POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Simulation de l'impact de vagues induites par le ballottement sur les parois des cuves de transport de gaz naturel liquéfié maritime
Auteur: Author:	Florian Etienne
Date:	2021
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Etienne, F. (2021). Simulation de l'impact de vagues induites par le ballottement sur les parois des cuves de transport de gaz naturel liquéfié maritime [Master's thesis, Polytechnique Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/9154/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/9154/
Directeurs de recherche: Advisors:	Stéphane Étienne, & Cédric Béguin
Programme: Program:	Génie mécanique

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Simulation de l'impact de vagues induites par le ballottement sur les parois des cuves de transport de gaz naturel liquéfié maritime

FLORIAN ETIENNE
Département de génie mécanique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
Génie mécanique

Août 2021

© Florian Etienne, 2021.

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
affiliée à l'Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Simulation de l'impact de vagues induites par le ballottement sur les parois des cuves de transport de gaz naturel liquéfié maritime

présenté par **Florian ETIENNE**
en vue de l'obtention du diplôme de *Maîtrise ès sciences appliquées*
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

André GARON, président
Stéphane ÉTIENNE, membre et directeur de recherche
Cédric BÉGUIN, membre et codirecteur de recherche
Sami AMMAR, membre

DÉDICACE

À ma grand-mère ...

REMERCIEMENTS

Mes premières pensées vont à mon directeur de recherche, Stéphane ÉTIENNE, que je remercie pour m'avoir proposé un sujet captivant dans un domaine où j'avais peu d'expérience. Ses conseils et son suivi m'ont permis d'avancer au mieux dans ce projet. Je souhaite également remercier le professeur Cédric BÉGUIN qui a toujours su me proposer des clés de résolution lorsque j'avais des difficultés. Merci également à Dominique PELLETIER, professeur et créateur du logiciel CADYF qui m'a aidé à mes débuts à comprendre les subtilités de ce code.

Pour la difficile prise en main du code, j'ai également eu la chance de profiter de l'aide de Étienne MULLER et Yohann VAUTRIN qui ont su me former afin de devenir autonome. Leurs réponses claires et précises à mes questions m'ont fait économiser un temps précieux. Un grand merci à vous.

Merci aux collègues du laboratoire de simulation d'écoulement fluides, Anthony, Jean, Mathilde, Stefane et Théo avec qui j'ai eu le plaisir de travailler et d'échanger sur les diverses problématiques. Malgré la pandémie nous avons su nous adapter et créer de bonnes relations.

Merci à Gaztransport & Technigaz (GTT) et au programme «Génie par la simulation »pour leur soutien financier et pour les défis techniques qu'ils m'ont amené à relever.

Enfin, merci à mes parents, ma famille et mes amis qui n'ont pas manqué de me soutenir et de me motiver pour ce projet.

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une formulation éléments finis permettant la résolution d'écoulements compressibles instationnaires avec une partie supersonique. L'objectif principal est de pouvoir modéliser l'impact de vagues sur une paroi afin d'avoir des données sur les pressions d'impacts pariétales.

On commence par expliciter les équations de Navier-Stokes compressibles que ce soit pour un liquide faiblement compressible ou pour un gaz parfait. Ces équations sont ensuite résolues par la méthode des éléments finis couplée à la méthode des *Backward Differentiation Formula* (BDF) pour la discrétisation temporelle. L'interface entre deux fluides non miscibles est modélisée à l'aide d'une formulation *Arbitrary Lagrangian Eulerian* (ALE) permettant la déformation de l'interface Liquide-gaz. Différentes formulations sont également développées pour le déplacement du point de contact de l'interface sur la paroi dans le cas où son déplacement serait supersonique. Une méthode d'adaptation de maillage est également présentée pour les cas où l'erreur sur la déformation du maillage ou sur une variable serait trop élevée.

Ces outils sont utilisés lors d'un cas de choc de Rankine-Hugoniot et d'impact d'un cylindre d'eau sur paroi fixe permettant de valider les développements effectués. Pour le cas qui nous intéresse, à savoir un cylindre d'eau sur paroi fixe avec une vitesse initiale, les résultats obtenus sont prometteurs pour la suite mais d'autres développements doivent être effectués pour représenter au mieux un impact de vague réel tel que une formulation pour la formation du jet.

ABSTRACT

This essay presents a finite element formulation to solve compressible unsteady flow with a supersonic part. The main objective is to model the wave impact and to produce data of its pressure onto a wall.

First, this essay will present the compressible Navier-Stokes equations for a faint compressible liquid and a compressible gas. These equations are solved with the finite element method combined with the Backward Differentiation Formula (BDF) method for temporal discretization. Additionally, the interface between two immiscible fluids with the Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation is modeled to consider a Liquid-Gas interface deformation. Various formulations have been developed to move the interface contact point on the wall in the event of supersonic velocity of the contact point. A mesh adaptation method is displayed to capture whether the deformation error or one of the variables error is too high.

These developments are used during a case of the Rankine-Hugoniot shock and the impact of cylindrical-figured water to confirm the developments that have been created. The case of cylindrical-figured water that impacts a wall with an initial boost of speed provides encouraging results for future research, however further developments are needed to represent an accurate case of a wave impact similar to a jet motion appearance.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vi

TABLE DES MATIÈRES vii

LISTE DES TABLEAUX x

LISTE DES FIGURES xi

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS xiii

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
1.1 Contexte de l'étude 1
1.2 Problématique 2
1.3 Objectifs de recherche 3
1.4 Plan du mémoire 3

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE 4
2.1 Méthodes de discrétisation spatiale pour la simulation d'écoulements diphasiques 4
2.1.1 Smoothed Particle Hydrodynamics 4
2.1.2 Méthode de suivi d'interface 5
2.1.3 Méthode de capture d'interface 6
2.2 Méthodes de discrétisation temporelle 9
2.2.1 Méthode d'Euler 9
2.2.2 Méthode de Crank-Nicolson 10
2.2.3 Méthode de Runge-Kutta 11
2.3 Impact de goutte 11
2.3.1 Modèle théorique développé 12
2.3.2 Essais expérimentaux 13
2.3.3 Simulations numériques 14

CHAPITRE 3 ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET RÉSOLUTION 16
3.1 Équations de Navier-Stokes 16
3.2 Méthode de résolution 20
3.2.1 Formulation faible 20
3.2.2 Discrétisation spatiale 22
3.2.3 Résolution du système 23
3.2.4 Discrétisation temporelle : *Backward differentiation formula* (BDF) . 24
3.2.5 Formulation *Arbitrary Lagrangian–Eulerian* (ALE) 25
3.3 Adaptation 26
3.3.1 Adaptation du pas de temps 26
3.3.2 Adaptation du maillage 29

CHAPITRE 4 MODÉLISATION DE L'INTERFACE 32
4.1 Milieu diphasique 32
4.2 Représentation des interfaces 32
4.3 Condition physique sur l'interface 33
4.4 Conditions sur les noeuds de l'interface 34
4.5 Calcul de la courbure et application de la tension superficielle 35
4.6 Déplacement du point de contact 36

CHAPITRE 5 VÉRIFICATION DU CODE IMPLÉMENTÉ 39

CHAPITRE 6 VALIDATION ET CAS D'APPLICATION 40
6.1 Présentation du modèle d'impact de Rankine-Hugoniot 40
6.1.1 Modélisation du cas sur CADYF 43
6.2 Présentation du modèle de Lesser choc 2D 46
6.3 Cas simulés 52
6.3.1 Cylindre d'eau seul 55
6.3.2 Cylindre d'eau entouré d'air avec la vitesse imposée sur la frontière et une vitesse initiale dans le liquide 60
6.3.3 Cylindre d'eau entouré d'air interface libre avec une vitesse initiale dans le liquide 68

CHAPITRE 7 CONCLUSION 72
7.1 Synthèse des travaux 72
7.2 Limitations de la solution proposée 73

7.3 Améliorations futures 73

RÉFÉRENCES 75

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Valeur maximum du *Swing factor* 28

Tableau 6.1 Propriétés physiques et thermodynamiques de l'eau pour la simulation d'un choc 44

Tableau 6.2 Propriétés physiques et thermodynamiques de l'eau et de l'air pour notre simulation 53

Tableau 6.3 Caractéristiques du problème pour notre nouvelle simulation 55

Tableau 6.4 Propriétés physiques et thermodynamiques de l'eau et de l'air pour notre nouvelle simulation 56

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Représentation des différentes charges élémentaires ©Vautrin (2020), reproduit avec permission 2
Figure 2.1 Schéma de la fonction SPH appliquée aux noeuds voisins à la distance h 5
Figure 2.2 Schéma modélisant les marqueurs et les cellules dans la méthode MAC 6
Figure 2.3 Schéma descriptif de la méthode VOF 7
Figure 2.4 Représentation des différentes variables dans le calcul de la méthode RK4 12
Figure 2.5 Différents impacts observés. Rein (1993) 13
Figure 2.6 Montage réalisé dans les simulations de C.Josserand et S. Thoroddsen (2016) 14
Figure 3.1 Représentation de la valeur mécanique et thermodynamique 19
Figure 4.1 Écoulements à deux phases 33
Figure 4.2 Représentation de l'interface 33
Figure 4.3 Longueur des éléments sur l'interface attaché au noeud n_i 35
Figure 4.4 Modélisation du problème d'élément négatif pouvant survenir lors de fort impact 36
Figure 4.5 Schéma de la méthode du déplacement du point de contact, à partir du noeud suivant 37
Figure 4.6 Déplacement du noeud 1 sur la droite définie par les nouveaux noeuds 2 et 3 38
Figure 6.1 Schéma du développement de la discontinuité de pression 41
Figure 6.2 Résultat théorique mis en perspective de la pression et de la vitesse en fonction du temps et de la position adimensionnel lors d'un cas d'impact Rankine-Hugoniot 43
Figure 6.3 Maillage au temps $t = 0$ s pour les deux simulations effectuées 45
Figure 6.4 Observation à une position fixe du remaillage autour de l'onde de choc pour différents temps 46
Figure 6.5 Tracé de la pression en fonction du temps pour différentes positions dans le domaine 47
Figure 6.6 Tracé de la vitesse en fonction du temps pour différentes positions dans le domaine 48
Figure 6.7 Impact de goutte ou d'un cylindre d'eau lorsque le liquide est considéré compressible 49

Figure 6.8 Tracé du front adimensionnel pour différents temps avant $t_{critique}$ . . 51
Figure 6.9 Formation du jet à t supérieur à $t_{critique}$ 51
Figure 6.10 Vue en perspective de la pression théorique le long de la frontière de la goutte en fonction du temps inférieur au temps critique 53
Figure 6.11 Schéma avec un cas d'impact modélisant juste le cylindre d'eau . . . 55
Figure 6.12 Tracé de la fonction f donné par l'équation (6.30) 56
Figure 6.13 Maillage pour la première simulation 57
Figure 6.14 Maillage pour la deuxième simulation 58
Figure 6.15 Comparaison du déplacement géométrique avec les résultats obtenus de la première simulation sur CADYF 59
Figure 6.16 Vue en perspective de la pression le long de la frontière de la goutte en fonction du temps 60
Figure 6.17 Vue en 2D de la pression le long de la frontière de la goutte en fonction du temps 61
Figure 6.18 Tracé du front d'onde de la pression pour différents temps comparé à la solution théorique attendue 62
Figure 6.19 Évolution du maillage permettant de réaliser les nouvelles simulations 63
Figure 6.20 Conditions limites appliquées sur le domaine 64
Figure 6.21 Tracés de différentes variables en fonction du temps adimensionnel pour le cas de simulation diphasique avec une vitesse imposée sur l'interface 65
Figure 6.22 Évolution du maillage autour du front d'onde au cours du temps . . 66
Figure 6.23 Tracé du front d'onde de la pression pour différents temps comparé à la solution théorique attendue pour le cas de simulation diphasique avec une vitesse imposée sur l'interface 67
Figure 6.24 Tracé en 2D de la pression sur l'interface pour le cas de simulation diphasique avec une vitesse imposé sur l'interface 68
Figure 6.25 Vitesse verticale du fluide sur les dix noeuds de l'interface après le point triple 69
Figure 6.26 Comparaison des résultats calculés géométriquement à ceux simulés avec une vitesse initiale dans le domaine liquide et un démarrage à $50\%r_{critique}$ 70
Figure 6.27 Pression sur l'interface pour le cas de simulations diphasiques avec une vitesse initiale dans le domaine liquide et un démarrage à $50\%r_{critique}$ 71

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET NOTATIONS

ABRÉVIATIONS

ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian
BDF	Backward Differentiation Formula
CADYF	Calcul et Analyse en DYnamique des Fluides
ELP	Elementary Loading Process
FEM	Finite Element Method
GNL	Gaz Naturel Liquéfié
GTT	Gaztransport & Technigaz
MAC	Marker And Cell
SPH	Smooth Particles Hydrodynamics
SUPG	Streamline Upwind Petrov Galerkin
VOF	Volume Of Fluid

NOMENCLATURE

$\tilde{\cdot}$	Notation adimensionnelle
α_r	Coefficent de compressibilité isotherme
β_r	Coefficent de dilatation thermique isobare
$\boldsymbol{\chi}$	Vecteur de déplacement du maillage
c_{eau}	Célérité du son dans l'eau
c_p	Capacité thermique massique à pression constante
c_V	Capacité thermique massique à volume constant
δp, δT, $\delta \boldsymbol{u}$	Fonctions tests
$\delta \boldsymbol{x}$	Correction de la solution
δ_{ij}	Delta de Kronecker
δ_i	Taille de maille
e	Énergie spécifique interne du système
e_g	Erreur globale
ϵ_x	Critère de convergence sur la solution
$\epsilon_{\boldsymbol{R}}$	Critère de convergence sur le résidu
η	Viscosité de volume
$\emptyset$	Ensemble vide
$\boldsymbol{f}$	Vecteur forces volumiques

F_1	Équation de l'ondelette
γ	Indice adiabatique
Γ	Frontière du domaine de calcul
Γ_D	Portion de frontière avec condition de Dirichlet
Γ_N	Portion de frontière avec condition de Neumann
Γ_I	Interface entre les deux fluides
h	Pas de temps
∇	Gradient
$\boldsymbol{J_R}(\boldsymbol{x}^n)$	Jacobien du vecteur résidu
k	Conductivité thermique
κ	Coubure de l'interface
$\mathcal{L}_h$	Erreur de troncature locale
λ	Seconde viscosité
$\underline{\Delta}$	Opérateur Laplace-Beltrami
Ma	Nombre de Mach
$\boldsymbol{n}$	Vecteur normale
N_i	Fonction polynomiale
$\|\cdot\|$	Norme associée au produit scalaire euclidien
Ω	Domaine de calcul
p	Pression totale
p_∞	Pression ajoutée
p_m	Pression mécanique
p_r	Pression thermodynamique de référence
Pr	Nombre de Prandtl
q_s	Source de chaleur extérieur
R	Constante spécifique du gaz
$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}^n)$	Vecteur résidu du système matriciel
r_c	Position du point de contact
R_c	Rayon de courbure
Re	Nombre de Reynolds
ρ	Masse volumique
ρ_{ref}	Masse volumique de référence
$\mathcal{S}$	*Swing factor*
σ	Vecteur des contraintes
$\boldsymbol{t}$	Vecteur tangentielle
t	Temps

T	Température
T_m	Température mécanique
T_r	Température thermodynamique de référence
τ	Tenseur des contraintes visqueuses
$\boldsymbol{u}$	Vecteur vitesse d'une particule fluide
V_0	Vitesse initiale du cylindre d'eau
v_c	Vitesse du point de contact
We	Nombre de Weber
x	Position selon l'axe des abscisses
y	Position selon l'axe des ordonnées

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte de l'étude

Sur le premier semestre de l'année 2020, le gaz naturel a représenté presque un quart de la consommation énergétique mondiale et sa part ne cesse de croître depuis plusieurs années. Le fait qu'elle produise moins de CO_2 que les autres énergies fossiles telles que le pétrole et le charbon, en fait une énergie de transition vers des énergies renouvelables. Le transport de cette énergie se fait par des méthaniers qui transportent ce gaz sous forme liquide pour que le gaz prenne moins de place [1]. Gaztransport & Technigaz (GTT), une société française d'ingénierie navale, s'intéresse au ballottement de ce liquide dans les cuves à membrane de Gaz Naturel Liquéfié (GNL) sur structure flottante (méthaniers, tout type de navire propulsé au GNL, navires ravitailleurs en GNL etc ...) et en particulier à l'évaluation des pressions d'impact sur les parois des cuves et à l'étude des mécanismes physiques qui interviennent pendant les impacts liquides [2]. Ces impacts répétés peuvent provoquer des dommages irréversibles sur la paroi tel que sa rupture et le déversement dans les océans du GNL entraînant de graves conséquences écologiques. GTT doit donc optimiser leurs cuves pour pouvoir résister à ces impacts dûs au ballottement à l'intérieur des cuves. Pour ce faire, l'entreprise réalise des essais empiriques sur des cuves à l'échelle 1 :40 avec de l'eau et de l'air. La pression d'impact se mesure à l'aide de capteurs situés sur les parois. Toutefois, ces essais ne permettent pas la prise en compte de phénomènes présents à échelle réelle tels que les changements de phases ou les interactions fluides-structures. De plus, le couple eau\air réagit thermodynamiquement différemment du couple Gaz\GNL [3]. C'est pour ces raisons que GTT a fait appel aux universités pour la réalisation de simulation numérique du ballottement présent dans leurs cuves. W. Lafeber et al. [2] ont montré que la force induite par la vague impactant le mur peut être décomposée en temps et en espace. Cette force d'impact est une combinaison des forces ELP1, ELP2 et ELP3 pour *Elementary Loading Process* [4]. La figure 1.1 donne une représentation de chacune de ces forces. L'ELP1 correspond à l'impact direct sur le mur, dû à la différence de vitesse entre le mur et le liquide. Elle est associée à la compression du liquide et l'élasticité du mur. Ce phénomène est difficile à détecter expérimentalement. L'ELP2 est la force hydrodynamique associée au changement de quantité de mouvement imposé par le mur au fluide. Elle n'a de valeur qu'à la racine du jet le long du mur après contact. Enfin, l'ELP3 est la force liée à la compression ou expansion du gaz pris au piège par le liquide. Elle est caractérisée par des oscillations de pressions. À cela il faut ajouter d'autres phénomènes physiques comme l'instabilité de surface libre telle que les instabilités de Kelvin-Helmhotz

ou Rayleigh-Taylor qui peuvent influencer le résultat de ces ELP.

Différents algorithmes sont développés afin de trouver des solutions à ces problèmes. Leurs fonctionnements seront développés dans la partie État de l'art. À Polytechnique Montréal, les développements réalisés par les étudiants sous la direction de Stéphane ÉTIENNE et Dominique PELLETIER depuis 40 ans ont permis le développement d'un code de résolution d'équations de Navier-Stokes par les éléments finis. Ce code peut résoudre des problèmes diphasiques en utilisant une méthode de suivi d'interface et la modélisation de fluide compressible. Les développements réalisés et la précision de résolution font de ce code un bon candidat pour résoudre les problématiques posées par GTT. Dans le cadre de ma maîtrise, j'ai été amené à m'intéresser à la résolution de différents problèmes présentant l'ELP1.

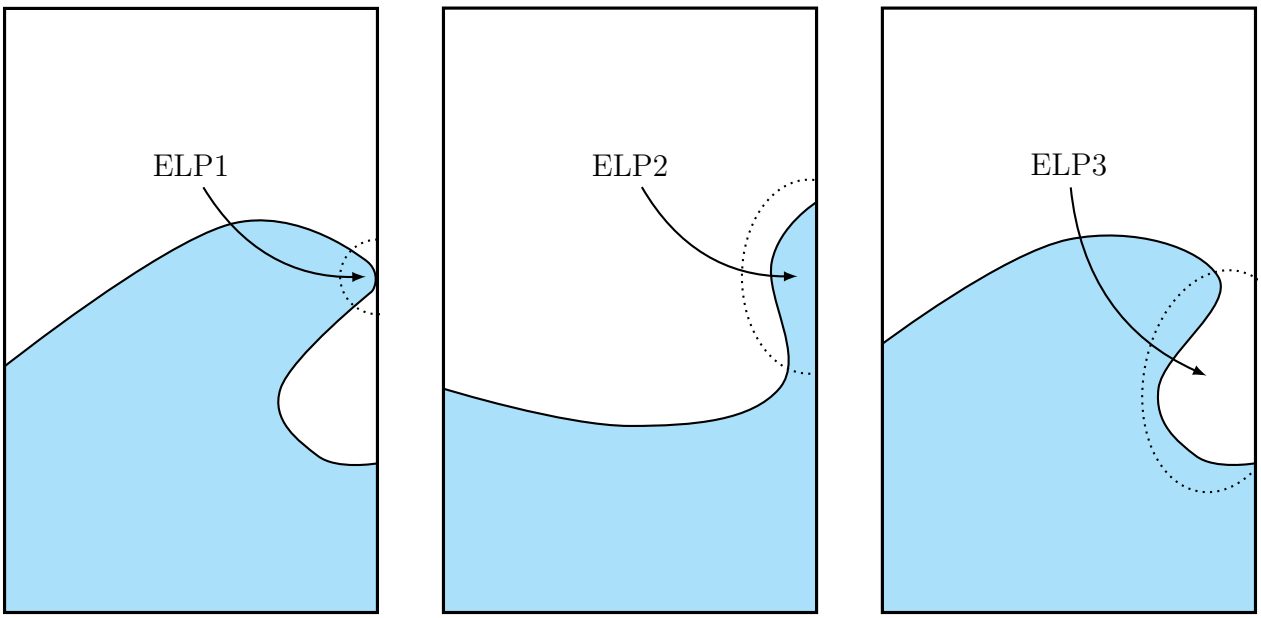


Figure 1.1 Représentation des différentes charges élémentaires ©Vautrin (2020), reproduit avec permission

1.2 Problématique

Lors de ces impacts de vagues, les vitesses du fluides sont telles que certaines particules de fluide ont un Mach supersonique Ma > 1. De ce fait les équations de Navier-Stokes ne peuvent plus être résolues en incompressible. Le Mach étant défini par Ma$= \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}}$ où V correspond à la vitesse du fluide, γ l'indice adiabatique, R la constante spécifique du gaz et T la température, les variations de volume au sein du même domaine fluide ne peuvent plus être négligées et doivent être prise en compte.

1.3 Objectifs de recherche

Objectif principal Développer et Implémenter une formulation permettant la résolution des cas d'impact de liquide compressible subsonique où le point de contact est supersonique dans un environnement gaz compressible.

Objectifs spécifiques

- Développer une méthode assurant le bon déplacement des noeuds et des éléments finis dans le cas d'impact de fluide.
- Valider le remaillage autour du front d'onde.
- Appliquer la méthode de résolution au cas d'un impact de cylindre d'eau sur une paroi fixe.

1.4 Plan du mémoire

Ce mémoire est une présentation des travaux effectués tout le long de cette maîtrise. On commence dans le chapitre 2 par une revue de littérature montrant les développements effectués sur ce sujet. Le chapitre 3 présente les équations à résoudre et les méthodes numériques pour y parvenir. Le chapitre 4 présente les méthodes numériques de modélisation de l'interface déjà présente sur CADYF et les nouvelles méthodes implémentées. Le chapitre 5 développe l'idée derrière la vérification d'implémentation par la méthode des solutions manufacturées. Enfin le dernier chapitre sera consacré à la validation et à l'application sur des cas de simulation d'impact. Ce mémoire se clôture par une conclusion faisant une synthèse des travaux effectués, des limites auxquelles nous avons été confrontées et des améliorations futures possibles.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE

Dans ce chapitre nous expliciterons différentes méthodes numériques utilisées pour résoudre les cas d'écoulements proposés par GTT. Nous en présenterons les avantages et les inconvénients. Nous évoquerons aussi les différents travaux de recherche sur l'impact de goutte

2.1 Méthodes de discrétisation spatiale pour la simulation d'écoulements diphasiques

Parmi les différentes universités qui ont décidé de travailler sur ce projet, les méthodes de modélisation sont multiples. Voici une présentation succincte des méthodes utilisées dans ce projet.

2.1.1 Smoothed Particle Hydrodynamics

La méthode SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) fut développée en 1977 par R. A. Gingold et J. J. Monaghan [5] dans le but de résoudre des problèmes d'astrophysique. Son application s'est ensuite étendue dans de nombreux domaines tels qu'en mécanique des fluides ou des solides. Dans le domaine de la mécanique des fluides, elle permet la résolution de problèmes qui présentent une surface libre de manière assez naturelle. Cette méthode a vu son utilisation s'accroître durant les 20 dernières années avec le succès de l'application de cette méthode dans des cas d'écoulements diphasiques [6] ou d'impact de solide [7]. Elle est caractérisée par le fait qu'elle ne nécessite pas de maillage, ce qui est un avantage pour la déformation d'interface fluide ou la séparation de gouttes. La problématique du ballottement dans les cuves est un problème avec surface libre complexe d'où son utilisation accrue dans ce domaine.

La méthode SPH s'appuie sur une formulation lagrangienne des équations de Navier-Stokes ce qui signifie que les mouvements des noeuds sont égaux aux mouvements des particules fluides. Chaque noeud est porteur de propriétés qui sont connues telles que sa densité, sa masse, sa vitesse etc... Chaque noeud interagit avec ses voisins pouvant modifier ses propriétés au cours du temps [8]. Soit r notre noeud, on définit $\rho(r,t)$ sa masse volumique au cours du temps par :

$$\rho(r,t) = \int_V W(|r-r'|,h)\rho(r',t)dV \tag{2.1}$$

On a V qui correspond à notre domaine d'intégration, W correspond à notre fonction de poids aussi appelée *smoothing kernel*, h définit la zone d'influence de la particule r et $\rho(r',t)$

la masse volumique au niveau de la particule r'. Voir figure 2.1. La résolution se fait en transformant les équations aux dérivées partielles sous une forme intégrale.

(a) (b)

Figure 2.1 Schéma de la fonction SPH appliquée aux noeuds voisins à la distance h

Les dernières publications sur cette méthode appliquée au cas de GTT ont permis la modélisation de 4 différentes vagues à différentes échelles. Le gaz utilisé est toujours l'air et le liquide de l'eau. Les résultats ont été ensuite comparés entre eux. Les différences de pression dues aux différentes échelles sont ensuite expliquées [9].

2.1.2 Méthode de suivi d'interface

La méthode de suivi d'interface ou *front tracking* est une méthode où l'interface est décrite par des éléments 2D tels que des triangles pour une simulation 3D. La position de l'interface est connue de manière explicite. Dans leur publication, S.O. Unverdi et G.Tryggvason [10] les développeurs de cette méthode utilisent une description lagrangienne de l'interface à l'aide de noeuds et d'éléments 2D. Le domaine est défini par un maillage structurel eulérien. L'avantage de cette méthode est que l'on connaît la position de l'interface avec précision et qu'il est plus simple d'appliquer les lois d'interface sur celle-ci. En revanche cette méthode présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte les changements tels que la fusion ou la rupture entre 2 fluides.

Méthode MAC

La méthode *Marker-And-Cell* (MAC) est une méthode où le fluide est modélisé par un champ de vitesse dont la variation au cours du temps est modélisée par des points virtuels. Étant donné que pour chaque point modélisant le fluide, il est bien trop coûteux de stocker sa vitesse, le domaine est modélisé par un maillage structurel où la vitesse est connue de manière discrète sur chaque frontière d'une cellule. La vitesse d'un point modélisant le fluide est calculée par interpolation. L'interface de notre fluide est tracée à l'aide des points situés

à la frontière du fluide (voir figure 2.2). Cette méthode fut développée en 1965 par F. H. Harlow et J. E. Welch [11].

