Titre: Title:	Interpolation dyadique
Auteurs: Authors:	Gilles Deslauriers, & Serge Dubuc
Date:	1987
Type:	Rapport / Report
Référence: Citation:	Deslauriers, G., & Dubuc, S. (1987). Interpolation dyadique. (Rapport technique n° EPM-RT-87-22). https://publications.polymtl.ca/9861/

EPM/RT-87/22

INTERPOLATION DYADIQUE

Gilles Deslauriers, professeur
Serge Dubuc, professeur

Département de mathématiques appliquées

École Polytechnique de Montréal
juin 1987

Dépôt légal, 2e trimestre 1987
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser aux:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honorerons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable, dans le cas d'établissements d'enseignement, de société ou d'organismes canadiens.

Interpolation dyadique.

Gilles Deslauriers et Serge Dubuc.

Décrivons une nouvelle méthode d'interpolation. Cette méthode dépend de quatre paramètres a, b, c et d. Le point de départ est une fonction y(n) définie sur les entiers relatifs, notre désir est de prolonger cette fonction à tout l'axe réel si possible. Soit D_n l'ensemble des nombres rationels dyadiques $m/2^n$ où m est un entier relatif arbitraire, y(t) est déjà définie sur D_0. Par récurrence, on prolonge y à D_1, D_2, D_3, ... Si y est déjà prolongée à D_n, si $h = 2^{-n-1}$ et si t appartient à D_{n+1} mais non à D_n, les nombres t-3h, t-h, t+h et t+3h appartiennent à D_n et nous posons:

$$y(t) = ay(t-3h) + by(t-h) + cy(t+h) + dy(t+3h) \quad (1)$$

Le prolongement y(t) se poursuit jusqu'à l'ensemble D des rationels dyadiques p/q où p est un entier relatif et q est une puissance entière de 2. Le second auteur en [1] a étudié le processus de l'interpolation dyadique pour le choix suivant des paramètres: a = d = -1/16 et b = c = 9/16. La question principale de ce travail est de déterminer des conditions sur les paramètres a, b, c et d pour que l'interpolation construite sur les nombres dyadiques se prolonge par continuité à tout l'axe réel.

1. Propriétés élémentaires de l'interpolation dyadique.

Nous présentons quelques propriétés élémentaires du schéma (1) d'interpolation dyadique. La vérification de ces propriétés se fait comme pour le cas a = d = -1/16, b = c = 9/16 étudié en [1].

Théorème 1. Si y(t) est l'interpolation de la suite y(n) définie sur D_0, si h est une puissance entière négative de 2, alors l'interpolation dyadique de la suite y(nh) est y(th).

Introduisons l'interpolante fondamentale. Partons de la suite $F(n)$ définie sur D_0: $F(0) = 1$ et $F(n)$ est nulle pour les autres valeurs entières de n. L'interpolation dyadique $F(t)$ de cette suite sera appelée l'interpolante fondamentale. F admet les propriétés suivantes:

Lemme 1. L'interpolante fondamentale est nulle hors de l'intervalle $]-3, 3[$.

Théorème 2. Si $y(n)$ est une fonction définie sur D_0, le prolongement dyadique de cette suite $y(t)$ satisfait l'identité:

$$y(t)=\sum_{n=[t]-2}^{[t]+3} y(n)\ F(t-n).$$

$[t]$ désigne la partie entière du nombre t.

De la dernière identité et du théorème 1, on tire l'équation fonctionnelle suivante pour l'interpolante fondamentale:

$$F(t/2) = F(t) + aF(t-3) + bF(t-1) + cF(t+1) + dF(t+3).$$

Nous avons tracé l'interpolante fondamentale pour différents choix des paramètres a, b, c et d.

	a	b	c	d
Figure 1	-0,0625	0,5625	0,5625	-0,0625
Figure 2	-0,18	0,68	0,68	-0,18
Figure 3	0,3	0,1	0,4	0,2
Figure 4	0,1	0,4	0,4	0,1

