

Titre: Introduction à la mécanique analytique
Title:

Auteurs: Jean-Claude Piedboeuf
Authors:

Date: 1992

Type: Rapport / Report

Référence: Piedboeuf, J.-C. (1992). Introduction à la mécanique analytique. (Rapport technique n° EPM-RT-92-13). <https://publications.polymtl.ca/9840/>
Citation:

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/9840/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-92-13
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

18 SEP. 1992

EPM/RT-92/13

**INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE
ANALYTIQUE**

par:

Jean-Claude Piedboeuf

Professeur adjoint, département de génie mécanique

Royal Military College of Canada

Kingston, (Ontario), Canada, K7K 5L0

et

Professeur associé, département électrique

et de génie informatique,

École Polytechnique de Montréal

Montréal, (Québec), Canada, H3C 3A7

naturel

**DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ET DE GÉNIE INFORMATIQUE**

SECTION AUTOMATIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Août 1992

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, juillet 1992
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case Postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honoreronons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Coordonnées généralisées	2
3	Principe du travail virtuel	5
3.1	Déplacement virtuel	5
3.2	Travail d'une contrainte: réel et virtuel	5
3.3	Énoncé du principe du travail virtuel	6
3.4	Principe généralisé de d'Alembert	7
4	Équations de Lagrange	8
5	Forces de friction visqueuses	11
6	Conclusion	12

Liste des figures

1	Diagramme de corps libres	1
2	Particule se déplaçant dans un plan	3
3	Contraintes cinétiques sur une particule	4
4	Déplacements virtuels (a) et réels (b)	5
5	Contrainte scléronomique (a) et rhéonomique (b)	6

1 Introduction

La mécanique classique est basée sur les lois de Newton-Euler¹. Les différents corps composant un système sont isolés grâce aux diagrammes de corps libres qui montrent toutes les forces appliquées sur un corps donné (fig. 1). Dans ces diagrammes, les forces d'interaction entre les différents corps dues aux contraintes cinétiques doivent être considérées. Pour le système global, ces forces de contrainte sont internes au système. C'est-à-dire qu'elles s'annulent mutuellement lorsque les différents corps sont réassemblés. Souvent on

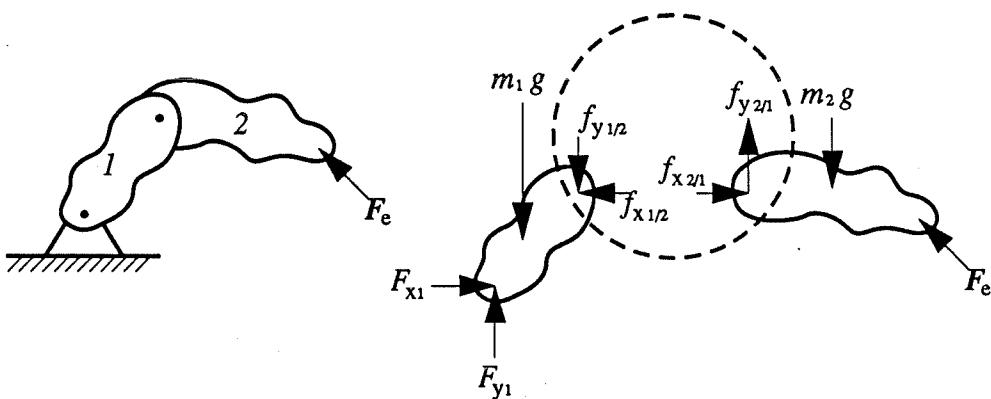


Figure 1: Diagramme de corps libres

ne s'intéresse qu'au mouvement global du système et les forces de contrainte ne présentent pas d'intérêt. L'apparition de ces forces de contrainte est alors vue comme un désavantage de la méthode de Newton-Euler.

La mécanique classique utilise des coordonnées physiques et des forces qui sont des quantités vectorielles. Il faut donc choisir un repère pour exprimer ces vecteurs. Il faut exprimer dans le même repère les vecteurs associés à un corps avant de les combiner. Les équations du mouvement sont aussi écritent pour un repère donné ce qui est souvent considéré comme un inconvénient.

