

**Titre:** Asservissement d'une articulation robotique élastique avec un  
Title: contrôleur à structure variable

**Auteurs:** Caroline Serfass, & Romano M. De Santis  
Authors:

**Date:** 1987

**Type:** Rapport / Report

**Référence:** Serfass, C., & De Santis, R. M. (1987). Asservissement d'une articulation  
Citation: robotique élastique avec un contrôleur à structure variable. (Rapport technique  
n° EPM-RT-87-19). <https://publications.polymtl.ca/9545/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/9545/>  
PolyPublie URL:

**Version:** Version officielle de l'éditeur / Published version

**Conditions d'utilisation:** Tous droits réservés / All rights reserved  
Terms of Use:

 **Document publié chez l'éditeur officiel**  
Document issued by the official publisher

**Institution:** École Polytechnique de Montréal

**Numéro de rapport:** EPM-RT-87-19  
Report number:

**URL officiel:**  
Official URL:

**Mention légale:**  
Legal notice:

EPM/RT-87/19

ASSERVISSEMENT D'UNE ARTICULATION ROBOTIQUE  
ELASTIQUE AVEC UN CONTROLEUR A STRUCTURE VARIABLE

Par

Caroline (Serfass), Ing., M.Sc.A.

Projet dirigé par

Romano M. DeSantis, professeur

Département de Génie Electrique

Ecole Polytechnique de Montréal  
Juin (1987)

07/01/87

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'auteur.

Dépôt légal, 2e trimestre 1987  
Bibliothèque nationale du Québec  
Bibliothèque nationale du Canada

Pour ce procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal  
Ecole Polytechnique de Montréal  
Case postale 6079, Succursale A  
Montréal (Québec) H3C 3A7  
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'Ecole Polytechnique de Montréal. Nous n'honorons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

## SOMMAIRE

L'application d'un contrôleur à structure variable à l'asservissement de position d'une articulation robotique avec un lien de transmission élastique est utilisée comme véhicule d'exploration, d'illustration et d'évaluation des modalités de conception et de fonctionnement de ce nouveau type de contrôleur. Pour ce faire nous utilisons la théorie générale des systèmes à structure variable (méthode de Utkin), la notion de modèle d'état et la technique du positionnement des pôles; l'étude de simulation est développée en utilisant un logiciel écrit en Turbo Pascal et opérant sur IBM PC; l'analyse comparative repose sur une étude de la sensibilité des trois contrôleurs aux perturbations et aux variations des paramètres du système.

Les résultats obtenus mettent en évidence un certain nombre d'avantages du contrôleur à structure variable par rapport aux contrôleurs actuellement utilisés. La présence d'oscillations rapides et de hauts niveaux de tension dans la commande, plus une tendance à l'instabilité lors de la présence d'un délai de boucle, suggèrent néanmoins que des améliorations substantielles sont nécessaires avant que ce nouveau type de contrôleur puisse être considéré un candidat sérieux au remplacement de ses concurrents.

## ABSTRACT

The controller design of a position servo with an elastic link is used as a vehicle to discuss performance sensitivity aspects of a sliding mode controller. The sliding mode controller is designed using the by now classical procedure proposed by Utkin, namely: -the characterization of the desired system dynamic behavior in terms of an assigned sliding mode; -the choice of a controller structure which guarantees the existence and the stability of the sliding mode; -the determination of the controllers parameters which will steer the plant state to the sliding mode. Performance sensitivity is considered in relation to plant parameters variations, the presence of an external disturbance, the introduction of a delay in the control action.

The ensuing results are to the effect that in spite of the advantages offered by the sliding mode controller, the presence of chattering and a tendency to unstable oscillations suggest that further improvements are needed before this type of controller may replace its more standard counterparts.

## REMERCIEMENTS

Ce projet a été développé dans le cadre du projet FCAR-CRP-378-76, "Analyse et Commande des Processus Industriels par Ordinateur: Application au Réseaux Electrique", financé par le Ministère de l'Education du Québec. Il a également bénéficié du support financier de l'octroi A-8244, "Sensibilité, Stabilité et Commande Optimale des Systèmes", du Conseil de Recherches en Sciences et en Génie du Canada.

L'auteur tient à exprimer vivement sa reconnaissance envers son directeur de recherche, Dr. Romano M. De Santis, professeur du département de Génie Electrique, pour avoir proposé le thème du projet et pour avoir supervisé son développement.

Un grand remerciement est dû au professeur Rozinoer, directeur du Département d'Automatique de l'Ecole Centrale de Lyon, qui l'a soutenue et aidée dans ses démarches d'inscription à l'Ecole Polytechnique de Montréal. L'auteur tient à remercier également le Dr. R.P. Malhamé, professeur au département de Génie électrique, pour lui avoir facilité la recherche bibliographique.

Il lui tient enfin tout particulièrement à coeur de remercier Lamia Orfali et Raouf Naggar ainsi que leur famille, pour leur présence chaleureuse lors de la phase finale de ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	iii
ABSTRACT .....	v
REMERCIEMENTS .....	vii
LISTE DES FIGURES .....	xii
LISTE DES TABLEAUX .....	xv
CHAPITRE I - INTRODUCTION .....	1
1.1 Introduction .....	1
1.2 Organisation du mémoire.....	4
1.3 Contrôleurs à structure variable.....	5

<b>CHAPITRE II - MODÉLISATION DE L'ARTICULATION</b>	
<b>ROBOTIQUE ÉLASTIQUE ET DE</b>	
<b>L'ASSERVISSEMENT.....</b>	<b>7</b>
2.1 Le système en étude.....	7
2.2 Équations physiques du système.....	9
2.3 Choix des valeurs des paramètres.....	10
2.4 Modèle du système avec variables d'état..	11
2.5 Le système de contrôle.....	13
 <b>CHAPITRE III - DESIGN DU CONTRÔLEUR À</b>	
<b>STRUCTURE VARIABLE.....</b>	
	<b>15</b>
3.1 La méthode utilisée.....	15
3.2 Procédure de conception.....	15
3.3 Application à l'articulation robotique...	20
 <b>CHAPITRE IV - DÉVELOPPEMENT D'UN LOGICIEL DE</b>	
<b>SIMULATION.....</b>	
	<b>23</b>
4.1 Introduction .....	23
4.2 Structure du logiciel vue par.....	
l'utilisateur.....	25
4.3 Structure interne du logiciel.....	28



CHAPITRE V - COMPORTEMENT DU CONTRÔLEUR À.....	
STRUCTURE VARIABLE.....	35
5.1 Positionnement des pôles.....	35
5.2 Choix des gains.....	37
5.3 Résultats.....	39
CHAPITRE VI - ANALYSE COMPARATIVE DES TROIS.....	
CONTRÔLEURS.....	42
6.1 Introduction.....	42
6.2 Systèmes de référence.....	43
6.3 Performances statiques et dynamiques.....	44
6.4 Sensibilité à la variation des paramètres	46
6.5 Analyse de la sensibilité à une.....	
perturbation.....	53
6.6 Analyse de la sensibilité au délai.....	57
CHAPITRE VII - CONCLUSION.....	63
7.1 Simplicité de conception et fiabilité....	63
7.2 Résultats obtenus.....	63
7.3 Extensions possibles.....	65

BIBLIOGRAPHIE ..... 67

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
2.1	Articulation robotique élastique entraînée par un moteur à courant continu.....	7
2.2	Mise en évidence de la transmission élastique du robot Smart de Comau (en-bas à gauche).....	8
2.3	Représentation du système asservi.....	13
3.1	Représentation fonctionnelle du contrôleur à structure variable.....	16
3.2	Les différentes étapes de la conception du contrôleur à structure variable.....	18
4.1	Déroulement chronologique du programme vu par l'utilisateur.....	27
4.2	Structure interne du programme.....	33

4.3	Structure interne de la boucle de calcul.....	34
5.1	Essai SSV: valeurs nominales des gains.....	40
6.1	Performance dynamique FID versus structure variable.....	45
6.2	Performance dynamique retour linéaire versus structure variable.....	46
6.3	Variation de $K_m$ : retour linéaire d'état versus structure variable.....	48
6.4	Variation de $\tau_{u1}$ : retour linéaire d'état versus structure variable.....	48
6.5	Variation de $j_2$ : retour linéaire d'état versus structure variable.....	49
6.6	Variation de $K_m$ : essai nominal versus gains supérieurs.....	51
6.7	Variation de $\tau_{u1}$ : essai nominal versus gains supérieurs.....	51

6.8	Variation de $j_2$ : essai nominal versus gains supérieurs.....	52
6.9	Sensibilité à une perturbation pour le contrôleur PID.....	54
6.10	Sensibilité à une perturbation pour le contrôleur par retour linéaire d'état.....	54
6.11	Sensibilité à une perturbation pour le contrôleur à structure variable.....	55
6.12	Amélioration du contrôleur à structure variable face à une perturbation.....	57
6.13	Effet d'un délai sur le contrôleur PID, à retour linéaire d'état et à structure variable.....	59
6.14	Comportement du système à structure variable avec gains plus élevés face à un délai.....	60
6.15	Effet d'un délai sur un contrôleur à structure variable peu sensible aux perturbations.....	62

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
2.1	Paramètres physiques du système.....	9
4.1	Paramètres du système physique.....	29
4.2	Paramètres de simulation.....	29
4.3	Paramètres des différents contrôleurs.....	30
5.1	Choix des pôles du contrôleur à structure variable.....	36
5.2	Choix des gains du contrôleur à structure variable avec les valeurs nominales des pôles	38
5.3	Paramètres de l'essai nominal.....	39
6.1	Paramètres des systèmes de référence.....	43

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

#### 1.1 Introduction

Dans beaucoup de systèmes de contrôle il est important que l'opération du système soit insensible aux variations des paramètres et de la charge. Avec les contrôleurs actuellement disponibles, cette exigence peut être difficile à satisfaire lors de la présence de larges variations de paramètres et lorsque ces mêmes variations ne sont pas facilement prévisibles. Ces éventualités sont assez fréquentes en robotique par exemple, où il peut arriver qu'un moment d'inertie d'un robot par rapport à un axe de rotation varie de façon importante suivant la longueur du bras, la charge ou simplement la configuration du robot [6] [7] [8]. Or l'insensibilité aux variations des paramètres constitue une condition essentielle à l'élaboration de robots plus performants.

En vue d'améliorer cette situation, de nombreux articles scientifiques ont récemment attiré l'attention sur les avantages potentiels offerts par les contrôleurs à structure variable [1,2,3,4,5,6,7,8,9,14]. Des études

illustrant la supériorité de leurs performances statiques et dynamiques par rapport aux contrôleurs existants ont été développées [3,5,6,7,8,9]; de nombreuses procédures conceptuelles et des algorithmes de calcul nécessaires pour leur conception ont été proposés [3,5,6,7,8,9,14]; de nombreuses applications dans le domaine de l'électrotechnique [3] [9], ainsi que dans celui de la robotique [6] [7] [8] ont été illustrées.

Malgré tout cet enthousiasme et toute cette richesse de documentation, force est de constater que la réalité industrielle manifeste une forte résistance à remplacer les contrôleurs conventionnels par les contrôleurs à structure variable; en effet, le nouveau type de contrôleur n'existe que sur papier. Ce phénomène s'explique en partie par le fait que des difficultés ont été expérimentées en ce qui concerne la sensibilité des systèmes à structure variable aux retards [8] et une certaine tendance à entrer en oscillations [6] [7] [8]. Par ailleurs, une autre difficulté vient du fait que les contrôleurs à structure variable n'ont pas encore été suffisamment étudiés pour que des conclusions définitives puissent avoir été établies.

Ainsi plusieurs questions restent ouvertes: la méthodologie de conception est-elle véritablement au point pour nous procurer de façon efficace des solutions fiables



et satisfaisantes? La supériorité théorique de leur sensibilité face à la variation des paramètres se concrétise-t-elle en une supériorité sur le banc d'essai? Les niveaux de contrôle requis et les retards de boucle admissibles sont-ils compatibles avec les caractéristiques offertes par les capteurs, les actionneurs et les convertisseurs disponibles sur le marché?

L'objectif de ce projet est de contribuer à une réponse à ces questions. Pour ce faire, nous considérons l'application du contrôleur à structure variable à l'asservissement de position d'une articulation robotique avec un lien de transmission élastique [13]. L'intérêt d'une telle application est double. D'une part, tout en étant d'une complexité modérée, la nature du système asservi nous procure un banc d'essai idéal pour tester d'une façon claire et concluante les traits saillants du contrôleur en étude. D'autre part, l'application envisagée nous permet de contribuer à une meilleure compréhension d'un système d'une grande importance pratique dans le domaine de l'automatisation et de la robotique.

La réalisation du projet prévoit le développement de plusieurs étapes: la modélisation du système asservi, une illustration des caractéristiques générales d'un contrôleur à structure variable, la conception d'un contrôleur pour une étude de cas, une étude de ce

contrôleur par voie de simulation et une analyse comparative des performances du nouveau contrôleur par rapport à celles d'un contrôleur FID et d'un contrôleur linéaire avec rétroaction d'état. La conception du contrôleur à structure variable utilise les théories générales des systèmes à structure variable [1],[2], la notion de modèle d'état [10] et la technique de positionnement des pôles [3] [10]. Pour la simulation, nous avons développé un logiciel spécifique, ROBEL, sur un micro-ordinateur IBM-PC, en langage Turbo-Pascal [16] [17]. L'analyse comparative se propose d'étudier le comportement des trois contrôleurs, d'une part sous des conditions nominales, d'autre part face à une perturbation constante de la commande, à un délai et à des variations dans les paramètres du système.

## 1.2 Organisation du mémoire

Le mémoire est divisé en 7 chapitres. Le chapitre II présente la modélisation de l'articulation robotique avec un lien de transmission élastique; le chapitre III est consacré au design du contrôleur à structure variable; au chapitre IV, une description synthétique du logiciel ROBEL nous permet de cerner ses possibilités et de comprendre le déroulement d'une simulation; le chapitre V est consacré à

l'étude du comportement du contrôleur à structure variable; le chapitre VI propose une analyse comparative des résultats obtenus avec les trois contrôleurs: PID, par retour linéaire d'état et à structure variable; finalement, les conclusions de ce travail sont tirées au chapitre VII, où nous suggérons également quelques extensions possibles.

