

**Titre:** Introduction à la modélisation des robots flexibles  
Title:

**Auteurs:** Jean-Claude Piedboeuf  
Authors:

**Date:** 1992

**Type:** Rapport / Report

**Référence:** Piedboeuf, J.-C. (1992). Introduction à la modélisation des robots flexibles.  
Citation: (Technical Report n° EPM-RT-92-14). <https://publications.polymtl.ca/9839/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/9839/>  
PolyPublie URL:

**Version:** Version officielle de l'éditeur / Published version

**Conditions d'utilisation:** Tous droits réservés / All rights reserved  
Terms of Use:

## Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

**Institution:** École Polytechnique de Montréal

**Numéro de rapport:** EPM-RT-92-14  
Report number:

**URL officiel:**  
Official URL:

**Mention légale:**  
Legal notice:

18 SEP. 199

ÉCOLE POLYTECHNIQUE BIBLIOTHÈQUE

EPM/RT-92/14

## INTRODUCTION À LA MODÉLISATION DES ROBOTS FLEXIBLES

par:

Jean-Claude Piedboeuf  
Professeur adjoint, département de génie mécanique  
Royal Military College of Canada  
Kingston, (Ontario), Canada, K7K 5L0  
et  
Professeur associé, département électrique  
et de génie informatique,  
École Polytechnique de Montréal  
Montréal, (Québec), Canada, H3C 3A7

Manuscript

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ET DE GÉNIE INFORMATIQUE

SECTION AUTOMATIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Août 1992

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, juillet 1992  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal  
École Polytechnique de Montréal  
Case Postale 6079, Succursale A  
Montréal (Québec) H3C 3A7  
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honoreronons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation d'une membrure flexible</b>	<b>3</b>
2.1	Introduction . . . . .	3
2.2	Élasticité ou flexibilité . . . . .	4
2.3	Hypothèses de modélisation . . . . .	5
2.4	Cinématique . . . . .	6
2.4.1	Position et vitesse linéaires . . . . .	6
2.4.2	Matrice de rotation et vitesse angulaire . . . . .	7
2.5	Cinématique à l'ordre deux . . . . .	8
2.6	Énergie et forces . . . . .	13
2.6.1	Énergie cinétique . . . . .	13
2.6.2	Énergie potentielle . . . . .	13
2.6.3	Fonction de dissipation de Rayleigh . . . . .	14
2.6.4	Forces généralisées . . . . .	14
2.7	Discrétisation . . . . .	15
2.8	Conclusion . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Exemple de modélisation</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Le robot flexible modélisé . . . . .	19
3.3	Modèle linéaire . . . . .	20
3.3.1	Cinématique . . . . .	21
3.3.2	Énergie et forces . . . . .	21
3.3.3	Discrétisation . . . . .	22
3.3.4	Dérivation des équations . . . . .	23
3.4	Modèle non-linéaire . . . . .	25

*TABLE DES MATIÈRES*

3.4.1	Cinématique . . . . .	25
3.4.2	Énergie . . . . .	26
3.4.3	Dérivation des équations . . . . .	26
3.5	Simulation . . . . .	28
3.5.1	Fonctions propres de la poutre encastrée sans charge .	30
3.5.2	Splines cubiques . . . . .	31
3.6	Conclusion . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

# Liste des figures

2.1	Une articulation élastique . . . . .	4
2.2	Une membrure flexible . . . . .	5
2.3	Une membrure flexible et ses repères . . . . .	7
2.4	Une membrure flexible et ses repères . . . . .	10
2.5	Membrure en rotation . . . . .	17
2.6	Déformation $v$ en fonction des modes naturels d'une poutre encastree . . . . .	18
3.1	Membrure flexible en rotation dans le plan horizontal . . . . .	20
3.2	Première fréquence d'une poutre en rotation en négligeant les termes d'ordre deux et en les incluant . . . . .	29



# Chapitre 1

## Introduction

Les robots utilisés dans l'industrie sont extrêmement précis. Mais ceci est au prix d'une sur-conception du robot afin d'éviter toute vibration. Ils sont donc massifs et exigent des moteurs puissants. Malgré tout, ils sont relativement lents et ont une faible charge utile par rapport à leur poids. Un robot industriel est dix fois moins efficace que l'être humain pour des charges de zéro à dix kilogrammes (Rivin, 1988).

De plus, on a rapidement réalisé que ces robots extrêmement rigides ne sont pas appropriés pour exécuter des tâches nécessitant un contact avec l'environnement. La moindre erreur dans la position génère une force de réaction importante. Il faut donc rajouter des poignets souples afin d'absorber l'énergie de contact.

Les robots industriels sont utilisés dans des domaines précis. Ils sont en général fixés solidement dans le plancher et les déplacer requiert un travail important. De tels robots ne peuvent être utilisés pour la majorité des applications de la vie courante. Peut-on en effet imaginer un robot Puma monté sur une base mobile et ramassant les ordures ménagères?

Il serait donc intéressant de disposer de robots plus légers. Ayant une inertie plus faible, ceux-ci seraient moins dangereux. Entrer en collision avec un bras de dix kilogrammes laisse moins de séquelles que si le bras pèse 100 kilogrammes. Des robots légers seraient aussi plus rapides et disposeraient d'une souplesse inhérente permettant des contacts avec l'environnement.

Par contre, un robot léger est moins précis à cause de la flexibilité non-négligeable des membrures. Son modèle est plus complexe et à l'heure actuelle aucun contrôle efficace n'existe pour de tels robots.

Ce document se veut une introduction à la modélisation des robots flexibles en utilisant la méthode de Lagrange (Piedboeuf,1992). Le chapitre 2 développe les équations nécessaires à la modélisation d'une membrure flexible. On considère deux flexions perpendiculaires et une torsion. Le chapitre 3 présente un exemple de modélisation d'une membrure flexible en rotation dans le plan horizontal. Ce document suppose que le lecteur sait modéliser un robot rigide.

Ce texte est une première version composée pour faciliter la compréhension d'un séminaire portant sur la modélisation et le contrôle des structures flexibles. Je réclame donc l'indulgence du lecteur pour les fautes qui m'auraient échappé et pour les tournures de phrases trop abruptes. J'apprécierai par contre, les commentaires que vous pourriez faire.

# Chapitre 2

## Modélisation d'une membrure flexible

### 2.1 Introduction

La modélisation d'un robot rigide par la méthode de Lagrange consiste à obtenir les énergies cinétique et potentielle ainsi que les forces généralisées. Pour l'énergie cinétique, il faut connaître la vitesse du centre de masse de chaque corps ainsi que la vitesse de rotation du repère attaché au centre de masse du corps. Ces vitesses se calculent aisément en utilisant des repères en mouvement ainsi que la récursivité<sup>1</sup>. La seule source d'énergie potentielle d'un robot parfaitement rigide est la gravité. Il faut donc calculer la position du centre de masse de chacun des corps. Les forces généralisées d'un robot n'ayant pas de contact avec son environnement proviennent uniquement des forces appliquées par les moteurs. On constate donc qu'il est possible d'obtenir les énergies cinétique et potentielle d'un corps  $i$  quelconque en supposant qu'on connaît les positions et les vitesses du corps précédent (corps  $i - 1$ ). On peut ainsi modéliser un corps type et utiliser ce modèle par la suite.

Dans le cas d'un robot flexible, le raisonnement est le même. On cherche à modéliser une membrure flexible en supposant qu'on connaît les positions et vitesses du corps précédent. Il faut donc établir l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'une membrure quelconque.

Ce chapitre débute par une discussion sur l'élasticité d'une articulation

---

<sup>1</sup>La vitesse du corps  $i$  peut être obtenue à partir de la vitesse du corps  $i - 1$ .

et la flexibilité d'une membrure. On introduit ensuite les hypothèses utilisées pour la modélisation. Par la suite, on établit les relations cinétiques entre un repère attaché à la base de la membrure et un repère attaché à une position quelconque sur la membrure. À ce point, une section discute du cas où des hypothèses moins restrictives sont utilisées. Cette section peut être sautée dans une première lecture. On donne ensuite l'expression de l'énergie cinétique et celle de l'énergie potentielle. Le chapitre se termine par une discussion sur l'amortissement dans les membrures flexibles.

## 2.2 Élasticité ou flexibilité

Les robots présentent deux sources de flexibilité: les articulations et les membrures. Pour les articulations, on parle plutôt d'élasticité par analogie avec un ressort.

L'élasticité des articulations est généralement importante et elle existe à divers niveaux sur tous les robots, rigides ou flexibles. Cette élasticité provient du système de transmission utilisé pour relier le moteur à la membrure, par exemple, un réducteur harmonique, une courroie, des engrenages. L'élasticité de l'articulation étant localisée à un point précis, un simple ressort linéaire suffit à la modéliser (fig. 2.1).