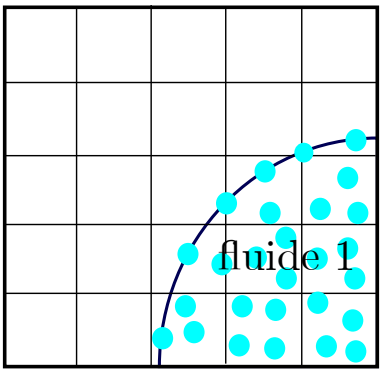


Figure 2.2 Schéma modélisant les marqueurs et les cellules dans la méthode MAC

2.1.3 Méthode de capture d'interface

La méthode de capture d'interface ou *interface capturing* est une méthode où contrairement au suivi d'interface, aucun élément ne représente l'interface. L'interface est connue de manière implicite à l'aide d'une fonction. L'avantage de cette méthode est qu'elle peut prendre automatiquement les changements topologiques contrairement à la méthode de suivi d'interface. En revanche la diffusion de l'interface le long des cellules peut entraîner une perte de précision de la solution [12].

Méthodes des volumes de fluides (VOF)

La méthode des volumes de fluides fut développée en 1976 par W. F. Noh et Paul Woodward [13] qui répondait à un besoin de pouvoir modéliser l'interface entre différents fluides, elle fut rendue populaire suite à la publication dans le journal *Journal of Computational Physics* par C. W. Hirt et B. D. Nichols en 1981 [14]. C'est une méthode de discrétisation d'équations aux dérivées partielles. Elle fait partie de la classe des méthodes eulériennes, ce qui signifie que le maillage reste fixe dans tout le domaine d'étude. Elle trouve son application dans différents domaines de l'ingénierie dont la mécanique des fluides.

Soit Ω notre domaine d'étude, on définit une fonction ϕ qui donne l'information de si on est situé dans le domaine du premier fluide Ω_1 ou du second fluide Ω_2 avec $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega_1 \\ 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

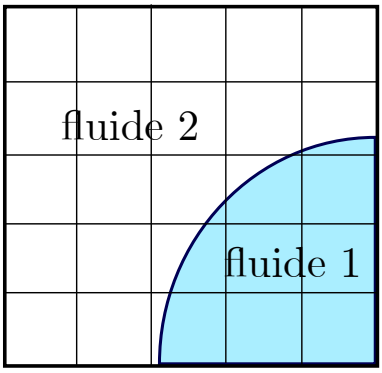
Avec $\boldsymbol{x}$ la position.

Dans le cas de VOF, notre domaine d'étude sera divisé en plusieurs cellules où on pourra trouver nos deux fluides dans une et même cellule. Notre fonction ϕ aussi appelée fraction volumique, va valoir 1 si on se situe dans une cellule ne contenant que du fluide 1, 0 si la cellule ne présente que du fluide 2 et elle sera comprise entre 0 et 1 si une cellule est en présence des 2 fluides. Le transport de cette fonction par les particules fluides est donné par la relation suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi = 0 \tag{2.3}$$

Avec $\boldsymbol{u}$ la vitesse du fluide. Les propriétés de nos deux fluides en présence sont directement reliées par cette fonction. Soit ρ_1 et ρ_2 respectivement la densité du fluide 1 et 2. La densité ρ dans tout le domaine sera donnée par :

$$\rho = \phi\rho_1 + (1 - \phi)\rho_2 \tag{2.4}$$



(a)

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.15
0.0	0.0	0.15	0.7	1.0
0.0	0.0	0.7	1.0	1.0
0.0	0.0	0.8	1.0	1.0

(b)

Figure 2.3 Schéma descriptif de la méthode VOF

Parmis les laboratoires en partenariat avec GTT, on trouve R. De Böck, A. Tijsseling et B. Koren [15] qui se sont proposés d'utiliser cette méthode pour résoudre des problèmes avec deux fluides compressibles. Dans leur modèle, les fluides sont à l'équilibre thermodynamique. Leurs résultats sont comparés au modèle de Bagnold généralisé [16]. Dans ce modèle, on considère un tube fermé avec du liquide entouré d'un gaz. Le liquide fonctionne comme un piston soumis à la gravité. Il est utilisé pour la vérification et la validation de leur modèle en 1D. Il est aussi comparé au modèle de Haas et Sturtevant [17]. C'est un modèle 2D d'une bulle remplie d'un gaz présent dans une atmosphère constituée d'air où la bulle va être frappée par une onde de choc. Ils ont montré que leur modèle prend bien en compte les instabilités de surface et est en accord avec les modèles utilisés pour comparer leur travail. Néanmoins

leur méthode ne permettait pas encore de prendre en compte les changements de phase des fluides mis en jeu. Les travaux de M. Ancellin, L. Brosset et J. Ghidaglia. [3] permettent la prise en compte de ce phénomène.

Dans les travaux de M. Ancellin et al. [3], ils ont utilisé la méthode des éléments finis VOF. Leur objectif ici est de prendre en compte les effets de compressibilités, d'évaporation et de condensation de deux fluides durant l'impact d'une vague. Leurs résultats ont été comparés avec le cas du piston de Bagnold [16]. Ils ont réussi à obtenir des résultats valides et à montrer une dépendance entre la diffusion thermique à l'interface et le changement de phase. La suite de leur travail serait de faire évoluer leur modélisation à des dimensions supérieures.

Méthodes des surfaces de niveaux (*Level-set method*)

Cette méthode fut mise en place par S. Osher et J. A. Sethian [18] en 1988 afin de modéliser une interface entre deux fluides. Elle est appliquée dans différents domaines d'ingénierie telle que dans le traitement d'image numérique ou la planification. Dans cette méthode, on définit une fonction $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ appelée *Level-set function* qui représente notre interface $\Gamma(t)$ lorsque la position de notre point $\boldsymbol{x}$ dans le domaine du fluide 1 noté Ω_1 vaut 0. La fonction ψ présente les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \psi(\boldsymbol{x}, t) > 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega_1 \\ \psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega_1 = \Gamma(t) \\ \psi(\boldsymbol{x}, t) < 0 & \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega_1} \end{cases} \tag{2.5}$$

Cette méthode reste très avantageuse dans la simulation d'écoulement avec fusion ou séparation de fluide étant donné que la fonction ψ reste continue. Cependant, la conservation des volumes des fluides présents dans la simulation n'est pas garantie contrairement à la méthode VOF. Le transport de cette fonction est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \psi = 0 \tag{2.6}$$

Avec $\boldsymbol{u}$ la vitesse du fluide dont la valeur nous intéresse sur l'interface mais qui est arbitraire à l'intérieur du fluide. Dans le cas de la vitesse de déplacement de l'interface, seule sa vitesse normale nous intéresse, l'équation 2.6 devient :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \boldsymbol{u}_N \cdot |\nabla \psi| = 0 \tag{2.7}$$

Avec $\boldsymbol{u}_N = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$ la vitesse normale du fluide [19]. Une fonction *Heaviside H* est utilisée pour

donner les propriétés physiques dans tout le domaine. On a pour cette fonction :

$$\begin{cases} H(\psi) = 1 & \text{si} \quad \psi > 0 \\ H(\psi) = 0 & \text{si} \quad \psi < 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Cependant, afin d'éviter les oscillations numériques dues à la discontinuité des propriétés physiques au passage de l'interface. Le choix sera porté sur la fonction Heaviside suivante :

$$\begin{cases} H(\psi) = 0 & \text{si} \quad \psi < -\delta \\ H(\psi) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\psi}{\delta} + \dfrac{1}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi\psi}{\delta}\right)\right) & \text{si} \quad \psi \leq |\delta| \\ H(\psi) = 1 & \text{si} \quad \psi > \delta \end{cases} \tag{2.9}$$

Avec δ représentant l'épaisseur de l'interface. Soit μ_1 et μ_2 respectivement la viscosité du fluide 1 et 2. La viscosité dans le domaine est donnée par l'équation :

$$\mu = H(\psi)\mu_1 + (1 - H(\psi))\mu_2 \tag{2.10}$$

De même pour la densité on a :

$$\rho = H(\psi)\rho_1 + (1 - H(\psi))\rho_2 \tag{2.11}$$

2.2 Méthodes de discrétisation temporelle

Une fois la discrétisation spatiale effectuée, en écoulement instationnaire on aura besoin de résoudre des problèmes faisant intervenir des équations différentielles. Afin de les résoudre on peut choisir des méthodes explicites, implicites ou des hybrides de ces deux grandes catégories de méthodes. Voici une description de quelques-unes utilisées.

2.2.1 Méthode d'Euler

Soit le problème définit par :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(y,t) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases} \tag{2.12}$$

On parle de méthode explicite de résolution des équations différentielles lorsque la solution au temps suivant est calculée à partir du temps actuel :

$$y(t+h) = g(y(t)) \tag{2.13}$$

Avec h le pas de temps.
Une méthode implicite est quand la solution au temps suivant est solution d'une fonction faisant intervenir le temps actuel :

$$g(y(t), y(t+h)) = 0 \tag{2.14}$$

Les méthodes explicites sont plus simple à implémenter que les méthodes implicites. À cela il faut ajouter que résoudre l'équation (2.14) demande des coûts de calculs supplémentaires, néanmoins pour obtenir la même précision avec les deux méthodes il faudrait avoir des pas de temps h bien plus petit pour une méthode explicite ce qui augmenterait les temps de calculs.

Une des méthodes les plus anciennes est la méthode d'Euler explicite *Forward Euler* pour laquelle on approxime $\left(\frac{dy}{dt}\right)_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ au temps t_i et avec $h = t_{i+1} - t_i$ d'où :

$$y_{i+1} = hf(y_i, t_i) + y_i \tag{2.15}$$

y_{i+1} et y_i étant respectivement les solutions au temps t_{i+1} et t_i.

Pour la méthode Euler implicite, *Backward Euler*, on approxime la dérivée au temps t_{i+1} :

$$y_{i+1} = hf(y_{i+1}, t_{i+1}) + y_i \tag{2.16}$$

Les méthodes d'Euler présentent l'avantage d'être facile à implémenter dans un code informatique mais sont peu précises et souvent instables.

2.2.2 Méthode de Crank-Nicolson

La méthode de Crank-Nicolson est la plus utilisée dans la littérature scientifique. Elle fut développée par J. Crank et P. Nicolson en 1947 [20]. Elle présente l'avantage d'avoir un coût de calcul faible et son implémentation dans un code de calcul est assez simple. Son ordre de précision est de 2. Il faudra s'orienter vers des méthodes de plus grand ordre pour avoir une meilleure précision [4]. La méthode Crank-Nicolson est un hybride entre une méthode d'Euler explicite et implicite. En reprenant l'équation (2.12), La solution au temps t_{i+1} sera

donnée par :

$$y_{i+1} = \frac{h}{2}\left(f(y_{i+1}, t_{i+1}) + f(y_i, t_i)\right) + y_i \tag{2.17}$$

2.2.3 Méthode de Runge-Kutta

La méthode de Runge-Kutta fut développée par C. Runge et W. Kutta à la fin du XIX siècle. C'est une méthode d'Euler étendue permettant d'avoir une meilleure précision de la solution [21]. La méthode la plus répandue dans les codes de calcul malgré son coût de calcul est la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 (RK4) donnant une meilleure précision de la solution et permettant aisément d'utiliser des pas de temps adaptatifs. Le principe est le suivant, si on reprend notre problème défini par l'équation (2.12), la solution au temps t_{i+1} sera définie par :

$$y_{i+1} = h\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} + y_i \tag{2.18}$$

où on aura :

$$k_1 = f(y_i, t_i) \text{ correspond à la pente de } y_i \text{ au temps } t_i$$

$$k_2 = f\left(y_i + \frac{1}{2}hk_1, t_i + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_3 = f\left(y_i + \frac{1}{2}hk_2, t_i + \frac{1}{2}h\right)$$

$$k_1 = f(y_i + hk_3, t_i + h)$$

k_1 correspond à la pente de y_i au temps t_i. k_2 correspond à la pente calculée à un temps intermédiaire entre t_i et t_{i+1} pour une solution intermédiaire entre y_i et y_{i+1} définie à partir de la pente k_1. k_3 est similaire à k_2 à la différence que la pente se calcule sur la solution intermédiaire entre y_i et y_{i+1} définie à partir de la pente k_2. k_4 correspond à la pente calculée au temps t_{i+1} pour la solution calculée à partir de la pente k_3. La figure 2.4 aide à la visualisation des pentes calculées.

2.3 Impact de goutte

Les recherches menées sur l'impact de goutte sur une surface sont motivées par de nombreux cas d'applications, tels que l'application de pesticide sur les feuilles des plantes, les imprimantes à jet d'encre ou encore la récupération d'huile par imbibition de poudre [22]. Dans notre cas, elle peut nous intéresser pour notre vague impactant un mur rigide. Cela nous permettra de connaître la physique derrière l'impact entre un fluide liquide compressible

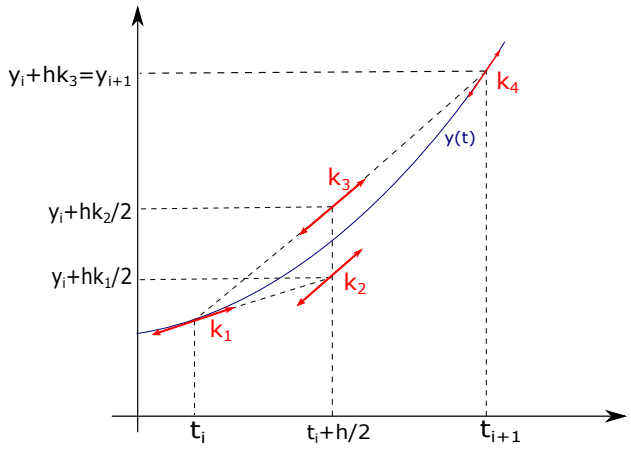


Figure 2.4 Représentation des différentes variables dans le calcul de la méthode RK4

impactant un solide et entouré d'un fluide gazeux.

2.3.1 Modèle théorique développé

Phase compressible

A partir des années 60 un intérêt particulier se porte sur la recherche d'une solution analytique pour le problème d'impact de goutte. En 1964, F. P. Bowden et J. E. Field [23] furent les premiers à montrer l'importance de l'onde de choc (*shock wave*) observable lors de l'impact entre une goutte d'eau et un mur rigide. La prise en compte de la compressibilité du fluide dans ce cas est primordiale. Des développements ont été réalisés par F. J. Heymann. [24] dans le cas de grandes vitesses d'impact, avec des simplifications sur la géométrie de la goutte. Dans sa publication parue en 1981, M. Lesser [25] développe un modèle et une méthode analytique utilisant de la géométrie optique en première approximation ce qui permet d'étudier des problèmes avec une géométrie qui évolue de manière complexe. Dans cet article, M. Lesser étudie la première étape de l'impact, étape où on a apparition du premier point de contact entre la goutte et la paroi jusqu'à que ce point ait une vitesse de déplacement inférieure à la vitesse du son. C'est durant cette phase que les plus grandes forces mécaniques sont développées.

Phase incompressible

En 1993 M. Rein [26] publie une revue des différents impacts de goutte qu'on peut observer de manière expérimentale et les différentes solutions analytiques développées pour modéliser l'impact d'une goutte de liquide sur une surface sèche. Il dépeint 3 types d'impacts

observables. Un impact qui rebondit *bouncing*, un qui s'étale *spreading* et un qui éclabousse *splashing*. Le rebondissement d'une goutte d'eau sera observé sur des surfaces hydrophobes. Les cas d'étalement ou d'éclaboussure pourront être observés sur les autres types de surfaces. La différence entre un cas d'étalement et d'éclaboussure est le fait que pour l'éclaboussure on observera l'apparition d'une ou de plusieurs nouvelles gouttelettes séparées de notre goutte principale. Les cas d'éclaboussures sont observables lors de grande vitesse d'impact. Le nombre de Weber représentant le rapport entre les forces d'inerties et les forces de tension superficielle, et le nombre de Reynolds représentant le rapport entre les forces d'inerties et les forces visqueuses, sont les deux principaux nombres adimensionnels qui régissent le phénomène d'impact. Un Weber élevé mènera à des instabilités autour de l'interface du liquide et on sera plus enclin à observer des éclaboussures.

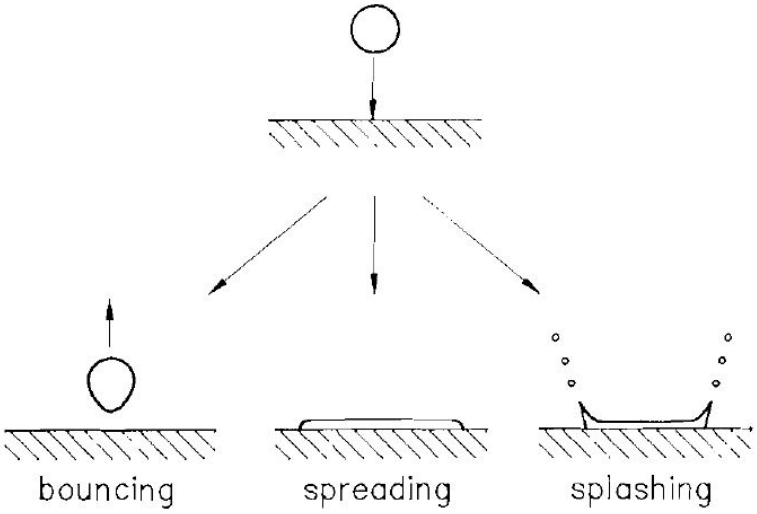


Figure 2.5 Différents impacts observés. Rein (1993)

2.3.2 Essais expérimentaux

Les premiers essais expérimentaux d'impact de goutte remontent au XVIII ème siècle. Dans la littérature, on retrouve un papier de A. M. Worthington [27] publié en 1877 faisant une description des différentes formes de gouttes pouvant être observées lors d'un impact vertical sur une plaque horizontale. Les développements des caméras à haute vitesse ces 20 dernières années ont permis l'étude d'impact à grande et petite vitesse de goutte et d'observer des détails qu'il n'était pas possible de voir à l'oeil humain ou avec des caméras de basse résolution. Les travaux de C.Josserand et S. Thoroddsen [28] ont permis de mettre en lumière que dans les conditions atmosphériques classiques, une bulle d'air sera toujours emprisonnée lors de

l'impact d'une goutte. En effet, juste avant impact, une fine couche d'air reste emprisonnée. Afin de minimiser l'énergie de surface, cette couche va se contracter et prendre la forme d'une bulle à l'intérieur de notre goutte. Dans le papier de E.Li et S. T. Thoroddsen [29], les expériences sont réalisées avec des bulles dont le rayon est de l'ordre du mm. Pour une bulle ayant un rayon apparent $R = 8$ mm et une vitesse $V = 2.43$ m/s, les auteurs trouvent un rayon de bulle d'air lorsqu'il y a contact entre le liquide et le solide de $r = 0.5$ mm et une hauteur de 2 μm. En supposant la goutte incompressible, une formule a été trouvée par P. D. Hicks et R. Purvis [30] donnant la hauteur de cette couche d'air et sa longueur (rayon de la tache).

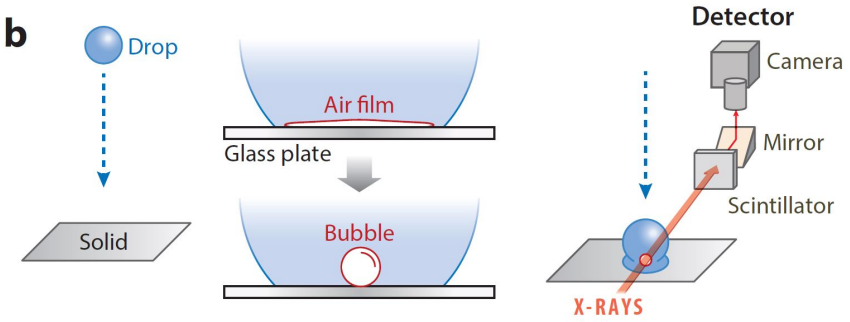


Figure 2.6 Montage réalisé dans les simulations de C.Josserand et S. Thoroddsen (2016)

2.3.3 Simulations numériques

Les simulations présentent l'avantage d'être moins coûteuses à réaliser et de pouvoir récupérer de nombreuses données. Elle permettent aussi d'expliquer les résultats expérimentaux observés. Le problème présente de grandes déformations de l'interface de la goutte et la séparation de goutelette à partir de la goutte principale. On trouve dans la littérature des méthodes de résolution des équations en utilisant une discrétisation spatiale VOF, MAC ou SPH. Les premières simulations d'impact de gouttes sur une surface sont réalisées par F. H. Harlow et J. P. Shannon [31] en 1967. Leurs simulations sont réalisées en utilisant la méthode des *Marker and cell*. Ces simulations seront réalisées en négligeant les effets de tension de surface et les effets visqueux de la goutte. Cette méthode numérique sera reprise par G. Brant Foote [32] en 1975 dans la simulation d'impact de goutte d'eau lié au problème de goutelette de pluie. Les premières simulations VOF seront menées en 1991 par Trapaga et Szekely [33] en 1993 par Huimin Liu, Enrique J Lavernia et Roger H Rangel [34] avec la simulation d'impact de plasma afin d'étudier son rayon d'étalement sur une surface solide. Des modèles sont ensuite développés à partir d'une méthode basée sur une méthode VOF permettant d'étudier

numériquement les différentes formes d'impact observables sur plusieurs surfaces.

En 2002, K. Haller, Y. Ventikos, D. Poulikakos et P. Monkewitz [35] proposent une simulation d'impact de liquide à très grande vitesse répondant à une problématique d'impact de goutte détériorant les turbines à vapeur. La phase d'impact où le liquide est compressible est étudiée. La compressibilité du liquide est prise en compte.

Plus récemment, on retrouve une simulation SPH réalisée par X. Yang et S-C. Kong [36] en 2018 afin de montrer l'influence de différents paramètres et des propriétés du fluide tels que la viscosité dynamique et la tension de surface sur le résultat d'impact de goutte observé. Leur résultats montreront que l'impact dépend essentiellement de la vitesse d'impact et de la viscosité du fluide. Y. Tatekura, M. Watanabe, K. Kobayashi et T. Sanada [37] ont publié une étude également sur l'impact de goutte à grande vitesse mais en s'intéressant plus précisément à la valeur maximum des pressions générées lors de cet impact. Pour résoudre l'écoulement ils utilisent une méthode numérique basée sur la méthode level set. Dans leur études, les effets que pourrait avoir le gaz sur l'impact n'est pas pris en compte. Leurs résultats montrent que la pression développée par le premier contact entre le liquide et la surface du solide, ne dépasse pas la valeur de la pression acoustique, montrant des résultats en accord avec la théorie de O. G. Engel [38].

Malheureusement il n'y a pas beaucoup de résultats numériques d'impact à faible vitesse étudié. En particulier sur les pressions que l'on pourrait observer après dépassement de la vitesse critique.

CHAPITRE 3 ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES ET RÉSOLUTION

Dans ce chapitre il sera question d'exposer les équations qui devront être résolues pour les cas d'impacts étudiés et la méthode de résolution développpée pour le code de résolution CADYF et les développements effectués pour notre cas spécifique.

3.1 Équations de Navier-Stokes

Les équations du comportement d'un gaz compressible sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} \tag{3.2}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (k \nabla T) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{u} + q_s \tag{3.3}$$

$$\rho = f(p, T) \tag{3.4}$$

Les variables $\boldsymbol{u}$, p et T représentent respectivement la vitesse, la pression et la température. Les variables ρ, μ, c_p et k sont respectivement, la masse volumique du fluide, sa viscosité dynamique, sa capacité thermique massique à pression constante et sa conductivité thermique. $\boldsymbol{f}$ représente les forces volumiques et q_s une source volumique de chaleur extérieure. $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit $\boldsymbol{\tau} = \left[\mu \left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T \right) + \lambda \boldsymbol{I} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \right]$

Hypothèses : Pour un gaz monoatomique la relation de Stokes est la suivante : $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Cette relation est erronée lorsqu'on modélise des écoulements liquides ou un gaz polyatomique et ne permettent pas de prendre en compte l'absorption ou la dispersion de la vitesse du son. Selon les études menées par L. Tiza [39], on doit introduire une seconde viscosité, qui prendra en compte les phénomènes explicités en amont : $\eta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. En première approximation, nous ne prendrons pas en compte cette seconde viscosité et garderons la relation de Stokes.

L'équation (3.4) est la loi d'état. On utilisera dans notre étude deux lois d'état, la loi des gaz parfait et la loi des gaz raidis. Pour un gaz parfait, l'équation d'état est la suivante :

$$\rho = \frac{p}{RT} \tag{3.5}$$

Avec R la constante spécifique du gaz. Pour la modélisation de liquide compressible nous utiliseront l'équation d'état des gaz raidis ou *stiffened gas* proposée par R. Menikoff et B. J. Plohr [40] :

$$p + \gamma p_\infty = (\gamma - 1)\rho e \tag{3.6}$$

où γ, p_∞ et e représentent respectivement l'indice adiabatique, une pression ajoutée qui rend ce caractère raidi au liquide et l'énergie spécifique interne du système. Les travaux de T. Flåtten, A. Morin et S. T. Munkejord [41] proposent une autre formulation de la pression.

On a e qui peut s'écrire comme étant :

$$e = c_V T + \frac{p_\infty}{\rho} \tag{3.7}$$

Avec c_V la capacité thermique à volume constant. La nouvelle formulation pour l'équation d'état devient :

$$p = (\gamma - 1)\rho c_V T - p_\infty \tag{3.8}$$

La vitesse du son est donnée par :

$$c_{eau} = \sqrt{\gamma \frac{p + p_\infty}{\rho}} \tag{3.9}$$

On notera que l'équation d'état des gaz raidis est aussi valable pour les gaz parfaits, si $p_\infty = 0$ Pa, l'équation (3.8) devient :

$$p = (\gamma - 1)\rho c_V T \tag{3.10}$$

En sachant que l'on a $\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$ et d'après la relation de Mayer $R = c_p - c_v$. Pour que notre équation des gaz raidis soit physiquement valide, les conditions $c_V > 0$ et $\gamma > 1$ doivent être au minimum respectées. Bien que la relation de Mayer ne soit valide que pour les gaz parfaits, l'utiliser pour les gaz raidis n'empêchent pas de respecter les deux conditions précédentes. Les valeurs de γ et p_∞ sont des valeurs trouvées expérimentalement. Dans l'article de K. Haller, Y. Ventikos, D. Poulikakos et P. Monkewitz [35], $\gamma = 5.0$ et $p_\infty = 6.13 \times 10^8$ Pa sont choisis pour modéliser l'eau. D'après les travaux de Y. Vautrin [42], nous choisirons la valeur de ces paramètres de sorte à avoir une vitesse du son $c_{eau} = 1480$ m/s et $c_p = 4180$ J/kg/K.

L'équation de continuité (3.1) peut être réécrite sous la forme suivante en appliquant les propriétés de l'opérateur divergence sur $\rho \boldsymbol{u}$:

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho(p, T)\right) \tag{3.11}$$

En développant la partie de droite on obtient :

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_T+\frac{\partial T}{\partial t}\left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right|_p\right)+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{u}\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_T\nabla p+\left.\frac{\partial\rho}{\partial T}\right|_T\nabla T\right) \tag{3.12}$$

En faisant l'hypothèse d'être en présence d'un gaz raidi, on a :

$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_T=\frac{1}{p}$$
$$\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T}\right|_p=-\frac{1}{T}$$

On peut réécrire l'équation de continuité sous la forme suivante :

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p\right)-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T\right) \tag{3.13}$$

Le système d'équations (3.1)-(3.4) devient :

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p\right)-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T\right) \tag{3.14}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f} \tag{3.15}$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p+\nabla\cdot(k\nabla T)+\boldsymbol{\tau}:\nabla\boldsymbol{u}+q_s \tag{3.16}$$

$$\rho=\frac{p+p_\infty}{(\gamma-1)\rho c_V T} \tag{3.17}$$

Dans les équations ci-dessus, p et T peuvent être décomposées en une valeur thermodynamique (indice r) qui caractérise le fluide en l'absence d'écoulement et une valeur mécanique (indice m) qui va varier autour de la valeur thermodynamique en présence d'un écoulement (voir figure 3.1) :

$$p=p_m+p_r+p_\infty$$
$$T=T_m+T_r$$

Avec $p_\infty=0$ pour un gaz parfait.