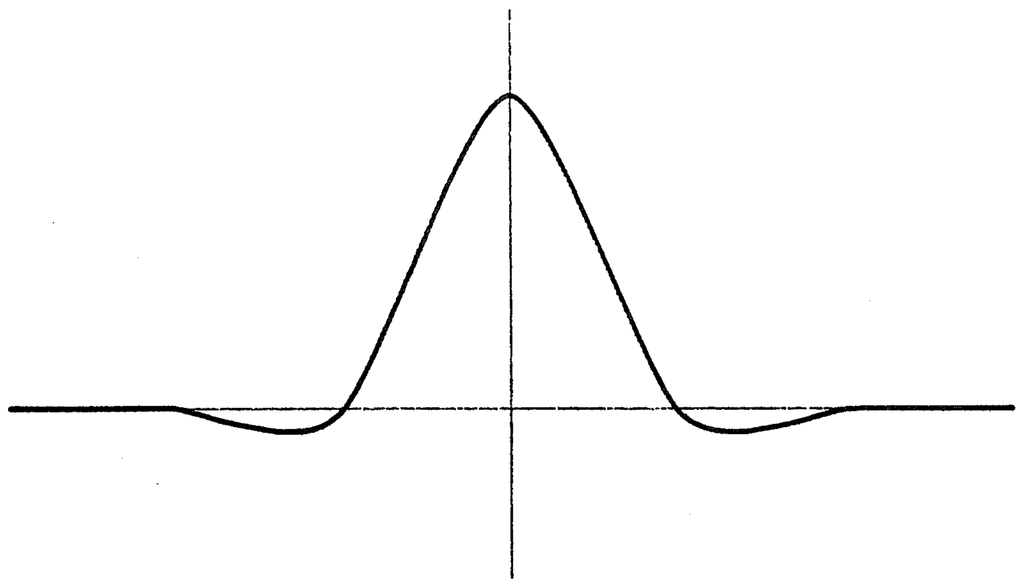

Figure 1

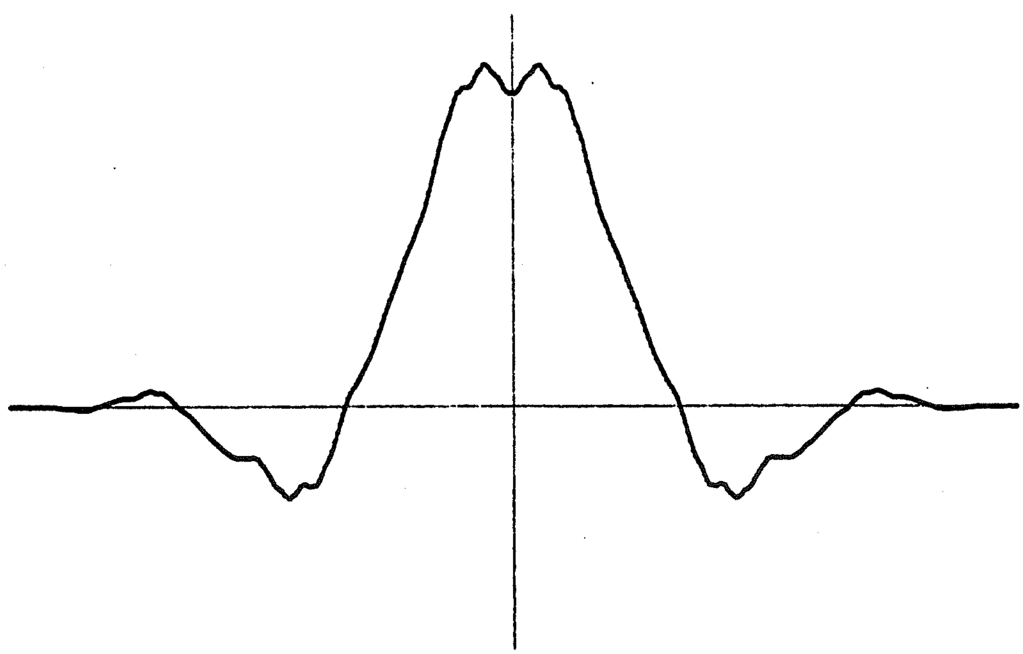

Figure 2

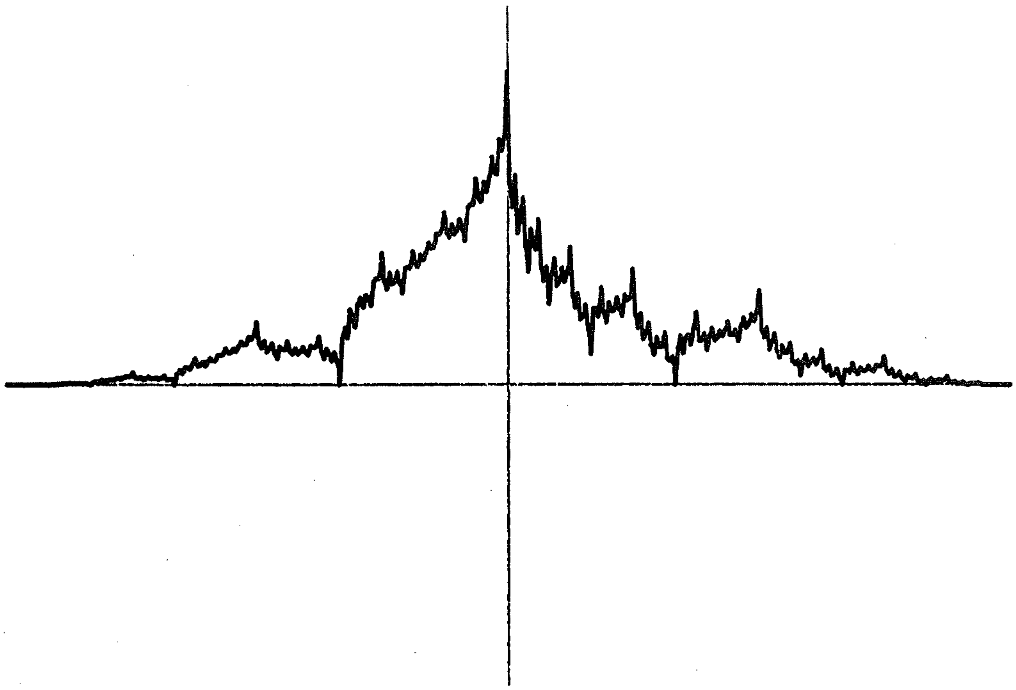

Figure 3

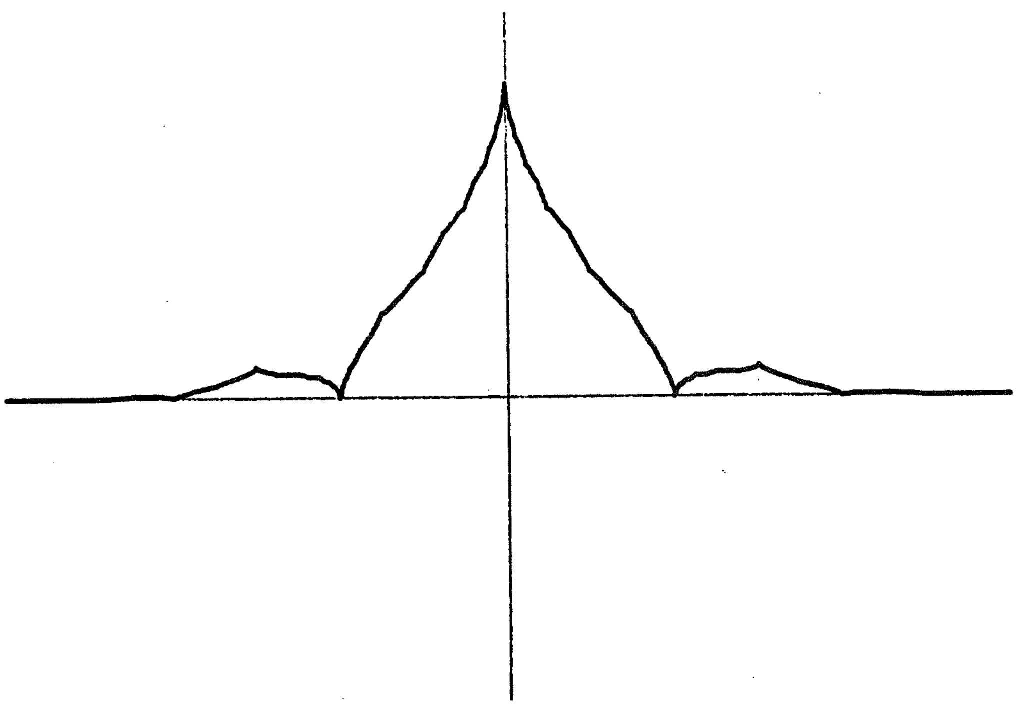

Figure 4

2. Calcul rapide de la fonction fondamentale.

A la fonction fondamentale, associons une suite de polynômes trigonométriques. Si n est un entier positif, si $h = 2^{-n}$,
$P_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(kh)\, e^{ikx}$.