La mécanique analytique est basée sur des principes variationnels. Les équations du mouvement peuvent donc être obtenues sans avoir à considérer les forces de contrainte. De plus, les équations du mouvement sont obtenues

¹ $\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a}_{cm}$ et $\sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{I}_{cm}\dot{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_{cm}\boldsymbol{\omega}$ avec cm indiquant le centre de masse.

sous forme scalaire, elles sont donc indépendantes d'un repère particulier.

Une première méthode de la mécanique analytique est le principe de d'Alembert. Ce principe est encore basé sur une approche vectorielle; il faut obtenir les forces externes, les accélérations et les vitesses des différents corps. Par contre, l'assemblage des équations éliminent les forces de contrainte.

La méthode de Lagrange est une autre approche variationnelle n'ayant aucun des deux "désavantages" de la mécanique classique. Cette méthode permet d'obtenir les équations du mouvement à partir de trois fonctions scalaires, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et les forces généralisées. Les énergies s'écrivent en terme des coordonnées et vitesses généralisées, tandis que les forces généralisées se déduisent du travail virtuel et des déplacements virtuels qui sont tous des fonctions scalaires. Notons qu'il faut en général obtenir les déplacements, les vitesses et les forces sous forme vectorielles pour calculer les énergies et les forces généralisées. Par contre, le fait que l'accélération n'est pas requise est considéré comme un atout de la méthode de Lagrange.

La mécanique analytique permet de résoudre des problèmes complexes plus facilement car la difficulté d'éliminer les forces de contrainte avec Newton-Euler est transposée dans un problème mathématique. Un des aspects les plus intéressants de la méthode de Newton-Euler est la possibilité d'une forme récursive des équations. Les équations de Lagrange se prêtent mal au développement récursif. Par contre le principe de d'Alembert permet la récursivité tout en éliminant les forces de contrainte.

2 Coordonnées généralisées

Considérons un système de N particules se déplaçant librement. La position d'une particule est décrite à l'aide d'un vecteur $\mathbf{r}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\mathbf{r}_i = x_i \vec{\mathbf{i}} + y_i \vec{\mathbf{j}} + z_i \vec{\mathbf{k}} \quad (1)$$

où x_i , y_i et z_i sont les composantes cartésiennes du vecteur.

Souvent, il est avantageux d'exprimer le mouvement au moyen d'un autre ensemble de coordonnées que les coordonnées cartésiennes, par exemple:

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

avec $n = 3N$. La relation entre les coordonnées cartésiennes x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, N$) et les nouvelles coordonnées q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) s'écrit:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ z_1 &= z_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ &\vdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned} \tag{2}$$

L'équation (2) représente une transformation de coordonnées qui a pour but de simplifier le problème.

Exemple Considérons une particule se déplaçant dans un plan $x - y$ tel qu'illustré à la figure 2. Le mouvement de la particule peut être décrit à l'aide

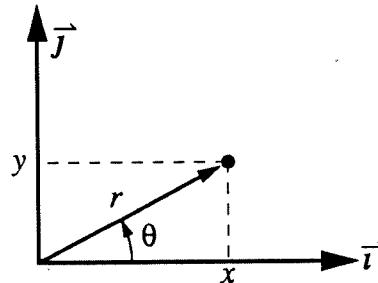


Figure 2: Particule se déplaçant dans un plan

des coordonnées cartésiennes x et y ou à l'aide des coordonnées polaires r et θ . En définissant $q_1 = r$ et $q_2 = \theta$ on obtient la transformation:

$$x = x(q_1, q_2) = q_1 \cos q_2, \quad y = y(q_1, q_2) = q_1 \sin q_2 \tag{3}$$

Dans la transformation (2), on a considéré que les particules étaient libres de se déplacer. En pratique, les particules sont souvent soumises à des contraintes réduisant leur liberté de mouvement. Par exemple, la figure 3(a) montre une particule attachée à l'extrémité d'une tige tournant autour de l'origine tandis que la figure 3(b) montre une particule glissant librement le

