06 OCT. 1989

EPM/RT-89/13

LUSS: Sous-programmes pour la résolution d'un système d'équations algébriques stockées en ligne de ciel.

Maryse Page, étudiante M.Sc.A.
André Garon, chercheur
Ricardo Camarero, professeur titulaire

Septembre 1989

gratuit

Ce projet a été réalisé grâce à l'apport financier du Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) et du Centre de Recherche Informatique de Montréal (CRIM).

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 3e trimestre 1989
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Service de l'édition
École Polytechnique de Montréal
Case postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10 $ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3, 00 $ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l' École Polytechnique de Montréal. Nous n'honorerons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, des sociétés ou d'organismes canadiens.

Table des Matières

Introduction **1**

Méthode de stockage en ligne de ciel **2**

Exemple: programme utilisant les sous-programmes LUSS **5**

Description des variables 5

Programmes 6

Exemple: construction du vecteur d'adressage NUMVAR **9**

Description des variables 9

Programme 10

Exemple de référence pour la description des sous-programmes **12**

Description des sous-programmes LUSS **14**

Sous-programme PRFSS 15

Sous-programme ADRSS 17

Sous-programme AGBSS 19

Sous-programme FLUSS 22

Sous-programme SLUSS 26

Annexe — Listing des sous-programmes LUSS **29**

Introduction

Ce rapport présente les sous-programmes pour le stockage et la résolution d'un système d'équations algébriques. Il décrit la méthode de stockage en ligne de ciel et quelques extraits d'un programme qui utilise ces sous-programmes. Pour chacun des sous-programmes, le rapport décrit la fonction, la liste des arguments et leurs descriptions et l'algorithme. Un exemple de matrice à traiter permet d'illustrer chacun des sous-programmes.

Méthode de stockage en ligne de ciel

La méthode utilisée s'applique à une matrice dont la structure est symétrique mais dont le contenu n'est pas nécessairement symétrique. La ligne de ciel est l'enveloppe des lignes et des colonnes de longueur variable qui entoure tous les termes non nuls. Il n'est pas nécessaire de stocker les termes nuls hors de la ligne de ciel car ils sont invariables lors de la factorisation pour la résolution du système d'équations.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Figure 1

L'enveloppe de la ligne de ciel comprend globalement trois parties. Il y a les termes diagonaux, les termes en-dessous de la diagonale (partie inférieure) et les

termes au-dessus de la diagonale (partie supérieure). L'enveloppe de la ligne de ciel est constituée par plusieurs bras. Un bras comporte des termes inférieurs, des termes supérieurs et un terme diagonal. La figure 2 illustre le bras de la ligne de ciel correspondant à l'indice 5 de la matrice.

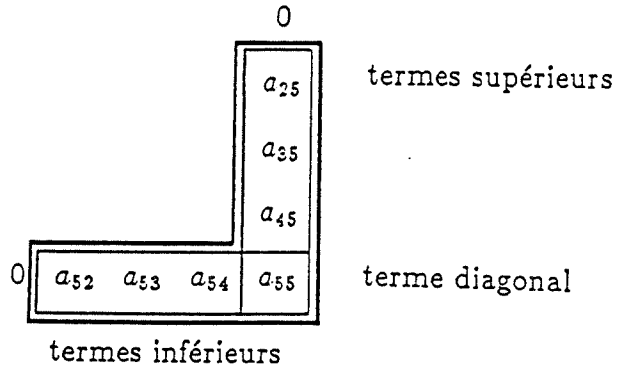

Figure 2

Les termes associés à un bras sont stockés dans l'ordre suivant: les termes inférieurs, les termes supérieurs et le terme diagonal.

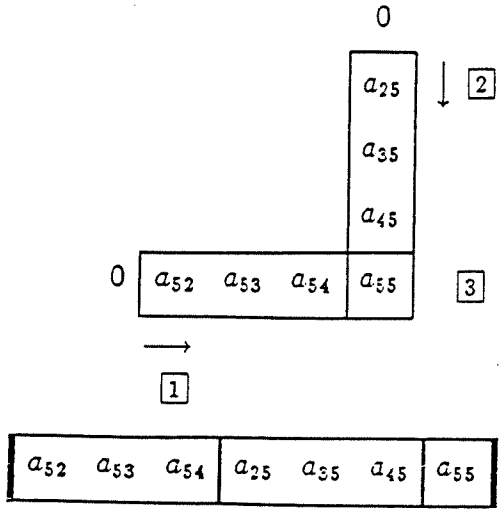

Figure 3

La hauteur de la ligne de ciel est la longueur des termes inférieurs ou des termes supérieurs.

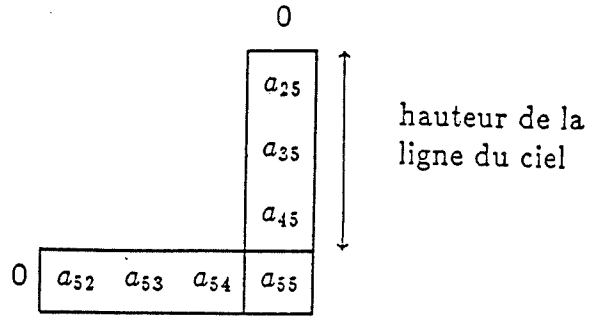

Figure 4

La matrice est stockée dans un vecteur. Le vecteur comprend consécutivement tous les bras qui forment la ligne de ciel.

