

Titre: Identification en temps réel des systèmes échantillonnés linéaires
Title: variants

Auteurs: André B. Turgeon, & Quang Tran Vu
Authors:

Date: 1975

Type: Rapport / Report

Référence: Turgeon, A. B., & Vu, Q. T. (1975). Identification en temps réel des systèmes échantillonnés linéaires variants. (Rapport technique n° EP-R-75-05).
Citation: <https://publications.polymtl.ca/9209/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/9209/>
PolyPublie URL:

Version: Version officielle de l'éditeur / Published version

Conditions d'utilisation: Tous droits réservés / All rights reserved
Terms of Use:

 **Document publié chez l'éditeur officiel**
Document issued by the official publisher

Institution: École Polytechnique de Montréal

Numéro de rapport: EP-R-75-05
Report number:

URL officiel:
Official URL:

Mention légale:
Legal notice:



DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

Rapport technique EP75-R-5

Classification: Library of Congress no.....

IDENTIFICATION EN TEMPS REEL DES SYSTEMES

ECHANTILLONNES LINEAIRES VARIANTS

par

André B. Turgeon
professeur agrégé

et

Quang Tran Vu
étudiant en maîtrise

23 janvier 1975

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ
UP 4
75R05

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7



**Bibliothèque
Ecole
Polytechnique
MONTREAL**

CLASSIFICATION

CA2PQ

No D'ENTRÉE

UP4

76113

75R05

27 FEV 1975

-dm-

76113

A CONSULTER
SUR PLACE

IDENTIFICATION EN TEMPS REEL DES SYSTEMES

ECHANTILLONNES LINEAIRES VARIANTS

André B. Turgeon *

Q.T. Vu **

soumis pour publication à Automatic Control Theory
& Applications

* Directeur du département de Génie Electrique,
Ecole Polytechnique, Montréal, Québec.

** Candidat aux études doctorales,
Département de Génie Electrique, Ecole Polytechnique
de Montréal, Québec.

Abstract

The exponential weighting function is used to extend the least squares and generalized least squares identification techniques of time invariant systems to the identification of time variant ones, in the presence of measurement noises. Some properties of the solutions are pointed out by theoretical and experimental (simulations) studies. The real time application of the above mentioned techniques is made possible by the use of numerical iterative methods. An optimum value of the weighting factor which corresponds to the best compromise between the filtering of the measurement noises and the pursuit of parameters, is shown to exist.

Sommaire

Une fonction de pondération exponentielle est utilisée pour étendre les méthodes de Kalman et des moindres carrés généralisés à l'identification des systèmes linéaires variants, en présence des bruits de mesures. Plusieurs propriétés des solutions sont dégagées à laide d'études théorique et expérimentale (simulations). L'utilisation des méthodes numériques itératives dans la recherche des solutions rend possible l'application au temps réel des méthodes étudiées. Il est démontré qu'il existe une valeur optimale du facteur de pondération correspondant au meilleur compromis entre le filtrage du bruit et la poursuite des paramètres.

INTRODUCTION

Le problème de l'identification des systèmes est traité abondamment dans la littérature depuis environ 25 années. Une rétrospective de ces traités [1] [3] [6] montre qu'en général ils se rapportent à des systèmes linéaires invariants. L'extension des méthodes proposées à l'identification des systèmes variants, un des problèmes principaux posés par la réalisation d'une boucle auto-adaptive, est encore peu exploitée.

Ce travail montre que l'introduction d'une fonction de pondération exponentielle accordant plus d'importance aux mesures récentes dans le critère de minimisation est un moyen simple et efficace pour étendre la méthode des moindres carrés généralisés (MCG) à l'identification des systèmes variants. Un choix rationnel d'un facteur de pondération doit être effectué en fonction de son double rôle soit: le filtrage des bruits de mesures et la poursuite des paramètres. Le lecteur doit être informé que cette solution n'est pas exacte mais elle nous semble être une bonne approche.

I. EXTENSION DES METHODES DE KALMAN [4] ET DES MCG [7] A L'IDENTIFICATION DES SYSTEMES VARIANTS

I.1 Extension de la méthode de Kalman

Soit:

x_i entrée du système et du modèle à l'instant iT

T période d'échantillonnage

y_i sortie réelle du système à l'instant iT

y_i^* sortie mesurée du système à l'instant iT

v_i bruit de mesure sur la sortie du système à l'instant iT

z_i sortie du modèle à l'instant iT .

Les équations aux différences du modèle et du système à l'instant kT

s'écrivent:

$$z_k = \sum_{i=1}^n (a_i x_{k-i} + b_i z_{k-i}) \quad (1)$$

$$y_k = \sum_{i=1}^m (p_i x_{k-i} + q_i y_{k-i}) \quad (2)$$

où a_i, b_i sont les paramètres du modèle; p_i, q_i ceux du systèmes. n est l'ordre du modèle et m , l'ordre du système.

Le critère quadratique de minimisation proposé répond à l'expression:

$$E_k = \sum_{k=1}^N \alpha^{N-k} [y_k^* - z_k]^2, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3)$$

avec N , le nombre d'échantillonnage, α un facteur de pondération qui attribue plus de poids aux mesures récentes.

La minimisation de (3) en fonction des paramètres a_i et b_i avec l'hypothèse de Kalman [4]

$$y_{k-i}^* = z_{k-i}, \quad i \geq 1 \quad (4)$$

permet l'évaluation du modèle à l'instant NT . Cette solution s'écrit:

$$\begin{bmatrix} y^* y^* \\ \varphi_\alpha \quad i \quad j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x y^* \\ \varphi_\alpha \quad i \quad j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^* y^* \\ \varphi_\alpha \quad 0 \quad i \\ y^* x \\ \varphi_\alpha \quad 0 \quad i \end{bmatrix} \quad (5)$$

i, j variant de 1 à n

$$\varphi_{\alpha}^{c d} \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} (N) = \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} c_{k-r} d_{k-s} \quad (6)$$

$$\varphi_{\alpha}^{c d} \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} (N) = \alpha \varphi_{\alpha}^{c d} \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} (N-1) + C_{N-r} d_{N-s} \quad (7)$$

L'équation (5) peut être mise sous une forme plus condensée:

$$\Phi_{\alpha K}^* G_K = \Phi_{\alpha 0}^* \quad (8)$$

avec $G_K = [b_i \dots a_i]$, i variant de 1 à n .