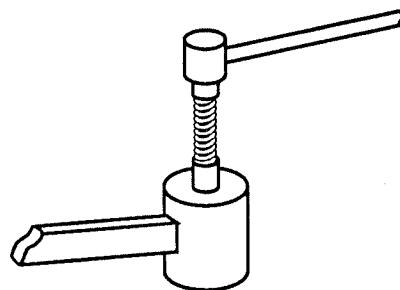


Figure 2.1: Une articulation élastique

Par contraste, la flexibilité d'une membrure présente un caractère distribué. C'est toute la membrure qui contribue à la déformation et un simple ressort n'est pas un bon modèle. Pour modéliser une membrure flexible, on

considère la flexion dans deux directions perpendiculaires et la torsion le long de l'axe de la membrure (fig. 2.2). Les déformations transversales  $v(x, t)$  et

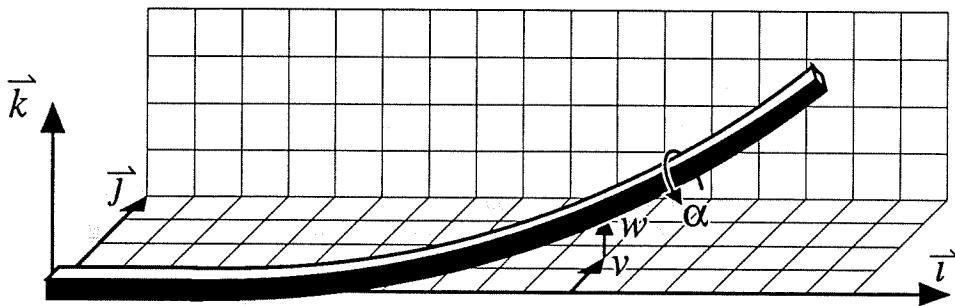


Figure 2.2: Une membrure flexible

$w(x, t)$  ainsi que la torsion  $\alpha(x, t)$  dépendent non seulement du temps mais aussi de la position selon l'axe longitudinal de la membrure. Le modèle exact d'une membrure flexible est donc représenté par des équations aux dérivées partielles plutôt que par des équations aux dérivées ordinaires.

## 2.3 Hypothèses de modélisation

On fait les hypothèses suivantes:

1. La membrure flexible peut-être représentée par un modèle de poutre d'Euler-Bernoulli, ce qui implique:
  - (a) les sections restent planes et perpendiculaires à l'axe neutre;
  - (b) le cisaillement dû à l'effort tranchant est négligé;
  - (c) l'inertie de rotation d'une section est négligée.
2. L'axe neutre ne s'allonge pas.
3. Le matériau n'a pas d'écoulement.
4. Les déformations sont petites ( $< 10 \%$ )

5. La vitesse de rotation est faible de façon à pouvoir négliger les termes de vitesses angulaires au carré

L'utilisation d'un modèle d'Euler-Bernoulli limite la validité du modèle à des membrures dont la longueur est beaucoup plus grande que l'épaisseur. De plus, le modèle n'est valable que pour les basses et moyennes fréquences. Dans les cas où ces limites sont trop contraignantes, il faut utiliser le modèle de Rayleigh ou celui de Timoshenko. Pour la majorité des robots flexibles, un modèle d'Euler-Bernoulli suffit. L'hypothèse 2 implique que la déformation longitudinale est négligeable par rapport aux autres déformations ce qui se vérifie pour les robots flexibles. L'hypothèse 4 permet de considérer la déformation comme étant d'ordre un ( $\mathcal{O}(1)$ ). L'hypothèse 5 revient à supposer que la vitesse de rotation est d'ordre un ( $\mathcal{O}(1)$ ). Cela permet de négliger les effets des forces centrifuges et de Coriolis. Le modèle est donc linéaire selon la vitesse. Cette hypothèse permet une simplification importante de la cinématique d'une membrure flexible car on se limite aux termes d'ordre un. Cette hypothèse se vérifie pour des robots se déplaçant lentement et ayant des membrures relativement courtes. Dans la section (2.5), cette contrainte sera levée.

## 2.4 Cinématique

La cinématique consiste à obtenir la relation entre un repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  attaché à la base de la membrure et un repère  $\mathcal{S}_i$  situé à une position quelconque le long de la membrure (fig. 2.3). À  $x = 0$ , l'axe neutre est tangent à l'axe  $\vec{i}$  du référentiel  $\mathcal{R}_{i-1}$ ; les repères  $\mathcal{R}_{i-1}$  et  $\mathcal{S}_i$  sont donc superposés. On suppose que la position et la vitesse de l'origine de  $\mathcal{R}_{i-1}$ , ainsi que son orientation et sa vitesse de rotation sont connues.

### 2.4.1 Position et vitesse linéaires

La position d'un élément  $dm$ , situé l'origine du repère  $\mathcal{S}_i$ , par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  est:

$${}^{i-1}\boldsymbol{r}_{\mathcal{R}_{i-1},dm} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

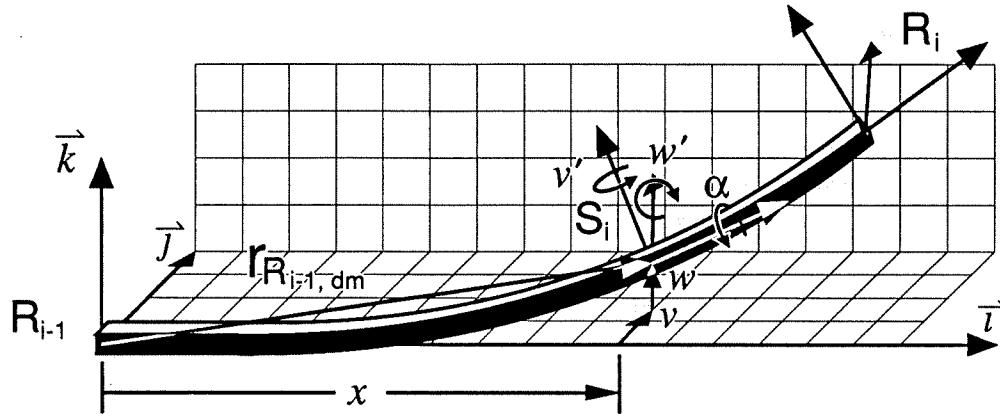


Figure 2.3: Une membrure flexible et ses repères

Le terme  ${}^{i-1}\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1},dm}$  se lit comme étant la position de l'élément  $dm$  par rapport à l'origine du repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  exprimée dans les coordonnées du repère  $\mathcal{R}_{i-1}$ . On suppose qu'une section de la poutre reste à la position  $x$ . La position absolue d'un élément  $dm$  de la poutre située à  $x$  est donc:

$$\mathbf{r}_{dm} = \mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}} + \mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1},dm} \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}}$  la position absolue du repère  $\mathcal{R}_{i-1}$ .

La vitesse absolue d'une section de la poutre s'obtient en dérivant la position (2.2) par rapport au temps. Étant donné que la position d'un élément  $dm$  est définie par rapport à un repère ayant un mouvement de rotation, il faut utiliser les relations du mouvement relatif.

$$\dot{\mathbf{r}}_{dm} = \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}_{i-1}} + \mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1},dm}^* + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_{i-1}} \times \mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1},dm} \quad (2.3)$$

où  $(\cdot)$  indique la dérivée par rapport au temps et  $(\cdot)^*$  indique la dérivée par rapport au temps lorsque le repère est considéré comme fixe.

Des équations (2.2) et (2.3), il est facile d'obtenir la position et la vitesse du repère  $\mathcal{R}_i$ . Il suffit de faire tendre  $x$  vers  $l_i$ , la longueur de la membrure  $i$ , dans (2.1).

#### 2.4.2 Matrice de rotation et vitesse angulaire

De par l'hypothèse du modèle d'Euler-Bernoulli, on considère qu'une section de la poutre subit une rotation d'un angle  $\alpha$  autour de  $x$ , d'un angle

$v'$  autour de  $z$  et d'un angle  $-w'$  autour de  $y$  avec  $()'$  indiquant une dérivée par rapport à  $x$ . En considérant les angles petits on a que  $\cos \theta \simeq 1$  et  $\sin \theta \simeq \theta$  lorsqu'on se limite à l'ordre un. L'ordre dans lequel on prend les angles n'a donc pas d'importance. Ceci ne serait pas vrai si on avait considéré les équations au deuxième ordre<sup>2</sup>.

La matrice de rotation de  $\mathcal{S}_i$  à  $\mathcal{R}_{i-1}$  est donc:

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & -\alpha \\ w' & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

De cette matrice, on obtient la vitesse angulaire du repère  $\mathcal{S}_i$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  de la façon suivante:

$${}^{i-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}}}{dt} (\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}})^T \quad (2.5)$$

La vitesse angulaire  ${}^{i-1}\omega_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}$  s'écrit donc:

$${}^{i-1}\omega_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ -\dot{w}' \\ \dot{v}' \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Cette vitesse aurait pu être déduite de la figure 2.3 par inspection car on se limite à l'ordre un.

La vitesse angulaire absolue du repère  $\mathcal{S}_i$  s'obtient en additionnant la vitesse du repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  à la vitesse angulaire donnée par (2.6). On obtient alors:

$$\omega_{\mathcal{S}_i} = \omega_{\mathcal{R}_{i-1}} + \omega_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i} \quad (2.7)$$

La vitesse angulaire absolue du repère  $\mathcal{R}_i$  attaché à l'extrémité de la poutre s'obtient en faisant tendre  $x$  vers  $l_i$  dans (2.7).

## 2.5 Cinématique à l'ordre deux

Cette section<sup>3</sup> développe la cinématique d'une membrure flexible lorsqu'on conserve les termes de deuxième ordre. Dans ce cas, le choix des coordonnées est plus délicat tel que discuté par Hodges et al. (1980) . Si on

<sup>2</sup>Ce cas sera discuté à la section 2.5.

