POLYPUBLIE

Étude numérique des écoulements turbulents dans les cascades

M. Agouzoul, M. Lacroix, Ricardo Camarero

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

Date	1985
Type	Rapport / Report Rapport technique/Technical Report
Version	Version officielle de l'éditeur / Published version
URL de PolyPublie PolyPublie URL	https://publications.polymtl.ca/9873/
Évaluation par les pairs Peer reviewed	
Conditions d'utilisation Terms of use	© Tous droits réservés / All rights reserved
Référence Citation	Agouzoul, M., Lacroix, M., & Camarero, R. (1985). Étude numérique des écoulements turbulents dans les cascades. (Rapport technique n° EPM-RT-85-14). https://publications.polymtl.ca/9873/
Publication officielle Official publication	
Institution Institution	École Polytechnique de Montréal
Numéro de rapport Report number	EPM-RT-85-14
URL officielle Official URL	
Mention légale Legal notice	

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal
https://publications.polymtl.ca

BIBLIOTHÈQUE
MAI 14 1985
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

EPM / RT-85-14

ETUDE NUMERIQUE DES ECOULEMENTS TURBULENTS DANS LES CASCADES

M. AGOUZOUL, M. LACROIX, R. CAMARERO
Ecole Polytechnique

Ecole Polytechnique de Montréal
Mai 1985

Ce travail a été réalisé avec l'appui finacier du C.R.S.N.G. et le Ministère de l'Education Nationale du Maroc.

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 3e trimestre 1985
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Service de l'édition
Ecole Polytechnique
Case Postale 6079, Succ. "A"
Montréal, Québec H3C 3A7
(514) 340-4903

Compter 0,05$ par page (arrondir au dollar le plus près), plus 1,50$ (Canada) ou 2,50$ (étranger) pour la couverture, les frais de poste et de manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'Ecole Polytechnque de Montréal. Nous n'honorerons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement ou d'organismes canadiens.

RESUME

Le but de cette étude a été le développement d'une méthode de calcul des écoulements turbulents dans les cascades (grilles d'aubes). Plus précisément, on étudie les écoulements turbulents bidimensionnels et stationnaires.

Les équations du mouvement moyen sont formulées en termes de courant-vorticité. Les tensions de Reynolds apparaissant dans les équations du mouvement, sont modélisées à l'aide du concept de la viscosité turbulente, basé sur l'hypothèse de Boussinesq. Cette viscosité est calculée à l'aide du modèle de turbulence k-ε. La pression est récupérée par une équation de poisson.

Les équations sont écrites dans un système de coordonnées curvilignes généralisées; pour les résoudre dans un domaine transformé où les noeuds du maillage coincident avec les frontières complexes du domaine de l'écoulement. Le maillage curviligne est généré numériquement par la résolution d'un système d'équations élliptiques à l'aide d'une technique de surrelaxation.

La résolution numérique des équations se fait par différences finies centrées sauf pour les termes convectifs où une différentiation amont d'ordre 3 est utilisée. Le comportement du schéma a été évalué pour deux cas test décrit dans la littérature:

a) Cas de cascade avec profil symétrique dans un écoulement à incidence nulle.

b) Cas de cascade avec profil fortement cambré.

En général un bon comportement du schéma a été observé; sauf pour le deuxième cas où la prédiction est relativement pauvre.

ABSTRACT

The objective of this work was to investigate the turbulent flow in cascades, in particular, the study of steady two-dimensional turbulent flows.

The average motion equations are formulated in vorticity-stream function variables. The Reynolds stresses are modelled with the eddy viscosity concept, based on the Boussinesq hypothesis. This eddy viscosity is calculated with the k - ϵ model. The pressure is recovered by a poisson equation.

In order to solve the equations in a transformed domain where the mesh nodes coincide with the complex boundary of flow domain; the equations are written in the curvilinear coordinate system. The curvilinear mesh is numerically generated by solving a system of elliptic equations, using a S.O.R. technique.

The equation are solved using a centered finite differences, except for the convective terms a third-order-accurate upwind is used.

The numerical scheme was investigated for two test cases described in the literature:

a) case of a cascade with a symmetric profile in a flow with zero incidence.

b) case of a cascade with a cambered profile.

In general a good behaviour is observed, except for a poor prediction in the second case.

TABLE DE MATIERES

Résumé	iii
Abstract	iv
Remerciements	v
Liste des symbôles	viii
I. Introduction:	1
II: les équations fondamentales:	7
- méthodes de calcul de la valeur moyenne:	7
- les équations de conservation:	9
III: les modèles mathématiques de turbulence:	16
- classification des modèles	16
- modèles à zéro équation	16
- modèles à une équation	17
- modèles à deux équations	18
- choix d'un modèle	20
IV: transformation des équations en coordonnées curvilignes	23
V: résolution numérique	29
- discrétisation des équations	29
- discrétisation des conditions aux frontières	31
- résolution numérique des équations aux différences	35
- organigramme	37

VI: Résultats 40

- résultats préliminaires 40
- cascade avec profil symétrique (NACA0012) 41
- cascade avec le profil NACA 65-4-10 44
- cascade avec profil fortement cambré 45

Conclusions et Recommandations: 47

Bibliographie: 48

Appendice: 51

Figures: 53

LISTE DES SYMBOLES

cp: coefficient de pression $\frac{P - P_{IF}}{\frac{1}{2} \rho U_o^2}$

C_1, C_2, C_d, σ_k, σ_ϵ: constantes du modèle de turbulence

f: variable représentant soit la vitesse, masse volumique ...etc

H_o: distance inter-aube

J: Jacobien de la transformation en coordonnées curvilignes

k: énergie cinétique de turbulence

ℓ; ℓm: longueur caractéristique ou de mélange

P: pression statique

Re: nombre de Reynolds = $\frac{U_o H_o}{\nu}$

U_o: vitesse à l'entrée

U_i: composante de la vitesse dans la direction i

u,v: composantes de la vitesse dans les deux directions(x,y)

$\vec{x}$: vecteur position

x,y: composante du vecteur position dans le plan physique

(η,τ): composante du vecteur position dans le plan transformé.

α', β', γ', P', Q': coefficients gémométriques résultants de la transformation en coordonnées curvilignes

K': constante de Von Karman.

ρ: masse volumique

ν: viscosité cinématique

ν_t viscosité turbulente

ω: vorticité

ψ: fonction de courant

ϵ; fonction de dissipation

δ: facteur de relaxation

δ_{ij}: tenseur de Kronecker

<u>indices inférieurs:</u>

$_{ij}$: indiquant la direction

$_e$: relatif à l'entrée

$_s$: relatif à la sortie

$_{IA}$: relatif au bord d'attaque

$_{IF}$: relatif au bord de fuite

$_w$: relatif à la paroi solide

η,τ: relatif au plan transformé

indices supérieurs

$( )'$: fluctuation de la propriété méthode <<A>>

$( )''$: fluctuation de la propriété méthode <<B>>

$(\bar{})$: valeur moyenne temporaire

$(\tilde{})$: valeur moyenne pondérée par la masse

$( )^{o}$: valeur intermidiaire (ou provisoire)

$( )^{+}$: valeur corrigée

CHAPITRE I
INTRODUCTION

1. GENERALITES sur la turbulence

1.1. Définitions

L'utilisation du mot "turbulent", pour caractériser un certain type d'écoulement de fluide, est récente et on ne trouve pas une définition générale et précise.

Osborne Reynolds a nommé ce genre d'écoulement "le mouvement sinus" et en 1937 Taylor et Von Karman [1] ont donné une définition de laquelle découle que la turbulence est un mouvement irrégulier d'où l'impossibilité de le décrire en détail comme une fonction du temps et de l'espace; mais il est possible de le décrire par des lois de probabilités et de son côté Webster's a donné dans [New international Dictionary] la définition suivante:
turbulence = agitation, confusion, troubles, perturbation,...
cette définition est aussi insuffisante pour caractériser le mouvement turbulent d'un fluide au sens moderne du terme.

Donc d'après la variété de ces définitions et la non-existence d'une définition générale et précise on va se contenter de donner les caractères des écoulements turbulents.

1.2 Caractère des écoulements turbulents:

* aléatoire: la fluctuation des grandeurs est une variable aléatoire
* caractère rotationnel aléatoire: les écoulements turbulents comportent des fluctuations du rotationnel

de la vitesse qui sont des variables aléatoires. Et ces fluctuations du rotationnel sont intenses et d'un ordre de grandeur supérieur à celui des écarts du rotationnel moyen dans l'écoulement; de ce fait les écoulements irrotationnels, dans lesquels les fluctuations sont induites par des phénomènes aléatoires tel que la vibration aléatoire d'une plaque, sont exclus des écoulements turbulents.

* caractère non linéaire: il est représenté dans les termes d'inertie des équations des écoulements turbulents
* caractère de diffusion: la diffusion turbulente due à l'agitation turbulente est beaucoup plus grande que la diffusion moléculaire.
* caractère dissipatif: la dissipation de l'énergie cinétique en chaleur est plus intense dans les écoulements turbulents à cause de l'augmentation considérable du taux de déformation du fluide.

1.3 Conditions d'existence des divers régimes

Reynolds en 1883, d'après l'expérience, a caractérisé la transition de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent dans une conduite circulaire, par le nombre qui porte son nom $Re = \frac{UL}{\nu}$ supérieur à un Re critique $\simeq$ 2000.

Le nombre de Mach n'intervient pas dans la transition tant qu'il est très inférieur à 1. Par contre dès que le nombre de Mach tend vers 1 la transition est influencée et elle est de plus en plus retardée pour des nombres de Mach de plus en plus grands.

Un autre nombre qui permet de séparer, du point de vue traitement statistique, les mouvements turbulents de l'agitation moléculaire; est le nombre de Knudsen

$$K_n = \ell m \, L^{-1}$$

ℓm : libre parcours du gaz (libre parcours moyen).

$\ell m = \frac{Cv}{a}$ c: constante fonction (propriété du gaz).

a: vitesse de propagation du son.

donc K_n = (Mach) (Reynodls)$^{-1}$

$K_n \simeq 10^{-2}$(Mach) pour la turbulence donc ℓm est très petit par rapport à l'échelle caractérisitique de l'écoulement L.

Dans le cas de la convection naturelle on se base sur le nombre de Grashof ($G = g\beta\Delta\theta L^3 v^{-2}$) et sa valeur critique est de l'ordre de $3\ 10^8$ à 10^9 dans le cas de la convection naturelle au voisinage d'une paroi verticale.

Pour les mouvements, à très grande échelle, en rotation Ω, le paramètre qui entre en considération est le nombre de Rossby.

$$R_o = U/\Omega L$$

En conclusion on peut dire que la turbulence se produit brusquement sous la forme d'un phénomène tridimensionnel localisé; même si l'écoulement laminaire précédent était bidimensionnel. Dans la plus part des cas le nombre de Reynolds est le critère de l'apparition de la turbulence ce qui implique que la seule propriété du fluide qui intervient est la viscosité cinématique

1.4 Effets de la turbulence:

Du fait que la diffusion turbulente est beaucoup plus grande que la diffusion moléculaire, des avantages et des inconvénients s'en suivent, parmis les avantages on a:

- l'augmentation de la vitesse des constituants d'une réaction chimique; donc augmentation des vitesses des réactions; exemple mélange carburant plus comburant
- augmentation des échanges de chaleur dans les échangeurs de chaleur, radiateurs, tuyères, ...

et parmis les inconvénients on a:

- l'érosion et l'ablation des surfaces exposées aux écoulements à grande vitesse.

Ses effets sur la quantité de mouvement et l'énergie cinétique ont pour avantages:

- le retard de la séparation des couches limites ce qui diminue parfois la résistance de forme, ce qui permet d'avoir des diffuseurs avec des angles d'ouverture plus grand et d'avoir des portances plus élevées pour les ailes d'avion, les pâles et aubages de turbomachine, etc....

et pour inconvénients:

- le bruit aérodynamique dû aux fluctuations de pression
- les pertes de charges sont plus grandes
- il y a augmentation de l'entropie locale
- la résistance de frottement des corps est plus importante.

1.5 ETUDE DES ECOULEMENTS DANS LES CASCADES:

Prédire le fonctionnement d'une turbomachine (turbine ou pompe) nécessite la prédiction de l'écoulement à l'intérieur de la machine.

Au départ on se basait sur les résultats d'expériences réalisées sur des modèles ou sur des grilles d'aubes. De telles expériences coûtent cher, ce qui a amené les

chercheurs, après l'avénement de l'ordinateur et le développement des méthodes numériques, à s'orienter vers la prédiction numérique des écoulements.

Les prédictions numériques, qu'on peut aussi appeler des expériences numériques, se font généralement en considérant des écoulements laminaires; ce qui est très loin de la réalité du fait des grands nombres de Reynolds atteint et de la complexité des géométries.

Avec le développement des ordinateurs et des modèles mathématiques, on commence à s'intéresser à l'étude numérique des écoulements turbulents.

La présente étude consiste à l'étude numérique des écoulements turbulents dans les cascades (ou grille d'aubes).

1.6 GEOMETRIE:

Une cascade est le représentant isolé, d'éléments identiques et juxtaposés l'un à côté de l'autre, formant ce qu'on appelle une grille d'aubes. Comme le montre la figure (1.1) une cascade est formée de quatre types de frontières:

- l'entrée: formant l'entrée de la cascade

- la sortie: formant la sortie de la cascade

- les frontières solides: formées par les parois solides d'un profil (profil d'aube).

- les frontières fictives: ce sont des frontières prises dans le fluide. Comme il a été dit que la cascade est le représentant d'éléments identiques et juxtaposés l'un à côté

de l'autre; donc la frontière fictive supérieure de l'élément à étudier est aussi la frontière inférieure d'un autre qui est lui identique par conséquent, pour l'élément considéré, la frontière fictive supérieure est identique à la frontière fictive inférieure; et de ce fait ces frontières sont aussi appelée frontières périodiques.

CHAPITRE II

EQUATIONS FONDAMENTALES

Dans ce chapitre, nous présenterons les méthodes de calcul de la valeur moyenne ainsi que les équations de conservation de la masse, et de la quantité de mouvement pour un écoulement bidimensionnel et turbulent (dans le cas des fluides obeissant aux relations de Newton et Stokes).

Lorsque l'écoulement est turbulent les grandeurs physiques (U_i, ω_i, P,...) et les propriétés physiques (μ, ρ,...) sont considérées comme des variables aléatoires du temps et de l'espace. Donc en plus du premier traitement statistique qui a permit en effet de définir, dans une particule contenant un grand nombre de modécules, ses diverses caractéristiques; un second traitement statistique, et cette fois-ci à l'échelle du continuum, s'avère nécessaire à cause du caractère aléatoire des diverses caractéristiques.

A cet effet deux méthodes sont utilisées.

2.1 Méthodes de calcul de la valeur moyenne

2.1.1 Méthode «A»: la méthode A ou la méthode de la grandeur macroscopique égale à la moyenne temporaire, pour cette méthode on pose

$$f = \overline{f} + f' \qquad (2.1)$$

avec $\overline{f}$: moyenne temporaire $= \frac{1}{T}\int_0^T f(t+\varsigma)d\varsigma$

f'= fluctuation de f

$\overline{f'} = 0$

Cette méthode a été utilisée par Boussinesq (1877) et Reynodls (1894). Elle est surtout utilisée pour les écoulements de fluides à masse volumique constante, mais pour les écoulements de fluides à masse volumique variable aléatoirement cette méthode donne des équations dont la forme n'est pas simple et dont les expressions n'ont pas de signification physique claire. Ceci peut conduire à l'élimination de termes qui peuvent ne pas être négligeables.

2.1.2 Méthode «B»: La méthode B ou méthode de la moyenne pondérée par la masse. Elle a été développée pour les équations relatives à l'atmosphère par Hesselberg (1926), Van Mighem (1948 1949) et Blackadar (1950). Elle a été appliquée aux écoulements de gaz par Favre (1958 - 75) [2] pour cette méthode on pose

$$f = \tilde{f} + f'' \quad \text{avec} \quad \tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \qquad (2.2)$$

$$\text{d'où } \overline{\rho f''} = 0 \text{ et } \overline{f''} = \frac{\overline{\rho' f''}}{\bar{\rho}}$$

pour les deux méthodes on a pour la masse volumique et pour la pression

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad , \quad p = \bar{p} + p'$$

Les deux méthodes sont équivalentes si $\rho' = 0$ (i.e: masse volumique constante). La méthode «B» simplifie la forme des termes de transport dans les équations et en clarifie la signification physique.

2.2 Equations du mouvement

2.1.1 Equations

Les écoulements turbulents sont régit par les équations de Navier-Stokes appliquées aux grandeurs instantannées; d'où les équations adimensionnelles et générales de l'écoulement permanent d'un fluide Newtonien, incompressible et exempté de forces de volume:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] \qquad (2.3)$$

Re: nombre Reynolds basé sur la vitesse moyenne
Le système (2.3) est fermé à l'aide de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (2.4)$$

Obtenir une solution exacte de ces équations nécessite un espace mémoire que n'a pas le plus puissant ordinateur de nos jours, du fait que le phénomène de la turbulence se passe à une échelle très petite (de l'ordre de 1/1000 du domaine de l'écoulement); ce qui nécessite un maillage très fin.

Or pour les problèmes pratiques on n'a pas besoin de connaître les détails et on s'intéresse uniquement aux moyennes temporaires des effets, et la prédiction de l'écoulement sera basée sur ces valeurs moyennes.

En appliquant l'une des définitions (2.1) ou (2.2) (car: fluide incompressible) aux composantes de la vitesse et la pression des équations (2.3) et (2.4) et en prenant la valeur moyenne temporaire on obtient:

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{U'_i U'_j} \right) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.6)$$

l'effet de la turbulence est introduit par la corrélation $\overline{U'_i U'_j}$ et peut-être interprétée comme une contrainte sur l'élément de fluide. L'existence de ces termes, appelés tensions de Reynolds, rend ouvert le système (2.5) et (2.6); contrairement au système (2.3) et (2.4).

Les tensions de Reynolds ne peuvent pas être calculées directement d'où la nécessité de modeler ces tensions en termes qu'on peut déterminer par des équations et ces nouvelles équations constituent le modèle mathématique de turbulence (chapitre III).

La presque totalité des modèles de turbulence sont basés sur l'hypothèse de Boussinesq qui dit que les tensions de Reynolds sont proportionnelles au gradient de la vitesse moyenne soit:

$$- \overline{U'_i U'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - 2/3 \, \delta_{ij} \, k \quad (2.7)$$

où

$k = \frac{1}{2} \overline{U'_i} \, \overline{U'_i}$: énergie cinétique de turbulence.