I.2 Extension de la méthode des MCG

L'équation aux différences du modèle est:

$$B_0 Z_i + B_1 Z_{i-1} + \dots + B_n Z_{i-n} + A_1 x_{i-1} + \dots + A_n x_{i-n} = 0 \quad (9)$$

dans laquelle les B_i et A_j sont des paramètres du modèle d'ordre n . Dans le cas d'un système linéaire invariant, le critère de minimisation de la méthode MCG s'écrit [7]:

$$R_N = \sum_{k=0}^N \frac{\left[\sum_{i=0}^n B_i y_{k-i}^* + \sum_{j=1}^n A_j x_{k-j} \right]^2}{\sum_{i=u}^n B_i^2} = \sum_{k=0}^N R_k^2 \quad (10)$$

En introduisant la fonction de pondération exponentielle on obtient la forme quadratique:

$$E_N = \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} R_k^2 \quad (11)$$

La minimisation de (11) par rapport aux paramètres conduit à un problème aux valeurs propres généralisées:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{\alpha}^{y y} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} (N) - E_N \delta_{ij} & \varphi_{\alpha}^{x y} \begin{matrix} \ell \\ j \end{matrix} (N) \\ \varphi_{\alpha}^{y x} \begin{matrix} j \\ \ell \end{matrix} (N) & \varphi_{\alpha}^{x x} \begin{matrix} \ell \\ \ell \end{matrix} (N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i \\ A_{\ell} \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

i et j variant de 0 à n , ℓ variant de 1 à n

δ_{ij} le Kronecker d'ordre $n + 1$

La relation (12) peut être mise sous la forme:

$$\Phi_{\alpha M}^* (E_N) G_M = 0 \quad (13)$$

avec $G_M = [B_i \dots A_\ell]$, i variant de 0 à n , et ℓ de 1 à n .
La valeur propre minimale de (12) correspond à la solution cherchée car E_N est minimum.

Etant données les propriétés de récurrence de l'équation (7) l'introduction d'une fonction exponentielle ne requiert pas plus d'espace-mémoire que dans le cas invariant. Ceci constitue un intérêt pratique car il en résulte une économie substantielle de l'espace mémoire par rapport à d'autre moyen d'adaptation comme par exemple le traitement des données en bloc, la pondération exponentielle tronquée etc...

II. ETUDE DE L'INFLUENCE DU FACTEUR DE PONDERATION α SUR LES PROPRIETES STATISTIQUES DES SOLUTIONS [8]

La mise en évidence de ces propriétés est faite pour un système invariant. L'ordre du modèle est égal à l'ordre du système. Ces hypothèses écartent évidemment les cas non stationnaires et non linéaires. On suppose que les bruits de mesures sont des bruits pseudo-blancs de moyennes nulles:

$$\overline{v_i} = 0$$

$$\overline{v_{i-r} \cdot v_{i-s}} = \begin{cases} 0 & \text{pour } r \neq s \\ \overline{v_i^2} & \text{pour } r = s \end{cases}$$

Ils sont de plus non corrélés à la sortie du système:

$$\overline{v_{i-r} \cdot y_{i-s}} = 0 \quad \forall r, s$$

On suppose aussi que l'entrée du système est précisément connue, étant donné qu'elle est générée par la calculatrice commandant le système.

II.1 Calcul des deux premiers moments des termes dus au bruit

D'après l'équation (6) on obtient:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^{**} y_r y_s^* (N) &= \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} y_{k-r} y_{k-s} + \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} v_{k-r} v_{k-s} \\ &+ \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} y_{k-r} v_{k-s} + \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} y_{k-s} v_{k-r} \end{aligned} \quad (17)$$

Pour qu'une solution asymptotique existe (cas MCG) il faut que les deux derniers termes de (17) soient nuls quel que soient r et s, et que le deuxième terme soit nul pour r différent de s. On Pose:

$$e_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} v_{k-r,j} v_{k-s,j} \quad (18)$$

où j indique que e_j provient du $j^{\text{ième}}$ élément de la fonction aléatoire V_i du bruit de mesure. L'espérance mathématique de e_j sur l'ensemble de la fonction aléatoire s'écrit:

$$E(e_j) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{N \rightarrow \infty} \alpha^{N-k} v_{k-r,j} v_{k-s,j} \quad (19)$$

$$E(e_j) = \sum_{k=0}^{N \rightarrow \infty} \alpha^{N-k} \sum_{j=0}^{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} v_{k-r,j} v_{k-s,j} \quad (20)$$

$$E(e_j) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot 0 = 0 \quad (21)$$

car:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=0}^M v_{k-r,j} v_{k-s,j} = 0 \text{ par hypothèse} \quad (22)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} = \frac{1}{1-\alpha} \text{ pour } 0 < \alpha \leq 1 \quad (23)$$

Un calcul semblable permet d'évaluer la variance de e_j (annexe I):

$$V(e_j) = \frac{\frac{v_i^2}{2}}{1 - \alpha^2} \quad (24)$$

En procédant de la même façon on obtient des expressions semblables pour les autres termes, par exemple:

$$f_j = \sum_{k=0}^{N \rightarrow \infty} \alpha^{N-k} x_{k-r,j} v_{k-s,j} \quad (25)$$

$$E(f_j) = 0 \quad (26)$$

$$V(f_j) = \frac{\frac{x_i^2}{2} \cdot \frac{v_i^2}{2}}{1 - \alpha^2} \quad (27)$$

Et le terme diagonal:

$$h_j = \sum_{k=0}^{N \rightarrow \infty} \alpha^{N-k} v_{k-r,j}^2 \quad (28)$$

$$E(h_j) = \frac{\frac{v_i^2}{2}}{1 - \alpha^2} \quad (29)$$

$$V(h_j) = \frac{\frac{v_i^4}{4}}{1 - \alpha^2} - \frac{\frac{v_i^2}{2}}{1 - \alpha^2} \quad (30)$$

II.2 Propriétés statistiques de la solution de Kalman

II.2.1 Moyenne de la solution

En séparant les termes dus au bruit, l'équation (8) peut s'écrire:

$$[\Phi_{\alpha K} + \Delta \Phi_{\alpha K}] G_K = [\Phi_{\alpha 0} + \Delta \Phi_{\alpha 0}] \quad (31)$$

où $\Delta \Phi_{\alpha K}$ et $\Delta \Phi_{\alpha 0}$ sont des matrices contenant des termes dus au bruit. Evidemment en multipliant les deux membres de (31) par $(1 - \alpha)$ on ne change pas la solution G_K .

On a:

$$[\Phi_{(1-\alpha)K} + \Delta \Phi_{(1-\alpha)K}] G_K = [\Phi_{(1-\alpha)0} + \Delta \Phi_{(1-\alpha)0}] \quad (32)$$

$$\text{où } X_{(1-\alpha)u} = (1-\alpha) X_{\alpha u} \quad (33)$$

On a ainsi d'après les équations (19) à (30)

$$E[\Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}] = \begin{bmatrix} \overline{v_i^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \overline{v_i^2} \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \triangleq E[\mu_{k\ell}]_{2n \times 2n} \quad (34)$$

$$E[\Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)O}] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0^T \end{bmatrix} \triangleq E[\mu_{0\ell}]_{1 \times 2n}^T \quad (35)$$

$$V[\Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}] = \begin{bmatrix} t_{ij} & u_{ij} \\ u_{ij} & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

i, j variant de 1 à n

$$V[\Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)O}] = \begin{bmatrix} t_{01} & t_{0n} & u_{01} & u_{0n} \end{bmatrix}^T \quad (37)$$

où:

$$t_{ij} = 2 \overline{y_i^2} \cdot \overline{v_i^2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (38)$$

$$t_{ij} = \overline{v_i^4} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} - \overline{v_i^2}^2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + 4 \overline{y_i^2} \cdot \overline{v_i^2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (39)$$

$$u_{ij} = \overline{x_i^2} \cdot \overline{v_i^2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (40)$$

D'après les relations (34) et (35) et le fait que

$$\overline{\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}} G_e = \overline{\bar{\Phi}_{(1-\alpha)O}} \quad (41)$$

où G_e est la solution exacte, on peut écrire:

$$G_K = G_e + \Delta G_K \quad (42)$$

où ΔG_K est un vecteur aléatoire dont la valeur moyenne est biaisée par la valeur quadratique du bruit de mesure et est indépendante du facteur de pondération α .