Posons $P(x) = ae^{3ix} + be^{ix} + 1 + ce^{-ix} + de^{-3ix}$, $P_1(x) = P(x)$. On établit la relation de récurrence $P_{n+1}(x) = P_n(2x)P(x)$. Le degré de P_n est $d_n = 3(2^n-1)$.

La relation de récurrence permet de dire que
$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} P(2^k x)$. On a aussi l'identité $P_{2n}(x) = P_n(x)\, P_n(2^n x)$.

Si $P_n(x) = \Sigma\, c_k e^{ikx}$, le coefficient de Fourier de e^{ikx} du polynôme $P_{2n}(x)$ est $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{k+\ell 2^n}\, c_{-\ell}$. Cette identité permet le calcul P_{2n} de façon rapide et avec relativement peu de mémoire.

3. Distribution de Schwartz et interpolation dyadique.

Nous verrons dans cette section que sous la seule condition $a+b+c+d = 1$, une distribution au sens de Schwartz est toujours associée à la fonction fondamentale F. Introduisons une suite de distributions. Si φ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, on pose $T_n(\varphi) = \Sigma_{x \in D_n} F(x)\varphi(x)/2^n$. T_n est une distribution au sens de Schwartz, de fait, il s'agit d'une combinaison linéaire finie de masses de Dirac disposées sur $D_n \cap [-3,3]$.

Théorème 3. La suite des distributions T_n converge vers une distribution T à support compact. La transformée de Fourier $G(y) = T(e^{-ixy})$ de la distribution limite satisfait l'équation fonctionnelle

$$G(2y) = G(y)\, P(y)/2; \text{ de plus } G(0) = 1.$$

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ une fonction indéfiniment dérivable à support compact, vérifions que la suite de nombres $T_n(\varphi)$ est convergente. Nous avons vu dans la section précédente que si l'on pose

$$P(y) = ae^{3iy} + be^{iy} + 1 + ce^{-iy} + de^{-3iy},\ P_1(y) = P(y),$$

et par récurrence

$$P_{n+1}(y) = P_n(2y)P(y),$$

alors

$$P_n(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k2^{-n})e^{iky}.$$

$F(k2^{-n})$ est le k ème coefficient de Fourier de $P_n(y)$. D'où

$$T_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Sigma_k\ \varphi(k/2^n)\ P_n(y)e^{-iky}\ 2^{-n}\ dy. \tag{2}$$

La formule de Poisson [3] dit que si f et f'' sont intégrables sur la droite réelle, si g(y) est la transformée de Fourier de f, alors $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(2\pi k/h)/h$. Si l'on applique la formule Poisson pour un pas de h égal à 2^{-n} à la fonction $f(x) = \varphi(x)e^{-ixz/h}$ et si $\Psi(y)$ est la transformée de Fourier de $\varphi(x)$, alors $\Sigma_k\ \varphi(k/2^n)e^{-ikz} = 2^n\ \Sigma_k\Psi((2\pi k+z)2^n)$. Si cette identité est subtituée dans l'intégrand de (2), alors

$$T_n(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ \Sigma\ \Psi((2\pi k+y)2^n)P_n(y)\ dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(y2^n)P_n(y)dy.$$ D'où

$$T_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(y)P_n(y/2^n)/2^n\ dy. \tag{3}$$

C'est sous cette forme qu'il est plus facile d'étudier la convergence de la suite $T_n(\varphi)$. Désignons par $\Theta_n(y)$ la fonction $P_n(y/2^n)/2^n = \Pi_{k=1}^n\ P(y/2^k)/2$. Par le fait que $P(0) = 1 + a + b + c$

+ d = 2, pour tout y de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on est assuré de la validité de l'inégalité $|P(y)/2-1| \leq B\ |y|$ si B est suffisamment grand. Cette inégalité assure la convergence uniforme sur tout intervalle compact de l'axe réel du produit infini $\Pi_{k=1}^{\infty} P(y/2^k)/2$. Si $G(y) = \Pi_{k=1}^{\infty} P(y/2^k)/2$, pour tout y, $G_n(y)$ converge vers G(y).

