

Titre: Formulation généralisée du filtre de pondération de la prédition analytique
Title: analytic

Auteurs: Maher Hammami, André B. Turgeon, & David Bensoussan
Authors:

Date: 1992

Type: Rapport / Report

Référence: Hammami, M., Turgeon, A. B., & Bensoussan, D. (1992). Formulation généralisée du filtre de pondération de la prédition analytique. (Rapport technique n° EPM-RT-92-40). <https://publications.polymtl.ca/9857/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/9857/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-92-40
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

**DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ET DE GÉNIE INFORMATIQUE**

Section automatique

**FORMULATION GÉNÉRALISÉE
DU FILTRE DE PONDÉRATION
DE LA PRÉDICTION ANALYTIQUE**

Partie I : Cas monovariable

**Hammami, Maher
Turgeon, André-B.
Bensoussan, David**

EPM/RT-92-40

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, décembre 1992
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case Postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honorerais que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

27 JAN. 1993

Formulation généralisée du filtre de pondération de la prédiction analytique

Partie I: Cas monovariable

Par

Maher Hammami, André-B. Turgeon

Département de Génie Electrique

École Polytechnique de Montréal

P.O. Box 6079, station "A"

Montréal, Québec H3C 3A7

David Bensoussan

Département de Génie Electrique

École de Technologie supérieur

4750, Henri Julien

Montréal, Québec H2T 2C8

Brahim

Table des matières

Liste des figures	iii
Liste des tableaux	iv
Liste des symboles	v
Sommaire	1
1 Introduction	2
2 Formulation du problème	2
3 Compensation des retards: état de l'art	4
3.1 La commande optimale	4
3.2 Le prédicteur de Smith	5
3.3 Commande par modèle interne	5
3.4 Commande prédictive analytique	6
3.5 Commande prédictive analytique généralisée	7
4 Formulation directe du filtre de pondération $F_{rc}(z)$ de la prédition analytique	9
4.1 Système sans charge	9
4.1.1 Modèle du second ordre $r = 2$	9
4.1.2 Modèle du troisième ordre $r = 3$	13
4.1.3 Extension du modèle d'ordre r	20
4.2 Première formulation du filtre de pondération en présence de charge	26
4.2.1 Modèle du second ordre $r = 2$	26
4.2.2 Modèle du troisième ordre $r = 3$	29
4.2.3 Extension du modèle d'ordre r	32
4.3 Seconde formulation du filtre de pondération	35
4.3.1 Modèle du second ordre $r = 2$	35
4.3.2 Modèle du troisième ordre $r = 3$	36
4.3.3 Modèle d'ordre r	37
5 Résultats et Simulation	40
5.1 Stabilité du filtre de pondération	40
5.2 Performances dynamique et statique	41
5.2.1 Compensateur proportionnel	41
5.2.2 Comparaison PAG et CMI	41
5.3 Robustesse de la structure de la commande PAG	41
6 Conclusion	43
Bibliographie	44

Annexe	46
A Simulation	47
A.1 Stabilité du filtre de pondération	47
A.2 Comparaison entre PS, PA et PAG	50
A.3 Comparaison entre CMI et PAG	54
A.4 Robustesse de la structure de la commande PAG	65
A.5 Conception du filtre d'adaptation en continu	66
B Les principaux algorithmes de la commande des systèmes avec retard de type PID	68

Liste des figures

1 Structure de contrôle échantillonnée conventionnelle.	3
2 Structure de contrôle en domaine z conventionnelle.	3
3 Le prédicteur de Smith.	5
4 Structure de la commande par modèle interne.	5
5 Schéma fonctionnel du prédicteur analytique discret.	6
6 Le prédicteur analytique généralisé Wong et Seborg.	7
7 Structure du prédicteur analytique généralisé.	8
8 Le prédicteur analytique sans estimation de charge.	9
9 Le prédicteur analytique avec estimation de charge.	26
10 Représentation du prédicteur analytique généralisé.	35
11 Structure du prédicteur analytique généralisé multivariable.	40
12 Stabilité du filtre du premier ordre $\beta_1 = 0$	47
13 Stabilité du filtre du second ordre $\beta_2 = 0$	48
14 Stabilité du filtre du troisième ordre $\beta_3 = 0$	48
15 Stabilité du filtre du troisième ordre $\beta_3 = 0.5$	49
16 Stabilité du filtre du troisième ordre $\beta_3 = 0.99$	49
17 Modélisation parfaite effet de β_2	56
18 Modélisation imparfaite effet de β_2	57
19 Modélisation parfaite effet du zéro τ_p	58
20 Modélisation imparfaite effet du zéro τ_p	59
21 Modélisation parfaite effet du pôle τ_{1p}	60
22 Modélisation imparfaite effet du pôle τ_{1p}	61
23 Effet du retard θ_p	62
24 Effet de β_2	63
25 Effet de α	64
26	68
27	70
28	72

Liste des tableaux

1	Effet de β_2 en modélisation parfaite	50
2	Effet de β_2 en modélisation imparfaite	51
3	Effet de τ_p en modélisation parfaite	51
4	Effet de τ_p en modélisation imparfaite	52
5	Effet de τ_{1p} en modélisation parfaite	52
6	Effet de τ_{1p} en modélisation imparfaite	53
7	Effet du retard θ_p	53
8	Effet de β_2	54
9	Effet de α	55

Liste des symboles

$$A_{0i} : e^{-\frac{T}{\tau_{im}}} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

\hat{d} : estimé de la charge de la perturbation

e : signal d'erreur

C : fonction de transfert du contrôleur

G_t : fonction de transfert de la charge

M_0 : fonction de transfert du modèle sans retard

M : fonction de transfert du modèle

P : fonction de transfert du processus

P_0 : fonction de transfert du processus sans retard

H : bloqueur d'ordre zéro

K_I : constante intégrale pour l'estimation de charge

K_m : gain du régime permanent du modèle

ℓ : perturbation de la charge

p : partie entière du retard du processus en discret

p_0 : partie fractionnelle du retard du processus en discret

r : le niveau de consigne

T : période d'échantillonnage

u : sortie du contrôleur

y : sortie du processus

\bar{y} : sortie du processus en régime permanent

\bar{y}_m : sortie du modèle en régime permanent

y_m : sortie du modèle retardé

y_m^* : sortie du modèle non retardé

$\hat{y}_{k+\lambda}$: sortie du processus predite à λ périodes d'échantillonnage

$y_p(z)$: transformé de $\hat{y}_{k+\lambda}$

F_r : filtre de pondération sans estimation de charge ($r = 1, 2, \dots, r$)

F_{rc} : filtre de pondération avec estimation de charge

K_c : contrôleur proportionnel

Alphabet grec

θ_m : retard du modèle

θ_p : retard du processus

τ_{im} : constante du modèle ($i = 1, 2, \dots, r$)

λ : partie entière du retard du modèle

λ_0 : partie fractionnelle fractionnel du modèle

Sommaire

La mise au point du système de commande d'un système comportant des retards purs pose un problème particulièrement ardu. De fait, au niveau des systèmes continus, la présence du retard conduit à une équation non transcendante. Ce n'est qu'à l'aide de certaines modifications de la structure de commande que l'on peut contourner cette difficulté, et procéder à la commande des systèmes avec retard.

La méthode la plus utilisée consiste en une solution préconisée par Smith qui permet d'aborder le problème par l'égalisation des réponses du systèmes et de son modèle ce qui enrave l'effet du retard, sur l'équation caractéristique du système bouclé.

Dans cette ligne de pensée, une formulation plus large du filtre de pondération du prédicteur analytique généralisé "PAG" est développée ici pour le cas de système monovariable et, par la suite, une extension aux systèmes multivariables est proposée. De plus, une étude comparative avec d'autres compensateurs (prédicteur de Smith "PS", PAG et commande par modèle interne "CMI") est faite.

Cette nouvelle formulation du filtre de pondération est valable pour la prédiction en présence de perturbations dynamiques et de retard dans le système [?]. De la sorte, elle offre au PAG un degré additionnel de liberté comparativement à la CMI, et pour les commandes dont l'objectif en est un de mise au point à la fois du fonctionnement en suiveur et en régulateur.

1 Introduction

Les effets préjudiciables du retard sur la stabilité et sur les performances d'un système de commande sont bien connus, et c'est la raison pour laquelle la commande des procédés comportant des retards suscite un intérêt considérable. Un grand nombre de techniques permettant la compensation des retards ont été développées: Le prédicteur de Smith (PS) (Smith, [Smi57]), le prédicteur analytique (PA) (Moore et al., [MSM70]), le prédicteur analytique discret (PAD) (Doss et Moore, [DM82]) et la commande par modèle interne (CMI) (Garcia et Morari, [GM82], [GM5a], [GM5b]). Garcia et Morari [GM5a] ont démontré que les schémas de commande conventionnelle (prédicteur de Smith, commande optimale quadratique linéaire) peuvent être reformulés par une structure de commande par modèle interne (CMI).

Plusieurs simulations et comparaisons expérimentales entre le prédicteur de Smith et les prédicteurs analytiques ont été proposées: Meyer et al., ([MSW78], [MWS79]), Wong et Seborg [WS86], Hammami [Ham89]. Elles montrent que des deux techniques de compensation c'est celle du PA qui est la plus performante. Wong et Seborg [WS86] ont généralisé l'approche du prédicteur analytique et ont permis l'utilisation de n'importe quel type de contrôleur plutôt que la forme spécifique du contrôleur PI proposée par Moore et al.: connue comme celle du prédicteur analytique généralisé (PAG). Une comparaison théorique des diverses approches prédictives de type analytique (PA, PAD et PAG) avec la commande par modèle interne a été effectuée par Wellons et Edgar [WE87].

Plusieurs chercheurs (Meyer et al. [MSW76]; Kantor et Andres [KA80], Watanabe et al. [WII83], Turgeon et Hammami [TH90b] [TH90a]) ont relevé les limites du régulateur de Smith en présence de perturbations qui ne sont pas mesurables. Une faiblesse comparable a été identifiée dans la structure de la commande par modèle interne (Huang et Stephanopoulos, 1985).

Dans cet article, on examine la relation entre la commande par modèle interne et le prédicteur analytique généralisé. Notre contribution originale concerne une formulation plus globale du filtre de pondération dans la prédiction analytique. Ce filtre intègre bien, comme cas spéciaux, les versions de Wong et Seborg, de Wellons et Edgar ainsi que celle de la CMI.

2 Formulation du problème

On utilise la transformée en z pour la formulation de la fonction de transfert du processus: y représentant la sortie du processus u , l'entrée disponible, P , la fonction de transfert du processus d'ordre n avec un retard de p périodes d'échantillonnages et d , l'effet des perturbations sur la sortie du processus. Nous écrivons:

$$y(z) = P(z)u(z) + d(z)$$

$$\text{avec } P(z) = \frac{B_p^n(z)z^{-p}}{A_p^n(z)}$$

$$\begin{aligned} B_p^n(z) &= B_{p0}^n + B_{p1}^n z^{-1} + B_{p2}^n z^{-2} + \cdots + B_{pn}^n z^{-n} \\ A_p^n(z) &= 1 + A_{p1}^n z^{-1} + A_{p2}^n z^{-2} + \cdots + A_{pn}^n z^{-n} \end{aligned}$$

Notre but est de produire une commande stabilisatrice du système $P(z)$ en présence du retard p ($\theta = pT - p_0T$ $0 \leq p_0 < 1$). On supposera que l'effet de la commande demeure valide durant une période d'échantillonnage T .

On considère la structure de contrôle en temps discret donnée par la figure 1, avec le contrôleur $C(s)$ et $r(s)$, le niveau de consigne. Un bloqueur d'ordre zéro $H(s)$ est utilisé pour convertir le signal de contrôle numérique en une fonction constante par paliers.

Le processus est représenté par la fonction de transfert:

$$P(s) = P_0(s)e^{-\theta s}$$

$P_0(s)$ est la fonction rationnelle de transfert du processus sans retard et θ est le retard inhérent au système $P(s)$.

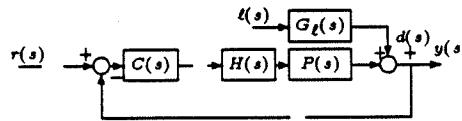


Figure 1: Structure de contrôle échantillonnée conventionnelle.

La figure 1 présente la forme hybride de la structure de commande; la forme équivalente exprimée en numérique est donnée à la figure 2. Le procédé a maintenant pour expression en z :

$$P(z) = P_0(z)z^{-p}$$

$P(z)$ est la fonction de transfert du processus sans retard; $C(z)$ le bloc de commande; le retard du processus représente un nombre multiple de la période d'échantillonnage, plus une partie fractionnelle (i.e $\theta = pT - p_0T$ $0 \leq p_0 < 1$).

Le bloqueur d'ordre zéro est inclus dans $P(z)$ suivant:

$$P(z) = Z[H(s)P(s)]$$

La perturbation $d(z)$ est la transformée en z de la charge et de sa fonction de transfert, soit:

$$d(z) = Z[\ell(s)G_\ell(s)]$$

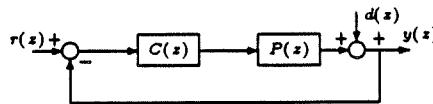


Figure 2: Structure de contrôle en domaine z conventionnelle.

La réponse en boucle fermé du système de commande est:

$$y(z) = \frac{C(z)P_0z^{-p}}{1 + C(z)P_0(z)z^{-p}}r(z) + \left[1 - \frac{C(z)P_0z^{-p}}{1 + C(z)P_0(z)z^{-p}}\right]d(z)$$

3 Compensation des retards: état de l'art

La compensation des effets du retard nécessite la prédition des effets de l'entrée sur la sortie du processus. Dans cette section, nous examinons les structures suivantes : la commande optimale, le prédicteur de Smith, la commande par modèle interne, la commande prédictive analytique, puis nous procérons à une étude comparative des diverses techniques.

3.1 La commande optimale

La théorie de la commande optimale appliquée aux systèmes avec retards purs est bien développée; en particulier la commande quadratique linéaire (Koivo, Koivo, [RL78]). Un premier travail en commande quadratique optimale avec contre-réaction pour les systèmes linéaires avec retards traités par les variables d'état a été présenté par Krasovskii (1962, 1963) il y a plus de vingt ans. Fuller (1968) a élaboré la commande optimale avec contre-réaction pour les systèmes linéaires invariants et monovariables ayant un retard pur à l'entrée. Ross et Flugge-Lotz [RF69] ont obtenu une loi de commande optimale avec contre-réaction et à horizon borné et infini ensuite, Ross (1969) a étendu ces résultats lorsque les retards dans l'état sont multiples. Le problème des retards multiples dans les systèmes linéaires a été considéré par Oguztoreli (1966) qui a dérivé des théorèmes d'existence et des conditions nécessaires pour la réalisation de la commande optimale. Mee (1973) a étendu le travail de Fuller pour les systèmes linéaires avec des entrées multiples et avec des retards différents à chaque entrée. Soliman et Ray (1970, 1971) ont traité des conditions nécessaires d'optimalité pour les systèmes à entrées multiples non-linéaires avec des retards sur les états et les entrées. De même, Soliman et Ray ont montré que la commande optimale des systèmes multivariables traités par des fonctions de transfert introduit des retards par transformation du modèle à un ensemble des équations différentielles ordinaires (Soliman et Ray, 1972a). Il considère les problèmes quadratiques linéaires multivariables avec des retards à la fois sur les états et sur la commande (Soliman et Ray, 1972b).

La question de la commandabilité des systèmes linéaires avec retard et ayant des entrées constantes par palier a été considéré par Thowsen et Perkins [TP76]. La sensibilité de la commande optimale des modèles à variables d'états face aux perturbations ou aux erreurs sur les paramètres du système a été considéré par Koda [Kod81] pour une classe particulière représentable par des équations différentielles.

L'application de la commande optimale pour le contrôle des systèmes multivariables contenant des retards est fort laborieuse compte tenu des difficultés de calcul inhérentes à la conception du contrôleur.

Il en est de même pour l'implantation pratique qui exige un effort de calcul considérable (Mee, 1973). Un autre inconvénient est, que l'évolution de la dynamique du système est souvent imprévue, ce qui complique considérablement l'implantation. Puis ce type de conception n'est pas facile pour des ajustements "on-line". Pour ces raisons, la philosophie de la commande optimale n'est pas très répandue dans la pratique industrielle; malgré les grands efforts de développement consacré par l'industrie chimique.

Ainsi, il est souhaitable de développer une approche alternative plus simple dans sa conception, son implantation et ses ajustements "on-line". C'est dans cette direction que nous menons ces travaux de recherche.

3.2 Le prédicteur de Smith

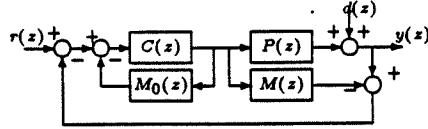


Figure 3: Le prédicteur de Smith.

Le compensateur de retard le plus connu est le prédicteur préconisé par Smith [Smi57]. Un grand nombre d'études expérimentales et de simulations (Lupfer et Oglesby [LO62], Parasad et Krishnaswamy [PK75], Meyer et al. [MSW76] [MSW78] [MWS79], Alevakis et Seborg [AS73]) ont permis de comparer le prédicteur de Smith avec les contrôleurs PI et PID conventionnels et de montrer les importantes améliorations que représentent la solution de Smith; spécialement, dans la réponse en suiveur. D'autres études ont examiné la sensibilité de ce prédicteur face à des erreurs de modélisation du retard et, ont suggéré des améliorations (Palmor [Pal80], Palmor et Shinnar [PS78] [PS81], Palmor et Halevi [PH83], Horowitz [Hor83]).

Le prédicteur de Smith [Smi57], donné à la figure 3, utilise une réplique du modèle $M(z)$, afin de prédire l'effet des actions de contrôle. Lorsque $M(z) = P(z)$, le contrôleur représente la réponse du modèle du processus sans retard: $M_0(z)$. Ce résultat inhibe l'effet du retard dans l'équation caractéristique et permet d'obtenir un contrôleur à gain plus élevé: donc plus de précision, de rapidité et de sensibilité.

La réponse en boucle fermée de la figure 3 (sans erreur de modélisation) est:

$$y(z) = \frac{C(z)P_0(z)z^{-p}}{1 + C(z)P_0(z)}r(z) + \left[1 - \frac{C(z)P_0(z)z^{-p}}{1 + C(z)P_0(z)}\right]d(z)$$

3.3 Commande par modèle interne

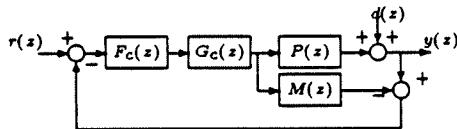


Figure 4: Structure de la commande par modèle interne.

La structure de base de la commande CMI [GM82] est donnée à la figure 4. $G_c(z)$ y représente le contrôleur, $F_c(z)$ le filtre de robustesse et $r(z)$ le niveau de consigne.

La compensation du retard et la prédiction de la sortie sont réalisées implicitement par la CMI. La structure CMI ne contient pas explicitement la contre réaction interne du modèle prédictif comme dans le cas du prédicteur de Smith. La CMI utilise le contrôleur $G_c(z)$, qui est idéalement une approximation de l'inverse du modèle du processus pour l'implantation d'une commande parfaite. De plus, les effets des perturbations du processus et leurs estimés sont traités par le contrôleur.

La réponse en boucle fermée est:

$$y(z) = d(z) + \frac{P(z)G_c(z)F_c(z)}{1 + G_c(z)F_c(z)[P(z) - M(z)]}(r(z) - d(z))$$

avec une modélisation parfaite (et avec $F_c(z) = 1$), $G_c(z)$ se doit être l'inverse du modèle de processus. Les problèmes engendrés par l'instabilité de l'inverse du modèle du processus seront considéré comme suit: le modèle du processus factorisé s'exprime par:

$$M(z) = M_+(z)M_-(z)$$

où $M_+(z)$ contient le retard et la partie de la fonction de transfert qui est à phase non minimale et n'a pas d'inverse. Le contrôleur $G_c(z)$ visera donc à l'inversion de la partie à phase minimale $[M(z)]^{-1}$:

$$G_c(z) = [M_-(z)]^{-1}$$

Une telle factorisation est toujours possible pour les systèmes dans l'espace H_∞ [Fra87].

Zafiriou et Morari [ZM85] et Garcia et Morari [GM5a] [GM5b] donnent plus d'information sur la conception du contrôleur CMI dans ce cas.

Incidentement, une autre contribution qui va dans le même sens que la commande par modèle interne a été préconisée par Brosilow [Bro79] avec la terminologie quelques peu différents, il propose de développer une commande par inférence qui dans son schéma de base est similaire à l'approche CMI.

Le rôle du filtre $F_c(z)$ (de premier ordre) est d'améliorer la robustesse du système, c'est à dire la performance de la commande en présence d'incertitude sur la modélisation du système et de la perturbation.

3.4 Commande prédictive analytique

Le prédicteur analytique (Moore et al., [MSM70]) prévoit la compensation des retards par l'adjonction d'un filtre de pondération dans la chaîne de contre-réaction du prédicteur. Ce filtre pondère l'erreur entre la sortie du système réel et, celle du système modélisé avec son retard et en présence de perturbations par rapport à la sortie du modèle sans retard, et ce, pour tenir compte du fait qu'ils sont décalés dans le temps. Moore a donné l'expression de ce filtre en temps continu pour un modèle du premier ordre avec retard, avec une correction additionnelle d'une période d'échantillonnage et demie dans la prédiction.

Doss et Moore [DM82] ont proposé un prédicteur analytique discret "PAD" comme à la figure 5.

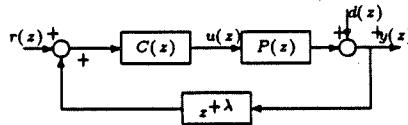


Figure 5: Schéma fonctionnel du prédicteur analytique discret.

Le prédicteur de sortie y est représenté par $z^{+\lambda}$, avec λ le retard du modèle du processus, et $C(z)$ est la compensation de la boucle.

Dans cette proposition, le PAD utilise un système du second ordre à temps discret tenant compte de la plus récente estimation de la charge \hat{d}_k et prédit récursivement la sortie future \hat{y}_k .

$$\hat{y}_k = -A_1^2 y_{k-1} - A_2^2 y_{k-2} + B_0^2 u_{k-\lambda} + B_1^2 u_{k-\lambda-1} + B_2^2 u_{k-\lambda-2} +$$

$$(B_0^2 + B_1^2 + B_2^2) \hat{d}_{k-1} \quad (1)$$

$$\hat{d}_k = \hat{d}_{k-1} + K_I(y_k - \hat{y}_k) \quad (2)$$

$$u_k = K_c(r_k - \hat{y}_{k+\lambda} - \hat{d}_k)$$

Pour cette prédition analytique, le PAD traite l'estimé de la charge \hat{d}_k par un modèle du second ordre. Le schéma d'estimation de la charge contient un paramètre K_I qui est utilisé afin d'ajuster la sensibilité de l'erreur ($y - \hat{y}_k$) (équation 2).

3.5 Commande prédictive analytique généralisée

Dans leur analyse du prédicteur analytique, Wong et Seborg [WS86] préconisent la structure de commande représentée à la figure 6. Ils considèrent que le retard est un multiple entier de la période d'échantillonnage et ils ne tiennent pas compte de la correction additionnelle d'une période d'échantillonnage et demie comme le fait Moore.

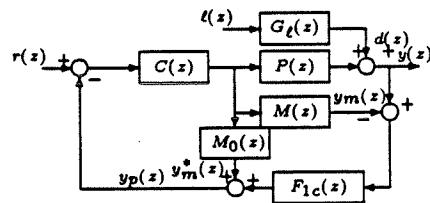


Figure 6: Le prédicteur analytique généralisé Wong et Seborg.

Wong et Seborg [WS86] montrent que le prédicteur du premier ordre et l'estimateur de la charge peuvent être combinés (figure 6):

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_{1c}(z)(y(z) - y_m(z))$$

$F_{1c}(z)$ est un filtre de pondération temporelle dont le but est de pondérer l'effet de l'erreur d'égalisation ($y(t) - y_m(t)$) par rapport à $y_m^*(t)$. $y_p(z)$ représente le signal de rétroaction, $y(z)$ est la sortie actuelle du système. Nous avons:

$$\begin{aligned} y_m(z) &= M(z)u(z) \\ y_m^*(z) &= M_0(z)u(z) \\ F_{1c}(z) &= A_{01}^\lambda + (1 - A_{01}^\lambda) \frac{1 - A_{01}z^{-1}}{1 - A_{01}} \\ &= F_1(z) + (1 - F_1(1)) \frac{1 - A_{01}z^{-1}}{1 - A_{01}} \end{aligned}$$

avec $F_1(z) = e^{-\frac{\lambda T}{T_m}} = (A_{01})^\lambda = A_{01}^\lambda$ et $1 - F_1(1) = \gamma_1$.

Le PAG peut recevoir aussi la forme de la figure 7 qui est une forme CMI améliorée:

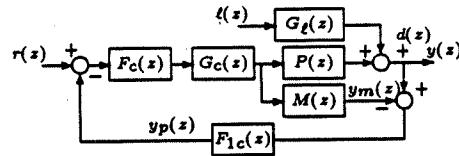


Figure 7: Structure du prédicteur analytique généralisé.

La réponse en boucle fermée du PAG devient:

$$y(z) = d(z) + \frac{P(z)G_c(z)F_c(z)[r(z) - F_{1c}(z)d(z)]}{1 + G_c(z)F_c(z)F_{1c}(z)[P(z) - M(z)]}$$

En comparant la structure PAG avec celle de la CMI, on constate que la seule différence qui existe entre les deux schémas de contrôle (figures 4 et 7) réside en l'introduction du filtre de pondération $F_{1c}(z)$ de l'erreur d'égalisation dans la chaîne de rétroaction. De fait, le PAG possède les mêmes propriétés que la CMI: pour une modélisation parfaite et une compensation idéale, $G_c(z) = [M(z)]^{-1}$ (Garcia et Morari, [GM82]).

Wellons et Edgar [WE87] ont donné la solution du PAG discret pour un modèle

$$M(z) = \frac{B^2(z)}{A^2(z)} z^{-\lambda} = \frac{B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}{1 - A_1 z^{-1} - A_2 z^{-2}} z^{-\lambda}$$

du second ordre. Le filtre de pondération $F_{2c}(z)$ est donné par des équations de récurrence:

$$\begin{aligned} F_{2c}(z) &= F_2(z) + (1 - F_2(1))F_\ell(z) \frac{A^2(z)}{A^2(1)} & (3) \\ F_2(z) &= \bar{A}_\lambda + A_2 \bar{A}_{\lambda-1} z^{-1} \\ F_\ell(z) &= \frac{1 - \beta_{20}}{1 - \beta_{20} z^{-1}}; \quad \beta_{20} = 1 - K_I(B_1 + B_2) \end{aligned}$$

avec $\bar{A}_0 = 1$, $\bar{A}_1 = A_1$

$$\bar{A}_i = A_1 \bar{A}_{i-1} + A_2 \bar{A}_{i-2} \quad \text{pour } i \geq 2$$

et λ l'horizon du prédicteur.

Dans ce travail, nous présentons la forme analytique exacte du filtre $F_{2c}(z)$ sans passer par les équations de récurrence comme l'ont fait Wellons et Edgar. De plus, nous montrons que cette expression du filtre est généralisable pour les systèmes d'ordre supérieur.

4 Formulation directe du filtre de pondération $F_{rc}(z)$ de la prédiction analytique

4.1 Système sans charge

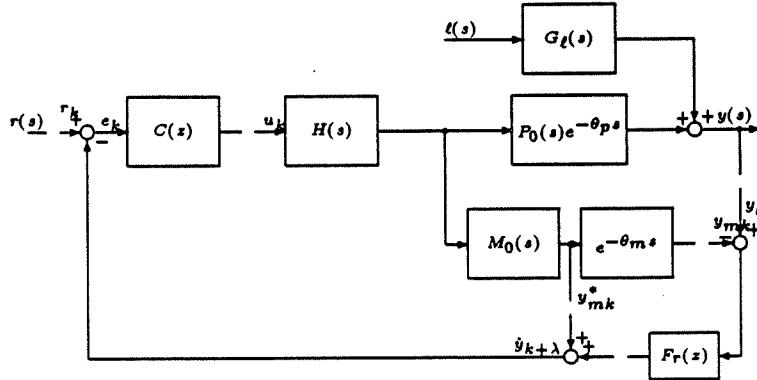


Figure 8: Le prédicteur analytique sans estimation de charge.

Dans notre approche, la compensation du retard peut être réalisée par un modèle de prédiction par lequel les sorties prédites aux instants d'échantillonnage sont produites à partir de la valeur effective de la sortie et des valeurs présentes et passées de l'entrée (figure 8). C'est d'ailleurs la solution, préconisée par Moore [MSM70], qui constitue la : **prédiction analytique**.

Nous voulons présenter ici, une nouvelle expression du filtre de pondération $F_r(z)$ (Hammami et al. [HTB91b] [HTB91a]) de la prédiction analytique suivant l'esprit de Moore. Cette formulation pourra tenir compte d'une structure du système plus évoluée. En particulier, le modèle permettra de représenter des systèmes dont les réponses indicielles possèdent des dépassemens; ce qui est fréquent dans la pratique industrielle.

Rappelons que le prédicteur analytique est, dans sa forme originale, basé sur un modèle $M_0(s)$ du premier ordre. On sait que ce type de modèle est largement employé pour la représentation de système dont la réponse indicuelle est apériodique et monotone en présence de retard pur (annexe B).

4.1.1 Modèle du second ordre $r = 2$

Soit un modèle du second ordre:

$$M(s) = \frac{K_m(1 + \tau_m s)e^{-\theta_m s}}{(1 + \tau_{1m}s)(1 + \tau_{2m}s)} = M_0(s)e^{-\theta_m s}$$

où K_m est le gain du régime permanent; τ_{1m} , τ_{2m} et τ_m sont les constantes de temps et θ_m , le retard.

Le retard du modèle prédictif θ_m de la figure (8) est défini par:

$$\theta_m = \lambda T - \lambda_0 T, \quad 0 \leq \lambda_0 < 1$$

où λ représente la partie entière du retard, λ_0 : la partie fractionnelle et, T : le temps d'échantillonnage. Dans la situation idéale, où le modèle est parfait et en absence de perturbation, on a:

$$y_{mk} = y_k.$$

Donc, le signal d'entrée du contrôleur est:

$$e_k = r_k - y_{mk}^*.$$

L'action du contrôleur est dictée par y_{mk}^* , la sortie du modèle sans retard, plutôt que par celle du processus effectif y_k . Dans la situation expérimentale, $y_{mk} \neq y_k$ et nous aurons en tenant compte du modèle avec le bloqueur:

$$M(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} M_0(s) e^{-\theta_m s} \right\}$$

D'où la fonction de transfert en temps discret:

$$M(z) = \frac{B_0^2 z^2 + B_1^2 z + B_2^2}{A_0^2 z^2 + A_1^2 z + A_2^2} z^{-\lambda} \quad (4)$$

avec:

$$B_0^2 = K_m \{1 - K_1^2 - K_2^2\}$$

$$B_1^2 = K_m \{-(A_{01} + A_{02}) + K_1^2(1 + A_{02}) + K_2^2(1 + A_{01})\}$$

$$B_2^2 = (-1)^1 K_m \{K_1^2 A_{02} + K_2^2 A_{01} - A_{01} A_{02}\}$$

$$A_0^2 = (-1)^0$$

$$A_1^2 = (-1)^1 [A_{01} + A_{02}] \quad (5)$$

$$A_2^2 = (-1)^2 A_{01} A_{02} \quad (6)$$

et

$$K_1^2 = \frac{\tau_{1m} - \tau_m}{\tau_{1m} - \tau_{2m}} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{1m}}}$$

$$K_2^2 = \frac{\tau_{2m} - \tau_m}{\tau_{2m} - \tau_{1m}} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{2m}}}$$

Si le bloqueur d'ordre zéro de la figure 8 est employé, $u(t)$ est une fonction variant par paliers, et l'équation aux différences du modèle devient:

$$y_{mk}^* + A_1^2 y_{mk-1}^* + A_2^2 y_{mk-2}^* = B_0^2 u_k + B_1^2 u_{k-1} + B_2^2 u_{k-2} \quad (7)$$

$$y_{mk} + A_1^2 y_{mk-1} + A_2^2 y_{mk-2} = B_0^2 u_{k-\lambda} + B_1^2 u_{k-(\lambda+1)} + B_2^2 u_{k-(\lambda+2)} \quad (8)$$

Les prédictions futures des sorties s'obtiennent récursivement par la résolution de l'équation de base d'un système du second ordre (4):

$$\hat{y}_{k+2} + A_1^2 \hat{y}_{k+1} + A_2^2 \hat{y}_k = B_0^2 u_{k-(\lambda-2)} + B_1^2 u_{k-(\lambda-1)} + B_2^2 u_{k-\lambda} \quad (9)$$

L'interaction des équations (9), (6) et (5) permet de déduire:

$$\hat{y}_{k+1} - (A_{01} + A_{02})\hat{y}_k + A_{01}A_{02}y_{k-1} = B_0^2u_{k-(\lambda-1)} + B_1^2u_{k-\lambda} + B_2^2u_{k-\lambda-1} \quad (10)$$

avec

$$A_{01} = e^{-(\frac{T}{T_{1m}})}, A_{02} = e^{-(\frac{T}{T_{2m}})} \quad (11)$$

Cette dernière équation peut être réécrite comme suit:

$$\hat{y}_{k+1} - A_{01}\hat{y}_k = A_{02}(\hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}) + B_0^2u_{k-(\lambda-1)} + B_1^2u_{k-\lambda} + B_2^2u_{k-\lambda-1} \quad (12)$$

Les prédictions futures des sorties s'obtiennent donc récursivement par la résolution de l'équation de base d'un système du second ordre (12). Posons: $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}$

$$\begin{aligned} (A_{02}^{\lambda-1}) \quad (\hat{w}_{k+1}) &= A_{02}\hat{w}_k + \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-\lambda+1-i} \\ (A_{02}^{\lambda-2}) \quad (\hat{w}_{k+2}) &= A_{02}\hat{w}_{k+1} + \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-\lambda+2-i} \\ \vdots &\quad \vdots & \vdots \\ (A_{02}^0) \quad (\hat{w}_{k+\lambda}) &= A_{02}\hat{w}_{k+\lambda-1} + \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-i} \end{aligned} \quad (13)$$

Le regroupement de cette série d'équations produit:

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k+\lambda} &= A_{02}^\lambda \hat{w}_k + \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-i} \\ &+ A_{02} \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-i-1} \\ &\vdots \\ &+ A_{02}^{\lambda-1} \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-\lambda+1-i} \end{aligned} \quad (14)$$

Utilisant $\hat{y}_k - A_{01}y_{k-1} = \hat{w}_k$, il vient:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} - A_{01}\hat{y}_{k+\lambda-1} &= A_{02}^\lambda(\hat{y}_k - A_{01}\hat{y}_{k-1}) \\ &+ \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-i} \\ &+ A_{02} \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-i-1} \\ &\vdots \\ &+ A_{02}^{\lambda-1} \sum_{i=0}^2 B_i^2u_{k-\lambda+1-i} \end{aligned} \quad (15)$$

De l'équation (7) et (11) il vient que:

$$\underbrace{y_{mk}^* - A_{01}y_{mk-1}^*}_{v_{mk}^*} - A_{02} \underbrace{(y_{mk-1}^* - A_{01}y_{mk-2}^*)}_{v_{mk-1}^*} = B_0^2u_k + B_1^2u_{k-1} + B_2^2u_{k-2} \quad (16)$$

Posons $v_{mk}^* = y_{mk}^* - A_{01}y_{mk-1}^*$

$$\begin{aligned} (A_{02}^0) \quad (v_{mk}^* - A_{02}v_{mk-1}^*) &= B_0^2u_k + B_1^2u_{k-1} + B_2^2u_{k-2} \\ (A_{02}^1) \quad (v_{mk-1}^* - A_{02}v_{mk-2}^*) &= B_0^2u_{k-1} + B_1^2u_{k-2} + B_2^2u_{k-3} \\ \vdots &\quad \vdots & \vdots \\ (A_{02}^{\lambda-1}) \quad (v_{mk-(\lambda-1)}^* - A_{02}v_{mk-\lambda}^*) &= B_0^2u_{k-\lambda+1} + B_1^2u_{k-\lambda} \\ &+ B_2^2u_{k-\lambda-1} \end{aligned} \quad (17)$$

L'addition des équations (17) produit:

$$\begin{aligned} v_{mk}^* - A_{02}^\lambda v_{mk-\lambda}^* &= \sum_{i=0}^2 B_i^2 u_{k-i} + A_{02} \sum_{i=0}^2 B_i^2 u_{k-i-1} + \cdots + A_{02}^{\lambda-1} \sum_{i=0}^2 B_i^2 u_{k-i-(\lambda-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{\lambda-1} A_{02}^i [B_0^2 u_{k-i} + B_1^2 u_{k-i-1} + B_2^2 u_{k-i-2}] \end{aligned} \quad (18)$$

La substitution de l'équation (15) dans (18) donne:

$$\hat{y}_{k+\lambda} - A_{01} \hat{y}_{k+\lambda-1} = A_{02}^\lambda (\hat{y}_k - A_{01} y_{k-1}) + v_{mk}^* - A_{02}^\lambda v_{mk-\lambda}^* \quad (19)$$

En remplaçant $v_{mk}^* = y_{mk}^* - A_{01} y_{mk-1}^*$ il vient:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} - A_{01} \hat{y}_{k+\lambda-1} &= A_{02}^\lambda (\hat{y}_k - A_{01} y_{k-1}) + (y_{mk}^* - A_{01} y_{mk-1}^*) \\ &\quad - A_{02}^\lambda (y_{mk-\lambda}^* - A_{01} y_{mk-\lambda-1}^*) \end{aligned} \quad (20)$$

Comme y_m^* et y_m ont les mêmes conditions initiales on a:

$$y_{mk} = y_{mk-\lambda}^*$$

D'après l'équation (10):

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} - A_{02} \hat{y}_k &= A_{01} (\hat{y}_k - A_{02} y_{k-1}) + B_0^2 u_{k-\lambda+1} + B_1^2 u_{k-\lambda} + \\ &\quad B_2^2 u_{k-\lambda-1} \end{aligned}$$

Un raisonnement similaire axé sur les équations (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20) et qui substitue A_{01} par A_{02} produit:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} - A_{02} \hat{y}_{k+\lambda-1} &= A_{01}^\lambda (\hat{y}_k - A_{02} y_{k-1}) + (y_{mk}^* - A_{02} y_{mk-1}^*) \\ &\quad - A_{01}^\lambda (y_{mk-\lambda}^* - A_{02} y_{mk-\lambda-1}^*) \end{aligned} \quad (21)$$

L'addition des équations $-A_{02} \times (20)$ avec $A_{01} \times (21)$ donne:

$$\hat{y}_{k+\lambda} = y_{mk}^* + \left[\frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} (y_k - y_{mk}) + \frac{A_{01} A_{02}^{\lambda+1} - A_{02} A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} (y_{k-1} - y_{mk-1}) \right] \quad (22)$$

L'équation (22) constitue un algorithme généralisé qui permet de considérer les modèles de second ordre. Cet algorithme peut être exprimée selon la fonction de transfert en z qui suit:

$y_p(z) = Z(\hat{y}_{k+\lambda}), y_m^*(z) = Z(y_{mk}^*), y(z) = Z(y_k), y_m(z) = Z(y_{mk})$
de l'équation (22), on a:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_2(z)(y(z) - y_m(z))$$

D'où l'expression du filtre $F_2(z)$ pour le second ordre:

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01} A_{02}^{\lambda+1} - A_{02} A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} z^{-1} \\ &= \frac{A_{01}(1 - A_{02}z^{-1})[F_1(z)] - A_{02}(1 - A_{01}z^{-1})[\bar{F}_1(z)]}{A_{01} - A_{02}} \end{aligned} \quad (23)$$

avec $[F_1(z)] = A_{01}^\lambda$ et $[\bar{F}_1(z)] = A_{02}^\lambda$

Remarque:

- Si le retard fractionnel λ_0 est nul: $B_0^2 = 0$.
- Si $\tau_{2m} = 0$: $A_{02} = 0$ (le modèle est du premier ordre), nous retrouvons là les résultats connus de $F_2(z) = F_1(z) = A_{01}^\lambda$ (Moore [MSM70], Wong-Seborg [WS86]).
- Si les pôles du modèle sont conjugués complexes:

$$\begin{aligned} A_{01} &= e^{-T(\alpha+j\omega)} \\ A_{02} &= e^{-T(\alpha-j\omega)} \end{aligned}$$

De l'équation (23), il vient:

$$F_2(z) = e^{-T\lambda\alpha} \frac{\sin[T(\lambda+1)\omega]}{\sin[T\omega]} - e^{-T(\lambda+1)\alpha} \frac{\sin[T\lambda\omega]}{\sin[T\omega]} z^{-1}$$

avec $\alpha = \xi\omega_n$ et $\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ sont les paramètres du modèle du second ordre:

$$M(s) = \frac{K_m\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- L'équation (23) devient:

$$F_2(z) = A_{01}^\lambda \sum_{i=0}^{\lambda} \left(\frac{A_{02}}{A_{01}} \right)^i - A_{02} A_{01}^\lambda \sum_{i=0}^{\lambda-1} \left(\frac{A_{02}}{A_{01}} \right)^i \quad (24)$$

Si $A_{01} = A_{02}$, l'équation (24) devient:

$$F_2(z) = (\lambda+1)A_{01}^\lambda - \lambda A_{01}^{(\lambda+1)} z^{-1}$$

- En général $F_2(z) \neq 1$, et les deux estimés y_k et y_k^* ne sont identiques que pour le cas spécial où le modèle est parfait et en absence de perturbation. Dans ces conditions,

$$y_{mk} = y_k$$

et

$$\hat{y}_{k+\lambda} = y_{mk}^*$$

Dans ce cas, il n'y a pas d'erreur $y_k - y_{mk}$ et la chaîne de retour par le bloc $F_2(z)$ est sans effet.

4.1.2 Modèle du troisième ordre $r = 3$

Soit un modèle du troisième ordre:

$$M(s) = \frac{K_m(1 + \tau_m s)e^{-\theta_m s}}{(1 + \tau_{1m}s)(1 + \tau_{2m}s)(1 + \tau_{3m}s)} = M_0(s)e^{-\theta_m s}$$

où K_m est le gain du régime permanent, τ_{1m} , τ_{2m} , τ_{3m} et τ_m sont les constantes de temps et θ_m est le retard.

Le retard du modèle prédictif θ_m de la figure 8 est défini comme suit:

$$\theta_m = \lambda T - \lambda_0 T, \quad 0 \leq \lambda_0 < 1$$

où λ représente le retard discret entier du modèle, λ_0 le retard discret fractionnel et T le temps d'échantillonnage.

Tenant compte du modèle avec le bloqueur d'ordre zéro, il vient:

$$M(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} M_0(s) e^{-\theta_m s} \right\}$$

D'où la fonction de transfert en temps discret:

$$M(z) = \frac{B_0^3 z^3 + B_1^3 z^2 + B_2^3 z + B_3}{z^3 + A_1^3 z^2 + A_2^3 z + A_3^3} z^{-\lambda} \quad (25)$$

avec

$$\begin{aligned} B_0^3 &= K_m (1 - K_1^3 - K_2^3 - K_3^3) \\ B_1^3 &= K_m [-(A_{01} + A_{02} + A_{03}) + (1 + A_{02} + A_{03})K_1^3 \\ &\quad + (1 + A_{01} + A_{03})K_2^3 + (1 + A_{01} + A_{02})K_3^3] \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} B_2^3 &= K_m [A_{01}A_{02} + A_{01}A_{03} + A_{02}A_{03} - (A_{02} + A_{03} + A_{02}A_{03})K_1^3 \\ &\quad - (A_{01} + A_{03} + A_{01}A_{03})K_2^3 - (A_{01} + A_{02} + A_{01}A_{02})K_3^3] \end{aligned}$$

$$B_3^3 = K_m [-A_{01}A_{02}A_{03} + A_{02}A_{03}K_1^3 + A_{01}A_{03}K_2^3 + A_{01}A_{02}K_3^3]$$

$$A_1^3 = -(A_{01} + A_{02} + A_{03}) \quad (26)$$

$$A_2^3 = A_{01}A_{02} + A_{01}A_{03} + A_{02}A_{03} \quad (27)$$

$$A_3^3 = -A_{01}A_{02}A_{03} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A_{01} &= e^{-\frac{T}{\tau_{1m}}} \\ A_{02} &= e^{-\frac{T}{\tau_{2m}}} \\ A_{03} &= e^{-\frac{T}{\tau_{3m}}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_1^3 &= \frac{\tau_{1m}}{\tau_{1m} - \tau_{2m}} \frac{\tau_{1m} - \tau_m}{\tau_{1m} - \tau_{3m}} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{1m}}} \\ K_2^3 &= \frac{\tau_{2m}}{\tau_{2m} - \tau_{1m}} \frac{\tau_{2m} - \tau_m}{\tau_{2m} - \tau_{3m}} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{2m}}} \\ K_3^3 &= \frac{\tau_{3m}}{\tau_{3m} - \tau_{1m}} \frac{\tau_{3m} - \tau_m}{\tau_{3m} - \tau_{2m}} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{3m}}} \end{aligned}$$

Si le bloqueur d'ordre zéro de la figure 8 est employé, $u(t)$ est une fonction variant par paliers, et l'équation aux différences du modèle devient:

$$y_{mk}^* + A_1^3 y_{mk-1}^* + A_2^3 y_{mk-2}^* + A_3^3 y_{mk-3}^* = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \quad (29)$$

$$y_{mk} + A_1^3 y_{mk-1} + A_2^3 y_{mk-2} + A_3^3 y_{mk-3} = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-\lambda-i} \quad (30)$$

Les prédictions futures des sorties s'obtiennent récursivement par la résolution de l'équation de base d'un système du troisième ordre (25):

$$\hat{y}_{k+3} + A_1^3 \hat{y}_{k+2} + A_2^3 \hat{y}_{k+1} + A_3^3 \hat{y}_k = B_0^3 u_{k+3-\lambda} + B_1^3 u_{k+2-\lambda} + B_2^3 u_{k+1-\lambda} + B_3^3 u_{k-\lambda} \quad (31)$$

L'interaction des équations (31), (26), (27) et (28) procure:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} - (A_{01} + A_{02} + A_{03}) \hat{y}_k + (A_{01} A_{02} + A_{01} A_{03} + A_{02} A_{03}) y_{k-1} \\ - A_{01} A_{02} A_{03} y_{k-2} = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i} \end{aligned} \quad (32)$$

De l'équation (32), on a:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} - A_{03} \hat{y}_k - (A_{01} + A_{02}) \hat{y}_k + A_{01} A_{02} (y_{k-1} - A_{03} y_{k-2}) \\ + A_{03} (A_{01} + A_{02}) y_{k-1} = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i} \end{aligned}$$

Encore une fois, les prédictions futures des sorties s'obtiennent récursivement par la résolution de l'équation de base d'un système du troisième ordre (31). Posons: $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{03} y_{k-1}$

$$\hat{w}_{k+1} - (A_{01} + A_{02}) \hat{w}_k + A_{01} A_{02} w_{k-1} = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i} \quad (33)$$

De l'équation (33), on a:

$$\hat{w}_{k+1} - A_{02} \hat{w}_k = A_{01} (\hat{w}_k - A_{02} w_{k-1}) + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i} \quad (34)$$

Posons $\hat{x}_k = \hat{w}_k - A_{02} w_{k-1}$ dans l'équation (34)

$$\hat{x}_{k+1} = A_{01} \hat{x}_k + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i} \quad (35)$$

Le développement de l'équation (35) est:

$$\begin{array}{lll} (A_{01}^{\lambda-1}) & (\hat{x}_{k+1} = A_{01} \hat{x}_k + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i}) \\ (A_{01}^{\lambda-2}) & (\hat{x}_{k+2} = A_{01} \hat{x}_{k+1} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+2-\lambda-i}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (A_{01}^0) & (\hat{x}_{k+\lambda} = A_{01} \hat{x}_{k+\lambda-1} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i}) \end{array}$$

Le regroupement de cette série d'équation produit:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+\lambda} = A_{01}^\lambda \hat{x}_k & + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \\ & + A_{01} \left(\sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-1-i} \right) \\ & \vdots \vdots \\ & + A_{01}^{\lambda-1} \left(\sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i} \right) \end{aligned}$$

Retournons à $\hat{w}_k - A_{02}w_{k-1} = \hat{x}_k$, il vient:

$$\begin{aligned}
\hat{w}_{k+\lambda} - A_{02}\hat{w}_{k+\lambda-1} &= A_{01}^\lambda(\hat{w}_k - A_{02}w_{k-1}) + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \\
&\quad + A_{01}(\sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-1-i}) \\
&\quad \vdots \quad \vdots \\
&\quad + A_{01}^{\lambda-1}(\sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k+1-\lambda-i}) \tag{36}
\end{aligned}$$

L'interaction des équations (26), (27), (28) et (29) permet de déduire:

$$\begin{aligned}
y_{mk}^* - (A_{01} + A_{02} + A_{03})y_{mk-1}^* + (A_{01}A_{02} + A_{01}A_{03} + A_{02}A_{03})y_{mk-2}^* \\
- A_{01}A_{02}A_{03}y_{mk-3}^* = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \tag{37}
\end{aligned}$$

De l'équation (37), il vient:

$$\begin{aligned}
(y_{mk}^* - A_{03}y_{mk-1}^*) - (A_{01} + A_{02})(y_{mk-1}^* - A_{03}y_{mk-2}^*) \\
+ A_{01}A_{02}(y_{mk-2}^* - A_{03}y_{mk-3}^*) = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i}
\end{aligned}$$

Posons: $w_{mk}^* = y_{mk}^* - A_{03}y_{mk-1}^*$

$$w_{mk}^* - (A_{01} + A_{02})w_{mk-1}^* + A_{01}A_{02}w_{mk-3}^* = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i}$$

On pose: $x_{mk}^* = w_{mk}^* - A_{02}w_{mk-1}^*$

$$x_{mk}^* = A_{01}x_{mk-1}^* + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \tag{38}$$

Par récurrence:

$$\begin{aligned}
x_{mk}^* - A_{01}x_{mk-1}^* &= \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \\
x_{mk-1}^* - A_{01}x_{mk-2}^* &= \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i-1} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_{mk-(\lambda-1)}^* - A_{01}x_{mk-\lambda}^* &= \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i+\lambda-1}
\end{aligned}$$

Ce qui procure:

$$\begin{aligned}
 x_{mk}^* - A_{01}^\lambda x_{mk-\lambda}^* &= \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \\
 &+ A_{02} \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i-1} \\
 &\vdots \quad \vdots \\
 &+ A_{01}^{\lambda-1} \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i+1-\lambda}
 \end{aligned}$$

Remplaçons $x_{mk}^* = w_{mk}^* - A_{02}w_{mk-1}^*$

$$\begin{aligned}
 w_{mk}^* - A_{02}w_{mk-1}^* - A_{01}^\lambda (w_{mk-\lambda}^* - A_{02}w_{mk-\lambda-1}^*) &= \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} \\
 &+ A_{02} \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i-1} \\
 &\vdots \quad \vdots \\
 &+ A_{01}^{\lambda-1} \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i+1-\lambda}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Remplaçons dans l'équation (36) par (39)

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} - A_{02}\hat{w}_{k+\lambda-1} &= A_{01}^\lambda (\hat{w}_k - A_{02}w_{k-1}) + (w_{mk}^* - A_{02}w_{mk-1}^*) \\
 &- A_{01}^\lambda (w_{mk-\lambda}^* - A_{02}w_{mk-\lambda-1}^*)
 \end{aligned} \tag{40}$$

Un raisonnement similaire axé sur les équations (34, 35, 36, 38, 39, 40) et qui substitue A_{01} par A_{02} produit:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} - A_{01}\hat{w}_{k+\lambda-1} &= A_{02}^\lambda (\hat{w}_k - A_{01}w_{k-1}) + (w_{mk}^* - A_{01}w_{mk-1}^*) \\
 &- A_{02}^\lambda (w_{mk-\lambda}^* - A_{01}w_{mk-\lambda-1}^*)
 \end{aligned} \tag{41}$$

L'addition des équations $-A_{02} \times (41)$ avec $A_{01} \times (40)$ procure:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} &= w_{mk}^* + \frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} (\hat{w}_k - \hat{w}_{mk-\lambda}^*) + \\
 &\quad \frac{A_{01}A_{02}^{\lambda+1} - A_{02}A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} (w_{k-1} - w_{mk-\lambda-1}^*)
 \end{aligned} \tag{42}$$

avec $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{03}y_{k-1}$

Un raisonnement encore similaire au lieu de poser $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{03}y_{k-1}$ on remplace par $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}$

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} - A_{02}\hat{w}_{k+\lambda-1} &= A_{03}^\lambda (\hat{w}_k - A_{02}w_{k-1}) + (w_{mk}^* - A_{02}w_{mk-1}^*) \\
 &- A_{03}^\lambda (w_{mk-\lambda}^* - A_{02}w_{mk-\lambda-1}^*)
 \end{aligned} \tag{43}$$

De même l'équation (41) devient:

$$\hat{w}_{k+\lambda} - A_{03}\hat{w}_{k+\lambda-1} = A_{02}^\lambda(\hat{w}_k - A_{03}w_{k-1}) + (w_{mk}^* - A_{03}w_{mk-1}^*) - A_{02}^\lambda(w_{mk-\lambda}^* - A_{03}w_{mk-\lambda-1}^*) \quad (44)$$

L'addition des équations $A_{02} \times (44)$ avec $-A_{03} \times (43)$ procure:

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k+\lambda} &= w_{mk}^* + \frac{A_{02}^{\lambda+1} - A_{03}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}}(\hat{w}_k - w_{mk-\lambda}^*) + \\ &\quad \frac{A_{02}A_{03}^{\lambda+1} - A_{03}A_{02}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}}(w_{k-1} - w_{mk-\lambda-1}^*) \end{aligned} \quad (45)$$

avec $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}$

L'addition des équations $A_{01} \times (42)$ et $-A_{03} \times (45)$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} &= y_{mk}^* + \frac{A_{01}(A_{02} - A_{03})A_{01}^{\lambda+1} + A_{02}(A_{03} - A_{01})A_{02}^{\lambda+1} + A_{03}(A_{01} - A_{02})A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})}(y_k - y_{mk}) \\ &\quad - \frac{A_{01}(A_{02}^2 - A_{03}^2)A_{01}^{\lambda+1} + A_{02}(A_{03}^2 - A_{01}^2)A_{02}^{\lambda+1} + A_{03}(A_{01}^2 - A_{02}^2)A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})}(y_{k-1} - y_{mk-1}) \\ &\quad + A_{01}A_{02}A_{03} \frac{(A_{02} - A_{03})A_{01}^{\lambda+1} + (A_{03} - A_{01})A_{02}^{\lambda+1} + (A_{01} - A_{02})A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})}(y_{k-2} - y_{mk-2}) \end{aligned} \quad (46)$$

L'équation (46) est un algorithme généralisé qui permet de considérer les modèles du troisième ordre. Cet algorithme peut être exprimé selon la fonction de transfert en z qui suit:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_3(z)(y(z) - y_m(z))$$

avec

$$\begin{aligned} F_3(z) &= \frac{A_{01}(A_{02} - A_{03})A_{01}^{\lambda+1} + A_{02}(A_{03} - A_{01})A_{02}^{\lambda+1} + A_{03}(A_{01} - A_{02})A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} \\ &\quad - \frac{A_{01}(A_{02}^2 - A_{03}^2)A_{01}^{\lambda+1} + A_{02}(A_{03}^2 - A_{01}^2)A_{02}^{\lambda+1} + A_{03}(A_{01}^2 - A_{02}^2)A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} z^{-1} \\ &\quad + A_{01}A_{02}A_{03} \frac{(A_{02} - A_{03})A_{01}^{\lambda+1} + (A_{03} - A_{01})A_{02}^{\lambda+1} + (A_{01} - A_{02})A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} z^{-2} \end{aligned} \quad (47)$$

D'où l'expression récursive:

$$F_3(z) = \frac{A_{01}(1 - A_{03}z^{-1})[{}^1\mathcal{F}_2(z)] - A_{03}(1 - A_{01}z^{-1})[{}^2\mathcal{F}_2(z)]}{A_{01} - A_{03}}$$

$$\text{avec } [{}^1\mathcal{F}_2(z)] = \frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}A_{02}^{\lambda+1} - A_{02}A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} z^{-1}$$

$$\text{et } [{}^2\mathcal{F}_2(z)] = \frac{A_{02}^{\lambda+1} - A_{03}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}} + \frac{A_{02}A_{03}^{\lambda+1} - A_{03}A_{02}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}} z^{-1}$$

Nous obtenons ainsi une formulation analytique définitive du filtre de pondération de la chaîne de rétro-action du prédicteur analytique.

