

Titre: Application des méthodes d'interpolation au design d'un compensateur robuste de systèmes avec retard
Title: Application of interpolation methods to the design of a robust controller for systems with delay

Auteurs: Maher Hammami, André B. Turgeon, & David Bensoussan
Authors:

Date: 1992

Type: Rapport / Report

Référence: Hammami, M., Turgeon, A. B., & Bensoussan, D. (1992). Application des méthodes d'interpolation au design d'un compensateur robuste de systèmes avec retard.
Citation: (Rapport technique n° EPM-RT-92-39). <https://publications.polymtl.ca/9507/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/9507/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EPM-RT-92-39
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:

**DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ET DE GÉNIE INFORMATIQUE**

Section automatique

**APPLICATION DES MÉTHODES D'INTERPOLATION
AU DESIGN D'UN COMPENSATEUR ROBUSTE DE
SYSTÈMES AVEC RETARD**

**Hammami, Maher
Turgeon, André-B.
Bensoussan, David**

.....
EPM/RT-92-39

Tous droits réservés. On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite des auteurs.

Dépôt légal, décembre 1992
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Pour se procurer une copie de ce document, s'adresser au:

Éditions de l'École Polytechnique de Montréal
École Polytechnique de Montréal
Case Postale 6079, Succursale A
Montréal (Québec) H3C 3A7
(514) 340-4000

Compter 0,10\$ par page (arrondir au dollar le plus près) et ajouter 3,00\$ (Canada) pour la couverture, les frais de poste et la manutention. Régler en dollars canadiens par chèque ou mandat-poste au nom de l'École Polytechnique de Montréal. Nous n'honoreronons que les commandes accompagnées d'un paiement, sauf s'il y a eu entente préalable dans le cas d'établissements d'enseignement, de sociétés ou d'organismes canadiens.

Application des méthodes d'interpolation au design d'un compensateur robuste de systèmes avec retard

Par

Maher Hammami, André-B. Turgeon

Département de Génie Electrique

École Polytechnique de Montréal

P.O. Box 6079, station "A"

Montréal, Québec H3C 3A7

David Bensoussan

Département de Génie Electrique

École de Technologie supérieur

4750, Henri Julien

Montréal, Québec H2T 2C8

Gratuit

Table des matières

Liste des figures	iv
Liste des symboles	v
Sommaire	1
1 Introduction	2
2 Le problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick	2
2.1 Condition nécessaire	3
2.2 Condition nécessaire et suffisante	3
3 Algorithme de Nevanlinna	4
4 Stabilisation robuste	8
4.1 Extension à un système qui comporte un intégrateur	10
4.2 Exemples explicatifs	11
4.3 Modification de l'algorithme de Nevanlinna-Pick classique	17
4.4 Stabilité robuste avec prescription du degré de stabilité	22
5 Stabilisation robuste avec incertitude paramétrique	23
5.1 Formulation du problème de stabilisation robuste	24
5.2 Rappel de la théorie d'interpolation classique	25
5.3 Modification de la théorie d'interpolation classique	25
5.3.1 Description de la solution de f_α	26
5.3.2 Cas limite $\alpha = \hat{\alpha}_{max}$	26
5.3.3 Cas $a_i \in \bar{D}$	27
5.4 Variations de paramètres complexes	28
5.5 Rappel: métrique hyperbolique	29
5.6 Définition du problème	29
5.6.1 Solution du problème de marge de gain	31
5.6.2 Exemples explicatifs	32

5.7	Stabilisation robuste pour les systèmes avec retard	36
5.8	Exemples explicatifs	39
5.8.1	Solution du problème de marge de phase	45
5.8.2	Formulation généralisée du problème de marge de gain ou de phase	47
5.9	Exemples explicatifs	50
	Bibliographie	59
	Annexes	61
A	Le problème d'interpolation de Pick-Nevanlinna	61
A.1	Condition nécessaire	61
A.2	Schwarz et Schwarz-Pick	62
A.3	Équivalence conforme	63
B	Propriétés de la fonction de sensibilité	63
B.1	Formule de Cauchy	63
B.2	Intégrale de Bode	64
B.3	Formule de Poisson	66
C	Construction d'un contrôleur par paramétrisation Q	66
D	Stabilité robuste avec des pôles réelles multiples incertains	69
E	Étude de l'approximation de Padé	71
E.1	Introduction	71
E.2	Approximation du retard avec une série de Taylor	72
E.3	Approximation de Padé	73
E.3.1	Équations générales de Perron	73
E.3.2	Analyse de gain et de phase	74
E.3.3	Expression de l'approximation de Padé d'ordre k de e^{-sT}	77
E.3.4	Phase ϕ correspondant aux approximations de Padé d'ordre k	78
E.3.5	Lieu des pôles et des zéros des approximations d'ordre k	79

E.3.6	Les racines de l'approximation de Padé d'ordre k	81
E.4	Représentation de l'approximation de Padé sous la forme d'une fraction continue "fraction-C"	85
E.4.1	Réalisation de l'algorithme de l'approximation de Padé "fraction-C" . . .	87
F	Résultats et simulations	88

Liste des figures

1	Interprétation des transformations $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}, \mathbf{D}, \bar{\mathbf{D}}$	vii
2	Structure de l'algorithme de Nevanlinna.	7
3	Système en contre-réaction	8
4	Système de contre-réaction avec incertitude	24
5	Domaine de la sensibilité interdites.	25
6	Fonction $d_D(0, r)$	29
7	Sensibilité optimale.	38
8	L'ordre de l'approximation de Padé optimale en fonction du retard $p_0 = 3; p_1 = 10$	45
9	Lieu des racines de $P(s)$	50
10	Module de la sensibilité de S et le lieu de Nyquist de $P(s)K_0(s)$	52
11	Module de la sensibilité de S et le lieu de Nyquist de $P(s)K_0(s)$ en utilisant l'interpolation.	52
12	Comparaison des trois méthodes nominale, optimale et sous-optimale.	53
13	Lieu des racines de $P(s)$	54
14	Exemple d'application de système avec retard T (approximation de Padé) . . .	57
15	Module de la sensibilité et le lieu de Nyquist en utilisant la méthode d'interpolation	

Liste des symboles

$P_1 : \{f(\xi); \text{analytique dans } \Re(f(\xi)) \geq 0 \in |\xi| \leq 1\}$

$P : \{f(\xi); \text{analytique dans } \Re(f(\xi)) \geq 0 \in \Re(\xi) \geq 0\}$

$D : \{f(\xi); \text{analytique dans } |f(\xi)| \leq 1 \in |\xi| \leq 1\}$

$\bar{D} : \{f(\xi); \text{analytique dans } |f(\xi)| \leq 1 \in \Re(\xi) \geq 0\}$

$H : \text{demi plan complexe de droite ouvert } \Re(s) > 0$

$\tilde{H} : \text{demi plan complexe de droite } \Re(s) \geq 0$

$D : \text{intérieur du disque unitaire } |z| < 1$

$\bar{D} : \text{intérieur et frontière du disque unitaire } |z| \leq 1$

$T : \text{ cercle unitaire } \{s \in \mathbf{C} : |s| = 1\}$

$\mathbf{C} : \text{ ensemble de nombre complexes}$

$C(s) : \text{ contrôleur du système.}$

$\mathbb{R} : \text{ ensemble de nombre réels}$

$\Re : \text{ partie réelle de l'ensemble } \mathbb{R}.$

$a' : \text{ transposé d'un nombre complexe}$

$A' : \text{ transposé d'une matrice}$

$\bar{a} : \text{ conjugué d'un nombre complexe}$

$\bar{A} : \text{ conjugué d'une matrice}$

$RH_{m \times r}^{\infty} : \text{ L'ensemble des matrices de réponses en fréquence rationnelles et propres de dimension } m \times r$

$BH_{m \times r}^{\infty} : \text{ Le sous-ensemble de } RH_{m \times r}^{\infty}, \text{ constitué de contractions.}$

$P(s)$: fonction de transfert d'un système monovariable

$P_0(s)$: fonction de transfert d'un système nominale monovariable.

$A(P_0, r)$: classe correspondant au modèle nominal $P_0(s)$, et

$r(s)$ est une bande d'incertitude

$$Q(s) = C(s)(1 + P_0(s)C(s))^{-1}$$

λ : les pôles à l'intérieur du plan droit.

z : les zéros à l'intérieur du plan droit

$$S(s) = (1 + P_0(s)C(s))^{-1} \text{ fonction de sensibilité}$$

λ_{max} : valeur propre maximale

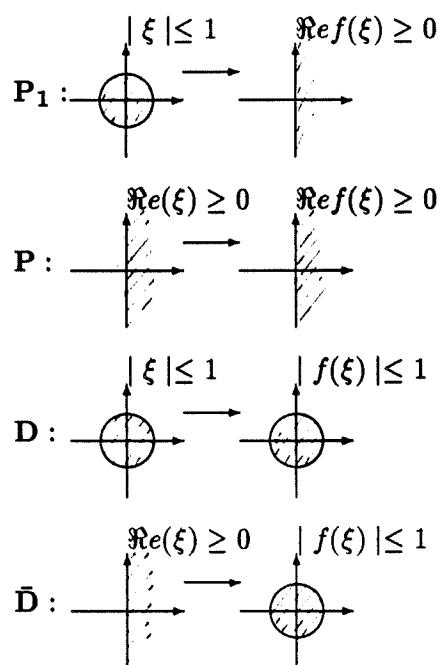


Figure 1: Interprétation des transformations P_1, P, D, \bar{D}

Sommaire

La théorie de l'interpolation de Nevanlinna-Pick joue un rôle important dans la théorie des systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel. Dans cet article, la théorie d'interpolation classique est présentée, en rapport avec ses éventuelles applications dans le domaine de la théorie des systèmes de commande comportant des retards.

1 Introduction

L'expression mathématique d'une fonction de transfert d'un système linéaire invariant donne lieu à deux modes de représentation fort différents: le lieu géométrique ou analytique que procure la réponse fréquentielle du système, fonction de la variable complexe; les équations algébriques qui découlent des polynômes rationnels des fonctions de Laplace du système. Bien qu'exprimant la même réalité physique: le lien entrée-sortie du système, ces deux types de représentation ouvrent, du point de vue analyse mathématique, des domaines d'exploitation théoriques tout à fait particuliers. Qu'il suffise de considérer, en examinant le problème de la stabilité, le genre d'étude qu'exigent l'application du critère de Nyquist avec ses lieux géométriques comparativement aux domaines possibles définis par les contraintes paramétriques d'inégalité auquelles conduisent le critère algébrique de Routh.

Dans la théorie de commande classique, les méthodes fréquentielles ont été abondamment développées et appliquées, citons: le test de stabilité de Nyquist, la condition de Wiener-Paley [PW34] [DM72], la formule de Bode concernant la relation entre les parties réelles et imaginaire des fonctions de transfert causales, etc ... Un livre récent de Freudenberg et Looze [FL88] a fait une synthèse des contributions dans ce domaine.

Après, le grand essor provoqué par les méthodes algébriques appliquées aux systèmes décrits par des variables d'état, une renaissance de la théorie analytique des systèmes reprend graduellement forme, au milieu des années 70. Les premières méthodes de synthèse multivariables dans le domaine des fréquences ont été développées surtout par les écoles d'Angleterre [Ros74] [Mac79]. Des méthodes de synthèse plus systématiques ont suivi. Introduites par Zames [Zam81], elles permettent de mieux traiter le problème de la stabilité robuste.

Dans l'application de la commande H^∞ , les propriétés des fonctions de transfert se manifestent par des *contraintes d'interpolation* [ZF83]. Ainsi, la théorie d'interpolation classique, datant du début du siècle, sert de base mathématique pour le développement d'une nouvelle théorie des systèmes dans le domaine des fréquences. Particulièrement, la théorie d'interpolation de Nevanlinna-Pick offre une solution intéressante au problème de la stabilisation robuste.

Helton [Hel81] a utilisé la notion d'opérateurs dans la théorie d'interpolation de Nevanlinna-Pick. Dans ce domaine de la commande, un premier travail dû à Tannenbaum, a appliqué la théorie de Nevanlinna-Pick au problème de la stabilisation robuste. Par la suite, le problème de la stabilité robuste d'un système monovariable est converti en un problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick par Kimura [Kim84] puis, ce travail a été poussé plus avant [KT85]. Chang et Pearson [CP84] ont résolu le problème associé au bloc de Pick dans l'expression de la matrice de la théorie de Nevanlinna-Pick [DGK79]. La version multivariable de la stabilité robuste a été également formulée [VK86].

2 Le problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick

En 1916, Pick a posé la question suivante [Pic16]: soit

$$f(z) \in \mathbf{P}_1 \text{ et } w_i = f(z_i), |z_i| < 1, i = 1, \dots, n.$$

Quelles conditions sont imposées aux n paires de nombres complexes (z_i, w_i) , $i = 1, \dots, n$ de par la relation imposée par la fonction analytique f ?

2.1 Condition nécessaire

La condition nécessaire mais non suffisante $\Re(w_i) > 0, i = 1, \dots, n$ découle de la définition de \mathbf{P}_1 .

En réponse à la question ci-dessus, Pick a dérivé une forme intégrale de $f(z)$ à partir du disque $|z| < r < 1$, c'est la formule de Schwarz:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{j\theta} + z}{re^{j\theta} - z} \Re[f(re^{j\theta})] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Im[f(re^{j\theta})] d\theta \quad (1)$$

De cette formulation, il vient (voir annexe A1):

$$\frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Re[f(re^{j\theta})]}{(re^{j\theta} - z_i)(re^{-j\theta} - \bar{z}_j)} d\theta$$

avec r , intérieur au cercle unitaire et englobant tout z_i , car $|z_i| < r \forall i$. Ainsi pour tout $x_i, i = 1, \dots, n$, on peut écrire (voir annexe A1):

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} x_i \bar{x}_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re[f(re^{j\theta})] \left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{re^{j\theta} - z_i} \right|^2 d\theta > 0$$

avec $f(z) \in \mathbf{P}_1$. De toute évidence, l'intégrale de la partie droite ne peut être négative. Nous remarquons la forme quadratique caractéristique de l'équation précédente par laquelle nous pouvons faire correspondre lorsque $r \rightarrow 1$ la condition matricielle suivante:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{w_1 + \bar{w}_1}{1 - z_1 \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_1 + \bar{w}_n}{1 - z_1 \bar{z}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n + \bar{w}_1}{1 - z_n \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_n + \bar{w}_n}{1 - z_n \bar{z}_n} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2)$$

La matrice P définie par (2) est le "bloc de Pick". Et, il est acquis que la condition $P \geq 0$ est nécessaire pour l'existence de $f(z) \in \mathbf{P}_1$ et, satisfaisant les contraintes d'interpolation:

$$w_i = f(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

2.2 Condition nécessaire et suffisante

À première vue, il peut paraître évident que $P \geq 0$ réalise aussi les conditions suffisantes pour l'existence de $f(z) \in \mathbf{P}_1$ rencontrant (3). Au départ Pick n'avait pas considéré cet aspect du problème. Cependant, la question n'est pas triviale et la réponse fut donnée par Nevanlinna [Nev19] à partir d'un algorithme générateur de f . Avant d'aborder cette procédure de Nevanlinna, notons une propriété importante du bloc de Pick (2), élaborée dans [Pic16].

Soit la transformation bilinéaire dans \mathbf{P}_1 :

$$z = \frac{1-w}{1+w}, \quad w = \frac{1-z}{1+z} \quad (4)$$

A un plan du disque unitaire dans le plan z , correspond la région droite du plan w .

Considérons la matrice P définie en (2). Nous notons que les éléments de cette matrice peuvent être réécrits de la façon suivante après avoir tenu compte de la transformation bilinéaire.

$$\begin{aligned} w_i + \bar{w}_j &= \frac{2(1 - z_i \bar{z}_j)}{(1 + z_i)(1 + \bar{z}_j)} \\ 1 - z_i \bar{z}_j &= \frac{2(w_i + \bar{w}_j)}{(1 + w_i)(1 + \bar{w}_j)} \end{aligned}$$

$$\frac{w_i + \bar{w}_j}{1 - z_i \bar{z}_j} = \frac{1 - z_i \bar{z}_j}{w_i + \bar{w}_j} \frac{(1 + w_i)(1 + \bar{w}_j)}{(1 + z_i)(1 - \bar{z}_j)}$$

L'élément apparaissant à l'extrême droite de l'équation précédente pouvant jouer le rôle de $x_i \bar{x}_j$ dans le développement antérieur, la condition $P > 0$ de l'équation (2) peut être remplacée par la condition matricielle suivante:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1 - z_1 \bar{z}_1}{w_1 + \bar{w}_1} & \dots & \frac{1 - z_1 \bar{z}_n}{w_1 + \bar{w}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1 - z_n \bar{z}_1}{w_n + \bar{w}_1} & \dots & \frac{1 - z_n \bar{z}_n}{w_n + \bar{w}_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Nous notons que si $P > 0, 1 - z_i \bar{z}_j > 0$ implique que $w_i + \bar{w}_j > 0$, i.e. que z_i et w_i sont nécessairement reliés entre eux par une fonction analytique qui est dans ce cas ci la transformation bilinéaire. CQFD

3 Algorithme de Nevanlinna

Un article de Nevanlinna [Nev29] a paru, trois années après la publication de Pick [Pic16]. Nevanlinna y formule un problème semblable à celui de Pick, avec toutefois des transformations \mathbf{D} au lieu de \mathbf{P}_1 et sont la formulation suit:

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les n paires de (z_i, β_i) , $|z_i| \leq 1, i = 1, \dots, n$, garantissent l'existence de la fonction $f \in \mathbf{D}$, définie par:

$$\beta_i = f(z_i), i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Il est possible que Nevanlinna n'ait pas été au courant des résultats de Pick puisqu'il n'a pas cité ce dernier. De plus, l'approche qu'il a utilisé est totalement différente de celle de Pick. L'algorithme de Nevanlinna est essentiellement séquentiel, et il est basé sur le lemme de Schwarz en fonction d'un point arbitraire du plan z .

Lemme de Schwarz: Soit $f(z) \in \mathbf{D}$ et $\beta_1 = f(z_1)$ avec $|z_1| < 1$.

Pour chaque z satisfaisant

$$|z - z_1| = r |1 - \bar{z}_1 z|, \quad 0 < r < 1$$

$f(z)$ satisfait l'inégalité:

$$|f(z) - \beta_1| \leq r |1 - \bar{\beta}_1 f(z)|$$

Le cas particulier $z_1 = \beta_1 = 0$ dans ce lemme fait usuellement référence au lemme de Schwarz dans les enseignements classiques des variables complexes (démonstration annexe A2).

Une application directe de ce lemme montre que, si $\beta_1 = f(z_1)$ et $f(z) \in \mathbf{D}$, il existe une fonction $f_1(z) \in \mathbf{D}$ telle que

$$f_1(z) = \frac{1 - \bar{z}_1 z}{z - z_1} \frac{f(z) - \beta_1}{1 - \bar{\beta}_1 f(z)} \quad (7)$$

En effet, selon le lemme de Schwarz et de Schwarz-Pick (démonstration annexe A2)

$$\frac{|f(z) - f(z_1)|}{|1 - \bar{f}(z_1)f(z)|} \leq r = \frac{|z - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z|} < 1$$

D'où

$$\frac{|f(z) - f(z_1)|}{|1 - \bar{f}(z_1)f(z)|} \frac{|1 - \bar{z}_1 z|}{|z - z_1|} \leq r < 1$$

i.e $|f(z)| < 1$. En effet,

$$f(z) = \frac{B_1(z)f_1(z) + \beta_1}{\bar{\beta}_1 B_1(z)f_1(z) + 1}, \text{ avec } B_1(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \quad (8)$$

Notons également que $B_1(z) \in \mathbf{D}$, $f(z) \in \mathbf{D}$ si et seulement si $f_1(z) \in \mathbf{D}$ ce qui est le cas. Notons que, $f(z_1) = \beta_1$ pour tout choix de $f_1(z)$. Par conséquent, la première condition d'interpolation de (6) est toujours satisfaite indépendamment de la sélection de $f_1(z)$. Pour satisfaire les $n-1$ autres conditions d'interpolation, il suffit de choisir $f_1(z)$ (8) tel que

$$\begin{aligned} f_1(z_i) &= \beta_i^{(2)} \quad i = 2, \dots, n \\ \beta_i^{(2)} &\triangleq \frac{1 - \bar{z}_1 z_i}{z_i - z_1} \frac{\beta_i - \beta_1}{1 - \bar{\beta}_1 \beta_i}, \beta_i = f(z_i) \end{aligned} \quad (9)$$

Ainsi, le problème d'interpolation $\beta_i = f(z_i)$ se trouve converti en un autre problème d'interpolation $f_1(z_i) = \beta_i^{(2)}$ qui l'englobe, ayant une condition d'interpolation de moins que le problème original.

Puisque $f_1(z) \in \mathbf{D}$,

$$|\beta_i^{(2)}| \leq 1, \quad i = 2, \dots, n \quad (10)$$

Si l'inégalité (10) est stricte pour chaque i , on peut appliquer la même procédure au problème d'interpolation déjà simplifié (9) avec une réduction d'une condition d'interpolation suivant la représentation

$$f_2(z) = \frac{1 - \bar{z}_2 z}{z - z_2} \frac{f_1(z) - \beta_2^{(2)}}{1 - \bar{\beta}_2^{(2)} f_1(z)}$$

avec

$$f_1(z) = \frac{B_2(z)f_2(z) + \beta_2^{(2)}}{\bar{\beta}_2^{(2)} B_2(z)f_2(z) + 1}, \quad B_2(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z}$$

Et ainsi de suite:

$$\begin{aligned} f_2(z_i) &= \beta_i^{(3)}, \quad i = 3, \dots, n \\ \beta_i^{(3)} &= \frac{1 - \bar{z}_3 z_i}{z_i - z_3} \frac{\beta_i^{(2)} - \beta_2^{(2)}}{1 - \bar{\beta}_2^{(2)} \beta_2^{(2)}} \end{aligned} \quad (11)$$

D'où la récurrence:

$$f_j(z) = \frac{B_j(z)f_{j+1}(z) + \rho_j}{\bar{\rho}_j B_j(z)f_{j+1}(z) + 1}, \quad B_j(z) = \frac{1 - \bar{z}_j z}{z - z_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

avec $\rho_j = \beta_j^{(j)}$ calculé aussi par la récurrence

$$\beta_i^{(j+1)} = \frac{1 - \bar{z}_j z_i}{z_i - z_j} \frac{\beta_i^{(j)} - \rho_j}{1 - \beta_i^{(j)} \bar{\rho}_j} \quad (13)$$

Cette induction est valable en autant que $|\rho_j| < 1$. Ainsi, la procédure nous conduit à la satisfaction des contraintes d'interpolation à $j=n$. Par conséquent, on peut choisir un quelconque des $f_{n+1} \in D$, et résoudre le problème original de façon itérative.

Remarque: Si $|\beta_m^{(2)}| = 1$ pour une valeur de m , $f_1(z) \equiv \beta_m^{(2)}$ est la seule fonction de D qui réalise (10) selon le théorème du module maximum. Par conséquent on doit avoir, $\beta_2^{(2)} = \beta_3^{(2)} = \dots = \beta_n^{(2)}$ pour résoudre le problème d'interpolation original.

Nevanlinna a démontré que le problème d'interpolation original admet une solution, si et seulement si:

$$|\beta_j^{(j)}| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ou

$$|\beta_j^{(j)}| < 1 \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (14)$$

$$\text{si } |\beta_j^{(j)}| = 1 \quad \beta_k^{(k)} = \beta_{k+1}^{(k)} = \dots = \beta_n^{(k)}$$

Le critère (14) est une version totalement différente de celle formulée par le critère de Pick, qui est représentée par

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1-\beta_1\bar{\beta}_1}{1-z_1\bar{z}_1} & \dots & \frac{1-\beta_1\bar{\beta}_n}{1-z_1\bar{z}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-\beta_n\bar{\beta}_1}{1-z_n\bar{z}_1} & \dots & \frac{1-\beta_n\bar{\beta}_n}{1-z_n\bar{z}_n} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (15)$$

La structure de l'algorithme de Nevanlinna reçoit une version plus claire suivant une représentation fractionnelle. Posons

$$f_j(z) = \frac{n_j(z)}{d_j(z)} \quad (16)$$

L'équation (12) peut être réécrite

$$\begin{bmatrix} n_j(z) \\ d_j(z) \end{bmatrix} = \Theta_j(z) \begin{bmatrix} n_{j+1}(z) \\ d_{j+1}(z) \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{avec } \Theta_j(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\rho_j|^2}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_j \\ \bar{\rho}_j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_j(z) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Il est supposé que la condition (14) est valide. Le terme commun $(\sqrt{1 - |\rho_j|^2})^{-1}$ est un facteur de normalisation. Puisque $\bar{B}_j(\bar{z}^{-1})B_j(z) = 1$, il vient

$$\bar{\Theta}_j^T(\bar{z}^{-1}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Theta_j(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ce qui implique que $\Theta_j(z)$ est une matrice J-unitaire.

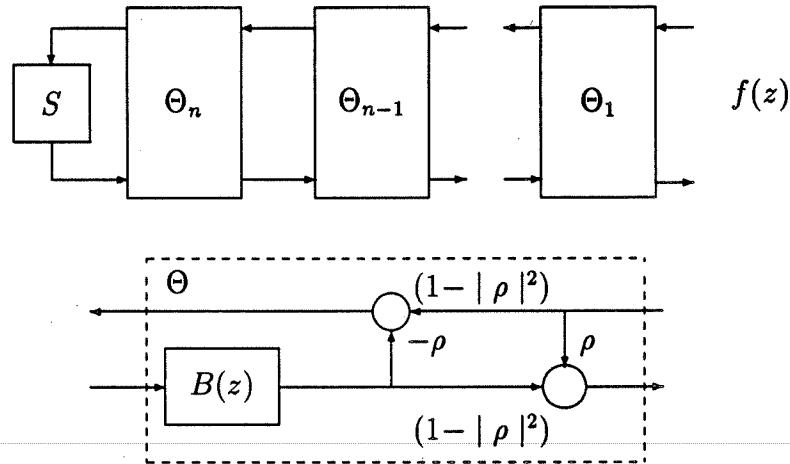


Figure 2: Structure de l'algorithme de Nevanlinna.

La solution au problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick $f(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} n(z) \\ d(z) \end{bmatrix} = \Theta_1(z)\Theta_2(z)\cdots\Theta_n(z) \begin{bmatrix} n_{n+1}(z) \\ d_{n+1}(z) \end{bmatrix}$$

ou $f_{n+1}(z) = \frac{n_{n+1}(z)}{d_{n+1}(z)} = S$ est choisie arbitrairement dans \mathbf{D} . La formule

$$f(z) = \frac{\Theta_{11}(z)S(z) + \Theta_{12}(z)}{\Theta_{21}(z)S(z) + \Theta_{22}(z)} \quad (19)$$

$$\Theta(z) = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(z) & \Theta_{12}(z) \\ \Theta_{21}(z) & \Theta_{22}(z) \end{bmatrix} := \Theta_1(z)\Theta_2(z)\cdots\Theta_n(z) \quad (20)$$

donne une paramétrisation de toutes les solutions du problème de Nevanlinna-Pick rencontrant la condition (14), où $S(z)$ représente un élément arbitraire de \mathbf{D} .

4 Stabilisation robuste

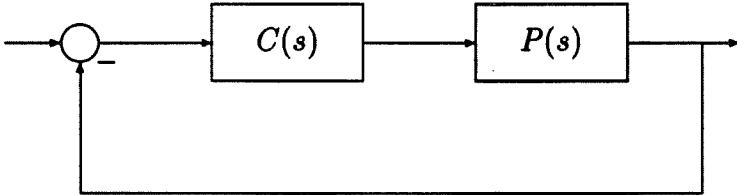


Figure 3: Système en contre-réaction

Considérons le système à boucle fermée de la figure 3 avec $P(s)$, la fonction de transfert d'un système monovariable et $C(s)$, celle du contrôleur. Posons que, $P(s)$ appartient à la classe $A(P_0, r)$ correspondant au modèle nominal $P_0(s)$ et, $r(s)$ est une bande d'incertitude définie par:

- $|P(j\omega) - P_0(j\omega)| \leq |r(j\omega)|, \forall \omega \in r(s) : \text{stable}$ (21)

- $P(s)$ et $P_0(s)$ ont le même nombre de pôles instables.

Recherchons un contrôleur donné $C(s)$ tel que le système en boucle fermée de la figure 3 soit stable pour tout système $P(s)$ de la classe $A(P_0, r)$. Si un tel contrôleur existe, il caractérise une stabilité robuste pour le domaine $A(P_0, r)$. Dans ce cadre, l'établissement d'un tel stabilisateur robuste peut être traduit en la résolution d'un problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick.

Soit le contrôleur $C(s)$ que nous caractérisons par une paramétrisation stable $Q(s)$ comme suit:

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + P_0(s)C(s)} \quad (22)$$

$$\text{ou encore } C(s) = \frac{Q(s)}{1 - P_0(s)Q(s)} \quad (23)$$

La stabilité interne du système implique que l'ensemble des transmissions du système

$$\begin{bmatrix} 1 - QP & P(1 - QP) \\ Q & (1 - PQ) \end{bmatrix} \quad (24)$$

soit stable.

$C(s)$ est un sous-système qui stabilise robustement $A(P_0, r)$, si et seulement si, il le réalise pour système nominal $P_0(s)$ et satisfait à la contrainte:

$$|r(j\omega)Q(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad (25)$$

• **Démonstration:** nous avons

$$\begin{aligned} [I + PC]^{-1}PC &= [(PC)^{-1}(1 + PC)]^{-1} = [(PC)^{-1} + I]^{-1} = [(I + PC)(PC)^{-1}]^{-1} \\ &= PC(I + PC)^{-1} = PC[I + P_0C - P_0C + PC]^{-1} = PC[I + P_0C + (P - P_0)C]^{-1} \end{aligned}$$

$$= PC[(I + (P - P_0)C(I + P_0C)^{-1})(I + P_0C)]^{-1} = PC(I + P_0C)^{-1}[I + (P - P_0)C(I + P_0C)^{-1}]^{-1}$$

D'après le théorème du petit gain, la transmission étudiée est stable si

$$|(\Delta P)C(I + P_0C)^{-1}| = |(\Delta P)Q| < 1$$

avec $(\Delta P) = P - P_0$

□

Selon Zames et Francis [ZF83], $C(s)$ est un stabilisateur de $P_0(s)$ si et seulement si:

- (i) $Q(s)$ est stable et possède des zéros qui biffent les pôles instables de $P_0(s)$;
- (ii) Les zéros de $1 - P_0(s)Q(s)$ sont localisés sur les pôles instables de $P_0(s)$, singularités multiples comprises.

• **Démonstration:**

Pour $s = \lambda$ de $P_0(s)$, $P_0(\lambda) = Q^{-1}(\lambda)$, il s'en suit que les transmissions suivantes sont stables.

$$\Rightarrow 1 - P_0Q = 0 \mid_{s=\lambda} \quad 1 - QP_0 = 0 \mid_{s=\lambda} \quad \text{et} \quad (1 - P_0Q)P_0 \mid_{s=\lambda} = P_0(1 - QP_0) \mid_{s=\lambda} = 0 \quad \square$$

Soient p_1, p_2, \dots, p_n les pôles instables (supposés distincts) de $P_0(s)$ satisfaisant $\Re(p_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$. On définit

$$B(s) = \frac{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}{(s + \bar{p}_1)(s + \bar{p}_2) \cdots (s + \bar{p}_n)} = \prod_{i=1}^n \frac{s - p_i}{s + \bar{p}_i} \quad (26)$$

$$|B(s)| = 1 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(s) &= \frac{Q(s)}{B(s)} \\ \text{et } \tilde{P}_0(s) &= B(s)P_0(s) \end{aligned} \quad (28)$$

Par construction $\tilde{P}_0(s)$ et $\tilde{Q}(s)$ sont stables.

$$r_m(s) \triangleq \frac{r(s)}{b(s)}$$

ou $b(s)$ est le filtre passe tout (inner) tel que $|r_m(s)| = |r(s)|$, i.e $r_m(s)$ n'a ni pôles ni zéros dans $\Re(s) > 0$.

Puisque, $r_m(s)$ est stable par hypothèse

$$u(s) = r_m(s)\tilde{Q}(s) \quad (29)$$

l'est également. Notons que $|B(j\omega)| = 1$ pour chaque ω , et il s'ensuit, d'après (25), que $|u(j\omega)| = |r_m(j\omega)\tilde{Q}(j\omega)| < 1, u \in \bar{\mathbf{D}}$.

Étant donné que $1 - P_0(s)Q(s) = 1 - \tilde{P}_0(s)\tilde{Q}(s)$, le problème de départ en devient un d'interpolation qui peut être défini comme suit:

$$\begin{cases} |u(j\omega)| < 1 \\ u(p_i) = r_m(p_i)\tilde{Q}(p_i) = \beta_i = \frac{r_m(p_i)}{\tilde{P}_0(p_i)} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (30)$$

Le problème se réduit à la recherche de la fonction $u \in \bar{\mathbf{D}}$ satisfaisant les conditions d'interpolation à partir des paires (p_i, β_i) (30). C'est un problème typique de Nevanlinna-Pick, tel que présenté à la section 3.

4.1 Extension à un système qui comporte un intégrateur

Le problème d'interpolation définit précédemment peut être étendu aux systèmes dotés d'un pôle simple à $s = 0$, en addition aux pôles instables $p_i, i = 1, \dots, n$ ($\Re e[p_i] > 0$). Les propriétés de $A(P_0, r)$ presupposent que $\lim_{\omega \rightarrow 0} |r(j\omega)| \rightarrow \infty$ et que la limite $r(s)$ sur l'incertitude du processus $\Delta P(s)$ est à déphasage minimal. La présence d'un pôle dans $P_0(s)$ ne rencontre évidemment pas cette contrainte. Posons

$$r(s) = \frac{r'_m(s)}{s} \quad (31)$$

où $r'_m(s)$ est une fonction à déphasage minimal. Il s'ensuit que

$$\tilde{P}_0(s) = sB(s)P_0(s) \text{ et } \tilde{Q} = \frac{Q(s)}{sB(s)} \quad (32)$$

sont stables, et $B(s)$ est défini par le produit de Blashke.