Étant donné que p_r, p_∞ et T_r sont constantes, les équations dimensionnelles pour un gaz

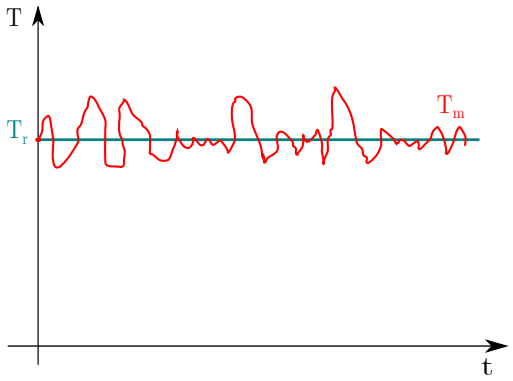


Figure 3.1 Représentation de la valeur mécanique et thermodynamique

compressible peuvent s'écrire sous la forme suivante.

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{p_m+p_r+p_\infty}\left(\frac{\partial p_m}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p_m\right)-\frac{1}{T_m+T_r}\left(\frac{\partial T_m}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_m\right) \tag{3.18}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p_m+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f} \tag{3.19}$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T_m}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_m\right)=\frac{\partial p_m}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p_m+\nabla\cdot(k\nabla T_m)+\boldsymbol{\tau}:\nabla\boldsymbol{u}+q_s \tag{3.20}$$

$$\rho=\frac{p_m+p_r+p_\infty}{(\gamma-1)\rho c_V(T_m+T_r)} \tag{3.21}$$

On pose α_r and β_r qui sont définies par :

$$\alpha_r=\frac{1}{p_r+p_\infty}$$
$$\beta_r=\frac{1}{T_r}$$

Les équations pour un gaz compressible peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$-\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\alpha_r}{\alpha_r p_m+1}\left(\frac{\partial p_m}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla p_m\right)-\frac{\beta_r}{\beta_r T_m+1}\left(\frac{\partial T_m}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T_m\right) \tag{3.22}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)=-\nabla p_m+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f} \tag{3.23}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T_m \right) = \frac{\partial p_m}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p_m + \nabla \cdot (k \nabla T_m) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{u} + q_s \tag{3.24}$$

$$\rho = f(p, T) \tag{3.25}$$

Et l'équation d'état devient :

$$\rho = \frac{p_r + p_\infty}{(\gamma - 1) c_V T_r} \frac{(\alpha_r p_m + 1)}{(\beta_r T_m + 1)}$$

$$\rho = \rho_r \frac{(\alpha_r p_m + 1)}{(\beta_r T_m + 1)}$$

où ρ_r représente la densité à l'état thermodynamique.

3.2 Méthode de résolution

Afin de résoudre ces équations, la méthode des éléments finis est employée. Pour ce faire, le contour Γ est discrétisé en éléments finis 1D et le domaine Ω est discrétisé en éléments finis 2D de forme triangulaire. L'avantage de cette méthode est de permettre la résolution d'équation faisant intervenir des termes non linéaires plus simple en proposant une solution discrète pour les équations. C'est sur le contour du domaine sur lequel on applique les conditions limites. Cela peut-être des conditions où on impose la valeur de la solution aux limites (condition de Dirichlet) ou bien la valeur de sa dérivée aux limites (condition de Neumann). On notera respectivement ces frontières Γ_D et Γ_N tel que :

$$\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$$
$$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$$

3.2.1 Formulation faible

Afin de résoudre les équations (3.14)-(3.16) nous allons utiliser la méthode de Galerkin pour obtenir la formulation faible de chacune des équations. Soient les espaces vectoriels V, Q et

S tels que :

$$V = \left\{\delta \boldsymbol{u} \in H^1_\Omega | \delta \boldsymbol{u} = 0 \; sur \; \Gamma_D\right\}$$
$$Q = L^2_\Omega$$
$$S = \left\{\delta T \in H^1_\Omega | \delta T = 0 \; sur \; \Gamma_D\right\}$$

On définit les fonctions tests $\delta \boldsymbol{u} \in V$ $\delta p \in Q$ et $\delta T \in S$ que l'on multiplie par les équations (3.22)-(3.24). La nouvelle formulation obtenue est ensuite intégrée sur tout le domaine Ω. Pour simplifier l'écriture nous poserons :

$$\alpha = \frac{1}{p}$$
$$\beta = \frac{1}{T}$$
$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{u}\nabla f$$

Pour les équations de Navier-Stokes on aura la formulation faible suivante :

$$\int_\Omega \delta p \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt}\right) d\Omega = 0 \tag{3.26}$$

$$\int_\Omega \delta \boldsymbol{u} \left(\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{f}\right) d\Omega = 0 \tag{3.27}$$

$$\int_\Omega \delta T \left(\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot (k \nabla T_m) - \boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{u} - q_s\right) d\Omega = 0 \tag{3.28}$$

En appliquant le théorème de la divergence et la dérivée du produit vectoriel, on obtient la formulation variationnelle.

$$\int_\Omega \delta p \left(\nabla \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt}\right) d\Omega = 0 \tag{3.29}$$

$$\int_\Omega \delta \boldsymbol{u} \left(\rho \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} - \boldsymbol{f}\right) d\Omega - \int_\Omega p \nabla \delta \boldsymbol{u} d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\tau} : \nabla \delta \boldsymbol{u} d\Omega = \int_\Gamma (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}) \delta \boldsymbol{u} d\Gamma - \int_\Gamma (p\boldsymbol{n}) \delta \boldsymbol{u} d\Gamma \tag{3.30}$$

$$\int_\Omega \delta T \left(\rho c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} - \boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{u} - q_s \right) d\Omega + \int_\Omega \nabla \delta T \left(k \nabla T \right) d\Omega = \int_\Gamma \delta T (k \nabla T) \boldsymbol{n} d\Gamma \quad (3.31)$$

3.2.2 Discrétisation spatiale

Une fois la formulation variationnelle obtenue, nous allons découper le domaine en sous parties que l'on appellera éléments finis. Comme nous travaillerons exclusivement en 2D, on discrétisera le domaine par des éléments triangulaires, et les frontière par des segments. Cette discrétisation va transformer le set d'équations non-linéaires difficile à résoudre en un set d'équation plus facile à résoudre. On introduit les polynômes d'interpolation linéaires par morceaux $\boldsymbol{u}_N$, p_N et T_N, les approximations de $\boldsymbol{u}$, p et T solutions exactes des équations (3.14)-(3.16) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{u}_N &= \sum_{i=1}^{n_u} N_i^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}_i \\ p \approx p_N &= \sum_{i=1}^{n_p} N_i^p p_i \\ T \approx T_N &= \sum_{i=1}^{n_T} N_i^T T_i \end{aligned}$$

où $N_i^{\boldsymbol{u}}$, N_i^p et N_i^T sont respectivement des fonctions polynomiales de la vitesse, pression et température, $\boldsymbol{u}_i$, p_i et T_i représentent les valeurs aux noeuds et n_u, n_p et n_T le nombre de noeuds pour chacune des variables.
En remplaçant les approximations des solutions exactes dans les équations (3.29)-(3.31), on obtient $(2 \times n_u + n_p + n_T)$ inconnues qui sont les $\boldsymbol{u}_i$, p_i, T_i à déterminer. L'objectif étant de résoudre les équations, on souhaite obtenir autant d'équations qu'il y a d'inconnues, on choisit que les fonctions tests soient égales aux fonctions polynomiales :

$$\delta \boldsymbol{u} = N_i^{\boldsymbol{u}} \quad \delta p = N_i^p \quad \delta T = N_i^T$$

Dans le but d'avoir une discrétisation stable de notre formulation, nous utiliserons des éléments qui satisfont la condition de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB) [43] permettant d'obtenir une solution unique. Nous utiliserons les éléments de Taylor Hood P2-P1 qui satisfont cette condition. Les fonctions polynomiales utilisées seront d'ordre 2 pour les vitesses,

la température et la géométrie et d'ordre 1 pour la pression. À la fin de l'assemblage on obtiendra un système matriciel à résoudre pour trouver les inconnues.

3.2.3 Résolution du système

Soit le système matriciel :

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.32}$$

Afin de résoudre ce système, la méthode de Newton-Raphson permettant de trouver les racines d'une fonction dérivable est utilisée.

On a le système suivant à résoudre :

$$\boldsymbol{J_R}(\boldsymbol{x}^n)\delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}^n) \tag{3.33}$$

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = \boldsymbol{x}^n + \delta\boldsymbol{x} \tag{3.34}$$

Avec $\boldsymbol{J_R}$ le Jacobien du résidu à l'itération n, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}^n)$ le résidu du système matriciel (3.32) à l'itération n que l'on cherche à avoir le plus proche de 0 et $\delta\boldsymbol{x}$ la correction de la solution. Le but est d'obtenir un résidu qui tend vers 0 ; néanmoins il ne sera jamais égal à 0. C'est pourquoi on définit les critères de convergences suivants :

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \epsilon_x \tag{3.35}$$

$$\frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}^n)\|}{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}^0)\|} \leq \epsilon_{\boldsymbol{R}} \tag{3.36}$$

Avec ϵ_x et $\epsilon_{\boldsymbol{R}}$ des valeurs qui sont à définir par l'utilisateur.

La méthode de Newton est très efficace, elle présente un ordre de convergence quadratique. Néanmoins sa faiblesse est que le Jacobien doit être calculé à chaque itération ce qui est très coûteux temporellement. Il doit également être inversible. On donne l'approximation du Jacobien par une méthode des différences finies qui permet de s'assurer de la prise en compte de toutes les variables :

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{R}}^{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{R}_i}{\partial x_j} = \frac{\boldsymbol{R}_i(..., x_j + \delta x_j, ...) - \boldsymbol{R}_i(..., x_j, ...)}{\delta x_j} \tag{3.37}$$

où δx_j est une perturbation, $\boldsymbol{R}_i$ le résidu et x_j le vecteur inconnu.

3.2.4 Discrétisation temporelle : *Backward differentiation formula* (BDF)

Lorsque l'on a une dépendance par rapport au temps des variables, la résolution passe par une méthode de discrétisation temporelle. Pour CADYF le choix s'est porté sur la méthode BDF, une méthode implicite développée par C. F. Curtiss et J. O. Hirschfelder [44]. On retrouve des méthodes BDF allant de l'ordre 1 (correspondant à la méthode implicite d'Euler, voir section 2.2.1) à l'ordre 6, les méthodes d'ordres 7 et plus étant bien trop instable pour être utilisées. Ces méthodes ont l'avantage d'être facile à implémenter et peu coûteuses en temps de calcul. L'utilisation des ordres élevés se fait lorsque il y a besoin d'avoir une meilleure exactitude de la solution au temps voulu, l'utilisation des ordres faibles lorsque l'on veut privilégier le temps de calcul et être stable. A. Hay et al. [4] ont développé une méthode adaptative du temps et de l'ordre permettant de limiter les coûts de calculs tout en conservant une bonne précision de la solution.

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,t) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases} \tag{3.38}$$

On exprime l'équation dérivée dans (3.38) au temps $t = t_{i+1}$:

$$\dot{y}_{i+1} = f(y_{i+1}, t_{i+1}) \tag{3.39}$$

La méthode BDF d'ordre p est obtenue à partir de la formulation du polynôme de Newton q au degré p interpolant y_j au temps t_j pour $j = n+1, ..., n+1-p$ pour lequel sa formulation est la suivante :

$$q(t) = \sum_{j=0}^{p} \left[\prod_{i=0}^{j-1} (t - t_{n+1-i}) \right] \delta^j y \tag{3.40}$$

où $\delta_i^j y$ correspond à la différence divisée à l'ordre j de y :

$$\begin{cases} \delta^j y = \delta^j \left[y_{n+1}, ..., y_{n+1-j} \right] = \dfrac{\delta^{j-1} \left[y_{n+1}, ..., y_{n+2-j} \right] - \delta^{j-1} \left[y_{n+1}, ..., y_{n+1-j} \right]}{t_{n+1} - t_{n+1-j}} \\ \delta^0 y = \delta^0 \left[y_{n+1} \right] = y_{n+1} \end{cases} \tag{3.41}$$

Le calcul des différences divisées est très pratique car les valeurs sont calculées par récurrence ce qui se fait facilement sur les codes de calculs d'aujourd'hui. En dérivant l'équation (3.40) et en l'écrivant au temps $t = t_{n+1}$:

$$\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^{p} \left[\prod_{i=1}^{j-1} (t_{n+1} - t_{n+1-i}) \right] \delta^j y = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i y_{n+1-i} \tag{3.42}$$

Avec α_i les coefficients obtenus après application de différences divisées. On obtient une estimation de la dérivé $\dot{y}(t_{n+1})$ ce qui nous donne par substitution :

$$f(y_{i+1}, t_{i+1}) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i y_{n+1-i} \tag{3.43}$$

À noter qu'en augmentant l'ordre, on devient plus précis mais plus instable.

3.2.5 Formulation *Arbitrary Lagrangian–Eulerian* (ALE)

Dans les cas de simulations où le maillage se déforme, on utilise la méthode *Arbitrary Lagrangian–Eulerian* (ALE). Elle fut introduite par C. W. Hirt, A. A. Amsden et J. Cook [45] en 1974. Dans le cas d'une formulation lagrangienne le maillage se déforme avec le fluide, les vitesses des noeuds du maillage sont égales aux vitesses des particules de fluide. Cette formulation est pratique, elle donne une bonne précision de là où se situe l'interface. Néanmoins, on se retrouve limité lorsqu'on fait face à de grande déformations de l'interface. Dans le cas d'une formulation eulérienne, le maillage reste fixe et les particules de fluide bougent à travers. Cette formulation permet de simuler des grandes déformations de l'interface, mais à le désavantage d'avoir une solution plus diffusée et une interface dont le contour n'est pas bien défini. L'idée d'une formulation ALE est que les mouvements du maillage à l'interface sont choisis arbitrairement et permettent d'augmenter la robustesse et la précision de la simulation. La nouvelle formulation des équations de Navier-Stokes avec la formulation ALE est la suivante :

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\alpha_r}{\alpha_r p_m + 1} \left(\frac{\partial p_m}{\partial t} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ALE}) \cdot \nabla p_m \right) - \frac{\beta_r}{\beta_r T_m + 1} \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ALE}) \cdot \nabla T_m \right) \tag{3.44}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ALE}) \cdot \nabla \boldsymbol{u} \right) = -\nabla p_m + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f} \tag{3.45}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{ALE}) \cdot \nabla T_m \right) = \frac{\partial p_m}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla p_m + \nabla \cdot (\lambda \nabla T_m) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \boldsymbol{u} + q_s \tag{3.46}$$

Avec $\boldsymbol{u}_{ALE}$ notre vitesse ALE. On notera qu'une vitesse ALE nulle nous donne une description eulérienne et une vitesse ALE égale à la vitesse du fluide, une description lagrangienne du maillage. Dans notre cas la vitesse ALE sera égale à la vitesse de déplacement du maillage

i.e. $\boldsymbol{u}_{ALE} = \dfrac{d\boldsymbol{\chi}}{dt}$.

Afin de propager le déplacement de l'interface dans le maillage, on utilise une formulation pseudo solide dans laquelle le maillage est considéré comme un solide linéaire hyper élastique qui se déforme en fonction des contraintes appliquées. Des détails sur les équations résolues pour le pseudo solide sont donnés par S. Lortie [46].

3.3 Adaptation

3.3.1 Adaptation du pas de temps

L'adaptation en pas de temps est réalisée dans le but d'augmenter les pas de temps quand c'est possible pour diminuer les coûts de calculs. Pour ce faire on estime l'erreur d'intégration du pas de temps par l'erreur globale [4] :

$$e_g(t_n) = y(t_n) - y_n \tag{3.47}$$

où $y(t_n)$ est la valeur exacte de la variable au temps t_n et y_n la variable obtenue numériquement pour le temps t_n. Malheureusement, le calcul de l'erreur globale n'est pas possible pour des raisons théoriques et pratiques. Une des raisons est que l'on souhaite garder les données d'intégration en temps permettant d'estimer uniquement une erreur locale. Pour estimer cette erreur locale, on suppose que la solution exacte précédant le calcul de l'erreur actuelle est connue précisément. Pour estimer cette erreur locale on utilise l'erreur de troncature locale qui est définie pour l'équation (3.38) par :

$$\mathcal{L}(y) = \dot{y}(t) - f(y(t), t) \tag{3.48}$$

On définit l'estimateur de cette erreur de troncature locale défini par $\mathcal{L}_h$. Au temps t_{n+1} on obtient à partir de l'équation (3.42) et en remplaçant y_{n+1-i} par $y(t_{n+1-i})$ l'estimation suivante :

$$\mathcal{L}_h(y(t_{n+1})) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i y(t_{n+1} - H_i) - f(y(t_{n+1}), t_{n+1}) \tag{3.49}$$

Avec $H_i = t_{n+1} - t_{n+1-i}$.

L'expression de $y(t_{n+1} - H_i)$ sous forme de série de Taylor à l'ordre q est donnée par :

$$y(t_{n+1} - H_i) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{H_i^k}{k!} y^{(k)}(t_{n+1}) + O(H_i^{q+1}) \tag{3.50}$$

En injectant l'équation (3.50) dans (3.49) on obtient :

$$\mathcal{L}_h(y(t_{n+1})) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \frac{H_i^k}{k!} y^{(k)}(t_{n+1}) - f(y(t_{n+1}), t_{n+1}) + O(H_i^{q+1}) \tag{3.51}$$

En sachant que $f(y(t_{n+1}), t_{n+1}) = y^{(1)}(t_{n+1})$ on peut réécrire l'équation (3.51) par :

$$\mathcal{L}_h(y(t_{n+1})) \approx \sum_{k=0}^{q} \overline{C_k} y^{(k)}(t_{n+1}) \tag{3.52}$$

Avec

$$\overline{C_k} = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i H_i^k + \delta_{1k} \right)$$

où δ_{1k} représente le delta de Kronecker. La méthode BDF d'ordre p étant construite de sorte à ce qu'elle soit consistante et d'ordre p, on aura pour $\overline{C_k} = 0$ pour $k = 0, ..., n$. En considérant que le premier terme non nul approxime bien $\mathcal{L}_h$ l'équation (3.52) devient :

$$\mathcal{L}_h(y(t_{n+1})) \approx \overline{C_{p+1}} y^{(p+1)}(t_{n+1}) \tag{3.53}$$

A. Hay et al. [4] démontre que $C_{p+1} \propto h^p$ avec h le pas de temps supposé constant. Plus l'ordre p est grand plus la constante est faible.

À partir de l'estimation de l'erreur de troncature locale $\mathcal{L}_h$ on donne l'erreur locale e_{n+1} au temps t_{n+1} :

$$e_{n+1} \approx \overline{C_{p+1}} y^{(p+1)}(t_{n+1}) h_{n+1} \tag{3.54}$$

Avec $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. En utilisant les différences finies à l'ordre $p + 1$ et en faisant une approximation de $y^{(p+1)}(t_{n+1})$ au premier ordre, on obtient :

$$y^{(p+1)}(t_{n+1}) \approx (p+1)! \delta^{p+1} y \tag{3.55}$$

On définit le *Swing factor* $\mathcal{S} = \dfrac{h_{n+1}}{h_n}$ permettant de connaître l'augmentation maximale du pas de temps qu'on puisse espérer tout en restant dans un domaine stable. Pour chaque variable, le *Swing factor* sera égal à :

$$\mathcal{S}_y = F_s \left(\frac{\epsilon^y}{e_{n+1}^y} \right)^{\frac{1}{p+1}} \tag{3.56}$$

Où F_s est un facteur de sécurité, ϵ^y l'erreur maximum établie par l'utilisateur et e_{n+1}^y l'erreur locale pour la variable y.

La valeur du pas de temps suivant sera donnée par :

$$h_{n+2} = h_{n+1}\mathcal{S}_{min} \tag{3.57}$$

Avec $\mathcal{S}_{min}$ la valeur la plus petite parmi les *Swing factor* calculés pour les variables $\boldsymbol{u}$, p, T en compressible et la valeur maximale $\mathcal{S}_{max}$ autorisée pour le *Swing factor* pour rester stable. Les différentes valeurs en fonction de p sont donnés dans le tableau 3.1 par S. Grigorieff [47] présentant des valeurs théoriques contraignantes et S. Skelboe [48] des valeurs plus permissives.

Adaptation de l'ordre

Dans le cas où l'on voudrait rester stable on serait amener à baisser le pas de temps, ce qui aura pour effet d'augmenter les temps de calcul alors qu'on pourrait plutôt baisser l'ordre d'adaptation rendant la méthode stable tout en augmentant le pas de temps et gardant une bonne précision de la solution. Pour choisir l'ordre, nous allons nous baser sur un critère de stabilité basé sur l'idée de Shampine et Gordon [49]. Lorsqu'une méthode devient instable, la solution numérique présente des oscillations de hautes fréquences. Ces oscillations sont détectables plus facilement pour les ordres élevés de dérivation de la solution. Lorsque la méthode est stable les ordres élevés dans l'équation (3.52) voient leur amplitude décroître tandis que si la méthode est instable les ordres élevés voient leur amplitude augmenter ce qui fait de cette méthode un bon indicateur de stabilité de l'intégration en temps BDF. La méthode BDF d'ordre p sera considérée comme stable si :

$$\delta_{p-1} > \delta_p > \delta_{p+1} > \delta_{p+2} > \delta_{p+3} \tag{3.58}$$

Avec $\delta_k = |h_{n+1}^k y^k(t_{n+1})| \approx |h_{n+1}^k k! \delta_y^k|$ approximation obtenue à partir des différences divisées. Si pour les 10 derniers pas de temps la condition de stabilité (3.58) est respectée, alors l'ordre de la méthode BDF est augmenté. Si plus de 50 % des pas de temps précédents ont passé le test de stabilité, alors on reste sur l'ordre actuel. Dans le cas où ces 2 conditions ne sont pas respectées, l'ordre est diminué. Après un changement, l'ordre est conservé pour les 20 pas de

Tableau 3.1 Valeur maximum du *Swing factor*

Ordre p	2	3	4	5	6
Grigorieff	2.414	1.127	1.019	1.003	1.000
Skelboe	2.6	1.9	1.5	1.2	1.05

temps suivants pour limiter les changements durant le calcul.

3.3.2 Adaptation du maillage

Lors des calculs avec interface, il se peut que les déformations soient trop grandes et que la propagation des déformations sur le maillage ne suffise plus ou bien que le maillage utilisé ne fournisse plus une assez bonne précision de la solution. Dans ces cas là un nouveau maillage est généré et adapté en fonction des estimations d'erreurs des variables sur le maillage. Voici les équations des erreurs pour certaines variables :

$$\text{Pression :} \qquad \|e_p\|_{L_2}^2 = \int_\Omega (p_{ex} - p_h)^2 d\Omega \tag{3.59}$$

$$\text{Vitesse :} \qquad \|e_{\boldsymbol{u}}\|_{H^1}^2 = \int_\Omega \left[\nabla(u_{ex} - u_h).\nabla(u_{ex} - u_h) + \nabla(v_{ex} - v_h).\nabla(v_{ex} - v_h)\right] d\Omega \tag{3.60}$$

$$\text{Énergie :} \qquad \|\mathbf{u}\|_E^2 = \int_\Omega (\tau : \tau)\, d\Omega \tag{3.61}$$

où :

$$\tau = \begin{bmatrix} 2\mu_{eff}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \mu_{eff}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu_{eff}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\mu_{eff}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{bmatrix}$$

$$\text{déformation :} \qquad \|\xi\|_D^2 = \int_\Omega (e : e)\, d\Omega \tag{3.62}$$

où $e = \frac{1}{2}\left(\nabla\xi^T + \nabla\xi + \nabla\xi^T \cdot \nabla\xi\right)$ est le tenseur des contraintes de Green-Lagrange :

$$e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \text{sym.} & 2\frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

Avec p_{ex} qui correspond à la valeur exacte du problème et p_h l'approximation par éléments finis de la variable sur un noeud. Cependant la solution analytique exacte n'étant pas connue dans la majorité des simulations réalisées, l'erreur réellement calculée est une approximation

de la vraie définition de l'erreur où la variable p_{ex} est remplacée par une variable p correspondant à une approximation de la variable p_{ex} calculé à partir de p_h. Les lecteurs les plus curieux pourront trouver plus d'information sur la méthode employée dans les travaux de Zienkiewicz et Zhu [50, 51]. L'ensemble des erreurs sur chaque élément pour une variable est ensuite rassemblé pour donner l'erreur globale suivante :

$$\|e\|_\Omega^2 = \sum_{i=1}^{n_{elem}} \|e\|_i^2 \tag{3.64}$$

Avec n_{elem} le nombre d'élément sur le maillage l'objectif étant de réduire cette erreur à chaque nouveau maillage fourni, on définit un facteur de réduction de l'erreur ζ dont la valeur est choisie par l'utilisateur en fonction de ses besoins. L'erreur recherchée $\|e_{cible}\|_\Omega$ est donnée par :

$$\|e_{cible}\|_\Omega = \zeta \|e\|_\Omega \tag{3.65}$$

En faisant l'hypothèse que l'erreur est equidistribuée sur tous les éléments, l'erreur cible sur chaque élément vaut :

$$\|e_{cible}\|_i = \frac{\|e_{cible}\|_\Omega}{\sqrt{n_{elem}}} \tag{3.66}$$

On a a priori l'erreur élémentaire reliée à la taille de son élément par :

$$\|e_{cible}\|_i = c\eta_i^\alpha \tag{3.67}$$

$$\|e\|_i = c\delta_i^\alpha \tag{3.68}$$

Avec c une constante, δ_i et η_i respectivement la taille de l'élément sur l'ancien maillage et la taille d'élément cible pour le prochain maillage et α le taux de convergence dépendant du type d'éléments choisi et de la norme utilisée pour mesurer l'erreur. La taille d'élément voulue est donnée par :

$$\eta_i = \left(\frac{\zeta \|e\|_\Omega}{\|e\|_i \sqrt{n_{elem}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.69}$$

Enfin la taille de l'élément se fait en choisissant la plus petite parmi celles calculées :

$$\eta_i^e = min\left(\eta_i^{\boldsymbol{u}}, \eta_i^p, \eta_i^{Energie}, \eta_i^{Déformation}\right) \tag{3.70}$$

CHAPITRE 4 MODÉLISATION DE L'INTERFACE

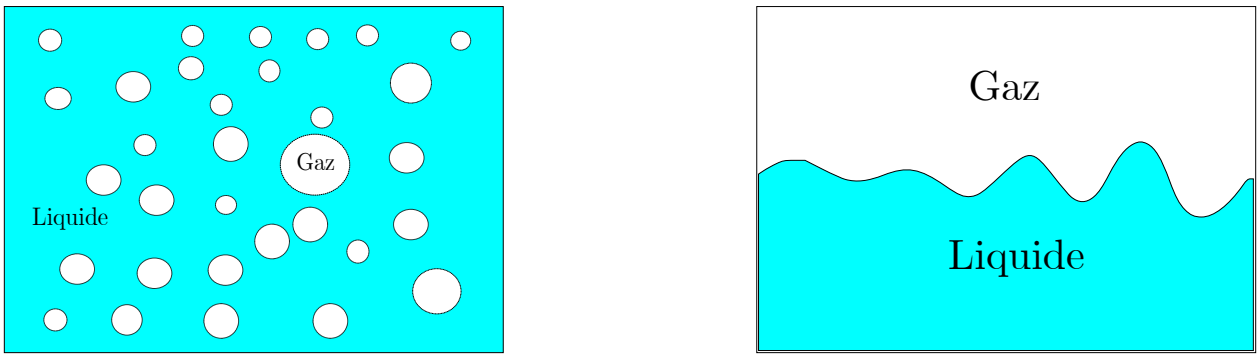
Dans cette section nous allons évoquer les développements qui ont permis la modélisation de l'interface entre deux fluides non miscibles et les modifications apportées pour permettre la prise en compte d'impact de cylindre d'eau.