Remarque:

- Si le retard fractionnel λ_0 est nul: $B_0^3 = 0$.

2. Si $\tau_{2m} = \tau_{3m} = 0$ (le modèle est du premier ordre) nous retrouvons là les résultats connus de $F_3(z) = F_1(z) = A_{01}^\lambda$ (Moore [MSM70], Wong-Seborg [WS86]).

3. Si $\tau_{3m} = 0$ (le modèle est du second ordre) nous retrouvons notre résultats $F_3(z) = F_2(z)$.

4. Si deux pôles du modèle sont imaginaires complexes le filtre de pondération devient:

$$F_3(z) = \frac{\sin[T\omega]A_{03}^{\lambda+2} - e^{-T(\lambda+1)\alpha}\sin[T(\lambda+2)\omega]A_{03} + e^{-T(\lambda+2)\alpha}\sin[T(\lambda+1)\omega]}{\sin[T\omega]A_{03}^2 - e^{-T\alpha}\sin[2T\omega]A_{03} + e^{-2T\alpha}\sin[T\omega]} \\ - \frac{e^{-T\alpha}\sin[2T\omega]A_{03}^{\lambda+2} - e^{-T(\lambda+1)\alpha}\sin[T(\lambda+2)\omega]A_{03}^2 + e^{-T(\lambda+3)\alpha}\sin[T\lambda\omega]}{\sin[T\omega]A_{03}^2 - e^{-T\alpha}\sin[2T\omega]A_{03} + e^{-2T\alpha}\sin[T\omega]} z^{-1} \\ + \frac{e^{-2T\alpha}\sin[T\omega]A_{03}^{\lambda+2} - e^{-T(\lambda+2)\alpha}\sin[T(\lambda+1)\omega]A_{03}^2 + e^{-T(\lambda+3)\alpha}\sin[T\lambda\omega]A_{03}}{\sin[T\omega]A_{03}^2 - e^{-T\alpha}\sin[2T\omega]A_{03} + e^{-2T\alpha}\sin[T\omega]} z^{-2}$$

avec $A_{01} = e^{-T(\alpha+j\omega)}$, $A_{02} = e^{-T(\alpha-j\omega)}$, $\alpha = \xi\omega_n$ et $\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.

5. De l'équation (47), il vient:

$$F_3(z) = \frac{-A_{03}A_{01}^{(\lambda+1)}\sum_{i=0}^{\lambda+1}\left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^i + A_{02}A_{01}^{(\lambda+1)}\sum_{i=0}^{\lambda}\left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^i + A_{03}^{(\lambda+2)}}{(A_{01}-A_{03})(A_{02}-A_{03})} \\ - \frac{A_{02}^2A_{01}^{(\lambda+1)}\sum_{i=0}^{\lambda-1}\left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^i - A_{03}^2A_{01}^{(\lambda+1)}\sum_{i=0}^{\lambda+1}\left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^i + (A_{01}+A_{02})A_{03}^{(\lambda+2)}}{(A_{01}-A_{03})(A_{02}-A_{03})} z^{-1} \\ + A_{01}A_{02}A_{03} \frac{A_{02}A_{01}^{\lambda}\sum_{i=0}^{\lambda-1}\left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^i - A_{03}A_{01}^{\lambda}\sum_{i=0}^{\lambda}\left(\frac{A_{02}}{A_{01}}\right)^i + A_{03}^{(\lambda+1)}}{(A_{01}-A_{03})(A_{02}-A_{03})} z^{-2} \quad (48)$$

Si $A_{01} = A_{02}$ et $A_{03} \neq A_{01}$ avec l'équation (48) il vient:

$$F_3(z) = \frac{-(\lambda+2)A_{03}A_{01}^{(\lambda+1)} + (\lambda+1)A_{01}^{(\lambda+2)} + A_{03}^{(\lambda+2)}}{(A_{01}-A_{03})^2} \\ - \frac{\lambda A_{01}^{(\lambda+3)} - (\lambda+2)A_{03}^2A_{01}^{(\lambda+1)} + 2A_{01}A_{03}^{(\lambda+2)}}{(A_{01}-A_{03})^2} z^{-1} \\ + \frac{\lambda A_{03}A_{01}^{(\lambda+3)} - (\lambda+1)A_{03}^2A_{01}^{(\lambda+2)} + A_{01}^2A_{03}^{(\lambda+2)}}{(A_{01}-A_{03})^2} z^{-2} \quad (49)$$

Si $\tau_{3m} = 0$, l'équation précédente devient: $F_3(z) = F_2(z)$

6. De l'équation (49), il vient:

$$F_3(z) = \sum_{j=0}^{\lambda} A_{01}^{(\lambda-j)} \sum_{i=0}^j A_{01}^{(j-i)} A_{03}^i - \left(A_{01} \sum_{j=1}^{\lambda} A_{01}^{\lambda-j} \sum_{i=0}^j A_{01}^{j-i} A_{03}^i \right. \\ \left. + A_{01}A_{03} \sum_{j=0}^{\lambda-1} A_{01}^{\lambda-1-j} \sum_{i=0}^j A_{01}^{j-i} A_{03}^i \right) z^{-1} \\ + A_{01}^2A_{03} \sum_{j=0}^{\lambda-1} A_{01}^{\lambda-1-j} \sum_{i=0}^j A_{01}^{(j-i)} A_{03} z^{-2} \quad (50)$$

Si $A_{01} = A_{02} = A_{03}$ avec l'équation (50), il vient:

$$F_3(z) = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} A_{01}^\lambda - \lambda(\lambda+1)A_{01}^{(\lambda+1)} z^{-1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} A_{01}^{\lambda+2} z^{-2}$$

4.1.3 Extension du modèle d'ordre r

Soit la fonction de transfert:

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{K_m(1 + \tau_1 s) \cdots (1 + \tau_m s)}{(1 + \tau_{1m}s) \cdots (1 + \tau_{rm}s)} e^{-\theta_m s} \\ &= M_0(s) e^{-\theta_m s} \end{aligned}$$

où K_m est le gain du régime permanent, $\tau_1, \dots, \tau_m, \tau_{1m}, \dots, \tau_{rm}$ sont les constantes de temps et θ_m est le retard.

Le retard du modèle prédictif θ_m est défini comme suit:

$$\theta_m = \lambda T - \lambda_0 T, \quad 0 \leq \lambda_0 < 1$$

où λ représente la partie entière du retard, λ_0 la partie fractionnelle et T le temps d'échantillonnage.

$$\begin{aligned} M(z) &= Z\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} M_0(s) e^{-\theta_m s}\right\} \\ &= K_m z^{-\lambda} \left\{ \frac{\prod_{i=1}^r (z - A_{0i}) - \sum_{i_0=1}^r K_{i_0}^r (z-1) \prod_{i=1, i \neq i_0}^r (z - A_{0i})}{\prod_{i=1}^r (z - A_{0i})} \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

$$= \frac{B_0^r z^r + B_1^r z^{r-1} + \cdots + B_r^r z^{-\lambda}}{A_0^r z^r + A_1^r z^{r-1} + \cdots + A_r^r} \quad (52)$$

avec

$$\begin{aligned} A_0^r &= (-1)^0 \\ A_1^r &= (-1)^1 \sum_{j_1=1}^r A_{0j_1} \\ A_2^r &= (-1)^2 \sum_{j_2=2}^r A_{0j_2} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} A_{0j_1} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_i^r &= (-1)^i \sum_{j_i=i}^r A_{0j_i} \sum_{j_{(i-1)}=i-1}^{j_i-1} A_{0j_{(i-1)}} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} A_{0j_1}; 1 < i \leq r \\ \\ B_0^r &= K_m [A_0^r - \sum_{i_0=1}^r K_{i_0}^r] \\ B_1^r &= K_m [A_1^r - (-1)^1 \sum_{i_0=1}^r K_{i_0}^r (1 + \sum_{\substack{j_1=1, \\ j_1 \neq i_0}}^r A_{0j_1})] \\ B_2^r &= K_m [A_2^r - (-1)^2 \sum_{i_0=1}^r K_{i_0}^r \{ \sum_{\substack{j_1=1, \\ j_1 \neq i_0}}^r A_{0j_1} + \sum_{\substack{j_2=2, \\ j_2 \neq i_0}}^r A_{0j_2} \sum_{\substack{j_1=1, \\ j_1 \neq i_0}}^{j_2-1} A_{0j_1} \}] \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ B_i^r &= K_m [A_i^r - (-1)^i \sum_{i_0=1}^r K_{i_0}^r \{ \sum_{\substack{j_i=i, \\ j_i \neq i_0}}^r A_{0j_i} \sum_{\substack{j_{(i-1)}=i-1, \\ j_{(i-1)} \neq i_0}}^{j_i-1} A_{0j_{(i-1)}} \cdots \sum_{\substack{j_1=1, \\ j_1 \neq i_0}}^{j_2-1} A_{0j_1} \}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{j_{(i-1)} = i-1, \\ j_{(i-1)} \neq i_0}}^r A_{0j_{(i-1)}} \sum_{\substack{j_{(i-2)} = i-2, \\ j_{(i-2)} \neq i_0}}^{j_{(i-1)}-1} A_{0j_{(i-2)}} \cdots \sum_{\substack{j_1 = 1, \\ j_1 \neq i_0}}^{j_2-1} A_{0j_1}] , 2 < i \leq r-1 \\
& \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
B_r^r &= K_m [A_r^r - (-1)^r \sum_{i_0=1}^r K_{i_0}^r \prod_{\substack{j_r = r, \\ j_r \neq i_0}}^1 A_{0j_r}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1^r &= \tau_{1m}^{(r-m-1)} \frac{(\tau_{1m} - \tau_1)(\tau_{1m} - \tau_2) \cdots (\tau_{1m} - \tau_m)}{(\tau_{1m} - \tau_{2m})(\tau_{1m} - \tau_{3m}) \cdots (\tau_{1m} - \tau_{rm})} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{1m}}} \\
& \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
K_i^r &= \tau_{im}^{(r-m-1)} \frac{(\tau_{im} - \tau_1)(\tau_{im} - \tau_2) \cdots (\tau_{im} - \tau_m)}{\prod_{j=1, j \neq i}^r (\tau_{im} - \tau_{jm})} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{im}}} \\
& \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
K_r^r &= \tau_{rm}^{(r-m-1)} \frac{(\tau_{rm} - \tau_1)(\tau_{rm} - \tau_2) \cdots (\tau_{rm} - \tau_m)}{(\tau_{rm} - \tau_{1m})(\tau_{rm} - \tau_{2m}) \cdots (\tau_{rm} - \tau_{(r-1)m})} e^{-\frac{\lambda_0 T}{\tau_{rm}}}
\end{aligned}$$

et $A_{0i} = e^{-\frac{T}{\tau_{im}}} \quad i = 1 \cdots r$

Démontrons, par induction, une expression générale pour le filtre de pondération:
Supposons qu'il est vrai pour l'ordre r ainsi:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_r(z)(y(z) - y_m(z)) \quad (53)$$

avec

$$F_r(z) = \frac{A_{01}(1 - A_{0r}z^{-1})[(1, \dots, (r-1))F_{(r-1)}(z)] - A_{0r}(1 - A_{01}z^{-1})[(2, \dots, r)F_{(r-1)}(z)]}{A_{01} - A_{0r}} \quad (54)$$

$$[(1, \dots, (r-1))F_{(r-1)}(z)] = \frac{A_{01}(1 - A_{0(r-1)}z^{-1})[(1, \dots, (r-2))F_{(r-2)}(z)] - A_{0(r-1)}(1 - A_{01}z^{-1})[(2, \dots, (r-1))F_{(r-2)}(z)]}{A_{01} - A_{0(r-1)}}$$

$$[(2, \dots, r)F_{(r-1)}(z)] = \frac{A_{02}(1 - A_{0r}z^{-1})[(2, \dots, (r-1))F_{(r-2)}(z)] - A_{0r}(1 - A_{02}z^{-1})[(3, \dots, r)F_{(r-2)}(z)]}{A_{02} - A_{0r}}$$

Maintenant, voyons l'expression du filtre d'ordre $r+1$:

Le bloqueur d'ordre zéro de la figure 8 étant employé, $u(t)$ est une fonction variant par paliers, et l'équation aux différences du modèle devient:

$$\begin{aligned}
y_{mk}^* + A_1^{r+1}y_{mk-1}^* + A_2^{r+1}y_{mk-2}^* + \cdots + A_{(r+1)}^{r+1}y_{mk-(r+1)}^* &= \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k-i} \\
y_{mk} + A_1^{r+1}y_{mk-1} + A_2^{r+1}y_{mk-2} + \cdots + A_{(r+1)}^{r+1}y_{mk-(r+1)} &= \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k-\lambda-i}
\end{aligned} \quad (55)$$

Les prédictions futures des sorties s'obtiennent récursivement par la résolution de l'équation de base d'un système d'ordre $(r+1)$

$$\hat{y}_{k+1} + A_1^{r+1}\hat{y}_k + A_2^{r+1}y_{k-1} + \cdots + A_{(r+1)}^{r+1}y_{k-r} = \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k+1-\lambda-i} \quad (56)$$

L'équation (56) devient:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} + (-1)^1 \sum_{j_1=1}^{r+1} A_{0j_1} \hat{y}_k + (-1)^2 \sum_{j_2=2}^{r+1} A_{0j_2} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} A_{0j_1} y_{k-1} + \cdots + \\ (-1)^{(r+1)} \prod_{j_{(r+1)}=1}^{r+1} A_{0j_{(r+1)}} y_{k-r} = \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k+1-\lambda-i} \end{aligned} \quad (57)$$

De l'équation (57), il vient:

$$\begin{aligned} [\hat{y}_{k+1} - A_{0(r+1)} \hat{y}_k] + (-1)^1 \sum_{j_1=1}^r A_{0j_1} [\hat{y}_k - A_{0(r+1)} y_{k-1}] + \\ (-1)^2 \sum_{j_2=2}^r A_{0j_2} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} A_{0j_1} [y_{k-1} - A_{0(r+1)} y_{k-2}] + \cdots + \\ (-1)^r \prod_{j_r=r}^1 A_{0j_r} [y_{k-(r-1)} - A_{0(r+1)} y_{k-r}] = \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k+1-\lambda-i} \end{aligned}$$

Posons: $\hat{w}_k = [\hat{y}_k - A_{0(r+1)} y_{k-1}]$

$$\begin{aligned} \hat{w}_{k+1} + (-1) \sum_{j_1=1}^r A_{0j_1} \hat{w}_k + (-1)^2 \sum_{j_2=2}^r A_{0j_2} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} A_{0j_1} w_{k-1} + \cdots + \\ (-1)^r \prod_{j_r=r}^1 A_{0j_r} w_{k-(r-1)} = \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k+1-\lambda-i} \end{aligned}$$

Le premier membre de l'équation aux différences est un système d'ordre r , ce qui se traduit par:

$$\hat{w}_{k+\lambda} = w_{mk}^* + [(1, \dots, r) F_r(z)] (\hat{w}_k - w_{mk}) \quad (58)$$

avec $\hat{w}_k = [\hat{y}_k - A_{0(r+1)} y_{k-1}]$, $w_{mk}^* = [y_{mk}^* - A_{0(r+1)} y_{mk-1}]$

et $w_{mk} = [y_{mk} - A_{0(r+1)} y_{mk-1}]$

Maintenant, reprenons le même raisonnement en permutant $A_{0(r+1)}$ par A_{01} :

$$\begin{aligned} [\hat{y}_{k+1} - A_{01} \hat{y}_k] + (-1)^1 \sum_{j_1=2}^{r+1} A_{0j_1} [\hat{y}_k - A_{01} y_{k-1}] + \\ (-1)^2 \sum_{j_2=3}^{r+1} A_{0j_2} \sum_{j_1=2}^{j_2-1} A_{0j_1} [y_{k-1} - A_{01} y_{k-2}] + \cdots + \\ (-1)^i \sum_{j_i=i+1}^{r+1} A_{0j_i} \sum_{j_{(i-1)}=i}^{j_i-1} A_{0j_{(i-1)}} \cdots \sum_{j_1=2}^{j_2-1} A_{0j_1} [y_{k-(i-1)} - A_{01} y_{k-i}] + \cdots + \\ (-1)^r \prod_{j_r=r+1}^2 A_{0j_r} [y_{k-(r-1)} - A_{01} y_{k-r}] = \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k+1-\lambda+i} \end{aligned}$$

Remplaçons $[\hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}]$ par \hat{w}_k

$$\begin{aligned}\hat{w}_{k+1} + (-1)^1 \sum_{j_1=2}^{r+2} A_{0j_1} \hat{w}_k + (-1)^2 \sum_{j_2=3}^{r+1} A_{0j_2} \sum_{j_1=2}^{j_2-1} A_{0j_1} w_{k-1} + \cdots + \\ (-1)^r \prod_{j_r=r+1}^2 A_{0j_r} w_{k-(r-1)} = \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k+1-\lambda+i}\end{aligned}$$

Ce qui procure:

$$\hat{w}_{k+\lambda} = w_{mk}^* + [(2, \dots, (r+1))F_r(z)](\hat{w}_k - w_{mk}) \quad (59)$$

avec $\hat{w}_k = [\hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}]$, $w_{mk}^* = [y_{mk}^* - A_{01}y_{mk-1}^*]$ et $w_{mk} = [y_{mk} - A_{01}y_{mk-1}]$
L'addition des équations $A_{01} \times (58) - A_{0(r+1)} \times (59)$

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_{(r+1)}(z)(y(z) - y_m(z)) \quad (60)$$

Ce qui est une équation conforme à la relation (53).

avec

$$F_{(r+1)}(z) = \frac{A_{01}(1 - A_{0(r+1)}z^{-1})[(1, \dots, r)F_r(z)] - A_{0(r+1)}(1 - A_{01}z^{-1})[(2, \dots, r+1)F_r(z)]}{A_{01} - A_{0(r+1)}}$$

$$\text{avec } [(1, \dots, r)F_r(z)] = \frac{A_{01}(1 - A_{0r}z^{-1})[(1, \dots, (r-1))F_{(r-1)}(z)] - A_{0r}(1 - A_{01}z^{-1})[(2, \dots, r)F_{(r-1)}(z)]}{A_{01} - A_{0r}}$$

$$\text{et } [(2, \dots, (r+1))F_r(z)] = \frac{A_{02}(1 - A_{0(r+1)}z^{-1})[(2, \dots, r)F_{(r-1)}(z)] - A_{0(r+1)}(1 - A_{02}z^{-1})[(3, \dots, (r+1))F_{(r-1)}(z)]}{A_{02} - A_{0(r+1)}}$$

Ce qui est une équation conforme à la relation (53).

Nous obtenons ainsi une formulation analytique définitive pour le filtre de pondération de la chaîne de rétro-action du prédicteur analytique quelque soit l'ordre du système.

Résumé:

Modèle du premier ordre:

$$F_1(z) = A_{01}^\lambda$$

Modèle du second ordre:

$$F_2(z) = \frac{A_{01}(1 - A_{02}z^{-1})[F_1(z)] - A_{02}(1 - A_{01}z^{-1})[\bar{F}_1(z)]}{A_{01} - A_{02}}$$

avec $[F_1(z)] = A_{01}^\lambda$ et $[\bar{F}_1(z)] = A_{02}^\lambda$

En général $[F_1(z)] = A_{0k}^\lambda$ avec $A_{0k}^\lambda = e^{-\frac{\lambda T}{r_{km}}}$

Modèle du troisième ordre:

$$F_3(z) = \frac{A_{01}(1 - A_{03}z^{-1})[(1,2)F_2(z)] - A_{03}(1 - A_{01}z^{-1})[(2,3)F_2(z)]}{A_{01} - A_{03}}$$

avec $[(1,2)F_2(z)] = \frac{A_{01}(1 - A_{02}z^{-1})[F_1(z)] - A_{02}(1 - A_{01}z^{-1})[\bar{F}_1(z)]}{A_{01} - A_{02}}$

et $[(2,3)F_2(z)] = \frac{A_{02}(1 - A_{03}z^{-1})[\bar{F}_1(z)] - A_{03}(1 - A_{02}z^{-1})[F_1(z)]}{A_{02} - A_{03}}$

En général:

$$[(i,j)F_2(z)] = \frac{A_{0i}(1 - A_{0j}z^{-1})[F_1(z)] - A_{0j}(1 - A_{0i}z^{-1})[\bar{F}_1(z)]}{A_{0i} - A_{0j}}$$

Modèle d'ordre r:

$$F_r(z) = \frac{A_{01}(1 - A_{0r}z^{-1})[(1,\dots,(r-1))F_{(r-1)}(z)] - A_{0r}(1 - A_{01}z^{-1})[(2,\dots,r)F_{(r-1)}(z)]}{A_{01} - A_{0r}}$$

avec $[(1,\dots,(r-1))F_{(r-1)}(z)] = \frac{A_{01}(1 - A_{0(r-1)}z^{-1})[(1,\dots,(r-2))F_{(r-2)}(z)] - A_{0(r-1)}(1 - A_{01}z^{-1})[(2,\dots,(r-1))F_{(r-2)}(z)]}{A_{01} - A_{0(r-1)}}$

et $[(2,\dots,r)F_{(r-1)}(z)] = \frac{A_{02}(1 - A_{0r}z^{-1})[(2,\dots,(r-1))F_{(r-2)}(z)] - A_{0r}(1 - A_{02}z^{-1})[(3,\dots,r)F_{(r-2)}(z)]}{A_{02} - A_{0r}}$

Fonction de transfert du système compensé

La réponse en boucle fermée du système compensé de la figure 8 est:

$$y(z) = \frac{P_0(z)C(z)z^{-p}r(z) + (1 + C(z)M_0(z) - C(z)F_r(z)M_0(z)z^{-\lambda})G_\ell(z)\ell(z)}{1 + C(z)M_0(z) + C(z)F_r(z)[P_0(z)z^{-p} - M_0(z)z^{-\lambda}]}$$

effet du bouclage égalisation des retards et pondération de l'erreur

(61)

Le dénominateur de cette expression de la fonction de transfert en suiveur de l'entrée et en régulateur vise à bien mettre en évidence l'influence de la modélisation du processus. Il comporte deux termes: le premier concerne le bouclage de la partie rationnelle du système non retardé; le second concerne la fonction d'égalisation faite par la chaîne de prédiction. Le filtre de pondération pondère l'erreur d'égalisation entre le système et son modèle pour tenir compte qu'elle forme avec le retour non retardé des signaux qui doivent être compatibles dans le temps. Nous voyons là qu'une modélisation parfaite produit un asservissement qui a les mêmes performances que celui de la boucle de la seule fonction rationnelle du système. L'effet du retard est exclu de la boucle: c'est là qu'est l'intuition créatrice de Smith!

Lorsqu'il y a des erreurs de modélisation dans des systèmes dont la réponse indicielle est apériodique et monotone, c'est pratiquement un processus d'ordre r avec un retard qui illustre le mieux la différence entre les deux prédicteurs de Smith et analytique. Supposons que le contrôleur proportionnel numérique soit utilisé alors, les erreurs en régime permanent (\bar{e}) causés par une modification de la commande de calibration, $r_c = \frac{1+K_m K_p}{K_c K_m} r$ pour le prédicteur de Smith (PS) et le prédicteur analytique (PA) sont donnés par:

$$\begin{aligned} (\bar{e})_{PS} &= \frac{K_m - K_p}{K_m(1 + K_c K_p)} \\ (\bar{e})_{PA} &= \frac{(K_m - K_p)[1 + K_c K_m(1 - F_r(1))]}{K_m[1 + K_c K_m + F_r(1)(K_c K_p - K_c K_m)]} \end{aligned}$$

avec $K_m = K_p$ l'erreur en régime permanent est nulle.

Similairement, pour un échelon unitaire sur la charge ($G_\ell(z)\ell(z) = \frac{K_\ell}{1-z^{-1}}$), les erreurs en régime permanent seront:

$$\begin{aligned} (\bar{e})_{PS} &= -\frac{K_\ell}{1 + K_c K_p} \\ (\bar{e})_{PA} &= -\frac{K_\ell(1 + K_c K_m(1 - F_r(1)))}{1 + K_c K_m + F_r(1)(K_c K_p - K_c K_m)} \end{aligned}$$

4.2 Première formulation du filtre de pondération en présence de charge

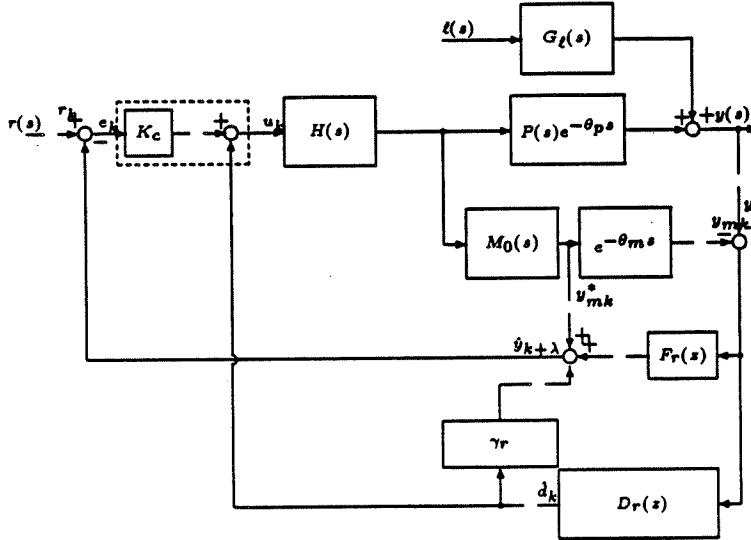


Figure 9: Le prédicteur analytique avec estimation de charge.

4.2.1 Modèle du second ordre $r = 2$

La section précédente ne tient pas implicitement compte des perturbations: elle a l'inconvénient (figure 8) de fournir des prédictions erronées en régime permanent, pour un modèle inadéquat où en présence de charge.

Nous utiliserons une expression de la prédition de charge proposée par Doss et Moore [DM82]; il vient:

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= -A_1^2 y_{k-1} - A_2^2 y_{k-2} + B_0^2 u_{k-\lambda} + B_1^2 u_{k-\lambda-1} + B_2^2 u_{k-\lambda-2} \\ &\quad + (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2) \hat{d}_{k-1} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\hat{d}_k = \hat{d}_{k-1} + K_I(y_k - \hat{y}_k) \quad (63)$$

$$u_k = K_c(r_{ck} - \hat{y}_{k+\lambda}) - \hat{d}_k \quad (64)$$

Nous introduisons notre propre notation avec $A_1^2 = A_{01} + A_{02}$, $A_2^2 = A_{01}A_{02}$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} - (A_{01} + A_{02})\hat{y}_{k+\lambda-1} &= -A_{01}A_{02}\hat{y}_{k+\lambda-2} + B_0^2 u_k + B_1^2 u_{k-1} + B_2^2 u_{k-2} \\ &\quad + B_0^2 \hat{d}_{k+\lambda-1} + B_1^2 \hat{d}_{k+\lambda-1} + B_2^2 \hat{d}_{k+\lambda-1} \end{aligned} \quad (65)$$

De l'équation (65), on a:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} - A_{01}\hat{y}_{k+\lambda-1} &= A_{02}(\hat{y}_{k+\lambda-1} - A_{01}\hat{y}_{k+\lambda-2}) + B_0^2(u_k + \underbrace{\hat{d}_{k+\lambda-1}}_{\hat{d}_k}) + \\ &\quad B_1^2(u_{k-1} + \underbrace{\hat{d}_{k+\lambda-1}}_{\hat{d}_k}) + B_2^2(u_{k-2} + \underbrace{\hat{d}_{k+\lambda-1}}_{\hat{d}_k}) \end{aligned} \quad (66)$$

Les prédictions futures des sorties s'obtiennent récursivement par la résolution de l'équation de base d'un système du second ordre (66). Posons: $\hat{w}_k = y_k - A_{01}y_{k-1}$

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} &= A_{02}\hat{w}_{k+\lambda-1} + B_0u_k + B_1u_{k-1} + B_2u_{k-2} + \sum_{j=0}^2 B_j^2 \hat{d}_k \\
 \hat{w}_{k+\lambda-1} &= A_{02}\hat{w}_{k+\lambda-2} + B_0^2u_{k-1} + B_1^2u_{k-2} + B_2^2u_{k-3} + \sum_{j=0}^2 B_j^2 \hat{d}_k \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 \hat{w}_{k+1} &= A_{02}\hat{w}_k + B_0^2u_{k-(\lambda-1)} + B_1^2u_{k-\lambda} + B_2^2u_{k-\lambda-1} + \\
 &\quad \sum_{j=0}^2 B_j^2 \hat{d}_k
 \end{aligned} \tag{67}$$

Le regroupement de cette série d'équations produit:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} &= A_{02}^\lambda \hat{w}_k \\
 &\quad + B_0^2u_k + B_1^2u_{k-1} + B_2^2u_{k-2} + \sum_{j=0}^2 B_j^2 \hat{d}_k \\
 &\quad + A_{02} \left[B_0^2u_{k-1} + B_1^2u_{k-2} + B_2^2u_{k-3} + \sum_{j=0}^2 B_j^2 \hat{d}_k \right] \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + A_{02}^{\lambda-1} \left[B_0^2u_{k-(\lambda-1)} + B_1^2u_{k-\lambda} + B_2^2u_{k-\lambda-1} + \sum_{j=0}^2 B_j^2 \hat{d}_k \right]
 \end{aligned} \tag{68}$$

L'équation (68) procure:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} &= A_{02}^\lambda \hat{w}_k + \sum_{i=0}^{\lambda-1} A_{02}^i [B_0^2u_{k-i} + B_1^2u_{k-i-1} + B_2^2u_{k-i-2}] + \\
 &\quad \sum_{i=0}^{\lambda-1} (A_{02})^i \sum_{j=0}^2 B_j^2 \hat{d}_k
 \end{aligned} \tag{69}$$

Notons que $\sum_{j=0}^2 B_j^2 = B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 = K_m(1 - A_{01})(1 - A_{02})$. Cette somme ne dépend que des pôles de la fonction de transfert du système. Reprenons l'équation (69) qui devient alors:

$$\begin{aligned}
 \hat{w}_{k+\lambda} &= A_{02}^\lambda \hat{w}_k + \sum_{i=0}^{\lambda-1} (A_{02})^i [B_0^2u_{k-i} + B_1^2u_{k-i-1} + B_2^2u_{k-i-2}] + \\
 &\quad K_m(1 - A_{01})(1 - A_{02}^\lambda) \hat{d}_k
 \end{aligned} \tag{70}$$

L'équation (18) donne:

$$\sum_{i=0}^{\lambda-1} A_{02}^i [B_0^2u_{k-i} + B_1^2u_{k-i-1} + B_2^2u_{k-i-2}] = v_{mk}^* - A_{02}^\lambda v_{mk-\lambda}^* \tag{71}$$

Finalement:

$$\hat{y}_{k+\lambda} - A_{01}\hat{y}_{k+\lambda-1} = A_{02}^\lambda(\hat{y}_k - A_{01}\hat{y}_{k-1}) + y_{mk}^* - A_{01}y_{mk-1}^* - A_{02}^\lambda(y_{mk-\lambda}^* - A_{01}y_{mk-\lambda-1}^*) + K_m(1 - A_{01})(1 - [F_1(1)])\hat{d}_k \quad (72)$$

Un raisonnement similaire axé sur les équations (66, 67, 68, 69, 70, 71, 72) et qui substitue A_{01} par A_{02} produit:

$$\hat{y}_{k+\lambda} - A_{02}\hat{y}_{k+\lambda-1} = A_{01}^\lambda(\hat{y}_k - A_{02}\hat{y}_{k-1}) + y_{mk}^* - A_{02}y_{mk-1}^* - A_{01}^\lambda(y_{mk-\lambda}^* - A_{02}y_{mk-\lambda-1}^*) + K_m(1 - A_{02})(1 - [F_1(1)])\hat{d}_k \quad (73)$$

L'addition des équations $-A_{02} \times (72)$ avec $A_{01} \times (73)$ procure:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} &= y_{mk}^* + \frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}}(y_k - y_{mk}) \\ &\quad + \frac{A_{01}A_{02}^{\lambda+1} - A_{02}A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}}(y_{k-1} - y_{mk-1}) \\ &\quad + K_m \frac{A_{01}(1 - A_{02})(1 - [F_1(1)]) - A_{02}(1 - A_{01})(1 - [F_1(1)])}{A_{01} - A_{02}}\hat{d}_k \end{aligned} \quad (74)$$

Cette équation peut être exprimée selon la fonction de transfert en z qui suit:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_2(z)(y(z) - y_m(z)) + K_m(1 - F_2(1))d(z) \quad (75)$$

D'après l'équation (64) et (8) il vient:

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= -A_1^2\hat{y}_{k-1} - A_2^2\hat{y}_{k-2} + (y_{mk} + A_1^2y_{mk-1} + A_2^2y_{mk-2}) \\ &\quad + (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2)\hat{d}_{k-1} \end{aligned} \quad (76)$$

Substituons dans l'équation (64):

$$\begin{aligned} d(z) &= \frac{K_I(1 + A_1^2z^{-1} + A_2^2z^{-2})}{1 - [1 - K_I(B_0^2 + B_1^2 + B_2^2)]z^{-1}}(y(z) - y_m(z)) \\ &= D_2(z)(y(z) - y_m(z)) \end{aligned} \quad (77)$$

$$y_p(z) = y_m^*(z) + [F_2(z) + \gamma_2 D_2(z)](y(z) - y_m(z)) \quad (78)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= K_m \frac{A_{01}(1 - A_{02})(1 - [F_1(1)]) - A_{02}(1 - A_{01})(1 - [F_1(1)])}{A_{01} - A_{02}} \\ &= K_m(1 - F_2(1)) \\ D_2(z) &= \frac{K_I(1 + A_1^2z^{-1} + A_2^2z^{-2})}{1 - [1 - K_I(B_0^2 + B_1^2 + B_2^2)]z^{-1}} \\ &= \frac{K_I(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})}{1 - [1 - K_I K_m(1 - A_{01})(1 - A_{02})]z^{-1}} \end{aligned}$$

Notons que si $\tau_2 = 0$, $\gamma_2 = \gamma_1 = K_m(1 - A_{01}^\lambda)$, $D_2(z) = D_1(z) = \frac{K_I(1 - A_{01}z^{-1})}{1 - [1 - K_I K_m(1 - A_{01})]z^{-1}}$ et l'on retrouve le résultat pour le système du premier ordre de Wong et Seborg.

Régime permanent:

Les valeurs en régime permanent de y et y_m sont notées par \bar{y} et \bar{y}_m respectivement. D'après l'équation (63) on a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_k = \bar{y} \quad (79)$$

La substitution de l'équation (79) dans (76) donne:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}_k &= \frac{(1 + A_1^2 + A_2^2)(\bar{y} - \bar{y}_m)}{B_0^2 + B_1^2 + B_2^2} \\ &= \frac{\bar{y} - \bar{y}_m}{K_m} \end{aligned}$$

Le régime permanent s'obtient par l'équation (75):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_{k+\lambda} &= \bar{y}_m + F_2(1)(\bar{y} - \bar{y}_m) + K_m(1 - F_2(1)) \frac{\bar{y} - \bar{y}_m}{K_m} \\ &= \bar{y} \end{aligned}$$

Le prédicteur analytique avec estimation de charge donne une prévision exacte du régime permanent qui est insensible aux erreurs de modélisation ou aux perturbations de charge non mesurées et peut donc être étendu à un système du troisième ordre.

4.2.2 Modèle du troisième ordre $r = 3$

Nous utiliserons une extension de l'expression de la prédition de charge proposée par Doss et Moore:

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= -A_1^3 y_{k-1} - A_2^3 y_{k-2} - A_3^3 y_{k-3} + B_0^3 u_{k-\lambda} + B_1^3 u_{k-\lambda-1} + B_2^3 u_{k-\lambda-2} \\ &\quad + B_3^3 u_{k-\lambda-3} + (B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3) \hat{d}_{k-1} \end{aligned} \quad (80)$$

$$\hat{d}_k = \hat{d}_{k-1} + K_I(y_k - \hat{y}_k) \quad (81)$$

$$u_k = K_c(r_{ck} - \hat{y}_{k+\lambda}) - \hat{d}_k \quad (82)$$

Nous introduisons notre propre notation:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+\lambda} - (A_{01} + A_{02} + A_{03}) \hat{y}_{k+\lambda-1} + (A_{01}A_{02} + A_{01}A_{03} + A_{02}A_{03}) \hat{y}_{k+\lambda-2} \\ - A_{01}A_{02}A_{03} \hat{y}_{k+\lambda-3} = \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 d_{k+\lambda-1} \end{aligned} \quad (83)$$

Posant: $w_k = y_k - A_{03}y_{k-1}$

$$\hat{w}_{k+\lambda} - (A_{01} + A_{02}) \hat{w}_{k+\lambda-1} = -A_{01}A_{02} \hat{w}_{k+\lambda-2} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 d_{k+\lambda-1} \quad (84)$$

Notons que $\sum_{i=0}^3 B_i^3 = K_m(1 - A_{01})(1 - A_{02})(1 - A_{03})$. Cette somme ne dépend que des pôles de la fonction de transfert du système.

Un raisonnement similaire axé sur les équations (65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74) et qui substitue y_k par w_k produit:

$$\begin{aligned}\hat{w}_{k+\lambda} &= w_{mk}^* + \frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}}(\hat{w}_k - w_{mk}) + \frac{A_{01}A_{02}^{\lambda+1} - A_{02}A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}}(w_{k-1} - w_{mk-1}) \\ &\quad + K_m(1 - A_{03})(1 - [{}^{1,2}F_2(1)])\hat{d}_k\end{aligned}\quad (85)$$

D'après l'équation (85), il vient:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+\lambda} - A_{03}\hat{y}_{k+\lambda-1} &= (y_{mk}^* - A_{03}y_{mk-1}^*) + \frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}}[(y_k - y_{mk}) \\ &\quad - A_{03}(y_{k-1} - y_{mk-1})] + \frac{A_{01}A_{02}^{\lambda+1} - A_{02}A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}}[(y_{k-1} - y_{mk-1}) - A_{03}(y_{k-2} - y_{mk-2})] \\ &\quad + K_m(1 - A_{03})(1 - [{}^{1,2}F_2(1)])\hat{d}_k\end{aligned}\quad (86)$$

Un raisonnement similaire axé sur les équations (84, 85) au lieu de poser $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{03}y_{k-1}$, dans l'équation (83) on remplace par $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}$

$$\hat{w}_{k+\lambda} - (A_{03} + A_{02})\hat{w}_{k+\lambda-1} = -A_{03}A_{02}\hat{w}_{k+\lambda-2} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-i} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 d_{k+\lambda-1}\quad (87)$$

L'équation (85) devient:

$$\begin{aligned}\hat{w}_{k+\lambda} &= w_{mk}^* + \frac{A_{02}^{\lambda+1} - A_{03}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}}(w_k - w_{mk}) + \frac{A_{02}A_{03}^{\lambda+1} - A_{03}A_{02}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}}(w_{k-1} - w_{mk-1}) \\ &\quad + K_m(1 - A_{01})(1 - [{}^{2,3}F_1(1)])\hat{d}_k\end{aligned}\quad (88)$$

De même l'équation (86) devient:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+\lambda} - A_{01}\hat{y}_{k+\lambda-1} &= y_{mk}^* - A_{01}y_{mk-1}^* + \frac{A_{02}^{\lambda+1} - A_{03}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}}[(y_k - y_{mk}) \\ &\quad - A_{01}(y_{k-1} - y_{mk-1})] + \frac{A_{02}A_{03}^{\lambda+1} - A_{03}A_{02}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}}[(y_{k-1} - y_{mk-1}) - A_{01}(y_{k-2} - y_{mk-2})] \\ &\quad + K_m(1 - A_{01})(1 - [{}^{2,3}F_1(1)])\hat{d}_k\end{aligned}\quad (89)$$

L'addition des équations $A_{01} \times (86)$ et $-A_{03} \times (89)$ en transformée en z:

$$\begin{aligned}y_p(z) &= y_m^*(z) + \frac{A_{01}(1 - A_{03}z^{-1})[{}^{1,2}F_2(z)] - A_{03}(1 - A_{01}z^{-1})[{}^{2,3}F_2(z)]}{A_{01} - A_{03}}(y(z) - y_m(z)) + \\ &\quad K_m \frac{A_{01}(1 - A_{03})(1 - [{}^{1,2}F_1(1)]) - A_{03}(1 - A_{01})(1 - [{}^{2,3}F_1(1)])}{A_{01} - A_{03}}d(z)\end{aligned}$$

$$\text{avec } {}^1,2\mathcal{F}_2(z) = \frac{A_{02}^{\lambda+1} - A_{01}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{01}} + \frac{A_{02}A_{01}^{\lambda+1} - A_{01}A_{02}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{01}} z^{-1}$$

$$\text{et } {}^2,3\mathcal{F}_2(z) = \frac{A_{02}^{\lambda+1} - A_{03}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}} + \frac{A_{02}A_{03}^{\lambda+1} - A_{03}A_{02}^{\lambda+1}}{A_{02} - A_{03}} z^{-1}$$

Finalement:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_3(z)(y(z) - y_m(z)) + K_m(1 - F_3(1))d(z) \quad (90)$$

avec

$$\begin{aligned} F_3(z) &= \frac{A_{01}(A_{02} - A_{03})A_{01}^{\lambda+1} + A_{02}(A_{03} - A_{01})A_{02}^{\lambda+1} + A_{03}(A_{01} - A_{02})A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} \\ &\quad - \frac{A_{01}(A_{02}^2 - A_{03}^2)A_{01}^{\lambda+1} + A_{02}(A_{03}^2 - A_{01}^2)A_{02}^{\lambda+1} + A_{03}(A_{01}^2 - A_{02}^2)A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} z^{-1} \\ &\quad + A_{01}A_{02}A_{03} \frac{(A_{02} - A_{03})A_{01}^{\lambda+1} + (A_{03} - A_{01})A_{02}^{\lambda+1} + (A_{01} - A_{02})A_{03}^{\lambda+1}}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} z^{-2} \\ \gamma_3 &= K_m(1 - F_3(1)) \\ &= K_m \left[\frac{A_{01}^2(1 - A_{02})(1 - A_{03})(A_{02} - A_{03})(1 - A_{01}^\lambda)}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} + \right. \\ &\quad \left. \frac{A_{02}^2(1 - A_{01})(1 - A_{03})(A_{03} - A_{01})(1 - A_{02}^\lambda)}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} + \right. \\ &\quad \left. \frac{A_{03}^2(1 - A_{01})(1 - A_{02})(A_{01} - A_{02})(1 - A_{03}^\lambda)}{(A_{01} - A_{02})(A_{01} - A_{03})(A_{02} - A_{03})} \right] \end{aligned}$$

D'après l'équation (80) et (30), il vient:

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= -A_1^3 y_{k-1} - A_2^3 y_{k-2} - A_3^3 y_{k-3} + (y_{mk} + A_1^3 y_{mk-1} + A_2^3 y_{mk-2} \\ &\quad + A_3^3 y_{mk-3}) + \sum_{i=0}^3 B_i^3 \hat{d}_{k-1} \end{aligned} \quad (91)$$

Substituons dans l'équation (81):

$$\begin{aligned} d(z) &= \frac{K_I(1 + A_1^3 z^{-1} + A_2^3 z^{-2} + A_3^3 z^{-3})}{1 - [1 - K_I \sum_{i=0}^3 B_i^3] z^{-1}} (y(z) - y_m(z)) \\ &= \frac{K_I \prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i} z^{-i})}{1 - [1 - K_I K_m \prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i})] z^{-1}} (y(z) - y_m(z)) \\ &= D_3(z)(y(z) - y_m(z)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} y_p(z) &= y_m^*(z) + [F_3(z) + \gamma_3 D_3(z)](y(z) - y_m(z)) \\ \text{avec } \gamma_3 &= K_m(1 - F_3(1)) \end{aligned}$$

Régime permanent:

Les valeurs en régime permanent de y et y_m sont notées par \bar{y} et \bar{y}_m respectivement. D'après l'équation (81) on a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_k = \bar{y} \quad (92)$$

La substitution de l'équation (92) dans (91) donne:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}_k &= \frac{(1 + A_1^3 + A_2^3 + A_3^3)(\bar{y} - \bar{y}_m)}{B_0^3 + B_1^3 + B_2^3 + B_3^3} \\ &= \frac{\bar{y} - \bar{y}_m}{K_m}\end{aligned}$$

Le régime permanent s'obtient par l'équation (90):

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_{k+\lambda} &= \bar{y}_m + F_3(1)(\bar{y} - \bar{y}_m) + K_m(1 - F_3(1)) \frac{\bar{y} - \bar{y}_m}{K_m} \\ &= \bar{y}\end{aligned}$$

Le prédicteur analytique avec estimation de charge donne une prévision exacte du régime permanent qui est insensible aux erreurs de modélisation ou aux perturbations de charge non mesurées et peut donc être étendue à un système d'ordre élevé.

4.2.3 Extension du modèle d'ordre r

Nous utiliserons une extension de l'expression de la prédition de charge proposée par Doss et Moore [DM82]; il vient:

$$\hat{y}_k = -A_1^r y_{k-1} - A_2^r y_{k-2} - \cdots - A_r^r y_{k-r} + \sum_{i=0}^r B_i^r u_{k-\lambda-i} \quad (93)$$

$$+ \sum_{i=0}^r B_i^r \hat{d}_{k-1} \quad (94)$$

$$\hat{d}_k = \hat{d}_{k-1} + K_I(y_k - \hat{y}_k) \quad (95)$$

$$u_k = K_c(r_{ck} - \hat{y}_{k+\lambda}) - \hat{d}_k \quad (96)$$

Notons que $\sum_{j=0}^r B_j^r = K_m \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i})$ l'identification de l'équation (51) avec l'équation (52) avec $z = 1$.

Démontrons par induction la formule suivante:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_r(z)(y(z) - y_m(z)) + K_m(1 - F_r(1))d(z)$$

avec $F_r(z)$ est donné par l'équation (54).

Supposons qu'elle est vraie pour l'ordre r et montrons qu'elle l'est aussi pour l'ordre $r + 1$:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+\lambda} + A_1^{r+1} \hat{y}_{k+\lambda-1} + A_2^{r+1} \hat{y}_{k+\lambda-2} + \cdots + A_{r+1}^{r+1} \hat{y}_{k+\lambda-(r+1)} &= \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} u_{k-i} \\ &+ \sum_{i=0}^{r+1} B_i^{r+1} \hat{d}_{k+\lambda-1}\end{aligned}$$

La même raisonnement effectué pour un système sans charge:

$$\hat{w}_{k+\lambda} = w_{mk}^* + [(1, \dots, r)F_r(z)](w_k - w_{mk}) + K_m(1 - A_{0(r+1)})[1 - [(1, \dots, r)F(1)]]\hat{d}_k \quad (97)$$

avec $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{0(r+1)}y_{k-1}$, $w_{mk}^* = y_{mk}^* - A_{0(r+1)}y_{mk-1}^*$ et $w_{mk} = y_{mk} - A_{0(r+1)}y_{mk-1}$
La même procédure avec $\hat{w}_k = \hat{y}_k - A_{01}y_{k-1}$, $w_{mk}^* = y_{mk}^* - A_{01}y_{mk-1}^*$ et $w_{mk} = y_{mk} - A_{01}y_{mk-1}$

$$\hat{w}_{k+\lambda} = w_{mk}^* + [{}^{(2,\dots,(r+1))}F_r(z)](\hat{w}_k - w_{mk}) + K_m(1 - A_{01})(1 - [{}^{(2,\dots,(r+1))}F_r(1)])\hat{d}_k \quad (98)$$

L'addition des équations $A_{01} \times (97)$ et $-A_{0(r+1)} \times (98)$, il vient:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_{(r+1)}(z)(y(z) - y_m(z)) + K_m(1 - F_{(r+1)}(1))d(z)$$

d'où la validation de la formule de récurrence.

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_r(z)(y(z) - y_m(z)) + \gamma_r d(z) \quad (99)$$

avec $\gamma_r = K_m(1 - F_r(1))$.

