

Titre: Méthodes de capture de chocs instationnaires et leur
Title: implémentation pour la méthode des éléments finis

Auteur: Mathilde Bonnichon
Author:

Date: 2021

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Bonnichon, M. (2021). Méthodes de capture de chocs instationnaires et leur
Citation: implémentation pour la méthode des éléments finis [Mémoire de maîtrise,
Polytechnique Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/9157/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/9157/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Stéphane Étienne, & Dominique Pelletier
Advisors:

Programme: Génie aérospatial
Program:

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

**Méthodes de capture de chocs instationnaires et leur implémentation pour la
méthode des éléments finis**

MATHILDE BONNICHON

Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie aérospatial

Août 2021

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

**Méthodes de capture de chocs instationnaires et leur implémentation pour la
méthode des éléments finis**

présenté par **Mathilde BONNICHON**

en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Jérôme VÉTEL, président

Stéphane ÉTIENNE, membre et directeur de recherche

Dominique PELLETTIER, membre et codirecteur de recherche

Cédric BÉGUIN, membre

DÉDICACE

À mon Grand Papa

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d’abord à remercier mes directeurs, Stéphane Étienne et Dominique Pelletier, de m’avoir confié ce projet passionnant et formateur. Merci à vous ainsi qu’à Cédric Béguin pour votre accompagnement constant malgré la distance. Je ne serais pas allée bien loin sans vos conseils et encouragements. Merci à Jérôme Vétel d’avoir accepté de présider ce jury. Et merci à tous d’avoir assisté à ma soutenance en présentiel, il était tellement plus agréable de présenter mon travail ainsi. Il n’y aurait pas eu de meilleure façon de conclure cette maîtrise. Merci au CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada) et au programme de Génie par la Simulation (GPS) pour leur soutien financier. Merci aussi pour les séries de conférences techniques du GPS. Elles m’ont rappelé à quel point je suis impressionnée par les défis que l’on peut relever avec les simulations numériques et me donnent envie de poursuivre dans cette voie.

J’ai une pensée particulière pour mes collègues du laboratoire. Merci à Florian, Anthony, Stefan et Jean. J’ai apprécié apprendre à vos côtés et échanger avec vous. Merci également à Étienne et Yohann pour leur aide précieuse dans l’apprentissage de CADYF.

Merci à ma famille de m’avoir soutenue, d’avoir partagé mes joies (et mes difficultés) malgré la distance. Merci à Bohémond pour son affection, sa patience et tout le courage qu’il m’a donné. Merci également à ma famille de Montréal, mes colocos Yoann, Gaetan et Yahya. Nous avons passé beaucoup de temps ensemble avec le confinement, sans vos conseils, nos discussions et soirées jeux ou séries je serais (peut-être) devenue folle. Merci aussi à mes compagnons de donjons. Bien qu’enfermée chez moi, j’ai exploré de nouveaux mondes en jouant avec vous.

Finalement, merci à tous mes amis de Montréal, nous nous sommes fait plein de beaux souvenirs ensemble, et j’espère que je pourrai venir vous revoir souvent. Merci à mes amis de France, qui ont su prendre de mes nouvelles quand j’oubliais de le faire, et se sont rendus disponibles les quelques fois où je suis passée dans le pays. Merci particulièrement à Maxence, nos discussions quotidiennes illuminent mes journées.

RÉSUMÉ

Ce mémoire s'intéresse à la stabilisation des écoulements pouvant présenter des discontinuités et des chocs, notamment les écoulements compressibles. La simulation des équations de Navier-Stokes avec la méthode des éléments finis peut présenter des instabilités, c'est pourquoi de nombreux schémas de stabilisation ont vu le jour, comme SUPG (Streamline-Upwind Petrov Galerkin). En présence de chocs, des oscillations supplémentaires apparaissent, il est nécessaire de mettre en place de la capture de choc pour les atténuer.

Nous utilisons une formulation unifiée des équations de Navier-Stokes, en variables primitives. De cette façon, les équations sont définies pour les écoulements compressibles comme incompressibles, ce qui nous permet de chercher à implémenter une capture de choc universelle, qui fonctionne pour tout type d'écoulements laminaires.

Après avoir adapté de la littérature deux opérateurs de capture de choc s'ajoutant à SUPG, nous avons évalué leurs performances sur deux cas tests : un cas de convection-diffusion et un tube à choc. Chacune des deux méthodes apporte une amélioration des résultats, bien qu'elle s'accompagne de difficultés de convergence lors de la résolution du système d'équations. De plus, les méthodes ne sont efficaces que pour un cas test donné chacune, et non les deux. Les sources de la plupart des difficultés rencontrées ont été identifiées. Ainsi des suggestions pour l'amélioration de la précision des méthodes et pour une meilleure universalisation ont pu être proposées.

ABSTRACT

This work is devoted to the stabilization of flows that may present discontinuities and shocks, in particular compressible flows. The simulation of the Navier-Stokes equations with the finite element method can present instabilities. To prevent that, many stabilization schemes have been developed, such as SUPG (Streamline-Upwind Petrov Galerkin). When shocks are involved, additional oscillations appear, we need to add shock capture to dampen them.

We use a unified formulation of the Navier-Stokes equations, in primitive variables. This way, the equations are defined for both compressible and incompressible flows, which allows us to try to implement a universal shock capture, which will work for all types of laminar flows.

After adapting from the literature two shock capture methods in combination with SUPG, we have evaluated their performances on two test cases: a convection-diffusion case and a shock tube. Each of the two methods brings an improvement of the results, although they are affected by convergence difficulties when solving the system of equations. Moreover, the methods are only effective for one given test case each, not both. The sources of most of the difficulties encountered have been identified. Thus, suggestions for improving the accuracy of the methods and for a better generalization have been proposed.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vi
TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
LISTE DES FIGURES	xi
LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET VARIABLES	xiv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Contexte	1
1.2 Problématique	2
1.3 Plan du mémoire	2
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	3
2.1 Différentes méthodes de stabilisation pour la méthode des éléments finis	3
2.1.1 Méthode upwind	5
2.1.2 Structure générale des méthodes de stabilisation	5
2.1.3 SUPG et PSPG	5
2.1.4 GLS	8
2.1.5 SGS et VMS	8
2.2 Stabiliser les chocs	8
2.2.1 Capture de choc : viscosité artificielle couplée à une méthode de stabilisation	9
2.2.2 Capteur de discontinuité pour les éléments d'ordre élevé	9
2.2.3 Suivi d'interface et autres méthodes de capture	10
2.3 Capture de choc ajoutée à une méthode de stabilisation	10
2.3.1 Différentes variables	10
2.3.2 Différents problèmes à résoudre et méthodes unifiées	11

2.3.3	Direction de la viscosité	12
CHAPITRE 3	LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS DANS CADYF	13
3.1	Les équations résolues	13
3.1.1	Conservation de la masse	13
3.1.2	Conservation de la quantité de mouvement	14
3.1.3	Conservation de l'énergie	14
3.1.4	Système d'équations de Navier-Stokes compressibles	14
3.1.5	Échelles de pression et température	14
3.1.6	Équations finales	16
3.2	Éléments finis	16
3.2.1	Forme faible	17
3.2.2	Discrétisation du problème	17
3.3	Autres aspects numériques de résolution	19
3.3.1	Résolution numérique des équations	19
3.3.2	Gestion du temps : schéma BDF	20
3.3.3	Adaptation	20
CHAPITRE 4	DIFFÉRENTS CAS TESTS ÉTUDIÉS	22
4.1	Équation de convection-diffusion de la température	22
4.1.1	Équations traitées	22
4.1.2	Géométrie et conditions aux limites	23
4.1.3	Adoucissement de la discontinuité de la condition aux limites en température	24
4.1.4	Résultat théorique sans diffusion	24
4.2	Tube à choc	25
4.2.1	Tube à choc : Étude théorique non visqueuse	26
4.2.2	Simulation du tube à choc : choix pour l'implémentation avec CADYF	36
4.2.3	Détermination des meilleures conditions d'expérimentation numérique	39
CHAPITRE 5	MISE EN PLACE D'UNE MÉTHODE DE CAPTURE DE CHOC	55
5.1	Capture de choc de Codina	55
5.1.1	Développement théorique	55
5.1.2	Identification des problèmes de la méthode	58
5.1.3	Rappel des problèmes rencontrés avec la méthode de Codina	64
5.2	Tezduyar et Senga	65
5.2.1	Développement	65

5.2.2	Implémentation dans CADYF	69
5.2.3	Deuxième terme	70
CHAPITRE 6 RÉSULTATS		71
6.1	Codina	71
6.1.1	Diffusion de température	71
6.1.2	Tube à choc	78
6.2	Tezduyar et Senga	80
6.2.1	Diffusion de température	80
6.2.2	Tube à choc	80
6.2.3	Conclusion	84
CHAPITRE 7 CONCLUSION		88
7.1	Synthèse des travaux	88
7.2	Améliorations futures	89
7.2.1	Un terme universel pour les écoulements compressibles et incompressibles	89
7.2.2	Amélioration de la convergence des méthodes	90
7.2.3	Amélioration de la précision des résultats	90
RÉFÉRENCES		92

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Choix optimaux des paramètres numériques pour la simulation du tube à choc	51
Tableau 5.1	Ordres de grandeur des termes intervenant dans la capture de choc de Codina	63
Tableau 5.2	Erreur relative L2 et dépassement relatif pour le problème du tube à choc pour différentes expressions de $\tau_{ }$	64
Tableau 5.3	Variables intervenant dans la définition du terme de capture de choc de Tezduyar et Senga [1]	68
Tableau 5.4	Comparaison de l'expression des termes intervenants dans SUPG et la capture de choc de Tezduyar et Senga	69

LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Décomposition de la pression en une pression mécanique et une pression de référence	15
Figure 3.2	Placement des noeuds sur un élément de Taylor-Hood	18
Figure 4.1	Ensemble des conditions aux limites imposées pour le cas de convection-diffusion de la température	23
Figure 4.2	Imposition linéaire de la condition discontinue en température sur un intervalle de largeur h	24
Figure 4.3	Résultats théoriques du problème de convection de température . . .	25
Figure 4.4	Solution obtenue avec CADYF pour l'équation de convection-diffusion de la température (maillage grossier de 55 éléments triangulaires) . .	26
Figure 4.5	Tube à l'instant initial (adapté d'Anderson [2])	27
Figure 4.6	Tube après la rupture du diaphragme (adapté d'Anderson [2])	28
Figure 4.7	Propriétés dans le tube à choc, pour un ratio initial de pression de 4 .	35
Figure 4.8	Trajectoire de deux particules et des zones caractéristiques dans le tube à choc pour un ratio de pression de 4	36
Figure 4.9	Propriétés dans le tube, pour un ratio initial de pression de 100 . . .	37
Figure 4.10	Trajectoire de deux particules et des zones caractéristiques dans le tube à choc pour un ratio de pression de 100	38
Figure 4.11	Représentation du tube avec CADYF	38
Figure 4.12	Conditions initiales (bleu) et conditions aux limites (noir) telles qu'imposées avec CADYF	39
Figure 4.13	Résultats théoriques attendus pour le tube à choc simulé avec CADYF (vitesse, pression, température et masse volumique à différents temps)	40
Figure 4.14	Évolution spatiale des propriétés dans le tube à choc, pour un maillage de 1×1000 éléments et une viscosité de 10^{-3} Pa.s	41
Figure 4.15	Détermination du dépassement maximal	42
Figure 4.16	Moyenne des erreurs relatives sur la vitesse pour différents maillages et une viscosité de 0.1 Pa.s	44
Figure 4.17	Vitesse dans le tube à choc pour un maillage de 1×1000 éléments à $t = 7 \cdot 10^{-4}$ s	45
Figure 4.18	Moyennes des erreurs relatives et dépassements de la solution sur la vitesse pour différentes viscosités et un maillage de 1×1000 éléments .	46
Figure 4.19	Erreurs sur la vitesse pour différentes viscosités et différents maillages	47

Figure 4.20	Dépassements relatifs sur la vitesse pour différentes viscosités et différents maillages	48
Figure 4.21	Évolution de l'erreur en vitesse pour différents maillages et $\mu = 10^{-10}$ Pa.s	49
Figure 4.22	Évolution de l'erreur en vitesse pour différents pas de temps	50
Figure 4.23	Évolution des dépassements de la vitesse pour différents pas de temps	51
Figure 4.24	Maillage 1 de départ pour le cas du tube à choc avec adaptation . . .	52
Figure 4.25	Maillage 2 de départ pour le cas du tube à choc avec adaptation . . .	52
Figure 4.26	Maillage 3 de départ pour le cas du tube à choc avec adaptation . . .	53
Figure 4.27	Variation de la masse volumique avec et sans adaptation dans le tube à choc à $t = 7.10^{-4}$ s	53
Figure 4.28	Évolution de l'erreur relative pour différentes propriétés dans un tube à choc ($\mu = 10^{-2}$ Pa.s) et différents maillages de départ	54
Figure 5.1	Comparaison de la fonction de Heaviside et son approximation continue (pour k=10)	60
Figure 5.2	Comparaison du calcul de $\tau_{ }$ et son approximation continue (pour k=10)	61
Figure 5.3	Norme de $\vec{u}_{ }$ pour $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, vue 1	62
Figure 5.4	Norme de $\vec{u}_{ }$ pour $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, vue 2	63
Figure 6.1	Définition de la largeur d'un choc δx	72
Figure 6.2	Nombre de noeuds par cycle d'adaptation pour différentes méthodes de stabilisation (maillage de départ de 5x5 éléments)	74
Figure 6.3	Erreur absolue par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation	75
Figure 6.4	Erreur relative par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation	76
Figure 6.5	Largeur de la discontinuité du cas de diffusion de température par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation	77
	Sans relaxation du maillage	78
	Avec relaxation du maillage	78
Figure 6.7	Maillage au cinquième cycle d'adaptation pour la diffusion de température stabilisé avec SUPG-Codina	78
Figure 6.8	Nombre de noeuds par cycle d'adaptation, avec et sans post traitement (relaxation du maillage)	79
Figure 6.9	Erreur absolue par cycle d'adaptation pour différentes méthodes de stabilisation avec et sans post traitement (relaxation du maillage) . .	80

Figure 6.10	Erreur absolue par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation avec et sans post traitement (relaxation du maillage) . . .	81
Figure 6.11	Erreur relative moyenne dans le tube à choc pour différentes méthodes de stabilisation	82
Figure 6.12	Dépassement relatif moyen dans le tube à choc pour différentes méthodes de stabilisation	83
Figure 6.13	Évolution du temps atteint avec la méthode de Tezduyar et Senga en fonction du nombre de pas de temps attendu	84
Figure 6.14	Évolution de la vitesse dans le tube à choc, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation à $t = 3.10^{-4}$ s	85
Figure 6.15	Évolution de la vitesse dans le tube à choc avant l'onde de détente, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation	85
Figure 6.16	Évolution de la vitesse dans le tube à choc (zoom) pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation	86
Figure 6.17	Évolution de la moyenne de l'erreur de la vitesse dans le tube à choc, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation	86
Figure 6.18	Évolution de la moyenne des dépassements relatifs de la vitesse dans le tube à choc, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation	87

LISTE DES SIGLES, ABRÉVIATIONS ET VARIABLES

BDF	Backward Differentiation Formula
CADYF	Computer Analysis of the DYnamics of Fluids ou Calcul et Analyse en DYnamique des Fluides
GLS	Galerkin least-squares
PSPG	Pressure-Stabilizing/Petrov–Galerkin
SGS	Subgrid Scale
SUPG	Streamline Upwind Petrov Galerkin
VMS	Variational Multiscale
a	Vitesse du son (m/s)
c_p	Capacité thermique massique à pression constante (J/(K.kg))
c_v	Capacité thermique massique à volume constant (J/(K.kg))
e	Énergie interne (J)
f ou \vec{f}	Forces volumiques (N/m ³)
I	Identité
h	Taille de la zone pour l’adoucissement de la discontinuité ou enthalpie (J)
h	Indice qui indique qu’une variable est propre à un élément
h^e	Taille de l’élément (m ou ua)
\mathcal{L}	Opérateur de moindre carré
M	Nombre de Mach
N_a	Fonction d’interpolation au noeud a
P	Opérateur de stabilisation
Pe	Nombre de Péclet
p	Pression (Pa)
p_{abs}	Pression absolue (Pa)
p_{mec}	Pression mécanique (Pa)
p_{ref}	Pression de référence (Pa)
q_s	Source thermique de chaleur
R	Constante thermodynamique du gaz ($R = 287$ J/(kg.K) pour de l’air) ou résidu d’une équation
T	Température (K)
t	Temps (s)

T_{abs}	Température absolue (K)
T_{mec}	Température mécanique (K)
T_{ref}	Température de référence (K)
u	Vitesse du fluide suivant x (m/s)
u_p	Vitesse du gaz entrainé dans le tube à choc (m/s)
\vec{u}	Vitesse du fluide (m/s)
$\vec{u}_{ }$	Vitesse du fluide projetée sur le gradient de la variable transportée (m/s)
v	Vitesse du fluide suivant y (m/s)
W	Vitesse du choc dans le tube à choc (m/s)
W_h	Fonction test
α	Coefficient de compressibilité isotherme (1/Pa)
α_{ref}	Coefficient de compressibilité isotherme de référence (1/Pa)
β	Coefficient de dilatation isobare de référence (1/K)
β_{ref}	Coefficient de dilatation isobare (1/K)
Γ	Frontière du domaine de définition d'un problème
γ	Indice adiabatique : $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
Δt	Pas de temps (s)
ζ_h	Terme de stabilisation SUPG sur un élément
κ	Diffusivité thermique (m ² /s)
λ	Conductivité thermique (W/(m.K))
μ	Viscosité dynamique (Pa.s)
ρ	Masse volumique (kg/m ³)
τ	Temps intrinsèque : matrice de paramètres de stabilisation
ϕ	Variable physique quelconque ou dissipation visqueuse
Ω	Domaine de définition d'un problème
Ω_e	Domaine de définition d'un élément

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte

La plupart des fluides sont considérés comme incompressibles. Cependant, dans de nombreuses situations, la compressibilité d'un fluide ne peut être négligée. L'application la plus connue est l'aérodynamique externe d'un avion supersonique. Les effets de la compressibilité se fait aussi ressentir dans les réacteurs, où des fortes températures et de fortes vitesses sont en jeu. La compressibilité est aussi à prendre en compte à faible nombre de Mach, notamment quand la température est élevée et que l'on ne peut plus se contenter de l'approximation de Boussinesq. C'est le cas de la vapeur chauffée dans des chaudières industrielles, ou encore de problèmes de jet chaud impactant. Certaines pipelines de gaz, un objet entrant à grande vitesse dans l'atmosphère ou la propagation du son dans un milieu sont également des situations où la compressibilité doit être prise en compte. Si la compressibilité se fait principalement sentir dans les gaz, des conditions de pression ou température extrêmes peuvent amener à devoir considérer certains liquides comme compressibles. Les écoulements diphasiques, par exemple entre un gaz compressible et un fluide incompressible ou faiblement compressible sont des défis de taille, dans lesquels la précision est cruciale. Un exemple particulièrement parlant est celui du transport de gaz naturel liquéfié par bateau. Le gaz dans les cuves, quand il est ballotté par les vagues, frappe la paroi de la cuve violemment, emprisonnant des bulles d'air au passage. Ce mouvement conduit à l'endommagement des cuves, et il est important de bien prévoir la fatigue occasionnée, car une rupture aurait des conséquences dévastatrices sur la santé et l'environnement [3, 4]. Dans le cadre de cette étude, la compressibilité des poches d'air emprisonnées dans le gaz naturel doit être prise en compte.

Dans un fluide compressible, de brusques variations des propriétés peuvent survenir, lors d'un choc notamment. Il est particulièrement important de bien rendre compte de ces chocs, et c'est un véritable défi pour les simulations numériques. Les chocs sont une source de perte de précision, il faut s'assurer de conserver les propriétés physiques telles que la conservation de la masse à travers le choc, les éléments se comportent mal en présence de forts gradients, et nous pouvons assister à la présence d'oscillations numériques autour de la véritable solution. Il faut noter que de telles difficultés numériques peuvent avoir lieu dans des écoulements incompressibles, lorsque la convection est très importante. Nous nous trouvons alors en présence de forts gradients et de discontinuités qui, s'ils ne sont pas des chocs, sont tout aussi difficiles à capturer numériquement.

1.2 Problématique

Des schémas de stabilisation numérique existent déjà dans le code d'élément finis que nous utilisons au laboratoire; CADYF (*Computer Analysis of the DYnamics of Fluids* ou Calcul et Analyse en DYnamique des Fluides). Cependant, ils ne sont pas particulièrement adaptés aux chocs et forts gradients, autour desquels il faut ajouter une stabilisation supplémentaire. Nous cherchons à mettre en place des méthodes de capture de choc, adaptées pour tout type d'écoulements laminaires; compressibles comme incompressibles, transitoires ou stationnaires.

Nous comparons les méthodes pour mieux comprendre leurs forces et faiblesses, et regardons si l'adaptation du maillage couplée à l'utilisation de ces méthodes permet de mieux compenser la perte de précision au niveau des discontinuités.

1.3 Plan du mémoire

Le présent mémoire rend compte des réflexions et développements menés afin de représenter numériquement les discontinuités dans des écoulements le mieux possible.

Après une revue de littérature sur la stabilisation et la capture de choc (chapitre 2), nous présenterons les équations résolues et les méthodes numériques utilisées dans CADYF (chapitre 3). Le chapitre 4 introduit les cas tests qui seront utilisés au long de ce mémoire pour évaluer les performances des méthodes implémentées : un cas de convection-diffusion et un tube à choc. Le développement théorique des deux méthodes retenues est fait chapitre 5, et les résultats qui en découlent sont commentés dans le chapitre 6. Finalement, la conclusion, chapitre 7, synthétise les travaux effectués et donne des pistes d'amélioration qu'il serait intéressant de poursuivre.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

En divisant un domaine en morceaux que l'on sait traiter, il est possible de résoudre des problèmes plus complexes. C'est ainsi que les décimales de π ont pu être approximées en approchant un cercle par un polygone. La méthode des éléments finis a commencé à être formalisée dans les années 1960, et continue d'être développée aujourd'hui. Elle nous permet, entre autre, de résoudre sur un maillage les équations de la mécanique des fluides [5]. Cependant, dans certains cas, cette méthode n'est pas suffisante car elle présente des instabilités numériques. Ces instabilités, qui prennent principalement la forme d'oscillations autour de la valeur attendue doivent être corrigées. En présence de forts gradients, comme il peut y en avoir lors de chocs dans des écoulements compressibles ou dans des problèmes de convection, les oscillations sont amplifiées, et le gradient est mal représenté. Nous présentons ici différentes méthodes de stabilisation et de capture de choc, puis nous nous concentrerons plus particulièrement sur les méthodes à viscosité artificielle qui s'ajoutent à une méthode de stabilisation.

2.1 Différentes méthodes de stabilisation pour la méthode des éléments finis

Précédemment, nous avons mentionné la présence possible d'oscillations dans la solution numérique. Ce phénomène, purement numérique, vient d'une instabilité locale, qui est ensuite diffusée à travers le maillage (et le temps s'il y a lieu). Les origines de l'instabilité locale peuvent provenir d'une condition initiale qui impose un fort gradient et crée donc une couche limite virtuelle, d'une condition initiale dépendant de l'espace qui ne peut pas être résolue initialement sur le maillage, ou encore d'un faible terme de diffusion proche d'un terme source ou d'une condition de Dirichlet non constants [6]. On ne peut pas réellement parler de phénomène de Gibbs. Le phénomène de Gibbs se caractérise par l'apparition d'oscillations lors de l'approximation en série de Fourier d'une fonction discontinue. Plus l'approximation est de qualité, plus il y aura d'harmoniques (fréquences d'oscillation) différentes, mais de plus faible amplitude (l'amplitude maximale reste bornée). Dans les cas que nous traitons, comme des écoulements compressibles ou des équations de convection-diffusion, les oscillations qui apparaissent sont purement numériques. Zienkiewicz et al. [7] montrent que sans stabilisation, des oscillations seront observables dès que la convection est plus importante que la diffusion, soit :

$$|Pe| > 1 \tag{2.1}$$

Pe est le nombre de Péclet, qui représente le rapport des effets de convection sur les effets de diffusion :

$$Pe = \frac{uh^e}{2\kappa} \quad (2.2)$$

avec u la vitesse, h^e la taille de l'élément, et κ le coefficient de diffusion.

Pour retarder le moment où ces phénomènes apparaissent, ou le supprimer, il faut décaler le schéma numérique, ou rajouter de la diffusion. Zienkiewicz et al. [7] montrent que décentrer le schéma de résolution des équations peut être interprété comme le schéma original auquel on aurait ajouté un terme de viscosité artificielle. La viscosité artificielle peut être ajoutée de deux façon différentes [6]. Elle peut l'être directement dans les équations, mais dans ce cas ce ne sont plus les mêmes équations qui sont résolues. Ces méthodes, dites *non consistent* en anglais, ou non conservatives en français, sont rapides mais ne conservent pas la physique du problème. L'autre façon est d'ajouter de la viscosité (ou de faire un décalage du schéma numérique) élément par élément, et de doser cet ajout en fonction du besoin. Puisque la précision est plus importante pour nous que des résultats rapides, nous nous intéresserons uniquement à ce type de méthodes, dites *consistent* en anglais (ou conservatives).

Nous allons présenter quelques techniques de stabilisation courantes. Ces méthodes peuvent être appliquées à tout type de problèmes. Nous verrons plus tard qu'en présence de forts gradients, il y a plus d'oscillations, et nous pouvons ajouter des méthodes supplémentaires pour ces oscillations additionnelles. Il est important de noter deux points. Tout d'abord, les méthodes sont empiriques. À partir de concepts mathématiques ou physiques, elles vont chercher à borner la solution et donc ces oscillations, ou à ajouter une viscosité qui ait un sens. Ensuite, une méthode peut être déclinée de plein de façons différentes. Une amélioration peut lui être ajoutée, pour mieux satisfaire un type de problème bien particulier, et n'apparaîtra pas dans la même méthode pour un autre type de problème. Ces deux points font que pour une seule méthode, il existe presque autant de versions que d'utilisateurs. Nous présenterons donc ici l'esprit des méthodes plutôt qu'une version précise.

Les principales techniques sont présentées en 1D par Zienkiewicz et al. [7], et pour l'équation de convection diffusion par Codina [8].

On retrouve principalement : l'upwind simple, SUPG (Streamline-upwind/Galerkin method) et sa version qui stabilise également la pression, PSPG (Pressure-Stabilizing/Petrov–Galerkin), GLS (Galerkin least-squares) et SGS (Subgrid Scale), qui est proche de VMS (Variational Multiscale).

2.1.1 Méthode upwind

La méthode upwind est la solution la plus simple. Il s'agit de décentrer le schéma numérique en amont. Ce décentrage peut être fait par une modification des fonctions de poids, comme proposé par Christie et al. [9]. L'influence du décalage du schéma, s'il est injecté dans les équations, peut être interprété comme l'ajout d'une viscosité supplémentaire dans l'équation initiale [7]. D'autres auteurs, comme Rice et Schnipke [10] ont alors développé une méthode d'upwind en réfléchissant directement de ce point de vue.

2.1.2 Structure générale des méthodes de stabilisation

Dans son article, Codina [8] donne une forme générale pour résumer les méthodes SUPG, GLS et SGS. Il présente aussi d'autres méthodes que nous ne traiterons pas ici. Toutes ces méthodes se caractérisent par l'ajout à la forme faible de nos équations d'un terme de la forme :

$$\text{Stabilisation} = \sum_{\text{Nb \acute{e}lem}} \int_{\Omega_e} P(W_h) \tau R(\phi_h) dV \quad (2.3)$$

avec P un opérateur qui dépend des fonctions test W_h , et qui sera propre à chaque méthode. Ω_e est le volume d'un élément et dV la différentielle de ce volume. τ est le temps intrinsèque, c'est une matrice de paramètres algorithmiques. R est le résidu des équations. Lorsque l'on résout une équation $A(\phi) = 0$, avec A un opérateur et ϕ une variable, l'équation est discrétisée sur un domaine et devient donc $A'(\phi_h)$, avec A' la discrétisation de A , et ϕ_h l'approximation de ϕ sur un élément. L'approximation ne satisfait pas parfaitement les équations, et le résidu est défini comme $A'(\phi_h) = R \neq 0$. P est ce qui caractérise la méthode, il peut y avoir des variations mineures, mais ce sont surtout les différentes versions empiriques de τ au sein d'une même méthode qui font la grande diversité des méthodes de stabilisation.

Plus le résidu est grand, plus le résultat numérique est éloigné de la solution réelle. Des méthodes pondérées par le résidu permettent donc d'ajouter de la viscosité artificielle uniquement là où elle est nécessaire.

Nous allons maintenant donner des détails sur les différentes méthodes introduites plus haut.

2.1.3 SUPG et PSPG

Généralités

Pour SUPG, le terme P est de la forme [8, 11, 12] :

$$P(W_h) = \vec{u} \cdot \nabla W_h \quad (2.4)$$

avec \vec{u} la vitesse de convection. De cette façon, le terme de stabilisation dépend de l'importance du terme de convection. Ce qui va changer dans les différentes versions de SUPG, ce sont les valeurs du temps intrinsèque τ .

Pour les équations de convection-diffusion en 1D, il y a une variable physique et une direction de l'espace, donc un seul τ . Pour stabiliser localement, τ doit être différent élément par élément, sinon, la méthode ne conserverait pas la physique. Hughes et al. [11] différencient les cas pour lesquels la convection ou la diffusion dominant, et donnent une expression différente de τ pour chaque cas. Il dépend, entre autre, de h^e , la taille de l'élément, ce qui assure que le terme est local. Ce terme est assez simple, il est facile de déterminer la longueur d'un élément avec des éléments linéaires. En revanche, il requiert d'effectuer un test pour vérifier si c'est la convection ou la diffusion qui domine, ce qui peut être lourd. Plus récemment, Galeão et al. [13] proposent, toujours pour le même type d'équation, un terme unique. Il dépend aussi de h^e , et du nombre de Péclet, ce qui lui permet d'être différent selon que la convection ou la diffusion domine sans test numérique supplémentaire.

Quand il y a plus d'une variable physique, comme dans les équations de Navier-Stokes, ou plus d'une dimension dans l'espace, ou encore que l'on est en transitoire, l'expression de τ peut prendre encore plus de formes.

SUPG pour différents type de problèmes

La généralisation de ce terme pour les équations de convection-diffusion en plusieurs dimensions est faite, par exemple, par Hughes et al. [14], où τ devient une matrice de paramètres. En revanche, il peut s'avérer difficile de trouver une expression satisfaisante de h^e , la longueur caractéristique de l'élément, qui intervient dans τ . Son expression peut dépendre du type d'éléments, du type d'équations, de la direction de l'écoulement...

Les équations transitoires apportent une complexité supplémentaire, puisque le schéma temporel lui-même peut générer des instabilités qu'il faut aussi corriger. En général, le temps intrinsèque se décompose en deux termes : un pour stabiliser le temps, et un pour stabiliser les équations (convection-diffusion, Navier-Stokes, Euler,...). Certaines expressions peuvent convenir au transitoire comme au stationnaire, il suffit d'enlever le terme en Δt du transitoire en stationnaire.

Quand il y a plusieurs équations, le terme SUPG total sera différent pour chaque équation, puisque l'expression du résidu diffère. Cependant, les différences ne s'arrêtent pas là, et il est généralement privilégié d'avoir une expression de τ spécifique à chaque équation. En effet, pour des équations différentes, les sources d'instabilités sont différentes, c'est pourquoi des termes spécifiques sont plus efficaces qu'un terme global.

Autres paramètres à prendre en compte

En plus des considérations sur les équations résolues et la dimension du problème, d'autres paramètres peuvent amener à des versions différentes du temps intrinsèque.

La méthode utilisée dans CADYF est adaptée de celle de Tezduyar et Osawa [12]. Elle est faite pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Mais une version compressible a été développée par Tezduyar et Senga [1, 15]. Elle apporte un paramètre de stabilisation spécifique pour la température, qui va dépendre du gradient de la température et sera utilisé pour stabiliser l'équation de l'énergie.

En plus du type d'équation, le temps intrinsèque dépend du set de variables indépendantes utilisées pour décrire le problème. Le choix d'un set de variables est particulièrement important, surtout en présence de choc, et sera détaillé par la suite.

Finalement, bien que ce soit généralement négligé, l'ordre des éléments peut être pris en compte. Codina [16] propose une version adaptée aux éléments quadratiques. Les noeuds ont des coefficients différents dans le calcul du temps intrinsèque, en fonction de s'ils sont sur des arrêtes ou des sommets.

Il existe des versions pour la turbulence, mais cela sort du cadre de notre travail et ne sera pas abordé.

PSPG

Cette méthode fonctionne comme SUPG, mais elle s'applique à la stabilisation de la pression. Tezduyar la présente dans [17]. Elle fonctionne pour les écoulements incompressibles.

Résumé

Finalement, appliquer SUPG revient à ajouter le terme $\sum_{\text{Nb_elem}} \int_{\Omega^e} \vec{u} \cdot \nabla W_h \tau R(\phi_h)$ aux équations pour chaque élément. Le temps intrinsèque τ sera différent en fonction des problèmes traités. Ils ont été développés pour différents types d'équations, comme la convection-diffusion ou les équations de Navier-Stokes, compressibles ou incompressibles, stationnaires ou transitoires. Les versions développées pour un certain set de variables indépendantes sont difficilement transposables à d'autres. Bien que plus rares, des variations peuvent aussi être apportées en fonction du type d'élément utilisé.

Tout ces développements successifs pour convenir à une gamme de problèmes toujours plus grande, avec la meilleure précision possible sont mis en valeur dans les revues des travaux de Hughes et ses associés [18] qui résument 25 ans de développement dans le domaine.

2.1.4 GLS

La méthode Galerkin Least Square (GLS) est proche de la méthode SUPG. Cette fois-ci, l'opérateur P est de la forme :

$$P(W_h) = \mathcal{L}(W_h) \quad (2.5)$$

avec \mathcal{L} l'opérateur de moindre carré, qui est présent dans le calcul des fonctionnelles par exemple. Cet opérateur est celui qui applique l'équation que l'on cherche à résoudre, sans le terme source. Ainsi, pour une équation de la forme $\mathcal{A}(x) + f = 0$, avec \mathcal{A} un opérateur et f un terme source, nous aurons $\mathcal{L} = \mathcal{A}$. Ainsi, GLS prend en compte toute l'équation, contrairement à SUPG qui ne stabilise que la convection. Les deux méthodes coïncident donc pour des problèmes de convection (problèmes hyperboliques).

L'expression du facteur de stabilisation τ est elle aussi très variée, les mêmes facteurs que pour SUPG sont à prendre en compte. Une version de la méthode est proposée par Hughes et al. [19].

2.1.5 SGS et VMS

Ces deux méthodes vont s'appuyer sur la séparation des inconnues en deux échelles : celle qui est résolue par le maillage, et celle qui ne l'est pas. Par exemple, pour une inconnue u , elle pourra être réécrite : $u = \bar{u} + u'$, avec \bar{u} la partie résolue par le maillage, et u' la partie non résolue, dont l'approximation est l'enjeu des méthodes. Un lecteur intéressé pourra consulter les travaux de Codina [8] pour comparer SGS aux méthodes SUPG et GLS décrites précédemment. Une version plus récente adaptée aux équations de Navier-Stokes compressible est proposée par Rispoli et Saavedra [20]. Une revue de ces travaux avec cette méthode a aussi été faite par Codina [21].

2.2 Stabiliser les chocs

Les méthodes citées précédemment peuvent ne pas être suffisantes quand il y a de forts gradients dans le domaine. Les principales sources de forts gradients, en dehors des conditions aux limites, sont la convection, ou des chocs dans des écoulements compressibles. Ces forts gradients peuvent causer des oscillations de forte amplitude, et ne sont souvent pas bien représentés ; ils sont plus diffusés qu'ils ne devraient l'être. Nous présentons ici différentes techniques pour stabiliser les chocs.

2.2.1 Capture de choc : viscosité artificielle couplée à une méthode de stabilisation

La méthode la plus utilisée capture le choc indirectement, en ajoutant une viscosité artificielle à l'un des schémas de stabilisation présentés précédemment. Nous rappelons que les méthodes de stabilisation ajoutent une viscosité artificielle qui dépend du résidu. Pour capturer les gradients, il faut ajouter une viscosité artificielle qui dépende du gradient. De cette façon, il n'est pas nécessaire d'avoir une condition explicite pour le déclenchement de la capture de choc ; il faut choisir une définition de la viscosité qui ne se déclenche qu'en cas de fort gradient.