Pour le bénéfice du lecteur, nous avons adopté une présentation condensée et un style concis. Des développements de nature complémentaire, qui malgré leur importance technique auraient pu alourdir le texte principal, ont été relégués dans un cahier d'annexes.

### 1.3 Contrôleurs à structure variable

Les fondements de la théorie des systèmes à structure variable (SSV) ont été développés dans les 25 dernières années presque exclusivement en URSS. Ces systèmes diffèrent des autres systèmes de contrôle par le fait que des changements peuvent se produire dans la structure du système pendant son opération. Le moment où ces changements se produisent ainsi que le type de structure obtenue sont déterminés en fonction de l'état actuel du système [1], [2].

Divers principes de design de systèmes à structure

variable [4] ont été proposés:

- le premier consiste à prendre des "morceaux" de trajectoires d'état des structures existantes et de les raccorder suivant un certain critère, dans le but d'obtenir une trajectoire satisfaisante.

- le second consiste à rechercher des trajectoires d'état de l'un des sous-systèmes, qui possèdent de bonnes performances dynamiques, et d'assurer qu'à partir d'un certain moment, le point de fonctionnement se déplace sur ces trajectoires.

- enfin, le dernier consiste à créer des modes glissants. Ces modes se produisent dans l'espace d'état du système, le long de surfaces où le contrôle est discontinu.

Les espoirs placés dans les deux premiers principes se sont avérés infructueux et on a limité leur application à des systèmes du 2<sup>e</sup> ordre [4]. Le seul principe de contrôle à structure variable prometteur consiste à introduire délibérément des modes glissants dans le système. Les résultats obtenus à ce jour permettent de considérer le contrôle à structure variable comme l'une des branches d'avenir de la théorie de contrôle [3], [4].

CHAPITRE II  
MODÉLISATION DE L'ARTICULATION ROBOTIQUE ÉLASTIQUE  
ET DE L'ASSERVISSEMENT

2.1 Le système en étude

Le système que nous utiliserons comme banc d'essai pour le développement de notre étude des contrôleurs à structure variable est représenté par une articulation robotique avec un lien de transmission élastique. La figure 2.1 nous montre les différentes composantes de ce système: un moteur électrique à courant continu, deux poulies, une courroie de transmission élastique et la charge.

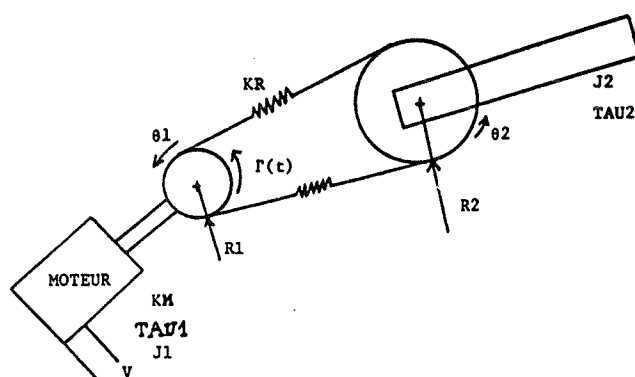


Figure 2.1: Articulation robotique élastique entraînée par un moteur à courant continu.

Des articulations robotiques de ce type sont souvent utilisées dans la construction de robots industriels, par exemple dans le robot italien Smart de Comau, dont nous présentons une photographie à la figure 2.2 [19].

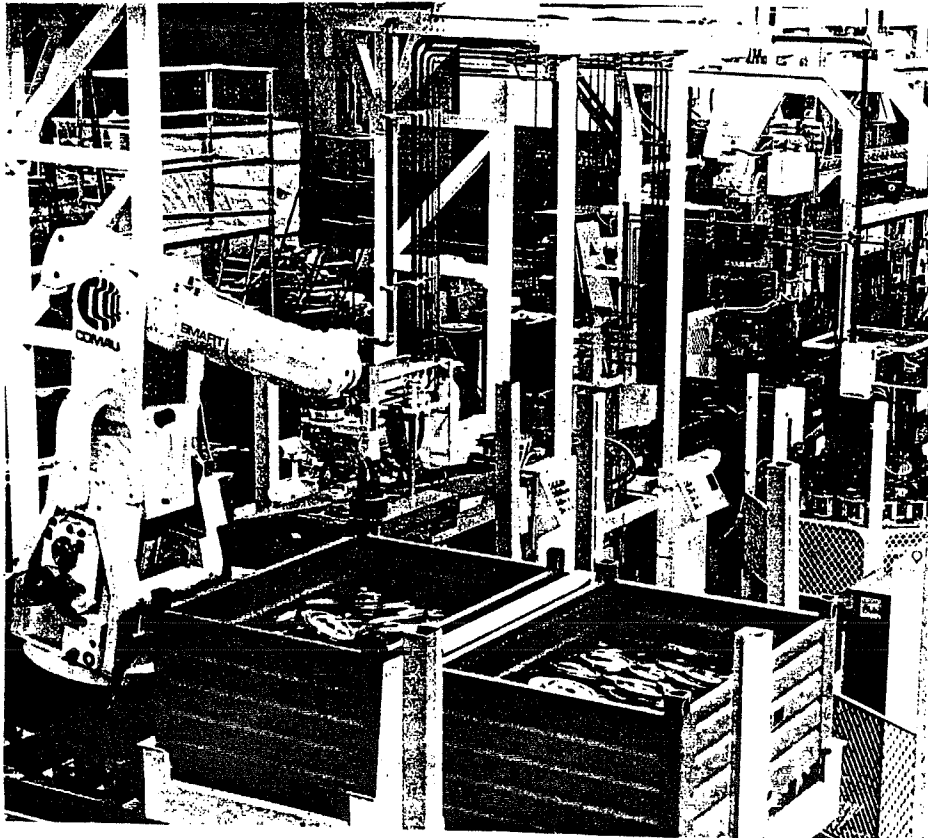


Figure 2.2: Mise en évidence de la transmission élastique  
du robot Smart de Comau (en-bas à gauche)

## 2.2 Equations physiques du système

Les notations indiquées à la figure 2.1 sont  $V$  la tension appliquée aux bornes de la bobine du rotor,  $R$  la résistance et  $L$  l'inductance de cette bobine.  $\theta_1$  et  $\theta_2$  désignent respectivement l'angle de l'axe du moteur et l'angle de l'articulation robotique. De plus, nous utiliserons les notations du tableau 2.1.

$\tau_1$	constante de temps du moteur
$K_m$	gain statique du moteur
$J_1$	moment d'inertie du moteur
$R_1$	rayon de couplage côté moteur
$K_R$	constante d'élasticité
$NT$	rapport de transmission
$J_2$	moment d'inertie du robot
$\tau_2$	constante de temps du robot
$R_2$	rayon de couplage côté robot

Tableau 2.1: paramètres physiques du système

L'application des lois de la dynamique au moteur et à l'articulation robotique nous donne respectivement les équations suivantes (plus de détails pourront être trouvés dans [10]):

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{K_m * V}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_1} * \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{K_R * R_1^2}{J_1} * (\theta_1 - NT * \theta_2) \quad (2.1)$$

$$NT * \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{K_R * R_2^2}{J_2} * (\theta_1 - NT * \theta_2) - \frac{1}{\tau_2} * \frac{d\theta_2}{dt} \quad (2.2)$$

### 2.3 Choix des valeurs des paramètres

Pour rendre notre étude plus concrète, nous utiliserons des paramètres d'articulation robotique compatibles avec la géométrie et la distribution des masses qui caractérisent l'articulation verticale du robot Smart présenté à la figure 2.2 [19]. Ceci nous amène à considérer les valeurs des paramètres suivantes:

#### 1. Paramètres relatifs à la charge

- moment d'inertie de la charge:  $J_2 = 75 \text{ kg.m}^2$
- constante de temps de la charge:  $\tau_2 = 10 \text{ s}$
- rayon de couplage côté charge:  $R_2 = 0.4 \text{ m}$



## 2. Paramètres relatifs à la transmission

- rapport de transmission:  $NT = 10$
- constante d'élasticité de la courroie:  $KR = 1250000 \text{ N/m}$

## 3. Paramètres relatifs au moteur

- moment d'inertie du moteur :  $J1 = 0.5 \text{ kg.m}^2$
- gain statique du moteur:  $Km = 1.5 \text{ rad/s.V.}$
- constante de temps du moteur:  $\tau1 = 0.05 \text{ s}$

### 2.4 Modèle du système avec variables d'état

En posant

$$\begin{aligned}
 x1 &\triangleq \theta1 & x2 &\triangleq \frac{d\theta1}{dt} \\
 x3 &\triangleq NT*\theta2 & x4 &\triangleq NT*\frac{d\theta2}{dt} & u &\triangleq V
 \end{aligned}$$

nous obtenons la représentation du système par le modèle d'état suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{KR \cdot R1^2}{J1} * x_1 - \frac{1}{\tau1} * x_2 + \frac{KR \cdot R1^2}{J1} * x_3 + \frac{Km}{\tau1} * u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\frac{KR \cdot R2^2}{J2} * x_1 - \frac{KR \cdot R2^2}{J2} * x_3 - \frac{1}{\tau2} * x_4 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

En posant

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{KR \cdot R1^2}{J1} & -\frac{1}{\tau1} & \frac{KR \cdot R1^2}{J1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{KR \cdot R2^2}{J2} & 0 & -\frac{KR \cdot R2^2}{J2} & -\frac{1}{\tau2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Km}{\tau1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\text{et } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

le système (2.3) devient:

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot u \quad (2.7)$$

## 2.5 Le système de contrôle

Le contrôle de l'articulation robotique avec lien de transmission élastique est réalisé en utilisant les éléments suivants: un moteur électrique à courant continu, deux potentiomètres, deux tachomètres, un convertisseur analogique/numérique, un microordinateur, un convertisseur numérique/analogique et un amplificateur de puissance. Les interactions entre ces différents éléments sont illustrées à la figure 2.3.

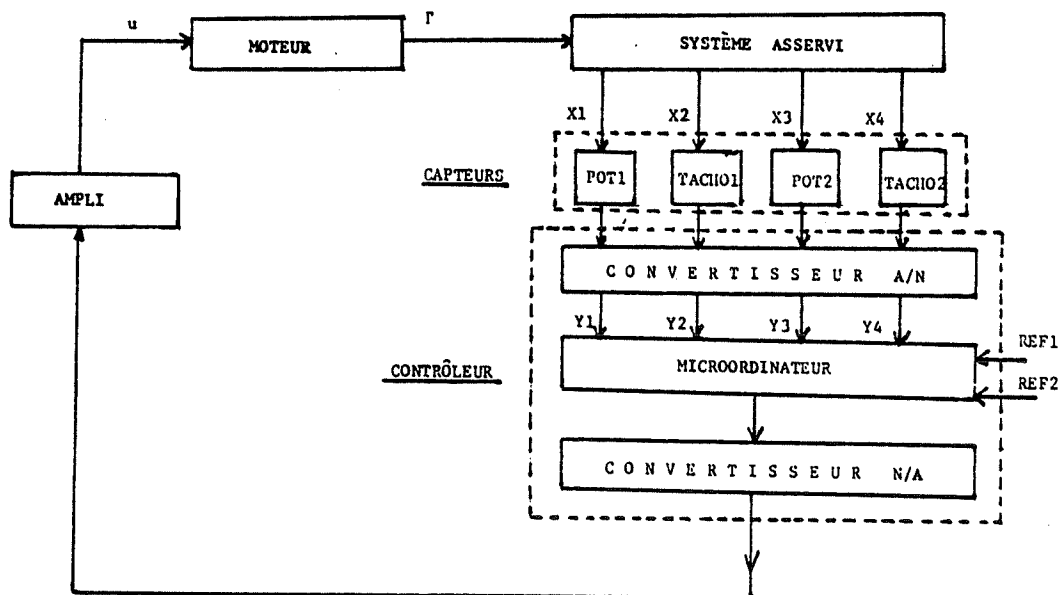


Figure 2.3: Représentation du système asservi

En pratique les notations de la figure 2.3 ont la signification suivante:

- u est la tension appliquée au moteur et  $|u_{max}|=125V$
- x1,x2,x3,x4 sont les variables d'état telles qu'elles ont été définies à la section 2.4
- y1,y2,y3,y4 sont ces mêmes variables après avoir été lues par les capteurs et numérisées
- T est le couple développé sur l'axe du moteur
- ref1 et ref2 sont les positions désirées respectivement pour l'angle de l'axe du moteur et celui de l'articulation robotique

Finalement le système global sera décrit par l'équation (2.3)  $\dot{X} = A * X + B * u$  où  $u = f(X)$  représente la loi de contrôle envisagée, qui pourra être PID, par retour linéaire d'état ou à structure variable.

## CHAPITRE III

### DESIGN DU CONTROLÉUR A STRUCTURE VARIABLE

#### 3.1 La méthode utilisée

Le problème de contrôle qui nous concerne peut être énoncé comme suit:

étant donné un système décrit par le modèle d'état

$$\dot{X} = A*X + B*u$$

où A est une matrice de dimension n\*n et B une matrice de dimension n\*1, X est le vecteur d'état et u=f(X) la loi de commande, définir u de sorte que l'état X atteigne un état de référence assigné, avec un temps de réponse et une précision satisfaisants.

#### 3.2 Procédure de conception

Entre la variété des procédures disponibles pour solutionner ce problème en utilisant la théorie des systèmes à structure variable, nous adopterons celle décrite par A.Y.Sivaramakrishnan dans [3]. Cette procédure, basée sur la technique du positionnement des pôles, utilise un contrôleur dont la structure est illustrée à la figure 3.1.

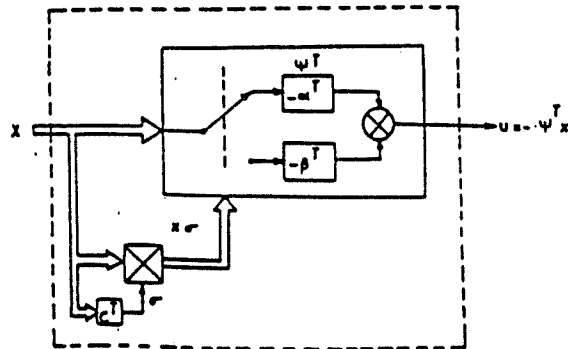


Figure 3.1: Représentation fonctionnelle du contrôleur à structure variable.