II.2.2 Variance de la solution

Soit

$$[\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K} + \Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}] G_K = [\bar{\Phi}_{(1-\alpha)0} + \Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)0}] \quad (43)$$

l'équation matricielle d'un modèle du n^{ième} ordre où $\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}$ et $\bar{\Phi}_{(1-\alpha)0}$ sont des matrices constantes. Les caractéristiques de $\Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}$ et $\Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)0}$ sont définis par les équations (34) à (40).

On pose:

$$G_K = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_{2n}]^T \quad (44)$$

D'après la règle de Cramer on a pour y_i :

$$g_i = \frac{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^i + \Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^i|}{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K} + \Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}|} \quad (45)$$

où $x_{(1-\alpha)K}^i$ est la matrice $X_{(1-\alpha)K}$ dont la k^{ième} colonne est remplacée par $X_{(1-\alpha)0}$.

L'ordre du modèle étant égale à celui du système on a:

$$\frac{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^i|}{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}|} = \frac{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^{-i}|}{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}|} = g_{ie} \quad (46)$$

où g_{ie} est la solution exacte. Ce qui donne si le niveau des bruits de mesure est relativement faible par rapport à la sortie:

$$g_i \approx \frac{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^i + \Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^i|}{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^{-i} + \Delta\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^{-i}|} \quad (47)$$

En éliminant les termes en double produit $\mu_{ij} \mu_{k\ell}$ ou plus dans le développement du déterminant [2] on obtient:

$$g_i \approx \frac{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}^{-i}| + \sum_{k=1}^n C_{ki} \mu_{ok} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, \neq k}^n L_{kj}^i \mu_{ki}}{|\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}| + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj} \mu_{kj}} \triangleq \frac{N_i}{D} \quad (48)$$

C_{kj} est le cofacteur de l'élément (k,j) de $\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}$

L_{kj}^0 est le cofacteur de l'élément (k,j) de L^i

L^i étant la matrice $\bar{\Phi}_{(1-\alpha)K}$ dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est remplacée par $\bar{\Phi}_{(1-\alpha)0}$

D'après les relations (34) et (35) il est évident que les estimés $E(N_i)$ et $E(D)$ de N_i et D sont des constantes indépendantes de α . Puisque N_i et D sont linéaires par rapport aux termes μ_{ij} dont les variances sont données par les relations (36) à (40) un calcul long mais direct donne comme expressions des variances de N_i et D et de la covariance de (N_i, D) :

$$V(N_i) = C_1 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (49)$$

$$V(D) = C_2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (50)$$

$$C(N_i, D) = C_3 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (51)$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes.

D'après ces dernières relations un calcul approximatif de la variance de g_i [5] donne:

$$V(g_i) \approx \frac{1}{E^2(D)} \cdot C_1 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{E^2(N_i)}{E^4(D)} \cdot C_2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} + 2 \frac{E(N_i)}{E^3(D)} \cdot C_3 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (52)$$

$$V(g_i) \approx k_i \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \quad (53)$$

où k_i est une constante qui dépend du niveau du bruit.

II.2.3 Simulation

Des simulations sur un cas particulier sont faites: soit le système du deuxième ordre suivant:

$$G(Z^{-1}) = \frac{0.185 Z^{-1} + 0.130 Z^{-2}}{1 - 1.185 Z^{-1} + 0.37 Z^{-2}} \quad (54)$$

Les moyennes des paramètres sont calculés à partir de 400 évaluations:

$$\bar{g}_i = \frac{1}{400} \sum_{j=1}^{400} g_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (55)$$

et les variances à partir de 100 évaluations:

$$V(g_i) = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} (g_{ij} - \bar{g}_i)^2 \quad (56)$$

où chaque g_{ij} est identifié après 100 mesures.

L'erreur d'identification est définie comme:

$$EI = \sqrt{(y_i - z_i)^2 / y_i^2} \times 100 \quad (57)$$

y_i et z_i étant les sorties réelles du système et du modèle, l'excitation étant la même pour les modèles et systèmes. Le niveau des bruits de mesure est défini de la même façon. Pour les simulations EI est évalué sur 320 échantillons.

La figure 1 illustre l'erreur d'identification en fonction du bruit de mesure pour différentes valeurs du facteur de pondération α . La courbe obtenue montre bien que la moyenne de la solution de Kalman lors de l'introduction de α est biaisée par le bruit de mesure et est indépendante de α . La figure 2 représente la variance du paramètre $B(1)$ en fonction de α . On y voit bien que la variance décroît avec α comme prévu dans l'analyse théorique.

II.3 Propriétés statistiques de la solution des MCG

II.3.1 Moyenne de la solution

On a comme solution:

$$[\Phi_{(1-\alpha)M} + \Lambda \bar{\Phi}_{(1-\alpha)M}] G_M = 0 \quad (58)$$

où $\bar{\Phi}_{(1-\alpha)M}$ est une matrice constante et:

$$\overline{\Delta\Phi}_{(1-\alpha)M} = \begin{bmatrix} \overline{v_i^2} - E_N & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \overline{v_i^2} - E_N \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad (59)$$

(2n+1)x(2n+1)

On a par ailleurs:

$$[\overline{\Phi}_{(1-\alpha)M} + \overline{\Delta\Phi}_{(1-\alpha)M}] G_e = 0 \quad (60)$$

où G_e est la solution exacte. Ce qui permet d'écrire:

$$G_M = G_e + \Delta G_M \quad (61)$$

où ΔG_M est un vecteur aléatoire de moyenne nulle.

En comparant au niveau de simulation précédente la figure 1 illustre assez bien ce résultat.

II.3.2 Variance de la solution

La recherche d'une expression analytique approximative pour la variance de G_M est laborieuse. Une étude par simulation (tableaux 1 et 2) montre cependant que la variance de G_M est du même ordre que celle de G_K pour les valeurs de α assez grande ($0.8 < \alpha < 1$). Pour les valeurs de α faibles la différence augmente avec le niveau des bruits de mesures. Ce fait serait dû à l'imprécision du calcul de la valeur propre minimale. Cependant l'existence d'une relation entre les coefficients de covariance pondérés $\varphi_{\alpha \ r \ s}^{c \ d}(N)$ et non pondérés $\varphi_{1 \ r \ s}^{c \ d}(N)$

$$\varphi_{\alpha \ r \ s}^{c \ d}(N) = \varphi_{1 \ r \ s}^{c \ d}(N) - \frac{1-\alpha}{\alpha} \sum_{j=1}^N \alpha^j \varphi_{1 \ r \ s}^{c \ d}(N-j) \quad (62)$$

permet d'établir un algorithme de calcul plus précis pour la valeur propre minimale. En conséquence cet algorithme pourrait même conduire à une variance de G_M plus petite que la variance de G_K [8].

III. IDENTIFICATION DES SYSTEMES VARIANTS [8]

III.1 Influence du facteur de pondération sur la poursuite des paramètres

L'étude est faite en absence du bruit de mesure et d'une façon expérimentale vu la complexité du problème. Plusieurs simulations ont été faites. Les résultats présentés aux figures 3 et 4 attestent qu'en absence du bruit de mesure une diminution du facteur de pondération rend l'identification aussi précise qu'on le veut.