La suite des intégrands en (3) converge donc ponctuellement vers $\Psi(y)\ G(y)$.

Vérifions que chacun des intégrands est majoré par une même fonction intégrable. On peut trouver une constante M telle que pour tout y de $[-\pi,\pi]$, $|G_n(y)| \leq M$. Soit C la valeur maximale de $|P(y)/2|$, ce paramètre C permet une majoration de $G_n(y)$ pour toute valeur réelle de y. En effet si k est un entier naturel, si $|y|$ est compris entre les deux valeurs $\pi 2^k$ et $2\pi 2^k$, alors $|G_n(y)| \leq MC^k$. Cette inégalité permet de trouver un nombre E tel que $|G_n(y)| \leq M(1+|y|)^E$. D'autre part, il existe une constante N telle que $|\Psi(y)| \leq N(1+|y|)^{-E-2}$. Chaque intégrand est donc majorée par la fonction intégrable $MN/(1+|y|)^2$.

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la suite $T_n(\varphi)$ converge vers $\int \Psi(y) G(y) dy$ lorsque n tend vers l'infini. Selon Schwartz ([3], p. 74, théorème XIII), si une suite de distributions converge ponctuellement, la fonctionnelle limite est également une distribution. La fonctionnelle $T(\varphi) = \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi)$ est une distribution.

La formule que $T(\varphi) = \int \Psi(y)\ G(y) dy$ fait également voir que G(y) est la transformée de Fourier de la distribution T. Faisons les remarques suivantes sur la fonction G: il est d'abord clair que G(0) vaut 1, l'expression de G permet de dire que $G(y) = G(y/2)\ P(y/2)/2$; d'où $G(2y) = G(y)\ (ae^{i3y}+be^{iy}+1+ce^{-iy}+de^{-i3y})/2$.

Remarque. Le support de chaque distribution est contenu dans $[-3,3]$, d'où le support de la distribution limite T est contenu dans l'intervalle $[-3, 3]$.

La fonction F a été définie sur les dyadiques D. Dans l'espoir de prolonger F par continuité lorsque ce sera possible, pour chacune des valeurs entières non-négatives n, on peut introduire une fonction F_n. F_n est linéaire par morceaux: si x est un nombre dyadique de la forme $k/2^n$, $F_n(x) = F(x)$ et sur l'intervalle $[x, x+2^{-n}]$, F_n est linéaire. Le prochain résultat fait valoir que la suite F_n est faiblement convergente.

Théorème 4. Si φ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact, si T est la distribution limite associée à F, alors la suite $\int F_n(x)\ \varphi(x)\ dx$ converge vers $T(\varphi)$.

Démonstration. Désignons par $\tau(x)$ la fonction châpeau: $\tau(x) = \max(1-|x|, 0)$. $F_n(x) = \Sigma_k F(k/2^n)\tau(2^n(x-k/2^n))$. Si μ_n est la combinaison des masses de Dirac: $\Sigma_k\ 2^{-n}F(k/2^n)\ \delta_{k/2^n}$ et si $\tau_n(x)$ est la fonction $2^n\tau(2^n x)$, F_n est la convolution de μ_n avec τ_n.

Si $\varphi(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable à support compact et si $\Psi(y)$ est la transformée de Fourier, alors $\int F_n(x)\ \ \varphi(x)\ dx = \int \Psi(y)\ G_n(y)[\sin\ (y/2^{n+1})/(y/2^{n+1})]^2 dy$. Le terme entre crochets est toujours majoré par 1 et tend ponctuellement vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Le théorème de convergence dominée utilisé dans le théorème précédent donne que $\int F_n(x)\varphi(x)dx$ tend vers $\int \Psi(y)G(y)\ dy = T(\varphi)$ lorsque n tend vers l'infini.

Théorème 5. Si $a = d$ et $b = c$ et que $a \in]-3/16, 1/16[$, alors la transformée de Fourier de la distribution limite T est intégrable.