<sup>3</sup>Cette section peut être sautée sans perte de continuité.

utilise un ensemble d'angles comme les angles d'Euler, la matrice de rotation dépend de l'ordre dans lequel ses angles sont pris. Par exemple la figure 2.3 de la section 2.4 montre une poutre flexible avec  $\alpha$ ,  $v$  et  $w$  comme coordonnées. Pour les fins de l'exemple, ignorons  $\alpha$ . La matrice de rotation  $\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}}$  du repère  $\mathcal{S}_i$  au repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  en utilisant  $v'$  suivit de  $w'$  et en développant le résultat aux ordres un et deux donne le résultat suivant:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}})^{v'w'} &\stackrel{\mathcal{O}(1)}{=} \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & 0 \\ w' & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\mathcal{O}(2)}{=} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) & -v' & -w' \\ v' & 1 - \frac{1}{2}v'^2 & -v'w' \\ w' & 0 & 1 - \frac{1}{2}w'^2 \end{bmatrix} \quad (2.8) \end{aligned}$$

Si l'ordre de rotation est maintenant inversé, c'est-à-dire que  $w'$  vient avant  $v'$ , la matrice de rotation aux premier et deuxième ordres est alors:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}})^{w'v'} &\stackrel{\mathcal{O}(1)}{=} \begin{bmatrix} 1 & -v' & -w' \\ v' & 1 & 0 \\ w' & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{\mathcal{O}(2)}{=} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) & -v' & -w' \\ v' & 1 - \frac{1}{2}v'^2 & 0 \\ w' & -v'w' & 1 - \frac{1}{2}w'^2 \end{bmatrix} \quad (2.9) \end{aligned}$$

Il n'y a pas de différence entre (2.8) et (2.9) à l'ordre un ( $\mathcal{O}(1)$ ), mais bien à l'ordre deux ( $\mathcal{O}(2)$ ). On ne peut donc plus exprimer la position et l'orientation du repère  $\mathcal{S}_i$  sur la membrure flexible aussi simplement que dans le cas linéaire. On utilise plutôt un vecteur  $r_i(x, v, w, \alpha)$  qui définit la position de l'origine de  $\mathcal{S}_i$  par rapport à  $\mathcal{R}_i$  ainsi qu'un vecteur  $\theta_i(x, v, w, \alpha)$  donnant l'orientation de  $\mathcal{S}_i$  par rapport à  $\mathcal{R}_{i-1}$  (fig. 2.4).

Afin de déterminer ces deux vecteurs, j'utilise la torsion  $\kappa_x$  et les courbures  $\kappa_y$  et  $\kappa_z$  comme coordonnées tel que proposé par Johanni (1985). La relation suivante donne une équation différentielle exprimant la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}}$ , de  $\mathcal{S}_i$  à  $\mathcal{R}_{i-1}$ , en terme de  $\kappa$  (Hodges et Dowell, 1974, Johanni, 1985) :

$$\mathcal{S}_i \tilde{\kappa} = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_z & \kappa_y \\ \kappa_z & 0 & -\kappa_x \\ -\kappa_y & \kappa_x & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\mathcal{R}_{i-1}}^{\mathcal{S}_i} \frac{d\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}}}{dx} \implies \frac{d\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}}}{dx} = \mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}} \mathcal{S}_i \tilde{\kappa} \quad (2.10)$$

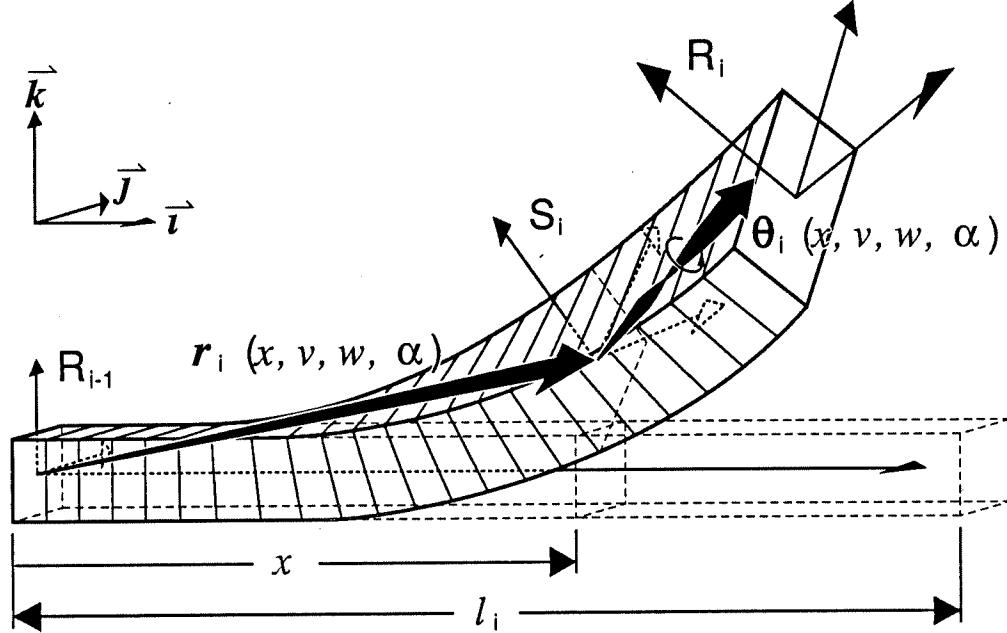


Figure 2.4: Une membrure flexible et ses repères

où  $x$  est la distance le long de l'axe neutre et où les indices  $S_i$  dans  $s_{\tilde{\kappa}}$  indique que  $\tilde{\kappa}$  est défini dans  $S_i$ . Afin de résoudre l'équation différentielle dans (2.10), la matrice de rotation  $R_{S_i}^{R_{i-1}}$  est développée à l'ordre deux:

$$R_{S_i}^{R_{i-1}} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$$

avec  $\mathbf{R}_0$  une matrice identité. Comme  $s_{\tilde{\kappa}}$  caractérise la membrure flexible, il comprend seulement des termes d'ordre un ou plus. L'équation différentielle suivante est alors obtenue pour (2.10):

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{R}_1}{dx}}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{\frac{d\mathbf{R}_2}{dx}}_{\mathcal{O}(2)} = \underbrace{s_{\tilde{\kappa}}}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{\mathbf{R}_1 s_{\tilde{\kappa}}}_{\mathcal{O}(2)} + \underbrace{\mathbf{R}_2 s_{\tilde{\kappa}}}_{\mathcal{O}(3)} \quad (2.11)$$

L'intégration des termes de même ordre de part et d'autre de l'égalité dans (2.11) donne  $\mathbf{R}_1$  and  $\mathbf{R}_2$ :

$$\mathbf{R}_1 = \int_0^x s_{\tilde{\kappa}} d\xi + \mathbf{R}_1(0) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{R}_2 = \int_0^x \mathbf{R}_1 \mathcal{S}_i \tilde{\boldsymbol{\kappa}} dx + \mathbf{R}_2(0) \quad (2.13)$$

Dans notre cas  $\mathbf{R}_1(0)$  et  $\mathbf{R}_2(0)$  sont des matrices nulles car  $\mathcal{S}_i$  est superposé avec  $\mathcal{R}_{i-1}$  pour  $x = 0$ . La solution de (2.12) donne pour  $\mathbf{R}_1$ :

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\int_0^x \kappa_z d\xi & \int_0^x \kappa_y d\xi \\ \int_0^x \kappa_z d\xi & 0 & -\int_0^x \kappa_x d\xi \\ -\int_0^x \kappa_y d\xi & \int_0^x \kappa_x d\xi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Tandis que la solution de (2.13) donne pour  $\mathbf{R}_2$ :

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left( \int_0^x \kappa_z d\xi \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \int_0^x \kappa_y d\xi \right)^2 & \int_0^x \left( \int_0^\xi \kappa_y d\eta \right) \kappa_x d\xi \\ \int_0^x \left( \int_0^\xi \kappa_x d\eta \right) \kappa_y d\xi & -\frac{1}{2} \left( \int_0^x \kappa_z d\xi \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \int_0^x \kappa_x d\xi \right)^2 \\ \int_0^x \left( \int_0^\xi \kappa_x d\eta \right) \kappa_z d\xi & \int_0^x \left( \int_0^\xi \kappa_y d\eta \right) \kappa_z d\xi \\ \int_0^x \left( \int_0^\xi \kappa_z d\eta \right) \kappa_x d\xi \\ \int_0^x \left( \int_0^\xi \kappa_z d\eta \right) \kappa_y d\xi \\ -\frac{1}{2} \left( \int_0^x \kappa_y d\xi \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \int_0^x \kappa_x d\xi \right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

De par les hypothèses, une section de la poutre reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre et la longueur de l'axe neutre reste constante. Mathématiquement, ces hypothèses se traduisent par:

$$\frac{i-1 \mathbf{r}'_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}}{|\mathbf{r}'|} = \mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } |\mathbf{r}'| = 1 \quad (2.16)$$

où  $()' = d() / dx$  et  $\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}$  est le vecteur position de l'origine de  $\mathcal{R}_{i-1}$  à l'origine de  $\mathcal{S}_i$  tandis que les indices impliquent que  $\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}$  est défini dans  $\mathcal{R}_{i-1}$ .

