

**Titre:** Etude des effets non parallèles sur la stabilité d'un écoulement  
Title: tridimensionnel compressible

**Auteur:** Stéphan Boivin  
Author:

**Date:** 1997

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Boivin, S. (1997). Etude des effets non parallèles sur la stabilité d'un écoulement  
Citation: tridimensionnel compressible [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/9233/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/9233/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Ion Paraschivoiu, & Christian Masson  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**ÉTUDE DES EFFETS NON PARALLÈLES SUR LA STABILITÉ  
D'UN ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL COMPRESSIBLE**

STÉPHAN BOIVIN

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

JUIN 1997

© Stéphan Boivin, 1997



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-33114-8

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ÉTUDE DES EFFETS NON PARALLÈLES SUR LA STABILITÉ D'UN  
ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL COMPRESSIBLE

présenté par: BOIVIN Stéphan

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., président

M. PARASCHIVOIU Ion, Ph.D., directeur de recherche

M. MASSON Christian, Ph.D., codirecteur de recherche

M. TEZOK Fatih, Ph.D., membre externe, Bombardier Groupe  
Aéronautique

À mes parents,  
à Julie et ma soeur

## REMERCIEMENTS

La concrétisation de ce mémoire n'aurait pu se faire sans la contribution, de près ou de loin, de plusieurs intervenants.

- Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, Dr. Ion Paraschivoiu, pour m'avoir supporté financièrement durant toute la durée du projet.
- Je veux aussi remercier mon codirecteur de recherche, Dr. Christian Masson, pour son support technique exceptionnel. Sa patience, la qualité de ses interventions et sa grande disponibilité ont été plus qu'essentiels tout au long du travail.
- Un merci tout spécial à Marc Langlois pour son immense dévouement.
- Je ne peux évidemment pas laisser sous silence le soutien moral de mes proches: Julie, Jean, Symone et Nancy. Dans les bons moments comme dans les plus difficiles, leur support fut grandement apprécié et je les en remercie.
- Je désire remercier la compagnie Bombardier Inc., Canadair pour son support technique et financier.
- Je tiens enfin à exprimer ma gratitude à tous les autres membres de la Chaire J.-A. Bombardier (Charles, Pascal, Dan, Philippe, Christophe, Idriss, Stéphane, François et Tayeb) pour le bon temps passé ensemble.

Merci à tous.

## RÉSUMÉ

L'objectif du présent travail est d'évaluer l'influence des effets non parallèles sur la prédiction de la transition. L'ajout des effets non parallèles comprend l'inclusion des termes non parallèles moyens dans les équations de stabilité de même que la considération des variations harmonique et non harmonique des ondes d'instabilité dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque. Les équations *tridimensionnelles* et *compressibles* ainsi obtenues sont résolues en faisant appel à une méthode de perturbations. Une formulation temporelle est employée pour l'obtention de la contribution parallèle du taux d'amplification, alors que les contributions non parallèles proviennent d'une approche spatiale.

Les résultats obtenus à partir de la méthode proposée dans ce mémoire furent comparés aux résultats de Cebeci et al. (1994), Langlois et al. (1997), et Masad et Malik (1994) pour des écoulements tridimensionnels, incompressibles autour d'une aile d'envergure infinie, et aux résultats de Salinas et Casalis (1997) pour le cas d'un écoulement bidimensionnel, compressible évoluant sur une plaque plane. Dans tous les cas, la concordance des résultats est excellente et les résultats confirment que les effets non parallèles peuvent avoir une influence déstabilisatrice importante sur l'écoulement.

La consistance du facteur  $n$  à la transition fut vérifiée à partir de résultats expérimentaux. L'échantillon restreint de résultats démontre que l'ajout des effets non parallèles dans les équations de stabilité n'influence pas de manière significative la variation du facteur  $n$  à la transition.

À la lumière du travail complété, il est recommandé qu'une solution non parallèle, déterminée à partir de l'approche locale traitée dans ce document, serve au démarrage du calcul PSE pour en augmenter l'efficacité et la rapidité.

## ABSTRACT

The objective of the present work is to investigate the importance of nonparallel effects in stability calculations and transition predictions. The nonparallel effects are analysed by including the nonparallel mean flow terms into the linear stability equations, and by taking into account harmonic and non-harmonic variations of disturbances in the direction perpendicular to the wing leading edge. The resulting *three-dimensional, compressible* equations are solved using a perturbation technique. A temporal formulation is used to obtain the parallel contribution to the disturbance growth rate and the nonparallel contributions are obtained from a spatial approach.

The results obtained using the proposed method have been compared with solutions from Cebeci et al. (1994), Langlois et al. (1997), and Masad and Malik (1994) for 3-D, incompressible flows over infinite swept wings, and with solutions obtained by Salinas and Casalis (1997) for the case of 2-D, compressible flow over a flat plate. In all cases, the agreement is excellent and results confirm that nonparallel effects may have a significant destabilizing influence on the stability characteristics of compressible and incompressible flows.

The improvement of the critical  $n$ -factor consistency at transition was quantified by comparison with available experimental data. The small sample of results shows no clear improvement in the consistency of the critical  $n$ -factor at transition.

With the completion of this task, we recommend that a nonparallel solution, as obtained from the perturbation approach proposed herein, be used to initiate PSE calculations more efficiently and systematically.



## TABLE DES MATIÈRES

<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	v
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	vi
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	vii
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	viii
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	x
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	xii
<b>LISTE DES SYMBOLES</b> . . . . .	xiii
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	xvii
 <b>CHAPITRE I: Introduction</b> . . . . .	 1
1.1 Travaux antérieurs . . . . .	1
1.2 Objectifs du travail . . . . .	4
1.3 Contenu du mémoire . . . . .	5
 <b>CHAPITRE II: Théorie linéaire de la stabilité</b> . . . . .	 7
2.1 Préambule . . . . .	7
2.2 Formulation parallèle . . . . .	9
2.2.1 Formulation temporelle . . . . .	12
2.2.2 Formulation spatiale . . . . .	13
2.3 Formulation non parallèle . . . . .	13
2.3.1 Méthode des perturbations . . . . .	15
2.3.2 Condition de solvabilité et problème adjoint . . . . .	17
2.3.3 Taux d'amplification non parallèle . . . . .	19
2.4 Prédiction de la transition - Méthode du $e^n$ . . . . .	22

<b>CHAPITRE III: Méthode numérique . . . . .</b>	<b>25</b>
3.1 Discrétisation du domaine de calcul . . . . .	26
3.2 Discrétisation des équations de stabilité . . . . .	27
3.2.1 Équations du problème aux valeurs propres parallèle . . . . .	27
3.2.2 Équations du problème aux valeurs propres adjoint . . . . .	28
3.2.3 Matrices non parallèles $[E]$ et $[G]$ . . . . .	29
3.3 Algorithme de résolution . . . . .	30
3.3.1 Solution des problèmes aux valeurs propres . . . . .	31
3.3.2 Évaluation de $h_1$ et $h_2$ . . . . .	35
3.3.3 Évaluation du terme de distorsion . . . . .	36
 <b>CHAPITRE IV: Discussion des résultats . . . . .</b>	 <b>37</b>
4.1 Géométries considérées . . . . .	38
4.2 Validation et discussion des effets non parallèles . . . . .	41
4.2.1 Vecteurs propres parallèles . . . . .	41
4.2.2 Taux d'amplification parallèles et non parallèles . . . . .	44
4.3 Prédiction de la transition . . . . .	51
 <b>CHAPITRE V: Conclusion . . . . .</b>	 <b>57</b>
5.1 Résumé du mémoire . . . . .	57
5.2 Contributions du mémoire . . . . .	59
5.3 Recommandations . . . . .	60
 <b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>	 <b>62</b>

## LISTE DES FIGURES

2.1	Système de coordonnées de référence. . . . .	9
2.2	Représentation de la vitesse de groupe. . . . .	21
3.1	Représentation du maillage décalé. . . . .	27
4.1	Cylindre de Poll: Corrélation expérimentale de Poll. . . .	38
4.2	Aile ONERA D: Vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite. . . . .	39
4.3	Aile AS-409: Distribution du Nombre de Mach local (Test 42). . . . .	40
4.4	Aile AS-409: Distribution du nombre de Mach local (Test 79). . . . .	40
4.5	Cylindre de Poll: Vecteurs propres $\hat{u}_o$ , $\hat{v}_o$ , $\hat{p}_o$ et $\hat{w}_o$ nor- malisés à $Re_{\delta^*} = 160.71$ pour $f = 1\,000$ Hz et $\beta^* =$ $1\,464.7\text{ m}^{-1}$ . . . . .	42
4.6	Aile ONERA D: Vecteurs propres $\hat{u}_o$ , $\hat{v}_o$ , $\hat{p}_o$ et $\hat{w}_o$ nor- malisés à $Re_{\delta^*} = 727.14$ pour $f = 3\,000$ Hz et $\beta^* =$ $1\,000\text{ m}^{-1}$ . . . . .	43
4.7	Cylindre de Poll: Taux d'amplification à $Re_{\delta^*} = 188.83$ pour $f = 0$ Hz. . . . .	46
4.8	Cylindre de Poll: Taux d'amplification à $Re_{\delta^*} = 429.28$ pour $f = 0$ Hz. . . . .	46

4.9	Cylindre de Poll: Taux d'amplification à $Re_{\delta^*} = 160.71$ pour $f = 1\,000$ Hz. . . . .	47
4.10	Cylindre de Poll: Taux d'amplification à $Re_{\delta^*} = 370.03$ pour $f = 1\,000$ Hz. . . . .	47
4.11	Cylindre de Poll: Taux d'amplification à $Re_{\delta^*} = 234.13$ pour $\beta^* = 1\,464.7\text{ m}^{-1}$ . . . . .	48
4.12	Aile ONERA-D: Amplification spatiale, orientation du vecteur d'onde et longueur d'onde pour $f = 3\,000$ Hz et $\beta^* = 1\,000\text{ m}^{-1}$ . . . . .	49
4.13	Plaque plane: Taux d'amplification pour $f = 167\,760$ Hz et $\beta^* = 6\,000\text{ m}^{-1}$ . . . . .	51

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Liste des grandeurs de référence . . . . .	11
4.1	Aile AS409: Facteur $n^u$ critique . . . . .	53
4.2	Aile AS409: Fréquence critique . . . . .	53
4.3	Aile AS409: $\beta^*$ critique . . . . .	53
4.4	Aile ONERA D: Facteur $n^u$ critique . . . . .	55
4.5	Aile ONERA D: Fréquence critique . . . . .	55
4.6	Aile ONERA D: $\beta^*$ critique . . . . .	55

## LISTE DES SYMBOLES

$[A], [B], [C]$	Matrices des coefficients parallèles
$[E], [G]$	Matrices des coefficients non parallèles
$[M_t], [P_t]$	Matrices temporelles discrétisées
$[M_{s1}], [M_{s2}], [P_s]$	Matrices spatiales discrétisées
$\mathcal{A}$	Amplitude partielle d'onde non parallèle
$A$	Amplitude de l'onde d'instabilité
$A_o$	Amplitude initiale de l'onde d'instabilité
$C_p, C_v$	Coefficients de chaleur spécifique [kJ/(kg·K)]
$D$	Opérateur $\frac{\partial}{\partial y}$
$f$	Fréquence d'oscillation [Hz]
$g$	$= 1 + \frac{2L}{\delta_e}$
$h_1, h_2$	Coefficients pour la condition de solvabilité non parallèle
$i, j, k, l$	Indices d'identification
$k$	Module du vecteur d'onde
$\vec{k}$	Vecteur d'onde
$\vec{k}_i$	Vecteur d'amplification spatiale
$L$	Distance par rapport à la paroi où $U = U_e/2$
$M$	Nombre de Mach
$N$	Nombre de points de discrétisation dans la direction $y$
$N^q$	Amplitude du facteur d'amplification
$n$	Ordre des matrices discrétisées
$n^q$	Enveloppe en fréquence de $N^q$
$Pr$	Nombre de Prandtl
$P$	Pression moyenne

$p$	Pression instantanée
$Q$	Profil laminaire moyen
$q$	Variable primitive de l'écoulement
$\tilde{q}$	Ondes d'instabilité
$\hat{q}$	Fonction de forme des ondes d'instabilité
$\hat{q}_0$	Amplitude des ondes d'instabilité parallèles
$\hat{q}_1$	Amplitude des ondes d'instabilité non homogènes
$\hat{q}^{adj}$	Composantes du vecteur propre adjoint
$R$	Constante des gaz parfaits
$Re$	Nombre de Reynolds
$Re_{\delta^*}$	Nombre de Reynolds basé sur $\delta^*$
$Re_c$	Nombre de Reynolds basé sur la corde
$t$	Temps
$T$	Température moyenne
$T_u$	Intensité de la turbulence
$U$	Vitesse moyenne dans la direction $x$
$u$	Vitesse instantanée dans la direction $x$
$\vec{V}_e$	Vitesse locale de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite
$V$	Vitesse moyenne dans la direction $y$
$v$	Vitesse instantanée dans la direction $y$
$W$	Vitesse moyenne dans la direction $z$
$w$	Vitesse instantanée dans la direction $z$
$\vec{V}_{gr}$	Vitesse de groupe
$X_i, X_{i-1}$	Points de calcul sur la surface de la géométrie
$x$	Coordonnée dans la direction normale au bord d'attaque
$x_o$	Position initiale
$Y$	$= \frac{1}{\mu} \frac{d^2 \mu}{dT^2}$
$y$	Coordonnée dans la direction normale à la paroi

$z$	Coordonnée dans la direction parallèle au bord d'attaque
$\alpha$	Composante complexe du vecteur d'onde dans la direction $x$
$\alpha_r$	Composante réelle de $\alpha$
$\alpha_i$	Composante imaginaire de $\alpha$
$\alpha_{guess}$	Valeur initiale connue de la valeur propre (Théorie spatiale)
$\beta$	Composante complexe du vecteur d'onde dans la direction $z$
$\beta_r$	Composante réelle de $\beta$
$\beta_i$	Composante imaginaire de $\beta$
$\chi$	$= \frac{\lambda}{\mu}$
$\delta^*$	Épaisseur de déplacement de la couche limite [m]
$\delta_e$	Épaisseur locale de la couche limite
$\Phi$	$= \{\hat{q}\}$
$\Phi'$	$= \alpha\Phi$
$\Gamma$	$= \frac{\lambda}{\mu} + 2$
$\gamma$	$= \frac{C_p}{C_v}$
$\gamma_i$	Taux d'amplification spatiale dans la direction de propagation
$\eta$	Coordonnée transformée dans la direction normale à la paroi
$\kappa$	Coefficient de conduction thermique [W/(m <sup>2</sup> ·K)]
$\Lambda$	Angle de flèche [°]
$\lambda$	Second coefficient de viscosité dynamique
$\mu$	Viscosité dynamique
$\nu$	Viscosité cinématique
$\Omega$	$= \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT}$
$\omega$	Fréquence d'oscillation complexe
$\omega_r$	Composante réelle de $\omega$
$\omega_i$	Composante imaginaire de $\omega$
$\Psi$	Vecteur propre transposé
$\psi$	Orientation locale du vecteur d'onde par rapport à $x$



$\psi_e$	Orientation locale de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite par rapport à $x$
$\psi_{gr}$	Orientation locale de la partie réelle de $\vec{V}_{gr}$ par rapport à $x$
$\bar{\psi}$	Orientation du vecteur d'amplification spatiale
$\theta$	Angle par rapport au bord d'attaque (Cylindre de Poll)
$\rho$	Densité de l'air
$\sigma^q$	Taux d'amplification spatiale dans la direction $x$
$\tau^q$	Nombre d'onde non parallèle dans la direction $x$
$\xi$	Variable d'intégration
$\zeta$	$= \alpha U + \beta W - \omega$
Indice $e$	Valeur à la frontière de la couche limite
Indice $r$	Valeur de référence
Exposant $q$	Onde d'instabilité utilisée pour le calcul non parallèle
Exposant $*$	Valeur dimensionnelle
$\Re$	Partie réelle
$\Im$	Partie imaginaire

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	Coefficients non nuls des matrices $[A]$ , $[B]$ et $[C]$ . .	68
I.1	Matrice $[A]$ . . . . .	68
I.2	Matrice $[B]$ . . . . .	68
I.3	Matrice $[C]$ . . . . .	68
ANNEXE II	Coefficients des matrices $[E]$ et $[G]$ . . . . .	70
II.1	Matrice $[E]$ . . . . .	70
II.2	Matrice $[G]$ . . . . .	70

## CHAPITRE I

### Introduction

#### 1.1 Travaux antérieurs

La recherche sur le phénomène de la transition laminaire/turbulent est essentiellement motivée par le potentiel de réduction de la traînée de frottement d'un avion lorsque l'on prolonge la région de la couche limite laminaire. En effet, il est bien connu que le frottement pariétal augmente de façon significative au moment de la transition vers la turbulence. Il existe différents mécanismes susceptibles de provoquer la transition. En l'absence de fortes perturbations, la transition est principalement causée par l'amplification d'ondes d'instabilité convectées par l'écoulement.

La première étude complète de stabilité fut menée par Orr (1907) et Sommerfeld (1908) qui firent l'analyse d'un écoulement parallèle entre deux plaques planes (écoulement de Poiseuille). Quelques années plus tard, Tollmien (1929) et Schlichting (1933) entreprirent d'appliquer les équations de stabilité de Orr-Sommerfeld à une couche limite parallèle (i.e., où localement, la couche limite est supposée d'épaisseur constante) et obtinrent les premiers résultats numériques. Depuis ce temps, les ondes d'instabilité se propageant dans un écoulement sont communément appelées "ondes de Tollmien-Schlichting" (TS waves) (voir le livre de Schlichting [38]). Les prédictions de Schlichting (1933) furent plus tard vérifiées expérimentalement par Schubauer et Skramstad (1948) [39].

Grâce aux nombreux efforts mis de l'avant au cours des quarante dernières

années, le comportement linéaire des ondes d'instabilité dans un écoulement laminaire est aujourd'hui bien connu. L'arrivée d'ordinateurs de plus en plus puissants rend maintenant possible l'application de la théorie linéaire de la stabilité à des problèmes d'une grande complexité (écoulements tridimensionnels, compressibles). En couplant cette théorie linéaire et parallèle à la méthode empirique du  $e^n$  [41], la transition peut être prédite. La méthode du  $e^n$  demeure d'ailleurs à ce jour la technique la plus utilisée à cette fin.

Pour le cas des écoulements bidimensionnels, la transition observée expérimentalement se produit lorsque le facteur  $n$  atteint une valeur dans le voisinage de 9 [4]. Par contre, dans le cas des écoulements tridimensionnels, il a été noté que la valeur de  $n$  à la transition peut varier entre 7 et 20 [42].

Plusieurs raisons peuvent expliquer cette grande variation du facteur  $n$  à la transition. Une des raisons principales est sûrement le fait que les effets non linéaires sont négligés dans l'analyse de la stabilité. Il a été également démontré que l'introduction des effets de courbure, qui sont souvent négligés dans l'analyse de la stabilité peut diminuer la variation du facteur  $n$  à la transition [42]. La considération des effets non parallèles est également susceptible de diminuer cette variation du facteur  $n$ .

Plusieurs approches théoriques ont été proposées afin d'analyser la stabilité des écoulements non parallèles (Ling et Reynolds (1973) [19], Gaster (1974) [9], Saric et Nayfeh (1975) [37], Itoh (1986) [15], Herbert et Bertolotti (1987) [11],[12], Masad et Malik (1994) [26]). Malgré qu'elles soient basées sur différentes formulations (développement en série, méthode des échelles multiples, équations parabolisées), ces formulations peuvent être regroupées en deux catégories.

