

Titre: Nouvelles méthodes numériques pour l'analyse sismique des réservoirs de liquide: effets de l'asymétrie, du ballonnement en surface libre et de blocs de glace en flottaison
Title:

Auteur: Damien Goulmot
Author:

Date: 2012

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Goulmot, D. (2012). Nouvelles méthodes numériques pour l'analyse sismique des réservoirs de liquide: effets de l'asymétrie, du ballonnement en surface libre et de blocs de glace en flottaison [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/910/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/910/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Najib Bouaanani
Advisors:

Programme: Génie civil
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

NOUVELLES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'ANALYSE SISMIQUE DES
RÉSERVOIRS DE LIQUIDE: EFFETS DE L'ASYMÉTRIE, DU BALLOTTEMENT EN
SURFACE LIBRE ET DE BLOCS DE GLACE EN FLOTTAISON

DAMIEN GOULMOT
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE CIVIL)
JUILLET 2012

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

NOUVELLES MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR L'ANALYSE SISMIQUE DES
RÉSERVOIRS DE LIQUIDE: EFFETS DE L'ASYMÉTRIE, DU BALLOTTEMENT EN
SURFACE LIBRE ET DE BLOCS DE GLACE EN FLOTTAISON

présenté par : GOULMOT Damien

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. LÉGER Pierre, Ph.D., président

M. BOUAANANI Najib, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. FUAMBA Musandji, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Le présent projet a été réalisé sous la direction de Najib Bouaanani, professeur agrégé de l'école Polytechnique de Montréal. Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de recherche pour le soutien constant et la confiance qu'il m'a accordé tout au long de mon projet de recherche. Je remercie également M. Benjamin Miquel, ancien doctorant de l'école Polytechnique de Montréal pour les conseils et les informations qu'il m'a fourni au début de ma maîtrise.

Je tiens à remercier également le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génies du Canada(CRNSG) ainsi que le Fonds de recherche du Québec - Nature et technologies (FQRNT).

Je remercie mes amis ainsi que tous les membres du Groupe de Recherche en Génie des Structures (GRS) de l'école Polytechnique de Montréal.

RÉSUMÉ

Ce travail a permis de développer une méthode semi-analytique originale permettant de calculer la réponse sismique des réservoirs rectangulaires symétriques, ou présentant une éventuelle asymétrie géométrique ou matérielle des parois. La méthode proposée est basée sur la méthode de sous-structuration et permet la prise en compte de la flexibilité des parois, de la compressibilité du liquide contenu, d'une condition de radiation au fond du réservoir, du ballotement de la surface liquide et permet d'intégrer une condition plus générale de masses flottantes comme des blocs de glace. La méthode emploie les éléments finis pour le calcul des modes propres de la structure sèche et se base sur la technique des valeurs limites pour résoudre l'équation différentielle régissant le potentiel des vitesses du fluide. La méthode est limitée aux petites variations et emploie la théorie linéaire d'Airy pour la modélisation du problème de ballotement. La technique proposée a été programmée et validée à l'aide de modèles élaborés par la méthode des éléments finis, pour plusieurs exemples numériques. Elle a notamment permis de mettre en évidence l'effet amplificateur d'un couvert de glace sur la réponse du fluide et de la structure.

ABSTRACT

This work proposes a semi-analytical method to calculate the dynamical response of symmetric and asymmetric rectangular liquid containing structures in two dimensional space. The proposed method is based on the substructure method and can take account of the flexibility of each wall independently, the compressibility of the liquid, a radiation condition at the tank bottom, the sloshing of the liquid surface and allows to take account of a more general condition of floating masses such as ice-blocks. The method uses the finite element technique to compute the natural modes of the dry structure and deals with the fluid potential by solving the boundary value problem. The method is limited to small changes, and employs Airy linear theory for modeling the sloshing problem. The proposed technique has been programmed and validated using the finite element method for several numerical examples. It provided an opportunity to highlight the amplifying effect of an ice cover on the response of the fluid and the structure.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
RÉSUMÉ	iv
ABSTRACT	v
TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES TABLEAUX	ix
LISTE DES FIGURES	x
LISTE DES ANNEXES	xv
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Position du problème et contexte de l'étude	1
1.2 Cadre et Objectif de la recherche	2
1.3 Plan du mémoire	2
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE	4
2.1 Introduction	4
2.2 Présentation des concepts de base	4
2.2.1 L'interaction fluide-structure	4
2.2.2 L'interaction Structure-onde acoustique	5
2.2.3 Les pressions hydrodynamiques	5
2.2.4 Le phénomène de "sloshing"	6
2.3 Modes de rupture des réservoirs sous excitation sismique et analyses de risques	8
2.3.1 Modes de rupture et d'endommagement	8
2.3.2 Analyses de risque pour des réservoirs soumis à un séisme	15
2.4 Recherches antérieures	18
2.4.1 Recherches générales réalisées sur les réservoirs dynamiquement sollicités	18
2.4.2 Recherches menées sur les réservoirs à toit flottant sollicités sismiquement	25
2.5 Revue des normes sur le dimensionnement para-sismique des réservoirs	27
2.5.1 Présentation de quelques normes	28
2.5.2 Modèles mécaniques équivalents	29

2.5.3	Pressions hydrodynamiques et périodes temporelles	30
2.5.4	Combinaison des différentes forces dynamiques dans le réservoir	36
CHAPITRE 3 ARTICLE 1 - SEISMIC ANALYSIS OF RECTANGULAR WATER-CONTAINING STRUCTURES WITH FLOATING ICE BLOCKS		37
3.1	Introduction	37
3.2	Mathematical formulation	39
3.2.1	General assumptions and governing equations	39
3.2.2	Impulsive hydrodynamic pressure	44
3.2.3	Convective hydrodynamic pressure	45
3.2.4	Time responses for a seismic loading	46
3.3	Illustrative numerical example	48
3.3.1	Properties of the studied system and numerical modeling	48
3.3.2	Frequency-domain response	49
3.3.3	Time-domain response	52
3.4	Conclusions	57
Bibliographie		63
CHAPITRE 4 APPROFONDISSEMENTS ET RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES		66
4.1	Modélisation des réservoirs à l'aide d'ADINA	66
4.1.1	Construction des modèles	66
4.1.2	Définition du maillage pour la prise en compte du ballotement	67
4.1.3	Analyses temporelles par la méthode des éléments finis	69
4.2	Equation d'équilibre des réservoirs asymétriques	71
4.3	Résultats complémentaires	77
4.3.1	Résultats complémentaires concernant l'article de l'annexe F	77
4.3.2	Résultats complémentaires concernant l'article du chapitre 3	79
CHAPITRE 5 DISCUSSION GÉNÉRALE		82
5.1	Discussion générale autour de l'article 0 (ANNEXE F)	82
5.2	Discussion générale autour de l'article 1 (CHAPITRE 3)	82
CHAPITRE 6 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS		84
6.1	Synthèse des travaux	84
6.2	Limitations de la solution proposée	85
6.3	Améliorations futures	86

RÉFÉRENCES	87
ANNEXES	92

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Modes de ruptures non accompagné de déversement de liquide (Source : Krausmann <i>et al.</i> (2011))	16
Tableau 2.2	Modes de rupture accompagné de déversement de liquide (Source : Krausmann <i>et al.</i> (2011))	16
Tableau 2.3	Leçons et recommandations (Source : Krausmann <i>et al.</i> (2011))	17
Tableau 4.1	Convergence des fréquences de sloshing en fonction du nombre de divisions verticales	67
Tableau 4.2	Longueur d'onde spatiales (en m) des 20 premiers modes convectifs . .	68
Tableau 4.3	Etude paramétrique des 3 premières fréquences naturelles anti-symétriques en fonction de la taille du maillage	68

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Schéma du cycle d'interaction entre le fluide et le solide	5
Figure 2.2	Différents types de pression au sein d'un réservoir rectangulaire lors d'un séisme (Source : ACI (2006))	6
Figure 2.3	(a) Ballotement linéaire-(b) Ballotement faiblement non-linéaire-(c) Ballotement fortement non-linéaire (Source : Ibrahim (2005))	7
Figure 2.4	(a)Réservoir avec déformation de type "elephant-foot" lors du séisme d'Alaska 1964 de magnitude 9.2 (Source : Applied Technology Council (2011))-(b)Réservoir avec déformation de type "diamond-shaped" (Source : Malhotra (2006))-(c)Réservoir avec déformation de type "elephant-knee" lors du séisme de Port-au-Prince 2010 de magnitude 7 (Source : Applied Technology Council (2011))	9
Figure 2.5	Déformation de la partie supérieure de la paroi et du toit d'un réservoir (Source : Malhotra (2006))	10
Figure 2.6	Glissement de la base d'un réservoir lors du séisme de Buhj 2001 en Inde (Source : Malhotra (2006))	10
Figure 2.7	(a)Rupture de la conduite d'entrée-sortie due au flambement de la paroi d'un réservoir-(b) Rupture de canalisation d'approvisionnement d'un réservoir due au glissement de sa base (Source : Malhotra (2006)) . . .	11
Figure 2.8	(a)Endommagement du système de lutte contre les incendies sur un réservoir -(b)Rupture des escaliers de maintenance d'un réservoir- lors du séisme de Chi Chi 1999 de magnitude 7.6 à Taiwan (Source : Chen et Chiang (2000))	11
Figure 2.9	Rupture des connections d'ancrage d'un réservoir lors du séisme du Chili 2010 de magnitude 8.8 (Source : Applied Technology Council (2011))	12
Figure 2.10	(a)Destruction du joint du toit flottant d'un réservoir de type "simple deck" et déformation de la structure du toit (Source : Malhotra (2006))-(b)Endommagement du joint de scellement du toit flottant d'un réservoir de type "double deck" lors du séisme de Izmit 1999 de magnitude 7.8 en Turquie (Source : Sezen <i>et al.</i> (2000))	12
Figure 2.11	Naufrage de toit flottant dans deux réservoirs (C et D) de kérosène lors du séisme de Tokachi-Oki 2003 de magnitude 8.0 au Japon (Source : Hatayama (2007))	13