La fonction $\tilde{Q}(s)$ sera stable, si $C(s)$ stabilise le système nominal $P_0(s)$ où $Q(s)$ est donné par l'équation (23). Puisque $P_0(s)Q(s) = \tilde{P}_0(s)\tilde{Q}(s)$, nous aurons

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(p_i)\tilde{Q}(p_i) &= 1, \quad i = 1, \dots, n \\ \tilde{P}_0(0)\tilde{Q}(0) &= 1 \end{aligned}$$

si $C(s)$ stabilise le système nominal. De même, d'après les équations (25), (26) et (32),

$$u(s) = r'_m(s)\tilde{Q}(s)$$

doit être une fonction réelle strictement bornée pour que $C(s)$ soit un stabilisateur robuste. Le problème est donc réduit à un problème d'interpolation tel que:

$$\begin{cases} |u(j\omega)| < 1 \\ u(p_i) = \beta_i, \quad \beta_i = \frac{r'_m(p_i)}{\tilde{P}_0(p_i)}, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (33)$$

Avec une condition d'interpolation additionnelle à $s = 0$

$$\begin{cases} u(0) = \beta_0, \quad \beta_0 = \frac{r'_m(0)}{\tilde{P}(0)}, \quad |\beta_0| < 1 \end{cases}$$

La classe des systèmes $A(P_0(s), r(s))$ ¹ avec la particularité que $P_0(s)$ a un pôle simple à $s = 0$ et $r(s)$ est donné sous la forme de (31) est stable et robuste, si et seulement si, la matrice P^2

¹

- Les pôles instables de $P_0(s)$ sont simples et les parties réelles sont positives.
- L'incertitude de la bande de fonction $r(s)$ est rationnelle et satisfait $\lim_{s \rightarrow \infty} r(s) = cte \neq 0$ ou $\lim_{s \rightarrow \infty} sr(s) = cte \neq 0$

$${}^2P = \begin{bmatrix} \frac{1-\beta_1\bar{\beta}_1}{\lambda_1+\bar{\lambda}_1} & \dots & \frac{1-\beta_1\bar{\beta}_n}{\lambda_1+\bar{\lambda}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-\beta_n\bar{\beta}_1}{\lambda_n+\bar{\lambda}_1} & \dots & \frac{1-\beta_n\bar{\beta}_n}{\lambda_n+\bar{\lambda}_n} \end{bmatrix} \text{ avec } \lambda_i \text{ les points d'interpolation des zéros ou des pôles instables.}$$

avec β_1 donnée par la condition (33) est définie positive et que $|\beta_0| < 1$. Si cette condition est satisfaite, nous calculons un stabilisateur robuste $C(s)$ en utilisant $u(s)$ de la formulation de Nevanlinna-Pick avec l'équation (23) et $Q(s) = \frac{sB(s)u(s)}{r_m(s)}$.

Remarque: Le système peut s'écrire sous la forme de $P(s) = \frac{P'(s)}{s}$. D'après l'égalité (21), il vient:

$$|P'(j\omega) - P'_0(j\omega)| \leq |r'_m(j\omega)|$$

avec $P_0(s) = \frac{P'_0(s)}{s}$. $P'_0(s)$ a les pôles instables seulement dans le demi-plan complexe de droite, le problème est réduit aux conditions d'interpolation (33), avec la condition additionnelle $|\beta_0| < 1$ qui lui est imposée.

4.2 Exemples explicatifs

1. Exemple

Soit le système suivant:

$$P_0(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$$

avec un pôle instable et $\tilde{P}_0(s) = -\frac{s+2}{(s+1)^2}$, $B(s) = \frac{1-s}{1+s}$ un déphasage pur.

$\beta_1 = \frac{r_m(1)}{P_0(1)} = -\frac{4}{3}r_m(1) < 1$ implique que $|r_m(1)| < \frac{3}{4}$ est une condition suffisante pour l'application de l'interpolation.

Calcul du contrôleur; suivant la procédure présenté à la section 3 nous avons:

$$u_1(s) = \frac{(s-1)u_2(s) + \beta_1(s+1)}{(s+1) + \bar{\beta}_1(s-1)u_2(s)}$$

avec $u_2(s)$, une fonction réelle arbitraire strictement bornée. Il vient:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{Q(s)}{1 - P_0(s)Q(s)}. \text{ Puis avec } Q(s) = \frac{B(s)}{r_m(s)}u(s) \text{ il vient} \\ &= \frac{\frac{B(s)}{r_m(s)}u(s)}{1 - P_0(s)\frac{B(s)}{r_m(s)}u(s)} \\ &= \frac{B(s)u(s)}{r_m(s) - P_0(s)B(s)u(s)} \text{ étant donné que } B(s) = \frac{1-s}{1+s}. \text{ Celà procure:} \\ &= \frac{\frac{1-s}{1+s}u(s)}{r_m(s) - P_0(s)\frac{1-s}{1+s}u(s)} \\ &= \frac{(1-s)u(s)}{(1+s)r_m(s) - P_0(s)(1-s)u(s)}. \text{ Puisque } P_0(s) = \frac{(s+2)}{(s-1)(s+1)} \text{ on aura} \\ &= \frac{(1-s)u(s)}{(1+s)r_m(s) - \frac{(s+2)}{(s-1)(s+1)}(1-s)u(s)} \\ &= \frac{(1-s)(1+s)u(s)}{(s+1)^2r_m(s) + (s+2)u(s)}. \text{ Puis suivant } u(s) = u_1(s) \text{ il vient} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(s+1)(1-s)\frac{(s-1)u_2(s)+\beta_1(s+1)}{(s+1)+\beta_1(s-1)u_2(s)}}{(s+1)^2r_m(s)+(s+2)\frac{(s-1)u_2(s)+\beta_1(s+1)}{(s+1)+\beta_1(s-1)u_2(s)}} \\
&= \frac{-(s-1)\{(s^2-1)u_2(s)+\beta_1(s+1)^2\}}{\{(s+1)^2r_m(s)\bar{\beta}_1(s-1)+(s+2)(s-1)\}u_2(s)+\{(s+1)^3r_m(s)+\beta_1(s+1)(s+2)\}} \\
&= \frac{-\{\bar{\beta}_1(s^2-1)u_2(s)+\beta_1(s+1)^2\}}{\{(s+1)^2r_m(s)+(s+2)\}u_2(s)+(s+1)\{\frac{(s+1)^2r_m(s)+(s+2)\beta_1}{s-1}\}}
\end{aligned}$$

Finalement:

$$C(s) = -\frac{l_1(s)u_2(s)+l_2(s)}{m_1(s)u_2(s)+m_2(s)} \quad (34)$$

avec

$$\begin{aligned}
l_1(s) &= s^2 - 1 \\
l_2(s) &= \beta_1(s+1)^2 \\
m_1(s) &= \bar{\beta}_1(s+1)^2r_m(s)+(s+2) \\
m_2(s) &= \frac{s+1}{s-1}\{(s+1)^2r_m(s)+(s+2)\beta_1\}
\end{aligned}$$

La formule (34) donne une paramétrisation de tous les stabilisateurs robustes des fonctions (réelles strictement bornées) de $u_2(s)$.

Choisissons $r_m(s) = \frac{b}{s+1}$ une structure fractionnaire définie avec ($b > 0$)

D'après $|r_m(1)| = \frac{b}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow b < \frac{3}{2}$ et $\beta_1 = -\frac{4}{3}r_m(1) \Rightarrow \beta_1 = -\frac{2b}{3}$

D'où

$$C(s) = -\frac{(s+1)\left[(s-1)u_2(s)-\frac{2}{3}b(s+1)\right]}{\left[(1-\frac{2}{3}b^2)s+2(1-\frac{b^2}{3})\right]u_2(s)+\frac{b}{3}(s+1)}$$

b représente un paramètre ajustable contrainé par $0 < b < \frac{3}{2}$. Notons que le choix $u_2(\infty) = \frac{2b}{3}$ rend la fonction $C(s)$ strictement propre.

2. Exemple: Soit $P_0(s)$ un système ayant deux pôles conjugués instables:

$$P_0(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

Les deux pôles instables sont $p_1 = 1+j$ et $p_2 = 1-j$.

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_0(s) &= P_0(s)B(s) \text{ avec } B(s) = \frac{p_1-s}{p_1+s} \frac{p_2-s}{p_2+s} \\
&= \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}
\end{aligned}$$

Rappelons que $u(p_i) = \beta_i = \frac{r_m(p_i)}{P_0(p_i)}$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{r_m(p_1)}{\tilde{P}_0(p_1)} = 4(1+j)r_m(p_1) \\
\beta_2 &= \bar{\beta}_1
\end{aligned}$$

La condition de la stabilité robuste établit par le bloc de Pick est représentée par:

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\beta_1\bar{\beta}_1}{p_1+\bar{p}_1} & \frac{1-\beta_1\bar{\beta}_2}{p_1+\bar{p}_2} \\ \frac{1-\beta_2\bar{\beta}_1}{p_2+\bar{p}_1} & \frac{1-\beta_2\bar{\beta}_2}{p_2+\bar{p}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-|\beta_1|^2}{2} & \frac{1-\beta_1^2}{2(1+j)} \\ \frac{1-\beta_2^2}{2(1+j)} & \frac{1-|\beta_2|^2}{2} \end{bmatrix} > 0$$

1^{ere} condition: Il faut $|\beta_1| < 1 \Rightarrow |r_m(p_1)| = \sqrt{Re(r_m(p_1))^2 + Im(r_m(p_1))^2} < \frac{1}{4\sqrt{2}}$

En proposant une structure définie pour $r_m(s) = \frac{b}{s+1} \Rightarrow r_m(p_1) = \frac{b(2-j)}{5}$.

Il impose une contrainte: $b < \sqrt{\frac{5}{32}} = 0.3953$

2^{ième} condition: mais le bloc de Pick doit rencontrer

$$\frac{(1-|\beta_1|^2)^2}{4} - \frac{(1-\bar{\beta}_1^2)(1-\beta_1^2)}{8} > 0$$

avec $\beta_1 = 4(1+j)r_m(p_1)$ et $r_m(p_1) = \frac{b}{p_1+1} \Rightarrow \beta_1 = \frac{4}{5}b(3+j)$ et $\beta_1^2 = \frac{16}{25}b^2(8+6j)$

$$\beta_1\bar{\beta}_1 = \frac{32}{5}b^2$$

Ce qui implique que: $40.96b^4 - 15.36b^2 + 1 > 0$, donc $0 < b < 0.2896$.

$0 < b < 0.2896$ donc une nouvelle contrainte sur b. Le calcul du compensateur $C(s)$ devra tenir compte de ces contraintes.

Calcul du contrôleur:

Formation des éléments $\beta_{i,j}$ comme suit:

$$\begin{aligned} \beta_{i,1} &= \beta_i \quad i = 1, \dots, l \\ \beta_{i,j+1} &= \frac{(\lambda_i + \bar{\lambda}_j)(\beta_{i,j} - \beta_{j,j})}{(\lambda_i - \bar{\lambda}_j)(1 - \bar{\beta}_{j,j}\beta_{i,j})}, \quad i \leq j \leq i-1 \leq l-1 \end{aligned}$$

Donc, la solution $u(s)$ est donné par la répitition des transformations fractionnaire linéaire.

$$u_j(s) = \frac{(s - \lambda_j)u_{j+1}(s) + \rho_j(s + \bar{\lambda}_j)}{s + \bar{\lambda}_j + \bar{\rho}_j(s - \lambda_j)u_{j+1}(s)} \quad j = l, l-1, \dots, 1$$

avec $\rho = \beta_{j,j}$. Dans ce cas les points d'interpolation seulement les pôles $\lambda_i = p_i$.

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \frac{(s - p_1)u_2(s) + \rho_1(s + \bar{p}_1)}{s + \bar{p}_1 + \bar{\rho}_1(s - p_1)u_2(s)} \quad \text{avec } \rho_1 = \beta_{1,1} = \beta_1 \\ \text{et } u_2(s) &= \frac{(s - p_2)u_3(s) + \rho_2(s + \bar{p}_2)}{s + \bar{p}_2 + \bar{\rho}_2(s - p_2)u_3(s)} \\ \text{avec } \rho_2 &= \beta_{2,2} = \frac{(p_2 + \bar{p}_1)(\beta_{2,1} - \beta_{1,1})}{(p_2 - p_1)(1 - \bar{\beta}_{1,1}\beta_{2,1})} = (1+j)\frac{\bar{\beta}_1 - \beta_1}{1 - (\bar{\beta}_1)^2} \end{aligned}$$

Finalement:

$$u_1(s) = \frac{(s - p_2)[(s - p_1) + \rho_1\bar{\rho}_2(s + \bar{p}_1)]u_3(s) + (s + \bar{p}_2)[(s - p_1)\rho_2 + \rho_1(s + \bar{p}_1)]}{(s - p_2)[(s + \bar{p}_1)\bar{\rho}_2 + \bar{\rho}_1(s - p_1)]u_3(s) + (s + \bar{p}_2)[(s + \bar{p}_1) + \rho_2\bar{\rho}_1(s - p_1)]}$$

avec $u_3(s)$, une fonction réelle arbitraire strictement bornée. Il vient:

$$\begin{aligned}
 C(s) &= \frac{Q(s)}{1 - P_0(s)Q(s)} \text{ avec } Q(s) = \frac{B(s)}{r_m(s)}u(s) \\
 &= \frac{B(s)u(s)}{r_m(s) - P_0(s)B(s)u(s)} \text{ avec } B(s) = \frac{p_1 - s}{p_1 + s} \frac{p_2 - s}{p_2 + s} \\
 &= \frac{(p_1 - s)(p_2 - s)u(s)}{(s + p_1)(s + p_2)r_m(s) - u(s)} \text{ avec } P_0(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \\
 &= \frac{(s^2 - 2s + 2)u(s)}{(s^2 + 2s + 2)r_m(s) - u(s)}
 \end{aligned}$$

avec $u(s) = u_1(s)$

$$C(s) = \frac{l_1(s)u_3(s) + l_2(s)}{m_1(s)u_3(s) + m_2(s)}$$

avec

$$\begin{aligned}
 l_1(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s - p_2) \left[(s - p_1) + (1 - j)\beta_1 \frac{\beta_1 - \bar{\beta}_1}{1 - \beta_1^2} (s + \bar{p}_1) \right] \\
 l_2(s) &= (s - p_1)(s - p_2)(s + \bar{p}_2) \left[(s - p_1)(1 + j) \frac{\bar{\beta}_1 - \beta_1}{1 - (\bar{\beta}_1)^2} + \beta_1(s + \bar{p}_1) \right] \\
 m_1(s) &= (s - p_2) \left\{ (s + p_1)(s + p_2) \left[(s + \bar{p}_1)(1 - j) \frac{\beta_1 - \bar{\beta}_1}{1 - \beta_1^2} + \bar{\beta}_1(s - p_1) \right] r_m(s) \right. \\
 &\quad \left. - \left[(s - p_1) + (1 - j)\beta_1 \frac{\beta_1 - \bar{\beta}_1}{1 - \beta_1^2} (s + \bar{p}_1) \right] \right\} \\
 m_2(s) &= (s + \bar{p}_2) \left\{ (s + p_1)(s + p_2) \left[(s + \bar{p}_1) + (1 + j) \frac{\bar{\beta}_1 - \beta_1}{1 - (\bar{\beta}_1)^2} \bar{\beta}_1(s - p_1) \right] r_m(s) \right. \\
 &\quad \left. - \left[(s - p_1)(1 + j) \frac{\bar{\beta}_1 - \beta_1}{1 - (\bar{\beta}_1)^2} + \beta_1(s + \bar{p}_1) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

3. Exemple: On considère le système nominale suivant:

$$P_0(s) = \frac{k_0}{s(s+1)}$$

qui comporte un pôle à l'origine.

Dans ce cas, $B(s) = 1$ et $\tilde{P}_0(s) = \frac{k_0}{s+1}$. La condition de stabilité robuste est donnée par:

$$|r'_m(0)| < |\tilde{P}_0(0)| = |k_0| \quad (35)$$

Donc, la stabilité robuste est assurée même avec une grande incertitude à $s = 0$. Il faut alors que le gain statique k_0 du système nominale soit élevé.

La condition (35) peut être aussi interprétée comme suit. Considérons la classe des systèmes ayant la forme $P(s) = \frac{k}{s(s+1)}$, où le gain k est dans l'intervalle $[k_1, k_2]$. Si on prend le gain

nominal par $k_0 = \frac{k_1+k_2}{2}$, donc $r'_m(s) = \frac{(k_2-k_1)}{2(s+1)}$ et l'application de l'inégalité (35) mène à la condition $k_1 k_2 > 0$. Ceci implique que le gain k ne doit pas changer de signe pour qu'il y ait stabilité robuste. Ce résultat est confirmé par le critère de Routh-Hurwitz appliqué à l'équation caractéristique $s(s+1)d(s) + kn(s) = 0$, où $C(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$. Le terme constant de cette équation est $kn(0)$. La stabilité est préservée si k ne change pas de signe.

4. Exemple:

Soit le système nominal [HTB92]:

$$P_0(s) = \frac{K_m}{s(1+\tau_m s)} e^{-Ts}$$

$\tau_m = 1$ sec, et $K_m = 2$.

La caractéristique fréquentielle de $P(j\omega)$ permet de définir une plage maximale d'errance autour du système nominal définie par:

$$|P'(j\omega) - P'_0(j\omega)| \leq r'_m(j\omega)$$

avec $r'_m(j\omega) = \frac{1+0.1j\omega}{1+0.5j\omega}$, i.e. $r'_m(s) = \frac{1+0.1s}{1+0.5s} = \frac{1+a\tau s}{1+\tau s}$ avec $a=0.2$ et $\tau = 0.5$

ce qui correspond à une erreur de 1 aux basses fréquences et de 0.2 sur les hautes fréquences.

La phase maximale est: $\sin \phi_m = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow \phi_m = -41.81^\circ$

Lorsque ω tend vers l'infini l'incertitude a une attenuation de $20 \log_{10} a = -13.98db$.

Numériquement nous avons:

$$P_0(s) = \frac{2}{s(1+s)} e^{-Ts}$$

et prenons $T = 0.1, 0.5, 1$. Les simulations et les résultats sont à l'annexe D.

Approximation de Padé du premier ordre

Utilisant l'approximation de Padé du premier ordre, le système nominal devient:

$$P_0(s) = \frac{2(2-Ts)}{s(s+1)(2+Ts)}$$

Dans ce cas, $B(s) = 1$ et $\tilde{P}_0(s) = \frac{2(2-Ts)}{(s+1)(2+Ts)}$.

La condition de stabilité robuste est donnée par:

$$|r'_m(0)| = 1 < |\tilde{P}_0(0)| = 2$$

La mise au point du contrôleur procure:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{Q(s)}{1 - P_0(s)Q(s)} \text{ avec } Q(s) = \frac{u(s)}{r_m(s)} \\ &= \frac{\frac{u(s)}{r_m(s)}}{1 - P_0(s)\frac{u(s)}{r_m(s)}} \text{ avec } r_m(s) = \frac{r'_m(s)}{s} \\ &= \frac{s u(s)}{r'_m(s) - s P_0(s) u(s)} \text{ avec } P_0(s) = \frac{2(2-Ts)}{s(s+1)(2+Ts)} \\ &= \frac{s(s+1)(2+Ts)u(s)}{(s+1)(Ts+2)r'_m(s) - 2(-Ts+2)u(s)} \end{aligned}$$

Choisissons pour $u(s)$ la fonction analytique stable:

$$u(s) = \frac{k_u}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{k_u}{\tau_d s^2 + \tau_s s + 1} \text{ avec } \tau_d = \tau_1 \tau_2, \tau_s = \tau_1 + \tau_2.$$

Le choix du contrôleur $C(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ est de façon que le numérateur $n(s)$ soit différent de zéro lorsque $s = 0$ et qu'il soit strictement propre.

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{k_u s(s+1)(Ts+2)}{(s+1)(2+Ts)(\tau_d s^2 + \tau_s s + 1)r'_m(s) - 2k_u(2-Ts)} \text{ avec } r'_m(s) = \frac{1+0.1s}{1+0.5s} \\ &= \frac{k_u s(s+1)(Ts+1)(0.5s+1)}{(s+1)(2+Ts)(\tau_d s^2 + \tau_s s + 1)(1+0.1s) - 2k_u(1+0.5s)(2-Ts)} \\ &= \frac{0.5(s+1)(Ts+2)(0.5s+1)}{a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.1T\tau_d \\ a_2 &= (1.1T + 0.2)\tau_d + 0.1T\tau_s \\ a_3 &= (2.2 + T)\tau_d + (1.1T + 0.2)\tau_s + 0.1T \\ a_4 &= 2\tau_d + (2.2 + T)\tau_s + 1.1T + 0.2 + k_u T \\ a_5 &= 2.2 + T + 2\tau_s - 2k_u(1-T) \end{aligned}$$

avec $k_u = 0.5$. Les résultats et les simulations sont à l'annexe D.

Approximation de Padé du second ordre

En utilisant l'approximation de Padé du second ordre, il vient:

$$e^{-Ts} = \frac{T^2 s^2 - 6Ts + 12}{T^2 s^2 + 6Ts + 12}$$

Choix du contrôleur:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{s u(s)}{r'_m(s) - s P_0(s) u(s)} \\ &= \frac{s(s+1)(12+6Ts+T^2s^2)u(s)}{(s+1)(12+6Ts+T^2s^2)r'_m(s) - 2(12-6Ts+T^2s^2)u(s)} \text{ avec } r'_m(s) = \frac{1+0.1s}{1+0.5s} \\ &= \frac{s(s+1)(12+6Ts+T^2s^2)(1+0.5s)u(s)}{(s+1)(1+0.1s)(12+6Ts+T^2s^2) - 2(1+0.5s)(12-6Ts+T^2s^2)u(s)} \\ &\quad \text{avec } u(s) = \frac{k_u}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \\ &= \frac{k_u s(s+1)(1+0.5s)(12+6sT+T^2s^2)}{\alpha_1 s^6 + \alpha_2 s^5 + \alpha_3 s^4 + \alpha_4 s^3 + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s + \alpha_7} \end{aligned}$$

conservons le même paramètre libre $u(s)$ que précédemment avec:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.1T^2\tau_d \text{ avec } \tau_d = \tau_1 \tau_2 \\ \alpha_2 &= (0.6T + 1.1T^2)\tau_d + 0.1T^2\tau_s \text{ avec } \tau_s = \tau_1 + \tau_2 \\ \alpha_3 &= (1.2 + 6.6T + T^2)\tau_d + (0.6T + 1.1T^2)\tau_s + 0.1T^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= (6T + 13.2)\tau_d + (1.2 + 6.6T + T^2)\tau_s + (0.6T + 1.1T^2 - k_u T^2) \\
\alpha_5 &= 12\tau_d + (6T + 13.2)\tau_s + (1.2 + 6.6T + T^2) - 2k_u(T^2 - 3T) \\
\alpha_6 &= 12\tau_s + (6T + 13.2) - 2k_u(-6T + 6) \\
\alpha_7 &= 12 - 24k_u
\end{aligned}$$

Pour que la condition que le numérateur $n(0) \neq 0 \Rightarrow k_u = \frac{1}{2}$.
La fonction analytique arbitraire, à la forme [HTB92]:

$$u(s) = \frac{0.5}{(3s+1)(5s+1)}$$

Analyse des résultats obtenus:

Les figures à l'annexe F détaillent la comparaison des résultats obtenus pour différents ordres d'approximation.

La figure à l'annexe F illustre la réponse temporelle du système. Nous notons qu'il n'y a aucune différence entre les approximations de Padé du premier ou du second ordre. Il en est de même pour le lieu de Nyquist correspondant à ces deux approximations. Notons toutefois que dans le cas de la réponse temporelle, le temps de montée augmente lorsque le retard augmente.

La figure à l'annexe F illustre la fonction de sensibilité pour l'approximation de Padé d'ordre 1. Nous notons que la sensibilité augmente avec le retard. L'étude amorcée pourrait servir pour corrober les résultats obtenus par Khargonekar et Poola relativement à la sensibilité optimale de systèmes avec retard.

4.3 Modification de l'algorithme de Nevanlinna-Pick classique

Le but visé est de remédier au problème des compensateurs répondant au problème d'interpolation, lorsque des points d'interpolation sont complexes. Le problème étant l'obtention de fonctions rationnelles en s ayant des coefficients complexes.

Rappelons que le problème de la stabilisation robuste pour les systèmes instables, dont les pôles à $s = p_j$, $j = 1, \dots, l$, $\Re[p_j] > 0$ est réduit au problème de calcul d'une fonction (RB),³ à partir des points d'interpolation:

$$u(p_j) = \frac{r_m(p_j)}{\tilde{P}_0(p_j)}$$

Le problème de l'interpolation de Nevanlinna-Pick classique est:

La détermination de la fonction de variable complexe $u(s)$ qui soit (AB)⁴ implique

$$\begin{aligned}
u(p_j) &= \beta_j, \quad j = 1, \dots, l \quad \Re[p_j] > 0 \text{ et } |\beta_j| < 1 \\
u_j(s) &= \frac{\rho_j + u_{j+1}(s) \frac{p_j-s}{\bar{p}_j+s}}{1 + \bar{\rho}_j u_{j+1}(s) \frac{p_j-s}{\bar{p}_j+s}}
\end{aligned} \tag{36}$$

³(RB) fonction réelle bornée: La fonction $u(s)$ est une fonction analytique bornée et réelle.

⁴(AB) fonction analytique bornée: Une fonction de variable complexe $u(s)$:

- (1) le module $|u(s)|$ est bornée pour $\Re[s] \geq 0$
- (2) est analytique pour $\Re[s] \geq 0$.

\bar{p} denote le conjugué de p , et le calcul de ρ_j est donné par:

$$\rho_i = \rho_{i,i} \text{ ou } \rho_{i,j} = \beta_j \quad \text{et}$$

$$\rho_{i,j} = \frac{\bar{p}_{i-1} + p_j}{\bar{p}_{i-1} - p_j} \frac{\rho_{i-1,j} - \rho_{i-1,i-1}}{1 - \bar{\rho}_{i-1,i-1}\rho_{i-1,j}} \quad 2 \leq i \leq l, \quad i \leq j \leq l$$

Le compensateur $u_1(s)$ est trouvé en supposant une fonction $u_{l+1}(s)$ arbitraire. Une difficulté avec cette algorithme émerge lorsque les points d'interpolation sont des nombres complexes, i.e $p_j = \sigma_j + j\omega_j$ et $\omega_j \neq 0$, car il en résulte une formule de compensateur polynomiale dont les coefficients sont complexes. Aussi est-il proposé DY4⁵ d'appliquer une transformation particulière pour rectifier ce problème.

Exemple :

$$\begin{aligned} u(1+j) &= \frac{j}{4} \\ u(1-j) &= -\frac{j}{4} \end{aligned}$$

D'après l'algorithme de Nevalinna-Pick classique:

$$u(s) = u_1(s) = \frac{s(\frac{8}{17} - \frac{15}{68}j) + (\frac{-47}{68} + \frac{1}{4}j)}{s(\frac{15}{17} - \frac{2}{17}j) + (1 - \frac{13}{17}j)}$$

la fonction de transfert a, nous le voyons, des coefficients imaginaire.

La modification de l'algorithme de Nevanlinna-Pick proposée est basée sur la théorie de d'interpolation de Youla-Saito⁶ des fonctions réelles-positives permettant de remplacer $u_1(s)$ par $u_2(s)$ comme suit:

$$u_1(s) = \frac{u_2(s)\lambda_1(s) + \mu_1(s)}{u_2(s)\gamma_1(s) + 1} \quad \text{ou} \quad u_2(s) = \frac{u_1(s) - \mu_1(s)}{\lambda_1(s) - \mu_1(s)\gamma_1(s)} \quad (37)$$

avec $\lambda_1(s), \mu_1(s)$ et $\gamma_1(s)$ sont des fonctions réelles que nous définissons par la suite. Nous montrerons que si $u_1(p_1) = \beta_1$, il s'ensuit que la transformation $u_1(s) \rightarrow u_2(s)$ transforme des fonctions (BR), de sorte que:

$$u_2(p_j) = \frac{\beta_j - \mu_1(p_j)}{\lambda_1(p_j) - \beta_j\gamma_1(p_j)} = T_1(\beta_j) \quad j = 2, \dots, l.$$

Le problème d'interpolation des points $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ est donc réduit au problème avec un point d'interpolation au moins soit β_2, \dots, β_l .

Cette procédure est répétée pour le problème avec deux points d'interpolation en moins, soit:

$$u_3(p_j) = \frac{T_1(\beta_j) - \mu_2(p_j)}{\lambda_2(p_j) - T_1(\beta_j)\lambda_1(p_j)} = T_2(\beta_j) \quad j = 3, 4, \dots, l$$

Les nouveaux points d'interpolation sont ceux qui apparaissent dans la diagonale du bloc suivant:

⁵P. Dorato, Yunzhi Li *A Modification of the classical Nevanlinna-Pick Interpolation Algorithm with Applications to Robust Stabilization* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-31, pp. 645-648, 1986.

⁶Interpolation with positive-real functions, J. Franklin Inst., vol. 284, no. 2, pp. 77-108, 1967.

$$\begin{array}{cccccc}
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_l \\
T_1(\beta_2) & T_1(\beta_3) & \cdots & T_1(\beta_l) \\
& T_2T_1(\beta_3) & \cdots & T_2T_1(\beta_l) \\
& & \vdots & & \\
& & T_{l-1} \cdots T_1(\beta_l)
\end{array}$$

D'où le nouveau problème:

$$\begin{aligned}
u(p_1) = \beta_1 &= \rho_1 \\
u(p_2) = T_1(\beta_2) &= \rho_2 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
u(p_l) = T_l \cdots T_1(\beta_l) &= \rho_l
\end{aligned}$$

Soit les éléments diagonaux de ce vecteur:

$$\rho_j = T_{j-1} \cdots T_1(\beta_j), \quad j = 2, \dots, l, \text{ avec } \rho_1 = \beta_1$$

Choix de λ , μ et γ

Soit $p_l = \sigma_l + j\omega_l$ et définissons:

$$R_l = \frac{1 - |\rho_l|^2}{|1 - \rho_1|^2}, X_l = \frac{2 \operatorname{Im} \rho_l}{|1 - \rho_l|^2}$$

Ainsi que les indices de Youla associés, soit:

$$\begin{aligned}
I_1(p_l) &= \frac{\frac{R_l}{\sigma_l} - \frac{X_l}{\omega_l}}{\frac{R_l}{\sigma_l} + \frac{X_l}{\omega_l}}, & I_2(p_l) &= \frac{2 \left| \frac{1 + \rho_l}{1 - \rho_l} \right|^2}{\frac{R_l}{\sigma_l} + \frac{X_l}{\omega_l}} \\
I_3(p_l) \frac{R_l}{\sigma_l} - \frac{X_l}{\omega_l} &, & I_4 &= I_1^{-1}.
\end{aligned}$$

$$z_l(s) = L_4 s + \frac{1}{sC}, \quad w_l(s) = L_1 s + \frac{1}{sC}$$

avec

$$L_1 = I_1/I_3, \quad L_4 = I_4/I_3, \quad C = \frac{I_3}{|p_l|^2},$$

Les fonctions réelles λ_l, μ et γ sont:

$$\begin{aligned}
\lambda_l(s) &= \frac{z_l(s) + w_l(s) - 1 - I_2/I_3}{z_l(s) + w_l(s) + 1 + I_2(s)/I_3(s)} = \frac{(I_4 + I_1)s^2 - (I_2 + I_3)s + 2|p_l|^2}{(I_4 + I_1)s^2 + (I_2 + I_3)s + 2|p_l|^2} \\
\mu_l(s) &= \frac{z_l(s) - w_l(s) - 1 + I_2/I_3}{z_l(s) + w_l(s) + 1 + I_2(s)/I_3(s)} = \frac{(I_4 - I_1)s^2 + (I_2 - I_3)s}{(I_4 + I_1)s^2 + (I_2 + I_3)s + 2|p_l|^2} \\
\gamma_l(s) &= \frac{z_l(s) - w_l(s) + 1 - I_2/I_3}{z_l(s) + w_l(s) + 1 + I_2(s)/I_3(s)} = \frac{(I_4 - I_1)s^2 - (I_2 - I_3)s}{(I_4 + I_1)s^2 + (I_2 + I_3)s + 2|p_l|^2}
\end{aligned} \tag{38}$$

Par substitution, il vient:

$$\lambda_l(p_l) = \rho_l \frac{Z_l - I_2/I_3}{Z_l + I_2/I_3}, \quad \mu_l(p_l) = \rho_l, \quad \gamma_l(p_l) = \frac{Z_l - I_2/I_3}{Z_l + I_2/I_3} \quad (39)$$

$$\text{ou } Z_l = \frac{1 + \rho_l}{1 - \rho_l} \quad (40)$$

D'après les équations (39) et (40), $u_l(s)$ est donné par l'équation suivante:

$$u_l(s) = \frac{u_{l+1}(s)\lambda_l(s) + \mu_l(s)}{u_{l+1}(s)\gamma_l(s) + 1} \quad (41)$$

L'interpolation $u_l(p_l) = \rho_l$ est indépendante de la valeur $u_{l+1}(p_l)$. $u_l(s)$ est une fonction RB pour la fonction RB de $u_{l+1}(s)$, qui est arbitraire, car la relation du type

$$\eta_l(s) = \frac{z_l(s)\eta_{l+1}(s) + I_2/I_3}{\eta_{l+1}(s) + w_l(s)}$$

est une fonction réelle positive ($\Re[s] > 0$) pour la fonction réelle positive arbitraire $\eta_{l+1}(s)$ YS. De même, $\eta_l(s)$ est BR si $\eta_{l+1}(s)$ est BR.

Algorithme général

Le traitement du cas général où les points d'interpolation sont réelle et complexe. Par exemple, $2k$ points d'interpolation complexe $(p_1, \bar{p}_1), \dots, (p_k, \bar{p}_k)$ et m points réel $(p_{k+1}, \dots, p_{k+m})$, donc les nouveaux points d'interpolation sont ceux qui apparaissent dans la diagonale du bloc suivant:

		<u>points</u>	<u>complexe</u>		<u>points</u>	<u>réel</u>
β_1	β_2	\dots	β_l	β_{l+1}	\dots	β_{l+m}
$T_1(\beta_2)$	\dots	$T_1(\beta_l)$	$T_1(\beta_{l+1})$	\dots	$T_1(\beta_{l+m})$	
		\vdots				
$T_{l-1} \cdots T_1(\beta_1)$		$T_{l-1} \cdots T_1(\beta_{l+1})$		\dots	$T_{l-1} \cdots T_1(\beta_{l+m})$	
		$T_l \cdots T_1(\beta_{l+1})$			$T_l \cdots T_1(\beta_{l+m})$	
		\vdots				
				$T_{l+m-1} \cdots T_1(\beta_{l+m})$		

Nous avons donc remplacé la solution originale (36) par la solution (41). Notons que, il suffit de choisir une fonction $u_{l+1}(s)$ qui soit BR; $u_l(s)$ sera alors automatiquement BR l'algorithme:

$$u_j(s) = \frac{u_{j+1}(s)\lambda_j(s) + \mu_j(s)}{u_{j+1}(s)\gamma_j(s) + 1}, \quad j = l, l-1, \dots, 1.$$

aboutira donc à une fonction finale $u_1(s)$ qui soit BR, CQFD.