III.2 Identification en présence des bruits de mesure

La propriété précédente est opposée à celle établie au paragraphe II.2.2. Le choix d'un facteur de pondération pour l'identification des systèmes variants en présence des bruits de mesure est ainsi un problème de compromis entre le filtrage du bruit et la poursuite des paramètres. Les figures 5 à 7 illustrent les résultats obtenus à partir de différentes simulations. Pour un niveau de bruit raisonnable le facteur de pondération permettant la meilleure identification devient de plus en plus petit dans une variation de plus en plus rapide des paramètres (fig. 5). La figure 6 montre sous un autre angle le choix judicieux de α . Pour une même variation des paramètres, une augmentation du niveau du bruit de mesure commande un α de plus en plus grand. La figure 7 montre que pour un α adéquat la méthode des MCG permet une meilleure identification que la méthode de Kalman.

CONCLUSION

Ce travail met clairement en évidence plusieurs propriétés concernant la solution des MCG et celle préconisée par Kalman lors de l'introduction d'une fonction de pondération exponentielle dans les critères de minimisation.

En présence de bruit pour un système invariant:

- la méthode des MCG procure une solution dont la valeur moyenne est non biaisée, contrairement à la méthode de Kalman.
- La variance des solutions est d'autant plus faible que α est grand.

En absence de bruit pour un système variant:

- les solutions sont d'autant précises que α est petit.

En présence de bruit pour un système variant:

- la méthode des MCG procure une meilleure solution que celle de la méthode de Kalman.
- il existe un compromis de α qui réalise à la fois la poursuite des paramètres et le filtrage du bruit. Cette valeur de α minimise l'erreur d'identification donnée à l'équation (57).

Avec la fonction de pondération exponentielle une économie substantielle de l'espace-mémoire est acquise et le fonctionnement en temps réel de l'algorithme d'identification est possible avec l'utilisation des méthodes numériques itératives. D'après les simulations faites pour un modèle du deuxième ordre (le programme est écrit en Fortran et exécuté par la calculatrice IBM/360) un cycle d'identification prend environ 0.08 seconde pour la méthode de Kalman et 0.13 seconde pour la méthode des MCG, ce qui donne la possibilité d'avoir un cycle de calcul compatible avec l'évolution des systèmes industriels.

ANNEXE I

Calcul des variances des termes dus au bruit

Les calculs sont faits pour un terme diagonal. Pour les autres termes les calculs se font de façon identique. Soit:

$$h_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \alpha^{N-k} v_{k,j}^2 \quad (\text{AI.1})$$

$$V(h_j) = E(h_j^2) - E^2(h_j) \quad (\text{AI.2})$$

où j indique le j^{ième} élément de la fonction aléatoire V du bruit.

$$h_j^2 = \sum_{k=0}^{N \rightarrow \infty} \alpha^{2(N-k)} v_{k,j}^4 + 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha^{N-k} \alpha^{N-\ell} v_{k,j}^2 v_{\ell,j}^2 \quad (\text{AI.3})$$

$$h_j^2 = h_{1j}^2 + h_{2j}^2 \quad (\text{AI.4})$$

$$E(h_{1j}^2) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N \rightarrow \infty} \alpha^{2(N-k)} v_{k,j}^4 \quad (\text{AI.5})$$

$$E(h_{1j}^2) = \sum_{k=0}^{N \rightarrow \infty} \alpha^{2(N-k)} \sum_{j=1}^M \frac{1}{M} v_{k,j}^4 = \frac{\overline{v_i^4}}{1 - \alpha^2} \quad (\text{AI.6})$$

On a de la même façon:

$$E(h_{2j}^2) = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha^{N-k} \alpha^{N-\ell} \sum_{j=1}^{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} v_{k,j}^2 \cdot v_{\ell,j}^2 \quad (\text{AI.7})$$

$$E(h_{2j}^2) = 2 \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} \right] \frac{\overline{v_i^2}}{1-\alpha} \quad (\text{AI.8})$$

car les bruits sont indépendants d'un échantillon à l'autre et:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha^{N-k} \alpha^{N-\ell} = \frac{1}{(1-\alpha)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)}$$

Les relations (AI.2) à (AI.8) donnent:

$$V(h_j) = \frac{\overline{v_i^4}}{(1-\alpha^2)} + \left[\frac{2}{(1-\alpha)^2} - \frac{2}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)} \right] \frac{\overline{v_i^2}}{1-\alpha} - \frac{\overline{v_i^2}}{(1-\alpha)^2}$$

$$v(h_j) = \frac{\frac{v_i^4}{1-\alpha^2}}{\frac{v_i^2}{1-\alpha^2}} - \frac{v_i^2}{1-\alpha^2}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Astrom K.J. & Eykhoff, System Identification - A survey, Automatica, 1971.
- [2] Babbar M., Distributions of solutions of a set of linear equations (with an application to linear programming), Am. Statistical Ass., Sept. 1955, Vol 50.
- [3] Iserman et al., Comparison of Six on-line identification and parameters estimation methods, Automatica, Jan. 1974.
- [4] Kalman R.E., Design of a self optimizing control system, trans. ASME, Fev. 1958, Vol 80.
- [5] Papoulis A., Probability, Random variables and stochastic processes, (Mc Graw-Hill), 1965.
- [6] Saradis G.N., Comparison on six on-line identification algorithms, Automatica, Jan. 1974.
- [7] Turgeon A.B., Identification en temps réel des systèmes échantillonnés en présence de bruits de mesure, Automatisme, Mars 1970.
- [8] Vu Q.T., Identification et auto-compensation des systèmes linéaires variants, thèse de maîtrise, Ecole Polytechnique, Montréal, Déc. 1973.

Alpha	V[B(1)]		V[B(2)]		V[A(1)]		V[A(2)]	
	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.
1.00	0.65×10^{-3}	0.54×10^{-3}	0.57×10^{-3}	0.46×10^{-3}	0.25×10^{-4}	0.26×10^{-4}	0.69×10^{-4}	0.68×10^{-4}
0.90	0.35×10^{-2}	0.34×10^{-2}	0.30×10^{-2}	0.29×10^{-2}	0.20×10^{-3}	0.20×10^{-3}	0.42×10^{-3}	0.42×10^{-3}
0.80	0.78×10^{-2}	0.88×10^{-2}	0.68×10^{-2}	0.77×10^{-2}	0.43×10^{-3}	0.43×10^{-3}	0.96×10^{-3}	0.10×10^{-2}
0.70	0.13×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.12×10^{-2}	0.14×10^{-2}	0.71×10^{-3}	0.69×10^{-3}	0.15×10^{-2}	0.16×10^{-2}
0.60	0.19×10^{-1}	0.24×10^{-1}	0.20×10^{-1}	0.23×10^{-1}	0.11×10^{-2}	0.10×10^{-2}	0.21×10^{-2}	0.22×10^{-2}
0.50	0.31×10^{-1}	0.37×10^{-1}	0.35×10^{-1}	0.40×10^{-1}	0.17×10^{-2}	0.17×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.28×10^{-2}

Tableau 1: Variances des paramètres
(5% de bruit)