D'après les équations (94), (55), il vient:

$$\hat{y}_k = - \sum_{i=1}^r A_i^r y_{k-i} + \sum_{i=0}^r A_i^r y_{mk-i} + \sum_{i=0}^r B_i^r \hat{d}_{k-1} \quad (100)$$

En remplaçons l'équation (100) dans (95), il vient:

$$\begin{aligned} d(z) &= \frac{K_I \sum_{i=0}^r A_i^r z^{-i}}{1 - [1 - K_I \sum_{i=0}^r B_i^r] z^{-1}} (y(z) - y_m(z)) \\ &= \frac{K_I \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i} z^{-i})}{1 - [1 - K_I K_m \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i})] z^{-1}} (y(z) - y_m(z)) \\ &= D_r(z)(y(z) - y_m(z)) \end{aligned}$$

où

$$y_p(z) = y_m^*(z) + [F_r(z) + \gamma_r D_r(z)](y(z) - y_m(z))$$

$$\text{avec } \gamma_r = K_m(1 - F_r(1)) \text{ et } D_r(z) = \frac{K_I \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i} z^{-i})}{1 - [1 - K_I K_m \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i})] z^{-1}}$$

Régime permanent:

Les valeurs en régime permanent de y et y_m sont notées par \bar{y} et \bar{y}_m respectivement. D'après l'équation (95) on a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_k = \bar{y} \quad (101)$$

La substitution de l'équation (101) dans (100) donne:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}_k &= \frac{\sum_{i=0}^r A_i^r}{\sum_{i=0}^r B_i^r} (\bar{y} - \bar{y}_m) \\ &= \frac{\bar{y} - \bar{y}_m}{K_m} \end{aligned}$$

Le régime permanent s'obtient par l'équation (99):

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}_{k+\lambda} &= \lim_{z \rightarrow 1} y_p(z) = \bar{y}_m + F_r(1)(\bar{y} - \bar{y}_m) + K_m(1 - F_r(1)) \frac{\bar{y} - \bar{y}_m}{K_m} \\ &= \bar{y}\end{aligned}$$

Résumé:

Modèle du premier ordre:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + [F_1(z) + \gamma_1 D_1(z)] (y(z) - y_m(z))$$

avec $\gamma_1 = K_m(1 - F_1(1))$
et $D_1(z) = \frac{K_I(1 - A_{01}z^{-1})}{1 - [1 - K_I K_m(1 - A_{01})]z^{-1}}$

Modèle du second ordre:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + [F_2(z) + \gamma_2 D_2(z)] (y(z) - y_m(z))$$

avec $\gamma_2 = K_m(1 - F_2(1))$
et $D_2(z) = \frac{K_I(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})}{1 - [1 - K_I K_m(1 - A_{01})(1 - A_{02})]z^{-1}}$

Modèle du troisième ordre:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + [F_3(z) + \gamma_3 D_3(z)] (y(z) - y_m(z))$$

avec $\gamma_3 = K_m(1 - F_3(1))$
et $D_3(z) = \frac{K_I(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})(1 - A_{03}z^{-1})}{1 - [1 - K_I K_m(1 - A_{01})(1 - A_{02})(1 - A_{03})]z^{-1}}$

Extension du modèle d'ordre r:

$$y_p(z) = y_m^*(z) + [F_r(z) + \gamma_r D_r(z)] (y(z) - y_m(z))$$

avec $\gamma_r = K_m(1 - F_r(1))$
et $D_r(z) = \frac{K_I \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i}z^{-1})}{1 - [1 - K_I K_m \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i})]z^{-1}}$

Fonction de transfert

La sortie avec modélisation imparfaite procure:

$$y(z) = \frac{K_c P_0(z) z^{-p} r(z) + \{1 + M_0(z)[K_c - K_c A_r^*(z) z^{-\lambda} - D_r(z) z^{-\lambda}]\} G_\ell \ell(z)}{1 + K_c M_0(z) + [K_c A_r^*(z) + D_r(z)][P_0(z) z^{-p} - M_0(z) z^{-\lambda}]}$$

avec $A_r^*(z) = F_r(z) + \gamma_r D_r(z)$

La sortie avec modèle parfait donne:

$$y(z) = \frac{K_c P_0(z) z^{-p} r(z) + \{1 + P_0(z)[K_c - K_c A_r^*(z) z^{-p} - D_r(z) z^{-p}]\} G_\ell \ell(z)}{1 + K_c P_0(z)}$$

4.3 Seconde formulation du filtre de pondération

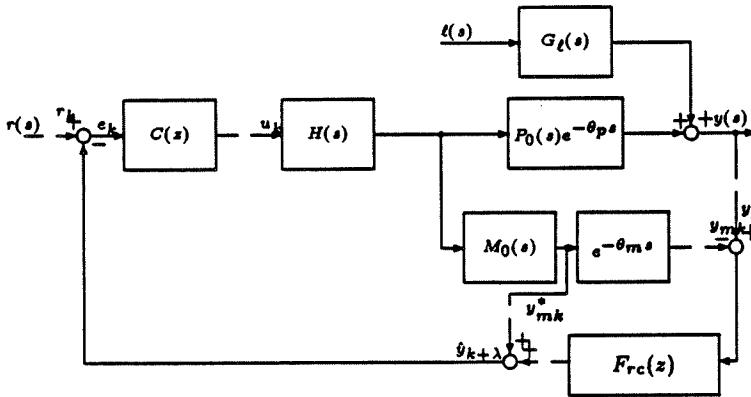


Figure 10: Représentation du prédicteur analytique généralisé.

Dans la structure précédente le système de contrôle a une double contre-réaction avec un contrôleur et un estimateur de charge séparés ce qui forme une structure de commande assez complexe.

Nous allons ici proposer une structure beaucoup plus simple pour accomplir exactement la même fonction.

4.3.1 Modèle du second ordre $r = 2$

Pour ce faire reprenons l'algorithme proposé par Doss et Moore [DM82] et modifions le comme suit:

$$\begin{aligned}\hat{y}_k = & -A_1^2 y_{k-1} - A_2^2 y_{k-2} + B_0^2 u_{k-\lambda} + B_1^2 u_{k-\lambda-1} \\ & + B_2^2 u_{k-\lambda-2} + (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2) \hat{d}_{k-1}\end{aligned}\quad (102)$$

Si le modèle et la fonction de transfert de la charge sont exacts et ont la même forme comme l'a proposé Moore, alors nous avons:

$$\begin{aligned}y_k = & -A_1^2 y_{k-1} - A_2^2 y_{k-2} + B_0^2 u_{k-\lambda} \\ & + B_1^2 u_{k-\lambda-1} + B_2^2 u_{k-\lambda-2} + (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2) \hat{d}_k\end{aligned}\quad (103)$$

D'après l'équation (63) avec l'équation (102):

$$\begin{aligned}\hat{d}_k = & \hat{d}_{k-1} + K_I [y_k + A_1^2 y_{k-1} + A_2^2 y_{k-2} \\ & - B_0^2 u_{k-\lambda} - B_1^2 u_{k-\lambda-1} - B_2^2 u_{k-\lambda-2} - (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2) \hat{d}_{k-1}]\end{aligned}\quad (104)$$

L'équation (104) avec (8):

$$\begin{aligned}\hat{d}_k = & \hat{d}_{k-1} - K_I (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2) \hat{d}_{k-1} + K_I [(y_k - y_{mk}) \\ & - (A_{01} + A_{02})(y_{k-1} - y_{mk-1}) + A_{01} A_{02} (y_{k-2} - y_{mk-2})]\end{aligned}\quad (105)$$

De l'équation (105), on a:

$$d(z) = \frac{F_{t_2}(z)}{B_0^2 + B_1^2 + B_2^2} (1 - A_{01} z^{-1}) (1 - A_{02} z^{-2}) (y(z) - y_m(z)) \quad (106)$$

avec $F_{t_2}(z) = \frac{1-\beta_2}{1-\beta_2 z^{-1}}$; $\beta_2 = 1 - K_I \sum_{i=0}^2 B_i = 1 - K_I K_m \prod_{i=1}^2 (1 - A_{0i})$.

Remplaçons l'équation (106) dans l'équation (75):

$$\begin{aligned} y_p(z) &= y_m^*(z) + \left[\frac{A_{01}^{\lambda+1} - A_{02}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}A_{02}^{\lambda+1} - A_{02}A_{01}^{\lambda+1}}{A_{01} - A_{02}} z^{-1} \right] (y(z) - y_m(z)) \\ &\quad + \frac{K_m(1 - F_2(1))F_{t_2}(z)}{K_m(1 - A_{01})(1 - A_{02})} (1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-2})(y(z) - y_m(z)) \\ &= y_m^*(z) + F_{2c}(z)(y(z) - y_m(z)) \end{aligned} \quad (107)$$

avec

$$F_{2c}(z) = F_2(z) + (1 - F_2(1))F_{t_2}(z) \frac{(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})}{(1 - A_{01})(1 - A_{02})}$$

$F_2(z)$ étant l'expression du filtre sans charge.

Nous avons donc obtenu une amélioration de l'algorithme de Doss et Moore [DM82] en ce sens que les constantes de l'algorithme de récurrence sont directement déduites à partir de la fonction de transfert du modèle $M(s)$. Cette déduction va être généralisée pour les modèles d'ordre plus élevé, ce qui n'a pas été possible de réaliser à partir de la première formulation du filtre.

Remarque:

1. Si $\tau_2 = 0$ et $\beta_2 = 0$ correspond à un filtre "dead beat", $F_{2c}(z) = F_{1c}(z) = A_{01}^\lambda + \frac{1-A_{01}^\lambda}{1-A_{01}}(1 - A_{01}z^{-1})$ tel que présenté par S. K. P. Wong et D. E. Seborg [WS86] et l'on peut retrouver également la formule itérative de M. Wellons et E. Edgar [WE87].
2. Si $z = 1$, $F_{2c}(1) = 1$

4.3.2 Modèle du troisième ordre $r = 3$

Nous utilisons l'extension de l'algorithme proposé par Doss et Moore [DM82] et que nous modifions comme suit:

$$\hat{y}_k = -A_1^3 y_{k-1} - A_2^3 y_{k-2} - A_3^3 y_{k-3} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-\lambda-i} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 \hat{d}_{k-1} \quad (108)$$

Si le modèle et la fonction de transfert de la charge sont exacts et ont la même forme comme l'a proposé Moore, alors nous avons:

$$y_k = -A_1^3 y_{k-1} - A_2^3 y_{k-2} - A_3^3 y_{k-3} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-\lambda-i} + \sum_{i=0}^3 B_i^3 \hat{d}_k \quad (109)$$

D'après l'équation (81) avec l'équation (108):

$$\begin{aligned} \hat{d}_k &= \hat{d}_{k-1} + K_I [y_k + A_1^3 y_{k-1} + A_2^3 y_{k-2} + A_3^3 y_{k-3} \\ &\quad - \sum_{i=0}^3 B_i^3 u_{k-\lambda-i} - \sum_{i=0}^3 B_i^3 \hat{d}_{k-1}] \end{aligned} \quad (110)$$

L'équation (110) avec (30):

$$\begin{aligned}\hat{d}_k &= \hat{d}_{k-1} - K_I \sum_{i=0}^3 B_i^3 \hat{d}_{k-1} + K_I [(y_k - y_{mk}) + A_1^3(y_{k-1} - y_{mk-1}) \\ &\quad + A_2^3(y_{k-2} - y_{mk-2}) + A_3^3(y_{k-3} - y_{mk-3})]\end{aligned}\quad (111)$$

De l'équation (111), on a:

$$d(z) = \frac{F_{t_3}(z)}{\sum_{i=0}^3 B_i^3} [1 + A_1^3 z^{-1} + A_2^3 z^{-2} + A_3^3 z^{-3}] (y(z) - y_m(z)) \quad (112)$$

avec $F_{t_3}(z) = \frac{1-\beta_3}{1-\beta_3 z^{-1}}$; $\beta_3 = 1 - K_I \sum_{i=0}^3 B_i^3 = 1 - K_I K_m \prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i})$.

Remplaçons l'équation (112) dans l'équation (90):

$$\begin{aligned}y_p(z) &= y_m^*(z) + F_3(z)(y(z) - y_m(z)) + \frac{(1 - F_3(1))F_{t_3}(z)}{(1 - A_{01})(1 - A_{02})(1 - A_{03})} \\ &\quad \times [1 + A_1^3 z^{-1} + A_2^3 z^{-2} + A_3^3 z^{-3}] (y(z) - y_m(z)) \\ &= y_m^*(z) + F_{3c}(z)(y(z) - y_m(z))\end{aligned}\quad (113)$$

avec

$$F_{3c}(z) = F_3(z) + (1 - F_3(1))F_{t_3}(z) \frac{\prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i} z^{-i})}{\prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i})}$$

avec $F_3(z)$ le filtre sans charge.

Nous avons donc obtenu une amélioration de l'algorithme de Doss et Moore [DM82] en ce sens que les constantes de l'algorithme de récurrence sont directement déduites à partir de la fonction de transfert du modèle $M(s)$.

Remarque:

- Si $\tau_2 = \tau_3 = 0$ et $\beta_3 = 0$ correspond à un filtre "dead beat", $F_{3c} = F_{1c}(z) = A_{01}^\lambda + \frac{1-A_{01}^\lambda}{1-A_{01}}(1 - A_{01}z^{-1})$ tel que présenté par S. K. P. Wong et D. E. Seborg [WS86].
- Si $z = 1$, $F_{3c}(1) = 1$.

4.3.3 Modèle d'ordre r

Nous utilisons l'extension de l'algorithme proposé par Doss et Moore [DM82] et que nous modifions comme suit:

$$\hat{y}_k = - \sum_{i=1}^r A_i^r y_{k-i} + \sum_{i=0}^r B_i^r u_{k-\lambda-i} + \sum_{i=0}^r B_i^r \hat{d}_{k-1}$$

Si le modèle et la fonction de transfert de la charge sont exacts et ont les mêmes formes que l'a proposé Doss et Moore, alors nous avons:

$$y_k = - \sum_{i=1}^r A_i^r y_{k-i} + \sum_{i=0}^r B_i^r u_{k-\lambda-i} + \sum_{i=0}^r B_i^r \hat{d}_k \quad (114)$$

Avec l'équation (95)

$$\hat{d}_k = \hat{d}_{k-1} - K_I \sum_{i=0}^r B_i^r \hat{d}_{k-1} + K_I \sum_{i=0}^r A_i^r (y_{k-i} - y_{mk-i}) \quad (115)$$

De l'équation (90) dans l'équation (115):

$$y_p(z) = y_m^*(z) + F_{rc}(z)(y(z) - y_m(z))$$

avec $F_{rc} = F_r(z) + (1 - F_r(1))F_{t_r}(z) \frac{\prod_{i=1}^r (1 - A_{0i}z^{-i})}{\prod_{i=1}^r (1 - A_{0i})}$

$$F_{t_r}(z) = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_r z^{-1}}; \quad \beta_r = 1 - K_I K_m \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i})$$

et $F_r(z)$ le filtre sans charge.

Remarque: Si $z = 1$, $F_{rc}(1) = 1$.

Résumé:

Modèle du premier ordre $r = 1$:

$$F_{1c}(z) = [F_1(z)] + (1 - [F_1(1)]) \frac{1 - A_{01}z^{-1}}{1 - A_{01}}$$

avec $[F_1(z)] = A_{01}^\lambda$

Modèle du second ordre $r = 2$:

$$F_{2c}(z) = [{}^{1,2}F_2(z)] + (1 - [{}^{1,2}F_2(1)])F_{t_2}(z) \frac{\prod_{i=1}^2 (1 - A_{0i}z^{-1})}{\prod_{i=1}^2 (1 - A_{0i})}$$

avec $[{}^{1,2}F_2(z)] = \frac{A_{01}(1 - A_{02}z^{-1})[{}^1F_1(z)] - A_{02}(1 - A_{01}z^{-1})[{}^2F_1(z)]}{A_{01} - A_{02}}$

avec $[{}^1F_1(z)] = A_{01}^\lambda$ et $[{}^2F_1(z)] = A_{02}^\lambda$

$$F_{t_2}(z) = \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_2 z^{-1}}; \quad \beta_2 = 1 - K_I K_m \prod_{i=1}^2 (1 - A_{0i})$$

Modèle du troisième ordre $r = 3$:

$$F_{3c}(z) = [{}^{1,2,3}F_3(z)] + (1 - [{}^{1,2,3}F_3(1)])F_{t_3}(z) \frac{\prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i}z^{-1})}{\prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i})}$$

avec $[{}^{1,2,3}F_3(z)] = \frac{A_{01}(1 - A_{03}z^{-1})[{}^{1,2}F_2(z)] - A_{03}(1 - A_{01}z^{-1})[{}^{2,3}F_2(z)]}{A_{01} - A_{03}}$

avec $F_{t_3}(z) = \frac{1 - \beta_3}{1 - \beta_3 z^{-1}}; \quad \beta_3 = 1 - K_I K_m \prod_{i=1}^3 (1 - A_{0i})$

Modèle d'ordre r :

$$F_{rc}(z) = [{}^{1,\dots,r}F_r(z)] + (1 - [{}^{1,\dots,r}F_r(1)])F_{t_r} \frac{\prod_{i=1}^r (1 - A_{0r}z^{-1})}{\prod_{i=1}^r (1 - A_{0r})}$$

$$A_{01}(1 - A_{0r}z^{-1})[{}^{1,\dots,(r-1)}F_{(r-1)}(z)]$$

$$\text{avec } [1, \dots, F_r(z)] = \frac{-A_{0r}(1 - A_{01}z^{-1})[2, \dots, F_{(r-1)}(z)]}{A_{01} - A_{0r}}$$

$$\text{avec } F_{t_3}(z) = \frac{1 - \beta_r}{1 - \beta_r z^{-1}}; \quad \beta_r = 1 - K_I K_m \prod_{i=1}^r (1 - A_{0i})$$

Fonction de transfert

La réponse en boucle fermée du système compensé de la figure 10 est:

$$y(z) = \frac{P_0(z)C(z)z^{-p}r(z) + (1 + C(z)M_0(z) - C(z)F_{rc}(z)M_0(z)z^{-\lambda})G_\ell(z)\ell(z)}{1 + C(z)M_0(z) + C(z)F_{rc}(z)[P_0(z)z^{-p} - M_0(z)z^{-\lambda}]}$$

effet du bouclage égalisation des retards et pondération de l'erreur

(116)

5 Résultats et Simulation

Dans cette section, nous présentons la stabilité du filtre de pondération [HTB92] avec le prédicteur analytique généralisé. Ensuite, une comparaison du prédicteur de Smith PA avec le PAG en utilisant un contrôleur proportionnel est faite. De même, une comparaison entre le PAG et la commande par modèle interne en suiveur et en régulation dans le cas d'une modélisation parfaite et imparfaite complète l'étude.

5.1 Stabilité du filtre de pondération

L'annexe A reproduit les diverses situations que nous avons simulées dans le but de mettre en évidence les propriétés fondamentales du filtre. Le lecteur devra s'y reporter pour les situer dans leur contexte global. Ici, nous portons l'attention du lecteur, sur les seules données qui sont pertinentes au filtre de pondération.

Nous remarquons pour différente constante de temps que les racines des filtres:

$$F_{1c} = F_1(z) + (1 - F_1(1))F_{\ell_1}(z) \frac{1 - A_{01}z^{-1}}{1 - A_{01}} \text{ avec } F_1(z) = A_{01}^\lambda$$

$$F_{2c} = F_2(z) + (1 - F_2(1))F_{\ell_2}(z) \frac{(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})}{(1 - A_{01})(1 - A_{02})}$$

avec $F_2(z)$ (l'équation (23)) et

$$F_{3c} = F_3(z) + (1 - F_3(1))F_{\ell_3}(z) \frac{(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})(1 - A_{03}z^{-1})}{(1 - A_{01})(1 - A_{02})(1 - A_{03})}$$

avec $F_3(z)$ (l'équation (47)) sont dans le cercle unitaire (stable). L'annexe A présente les filtres du premier, second et troisième ordre.

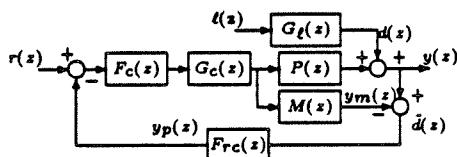


Figure 11: Structure du prédicteur analytique généralisé multivariable.

Nous notons que lorsque le retard augmente ou lorsque la constante de temps du filtre de pondération β diminue. Il en est de même lorsque pour une même valeur de m , les constantes de temps du système augmentent. Les valeurs de β_r ajoutent dans chaque cas un pôle unique supplémentaire β_r à la fonction de transfert en boucle fermée en référence à un système en boucle fermée où $F_{rc}(z)$ est remplacé par un gain unitaire. Ceci suit de par l'équivalence entre la figure 10 et la figure 11 où $F_{rc}(z)$ apparaît en retour, $G_c(z) = \frac{C(z)}{1+C(z)M_0(z)}$ et $F_c(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$. Ainsi par un filtre du premier ordre, et quelque soit $m = \lambda$, la constante de temps τ augmentant, les zéros du filtre de pondération tendent dans la direction du cercle unitaire. Pour un filtre de pondération du second ordre, les deux zéros du filtre de pondération tendent dans la direction du cercle unitaire lorsque τ augmente. Finalement, pour un filtre de pondération d'ordre trois, correspondant à un processus modelisé par une fonction de transfert du troisième ordre, les

zéros tendent vers le cercle unitaire. Dans les trois cas, le filtre de pondération a un pôle unique localisé à la valeur β_1 , β_2 et β_3 respectivement. Par conséquent, si l'on suppose que la boucle fermée est stable lorsque $F_{rc}(z)$ est remplacé par un gain unitaire, l'introduction du filtre de pondération $F_{rc}(z)$ ne nuit pas à la stabilité du système en boucle fermée.

5.2 Performances dynamique et statique

5.2.1 Compensateur proportionnel

Toujours selon l'annexe A qui regroupe les simulations nécessaires à la comparaison des prédicteurs (Smith, PA et PAG) pour un système du second ordre avec un zéro à non-minimum de phase.

Peu importe le prédicteur, dès que l'on fait de la modélisation imparfaite les temps de réponse sont plus longs que lors de la modélisation parfaite. L'effet de β_2 sur le PAG va donner des dépassements quelque peu plus élevés lorsque celui-ci augmente.

On remarque beaucoup plus de variation lorsque l'on change la valeur du zéro. Quand on éloigne le zéro en modélisation parfaite on voit seulement une augmentation du dépassement pour les trois prédicteurs, par contre, en modélisation imparfaite le temps de réponse augmente aussi et de façon assez significative.

Pour la variation d'un des pôles, les résultats sont quelque peu mitigés. On observe l'effet inverse entre la modélisation parfaite et imparfaite. C'est-à-dire que lorsque l'on augmente la valeur du pôle, le dépassement augmente en modélisation parfaite et diminue en modélisation imparfaite. Pour ce qui concerne le temps de réponse, celui-ci augmente sensiblement dans les deux cas.

Pour vérifier l'effet du retard sur les différents prédicteurs nous avons varié ce paramètre: aussi, et les résultats sont relativement semblables peu importe le prédicteur. Le temps de réponse augmente ainsi que le dépassement lorsque le retard est augmenté. Nous allons maintenant voir ce que la commande par modèle interne donne comme résultat.

5.2.2 Comparaison PAG et CMI

Dans tous les cas, le prédicteur analytique généralisé donne de meilleure résultat que la commande par modèle interne, l'annexe A regroupe les simulations nécessaires à la comparaison.

L'effet de β_2 sur la sortie du système: plus β_2 augmente plus le dépassement est grand. Un effet secondaire de l'augmentation de β_2 se fait sentir aussi sur le temps de réponse, seulement la variation de β_2 doit être beaucoup plus grande pour voir un changement. Il faut noter aussi que seul le prédicteur analytique généralisé est affecté par les variations de β_2 , car on ne retrouve pas ce paramètre dans l'équation de commande par modèle interne.

L'effet de α par contre ce fait sentir beaucoup plus sur les deux systèmes étudiés. Lorsque α approche de l'unité, le dépassement augmente subitement et le temps de réponse devient énorme.

5.3 Robustesse de la structure de la commande PAG

Dans cette partie nous examinons la robustesse de la structure de commande PAG vis à vis

des erreurs de modélisation. La sortie en boucle fermée est: (modélisation imparfaite)

$$y(z) = \frac{P(z)G_c(z)F_c(z)}{1 + G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)[P(z) - M(z)]} + \frac{1 - P(z)G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)}{1 + G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)[P(z) - M(z)]}$$

Soit $P(z)$, $M(z)$ et la fonction de transfert de la perturbation est stable: avec $G_c(1) = [M_-(1)]^{-1}$, le filtre de robustesse est $F_c(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z-1}$, $0 \leq \alpha < 1$.

Donc, il existe un α^* ($0 \leq \alpha^* < 1$) tel que

$$[M_-(1)]^{-1}P(1) > 0 \quad (117)$$

La démonstration est donnée à l'annexe A.

6 Conclusion

Ce rapport montre que le filtre de pondération faisant partie du schéma bloc du prédicteur analytique généralisé peut être exprimé d'une façon directe et non récursive. Les travaux précités mentionnent l'obtention d'un tel filtre lorsque le modèle utilisé pour décrire le processus est de premier ou de second ordre. Dans notre étude, nous avons démontré qu'il est possible d'obtenir une formulation simple du filtre d'adaptation pour un prédicteur analytique généralisé lorsque le modèle décrivant le processus a un ordre quelconque. Ceci constitue une extension des travaux présentés jusqu'à ce jour et permet une correction de la boucle plus adéquate dans une prédiction analytique généralisée. Nous avons là un outil de synthèse puissant pour les systèmes d'ordre quelconque défini par une fonction de transfert.

Bibliographie

- [AS73] G. Alevisakis and D.E. Seborg. An Extension of the Smith Predictor Method to Multivariable Linear Systems Containing Time Delays. *Int. J. Control.*, 3(17):541–551, 1973.
- [Bro79] C. B. Brosilow. The Structure and Design of Smith Predictors from the viewpoint of Inferential Control. *Joint Automatic Control Conference Proceedings*, 1979.
- [DM82] J. E. Doss and C. F. Moore. The Discrete Analytical Predictor-A Generalized Dead Time Compensation Technique. *ISA Trans.*, 20(4):77–85, 1982.
- [Fra87] Bruce A. Francis. *A Course in H_∞ Control Theory*. Springer-Verlag N° 88, 1987.
- [GM82] C. E. Garcia and M. Morari. Internal Model Control. I. A Unifying Review and some New Results. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 21(2):308–323, 1982.
- [GM5a] C. E. Garcia and M. Morari. Internal Model Control. II. Design Procedure for Multivariable Systems. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 24(2):472–484, 1985a.
- [GM5b] C. E. Garcia and M. Morari. Internal Model Control. III. Multivariable Control Law Computation and Tuning Guidelines. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 24(2):484–494, 1985b.
- [Ham89] M. Hammami. *Problèmes associés à la commande optimale linéaires des systèmes à retard*. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal, Dec 1989.
- [Hor83] I. Horowitz. Some Properties of Delayed Controls (Smith Regulator). *Int. J. Control.*, 38(5):977–990, 1983.
- [HTB91a] M. Hammami, A-B. Turgeon, and D. Bensoussan. Higher Order Modelling for Adaptation Filters in Generalized Analytic Predictors. *30th IEEE CDC in Brighton, UK*, pp. 963-968, 11-13 December 1991.
- [HTB91b] M. Hammami, A-B Turgeon, and D. Bensoussan. *Le prédicteur analytique généralisé*. Journées d'Optimisation, Université de Montréal, Mai 1991.
- [HTB92] M. Hammami, A-B. Turgeon, and D. Bensoussan. Stabilité du filtre de pondération pour la prédiction analytique généralisée monovariable. *Journée Tunisienne D'Electrotechnique et d'Automatique*, 6-9 Fevrier 1992.
- [KA80] J. C. Kantor and R. P. Andres. The Analysis and Design of Smith Predictors Using Singular Nyquist Arrays. *Int. J. Control.*, 31(4):655–664, 1980.
- [Kod81] Mosato Koda. Sensitivity Analysis of Time-Delay Systems. *Int. J. Systems Sci.*, 12(11):1389–1397, 1981.
- [LO62] D. E. Lupfer and M. W. Oglesby. The Application of Dead Time Compensation to a Chemical Reactor for Automatic Control of Production Rate. *ISA Transactions*, 1(1):72–80, 1962.

- [MSM70] C. F. Moore, C. L. Smith, and P. W. Murril. Improved Algorithm for Direct Digital Control. *Instrum. Control Syst.*, 43:70–74, January 1970.
- [MSW76] C. Meyer, D. E. Seborg, and R. K. Wood. A Comparaison of the Smith Predictor and Conventional Feedback Control. *Chem. Eng. Sci.*, 31:775–778, 1976.
- [MSW78] C. Meyer, D. E. Seborg, and R. K. Wood. An Experimental Application of Time Delay Compensation Techniques to Distillation Column Control. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 17(1):62–67, 1978.
- [MWS79] C. Meyer, R. K. Wood, and D. E. Seborg. Experimental Evaluation of Analytical and Smith Predictors for Distillation Column Control. *AICHE J.*, 25(1):24–32, January 1979.
- [Pal80] Z. Palmor. Stability Properties of Smith Dead Time Compensator Controllers. *Int. J. Control*, 32(6):937–949, 1980.
- [PH83] Z. J. Palmor and Y. Halevi. On the Design and Properties of Multivariable Dead Time Compensators. *Automatica*, 19(3):255–264, 1983.
- [PK75] C. C. Prasad and P. R. Krishnaswamy. Control of Pure Dead Time Processes. *Chem. Eng. Sci.*, 30:207–215, 1975.
- [PS78] Z. J. Palmor and R. Shinnar. Design and Tuning of Dead Time Compensators. *Proc. JACC*, 1978.
- [PS81] Z. J. Palmor and R. Shinnar. Design of Advanced Process Controllers. *AICHE J.*, 27(5):793–805, Sept. 1981.
- [RF69] D. W. Ross and I. Flügge-Lotz. An Optimal Control Problem for Systems with Differential-Difference Equation Dynamics. *SIAM J. Control*, 7(4):609–623, 1969.
- [RL78] W. H. Ray and D. G. Lainiotis. *Distributed Parameter Systems*. Volume 6, Control and Systems Theory, Marcel Dekker; INC. Edition, 1978.
- [Smi57] O. J. M. Smith. Closer Control of Loops with Dead Time. *Chem. Eng. Prog.*, 53(5):217–219, 1957.
- [TH90a] A. B. Turgeon and M. Hammami. *La compensation des systèmes à retard: les prédicteurs*. Technical Report, École Polytechnique de Montréal, Juin 1990. EPM/RT-90/9.
- [TH90b] A. B. Turgeon and M. Hammami. *La compensation des systèmes à retard: les prédicteurs*. Journées d'Optimisation, Université de Montréal, Mai 1990.
- [TP76] A. Thowsn and W. R. Perkins. On the Controllability of Linear Time-Delay Systems with piecewise Constant Inputs. *Int. J. Systems Sci.*, 7(3):347–360, 1976.
- [WE87] M. C. Wellons and T. F. Edgar. The Genralized Analytical Predictor. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 26(8):1523–1536, 1987.

- [WII83] K. Watanabe, Y. Ishiyama, and M. Ito. Modified Smith Predictor Control for Multi-variable Systems with Delays and Unmeasurable Step Disturbances. *Int. J. Control*, 37(5):959–973, 1983.
- [WS86] S. K. Wong and D. F. Seborg. A Theoretical Analysis of Smith and Analytical Predictors. *AICHE Journal*, 32(10):1597–1605, October 1986.
- [WS88] S. K. Wong and D. F. Seborg. *Int. J. Control*, Vol. 48, No. 6:2303–2327, 1988.
- [ZM85] E. Zafiriou and M. Morari. Digital Controllers for SISO Systems- A Review and a new Algorithm. *Int. J. Control*, 42(4):855–876, 1985.

A Simulation

A.1 Stabilité du filtre de pondération

Cet annexe regroupe un ensemble de simulations qui ont permis de mettre en évidence les propriétés du prédicteur analytique généralisé dans le domaine de la stabilité et en mode suiveur avec une comparaison avec le PS, PA.

Les simulations ont été réalisées sur un micro-ordinateur du type IBM PS/2 et sur une station SUN avec l'aide du progiciel MATLAB.

En cherchant les racines du filtre de pondération du premier ordre, du second ordre et du troisième ordre, respectivement

$$F_{1c} = F_1(z) + (1 - F_1(1))F_{\ell_1}(z) \frac{1 - A_{01}z^{-1}}{1 - A_{01}} \text{ avec } F_1(z) = A_{01}^{\lambda}$$

$$F_{2c} = F_2(z) + (1 - F_2(1))F_{\ell_2}(z) \frac{(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})}{(1 - A_{01})(1 - A_{02})}$$

avec $F_2(z)$ (l'équation (23)).

$$F_{3c} = F_3(z) + (1 - F_3(1))F_{\ell_3}(z) \frac{(1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1})(1 - A_{03}z^{-1})}{(1 - A_{01})(1 - A_{02})(1 - A_{03})}$$

avec $F_3(z)$ (l'équation (47)).

On constate que les racines sont dans le cercle unitaire (figure 12, 13, 14, 15, 16 avec une variation du retard $m = \lambda$ et variation des constantes de temps).

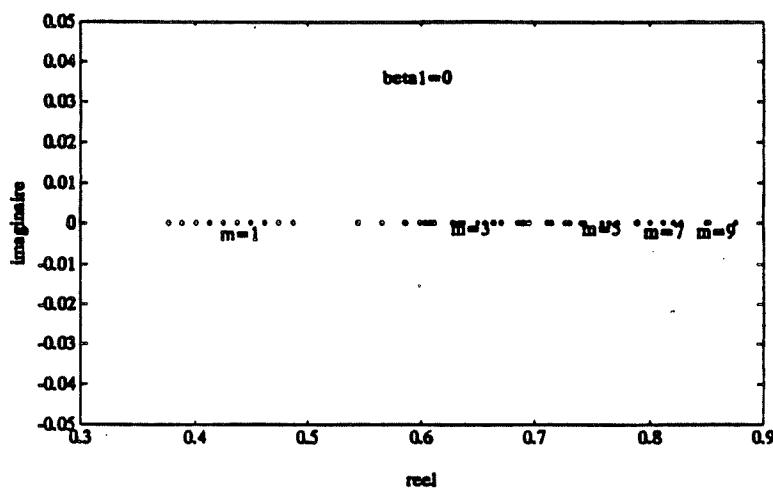


Figure 12: Stabilité du filtre du premier ordre $\beta_1 = 0$

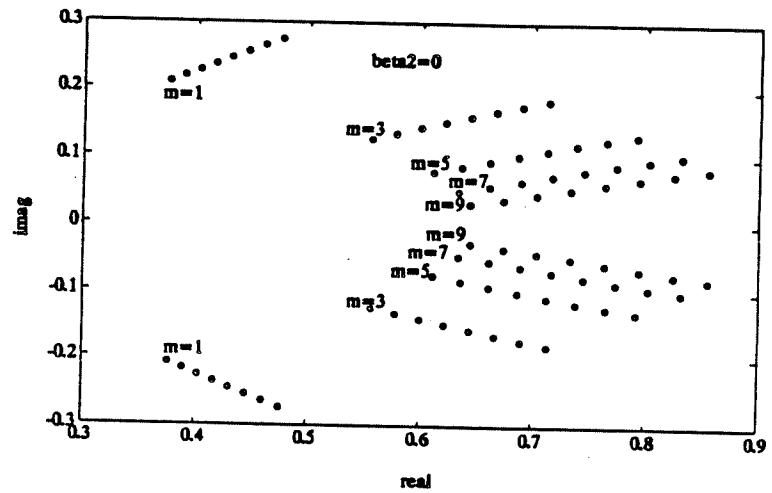


Figure 13: Stabilité du filtre du second ordre $\beta_2 = 0$

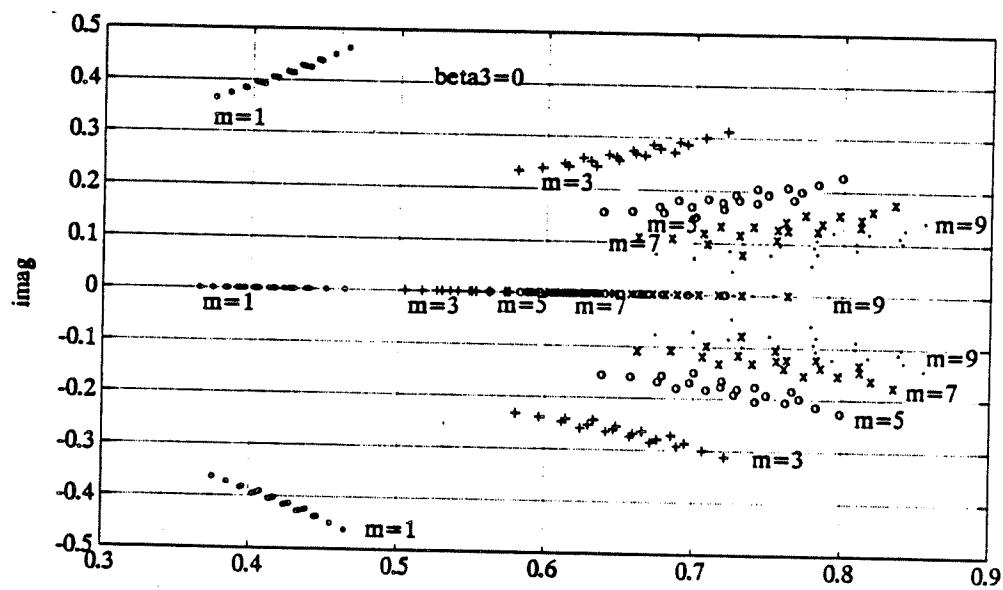


Figure 14: Stabilité du filtre du troisième ordre $\beta_3 = 0$

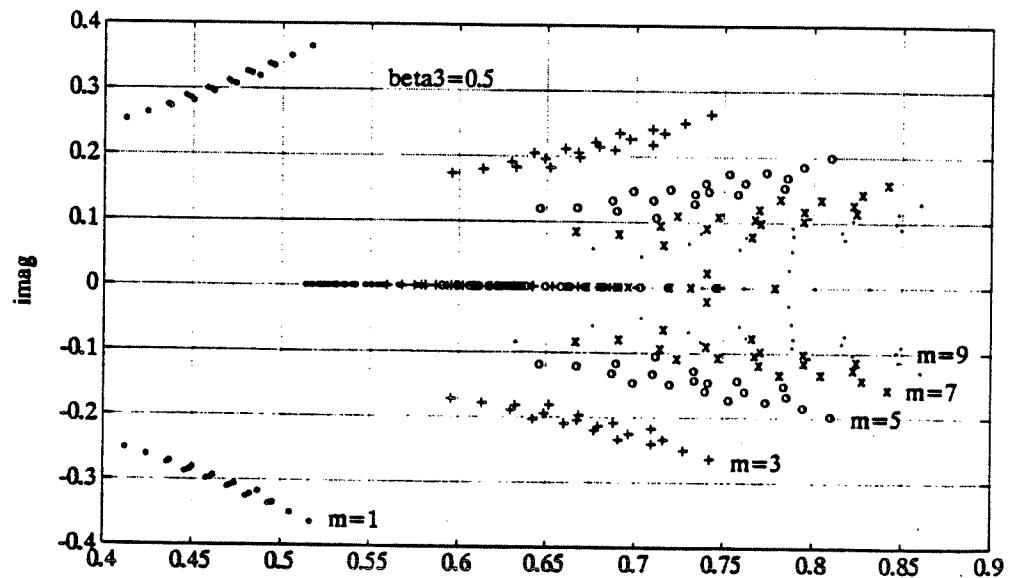


Figure 15: Stabilité du filtre du troisième ordre $\beta_3 = 0.5$

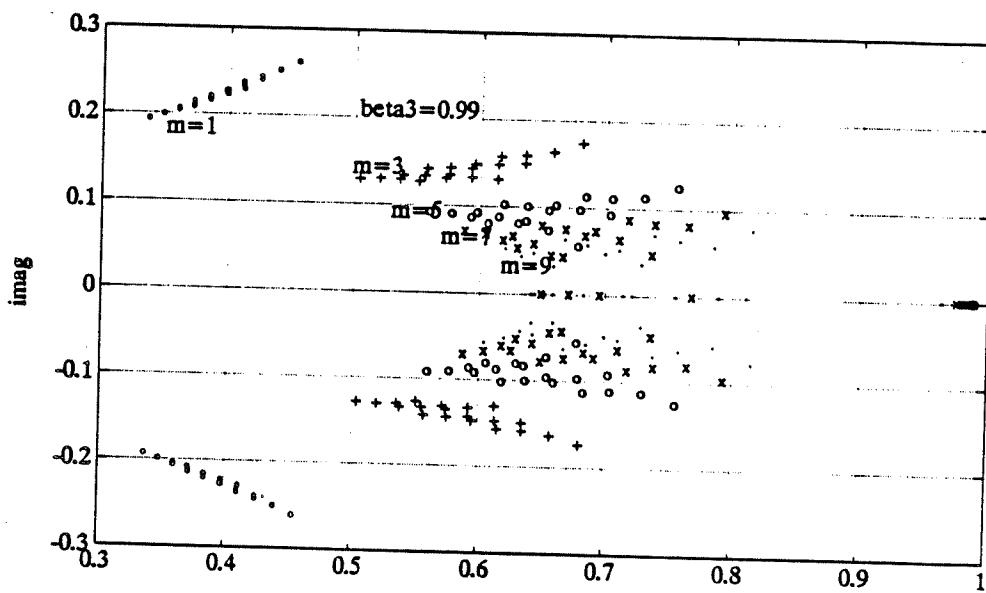


Figure 16: Stabilité du filtre du troisième ordre $\beta_3 = 0.99$

A.2 Comparaison entre PS, PA et PAG

Pour chaque paramètre de l'équation caractéristique du processus que nous allons faire varier, nous allons présenter une série de simulations pour la modélisation parfaite et une autre série en modélisation imparfaite. Nous allons commencer par voir l'effet du paramètre β_2 sur le prédicteur analytique généralisé (figure 17, 18). Après, nous allons regarder l'effet du zéro (figure 19, 20) pour chaque prédicteur ainsi que l'effet d'un des pôles (figure 21, 22). Pour terminés la section, nous allons étudier l'effet du retard (figure 23) sur le temps de réponse des différents prédicteurs.

Caractéristique	PS	PA	PAG
$\beta_2 = 0.1$			
dépassement (%)	1.05	0.73	0.74
temps de réponse (s)	18	18	18
$\beta_2 = 0.3$			
dépassement (%)	1.05	0.73	0.74
temps de réponse (s)	18	18	18
$\beta_2 = 0.5$			
dépassement (%)	1.05	0.73	0.74
temps de réponse (s)	18	18	18
$\beta_2 = 0.7$			
dépassement (%)	1.05	0.73	0.76
temps de réponse (s)	18	18	18
$\beta_2 = 0.9$			
dépassement (%)	1.05	0.73	0.86
temps de réponse (s)	18	18	18

Table 1: Effet de β_2 en modélisation parfaite

Caractéristique	PS	PA	PAG
$\beta_2 = 0.1$ dépassement (%) temps de réponse (s)	0.17 22	- 22	0.03 23
$\beta_2 = 0.3$ dépassement (%) temps de réponse (s)	0.17 22	- 22	0.01 22
$\beta_2 = 0.5$ dépassement (%) temps de réponse (s)	0.17 22	- 22	0.02 22
$\beta_2 = 0.7$ dépassement (%) temps de réponse (s)	0.17 22	- 22	0.02 22
$\beta_2 = 0.9$ dépassement (%) temps de réponse (s)	0.17 22	- 22	0.22 22

Table 2: Effet de β_2 en modélisation imparfaite

Caractéristique	PS	PA	PAG
$\tau_p = -2.0$ dépassement (%) temps de réponse (s)	0.56 18	0.36 18	0.37 18
$\tau_p = -2.5$ dépassement (%) temps de réponse (s)	0.78 18	0.53 18	0.53 18
$\tau_p = -3.0$ dépassement (%) temps de réponse (s)	1.05 18	0.73 18	0.74 18
$\tau_p = -3.5$ dépassement (%) temps de réponse (s)	1.40 17	0.98 18	0.98 18
$\tau_p = -4.5$ dépassement (%) temps de réponse (s)	2.24 17	1.63 17	1.63 17

Table 3: Effet de τ_p en modélisation parfaite

Caractéristique	PS	PA	PAG
$\tau_p = -2.0$			
dépassement (%)	3.57	2.99	3.05
temps de réponse (s)	19	19	19
$\tau_p = -2.5$			
dépassement (%)	4.21	3.58	3.66
temps de réponse (s)	19	19	19
$\tau_p = -3.0$			
dépassement (%)	4.90	4.22	4.34
temps de réponse (s)	19	19	19
$\tau_p = -3.5$			
dépassement (%)	5.64	4.91	5.07
temps de réponse (s)	28	19	26
$\tau_p = -4.0$			
dépassement (%)	6.42	5.65	5.85
temps de réponse (s)	29	27	28

Table 4: Effet de τ_p en modélisation imparfaite

Caractéristique	PS	PA	PAG
$\tau_{1p} = 2.0$			
dépassement (%)	0.26	0.10	0.11
temps de réponse (s)	17	17	17
$\tau_{1p} = 2.5$			
dépassement (%)	0.69	0.42	0.42
temps de réponse (s)	17	17	17
$\tau_{1p} = 3.0$			
dépassement (%)	1.05	0.73	0.74
temps de réponse (s)	18	18	18
$\tau_{1p} = 3.5$			
dépassement (%)	1.31	0.96	0.97
temps de réponse (s)	18	18	18
$\tau_{1p} = 4.0$			
dépassement (%)	1.46	1.09	1.11
temps de réponse (s)	19	19	19

Table 5: Effet de τ_{1p} en modélisation parfaite

Caractéristique	PS	PA	PAG
$\tau_{1p} = 2.0$ dépassement (%) temps de réponse (s)	4.79 18	4.05 18	4.12 17
$\tau_{1p} = 2.5$ dépassement (%) temps de réponse (s)	4.93 18	4.22 18	4.43 18
$\tau_{1p} = 3.0$ dépassement (%) temps de réponse (s)	4.90 19	4.22 19	4.34 19
$\tau_{1p} = 3.5$ dépassement (%) temps de réponse (s)	4.77 19	4.11 20	4.23 19
$\tau_{1p} = 4.0$ dépassement (%) temps de réponse (s)	4.57 20	3.92 20	4.04 20

Table 6: Effet de τ_{1p} en modélisation imparfaite

Caractéristique	PS	PA	PAG
$\theta_p = 1$ dépassement (%) temps de réponse (s)	1.05 18	0.73 18	0.74 17
$\theta_p = 3$ dépassement (%) temps de réponse (s)	3.51 18	2.88 18	2.93 18
$\theta_p = 5$ dépassement (%) temps de réponse (s)	6.22 30	5.53 28	5.76 28
$\theta_p = 7$ dépassement (%) temps de réponse (s)	8.57 35	7.87 34	8.22 34
$\theta_p = 9$ dépassement (%) temps de réponse (s)	10.75 40	9.99 39	10.48 39

Table 7: Effet du retard θ_p

A.3 Comparaison entre CMI et PAG

Pour faire les comparaisons entre commande par modèle interne et le prédicteur analytique généralisé, nous avons utilisé les paramètres suivant:

$$\begin{aligned} K_p &= K_m = 1 \\ \theta_p &= \theta_m = 1 \\ \tau_p &= \tau_m = -3 \\ \tau_{1p} &= \tau_{1m} = 3 \\ \tau_{2p} &= \tau_{2m} = 5 \end{aligned}$$

Comme on peut le remarquer par la valeur des paramètres nous sommes en modélisation parfaite. Nous allons plutôt vérifier les effets de β_2 et α dans cette section (figure 24, 25).