Exemple:

Soit le système nominale:

$$P_0(s) = \frac{6}{(1-s)(2-2s+s^2)}$$

avec une perturbation du système est $|\delta P(j\omega)| \leq \frac{1}{20} \quad \forall \omega$.

En utilisant la théorie de Nevanlinna-Pick classique, et choisissant la fonction arbitraire $u_3(s) = 0$,

$$u(p_1) = u(1+j) = \beta_1 = \frac{(1+3j)}{30}, \quad u(\bar{p}_1) = \bar{\beta}_1, \quad u(p_2) = u(1) = \beta_2 = 0.08333.$$

La solution recherchée:

$$u(s) = u_1(s) = \frac{(0.69119 + 0.03087j)s^2 - (0.87408 - 0.039245j)s + (0.58606 + 0.02650j)}{(1.08300 + 0.04803j)s^2 + (1.90799 + 0.09631j)s + (1.767796 + 0.078086j)}$$

Avec la modéification proposée, les indices de Youla correspondants sont:

$$I_1 = 0.66355, \quad I_2 = 1.81308, \quad I_3 = 2.39437, \quad \text{et} \quad I_4 = 1.50704.$$

Nous calculons les fonctions $\lambda_1(s)$, $\mu_1(s)$, et $\gamma_1(s)$ correspondant au point complexe $p_1 = 1+j$:

$$\begin{aligned}\lambda_1(s) &= \frac{2.1706s^2 - 4.2075s + 4.0000}{D(s)}, \\ \mu_1(s) &= \frac{0.8434s^2 - 0.5813s}{D(s)} \\ \gamma_1(s) &= \frac{0.8434s^2 + 0.5813s}{D(s)}\end{aligned}$$

avec $D(s) = 2.1706s^2 + 4.2075s + 4.0000$.

Le calcul de $u_2(p_2) = \frac{\beta_2 - \mu_1(p_2)}{\lambda_1(p_2) - \beta_2 \gamma_1(p_2)} = 0.3267 = T_1(\beta_2)$, $\rho_2 = T_1(\beta_2) = 0.3267$. Les indices de Youla sont positives pour p_1 et $|\rho_2| \leq 1$. Il existe donc une solution au problème de l'interpolation.

La sélection de $u_3(s) = 0$, implique que $u_2(s) = 0.3267$ et $u_1(s)$ a la forme suivante:

$$u_1(s) = \frac{u_2(s)\lambda_1(s) + \mu_1(s)}{u_2(s)\gamma_1(s) + 1} = \frac{1.5525s^2 - 1.9559s + 1.3068}{2.4661s^2 + 4.3974s + 4.000} = u(s)$$

Le calcul du compensateur est donné par:

$$C(s) = Q(s)(1 - P_0(s)Q(s))^{-1}$$

avec

$$Q(s) = \frac{u(s)B(S)}{r_m(s)}, \quad r_m(s) = \frac{1}{20}, \quad B(s) = \frac{(1-s)(2-2s+s^2)}{(1+s)(2+2s+s^2)}$$

Le résultat numérique final est:

$$C(s) = \frac{-20(1.5525s^2 - 1.9559s + 1.3068)}{2.4461s^2 + 19.074s + 74.414}$$

4.4 Stabilité robuste avec prescription du degré de stabilité

Dans de nombreux cas pratiques, la stabilisation robuste n'est pas suffisante pour garantir des spécifications de performance requise. Il est donc désirable de viser la stabilité de la boucle fermée pour une classe de systèmes $A(P_0(s), r(s))$ fluctuant autour d'un système nominal $P_0(s)$, de sorte que $\|P(s) - P_0(s)\| \leq r$ (Kimura et al. [KAO89]). Un contrôleur $C(s)$ est dit stabilisateur robuste avec un degrés de stabilité ε pour la classe A , si tous les pôles λ du système en boucle fermé satisfont

$$\operatorname{Re}\lambda < -\varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad (42)$$

pour chaque système $P(s)$ appartient à la classe $A(P_0, r)$.

Si $C(s)$ existe, la classe $A(P_0, r)$ est robustement stabilisable avec un degrés de stabilité ε . La stabilité robuste usuelle correspond au cas $\varepsilon = 0$. L'égalité (42) implique que la constante du temps du système en boucle fermé est au moins inférieure à ε^{-1} , $\forall P \in A$. La stabilité robuste avec un degrés de stabilité ε assure donc une certaine limite de la vitesse de la réponse pour les systèmes incertains.

La fonction de transfert "réelle" est représenté par:

$$P(s) = P_0(s) + \Delta P(s),$$

ou $\Delta P(s)$ noté l'écart entre le système réel et nominal.

On suppose que $\Delta P(s)$ est stable et satisfait:

$$|\Delta P(j\omega)| < |r(j\omega)|, \forall \omega$$

où $r(s)$ est une fonction de transfert stable à minimum de phase.

La construction d'un stabilisateur robuste selon la synthèse de commande H^∞ est appliquée au système:

$$\begin{aligned} \bar{P}_0(s) &= P_0(s - \varepsilon) \\ \bar{r}(s) &= r(s - \varepsilon) \end{aligned}$$

ce qui revient à effectuer une décalage de ε dans le plan s , où $\varepsilon > 0$ est choisi tel que $\bar{r}(s)$ est à déphasage minimal et stable. L'ensemble des systèmes réels $P(s)$ satisfait

$$P(s - \varepsilon) \in A(\bar{P}_0, \bar{r})$$

et est dénoté par $\bar{A}(P_0, r)$.

La condition de déphasage minimale et de stabilité par $\bar{r}(s)$ permet d'écrire:

$$\bar{A}(P_0, r) \subset A(P_0, r)$$

5. Exemple:

Soient $P_0(s)$ et $\Delta P(s)$ donnés par:

$$\begin{aligned} P_0(s) &= \frac{K}{s(s + 0.5)}, \\ \Delta P(s) &\in \left\{ \frac{\delta}{s + 5}; 0 < \delta < \delta_{max} \right\} \end{aligned}$$

σ	0.1	0.5	1	1.5	2	3
ε_{max}	3.080933	1.33484	0.99999	0.85844946	0.776086	0.680574

Table 1: Influence de σ sur le degré de stabilité

$$\bar{P}_0(s) = P_0(s - \varepsilon) = \frac{K}{(s - \varepsilon)(s - \varepsilon + 0.5)} = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

avec $p_1 = \varepsilon$ et $p_2 = \varepsilon - 0.5$.

L'algorithme de Nevanlinna-Pick appliqué à $\bar{P}_0(s)$ mène à:

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0(s) &= \bar{P}_0(s)B(s) \\ &= \frac{K}{(p_1 + s)(p_2 + s)} \text{ avec } B(s) = \frac{(p_1 - s)(p_2 - s)}{(p_1 + s)(p_2 + s)}\end{aligned}$$

Les points d'interpolation pour p_i sont donnés par la relation (30) sont:

$$\beta_i = \frac{\bar{r}(p_i)}{\tilde{P}_0(p_i)}, i = 1, 2$$

où

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\delta_{max}}{K} \frac{2p_1(p_1 + p_2)}{5} \\ \beta_2 &= \frac{\delta_{max}}{K} \frac{2p_2(p_1 + p_2)}{4.5}\end{aligned}$$

La condition de Nevanlinna-Pick, stipule que la matrice:

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\beta_1^2}{p_1+p_1} & \frac{1-\beta_1\beta_2}{p_1+p_2} \\ \frac{1-\beta_2\beta_1}{p_2+p_1} & \frac{1-\beta_2^2}{p_2+p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\frac{4}{25}\sigma^2p_1^2(p_1+p_2)^2}{2p_1} & \frac{1-\frac{4}{5\times 4.5}\sigma^2p_1p_2(p_1+p_2)^2}{p_1+p_2} \\ \frac{1-\frac{4}{5\times 4.5}\sigma^2p_1p_2(p_1+p_2)^2}{p_1+p_2} & \frac{1-\frac{4}{(4.5)^2}\sigma^2p_2^2(p_1+p_2)^2}{2p_2} \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma = \frac{\delta_{max}}{K}$$

doit être définie positive.

Nous notons que la valeur maximale de ε vérifiant la condition de Nevanlinna-Pick dépend du paramètre σ .

Nous remarquons que le degré de stabilité augmente lorsque σ diminue (tableau 1). La méthode de la stabilité robuste avec prescription du degré de stabilité est donc applicable aux systèmes linéaires avec des incertitudes non-structurées additives. Dans la synthèse des systèmes de commande robuste, la performance de la commande est sacrifiée au détriment quand le modèle nominale. La méthode présentée dans cette section permet un compromis entre la performance requise et la stabilité robuste du modèle incertain [KAO89] d'une plus grande incertitude associée au modèle nominal.

5 Stabilisation robuste avec incertitude paramétrique

Soient $P_k(s)$ l'ensemble des systèmes (linéaires, continus à dimension finie, invariants dans le temps, et propres) paramétrisés par k . Les paramètres du vecteur k prennent certaines valeurs

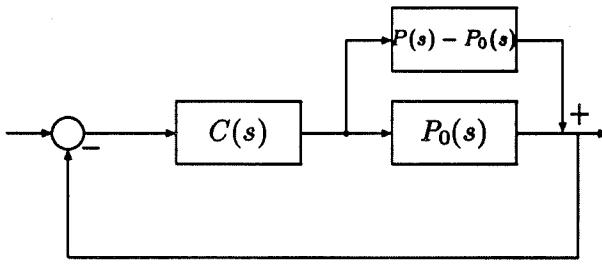


Figure 4: Système de contre-réaction avec incertitude

dans l'ensemble compact K . Notre but est de concevoir un contrôleur $C(s)$ pour chaque k de K , de sorte que le système $P_0(s)$ étant en boucle fermée comme à la figure 3 soit asymptotiquement stable (stabilité interne). On considère la famille suivante des systèmes monovariables.

$$P_k(s) = kP_0(s)$$

ou $P_0(s)$ est le système nominal (fixé) et k est un paramètre variable prenant des valeurs dans l'intervalle $[a, b]$, $b > 1 > a > 0$.

L'étude de ce problème montre que la marge de gain permise doit être supérieure à $20 \log \frac{b}{a}$ afin de permettre la variation paramétrique $a < k < b$. La marge de gain maximale va dépendre seulement des pôles et des zéros de $P_0(s)$ dans le demi plan complexe de droite ce que nous démontrerons par la suite.

5.1 Formulation du problème de stabilisation robuste

Soit $P_0(s)$ un système nominal monovariable donné avec les zéros à l'intérieur du demi-plan droit z_1, z_2, \dots, z_m , et les pôles à l'intérieur du demi plan droit p_1, p_2, \dots, p_n .

Pour un contrôleur $C(s)$, on définit la fonction de sensibilité (figure 4)

$$S(s) = (1 + P_0(s)C(s))^{-1}$$

Nous visons à la stabilité interne du système en boucle fermée (24). De plus, $S(s)$ doit satisfaire les conditions d'interpolation suivantes:

- a) La sensibilité $S(s)$ est une fonction rationnelle réelle et analytique dans \tilde{H} ;
- b) les zéros de $S(s)$ sont $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, multiplicités incluses, et
- c) les zéros de $S(s) - 1$ sont $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$, multiplicités incluses.

Lemme:

Un système est stable pour $k \in [a, b]$ si et seulement si $S(s) \notin [-\infty, \frac{a}{a-1}] \cup [\frac{b}{b-1}, \infty]$

Démonstration: $S(s)$ stable implique:

$$(1 + kP_0(s)C(s)) \neq 0 \Rightarrow P_0(s)C(s) \neq -\frac{1}{k} \Rightarrow 1 + P_0(s)C(s) \neq 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$$

$$\Rightarrow S(s) \neq \frac{k}{k-1} \text{ avec } k \in [a, b] \quad \forall s \in \tilde{H}$$

□

Ceci se traduit par $S(s) \notin [-\infty, \frac{a}{a-1}] \cup [\frac{b}{b-1}, \infty]$ ou $S(s) \in [\frac{a}{a-1}, \frac{b}{b-1}]$.

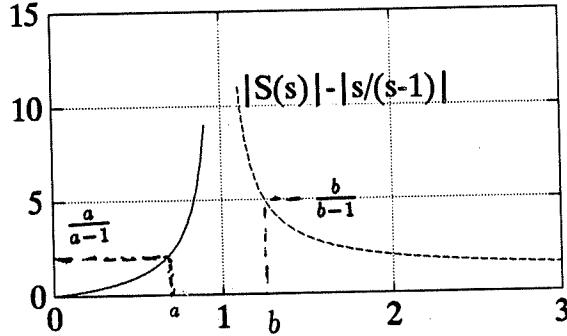


Figure 5: Domaine de la sensibilité interdites.

5.2 Rappel de la théorie d'interpolation classique

Soit $a_i \in D$, $\tilde{b}_i \in \bar{D}$ (disque unitaire fermé) $i = 1, 2, \dots, q$ avec $a_i \neq a_j, i \neq j$.
Le problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick classique consiste en la recherche (si elle existe) d'une fonction analytique $f : D \rightarrow \bar{D}$ telle que $f(a_i) = \tilde{b}_i$, $i = 1, 2, \dots, q$.

Cette fonction d'interpolation existe, si et seulement si, la matrice de Nevanlinna-Pick

$$N = \begin{bmatrix} 1 - \tilde{b}_i \tilde{b}_j \\ 1 - a_i \bar{a}_j \end{bmatrix} \quad (43)$$

est semi-définie positive.

5.3 Modification de la théorie d'interpolation classique

Soit $a_i \in D$, $b_i \in \mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes), $i = 1, 2, \dots, q$ avec a_i distinct.
Soit $\alpha \geq 0 \in \mathbb{R}$.

On s'intéresse à la recherche d'une fonction analytique f_α telle que
 $f_\alpha : D \rightarrow \bar{D} \ni f_\alpha(a_i) = \alpha b_i, \alpha \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$, ainsi que de la valeur α_{max} , telle que
 $\alpha \leq \hat{\alpha}_{max}$ qui puisse garantir l'existence d'une f_α .

Remarque: Si $\alpha = 0$, $f_\alpha \equiv 0$ est une solution triviale.

Definissons $A = [\frac{1}{1-a_i \bar{a}_j}]_{i,j=1,2,\dots,q}$ $B = [\frac{b_i \bar{b}_j}{1-a_i \bar{a}_j}]_{i,j=1,2,\dots,q}$.

$A - \alpha^2 B > 0$ constitue une condition d'interpolation de type (43). Notons que la valeur $\hat{\alpha}_{max}$ peut être déduite comme suit:

$$A - \alpha^2 B = A \alpha^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} I - A^{-1} B \right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{\alpha^2} I - A^{-1} B \right] = 0$$

d'où

$$\hat{\alpha}_{max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1} B)}} \quad (44)$$

5.3.1 Description de la solution de f_α

Soit:

$$B(z) = \prod_{i=1}^q \frac{a_i - z}{1 - \bar{a}_i z} \cdot \frac{\bar{a}_i}{|a_i|},$$

$$y_i = \frac{\bar{B}(0)}{\bar{a}_i}, y' = [y_1 \ y_2 \cdots y_q]$$

Soit $x' = [x_1 \ x_2 \ \cdots x_q]$ un vecteur (unique) tel que:

$$N_\alpha x = y \quad (45)$$

Soit:

$$P(z) = \bar{B}(0)B(z) - \sum_{i=1}^q \frac{B(z)}{(z - a_i)} x_i$$

$$Q(z) = (-1)^q z \left(\sum_{i=1}^q \frac{\alpha \bar{b}_i}{(1 - \bar{a}_i z)} \bar{x}_i \right)$$

$$\tilde{P}(z) = B(z)\bar{P}\left(\frac{1}{z}\right), \tilde{Q}(z) = B(z)\bar{Q}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Toutes les solutions du problème d'interpolation sont données par:

$$f_\alpha = \frac{\tilde{P}(z)g(z) + \tilde{Q}(z)}{P(z) + Q(z)g(z)} \quad (46)$$

ou $g(z)$ est chaque *fonction analytique arbitraire* $g : D \rightarrow \bar{D}$ [KT85].

5.3.2 Cas limite $\alpha = \hat{\alpha}_{max}$

Si $N_\alpha = (A - \alpha^2 B)$ est une matrice singulière, il est possible d'établir que:

$\exists! f_\alpha : D \rightarrow \bar{D} \ni f_\alpha(a_i) = ab_i$ et f_α est une fonction passe-tout, i.e. $|f_\alpha| = cte$ (dans le cercle unitaire fermé).

Soit l le rang de f_α , avec $l < q$. On arrange les mineurs principaux de la matrice N_α dans une matrice M qui est non singulière. On considère la restriction du problème d'interpolation en cherchant toutes les fonctions holomorphes $f_{\alpha_{max}} : D \rightarrow \bar{D} \ni f_{\alpha_{max}}(a_j) = \hat{\alpha}_{max} b_j$, $j = 1, 2, \dots, l$ qui rencontrent à la condition $M \geq 0$. Pour ce problème toutes les solutions sont données par:

$$f_{\alpha_{max}}(z) = \frac{\tilde{P}(z)g(z) + \tilde{Q}(z)}{P(z) + Q(z)g(z)}$$

ou $g(z)$ est une fonction analytique, arbitraire, $g : D \rightarrow \bar{D}$.

Pour la résolution du problème original, on choisit $g(z)$ tel que $f_{\alpha_{max}}$ satisfait le reste des conditions d'interpolation,

$$f_{\alpha_{max}}(a_i) = \hat{\alpha}_{max} b_i, \quad i = l+1, l+2, \dots, q$$

Soit:

$$f_{\alpha_{max}}(a_i) = \hat{\alpha}_{max} b_i = \frac{\tilde{P}(a_i)g(a_i) + \tilde{Q}(a_i)}{P(a_i) + Q(a_i)g(a_i)}, \quad i = l+1, l+2, \dots, q$$

Les conditions d'interpolation en relation avec la fonction g nous mène à la solution unique $g(z)$ où $g(z)$ est un produit de Blaschke [Tan86]. $g(a_i) = \frac{\hat{\alpha}_{max} b_i - \tilde{Q}(a_i)}{\tilde{P}(a_i) - \hat{\alpha}_{max} b_i Q(a_i)}$. Choisissons $g(z) = g_0$ pour plus de simplicité. Le rang de $N_\alpha = l < q$, d'après la théorie d'interpolation de Nevanlinna-Pick, il existe une solution unique à ce problème

$$\exists! g(z) \ni g(z) \equiv g_0$$

avec $|g_0| = 1$. Pour $\alpha = \hat{\alpha}_{max}$, il vient:

$$f_{\alpha_{max}} = \frac{\tilde{P}(z)g_0 + \tilde{Q}(z)}{P(z) + Q(z)g_0} \quad (47)$$

La description de $f_{\alpha_{max}}$ est une forme particulière de f_α de l'équation (46).

5.3.3 Cas $a_i \in \bar{D}$

Soit $a_j \in D, j = 1, \dots, l, a_{l+r} \in T$ (l'ensemble des points sur le cercle unitaire) ($r = 1, \dots, q-l$), et $b_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, q$. Soit $\alpha \geq 0$, on recherche une fonction analytique $f_\alpha : \bar{D} \rightarrow D \ni f_\alpha(a_i) = \alpha b_i, i = 1, \dots, q$.

$\hat{\alpha}_{max}$ a été défini plus tôt relativement à l'intérieur du cercle unitaire. Définissons: $\alpha_{max}(a_j, b_i) = \min(\hat{\alpha}_{max}, \frac{1}{|b_{l+1}|}, \frac{1}{|b_{l+2}|}, \dots, \frac{1}{|b_q|}) \forall j = 1, 2, \dots, l$ et $i = 1, \dots, q$. La forme générale de $f_{\hat{\alpha}_{max}}$ est $f_{\alpha_{max}}$ soit

$f_{\alpha_{max}}(a_i) = \alpha_{max} b_i, a_i \in \bar{D}$
si a_i est sur le cercle $f_{\alpha_{max}}(a_i) = \alpha_{max} b_i$; exemple: $f_{\alpha_{max}}(a_{l+r}) = \alpha_{max} b_{l+r} = \frac{b_{l+r}}{b_{l+r}} = 1$, et $f_{\alpha_{max}} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ à la limite. De façon générale,
 $f_\alpha(a_i) = \alpha b_i, i = 1, \dots, q$ existe si $\alpha < \alpha_{max}$.

D'où le *théorème général*:

Théorème 1:

Soit $a_i \in \bar{D}$ et $b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, q$. Il existe une fonction analytique $f_\alpha : \bar{D} \rightarrow D \ni f_\alpha(a_i) = \alpha b_i$, si et seulement si, $\alpha < \alpha_{max}(a_j, b_i)$

Démonstration: Soit $f_\alpha : D \rightarrow D$ une fonction analytique telle que:

$$f_\alpha(a_j) = \alpha b_j, j = 1, 2, \dots, l.$$

$\exists \alpha < \hat{\alpha}_{max}$, d'après l'équation (47), il existe des fonctions rationnelles qui sont déterminées complètement par les données d'interpolation, $P, \tilde{P}, Q, \tilde{Q} \ni$

$$f_\alpha = \frac{\tilde{P}g + \tilde{Q}}{P + Qg} \quad (48)$$

ou $g : D \rightarrow D$ est une fonction holomorphe arbitraire. Il revient donc de rechercher une fonction $g \ni f_\alpha(a_{l+r}) = b_{l+r}, r = 1, \dots, q-l$.

D'après (48), il vient:

$$g = \frac{\tilde{Q} - Pf_\alpha}{-\tilde{P} + Qf_\alpha} \quad (49)$$

et, $f_\alpha(a_{l+r}) = \alpha b_{l+r}, r = 1, \dots, q-l$

$$g(a_{l+r}) = \frac{\tilde{Q}(a_{l+r}) - P(a_{l+r})\alpha b_{l+r}}{-\tilde{P}(a_{l+r}) + Q(a_{l+r})\alpha b_{l+r}} = \gamma_r; \quad r = 1, \dots, q-l$$

Donc, $g : \bar{D} \rightarrow D \ni g(a_{l+r}) = \gamma_r, a_{l+r} \in T, \gamma_r \in D, r = 1, \dots, q-l$.

Soit l'ensemble $D_{1+\epsilon} = \{|z| < 1 + \epsilon\}, \epsilon > 0$.

La correspondance de la matrice de Nevanlinna-Pick pour les fonctions

$$g : D_{1+\epsilon} \rightarrow D$$

pour ϵ suffisamment petit, avec les points d'interpolation, la matrice correspondante N_ϵ est positive.

5.4 Variations de paramètres complexes

Nous sommes intéressés à étudier le cas où le paramètre k est complexe.

$$\begin{aligned} D'_{\frac{1}{r}} &\triangleq \{s / |s| \geq \frac{1}{r}\} \\ D_{\frac{1}{r}} &\triangleq \{s / |s| < \frac{1}{r}\} = \mathbb{C} \setminus D'_{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

Pour $P_0(s), r > 0$, l'on recherche $S(s) \ni$

- $S(s) : \tilde{H} \rightarrow D_{\frac{1}{r}}$
- $S(s)$ satisfait les conditions d'interpolation a), b) et c).

5.5 Rappel: métrique hyperbolique

Soient $z_1, z_2 \in D$. On définit

$$\delta(z_1, z_2) \triangleq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

δ est une invariance conforme dans le sens suivant. Rappelons que toute équivalence conforme γ satisfait (Annexe A3):

$$\gamma : D \rightarrow D, \delta(z_1, z_2) = \delta(\gamma(z_1), \gamma(z_2))$$

où γ est une transformation de Möbius i.e $\gamma(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} : D \rightarrow D$.

La distance hyperbolique entre deux points $z_1, z_2 \in D$ définie comme suit:

$$d_D(z_1, z_2) \triangleq \log \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|}$$

est également une invariance conforme. Il peut être réécrit, pour $r > 0$, comme suit: $d_D(0, r) = \log(\frac{1+r}{1-r})$ (obtenu en posant $z_1 = 0, z_2 = r > 0$).

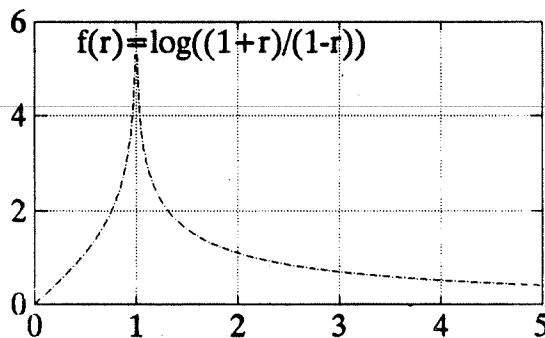


Figure 6: Fonction $d_D(0, r)$

Rappelons que deux domaines G_1, G_2 sont connectés simplement s'ils ont deux points limite en commun.

Théorème 2:

Soient G_1 et G_2 deux régions simplement connectées et $f : G_1 \rightarrow G_2$ une fonction analytique.
 $\forall z_1, z_2 \in G_1$,

$$d_{G_1}(z_1, z_2) \geq d_{G_2}(f(z_1), f(z_2))$$

L'égalité est vérifiée si et seulement si f est une équivalence conforme.

Ce théorème est une version modifiée du lemme de Schwarz dont la démonstration peut être lue dans le livre de Ahlfors [Ahl79].

5.6 Définition du problème

Soit le système nominal $P_0(s)$ qui possède les zéros $z_1, \dots, z_n \in \tilde{H}$ et les pôles $p_1, p_2, \dots, p_n \in \tilde{H}$ à l'intérieur du demi plan droit.

$$\begin{cases} \varphi : \tilde{H} \rightarrow \bar{D} \text{ est une invariance conforme} \\ \xi_i = \varphi(z_i) \quad \text{est la transformée des zéros} \\ \psi_j = \varphi(p_j) \quad \text{est la transformée des pôles} \end{cases}$$

Définition des points d'interpolation:

$$\begin{aligned} a_i &= \xi_i \quad i = 1, \dots, m & b_i &= 1, \quad i = 1, \dots, m \\ a_{j+m} &= \psi_j \quad j = 1, \dots, n & b_{j+m} &= 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

c'est à dire:

$$\begin{aligned} 1 &\xleftarrow{S} z_i \xrightarrow{\varphi} \xi_i, \\ 0 &\xleftarrow{S} p_j \xrightarrow{\varphi} \psi_j \end{aligned}$$

Théorème 3:

Le problème d'interpolation ci défini possède une solution si et seulement si:

$$d_G(0, 1) < d_D(0, \alpha_{max}) = \log\left(\frac{1 + \alpha_{max}}{1 - \alpha_{max}}\right)$$

- **Démonstration:** bâtissons une équivalence conforme Θ sur une région $G \subset \mathbb{C}$:

$$\Theta : G \rightarrow D \ni \Theta(0) = 0 \text{ et } \Theta^{-1}(\cdot) \text{ rationnel.}$$

On considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H} & \xrightarrow{S} & G \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \Theta \\ \bar{D} & \xrightarrow{\tilde{S}} & D \end{array}$$

ou $\tilde{S} = \Theta \circ S \circ \varphi^{-1}$ et $S = \Theta^{-1} \circ \tilde{S} \circ \varphi$

Résolvons le problème d'interpolation de Nevanlinna-Pick (N-P) de \bar{D} à D : i.e. recherchons une fonction analytique rationnelle \tilde{S} telle que:

- les zéros de $\tilde{S}(s)$ contiennent ψ_j
 - les zéros de $\tilde{S}(s) - \gamma$ contiennent ξ_i
- où $\gamma = \Theta(1)$,

La solution pour S pourra être extrapolée via la transformation $S = \Theta^{-1} \circ \tilde{S} \circ \varphi$

Recherchons donc: $\tilde{S} : \bar{D} \rightarrow D \ni$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\xi_i) &= \Theta(1), \quad i = 1, \dots, n \\ \tilde{S}(\psi_j) &= \Theta(0), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

C'est à dire, $\tilde{S} \ni$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \tilde{S}(\xi_i) & = & \alpha \xi_i = \Theta(1) \\ \tilde{S}(\psi_j) & = & \alpha \psi_j = \Theta(0) = 0 \end{array} \right.$$

D'après le théorème 1, ce problème est soluble si et seulement si $|\Theta(1)| < \alpha_{max}$ (ξ_i, ψ_j) ou de façon équivalente, $d_D(0, \alpha_{max}) > d_D(0, \Theta(1))$ (d'après le théorème 2).

5.6.1 Solution du problème de marge de gain

Soit $G = \mathbb{C} \setminus \left\{ (-\infty, \frac{a}{a-1}] \cup [\frac{b}{b-1}, \infty) \right\}$ et

$\Theta : G \rightarrow D$ une équivalence conforme, telle que: $\Theta(0) = 0$. On pose

$$\Theta(s) = \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - (\frac{b-1}{b})s}{1 - (\frac{a-1}{a})s}}}{1 + \sqrt{\frac{1 - (\frac{b-1}{b})s}{1 - (\frac{a-1}{a})s}}}$$

notons que

$$\Theta(1) = \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

Notons que la région G choisie permet de considérer l'ensemble des gains $a < k < b$ et tels que la fonction de la sensibilité soit stable (figure 5).

Le problème du marge de gain est résolu, si et seulement si:

$$d_G(0, 1) = d_D(0, \Theta(1)) < d_D(0, \alpha_{max})$$

ou

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}} < \alpha_{max}$$

ou de façon équivalente⁷

$$\frac{b}{a} < \left(\frac{1 + \alpha_{max}}{1 - \alpha_{max}} \right)^2 = \beta_{max} \quad (50)$$

Remarque: $\alpha_{max} \rightarrow 1$, i.e la marge de gain tend vers l'infinie. Pour un système à phase minimale $\alpha_{max} = 1$, et la marge de gain ne constitue pas un problème en soi.

⁷Notons que si $\Theta(1) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} < \alpha_{max} \Rightarrow \frac{1}{x} < \beta_{max}$

• Solution du problème de la sensibilité optimale

Soit $G = D_r$, i.e. l'ensemble des nombres complexes tels que $|s| < r$. Recherchons $\Theta : D_r \rightarrow D$ tel que $\Theta(0) = 0$. Lorsque $\Theta(s) = \frac{s}{r}$, et

$$d_{D_r}(0, 1) = d_D\left(0, \frac{1}{r}\right) = \log\left(\frac{1 + \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}}\right)$$

Selon le théorème 2, ce problème est soluble si et seulement si:

$$\log\left(\frac{1 + \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}}\right) = d_{D_r}(0, 1) < d_D(0, \alpha_{max}) = \log\left(\frac{1 + \alpha_{max}}{1 - \alpha_{max}}\right)$$

D'où

$$r > \frac{1}{\alpha_{max}}$$

La sensibilité minimale est donc:

$S : \tilde{H} \rightarrow D_r = \{s / |d| < r\}$ vu que $r > \frac{1}{\alpha_{max}}$, l'on déduit

$$S_{min} = \inf_C \sup_{s \in \tilde{H}} |S(s)| = \frac{1}{\alpha_{max}}$$

5.6.2 Exemples explicatifs

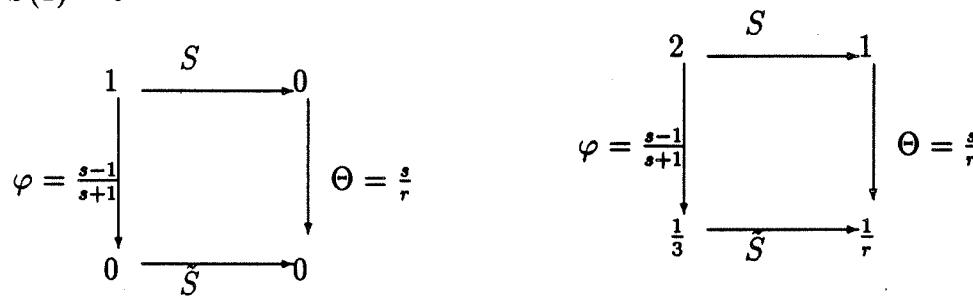
6. Exemple

Soit le système suivant:

$$P_0 = \frac{s-2}{s-1}$$

Avec $S(s) : \tilde{H} \rightarrow D_r$ où

- $S(2) = 1$
- $S(1) = 0$



D'après Nevanlinna-Pick, déterminons $\hat{\alpha}_{max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)^2}}$ ⁸

1^{ere} méthode: la transformée en s:

Les points d'interpolation sont: $\lambda_1 = 2, \beta_1 = 1, \lambda_2 = 1, \beta_2 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -\frac{18}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Donc la valeur propre maximale est: $\lambda_{max} = 9 \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{1}{3}$

2^{ieme} méthode: la transformée en z bilinéaire:

$$\text{avec } s = \frac{1-z}{1+z} \Rightarrow P_0(z) = \frac{1+3z}{z}$$

Les points d'interpolations sont:

$$a_1 = -\frac{1}{3} \in D \quad \text{avec} \quad b_1 = 1$$

$$a_0 = 0 \in D \quad \text{avec} \quad b_2 = 0$$

$$S(-\frac{1}{3}) = 1, \quad S(0) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } A^{-1}B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

La valeur propre maximale est: $\lambda_{max} = 9 \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{1}{3}$

Donc, $3 = \inf\{|S(s)| : C \text{ stabilisant}\}$ est la sensibilité minimale.

La marge de gain optimale du système est:

$$S : \tilde{H} \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{(-\infty, \frac{a}{a-1}] \cup [\frac{b}{b-1}, \infty)\} = G \ni S(1) = 0, S(2) = 1$$

⁸avec $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} & \frac{1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_2} \\ \frac{1}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_1} & \frac{1}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1 \bar{\beta}_1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} & \frac{\beta_1 \bar{\beta}_2}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_2} \\ \frac{\beta_2 \bar{\beta}_1}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_1} & \frac{\beta_2 \bar{\beta}_2}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_2} \end{bmatrix}$ dans le cas de la transformée en s.

$\Theta : G \rightarrow D$ est défini comme suit:

$$\Theta(s) = \frac{1 - \sqrt{\frac{1-\frac{b-1}{b}s}{1-\frac{a-1}{a}s}}}{1 + \sqrt{\frac{1-\frac{b-1}{b}s}{1-\frac{a-1}{a}s}}}$$

Θ est une équivalence conforme.

Notons que $\Theta(0) = 0$, et $\Theta(1) = \frac{1-\sqrt{\frac{a}{b}}}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}$. On définit $\varphi : \tilde{H} \rightarrow \bar{D}$ par $\varphi(s) = \frac{s-1}{s+1}$.