Figure 2.12	Débordement d'un réservoir due au ballotement lors du séisme de Kocaeli 1999 en Turquie (Source : Sezen <i>et al.</i> (2000))	13
Figure 2.13	(a)Rupture par cisaillement du support et destruction d'un réservoir élevé-(b)Endommagement du support d'un réservoir élevé en béton-(Source : Malhotra (2006))	14
Figure 2.14	(a)Implosion d'un réservoir cylindrique à toit fixe (Source : Malhotra (2006)) (b) Destruction par le feu d'un réservoir de pétrole lors du séisme de Kocaeli 1999 en Turquie (Source : Sezen <i>et al.</i> (2000))	14
Figure 2.15	Distribution de la gravité des dommages en fonction du pourcentage de cas analysés (Source : Krausmann <i>et al.</i> (2011))	16
Figure 2.16	Modèle de Housner (Source : Housner (1957))	19
Figure 2.17	Modèle simplifié de Housner (Source : Housner (1963))	20
Figure 2.18	Profils verticale et circonférentiel des modes de vibration de réservoirs cylindriques à vide (Source : Haroun (1980))	22
Figure 2.19	(a) Modèle de Housner-(b) Modèle de Malhotra (Source :)	29
Figure 2.20	(a) Distribution en fonction de la hauteur de la pression impulsive a dimensionnée-(b) Valeur maximale de la pression a dimensionnée (Source : Eurocode8(2003))	31
Figure 2.21	(a) Pression convective a dimensionnée du premier mode de sloshing -(b) Pression convective a dimensionnée du second mode de sloshing (Source : Eurocode8(2003))	32
Figure 2.22	Poids du premier mode impulsif et du premier mode convectif en fonction du rapport L/H_L dans un réservoir rectangulaire (Source : ACI-Committee-350 (2006))	34
Figure 2.23	Hauteurs d'application des masses impulsive et convective en fonction du rapport L/H_L dans un réservoir rectangulaire (Source : ACI-Committee-350 (2006))	35
Fig. 3.1	General geometry of the studied ice-water-structure systems.	40
Fig. 3.2	Sub-structuring approach : (a) Containing structure and ice added mass; (b) reservoir model.	41
Fig. 3.3	Geometry of the studied wall water system example.	49
Fig. 3.4	Numerical models : (a) Analytical model of the fluid domain and finite element model of the dry containing structure; (b) Coupled fluid-structure interaction finite element model.	50

Fig. 3.5	First four mode shapes and corresponding frequencies and effective modal masses of the empty wall-water-ice system : (a) Walls without ice added mass effects; (b) Walls with ice added mass effect.	51
Fig. 3.6	Frequency response of nondimensionalized hydrodynamic pressures and displacements : (a) Hydrodynamic pressures without ice cover, (b) Hydrodynamic pressures with ice cover, (c) Horizontal displacements without ice cover, (d) Horizontal displacements with ice cover. [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution.	53
Fig. 3.7	Nondimensionalized hydrodynamic pressure profiles on the walls of the studied system : (a) Convective hydrodynamic pressures without ice cover, (b) Impulsive hydrodynamic pressures without ice cover, (c) Convective hydrodynamic pressures with ice cover, (d) Impulsive hydrodynamic pressures with ice cover. [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution.	54
Fig. 3.8	Horizontal acceleration component of Imperial Valley earthquake (1940) at El Centro.	54
Fig. 3.9	Time-history response of the studied wall-water system without ice : (a) Nondimensionalized displacement at point C; (b) Nondimensionalized displacement at point C'; (c) Nondimensionalized shear force at section A; (d) Nondimensionalized shear force at section A'; (e) Nondimensionalized shear force at section A; . [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution.	55
Fig. 3.10	Time-history response of the studied wall-water system with ice : (a) Nondimensionalized displacement at point C; (b) Nondimensionalized displacement at point C'; (c) Nondimensionalized shear force at section A; (d) Nondimensionalized shear force at section A'; (e) Nondimensionalized shear force at section A; . [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution.	56
Fig. 4.1	Effet de la pression hydrostatique	69
Fig. 4.2	Accélérogramme modifié	70
Fig. 4.3	Découplage de la réponse en vibrations libres et de la réponse en vibrations forcées	71
Fig. 4.4	Géométrie du réservoir symétrique	77
Fig. 4.5	Effet du coefficient d'absorption pour un réservoir symétrique standard	78
Fig. 4.6	Géométrie du réservoir asymétrique étudié	78
Fig. 4.7	Effet de la largeur du réservoir sur le couplage des deux parois	79

Fig. 4.8	Réponses structurelles temporelles : cisaillement et déplacement en crête de mur	80
Fig. 4.9	Déplacement temporels verticaux des blocs de glace en surface	80
Fig. A.1	Domaines de validité de quelques théories sur la propagation des ondes de surface[ref : wikipedia]	97
Fig. C.1	Modèle mécanique équivalent de Housner	105
Fig. C.2	Ratios de masse impulsive et convectives en fonction des dimensions du réservoir (Graham et Rodriquez (1952))	107
Fig. D.1	Modes convectifs dans le cas d'un maillage à 2 divisions horizontales . .	108
Fig. D.2	Modes convectifs dans le cas d'un maillage à 10 divisions horizontales .	109
Fig. E.1	Schéma de principe des analyses temporelles	111
Fig. E.2	Prolongement du signal de départ d'une période	112
Fig. E.3	Opérations sur le spectre fréquentiel pour la ifft	113
Fig. E.4	Réponse temporelle après ifft	113
Fig. F.1	General geometry of the studied geometrically or materially asymmetric liquid containing structures.	127
Fig. F.2	Geometry of the studied geometrically asymmetric wall-water system. .	128
Fig. F.3	Geometry of the studied geometrically asymmetric wall-water system. .	129
Fig. F.4	First eight mode shapes and corresponding frequencies and effective modal masses of the walls without water.	130
Fig. F.5	Nondimensionalized hydrodynamic pressures and displacements for the geometrically asymmetric wall-water system : (a) and (b) hydrodynamic pressures, (c) displacements. Continuous lines : Points A, B and C. Dotted lines : Points A', B' and C'. [0.5cm]0.3mm Finite element solution ; [0.5cm]0.3mm Proposed solution with $\alpha = 1.0$; [0.5cm]0.3mm Proposed solution with $\alpha = 0.2$	131
Fig. F.6	Nondimensionalized hydrodynamic pressure profiles on the walls of the asymmetric wall-water system. Continuous lines : Left wall. Dotted lines : Right wall. [0.5cm]0.3mm Finite element solution ; [0.5cm]0.3mm Proposed solution.	132
Fig. F.7	Horizontal acceleration component of Imperial Valley earthquake (1940) at El Centro.	133

Fig. F.8	Time-history response of the geometrically asymmetric wall-water system : (a) Nondimensionalized displacement at point C; (b) Nondimensionalized displacement at point C'; (c) Nondimensionalized shear force at section A; (d) Nondimensionalized shear force at section A'. [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution.134
Fig. F.9	Geometry of the studied materially asymmetric tank-reservoir system. . 135
Fig. F.10	Finite elements models : (a) Retrofitted tank and analytical model for hydrodynamic pressure; (b) Retrofitted tank-water system. 136
Fig. F.11	First six mode shapes and corresponding frequencies and effective modal masses of the asymmetrical tank. 137
Fig. F.12	Nondimensionalized hydrodynamic pressures and displacements for the materially asymmetric tank-reservoir system : (a) and (b) hydrodynamic pressures, (c) displacements. Continuous lines : Points A, B and C. Dotted lines : Points A', B' and C'. [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution. 138
Fig. F.13	Nondimensionalized hydrodynamic pressure profiles on the walls of the materially asymmetric tank-reservoir system. Continuous lines : Left wall. Dotted lines : Right wall. [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution. 139
Fig. F.14	Time-history response of the materially asymmetric tank-reservoir system : (a) Nondimensionalized displacement at point C; (b) Nondimensionalized displacement at point C'; (c) Nondimensionalized shear force at section A; (d) Nondimensionalized shear force at section A'. [0.5cm]0.3mm Finite element solution; [0.5cm]0.3mm Proposed solution.140

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	APPROFONDISSEMENT SUR LES ONDES DE GRAVITÉ	92
Annexe B	CAS PARTICULIERS DU BALLOTEMENT DANS LES RÉSERVOIRS RIGIDES	98
Annexe C	MODÈLES MÉCANIQUES ÉQUIVALENTS	105
Annexe D	MODÉLISATION DU BALLOTEMENT PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS	108
Annexe E	MÉTHODES POUR LES ANALYSES TEMPORELLES	111
Annexe F	ARTICLE0-SEISMIC RESPONSE OF ASYMMETRIC RECTANGU- LAR LIQUID CONTAINING STRUCTURES	114

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce chapitre a pour but de présenter le contexte général dans lequel s'inscrit le projet de recherche, en précisant son cadre et ses objectifs. La structure du mémoire est présentée en fin du chapitre.

1.1 Position du problème et contexte de l'étude

Les réservoirs de stockage de liquides sont des structures très répandues dans le domaine du génie civil. Ces installations sont particulièrement employées dans l'industrie et notamment dans l'industrie lourde, dans laquelle elles servent à stocker toutes sortes de produits : hydrocarbures, LNG (Liquid Natural Gaz), etc., qui sont, pour la majorité, toxiques ou inflammables. Les réservoirs servent également à des usages municipaux, pour le stockage de l'eau potable. Lors de séismes, il est primordial que ces structures soient préservées, afin d'éviter qu'elles ne répandent leur précieux contenu, entraînant des réactions en chaîne incontrôlables pouvant causer plus de dégâts que le séisme lui-même. Par ailleurs, durant l'après-séisme, certains réservoirs comme les réservoirs d'eau, jouent un rôle crucial dans l'organisation des premiers secours. Afin de préserver et de mieux comprendre le comportement dynamique de ces structures, de nombreuses études ont été réalisées à partir du début des années 1930. La grande majorité des recherches entreprises jusqu'à nos jours portent sur l'étude du comportement dynamique des réservoirs cylindriques qui constituent les structures les plus rencontrées et les plus critiques, dans le domaine de l'industrie.