Tout comme pour la stabilisation, de nombreux choix peuvent être faits, pour rendre le choc plus précis, sans dépassements, et moins diffusif. En plus de dépendre des problèmes que l'on cherche à résoudre et d'être empirique, la viscosité artificielle va dépendre de la méthode de stabilisation avec laquelle elle est utilisée. Ces méthodes seront détaillées dans la partie suivante 2.3.

2.2.2 Capteur de discontinuité pour les éléments d'ordre élevé

Quand les éléments sont d'ordre plus élevés, il est possible d'essayer de détecter les forts gradients directement. Tonicello et al. [22] proposent une généralisation pour les équations de Navier-Stokes du travail de Persson et Peraire [23]. Cette méthode pour les éléments d'ordre élevé ajoute elle aussi une viscosité artificielle, mais cherche à détecter le choc pour n'appliquer la viscosité que localement. Une telle méthode peut aussi être couplée à un schéma de stabilisation, SGS dans le cas de Tonicello et al. Le capteur de discontinuité s'appuie sur l'ordre des polynômes servant à approximer la solution sur un élément. Si la solution est lisse, l'ordre des polynômes nécessaire pour l'approximer va décroître rapidement. À l'inverse, si la solution présente un choc ou des oscillations, il faudra des polynômes d'ordre plus élevé. À ce moment, l'opérateur repère qu'il est en présence d'un choc, et la viscosité artificielle est appliquée. La difficulté de cette méthode est que, comme les autres, elle introduit des paramètres numériques à déterminer. Lodato [24] propose de les déterminer à l'aide de solutions manufacturées. Cela implique que les paramètres sont propres à un problème donné, dont il faut préalablement avoir une bonne connaissance. Il ajoute aussi que de telles méthodes ne sont pas vraiment valables pour des éléments d'ordre inférieur à 4.

2.2.3 Suivi d'interface et autres méthodes de capture

Il est aussi possible de considérer la discontinuité qui se propage comme une déformation dans le fluide. Un choc par exemple, peut être défini comme une interface, et être suivi. Il peut également être capturé par des méthodes telles que la méthode du volume de fluide, la méthode des particules, la méthode *level-set* ainsi que la méthode phase-champ. Ces cinq méthodes sont décrites par Elgeti et Sauerland [25].

2.3 Capture de choc ajoutée à une méthode de stabilisation

La difficulté majeure de la capture de choc est qu'elle est très empirique, et qu'il y a plein d'outils construits pour un type de problème donné. Les codes n'étant pas tous construits pareil, nous n'avons pas forcément les mêmes données que les auteurs, ce qui occasionne des problèmes dans l'adaptation d'une méthode. De plus, la capture de choc est peu développée, elle fait généralement l'objet d'une sous partie d'un article sur la stabilisation.

Il est compliqué de développer un outil universel, qui convienne pour plusieurs types d'écoulements (stationnaires et transitoires, compressibles ou incompressibles). Hughes et al. [18] et Codina [21] résument des années de recherche. Voyons quels sont les critères à garder en tête pour tendre vers une formulation de la capture de choc qui puisse s'appliquer à différents types d'écoulement.

2.3.1 Différentes variables

La compressibilité ajoute une complexité à la stabilisation. Comme souligné précédemment, la méthode SUPG implémentée dans CADYF est dérivée de celle de Tezduyar et Osawa [12], et est faite pour l'incompressible. Elle stabilise donc principalement les discontinuités dues à la convection, et non les chocs. Elle reste utilisable, mais a été améliorée pour le compressible par Tezduyar et Senga [1, 15].

En plus d'un ajout pour mieux prendre en compte la compressibilité, il faut noter que les équations de Navier-Stokes compressibles peuvent s'exprimer avec plusieurs ensembles de variables dépendantes différentes. Il existe les variables primitives (\vec{u}, p, T) , les variables conservées $(\rho, \rho\vec{u}, \rho e$ avec e l'énergie interne) ou encore les variables entropiques. Les sets de variables indépendantes ont chacun leurs avantages, et le temps intrinsèque s'exprime différemment, en fonction des variables disponibles dans les équations ou le code pour l'évaluer. Les variables primitives sont efficaces à la limite incompressible car naturellement bien posées. Les variables conservées garantissent la conservation de la masse à travers un choc, et est donc avantageuse dans les écoulements supersoniques, susceptibles de présenter des chocs. Les va-

riables entropiques quant à elles, sont un changement de variable par rapport aux variables conservées, et présentent l'avantage de se ramener à un système d'équation symétrique. Elles ont été développées par Harten [26] et Hughes et al. [27], mais ont peu été utilisées. Pour le compressible, ce sont les variables conservées qui sont les plus répandues, il est difficile de trouver des articles en variables primitives, comme l'approche de Hauke [28] avec GLS.

2.3.2 Différents problèmes à résoudre et méthodes unifiées

Nous avons vu précédemment que les méthodes de stabilisation étaient très dépendantes du type de problème à résoudre. Par exemple, Bayona et al. [29] travaillent pour des ondes aéroacoustiques (compressible à faible Mach), Rispoli et Saavedra [20] ou Tezduyar et Senga [1, 15] travaillent avec des vitesses supersoniques. D'autres auteurs, comme Codina [30] ou Volker et Knobloch [31] travaillent avec les équations de convection-diffusion, donc des écoulements incompressibles. Indépendamment du type de problème résolu, différentes méthodes de stabilisation et capture de choc peuvent être utilisées. Pour un type d'écoulement, nous pouvons appliquer plusieurs méthodes de stabilisation, et une méthode de stabilisation peut être adaptée pour différents types d'écoulement. Elle sera légèrement modifiée pour répondre aux besoins du problème, mais elle restera la même technique de stabilisation. Ainsi, parmi les auteurs précédents, Codina, Tezduyar et Senga et Volker et Knobloch travaillent avec SUPG, Bayona et al. avec VMS, et Rispoli et Saavedra avec SGS. Toutefois, s'il est difficile d'adapter des travaux faits pour une méthode de stabilisation à une autre, il est en revanche possible de généraliser ce qui a été fait pour des équations de convection diffusion aux équations de Navier-Stokes.

La diversité de variables utilisées souligne elle aussi l'utilisation dans la littérature d'une méthode de stabilisation et de capture de choc pour un type de problème donné. Le besoin se fait ressentir par Bayona Roa, qui, dans sa thèse change de variables quand il traite un type d'écoulement différent [32]. Pour les écoulements supersoniques, il utilise les variables conservées, mais quand il s'intéresse aux écoulements aéroacoustiques, à faible Mach, il passe en variables primitives. En effet, comme dit plus tôt, les équations de Navier-Stokes sont mal posées à la limite incompressible.

Idéalement, il faudrait une formulation qui fonctionne pour tout type d'écoulements laminaires : compressibles, faiblement compressibles et incompressibles. Cela est possible en travaillant sur la formulation des équations, pour que le problème soit bien posé à la limite incompressible. Plusieurs écritures sont possibles, comme celle proposée en variables primitives par Ilinca et Pelletier [33], ou par Hauke et Hughes en variables primitives et entropiques [34, 35]. Cette méthode n'est pas généralisée, puisque les variables primitives ne conservent pas naturellement la masse dans un choc. Pour des personnes travaillant uniquement en compressible

supersonique, une telle approche n'est pas nécessaire.

2.3.3 Direction de la viscosité

Finalement, indépendamment du type de problème que l'on résout, il faut se poser la question de la direction dans laquelle on applique la viscosité de capture de choc. SUPG est dans le sens du courant, mais la capture de choc n'est pas obligée de l'être. Codina, ainsi que Volker et Knobloch proposent une version orthogonale pour la capture de choc avec SUPG pour l'équation de convection diffusion [30, 31]. Codina, cette fois pour SGS, met en valeur les choix possibles à propos de la direction de la capture de choc dans sa revue [21]. Le choc étant généralement orthogonal à l'écoulement, une capture de choc orthogonale permet de mieux capturer ce qui se passe dans cette direction.

CHAPITRE 3 LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS DANS CADYF

Tous les écoulements étudiés dans ce mémoire sont laminaires.

3.1 Les équations résolues

3.1.1 Conservation de la masse

Nous travaillons avec les équations de Navier-Stokes compressibles. Tout d'abord, la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.1)$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un gaz parfait, nous pouvons donc utiliser l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (3.2)$$

avec R la constante thermodynamique du gaz. Typiquement, pour de l'air, on a $R = 287$ J/(kg.K). En développant la conservation de la masse, (3.1) devient :

$$-\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho \right] \quad (3.3)$$

Puisque, d'après la relation des gaz parfaits, ρ dépend de p et T , nous pouvons développer le second membre.

$$-\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] + \frac{\vec{u}}{\rho} \cdot \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \nabla p + \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \nabla T \right] \quad (3.4)$$

En substituant α le coefficient de compressibilité isotherme, et β le coefficient de dilatation isobare (3.5) nous obtenons l'équation de continuité (3.6)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T = \frac{1}{p} \\ \beta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p = \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$-\nabla \cdot \vec{u} = \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p \right) - \beta \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) \quad (3.6)$$

3.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Nous avons aussi besoin de l'équation du mouvement (3.7).

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right] + \vec{f} \quad (3.7)$$

Dans cette équation interviennent μ la viscosité dynamique du fluide, et \vec{f} les forces volumiques exercées sur celui-ci. Nous rappelons que \mathbf{I} est l'identité, et T l'opérateur transposé.

3.1.3 Conservation de l'énergie

Pour des écoulements compressibles, il nous faut aussi considérer l'équation de l'énergie (3.8).

$$c_p \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p \right) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \phi + q_s \quad (3.8)$$

avec c_p la capacité thermique massique du fluide, λ sa conductivité thermique, q_s les sources volumiques de chaleur, et ϕ le terme de dissipation visqueuse, $\phi = \mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) : \nabla \vec{u}$, qui n'est pas actuellement implémenté dans CADYF.

3.1.4 Système d'équations de Navier-Stokes compressibles

Les équations de Navier-Stokes en compressible s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \vec{u} &= \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p \right) - \beta \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T \right) \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} &= -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right] + \vec{f} \\ c_p \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T &= \vec{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \phi + q_s \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec, pour un gaz parfait, $\rho(p, T) = \frac{p}{RT}$, $\alpha = \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{T}$.

3.1.5 Échelles de pression et température

Ce système est mal défini à la limite incompressible, ou en présence de faibles variations de température. À la manière d'Ilnca et Pelletier [33] et de Vautrin [3], chap. 4.1.2., afin d'avoir une formulation générale, nous séparons la pression et la température en deux échelles. En remarquant que les pression et température jouent un rôle mécanique dans les équations de Navier-Stokes, et un rôle thermodynamique dans l'équation d'état, nous pouvons séparer les

pression et température absolues ainsi :

$$\begin{aligned} p_{abs} &= p = p_{mec} + p_{ref} \\ T_{abs} &= T = T_{mec} + T_{ref} \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec p_{abs} et T_{abs} , les pression et température absolues, ou thermodynamiques, p_{mec} et T_{mec} les pression et température mécaniques, et p_{ref} et T_{ref} les pression et température de référence. On peut par exemple prendre pour référence les conditions de pression et température à l'entrée du domaine. Le concept est représenté fig. 3.1, où nous voyons que la pression absolue peut être vue comme des variations mécaniques autour d'une variable de référence constante. Cette décomposition est utile lorsque la valeur de référence est élevée et les variations mécaniques faibles, comme c'est le cas en compressible.

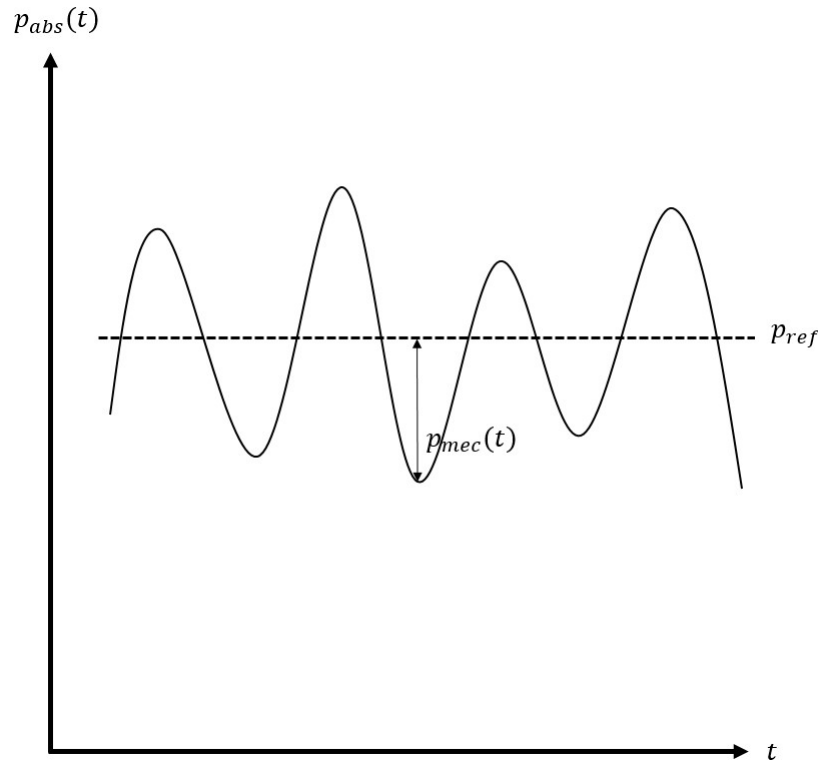


Figure 3.1 Décomposition de la pression en une pression mécanique et une pression de référence

Définissons α et β à l'état de référence :

$$\begin{aligned} \alpha_{ref} &= \frac{1}{p_{ref}} \\ \beta_{ref} &= \frac{1}{T_{ref}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Écrivons α et β en fonction de ces expressions :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{p_{mec} + p_{ref}} = \frac{\frac{1}{p_{ref}}}{\frac{1}{p_{ref}}p_{mec} + 1} = \frac{\alpha_{ref}}{\alpha_{ref}p_{mec} + 1} \\ \beta &= \frac{1}{T_{mec} + T_{ref}} = \frac{\frac{1}{T_{ref}}}{\frac{1}{T_{ref}}T_{mec} + 1} = \frac{\beta_{ref}}{\beta_{ref}T_{mec} + 1}\end{aligned}\quad (3.12)$$

3.1.6 Équations finales

Dans les équations de Navier-Stokes, seuls les gradients de la pression et la température interviennent. Puisque les références sont constantes, $\nabla p_{abs} = \nabla p_{mec}$ et $\nabla T_{abs} = \nabla T_{mec}$. Nous pouvons réécrire les équations de Navier-Stokes de la façon suivante :

$$\begin{aligned}-\nabla \cdot \vec{u} &= \frac{\alpha_{ref}}{\alpha_{ref}p_{mec} + 1} \left(\frac{\partial p_{mec}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p_{mec} \right) - \frac{\beta_{ref}}{\beta_{ref}T_{mec} + 1} \left(\frac{\partial T_{mec}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T_{mec} \right) \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} &= -\nabla p_{mec} + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T \right) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right] + \vec{f} \\ c_p \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T_{mec} &= \left(\frac{\partial p_{mec}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p_{mec} \right) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T_{mec}) + \phi + q_s\end{aligned}\quad (3.13)$$

Ces équations sont bien définies à la limite incompressible, et permettent d'étudier de faibles variations de pression et température mécanique. Sans cela, à cause de la précision machine, de faibles variations autour de la valeur de référence seraient écrasées par une valeur de référence de plusieurs ordres de grandeur supérieure. Il faudra cependant faire attention à ne pas oublier de rajouter la référence à la fin des calculs, pour le traitement des résultats par exemple.

Puisque nous travaillons avec les pression et température absolues, nous devons aussi modifier l'équation d'état.

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{R} \frac{p_{ref}}{T_{ref}} \frac{(\alpha_{ref}p_{mec} + 1)}{(\beta_{ref}T_{mec} + 1)} \\ \rho &= \rho_{ref} \frac{(\alpha_{ref}p_{mec} + 1)}{(\beta_{ref}T_{mec} + 1)}\end{aligned}\quad (3.14)$$

3.2 Éléments finis

Afin de résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes (3.13), nous utilisons la méthode des éléments finis. Elle est décrite de façon générale par Reddy [5] et adaptée pour

nos équations par Lortie [4].

3.2.1 Forme faible

La forme faible permet de réduire l'ordre des dérivées du problème, ce qui le rend plus facile à résoudre. De plus, elle met en valeur les conditions aux limites naturelles. Notons Ω le domaine sur lequel nous cherchons à résoudre les équations, et Γ la frontière de ce domaine. Nous introduisons les fonctions tests W_u , W_p et W_T associées respectivement à la vitesse, la pression et la température. Les fonctions tests doivent s'annuler sur les frontières où des conditions de Dirichlet sont appliquées. Multiplions nos équations de Navier-Stokes par les fonctions tests, puis intégrons par parties les termes du second ordre pour en baisser l'ordre. Il nous faudra aussi utiliser le théorème de la divergence, ou théorème de Green-Ostrogradski. Exprimé pour un champ vectoriel \vec{G} , sur un volume \mathcal{V} et une surface fermée \mathcal{S} , il permet de lier la divergence du champ vectoriel à son flux :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{G}) d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{G} \cdot d\vec{S} \quad (3.15)$$

Nous obtenons donc, pour l'équation de continuité :

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{u}) W_p d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\alpha_{ref}}{\alpha_{ref} p_{mec} + 1} \frac{Dp_{mec}}{Dt} W_p d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\beta_{ref}}{\beta_{ref} T_{mec} + 1} \frac{DT_{mec}}{Dt} W_p d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

avec $\frac{D}{Dt}$ l'opérateur dérivée particulière : $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$. La conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) W_u d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla p_{mec}) W_u d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[2\mu \vec{\epsilon} - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \vec{u} \right] : (\nabla W_u) d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) W_u d\Gamma + \int_{\Omega} \vec{f} W_u d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalement, pour l'équation d'énergie, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(c_p \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T_{mec} \right) W_T d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial p_{mec}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p_{mec} \right) W_T d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \lambda (\nabla T \cdot \nabla W_T) d\Omega - \int_{\Gamma} (\lambda \nabla T \cdot \vec{n}) W_T d\Gamma - \int_{\Omega} (\phi + q_s) W_T d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2.2 Discrétisation du problème

Comme décrit par Lortie [4] et Reddy [5], nous discrétisons le domaine, qui est continu, en sous domaines, les éléments finis. Dans notre cas, nous travaillons avec des triangles. Le

maillage est l'ensemble des triangles qui vont représenter notre domaine physique. Il faut noter que si le domaine a des frontières courbes, il ne sera pas parfaitement couvert, d'où les enjeux de produire de bons maillages, pour représenter au mieux toutes géométries.

Toutes nos simulations seront effectuées avec des éléments dit de Taylor-Hood, qui sont $P2 - P1$, ce qui veut dire qu'on approxime la température et la vitesse par des polynômes de degré 2, et la pression par des polynômes d'ordre 1. Les noeuds sont placés comme sur la figure 3.2

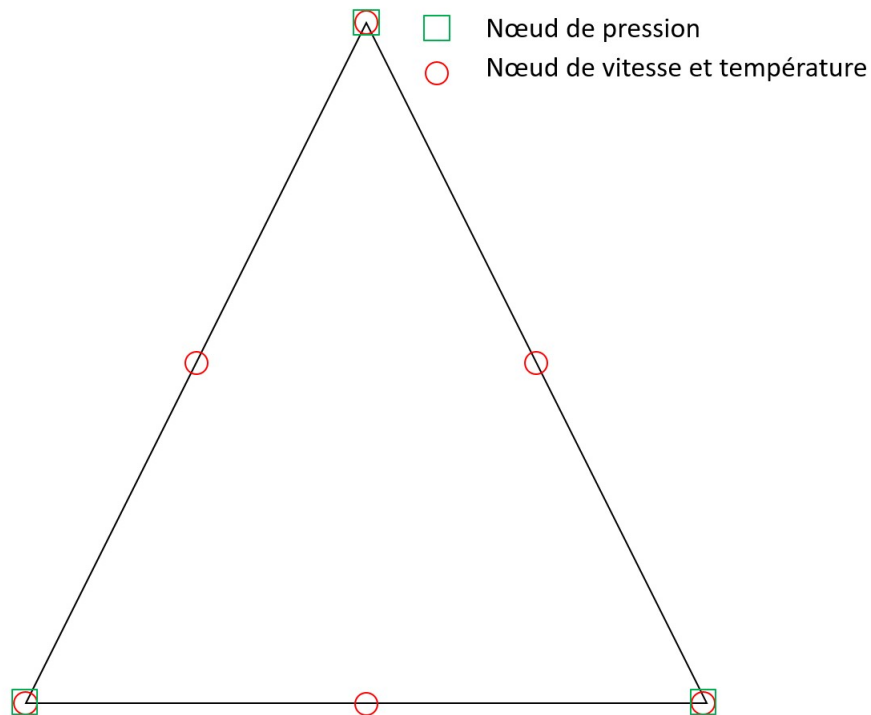


Figure 3.2 Placement des noeuds sur un élément de Taylor-Hood

Ce découpage va nous permettre de résoudre de façon approximative les équations élément par élément. Notons avec l'indice h la valeur d'une variable dans un élément h^e . Nous supposons que pour une variable ϕ , $\phi \approx \phi_h$ sur un élément. Ainsi, nous avons, pour un élément de

Taylor-Hood :

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}) &\approx u_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^6 u_j N_{u_j}(\vec{x}) \\
 v(\vec{x}) &\approx v_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^6 v_j N_{v_j}(\vec{x}) \\
 T(\vec{x}) &\approx T_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^6 T_j N_{T_j}(\vec{x}) \\
 p(\vec{x}) &\approx p_h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^3 p_k N_{p_k}(\vec{x})
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec N_ϕ la fonction d'interpolation de la variable ϕ et j et k les indices des noeuds. Nous attirons l'attention sur le fait que la vitesse et la température sont $P2$ et donc représentées par 6 noeuds, tandis que la pression, $P1$, est représentée par 3 noeuds.

La méthode de Galerkin consiste à choisir les fonctions test égales aux fonctions d'interpolation.

3.3 Autres aspects numériques de résolution

3.3.1 Résolution numérique des équations

Nous résolvons le système d'équations obtenu avec la méthode de Newton. La méthode de Newton est une méthode pour trouver les zéros d'une fonction (une fonction vectorielle dans notre cas). On approxime la fonction par sa tangente, et on se rapproche itérativement du 0. Relions les deux par le développement limité de la fonction f en un point x_{n+1} par rapport à un point de référence x_n :

$$f(x_{n+1}) \simeq f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) \tag{3.20}$$

Si nous supposons que x_{n+1} est une meilleure approximation de la racine que x_n , nous pouvons écrire que $f(x_{n+1}) \simeq 0$, et nous exprimons x_{n+1} en fonction de x_n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.21}$$

Avec un critère sur la différence entre x_{n+1} et x_n pour que la méthode s'arrête, nous trouvons itérativement une approximation de la racine de la fonction. Pour que la méthode fonctionne, il faut que la solution ne soit pas concave (du moins localement), et avoir une bonne estimation

de départ x_0 . Dans CADYF, l'approximation de départ est 0, mais l'utilisateur peut préciser son propre champ de départ. En dimension supérieure à 1, x est un vecteur, f une fonction vectorielle, et l'opérateur dérivée est remplacé par le gradient.

À part pour quelques problèmes déjà connus, il faut évaluer la dérivée pour appliquer la méthode de Newton. Nous utilisons la méthode des perturbations pour obtenir une évaluation de ces dérivées.

Un lecteur cherchant plus d'informations théoriques sur l'implémentation de ces méthodes dans CAFYF peut consulter les thèses de Muller [36] et Vautrin [3].

3.3.2 Gestion du temps : schéma BDF

La discrétisation temporelle est aussi un enjeu de taille pour les simulations instationnaires. Plusieurs schémas sont possibles. Certains auteurs utilisent des éléments finis en temps et en espace, mais nous utilisons les méthodes BDF (Backward Differentiation Formula), moins lourdes.

Cette méthode fait parti des méthodes linéaires pour résoudre des équations différentielles. Il s'agit de calculer la solution au pas de temps suivant à partir des p solutions précédentes. C'est une méthode implicite, puisqu'on évalue la solution pour le pas de temps $n + 1$.

L'ordre p du schéma peut varier, même au sein d'une simulation. Un schéma d'ordre $p = 1$ est le schéma d'Euler implicite d'ordre 1. Puisqu'il faut p pas de temps précédents pour résoudre, lorsque l'on ne connaît que l'instant initial, nous pouvons démarrer la résolution par un schéma d'ordre 1, et augmenter l'ordre au fur et à mesure. La méthode n'est pas "auto-démarrante".

D'après Vautrin [3] le coup supplémentaire en calcul est négligeable. Il y a en revanche un coup en espace qui augmente linéairement avec le nombre de pas de temps précédents à stocker pour la résolution. À l'inverse, pour les méthodes de type Runge-Kutta implicites, lorsque l'ordre est augmenté, la taille du système matriciel à résoudre l'est aussi, et le temps de calcul est donc plus important.

Plus de détails sur la méthode, dont l'expression des schémas numériques peuvent être trouvés dans les thèses de Vautrin [3] et Muller [36].

3.3.3 Adaptation

Avec CADYF, le pas de temps ainsi que l'ordre du schéma BDF peut être adapté au cours de la simulation. Nous avons choisi de ne pas adapter le pas de temps dans nos cas, mais de travailler avec un pas constant, pour mieux comprendre les enjeux de nos problèmes en ne faisant varier qu'un paramètre à la fois.

Il est également possible d'adapter le maillage. La solution est d'abord calculée sur le maillage actuel. Ensuite, une estimation d'erreur est faite. Les éléments où elle est trop importante sont identifiés, puis on définit une zone de plusieurs couches d'éléments autour des éléments problématiques. Finalement, cette zone est remaillée plus finement, un nouveau maillage est généré, et les calculs peuvent être effectués sur celui-ci. L'adaptation de maillage et du pas de temps a fait l'objet de la thèse de Muller [36], et y est donc décrite avec plus de détails. Nous utiliserons l'adaptation de maillage dans nos travaux, pour évaluer si dans certains cas, elle permet de compenser la perte de précision observée au niveau des chocs.

CHAPITRE 4 DIFFÉRENTS CAS TESTS ÉTUDIÉS

Pour tester les effets de la capture de choc, nous allons tester les performances des schémas implémentés sur différents cas tests. Le premier sera une équation de convection-diffusion de la température, stationnaire. La condition initiale sera discontinue, et nous étudierons la façon dont elle se propage dans le domaine. Ensuite, nous nous intéresserons à un tube à choc, dans lequel le fluide sera soumis aux équations de Navier-Stokes. De plus, la simulation est transitoire, ce qui nous permet de voir si la capture de choc se comporte bien dans ce cas là.

4.1 Équation de convection-diffusion de la température

Il est nécessaire d'avoir un premier cas test très simple. Nous choisissons un problème de convection-diffusion de la température. Il s'inspire de celui de Codina [30], bien qu'il ait été légèrement modifié pour supprimer certaines discontinuités. L'idée de ce test est d'imposer une discontinuité de température sur une frontière, pour provoquer une discontinuité dans le domaine. Nous pourrions ainsi évaluer si les méthodes de capture implémentées permettent à cette discontinuité d'être mieux résolue. Ce n'est pas un choc à proprement parler, le fluide est incompressible, mais une discontinuité. Tout comme pour un choc, il sera important de stabiliser les forts gradients.

4.1.1 Équations traitées

Nous travaillons avec une équation de convection-diffusion thermique. Elle pourra être stationnaire (4.1) ou transitoire (4.2). De plus, la vitesse et la pression sont prises constantes. C'est une solution naturelle des équations de Navier-Stokes incompressibles, il est donc possible de modéliser ce problème avec CADYF.

$$\vec{u} \cdot \nabla T - \kappa \Delta T = f \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - \kappa \Delta T = f \quad (4.2)$$

avec T la température, \vec{u} la vitesse de convection, κ la diffusivité thermique et f un terme source. On rappelle que la diffusivité thermique est liée à la conductivité thermique $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$.

4.1.2 Géométrie et conditions aux limites

Nous travaillons avec une géométrie légèrement modifiée par rapport au cas test proposé par Codina [30]. Le domaine est un rectangle de dimension $L = 1$ m sur $l = 0.8$ m. Les conditions aux limites de Dirichlet en température sont les suivantes : $T_{mec} = 1$ K sur la paroi supérieure et sur les 10% supérieurs de l'entrée, et $T_{mec} = 0$ K sur les 90% restant de l'entrée. Sur la sortie et le bas du domaine, la température est nulle. Pour les conditions aux limites en vitesse, nous imposons $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ m/s et $v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ m/s en haut et à gauche, les parois d'entrée du flux. On laisse u et v libres en bas et à droite. Ainsi la norme de la vitesse de convection est de $\vec{u} = 1$ m/s. En stationnaire, la vitesse reste constante dans tout le domaine, nous avons donc bien l'équation de convection-diffusion de la température souhaitée. L'ensemble des conditions aux limites sont résumées fig. 4.1.

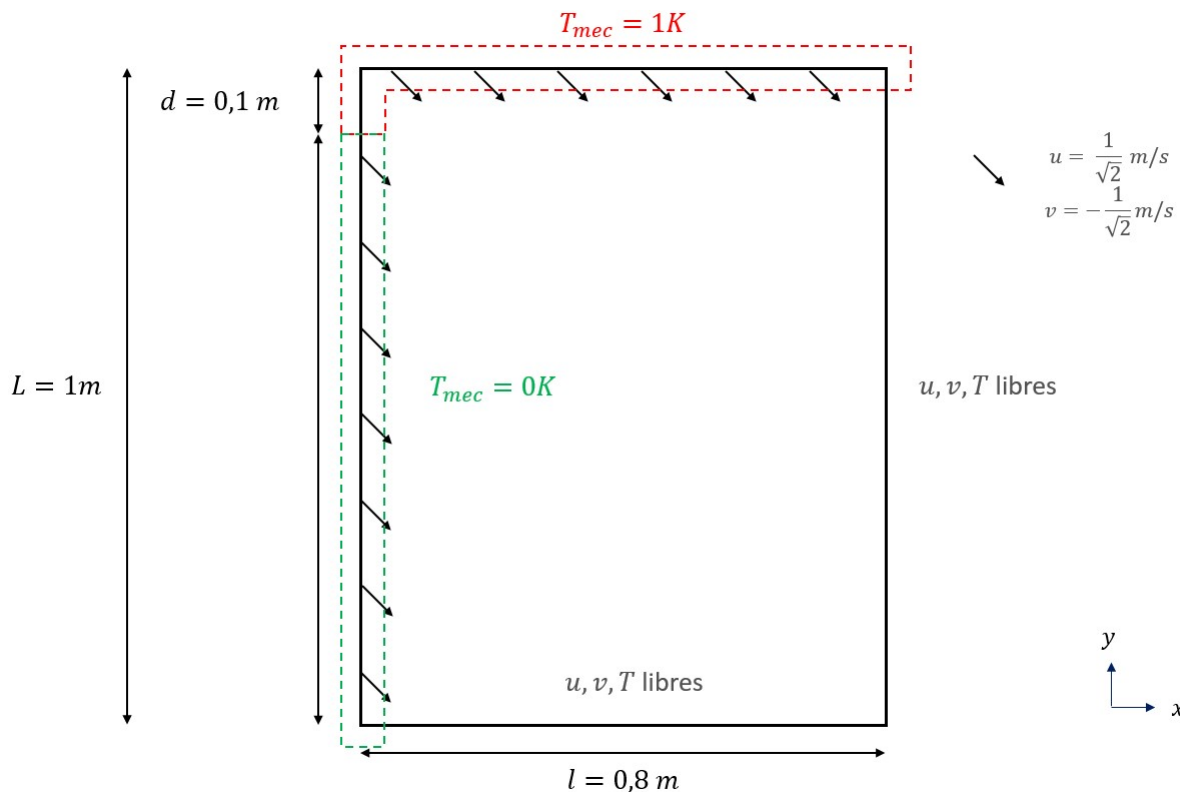


Figure 4.1 Ensemble des conditions aux limites imposées pour le cas de convection-diffusion de la température

4.1.3 Adoucissement de la discontinuité de la condition aux limites en température

Sur la frontière de gauche, nous devons imposer une condition aux limites discontinue en température. Nous passons de $T_{mec} = 0$ K à $T_{mec} = 1$ K en $x_{discont} = 0.9$. Pour adoucir cette discontinuité, nous introduisons une longueur $h = 1\%L = 0.01$ m et créons une zone autour de $x_{discont} = 0.9$: $[x_{discont} - h; x_{discont} + h]$. Dans cette zone, nous imposons une condition aux limites linéaire, en imposant $T_{mec} = 1$ K en $x_{discont} + h$ et $T_{mec} = 0$ K en $x_{discont} - h$. Cette méthode est illustrée fig. 4.2. Nous avons adouci cette discontinuité à cause de problèmes de convergence, afin d'aider à la résolution.

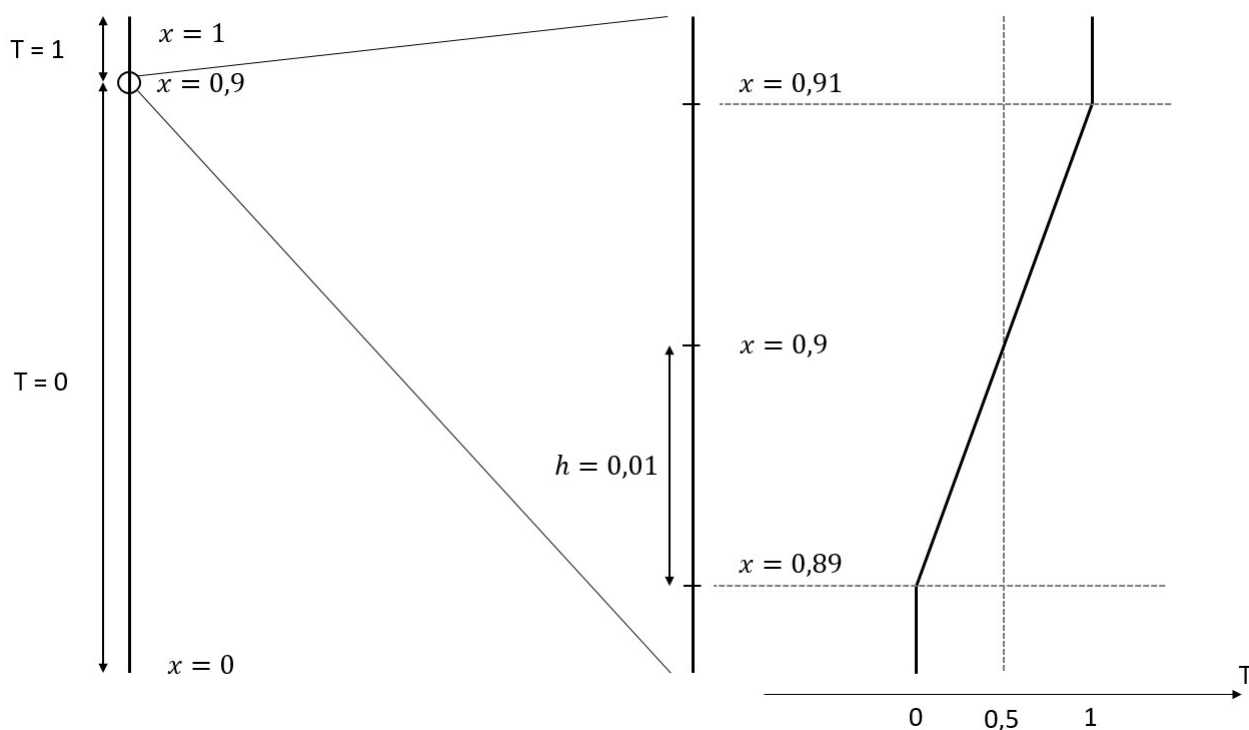


Figure 4.2 Imposition linéaire de la condition discontinue en température sur un intervalle de largeur h

4.1.4 Résultat théorique sans diffusion

Afin d'évaluer les résultats que nous obtenons avec CADYF, il nous faut une solution théorique de ce problème. Dans une approche simplifiée, nous ne considérons que la convection dans l'équation. Nous savons alors que le domaine sera divisé en deux. Puisque nous impo-

sons $T_{mec} = 1$ K à la frontière supérieure, nous aurons, dans la partie supérieure, $T_{mec} = 1$ K, et dans la partie inférieure, $T_{mec} = 0$ K. La séparation des domaines est une droite, dont la pente est la même que la direction du vecteur vitesse, qui est constant dans le domaine. Pour notre problème, avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, le résultat attendu est présenté fig. 4.3. L'équation de la droite séparant les deux domaines est $y = -x + 0.9$. L'implémentation numérique de cette solution sur le domaine, est décrite par l'équation (4.3).

$$T_{mec}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq -x + 0.9 \\ 0 & \text{si } y < -x + 0.9 \end{cases} \quad \forall (x, y) \in ([0, 0.8], [0, 1]) \quad (4.3)$$

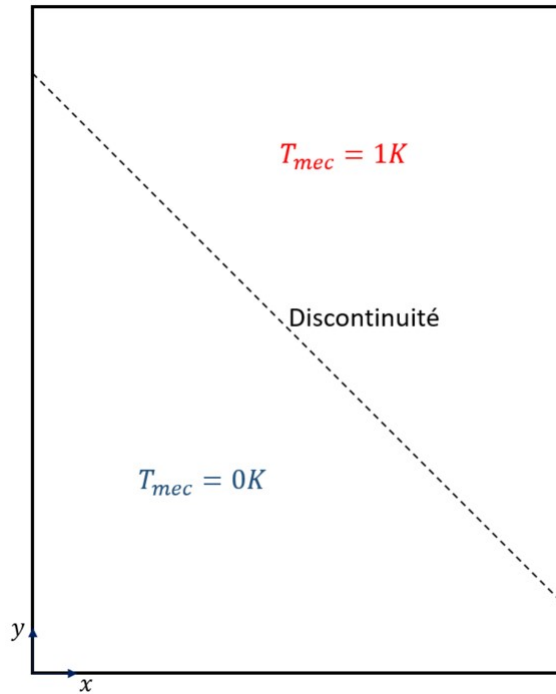


Figure 4.3 Résultats théoriques du problème de convection de température

Avec la diffusion, la solution obtenue avec CADYF est présentée fig. 4.4. Les résultats sont similaires, mais comme attendu, la discontinuité de température est diffusée.