La stratégie de commande utilisée par ce contrôleur est donnée par:

$$u = \sum_{i=1}^n \psi_i * X_i \quad (3.1)$$

où les  $\psi_i$  représentent des gains qui varient comme suit:

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x_i * \sigma > 0 \\ \beta_i & \text{si } x_i * \sigma < 0 \end{cases} \quad \text{pour } i = 1..n \quad (3.2)$$

avec

$$\sigma \triangleq C * X \quad (3.3)$$

$$C \triangleq [c_1 \dots c_n] \quad (3.4)$$

$n$  est l'ordre du système.  $C$  est appelé vecteur de commutation et la fonction  $\sigma$  prend le nom de fonction du mode glissant. L'équation  $\sigma=0$  est celle d'un hyperplan dénommé hyperplan de commutation. C'est en effet en fonction de la position du vecteur d'état  $X$  par rapport à cet hyperplan que s'opère le changement de structure.

D'habitude cette stratégie conduit à une situation où l'état du système est contraint à être localisé sur l'hyperplan de commutation (dynamique en mode glissant). Lorsque cette contrainte est satisfaite, le comportement dynamique du système est décrit en termes de  $n-1$  pôles  $p_1 \dots p_{n-1}$ . Ces pôles sont une fonction de  $C$ ,  $\alpha_1$  et  $\beta_1$ .

Le design du contrôleur est effectué en passant par les étapes suivantes (figure 3.2):

### 1. Choix des pôles qui caractérisent la dynamique désirée

Il s'agit de choisir les  $(n-1)$  pôles du mode glissant  $p_1 \dots p_{n-1}$ . Cette étape est similaire à celle qui est utilisée dans l'approche par rétroaction d'état par la technique du positionnement des pôles [10] (voir en annexe A).

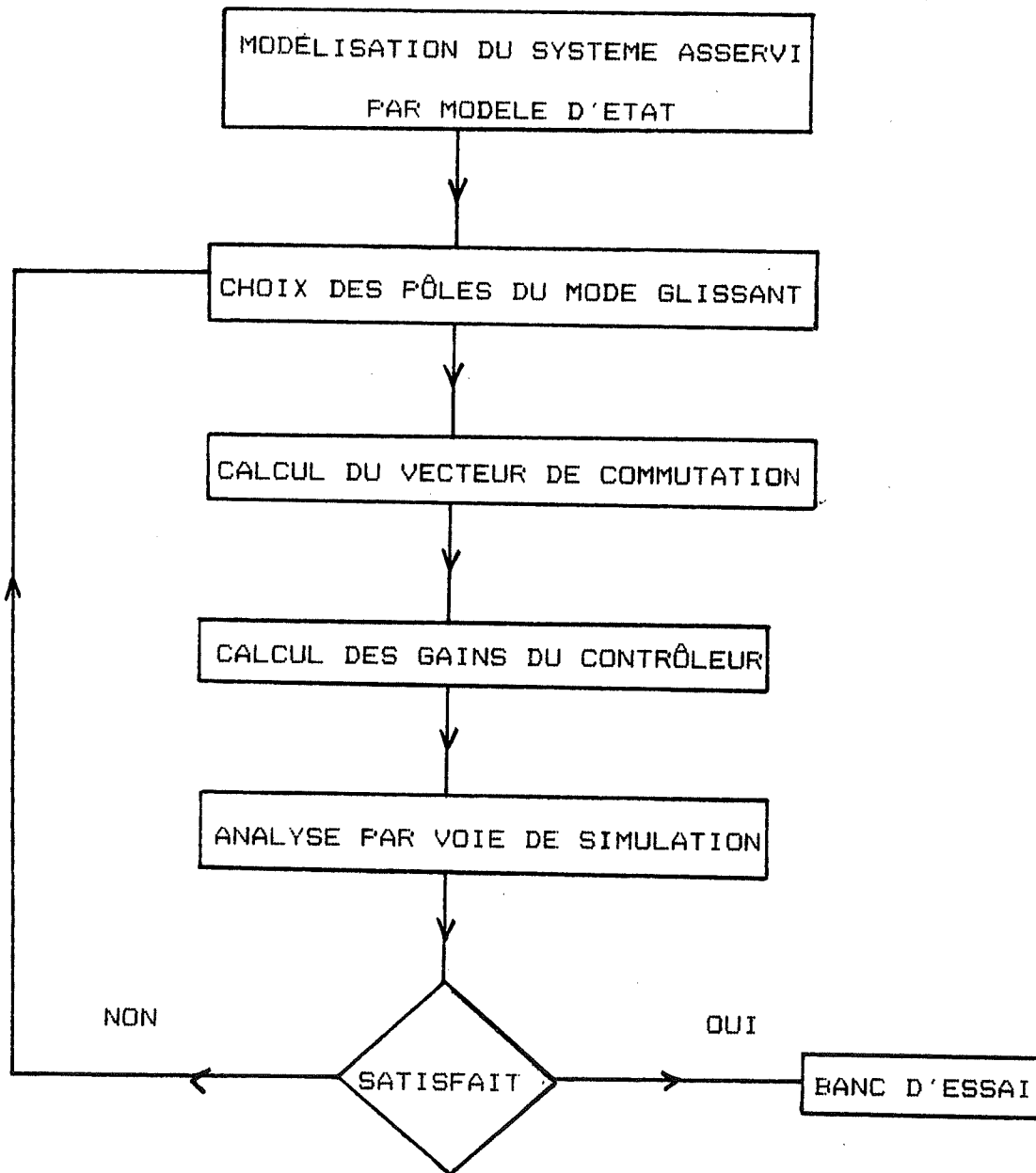


Figure 3.2: Les différentes étapes de la conception du contrôleur à structure variable



## 2. Détermination de la matrice C correspondant au choix des pôles effectué

On détermine d'abord une matrice M non singulière telle que:

$$M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \text{ où } b \text{ est un réel non nul.}$$

En utilisant la transformation définie par cette matrice et avec  $Y=MX$ , on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}_1 \\ \dot{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & a_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} * u \quad (3.5)$$

où les sous-matrices  $A_{11}$ ,  $A_{21}$  et  $A_{12}$  sont de dimensions respectives  $(n-1)*(n-1)$ ,  $1*(n-1)$  et  $(n-1)*1$  et  $a_{22}$  est un scalaire.

On détermine ensuite une matrice  $C_{11}$  telle que:

$$\det(sI - A_{11} + A_{12} * C_{11}) = (s - p_1) * \dots * (s - p_{n-1})$$

Le vecteur de commutation C est donné par:

$$C = [C_{11} \quad 1] * M \quad (3.6)$$

### 3. Détermination des gains $\alpha_i$ et $\beta_i$

Les valeurs de  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont déterminées de façon à satisfaire les relations suivantes:

$$\alpha_i < 1_i \quad (3.7)$$

$$\beta_i > 1_i \quad (3.8)$$

Les symboles  $1_i$  marquent les limites où doivent se situer les gains du contrôleur pour garantir le fonctionnement du système en mode glissant [1] [2].

$$1_i \triangleq - \frac{A_i^T * C}{B^T * C} \quad (3.9)$$

où  $A_i$  ( $i=1...n$ ) est le  $i$ ème vecteur colonne de la matrice d'état  $A$  donnée par (2.4).

### 3.3 Application à l'articulation robotique

L'application de la procédure de conception à l'articulation robotique modélisée au chapitre II (équations (2.4) à (2.6)) se concrétise comme suit:

#### 1. Choix des pôles

Pour choisir les valeurs numériques des pôles du mode glissant, nous nous sommes inspirés des résultats

obtenus avec les contrôleurs PID et par retour linéaire d'état. Ainsi, l'étude préalable du système avec un contrôleur PID nous fournit le point de départ d'une approche systématique (voir résultats en annexe C). En effet, par une technique bien connue [10], exposée en annexe C, nous commençons par ajuster les gains du contrôleur PID en fonction de certaines spécifications (coefficient d'amortissement, temps de réponse, commande maximale), puis, lorsque nous obtenons une réponse satisfaisante, nous calculons les pôles du système en boucle fermée correspondants. Nous nous inspirons de ces résultats pour positionner les pôles du contrôleur par retour linéaire d'état [10], comme exposé en annexe A, et enfin ceux du mode glissant pour le contrôleur à structure variable. On note ces derniers pôles  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ .

## 2. Détermination de la matrice C

Nous choisissons une matrice  $M$   $4 \times 4$  non singulière, la plus simple possible

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant (3.6), nous obtenons en posant

$$C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]:$$

$$c1 = -(p1+p2+p3) - (1/\tau2) \quad (3.10)$$

$$c2 = 1 \quad (3.11)$$

$$c3 = -(J2/(KR*R2^2)) * (p1*p2*p3) - c1 \quad (3.12)$$

$$c4 = (J2/(KR*R2^2)) * (p3*p1+p3*p2+p1*p2) - 1 - (c1*J2)/(c2*KR*R2^2) \quad (3.13)$$

### 3. Détermination des gains $\alpha_1$ et $\beta_1$

Nous commençons par calculer les limites  $l_1$  et nous proposons de choisir les gains  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  symétriques par rapport aux  $l_1$ . Nous verrons, à la lumière des résultats exposés au chapitre V, que d'un point de vue pratique, le choix des gains du système résulte d'un compromis entre une réponse satisfaisante et une sollicitation raisonnable du moteur.

En appliquant (3.9), nous obtenons:

$$l1 = (\tau1/Km) * ((KR*R1^2/J1) - (c4*KR*R2^2/J2)) \quad (3.14)$$

$$l2 = (\tau1/Km) * ((1/\tau1) - c1) \quad (3.15)$$

$$l3 = (\tau1/Km) * (c4 * (KR*R2^2/J2) - (KR*R1^2/J1)) \quad (3.16)$$

$$l4 = (\tau1/Km) * ((c4/\tau2) - c3) \quad (3.17)$$

## CHAPITRE IV

### DÉVELOPPEMENT D'UN LOGICIEL DE SIMULATION

#### 4.1 Introduction

La fonction du logiciel ROBEL (joint ROBOTique ELastique) est de nous permettre de simuler le comportement dynamique d'une articulation robotique élastique dont la position est asservie par un contrôleur PID, par retour linéaire d'état ou à structure variable, en tenant compte éventuellement d'une perturbation constante et d'un retard dans la commande.

Ses caractéristiques d'opération sont les suivantes:

- capacité à simuler le comportement statique et dynamique de l'articulation robotique décrite au chapitre II
- acquisition interactive des paramètres de simulation
- représentation numérique et graphique interactive des résultats
- création et lecture d'une banque de données relative aux expériences de simulation
- execution rapide

Ce logiciel a été écrit en langage Turbo-Pascal [16], [17] sur un micro-ordinateur IBM-PC. Sa structure générale est constituée d'un programme principal et d'un certain nombre de sous-programmes ou modules, dont chacun est voué à une fonction essentielle détaillée dans la section 4.3. Parmi les plus importantes, nous citons le module d'intégration numérique, basé sur la méthode d'intégration numérique Runge-Kutta d'ordre 4 présentée en annexe D.

L'élaboration de ce logiciel résulte de l'interaction des idées et des travaux de plusieurs personnes. Il nous fait plaisir de mentionner ici entre autres: André Terroux et Romano M. De Santis [12] (Asserv. pos: un programme pour la simulation de la commande d'un joint robotique), Pierre Radziszewski, Valérie Tremblay et Romano M. De Santis [13] (Simulation du comportement dynamique de la boucle de commande de l'articulation verticale de Rhino XR1), Anh-Tu Nguyen [15] (Étude de sensibilité du comportement dynamique d'un manipulateur robotique) et Mudit Kumar [14] (A Position Control System with Disturbance Rejection using Sliding Mode).

Dans la section 4.2 nous présentons le logiciel tel que vu par l'utilisateur, alors qu'au 4.3 nous en détaillons la structure interne. Nous espérons ainsi

donner au lecteur une vue d'ensemble qui lui permettra de mieux cerner le problème traité.

#### 4.2 Structure du logiciel vue par l'utilisateur

La succession chronologique des différentes étapes rencontrées par l'utilisateur lors de l'exécution du programme ROBEL est représentée à la figure 4.1. L'opérateur répond aux questions du logiciel pour avancer dans l'exécution. Nous abordons brièvement chaque option dans les paragraphes qui suivent.

##### 4.2.1 Assignment des paramètres

L'utilisateur choisit de fixer les paramètres de la simulation soit par défaut, soit par lecture d'un fichier stocké sur disquette lors d'une précédente exécution.

##### 4.2.2 Modification des paramètres

L'opérateur peut accéder à 3 groupes de paramètres distincts:

- les paramètres du système physique (tableau 4.1)
- les paramètres de simulation (tableau 4.2)
- les paramètres du contrôleur choisi (tableaux 4.3.a,b,c,d).

#### 4.2.3 Simulation

Lors de la simulation, l'utilisateur voit apparaître sur l'écran des informations concernant le comptage des intervalles d'intégration et l'évolution de certaines variables (temps, commande, position).

#### 4.2.4 Tracé graphique

Lorsque les calculs sont terminés, l'opérateur voit 7 courbes se succéder sur l'écran:

- tetapoint1 en fonction de teta1 (plan de phase côté moteur)
- teta1 en fonction du temps
- tetapoint2 en fonction de teta2 (plan de phase côté charge) .
- teta2 en fonction du temps
- commande en fonction du temps
- tetapoint1 en fonction du temps
- tetapoint2 en fonction du temps

Il a alors la possibilité de les imprimer toutes ou seulement les 5 premières.