L'équation (2.16) est une équation différentielle ordinaire qui peut être résolue pour  $\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}$ :

$$\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i} = \int_0^x \mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi + \mathbf{r}(0) \quad (2.17)$$

avec  $\mathbf{r}(0) = 0$ . La solution de (2.17) donne:

$$\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i} = \begin{bmatrix} x - \int_0^x \left\{ \frac{1}{2} \left( \int_0^\xi \kappa_z d\eta \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \int_0^\xi \kappa_y d\eta \right)^2 \right\} d\xi \\ \int_0^x \left( \int_0^\xi \kappa_z d\eta \right) d\xi + \int_0^x \left\{ \int_0^\xi \left( \int_0^\eta \kappa_x d\zeta \right) \kappa_y d\eta \right\} d\xi \\ \int_0^x \left( \int_0^\xi -\kappa_y d\eta \right) d\xi + \int_0^x \left\{ \int_0^\xi \left( \int_0^\eta \kappa_x d\zeta \right) \kappa_z d\eta \right\} d\xi \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Afin de simplifier l'écriture, les définitions suivantes sont utilisées:

$$v = \int_0^x \int_0^\xi \kappa_z d\eta d\xi \quad w = - \int_0^x \int_0^\xi \kappa_y d\eta d\xi \quad \alpha = \int_0^x \kappa_x d\xi \quad (2.19)$$

Dans (2.19)  $v$  and  $w$  représentent des flexions pures tandis que  $\alpha$  représente une torsion pure. En fonction de  $v$ ,  $w$  et  $\alpha$ , la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}}$  et le vecteur position  ${}^{i-1}\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}$  s'écrivent (Johanni, 1985, Pfeiffer et Bremer, 1990):

$$\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) & -v' - \int_0^x \alpha' w' d\xi & -w' + \int_0^x \alpha' v' d\xi \\ v' - \int_0^x \alpha w'' d\xi & 1 - \frac{1}{2}(v'^2 + \alpha^2) & -\alpha - \int_0^x v' w'' d\xi \\ w' + \int_0^x \alpha v'' d\xi & \alpha - \int_0^x v'' w' d\xi & 1 - \frac{1}{2}(w'^2 + \alpha^2) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$${}^{i-1}\mathbf{r}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \int_0^x (v'^2 + w'^2) d\xi \\ v - \int_0^x \int_0^\xi w'' \alpha d\eta d\xi \\ w + \int_0^x \int_0^\xi v'' \alpha d\eta d\xi \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La vitesse angulaire  ${}^{i-1}\omega_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}$  du repère  $\mathcal{S}_i$  par rapport au repère  $\mathcal{R}_{i-1}$  s'exprime à l'aide de la matrice de rotation  $\mathbf{R}_{\mathcal{S}_i}^{\mathcal{R}_{i-1}}$  (2.20) ainsi que précisé à la section 2.4 (équation (2.5)). En appliquant (2.5) sur (2.20) et en ne conservant que les termes d'ordre deux ou moins, tout en réarrangeant les termes pour mettre en évidence l'anti-symétrie de  ${}^{i-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i}$ , on obtient la vitesse angulaire suivante:

$${}^{i-1}\omega_{\mathcal{R}_{i-1}, \mathcal{S}_i} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} + \int_0^x (v' \dot{w}'' - w' \dot{v}'') d\xi \\ -\dot{w}' - \int_0^x (\alpha \dot{v}'' - v' \dot{\alpha}') d\xi \\ \dot{v}' + \int_0^x (w' \dot{\alpha}' - \alpha \dot{w}'') d\xi \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

où  $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$ .

## 2.6 Énergie et forces

### 2.6.1 Énergie cinétique

En se rappelant qu'on néglige l'inertie de rotation d'une section de la poutre, l'énergie cinétique d'un élément  $dm$  de la membrure situé à la position  $x$  s'écrit:

$$T_{dm} = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{r}}_{dm} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{dm} dx \quad (2.23)$$

avec  $\rho$  la densité linéaire du matériau. Si on a supposé la vitesse de rotation petite, il faut linéariser (2.23) à l'ordre deux par rapport aux coordonnées rigides et flexibles. L'énergie cinétique totale de la membrure  $i$  s'obtient en intégrant  $T_{dm}$  de 0 à  $l_i$  la longueur de la membrure. Cela donne:

$$T_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho \dot{\mathbf{r}}_{dm} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{dm} dx \quad (2.24)$$

### 2.6.2 Énergie potentielle

L'énergie potentielle provient de deux sources: la flexibilité de la membrure et la gravité. L'énergie potentielle due à la flexibilité s'écrit:

$$Vf_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \begin{bmatrix} v'' & w'' & \alpha' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_z & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & GI_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'' \\ w'' \\ \alpha' \end{bmatrix} dx \quad (2.25)$$

avec  $E$  le module de Young,  $G$  le module de torsion,  $I_y$  et  $I_z$ , les seconds moments d'aire selon  $y$  et  $z$  et  $I_p$  le moment polaire.

L'énergie potentielle due à la gravité s'écrit:

$$Vg_i = - \int_0^{l_i} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{dm} dx \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{g}$  le vecteur de l'accélération gravitationnelle et  $\mathbf{r}_{dm}$  la position d'un élément  $dm$  de la poutre telle que donnée par (2.2).

### 2.6.3 Fonction de dissipation de Rayleigh

L'amortissement dans les membrures flexibles est un sujet complexe. Pour cette raison, on choisit souvent des matériaux ayant très peu d'amortissement afin de pouvoir le négliger. Un modèle possible d'amortissement structural est le modèle de Voigt-Kelvin qui donne la relation suivante entre la contrainte et la déformation (Nashif et al., 1985):

$$\sigma = E(\epsilon + \kappa_e \frac{d\epsilon}{dt}) \quad (2.27)$$

avec  $\kappa_e$  le coefficient d'amortissement interne. Ce modèle représente assez bien le comportement des matériaux à basses fréquences mais a tendance à sur-amortir les hautes fréquences.

La fonction de dissipation de Rayleigh s'écrit alors:

$$R_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \begin{bmatrix} \dot{v}'' & \dot{w}'' & \dot{\alpha}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_z \kappa_e & 0 & 0 \\ 0 & EI_y \kappa_e & 0 \\ 0 & 0 & GI_p \kappa_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{v}'' \\ \ddot{w}'' \\ \ddot{\alpha}' \end{bmatrix} dx \quad (2.28)$$

avec  $\kappa_e$  et  $\kappa_g$  les coefficients d'amortissement interne en flexion et en torsion. En général, on considère  $\kappa_g \approx \kappa_e$ .

### 2.6.4 Forces généralisées

En général, pour un robot flexible il n'y a pas d'actionneur agissant directement sur les membrures. L'action se produit au niveau de l'articulation par l'intermédiaire du moteur. Les forces généralisées associées à une membrure flexible sont donc nulles.

## 2.7 Discrétilsation

Jusqu'à présent aucune attention spéciale n'a été portée au fait qu'une membrure flexible est un système à paramètres distribués. Cette caractéristique se traduit par la dépendance des déformations  $v$ ,  $w$  et  $\alpha$  de l'espace  $x$  et du temps  $t$ :

$$v = v(x, t), \quad w = w(x, t), \quad \alpha = \alpha(x, t)$$

La dynamique de la membrure flexible est donc représentée par des équations aux dérivées partielles.

Dans le cas d'un robot, les coordonnées des moteurs et des articulations sont discrètes<sup>4</sup> tandis que celles des membrures sont distribuées. Le système d'équations résultant est donc hybride, c'est-à-dire composé d'équations aux dérivées ordinaires et d'équations aux dérivées partielles. Un tel système présente certains avantages au niveau de l'analyse. Par contre, il est difficile à utiliser pour la simulation ou le contrôle en temps réel.

Une approche plus pratique est de discrétilsier spatialement les déformations en les exprimant en terme de séries. L'expansion modale établit que la réponse d'un système linéaire peut s'exprimer comme la somme infinie de ses modes propres (Meirovitch, 1967). En pratique, les modes propres ne peuvent être trouvés que pour des cas simples. On utilise donc des méthodes approximatives. Ainsi, la méthode des modes supposés<sup>5</sup> permet d'écrire:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= {}^v\phi^T(x) {}^v\boldsymbol{\eta}(t) & w(x, t) &= {}^w\phi^T(x) {}^w\boldsymbol{\eta}(t) & \alpha(x, t) &= {}^\alpha\phi^T(x) {}^\alpha\boldsymbol{\eta}(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

$${}^v\phi, {}^v\boldsymbol{\eta} \in \Re^{\nu_v} \quad {}^w\phi, {}^w\boldsymbol{\eta} \in \Re^{\nu_w} \quad {}^\alpha\phi, {}^\alpha\boldsymbol{\eta} \in \Re^{\nu_\alpha}$$

Les  ${}^v\phi(x)$ ,  ${}^w\phi(x)$  et  ${}^\alpha\phi(x)$  sont composés de fonctions admissibles qui satisfont donc les conditions frontières géométriques. Ces fonctions sont des formes qu'on suppose pour la membrure. Les  $\boldsymbol{\eta}(t)$  représentent les coordonnées généralisées discrètes. À une membrure flexible, on associe donc le vecteur de coordonnées généralisées suivant:

$$\mathbf{q}_f = \begin{bmatrix} {}^v\boldsymbol{\eta} \\ {}^w\boldsymbol{\eta} \\ {}^\alpha\boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

<sup>4</sup>Elles ne dépendent que du temps et pas de l'espace.

<sup>5</sup>Cette méthode s'apparente aux méthodes de Ritz.

de dimension  $n_f = \nu_v + \nu_w + \nu_\alpha$ .

En utilisant la méthode des modes supposés, une déformation est représentée par une somme pondérée des fonctions de forme où les facteurs de pondération sont les coordonnées généralisées. La série converge pour un nombre de fonctions suffisamment grand. Un choix judicieux des fonctions de forme permet de réduire le nombre de termes dans la série ce qui présente certains avantages pour le contrôle. Le nombre de modes à retenir dépend de la plage de fréquences qui est excitée et de la différence entre les modes de déformations réels et ceux supposés.

La contribution de chacun des modes varie selon les conditions et est donc difficile à quantifier exactement. L'idée générale est de voir quel est l'apport d'un mode supplémentaire au mouvement. Par exemple, une simulation réalisée avec deux fonctions de forme est comparée à une autre pour laquelle trois fonctions sont utilisées. Si la différence entre les deux simulations est minime alors deux fonctions sont suffisantes. Par contre, une autre simulation peut infirmer ce résultat. Si le système est excité à la fréquence du quatrième mode, celui-ci va entrer en résonnance. Mais avec seulement deux modes conservés, cette résonance n'apparaît pas en simulation. Cette méthode de comparaison a le désavantage de ne pouvoir s'appliquer avant de faire la simulation. Il existe certaines méthodes permettant de déterminer l'importance d'un mode sans avoir à faire de simulation (Hughes, 1987, van Woerkom, 1990).