Bien qu'un nombre important d'études aient été menées sur les réservoirs, aucune ne permette de prendre en compte de manière analytique, le comportement dynamique des réservoirs rectangulaires présentant une asymétrie géométrique ou matérielle des murs. En effet, dans la plupart des études réalisées, les murs sont considérés idéaux, ayant un comportement dynamique semblable. En outre, il existe certains cas, où cette dissymétrie ne peut être négligée. On peut notamment citer le cas des réservoirs rectangulaires supportés unilatéralement par un remblai, type de structures qui a fait l'objet d'une étude récente par les chercheurs Cakir et Livaoglu (2012). On peut également mentionner le cas de certaines infrastructures fluviales comme les écluses.

Par ailleurs l'impact d'une couche de glace non rigide sur des réservoirs aux parois flexibles soumis à une excitation sismique est un sujet qui a été très peu abordé dans la littérature. Or

dans les régions nordiques, telles que le Canada, il est fréquent que les réservoirs et structures hydrauliques tels que les barrages, soient couverts d'une couche de glace de 1 à 2 m d'épaisseur. Si des études ont été réalisées sur les barrages présentant un couvert de glace [P. Paultre et Carbonneau (2002), N. Bouaanani et Proulx (2002) et Bouaanani et Paultre (2005)], en revanche, et à la connaissance de l'auteur, aucune recherche n'ont été menées en ce qui concerne les réservoirs asymétriques couverts de blocs de glaces et soumis à une excitation sismique. Dans le but de fournir des moyens d'analyses pratiques pour les deux problématiques énoncées, ce document se propose d'une part d'étudier le comportement dynamique des réservoirs rectangulaires asymétriques et d'autre part, d'étudier leur réponse sismique dans le cas où ces derniers sont couverts par des blocs de glace.

1.2 Cadre et Objectif de la recherche

Ce mémoire a pour objectif de proposer et de valider une méthode théorique permettant de prendre en compte l'effet de l'asymétrie de réservoirs rectangulaires présentant des murs dépareillés et d'étudier leur impact sur leur comportement dynamique. La méthode proposée doit satisfaire les critères suivants : (i) tenir compte de l'interaction réservoir-murs mais également tenir compte du ballonnement du liquide à la surface du réservoir ainsi que d'une condition plus générale de masses flottantes ; (ii) inclure les effets de la compressibilité de l'eau et les mécanismes de dissipation de l'énergie (condition de sédiments au fond du réservoir ou viscosité de l'eau introduit de manière artificielle) ; (iii) être programmable numériquement ; (iv) une fois programmé, permettre d'effectuer des études paramétriques montrant l'influence de certains paramètres (géométrie du réservoir, paramètres du liquide ou matériau de la structure) sur la réponse dynamique du système.

1.3 Plan du mémoire

Ce mémoire s'articule autour de trois parties principales. La première partie introduit les concepts fondamentaux abordés au cours des développements et fournit une revue de littérature sur les études majeures qui ont été réalisées dans le domaine de l'interaction fluide-structure au sein des réservoirs du génie civil. La seconde partie correspond à l'article officiel publié dans le cadre de cette recherche, proposant une méthode analytique originale permettant de prendre en compte la triple interaction liquide-glace-structure dans les analyses sismiques de réservoirs. La troisième partie approfondit certains points effleurés ou non abordés dans les articles publiés lors de cette maîtrise. Enfin, la dernière partie est une conclusion de l'ensemble des recherches menées.

Ce mémoire est également constitué de six annexes approfondissant certains points théoriques abordés dans le corps du mémoire et fournissant des méthodes pour la modélisation et les analyses. La dernière annexe correspond au premier article publié lors de la maîtrise et fournit une méthode analytique permettant le calcul des pressions hydrodynamiques impulsives au sein des réservoirs asymétriques.

CHAPITRE 2

REVUE DE LITTÉRATURE

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif d'introduire de manière générale le phénomène d'interaction fluide-structure ayant lieu dans les réservoirs excités sismiquement. La première partie introduit la terminologie et les concepts de base considérés dans l'étude. La seconde partie passe en revue les dommages classiquement observés sur les réservoirs lors de séismes et présente succinctement des analyses de risque relative à ce genre de problèmes. La troisième partie s'intéresse aux études antérieures réalisées sur le comportement dynamique des réservoirs. La quatrième partie présente une brève revue des normes internationales de dimensionnement para-sismique des réservoirs, en énonçant leurs principales caractéristiques.

2.2 Présentation des concepts de base

2.2.1 L'interaction fluide-structure

L'interaction fluide-structure réfère à l'étude du couplage ayant lieu entre un solide et le fluide dans lequel il est immergé ou en contact partiel. Le terme de couplage pour ce genre de phénomènes est justifié par le fait que l'évolution de chacun des deux protagonistes dépend de celle de l'autre. L'interaction peut avoir lieu entre un solide et un fluide gazeux, on parle alors de phénomènes aérodynamiques. On peut notamment citer l'exemple du vent s'exerçant sur les pales d'une éolienne ou sur une aile d'avion. Dans le cas où l'interaction a lieu entre un solide et un fluide liquide, on parle de phénomène hydroélastique comme l'écoulement autour d'une pile de pont ou la pression hydrodynamique s'exerçant en amont d'un barrage lors d'un séisme. Dans les deux cas cités, le fluide déforme ou met en mouvement le solide. Ce dernier en retour modifie localement le champ de l'écoulement du fluide. L'interaction fluide-structure est un phénomène dynamique et peut être caractérisé à chaque instant par un cycle d'interaction ayant lieu entre le liquide et le solide (voir Fig. 2.1)

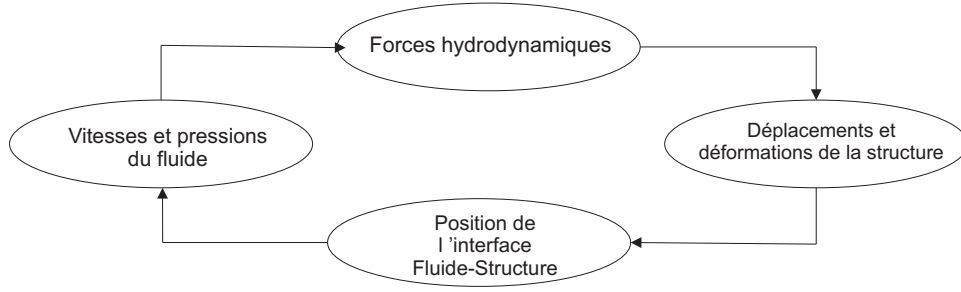


Figure 2.1 Schéma du cycle d'interaction entre le fluide et le solide

Il existe deux types de couplage, le couplage faible dans lequel seule l'action du fluide sur le solide (ou inversement), est considérée, et le couplage fort dans lequel chaque perturbation de la boucle de rétroaction (Fig. 2.1) déstabilise le cycle entier qui converge alors faire une nouvelle position d'équilibre. (si le système est globalement stable) Dans certains cas les hypothèses réalisées permettent de linéariser les équations et d'exprimer simplement le comportement du fluide et du solide à l'aide de formules analytiques, en revanche dans d'autres cas, la nature physique fortement non-linéaire des problèmes nécessite des modèles numériques poussés.

2.2.2 L'interaction Structure-onde acoustique

En ce qui concerne les problèmes d'interaction fluide-structure au sein des réservoirs, les problèmes d'écoulement sont généralement négligeables, le fluide est supposé compressible, irrotationnel et non visqueux, de sorte que son champ des vitesses peut être entièrement décrit par un potentiel des vitesses, le fluide est ainsi traité entièrement comme une onde acoustique. Le fluide et la structure sont supposés ne subir que des petites perturbations. Le fluide est gouverné par l'équation d'onde

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{C^2} \right) \phi = 0 \quad (2.1)$$

2.2.3 Les pressions hydrodynamiques

Dans le domaine du génie civil, le problème d'interaction fluide-structure réside dans l'estimation de la distribution des pressions hydrodynamiques, des forces de cisaillement, des moments de renversement à la base des murs, et la détermination des caractéristiques des modes de ballotement de la surface libre du liquide.

La pression hydrodynamique est généralement divisée en deux composantes, une pression

impulsive causée par la portion du liquide accélérant avec le réservoir et une pression convective causée par la portion du liquide ballotant dans le réservoir. Cette dernière pression est responsable du mouvement du liquide à la surface du réservoir. Selon la nature de l'excitation sismique, le fluide va développer des pressions spécifiques sur les parois du réservoir. La figure Fig. 2.2 illustre les différents types de pressions et de forces s'exerçant sur les parois d'un réservoir rectangulaire lors d'un séisme.