ν_t: grandeur adimensionnelle comparable à la viscosité moléculaire du fluide adimensionnelle (soit $\frac{1}{Re}$); sa valeur dimensionnelle est appelée viscosité turbulente ou tourbillonnaire. Contrairement à la viscosité moléculaire, ν_t est une propriété de l'écoulement et elle varie d'un point à l'autre.

Le terme $2/3\ \delta_{ij}k$ sera absorbé par le gradient de la pression ainsi la pression statique sera remplacée par $P + 2/3k$.

En remplaçant $\overline{U'_i\ U'_j}$ par (2.7) dans l'équation (2.5) en omettant la barre au dessus de U et P on obtient:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_e \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \qquad (2.8)$$

$$\text{avec } \nu_e = \nu_t + \frac{1}{R_e} \qquad (2.9)$$

Donc le système d'équations (2.8) et (2.6) plus un modèle de turbulence pour la détermination de ν_t est un système fermé qui peut être traité numériquement en terme de variable primitive (u, v, p) ou en terme de variable secondaire (ω, ψ) (vorticité et fonction de courant).

Le couplage et la non linéarité des équations du mouvement et en plus de la difficulté de la discrétisation de ces même équations dans une géométrie assez complexe nous ont poussés à utiliser la formulation vorticité-courant. Donc en prenant le rotationnel de (2.8) et après simplifications à l'aide de l'équation de continuité on obtient l'équation de transport suivante:

$$U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \nu_e \nabla^2 \omega = 2 \frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \nu_e}{\partial y^2} \right) \qquad (2.10)$$

où $$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.11).$$

En utilisant la fonction de courant ψ définie par:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \ ; \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (2.12)$$

l'équation de continuité étant automatiquement vérifiée et l'équation (2.11) devient:

$$\nabla^2 \psi = - \omega \qquad (2.13)$$

2.2.2 Conditions aux frontières (voir figure 1.1)

l'entrée: De (2.11) on tire que:

$$\omega_e(y) = - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.14)$$

et

$$\psi_e(y) = \int u \, dy \qquad (2.15)$$

pour un profil uniforme à l'entrée on obtient:

$$\omega_e(y) = 0 \qquad (2.16)$$

et

$$\psi_e(y) = y \cos(\lambda) \qquad (2.17)$$

λ: angle d'attaque de l'écoulement.

frontières fictives: Au niveau de ces frontières on a la périodicité des grandeurs physiques et de leurs dérivées, ce qui implique la périodicité de la vorticité. et la périodicité de la fonction de courant est assurée mais à une constante près et cette constante étant égale à la différence entre les deux valeurs extrèmes à l'entrée (cos(λ)).

$$\omega(x, y_i) = \omega(x, y_s)$$

$$\psi(x, y_s) = \psi(x, y_i) + \cos \lambda \qquad (2.18)$$

y_i, y_s; correspondent à la frontière inférieure et supérieure.

frontières solides: Le courant n'est pas connu à priori sur les parois solides, la condition d'adhérence du fluide sur la paroi implique que les composantes curvilignes sont nulles.

$$u_\eta = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0 \qquad (2.19)$$

$$u_\tau = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0 \qquad (2.20)$$

(* voir chap IV pour la signification de η, τ, J). L'équation 2.20 montre que le courant est constant sur la paroi considérée; d'une part et d'autre part la constance du débit oblige le courant à être périodique au niveau des frontières solides (ceci à une constante près cos(λ)). Et il est calculé par extrapolation vers les frontières solides.

La condition pour la vorticité au niveau des frontières solides est déduite de l'équation (2.13).

$$\omega|_w = -\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right]_w \qquad (2.21)$$

Notons que la mise en oeuvre numérique de cette condition constitue la difficulté des formulations des équatios du mouvement en terme de vorticité [4].

la sortie: A la sortie on suppose en général que l'écoulement s'est rétabli ce qui nous a permis de poser:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \qquad (2.22)$$

2.3 Equation de la pression:

La première approche de récupérer la pression est de retourner aux équations originelles de la quantité de mouvement(2.8) et en choisissant une valeur arbitraire, en un point de la frontière, calculer la variation de P le long de cette frontière par intégration numérique mais cette approche donne des valeurs différentes selon le chemin d'intégration suivi.

En plus dans cette étude on voudrait prédire le champ de pression dans tout le domaine et c'est pour cela qu'on a opté pour l'approche qui consiste à dériver une équation de poisson pour la pression à partir des équations de mouvement (2.8) [5] on obtient:

$$\nabla^2 p = 2\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 \nu_e}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x \partial y}\right\} = S \qquad (2.23)$$

Le membre de droite ne dépend que du champ de vitesse et de la viscosité effective, calculés lors de la résolution des éøuéᵐ3•n§ èu ï•uvøïùnᵐ à•upüées avec le modèle de turbulence.

Le terme de droite S s'écrit en terme de la fonction de courant comme suit:

$$S = 2\left\{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right]^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\left[\frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \nu_e}{\partial y^2}\right] + \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 \nu_e}{\partial x \partial y}\right\} \qquad (2.24)$$

2.3.1 Conditions aux frontières

entrée et sortie:

Comme on suppose qu'à l'entrée et à la sortie v = 0 (ou la vitesse alignée avec les frontières du domaine) et que l'écoulement est à peu près établi ($\frac{\partial u}{\partial x} \simeq 0$) (ou $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$) on tire de (2.8) et de la définition (2.11)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(\nu_e \omega) \qquad (2.25)$$

(cette condition inclus aussi le cas où on a un profil de vitesse uniforme à l'entrée($\frac{\partial P}{\partial x} = 0$)).

frontières périodiques:

Au niveau des frontières périodiques la pression est périodique.

frontières solides:

De l'équation (2.8) on montre, en utilisant la condition d'adhérence, que:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial t} \qquad (2.26)$$

n et t étant respectivement la normale et la tangente à la frontière solide.

CHAPITRE III

LES MODELES MATHEMATIQUES DE TURBULENCE

Comme il a été dit dans le chapitre précédent, le système (2.5) et (2.6) permettant de résoudre l'écoulement moyen, est un système ouvert et dans ce chapitre nous donnerons un bref aperçu sur les principaux modèles de turbulence existants.

3.1 CLASSIFICATIONS DES MODELES

Les modèles de turbulence peuvent être classsifiés de plusieurs façons [6]:

a): les modèles basés sur l'approximation de Boussinesq.
b): les autres modèles, par exemple, les modèles basés sur les tensions de Reynolds.

Une deuxième classification [3] classifie les modèles selon le nombre d'équations différentielles à résoudre pour estimer les tensions de Reynolds et c'est cette deuxième qui sera adoptée au fait de sa clarté et de sa simplicité.

3.2 Modèles a zéro equation: modèles de longueur de mélange

En s'inspirant de la théorie cinétique des gaz L. Prandtl en 1925 [7] à proposé d'écrire:

$$\nu_t = \ell_m^2 \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]^{1/2} \qquad (3.1)$$

où ℓ_m, longueur de mélange, est le seul paramètre inconnu; qui peut être spécifié d'une manière semi-empirique ou emprique [9].

Ces modèles basés sur la longueur de mélange font intervenir une échelle de temps proportionnelle à $1/|\partial u_i/\partial x_j|$. Donc quand la déformation tend vers zéro l'échelle de temps devient infinie et par conséquent la longueur de mélange devient nulle; ce qui est contradictoire avec l'expérience [10]; d'autre part ils évaluent la viscosité turbulente en terme de paramètres locaux de l'écoulement, et ne tiennent pas compte de l'effet de l'écoulement amont sur la structure de la turbulence et par conséquent sur la viscosité turbulente.

Mais en choisissant judicieusement la longueur de mélange, ces modèles simulent relativement bien des écoulements simples tels que: couches limites, jets,... etc.

3.3. Les modèles à une équation

Afin de remédier aux inconvénients des modèles à zéro équation Kolmogorov (1942) et Prandtl (1945) [11] ont proposés une théorie basée sur le concept de cascade d'énergie c'est-à-dire que l'énergie cinétique des grands toubillons se deverse vers les plus petits pour se dissiper à la fin par les forces visqueuses, ils arrivent à l'équation suivante:

$$u_j \frac{\partial k}{\partial \partial_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right) + \nu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - c_d\frac{k^{3/2}}{\ell} \qquad (3.2)$$

les constante σ_k et c_d sont déterminées empiriquement, et ℓ est une longueur caractéristique.

L'analyse dimensionnelle montre que:

$$\nu_t = k^{1/2} \ell \qquad (3.3)$$

des modèles équivalents sont aussi développés par d'autres auteurs [3] tels que le modèle de Bradshaw (1967) et celui de Nee et Kovasznay [2] pour la visocité turbulente.

Malgré que ces modèles tiennent compte du transport de l'énergie cinétique ou de la viscosité turbulente, ils ne peuvent pas simuler certains écoulements (i.e.:écoulements avec recirculation). Ceci est dû à la difficulté de spécifier une distribution adéquate de la longueur caractéristique ℓ. D'où la nécessité, pour obtenir un niveau d'universalité plus elevé, d'avoir une autre équation de transport pour déterminer ℓ qui tient compte de l'influence des conditions amont sur ℓ.

3.4 Les modèles à deux équations

Le principe de construction de ces modèles est le suivant:

- on définit une variable $z = k^m \ell^n$, m et n sont des constantes.
- on écrit une équation de transport pour z à partir des équations de Navier-Stokes.
- on éxprime les corrélations inconnues en termes de variables connues
- déduire ℓ de z et k:z et k étant déterminées à partir de leurs équations de transport(l'équation de transport de k étant toujours l'équation (3.2)). La viscosité turbulente est ainsi déterminée par (3.2). Plusieurs chercheurs ([3], [8], [13]) ont utilisés différentes valeurs de m et n le tableau suivant en résume l'essentiel:

AUTEURS	Z	SYMBOLE
Kolmogorov (1942)	$k^{1/2}/\ell$	f
Chou(1945), Davidov(1961) Harlow-Nakayama(1968) Jones-Launder (1972) Spalding et al(1970)	$k^{3/2}/\ell$	ϵ
Rotta (1951), Spalding (1967)	ℓ	ℓ
Rotta (1968, 1971) Rodi - Spalding (1970) Ng - Spalding (1972)	$k\ell$	$k\ell$
Spalding (1969)	k/ℓ^2	w

Tous ces modèles donnent à peu près le même degré de concordance avec la réalité et surtout pour les écoulements de type couche limite à grands nombres de Reynolds [3]. Le plus utilisé est le modèle k-ϵ, où ϵ est la fonction de dissipation (terme de dissipation de l'équation (3.2)).

$$\epsilon = C_d \, k^{3/2}/\ell \qquad (3.4)$$

Tout comme k, ϵ est déterminée à partir de l'équation de transport suivante:

$$u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_t}\frac{\partial \epsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{C_1 \, \epsilon \, \nu_t}{k}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \qquad (3.5)$$

La viscosité turbulente est déterminée à partir de (3.3) et (3.4):

$$\nu_t = C_d \frac{k^2}{\epsilon} \qquad (3.6)$$

Le seul inconvénient que l'on peut attribuer à ces modèles c'est qu'ils sont basés sur l'approximation de Boussinesq. Pour remédier à cet inconvient des modèles à plusieurs équations font leur apparition [2] tels que les modèles de tensions de Reynolds ou des quantités reliées à ces tensions. Mais ces modèles fort complexes sont encore au stade du développement.

3.5 Choix d'un modèle

Suite aux discusions précédentes et aux expériences numériques effectuées par Lacroix [4] dans des géométries complexes, on peut conclure que le modèle k - ϵ est le seul à présent qui puisse représenter les écoulements dans les cascades vue la complexité de la géométrie et de l'écoulement.

3.5.1 Constantes et conditions aux frontières

Les constantes empiriques apparaissant dans le modèle (équations (3.2) et (3.5)) sont données ci-dessus[9]:

$$\sigma_k = 1,\ \sigma_\epsilon = 1.22,\ C_1 = 1.44,\ C_2 = 1.92,\ C_d = 0.09$$

A l'entrée on peut supposer que le transport de l'énergie cinétique de turbulence par les phénomènes de convection et de diffusion est négligeable. L'écoulement étant uniforme, par conséquent l'énergie cinétique de turbulence est constante ainsi que la fonction de dissipation ϵ.

La valeur de k devrait être estimée en se basant sur des valeurs expérimentales et la valeur ϵ est obtenue par:

$$\epsilon = C_d\ k^{3/2}/\ell \qquad (3.7)$$

où ℓ est la longueur caractéristique égale à: [15]

$$\ell = 0.01\ H_o$$

H_o: distance inter-aube

Au niveau des parois solides, on néglige la sous-couche laminaire et on impose les conditions aux frontières de k et ϵ sur la première ligne du maillage adjacante à la paroi. A cet endroit on peut supposer que le transport de K par les phénomènes de convection et de diffusion est négligeable devant les autres termes (hypothèse de turbulence locale) et on tire des équations (3.2) et (3.3)

$$k_{w+1} = \frac{\ell^2_{w+1}}{C_d} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (3.8$$

w + 1 : noeud adjacent à la frontière.
De l'équation (3.4) on tire:

$$\epsilon_{w+1} = C_d \frac{k^{3/2}_{w+1}}{\ell_{w+1}} \qquad (3.9)$$

Pour les frontières fictives, la périodicité de k et ϵ est conservée. A la sortie, du fait qu'on suppose que l'écoulement s'est déjà rétabli, on pose comme pour la fonction de courant et la vorticité:

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0 \qquad (3.10)$$

La longueur caractéristique figurant dans les équations (3.8) et (3.9) est donnée par:

$$\ell_{w+1} = C_d^{1/4} \, k'y \qquad (3.11)$$

k': constante de Von Karman.

CHAPITRE IV

TRANSFORMATION DES EQUATIONS EN COORDONNEES CURVILIGNES

Les équations de l'écoulement décrites aux deux chapitres précédents sont transformées en coordonnées curvilignes ce qui permet de les résoudre dans un domaine transformé où les noeuds de l'espace de discrétisation coincident avec les frontières fort complexes. C'est sur ce nouveau domaine que seront résoulues les équations.

La transformation utilisée est celle de Thompson [16] qui consiste à faire correspondre au réseau cartésien (x,y) dans le plan physique un réseau de coordonnées (η,τ) dans le plan transformé figure (4.1).

Les équations qui gouvernent cette transformation sont

$$\nabla^2\eta = P'(\eta,\tau),\ \nabla^2\tau = Q'(\eta,\tau) \qquad (4.1)$$

Cependant, pour pouvoir effectuer les calculs numériques dans le plan transformé(η,τ) on doit interchanger les variables (x,y) avec (η,τ) dans les équations (4.1).
On obtient:

$$\alpha' \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\eta^2} - \beta' \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\eta\partial\tau} + \gamma' \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\tau^2} + P' \frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta} + Q' \frac{\partial\vec{r}}{\partial\tau} = 0 \qquad (4.2)$$

$$\alpha' = (x_\tau^2 + y_\tau^2)/J^2$$

$$\beta' = 2(x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau)/J^2 \qquad (4.3)$$

$$\gamma' = (x_\eta^2 + y_\eta^2)/J^2$$

$$J = x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta$$

Les termes forcés P' et Q' permettent de contrôler la concentration des lignes du maillage dans le plan physique et sont calculés, connaissant la distributions des points sur les frontières, à l'aide de la technique de Thomas et Middlecoff [17].

4.1 Transformation des équations

Les équations de l'écoulement et leurs conditions aux frontières sont également écrites en coordonnées curvilignes.

Dans le plan transformé les équations sont représentées par l'équation suivante:

$$U^* \frac{\partial \Delta}{\partial \eta} + V^* \frac{\partial \Delta}{\partial \tau} - K^* \left[\alpha \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \eta^2} - \beta \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \cdot \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \tau^2} \right] = R \qquad (4.4)$$

Le tableau suivant explicite les paramètres figurant dans cette équation pour chacune des équations de l'écoulement.

Δ	U^*	V^*	K^*	R
ω	U^*_ω	V^*_ω	ν_e	R_ω
Ψ	P'	Q'	-1	$-\omega$
k	U^*_k	V^*_k	ν_t/σ_k	R_k
ϵ	V^*_ϵ	V^*_ϵ	$K\ \nu_t/\sigma_\epsilon$	R_ϵ
P	P'	Q'	-1	R_p

où:

$$U^*_\omega = E_2(\psi) - \nu_e P'$$

$$V^*_\omega = E_1(\psi) - \nu_e Q'$$

$$U^*_k = E_2(\psi) - F_1(\nu_t)/\sigma_k$$

$$V^*_k = E_1(\psi) - F_2(\nu_t)/\sigma_\epsilon$$

$$U^*_\epsilon = k(E_2(\psi) - F_1(\nu_t)/\sigma_\epsilon)$$

$$V^*_\epsilon = k(E_1(\psi) - F_2(\nu_t)/\sigma_\epsilon)$$

$$R_\omega = - G_{1,5}(\psi) \cdot G_{1,5}(\nu_t) - 4\, G_{6,10}(\psi) \cdot G_{6,10}(\nu_t)$$

$$R_k = \nu_t (4G^2_{6,10}(\psi) + G^2_{1,5}(\psi)) - \epsilon$$

$$R_\epsilon = C_1 \nu_t\, \epsilon (4G^2_{6,10}(\psi) + G^2_{1,5}(\psi)) - C_2\, \epsilon^2$$

$$R_p = 2 \Big\{ H_{1,5}(\psi) \cdot H_{6,10}(\psi) + G^2_{6,10}(\psi) + G_{9,10}(\psi) \left[H_{1,5}(\nu_t) - H_{6,10}(\nu_t)\right] + G_{6,10}(\nu_t) \left[H_{6,10}(\psi) - H_{1,5}(\psi)\right] \Big\}$$

E, F, G et H sont des opérarateurs différentiels linéaires définis comme suit:

$$E_1 = \left(-\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \; ; \quad E_2 = \left(\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)$$

$$F_1 = \left(\alpha' \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\beta'}{2}\frac{\partial}{\partial \tau} + P'\right) \; ; \; F_2 = \left(\gamma' \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\beta'}{2}\frac{\partial}{\partial \eta} + Q'\right)$$

$$G_{i,i+4} = \left(g_i \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + g_{i+1} \frac{\partial^2}{\partial n \partial \tau} + g_{i+2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + g_{i+3} \frac{\partial}{\partial \eta} + g_{i+4} \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$$

$$H_{i,i+4} = \left(h_i \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + h_{i+1} \frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\tau} + h_{i+2} \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + h_{i+3} \frac{\partial}{\partial\eta} + h_{i+4} \frac{\partial}{\partial\tau}\right)$$

$g_1 = \eta_y^2 - \eta_x^2$ $\qquad h_1 = \eta_x^2$

$g_2 = 2(\eta_y\tau_y - \eta_x\tau_x)$ $\qquad h_2 = 2\eta_x\ \tau_x$

$g_3 = \tau_y^2 - \tau_x^2$ $\qquad h_3 = \tau_x^2$

$g_4 = \eta_{yy} - \eta_{xx}$ $\qquad h_4 = \tau_{xx}$

$g_5 = \tau_{yy} - \tau_{xx}$ $\qquad h_5 = \tau_{xx}$

$g_6 = \eta_x\ \eta_y$ $\qquad h_6 = \eta_y^2$

$g_7 = \tau_x\ \eta_y + \tau_y\ \eta_x$ $\qquad h_7 = 2\tau_y\ \eta_y$

$g_8 = \tau_x\ \tau_y$ $\qquad h_8 = \tau_y^2$

$g_9 = \eta_{xy}$ $\qquad h_9 = \eta_{yy}$

$g_{10} = \tau_{xy}$ $\qquad h_{10} = \tau_{yy}$

4.2 Transformation des conditions aux frontieres

4.2.1 A l'entrée

Comme la colonne (η = constante) du maillage adapté est confondue avec la colonne (x = constante) du maillage cartésien, les conditions (2.16) , (2.17) et (3.7), du type Dirichlet, restent inchangées.
La condition (2.25) de la pression devient:

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = - \frac{1}{\alpha' J} \frac{\partial(\omega \nu_e)}{\partial \tau} \qquad (4.5)$$

4.2.2 Frontières périodiques

La condition de périodicité est conservée pour toutes les variables.

