

**Titre:** Formulation combinée spatiale-spectrale de la méthode des moments pour l'étude des structures planaires en très hautes fréquences  
Title: Formulation combinée spatiale-spectrale de la méthode des moments pour l'étude des structures planaires en très hautes fréquences

**Auteurs:** Abdelaziz Samet, Ammar B. Kouri, & Fadhel M. Ghannouchi  
Authors: Abdelaziz Samet, Ammar B. Kouri, & Fadhel M. Ghannouchi

**Date:** 1995

**Type:** Rapport / Report

**Référence:** Samet, A., Kouri, A. B., & Ghannouchi, F. M. (1995). Formulation combinée spatiale-spectrale de la méthode des moments pour l'étude des structures planaires en très hautes fréquences. (Rapport technique n° EPM-RT-95-08).  
Citation: Samet, A., Kouri, A. B., & Ghannouchi, F. M. (1995). Formulation combinée spatiale-spectrale de la méthode des moments pour l'étude des structures planaires en très hautes fréquences. (Rapport technique n° EPM-RT-95-08).  
<https://publications.polymtl.ca/9858/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/9858/>  
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/9858/>

**Version:** Version officielle de l'éditeur / Published version

**Conditions d'utilisation:** Tous droits réservés / All rights reserved  
Terms of Use: Tous droits réservés / All rights reserved

## Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

**Institution:** École Polytechnique de Montréal

**Numéro de rapport:** EPM-RT-95-08  
Report number: EPM-RT-95-08

**URL officiel:**  
Official URL:

**Mention légale:**  
Legal notice:

24 OCT. 1995

**FORMULATION COMBINEE  
"SPATIALE-SPECTRALE" DE LA METHODE  
DES MOMENTS POUR L'ETUDE DES STRUCTURES  
PLANAIREES EN TRES HAUTES FREQUENCES**  
par

**Abdelaziz Samet, Ammar B. Kouki  
Fadhel M. Ghannouchi**

**Département de Génie Électrique et de Génie Informatique  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**Août 1995**

**EPM/RT - 95/..08**

*gratuit*

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, Août 1995  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada

Formulation combinée "Spatiale - Spectrale" de la méthode des moments pour l'étude des structures planaires en très hautes fréquences (EPM/RT-95/08)

Abdelaziz Samet, Ammar Kouki, Fadhel Ghannouchi (génie électrique et génie informatique)

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Service des Éditions  
École Polytechnique de Montréal  
Case postale 6079, Succursale Centre-Ville  
Montréal (Québec) H3C 3A7  
Téléphone: (514) 340-4473  
Télécopie: (514) 340-3734

Compter 0,10 \$ par page et ajouter 3,00 \$ pour la couverture, les frais de poste et la manutention.  
Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal.

Nous n'honoreronos que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

## **SOMMAIRE**

Ce rapport fait l'objet d'une nouvelle formulation de la méthode des moments appliquée à l'étude des structures microruban dans le domaine des très hautes fréquences où le comportement dynamique est très important.

Il s'agit d'une approche rigoureuse basée sur une formulation combinée dans les deux domaines spatial et spectral. La fonction de Green est décomposée en deux parties, l'une quasi-statique et l'autre dynamique.

La partie quasi-statique est responsable du mauvais comportement asymptotique de la fonction de Green. Cette partie sera exprimée dans le domaine spatial par calcul analytique exact de la transformée inverse.

La partie restante sera conservée dans le domaine spectral et correspond à la contribution dynamique de la fonction de Green, son bon comportement asymptotique permettra l'utilisation de fonctions de base et test présentant des discontinuités décrivant au mieux l'allure des grandeurs physiques recherchées. La convergence est alors assurée avec un nombre de fonctions de base et test relativement faible.

# TABLE DES MATIERES

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Méthode des moments</b>	<b>4</b>
<b>2.1</b>	Formulation dans le domaine spatial	5
<b>2.2</b>	Formulation dans le domaine spectral	7
<b>3</b>	<b>Forme analytique approchée des fonctions de Green spatiales pour les potentiels vecteur et scalaire</b>	<b>10</b>
<b>3.1</b>	Extraction de la partie quasi-statique	12
<b>3.2</b>	Contribution des ondes de surfaces	13
<b>3.3</b>	Détermination des images complexes	16
<b>3.4</b>	Comportement asymptotique de $R_{TE} + R_q$	18
<b>4</b>	<b>Formulation simultanée de la méthode des moments dans les domaines spatial et spectral</b>	<b>23</b>
<b>4.1</b>	Limitations de la méthode des moments formulée dans le domaine spectral ou spatial	23
<b>4.1.a</b>	Dans le domaine spectral	23
<b>4.1.b</b>	Dans le domaine spatial	24
<b>4.2</b>	Décomposition des fonctions de Green en parties quasi-statiques et dynamiques	28
<b>4.3</b>	Formulation intégrale combinée " Spatiale-spectrale "	31
<b>5</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>34</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>36</b>

## **LISTE DES FIGURES**

<b>2.1</b>	Forme générale d'une structure micro-ruban	5
<b>3.1</b>	Dipôle électrique horizontal au dessus d'une structure micro-ruban	10
<b>3.2</b>	Détermination des images complexes	16
<b>3.3</b>	Contours d'intégration dans les plans complexes $k_{z0}$ (a) et $k_\rho$ (b)	17
<b>3.4</b>	Comportement spectral de $R_{TE} + R_q$ sur $\mathcal{C}_1$	19
<b>3.5</b>	$R_{TE} + R_q - R_{TE0} - R_{q0}$ ( partie quasi-statique extraite )	20
<b>3.6</b>	$F_2(k_\rho)$ ( parties quasi-statique et ondes de surface extraites )	21
<b>3.7</b>	Erreur relative sur l'approximation de $F_2(k_\rho)$	22
<b>4.1</b>	Erreur relative sur l'approximation de $F_2(k_\rho)$ pour différentes fréquences	25
<b>4.2</b>	Potentiel scalaire $G_q(\rho)$	26
<b>4.3</b>	Potentiel vecteur $G_A^{xx}(\rho)$	27
<b>4.4</b>	Contributions statique et dynamique de la fonction de Green spatiale pour le potentiel scalaire $G_q(\rho)$	32
<b>4.5</b>	Contributions statique et dynamique de la fonction de Green spatiale pour le potentiel vecteur $G_A^{xx}(\rho)$	33

## **LISTE DES TABLEAUX**

<b>2.1</b>	Comportement asymptotique de la fonction de Green Dyadique Spectrale pour le champ électrique	<b>9</b>
<b>3.1</b>	Différentes contributions des fonctions de Green	<b>12</b>
<b>4.1</b>	Comportement asymptotique de la partie dynamique de la fonction de Green Dyadique Spectrale pour le champ électrique	<b>28</b>

## *Chapitre 1*

### ***INTRODUCTION***

Les fonctions assurées par un circuit micro-ondes sont de plus en plus complexes afin de répondre au mieux aux exigences sans cesse croissantes des systèmes de télécommunications.

La maîtrise de la technologie des circuits imprimés a rendu possible la miniaturisation des circuits micro-ondes composés par des dispositifs modulaires tels que: amplificateurs, déphasateurs, oscillateurs, mélangeurs, ...

Les fréquences deviennent de plus en plus élevées et seule une approche rigoureuse permettra l'étude des problèmes de couplage, de discontinuités et de rayonnement.

Dans ce rapport nous présentons une méthode d'approche basée sur la méthode des moments [1]. Il s'agit d'une méthode intégrale formulée initialement dans le domaine spatial [2]. Cette technique est limitée essentiellement par les difficultés dans le calcul de la fonction de Green dans le domaine spatial en particulier lorsque la fréquence augmente et l'approximation quasi-TEM ( Transverse Electro-Magnétique )

n'est plus justifiée.

Cette méthode est par la suite devenue plus connue par ses applications dans le domaine spectral [3-4-5-6-7]. En effet le calcul de la fonction de Green spectrale se prête bien pour les structures planaires.

La convergence de cette méthode est tributaire du choix des fonctions de base et test. L'existence des différentes intégrales est assurée par certains critères de décroissance rapide [8] et ceci est en contradiction avec la nature de la grandeur recherchée qui parfois présente des discontinuités et donc de spectre relativement large.

Le nombre de fonctions de base et test nécessaires pour assurer une bonne convergence du problème peut alors devenir important. Le temps de calcul sera donc affecté en conséquence et peut être non acceptable.

Une autre alternative consiste à formuler la méthode des moments dans le domaine spatial où les fonctions de Green des potentiels vecteur et scalaire sont approchées par des expressions analytiques [9-10-11-12]. Cette technique consiste à calculer la fonction de Green dans le domaine spectral, puis la décomposer en trois parties dont on peut calculer les transformées inverses. Les deux premières parties représentent respectivement les contributions quasi-statique et ondes de surface, alors que la quantité restante est approximée par une série de fonctions exponentielles afin de rendre possible le calcul de sa transformée inverse. Cette approximation peut se faire par la méthode de Prony [13], elle représente les images complexes

Nous montrerons que l'erreur commise sur le calcul de la contribution images complexes devient importante lorsque la fréquence augmente. D'autre part, lorsque la distance est comparable à la longueur d'onde la fonction de Green spatiale présente des oscillations. Ces oscillations rendent plus délicate l'application de la méthode des moments.

Une approche rigoureuse formulée simultanément dans les deux domaines spatial et spectral sera présentée dans ce rapport. La fonction de Green calculée dans le domaine spectral sera décomposée en deux parties, l'une quasi-statique et l'autre dynamique. La partie quasi-statique est responsable du mauvais comportement asymptotique de la fonction de Green. Cette partie sera exprimée dans le domaine spatial par calcul analytique exact de la transformée inverse. La partie restante sera conservée dans le domaine spectral et correspond à la contribution dynamique de la fonction de Green, son bon comportement asymptotique permettra l'utilisation de

fonctions de base et test présentant des discontinuités décrivant au mieux l'allure des grandeurs physiques recherchées. La convergence est alors assurée avec un nombre de fonctions de base et test relativement faible.

En conclusion, ce rapport sera terminé par une série de suggestions pour mettre en évidence l'avantage de cette formulation mixte spatiale - fréquentielle.

## *Chapitre 2*

### **METHODE DES MOMENTS**

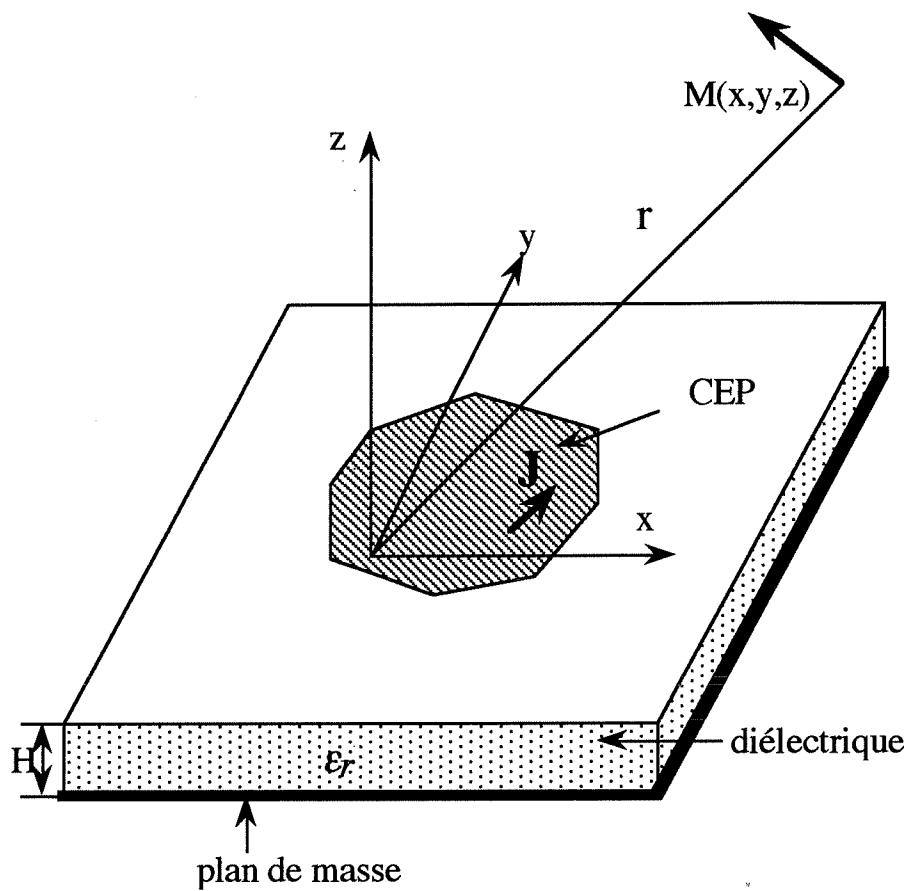
La forme générale de la structure à étudier est représentée en Figure 1. Il s'agit d'un substrat diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  et d'épaisseur  $H$ . Les dimensions latérales sont supposées infinies. La face inférieure est complètement métallisée et joue le rôle de plan de masse, alors que sur la face supérieure est imprimée un conducteur de forme arbitraire. Le problème consiste à déterminer la distribution de courant sur ce conducteur sous forme d'une série de fonctions de base.

$$\mathbf{J}(x, y) = J_x \hat{\mathbf{x}} + J_y \hat{\mathbf{y}} \quad (2.1.a)$$

$$J_x(x, y) = \sum_n A_n J_{xn}(x, y) + J_{xS}(x, y) \quad (2.1.b)$$

$$J_y(x, y) = \sum_n B_n J_{yn}(x, y) + J_{yS}(x, y) \quad (2.1.b)$$

$\{J_{xn}, J_{yn}\}$  sont les fonctions de base,  $\{J_{xS}, J_{yS}\}$  représentent la source et  $\{A_n, B_n\}$  sont les inconnues du problème.