4.2 Tube à choc

Le deuxième cas test étudié est celui du tube à choc. Il nous permettra de tester nos développements sur les équations de Navier-Stokes en transitoire.

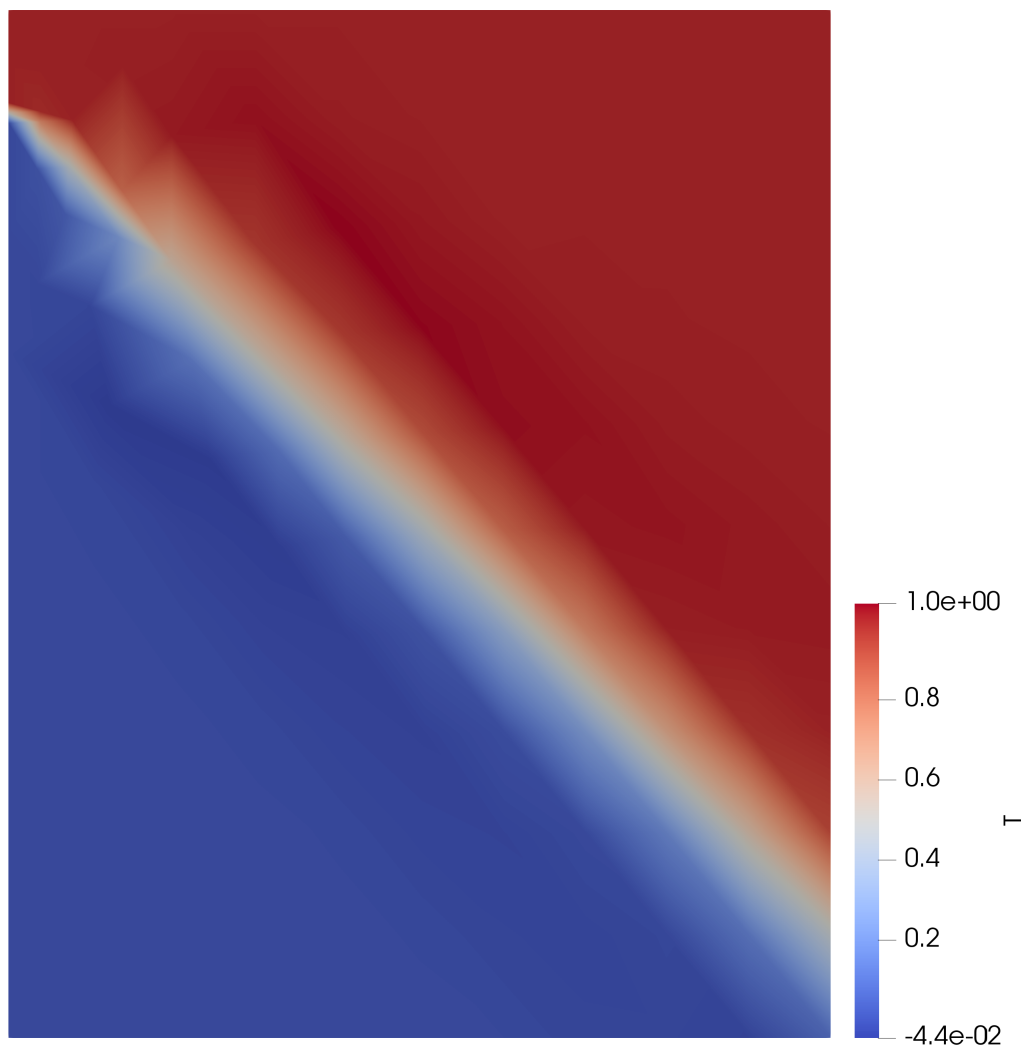


Figure 4.4 Solution obtenue avec CADYF pour l'équation de convection-diffusion de la température (maillage grossier de 55 éléments triangulaires)

Nous allons déterminer les équations qui régissent le choc normal, puis l'onde de détente. Nous ne considérerons pas les chocs et ondes de détente réfléchis sur les extrémités du tube. Ensuite nous présenterons une implémentation de ces équations pour obtenir les propriétés dans le tube à tout instant, qui pourra servir de solution de référence pour nos simulations.

4.2.1 Tube à choc : Étude théorique non visqueuse

Cette étude est une application de l'étude faite par Anderson dans le chapitre 7 de son livre sur les écoulements compressibles [2]. L'approche non visqueuse est suffisante pour notre étude. Elle pourra éventuellement être utilisée plus tard comme point de départ du développement

d'une solution manufacturée, qui prendra en compte la viscosité.

Rappel des hypothèses et définition du problème

Nous travaillons avec des écoulements 1D, stationnaires, sans forces, adiabatiques et non visqueux, donc isentropiques. Les gaz sont supposés caloriquement parfaits. Travailler avec des écoulements stationnaires n'est pas incompatible avec un tube à choc transitoire. Nous nous plaçons dans le référentiel du choc, il est donc stationnaire, puis, comme nous connaissons sa vitesse, nous pouvons calculer sa nouvelle position, et résoudre de nouveau les équations dans le référentiel du choc. Notre problème discret sera donc un cas transitoire.

Considérons un tube séparé en deux parties par un diaphragme. Les deux parties sont occupées par deux gaz (qui peuvent être différents ou identiques) à des pressions différentes (voir fig. 4.5). Les autres propriétés peuvent elles aussi être distinctes. À l'instant $t = 0$ on casse le diaphragme. La différence de pression va mettre en mouvement les fluides dans le tube. Il y aura propagation d'un choc normal d'une part, et d'une onde de détente dans l'autre sens. Il y a également une discontinuité de contact entre les zones que constituaient initialement les deux fluides (voir fig. 4.6 pour les noms des zones). À travers cette discontinuité, la vitesse du fluide et la pression sont constantes. En revanche, la masse volumique et la température ne sont pas nécessairement égales, car dépendent des conditions initiales des gaz.

Nous notons la masse volumique dans le domaine de fluide i ρ_i , sa vitesse u_i , la vitesse du son a_i , sa pression p_i , son énergie interne e_i et son enthalpie h_i . La vitesse du choc sera notée W , et la vitesse du gaz entraîné u_p .

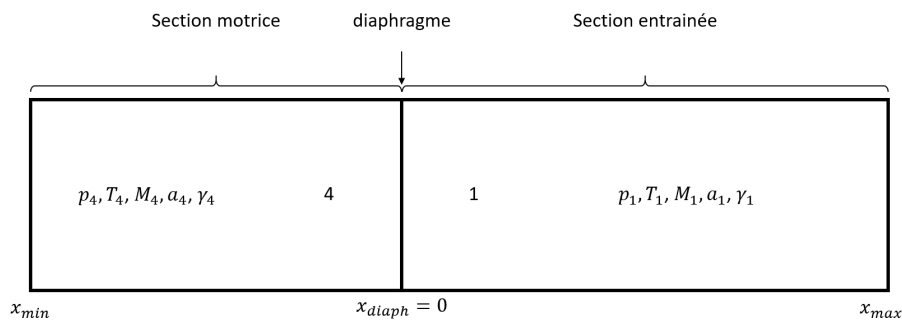


Figure 4.5 Tube à l'instant initial (adapté d'Anderson [2])



Figure 4.6 Tube après la rupture du diaphragme (adapté d'Anderson [2])

Choc normal

Quelle que soit la valeur des vitesses, pour un écoulement permanent 1D non visqueux, adiabatique et sans forces extérieures, les équations de conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie entre deux zones notées 1 et 2 se simplifient en :

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} &= h_2 + \frac{u_2^2}{2}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Dans le cas d'un choc mobile, on a $u_1 = W$ et $u_2 = W - u_p$, avec W la vitesse du choc normal, et u_p la vitesse d'entraînement du gaz derrière l'onde de choc. Les équations (4.4) deviennent donc :

$$\rho_1 W = \rho_2 (W - u_p) \quad (4.5)$$

$$p_1 + \rho_1 W^2 = p_2 + \rho_2 (W - u_p)^2 \quad (4.6)$$

$$h_1 + \frac{W^2}{2} = h_2 + \frac{(W - u_p)^2}{2} \quad (4.7)$$

En réécrivant l'équation de continuité (4.5), nous avons :

$$W - u_p = W \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (4.8)$$

En la substituant dans l'équation (4.7), nous obtenons :

$$W^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4.9)$$

De même, nous pouvons écrire à partir de (4.5) :

$$W = (W - u_p) \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4.10)$$

Ce qui, dans (4.9) donne :

$$(W - u_p)^2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \quad (4.11)$$

En injectant (4.9) et (4.11) dans l'équation de conservation de l'énergie (4.7), et en utilisant $h = e + p/\rho$, nous obtenons (4.12) qui est l'équation d'Hugoniot :

$$e_2 - e_1 + \frac{p_1 + p_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (4.12)$$

L'hypothèse d'un gaz caloriquement parfait implique que $e = c_v T$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}} \right] \quad (4.13)$$

De plus, la relation des gaz parfaits donne $\rho = \frac{p}{RT}$, d'où :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}} \quad (4.14)$$

Cherchons maintenant à exprimer la vitesse du choc et celle des particules entraînées. Définissons d'abord le nombre de Mach du choc :

$$M = \frac{W}{a_1} \quad (4.15)$$

Avec les relations des gaz parfaits et des gaz caloriquement parfaits, nous pouvons écrire :

$$W = a_1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) + 1} \quad (4.16)$$

Avec l'équation (4.8), u_p peut être exprimée en fonction de W , ce qui, avec (4.16) conduit à :

$$u_p = \frac{a_1}{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right)^{1/2} \quad (4.17)$$

Ces résultats pourront être utilisés pour résoudre une moitié de ce qui se passe dans le tube à choc. Il faut noter que nous ne nous intéressons pas ici à la réflexion de l'onde une fois

qu'elle arrive au bout du tube.

Onde d'expansion

Étudions maintenant l'autre moitié du problème. L'apparition de l'onde de choc et l'entraînement du fluide derrière celui-ci n'est possible que parce qu'apparaît simultanément une onde d'expansion se propageant dans la direction opposée.

Pour déterminer ce qui se passe dans cette onde, nous utilisons la méthode des caractéristiques. Nous cherchons une courbe sur laquelle notre équation aux dérivées partielles se réduit à une équation différentielle ordinaire. $u + \frac{2a}{\gamma-1}$ est constant sur la caractéristique. Comme sur la fig. 4.6, la zone 4 est la zone encore non perturbée par l'onde d'expansion. En évaluant l'expression précédente entre 4 et un endroit quelconque x de l'onde, nous pouvons exprimer la vitesse du son $a(x)$ n'importe où dans l'onde. La partie sur l'obtention des caractéristiques est omise, un lecteur intéressé pourra consulter le chapitre 7.6 d'Anderson [2].

$$\frac{a}{a_4} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right) \quad (4.18)$$

De plus, comme nous avons supposé que le fluide était caloriquement parfait, $a = \sqrt{\gamma RT}$, ce qui nous permet d'exprimer la température en tout point :

$$\frac{T}{T_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{a_4} \right]^2 \quad (4.19)$$

Rappelons les relations isentropiques entre un état i et j :

$$\frac{p_i}{p_j} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_j} \right)^\gamma = \left(\frac{T_i}{T_j} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.20)$$

La pression et la masse volumique peuvent ainsi être exprimées à travers toute l'onde :

$$\frac{p}{p_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{a_4} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.21)$$

$$\frac{\rho}{\rho_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{a_4} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (4.22)$$

Dans les équations (4.18), (4.19), (4.21), (4.22) apparaît la vitesse locale u des particules dans l'onde. Elle peut facilement être exprimée en partant de l'équation de n'importe quelle

caractéristique (4.18), avec x la position d'un point sur cette caractéristique :

$$x = (u - a)t \quad (4.23)$$

Cela nous permet, d'exprimer u en fonction de la position x du point étudié :

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(a_4 + \frac{x}{t} \right) \quad (4.24)$$

Tube à choc complet

Nous avons explicité d'une part les équations nous permettant de connaître ce qui se passe derrière le choc normal, et d'autre part les équations permettant d'obtenir les propriétés physiques dans l'onde d'expansion. Maintenant, intéressons nous aux liens entre toutes les zones du problème pour avoir l'expression de la solution dans l'ensemble du tube à choc. Les notations des zones s'appuient toujours sur la figure 4.6.

Zone 1 : avant le passage du choc normal Avant le passage du choc normal, le milieu n'est pas encore perturbé, ses propriétés restent donc les mêmes qu'à l'instant initial dans cette zone : $u = 0$, $p = p_1$, $T = T_1$ et $\rho = \rho_1$.

Zone 2 : derrière l'onde de choc Les propriétés après l'onde de choc ont été exprimées par les équations (4.17), (4.13) et (4.14). Elles dépendent toutes de $\frac{p_2}{p_1}$ qu'il faut exprimer. Les fluides sont entraînés à la même vitesse, donc $u_2 = u_3 = u_p$. Exprimons u_3 d'une autre façon pour isoler p_2/p_1 dans l'expression de u_p (4.17). En évaluant la pression entre la tête et la queue de l'onde dans (4.21), nous obtenons :

$$u_3 = \frac{2a_4}{\gamma_4 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{\gamma_4 - 1}{2\gamma_4}} \right] \quad (4.25)$$

Or, les pressions sont continues entre les zones 2 et 3, donc $\frac{p_3}{p_4} = \frac{p_2}{p_4}$, ou encore $\frac{p_2}{p_4} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{p_1}{p_4} \right)$. En égalant u_3 obtenue par (4.25) à u_p obtenue avec (4.17), nous pouvons exprimer p_2/p_1 en fonction de données du problème.

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \left[1 - \frac{(\gamma_4 - 1)(a_1/a_4)(p_2/p_1 - 1)}{\sqrt{2\gamma_1[2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1)(p_2/p_1 - 1)]}} \right]^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} \quad (4.26)$$

En résolvant cette équation, p_2/p_1 est exprimé, et il est possible d'en déduire la vitesse W de l'onde de choc par (4.10), la vitesse d'entraînement des particules u_p par (4.17), la température dans la zone 2 par (4.13), et la masse volumique dans cette zone par (4.14).

Zone 3 : entre la discontinuité de contact et l'onde d'expansion Pour cette zone, nous avons déjà utilisé $p_3 = p_2$ et $u_3 = u_2$. Reste à déterminer T_3 et ρ_3 .

Rappelons que $\frac{p_3}{p_4} = \frac{p_2}{p_4} = \frac{p_2}{p_1} / \left(\frac{p_4}{p_1}\right)$. Utilisons maintenant les relations isentropiques pour déterminer la température et la masse volumique (T_4 et ρ_4 sont connues par les conditions initiales) :

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{\gamma_4-1}{\gamma_4}} \quad (4.27)$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_4} = \left(\frac{p_3}{p_4}\right)^{\frac{1}{\gamma_4}} \quad (4.28)$$

Zone d'expansion : intérieur de l'onde d'expansion La détermination des propriétés dans l'onde d'expansion se fait point par point, les propriétés physiques ne sont pas constantes à travers l'onde. Commençons par déterminer la vitesse locale d'un point en fonction de sa position par (4.24). Ensuite, nous pouvons l'utiliser pour déterminer la pression avec (4.21), la température avec (4.19) et la masse volumique avec (4.22).

Zone 4 : Avant le passage de l'onde d'expansion Finalement, il reste à déterminer les propriétés de la dernière zone. L'onde d'expansion n'est pas encore arrivée dans la zone, ses propriétés restent donc inchangées. La pression vaut p_4 , la température T_4 , la masse volumique ρ_4 et la vitesse est nulle.

Choix pour la solution numérique

Maintenant que nous avons exprimé zone par zone les propriétés des fluides, nous allons pouvoir les assembler numériquement pour avoir la solution globale.

Résolution du ratio de pression Nous avons vu qu'il fallait en premier lieu déterminer p_2/p_1 avec l'équation (4.26). Nous allons pour cela utiliser la méthode de Newton. Nous mettons l'équation sous la forme d'une fonction F à annuler :

$$F(p_2/p_1) = \frac{p_2}{p_1} \left[1 - \frac{(\gamma_4 - 1)(a_1/a_4)(p_2/p_1 - 1)}{\sqrt{2\gamma_1[2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1)(p_2/p_1 - 1)]}} \right]^{\frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}} - \frac{p_4}{p_1} = 0 \quad (4.29)$$

En notant $X = \frac{p_2}{p_1}$ notre inconnue, $A = (\gamma_4 - 1)(a_1/a_4)$, $B = 2\gamma_1$, $C = \gamma_1 + 1$, $\frac{p_4}{p_2} = p_r$ et $e = \frac{-2\gamma_4}{\gamma_4 - 1}$ nous obtenons une équation plus lisible :

$$X \cdot \left[1 - \frac{A(X-1)}{\sqrt{B(B+C(X-1))}} \right]^e - p_r = F(X) = 0 \quad (4.30)$$

La méthode de Newton fait appel à la dérivée de F . Nous dérivons l'expression (4.30) à la main, confirmons le résultat à l'aide de WolframAlpha et obtenons :

$$F'(X) = \left[1 - \frac{A(X-1)}{\sqrt{B(B+C(X-1))}} \right]^e + eX \left[\frac{ABC(X-1)}{2(B(B+C(X-1)))^{\frac{3}{2}}} - \frac{A}{\sqrt{B(B+C(X-1))}} \right] \left[1 - \frac{(A(X-1))}{\sqrt{B(B+C(X-1))}} \right]^{e-1} \quad (4.31)$$

avec p_2/p_1 , nous pouvons maintenant calculer toutes les propriétés dans l'écoulement, à condition de savoir où les appliquer, c'est-à-dire de savoir où sont les différentes zones.

Découpage par zone et mise à jour Il est crucial de savoir où sont chacune de nos zones pour appliquer les bonnes équations dans chacune d'entre elles. Nous nommons les frontières des zones comme présenté fig. 4.6. La position d'une zone est donc définie par la position de ses deux extrémités. La zone 1 s'étend donc sur $[x_{12}, x_{max}]$, la zone 2 sur $[x_{23}, x_{12}]$, la zone 3 sur $[x_{queue}, x_{23}]$, l'onde d'expansion est comprise entre $[x_{tete}, x_{queue}]$, et finalement, la zone 4 s'étend sur $[x_{min}, x_{tete}]$.

Mettre à jour la position d'une zone revient donc à actualiser la position de chacune de ses extrémités. À l'instant initial, il n'y a que deux zones, la 1 et la 4. Nous plaçons x_{12} , x_{23} , x_{tete} , x_{queue} à l'endroit du diaphragme à ce moment. Le diaphragme est lui placé arbitrairement en 0, pour avoir des résultats plus clairs. Ensuite, à chaque pas de temps de longueur Δt :

- x_{min} et x_{max} sont fixes
- x_{12} se déplace à la vitesse W pendant Δt , la nouvelle position de la zone est donc de $x_{12} + W \cdot \Delta t$
- De même, x_{23} se déplace de u_p pendant Δt
- La vitesse de la queue de l'onde est $u_p - a_3$. Pour calculer la vitesse du son dans la zone 3 a_3 , il faut utiliser l'équation (4.18), avec $u = u_p$ dans cette zone.
- Finalement, la vitesse de la tête de l'onde est a_4 , et sa nouvelle position est $x_{tete} + a_4 \cdot \Delta t$

Maintenant que nous connaissons la position de chacune des zones dans le temps, plusieurs options s'offraient à nous pour discrétiser le domaine. Répartir des points fixes dans tout le domaine, et vérifier à chaque itération dans quelle zone ils sont, ou encore redéfinir à chaque itération un set de points appartenant à une zone. Nous avons opté pour la deuxième solution, car elle permet d'observer les discontinuités de façon abrupte. En effet, on prend une zone et on la divise en x intervalles, en incluant les extrémités. Avec la valeur exacte à droite et à gauche de la frontière, la discontinuité est parfaitement représentée par une droite verticale.

Structure du code Nous commençons par calculer le ratio p_2/p_1 à partir de l'équation (4.26) en lui appliquant la méthode de Newton. Cette valeur va nous permettre de calculer les propriétés du choc, à savoir sa vitesse W et la vitesse des particules entraînées u_p .

Nous avons choisi de conserver la solution dans un unique tableau en trois dimensions. À chaque pas de temps, nous conservons la solution pour tous les points du domaine. Pour chaque point, nous enregistrons 5 valeurs : la position du point dans le domaine, la vitesse des particules à cet endroit, la pression, la température et la masse volumique. D'autres paramètres peuvent cependant être ajoutés.

Nous initialisons ensuite le problème. Des précautions sont nécessaires, car au temps $t = 0$ il n'y a que deux zones : la 1 et la 4. Pour que la taille de la solution à l'instant initial soit compatible aux solutions aux instants suivants, il faut qu'il y ait le même nombre de points d'évaluation de la solution répartis dans le domaine. Nous séparons donc les 2 zones de l'instant initial en autant de point qu'il y en aura par la suite pour 5 zones.

Comme nous ne souhaitons pas étudier la réflexion de l'onde de choc ou de l'onde de détente, et que nous connaissons leurs vitesses (respectivement W dans le sens des x croissants, et a_4 dans le sens des x décroissants), et que nous utilisons un pas de temps constant, nous pouvons calculer le nombre d'itérations pour qu'un des bords soit atteint, ce qui définit notre temps de simulation.

Ensuite, pour chaque pas de temps, nous effectuons les étapes suivantes :

1. Calcul de la nouvelle position des zones
2. Découpage en parties égales des intervalles ainsi définis
3. Calcul des propriétés de chaque point défini précédemment en fonction de la zone dans laquelle il est.

Il est aussi possible de calculer la trajectoire d'un point. Soit un point à une position initiale x_p . À chaque itération, nous connaissons la position de chacune des zones, et pouvons donc savoir dans quelle zone est notre point, et ainsi calculer sa nouvelle position :

- S'il est dans la zone 1 ou 4, sa position reste la même
- S'il est dans la zone 2 ou 3, il avance à la vitesse u_p pendant un pas de temps Δt

- S'il est dans la zone de l'onde d'expansion, à partir de sa position et du temps sa vitesse est obtenue avec l'expression (4.24)

Résultats

Tous les résultats présentés sont obtenus pour de l'air, un tube à choc de $L = 1$ m, avec le diaphragme au centre. Pour un ratio de pression $\frac{p_4}{p_1} = 4$ ($p_4 = 4$ Pa et $p_1 = 1$ Pa), nous observons l'évolution des propriétés dans le tube fig. 4.7, et les trajectoires fig. 4.8.

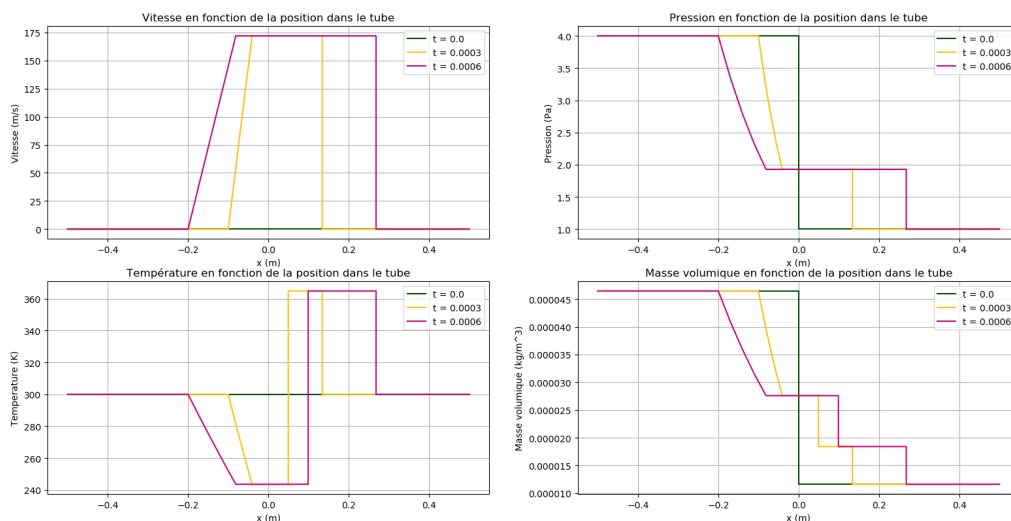


Figure 4.7 Propriétés dans le tube à choc, pour un ratio initial de pression de 4

Nous vérifions que les conditions initiales sont bien imposées. La vitesse est nulle partout dans le tube, la pression vaut 4 Pa d'une part du diaphragme et 1 Pa de l'autre. Nous avons choisi des températures identiques, et par conséquent la masse volumique est différente dans les deux zones.

Nous pouvons ensuite voir le choc normal se propager dans le sens des x croissants, et l'onde d'expansion se propager de le sens des x décroissants. Dans la détente, la vitesse a une évolution linéaire, comme prévu par l'équation de la caractéristique (4.23). La pression, température et masse volumique évoluent comme des fonctions puissance à cause des relations isentropiques.

Pour des chocs plus forts, c'est-à-dire avec un ratio de pression initial plus important, la queue de l'onde de détente peut se déplacer dans le sens des x croissants, comme illustré sur les fig. 4.9 et 4.10 pour un ratio de pression de 100.

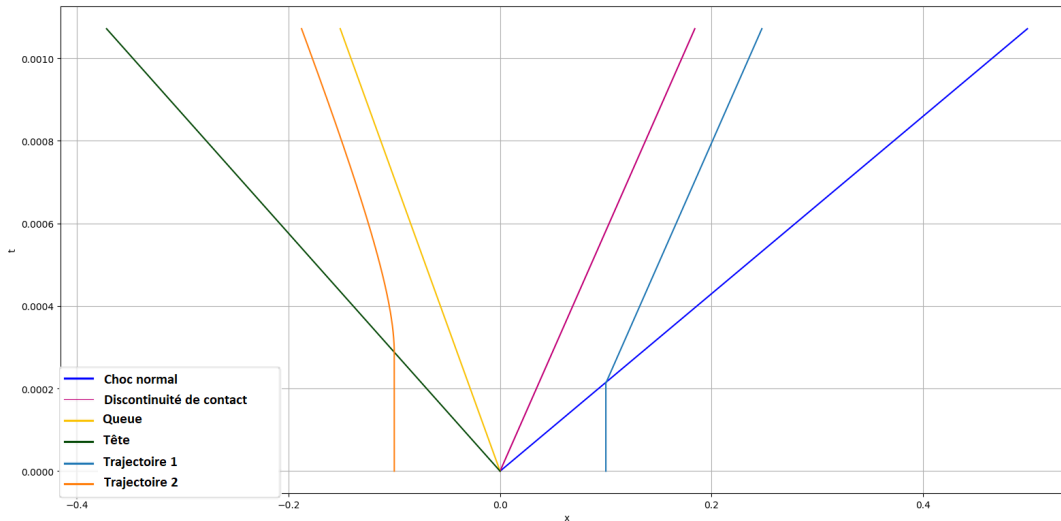


Figure 4.8 Trajectoire de deux particules et des zones caractéristiques dans le tube à choc pour un ratio de pression de 4

Conclusion

Les résultats obtenus sont valables uniquement pour les écoulements 1D, non visqueux, de fluides caloriquement parfaits, mais sont exacts, et peuvent servir de comparaisons aux résultats numériques d'un même problème simulé par éléments finis par exemple. Il pourrait être intéressant de faire des tests avec des fluides différents des deux côtés du diaphragme.

4.2.2 Simulation du tube à choc : choix pour l'implémentation avec CADYF

Nous avons modélisé avec CADYF le tube à choc défini précédemment, dont la description est présentée dans cette partie. Il faut noter que nous allons résoudre avec CADYF les équations de Navier-Stokes, alors que la théorie du tube à choc est développée pour un fluide parfait. Pour nous rapprocher le plus possible de cette hypothèse, nous allons résoudre Navier-Stokes avec une viscosité très faible. Tout comme dans le modèle théorique, nous arrêterons la simulation avant d'arriver aux extrémités du tube et ne considérerons pas les ondes qui se réfléchissent.

Géométrie

Nous prenons un tube de longueur $L = 1$ m et de hauteur $h = 0.2$ m. Nous plaçons le diaphragme en son milieu Figure (4.11).

Remarque : Pour obtenir un maillage qui prenne en compte la position du diaphragme, et ne

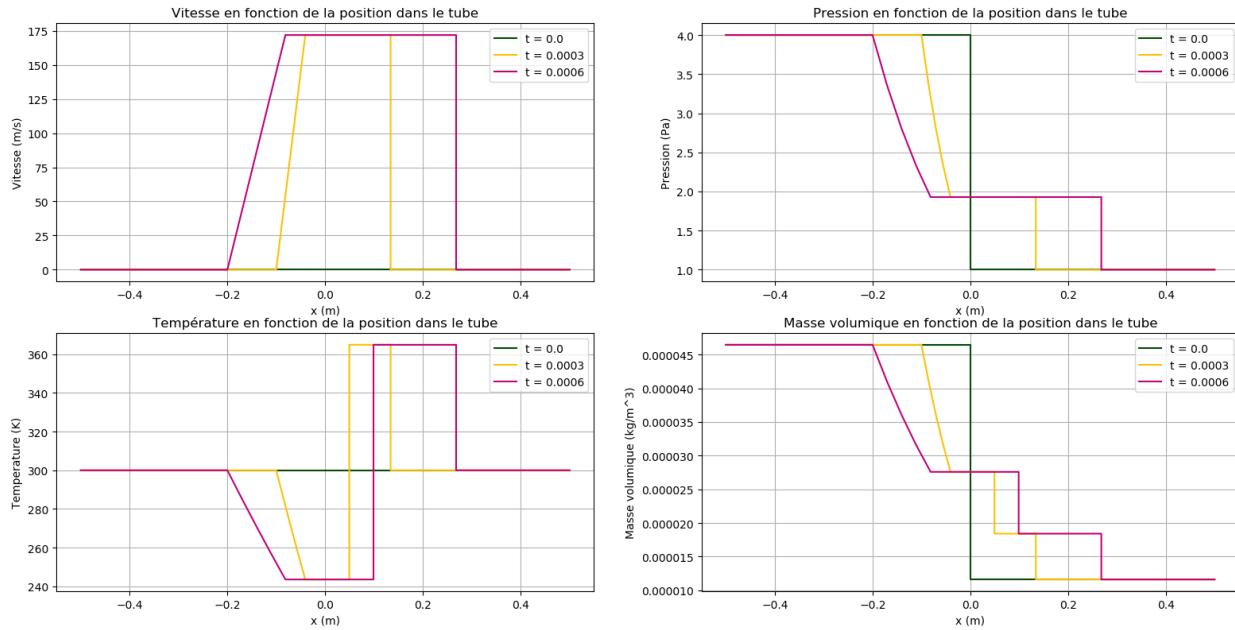


Figure 4.9 Propriétés dans le tube, pour un ratio initial de pression de 100

pas avoir de maille qui le traverse, nous définissons avec CADYF la courbe du diaphragme $((0; 0), (0; 0.2))$. Aucune condition ne sera imposée dessus directement.

Propriétés du fluide

Nous choisissons de travailler avec de l'air, que nous supposons être un gaz parfait. Cette hypothèse implique que, pour toute pression et température, $\gamma = 1.4$ et $R_{air} = 287 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$. Pour rappel, R_{air} est la constante de gaz de l'air, différente de R la constante universelle des gaz parfaits. Nous nous plaçons à $p_{ref} = 5000 \text{ Pa}$ et $T_{ref} = 175 \text{ K}$. La relation des gaz parfaits nous donne alors $\rho_{ref} = 0.1 \text{ kg}/\text{m}^3$. De plus, la relation de Mayer $c_p - c_v = R_{air}$ et $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ donnent $c_v = \frac{R_{air}}{\gamma-1}$ et $c_p = \gamma c_v$, ce qui donne $c_p = 1004.5 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$.

La viscosité quant à elle, variera dans nos différents cas. Pour se rapprocher de la théorie développée précédemment, il faut que cette viscosité soit faible.

Remarque : Pour plus de précision, il aurait été préférable d'adimensionner le problème pour déterminer quelles valeurs de la viscosité sont assez faibles.

La conductivité est arbitrairement fixée à 1.

Finalement, les propriétés fixées dans CADYF sont les suivantes :

$$\text{masse volumique} = 0.1 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$c_p = 1004.5 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

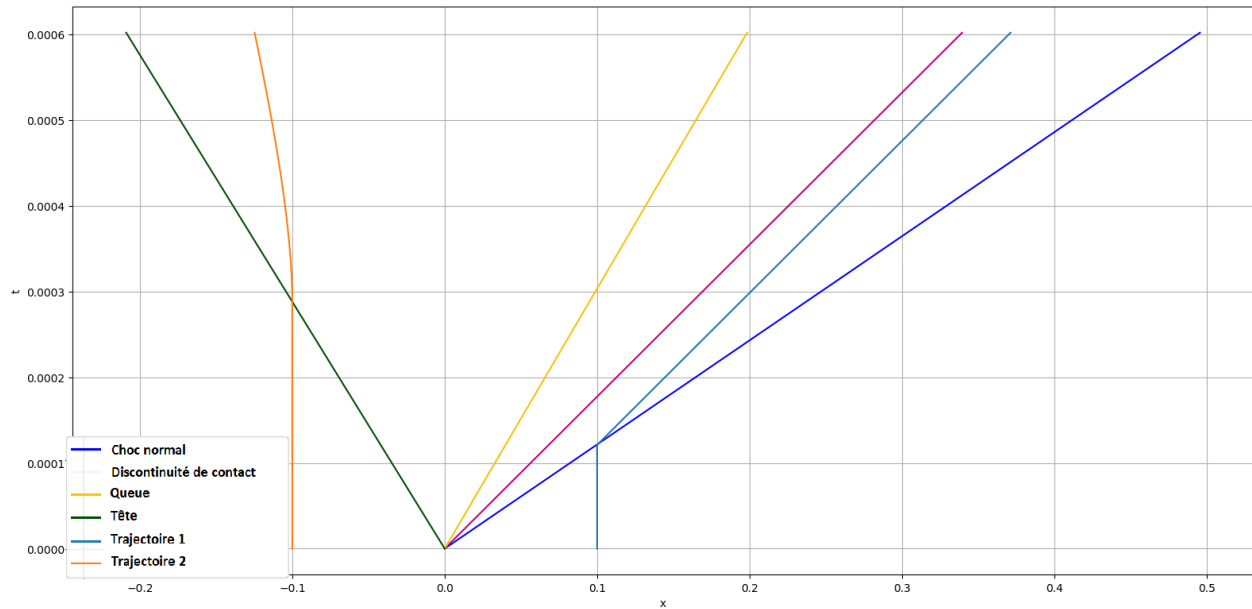


Figure 4.10 Trajectoire de deux particules et des zones caractéristiques dans le tube à choc pour un ratio de pression de 100

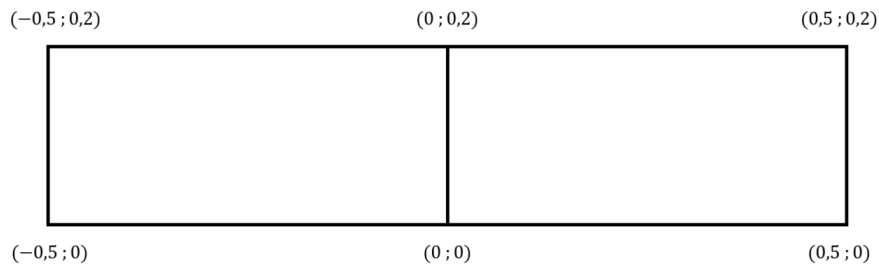


Figure 4.11 Représentation du tube avec CADYF

viscosité = variable

conductivité = 1.0 W/(m.K)

$C_{alpha} = 1/P_{ref} = 1/5000 \text{ 1/Pa}$

$C_{beta} = 1/T_{ref} = 1/175 \text{ 1/K}$

Remarque : Ces propriétés sont les mêmes de chaque côté du diaphragme car ce sont des propriétés de références.