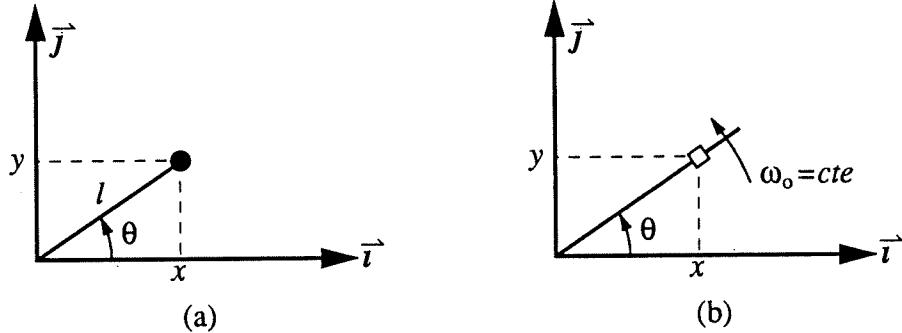


Figure 3: Contraintes cinétiques sur une particule

long d'une tige qui tourne à vitesse constante. Dans le cas (a), la contrainte s'écrit $x^2 + y^2 = l^2$ et elle est de la forme $f(x, y, z) = 0$. Le fait que l'on puisse écrire une fonction $f(\cdot) = 0$ indique que c'est une contrainte holonomique et le fait qu'elle ne dépende pas du temps en fait une contrainte scléronomique. Dans le cas (b), la contrainte s'écrit $x \tan(\omega_0 t) - y = 0$ et elle est de la forme $f(x, y, z, t) = 0$. C'est donc encore une contrainte holonomique mais puisqu'elle dépend du temps, elle est rhéonomique. Notons que d'autres formes existent (Meirovitch, 1970, sect. 2.2).

En général, si un système de N particules se déplaçant dans un espace tridimensionnel est soumis à c contraintes cinétiques, le mouvement du système peut être décrit par n coordonnées (q_1, q_2, \dots, q_n) où:

$$n = 3N - c \quad (4)$$

est le nombre de degrés de liberté du système. De la même façon, un système de N corps rigides soumis à c contraintes cinétiques possède:

$$n = 6N - c \quad (5)$$

degrés de liberté. Le nombre de degrés de liberté est donc le nombre minimum de coordonnées nécessaires pour décrire complètement un système. Les n coordonnées (q_1, q_2, \dots, q_n) sont appelées coordonnées généralisées.

Notons que les coordonnées généralisées n'ont pas besoin d'avoir un sens physique et qu'elles ne sont pas uniques. Pour les lecteurs familiers avec le contrôle, indiquons qu'il existe une relation directe entre les coordonnées généralisées d'un système mécanique et les variables d'états:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3 Principe du travail virtuel

Le principe du travail virtuel est historiquement l'un des premiers principes variationnels. Bien que ce principe traite de l'équilibre statique d'un système mécanique, on l'utilise ici pour faciliter la transition de la mécanique classique (Newton-Euler) à la mécanique analytique. Avant d'attaquer le principe du travail virtuel, il faut définir les déplacements virtuels.

3.1 Déplacement virtuel

Les déplacements virtuels ne sont pas de vrais déplacements mais des changements infinitésimaux des coordonnées compatibles avec les contraintes se produisant à un instant donné. On dénote les déplacements virtuels par la lettre δ , tandis que les déplacements réels sont indiqués par la lettre d (e.g δx et dx). Par exemple, les déplacements virtuels et réels de la tige en rotation de la figure 3(b) sont indiqués à la figure 4. Notons que si les contraintes

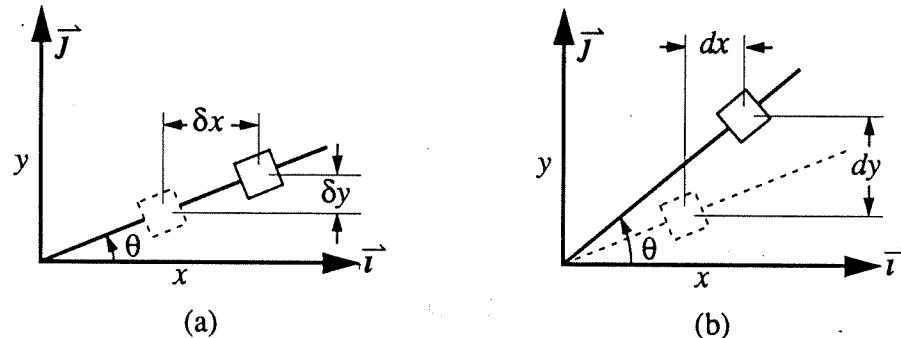


Figure 4: Déplacements virtuels (a) et réels (b)

ne dépendent pas du temps, les déplacements virtuels sont équivalents aux déplacements réels.