Recherche d'une fonction analytique $\tilde{S} : \bar{D} \rightarrow D$ telle que $\tilde{S}(0) = 0$, et $\tilde{S}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{\frac{a}{b}}}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}$. Par Nevanlinna-Pick,

nous remarquons que $\frac{1}{3} \geq \frac{1-\sqrt{\frac{a}{b}}}{1+\sqrt{\frac{a}{b}}}$ ce qui implique que $\frac{b}{a} \leq 4$. La marge de gain optimale est $20 \log 4$ décibels pour $P_0(s)$.

7. Exemple

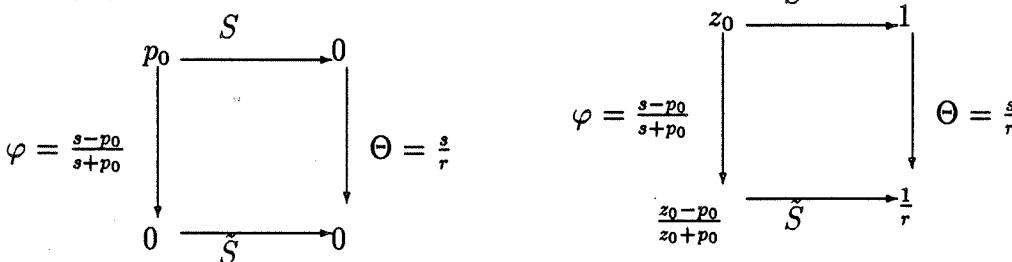
Généralisons l'exemple 1, avec un pôle p_0 et un zéro z_0 quelconque.

$$P_0(s) = \frac{s-z_0}{s-p_0}, p_0, z_0 > 0,$$

avec $S(s) : \tilde{H} \rightarrow D_r$ telle que

- $S(z_0) = 1$

- $S(p_0) = 0$



Finalement: $\tilde{S}\left(\frac{z_0-p_0}{z_0+p_0}\right) = \frac{1}{r}$ et $\tilde{S}(0) = 0$

D'après Nevanlinna-Pick:

1^{ere} méthode: la transformée en s:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2z_0} & \frac{1}{z_0+p_0} \\ \frac{1}{z_0-p_0} & \frac{1}{2p_0} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2z_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La valeur propre maximale de $A^{-1}B$ est égale à $\frac{(z_0+p_0)^2}{(z_0-p_0)^2}$ d'où $\alpha_{max} = \left| \frac{z_0-p_0}{z_0+p_0} \right|$.

2^{ième} méthode: la transformée en z bilinéaire:

$$P_0(z) = \frac{(1-z_0)-(1+z_0)z}{(1-p_0)-(1+p_0)z}$$

Les points d'interpolation sont:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1-z_0}{1+p_0}\right) &= 1 \\ S\left(\frac{1-p_0}{1+p_0}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - (\frac{1-z_0}{1+z_0})^2} & \frac{1}{1 - (\frac{1-z_0}{1+z_0})(\frac{1-p_0}{1+p_0})} \\ \frac{1}{1 - (\frac{1-z_0}{1+z_0})(\frac{1-p_0}{1+p_0})} & \frac{1}{1 - (\frac{1-p_0}{1+p_0})^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{(1+z_0)^2}{4z_0} & \frac{(1+z_0)(1+p_0)}{2(z_0+p_0)} \\ \frac{(1+z_0)(1+p_0)}{2(z_0+p_0)} & \frac{(1+p_0)^2}{4p_0} \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} \frac{(1+z_0)^2}{4z_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{max}(A^{-1}B) = \left(\frac{p_0+z_0}{p_0-z_0}\right)^2 \Rightarrow \alpha_{max} = \left|\frac{p_0-z_0}{p_0+z_0}\right|$$

Donc, $\left|\frac{z_0+p_0}{z_0-p_0}\right| = \inf\{|S(s)| : C \text{ stabilisant}\}$ est la sensibilité minimale.

La marge de gain optimale du système est:

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}} \leq \alpha_{max}$$

avec $\alpha_{max} = \left|\frac{z_0-p_0}{z_0+p_0}\right|$ et $\frac{b}{a} < \left(\frac{1+\alpha_{max}}{1-\alpha_{max}}\right)^2$ ce qui implique que:

$\frac{b}{a} < \left(\frac{z_0}{p_0}\right)^2$ si $z_0 > p_0 \Rightarrow$ le gain optimal est $20 \log\left(\frac{z_0}{p_0}\right) = 40 \log\left(\frac{z_0}{p_0}\right)$ dB.

$\frac{b}{a} < \left(\frac{p_0}{z_0}\right)$ si $z_0 < p_0 \Rightarrow$ le gain optimal est $40 \log\left(\frac{p_0}{z_0}\right)$ dB.

8. Exemple

Soit un système avec deux pôles instables et deux zéros instables:

$$P_0(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s-3)(s-4)}$$

D'après Nevanlinna-Pick:

1^{ere} méthode: la transformée en s:

$$\begin{aligned}
S(1) &= 1 & \lambda_1 &= 1 & \beta_1 &= 1 \\
S(2) &= 1 & \lambda_2 &= 2 & \beta_2 &= 1 \\
S(3) &= 0 & \lambda_3 &= 3 & \beta_3 &= 0 \\
S(4) &= 0 & \lambda_4 &= 4 & \beta_4 &= 0
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } \lambda_{max} = 1323.1 \Rightarrow \sqrt{\lambda_{max}} = 36.37 \Rightarrow \alpha_{max} = 0.02749$$

2^{ième} méthode: la transformée en z:

$$P_0(z) = \frac{z(1+3z)}{(1+2z)(3+5z)} \text{ avec } s = \frac{1-z}{1+z}$$

Les points d'interpolation sont:

$$\begin{aligned} S(0) &= 1 \\ S\left(-\frac{1}{3}\right) &= 1 \\ S\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ S\left(-\frac{3}{5}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Les matrices de Nevanlinna-Pick sont:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{9}{8} & \frac{6}{5} & \frac{15}{12} \\ 1 & \frac{6}{5} & \frac{4}{3} & \frac{10}{7} \\ 1 & \frac{15}{12} & \frac{10}{7} & \frac{25}{16} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{9}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc $\lambda_{max} = 1323.1 \Rightarrow \sqrt{\lambda_{max}} = 36.37 \Rightarrow \alpha_{max} = 0.02749$

Donc, $36.37 = \inf\{|S(s)| : C \text{ stabilisant}\}$ est la sensibilité minimale.

La marge de gain optimale du système est:

$\frac{b}{a} = \left(\frac{1+\alpha_{max}}{1-\alpha_{max}}\right)^2$ ce qui implique que: $\frac{b}{a} < 1.116$ d'où le gain optimal est $0.9554db$.

5.7 Stabilisation robuste pour les systèmes avec retard

Les problèmes de stabilisation robuste pour une certaine familles des systèmes de dimension finie ont été abordés par Kimura (1984), Tannenbaum (1980, 1981, 1982), Khargonekar et Tannenbaum (1985), Khargonekar et Poola [KP86]. Dans ce qui suit, nous présentons l'extension des résultats précédent proposées par Khargonekar et Poola [KP86].

Soit la fonction de transfert:

$$P_0(s) = \frac{e^{-Ts} n_1(s) n_2(s) n_3(s)}{d_1(s) d_2(s)}$$

avec les zéros p_1, p_2, \dots, p_n du dénominateur $d_1(s) \in \tilde{H}$ et les zéros z_1, z_2, \dots, z_m de $n_2(s)$ (infini et axe imaginaire inclus), $n_1(s)$ est un produit blaschke⁹, $n_2(s)$, $n_3(s)$ et $d_2(s)$ sont des fonctions polynomiales. Donc:

(a) Un compensateur¹⁰ $C(s) \in A_2^{-1} A_1$ assure la stabilité interne de $P_0(s)$ si la fonction de la

⁹si $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ sont les zéros de $n(s) \in H$, donc

$$n_1(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{s - q_j}{s + \bar{q}_j} \right) \left(\frac{\bar{q}_j^2 - a}{|\bar{q}_j^2 - a|} \right)$$

avec $a > 0$ est choisie tel que $a \neq q_j \quad \forall j$ $n_1(s)$ vérifie $|n_1(s)| = 1$.

¹⁰Callier et Desoer IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-25, 651 (1978) ont introduit l'algèbre de quotient.

$$A_2^{-1} A_1 = \left\{ \frac{n(s)}{d(s)} : n \in A_1, d \in A_2 \right\}$$

sensibilité complémentaire est:

$$T(s) = P_0(s)C(s)(1 + P_0(s)C(s))^{-1}$$

peut être écrite sous la forme:

$$T(s) = e^{-Ts}n_1(s)T_1(s)$$

ou $T_1(s)$ est une fonction analytique borné de \tilde{H} .

Les conditions d'interpolation pour la boucle fermée sont:

$$T(z_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (51)$$

$$T(p_j) = 1, j = 1, 2, \dots, n \text{ et} \quad (52)$$

$$T(\infty) \neq 1. \quad (53)$$

(b) Si $T(s)$ est une fonction analytique bornée satisfaisant les équations (51)-(53),

$$C(s) = T(s)P_0(s)^{-1}(1 - T(s))^{-1} \quad (54)$$

appartient à $A_2^{-1}A_1$ et la stabilité interne de $P_0(s)$.

Problème de la sensibilité optimale

Une importante classe des systèmes distribués sont les fonctions de transfert de la forme suivante:

$$P(s) = e^{-\theta s} P_0(s)$$

où θ constitue le retard. Ici, $P_0(s)$ est une fonction de transfert du processus de dimension finie.

9. Exemple:

Un exemple simple du système distribué consiste en un retard pur, i.e. $P(s) = e^{-\theta s}$. L'exemple simple de la fonction de pondération est un filtre passe-bas:

$$W(s) = \frac{1}{as + 1}, \quad a > 0.$$

Cet exemple présente une occasion de comparer les effets des deux paramètres θ (le retard), et a (l'inverse de la bande passante), dans le contexte de la minimisation de sensibilité H^∞ .

L'interpolation de Nevanlinna-Pick classique n'est pas suffisante pour résoudre ce problème; la résolution suit les grandes lignes de la théorie de Sarason¹¹.

Soit la sensibilité optimale:

$$\mu := \inf \left\{ \left\| \frac{1}{as + 1} (1 + e^{-\theta s} C(s)) \right\|_\infty : C(s) \text{ stabilisant} \right\}.$$

Donc $\mu = |\cos y_{a\theta}|$, où $y_{a\theta}$ est l'unique solution dans l'intervalle $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ de l'équation suivante:

$$\tan y + \frac{ay}{\theta} = 0$$

¹¹A. Tannenbaum *Distributed H[∞]-Theory* CRM Summer School: Montreal 1992.

Les figures permettent de calculer la sensibilité optimale de façon directe.

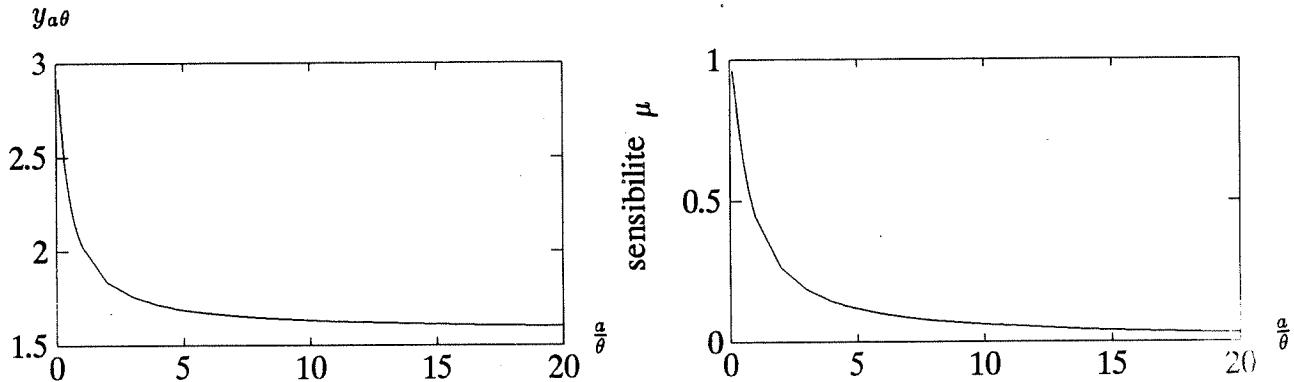


Figure 7: Sensibilité optimale.

10. Exemple:

Soit un système arbitraire $P(s)$ stable, dont la partie "outer" est inversible. Considérons la fonction de pondération

$$W(s) = \frac{1}{as + 1} \quad a > 0.$$

La sensibilité optimale de $P(s)$ relative à $W(s)$ est donné par la plus grande racine à l'intérieur de l'intervalle $[0, 1]$ de l'équation suivante en ρ :

$$\frac{z_2 + \frac{1}{a} - P(z_2)P(z_1)^{-1}(z_1 + \frac{1}{a})}{1 - P(z_2)P(z_1)^{-1}} \quad (55)$$

ou

$$z_1 := \frac{j}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} \quad z_2 = \bar{z}_1.$$

1^{er} cas:

$$P(s) = e^{-\theta s} \left(\frac{s - b}{s + b} \right) \quad \theta, b > 0$$

D'après la formule (55), la sensibilité optimale est la plus grande racine à l'intérieur de l'intervalle $[0, 1]$ de l'équation suivante en ρ :

$$\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} + \left(1 - \frac{2ab}{\rho^2(ab+1)^2 - 1} \right) \tan \left(\frac{\theta}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} \right) = 0.$$

2^{ième} cas:

$$P(s) = e^{-\theta s} \prod_{i=1}^n \left(\frac{s - b_i}{s + b_i} \right) \quad \theta, b_i > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

et la fonction de pondération:

$$W(s) = \frac{1}{as + 1},$$

la sensibilité optimale est la plus grande racine dans l'intervalle $[0, 1]$ de l'équation suivante en ρ :

$$\frac{\theta}{a} \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} + \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}\right) + 2 \sum_{i=1}^n \arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}}{ab_i}\right) = \pi.$$

5.8 Exemples explicatifs

11. Exemple:

Soit un système avec deux zéros quelconques instable et un pôle instable:

$$P_0(s) = \frac{(s - z_0)(s - z_1)}{(s - p_0)} \quad z_0, z_1, p_0 > 0$$

D'après Nevanlinna-Pick:

1^{ere} méthode: la transformée en s:

$S(\lambda_i) = \beta_i$ soit:

$$\begin{aligned} S(z_0) &= 1 & \lambda_1 = z_0 & \beta_1 = 1 \\ S(z_1) &= 1 & \lambda_2 = z_1 & \beta_2 = 1 \\ S(p_0) &= 0 & \lambda_3 = z_2 & \beta_3 = 0 \end{aligned}$$

appliquons la condition d'interpolation:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_0 + \bar{z}_0} & \frac{1}{z_0 + \bar{z}_1} & \frac{1}{z_0 + \bar{p}_0} \\ \frac{1}{z_1 + \bar{z}_0} & \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1} & \frac{1}{z_1 + \bar{p}_0} \\ \frac{1}{p_0 + \bar{z}_0} & \frac{1}{p_0 + \bar{z}_1} & \frac{1}{2p_0} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_0 + \bar{z}_0} & \frac{1}{z_0 + \bar{z}_1} & 0 \\ \frac{1}{z_1 + \bar{z}_0} & \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{max}(A^{-1}B) = \left(\frac{p_0 + z_0}{p_0 - z_0}\right)^2 \left(\frac{p_0 + z_1}{p_0 - z_1}\right)^2 \Rightarrow \alpha_{max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)}} = \left| \frac{p_0 - z_0}{p_0 + z_0} \frac{p_0 - z_1}{p_0 + z_1} \right|$$

Donc, $\left| \frac{p_0 + z_0}{p_0 - z_0} \frac{p_0 + z_1}{p_0 - z_1} \right| = \inf \{ |S(s)| : C \text{ stabilisant} \}$ est la sensibilité minimale.

2^{ieme} méthode: la transformation bilinéaire en z:

$$P(z) = \frac{(1 - z_0 - (1 + z_0)z)(1 - z_1 - (1 + z_1)z)}{1 - p_0 - (1 + p_0)z}$$

les conditions d'interpolation sont:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1 - z_0}{1 + z_0}\right) &= 1 \\ S\left(\frac{1 - z_1}{1 + z_1}\right) &= 1 \\ S\left(\frac{1 - p_0}{1 + p_0}\right) &= 0 \end{aligned}$$

avec z_0 et z_1 sont réelles dans ce cas

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(1+z_0)(1+z_0)}{z_0(z_0+2)} & \frac{(1+z_0)(1+z_1)}{2(z_0+z_1)} & \frac{(1+z_0)(1+p_0)}{2(z_0+p_0)} \\ \frac{(1+z_1)(1+z_0)}{2(z_1+z_0)} & \frac{(1+z_1)(1+z_1)}{z_1(z_1+2)} & \frac{(1+z_1)(1+p_0)}{2(z_1+p_0)} \\ \frac{(1+p_0)(1+z_0)}{2(p_0+z_0)} & \frac{(1+p_0)(1+z_1)}{2(p_0+z_1)} & \frac{(1+p_0)(1+p_0)}{p_0(p_0+2)} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{(1+z_0)(1+z_0)}{z_0(z_0+2)} & \frac{(1+z_0)(1+z_1)}{2(z_0+z_1)} & 0 \\ \frac{(1+z_1)(1+z_0)}{2(z_1+z_0)} & \frac{(1+z_1)(1+z_1)}{z_1(z_1+2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc, $\left| \frac{p_0+z_0}{p_0-z_0} \frac{p_0+z_1}{p_0-z_1} \right| = \inf \{ |S(s)| : C \text{ stabilisant} \}$ est la sensibilité minimale.

3^{ieme} méthode: méthode de Khargonekar et Poola:

$$T(z_0) = 0$$

$$T(z_1) = 0$$

$$T(p_0) = 1$$

appliquons la condition d'interpolation:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_0+p_0} \\ \frac{1}{z_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_1+p_0} \\ \frac{1}{p_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{2p_0} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p_0} \end{bmatrix}$$

Donc, $\left| \frac{p_0+z_0}{p_0-z_0} \frac{p_0+z_1}{p_0-z_1} \right| = \inf \{ |S(s)| : C \text{ stabilisant} \}$ est la sensibilité minimale.

La marge de gain optimale du système est:

$$40 \log\left(\frac{1 + \alpha_{max}}{1 - \alpha_{max}}\right)$$

Si $(p_0 > z_0, z_1)$ ou $(z_0, z_1 > p_0) \Rightarrow MG_{opt} = 40 \log_{10} \left(\frac{p_0^2 + z_0 z_1}{p_0(z_0 + z_1)} \right)$

Si $z_0 > p_0 > z_1 > 0$ ou $z_1 > p_0 > z_0 > 0 \Rightarrow MG_{opt} = 40 \log_{10} \left(\frac{p_0(z_0 + z_1)}{p_0^2 + z_0 z_1} \right)$

Application numérique: $p_0 = 5, z_0 = 2, z_1 = 3$ d'où $\alpha_{max} = 0.1071$ et la sensibilité minimale est: $S_0 = 9.333$.

12. Exemple:

Généralisons l'exemple 9, avec un pôle $p_0 > 0$ et des zéros $z_i > 0$ $i = 1, 2, \dots, q$ quelconque

$$P_0(s) = \frac{\prod_{i=1}^q (s - z_i) \hat{P}_1(s)}{(s - p_0)}$$

avec $\hat{P}_1(s)$ est un système stable.

Appliquons la condition d'interpolation:

$$T(z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

$$T(p_0) = 1$$

$$\alpha_{max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)}} = \left| \prod_{i=1}^q \frac{(p_0 - z_i)}{(p_0 + z_i)} \right|$$

La sensibilité minimale est:

$$\prod_{i=1}^q \frac{(p_0 + z_i)}{(p_0 - z_i)} = \inf \{ |S(s)| : C \text{ stabilisant} \}$$

La marge de gain optimale du système est:

si $p_0 > z_0, z_1, \dots, z_q > 0$, posons:

$$\begin{aligned} \beta_{max} &= \left(\frac{1 + \alpha_{max}}{1 - \alpha_{max}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(p_0 + z_1)(p_0 + z_2) \cdots (p_0 + z_q) + (p_0 - z_1)(p_0 - z_2) \cdots (p_0 - z_q)}{(p_0 + z_1)(p_0 + z_2) \cdots (p_0 + z_q) - (p_0 - z_1)(p_0 - z_2) \cdots (p_0 - z_q)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(p_0^q + A_1^q p_0^{q-1} + \cdots + A_q^q) + (p_0^q + (-1)^1 A_1^q p_0^{q-1} + \cdots + (-1)^q A_q^q)}{(p_0^q + A_1^q p_0^{q-1} + \cdots + A_q^q) - (p_0^q + (-1)^1 A_1^q p_0^{q-1} + \cdots + (-1)^q A_q^q)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{2p_0^q + A_2^q p_0^{q-2} + \cdots + (1 + (-1)^q) A_q^q}{2A_1^q p_0^{q-1} + 2A_3^q p_0^{q-3} + \cdots + (1 - (-1)^q) A_q^q} \right)^2 \end{aligned}$$

$$MG = 40 \log_{10} \frac{2p_0^q + A_2^q p_0^{q-2} + \cdots + (1 + (-1)^q) A_q^q}{2A_1^q p_0^{q-1} + 2A_3^q p_0^{q-3} + \cdots + (1 - (-1)^q) A_q^q}$$

avec

$$\begin{aligned} A_1^q &= \sum_{j_1=1}^q z_{j_1} \\ A_2^q &= \sum_{j_2=2}^q z_{j_2} \sum_{j_1=1}^{j_2-1} z_{j_1} \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_i^q &= \sum_{j_i=i}^q z_{j_i} \sum_{j_{(i-1)}=i-1}^{j_i-1} z_{j_{(i-1)}} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} z_{j_1} \quad 1 < i \leq q \end{aligned}$$

13. Exemple:

De même lorsque le système posséde un retard T :

$$P_0(s) = \frac{\prod_{i=1}^q (s - z_i) \hat{P}_1(s)}{(s - p_0)} e^{-Ts}$$

Appliquons les conditions d'interpolations:

$$\begin{aligned} T(z_i) &= 0 \quad z_i \quad (i = 1, \dots, q) > 0, \quad p_0 > 0 \\ T(p_0) &= e^{Tp_0} \end{aligned}$$

$$\alpha_{max} = e^{-Tp_0} \left| \prod_{i=1}^q \frac{(p_0 - z_i)}{(p_0 + z_i)} \right|$$

La sensibilité minimale est:

$$S_0 = e^{Tp_0} \prod_{i=1}^q \left| \frac{(p_0 + z_i)}{(p_0 - z_i)} \right|$$

La marge de gain optimale est:

$$40 \log\left(\frac{1 + \alpha_{max}}{1 - \alpha_{max}}\right) = 40 \log \frac{\prod_{i=1}^q (p_0 + z_i) + e^{-Tp_0} \left| \prod_{i=1}^q (p_0 - z_i) \right|}{\prod_{i=1}^q (p_0 + z_i) - e^{-Tp_0} \left| \prod_{i=1}^q (p_0 - z_i) \right|}$$

14. Exemple:

Maintenant, considérons un système avec deux pôles instables en présence d'un retard:

$$P_0(s) = \frac{\hat{P}_1(s)}{(s - p_0)(s - p_1)} e^{-Ts}$$

1^{ere} cas: Sans approximation du retard:

Les points d'interpolation sont:

$$\begin{aligned} T(p_0) &= e^{Tp_0} \\ T(p_1) &= e^{Tp_1} \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_0+p_1} & \frac{1}{p_0+p_1} \\ \frac{1}{p_1+p_0} & \frac{1}{p_1+p_0} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \frac{e^{2Tp_0}}{p_0+p_0} & \frac{e^{T(p_0+p_1)}}{p_0+p_1} \\ \frac{e^{T(p_1+p_0)}}{p_1+p_0} & \frac{e^{T(p_1+p_1)}}{p_1+p_1} \end{bmatrix}$$

$$\text{La sensibilité optimale est } \alpha_{0,max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)}}.$$

2^{ième} cas: Approximation de Padé du premier ordre:

Les points d'interpolation sont:

$$\begin{aligned} S(p_0) &= 0 \\ S(p_1) &= 0 \\ S(z_0) &= 1 \text{ avec } z_0 = \frac{2}{T} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{p_0+p_0} & \frac{1}{p_0+p_1} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_0} \\ \frac{1}{p_1+p_0} & \frac{1}{p_1+p_1} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_0} \\ \frac{1}{z_0+p_0} & \frac{1}{z_0+p_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{La sensibilité optimale est } \alpha_{1,max} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)}}.$$

3^{ieme} cas: Approximation de Padé du second ordre:

Les points d'interpolation sont:

$$S(p_0) = 0$$

$$S(p_1) = 0$$

$$S(z_0) = 1 \text{ avec } z_0 = \frac{(3 + 1.73205080756888 * j)}{T}$$

$$S(z_1) = 1 \text{ avec } z_1 = \frac{(3 + 1.73205080756888 * j)}{T}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_0+p_0} & \frac{1}{p_0+p_1} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_1} \\ \frac{1}{p_1+p_0} & \frac{1}{p_1+p_1} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_1} \\ \frac{1}{z_0+p_0} & \frac{1}{z_0+p_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_1} \\ \frac{1}{z_1+p_0} & \frac{1}{z_1+p_1} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_1} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_1} \end{bmatrix}$$

La sensibilité optimale est $\alpha_{2_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)}}$.

4^{ieme} cas: Approximation de Padé du troisième ordre:

Les points d'interpolation sont:

$$S(p_0) = 0$$

$$S(p_1) = 0$$

$$S(z_0) = 1 \text{ avec } z_0 = \frac{(3.67781464537392 + 3.50876191956745j)}{T}$$

$$S(z_1) = 1 \text{ avec } z_1 = \frac{(3.67781464537392 - 3.50876191956745j)}{T}$$

$$S(z_2) = 1 \text{ avec } z_2 = \frac{4.64437070925217}{T}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_0+p_0} & \frac{1}{p_0+p_1} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_2} \\ \frac{1}{p_1+p_0} & \frac{1}{p_1+p_1} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_1} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_2} \\ \frac{1}{z_0+p_0} & \frac{1}{z_0+p_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_2} \\ \frac{1}{z_1+p_0} & \frac{1}{z_1+p_1} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_2} \\ \frac{1}{z_2+p_0} & \frac{1}{z_2+p_1} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_2+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_2} \end{bmatrix}$$

La sensibilité optimale est $\alpha_{3_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)}}$.

5^{ieme} cas: Approximation de Padé du quatrième ordre:

Les points d'interpolation sont:

$$S(p_0) = 0$$

$$S(p_1) = 0$$

$$S(z_0) = 1 \text{ avec } z_0 = \frac{(4.20757879435925 + 5.31483608371351j)}{T}$$

$$S(z_1) = 1 \text{ avec } z_1 = \frac{(4.20757879435925 - 5.31483608371351j)}{T}$$

$$S(z_2) = 1 \text{ avec } z_2 = \frac{(5.79242120564074 + 1.73446825786901j)}{T}$$

$$S(z_3) = 1 \text{ avec } z_3 = \frac{(5.79242120564074 - 1.73446825786901j)}{T}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_0+p_0} & \frac{1}{p_0+p_1} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_2} & \frac{1}{p_0+\bar{z}_3} \\ \frac{1}{p_1+p_0} & \frac{1}{p_1+p_1} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_1} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_2} & \frac{1}{p_1+\bar{z}_3} \\ \frac{1}{z_0+p_0} & \frac{1}{z_0+p_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_3} \\ \frac{1}{z_1+p_0} & \frac{1}{z_1+p_1} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_3} \\ \frac{1}{z_2+p_0} & \frac{1}{z_2+p_1} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_3} \\ \frac{1}{z_3+p_0} & \frac{1}{z_3+p_1} & \frac{1}{z_3+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_3+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_3+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_3+\bar{z}_3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_0+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_0+\bar{z}_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_1+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_1+\bar{z}_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_2+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_2+\bar{z}_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_3+\bar{z}_0} & \frac{1}{z_3+\bar{z}_1} & \frac{1}{z_3+\bar{z}_2} & \frac{1}{z_3+\bar{z}_3} \end{bmatrix}$$

La sensibilité optimale est $\alpha_{4_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}(A^{-1}B)}}$.

Application numérique: Les pôles sont: $p_0 = 3$ et $p_1 = 10$ avec une variation du retard paramétrique T.

	$T = 0.01$	0.05	$T = 0.1$	$T = 0.3$	$T = 0.5$	$T = 0.6$
$\alpha_{0_{max}} =$	0.8781	0.5241	0.2802	0.0293	0.0037	0.0013
$\alpha_{1_{max}} =$	0.8780	0.5163	0.2464	0.07591	0.0612	0.0263
$\alpha_{2_{max}} =$	0.8781	0.5241	0.2807	0.0474	0.0778	0.1325
$\alpha_{3_{max}} =$	0.8781	0.5241	0.2802	0.0283	0.0031	0.0105
$\alpha_{4_{max}} =$	0.8781	0.5241	0.2802	0.0293	0.0043	0.0028
$\alpha_{5_{max}} =$	0.8781	0.5241	0.2802	0.293	0.0037	0.0012

Table 2: Variation du retard T en fonction de la sensibilité minimale.

ORDRE DE PADÉ

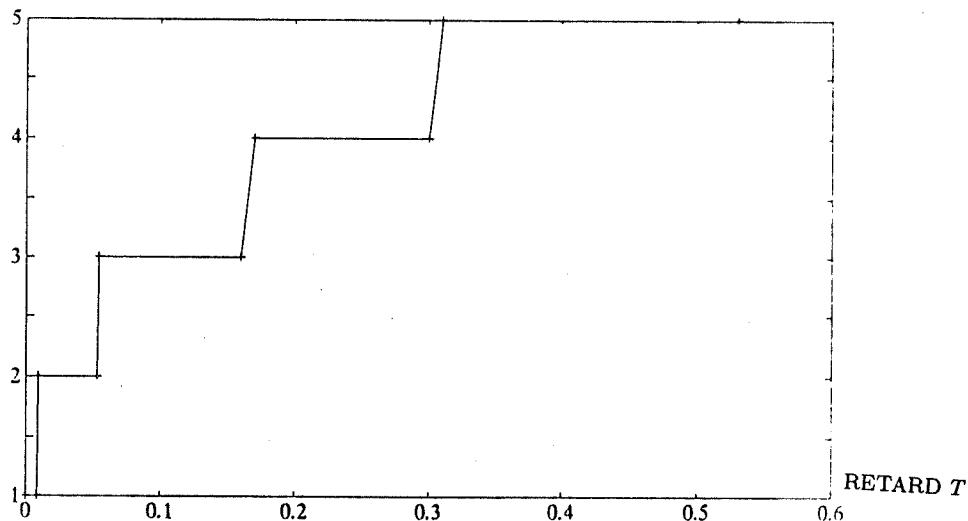


Figure 8: L'ordre de l'approximation de Padé optimale en fonction du retard $p_0 = 3; p_1 = 10$

Remarques:

- Si le retard augmente la sensibilité diminue;
- Suivant le retard on a l'ordre de l'approximation de Padé minimale qui donne la même valeur de la sensibilité.

5.8.1 Solution du problème de marge de phase

Le problème de marge de phase (MP) est la recherche d'un contrôleur $C(s) \in \Omega$ stabilité interne $e^{i\theta}P(s) \forall \theta \in [-\theta_1, \theta_2]$, où $0 \leq \theta_i < \pi, i = 1, 2$ (considérons le cas $\theta_1 = \theta_2$). Le contrôleur $C(s)$ est une solution du problème MP si et seulement si $S(s) = (1 + PC)^{-1}$ est une fonction rationnelle réelle et satisfaisant les conditions d'interpolation [YAB92] et

$$1 + e^{i\phi}P(s)C(s) \neq 0, \forall \phi \in [-\theta_1, \theta_2] \text{ et } \forall s \in \bar{H}. \quad (56)$$

Le problème MP est $G = G_1$ dans le cas du problème général avec

$$G_1 = \{s \in \mathbf{C} : s \neq [1 - i \cot(\theta/2)]/2, \forall \theta \in [-\theta_1, \theta_2]\},$$

L'équivalence conforme φ de $G = G_1$ vers D est:

$$\Theta(s) = i \frac{\sqrt{(s - s_1)/(s_2 - s)} - \sqrt{-s_1/s_2}}{\sqrt{(s - s_1)/(s_2 - s)} + \sqrt{-s_1/s_2}} \times \frac{1 + \sqrt{-s_1/s_2}}{1 + \sqrt{-s_1/s_2}}$$

avec

$$|\Theta(1)|^2 = \left| \frac{s_1 \bar{s}_2 + \bar{s}_1 s_2 + 2 |s_1| |s_2|}{4 \bar{s}_1 s_2} \right|$$

Notons en générale $\Theta(s)$ ne possède pas la propriété $\bar{\Theta}(s) = \Theta(\bar{s})$ excepté dans le cas où $\theta_1 = \theta_2$, c'est la raison pour laquelle la supposition de $\theta_1 = \theta_2$ dans le problème de marge de phase. Dans ce cas, $s_2 = \bar{s}_1$, et il vient que:

$$\Theta(s) = \frac{|s_1| - \sqrt{(s - s_1)(s - \bar{s}_1)}}{s - 1} \quad \text{et} \quad |\Theta(1)| = \sin \frac{\theta}{2}$$

Le problème de marge de phase est solvable si et seulement si:

$$\sin(\theta/2) < \alpha_{max}.$$

La marge de phase maximale de $P(s)$ est égale à $2 \sin^{-1} \alpha_{max}$ si $\alpha_{max} \leq 1$ et π si $\alpha_{max} > 1$, dans ce cas il existe un compensateur de marge de phase en boucle fermée arbitraire qui approche de la marge de phase maximale.