La première correspond aux méthodes dites locales (toutes les méthodes à l'exception de celle de Herbert et Bertolotti [11],[12]) où la résolution du

problème non parallèle se fait en débutant avec la solution du problème aux valeurs propres parallèle et ensuite en évaluant une correction non parallèle à partir d'une condition de solvabilité et d'un problème adjoint.

La seconde catégorie de méthodes a été proposée par Herbert et Bertolotti [11]. Dans cette approche, les équations de stabilité sont rendues paraboliques dans la direction principale de l'écoulement moyen ( $x$ ), ce qui permet de résoudre en une étape le problème de stabilité non parallèle par une procédure de marche en  $x$ . C'est l'approche PSE (Parabolised Stability Equations). Cette approche est très prometteuse car elle permet également l'étude des effets non linéaires. Toutefois, elle nécessite une solution initiale qui doit être obtenue par une méthode locale (parallèle ou non parallèle). Langlois et al. [18] ont démontré que le démarrage de la procédure de marche en  $x$  des PSE à partir d'une solution parallèle peut produire des résultats erronés et recommandent donc l'utilisation d'une solution initiale non parallèle.

Deux modèles mathématiques pour l'étude de la stabilité d'écoulements non parallèles et pouvant être solutionnés de façon locale ont été récemment proposés [35],[26]. Dans leur publication de 1993, Lin et Reed [35] firent l'addition des effets non parallèles pour l'étude de la stabilité d'une couche limite tridimensionnelle et incompressible autour d'une aile d'envergure infinie. Afin d'alléger les calculs, seuls les termes non parallèles se rattachant à l'écoulement moyen furent introduits dans la formulation; on n'allouait donc aux ondes d'instabilité qu'une variation harmonique (sans variation en amplitude) dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque. Leurs résultats montrent que l'addition des termes non parallèles déstabilise l'écoulement par rapport à la formulation parallèle. Conséquemment, la croissance des ondes d'instabilité représentée par le calcul du facteur  $n$  se fait de façon plus rapide lorsque les termes non parallèles sont considérés. Bref, selon leur étude, les

termes non parallèles ont un effet déstabilisateur sur l'écoulement.

Plus tard, Masad et Malik [26] reprirent le même type d'analyse mais cette fois, en considérant la variation non harmonique des ondes d'instabilité dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque. Tout comme pour le travail de Lin et Reed, les termes non parallèles liés à l'écoulement moyen étaient inclus dans les équations de stabilité et l'étude fut menée pour un écoulement autour d'un cylindre en flèche d'envergure infinie [34]. La formulation était tridimensionnelle, incompressible et exprimée en coordonnées cylindriques, i.e. les effets liés à la courbure de surface étaient considérés. Une fois le système d'équations non parallèles construit, une méthode de perturbations était utilisée pour faire le calcul du facteur d'amplification spatiale non parallèle. Leurs résultats sont unanimes: l'addition des termes non parallèles dans la formulation a clairement un effet déstabilisateur sur l'écoulement.

## 1.2 Objectifs du travail

La Chaire en aéronautique J.-A. Bombardier travaille depuis quelques années au développement d'un code d'analyse de stabilité applicable à des ailes de géométrie arbitraire opérant en régime transsonique (SCOLIC) [Masson, Langlois et Paraschivoiu, 1995]. Le code fut à l'origine construit pour traiter un écoulement tridimensionnel, compressible et ne comportait alors qu'une formulation dite parallèle [28], i.e. pour laquelle la couche limite est supposée d'épaisseur constante. Tout récemment, le code fut modifié pour tenir compte des effets liés à la courbure des surfaces [17]. On croit maintenant que l'introduction des contributions non parallèles, jusqu'ici négligées, devrait également améliorer la précision de la prédiction de la position de la transition obtenue à l'aide de la méthode du  $e^n$ . Le présent mémoire discute donc les

résultats obtenus à l'aide d'une méthode locale suite à l'addition des termes non parallèles dans les équations linéaires de la stabilité. La méthode locale non parallèle proposée dans ce mémoire pourra également être utilisée pour produire la solution initiale non parallèle nécessaire pour la solution des PSE par une procédure de marche en espace.

### 1.3 Contenu du mémoire

Le Chapitre II traite de l'aspect mathématique du travail en présentant une description complète des formulations parallèle et non parallèle. La méthode de résolution des équations de stabilité non parallèles est basée sur la méthode des perturbations. Contrairement à la méthode de marche en espace [12] généralement utilisée pour la solution des équations de stabilité parabolisées (PSE), l'application d'une méthode de perturbation permet la résolution des équations non parallèles de manière locale. Les détails concernant le calcul du facteur  $n$  pour un écoulement non parallèle sont également inclus à la fin du Chapitre II.

Dans le Chapitre III, l'aspect numérique du travail est abordé. On y donne une description du maillage employé ainsi que tous les détails concernant la discrétisation par différences finies des équations de stabilité non parallèles. On termine en décrivant l'algorithme utilisé pour le calcul du taux d'amplification spatiale non parallèle.

Les résultats obtenus pour fins de validation sont ensuite présentés dans le Chapitre IV. On y trouve des résultats s'appliquant à des écoulements 3-D incompressibles, et quelques remarques sont faites sur des résultats obtenus pour un cas compressible. En incompressible, deux géométries furent étudiées: un cylindre en flèche d'envergure infinie (cylindre de Poll [34]) et une aile

ONERA D d'envergure infinie. Les résultats compressibles présentés à la fin du Chapitre IV furent obtenus pour un écoulement bidimensionnel sur une plaque plane.

Deux échantillons de résultats expérimentaux sont finalement présentés à partir desquels il fut possible d'apprécier l'importance des effets non parallèles sur la prédiction de la transition. Pour ce faire, on a réalisé une étude comparative du facteur  $n$  à la transition pour les cas d'une aile AS409 (ONERA/CERT) et d'une aile ONERA D (ONERA/CERT).

Les principales conclusions et recommandations en rapport avec la réalisation du travail décrit dans ce mémoire sont énoncées au Chapitre V.



## CHAPITRE II

### Théorie linéaire de la stabilité

#### 2.1 Préambule

La théorie linéaire de stabilité permet l'analyse des principales caractéristiques de stabilité de l'écoulement laminaire près d'une surface. Couplée à la méthode du  $e^n$ , elle constitue un outil approprié pour la prédiction de la transition d'un écoulement autour d'une aile en régime transsonique. Cependant, avant d'entreprendre une analyse de stabilité, les caractéristiques de l'écoulement laminaire (champ de vitesses moyen) se doivent d'être connues. Ce champ de vitesses moyen peut être obtenu à partir de la résolution des équations de Navier-Stokes ou de couche limite.

Il est important de noter que les calculs visqueux se doivent d'être faits avec la plus grande précision, surtout pour les régions se situant tout près de la paroi puisque les premières et deuxièmes dérivées dans la direction normale à la paroi des propriétés de l'écoulement sont présentes dans les équations de stabilité. En général, une telle exigence ne peut être respectée efficacement à l'aide de codes de résolution des équations de Navier-Stokes. Par conséquent, la plupart des études de stabilité présentées dans la littérature font appel à une formulation de couche limite pour le calcul des caractéristiques de l'écoulement moyen. Tout en permettant d'obtenir une beaucoup plus grande précision près de la surface, la résolution des équations de couche limite requiert un minimum de ressources informatiques.

Pour réaliser les calculs de couche limite, on se doit de connaître la distribution de pression sur la surface d'intérêt. Pour ce faire, des distributions de pression expérimentales ou obtenues par la résolution d'équations non visqueuses appropriées (équation de Laplace, équations du potentiel complet, équations d'Euler) sont utilisées. Bref, quatre étapes majeures composent une étude complète de stabilité:

- le calcul de l'écoulement externe par la solutions d'équations non visqueuses;
- le calcul du champ de vitesse tout près de la paroi par la résolution des équations de couche limite;
- la résolution des équations linéaires de la stabilité;
- l'utilisation de la méthode du  $e^n$  pour corréler les caractéristiques de stabilité à la position de la transition.

### **Calcul de l'écoulement non visqueux**

Lorsque les distributions de pression à la surface ne sont pas connues de manière expérimentale, on se doit de les prédire en faisant appel à un code non visqueux. Toutefois, dans le présent travail, des distributions de pression mesurées expérimentalement ont été utilisées. Dans le cas du cylindre de Poll [34] (utilisé pour la plupart des résultats présentés dans le Chapitre IV), le champ de vitesse est exprimé à l'aide d'une corrélation d'ordre 7 des résultats expérimentaux. Cette corrélation dépend de l'angle de flèche et de  $\theta$  (voir Poll [34]).

### **Calcul de couche limite**

Les couches limites tridimensionnelles sont calculées à l'aide du code

CLDF [13] dans lequel les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont discrétisées suivant les lignes de courant locales. Le système d'axes utilisé est curviligne et fixé à la surface. On ne considère que la forme cartésienne des équations, et le système de coordonnées est orienté par rapport au plan tangent local. Les hypothèses habituelles de couche limite sont utilisées pour la résolution et le code peut traiter des couches limites autant laminares que turbulentes. Le lecteur désirant obtenir toutes informations supplémentaires est invité à consulter le manuel d'utilisation [14].

## 2.2 Formulation parallèle

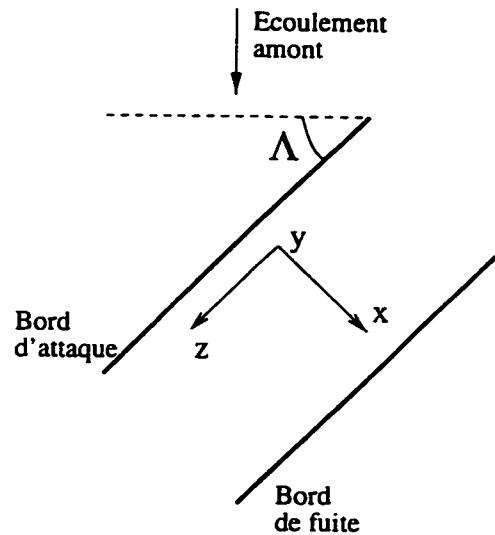


Figure 2.1 Système de coordonnées de référence.

En se référant au système de coordonnées cartésien local de la Fig. 2.1, les variables primitives de l'écoulement à un temps donné (les composantes de vitesse  $u, v, w$  dans les directions  $x, y$  et  $z$  respectivement, la pression  $p$  et la température  $T$ ) sont exprimées sous la forme:

$$q(x, y, z, t) = Q(y) + A_o \hat{q}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} \quad (2.1)$$

où  $Q(y)$  représente le profil laminaire moyen et  $\hat{q}(y)$  la fonction de forme des ondes d'instabilité.  $\alpha$  et  $\beta$  représentent les composantes en  $x$  et en  $z$  du nombre d'onde et  $\omega$ , la fréquence.  $A_o$  est l'amplitude initiale de l'onde d'instabilité.

Les variables instantanées telles que définies dans l'Éq.(2.1) sont d'abord introduites dans les équations de Navier-Stokes, de continuité et d'énergie. Puis, en soustrayant des équations la solution correspondant à l'écoulement laminaire moyen, on élimine les termes non homogènes. En négligeant les termes non linéaires et d'ordre supérieur, on obtient un système homogène de cinq équations différentielles linéaires du second ordre ayant la forme suivante:

$$([A]D^2 + [B]D + [C]) \{\hat{q}\} = 0 \quad (2.2)$$

où  $D = d/dy$  et  $\{\hat{q}\}$  est le vecteur des fluctuations. Deux des composantes de  $\{\hat{q}\}$  sont construites à partir de combinaisons linéaires des variables primitives (voir transformation de Stuart [10]). Ainsi:

$$\{\hat{q}\} = (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{T}, \alpha \hat{w} - \beta \hat{u})^T \quad (2.3)$$

Pour un écoulement tridimensionnel et compressible, les matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[C]$  sont de dimension 5x5 et leurs coefficients sont présentés à l'Annexe I. Tous ces coefficients sont adimensionnels et les grandeurs de référence utilisées sont données au Tableau 2.1 (l'indice  $e$  indique une propriété évaluée à la frontière supérieure de la couche limite et  $\delta^*$  est l'épaisseur de déplacement de la couche limite).

Il est à noter que pour un écoulement 3-D incompressible, l'application de la transformation de Stuart permet de réduire l'analyse de stabilité en un

simple problème bidimensionnel.

Variable	Grandeur de référence
$U, V, W$	$U_e$
$t$	$\delta^*/U_e$
$P$	$\rho_e U_e^2$
$T$	$T_e$
$\mu, \lambda$	$\mu_e$
$\kappa$	$\mu_e C_p$
$\rho$	$\rho_e$
$x, y, z$	$\delta^*$

Tableau 2.1 Liste des grandeurs de référence

Les conditions aux limites du problème sont homogènes (les fluctuations doivent tendre vers zéro à la paroi et à l'extérieur de la couche limite, sauf pour la pression) et sont données par

$$\left. \begin{array}{c} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{T} \\ \hat{w} \end{array} \right\} = 0 \quad \text{à} \quad y = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \infty \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Les équations de stabilité (Éq.(2.2)) et leurs conditions aux limites homogènes (Éq.(2.4)) constituent un problème aux valeurs propres dans lequel  $\alpha, \beta$  et  $\omega$  sont les valeurs propres et  $\{\hat{q}\}$  le vecteur propre. Ainsi, une solution non triviale existe seulement pour certaines combinaisons des paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\omega$ .

En général,  $\alpha, \beta$  et  $\omega$  sont complexes (six paramètres réels sont donc impliqués dans une étude de stabilité). En considérant les composantes réelle et imaginaire du problème aux valeurs propres, deux relations réelles seulement sont disponibles. Le système est donc ouvert (plus d'inconnues que d'équations disponibles). Il devient de ce fait nécessaire d'émettre certaines hypothèses de

départ concernant la nature des ondes d'instabilité. En supposant que les ondes d'instabilité croient dans le temps seulement, on obtient la formulation temporelle. Pour ce faire, on doit considérer  $\alpha$  et  $\beta$  réels, et  $\omega$  complexe. Lorsque l'on suppose que les ondes d'instabilité croient dans l'espace seulement, on obtient la formulation spatiale. Dans ce cas,  $\omega$  est réel et  $\alpha$  et  $\beta$  sont complexes.

### 2.2.1 Formulation temporelle

En théorie temporelle, on pose que  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels, alors que  $\omega$  est complexe, i.e.  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ . Physiquement, on suppose donc pour la formulation temporelle que l'amplification des ondes d'instabilité n'est fonction que du temps. Ainsi, les variables de l'écoulement (vitesse, pression et température) prennent la forme:

$$q(x, y, z, t) = Q(y) + A_o \hat{q}(y) e^{\omega_i t} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega_r t)} \quad (2.5)$$

Le taux d'amplification des ondes d'instabilité dépend essentiellement du signe de  $\omega_i$ : pour  $\omega_i < 0$ , les ondes d'instabilité sont amorties, pour  $\omega_i > 0$ , les ondes d'instabilité croissent alors que pour  $\omega_i = 0$ , l'amplification est nulle.  $\omega_r$  représente la fréquence d'oscillation et  $\alpha$  et  $\beta$  sont les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans les directions  $x$  et  $z$  respectivement. L'angle  $\psi$  compris entre le vecteur  $\vec{k}$  et la direction perpendiculaire au bord d'attaque ( $x$ ) est donné par la relation:

$$\psi = \arctan \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \quad (2.6)$$

### 2.2.2 Formulation spatiale

Dans le cas de la formulation spatiale, on suppose que le taux d'amplification des ondes d'instabilité varie dans l'espace, i.e. dans les directions  $x$  et  $z$ . Lorsque la théorie spatiale est employée,  $\omega$  est donc réel alors que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont complexes, i.e.  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  et  $\beta = \beta_r + i\beta_i$ . En introduisant l'hypothèse spatiale, les variables de l'écoulement sont exprimées sous la forme:

$$q(x, y, z, t) = Q(y) + A_o \hat{q}(y) e^{-\alpha_i x - \beta_i z} e^{i(\alpha_r x + \beta_r z - \omega_r t)} \quad (2.7)$$

Avec la théorie spatiale, le vecteur d'onde est défini tel que  $\vec{k} = (\alpha_r, \beta_r)$ ; on définit également un nouveau paramètre appelé "vecteur d'amplification" ayant la forme  $\vec{k}_i = (-\alpha_i, -\beta_i)$ . Le vecteur d'onde et le vecteur d'amplification forment avec l'axe des  $x$  les angles:

$$\psi = \arctan \left( \frac{\beta_r}{\alpha_r} \right) \quad (2.8)$$

$$\bar{\psi} = \arctan \left( \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right) \quad (2.9)$$

Pour une aile d'envergure infinie, on peut considérer que  $\beta_i = 0$ . Dans ce cas, les ondes d'instabilité sont amplifiées pour  $\alpha_i < 0$ , neutres pour  $\alpha_i = 0$  et amorties pour  $\alpha_i > 0$  (dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque  $x$ ).

## 2.3 Formulation non parallèle

Comme pour l'analyse de stabilité parallèle, les vitesses instantanées ( $u, v, w$ ), la pression instantanée ( $p$ ) et la température instantanée ( $T$ ) sont représentées par la somme de deux contributions distinctes: une valeur se rattachant à l'écoulement laminaire (invariante dans le temps) et une onde d'instabilité.

En posant que  $x$  est la coordonnée dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque,  $y$  la coordonnée dans la direction normale à la surface et  $z$ , la coordonnée dans la direction parallèle au bord d'attaque, les cinq variables primitives de l'écoulement se présentent sous la forme:

$$q(x, y, z, t) = Q(x, y) + \tilde{q}(x, y, z, t) \quad (2.10)$$

où

$$\tilde{q}(x, y, z, t) = \mathcal{A}(x)\hat{q}(x, y)e^{i(\int \alpha dx + \beta z - \omega t)} \quad (2.11)$$

Dans les Éqs.(2.10) et (2.11),  $Q(x, y)$  représente l'écoulement non parallèle et laminaire moyen et  $\hat{q}(x, y)$ , la fonction de forme des ondes d'instabilité.  $\mathcal{A}(x)$  est appelé *amplitude partielle d'onde*,  $(\alpha, \beta)$  sont les composantes complexes du nombre d'onde et  $\omega$  représente la pulsation complexe.

Pour les besoins de l'étude de stabilité d'écoulements non parallèles, quatre aspects importants sont à noter:

- (i) Les variables primitives de l'écoulement moyen varient dans les directions  $x$  et  $y$ , i.e.  $Q(x, y)$ .
- (ii) L'amplification des ondes d'instabilité est donnée par le produit de deux contributions distinctes,  $\mathcal{A}(x)$  et  $\hat{q}(x, y)$ , toutes deux variant dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque  $x$ .
- (iii)  $\alpha$  varie dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque, i.e  $\alpha(x)$
- (iv) On ne considère qu'une variation faible en  $x$  pour  $Q(x, y)$ ,  $\hat{q}(x, y)$  et  $\mathcal{A}(x)$  i.e., toutes les dérivées d'ordre supérieur à un en  $x$  sont négligées.

Les équations de stabilité compressibles et non parallèles sont obtenues en substituant l'Éq.(2.10) dans les équations de Navier-Stokes, de continuité et d'énergie. Par le biais de la solution moyenne laminaire, certains termes



non homogènes sont éliminés. En négligeant tous les termes non linéaires, on obtient un système de cinq équations différentielles ordinaires du second ordre ayant la forme:

$$([A]D^2 + [B]D + [C])\{\hat{q}\} = \frac{[E(\{\hat{q}\})]}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{dx} + [G(\{\hat{q}\})] \quad (2.12)$$

Les matrices 5x5  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[C]$  demeurent inchangées par rapport à la formulation parallèle. Les contributions non parallèles sont comprises dans les matrices  $[E]$  et  $[G]$  de dimension  $[5 \times 1]$ . Dans l'Éq.(2.12), la notation  $[E(\{\hat{q}\})]$  et  $[G(\{\hat{q}\})]$  est employée pour bien indiquer la dépendance de ces deux matrices en  $\{\hat{q}\}$  (vecteur propre du problème non parallèle). Les coefficients des matrices  $[E]$  et  $[G]$  sont donnés à l'Annexe II.