Le nombre de modes à utiliser dans la méthode des modes supposés est le facteur le plus important pour la validité de cette méthode. Il faut faire une nuance entre l'approximation des fonctions propres d'un système linéaire par des fonctions approximatives et l'approximation du système par l'expansion modale qui est une méthode exacte lorsque le nombre de modes tend vers l'infini. En effet, dans l'expansion modale de l'équation aux dérivées partielles linéaire, seuls les deux premiers modes peuvent avoir de l'importance. Par contre, pour bien approximer ces deux modes, il peut être nécessaire d'utiliser trois ou quatre fonctions admissibles.

**Exemple** Considérons le cas d'une membrure en rotation (fig. 2.5). La membrure étant encastrée dans l'axe implique les conditions frontières géométriques suivantes:

$$v(x = 0, t) = 0 \text{ et } v'(x = 0, t) = 0$$

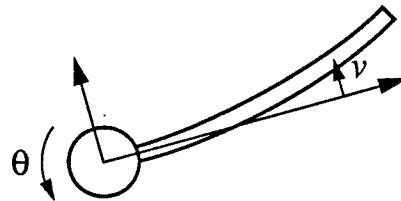


Figure 2.5: Membrure en rotation

Un bon choix pour les fonctions  ${}^v\phi(x)$  est de prendre les modes naturels d'une poutre encastrée sans charge à l'extrémité. En supposant que pour la plage de fréquences désirée, trois modes suffisent, la déformation  $v$  en un point quelconque de la poutre est représentée à la figure 2.6.

Si des fonctions polynomiales avaient été choisies, il en faudrait probablement plus pour atteindre une précision donnée. Remarquons que dans le cas linéaire, le meilleur choix que l'on puisse faire est de prendre les fonctions propres du système. Il faut cependant qu'elles puissent se calculer.

D'autres méthodes existent pour approximer les déformations. Ces méthodes sont basées sur la définition de polynômes par morceau par opposition aux méthodes de Ritz qui utilisent une fonction définie sur toute la longueur. Par exemple, Dancose et al. (1989) utilisent des splines cubiques tandis que Truckenbrodt (1980) prend des B-splines cubiques. Il est aussi possible d'utiliser la méthode des éléments finis (Gerardin et al., 1983, Levinson et Kane, 1981). Ces méthodes exigent en général un plus grand nombre de termes pour bien représenter le système.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre a permis d'établir les relations de base pour modéliser une membrure flexible. Le modèle est général car trois déformations sont considérées et le mouvement de la base de la poutre est supposé comme étant quelconque. Les énergies et la fonction de dissipation de Rayleigh ont été obtenues en fonction des déformations qui sont des variables continues sur l'espace. Il faut donc substituer la discrétisation des déformations avant d'appliquer la méthode de Lagrange.

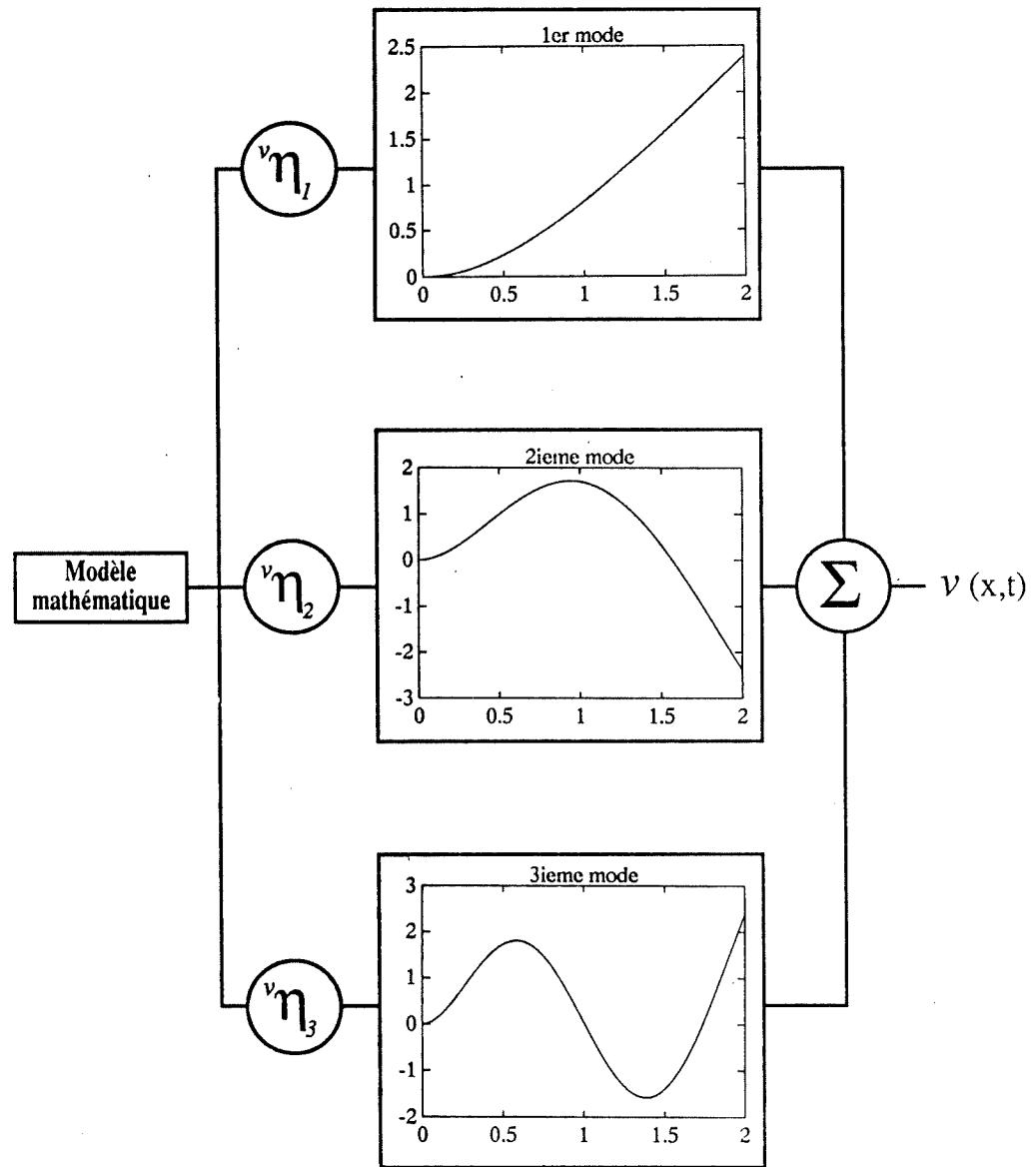


Figure 2.6: Déformation  $v$  en fonction des modes naturels d'une poutre encastrée

# Chapitre 3

## Exemple de modélisation

### 3.1 Introduction

Ce chapitre présente la modélisation d'une membrure flexible en rotation dans le plan horizontal. Seule la déformation dans le plan de rotation est considérée. La première section présente le système modélisé et établit les hypothèses. Dans la deuxième section, on obtient un modèle linéaire en considérant la vitesse de rotation petite. La troisième section discute du modèle lorsqu'on ne fait pas l'hypothèse de faible vitesse de rotation. Cela implique donc de considérer la cinématique au deuxième ordre. Cette section peut être sautée dans une première lecture mais j'encourage le lecteur à regarder le graphique 3.2 qui montre ce qui se passe lorsqu'on ne considère pas la vitesse de rotation petite tout en se limitant au premier ordre pour la cinématique. Le système devient instable à une certaine vitesse de rotation.

### 3.2 Le robot flexible modélisé

Le robot modélisé est présenté à la figure(3.1). En plus des hypothèses du chapitre 2, on considère que la poutre est uniforme. La densité  $\rho$ , le module de Young  $E$ , le second moment d'aire  $I_z$  et le coefficient d'amortissement interne  $\kappa_e$  sont donc constants. Cette hypothèse simplifie le calcul des intégrales. La poutre à une longueur  $l$ . À la base, le moteur applique un moment  $T$ . L'inertie du moteur est  $I_m$  et son amortissement visqueux est  $\mu_m$ . Enfin, la poutre n'est flexible que dans le plan horizontal, seule la déformation  $v(x, t)$  existe donc.

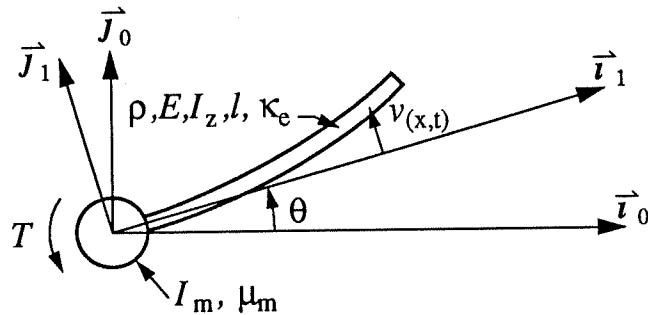


Figure 3.1: Membrane flexible en rotation dans le plan horizontal

Les référentiels suivants sont utilisés: un référentiel inertiel<sup>1</sup>  $\mathcal{I}$  et un référentiel en mouvement  $\mathcal{R}_1$ . Il n'est pas nécessaire de considérer un repère  $\mathcal{S}_1$  sur la poutre car les relations du chapitre 2 ont été obtenues en fonction des vecteurs unitaires du repère attaché à la base de la poutre, ici  $\mathcal{R}_1$ .