4.2.3. Frontières solides

Comme il a été mentionné au paragraphe (2.2.2) le courant est calculé par extrapolation vers les frontières solides. Les détails seront donnés au Chapitre V (résolution numérique) pour la vorticité la condition (2.21) devient

$$\omega_w = - \left[\gamma' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \alpha' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right]_w \qquad (4.6)$$

en dehors des bords d'attaque et de fuite le terme $\alpha' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$ est nul (résultat de la condition d'adhérence à la paroi).

La condition (2.26), pour la pression, devient:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \tau} \right|_w = \frac{1}{\gamma'} \left[\frac{1}{ReJ} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\beta'}{2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \Bigg|_w \qquad (4.7)$$

Tandis que les conditions (3.8) et (3.9), pour l'énergie cinétique de turbulence et la fonction de dissipation, deviennent:

$$K_{w+1} = \frac{\ell^2_{w+1}}{C_D} \left[4 \, G^2_{6,10}(\psi) + G^2_{1,5}(\psi) \right] \Big|_{w+1} \qquad (4.8)$$

$$\epsilon_{w+1} = C_D \frac{K^{3/2}_{w+1}}{\ell_{w+1}} \qquad (4.9)$$

Remarquons que ces deux dernières conditions sont valables pour tous les points entourant le profil.

4.2.4 <u>A la sortie</u>

Il a été supposé que l'écoulement s'est rétabli à la sortie, ce qui nous permet de poser:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\partial k}{\partial \eta} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} = 0 \qquad (4.10)$$

Sauf pour la pression la condition de sortie (2.25) devient

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = - \frac{1}{\alpha' J} \frac{\partial (\omega \nu_e)}{\partial \tau} \qquad (4.2.7)$$

Remarquons que ces deux dernières conditions sont valables pour tous les points entourant le profil.

4.2.4 A la sortie

Il a été supposé que l'écoulement s'est rétabli à la sortie, ce qui nous permet de poser:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\partial k}{\partial \eta} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} = 0 \qquad (4.10)$$

Sauf pour la pression la condition de sortie (2.25) devient

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = - \frac{1}{\alpha' J} \frac{\partial (\omega \nu_e)}{\partial \tau} \qquad (4.2.7)$$

CHAPITRE V

RESOLUTION NUMERIQUE

5.1 Discrétisation des équations

La discrétisation des équations et de leurs conditions aux frontières est obtenue en approximant les dérivées de l'équation (4.4), dans le plan (η,τ), par des différences centrées du second ordre sauf pour les termes de convection des équations de transport de la vorticité, de l'énergie cinétique de turbulence, et de la fonction de dissipation.

Les termes de convection sont discrétisés à l'aide de la technique de différentiation amont précise au troisième ordre [16], [14] et [22] pour stabiliser le schéma numérique d'une part et minimiser l'effet de la viscosité artificielle introduite par le schéma aux différences.

Dans cette technique de différentiation les termes de convection sont estimés à l'aide de différence centrée du second ordre et le terme dominant l'erreur de discrétisation est discrétisé à l'aide d'une différence décentré en amont. Par exemple le terme $U^* \frac{\partial \Delta}{\partial \eta}$ de l'équation (4.4) devient:

pour $U^* > 0$

$$U^* \frac{\partial \Delta}{\partial \eta}\Big|_i \simeq \frac{U^*}{6\Delta\eta}\left[2\Delta_{i+1} + 3\Delta_i - 6\Delta_{i-1} + \Delta_{i-2}\right]$$

pour $U^* < 0$

$$U^* \frac{\partial \Delta}{\partial \eta}\Big|_i \simeq \frac{U^*}{6\Delta\eta}\left[-\Delta_{i+2} + 6\Delta_{i+1} - 3\Delta_i - 2\Delta_{i-1}\right]$$

soit, en tenant compte de $\Delta\eta = \Delta\tau = 1$, et en regroupant les deux expressions en une seule

$$U^* \frac{\partial \Delta}{\partial \eta}\Big|_i = \frac{1}{6}\Big[\frac{(|U^*| - U^*)}{2} \Delta_{i+2} - 2(|U^*| - 2U^*) \Delta_{i+1} \qquad (5.1)$$

$$+3 |U^*| \Delta_i - 2(2U^* + |U^*|) \Delta_{i-1} + \frac{(|U^*| + U^*)}{2} \Delta_{i-2}\Big)$$

On obtient aussi la même expression pour le terme $V^* \frac{\partial \Delta}{\partial \tau}\Big|_i$

La discrétisation de l'équation (4.4) au noeud (i,j) (équivalent au point (η,τ)) mène à l'expression suivante

$$A_1 \Delta_{i+2,j} + A_2 \Delta_{i+1,j} + A_3 \Delta_{i-1,j} + A_4 \Delta_{i-2,j} +$$

$$A_5 \Delta_{i,j+2} + A_6 \Delta_{i,j+1} + A_7 \Delta_{i,j-1} + A_8 \Delta_{i,j-2} +$$

$$A_9 \Delta_{i,j} - A_{10} = 0 \qquad (5.2)$$

Pour une équation de transport (ω, k, ϵ) on a:

$$A_1 = \frac{|U^*| - U^*}{12} \qquad A_5 = \frac{|V^*| - V^*}{12}$$

$$A_2 = \frac{2U^* - U^*}{3} - k^* \alpha' \qquad A_6 = \frac{2V^* - |V^*|}{3} - k^* \gamma'$$

$$A_3 = -\frac{2U^* + |U^*|}{3} - k^* \alpha' \qquad A_7 = -\frac{2V^* + |V^*|}{3} - k^* \gamma'$$

$$A_4 = \frac{|U^*| + U^*}{12} \qquad A_8 = \frac{|V^*| + V^*}{12}$$

$$A_9 = \frac{1}{2}(|U^*| + |V^*|) + 2k^*(\alpha' + \gamma')$$

$$A_{10} = R_{ij} - \frac{\beta' k^*}{4}(\Delta_{i+1,j+1} - \Delta_{i+1,j-1} - \Delta_{i-1,j+1} + \Delta_{i-1,j-1}) \qquad (5.3)$$

Et pour une équation de Poisson (ψ, p) on a:

$$A_1 = A_4 = A_5 = A_8 = 0$$

$$A_2 = \alpha' + P'/2 \qquad A_6 = \gamma' + Q'/2$$

$$A_3 = \alpha' - P'/2 \qquad A_7 = \gamma' - Q'/2$$

$$A_9 = -2(\alpha' + \gamma') \qquad (5.4)$$

Les termes U^*, V^* et R figurant dans les coefficients A_i sont discrétisés à l'aide de différences centrées précises au second ordre.

5.2 DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX FRONTIERES

5.2.1. A l'entrée et à la sortie

Les conditions (2.16),(2.17) et (3.7), du type Dirichlet, restent inchangées.

Les conditions (4.5) et (4.11) sont discrétisées à l'aide de différences centrées:

$$\frac{P_{e+1,j} - P_{e-1,j}}{2} = \left[-\frac{1}{\alpha' J}\right]_{e,j} \left[(\omega\ v_e)_{e,j+1} - (\omega\ v_e)_{e,j-1}\right] \frac{1}{2} \qquad (5.5)$$

De cette expression on tire les valeurs fictives $P_{e-1,j}$ ou $P_{e+1,j}$ soit qu'on se trouve à l'entrée ou à la sortie.

Par contre la condition (4.10) est discrétisée à l'aide de différences décentrées précises au second ordre et on obtient:

$$\Psi_{s,j} = (4\ \Psi_{s-1,j} - \Psi_{s-2,j})/3 \qquad (5.6)$$

valable aussi pour ω, k et ϵ.

5.2.2 Frontières périodiques

La périodicité se traduit par

$$\Delta_{i,NS+j} = \Delta_{i,NI+j} \qquad (5.7)$$

avec NI (respectivement NS) correspondant à l'indice de la frontière inférieure (respectivement supérieure); et j peut être positif ou négatif.

Ceci pour ω, k, ϵ et P; par contre pour la fonction de courant, comme il a été mentionné précédemment (équation (2.18)), la périodicité est à une constante près, soit:

$$\Psi_{i,NS+j} = \Psi_{i,NI+j} + \cos\lambda \qquad (5.8)$$

où λ est l'angle d'attaque de l'écoulement.

5.2.3 Parois solides

En dehors des bord d'attaque et de fuite, la condition (4.6) discrétisée devient:

$$\omega_w = \frac{\gamma'_w}{2}\ \left[7\ \psi_w - 8\ \psi_{w+1} + \psi_{w+2}\right] \qquad (5.9)$$

Cette expression est obtenue en effectuant un développement en série de Taylor de la fonction de courant autour d'un point w situé sur une paroi solide (τ = constante) et en éliminant les dérivées troisièmes des deux développements tout en se servant de la condition d'adhérence.

Le terme $\alpha' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$ de l'équation (4.5) n'est pas nul aux bords d'attaque et de fuite. Par ailleurs ces points sont aussi des points périodiques d'où leur particularité. La vorticité en ces points est calculée comme suit:

$$\omega(I,1) = \omega(I,N) = - \bar{\alpha} D_1 - \bar{\gamma} \Delta_2 \qquad (5.10)$$

avec

$\bar{\alpha} = (\alpha'_{i,1} + \alpha'_{i,N}) /2$; $\bar{\gamma} = (\gamma'_{i,1} + \gamma'_{i,N})/2$

$D_2 = [-7(\psi_{i,1} + \psi_{i,N}) + 8(\psi_{i,2} + \psi_{i,N-1}) - (\psi_{i,3} + \psi_{i,N-2})]/4$

$D_1 = (-7\psi_{IT,1} + 8\,\psi_{IT-2,1} - \psi_{IT-2,1})/2$ au bord d'attaque

$D_1 = (-7\,\psi_{IF,1} + 8\,\psi_{IF+1,1} - \psi_{IF+2,1})/2$ au bord de fuite

i = IT pour le bord d'attaque
i = IF pour le bord de fuite

Pour la fonction de courant on extrapole vers le bord d'attaque en utilisant le fait que $\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\Big|_{IT} = 0$
d'où:

$$\psi_{IT,1} = (4\,\psi_{IT-1,1} - \psi_{IT-2,1})/3 \qquad (5.11)$$

et c'est cette valeur qu'on impose sur l'extrados du profil; la valeur du courant sur l'intrados est déduite de cette valeur par périodicité.

Pour la pression la condition (4.2.3) est discrétisée à l'aide de différences centrées.

$$\frac{P_{i,w+1} - P_{i,w-1}}{2} = \frac{1}{\gamma'_{i,w}} \left[\frac{\beta'_{i,w}}{2} \left(\frac{P_{i+1,w} - P_{i-1,w}}{2} \right) + \frac{1}{R_e J_{i,w}} \frac{(\omega_{i+1,w} - \omega_{1-1,w}}{2} \right] \qquad (5.12)$$

De cette expression on tire les valeurs fictives $P_{i,w-1}$ ou $P_{i,w+1}$, selon qu'on se trouve au niveau d'une paroi solide inférieure ou supérieure.

L'énergie cinétique de turbulence est obtenue aux noeuds adjacents à la frontière solide, en discrétisant la condition (4.8) avec une précision du second ordre. Connaissant ainsi l'énergie cinétique de turbulence on calcule la fonction de dissipation par la formule (4.9).

L'application de l'opérateur (5.2) sur un noeud (w+1) adjacent à une frontière solide pour ω ou sur un noeud (w+2) pour k et ∈, fait apparaître une valeur fictive de ω, k et ∈ (ω_{w-1}, k_w, ϵ_w) soit des valeurs à l'extérieur du domaine de calcul.

On remedie à ce problème en extrapolant, dans le plan transformé, la valeur de ω, k et ∈:

$$\begin{aligned} \omega_{w-1} &= 3\omega_w - 3\omega_{w+1} + \omega_{w+2} \\ k_w &= 3k_{w+1} - 3k_{w+2} + k_{w+3} \end{aligned} \qquad (5.13)$$

$$\epsilon_w = 3\epsilon_{w+1} - 3\epsilon_{w+2} + \epsilon_{w+3}$$

5.3. RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DIFFERENCES

En discrétisant les équations aux dérivées partielles on se ramène à la résolution de systèmes d'équations algébriques. Les deux groupes de techniques numériques pour résoudre ces systèmes sont les méthodes directes ou itératives. Pour des raisons de la taille des systèmes et de la stabilité relative aux erreurs de troncature, les méthodes directes sont à rejeter [18].

La méthode itérative retenue est la méthode de surrelaxation par blocs, (à vrai dire sous relaxation car pour ω, k, ϵ, on a pris des coefficients inférieurs à 1 et pour ψ on a pris 1 pour stabiliser le schéma à cause du couplage des systèmes à résoudre.), vue sa simplicité et sa robustesse.

En général les vitesses de l'écoulement U et les dimensions des mailles dans la direction η sont respectivement plus grandes que les vitesses V et les dimensions dans la direction τ. Pour cela, en choisissant les colonnes comme des blocs et en effectuant les balayages de l'entrée à la sortie, on favorise la dominance diagonale des systèmes matriciels obtenus [19].

La configuration d'une relaxation par colonne nous donne pour l'équation (5.2):

$$A_1 \Delta_{i+2,j} + A_2 \Delta_{i+1,j} + A_3 \Delta^{+}_{i-1,j} + A_4 \Delta^{+}_{i-2,j}$$

$$+ A_5 \Delta_{i,j+2} + A_6 \Delta_{i,j+1} + A_7 \Delta_{i,j-1} + A_8 \Delta_{i,j-2}$$

$$+ A_9 \Delta_{i,j} + \frac{\beta' k}{4} (\Delta_{i+1,j+1} - \Delta_{i+1,j-1} - \Delta^{+}_{i-1,j+1} + \Delta^{+}_{i-j,j-1})$$

$$- R_{i,j} = 0 \qquad (5.14)$$

avec:

Δ : ancienne valeur provenant de l'itération précédente.

Δ^{+}: valeur corrigée par la relaxation précédente

Δ^{o}: valeur provisoire.

Ces valeurs sont reliées par le facteur de relaxation δ par:

$$\Delta^{+} = \Delta + \delta (\Delta^{o} - \Delta) \qquad (5.15)$$

En définissant la correction comme

$$C = \Delta^{+} - \Delta \qquad (5.16)$$

on peut écrire la valeur inconnue provisoire Δ^{o} comme suit

$$\Delta^{o} = \Delta + C/\delta \qquad (5.17)$$

En terme de corrections l'équation (5.14) devient

$$A_8 C_{i,j-2} + A_7 C_{i,j-1} + A_9 C_{i,j} + A_6 C_{i,j+1} + A_5 C_{i,j+2}$$

$$= -\delta [R\Delta_{i,j} + A_3 C_{i-1,j} + A_4 C_{i-2,j} +$$

$$\frac{\beta' k}{4} (C_{i-1,j-1} - C_{i-1,j+1})] \qquad (5.18)$$

où $R\Delta_{i,j}$ représente la valeur de l'équation (5.14) évaluée avec les anciennes valeurs de Δ provenant de l'itération précédente.

On obtient ainsi des systèmes pentadiagonaux cycliques, pour les équations de transport ω, k, ϵ, et tridiagonaux cycliques, pour les équations de poisson Ψ,p, au niveau des colonnes i limitées par les frontières périodiques; et au niveau des colonnes i limitées par les frontières solides on obtient des systèmes pentadiagonaux et tridiagonaux.

Les systèmes sont résolus, à chaque colonne i, par l'élimination gaussiennne pour minimiser le nombre d'opérations arithmétiques.

Sur les frontières périodiques le terme de droite de l'équation (5.18) est pris comme une moyenne de ses valeurs sur la frontière supérieure et inférieure. Cet artifice de calcul est utilisé après avoir remarqué, au niveau des tests préliminaires dans le cas d'une cascade formée de profil symétrique (NACA0012), une légère déviation de l'écoulement à la sortie qui est due à la technique de la différentiation amont, pour l'équation de transport de la vorticité, à l'aval du canal interaube; du fait que, dans le cas d'un profil symétrique, la vorticité est antisymétrique au niveau des parois solides.