4.1 Milieu diphasique

Les cas d'écoulements étudiés dans ce mémoire seront essentiellement des cas d'écoulements diphasiques. Un milieu diphasique se caractérise par la présence de deux phases s'écoulant ensemble et étant dépendantes l'une de l'autre. Cela peut porter sur l'étude d'un fluide présent dans des phases différentes (Gaz Naturel liquéfié/Gaz naturel), l'étude de deux fluides ayant la même phase et non miscibles (huile/eau) ou encore l'étude de deux fluides différents et ayant une phase différente (eau/air). On peut également séparer les écoulements diphasiques en deux modes d'écoulements différents : Les écoulements à deux phases dispersés pour lesquelles un fluide est clairsemé dans l'autre écoulement, cela peut s'agir par exemple de bulles de gaz présentes dans une phase liquide et les écoulements séparés par une interface tels que l'étude de vague. La complexité du premier cas est telle qu'il est actuellement impossible de le modéliser à l'aide d'un logiciel d'éléments finis, on aurait trop d'interface à modéliser et de changements de topologies à prendre en compte. Le second quant à lui est numériquement plus accessible pour un logiciel tel que CADYF. Les équations de Navier-Stokes sont résolues pour chacun des fluides en présence. La communication entre les deux fluides se fait par l'interface sur laquelle des conditions sont appliquées que nous allons expliciter. On note par Ω_1 et Ω_2 respectivement le domaine du fluide 1 et du fluide 2 tel que $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ et par Γ_I l'interface entre les deux fluides.

4.2 Représentation des interfaces

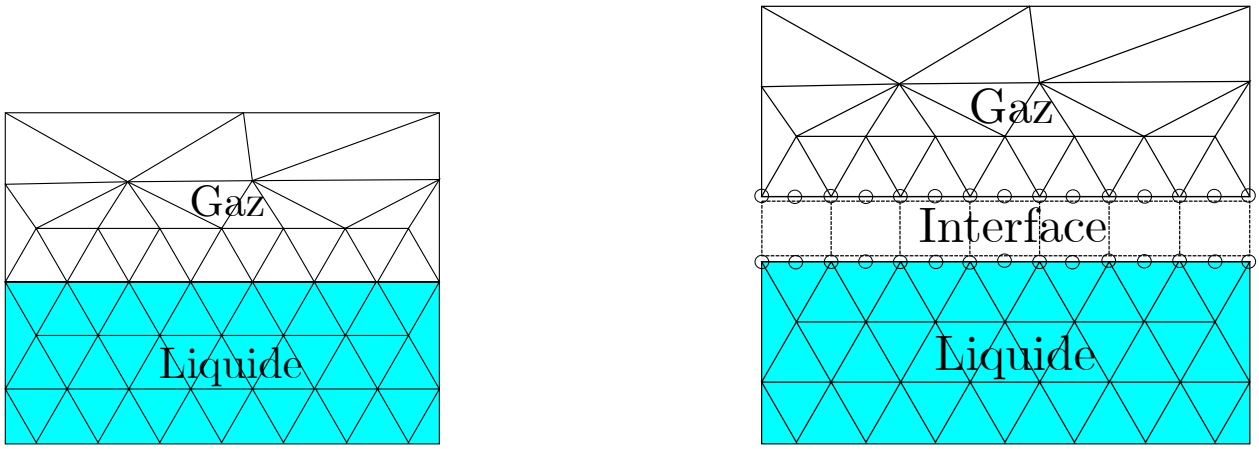
Pour rappel, les équations de Navier-Stokes sont résolues dans chacun des domaines, le seul échange d'information entre les domaines est réalisé à travers l'interface Γ_I. La méthode pour définir l'interface est une méthode de suivi d'interface ou *front tracking*. Elle sera décrite à l'aide d'éléments du maillage qui devront pouvoir se déplacer et se déformer en fonction de ce que la physique impose à l'interface. Les deux fluides étant disjoints, seule la discrétisation à l'interface doit être similaire. La discrétisation ne se réalisera pas si les deux frontières dans chacun des domaines n'ont pas le même nombre de noeuds, le même nombre de coordonnées



(a) Écoulement dispersé (b) Écoulement séparé

Figure 4.1 Écoulements à deux phases

des noeuds, le même nombre d'éléments et de types d'éléments. Comme nous utilisons des éléments P2-P1 pour représenter le domaine, les éléments sur l'interface sont modélisés par 3 noeuds. Les noeuds de part et d'autre de l'interface forment des éléments d'interface dont l'épaisseur est nulle. L'utilisation de ces éléments d'interface permet d'appliquer les conditions sur l'interface plus facilement.



(a) (b)

Figure 4.2 Représentation de l'interface

4.3 Condition physique sur l'interface

À l'interface entre deux fluides non miscibles, l'équilibre dynamique et thermodynamique doit être atteint, ces conditions découlent de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie du système formé de nos deux fluides.

La première condition est sur la continuité des vitesses :

$$\boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{u_2} \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{4.1}$$

On a également une condition de continuité de la température entre les deux interfaces :

$$T_1 = T_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{4.2}$$

Condition sur les contraintes normales au passage de l'interface :

$$(\boldsymbol{\tau_1} - \boldsymbol{\tau_2})\boldsymbol{n} = \sigma\kappa\boldsymbol{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{4.3}$$

Condition sur les contraintes tangentielles :

$$(\boldsymbol{\tau_1} - \boldsymbol{\tau_2})\boldsymbol{t} = \nabla\sigma \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{4.4}$$

$\boldsymbol{\tau_1}$ et $\boldsymbol{\tau_2}$ représentent respectivement le tenseur des contraintes des fluides 1 et 2, σ le coefficient de tension superficielle, $\boldsymbol{n}$ le vecteur normale unitaire à l'interface, κ la courbure de l'interface, $\boldsymbol{t}$ le vecteur unitaire tangent à l'interface et $\nabla\sigma$ la projection tangentielle sur l'interface du gradient de la tension superficielle.

4.4 Conditions sur les noeuds de l'interface

Aux conditions physiques vu précédemment viennent s'ajouter des conditions numériques non physiques qui correspondent à des conditions de déplacement des noeuds sur l'interface. La première condition est une condition sur les déplacements des noeuds représentant l'interface :

$$\boldsymbol{\chi_1} = \boldsymbol{\chi_2} \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{4.5}$$

Avec $\boldsymbol{\chi_1}$ et $\boldsymbol{\chi_2}$ représentant respectivement le déplacement des noeuds sur la frontière du fluide 1 et du fluide 2. Étant le même déplacement, on notera par $\boldsymbol{\chi}$ le déplacement des noeuds des fluides 1 et 2 sur la frontière.

On a une deuxième condition concernant la vitesse normale de déplacement des noeuds et la vitesse normale aux noeuds afin de respecter la condition de non pénétration et ne pas avoir de fuite de fluide :

$$\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{u_2} \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma \tag{4.6}$$

La dernière condition est sur la vitesse de déplacement tangentielle des noeuds. Si la vitesse imposée était la même que celle des fluides, on pourrait se retrouver avec une accumulation de noeuds dans certaines régions et par conséquent une interface raffinée à certains endroits et grossière à d'autres, provoquant des erreurs durant la simulation.

On fait le choix d'imposer pour la vitesse tangentielle une condition de régularité des noeuds le long de l'interface. Les ratios des longueurs des éléments attachés au noeud n_i doivent être conservés entre chaque pas de temps, voir figure 4.3 :

$$\frac{L_-}{l_-} = \frac{L_+}{l_+} \tag{4.7}$$

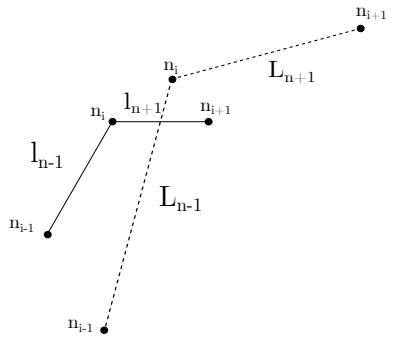


Figure 4.3 Longueur des éléments sur l'interface attaché au noeud n_i

Cette approche convient pour les cas en 2D avec une interface ouverte. Dans les cas en 2D ou 3D avec une interface fermée, il sera préférable d'utiliser l'approche développée par S. Fortin [52] dans laquelle on effectue une moyenne des vitesses tangentielles de déplacement des noeuds, moyenne réalisée par rapport aux N noeuds voisins :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_n}{\partial t} \cdot \boldsymbol{t} \tag{4.8}$$

Avec $\boldsymbol{t}$ le vecteur tangent à l'interface, et N le nombre de noeuds voisins.

4.5 Calcul de la courbure et application de la tension superficielle

Afin d'implémenter l'équation (4.3), on a besoin de calculer la courbure de notre interface. En théorie, le calcul de la courbure d'une courbe de fonction $f(x)$ se fait à partir des dérivées secondes de celle-ci. Dans le cas où on utiliserait des éléments P1-P1 on se retrouverait avec des valeurs de courbures nulles. Dans le cas où on utiliserait des éléments P2-P1 on serait là aussi face à un problème pour les noeuds attachés à 2 éléments puisque seule la continuité

de l'interface est garantie et pas celle des dérivées premières ou secondes. Pour remédier à ce problème, on remplace le terme $\kappa \boldsymbol{n}$ par une expression utilisant l'opérateur Laplace-Beltrami appliqué à la fonction identité [53] :

$$\underline{\Delta} id_\Gamma = -\kappa \boldsymbol{n} \tag{4.9}$$

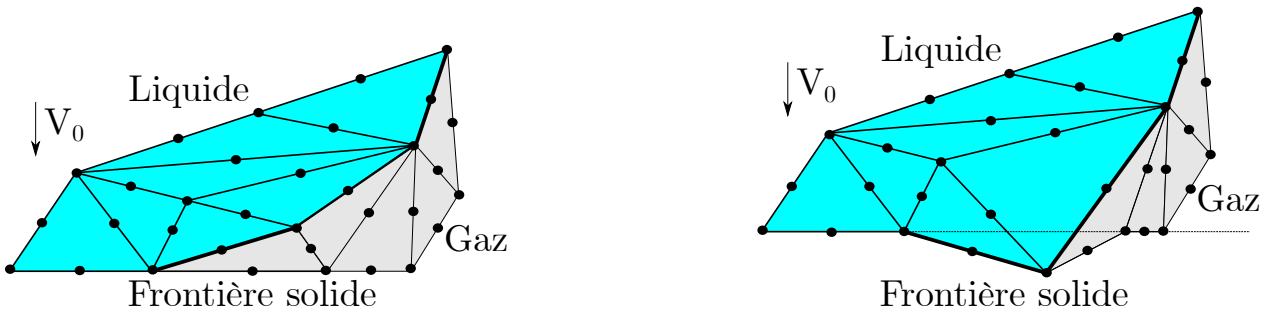
Avec id_Γ la fonction identité à l'interface. Après intégration par partie il est possible d'obtenir la formulation faible suivante de l'équation (4.3). Pour plus de détails se référer à la thèse de Y. Vautrin [42].

4.6 Déplacement du point de contact

Dans le cas d'une interface ouverte, les vitesses de déplacements des noeuds aux extrémités sont égales aux vitesses du fluide :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\chi}_i}{\partial t} = \boldsymbol{u}_i \quad \text{pour} \quad i \in \{1, n\} \tag{4.10}$$

Cette formulation fonctionne bien pour les cas incompressibles avec des faibles vitesses de déplacements de l'interface. En revanche, on devient très vite limité lorsque l'on souhaite simuler des impacts de liquide compressible avec un point de contact ayant une vitesse supersonique. Si la vitesse de déplacement verticale des noeuds sur l'interface est plus élevé que le déplacement horizontal du point de contact alors on aura des simulations avec des éléments aplatis voir négatifs. Voir figure 4.4.



(a) Au temps t_0 (b) Au temps $t_1 > t_0$

Figure 4.4 Modélisation du problème d'élément négatif pouvant survenir lors de fort impact

Afin de remédier à ce problème, deux solutions ont été implémentées. La première méthode qu'on nommera "Méthode à un noeud" consiste à imposer la vitesse de déplacement du point de contact, point étant relié au liquide au gaz et à la frontière solide, par rapport à la vitesse

du fluide au noeud suivant :

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} - \tan(\theta) v_2 = 0 \tag{4.11}$$

Avec $\frac{\partial \chi_1}{\partial t}$ la vitesse de déplacement du noeud 1, v_2 la vitesse verticale du fluide au noeud 2 positive si elle est dirigée vers le haut et θ l'angle entre la frontière solide et la droite passant par le noeud 1 et le noeud 2. Pour l'implémentation de cette équation dans CADYF, on choisit de transformer l'équation (4.11) faisant apparaître $\tan(\theta)$ en une équation avec la normale au noeud 1 qui est déjà calculée et peut être récupérée facilement :

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} \cdot n_{1x} - v_2 \cdot n_{1y} = 0 \tag{4.12}$$

Où n_{1x} et n_{1x} représentent respectivement la composante normale du noeud 1 selon les coordonnées x et y. Les particules de fluides vont glisser le long de l'interface jusqu'à être en

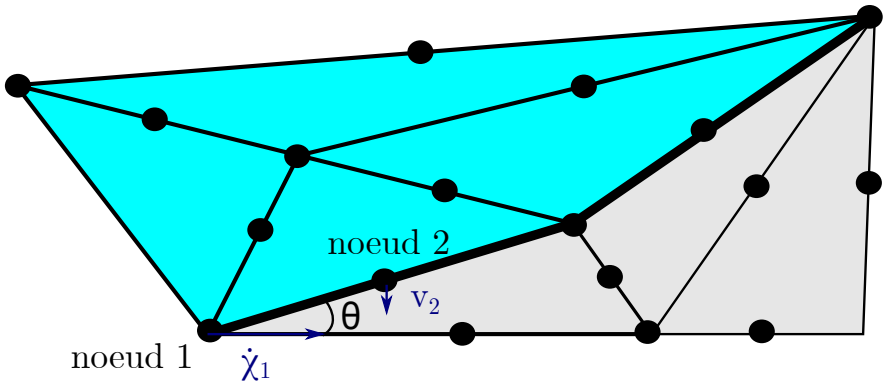


Figure 4.5 Schéma de la méthode du déplacement du point de contact, à partir du noeud suivant

contact avec l'interface solide, voir figure 4.5.

L'autre méthode qu'on nommera "Méthode à deux noeuds" est plus convenable lorsqu'on utilise des éléments P2-P1 où la géométrie de l'élément se profile sous la forme d'une droite. On fait l'hypothèse que nos 3 noeuds sont des points d'une droite. La position du point de contact est définie comme étant l'intersection de la droite qui passe par les 2 noeuds suivants avec l'axe des abscisses, voir figure 4.6.

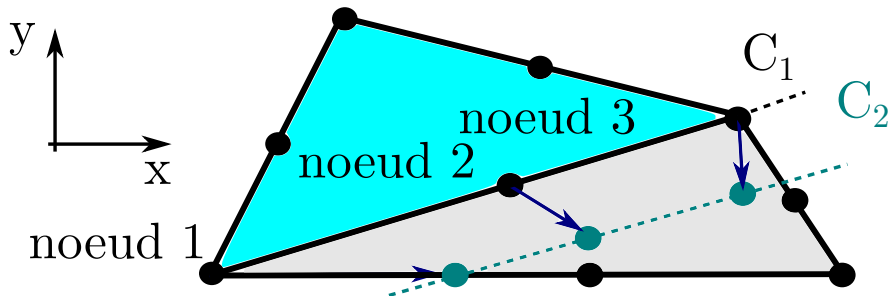


Figure 4.6 Déplacement du noeud 1 sur la droite définie par les nouveaux noeuds 2 et 3

CHAPITRE 5 VÉRIFICATION DU CODE IMPLÉMENTÉ

Avant de passer à la validation des modèles, une étape de vérification doit être réalisée. La vérification permet de s'assurer que les développements effectués correspondent bien aux exigences voulues, c'est une façon de vérifier si le code a bien été développé. La validation quant à elle, est une étape où les développements réalisés sont utilisés pour un cas de simulation exigé (par le partenaire industriel par exemple). On vérifie que le code implémenté satisfait les exigences voulues.

La vérification se fait généralement à l'aide d'un modèle dont la solution analytique est connue et suffisamment complexe pour faire varier de nombreuses variables . Le modèle n'a pas besoin d'être réaliste puisque la vérification n'est que purement mathématique. Dans le cas où les modèles avec solution analytique ne satisfont pas les besoins de vérification, on peut se tourner vers la méthode des solutions manufacturées *the method of manufactured solutions* (MMS) [54] dont un des avantages est de pouvoir identifier n'importe quelle erreur qui pourrait réduire l'ordre de précision de la méthode numérique. Pour un système d'équation donné noté L avec $\boldsymbol{u}$ solution de ce système tel que $L(\boldsymbol{u}) = 0$, on propose une solution $\boldsymbol{U}$, dont la forme est choisie par l'utilisateur. On définit un terme source $Q(\boldsymbol{U})$ dont sa forme est à déterminer tel que $L(\boldsymbol{U}) - Q(\boldsymbol{U}) = 0$. Cela nous donne la nouvelle équation à résoudre.

La convergence spatiale et temporelle du code a été vérifiée par les étudiants précédents, on pourra se référer à la thèse de Y. Vautrin [42] et S. Lortie [46].

CHAPITRE 6 VALIDATION ET CAS D'APPLICATION

Dans cette partie, nous chercherons à valider les points suivants :

- La propagation de la discontinuité à l'aide d'un cas unidimensionnel faisant intervenir les relations de Rankine-Hugoniot. Ce cas nous permettra également d'évaluer le gain du remaillage adaptatif.
- Le bon déplacement du point de contact lors du déplacement d'une interface ouverte, nous utiliserons la solution analytique d'un impact de goutte obtenue dans le modèle de M. Lesser [25].

6.1 Présentation du modèle d'impact de Rankine-Hugoniot

L'objectif de ce modèle va être de vérifier la bonne implémentation de la formulation pour les liquides faiblement compressible et le remaillage adaptatif pour la capture du choc.

Le problème est un cas unidimensionnel d'un impact de liquide à vitesse non nulle sur une paroi solide fixe. Du fait qu'on considère le liquide comme étant un gaz faiblement compressible, une onde de choc doit s'observer et se propager dans le milieu. La vitesse de cette onde est donnée par les relations de Rankine-Hugoniot [55].

Dans le cas d'un fluide, dont ses mouvements sont considérés dans une seule direction, les relations de Rankine-Hugoniot s'écrivent :

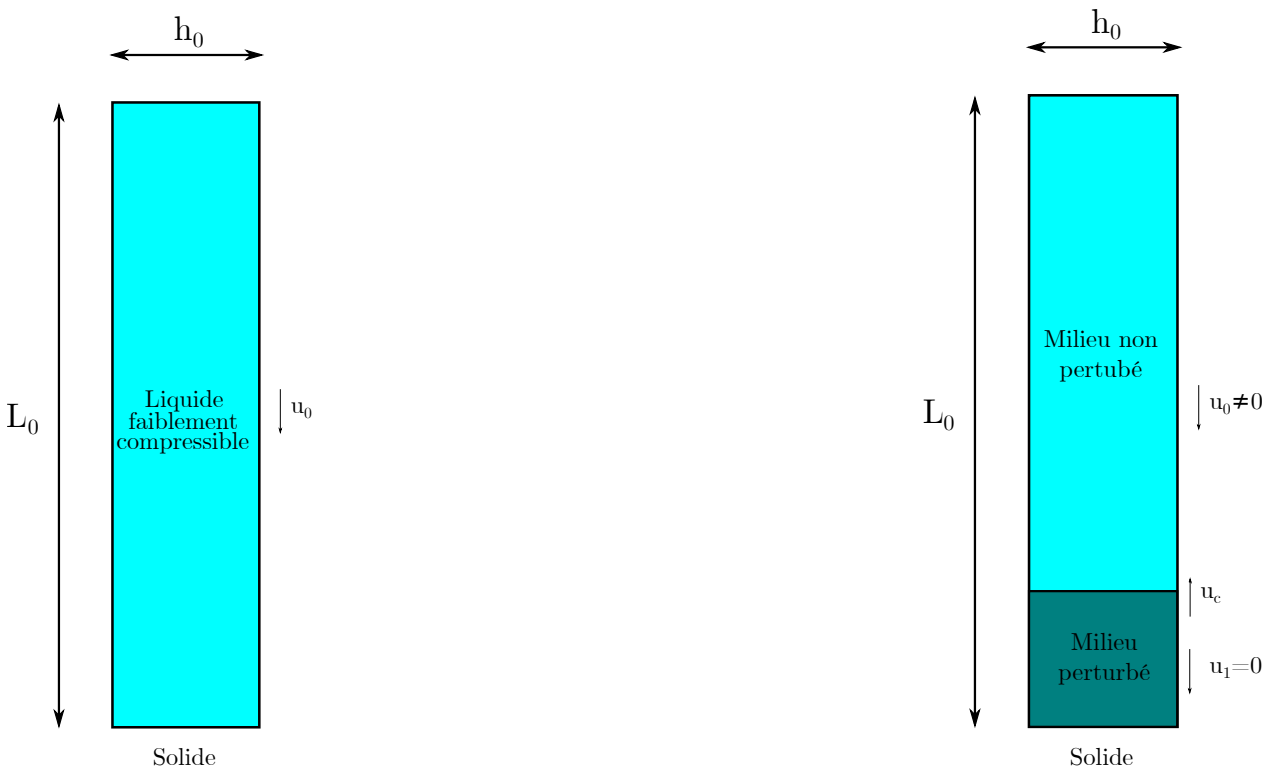
$$u_c(\rho_0 - \rho_1) = \rho_0 u_0 - \rho_1 u_1 \quad \text{Conservation de la masse} \tag{6.1}$$

$$u_c(\rho_0 u_0 - \rho_1 u_1) = (\rho_0 u_0^2 + p_0) - (\rho_1 u_1^2 + p_1) \quad \text{Conservation de la quantité de mouvement} \tag{6.2}$$

$$u_c(\rho_0 E_0 - \rho_1 E_1) = (\rho_0 E_0 + p_0)u_0 - (\rho_1 E_1 + p_1)u_1 \quad \text{Conservation de l'énergie} \tag{6.3}$$

Les indices 1 et 0 correspondent respectivement au milieu perturbé et non perturbé. ρ est la masse volumique, u la vitesse, E l'énergie totale par unité de masse et u_c la vitesse du choc. Sur CADYF nous ne pouvons modéliser que des écoulements compressibles en 2D. Pour que le caractère bidimensionnel n'affecte pas les résultats escomptés, notre cas d'étude considéré est un domaine rectangulaire de longueur $L_0 = 150$ m et de largeur $h_0 = 1$ m, voir figure 6.1.

La vitesse du milieu non perturbé est non nulle. La vitesse dans le milieu perturbé est nulle. Les pressions p_0 et p_1 sont considérées comme étant des pressions relatives par rapport à p_{ref}. Dans le milieu non perturbé $p_0 = 0$ Pa. On peut réécrire les équations (6.1) et (6.2) sous la forme :



(a) Avant le choc (b) Après le choc

Figure 6.1 Schéma du développement de la discontinuité de pression

$$u_c = \frac{\rho_0 u_0}{(\rho_0 - \rho_1)} \quad \text{Conservation de la masse} \tag{6.4}$$

$$p_1 = \rho_0 u_0 (u_0 - u_c) \quad \text{Conservation de la quantité de mouvement} \tag{6.5}$$

Dans le cas d'un gaz raidi la masse volumique à l'intérieur doit évoluer, F. Dias et J.-M. Ghidaglia [56] proposent une relation simplifiée pour la masse volumique de l'eau :

$$\rho_1 = \rho_0 \left(1 + k \frac{p_1}{p_{ref}}\right) \tag{6.6}$$

Où $p_{ref} = p_r + p_\infty$ (voir section 3.1 pour plus de détails). k représente l'inverse de la constante adiabatique dans le cas d'un gaz parfait. On va faire l'hypothèse que c'est également vrai pour notre cas.

De l'équation (3.9) on en sort la relation de la vitesse du son pour le domaine non perturbé suivant :

$$c^2_{eau,0} = \gamma \frac{p_{ref}}{\rho_0} \tag{6.7}$$

À l'aide des équations (6.5)-(6.7), on obtient l'équation du second degré suivante avec comme inconnue la vitesse de choc :

$$-c^2_{eau,0} = u_c(u_0 - u_c) \tag{6.8}$$

En résolvant, on obtient les solutions suivantes :

$$u_c = -c_{eau,0} \left(\sqrt{1 + \frac{\mathrm{Ma}^2}{4}} \pm \frac{\mathrm{Ma}}{2}\right) \tag{6.9}$$

$$p_1 = \rho_{ref,0} u_0 c_{eau,0} \left(\sqrt{1 + \frac{\mathrm{Ma}^2}{4}} \pm \frac{\mathrm{Ma}}{2}\right) \tag{6.10}$$

Avec Ma$= \dfrac{u_0}{c_{eau,0}}$ le nombre de Mach dans le milieu non perturbé. Pour nos essais la vitesse du son dans l'eau sera prise égale à $c_{eau,0} = 1464$ m/s et $u_0 = 0.1$ m/s, ce qui nous donne un Mach très faible (Ma$\ll 1$). On peut approximer les nouvelles solutions par :

$$u_c = -c_{eau,0} \tag{6.11}$$

$$p_1 = \rho_{ref,0} u_0 c_{eau,0} \tag{6.12}$$

On se retrouve avec la formule théorique de l'onde de pression crée dont la valeur est celle de la pression acoustique et qui se propage à la vitesse du son dans le milieu perturbé. En adimensionnalisant les valeurs tel que :

$$\widetilde{p} = \frac{p}{\rho_{ref,0} u_0 c_{eau,0}} \quad \widetilde{y} = \frac{y}{L_0} \quad \widetilde{t} = \frac{t|u_c|}{L_0} \quad \widetilde{u} = \frac{u}{|u_0|}$$

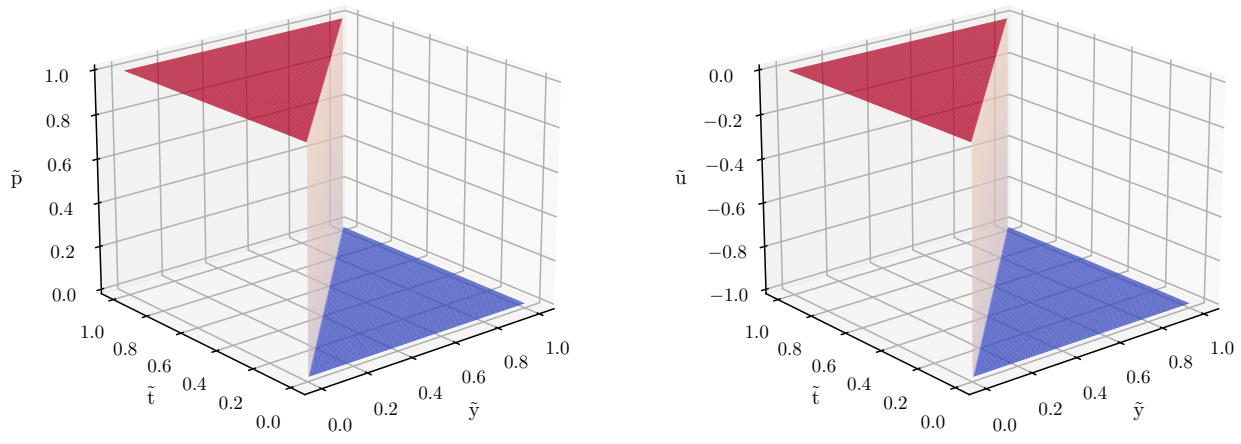
La pression dans tout le domaine en fonction du temps est donnée par :

$$\begin{cases} \widetilde{p}(\widetilde{y}, \widetilde{t}) = 0 & \text{si} \quad \widetilde{y} \geq \widetilde{t} \\ \widetilde{p}(\widetilde{y}, \widetilde{t}) = 1 & \text{si} \quad \widetilde{y} < \widetilde{t} \end{cases} \tag{6.13}$$

et la vitesse dans tout le domaine par :

$$\begin{cases} \widetilde{u}(\widetilde{y}, \widetilde{t}) = -1 & \text{si} \quad \widetilde{y} \geq \widetilde{t} \\ \widetilde{u}(\widetilde{y}, \widetilde{t}) = 0 & \text{si} \quad \widetilde{y} < \widetilde{t} \end{cases} \tag{6.14}$$

Une représentation graphique de ces fonctions est donnée sur les figures 6.2(a) et 6.2(b).