Démonstration. La transformée de Fourier de T est

$$G(y) = \prod_{k=1}^{\infty} P(y/2^k)/2.$$

Posons $y = 2^N z$ avec $1 < z < 2$. Ainsi

$$G(y) = \prod_{k=1}^{\infty} P(z2^N/2^k)/2 = \prod_{k=1}^{N} P(z\ 2^{N-k})/2\ \ \prod_{k=0}^{\infty}\ P(z/2^k)/2 \text{ et}$$

$$|G(y)| \leq M \prod_{k=0}^{N-1} |P(z2^k)|/2 \text{ car } G \text{ est bornée sur } [-\pi, \pi].$$

Désignons par B_a le maximum en y de $|(1 - 8a \cos y + 8a \cos^2 y)|$. Vu l'hypothèse que $a \in]-3/16, 1/16[$, on peut vérifier que $B_a < 2$.

Puisque $P(z2^k) = (1 - 8a \cos 2^k z + 8a \cos^2 2^k z)(1 + \cos 2^k z)$

$$\text{et } \prod_{k=0}^{N-1} \frac{(1+\cos 2^k z)}{2} = \left[\frac{\sin(2^N z)}{2^N \sin(z/2)}\right]^2 \text{ alors } |G(y)| \leq M\, B_a^{\,N} \left[\frac{\sin(2^N z)}{2^N \sin(z/2)}\right]^2.$$

Si $B_a = 2^\beta$ (dans ce cas, $0 < \beta < 1$), alors $|G(y)| \leq M' \dfrac{2^{\beta N}}{2^{2N}} \leq \dfrac{M''}{y^{2-\beta}}$ pour des valeurs M' et M" convenablement choisies, valeurs qui sont indépendantes de y. De cette inégalité, G(y) est intégrable.

Corollaire 6. Si a = d et b = c et que $a \in]- 3/16, 1/16[$, alors la fonction fondamentale F(t) admet un prolongement continu.

4. Applications du schéma d'interpolation

Considérons une suite Z(n) de nombres complexes. Prenons la partie réelle et la partie imaginaire; nous obtenons ainsi deux suites de nombres réels X(n) et Y(n). Le schéma d'interpolation dyadique appliqué à ces deux suites donne les extensions respectives X(t) et Y(t). Ainsi Z(t) est alors la fonction complexe X(t) + iY(t). Nous ne donnerons ici que la représentation graphique d'une seule suite de nombres complexes et pour deux variations des paramètres a, b, c et d.

La suite utilisée sera $Z(n) = e^{i\frac{4\pi n}{5}}$ c'est-à-dire la deuxième racine cinquième de l'unité. Les figures 5 et 6 représentent respectivement les cas où a = d = − 0,0625 et b = c = 0,5625 ainsi que a = d = 0,5 et b = c = 0.