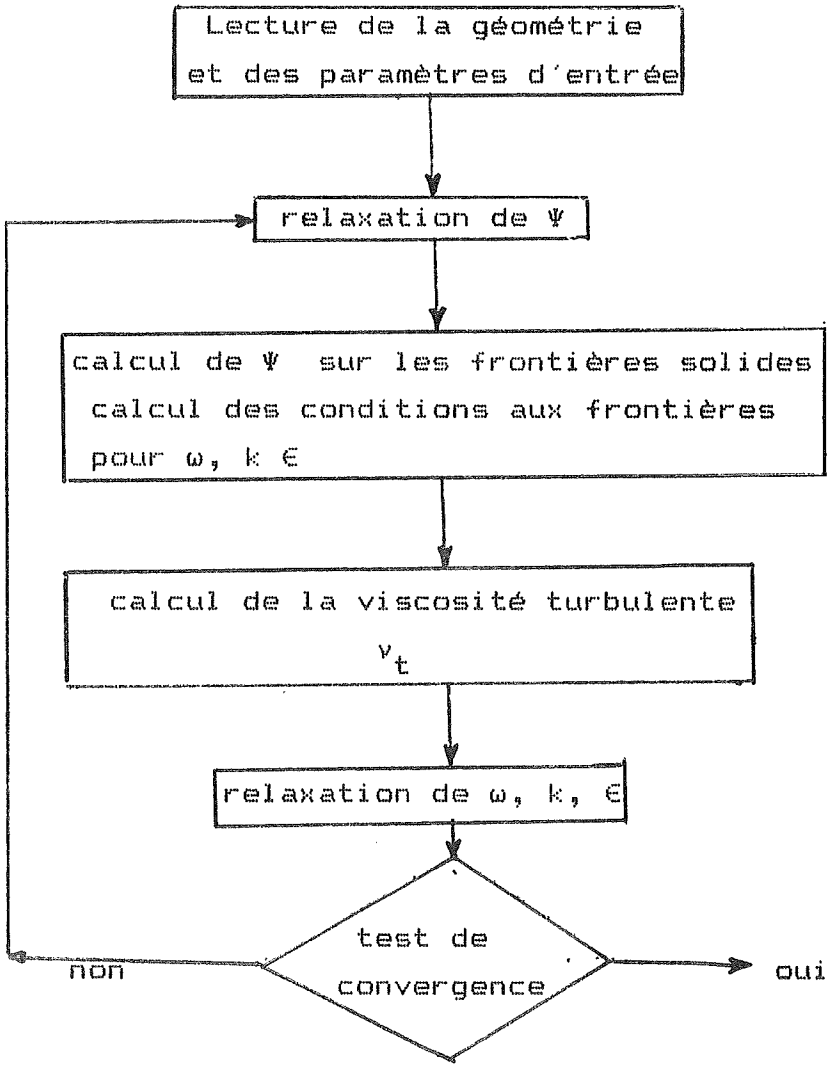
L'avantage de travailler avec les corrections c'est que ces corrections diminuent au cours des itérations ce qui réduit les erreurs d'arrondis. En plus, pour des conditions aux frontières de Dirichlet, les corrections sont nulles à ces frontières, ce qui simplifie le calcul des coefficients des systèmes d'équations algébriques issues de l'équation (5.18).

5.4 ORGANIGRAMME

Ayant un profil on définit d'abord une cascade. Ensuite on génère un maillage curviligne par la résolution des

équations (4.2). Des coordonnées (x, y) obtenues on calcul les coefficients géométriques qui serviront dans la résolution des équations du mouvement (ω, Ψ, k, ϵ) dont les résultats permettent de connaître le champ de vitesse et les lignes de courant, et permettront aussi le calcul du terme source de la pression (2.24) ainsi que ses conditions aux frontières.

L'organigramme de la résolution des équations du mouvement (ω, Ψ, k, ϵ) est le suivant:


Lecture de la géométrie
et des paramètres d'entrée
relaxation de Ψ
calcul de Ψ sur les frontières solides
calcul des conditions aux frontières
pour ω, k ∈
calcul de la viscosité turbulente
ν_t
relaxation de ω, k, ∈
test de
convergence
non
oui

CHAPITRE VI

RESULTATS

6.1. RESULTATS PRELIMINAIRES

Le premier test effectué est l'étude de l'écoulement laminaire entre deux plaques planes avec frontières périodiques et incidence nulle. Ceci pour pouvoir confronter les résultats numériques avec les solutions analytiques existantes dans le même cas.

Les figures (6.1.1) et (6.1.2) montrent la variation de la vitessse centrale (u(x, y = 0.5)) pour différents maillages (6 x 51 et 10 x 100), à un nombre de Reynolds de 10. On peut en conclure que pour avoir une vitesse de 1.5 au centre, un nombre d'au moins 10 points, dans la direction y, est nécessaire (les plaques se situent entre x =0 et x = 5).

Pour le deuxième cas (maillage 10 x 100), la figure (6.1.3) compare le profil de vitesse développé avec le profil théorique [12]. On remarque une bonne concordance entre les deux profils. Dans ce cas la pente du coefficient de pression est de - 1.1 (fig.(6.1.4)) très proche de la pente théorique $-\frac{12}{R_e}$, [12]. Au niveau du bord d'attaque la courbe fléchit légèrement; ceci est dû à ce que le profil de vitesse ne s'est pas encore développé et à l'existence du point d'arrêt.

Après ces tests on est passé au test des écoulements turbulents au niveau de la même géométrie (c.à.d.: cascade formée de plaques planes). Les figures (6.1.5) à (6.1.7) nous donnent le champ de vitesse, l'évolution de la vitesse le long

du canal et le coefficient de pression pour un nombre de Reynolds de 10,000 et un angle d'attaque de 0^{o}. Ce qu'on peut en déduire c'est le caractère applati du profil de vitesse au niveau des plaques malgré que la longueur des plaques est insuffisante pour avoir un écoulement établi; cette distance est de l'ordre de 25 à 40 fois le diamètre dans le cas d'un conduit circulaire [12]; qui nécessitera un espace mémoire considérable.

Les figures (6.1.8) à (6.1.11) donnent le champ de vitesse et le coefficient de pression C_p pour des angles d'attaques de 5^{o} et 30^{o}. A 5^{o} la différence, entre l'intrados et l'extrados, de la pression n'est pas appréciable pour qu'on puisse la voir sur la figure (6.1.9) donnant le coefficient C_p à l'intrados et à l'extrados. Par contre à 30^{o} on a une différence, mais on s'attend à ce que les deux courbes, figure (6.1.11), soient confondues à l'entrée (x = 0.0) ce qui n'est pas le cas. Ceci est probablement dû au fait qu'à l'entrée on a un gradient très élevé de pression et la pente des courbes est très voisine de l'infini. La zone de décrochement est probablement trop faible pour qu'on puisse la voir.

6.2 CASCADE AVEC UN PROFIL SYMETRIQUE (NACA 0012)

Après avoir testé le schéma numérique dans des geométries relativement simples on est passé à des géométries plus complexes formées avec des profils aérodynamiques tel que les profils NACA, JOUKOWSKY, ...etc.

Dans ce paragraphe on présentera les résultas obtenus avec un profil symétrique qui est le NACA 0012. Avant de discuter les résultats insistons sur le fait que les résultats présentés sont des résultats empiriques; du fait que le modèle

de turbulence dépend d'un certain nombre de constantes qui sont connues d'une manière empirique.

Contrairement à ce que fait M. Lacroix [4] on démarre les calculs directement avec le modèle k-€ du fait que dans les zones de périodicité il n'est pas évident d'estimer une longueur de mélange caractéristique, pour pouvoir démarrer les calculs avec un modèle à une seule équation (i e: Prandtl - Kolmogorov).

6.2.1 Cascade à incidence nulle (NACA 0012)

La première série d'expériences est effectuée sur la cascade de la figure (6.2.1). La géométrie est telle qu'on a une demi corde en amont du profil et une corde et demi en aval. Le maillage est de 96 x 16 noeuds avec 32 noeuds sur le profil et sans concentration le long des parois solides.

Les figures (6.2.2) à (6.2.6) montrent le champ de vitesse, les lignes de courant, les isobares, le coefficient de pression et le coefficient de pression moyen entre l'intrados et l'extrados, pour un nombre de Reynols de 1000 avec un calcul en régime laminaire. Les mêmes résultats sont montrés par les figures (6.2.7) à (6.2.11) pour le même nombre de Reynolds mais en régime en turbulent.

Les figures (6.2.12) à (6.2.16) montrent le même calcul pour un nombre de Reynolds de 10,000; de même que les figures (6.2.23) à (6.2.27), sont pour un nombre de Reynolds de 100,000.

A un nombre de Reynolds de 10,000 un autre essai a été effectué, figures (6.2.18) à (6.2.22), sur la même géométrie

en concentrant les lignes le long des parois (figure (6.2.17)); on a concentré au maximum tout en évitant de déstabiliser le schéma numérique qui est très sensible au maillage utilisé.

Sur ce dernier maillage, concentré, un dernier test a été effectué à un nombre de Reynolds de 1,400,000, figure (6.2.28) à (6.2.31), qui correspond à un nombre de Reynolds de 2,800,000, basé sur la corde. Ceci pour que l'on puisse comparer avec les résultats expérimentaux de Gregory [20], dans le cas d'un profil isolé.

6.2.2 Discussion des résultats

La première remarque qu'on peut faire c'est que pour un nombre de Reynolds de 1,000, il y a une différence entre le calcul laminaire (fig.(6.2.2) à (6.2.6)) et le calcul avec modèle de turbulence (fig. (6.2.7) à (6.2.11)). Ceci est probablement dû à ce qu'à ce nombre de Reynolds l'écoulement est plutôt laminaire que turbulent.

On peut aussi remarquer une différence entre la pression à l'intrados et à l'extrados du profil (fig. (6.2.5) à (6.2.10)) ce qui est certainement dû à la disymétrie qu'on a observé au niveau des termes forcés (P'et Q') du maillage adapté, lors de la génération de ce dernier; cette différence est plus accentuée dans le cas turbulent du fait que dans ce cas on a plus d'équations ce qui amplifie l'erreur.

Pour le maillage uniforme (fig. (6.2.1)) la différence entre l'écoulement à un nombre de Reynolds de 10,000 (fig. (6.2.12) à (6.2.16)) et l'écoulement à 100,000 (fig. (6.2.23) à (6.2.27)) n'est pas appréciable: Ce qui nous laisse

conclure que pour ce type de maillage à un certain nombre de Reynolds la viscosité artificielle, induite par la différenciation des équations de transport, est plus importante. Par contre pour le maillage concentré le long des parois solides (figure (6.2.17)) on détecte une différence entre un écoulement à un nombre de Reynolds de 10,000 (fig. (6.2.18) à (6.2.22)) et un écoulement à 1,400,0000 (fig. 6.2.28) à (6.2.31)).

Malgré la disymétrie observée au niveau de la pression, on a comparé les résultats numériques obtenues par le présent schéma, pour un nombre de Reynolds de 2,800,000 basé sur la corde du profil, avec les résultats expérimentaux de Gregory [20], en prenant la moyenne entre la pression à l'intrados et l'extrados du profil, figure (6.2.31). En général on a une bonne concordance avec les résultats expérimentaux, la dispersion est plus accentuée au bord d'attaque et de fuite. Trois raisons possibles peuvent expliquer cette différence. D'abord les mesures expérimentales sont faites dans le cas d'un profil isolé ce qui n'est pas notre cas. Ensuite l'écoulement n'est peut-être pas prédit convenablement avec le modèle de turbulence choisi. Enfin la concentration des points, sur le profil aux bords d'attaque et de fuite, n'est pas suffisante pour résoudre les grands gradients de la pression pour ces régions.

6.3 CASCADE AVEC LE PROFIL NACA 65-4-10:

La figure (6.3.1) illustre la cascade formée avec un profil NACA65-4-10, profil légèrement cambré. L'entrée est placée à une demi-corde, la sortie à une corde et demi, et le canal interaube est d'une demi-corde. Le maillage est de

96 x 18 noeuds avec 32 noeuds sur le profil et sans concentration le long des parois solides.

A un nombre de Reynodls de 1,000,000 on montre aux figures (6.3.2) à (6.3.4) le champ de vitesse, les lignes de courant, les isobares et le coefficient de pression sur l'intrados et l'extrados du profil.

6.4 CASCADE AVEC PROFIL FORTEMENT CAMBRE

Pour ce test le profil choisi est le profil sur lequel Langston et al [21] ont effectué des mesures. L'entrée est placée à une demi-corde, la sortie à une corde et demi, et le canal interaube est d'une demi-corde (figure (6.4.1)). Le maillage est de 92 x 16 noeuds avec 31 noeuds sur le profil.

Pour des raisons de similitude on a pris un nombre de Reynolds de 140,000 basé sur la distance inter-aube, l'angle d'attaque de l'écoulement est de 44.6 deg.

La figure (6.4.2) montre le champ de vitesse et la figure (6.4.3) compare les résultats, obtenus avec le présent modèle numérique, avec les résultats expérimentaux de Langston et al [21] à la mi-hauteur. On remarque une bonne concordance qualitative entre les deux résultats; mais quantitativement il y a une différence. Plusieurs raisons possibles pour expliquer cette différence. D'abord les mesures expérimentales ont été effectuées dans un cas tridimensionnel et à la mi-hauteur l'influence des parois latérales subsiste toujours. Une deuxième raison, c'est que l'écoulement n'est peut-être pas prédit convenablement avec le modèle choisi. Comme dernière raison, la différence est peut être due à la modification apportée au profil de départ au niveau du bord de

fuite, pour l'adapter à notre générateur de maillage. La figure (6.4.4) illustre les lignes isobares.

Pour ce cas le plus complexe des précédents, le temps d'exécution du programme sur un ordinateur IBM 4341 est de 1,5 x 10^{-3} seconde par itération et par noeud du maillage et la convergence est atteinte au bout de 1800 itérations environ.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

Un modèle numérique aux différences finies, pour la résolution des écoulements turbulents bidimensionnels dans les cascades, a été développé.

Les équations du mouvement moyen sont formulées en termes de fonction de courant et vorticité. Les tensions de Reynolds apparaissant dans les équations du mouvement, sont modélisées à l'aide du concept de la viscosité turbulente, basé sur l'hypothèse de Boussinesq. Cette viscosité turbulente est calculée à l'aide du modèle de turbulence $k - \epsilon$.

Dans le cas des cascades avec profil symétrique dans un écoulement à incidence nulle, le modèle donne des résultats satisfaisants. Cependant avec des profils cambrés, dans un écoulement à incidence, on a remarqué une mauvaise prédiction du point d'arrêt sur le profil; ce qui influence la solution du champ de pression. Ceci est probablement dû à la détermination de la fonction du courant sur le profil qui est aussi une inconnue du problème. D'autre part on sait que la modélisation des écoulements turbulents dépend fortement de l'empirisme du modèle de turbulence choisi [14]. Cet empirisme est caractérisé par les constantes figurant dans le modèle. Par conséquent une optimisation de ces constantes s'avère nécessaire; ce qui n'a pas fait l'objet de la présente étude.

En conséquence, nous recommandons dans une prochaine étape de l'étude entreprise, de formuler les équations du mouvement en termes de variables primitives; qui simplifiera les conditions aux frontières, surtout au niveau des parois solides et d'entreprendre une optimisation des constantes empiriques du modèle de turbulence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HINZE, J.O., "Turbulence" second édition
Mc Graw. Hill

[2] FAVRE, A., KOVASZNAY, J.S.G., DUMAS,R.J. GRAVIGLIO, J. COANTIC,M "La turbulence en mécanique des fluides, bases théoriques et expérimentales, méthodes statistiques"
GAUTHIER - VILLARS (France)

[3] LAUNDER, B.E; SPALDING, D.B. "Lectures in mathematical models of turbulence". London England 1972
Academic Press London and New-York

[4] LACROIX, M.; CAMARERO, R.; TAPUCU, A, "Etude numérique d'écoulements visqueux bidimensionnels bornés par des géométries complexes"
Rapport technique EP 84 - R - 18
Ecole Polytechnique de Montréal (1984)

[5] ROACHE, P., "Computational fluid dynamics"
Hermosa U.S.A. (1976)

[6] KAKAC, S.; SPALDING, D.B.; "Turbulent forces convection in channels and bundles"
Volume 1, (1978)

[7] PRANDTL, L.; "Bericht Über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz", ZAMM 5, 136 (1925).

[8] CEBECI, T. and SMITH "Analysis of turbulent boundary layers" A.M.O. (1974)

[9] RODI, W. "Turbulence models and their application a state of the art review" Institut FÜr Hydromechanik, Karrlsruhe, (1980)

[10] "Second international symposium on turbulent shear flows" Imperial college London July 2.4, 1979

[11] KOLMOGOROV, A.N.; "Equations of turbulent motion of an incompressible turbulent fluid", IZV. AKAD NAUK. ser. Phys. IV, no 1-2, 56 (1942)

[12] SCHLICHTING, H. "Boundary - Layer theory" seventh edition, Mc Graw - Hill.

[13] HARLOW, F.H., NAKAYAMA, P.I.; "Transport of turbulence energy decay rate", Los Alamos Sci. Lab. Univ. California Rep. LA - 3854, (1969)

[14] LEONARD, B.P.; "A survey of finite differences of opinion on numerical muddling of the incompressible defective confusion equations" ASME, Winter annual metting, New-York (1979)

[15] HAH, C. "A Navier-Stokes Analysis of three dimensional turbulent flows inside blade rows at design and off design conditions" ASME, Journal of engineering power. Paper 83-GT-40, 1984

[16] THOMPSON, J.F., "Numerical solutions of flow Problems using boundary fitted coordinates", Computational fluid Dynamics, Hollman, Mc Graw-Hill, (1981).