Conditions initiales et conditions aux limites

Nous fixons les conditions initiales avec la fonction usager *usr_init*. Dans la partie de gauche, nous avons $u_4 = 0 \text{ m/s}$, $v_4 = 0 \text{ m/s}$, $P_4 = 10000 \text{ Pa}$ et $T_4 = 175 \text{ K}$ et à droite du diaphragme

nous avons $u_1 = 0$ m/s, $v_1 = 0$ m/s, $P_1 = 5000$ Pa, $T_1 = 175$ K d'après la notation de la figure (4.5). Le ratio initial de pression $\frac{P_4}{P_1}$ vaut donc 2.

Nous rappelons qu'en compressible, CADYF utilise les pression et température mécaniques, qui sont liées aux pression et température absolues par $p_{abs} = p_{mec} + p_{ref}$ et $T_{abs} = T_{mec} + T_{ref}$. Il faut prendre cela en compte quand nous fixons les conditions initiales et aux limites.

Finalement, nous nous retrouvons à poser les conditions initiales suivantes dans CADYF :

- $u_1 = u_4 = 0$ m/s
- $v_1 = v_4 = 0$ m/s
- $P_1 = 0$ Pa et $P_4 = 5000$ Pa
- $T_1 = 0$ K et $T_4 = 0$ K

D'après la théorie du tube à choc développée précédemment, le problème est entièrement déterminé par le ratio de pression initial. Nous fixons les vitesses d'entrée et de sortie nulles, comme à l'instant initial. La simulation est arrêtée avant que les fronts d'onde atteignent les extrémités du tube. Le fluide ne sera donc jamais perturbé à l'entrée ou à la sortie, et sa vitesse restera nulle tout au long de la simulation. Nous imposons également une condition de non-glissement ou symétrie sur les parois du tube, ce qui revient à imposer $v = 0$ en haut et en bas du tube. Les autres grandeurs sont laissées libres. Voir résumé des conditions initiales figure (4.12).

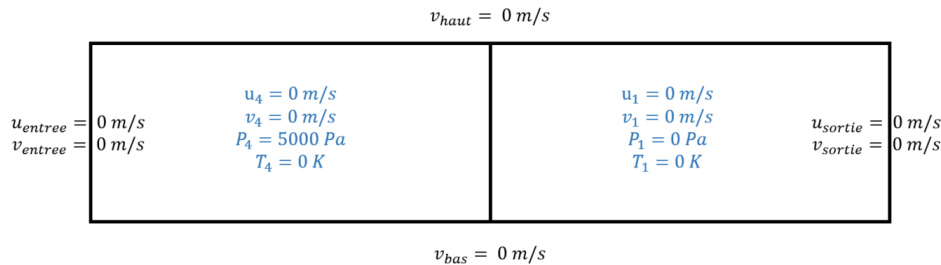


Figure 4.12 Conditions initiales (bleu) et conditions aux limites (noir) telles qu'imposées avec CADYF

4.2.3 Détermination des meilleurs conditions d'expérimentation numérique

Quelques tests préliminaires sont nécessaires pour mieux comprendre le cas du tube à choc et comprendre quels paramètres de simulation vont influencer la précision des résultats. Nous devons évaluer l'influence du maillage de départ, du pas de temps de résolution, de la viscosité, et de l'adaptation de maillage. Cette étude sur le tube sans stabilisation nous permettra d'avoir une bonne solution de référence, pour ensuite évaluer les méthodes de

capture de choc sans perturbations externes. Nous choisissons de travailler avec un pas de temps constant, afin de maîtriser pleinement la taille des pas de temps, pour en comprendre les effets sur la simulation du tube à choc.

Résultats attendus

Avec les conditions aux limites et initiales présentées précédemment, les développements de la partie précédente nous donnent la solution théorique non visqueuse fig. (4.13). Nous obtenons aussi une estimation de la durée de la simulation pour ne pas atteindre les bords du tube :

$$t_{max} = 1,626.10^{-3} \text{ s.}$$

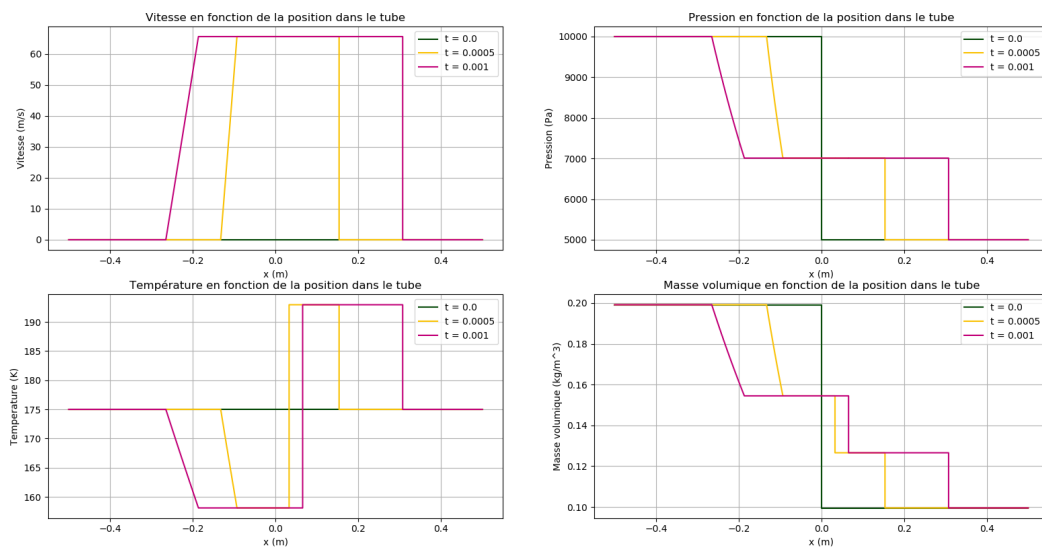


Figure 4.13 Résultats théoriques attendus pour le tube à choc simulé avec CADYF (vitesse, pression, température et masse volumique à différents temps)

Indicateurs de précision de la solution

Comme dit précédemment, nous allons commencer avec un pas de temps constant. Nous choisissons $\Delta t = 5.10^{-6}$ s, ce qui nous fera un total de 325 itérations temporelles pour résoudre le problème.

Premières observations Nous commençons par évaluer les premiers résultats de CADYF, et constatons qu'ils sont proches de la solution théorique (fig. 4.14). L'évolution spatiale et temporelle de la vitesse, température, pression et masse volumique dans le tube présentent les mêmes tendances. En revanche, les forts gradients ne sont pas bien simulés. Les brusques changements de valeurs dans les paramètres physiques, dus au choc normal et à l'onde de

choc, ont une forme plus douce, et nous observons également des oscillations autour de ces discontinuités. Ce n'est pas étonnant, puisque les chocs ne sont pas stabilisés. Cependant, une partie de ces oscillations peuvent être corrigées par de bons choix de maillage, viscosité et pas de temps.

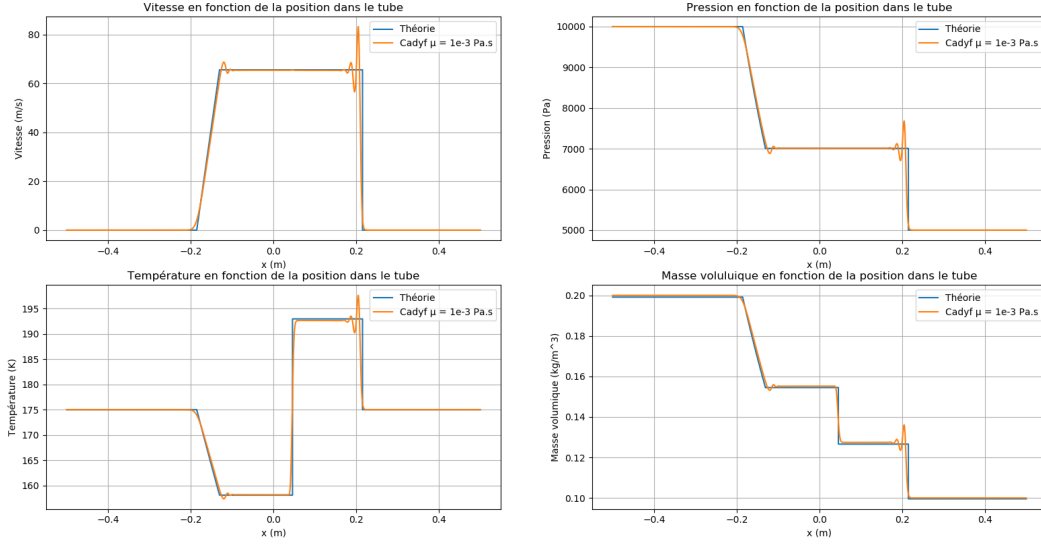


Figure 4.14 Évolution spatiale des propriétés dans le tube à choc, pour un maillage de 1×1000 éléments et une viscosité de 10^{-3} Pa.s

Pour cela, il nous faut quantifier ces observations pour tirer des conclusions plus précises sur l'influence de la viscosité, du maillage et de l'adaptation de celui-ci.

Erreur relative Pour évaluer la précision des résultats obtenus, nous proposons, pour le tube à choc, une erreur relative η_{rel} de type $L2$ à $t = t_j$:

$$\eta_{rel}(t_j) = \frac{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [\phi_{th}(x_i, t_j) - \phi_{num}(x_i, t_j)]^2}}{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \phi_{th}(x_i, t_j)^2}} \quad (4.32)$$

avec $\phi_{th}(x, t)$ la solution théorique et $\phi_{num}(x, t)$ la solution expérimentale

Il faut garder à l'esprit que même si nous parvenions à une solution numérique parfaite, cette erreur ne serait pas nulle. En effet, la solution théorique est non visqueuse, contrairement à la solution calculée avec CADYF. Cependant, cela peut être approximativement vu comme une erreur de répétition, une constante que nous rajoutons à l'erreur réelle, et n'empêche donc pas une étude comparative.

Dépassement relatif Pour évaluer l'importance des oscillations, nous choisissons de mesurer un dépassement relatif. Nous travaillons avec la vitesse, car elle ne présente qu'un plateau, la vitesse de déplacement du choc, qui peut être obtenue théoriquement. Elle est de $u_p = 65.63$ m/s dans nos conditions de simulation. Le dépassement maximum correspondra à la valeur maximale des oscillations, donc la valeur maximale prise par la vitesse (voir fig. 4.15). Si la vitesse obtenue avec CADYF est systématiquement inférieure à u_p , il n'y a pas de dépassements, on le fixe alors à 0. Le dépassement relatif sera calculé :

$$\text{dépassement relatif} = \frac{\text{dépassement max} - u_p}{u_p} \text{ s'il y a dépassement, } 0 \text{ sinon} \quad (4.33)$$

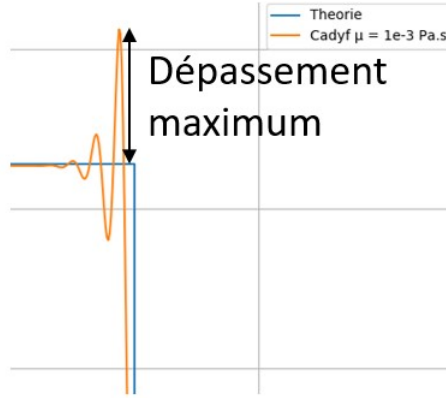


Figure 4.15 Détermination du dépassement maximal

Généralisation à tous les pas de temps Plutôt que d'étudier un seul pas de temps, nous pouvons faire une moyenne de ces indicateurs sur tous les pas de temps que nous avons extraits de notre simulation, afin de lisser d'éventuelles singularités. Nous excluons le temps initial $t = 0$ s, puisque nous imposons la condition initiale, elle est considérée comme exacte. Si nous avons extrait N pas de temps, en excluant $t = 0$, alors cette moyenne s'exprime :

$$\text{erreur relative moyenne} = \frac{\sum_{t=1}^N \eta_{rel}(t)}{N - 1} \quad (4.34)$$

$$\text{dépassement relatif moyen} = \frac{\sum_{t=1}^N \text{dépassement_relatif}(t)}{N - 1} \quad (4.35)$$

avec $erreur(t)$ calculée comme dans (4.32) et $dépassement_relatif(t)$ par (4.33). Le temps initial est connu, nous l'imposons, il ne compte donc pas dans le calcul de l'erreur.

Nous n'utilisons pas encore d'indicateur de largeur de choc, que nous gardons pour l'évaluation des méthodes de stabilisation.

Maillage

Nous avons tout d'abord vérifié que le nombre d'éléments en hauteur n'influait pas sur la précision des résultats, puisque le problème est 1D. Pour évaluer cela, nous avons effectué des simulations à une viscosité donnée. Nous avons choisi $\mu = 0.1$ Pa.s, puisque nous n'observons pas encore d'oscillations et de dépassements pour cette viscosité. Comme les oscillations contribuent beaucoup à l'erreur, nous prenons une viscosité où il n'y en a pas pour être plus sensible aux modifications apportées par le maillage. La hauteur du tube était divisée en 1 ou 20 éléments (donc une hauteur d'élément de 0.2 m ou 0.01 m respectivement). Le nombre d'éléments dans la largeur a été successivement de 100, 200, 400, 800 et 1600. La coupe est faite au centre du tube, suivant la droite $(-0.5, 0.1)$, $(0.5, 0.1)$. Des coupes ont été faites à d'autres endroits (25% et 15% de la hauteur du tube) avec des résultats similaires.

Nous étudions les erreurs relatives moyennes (sur tous les pas de temps) de la vitesse pour les différents maillages. À partir des résultats présentés figure (4.16), nous constatons qu'en effet, le nombre d'éléments dans la hauteur n'influence pas la précision des résultats. En revanche, les temps de calcul sont significativement moins élevés. Par exemple, avec 325 pas de temps (soit un pas de temps de $\Delta t = 5.10^{-6}$ s) pour un maillage de 1600 éléments dans la longueur, le résultat est obtenu en 30 min quand il y a 20 éléments de hauteur, contre 1 min avec un élément. Les tests ont été faits dans les mêmes conditions de simulation (même machine). Nous allons donc travailler avec 1 élément dans la hauteur.

Nous remarquons aussi que pour une viscosité donnée, à partir d'un moment, le nombre d'éléments dans la largeur ne change pas sensiblement la précision des résultats. Ici, la limite se trouve aux alentours de 800 ou 1000 éléments. Cependant, cette limite dépend possiblement de la viscosité en plus du maillage, il conviendra de faire une étude couplée pour tirer une conclusion définitive.

Viscosité

Nous commençons par étudier le comportement de la solution pour un maillage et un temps donné. À partir de l'étude précédente, nous choisissons de travailler avec un maillage de 1000 éléments de largeur et 1 de hauteur. Nous nous plaçons à $t = 7.10^{-4}$ s et faisons varier la viscosité de 1 à 10^{-6} Pa.s. Les résultats, fig. (4.17) montrent que plus la viscosité diminue, plus l'onde de choc et l'onde de détente sont mieux représentées, les courbes sont plus marquées, moins arrondies. En revanche, des oscillations apparaissent quand la viscosité

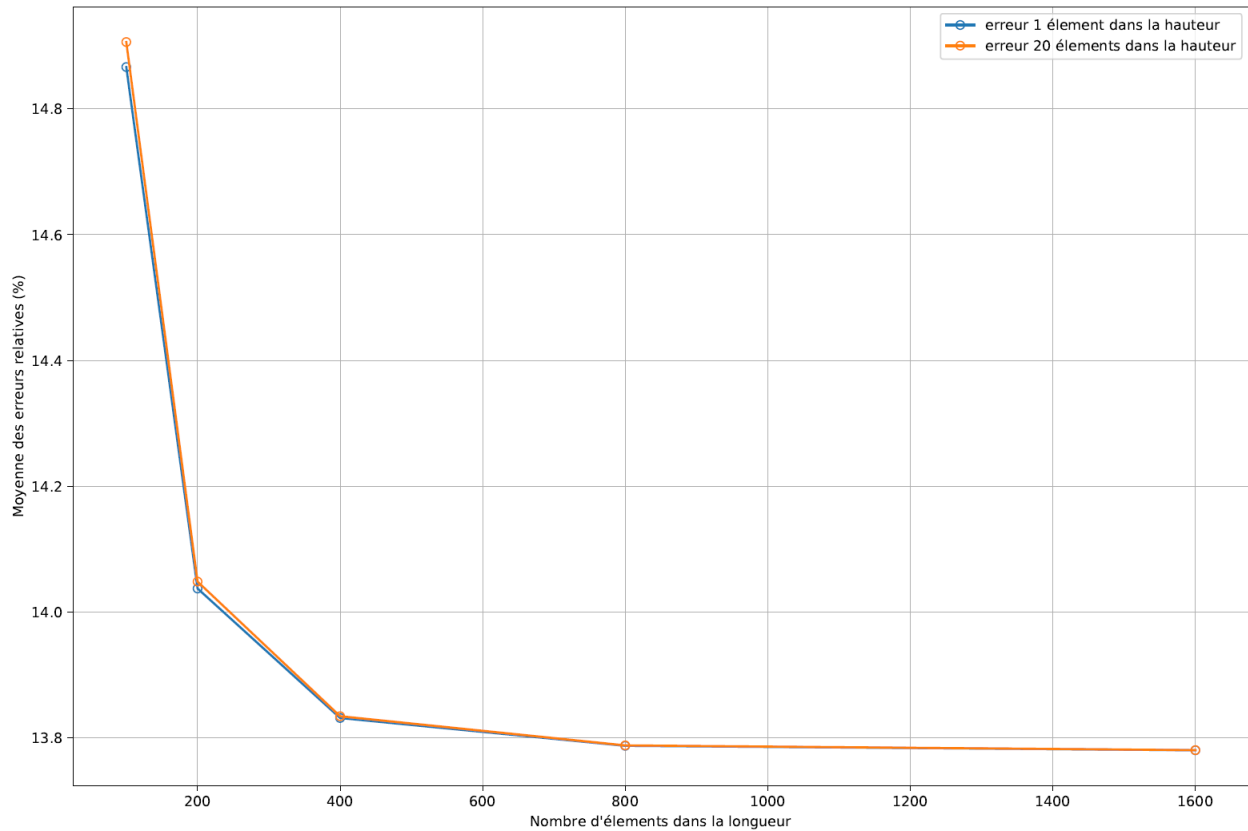


Figure 4.16 Moyenne des erreurs relatives sur la vitesse pour différents maillages et une viscosité de 0.1 Pa.s

diminue. Cependant, l'amélioration de la solution et l'amplitude des oscillations semblent bornées. À partir de $\mu = 10^{-3}$ Pa.s, nous ne discernons plus vraiment les courbes.

Nous pouvons mieux évaluer la précision de la solution en calculant l'erreur relative et le dépassement comme précédemment (fig. 4.18). Toujours pour le même maillage (1x1000 éléments), l'erreur sur la solution semble bien stagner pour des viscosités de 10^{-3} Pa.s ou moins. De même, pour les oscillations, l'amplitude n'augmente que faiblement à partir de 10^{-4} Pa.s. Cependant, tout comme les erreurs semblaient limitées par le maillage, l'erreur et les dépassements sont peut-être limités par la viscosité aussi. Nous allons maintenant effectuer des tests plus complets pour voir s'il y a une limite de précision de la solution et une limite d'oscillations, et pour quels couples maillages/viscosités ces limites sont valides.

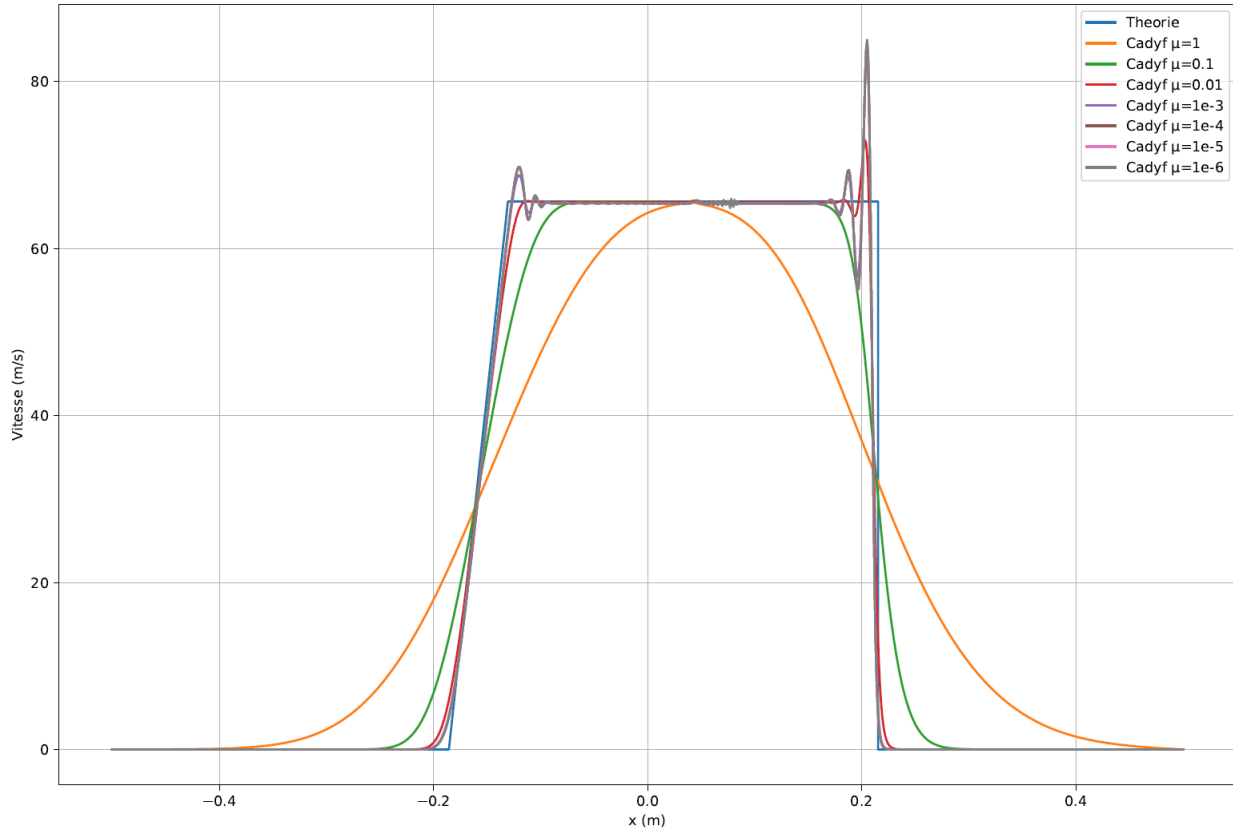


Figure 4.17 Vitesse dans le tube à choc pour un maillage de 1×1000 éléments à $t = 7.10^{-4}$ s

Limite de précision maillage/viscosité

Pour vérifier que les tendances que nous avons observées dans les deux parties précédentes, et voir s'il y a une corrélation entre elles, nous allons effectuer des tests sur une plus large gamme de viscosités et de finesses de maillage. La viscosité est prise entre 10^{-3} Pa.s et 10^{-10} Pa.s et nous résolvons toujours les équations transitoires avec un pas de temps de 5.10^{-6} s. Pour des viscosités supérieures à 10^{-4} Pa.s, nous sommes trop loin de l'approximation de fluide parfait, et les résultats ne seront pas significatifs. Le maillage quant à lui sera constitué de 1000 à 16 000 éléments dans la longueur, le nombre d'éléments étant multiplié par 2 à chaque fois. Nous conserverons 1 élément dans la hauteur dans tous les cas. Comme précédemment, nous étudions les dépassements relatifs, calculés avec (4.35) et l'erreur relative de la solution avec (4.34).

Nous constatons qu'en effet, pour un maillage donné, l'erreur sur la solution (fig. 4.19) et l'amplitude des oscillations (fig. 4.20) sont bornées. Plus le maillage est fin, plus la borne est atteinte rapidement quand les viscosités diminuent. De plus, plus le maillage est fin, plus les erreurs et dépassements relatifs sont bas. Il faut noter que ces baisses d'erreurs et d'oscillations

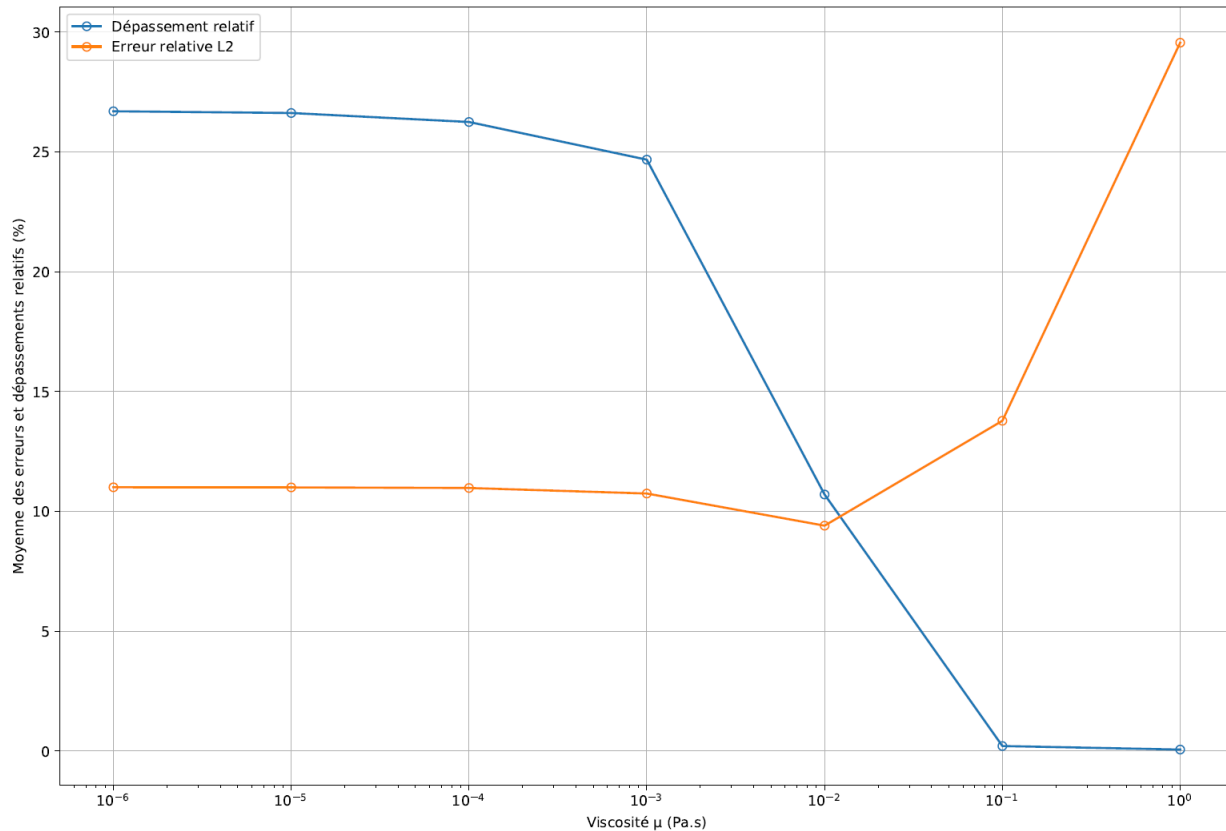


Figure 4.18 Moyennes des erreurs relatives et dépassements de la solution sur la vitesse pour différentes viscosités et un maillage de 1x1000 éléments

sont de l'ordre du pourcent. La réduction d'erreur se fait de plus en plus lentement au fur et à mesure que le maillage est raffiné (voir fig. (4.21)). Nous remarquons que même dans les meilleurs cas, l'erreur ne descend pas sous les 10%, ce qui est important. Deux explications sont envisageables. Tout d'abord, la solution numérique présente des oscillations, qui ne disparaissent pas avec le raffinement du maillage. L'erreur ne pourra jamais être nulle tant que les oscillations persistent. De plus, la précision des résultats peut être limitée en espace, mais aussi en temps. Il est donc probable que l'erreur temporelle domine ici, ce qui nous empêche d'évaluer correctement l'influence du raffinement du maillage et de la viscosité.

Finalement, d'un point de vue de la précision des résultats, nous pouvons conclure qu'il faut travailler avec des viscosités inférieures à $\mu = 10^{-5}$ Pa.s, voire $\mu = 10^{-6}$ Pa.s. Pour ce qui est du maillage, un bon compromis entre la précision du maillage et la vitesse du calcul serait de 2000 éléments dans la longueur pour les calculs les plus rapides, 4000 sinon. En effet, au-delà de ces limites, les performances ne sont pas sensiblement améliorées pour ce pas de temps (moins de 0.2% de différence entre 2000 et 16000 éléments, pour l'erreur comme pour les dépassements), alors que le coup de calcul est bien plus important avec 16000 éléments.

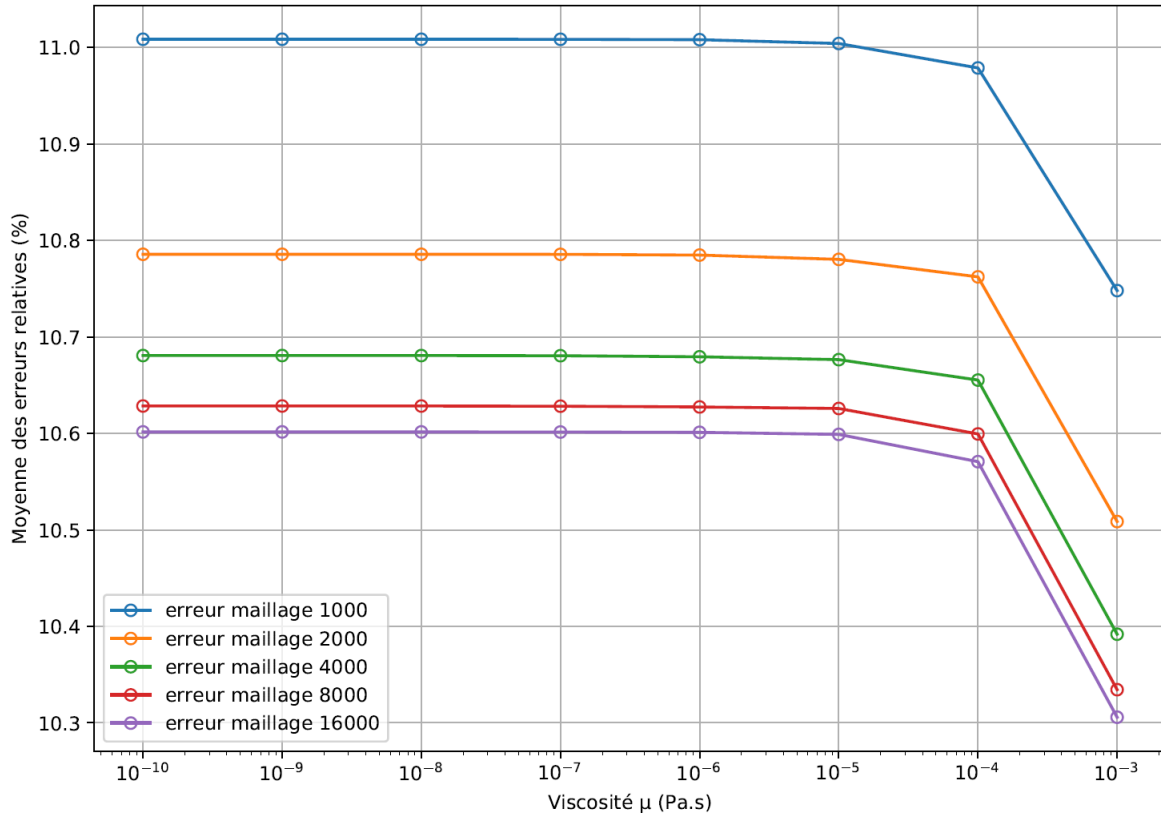


Figure 4.19 Erreurs sur la vitesse pour différentes viscosités et différents maillages

Pas de temps

Comme dit précédemment, une autre source d'explication des limites de précision pour un cas donné peut être la taille du pas de temps. Précédemment, nous travaillions avec un pas de temps de $5 \cdot 10^{-6}$ s, soit 325 pas de temps pour une simulation. Voyons ce qui se passe si nous réduisons ce pas de temps. À partir des observations précédentes, nous choisissons un maillage de 4000 éléments dans la largeur et une viscosité de $\mu = 10^{-5}$ Pa.s. Nous allons prendre successivement 325, 650, 1300, 2600, 4000, 5200, 6000, 6500, 7000, 7500, 8000, 9000 puis 10400 pas de temps, ce qui fait des pas de temps compris entre $5 \cdot 10^{-6}$ s et $1.5 \cdot 10^{-7}$ s. L'évolution des erreurs relatives et dépassements relatifs sont présentés fig. 4.22 et 4.23.

Ces deux figures nous montrent qu'en effet, en réduisant la taille du pas de temps, nous améliorons la précision et la stabilité des résultats. Cependant, cette réduction est de plus en plus lente, particulièrement à partir d'un pas de temps de $3.1 \cdot 10^{-7}$ s, soit 5200 itérations temporelles. Ce n'est pas surprenant puisque nous tendons de plus en plus lentement vers un pas de temps nul. En revanche, nous voyons que les dépassements augmentent à partir de $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-7}$ s, soit 6500 pas de temps. En plus d'être plus lent, prendre un pas de

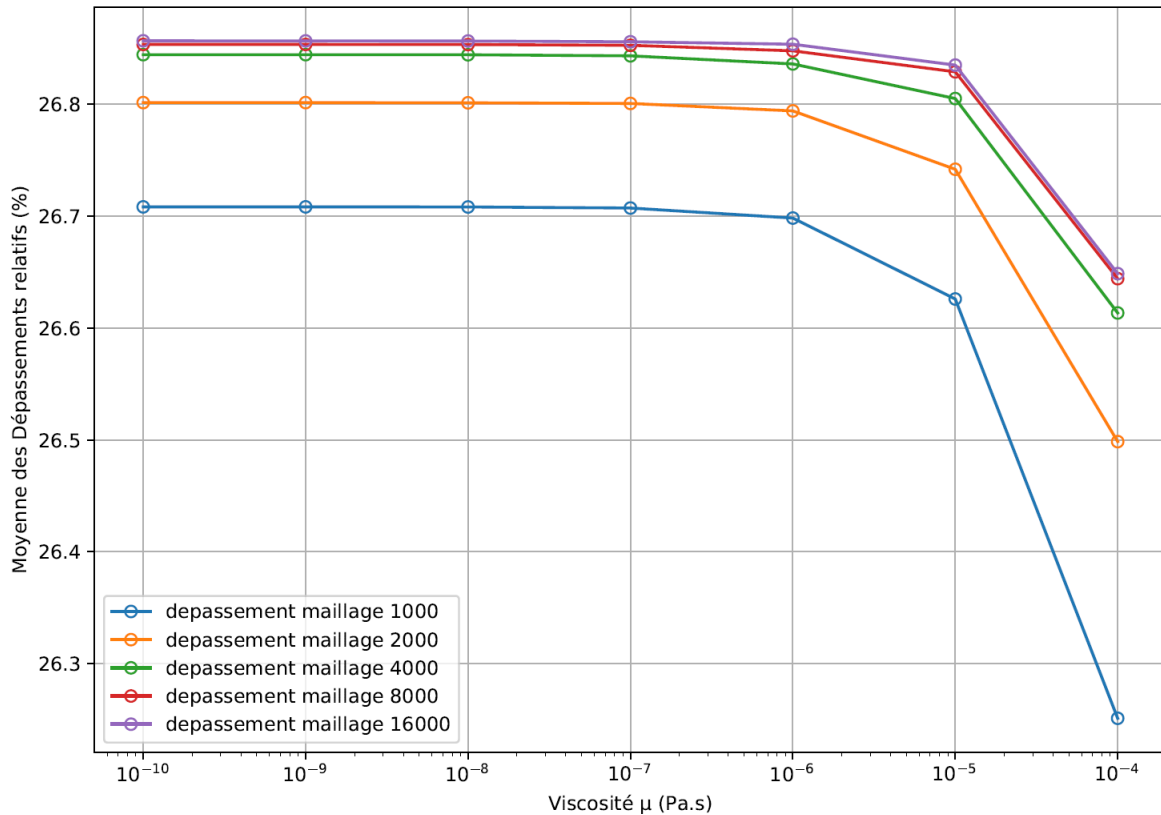


Figure 4.20 Dépassements relatifs sur la vitesse pour différentes viscosités et différents maillages

temps trop petit fait apparaître des instabilités et est donc contre indiqué. Nous allons donc travailler entre des pas de temps compris entre 4.10^{-7} s et $2.7.10^{-7}$ s, soit 4000 et 6000 pas de temps pour une simulation de $1.626.10^{-3}$ s. Au delà, les pas de temps sont trop faibles, trop proches de la limite de précision de la machine pour des réels simple précision, et les résultats ne sont plus cohérents.