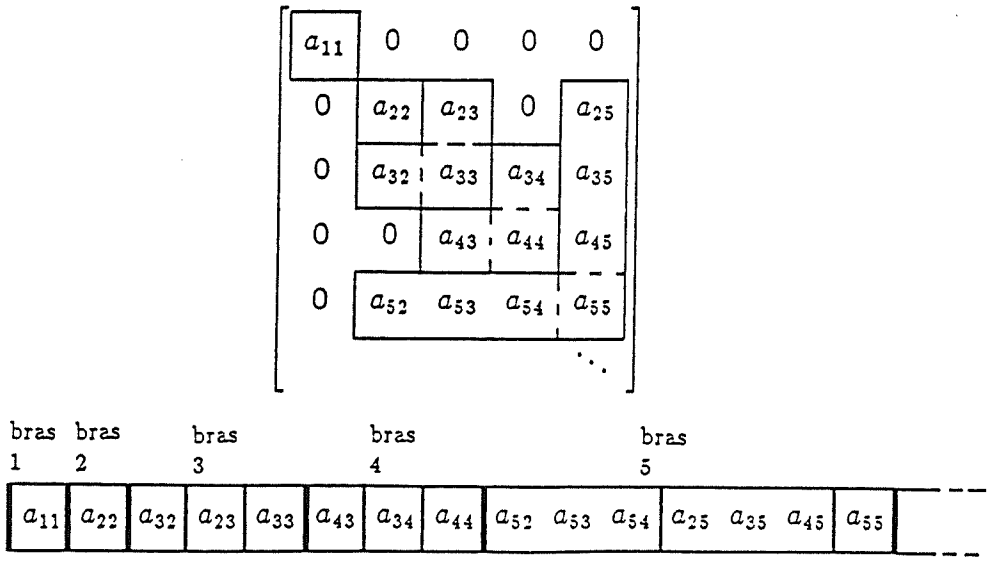

Figure 5

Exemple: programme utilisant les sous-programmes LUSS

Les extraits de ce programme permettent d'illustrer l'utilisation des sous-programmes LUSS dans le contexte de la méthode des éléments finis. Cette section présente aussi la description des variables utilisées en arguments des sous-programmes.

Description des variables

NBRDLE	Nombre de degrés de liberté de l'élément.
MAXDLE	Dimension maximale de la matrice élémentaire.
VADELM()	Vecteur d'adressage des degrés de liberté de l'élément.
MATELM(,)	Matrice élémentaire.
NBREQ	Nombre d'équations globales.
ADRMAT()	Vecteur d'adressage de la matrice globale en fonction de la ligne de ciel.
ESPMAT	Longueur effective utilisée du vecteur MATGLB.
HLCIEL()	Hauteur de la ligne de ciel de la matrice globale.

MATGLB()	Matrice globale.
MDDGLB()	Membre de droite global.
SOLUTN()	Solution du système d'équations algébriques associées à la matrice globale.
MSGERR	Unité logique de sortie des messages d'erreurs.

Programme

```
      PROGRAM UTLUSS
*  Paramètres
      INTEGER            MAXDLE, MAXEQU, MAXVEC, MAXNOD
      PARAMETER          (MAXDLE = 3, MAXEQU = 1000, MAXVEC = 10000)
      PARAMETER          (MAXNOD = 1000)
*  Variables utilisées en argument
      INTEGER            NBRDLE, MAXDLE, VADELM (MAXDLE)
      INTEGER            NBREQ, ADRMAT (MAXEQU), ESPMAT
      INTEGER            HLCIEL (MAXEQU)
      INTEGER            MSGERR
      DOUBLE PRECISION   MATELM (MAXDLE, MAXDLE)
      DOUBLE PRECISION   MATGLB (MAXVEC)
      DOUBLE PRECISION   MDDGLB (MAXEQU), SOLUTN (MAXEQU)
*  Variables locales
      INTEGER            NBRELM
      INTEGER            NUMVAR (MAXNOD)
      ...
```

```
*  Initialisation du vecteur HLCIEL
      DO 901  I = 1, MAXEQU
          HLCIEL(I) = 0
  901 CONTINUE
    ...
*  Initialisation du vecteur MATGLB
      DO 951  I = 1, MAXVEC
        MATGLB(I) = 0.0D0
  951 CONTINUE
   ...
**  Construction du vecteur contenant le profil de la ligne
**  de ciel (hauteur de la ligne de ciel HLCIEL)
      DO 1001 NE = 1, NBRELM
*   Construction du vecteur d'adressage de l'élément
         DO 1002 J = 1, NBRDLE
            VADELM(J) = NUMVAR (CNCELM (J, NE) )
 1002    CONTINUE
         CALL PRFSS (NBRDLE, VADELM, HLCIEL)
 1001 CONTINUE
**  Construction du vecteur d'adressage de la matrice globale
**  en fonction de la hauteur de la ligne de ciel (ADRMAT)
      CALL ADRSS (NBREQ, HLCIEL, ADRMAT, ESPMAT)
   ...
**  Assemblage de matrice globale (MATGLB)
      DO 2001 NE = 1, NBRELM
```

```
*   Construction de VADELM
          DO 2002 J = 1, NBRDLE
             VADELM(J) = NUMVAR (CNCELM (J, NE) )
*   Construction de la matrice élémentaire (MATELM)
             DO 2003 I = 1, NBRDLE
                MATELM (I, J) = ...
 2003        CONTINUE
 2002     CONTINUE
          CALL AGBSS (MAXDLE, NBRDLE, VADELM, ADRMAT, MATELM, MATGLB)
 2001 CONTINUE
   ...
**  Factorisation LU de la matrice globale
      CALL FLUSS (NBREQ, ADRMAT, MATGLB, MSGERR)
   ...
**  Résolution du système d'équations algébriques pour
**  le membre de droite MDDGLB (solution SOLUTN)
      CALL SLUSS (NBREQ, ADRMAT, MATGLB, MDDGLB, SOLUTN)
   ...
```

Exemple: construction du vecteur d'adressage NUMVAR

Le vecteur d'adressage NUMVAR, utilisé dans l'exemple précédent, est construit selon une convention relative à la méthode des éléments finis. L'exemple suivant permet d'illustrer la convention qui a été utilisée pour les sous-programmes LUSS.

Description des variables

NBRELM	Nombre d'éléments
NNDG	Nombre de noeuds globaux
NBRNOD	Nombre de noeuds par élément
NDRCLT	Nombre de conditions de Dirichlet
CNCELM(,)	Connectivité
NUMVAR( )	Vecteur d'adressage des degrés de liberté
DRCLET( )	Valeur des conditions de Dirichlet
NUMELM	Numéro de l'élément
NUMNOD	Numéro du noeud