Alpha	V[B(1)]		V[B(2)]		V[A(1)]		V[A(2)]	
	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.	Kalman	M.C.G.
1.00	0.26×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.22×10^{-2}	0.17×10^{-2}	0.94×10^{-4}	0.10×10^{-3}	0.24×10^{-3}	0.28×10^{-3}
0.90	0.10×10^{-1}	0.10×10^{-1}	0.87×10^{-2}	0.91×10^{-2}	0.73×10^{-3}	0.81×10^{-3}	0.12×10^{-2}	0.14×10^{-2}
0.80	0.18×10^{-1}	0.22×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.20×10^{-1}	0.16×10^{-2}	0.18×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.32×10^{-2}
0.70	0.27×10^{-1}	0.37×10^{-1}	0.24×10^{-1}	0.40×10^{-1}	0.26×10^{-2}	0.26×10^{-2}	0.40×10^{-2}	0.50×10^{-2}
0.60	0.42×10^{-1}	0.63×10^{-1}	0.45×10^{-1}	0.76×10^{-1}	0.40×10^{-2}	0.40×10^{-2}	0.55×10^{-2}	0.66×10^{-2}
0.50	0.64×10^{-1}	0.98×10^{-1}	0.76×10^{-1}	0.98×10^{-1}	0.62×10^{-2}	0.62×10^{-2}	0.70×10^{-2}	0.79×10^{-2}

Tableau 2: Variances des paramètres
(10% de bruit)

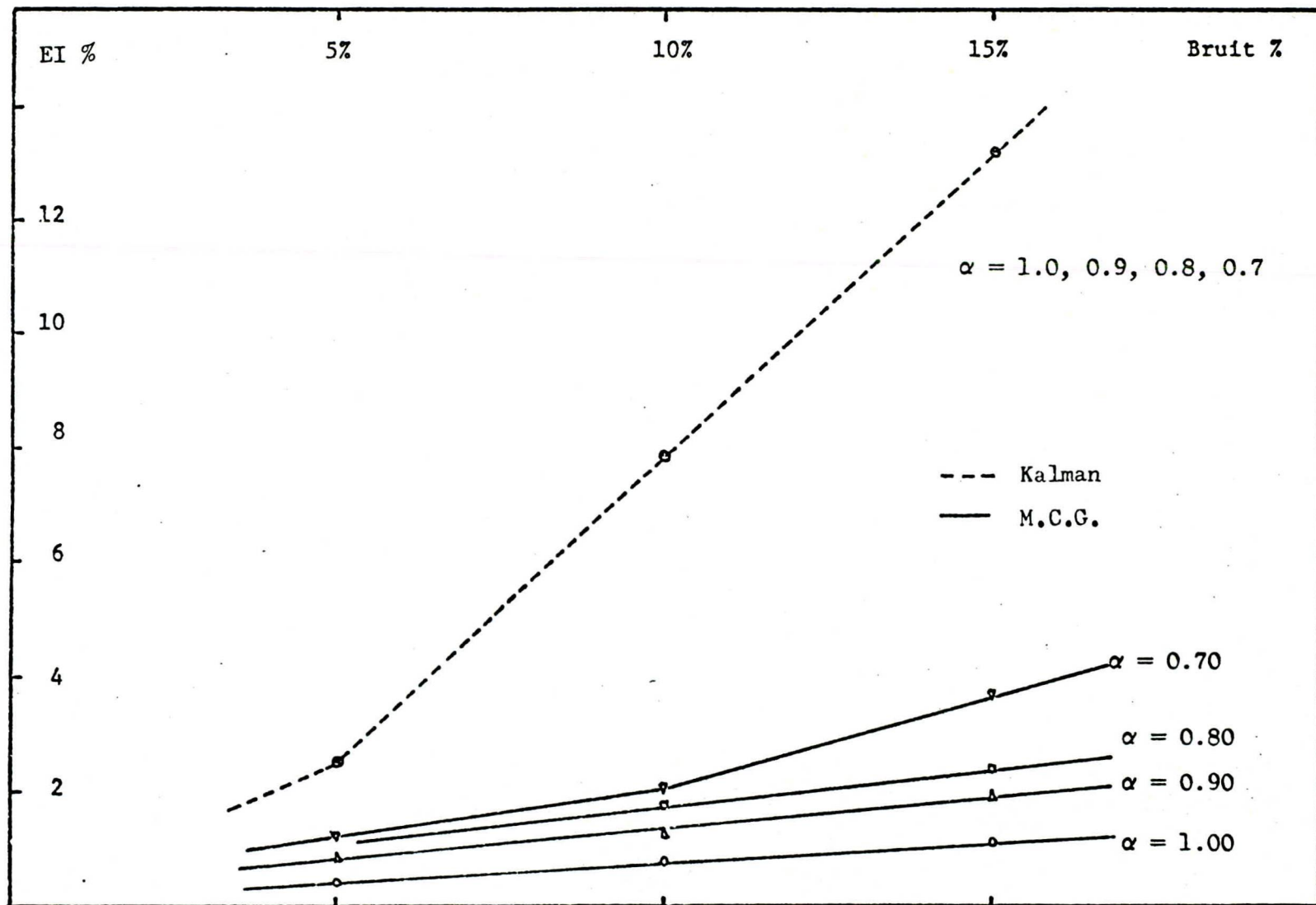


Fig. 1: Influence de α sur les moyennes des modèles.