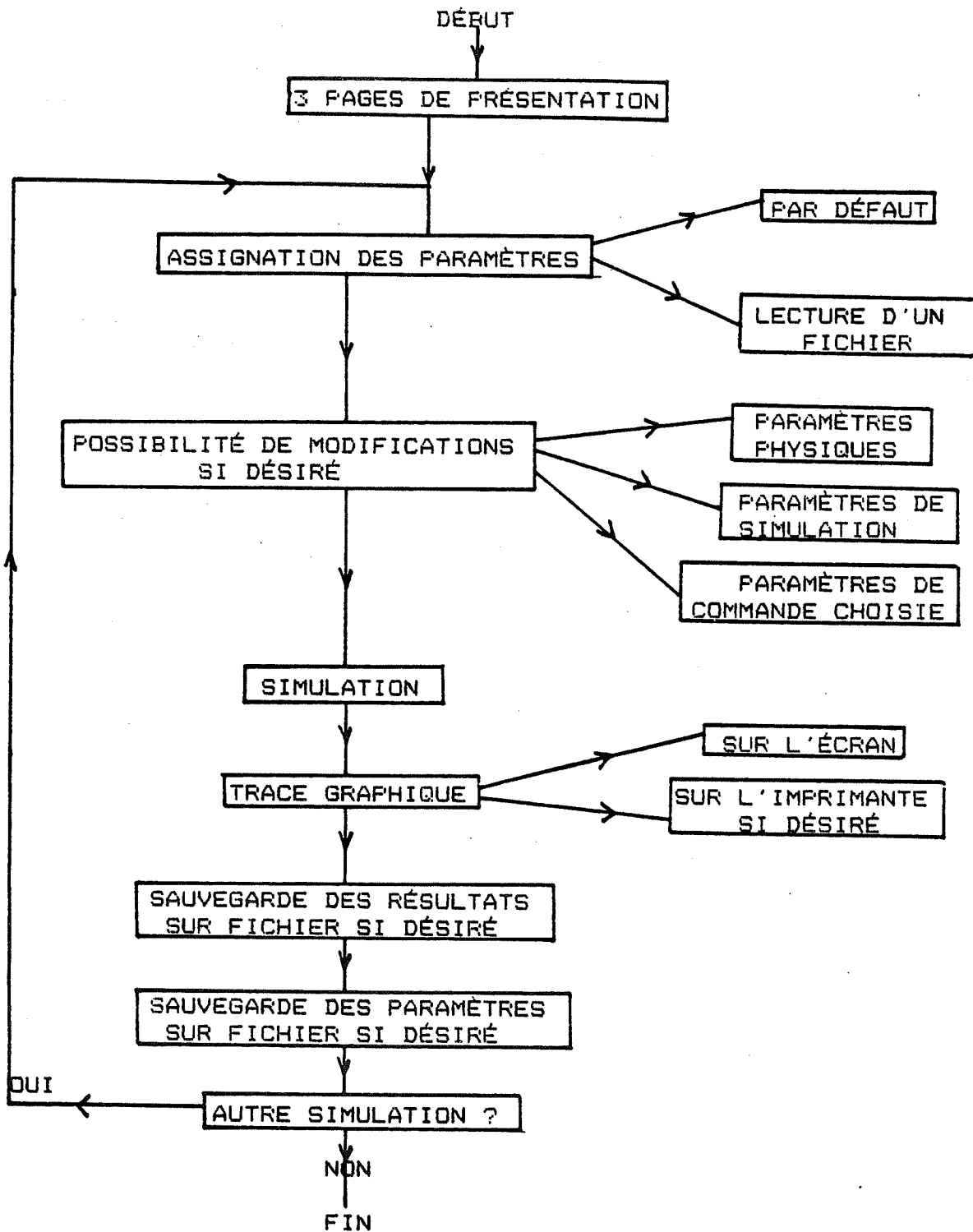


Figure 4.1: Déroulement chronologique du programme vu par l'utilisateur.

#### 4.2.5 Sauvegarde des résultats sur fichier

L'intérêt de cette opération réside dans l'utilisation de certains résultats sous forme vectorielle pour tracer des courbes superposées avec le logiciel Matlab [16] (voir chapitre VI). Cette présentation rend plus faciles et plus clairs à la fois le travail d'analyse et le présent exposé.

#### 4.2.6 Sauvegarde des paramètres sur fichier

Cette option s'avère être très utile dans les cas où l'utilisateur répète un certain nombre d'essais en faisant varier un seul paramètre (par exemple pour l'étude de sensibilité au chapitre VI). Ainsi, il charge les paramètres au début de l'exécution et l'étape de modification des paramètres est très brève.

#### 4.3 Structure interne du logiciel

La structure interne du logiciel est très voisine de la structure fonctionnelle perçue par l'utilisateur. Ainsi la figure 4.2 qui mentionne les différents sous-programmes utilisés a une architecture très voisine de la figure 4.1.

\*\*\*\*\*PARAMETRES DU SYSTEME PHYSIQUE\*\*\*\*\*

- (1) GAIN STATIQUE DU MOTEUR.....KM=1.50
- (2) CONSTANTE DE TEMPS DU MOTEUR.....TAU1=0.050
- (3) MOMENT D'INERTIE MOTEUR.....J1=0.50
- (4) RAYON DE COUPLAGE MOTEUR.....R1=0.040
- (5) COEFFICIENT D'ELASTICITE RESSORT.....KR=1250000.0000
- (6) CONSTANTE DE TEMPS ROBOT.....TAU2=10.000
- (7) MOMENT D'INERTIE ROBOT.....J2=75.0000
- (8) RAPPORT DE TRANSMISSION.....NT=10

Tableau 4.1: Paramètres du système physique.

\*\*\*\*\*PARAMETRES DE SIMULATION\*\*\*\*\*

- (1) AMPLI(LINEAIRE/DUALMODE/BANG-BANG):(0/1/2).....AMP=0
- (2) CONTROLE(SSV/PID/RETOUR D'ETAT):(0/1/2).....R=0
- (3) PERIODE D'ECHANTILLONNAGE.....DT=0.0010000
- (4) FIN DE SIMULATION.....TF=1.00
- (5) PERTURBATION SUR L'ENTREE.....CF=0.00
- (6) ETAT INITIAL.....T10,T20,T30,T40=0.00 0.00 0.00 0.00
- (7) ETAT INITIAL DE L'INTEGRATEUR.....I30=0.00
- (8) ETATS DESIRES.....REF1,REF2=1.00 0.10
- (9) DELAI DE COMMUTATION.....D=0.000000
- (10) ON TRACE UN POINT CALCULE SUR NB.....NB=10
- (11) BRUIT CAPTEURS DE POSITION ET DE VITESSE.....N1,N2=0.000 0.000
- (12) GAINS CAPTEURS DE POSITION ET DE VITESSE.....KP,KS=0.020 0.06
- (13) NIVEAU DE QUANTISATION CONVERTISSEUR A/N.....Q1,Q2=0.00010 0.00010
- (14) NIVEAU DE QUANTISATION CONVERTISSEUR N/A.....Q3=0.00010
- (15) EMPLACEMENT DES CAPTEURS:X1,X2(1)/X3,X4(2)/X1,X4(3).....M=1

Tableau 4.2: Paramètres de simulation.

\*\*\*\*\*VOUS AVEZ CHOISI UN CONTROLLEUR PID\*\*\*\*\*

- (1) COMPOSANTE PROPORTIONNELLE.....K1=14.80
- (2) COMPOSANTE DERIVEE.....K2=1.30
- (3) COMPOSANTE INTEGRALE.....K3=34.90
- (4) COMPOSANTE ANTICIPATRICE.....K4=-0.20

a)

\*\*\*\*\*VOUS AVEZ CHOISI UN CONTROLLEUR A RETOUR LINEAIRE D'ETAT\*\*\*\*\*

- (1).....KREG1=85.50
- (2).....KREG2=3.30
- (3).....KREG3=-32.10
- (4).....KREG4=0.23

b)

\*\*\*\*\*VOUS AVEZ CHOISI UN CONTROLLEUR A STRUCTURE VARIABLE\*\*\*\*\*

LES POLES DU SYSTEME EN MODE GLISSANT SONT PR1,PR2+i\*Pi,PR3-i\*Pi

- (1).....PR1=-2.5E+001
- (2).....PR2=-2.5E+001
- (3).....PR3=-2.5E+001
- (4).....PI=7.0E+001

c)

- (1)  $\text{alfa1} < -3.36144 < \text{beta1}$      $\text{alfa1} = -6.72000$      $\text{beta1} = 0.00000$
- (2)  $\text{alfa2} < -1.83000 < \text{beta2}$      $\text{alfa2} = -3.66000$      $\text{beta2} = 0.00000$
- (3)  $\text{alfa3} < 3.36144 < \text{beta3}$      $\text{alfa3} = 0.00000$      $\text{beta3} = 6.72000$
- (4)  $\text{alfa4} < 0.77523 < \text{beta4}$      $\text{alfa4} = 0.00000$      $\text{beta4} = 1.54000$

d)

Tableau 4.3: Paramètres des différents contrôleurs

A chaque opération définie à la section 4.2 correspond un sous-programme:

- PRE, DIRECT et EQUATIONS pour les 3 pages de présentation.
- LECT pour la lecture d'un fichier de paramètres.
- DEFAUT pour fixer la valeur des paramètres par défaut.
- SYS pour modifier les paramètres du système physique.
- SIM pour modifier les paramètres de simulation.
- POLES, COMMUT, PID, KREG pour modifier les paramètres de la commande choisie.
- TRACE pour les tracés graphiques (utilise GRAPH1 et GRAPH2).
- SAUVE pour sauvegarder des tableaux de résultats sur fichier.
- STOCK pour sauvegarder les paramètres de la simulation sur fichier.

La boucle de calcul qui correspond à la partie SIMULATION vue par l'utilisateur (voir figures 4.1 et 4.2) est détaillée à la figure 4.3. A chaque calcul important correspond un sous-programme:

- COMMANDE pour le calcul de la commande (en fonction du contrôleur choisi).

- AMPLI pour l'amplification de la commande.
- DELAI pour tenir compte de l'effet d'un retard dans la commande.
- RK4 pour effectuer l'intégration numérique Runge-Kutta d'ordre 4 (voir Annexe D).

Pour mieux comprendre les enchaînements de la figure 4.3, il peut être utile de consulter la figure 2.3 page 13 qui explique le fonctionnement du système asservi.

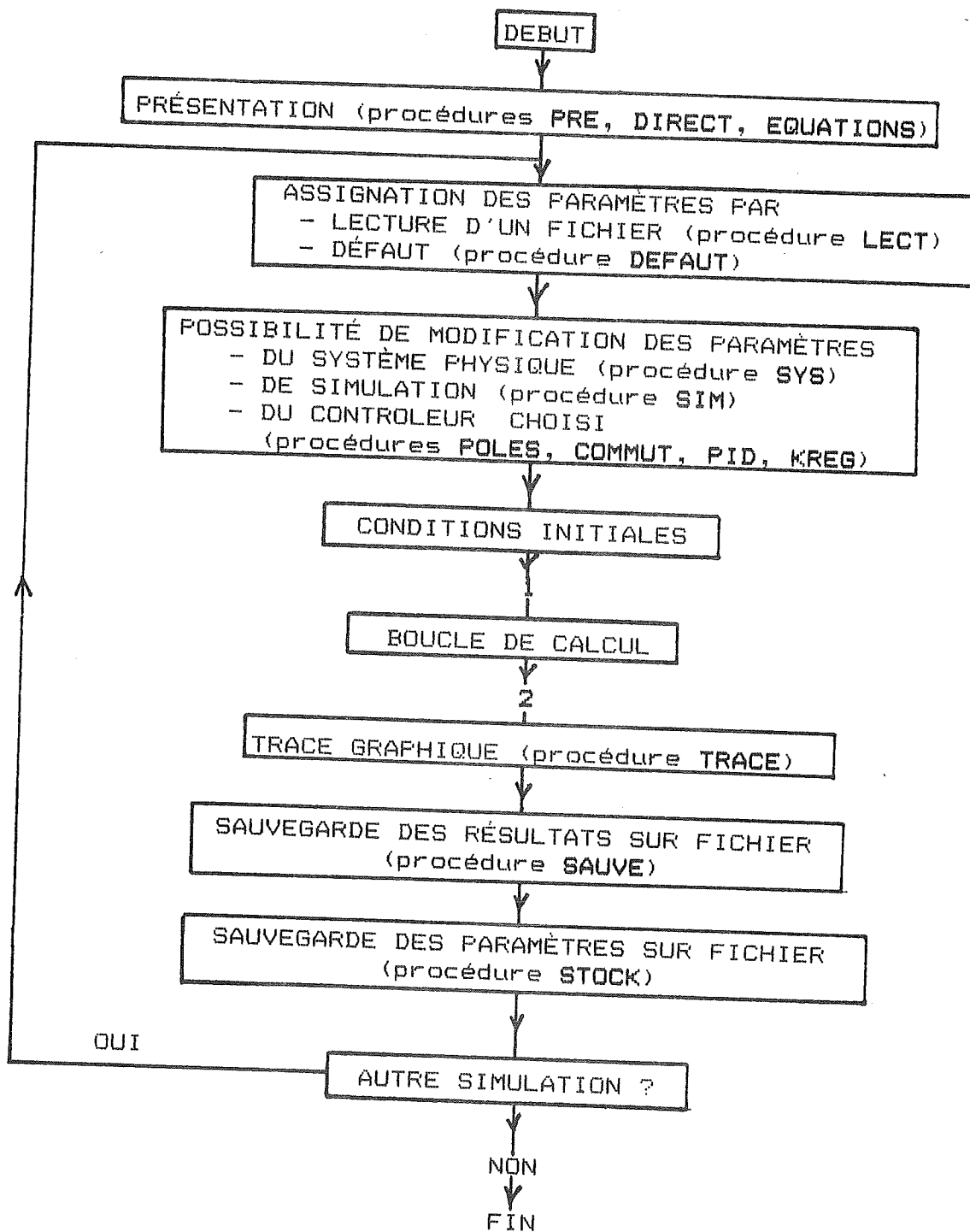


Figure 4.2: Structure interne du programme.