Programme

```
 PROGRAM CSTNVR
*  Paramètres
      INTEGER              MAXNOD, MAXELM
      PARAMETER            (MAXNOD = 1000, MAXELM = 1001)
*  Variables locales
      INTEGER              NBRELM, NNDG, NBRNOD, NDRCLT
      INTEGER              CNCELM (MAXNOD, MAXELM)
      INTEGER              NUMVAR (MAXNOD)
      INTEGER              NUMELM, NUMNOD
      DOUBLE PRECISION     DRCLET (MAXNOD)
   ...
*  Lecture de la connectivité
      DO 1100 NE = 1, NBRELM
         READ (DONNEE, *) NUMELM, (CNCELM (J, NUMELM), J = 1, NBRNOD)
 1100 CONTINUE
   ...
*  Initialisation
      DO 1200 I = 1, NNDG
         NUMVAR(I) = 1
 1200 CONTINUE
   ...
*  Identification des conditions de Dirichlet
      DO 1300 I = 1, NDRCLT
         READ (DONNEE, *) NUMNOD, VALDRC
```

```
         IF (VALDRC.NE.0.0D0) THEN
            NUMVAR (NUMNOD) = -I
            DRCLET(I) = VALDRC
         END IF
 1300 CONTINUE
   ...
*  Numérotation des inconnues
      NBREQ = 0
      DO 1400 I = 1, NNDG
         IF (NUMD(I).EQ.1) THEN
            NBREQ = NBREQ + 1
            NUMVAR(I) = NBREQ
         END IF
 1400 CONTINUE
```

Exemple de référence pour la description des sous-programmes

Dans la section suivante, la description détaillée de chacun des sous-programmes sera faite. Pour illustrer la fonction de ces sous-programmes, il est possible de considérer un exemple de trois matrices élémentaires à assembler dans une matrice globale selon les vecteurs d'adressage des degrés de liberté suivants. Les éléments ont trois degrés de liberté (NBRDLE = 3).

Degrés	VADELM		
	Élement 1	Élement 2	Élement 3
1	1	3	4
2	2	4	5
3	3	5	6

La matrice globale assemblée a la forme suivante

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

Cette matrice est stockée en ligne de ciel en utilisant les sous-programmes PRFSS, ADRSS et AGBSS. La matrice est factorisée selon LU à l'aide du sous-programme FLUSS. La résolution du système d'équations algébriques associées à cette matrice est faite avec SLUSS.

Description des sous-programmes LUSS

Pour la description des sous-programmes, la convention suivante est utilisée pour détailler les arguments.

$\rightarrow$: argument en entrée

$\leftarrow$: argument en sortie

$\leftrightarrow$: argument en entrée et en sortie

(I) : argument de type entier

(D) : argument de type réel, double précision

Un vecteur VEC(I) est noté VEC_I. Un tableau MAT(I,J) est noté $MAT_{I,J}$.

L'indice $*$ correspond à l'énoncé FORTRAN qui associe la dimension du vecteur ou du tableau en argument à la dimension de la variable du programme appelant.

Sous-programme PRFSS

Fonction	Calcul du profil de la ligne de ciel de la matrice globale (hauteur de la ligne de ciel)
Utilisation	CALL PRFSS ($\overrightarrow{\text{NBRDLE}}$, $\overrightarrow{\text{VADELM}_*}$, $\overleftrightarrow{\text{HLCIEL}_*}$)
En entrée	(I) NBRDLE Nombre de degré de liberté de l'élément (I) VADELM(*) Vecteur d'adressage des degrés de liberté de l'élément
En entrée et en sortie	(I) HLCIEL(*) Profil de la ligne de ciel de la matrice globale (hauteur de la ligne de ciel)
Notes	Avant le premier appel de PRFSS, le vecteur HLCIEL doit être initialisé à 0. Le vecteur HLCIEL est mis à jour à chaque fois que PRFSS est appelé pour un élément.
Algorithme	Une combinaison locale de degrés de liberté de l'élément correspond à une position dans la matrice globale, à l'aide du vecteur d'adressage VADELM. Étant donné que la matrice est symétrique dans sa structure, le sous-programme teste seulement les combinaisons appartenant à la partie supérieure de la matrice globale. Pour ces combinaisons, il calcule leur hauteur par rapport à la

diagonale. Il conserve la hauteur maximale pour chacun des indices de la matrice globale.

Exemple

Le contenu du vecteur HLCIEL est présenté dans le tableau suivant après l'appel de PRFSS pour chacun des éléments.

No. de l'équation	HLCIEL		
	Élement 1	Élement 2	Élement 3
1	0	0	0
2	1	1	1
3	2	2	2
4	0	1	1
5	0	2	2
6	0	0	2

Sous-programme ADRSS

Fonction

Calcul du vecteur d'adressage de la matrice globale en fonction de la hauteur de la ligne de ciel

Utilisation

CALL ADRSS ($\overrightarrow{\text{NBREQ}}$, $\overrightarrow{\text{HLCIEL}}_*$, $\overleftarrow{\text{ADRMAT}}_*$, $\overleftarrow{\text{ESPMAT}}$)

En entrée

(I) NBREQ

Nombre d'équations globales

(I) HLCIEL(*)

Profil de la ligne de ciel de la matrice globale (hauteur de la ligne de ciel)

En sortie

(I) ADRMAT(*)

Vecteur d'adressage de la matrice globale en fonction de la hauteur de la ligne de ciel

(I) ESPMAT

Longueur effective utilisée du vecteur MATGLB

Notes

Avant l'appel de ADRSS, PRFSS doit être appelé pour chacun des éléments qui composent la matrice globale.

Algorithme

En connaissant la hauteur de la ligne de ciel pour tous les indices de la matrice globale, la longueur des bras peut être calculée. Un bras est composé par les termes inférieurs, par les termes supérieurs et par le terme diagonal. A l'aide de AGBSS, la matrice globale sera stockée dans un vecteur. Le vecteur contient consécutivement tous les bras, en indice croissant. Le sous-programme ADRSS permet de calculer la position de

l'élément diagonal de chacun des bras. Chacune des positions est stockée dans ADRMAT.

Exemple

Le vecteur d'adressage ADRMAT de l'exemple est le suivant.

No. de l'équation	ADRMAT
1	1
2	4
3	9
4	12
5	17
6	22

Il en est ainsi car la matrice sera stockée de la façon indiquée à la figure suivante

1 a_{11}	3 a_{12}	7 a_{13}	0	0	0
2 a_{21}	4 a_{22}	8 a_{23}	0	0	0
5 a_{31}	6 a_{32}	9 a_{33}	11 a_{34}	15 a_{35}	0
0	0	10 a_{43}	12 a_{44}	16 a_{45}	20 a_{46}
0	0	13 a_{53}	14 a_{54}	17 a_{55}	21 a_{56}
0	0	0	18 a_{64}	19 a_{65}	22 a_{66}

Pour cette matrice, ESPMAT = 22.