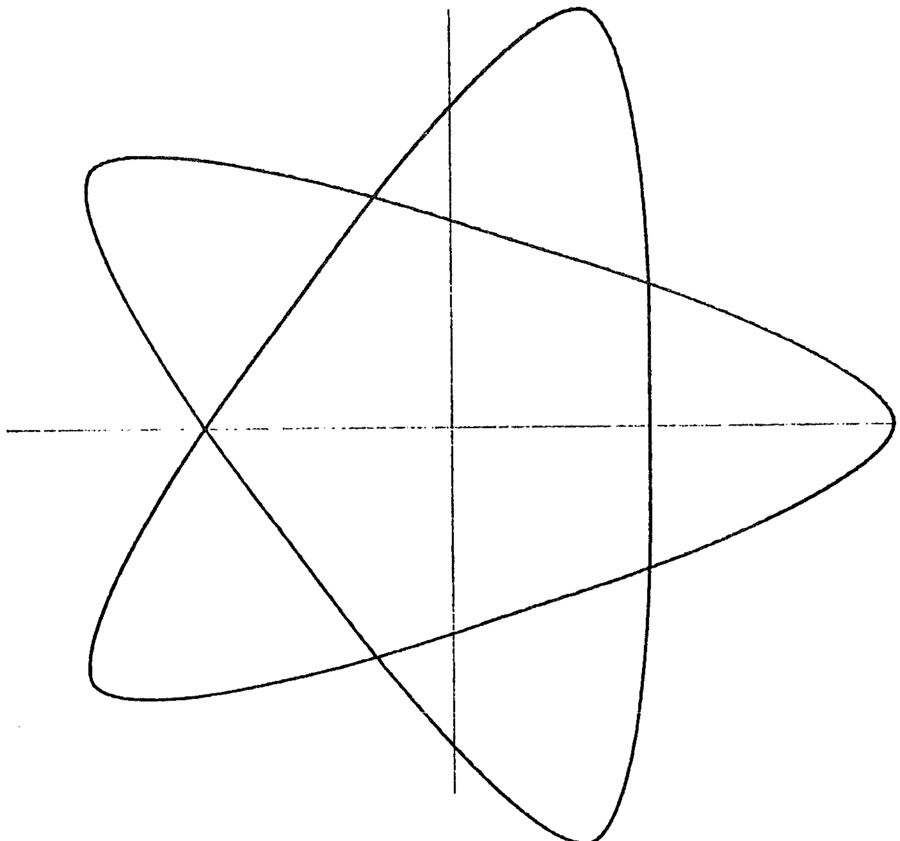

Figure 5

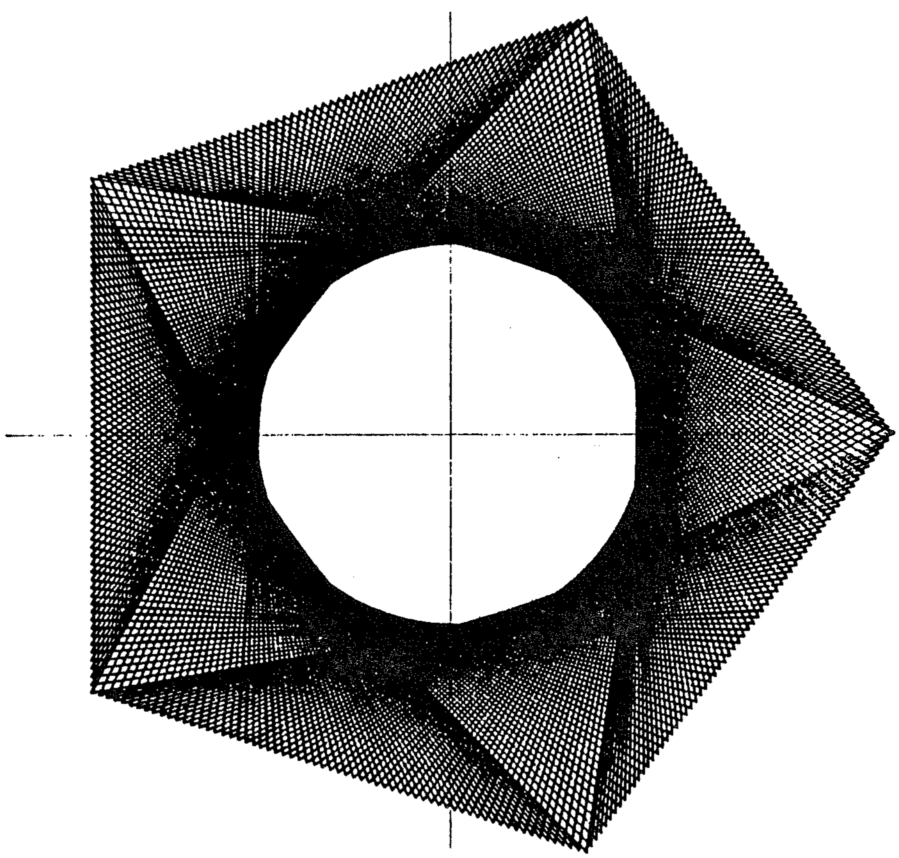

Figure 6

Finalement si $Y(n) = 0$ pour $n \neq 0$ et $Y(n) = 1$, nous donnerons deux représentations graphiques dans le plan complexe. La première, figure 7, est la courbe en C de Gosper. Elle est obtenue par le schéma d'interpolation lorsque $a=d=0$, $b = \frac{1}{2} + i/2$ et $c = \frac{1}{2} - i/2$ et lorsque t varie dans $[0,1]$.