(a) Pression

(b) Vitesse

Figure 6.2 Résultat théorique mis en perspective de la pression et de la vitesse en fonction du temps et de la position adimensionnel lors d'un cas d'impact Rankine-Hugoniot

6.1.1 Modélisation du cas sur CADYF

Le cas sera modélisé avec les propriétés physiques et thermodynamiques de l'eau qui sont données dans le tableau 6.1. La valeur choisie pour la pression de référence permet d'avoir

une vitesse du son dans le milieu non perturbé $c_{eau,0} = 1464$ m/s.

Toutes les frontières du domaines sont fixes. Sur les frontières gauche et droite, on impose des conditions de symétrie pour éviter l'influence qu'on pourrait avoir du fait que le cas soit 2D, sur la frontière du haut, une condition de glissement laissant le volume du fluide dans le domaine évoluer dû à sa compression et celle du bas nous fixons sa vitesse à zéro. Deux simulations sont effectuées dont les maillages initiaux sont présentés sur la figure 6.3 :

— La première est réalisée avec un maillage uniforme sur tout le domaine composé de mailles triangulaires de longueurs h_0 et de largeurs $0.1\%L_0$. Le domaine sera constitué de 3000 éléments.

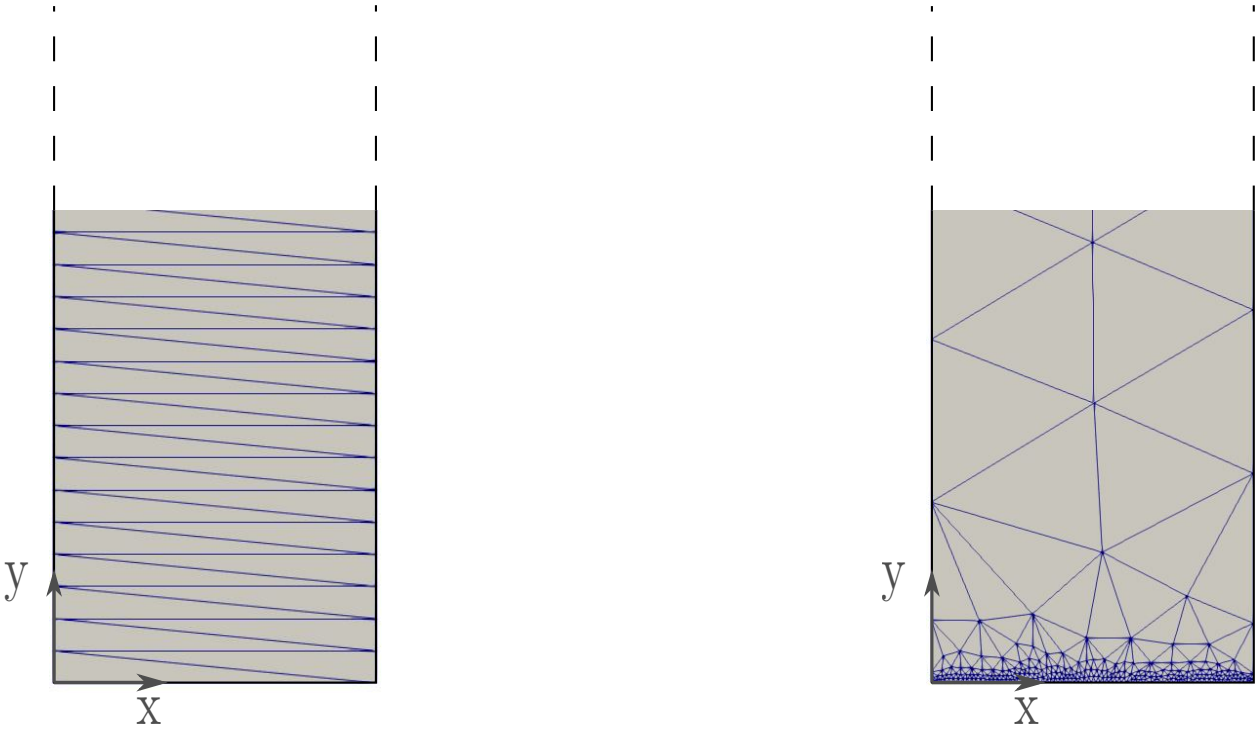
— La deuxième est réalisée avec un maillage initial raffiné sur la frontière du bas. Au cours de la simulation l'erreur sur la pression à partir de la norme $H1$ sera calculé. Un raffinement sera effectué là où l'erreur est au dessus d'une valeur choisie par l'utilisateur. Le maillage de base est composé de 16 000 éléments qui vont se stabiliser autour de 6000 éléments.

L'objectif est de s'assurer que le raffinement est bien effectué autour du front d'onde.

Au cours de la simulation pour le cas avec remaillage, beaucoup de phases de remaillages sont effectuées (autour de 1500) étant donné que le raffinement doit suivre le front d'onde qui se déplace à la vitesse du son. C'est là où la discontinuité en pression commence à s'observer. On observe un raffinement tout autour du front d'onde, ce qui était désiré. Le critère de raffinement choisi sur l'erreur relative est de 5%. Si cette tolérance n'est pas respectée, on arrête le calcul pour remailler et on relance le calcul à partir du dernier temps avec le nouveau maillage où la solution précédente a été interpolée. On choisit un facteur de réduction de l'erreur de 0.5, avec des éléments dont la taille varie entre 5×10^{-4} m et 5×10^{-1} m. La figure 6.4 montre le remaillage effectué autour du front d'onde au cours du temps en observant à une position fixe du domaine.

Tableau 6.1 Propriétés physiques et thermodynamiques de l'eau pour la simulation d'un choc

Variables	Description	Eau
μ_0	Viscosité dynamique (Pa.s)	1.1080×10^{-3}
$\rho_{ref,0}$	Masse volumique de référence (kg/m^3)	998
k_0	Conductivité thermique (W/(m· K))	0.6
$T_{ref,0}$	Température de référence (K)	293
c_{p_0}	Capacité thermique (J/kg/K)	4181.9
$p_{ref,0}$	Pression de référence (Pa)	7.78472×10^8



(a) Sans adaptation du maillage

(b) Avec adaptation du maillage

Figure 6.3 Maillage au temps $t = 0$ s pour les deux simulations effectuées

Une fois les simulations effectuées, on récupère la pression et la vitesse verticale sur le domaine que l'on compare avec la théorie. Les résultats sont présentés sur les graphiques 6.5 et 6.6.

Que ce soit le cas avec ou sans remaillage, les résultats de la simulation sont en accord avec les résultats théoriques que ce soit pour la pression ou la vitesse verticale tout le long du domaine. On observe la discontinuité en pression se propager le long du domaine en fonction du temps. Les changements de valeurs pour les variables provoquent tout de même des oscillations autour de la valeur finale. Ce qui est observé est un phénomène de Gibbs qui apparaît lorsqu'on essaye de modéliser une fonction avec de fortes discontinuités par une fonction continue. Il est normal de les observer pour notre cas et l'augmentation d'éléments ne fera qu'augmenter ce phénomène. On le voit d'ailleurs avec la figure 6.5(a) où un raffinement prononcé dans la zone de discontinuité accentue l'amplitude du phénomène.

Ces oscillations sont nettement atténuées avec l'utilisation du remaillage sur le domaine. On peut penser que l'interpolation effectuée empêche l'apparition d'oscillations. Cependant au démarrage du calcul, la discontinuité est d'amplitude élevée le temps que l'écoulement se met en place. Elle l'est d'autant plus avec le remaillage.

Différentes approches sont employées pour régler ce problème d'instabilité. Pour le réduire

on utilise la méthode *Streamline Upwind Petrov Galerkin* (SUPG) que l'on retrouve dans les travaux de T.E. Tezduyar et Y. Osawa [57], et implémentée dans CADYF, qui consiste en l'ajout d'un terme de diffusion numérique lors de la résolution des équations de Navier-Stokes par éléments finis. À la méthode de SUPG il faudrait y associer une méthode de capture de choc qui permettrait de raffiner autour de la discontinuité et d'avoir une position du choc bien définie. Dans la littérature, des méthodes sont proposées par T. E. Tezduyar et M. Senga [58] et R. Codina [59].

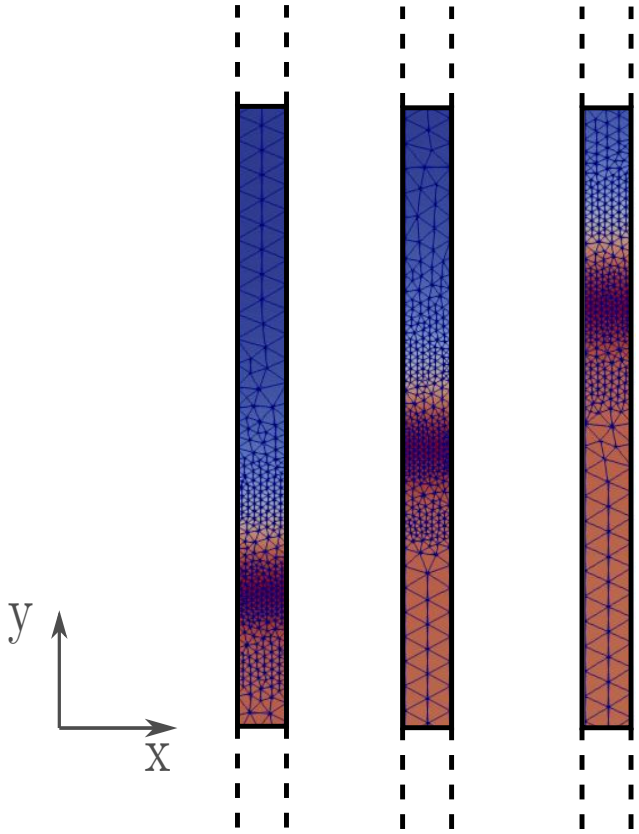
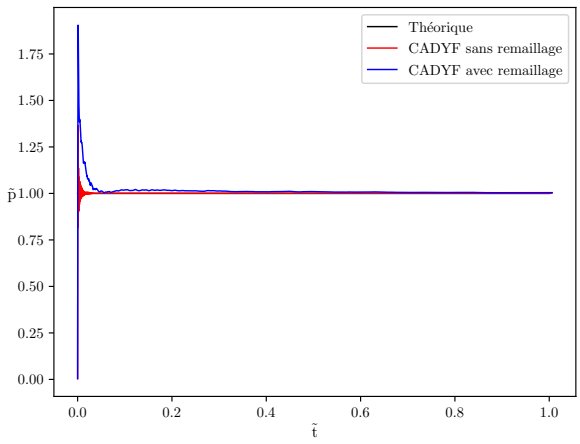


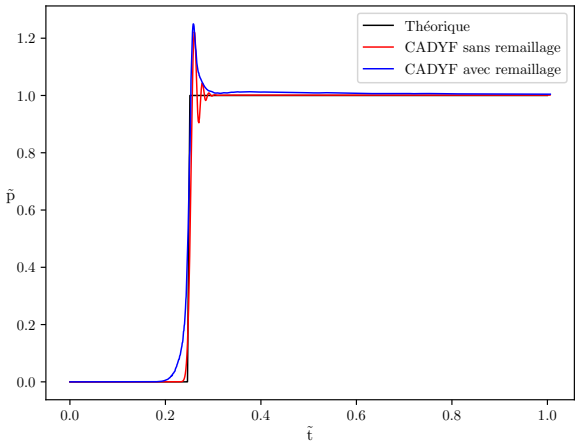
Figure 6.4 Observation à une position fixe du remaillage autour de l'onde de choc pour différents temps

6.2 Présentation du modèle de Lesser choc 2D

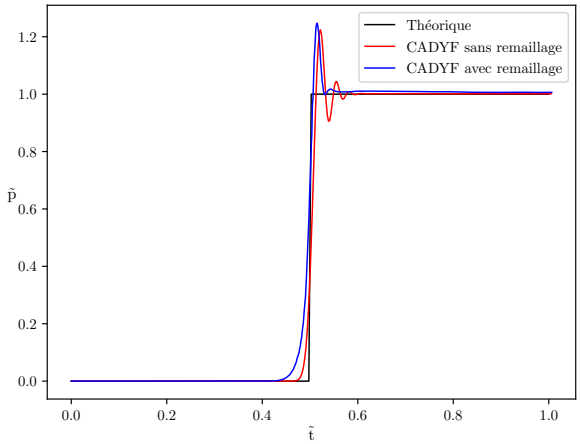
Soit une goutte 2D prenant la forme d'un cercle de rayon R se déplaçant à la vitesse V_0 verticale en direction d'un solide rigide dans un système de coordonné (x, y). On considère qu'à $t = 0$ s, on a le premier point de contact entre ce cylindre d'eau et le solide. Ce premier point de contact va générer une onde de pression de valeur $p(c, t) = \rho c V_0$, avec ρ et c respectivement la masse volumique et la vitesse du son dans notre liquide. Le point de



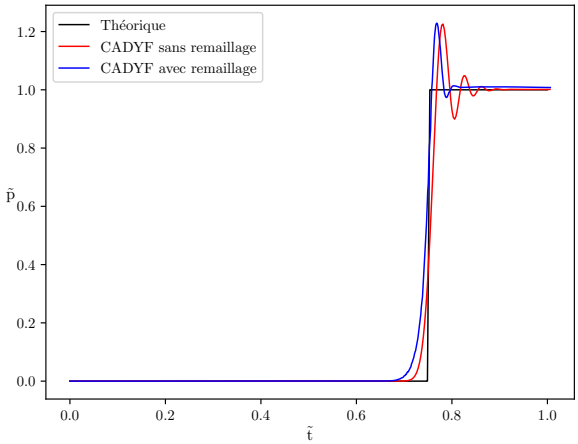
(a) $\widetilde{y} = 0.0$



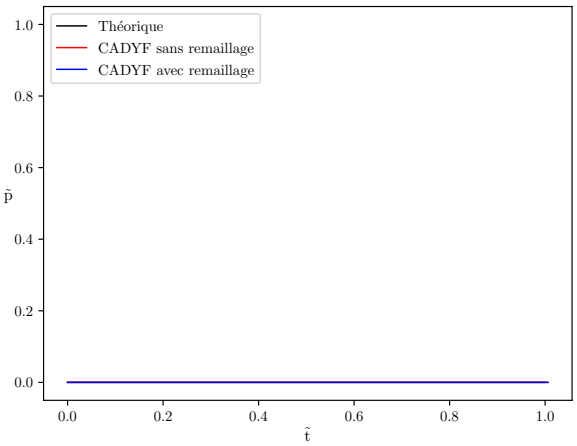
(b) $\widetilde{y} = 0.25$



(c) $\widetilde{y} = 0.5$

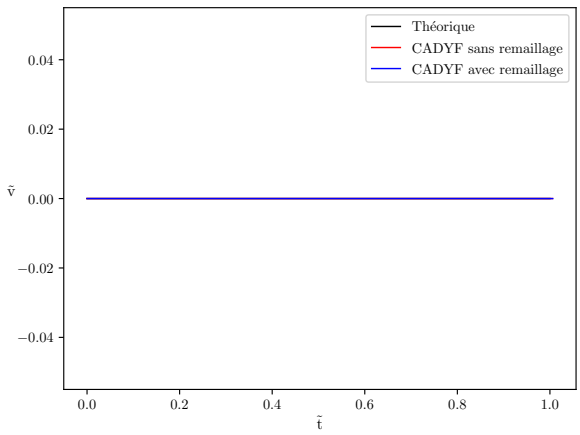


(d) $\widetilde{y} = 0.75$

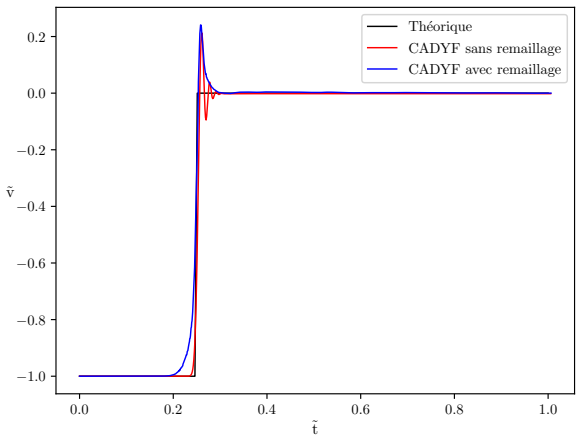


(e) $\widetilde{y} = 1.0$

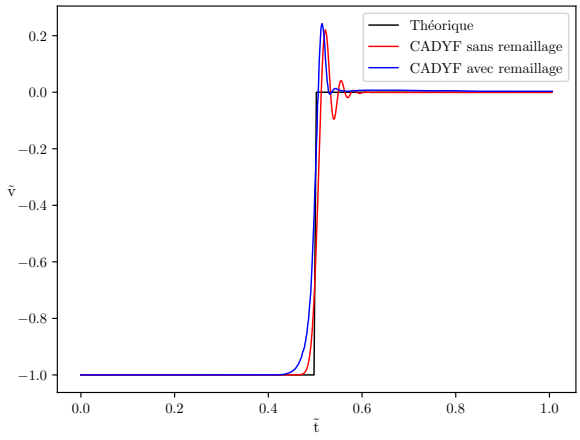
Figure 6.5 Tracé de la pression en fonction du temps pour différentes positions dans le domaine



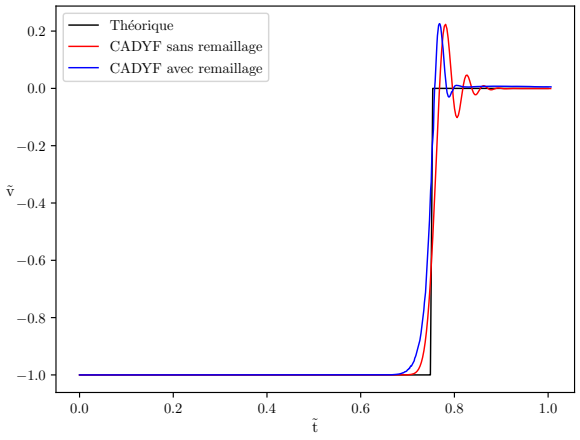
(a) $\widetilde{y} = 0.0$



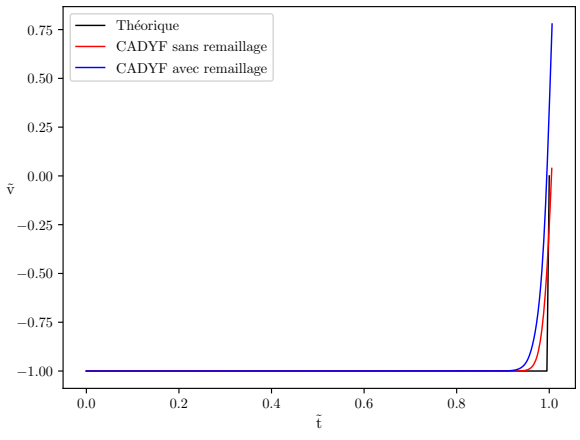
(b) $\widetilde{y} = 0.25$



(c) $\widetilde{y} = 0.5$



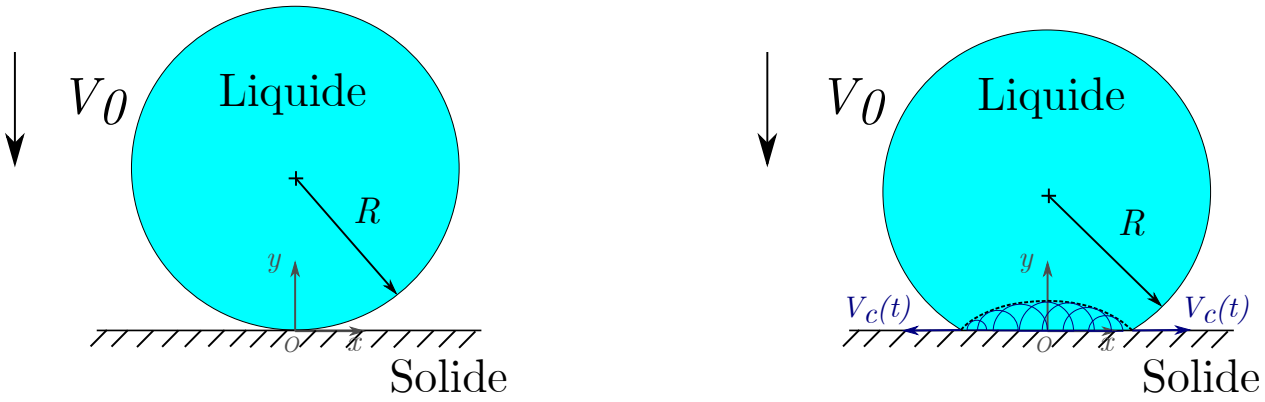
(d) $\widetilde{y} = 0.75$



(e) $\widetilde{y} = 1.0$

Figure 6.6 Tracé de la vitesse en fonction du temps pour différentes positions dans le domaine

contact va ensuite se dédoubler en deux points de contact partant chacun dans une direction opposée à une vitesse $v_c(0) = \infty$ qui va décroître. À chaque nouveau point en contact avec le sol, une onde de pression est émise de valeur $p(O, t = 0\ s) = \rho c V_0$. Une région de forte pression va se former entre ces deux points de contact, voir figure 6.7.



(a) Au temps t_0 (b) Au temps t_1

Figure 6.7 Impact de goutte ou d'un cylindre d'eau lorsque le liquide est considéré compressible

Dans cette phase où la vitesse de déplacement du point de contact est supérieure à la vitesse du son, le déplacement de ce point $r_c(t)$ et sa vitesse $v_c(t)$ sont donnés par les modèles géométriques suivants :

$$r_c(t) = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{V_0 t}{R}\right)^2} \tag{6.15}$$

$$v_c(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{V_0 t}{R}\right)^2} - 1}} \tag{6.16}$$

La propagation de cette onde de pression s'arrête lorsque la vitesse du point de contact devient égale à la vitesse du son dans l'eau :

$$v_c(t_{critique}) = c_{eau} \tag{6.17}$$

Après calcul, cela correspond à la distance parcourue critique suivante :

$$r_{critique} = R\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{V_0}{c_{eau}}\right)^2}} \tag{6.18}$$

Et le temps critique suivant :

$$t_{critique} = \frac{R}{V_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_0}{c_{eau}}\right)^2}}\right) \tag{6.19}$$

Afin d'avoir une meilleure compréhension des graphiques qui vont suivre et pour pouvoir comparer les simulations à la théorie, on définit les nombres adimensionnels suivant :

$$\widetilde{t} = \frac{t}{t_{critique}} \quad \widetilde{v} = \frac{v_c}{c_{eau}}$$
$$\widetilde{p} = \frac{p}{\rho c_{eau} V_0} \quad \widetilde{x} = \frac{x}{r_{critique}} \quad \widetilde{y} = \frac{y}{r_{critique}}$$

Géométrie du front d'onde

On définit τ comme étant le temps où le point de contact est à la position $r_c(\tau)$, et t le temps auquel on observe le front d'onde tel que $t > \tau$. Le centre de l'onde de pression formé au point de contact est donné par $x_0 = r_c(\tau)$ et $y_0 = 0$. L'équation de l'ondelette est donnée par :

$$F_1(t,\tau) = (x(t,\tau) - x_0)^2 + (y(t,\tau) - y_0)^2 - c_{eau}^2(t-\tau)^2 = 0 \tag{6.20}$$

Cette équation de l'ondelette reste constant peut importe la valeur de τ :

$$\frac{\partial F_1(t,\tau)}{\partial \tau} = 0 \tag{6.21}$$

Soit x_s et y_s les coordonnées représentant le tracé du front d'onde. x_s et y_s sont solutions de (6.20) et (6.21). Le tracé se faisant également pour τ constant, on a :

$$\frac{\partial x_s(t,\tau)}{\partial \tau} = 0 \quad \frac{\partial y_s(t,\tau)}{\partial \tau} = 0$$

De l'équation (6.20) et (6.21) on obtient l'équation paramétrique du front d'onde résultante des ondelettes représentée par :

$$\begin{cases} x_s(t,\tau) = r_c(\tau) + \dfrac{c_{eau}^2(t-\tau)}{v_c(\tau)} \\ y_s(t,\tau) = \sqrt{c_{eau}^2(t-\tau)^2 - (x(t,\tau) - r_c(\tau))^2} \end{cases} \quad t < t_{critique} \tag{6.22}$$

En adimensionnalisant l'équation paramétrique (6.22) par $r_{critique}$ on obtient le tracé du front d'onde de la figure 6.8.

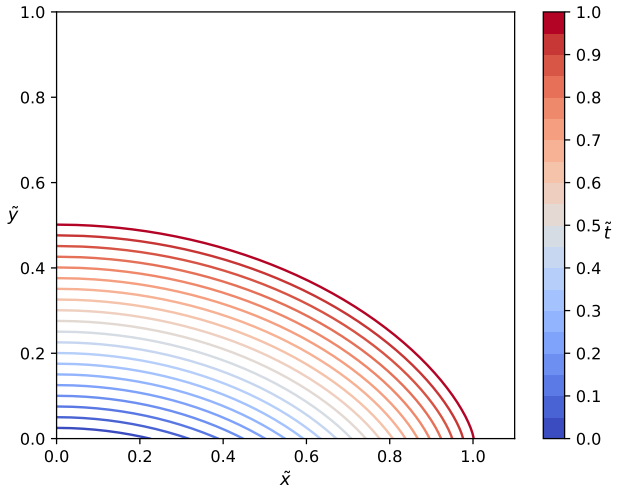


Figure 6.8 Tracé du front adimensionnel pour différents temps avant $t_{critique}$

Lorsque le point de contact aura une vitesse inférieure à la vitesse du son, l'onde de pression dépassera le point de contact et va monter le long de l'interface de la goutte. Un jet va se former le long du mur, voir figure 6.9.