Une autre méthode du problème de marge de phase:

$$K = \{k = e^{j\theta} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0 \text{ et } 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$S(s) : \tilde{H} \rightarrow G = \mathbf{C} \setminus \left\{ \frac{k}{k-1} : k \in \mathbf{C} \right\}$$

$$S(s) \neq \frac{k}{k-1} \forall k \in K \quad S \in \tilde{H}$$

$$\begin{aligned} \Theta(s) &= \frac{1 - \sqrt{\frac{1 - (\frac{b-1}{b})s}{1 - (\frac{a-1}{a})s}}}{1 + \sqrt{\frac{1 - (\frac{b-1}{b})s}{1 - (\frac{a-1}{a})s}}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b(1-s)+s}{a(1-s)+s}}}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b(1-s)+s}{a(1-s)+s}}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{s-b(s-1)}{s-a(s-1)}}}{\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{s-b(s-1)}{s-a(s-1)}}} \end{aligned}$$

Posons: $a = e^{j\theta_1}$ et $b = e^{j\theta_2}$ ($\theta_1 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ et $\theta_2 \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

$$\Theta(s) = \frac{e^{j\frac{(\theta_2-\theta_1)}{2}} - \sqrt{\frac{s-e^{j\theta_2}(s-1)}{s-e^{j\theta_1}(s-1)}}}{e^{j\frac{(\theta_2-\theta_1)}{2}} + \sqrt{\frac{s-e^{j\theta_2}(s-1)}{s-e^{j\theta_1}(s-1)}}}$$

$$|\Theta(1)| < \alpha_{max}$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta(1) &= \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} - 1}{\sqrt{\frac{b}{a}} + 1} \\ &= \frac{1 - e^{j\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}}{1 + e^{j\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}} \\ &= \frac{-j \sin(\frac{\theta_1-\theta_2}{4})}{\cos(\frac{\theta_1-\theta_2}{4})} \end{aligned}$$

$$|\Theta(1)| = \left| \frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)} \right| < \alpha_{max} \text{ avec } x_0 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} < \alpha_{max}^2 \Rightarrow \frac{1-\cos(2x_0)}{1+\cos(2x_0)} < \alpha_{max}^2$$

$$\Rightarrow \cos(2x_0) > \frac{1 - \alpha_{max}^2}{1 + \alpha_{max}^2} \Rightarrow 2|x_0| < \arccos \frac{1 - \alpha_{max}^2}{1 + \alpha_{max}^2} \Rightarrow |\theta_2 - \theta_1| < 2 \arccos \frac{1 - \alpha_{max}^2}{1 + \alpha_{max}^2}$$

minimum de phase si $\alpha_{max} = 1 \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \pi$ est la marge de phase maximale avec $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ou $P(s) = e^{j\theta} P_0(s)$.

• Solution du problème de la sensibilité optimale

$$\log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = d_{D_{\frac{1}{r}}}(0, 1) = d_D(0, \alpha_{max}) = \log \left(\frac{1+\alpha_{max}}{1-\alpha_{max}} \right)$$

D'où

$$r < \alpha_{max}$$

5.8.2 Formulation généralisée du problème de marge de gain ou de phase

Bien que la transformation suivante ne soit pas une transformation conforme il représente une formulation généralisé du marge de gain ou de phase, la marge de gain est obtenue en posant $\theta_1 = \theta_2$ et la marge de phase est obtenue en posant $k_1 = k_2$.

La solution du problème de marge de gain et de phase combiné est un problème autrement complexe.

$$k \in [k_1, k_2] \text{ et } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$|\theta_2 - \theta_1| < 2 \arccos \left(\frac{1+k_0^2}{2k_0} \frac{1-\alpha_{max}^2}{1+\alpha_{max}^2} \right)$$

Démonstration:

$$\Theta(1) = \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}} \text{ avec } a = k_1 e^{j\theta_1}, b = k_2 e^{j\theta_2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \Theta(1) &= \frac{1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}}}{1 + \sqrt{\frac{k_1}{k_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}}} \\ &= \frac{1 - k_0 e^{j \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}}}{1 + k_0 e^{j \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{2}}} \text{ avec } k_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \\ &= \frac{e^{jx} - k_0}{e^{jx} + k_0} \text{ avec } x = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos(x) - k_0 + j \sin(x)}{(\cos(x) + k_0) + j \sin(x)} \\
&= \frac{1 - k_0^2 + 2k_0 j \sin(x)}{(1 + k_0^2) + 2k_0 \cos(x)} \\
&= \frac{\frac{1-k_0^2}{2k_0} + j \sin(x)}{\frac{1+k_0^2}{2k_0} + \cos(x)} \\
|\Theta(1)| &= \frac{\sqrt{\left(\frac{1-k_0^2}{2k_0}\right)^2 + \sin^2(x)}}{\frac{1+k_0^2}{2k_0} + \cos(x)} < \alpha_{max} \\
\Rightarrow & \frac{\left(\frac{1+k_0^2}{2k_0}\right)^2 - \cos^2(x)}{\cos^2(x) - 2\frac{1+k_0^2}{2k_0} \cos(x) + \left(\frac{1+k_0^2}{2k_0}\right)^2} < \alpha_{max}^2 \tag{57}
\end{aligned}$$

$$\cos^2(x) + \frac{2\eta\alpha_{max}^2}{1+\alpha_{max}^2} \cos(x) + \eta^2 \frac{(\alpha_{max}^2 - 1)}{\alpha_{max}^2 + 1} > 0 \text{ avec } \eta = \frac{1+k_0^2}{2k_0}$$

Le discriminant est: $\delta = \frac{\eta^2}{(\alpha_{max}^2 + 1)^2} \Rightarrow \sqrt{\delta} = \frac{\eta}{1+\alpha_{max}^2}$

$$\cos(x) = \eta \frac{-\alpha_{max}^2 \pm 1}{1+\alpha_{max}^2}$$

Donc, $\eta \frac{1-\alpha_{max}^2}{1+\alpha_{max}^2} < \cos(x) < 1 \Rightarrow 0 < |x| < \arccos \eta \frac{1-\alpha_{max}^2}{1+\alpha_{max}^2}$

Finalement:

$$\begin{aligned}
|\theta_2 - \theta_1| &< 2 \arccos \left(\eta \frac{1 - \alpha_{max}^2}{1 + \alpha_{max}^2} \right) \\
|\theta_2 - \theta_1| &< 2 \arccos \left(\frac{1 + k_0^2}{2k_0} \frac{1 - \alpha_{max}^2}{1 + \alpha_{max}^2} \right)
\end{aligned}$$

Cas particulier: si $k_1 = k_2$ donc $k_0 = 1$, c'est le problème de la marge de phase. □
De l'équation (57), il vient:

$$\frac{\eta^2 - \cos^2 x}{(\eta + \cos(x))^2} < \alpha_{max}^2$$

avec $\eta = \frac{1+k_0^2}{2k_0}$ et $k_0 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$

$$\eta^2 - 2 \frac{\alpha_{max}^2}{1 - \alpha_{max}^2} \cos(x) \eta - \frac{1 + \alpha_{max}^2}{1 - \alpha_{max}^2} \cos^2(x) < 0$$

le discriminant est: $\delta = \frac{\cos^2(x)}{(1 - \alpha_{max}^2)^2} \quad \sqrt{\delta} = \frac{\cos(x)}{1 - \alpha_{max}^2} > 0$

La solution est:

$$\eta = \frac{\alpha_{max}^2 \pm 1}{1 - \alpha_{max}^2} \cos(x)$$

D'où

$$0 < \eta < \frac{1 + \alpha_{max}^2}{1 - \alpha_{max}^2} \cos(x) = \eta_1 \tag{58}$$

$$\Rightarrow \frac{1+k_0^2}{2k_0} < \frac{1+\alpha_{max}^2}{1-\alpha_{max}^2} \cos(x) \Rightarrow k_0^2 - 2\eta_1 k_0 + 1 < 0$$

La solution est: $\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 - 1} < k_0 < \eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 - 1}$
 avec $\eta_1^2 - 1 > 0 \Rightarrow \eta_1^2 > 1 \Rightarrow \eta_1 > 1$ qui est la condition de marge de phase ou encore:
 $\Rightarrow \cos(x)^2 > \frac{1-\alpha_{max}^2}{1+\alpha_{max}^2} \Rightarrow \frac{\cos(2x)-1}{2} > \frac{1-\alpha_{max}^2}{1+\alpha_{max}^2} \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{3-\alpha_{max}^2}{1+\alpha_{max}^2}\right)$
 Finalement:

$$\frac{k_2}{k_1} < \frac{1}{(\eta_1 - \sqrt{\eta_1^2 - 1})^2} = \frac{1}{2\eta_1^2 - 1 - 2\eta_1\sqrt{\eta_1^2 - 1}}$$

Cas particulier: si $\theta_2 = \theta_1$, c'est le problème de la marge de gain.

5.9 Exemples explicatifs

15. Exemple:¹²

Soit le système suivant:

$$P(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s-2)}$$

avec un pôle instable $p_0 = 2$ et un zéro à non-minimum de phase $z_0 = 1$.

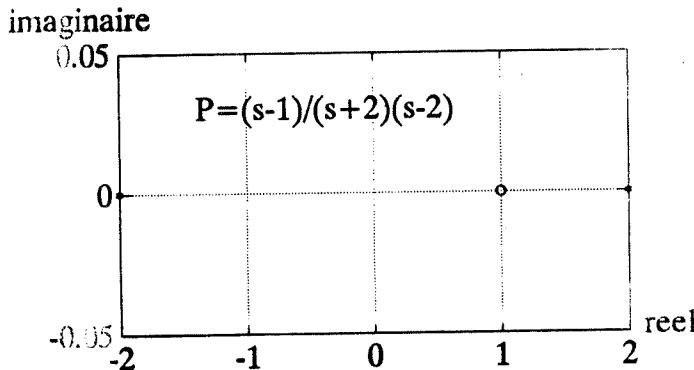


Figure 9: Lieu des racines de $P(s)$

$$S(1) = 1$$

$$S(2) = 0$$

Quelle sont la sensibilité $S = \frac{1}{1-PK}$ applicable avec K stabilisant ?

$$S = \{ \text{stable } S | S(1) = S(\infty) = 1, S(2) = 0 \}$$

Recherche d'un contrôleur (non optimal) stabilisant satisfaisant les conditions d'interpolation.

Soit:

$$S_0(s) = \frac{s-2}{(s+2)} \left(\frac{s-1}{s+1} - \frac{6}{s+1} \right) = \frac{(s-2)(s-7)}{(s+2)(s+1)}$$

$$\text{Donc } K_0(s) = \frac{S_0(s)-1}{P(s)S_0(s)} = -12 \frac{s+2}{s-7}$$

$$\| S_0(s) \|_\infty = 7, \text{ le rayon du M-cercle} = \frac{1}{7}$$

$$\begin{aligned} S &= \{ \text{stable } S \mid S(1) = S(\infty) = 1, S(2) = 0 \} \\ &= \left\{ \frac{(s-2)(s-7)}{(s+2)(s+1)} + \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+1)} Q \mid Q \text{ stable} \right\} \end{aligned}$$

Par la méthode de Nevanlinna-Pick (en ignorant $S(\infty) = 1$).

$$\min_{S \text{ stable}} \| S \|_\infty$$

$$\text{avec } S(1) = 1 \quad S(2) = 0$$

$$N_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2-1}{2} & \frac{\alpha^2}{2} \\ \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha^2}{4} \end{bmatrix}$$

¹²Tutorial Workshop on H^∞ Control Theory, 26th IEEE Conference on Decision and Control, December 7-8 1987

$$\det N_\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } 3 \quad (\alpha \geq 0)$$

Donc $N_\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 3 = \alpha_{opt}$

$$N_3 \gamma_{opt} = N_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = 0$$

Donc

$$S_{opt}(s) = \frac{\frac{3}{s-1} + \frac{-4}{s-2}}{\frac{3}{s-1} + \frac{-4}{s-2}} = 3 \frac{2-s}{2+s}$$

$$\| S_{opt} \|_\infty = 3 = | S_{opt}(j\omega) | \forall \omega$$

En ignorant la contrainte $S(\infty) = 1$ ($S_{opt}(\infty) = -3$) la résultat du contrôleur $K_{opt}(s) = \frac{4}{3}(s+2)$
Il n'est pas propre et n'est pas acceptable.

Notons que $P(s)K_{opt}(s)$ a un "marge de constant",

$$dist(PK_{opt}, +1) = \frac{1}{3} \quad \forall \omega$$

Maintenant On inclu la contrainte $S(\infty) = 1$

Une modification de $S_{opt} = 3 \frac{2-s}{2+s}$ en haute fréquence de prendre la contrainte $S(\infty) = 1$, soit

$$S_\epsilon = S_{opt} + \underbrace{\frac{s-1}{s+1} \frac{s-2}{s+2}}_{\text{garantir } S_\epsilon(1)=1, S_\epsilon(2)=0} \overbrace{\frac{\epsilon s}{1+\epsilon s}}^{\text{strictement causal}} 4$$

La valeur 4 est donné par la condition d'interpolation $S(\infty) = 1$ avec $S_\epsilon(\infty) = S_{opt}(\infty) + 4 = -3 + 4 = 1$

L'idée de base: pour un ϵ petit, le terme d'addition n'affecte pas S_{opt} aux fréquence ω avec $\omega\epsilon \ll 1$ lorsque $s = \infty$, donc $S_\epsilon(\infty) = 1$.

$$K_\epsilon = \underbrace{\frac{4}{3}(s+2)}_{K_{opt}} \underbrace{\frac{1+(1+3\epsilon)s}{1+(1+\frac{7}{3}\epsilon)s-\frac{\epsilon}{3}s^2}}_{\begin{array}{l} \text{pole } \approx -1 + \frac{3}{\epsilon} \\ \text{zero } \approx -1 \end{array}}$$

Finalement: $\tilde{K}_\epsilon = \frac{4}{3} \frac{s+2}{1-\epsilon s}$ pour $\epsilon > 0$.

Par exemple, $\epsilon = 0.04$ donc $\| S_\epsilon \|_\infty \approx 3.27$

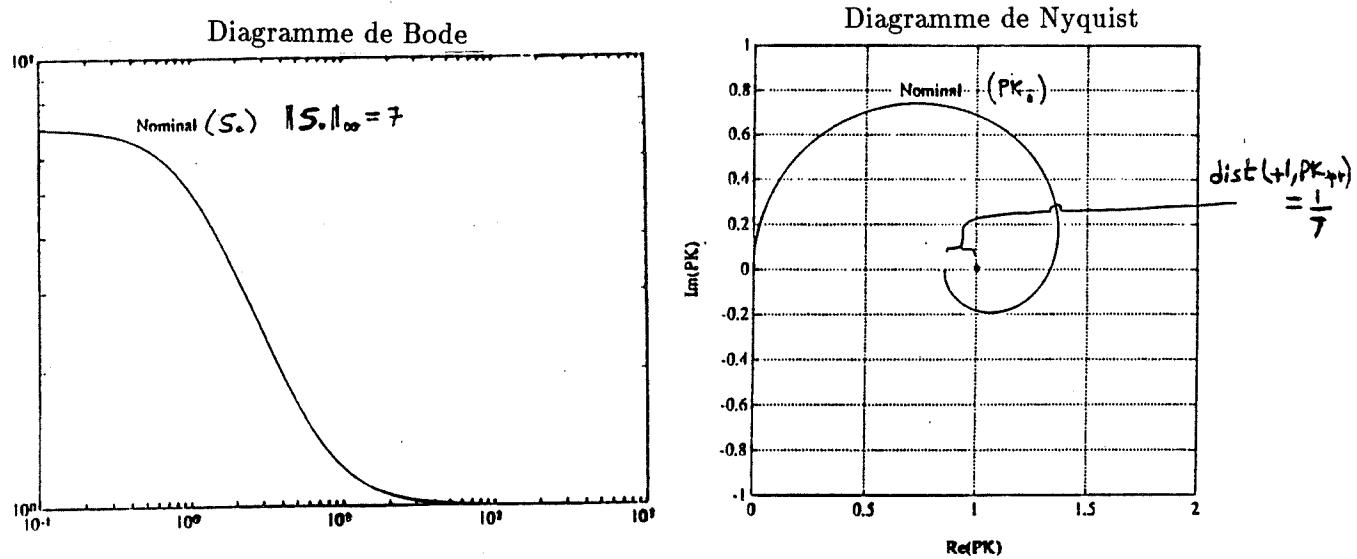


Figure 10: Module de la sensibilité de S et le lieu de Nyquist de $P(s)K_0(s)$.

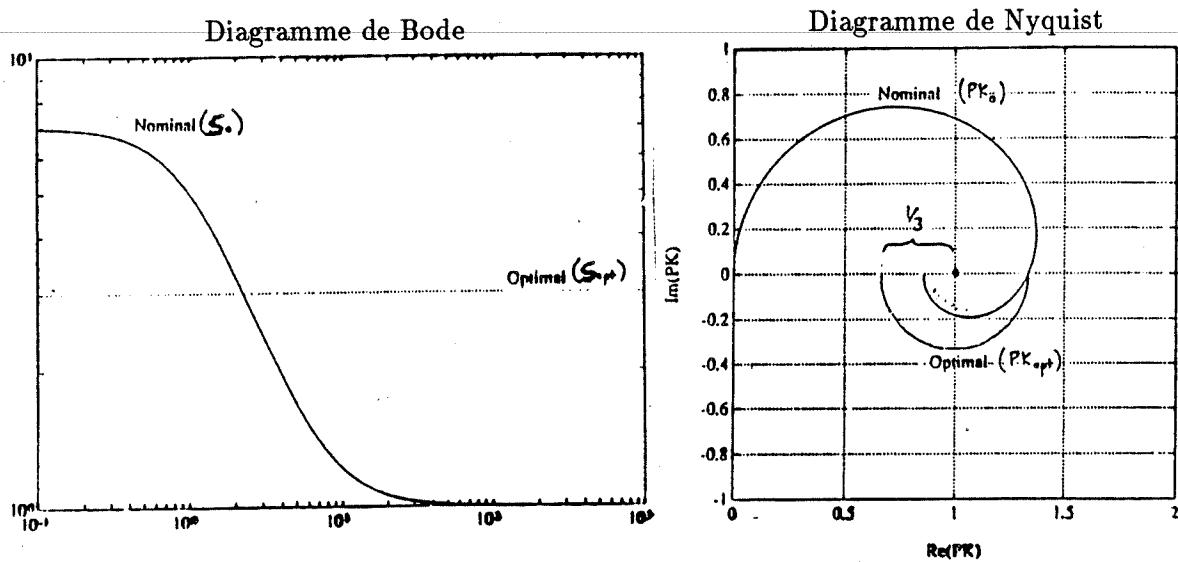


Figure 11: Module de la sensibilité de S et le lieu de Nyquist de $P(s)K_0(s)$ en utilisant l'interpolation.

Diagramme de Bode

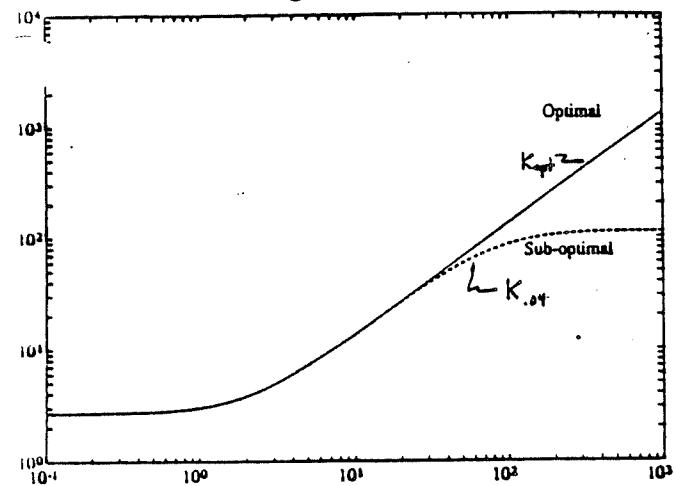


Diagramme de Bode

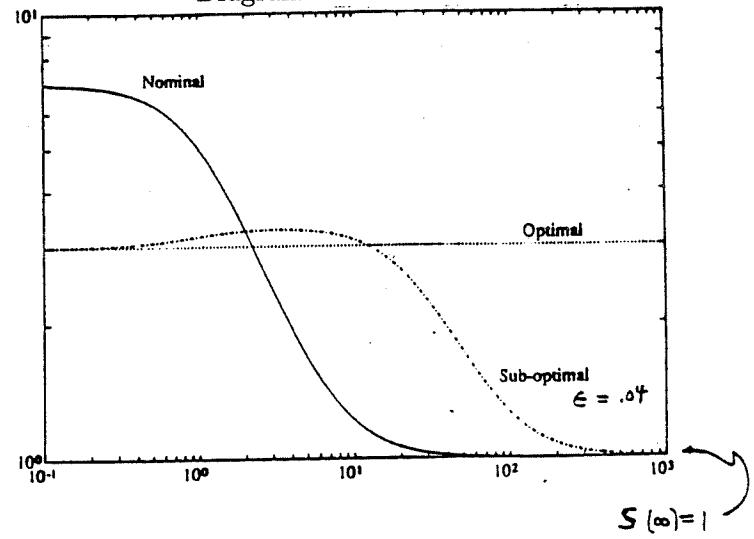
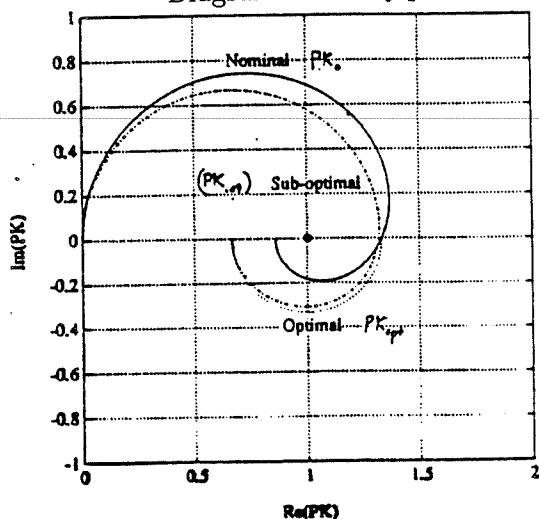


Diagramme de Nyquist



$$\begin{aligned} \text{dist}(+1, PK_n) &= \frac{1}{2} \\ \text{dist}(+1, PK_{op}) &= \frac{1}{3} \\ \text{dist}(+1, PK_{so}) &= 0.367 \end{aligned}$$

Figure 12: Comparaison des trois méthodes nominale, optimale et sous-optimale.

16. Exemple:

Soit le système suivant en utilisant l'approximation de Padé du premier ordre $e^{-Ts} = \frac{-Ts+2}{Ts+2}$

$$P(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s-2)} \frac{-Ts+2}{Ts+2}, \quad T \neq 1$$

avec un pôle instable et des zéros à non-minimum de phase.

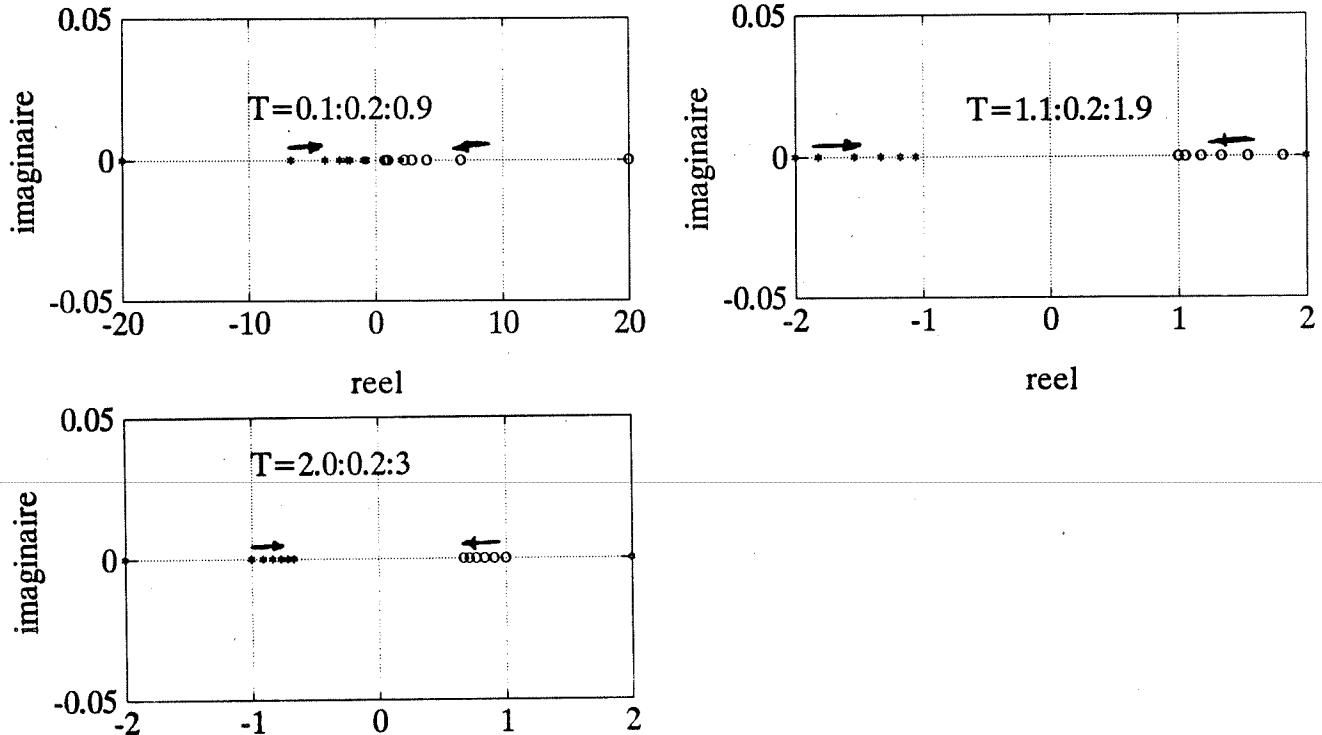


Figure 13: Lieu des racines de $P(s)$

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 \\ S\left(\frac{2}{T}\right) &= 1 \\ S(2) &= 0 \end{aligned}$$

Quelle sont la sensibilité $S = \frac{1}{1-PK}$ applicable avec K stabilisant ?

$$\mathbf{S} = \{ \text{stable } S/S(1) = S\left(\frac{2}{T}\right) = S(\infty) = 1, S(2) = 0 \}$$

Recherche d'un contrôleur stabilisant utilisant les conditions d'interpolation. Soit:

$$S_0(s) = \left(\frac{s-2}{s+2}\right) \left[\frac{s-\frac{2}{T}}{s+\frac{2}{T}} \frac{s-1}{s+1} + \frac{x_0}{s+1} + \frac{x_1}{s+\frac{2}{T}} \right]$$

$$S_0(1) = 1 \Rightarrow x_0 = -6 - \frac{2Tx_1}{T+2}$$

$$S_0\left(\frac{2}{T}\right) = 1 \Rightarrow \frac{Tx_0}{2+T} + \frac{Tx_1}{4} = \frac{2+2T}{2-2T}$$

retard T	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$dist(1 - PK)$	0.25	0.28	0.25	0.23	0.22
$\ S_0 \ _\infty$	4.0466	3.6161	3.9795	4.31	4.53
$\omega(\frac{rad}{s})$	0	0	1.4945	1.36	1.24

Table 3: Variation du retard T de 0.1 à 0.9

retard T	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
$dist(1 - PK)$	0.21	0.21	0.20	0.20	0.19
$\ S_0 \ _\infty$	4.68	4.8	4.91	5.045	5.206
$\omega(\frac{rad}{s})$	1.13	1.03	0.95	0.71	0.6488

Table 4: Variation du retard T de 1.1 à 1.9

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4(-2T^2 + 5T + 1)(T + 2)}{T(T - 6)}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{16T^2 - 46T + 28}{T - 6}$$

$$\begin{aligned} K_0(s) &= \frac{S_0(s) - 1}{P(s)S_0(s)} \\ &= \frac{(s + 2)(Ts + 2)[(s - 2)(s^2 + as + b) - (s + 2)(s + 1)(s + \frac{2}{T})]}{(s - 1)(s^2 + as + b)(-Ts + 2)} \end{aligned}$$

avec $a = (x_0 + x_1 - \frac{2}{T} - 1)$, $b = x_1 + \frac{2}{T}x_0 + \frac{2}{T}$

Remarque: $dist(1 - PK)$ correspond le rayon du cercle $M = \frac{1}{\|S_0\|_\infty}$.

Rappel du théorème de Nevanlinna-Pick:

\exists un S stable tel que: $S(\lambda_i) = \beta_i$ et $\| S \|_\infty \leq \alpha$ si et seulement si la matrice Hermitienne $N_\alpha \geq 0$, avec

$$N_{\alpha_{ij}} = \frac{\alpha^2 - \beta_i \bar{\beta}_j}{\lambda_i + \bar{\lambda}_j} = \frac{\alpha^2}{\lambda_i + \bar{\lambda}_j} - \frac{\beta_i \bar{\beta}_j}{\lambda_i + \bar{\lambda}_j}$$

retard T	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3
$dist(1 - PK)$	0.8	0.8093	0.8124	0.8066	0.7855	0.7274
$\ S_0 \ _\infty$	5.29	5.44	5.54	5.55	5.54	5.65
$\omega(\frac{rad}{s})$	0.6	0.58	0.49	0.54	0.65	0.71

Table 5: Variation du retard T de 2.0 à 3

avec $S(\lambda_i) = \beta_i$ et $\|S\|_\infty \leq \alpha$.

$$\min\{\|S\|_\infty / S(\lambda_i) = \beta_i\} = \max\{\alpha / \det(\alpha^2 \frac{1}{\lambda_i + \bar{\lambda}_j} - \frac{\beta_i \bar{\beta}_j}{\lambda_i + \bar{\lambda}_j}) = 0\}$$

Cherchons

$$\min_{S \text{ stable}} \|S\|_\infty$$

On appliquant le théorème de Nevanlinna Pick (ignorant $S(\infty) = 1$) avec $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{2}{T}, \lambda_3 = 2$

$$\begin{aligned} S(1) &= 1 = \beta_1 \\ S\left(\frac{2}{T}\right) &= 1 = \beta_2 \\ S(2) &= 0 = \beta_3 \end{aligned}$$

$$N_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2 - 1}{2} & \frac{\alpha^2 - 1}{1 + \frac{2}{T}} & \frac{\alpha^2}{3} \\ \frac{\alpha^2 - 1}{1 + \frac{2}{T}} & \frac{\alpha^2 - 1}{\frac{4}{T}} & \frac{\alpha^2}{2 + \frac{2}{T}} \\ \frac{\alpha^2}{3} & \frac{\alpha^2}{\frac{2}{T} + 2} & \frac{\alpha^2}{4} \end{bmatrix}$$

Determinant de $N_{\alpha_{opt}}$ est nul, ce qui implique que

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{\frac{T}{32} - \frac{1}{4(1 + \frac{2}{T})^2}}{\frac{T}{32} - \frac{T}{36} - \frac{1}{4(1 + \frac{2}{T})^2} - \frac{1}{2(2 + \frac{2}{T})^2} + \frac{2}{3(1 + \frac{2}{T})(2 + \frac{2}{T})}}}$$

$N_\alpha \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha_{opt}$, le rang de $N_\alpha = 2$, c'est à dire que $N_{\alpha_{opt}} \gamma_{opt} = 0$

$$\Rightarrow \gamma_{opt} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 + \frac{2}{T} \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$S_{opt}(s) = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i \beta_i}{s - \lambda_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{s - \lambda_i}} \text{ avec } m = 3$$

$$S_{opt}(s) = \frac{(s-2)\{(5T+2)s - (8+2T)\}}{(T+2)s^2 - (8T+4)s + (4T+8)}$$

$$K_0(s) = \frac{(4Ts-8)(s+2)(Ts+2)}{(-Ts+2)[(5T+2)s - (8+2T)]}$$

$$P(s)K_0(s) = \frac{(s-1)(4Ts-8)}{(s-2)(5T+2)s - (8+2T)}$$

retard T	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\omega \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$	1.79	1.79	1.82	1.8817	2.0	2.21	2.68
$\text{dist}(1 - PK)$	0.35	0.38	0.4	0.43	0.44	0.45	0.46
$\ S_0 \ _{\infty}$	2.8645	2.6297	2.4620	2.3394	2.25	2.1884	2.1552

Table 6: Variation du retard T de 0.1 à 0.7

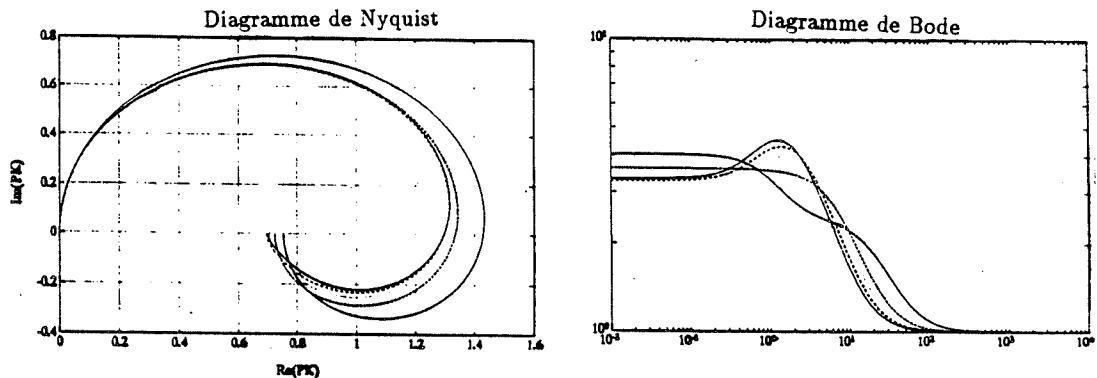


Figure 14a $T = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$

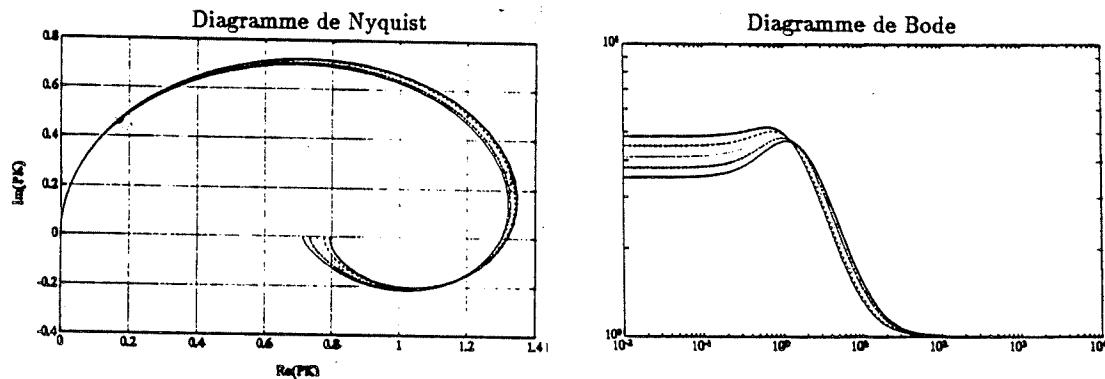


Figure 14b $T = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9$

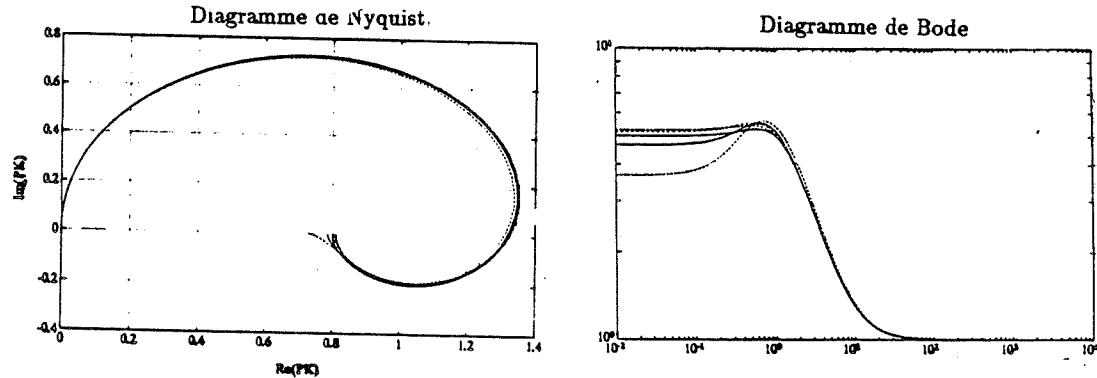


Figure 14c $T = 2, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3$

Figure 14: Exemple d'application de système avec retard T (approximation de Padé)