Sous-programme AGBSS

Fonction

Assemblage de la matrice élémentaire dans la matrice globale

Utilisation

```
CALL AGBSS  (MAXDLE, NBRDLE, VADELM*,
             ADRMAT*, MATELM(MAXDLE,*), MATGLB*)
```

En entrée

(I) MAXDLE

Dimension maximale de la matrice élémentaire

(I) NBRDLE

Nombre de degré de liberté de l'élément

(I) VADELM(*)

Vecteur d'adressage des degrés de liberté de l'élément

(I) ADRMAT(*)

Vecteur d'adressage de la matrice globale en fonction de la hauteur de la ligne de ciel

(D) MATELM (MAXDLE,*)

Matrice élémentaire

En entrée et en sortie

(D) MATGLB(*)

Matrice globale

Notes

Avant le premier appel de AGBSS, le vecteur MATGLB doit être initialisé à 0.0D0.

Le vecteur MATGLB est mis à jour à chaque fois que AGBSS est appelé pour un élément.

Avant l'appel de AGBSS, le sous-programme ADRSS

doit être appelé pour définir le vecteur d'adressage ADRMAT de la matrice globale.

Algorithme

Une combinaison locale de degrés de liberté de l'élément correspond à une position dans la matrice globale, à l'aide du vecteur d'adressage VADELM. Il y a trois cas possibles de position d'un terme dans la matrice globale.

1° cas: Le terme appartient à la diagonale.

POSITION = position du terme diagonal du bras correspondant.

2° cas: Le terme appartient à la partie inférieure.

POSITION = position du premier terme supérieur du bras correspondant

+ différence de position par rapport à la diagonale.

3° cas: Le terme appartient à la partie supérieure.

POSITION = position du terme diagonal du bras correspondant

+ différence de position par rapport à la diagonale.

Lorsque la position du terme est connue, la contribution du terme de la matrice élémentaire est ajoutée au terme correspondant de la matrice globale.

Exemple

L'exemple suivant illustre la position de chaque terme de chacune des matrices élémentaires dans la matrice globale.

I_{local}	J_{local}	POSITION		
		Élement 1	Élement 2	Élement 3
1	1	1	9	12
1	2	3	11	16
1	3	7	15	20
2	1	2	10	14
2	2	4	12	17
2	3	8	16	21
3	1	5	12	18
3	2	6	14	19
3	3	9	17	22

Sous-programme FLUSS

Fonction — Factorisation LU de la matrice globale stockée en ligne de ciel

Utilisation — CALL FLUSS ($\overrightarrow{\text{NBREQ}}$, $\overrightarrow{\text{ADRMAT}_*}$, $\overleftrightarrow{\text{MATGLB}_*}$, $\overrightarrow{\text{MSGERR}}$)

En entrée

(I) NBREQ

Nombre d'équations globales

(I) ADRMAT(*)

Vecteur d'adressage de la matrice globale en fonction de la hauteur de la ligne de ciel

(I) MSGERR

Indicateur de messages d'erreurs et unité logique de sortie des messages d'erreurs, si MSGERR > 0. Si MSGERR $= 0$, il n'y a pas de message. Il y a des messages d'erreurs si un ou plusieurs termes diagonaux sont plus petits que 1.0×10^{-8}.

En entrée et en sortie

(D) MATGLB(*)

Matrice globale

Sous-programmes utilisés — Fonction DDOT de la librairie ESSL

Notes — Avant l'appel de FLUSS, AGBSS, doit être appelé pour chacun des éléments qui composent la matrice globale.

En entrée, le vecteur MATGLB représente la matrice globale. En sortie, il représente la matrice globale factorisée. Les matrices L et U remplacent la matrice globale.

Lors de la factorisation, il n'y a pas de pivotage des lignes de la matrice pour éviter les pivots nuls. Si le pivot est plus petit que 1×10^{-8}, le pivot est remplacé par la valeur 1×10^{-8}, tout en conservant le signe du pivot.

Algorithme

L'algorithme de ce sous-programme est celui d'une factorisation LU d'une matrice. La matrice L correspond à la matrice triangulaire inférieure ayant des termes unitaires sur sa diagonale. La matrice U correspond à la matrice triangulaire supérieure. Cette décomposition permet le stockage des matrice L et U dans le vecteur MATGLB, selon le même vecteur d'adressage de la ligne de ciel ADRMAT. La particularité de cette factorisation LU, c'est qu'elle procède en tenant compte de la structure de la matrice globale, qui est stockée en ligne de ciel.

Exemple

Pour la matrice globale de l'exemple, les deux matrices L et U ont les formes suivantes.

Matrice L

1	0	0	0	0	0
2 ℓ_{21}	1	0	0	0	0
5 ℓ_{31}	6 ℓ_{32}	1	0	0	0
0	0	10 ℓ_{43}	1	0	0
0	0	13 ℓ_{53}	14 ℓ_{54}	1	0
0	0	0	18 ℓ_{64}	19 ℓ_{65}	1

Matrice U

1 u_{11}	3 u_{12}	7 u_{13}	0	0	0
0	4 u_{22}	8 u_{23}	0	0	0
0	0	9 u_{33}	11 u_{34}	15 u_{35}	0
0	0	0	12 u_{44}	16 u_{45}	20 u_{46}
0	0	0	0	17 u_{55}	21 u_{56}
0	0	0	0	0	22 u_{66}

- Pour le calcul de u_{11},
  - $u_{11} = a_{11}$
  - MATGLB(1) n'est pas modifié
- Pour le calcul de u_{12},
  - $u_{12} = a_{12}$
  - MATGLB(3) n'est pas modifié
- Pour le calcul de ℓ_{21},
  - $\ell_{21} = a_{21}/u_{11}$
  - MATGLB(2) = MATGLB(2)/MATGLB(1)
- Pour le calcul de u_{22},
  - $u_{22} = a_{22} - \ell_{21}u_{12}$
  - MATGLB(4) = MATGLB(4)- MATGLB(2) $\times$ MATGLB(3)
  - ...

Sous-programme SLUSS

Fonction

Résolution du système d'équations algébriques associées à la matrice globale.