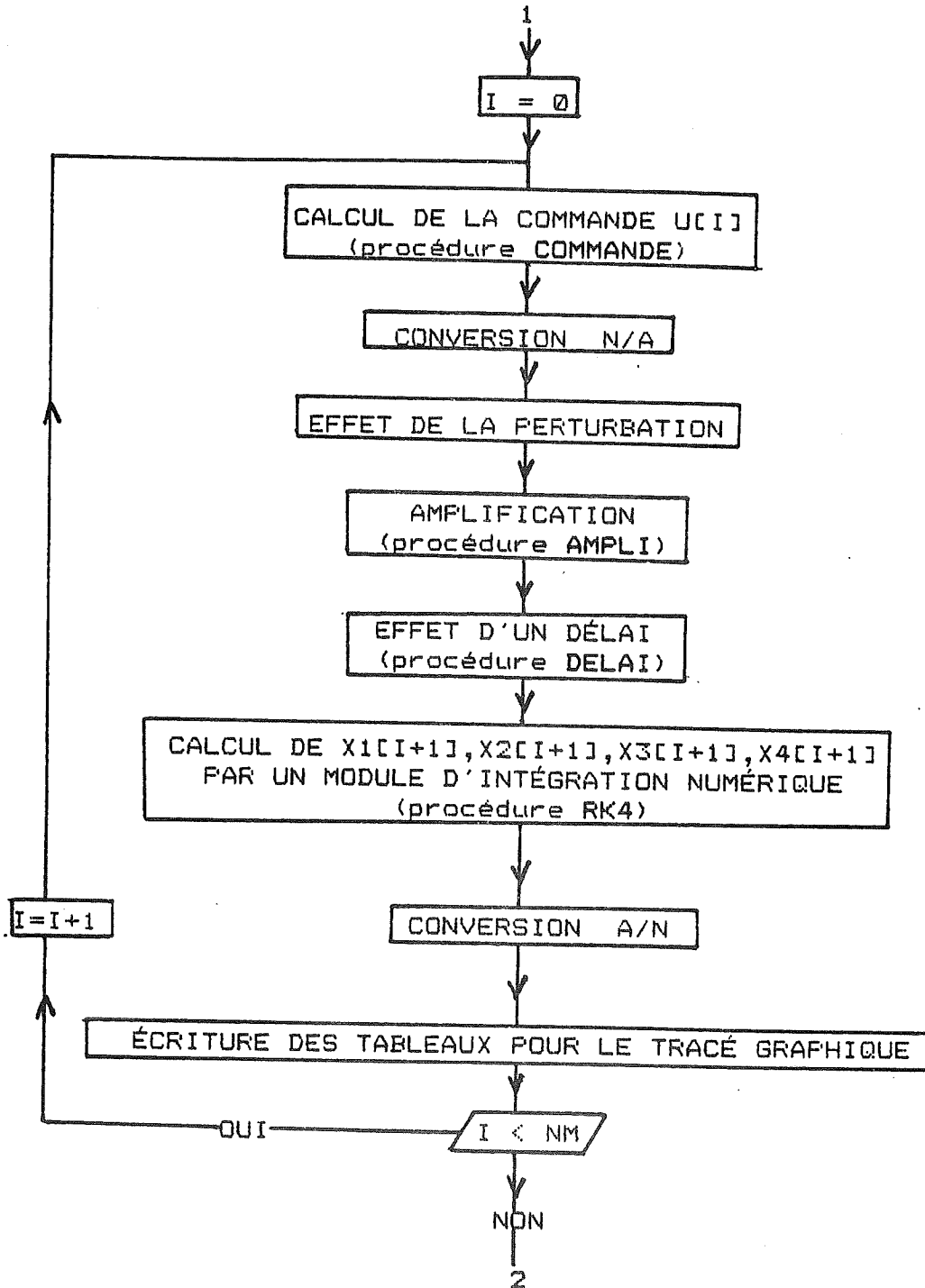


Figure 4.3: Structure interne de la boucle de calcul.



## CHAPITRE V

### COMPORTEMENT DU CONTROLEUR A STRUCTURE VARIABLE

#### 5.1 Positionnement des pôles

Pour effectuer le positionnement des pôles qui doivent caractériser la dynamique du contrôleur à structure variable, nous nous inspirons des résultats obtenus avec les autres contrôleurs. Après divers essais avec le contrôleur PID (détaillés en annexe C), nous avons calculé les pôles en boucle fermée du système qui nous a paru optimal. Ces pôles sont:  $-17 \pm 76 * i$   $-12$   $-5$ . Ce premier résultat nous a permis de placer facilement les pôles du contrôleur par retour linéaire d'état. Notre choix s'est porté sur des pôles égaux à:  $-25 \pm 70 * i$   $-25$   $-25$ . Ces dernières valeurs ont constitué notre point de départ pour le positionnement des pôles du contrôleur à structure variable. Quelques essais significatifs ont été reportés au tableau 5.1.

pôles choisis	TR5%	extrêmes de u
-25 -25 -25	0.25s	300/-350
-17 -17±76*i	0.45s	5/-6
-30 -30±60*i	0.13s	70/-70
-25 -25±70*i	0.20s	20/-30

Tableau 5.1: Choix des pôles du contrôleur à structure variable

Pour chaque essai les valeurs des gains  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  sont choisies symétriques par rapport aux  $l_1$  avec un écart de 100%. Notre choix s'est porté sur les pôles égaux à -25 -25±70\*i parce qu'avec des valeurs moyennes des gains ils nous procurent un temps de réponse à 5% convenable, 200ms, et sollicitent le moteur de façon raisonnable.

Les résultats obtenus nous permettent d'affirmer que l'étape de positionnement des pôles dans la conception du contrôleur à structure variable ne présente pas de difficulté particulière.

La différence du contrôleur à structure variable par rapport au contrôleur par retour linéaire d'état réside dans le fait que nous pouvons agir non seulement sur les

pôles , mais aussi sur les gains du contrôleur pour ajuster la réponse désirée.

### 5.2. Choix des gains

Le tableau 5.2 nous montre les résultats obtenus par le système à structure variable dont les pôles du mode glissant ont été fixés à  $-25, -25 \pm 70i$ . Les gains du contrôleur à structure variable sont choisis conformément aux considérations exposées au chapitre III, c'est-à-dire que  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  ont des valeurs symétriques par rapport aux  $l_1$  (donnés par (3.9)). Les facteurs qui interviennent dans notre discussion sont le temps de réponse à 5% et la tension fournie par le moteur. Nous observons que plus les gains du contrôleur sont éloignés des  $l_1$ , meilleur est le temps de réponse du système. En effet, dans ce cas, le point de fonctionnement atteint l'hyperplan de commutation  $\sigma=0$  plus rapidement et ainsi le système entre plus vite en mode glissant et rejoint la dynamique préassignée par le choix des pôles. Par contre, plus les gains sont élevés, plus on sollicite le moteur, puisque la tension  $u$  à fournir est de plus en plus importante. Il s'agit de trouver un compromis entre ces deux aspects.

variation par rapport aux $l_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\alpha_4$	$\beta_4$	TR5%	Extrêmes de u
10%	-3.70	-3.02	-2.01	-1.65	3.02	3.70	0.69	0.85	>2s	0.6/0
20%	-4.03	-2.69	-2.20	-1.46	2.69	4.03	0.62	0.92	>2s	2/0
30%	-4.37	-2.35	-2.38	-1.28	2.35	4.37	0.54	1.00	1.2s	2/0
40%	-4.70	-2.02	-2.56	-1.10	2.02	4.70	0.46	1.08	0.5s	3/-1
50%	-5.04	-1.68	-2.74	-0.91	1.68	5.04	0.38	1.15	0.35s	4/-9
60%	-5.38	-1.34	-2.93	-0.73	1.34	5.38	0.31	1.23	0.27s	5/-10
70%	-5.71	-1.01	-3.11	-0.55	1.01	5.71	0.23	1.31	0.22s	10/-15
80%	-6.05	-0.67	-3.29	-0.37	0.67	6.05	0.15	1.39	0.20s	15/-20
90%	-6.38	-0.34	-3.48	-0.18	0.34	6.38	0.08	1.46	0.19s	15/-25
100%	-6.72	0	-3.66	0	0	6.72	0	1.54	0.15s	20/-30
150%	-8.4	1.68	-4.57	0.91	-1.68	8.4	-0.38	1.92	0.14s	35/-45
200%	-10.08	3.36	-5.49	1.83	-3.36	10.08	-0.77	2.31	0.13s	55/-80

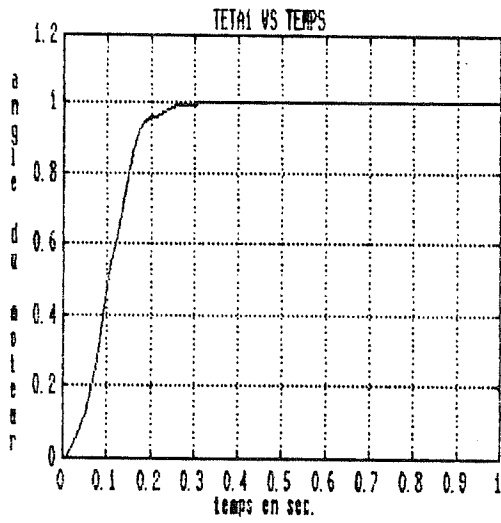
Tableau 5.2: Choix des gains du contrôleur à structure variable avec les valeurs nominales des pôles  $-25, -25 \pm 70 \cdot i$ .

### 5.3. Résultats

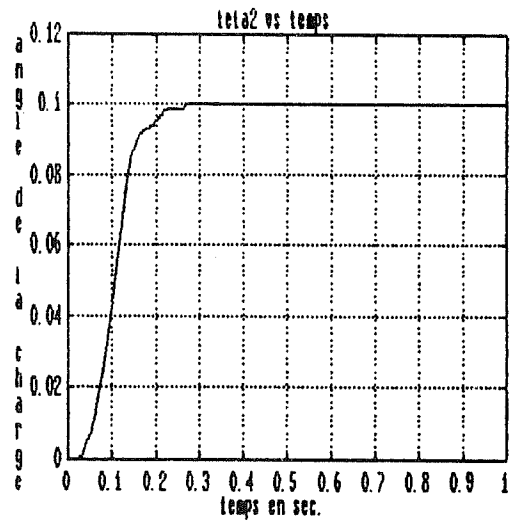
L'essai que nous retenons pour la suite de l'analyse correspond aux pôles en mode glissant déjà cités  $-25, -25 \pm 70*i$ . Les valeurs nominales des gains choisis  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  varient de 100% par rapport aux  $1_i$ . Ces valeurs sont encadrées sur le tableau 5.2 et vérifient les inégalités (3.7) et (3.8). Les réponses obtenues avec ce système sont reportées à la figure 5.1.

$p_1 = -25$
$p_2 = -25+70*i$
$p_3 = -25-70*i$
$\alpha_1 = -6.72$
$\beta_1 = 0$
$\alpha_2 = -3.66$
$\beta_2 = 0$
$\alpha_3 = 0$
$\beta_3 = 6.72$
$\alpha_4 = 0$
$\beta_4 = 1.54$

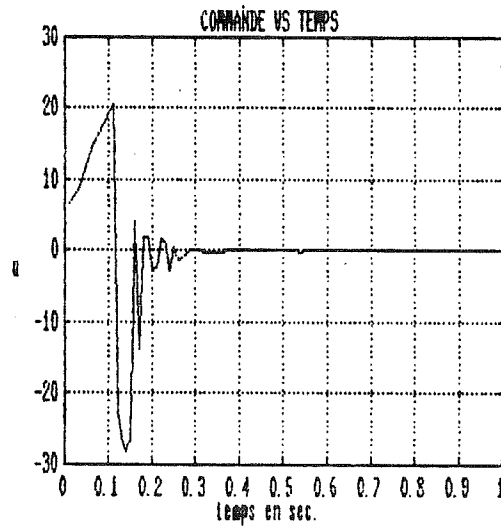
Tableau 5.3: Paramètres de l'essai nominal



(1)



(2)



(3)

Figure 5.1: Essai SSV: valeurs nominales des gains

(1) teta1 versus temps

(2) teta2 versus temps

(3) commande

Tous les essais concernant le contrôleur à structure variable relatés dans le chapitre suivant proviennent, sauf précision contraire, de cet essai nominal.

Dans tous les essais qui ont été effectués pour ce travail, nous avons adopté une période d'échantillonnage de 1 ms; nous avons vérifié auparavant que les résultats sont identiques si l'on échantillonne avec une période égale à 0.1 ms. Dans les cas où le système diverge, pour nous assurer que la divergence n'est pas une divergence de calculs numériques, nous avons calculé les pôles du système en boucle fermée. Nous avons ainsi pu nous assurer que certains de ces pôles se situent à droite l'origine, ce qui nous conforte dans l'idée qu'il s'agit bien d'une divergence du système. Cette vérification a été réalisée à l'aide du logiciel MATLAB [20] et les détails des calculs se trouvent en annexe C.

## CHAPITRE VI

### ANALYSE COMPARATIVE DES TROIS CONTROLEURS

#### 6.1 Introduction

Ce chapitre analyse les avantages et les inconvénients de l'utilisation d'un contrôleur à structure variable dans l'asservissement de position d'une articulation robotique avec un lien de transmission élastique. Dans ce but, nous décrivons un certain nombre de simulations effectuées avec le logiciel ROBEL pour évaluer les performances du contrôleur à structure variable en matière de précision, de temps de réponse, de sensibilité à des variations de paramètres, à une perturbation constante et à un délai. Ces performances sont comparées à celles obtenues en utilisant le contrôleur PID et le régulateur par retour linéaire d'état.

De façon générale pour les trois contrôleurs, nous observons que l'angle du moteur  $\theta_1$  et l'angle de l'articulation robotique  $\theta_2$  ont le même comportement. Ainsi nous nous contenterons d'illustrer cet exposé des courbes  $\theta_2$  versus temps. Pour tous les essais, l'état initial de  $\theta_2$  a été choisi égal à 0 et la référence  $ref_2$



égale à 0.1 rad.

### 6.2 Systemes de référence

Les paramètres des contrôleurs PID et par retour linéaire d'état qui constituent notre référence figurent au tableau 6.1.

contrôleur	gains
FID	$K1 = 14.80$ $K2 = 1.30$ $K3 = 34.90$ $K4 = -0.20$
RETOUR D'ETAT	$KREG1 = 65.80$ $KREG2 = 2.70$ $KREG3 = -22.61$ $KREG4 = 0.51$

Tableau 6.1: Paramètres des systèmes de référence

Dans la suite les illustrations concernant ces deux contrôleurs proviennent de ces valeurs des paramètres, à l'exception de l'essai avec le contrôleur PID qui figure à la section 6.3.

Pour le contrôleur à structure variable, les paramètres de référence sont donnés au tableau 5.3 et

constituent l'essai nominal.

### 6.3. Performances statiques et dynamiques

La précision des réponses obtenues, que ce soit avec le contrôleur PID, par retour linéaire d'état ou à structure variable, ne prête pas à grande discussion. En effet les réponses du système nominal présentent toujours une erreur à régime quasi nulle.

Il n'en est pas de même du temps de réponse du système. En effet, il ressort des résultats exposés en annexe C que l'on ne peut pas obtenir un temps de réponse aussi petit que l'on veut avec le contrôleur PID. Par contre, comme nous le montrent les résultats du tableau 5.2, avec un contrôleur à structure variable il est possible d'obtenir, en théorie, un temps de réponse aussi court que l'on veut, en augmentant les gains du contrôleur. Par contre, en pratique, on est limité par la tension maximale que peut fournir le moteur ( $\pm 125V$ ).