3.2 Travail d'une contrainte: réel et virtuel

Supposons qu'un ensemble de forces de résultante \mathbf{R}_i agit sur chaque particule du système. La force résultante \mathbf{R}_i se décompose en une force appliquée \mathbf{F}_i et une force de contrainte \mathbf{f}_i ($i = 1, 2, \dots, N$). La figure 5(a) montre la force de contrainte \mathbf{f} appliquée sur un système subissant une contrainte

scléronomique ($f(x, y, z) = 0$) tandis que dans la figure 5(b), la contrainte est rhéonomique ($f(x, y, z, t) = 0$). Le travail infinitésimal² accompli par la

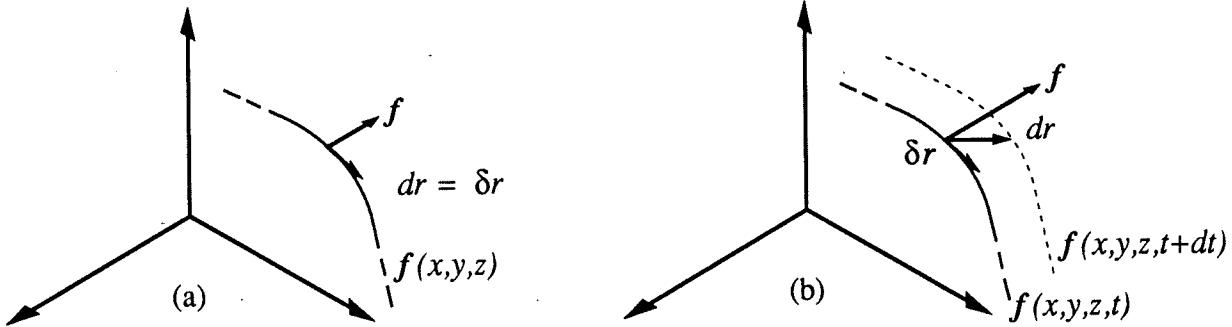


Figure 5: Contrainte scléronomique (a) et rhéonomique (b)

contrainte scléronomique est nul ($\overline{dW} = f \cdot dr = 0$) car la contrainte est perpendiculaire au déplacement infinitésimal. Dans le cas de la contrainte rhéonomique, le travail infinitésimal n'est pas nul ($\overline{dW} = f \cdot dr \neq 0$) car le déplacement dr n'est plus perpendiculaire à la force de contrainte. Par contre, le travail virtuel est nul ($\overline{\delta W} = f \cdot \delta r = 0$) car le déplacement virtuel δr reste perpendiculaire à la force de contrainte. On peut donc affirmer que: *le travail accompli par les forces de contrainte lors d'un déplacement virtuel est nul.*

3.3 Énoncé du principe du travail virtuel

Considérons un système de N particules avec \mathbf{R}_i la force résultante sur chaque particule. Pour un système en équilibre, $\mathbf{R}_i = 0$ pour chaque particule i et donc:

$$\overline{\delta W_i} = \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

Pour le système complet, on obtient:

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^N \overline{\delta W_i} = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (8)$$

²La barre sur dW indique que dW est une valeur infinitésimale et non une différentielle

Ce résultat est trivial pour un \mathbf{R}_i quelconque mais si le système est soumis à des contraintes telles que:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

avec \mathbf{F}_i une force appliquée et \mathbf{f}_i une force de contrainte alors:

$$\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (10)$$

Mais on a vu que le travail accompli par les forces de contrainte lors d'un déplacement virtuel est nul ($\overline{\delta W} = \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$). On obtient donc:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (11)$$

Cette équation représente la forme mathématique du principe du travail virtuel qui s'exprime comme suit: *le travail accompli par les forces appliquées lors d'un déplacement virtuel est nul.* Remarquons que $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ n'implique pas que $\mathbf{F}_i = 0$ pour tout i car à cause des contraintes, les $\delta \mathbf{r}_i$ ne sont pas indépendants.