[17] THOMAS, P.D.; MIDDLECOFF, J.F.; "Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations"AIAA Vol. 18, 652 (1979)

[18] RICE, J.R.; "Matrix computations and mathematical software" Mc Graw - Hill (1981)

[19] PATANKAR, S.V., "Numericl heat transfer and fluid flow" Mc Graw - Hill (1980)

[20] GREGORY, N., and O'REITTY, C.L.: "Low speed aerodynamic characteristics of NACA0012 airfoil section, including the effects of upper surface roughness simulation hoarfrost" National Physical Laboratory, Teddington, England, Aero. Rept. 1308 (1970)

[21] LANGSTON, L.S. and all "Three dimensional flow within a turbine cascade passage" ASME Journal of engineering for power, vol. 99, No. 1 Jan. 1977

[22] AGARWAL, R.K.; "A third - order - accurate upwind scheme for Navier-Stokes solutions at high Reynolds numbers" AIAA paper No 81-0112 (1981)

APPENDICE

Adimensionnalisation des variables

Toutes les variables sont adimensionnalisées par rapport aux variables à l'entrée de la cascade (U_o, H_o, ρ, ν). Donc les variables adimensionnelles sont reliées aux variables dimensionnelles (indice d):

$$x = \frac{Xd}{H_o} \quad , \quad Y = \frac{Yd}{H_o}$$

$$u = \frac{Ud}{U_o} \quad , \quad V = \frac{Vd}{U_o}$$

$$P = \frac{P_d}{\rho U_o^2} \quad ,$$

$$\omega = \frac{\omega_d}{u_o/H_o}, \quad \Psi = \frac{\Psi_d}{U_o H_o}$$

$$\nu_t = \frac{\nu_{td}}{U_o \, H_o},$$

$$k = \frac{Kd}{U_o^2} \quad , \quad \epsilon = \frac{\epsilon_d}{U_o^3/H_o}$$

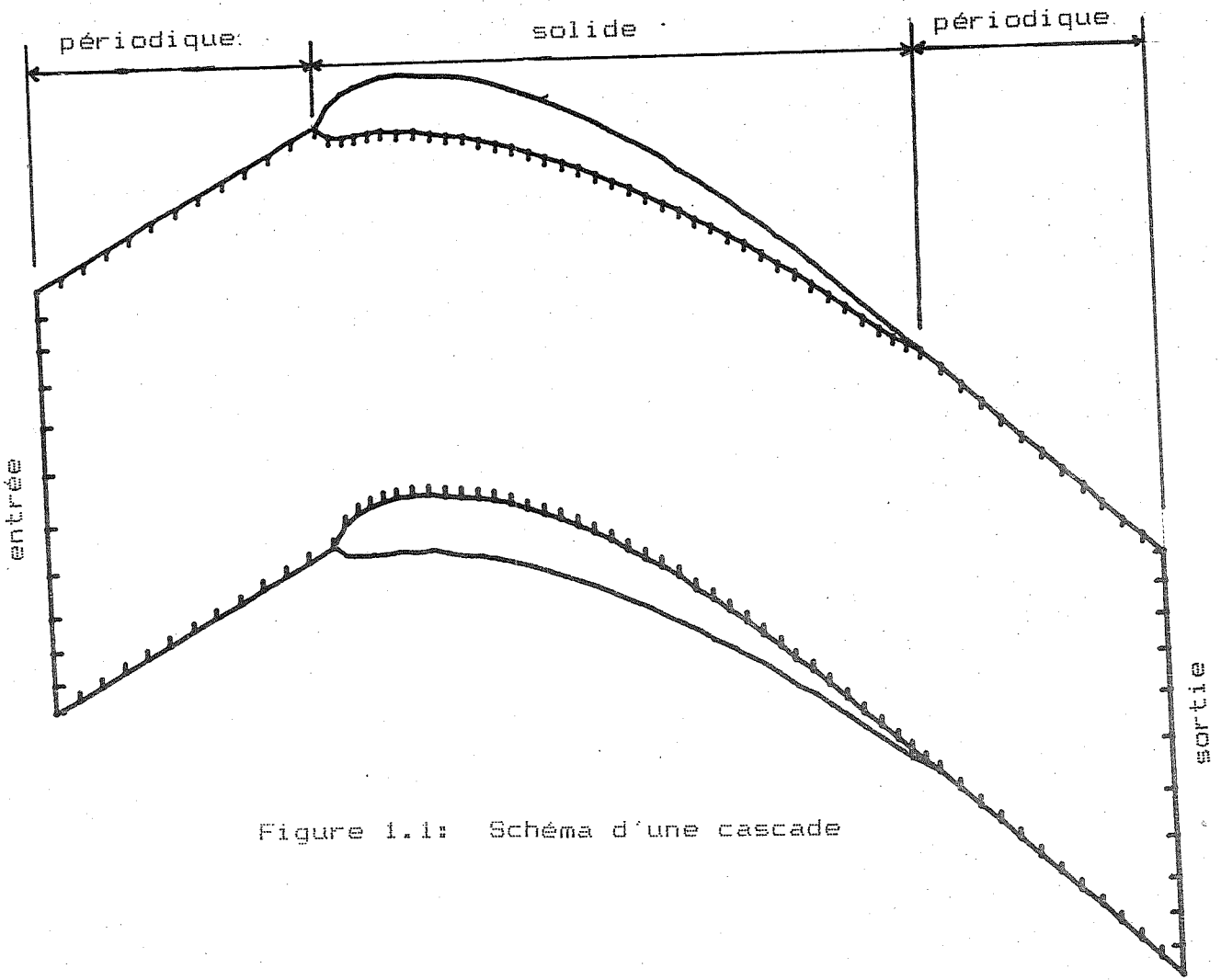


Figure 1.1: Schéma d'une cascade

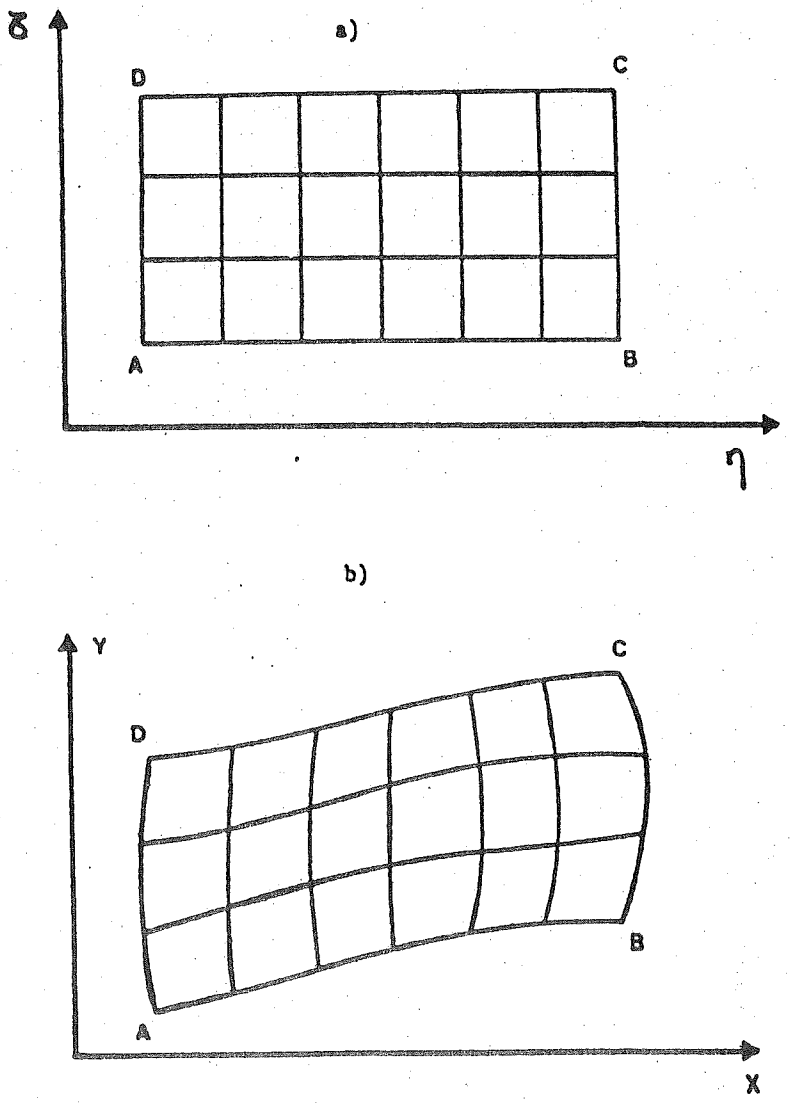


Figure 4.1: Transformation du domaine physique (x,y) au domaine de calcul (η,τ) en deux dimensions.

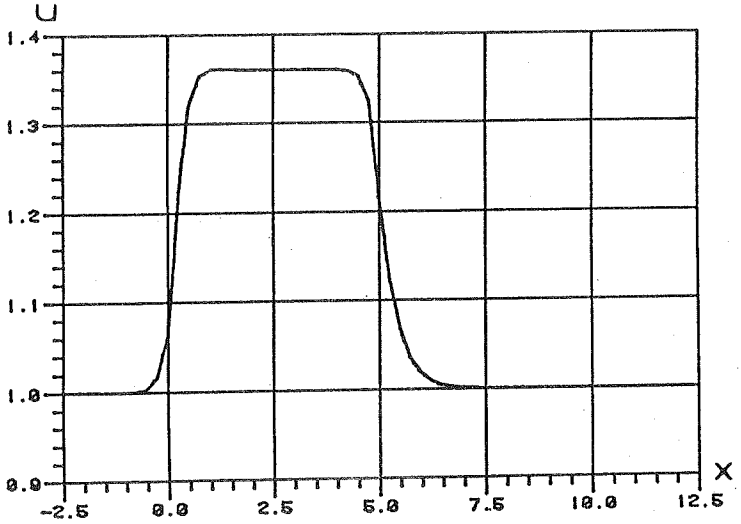


Figure 6.1.1: Vitesse axiale Re = 10
maillage 6 x 51

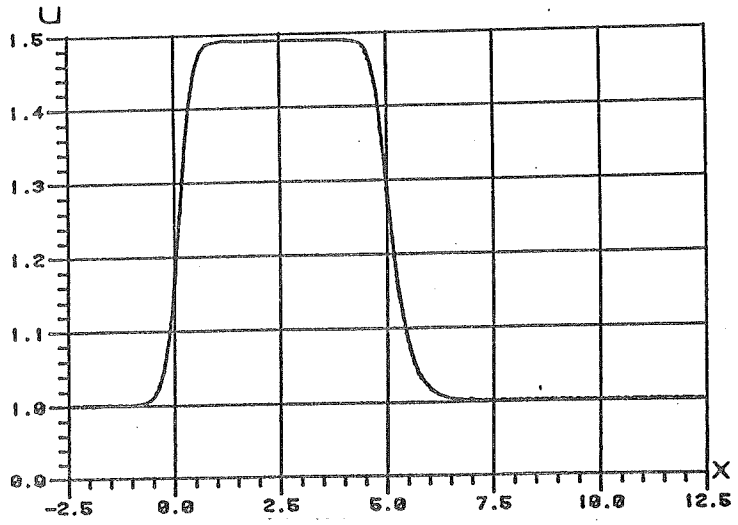


Figure 6.1.2: Vitesse axiale Re = 10
maillage 10 x 100

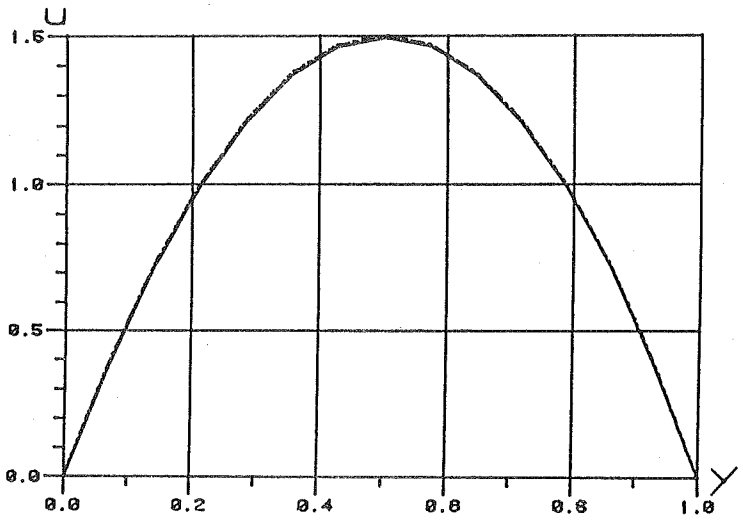


Figure 6.1.3: Profil de vitesse cas fig. 6.1.2
(—) présent schéma
(– –) théorique

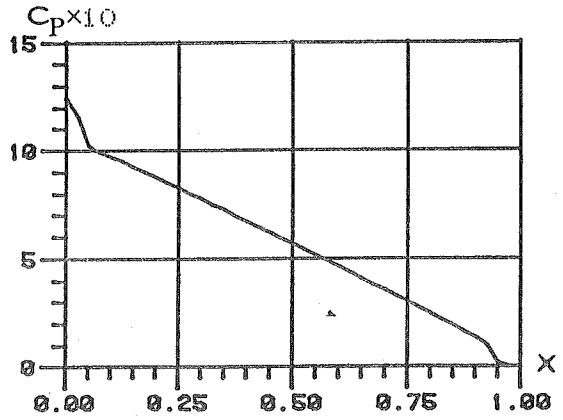


Figure 6.1.4: Coefficient de pression
le long de la plaque

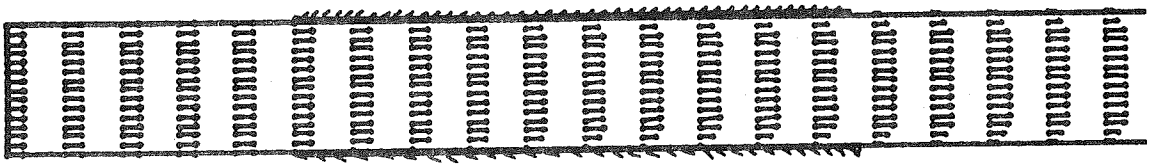


Figure 6.1.5: Champ de vitesse
Re = 10,000.

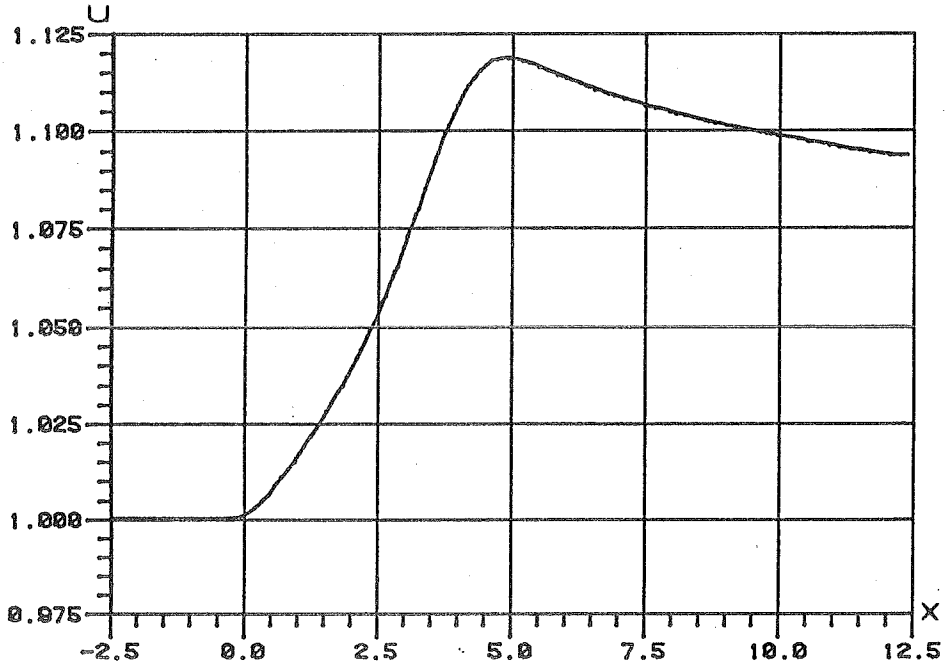


Figure 6.1.6: u = fonction (x)

