

Titre: Problème du voyageur de commerce : une formulation par
Title: programmation linéaire

Auteurs: Jean-Claude Picard, & Maurice Queyranne
Authors:

Date: 1975

Type: Rapport / Report

Référence: Picard, J.-C., & Queyranne, M. (1975). Problème du voyageur de commerce : une formulation par programmation linéaire. (Rapport technique n° EP-R-75-07).
Citation: <https://publications.polymtl.ca/9217/>

Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/9217/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

Document publié chez l'éditeur officiel

Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-75-07
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



DÉPARTEMENT DE GÉNIE INDUSTRIEL

enatas

RAPPORT TECHNIQUE : EP75 - R - 7
Classification: Library of Congress

LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE:
UNE FORMULATION PAR PROGRAMMATION LINÉAIRE

PAR: Jean Claude Picard, Ecole Polytechnique
Maurice Queyranne, Ecole Polytechnique

Le 5 février 1975

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP4
75R07
FRE

C.P. 501
Snowdon
Montréal 248



Bibliothèque
École
Polytechnique
MONTRÉAL

CLASSIFICATION

CA2PQ

UP4

75 B07 FRE

No D'ENTRÉE

77445

19 SEPT 1975

Résumé	ligne 1.	un O-circuit <u>est</u> un chemin
p.26	ligne 6 19	<u>O</u> -bonne solution
	dernière	<u>1</u> - recherche d'un O-circuit et de <u>Tournées</u> - a parité
p.10	avant-dernière	réalisable de <u>(P*)</u>

- 1975 -

77445

**A CONSULTER
SUR PLACE**

LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE:
UNE FORMULATION PAR PROGRAMMATION LINEAIRE*

par

Jean-Claude Picard
Ecole Polytechnique, Montréal

and

Maurice Queyranne
Ecole Polytechnique, Montréal

*Cette recherche a été subventionnée par les fonds de recherche CNRC A 8528 et RD 804.

RESUME

Dans un réseau à $n+1$ sommets, un 0-circuit et un chemin d'origine x_0 fixée, devant comporter $n+1$ arcs, et d'extrémité x_0 ; une formulation par un programme linéaire, à n contraintes, du problème du voyageur de commerce est définie; utilisant un schéma de génération de colonne par recherche d'un 0-circuit de longueur minimale dans un réseau associé, ce programme linéaire fournit une "excellente" borne inférieure sur la longueur du trajet du voyageur de commerce; un algorithme par "Branch and Bound" en est dérivé, et donne une solution exacte du problème du voyageur de commerce.

INTRODUCTION

Le problème du voyageur de commerce (TSP) est l'un des problèmes les plus célèbres de la littérature de la Recherche Opérationnelle (voir par exemple [3]). Il consiste à trouver le plus court circuit qui traverse au moins une fois chaque sommet d'un réseau. De nombreuses méthodes de résolution approchée ont été suggérées, fournissant une "bonne" solution dont on ne peut toutefois pas garantir en général l'optimalité.

Peu de méthodes fournissant une solution exacte en un temps de calcul raisonnable ont été développées; le principe général de celles qui sont actuellement disponibles semble être le suivant:

- (a) définir un problème combinatoire
 - (i) facile à résoudre
 - (ii) tel que les circuits hamiltoniens (tours) soient solution réalisable
 - (iii) qui respecte le classement des tours selon leur longueur
- (b) si la solution de (a) n'est pas un tour, définir une structure de "branch and bound" de la façon suivante:
 - (i) séparer l'ensemble des tours selon qu'ils utilisent ou non, certains arcs
 - (ii) évaluer une borne inférieure sur la longueur du tour optimal dans chaque sous-ensemble ainsi défini, en

retournant au point (a).

Une procédure ainsi définie est donc récursive et l'on ne peut garantir que la solution optimale sera trouvée en un nombre "raisonnable" d'itérations; à ce point de vue, une bonne méthode est caractérisée par:

- 1) la facilité de résolution du sous-problème (a)
- 2) la qualité de la borne fournie par la solution optimale de (a)

Les méthodes disponibles sont essentiellement définies par la nature du sous-problème combinatoire (a):

- problème d'affectation: c'est la voie classique (voir [2], [3], [6], [7], [10], [17]), le sous -problème est aisé à résoudre mais la borne obtenue est assez médiocre, d'où un nombre considérable de séparations et d'évaluations (voir [2]).
- arbre de poids minimum (SST): Cette approche, aperçue par Christofides [5], et développée par Held et Karp [12 I et II], fournit une borne bien meilleure, pour un sous-problème plus facile à résoudre, d'où des performances bien meilleures [12 II].

Nous développons ici une nouvelle approche par laquelle le TSP est plongé dans un problème général de plus-court-chemin: le sous -problème (a) consiste en la recherche d'un chemin, dont l'origine, l'extrémité et le nombre d'arcs sont fixés ("0-circuit") de longueur minimale; ce problème a été défini d'abord par Saigal [16], qui en avait d'ailleurs indiqué la

connexion avec le T.S.P. mais sans en dériver une méthode effective de résolution.

A cette fin, nous définissons un programme linéaire à n contraintes (où $n+1$ est le nombre de sommets du réseau) et à variables implicites (voir par exemple [11], [12 I], [14]) pour lequel la génération d'une colonne candidate s'obtient en cherchant un 0-circuit de longueur minimale dans un réseau associé. La solution optimale du programme linéaire fournit une borne, généralement meilleure que celle de Held et Karp, et dont nous prouvons qu'elle est toujours au moins aussi bonne (presque toujours nettement meilleure) que celle du problème d'affectation; en outre, la solution optimale (qui est presque toujours un tour optimal dans les problèmes de taille modeste) fournit également des indications sur les "chances" qu'ont les arcs d'appartenir au tour optimal; de là nous dérivons une structure de branch and bound efficace. Toutefois, le phénomène de convergence lente vers la solution du programme linéaire semble indiquer que la méthode ici décrite devra être abandonnée pour des problèmes de taille moyenne ($n \geq 30$), au profit d'une méthode de relaxation, à la manière de Held et Karp [12 II], dont nous avons entrepris le développement, et qui constituera la suite de cette étude.

1. 0-Circuits

Soit $R = (V, E, d)$ un réseau à $V = n + 1$ sommets, où l'arc $(x, y) \in E$ est muni d'une valuation $d(x, y)$ représentant la "longueur" de l'arc (x, y) . Nous supposerons ce réseau complet (on peut affecter une longueur infinie aux arcs inexistants) et sans boucle. Désignons par x_0 un sommet quelconque de R (pour le choix de x_0 , voir § 6) et les autres sommets par x_1, \dots, x_n ; dans toute la suite, nous noterons $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ ($i \neq j$).