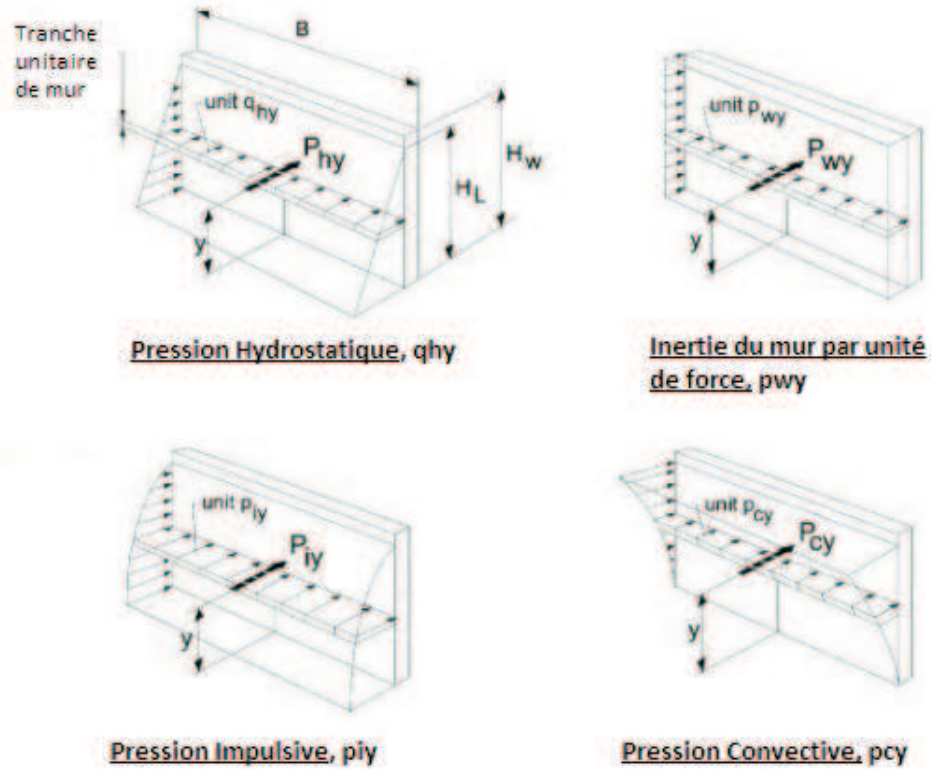


Figure 2.2 Différents types de pression au sein d'un réservoir rectangulaire lors d'un séisme (Source : ACI (2006))

La relation existant entre la pression hydrodynamique et le potentiel des vitesses est la suivante

$$p(x, y, z, t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.2)$$

2.2.4 Le phénomène de "sloshing"

Le phénomène de "sloshing" ou ballotement du liquide en Français, correspond à l'oscillation de la surface du liquide due à l'excitation de son contenant. Il s'agit d'un phénomène qui peut être fortement non-linéaire. Cependant sous certaines hypothèses, le ballotement ou la forme des vagues de pression se propageant en surface peut être modélisé linéairement. La

figure Fig.2.3 présente un aperçu des différents types de ballotement pouvant avoir lieu dans un réservoir de liquide.

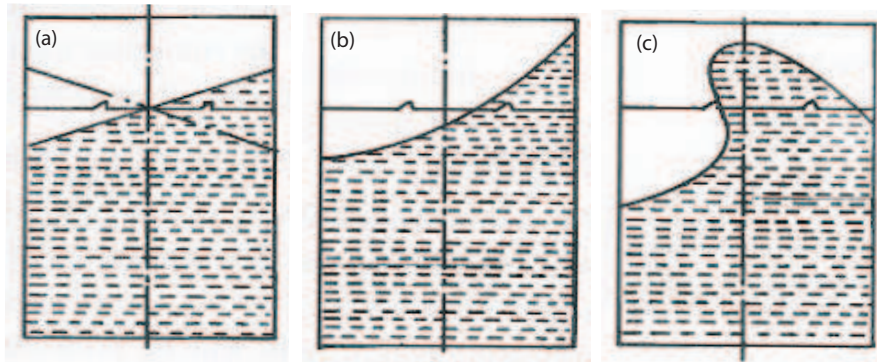


Figure 2.3 (a) Ballotement linéaire-(b) Ballotement faiblement non-linéaire-(c) Ballotement fortement non-linéaire (Source : Ibrahim (2005))

Dans le cas de la fig. (2.3)(a), le liquide subit de très faibles oscillations et sa surface reste plane. Il s'agit d'un cas parfaitement linéaire qui peut être décrit par les équations d'oscillation d'un pendule linéaire.

Dans le cas de la fig. (2.3)(b), le liquide subit des oscillations plus ou moins importantes et sa surface n'est plus plane. La surface du liquide est décrite par des équations différentielles de faibles non-linéarités qui peuvent être résolues à l'aide de la méthode des perturbations (on distingue la théorie linéaire d'Airy, théorie d'ordre 1 en $O(\epsilon)$ des théories d'ordre supérieur ou égale à 2 introduites par Stokes). Un rappel de ces théories est fait en annexe A.

Dans le cas de la fig. (2.3)(c), le liquide possède un mouvement fortement non-linéaire en surface principalement due à des changements rapides de vitesses associés aux impacts de la pression hydrodynamique au voisinage de la surface libre du liquide. Ce comportement du fluide très non-linéaire nécessite des méthodes de calcul élaborées.

2.3 Modes de rupture des réservoirs sous excitation sismique et analyses de risques

2.3.1 Modes de rupture et d'endommagement

Les réservoirs de stockage tels que les réservoirs de pétrole ou encore les réservoirs d'eau potable, sont des structures particulièrement surveillées en cas de séisme, en raison des accidents qui ont eu lieu lors des séismes passés. Lors de séismes, les réservoirs de produits inflammables ou toxiques constituent de véritables bombes à retardement, et peuvent parfois causer plus de dégât que le séisme lui-même. Un accident notable de ce genre s'est produit lors du séisme de Kocaeli de 1999 en Turquie, qui a frappé la raffinerie de Tupra, 7^{eme} raffinerie Européenne, et causé plus de 500 millions de dollars US de dégâts matériels et de pertes selon Sezen *et al.* (2000). Lors de ce séisme, des réservoirs de naphta couverts ont subi un ballotement excessif de leur toit flottant qui, en frottant avec les parois, a créé des étincelles enflammant instantanément le liquide. Le feu c'est ensuite propagé vers les réservoirs de pétrole brut, endommageant 30 des 45 réservoirs couverts par un toit flottant. En plus des pertes économiques, des quantités importantes de matière toxique ont été libérés dans l'environnement incluant, 200 tonnes d'ammoniac anhydre servant à réguler les surpressions dans les réservoirs, 6500 tonnes d'acrylonitrile (ACN) échappés des réservoirs endommagés, 1200 tonnes d'oxygène cryogénique, et des fumées toxiques qui en s'échappant des fermes de réservoirs ont pris feu et mis des jours à être éteintes d'après Steinberg *et al.* (2000).

Dans ce genre d'accident industriel, les réservoirs d'eau constituent des ressources inestimables pour contenir les incendies et survenir aux besoins de la population sinistrée alentour. Après chaque séisme, des observations des dommages subis par les installations sont faites, dans le but d'évaluer les pertes mais également de vérifier la validité des normes de dimensionnement para-sismique, et de les améliorer si besoin est.

Les paragraphes qui suivent présentent de manière non exhaustive les dégâts classiques observés sur les réservoirs après un séisme.

(1) Dégâts mineurs à modérés sur la structure du réservoir

i) Flambement du fond des réservoirs cylindriques, (voir Fig.2.4) :

-De type "elephant-foot" (pied d'éléphant), il s'agit d'un flambement axi-symétrique plastique due à une concentration de contrainte, surtout observé sur les réservoirs larges ($H/D < 1$). (Fig 2.4a)

-De type "diamond-shaped" (en forme de diamant), il s'agit d'une déformation élastique observée sur les réservoirs à parois minces. (Fig 2.4b)

-De type "elephant-knee" (genou d'éléphant), il s'agit d'un flambement plastique axi-symétrique situé un peu en dessous du milieu de la hauteur du réservoir. (Fig 2.4c)

ii) Flambement au sommet des murs due au ballottement, (voir Fig. 2.5)

iii) Glissement de la base du réservoir en raison d'un mauvais ancrage ou d'une absence d'ancrage, (voir Fig. 2.6)



Figure 2.4 (a) Réservoir avec déformation de type "elephant-foot" lors du séisme d'Alaska 1964 de magnitude 9.2 (Source : Applied Technology Council (2011))-(b) Réservoir avec déformation de type "diamond-shaped" (Source : Malhotra (2006))-(c) Réservoir avec déformation de type "elephant-knee" lors du séisme de Port-au-Prince 2010 de magnitude 7 (Source : Applied Technology Council (2011))



Figure 2.5 Déformation de la partie supérieure de la paroi et du toit d'un réservoir
(Source : Malhotra (2006))



Figure 2.6 Glissement de la base d'un réservoir lors du séisme de Buhj 2001 en Inde
(Source : Malhotra (2006))

(2) Dégâts sur les accessoires, canalisations et systèmes d'ancrage du réservoir

i) Rupture de la conduite d'entrée-sortie du liquide due, (voir Fig. 2.7) :

- Au flambement de la paroi (elephant-foot).
- Au soulèvement ou au glissement de la base.

ii) Endommagement des accessoires entourant le réservoir, (voir Fig. 2.8) :

- Détérioration du système de lutte contre les incendies du réservoir.
- Rupture des escaliers de maintenance

iii) Rupture des connections d'ancrage au sol, (voir Fig. 2.9)



Figure 2.7 (a)Rupture de la conduite d'entrée-sortie due au flambement de la paroi d'un réservoir-(b) Rupture de canalisation d'approvisionnement d'un réservoir due au glissement de sa base (Source : Malhotra (2006))



Figure 2.8 (a)Endommagement du système de lutte contre les incendies sur un réservoir - (b)Rupture des escaliers de maintenance d'un réservoir- lors du séisme de Chi Chi 1999 de magnitude 7.6 à Taiwan (Source : Chen et Chiang (2000))



Figure 2.9 Rupture des connections d'ancrage d'un réservoir lors du séisme du Chili 2010 de magnitude 8.8 (Source : Applied Technology Council (2011))

(3) Dégâts sur la toiture des réservoirs couverts

i) **Endommagement du toit flottant par le ballotement**, (voir Fig. 2.10)