Les ondes d'instabilité, à l'exception de la pression, doivent être nulles près de la surface et à l'extérieur de la couche limite. Les conditions aux limites rattachées à l'étude de stabilité non parallèle sont donc homogènes et données par:

$$\left. \begin{array}{c} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{T} \\ \hat{w} \end{array} \right\} = 0 \quad \text{à} \quad y = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \infty \end{array} \right. \quad (2.13)$$

### 2.3.1 Méthode des perturbations

L'utilisation de la méthode des perturbations pour la résolution des équations de stabilité non parallèles fut d'abord proposée par Masad et Malik [26]. Leur formulation ne s'applique qu'à des écoulements tridimensionnels et incompressibles. Dans la section qui suit, une procédure similaire est présentée, mais cette fois s'appliquant aux écoulements tridimensionnels et *compressibles*.

En se référant à l'Éq.(2.12), on débute l'analyse par le développement de la solution non parallèle en une série ayant la forme

$$\{\hat{q}\} = \{\hat{q}_0\} + \{\hat{q}_1\} + \dots \quad (2.14)$$

où  $\{\hat{q}_0\}$  est la solution (vecteur propre) du problème compressible parallèle et les termes additionnels ( $\{\hat{q}_1\} + \dots$ ) représentent les contributions reliées aux effets non parallèles.

En introduisant cette série dans le système d'équations de stabilité non parallèles (Éq.(2.12)) et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un, on obtient les deux problèmes suivants:

(i) Problème aux valeurs propres parallèle:

$$([A]D^2 + [B]D + [C])\{\hat{q}_0\} = 0 \quad (2.15)$$

avec

$$\left. \begin{array}{c} \hat{u}_0 \\ \hat{v}_0 \\ \hat{T}_0 \\ \hat{w}_0 \end{array} \right\} = 0 \quad \text{à} \quad y = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \infty \end{array} \right.$$

(ii) Problème non homogène:

$$([A]D^2 + [B]D + [C])\{\hat{q}_1\} = \frac{[E(\{\hat{q}_0\})]}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{dx} + [G(\{\hat{q}_0\})] \quad (2.16)$$

avec

$$\left. \begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{T}_1 \\ \hat{w}_1 \end{array} \right\} = 0 \quad \text{à} \quad y = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \infty \end{array} \right.$$

De par leur forme, les deux problèmes ci-dessus doivent être résolus de manière séquentielle, i.e. la solution  $\{\hat{q}_0\}$  du problème aux valeurs propres

parallèle se doit d'être calculée avant de pouvoir entreprendre la résolution du problème non homogène. Il est important de noter que la précision de la méthode des perturbations dépend essentiellement du taux de convergence de la série choisie (Éq.(2.14)). Dans ce travail, nous nous intéressons aux écoulements légèrement non parallèles; on s'attend donc à ce que la contribution parallèle de la série ( $\{\hat{q}_0\}$ ) soit dominante par rapport aux termes non parallèles ( $\{\hat{q}_1\} + \dots$ ).

### 2.3.2 Condition de solvabilité et problème adjoint

Le problème, tel que défini par l'Éq.(2.15), correspond au problème aux valeurs propres compressible parallèle. Comme mentionné plus haut, l'analyse de stabilité non parallèle débute par la résolution du problème parallèle et l'obtention du vecteur propre parallèle correspondant ( $\{\hat{q}_0\}$ ).  $\{\hat{q}_0\}$  est ensuite introduit dans le membre de droite du problème non homogène.

Comme la partie homogène de l'Éq.(2.16) possède une solution non triviale ( $\{\hat{q}_0\}$ ), le problème non homogène possède une solution si et seulement si une condition de solvabilité est respectée [33].

La condition de solvabilité est construite en utilisant une procédure classique telle que présentée, par exemple, dans la Ref. [33]. On multiplie d'abord l'Éq.(2.16) par un vecteur transposé  $\{\hat{q}^{adj}\}^T$ , et on intègre l'équation résultante sur tout le domaine d'intérêt (domaine défini dans la direction perpendiculaire à la surface,  $y$ ). On obtient donc:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [A] D^2 \{\hat{q}_1\} dy + \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [B] D \{\hat{q}_1\} dy \\ & \quad + \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [C] \{\hat{q}_1\} dy \\ & = \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{dx} \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [E] dy + \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [G] dy \end{aligned} \quad (2.17)$$

où:

$$\{\hat{q}^{adj}\} = (\alpha \hat{u}^{adj} + \beta \hat{w}^{adj}, \hat{v}^{adj}, \hat{p}^{adj}, \hat{T}^{adj}, \alpha \hat{w}^{adj} - \beta \hat{u}^{adj}) \quad (2.18)$$

En intégrant par parties:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[ D^2 \{\hat{q}^{adj}\}^T [A] - D \{\hat{q}^{adj}\}^T [B] - \{\hat{q}^{adj}\}^T (D[B] - [C]) \right] \{\hat{q}_1\} dy \\ + \left[ \{\hat{q}^{adj}\}^T ([A] D \{\hat{q}_1\} + [B] \{\hat{q}_1\}) - D \{\hat{q}^{adj}\}^T [A] \{\hat{q}_1\} \right] \Big|_0^\infty \\ = \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d\mathcal{A}}{dx} \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [E] dy + \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [G] dy \end{aligned} \quad (2.19)$$

On définit  $\{\hat{q}^{adj}\}$  en posant:

$$D^2 \{\hat{q}^{adj}\}^T [A] - D \{\hat{q}^{adj}\}^T [B] - \{\hat{q}^{adj}\}^T (D[B] - [C]) = 0 \quad (2.20)$$

et

$$\left[ \{\hat{q}^{adj}\} ([A] D \{\hat{q}_1\} + [B] \{\hat{q}_1\}) - D \{\hat{q}^{adj}\}^T [A] \{\hat{q}_1\} \right] \Big|_0^\infty = 0 \quad (2.21)$$

En transposant l'Éq.(2.20), on obtient:

$$[A]^T D^2 \{\hat{q}^{adj}\} - [B]^T D \{\hat{q}^{adj}\} - (D[B] - [C])^T \{\hat{q}^{adj}\} = 0 \quad (2.22)$$

Les conditions aux frontières pour  $\{\hat{q}^{adj}\}$  sont obtenues en faisant tendre vers zéro les six termes de l'Éq.(2.21). En introduisant les conditions aux limites se rattachant à  $\{\hat{q}_1\}$ , on obtient les conditions suivantes pour  $\{\hat{q}^{adj}\}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{u}^{adj} \\ \hat{v}^{adj} \\ \hat{T}^{adj} \\ \hat{w}^{adj} \end{array} \right\} = 0 \quad \text{à} \quad y = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \quad (2.23)$$

Le problème décrit par l'Éq.(2.22) et ses conditions aux limites (Éq.(2.23)) constitue le problème *adjoint*. Les valeurs propres se rattachant au problème adjoint sont les mêmes que celles du problème parallèle original (voir Nayfeh [33]). Une fois la solution du problème adjoint déterminée, on l'introduit dans le membre de droite de l'Éq.(2.19) pour finalement obtenir la condition de solvabilité:

$$h_1 \frac{d\mathcal{A}}{dx} + h_2 \mathcal{A} = 0 \quad (2.24)$$

où

$$h_1 = \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [E] dy \quad (2.25)$$

et

$$h_2 = \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [G] dy \quad (2.26)$$

L'équation différentielle du premier ordre que représente la condition de solvabilité (Éq.(2.24)) a pour solution

$$\frac{\mathcal{A}}{A_0} = e^{\int_{x_0}^x \left(-\frac{h_2}{h_1}\right) dx} \quad (2.27)$$

où  $A_0$  est l'amplitude de l'onde d'instabilité à la position  $x = x_0$ .

### 2.3.3 Taux d'amplification non parallèle

En introduisant la solution de  $\mathcal{A}(x)$  (voir Éq.(2.27)) dans l'expression des ondes d'instabilité définie précédemment (Éq.(2.10)), on obtient:

$$\tilde{q}(x, y, z, t) = A_0 \hat{q}(x, y) e^{\int_{x_0}^x \left(i\alpha - \frac{h_2}{h_1}\right) dx + i\beta z - i\omega t} \quad (2.28)$$

Le taux d'amplification spatiale et le nombre d'onde non parallèles dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque ( $x$ ) sont donnés par

$$\sigma^q = \Re \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \tilde{q} \right) \quad (2.29)$$

$$\tau^q = \Im \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \tilde{q} \right) \quad (2.30)$$

i.e.

$$\sigma^q = -\alpha_i - \Re \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \Re \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \hat{q} \right) \quad (2.31)$$

$$\tau^q = \alpha_r - \Im \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \Im \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \hat{q} \right) \quad (2.32)$$

La première des trois contributions que l'on retrouve dans l'Éq.(2.31) correspond au taux d'amplification spatiale de la théorie de stabilité compressible parallèle. La seconde,  $-\Re \left( \frac{h_2}{h_1} \right)$ , est directement liée aux effets non parallèles. Il est important de noter que les deux premiers termes de l'Éq.(2.31) demeurent constants dans la direction perpendiculaire à la surface ( $y$ ). La troisième contribution, également liée aux effets non parallèles, est appelée *distorsion* et dépend directement de la distance par rapport à la surface et de l'onde d'instabilité d'intérêt (i.e.  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$  ou  $\hat{T}$ ). C'est d'ailleurs pour bien souligner cette dépendance à l'onde d'instabilité d'intérêt que l'on utilise l'exposant  $q$  pour  $\sigma$  et  $\tau$ . Dans ce mémoire, nous allons utiliser les trois taux d'amplification suivants:

$$\begin{aligned} \sigma^u &= -\alpha_i - \Re \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \Re \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \hat{u}_{max} \right) \\ \sigma^v &= -\alpha_i - \Re \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \Re \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \hat{v}_{max} \right) \\ \sigma^w &= -\alpha_i - \Re \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + \Re \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \hat{w}_{max} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

où  $\hat{u}_{max}(x)$  correspond à la valeur maximale de  $|\hat{u}(x, y)|$  dans le domaine  $0 \leq y \leq \infty$ .  $\hat{v}_{max}(x)$  et  $\hat{w}_{max}(x)$  sont définies de façon similaire.

En se référant à l'Éq.(2.16), il est intéressant de noter que  $\hat{q}_1$  n'a pas besoin d'être connu pour l'obtention du taux d'amplification spatiale non parallèle.

### Taux d'amplification spatiale produit par la formulation temporelle

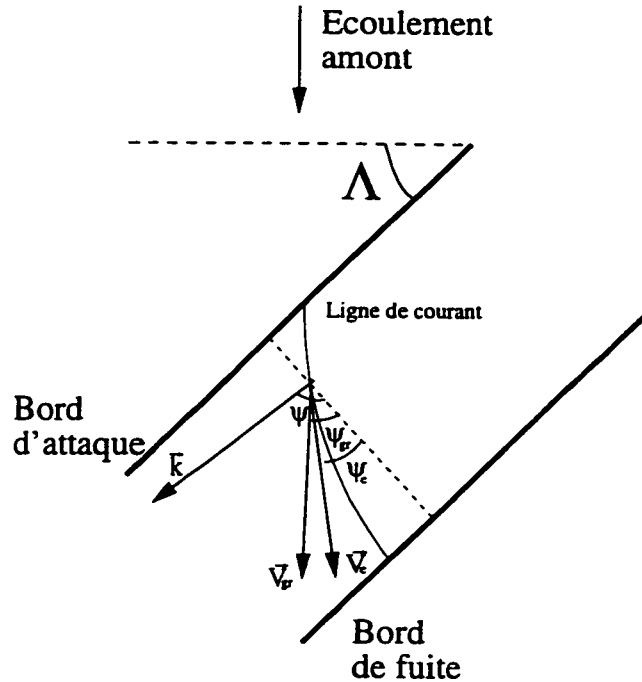


Figure 2.2 Représentation de la vitesse de groupe.

Dans l'Éq.(2.31), la première contribution,  $-\alpha_i$ , est obtenue en faisant la résolution du problème aux valeurs propres spatial et parallèle. Lorsque la formulation temporelle est employée, le taux d'amplification spatiale dans la direction de la composante réelle de la vitesse de groupe,  $\gamma_i$ , est déterminé à partir de la relation de Gaster [8], i.e.:

$$\gamma_i = -\frac{\omega_i}{|\vec{V}_{gr}|} \quad (2.34)$$

où  $\vec{V}_{gr}$  est la partie réelle de la vitesse de groupe (voir Fig. 2.2). En général, l'orientation de la composante réelle de la vitesse de groupe est proche de celle

de la vitesse de l'écoulement à la frontière de la couche limite  $\vec{V}_e$ . Dans l'hypothèse où  $\gamma_i$  représente le taux d'amplification total parallèle (i.e.  $\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$ ), la formulation temporelle prédit donc un taux d'amplification spatiale non nul dans la direction parallèle au bord d'attaque ( $\beta_i$ ). Or, lorsque la formulation spatiale est appliquée au cas d'une aile d'envergure infinie, on assume que la composante du taux d'amplification spatiale dans la direction de l'envergure,  $\beta_i$ , est nul. Dans le contexte de la formulation temporelle, cette hypothèse ( $\beta_i = 0$ ) revient à supposer que  $\gamma_i$  représente seulement une composante du taux d'amplification total parallèle. L'autre composante, perpendiculaire à la vitesse de groupe, est telle que  $\beta_i$  est nul. Le taux d'amplification spatiale dans la direction normale au bord d'attaque produite par la formulation temporelle prend donc la forme:

$$\alpha_i = \frac{\gamma_i}{\cos \Psi_{gr}} \quad (2.35)$$

où  $\Psi_{gr}$  est l'orientation de la partie réelle de la vitesse de groupe par rapport à  $x$ .

## 2.4 Prédiction de la transition - Méthode du $e^n$

Un écoulement évoluant sur une surface est affecté par plusieurs types de fluctuations externes. Certaines de ces fluctuations externes se retrouvent à l'extérieur de la couche limite (bruit, turbulence, etc.) alors que d'autres sont liées directement au contact de l'écoulement avec la surface (irrégularité de la surface, vibration, etc.). Lorsque l'amplitude de ces fluctuations est relativement petite, des ondes d'instabilité se créent et croissent de manière exponentielle dans la couche limite. En négligeant les comportements non linéaires (qui sont en général observables dans moins de 20% de la région de



transition), le développement de ces ondes d'instabilité peut être assez bien représenté par la théorie linéaire de la stabilité. C'est d'ailleurs à partir de l'hypothèse d'une évolution des ondes entièrement linéaire jusqu'à la transition que la méthode du  $e^n$  fut construite (Smith et Gamberoni [40] et Van Ingen [41]).

Pour un écoulement incompressible, le vecteur d'onde  $\vec{k}$  correspondant à l'onde d'instabilité la plus instable est orienté dans la direction longitudinale de l'écoulement. En régime compressible, et ce même pour un écoulement bidimensionnel, le vecteur d'onde correspondant à la fluctuation la plus instable n'est pas forcément orienté dans la direction longitudinale de l'écoulement (apparition d'ondes dites "obliques"). À mesure que le nombre de Mach augmente, les ondes obliques deviennent les plus instables et leur direction constitue donc une inconnue supplémentaire.

En supposant que  $\beta_i = 0$  (cas d'une aile d'envergure infinie), l'amplitude  $A^q(x, \beta, \omega)$  de l'onde d'instabilité pour une position donnée est calculée en intégrant le taux d'amplification spatial ( $\sigma^q$ ) dans la direction  $x$ , i.e.:

$$N^q = \ln \left( \frac{A^q(x, \beta^*, f)}{A_0^q} \right) = \int_{x_0}^x \sigma^q(\xi, \beta^*, f) d\xi \quad (2.36)$$

où  $x$  représente une position sur le trajet de la perturbation et  $x_0$ , la position correspondant à un taux d'accroissement nul ( $\sigma^q = 0$ ).

La notation  $A^q(x, \beta^*, f)$  et  $\sigma^q(\xi, \beta^*, f)$  a été utilisée pour souligner que  $A^q$  et  $\sigma^q$  sont fonction de la position  $x$ , du nombre d'onde dimensionnel transversal  $\beta^*$  ( $= \beta/\delta^*$ ), et de la fréquence en hertz  $f$  ( $= \frac{\omega x}{2\pi} \frac{U_\infty}{\delta^*}$ ). Donc, pour calculer  $A^q(x, \beta^*, f)$ , on doit spécifier  $\beta^*$  et  $f$ . En général,  $f$  est maintenue constante et deux stratégies sont souvent utilisées dans la littérature pour  $\beta^*$ :

- $\beta^*$  est maintenu constant (**méthode  $\beta^*$  constant**), i.e.

$$N^q(x, f) = \max_{\beta^*} \int_{x_0}^x \sigma^q d\xi \quad (2.37)$$

- $\beta^*$  correspondant au maximum de  $\sigma^q$  (**méthode de l'enveloppe**), i.e.

$$N^q(x, f) = \int_{x_0}^x \max_{\beta^*} \sigma^q d\xi \quad (2.38)$$

Enfin, quelle que soit la stratégie d'intégration utilisée, on appelle facteur  $n^q$  l'enveloppe en fréquence de  $N^q(x, f)$ :

$$n^q(x) = \max_f (N^q(x, f)) \quad (2.39)$$

Pour un écoulement bidimensionnel ayant un niveau de turbulence relativement bas, il a été observé que le facteur  $n$  calculé à l'aide de la méthode de l'enveloppe se situe autour de 9 à la transition [40],[41]. Le couplage des observations expérimentales avec le calcul du facteur  $n$  constitue la base de ce qui est communément appelé la *méthode du  $e^n$* .

Malheureusement, la valeur critique du facteur  $n$ , i.e. la valeur de  $n$  à la transition, n'est pas universelle et dépend grandement du type et de l'amplitude des fluctuations externes affectant l'écoulement. Par exemple, lorsque les fluctuations externes les plus significatives sont celles liées à la turbulence dans l'écoulement amont, une relation empirique fut suggérée par Mack [21], et est donnée par

$$n_{crit} = -8.43 - 2.4 \ln T_u \quad (2.40)$$

où  $T_u$  est l'intensité de la turbulence. Cette relation est valide pour  $10^{-3} \leq T_u \leq 10^{-2}$  [4].

## CHAPITRE III

### Méthode numérique

L'analyse de la stabilité ne peut, en général, se faire de manière analytique. Le modèle mathématique décrit au Chapitre II doit donc être solutionné numériquement.

Deux principales méthodes numériques ont été développées pour la résolution des équations linéaires de stabilité. La première méthode, utilisée par Mack [22], implique la solution des équations de stabilité à l'aide d'une méthode aux valeurs initiales (Initial Value Method). Avec une IVM, la solution est obtenue de manière itérative en intégrant les équations de stabilité de la paroi jusqu'à la frontière externe de la couche limite. C'est essentiellement une procédure d'essais et erreurs où l'on fait varier la valeur propre jusqu'à ce que la solution obtenue respecte les conditions prescrites à la frontière externe de la couche limite.

La deuxième méthode, plus efficace et surtout plus systématique, fut proposée par Malik et Orszag [24] pour la résolution des équations temporelles de stabilité. Cette méthode consiste en une résolution globale des équations de stabilité avec l'imposition des conditions aux limites (Boundary Value Method). Cette BVM fut plus tard appliquée à la formulation spatiale par Cebeci et Stewartson [7] et Arnal et Juillen [3]. Dans ce mémoire, la résolution des problèmes aux valeurs propres parallèle et adjoint est réalisée à l'aide d'une BVM.