Utilisation

$$\boxed{\text{CALL SLUSS} \quad (\overrightarrow{\text{NBREQ}},\ \overrightarrow{\text{ADRMAT}_*},\ \overrightarrow{\text{MATGLB}_*},\ \overrightarrow{\text{MDDGLB}_*},\ \overleftarrow{\text{SOLUTN}_*})}$$

En entrée

(I) NBREQ

Nombre d'équations globales

(I) ADRMAT(*)

Vecteur d'adressage de la matrice globale en fonction de la hauteur de la ligne de ciel

(D) MATGLB(*)

Matrice globale factorisée

(D) MDDGLB(*)

Membre de droite global

En sortie

(D) SOLUTN(*)

Solution du système d'équations algébriques associées à la matrice globale

Sous-programmes utilisées

Fonction DDOT de la librairie ESSL

Notes

Avant l'appel de SLUSS, le sous-programme FLUSS doit être appelé pour factoriser la matrice globale selon les matrices L et U.

Le vecteur MATGLB contient les matrices L et U

Algorithme

En tenant compte de la convention de stockage de la matrice globale en ligne de ciel, le système d'équations

algébriques est résolu. Le système d'équation est

$$\begin{aligned} [A][x] &= [b] \\ [L][U][x] &= [b] \end{aligned}$$

qui peut être écrit

$$\begin{aligned} [L][x'] &= [b] \\ \text{avec} \quad [U][x] &= [x'] \end{aligned}$$

La descente triangulaire permet de résoudre $[L][x'] = [b]$. La montée triangulaire permet de résoudre $[U][x] = [x']$ pour déterminer le vecteur solution recherchée $[x]$ (SOLUTN)

Exemple

La descente triangulaire s'effectue pour le système d'équations suivant

$$[L][x'] = [b]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \; \ell_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 \; \ell_{31} & 6 \; \ell_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \; \ell_{43} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \; \ell_{53} & 14 \; \ell_{54} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \; \ell_{64} & 19 \; \ell_{65} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \\ x'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$$

$x'_1 = b_1,$

SOLUTN(1) = MDDGLB(1)

$\ell_{21}x'_1 + x'_2 = b_2 \rightarrow x'_2 = b_2 - \ell_{21}x'_1$

SOLUTN(2) = MDDGLB(2) - MATGLB(2) $\times$ SOLUTN(1)

...

La montée triangulaire du système d'équations est

$$[u][x] = [x']$$

$$\begin{bmatrix} 1 \; u_{11} & 3 \; u_{12} & 7 \; u_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \; u_{22} & 8 \; u_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \; u_{33} & 11 \; u_{34} & 15 \; u_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \; u_{44} & 16 \; u_{45} & 20 \; u_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \; u_{55} & 21 \; u_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \; u_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \\ x'_6 \end{bmatrix}$$

$u_{66}x_6 = x'_6 \rightarrow x_6 = x'_6/u_{66},$

SOLUTN(6) = SOLUTN(6)/MATGLB(22)

$u_{55}x_5 + u_{56}x_6 = x'_5 \rightarrow x_5 = x'_5 - u_{56}x_6$

SOLUTN(5) = SOLUTN(5) - MATGLB(2) $\times$ SOLUTN(6)

...

Annexe — Listing des sous-programmes LUSS

Sous-programme PRFSS

```
      SUBROUTINE PRFSS (NBRDLE, VADELM, HLCIEL)
       IMPLICIT NONE

*
*>>>>>CALCUL DU PROFIL DE LA LIGNE DE CIEL DE LA MATRICE
*

*
*      ALGORITHME DU SOUS-PROGRAMME
*      ----------------------------
*      UNE COMBINAISON LOCALE DE DEGRES DE LIBERTE DE L'ELEMENT
*      (NDLI,NDLJ) CORRESPOND A UNE POSITION DANS LA MATRICE GLOBALE
*      (EQI,EQJ), A L'AIDE DU VECTEUR D'ADRESSAGE VADELM.
*      ETANT DONNE QUE LA MATRICE EST SYMETRIQUE DANS SA STRUCTURE,
*      LE SOUS-PROGRAMME TESTE SEULEMENT LES COMBINAISONS
*      APPARTENANT A LA PARTIE SUPERIEURE DE LA MATRICE GLOBALE.
```

```
*       POUR CES COMBINAISONS, IL CALCULE LEUR HAUTEUR PAR RAPPORT
*       A LA DIAGONALE (HLOC). IL CONSERVE LA HAUTEUR MAXIMALE POUR
*       CHACUN DES INDICES DE LA MATRICE GLOBALE (HLCIEL).
*


*
*       DESCRIPTION DES VARIABLES EN ARGUMENT
*       -------------------------------------
*       - NBRDLE     : NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE DE L'ELEMENT
*
*       - VADELM( ) : VECTEUR D'ADRESSAGE DES DEGRES DE LIBERTE DE
*                     L'ELEMENT
*
*       - HLCIEL( ) : PROFIL DE LA LIGNE DE CIEL DE LA MATRICE
*                     GLOBALE (HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL)
*


*
*       NOTES
*       -----
*       - AVANT LE PREMIER APPEL DE PRFSS, LE VECTEUR HLCIEL DOIT ETRE
*         INITIALISE A 0.
*
*       - LE VECTEUR HLCIEL EST MIS A JOUR A CHAQUE FOIS QUE PRFSS EST
*         APPELE POUR UN ELEMENT.
*
```

```
*
*       VARIABLES .. ARGUMENTS
*       ----------------------
*       - ENTREE: NBRDLE, VADELM, HLCIEL
*       - SORTIE: HLCIEL
*
        INTEGER    NBRDLE, VADELM(*), HLCIEL(*)
*
*       VARIABLES .. LOCALES
*       --------------------
*
        INTEGER    NDLI   , NDLJ   , EQI    , EQJ    , HLOC

        DO 1001 NDLI = 1, NBRDLE
         EQI = VADELM(NDLI  )
         IF (EQI.GT.0) THEN
          DO 1000 NDLJ = 1, NBRDLE
           EQJ = VADELM(NDLJ  )
           IF (EQJ.GT.0) THEN
            IF (EQJ.LT.EQI) THEN
             HLOC       = EQI - EQJ
             HLCIEL(EQI) = MAX(HLOC,HLCIEL(EQI))
            END IF
           END IF
1000     CONTINUE
        END IF
```

```
1001  CONTINUE
      END
```