Nous emploierons le mot tour pour désigner un circuit hamiltonien, c'est à dire un chemin traversant exactement une fois chacun des sommets x_0, x_1, \dots, x_n du réseau. Un tour peut être considéré comme un chemin issu de x_0 , comportant exactement $n + 1$ arcs, et d'extrémité x_0 .

Nous appellerons 0-circuit tout chemin (non nécessairement élémentaire) issu de x_0 , comprenant n sommets intermédiaires distincts de x_0 , et d'extrémité x_0 ; en particulier, un tour est un 0-circuit et, réciproquement, un 0-circuit c est un tour si et seulement s'il traverse exactement une fois chaque sommet intermédiaire; sinon il existe quelque sommet x_i ($\neq x_0$) qui n'est pas atteint par c , et aussi quelque autre sommet x_j ($\neq x_0$) qui est traversé au moins deux fois par c , c'est à dire que la "partie intermédiaire" obtenue en ôtant de c le sommet x_0 et les deux arcs incidents à x_0 , comprend (au moins) un circuit (non nécessairement

élémentaire) sur certains des "sommets intermédiaires" x_1, \dots, x_n .

Nous sommes naturellement conduits à définir, pour chaque 0-circuit c , son vecteur associé $a_c \in \mathbb{R}^m$ dont chacune des composantes $a_{c,i}$ représente le nombre de fois que c traverse le sommet x_i ($\neq x_0$). Clairement $a_c \geq 0$, $\underline{1} \cdot a_c = \sum_i a_{c,i} = n$ (où $\underline{1}$ désigne le n -vecteur dont toutes les composantes sont 1), et un 0-circuit T est un tour si et seulement si son vecteur associé $a_T = \underline{1}$.

2. Une formulation par la Programmation linéaire du problème du voyageur de commerce

Désignons par C l'ensemble des 0-circuits définis dans le réseau R , et par l_c , la longueur d'un 0-circuit (somme des longueurs des arcs).

Considérons le programme linéaire en nombres entiers suivant:

$$(PLI) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad z(x) = \sum_{c \in C} l_c x_c \\ \text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_c \geq 0, \text{ entier} \\ \sum_{c \in C} a_c x_c = \underline{1} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1)$$

et le programme linéaire déduit en relâchant les contraintes d'intégrité sur x .

$$\left. \begin{array}{l} \text{(P.L.)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad z(x) = \sum_{c \in C} l_c x_c \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sum_{c \in C} a_c x_c = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2)$$

programme linéaire à $n(n-1)^{n-1}$ variables non-négatives et n contraintes.

Il est clair que, dans la solution optimale de (PLI) ou de (PL), si c et c' ont même vecteur associé, et si $l_c < l_{c'}$ alors $x_{c'} = 0$; ceci permet de réduire considérablement le nombre de variables. Dans toute la suite, l'ensemble C sera réduit aux 0-circuits de longueur minimale parmi ceux ayant le même vecteur associé.

Lemme 2-1. Il existe un seul point entier satisfaisant aux contraintes de (PLI), et ce point représente le tour optimal dans le réseau R .

En additionnant les n contraintes de (PLI) on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{c \in C} n x_c &= n \\
 \text{soit} \\
 \sum_{c \in C} x_c &= 1
 \end{aligned} \quad (3)$$

Comme x non-négatif, les seules solutions à (3) sont telles que

$$\begin{aligned}
 \exists c^* \in C, \quad x_{c^*} &= 1 \\
 x_{c'} &= 0 \quad \text{pour tout } c' \in C \quad (c' \neq c)
 \end{aligned} \quad (4)$$

d'où $a_{c^*} = 1$ c'est à dire que c^* est un tour dans R , et d'après la remarque ci-dessus, un tour optimal.

Lemme 2-2. Cette solution est un sommet du polyèdre P défini par les contraintes de (PL), et le sommet associé est adjacent à tous les autres sommets du polyèdre P .

D'après le lemme 2-1, le polyèdre P est non vide. Considérons un sommet de P , et B une base réalisable correspondante; nous allons démontrer que l'on peut passer au point entier par une simple opération de pivotage.

Considérons le vecteur-colonne $a_T = \underline{1}$ associé au tour optimal, et les opérations de pivotage permettant de faire entrer x_T dans la base (les notations sont celles de [15])

$$a) \hat{a}_T = B^{-1}a_T = B^{-1}\underline{1} = B^{-1}b = \hat{b} \geq \underline{0}$$

b) choix du pivot et de la variable r sortante

$$\hat{\frac{b_r}{a_r}} = \min \left\{ \hat{\frac{b_j}{a_j}} \mid \hat{a}_j > \underline{0} \right\} = \min \left\{ 1 / \hat{b}_j > 0 \right\}$$

on choisit une variable r quelconque de niveau non-nul dans la base B (il en existe toujours puisque $\hat{b} > \underline{0}$)

La base B' obtenue en substituant x_T à x_r correspond au sommet entier: En effet $x'_T = 1$ et $x'_c = 0$, $\forall c \neq T$ est bien une solution de base (on a bien $B'x' = 1$) et cette solution de base est unique.

Cette dernière propriété tient au fait que le sommet entier correspond à une solution extrêmement dégénérée.

Un procédé très général pour aborder ce genre de programme linéaire, où les variables sont en fait définies implicitement, est d'utiliser la méthode revisée du simplexe: La génération de la colonne entrant dans la base s'effectue en résolvant un sous-problème de nature généralement combinatoire (voir par exemple [11], [14], [12, I])

Lemme 2-3. La génération de la colonne devant entrer dans la base se ramène à la recherche d'un 0-circuit de longueur minimale dans un réseau associé.

Soit B une base réalisable et π le vecteur-multiplicateur associé. La variable candidate est choisie en calculant le minimum de

$$\hat{\ell}_c = \ell_c - \pi \cdot \alpha_c \quad (5)$$

pour les variables hors-base (si c est dans la base $\hat{\ell}_c = 0$). Une variable x_r sera donc choisie pour entrer dans la base tant que $\hat{\ell}_r = \min_{c \in C} \hat{\ell}_c < 0$. Pour un circuit c le calcul de ℓ_c revient à affecter une "pénalité" $-\pi_i$ à la longueur de c chaque fois que le sommet $x_i \neq x_0$ est traversé; cette pénalité peut être répartie sur les arcs adjacents au sommet i en définissant les "longueurs pénalisées" suivantes:

$$d'_{k,i} = d_{k,i} - \lambda \pi_k - (1-\lambda) \pi_i$$

$$d'_{i,j} = d_{i,j} - \lambda \pi_i - (1-\lambda) \pi_j$$

où $\lambda \in [0,1]$ est un paramètre: on utilisera par exemple les valeurs $\lambda = \frac{1}{2}$ pour conserver éventuellement la symétrie du réseau, ou $\lambda = 0$ (resp 1) pour préserver l'ordre des longueurs des arcs indicents en x_i (resp. issus de x_i).