Nous avons testé les pas de temps adaptatifs avec différentes tolérances. Les pas de temps moyens se situent autour de 3.10^{-7} s, ce qui n'est pas recommandé. Nous continuerons donc de travailler avec des pas de temps fixes.

En plus du choix de la viscosité et du raffinement du maillage, le choix du pas de temps est crucial pour avoir des résultats de bonne qualité.

Adaptation

Les erreurs de la solution numérique proviennent principalement du mauvais rendu des forts gradients. La solution à cet endroit est plus douce qu'elle ne devrait l'être et peut présenter

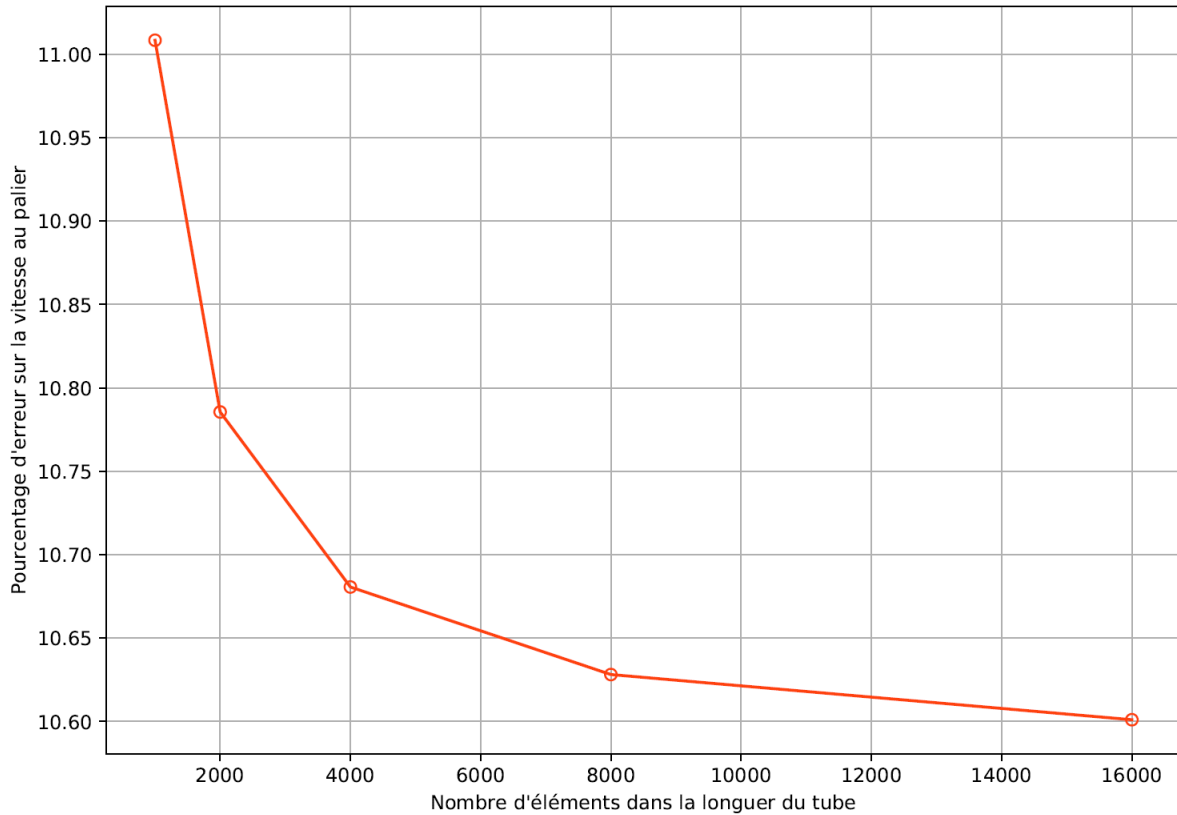


Figure 4.21 Évolution de l'erreur en vitesse pour différents maillages et $\mu = 10^{-10}$ Pa.s

des oscillations en amont ou en aval. Il est donc légitime de se demander si utiliser un maillage adaptatif, qui sera raffiné aux endroits des forts gradients, ne permet pas d'obtenir de meilleurs résultats.

Nous comparons un maillage de 1×2000 éléments non adaptés à différents maillages de départ présentés fig. 4.24, 4.25 et 4.26 qui seront adaptés globalement. La cible d'erreur est de 0.5 (donc nous cherchons à réduire l'erreur de moitié après un cycle d'adaptation). L'erreur est calculée pour les normes énergie, thermique, et $L2$ en pression. Nous prenons une viscosité de 10^{-2} Pa.s. C'est au-dessus du seuil physique d'un écoulement parfait fixé précédemment, mais nous avons rencontré des difficultés d'adaptation de maillage pour les cas avec une viscosité plus faible, comme 10^{-6} Pa.s ou 10^{-4} Pa.s, à cause de l'apparition d'éléments à aire négative.

L'évaluation des propriétés, puis plus tard des erreurs, se fait à $t = 7 \cdot 10^{-4}$ s. L'évolution de la masse volumique pour les différents maillage de départ sont présentés fig. 4.27. Nous observons que les solutions sont proches, sans être les mêmes. À l'oeil nu, il n'est pas possible de dire si une solution est meilleure que l'autre. Nous remarquons aussi un léger décalage entre les plateaux théoriques et simulés, mais c'était déjà le cas dans les premiers tests fig.

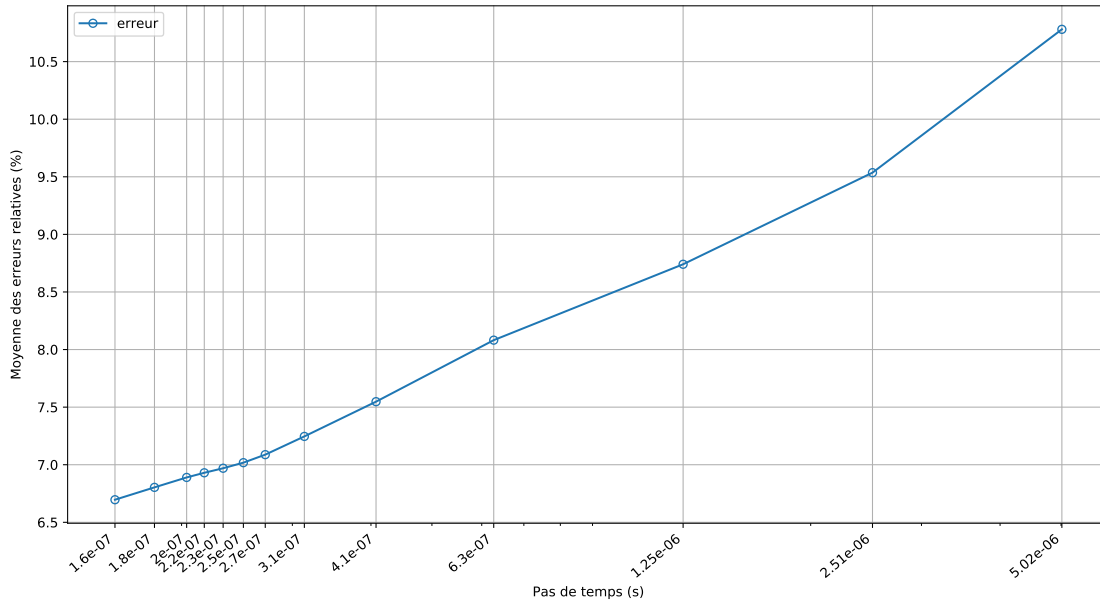


Figure 4.22 Évolution de l'erreur en vitesse pour différents pas de temps

4.14.

Nous procédons à un calcul d'erreur, à partir de (4.32), à $t = 7.10^{-4}$ s, pour chaque variable (vitesse, pression, température, et masse volumique). Nous constatons fig. 4.28, que les résultats sont équivalents, voire meilleurs sans adaptation plutôt qu'avec. De plus, les temps de calcul sont plus longs avec adaptation, parce qu'il y a beaucoup plus d'éléments, qu'il faut évaluer les erreurs, calculer le nouveau maillage et transférer les solutions d'un maillage à l'autre. Cela s'explique par la nature du problème. Le tube à choc est 1D, tandis que l'adaptation se fait en 2D. Beaucoup d'éléments sont générés dans le sens traverse, pour lequel nous avons montré qu'un seul élément était nécessaire. Les erreurs d'interpolation de la solution lors du passage d'un maillage à l'autre ne sont pas compensées par l'amélioration de la solution grâce à l'adaptation. Dans notre cas, le maillage 1D est suffisamment fin pour capturer la physique.

Conclusion

Finalement cette étude nous montre qu'il est mieux de travailler avec un maillage de 1 élément de hauteur, et entre 2000 et 4000 dans la largeur. Des tests à pas de temps plus faibles donneraient peut être des maillages plus fins comme cible, mais celle-ci est suffisante pour les premiers tests. La viscosité doit être au moins inférieure à 10^{-5} Pa.s. Le pas de temps sera fixe et compris entre 4.10^{-7} s et $2.7.10^{-7}$ s, soit 4000 à 6000 pas de temps pour

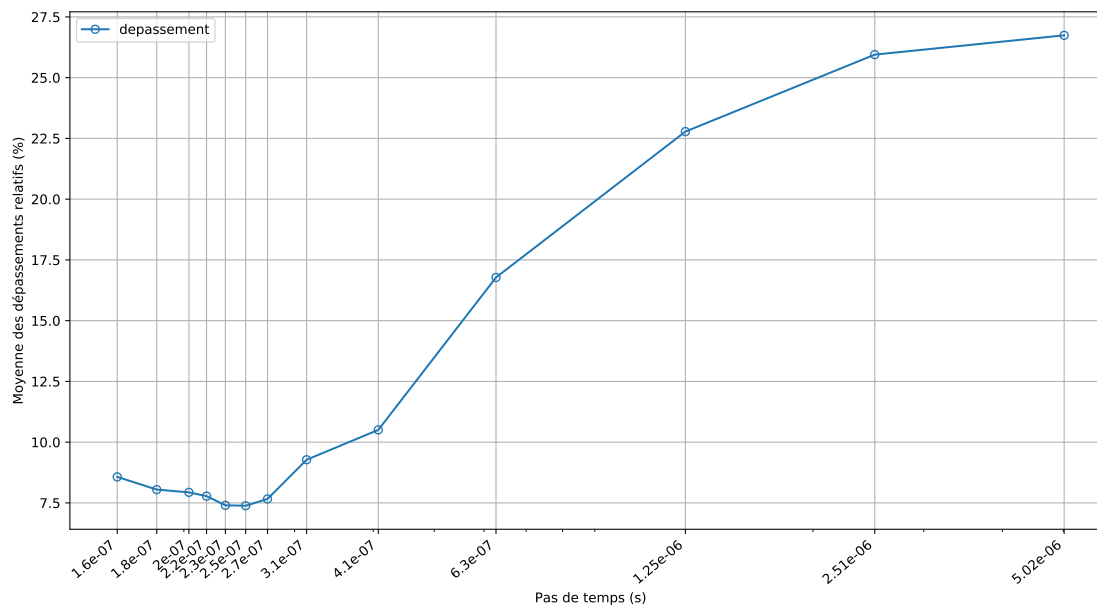


Figure 4.23 Évolution des dépassements de la vitesse pour différents pas de temps

une simulation. Finalement, il est plus intéressant de ne pas adapter le maillage, puisque le cas est 1D. Nous résumons ces choix dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1 Choix optimaux des paramètres numériques pour la simulation du tube à choc

Paramètre	Valeur
Hauteur maillage	1 élément
Largeur maillage	2000 à 4000 éléments
Viscosité	Inférieure à 10^{-5} Pa.s
Pas de temps	Fixe, entre 4.10^{-7} s et $2.7.10^{-7}$ s
Adaptation de maillage	Sans

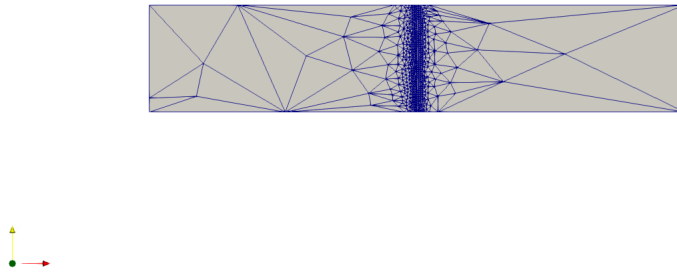


Figure 4.24 Maillage 1 de départ pour le cas du tube à choc avec adaptation

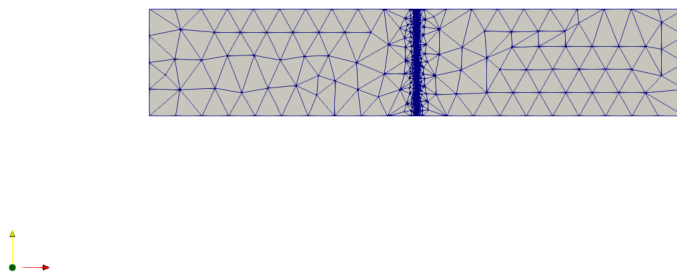


Figure 4.25 Maillage 2 de départ pour le cas du tube à choc avec adaptation

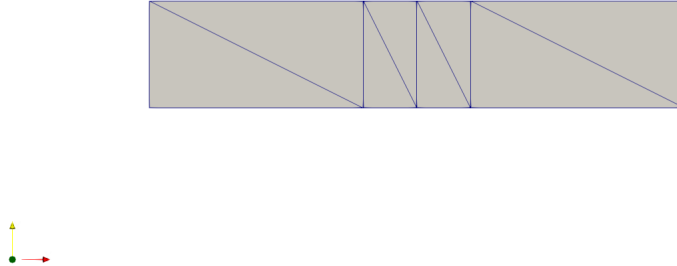


Figure 4.26 Maillage 3 de départ pour le cas du tube à choc avec adaptation

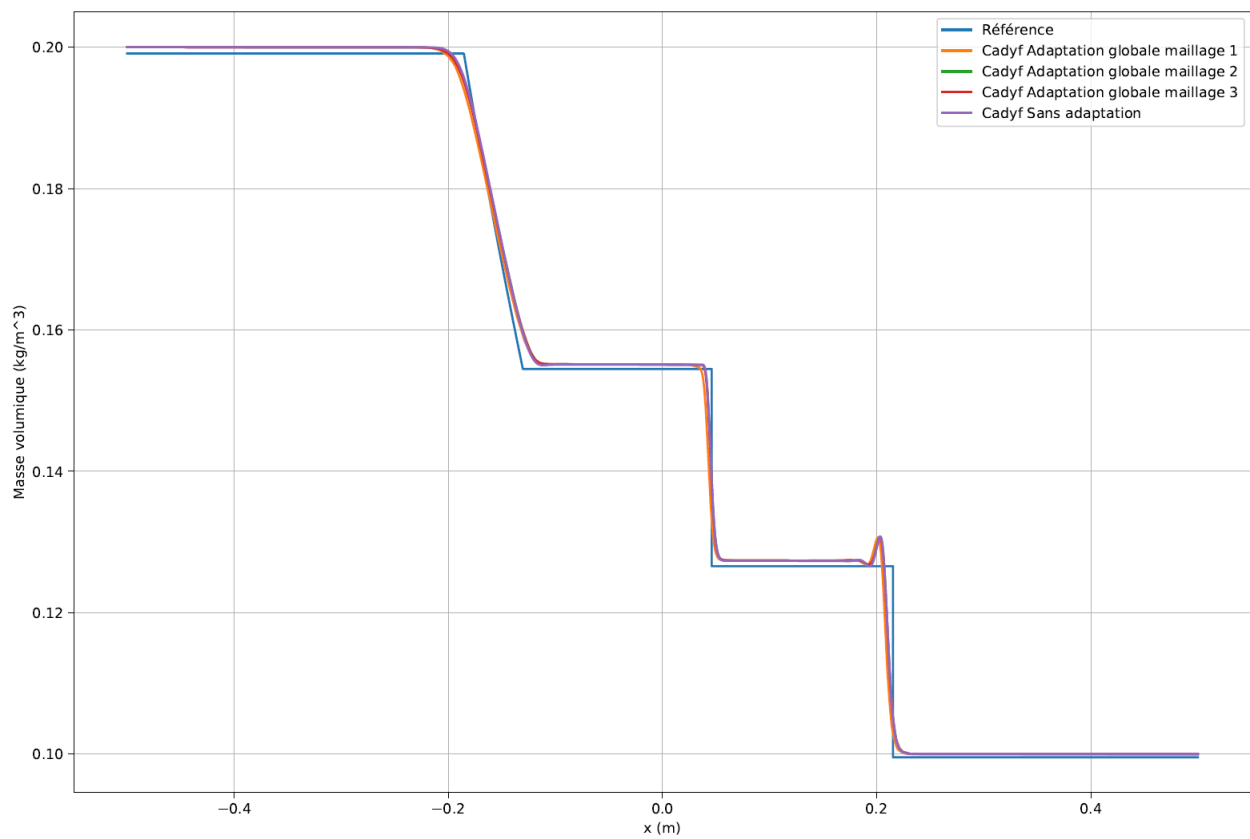


Figure 4.27 Variation de la masse volumique avec et sans adaptation dans le tube à choc à $t = 7.10^{-4}$ s

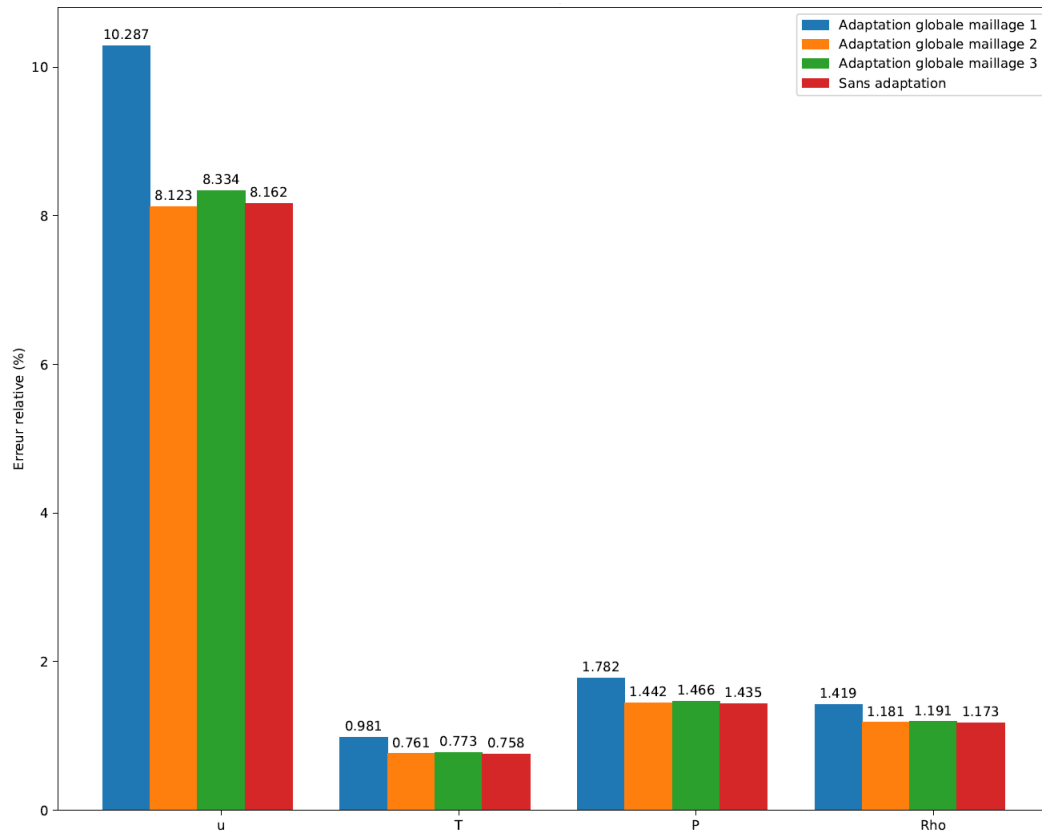


Figure 4.28 Évolution de l'erreur relative pour différentes propriétés dans un tube à choc ($\mu = 10^{-2}$ Pa.s) et différents maillages de départ

CHAPITRE 5 MISE EN PLACE D'UNE MÉTHODE DE CAPTURE DE CHOC

Dans un premier temps, nous mettons en place la méthode proposée par Codina dans [30]. La méthode, initialement prévue pour des équations de convection-diffusion sera adaptée aux équations de Navier-Stokes. Nous présenterons ensuite la méthode proposée par Tezduyar et Senga [1, 15], développée pour les équations de Navier-Stokes compressibles. Nous pointerons quelques problèmes inhérents à chaque méthode.

5.1 Capture de choc de Codina

5.1.1 Développement théorique

Codina propose d'ajouter à SUPG une méthode de capture de choc, pour l'équation de convection diffusion (5.1). Nous allons l'adapter aux équations de Navier-Stokes. Nous notons ϕ la variable physique diffusée. Pour adapter cette méthode aux équations de Navier-Stokes, nous allons développer deux coefficients de capture de choc au lieu d'un, un par variable d'intérêt dans SUPG (\vec{u} et T). La pression n'intervient pas dans SUPG, donc même si elle fait parti de nos variables en formulation primitive, il n'a pas lieu de lui calculer un coefficient de capture de choc.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi - \kappa \Delta \phi = f \quad (5.1)$$

Nous rappelons que les W sont les fonctions test. La forme faible de l'équation de convection diffusion devient :

$$\int_{\Omega} W_h \left[\frac{\partial \phi_h}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi_h \right] d\Omega + \kappa \int_{\Omega} \nabla W_h \cdot \nabla \phi_h d\Omega + \underbrace{\sum_{Nb_{elem}} \int_{\Omega^e} \zeta_h R(\phi_h) d\Omega}_{\text{stabilisation et capture choc}} = \int_{\Omega} W_h f d\Omega \quad (5.2)$$

avec $R(\phi_h)$ le résidu. Nous l'exprimons pour l'équation de convection-diffusion, mais bien entendu, il conviendra de prendre le résidu de l'équation associée à la variable diffusée lors de l'implémentation. R pourra donc être le résidu de l'équation de conservation de la masse, de la quantité de mouvement ou de l'énergie.

$$R(\phi_h) = \vec{u} \cdot \nabla \phi_h - \kappa \Delta \phi_h - f \quad (5.3)$$

Le terme de stabilisation SUPG simple est :

$$\zeta_h = \tau_{supg} \vec{u} \cdot \nabla W_h \quad (5.4)$$

Pour ajouter de la capture de choc à SUPG, on modifie ζ , en lui ajoutant un temps intrinsèque de capture τ_{choc}

$$\zeta'_h = \underbrace{\tau_{supg} \vec{u} \cdot \nabla W_h}_{\zeta_{supg}} + \underbrace{\tau_{choc} \vec{u}_{||} \cdot \nabla W_h}_{\zeta_{choc}} \quad (5.5)$$

Le nouveau terme τ_{choc} est ajouté non plus dans la direction de l'écoulement (de \vec{u}), mais dans la direction du gradient de la variable transportée. Nous appelons cette direction $\vec{u}_{||}$, et elle est définie par :

$$\vec{u}_{||} := \frac{\vec{u} \cdot \nabla \phi_h}{|\nabla \phi_h|^2} \nabla \phi_h, \text{ si } |\nabla \phi_h| \neq 0 \quad (5.6)$$

Il faut faire attention à ce qui se passe quand le gradient est trop petit, car nous faisons apparaître une forme indéterminée. Quand le gradient est faible, il n'y a pas de choc, donc nul besoin de stabiliser. Nous pouvons alors dire que le terme de stabilisation est nul quand le gradient est trop petit. Nous travaillons avec des réels en double précision, il ne sert à rien de manipuler des valeurs plus petites que l'épsilon machine pour ces réels en double précision. Nous fixons donc la définition d'un gradient trop petit à 10 epsilon machine, soit environ 10^{-15} . Fixer $\vec{u}_{||}$ à $\vec{0}$ nous garanti d'avoir $\zeta_{choc} = 0$.

$$\vec{u}_{||} = \vec{0}, \text{ si } |\nabla \phi_h|^2 \leq 10^{-15} \quad (5.7)$$

Cependant, cette méthode introduit une discontinuité dans les valeurs de $\vec{u}_{||}$, qui peut conduire à des difficultés de convergence de la méthode de Newton. En effet, nous avons constaté que plus la valeur seuil du gradient était augmentée, plus les calculs avaient du mal à converger, voire ne convergeaient pas. En effet, la discontinuité se produit plus fréquemment quand le seuil est élevé. 10^{-15} est la plus petite valeur que nous pouvons prendre qui conserve un sens numérique.

Le plus grand défi reste l'expression de τ_{choc} . D'après Codina, le terme de capture de choc se calcule comme celui de SUPG, mais en utilisant $\vec{u}_{||}$ au lieu de \vec{u} . Dans CADYF, τ_{supg} est adapté de Tezduyar et Osawa [12]. Il est de la forme :

$$\tau_{supg} = \frac{1}{\sqrt{1/\tau_{adv}^2 + 1/\tau_{diff}^2 + 1/\tau_{conv}^2}} \quad (5.8)$$

τ_{adv} est le terme de stabilisation temporel, τ_{diff} le terme de stabilisation pour la diffusion et τ_{conv} le terme de stabilisation pour la partie convective de l'équation. Nous avons :

$$\begin{aligned}\tau_{adv} &= \frac{\Delta t}{2} \\ \tau_{diff} &= \frac{h_{UGN}^2}{4\nu} \\ \tau_{conv} &= \frac{h_{UGN}}{2\|\vec{u}\|}\end{aligned}\tag{5.9}$$

En stationnaire, τ_{adv} est nul. h_{UGN} est la taille caractéristique de l'élément au sens de la stabilisation. La version de CADYF est un peu différente de celle de Tezduyar et Osawa, pour améliorer la continuité du terme :

$$h_{UGN} = 2\|\vec{u}\| \left(\sqrt{\sum (\vec{u} \cdot \nabla N_a)^2} \right)^{-1}\tag{5.10}$$

avec N_a la fonction d'interpolation associée au noeud a . Il n'est pas spécifié dans l'article la variable de la fonction d'interpolation. Dans CADYF, pour les écoulements laminaires, nous utilisons celles de la vitesse.

Regardons les parties de τ_{supg} qui dépendent de $\vec{u}_{||}$. Le plus évident est le terme de stabilisation de la convection, τ_{conv} . Nous développerons donc un nouveau terme τ_{conv_choc} . De façon moins évidente, τ_{diff} dépend aussi de $\vec{u}_{||}$ à travers h_{UGN} . Cette dépendance a été négligée.

De plus, il faut noter que notre version de SUPG n'est pas à jour. Nous travaillons à partir de l'article de Tezduyar et Osawa de 2000 [12], mais cette méthode est développée pour les écoulements incompressibles. Dans des articles plus récents de Tezduyar et Senga [1, 15] pour les écoulements compressibles, le terme SUPG de base (en dehors de la capture de choc) est légèrement modifié. La longueur de référence de l'élément est toujours calculée de la même façon pour stabiliser la vitesse, mais pour l'équation de l'énergie, une nouvelle version est développée en faisant intervenir le gradient de la température. Plus de tests seraient nécessaires pour vérifier l'importance de cette modification. Il faudrait aussi tester les effets du calcul d'une nouvelle taille caractéristique d'élément avec $\vec{u}_{||}$.

Calculons maintenant $\tau_{||}$, et non τ_{choc} , de la même manière que τ_{supg} , mais avec $\vec{u}_{||}$. Nous avons :

$$\tau_{||} = \frac{1}{\sqrt{1/\tau_{adv}^2 + 1/\tau_{diff}^2 + 1/\tau_{conv_choc}^2}}\tag{5.11}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \tau_{adv} &= \frac{\Delta t}{2} \\
 \tau_{diff} &= \frac{h_{UGN}^2}{4\nu} \\
 \tau_{conv_choc} &= \frac{h_{UGN}}{2\|\vec{u}_{||}\|}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Codina d'une part [30] et Hughes d'autre part [37] ont remarqué que si l'on ajoutait les deux schémas tels quels, le schéma numérique était trop diffusif. Cette trop grande diffusion ne peut pas être corrigée plus tard par l'adaptation de maillage, puisqu'elle est directement dans les équations, c'est pourquoi τ_{choc} , le terme de capture de choc final, n'est pas directement $\tau_{||}$. Nous préférons lui retrancher τ_{supg} . De cette façon, la capture de choc n'intervient que lorsque le terme est plus grand que celui de SUPG. Nous prenons la valeur absolue de cette différence, pour être certain de rajouter de la viscosité, et non d'en enlever.

$$\tau_{choc} = \max(0, \tau_{||} - \tau_{supg}) \tag{5.13}$$

5.1.2 Identification des problèmes de la méthode

Après des tests numériques, nous avons constaté des difficultés de convergence lors de la résolution du système d'équation avec la méthode de Newton. Elles sont dues à l'introduction de discontinuités dans le calcul du terme de capture de choc. Les tangentes peuvent être amenées à changer brusquement, et nous allons osciller entre deux valeurs approchées de la solution, sans jamais converger. Nous présentons ici les différentes causes de discontinuité observées.

Condition if

$\vec{u}_{||}$ est défini comme :

$$\vec{u}_{||} = \begin{cases} \frac{\vec{u} \cdot \nabla \phi}{\|\nabla \phi\|^2} \nabla \phi & \text{si } \nabla \phi \leq 10^{-15} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.14}$$

Avec cette condition if, $\vec{u}_{||}$ passe subitement d'une valeur non nulle à 0. Nous avons remarqué que plus la borne est faible (ici 10^{-15}), moins cette situation se produit, et donc naturellement la convergence est meilleure.

Pour éviter d'implémenter une condition if, nous pouvons remplacer la définition de $\vec{u}_{||}$ par :

$$\vec{u}_{||} = \frac{\vec{u} \cdot \nabla \phi}{\|\nabla \phi\|^2 + 10\epsilon} \nabla \phi \quad (5.15)$$

avec ϵ la valeur de l'epsilon machine en double précision. Cette méthode n'a pas été implémentée, parce que lorsque la norme de $\nabla \phi$ tend vers 0, le terme en 10ϵ prend le dessus, et les valeurs n'ont pas de sens physique. Il est préférable de garder la discontinuité, qui elle a un sens physique.

Prise d'un maximum

Il est évident que $\max(0, x)$ est une fonction discontinue, qu'il serait bon de lisser. Nous pouvons montrer que $\max(0, \tau_{||} - \tau) = (\tau_{||} - \tau)H(\tau_{||} - \tau)$, avec H la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \text{non défini} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Une approximation continue connue de la fonction de Heaviside est :

$$H(x) \approx \frac{1}{1 + e^{-2kx}} \quad (5.17)$$

avec k un paramètre utilisateur. Plus k est grand, plus l'approximation est de qualité; la largeur de la transition est plus faible. Cependant, c'est cette largeur qui pose problème. Puisque nous multiplions ensuite par $\tau_{||} - \tau$, si ce terme est négatif, tout le terme sera négatif, et nous ne pouvons pas nous permettre d'ajouter un terme de diffusion du mauvais signe. Ce problème est appréciable visuellement. La comparaison de la fonction et son approximation est présentée fig. 5.1 pour $k = 10$, ainsi que le calcul de $\tau_{||}$ fig. 5.2. k est ici pris petit pour que le problème de valeurs négatives apparaisse mieux visuellement. Dans la pratique, k prend des valeurs plus élevées, typiquement 10^3 ou plus.

De plus, la formulation approximative contient une exponentielle, dont le calcul est plus complexe que celui d'un maximum.

Nous n'avons pas trouvé une façon satisfaisante de nous débarrasser de la discontinuité induite par le terme de maximum tout en conservant la physique. Nous avons donc le choix entre le garder tel quel, ou le supprimer. Si nous le supprimons, et prenons $\tau_{choc} = \tau_{||}$, nous risquons d'ajouter trop de diffusion. Il nous paraît mieux de risquer une mauvaise convergence que

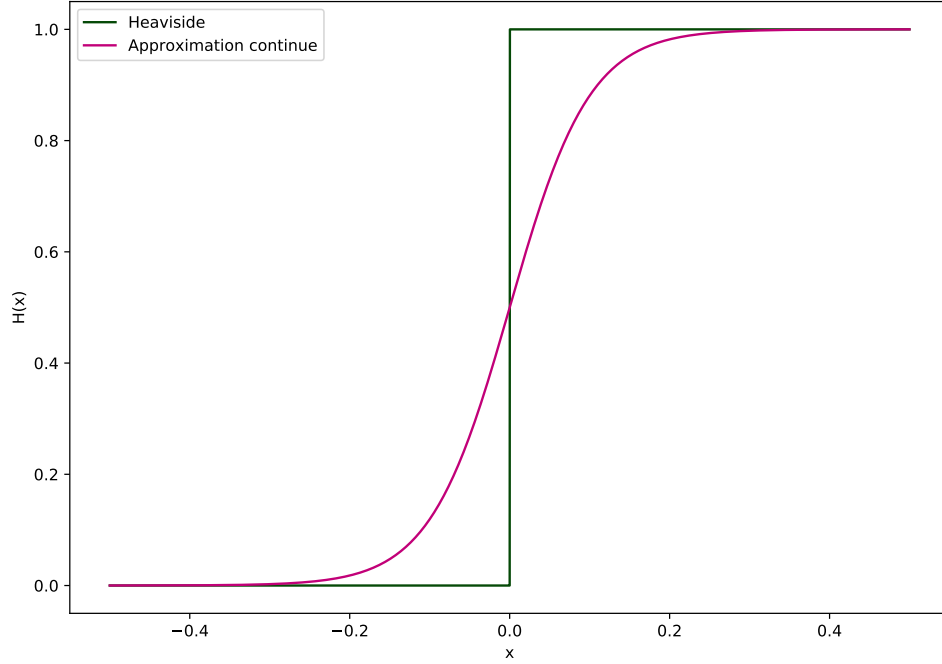


Figure 5.1 Comparaison de la fonction de Heaviside et son approximation continue (pour $k=10$)

de résoudre systématiquement un problème avec trop de diffusion, donc nous conservons le maximum.

Une première approche sans le maximum donne des itérations divergentes vers la moitié du problème du tube à choc transitoire.