Sous-programme ADRSS

```
      SUBROUTINE ADRSS (NBREQ , HLCIEL, ADRMAT, ESPMAT)
       IMPLICIT NONE

*
*>>>>>CALCUL DU VECTEUR D'ADRESSAGE DE LA MATRICE EN FONCTION DE
*     LA HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL
*


*
*      ALGORITHME DU SOUS-PROGRAMME
*      ----------------------------
*      EN CONNAISSANT LA HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL POUR TOUS LES
*      INDICES DE LA MATRICE GLOBALE, LA LONGUEUR DES BRAS PEUT ETRE
*      CALCULEE.  UN BRAS EST COMPOSE PAR LES TERMES INFERIEURS, PAR
*      LES TERMES SUPERIEURS ET PAR LE TERME DIAGONAL.  A L'AIDE DE
*      AGBSS, LA MATRICE GLOBALE SERA STOCKEE DANS UN VECTEUR.  LE
*      VECTEUR CONTIENT CONSECUTIVEMENT TOUS LES BRAS, EN INDICE
*      CROISSANT.  LE SOUS-PROGRAMME ADRSS PERMET DE CALCULER LA
*      POSITION DE L'ELEMENT DIAGONAL DE CHACUN DES BRAS.  CHACUNE
*      DES POSITIONS EST STOCKEE DANS ADRMAT.
*


*
*      DESCRIPTION DES VARIABLES EN ARGUMENT
*      -------------------------------------
```

```
*       - NBREQ      : NOMBRE D'EQUATIONS GLOBALES
*
*       - HLCIEL( ) : PROFIL DE LA LIGNE DE CIEL DE LA MATRICE GLOBALE
*                     (HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL)
*
*       - ADRMAT( ) : VECTEUR D'ADRESSAGE DE LA MATRICE GLOBALE EN
*                     FONCTION DE LA HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL
*
*       - ESPMAT    : LONGUEUR EFFECTIVE UTILISEE DU VECTEUR MATGLB
*


*
*       NOTES
*       -----
*       - AVANT L'APPEL DE ADRSS, PRFSS DOIT ETRE APPELE POUR CHACUN
*         DES ELEMENTS QUI COMPOSENT LA MATRICE GLOBALE.
*


*
*       VARIABLES .. ARGUMENTS
*       ----------------------
*       - ENTREE: NBREQ , HLCIEL
*       - SORTIE: ADRMAT, ESPMAT
*
        INTEGER    NBREQ , HLCIEL(*), ADRMAT(*), ESPMAT
*
*       VARIABLES .. LOCALES
```

```
*       -------------------
*
        INTEGER    NUMEQ

        ADRMAT(1) = 1
        DO 1000 NUMEQ = 2, NBREQ
         ADRMAT(NUMEQ) = ADRMAT(NUMEQ-1) + 2 * HLCIEL(NUMEQ) + 1
 1000   CONTINUE
        ESPMAT = ADRMAT(NBREQ)
       END
```

Sous-programme AGBSS

```
      SUBROUTINE AGBSS (MAXDLE, NBRDLE ,VADELM, ADRMAT, MATELM, MATGLB)
       IMPLICIT NONE

*
*>>>>>ASSEMBLAGE DE LA MATRICE ELEMENTAIRE DANS LA MATRICE GLOBALE
*


*
*      ALGORITHME DU SOUS-PROGRAMME
*      ----------------------------
*      UNE COMBINAISON LOCALE DE DEGRES DE LIBERTE DE L'ELEMENT
*      (I,J) CORRESPOND A UNE POSITION DANS LA MATRICE GLOBALE
*      (EQI,EQJ), A L'AIDE DU VECTEUR D'ADRESSAGE VADELM.  IL Y A
*      TROIS CAS POSSIBLES DE POSITION D'UN TERME DANS LA MATRICE
*      GLOBALE.
*      - 1. CAS : LE TERME APPARTIENT A LA DIAGONALE
*                 POSITION (IJ) = POSITION DU TERME DIAGONAL DU BRAS
*                                 CORRESPONDANT
*
*      - 2. CAS : LE TERME APPARTIENT A LA PARTIE INFERIEURE
*                 POSITION (IJ) = POSITION DU PREMIER TERME SUPERIEUR
*                                 DU BRAS CORRESPONDANT
*                               + DIFFERENCE DE POSITION PAR RAPPORT
*                                 A LA DIAGONALE
*
```

```
*       - 3. CAS : LE TERME APPARTIENT A LA PARTIE SUPERIEURE
*                  POSITION (IJ) = POSITION DU TERME DIAGONAL
*                                + DIFFERENCE DE POSITION PAR RAPPORT
*                                  A LA DIAGONALE
*

*
*       DESCRIPTION DES VARIABLES EN ARGUMENT
*       -------------------------------------
*       - MAXDLE      : DIMENSION MAXIMALE DE LA MATRICE ELEMENTAIRE
*
*       - NBRDLE      : NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTE DE L'ELEMENT
*
*       - VADELM( )   : VECTEUR D'ADRESSAGE DES DEGRES DE LIBERTE
*                       DE L'ELEMENT
*
*       - ADRMAT( )   : VECTEUR D'ADRESSAGE DE LA MATRICE GLOBALE EN
*                       FONCTION DE LA HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL
*
*       - MATELM( , ) : MATRICE ELEMENTAIRE
*
*       - MATGLB( )   : MATRICE GLOBALE
*

*
*       NOTES
*       -----
```

```
*     - AVANT LE PREMIER APPEL DE AGBSS, LE VECTEUR MATGLB DOIT ETRE
*       INITIALISE A 0.0D0.
*
*     - LE VECTEUR MATGLB EST MIS A JOUR A CHAQUE FOIS QUE AGBSS EST
*       APPELE POUR UN ELEMENT.
*
*     - AVANT L'APPEL DE AGBSS, LE SOUS-PROGRAMME ADRSS DOIT ETRE
*       APPELE POUR DEFINIR LE VECTEUR D'ADRESSAGE ADRMAT DE LA
*       MATRICE GLOBALE.
*


*
*     VARIABLES ...ARGUMENTS
*     ----------------------
*     - ENTREE: MAXDLE, NBRDLE, VADELM, ADRMAT, MATELM, MATGLB
*     - SORTIE: MATGLB
*
      INTEGER          MAXDLE, NBRDLE, VADELM(*), ADRMAT(*)
      DOUBLE PRECISION MATELM(MAXDLE,*), MATGLB(*)
*
*     VARIABLES .. LOCALES
*     --------------------
*
      INTEGER          I     ,J     ,IJ     ,EQI    ,EQJ

      DO 1001 I = 1 , NBRDLE
       EQI = VADELM(I)
```

```
      IF (EQI.GT.0) THEN
       DO 1000 J = 1 , NBRDLE
        EQJ = VADELM(J)
        IF (EQJ.GT.0) THEN
*
*       ADRESSAGE DU COEFFICIENT DE LA MATRICE ELEMENTAIRE
*       DANS LA MATRICE GLOBALE
*       ------------------------------------------------
*
         IF (EQI.EQ.EQJ) THEN
          IJ    = ADRMAT(EQI)
         ELSE IF (EQI.GT.EQJ) THEN
          IJ    = (ADRMAT(EQI)+ADRMAT(EQI-1)+1)/2 + EQJ-EQI
         ELSE IF (EQI.LT.EQJ) THEN
          IJ    = ADRMAT(EQJ) + EQI-EQJ
         END IF
         MATGLB(IJ) = MATGLB(IJ) + MATELM(I,J)
        END IF
1000   CONTINUE
      END IF
1001  CONTINUE
     END
```