3. Pénalités et formulation "Duale"

Remarquons que les pénalités π introduites dans la démonstration du lemme 2-3 agissent comme une simple translation sur la longueur des tours: ces pénalités laissent inchangé l'ordre des différents tours. Nous sommes naturellement amenés à poser le problème: "Existe-t-il des pénalités π telles que le 0-circuit de longueur minimale dans le réseau associé soit un tour"?

Mathématiquement, ce problème se transcrit ainsi:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \pi \in \mathbb{R}^n \\ \text{tel que } l_c + \pi \cdot a_c \geq C^* + \pi \cdot \underline{1} \quad \forall c \in C \end{array} \right.$$

où C^* désigne la longueur (inconnue) du tour optimal.

Ce problème est de trouver un point π appartenant à un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ défini par un très grand nombre de contraintes; même si l'on effectue la même réduction que dans le problème P (un seul 0-circuit, de longueur minimum, pour chaque vecteur a_c) ce nombre reste considérable.

On peut appliquer à ce problème une approche développée par Held et Karp [12, II]. Nous ne développerons pas davantage ici cette voie, qui sera étudiée dans un rapport ultérieur. Nous déduirons simplement ici des relations entre ce problème et le problème (PL), qui feront l'objet du théorème 3-2. Introduisons dans (D) des "variables artificielles" $y_c \geq 0$, une par contrainte ; on définit ainsi le "programme auxiliaire" suivant

$$(D_y) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } w(\pi) = \sum_{c \in C} y_c \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} y_c \geq 0, \pi \text{ non astreint} \\ \sum_i \pi_i (a_{c,i} - 1) + y_c \geq C^* - l_c \quad \forall c \in C \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6)$$

Il est bien connu (cf par exemple [6]) qu'il existe une solution à (D) si et seulement si le minimum W_{\min} de (D_y) est nul.

En dualisant, nous obtenons

$$(P^*) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } v(x) = \sum_{c \in C} (C^* - l_c) x_c \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_c \leq 1 \quad \forall c \in C \\ \sum_{c \in C} (a_{c,i} - 1) x_c = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7)$$

Le vecteur nul 0 est une solution réalisable de (P^{*}) avec $v(\underline{0})=0$.
S'il existe une solution réalisable $x' \neq \underline{0}$, telle que $v(x') > 0$ alors

(puisque $x' \geq 0$)

$$1 \cdot x' = \sum_{c \in C} x'_c > 0$$

Définissons un vecteur x par $x_c = \frac{x'_c}{\sum_{s \in C} x'_s}$; il est clair

que x est une solution réalisable de (P^*) vérifiant

$$1 \cdot x = 1 \quad (3)$$

$$v(x) > 0 \quad (8)$$

La propriété (3) va nous permettre de faire disparaître C^* :

soit (P') le programme linéaire obtenu en ajoutant la contrainte (3) au problème (P^*) .

Lemme 3-1. Le problème (P') est équivalent au problème (PL) .

Ecrivons (P') :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } z(x) = \sum_{c \in C} t_c x_c \\ \text{s.c. } \left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq x_c \leq 1 & \forall c \in C \\ \sum_{c \in C} a_{c,i} x_c = 1 & \forall i = 1, \dots, n \\ \sum_{c \in C} x_c = 1. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (9)$$

- a) la contrainte $x \leq 1$ découle de $\sum_{c \in C} x_c = 1$ et de $x \geq 0$.
- b) la somme des n contraintes suivantes donne $\sum_{c \in C} n x_c = n$
donc la contrainte (3) est redondante avec celles-ci et peut également être supprimée.

On obtient alors exactement le problème (LP) .

Théorème 3-2. Le problème (D) a une solution si et seulement si un tour est solution optimale de (LP).

Preuve:

Condition nécessaire: supposons que le tour optimal T de longeur C^* soit solution optimale de (LP).

D'après le théorème fondamental de la Programmation linéaire cette solution optimale est de base: considérons la base optimale et le vecteur muplicateur π associé. Les conditions d'optimilité s'énoncent:

$$\hat{e}_c = e_c - \pi \cdot a_c \geq 0 \quad (10)$$

$$\hat{e}_T = C^* - \pi \cdot \underline{1} = 0 \quad (11)$$

ce qui implique que $-\pi$ est une solution de (D).

Condition suffisante: Supposons que le tour optimal T ne soit pas solution optimale de P : il existe \bar{x} vérifiant les contraintes de (P) et tel que $Z(\bar{x}) < C^*$. Le vecteur \bar{x} est aussi une solution réalisable de (P^*) et $V(\bar{x}) = C^* - Z(\bar{x}) > 0$. Par conséquent la solution optimale de P^* vérifiera à fortiori $V_{\text{Max}} > 0$. D'après le théorème de dualité on aura $W_{\text{Min}} > 0$ ce qui implique que le polyèdre P est vide.

4. Solution optimale de (PL) et relation avec le problème d'affectation

Généralement la solution optimale de (PL) n'est pas un tour, mais elle permet de tirer des informations sur les "chances" qu'ont certains arcs de participer au tour optimal; ceci permettra d'élaborer au chapitre 5 une procédure de Branch-and-Bound qui donnera la solution exacte du Problème du voyageur de commerce.

A toute solution réalisable de PL nous associerons un graphe pondéré $G = (X, E', p)$: soit L l'ensemble des 0-circuits correspondants aux variables à niveau non nul dans cette solution; soit $n_c(i, j)$ le nombre de fois que le 0-circuit c , de niveau $\bar{x}_c > 0$, parcourt l'arc (x_i, x_j) ; nous définissons le poids de l'arc (x_i, x_j) par:

$$p(i, j) = \sum_{c \in L} \bar{x}_c \cdot n_c(i, j) \quad (12)$$

et $E' \subset E$ sera l'ensemble des arcs de poids (strictement) positif.