Ainsi la figure 6.1(2) nous montre la réponse du système à structure variable avec un temps de réponse de 200 ms environ pour la charge (essai nominal). Si l'on calcule les gains du contrôleur PID pour obtenir ce temps de réponse, on obtient la réponse donnée à la figure 6.1(1).

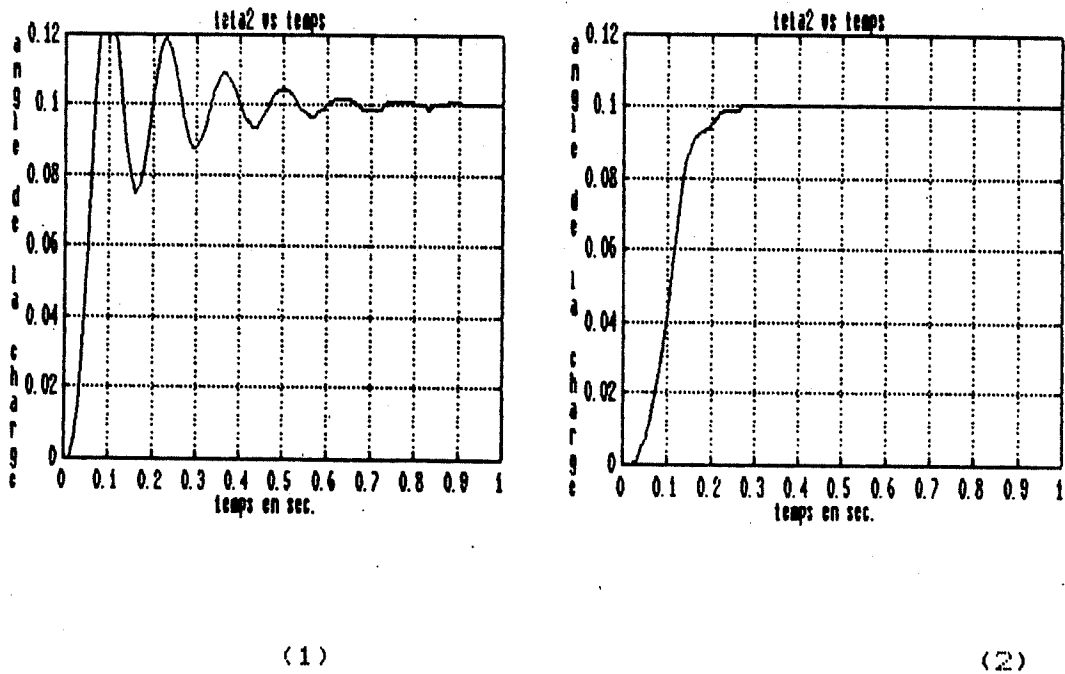
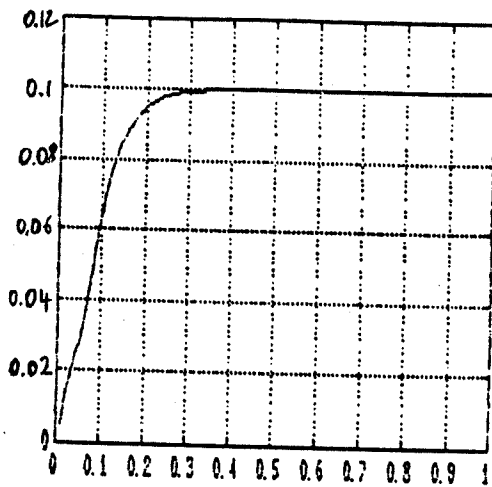


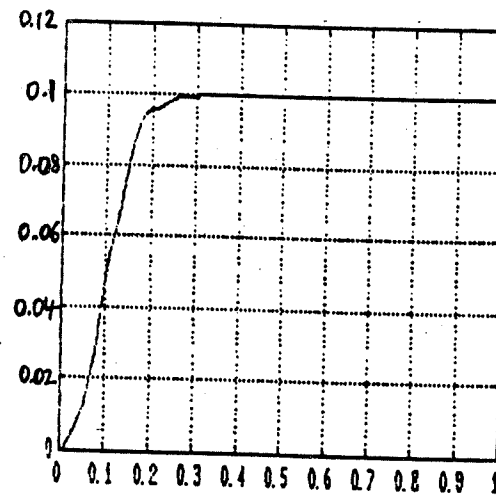
Figure 6.1: Performance dynamique PID (1)  
versus structure variable (2)

Cet essai montre bien la supériorité du contrôleur à structure variable face au contrôleur PID en matière de temps de réponse.

Par contre, un système linéaire avec retour d'état peut en général fournir le même temps de réponse qu'un système à structure variable. Cet aspect est illustré par les courbes de la figure 6.2 ci-dessous.



(1)



(2)

Figure 6.2: Performance dynamique retour linéaire (1)  
versus structure variable (2)

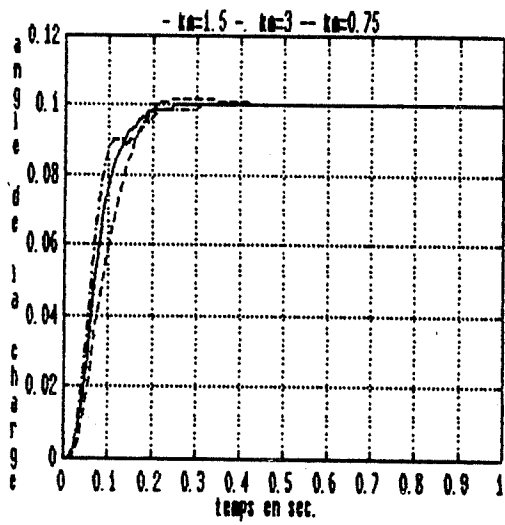
#### 6.4. Sensibilité à la variation des paramètres

Les paramètres que nous avons fait varier dans cette étude sont  $K_m$ , le gain statique du moteur,  $\tau_1$ , la constante de temps du moteur et  $j_2$  le moment d'inertie de la charge. Pour les deux premiers paramètres, il est intéressant d'envisager de telles variations, car on ne peut pas les calculer de façon exacte. Par ailleurs  $j_2$ , le moment d'inertie du robot par rapport à l'axe de rotation considéré, varie au cours du temps en fonction des mouvements du robot. En termes de variations, nous avons

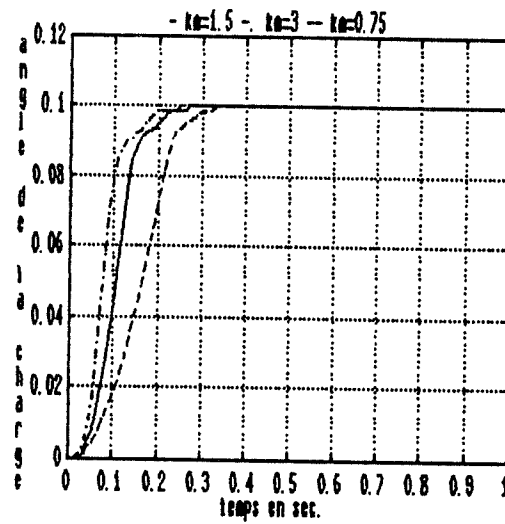
envisagé des valeurs deux fois plus grandes et deux fois plus petites que les valeurs nominales. Soit

$K_m = 1.5$	$K_m = 3$	$K_m = 0.75$
$\tau_{u1} = 0.05$	$\tau_{u1} = 0.1$	$\tau_{u1} = 0.025$
$j_2 = 75$	$j_2 = 150$	$j_2 = 37.5$

Les courbes des figures 6.3, 6.4 et 6.5 nous montrent que la réponse du système à structure variable nominal est moins sensible que celle du système à retour linéaire d'état face à la variation de  $K_m$ ,  $\tau_{u1}$  et  $j_2$ .

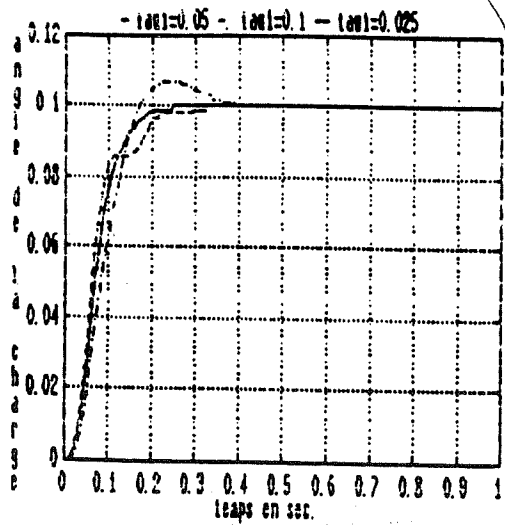


(1)

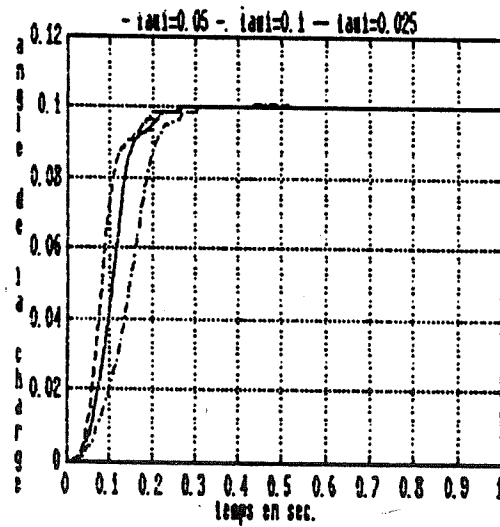


(2)

Figure 6.3: Variation de  $K_m$ : retour linéaire d'état (1)  
versus structure variable (2)

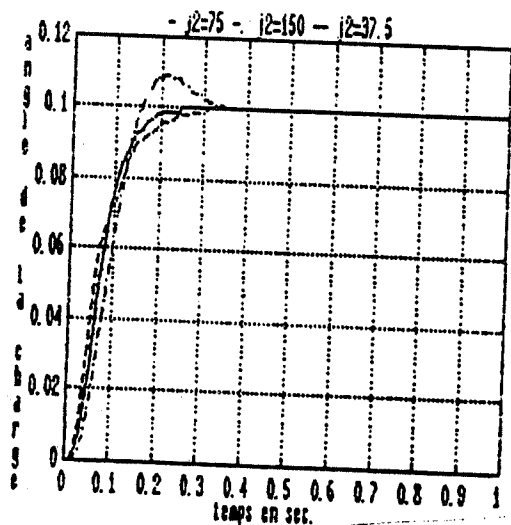


(1)

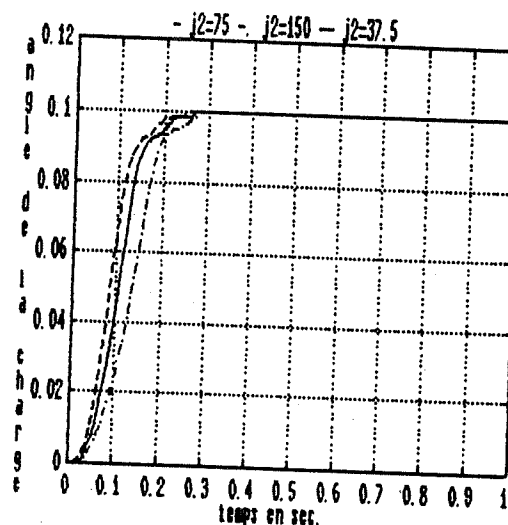


(2)

Figure 6.4: Variation de  $\tau_{a1}$ : retour linéaire d'état (1)  
versus structure variable (2)



(1)



(2)

Figure 6.5: Variation de  $j_2$ : retour linéaire d'état (1)  
versus structure variable (2)

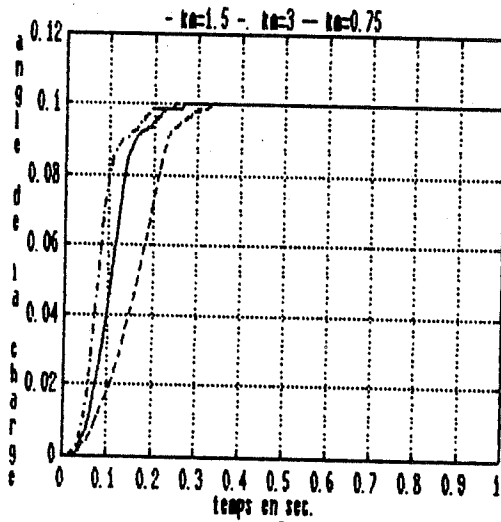
Nous remarquons que les réponses du système linéaire à retour d'état présentent des dépassements de l'ordre de 5% lorsque les paramètres du système varient. Par contre, ces dépassements n'existent pas lorsque nous faisons varier l'un quelconque des paramètres cités plus haut dans le système à structure variable. Les performances des deux systèmes s'avèrent être identiques d'un point de vue rapidité de rétablissement du régime permanent.

Par contre, lors de la variation d'un paramètre, les différentes réponses du système à structure variable

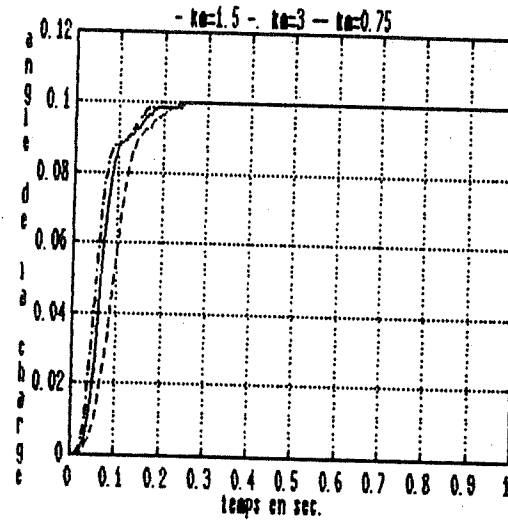
nominal s'avèrent être décalées dans le temps. Ce résultat provient du fait que le vecteur de commutation  $C$  et les valeurs des limites  $l_1$  dépendent directement de  $K_m$ ,  $\tau_{u1}$  et  $j_2$  (voir chapitre III équations (3.10) à (3.17)). Ainsi, lorsqu'un de ces paramètres varie, il se trouve que les pôles du système n'ont plus la valeur préassignée et la dynamique résultante est différente. Par ailleurs, comme les  $l_1$  ont changé, il s'avère dans notre exemple que l'on n'est plus en mode glissant, même si on en est encore très proche.