Discontinuité de norme de $\vec{u}_{||}$

Finalement, nous avons un problème dans la définition de $\tau_{||}$, car nous faisons apparaître une valeur absolue, fonction qui n'est pas C^1 . Repartons de la définition (5.14) et notons, pour simplifier, $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_{conv} \\ v_{conv} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, nous avons alors :

$$\vec{u} \cdot \nabla\phi = ax + by \quad (5.18)$$

$$\|\nabla\phi\| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |\nabla\phi|^2 = x^2 + y^2 \quad (5.19)$$

Donc

$$\vec{u}_{||} = \frac{ax + by}{x^2 + y^2} \nabla\phi = \frac{ax + by}{x^2 + y^2} x + \frac{ax + by}{x^2 + y^2} y \quad (5.20)$$

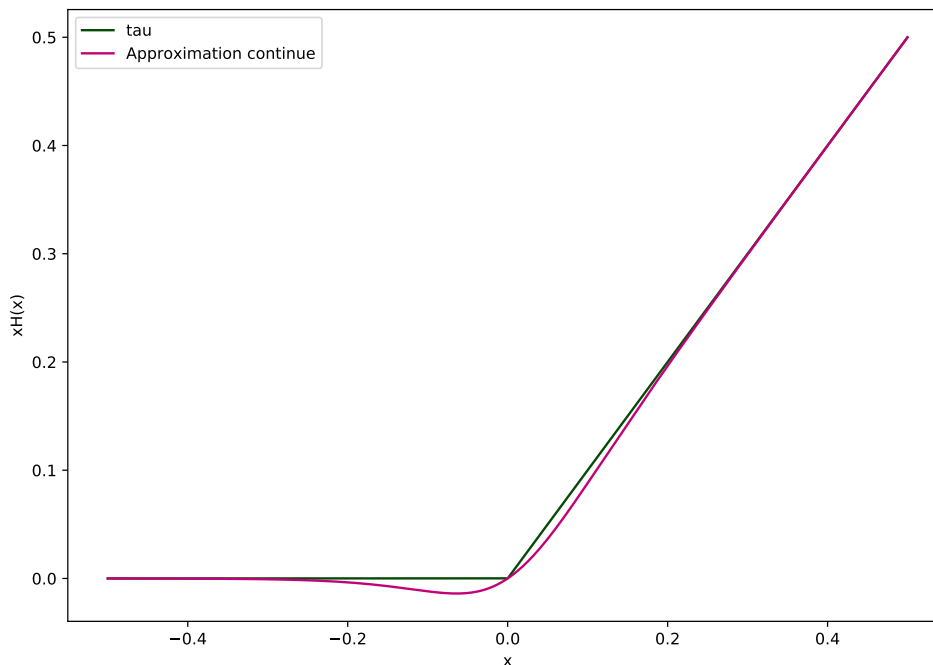


Figure 5.2 Comparaison du calcul de $\tau_{||}$ et son approximation continue (pour $k=10$)

\Rightarrow

$$\|\vec{u}_{||}\| = \sqrt{\left(\frac{ax + by}{x^2 + y^2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{ax + by}{x^2 + y^2}\right)^2 y^2} \quad (5.21)$$

\Leftrightarrow

$$\|\vec{u}_{||}\| = \left|\frac{ax + by}{x^2 + y^2}\right| \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.22)$$

Cette expression n'est pas C^1 . Nous traçons cette équation figures (5.3) et (5.4) pour $a = u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, qui correspondent aux valeurs de la vitesse pour le problème de convection diffusion de la température à la partie 4.1.2. Nous voyons la forme caractéristique en V de la valeur absolue, en plus de la discontinuité apportée par la division par 0 évoquée au début de la section.

Supprimer le "if $\nabla\phi \neq 0$ " ne changera pas le problème de convergence de Newton à cause de ce calcul de norme, qui est lui aussi problématique.

Terme temporel qui domine

Étudions maintenant le comportement transitoire de cette méthode.

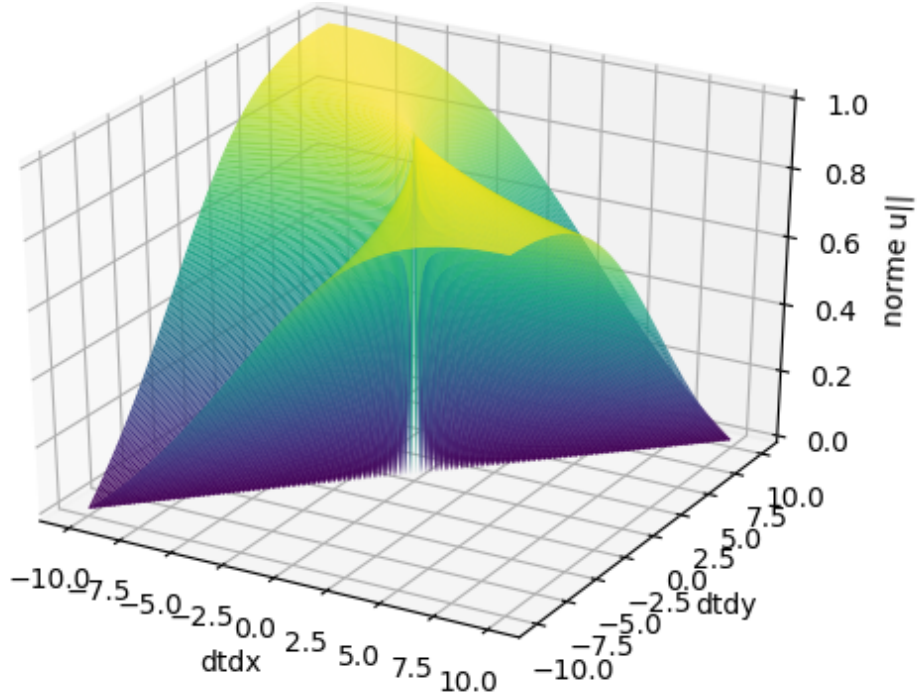


Figure 5.3 Norme de $\vec{u}_{||}$ pour $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, vue 1

Mise en évidence du problème Nous rappelons que τ_{supg} se calcule de la façon suivante :

$$\tau_{supg} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tau_{adv}^2} + \frac{1}{\tau_{conv}^2} + \frac{1}{\tau_{diff}^2}}} \quad (5.23)$$

avec τ_{adv} le terme de stabilisation temporel, τ_{diff} , le terme de stabilisation pour la diffusion et τ_{conv} celui pour la convection. Leurs expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \tau_{adv} &= \frac{\Delta t}{2} \\ \tau_{diff} &= \frac{h_{UGN}^2}{4\nu} \\ \tau_{conv_choc} &= \frac{h_{UGN}}{2\|\vec{u}_{||}\|} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Typiquement en transitoire, pour un problème de diffusion de température tel que décrit dans la partie 4.1.2, les ordres de grandeur des termes intervenant dans ces expressions sont regroupés dans le tableau 5.1.

Nous constatons qu'en transitoire, les termes SUPG et de capture de choc $\tau_{||}$ sont du même

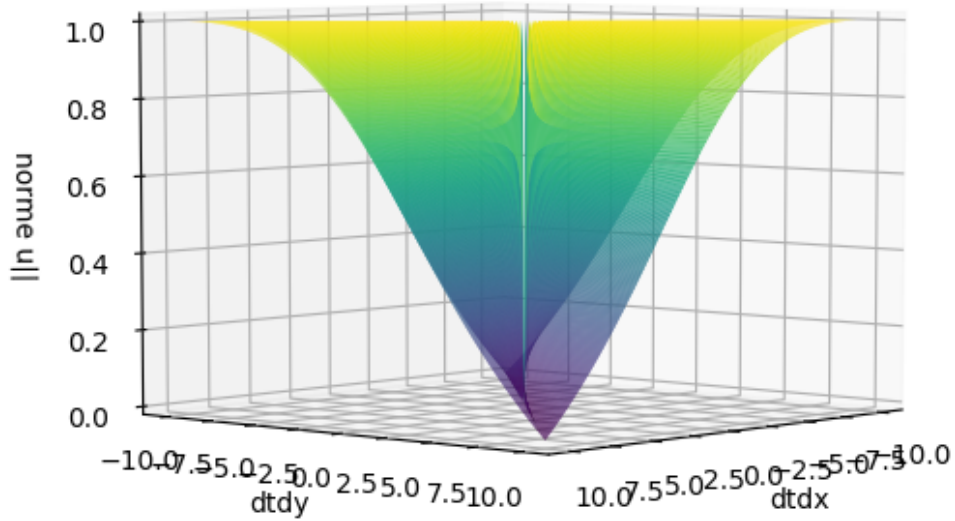


Figure 5.4 Norme de $\vec{u}_{||}$ pour $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $v = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, vue 2

Tableau 5.1 Ordres de grandeur des termes intervenant dans la capture de choc de Codina

	SUPG	Capture de choc ($\tau_{ }$)
Δt	10^{-4}	10^{-4}
h_{UGN}	10^{-1}	10^{-1}
ν	10^{-4}	10^{-4}
$ \vec{u} $ ou $ \vec{u}_{ } $	1	entre 10^{-1} et 10^{-2}
τ_{adv}	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
τ_{conv}	0.05	entre 0.5 et 5
τ_{diff}	25	25
τ_{supg} ou $\tau_{ }$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$

ordre de grandeur. Leur différence, $\tau_{choc} = \max(0, \tau_{||} - \tau_{supg})$ est donc très faible, le terme SUPG sera beaucoup plus grand que le terme de capture : $\tau_{supg} \gg \tau_{choc}$. Le terme de capture de choc n'apportera pas de différence par rapport à SUPG, et n'améliorera pas la stabilité du problème. Les deux τ ont le même ordre de grandeur, parce que, comme mis en valeur dans le tableau 5.1, le terme est piloté par la valeur de τ_{adv} , qui est plusieurs ordres de grandeur en-dessous de τ_{conv} et τ_{diff} . Comme ce terme, contrairement à τ_{conv} ne varie pas en fonction du gradient de la variable physique transportée, et qu'il étouffe les autres, nous ne pouvons pas stabiliser en espace le choc avec cette formulation.

Proposition de substitution Pour s'affranchir de cela, il faudrait une autre formulation, qui permette de ne pas avoir le terme de capture de choc qui dépende du régime transitoire.

Attention, cette formulation ne nous affranchira pas pour autant des problèmes de continuité du terme. Par exemple, nous proposons d'enlever le terme temporel pour la partie choc uniquement :

$$\tau_{||} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\tau_{\text{conv_choc}}}^2 + \frac{1}{\tau_{\text{diff}}}^2}} \quad (5.25)$$

Les premiers tests lancés avec cette version du terme ne sont pas concluants. Ils ont été faits pour le tube à choc, avec un maillage de 1x4000 éléments, une viscosité de $\mu = 10^{-5}$ Pa.s. Les pas de temps sont fixes de taille $1.25 \cdot 10^{-6}$ s. Les calculs convergent très mal, nous avons souvent des itérations temporelles qui ne convergent pas ou sont reprises. Le calcul ne peut même pas se finir, nous nous arrêtons à 70% du calcul environ.

De plus, la précision des résultats n'est pas améliorée. En utilisant les mêmes calculs d'erreur et de dépassement que dans les équations (4.32) et (4.33), nous faisons une moyenne sur les pas de temps effectués, et obtenons les résultats suivants :

Tableau 5.2 Erreur relative L2 et dépassement relatif pour le problème du tube à choc pour différentes expressions de $\tau_{||}$

	Version avec advection (5.23)	Version sans advection (5.25)
Erreur relative L2 (%)	8.74	9.00
Dépassement relatif (%)	22.50	22.99

L'erreur et le dépassement sont plus élevés pour la version sans terme temporel. Deux explications à ce phénomène peuvent être apportées. Tout d'abord, l'amélioration de la précision du terme de Codina est probablement contrebalancée par la perte de précision de la stabilisation temporelle. En effet, au vu des problèmes de convergence, nous ne pouvons pas dire que la stabilisation temporelle apportée par SUPG est suffisante, il en faut manifestement aussi dans le terme de capture de choc. De plus, le développement des termes de capture de choc est très délicat et très sensible, cette version n'est peut être tout simplement pas assez raffinée. Il faudrait idéalement effectuer des tests dans d'autres conditions de viscosité et pas de temps pour confirmer cette impression.

5.1.3 Rappel des problèmes rencontrés avec la méthode de Codina

- Nous avons une version de SUPG adaptée pour les écoulements incompressibles, et pas optimisés pour les écoulements compressibles (plus de détails dans la partie sur la méthode de Tezduyar et Senga dans la section suivante)
- Mauvais choix dans le calcul du terme : h_{UGN} dépend également de \vec{u} , il conviendrait de calculer une nouvelle version h_{choc} avec $\vec{u}_{||}$. Cependant, cette modification agira

- principalement sur la précision de la méthode, moins sur la convergence de la méthode de Newton ni les problèmes en transitoire
- Problème de continuité (et donc de résolution avec la méthode de Newton) parce qu'on utilise une condition if pour éviter le cas particulier $\nabla\phi = 0$
 - Problème de continuité à cause de la présence d'un maximum : $\tau_{choc} = \max(0, \tau_{||} - \tau_{supg})$. Le maximum est pris pour éviter d'ajouter trop de diffusion dans le problème
 - Problème de continuité parce que la norme de $\vec{u}_{||}$ n'est pas continue (apparition dans le calcul d'une valeur absolue)
 - Inefficace en transitoire, parce que la partie temporelle prédomine dans le terme de capture de choc et le terme SUPG, ils sont presque égaux. Le terme qu'on ajoute finalement pour la capture de choc étant la différence des deux, il est presque nul. La formulation naïve d'enlever le terme d'advection n'est pas satisfaisante, elle n'apporte pas d'amélioration sur la précision des résultats, et des difficultés de convergence. Il faudrait développer un terme plus sophistiqué.

La méthode proposée par Codina donne des résultats corrects en régime permanent (comme le cas de la diffusion de température), si l'on met de côté quelques difficultés de convergence qui peuvent apparaître. En transitoire, le terme n'apporte aucune amélioration puisqu'il est presque nul. La majorité des problèmes de cette méthode vient de son adaptation aux équations de Navier-Stokes, puisqu'elle est originellement développée pour une équation de convection-diffusion. Pour résoudre tous les problèmes posés par cette méthode, le plus simple serait de développer un nouveau terme.

5.2 Tezduyar et Senga

5.2.1 Développement

Cette méthode s'appuie sur les travaux de Tezduyar et Senga [15] et [1]. Les deux articles sont quasiment identiques, nous avons travaillé avec le plus récent.

La formulation est faite pour les équations de Navier-Stokes compressibles, en variables conservées et en transitoire.

Dans cette formulation, le terme de capture de choc s'ajoute à SUPG, mais n'a pas exactement la même forme, comme c'était le cas avec la méthode de Codina. Pour mieux comprendre les notations de l'article, nous introduisons la forme faible (Galerkin) matricielle en variables

conservées :

$$\int_{\Omega} W_h \cdot \left(\frac{\partial U_h}{\partial t} + A_{i_h} \frac{\partial U_h}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_h}{\partial x_i} \right) \cdot E_i d\Omega - \int_{\Gamma_H} W_h \cdot H_h d\Gamma - \int_{\Omega} W_h \cdot R_h d\Omega + \text{SUPG} + \text{Choc} \quad (5.26)$$

Dans cette notation, nous avons W la fonction test, U le vecteur des variables conservées, $U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho e)$. Attention, avec cette notation, R n'est pas le résidu, mais le vecteur des réactions/forces extérieures ; et H^h regroupe les conditions aux limites naturelles. De plus,

$$A_i = \frac{\partial F_i}{\partial U} \quad (5.27)$$

et

$$E_i = K_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \quad (5.28)$$

avec F la partie Eulérienne de l'équation du mouvement et E la partie visqueuse :

$$F_i = \begin{bmatrix} u_i \rho \\ u_i \rho u_1 + \delta_{i1} p \\ u_i \rho u_2 + \delta_{i2} p \\ u_i (\rho e + p) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ (\lambda(\nabla \cdot \vec{u})I + 2\mu\epsilon\vec{u})_{i1} \\ (\lambda(\nabla \cdot \vec{u})I + 2\mu\epsilon\vec{u})_{i2} \\ -q_i + (\lambda(\nabla \cdot \vec{u})I + 2\mu\epsilon\vec{u})_{ik} u_k \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Le terme SUPG lui, est de la forme :

$$\text{SUPG} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} \left(\frac{\partial W_h}{\partial x_k} \right) \cdot A_{k_h} \left[\frac{\partial U_k}{\partial t} + A_{i_h} \frac{\partial U_h}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_i} - R_h \right] d\Omega \quad (5.31)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\text{SUPG} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \tau_{SUPG} \nabla W_h \cdot A_{k_h} \text{ Résidu } d\Omega \quad (5.32)$$

Le terme de stabilisation du choc vaut lui :

$$\text{Choc} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{choc} \left(\frac{\partial W_h}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial U_h}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (5.33)$$

qui peut s'écrire de façon plus compacte :

$$\text{Choc} = \sum_{e=1}^{N_{el}} \int_{\Omega_e} \nu_{choc} \nabla W \cdot \nabla U d\Omega \quad (5.34)$$

Le terme de choc est de la forme :

$$\nu_{choc} = \tau_{choc} (u_{int})^2 = \frac{h_{choc}}{2u_{cha}} \left(\frac{\|\nabla \rho^h\| h_{choc}}{\rho_{ref}} \right)^\beta (u_{int})^2 \quad (5.35)$$

avec h_{choc} de la forme

$$h_{choc} = 2 \left(\sum |\vec{j} \cdot \nabla N_a| \right)^{-1} \quad (5.36)$$

N_a correspond aux fonctions d'interpolation sur l'élément, mais nous ne savons pas précisément de quelle variable. De plus, dans CADYF, pour des termes similaires, le calcul a été légèrement modifié pour s'affranchir des valeurs absolues, et s'écrit plutôt :

$$h_{choc} = 2 \left(\sqrt{\sum (\vec{j} \cdot \nabla N_a)^2} \right)^{-1} \quad (5.37)$$

Bien que $\sum x^2 \neq (\sum x)^2$, conserver le choix fait dans CADYF est pertinent, car il nous permet de rester continu. Nous avons :

$$\vec{j} := \frac{\nabla \rho^h}{\|\nabla \rho^h\|} \quad (5.38)$$

$$\rho_{ref} = \rho_{inf} \left(\frac{\rho_{scale}}{\rho_{inf}} \right)^{b_R/2} \quad (5.39)$$

Les autres variables intervenant dans cette définition sont regroupées dans le tableau 5.3.

Nous proposons de prendre $u_{cha} = u_{int} = \|\vec{u}^h\|$, afin de supprimer le risque de division par 0 amené par u_{cha} dans l'expression de ν_{choc} (5.35).

Le calcul de la valeur de référence n'est pas un problème avec CADYF, puisqu'elle est renseignée par l'utilisateur. Nous utiliserons donc cette valeur plutôt que de calculer une valeur de référence.

Avec ces deux choix, nous nous affranchissons du risque de diviser par une vitesse nulle. La masse volumique n'est jamais nulle, et son utilisation ne présente pas de risque non plus.

Tableau 5.3 Variables intervenant dans la définition du terme de capture de choc de Tezduyar et Senga [1]

Terme	Propositions article	Choix proposés pour CADYF
u_{cha} : vitesse caractéristique	$\ \bar{u}^h\ $, vitesse du son, vitesse de référence	$\ \bar{u}^h\ $ n'est pas explicitée dans l'article, nous considérons que c'est la norme de la vitesse dans l'élément
u_{int} : vitesse intrinsèque	$\ \bar{u}^h\ $, vitesse du son, u_{cha}	$\ \bar{u}^h\ $
ρ_{inf} : inflow	Masse volumique à l'entrée	Elle n'est pas spécifiée par l'utilisateur en variables primitives, nous pouvons sauvegarder la première valeur calculée
ρ_{scale} : masse volumique de référence	ρ_{inf} ou la masse volumique derrière un choc normal pour la masse volumique d'entrée	ρ_{inf}
β et b_R : coefficients	1 ou 2	Traités plus tard

En revanche, puisqu'intervient le gradient de la masse volumique, il reste une possibilité de diviser par 0, à laquelle il faudra faire attention. La nouvelle expression du terme est :

$$\nu_{choc} = \frac{h_{choc}\|u^h\|}{2} \left(\frac{\|\nabla\rho^h\|h_{choc}}{\rho_{ref}} \right)^\beta = \frac{\|u^h\|}{2} \left(\frac{\|\nabla\rho^h\|}{\rho_{ref}} \right)^\beta h_{choc}^{\beta+1} \quad (5.40)$$

avec h_{choc} tel que dans (5.37), nous avons :

$$\nu_{choc} = \frac{\|u^h\|}{2} \left(\frac{\|\nabla\rho^h\|}{\rho_{ref}} \right)^\beta \left(\frac{2}{\sqrt{\sum \left(\frac{\nabla\rho^h}{\|\nabla\rho^h\|} \cdot \nabla N_a \right)^2}} \right)^{\beta+1} \quad (5.41)$$

Pour capturer le choc, nous voulons un terme qui dépende du gradient de ρ . Plus il est grand, plus la stabilisation doit être importante. Vérifions que c'est bien le cas :

$$\nu_{choc} \approx \|\nabla\rho\|^\beta \left(\frac{\|\nabla\rho\|}{\nabla\rho} \right)^{\beta+1} = \mathcal{O}(\|\nabla\rho\|^{2\beta+1}) \quad (5.42)$$

Il reste maintenant à déterminer la valeur de β . Tezduyar et Senga proposent $\beta = 1$ pour un choc plus doux, et $\beta = 2$ pour un choc plus fort. Comme compromis, ils prennent :

$$\nu_{choc} = \frac{1}{2} [(\nu_{choc})_{\beta=1} + (\nu_{choc})_{\beta=2}] \quad (5.43)$$

5.2.2 Implémentation dans CADYF

Pour implémenter cette méthode dans CADYF, nous devons faire face à quelques difficultés. Puisque nous sommes en variables primitives, et non conservées, nous n'avons pas naturellement $\nabla\rho$, qu'il nous faut calculer. Nous pouvons l'évaluer numériquement, par la méthode des perturbations, comme ∇p et ∇T , ou par la loi des gaz parfaits, à partir de ∇p et ∇T qui ont déjà été calculés. Pour des raisons de simplicité, dans une première approche, nous utiliserons plutôt la loi des gaz parfaits. Si le terme de capture fonctionne, nous pourrions essayer la première méthode pour plus de précision et pour nous affranchir de l'équation des gaz parfaits, dans le cas où nous voudrions travailler avec d'autres équations d'état. Pour cela, utilisons la version de la loi des gaz parfaits prenant en compte les pression et température mécaniques :

$$\rho = \rho_{ref} \frac{(\alpha_{ref} p_{mec} + 1)}{(\beta_{ref} T_{mec} + 1)} \quad (5.44)$$

Le gradient devient donc, sur un élément i :

$$\nabla\rho(i) = \rho_{ref} \left[\frac{(\alpha_{ref} \nabla p_{mec}(i))(\beta_{ref} T_{mec}(i) + 1) - (\beta_{ref} \nabla T_{mec}(i))(\alpha_{ref} p_{mec}(i) + 1)}{(\beta_{ref} T_{mec}(i) + 1)^2} \right] \quad (5.45)$$

Pour le gradient des fonctions d'interpolation, nous avons un problème différent. Il n'est pas précisé dans l'article des fonctions de forme de quelle variable il est question. Il ne nous est pas possible de prendre celles de ρ , puisque nous travaillons en variables primitives nous ne les utilisons pas. Nous choisissons de prendre les fonctions d'interpolation de la vitesse. Puisque la vitesse est P2, nous serons plus précis qu'avec la pression par exemple. L'influence du choix des fonctions d'interpolation n'est pas facile à évaluer a priori. Finalement les termes que nous allons utiliser sont résumés dans le tableau 5.4.

Tableau 5.4 Comparaison de l'expression des termes intervenants dans SUPG et la capture de choc de Tezduyar et Senga

	SUPG	Terme Tezduyar et Senga
h_{choc}	$\frac{\sqrt{2}\ u\ }{\sqrt{\sum (u \cdot \nabla N_a)^2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sum (\frac{\nabla\rho}{\ \nabla\rho\ } \cdot \nabla N_a)^2}}$
τ	$\tau_{choc} = \frac{1}{\sqrt{1/\tau_{adv}^2 + 1/\tau_{diff}^2 + 1/\tau_{conv}^2}}$ avec les différents τ dans (5.12)	$\frac{\nu_{choc}}{u^2}$
ν	pas calculé directement	$\frac{\ u^h\ }{2} \left(\frac{\ \nabla\rho^h\ }{\rho_{ref}} \right)^\beta h_{choc}^{\beta+1}$ avec $\beta = 1$ ou 2
terme capture	$\sum \int_\Omega R\tau \nabla N_a \cdot \vec{u} d\Omega$	$\sum \int_\Omega \nu_{choc} \nabla N_a \cdot \nabla \vec{u} d\Omega$

Remarque : Les termes présentés ici sont tous calculés par élément. Les sommes sont sur

le nombre de fonctions de forme par élément, pour h_{choc} comme pour le terme de capture total. Les fonctions de forme N_a sont celles de la vitesse pour SUPG (en laminaire) et pour la capture de choc. Un terme en $\sqrt{2}$ est apparu dans la formulation de SUPG de CADYF, au lieu de 2. Ce terme ayant peu d'incidence, il a été conservé dans la formulation du terme de capture de choc pour rester cohérent. Nous avons vérifié que les unités de tous les termes présents dans ce tableau sont cohérentes entre elles.

5.2.3 Deuxième terme

Tezduyar et Senga proposent également un deuxième terme dans la suite de l'article :

$$\nu_{choc} = \|Y^{-1}Z\| \left(\sum_{i=1}^{n_{sd}} \left\| Y^{-1} \frac{\partial U_h}{\partial x_i} \right\|^2 \right)^{\beta/2-1} \left(\frac{h_{choc}}{2} \right)^\beta \quad (5.46)$$

avec h_{choc} défini comme précédemment, Y est une matrice diagonale de mise à l'échelle avec les valeurs de références, et Z vaut

$$Z = \frac{\partial U_h}{\partial t} + A_{i_h} \frac{\partial U_h}{\partial x_i} \quad (5.47)$$

ou juste, en stationnaire

$$Z = A_{i_h} \frac{\partial U_h}{\partial x_i} \quad (5.48)$$

Le problème de cette méthode est que la définition des termes Z et U sont adaptés pour les variables conservées. Deux solutions s'offrent à nous. Tout d'abord, nous pouvons faire un changement de variables comme proposé par Hauke et Hughes [34] et Hauke [35] pour GLS. Sinon, plus directement, nous pouvons adapter les termes. Puisque les A_i représentent le terme de convection, Z est l'équivalent de la dérivée particulaire. Par exemple, la dérivée particulaire de la température est :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})T \quad (5.49)$$

CHAPITRE 6 RÉSULTATS

Cette partie met en valeur les résultats obtenus avec les méthodes de Codina et de Tezduyar et Senga, ainsi que les conclusions qui en découlent.

6.1 Codina

Nous présentons ici l'évaluation de la méthode de capture de choc de Codina, telle que décrite dans la partie 5.1.

6.1.1 Diffusion de température

Nous commençons par le cas test le plus simple, la diffusion de température, qui a été décrit dans la partie 4.1.2. Le maillage de départ est 5x5 éléments. Il n'est pas totalement régulier, à cause de la définition de h pour l'adoucissement de la discontinuité de la condition aux limites en température (voir partie 4.1.3). Nous exécutons ce cas et effectuons jusqu'à 6 cycles d'adaptation de maillage. Au cours de ces simulations, nous avons rencontré quelques problèmes techniques. Quelle que soit la méthode de stabilisation utilisée, nous avons régulièrement des problèmes de convergence de la méthode de Newton. De plus, l'adaptation de maillage posait elle aussi problème. Il n'était pas rare de la voir s'arrêter à cause d'éléments à aire négative ou de difficultés à produire un nouveau maillage. Il fallait généralement faire tourner plusieurs fois les cas pour obtenir des résultats exploitables.

Outils de mesure et paramètres d'expérimentation

Paramètre de l'adaptation Dans un premier temps, nous faisons de l'adaptation de maillage classique, sans post-traitement du maillage obtenu. La cible d'erreur entre deux cycles est de 0.25, nous cherchons à réduire l'erreur de 75% entre deux cycles. Le calcul du nouveau maillage est piloté par la norme de l'erreur thermique eq. (6.7), puisque dans la diffusion de température les autres variables sont supposées constantes. Les variables constantes devraient présenter une erreur nulle. Nous calculons tout de même les erreurs sur la pression (norme $L2$, eq (6.2)) et l'énergie (eq (6.3)) pour nous assurer que ce postulat est bien vérifié. Les erreurs sont calculées globalement, et non localement, avec les formules suivantes :

$$\|T\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla T \cdot \nabla T) d\Omega \quad (6.1)$$

$$\|p\|^2 = \int_{\Omega} p^2 d\Omega \quad (6.2)$$

$$\|\text{énergie}\|^2 = \int_{\Omega} (\epsilon : \epsilon) d\Omega \quad (6.3)$$

$$\text{avec } \epsilon = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Largeur du choc Pour évaluer rapidement le degré de diffusion du choc, nous pouvons définir une largeur de choc. Elle correspond à la distance δx entre le moment à partir duquel la température (ou tout autre grandeur) dépasse 10% de sa valeur initiale et celui où elle atteint 10% de sa valeur finale. Cette définition est illustrée fig. 6.1.

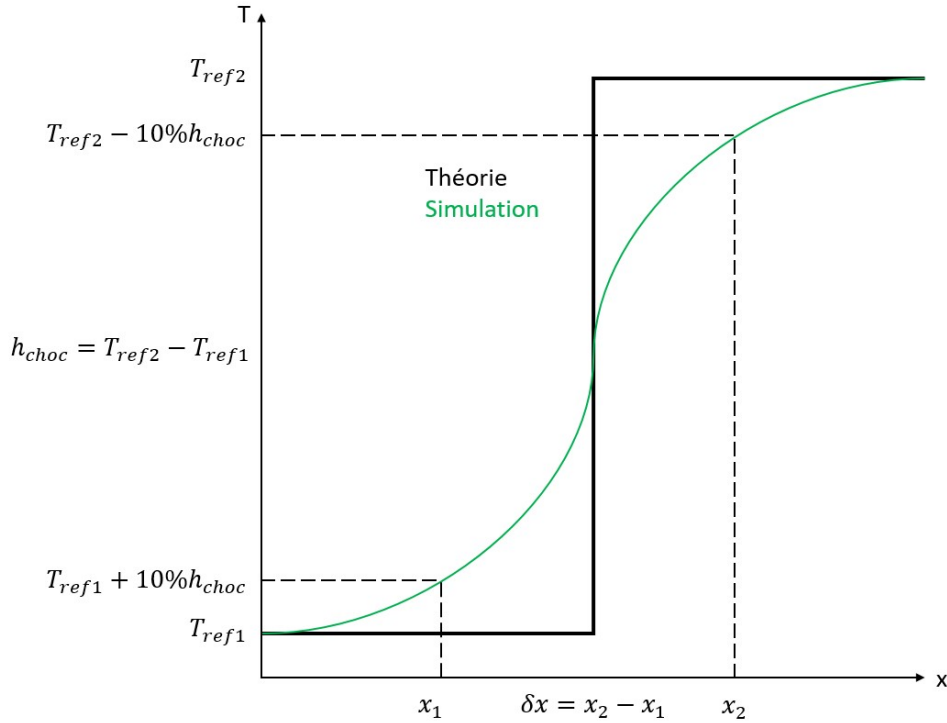


Figure 6.1 Définition de la largeur d'un choc δx

Type d'erreur ADAPT et CADYF nous retournent les erreurs absolues et relatives. La solution exacte est estimée dans ADAPT par la méthode de Zienkiewicz et Zhu [38, 39]. Notons ϕ_{exacte} l'estimation de la solution exacte obtenue avec cette méthode, et ϕ_{cadyf} la solution obtenue avec CADYF. Alors l'erreur absolue sera définie par :

$$\text{erreur absolue} = \int_{\Omega} (\phi_{exacte} - \phi_{cadyf})^2 d\Omega \quad (6.4)$$

Pour l'erreur relative, nous avons :

$$\text{Erreur relative} = \frac{\text{erreur absolue}}{\text{erreur solution}} \quad (6.5)$$

L'erreur sur la solution, quant à elle, est celle obtenue par la norme avec laquelle nous travaillons. Par exemple, pour la norme thermique :

$$\|T\|^2 = \int_{\Omega} (\nabla T \cdot \nabla T) d\Omega \quad (6.6)$$

et pour la température, la norme L2 :

$$\|T\|_{L2}^2 = \int_{\Omega} T^2 d\Omega \quad (6.7)$$

Premières observations

Nous allons comparer les résultats sans stabilisation, avec SUPG seul et avec le couplage SUPG et capture de choc de Codina. L'adaptation de maillage raffine aux endroits nécessaires, et déraffine lorsqu'il n'est pas nécessaire d'avoir plus d'éléments. Le plus souvent, nous constatons une augmentation du nombre d'éléments entre deux cycles. L'évolution du nombre d'éléments par cycle d'adaptation est présentée fig. 6.2, ce qui nous permet de confirmer que le nombre de noeuds augmente en effet. Il est plus important quand nous n'utilisons pas de stabilisation, ce qui n'est pas étonnant, puisqu'il y a plus d'erreur à compenser. En revanche, il est plus surprenant de voir que le nombre de noeuds est plus important pour SUPG-Codina que pour SUPG seul. Cela ne présume pas pour autant de l'efficacité ou non de la méthode, il faut plutôt regarder les erreurs sur la solution. Finalement nous pouvons noter qu'il n'a pas été possible d'obtenir un sixième cycle d'adaptation pour SUPG-Codina, ce qui n'est pas un problème si les résultats sont bons avec cinq cycles d'adaptation.

Les erreurs présentées ici sont celles de la norme thermique $\|T\|^2$. Pour les normes énergie et L2p, les erreurs sont bien en dessous de la norme thermique (de plusieurs ordres de grandeur), ce qui confirme que les autres variables sont bien considérées comme constantes dans ce problème de diffusion simulé à partir des équations de Navier-Stokes. Les erreurs absolues et relatives de la solution en fonction du nombre de noeuds dans le maillage sont présentés fig. 6.3 et fig. 6.4 respectivement. Globalement, SUPG-Codina donne de meilleurs résultats que SUPG seul, qui donne de meilleurs résultats que sans stabilisation. Cependant, l'écart entre les deux dérivées de SUPG et sans stabilisation est plus grand qu'entre les deux méthodes (SUPG et SUPG-Codina). Ce n'est pas surprenant puisque SUPG-Codina s'appuie sur SUPG. Le sixième cycle d'adaptation, qui a pu être obtenu dans le cas sans stabilisation

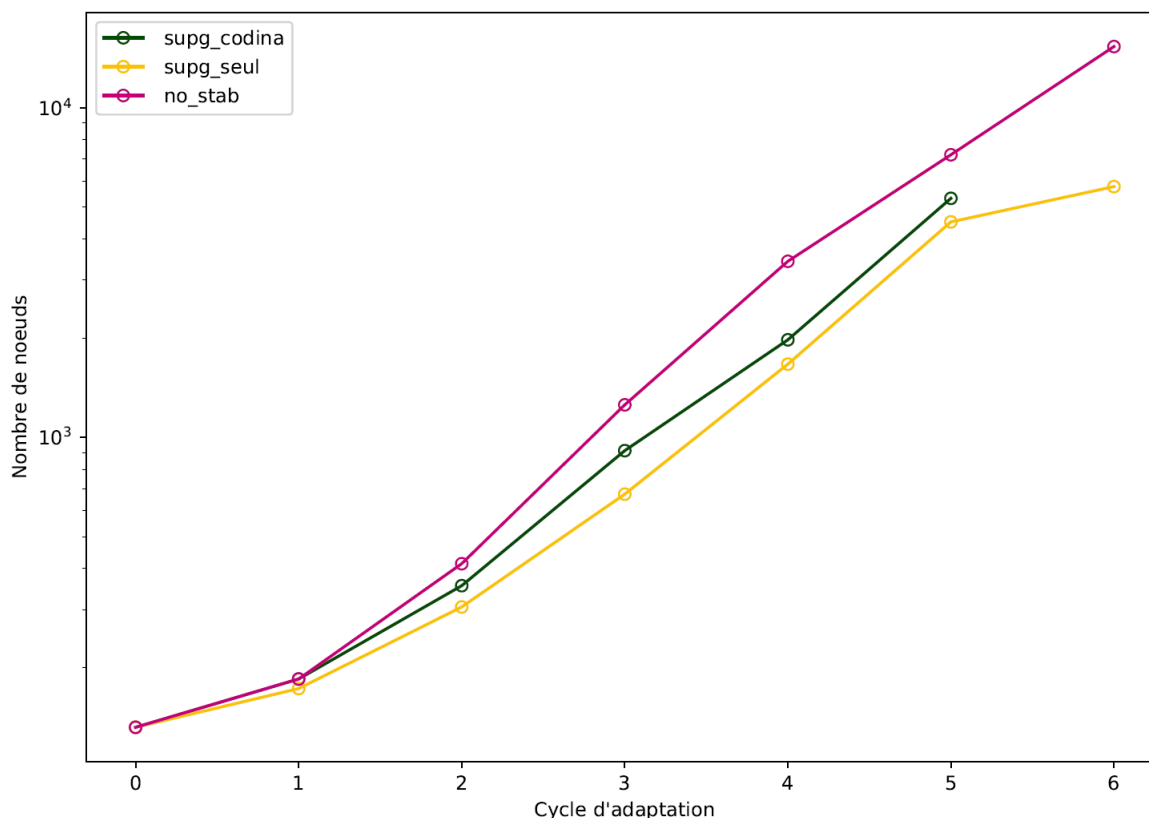


Figure 6.2 Nombre de noeuds par cycle d'adaptation pour différentes méthodes de stabilisation (maillage de départ de 5x5 éléments)

et avec SUPG donne des erreurs plus basses que le cinquième cycle d'adaptation de SUPG-Codina. Toutefois, il faut garder à l'esprit qu'adapter coûte cher en temps de calcul, et génère un plus grand nombre d'éléments. Il est intéressant d'avoir des résultats similaires à SUPG seul avec un cycle d'adaptation de moins.