- Endommagement général du toit
- Endommagement localisé du joint du toit flottant

ii) **Naufrage du toit dans le réservoir**, (voir Fig. 2.11)

iii) **Débordement du réservoir du à l'endommagement du toit**, (voir Fig. 2.12)

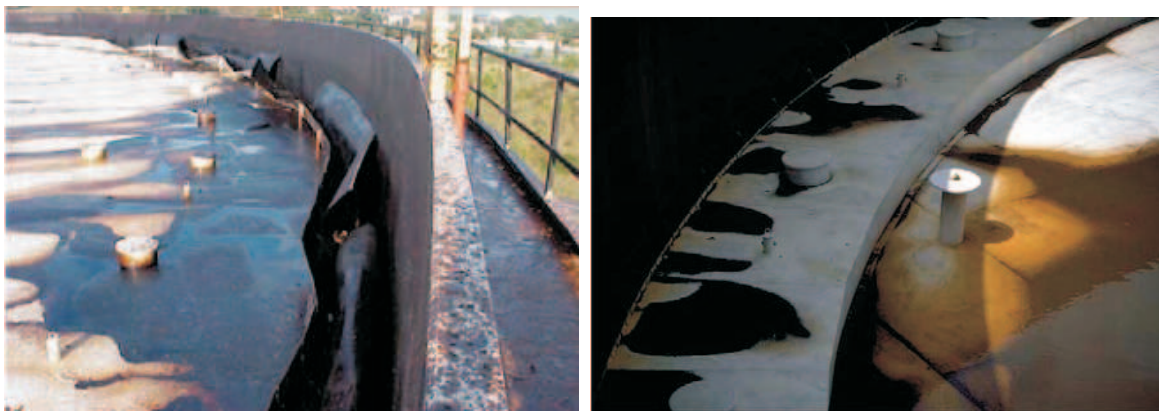


Figure 2.10 (a) Destruction du joint du toit flottant d'un réservoir de type "simple deck" et déformation de la structure du toit (Source : Malhotra (2006))-(b) Endommagement du joint de scellement du toit flottant d'un réservoir de type "double deck" lors du séisme de Izmit 1999 de magnitude 7.8 en Turquie (Source : Sezen *et al.* (2000))



Figure 2.11 Naufrage de toit flottant dans deux réservoirs (C et D) de kérosène lors du séisme de Tokachi-Oki 2003 de magnitude 8.0 au Japon (Source : Hatayama (2007))



Figure 2.12 Débordement d'un réservoir due au ballotement lors du séisme de Kocaeli 1999 en Turquie (Source : Sezen *et al.* (2000))

(4) Dégâts rendant inopérant le réservoir

i) **Rupture du support pour les réservoirs surélevés**, Voir Fig. 2.13

ii) **Destruction du réservoir**, (voir Fig. 2.14) :

- Implosion des réservoirs couverts par un toit fixe due à la perte de liquide par la base. -
- Destruction totale du réservoir par le feu.



Figure 2.13 (a) Rupture par cisaillement du support et destruction d'un réservoir élevé-
(b) Endommagement du support d'un réservoir élevé en béton-(Source : Malhotra (2006))



Figure 2.14 (a) Implosion d'un réservoir cylindrique à toit fixe (Source : Malhotra (2006)) (b)
Destruction par le feu d'un réservoir de pétrole lors du séisme de Kocaeli 1999 en Turquie
(Source : Sezen *et al.* (2000))

2.3.2 Analyses de risque pour des réservoirs soumis à un séisme

De nombreuses analyses de risques s'intéressant à l'impact de catastrophes naturelles sur des complexes industriels ont été réalisées, et notamment des travaux portant sur la probabilité d'impact d'un séisme en zone industrielle comportant des fermes de réservoirs ont été menées. On distingue principalement deux types d'analyse de risque ; analyse quantitatives et analyses qualitatives.

Les études de risque quantitatives reposent souvent sur des lois probabilistes. Dans le cas de l'étude de risque de l'impact d'un séisme sur une zone industrielle, la probabilité de dommage d'une installation à la suite d'un séisme est quantifiée en croisant les données fournies par les courbes de fragilité de l'installation avec les courbes de probabilité sismique de la région étudiée. Le travail récent de Fabbrocino *et al.* (2005) présente une méthode d'analyse de risque quantitative permettant de traduire le risque de perte de contenu de liquide, lors d'un séisme, dans une ferme de réservoirs en fonction de zones géographiques à probabilité variable. Korkmaz *et al.* (2011) ont présenté une analyse de risque quantitative de rupture d'un réservoir type lors d'un séisme.

Les études de risque qualitatives sont basées sur des analyses statistiques des dégâts observés lors d'événements passés documentés par des bases de données. Une étude de risque récente sur les accidents Natech (accidents industriels) a été réalisée par une équipe de chercheurs Européens : Krausmann *et al.* (2011). L'étude s'appuie sur plusieurs bases de données européennes et américaines. Elle s'intéresse aux accidents industriels déclenchés par des séismes, des inondations ou par la foudre, et propose un bilan et des recommandations. Cet article est particulièrement intéressant dans la présente section, car il fournit un classement des dégâts sismiques classiquement observés sur les réservoirs en fonction de leur gravité, et propose des recommandations permettant de palier aux défaillances observées.

L'article répartit les dommages sismiques observés sur les réservoir en deux catégories, selon qu'il y ai eu déversement de liquide ou non (voir Tabs. 2.1 et 2.2). La distribution des différents dommages en fonction de leur sévérité est présentée à la Fig. 2.15.

Tableau 2.1 Modes de ruptures non accompagné de déversement de liquide (Source : Krausmann *et al.* (2011))

Dommages Structuraux sans fuite	
Gravité	Type de dommages
Mineur	Flambement de type "Elephant-foot" Déformation du support de la structure Élongation des boulons de la structure Dommages dues au ballotement
Modérée	Rupture des boulons d'ancrage Défaillance des connections/soudures Dommages du toit dues au ballotement ou rupture des joints toit-réservoir Défaillance des colonnes ou de la structure de soutien

Tableau 2.2 Modes de rupture accompagné de déversement de liquide (Source : Krausmann *et al.* (2011))

Dommages Structuraux avec fuite	
Gravité	Type de dommages
Mineur	Défaillance partielle des brides ou des connecteurs
Grave	Défaillance avec perte de liquide par le toit ou le haut des murs
Catastrophique	Effondrement ou basculement du réservoir

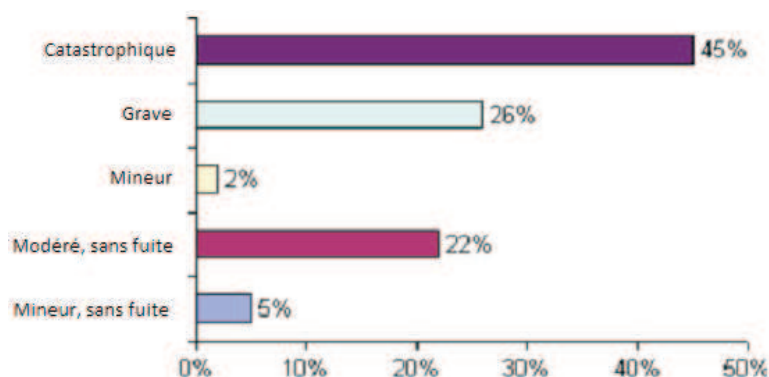


Figure 2.15 Distribution de la gravité des dommages en fonction du pourcentage de cas analysés (Source : Krausmann *et al.* (2011))

Les statistiques présentées par la Fig. 2.15 ont été réalisées à partir de l'étude de 79 cas sélectionnés dans des bases de données. Il ressort de cette étude, que dans la majorité des cas de réservoirs frappés par un séisme, il y a déversement du produit contenu.

Le tableau (Tab. 2.3) extrait de Krausmann *et al.* (2011) fournit les leçons et recommandations faites pour les principaux modes de rupture observés durant un séisme.

Tableau 2.3 Leçons et recommandations (Source : Krausmann *et al.* (2011))

Leçons à retenir	Recommandations
Les toits flottants ont tendance à prendre feu durant un séisme. Le ballotement du liquide peut entraîner un frottement du toit métallique contre les murs, induisant des étincelles pouvant enflammer le liquide contenu si celui-ci est inflammable.	Le risque associé aux réservoirs à toit flottant dans les zones sismiques doit-être ré-évalué.
Le ballotement du liquide peut compromettre l'intégrité structural des réservoirs pleins.	Le ballotement du liquide et les forces dynamiques induites sur les murs du réservoir doivent être pris en compte dans l'évaluation du risque en zone sismique.
Les connections rigides entre les conduites et les équipements sont vulnérables aux secousses et aux endommagements des réservoirs, leur rupture peut conduire à des fuites de liquides.	Des connections spécifiques doivent être utilisées dans les zones à risque sismique.
Les barrières de sécurité permettant d'éviter un accident ou d'atténuer ses conséquences, telles que les puisards autour des réservoirs ou les systèmes d'arroseurs, peuvent échouer en cas de séismes.	Des moyens de prévention actifs et passifs, adaptés aux complexes doivent être dimensionnés pour supporter les forces probables générées par un séisme.
Les équipements non ancrés peuvent subir des dommages avec les déplacements latéraux ou le basculement.	L'ancrage et la retenue des équipements pourrait empêcher de manière efficace les déplacements latéraux, préservant ainsi l'équipement.
Un séisme peut déclencher plusieurs fuites au sein d'un même complexe ou affecter plusieurs usines chimiques à la fois.	Les caractéristiques de l'impacte d'un séisme sur une usine chimique, et le possible effet domino qui pourrait en résulter, doivent être pris en compte dans l'organisation spatiale des installations et dans la préparation des plans d'intervention d'urgence. En particulier, les planifications d'urgences sur le site doivent prendre en compte la possibilité que les moyens d'intervention extérieurs au site ne soient pas disponibles, étant occupés à lutter contre les conséquences de la catastrophe naturelle. D'un autre côté, les planifications d'intervention hors-site doivent prendre en compte les fuites possibles à l'extérieur du site et l'impacte qui en résulterait alors sur les opérations d'intervention. La mise en place d'un système d'alerte précoce et de réponse rapide aux séismes dans les usines serait utile pour permettre la fermeture automatique des systèmes critiques en cas de séisme.