Lemme 4-1. Le graphe pondéré $G = (X, E', p)$ est fortement connexe.
 Démonstration: Soit $x, y \in X (x \neq y)$, nous allons démontrer qu'il existe toujours un chemin allant de x à y dans G :

i) si $x = x_0$ remarquons qu'il existe un 0-circuit c de niveau $\bar{x}_c > 0$ dans la solution optimale de (PL), traversant au moins une fois le sommet y ; ce 0-circuit contient donc un chemin (x_0, y) joignant l'origine x_0 à y , et tous les arcs (i, j) de ce chemin ont un poids > 0

ii) si $y = x_0$, de la même manière, il existe un 0-circuit c de niveau \bar{x}_c non-nul traversant x , et par conséquent un chemin (x, x_0) joignant x à x_0 et dont tous les arcs ont des poids > 0 .

iii) enfin si x et y sont différents de x_0 , il suffit de mettre bout-à-bout les chemins (x, x_0) et (x_0, y) exhibés aux points (ii) et (i).

Lemme 4-2. Les poids $p(i, j)$ associés à une solution réalisable x , représentent une circulation telle que le flot traversant chaque sommet est égal à 1, c'est à dire

$$\forall x \in X \quad \sum_{(y, x) \in E} p(y, x) = \sum_{(x, z) \in E} p(x, z) = 1 \quad (13)$$

et de coût total égal à $Z(x)$.

Démonstration: pour tout 0-circuit c , on a:

$$\sum_{(y, x) \in E} n_c(y, x) = \sum_{(x, z) \in E} n_c(x, z) = \partial_{c, x} \quad (14)$$

la relation (13) est alors équivalente à la contrainte correspondant au sommet $s \in X$ dans le programme linéaire (PL).

Remarquons que la longueur du 0-circuit c peut être définie par

$$l_c = \sum_{(i, j) \in E} n_c(i, j) \cdot d_{ij}$$

donc le coût total de la circulation p est

$$\begin{aligned}
 c(p) &= \sum_{(i,j) \in E} p(i,j) d_{ij} = \sum_{(i,j) \in E} \sum_{c \in L} n_c(i,j) \cdot x_c \cdot d_{ij} \\
 &= \sum_{c \in L} \left(\sum_{(i,j) \in E} n_c(i,j) d_{ij} \right) x_c = \sum_{c \in L} l_c x_c \\
 &= z(x)
 \end{aligned}$$

Théorème 4-3. Soit z_A la valeur de l'affectation optimale dans le réseau R , \bar{z} la valeur optimale de la fonction-objectif de (PL), et C^* la longueur du tour optimal, on a:

$$(i) \quad z_A \leq \bar{z} \leq C^*$$

(ii) si la solution optimale du problème d'affectation (PA) est unique et si $z_A = \bar{z}$ alors le tour optimal est solution optimale de (PA) et de (PL).

Démonstration:

(i) la seconde inégalité découle du lemme 2-1 (le tour optimal représente une solution-réalisable de LP); le problème d'affectation étant défini ainsi:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(PA)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser: } z_A(x) = \sum_{(i,j) \in E} d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in X \\ \sum_{(k,i) \in E} x_{ki} = 1 \quad \forall i \in X \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

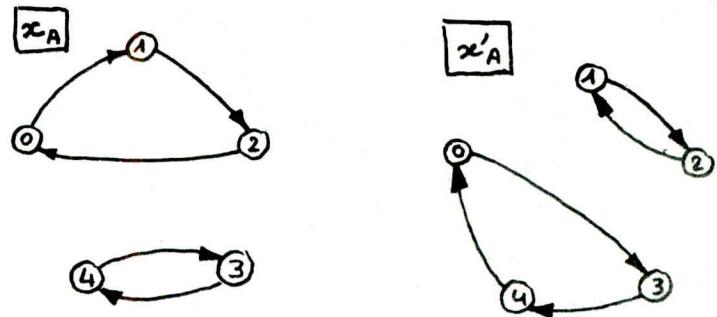
Il découle du lemme 4-2 que les poids P vérifient les contraintes de (PA) d'où la seconde inégalité.

(ii) si $Z_A = \bar{Z}$ alors p est la solution optimale de (PA), unique par hypothèse. L'affectation optimale définit un graphe ($X'E'$) forcément connexe (d'après le lemme 4-1) c'est-à-dire ne contenant pas de sous-tours. Cette solution est donc le tour optimal (cf par exemple [3], [6], [10])

Remarque: si la condition d'unicité de la solution optimale de (PA) n'est pas vérifiée, le point (ii) n'est pas nécessairement vrai.

Exemple:

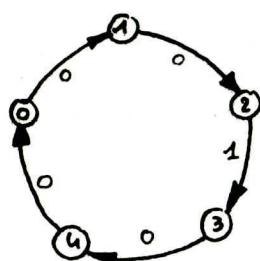
	0	1	2	3	4
0	0	1	0	1	
1	1		0	1	1
2	0	0		1	1
3	1	1	1		0
4	0	1	1	0	



Matrice des "distances"

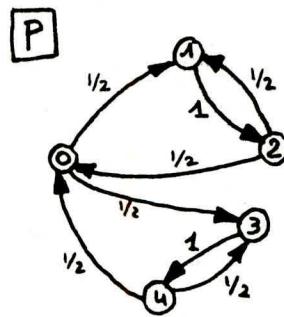
Les deux solutions optimales de P.A.

$$Z_A = 0$$



Tour optimal

$$C^* = 1$$



Graphe pondéré associé à la solution optimale de (PL): $\bar{Z} = 0$

$$P = \frac{1}{2} x_A + \frac{1}{2} x'_A$$

5. Branch and Bound

Une méthode de Branch and Bound consiste en un principe de séparation de l'ensemble des solutions réalisables (ici les tours dans le réseau R) et une méthode de calcul de **bornes** (inférieures pour un problème de minimisation) sur la valeur de la fonction-objectif (longueur du tour minimal) sur les sous-ensembles ainsi engendrés.