Mais la grande force des systèmes à structure variable vient du fait que plus les gains du contrôleur sont élevés, meilleures sont les performances du système face aux variations des paramètres. Cet aspect essentiel est illustré par les schémas (1) et (2) des figures 6.6, 6.7 et 6.8.



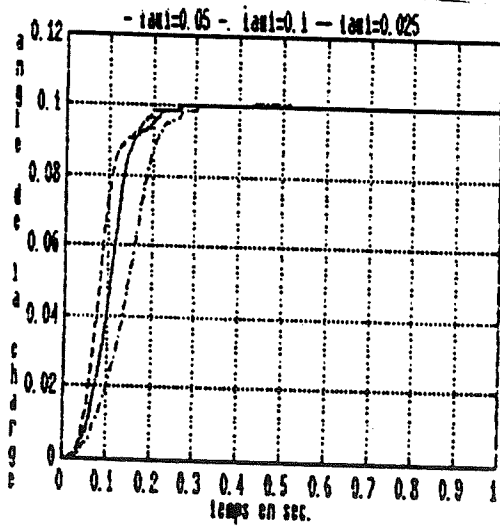


(1)

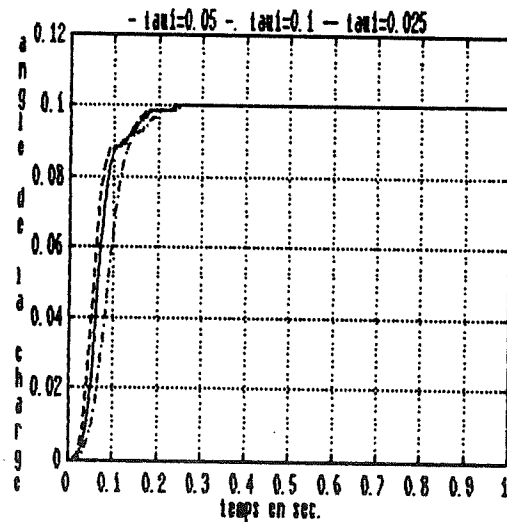


(2)

Figure 6.6: Variation de  $K_m$ : essai nominal (1)  
versus gains supérieurs (2)



(1)



(2)

Figure 6.7: Variation de  $\tau_i$ : essai nominal (1)  
versus gains supérieurs (2)

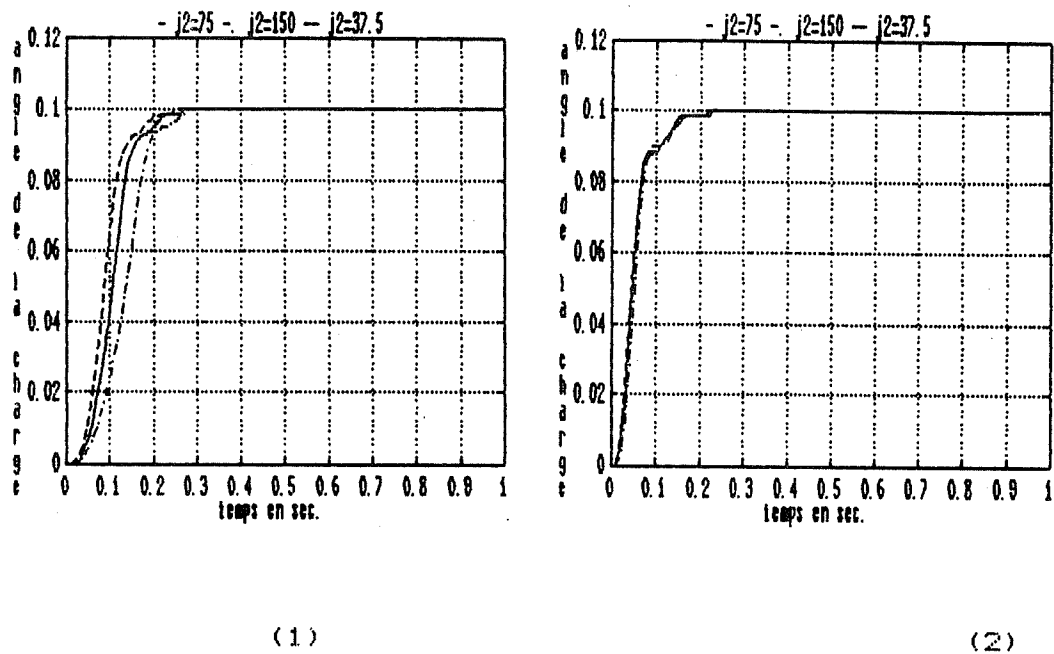


Figure 6.8: Variation de  $j_2$ : essai nominal (1)  
versus gains supérieurs (2)

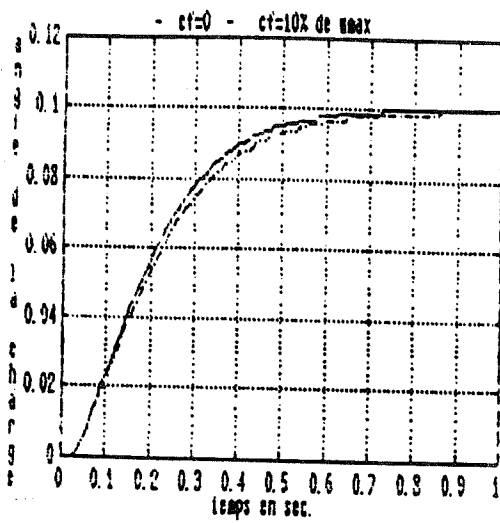
Les schémas (1) des trois figures précédentes constituent les réponses du système nominal avec les gains nominaux respectivement lorsque  $K_m$ ,  $\tau_{a1}$  et  $j_2$  varient; les schémas (2) résultent des variations respectives de  $K_m$ ,  $\tau_{a1}$  et  $j_2$  et constituent les réponses d'un système où les valeurs des gains ont été choisies dans le tableau 5.2, de telle sorte que l'on soit assuré qu'avec n'importe quelle combinaison de paramètres étudiée, on est en mode glissant. Ainsi, pour les variations de  $K_m$  et  $\tau_{a1}$ , les schémas (2) des figures 6.6 et 6.7 résultent de l'essai constituant la

dernière ligne du tableau 5.2. Pour illustrer la variation de  $j_2$  (schéma (2) de la figure 6.8), nous avons choisi des gains encore plus élevés et l'essai reste du domaine de la simulation puisque la commande dépasse les limites prescrites ( $|u_{max}|=125V$ ).

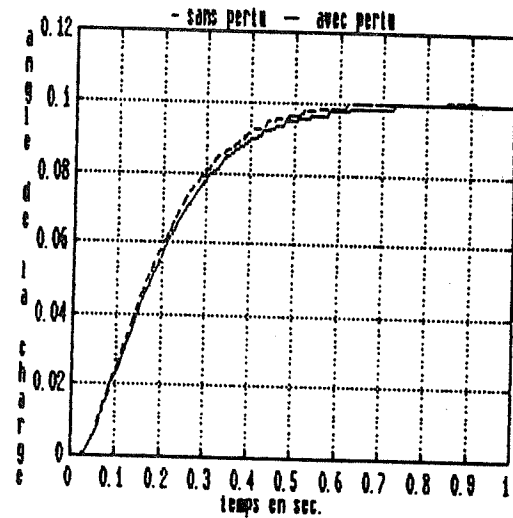
Nous observons que sur les schémas (2) des trois figures, les réponses du système sont beaucoup plus proches que sur les schémas (1). En fait, la dynamique du système n'est toujours pas celle préassignée par le choix des pôles. Simplement, lorsque les gains sont plus élevés, le système entre en mode glissant et dès lors s'avère insensible à la variation des paramètres.

#### 6.5 Analyse de la sensibilité à une perturbation

Nous nous intéressons ici à une perturbation constante  $c_f$ , qui peut être représentée par une charge constante agissant sur l'axe du moteur. Pour chacun des essais effectués, nous appliquons une perturbation égale environ à 10% de la commande maximale fournie lorsqu'il n'y a pas de perturbation. Les courbes des figures 6.9, 6.10 et 6.11 nous montrent que le contrôleur à structure variable est moins robuste face aux perturbations que le contrôleur par retour linéaire d'état, qui l'est lui-même moins que le contrôleur FID.

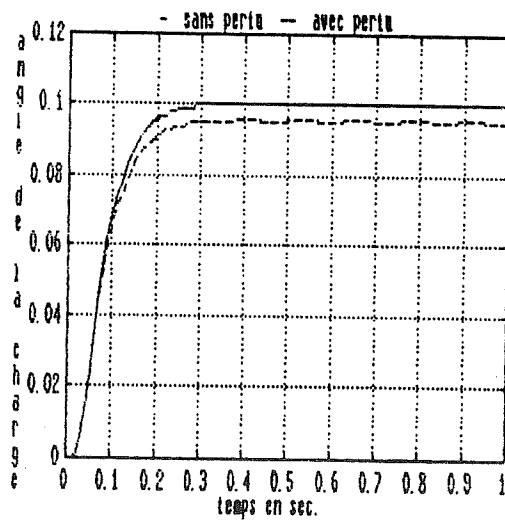


(1)

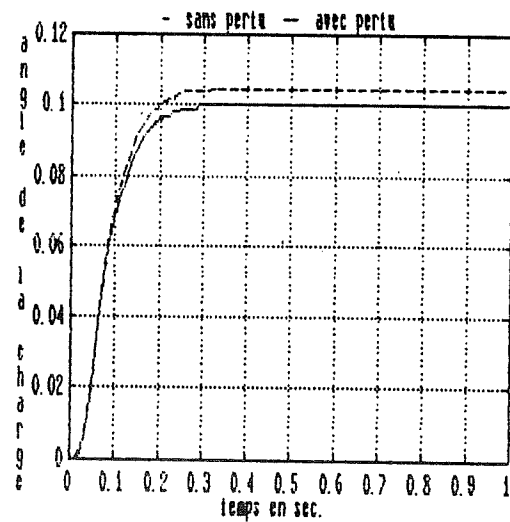


(2)

Figure 6.9: Sensibilité à une perturbation  $>0$  (1)  $<0$  (2)  
pour le contrôleur PID

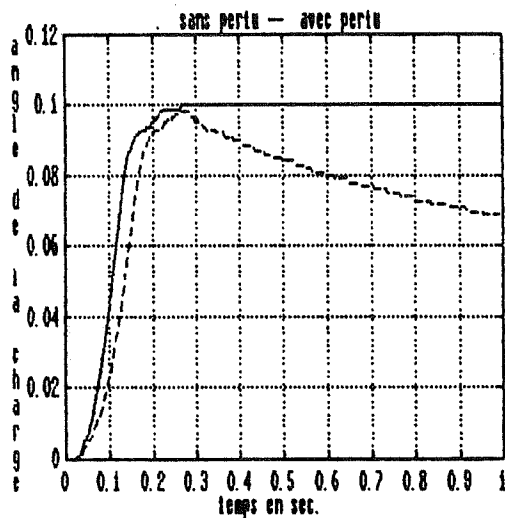


(1)

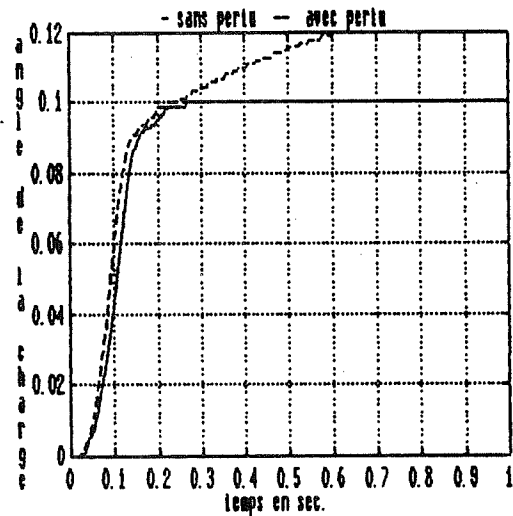


(2)

Figure 6.10: Sensibilité à une perturbation  $>0$  (1)  $<0$  (2)  
pour le contrôleur par retour linéaire d'état



(1)



(2)

Figure 6.11: Sensibilité à une perturbation  $>0$  (1)  $<0$  (2)  
pour le contrôleur à structure variable

En effet, la figure 6.9 nous montre que le système contrôlé par un PID est pratiquement insensible à l'effet d'une perturbation. Ce résultat est la conséquence bien connue de la présence de l'intégrateur. Le contrôleur par retour linéaire d'état est sensible à la perturbation puisqu'il présente une erreur à régime d'environ 5% comme l'indique la figure 6.10. Par contre sur la figure 6.11, on observe une erreur à régime de  $\pm 45\%$  dans la réponse du système à structure variable nominal, lorsqu'on applique

respectivement une perturbation positive (1) ou négative (2). Un rapide calcul détaillé en annexe E permet de vérifier ces résultats et de prévoir qu'en augmentant les gains du contrôleur, nous pouvons, en théorie, rendre l'erreur aussi petite que nous le désirons. Mais nous sommes limités, bien-sûr, par les valeurs maximales de la commande ( $|u_{max}|=125V$ ). Ainsi, nous avons obtenu de bons résultats en augmentant  $|\alpha_1|$  et  $|\alpha_3|$  et en gardant tous les autres gains identiques. La figure 6.12 compare les réponses obtenues avec les valeurs nominales des gains (a), avec les mêmes gains et une perturbation  $cf=3V$  (b) et enfin avec des gains  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  plus élevés ( $\alpha_1$  et  $\alpha_3 = -150$ ) et la même perturbation (c). Ainsi avec  $\alpha_1 = \alpha_3 = -150$ , l'erreur à régime n'est plus que de 1%.

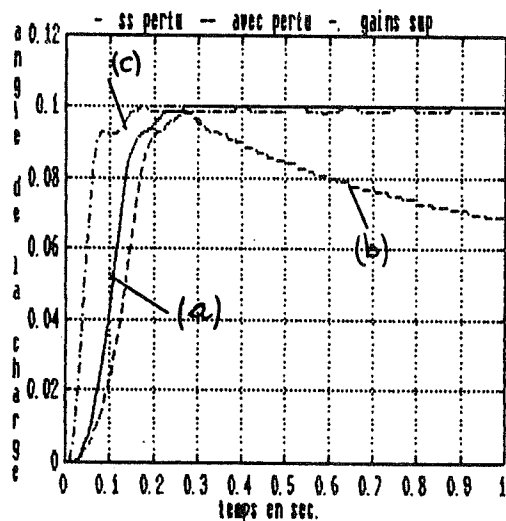


Figure 6.12: Amélioration du contrôleur à structure variable face à une perturbation.