### 3.3 Modèle linéaire

Un modèle linéaire est obtenu en considérant que la vitesse de rotation de la base est petite. Cela permet de limiter la cinématique à l'ordre un. Je rappelle l'importance de faire cette hypothèse lorsqu'on limite la cinématique à l'ordre un. Sinon le modèle obtenu présente la caractéristique peu intéressante d'avoir ces fréquences naturelles qui diminuent lorsque la vitesse de rotation augmente. Cette situation est évidemment impossible physiquement.

Le développement du modèle est suffisamment détaillé pour que le lecteur puisse le refaire “aisément”. Étant donné que la discrétisation n'est nécessaire que pour l'application de la méthode de Lagrange, les énergies et la fonction de dissipation de Rayleigh seront obtenues en utilisant la forme continue de la déformation  $v$ . Par la suite le Lagrangien sera écrit sous forme discrète.

---

<sup>1</sup>C'est-à-dire qu'il n'a pas d'accélération.

### 3.3.1 Cinématique

Les coordonnées généralisées du système sont:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ {}^v\boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

avec:

$${}^v\boldsymbol{\eta} \in \Re^{\nu_v}$$

où  $\nu_v$  est le nombre de termes retenus pour discréteriser la déformation  $v$ .

Étant donné que la base ne se déplace pas en translation, la position absolue d'un élément  $dm$  est égale à la position par rapport à  $\mathcal{R}_1$ . Elle est donc donnée directement par (2.1):

$${}^1\boldsymbol{r}_{dm} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

L'indice 1 dans  ${}^1\boldsymbol{r}_{dm}$  indique que le vecteur est exprimé en utilisant les vecteurs unitaires du repère  $\mathcal{R}_1$ . La vitesse absolue de l'élément  $dm$  est (de 2.3):

$${}^1\dot{\boldsymbol{r}}_{dm} = {}^1\boldsymbol{r}_{dm}^* + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\boldsymbol{r}_{dm} \quad (3.3)$$

La vitesse de rotation du repère  $\mathcal{R}_1$  est:  ${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}\vec{k}_1$  tandis que la dérivée de  ${}^1\boldsymbol{r}_{dm}$  dans  $\mathcal{R}_1$  s'écrit:  ${}^1\boldsymbol{r}_{dm}^* = \dot{v}\vec{j}_1$ . L'équation (2.3) se récrit donc:

$${}^1\dot{\boldsymbol{r}}_{dm} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}v \\ \dot{v} + x\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.3.2 Énergie et forces

L'énergie cinétique du moteur est:

$$T_m = \frac{1}{2}I_m\dot{\theta}^2 \quad (3.5)$$

L'énergie cinétique d'un élément  $dm$  s'obtient de (2.23)

$$\begin{aligned} T_{dm} &= \frac{1}{2}\rho {}^1\dot{\boldsymbol{r}}_{dm} \cdot {}^1\dot{\boldsymbol{r}}_{dm} dx \\ &= \frac{1}{2}(\rho\dot{\theta}^2v^2 + \rho\dot{v}^2 + 2\rho x\dot{\theta}\dot{v} + \rho x^2\dot{\theta}^2) dx \end{aligned} \quad (3.6)$$

La linéarisation de l'énergie cinétique d'un élément  $dm$  à l'ordre deux par rapport à  $\theta$  et  $v$  donne:

$$T_{dm} = \left( \frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 + \rho x \dot{\theta} \dot{v} + \frac{1}{2} \rho x^2 \dot{\theta}^2 \right) dx \quad (3.7)$$

L'énergie cinétique du système s'obtient en intégrant  $T_{dm}$  sur la longueur de la poutre et en y additionnant  $T_m$ :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2 + \int_0^l \left( \frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 + \rho x \dot{\theta} \dot{v} + \frac{1}{2} \rho x^2 \dot{\theta}^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \dot{\theta}^2 + \int_0^l \left( \rho x \dot{\theta} \dot{v} + \frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 \right) dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'énergie potentielle du système provient uniquement de la poutre flexible. Elle est donnée par (2.25):

$$V = \frac{1}{2} EI_z \int_0^l v''^2 dx \quad (3.9)$$

Tandis que l'amortissement provient du moteur et de la poutre. La fonction de dissipation de Rayleigh s'écrit donc (de 2.28):

$$R = \frac{1}{2} \mu_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} EI_z \kappa_e \int_0^l \dot{v}''^2 dx \quad (3.10)$$

La seule force externe est le moment appliqué par le moteur. Le vecteur de force généralisée est donc:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_m \\ \mathbf{Q}_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

où  $\vec{0}$  a la dimension de  ${}^v\boldsymbol{\eta}$ .

### 3.3.3 Discrétisation

La discrétisation se fait en appliquant la méthode des modes supposés (2.29):

$$v(x, t) = {}^v\boldsymbol{\phi}^T(x) {}^v\boldsymbol{\eta}(t) \quad (3.12)$$

avec  ${}^v\boldsymbol{\phi}$ ,  ${}^v\boldsymbol{\eta} \in \Re^{\nu_v}$ . Le Lagrangien s'écrit donc:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} \left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \dot{\theta}^2 + \rho \dot{\theta} \int_0^l x {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{2} \rho {}^v\boldsymbol{\eta}^T \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi} {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} \\ &\quad - \frac{1}{2} EI_z {}^v\boldsymbol{\eta}^T \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi}'' {}^v\boldsymbol{\phi}''^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Tandis que la fonction de dissipation de Rayleigh devient:

$$R = \frac{1}{2} \mu_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} EI_z \kappa_e {}^v\boldsymbol{\eta}^T \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi}'' {}^v\boldsymbol{\phi}''^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.14)$$

### 3.3.4 Dérivation des équations

Pour obtenir les équations du mouvement, il faut maintenant appliquer les équations de Lagrange (Piedboeuf, 1992). Pour la poutre en rotation, ces équations s'écrivent:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, 1 + \nu_v \quad (3.15)$$

avec les coordonnées généralisées  $q_i$  données par (3.1).

Pour la coordonnée généralisée du moteur,  $\theta$ , les différents termes de (3.15) donnent:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \dot{\theta} + \rho \int_0^l x {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \ddot{\theta} + \rho \int_0^l x {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = \mu_m \dot{\theta} \quad (3.19)$$

En remplaçant (3.17) à (3.19) dans (3.15), on trouve l'équation du mouvement associée à  $\theta$ :

$$\left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \ddot{\theta} + \rho \int_0^l x {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mu_m \dot{\theta} = T \quad (3.20)$$

Dans le cas des coordonnées généralisées associées à la membrure flexible, les équations du mouvement s'écrivent en une étape en appliquant les équations de Lagrange avec le vecteur  ${}^v\boldsymbol{\eta}$  plutôt qu'avec un scalaire. L'équation (3.15) se récrit:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial {}^v\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial R}{\partial {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}}} = 0 \quad (3.21)$$

Les différents termes apparaissant dans (3.21) s'écrivent:

$$\frac{\partial L}{\partial {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}}} = \rho \dot{\theta} \int_0^l x^v \phi dx + \rho \int_0^l {}^v\phi^v \phi^T dx {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial {}^v\boldsymbol{\eta}} \right) = \rho \ddot{\theta} \int_0^l x^v \phi dx + \rho \int_0^l {}^v\phi^v \phi^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial {}^v\boldsymbol{\eta}} = -EI_z \int_0^l {}^v\phi''^v \phi''^T dx {}^v\boldsymbol{\eta} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial R}{\partial {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}}} = EI_z \kappa_e \int_0^l {}^v\phi''^v \phi''^T dx {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}} \quad (3.25)$$

En remplaçant (3.23) à (3.25) dans (3.21), on trouve l'équation du mouvement associée à  ${}^v\boldsymbol{\eta}$ :

$$\begin{aligned} & \rho \ddot{\theta} \int_0^l x^v \phi dx + \rho \int_0^l {}^v\phi^v \phi^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} \\ & + EI_z \kappa_e \int_0^l {}^v\phi''^v \phi''^T dx {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}} + EI_z \int_0^l {}^v\phi''^v \phi''^T dx {}^v\boldsymbol{\eta} = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sous forme matricielle, les équations du mouvement (3.20) et (3.26) se récrivent:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{K}\boldsymbol{q} = \mathbf{f} \text{ avec } \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ {}^v\boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Les matrices de masse  $\mathbf{M}$ , d'amortissement  $\mathbf{B}$  et de rigidité  $\mathbf{K}$  ainsi que le vecteur des forces appliquées  $\mathbf{f}$  s'écrivent:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_m + \frac{\rho l^3}{3} & \rho \int_0^l x^v \phi^T dx \\ \rho \int_0^l x^v \phi dx & \rho \int_0^l {}^v\phi^v \phi^T dx \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mu_m & \vec{0}^T \\ \vec{0} & EI_z \kappa_e \int_0^l {}^v\phi'''{}^v\phi''^T dx \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & EI_z \int_0^l {}^v\phi'''{}^v\phi''^T dx \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} T \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

où  $\vec{0}$  est un vecteur ayant la dimension de  ${}^v\eta$ .

## 3.4 Modèle non-linéaire

Cette section<sup>2</sup> discute du cas où la vitesse de rotation de la base n'est pas petite. Il faut alors utiliser la cinématique à l'ordre deux pour obtenir un modèle correct. C'est-à-dire un modèle qui reflète bien l'augmentation de la rigidité avec la vitesse de rotation.

### 3.4.1 Cinématique

La cinématique d'une poutre flexible à l'ordre deux a été développée à la section 2.5. La position d'un élément  $dm$  sur la poutre est donnée par (2.21). Sachant que la base ne se déplace pas et ne considérant que la déformation  $v$ , on obtient l'équation suivante pour la position absolue d'un élément  $dm$ :

$${}^1\mathbf{r}_{dm} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} \int_0^x v'^2 d\xi \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La vitesse absolue d'un élément  $dm$  s'obtient en appliquant (2.3). On obtient:

$${}^1\dot{\mathbf{r}}_{dm} = \begin{bmatrix} - \int_0^x v' \dot{v}' d\xi - \dot{\theta} v \\ \dot{v} + \dot{\theta} \left( x - \frac{1}{2} \int_0^x v'^2 d\xi \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

---

<sup>2</sup>Cette section peut être sautée sans perte de continuité.