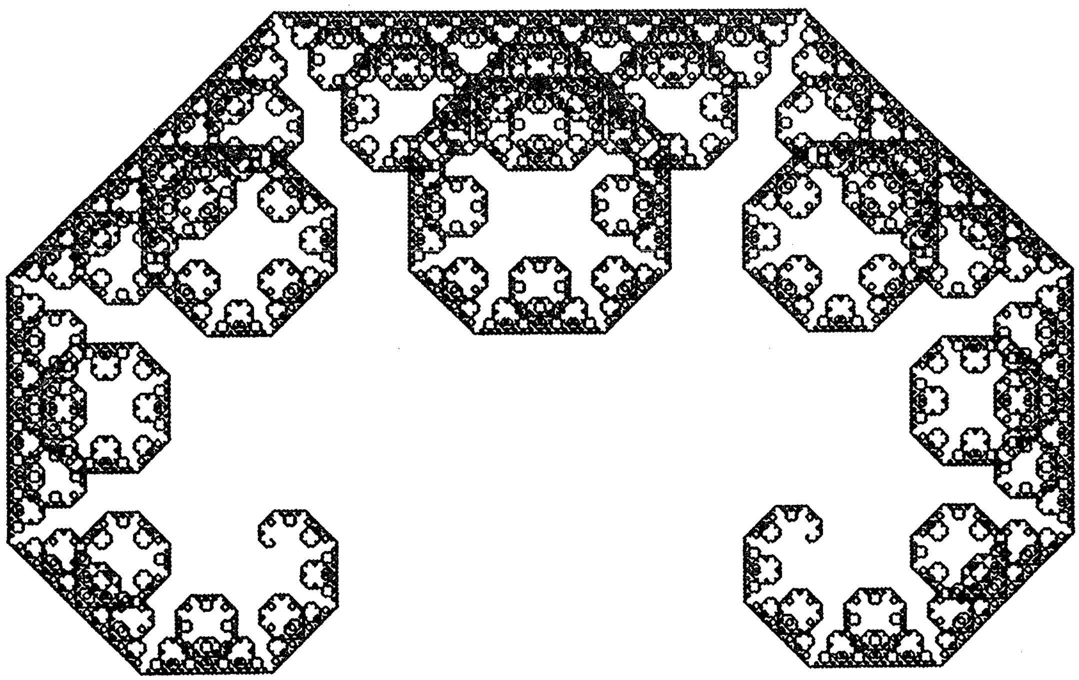

Figure 7

La dernière courbe, la dentelle, figure 8, est obtenue en prenant $a = d = 0$, $b = \frac{1}{5} + i/3$ et $c = \frac{4}{5} - i/3$ et pour t dans l'intervalle $[0, 1]$.

Les deux dernières courbes font partie de la classe des courbes de von Koch-Mandelbrot. [2]

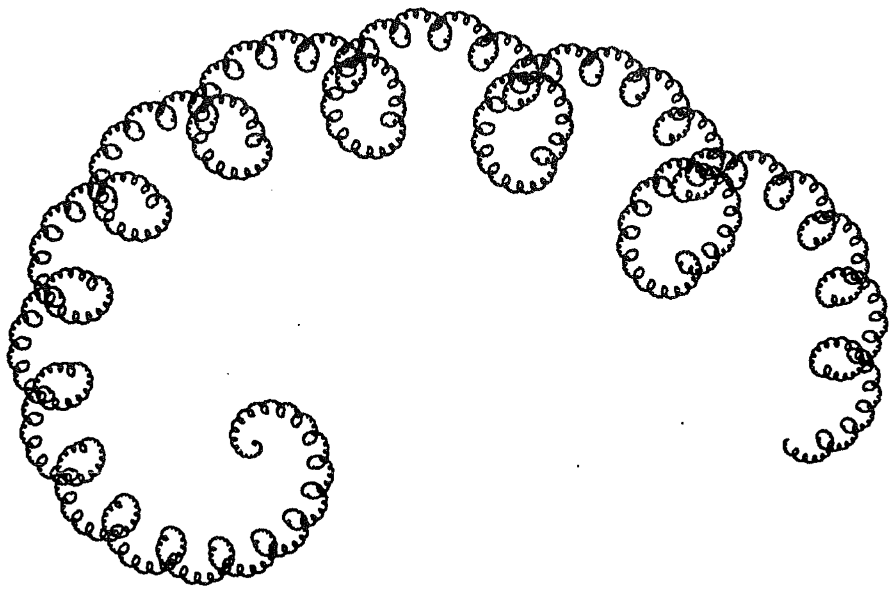

Figure 8

Bibliographie

[1] DUBUC, S. "Interpolation Through an Iterative Scheme" J. Math. Anal. Appl (à paraître)

[2] MANDELBROT, B. "Les objets Fractals" Deuxième édition, Flammarion 1984.

[3] SCHWARTZ, L. "Théorie des distributions" Hermann, Paris 1966