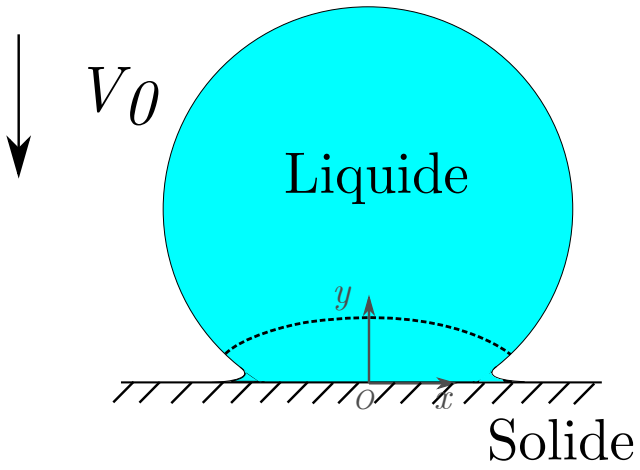


Figure 6.9 Formation du jet à t supérieur à $t_{critique}$

Pression sur la paroi

Le rayon de courbure au temps t du point qui était le point de contact au temps τ est donné par :

$$R_c(t,\tau) = c_{eau}(t-\tau) + R_c(\tau,\tau) \tag{6.23}$$

Où :

$$R_c(\tau,\tau) = \frac{[(Dx_s)^2 + (Dy_s)^2]^{\frac{3}{2}}}{|Dx_s D^2 y_s - Dy_s D^2 x_s|} \tag{6.24}$$

Avec $D = \dfrac{\partial}{\partial \tau}$, il peut être démontré que pour une section d'aire infinitésimale notée δA la quantité :

$$\frac{p^2}{\rho c_{eau}} \delta A \tag{6.25}$$

est conservée. La pression le long de la paroi est donnée par :

$$p_s(t,\tau) = \left(\frac{R_c(\tau,\tau)}{R_c(t,\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} p_s(\tau,\tau) \tag{6.26}$$

Avec $p_s(\tau,\tau)$ la pression au point de contact. Le détail pour obtenir cette pression, est donné par M.B. Lesser [25] et sa valeur pour $t < t_{critique}$ est donnée par :

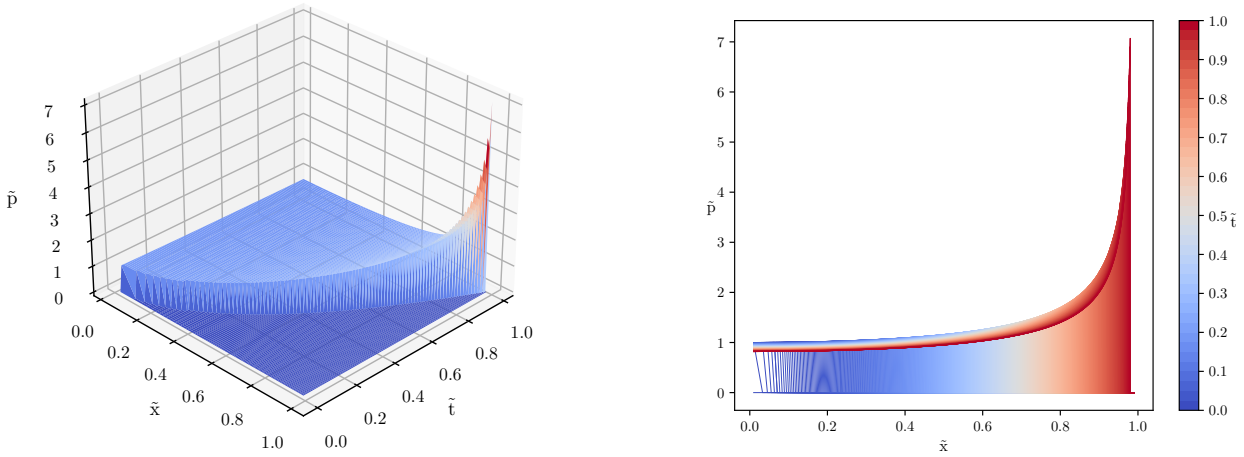
$$p_s(\tau,\tau) = \frac{\sqrt{\dfrac{t_{critique}}{\tau}}}{\sqrt{\dfrac{t_{critique}}{\tau} - 1}} \rho c V_0 \tag{6.27}$$

La figure 6.10 présente un tracé de cette pression le long de la paroi pour $t < t_{critique}$. En théorie on aurait $p_s(t_{critique}, t_{critique}) = \infty$. Pour que les graphiques soient lisibles, nous avons tracé la pression que pour des temps inférieurs à $t_{critique}$.

6.3 Cas simulés

Dans un premier temps, l'objectif va être de vérifier que l'onde de pression est observable et peut être récupérée pour être comparée avec les prédictions de Lesser durant la première phase où $t < t_{critique}$. Trois simulations basées sur le modèle de Lesser ont été effectuées :

- Description du modèle avec de l'eau uniquement, les effets de l'air sur la solution ne sont pas pris en compte. On impose une vitesse initiale dans tout le fluide. La vitesse du fluide et la vitesse aux noeuds sur la frontière fluide.
- Description du modèle avec l'eau et l'air. Une vitesse initiale dans tout le domaine



(a) Graphique 3D

(b) Graphique 2D

Figure 6.10 Vue en perspective de la pression théorique le long de la frontière de la goutte en fonction du temps inférieur au temps critique

eau est imposée et une vitesse constante sur l'interface le long de la simulation.

— Description du modèle avec l'eau et l'air, seule une vitesse initiale dans le domaine eau est imposée.

Description du problème : Ce problème est proposé par GTT dans le but d'étudier un impact de vague de type ELP1. On considère un cylindre d'eau d'un rayon $R_0 = 0.5$ m ayant une vitesse initiale $V_0 = 6.5$ m/s. Dans un premier temps nous considérons uniquement l'eau, mais pour les prochaines simulations où nous aurons besoin de l'air, nous allons donner les propriétés physiques et thermodynamiques de référence pour ces deux fluides, voir tableau 6.2.

Tableau 6.2 Propriétés physiques et thermodynamiques de l'eau et de l'air pour notre simulation

Variables	Description	Liquide (eau)	Gaz (air)
μ_0	Viscosité dynamique (Pa.s)	1.1080×10^{-3}	1.7965×10^{-5}
$\rho_{ref,0}$	Masse volumique de référence (kg/m^3)	998	1.2
k_0	Conductivité thermique (W/(m· K))	0.6	0.025
$T_{ref,0}$	Température de référence (K)	293	
$c_{p,0}$	Capacité thermique (J/kg/K)	4181.9	1006.1
$p_{ref,0}$	Pression de référence (Pa)	7.78472×10^8	1.01325×10^5
$\sigma_{eau/air,0}$	Coefficient de tension superficielle (N/m)	0.072	

On a :

$$c = \sqrt{\gamma R T_{ref}}$$

On souhaite exprimer c en fonction des propriétés qui peuvent être uniquement rentrées sur CADYF, soit celle du tableau 6.2. On a R et γ pouvant être reformulés comme ci-dessous :

$$R = \frac{p_{ref}}{\rho_{ref} T_{ref}} \quad et \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_p}{c_p - \frac{P_{ref}}{\rho_{ref} T_{ref}}}$$

On peut exprimer la célérité du son avec ces propriétés :

$$c = \sqrt{\frac{T_{ref} c_p P_{ref}}{\rho_{ref} c_p T_{ref} - P_{ref}}}$$

Les caractéristiques du problème données ci-dessus nous permettent de calculer le $t_{critique}$ à l'aide de l'équation (6.19) :

$$t_{critique,0} = 7.57 \times 10^{-7} \text{ s}$$

Dans CADYF, le pas de temps minimum que l'on peut utiliser vaut $h_{min} = 10^{-8}$ s ce qui est bien trop "important" pour réaliser une simulation où les vitesses sont aussi élevées sur une courte distance et où des zones de fortes pressions doivent être observées. Pour palier à ce problème, on choisit de redimensionner notre simulation afin d'avoir un nouveau $t_{critique,1} > 1$ s qui permettrait de réaliser des simulations avec un pas de temps convenable. Par expérience un pas de temps $h_{min} < 10^{-5}$ s pourrait créer des singularités dans la matrice de résolution ce qu'on veut à tout prix éviter. On veut :

$$\frac{R_1}{V_1}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_1}{c_{eau,1}}\right)^2}}\right) > 1 \; s$$

L'indice 1 est utilisé pour les nouvelles valeurs des variables.

Dans la littérature, la valeur du nombre de Reynolds, du Mach et du Weber a son importance lors d'un impact de goutte. On va chercher à conserver leur valeur. De même pour le nombre de Prandlt qui même si il n'aura pas beaucoup d'influence dans les simulations, sa conservation ne coûte rien et permet une meilleure concordance de l'ancien et du nouveau modèle. On caractérise notre problème avec les 4 nombres adimensionnels suivants :

$$\text{Pr} = \frac{\mu_0 c_{p,0}}{k_0} \quad \text{Re} = \frac{\rho_{ref,0} V_0 R_0}{\mu_0} \quad \text{Ma} = \frac{V_0}{c_{eau,0}} \quad \text{We} = \frac{\rho_{ref,0} V_0^2 R_0}{\sigma_{eau/air_0}}$$

Les nouvelles propriétés permettant de les conserver sont données dans le tableau 6.3 et 6.4.

Les valeurs du temps critique, de la vitesse du son dans l'eau, de la distance critique et de la pression acoustique à partir du tableau 6.2 sont données ci-dessous :

$$t_{critique,0} = 7.57 \times 10^{-7}\,\text{s} \quad c_{eau,0} = 1464\,\text{m/s}$$

$$r_{critique,0} = 2.22 \times 10^{-3}\,\text{m} \quad p_0(C,t) = 9.5 \times 10^{6}\,\text{Pa}$$

Avec les nouvelles propriétés ces valeurs deviennent :

$$t_{critique,1} = 1.26\,\text{s} \quad c_{eau,1} = 8.8 \times 10^{-4}\,\text{m/s}$$

$$r_{critique,1} = 2.22 \times 10^{-3}\,\text{m} \quad p_1(C,t) = 3.45 \times 10^{-6}\,\text{Pa}$$

6.3.1 Cylindre d'eau seul

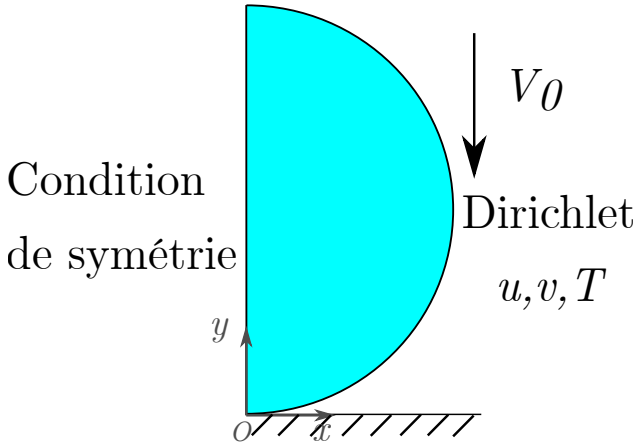


Figure 6.11 Schéma avec un cas d'impact modélisant juste le cylindre d'eau

Tableau 6.3 Caractéristiques du problème pour notre nouvelle simulation

Variables	Description	Valeur	unité
R_1	Rayon de la goutte	0.5	m
V_1	Vitesse initiale de la goutte	3.92×10^{-6}	m/s

Tableau 6.4 Propriétés physiques et thermodynamiques de l'eau et de l'air pour notre nouvelle simulation

Variables	Description	Liquide (eau)	Gaz (air)
μ_1	Viscosité dynamique (Pa.s)	6.6794×10^{-10}	1.1080×10^{-11}
$\rho_{ref,1}$	Masse volumique de référence (kg/m^3)	998	1.2
k_1	Conductivité thermique (W/(m· K))	3.62×10^{-7}	1.51×10^{-8}
$T_{ref,1}$	Température de référence (K)	293	
$c_{p,1}$	Capacité thermique (J/kg/K)	4181.9	1006.1
$p_{ref,1}$	Pression de référence (Pa)	7.78472×10^{-4}	1.01325×10^{-7}
$\sigma_{eau/air,1}$	Coefficient de tension superficielle (N/m)	2.62×10^{-14}	

On modélise ce cylindre d'eau tel que sur la figure 6.11. Pour faciliter les calculs nous ne modéliserons qu'une partie de la goutte en utilisant les conditions de symétrie. À l'interface de la goutte on appliquera des conditions de Dirichlet sur u, v et T. Tout le long de la simulation on aura :

$$\begin{aligned} &u = 0\,m/s \quad \text{pour } x, y \in \Omega_{eau} \\ &v(x, y, t) = -V_1 \quad \text{pour } x, y \in \Omega_{eau} \quad \text{avec } x \neq 0 \\ &v(x, y, t) = 0\,m/s \quad \text{pour } x, y \in \Omega_{eau} \quad \text{avec } y = 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

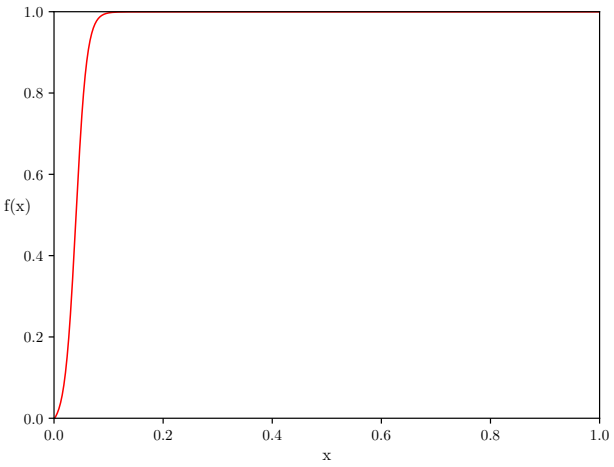


Figure 6.12 Tracé de la fonction f donné par l'équation (6.30)

La taille des éléments est différente en fonction de l'où on se situe dans le domaine. Pour avoir des temps de simulations peu coûteux tout en ayant convergence de la solution on choisit pour la première simulation d'avoir les éléments les plus petits à l'intérieur d'un cercle de

rayon $R_{maille,1} = 1.5r_{critique}$ et de grossir le maillage au fur et à mesure que l'on s'écarte de cette zone. Le rayon est choisi de sorte qu'on puisse capturer au mieux les ondes de pression. Pour la deuxième simulation où ce qui nous importe le plus est la pression maximale sur la frontière du bas, les éléments les plus petits seront situés sur la frontière du bas sur une distance $R_{maille,2} = 2r_{critique}$. Les figures 6.13 et 6.14 donnent une représentation du maillage utilisée respectivement pour la simulation 1 et 2. Soit δ_{min} et δ_{max} respectivement la plus petite et la plus grande taille de maille donnée par l'utilisateur. Soit $d(n)$ la distance entre le noeud n et un segment OP sur la frontière du bas et d_{max} la distance maximum entre le noeud le plus éloigné et O. La taille de maille définie au noeud $\delta(n)$ est donnée par la fonction :

$$\delta(n) = \delta_{min} + (\delta_{max} - \delta_{min}))f\left(\frac{d(n)}{d_{max}}\right) \tag{6.29}$$

Avec la fonction f définie par :

$$f(x) = 0.51\left(0.96 + tanh\left(50x - 2\right)\right) \tag{6.30}$$

La figure 6.12 en donne une représentation graphique pour $0 \leq x \leq 1$. La simulation est réalisée avec 4×10^6 éléments.

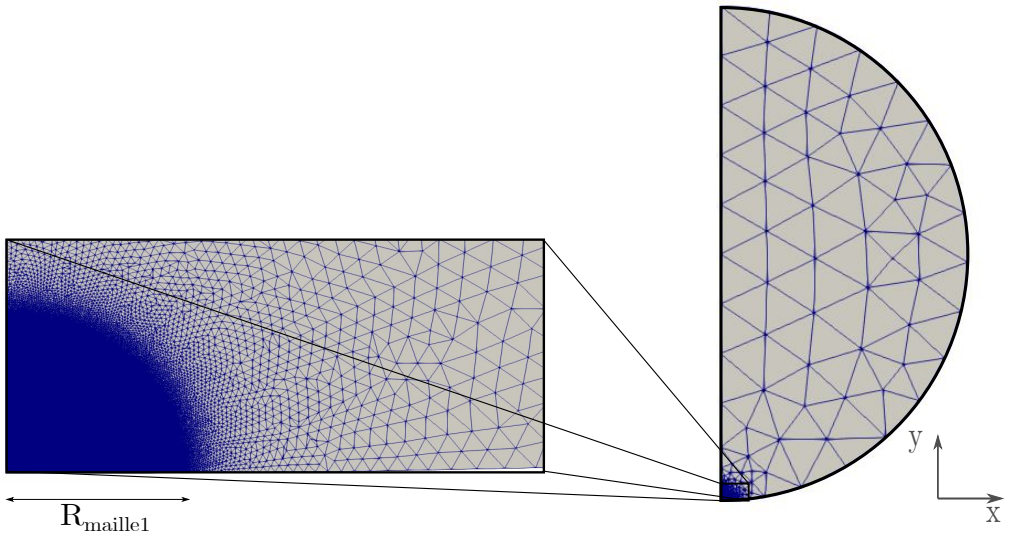


Figure 6.13 Maillage pour la première simulation

Aucune adaptation spatiale ne sera réalisée, seule l'adaptation en temps est utilisée pour réduire les temps de calculs. Nous laissons tourner la simulation jusqu'au temps critique pour la première simulation étant donné que les résultats après ce temps n'ont plus de sens

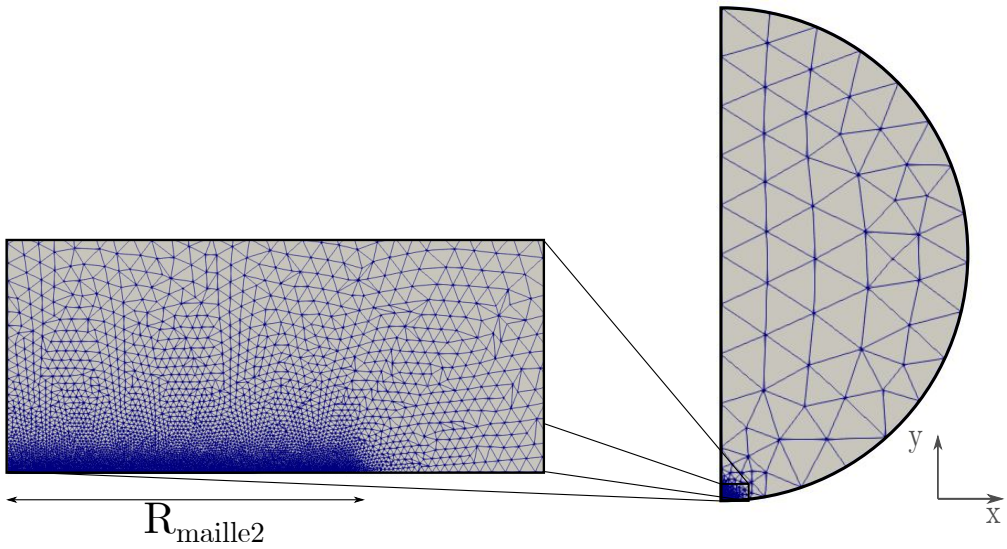


Figure 6.14 Maillage pour la deuxième simulation

physique.

Discussions des résultats obtenus

Dans cette section nous allons comparer les résultats obtenus avec la théorie. Le déplacement du point de contact est donné géométriquement par l'équation (6.15). Le déplacement du point de contact pour la première simulation est en accord avec la théorie ce qui est cohérent avec les conditions appliquées sur la frontière. On observe néanmoins un dévoiement de la simulation sur la figure 6.15 pour $0.25 \leq \widetilde{t} \leq 0.45$ pouvant être expliqué par la définition du cercle avec des segments P1 qui nous donne cette portion linéaire. Des segments plus fins permettraient d'obtenir les points collés sur la géométrie.

La figure 6.16 donne une vue en perspective de la pression le long de la frontière sur une distance $2r_{critique}$ pour chaque pas de temps calculé. La première simulation étant arrêtée à $t_{critique}$ et la 2ème au delà de $2t_{critique}$ permettant de connaître la valeur de pression maximum pour cette simulation.

La figure 6.16 donne une vue en 2D où l'évolution du pas de temps est représentée par une variation des couleurs. Les deux premiers graphiques sont représentés avec toutes les données de pression et de position pour chaque pas de temps calculé, et les deux derniers graphiques juste pour quelques pas de temps afin d'observer au mieux les potentiels dépassement par rapport à la théorie. La courbe verte sur la figure 6.17 représente la pression maximum au point triple pour différentes positions. Lorsque le point triple est à $\widetilde{x} = 1$ la pression est

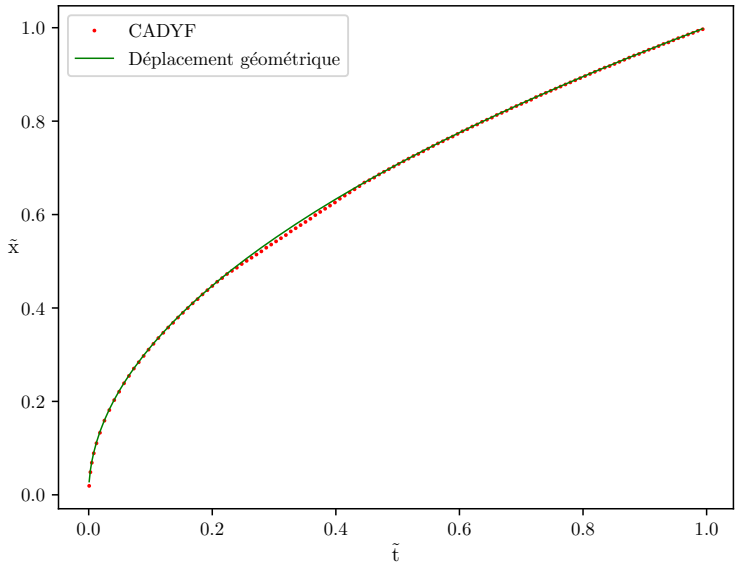


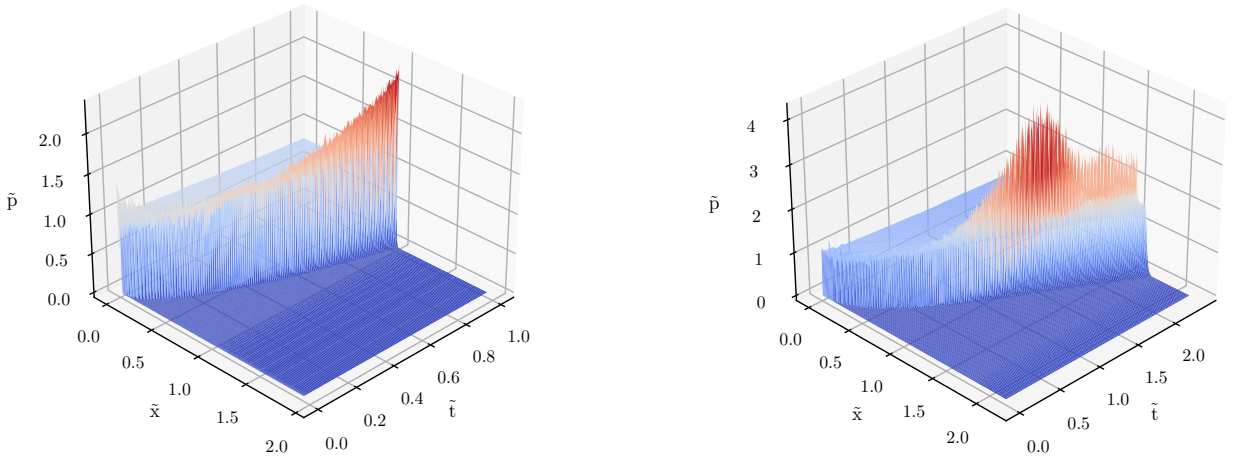
Figure 6.15 Comparaison du déplacement géométrique avec les résultats obtenus de la première simulation sur CADYF

infinie dans la théorie linéaire de Lesser. Les courbes de la pression pour les premiers pas de temps sont fidèles à la théorie de Lesser, les graphiques 6.17(c) et 6.17(d) nous montrent un léger dépassement et des oscillations par rapport à la courbe de Lesser dû aux discontinuités de pression autour du point triple. Ces phénomènes d'oscillations tendent à s'atténuer au fur et à mesure que l'on se rapproche du temps critique. Pour les deux simulations on obtient :

$$\widetilde{p}(1) = 2.3 \quad \widetilde{p}_{max}(\widetilde{t}_{max}) = 4.265 \quad \text{avec} \quad \widetilde{t}_{max} = 1.42$$

Cette différence observée peut s'expliquer par le fait que des facteurs comme la viscosité sont pris en compte dans notre simulation et non dans la théorie. Également la théorie nous dit que pour chaque pas de temps la pression maximale doit être observée au point de contact, ce qui n'est pas le cas pour les premiers pas de temps de nos deux simulations. Le point de contact est en avance sur la pression maximale et c'est après avoir dépassé le temps critique que la pression maximale est au point critique comme il est montré sur la figure 6.17(b). Sur cette même figure on voit également pour les derniers pas de temps, 2 pics de pressions. Le premier est causé par l'impact au point de contact et le deuxième correspond à l'onde de pression avançant à la vitesse du son et qui par conséquent a dépassé le point triple.

Les graphiques sur la figure 6.18 nous donnent le front d'onde de la pression observée dans la première simulation qui est comparée avec le tracé de l'équation (6.22). La simulation colle quasiment à la théorie. Un léger décalage est observé à partir de $\widetilde{t} = 0.5$. Le front d'onde se



(a) Jusqu'à $t_{critique}$

(b) Au delà $2t_{critique}$

Figure 6.16 Vue en perspective de la pression le long de la frontière de la goutte en fonction du temps

diffuse au fur et à mesure que la simulation avance.

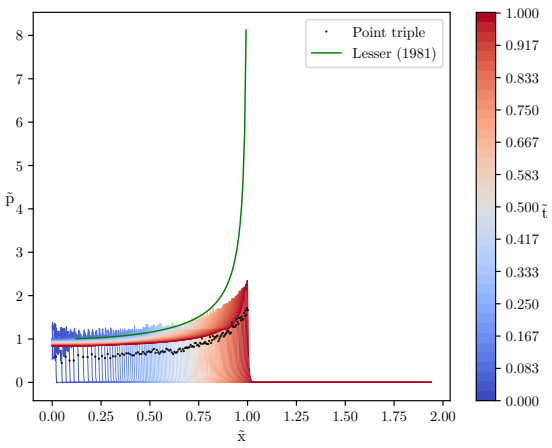
Cette simulation a été réalisée sans interpolation étant donné qu'ici le domaine se déforme et que l'interpolation est mal gérée dans ce cas là. Ce modèle est assez cohérent pour $t < t_{critique}$, néanmoins il ne devient plus valide au delà de ce temps. Pour potentiellement observer le jet se former, il est nécessaire de faire un cas où le mouvement de l'interface est laissé libre. Pour ce faire, deux autres cas seront effectués.

6.3.2 Cylindre d'eau entouré d'air avec la vitesse imposée sur la frontière et une vitesse initiale dans le liquide

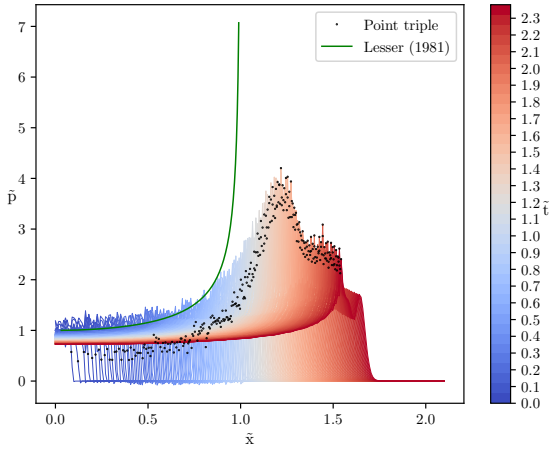
Cette partie a pour objectif de vérifier la possibilité de déplacer l'interface comme indiquée dans la section 4.6 permettant la modélisation après impact d'un cylindre d'eau entouré d'air.