CEP: Conducteur Electrique Parfait

**Figure 2.1** Forme générale d'une structure micro-ruban

## 2.1 FORMULATION DANS LE DOMAINE SPATIAL

La dépendance du temps est du type  $e^{j\omega t}$ , alors le champ électrique  $\mathbf{E}$  peut être exprimé à partir des potentiels vecteur  $\mathbf{A}$  et scalaire  $\Phi$ .

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.2.a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \iint_S \bar{\mathbf{G}}_A(\mathbf{r}/\mathbf{r}') \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') d\mathbf{s}' \quad (2.2.b)$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{-1}{j \cdot \omega \cdot \epsilon} \iint_S G_q(\mathbf{r}/\mathbf{r}') \cdot [\nabla' \mathbf{J}_S(\mathbf{r}')] d\mathbf{s}' \quad (2.2.c)$$

avec:  $\bar{\mathbf{G}}_A$ ,  $G_q$  fonctions de Green dans le domaine spatial relatives aux potentiels vecteur et scalaire respectivement et  $\mathbf{J}_S$  la distribution surfacique de courant sur le conducteur supérieur (dans le plan  $z=0$ ).

D'où le champ électrique tangentiel à l'interface air-diélectrique ( $z=0$ ):

$$E_x = -j\omega\mu G_A^{xx} * J_x + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} [G_q * \nabla \mathbf{J}_S] \quad (2.3.a)$$

$$E_y = -j\omega\mu G_A^{yy} * J_y + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial y} [G_q * \nabla \mathbf{J}_S] \quad (2.3.b)$$

où (\*) désigne le produit de convolution, sauf lorsqu'il se présente en exposant où il désigne le complexe conjugué.

Il est possible d'obtenir des expressions approchées des fonctions de Green  $\bar{\mathbf{G}}_A$ , et  $G_q$  dans une approche quasi-statique[14]. Ce modèle ne tient pas compte des effets dispersifs de la structure et n'est plus valable pour des fréquences élevées.

Une autre option consiste à calculer les fonctions de Green par transformation de Hankel inverse, ces fonctions étant radiales.

$$G_{A,q}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \cdot \underset{\text{C.I.S.}}{\int} H_0^{(2)}(k_\rho \cdot \rho) \cdot \tilde{G}_{A,q}(k_\rho) \cdot k_\rho \cdot dk_\rho \quad (2.4)$$

avec:  $k_\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

C.I.S.: Contour d'intégration de Sommerfield

$H_0^{(2)}$  : Fonction de Hankel de deuxième espèce

$\tilde{G}_{A(q)}$ : Fonction de Green spectrale pour le potentiel vecteur (scalaire)

Le choix du contour d'intégration C.I.S. est tel que la condition de rayonnement est satisfaite[15].

Le temps de calcul est dans ce cas très important et compromet l'intérêt de ce choix.

Par la suite la méthode des moments consiste à remplacer  $J_x$  et  $J_y$  exprimées par (2.1) dans (2.3) puis tester par des fonctions notées  $T_{xm}(x, y)$  et  $T_{ym}(x, y)$ , on aboutit alors au système linéaire suivant:

$$\sum_{n=1}^N A_n \left\langle T_{xm} \left| -j\omega\mu G_A^{xx} * J_{xn} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left[ G_q * \frac{\partial J_{xn}}{\partial x} \right] \right. \right\rangle + B_n \left\langle T_{xm} \left| \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left[ G_q * \frac{\partial J_{yn}}{\partial y} \right] \right. \right\rangle = \\ - \left\langle T_{xm} \left| -j\omega\mu G_A^{xx} * J_{xs} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ G_q * \left( \frac{\partial J_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial J_{ys}}{\partial y} \right) \right] \right\} \right. \right\rangle \quad (2.5.a)$$

$$\sum_{n=1}^N B_n \left\langle T_{ym} \left| -j\omega\mu G_A^{yy} * J_{yn} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_q * \frac{\partial J_{yn}}{\partial y} \right] \right. \right\rangle + A_n \left\langle T_{ym} \left| \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_q * \frac{\partial J_{xn}}{\partial x} \right] \right. \right\rangle = \\ - \left\langle T_{ym} \left| -j\omega\mu G_A^{yy} * J_{ys} + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_q * \left( \frac{\partial J_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial J_{ys}}{\partial y} \right) \right] \right\} \right. \right\rangle \quad (2.5.b)$$

Le produit scalaire est défini comme suit:

$$\langle f | g \rangle = \iint f^*(x, y) g(x, y) dx dy \quad (2.6)$$

## 2.2 FORMULATION DANS LE DOMAINE SPECTRAL

La transformation de Fourier est définie comme suit:

$$f(x, y) \xrightarrow{\text{TF}} \tilde{f}(\alpha, \beta) \quad (2.7.a)$$

$$\tilde{f}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (2.7.b)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\alpha, \beta) e^{+j(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (2.7.c)$$

Les opérateurs de dérivation  $\frac{\partial \cdot}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \cdot}{\partial y}$  seront alors représentés dans le domaine spectral par des multiplications respectivement par  $j\alpha$  et  $j\beta$ .

Le système d'équations (2.3) devient donc dans le domaine spectral:

$$\tilde{E}_x(\alpha, \beta, z) = -j\omega \tilde{G}_A^{xx} \tilde{J}_x - \frac{\alpha^2}{j\omega} \tilde{G}_q \tilde{J}_x - \frac{\alpha\beta}{j\omega} \tilde{G}_q \tilde{J}_y \quad (2.8.a)$$

$$\tilde{E}_y(\alpha, \beta, z) = -j\omega \tilde{G}_A^{yy} \tilde{J}_y - \frac{\beta^2}{j\omega} \tilde{G}_q \tilde{J}_y - \frac{\alpha\beta}{j\omega} \tilde{G}_q \tilde{J}_x \quad (2.8.b)$$

Ce système peut aussi s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{xx} & \tilde{Z}_{xy} \\ \tilde{Z}_{yx} & \tilde{Z}_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_y \end{pmatrix} \quad (2.9.a)$$

$$\tilde{Z}_{xx} = -j\omega\mu\tilde{G}_A^{xx} - \frac{\alpha^2}{j\omega\epsilon}\tilde{G}_q \quad (2.9.b)$$

$$\tilde{Z}_{xy} = \tilde{Z}_{yx} = -\frac{\alpha\beta}{j\omega\epsilon}\tilde{G}_q \quad (2.9.c)$$

$$\tilde{Z}_{yy} = -j\omega\mu\tilde{G}_A^{yy} - \frac{\beta^2}{j\omega\epsilon}\tilde{G}_q \quad (2.9.d)$$

Par la suite l'application de la méthode des moments permet d'aboutir au système linéaire suivant:

$$\sum_{n=1}^N A_n \left\langle \tilde{T}_{xm} \mid \tilde{Z}_{xx} * \tilde{J}_{xn} \right\rangle + B_n \left\langle \tilde{T}_{xm} \mid \tilde{Z}_{xy} * \tilde{J}_{yn} \right\rangle = \left\langle \tilde{T}_{xm} \mid \tilde{Z}_{xx} * \tilde{J}_{xS} + \tilde{Z}_{xy} * \tilde{J}_{yS} \right\rangle, \quad m=1...M \quad (2.10.a)$$

$$\sum_{n=1}^N A_n \left\langle \tilde{T}_{ym} \mid \tilde{Z}_{yx} * \tilde{J}_{xn} \right\rangle + B_n \left\langle \tilde{T}_{ym} \mid \tilde{Z}_{yy} * \tilde{J}_{yn} \right\rangle = \left\langle \tilde{T}_{ym} \mid \tilde{Z}_{yx} * \tilde{J}_{xS} + \tilde{Z}_{yy} * \tilde{J}_{yS} \right\rangle, \quad m=1...M \quad (2.10.b)$$

Le choix des fonctions de base et test doit se faire de telle sorte que l'existence des différentes intégrales soient assurées[7], pour cela une bonne connaissance du comportement asymptotique des éléments de la fonction de Green spectrale est nécessaire.

Le tableau 2.1 indique le comportement asymptotique des éléments de la fonction de Green spectrale pour le champ électrique et dans le cas de la structure représentée par la figure 2.1.

	$k_\rho \rightarrow \infty$ loin des deux axes	$\alpha \rightarrow \infty$ $\beta$ reste faible	$\beta \rightarrow \infty$ $\alpha$ reste faible
$\tilde{Z}_{xx}$	$k_\rho$	$\alpha$	$1/\beta$
$\tilde{Z}_{xy} = \tilde{Z}_{yx}$	$k_\rho$	tend vers zéro comme $\beta$	tend vers zéro comme $\alpha$
$\tilde{Z}_{yy}$	$k_\rho$	$1/\alpha$	$\beta$

**Tableau 2.1** Comportement asymptotique de la fonction de Green Dyadique Spectrale pour le champ électrique

Le tableau ci-dessous nous permet de conclure qu'il n'est pas possible de choisir des fonctions de base et test du type  $\xi_{en}$ ,  $\xi_{on}$ ,  $\eta_{en}$  et  $\eta_{on}$  définies par (2.11). Celà constitue un inconvénient puisque cette famille de fonctions permet en général de décrire l'allure des grandeurs physiques recherchées et assurent donc une meilleure convergence du problème.

$$\xi_{en}(x, W) = \frac{\cos[(n-1)\pi(1+x/W)]}{\sqrt{1-(x/W)^2}} \quad (2.11.a)$$

$$\xi_{on}(x, W) = \frac{\cos[(n-0.5)\pi(1+x/W)]}{\sqrt{1-(x/W)^2}} \quad (2.11.b)$$

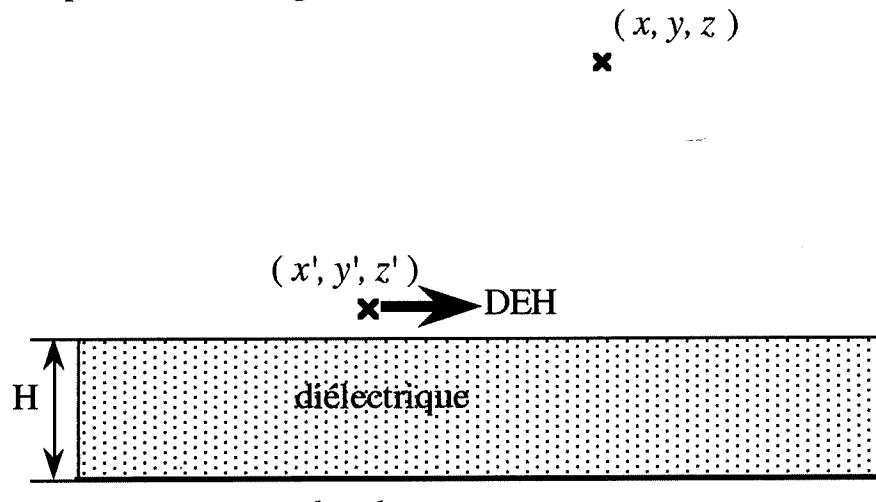
$$\eta_{en}(x, W) = \frac{\sin[(n-0.5)\pi(1+x/W)]}{\sqrt{1-(x/W)^2}} \quad (2.11.c)$$

$$\eta_{on}(x, W) = \frac{\sin[n\pi(1+x/W)]}{\sqrt{1-(x/W)^2}} \quad (2.11.d)$$

## **CHAPITRE 3**

### **FORME ANALYTIQUE APPROCHEE DES FONCTIONS DE GREEN SPATIALES POUR LES POTENTIELS VECTEUR ET SCALAIRES**

On considère un dipôle électrique porté par  $Ox$  et placé au dessus du substrat comme précisé dans la figure