On retiendra en particulier du tableau (Tab. 2.3), les leçons et recommandations faites sur l'effet du ballotement dans la partie supérieure des réservoirs incluant le toit dans le cas des réservoirs couverts.

2.4 Recherches antérieures

Le problème d'interaction fluide structure au sein des réservoirs soumis à une excitation dynamique est un problème récurrent dans les domaines de l'aérospatiale, du génie civil, du génie nucléaire, de la physique, de la navigation pétrolière et des mathématiques.

A première vue, si le problème paraît semblable d'un domaine à l'autre, en revanche chaque discipline scientifique emploie des modélisations physiques et des techniques numériques adaptées à ses besoins et qui ne sont pas toujours facilement transposables d'un domaine à l'autre, en raison de certaines hypothèses faites, ou simplement de la nature même des réservoirs étudiés. Par exemple, dans le domaine du génie civil, les structures étudiées de type : barrages, réservoirs de pétrole, château d'eau surélevés, sous excitation sismique, sont considérées comme étant fixes par rapport au sol, reprenant directement l'accélération de celui-ci. Tandis que dans le domaine de l'aérospatial qui s'intéresse par exemple, aux effets du ballotement du propergol liquide sur les performances de vol des véhicules à propulsion, les réservoirs étudiés sont en mouvement, et les sollicitations dynamiques considérées sont d'une nature plus complexe. C'est pourquoi chaque domaine scientifique a développé sa propre science du problème d'interaction fluide-structure, adaptée à ses applications.

Cette revue de littérature se réfère principalement aux recherches liées aux développements qui ont été réalisées dans le domaine du génie civil. La première partie présente de manière chronologique les travaux majeurs menés sur les réservoirs sollicités de manière sismique, en mettant en exergue les études impliquant des réservoirs rectangulaires. La seconde partie s'intéresse plus particulièrement aux recherches réalisées dans le domaine des réservoirs couverts par un toit flottant sous sollicitation sismique.

2.4.1 Recherches générales réalisées sur les réservoirs dynamiquement sollicités

Lors du dimensionnement para-sismique de structures telles que les réservoirs ou les barrages, l'évaluation des forces hydrodynamiques est une étape cruciale. L'un des premiers à avoir fourni une solution à ce problème fut Westergaard (1933) en déterminant les pressions hydrodynamiques sur un barrage poids rectangulaire rigide soumis à une accélération horizontale à l'aide d'une méthode analytique simplifiée utilisant des masses ajoutées d'eau. En ce qui concerne le comportement dynamique des réservoirs de stockage, les pionniers en ce domaine, furent Hoskin et Jacobsen (1934) qui, en se basant sur le travail de Westergaard, conduisirent des études théoriques et expérimentales pour évaluer les pressions hydrodynamiques développées dans les réservoirs rectangulaires soumis à une excitation sismique. L'un des premiers chercheurs à s'être intéressé aux châteaux d'eau, Ruge (1938), étudia de manière expérimentale les effets d'un séisme sur des réservoirs surélevés, et mit en évidence le

couplage entre le fluide et le système réservoir-support élevé. Par la suite, Jacobsen (1949) et Jacobsen et Ayre (1951) étudièrent, de manière expérimentale et analytique, la réponse dynamique de réservoirs cylindriques rigides. Werner et Sundquist (1949) étendirent le travail de Jacobsen aux réservoirs de forme rectangulaires, semi-circulaires, triangulaires et sphériques. Graham et Rodriguez (1952) fournirent une analyse détaillée des pressions hydrodynamiques convectives, liées au ballotement du fluide, et impulsives dans les réservoirs rectangulaires. Vers la fin des années 1950 et le début des années 1960, Housner publia deux travaux Housner (1957) et Housner (1963) dans lesquels il formula la méthode analytique simplifiée encore employée de nos jours par les ingénieurs de la pratique, permettant d'estimer la réponse d'un liquide dans des réservoirs rectangulaires ou cylindriques rigides, excités de manière sismique. Cette méthode utilise la décomposition de la pression hydrodynamique en pression impulsive et convective. La pression impulsive est modélisée par une masse rigidement connectée aux parois du réservoir et la pression convective est modélisée par une série de masses reliées aux parois par des ressorts, avec des tailles décroissantes représentant les différents modes fondamentaux de ballotement. Les masses sont fixées au niveau des résultantes des différentes constituantes de la pression. (Voir Fig. 2.16)

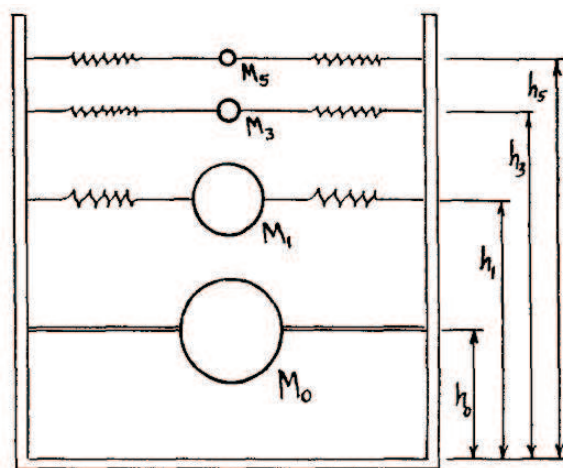


Figure 2.16 Modèle de Housner (Source : Housner (1957))

Comme on peut le constater à la Fig. 2.16, les masses modélisant le ballotement portent uniquement des numéros impairs correspondant aux modes de ballotement antisymétriques. Les modes de ballotement symétriques numérotés par des numéros pairs ne sont pas présents. En effet, le réservoir étant considéré rigide, leur facteur de participation est nul. Par ailleurs, on voit que la masse représentant le premier mode de ballotement est bien plus grande que celles des autres modes, ce mode est prépondérant dans la réponse convective. Dans son ar-

ticle, Housner (1963) ne conserve d'ailleurs que le premier mode de ballotement dans son modèle et justifie par le fait que c'est le mode qui a le plus d'importance dans la réponse à une excitation sismique (voir Fig. 2.17).

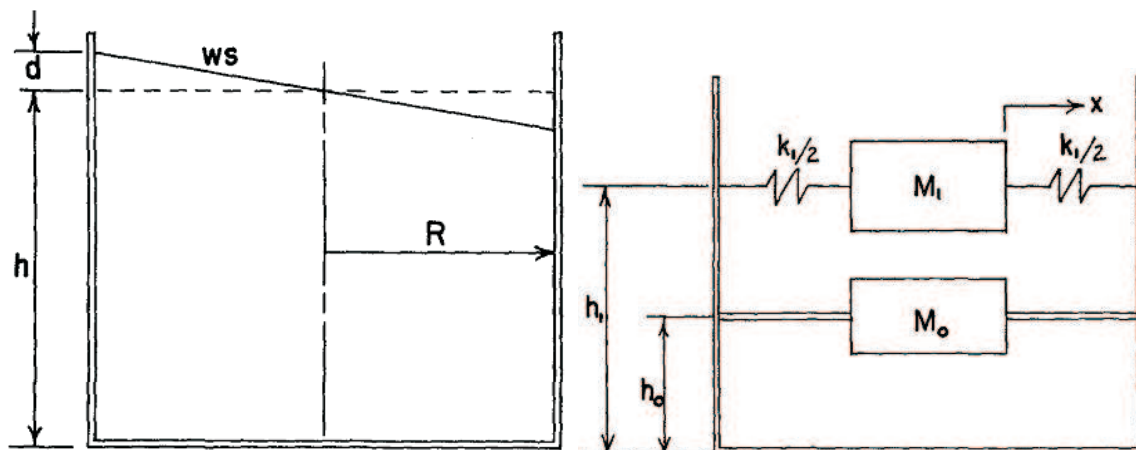


Figure 2.17 Modèle simplifié de Housner (Source : Housner (1963))

La figure 2.17(a) représente la déformée en surface du premier mode de ballotement. La figure 2.17(b) représente la modélisation simplifiée à l'aide de masses et ressorts pour un mode de ballotement. La méthode de Housner est très utilisée pour déterminer la réponse sismique maximale d'un réservoir à l'aide d'un spectre de réponse.