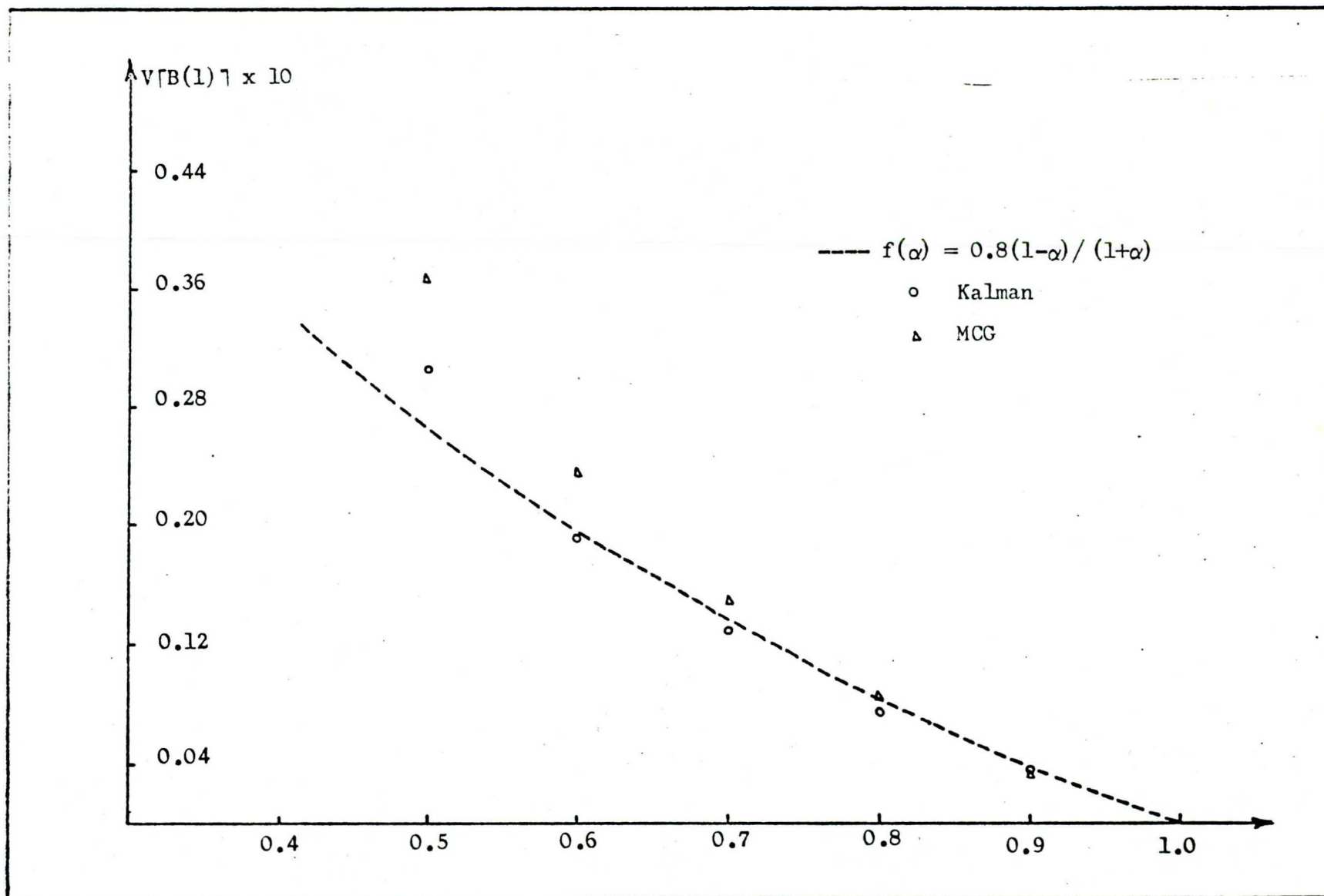


Fig. 2: Variance du paramètre $B(1)$ versus α
(Kalman et MCG)

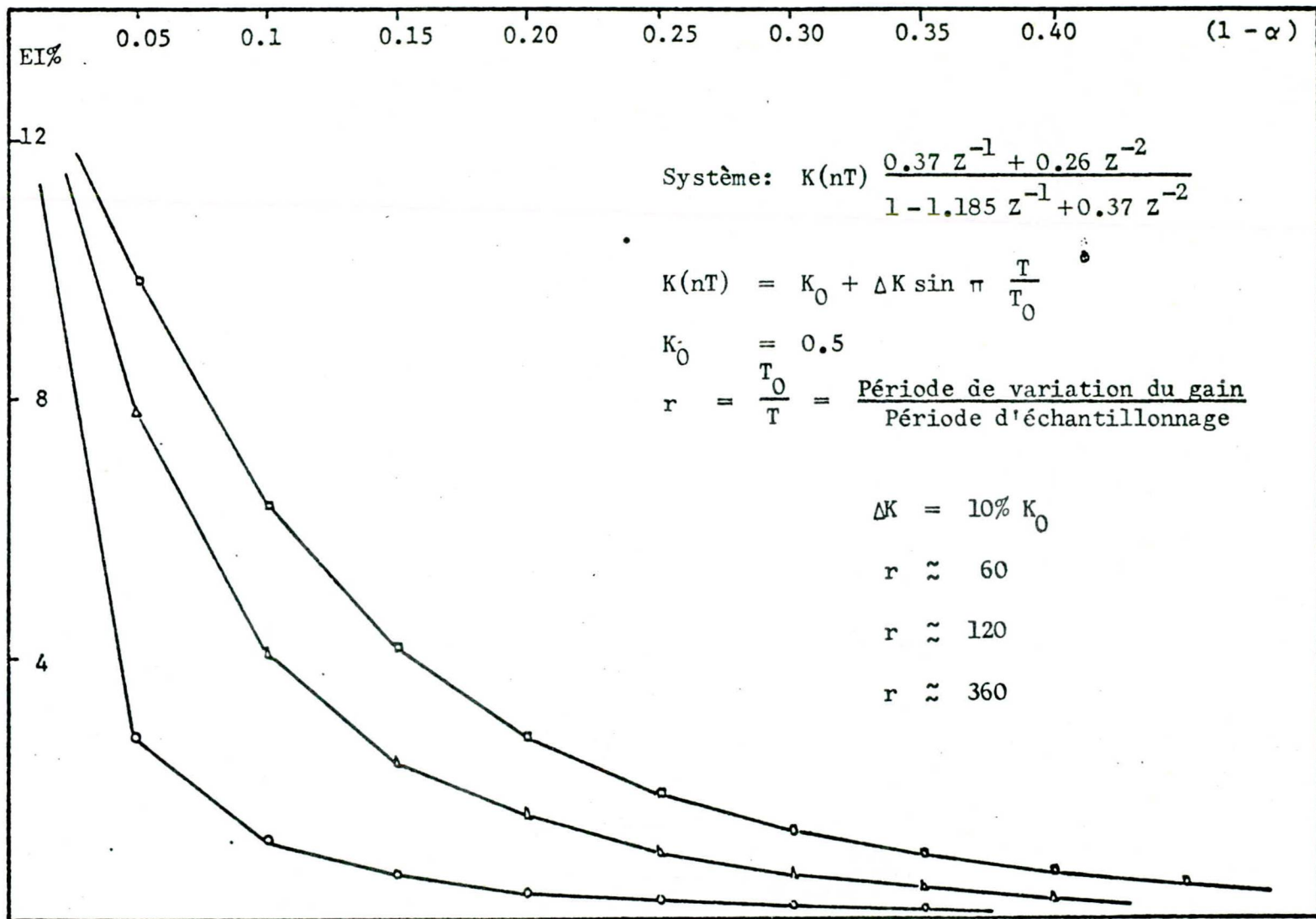


Fig. 3: Identification en absence du bruit de mesure
(Kalman et M.C.G.)