Soit $F_c E$ un ensemble d'arcs (dits "forcés")

$I_c E$ un ensemble (disjoint de X) d'arcs (dits "interdits")

$C(F, I)$ l'ensemble des 0-circuits qui empruntent

- exactement une fois chaque arc $e \in F$
- aucun des arcs $e \in I$

et $\bar{z}(F, I)$ la valeur optimale de la fonction-objectif du problème:

$$(PL(F, I)) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } \bar{z}(F, I)(x) = \sum_{c \in C(F, I)} l_c x_c \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \sum_{c \in C(F, I)} a_c x_c = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Afin de réduire le nombre de contraintes de $PL(F, I)$ l'ensemble F constituera un chemin (x, y) comprenant le sommet x_0 , et sera défini comme suit:

- au début $F_0 = \emptyset$ (le chemin est réduit à x_0) et $I_0 = \emptyset$,
- l'ensemble des "sommets intermédiaires" sera $V_0 = V - \{x_0\}$

- le chemin F' et l'ensemble I' d'arcs ayant été définis à la K^e séparation, la $(K+1)^e$ séparation s'effectuera en définissant une liste ordonnée d'arcs e_1, e_2, \dots, e_ℓ soit tous issus de l'extrémité du chemin F' , soit tous incidents à l'origine de I' . Soit y_i l'extrémité de l'arête e_i qui n'appartient pas au chemin F' , nous considérerons alors les $\ell+1$ sous-problèmes définis par (F_i, I_i) :

$$\begin{array}{lll}
 F_1 = F' \cup \{e_1\} & I_1 = I' & V_1 = V' - \{y_1\} \\
 F_2 = F' \cup \{e_2\} & I_2 = I' & V_2 = V' - \{y_2\} \\
 \dots & & \\
 F_\ell = F' \cup \{e_\ell\} & I_\ell = I' & V_\ell = V' - \{e_\ell\} \\
 F_{\ell+1} = F' & I_{\ell+1} = I' \cup \{e_1, e_2, \dots, e_\ell\} & V_{\ell+1} = V'
 \end{array}$$

et la borne inférieure associée au problème (F_i, I_i) sera $\bar{z}(F_i, I_i)$.

L'intérêt d'une telle méthode est que les problèmes $(F_1, I_1), \dots, (F_\ell, I_\ell)$ comprennent une contrainte de moins que le problème (F', I') , car à chaque fois un sommet exactement est rajouté au chemin F' (c'est l'extrémité y_i de l'arc e_i qui ne s'y trouvait pas); de plus le dernier problème $(F_{\ell+1}, I_{\ell+1})$ comporte autant de contraintes que (F', I') mais moins de variables.

La liste d'arcs est définie comme suit:

- considérons les arcs (y, z) issus de l'extrémité y du chemin F , de poids (strictement) positif dans la solution optimale de $PL(F, I)$; leur poids total est égal à 1; puisque dans le tour optimal $T(F, I)$

(utilisant le chemin F et aucun des arcs $e \in I$) le poids de ces arcs vaut 1 (s'ils sont dans $T(F, I)$) ou 0 (sinon), un principe raisonnable de séparation peut être de s'intéresser d'abord aux arcs sur lesquels pèse la plus grande incertitude, c'est à dire sur ceux dont le poids est le plus proche de $1/2$; on est ainsi conduit à classer les arcs, suivant les valeurs croissantes de $|p(y, z) - 1/2|$.

(Remarquons qu'un seul arc (y, z) , au plus, peut avoir un poids $p(y, z) > 1/2$, c'est à dire qu'en fin de compte les arcs seront classés par ordre de poids décroissant).

- on peut effectuer le même classement sur les arcs (z, x) incidents à l'origine x du chemin F ; on choisira en fait d'abord des deux listes, celle qui contient le moins d'arcs (de poids > 0).

Exemple 1 tiré de Wagner [17]

	1	2	3	4	5
1	∞	10	25	25	10
2	1	∞	10	15	2
3	8	9	∞	20	10
4	14	10	24	∞	15
5	10	8	25	27	∞

Matrice des distances

On prendra comme sommet de départ $x_0 = 2$ (remarquons que chacun des 4 autres choix de x_0 conduit au tour optimal comme solution de PL, sans avoir besoin d'appliquer le Branch and Bound)

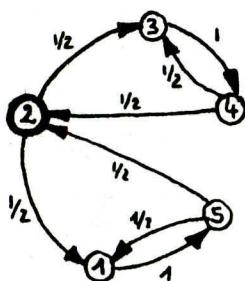
La solution optimale de PL est

$$x_C = 1/2 \text{ pour } c = (234342)$$

$$x_D = 1/2 \text{ pour } c = (215152)$$

avec $\bar{Z} = 61.5$ (l'affectation optimale donne $Z_A = 60$)

et le graphe pondéré est représenté ci-contre.

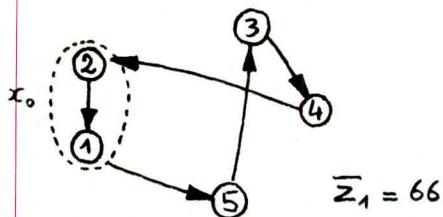


Considérons les arcs issus de 2 et définissons

$$\begin{array}{lll}
 F_1 = (2-1) & I_1 = \emptyset & V_1 = 3,4,5 \\
 F_2 = (2-3) & I_2 = \emptyset & V_2 = 1,4,5 \\
 F_3 = \emptyset & I_3 = (2-1), (2-3) & V_3 = V_0
 \end{array}$$

	x_0	3	4	5
x_0	∞	26	26	11
3	9	∞	20	10
4	10	24	∞	15
5	8	25	27	∞

1- Distances d_1



Solution optimale de $PL(F_1, I_1)$

a) Problème (F_1, I_1)

On définit des nouvelles distances:

$$\begin{aligned}
 d'_1(x_0, z) &= d(1,2) + d(e, z) \quad (z \in \{3, 4, 5\}) \\
 d'_1(z, x^0) &= d(z, 1) \quad (z \in \{3, 4, 5\}) \\
 d'_1(u, v) &= d(u, v) \quad (u, v \in \{3, 4, 5\})
 \end{aligned}$$

La solution optimale de $PL(F_1, I_1)$ est donnée par le 0-circuit hamiltonien:

$$(x_0 - 5 - 3 - 4 - x_0)$$

qui donne le tour

$$(2 - 1 - 4 - 3 - 5 - 2)$$

avec $\bar{Z}_1 = 66$

Aucune séparation n'est plus nécessaire (puisqu'un tour est trouvé).

b) Problème $PL(F_2, I_2)$

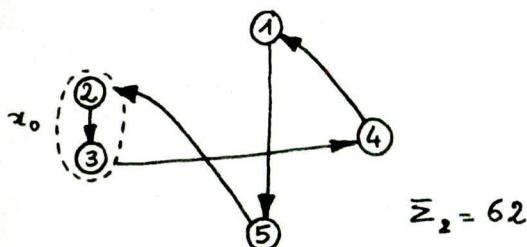
On définit de même les nouvelles distances d_2 (voir tableau 2).