Définition du cas à 1% de la distance critique

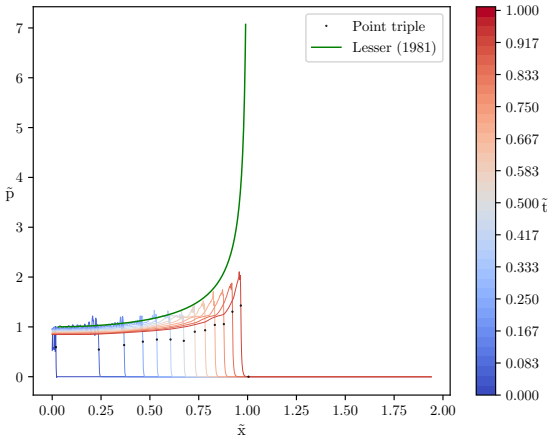
Pour ce cas, l'eau et l'air seront présent. Chaque domaine sera maillé. Dans le cas de Lesser, les simulations commencent avec un point de contact du cylindre d'eau sur la paroi du bas. CADYF n'étant pas capable actuellement de gérer le dédoublement des noeuds, on doit commencer avec au moins deux noeuds en contact sur la paroi du bas. Dans notre cas, il sera préférable de commencer avec plus de noeuds. Pour les premiers pas de temps, le point de contact se déplace à des vitesses proches de l'infini, les déformations seront réparties sur



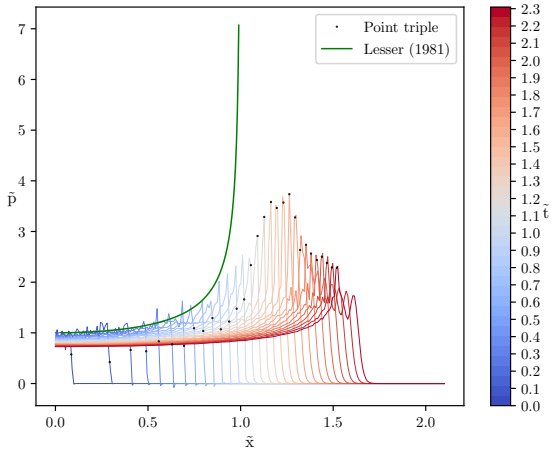
(a) Jusqu'à $t_{critique}$



(b) Au delà $2t_{critique}$

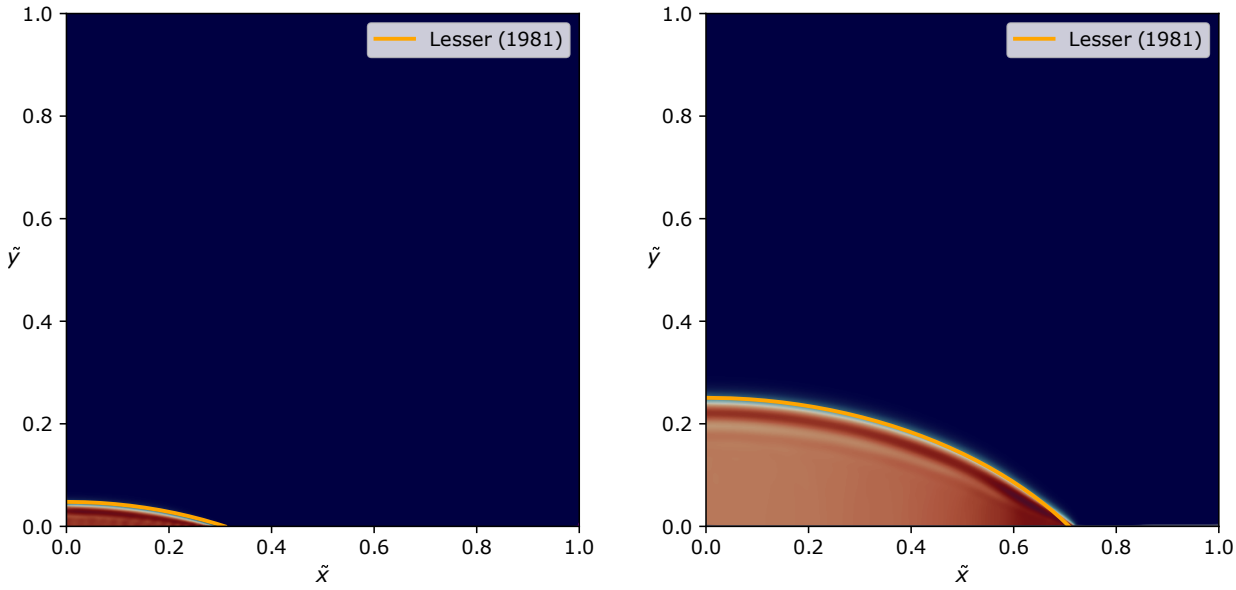


(c) Jusqu'à $t_{critique}$ avec quelques pas de temps affichés



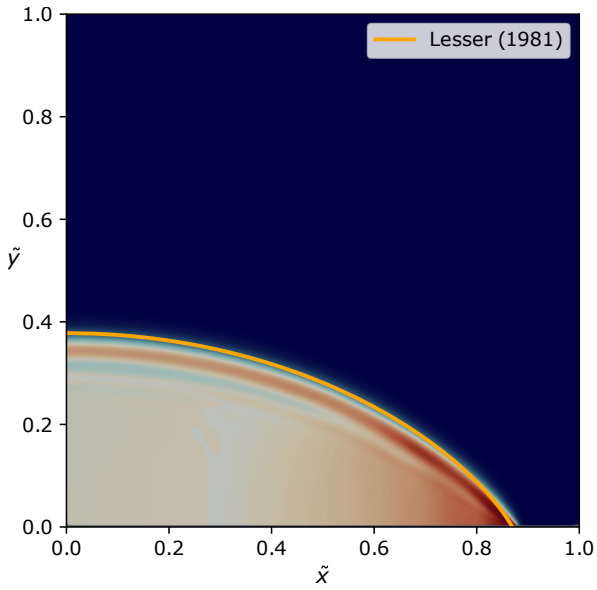
(d) Au delà de $t_{critique}$ avec quelques pas de temps affichés

Figure 6.17 Vue en 2D de la pression le long de la frontière de la goutte en fonction du temps

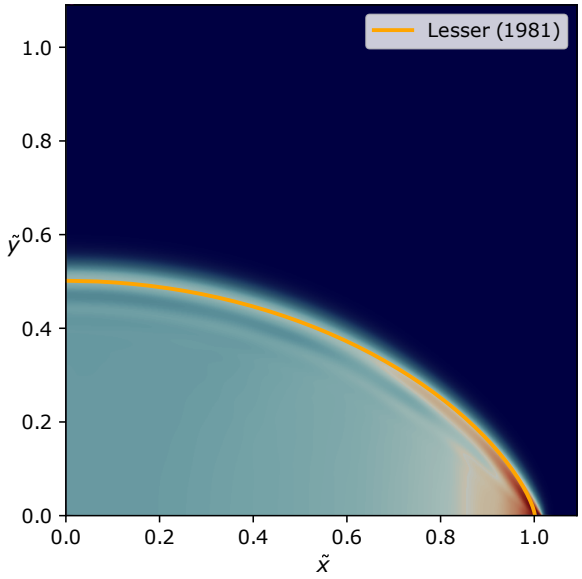


(a) $\widetilde{t} = 0.1$

(b) $\widetilde{t} = 0.5$



(c) $\widetilde{t} = 0.75$



(d) $\widetilde{t} = 1.0$

Figure 6.18 Tracé du front d'onde de la pression pour différents temps comparé à la solution théorique attendue

plusieurs mailles en utilisant le caractère pseudo-solide du maillage. Cela évitera une trop forte déformation de l'élément rattaché au point triple.

Au niveau du point de contact les éléments 2D doivent être d'une épaisseur tellement infime qu'il est impossible de mailler les éléments de gaz en dessous du cylindre d'eau. La stratégie pour remédier à ce problème est de surélever la zone d'impact ce qui aura pour effet d'augmenter l'épaisseur d'air présent à droite du point de contact. Toutes ces solutions nous mènent à une définition du domaine comme indiquée sur la figure 6.19.

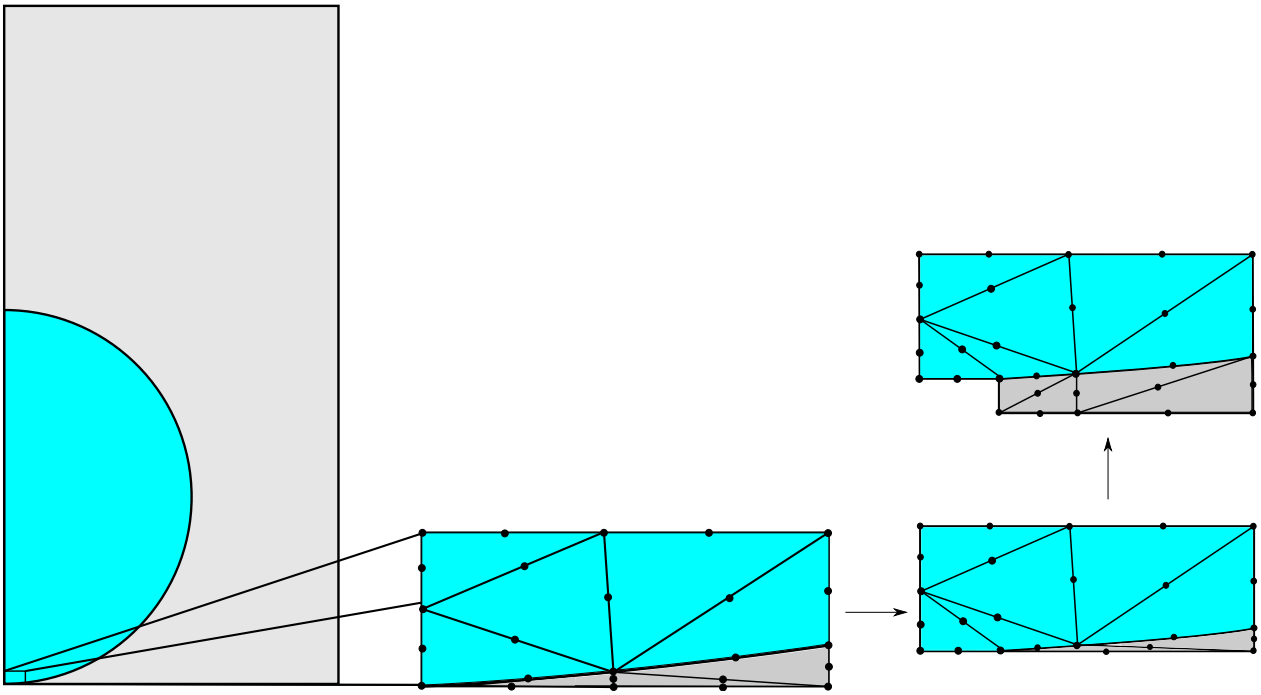


Figure 6.19 Évolution du maillage permettant de réaliser les nouvelles simulations

Les propriétés des deux fluides en présence sont celles définies dans le tableau 6.4. Notre simulation devant commencer après impact, on cherche cependant à obtenir des résultats similaires lorsque seulement un point est en contact avec la parois du bas. On définit une distance et un temps de démarrage respectivement r_{start} et t_{start}. En choisissant $r_{start} = 1\% r_{critique}$ on aura :

$$\frac{r_{start}}{r_{critique}} = \frac{\sqrt{1-\left(1-\dfrac{V_0 t_{start}}{R}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(1-\dfrac{V_0 t_{critique}}{R}\right)^2}} \approx \frac{\sqrt{\dfrac{2V_0 t_{start}}{R}}}{\sqrt{\dfrac{2V_0 t_{critique}}{R}}} = \sqrt{\frac{t_{start}}{t_{critique}}} = 1\% \qquad (6.31)$$

Soit $t_{start} = 0.01\% t_{critique}$. On peut considérer que l'on est assez proche du cas avec un point

de contact.

Les conditions appliquées sur le domaine sont données sur la figure 6.20. La condition de non pénétration est définie en posant une condition de Dirichlet nulle dans la direction normale à la paroi *i.e.* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ et une condition de Neumann nulle dans la direction tangentielle à la paroi *i.e.* $(-p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau})\cdot = 0$. Une condition sur la vitesse du fluide est imposée sur l'interface le long de la simulation afin de vérifier le bon déplacement du point de contact. Aucune condition de déplacement sur les noeuds n'est imposée. Dans le domaine liquide les conditions imposées sont les mêmes que l'équation (6.28).

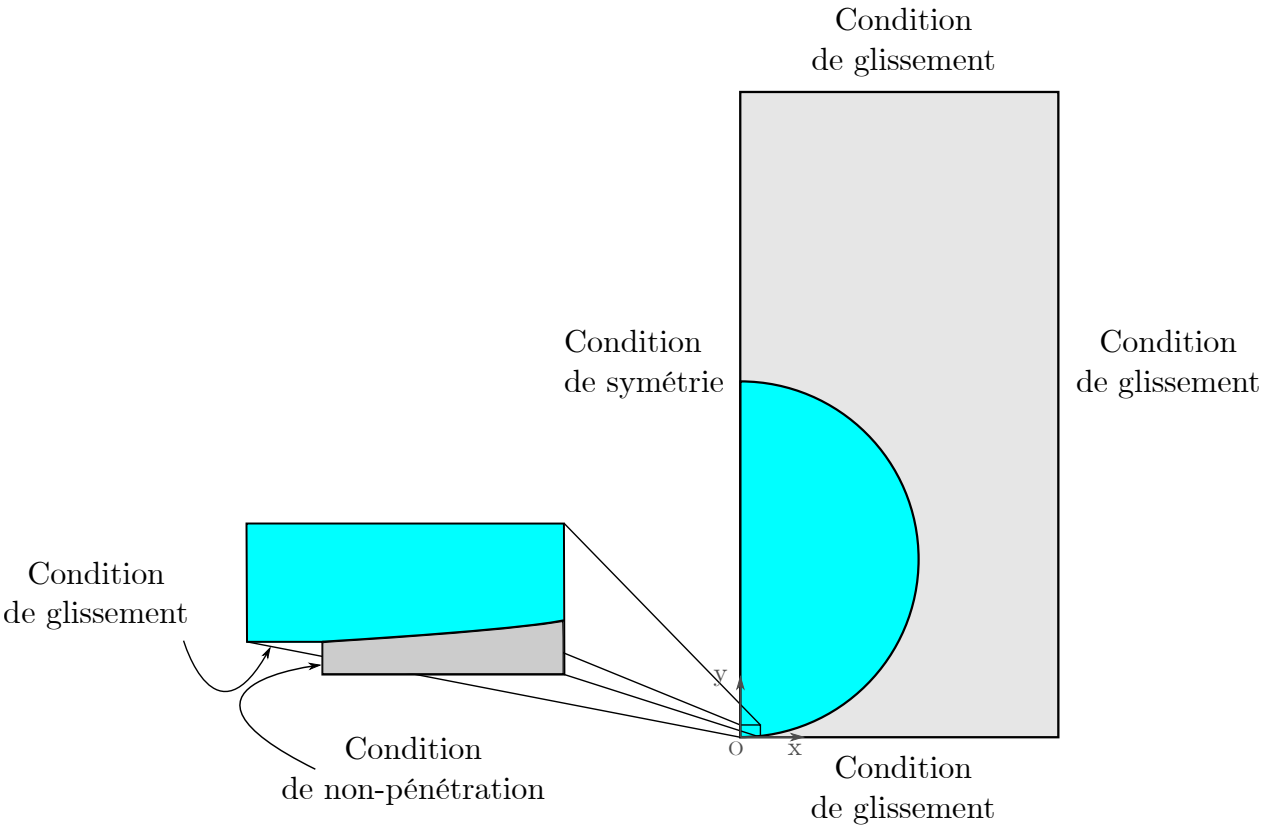
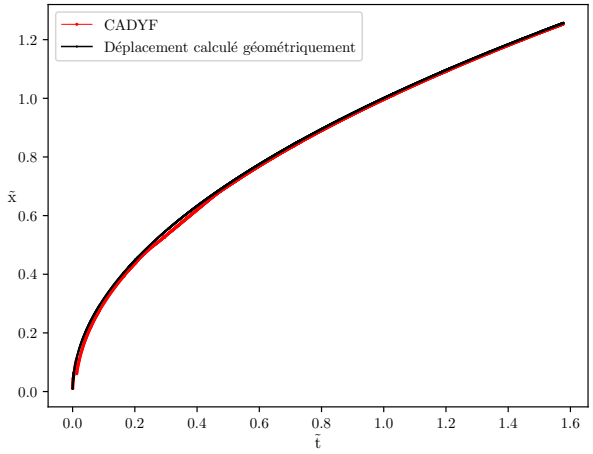


Figure 6.20 Conditions limites appliquées sur le domaine

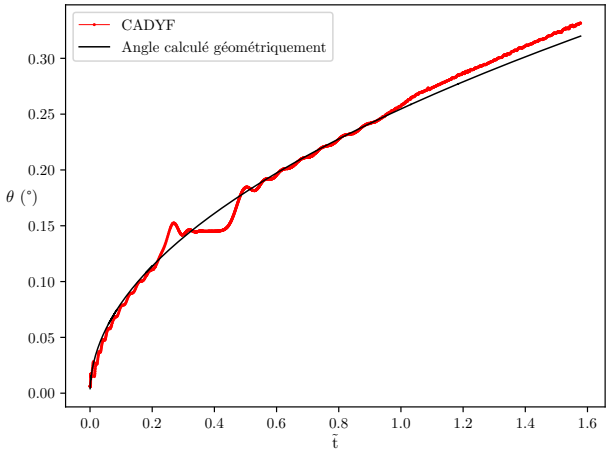
La simulation est réalisée avec la même disposition de maille que dans la figure 6.14 et avec 1.4×10^4 éléments pour le maillage initial. Des étapes de remaillages seront réalisées lorsque la norme $H1$ sur l'erreur de la pression ou sur la déformation du maillage dépasse les 5%. On choisit un facteur de réduction de l'erreur de 0.7. La simulation sera arrêtée au delà de $t = 1.5t_{critique}$. Plus de 2100 remaillages ont été réalisés pour atteindre ce temps. Le maillage variant aux alentours de 3.3×10^4 éléments.

Discussion des résultats

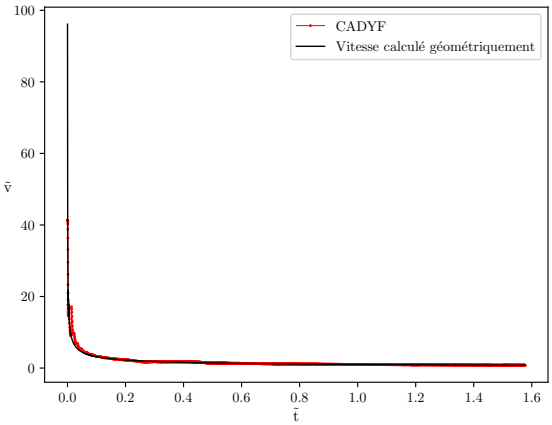
Les résultats pour le déplacement, la vitesse et l'angle du point de contact observés sur la figure 6.21 concordent avec les formules (6.15) et (6.16) ce qui nous conforte dans le choix d'un déplacement du point triple en fonction de la vitesse verticale du fluide au noeud voisin. On observe de légères variations pour l'angle qui sont vite corrigées. Un décalage par rapport à la courbe théorique pour l'angle est observé après $\widetilde{t} = 1$ ce qui n'est pas important pour ce cas où la vitesse du fluide est imposée sur la frontière le long de la simulation.



(a) Déplacement du point de contact en fonction du temps



(b) Angle au point de contact en fonction du temps



(c) Vitesse de déplacement du point de contact en fonction du temps

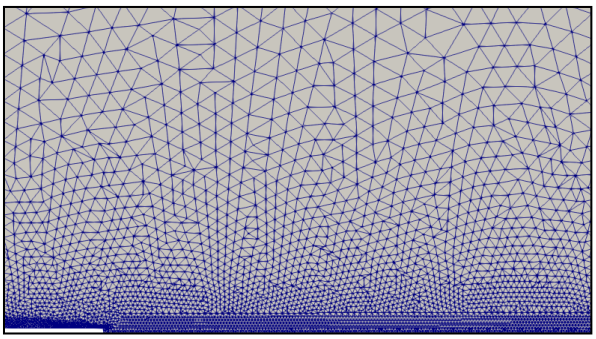
Figure 6.21 Tracés de différentes variables en fonction du temps adimensionnel pour le cas de simulation diphasique avec une vitesse imposée sur l'interface

Le long de la simulation on observe bien un raffinement autour du front d'onde ce qui valide le raffinement sur l'erreur de pression pour un cas 2D, voir figure 6.22. Au rapprochement du

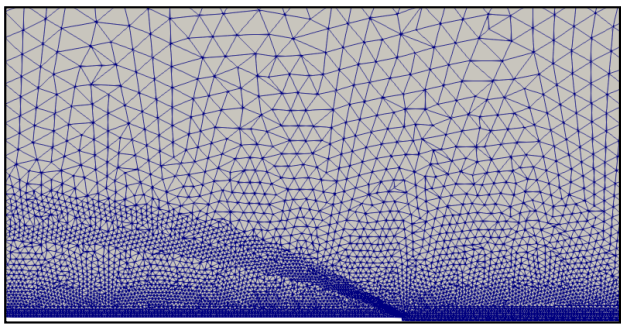
temps critique le maillage devient néanmoins plus grossier du fait de l'onde de pression qui se diffuse. Malgré cela, les résultats de front d'onde peuvent être comparés avec les résultats de Lesser qui concordent pour $\widetilde{t} < 0.5$ mais dont l'onde de pression devient trop diffusée au delà de cette valeur. Les résultats de la pression sur la frontière et sur l'interface sont présentés sur la figure 6.24. Sur les premiers temps on observe de nombreux dépassement de la valeur maximum prédit par M. Lesser. Les résultats nous donnent :

$$\widetilde{p}(1) = 6.7 \quad \widetilde{p}_{max}(\widetilde{t}_{max}) = 8.18 \quad \text{avec} \quad \widetilde{t}_{max} = 1.02$$

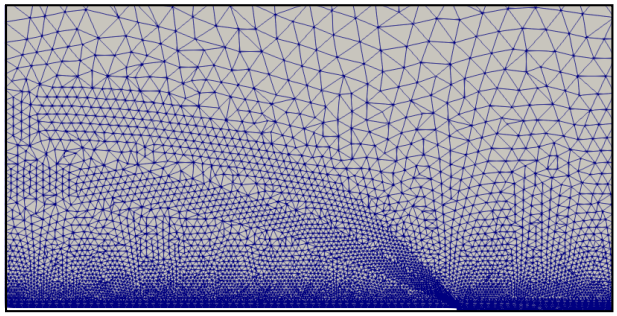
La valeur où le maximum est atteint est nettement plus proche que dans le cas d'un cylindre d'eau uniquement et la valeur de $\widetilde{p}_{max}$ est bien plus élevée. Les valeurs maximums de pression pour les premiers pas de temps sont également atteintes avant le point de contact. Elles sont atteintes sur le point de contact au moment où l'on se rapproche du point critique.



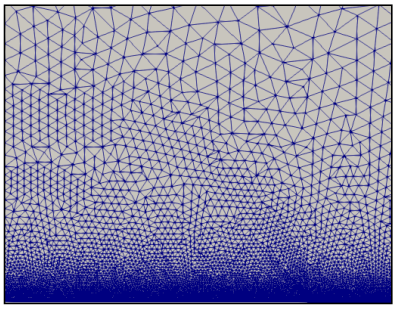
(a) $\widetilde{t} = 0.01$



(b) $\widetilde{t} = 0.25$

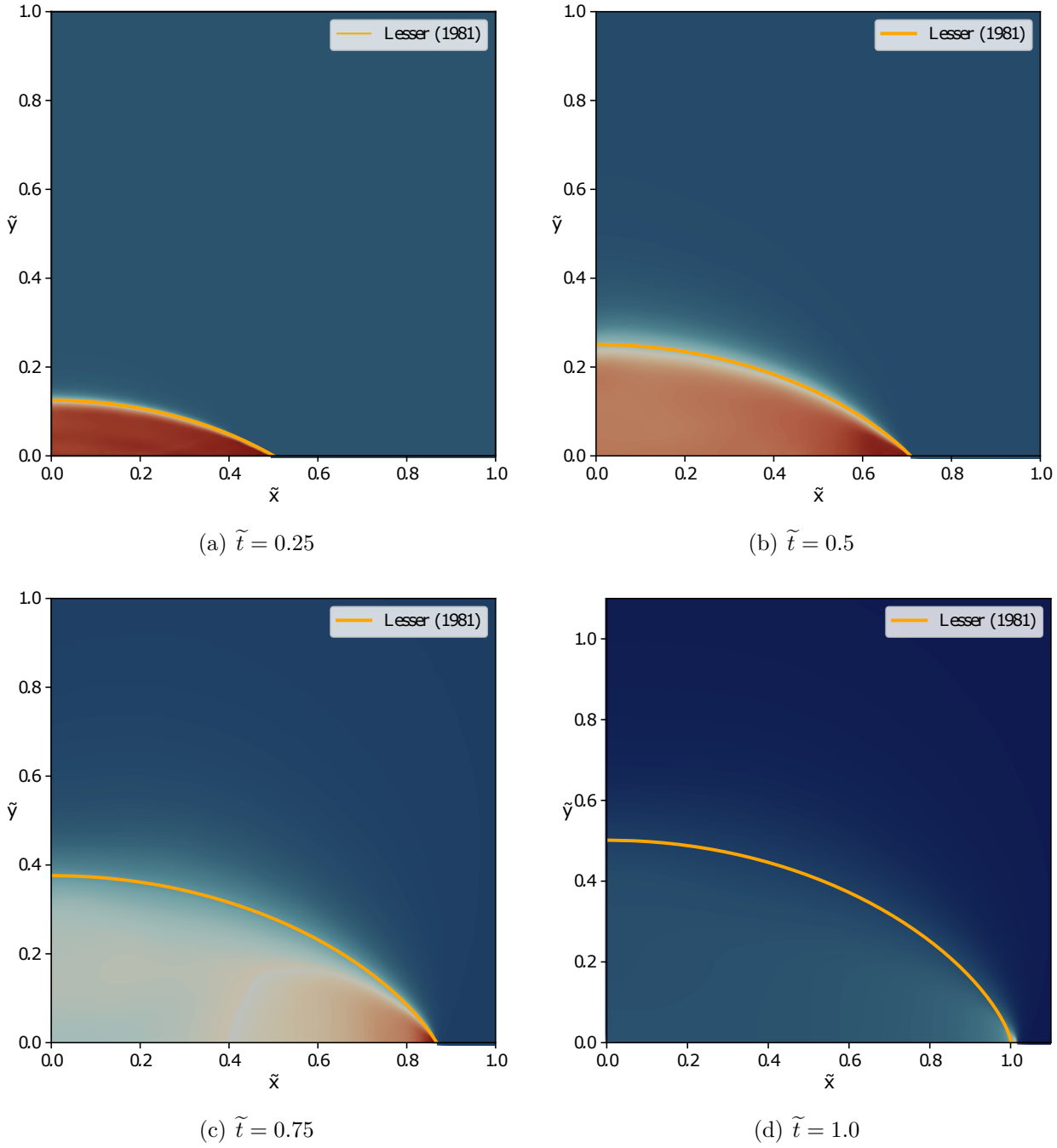


(c) $\widetilde{t} = 0.50$



(d) $\widetilde{t} = 1.0$

Figure 6.22 Évolution du maillage autour du front d'onde au cours du temps



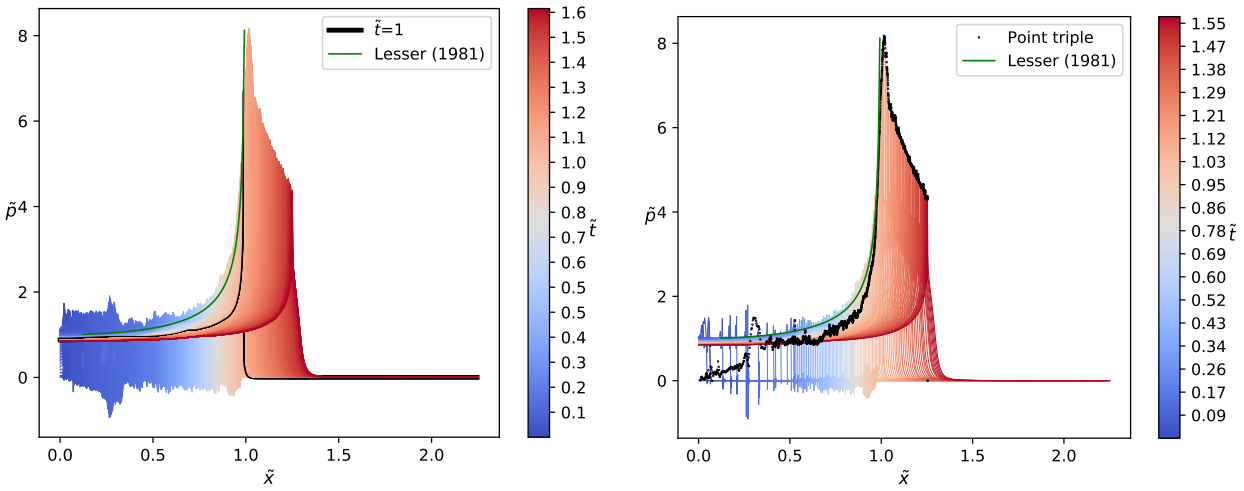
(a) $\widetilde{t} = 0.25$

(b) $\widetilde{t} = 0.5$

(c) $\widetilde{t} = 0.75$

(d) $\widetilde{t} = 1.0$

Figure 6.23 Tracé du front d'onde de la pression pour différents temps comparé à la solution théorique attendue pour le cas de simulation diphasique avec une vitesse imposée sur l'interface



(a) Affichage de tous les pas de temps

(b) Sélection de quelques pas de temps

Figure 6.24 Tracé en 2D de la pression sur l'interface pour le cas de simulation diphasique avec une vitesse imposé sur l'interface

6.3.3 Cylindre d'eau entouré d'air interface libre avec une vitesse initiale dans le liquide

Pour ce cas, la vitesse du fluide sur l'interface est laissée libre. Suite à des difficultés de convergence en partant à $r_{start} = 1\% r_{critique}$ on lancera cette simulation à $r_{start} = 50\% r_{critique}$ soit $t_{start} = 25\% t_{critique}$. Cela permettra de démarrer à une vitesse du point triple moins élevé et de réduire le nombre de remaillage. Les conditions limites sont les mêmes que dans la section 6.3.2 à la différence que la vitesse du fluide sur l'interface n'est plus imposée. Les conditions initiales et le maillage initial restent également identiques.