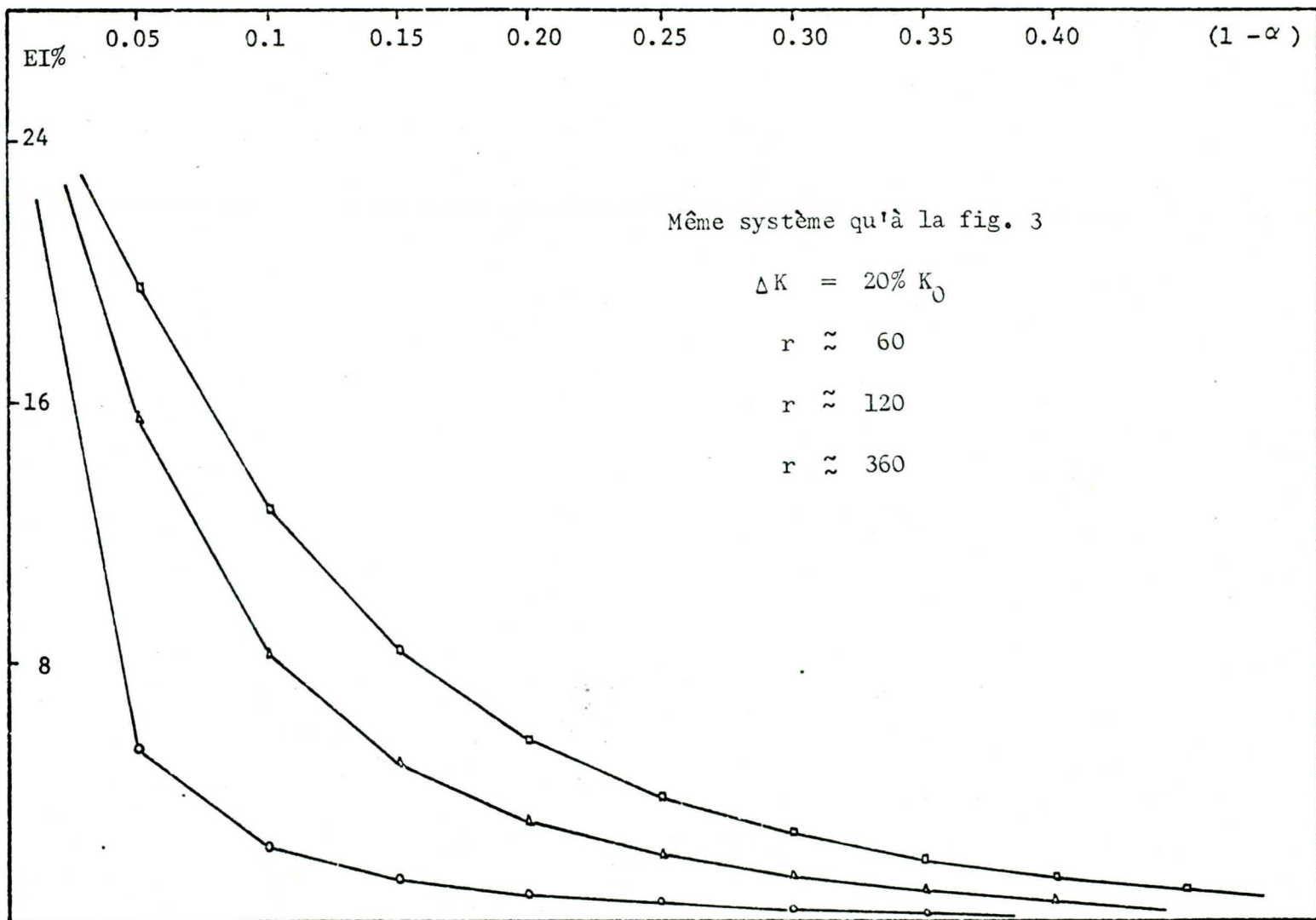


Fig. 4: Identification en absence du bruit de mesure
(Kalman et MCG)

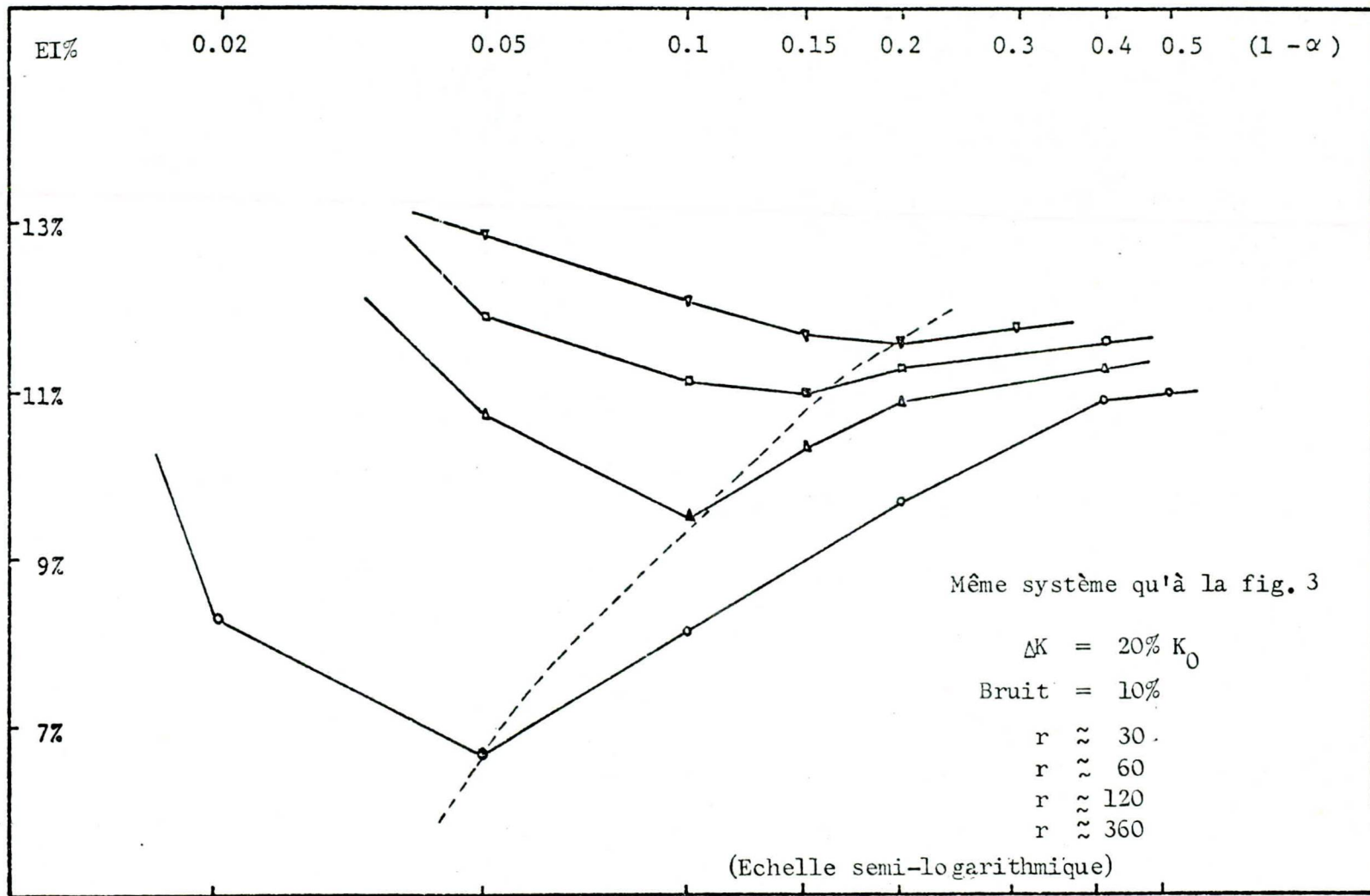


Fig. 5: Identification en présence des bruits de mesure
 (Méthode des MCG)