Caractéristique	CMI	PAG
$\beta_2 = 0.1$		
dépassemement (%)	0.57	0.50
temps de réponse (s)	30	29
$\beta_2 = 0.3$		
dépassemement (%)	0.57	0.50
temps de réponse (s)	30	29
$\beta_2 = 0.5$		
dépassemement (%)	0.57	0.51
temps de réponse (s)	30	29
$\beta_2 = 0.7$		
dépassemement (%)	0.57	0.52
temps de réponse (s)	30	29
$\beta_2 = 0.9$		
dépassemement (%)	0.57	0.53
temps de réponse (s)	30	30

Table 8: Effet de β_2

Caractéristique	CMI	PAG
$\alpha = 0.1$ dépassemement (%) temps de réponse (s)	0.57 30	0.50 29
$\alpha = 0.3$ dépassemement (%) temps de réponse (s)	0.59 31	0.52 30
$\alpha = 0.5$ dépassemement (%) temps de réponse (s)	0.61 32	0.55 30
$\alpha = 0.7$ dépassemement (%) temps de réponse (s)	0.65 34	0.60 33
$\alpha = 0.9$ dépassemement (%) temps de réponse (s)	0.73 51	0.70 50

Table 9: Effet de α

$$K_p = K_m = 1, \Theta_p = \Theta_m = 1, \tau_p = \tau_m = -3$$

$$\tau_{1p} = \tau_{1m} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5$$

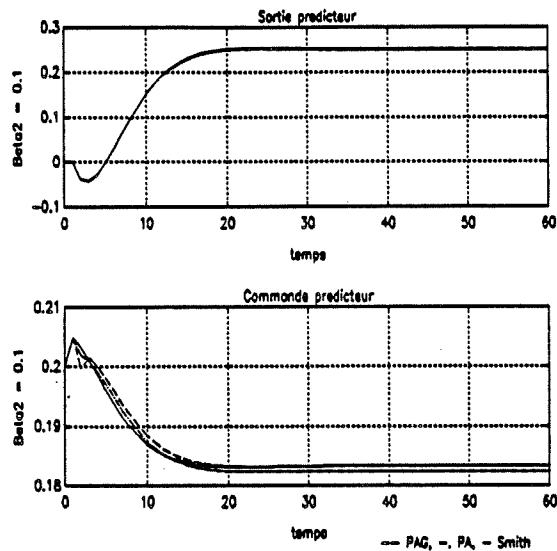


Figure 17a: $\beta_2 = 0.1$

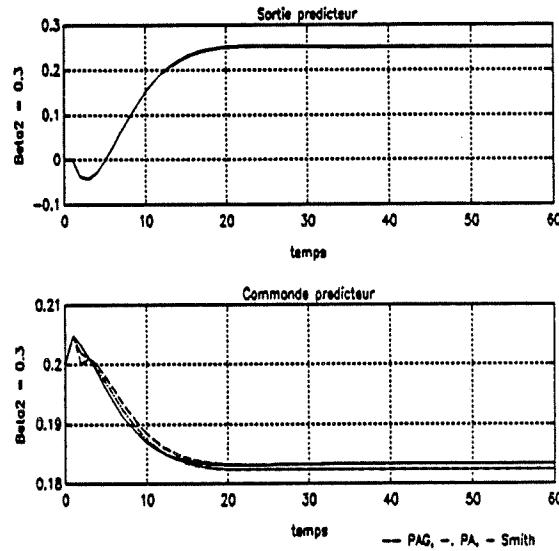


Figure 17b: $\beta_2 = 0.3$

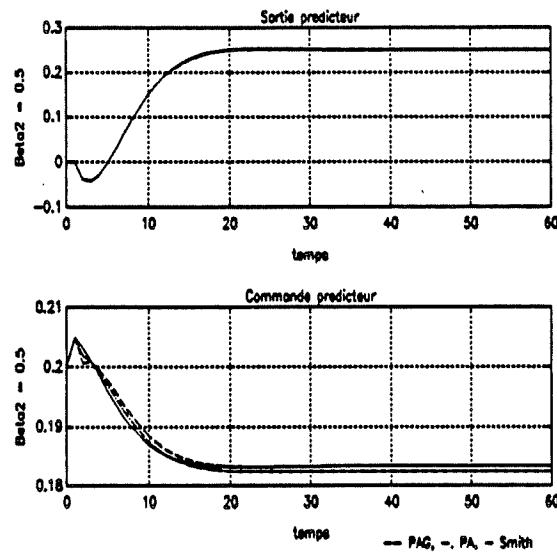


Figure 17c: $\beta_2 = 0.5$

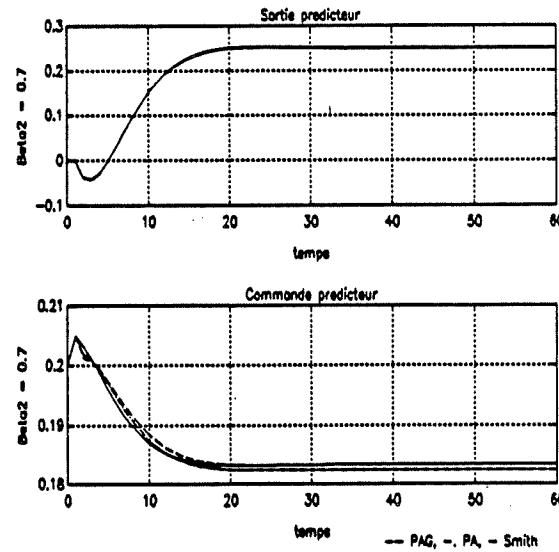


Figure 17d: $\beta_2 = 0.7$

Figure 17: Modélisation parfaite effet de β_2

$$K_p = K_m = 1, \Theta_p = 1, \Theta_m = 5, \tau_p = \tau_m = -3 \\ \tau_{1p} = \tau_{1m} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5$$

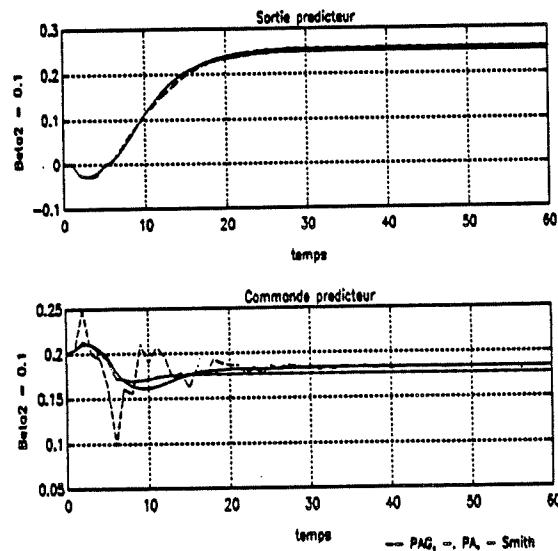


Figure 18a: $\beta_2 = 0.1$

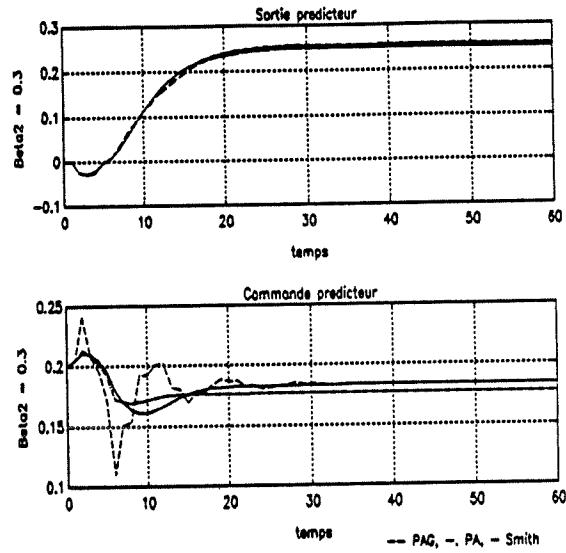


Figure 18b: $\beta_2 = 0.3$

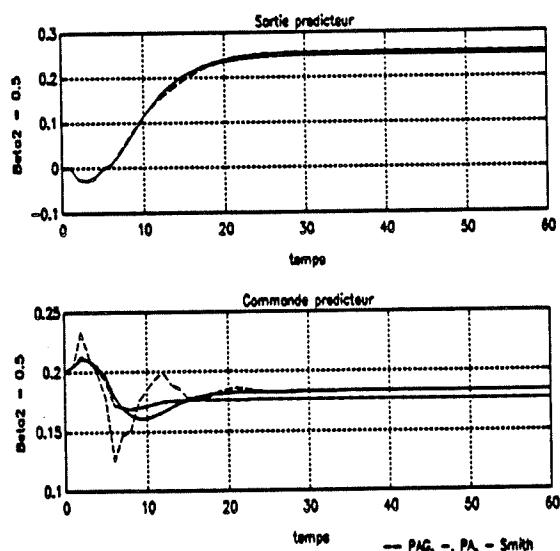


Figure 18c $\beta_2 = 0.5$

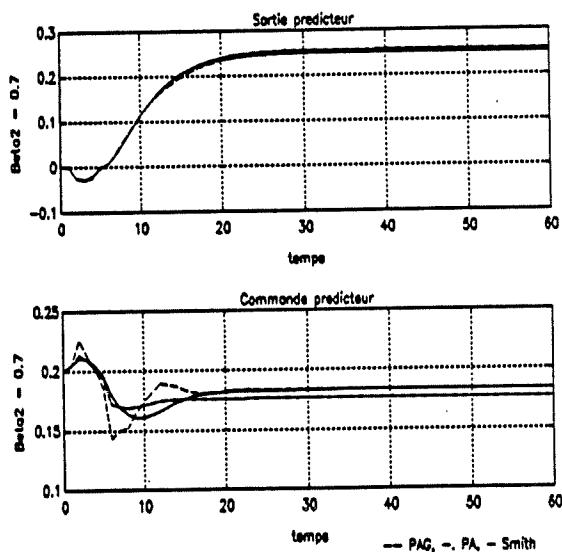


Figure 18d: $\beta_2 = 0.7$

Figure 18: Modélisation imparfaite effet de β_2

$$K_p = K_m = 1, \Theta_p = \Theta_m = 1, \beta_2 = 0.3$$

$$\tau_{ip} = -3.0, \tau_{im} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5$$

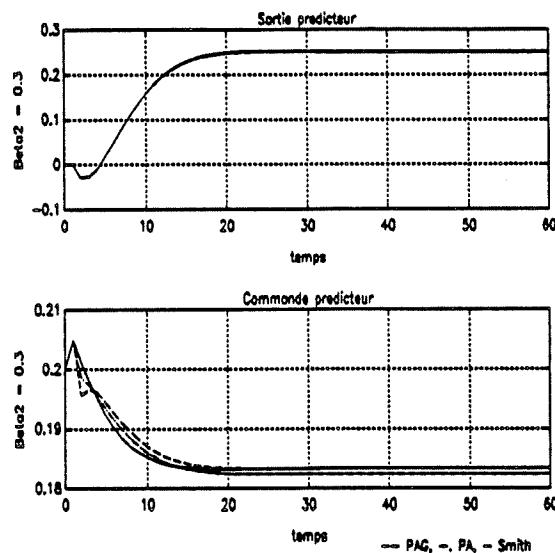


Figure 19a : $\tau_p = -2.0$

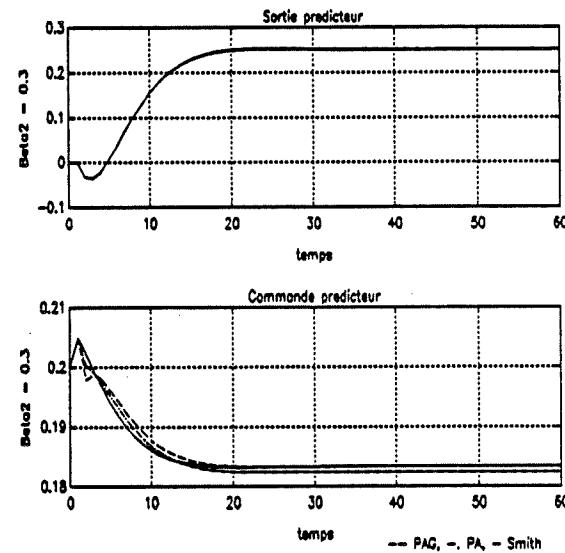


Figure 19b : $\tau_p = -2.5$

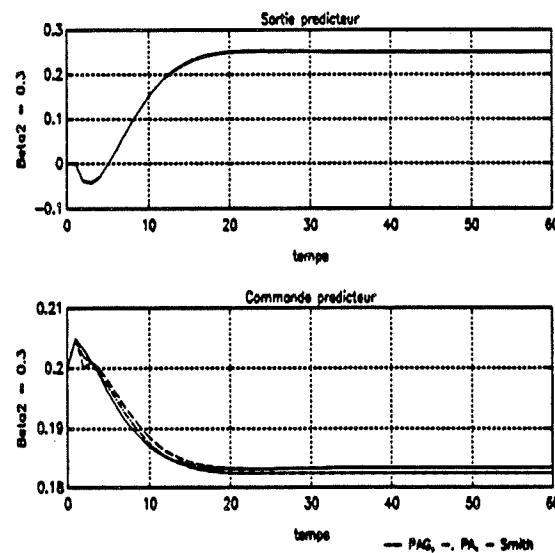


Figure 19c : $\tau_p = -3.0$

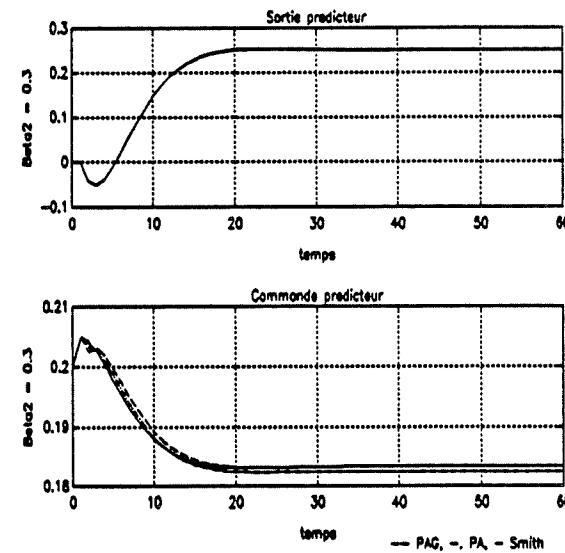


Figure 19d : $\tau_p = -3.5$

Figure 19: Modélisation parfaite effet du zéro τ_p

$$K_p = K_m = 1, \Theta_p = 4, \Theta_m = 1, \beta_2 = 0.3$$

$$\tau_m = -3.0, \tau_{lp} = \tau_{lm} = 3, \tau_{zp} = \tau_{zm} = 5$$

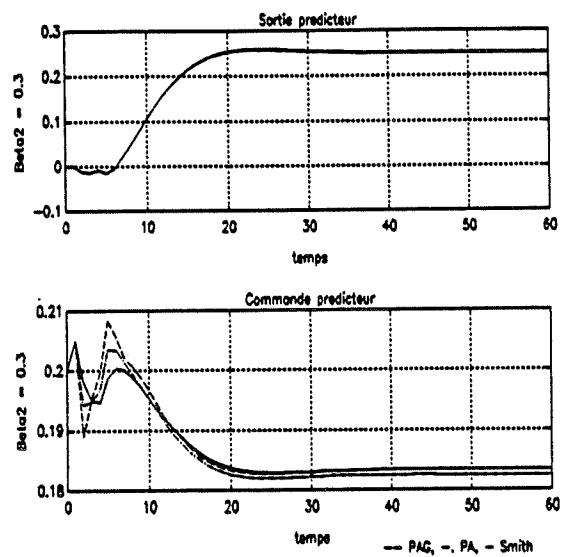


Figure 20a : $\tau_p = -2.0$

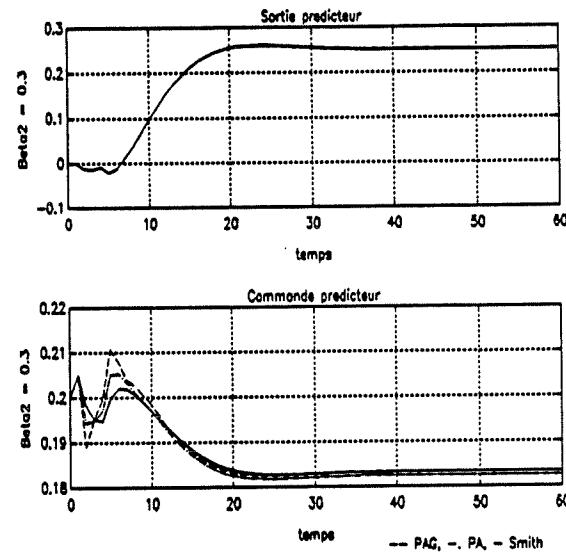


Figure 20b : $\tau_p = -2.5$

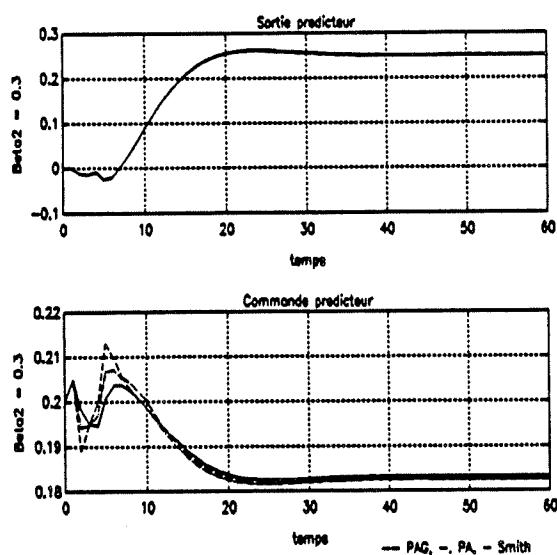


Figure 20c : $\tau_p = -3.0$

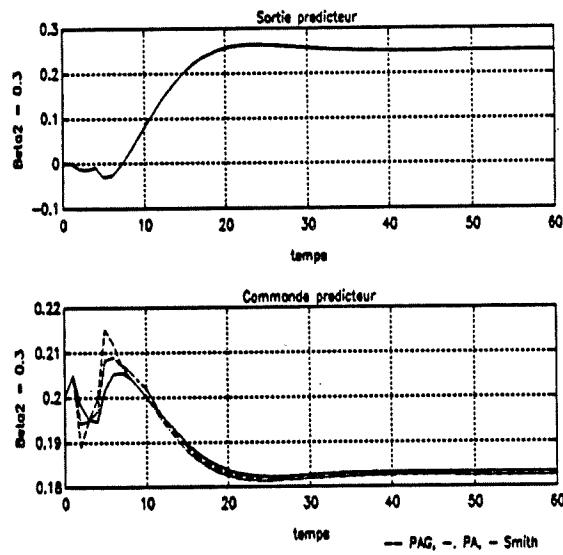


Figure 20d : $\tau_p = -3.5$

Figure 20: Modélisation imparfaite effet du zéro τ_p

$$K_p = K_m = 1, \Theta_p = \Theta_m = 1, \beta_2 = 0.3$$

$$\tau_p = \tau_m = -3, \tau_{1m} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5$$

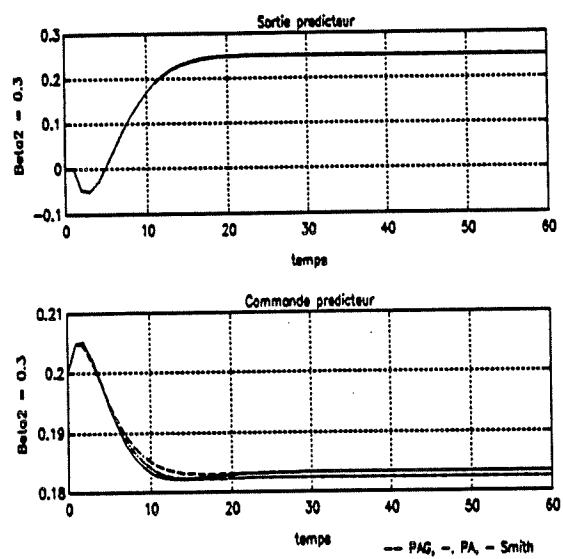


Figure 21a : $\tau_{ip} = 2.0$

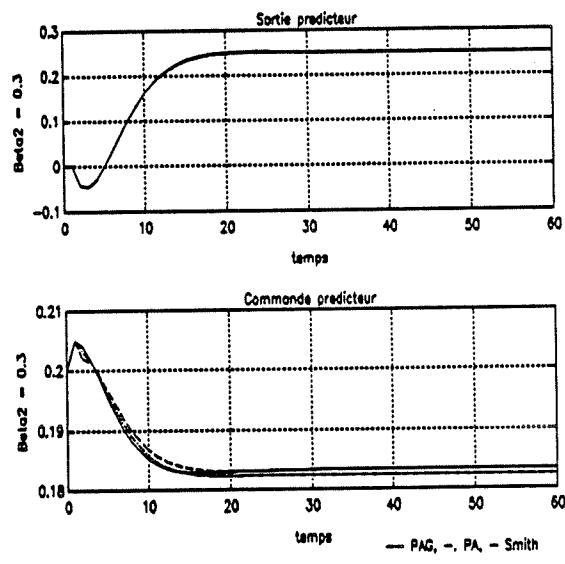


Figure 21b : $\tau_{ip} = 2.5$

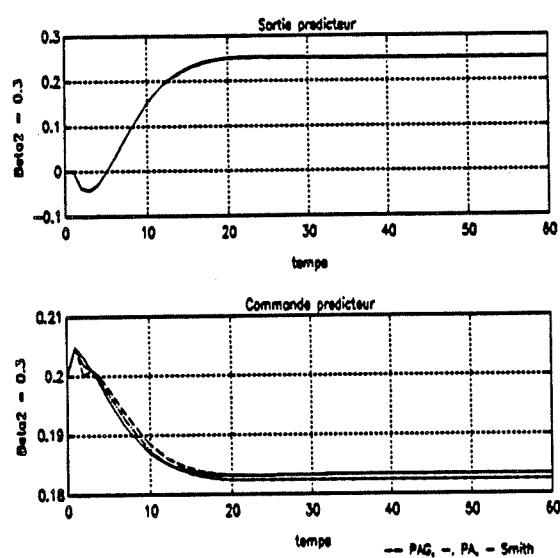


Figure 21c : $\tau_{ip} = 3.0$

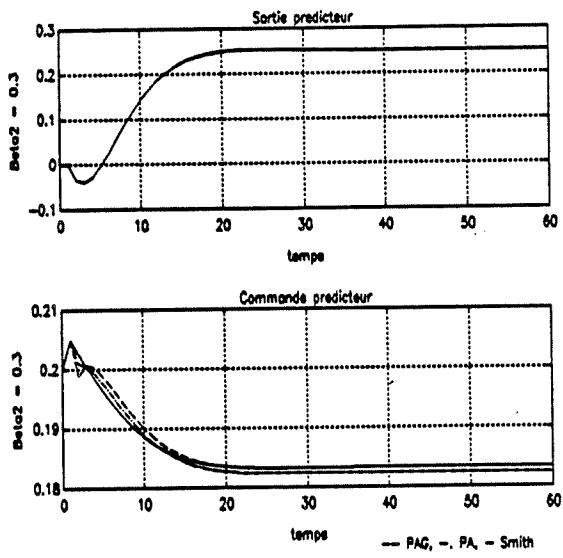


Figure 21d : $\tau_{ip} = 3.5$

Figure 21: Modélisation parfaite effet du pôle τ_{ip}

$$K_p = K_m = 1, \Theta_p = 4, \Theta_m = 1, \beta_2 = 0.3$$

$$\tau_p = \tau_m = -3, \tau_{1m} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5$$

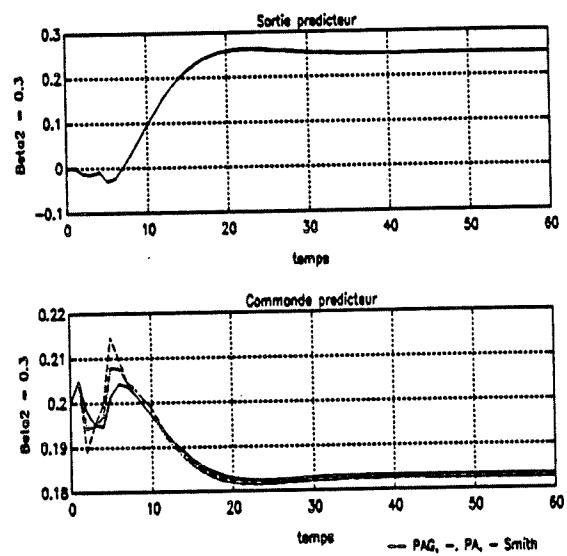


Figure 22a: $\tau_{ip} = 2.0$

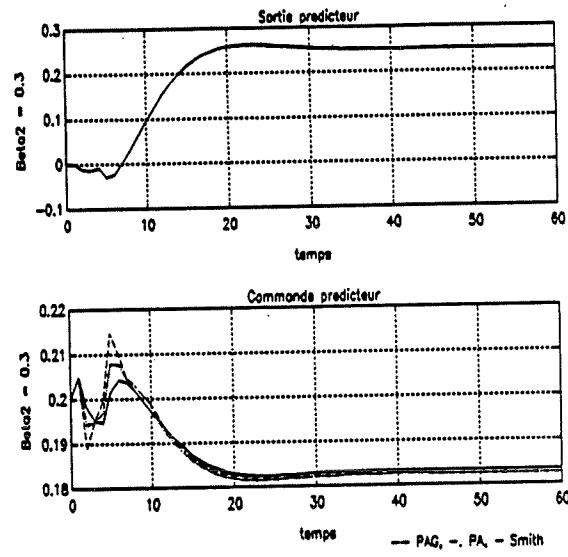


Figure 22b: $\tau_{ip} = 2.5$

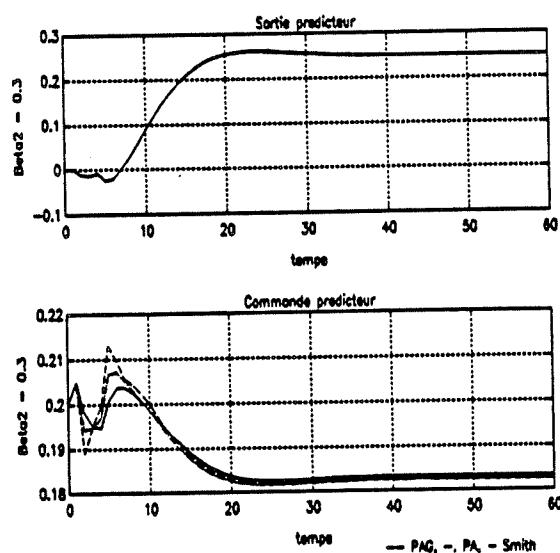


Figure 22c : $\tau_{ip} = 3.0$

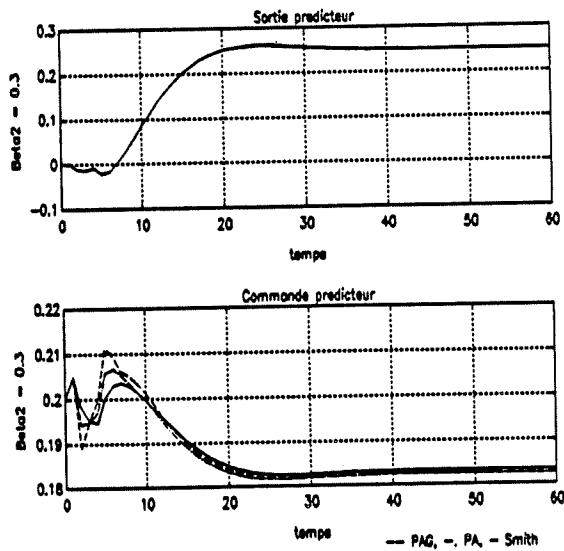


Figure 22d: $\tau_{ip} = 3.5$

Figure 22: Modélisation imparfaite effet du pôle τ_{ip}

$$K_p = K_m = 1, \Theta_m = 1, \tau_p = \tau_m = -3, \beta_2 = 0.3$$

$$\tau_{1p} = \tau_{1m} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5$$

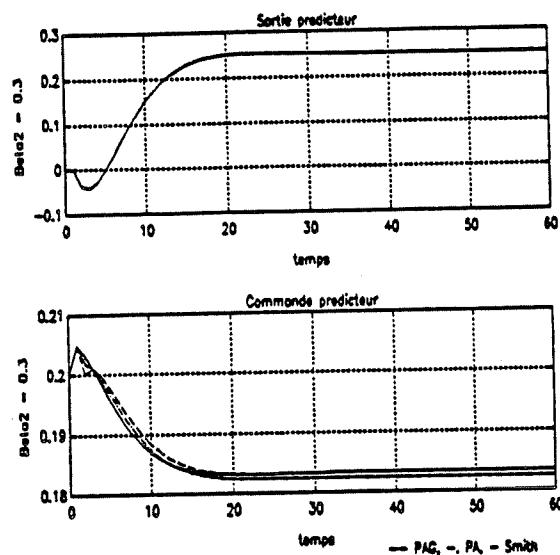


Figure 23a : $\Theta_p = 1$

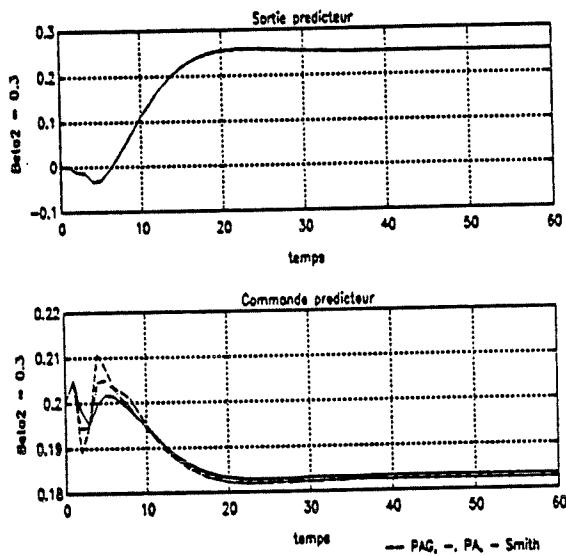


Figure 23b : $\Theta_p = 3$

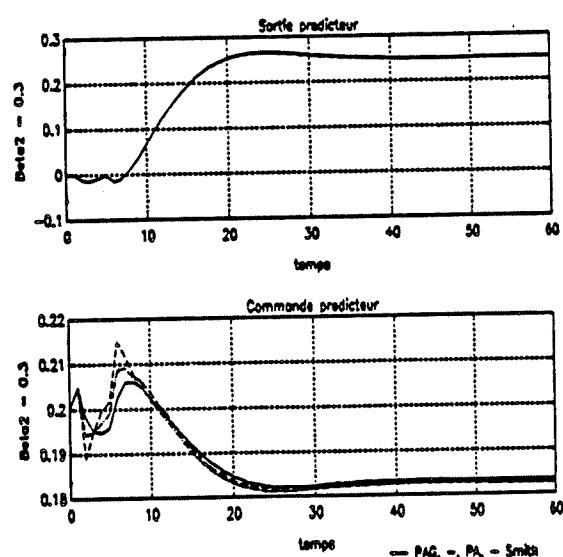


Figure 23c : $\Theta_p = 5$

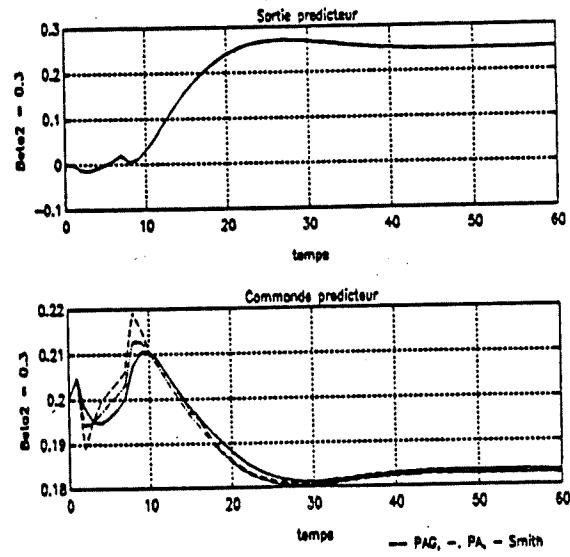


Figure 23d : $\Theta_p = 7$

Figure 23: Effet du retard θ_p

$$\begin{aligned}
K_p = K_m = 1, \Theta_p = \Theta_m = 1, \tau_p = \tau_m = -3 \\
\tau_{1p} = \tau_{1m} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5, \alpha = 0.1
\end{aligned}$$

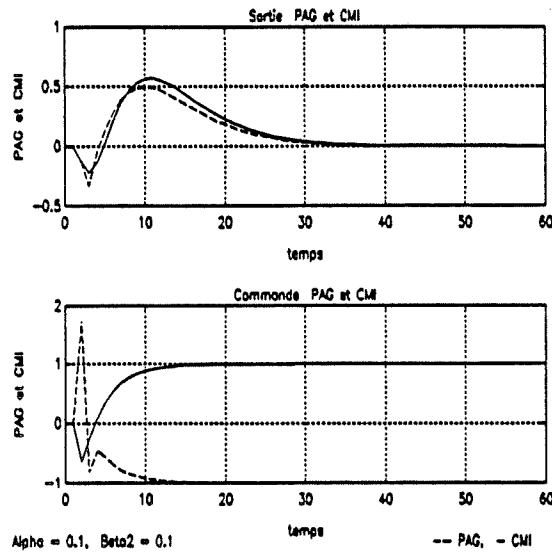


Figure 24a : $\beta_2 = 0.1$

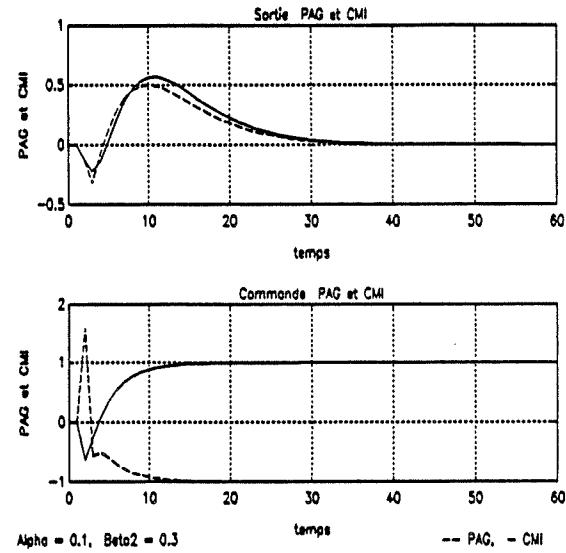


Figure 24b : $\beta_2 = 0.3$

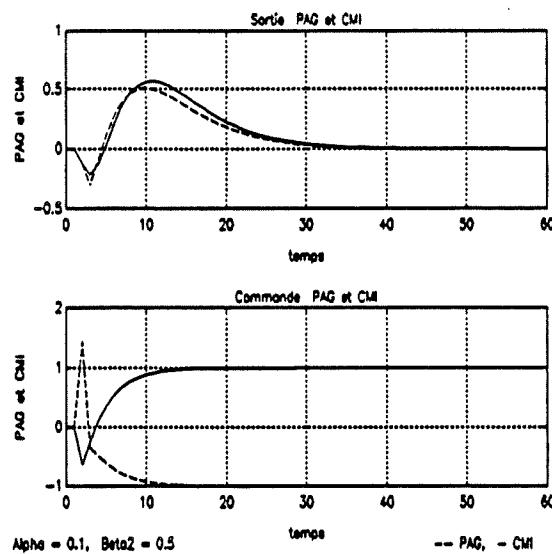


Figure 24c : $\beta_2 = 0.5$

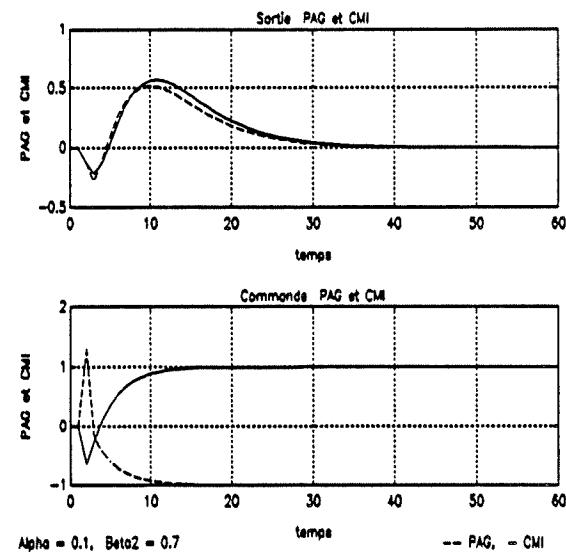


Figure 24d : $\beta_2 = 0.7$

Figure 24: Effet de β_2

$$\begin{aligned}
K_p = K_m = 1, \Theta_p = \Theta_m = 1, \tau_p = \tau_m = -3 \\
\tau_{1p} = \tau_{1m} = 3, \tau_{2p} = \tau_{2m} = 5, \beta_2 = 0.1
\end{aligned}$$

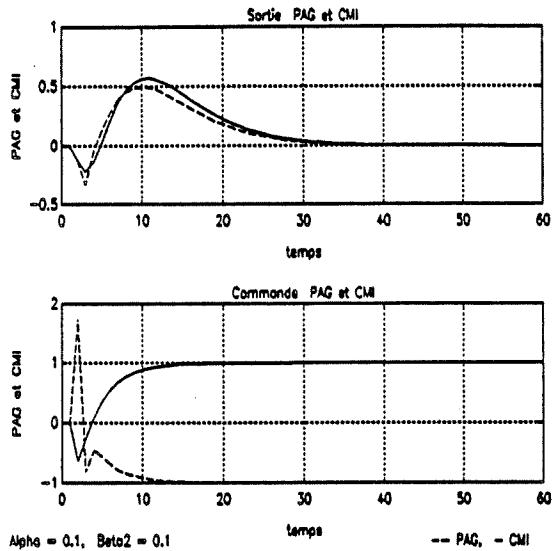


Figure 25a : $\alpha = 0.1$

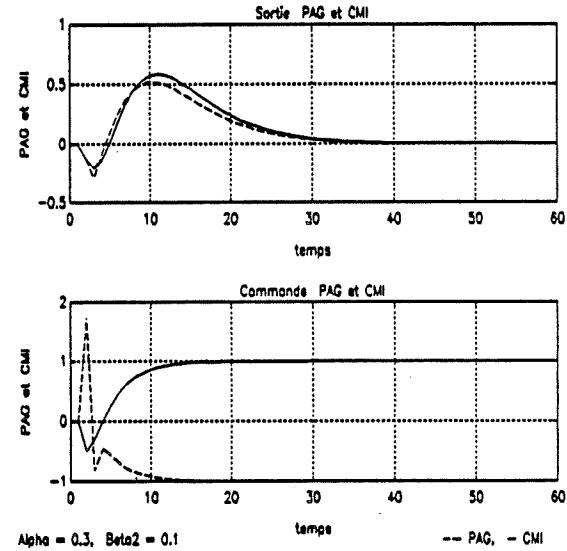


Figure 25b : $\alpha = 0.3$

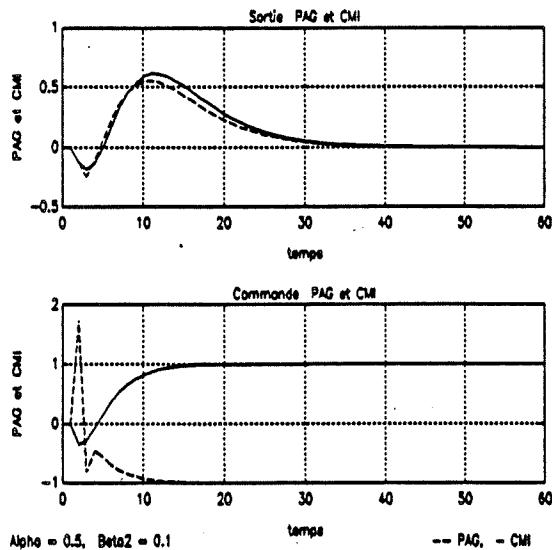


Figure 25c : $\alpha = 0.5$

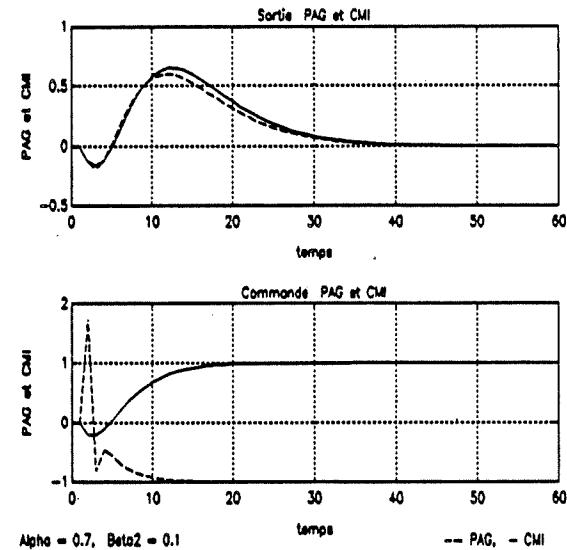


Figure 25d : $\alpha = 0.7$

Figure 25: Effet de α

A.4 Robustesse de la structure de la commande PAG

Soit $P(z)$ le processus, $M(z)$ le modèle du processus et $G_t(z)$ la fonction de transfert de la perturbation. Nous supposons que $P(z)$, $M(z)$ et $G_t(z)$ sont stables. La stabilité en boucle fermée est garantie pour autant que toutes les racines de l'équation caractéristique est strictement dans le cercle unitaire.

L'équation caractéristique de la sortie en boucle fermée est: (avec $G_c(z) = [M_-(z)]^{-1}$)

$$1 + G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)[P(z) - M(z)] = 0 \quad (118)$$

avec $F_c(z) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$ est le filtre de robustesse du contrôleur.

Selon le critère de stabilité de Nyquist il faut que:

$G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)[P(z) - M(z)]$ ne renferme pas $(-1, j0)$.

Pour le système en boucle ouverte (aucune racine en-dehors du cercle unitaire) le contour de Nyquist encercle à l'extérieur du disque unitaire dans le plan z. Nous supposons $F_c(z)$ diagonale). Divisant par $\frac{1}{F_c(z)}$ avec $G_c(z) = [M_-(z)]^{-1}$, il vient:

$$\frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - \alpha} + [M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)[P(z) - M(z)] = 0$$

$$z - \alpha + z(1 - \alpha)[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)P(z) - z(1 - \alpha)[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)M(z) = 0 \quad (119)$$

Si $P(1) \neq 0$, $F_{rc}(1) = 1$, pour $z = 1$, l'équation (119) n'a pas de racine.

Divisant l'équation (119) par $(z - 1)(1 - \alpha)$, il vient:

$$\frac{(z - 1) + (1 - \alpha)}{(1 - \alpha)(z - 1)} + \frac{1}{z - 1} [z[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)P(z) - z[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)M(z)] = 0$$

ou

$$\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \alpha} [1 + z[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)P(z) - z[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)M(z)] = 0$$

Dans le cas de la stabilité, l'équation

$$[1 - z[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)M(z) + z[M_-(z)]^{-1}F_{rc}(z)P(z)] \frac{1}{z - 1} \quad (120)$$

ne renferme pas $(-\frac{1}{1-\alpha}, j0)$ quand z traverse le contour de Nyquist. Pour $P(z)$ et $M(z)$ supposés stables, donc $F_{rc}(z)$ est stable. La seule singularité dans le cercle unitaire à $z = 1$, l'équation (120) est infinie à $z = 1$. Le contour de Nyquist passe par $z = 1$, le pôle est exclu du contour cet contournement est donné par: $z = 1 + \varepsilon e^{i\theta}$, $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+\varepsilon e^{i\theta}-1} = \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\theta}$ et $\varepsilon \rightarrow 0$ quand $(z \rightarrow 1)$
il vient:

$$[1 - [M_-(1)]^{-1}F_{rc}(1)M(1) + [M_-(1)]^{-1}F_{rc}(1)P(1)] \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\theta} \quad (121)$$

avec $F_{rc}(1) = 1$, l'équation (121) se réduit à: $[M_-(1)]^{-1}P(1)\frac{1}{\varepsilon} e^{-i\theta} = 0$, la condition est:

$$[M_-(1)]^{-1}P(1) > 0 \quad (122)$$

à l'infinie est positive quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le contour de Nyquist croise l'axe positif. Donc une seule singularité pour $z = 1$ prend les valeurs finies dans le demi-plan gauche et pour chaque processus et modèle satisfaisant (122). Il existe un α^* tel que l'équation (117) ne croise pas l'axe réel à gauche de $-\frac{1}{1-\alpha}$ pour $\alpha^* \leq \alpha < 1$.

A.5 Conception du filtre d'adaptation en continu

Cette formulation du filtre d'adaptation de premier ordre dans le cas continu est présenté par S.K.P Wong et D. E. Seborg [WS88].

1) Le processus linéaire est considéré:

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t - \theta) + v(t) \quad (123)$$

avec la condition initiale $y(0) = y_0$.

La solution analytique de l'équation (123) est:

$$y(t) = \exp(at)y_0 + \int_0^t \exp[a(t-\eta)][bu(\eta-\theta) + v(n)]d\eta$$

Pareillement:

$$\begin{aligned} y(t+\theta) &= \exp[a(t+\theta)]y_0 + \int_0^{t+\theta} \exp[a(t+\theta-\eta)][bu(\eta-\theta) + v(n)]d\eta \\ &= \exp(a\theta)y(t) + \int_t^{t+\theta} \exp[a(t+\theta-\eta)][bu(\eta-\theta) + v(n)]d\eta \end{aligned} \quad (124)$$

2) Les modèles nominaux de premier ordre des systèmes (123) et (124) sont:

$$\dot{y}_m(t) = ay_m(t) + bu(t - \theta)$$

$$\dot{y}_m^*(t) = ay_m(t) + bu(t)$$

avec $y_m(0) = y_m^*(0) = y_0$. La solution analytique correspondante est:

$$y_m(t) = \exp(at)y_0 + \int_0^t \exp[a(t-\eta)]bu(\eta-\theta)d\eta$$

$$y_m^*(t) = \exp(at)y_0 + \int_0^t \exp[a(t-\eta)]bu(\eta)d\eta$$

Le but visé est d'exprimer l'intégrale de l'équation (124) en fonction des données du modèle.

3) Dénotons, $\tau = \eta - \theta$, dans l'intégrale de l'équation (124)

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\theta} \exp[a(t+\theta-\eta)]bu(\eta-\theta)d\eta &= \int_0^t \exp[a(t-\tau)]bu(\tau)d\tau - \int_0^{t-\theta} \exp[a(t-\tau)]bu(\tau)d\tau \\ &= y_m^*(t) - \exp(a\theta)y_m^*(t-\theta) \end{aligned}$$

L'équation (124), devient:

$$y(t+\theta) = y_m^*(t) + \exp(a\theta)[y(t) - y_m^*(t-\theta)] + \int_t^{t+\theta} \exp[a(t+\theta-\eta)]v(n)d\eta \quad (125)$$

Définissons:

$$d(t) = y(t) - y_m(t) \quad (126)$$

$$= \int_0^t \exp[a(t-\eta)]v(n)d\eta \quad (127)$$

Il suit que:

$$d(t - T) = \int_0^{t-T} \exp[a(t - T - \eta)]v(n)d\eta \quad (128)$$

où T est l'intervalle arbitraire de prédiction de la charge choisi par l'utilisateur. Combinons les équations (127) et (128);

$$\int_{t-T}^t \exp[a(t - \eta)]v(n)d\eta = d(t) - \exp(aT)d(t - T)$$

Nous admettrons que la perturbation de la charge, v , est constante dans l'intervalle de temps $t - T$ et $t + \theta$; alors que il vient

$$\frac{\int_t^{t+\theta} \exp[a(t + \theta - \eta)]v(n)d\eta}{\int_{t-T}^t \exp[a(t - \eta)]v(n)d\eta} = \frac{1 - \exp(a\theta)}{1 - \exp(aT)}$$

Donc

$$\int_t^{t+\theta} \exp[a(t + \theta - \eta)]v(n)d\eta = \frac{1 - \exp(a\theta)}{1 - \exp(aT)} [d(t) - \exp(aT)d(t - T)]$$

Par substitution dans l'équation (125), il vient que:

$$\hat{y}(t + \theta) = y_m^*(t) + \exp(a\theta)[y(t) - y_m^*(t - \theta)] + \frac{1 - \exp(a\theta)}{1 - \exp(aT)} [d(t) - \exp(aT)d(t - T)] \quad (129)$$

Définissons:

$$\hat{y}_p(t) = y(t + \theta) \quad (130)$$

En utilisant la transformation de Laplace des équations (129)-(130) et par réarrangement:

$$\hat{Y}_p(s) = Y_m^*(s) + F_{1c}(s)[Y(s) - Y_m(s)] \quad (131)$$

avec

$$F_{1c}(s) = \exp(a\theta) + \frac{[1 - \exp(a\theta)][1 - \exp(aT)\exp(-Ts)]}{1 - \exp(aT)} \quad (132)$$

et $\hat{Y}_p(s)$, $Y(s)$ et $Y_m(s)$ sont les transformées de Laplace de $\hat{y}_p(t)$, $y(t)$ et $y_m(t)$, respectivement.
Dans le cas d'un filtre d'adaptation discret, nous aurons, en posant $z = e^{Ts}$.

$$F_{1c}(z) = \exp(a \lambda T) + \frac{[1 - \exp(a \lambda T)][1 - \exp(aT)z^{-1}]}{1 - \exp(aT)}$$

avec λ est la partie entière du rapport $\frac{\theta}{T}$ (pour un système de premier ordre $a = -\frac{1}{\tau}$, $b = \frac{K_m}{\tau}$).

B Les principaux algorithmes de la commande des systèmes avec retard de type PID

B1. Méthode de Ziegler-Nichols 1942¹

Le choix du contrôleur PID, dans cette méthode est déterminé par le retard du système θ et la réponse à l'échelon. Cette dernière permet de déterminer la valeur de gain K_x à laquelle la réponse commence à présenter des oscillations périodiques dont nous notons la période T_x .

$$C(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)$$

avec $K_c = 0.6 K_x$

$$\tau_i = \frac{T_x}{2} = 2 \theta$$

$$\tau_d = \frac{T_x}{8} = 0.5 \theta$$

avec K_c le gain proportionnel, τ_i la constante de temps de l'intégrateur, τ_d la constante de temps de différentiateur.

L'inconvénient de cette méthode réside en le nombre important d'essais "on-line" nécessaires pour arriver au seuil d'oscillations et que de plus l'on cherche à atteindre des conditions de stabilité marginales auxquelles la réponse à l'échelon présente des oscillations périodiques non amorties.

B2. Méthode de Cohen et Coon 1953²

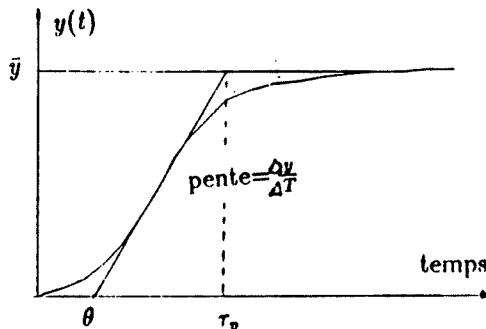


Figure 26:

Le modèle du processus considéré en est du premier ordre et dont la réponse à l'échelon est représentée à la figure 26. À partir de la pente moyenne de cette réponse, on déduit le retard θ ainsi que la constante de temps du processus τ_p . Le but recherché est d'obtenir une réponse aussi fidèle que possible à celle de l'échelon. Les constantes optimales du PID sont déterminées

¹J. G. Ziegler and N. B. Nichols. "Optimum Settings for Automatic Controllers." *Trans. ASME*, 64:759–768, November 1942.

²G. H. Cohen and G. A. Coon. "Theoretical Consideration of Retarded Control." *Trans. ASME*, 75:827–834, July 1953.

de façon empirique. Elles sont données approximativement par:

$$G_p(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1}$$

Les paramètres du contrôleur PID:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{1}{K_p} \cdot \frac{\tau_p}{\theta} \left(\frac{4}{3} + \frac{\theta}{4\tau_p} \right) \\ \tau_i &= \theta \left(\frac{32 + 6 \cdot \frac{\theta}{\tau_p}}{13 + 8 \cdot \frac{\theta}{\tau_p}} \right) \\ \tau_d &= \theta \left(\frac{4}{11 + 2 \cdot \frac{\theta}{\tau_p}} \right) \end{aligned}$$

avec $K_p = \frac{\bar{y}}{A}$ le gain permanent, \bar{y} le régime permanent, A l'amplitude de l'échelon, $S = \frac{\Delta y}{\Delta T}$ la pente de la courbe linéarisée de la sortie temporelle en fonction du temps, entre θ et τ_p .

B3. Méthode de Yuwana-Seborg 1982³

Le modèle de la boucle ouverte en question est celui d'un premier ordre avec retard θ , et constante de temps τ_p qui sont déterminés par la réponse à l'échelon à la différence près que ces paramètres ne sont pas déterminés en boucle ouverte mais en boucle fermée. Soit le modèle du premier ordre:

$$G_p(s) = \frac{K_p \cdot e^{-\theta s}}{1 + \tau_p s}$$

Dans le cas d'un contrôleur proportionnel $C(s) = K_c$ la fonction de transfert du système en boucle fermée $\frac{y(s)}{u(s)}$ est:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + \tau_p s + K e^{-\theta s}} \quad \text{où } K = K_c \cdot K_p \quad (133)$$

L'approximation de Padé du premier ordre est introduite:

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - 0.5\theta s}{1 + 0.5\theta s} \quad (134)$$

puis substituée au dénominateur de (133), pour obtenir:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\bar{K}(1 + 0.5\theta s)e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{K}{K+1} \\ \tau &= \sqrt{\frac{\theta\tau_p}{2(K+1)}} \\ \xi &= \frac{\tau_p + \frac{\theta}{2}(1-K)}{\sqrt{2\theta\tau_p(K+1)}} \end{aligned}$$

³Yuwana-Seborg "A new Method for on-line Controller Tuning" AIChE J., 28, 434 (1982).

La méthode est la modélisation d'un système du second ordre avec un coefficient d'amortissement ξ compris entre 0 et 1. La réponse temporelle à un échelon d'amplitude A est montrée à la figure 27. Notons les trois premières valeurs optimales C_{p1} , C_{m1} et C_{p2} ainsi que leur temps d'apparition T_{p1} , T_{m1} et T_{p2} . Notons $\Delta T = T_{m1} - T_{p1}$.

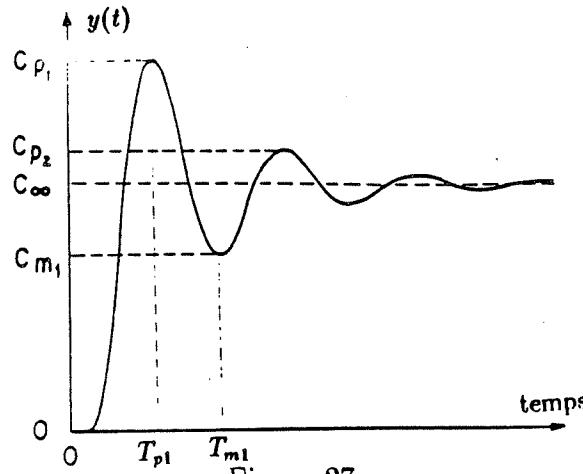


Figure 27:

D'après ce graphe, on peut estimer les paramètres K_p , τ_p et θ du modèle théorique du procédé comme suit:

$$\begin{aligned}\hat{K}_p &= \frac{C_{\infty}}{K_c \cdot (A - C_{\infty})} \\ \hat{\tau}_p &= \frac{\Delta T}{\pi} \cdot \left(\hat{\xi} \sqrt{\hat{K} + 1} + \sqrt{\hat{\xi}^2 \cdot (\hat{K} + 1) + \hat{K}} \right) \times \sqrt{(1 - \hat{\xi}^2) \cdot (\hat{K} + 1)} \\ \hat{\theta} &= \frac{2 \cdot \Delta T \sqrt{(1 - \hat{\xi}^2)(\hat{K} + 1)}}{\pi(\hat{\xi} \sqrt{\hat{K} + 1} + \sqrt{\hat{\xi}^2(\hat{K} + 1) + \hat{K}})}\end{aligned}$$

où

$$\hat{\xi} = \frac{-\ln\left(\frac{C_{\infty} - C_{m1}}{C_{p1} - C_{\infty}}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{C_{\infty} - C_{m1}}{C_{p1} - C_{\infty}}\right)}}$$

ou bien $\hat{\xi} = \frac{-\ln\left(\frac{C_{p2} - C_{\infty}}{C_{p1} - C_{\infty}}\right)}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2\left(\frac{C_{p2} - C_{\infty}}{C_{p1} - C_{\infty}}\right)}}$

Il est à noter que nous n'avons pas besoin d'attendre que le système atteigne son régime permanent. Cette dernière peut être calculée dès que le deuxième maximum de la réponse a été franchi grâce à la relation suivante:

$$\hat{C}_{\infty} = \frac{C_{p2}C_{p1} - C_{m1}^2}{C_{p1} + C_{p2} - 2C_{m1}}$$

B4. Méthode de Jutan-Rodriguez 1984⁴

Le modèle du processus en est aussi un du premier ordre:

$$G_p = \frac{K_p e^{-\theta s}}{\tau_p s + 1}$$

La fonction de transfert en boucle fermée, dans le cas d'une compensation sérielle proportionnelle et un retour unitaire est:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{1 + \tau_p s + K e^{-\theta s}} \quad (135)$$

Alors que Yuwana et Seborg utilisaient l'approximation suivante:

$$e^{-\theta s} = \frac{1 - 0.5\theta s}{1 + 0.5\theta s}$$

Jutan et Rodriguez utilisent plutôt:

$$e^{-\theta s} = \frac{1 + \gamma_1 \theta s + \gamma_2 \theta^2 s^2}{1 + \delta \theta s}$$

où les constantes γ_i et δ sont choisies en utilisant un algorithme des moindres carrés pour différentes valeurs de retard (en employant l'algorithme d'optimisation de Marquardt (1963)). Ainsi, ils trouvèrent:

$$\gamma_1 = -0.6143$$

$$\gamma_2 = 0.1247$$

$$\delta = 0.3866$$

L'avantage de cette approximation vient répondre à l'inexactitude de l'approximation de Padé du premier ordre $e^{-\theta s} > 0.5$.