3.4 Principe généralisé de d'Alembert

Tel qu'on la vu dans la section précédente, le principe du travail virtuel représente l'équilibre statique d'un système. En général on s'intéresse plutôt aux problèmes dynamiques. Le principe de d'Alembert permet d'appliquer le principe du travail virtuel à la dynamique.

La deuxième loi de Newton pour une particule i de masse constante m_i s'écrit:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = \dot{\mathbf{G}}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

où (\cdot) représente la dérivée par rapport au temps, \mathbf{F}_i est une force appliquée, \mathbf{f}_i une force de contrainte et \mathbf{a}_i est l'accélération de la masse m_i . En utilisant le principe de d'Alembert l'équation (12) se récrit:

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

où $-m_i \mathbf{a}_i$ est une force d'inertie. L'équation (13) représente un équilibre dynamique. Les forces appliquées sont contre-balancées par les forces d'inertie. On peut maintenant appliquer le principe du travail virtuel sur (13) en multipliant l'équation par le déplacement virtuel:

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

En prenant la sommation sur l'ensemble des particules et en considérant des déplacements virtuels compatibles avec les contraintes du système, on obtient:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (15)$$

On a utilisé le fait que le travail accompli par les forces de contrainte lors d'un déplacement virtuel est nul. L'équation (15) est l'expression du *principe généralisé de d'Alembert*. Elle constitue la base de la mécanique analytique.

4 Équations de Lagrange

Le principe généralisé de d'Alembert a l'avantage d'éliminer les contraintes. Par contre, il nécessite le calcul de l'accélération ce qui en général augmente la complexité. Les équations de Lagrange représentent une approche plus simple. En effet, les équations sont dérivées à partir des fonctions scalaires d'énergie cinétique et potentielle ainsi que des forces généralisées. Dans ce cas, seule la vitesse est nécessaire. Les équations de Lagrange utilisent les coordonnées généralisées q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) plutôt que les coordonnées physiques x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, N$). On ne considère dans cette section que les contraintes de type holonomique (i.e. $f(\cdot) = 0$). Pour ce cas il est possible de trouver un ensemble de coordonnées généralisées indépendantes.

Le principe généralisé de d'Alembert (15) se récrit:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (16)$$

En fonction des coordonnées généralisées q_i , \mathbf{r}_i se récrit:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (17)$$

La vitesse s'obtient en prenant la dérivée totale de \mathbf{r}_i , ce qui donne:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (18)$$

Par analogie avec la vitesse, le déplacement virtuel $\delta \mathbf{r}_i$ s'écrit:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (19)$$

car δt n'est pas considéré.

En utilisant (19), le second terme de (16) se récrit:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \end{aligned} \quad (20)$$

Le terme sous la double sommation se récrit:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \quad (21)$$

De plus, on a que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (22)$$

En utilisant (22) et en considérant que la dérivée totale par rapport au temps est interchangeable avec la dérivée partielle par rapport aux coordonnées généralisées, l'équation (21) se récrit:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} T_i - \frac{\partial}{\partial q_k} T_i \end{aligned} \quad (23)$$

où T_i est l'énergie cinétique de la particule i . En introduisant (23) dans (20) on obtient:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \right] \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right] \delta q_k\end{aligned}\quad (24)$$

où:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

est l'énergie cinétique totale du système³.

Il reste maintenant à obtenir les forces \mathbf{F}_i en terme des coordonnées généralisées. Le travail virtuel des forces appliquées s'écrit, en utilisant (19):

$$\begin{aligned}\overline{\delta W} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k\end{aligned}\quad (25)$$

où:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$$

est la force généralisée associée à la coordonnée généralisée q_k . Notons que les unités de la force généralisée Q_k ne sont pas nécessairement des unités de force. Elles peuvent être des unités de moment (si q_k est un déplacement angulaire) ou tout autre unité telle que le produit $Q_k \delta q_k$ possède les unités du travail.