### 3.1 Discrétisation du domaine de calcul

Plusieurs méthodes existent pour la discrétisation des équations de stabilité. Dans le présent travail, la méthode des différences finies, combinée à l'utilisation d'un maillage décalé pour la pression, est employée. En se référant à la Fig. 3.1, les trois fluctuations liées à la vitesse de l'écoulement ( $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$ ) ainsi que celle liée à la température ( $\hat{T}$ ) sont évaluées en chacun des points du maillage alors que la fluctuation relative à la pression ( $\hat{p}$ ) est définie à mi-chemin entre les points.

À la paroi, les fluctuations liées à la vitesse de l'écoulement ( $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$ ) sont connues et nulles. Dans le cas d'un écoulement compressible, la fluctuation liée à la température ( $\hat{T}$ ) est également connue et égale à zéro. Seule la fluctuation liée à la pression n'est pas prescrite à la paroi. Il n'est toutefois pas nécessaire de connaître  $\hat{p}$  à la paroi puisque  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  et  $\hat{T}$  y sont prescrits. L'utilisation d'un maillage décalé permet de définir  $\hat{p}$  entre les points (voir Fig. 3.1) et ainsi de faire la résolution des équations de stabilité sans avoir à évaluer  $\hat{p}$  à la paroi.

Il est avantageux de transformer le domaine physique original de la couche limite ( $0 \leq y \leq \delta_e$ ) en un domaine de calcul ( $0 \leq \eta \leq N - 1$ ) [24] tel que défini par la relation suivante (voir Fig. 3.1):

$$\eta = (N - 1) \frac{gy}{2L + y} \quad (3.1)$$

où  $g = 1 + \frac{2L}{\delta_e}$ ,  $L$  représente la distance par rapport à la surface pour laquelle  $U(y) = U_e/2$ , et  $N$  est le nombre de points employés pour discrétiser les équations linéaires de stabilité.

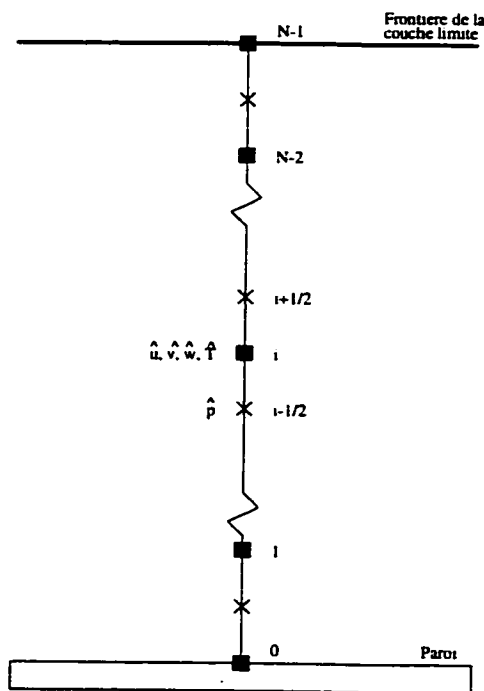


Figure 3.1 Représentation du maillage décalé.

## 3.2 Discrétisation des équations de stabilité

### 3.2.1 Équations du problème aux valeurs propres parallèle

Au moment où l'on entreprend l'analyse des équations de stabilité, toutes les propriétés moyennes (vitesses, pression et températures) de l'écoulement dans la couche limite, de même que leurs dérivées premières et secondes dans la direction perpendiculaire à la surface ( $y$ ), sont connues. Comme la résolution des équations de couche limite se fait avec un maillage différent de celui utilisé pour la résolution des équations de stabilité, ces valeurs sont interpolées conformément à la discrétisation présentée à la Fig. 3.1.

En se fiant à la définition du domaine de calcul (Éq.(3.1)), les dérivées premières et secondes des vecteurs propres dans la direction perpendiculaire à

la paroi ( $y$ ) que l'on retrouve dans les équations de stabilité sont données par:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_x &= \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}\bigg|_x \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (3.2)$$

où

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{2(N-1)g}{(2L+y)^2} \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} &= \frac{-4(N-1)g}{(2L+y)^3}\end{aligned}\quad (3.3)$$

La transformation donnée par l'Éq.(3.1) est utilisée principalement pour concentrer, dans le domaine physique, un plus grand nombre de points dans la région critique de la couche limite, tout en utilisant un espacement uniforme entre les points dans le domaine de calcul. Ainsi, les expressions centrées utilisées pour évaluer les dérivés premières et secondes des vecteurs propres  $(\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})$  ont une précision du second ordre.

Les coefficients des matrices  $[A]$ ,  $[B]$  et  $[C]$  (Annexe I) sont donc évalués en chacun des points du maillage pour les trois équations de quantité de mouvement et celle d'énergie. Les coefficients relatifs à l'équation de continuité sont, quant à eux, définis entre les points du maillage. Pour la résolution du problème aux valeurs propres parallèle, les coefficients  $A_{3,j}$ ,  $B_{3,j}$  et  $C_{3,j}$  ( $1 < j < 5$ ) sont donc évalués entre les points du maillage.

### 3.2.2 Équations du problème aux valeurs propres adjoint

Le problème aux valeurs propres adjoint représente essentiellement une transposée du problème aux valeurs propres parallèle (voir Éqs. (2.2) et (2.22)). Il contient le même nombre d'équations et les mêmes conditions aux frontières que le problème aux valeurs propres parallèle.

Aux frontières de la couche limite, les vecteurs propres adjoints  $\hat{u}^{adj}$ ,  $\hat{v}^{adj}$ ,  $\hat{T}^{adj}$  et  $\hat{w}^{adj}$  sont nuls (voir Eq.(2.23)). Seul le vecteur propre adjoint  $\hat{p}^{adj}$  n'est pas prescrit. Comme pour la perturbation liée à la pression ( $\hat{p}$ ) dans le cas du problème parallèle, on a choisi de définir  $\hat{p}^{adj}$  entre les points du maillage. Les dérivées premières et secondes des vecteurs propres adjoints  $\{\hat{q}^{adj}\}$  sont évaluées à l'aide d'expressions centrées (dans le domaine de calcul) et ont donc une précision du deuxième ordre.

Les équations 1, 2, 4 et 5 du système adjoint sont évaluées aux points du maillage alors que la troisième équation est définie à mi-chemin entre les points du maillage. En se référant à l'Annexe I, les coefficients  $A_{i,3}$ ,  $B_{i,3}$  et  $C_{i,3}$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) doivent donc être évalués entre les points pour la résolution du problème aux valeurs propres adjoint.

### 3.2.3 Matrices non parallèles $[E]$ et $[G]$

Tel que montré à l'Annexe II, les coefficients des matrices non parallèles  $[E]$  et  $[G]$  contiennent des dérivées premières, secondes et mixtes en  $x$  et  $y$ . Tout comme pour la résolution des problèmes aux valeurs propres parallèle et adjoint, les coefficients des matrices  $[E]$  et  $[G]$  reliés aux trois équations de quantité de mouvement et à celle d'énergie ( $E_{ij}$  et  $G_{ij}$  où  $i = 1, 2, 4, 5$ ) sont évalués aux points du maillage alors que les coefficients de l'équation de continuité ( $E_{3j}$  et  $G_{3j}$ ) sont définis à mi-chemin entre les points. Les dérivées dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque ( $x$ ) sont évaluées à l'aide d'expressions décentrées en amont du premier ordre à une distance  $y$  adimensionnelle constante par rapport à la surface.

### 3.3 Algorithme de résolution

Le taux d'amplification spatiale non parallèle est obtenu à partir de l'expression (voir section 2.3.3):

$$\sigma^q = -\alpha, -\Re\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + \Re\left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \hat{q}\right) \quad (3.4)$$

Trois contributions bien distinctes sont impliquées dans le calcul de  $\sigma^q$ . La première contribution correspond à la solution spatiale ( $\alpha_i$ ) du problème aux valeurs propres parallèle alors que les deux contributions additionnelles sont directement liées aux effets non parallèles.

En posant que  $X_i$  et  $X_{i-1}$  correspondent, respectivement, à deux points de discrétisation sur la surface de la géométrie (dans la direction  $x$ ), l'analyse complète de stabilité non parallèle au point  $X_i$  à l'aide d'une approche locale peut se résumer en 8 étapes:

1. Évaluation des coefficients des matrices  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  et  $\left[\frac{\partial B}{\partial y}\right]$  à  $x = X_i$
2. Solution du problème aux valeurs propres parallèle (formulation temporelle ou spatiale) à  $x = X_i$
3. Solution du problème adjoint à  $x = X_i$
4. Évaluation des coefficients des matrices  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  à  $x = X_{i-1}$
5. Solution du problème aux valeurs propres parallèle (formulation temporelle ou spatiale) à  $x = X_{i-1}$
6. Évaluation des coefficients des matrices  $[E]$  et  $[G]$  à  $x = X_i$
7. Calcul de  $h_1$  et  $h_2$
8. Calcul du terme de distorsion non parallèle



La contribution parallèle ( $\alpha_i$ ) est obtenue en faisant la résolution du problème aux valeurs propres parallèle (étapes 1 et 2). Le mode de résolution du problème parallèle est abordé à la Section 3.3.1. Dans le cas où la formulation temporelle est utilisée, la relation de Gaster (Éq.(2.34)) est employée pour convertir la valeur propre temporelle  $\omega_i$  en son équivalent spatial  $\alpha_i$ .

L'évaluation des vecteurs propres à  $x = X_{i-1}$  (étapes 4 et 5) permet le calcul des termes de distorsion ( $\frac{\partial \hat{q}}{\partial x}$ ) nécessaires à la construction de la matrice non parallèle  $[G]$ . Les paramètres non parallèles  $h_1$  et  $h_2$  peuvent être évalués seulement une fois la solution du problème adjoint connue (étape 3) et les matrices  $[E]$  et  $[G]$  construites (étape 6).

Le taux d'amplification spatial ( $\sigma^g$ ) est finalement obtenu en regroupant les résultats des étapes 2, 7 et 8.

### 3.3.1 Solution des problèmes aux valeurs propres

L'algorithme de solution implique la résolution de trois problèmes aux valeurs propres, soit les problèmes aux valeurs propres parallèles à  $x = X_i$  et  $x = X_{i-1}$  (formulations temporelle ou spatiale) et le problème adjoint à  $x = X_i$ .

#### Formulation temporelle

La résolution du problème aux valeurs propres parallèle en utilisant les hypothèses de la formulation temporelle peut se faire à l'aide d'algorithmes numériques conventionnels. Il existe deux types distincts de ces algorithmes, i.e. ceux où on applique une méthode de résolution dite *globale* et ceux faisant appel à une méthode de résolution dite *locale*. Les méthodes de résolution globales sont utilisées pour faire le calcul du spectre complet des valeurs propres. Aucune approximation initiale de la valeur propre n'est requise pour démarrer

la résolution mais le temps de calcul que demande la méthode globale est considérable. Au contraire, les méthodes locales sont beaucoup plus rapides mais nécessitent une bonne approximation de la valeur propre recherchée.

Dans le présent travail, la résolution globale est faite à partir de l'algorithme QZ [30] (calcul du spectre complet des valeurs propres) sur un maillage grossier. La valeur propre ainsi obtenue est ensuite utilisée comme approximation initiale pour la résolution locale sur un maillage fin. Le calcul local sert par conséquent à améliorer la précision de la valeur propre calculée.

La méthode inverse de Rayleigh est utilisée pour le calcul local [24]. Dans cette méthode, deux cycles itératifs sont imbriqués, dans lesquels le problème aux valeurs propres et un problème transposé sont résolus. Le problème aux valeurs propres temporel et discrétisé peut se mettre sous la forme matricielle:

$$([P_t] - \omega[M_t]) \{\Phi\} = 0 \quad (3.5)$$

où

$$\{\Phi\} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N)^T$$

$$\Phi_i \doteq \{\hat{q}\}_i$$

L'indice  $i$  sur  $\Phi_i$  indique la position en  $y$  dans la couche limite.

Lorsqu'appliquée à ce problème, la méthode inverse de Rayleigh se présente sous la forme:

$$([P_t] - \omega^k[M_t]) \{\Phi^{l+1}\} = [M_t] \{\Phi^l\} \quad (3.6)$$

$$([P_t] - \omega^k[M_t])^T \{\Psi^{l+1}\} = [M_t]^T \{\Psi^l\} \quad (3.7)$$

où  $l$  et  $k$  dénotent, respectivement, le cycle itératif interne et le cycle itératif externe. La boucle itérative interne est répétée huit fois et agit sur les vecteurs

propres. Suite à chaque cycle interne, les vecteurs propres et les vecteurs propres transposés sont normalisés à partir des relations:

$$\{\Phi^{l+1}\} = \frac{\{\Phi^{l+1}\}}{\max(\{\Phi^{l+1}\})} \quad (3.8)$$

$$\{\Psi^{l+1}\} = \frac{\{\Psi^{l+1}\}}{\max(\{\Psi^{l+1}\})} \quad (3.9)$$

Le calcul de la valeur propre se fait à la sortie de la boucle itérative interne à l'aide de la relation:

$$\omega^{k+1} = - \frac{\{\Psi^{l+1}\}^T [P_t] \{\Phi^{l+1}\}}{\{\Psi^{l+1}\}^T [M_t] \{\Phi^{l+1}\}} \quad (3.10)$$

Afin de vérifier la convergence du problème, on soumet la valeur propre à un test de convergence après chacune des boucles externes. En posant que  $\omega^k$  et  $\omega^{k+1}$  représentent, respectivement, les valeurs propres correspondant aux cycles  $k$  et  $k + 1$ , le critère de convergence est donné par:

$$\frac{|\omega^{k+1} - \omega^k|}{|\omega^{k+1}|} \leq 10^{-9} \quad (3.11)$$

Quoique très sévère, un tel critère de convergence s'est avéré approprié même dans les régions de l'écoulement où la convergence est la plus lente. En effet, lors de calculs détaillés, la convergence fut à chaque fois obtenue en 10 itérations externes ou moins.

### Formulation spatiale

Le problème aux valeurs propres parallèle construit à partir de la formulation spatiale est non linéaire en  $\alpha$ . Plusieurs méthodes existent pour la résolution de tels problèmes. De manière générale, une approche standard est utilisée dans laquelle on linéarise les termes en  $\alpha$  avec la simple relation

$\Phi' = \alpha\Phi$  ("Companion Matrix Method (CMM)"). Cette méthode, d'abord proposée par Bridges et Morris [5], permet de transformer le problème non linéaire spatial en un système linéaire qui peut être solutionné à l'aide de l'algorithme QZ par exemple. L'ordre du problème spatial linéaire est toutefois plus élevé que celui du problème temporel correspondant.

Le temps de calcul rattaché à un calcul global dépend directement de la dimension des matrices impliquées. Dans le cas de l'algorithme QZ, le temps de calcul varie selon la relation  $O\{n^3\}$  où  $n$  est l'ordre des matrices. Conséquemment, la résolution lorsque faite à partir de la formulation spatiale demande 6 fois plus de temps de calcul et 3 fois plus de mémoire que le calcul temporel [27].

Lorsqu'une approximation de  $\alpha$  est connue, la méthode inverse de Rayleigh peut être appliquée au problème linéarisé ayant la forme:

$$([P_s] - \alpha ([M_{s1}] + \alpha_{guess}[M_{s2}])) \{\Phi\} = 0 \quad (3.12)$$

où  $\alpha_{guess}$  est une approximation initiale de la valeur propre. Dans ce mémoire, une méthode plus efficace et rapide que la CMM, appelée *méthode hybride* [29], est utilisée pour le calcul de la valeur propre spatiale initiale ( $\alpha_{guess}$ ). Cette méthode hybride permet en fait de contourner la non-linéarité de la formulation spatiale complète.

### Problème adjoint

La méthode inverse de Rayleigh (Éqs. (3.7) à (3.11)) est également utilisée pour la résolution du problème adjoint. Cependant, comme la valeur propre du problème adjoint est égale à celle du problème parallèle, seule la boucle interne du procédé itératif est nécessaire.

### 3.3.2 Évaluation de $h_1$ et $h_2$

En se référant à la Section 2.3.1, les paramètres non parallèles  $h_1$  et  $h_2$  sont définis tel que:

$$h_1 = \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [E] dy \quad (3.13)$$

et

$$h_2 = \int_0^\infty \{\hat{q}^{adj}\}^T [G] dy \quad (3.14)$$

où  $\{\hat{q}^{adj}\}^T$  est la solution du problème aux valeurs propres adjoint (voir Section 3.2.2) et  $[E], [G]$  sont les matrices 5x1 pour lesquelles l'expression des coefficients se trouve à l'Annexe II. Selon la théorie des perturbations, les coefficients des matrices  $[E]$  et  $[G]$  sont construits en utilisant la solution du problème aux valeurs propres parallèle ( $\{\hat{q}_0\}$ ).

L'évaluation des paramètres  $h_1$  et  $h_2$  implique une intégration dans toute l'épaisseur de la couche limite. Les composantes des matrices  $[E]$  et  $[G]$  correspondant à l'équation de continuité (coefficients  $E_3$  et  $G_3$ ) sont évalués entre les points alors que les autres composantes ( $E_1, E_2, E_4, E_5$  et  $G_1, G_2, G_4, G_5$ ) sont évaluées aux points du maillage.  $h_1$  et  $h_2$  sont donc obtenus en faisant l'addition de deux intégrales distinctes, i.e.:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_{11} + h_{12} \\ h_2 &= h_{21} + h_{22} \end{aligned} \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} h_{11} &= \int_0^\infty [(\alpha \hat{u}^{adj} + \beta \hat{w}^{adj}) E_1 + \hat{v}^{adj} E_2 + \hat{T}^{adj} E_4 + (\alpha \hat{w}^{adj} - \beta \hat{u}^{adj}) E_5] dy \\ h_{12} &= \int_0^\infty (\hat{p}^{adj} E_3) dy \\ h_{21} &= \int_0^\infty [(\alpha \hat{u}^{adj} + \beta \hat{w}^{adj}) G_1 + \hat{v}^{adj} G_2 + \hat{T}^{adj} G_4 + (\alpha \hat{w}^{adj} - \beta \hat{u}^{adj}) G_5] dy \\ h_{22} &= \int_0^\infty (\hat{p}^{adj} G_3) dy \end{aligned}$$

Ces intégrales sont évaluées numériquement à l'aide de la méthode des trapèzes appliquée au maillage décalé de la Fig. 3.1.

### 3.3.3 Évaluation du terme de distorsion

Contrairement aux deux premières contributions du taux d'amplification non parallèle (voir Eq.(3.4)), le terme de distorsion,  $\Re \left( \frac{\partial}{\partial x} \ln \hat{q} \right)$ , dépend directement de  $\hat{q}$  et varie donc en fonction de la distance par rapport à la paroi ( $y$ ).

Le vecteur propre non parallèle  $\{\hat{q}\}$  est en général très similaire à  $\{\hat{q}_0\}$  [1]. Le terme de distorsion est donc approximé en utilisant la solution du problème aux valeurs propres parallèle homogène, i.e.  $\hat{q} \approx \hat{q}_0$ . Ainsi, le terme de distorsion non parallèle est évalué à partir de l'expression

$$\left. \frac{\partial(\ln \hat{q}_0)}{\partial x} \right|_y = \left. \frac{\partial(\ln \hat{q}_0)}{\partial x} \right|_\eta + \left. \frac{\partial(\ln \hat{q}_0)}{\partial \eta} \right|_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \Big|_y \quad (3.16)$$

dans laquelle les dérivées partielles dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque ( $x$ ) sont approximées à partir d'expressions amonts du premier ordre à une distance adimensionnelle ( $y$ ) constante par rapport à la paroi.