- (a) essai nominal
- (b) gains nominaux et perturbation
- (c) gains supérieurs et perturbation

### 6.6 Analyse de la sensibilité au délai

Le programme ROBEL (voir description au chapitre IV), par l'intermédiaire du sous-programme délai, nous offre la possibilité de faire intervenir un délai dans l'application de la commande. Toutes les courbes que nous présentons par la suite figurent la réponse du système avec un délai de 0,10 ou 20 ms.

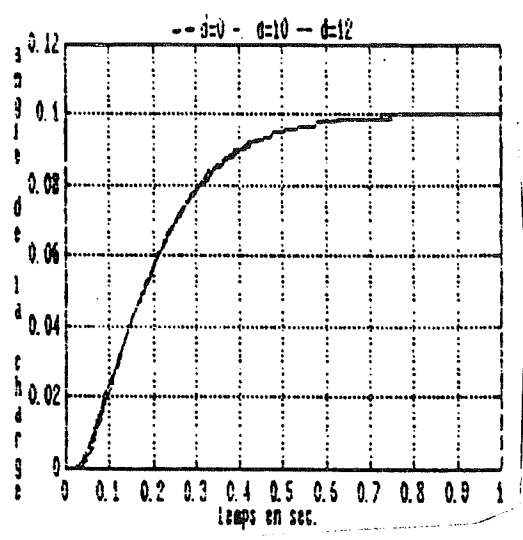
Comme l'indiquent les schémas (1), (2) et (3) de la figure 6.13, le système à structure variable s'avère très sensible à la présence d'un délai.

D'après le schéma (1) nous observons que le système avec le contrôleur PID est pratiquement insensible à un délai de l'ordre de 12 ms. De façon intuitive, ce résultat peut s'expliquer par le fait que le système réagit de façon lente et a donc le temps de se réajuster lorsqu'intervient un délai.

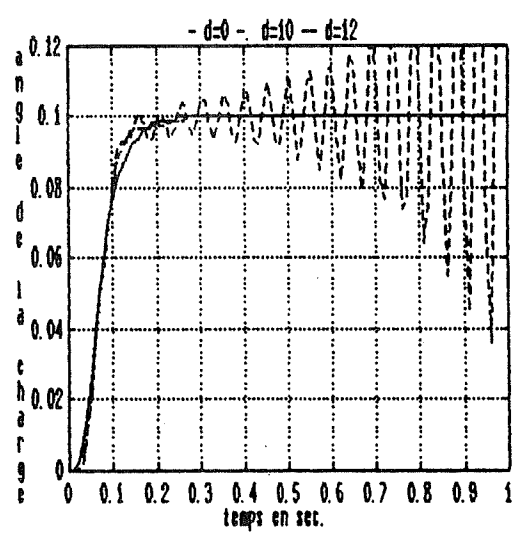
Par contre, le schéma (2) nous montre que le système avec retour d'état oscille puis converge avec un délai de 10 ms, alors qu'il diverge avec un délai de 12 ms. La même interprétation intuitive prévaut ici, c'est-à-dire que comme le système est rapide, il va se déstabiliser s'il intervient un délai dans la commande et même diverger si ce délai est trop important.

Le système à structure variable s'avère très sensible au délai (schéma (3)). Il est intrinsèquement encore plus rapide que le système contrôlé par retour linéaire d'état et donc, intuitivement, plus sensible au délai que ce dernier.

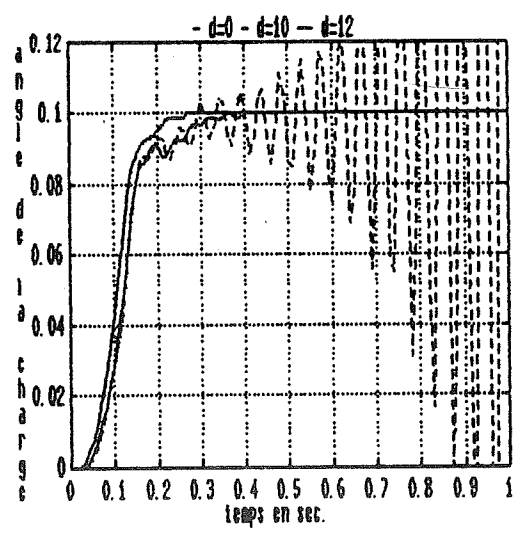




(1)



(2)



(3)

Figure 6.13: Effet d'un délai sur les contrôleurs PID (1) à retour linéaire d'état (2) et à structure variable (3)

A la lumière des observations faites à la section 6.5, nous pouvons nous demander à présent si une amélioration des performances du système à structure variable face à une perturbation par l'augmentation des gains ne va pas entraîner une dégradation d'un point de vue comportement face à un délai. Ce point est illustré par la figure 6.14.

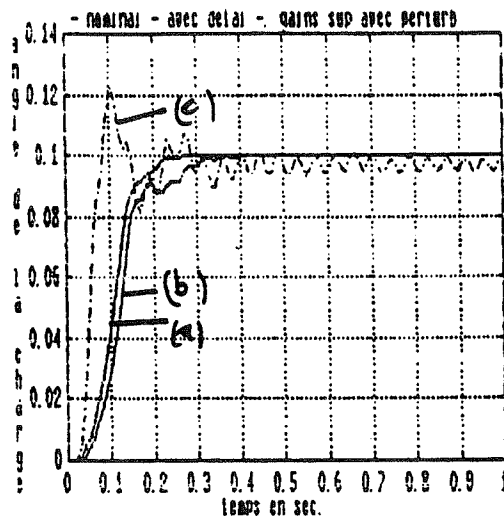


Figure 6.14: Comportement du système à structure variable avec gains plus élevés face à un délai

- (a) essai nominal
- (b) gains nominaux et délai de 10 ms
- (c) gains supérieurs et délai de 10 ms

Les courbes présentées comparent les réponses obtenues avec les valeurs nominales des gains et sans délai (a), avec les mêmes gains et un délai de 10 ms (b), enfin avec des gains  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  (tels que l'erreur à régime soit de 3% en présence d'une perturbation  $cf=3$ ) et un délai de 10 ms (c). On s'aperçoit qu'avec les gains tels que l'erreur à régime soit de 3% le système converge après un temps très long et d'importantes oscillations. Par contre, si on augmente encore plus les gains pour avoir une erreur à régime de 1%, le système diverge avec un délai de 10 ms. Cet aspect est illustré par la figure 6.15.

La courbe présentée compare les réponses obtenues avec des gains  $\alpha_1 = \alpha_3 = -50$  (tels que l'erreur à régime soit de 3% en présence d'une perturbation  $cf=3$ ) et un délai de 10 ms (a) et avec des gains  $\alpha_1 = \alpha_3 = -150$  (tels que l'erreur à régime soit de 1%) et un délai de 10 ms (b).

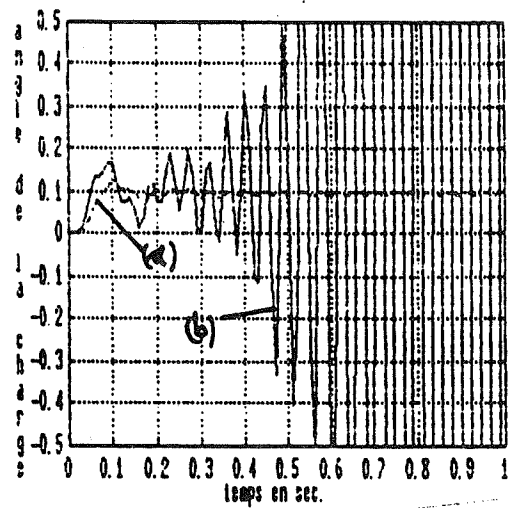


Figure 6.15: Effet d'un délai sur un contrôleur à structure variable peu sensible aux perturbations.

(a) gains moyens (supérieurs aux gains nominaux) et délai de 10 ms

(b) gains supérieurs à (a) et délai de 10 ms

## CHAPITRE VII

### CONCLUSION

#### 7.1 Simplicité de conception et fiabilité

Sur la base des expériences présentées dans ce mémoire, il nous est permis de constater que malgré leur nouveauté, les systèmes à structure variable bénéficient d'une méthodologie de conception bien définie et efficace. Le choix des paramètres du contrôleur ainsi que les calculs nécessaires se font de façon aisée. Les résultats obtenus correspondent aux prévisions que l'on peut tirer de façon analytique et prouvent la fiabilité du contrôleur à structure variable. Par ailleurs, son implantation sur microordinateur ne présente pas de difficulté particulière.

#### 7.2 Résultats obtenus

L'analyse comparative des performances des contrôleurs PID, par retour linéaire d'état et à structure variable nous permet d'énoncer les conclusions suivantes:

En choisissant des gains suffisamment élevés, le

contrôleur à structure variable s'avère être pratiquement insensible à une perturbation sur la commande et à des variations de paramètres du système. Par contre, il devient alors très sensible à un délai sur la commande et demande au moteur de fournir une tension très élevée et plus oscillante, donc de dépenser plus d'énergie.

De façon plus détaillée, l'analyse comparative des trois contrôleurs nous a permis de constater que:

- Sous des conditions nominales, les performances statiques et dynamiques des contrôleurs à structure variable et par retour linéaire d'état sont équivalentes. Par contre, le contrôleur PID nous donne un système beaucoup plus lent.

- La présence d'une perturbation extérieure a des effets différents sur les trois contrôleurs. Cet effet est pratiquement insignifiant lors de l'application d'un contrôleur PID; il reste très faible lors de l'utilisation d'un régulateur par retour linéaire d'état; par contre il devient très important avec le contrôleur à structure variable. Cette situation peut être améliorée en augmentant les gains.

- Face à un délai de 12 ms sur la commande, le contrôleur PID s'avère être parfaitement insensible, alors que les contrôleurs par retour linéaire d'état et à structure variable divergent tous les deux. Par ailleurs, plus on augmente ses gains, plus le contrôleur à structure variable s'avère être sensible au délai.

- Face à des variations de paramètres du système, les contrôleurs PID et par retour linéaire d'état présentent tous deux des dépassements dans les réponses du système, mais le régime permanent se rétablit beaucoup plus lentement pour le premier. Le contrôleur à structure variable avec les valeurs nominales des gains est supérieur en ce sens que les réponses ne présentent pas de dépassement; par contre, ces réponses s'avèrent être relativement décalées dans le temps lorsqu'on fait varier un paramètre. Cet inconvénient disparaît lorsqu'on augmente les gains.

### 7.3 Extensions possibles

Pour une première approche globale du contrôle à structure variable, la présente étude a atteint les objectifs fixés. Il serait néanmoins intéressant

d'investiguer les approches suivantes:

- rajouter un intégrateur au contrôleur à structure variable, ce qui pourrait lui conférer une plus grande robustesse face aux perturbations;
- rajouter un observateur d'état, pour prévoir les cas où l'état du système n'est pas accessible par une mesure directe;
- concrétiser cette étude par des tests sur un système physique;
- faire une étude plus poussée de la sensibilité du système aux variations des paramètres.



BIBLIOGRAPHIE

1. V.I. UTKIN, "Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems", Mir Publisher Moscow (1978).
2. U. ITKIS, "Control Systems of Variable Structure", John Wiley & Sons Inc., New York (1976).
3. A.Y. SIVARAMA KRISHNAN, M.V. HARIHARAN, M.C. SRISAILAM, "Design of Variable Structure Load-Frequency Controller Using Pole Assignment Technique", Int. J. Control, Vol. 40, No. 3, 487-498 (1984).
4. V.I. UTKIN, "Variable Structure Systems: Present and Future", Plenum Publishing Corporation (1984).
5. V.I. UTKIN, K.D. YANG, "Methods for constructing discontinuity planes in multidimensional variable structure systems", Automatic Remote Control 39, 1466 (1978)
6. J.-J.E. SLOITINE, J.A. COETSEE, "Adaptive sliding controller synthesis for non-linear systems", Int.J. Control, Vol.43 No6, 1631-1651 (1986)
7. J.-J.E SLOITINE, "Sliding controller design for non-linear systems", Int.J.Control, Vol.40, No2,421-434 (1984)
8. K.K.D YOUNG, "Controller design for a manipulator using theory of variable structure systems", IEEE Transactions on Systems, Men and Cybernetics SMC-8, pp 101-109 (1978)
9. J.ERSCHLER, F.ROUBELLAT, J.P.VERNHES, "Automation of a Hydroelectric Power Station Using Variable-Structure Control Systems", Automatica, Vol.10, pp31-36(1974)
10. R.M. DESANTIS, "Théorie des systèmes de commande linéaires", École Polytechnique de Montréal (1986).
11. R.M. DESANTIS, "Éléments fondamentaux de la robotique: Cinématique, Dynamique et Commande", École Polytechnique de Montréal (1986).

12. A. TERROUX, R.M. DESANTIS, "Asserv. pos: un programme pour la simulation de la commande d'un joint robotique" (1984).
13. P. RADZISZEWSKI, V. TREMBLAY, R.M. DESANTIS, "Simulation du comportement dynamique de la boucle de commande de l'articulation verticale de Rhino XR1".
14. M. KUMAR, "A position control system with disturbance rejection using sliding mode", Mc Gill University (1986).
15. A.T. NGUYEN, R.M. DESANTIS, "Etude de sensibilité du comportement dynamique d'un manipulateur robotique", Rapport technique EPM/RT-87-2, Ecole Polytechnique de Montréal (1987)
16. ANONYMOUS, "Turbo Pascal Reference Manual", Borland International Inc. (1985).
17. ANONYMOUS, "Turbo Graphix Toolbox", Borland International Inc. (1985).
18. SHAN S. KUO, "Computer Applications for Numerical Methods"
19. COMAU S.p.A, "Smart", Assembly and Handling Systems Str. Borgaretto 22, 10040 Borgaretto, Torino (Italy)
20. C. MOLER, J. LITTLE, S. BANGERT, S. KLEIMAN, "PC-Matlab for MS-DOS Personal Computer", The Mathworks Inc. (1986).

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00289485 3