La solution optimale est le 0-circuit hamiltonien:

$$(x_0 - 4 - 1 - 5 - x_0)$$

	x_0	1	4	5
x_0	∞	18	30	20
1	10	∞	25	10
4	10	14	∞	15
5	8	10	27	∞

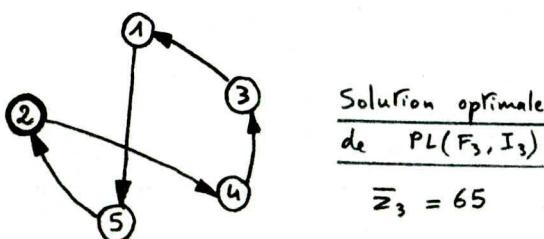
2- Distances d_2



Solution optimale de $PL(F_2, I_2)$

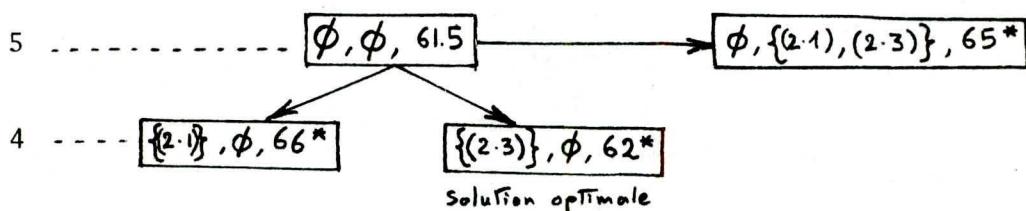
		2	1	3	4	5
2	x_0	∞	∞	15	2	
1	x_0	10	∞	25	25	10
3	9	8	∞	20	10	
4	10	14	24	∞	15	
5	8	10	25	27	∞	

3. Distances d_3



Nous pouvons résumer la procédure par une arborescence à chaque sommet de laquelle sont associées les données $(F, I, \bar{Z}(I, F))$ et éventuellement une étoile * si la solution est un tour.

Nombre de contraintes



qui donne le tour

$$(2 - 3 - 4 - 1 - 5 - 2)$$

avec $\bar{Z}_2 = 62$

Aucune séparation n'est plus nécessaire.

c) Problème $PL(F_3, I_3)$

Les distances d_3 sont définies par

$$d_3(u, v) = d(u, v)$$

sauf pour $d_3(2, 1) = \infty$

$$d_3(2, 3) = \infty$$

La solution optimale est le 0-circuit hamiltonien:

$$(2 - 4 - 3 - 1 - 5 - 2)$$

avec $\bar{Z}_3 = 65$

Le problème est donc résolu: le tour optimal est $(2 - 3 - 4 - 1 - 5 - 2)$ de longueur 65.

Dans le cas où la matrice des distances est symétrique, c'est à dire, en somme, le graphe non orienté, nous remarquons que le graphe pondéré obtenu peut être considéré également comme non-orienté, avec les pondérations :

$$q(x, y) = p(x, y) + p(y, x) \quad \forall (x, y) \in V^2$$

En effet p représente la pondération associée à une solution optimale de (PL) tel que $p(x, y) \neq p(y, x)$, il existe une autre solution optimale, déduite de la précédente en renversant dans chaque 0-circuit le sens des arcs; si p' représente la pondération associée à cette nouvelle solution, on a

$$p'(x, y) = p(y, x) \quad \forall (x, y) \in E$$

Alors la demi-somme des deux solutions donne encore une solution optimale, avec une pondération $p'' = \frac{1}{2} (p + p')$ symétrique.

La pondération q définie sur le graphe non-orienté sous-jacent à (V, E) ne représente plus une circulation, mais vérifie l'égalité suivante :

$$\sum_{f \in \text{Adj}(x)} q(f) = 2 \quad \text{où } \text{Adj}(x) \text{ est l'ensemble des arêtes adjacentes à } x$$

La première séparation devra tenir compte de cette symétrie afin d'éviter qu'une même solution ne se présente (sous forme symétrique) dans plusieurs sous-problèmes. On n'utilisera (arbitrairement) que les arcs (x_0, y_i) issus de x_0 , et, en notant $\bar{e}_i = (y_i, x_0)$ l'arc symétrique de e , nous définissons :

$$\begin{array}{ll} F_1 = \{e_1\} & I_1 = \{\bar{e}_1\} \\ F_2 = \{e_2\} & I_2 = \{\bar{e}_1, e_1, \bar{e}_2\} \\ \cdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} F_\ell = \{e_\ell\} & I_\ell = I_{\ell-1} \cup \{e_{\ell-1}, \bar{e}_\ell\} \\ F_{\ell+1} = \emptyset & I_{\ell+1} = I_\ell \cup \{e_\ell\} \end{array}$$

Si, dans le problème $PL(F_{\ell+1}, I_{\ell+1})$, x_0 a moins de 2 arêtes adjacentes, il n'y a pas de tour hamiltonien dans le réseau, et le sous-problème peut être abandonné.

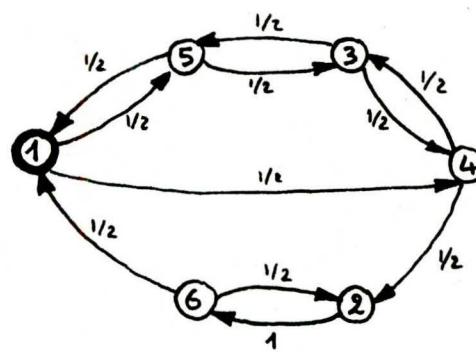
Si $Adj_{\ell+1}(x_0) = \{(x_0, y), (x_0, z)\}$, tout tour hamiltonien traversera x_0 entre y et z ; choisissons une orientation arbitraire, disons $y \rightarrow x_0 \rightarrow z$ le nombre de sommets intermédiaires (c'est à dire le nombre de contraintes de $PL(F_{\ell+1}, I_{\ell+1})$) est alors diminué de 2 par rapport au problème initial. Après cette première séparation, le réseau est, dans tous les cas, orienté et l'on est ramené au cas non-symétrique.

Nous allons illustrer tout ceci sur l'exemple 2.

Exemple 2 tiré de Held et Karp [12, I], en partant de $x_0 = 1$

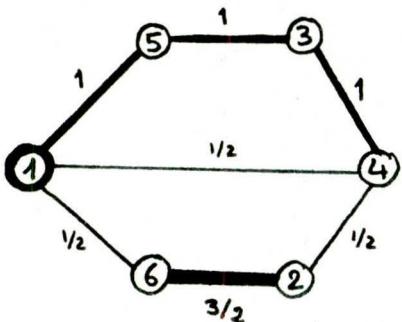
	1	2	3	4	5	6
1	—	97	60	73	17	52
2	—	41	52	90	30	
3	—	21	35	41		
4	—	95	46			
5	—	81				
6	—					

Distances (symétriques)



Une solution optimale

$\Sigma = 206.5$



1. Pondérations non orientées

Une solution optimale est constituée par les 0-circuits $((1) - 5 - 3 - 4 - 3 - 5 - (1))$ $((1) - 4 - 2 - 6 - 2 - 6 - (1))$ au niveau $1/2$ chacun, $\bar{Z} = 206.5$

On en déduit les pondérations non-orientées représentées ci-contre (remarquons que l'arête 2-6 a un poids: $3/2 > 1$).