De manière générale, on emploie  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{v}_0$  ou  $\hat{w}_0$  pour le calcul du terme de distorsion et la position choisie dans la couche limite est celle correspondant à  $|\hat{u}_0|_{max}$ ,  $|\hat{v}_0|_{max}$  ou  $|\hat{w}_0|_{max}$ . Lorsque  $\hat{q}_0 = \hat{q}_{0_{max}}$ , le deuxième terme du membre de droite de l'Éq.(3.16) disparaît et ainsi:

$$\left. \frac{\partial(\ln \hat{q}_0)}{\partial x} \right|_y = \left. \frac{\partial(\ln \hat{q}_0)}{\partial x} \right|_\eta \quad (3.17)$$

Finalement, comme  $\hat{u}_{0_{max}}$  est utilisé pour faire la normalisation du vecteur propre  $\{\hat{q}_0\}$ , le terme de distorsion non parallèle s'annule lorsque  $\hat{q} = \hat{u}_{0_{max}}$ .

## CHAPITRE IV

### Discussion des résultats

La validation de la méthode des perturbations proposée comprend deux séries de résultats. Étant donnée l'importance de la qualité des résultats parallèles dans l'application de la formulation non parallèle locale, la première série de résultats comprend les vecteurs propres parallèles obtenus à partir des formulations temporelle et hybride spatiale. Les vecteurs propres parallèles sont comparés à ceux publiés par Masad et Malik [26] et Casalis [6].

Dans la seconde série de résultats, les taux d'amplification parallèles et non parallèles sont comparés, pour différentes géométries, à ceux obtenus à partir de deux approches différentes, i.e.:

- une méthode de perturbations (approche locale de Masad et Malik [26])
- une approche PSE linéaire (Langlois et al. [18])

Certains résultats tiennent compte des effets liés à la courbure des surfaces, i.e. on considère la géométrie de la paroi dans les équations de stabilité<sup>1</sup>. Dans ce cas, la formulation parallèle avec courbure de Langlois et al. [17] est employée pour le calcul de la solution parallèle. La validation comprend des résultats obtenus à partir d'écoulements incompressibles et compressibles.

---

<sup>1</sup>La formulation non parallèle sans effets de courbure néglige la géométrie de la surface en ne tenant compte que de la variation de la pression à la paroi

## 4.1 Géométries considérées

Voici une brève description des différentes géométries qui furent utilisées pour l'analyse des résultats.

### Cylindre de Poll [34]

- Cylindre en flèche d'envergure infinie
- Angle de flèche:  $60^\circ$
- Nombre de Reynolds basé sur le rayon: 335 000

L'écoulement à l'extérieur de la couche limite est défini par la corrélation expérimentale de Poll (voir Fig. 4.1).  $U_e$  représente la vitesse adimensionnelle dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque et  $\theta$ , l'angle de déplacement sur la surface par rapport au bord d'attaque du cylindre.  $\Lambda$  représente l'angle de flèche de l'aile.

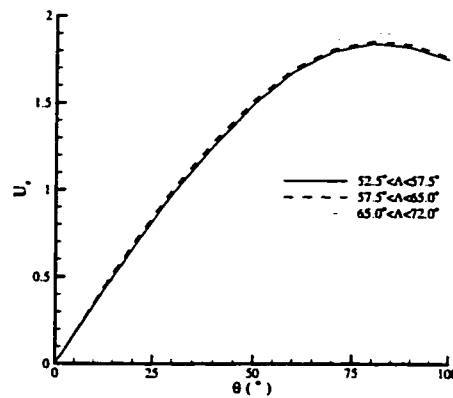


Figure 4.1 Cylindre de Poll: Corrélation expérimentale de Poll.

La vitesse de l'écoulement non visqueux dans la direction parallèle au bord d'attaque du cylindre ( $W_e$ ) est donnée par l'expression:

$$W_e = \tan \Lambda \quad (4.1)$$



### Plaque plane

- Nombre de Mach: 1.6
- Vitesse de l'écoulement amont: 460 m/s

### Aile avec profil ONERA D [3]

- Aile en flèche d'envergure infinie
- Angle de flèche:  $60^\circ$
- Angle d'attaque:  $-4^\circ$

La vitesse adimensionnelle de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite pour une aile d'envergure infinie avec profil ONERA D a été tirée de données expérimentales et est présentée à la Fig. 4.2.  $U_\infty$  représente la vitesse de l'écoulement amont dans la direction perpendiculaire au bord d'attaque et  $S/c$ , le déplacement adimensionnel sur la surface de l'aile.

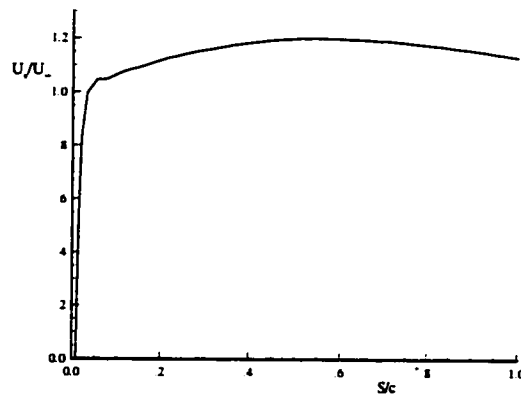


Figure 4.2 Aile ONERA D: Vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite.

La composante de vitesse adimensionnelle transversale est constante et donnée par la relation:

$$W_e = \tan \Lambda \quad (4.2)$$

### Aile AS-409 [2]

- Aile conique
- Angle de flèche:  $15^\circ$

Les distributions du nombre de Mach local à l'extérieur de la couche limite pour les Tests 42 et 79 d'Archambaud et al. sont présentées aux Figs. 4.3 et 4.4. Dans les deux cas, les distributions proviennent de résultats expérimentaux et sont exprimées en fonction du déplacement adimensionnel ( $S/c$ ) sur la surface de l'aile.

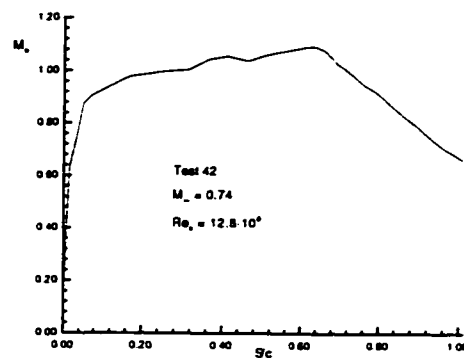


Figure 4.3 Aile AS-409: Distribution du Nombre de Mach local (Test 42).

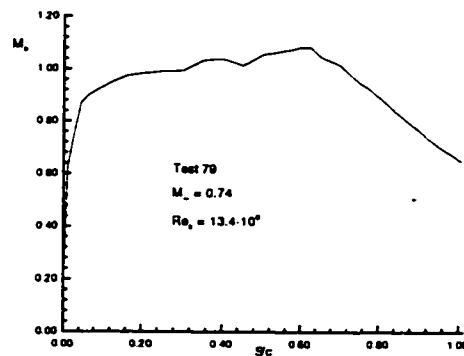


Figure 4.4 Aile AS-409: Distribution du nombre de Mach local (Test 79).

## 4.2 Validation et discussion des effets non parallèles

### 4.2.1 Vecteurs propres parallèles

La Fig. 4.5 présente les vecteurs propres parallèles normalisés obtenus pour un écoulement incompressible évoluant autour d'un cylindre en flèche d'envergure infinie (cylindre de Poll). La fréquence d'oscillation des ondes d'instabilité est de 1 000 Hz et  $|\hat{u}_{o_{max}}|$  est employé pour faire la normalisation des vecteurs propres parallèles. On ne tient pas compte des effets liés à la courbure de la surface du cylindre.

Les résultats sont comparés à ceux publiés par Masad et Malik [26]. Les vecteurs propres représentés par les cercles vides (Figs. 4.5 (a),(b),(c),(d)) correspondent à la solution obtenue à partir de la formulation temporelle et les cercles pleins (Figs. 4.5 (e),(f),(g),(h)) correspondent à la solution obtenue à partir de la formulation hybride spatiale. Les vecteurs propres calculés par Masad et Malik (lignes pleines) proviennent d'une formulation spatiale complète. La concordance de la solution découlant de la formulation hybride spatiale est presque parfaite. Dans le cas de la formulation temporelle, seules les composantes dominantes ( $\hat{u}_o$  et  $\hat{w}_o$ ) de la solution parallèle concordent parfaitement avec la solution spatiale de Masad et Malik. Les deux autres composantes ( $\hat{v}_o$  et  $\hat{p}_o$ ) présentent des écarts allant jusqu'à un peu plus de 10% par rapport à la solution spatiale de Masad et Malik. En considérant l'ordre de grandeur de chacun des vecteurs propres, on peut s'attendre à ce que de tels écarts n'aient cependant qu'une influence négligeable sur le calcul du taux d'amplification non parallèle.

Les résultats de la Fig. 4.6 furent obtenus pour le cas d'un écoulement incompressible autour d'une aile en flèche d'envergure infinie ayant un profil ONERA D. Les composantes réelle et imaginaire des vecteurs propres parallèles

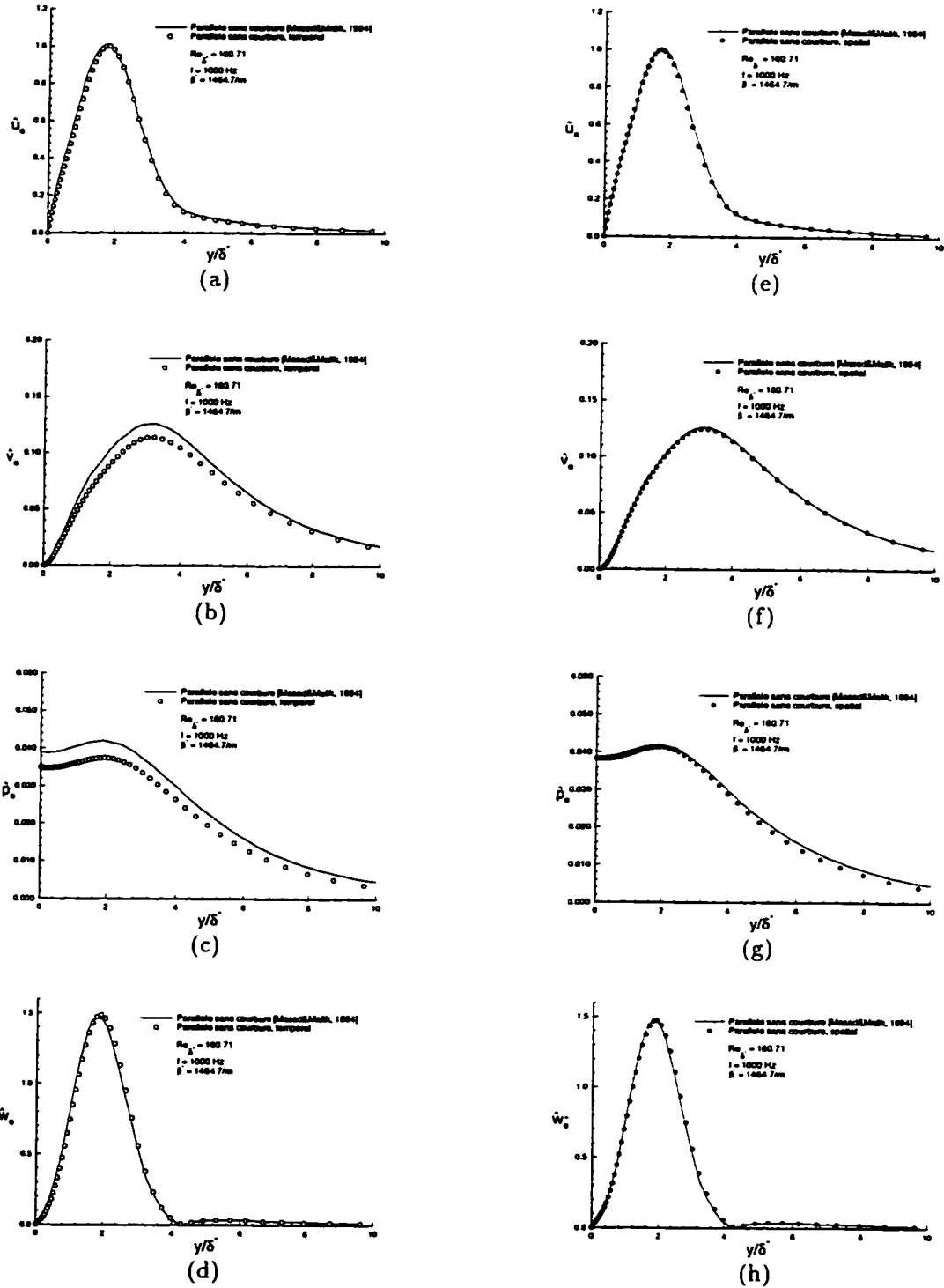


Figure 4.5 Cylindre de Poll: Vecteurs propres  $\hat{u}_\delta$ ,  $\hat{v}_\delta$ ,  $\hat{p}_\delta$  et  $\hat{w}_\delta$  normalisés à  $Re_{\delta^*} = 160.71$  pour  $f = 1\,000 \text{ Hz}$  et  $\beta^* = 1\,464.7 \text{ m}^{-1}$ .

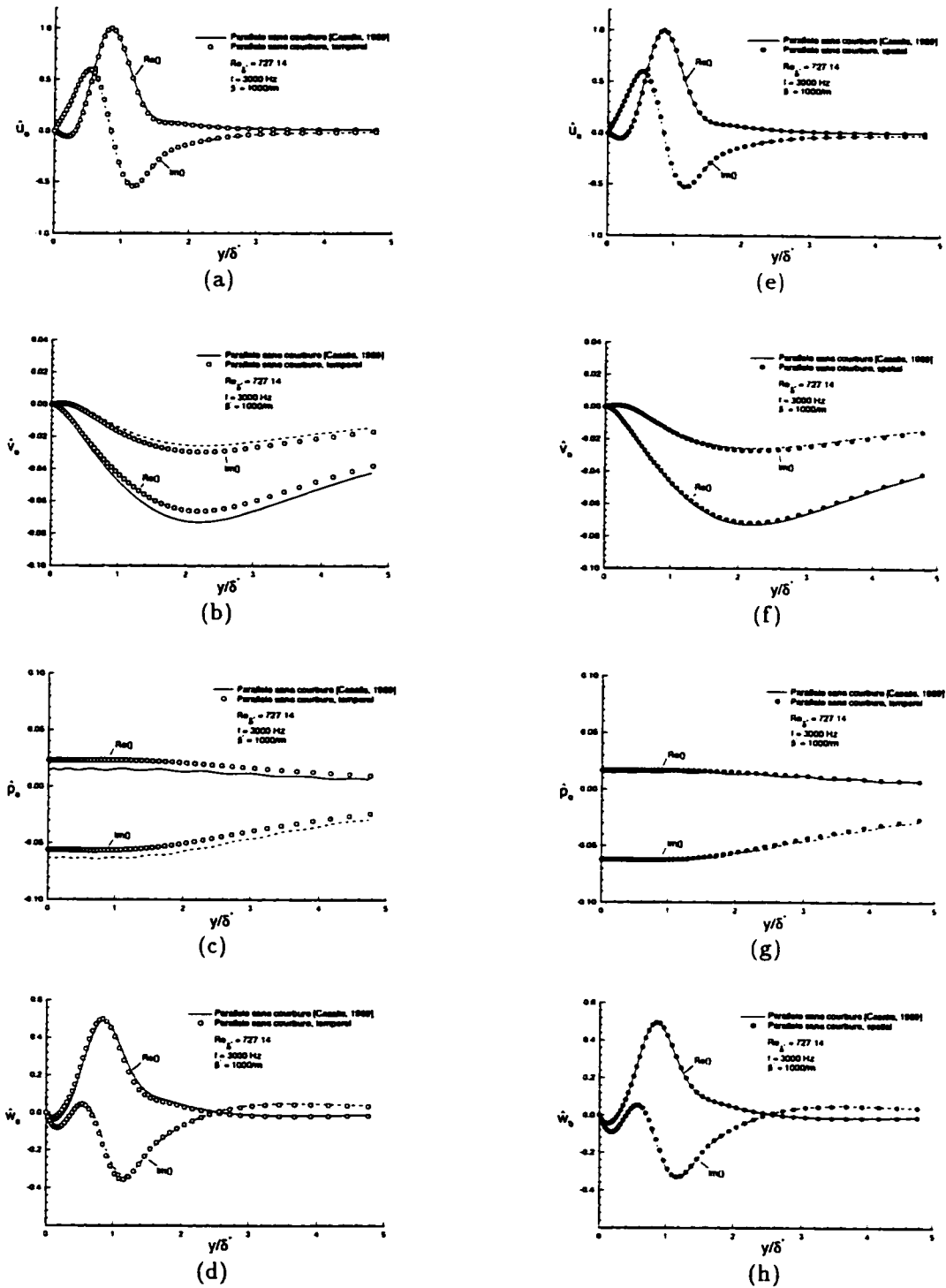


Figure 4.6 Aile ONERA D: Vecteurs propres  $\hat{u}_o$ ,  $\hat{v}_o$ ,  $\hat{p}_o$  et  $\hat{w}_o$  normalisés à  $Re_{d^*} = 727.14$  pour  $f = 3\,000 \text{ Hz}$  et  $\beta = 1\,000 \text{ m}^{-1}$ .

sont comparées à celles obtenues à l'aide d'une méthode spatiale développée par Casalis [6].

Les vecteurs propres ont été normalisés avec  $[\Re(\hat{u}_o)]_{max}$ . La vitesse de l'écoulement amont est de 80 m/s ( $Re_c = 1.7 \cdot 10^6$ ) et la fréquence d'oscillation des ondes d'instabilité est de 3 000 Hz. Les résultats présentés ont été obtenus à partir des formulations temporelle (cercles vides) et hybride spatiale (cercles pleins). La solution de Casalis fut obtenue à partir d'une formulation spatiale complète et est représentée par les lignes pleines.

Encore une fois, les vecteurs propres découlant de la formulation hybride spatiale affichent une concordance presque parfaite avec les résultats obtenus par Casalis. Il en est de même des deux composantes de vitesse parallèles à la paroi ( $\hat{u}_o$  et  $\hat{w}_o$ ) provenant de la formulation temporelle. Seuls les vecteurs propres ( $\hat{v}_o$  et  $\hat{p}_o$ ) de la formulation temporelle présentent un écart un peu plus important mais négligeable en tenant compte des ordres de grandeur impliqués.

En se fiant aux résultats des Figs. 4.5 et 4.6, il semble raisonnable de conclure que la formulation hybride spatiale est en tous points équivalente à la formulation spatiale complète pour le cas d'un écoulement incompressible. Un tel résultat devient très intéressant si on considère l'énorme économie au niveau du temps d'implantation et de calcul que permet la méthode hybride par rapport à la formulation spatiale complète.

#### 4.2.2 Taux d'amplification parallèles et non parallèles

La présente section traite des taux d'amplifications parallèles et non parallèles obtenus à l'aide d'une méthode de résolution locale pour fins de validation. Les premiers résultats de la section ont été obtenus en faisant l'hypothèse d'un écoulement tridimensionnel, incompressible alors que le dernier résultat correspond à un écoulement bidimensionnel, compressible.

### Écoulement incompressible

Les premiers taux d'amplification présentés furent obtenus pour des écoulements à bas nombre de Mach. L'hypothèse d'un écoulement incompressible est introduite dans les équations de stabilité en posant que  $M = 0$  et  $T = cte$  dans les coefficients des Annexes I et II. Les systèmes d'équations parallèles et non parallèles résultant de l'hypothèse incompressible sont donc considérablement simplifiés par rapport aux systèmes d'équations originaux (Eqs. (2.2) et (2.12)). Deux géométries différentes ont été choisies pour l'analyse incompressible: un cylindre en flèche d'envergure infinie (cylindre de Poll) et une aile en flèche d'envergure infinie avec profil ONERA D.