Jusque dans les années 1960, la flexibilité des réservoirs était négligée dans l'évaluation de la réponse sismique qui se focalisait alors uniquement sur le comportement dynamique du fluide. Cependant, les dommages sévères constatés sur les réservoirs de stockage lors des séismes du Chili 1960 décrits dans le travail de Steinbrugge et Flores (1963), d'Alaska 1964 décrits par Hanson (1973) and Rine (1967) et de Nigaata 1964, poussèrent les chercheurs de l'époque à s'intéresser aux propriétés vibratoires des réservoirs. A la même époque, la naissance de l'ère informatique, permet le développement des première méthodes numériques assistées par ordinateur, Edwards (1969) est le premier à avoir employé l'outil informatique pour évaluer la réponse dynamique d'un réservoir cylindrique flexible encastré. Dans la même lignée, Shaa-ban (1975) and Balendra (1978) déterminèrent la réponse sismique de réservoirs cylindriques flexibles sans et avec toit respectivement, en utilisant la méthode des éléments finis. L'une des premières méthode analytique prenant en compte la flexibilité du réservoir fut proposée par Veletsos (1974). Cette méthode est une extension de la méthode de Chopra (1967,1968,1970) utilisée dans le calcul sismique des barrages poids. La méthode suppose que les déplacements en chaque point du réservoir $u(x,y,t)$ s'écrivent dans la base des modes de vibration tronquée

à un mode (mode prescrit qui vérifie les conditions cinématiques)

$$u(x, y, t) = \psi_1(x, y) w(t) \quad (2.3)$$

où $w(t)$ représente la coordonnée généralisée du système et ψ_1 représente la fonction de forme du premier mode de vibration de la structure. Les pressions hydrodynamiques au sein du réservoir sont obtenues en résolvant l'équation de Laplace à l'aide des conditions aux frontières. Enfin la coordonnée généralisée $w(t)$ est déterminée à l'aide de l'équation d'équilibre dynamique de la coque, que l'on peut obtenir à l'aide du théorème des puissances virtuelles comme suit

$$[m_{W,S}^* + m_{W,\ell}^*] \ddot{w} + c^* \dot{w} + k^* w = -[m_{u,S}^* + m_{u,\ell}^*] \ddot{u}(t) \quad (2.4)$$

avec

$$m_{u,S}^* = \int_0^{H_S} \mu(y) \psi_1(y) dy + m_r \psi_1(H_S) \quad m_{W,S}^* = \int_0^{H_S} \mu(y) \psi_1^2(y) dy + m_r \psi_1^2(H_S) \quad (2.5)$$

$$m_{u,\ell}^* = \int_0^{H_S} S_U(y) \psi_1(y) dy \quad m_{W,\ell}^* = \int_0^{H_S} S_W(y) \psi_1(y) dy \quad (2.6)$$

$m_{u,S}^*$ et $m_{u,\ell}^*$ les facteurs de participation modale généralisés correspondant aux masses de solide et fluide respectivement et $m_{W,S}^*$ et $m_{W,\ell}^*$ les masses généralisées de solide et de fluide respectivement.

Plus tard, Veletsos et Yang (1976) présentèrent des formules simplifiées permettant de calculer les fréquences naturelles fondamentales couplées de la structure et du liquide à l'aide de la méthode énergétique de Rayleigh-Ritz. Epstein (1976) présenta des formules et des courbes de dimensionnement basées sur le modèle de Housner, pouvant être utilisées pour estimer les moments de flexion et de renversement dans les réservoirs rectangulaires et cylindriques soumis à une excitation sismique ainsi que pour estimer le maximum en déplacement de la surface libre due au ballotement. Vers la fin des années 1970, D.P. Clough conduisit une série d'expérimentations Clough (1977), Clough et Clough (1978) et Clough *et al.* (1978), sur des réservoirs cylindriques en aluminium de taille réduite 1/3 (avec $H/D < 1$) excités sismiquement. Il fit varier les conditions d'ancrage et les conditions à la surface des réservoirs (surface libre, avec toit fixe, avec toit flottant). Ces expériences vont notamment mettre en évidence la présence non négligeable de déformations non circulaires des réservoirs due aux modes de type $\cos(n\theta)$ (voir Fig. 2.18), déformations alors non prises en compte par les codes de dimensionnement para sismiques.

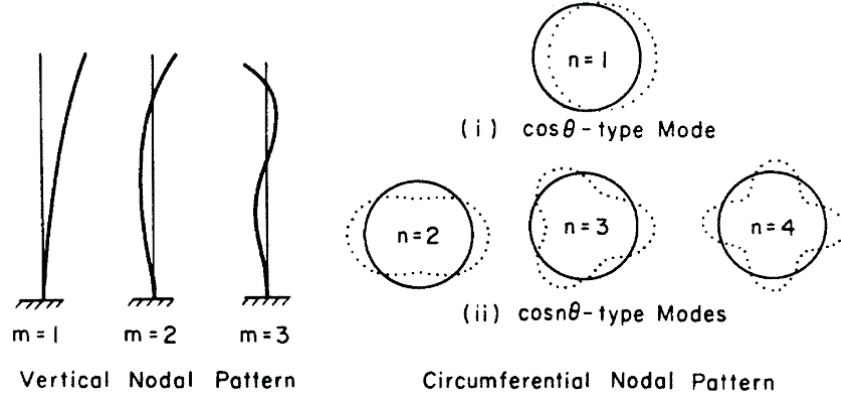


Figure 2.18 Profils verticale et circonférentiel des modes de vibration de réservoirs cylindriques à vide (Source : Haroun (1980))

A partir des années 1980, M.A. Haroun, avec la collaboration de G.W. Housner publie une série de travaux portant sur le comportement dynamique des réservoirs cylindriques et rectangulaires. Haroun (1980) présente une méthode numérique pour déterminer la réponse dynamique de réservoirs cylindriques. Il utilise la méthode des éléments finis pour modéliser les parois du réservoir et traite le liquide comme un milieu continu en résolvant l'équation de Laplace qui le gouverne à l'aide des conditions aux frontières mouvantes. L'équation du mouvement pour des vibrations libres de la coque est déterminée à l'aide du principe d'Hamilton

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0 \quad (2.7)$$

ou T et U représente l'énergie cinétique et l'énergie potentielle respectivement de la coque

$$U(t) = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_S] \{q\}; \quad T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_S] \{\dot{q}\} \quad (2.8)$$

$[K_S]$ et $[M_S]$ sont les matrices assemblées, de rigidité et de masse respectivement de la coque. W représente le travail réalisé par la pression du liquide

$$W = -\{\dot{q}\}^T [DM] \{\ddot{q}\} \quad (2.9)$$

avec $[DM]$ la masse ajoutée équivalente correspondant à la pression du fluide déterminée à l'aide de la méthode des travaux virtuels. L'insertion des équations Eqs. (B51) et (B52) dans l'équation d'Hamilton Eq.(2.7) donne l'équation de vibrations libres du système coque-liquide

$$([M_S] + [DM]) \{\ddot{q}\} + [K_S] \{q\} = \{0\} \quad (2.10)$$

La méthode traite également le problème avec une excitation sismique en suivant la même méthodologie, distinguant les réponses de type $\cos(\theta)$ et de type $\cos(n\theta)$. Haroun (1983) mène une série d'expérimentations à l'université de Berkeley. Des tests dynamiques de vibrations ambiantes et forcées sont menés sur des réservoirs à taille réelle. Deux réservoirs sont munis d'une instrumentation permanente dans le but de mesurer la réponse à un éventuel séisme in-situ. Haroun (1984) donne une méthode permettant de déterminer les efforts dans les parois de réservoirs rectangulaires. Il s'agit d'une méthode de simple interaction entre le liquide et la structure. En effet, le liquide est traité comme un milieu continu en résolvant l'équation de Laplace à l'aide des conditions aux frontières du réservoir rigide sollicité sismiquement dans les trois directions. Une fois la pression déterminée, les efforts et déplacements au sein de chaque parois sont déterminées à l'aide de l'équation de Timoshenko et Woinowsky (1959)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{P}{K} \quad (2.11)$$

ou P correspond à des cas de chargement de pression hydrodynamique. Le déplacement w en chaque point des parois est entièrement déterminé à l'aide des conditions aux frontières des plaques.

L'effet de la composante verticale des excitations sismiques sur la réponse dynamique des réservoirs cylindriques fut traité par les chercheurs suivant : Luft (1984), Haroun (1985) et Veletsos et Tang (1985). Le premier s'intéresse aux réservoirs cylindriques en béton précontraint et propose une méthode analytique basée sur une décomposition du déplacement de chaque point du réservoir dans la base des coordonnées généralisées du réservoir

$$w(z, t) = \sum_j N_j(z) w_j(t) \quad (2.12)$$

ou $N_j(z)$ représente la j^{eme} fonction de forme et $w_j(t)$ représente la coordonnée généralisée. Les fonctions de forme N_j sont choisies de manière arbitraire de manière à former une famille de fonctions orthogonales cinématiquement admissibles. Dans l'étude $N_j(z) = \cos(k_j z)$. L'emploi de la méthode de Galerkin et de l'orthogonalité des fonctions de forme permet de déterminer toutes les inconnues. Haroun (1985) et Veletsos et Tang (1985) réutilisent leur méthodes respectives en les adaptant, de manière à prendre en compte l'accélération verticale.

Park *et al.* (1990) fournissent une méthode numérique robuste permettant de calculer la réponse sismique d'un réservoir rectangulaire. La Méthode des Éléments de Frontière (BEM) est utilisée pour calculer les pressions hydrodynamiques en prenant en compte le ballotement, tandis que la méthode des Éléments Finis (FEM) est employée pour déterminer la réponse

de la structure. La méthode permet de faire des analyses temporelles. Dans la même lignée, Kim *et al.* (1996) présentent une méthode analytique permettant de calculer la réponse dynamique des réservoirs rectangulaires flexibles en trois dimensions soumis à des excitations horizontales et verticales. Sur les quatre murs, deux sont considérées rigides, les deux autres sont flexibles. Deux jeux de conditions aux frontières pour les plaques flexibles sont pris en compte. La pression hydrodynamique est déterminée en résolvant l'équation de Laplace muni des conditions aux frontières. Le déplacement en chaque point des parois flexibles est donné sous la forme d'une décomposition dans la base des modes généralisés

$$w(y, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_m^y \psi_n^z f_{mn}(t) \quad (2.13)$$

ou $f_{mn}(t)$ sont les coordonnées généralisées à déterminer ; ψ_m^y est la fonction de forme du m^{eme} mode de vibration d'une poutre cantilever et ψ_n^z est la fonction de forme du n^{eme} mode de vibration d'une poutre bi-encastée ou bi-simplement appuyée en fonction des conditions aux frontières des murs flexibles, considérées. L'application du principe d'Hamilton permet d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires solvable dont les inconnues sont les coordonnées généralisées $f_{mn}(t)$. Dans la méthode décrite, la pression convective n'est pas prise en compte directement mais calculée à l'aide des conditions aux frontières rigides.