3.1. plan de masse

DEH: Dipôle Electrique Horizontal

**Figure 3.1** Dipôle électrique horizontal au dessus d'une structure micro-ruban

Les fonctions de Green spectrales pour les potentiels vecteur et scalaire sont données [9] dans le milieu air par:

$$\tilde{G}_A^{xx}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} \left[ e^{-jk_{z0}(z-z')} + R_{TE} e^{-jk_{z0}(z+z')} \right] \quad (3.1.a)$$

$$\tilde{G}_q(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} \left[ e^{-jk_{z0}(z-z')} + (R_{TE} + R_q) e^{-jk_{z0}(z+z')} \right] \quad (3.1.b)$$

avec:

$$R_{TE} = -\frac{r_{10}^{TE} + e^{-j2k_{z1}H}}{1 + r_{10}^{TE} e^{-j2k_{z1}H}} \quad (3.2.a)$$

$$R_q = \frac{2k_{z0}^2(1-\varepsilon_r)(1-e^{-j4k_{z1}H})}{(k_{z1}+k_{z0})(k_{z1}+\varepsilon_r k_{z0})(1+r_{10}^{TE} e^{-j2k_{z1}H})(1-r_{10}^{TM} e^{-j2k_{z1}H})} \quad (3.2.b)$$

$$r_{10}^{TE} = \frac{k_{z1}-k_{z0}}{k_{z1}+k_{z0}} \quad (3.2.c)$$

$$r_{10}^{TM} = \frac{k_{z1}-\varepsilon_r k_{z0}}{k_{z1}+\varepsilon_r k_{z0}} \quad (3.2.d)$$

$$k_{z0}^2 + k_\rho^2 = k_0^2 \quad (3.2.e)$$

$$k_{z1}^2 + k_\rho^2 = \varepsilon_r k_0^2 \quad (3.2.f)$$

Dans ce qui suit nous allons procéder à une décomposition des fonctions de Green spectrales  $\tilde{G}_A^{xx}$  et  $\tilde{G}_q$  en trois parties. La première partie correspond à la contribution quasi-statique et est donnée par une approximation de la fonction de Green pour  $k_\rho$  grand devant  $k_0$ , alors que la deuxième partie représente les ondes de surfaces. La partie restante sera approximée par des fonctions exponentielles et correspond à la contribution "images complexes".

Le tableau 3.1 indique les notations des différentes contributions des fonctions de Green dans les deux domaines spatial et spectral.

fonction de Green		spatiale	spectrale
	quasi-statique	ondes de surface	images complexes
potentiel vecteur	$G_{A0}^{xx}(\rho)$	$G_{A,sw}^{xx}(\rho)$	$G_{A,ci}^{xx}(\rho)$
	$\tilde{G}_{A0}^{xx}(k_\rho)$	$\tilde{G}_{A,sw}^{xx}(k_\rho)$	$\tilde{G}_{A,ci}^{xx}(k_\rho)$
potentiel scalaire	$G_{q0}(\rho)$	$G_{q,sw}(\rho)$	$G_{q,ci}(\rho)$
	$\tilde{G}_{q0}(k_\rho)$	$\tilde{G}_{q,sw}(k_\rho)$	$\tilde{G}_{q,ci}(k_\rho)$

**Tableau 3.1** Différentes contributions des fonctions de Green

Les fonctions de Green pour les potentiels vecteur et scalaire données par 3.1 sont donc exprimées par une somme des trois différentes contributions, soit dans le domaine spectral:

$$\tilde{G}_A^{xx}(k_\rho) = \tilde{G}_{A0}^{xx}(k_\rho) + \tilde{G}_{A,sw}^{xx}(k_\rho) + \tilde{G}_{A,ci}^{xx}(k_\rho) \quad (3.3.a)$$

$$\tilde{G}_q(k_\rho) = \tilde{G}_{q0}(k_\rho) + \tilde{G}_{q,sw}(k_\rho) + \tilde{G}_{q,ci}(k_\rho) \quad (3.3.b)$$

### 3.1 EXTRACTION DE LA PARTIE QUASI-STATIQUE

La contribution quasi-statique est donnée par l'approximation de la fonction de Green lorsque la fréquence  $f$  est très faible. Dans ce cas on peut considérer  $k_0 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 0$  et  $k_{z0} \approx k_{z1} \approx -jk_\rho$ . Alors  $R_{TE}$  et  $R_q$  peuvent être approchées respectivement par  $R_{TE0}$  et  $R_{q0}$  données par

$$R_{TE0} = -e^{-j2k_{z0}H} \quad (3.4.a)$$

$$R_{q0} = \frac{K(1 - e^{-j4k_{z0}H})}{(1 - Ke^{-j2k_{z0}H})} \quad (3.4.b)$$

$$K = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \quad (3.4.c)$$

Pour rendre possible l'utilisation de l'identité de Sommerfield on approime  $R_{q0}$  par:

$$R_{q0} \approx R'_{q0} = K(1 - e^{-j4k_{z0}H})(1 + Ke^{-j2k_{z0}H}) \quad (3.5)$$

L'erreur commise sur  $R_{q0}$  sera prise en compte dans la partie restante de la fonction de Green qui correspond à la contribution des images complexes.

Les contributions quasi-statiques des fonctions de Green spectrales pour les potentiels vecteur et scalaire sont alors données par (3.6).

$$\tilde{G}_{A0}^{xx}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} [e^{-jk_{z0}(z-z')} - e^{-jk_{z0}(z+z'+2H)}] \quad (3.6.a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q0}(k_\rho) = & \frac{1}{j2k_{z0}} [e^{-jk_{z0}(z-z')} + e^{-jk_{z0}(z+z')} \\ & (-e^{-j2k_{z0}H} + K(1 - e^{-j4k_{z0}H})(1 + Ke^{-j2k_{z0}H}))] \end{aligned} \quad (3.6.b)$$

Les fonctions de Green spatiales quasi-statiques sont alors déduites par la transformation de Hankel inverse.

$$G_{A0}^{xx}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{-jk_0r}}{r} - \frac{e^{-jk_0r_1}}{r_1} \right] \quad (3.7.a)$$

$$G_{q0}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{-jk_0r}}{r} + K \frac{e^{-jk_0r_0}}{r_0} + (K^2 - 1) \frac{e^{-jk_0r_1}}{r_1} - K \frac{e^{-jk_0r_2}}{r_2} - K^2 \frac{e^{-jk_0r_3}}{r_3} \right] \quad (3.7.b)$$

$$\text{avec;} \quad r = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2} \quad (3.7.c)$$

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + (z+z'+2nH)^2} \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad (3.7.d)$$

### 3.2 CONTRIBUTION DES ONDES DE SURFACES

Les fonctions de Green spatiales pour les potentiels vecteur et scalaire  $G_A^{xx}(\rho)$  et  $G_q(\rho)$  sont données par:

$$G_A^{xx}(\rho) = G_{A0}^{xx}(\rho) + \frac{1}{4\pi} \int_{\text{C.I.S.}} \frac{1}{j2k_{z0}} (R_{TE} - R_{TE0}) e^{-jk_{z0}(z+z')} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (3.8.a)$$

$$G_q(\rho) = G_{q0}(\rho) + \frac{1}{4\pi} \int_{\text{C.I.S.}} \frac{1}{j2k_{z0}} (R_{TE} + R_q - R_{TE0} - R_{q0}) e^{-jk_{z0}(z+z')} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (3.8.b)$$

Comme  $R_{TE}$  et  $R_q$  présentent des singularités, il faut alors procéder à une extraction des pôles. La partie extraite correspondra à la contribution des ondes de surface. Les ondes de surfaces se présentent généralement par paires complexes et conjuguées[12], d'où:

$$R_{TE} - R_{TE0} = F_1(k\rho) + F_{1sw}(k\rho) \quad (3.9.a)$$

$$F_{1sw}(k\rho) = j2k_{z0} e^{jk_{z0}(z+z')} \sum_{p=1}^{N_{TE}} \frac{2k_{\rho p} \operatorname{Res1}(p)}{k_\rho^2 - k_{\rho p}^2} \quad (3.9.b)$$

$$R_{TE} + R_q - R_{TE0} - R_{q0} = F_2(k\rho) + F_{2sw}(k\rho) \quad (3.10.a)$$

$$F_{2sw}(k\rho) = j2k_{z0} e^{jk_{z0}(z+z')} \sum_{p=1}^{N_{TE}+N_{TM}} \frac{2k_{\rho p} \operatorname{Res2}(p)}{k_\rho^2 - k_{\rho p}^2} \quad (3.10.b)$$

avec  $N_{TE}$ ( $N_{TM}$ ) nombre de pôles TE(TM). les quantités  $\operatorname{Res1}(p)$  et  $\operatorname{Res2}(p)$  sont calculées comme suit:

$$\operatorname{Res1}(p) = \left. \frac{e^{-jk_{z0}(z+z')}}{j2k_{z0}} \right|_{k_\rho=k_{\rho p}} \cdot \lim_{k_\rho \rightarrow k_{\rho p}} (k_\rho - k_{\rho p}) R_{TE} \quad (3.11.a)$$

$$\operatorname{Res2}(p) = \left. \frac{e^{-jk_{z0}(z+z')}}{j2k_{z0}} \right|_{k_\rho=k_{\rho p}} \cdot \lim_{k_\rho \rightarrow k_{\rho p}} (k_\rho - k_{\rho p}) (R_{TE} + R_q) \quad (3.11.b)$$

Les contributions des fonctions de Green spatiales relatives aux ondes de surface sont alors données par:

$$G_{A,sw}^{xx}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^{N_{TE}} \int_{\text{C.I.S.}} \frac{2k_{\rho p} \operatorname{Res1}(p)}{k_{\rho}^2 - k_{\rho p}^2} H_0^{(2)}(k_{\rho} \rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (3.12.a)$$

$$G_{q,sw}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^{N_{TE} + N_{TM}} \int_{\text{C.I.S.}} \frac{2k_{\rho p} \operatorname{Res2}(p)}{k_{\rho}^2 - k_{\rho p}^2} H_0^{(2)}(k_{\rho} \rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (3.12.b)$$

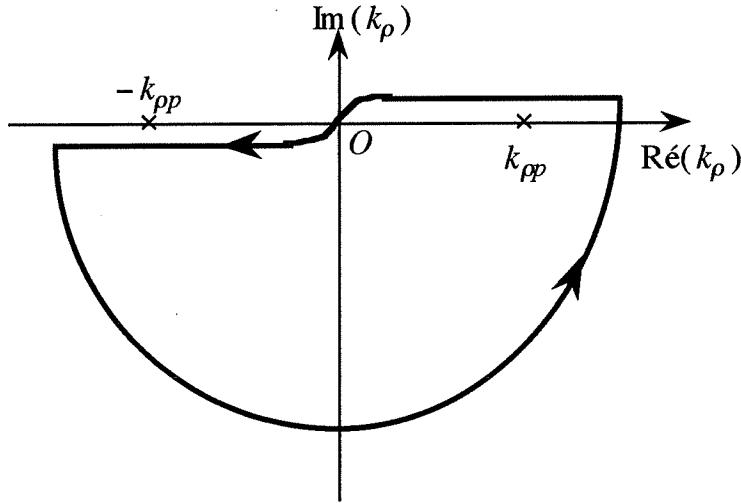
Par la suite l'application du théorème des résidus nous permet de déterminer les expressions des intégrales dans (3.11).

$$G_{A,sw}^{xx}(\rho) = \frac{1}{4\pi} (-j2\pi) \sum_{p=1}^{N_{TE}} \operatorname{Res1}(p) H_0^{(2)}(k_{\rho p} \rho) k_{\rho p} \quad (3.13.a)$$

$$G_{q,sw}(\rho) = \frac{1}{4\pi} (-j2\pi) \sum_{p=1}^{N_{TE} + N_{TM}} \operatorname{Res2}(p) H_0^{(2)}(k_{\rho p} \rho) k_{\rho p} \quad (3.13.b)$$

Le contour fermé est représenté dans la figure 3.2, il est composé par un demi-cercle parcouru dans le sens trigonométrique et le C.I.S. parcouru dans le sens inverse (de  $+\infty$  à  $-\infty$ ). Le demi-cercle est tel que la partie imaginaire de  $k_{\rho}$  est négative. En effet le comportement asymptotique de  $H_0^{(2)}$  est donné par [c]:

$$H_0^{(2)}(k_{\rho} \rho) \sim \sqrt{2/k_{\rho} \rho} e^{-jk_{\rho} \rho} \quad (3.14)$$