La fonction de transfert en boucle fermée est:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{K'(1 + \delta s)e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s^2 + 1}$$

avec

$$\begin{aligned}\tau &= \sqrt{\frac{\tau_p \theta \delta + \gamma_2 k \theta^2}{1 + K}} \\ \xi &= \frac{\theta(\delta + \gamma_1 K) + \tau_p}{\sqrt{2(1 + K)(\tau_p \theta + \gamma_2 K \theta^2)}}\end{aligned}$$

⁴Jutan-Rodriguez "Extension of a new Method for on-line Controller tuning" Can. J. Chem. Eng., 62,802 (1984).

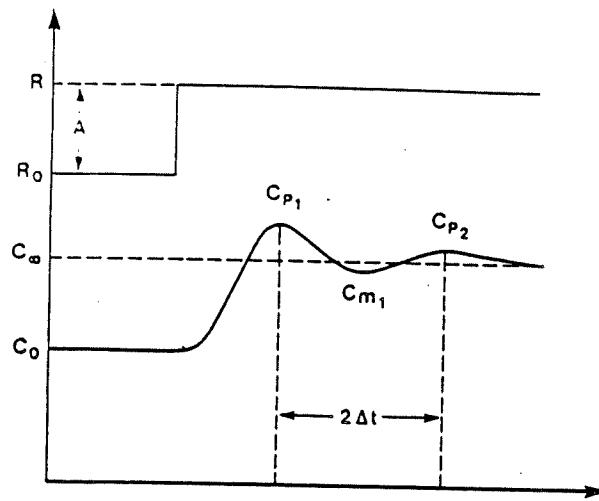


Figure 28:

Soit (figure 28):

$$\Delta T = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

L'estimation de l'amortissement ξ est donné par:

$$\hat{\xi} = \frac{-\ln \alpha_1}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \alpha_1}}$$

avec $\alpha = \frac{C_\infty - C_{m1}}{C_{p1} - C_\infty}$

L'estimation de la constante de temps du modèle est:

$$\hat{\tau}_p = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2a}$$

et $\hat{\theta} = \alpha_0 + \beta \tau_p$

où

$$\begin{aligned} a &= \beta^2 \gamma_2 K + \beta \delta & \alpha_0 &= \frac{2\xi\tau(1+K)}{\delta+\gamma_1 K} \\ b &= 2\gamma_2 K \alpha_0 \beta + \alpha_0 \delta & \beta &= -(\delta + \gamma_1 K)^{-1} \\ c &= \gamma_2 K \alpha_0^2 - \tau^2(1+K) & K &= K_m \cdot K_c \end{aligned}$$

où K_c est le gain fixé de l'action proportionnelle du contrôleur PID dans l'expérience de mesure en cours et l'estimation du gain K_p est donné par:

$$\hat{K}_p = \frac{|C_\infty - C_0|}{K_c(|R - R_0| - |C_\infty - C_0|)}$$

B5. Méthode de Lee (1989)⁵

La fonction de transfert du système en boucle fermée est une fonction de transfert du second ordre avec retard, où le retard est important (voir figure 27).

Le système en boucle ouverte est $G_p(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{s\tau_p + 1}$ et le système en boucle fermée après application d'une compensation proportionnelle K_c est:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{K_c K_p e^{-\theta s}}{1 + \tau_p s + K_c K_p e^{-\theta s}} \quad (136)$$

Cette fonction de transfert est égalisée à une seconde fonction de transfert qui est celle d'un modèle du second ordre avec un retard θ et un zéro supplémentaire à $\frac{-1}{q}$.

$$\frac{y(s)}{r(s)} \approx \frac{K(qs + 1)e^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (137)$$

où

$$\begin{aligned} K &= \frac{C_\infty}{A} \\ \xi &= \frac{-\ln \left(\frac{C_\infty - C_{m1}}{C_{p1} - C_\infty} \right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \left(\frac{C_\infty - C_{m1}}{C_{p1} - C_\infty} \right)}} \\ \text{et } \tau &= \Delta T \cdot \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \end{aligned}$$

en tenant compte des données de la figure 27.

La méthode consiste, rappelons le, à l'égalisation des pôles dominants des équations (137) et (136) ou les pôles de l'équation (136) sont:

$$-\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} j \quad \text{avec } j = \sqrt{-1}$$

Substituant ces pôles au dénominateur de l'équation (136), nous obtenons les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} 1 + \tau_p \left(-\frac{\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} j \right) + K_c K_p e^{-\theta \left(-\frac{\xi}{\tau} + \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} j \right)} &= 0 \\ 1 + \tau_p \left(-\frac{\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} j \right) + K_c K_p e^{-\theta \left(-\frac{\xi}{\tau} - \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau} j \right)} &= 0 \end{aligned}$$

D'où les valeurs recherchées:

Le gain du régime permanent est:

$$K_p = \frac{C_\infty}{K_c(A - C_\infty)}$$

quant aux valeurs τ_p et θ , elles sont les solutions de l'équation transcendante (138) et (139):

$$e^{-\alpha\theta} - \frac{K_c K_p}{\beta} [\alpha \sin(\beta\theta) - \beta \cos(\beta\theta)] = 0 \quad (138)$$

⁵Lee "On-line PID Controller Tuning from a Single Closed-Loop Test" AIChE J., 35, 329 (1989).

$$\text{et } \tau_p = \frac{1}{\alpha} [1 + K_c K_p e^{\alpha\theta} \cos(\beta\theta)] \quad (139)$$

où

$$\alpha = \frac{\xi}{\tau} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\tau}$$

Ces équations sont résolues numériquement; en utilisant la méthode d'itération à point fixe, nous obtenons:

$$(\theta)_{k+1} = \frac{1}{\beta} [\mu + \arctan \left(\frac{\beta e^{-\alpha(\theta)_k}}{K_c K_p \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\beta(\theta)_k - \mu)} \right)], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

avec la valeur initiale:

$$(\theta)_0 = \frac{(\mu + \frac{\pi}{4})}{\beta}$$

et

$$\mu = \arctan \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)$$

B6. Méthode de Chen (1989)⁶

Chen propose d'étudier la fonction de transfert d'un système du second ordre avec retard qui inclut cette fois ci le cas d'une réponse sous-amortie.

$$\frac{y(s)}{r(s)} = H(s) = \frac{Ke^{-\theta_{bf}s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

En utilisant les valeurs extraites à partir de la figure 27:

$$\begin{aligned} K &= \frac{C_\infty}{A} \\ \xi &= \frac{-\ln(M)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M)}} \\ \tau &= \frac{(T_{m1} - T_{p1})\sqrt{1 - \xi^2}}{\pi} \\ \theta_{bf} &= 2T_{p1} - T_{m1} \\ C_\infty &= \frac{C_{p1}C_{p2} - C_{m1}^2}{C_{p1} + C_{p2} - 2C_{m1}} \\ M &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{C_\infty - C_{m1}}{C_{p1} - C_\infty} + \frac{C_{p2} - C_\infty}{C_\infty - C_{m1}} \right) \end{aligned}$$

A représente l'amplitude de l'échelon appliqué et M le dépassement mesuré. La fréquence critique vérifie

$$-\theta_{bf} \omega_x - \arctan \left(\frac{2\xi\tau\omega_x}{1 - \tau^2\omega_x^2} \right) = -\pi$$

⁶Chen "A Simple Method for on-line Identification and Controller Tuning" AIChE J., 33, 2037 (1989).

Solutionnant cette dernière équation pour ω_x , la période critique T_x correspondante:

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega_x}$$

L'amplitude de la fonction de transfert en boucle fermée correspondant à la fréquence d'oscillation est donnée par:

$$|H(j\omega_x)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - \tau^2\omega_x^2)^2 + (2\xi\tau\omega_x)^2}}$$

De plus, le gain critique du système en *boucle ouverte* est:

$$|C(j\omega_x)G_p(j\omega_x)| = \frac{|H(j\omega_x)|}{\sqrt{1 + 2|H(j\omega_x)| + |H(j\omega_x)|^2}}$$

Cette dernière équation est la réciproque de la marge de gain du système avec le contrôleur PID en mode proportionnel seulement: $C(s) = K_c$. Le gain critique du système en boucle fermée est:

$$K_{cx} = K_c \times (\text{marge de gain})$$

À partir du gain critique (K_{cx}) et la période critique (T_x), nous pouvons avoir recours aux relations de Ziegler-Nichols pour déterminer les constantes optimales du PID.

B7. Méthode de Lee, Cho et Edgar (1990)⁷

Cette approche fait appel à la méthode de Chen. Toutefois, le processus considéré en est un du second ordre avec retard (plutôt qu'un du premier ordre avec retard). Une fois le gain et la fréquence critique trouvés, une nouvelle représentation du modèle du procédé à commander est établie, soit l'on applique à ce processus un gain proportionnel K_c et un retour unitaire. Le processus $G_p(s)$ et la boucle fermée $H(s)$ peuvent être exprimées comme suit:

$$G_p(s) = \frac{(b_1 s + b_2)e^{-\theta_b s}}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$\text{et } H(s) = \frac{K_c G_p(s)}{1 + K_c G_p(s)} = \frac{K e^{-\theta_b s}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

avec

$$a_1 = \frac{2\xi\tau + K\theta_b f}{(\tau^2 - \frac{K\theta_b^2 f}{2})}$$

$$a_2 = \frac{1 - K}{\tau^2 - K \frac{\theta_b^2 f}{2}}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{(a_2 - \omega_x^2)^2 + (a_1\omega_x)^2 - (K_x b_2)^2}}{\omega_x \cdot K_x}$$

$$b_2 = \frac{a_2 K}{K_c(1 - K)}$$

⁷Lee, Cho, Edgar "An Improved Technique for PID Controller Tuning from Closed Loop Tests". AIChE J., 36 1891 (1990).

et finalement,

$$\theta = \frac{\pi + \arctan\left(\frac{b_1\omega_x}{b_2}\right) - \arctan\left(\frac{a_1\omega_x}{(a_2 - \omega_x^2)}\right)}{\omega_x}$$

avec θ_{bf} est le retard de la réponse en boucle fermée.

Le critère de performance dans le domaine de la fréquence est choisi de façon à ce que la valeur crête corresponde à un argument de la boucle ouverte égal à 225° , soit:

$$C(j\omega_p)G_p(j\omega_p) = re^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$\omega_b \leq 2\omega_p$$

avec ω_p la fréquence de résonance et

$$r = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{M_p^2} - 0.5}}{1 - \frac{1}{M_p^2}}$$

où ω_b est la largeur de bande en boucle fermée du système soit la valeur déterminant une attenuation de $3 dB$, et M_p est l'amplitude de la boucle fermée à la fréquence de résonance ω_p . La condition de résonance s'écrit:

$$\frac{d}{d\omega} \left(\left| \frac{C(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_p(j\omega)} \right| \right) = 0$$

À partir de la combinaison de cette dernière relation avec les critères définis plus haut, on obtient les relations suivantes qui permettent de déterminer le réglage du contrôleur PID soit $C(s) = K_c(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s)$ avec

$$K_c = \frac{r}{\sqrt{[1 + q^2(\omega_p)][u^2(\omega_p) + v^2(\omega_p)]}}$$

$$\tau_d = \frac{\alpha[u'(\omega_p) - v'(\omega_p)q(\omega_p) + \frac{u(\omega_p)q(\omega_p)}{\omega_p}] + \beta[v'(\omega_p) + u'(\omega_p)q(\omega_p) - \frac{u(\omega_p)q(\omega_p)}{\omega_p}]}{2[v(\omega_p) - u(\omega_p)]}$$

$$\tau_i = \frac{1}{\omega_p[\tau_d\omega_p - q(\omega_p)]}$$

D'où

$$G_p(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$$

$$u'(\omega) = \frac{du(\omega)}{d\omega} \text{ et } v'(\omega) = \frac{dv(\omega)}{d\omega}$$

$$q(\omega) = \tan \left[\frac{\pi}{4} - \arctan \left(\frac{v(\omega)}{u(\omega)} \right) \right]$$

$$\alpha = -\frac{r}{\sqrt{2}} - M_p^2 \left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\beta = (M_p^2 - 1) \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Algorithme de réglage:

1. On initialise ω_p à $\frac{\omega_x}{3}$ et on fixe M_p soit à 1.02 soit à 1.25 (la valeur retenue sera celle qui aura procuré la plus haute fréquence de résonnance ω_p possible).
2. On calcule les trois gains du contrôleur PID.
3. On augmente la valeur de ω_p et on refait l'étape 2. On répète cette procédure jusqu'à ce que la contrainte suivante ne soit plus respectée:

$$\left| \frac{C(j2\omega_p)G_p(j2\omega_p)}{1 + C(j2\omega_p)G_p(j2\omega_p)} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La valeur de la fréquence de résonnance ω_p se situe quelque part entre $\frac{\omega_x}{3}$ et $3\omega_x$.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289763 3

**DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ET DE GÉNIE INFORMATIQUE**

Section automatique

**FORMULATION GÉNÉRALISÉE
DU FILTRE DE PONDÉRATION
DE LA PRÉDICTION ANALYTIQUE**

Partie II : Cas multivariable

**Hammami, Maher
Turgeon, André-B.
Bensoussan, David**

EPM/RT-92-41

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, décembre 1992
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case Postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honoreronons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

Formulation généralisée du filtre de pondération de
la prédiction analytique
Partie II: Cas multivariable

Par

Maher Hammami, André-B. Turgeon

Département de Génie Electrique

École Polytechnique de Montréal

P.O. Box 6079, station "A"

Montréal, Québec H3C 3A7

David Bensoussan

Département de Génie Electrique

École de Technologie supérieur

4750, Henri Julien

Montréal, Québec H2T 2C8

Shatour

Table des matières

Liste des figures	iv
Liste des symboles	iv
1 Extension du filtre de pondération du PAG au cas multivariable	1
1.1 Les approches existantes au problème de la compensation des retards multivariables	1
1.2 Commande par modèle interne multivariable	4
1.2.1 Conception du contrôleur CMI multivariable	5
1.2.2 Conception du contrôleur par l'adjonction d'un module d'"interaction" .	10
1.3 Une nouvelle formulation du filtre de pondération multivariable	20
1.3.1 Conception du filtre de pondération multivariable	20
2 Résultats et simulations	24
2.1 Modèle Wood et Berry	24
2.1.1 Contrôleur CMI	24
2.1.2 Le choix du contrôleur par la matrice "interactive"	25
2.2 Colonne de distillation d'eau et d'éthanol	26
2.2.1 Le choix d'un contrôleur par la méthode CMI	26
2.2.2 Le choix du contrôleur par la matrice "d'interaction"	30
2.3 Modèle colonne de distillation	32
2.3.1 Le choix d'un contrôleur par la méthode CMI	32
3 Application du principe d'invariance aux systèmes linéaires multivariables en présence du PAG	36
3.1 Introduction	36
3.2 Formulation du principe d'invariance	36
3.2.1 1 ^{er} Cas: $i = j$:	37
3.2.2 2 ^{ieme} cas $i \neq j$:	37
3.3 Réalisation du principe d'invariance pour les systèmes linéaires multivariables	38
3.3.1 Formulation du problème	38
3.3.2 Structure classique	39
3.4 Implantation d'une commande assurant l'invariance dans une structure PAG	40
3.4.1 1 ^{er} cas $i=j$:	40
3.4.2 2 ^{ieme} cas $i \neq j$:	43
3.4.3 Étude de la stabilité	45
3.4.4 Application: Colonne de distillation d'eau et d'éthanol	46
Bibliographie	49
A Calcul de la matrice "d'interaction"	51
A.1 Procédure de la conception	51
A.2 Exemples	52
B Détermination du filtre de robustesse du PAG	54

C Dérivation du contrôleur CMI multivariable pour le modèle de Wood et Berry	56
D Colonne de distillation d'eau et d'éthanol	58
D.1 Le choix d'un contrôleur par la méthode CMI	58
D.2 Le choix du contrôleur par la matrice d'"interaction"	59
E Modèle colonne de distillation	64
E.1 Le choix du contrôleur par la méthode CMI	64

Liste des figures

1	Structure de la commande multivariable conventionnelle.	2
2	Compensateur de retard multivariable d'Ogunnaike-Ray.	2
3	La compensation ORC et la structure de la CMI.	3
4	Structure de la commande par modèle interne multivariable.	4
5	Structure du prédicteur analytique généralisé multivariable.	20
6	Comparaison PAG CMI-. au colonne de distillation d'eau et d'éthanol.	29
7	Comparaison PAG CMI-. au modèle colonne de distillation.	35
8	38
9	Principe d'invariance pour $i = j$	39
10	Principe d'invariance pour $i \neq j$	39
11	Le principe d'invariance en présence du PAG pour le cas $i = j$	40
12	Le principe d'invariance en présence du PAG pour le cas $i = j$	41
13	Le principe d'invariance en fonction du PAG $i \neq j$	43
14	Le principe d'invariance en fonction du PAG $i \neq j$	43
15	Le principe d'invariance en fonction du PAG $1 \neq 2$ pour la perturbation $\ell_1(z)$. .	46
16	Le principe d'invariance en fonction du PAG $1 \neq 2$ pour la perturbation $\ell_2(z)$. .	48

Liste des symboles

A : matrice de pondération strictement positive.

a_{ki} : paramètre du système.

C : matrice du contrôleur conventionnel.

$(D_{kj}^{ir})(z)$: filtre dont la sortie alimente l'entrée $u_k(z)$ du processus primaire, connecté entre la j^{ieme} sortie visant à inhiber l'effet de la r^{ieme} perturbation sur la i^{ieme} sortie du processus primaire.

e : signal d'erreur.

\underline{F}_{rc} : matrice du filtre de pondération du PAG.

\underline{F}_c : filtre de robustesse.

G_c : matrice de compensation suivant la CMI.

$\underline{G}_{c1}, \underline{G}_{c2}$: compensateurs appartenant à l'ensemble des matrices rationnelles propres et invertibles.

$G_\ell(z)$: matrice de fonctions de transfert de la charge.

$G_{\ell_{ir}}(z)$: fonction de transfert entre la r^{ieme} perturbation et la i^{ieme} sortie en boucle ouverte.

P : matrice de fonction de transfert du processus.

$\underline{\ell}$: vecteur des perturbations de charge.

\underline{u} : vecteur des actions de contrôle.

\underline{y} : vecteur des sorties du système.

\underline{P}_0 : matrice de fonction de transfert du processus sans retard.

M : matrice de fonction de transfert du modèle.

M_0 : matrice de fonction de transfert du modèle sans retard.

M_+ : contient les retards et les zéros de M en-dehors du cercle unitaire.

M_- : partie stable et réalisable de M .

$\bar{P}_{0,i}$: les éléments de la matrice inverse du processus sans retard.

\bar{p}_{ij} : les retards de la matrice inverse du processus.

K_p : matrice non singulière.

k_i : représente le retard minimum de la rangée i.

Alphabet grec

θ : retard du système.

λ : partie entière du retard.

λ_j^+ : $\max_i \{\max(0, P_{ij})\} j = 1, \dots, n$

λ_{pi} : l'horizon de prédition.

$\xi_P(z)$: matrice "d'interaction"

σ_i : zéros en-dehors du cercle unitaire

Glossaire

CMI : commande par modèle interne.

PAG : prédicteur analytique généralisée.

PS : prédicteur de Smith.

WF : matrice interactive proposée par Wolovich et Falb.

ORC : compensateur de Ogunnaike et Ray.

SISO : système monovariable.

MIMO : système multivariable.

1 Extension du filtre de pondération du PAG au cas multivariable

Dans cette section nous nous proposons de développer une formulation généralisée du filtre de pondération du PAG dans le cas multivariable. Rappelons qu'il a été démontré [WE87] que la structure de contrôle du PAG multivariable est une extension simple de la CMI multivariable.

Dans une première section, nous examinerons les travaux relatifs aux systèmes multivariables comportant des retards. Nous nous attarderons principalement aux travaux impliquant la CMI avant de présenter notre proposition.

1.1 Les approches existantes au problème de la compensation des retards multivariables

Plusieurs procédures de compensation de systèmes multivariables comportant des retards ont été proposées afin d'étendre le champs d'application du prédicteur de Smith. Une première partie, fait appel à des solutions existantes pour le problème de systèmes asservis multivariable comportant des retards.

Considérons le système multivariable dans le domaine de Laplace:

$$\underline{y}(s) = \underline{P}(s)\underline{u}(s) + \underline{G}_\ell(s)\underline{\ell}(s)$$

où $\underline{y}(s)$ représente le vecteur des sorties du système, $\underline{u}(s)$, le vecteur des actions de contrôle, et $\underline{\ell}(s)$ un vecteur des perturbations de charge. La matrice de fonction de transfert du processus $\underline{P}(s)$ a la forme:

$$\underline{P}(s) = \begin{bmatrix} P_{0_{11}}(s)e^{-\theta_{11}s} & P_{0_{12}}(s)e^{-\theta_{12}s} & \dots & P_{0_{1n}}(s)e^{-\theta_{1n}s} \\ P_{0_{21}}(s)e^{-\theta_{21}s} & P_{0_{22}}(s)e^{-\theta_{22}s} & \dots & P_{0_{2n}}(s)e^{-\theta_{2n}s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{0_{n1}}(s)e^{-\theta_{n1}s} & P_{0_{n2}}(s)e^{-\theta_{n2}s} & \dots & P_{0_{nn}}(s)e^{-\theta_{nn}s} \end{bmatrix}$$

avec

$$P_{0_{ij}} = \frac{k_{ij} \prod_{p=1}^{m_{ij}} (\tau_{ijp}s + 1)}{\prod_{q=1}^{r_{ij}} (\tau_{ijq}s + 1)}, \quad P_{ij}(s) = P_{0_{ij}}(s)e^{-\theta_{ij}s}$$

où k_{ij} = le gain du régime permanent de l'élément ij de $P_{0_{ij}}$.

m_{ij} = nombre des zéros de $P_{0_{ij}}(s)$.

r_{ij} = nombre des pôles de $P_{0_{ij}}(s)$ ($m_{ij} < r_{ij}$ pour les systèmes strictement propres).

On suppose que la matrice de fonction de transfert de la charge $\underline{G}_\ell(s)$ a une forme semblable à celle de la matrice de fonction de transfert du processus; autrement dit elle inclut des retards.

Le diagramme bloc du contrôle multivariable conventionnel est donné par la figure 1. La réponse en boucle fermée de ce système est:

$$\underline{y}(s) = [I + \underline{P}(s)\underline{C}(s)]^{-1} [\underline{P}(s)\underline{C}(s)\underline{r}(s) + \underline{d}(s)]$$

L'équation caractéristique:

$$| I + \underline{P}(s)\underline{C}(s) | = 0$$

indique que la stabilité du système est affectée par les retards présents dans la matrice de fonction de transfert du processus. Il s'en suit que les gains du contrôleur (que l'on peut se permettre en rapport à un objectif de performance particulier tel la sensibilité) sont réduits en rapport à un système similaire où les retards sont absents. Ceci complique donc l'analyse de la réponse du système.

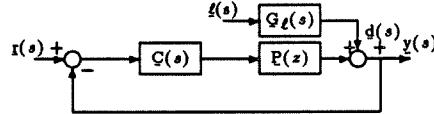


Figure 1: Structure de la commande multivariable conventionnelle.

Alevakis et Seborg [AS73], ont adapté le prédicteur de Smith pour les systèmes multivariables lorsque les retards θ_{ij} sont identiques. Avec cette restriction, la fonction de transfert multivariable du processus est donnée par:

$$\underline{P}(s) = \underline{P}_0(s)e^{-\theta s}$$

avec $\underline{P}_0(s)$: la matrice de fonction de transfert du processus sans retard. Il a été établi que, l'implantation du prédicteur de Smith pour ce cas spécial, est similaire à la solution des systèmes SISO.

Ogunnaike et Ray [OR79] ont développé le compensateur lorsque les retards θ_{ij} sont différents. Le diagramme bloc de ce compensateur est donné à la figure 2. Par analogie avec le prédicteur de Smith SISO, une boucle de contre-réaction interne $M_0(s) - M(s)$ est incorporée au contrôleur $C(s)$. $M_0(s)$ représente le modèle multivariable rationnel du processus $\underline{P}_0(s)$ et $M(s)$ représente le modèle multivariable du processus $\underline{P}(s)$ incluant des retards. Le contrôleur $G_{0c}(s)$ de la boucle interne constituée par $C(s)$ et $(M(s) - M_0(s))$ est:

$$G_{0c}(s) = \{I + C(s)[M_0(s) - M(s)]\}^{-1} C(s) \quad (1)$$

La sortie du système s'exprime alors comme suit:

$$y(s) = [I + \underline{P}(s)G_{0c}(s)]^{-1} [\underline{P}(s)G_{0c}(s)r(s) + \underline{d}(s)] \quad (2)$$

Substituant (1) dans (2), nous obtenons:

$$\begin{aligned} y(s) &= \underline{P}(s) [I + C(s)\underline{P}_0(s)]^{-1} C(s)r(s) \\ &\quad + \underline{P}(s) [I + C(s)\underline{P}_0(s)]^{-1} H(s)\underline{P}^{-1}(s)\underline{d}(s) \end{aligned}$$

avec $H(s) = I + C(s)(\underline{P}_0(s) - \underline{P}(s))$.

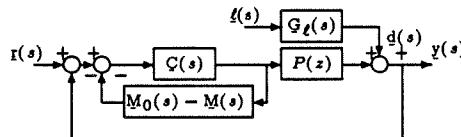


Figure 2: Compensateur de retard multivariable d'Ogunnaike-Ray.

Ogunnaike et Ray démontrent que la sensibilité de ce système en boucle fermée, est déterminée par l'équation caractéristique:

$$| I + \underline{C}(s)P_0(s) | = 0$$

qui ne contient aucun retard, ce qui fait que le contrôleur $\underline{C}(s)$ peut avoir des gains plus élevés et des performances améliorées.

Garcia et Morari [GM5a] ont comparé le compensateur de retard de Ogunnaike-Ray (ORC) avec la structure de la commande par modèle interne multivariable. Le schéma de commande de la figure 2 est repris avec une structure de contrôle de type CMI (figure 3) dans laquelle:

$$G_c(s) = [I + \underline{C}(s)M_0(s)]^{-1} \underline{C}(s)$$

Le contrôleur $G_c(s)$ dépend donc seulement de la partie *rationnelle* du modèle du processus $M_0(s)$, et simplifie, de ce fait, la complexité inhérente aux effets des retards dans l'analyse de la stabilité.

Soliman et Ray [SR72] et Ogunnaike et Ray [OR79] ont affirmé que les solutions, avec ce type de contre-réaction, peuvent être ramenées à une formulation de commande optimale quadratique classique dans les cas monovariable puis multivariable respectivement. Dans de tels cas, la compensation est supposée contenir des retards, et elle a fait, par ailleurs, l'objet d'une étude pratique [OLMR83].

Jerome et Ray [JR86] ont amélioré le compensateur de retards multiples développé par Ogunnaike et Ray en prévoyant l'adjonction d'un retard dans la conception du contrôleur (appelé le compensateur de retard multiple généralisé).

Garcia et Morari ont démontré, par un exemple, que la conception des contrôleurs $G_c(s)$ ou $\underline{C}(s)$ peut conduire à de mauvaises performances lorsqu'il y a une différence entre les retards modélisés et les retards effectifs du système.

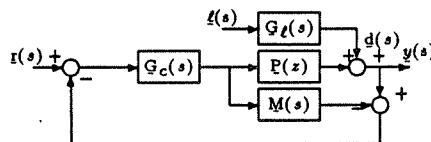


Figure 3: La compensation ORC et la structure de la CMI.

Jerome et Ray ont aussi incorporé quelques techniques de factorisation des retards développées par Holt et Morari [HM5b] dans la conception de ce type compensateur. Ces propositions donnent des résultats similaires à l'approche de la CMI. On note, que les compensateurs des systèmes à retard développés par Ogunnaike et Ray et Jerome et Ray, n'abordent pas la conception du contrôleur, mais visent seulement à l'élimination partielle ou complète des effets des retards. Par contre, l'approche de la CMI comporte implicitement une définition de la compensation des retards multiples, dans laquelle on fait appel à l'utilisation de la technique de factorisation des retards développés par Holt et Morari.

Récemment, Tsiliannis et Svoronos [TS88] ont proposé une méthode permettant le découplage du système multivariable respectant le fait que la structure comporte des retards. Cette technique canalise l'effet des retards sur la diagonale et élimine ainsi les interactions multiples des retards non-diagonaux. Par la suite la méthode propose un choix optimum des contrôleurs

des boucles, soit du point de vue du critère d'erreur à temps minimum, soit de la somme des carrés ou, encore celui de la somme des valeurs absolues.

Dans ce qui suit, nous approfondirons certains concepts mentionnés plus haut, notamment celui de la commande par modèle interne [GM5a] et celui de Tsiliannis et Svoronos [TS88].

1.2 Commande par modèle interne multivariable

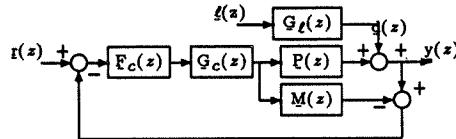


Figure 4: Structure de la commande par modèle interne multivariable.

Nous utiliserons des matrices de fonctions de transfert en z des processus multivariables, soit:

$$\underline{y}(z) = \underline{P}(z)\underline{u}(z) + \underline{d}(z)$$

où $\underline{y}(z) \in \Re^n$ est un vecteur des sorties du système, $\underline{u} \in \Re^n$ est un vecteur des actions de contrôle (supposé constant dans l'intervalle d'échantillonnage), et \underline{d} est un vecteur des perturbations du processus. La matrice de fonction de transfert du processus prend alors la forme:

$$\underline{P}(z) = z^{-1} \begin{bmatrix} P_{011}(z)z^{-p_{11}} & P_{012}(z)z^{-p_{12}} & \dots & P_{01n}(z)z^{-p_{1n}} \\ P_{021}(z)z^{-p_{21}} & P_{022}(z)z^{-p_{22}} & \dots & P_{02n}(z)z^{-p_{2n}} \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{0n1}(z)z^{-p_{n1}} & P_{0n2}(z)z^{-p_{n2}} & \dots & P_{0nn}(z)z^{-p_{nn}} \end{bmatrix}$$

Les éléments $P_{0ij}(z)$ sont des fonctions rationnelles en z qui sont strictement propres. La période d'échantillonnage additionnelle de post multiplication du retard z^{-1} de la matrice de fonction de transfert est due au bloqueur d'ordre zéro.

À l'exception du filtre de robustesse $F_c(z)$, la structure représentée à la figure 1 est équivalente à la structure de commande conventionnelle avec

$$\underline{C}(z) = [I + \underline{G}_c(z)\underline{M}(z)]^{-1} \underline{G}_c(z)$$

La réponse en boucle fermée de cette structure de contrôle CMI est:

$$\begin{aligned} \underline{y}(z) &= \underline{d}(z) + \underline{P}(z)[I + \underline{G}_c(z)\underline{F}_c(z)(\underline{P}(z) - \underline{M}(z))]^{-1} \\ &\quad \times \underline{G}_c(z)\underline{F}_c(z)(\underline{r}(z) - \underline{d}(z)) \end{aligned}$$

et l'action de commande $u(z)$ est déterminée par:

$$\underline{u}(z) = \{I + \underline{G}_c(z)\underline{F}_c(z)[\underline{P}(z) - \underline{M}(z)]\}^{-1} \underline{G}_c(z)\underline{F}_c(z)(\underline{r}(z) - \underline{d}(z))$$

1.2.1 Conception du contrôleur CMI multivariable

Nous allons nous attarder sur la procédure de conception du filtre de pondération, qui constitue l'élément de retour du système de la figure 5. Notre proposition est une extension du filtre aux systèmes multivariables et implique une factorisation du retard de la CMI (Garcia et Morari [GM5a] [GM5b]).

Le modèle du processus multivariable peut toujours admettre la factorisation de type "inner-outer" qui suit:

$$\begin{aligned} \underline{M}(z) &= \underline{M}_+(z)\underline{M}_-(z) \\ \underline{M}_+(1) &= I \end{aligned}$$

avec $\underline{M}_+(z)$ contient les retards et les zéros de $\underline{M}(z)$ en-dehors du cercle unitaire et $\underline{M}_-(z)$ a un inverse stable et réalisable.

Le contrôleur $G_c(z)$ est:

$$G_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1} \quad (3)$$

de façon à obtenir la meilleure approximation stable de la fonction de transfert instable $\underline{M}(z) = \underline{M}_+(z)\underline{M}_-(z)$. Cette commande garantit une transmission diagonale entre l'entrée et la sortie du système de commande et dans le cas d'une modélisation parfaite, il vient $\underline{y}(z) = \underline{r}(z)$ (avec $\underline{M}_+(z) = I$).

Le but du filtre $F_c(z)$ est d'améliorer la robustesse du système en présence d'erreurs de modélisation. La sortie pour une modélisation parfaite est:

$$\underline{y}(z) = \underline{M}_+(z)F_c(z)\underline{r}(z) + [I - \underline{M}_+(z)F_c(z)]\underline{d}(z) \quad (4)$$

Si à l'instar de la relation (4) la modélisation est imparfaite alors nous aurons:

$$\begin{aligned} \underline{y}(z) &= \underline{P}(z)\{I + G_c(z)[\underline{P}(z) - \underline{M}(z)]\}^{-1}G_c(z)F_c(z)\underline{r}(z) + \\ &\quad [I - \underline{P}(z)[I + G_c(z)(\underline{P}(z) - \underline{M}(z))]^{-1}G_c(z)F_c(z)]\underline{d}(z) \end{aligned}$$

Si $\underline{M}_+(z)$ et $F_c(z)$ ont été choisies diagonales, la transmission entre l'entrée et la sortie du système de commande est diagonale; autrement dit le système de commande est découpé. $F_c(z)$ est un compromis entre la robustesse formulée généralement en fonction de la fréquence, et de la performance temporelle. Le choix de $\underline{M}_+(1) = I$, $F_c(1) = I$ a pour but d'éliminer l'erreur en régime permanent.

La factorisation de $\underline{M}(z)$ peut être reprise comme suit:

$$\underline{M}(z) = \underline{M}_{+1}(z)\underline{M}_{+2}(z)\underline{M}_-(z)$$

La partie non inversible $\underline{M}_+(z)$ est décomposée en $\underline{M}_{+1}(z)\underline{M}_{+2}(z)$ de façon à ce que $\underline{M}_{+1}(z)$ soit un filtre passe-tout et de sorte que $\underline{M}(z)^{-1}\underline{M}_{+1}(z) = \underline{M}_{+2}(z)\underline{M}_-(z)$ soit propre, et que $\underline{M}^{-1}(z)\underline{M}_{+2}(z)$ soit stable.

1.2.1.1 Procédure de factorisation diagonale de $\underline{M}_{+1}(z)$

Garcia et Morari [GM5a] ont présenté une procédure de factorisation quasi-optimale de la matrice $\underline{M}_{+1}(z)$ diagonale dans le cas d'une modélisation parfaite $\underline{M}(z) = \underline{P}(z)$.

$$\underline{M}_{+1}(z) = \text{diag}[z^{-(\lambda_1^+ + 1)}, z^{-(\lambda_2^+ + 1)}, \dots, z^{-(\lambda_n^+ + 1)}] \quad (5)$$

Les éléments de la matrice inverse du processus $[P(z)]^{-1}$ sont donnés par $\bar{P}_{0,ij}(z)z^{\bar{p}_{ij}+1}$ avec $\bar{P}_{0,ij}(z)$ strictement propre en z . Posons que:

$$\lambda_j^+ = \max_i \{\max(0, \bar{p}_{ij})\} \quad j = 1, \dots, n$$

représente le retard minimum nécessaire pour assurer la réalisabilité de $G_c(z) = [M_-(z)]^{-1} = [M(z)]^{-1}M_+(z)$ (Garcia (1982) ou la procédure dans le cas continu de Holt et Morari (1985)).

L'exemple qui suit illustre cette procédure de factorisation:

Exemple:

On considère la matrice de fonction de transfert:

$$P(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \begin{bmatrix} 2z^{-1} & z^{-3} \\ z^{-3} & z^{-4} \end{bmatrix}$$

L'inverse non réalisable de $P(z)$ est:

$$[P(z)]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z & -z^2 \\ -z^2 & 2z^4 \end{bmatrix}$$

avec $\bar{p}_{11} = 0, \bar{p}_{12} = 1, \bar{p}_{21} = 1$ et $\bar{p}_{22} = 3$, valeurs pour lesquelles $\lambda_1^+ = 1, \lambda_2^+ = 3$ et qui mènent à la matrice diagonale

$$M_+(z) = \begin{bmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & z^{-4} \end{bmatrix}$$

Parmi tous les choix possibles de $M_-(z)$, Holt et Morari proposent [HM5a] celui qui est formulé dans (5) et qui permet une minimisation de l'indice de performance ISE (integral square error), soit:

$$\int_0^\infty e^T A e dt$$

où e est un signal d'erreur et A est une matrice de pondération strictement positive. Le choix optimal s'avère selon [HM5a] être celui qui consiste à réarranger l'ordre des colonnes et des rangées de $M(z)$ de façon à ce que le délai minimum de chaque colonne apparaît sur la diagonale de $M(z)$. Dans l'exemple qui précède on peut noter que $M(z)$ -en occurrence égal à $P(z)$ ou la supposition de modélisation parfaite- n'est pas optimal.

Pour une réponse rapide on obtient:

$$M'_+(z) = \begin{bmatrix} z^{-2} & 2z^{-1}(1 - z^{-1}) \\ 0 & z^{-3} \end{bmatrix}$$

avec $[M_-(z)]^{-1}$ est réalisable. En addition, $M'_+(z)$ satisfait $M'_+(1) = I$. La deuxième sortie est retournée en régime permanent après une période d'échantillonnage en utilisant $M'_+(z)$ au lieu que $M_+(z)$. Cependant, la réponse est un compromis entre la rapidité et l'interaction.

Si le modèle du processus ne contient aucun retard, $M_{+1}(z)$ contient le facteur $z^{-1}I$ afin d'obtenir un inverse réalisable. Le retard d'une période d'échantillonnage est présent dans tous les systèmes numériques utilisant un bloqueur d'ordre zéro.

Une nouvelle méthode de calcul la limite inférieure:

L'idée de base de mesure de l'effet des systèmes avec retard dans la réponse en boucle fermée a été suggérée par Holt et Morari 1985.

- (i) La méthodologie qui suit va permettre le découplage pour autant que l'on puisse augmenter les délais des fonctions de transfert du processus de façon arbitraire. Dénotons

$$\tau_i = \min_j p_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

et par T le vecteur $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, où p_{ij} est le retard minimum des éléments P_{ij} du processus P . La factorisation suggérée est:

$$P^d = \text{diag}(e^{-\tau_1 s}, e^{-\tau_2 s}, \dots, e^{-\tau_n s})$$

- (ii) Dénotons par:

$$\begin{aligned} r_{ll} &= \max_k (\max(0, \hat{q}_{kl} - \hat{p}_{kl})) \quad l = 1, \dots, n, \quad \text{et } R = (r_{11}, \dots, r_{nn}) \\ P_+^d &= \text{diag}(e^{-r_{11}s}, \dots, e^{-r_{ll}s}, \dots, e^{-r_{nn}s}) \end{aligned} \quad (7)$$

ou \hat{p}_{kl} et \hat{q}_{kl} sont le retard minimum du numérateur et dénominateur d'élément kl de P^{-1} respectivement.

La limite inférieure définie par l'équation (7) est difficile à calculer. La difficulté augmente avec l'ordre du système en calculant la matrice inverse avec retard. L'équation de la limite inférieure peut être calculée selon la méthode de programmation de type (MILP)¹

Dénotons par A la matrice dont les éléments a_{ij} apparaissent dans de processus:

$$P(s) = P_{ij}(s) e^{-a_{ij}s}$$

Soit:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

il s'ensuit que le retard minimum du dénominateur \hat{q}_{kl} est commun $\forall k, l$. Notons que ce retard commun minimum par \hat{q} . L'équation (7) est simplifiée:

$$r_{ll} = \max_k (\max(0, (\hat{q} - \hat{p}_{kl}))) \quad l = 1, \dots, n$$

ou, après quelques manipulations:

$$r_{ll} = \max(0, (\hat{q} - \min_k \hat{p}_{kl})) \quad l = 1, \dots, n \quad (8)$$

Calcul de \hat{q} et $\min_k(\hat{p}_{kl})$

¹P. Psarris and C. A. Floudas "Improving the Decoupling Response Bound in Multivariable Time Delay Systems" American Control Conference, Vol. 2, pp. 1848-1852, Boston 1991.

Soient les ensembles indexés I, $i = 1, \dots, n$ et J, $j = 1, \dots, n$ introduits pour le calcul des rangées et des colonnes de la matrice des retards respectivement. Les variables binaires y_{ij} sont des valeurs 0-1 associées avec les éléments a_{ij} de la matrice A du retard. Le retard minimum du dénominateur de A^{-1} , \hat{q} , est donc donné par la solution du problème suivant:

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j y_{ij} a_{ij} \quad (9)$$

$$\sum_i y_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_j y_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j \quad (10)$$

Notons que la solution du problème ci-dessus rend la valeur de \hat{q} et des retards a_{ij} . Les valeurs de ce dernier sont déterminé lorsque y_{ij} soit égale à 1.

Notons que la formulation mathématique (10) ne prend pas en considération de la cancellation des termes pouvant apparaître au déterminant. Notons qu'une perturbation infinitésimale des retards resultera en un système sans cancellation. Le $\min_k(\hat{p}_{kl})$ est calculé $\forall l$ pour déterminer les éléments du vecteur r d'après l'équation () ce qui entraîne à la résolution du problème suivant pour $l = 1, \dots, n$.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j y_{ij} a_{ij} \quad i \neq l \quad (11)$$

$$\sum_i y_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_j y_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_{ij} = 0, 1 \quad \forall i, j \quad (12)$$

La solution de (12) pour $l = 1, \dots, n$ donne les valeurs $\min_k(\hat{p}_{kl}) \quad \forall l$. Les retards a_{ij} sont déterminés lorsque la valeur y_{ij} égale à 1.

Un approche plus rigoureuse pour l'optimisation de la limite inférieure consiste à augmenter les retards individuels de la matrice A (le système P) jusqu'à ce que le test de réarrangement soit satisfait. Celui-ci consiste à réarranger la matrice en interchangeant les colonnes de façon à ce que le délai minimal de chaque rangée apparaisse sur la diagonale. Les limites supérieure et inférieure coïncident, la limite inférieure peut être calculée d'après le retard minimum dans la rangée de la matrice modifiée. Si on élimine certaines rangées de A, il est possible de générer la sous-matrice qui satisfait le test de réarrangement, cette sous-matrice contient le sous-vecteur du vecteur limite supérieure T de l'équation (6) et ce sous vecteur de la limite supérieure peut être réalisé en augmentant le retard spécifique du système original.

Soient b_{ij} les retards modifiés de la matrice modifiée B. Les valeurs binaires y_{ij} -soit 1 soit 0- sont associées aux éléments b_{ij} . La valeur de y_{ij} égale 1 lorsque l'élément correspondant dans la matrice de délai est le plus petit de sa rangée. Il revient donc de résoudre le problème suivant.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j b_{ij} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\sum_i y_{ij} &= 1 \quad j = 1, \dots, n \\
\sum_j y_{ij} &= 1 \quad i = 1, \dots, n \\
\sum_j y_{ij} b_{ij} - b_{ij} &\leq 0 \quad i, j = 1, 4, \dots, n \\
a_{ij} &\leq b_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \\
y_{ij} &= 0, 1 \quad \forall i, j
\end{aligned} \tag{14}$$

La solution de (14) selon la méthode (MILP) donne les retards b_{ij} du système modifié et montre la limite inférieure améliorée dans ce problème modifié. A partir de b_{ij} l'on retrouve les éléments a_{ij} . La matrice modifiée satisfait le test de réarrangement.

1.2.1.2 Choix de $\underline{\mathbf{M}}_{+2}(z)$

$\underline{\mathbf{M}}_{+2}(z)$ est choisie de façon à ce que $[\underline{\mathbf{M}}_-(z)]^{-1}$ soit stable. En supposant $\underline{\mathbf{M}}_{+1}(z) = z^{-1}I$, l'inverse de $\underline{\mathbf{M}}_-(z)$ est donnée par:

$$[\underline{\mathbf{M}}_-(z)]^{-1} = [\underline{\mathbf{M}}(z)]^{-1} \underline{\mathbf{M}}_{+2}(z) = \frac{\text{adj}(\underline{\mathbf{M}}(z))}{\det(\underline{\mathbf{M}}(z))} \underline{\mathbf{M}}_{+2}(z)$$

Lorsque $\underline{\mathbf{M}}(z)$ est stable $\det(\underline{\mathbf{M}}(z))$ contient tous les zéros de $\underline{\mathbf{M}}(z)$ qu'ils soient ou non à l'intérieur du cercle unitaire.

Cette procédure est illustrée par l'exemple suivant:

Exemple:

On considère la matrice de fonction de transfert du modèle:

$$\underline{\mathbf{M}}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.6}{z-0.4} & \frac{0.5}{z-0.5} \\ \frac{0.6}{z-0.5} & \frac{0.6}{z-0.4} \end{bmatrix}$$

est stable en boucle ouverte. Le déterminant de la matrice est:

$$\det[\underline{\mathbf{M}}(z)] = \frac{0.36}{(z-0.4)^2} - \frac{0.30}{(z-0.5)^2}$$

se réduit à:

$$\det[\underline{\mathbf{M}}(z)] = \frac{0.06(z^2 - 2z + 0.7)}{(z-0.4)^2(z-0.5)^2}$$

le déterminant contient un zéro de $\underline{\mathbf{M}}(z)$ qui est en-dehors du cercle unitaire (les racines de $z^2 - 2z + 0.7 = 0$ étant $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{0.3}$).

Le facteur $z_1 = 1 + \sqrt{0.3} \approx 1.547$ rend $[\underline{\mathbf{M}}(z)]^{-1}$ instable. $\underline{\mathbf{M}}_{+2}(z)$ est choisie de façon que $z - (1 + \sqrt{0.3})$ soit annulé par $[\underline{\mathbf{M}}_-(z)]^{-1}$.

$\underline{\mathbf{M}}_{+2}(z)$ sera donc:

$$\underline{\mathbf{M}}_{+2}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-1.547}{1-1.547z} & 0 \\ 0 & \frac{z-1.547}{1-1.547z} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{M}}_{+1}(z) = z^{-1}I_2$$

Dans la forme finale de $\underline{M}_+(z)$, nous ne tenons compte que de l'objectif de performance temporel $\underline{M}_+(1) = I$.

Pour une réponse plus rapide, on utilise la transformation suivante (le contrôleur est stable):

$$\underline{M}_+(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3.095(1 - z^{-1}) & \frac{z-1.547}{1-1.547z}z^{-1} \end{bmatrix}$$

La première sortie présente une réponse "deadbeat", la seconde sortie est affectée par une réponse inverse et en interaction. Il est possible de sélectionné $M_+(z)$ afin que ce soit la seconde sortie à une réponse "deadbeat" et la première sortie est affectée par une réponse inverse et en interaction. $M_+(z)$ a été choisi tel que la sortie la plus importante présente une réponse "deadbeat".

1.2.1.3 Détermination du filtre de robustesse de la CMI multivariable

Garcia et Morari [GM5b] ont présenté un théorème pour les systèmes multivariables assurant la stabilité en boucle fermée dans le cas d'un filtre de robustesse diagonale.

Nous supposons que:

a) le filtre $F_c(z)$ donné par la figure 4 est diagonal et de type exponentiel dans le temps soit:

$$F_c(z) = \text{diag} \left[\frac{1 - \alpha_i}{1 - \alpha_i z^{-1}} \right] \quad 0 \leq \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n$$

b) que $G_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$. Il existe un α^* ($0 \leq \alpha^* < 1$) tel que le système soit stable en boucle fermée $\forall \alpha_i$ dans l'intervalle ouvert $\alpha^* \leq \alpha_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) si et seulement si $P(z)$ et $M(z)$ satisfont:

$$\Re\{\Lambda_j(P(1)[M(1)]^{-1})\} > 0 \quad j = 1, \dots, n$$

où $\Lambda_j[A]$ indiquent la j^{ieme} valeur propre de A .

1.2.2 Conception du contrôleur par l'adjonction d'un module d'"interaction"

La conception se base sur la notion de matrice "interactive" proposée par Wolowich et Falb [WF76] pour les systèmes MIMO à invariant caractéristique. L'invariant caractéristique d'une matrice $P(z)$ représentant un processus dans lequel est associée une matrice de compensation $G_c(z)$. Celle-ci est une matrice triangulaire inférieure $\xi_P(z)$ dite matrice d'interaction. Cette dernière est dite invariante par rapport à $P(z)$ en ce sens que $P(z)G_{c1}(z) = \xi_P(z)$ et que $\xi_P(z)G_{c2}(z) = P(z)$ pour des compensateurs $G_{c1}(z)$ et $G_{c2}(z)$ appartenant à l'ensemble des matrices rationnelles propres et inversibles. Tel que démontré dans [WF76], l'équivalence de $P(z)$ et de $\xi_P(z)$ implique un rang commun et, de plus, la stabilité de l'un implique la stabilité de l'autre. La méthode de construction de la matrice d'interaction $\xi_P(z)$ est élaborée dans [WF76], et il y est démontré qu'elle est unique.

Rappelons que, dans le cas de la CMI, le contrôleur est $G_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$.

Exemples d'application dans le cas d'une CMI (modélisation parfaite). Nous commencerons par illustrer des matrices de compensation $G_c(z)$ réalisables.

- 1- $\underline{P}_1(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-d_1} & z^{-d_1} \\ z^{-d_1} & z^{-d_1} \end{bmatrix}$
- $\underline{P}_{1+}(z) = z^{-d_1} \text{ avec } G_{1c}(z) = [\underline{P}_{1-}(z)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$
- 2- $\underline{P}_2(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-d_1} & z^{-d_1} \\ z^{-d_2} & z^{-d_2} \end{bmatrix}$
- $\underline{P}_{2+}(z) = \begin{bmatrix} z^{-d_1} & 0 \\ 0 & z^{-d_2} \end{bmatrix} \text{ avec } G_{2c}(z) = [\underline{P}_{2-}(z)]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$
- 3- $\underline{P}_3(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-1} & z^{-2} \\ z^{-3} & z^{-1} \end{bmatrix}$
- $\underline{P}_{3+}(z) = z^{-1} \text{ avec } G_{3c}(z) = [\underline{P}_{3-}(z)]^{-1} = \frac{1}{2-z^{-3}} \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1} \\ -z^{-2} & 2 \end{bmatrix}$
- 4- $\underline{P}_4(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-2} & z^{-1} \\ z^{-1} & z^{-3} \end{bmatrix}$
- $\underline{P}_{4+}(z) = z^{-1} \text{ avec } G_{4c}(z) = [\underline{P}_{4-}(z)]^{-1} = \frac{1}{-2+z^{-3}} \begin{bmatrix} z^{-2} & -1 \\ -2 & z^{-1} \end{bmatrix}$

Dans les exemples qui suivent, le contrôleur $G_c(z)$ n'est pas réalisable.

- 5- $\underline{P}_5(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-1} & z^{-2} \\ z^{-3} & z^{-4} \end{bmatrix}$
- $\underline{P}_{5+}(z) = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 \\ 0 & z^{-3} \end{bmatrix} \text{ avec } G_{5c}(z) = [\underline{P}_{5-}(z)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -z & 2z \end{bmatrix}$
- 6- $\underline{P}_6(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) & z^{-1} \\ z^{-1}(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) & z^{-1} \end{bmatrix}$
- $\underline{P}_{6+}(z) = z^{-1} \text{ avec } G_{6c}(z) = 3 \begin{bmatrix} z & -z \\ -z(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) & z(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \end{bmatrix}$
- 7- $\underline{P}_7(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) & z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1}) \\ z^{-1}(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) & z^{-1} \end{bmatrix}$
- $\underline{P}_{7+}(z) = z^{-1} \text{ avec } G_{7c}(z) = -18 \begin{bmatrix} z^2 & -z^2(1 + \frac{1}{3}z^{-1}) \\ -z^2(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) & z^2 + (1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \end{bmatrix}$

Pour répondre au problème de la non réalisabilité des compensations G_{5c}, G_{6c}, G_{7c} , l'approche de la matrice d'interaction peut s'avérer utile [TS88].

A) Nous commencerons par définir les zéros à l'intérieur du cercle unitaire et les retards.

Soit $\underline{P}(z)$ de dimension $n \times n$. Il existe une matrice polynomiale unique $\xi_P(t)(z)$ appelée matrice "d'interaction" de la forme:

$$\xi_P(z) = H_P(z) \text{diag}(z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_n})$$

avec

$$H_P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(z) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ h_{n1}(z) & h_{n2}(z) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dans laquelle $h_{ij}(z)$ soit divisible par z , soit nulle, de sorte que:

A1. $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi_P(z) P(z) = K_P$ où K_P est une matrice non singulière;

A2. $P(z)^{-1} \xi_P(z)^{-1}$ est propre;

A3. Si $P_1(z), P_2(z)$ sont de rang plein et propres, il existe une matrice $P(z)$ propre telle que $P_1(z)P(z) = P_2(z)$ si et seulement si, le produit $\xi_{P_1}(z)[\xi_{P_2}(z)]^{-1}$ est propre.