Les Figs. 4.7 à 4.11 présentent les taux d'amplification ( $\sigma^u$ ) obtenus pour des écoulements incompressibles autour d'un cylindre en flèche d'envergure infinie (cylindre de Poll). Les résultats sont comparés à ceux présentés par Masad et Malik [26] qui furent également obtenus par le biais d'une méthode de perturbations (formulation spatiale complète). Seuls les taux d'amplification non parallèles tiennent compte des effets liés à la courbure du cylindre.

Dans les Figs. 4.7 et 4.8, la fréquence des ondes d'instabilité est nulle (ondes stationnaires) et les taux d'amplification sont présentés pour tout le domaine instable de  $\beta$ . Les résultats obtenus à partir des formulations temporelle (Figs. 4.7 (a) et 4.8 (a)) et hybride spatiale (Figs. 4.7 (b) et 4.8 (b)) sont illustrés. Pour les deux formulations, la concordance des résultats est excellente pour les deux nombres de Reynolds choisis (correspondant à deux positions sur le cylindre). En se référant aux Figs. 4.7 et 4.8, l'équivalence des approches temporelle et spatiale confirme la faible influence des vecteurs propres  $\hat{v}_0$  et  $\hat{p}_0$  sur le calcul du taux d'amplification non parallèle  $\sigma^u$  (voir Section 4.2.1). Dans la région où les taux d'amplification atteignent un maximum, l'effet combiné des contributions de courbure et non parallèles stabilise

l'écoulement. En comparant les deux figures, on remarque également que l'effet stabilisateur s'amplifie avec une augmentation de  $Re_\delta \cdot^2$ .

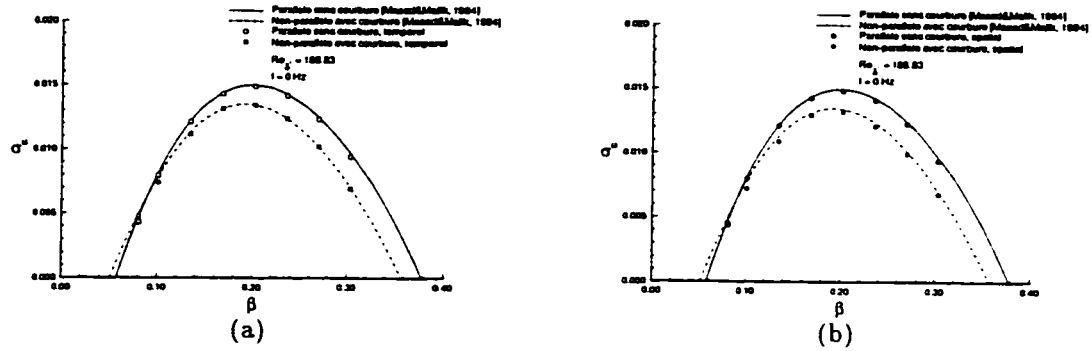


Figure 4.7 Cylindre de Poll: Taux d'amplification à  $Re_\delta = 188.83$  pour  $f = 0$  Hz.

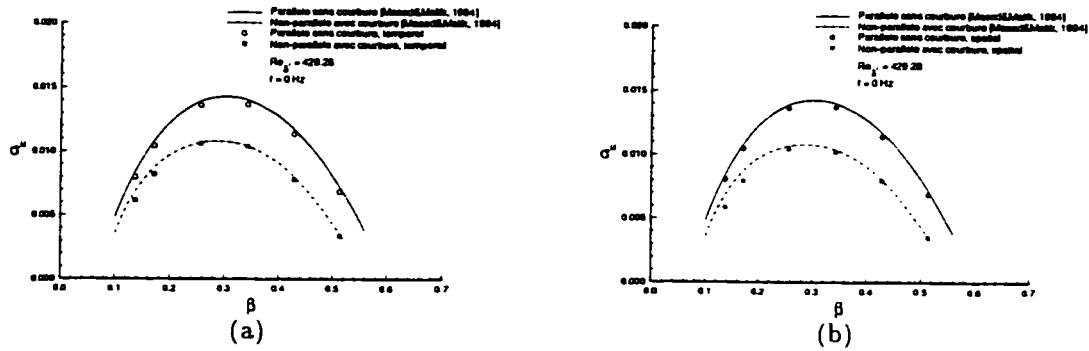


Figure 4.8 Cylindre de Poll: Taux d'amplification à  $Re_\delta = 429.28$  pour  $f = 0$  Hz.

Les figures suivantes (Figs. 4.9 et 4.10) montrent les taux d'amplification obtenus pour des ondes d'instabilité ayant une fréquence d'oscillation de 1 000 Hz pour tout le domaine instable de  $\beta$ . Encore une fois, pour les deux positions sur le cylindre, la concordance des résultats avec ceux de Masad et Malik [26] est presque parfaite. En se fiant aux Figs. 4.9 et 4.10, l'effet stabilisateur lié à l'addition combinée des effets de courbure et non parallèles

<sup>2</sup>Masad et Malik ont démontré que l'effet stabilisateur des contributions liées à la courbure s'accroît à mesure que l'on s'éloigne du bord d'attaque du cylindre [26]



semble s'amplifier avec une augmentation de  $\beta$ . Tout comme pour les ondes d'instabilité stationnaires, l'effet stabilisateur semble également s'amplifier avec une augmentation de  $Re_{\delta^*}$ .

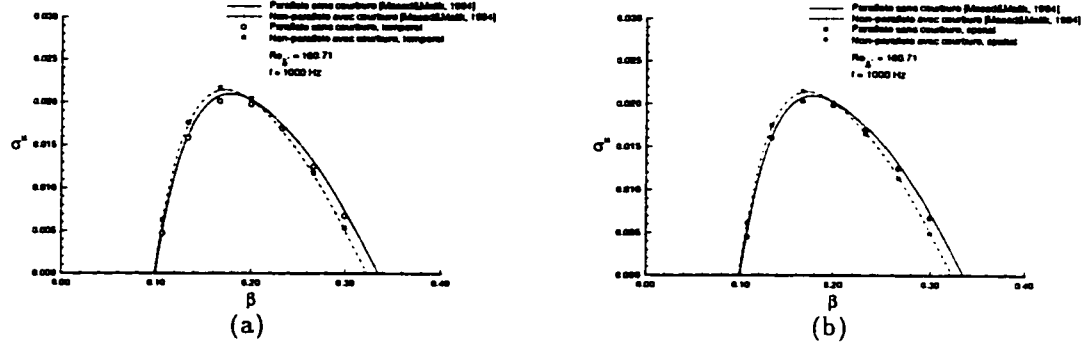


Figure 4.9 Cylindre de Poll: Taux d'amplification à  $Re_{\delta^*} = 160.71$  pour  $f = 1\,000$  Hz.

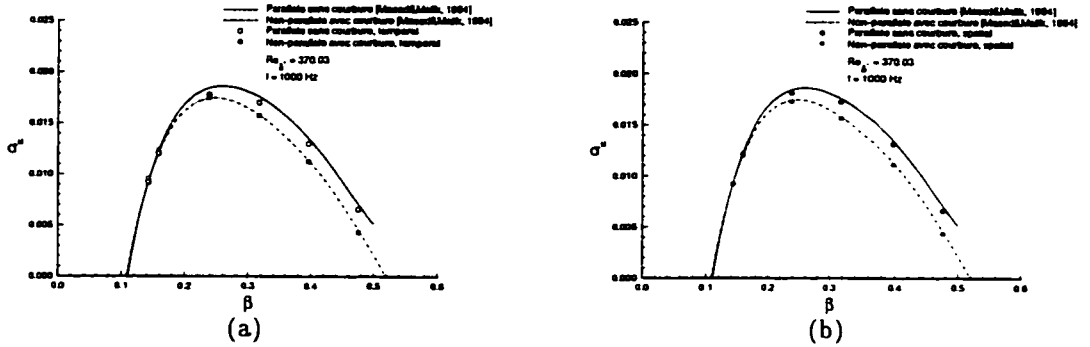


Figure 4.10 Cylindre de Poll: Taux d'amplification à  $Re_{\delta^*} = 370.03$  pour  $f = 1\,000$  Hz.

La Fig. 4.11 présente la variation des taux d'amplification parallèle et non parallèle pour plusieurs fréquences d'oscillation. La composante en  $z$  dimensionnelle du nombre d'onde  $\vec{k}$  est fixée à  $\beta^* = 1\,464.7\text{ m}^{-1}$ . Les résultats présentés furent obtenus à partir des formulations temporelle (Fig. 4.11 (a))

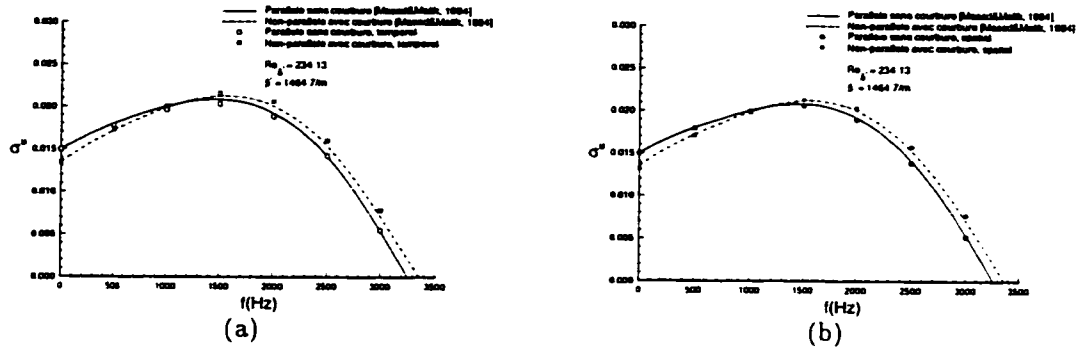


Figure 4.11 Cylindre de Poll: Taux d'amplification à  $Re_{\delta^*} = 234.13$  pour  $\beta^* = 1\,464.7\,\text{m}^{-1}$ .

et hybride spatiale (Fig. 4.11 (b)). L'effet stabilisateur lié à l'ajout des contributions de courbure et non parallèles diminue clairement avec une augmentation de la fréquence d'oscillation. Lorsque la fréquence augmente au-delà de celle correspondant au taux d'amplification maximum, l'effet devient même déstabilisateur. En se fiant aux résultats des Figs. 4.7 à 4.11, il semble raisonnable d'avancer qu'un comportement similaire est à prévoir pour tous  $Re_{\delta^*}$ .

Les résultats suivants furent obtenus pour un écoulement incompressible autour d'une aile ONERA D d'envergure infinie (Fig. 4.12). Le nombre de Reynolds basé sur la corde est de  $1.7 \cdot 10^6$ . Les résultats provenant de la méthode de perturbations proposée sont comparés à ceux obtenus par Langlois et al. [18] pour tout le domaine instable de  $Re_{\delta^*}$ . Il est à noter que les résultats de Langlois et al. furent obtenus à partir d'une approche de marche en  $x$  linéaire (PSE).

La fréquence d'oscillation des ondes d'instabilité est de 3 000 Hz et la composante dimensionnelle en  $z$  du nombre d'onde  $\vec{k}$  est fixée à  $\beta^* = 1\,000\,\text{m}^{-1}$ . Les Figs. 4.12 (a),(b) et (c) présentent les taux d'amplification calculés en se basant sur les trois composantes de vitesse ( $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ , et  $\hat{w}$ ) alors que les Figs. 4.12

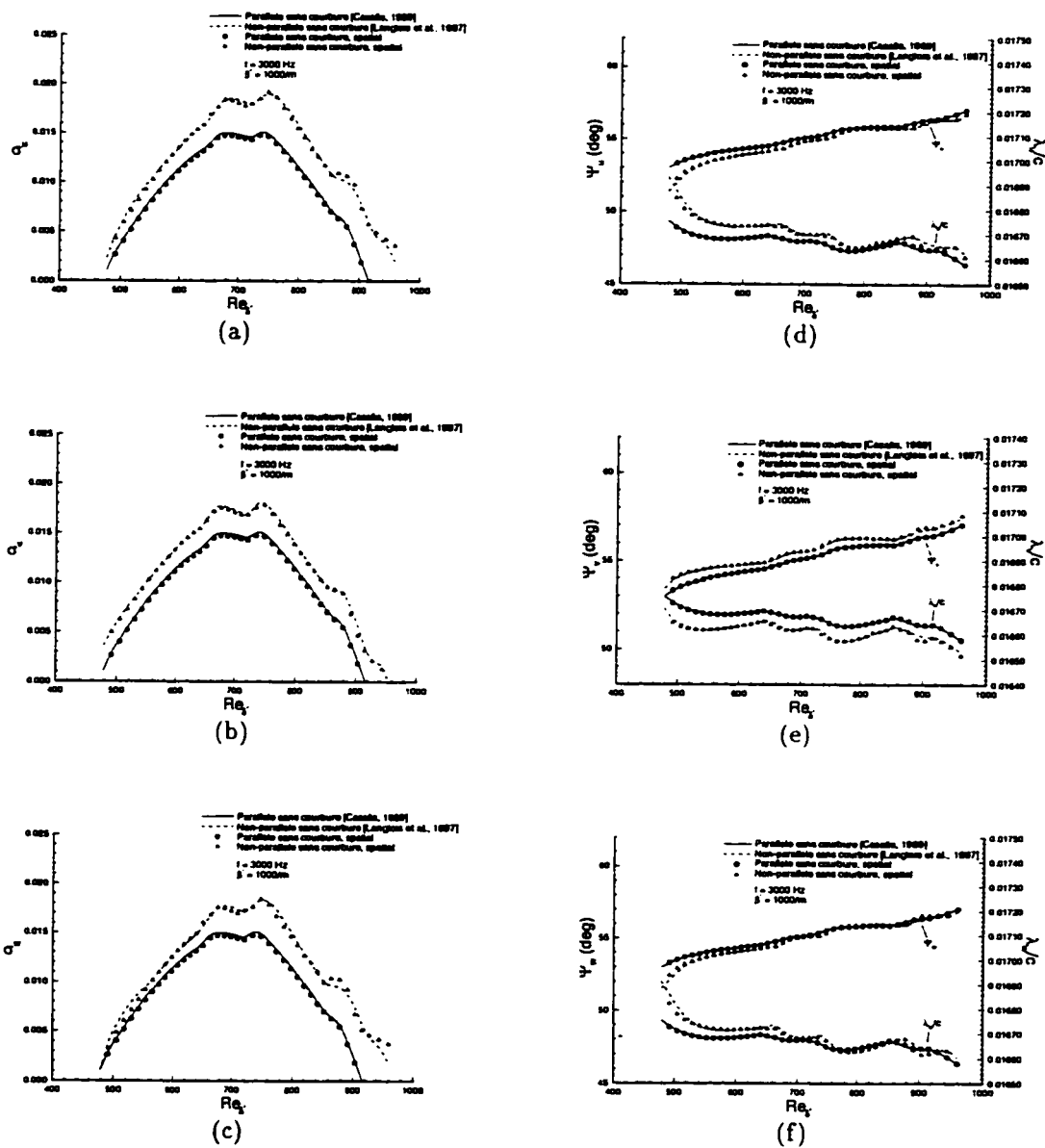


Figure 4.12 Aile ONERA-D: Amplification spatiale, orientation du vecteur d'onde et longueur d'onde pour  $f = 3000 \text{ Hz}$  et  $\beta^* = 1000 \text{ m}^{-1}$ .

(d),(e) et (f) comparent les caractéristiques des ondes d'instabilité (orientation du vecteur d'onde et longueur d'onde adimensionnelle) pour la plage des nombres de Reynolds instables. La formulation hybride spatiale fut employée pour l'obtention de tous les résultats présentés à la Fig. 4.12. L'effet déstabilisateur des contributions non parallèles est clairement illustré pour les trois taux d'amplification  $\sigma^u$ ,  $\sigma^v$  et  $\sigma^w$  (Figs. 4.12 (a),(b) et (c)). Dans les trois cas, l'effet déstabilisateur tend à s'amplifier avec une augmentation de  $Re_{\delta^*}$ .

La concordance des résultats avec ceux de Langlois et al. [18] est à peu près parfaite partout sauf dans les régions où la dérivée du taux d'amplification par rapport à  $x$  (ou  $Re_{\delta^*}$ ) subit des variations importantes. Pour les valeurs de  $f$  et  $\beta^*$  choisies, les Figs. 4.12 (d),(e) et (f) indiquent que l'orientation et la longueur d'onde des vecteurs d'onde demeurent à peu près constantes pour tout le domaine instable de  $Re_{\delta^*}$ . En se fiant à la valeur de l'orientation des vecteurs d'onde ( $\approx 55^\circ$ ), les instabilités sont de nature essentiellement mixte pour tout le domaine de  $Re_{\delta^*}$ . Comme l'orientation des vecteurs d'onde de même que la longueur d'onde des ondes d'instabilité dépendent directement du taux d'amplification, la concordance est excellente pour toutes les positions sur l'aile à l'exception des régions où la dérivée du taux d'amplification non parallèle par rapport à  $x$  varie de manière plus importante. En se fiant à la Fig. 4.12, les effets non parallèles ont une influence beaucoup moins importante sur les vecteurs d'onde et longueurs d'onde que sur les taux d'amplification.

### Écoulement compressible

Le dernier résultat fut obtenu en faisant l'étude d'un écoulement bidimensionnel compressible évoluant sur une plaque plane (Fig. 4.13). La fréquence d'oscillation des ondes d'instabilité est environ 168 kHz et  $\beta^* = 6\,000\text{ m}^{-1}$ .

Le taux d'amplification spatiale correspondant à  $\hat{u}$  obtenu à partir de la

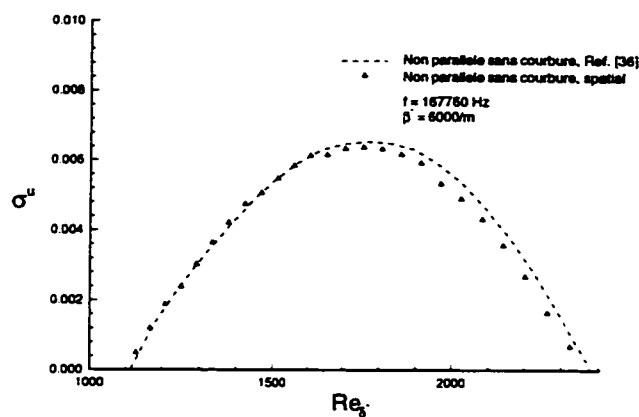


Figure 4.13 Plaque plane: Taux d'amplification pour  $f = 167\,760$  Hz et  $\beta^* = 6\,000\text{ m}^{-1}$ .

méthode locale présentée aux Chapitres II et III est comparé à celui obtenu à l'aide de l'approche PSE [36] pour toute la région instable de la plaque. Tel que montré par la figure, même pour un écoulement en régime supersonique, la concordance entre les deux approches est excellente.

### 4.3 Prédiction de la transition

Un des objectifs de l'introduction des effets non parallèles dans les équations linéaires de stabilité est de quantifier l'incidence des effets non parallèles sur la corrélation existant entre la position prédite et observée de la transition. En couplant la théorie de la stabilité avec la méthode du  $e^n$ , la qualité de cette corrélation réside dans la consistance du facteur  $n$  à la transition. Pour un certain environnement (niveau de turbulence, rugosité de la surface), on devrait s'attendre à ce que le facteur  $n$  critique à la transition demeure sensiblement constant pour toutes géométries et conditions de vol.