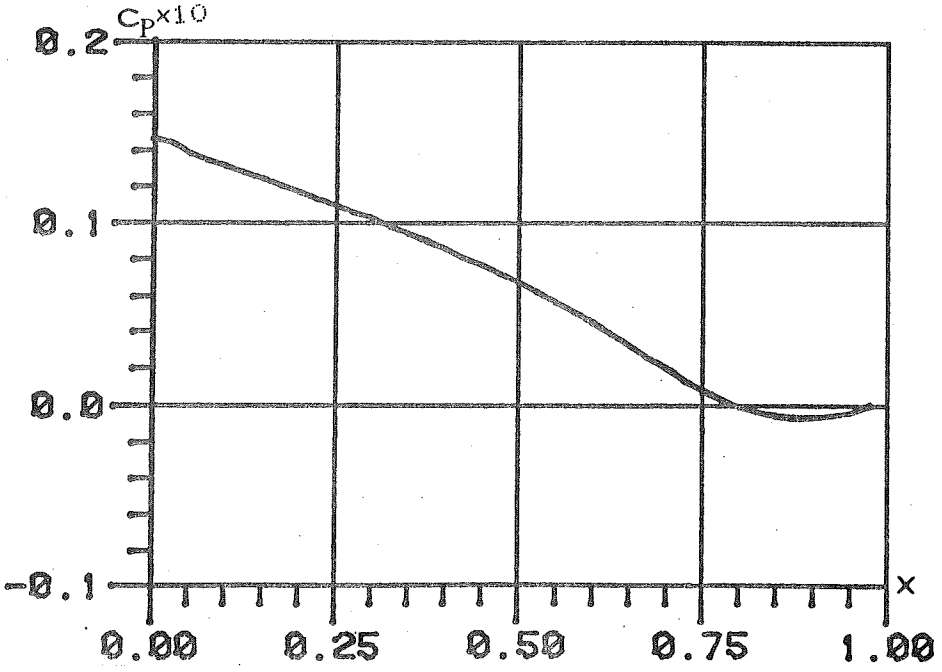


Figure 6.1.7: Coefficient de pression
Cas fig. 6.1.5

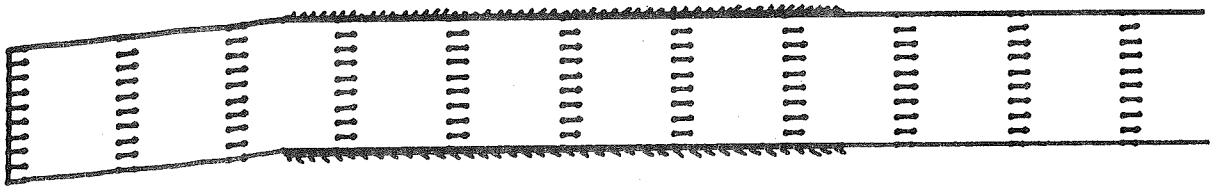


Figure 6.1.8: Champ de vitesse Re = 10,000
Angle d'attaque = 5°

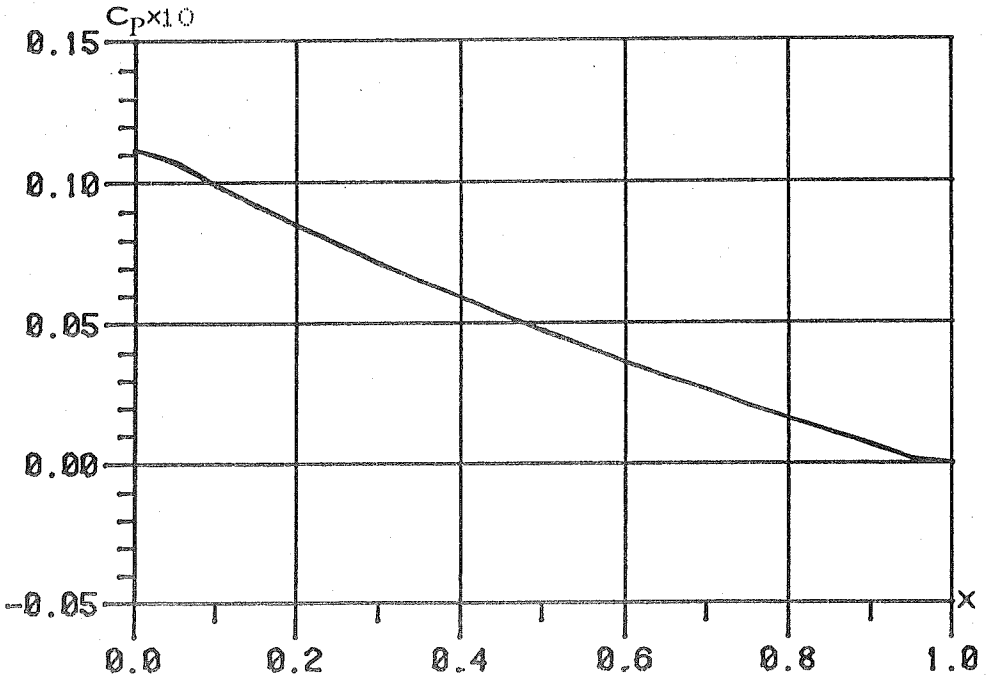


Figure 6.1.9: Coefficient de pression
cas fig. 6.1.8

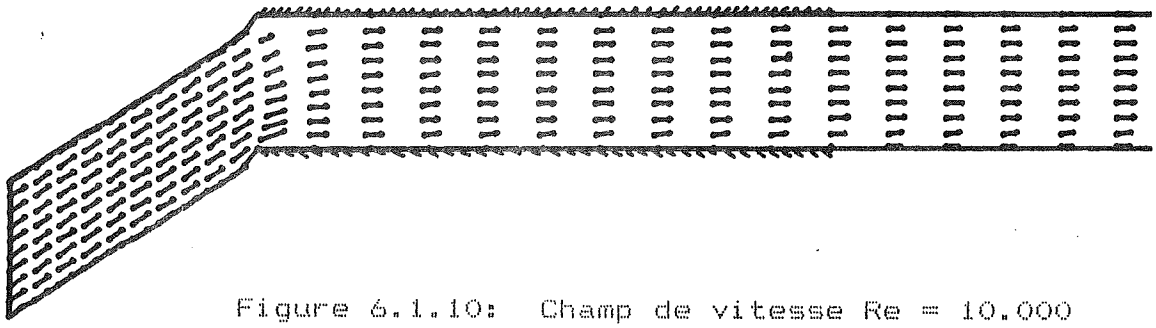


Figure 6.1.10: Champ de vitesse Re = 10.000
Angle d'attaque = 30°

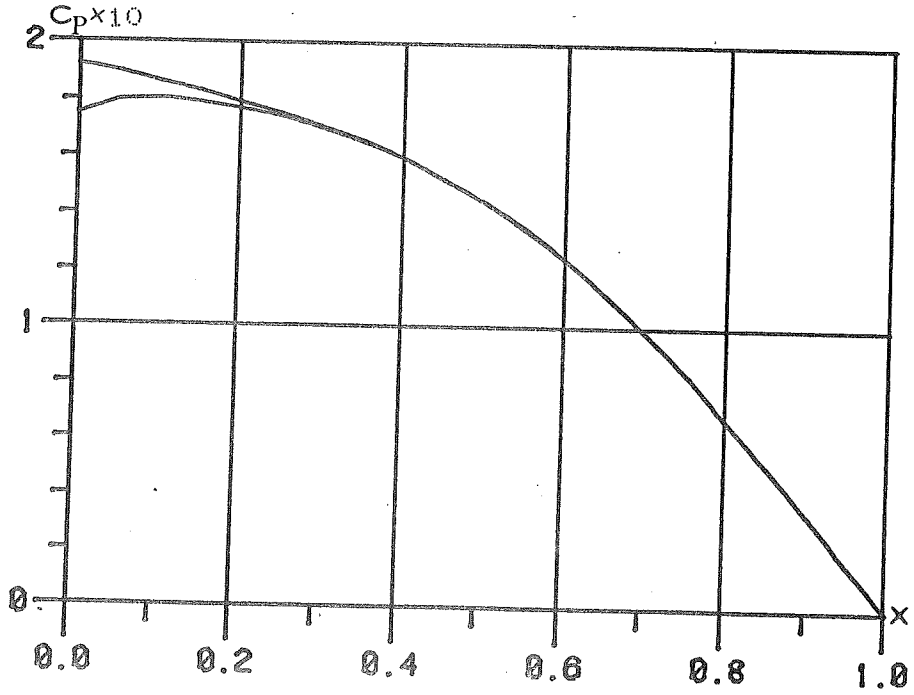


Figure 6.1.11: Coefficient de pression
cas fig. 6.1.10

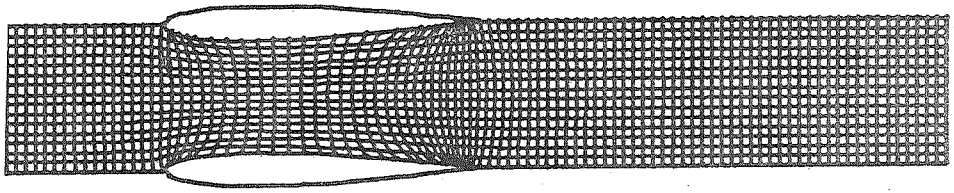


Figure 6.2.1: Maillage uniforme 16 x 96
NACA 0012

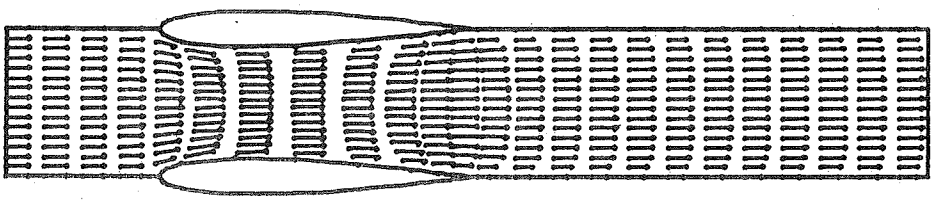


Figure 6.2.2: Champ de vitesse
Re = 1,000 (Laminaire)

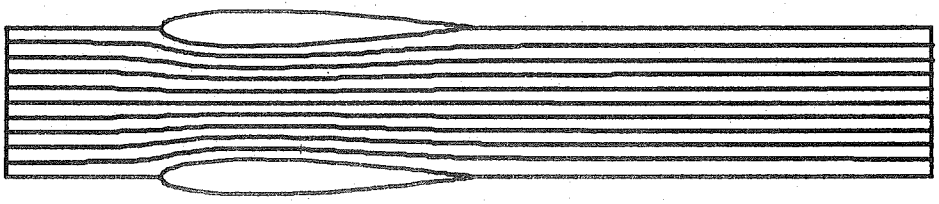


Figure 6.2.3: Lignes de courant
Re = 1,000 (Laminaire)

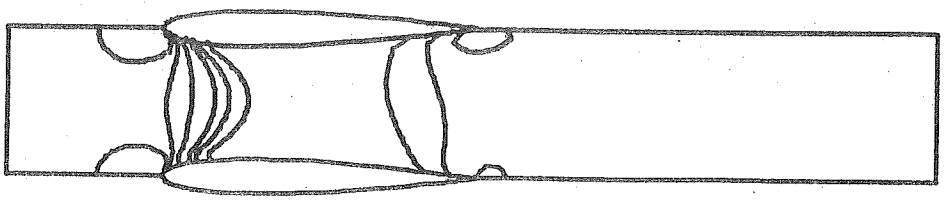


Figure 6.2.4: Isobares
Re = 1,000 (Laminaire)

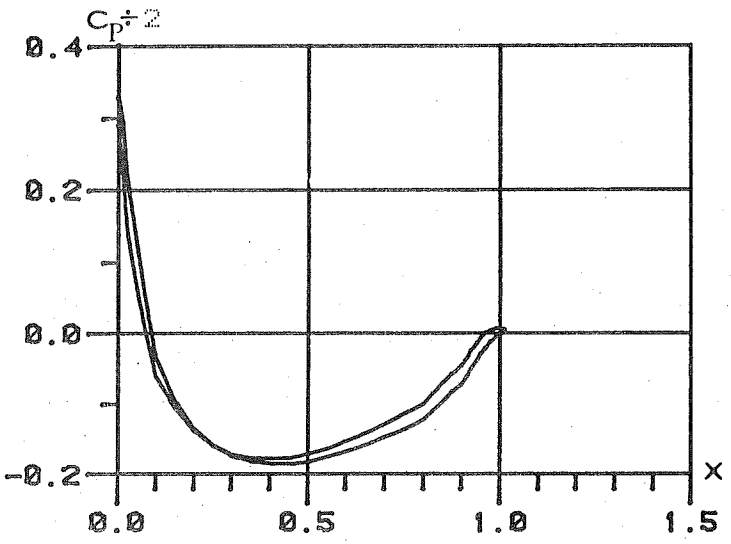


Figure 6.2.5: Coefficient de pression, incidence nulle Re = 1,000 (Laminaire)

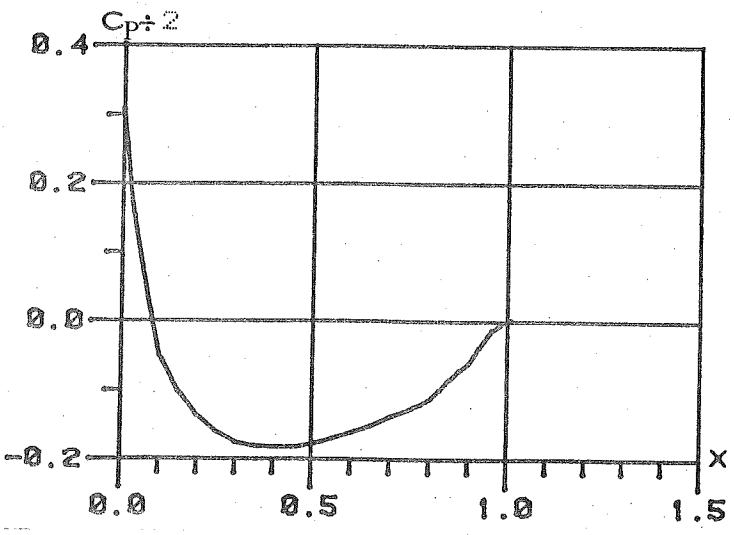


Figure 6.2.6: Coefficient de pression moyen incidence nulle Re = 1,000 (Laminaire)

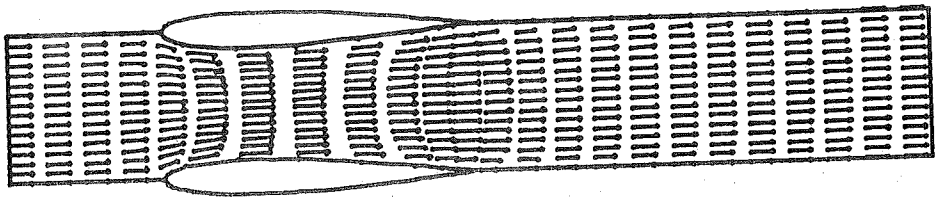


Figure 6.2.7: Champ de vitesse
Re = 1,000 (turbulent)

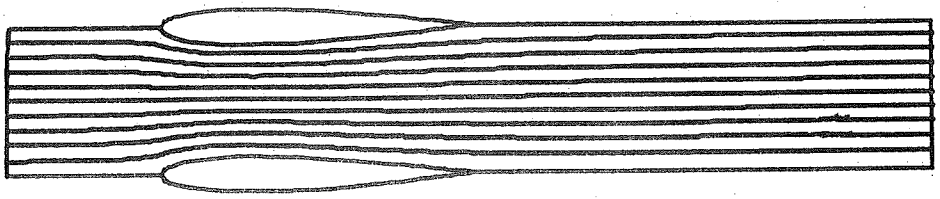


Figure 6.2.8: Lignes de courant
Re = 1,000 (turbulent)

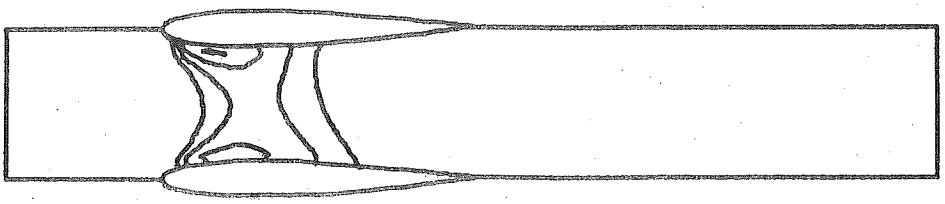


Figure 6.2.9: Isobares
Re = 1,000 (turbulent)

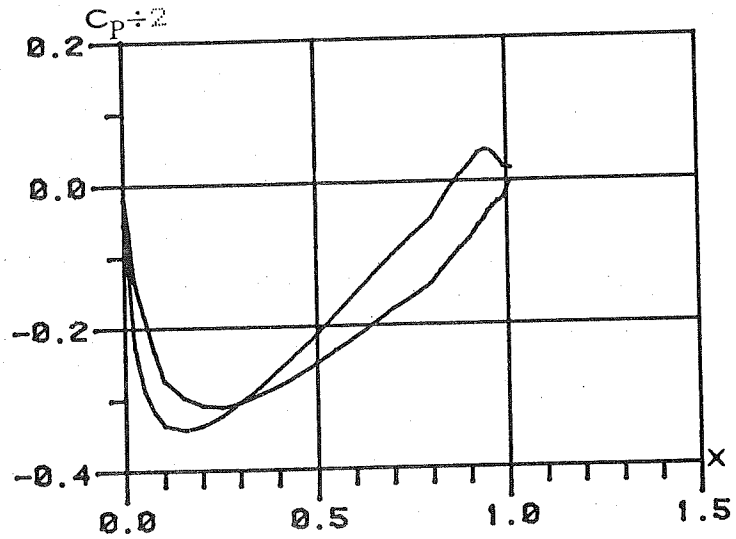


Figure 6.2.10: Coefficient de pression, incidence nulle Re = 1,000 (turbulent)

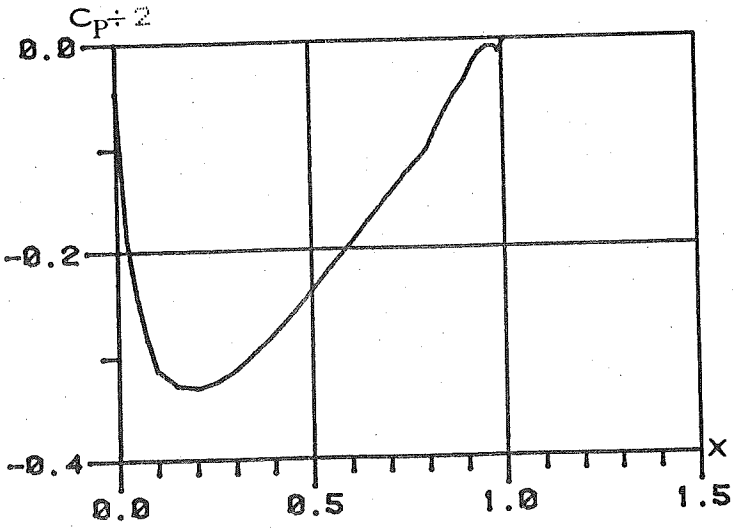


Figure 6.2.11: Coefficient de pression moyen, incidence nulle Re = 1,000 (turbulent)