La procédure de calcul de la matrice "d'interaction" (voir annexe A) procure les résultats qui suivent en rapport avec les exemples déjà cités

$$\begin{aligned} 1 - \quad \xi_{P_1}(z) &= \begin{bmatrix} z^{d_1} & 0 \\ 0 & z^{d_1} \end{bmatrix} \\ 2 - \quad \xi_{P_2}(z) &= \begin{bmatrix} z^{d_1} & 0 \\ 0 & z^{d_2} \end{bmatrix} \\ 3 - \quad \xi_{P_3}(z) &= \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ 4 - \quad \xi_{P_4}(z) &= \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ 5 - \quad \xi_{P_5}(z) &= \begin{bmatrix} z & 0 \\ -\frac{1}{2}z^2 & z^4 \end{bmatrix} \\ 6 - \quad \xi_{P_6}(z) &= \begin{bmatrix} z & 0 \\ -z^2 & z^2 \end{bmatrix} \\ 7 - \quad \xi_{P_7}(z) &= \begin{bmatrix} z & 0 \\ -z^3 + \frac{1}{3}z^2 & z^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Exemple de calcul de la matrice "d'interaction":

Nous illustrons une première méthode permettant de définir la matrice d'interaction $\xi^1(z)$ dont les rangées seront dénotées $\xi^1(z)_i$. k_i représentera le retard minimum de la rangée i de $P_5(z)$. k_i^1 fait référence au premier choix possible de $\xi^1(z)_i$.

$$P_5(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-1} & z^{-2} \\ z^{-3} & z^{-4} \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 1 \quad \tau_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z [2z^{-1} \ z^{-2}] = [2 \ 0]$$

$$k_2 = 3 \quad \tau_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 [z^{-3} \ z^{-4}] = [1 \ 0]$$

La première rangée de la matrice "d'interaction" est $\xi(z)_1 = [z \ 0]$

Si $\xi_1 = \tau_1 = [2 \ 0]$ et τ_2 étaient, linéairement indépendants, la seconde rangée de la matrice

“d’interaction” est donnée par $[0 \ z^3]$,
dans le cas présent $\tau_2 = \frac{1}{2}\xi_1$

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 = z^{k_2^1} \{ [0 \ z^3] - \frac{1}{2}[z \ 0] \}$$

Le choix de k_2^1 doit être tel que l’expression qui suit soit finie:

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 \underline{P}_5(z) = [0 \ \frac{1}{2}z^{(k_2^1-1)}]$$

Soit $k_2^1 = 1$. Nous pouvons vérifier que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\xi}^1(z)_2 \underline{P}(z) = [0 \ \frac{1}{2}] = \tilde{\xi}_2^1 \text{ finie et non nulle}$$

Donc $\tilde{\xi}_2^1$ et ξ_1 sont linéairement indépendantes d’où la matrice “d’interaction”

$$\xi_P(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -\frac{1}{2}z^2 & z^4 \end{bmatrix}$$

La procédure de conception des matrices “d’interactions” $\xi_{P_6}(z)$ et $\xi_{P_7}(z)$ sont présentées à l’annexe A.

Conception du contrôleur par l’adjonction de la matrice d’interaction.

Dans ce cas, nous élaborerons la conception du contrôleur qui est optimale dans le sens que la somme des carrés de l’erreur e existant entre la sortie et la référence est minimale, et idéalement, nulle. Alternativement, on pourra viser à minimiser une forme quadratique $e^T Q e$ dans laquelle Q est une matrice de pondération strictement positive et la somme $Q e$ où Q est une matrice strictement positive. L’ensemble de ces minimisations se faisant pour la somme des échantillonnages allant de $t = t_* + k$; à l’infini. t_* représente le moment de l’application d’une variation de type échelon du point de consigne.

L’hypothèse A1 entraîne que $\xi_P(z)^{-1}$ est stable et causale. Les conditions A1 et A3, combinées aux conditions $F_c(1) = I$ résultent du choix de contrôleur.

$$G_c(z) = [\underline{P}(z)]^{-1} [\xi_P(z)]^{-1} \xi_P(1) F_c(z)$$

lequel est propre, stable et permet d’éliminer l’erreur en régime permanent.

Exemples:

$$\underline{P}(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \begin{bmatrix} 2z^{-2} & z^{-5} \\ z^{-1} & z^{-3} \end{bmatrix}$$

Ainsi $d_1 = 2, d_2 = 1$ et $\lim_{z \rightarrow \infty} \det(\begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & z^1 \end{bmatrix} \underline{P}(z)) = 0$

$$\xi_P(z) = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}z^4 & z^3 \end{bmatrix} \text{ avec } \xi_P(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_c(z) = \begin{bmatrix} \frac{2-z^{-1}+z^{-3}}{4} & -\frac{z^{-3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice en boucle fermée:

$$\begin{aligned} G_{BF}(z) &= \xi_P(z)^{-1} \xi_P(1) \\ &= \begin{bmatrix} z^{-2} & 0 \\ \frac{1}{2}(z^{-1} - z^{-3}) & z^{-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

est optimale mais n'est pas découpée. Nous abordons donc le découplage de $G_{BF}(z)$.

On suppose que la matrice de transfert en boucle fermée désirée est $G_d(z)$ (non singulière et propre) et que la matrice de transfert satisfait A1-A3. Il existe donc un contrôleur admissible si et seulement si $\xi_P \xi_{G_d}^{-1}$ est propre.

$$\text{La réponse en boucle fermée désirée étant } G_d(z) = \begin{bmatrix} z^{-p_1} & 0 \\ 0 & z^{-p_2} \end{bmatrix}$$

Le meilleur contrôleur propre possible est:

$$\xi_P \xi_{G_d}^{-1} = \begin{bmatrix} z^{2-p_1} & 0 \\ -\frac{1}{2}z^{4-p_1} & z^{3-p_2} \end{bmatrix}$$

Par suite, le meilleur découplage du contrôleur $G_c(z)$ correspond à $p_1 = 4$ et $p_2 = 3$ de sorte que:

$$G_c(z) = P(z)^{-1} G_d(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z^{-2} & z^{-3} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Calcul du contrôleur pour $P_5(z), P_6(z), P_7(z)$

$$\begin{aligned} G_{5c}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+z^{-1}) & -z^{-1} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ G_{6c}(z) &= \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 - \frac{3}{2}z^{-1} & 3(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \end{bmatrix} \\ G_{7c}(z) &= \begin{bmatrix} -2(7+2z^{-1}) & 18(1 + \frac{1}{3}z^{-1}) \\ 3(5+2z^{-1}) & -18(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Remarque:

Si la matrice de transfert diagonale désirée en boucle fermée est, ($G_d = \text{diag}(z^{-p_i})$), la plus petite valeur p_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) est donnée par la dérivée $i^{\text{ème}}$ de la colonne de la matrice d'interaction $\xi_P p_i = \partial C_i(\xi_P)$. Le degré de la colonne de la matrice d'interaction est la plus petite valeur possible du retard de la diagonale G_d .

Appliquons à l'exemple donné par Garcia et Morari [GM5a]:

$$\text{Soit } M(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \begin{bmatrix} 2z^{-1} & z^{-3} \\ z^{-3} & z^{-4} \end{bmatrix}$$

$$d_1 = 1 \quad \tau_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z \begin{bmatrix} \frac{2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} & \frac{z^{-3}}{1-0.5z^{-1}} \end{bmatrix} = [2 \ 0] = \xi_1 \text{ avec } \xi(z)_1 = [z \ 0]$$

$$d_2 = 3 \quad \tau_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \begin{bmatrix} \frac{z^{-3}}{1-0.5z^{-1}} & \frac{z^{-4}}{1-0.5z^{-1}} \end{bmatrix} = [1 \ 0] = \xi_2 \text{ avec } \xi(z)_2 = [0 \ z^3]$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2}\xi_1 \quad (\xi_1 \text{ et } \xi_2 \text{ sont linéairement dépendants})$$

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 = z^{k_1} \{ [0 \ z^3] - \frac{1}{2}[z \ 0] \} = z^{k_1} \left[-\frac{1}{2}z \ z^3 \right]$$

Le choix de k_2^1 doit être tel que la limite d'expression qui suit soit finie:

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 M(z) = [0 \ z^{-1+k_2^1}]$$

Soit $k_2^1 = 1$, il vient:

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 = \left[-\frac{1}{2}z^2 \ z^4 \right]$$

Donc $\tilde{\xi}_2^1$ et ξ_1 sont linéairement indépendant d'où la matrice "d'interaction"

$$\xi_M(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -\frac{1}{2}z^2 & z^4 \end{bmatrix} \text{ avec } \xi_M(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ fini et non nulle. Le contrôleur est:}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi_M(z) M(z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le contrôleur G_c est:

$$G_c(z) = \begin{bmatrix} \frac{2-z^{-1}-z^{-2}}{\frac{1}{2}} & -\frac{z^{-2}}{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

B) Cas des retards et les zéros en-dehors du cercle unitaire.

Dans cette partie, nous présentons les deux matrices "d'interaction" généralisées de Tsili-giannis et Svoronos [TS89]. Ces matrices dénotées "interaction h et q" sont introduites dans le cas plus général où en addition aux retards, les zéros finis en-dehors du cercle unitaire sont aussi définis. Pour cela, tous les éléments non inversibles sont exprimés par "l'interaction WF", si le système a aucun zéro fini en-dehors du cercle unitaire. La réduction de l'inverse de "l'interaction h" a un découplage optimale triangulaire de la matrice de transfert en boucle fermée en rapport avec le critère SSE pendant ce temps la réduction de l'inverse de "l'interaction q" est optimale en rapport avec un critère de performance à temps minimum, de sorte que:

Assomptions de base sur le système considéré \underline{P}

- B1: La matrice de transfert du système \underline{P} est non singulière et propre;
- B2: Le système est stable en boucle ouverte;
- B3: Il n'y a aucune annulation de pôles par des zéros dans la matrice de transfert du système;
- B4: Le système n'a aucun zéro de transmission dans le cercle unitaire.

Les retards sont considérés comme des zéros à l'infini. Nous dénotons par $\sum = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ l'ensemble des zéros finis ou infinis en-dehors du cercle unitaire $|z| > 1$ de \underline{P} . \sum contient donc tous les éléments non inversibles. L'"interacteur WF" prenant en considération les délais uniquement, il est proposé d'effectuer une transformation qui permettent de déplacer un zéro en dehors du cercle à l'infini avant d'appliquer la méthode préconisée par WF. Deux transformations sont possibles:

- Dans le cas d'un interacteur de type h, la transformation: $h \rightarrow z$ est:

$$z = \frac{1 + \sigma h}{h + \sigma} \iff h = \frac{1 - \sigma z}{z - \sigma} (\sigma \in \sum) \quad (15)$$

Cette transformation permet à la matrice "d'interaction" un découplage triangulaire du contrôleur, tout en minimisant le critère de la somme des carrés des erreurs de la réponse temporelle en régime établi.

- La seconde transformation possible $q \rightarrow z$ est:

$$z = \frac{\sigma q}{q + \sigma - 1} \Leftrightarrow q = \frac{(1 - \sigma)z}{z - \sigma} (\sigma \in \sum) \quad (16)$$

permet à l'"interaction" un découplage triangulaire du contrôleur qui est optimale en rapport avec le temps de stabilisation des performances temporelles.

On remarque lorsque: $\sigma \rightarrow \infty, h = q = z$, c'est à dire que les transformations précédentes sont équivalentes.

Théorème: Soit la matrice de transfert $\underline{P}(z)$ satisfaisant (B1) à (B3), il existe une matrice rationnelle triangulaire inférieure unique:

$$\xi_{P_\sigma}^w(z) = H_{P_\sigma} \text{diag}\{w^{k_1\sigma}, w^{k_2\sigma}, \dots, w^{k_n\sigma}\} (k_{i\sigma} \geq 0)$$

avec $w = h$ (équation (15)) ou $w = q$ (équation (16))

$$H_{P_\sigma}(w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21}(w) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ h_{n1}(w) & h_{n2}(w) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

où $h_{ij}(w) i, j = 1, 2, \dots, n$ sont des polynômes en w divisibles par w (ou zéro) de sorte que:

1. $\lim_{z \rightarrow \sigma} \xi_{P_\sigma}^w(z) \underline{P}(z) = K_{P_\sigma}^w$ est non singulière;
2. $\xi_{P_\sigma}^w(z)$ a un inverse stable;
3. $\xi_{P_\sigma}^w(z)$ a un inverse causal;
4. les pôles en-dehors du cercle unitaire $|z| > 1$ de $\underline{P}(z)^{-1} \xi_{P_\sigma}^w(z)^{-1}$ sont ceux de $\sum - \{\sigma\}$;
5. Si $\underline{P}_1(z)$ et $\underline{P}_2(z)$ satisfont les propositions (B1) à (B3), il existe un $\underline{P}(z)$ sans pôle à σ tel que $\underline{P}_1(z)\underline{P}(z) = \underline{P}_2(z)$ si et seulement si $\xi_{P_1\sigma}^w(z)\xi_{P_2\sigma}^w(z)$ n'a aucun pôle à σ .

Un "intéracteur $\sigma \rightarrow w$ " (c'est à dire $\sigma \rightarrow h$ ou $\sigma \rightarrow q$) ne tient compte que d'un seul élément de \sum . Pour l'ensemble des éléments de \sum , la généralisation de l'"interaction w" est:

$$\xi_P^w(z) = \xi_N^w(z)\xi_{N-1}^w(z)\cdots\xi_2^w(z)\xi_1^w(z)$$

où ξ_i^w est l'"interaction" $\sigma_i - w$ de $K_{i-1}^w(z)$, avec $K_i^w(z) = \xi_i^w(z)K_{i-1}^w$ et $K_0^w(z) = \underline{P}(z)$.

Théorème: Soit une matrice de transfert $\underline{P}(z)$ satisfaisant (B1) à (B4) avec $w = h$ ou $w = q$. L'"interaction" w généralisée ξ_P^w avec les propriétés suivantes:

1. $\lim_{z \rightarrow \sigma_i} \xi_P^w(z) \underline{P}(z)$ est finie et non singulière $\forall \sigma_i \in \sum$;
2. $\underline{P}(z)^{-1} \xi_P^w(z)^{-1}$ est stable et propre;

3. Si $\underline{P}_1(z)$ et $\underline{P}_2(z)$ satisfont (B1) à (B4), alors il existe un $\underline{P}(z)$ stable et propre tel que $\underline{P}_1(z)\underline{P}(z) = \underline{P}_2(z)$ si et seulement si $\xi_{\underline{P}_1}^w(z)\xi_{\underline{P}_2}^w(z)^{-1}$ est stable et propre.

Design du compensateur

Théorème: On suppose que les conditions (B1) à (B4) sont vérifiées. Pour chaque matrice de transfert propre et stable $\underline{F}_c(z)$ avec $\underline{F}_c(1) = I$ et $w = h$ ou $w = q$, le contrôleur

$$\underline{G}_c(z) = \underline{P}(z)^{-1}\xi_P^w(z)^{-1}\xi_P^w(1)\underline{F}_c(z) \quad (17)$$

est propre, stable et élimine les erreurs en régime permanent.

Paramétrisation des matrices de transfert en boucle fermée

On suppose que les hypothèses (B1) à (B4) sont vérifiées. Si G_d est la matrice de transfert en boucle fermée désirée (G_d non singulière, stable et propre) alors il existe un contrôleur admissible (stable et propre) G_c pour l'une des conditions suivantes:

1. Si et seulement si $\xi_P^w(z)\xi_{G_d}^w(z)^{-1}$ est stable et propre ($w = h$ ou q) ou, alternativement:
2. Si et seulement si $\xi_P^w(z)G_d(z)$ est stable et propre ($w = h$ ou q)

Théorème: On suppose que les hypothèses (B1) à (B4) sont vérifiées. Si l'on est intéressé par la matrice de transfert en boucle fermée diagonale qui suit, dans quel cas

$$[G_d(z)]_{ii} = \prod_{j=1}^N w(\sigma_j)^{-m_{ij}} (w = h \text{ ou } q)$$

il s'en suit que les plus petites valeurs possibles m_{ij} sont données par l'ordre le plus élevé de $w(\sigma_j)$ dans la i^{ieme} colonne de $\xi_P^w(z)$.

Remarque:

La proposition B4 peut être relaxée en excluant seulement les zéros situés sur le cercle unitaire ($|\sigma| = 1$). Pour l'interacteur h on considère le contrôleur sous-optimal pour l'utilisation:

$$h = \frac{1 - (\sigma + \varepsilon)z}{z - \sigma} \frac{1 - \sigma}{1 - (\sigma + \varepsilon)}$$

$|\varepsilon|$ faible, $|\sigma + \varepsilon| > 1$. Cette modification assure que l'inverse de $\xi_{P_\sigma}^p$ est stable (autrement $\xi_{P_\sigma}^{p-1}$ a des pôles sur le cercle unitaire à la valeur complexe conjuguée de σ).

Exemple:

On considère le système qui suit, donné d'après Garcia et Morari (1985b)

$$\underline{P}(z) = \begin{pmatrix} \frac{0.6}{z-0.4} & \frac{0.5}{z-0.5} \\ \frac{0.6}{z-0.5} & \frac{0.6}{z-0.4} \end{pmatrix}$$

Ce système a des zéros en-dehors du cercle unitaire à $1 + \sqrt{0.3} (= \sigma_1)$ et $\infty (= \sigma_2)$.

• Cas d'"interacteur h :

En suivant la procédure donnée dans l'annexe A, nous avons:

$$\xi_1^h(z) = \xi_{P\sigma_1}^h(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha \frac{1-\sigma_1 z}{z-\sigma_1} & \frac{1-\sigma_1 z}{z-\sigma_1} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \frac{0.6+\sqrt{0.3}}{0.5+\sqrt{0.3}}$. Soit

$$K_1^h(z) = \xi_{P\sigma_1}^h(z)P(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.6}{z-0.4} & \frac{0.5}{z-0.5} \\ \frac{0.6(1-\sigma_1 z)(1-\alpha)}{(z-0.4)(z-0.5)} & \frac{(0.6-0.5\alpha)(1-\sigma_1 z)}{(z-0.4)(z-0.5)} \end{bmatrix}$$

D'où:

$$\xi_2^h(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

et

$$\xi_P^h(z) = \xi_2^h(z)\xi_1^h(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ -\alpha z \frac{1-\sigma_1 z}{z-\sigma_1} & z \frac{1-\sigma_1 z}{z-\sigma_1} \end{pmatrix}$$

et la matrice en boucle fermée optimale (dans le sens de la minimisation des erreurs de la réponse temporelle en régime permanent) est donnée par $G_{BF}(z) = \xi_P^h(z)^{-1}\xi_P^h(1)$ ou

$$G_{BF}(z) = z^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha \frac{(\sigma_1+1)(1-z)}{1-\sigma_1 z} & \frac{z-\sigma_1}{1-\sigma_1 z} \end{bmatrix}$$

Le contrôleur est donné par $G_c(z) = P(z)^{-1}G_{BF}(z)$ (avec l'annulation de la paire pôle / zéro) ou

$$G_c(z) = \frac{z^{-1}(z-0.4)(z-0.5)}{(z-0.452)(1-\sigma_1 z)} \begin{bmatrix} 7.78(z-0.357) & -8.333(z-0.4) \\ -12.432(z-0.517) & 10(z-0.5) \end{bmatrix}$$

Si l'on desire une transmission en boucle fermée découpée et que l'ordre le plus élevé est $m_{11} = m_{21} = m_{12} = m_{22} = 1$ alors le système en boucle fermée désiré $G_d(z) = \text{diag}\{z^{-1} \frac{z-\sigma_1}{1-\sigma_1 z}\}$ résulte avec le contrôleur $G_c(z)$ donné par:

$$G_c(z) = \frac{z^{-1}(z-0.4)(z-0.5)}{(z-0.452)(1-\sigma_1 z)} \begin{bmatrix} 10(z-0.5) & -8.333(z-0.4) \\ -10(z-0.4) & 10(z-0.5) \end{bmatrix}$$

• Cas d'“interacteur q”:

Si le temps de stabilisation minimum de la réponse temporelle est désiré on utilise l’“interaction q”, et, toujours d'après l'annexe A.

$$\xi_1^q(z) = \xi_{G\sigma_1}^q(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha \frac{(1-\sigma_1)z}{z-\sigma_1} & \frac{(1-\sigma_1)z}{z-\sigma_1} \end{bmatrix}$$

$$K_1^q(z) = \xi_1^q(z)P(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.6}{z-0.4} & \frac{0.5}{z-0.5} \\ \frac{0.6(1-\sigma_1)(1-\alpha)z}{(z-0.4)(z-0.5)} & \frac{(0.6-0.5\alpha)(1-\sigma_1)z}{(z-0.4)(z-0.5)} \end{bmatrix}$$

et

$$\xi_2^q(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

L'interacteur q est:

$$\xi_P^q(z) = \xi_2^q(z)\xi_1^q(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -\alpha \frac{(1-\sigma_1)z^2}{z-\sigma_1} & \frac{(1-\sigma_1)z^2}{z-\sigma_1} \end{bmatrix}$$

et la matrice de transfert optimale en boucle fermée est:

$$G_{BF}(z) = z^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha \frac{\sigma_1(1-z)}{(1-\sigma_1)z} & \frac{z-\sigma_1}{(1-\sigma_1)z} \end{bmatrix}$$

Le contrôleur en boucle fermée de la CMI avec interacteur de type q est

$$G_c(z) = \frac{z^{-2}(z-0.4)(z-0.5)}{(z-0.452)(1-\sigma_1)} \begin{bmatrix} 8.653(z-0.422) & -8.333(z-0.4) \\ -11.477(z-0.477) & 10(z-0.5) \end{bmatrix}$$

Pour un découplage d'ordre $m_{11} = m_{21} = m_{12} = m_{22} = 1$, la matrice de transfert en boucle fermée possible est $G_d(z) = \text{diag}\left\{\frac{z^{-1}(1-\sigma_1 z^{-1})}{(1-\sigma_1)}\right\}$. Ce résultat s'obtient avec le contrôleur

$$G_c(z) = \frac{z^{-2}(z-0.4)(z-0.5)}{(z-0.452)(1-\sigma_1)} \begin{bmatrix} 10(z-0.5) & -8.333(z-0.4) \\ -10(z-0.4) & 10(z-0.5) \end{bmatrix}$$

□

1.3 Une nouvelle formulation du filtre de pondération multivariable

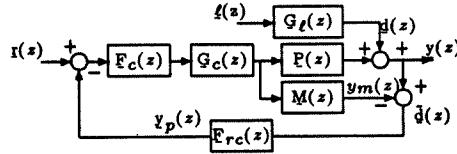


Figure 5: Structure du prédicteur analytique généralisé multivariable.

Par analogie avec les systèmes SISO, le PAG multivariable est maintenant implanté par l'insertion d'un filtre de pondération $F_{rc}(z)$ dans la boucle de contre-réaction de la structure CMI multivariable. Le résultat de la structure de la commande du PAG est donné à la figure 5, $\underline{y}_p(z)$ est un vecteur de prédiction:

$$\underline{y}_p(z) = F_{rc}(z)\underline{d}(z)$$

La réponse en boucle fermée pour le PAG est:

$$\begin{aligned} \underline{y}(z) &= P(z)[I + G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)(P(z) - M(z))]^{-1}G_c(z)F_c(z)r(z) + \\ &\quad \left\{ I - P(z)[I + G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)(P(z) - M(z))]^{-1}G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z) \right\} \underline{d}(z) \end{aligned} \quad (18)$$

Dans le cas d'une modélisation parfaite, l'équation (18) se réduit à:

$$\underline{y}(z) = P(z)G_c(z)F_c(z)r(z) + [I - P(z)G_c(z)F_c(z)F_{rc}(z)] \underline{d}(z) \quad (19)$$

1.3.1 Conception du filtre de pondération multivariable

Pour le cas monovariable, la procédure de conception du contrôleur CMI est applicable pour le PAG. La même procédure est vraie pour le PAG multivariable. Dans le cas d'une modélisation parfaite, la structure CMI est réalisée quand le contrôleur $G_c(z)$ est l'inverse de la matrice de transfert du modèle.

Substituons $[M(z)]^{-1}$ à $G_c(z)$ dans l'équation (19) (modélisation parfaite) avec $F_c(z) = I$, il vient:

$$\underline{y}(z) = r(z) + [I - F_{rc}(z)] \underline{d}(z)$$

Si le modèle est inversible, que le processus ne contient aucun retard et que $F_{rc}(z) = I$.

L'inverse d'un modèle n'étant jamais réalisable notons $M(z) = M_-(z)M_+(z)$ (voir section 1.2.1). En choisissant le contrôleur CMI: $G_c(z) = [M_-(z)]^{-1}$, la sortie est donnée par:

$$\underline{y}(z) = M_+(z)F_c(z)r(z) + [I - M_+(z)F_c(z)F_{rc}(z)] \underline{d}(z) \quad (20)$$

En comparant la sortie fournie par l'équation (20) avec celle de la CMI donnée par l'équation (4), nous constatons que les sorties sont identiques en régime suiveur.

Cependant, la sortie en régulation du PAG, contient le filtre de pondération $\underline{F}_{rc}(z)$ qui va permettre une meilleure performance.

Le PAG possède d'importantes propriétés que nous incorporerons dans le filtre de pondération $\underline{F}_{rc}(z)$:

- Dans le cas d'une prédiction parfaite et d'une perturbation de charge de type échelon, le filtre d'adaptation prévoit les effets de perturbation attribuables à la charge;
- Quand toutes les conditions de la prédiction parfaite ne sont pas appliquées, le filtre de pondération pourvoie tant à une meilleure robustesse qu'à un flexibilité relative de la réponse temporelle.

Ces propriétés peuvent être incorporées au filtre de pondération $\underline{F}_{rc}(z)$.

Lorsque le filtre du contrôleur CMI $\underline{F}_c(z)$ et le filtre de pondération \underline{F}_{rc} sont diagonaux, la sortie donnée par l'équation (20) peut être réarrangée comme suit:

$$\underline{y}(z) = \underline{M}_+(z)\underline{F}_c(z)\underline{r}(z) + [I - \underline{M}_+(z)\underline{F}_{rc}(z)\underline{F}_c(z)]\underline{d}(z)$$

Le but du filtre de pondération de prédiction $\underline{F}_{rc}(z)$ est d'annuler tous les retards [WE87]. Ce qui implique:

$$\underline{M}_+(z)\underline{F}_{rc}(z) = I$$

ou

$$\underline{F}_{rc}(z) = [\underline{M}_+(z)]^{-1} \quad (21)$$

$\underline{M}_+(z)$ contenant des retards, $\underline{F}_{rc}(z)$ contient nécessairement les prédicteurs.

Pour un filtre de pondération multivariable de prédiction $A(z)$, le filtre de prédiction pour la $(i, k)^{\text{ieme}}$ sortie est donné par:

$$F_{r_{ik}c}^{ik,j}(z) = F_{r_{ik}}^{ik}(z) + (1 - F_{r_{ik}}^{ik}(1))F_{\ell_{r_{ik}}}^{ik}(z) \frac{A_{r_{ik}}^{ik}(z)}{A_{r_{ik}}^{ik}(1)}; \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, m \quad (22)$$

où $A_{r_{ik}}^{ik}(z)$ est le dénominateur de la fonction de transfert du prédicteur $A(z)$ pour la $(i, k)^{\text{ieme}}$ sortie et d'ordre r_{ik} . Dans la proposition de Wellons et Edgar [WE87], $A(z)$ est donné par une formule de récurrence valide pour les systèmes du second ordre. Notre contribution va consister à élargir $A(z)$ à des systèmes d'ordre quelconque et d'offrir une formulation précise de $A(z)$. $F_{\ell_{r_{ik}}}^{ik}(z)$ est un filtre passe bas du premier ordre avec une constante de temps $\beta_{r_{ik}}^{ik}$ et un horizon de prédiction $\lambda_{pi} = j$. Ainsi, $F_{2c}^{12,3}(z)$ représente le filtre pour la sortie y_{12} avec l'horizon de prédiction $\lambda_{p1} = 3$. $F_2^{12}(z)$ pour un système du second ordre est donnée par:

$$F_2^{12}(z) = \frac{A_{01}^{j+1} - A_{02}^{j+1}}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}A_{02}^{j+1} - A_{02}A_{01}^{j+1}}{A_{01} - A_{02}} z^{-1}$$

avec $A_{01} = e^{-\frac{T}{\tau_{1m}}}$ et $A_{02} = e^{-\frac{T}{\tau_{2m}}}$, τ_{1m} et τ_{2m} sont des constantes du temps du système.

Procédure de conception du filtre de pondération

La conception que nous proposons suit la procédure présentée dans la section 1.2.1. On suppose que $\underline{M}_+(z)$ est une matrice diagonale et de la forme:

$$\underline{M}_+(z) = \text{diag} [p_{11}^+(z)z^{-\lambda_1^+-1}, p_{22}^+(z)z^{-\lambda_2^+-1}, \dots, p_{nn}^+(z)z^{-\lambda_n^+-1}]$$

Le prédicteur de perturbation $\underline{F}_{rc}(z)$ a aussi la forme diagonale:

$$\underline{F}_{rc}(z) = \text{diag} [F_{r_{1k}c}^{1k,\lambda_{p1}}(z), F_{r_{2k}c}^{2k,\lambda_{p2}}(z), \dots, F_{r_{nk}c}^{nk,\lambda_{pn}}(z)] \quad k = 1, \dots, m$$

avec l'horizon de prédiction λ_{pi} tel que

$$\lambda_{pi} = \lambda_i^+ + 1; \quad i = 1, \dots, m.$$

Exemple:

On considère la matrice de la fonction de transfert du modèle:

$$\underline{M}(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \begin{bmatrix} 2z^{-1} & z^{-3} \\ z^{-3} & z^{-4} \end{bmatrix}$$

Nous avons montré dans la section 1.2.1 que la factorisation est optimale et elle est donnée par:

$$\underline{M}_+(z) = \begin{bmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & z^{-4} \end{bmatrix}$$

L'application de la conception donnée par l'équation (21) du filtre de prédiction est:

$$\underline{F}_{rc} = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & z^4 \end{bmatrix} \quad k = 1 \quad (23)$$

L'horizon de prédiction pour la première sortie est sélectionné par $\lambda_{p1} = 2$ et celui pour la seconde sortie est sélectionné par $\lambda_{p2} = 4$.

La matrice de prédiction $\underline{F}_{rc}(z)$ (d'ordre 1) est exprimée par:

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} F_{r_{11}c}^{11,2}(z) & 0 \\ 0 & F_{r_{21}c}^{21,4}(z) \end{bmatrix}$$

Dans une telle conception, et les retards sont au moins en théorie, annulés de la sortie en régulation.

Pour une réponse rapide on utilise la factorisation suivante:

$$\underline{M}_+(z) = \begin{bmatrix} z^{-2} & 2z^{-1}(1 - z^{-1}) \\ 0 & z^{-3} \end{bmatrix}$$

Malgré que la réponse résultante contient des interactions, la matrice de prédiction $\underline{F}_{rc}(z)$ est désigné d'éliminer les interactions de la réponse de régulation. En employant la conception donnée par l'équation (21), la matrice de prédiction est:

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} z^2 & -2(z^4 - z^3) \\ 0 & z^3 \end{bmatrix}$$

Cependant, la matrice de prédition résultante est:

$$\underline{F}_{rc} = \begin{bmatrix} F_{1c}^{11,2} & -2[F_{1c}^{21,4}(z) - F_{1c}^{21,3}(z)] \\ 0 & F_{1c}^{21,3}(z) \end{bmatrix}$$

Remarquons que le deuxième élément de la première rangée contient les prédictions de d_2 , mais n'est pas de d_1 .

Détermination du filtre de robustesse du PAG

Théorème:

On suppose que le filtre \underline{F}_c de la figure 5 est diagonal et de type exponentiel dans le temps soit:

$$\underline{F}_c(z) = diag\left\{\frac{1-\alpha_i}{1-\alpha_i z^{-1}} \mid 0 \leq \alpha_i < 1, i = 1, \dots, n\right\} \quad (24)$$

et $\underline{G}_c = [\underline{M}_-]^{-1}$. Il existe un α^* ($0 \leq \alpha < 1$) tel que le système est stable en boucle fermée $\forall \alpha_i$ dans l'intervalle ouvert $\alpha^* \leq \alpha_i < 1$.

La démonstration est donnée à l'annexe B.

Comparaison entre CMI et PAG

L'emploi du contrôleur de la CMI $G_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$, conduit à une sortie en boucle fermée du PAG:

$$\underline{y}(z) = \underline{M}_+(z)\underline{F}_c(z)\underline{r}(z) + [I - \underline{M}_+(z)\underline{F}_c(z)\underline{F}_{rc}(z)]\underline{d}(z)$$

En supposant la modélisation parfaite, le PAG multivariable et CMI sont équivalents (sans erreur de modélisation). Si $\underline{M}_+(z) = \underline{M}_{+1}(z)\underline{M}_{+2}(z)$ et $\underline{F}_c(z)$ sont diagonaux, la sortie en régulation en boucle fermée de la CMI prend la forme:

$$y(z) = (I - \underline{F}_c(z)\underline{M}_{+2}(z)\underline{M}_{+1}(z))\underline{d}(z)$$

et $\underline{M}_{+1}(z)$ ne contenant que les retards. Par analogie avec la sortie en régulation du CMI, le PAG est:

$$\underline{y}(z) = [I - \underline{F}_c(z)\underline{M}_{+2}(z)\underline{M}_{+1}(z)\underline{F}_{rc}(z)]\underline{d}(z)$$

avec $\underline{F}_{rc}(z) = [\underline{M}_+(z)]^{-1} = [\underline{M}_{+1}(z)\underline{M}_{+2}(z)]^{-1}$

Application à la méthode de la matrice "interactive" de Tsiliannis et Sovoronos

Le choix du contrôleur $G_c(z) = [\underline{M}(z)]^{-1}[\xi_M(z)]^{-1}\xi_M(1)$.

La sortie dans le cas d'une modélisation parfaite:

$$\underline{y}(z) = [\xi_P(z)]^{-1}\xi_P(1)\underline{r}(z) + \{I - [\xi_P(z)]^{-1}\xi_P(1)\underline{F}_c(z)\underline{F}_{rc}(z)\}\underline{d}$$

Le filtre de pondération est:

$$\underline{F}_{rc}(z) = [\xi_P(1)]^{-1}\xi_P(z)$$

La matrice de découplage étant $G_c(z) = [\underline{M}(z)]^{-1}G_d(z)$, nous avons

$$\underline{F}_{rc}(z) = [\underline{F}_c(z)]^{-1}[\underline{G}_d(z)]^{-1}$$

2 Résultats et simulations

2.1 Modèle Wood et Berry

Dans cette section, nous comparons les simulations et les performances de la CMI et PAG multivariables pour le modèle de la colonne de distillation de Wood et Berry. Wood et Berry [WB73] ont développé le modèle de base expérimental de la colonne de distillation binaire d'un montage pilote. Le modèle est un système 2×2 comportant des fonctions de transferts du premier ordre plus un retard et possède des interactions significatives. Il a été considéré pour la comparaison des résultats de simulation par les schémas un seul boucle et le contrôle multivariable (Meyer [MSW78], Ogunnaike et Ray [OR79], Garcia et Morari [GM5a]). Le modèle en question est donné par:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21.0s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3.8e^{-8s}}{14.9s+1} \\ \frac{4.9e^{-3s}}{13.2s+1} \end{bmatrix} \ell(s) \quad (25)$$

$$\underline{y}(s) = \underline{M}(s)\underline{u}(s) + \underline{G}_\ell \ell(s) \quad (26)$$

Un résumé des variables et des valeurs en régime permanent sont donnés dans le tableau suivant:

Variable	Description	valeur en régime permanent
y_1	composition de la fraction molaire excédente	96.25% mole de methanol
y_2	composition de la partie inférieure	0.50% mole de methanol
u_1	pourcentage de débit excédent	1.95 lb/ min
u_2	vapeur du débit de pourcentage	1.71 lb/ min
d_1	alimentation du pourcentage de débit	2.45 lb/ min

La période d'échantillonnage est $T = 1$ minute.

La fonction de transfert du modèle en discret est donné par:

$$\underline{M}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.7440z^{-2}}{1-0.9419z^{-1}} & \frac{-0.8789z^{-4}}{1-0.9535z^{-1}} \\ \frac{0.5786z^{-8}}{1-0.9123z^{-1}} & \frac{-1.3015z^{-4}}{1-0.9329z^{-1}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

2.1.1 Contrôleur CMI

Suivant la procédure de factorisation appliquable au CMI et donnée dans la section 1.2.1 le résultat de $\underline{M}_+(z)$ est:

$$\underline{M}_+(z) = \begin{bmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & z^{-4} \end{bmatrix}$$

On note que le retard minimum de l'équation (27) se trouve dans la forme diagonale, le découplage de la factorisation est optimale.

Le déterminant de la matrice de fonction de transfert du processus ne contient aucun zéro en-dehors du cercle unitaire. Le résultat du contrôleur $\underline{G}_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$ est stable et réalisable.

D'où l'expression du filtre de pondération, la matrice de prédition désiré est:

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & z^4 \end{bmatrix}$$

ou

$$F_{rc}(z) = \begin{bmatrix} F_{r_{11}c}^{11,2}(z) & 0 \\ 0 & F_{r_{21}c}^{21,4}(z) \end{bmatrix} \text{ avec } r_{11} = r_{21} = 1$$

Les fonctions de transfert de prédition sont supposées les mêmes fonctions de transfert de la charge donnée par l'équation (26) (i.e aucune erreur de modélisation de la charge). La prédition de la sortie $y_{11}, F_{1c}^{11,2}(z)$, est donnée par l'équation (22) avec une constante de temps de premier ordre $\tau_{11} = 14.9$ et l'horizon de prédition $\lambda_{p1} = 2$. De même, $F_{1c}^{21,4}(z)$ utilise une constante de temps de premier ordre $\tau_{21} = 13.2$ et un horizon de prédition $\lambda_{p2} = 4$.

$$F_{1c}(z) = F_1(z) + (1 - F_1(1)) \frac{1 - A_{01}z^{-1}}{1 - A_{01}} \\ \text{avec } F_1(z) = A_{01}^\lambda = e^{-\frac{\lambda T}{\tau_{11}}}, \quad i = 1, 2$$

2.1.2 Le choix du contrôleur par la matrice "interactive"

$$d_1 = 2 \quad \tau_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left[\frac{0.7440z^{-2}}{1 - 0.9419z^{-1}} \quad \frac{-0.8789z^{-4}}{1 - 0.93535z^{-1}} \right] = [0.7440 \quad 0] \\ d_2 = 4 \quad \tau_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 \left[\frac{0.5786z^{-8}}{1 - 0.9123z^{-1}} \quad \frac{-1.3015z^{-4}}{1 - 0.9329z^{-1}} \right] = [0 \quad -1.3015]$$

τ_1 et τ_2 sont donc linéairement indépendant.

$$\xi_M = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & z^4 \end{pmatrix} \text{ avec } \xi_M(1) = I.$$

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} F_{r_{11}c}^{11,2}(z) & 0 \\ 0 & F_{r_{21}c}^{21,4}(z) \end{bmatrix} \text{ avec } r_{11} = r_{21} = 1$$

Le contrôleur est:

$$G_c(z) = [M(z)]^{-1} [\xi_M(z)]^{-1} \xi_M(1) \\ = \begin{bmatrix} \bar{P}_{0_{11}}(z) & \bar{P}_{0_{12}}(z)z^{-2} \\ \bar{P}_{0_{21}}(z)z^{-4} & \bar{P}_{0_{22}}(z) \end{bmatrix}$$

Les termes $\bar{P}_{0_{11}}(z), \bar{P}_{0_{12}}(z), \bar{P}_{0_{21}}(z), \bar{P}_{0_{22}}(z)$ sont donnés par les équations (50), à (53).

Le choix du contrôleur est la même pour les deux cas 2.1.1, 2.1.2.

Les simulations ont été faites par Wellons et Edgar [WE87]. Elles montrent que les performances du PAG sont mieux que la CMI.

2.2 Colonne de distillation d'eau et d'éthanol

Ogunnaike (1981) a mis en équations une colonne de distillation d'eau et d'éthanol. Son modèle est le suivant:

$$\underline{y} = \underline{P}(s)\underline{u}(s) + \underline{d}(s)$$

avec

$$\underline{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.66e^{-2.6s}}{6.7s+1} & \frac{-0.0049e^{-s}}{9.06s+1} \\ \frac{-34.7e^{-9.2s}}{8.15s+1} & \frac{0.87(11.61s+1)e^{-s}}{(3.89s+1)(18.8s+1)} \end{bmatrix} \text{ et } \underline{G}_t(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.14e^{-12s}}{6.2s+1} & \frac{-0.0011(26.32s+1)e^{-2.66s}}{(7.85s+1)(8.94s+1)} \\ \frac{-11.54e^{-0.6s}}{7.01s+1} & \frac{0.32e^{-2.6s}}{7.76s+1} \end{bmatrix}$$

avec y_1 , la fraction de molaire excédente d'éthanol;
 y_2 , la température de la partie inférieure de la solution;
 u_1 , le pourcentage du débit excédent (m^3/s);
 u_2 , la pression de la vapeur d'ébullition (k/Pa);
 d_1 , l'alimentation du pourcentage de débit (m^3/s);
et d_2 est l'alimentation de température $^{\circ}C$.

La description complète de ce modèle est donnée par Ogunnaike et al. (1983).

Soit la transformée en discret de ce modèle, de période d'échantillonnage, $T = 1$ minute.

$$\underline{y}(z) = \underline{P}(z)\underline{u}(z) + \underline{d}(z)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{P}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{0.038+0.0533z^{-1}}{1-0.8614z^{-1}}z^{-3} & \frac{-0.0005121z^{-1}}{1-0.8955z^{-1}}z^{-1} \\ \frac{-3.2443-0.7625z^{-1}}{1-0.8845z^{-1}}z^{-10} & \frac{0.1238z^{-1}-0.1136z^{-2}}{1-1.7215z^{-1}+0.7333z^{-2}}z^{-1} \end{bmatrix} \\ \underline{G}_t(z) &= \begin{bmatrix} \frac{0.0209z^{-1}}{1-0.8510z^{-1}}z^{-12} & \frac{(-0.0835-0.0694z^{-1}+0.1442z^{-2})10^{-3}}{1-1.8143z^{-1}+0.8222z^{-2}}z^{-3} \\ \frac{-0.6401-0.8941z^{-1}}{1-0.8671z^{-1}}z^{-1} & \frac{0.0161+0.0226z^{-1}}{1-0.8791z^{-1}}z^{-3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

2.2.1 Le choix d'un contrôleur par la méthode CMI

Suivant la procédure de factorisation applicable au CMI dans la section 1.2.1. Le résultat de $\underline{M}_+(z)$ est:

$$\underline{M}_+(z) = \underline{M}_{+1}(z)\underline{M}_{+2}(z)$$

avec

$$\underline{M}_{+1}(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & 0 \\ 0 & z^{-3} \end{bmatrix} \quad \underline{M}_{+2}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-z_1}{1-z_1z} & 0 \\ 0 & \frac{z-z_1}{1-z_1z} \end{bmatrix}$$

avec $z_1 \approx -1.3462$.

Le résultat du contrôleur $\underline{G}_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$ est stable et réalisable (voir annexe D).

D'où l'expression du filtre de pondération [HTB91a], la matrice de prédiction désirée est:

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} z^{3\frac{1-z_1z}{z-z_1}} & 0 \\ 0 & z^{3\frac{1-z_1z}{z-z_1}} \end{bmatrix}$$

Évidemment, on ne peut pas utiliser la conception $F_{rc}(z) = [\mathbf{M}_+(z)]^{-1}$ car $\mathbf{M}_+(z)]^{-1}$ contiennent les pôles instables. Cependant, nous remarquons que $[\mathbf{M}_+(z)]^{-1}$ contient le facteur z^3I , qui est le prédicteur désiré. D'où la conception du filtre de prédiction

$$\mathbf{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} F_{r_1 k c}^{1k,3}(z) & 0 \\ 0 & F_{r_2 k c}^{2k,3}(z) \end{bmatrix}; \quad k = 1, 2.$$

avec $r_{11} = r_{21} = r_{22} = 1$ et $r_{12} = 2$.

Le filtre \mathbf{F}_{rc} correspondant est:

$$\begin{aligned} F_{1c}^{11,3} &= F_1^{11}(z) + (1 - F_1^{11}(1))F_{\ell_1}^{11}(z)\frac{A_1^{11}(z)}{A_1^{11}(1)} \\ F_1^{11}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{11}}})^3; \quad \tau_{11} = 6.2 \\ A_1^{11}(z) &= (1 - e^{-\frac{T}{\tau_{11}}}z^{-1}) \\ F_{\ell_1}^{11}(z) &= \frac{1 - \beta_1^{11}}{1 - \beta_1^{11}z^{-1}} \\ F_{2c}^{12,3} &= F_2^{12}(z) + (1 - F_2^{12}(1))F_{\ell_2}^{12}(z)\frac{A_2^{12}(z)}{A_2^{12}(1)} \\ F_2^{12}(z) &= \frac{(A_{01})^4 - (A_{02})^4}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}(A_{02})^4 - A_{02}(A_{01})^4}{A_{01} - A_{02}}z^{-1} \\ A_{01} &= e^{-\frac{T}{\tau_{121}}}; \quad \tau_{121} = 7.85 \\ \text{et } A_{02} &= e^{-\frac{T}{\tau_{122}}}; \quad \tau_{122} = 8.94 \\ A_2^{12}(z) &= (1 - A_{01}z^{-1})(1 - A_{02}z^{-1}) \\ F_{\ell_2}^{12}(z) &= \frac{1 - \beta_2^{12}}{1 - \beta_2^{12}z^{-1}} \\ F_{1c}^{21,3} &= F_1^{21}(z) + (1 - F_1^{21}(1))F_{\ell_1}^{21}(z)\frac{A_1^{21}(z)}{A_1^{21}(1)} \\ F_1^{21}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{21}}})^3; \quad \tau_{21} = 7.01 \\ A_1^{21}(z) &= (1 - e^{-\frac{T}{\tau_{21}}}z^{-1}) \\ F_{\ell_1}^{21}(z) &= \frac{1 - \beta_1^{21}}{1 - \beta_1^{21}z^{-1}} \\ F_{1c}^{22,3} &= F_1^{22}(z) + (1 - F_1^{22}(1))F_{\ell_1}^{22}(z)\frac{A_1^{22}(z)}{A_1^{22}(1)} \\ F_1^{22}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{22}}})^3; \quad \tau_{22} = 7.76 \\ A_1^{22}(z) &= (1 - e^{-\frac{T}{\tau_{22}}}z^{-1}) \\ F_{\ell_1}^{22}(z) &= \frac{1 - \beta_1^{22}}{1 - \beta_1^{22}z^{-1}} \end{aligned}$$

supposons que $\beta_1^{11} = \beta_2^{12} = \beta_1^{21} = \beta_1^{22} = \beta$ d'où $F_{\ell_1}^{11}(z) = F_{\ell_2}^{12}(z) = F_{\ell_1}^{21}(z) = F_{\ell_1}^{22}(z) = \frac{1-\beta}{1-\beta z^{-1}}$

La figure 6 présente les simulations obtenues sur logiciel Matlab. Les résultats globaux (6e et 6f) montrent l'avantage de la méthode PAG, vu le dépassement moindre de la réponse temporelle. A titre indicatif les composantes des sorties y_1 (6a et 6b) et y_2 (6c et 6d) sont

tracées de façon individuelle. Notons que les résultats obtenus sont paramétrisés en fonction d'un paramètre de filtre de pondération, qui prend une valeur de $\beta = 0.5$ dans la figure 6a-6f et une valeur $\beta = 0$ dans la figure 6g-6h. L'exemple traité illustre bien l'avantage de l'insertion d'un filtre de pondération PAG dans le cas d'un processus multivariable avec retard.

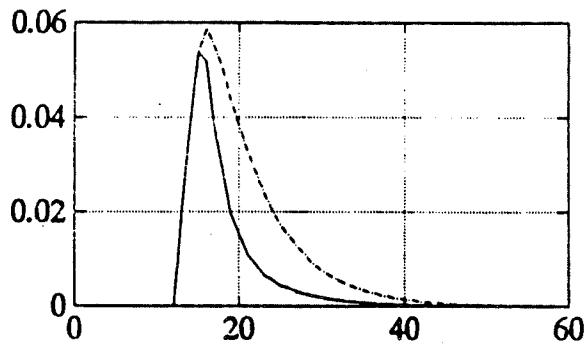


Figure 6a : Comparaison PAG CMI-. de y_{11} avec $\beta = 0.5$ et $\alpha = 0.5$

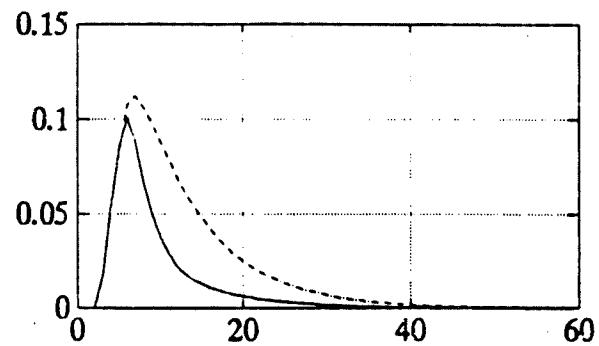


Figure 6e Comparaison PAG CMI-. de y_{22} avec $\beta = 0.5$ et $\alpha = 0.5$

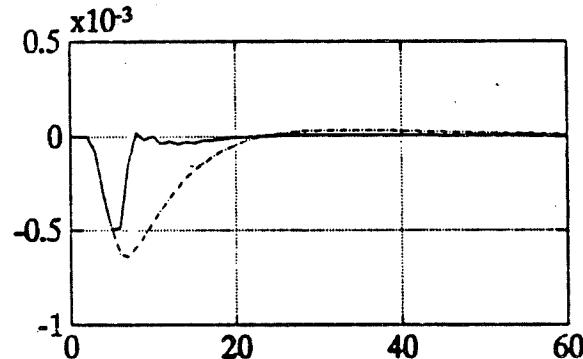


Figure 6b Comparaison PAG CMI-. de y_{12} avec $\beta = 0.5$ et $\alpha = 0.5$

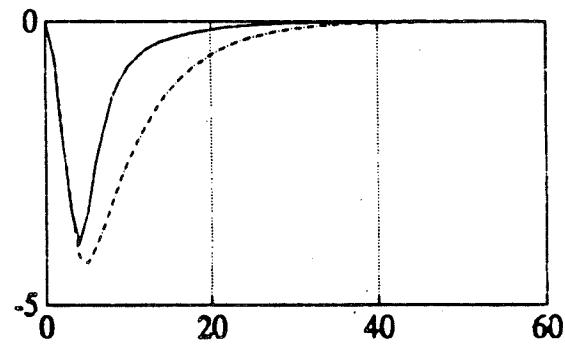


Figure 6f Comparaison PAG CMI-. de y_2

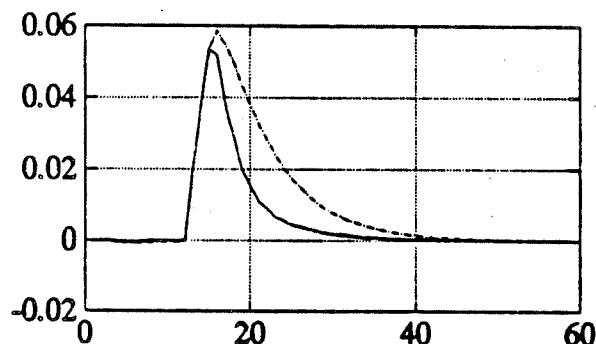


Figure 6c Comparaison PAG CMI-. de y_1

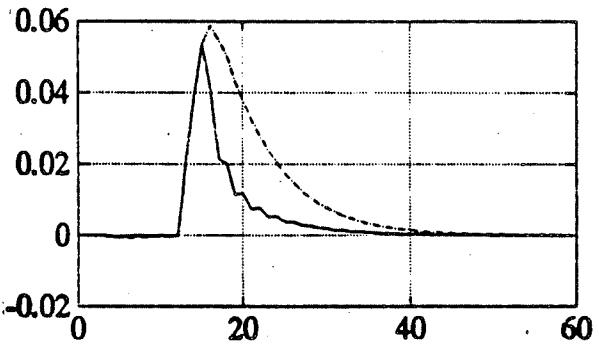


Figure 6g Comparaison PAG CMI-. de y_1 avec $\beta = 0$ et $\alpha = 0.5$

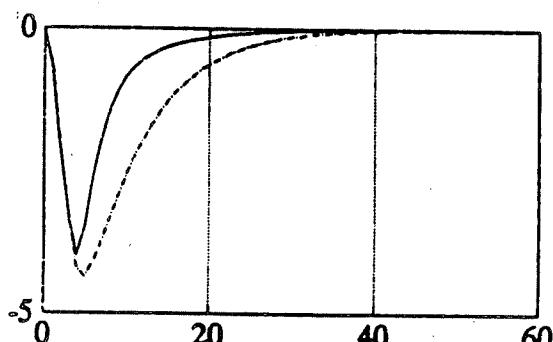


Figure 6d Comparaison PAG CMI-. de y_{21} avec $\beta = 0.5$ et $\alpha = 0.5$

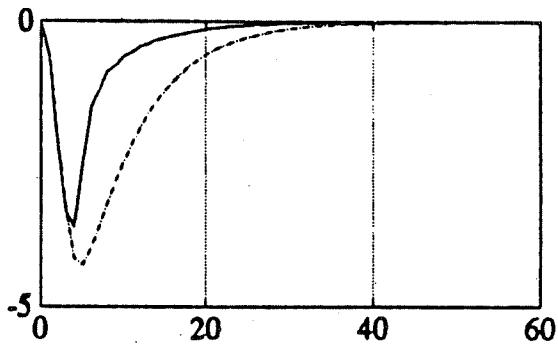


Figure 6h: Comparaison PAG CMI-. de y_2 avec $\beta = \beta_2 = 0$ et $\alpha = 0.5$

Figure 6: Comparaison PAG CMI-. au colonne de distillation d'eau et d'éthanol

2.2.2 Le choix du contrôleur par la matrice “d’interaction”

Soit le modèle donné par l’équation (49):

$$\underline{M}(z) = \begin{bmatrix} \frac{b_1+b_2z^{-1}}{1+a_1z^{-1}}z^{-3} & \frac{b_3}{1+a_2z^{-1}}z^{-2} \\ \frac{b_4+b_5z^{-1}}{1+a_3z^{-1}}z^{-10} & \frac{b_6+b_7z^{-1}}{1+a_4z^{-1}+a_5z^{-2}}z^{-2} \end{bmatrix}$$

- Dans le cas d’un “interacteur” de type h , la transformation: $h \rightarrow z$ est:

$$z = \frac{1+\sigma h}{h+\sigma} \iff h = \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} \quad (\sigma = z_1 \approx -1.3462)$$

Cette transformation permet à la matrice “d’interaction” un découplage triangulaire du contrôleur, tout en minimisant le critère de la somme des carrés des erreurs de la réponse temporelle en régime permanent.