Les prochains résultats ont été choisis pour comparer la consistance des facteurs  $n^u$  critiques obtenus à partir des formulations parallèle et non parallèle (avec et sans effets de courbure, compressible et incompressible). Les

comparaisons sont faites en calculant la valeur critique du facteur  $n^u$  à la transition pour différentes géométries et emplacements de transition déjà connus [2] [3]. Les taux d'amplification parallèles et non parallèles impliqués dans les calculs de facteurs  $n^u$  sont déterminés à l'aide de la méthode de résolution locale présentée aux Chapitres II et III.

Archambaud et al. [2] ont publié une série d'observations de la position de la transition pour une aile conique ayant un profil AS-409. L'étude fut menée dans la soufflerie transsonique T2 de l'ONERA/CERT. Dans le but d'éviter les complications liées à l'utilisation d'une formulation entièrement tridimensionnelle, l'hypothèse d'une aile d'envergure infinie avec comme angle de flèche l'angle de flèche moyen (mi-corde) de l'aile conique fut employée pour les calculs de stabilité. Les facteurs  $n^u$  critiques furent déterminés à partir des positions de transition observés lors des tests no. 42 et 79 [2].

Pour le test no. 42, les pression et température de stagnation étaient de 2 bars et 145 K, respectivement, et le nombre de Reynolds basé sur la corde était de  $12.8 \cdot 10^6$ . Pour le test no. 79, les pression et température de stagnation étaient de 2.5 bars et 164 K, respectivement, alors que le nombre de Reynolds était de  $13.4 \cdot 10^6$ . Pour les deux tests choisis, le nombre de Mach de l'écoulement amont était de 0.74. Tous les résultats de l'étude sont compris dans les Tableaux 4.1 à 4.3. Il est à noter que les détails concernant la géométrie du profil AS-409 ne sont pas publics. Il ne fut donc pas possible d'inclure les effets liés à la courbure des surfaces.

Le second échantillon de résultats expérimentaux analysé dans cette section fut publié par Arnal et Juillen [3]. La géométrie mise à l'étude était une aile en flèche d'envergure infinie avec profil ONERA D et les tests furent également effectués dans une soufflerie de l'ONERA.

Langlois et al. [18] ont mené une étude détaillée de l'influence des effets

Formulation parallèle sans effets de courbure	Facteur $n^u$	
	Test 42	Test 79
Méthode de l'enveloppe	5.0	6.6
$\beta^*$ constant	3.1	4.9
Formulation non parallèle sans effets de courbure	Facteur $n^u$	
	Test 42	Test 79
$\beta^*$ constant	8.0	5.7
Formulation non parallèle avec effets de courbure	Facteur $n^u$	
	Test 42	Test 79
$\beta^*$ constant	N/D	N/D

Tableau 4.1 Aile AS409: Facteur  $n^u$  critique

Formulation parallèle sans effets de courbure	$f$ (kHz)	
	Test 42	Test 79
Méthode de l'enveloppe	20.0	30.0
$\beta^*$ constant	6.00	30.0
Formulation non parallèle sans effets de courbure	$f$ (kHz)	
	Test 42	Test 79
$\beta^*$ constant	6.00	30.0
Formulation non parallèle avec effets de courbure	$f$ (kHz)	
	Test 42	Test 79
$\beta^*$ constant	N/D	N/D

Tableau 4.2 Aile AS409: Fréquence critique

Formulation parallèle sans effets de courbure	$\beta^*$ (mm <sup>-1</sup> )	
	Test 42	Test 79
$\beta^*$ constant	12.0	3.00
Formulation non parallèle sans effets de courbure	$\beta^*$ (mm <sup>-1</sup> )	
	Test 42	Test 79
$\beta^*$ constant	12.0	3.00
Formulation non parallèle avec effets de courbure	$\beta^*$ (mm <sup>-1</sup> )	
	Test 42	Test 79
$\beta^*$ constant	N/D	N/D

Tableau 4.3 Aile AS409:  $\beta^*$  critique

non parallèles pour la même configuration en employant l'approche PSE. Leur étude comportait des écoulements amont ayant trois vitesses différentes: 50, 65 et 80 m/s. Selon les résultats de leur étude, les effets non parallèles étaient négligeables pour un écoulement ayant une vitesse de 50 m/s et par conséquent, seules les vitesses de 65 et 80 m/s ont été retenues pour notre analyse. Les valeurs critiques pour  $\beta^*$  et  $f$  identifiées par Langlois et al. [18] furent utilisées pour faire le calcul du facteur  $n^u$  à la transition. Tous les détails concernant les résultats de cette analyse sont présentés dans les Tableaux 4.4 à 4.6.

À la lecture du Tableau 4.1, on constate que l'écart entre les valeurs du facteur  $n$  en passant d'un test à l'autre est de 1.6 pour la méthode enveloppe, 1.8 pour la méthode  $\beta^*$  constant en formulation parallèle et 2.3 en formulation non parallèle. On peut donc affirmer que l'inclusion des effets non parallèles n'améliore pas la consistance du facteur  $n$  dans ce cas. On remarque également, en comparant les résultats à  $\beta^*$  constant, que les effets non parallèles sont beaucoup plus élevés pour le test 42 que pour le test 79. Ceci s'explique par le fait que l'instabilité dominante du test 42 est de nature transversale (fréquence relativement faible) alors qu'elle est longitudinale pour le test 79 (fréquence élevée). On notera par contre que les résultats de la méthode enveloppe indiquent seulement des ondes longitudinales.

Les résultats obtenus par la méthode à  $\beta^*$  constant sur l'aile ONERA D (Tableau 4.4) indiquent également que l'écart entre les facteurs  $n$  critiques pour les deux vitesses étudiées varie peu selon que l'on considère ou non les effets non parallèles et de courbure. Les effets non parallèles sont déstabilisateurs tandis que la courbure est stabilisatrice.

Pour une vitesse à l'infini amont de 80 m/s, Langlois et al. [18] ont observé que l'inclusion des effets non parallèles résulte en un changement d'orientation à la transition, d'une instabilité mixte ( $\Psi = 49^\circ$ ) à une instabilité purement



Formulation parallèle sans effets de courbure	Facteur $n^u$	
	65 m/s	80 m/s
Méthode de l'enveloppe	7.8	5.6
$\beta^*$ constant	5.2	3.8
Formulation parallèle avec effets de courbure	Facteur $n^u$	
	65 m/s	80 m/s
Méthode de l'enveloppe	6.8	4.5
$\beta^*$ constant	5.1	3.7
Formulation non parallèle sans effets de courbure	Facteur $n^u$	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	6.5	5.0
Formulation non parallèle avec effets de courbure	Facteur $n^u$	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	6.2	4.1

Tableau 4.4 Aile ONERA D: Facteur  $n^u$  critique

Formulation parallèle sans effets de courbure	$f$ (kHz)	
	65 m/s	80 m/s
Méthode de l'enveloppe	1.40	3.25
$\beta^*$ constant	1.75	3.00
Formulation parallèle avec effets de courbure	$f$ (kHz)	
	65 m/s	80 m/s
Méthode de l'enveloppe	1.40	3.25
$\beta^*$ constant	1.75	3.00
Formulation non parallèle sans effets de courbure	$f$ (kHz)	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	1.75	1.00
Formulation non parallèle avec effets de courbure	$f$ (kHz)	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	1.75	1.00

Tableau 4.5 Aile ONERA D: Fréquence critique

Formulation parallèle sans effets de courbure	$\beta^*$ ( $\text{mm}^{-1}$ )	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	.625	.925
Formulation parallèle avec effets de courbure	$\beta^*$ ( $\text{mm}^{-1}$ )	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	.625	.925
Formulation non parallèle sans effets de courbure	$\beta^*$ ( $\text{mm}^{-1}$ )	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	.675	1.25
Formulation non parallèle avec effets de courbure	$\beta^*$ ( $\text{mm}^{-1}$ )	
	65 m/s	80 m/s
$\beta^*$ constant	.675	1.25

Tableau 4.6 Aile ONERA D:  $\beta^*$  critique

transversale ( $\Psi = 84^\circ$ ). Ceci explique le changement de fréquence et de nombre d'onde transversal critiques pour ce cas.

Les résultats des Tableaux 4.1 à 4.6 laissent présumer que la précision du facteur  $n^q$  à la transition n'est modifiée que très peu par l'ajout des effets non parallèles ou de courbure dans les équations de stabilité. Par contre, en considérant la quantité restreinte de résultats à notre disposition, il est difficile de se prononcer fermement sur la généralité de cette observation.

## CHAPITRE V

### Conclusion

#### 5.1 Résumé du mémoire

On identifie principalement deux types d'approches pour la résolution des équations de stabilité non parallèles. Le premier type d'approche implique la résolution en une seule étape des équations de stabilité paraboliques à l'aide d'une procédure de marche dans la direction principale de l'écoulement moyen ( $x$ ). C'est l'approche PSE. Le second type d'approche pour la résolution des équations de stabilité non parallèles est purement local. La méthode locale consiste en l'ajout d'une correction non parallèle à la solution du problème aux valeurs propres parallèle.

La résolution des équations de stabilité non parallèles à partir d'une méthode de résolution locale fut présentée dans ce mémoire. Contrairement à ce que l'on retrouve déjà dans la littérature, la méthode locale traitée ici fut appliquée aux équations de stabilité tridimensionnelles et compressibles. Voici, par le biais d'un bref résumé de chacun des chapitres du mémoire, un aperçu du travail qui fut complété:

- Tel que décrit dans le Chapitre I, le principal objectif du travail était de quantifier l'incidence de l'introduction des effets non parallèles sur la variation du facteur  $n$  à la transition. Deux modèles mathématiques pour la résolution des équations de stabilité non parallèles de manière locale furent présentés dans le Chapitre I [26], [35]. Le principal avantage de l'approche locale est qu'elle permet de tenir compte des effets non

parallèles dans les équations de stabilité, tout en se basant sur un code de stabilité linéaire conventionnel, i.e. local.

- Le mode de résolution des équations de stabilité non parallèles qui fut présenté dans le Chapitre II est basé sur le modèle mathématique de Masad et Malik [26]. Avec la méthode proposée, la résolution du problème non parallèle se fait en débutant avec la solution du problème aux valeurs propres parallèle puis en évaluant une correction non parallèle à partir d'une condition de solvabilité et d'un problème adjoint. À la fin du Chapitre II, deux méthodes de calcul du facteur  $n$  pour la prédiction de la transition furent également décrites.
- L'aspect numérique du travail fut présenté au Chapitre III. La méthode numérique choisie est similaire à celle suggérée par Malik et Orszag [24] qui consiste en l'imposition des conditions aux limites pour la résolution des équations linéaires de stabilité (BVM). Tous les détails concernant la discrétisation des équations de stabilité non parallèles, de même que l'algorithme complet de résolution pour l'obtention du taux d'amplification spatiale non parallèle (formulations temporelle et spatiale) furent énoncés dans le Chapitre III.
- L'applicabilité de la méthode locale proposée pour la résolution des équations de stabilité non parallèles fut démontrée dans le Chapitre IV. Les taux d'amplification parallèles et non parallèles furent comparés à ceux publiés par Masad et Malik [26] pour des écoulements incompressibles évoluant autour d'un cylindre en flèche d'envergure infinie. De la même façon, les taux d'amplification parallèles et non parallèles furent comparés à ceux obtenus par Langlois et Casalis [18] pour le cas d'un écoulement incompressible évoluant autour d'une aile en flèche d'envergure infinie.

Les résultats obtenus pour un cas bidimensionnel, compressible furent finalement comparés à ceux rendus disponibles par Salinas et Casalis [36].

- Également dans le Chapitre IV, les facteurs  $n$  critiques déterminés à l'aide des formulations parallèle et non parallèle locales furent comparés. Les comparaisons ont été faites pour des écoulements avec et sans effets de courbure, compressibles et incompressibles, en calculant la valeur critique du facteur  $n$  à la transition pour des positions de transition déjà connues [2] [3]. Deux géométries différentes furent analysées pour la prédiction de la transition soient une aile conique AS-409 et une aile en flèche d'envergure infinie avec profil ONERA D.

## 5.2 Contributions du mémoire

Une méthode locale pour la résolution des équations linéaires de stabilité non parallèles fut mise à l'étude pour un écoulement tridimensionnel et compressible. En se fiant aux résultats présentés dans le Chapitre IV, l'équivalence de l'approche locale présentée aux Chapitres II et III avec la méthode de marche PSE put être démontrée. L'équivalence entre la méthode hybride spatiale et la formulation spatiale complète fut également démontrée autant pour les valeurs propres que les vecteurs propres parallèles et non parallèles. À la lumière de l'ensemble des résultats obtenus, il apparaît raisonnable de conclure que la méthode de perturbations proposée dans ce mémoire peut être employée avec confiance pour la résolution des équations de stabilité linéaires non parallèles.

Par le biais de l'ajout des effets non parallèles dans les équations linéaires de la stabilité, un des objectifs du travail était de quantifier l'incidence de l'introduction des effets non parallèles sur la variation du facteur  $n$  critique à la transition. Malgré un échantillonnage très limité, les résultats du Chapitre IV

démontrent que l'ajout des effets non parallèles dans les équations de stabilité n'influence pas de manière significative cette variation.

### 5.3 Recommandations

Lorsqu'on compare les facteurs  $n$  critiques à la transition découlant de la résolution des équations linéaires de stabilité, la méthode du  $e^n$  semble encore déficiente à bien des égards. Il fut en effet démontré dans ce mémoire que l'ajout des effets non parallèles dans les équations linéaires de stabilité ne diminue pas de manière significative la variation du facteur  $n$  critique à la transition.

On croit maintenant que le couplage de la méthode empirique du  $e^n$  à la résolution des équations de stabilité non linéaires pourrait avoir une influence positive sur la consistance du facteur  $n$  à la transition. Une méthode PSE existe déjà pour la résolution des équations de stabilité linéaires et pourrait être étendue pour traiter des interactions non linéaires. Pour le démarrage du calcul PSE, une solution locale ( $\hat{q}$ ) est requise que l'on obtient en général à partir de la résolution des équations linéaires et parallèles de stabilité. Avec une solution initiale parallèle, le démarrage du calcul PSE est problématique et plusieurs points en  $x$  sont requis avant d'obtenir la convergence désirée. Avec une méthode locale comme celle proposée dans ce mémoire, une solution initiale non parallèle pourrait servir au démarrage efficace et systématique du calcul PSE.

Le temps de calcul enregistré est très décevant lorsqu'on compare la méthode locale proposée avec les méthodes impliquant une procédure de marche dans la direction principale de l'écoulement moyen (PSE). Pour un maillage identique, la méthode locale demande en moyenne deux fois plus de temps de

calcul que la méthode PSE. Avec un schéma de discrétisation d'ordre deux fois moins élevé en  $y$  (ordre deux), la méthode de perturbations requiert également un maillage plus raffiné que la méthode PSE pour l'obtention de la convergence de la solution. Un schéma de discrétisation d'ordre quatre serait par conséquent à considérer pour l'approche non parallèle locale.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AIRIAU, C. (1994). Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire incompressible par un système d'équations parabolisé (PSE). Thèse de Doctorat, ENSAE, Toulouse, No. d'ordre: 141.
- [2] ARCHAMBAUD, J.P., PAYRY, M.J. et SERAUDIE, A. (1989). Étude expérimentale de la laminarité sur l'aile AS409 jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 14 millions dans la soufflerie T2. Rapport technique de synthèse 33/5006-19.
- [3] ARNAL, D. et JUILLEN, J.C. (1987). Three-Dimensional Transition Studies at ONERA/CERT. AIAA Paper 87-1335.
- [4] ARNAL, D. (1993). Progress in Transition Modelling. AGARD Report, 793, 63.
- [5] BRIDGES, T.J. et MORRIS, P.J. (1984). Differential Eigenvalue Problems in which the Parameter Appears Non-Linearly. Journal of Computational Physics, 55, 437-460.
- [6] CASALIS, G. (1989). Résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld en tridimensionnel et en incompressible par une méthode de Galerkin avec les polynômes de Chebichev: le code COCIP. Rapport technique DERAT No. 46/5618.34.
- [7] CEBECI, T., STEWARTSON, K. (1980). Stability and Transition in Three-Dimensional Flows. AIAA Journal, 18, 398-405.



- [8] GASTER, M. (1962). A Note on the Relation between Temporally Increasing and Spatially Increasing Disturbances in Hydrodynamic Stability. Journal of Fluid Mechanics, 14, 222-224.
- [9] GASTER, M. (1974). On the Effects of Boundary Layer Growth on Flow Stability. Journal of Fluid Mechanics, 66, 465-480.
- [10] GREGORY, N., STUART, J.T. et WALKER, W.S. (1955). On the Stability of Three-Dimensional Boundary Layers with Application to the Flow due to a Rotating Disk. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A248, 155-199.
- [11] HERBERT, T. et BERTOLOTI, F.P. (1987). Stability Analysis of Non-parallel Boundary Layers. Bull. Am. Phys. Soc., 1, 2079.
- [12] HERBERT, T. (1993). Parabolized Stability Equations. AGARD FDP/VKI Special Course on Progress in Transition Modelling, Madrid et Bruxelles.
- [13] HOUEVILLE, R., MAZIN, C. et CORJON, A. (1993). Méthode de caractéristiques pour le calcul des couches limites tridimensionnelles. La Recherche Aérospatiale, 1, 37-49.
- [14] HOUEVILLE, R. et COUSTEX, J. (1993). Calcul de couches limites tridimensionnelles. Mode d'emploi du code CLDF. Rapport intermédiaire, ONERA/CERT.
- [15] ITOH, N. (1986). The Origin and Subsequent Development in Space of Tollmien-Schlichting Waves in a Boundary Layer. Fluid Dynamics Research (North Holland), 1, 119-130.

- [16] KLEISER, L. (1993). Direct Navier-Stokes Simulations: Temporal. AGARD FDP/VKI Special Course on Progress in Transition Modelling. Madrid et Bruxelles.
- [17] LANGLOIS, M., MASSON, C., PARASCHIVOIU, I. et TEZOK, F. (1995). Curvature Effects in 3-D Compressible Transition Analysis. Proceedings of the Fourth Annual Conference of the CFD Society of Canada, II, 315-322.
- [18] LANGLOIS, M., CASALIS, G. et ARNAL, D. (1997). On the Practical Application of the PSE Approach to Linear Stability. Soumis pour publication dans Aerospace Science and Technology.
- [19] LING, C.H. et REYNOLDS, W.C. (1973). Non-Parallel Flow Corrections for the Stability of Shear Flows. Journal of Fluid Mechanics, 59, 571.
- [20] LIN, R.S. et REED, H.L. (1993). Effects of Curvature on Stationary Crossflow Instability of a Three-Dimensional Boundary Layer. AIAA Journal, 31, 1611-1617.
- [21] MACK, L.M. (1977). Transition Prediction and Linear Stability Theory. AGARD Conference Proceedings, 227, 1-1:1-22.
- [22] MACK, L.M. (1979). On the Stability of the Boundary Layer on a Transonic Swept Wing. AIAA Paper 79-0264.
- [23] MACK, L.M. (1988). Stability of Three-Dimensional Boundary Layers on Swept Wings at Transonic Speeds. IUTAM Symp. Transsonicum III, Göttingen, Eds. Zierep et Oertel, Springer Verlag.
- [24] MALIK, M.R. et ORSZAG, S.A. (1981). Efficient Computation of the Stability of Three-Dimensional Compressible Boundary Layers. AIAA Paper, 81, 1277.