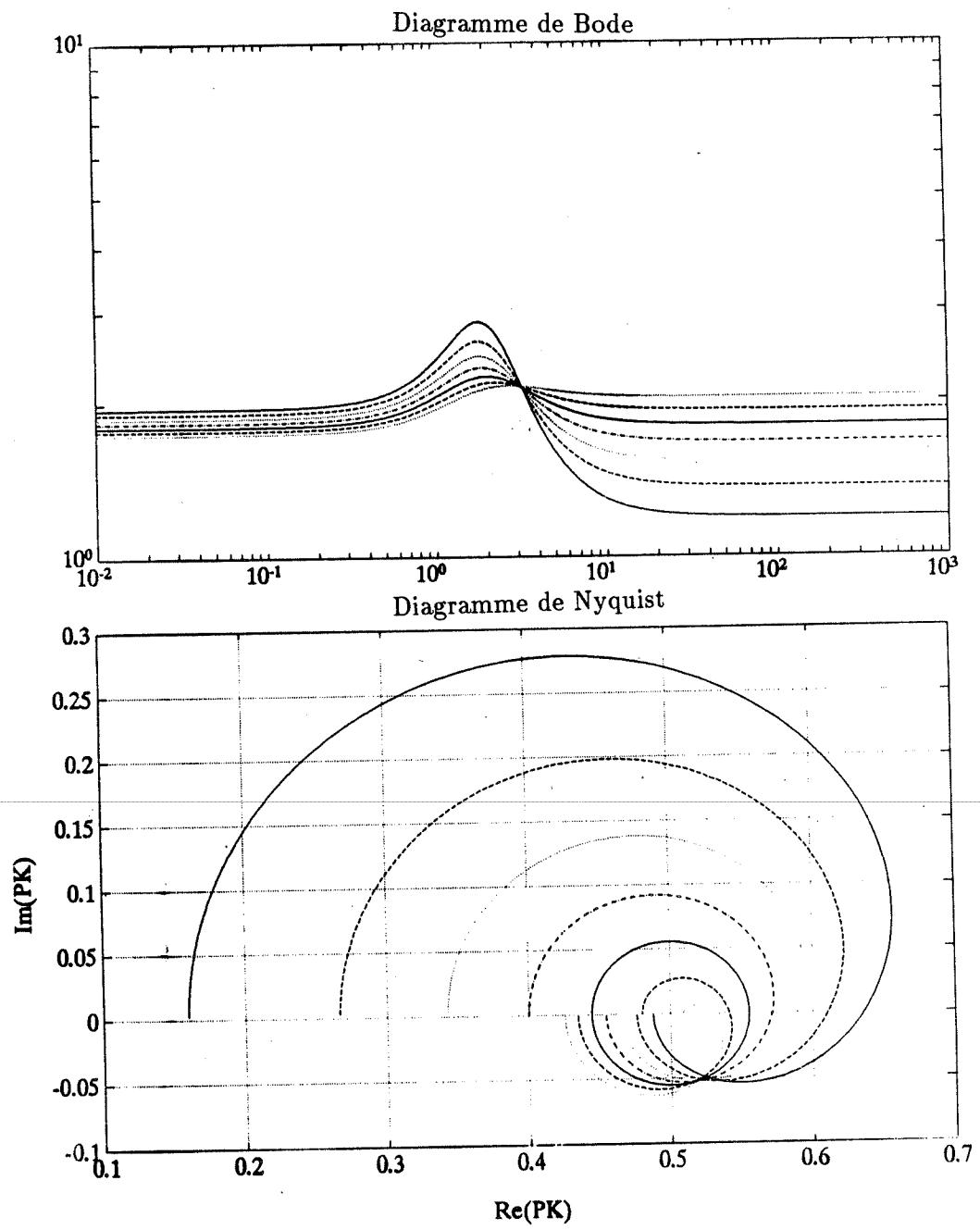


Figure 15: Module de la sensibilité et le lieu de Nyquist en utilisant la méthode d'interpolation

Bibliographie

- [Ahl79] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [CP84] B. C. Chang and J. B. Pearson. Optimal Disturbance Reduction in Linear Multivariable Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29:880–887, 1984.
- [DGK79] PH. Delsarte, Y. Genin, and Y. Kamp. The Nevanlinna-Pick Problem for a Matrix-Valued Functions. *SIAM J. Appl. Math.*, 36(1):47–61, February 1979.
- [DM72] H. Dym and H. P. McKean. *Fourier Series and Integrals*. Volume , Academic Press, Inc, Probability and Mathematical Statistics Edition, 1972.
- [FL88] J. S. Freudenberg and D. P. Looze. *Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems*. Springer Verlag, New york, 1988.
- [HTB92] M. Hammami, A.-B. Turgeon, D. Bensoussan Design de compensation robuste de systèmes avec retard selon des méthodes d’interpolation. *Conférence Canadienne et Exposition, Automatisation Industrielle* Acte de la conférence Vol. 1, pp. 8.5-8.9, Montréal 1-3 Juin 1992.
-
- [Hel81] J. W. Helton. Broadbanding : Gain Equalization Directly from Data. *IEEE Trans. Circuit and Systems*, CAS-28:1125–1137, 1981.
- [Kim84] H. Kimura. Robust Stability for a Class of Transfer Functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29(9):788–793, september 1984.
- [KAO89] Kimura, H. K. Akai and T. Oike Robust stabilization of a Flexible Arm *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control* pp. 1862-1865 Tampa, Florida December 1989
- [KT85] P.P. Khargonekar and A. Tannenbaum. Non-Euclidian Metrics and the Robust Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-30:1005–1013, 1985.
- [KP86] Pramod P. Khargonekar and K. Poola. Robust Stabilization of Distributed Systems *Automatica*, Vol. 22, No. 1, pp.77-84, 1986.
- [Lam91] James Lam Balanced Realization of Padé Approximants of e^{-sT} . *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 36, No. 9, 1991.
- [Mac79] A. G. J. MacFarlane. *Frequency-Response Methods in Control Systems*.
- [Mar79] Marshall J.E *Control of Time-Delay Systems* Institution of Electrical Engineers (IEE), 1979. NY, IEEE Press Edition, 1979.
- [Nev19] R. Nevanlinna. Über Beschränkte Funktionen, die Ingegebenen Punkten Vorgeschreibene Funktionswerte Bewirkt Werden. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 13(1):1–71, 1919.

- [Nev29] R. Nevanlinna. Über Beschränkte Analytische Funktionen. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 32(7):75, 1929.
- [Pad] Padé, H. 1892 *Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, ser. 3(suppl.)9:1-93.
- [Pet84] Petrushev, P.P. and Popov, V.A *Rational Approximation of Real Functions* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1984.
- [Pic16] G. Pick. Über die Beschränkungen Analytischer Funktionen, Welche Durch Vorgegebene Funktionswerte Bewirkt Werden. *Math. Ann.*, 77:7–23, 1916.
- [PW34] R.E.A. Paley and N. Wiener. *Fourier Transforms in the Complex Domain*. Volume XIX, American Mathematical Society, edition, 1934.
- [Ros74] H. H. Rosenbrock. *Computer-Aided Control System Design*. Academic Press, 1974.
- [Tan86] A. Tannenbaum Note personnel 1986.
- [VK86] M. Vidyasagar and H. Kimura. Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems. 22(1):85–94, 1986.
-
- [YAB92] W-Y. Yan, B.D.O. Anderson and R. R. Bitmead “*The Combined Sensitivity and Phase Margin Problem*” *Automatica*, Vol. 28, No 2, pp. 417-421, 1992.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26:301–320, 1981.
- [ZF83] G. Zames and B. A. Francis. Feedback, Minimax Sensitivity and Optimal Robustness. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-28:585–601, 1983.

Annexes

A Le problème d'interpolation de Pick-Nevanlinna

A.1 Condition nécessaire

- Démontrons l'égalité suivante:

$$\frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Re[f(re^{-j\theta})]}{(re^{j\theta} - z_i)(re^{-j\theta} - \bar{z}_j)} d\theta$$

De l'équation (1), il vient:

$$f(z_i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{j\theta} + z_i}{re^{j\theta} - z_i} \Re[f(re^{-j\theta})] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Im[f(re^{j\theta})] d\theta$$

$$f(z_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{j\theta} + z_j}{re^{j\theta} - z_j} \Re[f(re^{-j\theta})] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Im[f(re^{j\theta})] d\theta$$

$$\bar{f}(z_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{-j\theta} + \bar{z}_j}{re^{-j\theta} - \bar{z}_j} \Re[f(re^{-j\theta})] d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{Im}[f(re^{j\theta})] d\theta$$

$$\begin{aligned} f(z_i) + \bar{f}(z_j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{j\theta} + z_i}{re^{j\theta} - z_i} \Re[f(re^{-j\theta})] d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{-j\theta} + \bar{z}_j}{re^{-j\theta} - \bar{z}_j} \Re[f(re^{-j\theta})] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{re^{j\theta} + z_i}{re^{j\theta} - z_i} + \frac{re^{-j\theta} + \bar{z}_j}{re^{-j\theta} - \bar{z}_j} \right\} \Re[f(re^{-j\theta})] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2(r^2 - z_i \bar{z}_j)}{(re^{j\theta} - z_i)(re^{-j\theta} - \bar{z}_j)} \Re[f(re^{-j\theta})] d\theta \end{aligned}$$

Finalement:

$$\frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Re[f(re^{-j\theta})]}{(re^{j\theta} - z_i)(re^{-j\theta} - \bar{z}_j)} d\theta$$

- Démontrons cette égalité par récurrence:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} x_i \bar{x}_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re[f(re^{j\theta})] \left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{re^{j\theta} - z_i} \right|^2 d\theta > 0$$

Supposons qu'il est vrai pour l'ordre n et démontrons pour l'ordre $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} x_i \bar{x}_j &= \sum_{i,j=1}^n \frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} x_i \bar{x}_j + \sum_{i=n+1, j=1}^n \frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} x_i \bar{x}_j + \\
 &\quad \sum_{i=1, j=n+1}^n \frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} x_i \bar{x}_j + \frac{f(z_{n+1}) + \bar{f}(z_{n+1})}{r^2 - z_{n+1} \bar{z}_{n+1}} x_{n+1} \bar{x}_{n+1} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re e[f(re^{j\theta})] \left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{re^{j\theta} - z_i} \right|^2 d\theta + \\
 &\quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re e f(re^{j\theta}) \left\{ \frac{x_{n+1}}{re^{j\theta} - z_{n+1}} \sum_{j=1}^n \frac{\bar{x}_j}{re^{-j\theta} - \bar{z}_j} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\bar{x}_{n+1}}{re^{-j\theta} - \bar{z}_{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{re^{j\theta} - z_i} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{x_{n+1}}{re^{j\theta} - z_{n+1}} \cdot \frac{\bar{x}_{n+1}}{re^{-j\theta} - \bar{z}_{n+1}} \right\} d\theta
 \end{aligned}$$

Finalement:

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{f(z_i) + \bar{f}(z_j)}{r^2 - z_i \bar{z}_j} x_i \bar{x}_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re e[f(re^{j\theta})] \left| \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{re^{j\theta} - z_i} \right|^2 d\theta > 0$$

■

A.2 Schwarz et Schwarz-Pick

- Lemme de Schwarz: Soit $f \in D$ est analytique.

Si $f(0) = 0$, donc $|f(z)| \leq |z|$, et $|f'(0)| \leq 1$.

L'égalité au point z si et seulement si $f(z) = e^{i\theta} z$.

Démonstration:

Il est une application élémentaire du principe du maximum. On définit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Cependant, par le principe du module du maximum, $g(z)$ a un maximum dans la borne quand $|z| = 1$.

$$\max_{|z| \leq 1} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \max_{|z|=1} |f(z)| < 1$$

$(f(z)$ est dans le disque $f \in D$

■

- Théorème de Schwarz-Pick:

Soit $f \in D$ est analytique. Donc $d(z_1, z_2) \geq d(f(z_1), f(z_2))$ avec l'égalité pour chaque $z_1, z_2 \in D$ si et seulement si f est une transformation de Möbius.

Démontrons ce théorème:

Soit

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\bar{f}(z_2)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2} \right|$$

Prenons

$$g(z) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - f(z_1)\bar{f}(z_2)}$$

On définit

$$\varphi(z) = \frac{z_2 - z}{1 - \bar{z}_2 z}$$

Remarquons que $\varphi(z_2) = 0$, et $\varphi(0) = z_2$.

Donc, si $h = g \circ \varphi$ nous remarquons que $h(0) = g(z_2) = 0$ et d'après le lemme de Schwarz, il vient:

$$|g(z)| = |h \circ \varphi^{-1}(z)| \leq |\varphi^{-1}(z)| = |\varphi(z)|$$

d'où le résultat demandé. ■

A.3 Equivalence conforme

Démontrons $\delta(z_1, z_2) = \delta(\gamma(z_1), \gamma(z_2))$ avec

$$\delta(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \text{ et } \gamma(z_1) = e^{i\theta} \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1}, \gamma(z_2) = e^{i\theta} \frac{z_2 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_2}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\gamma(z_1) - \gamma(z_2)}{1 - \bar{\gamma}(z_1)\gamma(z_2)} \right| &= \left| \frac{e^{i\theta} \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} - e^{i\theta} \frac{z_2 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_2}}{1 - e^{-i\theta} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{1 - z_0 \bar{z}_1} e^{i\theta} \frac{z_2 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_2}} \right| \\ &= \left| \frac{(z_1 - z_0)(1 - \bar{z}_0 z_2) - (z_2 - z_0)(1 - \bar{z}_0 z_1)}{(1 - z_0 \bar{z}_1)(1 - \bar{z}_0 z_2) - (\bar{z}_1 - \bar{z}_0)(z_2 - z_0)} \right| \\ &= \left| \frac{(z_1 - z_2)(1 - z_0 \bar{z}_0)}{(1 - \bar{z}_1 z_2)(1 - z_0 \bar{z}_0)} \right| \left| \frac{1 - z_0 \bar{z}_1}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right| \\ &= \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \\ &= \delta(z_1, z_2) \end{aligned}$$

D'où la solution $\delta(z_1, z_2) = \delta(\gamma(z_1), \gamma(z_2))$ ■

B Propriétés de la fonction de sensibilité

B.1 Formule de Cauchy

Théorème de Cauchy

Soit $f(s)$ qui est analytique à l'intérieur du contour fermé C alors

$$\oint f(s) ds = 0$$

Si $f(s)$ est analytique en tous points intérieurs de C accepté le point $s = a$ alors:

$$\oint_C \frac{f(s)}{s - a} ds = 2\pi j f(a)$$

Les valeurs bornées sont reliées aux valeurs de l'intérieur.

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)} = \sum \frac{a_i}{(s - p_i)} \\ &= \frac{d}{ds} \left[\sum a_i \ln(s - p_i) \right] = \frac{d}{ds} \Gamma(s) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_a^b f(s) ds = \int_a^b d\Gamma = \Gamma(b) - \Gamma(a)$$

B.2 Intégrale de Bode

$\ln[\tilde{S}(s)]$ est analytique avec $\tilde{S}(s) = S(s)B_p^{-1}(s)$

$B_p(s) = \prod_{i=1}^{N_p} \frac{-p_i + s}{\bar{p}_i + s}$ est le produit de Blaschke des pôles dans le demi-plan droit ouvert (DPD), avec les multiplicités:

$$\mathbf{P} = \{p_i, i = 1, \dots, N_p\}$$

$$\oint \ln \tilde{S}(s) ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \tilde{S}(\omega) d\omega + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln \tilde{S}(Re^{j\theta}) Rje^{j\theta} d\theta = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \tilde{S}(\omega) d\omega + \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sum_i \ln \left[\frac{Re^{j\theta} + p_i}{Re^{j\theta} - \bar{p}_i} \right] jRe^{j\theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln [1 + PC(Re^{j\theta})] jRe^{j\theta} d\theta = 0$$

- calcul de $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \tilde{S}(\omega) d\omega = 2 \int_0^\infty \ln |S(\omega)| d\omega$

- Calcul de $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sum_i \ln \left[\frac{Re^{j\theta} + \bar{p}_i}{Re^{j\theta} - p_i} \right] jRe^{j\theta} d\theta$

Posons $x = Re^{j\theta}$:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \frac{\bar{p}_i}{x}) &= \frac{\bar{p}_i}{x} - \frac{1}{2}(\frac{\bar{p}_i}{x})^2 + \dots & \left| \frac{\bar{p}_i}{x} \right| < 1 \\ \ln(1 - \frac{p_i}{x}) &= -\frac{p_i}{x} - \frac{1}{2}(\frac{p_i}{x})^2 - \dots & \left| \frac{p_i}{x} \right| < 1 \end{aligned}$$

pour $x > |p_i|$

$$\begin{aligned} \ln \frac{\bar{p}_i + x}{x - p_i} &= \ln \left(\frac{1 + \frac{\bar{p}_i}{x}}{1 - \frac{p_i}{x}} \right) \\ &= \frac{p_i + \bar{p}_i}{x} + \text{terme d'ordre élevé} \end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{\bar{p}_i+x}{p_i-x}\right) = 2\Re e(p_i)$

$$\begin{aligned} I_2 &= j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sum_i \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x+\bar{p}_i}{x-p_i}\right) \right) d\theta \\ &= -2\pi j \sum_i \Re e(p_i) \end{aligned}$$

Calcul de I_3

$$I_3 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln[1 + PC(Re^{j\theta})] j Re^{j\theta} d\theta = 0 \text{ si } PC \rightarrow \frac{k}{s^q}, q \geq 2$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \ln |S(\omega)| d\omega = \begin{cases} 0 & p_i = 0 \\ \frac{1}{\pi} \sum \Re e(p_i) & p_i \neq 0 \end{cases}$$

Interpretation de l'intégrale de Bode:

Avec ϵ petit, plus de chance de la fonction de sensibilité a un dépassement élevé (l'idée est d'étendre la surface en haute fréquence).

Choix de la fonction de pondération:

On suppose que $S(s)$ est analytique dans le demi-plan droit (DPD). $\ln S(s)$ est analytique dans (DPD) accepté les points $p_i; \forall S(p_i) = 0$. On définit:

$$\tilde{S}(s) = B_p^{-1}(s) S(s) \quad B_p(s) \triangleq \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(\frac{s-p_i}{s+\bar{p}_i}\right) & S(p_i) = 0 \quad p > 0 \\ 1 & S(p_i) = 0 \quad p = 0 \end{cases}$$

$$\ln \tilde{S}(s) = \ln B_p^{-1}(s) + \ln S(s)$$

$\ln \tilde{S}$ est analytique avec des valeurs connu à $z_i, i = 1, 2, \dots, m$.

$$\ln \tilde{S}(z_i) = \begin{cases} \ln B_p^{-1}(z_i) & S(z_i) = 0 \quad p > 0 \\ 0 & \text{autre cas} \quad p = 0 \end{cases}$$

Soit $s_0 = x_0 + jy_0, x_0 > 0$

$\forall s_0$ dans le demi-plan droit, $\exists \delta$ suffisement petit \exists :

$$\ln f(s_0) = \frac{1}{j\pi} \int_{C_\delta} \ln f(\xi) \frac{x_0}{(\xi - s_0)(\xi + \bar{s}_0)} d\xi \quad (59)$$

Un calcul direct montre que la limite $\delta \rightarrow 0$ avec $\xi = j\omega$ dans (59)

$$\ln f(s_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln f(j\omega) \frac{x_0}{x_0^2 + (y_0 - \omega)^2} d\omega \quad (60)$$

Soit $f(s) = \tilde{S}(s)$ et $s = x > 0$ (conjugués de $S(j\omega)$ est $S(j\omega) = S(-j\omega)$), lorsque $y_0 = 0$

$$\ln |\tilde{S}(x)| = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \ln |S(j\omega)| \frac{x}{x^2 + \omega^2} d\omega$$

avec $\tilde{S} = B_p^{-1}S$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \ln |S(j\omega)| \frac{x}{x^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} \ln |B_p^{-1}(x)|$$

B.3 Formule de Poisson

Soit:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi; \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi + \bar{z}} d\xi$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1 - \alpha)\xi + (\bar{z} + \alpha z)}{(\xi - z)(\xi + \bar{z})} f(\xi) d\xi$$

avec $\xi = s$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega(1 - \alpha) + \bar{z} + \alpha z}{(z - i\omega)(\bar{z} + i\omega)} f(i\omega) d\omega$$

Si $\alpha = 1$

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{|z - i\omega|^2} f(i\omega) d\omega$$

est appelé formule de *poisson* pour le demi plan.

C Construction d'un contrôleur par paramétrisation Q

La recherche d'un contrôleur $C(s)$ qui satisfait la stabilité interne et les propriétés asymptotiques simultanément¹³:

$$C = \frac{X + MQ}{Y - NQ} \tag{61}$$

Méthode de la factorisation “coprime”

Soit le système P exprimé sous la forme d'un rapport de polynômes coprimes:

$$P = \frac{N}{M}$$

Le système en contre-réaction a une stabilité interne garantie si et seulement si le polynôme caractéristique de la boucle fermée n'a pas de zéro dans le demi-plan droit $\Re s \geq 0$. Un contrôleur C satisfait la condition de stabilité interne si

$$\begin{aligned} C &= \frac{X}{Y} \\ \text{avec } NX + MY &= 1 \end{aligned}$$

Procédure de recherche X et Y :

Étape 1: si P est stable, $N = P$, $M = 1$, $X = 0$, $Y = 1$, fin; sinon continuer.

¹³J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum *Feedback control theory* Macmillan 1992.

Étape 2: Appliquer la transformation de $P(s)$ à $\tilde{P}(\lambda)$ suivante $s = \frac{1-\lambda}{\lambda}$. $\tilde{P}(\lambda)$ est le rapport des polynômes coprime:

$$\tilde{P}(\lambda) = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}$$

Étape 3: Utiliser l'algorithme d'Euclide, pour la recherche des polynômes $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ tel que:

$$nx + my = 1$$

Étape 4: Transformer $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ à $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ par $\lambda = \frac{1}{s+1}$.

Exemple:

Soit le système avec deux pôles instables:

$$P(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \quad (62)$$

- 1) Recherche d'un contrôleur C propre qui satisfait la stabilité interne.
- 2) La valeur en régime permanent de la sortie y est égale à 1 quand l'entrée r est un échelon unitaire et la perturbation $d = 0$.
- 3) La valeur en régime permanent de la sortie y est nulle quand l'entrée de la perturbation est une sinusoïde de 10 rad/s et l'entrée $r = 0$.

Réponse à la question 1):

Utilisons la méthode de la factorisation "coprime":

D'après l'étape 2, il vient:

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \frac{\lambda^2}{6\lambda^2 - 5\lambda + 1} \\ n(\lambda) &= \lambda^2 \\ m(\lambda) &= 6\lambda^2 - 5\lambda + 1 \end{aligned}$$

Passons à l'étape 3 par l'algorithme d'Euclide:¹⁴

¹⁴ l'entrée: polynômes n, m

initialisation: le degré (n) \geq degré (m) échangé n et m si n n'est pas vrai.

Étape a) Division m par n prendre le quotient q_1 et le reste r_1

$$\begin{aligned} n &= mq_1 + r_1 \\ \text{degré } r_1 &< \text{degré } m. \end{aligned}$$

Étape b) Division r_1 par m prendre le quotient q_2 et le reste r_2 :

$$\begin{aligned} m &= r_1 q_2 + r_2 \\ \text{degré } r_2 &< \text{degré } r_1. \end{aligned}$$

Étape c): Division r_2 par r_1 :

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ \text{degré } r_3 &< \text{degré } r_2. \end{aligned}$$

continue, stop à l'étape k quand r_k est une constante non nulle.

$$\begin{aligned}
q_1(\lambda) &= \frac{1}{6} \\
r_1(\lambda) &= \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{6} \\
q_2(\lambda) &= \frac{36}{5}\lambda - \frac{114}{25} \\
r_2(\lambda) &= \frac{6}{25}
\end{aligned}$$

r_2 étant une constante non nulle, on arrête après l'étape b de l'algorithme d'Euclide. Les équations sont:

$$\begin{aligned}
n &= mq_1 + r_1 \\
m &= r_1 q_2 + r_2
\end{aligned}$$

Donc $r_2 = (1 + q_1 q_2)m - q_2 n \Rightarrow x = -\frac{q_2}{r_2}, y = \frac{1+q_1q_2}{r_2}$.

$$x(\lambda) = -30\lambda + 19, \quad y(\lambda) = 5\lambda + 1$$

Finalement, à l'étape 4:

$$\begin{aligned}
N_1(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} \\
M(s) &= \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} \\
X(s) &= \frac{19s-11}{s+1} \\
Y(s) &= \frac{s+6}{s+1}
\end{aligned}$$

En tenant compte des spécifications 2) et 3), il vient que:

- la valeur en régime permanent de la fonction de transfert d'entrée r et de sortie y est égale à $N(X + MQ)$:

$$N(0)[X(0) + M(0)Q(0)] = 1 \quad (63)$$

- La fonction de transfert de la perturbation d à la sortie y est égale à $N(Y - NQ)$:

$$N(10j)[Y(10j) - N(10j)Q(10j)] = 0 \quad (64)$$

D'après les équations (63), (64), il vient que:

$$\begin{aligned}
Q(0) &= 6 \\
Q(10j) &= (6 + 10j)(1 + 10j) = -94 + 70j \\
\Re e Q(10j) &= -94 \\
\Im m Q(10j) &= 70
\end{aligned}$$

La paramétrisation Q est:

$$Q(s) = x_1 + x_2 \frac{1}{s+1} + x_3 \frac{1}{(s+1)^2}$$

La résolution de $Q(s)$ est donné par $Ax = b$ avec $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

D'où $x_1 = -79$, $x_2 = -723$, $x_3 = 808$.

Finalement:

$$Q(s) = \frac{-79s^2 - 881s + 6}{(s+1)^2}$$

D'après l'équation (61) le contrôleur est:

$$C(s) = \frac{-60s^4 - 598s^3 + 2515s^2 - 1794s + 1}{s(s^2 + 100)(s + 9)}$$

D Stabilité robuste avec des pôles réelles multiples incertains

Considérons le système avec des pôles incertain réel¹⁵:

$$P_s(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z - s_1) \cdots (z - s_r)}$$

où $\tilde{P}(z)$ n'a ni pôles ni zéros dans le demi-plan droit ($\bar{H} = \{z \in \mathbb{C} \Re e(z) \geq 0\}$).

Soit $K = \{s = (s_1, \dots, s_r) : s_1 \in [s_1^0 - \alpha, s_1^0 + \beta], s \in \Gamma\}$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^r$ est définie par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} s_1 + \cdots + s_r &= s_1^0 + \cdots + s_r^0 \\ \sum_{i \neq j} x_i x_j &= \sum_{i \neq j} s_i^0 s_j^0 \\ \cdots &= \cdots \\ \sum_{i=1}^r x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_r &= \sum_{i=1}^r s_1^0 \cdots \hat{s}_i^0 \cdots s_r^0 \end{aligned}$$

avec $0 < s_1^0 < \cdots < s_r^0$ sont des nombres réels positifs. Ce qui est équivalent à considérer le cas où tous les coefficients du polynôme du dénominateur sont connus sauf un seul.

Définissons la fonction de pondération:

$$W(z) = \frac{1}{(z - s_1^0) \cdots (z - s_r^0)}$$

¹⁵J. Amillo and F. A. Mata *Robust Stabilization of Systems with Multiple Real Pole Uncertainties* IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-36, pp. 749-752, 1991.

et la fonction de sensibilité pondéré est définie par:

$$S(z) = \frac{W(z)}{1 + P_0(z)C(z)}$$

ou $P_0(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{(z - s_1^0) \cdots (z - s_r^0)}$

est appelé le modèle nominal et $z \in \tilde{H} = \bar{H} \cup \{\infty\}$

Le problème général est équivalent à chercher une fonction rationnelle réelle propre $C(z)$ tel que:

$$1 + P_s(z)C(z) \neq 0 \quad (65)$$

pour tout $z \in \tilde{H}$ et $s \in K$.

Soit $R(s, z) = (z - s_1) \cdots (z - s_r)$. D'après l'équation (65), il vient:

$$R(s^0, z)[1 + P_0(z)C(z)] = \frac{1}{T(z)} \notin [-\eta, \xi]$$

pour tout $z \in \tilde{H}$ avec:

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha(s_1^0 - s_2^0 - \alpha) \cdots (s_1^0 - s_r^0 - \alpha) \\ \xi &= \beta(s_1^0 - s_2^0 + \beta) \cdots (s_1^0 - s_r^0 + \beta) \end{aligned} \quad (66)$$

si r est impair et

$$\begin{aligned} \eta &= \beta(s_2^0 - s_1^0 - \beta) \cdots (s_r^0 - s_1^0 - \beta) \\ \xi &= \alpha(s_2^0 - s_1^0 + \alpha) \cdots (s_r^0 - s_1^0 + \alpha) \end{aligned} \quad (67)$$

si r est pair.

S'il existe un contrôleur $C(z)$ qui satisfait l'équation (65) et qu'il n'y a aucune annulation de type pôle/zéro entre $P_0(z)$ et $C(z)$, il en découle que:

1. S est une fonction rationnelle réelle et analytique dans \tilde{H} .
2. $S(p_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.
3. $S(z_i) = W(z_i)$ pour tout $i = 1, \dots, m$.
4. S a un zéro d'ordre r à $z = \infty$.
5. $S/W - 1$ a un zéro d'ordre $l \geq d_2 + r - d_1$ à $z = \infty$.
6. $S(z) \notin A_n = (-\infty, \frac{1}{\eta}] \cup [\frac{1}{\xi}, +\infty)$ avec ξ et η

S'il existe une fonction S qui satisfait 1)-6), la fonction $C(z)$ est définie par:

$$C(z) = \frac{W(z) - S(z)}{P_0(z)S(z)}$$

Soit $b - \epsilon > a > 0$ avec $\epsilon = 2^r \cos^r \frac{\pi}{2^r}$. Soit $T^* = \omega \circ T'$ et $T = \theta \circ T^* \circ \varphi$ ou

$$\varphi(z) = \frac{1-z}{1+z}, \quad \theta(z) = \frac{1-\varphi^2(z)}{\xi + \eta\varphi^2(z)}, \quad \text{et } \omega(z) = \frac{a-bz}{b-az}$$

Si $\tilde{P}(z)$ a aucun pôles et zéros dans \bar{H} et $l = d_2 + r - d_1 = 1$ avec S satisfait les conditions 1)-6) si et seulement si:

$$\xi + \eta = \frac{2^{r+2}a}{b^2 - a^2} \quad (68)$$

La fonction de sensibilité S a un zéro d'ordre r à $z = \infty$ avec

$$S(z) = \frac{c_1(1+z)^r + c_2}{k_1(1+z)^{2r} + k_2(1+z)^r + k_3} \quad (69)$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= 2^{r+2}a(b^2 - a^2); \quad c_2 = 2^{2r+2}ab \\ k_1 &= (\xi + \eta)(b^2 - a^2)^2; \\ k_2 &= 2^{r+1}[\xi(b+a) + \eta(b-a)](b^2 - a^2); \\ k_3 &= 2^{2r}[\xi(b+a)^2 + \eta(b-a)^2]. \end{aligned}$$

Exemple:

Considérons le système suivant:

$$P_s(z) = \frac{z+6}{(z-s_1)(z-s_2)} \quad (70)$$

ou $s_1 \in [1, 2]$, $s_1 + s_2 = \frac{9}{2}$. Soit $s_1^0 = \frac{3}{2}$, $s_2^0 = 3$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Utilisons (67), on obtient $\xi = 1$ et $\eta = \frac{1}{2}$, et $\epsilon = 2$ et on choisit $a = 1$, $b = 3.4157$ qui satisfait $b > a + \epsilon$ et l'équation (68). La fonction $S(z)$ (69) est:

$$S(z) = \frac{16z^2 + 32z + 21.1235}{16z^4 + 64z^3 + 140.9878z^2 + 153.9756z + 94.6113}$$

Le choix du contrôleur $C(z)$:

$$C(z) = \frac{104z^3 + 191.8643z^2 + 105.0312z - 0.4444}{16z^3 + 128z^2 + 213.1235z + 126.7409}$$

qui satisfait la stabilité robuste de la famille (70).

E Étude de l'approximation de Padé

E.1 Introduction

Nous abordons l'étude en présentant un résumé introductif qui montre comment l'approximation de Padé [Pad] est construite. On verra que celle-ci est une fraction rationnelle obtenue

à partir du rapport de deux polynômes. L'ordre de ceux-ci dépend de la précision voulue et aussi de la limite de stabilité imposé par le système. De plus, une approximation de Padé d'ordre n , nous donne la même précision qu'une série de Taylor d'ordre $2n$. L'erreur se trouvant sur le terme $2n + 1$, les $2n$ premiers termes de l'approximation de Padé sont identiquement les mêmes que les $2n$ premiers de ceux de la série de Taylor.

L'avantage le plus remarquable est relié au gain du modèle du retard obtenu par une approximation de Padé. Celui-ci est constant, unitaire et invariant selon la fréquence. En passant un domaine de la fréquence, on voit que chacun des pôles de la fraction rationnelle possède un zéro image [Mar79] par rapport à l'axe $j\omega$ dans le plan complexe. A chacun des modules ou normes des pôles correspond une norme identique des zéros image, ce qui à pour effet de donner un rapport constant et unitaire.

En ce qui concerne la phase, nous verrons que plus l'approximation est d'ordre élevé plus la limite de stabilité diminue.