Si les forces appliquées peuvent se diviser en forces conservatives⁴ et en forces non-conservatives alors le travail virtuel des forces appliquées se récrit:

$$\overline{\delta W} = \overline{\delta W_c} + \overline{\delta W_{nc}}$$

³Notons que la vitesse $\dot{\mathbf{r}}_i$ doit être la vitesse absolue de la particule i . Par contre, elle peut être exprimée dans n'importe quel repère.

⁴Les forces conservatives sont celles qui dérivent d'un potentiel V , $F_c = -\nabla V$. Par exemple pour un ressort, $V = 1/2 k x^2$ et $F = -\nabla V = -\partial V / \partial x = -kx$.

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^n Q_{knc} \delta q_k \\
&= - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{knc} \right) \delta q_k
\end{aligned} \tag{26}$$

où Q_{knc} sont les forces non-conservatives.

En remplaçant (24) et (26) dans l'équation du principe généralisé de d'Alembert (16), on obtient:

$$-\sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} - Q_{knc} \right] \delta q_k = 0 \tag{27}$$

Cependant les déplacements virtuels généralisés δq_k sont arbitraires et indépendants⁵, donc pour que (27) soit satisfaite il faut que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{28}$$

On considère que Q_i contient seulement les forces non-conservatives. L'expression (28) représente les équations de Lagrange. C'est un ensemble de n équations différentielles du deuxième ordre. Il y a donc une équation par coordonnée généralisée.

Étant donné que l'énergie potentielle ne dépend pas des vitesses généralisées \dot{q}_i , on définit le Lagrangien:

$$L = T - V \tag{29}$$

et les équations de Lagrange se récrivent sous une forme plus compacte:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{30}$$

5 Forces de friction visqueuses

Dans les forces généralisées se retrouvent les forces de friction. Lorsque la friction est visqueuse, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la vitesse, on

⁵Les contraintes sont holonomiques.

peut définir une fonction scalaire connue sous le nom de fonction de dissipation de Rayleigh. Pour l'obtenir, on repart du principe généralisé de d'Alembert (16) où on extrait la force de frottement visqueux de la force appliquée. Cela donne:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - c_i \dot{\mathbf{r}}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (31)$$

En utilisant (19), on récrit le terme de frottement visqueux comme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N c_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n c_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n c_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} c_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) \delta q_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \end{aligned} \quad (32)$$

où R est la fonction de dissipation de Rayleigh:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad (33)$$

Les équations de Lagrange se récrivent alors:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

Les forces généralisées non-conservatives Q_i excluent maintenant les forces de friction visqueuse.

6 Conclusion

Les équations de Lagrange sont un outil puissant pour dériver les équations du mouvement de systèmes complexes. Bien que la dérivation des équations ait été faite pour un système de particules, les équations s'appliquent

pour un système de corps rigides ou même flexibles⁶. Les équations sont basées sur deux quantités scalaires, les énergies cinétique et potentielle ainsi que sur les forces généralisées qui peuvent être facilement calculées pour des corps rigides. La difficulté d'obtenir les accélérations et d'éliminer les forces de contrainte inhérente à la méthode de Newton-Euler est transposée en un problème mathématique dans les équations de Lagrange. C'est pour cette raison que les premiers modèles de robots ont été écrits en utilisant les équations de Lagrange. Par contre, les équations de Newton-Euler se prêtent beaucoup mieux à la récursivité ce qui permet de réduire dramatiquement le nombre d'opérations. Une méthode permettant d'éliminer les forces de contrainte tout en possédant une récursivité est basée sur le principe généralisé de d'Alembert (Greenwood, 1988, sect. 8.7).

⁶Pour un corps flexible, il faut discréteriser spatialement le corps en utilisant par exemple, la méthode des modes supposés.

Références

- [1] Donald T. Greenwood. *Principles of Dynamics*. Prentice-Hall, Inc., second edition, 1988.
- [2] Leonard Meirovitch. *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1970.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289801 1