Passé trois cycles d'adaptation, les résultats pour SUPG et SUPG-Codina sont quasiment confondus, l'efficacité l'adaptation de maillage écrase celle des méthodes de stabilisation. SUPG-Codina semble bien pour des résultats rapides, avec le moins de cycle d'adaptation possible, 3 ou moins ici. Au-delà, les bénéfices ne sont pas aussi importants que ceux de l'adaptation de maillage.

Finalement, étudions la largeur de la discontinuité, dont la méthode de calcul a été donnée précédemment. Elle est plus faible avec SUPG qu'avec SUPG-Codina. Cela est peut-être lié à l'ajout de plus de viscosité artificielle, mais nous avons besoin de cette viscosité pour stabiliser autour de la discontinuité. La largeur de la discontinuité finit par tendre vers une certaine valeur (environ 0.05m), au bout d'un moment il ne sert plus à rien de raffiner pour l'améliorer, nous sommes limité par la diffusion.

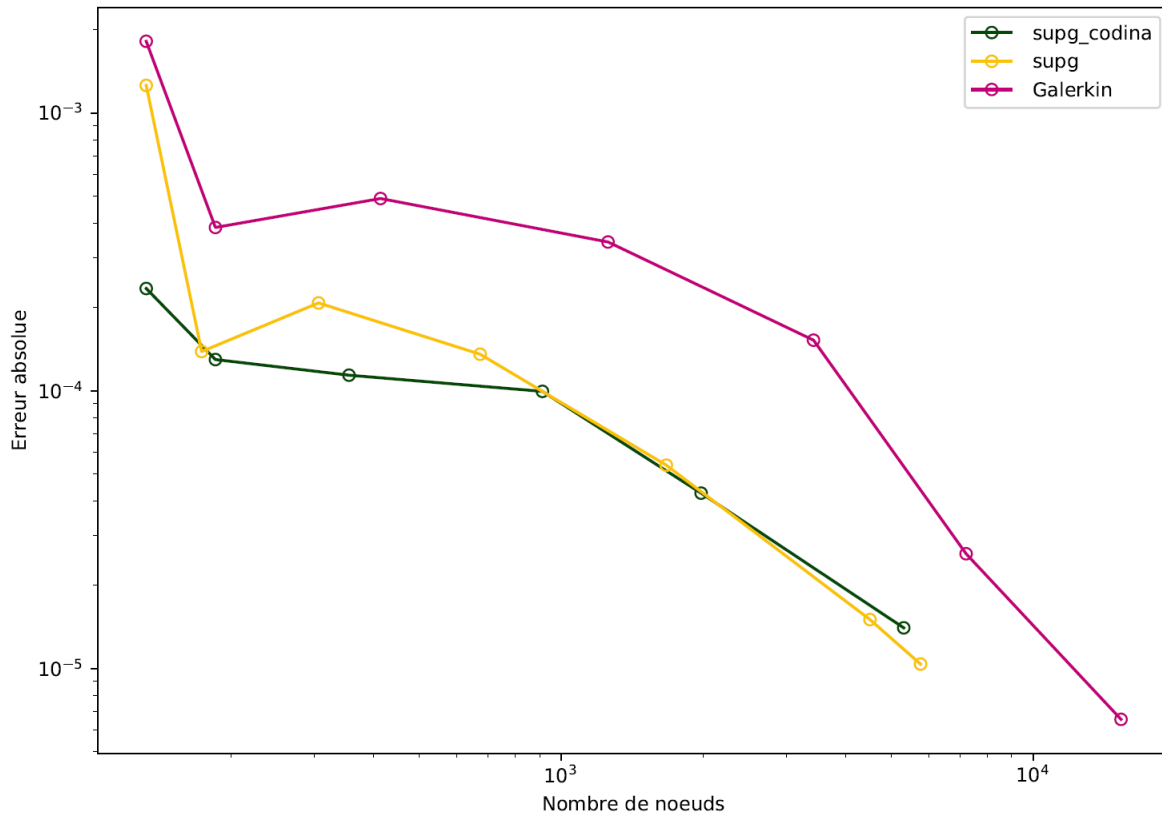


Figure 6.3 Erreur absolue par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation

Erreur exacte

Nous avons déterminé précédemment la solution exacte du problème de diffusion non visqueux. Au lieu d'utiliser l'estimateur d'erreur de ADAPT, nous avons utilisé l'erreur exacte non visqueuse. Les résultats ne sont pas concluants, l'erreur stagne vers une valeur, qui est l'erreur faite par l'approximation non visqueuse. Dans notre cas, la viscosité ne peut pas être négligée, et nous devons travailler avec l'estimateur d'erreur d'ADAPT, ou construire une solution manufacturée.

Avec post traitement de l'adaptation : relaxation du maillage

ADAPT nous propose un outil de relaxation du maillage. Le nouveau maillage généré est modifié pour être plus lisse, et c'est ce maillage relaxé qui sera utilisé pour relancer le calcul. Un lecteur intéressé pourra consulter la thèse de Muller, partie 4.3 [36]. Cela permet d'avoir un maillage plus équilibré, avec des éléments mieux répartis. En effet, après des remaillages successifs, nous nous retrouvons parfois avec des éléments très déformés (très allongés), ou encore des sommets partagés par beaucoup d'éléments. Relaxer le maillage permet de réduire

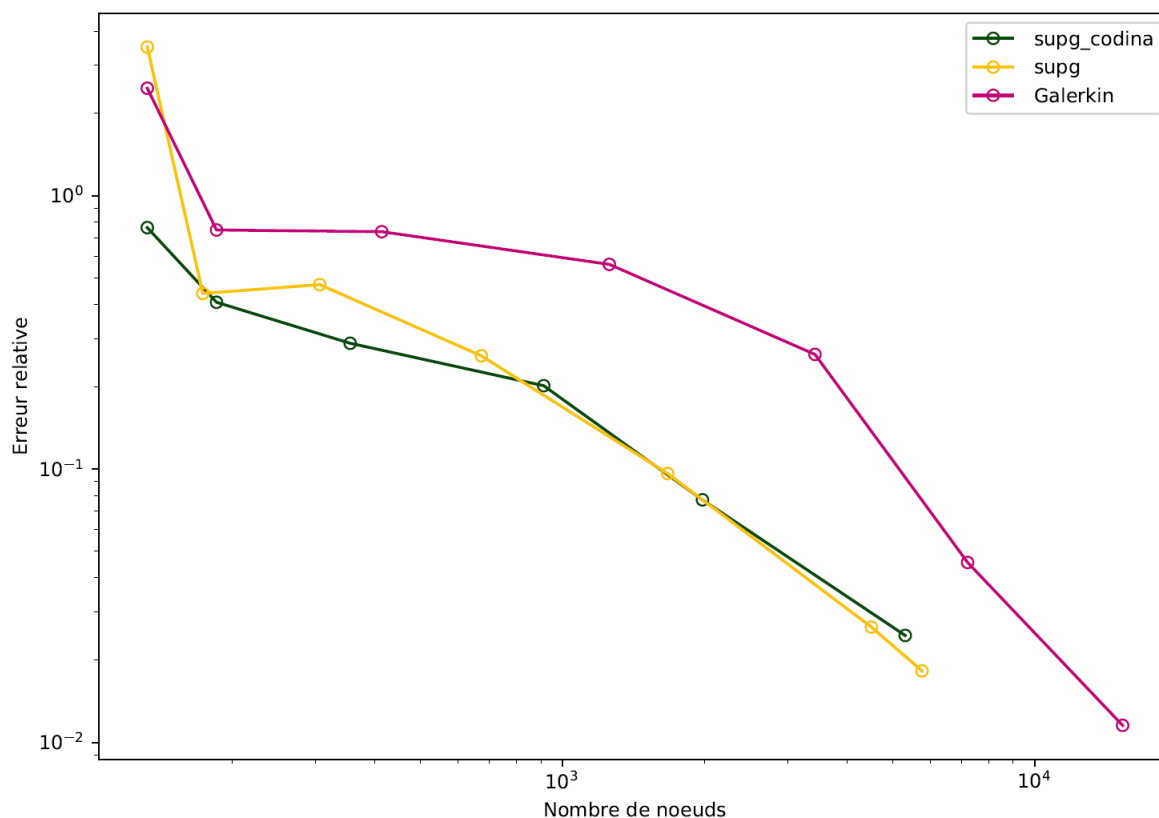


Figure 6.4 Erreur relative par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation

ces problèmes, et donc faciliter le prochain remaillage. La différence est illustrée avec les maillages fig. 6.7. Les éléments sont beaucoup plus réguliers à droite, mais en contrepartie plus petits et plus nombreux. La relaxation du maillage est effectuée plusieurs fois entre chaque cycle d'adaptation, pas uniquement au dernier.

Cette méthode nous a permis de ne plus avoir de problème lors de l'adaptation de maillage. Les éventuelles difficultés de convergence de la méthode de Newton persistent quant à elles. En revanche, la relaxation de maillage génère beaucoup plus de noeuds. En effet, nous voyons fig. 6.8 que le nombre de noeuds est beaucoup plus important avec la relaxation du maillage, quelle que soit la méthode de stabilisation utilisée. À l'inverse, quand la relaxation de maillage n'est pas utilisée, c'est pour SUPG-Codina que nous avons le plus de noeuds. Il faut voir si ce plus grand nombre de noeuds s'accompagne d'une amélioration significative de la précision des résultats.

Voyons si en plus d'aider à l'adaptation de maillage, la relaxation du maillage apporte une amélioration des résultats. Nous confirmons avec la fig. 6.9 que plus nous effectuons de cycles d'adaptation, plus les erreurs diminuent lorsque nous utilisons la relaxation du maillage. En

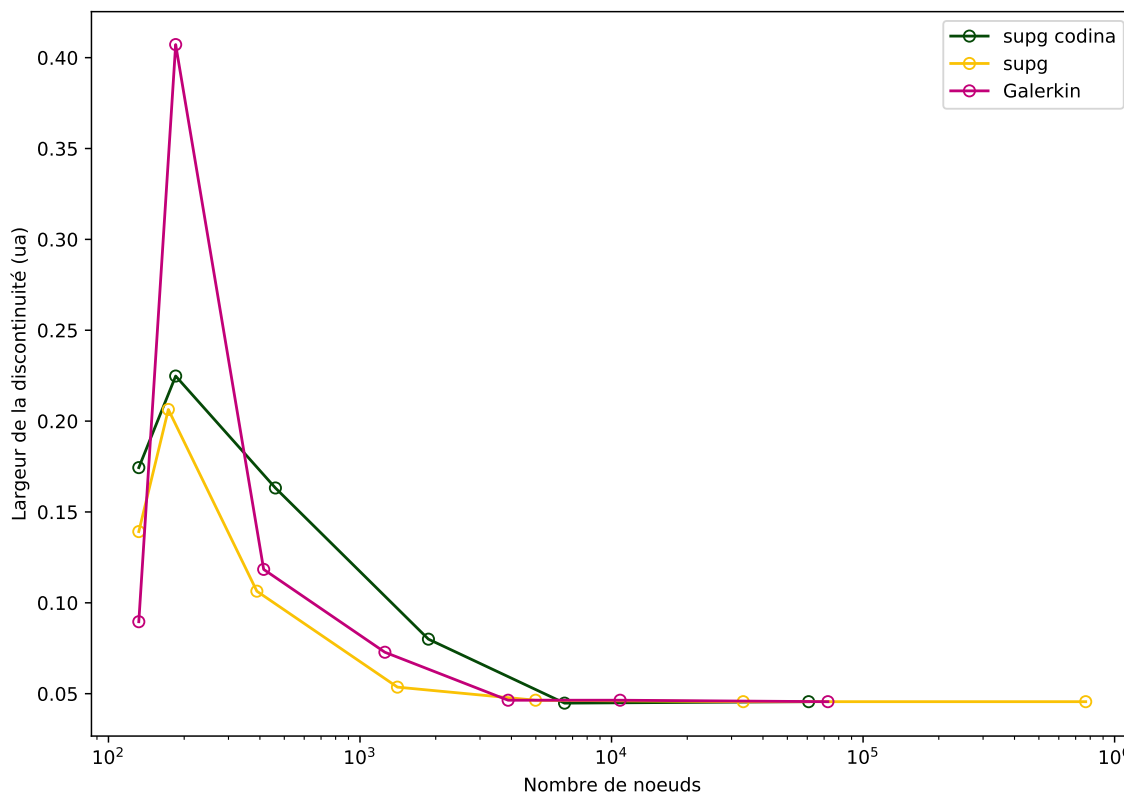


Figure 6.5 Largeur de la discontinuité du cas de diffusion de température par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation

effet, plus il y a de cycles, plus il y a d'éléments déformés ou partageant des sommets, donc le maillage est de plus mauvaise qualité. Corriger cela nous permet de retrouver des résultats plus précis. Cette amélioration est encore plus marquée pour SUPG et SUPG-Codina, l'erreur est divisée par plus de 10 pour le sixième cycle de SUPG.

Cependant, nous avons vu précédemment que la relaxation du maillage conduisait à un nombre beaucoup plus grand d'éléments, cela est-il suffisamment important pour nous dissuader d'utiliser la méthode? Observons l'évolution des erreurs absolues en fonction du nombre de noeuds dans le maillage, fig. 6.10. Pour le sixième cycle d'adaptation de SUPG, nous observons une amélioration de l'erreur d'un facteur 10, mais le nombre de noeuds est multiplié par un facteur 100. Pour le cinquième cycle avec SUPG-Codina, nous avons une amélioration de l'erreur d'un facteur 10 aussi, et une augmentation du nombre de noeuds d'un peu plus de 10 aussi. L'utilisateur peut utiliser l'une ou l'autre des méthodes, en fonction des ressources disponibles, et de s'il a besoin de résultats précis (relaxation du maillage), ou rapides (sans relaxation).

Il faut remarquer que la relaxation de maillage ne génère pas plus d'erreurs de transfert

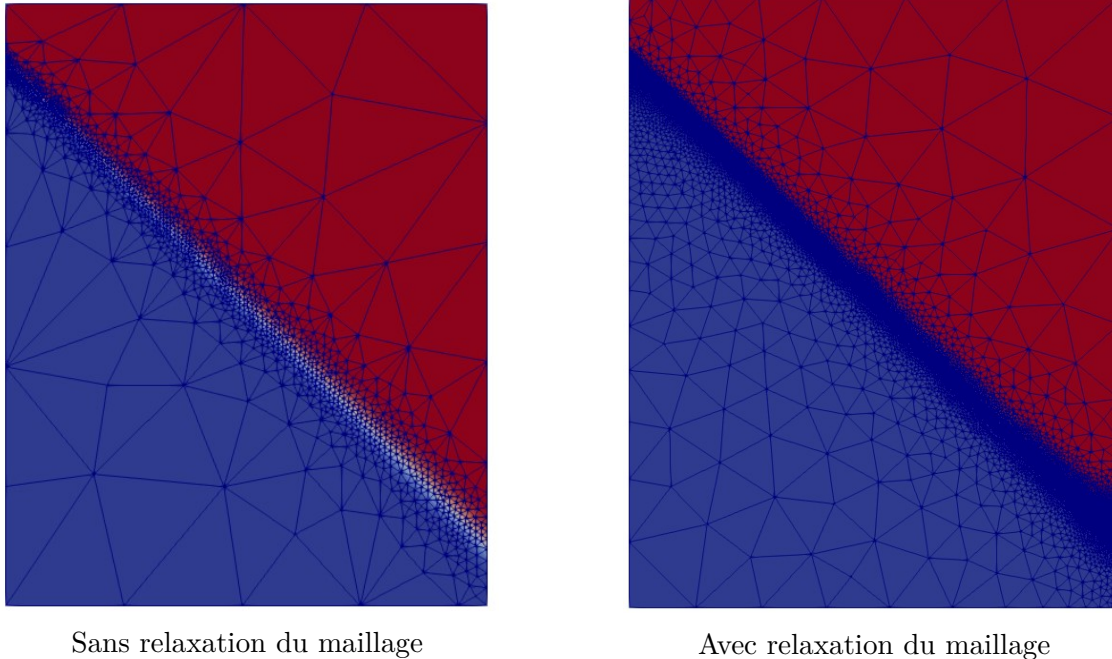


Figure 6.7 Maillage au cinquième cycle d'adaptation pour la diffusion de température stabilisé avec SUPG-Codina

d'erreur de la solution que l'adaptation de maillage simple.

L'utilisation de la relaxation de maillage ne change pas les conclusions faites précédemment sur l'efficacité des différentes méthodes.

6.1.2 Tube à choc

Pour évaluer l'efficacité de la méthode de capture de choc de Codina sur le cas du tube à choc, nous nous plaçons dans les conditions expérimentales déterminées précédemment. Le maillage sera donc de 1 élément de hauteur sur 2000 éléments de largeur, et la viscosité de $\mu = 10^{-7}$ Pa.s. Le pas de temps est fixe, mais puisqu'il est celui qui influence le plus sur la précision des résultats, nous ferons des tests pour plusieurs pas de temps : $5 \cdot 10^{-6}$ s, $1.25 \cdot 10^{-6}$ s, $4.1 \cdot 10^{-7}$ s et $2 \cdot 10^{-7}$ s, soit respectivement 325, 1300, 4000, 8000 pas de temps pour résoudre le cas. Pour des pas de temps longs, les méthodes de stabilisation font peu voire pas de différence sur l'erreur (fig. 6.11) ou sur les dépassements (fig. 6.12). Quand nous arrivons à des pas de temps inférieurs à 10^{-7} s pour les dépassements, et un peu plus bas pour les erreurs, les effets de méthodes de stabilisation commencent à se faire sentir. Cependant, nous remarquons que SUPG seul et SUPG-Codina donnent des résultats similaires, les courbes semblent être fusionnées. Cela ne veut pas dire que la méthode de Codina ne s'est pas effectuée, puisqu'on

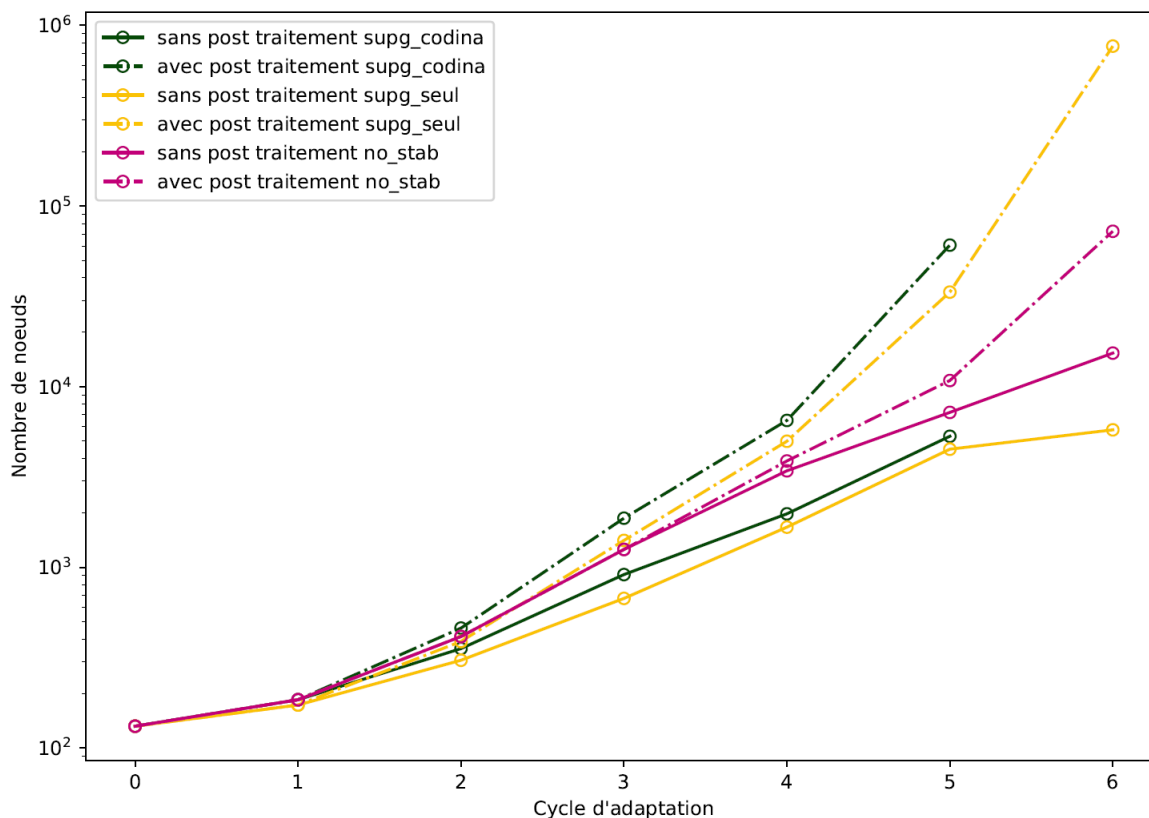


Figure 6.8 Nombre de noeuds par cycle d'adaptation, avec et sans post traitement (relaxation du maillage)

voit qu'utilisée seule, elle apporte quand même une stabilisation, même si elle est moins bonne que SUPG seul. Rien de surprenant à ce comportement, nous avons vu qu'en transitoire, le terme temporel prédominait dans le calcul du terme SUPG et du terme de Codina, et que le terme final était donc trop faible devant le terme SUPG pour apporter quelque chose en plus (voir section 5.1.2).

Tel quel, le terme de Codina n'apporte pas de différence par rapport à l'utilisation de SUPG seul. De plus, à cause des discontinuités qu'il peut avoir, il rend la convergence plus difficile, et les calculs plus longs. Il n'est donc pas intéressant de l'utiliser en transitoire. Nous pouvons chercher des solutions aux problèmes de continuité et de prédominance du terme temporel en transitoire présentés section 5.1.2 ou essayer de développer une différente méthode plus robuste.

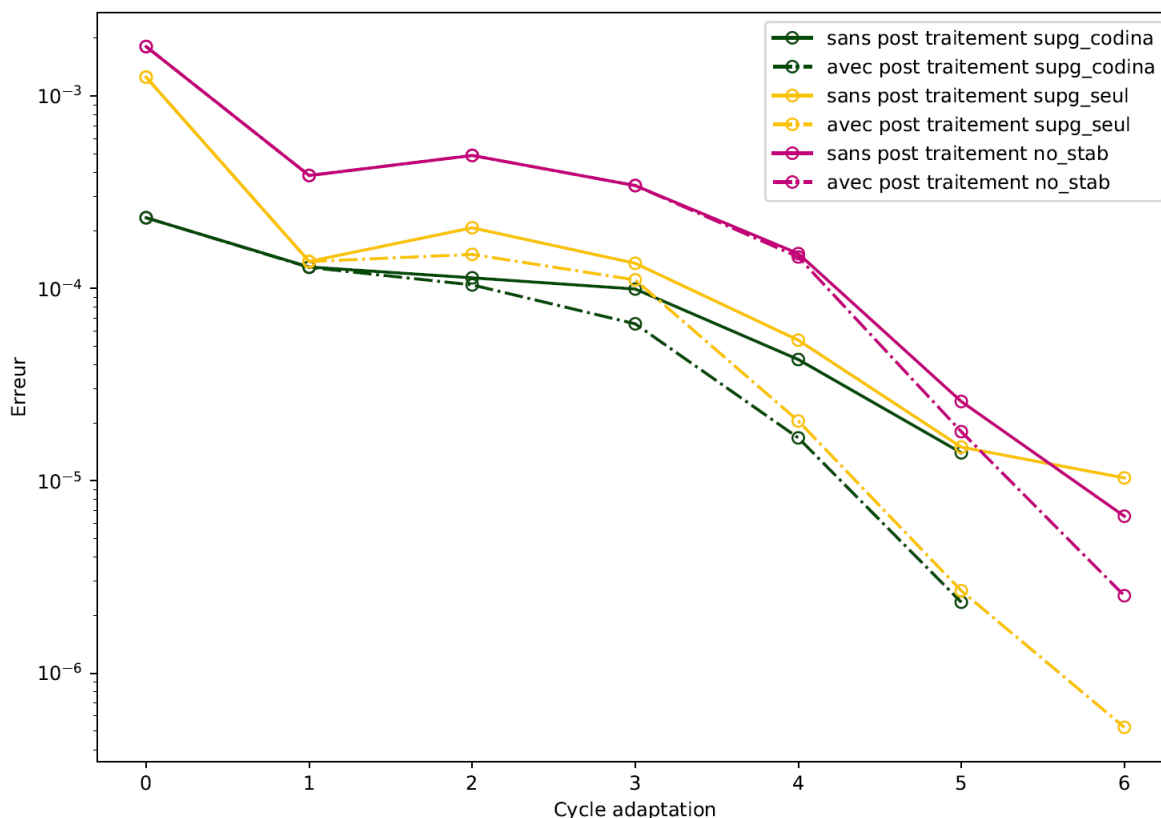


Figure 6.9 Erreur absolue par cycle d'adaptation pour différentes méthodes de stabilisation avec et sans post traitement (relaxation du maillage)

6.2 Tezduyar et Senga

6.2.1 Diffusion de température

Ce cas n'a pas été traité avec la méthode de Tezduyar et Senga. En effet, elle est développée pour des écoulements compressibles, la formulation fait appel à l'équation d'état et le terme de stabilisation n'est pas défini quand $\nabla\rho$ est nul.

6.2.2 Tube à choc

Nous ne comparons pas ce cas avec Codina puisque la méthode donne des résultats superposés à SUPG en transitoire. Nous relevons immédiatement un premier problème avec cette méthode, puisque si les premières itérations convergent, le problème finit lentement par diverger, et le calcul ne finit pas. Commençons par voir si la taille du pas de temps a une influence. Puisque nous travaillons en pas de temps fixes et que nous fixons le nombre de pas de temps, nous pouvons calculer un pourcentage du nombre de pas de temps réalisés sur le nombre de

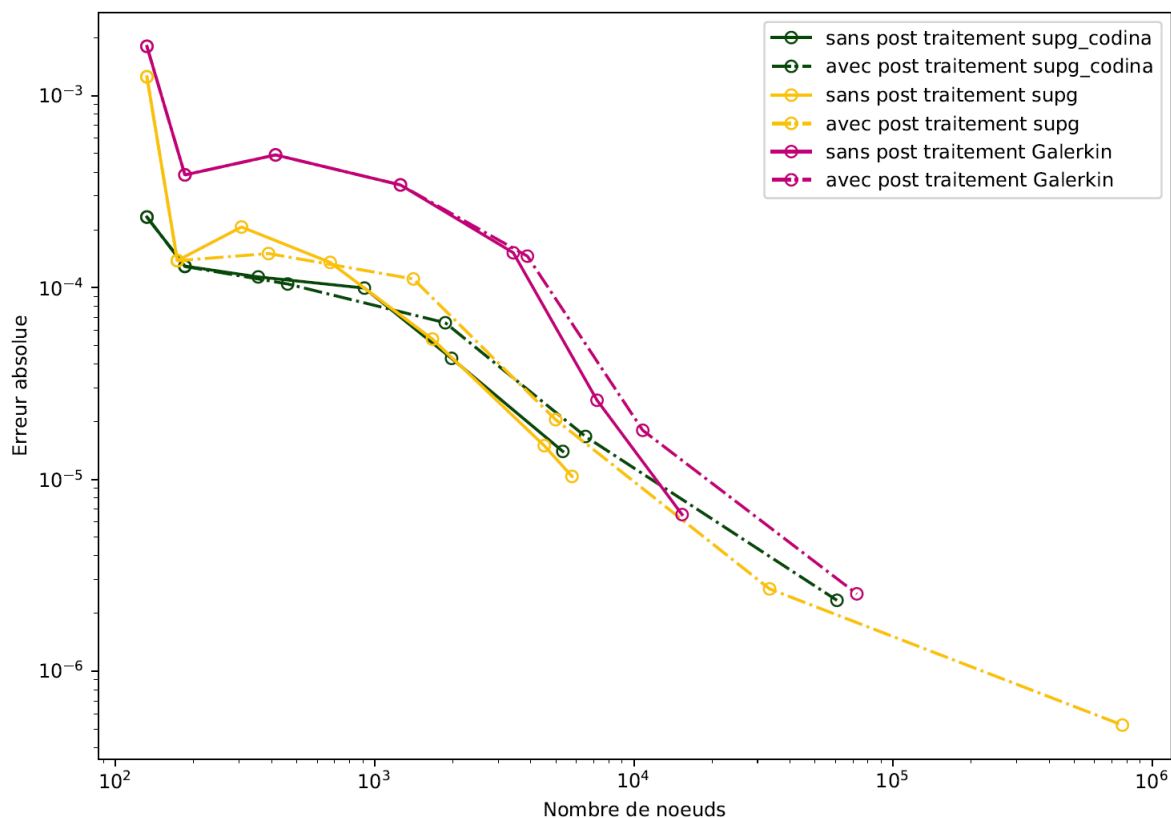


Figure 6.10 Erreur absolue par nombre de noeuds pour différentes méthodes de stabilisation avec et sans post traitement (relaxation du maillage)

pas de temps attendu. Nous voyons fig. 6.13 qu'à part pour 650 pas de temps, plus le nombre de pas de temps augmente (et donc plus le pas de temps diminue), plus la simulation va loin dans le temps. À partir de 10 000 pas de temps, nous atteignons des pas de temps de l'ordre de 10^{-7} s, ce qui est la limite du code. Le système résolu devient presque diagonal, avec les termes non diagonaux qui sont très petits, voire ignorés lors de la résolution. La moins bonne convergence des résultats passé ce point peut trouver sa source ici.

Une explication possible de l'amélioration de la convergence avec la baisse du pas de temps est que la méthode de Tezduyar et Senga n'apporte pas de stabilisation temporelle, il faut donc baisser le pas de temps pour apporter naturellement cette stabilisation. Il n'y a pourtant pas de stabilisation temporelle quand nous résolvons le problème avec la méthode de Galerkin seule, et les résultats convergent. De plus, SUPG apporte déjà de la stabilisation temporelle, et la méthode de Tezduyar et Senga s'utilise avec SUPG. Donc cette hypothèse mérite d'être explorée, mais il peut y avoir d'autres explications à cette non convergence.

Comparons maintenant les résultats obtenus avec la méthode de Tezduyar et Senga. Tout d'abord, les valeurs de la vitesse axiale u sont présentées fig. 6.14, fig. 6.15 (zoom avant l'onde

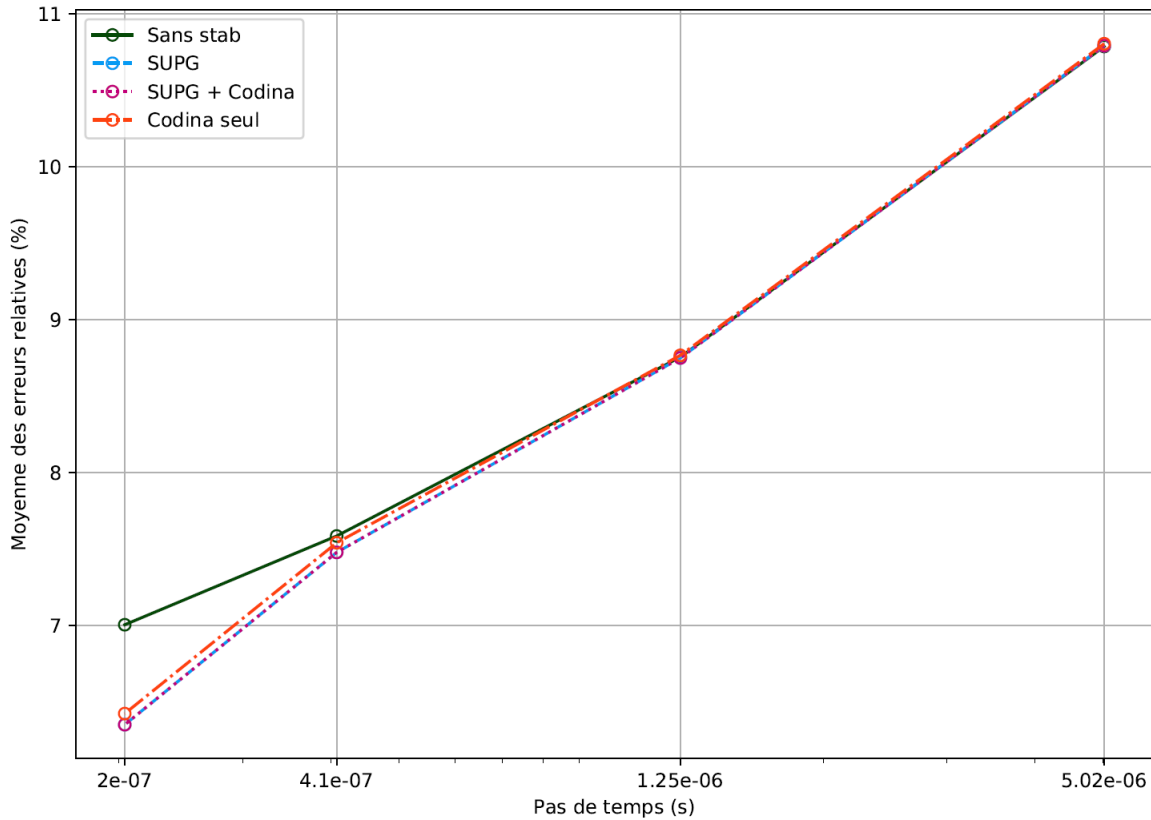


Figure 6.11 Erreur relative moyenne dans le tube à choc pour différentes méthodes de stabilisation

de détente) et fig. 6.16 (zoom entre l'onde de détente de l'onde de choc). Nous constatons aisément que les résultats avec Tezduyar et Senga présentent, à pas de temps égaux, beaucoup moins d'oscillations qu'avec SUPG. En revanche, nous remarquons une légère oscillation avant l'onde de détente 6.15 et après l'onde de choc (non représentée), et une bosse d'amplitude non négligeable à l'endroit de la discontinuité de contact (en x_{23} sur la fig. 4.6). De plus, après cette bosse, la vitesse de déplacement du choc normal u_p est plus faible qu'attendu. La réduction du pas de temps augmente l'amplitude de l'oscillation d'avant l'onde de détente et le choc, mais contribue à réduire les oscillations là où sont les discontinuités et ne change pas l'amplitude de la bosse. La bosse était présente avec SUPG, mais est amplifiée avec la capture de choc de Tezduyar et Senga. L'origine de l'amplification de la bosse est inconnue, il faudrait conduire des tests, notamment sur la finesse du maillage, pour comprendre d'où elle vient.