**Figure 3.2** Contour fermé d'intégration de  $G_{A,q}^{sw}$

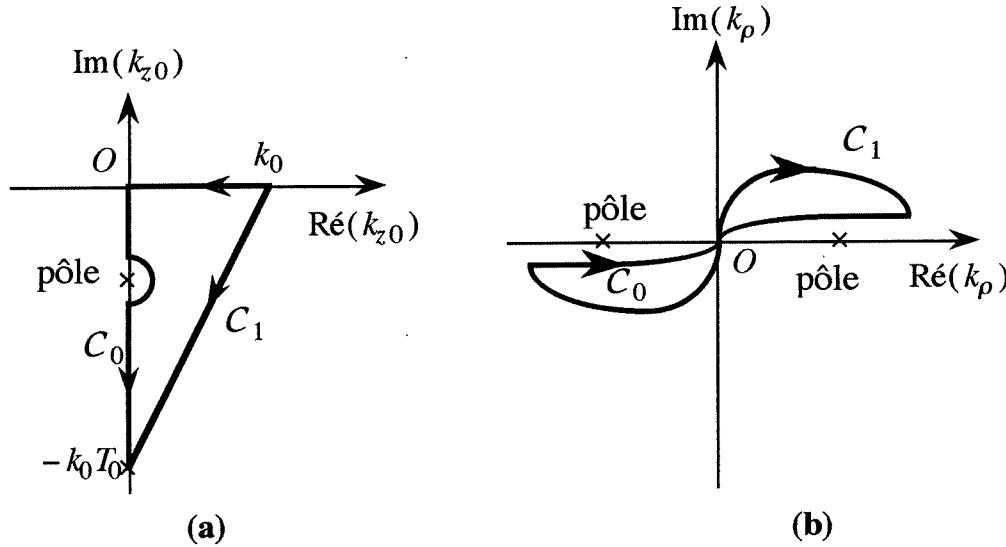
### 3.3 DETERMINATION DES IMAGES COMPLEXES

Les fonctions de Green spatiales peuvent être exprimées comme suit:

$$G_A^{xx}(\rho) = G_{A0}^{xx}(\rho) + G_{A,sw}^{xx}(\rho) + \frac{1}{4\pi} \int_{C.I.S.} \frac{1}{j2k_{z0}} F_1(k\rho) e^{-jk_{z0}(z+z')} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (3.15.a)$$

$$G_q(\rho) = G_{q0}(\rho) + G_{q,sw}(\rho) + \frac{1}{4\pi} \int_{C.I.S.} \frac{1}{j2k_{z0}} F_2(k\rho) e^{-jk_{z0}(z+z')} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (3.15.b)$$

Comme  $F_1(k_\rho)$  et  $F_2(k_\rho)$  sont des fonctions analytiques, il est alors possible de procéder à un changement du contour d'intégration sans affecter la valeur de l'intégrale à calculer. Le nouveau contour correspondra à un segment de ligne droite dans le plan complexe  $k_{z0}$  et il sera noté  $C_1$  alors que le contour initial C.I.S. sera noté  $C_0$ . La figure 3.3 représente les deux contours d'intégration dans les plans complexes  $k_{z0}$  et  $k_\rho$ .



**Figure 3.3** Contours d'intégration dans les plans complexes  $k_{z0}$ (a) et  $k_\rho$ (b)

$k_{z0}$  sur le contour  $C_1$  peut être exprimée en fonction d'un paramètre réel d'intégration noté  $t$  et tel que:

$$k_{z0} = k_0 \left[ -jt + \left( 1 - \frac{t}{T_0} \right) \right], \quad t \in [0, T_0] \quad (3.16)$$

Les fonctions  $F_1(k_\rho)$  et  $F_2(k_\rho)$  sont particulièrement lisses sur le contour  $C_1$ , on peut alors les approximer par une série de fonctions exponentielles complexes en se basant sur la méthode de Prony [13].

$$F_1(k_\rho) = \sum_{n=1}^N a_n e^{b_n k_{z0}} \quad (3.17.a)$$

$$F_2(k_\rho) = \sum_{n=1}^{N'} a'_n e^{b'_n k_{z0}} \quad (3.17.b)$$

D'où une approximation de la contribution "images complexes" des fonctions de Green spectrales  $\tilde{G}_{A,ci}^{xx}(k_\rho)$  et  $\tilde{G}_{q,ci}(k_\rho)$ :

$$\tilde{G}_{A,ci}^{xx}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} \sum_{n=1}^N a_n e^{-jk_{z0}(z+z'+jb_n)} \quad (3.18.a)$$

$$\tilde{G}_{q,ci}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} \sum_{n=1}^{N'} a'_n e^{-jk_{z0}(z+z'+jb'_n)} \quad (3.18.b)$$

Soit alors dans le domaine spatial par transformation de Hankel inverse:

$$G_{A,ci}^{xx}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^N a_n \frac{e^{-jk_0 r_n}}{r_n}, \quad r_n = \sqrt{\rho^2 + (z+z'+jb_n)^2} \quad (3.19.a)$$

$$G_{q,ci}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N'} a'_n \frac{e^{-jk_0 r'_n}}{r'_n}, \quad r'_n = \sqrt{\rho^2 + (z+z'+jb'_n)^2} \quad (3.19.b)$$

Nous montrerons dans le chapitre 4 que le choix de  $T_0$  n'est pas très critique pour des fréquences  $f$  peu élevées.

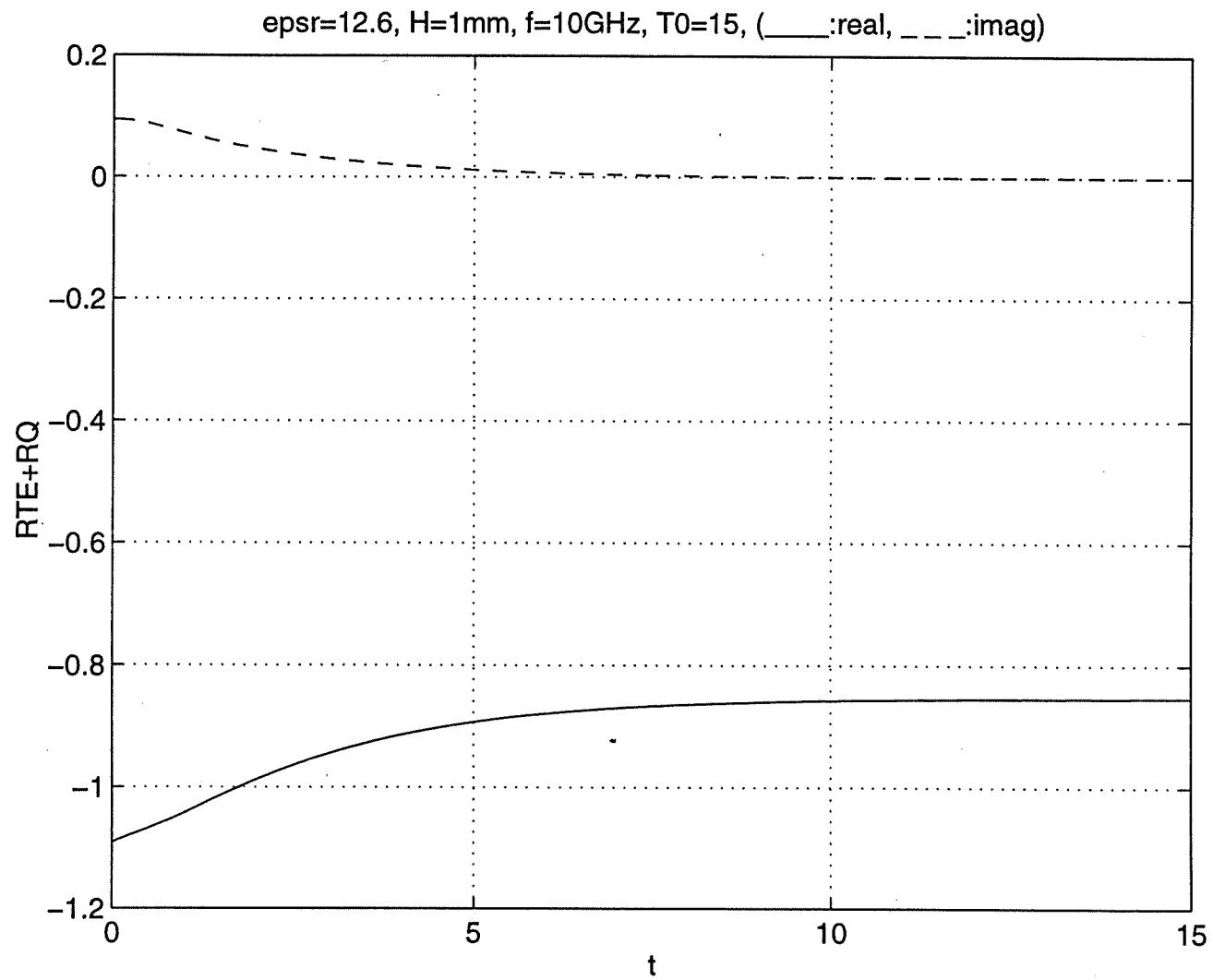
### 3.4 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $R_{TE} + R_q$

Pour pouvoir appliquer la méthode de Prony la fonction à approximer doit être lisse et doit décroître vers zéro lorsque  $k_\rho$  augmente. L'extraction de la partie quasi-statique et des ondes de surfaces de  $R_{TE} + R_q$  a permis d'aboutir à une fonction  $F_2(k_\rho)$  analytique et respectant les conditions citées plus haut.

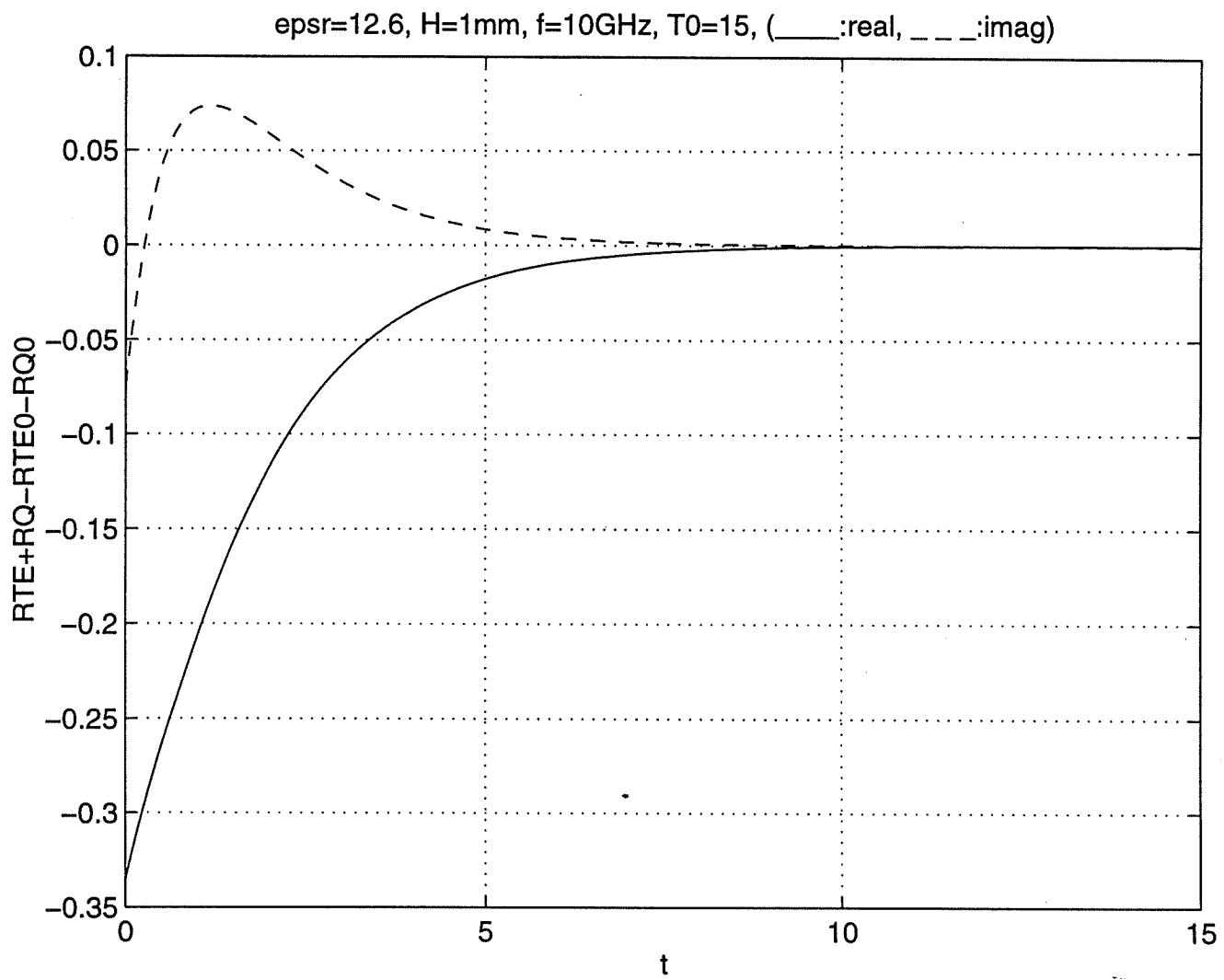
La figure 3.4 représente l'allure de  $R_{TE} + R_q$  le long du contour  $C_1$ . Après extraction de la partie quasi-statique on aboutit à  $R_{TE} + R_q - R_{TE0} - R_{q0}$ , cette quantité tend vers zéro lorsque  $k_\rho$  augmente mais présente des extrémas comme le montre la figure 3.5, ces extrémas sont dus à la présence de pôles dans  $R_{TE}$  et  $R_q$ .