E.2 Approximation du retard avec une série de Taylor

La fonction de transfert du retard est:

$$H(s) = e^{-Ts}$$

nous procure les relations de gain et de phase suivantes:

$$\begin{aligned} \text{Gain} &= 1 \\ \text{Phase} &= -\omega T \quad \text{rad} \end{aligned}$$

En prenant une approximation d'ordre 1 du développement en série de Taylor de $H(s)$ on obtient;

$$\begin{aligned} e^{-sT} &\approx 1 - sT \\ \text{Gain} &= \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \\ \text{Phase} &= -\arctan(\omega T) \quad \text{rad} \end{aligned}$$

Une autre type d'approximation:

$$e^{-Ts} = \frac{1}{e^{Ts}} = \frac{1}{1 + Ts + \frac{T^2 s^2}{2!} + \frac{T^3 s^3}{3!} + \dots}$$

L'approximation du premier ordre est:

$$\begin{aligned} e^{-Ts} &\approx \frac{1}{1 + Ts} \\ \text{Gain} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \text{Phase} &= -\arctan(\omega T) \quad \text{rad} \end{aligned}$$

Ces résultats montrent que le gain dépend de la fréquence et que la phase diverge rapidement de la valeur $-\omega T$. Nous verrons qu'avec l'approximation de Padé, on peut obtenir une relation indépendante de la fréquence pour le gain. De plus les relations que l'on obtiendra pour la phase seront plus acceptables que celles obtenues avec Taylor.

Un autre type d'approximation en utilisant Taylor:

$$e^{-sT} = \frac{e^{-s\frac{T}{2}}}{e^{s\frac{T}{2}}} = \frac{1 - \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{2^2} \frac{s^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{T^n}{2^n} \frac{s^n}{n!}}{1 + \frac{T}{2}s + \frac{T^2}{2^2} \frac{s^2}{2!} + \cdots + \frac{T^n}{2^n} \frac{s^n}{n!}}$$

Un autre inconvénient est la présence des pôles instables lorsque l'ordre est supérieur à 5.

E.3 Approximation de Padé

L'objectif est de construire une fraction rationnelle qui nous permettra d'obtenir une approximation acceptable d'une fonction. Cette fonction doit pouvoir être représentée préalablement par une série de Taylor. Car la fraction rationnelle sera obtenue par identification, c'est à dire termes à termes, avec la série de Taylor. La fraction rationnelle sera le quotient de deux polynômes. L'ordre de chacun de ces polynômes dépend de la fonction analysée et aussi du type d'approximation recherché. Elle permettra d'obtenir l'approximation de la fonction à des fin de programmation pour réduire le temps de calcul.

E.3.1 Equations générales de Perron

En particulier pour le cas de la fonction e^t , la fraction rationnelle peut être obtenue avec la limite suivante:

$$e^t = \lim_{(p+q) \rightarrow \infty} \frac{F_{pq}(t)}{G_{pq}(t)}$$

Les formes générales de ces polynômes qui forment la fraction ont été donnés par O. Perron [Pet84] et elles sont:

$$\begin{aligned} F_{pq}(t) &= \frac{1}{(p+q)!} \int_0^\infty t^p (t+z)^q e^{-t} dt \\ G_{pq}(t) &= \frac{1}{(p+q)!} \int_0^\infty t^q (t-z)^p e^{-t} dt \end{aligned}$$

Développées autour de $z = 0$, ces intégrales nous donne les suites suivantes:

$$\begin{aligned} F_{pq}(t) &= \sum_{i=0}^p \frac{(p+q-i)!p!}{(p+q)!(p-1)!} \frac{t^i}{i!} \\ G_{pq}(t) &= \sum_{i=0}^q \frac{(p+q-i)!q!}{(p+q)!(q-1)!} \frac{(-t)^i}{i!} \end{aligned}$$

Ce qui correspond à:

$$\begin{aligned}
 F_{pq}(t) &= 1 + \frac{p}{(p+q)}t + \left(\frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)} \right) \frac{t^2}{2!} + \dots \\
 &\quad + \left(\frac{p(p-1)\cdots 2 \cdot 1}{(p+q)(p+q-1)\cdots(q+1)} \right) \frac{t^p}{p!} \\
 G_{pq}(t) &= 1 - \frac{q}{(p+q)}t + \left(\frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)} \right) \frac{t^2}{2!} + \dots \\
 &\quad + \left(\frac{q(q-1)\cdots 2 \cdot 1}{(p+q)(p+q-1)\cdots(p+1)} \right) \frac{(-t)^q}{q!}
 \end{aligned}$$

E.3.2 Analyse de gain et de phase

En effectuant un changement de variable sur t pour analyser la fonction dans le plan complexe, nous obtenons:

$$e^t |_{t \leftarrow -sT} = e^{-sT}$$

La variable s sera éventuellement substituée par $j\omega$ pour l'étude fréquentielle de la fraction rationnelle. T représente la valeur du retard de la fonction.

L'utilisation de la diagonale de la table de Padé nous procure un gain constant unitaire et invariant selon la fréquence. Ce n'est pas le cas de la phase. La phase ϕ_{Exacte} de la fonction e^{-Ts} est:

$$\begin{aligned}
 \phi_{Exacte} &= arg[(e^{-sT}) |_{s \leftarrow j\omega}] \\
 &= arg(e^{-j\omega T}) \\
 &= arg[\cos(\omega T) - j \sin(\omega T)] \\
 &= arctan \left[\frac{-\sin(\omega T)}{\cos(\omega T)} \right] \\
 &= -\omega T
 \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable, $t \leftarrow -sT$, dans les équations générales de Perron on obtient les relations qui suivantes:

$$\begin{aligned}
 F_{pq}(sT) &= \sum_{i=0}^p \frac{(p+q-i)!p!}{(p+q)!(p-i)!} \frac{(-sT)^i}{i!} \\
 G_{pq}(sT) &= \sum_{i=0}^q \frac{(p+q-i)!q!}{(p+q)!(q-i)!} \frac{(sT)^i}{i!}
 \end{aligned}$$

Avec la propriété que possède la fonction rationnelle puisque nous travaillons avec la diagonale ($p = q = k$) de la table,

$$F_k(sT) = G_k(-sT)$$

La relation de phase se résume à:

$$\begin{aligned}
 \text{Phase} \left[\frac{F_k(sT)}{G_k(sT)} \right]_{s \leftarrow j\omega} &= \arg [F_k(j\omega T)] - \arg [G_k(j\omega T)] \\
 &= 2 \cdot \text{argument}[F_k(j\omega T)] \\
 &= 2 \cdot \text{argument} \left[\sum_{i=0}^k \frac{(2k-i)!k!}{(2k)!(k-i)!} \frac{(-j\omega T)^i}{i!} \right] \\
 &= -2 \cdot \arctan \left[\frac{\sum_{m=i_{\text{impair}}=1}^k \frac{(2k-m)!k!}{(2k)!(k-m)!} \cdot \frac{(\omega T)^m}{m!} \cdot \text{Sign}[j^m]}{\sum_{n=j_{\text{pair}}=0}^k \frac{(2k-n)!k!}{(2k)!(k-n)!} \cdot \frac{(\omega T)^n}{n!} \cdot \text{Sign}[j^n]} \right]
 \end{aligned}$$

En adoptant la définition qui suit pour la fonction de l'opérateur de signe sur la variable complexe j .

$$\begin{aligned}
 \text{Sign}[j^1] &= \text{Sign}[j] = +1 \\
 \text{Sign}[j^2] &= \text{Sign}[j^2] = \text{Sign}[-1] = -1 \\
 \text{Sign}[j^3] &= \text{Sign}[(-1) \cdot j] = -1 \\
 \text{Sign}[j^4] &= \text{Sign}[j^2 \cdot j^2] = \text{Sign}[(-1) \cdot (-1)] = +1 \quad \text{etc...}
 \end{aligned}$$

Notez que selon la valeur de la puissance de j , les termes dans la suite se répartiront au numérateur et au dénominateur lors de l'évaluation de l'argument. La phase ϕ_k de l'approximation d'ordre k de la fonction $e^{-j\omega T}$ varie selon l'ordre de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= -2 \arctan \left[\frac{\left(\frac{k}{2k}\right) \omega T}{1} \right] \\
 \phi_2 &= -2 \arctan \left[\frac{\left(\frac{k}{2k}\right) \omega T}{1 - \left(\frac{k(k-1)}{2k(2k-1)}\right) \frac{(\omega T)^2}{2!}} \right] \\
 &\vdots \\
 \phi_k &= -2 \arctan \left[\frac{\left(\frac{k}{2k}\right) \omega T - \left(\frac{k(k-1)(k-2)}{2k(2k-1)(2k-2)}\right) \frac{(\omega T)^3}{3!} + \cdots + \varphi_i}{1 - \left(\frac{k(k-1)}{2k(2k-1)}\right) \frac{(\omega T)^2}{2!} + \cdots + \varphi_j} \right]
 \end{aligned}$$

Les derniers termes φ_i et φ_j sont donnés par:

$$\begin{aligned}
 \varphi_i &= (-1)^i \left(\frac{k(k-1)(k-2) \cdots 2}{2k(2k-1)(2k-2) \cdots k} \right) \frac{(\omega T)^i}{i!} \\
 &\quad i = k-1 \text{ si } k \text{ est pair} \\
 &\quad i = k \quad \text{si } k \text{ est impair} \\
 \varphi_j &= (-1)^j \left(\frac{k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1}{2k(2k-1)(2k-2) \cdots (k+1)} \right) \frac{(\omega T)^j}{j!} \\
 &\quad j = k \quad \text{si } k \text{ est pair} \\
 &\quad j = k-1 \text{ si } k \text{ est impair}
 \end{aligned}$$

Une liste des fractions rationnelles $\left(\frac{k}{k}\right)_f$ pour k variant de 1 à 10, servant d'approximation à la fonction e^{-sT} , est fourni en annexe E.3.3. Aussi, pour chacune de ces approximations, une autre liste des phases ϕ_k correspondantes est donnée.

E.3.3 Expression de l'approximation de Padé d'ordre k de e^{-sT}

$k = 1$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2}}{1 + \frac{sT}{2}}$$

$k = 2$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{12}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{12}}$$

$k = 3$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{10} - \frac{(sT)^3}{120}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{10} + \frac{(sT)^3}{120}}$$

$k = 4$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{9.3333} - \frac{(sT)^3}{84} + \frac{(sT)^4}{1680}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{9.3333} + \frac{(sT)^3}{84} + \frac{(sT)^4}{1680}}$$

$k = 5$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{9} - \frac{(sT)^3}{72} + \frac{(sT)^4}{1008} - \frac{(sT)^5}{30240}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{9} + \frac{(sT)^3}{72} + \frac{(sT)^4}{1008} + \frac{(sT)^5}{30240}}$$

$k = 6$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.8} - \frac{(sT)^3}{66} + \frac{(sT)^4}{792} - \frac{(sT)^5}{15840} + \frac{(sT)^6}{665280}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.8} + \frac{(sT)^3}{66} + \frac{(sT)^4}{792} + \frac{(sT)^5}{15840} + \frac{(sT)^6}{665280}}$$

$k = 7$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.6666} - \frac{(sT)^3}{62.4} + \frac{(sT)^4}{686.4} - \frac{(sT)^5}{11440} + \frac{(sT)^6}{308880} - \frac{(sT)^7}{17297280}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.6667} + \frac{(sT)^3}{62.4} + \frac{(sT)^4}{686.4} + \frac{(sT)^5}{11440} + \frac{(sT)^6}{308880} + \frac{(sT)^7}{17297280}}$$

$k = 8$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.571428} - \frac{(sT)^3}{60} + \frac{(sT)^4}{624} - \frac{(sT)^5}{9360} + \frac{(sT)^6}{205920} - \frac{(sT)^7}{7207200} + \frac{(sT)^8}{518918400}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.571428} + \frac{(sT)^3}{60} + \frac{(sT)^4}{624} + \frac{(sT)^5}{9360} + \frac{(sT)^6}{205920} + \frac{(sT)^7}{7207200} + \frac{(sT)^8}{518918400}}$$

$k = 9$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.5} - \frac{(sT)^3}{58.285714} + \frac{(sT)^4}{582.8571428} - \frac{(sT)^5}{8160} + \frac{(sT)^6}{159120} - \frac{(sT)^7}{4455360} + \frac{(sT)^8}{196035840} - \frac{(sT)^9}{17643225600}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.5} + \frac{(sT)^3}{58.285714} + \frac{(sT)^4}{582.8571428} + \frac{(sT)^5}{8160} + \frac{(sT)^6}{159120} + \frac{(sT)^7}{4455360} + \frac{(sT)^8}{196035840} + \frac{(sT)^9}{17643225600}}$$

$k = 10$

$$\frac{1 - \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.4445} - \frac{(sT)^3}{57} + \frac{(sT)^4}{553.714285} - \frac{(sT)^5}{7382.85714} + \frac{(sT)^6}{132891.428571} - \frac{(sT)^7}{3255840} + \frac{(sT)^8}{112869120} - \frac{(sT)^9}{60949324800} + \frac{(sT)^{10}}{870442572800}}{1 + \frac{sT}{2} + \frac{(sT)^2}{8.4445} + \frac{(sT)^3}{57} + \frac{(sT)^4}{553.714285} + \frac{(sT)^5}{7382.85714} + \frac{(sT)^6}{132891.428571} + \frac{(sT)^7}{3255840} + \frac{(sT)^8}{112869120} + \frac{(sT)^9}{60949324800} + \frac{(sT)^{10}}{870442572800}}$$

E.3.4 Phase ϕ correspondant aux approximations de Padé d'ordre k

$k = 1$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2}}{1} \right]$$

$k = 2$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{12}} \right]$$

$k = 3$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{120}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{10}} \right]$$

$k = 4$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{84}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{9.3333} + \frac{(\omega T)^4}{1680}} \right]$$

$k = 5$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{72} + \frac{(\omega T)^5}{30240}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{9} + \frac{(\omega T)^4}{1008}} \right]$$

$k = 6$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{66} + \frac{(\omega T)^5}{15840}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{8.8} + \frac{(\omega T)^4}{792} - \frac{(\omega T)^6}{665280}} \right]$$

$k = 7$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{62.4} + \frac{(\omega T)^5}{11440} - \frac{(\omega T)^7}{17297280}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{8.6667} + \frac{(\omega T)^4}{686.4} - \frac{(\omega T)^6}{308880}} \right]$$

$k = 8$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{60} + \frac{(\omega T)^5}{9360} - \frac{(\omega T)^7}{7207200}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{8.571428} + \frac{(\omega T)^4}{624} - \frac{(\omega T)^6}{205920} + \frac{(\omega T)^8}{518918400}} \right]$$

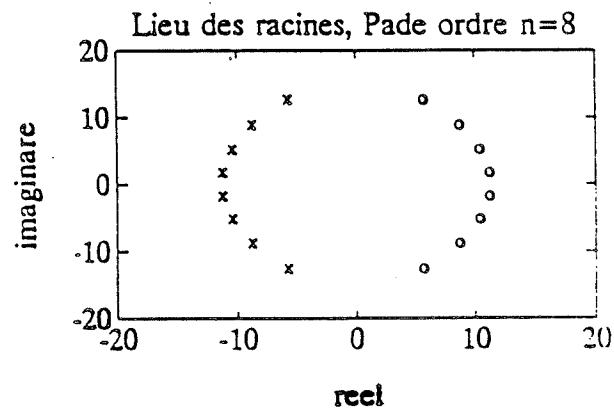
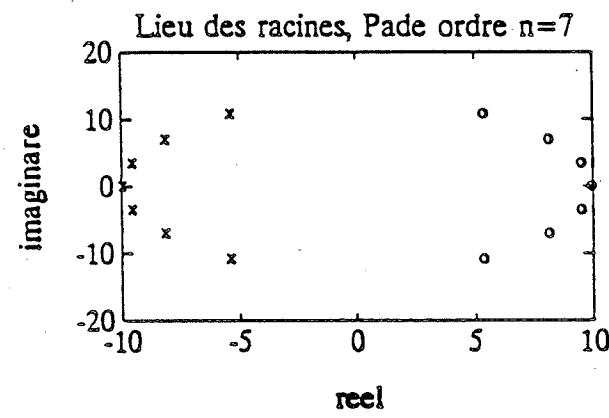
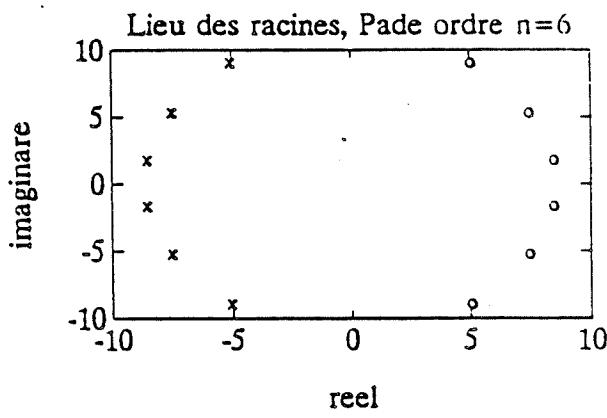
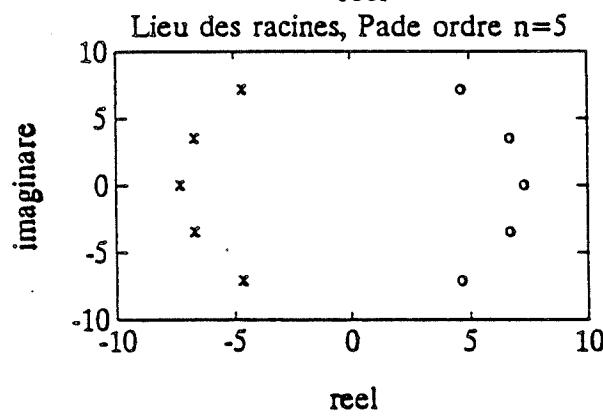
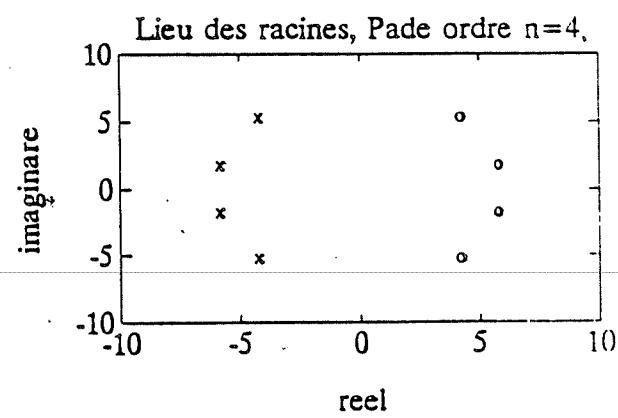
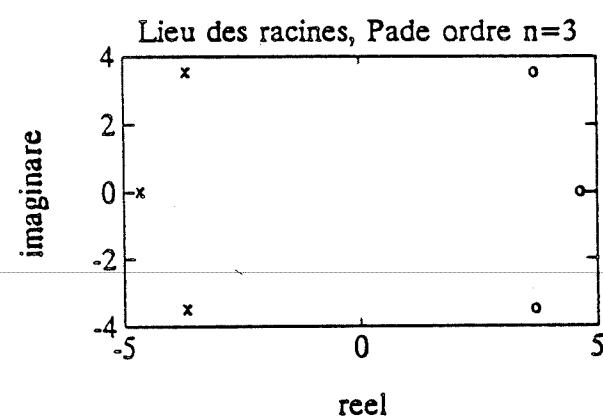
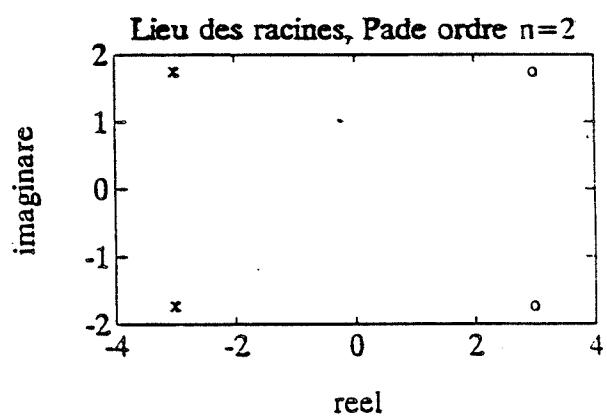
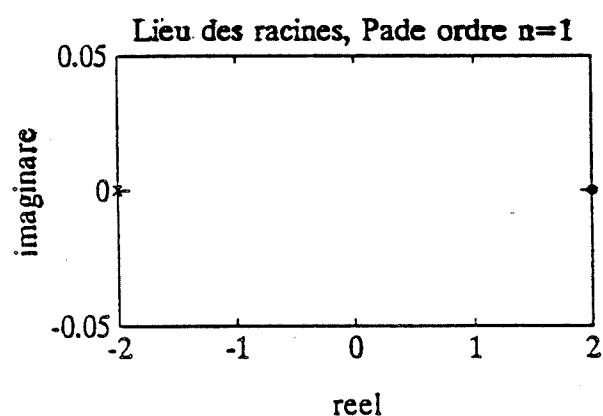
$k = 9$

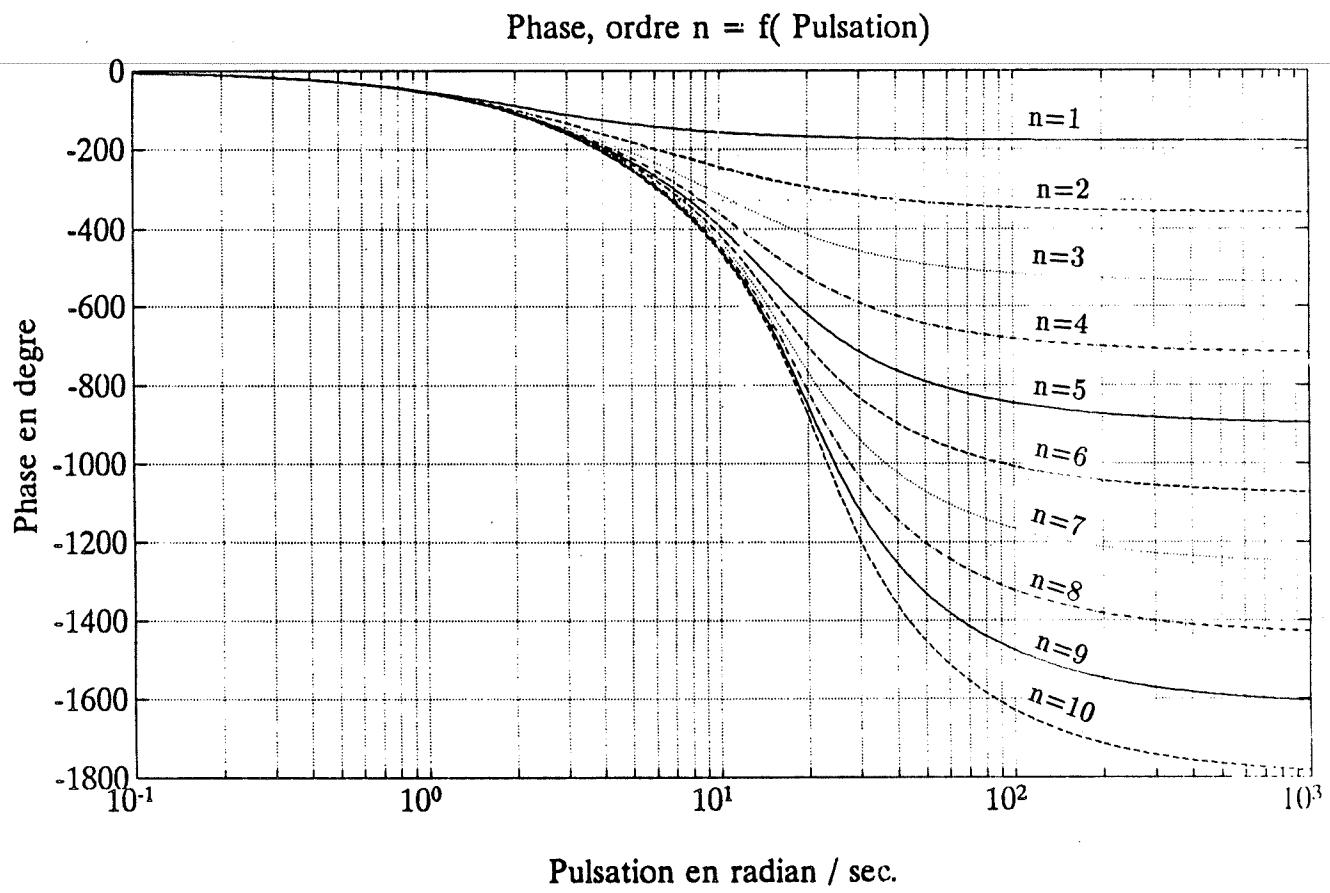
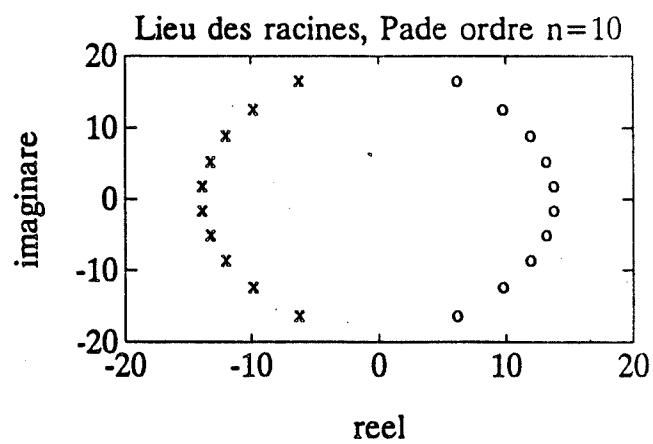
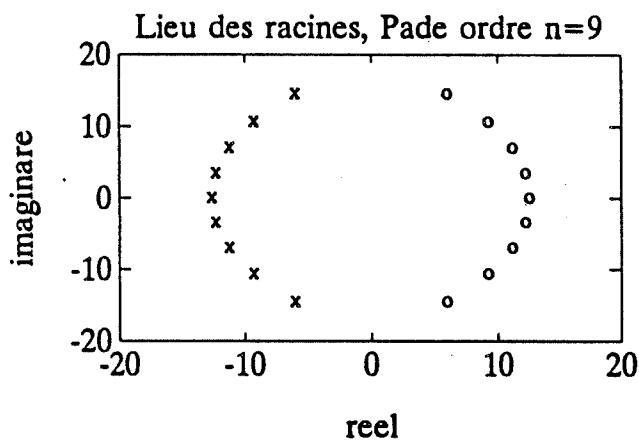
$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{58.285714} + \frac{(\omega T)^5}{8160} - \frac{(\omega T)^7}{4455360} + \frac{(\omega T)^9}{17643225600}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{8.5} + \frac{(\omega T)^4}{582.8571428} - \frac{(\omega T)^6}{159120} + \frac{(\omega T)^8}{196035840}} \right]$$

$k = 10$

$$-2\arctan \left[\frac{\frac{\omega T}{2} - \frac{(\omega T)^3}{57} + \frac{(\omega T)^5}{7382.85714} - \frac{(\omega T)^7}{3255840} + \frac{(\omega T)^9}{60949324800}}{1 - \frac{(\omega T)^2}{8.4445} + \frac{(\omega T)^4}{553.714285} - \frac{(\omega T)^6}{132891.428571} + \frac{(\omega T)^8}{112869120} - \frac{(\omega T)^{10}}{670442572800}} \right]$$

E.3.5 Lieu des pôles et des zéros des approximations d'ordre k





E.3.6 Les racines de l'approximation de Padé d'ordre k

Ordre k=1:

zéro pôle

$$\frac{2}{T} \quad \frac{-2}{T}$$

Ordre k=2:

zéros	pôles
-------	-------

$$\frac{3.000000000000000 + 1.73205080756888i}{T} \quad \frac{-3.000000000000000 + 1.73205080756888i}{T}$$

$$\frac{3.000000000000000 - 1.73205080756888i}{T} \quad \frac{-3.000000000000000 - 1.73205080756888i}{T}$$

Ordre k=3:

zéros	pôles
-------	-------

$$\frac{3.67781464537392 + 3.50876191956745i}{T} \quad \frac{-3.67781464537392 + 3.50876191956745i}{T}$$

$$\frac{3.67781464537392 - 3.50876191956745i}{T} \quad \frac{-3.67781464537392 - 3.50876191956745i}{T}$$

$$\frac{4.64437070925217}{T} \quad \frac{-4.64437070925217}{T}$$

Ordre k=4:

zéros	pôles
-------	-------

$$\frac{4.20757879435925 + 5.31483608371351i}{T} \quad \frac{-4.20757879435925 + 5.31483608371351i}{T}$$

$$\frac{4.20757879435925 - 5.31483608371351i}{T} \quad \frac{-4.20757879435925 - 5.31483608371351i}{T}$$

$$\frac{5.79242120564074 + 1.73446825786901i}{T} \quad \frac{-5.79242120564074 + 1.73446825786901i}{T}$$

$$\frac{5.79242120564074 - 1.73446825786901i}{T} \quad \frac{-5.79242120564074 - 1.73446825786901i}{T}$$

Ordre k=5:

zéros	pôles
$\frac{4.64934860636329 + 7.14204584067596i}{T}$	$\frac{-4.64934860636329 + 7.14204584067596i}{T}$
$\frac{4.64934860636329 - 7.14204584067596i}{T}$	$\frac{-4.64934860636329 - 7.14204584067596i}{T}$
$\frac{7.29347719065923}{T}$	$\frac{-7.29347719065923}{T}$
$\frac{6.70391279830709 + 3.48532283236640i}{T}$	$\frac{-6.70391279830709 + 3.48532283236640i}{T}$
$\frac{6.70391279830709 - 3.48532283236640i}{T}$	$\frac{-6.70391279830709 - 3.48532283236640i}{T}$

Ordre k=6:

zéros	pôles
$\frac{5.03186449562160 + 8.98534590730787i}{T}$	$\frac{-5.03186449562160 + 8.98534590730787i}{T}$
$\frac{5.03186449562160 - 8.98534590730787i}{T}$	$\frac{-5.03186449562160 - 8.98534590730787i}{T}$
$\frac{7.47141671265178 + 5.25254462289416i}{T}$	$\frac{-7.47141671265178 + 5.25254462289416i}{T}$
$\frac{7.47141671265178 - 5.25254462289416i}{T}$	$\frac{-7.47141671265178 - 5.25254462289416i}{T}$
$\frac{8.49671879172661 + 1.73501934646306i}{T}$	$\frac{-8.49671879172661 + 1.73501934646306i}{T}$
$\frac{8.49671879172661 - 1.73501934646306i}{T}$	$\frac{-8.49671879172661 - 1.73501934646306i}{T}$

Ordre k=7:

zéros	pôles
$\frac{5.37135375788663+10.84138826143342i}{T}$	$\frac{-5.37135375788663+10.84138826143342i}{T}$
$\frac{5.37135375788663-10.84138826143342i}{T}$	$\frac{-5.37135375788663-10.84138826143342i}{T}$
$\frac{8.14027832727610+7.03434809542004i}{T}$	$\frac{-8.14027832727610+7.03434809542004i}{T}$
$\frac{8.14027832727610-7.03434809542004i}{T}$	$\frac{-8.14027832727610-7.03434809542004i}{T}$
$\frac{9.94357371705698}{T}$	$\frac{-9.94357371705698}{T}$
$\frac{9.51658105630879+3.47857212226018i}{T}$	$\frac{-9.51658105630879+3.47857212226018i}{T}$
$\frac{9.51658105630879-3.47857212226018i}{T}$	$\frac{-9.51658105630879-3.47857212226018i}{T}$

Ordre k=8:

zéros	pôles
$\frac{5.67796789779532+12.70782259720976i}{T}$	$\frac{-5.67796789779532+12.70782259720976i}{T}$
$\frac{5.67796789779532-12.70782259720976i}{T}$	$\frac{-5.67796789779532-12.70782259720976i}{T}$
$\frac{8.73657843440462+8.82888500094362i}{T}$	$\frac{-8.73657843440462+8.82888500094362i}{T}$
$\frac{8.73657843440462-8.82888500094362i}{T}$	$\frac{-8.73657843440462-8.82888500094362i}{T}$
$\frac{10.40968158127352+5.23235030528357i}{T}$	$\frac{-10.40968158127352+5.23235030528357i}{T}$
$\frac{10.40968158127352-5.23235030528357i}{T}$	$\frac{-10.40968158127352-5.23235030528357i}{T}$
$\frac{11.17577208652655+1.73522889070719i}{T}$	$\frac{-11.17577208652655+1.73522889070719i}{T}$
$\frac{11.17577208652655-1.73522889070719i}{T}$	$\frac{-11.17577208652655-1.73522889070719i}{T}$

Ordre k=9:

zéros

pôles

$$\frac{5.95852159636046+14.58292737668396i}{T} \quad \frac{-5.95852159636046+14.58292737668396i}{T}$$

$$\frac{5.95852159636046-14.58292737668396i}{T} \quad \frac{-5.95852159636046-14.58292737668396i}{T}$$

$$\frac{9.27687977436074+10.63454335087555i}{T} \quad \frac{-9.27687977436074+10.63454335087555i}{T}$$

$$\frac{9.27687977436074-10.63454335087555i}{T} \quad \frac{-9.27687977436074-10.63454335087555i}{T}$$

$$\frac{11.20884363900720+6.99631383575841i}{T} \quad \frac{-11.20884363900720+6.99631383575841i}{T}$$

$$\frac{11.20884363900720-6.99631383575841i}{T} \quad \frac{-11.20884363900720-6.99631383575841i}{T}$$

$$\frac{12.59403836338571}{T} \quad \frac{-12.59403836338571}{T}$$

$$\frac{12.25873580857873+3.47569676697837i}{T} \quad \frac{-12.25873580857873+3.47569676697837i}{T}$$

$$\frac{12.25873580857873-3.47569676697837i}{T} \quad \frac{-12.25873580857873-3.47569676697837i}{T}$$

Ordre k=10:

zéros	pôles
$\frac{6.21783246729838+16.46539891814761i}{T}$	$\frac{-6.21783246729838+16.46539891814761i}{T}$
$\frac{6.21783246729838-16.46539891814761i}{T}$	$\frac{-6.21783246729838-16.46539891814761i}{T}$
$\frac{9.77243913371467+12.44997096494121i}{T}$	$\frac{-9.77243913371467+12.44997096494121i}{T}$
$\frac{9.77243913371467-12.44997096494121i}{T}$	$\frac{-9.77243913371467-12.44997096494121i}{T}$
$\frac{11.93505665719437+8.76989437787966i}{T}$	$\frac{-11.93505665719437+8.76989437787966i}{T}$
$\frac{11.93505665719437-8.76989437787966i}{T}$	$\frac{-11.93505665719437-8.76989437787966i}{T}$
$\frac{13.23058193091439+5.22313584164169i}{T}$	$\frac{-13.23058193091439+5.22313584164169i}{T}$
$\frac{13.23058193091439-5.22313584164169i}{T}$	$\frac{-13.23058193091439-5.22313584164169i}{T}$
$\frac{13.84408981087826+1.73533039080800i}{T}$	$\frac{-13.84408981087826+1.73533039080800i}{T}$
$\frac{13.84408981087826-1.73533039080800i}{T}$	$\frac{-13.84408981087826-1.73533039080800i}{T}$

E.4 Représentation de l'approximation de Padé sous la forme d'une fraction continue "fraction-C"

Soit:

$$e^{-sT} = 1 + \frac{-sT}{1 + \frac{sT/2}{1 + \frac{-sT/6}{1 + \frac{sT/6}{\ddots}}}}$$

et on définit la r^{ieme} fraction continue sous la forme:

$$e^{-sT} = \frac{A_r(sT)}{B_r(sT)}$$

où

$$\begin{aligned} A_r(sT) &= A_{r-1}(sT) + a_r s T A_{r-2}(sT) \quad r = 2, 3, 4, \dots \\ B_r(sT) &= B_{r-1}(sT) + a_r s T B_{r-2}(sT) \quad r = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

avec $A_0 = 1$, $A_1 = 1 - sT$, $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, et

$$a_r = \begin{cases} \frac{1}{2(2l-1)} & r = 2l, \quad l = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{-1}{2(2l-1)} & r = 2l-1, \quad l = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

L'objectif est la réalisation de l'espace d'état [Lam91]:

$$\frac{A_{2l}(sT)}{B_{2l}(sT)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

avec $A \in \Re^{l \times l}$, $B \in \Re^{l \times 1}$, $C \in \Re^{1 \times l}$, $D \in \Re$.