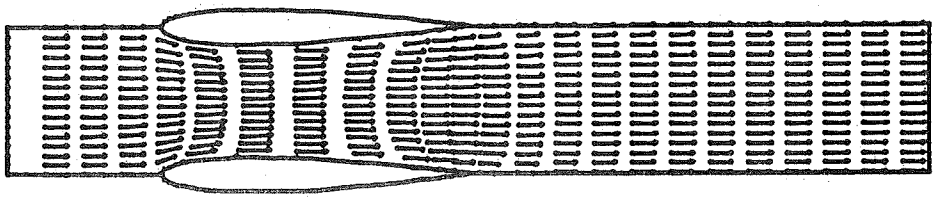


Figure 6.2.12: Champ de vitesse
Re = 10,000

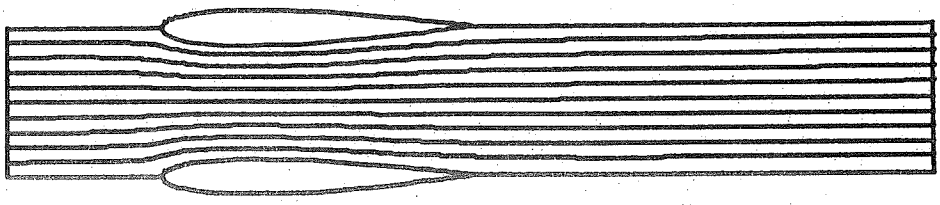


Figure 6.2.13: Lignes de courant
Re = 10,000

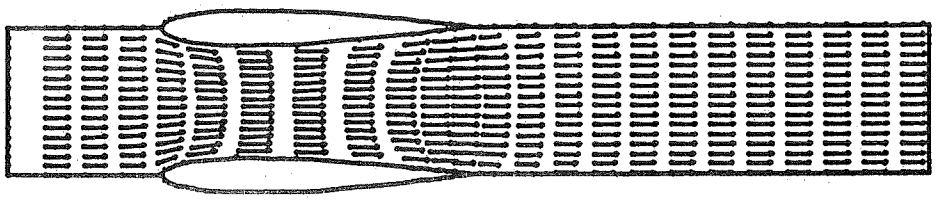


Figure 6.2.12: Champ de vitesse
Re = 10,000

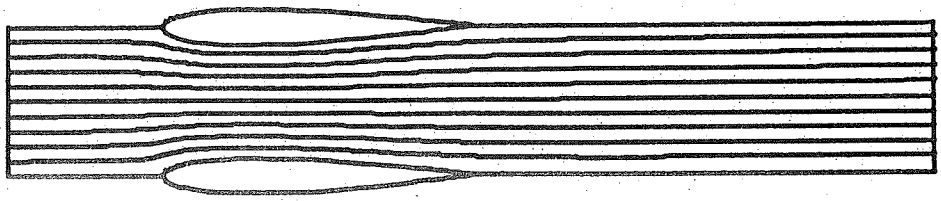


Figure 6.2.13: Lignes de courant
Re = 10,000

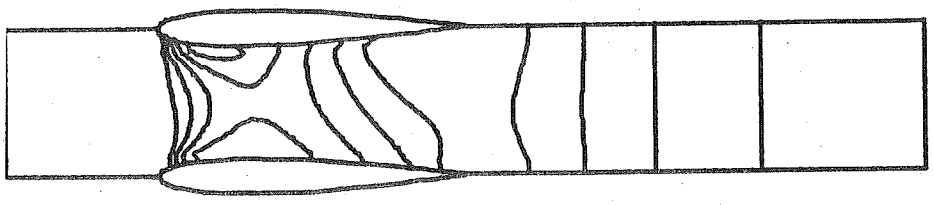


Figure 6.2.14: Isobares
Re = 10,000

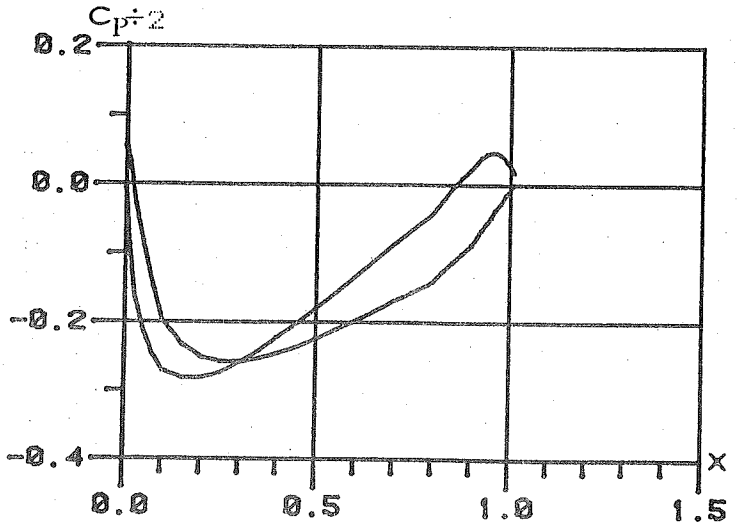


Figure 6.2.15: Coefficient de pression
Re = 10,000

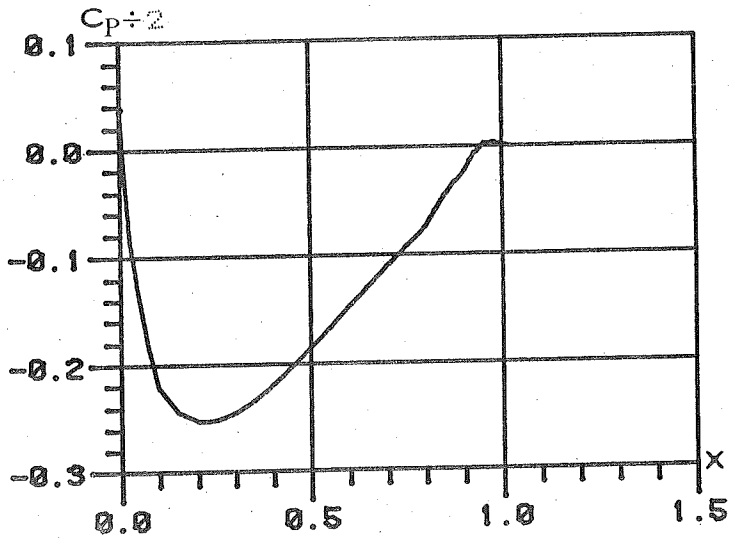


Figure 6.2.16: Coefficient de pression moyen
Re = 10,000

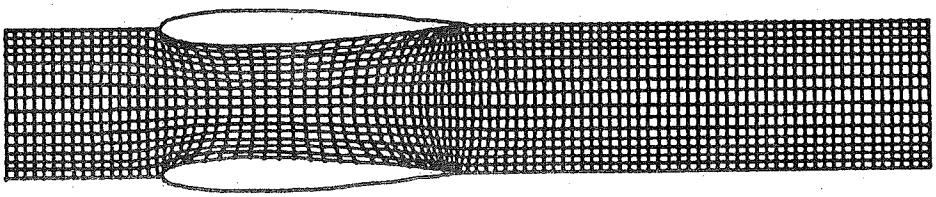


Figure 6.2.17: Maillage concentré le long des parois (16 x 96) NACA 0012

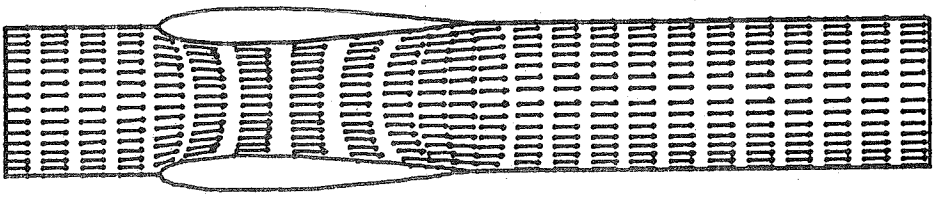


Figure 6.2.18: Champ de vitesse
Re = 10,000
maillage concentré

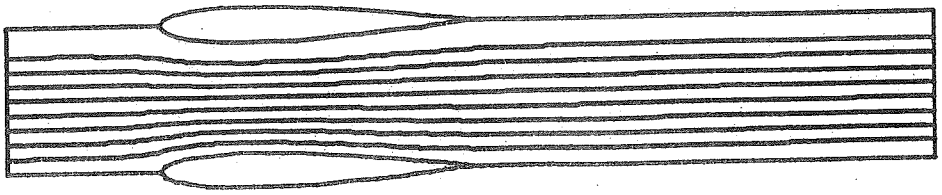


Figure 6.2.19: Lignes de courant Re = 10,000
Maillage concentré

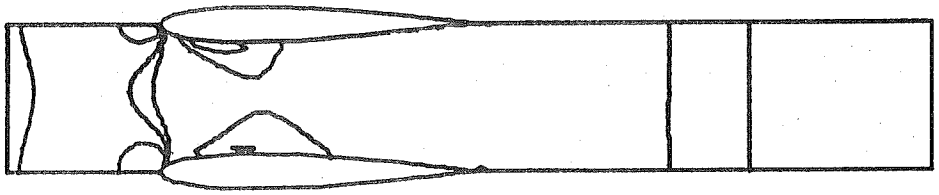


Figure 6.2.20: Isobares Re = 10,000
Maillage concentré

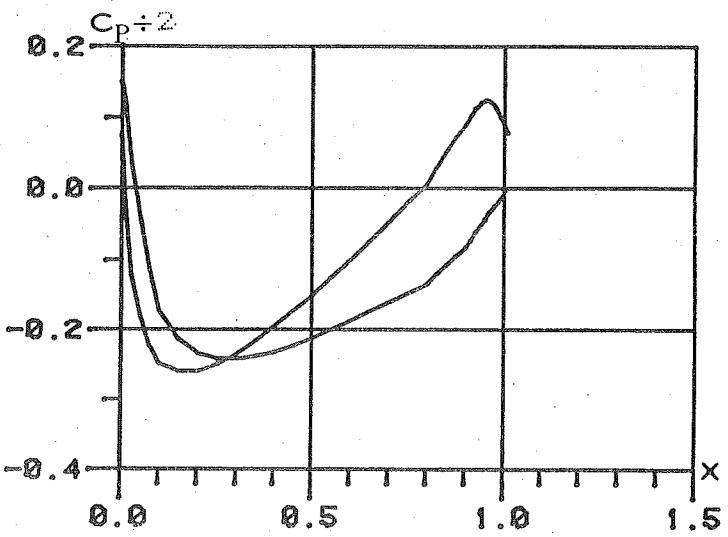


Figure 6.2.21: Coefficient de pression
Re = 10,000
maillage concentré

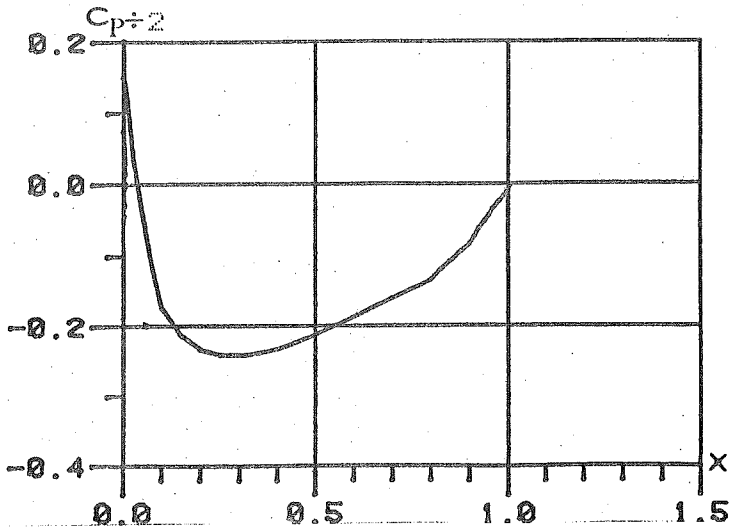


Figure 6.2.22: Coefficient de pression moyen
Re = 10,000, maillage concentré

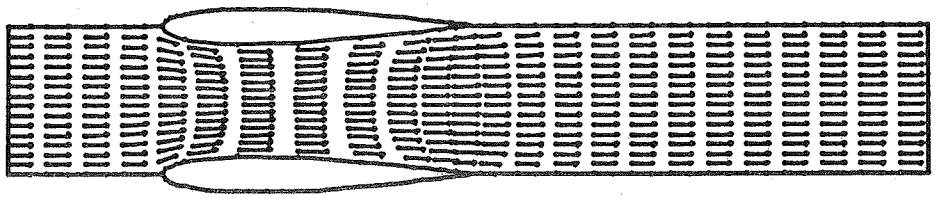


Figure 6.2.23: Champ de vitesse Re = 100,000
maillage uniforme

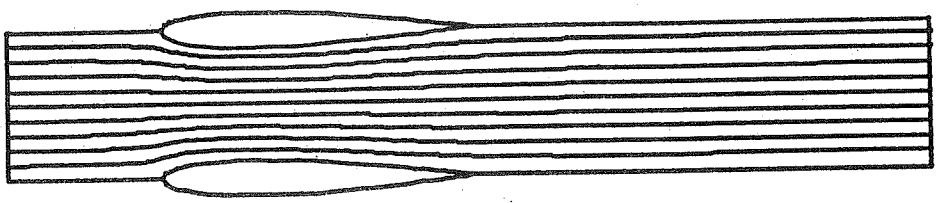


Figure 6.2.24: Lignes de courant Re = 100,000
maillage uniforme

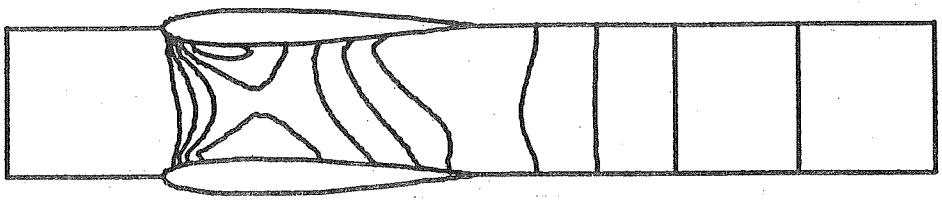


Figure 6.2.25: Isobares Re = 100,000
maillage uniforme

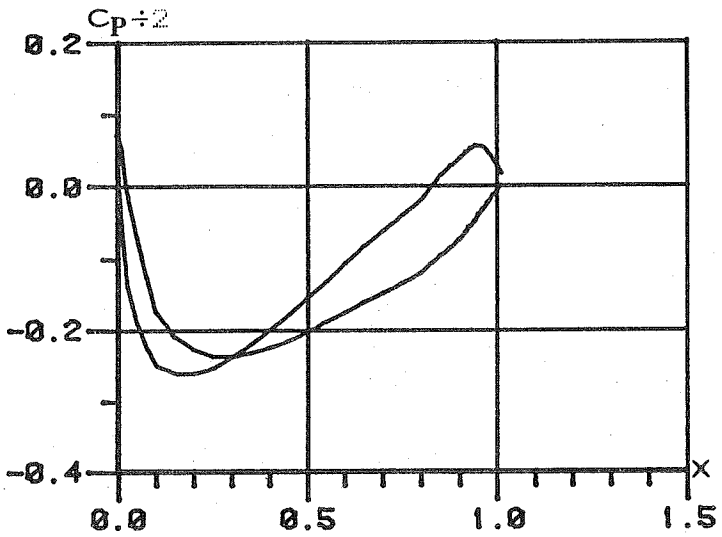


Figure 6.2.26: Coefficient de pression Re = 100,000 maillage uniforme

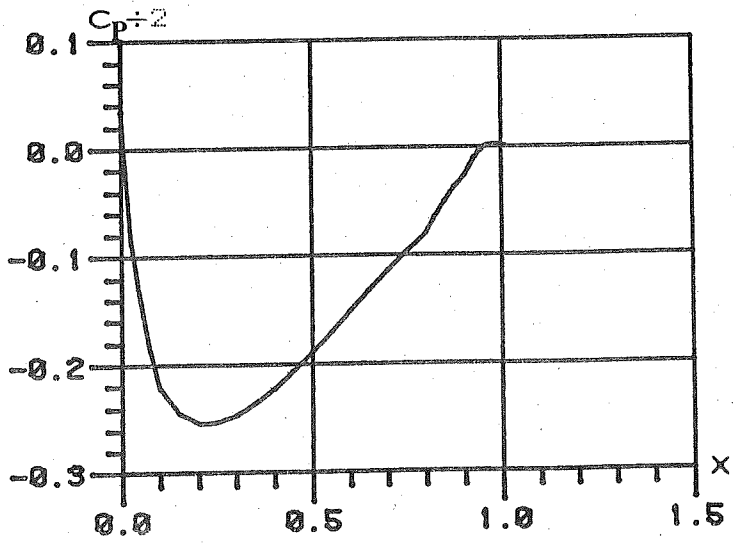


Figure 6.2.27: Coefficient de pression Re = 100,000 maillage uniforme

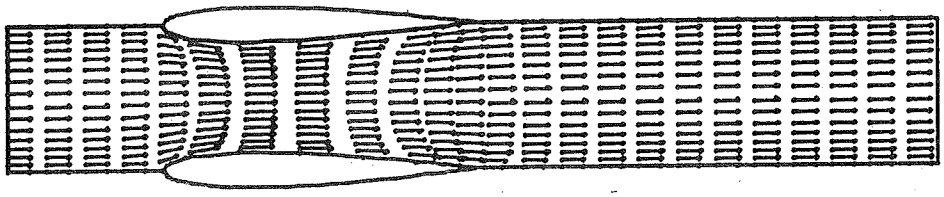


Figure 6.2.28: Champ de vitesse Re = 1,400,000
maillage concentré

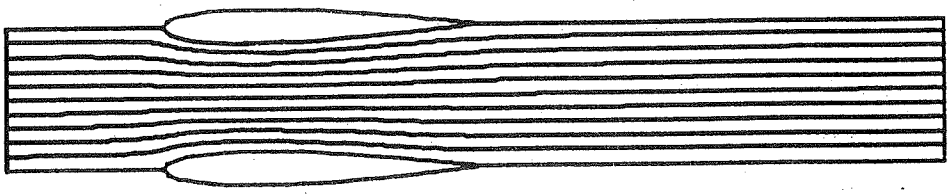


Figure 6.2.29: Lignes de courant Re = 1,400,000
maillage concentré

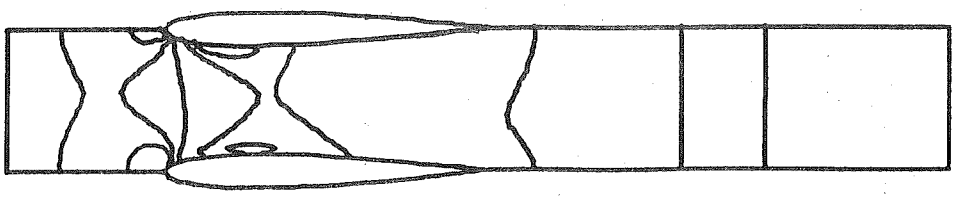


Figure 6.2.30: Isobares Re = 1,400,000
maillage concentré

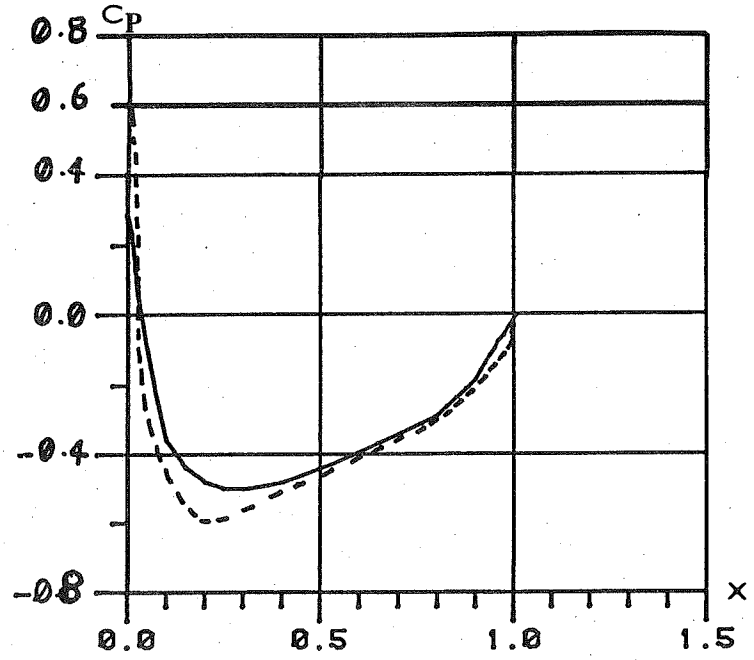


Figure 6.2.31: Coefficient de pression
Re = 1,400,000
(———) Present travail
(– – –) Expérience Gregory [21]