La fonction  $F_2(k_\rho)$  est représentée par la figure 3.6, elle est obtenue après extraction des pôles. Comme elle est lisse sur  $C_1$  et tend vers zéro lorsque  $k_\rho$  augmente, alors elle se prête bien à une approximation par des fonctions exponentielles en se basant sur la méthode de Prony. La figure 3.7 représente l'erreur

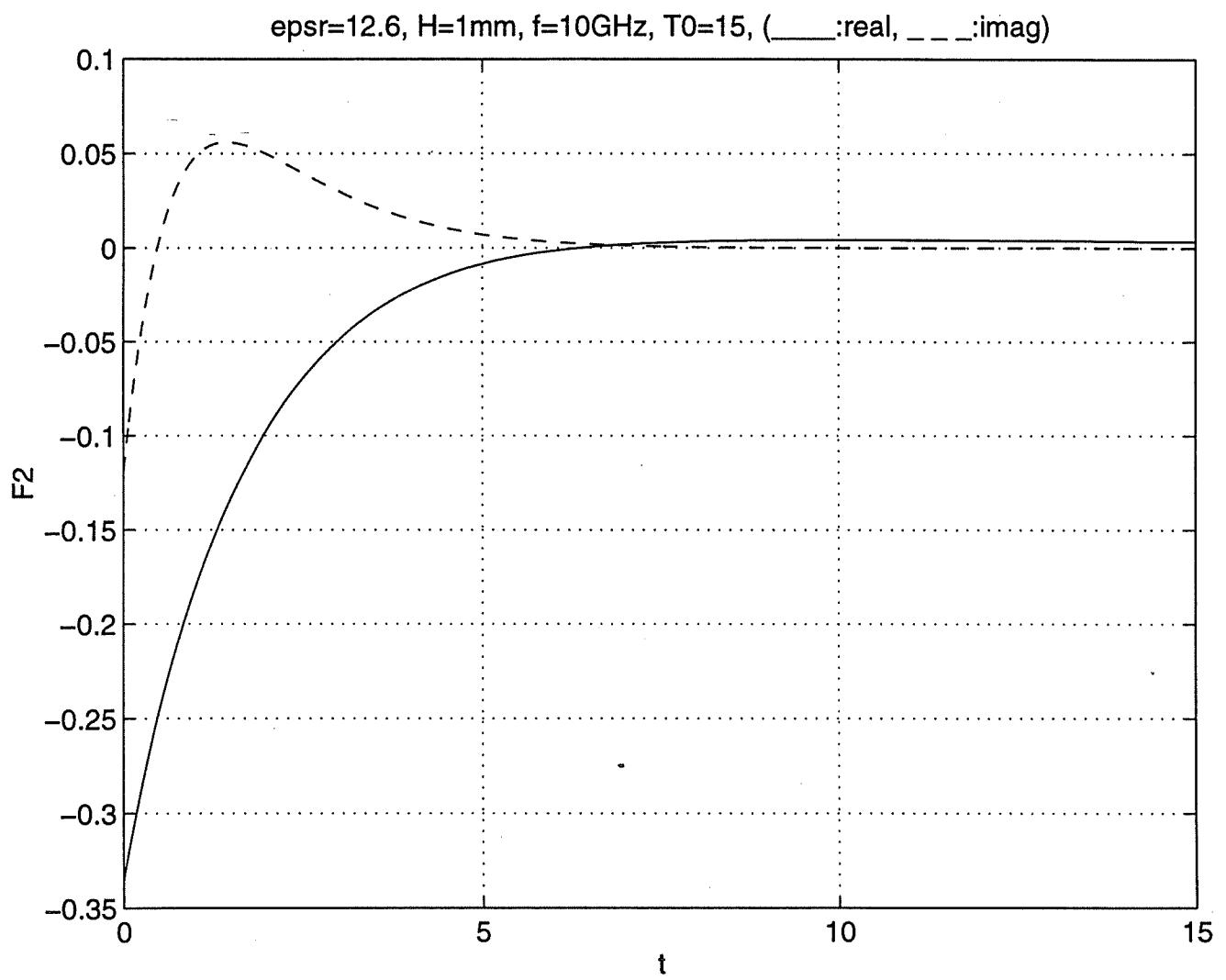
relative commise sur l'apprximation de  $F_2(k_p)$  pour le cas de quatre fonctions ( $N_2 = 4$ ).



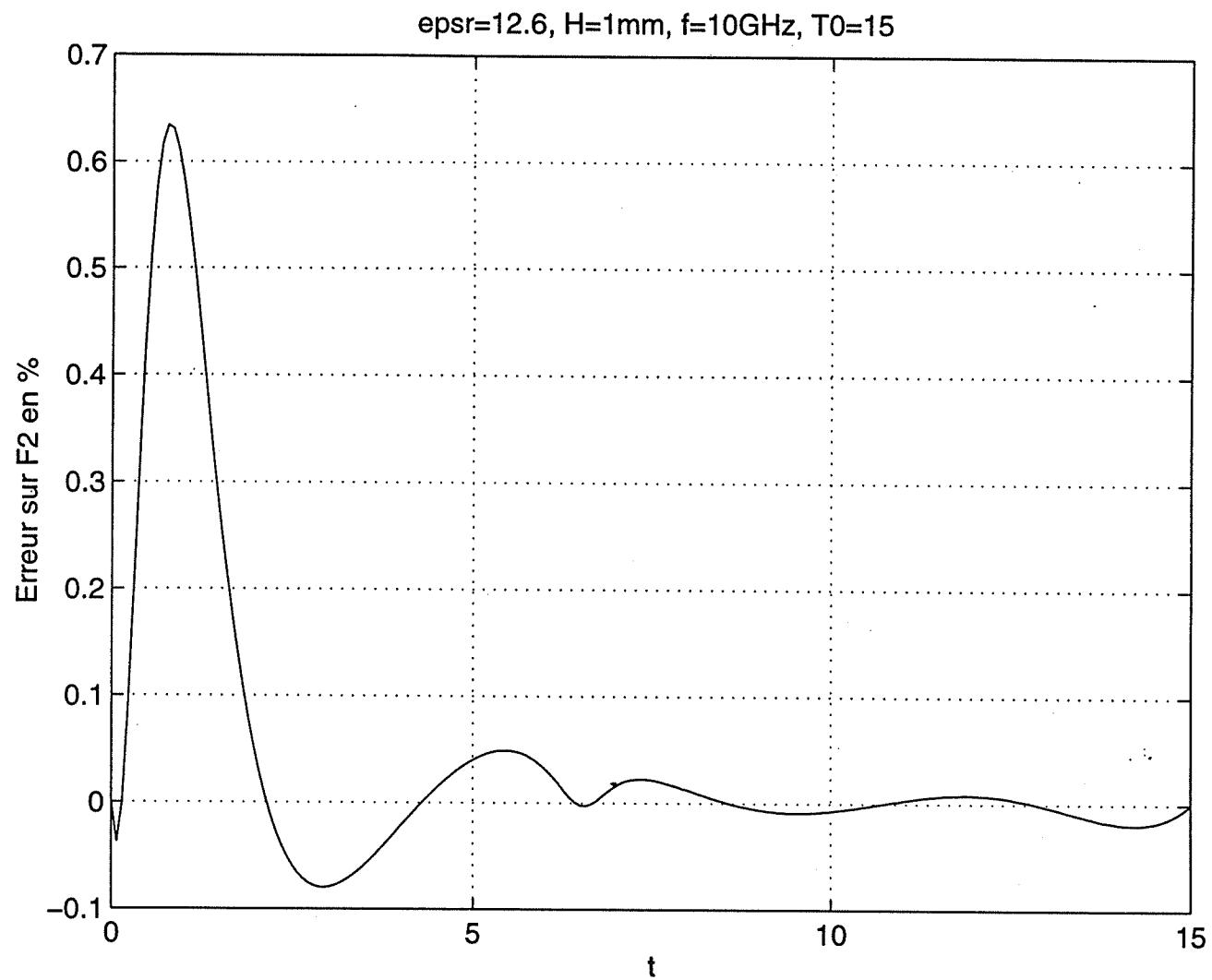
**Figure 3.4** Comportement spectral de  $R_{TE} + R_Q$  sur  $C_1$



**Figure 3.5**  $R_{TE} + R_q - R_{TE0} - R_{q0}$  ( partie quasi-statique extraite )



**Figure 3.6**  $F_2(k_\rho)$  ( parties quasi-statique et ondes de surface extraites )



**Figure 3.7** Erreur relative sur l'approximation de  $F_2(k_\rho)$

## **CHAPITRE 4**

### ***FORMULATION SIMULTANEE DE LA METHODE DES MOMENTS DANS LES DOMAINES SPATIAL ET SPECTRAL***

#### **4.1 LIMITATIONS DE LA METHODE DES MOMENTS FORMULEE DANS LE DOMAINE SPECTRAL OU SPATIAL**

##### **4.1.a Dans le domaine spectral**

D'après le tableau 2.1 indiquant le comportement asymptotique des éléments de la fonction de Green dyadique spectrale pour le champ électrique, le choix des fonctions de base et test conditionne la rapidité de la convergence des différentes intégrales à calculer exprimées dans (2.10).

Une étude a été présentée par AKSUN et MITTRA [8] où ils ont montré que le choix de fonctions test du type " $\lfloor \text{pulse}(x) * \text{triangle}(x) \rfloor \text{pulse}(y)$ " assure une convergence nettement meilleure que " $\text{pulse}(x)\text{pulse}(y)$ " ou encore " $\text{triangle}(x)\text{pulse}(y)$ ", les fonctions de base étant du type " $\text{triangle}(x)\text{pulse}(y)$ ". Ce

choix tient moins bien compte des discontinuités dans les grandeurs physiques recherchées. En effet ces fonctions test limitent la contribution des effets de bord par pondération dans la procédure de Galerkin. Alors le gain obtenu sur la rapidité de calcul des intégrales est contrebalancé par le nombre d'intégrales qui doit être plus important pour une description comparable de l'allure de la grandeur physique recherchée.

Pour avoir une taille de matrice  $N \times M$  limitée, le choix des fonctions de base et test doit être compatible avec le comportement de la densité surfacique de courant aux niveaux des différentes discontinuités. Pour une analyse spectrale ce choix n'est pas toujours possible puisque l'existence même des intégrales à calculer n'est pas assurée.

Nous montrerons par la suite comment, par action sur la fonction de Green, il est possible de contourner cette difficulté.

#### 4.1.b Dans le domaine spatial

L'application de la méthode des moments par calcul direct des fonctions de Green spatiales nécessite le calcul d'intégrales de dimension cinq.