Posons $e_1 = (1-6)$, $e_2 = (1-4)$, $e_3 = (1-5)$.

Nous trouvons successivement:

$$F_1 = \{(1-6)\} \quad I_1 = \{(6-1)\} \quad \bar{Z}_1 = 207 \text{ pour le tour } (1-6)-2-4-3-5-(1)$$

$$F_2 = \{(1-4)\} \quad I_2 = \{(6-1), (1-6), (4-1)\} \quad \bar{Z}_2 = 242 \text{ pour le tour } (1-4)-6-2-3-5-(1)$$

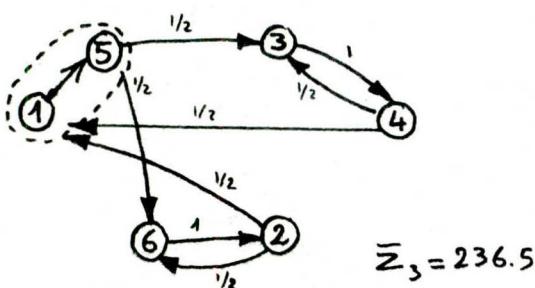
$$F_3 = \{(1-5)\} \quad I_3 = \{(6-1), (1-6), (4-1), (1-4), (5-1)\}$$

$$\bar{Z}_3 = 236.5 \text{ avec les 0-circuits}$$

$$(1-5) - 6 - 2 - 6 - 2 - (1) \quad \text{et}$$

$$(1-5) - 3 - 4 - 3 - 4 - (1)$$

chacun au niveau $1/2$. Le graphe pondéré est représenté fig. 2



2. Solution optimale de PL(F_3, I_3)

Nous allons développer davantage le 4^e sous-problème:

$$F_4 = \emptyset \quad I_4 = \{(6-1), (1-6), (4-1), (1-4), (5-1), (1-5)\}$$

restent exactement deux arêtes (1-2) et (1-3) adjacentes à 1.

Choisissons arbitrairement l'orientation $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$.

	x_0	4	5	6
x_0	∞	209	247	187
4	21	∞	95	46
5	35	95	∞	81
6	41	46	81	∞

Distances d_4

L'ensemble des sommets intermédiaires est

$$V_4 = 4, 5, 6$$

et les distances modifiées:

$$d_u(x_0, y) = d(3, 1) + d(1, 2) + d(2, y)$$

$$d_u(y, z) = d(y, z)$$

$$d_u(z, x_0) = d(z, 3)$$

A l'occasion de ce sous-problème, définissons une borne inférieure assez grossière sur \bar{z}_j :

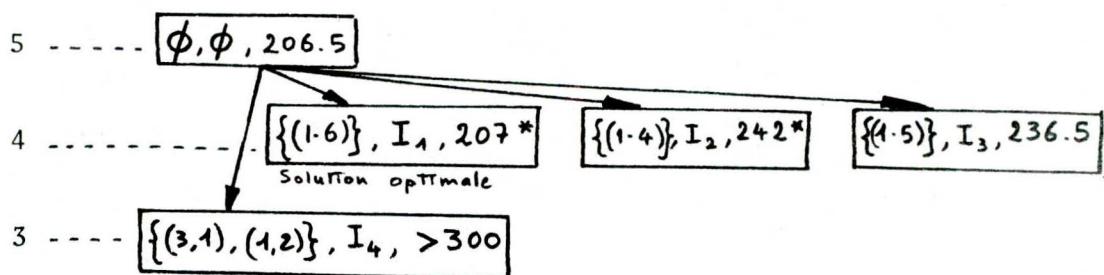
$$\bar{z}_i \geq b_i = \min_{y \in V_i} d_i(x_0, y) + \left[(|V_i| - 1) \times \min_{y, z \in V_i} d_i(y, z) \right] + \min_{z \in V_i} d_i(z, x_0)$$

$$\text{ici nous avons } b_4 = 187 + [2 \times 46] + 21 = 300 ;$$

ayant déjà trouvé une solution réalisable de longueur 207, on peut abandonner le dernier sous-problème sans avoir besoin de le résoudre.

La procédure est résumée dans l'arborescence ci-dessous

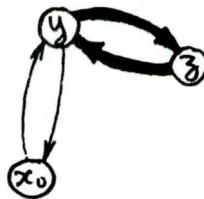
Nombre de contraintes



6. Mise en oeuvre et perspectives

La part prépondérante de l'effort de calcul dans la mise en oeuvre de la procédure décrite ci-dessus est consacrée à la recherche des 0-circuits de coût marginal minimal. Les considérations suivantes mènent à une économie sensible:

- 0 - bonne solution de départ: on restreint d'abord l'ensemble des variables aux 0-circuits qui cyclent sur deux sommets intermédiaires.



0-circuits sur 2 sommets intermédiaires

Si n désigne le nombre de sommets intermédiaires, on distingue selon la parité de n :

- si n pair, le programme linéaire se ramène à la formulation linéaire continue du problème du couplage; des algorithmes efficaces peuvent être dérivés du simplexe (Burlet [4])

ou de considérations basées sur la dualité (Liebman [13])

- si n est impair, on obtient une légère variante du problème ci-dessus⁽¹⁾.

- 1 - recherche d'un 0-circuit de longueur minimale: on peut appliquer (cf [16]) l'algorithme de Bellman, ce qui conduit à un nombre d'opérations (additions, comparaisons) de l'ordre de n^3 . On peut également appliquer

Note (1): Ces points seront développés dans un rapport "Sur les plus courts chemins à nombre d'arcs fixé, et application à des problèmes combinatoires et de ~~données~~ - à paraître".

l'algorithme de Dijkstra [8] qui garantit (en structurant bien les données) un nombre maximum d'opérations de l'ordre de $n^2 \log n$ ⁽¹⁾

2 - variante: on peut restreindre l'ensemble des variables de PL en excluant les 0-circuits qui "bouclent" sur un seul arc: si x, y sont deux sommets successifs dans le 0-circuit c , le sommet suivant ne sera ni y évidemment (le réseau R est supposé sans boucles) ni x ; ceci s'obtient au prix d'un temps de calcul exactement double, de même pour l'encombrement mémoire (double-marquage)⁽¹⁾. Si la première version permettait de résoudre, sans branch and bound, la plupart des exemples avec $n \leq 6$, cette variante s'est révélée efficace pour des réseaux avec $n = 10$. Dans tous les cas, la borne obtenue est nécessairement plus proche de la longueur du tour optimal qu'avec le premier algorithme.