Sous-programme FLUSS

```
      SUBROUTINE FLUSS (NBREQ , ADRMAT, MATGLB, MSGERR)
       IMPLICIT NONE

*
*>>>>> FACTORISATION LU
*

*
*       ALGORITHME DU SOUS-PROGRAMME
*       ----------------------------
*       L'ALGORITHME DE CE SOUS-PROGRAMME EST CELUI D'UNE FACTORISATION
*       LU D'UNE MATRICE.  LA MATRICE L CORRESPOND A LA MATRICE
*       TRIANGULAIRE INFERIEURE AYANT DES TERMES UNITAIRES SUR SA
*       DIAGONALE.  LA MATRICE U CORRESPOND A LA MATRICE TRIANGULAIRE
*       SUPERIEURE.  CETTE DECOMPOSITION PERMET LE STOCKAGE DES
*       MATRICES L ET U DANS LE VECTEUR MATGLB, SELON LE MEME VECTEUR
*       D'ADRESSAGE DE LA LIGNE DE CIEL ADRMAT.  LA PARTICULARITE DE
*       CETTE FACTORISATION LU, C'EST QU'ELLE PROCEDE EN TENANT COMPTE
*       DE LA STRUCTURE DE LA MATRICE GLOBALE, QUI EST STOCKEE EN LIGNE
*       DE CIEL.
*

*
*       DESCRIPTION DES VARIABLES EN ARGUMENT
*       -------------------------------------
```

```
*       - NBREQ      : NOMBRE D'EQUATIONS GLOBALES
*
*       - ADRMAT( ) : VECTEUR D'ADRESSAGE DE LA MATRICE GLOBALE EN
*                     FONCTION DE LA HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL
*
*       - MSGERR     : UNITE LOGIQUE DE SORTIE DES MESSAGES D'ERREURS
*                     ET INDICATEUR DE MESSAGES D'ERREURS, SI MSGERR>0.
*                     SI MSGERR=0, IL N'Y A PAS DE MESSAGE.  IL Y A DES
*                     MESSAGES D'ERREURS SI UN OU PLUSIEURS TERMES
*                     DIAGONAUX SONT PLUS PETITS QUE 1.0E-08.
*
*       - MATGLB( ) : MATRICE GLOBALE
*


*
*       NOTES
*       -----
*       - AVANT L'APPEL DE FLUSS, AGBSS DOIT ETRE APPELE POUR CHACUN
*         DES ELEMENTS QUI COMPOSENT LA MATRICE GLOBALE.
*
*       - EN ENTREE, LE VECTEUR MATGLB REPRESENTE LA MATRICE GLOBALE.
*         EN SORTIE, IL REPRESENTE LA MATRICE GLOBALE FACTORISEE.
*         LES MATRICES L ET U REMPLACENT LA MATRICE GLOBALE.
*
*       - LORS DE LA FACTORISATION, IL N'Y A PAS DE PIVOTAGE DES LIGNES
*         DE LA MATRICE POUR EVITER LES PIVOTS NULS.  SI LE PIVOT EST
*         PLUS PETIT QUE 1.0E-08, LE PIVOT EST REMPLACE PAR LA VALEUR
```

```
*        1.0E-08, TOUT EN CONSERVANT LE SIGNE DU PIVOT.
*


*
*      DESCRIPTION DES VARIABLES LOCALES
*      ---------------------------------
*      - I     : NUMERO DU BRAS I , LONGUEUR MAXIMALE DE LA RANGEE
*      - ID    : POSITION DU TERME DIAGONAL DU BRAS I
*      - IL    : POSITION DU PREMIER TERME INFERIEUR DU BRAS I
*      - IU    : POSITION DU PREMIER TERME SUPERIEUR DU BRAS I
*      - LONGI : HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL DU BRAS I
*      - IMIN  : POSITION DU PREMIER ELEMENT NON NUL DANS LA PARTIE
*                INFERIEURE DU BRAS I (RANGEE)
*      - J     : NUMERO DU BRAS J
*      - JD    : POSITION DU TERME DIAGONAL DU BRAS J
*      - JL    : POSITION DU PREMIER TERME INFERIEUR DU BRAS J
*      - JU    : POSITION DU PREMIER TERME SUPERIEUR DU BRAS J
*      - LONGJ : HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL DU BRAS J
*      - LONG  : HAUTEUR MINIMUM DE LA LIGNE DE CIEL (BRAS I OU BRAS J)
*


*
*      VARIABLES .. ARGUMENTS
*      ----------------------
*      - ENTREE: NBREQ , ADRMAT, MATGLB, MSGERR
*      - SORTIE: MATGLB
*
```

```
      INTEGER          NBREQ , ADRMAT(*), MSGERR
      DOUBLE PRECISION MATGLB(*)

*
*     VARIABLES .. LOCALES
*     --------------------
*
      INTEGER          I     ,J     ,IJ
      INTEGER          ID    ,IL    ,IU    ,LONGI ,IMIN
      INTEGER          JD    ,JL    ,JU    ,LONGJ
      INTEGER          DEBI  ,DEBJ  ,LONG
      DOUBLE PRECISION EPSLU ,LUDAG
      PARAMETER       (EPSLU=1.0D-08)
*
*     FONCTIONS .. ESSL
*     -----------------
*
      DOUBLE PRECISION DDOT

      DO 1001 I = 2 , NBREQ
       ID    = ADRMAT(I  )
       IL    = ADRMAT(I-1)+ 1
       IU    = ( ID + IL ) / 2
       LONGI = IU - IL
       IMIN  = I - LONGI
*
*     CALCUL DU PREMIER TERME INFERIEUR S'IL NE S'AGIT PAS DU
```

```
*       TERME DIAGONAL DU BRAS
*
        IF (IMIN.NE.I) MATGLB(IL) = MATGLB(IL)/MATGLB(ADRMAT(IMIN))
*
*       BOUCLE DU DEUXIEME TERME DE LA PARTIE INFERIEURE AU DERNIER
*       TERME DE LA PARTIE INFERIEURE
*
        DO 1000 J = IMIN+1 , I-1
         JD     = ADRMAT(J  )
         JL     = ADRMAT(J-1)+ 1
         JU     = ( JD + JL ) / 2
         LONGJ = JU - JL
         LONG   = MIN(J-IMIN,LONGJ)
*
*        CALCUL DE L(I,J) POUR I DIFFERENT DE J
*
         IJ      = IL + J - IMIN
         DEBI    = IJ - LONG
         DEBJ    = JD - LONG
         MATGLB(IJ) = (MATGLB(IJ)-
     &   DDOT(LONG,MATGLB(DEBI),1,MATGLB(DEBJ),1))/MATGLB(JD)
*
*        CALCUL DE U(J,I) POUR I DIFFERENT DE J
*
         IJ      = IU + J - IMIN
         DEBI    = IJ - LONG
         DEBJ    = JU - LONG
```

```
      MATGLB(IJ) = MATGLB(IJ)-
     &  DDOT(LONG,MATGLB(DEBI),1,MATGLB(DEBJ),1)
 1000 CONTINUE
*
*     CALCUL DE U(I,J) POUR I EGAL A J ET DETECTION DES PIVOTS
*     TROP PETITS
*
      LUDAG  = MATGLB(ID) - DDOT(LONGI,MATGLB(IL),1,MATGLB(IU),1)
      IF ( DABS(LUDAG ).LT.EPSLU)  THEN
       MATGLB(ID) = SIGN(EPSLU,LUDAG)
       IF (MSGERR.GT.0) WRITE(MSGERR,9000) LUDAG, I, MATGLB(ID)
      ELSE
       MATGLB(ID) = LUDAG
      ENDIF
 1001 CONTINUE
 9000 FORMAT(T1,'*** AVERTISSEMENT *** FLUSS - PIVOT =',G16.8,
     &        'A L''EQUATION ',I10, ' REMPLACE PAR ',G16.8)
      END
```