On considère à titre d'exemple l'intégrale suivante:

$$\langle T_{xm} | G_A^{xx} * J_{xn} \rangle = \iint_{D(T)} \left[ \iint_{D(B)} G_A^{xx}(x - x', y - y') J_{xn}(x', y') dx' dy' \right] T_{xm}(x, y) dx dy \quad (4.1)$$

avec:

$$G_A^{xx}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \iint_{C.I.S.} \tilde{G}_A^{xx}(k_\rho) H_0^{(2)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho \quad (4.2)$$

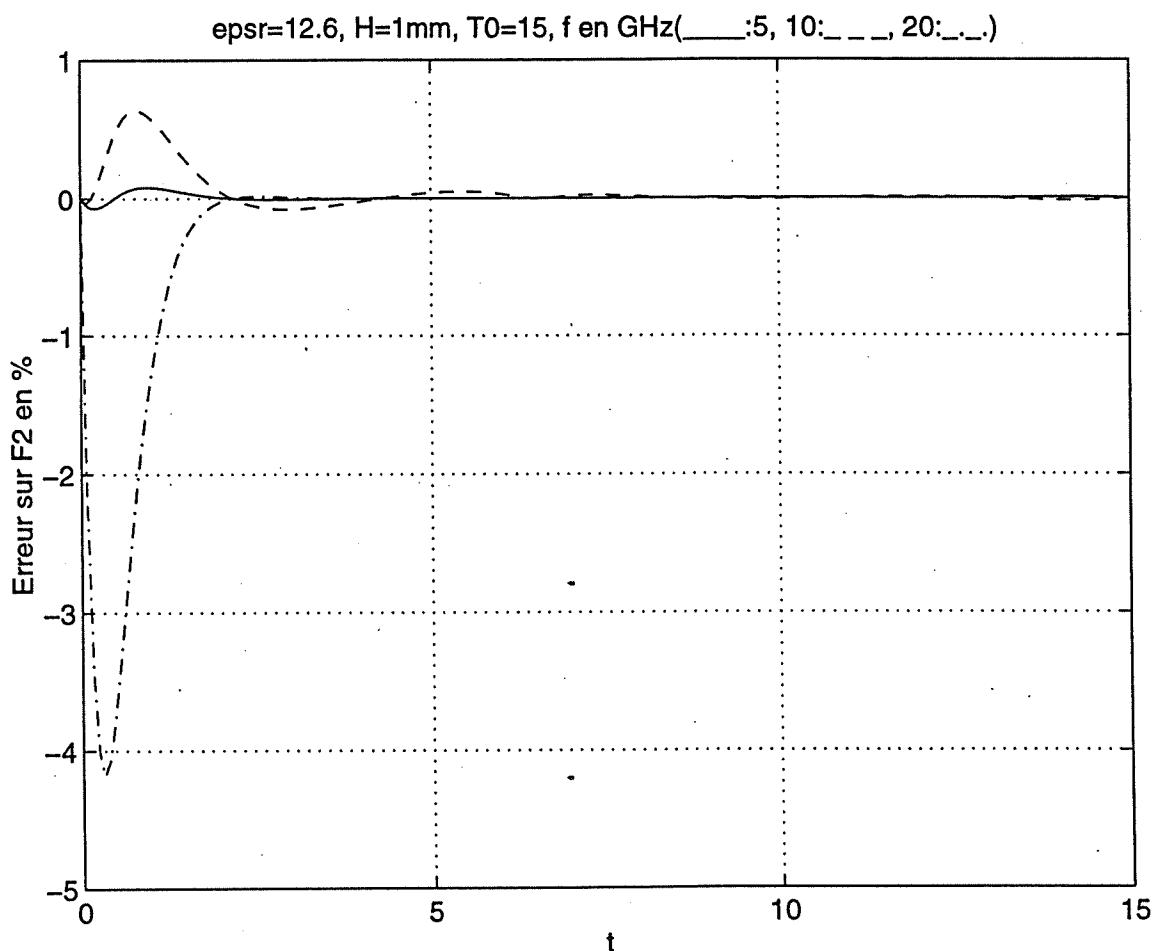
La dimension de cette intégrale peut être réduite à trois par transfert du produit de convolution entre les fonctions de base et test qui sera effectué analytiquement. Malgré cette amélioration le temps de calcul reste toujours important.

La détermination d'une expression analytique approchée des fonctions de Green spatiales pour les potentiels vecteur et scalaire est une bonne alternative puisque la dimension de l'intégrale définie par (4.1) sera réduite à deux. En plus le domaine d'intégration est borné.

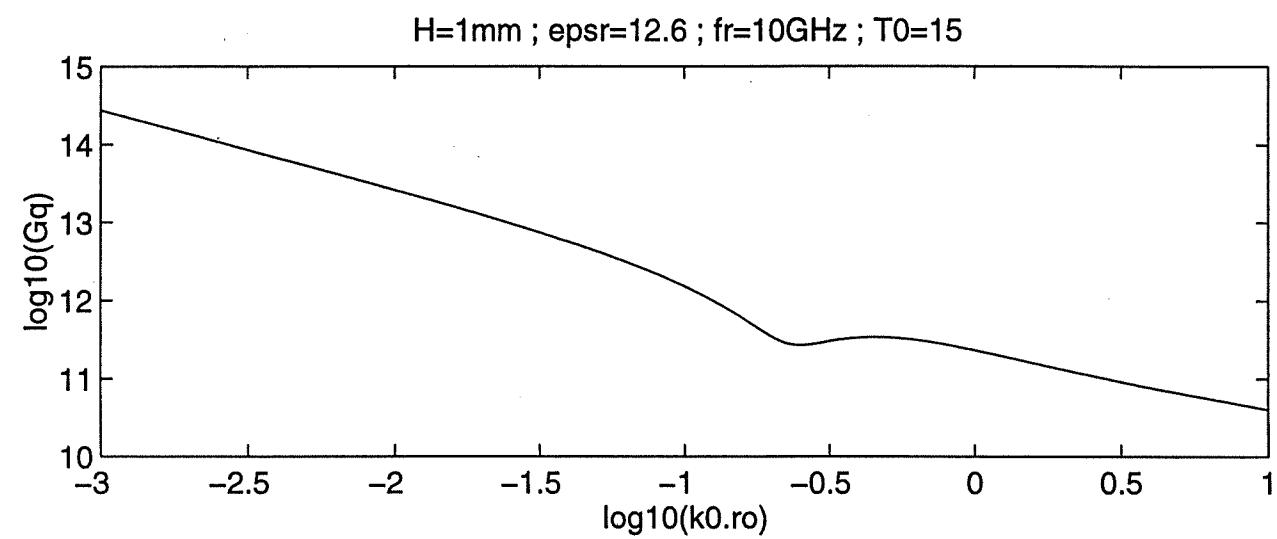
Lorsque la fréquence augmente et les dimensions du circuit sont supérieures à la longueur d'onde, les fonctions de Green spatiales deviennent très oscillatoires ce qui a pour effet d'augmenter le temps de calcul de l'intégration numérique. D'autre part l'erreur commise sur l'approximation des parties "images complexes" devient importante.

La figure 4.1 représente l'erreur relative commise sur l'approximation de  $F_2(k_\rho)$  pour différentes fréquences. Nous constatons que l'erreur est d'autant plus importante lorsque la fréquence augmente.

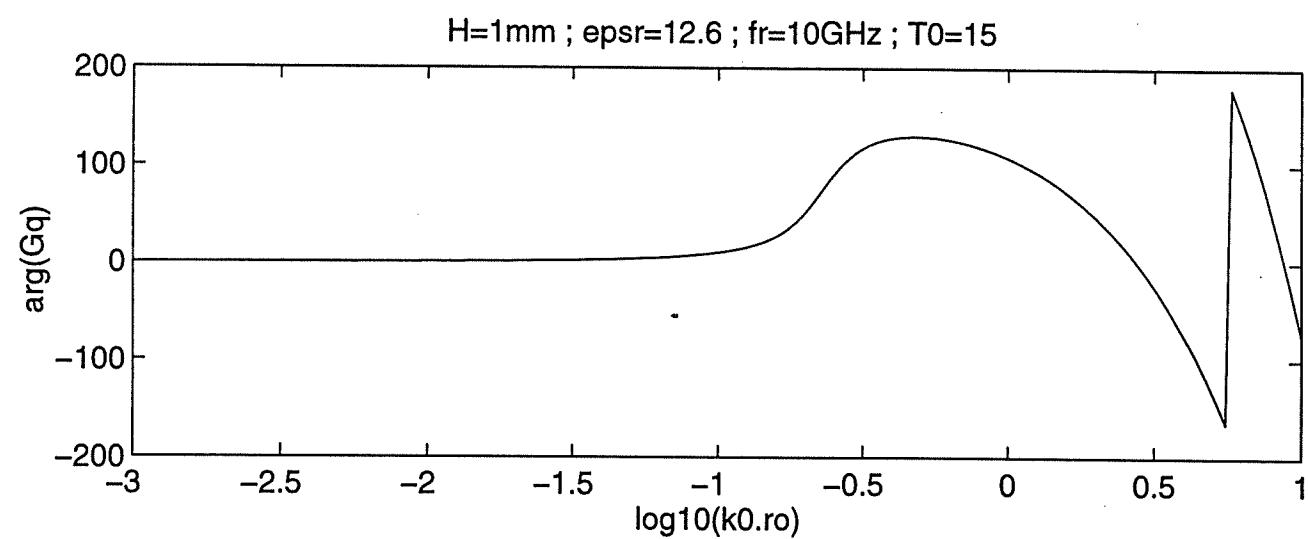
Les fonctions de Green spatiales pour les potentiels vecteur et scalaire sont représentées respectivement dans les figures 4.2 et 4.3. Nous vérifions bien le comportement oscillatoire de ces fonction lorsque la distance augmente.



**Figure 4.1** Erreur relative sur l'approximation de  $F_2(k_\rho)$  pour différentes fréquences



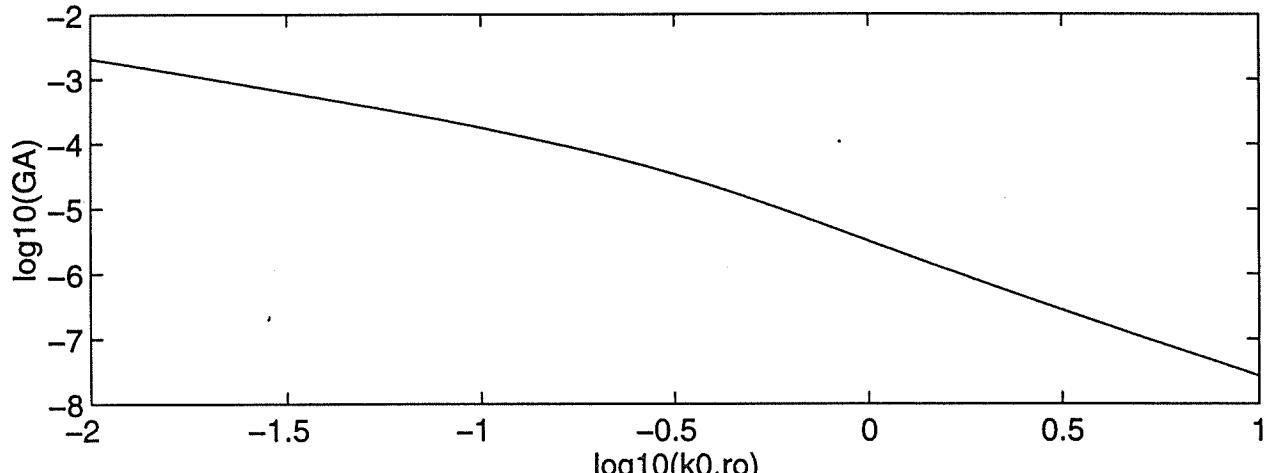
(a): Module



(b): Argument

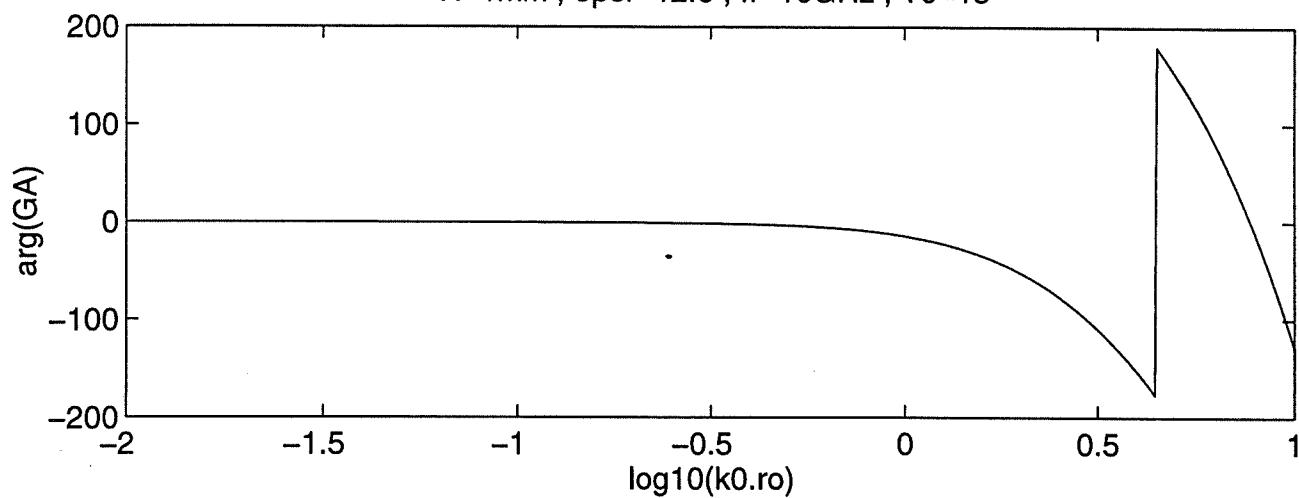
**Figure 4.2** Potentiel scalaire  $G_q(\rho)$

$H=1\text{mm}$  ;  $\text{epsr}=12.6$  ;  $\text{fr}=10\text{GHz}$  ;  $T_0=15$



(a): Module

$H=1\text{mm}$  ;  $\text{epsr}=12.6$  ;  $\text{fr}=10\text{GHz}$  ;  $T_0=15$



(b): Argument

**Figure 4.3** Potentiel vecteur  $G_A^{xx}(\rho)$

## 4.2 DECOMPOSITION DES FONCTIONS DE GREEN EN PARTIES QUASI-STATIQUES ET DYNAMIQUES

La formulation de la méthode des moments dans le domaine spectral pour l'étude des structures microruban présente l'avantage d'un calcul systématique et sans grandes complexités des fonctions de Green [5-6-7]. Toutefois leur comportement asymptotique conditionne le choix des fonctions de base et test[8].