- [25] MALIK, M.R. (1982). COSAL - A Black-Box Compressible Stability Analysis Code for Transition Prediction in Three-Dimensional Boundary Layers. NASA CR-165925.
- [26] MASAD, J.A. et MALIK, M.R. (1994). Effects of Body Curvature and Nonparallelism on the Stability of Flow over a Swept Cylinder. Physics of Fluids, 6, 2363-2379.
- [27] MASSON, C., MARTINUZZI, R., LANGLOIS, M., MIRSHAMS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1994). Transition Prediction for Swept Wings in the Transonic Regime. Final Report for Bombardier Inc./Canadair, Research Convention CDT C158, École Polytechnique de Montréal, Canada
- [28] MASSON, C., MARTINUZZI, R., LANGLOIS, M., PARASCHIVOIU, I. et TEZOK, F. (1995). Transition Prediction Capabilities for Conical Wings in the Transonic Regime. Canadian Aeronautics and Space Journal, 41, 28-39.
- [29] MASSON, C., MARTINUZZI, R., MIRSHAMS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1996). Natural Transition in Transonic Flows using an Efficient Temporal/Spatial Formulation. AIAA J. of Aircraft, Vol.33, No.5, 931-937.
- [30] MOLER, C.B. et STEWART, W. (1973). An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems. SIAM Journal for Numerical Analysis, 10, No.2, 241.
- [31] NAYFEH, A.H. et PADHYE, A. (1979). The Relation Between Temporal and Spatial Stability in Three-Dimensional Flows. AIAA Journal, 17, 1084-1090.

- [32] NAYFEH, A.H. (1980). Stability of Three-Dimensional Boundary Layers. AIAA Journal, 18, No.4, 406-416.
- [33] NAYFEH, A.H. (1981). Introduction to Perturbation Techniques. Wiley, U.S.A..
- [34] POLL, D.I.A. (1985). Some Observations of the Transition Process on the Windward Face of a Long Yawed Cylinder. Journal of Fluid Mechanics, 150, 329.
- [35] REED, H.L. (1993). Direct Navier-Stokes Simulations: Spatial. AGARD FDP/VKI Special Course on Progress in Transition Modelling, Madrid et Bruxelles.
- [36] SALINAS, H. et CASALIS, G. (1997). Extension de l'approche PSE en théorie linéaire au cas d'écoulements compressibles. Rapport ONERA/CERT, à paraître..
- [37] SARIC, W.S. et NAYFEH, A.H. (1977). Nonparallel Stability of Boundary Layers with Pressure Gradients and Suction. AGARD CP, No. 224.
- [38] SCHLICHTING, H. (1968). Boundary Layer Theory. McGraw Hill, New York, U.S.A.
- [39] SCHUBAUER, G.B. et SKRAMSTAD, H.K. (1948). Laminar Boundary Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate. NACA Report 909.
- [40] SMITH, A.M.O. et GAMBERONI, N. (1956). Transition, Pressure Gradient, and Stability Theory. Douglas Aircraft Co., Rept. No. ES 26338.
- [41] VAN INGEN, J.L. (1956). A Suggested Semi-Empirical Method for the Calculation of the Boundary-Layer Region. Report No. VTH74, Delft University of Technology, The Netherlands.

- [42] VIKEN, J., COLLIER, F.S., WAGNER, R.D. et BARTLETT, D.W. (1989). On the Stability of Swept Wing Laminar Boundary Layers Including Curvature Effects. Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, Toulouse, 381-388.

## ANNEXE I

### COEFFICIENTS NON NULS DES MATRICES [A], [B] ET [C]

#### I.1 Matrice [A]

$$A_{11} = A_{22} = A_{44} = A_{55} = 1$$

#### I.2 Matrice [B]

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \Omega \frac{\partial T}{\partial y} & B_{32} &= 1 \\
 B_{12} &= i(\Gamma - 1)k^2 & B_{41} &= 2(\gamma - 1) \frac{M^2 Pr}{k^2} \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
 B_{14} &= \Omega \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right) & B_{44} &= 2\Omega \frac{\partial T}{\partial y} \\
 B_{21} &= i \frac{(\Gamma - 1)}{\Gamma} & B_{45} &= 2(\gamma - 1) \frac{M^2 Pr}{k^2} \left( \alpha \frac{\partial W}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\
 B_{22} &= \Omega \frac{\partial T}{\partial y} & B_{54} &= \Omega \left( \alpha \frac{\partial W}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\
 B_{23} &= -\frac{Re}{\mu\Gamma} & B_{55} &= \Omega \frac{\partial T}{\partial y}
 \end{aligned}$$

#### I.3 Matrice [C]

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= - \left( \frac{i\rho_e T_e Re}{\mu T} \zeta + \Gamma k^2 \right) \\
 C_{12} &= - \left[ \frac{\rho_e T_e Re}{\mu T} \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right) - i\Omega \frac{\partial T}{\partial y} k^2 \right] \\
 C_{13} &= -\frac{iRe}{\mu} k^2 \\
 C_{14} &= Y \frac{\partial T}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \Omega \left( \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\
 C_{21} &= i \frac{\chi}{\Gamma} \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \\
 C_{22} &= - \left( \frac{i\rho_e T_e Re}{\Gamma \mu T} \zeta + \frac{k^2}{\Gamma} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{24} &= \frac{i}{\Gamma} \Omega \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
C_{31} &= i \\
C_{32} &= -\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \\
C_{33} &= \frac{i \gamma M^2 \zeta}{\rho_e T_e} \\
C_{34} &= -\frac{i}{T} \zeta \\
C_{42} &= -Pr \left[ \frac{\rho_e T_e Re}{\mu T} \frac{\partial T}{\partial y} - 2i(\gamma - 1) M^2 \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \\
C_{43} &= \frac{i Re Pr}{\mu} (\gamma - 1) M^2 \zeta \\
C_{44} &= - \left\{ \frac{i \rho_e T_e Re Pr}{\mu T} \zeta + k^2 - (\gamma - 1) M^2 Pr \Omega \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right] - Y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - \Omega \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right\} \\
C_{52} &= -\frac{\rho_e T_e Re}{\mu T} \left( \alpha \frac{\partial W}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\
C_{54} &= Y \frac{\partial T}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial W}{\partial y} - \beta \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \Omega \left( \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \\
C_{55} &= - \left( \frac{i \rho_e T_e Re}{\mu T} \zeta + k^2 \right)
\end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned}
k^2 &= \alpha^2 + \beta^2 & \Gamma &= \frac{\lambda}{\mu} + 2 & M &= \frac{U_r}{\sqrt{\gamma R T_r}} \\
\Omega &= \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} & Y &= \frac{1}{\mu} \frac{d^2 \mu}{dT^2} & \chi &= \frac{\lambda}{\mu} & Re &= \frac{U_r \delta^*}{\nu_r} \\
\rho_e T_e &= \frac{\rho_e^* T_e^*}{\rho_r T_r} & \zeta &= \alpha U + \beta W - \omega
\end{aligned}$$

## ANNEXE II

### COEFFICIENTS DES MATRICES [E] ET [G]

#### II.1 Matrice [E]

$$\begin{aligned}
 E_1 &= -(\Gamma - 1) \alpha \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - \left( \frac{-\rho_e T_e Re U}{\mu T} + i 2 \Gamma \alpha \right) (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}) - \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \alpha \hat{v} + \frac{Re \alpha}{\mu} \hat{p} \\
 &\quad + i(\Gamma - 1) \beta (\alpha \hat{w} - \beta \hat{u}) \\
 E_2 &= -\frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \frac{\alpha}{k^2} \frac{\partial (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w})}{\partial y} + \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial (\alpha \hat{w} - \beta \hat{u})}{\partial y} - \frac{\chi}{\Gamma} \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\alpha}{k^2} (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}) \\
 &\quad - \left( \frac{-\rho_e T_e Re U}{\Gamma \mu T} + \frac{i 2 \alpha}{\Gamma} \right) \hat{v} - \frac{\Omega}{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial y} \hat{T} + \frac{\chi}{\Gamma} \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\beta}{k^2} (\alpha \hat{w} - \beta \hat{u}) \\
 E_3 &= -\frac{\alpha}{k^2} (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}) - \gamma M^2 U \hat{p} + \frac{U}{T} \hat{T} + \frac{\beta}{k^2} (\alpha \hat{w} - \beta \hat{u}) \\
 E_4 &= -2(\gamma - 1) M^2 Pr \frac{\partial U}{\partial y} \hat{v} \\
 &\quad - (\gamma - 1) \frac{M^2 Pr Re U}{\mu} \hat{p} - \left( \frac{-\rho_e T_e Re Pr U}{\mu T} + i 2 \alpha \right) \hat{T} \\
 E_5 &= (\Gamma - 1) \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + i(\Gamma - 1) \beta (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}) + \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \beta \hat{v} - \frac{Re \beta}{\mu} \hat{p} \\
 &\quad - \left( \frac{-\rho_e T_e Re U}{\mu T} + i 2 \alpha \right) (\alpha \hat{w} - \beta \hat{u})
 \end{aligned}$$

#### II.2 Matrice [G]

$$\begin{aligned}
 G_1 &= -(\Gamma - 1) \alpha \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial y} - \left[ \frac{-\rho_e T_e Re U \alpha}{\mu T} + i 2 \Gamma \alpha^2 + i(\Gamma - 1) \beta^2 \right] \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \alpha \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\
 &\quad + \frac{Re \alpha}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \left[ \frac{-\rho_e T_e Re U \beta}{\mu T} + i(\Gamma + 1) \alpha \beta \right] \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \\
 &\quad + \frac{\rho_e T_e Re V}{\mu T} \frac{\partial (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w})}{\partial y} - \chi \Omega \frac{\partial T}{\partial x} \alpha \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \\
 &\quad - \left[ \frac{-\rho_e T_e Re}{\mu T} \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\alpha}{k^2} + i \Gamma \Omega \frac{\partial T}{\partial x} \alpha \right] (\alpha \hat{u} + \beta \hat{w}) \\
 &\quad + \frac{\gamma M^2 Re}{\mu T} \left[ \alpha \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \beta \left( U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \hat{p} \\
 &\quad - \left\{ \frac{\rho_e T_e Re}{\mu T^2} \left[ \alpha \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \beta \left( U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + i \chi \Omega \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) k^2 + i \Omega \left( 2 \alpha^2 \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \alpha \beta \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right\} \hat{T}
 \end{aligned}$$



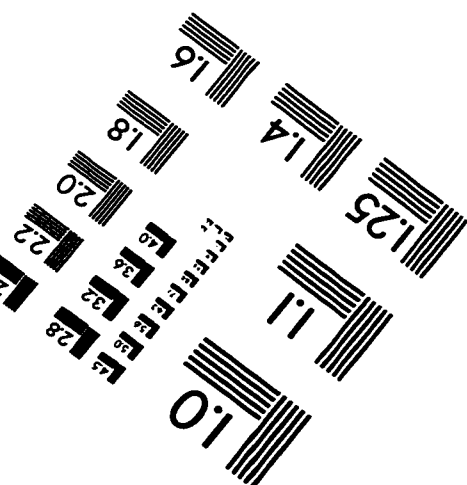
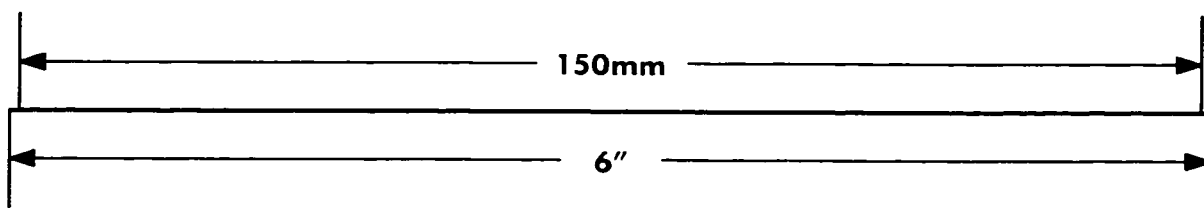
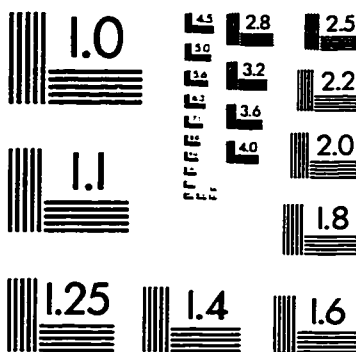
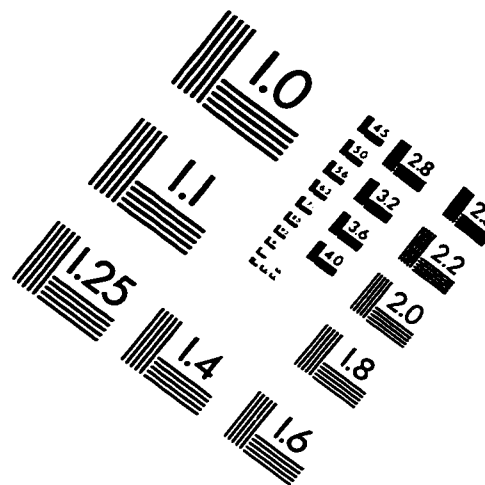
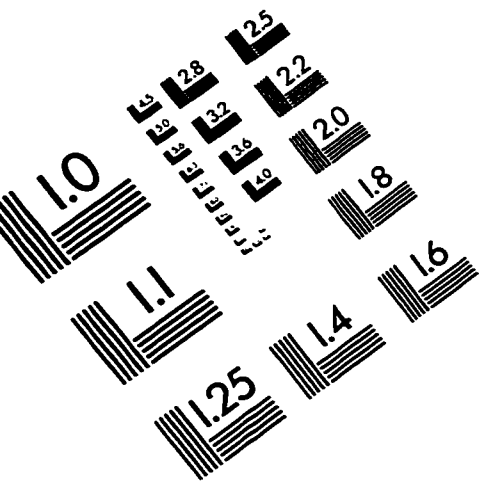
$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{\rho_e T_e Re}{\mu T} \left( \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial W}{\partial x} \right) \frac{\beta}{k^2} + i\beta \Omega \frac{\partial T}{\partial x} \right] (\alpha \dot{w} - \beta \dot{u}) \\
G_2 = & - \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x \partial y} - \frac{\chi}{\Gamma} \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \left( \frac{-\rho_e T_e Re U}{\Gamma \mu T} + \frac{i2\alpha}{\Gamma} \right) \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - \frac{\Omega}{\Gamma} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \dot{T}}{\partial x} \\
& - \frac{\Omega}{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\alpha}{k^2} \frac{\partial (\alpha \dot{u} + \beta \dot{w})}{\partial y} + \frac{\rho_e T_e Re V}{\Gamma \mu T} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \left( \Omega \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\chi}{\Gamma} \Omega \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial \dot{T}}{\partial y} \\
& + \frac{\Omega}{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial (\alpha \dot{w} - \beta \dot{u})}{\partial y} - \left( \frac{-\rho_e T_e Re}{\Gamma \mu T} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{i}{\Gamma} \Omega \frac{\partial T}{\partial x} \alpha \right) \dot{v} \\
& - \left( \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \Omega \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \Omega \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + Y \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{Y}{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\chi}{\Gamma} Y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x} \right) \dot{T} \\
G_3 = & - \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\gamma M^2 U}{\rho_e T_e} \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} + \frac{U}{T} \frac{\partial \dot{T}}{\partial x} - \frac{\gamma M^2 V}{\rho_e T_e} \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} + \frac{V}{T} \frac{\partial \dot{T}}{\partial y} \\
& + \left( \frac{-\gamma M^2}{\rho_e T_e} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\alpha}{k^2} (\alpha \dot{u} + \beta \dot{w}) - \frac{\gamma M^2}{\rho_e T_e} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \dot{p} \\
& + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - 2 \frac{U}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - 2 \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\gamma M^2 U}{\rho_e T_e} \frac{\partial P}{\partial x} \right) \dot{T} \\
& + \left( \frac{\gamma M^2}{\rho_e T_e} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\beta}{k^2} (\alpha \dot{w} - \beta \dot{u}) \\
G_4 = & -2(\gamma - 1) M^2 Pr \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \\
& - (\gamma - 1) \frac{M^2 Pr Re U}{\mu} \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} - \left( \frac{-\rho_e T_e Re Pr U}{\mu T} + i2\alpha \right) \frac{\partial \dot{T}}{\partial x} \\
& - 2(\gamma - 1) M^2 Pr \left( \Gamma \frac{\partial V}{\partial y} + \chi \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - (\gamma - 1) \frac{M^2 Pr Re V}{\mu} \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} \\
& + \frac{\rho_e T_e Re Pr V}{\mu T} \frac{\partial \dot{T}}{\partial y} - \left\{ \left[ \frac{-\rho_e T_e Re Pr}{\mu T} \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1) \frac{M^2 Pr Re}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right] \frac{\alpha}{k^2} \right. \\
& + i2(\gamma - 1) M^2 Pr \left[ \left( \Gamma - 2 \frac{\beta^2}{k^2} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + 2 \frac{\alpha \beta}{k^2} \frac{\partial W}{\partial x} + \chi \frac{\partial V}{\partial y} \right] \left. \right\} (\alpha \dot{u} + \beta \dot{w}) \\
& + \frac{\gamma M^2 Re Pr}{\mu T} \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) \dot{p} - \left[ \frac{\rho_e T_e Re Pr}{\mu T^2} \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) + i2\Omega \frac{\partial T}{\partial x} \alpha \right] \dot{T} \\
& + \left\{ \left[ \frac{-\rho_e T_e Re Pr}{\mu T} \frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma - 1) \frac{M^2 Pr Re}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right] \frac{\beta}{k^2} \right. \\
& + \frac{i2(\gamma - 1) M^2 Pr}{k^2} \left[ 2\alpha \beta \frac{\partial U}{\partial x} - (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial W}{\partial x} \right] \left. \right\} (\alpha \dot{w} - \beta \dot{u}) \\
G_5 = & (\Gamma - 1) \beta \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial x \partial y} + \left[ -\frac{\rho_e T_e Re U \beta}{\mu T} + i(\Gamma + 1) \alpha \beta \right] \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \Omega \frac{\partial T}{\partial y} \beta \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - \frac{Re}{\mu} \beta \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} \\
& - \left[ \frac{-\rho_e T_e Re U \alpha}{\mu T} + i2\alpha^2 - i(\Gamma - 1) \beta^2 \right] \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \chi \Omega \frac{\partial T}{\partial x} \beta \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} \\
& + \frac{\rho_e T_e Re V}{\mu T} \frac{\partial (\alpha \dot{w} - \beta \dot{u})}{\partial y} + \left[ \frac{\rho_e T_e Re}{\mu T} \left( \alpha \frac{\partial W}{\partial x} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\alpha}{k^2} + i\chi \Omega \frac{\partial T}{\partial x} \beta \right] (\alpha \dot{u} + \beta \dot{w})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma M^2 Re}{\mu T} \left[ \alpha \left( U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \beta \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \bar{p} \\
& - \left\{ \frac{\rho_e T_e Re}{\mu T^2} \left[ \alpha \left( U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \beta \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \right. \\
& + i\Omega \left[ (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial W}{\partial x} - 2\alpha\beta \frac{\partial U}{\partial x} \right] \Big\} \dot{T} \\
& - \left[ \frac{\rho_e T_e Re}{\mu T} \left( \alpha \frac{\partial W}{\partial x} - \beta \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\beta}{k^2} + i\Omega \frac{\partial T}{\partial x} \alpha \right] (\alpha \dot{w} - \beta \dot{u})
\end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned}
k^2 &= \alpha^2 + \beta^2 & \Gamma &= \frac{\lambda}{\mu} + 2 & M &= \frac{U_r}{\sqrt{\gamma R T_r}} \\
\Omega &= \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dT} & Y &= \frac{1}{\mu} \frac{d^2\mu}{dT^2} & \chi &= \frac{\lambda}{\mu} & Re &= \frac{U_r \delta^*}{\nu_r} \\
\rho_e T_e &= \frac{\rho_e^* T_e^*}{\rho_r T_r}
\end{aligned}$$

# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc  
1653 East Main Street  
Rochester, NY 14609 USA  
Phone: 716/482-0300  
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