3 - choix du sommet de départ: bien qu'aucun résultat n'ait été prouvé, les expériences réalisées semblent indiquer qu'un sommet "central" c'est à dire tel que les distances aux autres sommets soient assez voisines, donne les plus mauvaises bornes; on assiste en effet à une prolifération de 0-circuits partiels, donnant au graphe une structure rappelant une marguerite. Un choix raisonnable semble être de choisir un sommet "périmérique", c'est à dire dont les distances aux autres sommets sont rapidement grandes par rapport aux plus petites; on peut choisir par exemple un sommet dont la distribution des distances présente la plus grande variance.

Voir note (1)

La première version de l'algorithme fut essayée sur 3 classes de problèmes pour $n = 5, 6, 10$ (symétriques comme asymétriques)

pour $n = 5$ tous les problèmes furent résolus en partant d'au moins un sommet

pour $n = 6$ ce fut le cas pour tous les problèmes symétriques et la moitié des problèmes asymétriques

pour $n = 10$ seul le problème tiré d'Ashour-Vega-Parker [1] fut résolu en partant du sommet 5.

Sur 4 problèmes de taille 10 (dont [5], [7]) l'écart maximum entre \bar{Z} et C^* est de 6.5%, et sa valeur moyenne fut de 3.5%.

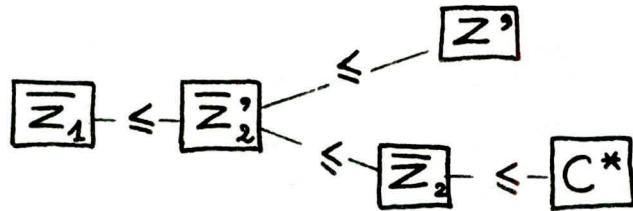
La variante (permettant d'éviter les circuits de longueur 2) a toujours donné le tour optimal pour $n = 5$ et 6.

pour $n = 10$ le problème asymétrique fut résolu en partant de tous les sommets. Les 3 autres furent résolus en partant de plus de la moitié des sommets.

L'écart moyen est de l'ordre de 5%.

En outre sur les problèmes de taille 10, l'utilisation de la solution de départ suggérée plus haut permet d'économiser plus de la moitié du temps de calcul, et cette proportion semble croître avec n .

Enfin l'application de la variante évoquée ci-dessus à partir de la solution de départ donne une valeur de Z comprise entre celles fournies séparément par chacun des 2 autres algorithmes (voir fig. page suivante).



\bar{z}_1 valeur de la solution obtenue avec l'algorithme original

\bar{z}_2 valeur de la solution obtenue avec la variante

\bar{z}'_2 valeur de la solution obtenue en partant de la solution de départ

z' valeur de la solution de départ

C^* longueur de tour optimal

Dans le rapport précision/temps de calcul, c'est donc cette version qui semble donner les meilleurs résultats.

7. Problèmes de grande taille

Pour des valeurs de n comprises entre 10 et 20, se produit un effet bien connu dans les PL de grande taille: la valeur de la fonction-objectif ne décroît plus que très lentement ("effet de plateau") ce qui rend la convergence très lente. ([11],[12,I])

Pour pouvoir appliquer les considérations ci-dessus à des problèmes de taille moyenne, nous avons entrepris de développer une procédure par relaxation, très proche de celle de Held et Karp [12,II], dont les résultats seront alors publiés.

L'approche par des chemins à nombre d'arcs fixé (baptisés 0-circuits

si ce nombre est égal au nombre de sommets) se révèle fructueuse et s'étend à divers problèmes combinatoires, de cheminement et de tournées: à suivre.

REFERENCES

- [1] Ashour S., Vega J.F. et Parker R.G.: "A heuristic algorithm for T.S.P." Transpn Res. Vol. 6, pp 187-195 Pergamon Press (1972)
- [2] Bellmore M. et Malone J.: "Pathology of TSP Subtour-Elimination Algorithms". Operations Research, Vol. 16, pp 538-558 (1968).
- [3] Bellmore M. et Nemhauser G.L.: "The TSP: A Survey". Operations Research, Vol. 16, pp 538-558 (1968).
- [4] Burlet M. These de 3e cycle
Université de Grenoble (à paraître)
- [5] Christofides N.: "The Shortest Hamiltonian Chain of a Graph". S.I.A.M. Appl. Math., Vol. 19, pp 689-696 (1970).
- [6] Dantzig G.B.: "Linear Programming and extensions". Princeton University Press (1963).
- [7] Dantzig G.B., Fulkerson D.R. et Johnson S.M.: "On a LP, combinatorial approach to the T.S.P.". Operations Research, Vol. 7, pp 58 à 66 (1959).
- [8] Dijkstra E.W.: "A note on two Problems in Connexion with Graphs". Numerische Mathematik, Vol. 1, pp 269-271 (1959).
- [9] Ford L.R. et Fulkerson D.R.: "Flows in Networks" Princeton University Press (1962).
- [10] Garfinkel R. et Nemhauser G.: "Integer Programming". John Wiley and Sons (1972).
- [11] Gilmore P.C. et Gomory R.E.: "A L.P. approach to the Cutting Stock problem". Operations Research I, Vol. 9, pp 849-859 (1961).
II, Vol. 11, pp 863-887 (1963)
- [12] Held M. et Karp R.M.: "The TSP and Minimum Spanning Trees".
I Operations Research, Vol. 18, pp 1138-1162 (1970)
II Mathematical Programming, Vol. 1, pp 6-25 (1971)

- [13] Liebman J.C.: "Notes on Edmond's matching and White's K-matching".
Notes privées (1972).
- [14] Rao M.R. et Zions S.: "Allocation of transportation Units to
Alternative Trips".
Operations Research, Vol. 16, pp 52-63 (1968).
- [15] Sakarovitch M.: "Programmation linéaire".
Université de Grenoble (1973).
- [16] Saigal R.: "A constrained Shortest Route Problem".
Operations Research, Vol. 16, pp 388-401 (1970).
- [17] Wagner H.M.: "Principles of Management Science".
Prentice-Hall (1970).



77445

CONSULTER
SUR PLACE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288698 2