### 3.4.2 Énergie

Seule l'énergie cinétique va différer du cas linéaire. L'énergie cinétique d'un élément  $dm$  est:

$$\begin{aligned} T_{dm} = & \left[ \frac{1}{4} \rho \left( \int_0^x v' \dot{v}' d\xi \right)^2 + \rho \dot{\theta} v \int_0^x v' \dot{v}' d\xi + \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 v^2 + \frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 + \rho x \dot{\theta} \dot{v} \right. \\ & - \frac{1}{2} \rho \dot{\theta} \dot{v} \int_0^x v'^2 d\xi + \frac{1}{2} \rho x^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \rho x \dot{\theta}^2 \int_0^x v'^2 d\xi \\ & \left. + \frac{1}{8} \rho \dot{\theta}^2 \left( \int_0^x v'^2 d\xi \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

La linéarisation de l'énergie cinétique à l'ordre deux par rapport à  $v$  donne:

$$T_{dm} = \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 v^2 + \frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 + \rho x \dot{\theta} \dot{v} + \frac{1}{2} \rho x^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \rho x \dot{\theta}^2 \int_0^x v'^2 d\xi \right) dx \quad (3.35)$$

Par rapport au cas linéaire (3.7), on voit que l'énergie cinétique en considérant une grande vitesse de rotation comporte deux termes supplémentaires. Le premier provient d'un terme d'ordre un dans la cinématique d'une membrure flexible tandis que le deuxième résulte d'un terme d'ordre deux.

Étant donné que l'énergie potentielle n'est pas affectée par les termes d'ordre deux, on peut écrire directement le Lagrangien sous forme discrète:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \dot{\theta}^2 + \rho \dot{\theta} \int_0^l x^v \phi^T dx^v \ddot{\eta} + \frac{1}{2} \rho^v \eta^T \int_0^l v \phi^v \phi^T dx^v \ddot{\eta} \\ & + \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 v \eta^T \int_0^l v \phi^v \phi^T dx^v \eta - \frac{1}{2} \rho \dot{\theta}^2 v \eta^T \int_0^l x \int_0^x v \phi'^v \phi'^T d\xi dx^v \eta \\ & - \frac{1}{2} EI_z v \eta^T \int_0^l v \phi''^v \phi''^T dx^v \eta \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.4.3 Dérivation des équations

On peut maintenant appliquer la méthode de Lagrange. Pour la coordonnée  $\theta$  du moteur, on obtient l'équation suivante:

$$\left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \ddot{\theta} + \rho \int_0^l x^v \phi^T dx^v \ddot{\eta} + \rho \ddot{v} \eta^T \int_0^l v \phi^v \phi^T dx^v \eta + 2\rho \ddot{v} \eta^T \int_0^l v \phi^v \phi^T dx^v \ddot{\eta}$$

$$-\rho\ddot{\theta}^v\boldsymbol{\eta}^T \int_0^l x \int_0^x {}^v\boldsymbol{\phi}'{}^v\boldsymbol{\phi}'^T d\xi dx {}^v\boldsymbol{\eta} - 2\rho\dot{\theta}^v\boldsymbol{\eta}^T \int_0^l x \int_0^x {}^v\boldsymbol{\phi}'{}^v\boldsymbol{\phi}'^T d\xi dx {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}} + \mu_m \dot{\theta} = T \quad (3.37)$$

On constate que (3.37) possède des termes d'ordre deux en  ${}^v\boldsymbol{\eta}$ . Étant donné qu'on désire une équation exacte à l'ordre un seulement, ces termes peuvent être éliminés<sup>3</sup>. L'équation du mouvement pour  $\theta$  se récrit donc:

$$\left( I_m + \frac{\rho l^3}{3} \right) \ddot{\theta} + \rho \int_0^l x {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mu_m \dot{\theta} = T \quad (3.38)$$

On constate qu'à l'ordre un l'équation associée à  $\theta$  lorsqu'on ne considère pas  $\dot{\theta}$  petit est la même que pour le modèle linéaire (3.20).

Pour les coordonnées flexibles  ${}^v\boldsymbol{\eta}$  l'équation du mouvement est:

$$\begin{aligned} \rho\ddot{\theta} \int_0^l x {}^v\boldsymbol{\phi} dx + \rho \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi} {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\ddot{\boldsymbol{\eta}} - \rho\dot{\theta}^2 \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi} {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\boldsymbol{\eta} + \rho\dot{\theta}^2 \int_0^l x \int_0^x {}^v\boldsymbol{\phi}'{}^v\boldsymbol{\phi}'^T d\xi dx {}^v\boldsymbol{\eta} \\ + EI_z \kappa_e \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi}''{}^v\boldsymbol{\phi}''^T dx {}^v\dot{\boldsymbol{\eta}} + EI_z \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi}''{}^v\boldsymbol{\phi}''^T dx {}^v\boldsymbol{\eta} = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

On constate que par rapport à l'équation du modèle linéaire (3.26), (3.39) possède deux termes supplémentaires. Le premier:

$$-\rho\dot{\theta}^2 \int_0^l {}^v\boldsymbol{\phi} {}^v\boldsymbol{\phi}^T dx {}^v\boldsymbol{\eta}$$

provient d'un terme d'ordre un dans la cinématique. Ce terme diminue la rigidité lorsque la vitesse de rotation augmente. Le deuxième terme:

$$+\rho\dot{\theta}^2 \int_0^l x \int_0^x {}^v\boldsymbol{\phi}'{}^v\boldsymbol{\phi}'^T d\xi dx {}^v\boldsymbol{\eta}$$

est dû au terme d'ordre deux dans la cinématique et il augmente la rigidité lorsque la vitesse de rotation augmente.

Afin d'étudier l'effet de ces deux termes, on linéarise le modèle autour d'une vitesse de rotation donnée. Ensuite on regarde la fréquence du premier mode en fonction de la vitesse de rotation lorsque la cinématique est limitée à l'ordre un et lorsqu'on la développe à l'ordre deux. Pour la démonstration, on

---

<sup>3</sup>On peut même dire que ces termes doivent être éliminé car si on voulait un modèle exact à l'ordre deux, il faudrait développer la cinématique à l'ordre trois afin d'avoir un modèle consistant.

néglige l'amortissement. La matrice de masse reste identique à (3.28) tandis que le seul terme non-nul dans la matrice de rigidité (3.30) devient:

$$-\rho\dot{\theta}^2 \int_0^l {}^v\phi {}^v\phi^T dx {}^v\eta + \rho\dot{\theta}^2 \int_0^l x \int_0^x {}^v\phi' {}^v\phi'^T d\xi dx {}^v\eta + EI_z \int_0^l {}^v\phi'' {}^v\phi''^T dx {}^v\eta \quad (3.40)$$

La solution du problème aux valeurs propres:

$$(\omega^2 M - K)q = 0 \quad (3.41)$$

donne les fréquences propres du système. En utilisant les valeurs suivantes:  $E = 71 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 0,349 \text{ kg/m}$ ,  $L = 2,2 \text{ m}$ ,  $I_z = 1,32 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ , on obtient les équations suivantes pour le carré de la première fréquence:

$$\omega_{O(1)}^2 = 305.6 - 2.16\dot{\theta}^2 \quad (3.42)$$

$$\omega_{O(2)}^2 = 305.6 + 0.418\dot{\theta}^2 \quad (3.43)$$

où  $\omega_{O(1)}^2$  est la fréquence lorsque la cinématique à l'ordre un est utilisée tandis que  $\omega_{O(2)}^2$  est la fréquence en utilisant la cinématique à l'ordre deux. Le graphique 3.2 montrant le rapport  $\omega^2/\omega_{\dot{\theta}=0}^2$  est frappant. Lorsqu'on ne considère pas les termes d'ordre deux dans la cinématique, la fréquence diminue et  $\omega^2/\omega_{\dot{\theta}=0}^2$  devient même négatif. De plus on constate que l'effet du terme provenant de la cinématique à l'ordre un est assez marqué. Il ne peut donc pas être négligé tel que mentionné par certains auteurs sauf si on ajoute l'hypothèse que la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est petite.

### 3.5 Simulation

Afin de pouvoir simuler le système, il faut calculer les intégrales des fonctions de forme. Notons que toutes ces intégrales sont indépendantes du temps. Elles peuvent donc être calculées hors ligne une fois pour toute. Le vecteur des fonctions de forme s'écrit:

$${}^v\phi = \begin{bmatrix} {}^v\phi_1 \\ {}^v\phi_2 \\ \vdots \\ {}^v\phi_{\nu_v} \end{bmatrix}$$

où  $\nu_v$  est le nombre de fonctions de forme retenu. Deux possibilités pour construire les fonctions de forme sont discutées: prendre les fonctions propres d'une poutre encastrée sans charge ou choisir les splines cubiques.