- interacteur du retard:

$$\xi_2^h(z) = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4}z^3 & z^3 \end{bmatrix} \text{ avec } \frac{b_6}{b_4} \approx -0.0382$$

- interacteur du zéro:

$$\begin{aligned} \xi_1^h(z) = \xi_{M\sigma}^h(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 h & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} & \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\alpha_1^1 \approx -252.3791$ et $\sigma \approx -1.3463$.

$$\begin{aligned} \xi_M^h(z) &= \xi_2^h(z)\xi_1^h(z) \\ &= \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4}z^3 - \alpha_1^1 \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} z^3 & \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} z^3 \end{bmatrix} \text{ avec } \xi_M^h(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4} - \alpha_1^1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice en boucle fermée optimale est donnée par:

$$\begin{aligned} G_{BF}(z) &= [\xi_M^h(z)]^{-1}\xi_M^h(1) \\ &= z^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma_1 z + \gamma_2}{1-\sigma z} - \gamma_0 \frac{z-\sigma}{1-\sigma z} z^{-1} & \frac{z-\sigma}{1-\sigma z} z^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\gamma_0 = \frac{b_6}{b_4} + \alpha_1^1 \approx -252.4173$; $\gamma_1 = \frac{b_6}{b_4} - \alpha_1^1 \sigma \approx -339.8131$ et $\gamma_2 = -\frac{b_6}{b_4} \sigma + \alpha_1^1 \approx -252.4305$.

Nous remarquons que le contrôleur $G_c(z)$ est réalisable et stable (voir annexe D.2).

La matrice de prédiction est:

$$F_{rc}(z) = z^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha^{*h}(z-1)(z-z_{0h})}{z-\sigma} & \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} z \end{bmatrix}$$

avec $\alpha^{*h} = -\frac{b_6}{b_4} + \alpha_1^1 \sigma \approx 339.8131$

et $z_{0h} = \frac{(\frac{b_6}{b_4} + \alpha_1^1)\sigma}{\frac{b_6}{b_4} - \alpha_1^1 \sigma} \approx -1$

$$F_{rc} = \begin{bmatrix} F_{r_{1k}c}^{1k,2} & 0 \\ 0 & F_{r_{2k}c}^{2k,2} \end{bmatrix} \text{ avec } k = 1, 2$$

ou $r_{11} = r_{21} = r_{22} = 1$ et $r_{12} = 2$.

- La seconde transformation $q \rightarrow z$ est:

$$z = \frac{\sigma q}{q + \sigma - 1} \Leftrightarrow q = \frac{(1 - \sigma)z}{z - \sigma}$$

permet à "l'interaction" un découplage triangulaire du contrôleur qui est optimale en rapport avec le temps de stabilisation des performances temporelles.

- interacteur du zéro:

$$\begin{aligned}\xi_1^q(z) = \xi_{M\sigma}^q(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 q & q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} & \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- interacteur du retard:

$$\xi_2^q(z) = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4} z^3 & z^3 \end{bmatrix}$$

Finalement:

$$\begin{aligned}\xi_M^q(z) &= \xi_2^q(z)\xi_1^q(z) \\ &= \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4} z^3 - \alpha_1^1 \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} z^3 & \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} z^3 \end{bmatrix} \text{ avec } \xi_M^q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4} - \alpha_1^1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

et la matrice de transfert optimale en boucle fermée est donnée par:

$$\begin{aligned}G_{BF}(z) &= [\xi_M^q(z)]^{-1} \xi_M^q(1) \\ &= z^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma_3 z + \gamma_4}{(1-\sigma)z} - \gamma_0 \frac{z-\sigma}{(1-\sigma)z} z^{-1} & \frac{z-\sigma}{(1-\sigma)z} z^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

avec $\gamma_3 = \frac{b_6}{b_4} + \alpha_1^1(1 - \sigma) \approx -592.1922$ et $\gamma_4 = -\frac{b_6}{b_4} \approx 0.0382$.

Nous remarquons que le contrôleur $G_c(z)$ est réalisable et stable (voir annexe D.2).

Le filtre de prédiction est:

$$\begin{aligned}F_{rc}(z) &= z^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\alpha^{*q}(z-1)(z-z_{0q})}{z-\sigma} & \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} z \end{bmatrix} \\ \text{avec } \alpha^{*q} &= -\alpha_1^1 + \alpha_1^1 \sigma - \frac{b_6}{b_4} \approx 592.1922 \text{ et } z_{0q} = \frac{\sigma \alpha_1^1 + \sigma \frac{b_6}{b_4}}{\alpha_1^1 - \alpha_1^1 \sigma + \frac{b_6}{b_4}} \approx -0.5738\end{aligned}$$

ou

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} F_{r_1 k c}^{1k,2}(z) & 0 \\ 0 & F_{r_2 k c}^{2k,2}(z) \end{bmatrix} \text{ avec } k = 1, 2$$

avec $r_{11} = r_{21} = r_{22} = 1$ et $r_{12} = 2$.

2.3 Modèle colonne de distillation

Pour les systèmes multivariable telle que les colonnes de distillation ont des retards (Ogunnaike 1983).

$$\underline{y}(s) = \underline{P}(s)\underline{u}(s) + \underline{d}(s)$$

\underline{y} est le vecteur des sorties, \underline{u} est le vecteur de contrôle, \underline{d} est un vecteur des variables de perturbation. Soit

$$\underline{P}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.66e^{-2.6s}}{6.7s+1} & \frac{-0.61e^{-3.5s}}{8.64s+1} & \frac{-0.0049e^{-s}}{9.06s+1} \\ \frac{1.11e^{-5.5s}}{3.25s+1} & \frac{-2.36e^{-3s}}{5.0s+1} & \frac{-0.012e^{-1.2s}}{7.09s+1} \\ \frac{-34.68e^{-9.2s}}{8.15s+1} & \frac{46.2e^{-9.4s}}{10.9s+1} & \frac{0.87(11.61s+1)e^{-s}}{(3.89s+1)(18.8s+1)} \end{bmatrix} \text{ et } \underline{G}_\ell(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.14e^{-12s}}{6.2s+1} & \frac{-0.0011(26.32s+1)e^{-2.66s}}{(7.85s+1)(8.94s+1)} \\ \frac{0.53e^{-10.5s}}{6.9s+1} & \frac{-0.0032(19.62s+1)e^{-3.44s}}{(7.29s+1)(8.94s+1)} \\ \frac{-11.54e^{-0.6s}}{7.01s+1} & \frac{0.32e^{-2.6s}}{7.76s+1} \end{bmatrix}$$

avec y_1 , la fraction molaire excédente d'éthanol;
 y_2 , la fraction molaire d'éthanol dans le sens latérale;
 y_3 , la température de la partie inférieure;
 u_1 , le pourcentage du débit excédent (m^3/s);
 u_2 , le produit du pourcentage dans le sens latérale (m^3/s);
 u_3 , la pression du vapeur d'ébullition (kPa);
 d_1 , l'alimentation du pourcentage de débit (m^3/s);
et d_2 est l'alimentation de température ($^\circ C$).

Le système en discret est [HTB92b]:

$$\underline{y}(z) = \underline{P}(z)\underline{u}(z) + \underline{d}(z)$$

avec la période d'échantillonnage $T = 1$ minute.

$$\underline{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.0382+0.0533z^{-1}}{1-0.8614z^{-1}}z^{-3} & \frac{-0.0343-0.0324z^{-1}}{1-0.8907z^{-1}}z^{-4} & \frac{-0.5121 \cdot 10^{-3}z^{-1}}{1-0.8955z^{-1}}z^{-1} \\ \frac{0.1583+0.1357z^{-1}}{1-0.7351z^{-1}}z^{-7} & \frac{-0.4278z^{-1}}{1-0.8187z^{-1}}z^{-3} & \frac{-0.0013-0.0003z^{-1}}{1-0.8685z^{-1}}z^{-2} \\ \frac{-3.2424-0.7621z^{-1}}{1-0.8845z^{-1}}z^{-10} & \frac{2.4744+1.5755z^{-1}}{1-0.9123z^{-1}}z^{-10} & \frac{0.1238z^{-1}-0.1136z^{-2}}{1-1.7215z^{-1}+0.733z^{-2}}z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_\ell(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.0209z^{-1}}{1-0.8510z^{-1}}z^{-12} & \frac{(-0.0835-0.0694z^{-1}+0.1442z^{-2})10^{-3}}{1-1.8143z^{-1}+0.8222z^{-2}}z^{-3} \\ \frac{0.0370+0.0345z^{-1}}{1-0.8651z^{-1}}z^{-11} & \frac{(-0.5105+0.1219z^{-1}+0.3452z^{-2})10^{-3}}{1-1.766z^{-1}+0.7796z^{-2}}z^{-4} \\ \frac{-0.6401-0.8941z^{-1}}{1-0.8671z^{-1}}z^{-1} & \frac{0.0161+0.0226z^{-1}}{1-0.8791z^{-1}}z^{-3} \end{bmatrix}$$

2.3.1 Le choix d'un contrôleur par la méthode CMI

Suivant la procédure de factorisation applicable au CMI dans la section 1.2.1. Le résultat de $\underline{M}_+(z)$ est:

$$\underline{M}_+(z) = \underline{M}_{+1}(z)\underline{M}_{+2}(z)$$

avec

$$\underline{M}_{+1}(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-3} \end{bmatrix} \text{ et } \underline{M}_{+2}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-z_1}{1-z_1z} \frac{z-z_2}{1-z_2z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z-z_1}{1-z_1z} \frac{z-z_2}{1-z_2z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z-z_1}{1-z_1z} \frac{z-z_2}{1-z_2z} \end{bmatrix}$$

avec $z_1 \approx -1.4$ et $z_2 \approx 1.2$.

Le résultat du contrôleur $\underline{G}_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$ est stable et réalisable (voir annexe E). D'où l'expression du filtre de pondération, la matrice de prédition désirée est:

$$\underline{F}_{rc} = \begin{bmatrix} F_{r_{1k}c}^{1k,3}(z) & 0 & 0 \\ 0 & F_{r_{2k}c}^{2k,3}(z) & 0 \\ 0 & 0 & F_{r_{3k}c}^{3k,3}(z) \end{bmatrix}; \quad k = 1, 2$$

avec $r_{11} = r_{21} = r_{31} = r_{32} = 1$ et $r_{12} = r_{22} = 2$.

Le filtre \underline{F}_{rc} correspondant est:

$$\begin{aligned} F_{1c}^{11,3} &= F_1^{11}(z) + (1 - F_1^{11}(1))F_{\ell_1}^{11} \frac{A_1^{11}(z)}{A_1^{11}(1)} \\ F_{2c}^{12,3} &= F_2^{12}(z) + (1 - F_2^{12}(1))F_{\ell_2}^{12} \frac{A_2^{12}(z)}{A_2^{12}(1)} \\ F_{1c}^{21,3} &= F_1^{21}(z) + (1 - F_1^{21}(1))F_{\ell_1}^{21} \frac{A_1^{21}(z)}{A_1^{21}(1)} \\ F_{2c}^{22,3} &= F_2^{22}(z) + (1 - F_2^{22}(1))F_{\ell_2}^{22} \frac{A_2^{22}(z)}{A_2^{22}(1)} \\ F_{1c}^{31,3} &= F_1^{31}(z) + (1 - F_1^{31}(1))F_{\ell_1}^{31} \frac{A_1^{31}(z)}{A_1^{31}(1)} \\ F_{1c}^{32,3} &= F_1^{32}(z) + (1 - F_1^{32}(1))F_{\ell_1}^{32} \frac{A_1^{32}(z)}{A_1^{32}(1)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F_1^{11}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{11}}})^3; \quad \tau_{11} = 6.2 \\ F_2^{12}(z) &= \frac{(A_{01})^4 - (A_{02})^4}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}(A_{02})^4 - A_{02}(A_{01})^4}{A_{01} - A_{02}} z^{-1} \\ &\quad A_{01} = e^{-\frac{T}{\tau_{121}}}; \quad \tau_{121} = 7.85 \\ &\quad \text{et } A_{02} = e^{-\frac{T}{\tau_{122}}}; \quad \tau_{122} = 8.94 \\ F_1^{21}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{21}}})^3; \quad \tau_{21} = 6.9 \\ F_2^{22}(z) &= \frac{(A_{01})^4 - (A_{02})^4}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}(A_{02})^4 - A_{02}(A_{01})^4}{A_{01} - A_{02}} z^{-1} \\ &\quad A_{01} = e^{-\frac{T}{\tau_{221}}}; \quad \tau_{221} = 7.29 \\ &\quad \text{et } A_{02} = e^{-\frac{T}{\tau_{222}}}; \quad \tau_{222} = 8.94 \\ F_1^{31}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{31}}})^3; \quad \tau_{31} = 7.01 \\ F_1^{32}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{32}}})^3; \quad \tau_{32} = 7.76 \end{aligned}$$

supposons que $\beta_1^{11} = \beta_2^{12} = \beta_1^{21} = \beta_2^{22} = \beta_1^{31} = \beta_1^{32} = \beta$ d'où $F_{\ell}^{i,j} = \frac{1-\beta}{1-\beta z^{-1}}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$

Les résultats globaux (7c,7f,7i) (figure 7) montrent l'avantage de la méthode PAG, vu le dépassement moindre de la réponse temporelle. A titre indicatif les composantes des sorties y_1 (7a,7b), y_2 (7d,7e) et y_3 (7g,7h) sont tracées de façon individuelle. Notons que les résultats

obtenus sont paramétrisés en fonction d'un paramètre de filtre de pondération, qui prend une valeur de $\beta = 0.5$ et $\alpha = 0.5$. L'exemple traité illustre bien l'avantage de l'insertion d'un filtre de pondération PAG dans le cas d'un processus multivariable avec retard.

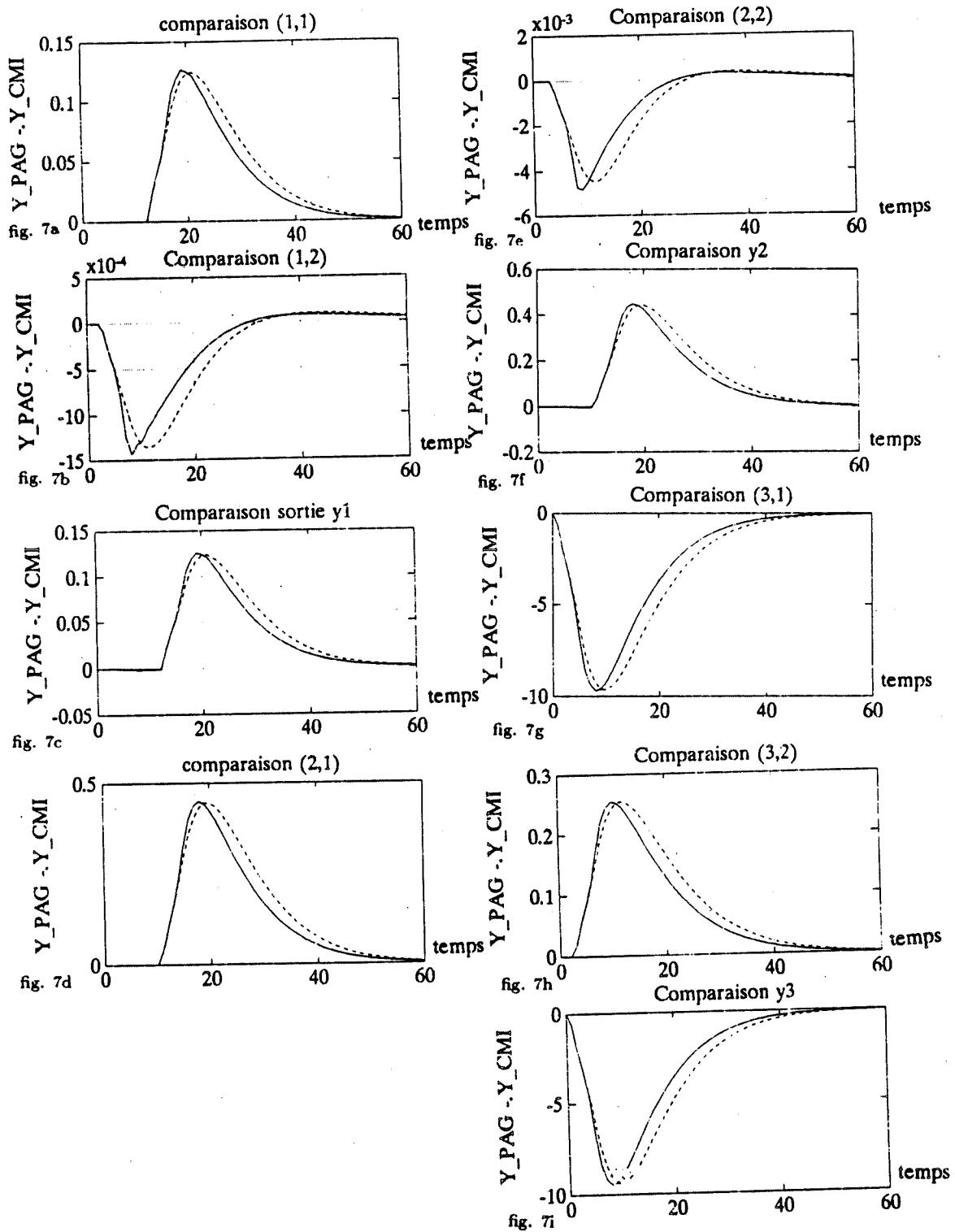


Figure 7: Comparaison PAG CMI- au modèle colonne de distillation

Examinons la fonction de transfert:

$$\begin{aligned} V_{ij}(z) &= \frac{X_i(z)}{G_{\ell_j}(z)\ell(z)} \\ &= \frac{(-1)^{(i+j)}\Delta_{ij}(z)}{\Delta(z)} \end{aligned} \quad (33)$$

Notre objectif est de déterminer des conditions d'invariance de $X_i(z)$ par rapport à $G_{\ell_j}(z)\ell(z)$, autrement dit, des conditions qui assure que $V_{ij}(z) = 0$.

3.2.1 1^{er} Cas: $i = j$:

$$\begin{aligned} \Delta(z)X_i(z) &= [(-1)^{(i+1)}a_{i1}\Delta_{i1} + (-1)^{(i+2)}a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + (-1)^{(i+j)}a_{ij}\Delta_{ij} + \\ &\quad + \cdots + (-1)^{(i+n)}a_{in}\Delta_{in}] X_i(z) \end{aligned}$$

Sous les hypothèses des conditions initiales nulles et que les autres influences externes sont nulles sauf $G_{\ell_i}(z)\ell(z)$. En supposant le coefficient a_{ii} et le mineur correspondant Δ_{ii} non nuls:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{ii}\Delta_{ii}(z)X_i(z) &= \Delta_{ii}(z)G_{\ell_i}(z)\ell(z) \\ \Rightarrow V_{ii}(z) &= \frac{X_i(z)}{G_{\ell_i}(z)\ell(z)} = \frac{1}{a_{ii}(z)} \end{aligned} \quad (34)$$

Le numérateur de la fonction de transfert dans ce cas est une constante non nulle et les conditions d'invariance absolue ne peuvent pas être réalisées.

3.2.2 2^{ieme} cas $i \neq j$:

La condition $\Delta_{ij}(z) = 0$ que les conditions d'invariance absolue soit réalisées. Ainsi, pour réaliser des conditions d'invariance, le choix des termes $a_{ik}(z)$ devrait être effectué de façon que le mineur $\Delta_{ij}(z)$ puisse être exprimé par la différence entre deux termes dépendant de $a_{ij}(z)$, soit

$$\Delta_{ij}(z) = M(z) - N(z) \quad (35)$$

En d'autres termes, la fonction de transfert $V_{ij}(z)$ doit être la différence de deux fonctions de transfert $V_{ij}(z) = \frac{M(z)}{\Delta} - \frac{N(z)}{\Delta} = V'_{ij}(z) - V''_{ij}(z)$.

Ce qui signifie qu'il devrait au moins exister deux voies indépendantes de propagation entre le point d'application de perturbation et l'endroit où ses effets devraient être annulés.

3.3 Réalisation du principe d'invariance pour les systèmes linéaires multivariables

3.3.1 Formulation du problème

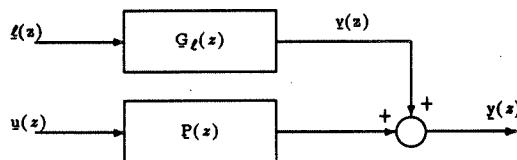


Figure 8:

- $\underline{P}(z)$ représente la matrice de transfert des fonctions de transfert du processus entre les entrées et les sorties effectives;
- $\underline{y}(z)$ représente les sorties du processus perturbations et les sorties;
- $\underline{u}(z)$ représente les entrées du processus;
- $G_l(z)$ représente la fonction de transfert entre les perturbations et les sorties du processus;
- $\underline{l}(z)$ représente un vecteur de perturbations.

Le système représenté à la figure 1 peut être exprimé de la façon suivante:

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(z) & \cdots & P_{1n}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m1}(z) & \cdots & P_{mn}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ \vdots \\ u_n(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{l_{11}}(z) & \cdots & G_{l_{1l}}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{l_{m1}}(z) & \cdots & G_{l_{ml}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1(z) \\ \vdots \\ \ell_l(z) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\underline{y}(z) = \underline{P}(z)\underline{u}(z) + G_l(z)\underline{l}(z)$$

Dimension des vecteurs et matrices de (36) sont:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z) &: n \times m \\ G_l(z) &: m \times l \\ \underline{u}(z) &: n \times 1 \\ \underline{y}(z) &: m \times 1 \\ \underline{l}(z) &: l \times 1 \end{aligned}$$

avec

- n: nombre d'entrées indépendantes;
- l: nombre de perturbations;
- m: nombre des sorties ($m \leq n$).

Considérons la figure 2, dans laquelle la structure de commande incorpore une matrice $D_{ki}^{ir}(z)$ dont le but est de garantir l'invariance entre $y_i(z)$ et $\ell_r(z)$

3.3.2 Structure classique

Considerons la boucle de commande illustrée à la figure 9 dans lequel nous étudions l'invariance entre la sortie $y_i(z)$ et l'entrée $\tilde{y}_i(z)$.

1^{er} cas i=j: La fonction de transfert est:

$$\frac{y_i(z)}{\ell_r(z)} = \frac{G_{\ell_{ir}}(z)}{1 + D_{ki}^{ir}(z)P_{ki}(z)} \quad (37)$$

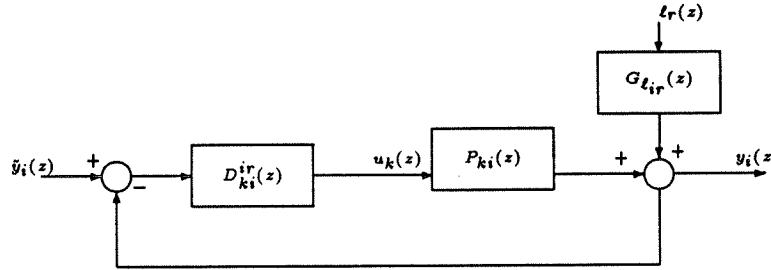


Figure 9: Principe d'invariance pour $i = j$.

Nous notons là encore la difficulté d'obtenir l'invariance pour $i = j$, car le numérateur de la relation (37) ne peut être annulé.

2^{ieme} cas $i \neq j$: Considérons la boucle de commande de la figure 10 dans laquelle la fonction de transfert est:

$$\frac{y_i(z)}{\ell_r(z)} = \frac{G_{\ell_{ir}}(z) [1 + D_{kj}^{ir}(z)P_{jk}(z)] - G_{\ell_{jr}}(z)D_{kj}^{ir}(z)P_{ik}(z)}{1 + D_{kj}^{ir}(z)P_{jk}(z)} \quad (38)$$

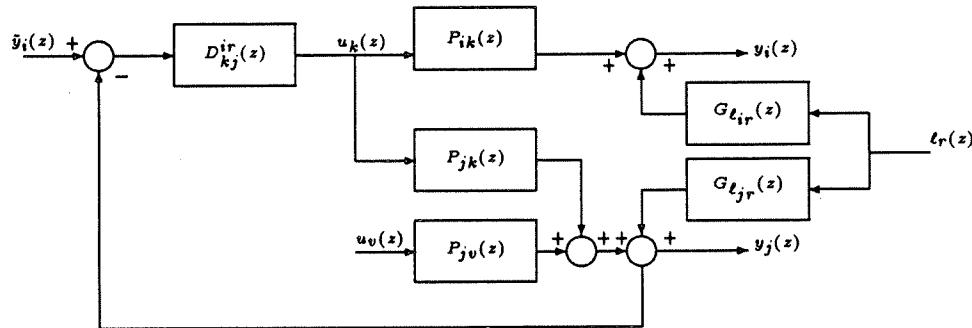


Figure 10: Principe d'invariance pour $i \neq j$.

L'invariance est réalisée si:

$$(D_{kj}^{ir})^A(z) = \frac{G_{\ell_{ir}}(z)}{G_{\ell_{jr}}(z)P_{ik}(z) - G_{\ell_{ir}}(z)P_{jk}(z)}$$

Pour la sortie $y_j(z)$:

$$\frac{y_j(z)}{\ell_r(z)} = \frac{G_{\ell_{jr}}(z)}{1 + (D_{kj}^{ir})^A(z)P_{jk}(z)}$$

Soit $V_{kj}^{ir}(z)$ la fonction de transfert entre $y_i(z)$, et la perturbation $\ell_r(z)$ quand un filtre $D_{kj}^{ir}(z)$ est ajouté au système primaire: la relation (38) peut être réécrite:

$$V_{kj}^{ir}(z) = \frac{y_i(z)}{\ell_r(z)} = \frac{G_{\ell_{ir}}(z)[1 + D_{kj}^{ir}(z)(H_{kj}^{ir})^A(z)]}{1 + D_{kj}^{ir}(z)P_{jk}(z)}$$

où $(H_{kj}^{ir})^A(z) = -\frac{1}{(D_{kj}^{ir})^A(z)}$

D'où la fonction est définie par:

$$\frac{V_{kj}^{ir}(z)}{G_{\ell_{ir}}(z)} = \frac{\frac{1}{D_{kj}^{ir}(z)} + (H_{kj}^{ir})^A(z)}{\frac{1}{D_{kj}^{ir}(z)} + P_{jk}(z)}$$

3.4 Implantation d'une commande assurant l'invariance dans une structure PAG

Il a été démontré [TN91] que les conditions d'invariance sont facilement implantées par la structure du CMI. Ce type de structure permet, nous le verrons, de mieux formuler les conditions de réalisabilité et l'étude de la stabilité des commandes. Rappelons que le PAG permet d'insérer un filtre d'adaptation lequel offre plus de flexibilité de conception par rapport à la structure du prédicteur de Smith qui est une expression particulière du CMI. Ici [HTB91b] nous considérons l'effet bénéfique de cette structure PAG.

3.4.1 1^{er} cas i=j:

Soit le système de commande représenté à la figure 11 et dans lequel $M_{ik}(z)$ représente le modèle du (i, k) processus, $M_{0_{ik}}(z)$ le modèle du processus sans retard du $M_{ik}(z)$.

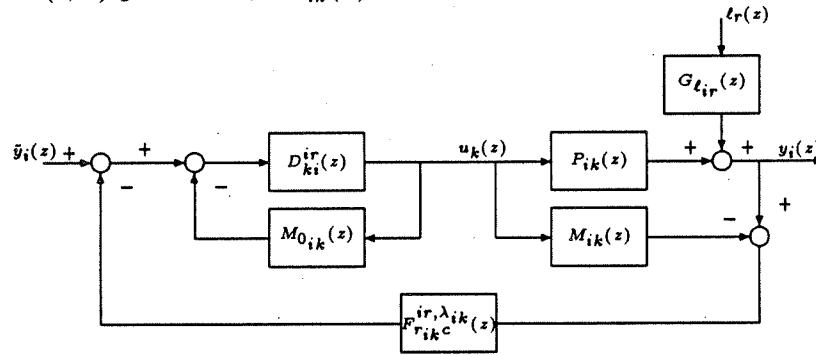


Figure 11: Le principe d'invariance en présence du PAG pour le cas $i = j$.

La valeur r_{ik} est l'ordre du filtre d'adaptation qui est identique à celle de la fonction de transfert $G_{\ell_{ir}}(z)$, et λ_{ik} l'horizon du filtre: le retard du modèle $M_{ik}(z)$.

Pour relever l'effet de la sortie $y_j(z)$ sur la variable à régulariser $y_i(z)$, on connecte entre les deux variables un filtre approprié $D_{jk}^{ir}(z)$ dont la sortie alimente l'entrée $u_k(z)$ du système primaire.

Posons:

$$(D_{ki}^{ir}(z))^F = \frac{D_{ki}^{ir}(z)}{1 + D_{ki}^{ir}(z)M_{0ik}(z)}$$

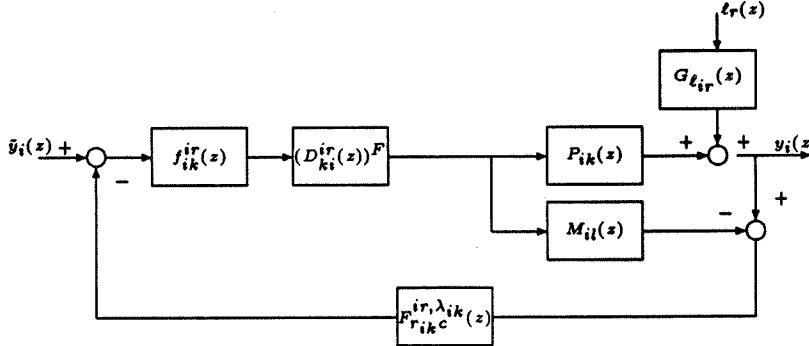


Figure 12: Le principe d'invariance en présence du PAG pour le cas $i = j$.

La fonction de transfert en régulation est:

$$\frac{y_i(z)}{\ell_r(z)} = \frac{G_{\ell_r}(z) [1 - (D_{ki}^{ir}(z))^F f_{ik}^{ir}(z) F_{r_{ik}c}^{ir, \lambda_{ik}}(z) M_{ik}(z)]}{1 + (D_{ki}^{ir}(z))^F f_{ik}^{ir}(z) F_{r_{ik}c}^{ir, \lambda_{ik}}(z) [P_{ik}(z) - M_{ik}(z)]}$$

Les conditions d'invariance absolue, sont assurées par $(D_{ki}^{ir}(z))^{FA}$ soit (pour le PAG):

$$(D_{ki}^{ir}(z))^{FA} = [(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_S [(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_I = \frac{1}{f_{ik}^{ir}(z) F_{r_{ik}c}^{ir, \lambda_{ik}}(z) M_{ik}(z)} \quad (39)$$

Le retour étant unitaire pour le prédicteur de Smith, les conditions d'invariance absolue sont assurées par $(D_{ki}^{ir}(z))^{FA}$:

$$(D_{ki}^{ir}(z))^{FA} = [(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_S [(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_I = \frac{1}{f_{ik}^{ir}(z) M_{ik}(z)} \quad (40)$$

Une comparaison des conditions d'invariance entre le prédicteur analytique généralisée (équation (39) et le prédicteur de Smith (40) montrent que pour les systèmes avec retard la condition d'invariance du prédicteur de Smith n'est pas réalisable (la présence du retard dans le dénominateur), d'où l'avantage du PAG car le retard est inhibé du dénominateur.

Pour le PAG les conditions d'invariance absolue pour un système monovariable peuvent être réalisés, à condition que le modèle du processus soit inversible. Posons $M_{ik}(z) = M_{ik}^+(z)M_{ik}^-(z)$: deux fonctions passe-tout avec $M_{ik}^-(z)$ la partie inversible (stable) et

$$M_{ik}^+(z) = M_{ik}^{+1}(z)M_{ik}^{+2}(z)M_{ik}^{+3}(z)$$

pour l'autre terme $M_{ik}^{+1}(z)$ représente le retard de M_{ik} , $M_{ik}^{+2}(z)$ comprend les zéros instables de M_{ik} et $M_{ik}^{+3}(z)$ la partie des zéros dont la partie réelle négative de $M_{ik}(z)$ se trouve entre $(-1, 0)$ dans le cercle unitaire celles-ci présentent les oscillations cachées. Posons

$$(D_{ki}^{ir})^{FA}(z) = [(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_S [(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_I = \frac{1}{M_{ik}^{+2}(z)M_{ik}^{+3}(z)M_{ik}^-(z)f_{ik}^{ir}(z)}$$

avec $[(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_S = \frac{1}{M_{ik}^-(z)f_{ik}^{ir}(z)}$ et $[(D_{ki}^{ir})^{FA}(z)]_I = \frac{1}{M_{ik}^{+2}(z)M_{ik}^{+3}(z)}$.
 car $F_{rikc}^{ir,\lambda_{ik}}(z)M_{ik}^{+1}(z) = 1$ ce qui est particulier au PAG. Ainsi

$$(D_{ki}^{ir})^{FA}(z) = \frac{1}{M_{ik}^{+2}(z)M_{ik}^{+3}(z)M_{ik}^-(z)f_{ik}^{ir}(z)}$$

$$\text{avec } M_{ik}^{+3}(z) = z^{-\rho} \prod_{j=1}^{\rho} \frac{z-k_j}{1-k_j}$$

Les zéros instables sont regroupés dans trois classes différentes selon Jerome et Ray [JR91] pour les systèmes continus, nous présentons ici un extension pour les systèmes discrets Hammami et al. [HTB92c]:

1^{ere} classe: un nombre infini des zéros en dehors du cercle unitaire (instables) et aucun zéro stable.

$$M_{ik}^{+2}(z) = \frac{B^{ik}(z)}{B^{ik}\left(\frac{1}{z}\right)}; \quad M_{ik}^-(z) = \frac{B^{ik}\left(\frac{1}{z}\right)}{A^{ik}(z)}$$

2^{ieme} classe: un nombre infini des zéros en dehors du cercle unitaire (instables) et un nombre fini de zéros dans le cercle unitaire (stable) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

$$M_{ik}^{+2}(z) = \frac{B^{ik}(z)}{B^{ik}\left(\frac{1}{z}\right)} \prod_{j=1}^n \frac{(1-\xi_j)(z-(\xi_j^H)^{-1})}{(1-(\xi_j^H)^{-1})(z-\xi_j)}$$

$$M_{ik}^-(z) = \frac{B^{ik}\left(\frac{1}{z}\right)}{A^{ik}(z)} \prod_{j=1}^n \frac{(1-(\xi_j^H)^{-1})(z-\xi_j)}{(1-\xi_j)(z-(\xi_j^H)^{-1})}$$

3^{ieme} classe: un nombre fini de zéros instables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ et un nombre infini de zéros stables.

$$M_{ik}^{+2}(z) = \prod_{j=1}^n \frac{(1-(\xi_j^H)^{-1})(z-\xi_j)}{(1-\xi_j)(z-(\xi_j^H)^{-1})}$$

$$M_{ik}^-(z) = \frac{B^{ik}(z)}{A^{ik}(z)} \prod_{j=1}^n \frac{(1-\xi_j)(z-(\xi_j^H)^{-1})}{(1-(\xi_j^H)^{-1})(z-\xi_j)}$$

$f_{ik}^{ir}(z)$ est un filtre de robustesse [MZ89].

3.4.2 2^{ieme} cas $i \neq j$:

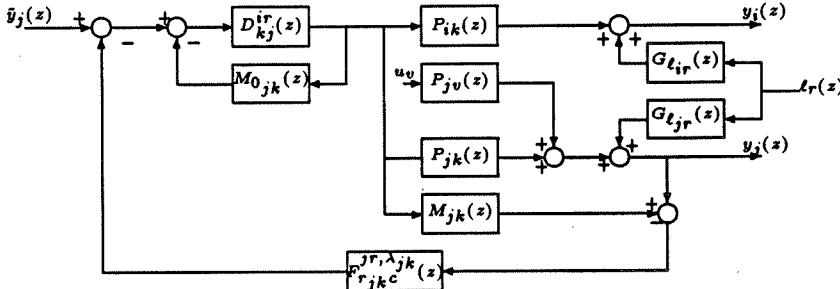


Figure 13: Le principe d'invariance en fonction du PAG $i \neq j$.

avec

$$(D_{kj}^{ir})^F(z) = \frac{D_{kj}^{ir}(z)}{1 + M_{0jk}(z)D_{jk}^{ir}(z)}$$

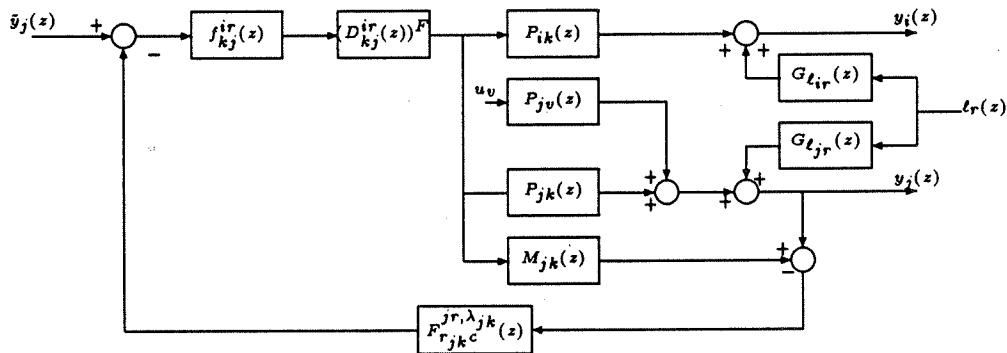


Figure 14: Le principe d'invariance en fonction du PAG $i \neq j$.

Pour la sortie $y_i(z)$:

$$V_{kj}^{ir}(z) = \frac{y_i(z)}{l_r(z)} = G_{t_{ir}}(z) + \frac{-P_{ik}(z)(D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) F_{r_j k c}^{jr, \lambda_{jk}}(z) G_{\ell_{jr}}(z)}{1 + (D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) F_{r_j k c}^{jr, \lambda_{jk}}(z) [P_{jk}(z) - M_{jk}(z)]}$$

le filtre d'invariance correspondant dans le cas d'une modélisation imparfaite à:

$$(D_{kj}^{ir})^{FA} = \frac{G_{\ell_{ir}}(z)}{\{P_{ik}(z)G_{\ell_{jr}}(z) - G_{\ell_{ir}}(z)[P_{jk}(z) - M_{jk}(z)]\}f_{kj}^{ir}(z)F_{r_{jk}}^{jr,\lambda_{jk}}(z)} \quad (41)$$

cette condition (41) est réalisable même si ($P_{jk}(z) \neq M_{jk}(z)$), il faut:

$$\alpha_{ir} \geq \max[(p_{ik} + \alpha_{ir} - \lambda_{jk}), (\alpha_{ir} + \max(p_{jk}, \lambda_{jk}) - \lambda_{jk})] \quad (42)$$

avec

- λ_{jk} le retard entier de la fonction de transfert $M_{jk}(z) = M_{0_{jk}}(z)z^{-\lambda_{jk}}$;
- α_{ir} le retard entier de la fonction de transfert $G_{\ell_{ir}}(z) = G_{\ell 0_{ir}}(z)z^{-\alpha_{ir}}$;
- α_{jr} le retard entier de la fonction de transfert $G_{\ell_{jr}}(z) = G_{\ell 0_{jr}}(z)z^{-\alpha_{jr}}$;
- p_{jk} le retard entier de la fonction de transfert $P_{jk}(z) = P_{0_{jk}}(z)z^{-p_{jk}}$;
- p_{ik} le retard entier de la fonction de transfert $P_{ik}(z) = P_{0_{ik}}(z)z^{-p_{ik}}$.

La condition d'invariance pour le prédicteur de Smith (modélisation imparfaite):

$$(D_{kj}^{ir})^{FA} = \frac{G_{\ell_{ir}}(z)}{\{P_{ik}(z)G_{\ell_{jr}}(z) - G_{\ell_{ir}}(z)[P_{jk}(z) - M_{jk}(z)]\}f_{kj}^{ir}(z)} \quad (43)$$

cette condition (43) est réalisable si:

$$\alpha_{ir} \geq \max[(p_{ik} + \alpha_{jr}), (\alpha_{ir} + \max(p_{jk}, \lambda_{jk}))] \quad (44)$$

Une comparaison des conditions de réalisation du PAG (équation (42)) et PS (équation (44)) montre que la condition du PAG est supérieure au PS dans le cas d'une modélisation imparfaite avec $i \neq j$.

Dans le cas d'une modélisation parfaite:

La condition d'invariance pour le PAG est:

$$(D_{kj}^{ir})^{FA}(z) = \frac{G_{\ell_{ir}}(z)}{f_{kj}^{ir}(z)F_{r_{jk}c}^{jr, \lambda_{jk}}(z)P_{ik}(z)G_{\ell_{jr}}(z)} = [(D_{kj}^{ir})^{FA}(z)]_S [(D_{kj}^{ir})^{FA}(z)]_I \quad (45)$$

La condition de réalisation de l'équation (45) est :

$$\alpha_{ir} \geq p_{ik} + \alpha_{jr} - \lambda_{jk} \quad (46)$$

La condition d'invariance pour le PS est:

$$(D_{kj}^{ir})^{FA}(z) = \frac{G_{\ell_{ir}}(z)}{f_{kj}^{ir}(z)P_{ik}(z)G_{\ell_{jr}}(z)} \quad (47)$$

La condition de réalisation de l'équation (47) est :

$$\alpha_{ir} \geq p_{ik} + \alpha_{jr} \quad (48)$$

Une comparaison des conditions de réalisation du PAG (équation (46)) et du PS (équation (48)) nous montre que la condition du PAG est supérieure au PS dans le cas d'une modélisation parfaite avec $i \neq j$.

$$\Rightarrow \frac{V_{kj}^{ir}(z)}{G_{\ell_{ir}}}(z) = 1 + (D_{kj}^{ir})^F(H_{kj}^{ir})^{FA}(z)$$

avec

$$(H_{kj}^{ir})^{FA}(z) = -\frac{1}{(D_{kj}^{ir})^{FA}(z)}$$

Pour la sortie y_j :

$$\frac{y_j(z)}{G_{\ell_{jr}}(z)\ell_r(z)} = \frac{1 - (D_{kj}^{ir})^F(z)f_{kj}^{ir}(z)F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z)M_{jk}(z)}{1 + (D_{kj}^{ir})^F(z)f_{kj}^{ir}(z)F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z)[P_{jk}(z) - M_{jk}(z)]}$$

Ce qui confère au filtre à invariance absolue une forme très simple et, nous montre que dans sa formulation, le principe d'invariance a une structure de prédicteur analytique généralisée (PAG). Les fonctions d'évaluation de l'amélioration de la sensibilité vis-à-vis de la perturbation $\ell_r(z)$ est donnée dans le cas général par:

$$\begin{aligned} \frac{V_{jk}^{ir}(z)}{G_{\ell_{ir}}(z)} &= \frac{1 + (D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) (H_{ij}^{ir})^{FA}(z)}{1 + (D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) (P_{jk}(z) - M_{jk}(z))} \\ &= \frac{\frac{1}{(D_{kj}^{ir})^F(z)} + f_{kj}^{ir}(z) F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) (H_{ij}^{ir})^{FA}(z)}{\frac{1}{(D_{kj}^{ir})^F(z)} + f_{kj}^{ir}(z) F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) (P_{jk}(z) - M_{jk}(z))} \end{aligned}$$

3.4.3 Étude de la stabilité

Nous pouvons établir:

$$\tilde{u}_l = \frac{(D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) \left\{ \tilde{y}_j(z) - F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n P_{jv}(z) u_v(z) - F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) \sum_{t=1}^l G_{\ell_{jt}}(z) \ell_t(z) \right\}}{1 + (D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) [P_{jk}(z) - M_{jk}(z)]}$$

vis-à-vis de la commande $\tilde{u}_l(z)$, l'équation caractéristique s'écrit [Far86]:

$$\frac{1}{(D_{kj}^{ir})^F f_{kj}^{ir}(z)} + F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) [P_{jk}(z) - M_{jk}(z)] = 0$$

vis-à-vis de la sortie $y_j(z)$, l'équation caractéristique est [Far86]:

$$\frac{1}{(D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) P_{jk}(z)} + \frac{F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) [P_{jk}(z) - M_{jk}(z)]}{P_{jk}(z)} = 0$$

pour la sortie $y_i(z)$, l'équation caractéristique écrit:

$$\frac{1}{(D_{kj}^{ir}(z))^F f_{kj}^{ir}(z) P_{ik}(z)} + \frac{F_{r_{jk}c}^{jr,\lambda_{jk}}(z) [P_{jk}(z) - M_{jk}(z)]}{P_{ik}(z)} = 0$$

3.4.4 Application: Colonne de distillation d'eau et d'éthanol

La description complète de ce modèle est donnée par Ogunnaike et al. (1983).

Soit la transformé en discret de ce modèle, de période d'échantillonnage, $T = 1$ minute.

$$\underline{y}(z) = \underline{P}(z)\underline{u}(z) + \underline{d}(z)$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{P}(z) &= \begin{bmatrix} \frac{0.038+0.0533z^{-1}}{1-0.8614z^{-1}}z^{-3} & \frac{-0.0005121z^{-1}}{1-0.8955z^{-1}}z^{-1} \\ \frac{-3.2443-0.7625z^{-1}}{1-0.8845z^{-1}}z^{-10} & \frac{0.1238z^{-1}-0.1136z^{-2}}{1-1.7215z^{-1}+0.7333z^{-2}}z^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{011}(z)z^{-3} & P_{012}(z)z^{-1} \\ P_{021}(z)z^{-10} & P_{022}(z)z^{-1} \end{bmatrix} \\ \underline{G}_\ell(z) &= \begin{bmatrix} \frac{0.0209z^{-1}}{1-0.8510z^{-1}}z^{-12} & \frac{(-0.0835-0.0694z^{-1}+0.1442z^{-2})10^{-3}}{1-1.8143z^{-1}+0.8222z^{-2}}z^{-3} \\ \frac{-0.6401-0.8941z^{-1}}{1-0.8671z^{-1}}z^{-1} & \frac{0.0161+0.0226z^{-1}}{1-0.8791z^{-1}}z^{-3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{\ell_{011}}(z)z^{-12} & G_{\ell_{012}}(z)z^{-3} \\ G_{\ell_{021}}(z)z^{-1} & G_{\ell_{022}}(z)z^{-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le numérateur $P_{011}(z)$ a un zéro instable ($= -1.4026$).

Le numérateur de $G_{\ell_{012}}(z)$ a un zéro instable ($= -1.7938$). De même pour $G_{\ell_{021}}(z)$ qui a un zéro instable ($= -1.3968$) et aussi $G_{\ell_{022}}(z)$ qui a un zéro instable ($= -1.4037$).

Le principe d'invariance lorsque $1 \neq 2$:

Pour la première perturbation (ℓ_1):

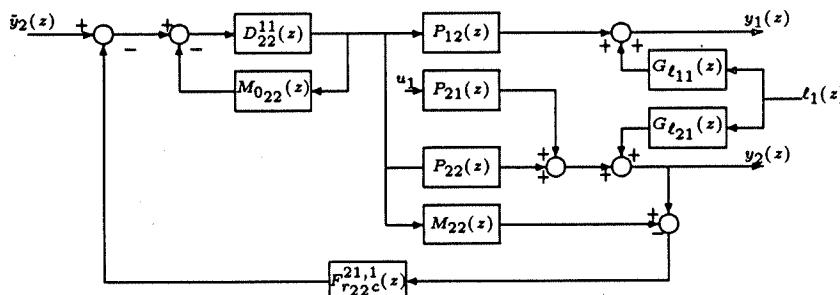


Figure 15: Le principe d'invariance en fonction du PAG $1 \neq 2$ pour la perturbation $\ell_1(z)$.

Dans le cas d'une modélisation imparfaite:

$$(D_{22}^{11})^{FA}(z) = \frac{G_{\ell_{11}}(z)}{\{P_{12}(z)G_{\ell_{21}}(z) - G_{\ell_{11}}(z)[P_{22}(z) - M_{22}(z)]\} F_{r_{22}c}^{21,1} f_{22}^{11}(z)}$$

ou $f(z)$ est le filtre de robustesse.

Dans le cas d'une modélisation parfaite $P_{22} = M_{22}$:

$$(D_{22}^{11})^{FA}(z) = \frac{G_{\ell_{11}}(z)}{f_{22}^{11}(z)F_{r_{22}c}^{21,1}(z)P_{12}(z)G_{\ell_{21}}(z)} \text{ avec } r_{22} = 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0.0209}{0.000521} \frac{(z - 0.8955)(z - 0.8671)}{(z - 0.8510)(0.6401z + 0.8941)F_{1c}^{21,1}(z)f_{22}^{11}(z)} \\
&= 62.6702 \frac{(z - 0.8955)(z - 0.8671)}{(z - 0.8510)(z + 1.3968)} \frac{1}{F_{1c}^{21,1}(z)f_{22}^{11}(z)}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
F_{1c}^{21,1}(z) &= F_1^{21}(z) + (1 - F_1^{21}(z))F_{\ell_1}^{21}(z) \frac{A_1^{21}(z)}{A_1^{21}(1)} \\
F_1^{21}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{21}}})^1 \quad \tau_{21} = 7.01 \quad T = 1 \\
A_1^{21}(z) &= (1 - e^{-\frac{T}{\tau_{21}}} z^{-1}) \\
F_{\ell_1}^{21}(z) &= \frac{1 - \beta_1^{21}}{1 - \beta_1^{21} z^{-1}} \\
&= e^{-\frac{1}{7.01}} + (1 - \beta_1^{21}) \frac{z - e^{-\frac{1}{7.01}}}{z - \beta_1^{21}} \\
&= \frac{(1 - \beta_1^{21} + e^{-\frac{1}{7.01}})z - e^{-\frac{1}{7.01}}}{z - \beta_1^{21}} \text{ avec } e^{-\frac{1}{7.01}} = 0.8671
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_{22}^{11})^{FA}(z) &= 62.6702 \frac{(z - 0.8955)(z - 0.8671)}{(z - 0.8510)(z + 1.3968)} \frac{(z - \beta_1^{21})}{((1 - \beta_1^{21} + e^{-\frac{1}{7.01}})z - e^{-\frac{1}{7.01}})} \frac{1}{f_{22}^{11}(z)} \\
&= [(D_{22}^{11})^{FA}(z)]_S [(D_{22}^{11})^{FA}(z)]_I
\end{aligned}$$

$$[(D_{22}^{11})^{FA}(z)]_I = \frac{1 + z\xi_1}{z + \xi_1} \text{ avec } \xi_1 = 1.3968$$

$$[(D_{22}^{11})^{FA}(z)]_S = 62.6702 \frac{(z - 0.8955)(z - 0.8671)}{(z - 0.8510)(1 + 1.3968z)} \frac{(z - \beta_1^{21})}{((1 - \beta_1^{21} + e^{-\frac{1}{7.01}})z - e^{-\frac{1}{7.01}})} \frac{1}{f_{22}^{11}(z)}$$

Pour la seconde perturbation (ℓ_2):

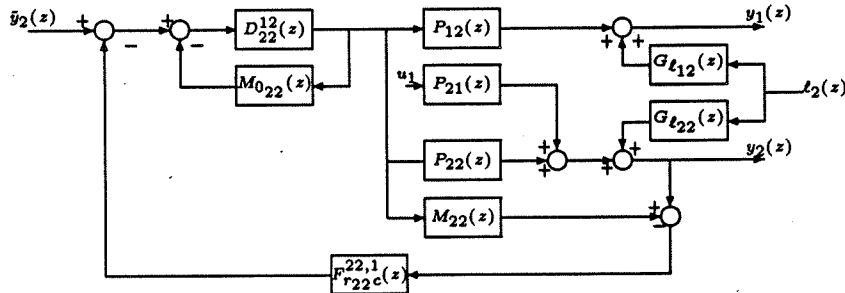


Figure 16: Le principe d'invariance en fonction du PAG $1 \neq 2$ pour la perturbation $\ell_2(z)$.