Le numérateur de Padé $A_{2l}(s)$ est:

$$A_{2l}(sT) = \frac{l!}{(2l)!} \sum_{j=0}^l \frac{(2l-j)!}{j!(l-j)!} (-sT)^j$$

et le dénominateur de Padé $B_{2l}(sT)$, est:

$$B_{2l}(sT) = \frac{l!}{(2l)!} \sum_{j=0}^l \frac{(2l-j)!}{j!(l-j)!} (sT)^j$$

quand l'ordre de Padé augmente les coefficients devient très faible.

Par changement de variable, la formule de recurrence est donné par:

$$\tilde{B}_r(z) = \tilde{B}_{r-1}(z) + a_r \tilde{B}_{r-2}(z) \left(\frac{4l}{e}\right)^{l-j}$$

ou $sT = \frac{4l}{e}z$. Le dénominateur en terme de z est explicitement écrit:

$$\tilde{B}_{2l}(z) = \sum_{j=0}^l \frac{(l+j)!l!}{(2l)!(l-j)!j!} \left(\frac{4l}{e}z\right)^{l-j}$$

Considérons le polynôme unitaire $\tilde{P}_l(z)$ tel que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_l(z) &= \frac{(2l)!}{l!} \left(\frac{e}{4l}\right)^l \tilde{B}_{2l}(z) \\ &= \sum_{j=0}^l \frac{(l+j)!}{(l-j)!j!} \left(\frac{e}{4l}\right)^j z^{l-j} \end{aligned} \tag{71}$$

qui représente le dénominateur de Padé dans une nouvelle version. L'équation 71 présente une borne des coefficients de $\tilde{P}_l(z)$, avec $\tilde{P}_l(z) \equiv \sum_{j=0}^l c_j z^{l-j}$,

$$1 \leq c_j \leq \left(\frac{4}{3}\right) \frac{2^l}{\sqrt{l}}$$

et l'estimé

$$\max_{0 \leq j \leq l} c_j \approx (1.8372)^l \sqrt{\frac{3}{\pi l}} \quad \text{pour } l \gg 1.$$

E.4.1 Réalisation de l'algorithme de l'approximation de Padé “fraction-C”

Étape 1 Avec $\tilde{B}_0 = \tilde{B}_1 = 1$,

$$\tilde{B}_{r+1}(z) = \tilde{B}_r(z) + a_{r+1} \tilde{B}_{r-1}(z) \left(\frac{4lz}{e} \right)$$

pour $r = 1, 2, \dots, 2l - 1$ avec $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_{2r-1} = \frac{-1}{2(2r-1)}$, $a_{2r} = \frac{1}{2(2r-1)}$.

Étape 2 Le dénominateur unitaire de Padé $\tilde{P}_l(z)$ définie par l'équation (71):

$$\tilde{P}_l(z) = z^l + c_1 z^{l-1} + \dots + c_l$$

Étape 3 D'après la table- β , il vient:

$$\begin{array}{ccccccccc} \beta_{11} = 1 & \beta_{12} = c_2 & \beta_{13} = c_4 & \cdots & \beta_{1j} = c_{2j} & \cdots \\ \beta_{21} = c_1 & \beta_{22} = c_3 & \beta_{23} = c_5 & \cdots & \beta_{2j} = c_{2j+1} & \cdots \end{array}$$

et pour $i \geq 3$, $j \geq 1$

$$\beta_{ij} = \beta_{(i-2)(j+1)} - \frac{\beta_{(i-2)} \beta_{(i-1)(j+1)}}{\beta_{(i-1)1}}$$

Étape 4: Soit $\tilde{\eta} = \frac{4}{eT}$, calculons:

$$\alpha_0 = c_1 \tilde{\eta}$$

$$\alpha_k = \tilde{\eta} \sqrt{\frac{\beta_{(k+2)1}}{\beta_{(k)1}}} \quad k = 1, 2, \dots, (l-1)$$

Étape 5: La réalisation de l'espace d'état (A, B, C, D) de l'approximation de Padé.

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{l-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_{l-1} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha_0} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} (-1)^{l+1} \sqrt{2\alpha_0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad D = (-1)^l$$

F Résultats et simulations

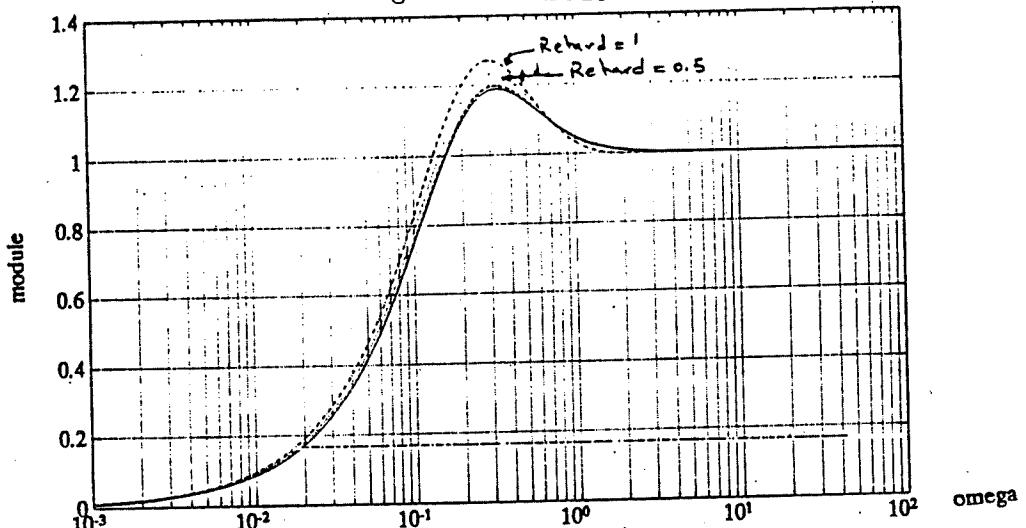
Dans cette section nous présentons une comparaison lors d'une conception d'un contrôleur selon la méthode d'interpolation entre l'approximation de Padé du premier et second ordre [HTB92].

Le forme de la paramétrisation arbitraire, à la forme:

$$u(s) = \frac{0.5}{(3s + 1)(5s + 1)}$$

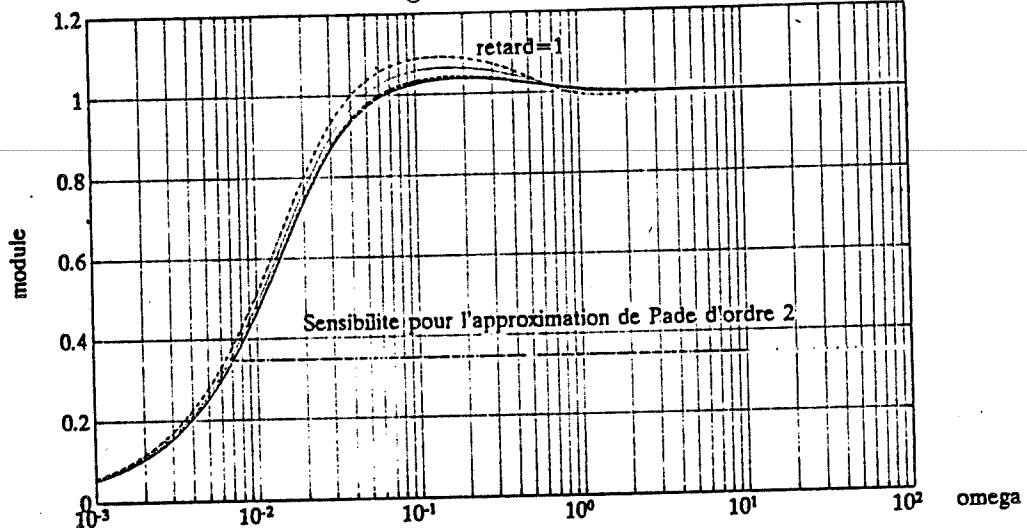
retard (sec)	$t_{5\%}(P_{min})$ (sec)	$t_{5\%}(P_{nom})$ (sec)	$t_{5\%}(P_{max})$ (sec)
0.1	44.87	19.74	12.2
0.5	45.3	20.2	12.56
1	45.78	20.86	12.6

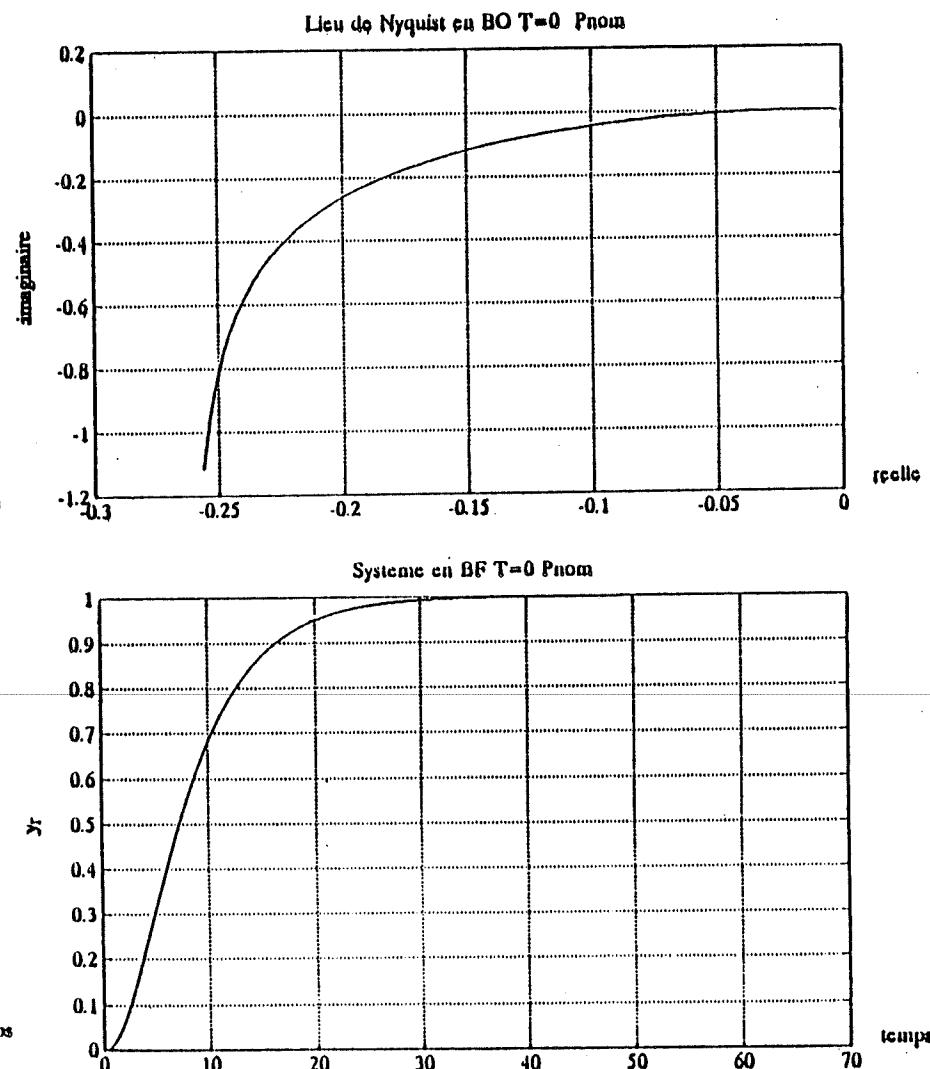
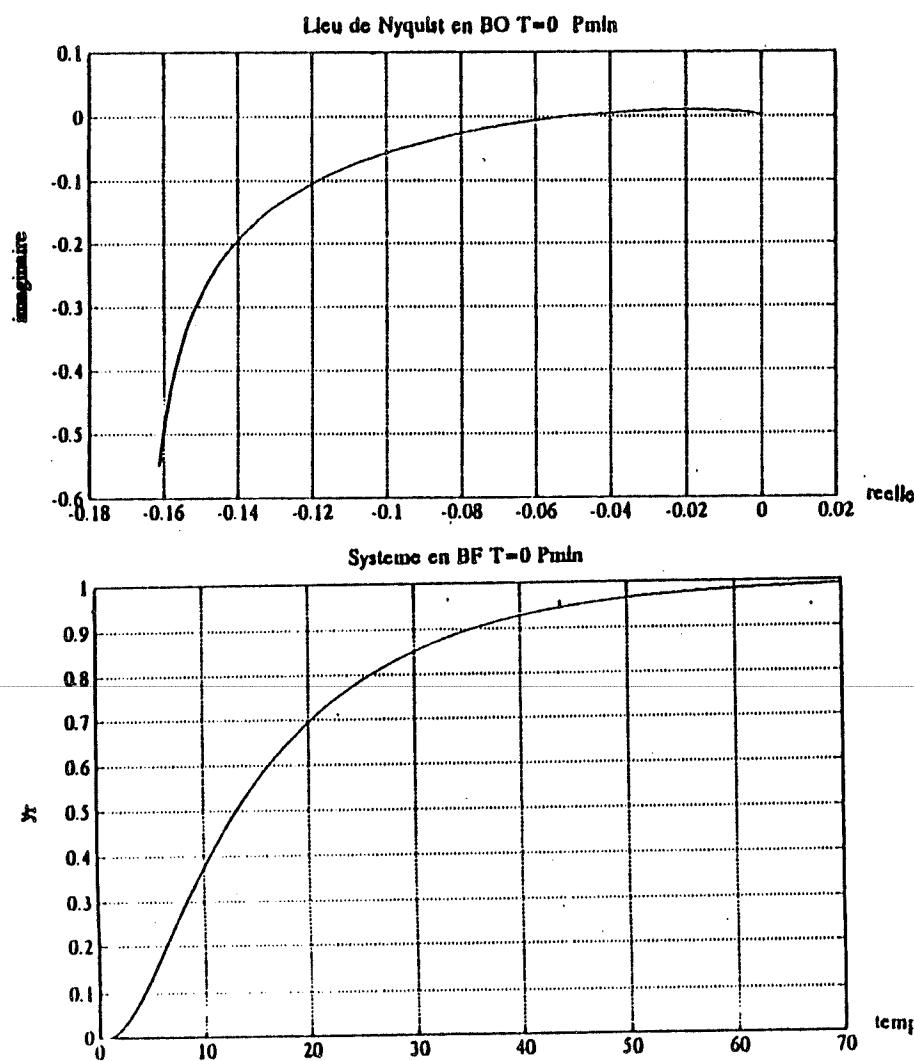
Diagramme de Bode



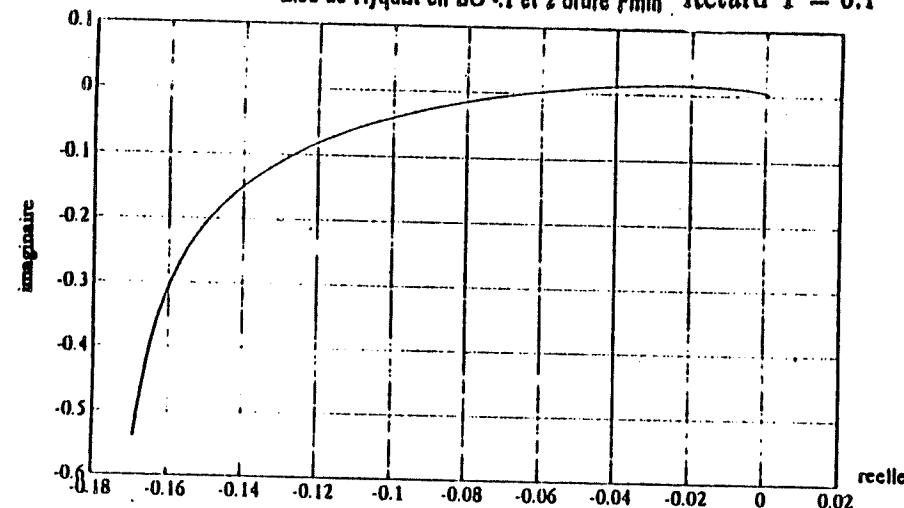
Sensibilité pour l'approximation de Padé d'ordre 1

Diagramme de Bode

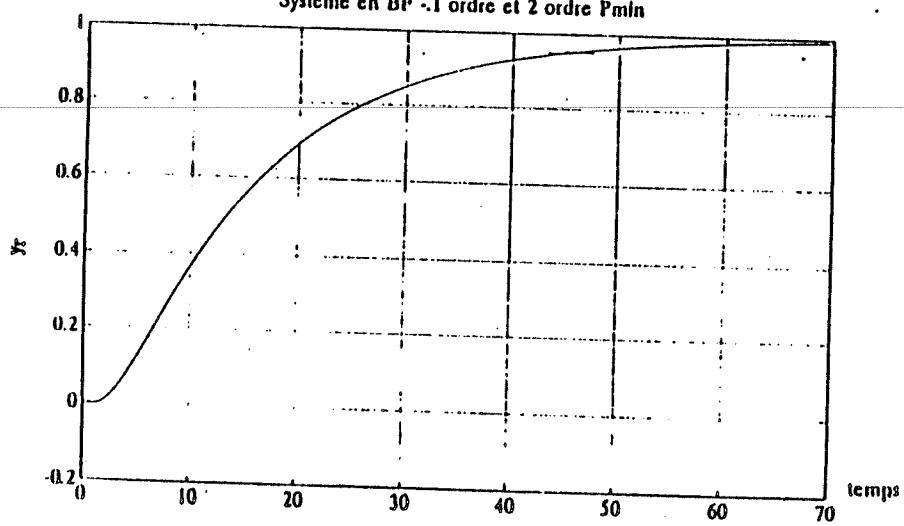




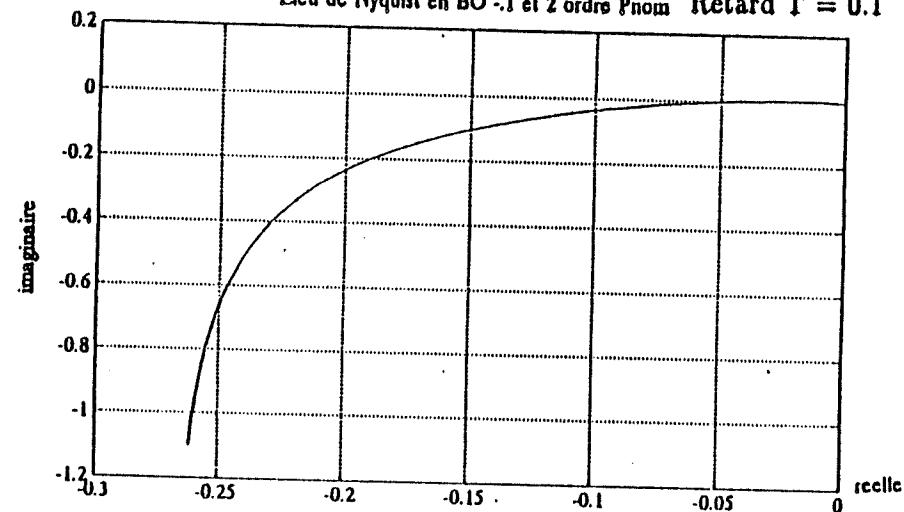
Lieu de Nyquist en BO -1 et 2 ordre Pmin Retard T = 0.1



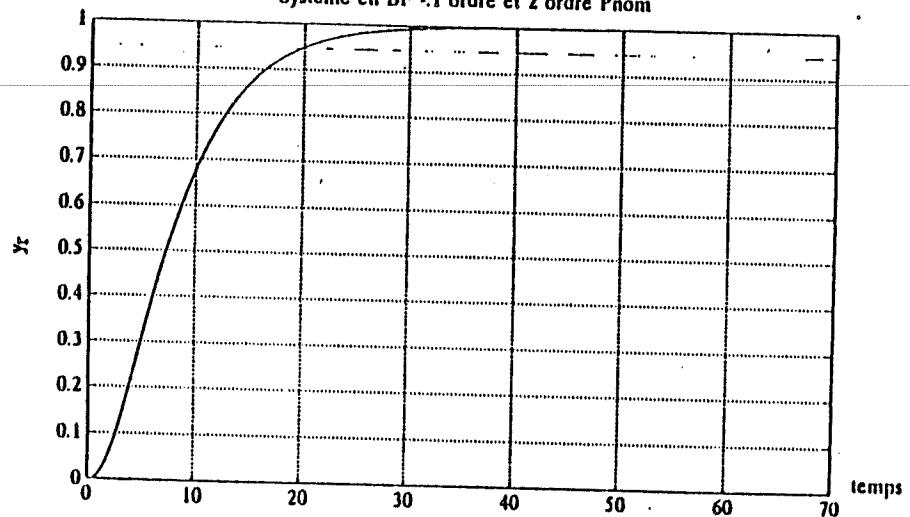
Système en BF -1 ordre et 2 ordre Pmin



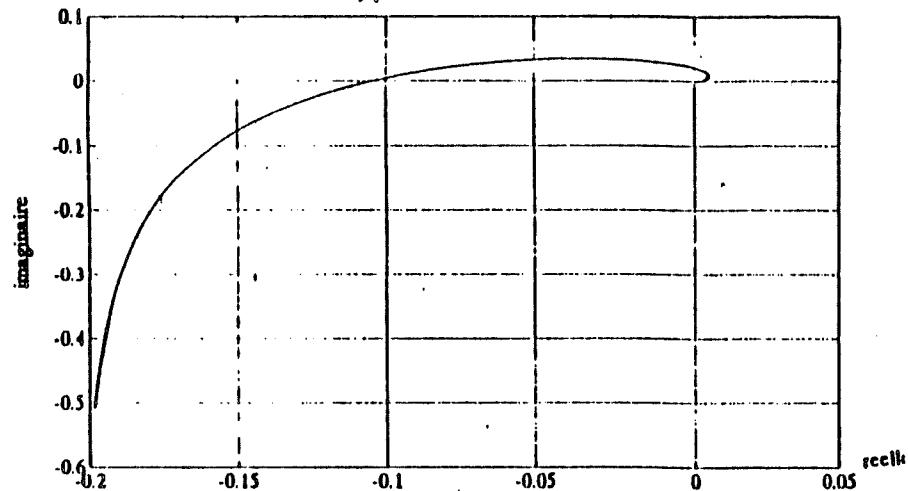
Lieu de Nyquist en BO -1 et 2 ordre Pnom Retard T = 0.1



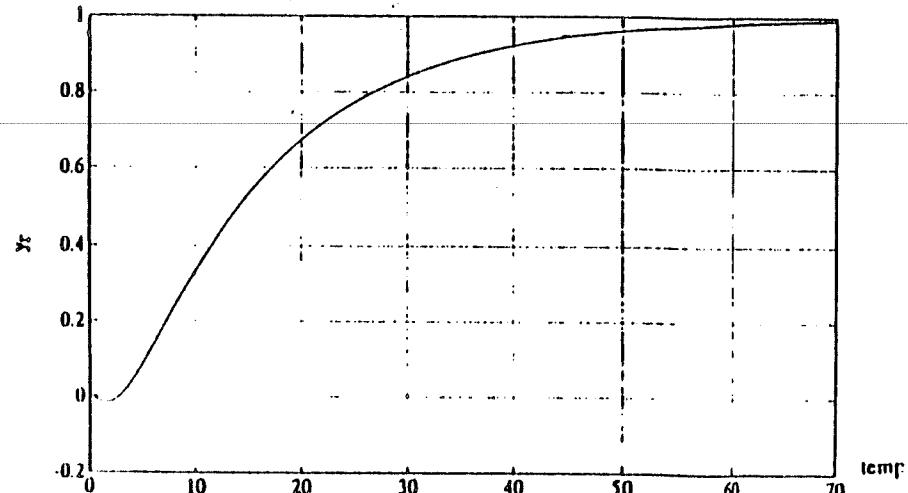
Système en BF -1 ordre et 2 ordre Pnom



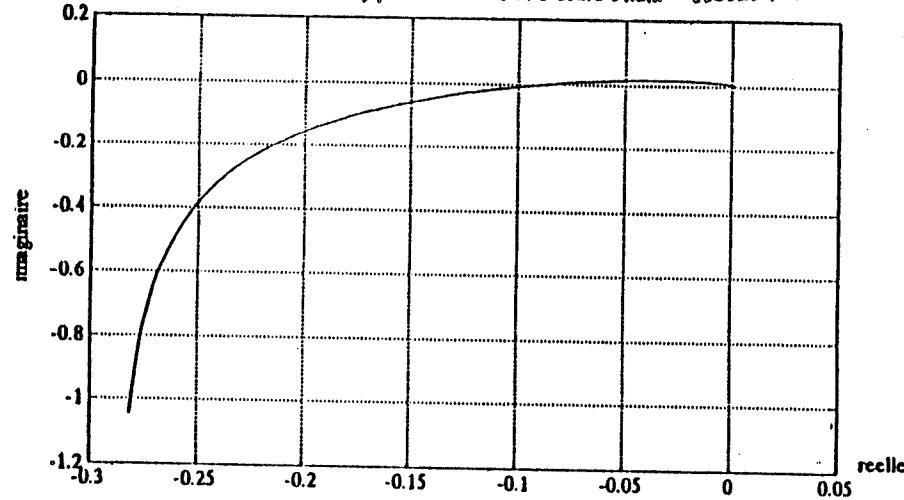
Lieu de Nyquist en BO -1 et 2 ordre Pmin Retard T = 0.5



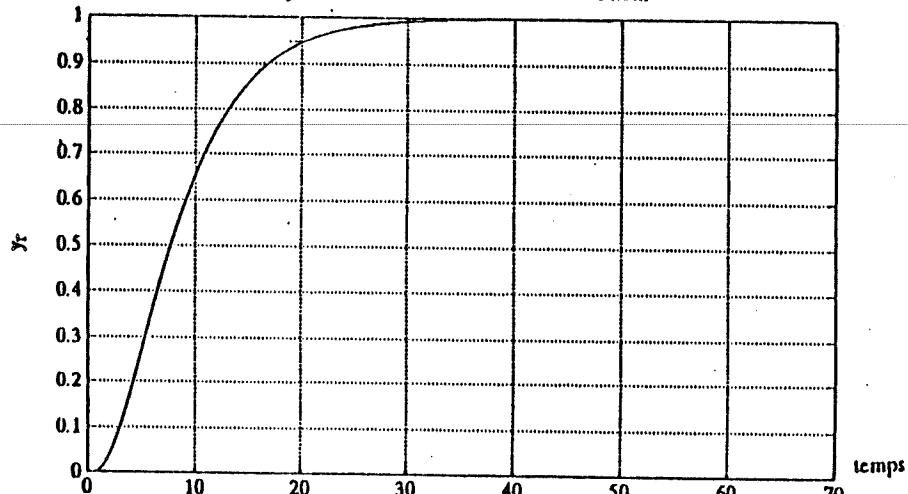
Système en BF -1 ordre et 2 ordre Pmin

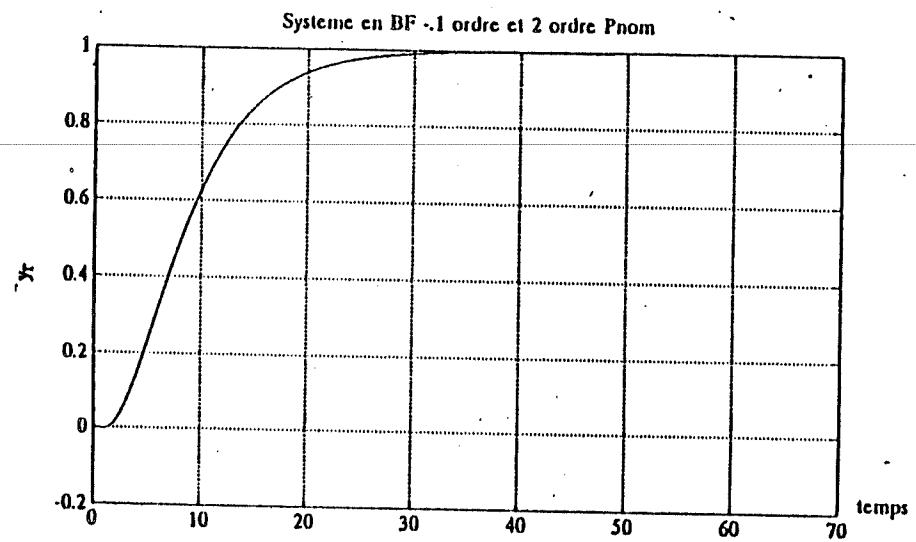
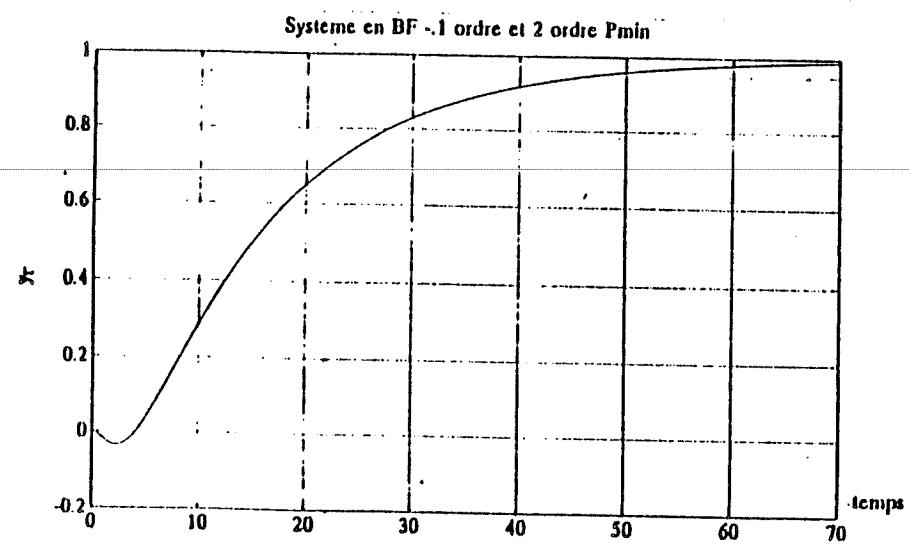
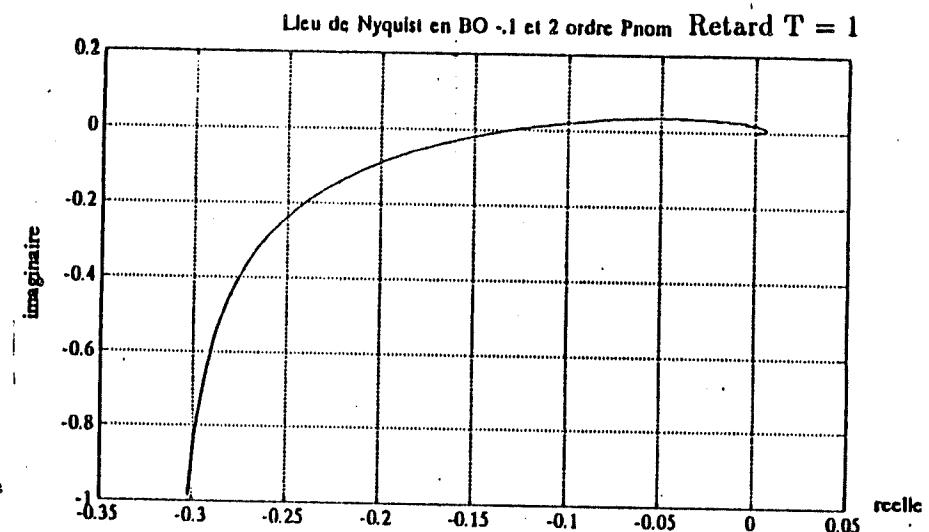
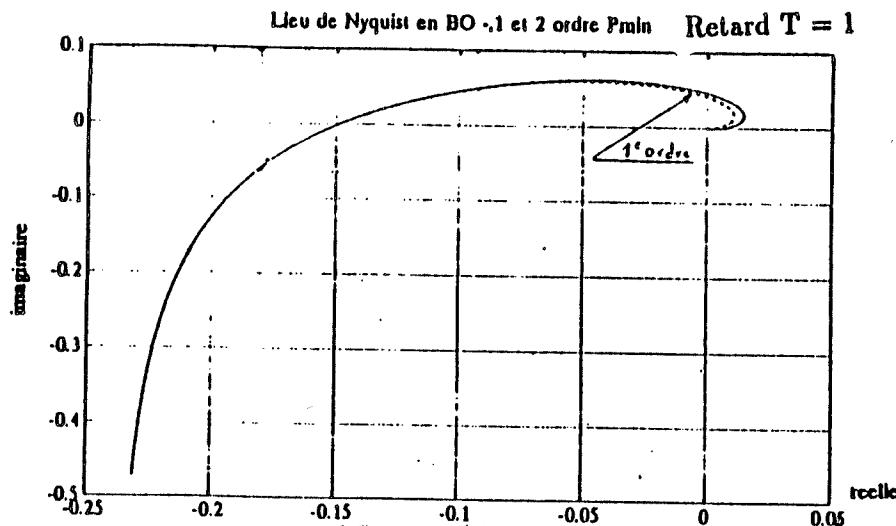


Lieu de Nyquist en BO -1 et 2 ordre Pnom Retard T = 0.5



Système en BF -1 ordre et 2 ordre Pnom





ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



- 3 9334 00289764 1