Évaluons maintenant l'influence du schéma sur l'erreur et les dépassements de la solution. Les calculs d'erreurs et dépassements relatifs sont effectués comme précédemment, les moyennes sont faites sur le nombre de pas de temps obtenus. Nous cherchons notamment à savoir à

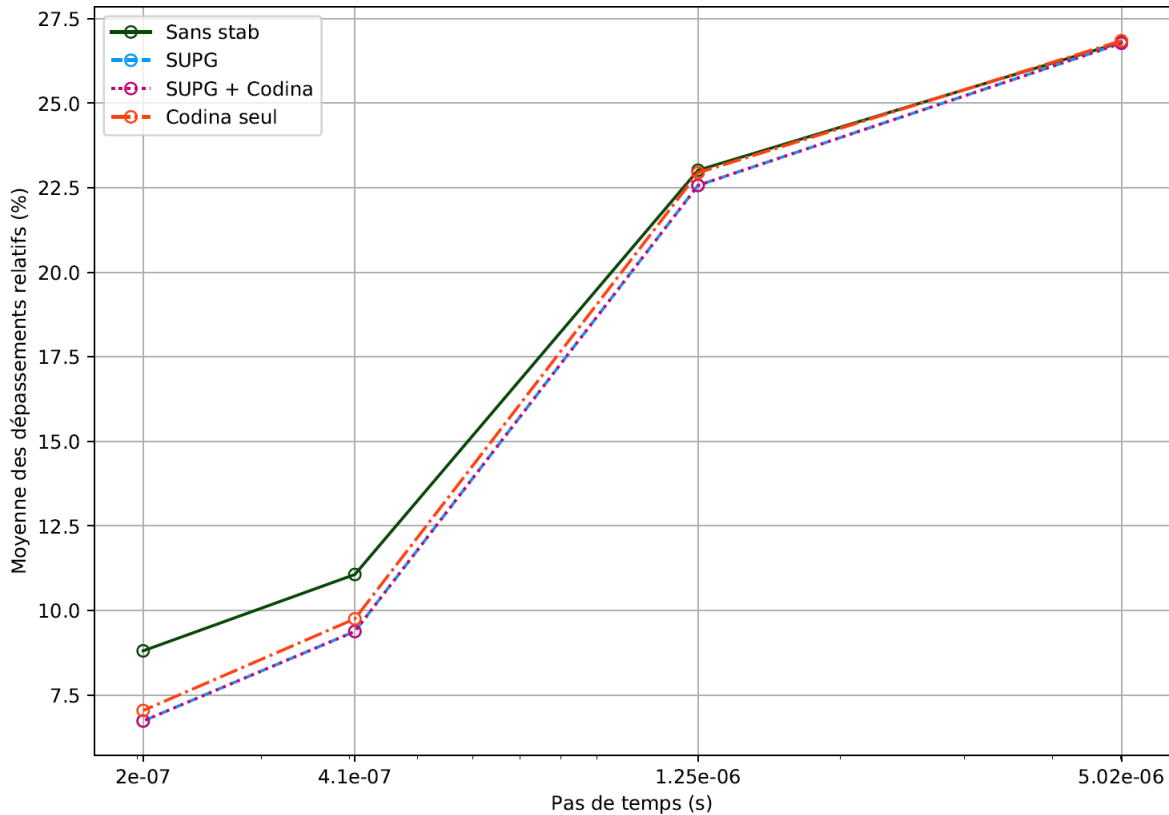


Figure 6.12 Dépassement relatif moyen dans le tube à choc pour différentes méthodes de stabilisation

quel point l'apparition de la bosse et l'erreur sur la vitesse du choc u_p sont problématiques. Les erreurs et dépassements sont représentés pour différents pas de temps et comparés avec SUPG fig. 6.17 et 6.18. Les résultats sont bien meilleurs qu'avec SUPG. Malgré les problèmes évoqués, l'erreur comme les dépassements sont bien plus bas avec la méthode de Tezduyar et Senga, surtout pour des pas de temps élevés (peu de pas de temps attendus). Attention cependant, tout comme pour SUPG, l'erreur commence à remonter légèrement quand le pas de temps devient trop petit.

Nous pourrions être tentés de conclure que puisque l'erreur et les dépassements sont plus bas avec la méthode de Tezduyar et Senga, elle est à privilégier à SUPG. Toutefois, elle présente des problèmes non négligeables. Elle fait lentement diverger les calculs, et le palier de la vitesse du choc n'est pas bon, même si ça ne fait pas significativement augmenter l'erreur globale sur la solution. Les oscillations ne sont pas souhaitables, mais la vitesse du choc peut être une information critique. Il faut donc être conscient des informations que l'on veut tirer de notre solution pour faire un choix de méthode.

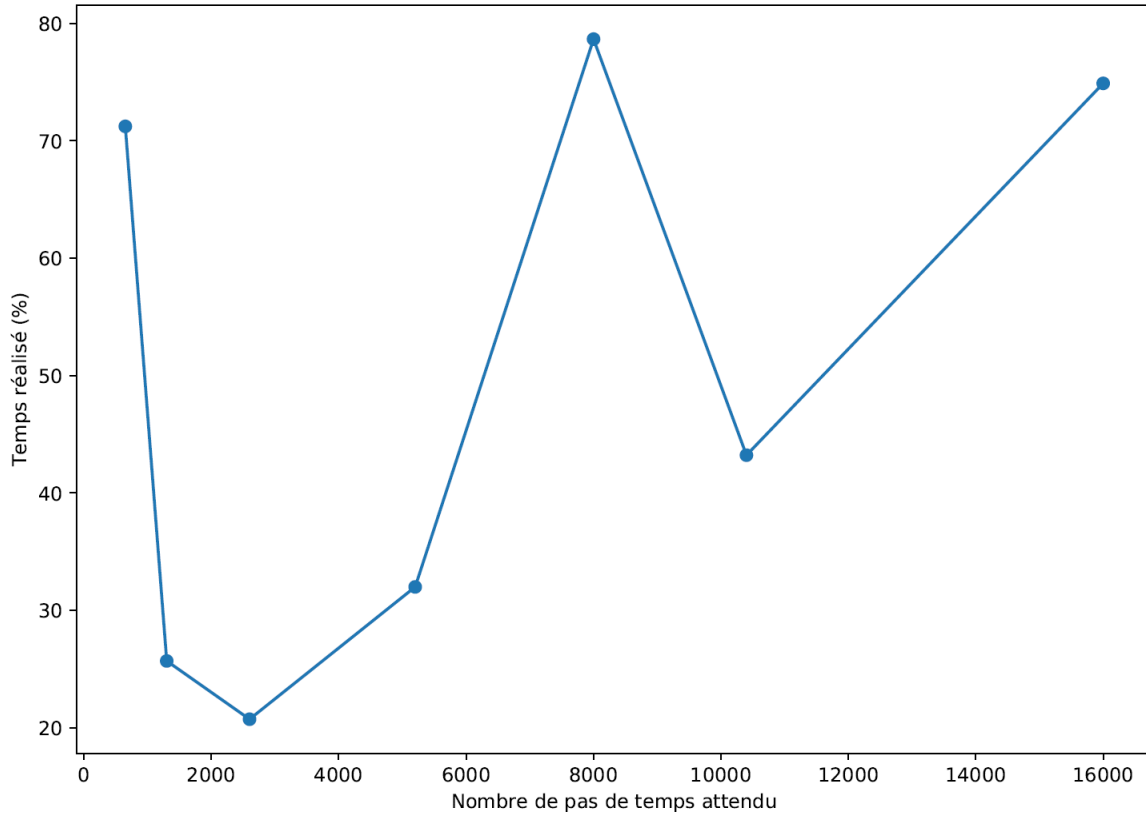


Figure 6.13 Évolution du temps atteint avec la méthode de Tezduyar et Senga en fonction du nombre de pas de temps attendu

6.2.3 Conclusion

Les résultats apportés par la capture de choc de Tezduyar et Senga sont mitigés. Elle conduit à des difficultés de convergence, que nous n'avons pas encore expliquées, la piste de la non stabilisation du temps ne paraît pas suffisante. Pour la partie de la simulation qui a pu être effectuée, la méthode donne de meilleurs résultats pour le tube à choc, si l'on n'a pas besoin précisément de la vitesse du choc, et que l'on préfère avoir un résultat avec le moins d'oscillations possible.

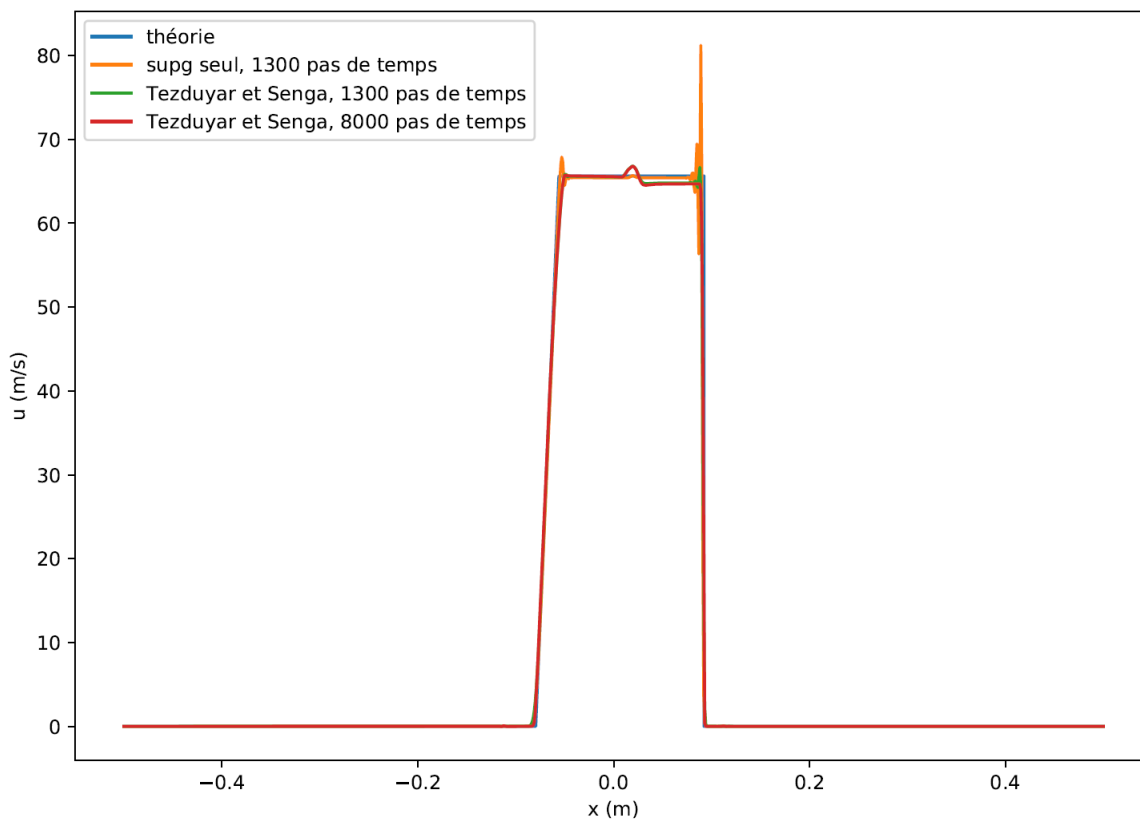


Figure 6.14 Évolution de la vitesse dans le tube à choc, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation à $t = 3.10^{-4}$ s

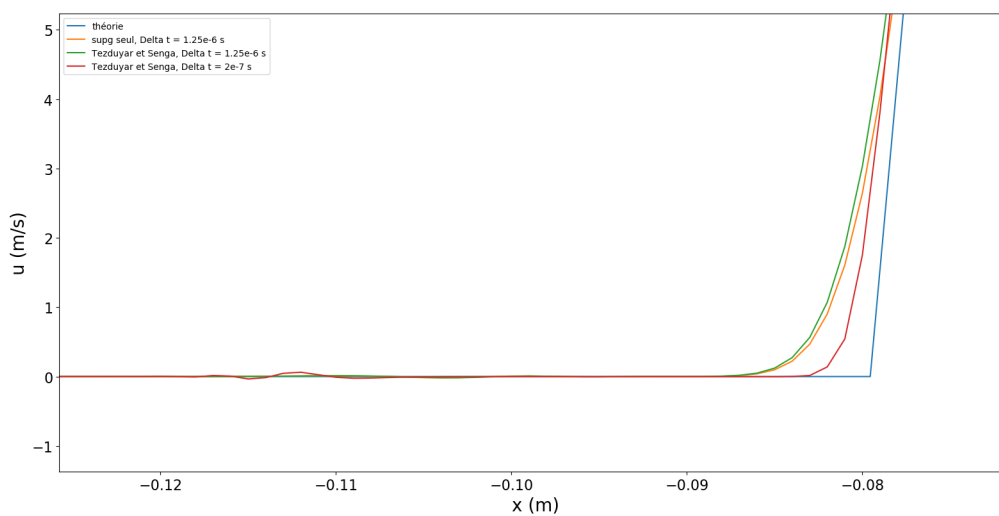


Figure 6.15 Évolution de la vitesse dans le tube à choc avant l'onde de détente, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation

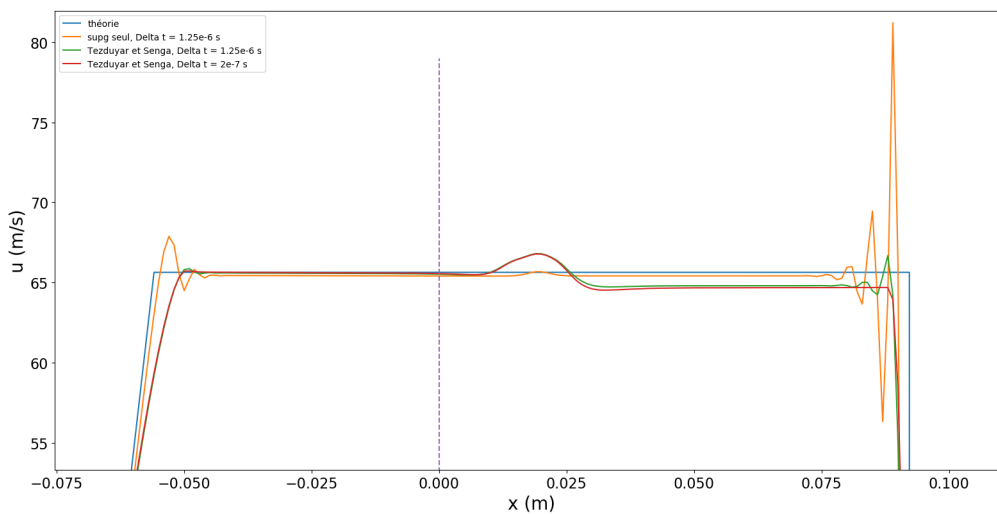


Figure 6.16 Évolution de la vitesse dans le tube à choc (zoom) pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation

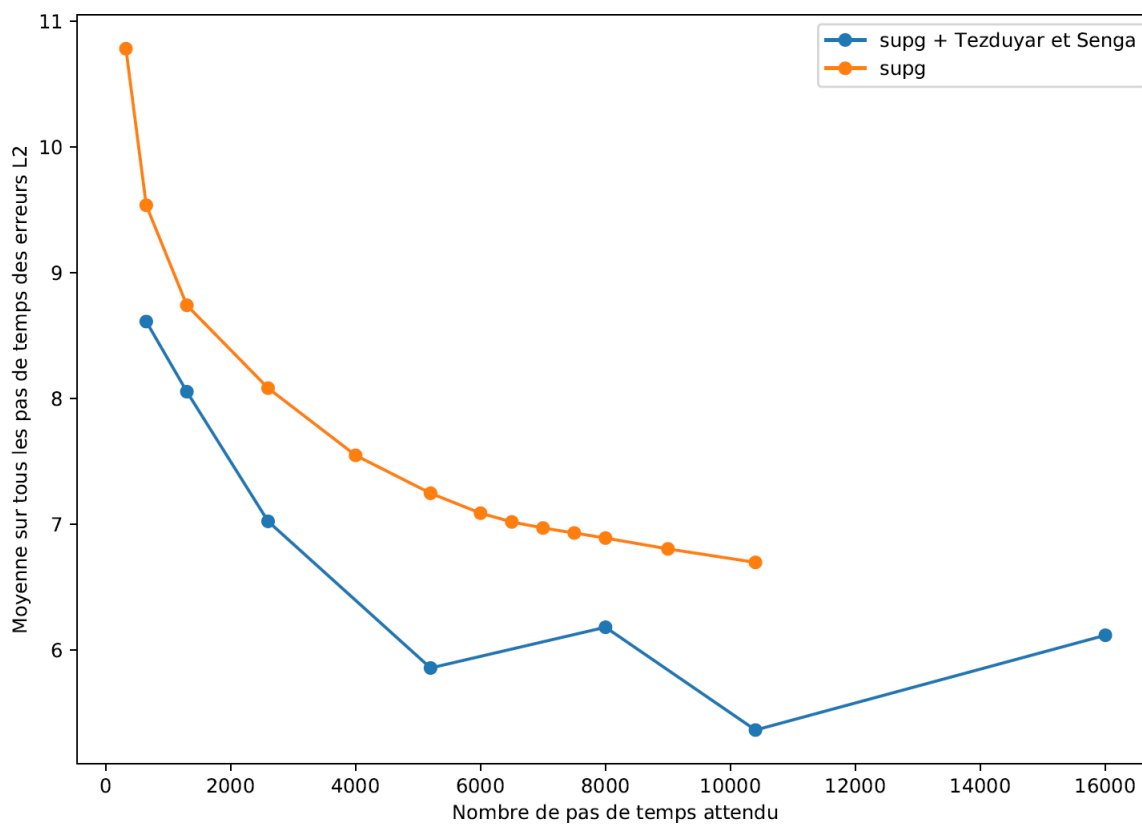


Figure 6.17 Évolution de la moyenne de l'erreur de la vitesse dans le tube à choc, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation

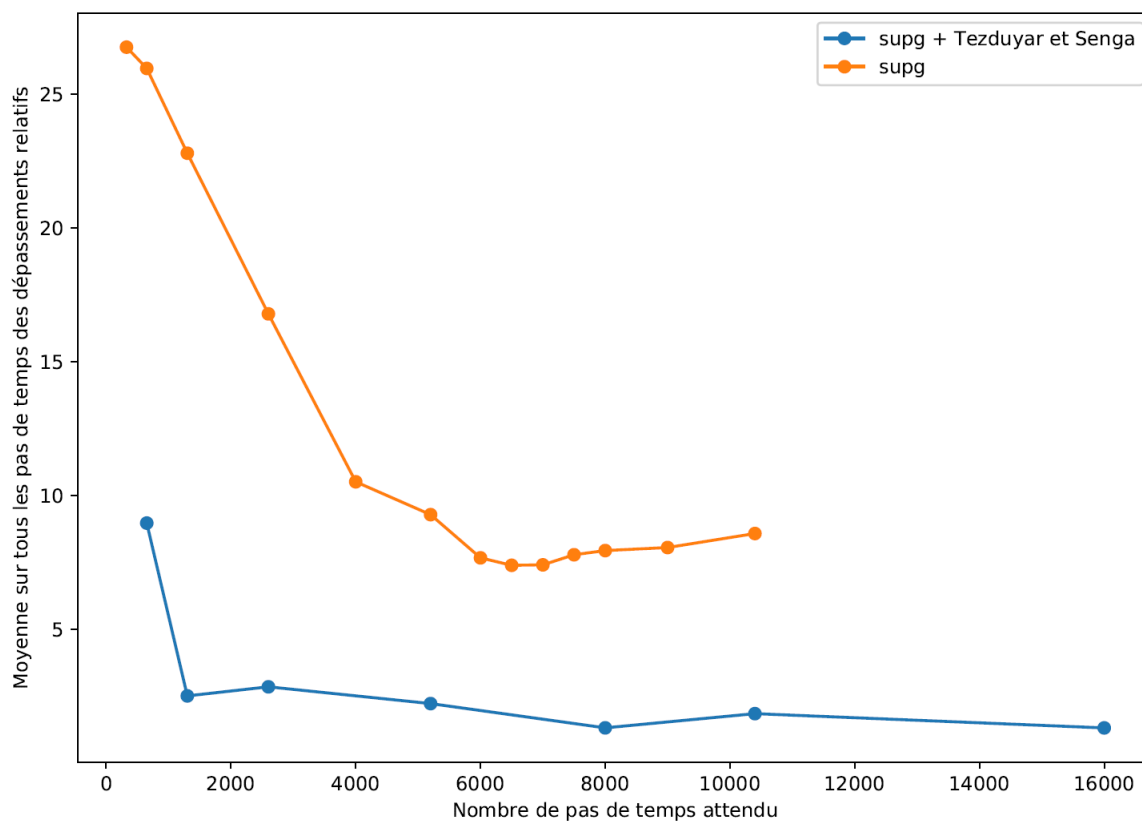


Figure 6.18 Évolution de la moyenne des dépassements relatifs de la vitesse dans le tube à choc, pour différents pas de temps et méthodes de stabilisation

CHAPITRE 7 CONCLUSION

7.1 Synthèse des travaux

Lors de la simulation d'écoulements compressibles ou de problèmes de convection-diffusion, des chocs ou de forts gradients peuvent apparaître, et ils sont la source d'instabilités numériques que nous cherchons à réduire. Les équations de Navier-Stokes compressibles en variables conservées sont mal définies à la limite incompressible. À partir d'une écriture unifiée des équations en variables primitives, adaptée pour tout régime d'écoulements laminares, nous nous sommes appliqués à mettre en place de la capture de choc en complément de la méthode SUPG.

Nous avons commencé par adapter la méthode de Codina pour les équations de convection-diffusion aux équations de Navier-Stokes compressibles [30]. La méthode présente des discontinuités : prise d'une norme, d'un maximum, condition "si" pour ne pas diviser par 0. Elles conduisent à des difficultés de convergence lors de la résolution du système d'équations par la méthode de Newton. En dehors des difficultés de convergence accrues, la méthode conduit à une amélioration notable de la précision des résultats pour le cas de convection-diffusion stationnaire. Pour le tube à choc, la méthode n'apporte aucune amélioration par rapport à SUPG. En effet, dans notre formulation, le terme temporel domine à la fois dans la partie SUPG et la partie capture de choc, les deux termes sont quasiment égaux, et aucune stabilisation complémentaire n'est donc apportée par la capture de choc. Ce problème peut aussi venir indirectement d'une mauvaise adaptation de la méthode de Codina aux équations de Navier-Stokes compressibles.

Dans le cas 2D de l'équation de convection-diffusion, l'adaptation de maillage, couplée à la capture de choc, bien qu'elle participe à une augmentation du nombre d'éléments dans le maillage, améliore significativement la qualité des résultats.

Nous avons ensuite testé la méthode de Tezduyar et Senga [1, 15] sur le cas du tube à choc. La formulation faisant appel à l'équation d'état du gaz et au gradient de la masse volumique, il n'est possible de la tester que sur des cas compressibles. Tout comme la méthode de Codina, cette méthode amène des difficultés de convergence. Elles sont cette fois temporelles ; le problème diverge tout doucement au fur et à mesure des itérations temporelles, au lieu de diverger brusquement à cause de la présence d'une discontinuité. Les difficultés de convergence portent plus à conséquence, puisque la simulation ne peut pas aboutir. Nous arrivons à effectuer entre 20 et 80% de la simulation. L'origine de ce problème de convergence n'a pas encore été identifiée. En revanche, les résultats pour la partie de la solution qui a été

effectuée sont bons. L'erreur baisse de 1 à 3% par rapport à SUPG, parce que les oscillations sont fortement atténuées. Cependant, il y a une dégradation de la solution au niveau de la discontinuité de contact entre les deux fluides, avec l'amplification d'une bosse qui était présente avec SUPG. Ce n'est pas suffisant pour dégrader la précision globale des résultats, mais donne une moins bonne estimation de la vitesse de déplacement du choc, qui peut être une information importante dans certaines simulations.

Il est difficile de comparer les deux méthodes, puisque la méthode de Codina ne donne pas de résultats en compressible transitoire, et qu'il n'est pas possible de traiter un écoulement incompressible avec celle de Tezduyar et Senga. Séparément et en dehors des difficultés de convergence, les deux méthodes donnent des résultats satisfaisants pour un type de problème donné. Malgré une formulation des équations unifiée pour les écoulements compressibles et incompressibles, nous ne sommes pas parvenus à faire une capture de choc universelle. Cependant, de nombreuses pistes sont envisageables pour achever ce but et améliorer les résultats obtenus.

7.2 Améliorations futures

7.2.1 Un terme universel pour les écoulements compressibles et incompressibles

Nous avons constaté que la méthode de Codina, bien qu'elle soit structurellement adaptée aux écoulements compressibles transitoires, ne donne pas de résultats satisfaisants. La stabilisation temporelle dirige le terme. Comme on le soustrait ensuite au terme SUPG, le terme de capture effectivement ajouté est nul. Un meilleur équilibrage des termes peut améliorer la situation et rendre la méthode efficace pour une plus grande gamme de type d'écoulements. Pour cela, plusieurs choix s'offrent à nous :

- Enlever le terme temporel de la formulation dans la partie capture de choc. La stabilisation temporelle serait ainsi apportée uniquement par la partie SUPG. Cependant, la méthode de Tezduyar et Senga fonctionne de cette façon, et le problème ne converge pas jusqu'au bout. Nous pouvons nous demander si nous aurons le même type de comportement en procédant ainsi.
- Enlever la prise du maximum dans le calcul du terme de capture de choc, donc prendre $\tau_{choc} = \tau_{||}$, au lieu de $\tau_{choc} = \max(0, \tau_{||} - \tau_{supg})$. Ce choix risque de rajouter trop de diffusion localement, il faudrait évaluer cette augmentation, et voir si la généralisation de la méthode à tout type d'écoulement vaut cette perte de précision.
- En dehors des préoccupations de la stabilisation temporelle, il faudrait aussi confirmer si la méthode est adaptée aux équations de Navier-Stokes compressibles stationnaires. Si ce n'est pas le cas, la généralisation du terme aux équations de Navier-Stokes n'est

pas suffisante, et il est nécessaire de développer un nouveau terme.

La méthode de Tezduyar et Senga n'est pas applicable car elle fait appel à l'équation d'état, dans notre cas la loi des gaz parfaits, pour calculer la masse volumique (variable conservée) à partir de la pression et température (variables primitives). Le terme de stabilisation dépend aussi du gradient de la masse volumique. Les écoulements où la masse volumique est constante ne peuvent donc pas être traités par cette capture de choc. La masse volumique avait été choisie parce que c'est une variable caractéristique lors d'un choc, elle varie fortement à travers un choc. Nous pourrions essayer d'appliquer la même démarche, mais avec d'autres variables caractéristiques du choc, comme la pression. Il faudra alors vérifier que l'on n'ajoute pas trop de diffusion dans les problèmes où des gradients de pression interviennent, comme les phénomènes de perte de charge.

7.2.2 Amélioration de la convergence des méthodes

Les causes de discontinuités de la méthode de Codina ont été mises en avant précédemment, et peu de solutions convaincantes ont été trouvées. Une reformulation totale serait nécessaire si l'on veut totalement s'affranchir des problèmes de convergence.

Pour Tezduyar et Senga, il faudrait comprendre plus en détail les causes de la lente divergence des résultats au fil des itérations temporelles. Elle est probablement liée à la stabilisation du temps qui est absente dans le terme de capture de choc, mais pas nécessairement. En effet, la méthode des Galerkin simple ne stabilise pas le temps et les calculs convergent quand elle est utilisée.

7.2.3 Amélioration de la précision des résultats

Les cas test utilisent des solutions théoriques non visqueuses. Ces solutions peuvent servir de point de départ pour créer une solution manufacturée, ce qui permettrait d'étudier la convergence des résultats avec précision. De plus, la solution manufacturée nous aiderait à quantifier le rôle de la viscosité dans la diffusion du choc.

Les résultats pour les écoulements compressibles stabilisés par SUPG pourraient être améliorés en ajoutant un terme stabilisant l'équation de l'énergie à partir de la température dans la formulation SUPG. Ce terme est proposé dans les articles de Tezduyar et Senga [1, 15], tandis que nous utilisons la version plus ancienne de Tezduyar et Osawa [12].

Les deux méthodes implémentées sont des méthodes où la capture de choc est isotrope. Des méthodes orthogonales existent aussi. C'est le cas de la méthode de Codina, qui a également une version orthogonale [30]. Il serait intéressant d'implémenter une méthode de ce type pour évaluer les apports d'un opérateur orthogonal.

La capture de choc de Codina pourrait être améliorée en ne négligeant pas \vec{u}_{\parallel} dans la définition de la taille de l'élément. Dans la version implémentée, la taille de l'élément qui intervient dans la capture de choc est la même que celle utilisée dans SUPG, mais nous pourrions construire une version avec une taille d'élément différente, qui dépende de \vec{u}_{\parallel} .

Comprendre l'origine de l'amplification de la bosse de la discontinuité de contact dans le tube à choc stabilisé avec l'opérateur de Tezduyar et Senga permettrait de mieux comprendre la méthode, ses limites, et d'en proposer des améliorations. Il serait aussi intéressant de tester le deuxième opérateur qu'ils présentent, dont nous avons proposé une adaptation en variables primitives section 5.2.3.

RÉFÉRENCES

- [1] T. E. Tezduyar et M. Senga, “SUPG finite element computation of inviscid supersonic flows with YZ shock-Capturing,” *Computers & Fluids*, vol. 36, n°. 1, p. 147–159, janv. 2007. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793005001362>
- [2] J. D. Anderson, *Modern compressible flow : with historical perspective*, 2^e éd., ser. McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering. New York : McGraw-Hill, 1990.
- [3] Y. Vautrin, “Modélisation et simulation numérique d’écoulements diphasiques de fluides séparés par une interface avec une méthode d’éléments finis adaptatives en espace et en temps,” PhD Thesis, Polytechnique Montréal, juill. 2020. [En ligne]. Disponible : <https://publications.polymtl.ca/5337/>
- [4] S. Lortie, “Simulation d’écoulements à surface libre entre un liquide et un gaz compressible,” Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, août 2018. [En ligne]. Disponible : <https://publications.polymtl.ca/3272/>
- [5] J. N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, 2^e éd., ser. McGraw-Hill series in mechanical engineering. New York : McGraw-Hill, 1993.
- [6] C. M. v. 5.5., “COMSOL Multiphysics Reference Manual,” Manuel, COMSOL AB, Stockholm, Sweden, 2019, pp. 219-225.
- [7] O. Zienkiewicz, R. Taylor et P. Nithiarasu, “2.2 The Steady-State Problem in One Dimension,” dans *Finite Element Method for Fluid Dynamics (6th Edition)*. Elsevier, 2005. [En ligne]. Disponible : <https://app.knovel.com/hotlink/pdf/id:kt004QK9B6/finite-element-method-3/continuity-requirements>
- [8] R. Codina, “Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 156, n°. 1-4, p. 185–210, avr. 1998. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782597002065>
- [9] I. Christie, D. F. Griffiths, A. R. Mitchell et O. C. Zienkiewicz, “Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 10, n°. 6, p. 1389–1396, 1976. [En ligne]. Disponible : <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.1620100617>
- [10] J. Rice et R. Schnipke, “A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and*

- Engineering*, vol. 48, n^o. 3, p. 313–327, avr. 1985. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782585800050>
- [11] T. J. Hughes, M. Mallet et M. Akira, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics : II. Beyond SUPG,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 54, n^o. 3, p. 341–355, mars 1986. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045782586901106>
- [12] T. E. Tezduyar et Y. Osawa, “Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n^o. 3-4, p. 411–430, oct. 2000. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782500002115>
- [13] A. Galeão, R. Almeida, S. Malta et A. Loula, “Finite element analysis of convection dominated reaction–diffusion problems,” *Applied Numerical Mathematics*, vol. 48, n^o. 2, p. 205–222, févr. 2004. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927403001582>
- [14] T. J. Hughes et M. Mallet, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics : III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, n^o. 3, p. 305–328, nov. 1986. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045782586901520>
- [15] T. E. Tezduyar et M. Senga, “Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, n^o. 13, p. 1621–1632, févr. 2006. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782505002999>
- [16] R. Codina, E. Oñate et M. Cervera, “The intrinsic time for the streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation using quadratic elements,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 94, n^o. 2, p. 239–262, janv. 1992. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/004578259290149E>
- [17] T. Tezduyar, “Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Flow Computations,” dans *Advances in Applied Mechanics*. Elsevier, 1991, vol. 28, p. 1–44. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0065215608701534>
- [18] T. J. R. Hughes, G. Scovazzi et T. E. Tezduyar, “Stabilized Methods for Compressible Flows,” *J Sci Comput*, vol. 43, n^o. 3, p. 343–368, juin 2010. [En ligne]. Disponible : <http://link.springer.com/10.1007/s10915-008-9233-5>
- [19] T. J. R. Hughes, L. P. Franca et G. M. Hulbert, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The galerkin/least-squares

- method for advective-diffusive equations,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 73, n^o. 2, p. 173–189, mai 1989. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782589901114>
- [20] F. Rispoli et G. Z. Rafael Saavedra, “A stabilized finite element method based on SGS models for compressible flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n^o. 1, p. 652–664, déc. 2006. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782506002131>
- [21] R. Codina, “Finite Element Approximation of the Convection-Diffusion Equation : Subgrid-Scale Spaces, Local Instabilities and Anisotropic Space-Time Discretizations,” dans *BAIL 2010 - Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods*, C. Clavero, J. L. Gracia et F. J. Lisbona, édit. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011, vol. 81, p. 85–97, series Title : Lecture Notes in Computational Science and Engineering. [En ligne]. Disponible : http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-19665-2_10
- [22] N. Tonicello, G. Lodato et L. Vervisch, “Entropy preserving low dissipative shock capturing with wave-characteristic based sensor for high-order methods,” *Computers & Fluids*, vol. 197, p. 104357, janv. 2020. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793019303160>
- [23] P.-O. Persson et J. Peraire, “Sub-Cell Shock Capturing for Discontinuous Galerkin Methods,” dans *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, Nevada : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 2006. [En ligne]. Disponible : <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2006-112>
- [24] G. Lodato, “Characteristic modal shock detection for discontinuous finite element methods,” *Computers & Fluids*, vol. 179, p. 309–333, janv. 2019. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045793018308557>
- [25] S. Elgeti et H. Sauerland, “Deforming Fluid Domains Within the Finite Element Method : Five Mesh-Based Tracking Methods in Comparison,” *Arch Computat Methods Eng*, vol. 23, n^o. 2, p. 323–361, juin 2016. [En ligne]. Disponible : <http://link.springer.com/10.1007/s11831-015-9143-2>
- [26] A. Harten, “On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy,” *Journal of Computational Physics*, vol. 49, n^o. 1, p. 151–164, janv. 1983. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021999183901183>
- [27] T. Hughes, L. Franca et M. Mallet, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics : I. Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics,” *Computer Methods in Applied*

- Mechanics and Engineering*, vol. 54, n^o. 2, p. 223–234, févr. 1986. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045782586901271>
- [28] G. Hauke, “Simple stabilizing matrices for the computation of compressible flows in primitive variables,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n^o. 51-52, p. 6881–6893, oct. 2001. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782501002675>
- [29] C. Bayona, J. Baiges et R. Codina, “Solution of low Mach number aeroacoustic flows using a Variational Multi-Scale finite element formulation of the compressible Navier–Stokes equations written in primitive variables,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 344, p. 1073–1103, févr. 2018. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782518300471>
- [30] R. Codina, “A discontinuity-capturing crosswind-dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, n^o. 3-4, p. 325–342, déc. 1993. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/004578259390213H>
- [31] J. Volker et P. Knobloch, “On Discontinuity—Capturing Methods for Convection—Diffusion Equations,” dans *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, A. B. de Castro, D. Gómez, P. Quintela et P. Salgado, édit. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2006, p. 336–344. [En ligne]. Disponible : http://link.springer.com/10.1007/978-3-540-34288-5_27
- [32] C. Bayona Roa, “Adaptive Mesh Simulations of Compressible Flows using Stabilized Formulations,” Thèse de doctorat, UPC, Departament d’Enginyeria Civil i Ambiental, 2017. [En ligne]. Disponible : <http://hdl.handle.net/2117/114441>
- [33] F. Ilinca et D. Pelletier, “A unified approach for adaptive solutions of compressible and incompressible flows,” dans *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, NV, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, janv. 1997. [En ligne]. Disponible : <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.1997-330>
- [34] G. Hauke et T. Hughes, “A unified approach to compressible and incompressible flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 113, n^o. 3-4, p. 389–395, mars 1994. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045782594900558>
- [35] G. Hauke et T. J. R. Hughes, “A comparative study of different sets of variables for solving compressible and incompressible flows,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, n^o. 1, p. 1–44, janv. 1998. [En ligne]. Disponible : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782597000431>

- [36] E. Muller, “Méthode d’éléments finis localement adaptative en espace et adaptative entemps pour la résolution d’écoulements instationnaires,” PhD Thesis, Polytechnique Montréal, août 2020. [En ligne]. Disponible : Avenir
- [37] T. J. Hughes et M. Mallet, “A new finite element formulation for computational fluid dynamics : IV. A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, n^o. 3, p. 329–336, nov. 1986. [En ligne]. Disponible : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045782586901532>
- [38] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1 : The recovery technique,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n^o. 7, p. 1331–1364, 1992, _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620330702>. [En ligne]. Disponible : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620330702>
- [39] —, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n^o. 7, p. 1365–1382, 1992, _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620330703>. [En ligne]. Disponible : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620330703>