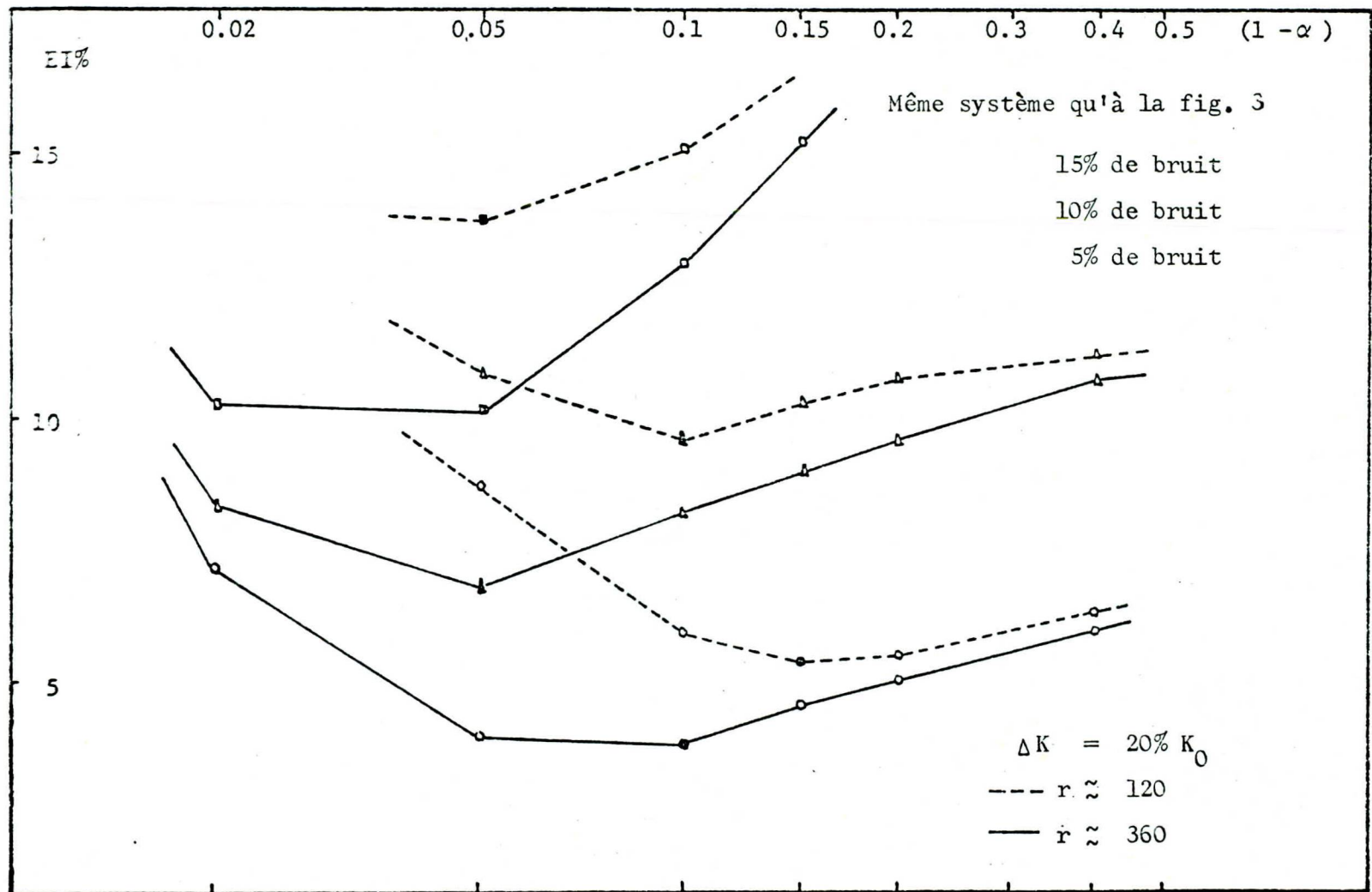


Fig. 6: Identification en présence des bruits de mesure
(Méthode des MCG)

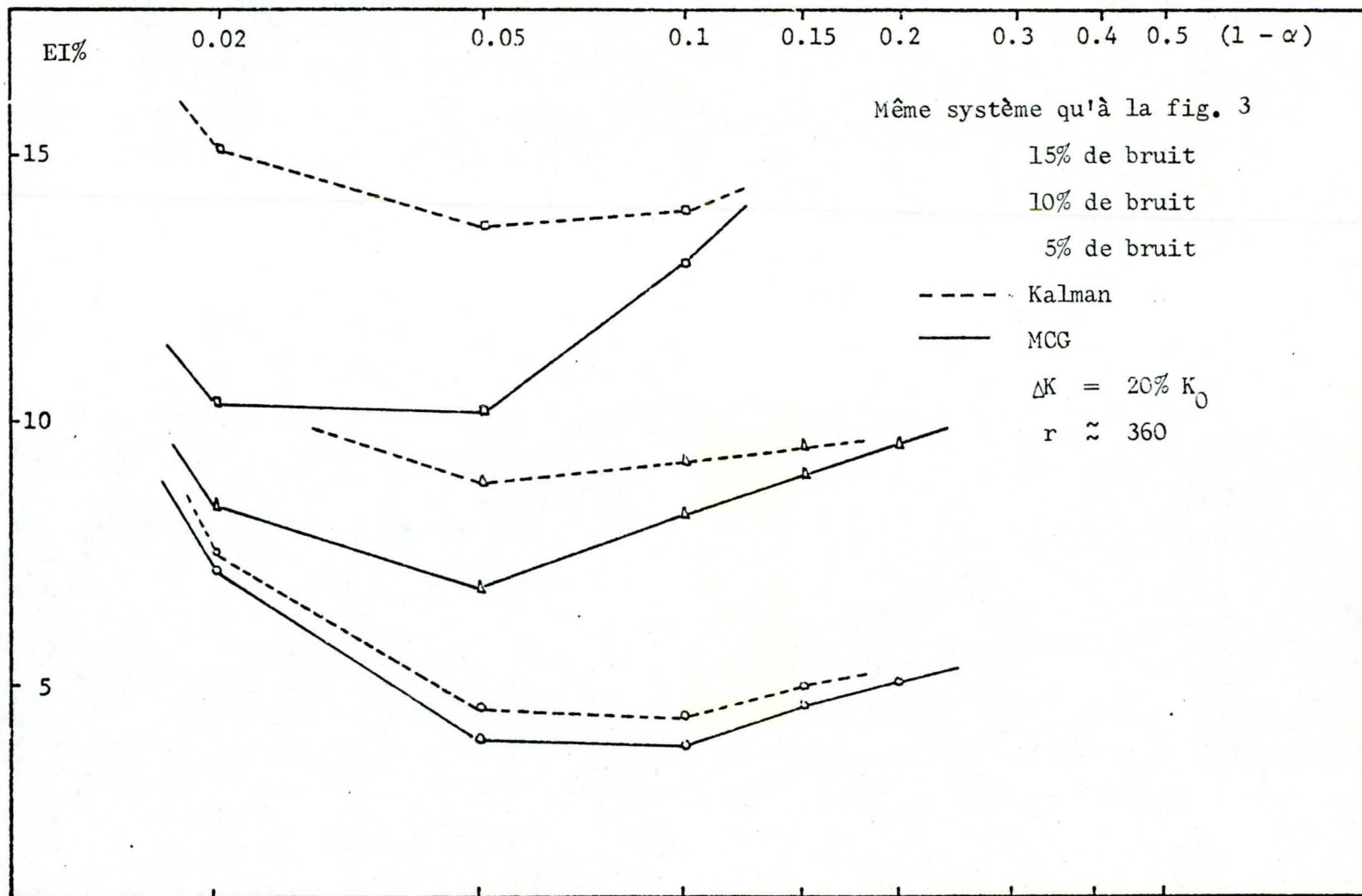


Fig. 7: Comparaison avec la méthode de Kalman

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288686 7