Le tableau 4.1, représente le comportement asymptotique des éléments de la fonction de Green spectrale pour le champ électrique après extraction des parties quasi-statiques.

	$k_p \rightarrow \infty$ loin des deux axes	$\alpha \rightarrow \infty$ $\beta$ reste faible	$\beta \rightarrow \infty$ $\alpha$ reste faible
$\tilde{Z}_d^{xx}$	$\cancel{\frac{1}{k_p}}$	$\cancel{\frac{1}{\alpha}}$	$\cancel{\frac{1}{\beta^3}}$
$\tilde{Z}_d^{xy} = \tilde{Z}_d^{yx}$	$\cancel{\frac{1}{k_p}}$	tend vers zéro comme $\frac{\beta}{\alpha^2}$	tend vers zéro comme $\frac{\alpha}{\beta^2}$
$\tilde{Z}_d^{yy}$	$\cancel{\frac{1}{k_p}}$	$\cancel{\frac{1}{\alpha^3}}$	$\cancel{\frac{1}{\beta}}$

**Tableau 4.1** Comportement asymptotique de la partie dynamique de la fonction de Green dyadique spectrale pour le champ électrique

Le tableau ci-dessus est relatif à une structure microruban simple couche, il indique le comportement asymptotique des contributions dynamiques des éléments de la fonction de Green dyadique spectrale pour le champ électrique. Nous constatons que tous les éléments sont décroissants. Le cas le plus défavorable correspond à un comportement en  $\cancel{\frac{1}{x}}$ , au lieu de  $x$  sans extraction de la partie quasi-statique, pour  $x$  suffisamment grand. Il est alors devenu possible d'élargir le choix des familles de fonctions de base et test, en particulier celles données par (2.11). Cette possibilité aura pour effet de limiter le nombre de fonctions utilisées, la convergence du problème est alors améliorée.

La fonction de Green dyadique spectrale pour le champ électrique  $(\tilde{\mathbf{Z}})$  peut se mettre sous la forme suivante:

$$(\tilde{\mathbf{Z}}) = (\tilde{\mathbf{Z}}_s) + (\tilde{\mathbf{Z}}_d) \quad (4.3)$$

$(\tilde{\mathbf{Z}}_s)$  et  $(\tilde{\mathbf{Z}}_d)$  représentent respectivement les contributions quasi-statique et dynamique, Elles sont exprimées à partir des contributions quasi-statiques et dynamiques des potentiels vecteur et scalaire comme suit:

$$\tilde{Z}_{s(d)}^{xx} = -j\omega\mu\tilde{G}_{A,s(d)}^{xx} - \frac{\alpha^2}{j\omega\epsilon}\tilde{G}_{q,s(d)} \quad (4.4.a)$$

$$\tilde{Z}_{s(d)}^{xy} = \tilde{Z}_{s(d)}^{yx} = -\frac{\alpha\beta}{j\omega\epsilon}\tilde{G}_{q,s(d)} \quad (4.4.b)$$

$$\tilde{Z}_{s(d)}^{yy} = -j\omega\mu\tilde{G}_{A,s(d)}^{yy} - \frac{\beta^2}{j\omega\epsilon}\tilde{G}_{q,s(d)} \quad (4.4.c)$$

Dans l'approximation quasi-statique nous pouvons considérer que  $k_0 \cong 0$  et  $k_{z0} \cong -jk_\rho$  avec  $k_\rho$  très grand. Les contributions quasi-statiques de  $R_{TE}$  et  $R_q$  sont alors données par 3.4.

$R_{q0}$  peut être approximée par  $R'_{q0}$  donnée par 3.5 ou encore par une somme de fonctions exponentielles à l'aide de la méthode de Prony. Dans tous les cas le comportement asymptotique des contributions dynamiques de  $G_A$  et  $G_q$  reste le même. En effet, pour  $k_\rho$  suffisamment grand  $k_{z0}$  est à partie imaginaire négative et telle que  $e^{-jk_{z0}H}$  tend vers zéro.

Nous avons effectué une étude comparative entre ces deux choix et un troisième plus simple qui consiste à déterminer les contributions quasi-statiques en considérant  $R_{TE} \cong R_{TES} = 0$  et  $R_q \cong R_{qs} = K$ .

Les différences obtenues sur le calcul des fonctions de Green spatiales sont très faibles. Nous obterons alors pour le troisième choix qui permettra d'avoir les expressions les plus simples des contributions spatiales quasi-statiques des fonctions

de Green. Ceci aura pour effet de réduire le temps de calcul numérique des différentes intégrales dans le domaine spatial.

Les contributions quasi-statiques des fonctions de Green pour les potentiels vecteurs et scalaires sont alors:

$$\tilde{G}_{As}^{xx}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} e^{-jk_{z0}(z-z')} \quad (4.6.a)$$

$$\tilde{G}_{qs}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} [e^{-jk_{z0}(z-z')} + K e^{-jk_{z0}(z+z')}] \quad (4.6.b)$$

les parties restantes des fonctions de Green représentent alors les contributions dynamiques et elles sont caractérisées par un bon comportement asymptotique.

$$\tilde{G}_{A,d}^{xx}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} R_{TE} e^{-jk_{z0}(z+z')} \quad (4.7.a)$$

$$\tilde{G}_{q,d}(k_\rho) = \frac{1}{j2k_{z0}} [R_{TE} + R_q - K] e^{-jk_{z0}(z+z')} \quad (4.7.b)$$

Les fonctions de Green spatiales quasi-statiques sont déterminées par transformation de Hankel inverse.

$$G_{As}^{xx}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \quad (4.8.a)$$

$$G_{qs}(\rho) = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{e^{-jk_0 r}}{r} + K \frac{e^{-jk_0 r'}}{r'} \right] \quad (4.8.b)$$

avec:  $r = \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}$  (4.8.c)

$$r' = \sqrt{\rho^2 + (z+z')^2} \quad (4.8.d)$$

### 4.3 FORMULATION INTEGRALE COMBINEE " SPATIALE-SPECTRALE "

L'application de la méthode des moments se fait dans ce cas après décomposition des fonctions de Green pour les potentiels vecteur et scalaire en parties quasi-statiques et dynamiques.

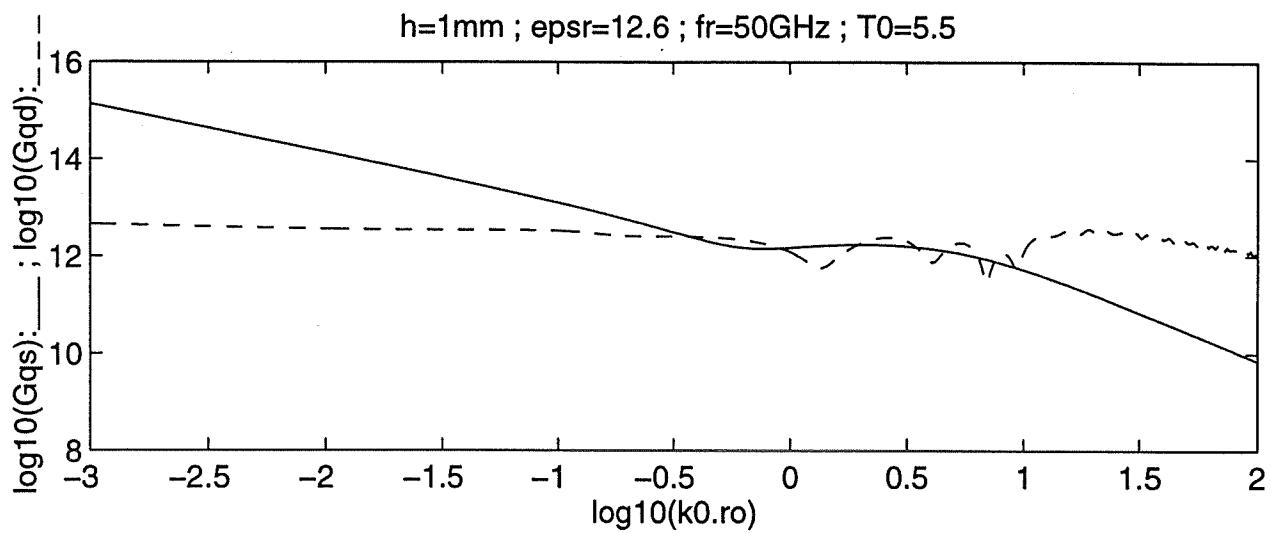
Chaque produit scalaire du système d'équations (2.5) est alors dédoublé. Le premier reste formulé dans le domaine spatial et il est relatif à la partie quasi-statique, alors que le second est transposé dans le domaine spectral et représente la composante dynamique du problème.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N A_n & \left( \left\langle T_{xm} \left| -j \omega \mu G_{A0}^{xx} * J_{xn} + \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left[ G_{q0} * \frac{\partial J_{xn}}{\partial x} \right] \right| \right\rangle + \left\langle \tilde{T}_{xm} \left| \tilde{Z}_d^{xx} \tilde{J}_{xn} \right. \right\rangle \right) + B_n \left( \left\langle T_{xm} \left| \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left[ G_{q0} * \frac{\partial J_{yn}}{\partial y} \right] \right| \right\rangle + \left\langle \tilde{T}_{xm} \left| \tilde{Z}_d^{xy} \tilde{J}_{yn} \right. \right\rangle \right) \\ & = - \left\langle T_{xm} \left| -j\omega \mu G_{A0}^{xx} * J_{xs} + \frac{1}{j\omega \epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ G_{q0} * \left( \frac{\partial J_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial J_{ys}}{\partial y} \right) \right] \right\} \right| \right\rangle - \left\langle \tilde{T}_{xm} \left| \tilde{Z}_d^{xx} \tilde{J}_{xs} + \tilde{Z}_d^{xy} \tilde{J}_{ys} \right. \right\rangle, m=1\dots M \end{aligned} \quad (4.9.a)$$

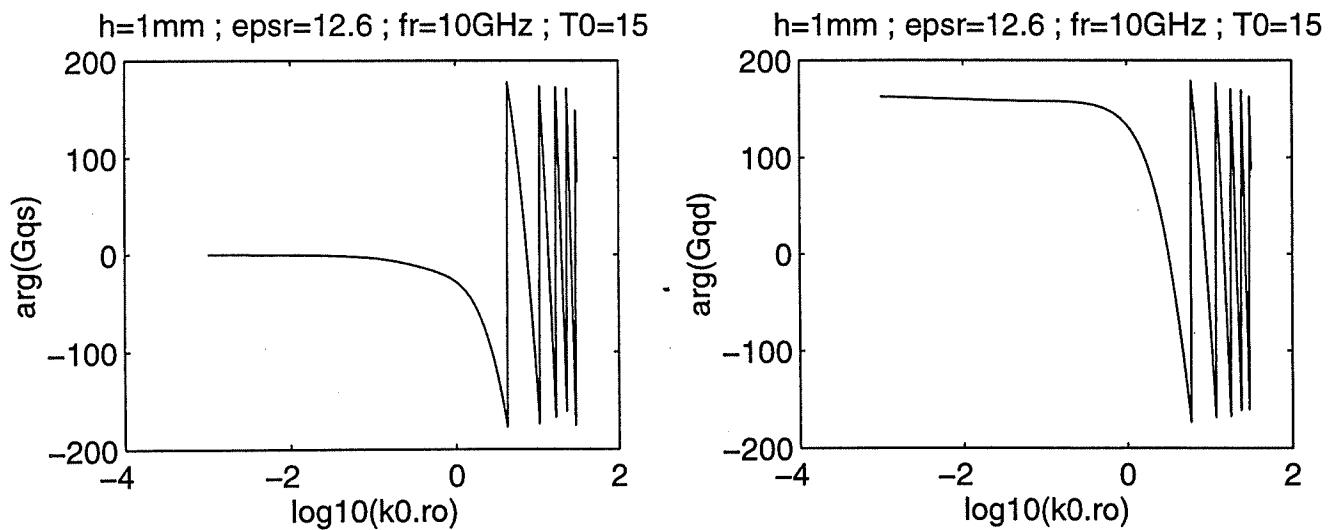
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N B_n & \left( \left\langle T_{ym} \left| -j \omega \mu G_{A0}^{yy} * J_{yn} + \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_{q0} * \frac{\partial J_{yn}}{\partial y} \right] \right| \right\rangle + \left\langle \tilde{T}_{ym} \left| \tilde{Z}_d^{yy} \tilde{J}_{yn} \right. \right\rangle \right) + A_n \left( \left\langle T_{ym} \left| \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_{q0} * \frac{\partial J_{xn}}{\partial x} \right] \right| \right\rangle + \left\langle \tilde{T}_{ym} \left| \tilde{Z}_d^{yx} \tilde{J}_{xn} \right. \right\rangle \right) \\ & = - \left\langle T_{ym} \left| -j\omega \mu G_{A0}^{yy} * J_{ys} + \frac{1}{j\omega \epsilon} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ G_{q0} * \left( \frac{\partial J_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial J_{ys}}{\partial y} \right) \right] \right\} \right| \right\rangle - \left\langle \tilde{T}_{ym} \left| \tilde{Z}_d^{yy} \tilde{J}_{ys} + \tilde{Z}_d^{yx} \tilde{J}_{xs} \right. \right\rangle, m=1\dots M \end{aligned} \quad (4.9.b)$$

Les fonctions de base et test peuvent être choisies de telle sorte que leur produit de convolution puisse être calculé analytiquement. Les intégrales dans le domaine spatial, initialement de dimension quatre, deviennent alors de dimension deux tout comme celles à calculer dans le domaine spectral.