Sous-programme SLUSS

```
      SUBROUTINE SLUSS (NBREQ , ADRMAT, MATGLB, MDDGLB, SOLUTN)
       IMPLICIT NONE

*
*      ALGORITHME DU SOUS-PROGRAMME
*      ----------------------------
*      EN TENANT COMPTE DE LA CONVENTION DE STOCKAGE DE LA MATRICE
*      GLOBALE EN LIGNE DE CIEL, LE SYSTEME D'EQUATIONS ALGEBRIQUES
*      EST RESOLU.  LE SYSTEME D'EQUATIONS EST
*                          [A] [X] = [B],
*                     [L] [U] [X] = [B],
*      QUI PEUT ETRE ECRIT
*                         [L] [X'] = [B]
*               AVEC      [U] [X] = [X']
*      LA DESCENTE TRIANGULAIRE PERMET DE RESOUDRE [L][X']=[B].
*      LA MONTEE TRIANGULAIRE PERMET DE RESOUDRE [U][X]=[X'] POUR
*      DETERMINER LE VECTEUR SOLUTION RECHERCHE [X] (SOLUTN).
*

*
*      DESCRIPTION DES VARIABLES EN ARGUMENT
*      -------------------------------------
*      - NBREQ      : NOMBRE D'EQUATIONS GLOBALES
*
*      - ADRMAT( ) : VECTEUR D'ADRESSAGE DE LA MATRICE GLOBALE EN
```

```
*                    FONCTION DE LA HAUTEUR DE LA LIGNE DE CIEL.
*
*      - MATGLB( ) : MATRICE GLOBALE FACTORISEE

*      - MDDGLB( ) : MEMBRE DE DROITE GLOBAL

*      - SOLUTN( ) : SOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS ALGEBRIQUES
*                    ASSOCIEES A LA MATRICE GLOBALE.
*


*
*      NOTES
*      -----
*      - AVANT L'APPEL DE SLUSS, LE SOUS-PROGRAMME FLUSS DOIT ETRE
*        APPELE POUR FACTORISER LA MATRICE GLOBALE SELON LES MATRICES
*        L ET U.
*
*      - LE VECTEUR MATGLB CONTIENT LES MATRICES L ET U.
*


*
*      VARIABLES .. ARGUMENTS
*      ----------------------
*      - ENTREE: NBREQ , ADRMAT, MATGLB, MDDGLB
*      - SORTIE: SOLUTN
*
       INTEGER          NBREQ , ADRMAT(*)
```

```
      DOUBLE PRECISION MATGLB(*), MDDGLB(*), SOLUTN(*)

*
*     VARIABLES .. LOCALES
*     --------------------
*
      INTEGER          I     , J    , IL    , JD    , LONGI , LONGJ
      DOUBLE PRECISION XJ

*
*     FONCTIONS .. ESSL
*     -----------------
*
      DOUBLE PRECISION DDOT

*
*>>>>>DESCENTE TRIANGULAIRE
*
      SOLUTN(1) = MDDGLB(1)
      DO 1000 I = 2 , NBREQ
       IL        = ADRMAT(I-1)+ 1
       LONGI     = ( ADRMAT(I) - IL ) / 2
       SOLUTN(I) = MDDGLB(I)
     &           - DDOT(LONGI,MATGLB(IL),1,SOLUTN(I-LONGI),1)
 1000 CONTINUE
*
*>>>>>REMONTEE TRIANGULAIRE
```

```
*
      DO 1002 J = NBREQ , 2 , -1
       JD     = ADRMAT(J  )
       LONGJ = (JD-ADRMAT(J-1)-1) / 2
       XJ     = SOLUTN(J) / MATGLB(JD)
       DO 1001 I = J-LONGJ , J-1
        SOLUTN(I) = SOLUTN(I) - MATGLB(JD+I-J) * XJ
1001   CONTINUE
       SOLUTN(J) = XJ
1002  CONTINUE
      SOLUTN(1) = SOLUTN(1) / MATGLB(ADRMAT(1))
     END
```

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL
3 9334 00223419 1