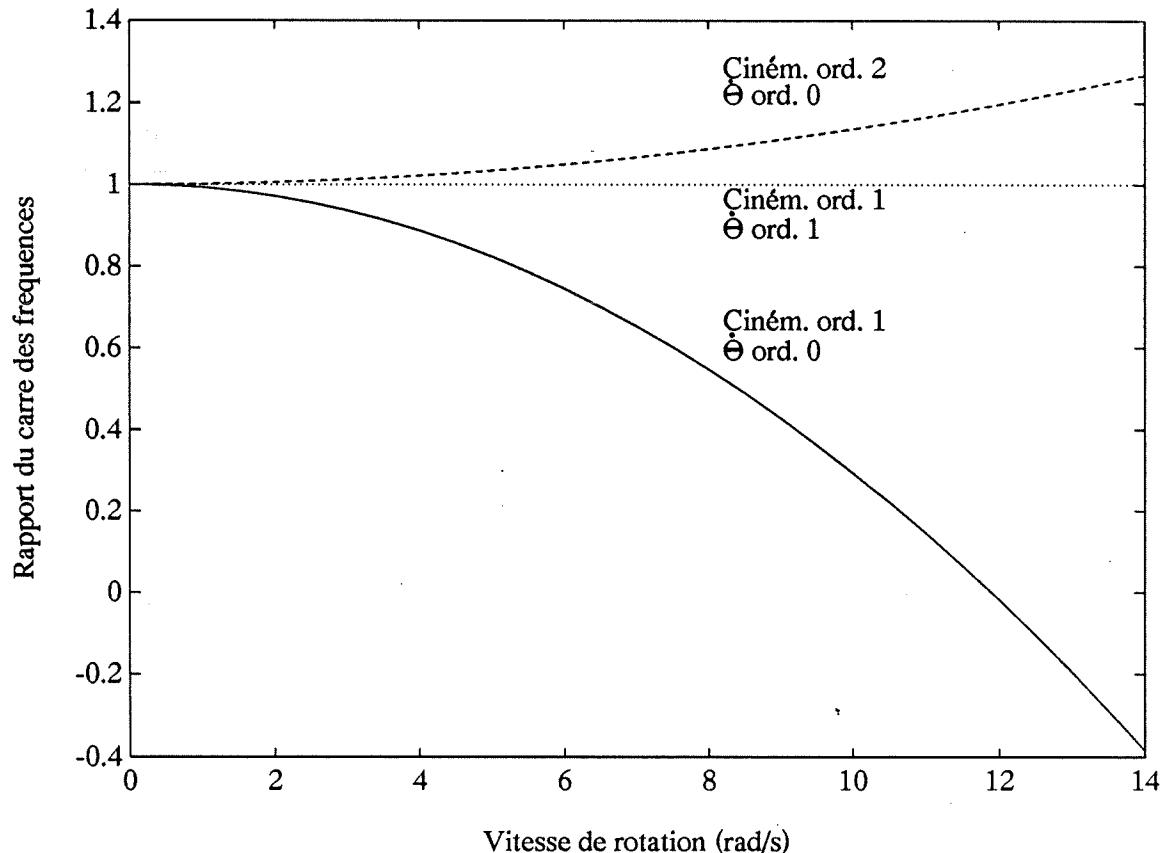


Figure 3.2: Première fréquence d'une poutre en rotation en négligeant les termes d'ordre deux et en les incluant

### 3.5.1 Fonctions propres de la poutre encastrée sans charge

Ces fonctions sont les solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$-\rho\ddot{v} - EI_z v''' = 0 \quad (3.44)$$

$$v_0 = 0 \quad v'_0 = 0 \quad v''_L = 0 \quad v'''_L = 0$$

**Fonctions propres** Les fonctions propres, solution de (3.44) et des conditions frontières associées, sont:

$${}^v\phi_i(x) = a_i \left[ \sin \frac{\lambda_i x}{L} - \sinh \frac{\lambda_i x}{L} + c_i \left( \cos \frac{\lambda_i x}{L} - \cosh \frac{\lambda_i x}{L} \right) \right] \quad (3.45)$$

avec

$$\lambda_i^4 = \frac{\rho\omega_i^2 L^4}{EI_z}$$

où  $\omega_i$  est la fréquence naturelle du  $i^{\text{ème}}$  mode en radians par seconde.

La constante  $c_i$  apparaissant dans l'équation de  ${}^v\phi_i$  (3.44) est:

$$c_i = -\frac{\sin \lambda_i + \sinh \lambda_i}{\cos \lambda_i + \cosh \lambda_i} \quad (3.46)$$

**Équation caractéristique** Les valeurs propres  $\lambda_i$  sont les solutions de l'équation caractéristique:

$$\cos \lambda_i \cosh \lambda_i + 1 = 0 \quad (3.47)$$

**Relations d'orthogonalité** Deux relations d'orthogonalité permettent de déterminer les valeurs des constantes de normalisation  $a_i$ .

$$\int_0^L \rho {}^v\phi_i {}^v\phi_j dx = \delta_{ij} \quad (3.48)$$

$$\int_0^L EI_z {}^v\phi_i''' {}^v\phi_j'' dx = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (3.49)$$

où  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker. Les deux conditions d'orthogonalité étant redondantes, la deuxième peut servir à valider les résultats.

### 3.5.2 Splines cubiques

Les fonctions propres d'une poutre encastrée utilisées dans la section précédente sont définies sur toute la longueur de la poutre. Ceci implique donc une fonction relativement complexe ce qui peut causer certains problèmes numériques. Un moyen d'éviter cela est de définir les fonctions proposées par morceaux. La poutre est alors divisée en un certain nombre d'intervalles et un polynôme de degré réduit est utilisé pour chaque intervalle.

Une façon de générer ces polynômes est d'utiliser les splines cubiques (e.g. Dancose et al., 1989, Gebler, 1987) ou encore les B-splines cubiques qui permettent de réduire le nombre d'intervalles (Truckenbrodt, 1980). La méthode des splines s'apparente aux méthodes d'éléments finis. La différence est que les splines exigent la continuité jusqu'à la dérivée seconde entre deux polynômes alors que les éléments finis ne demandent que la continuité de la dérivée première.

Cette section n'a pas pour but d'exposer la théorie des splines ou des éléments finis mais de donner au lecteur des fonctions de forme simples. Cela permettra de solutionner les différentes intégrales du modèle sans trop de difficulté.

Pour une membrure flexible de  $0,625\text{ m}$  de longueur avec  $\rho = 1,12\text{ kg/m}$  et  $EI_z = 218\text{ Nm}^2$ , Gebler (1987) propose les deux fonctions cubiques suivantes:

$${}^v\phi_1(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (3.50)$$

$${}^v\phi_2(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad (3.51)$$

Gebler (1987) indique que ces fonctions donnent des résultats satisfaisants pour un robot expérimental. Notons que ces fonctions sont définies pour un seul intervalle, dont la longueur est la longueur de la membrure.

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre a illustré la modélisation d'un robot flexible à l'aide de l'exemple maintenant classique d'une membrure en rotation dans le plan horizontal. La modélisation a été faite en utilisant la méthode de Lagrange. Une comparaison des modèles obtenus en considérant la cinématique à l'ordre

un et à l'ordre deux montre l'importance de considérer la vitesse angulaire petite lorsqu'on utilise la cinématique à l'ordre un.

# **Chapitre 4**

## **Conclusion**

Ce rapport a introduit la modélisation des robots flexibles en utilisant la méthode de Lagrange. On a modélisé une membrure flexible type en supposant qu'on connaît le mouvement de la base de la membrure. Lors du développement de la cinématique d'une membrure flexible, on a insisté particulièrement sur l'importance de développer la cinématique à l'ordre deux si les vitesses angulaires et les forces appliquées ne sont pas petites. La modélisation a ensuite été illustrée sur une membrure flexible en rotation dans le plan horizontal.



# Bibliographie

- [1] S. Dancose, J. Angeles, and N. Hori. Optimal vibration control of a rotating flexible beam. *ASME Diagnostics, Vehicle Dynamics and Special Topics*, 259–264, 1989.
- [2] M. Gérardin, G. Robert, and C. Bernardin. Dynamic modelling of manipulators with flexible members. In *Advanced Software in Robotics (AIM)*, Liège, Belgium, May 1983.
- [3] B. Gebler. *Modellbildung, Regelung und Steuerung für elastische Industrieroboter*. Volume Reihe 11,, VDI Verlag Fortschritt-Berichte, Düsseldorf, 1987.
- [4] Dewey H. Hodges and E. H. Dowell. *Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades*. Technical Report, NASA, December 1974. TN D-7818.
- [5] Dewey H. Hodges, Robert A. Ormiston, and David A. Peters. *On the Nonlinear Deformation Geometry of Euler-Bernoulli Beams*. Technical Report, NASA, 1980. TP 1566.
- [6] Peter C. Hughes. Space structure vibration mode: How many exist? Which ones are important. *IEEE Control Magazine*, 22–28, February 1987.
- [7] R. Johann. *Automatisches Aufstellen der Bewegungsgleichungen von baumstrukturierten Mehrkörpersystemen mit elastischen Bauteilen*. Technical Report, Institute B for Mechanics, Technical Uni, 1985. Report 8501.

- [8] David A. Levinson and Thomas R. Kane. Simulation of large motions of nonuniform beams in orbits. *The Journal of Astronautical Sciences*, 29(3):213–244, 981.
- [9] Leonard Meirovitch. *Analytical Methods in Vibrations*. The Macmillan Company, New York, 1967.
- [10] A. Nashif, D.I.G. Jones, and J.P. Henderson. *Vibration Damping*. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [11] F. Pfeiffer and H. Bremer. Elastic multibody theory applied to elastic manipulators. In *IUTAM Symposium on: Dynamical Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures*, Moscow, May 1990.
- [12] Jean-Claude Piedbœuf. *Introduction à la mécanique analytique*. Technical Report, École Polytechnique de Montréal, juillet 1992.
- [13] Eugene I. Rivin. *Mechanical design of robots*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
- [14] P.Th.L.M. van Woerkom. Mathematical models of flexible spacecraft dynamics: A survey of order reduction approaches. *Control-Theory and Advanced Technology*, 6(4):609–632, 1990.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289799 7