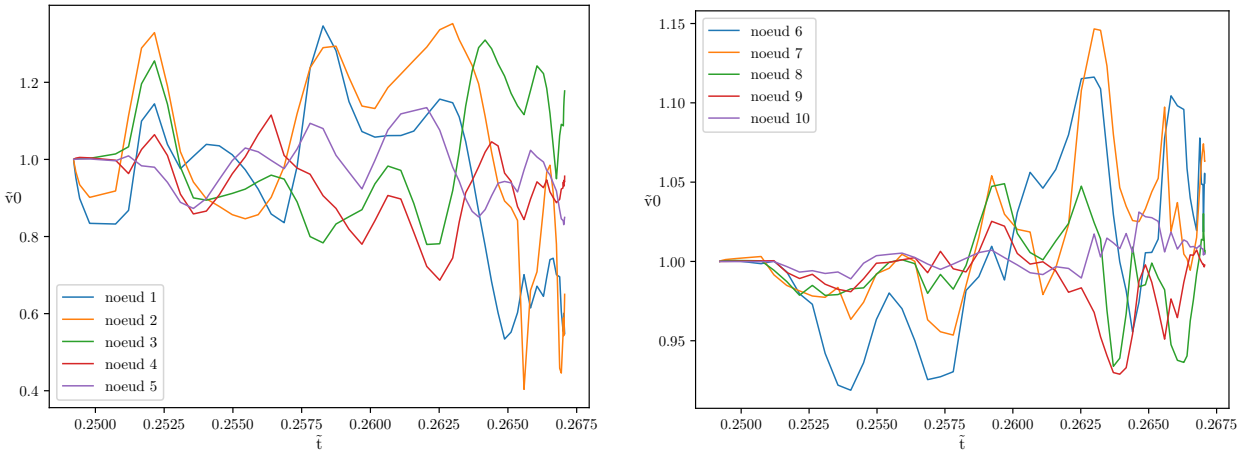
Problèmes rencontrés

Le fait qu'il n'y ait pas de stabilisation provoque des oscillations de grandes amplitudes de la vitesse verticale du fluide pour les noeuds le long de l'interface proche du point de contact. La figure 6.25 montre la vitesse verticale au début de la simulation pour les 10 noeuds suivants le point triple sur l'interface. $\widetilde{v}_0$ et $\widetilde{t}$ sont définis comme :

$$\widetilde{v}_0 = \frac{V(noeud)}{V_1} \quad \text{et} \quad \widetilde{t} = \frac{t_{start} + t}{t_{critique}}$$

La vitesse du fluide tend à se stabiliser au fur et à mesure que l'on s'écarte de l'interface. Cependant les conditions de vitesse du point triple sont contrôlées à partir des 2 noeuds situés sur le même élément. Ce problème ne pouvant être évité qu'avec une méthode de stabilisation

numérique, on choisit la méthode provoquant les oscillations les plus faibles à savoir celle où la vitesse du point triple est donnée par la vitesse du fluide au noeud suivant. La comparaison est faite avec le cas de M. Lesser bien que la simulation commence bien après impact.



(a) Vitesse du noeud 1 au noeud 5

(b) Vitesse du noeud 6 au noeud 10

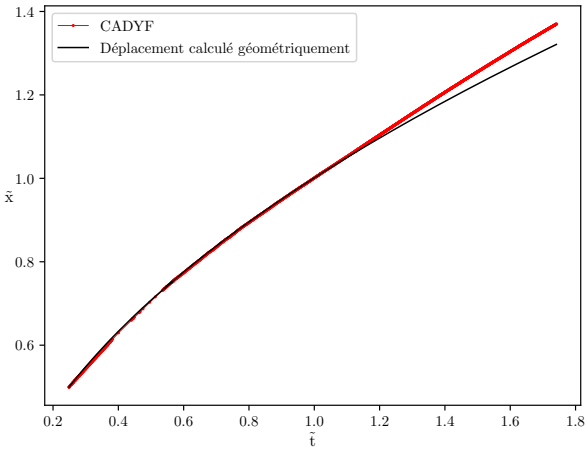
Figure 6.25 Vitesse verticale du fluide sur les dix noeuds de l'interface après le point triple

Discussion des résultats

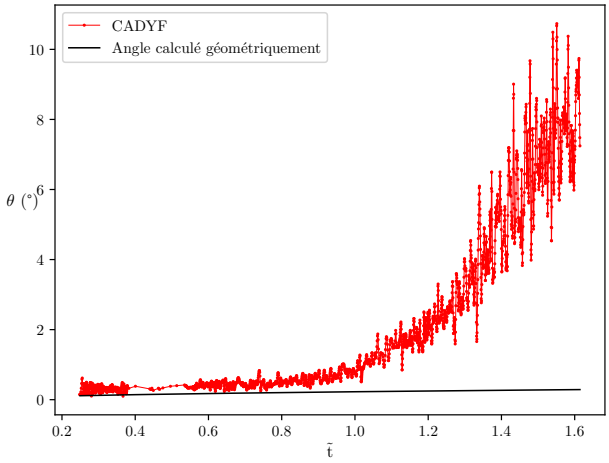
La simulation est arrêtée un peu avant $t = 2t_{critique}$ et 2500 remaillages sont effectués. Les oscillations sont conséquentes que ce soit pour l'angle ou la vitesse. On note néanmoins une tendance pour les 3 variables présentées à la figure 6.26. Pour $\widetilde{t} < 1$ Les courbes ont l'air de suivre les calculs géométriques, à partir de $\widetilde{t} > 1$ la vitesse du point triple se stabilise autour de la vitesse du son, l'angle croit de façon exponentielle et le point triple se déplace de manière linéaire. L'angle au point de contact pour $\widetilde{t} > 1$ a une tendance cohérente avec ce qui est attendu au delà du $t_{critique}$. Un jet doit se former et par conséquent l'angle au point de contact doit se rapprocher des 180°. La figure 6.27 montre des valeurs de pression très élevées qui ne semblent pas décroître. Par analyse des courbes on obtient :

$$\widetilde{p}(1) = 8.6 \quad \widetilde{p}_{max}(\widetilde{t}_{max}) = 42.8 \quad \text{avec} \quad \widetilde{t}_{max} = 1.33$$

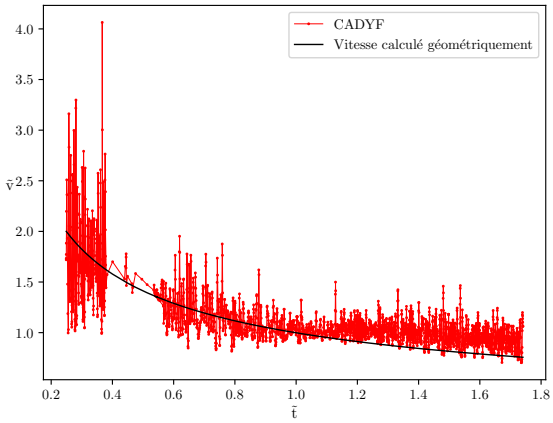
Les valeurs après $t_{critique}$ sont à considérer avec précaution, Les valeurs sont élevées et à partir de $\widetilde{t} = 1.13$ des pressions négatives d'amplitude élevées se manifestent.



(a) Déplacement du point de contact en fonction du temps

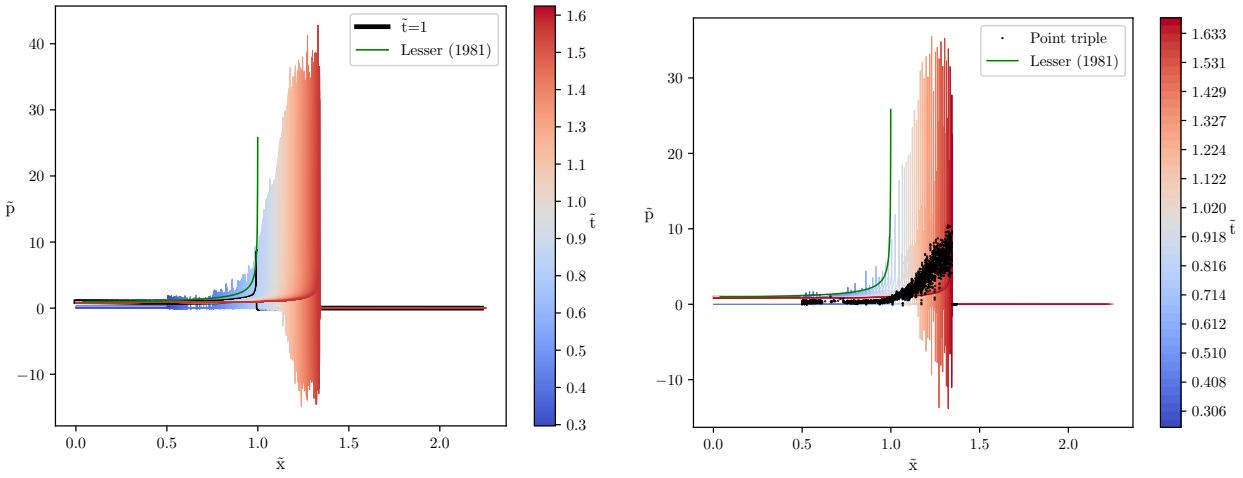


(b) Angle au point de contact en fonction du temps



(c) Vitesse de déplacement du point de contact en fonction du temps

Figure 6.26 Comparaison des résultats calculés géométriquement à ceux simulés avec une vitesse initiale dans le domaine liquide et un démarrage à 50%$r_{critique}$



(a) Affichage de tous les pas de temps

(b) Sélection de quelques pas de temps

Figure 6.27 Pression sur l'interface pour le cas de simulations diphasiques avec une vitesse initiale dans le domaine liquide et un démarrage à $50\% r_{critique}$

CHAPITRE 7 CONCLUSION

7.1 Synthèse des travaux

Ce mémoire a eu pour but d'apporter des améliorations au code permettant la simulation d'impact de vague présent dans les méthaniers transportant du GNL. Pour ce faire, il a fallu implémenter un modèle compressible instationnaire fonctionnant pour le liquide et le gaz ainsi que les modifications des conditions de déplacements de l'interface sur une paroi. L'implémentation s'est effectuée dans un code utilisant une formulation éléments finis pour la discrétisation spatiale couplée aux méthodes BDF pour la discrétisation temporelle.

Dans un premier temps, une écriture des équations de Navier-Stokes en compressible a été donnée, pouvant convenir à des gaz considérés comme parfait et à des liquides faiblement compressibles. Suite à cela nous avons donné les méthodes de résolution de ces équations pour des cas diphasiques compressibles instationnaires. La méthode des éléments finis permet une discrétisation spatiale facilitant la résolution des équations de Navier-Stokes. Les méthodes BDF pour la discrétisation temporelle et la résolution d'écoulements instationnaires. La formulation ALE pour la description de l'interface permet l'application de conditions physiques. La description du maillage pseudo-solide permet la déformation de l'interface. Dans le cas où le maillage initial ne suffirait pas à conserver la précision sur l'erreur des variables calculées, nous avons également présenté une méthode d'adaptation de maillage.

Dans un deuxième temps nous avons évoqué les méthodes utilisées pour modéliser l'interface entre nos deux fluides, et les conditions physiques appliquées. Nous avons apporté aux formulations déjà existantes, deux nouvelles méthodes permettant le déplacement du point en contact avec la paroi solide dans des cas où l'interface se déforme à une vitesse supersonique.

Les étapes de vérifications étant déjà faites par les étudiants précédents nous nous sommes plus attardés sur la validation du code sur la propagation d'une discontinuité en 1D et l'adaptation de remaillage autour de celle-ci. On a montré qu'avec ou sans remaillage, les résultats collaient parfaitement à la théorie. Nous avons observé quelques oscillations néanmoins autour de la valeur désirée pouvant être atténuées en développant une méthode de capture de choc couplée à une méthode de stabilisation SUPG. Des simulations de cas d'impact 2D d'un cylindre d'eau ont été ensuite réalisées qui ont été comparées à un modèle analytique développé par M. Lesser [25], ce qui a permis également de valider le déplacement du point contact sur la paroi. Nous nous sommes cantonnés à comparer ces résultats avec la théorie, le front d'onde n'étant pas récupérable expérimentalement. Les améliorations effectuées

nous ont permis de nous rapprocher d'un cas d'impact proche de la réalité et d'en sortir une solution à partir de simulations.

7.2 Limitations de la solution proposée

Dans ce mémoire nous avons dû faire face à quelques limites par rapport à la solution proposée. En voici une liste des principales observées :

- Un première limitation est le remaillage autour de la discontinuité qui devient trop grossier au fur et à mesure de la simulation, ce qui a pour conséquence de diffuser le front d'onde et de ne pas le capturer de manière précise.
- Les développements actuels ne permettent pas de réaliser le cas d'impact de cylindre avec une interface fluide-fluide où on aurait un point d'impact sur la parois qui se dédoublerait. Les simulations ont donc dû commencer à un temps après impact.
- Les oscillations pour la solution sur le cas d'impact effectué avec seulement une condition initiale dans l'eau ne nous garantissent pas une solution robuste. Les résultats pour ce dernier cas ont été difficiles à obtenir, les calculs ont dû être répétés en changeant les paramètres du maillage pour pouvoir avoir des résultats convergents et faire avancer les simulations au delà du temps voulu.
- Les méthodes de stabilisations actuellement implémentés dans CADYF limitent la convergence spatiale et ne permettent pas par conséquent également de faire avancer les simulations.
- Les dimensions temporelles lors d'impact ELP1 sont extrêmement faibles, il a fallu adapter les paramètres de la simulation pour pouvoir la réaliser.

7.3 Améliorations futures

Dans cette section on propose des améliorations qui pourraient permettre d'avoir un modèle fidèle à l'impact de vague :

- La prise en compte des changements topologiques de l'interface permettrait d'avoir un cas de cylindre d'eau impactant un mur qui commencerait avant contact de l'interface sur la paroi.
- La réduction du pas de temps minimal permettrait de simuler un cas d'impact avec les vrais valeurs des propriétés physiques des deux fluides en présence.
- Le développement d'une méthode de capture de choc serait également utile pour une capture nette du front d'onde.
- Une méthode de stabilisation adaptée pour des simulations d'écoulements superso-

niques serait un atout également contre les oscillations des variables.

— L'implémentation du mouvement du point de contact lorsque le jet doit se former après temps critique doit également être pensé.

RÉFÉRENCES

[1] *Are we entering a golden age ?*, 2011. [En ligne]. Disponible : https://www.iea.org/reports/are-we-entering-a-golden-age

[2] W. Lafeber, H. Bogaert, L. Brosset *et al.*, "Elementary loading processes (elp) involved in breaking wave impacts : findings from the sloshel project," dans *The Twenty-second International Offshore and Polar Engineering Conference*. International Society of Offshore and Polar Engineers, 2012.

[3] M. Ancellin, L. Brosset et J.-M. Ghidaglia, "Numerical simulation of wave impacts with interfacial phase change : An interface reconstruction scheme," *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, vol. 76, p. 352–364, 2019.

[4] A. Hay, S. Etienne, D. Pelletier et A. Garon, "hp-adaptive time integration based on the bdf for viscous flows," *Journal of Computational Physics*, vol. 291, p. 151–176, 2015.

[5] R. A. Gingold et J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars," *Monthly notices of the royal astronomical society*, vol. 181, n°. 3, p. 375–389, 1977.

[6] J. J. Monaghan, "Sph and riemann solvers," *Journal of Computational Physics*, vol. 136, n°. 2, p. 298–307, 1997.

[7] P. Randles et L. D. Libersky, "Smoothed particle hydrodynamics : some recent improvements and applications," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 139, n°. 1-4, p. 375–408, 1996.

[8] M. Gomez-Gesteira, B. D. Rogers, R. A. Dalrymple et A. J. Crespo, "State-of-the-art of classical sph for free-surface flows," *Journal of Hydraulic Research*, vol. 48, n°. sup1, p. 6–27, 2010.

[9] P.-M. Guilcher, Y. Jus et L. Brosset, "2d simulations of breaking wave impacts on a flat rigid wall-part 2 : Influence of scale," *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, vol. 30, n°. 03, p. 286–298, 2020.

[10] S. O. Unverdi et G. Tryggvason, "A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows," *Journal of computational physics*, vol. 100, n°. 1, p. 25–37, 1992.

[11] F. H. Harlow et J. E. Welch, "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface," *The physics of fluids*, vol. 8, n°. 12, p. 2182–2189, 1965.

[12] F. De Sousa, N. Mangiavacchi, L. Nonato, A. Castelo, M. F. Tomé, V. Ferreira, J. Cuminato et S. McKee, "A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3d multi-fluid flows with free surfaces," *Journal of Computational Physics*, vol. 198, n°. 2, p. 469–499, 2004.

[13] W. F. Noh et P. Woodward, "Slic (simple line interface calculation)," dans *Proceedings of the fifth international conference on numerical methods in fluid dynamics June 28–July 2, 1976 Twente University, Enschede*. Springer, 1976, p. 330–340.

[14] C. W. Hirt et B. D. Nichols, "Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries," *Journal of computational physics*, vol. 39, n°. 1, p. 201–225, 1981.

[15] R. De Böck, A. Tijsseling et B. Koren, "A monotonicity-preserving higher-order accurate finite-volume method for kapila's two-fluid flow model," *Computers & Fluids*, vol. 193, p. 104272, 2019.

[16] R. Bagnold, "Interim report on wave-pressure research.(includes plates and photographs)." *Journal of the Institution of Civil Engineers*, vol. 12, n°. 7, p. 202–226, 1939.

[17] J.-F. Haas et B. Sturtevant, "Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 181, p. 41–76, 1987.

[18] S. Osher et J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations," *Journal of computational physics*, vol. 79, n°. 1, p. 12–49, 1988.

[19] S. Osher et R. P. Fedkiw, "Level set methods : an overview and some recent results," *Journal of Computational physics*, vol. 169, n°. 2, p. 463–502, 2001.

[20] J. Crank et P. Nicolson, "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type," dans *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 43, n°. 1. Cambridge University Press, 1947, p. 50–67.

[21] J. C. Butcher, "A history of runge-kutta methods," *Applied numerical mathematics*, vol. 20, n°. 3, p. 247–260, 1996.

[22] J. H. Snoeijer et B. Andreotti, "Moving contact lines : scales, regimes, and dynamical transitions," *Annual review of fluid mechanics*, vol. 45, p. 269–292, 2013.

[23] F. P. Bowden et J. E. Field, "The brittle fracture of solids by liquid impact, by solid impact, and by shock," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 282, n°. 1390, p. 331–352, 1964.

[24] F. J. Heymann, "High-speed impact between a liquid drop and a solid surface," *Journal of Applied Physics*, vol. 40, n°. 13, p. 5113-5122, déc 1969. [En ligne]. Disponible : http://dx.doi.org/10.1063/1.1657361

[25] M. Lesser, "Analytic solutions of liquid-drop impact problems," *Proceedings of The Royal Society of London. Series A, Mathematical and physical sciences*, vol. 377, nº. 1770, p. 289–308, 1981.

[26] M. Rein, "Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces," *Fluid Dynamics Research*, vol. 12, nº. 2, p. 61–93, 1993.

[27] A. M. Worthington, "Xxviii. on the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate," *Proceedings of the royal society of London*, vol. 25, nº. 171-178, p. 261–272, 1877.

[28] C. Josserand et S. T. Thoroddsen, "Drop impact on a solid surface," *Annual review of fluid mechanics*, vol. 48, p. 365–391, 2016.

[29] E. Li et S. T. Thoroddsen, "Time-resolved imaging of a compressible air disc under a drop impacting on a solid surface," 2015.

[30] P. D. Hicks et R. Purvis, "Air cushioning and bubble entrapment in three-dimensional droplet impacts," *J Fluid Mech*, vol. 649, p. 135–163, 2010.

[31] F. H. Harlow et J. P. Shannon, "The splash of a liquid drop," *Journal of Applied Physics*, vol. 38, nº. 10, p. 3855–3866, 1967.

[32] G. B. Footte, "The water drop rebound problem : dynamics of collision," *Journal of Atmospheric Sciences*, vol. 32, nº. 2, p. 390–402, 1975.

[33] G. Trapaga et J. Szekely, "Mathematical modeling of the isothermal impingement of liquid droplets in spraying processes," *Metallurgical and Materials Transactions B*, vol. 22, nº. 6, p. 901–914, 1991.

[34] H. Liu, E. J. Lavernia et R. H. Rangel, "Numerical simulation of substrate impact and freezing of droplets in plasma spray processes," *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 26, nº. 11, p. 1900, 1993.

[35] K. Haller, Y. Ventikos, D. Poulikakos et P. Monkewitz, "Computational study of high-speed liquid droplet impact," *Journal of Applied Physics*, vol. 92, nº. 5, p. 2821–2828, 2002.

[36] X. Yang et S.-C. Kong, "3d simulation of drop impact on dry surface using sph method," *International Journal of Computational Methods*, vol. 15, nº. 03, p. 1850011, 2018.

[37] Y. Tatekura, M. Watanabe, K. Kobayashi et T. Sanada, "Pressure generated at the instant of impact between a liquid droplet and solid surface," *Royal Society open science*, vol. 5, nº. 12, p. 181101, 2018.

[38] O. G. Engel *et al.*, "Waterdrop collisions with solid surfaces," *Journal of research of the national bureau of standards*, vol. 54, nº. 5, p. 281–298, 1955.

[39] L. Tisza, “Supersonic absorption and stokes’ viscosity relation,” *Physical Review*, vol. 61, n°. 7-8, p. 531, 1942.

[40] R. Menikoff et B. J. Plohr, “The riemann problem for fluid flow of real materials,” *Reviews of modern physics*, vol. 61, n°. 1, p. 75, 1989.

[41] T. Flåtten, A. Morin et S. T. Munkejord, “On solutions to equilibrium problems for systems of stiffened gases,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 71, n°. 1, p. 41–67, 2011.

[42] Y. Vautrin, “Modélisation et simulation numérique d’écoulements diphasiques de fluides séparés par une interface avec une méthode d’éléments finis adaptatives en espace et en temps,” Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal, 2020.

[43] F. Brezzi, “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers,” *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, n°. S4, p. 1–26, 1974.

[44] C. F. Curtiss et J. O. Hirschfelder, “Integration of stiff equations,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 38, n°. 3, p. 235, 1952.

[45] C. W. Hirt, A. A. Amsden et J. Cook, “An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds,” *Journal of computational physics*, vol. 14, n°. 3, p. 227–253, 1974.

[46] S. Lortie, “Simulation d’écoulements à surface libre entre un liquide et un gaz compressible,” Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2018.

[47] R. D. Grigorieff, “Stability of multistep-methods on variable grids,” *Numerische Mathematik*, vol. 42, n°. 3, p. 359–377, 1983.

[48] S. Skelboe, “The control of order and steplength for backward differentiation methods,” *BIT Numerical Mathematics*, vol. 17, n°. 1, p. 91–107, 1977.

[49] L. Shampine et M. Gordon, “Computer solution of ordinary differential equations : the initial value problem, 1975.”

[50] O. C. Zienkiewicz et J. Z. Zhu, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1 : The recovery technique,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n°. 7, p. 1331–1364, 1992.

[51] ——, “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2 : Error estimates and adaptivity,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, n°. 7, p. 1365–1382, 1992.

[52] S. Fortin, "Étude de bistabilité des bulles ellipsoïdales par une méthode ale de résolution des écoulements diphasiques," Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal, 2019.

[53] G. Dziuk, "An algorithm for evolutionary surfaces," *Numerische Mathematik*, vol. 58, nº. 1, p. 603–611, 1990.

[54] P. J. Roache, "Code verification by the method of manufactured solutions," *J. Fluids Eng.*, vol. 124, nº. 1, p. 4–10, 2002.

[55] W. J. M. Rankine, "Xv. on the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, nº. 160, p. 277–288, 1870.

[56] F. Dias et J.-M. Ghidaglia, "Slamming : Recent progress in the evaluation of impact pressures," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 50, p. 243–273, 2018.

[57] T. E. Tezduyar et Y. Osawa, "Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, nº. 3-4, p. 411–430, 2000.

[58] T. E. Tezduyar et M. Senga, "Supg finite element computation of inviscid supersonic flows with yzβ shock-capturing," *Computers & fluids*, vol. 36, nº. 1, p. 147–159, 2007.

[59] R. Codina, "A discontinuity-capturing crosswind-dissipation for the finite element solution of the convection-diffusion equation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, nº. 3-4, p. 325–342, 1993.