Dans le cas d'une modélisation imparfaite:

$$(D_{22}^{12})^{FA}(z) = \frac{G_{\ell_{12}}(z)}{\{P_{12}(z)G_{\ell_{22}}(z) - G_{\ell_{12}}(z)[P_{22}(z) - M_{22}(z)]\} F_{r_{22}c}^{22,1} f_{22}^{12}(z)}$$

Dans le cas d'une modélisation parfaite:

$$\begin{aligned} (D_{22}^{12}(z))^{FA}(z) &= \frac{G_{\ell_{12}}(z)}{F_{r_{22}c}^{22,1}(z)P_{12}(z)G_{\ell_{22}}(z)f_{22}^{12}(z)} \\ &= \frac{(-0.0835z^2 - 0.0694z + 0.1442)10^{-3}}{z^2 - 1.8143z + 0.8222} \frac{z - 0.8955}{-0.0005121} \frac{z - 0.8791}{0.0161z + 0.0226} \frac{1}{F_{1c}^{22,1}(z)f_{22}^{12}(z)} \end{aligned}$$

avec $F_{1c}^{22,1}(z) = F_1^{22}(z) + (1 - F_1^{22}(z))F_{\ell_1}^{22}(z) \frac{A_1^{22}(z)}{A_1^{22}(1)}$

$$F_1^{22}(z) = (e^{-\frac{T}{\tau_{22}}})^1 \quad \tau_{22} = 7.76$$

$$A_1^{22}(z) = (1 - e^{-\frac{T}{\tau_{22}}})z^{-1}$$

$$F_{\ell_1}^{22}(z) = \frac{1 - \beta_1^{22}}{1 - \beta_1^{22}z^{-1}}$$

$$F_{1c}^{22,1}(z) = \frac{(1 - \beta_1^{22} + e^{-\frac{1}{7.76}})z - e^{-\frac{1}{7.76}}}{z - \beta_1^{22}}$$

$$(D_{22}^{12}(z))^{FA}(z) = 10.1276 \frac{(z + 1.7938)(z - 0.9627)(z - 0.8955)(z - 0.8791)(z - \beta_1^{22})}{(z - 0.9340)(z - 0.8803)(z + 1.4037)((1 - \beta_1^{22} + e^{-\frac{1}{7.76}})z - e^{-\frac{1}{7.76}})} \frac{1}{f_{22}^{12}(z)}$$

$$[(D_{22}^{12}(z))^{FA}(z)]_S = 10.1276 \frac{(1 + 1.7938z)(z - 0.9627)(z - 0.8955)(z - 0.8791)(z - \beta_1^{22})}{(z - 0.9340)(z - 0.8803)(1 + 1.4037z)((1 - \beta_1^{22} + e^{-\frac{1}{7.76}})z - e^{-\frac{1}{7.76}})} \frac{1}{f_{22}^{12}(z)}$$

$$[(D_{22}^{12}(z))^{FA}(z)]_I = \frac{(z + 1.7938)}{(1 + 1.7938z)} \frac{(1.4037z + 1)}{(z + 1.4037)}$$

avec $e^{-\frac{1}{7.76}} = 0.8791$.

Bibliographie

- [AS73] G. Alevakis and D.E. Seborg. An Extension of the Smith Predictor Method to Multivariable Linear Systems Containing Time Delays. *Int. J. Control.*, 3(17):541–551, 1973.
- [Far86] C. Fargeon. Commande numérique des systèmes. *Masson*, 1986.
- [GM5a] C. E. Garcia and M. Morari. Internal Model Control. 2. Design Procedure for Multivariable Systems. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 24(2):472–484, 1985a.
- [GM5b] C. E. Garcia and M. Morari. Internal Model Control. 3. Multivariable Control Law Computation and Tuning Guidelines. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 24(2):484–494, 1985b.
- [HM5a] B. R. Holt and M. Morari. Design of Resilient Processing Plants V. The Effect of Dead Time on Dynamic Resilience. *Chem. Eng. Sci.*, 40(7):1229–1237, 1985a.
- [HM5b] B. R. Holt and M. Morari. Design of Resilient Processing Plants VI. The Effect of Right-Half-Plane Zeros on Dynamic Resilience. *Chem. Eng. Sci.*, 40(1):59–74, 1985b.
- [HTB91a] M. Hammami, A-B. Turgeon, and D. Bensoussan. Filtre d'adaptation pour la prédiction analytique généralisée multivariable. In *Congrès Canadien en Génie Électrique et Informatique, Acte de la conférence*, page 8.1.1-8.1.4, 25 septembre 1991.
- [HTB91b] Hammami, M., A-B. Turgeon and D. Bensoussan, *Higher Order Modelling for Adaptation Filters in Generalized Analytic Predictors* Proceedings of the 30th IEEE CDC in Bringhton, UK, pp. 963-968, 11-13 December 1991.
- [HTB92a] Hammami, M., A-B. Turgeon and D. Bensoussan, *Stabilité du filtre de pondération pour la prédiction analytique généralisée monvariable* Journée Tunisienne d'Électrotechnique et d'Automatique, Acte de la conférence, 6–9 Fevrier 92.
- [HTB92b] M. Hammami, A-B. Turgeon, and D. Bensoussan. Étude comparative de compensateur de retard pour systèmes multivariables. *Conférence Canadienne et exposition sur l'Automatisation Industrielle, Acte de la conférence*, pp. 8.1–8.4, 1–3 Juin 1992.
- [HTB92c] M. Hammami, A-B. Turgeon, and D. Bensoussan. Application of the Invariance Principle to Linear Multivariable Systems with delays. *31st IEEE CDC at the Westin La Paloma, Tuscon, Arizona* December 1992 (accepté pour publication).
- [JR86] N. F. Jerome and W. H. Ray. High-Performance Multivariable Control Strategies for Systems Having Time Delays. *AICHE*, 32(6):914–931, 1986.
- [JR91] Jerome, N. F., and W. H. Ray, *Control of Single-Input/Single-Output Systems with Time Delays and an Infinite Number of Right-Half Plane Zeros*. *Chem. Engng. Sci.*, Vol. 46, N°. 8, pp 2003-2018, 1991.

- [MSW78] C. Meyer, D. E. Seborg, and R. K. Wood. An Experimental Application of Time Delay Compensation Techniques to Distillation Column Control. *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 17(1):62–67, 1978.
- [MZ89] M. Morari and E. Zafiriou, *Robust Process Control*, Prentice Hall 1989.
- [N91] G. B. D. Nguetsé. Formulation robuste du principe d'invariance absolue appliquée à la synthèse des systèmes linéaires multivariables avec ou sans retards. *Mémoire de maîtrise* Décembre 1991.
- [OLMR83] B. A. Ogunnaike, J. P. Lemaire, M. Morari, and W. H. Ray. Advanced Multivariable Control of a Pilot-Plant Distillation Column. *AICHE J.*, 29(4):632–640, July 1983.
- [OR79] B. A. Ogunnaike and W. H. Ray. Improved Algorithm for Linear Systems Having Multiple Time Delays. *AICHE J.*, 25(6):1043–1057, 1979.
- [Pet60] Petrov, B.N, *The Invariance Principle and the Conditions of its Application During the Calculation of Linear and Nonlinear Systems*, Automatic and Remote Control, Vol.1, pp. 117-125, 1960.
- [SR72] M. A. Soliman and W. H. Ray. The Optimal Control of Process Containing Pure Time Delays- II Transfer Function Models. *Chem. Eng. Sci.*, 27:2183–2188, 1972.
- [TS88] C. A. Tsiliogiannis and S. A. Svoronos. Dynamic Interactors in Multivariable Process Control-I. The General Time Delay Case. *Chem. Eng. Sci.*, 43(2):339–347, 1988.
- [TS89] C. A. Tsiliogiannis and S. A. Svoronos. Dynamic Interactors in Multivariable Process Control-II. Time Delays and Zeros Outside the Unit Circle. *Chem. Eng. Sci.*, 44(9):2041–2047, 1989.
- [TN91] A-B. Turgeon et G.B.D. Nguetsé, *Formulation robuste du principe d'invariance absolue appliquée à la synthèse des systèmes linéaires multivariables*, Congrès canadien en génie électrique et informatique Quebec 25-27 Sept. 1991.
- [WB73] R. K. Wood and M. W. Berry. Terminal Composition Control of a Binary Distillation Column. *Chem. Eng. Sci.*, 28:1707–1717, 1973.
- [WE87] M. C. Wellons and T. F. Edgar. The Genralized Analytical Predictor. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 26(8):1523–1536, 1987.
- [WF76] W. A. Wolovich and P. L. Falb. Invariants and Canonical Forms under Dynamic Compensation. *SIAM J. Control Optimiz*, 14(6):996–1008, November 1976.

A Calcul de la matrice “d’interaction”

A.1 Procédure de la conception

Soit la matrice de fonction de transfert $\underline{P}(z)$ non singulière et strictement propre, donc il existe un entier unique k_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (représente le retard minimum de la rangée i de $\underline{P}(z)$) tel que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{k_i} P_i(z) = \tau_i; \quad P_i(z) = i^{\text{ieme}} \text{ rangée de } \underline{P}(z)$$

est à la fois fini et non nul.

On définit la première rangée $\xi(z)_1$ de $\xi(z)$ par:

$$\xi(z)_1 = (z^{k_1}, 0, \dots, 0)$$

telle que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)_1 \underline{P}(z) = \tau_1 = \xi_1$$

Si τ_2 est linéairement indépendant $\tau_1 = \xi_1$, il vient:

$$\xi(z)_2 = (0, z^{k_2}, 0, \dots, 0)$$

si

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \xi(z)_2 \underline{P}(z) = \tau_2$$

Si τ_2 et ξ_1 sont linéairement dépendant $\tau_2 = \alpha_1^1 \xi_1$, il vient:

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 = z^{k_2^1} [(0, z^{k_2}, 0, \dots, 0) - \alpha_1^1 \xi(z)_1]$$

avec k_2^1 est un entier unique

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\xi}^1(z)_2 \underline{P}(z) = \tilde{\xi}_2^1$$

est finie et non nulle. Si $\tilde{\xi}_2^1$ est linéairement indépendant de ξ_1 , on obtient la seconde rangée de l’“interaction”

$$\xi(z)_2 = \tilde{\xi}^1(z)_2$$

Si non, il vient:

$$\tilde{\xi}_2^1 = \alpha_1^2 \xi_1$$

et soit

$$\tilde{\xi}^2(z)_2 = z^{k_2^2} [\tilde{\xi}^1(z)_2 - \alpha_1^2 \xi(z)_1]$$

avec k_2^2 est un entier unique

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\xi}^2(z)_2 \underline{P}(z) = \tilde{\xi}_2^2$$

est finie et non nulle. Si $\tilde{\xi}_2^2$ et ξ_1 sont linéairement indépendant,

$$\xi(z)_2 = \tilde{\xi}^2(z)_2$$

et si non, on répète la procédure jusqu'à ce que l'indépendance linéaire soit obtenue. Un nombre fini d'étape est demandé quand $\underline{P}(z)$ est non singulière et $d_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$ (Goodwin et Sin, 1984). Les autres rangées de $\xi(z)$ sont obtenues par la même procédure.

A.2 Exemples

- Soit le système $\underline{P}_6(z)$:

$$\underline{P}_6(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) & z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1}) \\ z^{-1}(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) & z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 1 \quad \tau_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z[z^{-1}(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \quad z^{-1}] = [1 \quad 1] = \xi_1 \text{ avec } \xi_1(z) = [z \quad 0]$$

$$k_2 = 1 \quad \tau_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z[z^{-1}(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) \quad z^{-1}] = [1 \quad 1] = \xi_2 \text{ avec } \xi_2(z) = [0 \quad z]$$

$\tau_2 = \xi_1$ (ξ_1 et ξ_2 sont linéairement dépendants)

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 = z^{k_2^1} [-z \quad z]$$

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 \underline{P}_6(z) = [-\frac{1}{3}z^{k_2^1-1} \quad 0]$$

Donc $k_2^1 = 1$ pour que $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\xi}^1(z)_2 \underline{P}_6(z) = [-\frac{1}{3} \quad 0]$ est finie non nulle. $\tilde{\xi}_2^1$ et ξ_1 sont linéairement indépendants.

Finalement:

$$\xi_{P_6}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -z^2 & z^2 \end{bmatrix}$$

□

- Soit le système suivant $\underline{P}_7(z)$ donné par:

$$\underline{P}_7(z) = \begin{bmatrix} z^{-1}(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) & z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1}) \\ z^{-1}(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) & z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 1 \quad \tau_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z[z^{-1}(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \quad z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1})] = [1 \quad 1] = \xi_1$$

$$k_2 = 1 \quad \tau_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z[z^{-1}(1 + \frac{1}{6}z^{-1}) \quad z^{-1}] = [1 \quad 1] = \xi_2$$

Donc $\xi_1 = \tau_1$, calculons $\tilde{\xi}^1(z)_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^1(z)_2 &= z^{k_2^1} \{[0 \quad z] - [z \quad 0]\} \\ &= z^{k_2^1} [-z \quad z] \end{aligned}$$

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 \underline{P}_7(z) = -\frac{1}{3}[z^{k_2^1-1} \quad z^{k_2^1-1}]$$

Avec $k_2^1 = 1$ d'où

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\xi}^1(z)_2 \underline{P}_7(z) = -\frac{1}{3}[1 \quad 1]$$

Donc $\tilde{\xi}_2^1(z) = [-z^2 \ z^2]$
 $\xi_2^1 = -\frac{1}{3}\xi_1$ sont linéairement dépendants:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^1(z)_2 &= \{[-z^2 \ z^2] - (-\frac{1}{3})[z \ 0]\} \\ &= z^{k_2^2}[-z^2 + \frac{1}{3}z \ z^2]\end{aligned}$$

$$\tilde{\xi}^1(z)_2 P_7(z) = [\frac{1}{6}z^{k_2^2-1} \ \frac{1}{3}z^{k_2^2-1}]$$

Donc $k_2^2 = 1$ d'où $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\xi}^1(z)_2 P(z) = [\frac{1}{6} \ \frac{1}{3}]$ est linéairement indépendant de ξ_1 .
 Finalement:

$$\xi_{P_7}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ -z^3 + \frac{1}{3}z^2 & z^3 \end{bmatrix}$$

□

B Détermination du filtre de robustesse du PAG

La fonction de transfert en boucle ouverte est:

$$H = \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+(I - \underline{F}_c\underline{F}_{rc}\underline{M}_+)^{-1}\underline{F}_c$$

Soit $\varphi(H)$ l'équation caractéristique en boucle ouverte qui contient tous les pôles de H et $\psi(H)$ l'équation caractéristique en boucle fermée.

Le système donné par la figure 5 est stable si toutes les racines de $\psi(H)$ sont à l'intérieur du cercle unitaire

$$\psi(H) = \varphi(H)\det(I + H) = 0$$

Le système \underline{P} étant stable, toutes les racines de $\varphi(H) = 0$ sont dans le demi plan de gauche ouvert à l'exception des pôles à l'origine introduites par le contrôleur intégral. Il s'en suit que la stabilité en boucle fermé est déterminée par les zéros du déterminant de l'opérateur de, rétro-action:

$$\det(I + H)$$

le filtre est: $\underline{F}_c(z) = \text{diag}(\frac{1-\alpha^*}{1-\alpha^*z^{-1}})$

$$\begin{aligned} \det(I + H) &= \det \left\{ I + \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ \left[I - \frac{1-\alpha^*}{1-\alpha^*z^{-1}} \underline{F}_{rc}\underline{M}_+ \right]^{-1} \left(\frac{1-\alpha^*}{1-\alpha^*z^{-1}} \right) I \right\} \\ &= \det \left\{ I + \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ z \left[(z-1)I + (1-\alpha^*)(I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) \right]^{-1} (1-\alpha^*) I \right\} \\ &= \det \left\{ I + \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ (1-\alpha^*) \frac{z}{z-1} \left[I + \frac{1-\alpha^*}{z-1} (I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) \right]^{-1} \right\} \\ &= \det \left\{ I + \frac{1-\alpha^*}{z-1} \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ z \left[I + \frac{1-\alpha^*}{z-1} (I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) \right]^{-1} \right\} \\ &= \det \left\{ \left\{ I + \frac{1-\alpha^*}{z-1} (I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) + \frac{1-\alpha^*}{z-1} \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ z \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ I + \frac{1-\alpha^*}{z-1} (I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) \right\}^{-1} \right\} \\ &= \det \left\{ \left\{ (1-\alpha^*)I \right\} \left\{ \frac{1}{1-\alpha^*} I + [(I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) + \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ z] \left(\frac{1}{z-1} I \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ I + \frac{1-\alpha^*}{z-1} (I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) \right\}^{-1} \right\} \\ \\ &\frac{\det \left\{ \frac{1}{1-\alpha^*} I + [(I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) + \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ z] \left(\frac{1}{z-1} I \right) \right\}}{\det \left\{ I + \left(\frac{1-\alpha^*}{z-1} I \right) (I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) \right\}} = 0 \end{aligned}$$

On note que le polynôme du dénominateur est fini excepté en $z = 1$. Cependant, $\underline{M}_+(1) = I$, $\underline{F}_{rc}(1) = I$ et chaque élément de \underline{M}_+ est strictement propre de fonction rationnelle en z et $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+}{z-1}$ est finie.

Seulement les racines du polynôme du numérateur de (49) donnent la stabilité. La recherche des valeurs propres s'exprime par:

$$[(I - z\underline{F}_{rc}\underline{M}_+) + \underline{P}\underline{M}^{-1}\underline{M}_+ z] \left(\frac{1}{z-1} I \right)$$

Le lieu des racines n'encercler pas $-\frac{1}{1-\alpha^*}$ quand z traverse le contour de Nyquist dans le plan z (Postlethwaite et MacFarlane, 1979). Donc, ce contour encercle l'extérieur du disque unitaire du plan z . \underline{P} et \underline{M} sont supposées stables, seulement la singularité dans le cercle unitaire est infinie quand $z = 1$ et finie dans les autres cas.

A $z = 1$, le contour est:

$$z = 1 + \varepsilon e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$$

$$CL_j \simeq \lambda_j \{ \underline{P}(1) \underline{M}(1)^{-1} \} \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\theta} = |\lambda_j| e^{i\varphi_j} \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\theta} = \frac{|\lambda_j|}{\varepsilon} e^{-i(\varphi_j - \theta)}$$

Sous la condition, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_j < \frac{\pi}{2} \quad \forall j$, et $\forall CL_j$ croise l'axe réel à l'infini positif. Seulement la singularité pour $z = 1$, le CL est finie dans le plan gauche. Pour chaque $\underline{M}(z)$ satisfait (24), donc, il existe un α^* tel que:

le lieu des racines, ne croise pas l'axe réel à gauche de $-\frac{1}{1-\alpha}$ avec $\alpha^* \leq \alpha < 1$.

C Dérivation du contrôleur CMI multivariable pour le modèle de Wood et Berry

Le modèle de la matrice de fonction de transfert du modèle Wood et Berry est de la forme:

$$\underline{M}(z) = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}z^{-2}}{A_{11}(z)} & \frac{b_{12}z^{-4}}{A_{12}(z)} \\ \frac{b_{21}z^{-8}}{A_{21}(z)} & \frac{b_{22}z^{-4}}{A_{22}(z)} \end{bmatrix}$$

avec $A_{ij} = 1 - a_{ij}z^{-1}$

Les constantes a_{ij} et b_{ij} sont données par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= e^{-\frac{T}{\tau_{ij}}} \\ b_{ij} &= K_{p_{ij}}(1 - a_{ij}) \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

avec $\tau_{11} = 16.7; \tau_{12} = 21.0; \tau_{21} = 10.9; \tau_{22} = 14.4$

et $K_{p_{11}} = 12.8; K_{p_{12}} = -18.9; K_{p_{21}} = 10.9; K_{p_{22}} = -19.4$.

Le contrôleur $\underline{G}_c(z)$ est donné par:

$$\underline{G}_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$$

avec: $\underline{M}_-(z)^{-1} = [\underline{M}(z)]^{-1}\underline{M}_+(z)$.

L'inverse de la matrice de fonction de transfert du modèle est calculé par:

$$[\underline{M}(z)]^{-1} = \frac{\text{adj}(\underline{M}(z))}{\det(\underline{M}(z))}$$

L'adjoint de $\underline{M}(z)$ est:

$$\text{adj}(\underline{M}(z)) = \begin{bmatrix} \frac{b_{22}z^{-4}}{A_{22}(z)} & \frac{-b_{12}z^{-4}}{A_{12}(z)} \\ \frac{-b_{21}z^{-8}}{A_{21}(z)} & \frac{b_{11}z^{-2}}{A_{11}(z)} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de $\underline{M}(z)$ est:

$$\det[\underline{M}(z)] = \frac{b_{11}b_{22}z^{-6}}{A_{11}(z)A_{22}(z)} - \frac{b_{12}b_{21}z^{-12}}{A_{12}(z)A_{21}(z)}$$

Se réduit à:

$$\det[\underline{M}(z)] = \frac{N_d(z)z^{-6}}{A_{11}(z)A_{22}(z)A_{12}(z)A_{21}(z)}$$

avec $N_d(z) = b_{11}b_{22}A_{12}(z)A_{21}(z) - b_{12}b_{21}z^{-6}A_{11}(z)A_{22}(z)$.

La matrice de la fonction de transfert du modèle inverse est donnée par:

$$[\underline{M}(z)]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{011}(z)z^2 & \bar{P}_{012}(z)z^2 \\ \bar{P}_{021}(z)z^{-2} & \bar{P}_{022}(z)z^4 \end{bmatrix} \quad (49)$$

avec:

$$\bar{P}_{011}(z) = \frac{b_{22}A_{11}(z)A_{12}(z)A_{21}(z)}{N_d(z)} \quad (50)$$

$$\bar{P}_{012}(z) = \frac{-b_{12}A_{11}(z)A_{21}(z)A_{22}(z)}{N_d(z)} \quad (51)$$

$$\bar{P}_{021}(z) = \frac{-b_{21}A_{11}(z)A_{12}(z)A_{22}(z)}{N_d(z)} \quad (52)$$

$$\bar{P}_{022}(z) = \frac{b_{11}A_{12}(z)A_{21}(z)A_{22}(z)}{N_d(z)} \quad (53)$$

Examinant l'équation (49), nous observons que le retard minimum de chaque colonne apparaît sur la diagonale, donc la factorisation de découplage est une factorisation optimale avec $\bar{p}_{11} = 1, \bar{p}_{12} = 1, \bar{p}_{21} = 0$ et $\bar{p}_{22} = 3$.

Ce résultat de factorisation de $M_{+1}(z)$ est:

$$M_{+1}(z) = \begin{bmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & z^{-4} \end{bmatrix}$$

M_{+2} est sélectionnée pour extraire les zéros du système qui sont en dehors du cercle unitaire. Une discussion à la section 1.2.1 montre que les zéros de $M(z)$ contiennent les facteurs du déterminant de $M(z)$. Les racines de $N_d(z)$ ont été calculées numériquement et elles sont toutes dans le cercle unitaire

$$(-0.8990; -0.4499 \pm j0.7783; 0.4483 \pm j0.7792; 0.9607; 0.9035 \pm j0.0416).$$

Par conséquent $M_{+2}(z)$ est sélectionné à I , et

$$\begin{aligned} G_c(z) &= [M(z)]^{-1}M_{+1}(z) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{011}(z) & \bar{P}_{012}(z)z^{-2} \\ \bar{P}_{021}(z)z^{-4} & \bar{P}_{022}(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\bar{P}_{0ij}(z)$ est donné par les équations (50), (51), (52), (53).

On remarque que le contrôleur est stable et réalisable.

D Colonne de distillation d'eau et d'éthanol

D.1 Le choix d'un contrôleur par la méthode CMI

Le modèle est le suivant:

$$\underline{M}(z) = \begin{bmatrix} \frac{B_{11}}{A_{11}} z^{-3} & \frac{B_{12}}{A_{12}} z^{-1} \\ \frac{B_{21}}{A_{21}} z^{-10} & \frac{B_{22}}{A_{22}} z^{-1} \end{bmatrix}$$

Le contrôleur $G_c(z)$ est donné par: $G_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$ avec $[\underline{M}_-(z)]^{-1} \underline{M}_+(z)$. L'inverse de la matrice de fonction de transfert du modèle est:

$$[\underline{M}(z)]^{-1} = \frac{\text{adj}(\underline{M}(z))}{\det(\underline{M}(z))}$$

L'adjoint de $\underline{M}(z)$ est:

$$\text{adj}(\underline{M}(z)) = \begin{bmatrix} \frac{B_{22}}{A_{22}} z^{-1} & -\frac{B_{12}}{A_{12}} z^{-1} \\ -\frac{B_{21}}{A_{21}} z^{-10} & \frac{B_{11}}{A_{11}} z^{-3} \end{bmatrix}$$

Le déterminant se réduit à:

$$\det(\underline{M}(z)) = \frac{N_d z^{-4}}{A_{11} A_{12} A_{21} A_{22}}$$

avec $N_d = B_{11} B_{22} A_{12} A_{21} - B_{21} B_{12} A_{11} A_{22} z^{-7}$

La matrice de la fonction de transfert du modèle inverse est donnée par:

$$[\underline{M}(z)]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{0_{11}} z^3 & \bar{P}_{0_{12}} z^3 \\ \bar{P}_{0_{21}} z^{-6} & \bar{P}_{0_{22}} z \end{bmatrix} \quad (54)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{P}_{0_{11}} &= \frac{B_{22} A_{11} A_{12} A_{21}}{N_d} \\ \bar{P}_{0_{12}} &= -\frac{B_{12} A_{11} A_{22} A_{21}}{N_d} \\ \bar{P}_{0_{21}} &= -\frac{B_{21} A_{11} A_{22} A_{12}}{N_d} \\ \bar{P}_{0_{22}} &= \frac{B_{11} A_{22} A_{12} A_{21}}{N_d} \end{aligned}$$

On examinons l'équation (54), nous observons que le retard minimum de chaque colonne est:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{0_{11}} &= 2 & \bar{p}_{0_{12}} &= 2 \\ \bar{p}_{0_{21}} &= 0 & \bar{p}_{0_{22}} &= 0 \end{aligned}$$

avec $\lambda_1^+ = 2$ et $\lambda_2^+ = 2$. Ce résultat de factorisation de $\underline{M}_+(z)$ est:

$$\underline{M}_+(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & 0 \\ 0 & z^{-3} \end{bmatrix}$$

$\underline{M}_{+2}(z)$ est sélectionné pour extraire les zéros du système qui sont en dehors du cercle unitaire. Les racines de $N_d(z)$ ont été calculées numériquement $-1.3463; -0.8822; -0.2814 \pm j0.7300; 0.4536 \pm j0.6161; 0.9383 \pm j0.0334; 0.8679; 0.6799; -0.2352$ et toutes sont dans le cercle unitaire à l'exception d'un qui est $z_1 \approx -1.3462$.

$$\underline{M}_{+2}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-z_1}{1-z_1 z} & 0 \\ 0 & \frac{z-z_1}{1-z_1 z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} G_c(z) &= [\underline{M}(z)]^{-1} \underline{M}_{+1}(z) \\ &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{0_{11}} \frac{z-z_1}{1-z_1 z} & \bar{P}_{0_{12}} \frac{z-z_1}{1-z_1 z} \\ \bar{P}_{0_{21}} \frac{z-z_1}{1-z_1 z} z^{-9} & \bar{P}_{0_{22}} \frac{z-z_1}{1-z_1 z} z^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le résultat du contrôleur $G_c(z) = [\underline{M}_-(z)]^{-1}$ est stable et réalisable.

D'où l'expression du filtre de pondération, la matrice de prédition désirée est:

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} z^3 \frac{1-z_1 z}{z-z_1} & 0 \\ 0 & z^3 \frac{1-z_1 z}{z-z_1} \end{bmatrix}$$

ou

$$\underline{F}_{rc}(z) = \begin{bmatrix} F_{r_1 k_c}^{1k,3}(z) & 0 \\ 0 & F_{r_2 k_c}^{2k,3}(z) \end{bmatrix}; \quad k = 1, 2.$$

D.2 Le choix du contrôleur par la matrice d'“interaction”

Soit le modèle donné par l'équation (49):

$$\underline{M}(z) = \begin{bmatrix} \frac{b_1+b_2 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}} z^{-3} & \frac{b_3}{1+a_2 z^{-1}} z^{-2} \\ \frac{b_4+b_5 z^{-1}}{1+a_3 z^{-1}} z^{-10} & \frac{b_6+b_7 z^{-1}}{1+a_4 z^{-1}+a_5 z^{-2}} z^{-2} \end{bmatrix}$$

- Dans le cas d'un interacteur de type h, la transformation: $h \rightarrow z$ est:

$$z = \frac{1 + \sigma h}{h + \sigma} \iff h = \frac{1 - \sigma z}{z - \sigma}$$

Cette transformation permet à la matrice “d'interaction” un découplage triangulaire du contrôleur, tout en minimisant le critère de la somme des carrés des erreurs de la réponse temporelle en régime permanent.

• Interacteur du retard:

$$k_1 = 2 \quad \tau_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 M_1(z) = [0 \quad b_4]$$

avec $\xi_1(z) = [z^2 \quad 0]$

$$k_2 = 2 \quad \tau_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 M_2(z) = [0 \quad b_6]$$

avec $\xi_2(z) = [0 \quad z^2]$
 $\tau_2 = \alpha_1^1 \xi_1 \rightarrow \alpha_1^1 = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{b_6}{b_4}$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^1(z)_2 &= z^{k_2^1} ([0 \quad z^2] - \alpha_1^1 [z^2 \quad 0]) \\ &= z^{k_2^1} [-\alpha_1^1 z^2 \quad z^2] \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{k_2^1} [-\alpha_1^1 z^2 \quad z^2] \underline{M}(z) = [-\frac{b_6}{b_4} b_1 \quad b_7 + b_6(a_2 - a_4)]$$

avec $k_2^1 = 1$.

Finalement:

$$\xi_2^h(z) = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4} z^3 & z^3 \end{bmatrix}$$

• Intéracteur du zéro:

Nous utilisons la transformation $z = \frac{1+\sigma h}{h+\sigma}$ étant donné que nous avons un zéro en dehors du cercle unitaire $\sigma \approx -1.3463$.

$$\underline{M}(z) = \begin{bmatrix} \frac{(b_1\sigma+b_2)+(b_1+b_2\sigma)h^{-1}}{(\sigma+a_1)+(1+a_1\sigma)h^{-1}} \left(\frac{1+\sigma h^{-1}}{h^{-1}+\sigma} \right)^3 & \frac{b_3(1+\sigma h^{-1})}{(\sigma+a_2)+(1+a_2\sigma)h^{-1}} \left(\frac{1+\sigma h^{-1}}{h^{-1}+\sigma} \right) \\ \frac{(b_4\sigma+b_5)+(b_4+b_5\sigma)h^{-1}}{(\sigma+a_3)+(1+a_3\sigma)h^{-1}} \left(\frac{1+\sigma h^{-1}}{h^{-1}+\sigma} \right)^{10} & \frac{k_1+k_2h^{-1}+k_3h^{-2}}{k_4+k_5h^{-1}+k_6h^{-2}} \left(\frac{1+\sigma h^{-1}}{h^{-1}+\sigma} \right) \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= \sigma b_6 + b_7 \\ k_2 &= b_6(1 + \sigma^2) + 2b_7\sigma \\ k_3 &= b_6\sigma + b_7\sigma^2 \\ k_4 &= \sigma^2 + a_4\sigma + a_5 \\ k_5 &= 2\sigma + 2\sigma a_5 + a_4(1 + \sigma^2) \\ k_6 &= 1 + a_4\sigma + a_5\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{11} = 0 \quad \tau_1 &= \lim_{h \rightarrow \infty} h^0 \underline{M}_1(h) = \left[\frac{b_1\sigma + b_2}{\sigma + a_1} \frac{1}{\sigma^3} \quad \frac{b_3}{\sigma + a_2} \frac{1}{\sigma} \right] \\ k_{22} = 0 \quad \tau_2 &= \lim_{h \rightarrow \infty} h^0 \underline{M}_2(h) = \left[\frac{b_4\sigma + b_5}{\sigma + a_3} \frac{1}{\sigma^{10}} \quad \frac{\sigma b_6 + b_7}{\sigma^2 + a_4\sigma + a_5} \frac{1}{\sigma} \right] \end{aligned}$$

Nous remarquons que les deux vecteurs τ_1 et τ_2 sont linéairement dépendants:

$$\begin{bmatrix} \frac{b_1\sigma+b_2}{\sigma+a_1} \frac{1}{\sigma^3} & \frac{b_3}{\sigma+a_2} \frac{1}{\sigma} \\ \frac{b_4\sigma+b_5}{\sigma+a_3} \frac{1}{\sigma^{10}} & \frac{\sigma b_6+b_7}{\sigma^2+a_4\sigma+a_5} \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00032736878655 & -0.00016966355487 \\ -0.08262103385212 & 0.04281953224121 \end{bmatrix}$$

donc $\tau_2 = \alpha_1^1 \xi_1$ avec $\alpha_1^1 = \frac{(b_4\sigma+b_5)(\sigma+a_1)}{(b_1\sigma+b_2)(\sigma+a_3)\sigma} \approx -252.3791$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_2^1(h)_2 &= h^{k_2^1} (\xi_2(h) - \alpha_1^1 \xi_1(h)) \\ &= h^{k_2^1} ([0 \quad 1] - \alpha_1^1 [1 \quad 0]) \\ &= h^{k_2^1} [-\alpha_1^1 \quad 1] \end{aligned}$$

$\lim_{h \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_2^1(h) \underline{M}(h)$ est fini et non nulle et linéairement indépendant avec le vecteur ξ_1 lorsque $k_2^1 = 1$.

Finalement:

$$\begin{aligned} \xi_1^h(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 h & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} & \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Interacteur de l'opérateur h:

$$\begin{aligned}\xi_M^h(z) &= \xi_2^h(z)\xi_1^h(z) \\ &= \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4}z^3 - \alpha_1^1 \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} z^3 & \frac{1-\sigma z}{z-\sigma} z^3 \end{bmatrix} \text{ avec } \xi_P^h(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4} - \alpha_1^1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{G}_{BF}(z) &= [\xi_M^h(z)]^{-1} \xi_M^h(1) \\ &= z^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma_1 z + \gamma_2}{1-\sigma z} - \gamma_0 \frac{z-\sigma}{1-\sigma z} z^{-1} & \frac{z-\sigma}{1-\sigma z} z^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

avec $\gamma_0 = \frac{b_6}{b_4} + \alpha_1^1 \approx -252.4173$; $\gamma_1 = \frac{b_6}{b_4} - \alpha_1^1 \sigma \approx -339.8131$ et $\gamma_2 = -\frac{b_6}{b_4} \sigma + \alpha_1^1 \approx -252.4305$.

- Contrôleur de l'opérateur h:

Le contrôleur est donné par $\underline{G}_c(z) = [\underline{M}(z)]^{-1} \underline{G}_{BF}(z)$ (avec l'annulation de la paire pôle / zéro) ou

$$\underline{G}_c(z) = \begin{bmatrix} g_{c_{11}} & g_{c_{12}} \\ g_{c_{21}} & g_{c_{22}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}g_{h_{11}} &= \frac{A_{11}A_{21}}{1-\sigma z} \left[\frac{B_{22}A_{12}(1-\sigma z)z - B_{12}A_{22}\{(\gamma_1 z + \gamma_2)z - \gamma_0(z-\sigma)\}}{N_d} \right] \\ g_{h_{12}} &= \bar{P}_{0_{12}} \frac{z-\sigma}{1-\sigma z} \\ g_{h_{21}} &= \frac{A_{12}A_{22}z^{-1}}{1-\sigma z} \left[\frac{-B_{21}A_{11}(1-\sigma z)z^{-1} + B_{11}A_{21}\{(\gamma_1 z + \gamma_2) - \gamma_0(z-\sigma)z^{-1}\}}{N_d} \right] \\ g_{h_{22}} &= \bar{P}_{0_{22}} \frac{z-\sigma}{1-\sigma z} z^{-2}\end{aligned}$$

Les zéros du numérateur de $g_{h_{11}}$ sont:

$$-1.34629; 0.867422; 0.927172 \text{ et } 16.2047$$

avec les racines de A_{11} et A_{21} .

Les zéros du numérateur de $g_{h_{21}}$ sont²:

$-1.34629; -1.0935; -0.57048; -0.236171; -0.187155 \pm j0.649696; 0.57285 \pm j0.505952; 0.867964; 1.09919$
avec les racines de A_{22} et A_{12} .

Nous remarquons qu'il y a une simplification pôle/zéro ($\sigma = -1.34629$ des paramètres du contrôleur \underline{G}_c).

Nous remarquons que le contrôleur $\underline{G}_c(z)$ est réalisable et stable.

- La seconde transformation $q \rightarrow z$ est:

$$z = \frac{\sigma q}{q + \sigma - 1} \iff q = \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma}$$

²calculé par le logiciel Mathematica

permet à "l'interaction" un découplage triangulaire du contrôleur qui est optimale en rapport avec le temps de stabilisation des performances temporelles.

$$M(z) = \begin{bmatrix} \frac{(b_1\sigma+b_2)+(b_3(\sigma-1)q^{-1})}{(\sigma+a_1)+a_1(\sigma-1)q^{-1}} \left(\frac{1+(\sigma-1)q^{-1}}{\sigma} \right)^3 & \frac{b_3\sigma}{(\sigma+a_2)+a_2(\sigma-1)q^{-1}} \left(\frac{1+(\sigma-1)q^{-1}}{\sigma} \right)^2 \\ \frac{(b_4\sigma+b_5)+b_5(\sigma-1)q^{-1}}{(\sigma+a_3)+a_3(\sigma-1)q^{-1}} \left(\frac{1+(\sigma-1)q^{-1}}{\sigma} \right)^{10} & \frac{(b_6\sigma^2+b_7\sigma)+b_7\sigma(\sigma-1)q^{-1}}{(\sigma^2+a_4\sigma+a_5)+(a_4\sigma(\sigma-1)+2a_5(\sigma-1))q^{-1}+a_5(\sigma-1)^2q^{-2}} \left(\frac{1+(\sigma-1)q^{-1}}{\sigma} \right)^2 \end{bmatrix}$$

- Interacteur du retard:

$$\begin{aligned} \xi_1^q(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 q & q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1^1 \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} & \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Interacteur du zéro:

$$\xi_2^q(z) = \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4}z^3 & z^3 \end{bmatrix}$$

- Interacteur de l'opérateur q:

$$\begin{aligned} \xi_M^q(z) &= \xi_2^q(z)\xi_1^q(z) \\ &= \begin{bmatrix} z^2 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4}z^3 - \alpha_1^1 \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} z^3 & \frac{(1-\sigma)z}{z-\sigma} z^3 \end{bmatrix} \text{ avec } \xi_M^q(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_6}{b_4} - \alpha_1^1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice de transfert optimale en boucle fermée est:

$$\begin{aligned} G_{BF}(z) &= [\xi_M^q(z)]^{-1}\xi_M^q(1) \\ &= z^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\gamma_3 z + \gamma_4}{(1-\sigma)z} - \gamma_0 \frac{z-\sigma}{(1-\sigma)z} z^{-1} & \frac{z-\sigma}{(1-\sigma)z} z^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec $\gamma_3 = \frac{b_6}{b_4} + \alpha_1^1(1-\sigma) \approx -592.1922$ et $\gamma_4 = -\frac{b_6}{b_4} \approx 0.0382$.

- Contrôleur de l'opérateur q:

Le contrôleur en boucle fermée de la CMI avec interacteur de type q est:

$$G_c(z) = \begin{bmatrix} g_{q_{11}} & g_{q_{12}} \\ g_{q_{21}} & g_{q_{22}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} g_{q_{11}} &= \frac{A_{11}A_{21}}{(1-\sigma)} \frac{B_{22}A_{12}(1-\sigma)z - B_{12}A_{22}\{\gamma_3z + \gamma_4 - \gamma_0(z-\sigma)z^{-1}\}}{N_d} \\ g_{q_{12}} &= \bar{P}_{0_{12}} \frac{z-\sigma}{1-\sigma} z^{-1} \\ g_{q_{21}} &= \frac{A_{12}A_{22}z^{-2}}{1-\sigma} \frac{-B_{21}A_{11}(1-\sigma)z^{-6} + B_{11}A_{21}\{(\gamma_3z + \gamma_4) - \gamma_0(z-\sigma)z^{-1}\}}{N_d} \\ g_{q_{22}} &= \bar{P}_{0_{22}} \frac{z-\sigma}{1-\sigma} z^{-3} \end{aligned}$$

Les zéros du numérateur de $g_{q_{11}}$ sont:

$$-1.34585; 0.85836; 0.929017 \text{ et } 9.39149$$

avec les racines de A_{11} et A_{21} .

Les zéros du numérateur de $g_{q_{21}}$ sont:

$$-1.34629; -0.938284; -0.271902 \pm j0.640503; -0.234; 0.514704 \pm j0.490275; 0.869771; 1.08165$$

avec les racines de A_{22} et A_{12} .

Nous remarquons que le contrôleur $G_c(z)$ est réalisable et stable.

E Modèle colonne de distillation

$$\underline{P}(z) = \begin{bmatrix} \frac{0.0382+0.0533z^{-1}}{1-0.8614z^{-1}} z^{-3} & \frac{-0.0343-0.0324z^{-1}}{1-0.8907z^{-1}} z^{-4} & \frac{-0.5121 \cdot 10^{-3}z^{-1}}{1-0.8955z^{-1}} z^{-1} \\ \frac{0.1583+0.1357z^{-1}}{1-0.7351z^{-1}} z^{-7} & \frac{-0.4278z^{-1}}{1-0.8187z^{-1}} z^{-3} & \frac{-0.0013-0.0003z^{-1}}{1-0.8685z^{-1}} z^{-2} \\ \frac{-3.2424-0.7621z^{-1}}{1-0.8845z^{-1}} z^{-10} & \frac{2.4744+1.5755z^{-1}}{1-0.9123z^{-1}} z^{-10} & \frac{0.1238z^{-1}-0.1136z^{-2}}{1-1.7215z^{-1}+0.733z^{-2}} z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{B_{11}(z)}{A_{11}(z)} z^{-3} & \frac{B_{12}(z)}{A_{12}(z)} z^{-4} & \frac{B_{13}}{A_{13}(z)} z^{-2} \\ \frac{B_{21}(z)}{A_{21}(z)} z^{-7} & \frac{B_{22}}{A_{22}(z)} z^{-4} & \frac{B_{23}(z)}{A_{23}(z)} z^{-2} \\ \frac{B_{31}(z)}{A_{31}(z)} z^{-10} & \frac{B_{32}(z)}{A_{32}(z)} z^{-10} & \frac{B_{33}(z)}{A_{33}(z)} z^{-2} \end{bmatrix}$$

E.1 Le choix du contrôleur par la méthode CMI

Dans le cas d'une modélisation parfaite ($\underline{P}(z) = \underline{M}(z)$), le déterminant du modèle $\underline{M}(z)$ se réduit à:

$$\det[\underline{M}(z)] = \frac{N_d(z)z^{-7}}{A_{11}A_{12}A_{13}A_{21}A_{22}A_{23}A_{31}A_{32}A_{33}}$$

avec

$$\begin{aligned} N_d(z) = & B_{11}A_{12}A_{13}A_{21}A_{31}(B_{22}B_{33}A_{32}A_{33} - B_{32}B_{23}A_{22}A_{33}z^{-8}) \\ & - B_{21}A_{11}A_{22}A_{23}A_{31}(B_{12}B_{33}A_{32}A_{13} - B_{32}B_{13}A_{12}A_{33}z^{-6})z^{-5} \\ & + B_{31}A_{11}A_{21}A_{32}A_{33}(B_{12}B_{23}A_{22}A_{13}z^{-2} - B_{22}B_{13}A_{12}A_{23})z^{-7} \end{aligned}$$

La matrice de la fonction de transfert du système inverse est donnée par:

$$[\underline{M}(z)]^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{011}z^3 & \bar{P}_{012}z^2 & \bar{P}_{013}z^3 \\ \bar{P}_{021}z^{-1} & \bar{P}_{022}z^3 & \bar{P}_{023}z^2 \\ \bar{P}_{031}z^{-6} & \bar{P}_{032}z^{-6} & \bar{P}_{033}z \end{bmatrix} \quad (55)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{P}_{011}(z) &= \frac{A_{11}A_{12}A_{13}A_{21}A_{31}(B_{22}B_{33}A_{32}A_{23} - B_{32}B_{23}A_{22}A_{33}z^{-8})}{N_d} \\ \bar{P}_{021}(z) &= -\frac{A_{11}A_{12}A_{13}A_{22}A_{32}(B_{21}B_{33}A_{31}A_{23} - B_{31}B_{23}A_{21}A_{33}z^{-4})}{N_d} \\ \bar{P}_{031}(z) &= \frac{A_{11}A_{12}A_{13}A_{23}A_{33}(B_{21}B_{32}A_{31}A_{22}z^{-4} - B_{22}B_{31}A_{21}A_{32})}{N_d} \\ \bar{P}_{012}(z) &= -\frac{A_{11}A_{21}A_{22}A_{23}A_{31}(B_{12}B_{33}A_{32}A_{13} - B_{32}B_{13}A_{12}A_{33}z^{-6})}{N_d} \\ \bar{P}_{022}(z) &= \frac{A_{12}A_{21}A_{22}A_{23}A_{32}(B_{11}B_{33}A_{31}A_{13} - B_{31}B_{13}A_{11}A_{33}z^{-7})}{N_d} \\ \bar{P}_{032}(z) &= -\frac{A_{21}A_{13}A_{22}A_{23}A_{33}(B_{11}B_{32}A_{12}A_{31} - B_{12}B_{31}A_{11}A_{32}z^{-1})}{N_d} \\ \bar{P}_{013}(z) &= \frac{A_{11}A_{21}A_{31}A_{32}A_{33}(B_{12}B_{23}A_{13}A_{22}z^{-2} - B_{13}B_{22}A_{12}A_{23})}{N_d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_{0_{23}}(z) &= -\frac{A_{12}A_{22}A_{31}A_{32}A_{33}(B_{11}B_{23}A_{13}A_{21} - B_{13}B_{21}A_{11}A_{23}z^{-3})}{N_d} \\ \bar{P}_{0_{33}}(z) &= \frac{A_{13}A_{23}A_{31}A_{32}A_{33}(B_{11}B_{22}A_{21}A_{12} - B_{21}B_{12}A_{11}A_{22}z^{-5})}{N_d}\end{aligned}$$

En examinant l'équation (55), nous observons que le retard minimum de chaque colonne est:

$$\bar{p}_{11} = 2, \quad \bar{p}_{12} = 1, \quad \bar{p}_{13} = 2$$

$$\bar{p}_{21} = 0, \quad \bar{p}_{22} = 2, \quad \bar{p}_{23} = 1$$

$$\bar{p}_{31} = 0, \quad \bar{p}_{32} = 0, \quad \bar{p}_{33} = 0$$

valeurs pour lesquelles $\lambda_1^+ = 2, \lambda_2^+ = 2, \lambda_3^+ = 2$ et qui mènent à la matrice diagonale de $\underline{M}_{+1}(z)$:

$$\underline{M}_{+1}(z) = \begin{bmatrix} z^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & z^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-3} \end{bmatrix}$$

\underline{M}_{+2} est sélectionné afin d'enlever les zéros du système qui sont en-dehors du cercle unitaire. Les racines de $N_d(z)$ ont été calculées numériquement avec deux racines qui se trouvent à l'extérieur du cercle unitaire³.

Les facteurs $z_1 \approx -1.4$ et $z_2 \approx 1.2$ rendant $[\underline{M}(z)]^{-1}$ instable. Donc \underline{M}_{+2} est choisie de façon que $z - z_1$ et $z - z_2$ soit annulé par $[\underline{M}_-(z)]^{-1}$.

$$\underline{M}_{+2}(z) = \begin{bmatrix} \frac{z-z_1}{1-z_1z} \frac{z-z_2}{1-z_2z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z-z_1}{1-z_1z} \frac{z-z_2}{1-z_2z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z-z_1}{1-z_1z} \frac{z-z_2}{1-z_2z} \end{bmatrix}$$

$$G_c(z) = [\underline{M}(z)]^{-1} \underline{M}_{+1}(z) \underline{M}_{+2}(z).$$

On remarque que le contrôleur est stable et réalisable.

D'où l'expression du filtre de pondération, la matrice de prédiction désirée est:

$$\underline{F}_{rc} = \begin{bmatrix} F_{r_{1k}c}^{1k,3}(z) & 0 & 0 \\ 0 & F_{r_{2k},c}^{2k,3}(z) & 0 \\ 0 & 0 & F_{r_{3k}c}^{3k,3}(z) \end{bmatrix}; \quad k = 1, 2$$

avec $r_{11} = r_{21} = r_{31} = r_{32} = 1$ et $r_{12} = r_{22} = 2$.

Le filtre \underline{F}_{rc} correspondant est:

$$\begin{aligned}F_{1c}^{11,3} &= F_1^{11}(z) + (1 - F_1^{11}(1))F_{\ell_1}^{11} \frac{A_1^{11}(z)}{A_1^{11}(1)} \\ F_{2c}^{12,3} &= F_2^{12}(z) + (1 - F_2^{12}(1))F_{\ell_2}^{12} \frac{A_2^{12}(z)}{A_2^{12}(1)} \\ F_{1c}^{21,3} &= F_1^{21}(z) + (1 - F_1^{21}(1))F_{\ell_1}^{21} \frac{A_1^{21}(z)}{A_1^{21}(1)} \\ F_{2c}^{22,3} &= F_2^{22}(z) + (1 - F_2^{22}(1))F_{\ell_2}^{22} \frac{A_2^{22}(z)}{A_2^{22}(1)}\end{aligned}$$

³calculé par le logiciel mathematica

$$\begin{aligned} F_{1c}^{31,3} &= F_1^{31}(z) + (1 - F_1^{31}(1))F_{\ell_1}^{31} \frac{A_1^{31}(z)}{A_1^{31}(1)} \\ F_{1c}^{32,3} &= F_1^{32}(z) + (1 - F_1^{32}(1))F_{\ell_1}^{32} \frac{A_1^{32}(z)}{A_1^{32}(1)} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} F_1^{11}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{11}}})^3; \quad \tau_{11} = 6.2 \\ F_2^{12}(z) &= \frac{(A_{01})^4 - (A_{02})^4}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}(A_{02})^4 - A_{02}(A_{01})^4}{A_{01} - A_{02}} z^{-1} \\ &\quad A_{01} = e^{-\frac{T}{\tau_{121}}}; \quad \tau_{121} = 7.85 \\ &\quad \text{et } A_{02} = e^{-\frac{T}{\tau_{122}}}; \quad \tau_{122} = 8.94 \\ F_1^{21}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{21}}})^3; \quad \tau_{21} = 6.9 \\ F_2^{22}(z) &= \frac{(A_{01})^4 - (A_{02})^4}{A_{01} - A_{02}} + \frac{A_{01}(A_{02})^4 - A_{02}(A_{01})^4}{A_{01} - A_{02}} z^{-1} \\ &\quad A_{01} = e^{-\frac{T}{\tau_{221}}}; \quad \tau_{221} = 7.29 \\ &\quad \text{et } A_{02} = e^{-\frac{T}{\tau_{222}}}; \quad \tau_{222} = 8.94 \\ F_1^{31}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{31}}})^3; \quad \tau_{31} = 7.01 \\ F_1^{32}(z) &= (e^{-\frac{T}{\tau_{32}}})^3; \quad \tau_{32} = 7.76 \end{aligned}$$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289762 5