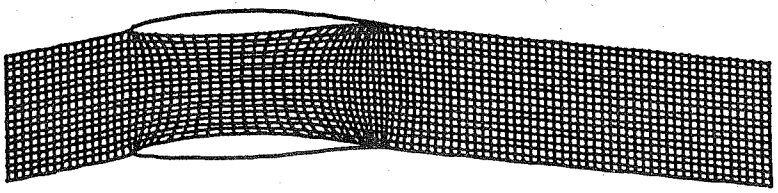


Figure 6.3.1: Maillage 18 x 96
NACA 65-4-10

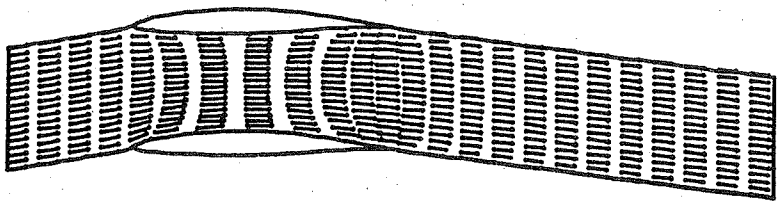


Figure 6.3.2: Champ de vitesse
Re = 1,000,000

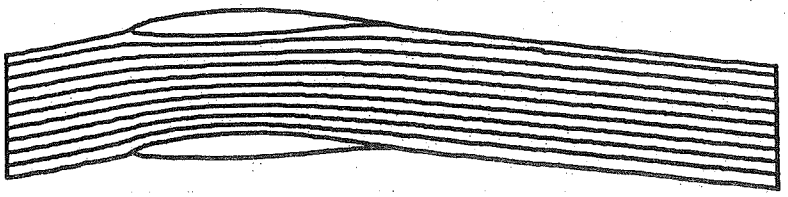


Figure 6.3.3: Lignes de courant
Re = 1,000,000

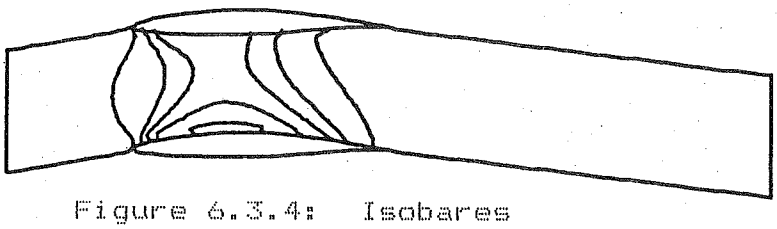


Figure 6.3.4: Isobares
Re = 1,000,000

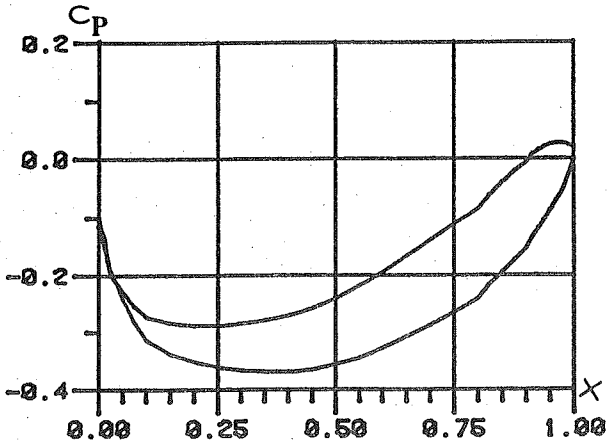


Figure 6.3.5: Coefficient de pression
Re = 1,000,000

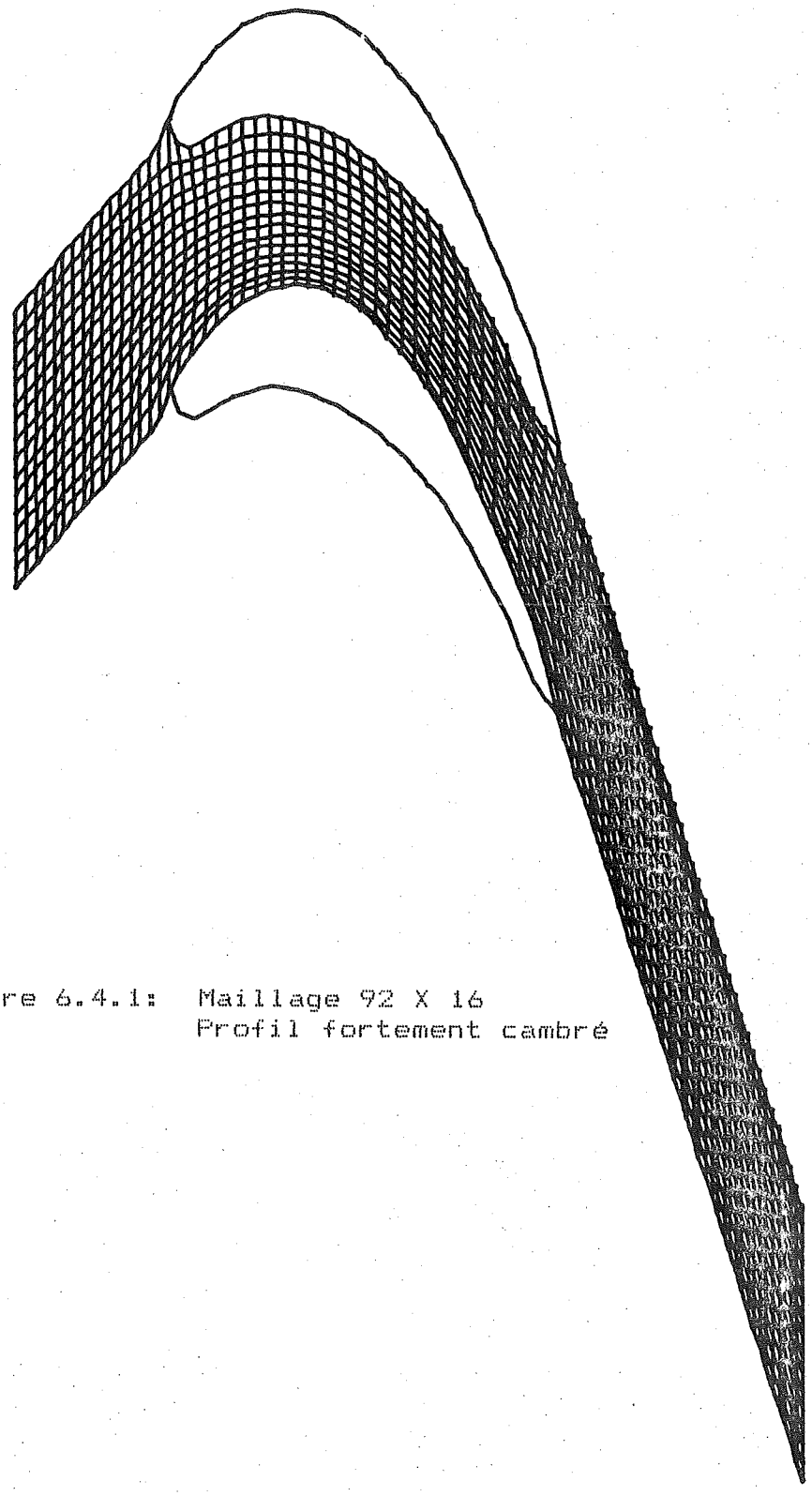


Figure 6.4.1: Maillage 92 X 16
Profil fortement cambré

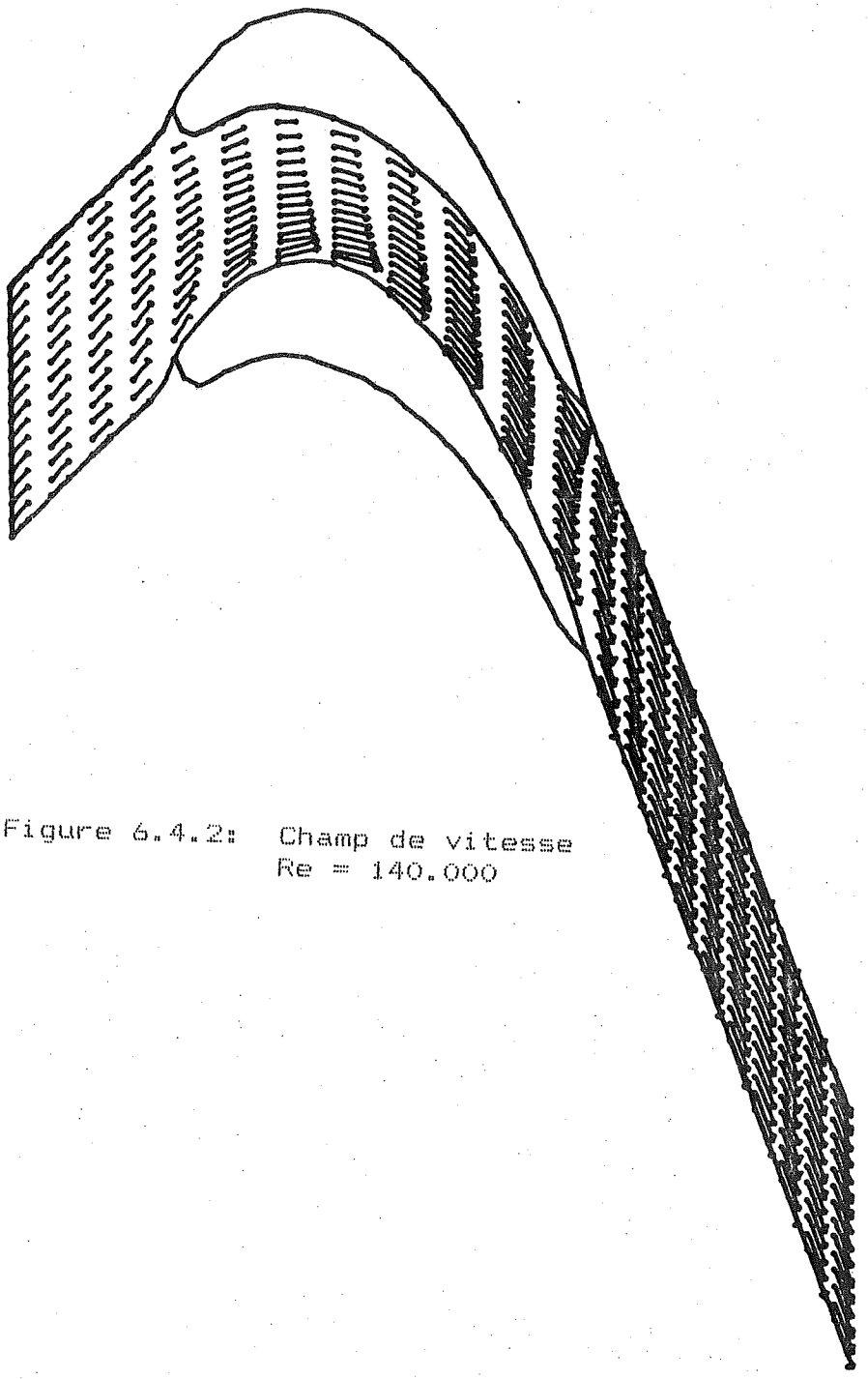


Figure 6.4.2: Champ de vitesse
Re = 140.000

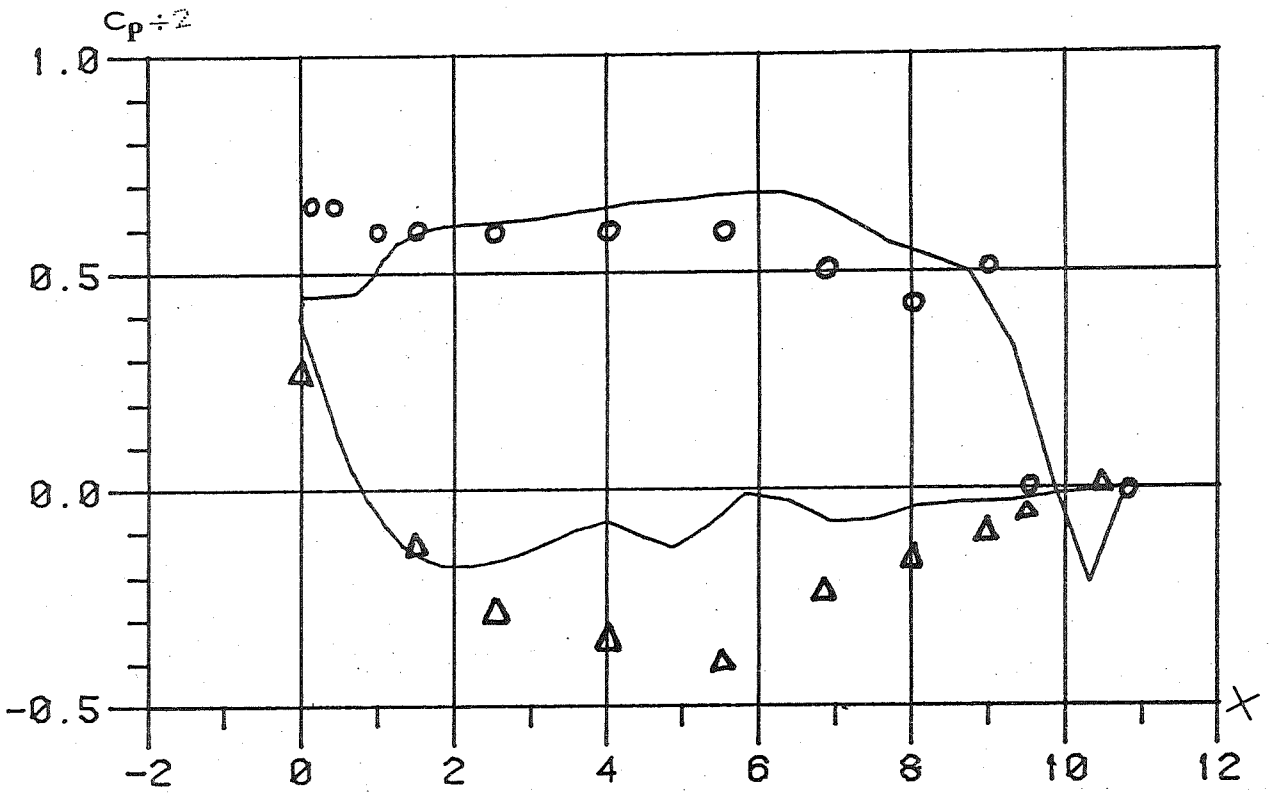


Figure 6.4.3: Coefficient de pression sur le profil
(————): prédiction avec le présent schéma
(O, Δ): mesure expérimentales Langston et al [20]

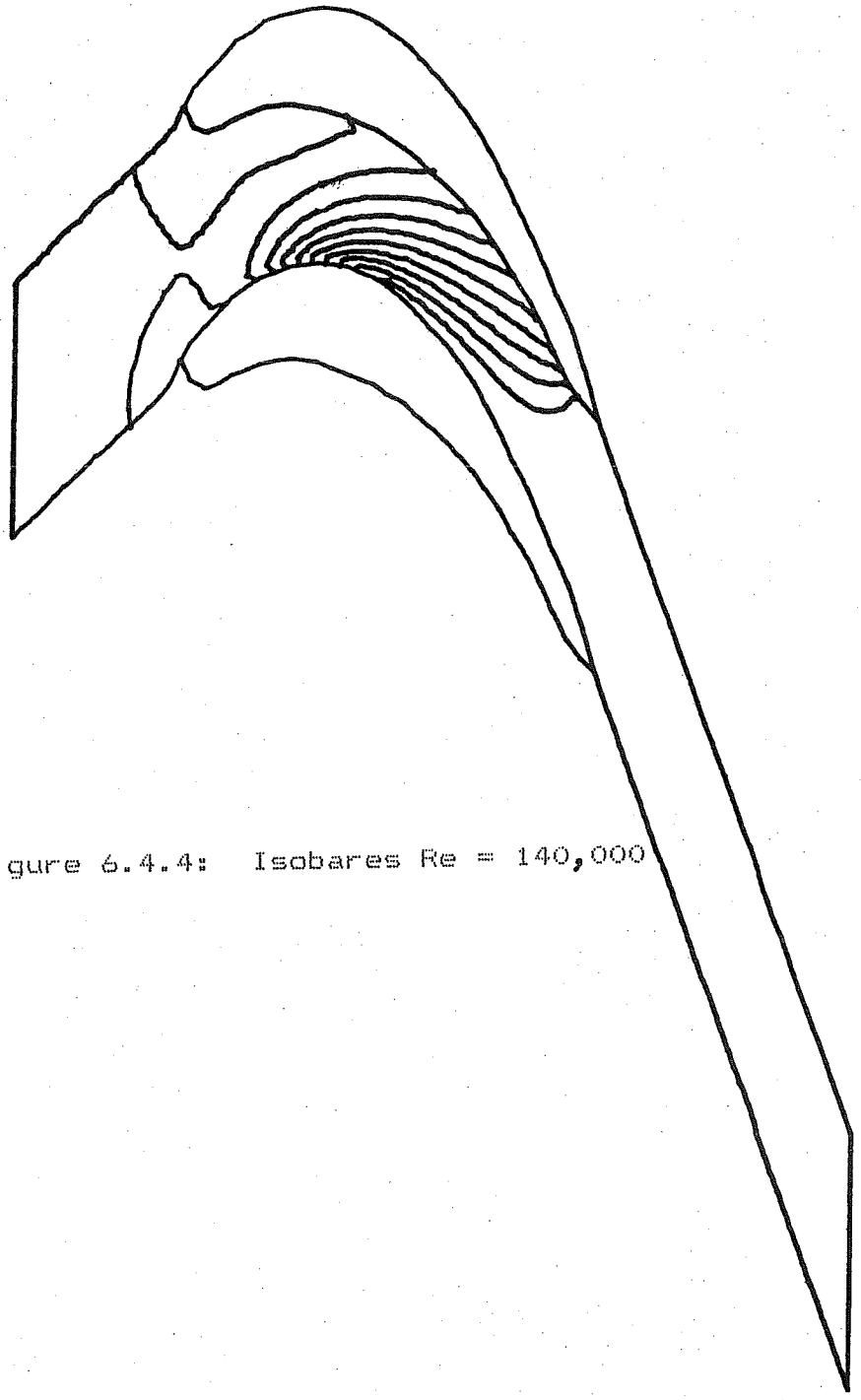


Figure 6.4.4: Isobares Re = 140,000

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00289346 7

CAMARERO LACROIX
ÉTUDE NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS DANS LES CASCADES
1988

CA2P
UP 5
R85-