La figure 4.4 et 4.5 représentent les fonctions de Green spatiales quasi-statiques et dynamiques respectivement pour les potentiels vecteur et scalaire. On constate que, lorsque la distance  $\rho$  augmente,  $G_{A0}^{xx}$  ( $G_{q0}$ ) devient négligeable devant  $G_{A,d}^{xx}$  ( $G_{q,d}$ ). Alors le phénomène oscillatoire des fonctions de Green quasi-statiques n'est plus critique. La décomposition des fonctions de Green est alors effectuée de telle sorte que les contributions des parties quasi-statiques restent négligeables pour des distances  $\rho$  supérieures à la longueur d'onde, alors que les contributions dynamiques sont négligeables pour  $k_\rho$  grand devant  $k_0$ . Dans le calcul numérique des différentes intégrales on pourra tenir compte de cette constatation.

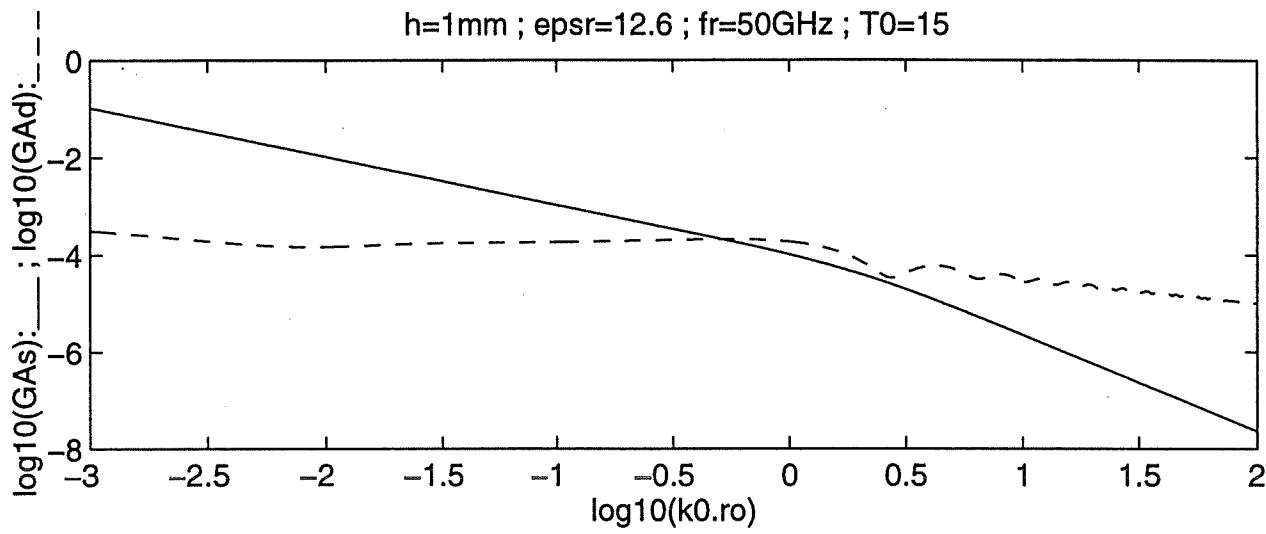


(a): Modules

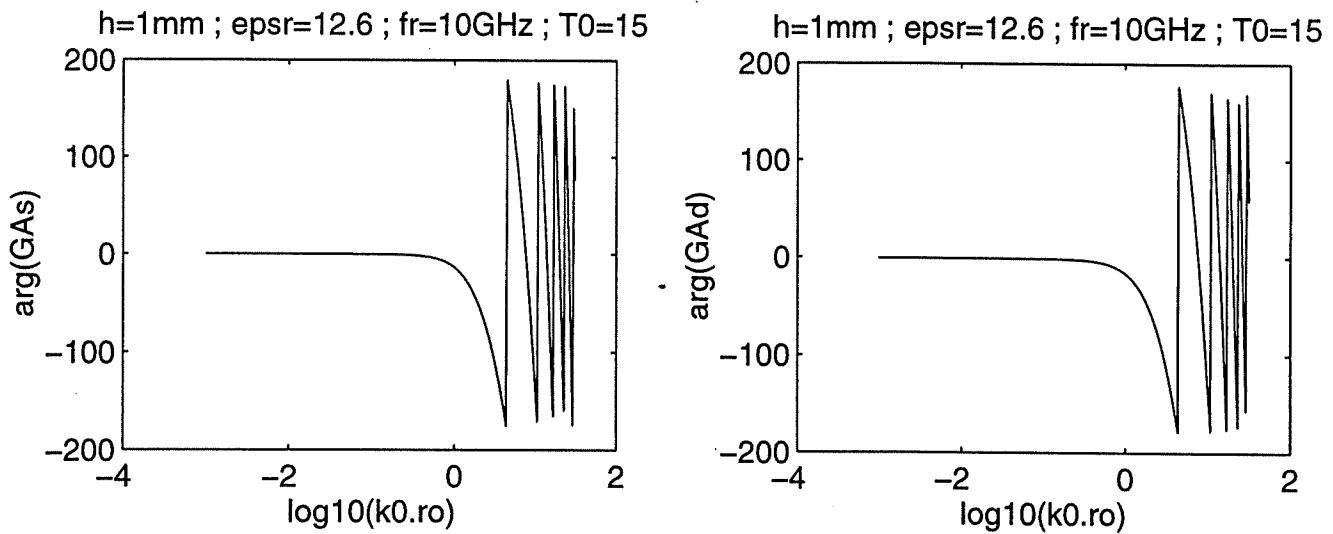


(b): Arguments

**Figure 4.4** Contributions statique et dynamique de la fonction de Green spatiale pour le potentiel scalaire  $G_q(\rho)$



(a): Modules



(b): Arguments

**Figure 4.5** Contributions statique et dynamique de la fonction de Green spatiale pour le potentiel vecteur  $G_A^{xx}(\rho)$

## ***CHAPITRE 5***

### ***CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES***

Dans ce rapport nous avons présenté une nouvelle formulation de la méthode des moments pour l'étude des structures micro-rubans. Cette formulation est basée sur la décomposition des fonctions de Green pour les potentiels vecteurs et scalaires en parties quasi-statiques et dynamiques.

Dans cette décomposition aucune approximation n'est faite. Cette décomposition est donc rigoureuse et permet le choix de fonctions de base et test présentant des discontinuités et décrivant au mieux l'allure des grandeurs physiques recherchées. La convergence du problème est alors améliorée comparativement à une formulation spectrale.

Pour dégager l'intérêt de cette nouvelle formulation par rapport à une formulation spatiale, basée sur la technique des images complexes, il serait intéressant d'étudier des structures dont les dimensions sont supérieures à la longueur d'onde. Ce cas se présente en particulier pour les structures couplées.

AKSUN et MITTRA ont étudié le rayonnement parasite d'une ligne microbande sous différentes conditions de fermetures [16], ils ont par la suite étudié le cas de deux lignes couplées [17]. Ces études sont basées sur le calcul de la fonction de Green spatiale par la technique des images complexes et à la fréquence  $f = 1 \text{ GHz}$ .

A la fréquence considérée la contribution des ondes de surface est négligeable, par conséquent la partie restante de la fonction de Green spectrale à approximer par

des fonctions exponentielles est bien lisse dans le nouveau contour  $C_1$ . L'erreur effectuée est alors très faible.

Lorsque la fréquence augmente l'erreur introduite par l'approximation à l'aide de la méthode de Prony devient importante. En effet, dans ce cas la fonction est approximer n'est plus bien lisse. Il serait intéressant de reprendre les études effectuées dans [16-17] à des fréquence plus élevées pour justifier l'erreur introduite par la technique des images complexes et mettre en évidence l'amélioration apportée par la nouvelle formulation mixte "Spatiale-Fréquentielle".

L'analyse d'autres structures plus complexes [18] par la détermination de leurs paramètres  $S$  et la comparaison à des résultats obtenus par d'autres méthodes permettra de justifier l'intérêt d'une telle formulation. Pour celà il est nécessaire de modéliser les différents types de sources et de charges pouvant être placées aux différents accès de la structure à étudier.

L'étude du problème dual, pour le cas de fentes, où l'inconnue à déterminer sera le courant magnétique n'a pas été abordé dans ce rapport. Le principe de la technique d'une formulation mixte reste le même, seule la décomposition en parties quasi-statique et dynamique est à étudier. Cette décomposition sera telle que la contribution quasi-statique de la fonction de Green sera déterminée rigoureusement dans le domaine spatial. La partie restante de la fonction de Green pourra être conservée dans le domaine spectral ou encore évaluée dans le domaine spatial par la technique des images complexes.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1-R. F. Harrington, Field Computation by Moment Methods. New York: MacMillan; Florida: Krieger Publishing, 1983.
- 2-J. R. Mozig, Integral Equation Technique, ch.3. pp. 133-213 In Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures. T. Itoh Ed. New York: J. Wiley & Sons, 1989
- 3-E. Yamashita and R. Mittra, Variational Method for the Analysis of Microstrip Line. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-16, pp.251-256, Ap. 1968.
- 4-R. Mittra and T. Itoh, A New Technique for the Analysis of the Dispersion Characteristic of Microstrip Lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-19, pp.47-56, Jan. 1971.
- 5-T. Itoh, Spectral Domain Immitance Approach for Dispersion Characteristics of Generalized Printed Transmission Lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-28, July. 1980.
- 6-T. Uwaro and T. Itoh, Spectral Domain Approach. ch.5. pp. 334-380 In Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures. T. Itoh Ed. New York: J. Wiley & Sons, 1989
- 7-A. Kouki, Application of the Spectral Domain Technique to Discontinuity and Spurious Radiation Problems in Microwave circuits. Ph.D. dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1991

- 8**-M. I. Aksun and R. Mittra, Choices of Expansion and Testing Functions for the Method of Moments Applied to a Class of Electromagnetic Problems. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-41, pp.503-509, Mar. 1993.
- 9**-D. G. Fang, J. J. Yang and Y. L. Delisle, Discrete Image Theory for Horizontal Electric Dipoles in a Multilayered Medium. IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. H, pp. 297-303, 1988
- 10**-Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang and G. E. Howard, A Closed-Form Spatial Green's Function for the Thick Microstrip Substrate. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-39, pp.588-592, Mar. 1991.
- 11**-Y. L. Chow, J. J. Yang and D. G. Fang, Complex Image Technique for Electric dipole in Homogeneous and Layered Dielectrics Between Two Ground Planes. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-40, 1992.
- 12**-M. I. Aksun and R. Mittra, Derivation of Closed-Form Green's Function for a General Microstrip Geometry. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-40, pp.2055-2062, Nov. 1992.
- 13**-R. W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers. New York: Dover, 1973, pp. 620-622.
- 14**-J.R. Mosig and T.K. Sarkar, Comparison of Quasi-static and Exact Electromagnetic Fields From a Horizontal Electric Dipole Above a Lossy Dielectric Backed by an Imperfect Ground Plane. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-34, pp 379-387, 1986
- 15**-W.C. Chew, Waves and Fields in Inhomogeneous media, New York: Van Nostrand Reinold, 1990.
- 16**-M. I. Aksun and R. Mittra, Estimation of Spurious Radiation from Microstrip Etches Using Closed-Form Green's Functions. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-40, pp.2063-2069, Nov. 1992.
- 17**-M. I. Aksun and R. Mittra, Spurious Radiation from Microstrip Interconnects. IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, Vol. 35, pp.148-158, May. 1993.
- 18**- R. Kipp, C.H. Chan, A.T. Yang and J.T. Yao, Simulation of High-Frequency Integrated circuits Incorporating Full-Wave Analysis of Microstrip Discontinuities. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. MTT-41, pp 848-854, 1993

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289919 1

École Polytechnique de Montréal  
C.P. 6079, Succ. Centre-ville  
Montréal (Québec)  
H3C 3A7