A partir des années 1980, un travail important sur la triple interaction fluide-structure-fondation est réalisé, on peut notamment citer les travaux de : Haroun et Ellaithy (1985), Veltsos et Tang (1990), Haroun et Abou-Izzedine (1992a), Haroun et Abou-Izzedine (1992b). La recherche dans ce domaine est encore active de nos jours : Livaoglu (2008) et Kianoush et Ghaemmaghami (2011). Il a été démontré selon certaines de ces sources que la prise en compte de l'interaction avec la fondation pouvait réduire de manière significative la composante impulsive de la pression, en revanche, il semblerait qu'il n'y ai pas d'effet sur la composante convective.

Lors de l'analyse des réservoirs de stockage sollicités par un séisme, l'étude du ballotement est fondamentale. En effet, il faut éviter le débordement du liquide et l'endommagement de la partie supérieure des réservoirs. Le ballotement est un phénomène par nature non-linéaire, cependant, en faisant l'hypothèse de faibles amplitudes d'oscillation du liquide, il est possible de linéariser la condition à la surface de ballotement. C'est cette condition à la frontière linéaire qui est considérée dans la plupart des études de génie civil qui se concentrent sur l'étude de la pression impulsive. En général, compte tenu de l'écart fréquentiel entre les modes convectifs basses fréquences et les modes impulsifs hautes fréquences, ces deux types de pression sont calculés de manière séparée. La pression convective est calculée en prenant en compte le réservoir avec des parois rigides. Housner (1957) et Housner (1963) donnent

des méthodes analytiques approximatives permettant de prendre en compte le ballotement à l'aide de modèles masses/ressorts. Haroun (1980) prit en compte le ballotement dans sa méthode semi-analytique. Gupta et Hutchison (1990) fournirent une méthode analytique permettant de prendre en compte les deux composantes de la pression hydrodynamique dans les réservoirs cylindriques. Dans leur méthode, les modes couplés liquide-structure sont déterminés à l'aide du quotient de Rayleigh tandis que le problème général entre la structure et le fluide, incluant le ballotement est traité à l'aide des principes variationnels de Toupin et d'Hamilton. La méthode prend en compte le couplage entre les deux types de pression. Chen *et al.* (1996) s'intéressent au problème non linéaire de ballotement dans les réservoirs rectangulaires sollicités sismiquement. Le problème est résolu numériquement à l'aide de la méthode des différences finis. Fisher et Rammerstorfer (1999) fournissent une analyse analytique raffinée montrant l'influence de la flexibilité des parois sur la pression convective dans les réservoirs cylindriques soumis à une excitation sismique. La décomposition des déplacements des parois dans la base des coordonnées généralisées et l'emploi du principe d'Hamilton sont employés pour déterminer les inconnus du problème. Virella *et al.* (2008) réalise une comparaison entre la théorie linéaire et non linéaire du ballotement dans les réservoirs rectangulaires en se servant de la méthodes des éléments finis. Ils montrent notamment que la distribution des pressions dans les réservoirs rectangulaires sont similaires avec les deux théories. Dans les cas de la théorie non linéaire cependant, les élévations du liquide sont supérieurs à celles obtenues à l'aide de la théorie linéaire. Ces résultats confirment les conclusions obtenus dans l'étude de Chen *et al.* (1996).

2.4.2 Recherches menées sur les réservoirs à toit flottant sollicités sismiquement

L'étude d'une condition de blocs flottants, tels que de la glace, présente une similitude avec l'étude des réservoirs à toit flottant, d'où l'importance d'une revue de littérature sur les réservoirs couverts.

Les toits flottants sont des systèmes principalement employés dans le domaine de l'industrie pétrolière pour couvrir les réservoirs de pétrole. L'objectif de ces systèmes est de minimiser les formations de vapeur d'hydrocarbures afin de limiter les pertes et les risques d'inflammation. Lors de l'étude du comportement sismique de tels réservoirs couverts, l'interaction fluide-toit flottant ne doit pas être négligé. Par le passé, des cas de ruptures et de naufrages de toits ont été constatés, notamment lors des séisme de Kocaeli (1999) en Turquie et de Tokachi-oki (2003) au Japon. Dans la plupart des cas cependant, les impacts du toit flottant sur les parois du réservoir endommage la structure et peut provoquer par frottement, l'inflammation du liquide contenu si ce dernier est inflammable. Dans la majorité des cas étudiés, la structure du réservoir à toit flottant est supposée rigide et le toit flexible. Bauer (1993) étudie par une

méthode numérique le cas des réservoirs rectangulaires en deux dimension couvert par un toit en prenant en compte un jeu de conditions aux frontières pour modéliser les connections du toit avec les parois du réservoir. Le toit est modélisé à l'aide d'une poutre ou d'une membrane. Matsui (2007) et Matsui (2009) fourni une méthode analytique pour l'étude des réservoirs cylindriques à paroi rigide et à toit flottant simple et single-deck respectivement, soumis à une excitation sismique latérale. Nagashima (2010) étudie les réservoirs cylindriques à toit flottant et parois flexibles à l'aide d'une méthode par éléments finis.

2.5 Revue des normes sur le dimensionnement para-sismique des réservoirs

Cette partie a pour objectif de présenter deux normes de dimensionnement parasismique pour les réservoirs rectangulaires : l'**Eurocode 8** et l'**ACI 350.1**. Ces normes fournissent des formules pour le dimensionnement parasismique des réservoirs et donne des méthodes simplifiées permettant de réaliser une analyse sismique.

De manière générale, les normes de dimensionnement parasismique des réservoirs mettent l'accent sur les points suivant :

- le sloshing et la flexibilité de la structure
- la ductilité et la capacité à dissiper de l'énergie

Le premiers point a été très largement traité dans la littérature et constitue encore un sujet de recherche actuel. En ce qui concerne la ductilité, très peu de méthodes simples permettent sa prise en compte. La ductilité est souvent déterminée par des méthodes empiriques. Il est reconnu que les réservoirs sont des structures beaucoup moins ductiles que les bâtiments et par ailleurs dissipent moins bien l'énergie que ces derniers. Les facteur de réduction des forces sismiques étant plus petits, lors du calcul des actions sismiques latérales, les forces mises en jeu au sein des réservoirs sont relativement, bien plus grandes, que celles considérées dans les bâtiments. Ceci résulte du fait que les facteurs de réduction des forces sismiques sont plus petits.

Pour les analyses sismiques, les normes préconisent l'emploi de modèles mécaniques masse-ressort équivalents. Les normes fournissent des méthodes ou des indications pour estimer : la distribution des pressions sur les parois dues à une excitation latérale ou verticale, la période temporelle du réservoir pour les modes verticaux et horizontaux, l'effet de l'interaction sol-structure, la hauteur de sloshing.

2.5.1 Présentation de quelques normes

L'**Eurocode 8** est la norme Européenne pour le dimensionnement parasismique des structures du génie civil. Elle est constituée de six parties, la partie 4 traite du dimensionnement parasismique des silos, réservoirs et pipelines. Les réservoirs considérés sont des réservoirs cylindriques et rectangulaires à base fixe ou flexible, les réservoirs à support élevés sont également traités.

L'**ACI 350.3** est l'une des normes de l'American Concrete Institute (ACI) qui concerne le dimensionnement parasismique des réservoirs rectangulaires et circulaires, en béton, fixés au sol et sur supports élevés. La seconde norme parasismique de l'ACI, l'**ACI 371** fournit des recommandations pour l'estimation des efforts sismiques des réservoirs élevés à support en béton. L'International Building Code **IBC 2000** fournit des recommandations pour le dimensionnement d'un certain nombre de structures incluant les réservoirs.

L'American Water Works Association (AWWA) a publié de nombreuses normes sur le dimensionnement des réservoirs de stockage d'eau. L'**AWWA D-100** (1996) traite des réservoirs soudés en acier, l'**AWWA D-103** (1997) traite des réservoirs en acier boulonnés et enduits en usine. L'**AWWA D-110** (1995) traite des réservoirs en béton précontraints avec brins enroulés et bobinés tandis que l'**AWWA D-115** (1995) traite des réservoirs en béton précontraint avec des tendons en circonférence. Dans toutes ces normes, les réservoirs traités sont cylindriques.

L'American Petroleum Institute (API) possède deux normes **API 650** et l'**API 620** qui fournissent des recommandations pour le dimensionnement et la construction des réservoirs de pétrole cylindriques en acier.

2.5.2 Modèles mécaniques équivalents

Toutes les normes de dimensionnement parasismique des réservoirs emploient des modèles mécaniques masse-ressort pour évaluer les caractéristiques relatives aux pressions hydrodynamiques. Les premiers modèles mécaniques furent proposés par Housner (1963) pour les réservoirs rigides rectangulaires et circulaires. Wozniak et Mitchell (1978) généralisèrent les modèles de Housner pour les réservoirs courts et minces. Veletsos et Young (1977), par une approche différente, proposèrent un modèle mécanique pour les réservoirs cylindriques. Plus tard, Haroun et Housner (1981) et Veletsos (1984) ont développé des modèles mécaniques pour les réservoirs flexibles. Enfin, récemment Malhotra *et al.* (2000) a simplifié les modèles pour réservoirs flexibles de Veletsos (1974).

La norme **ACI 350.3** se base sur les modèles de Housner (1963) avec les modifications de Wozniak et Mitchell (1978). Les paramètres des modes impulsifs et convectifs sont évalués à partir de modèles rigides.

L'**Eurocode 8** suggère l'utilisation du modèle de Veletsos et Young (1977) pour les réservoirs circulaires rigides. Pour les réservoirs circulaires flexibles, les modèles de Veletsos (1984) et de Haroun et Housner (1981) sont conseillés avec les modifications proposées par Malhotra *et al.* (2000). En ce qui concerne les réservoirs rectangulaires l'emploi du modèle de Housner (1963) est recommandé.

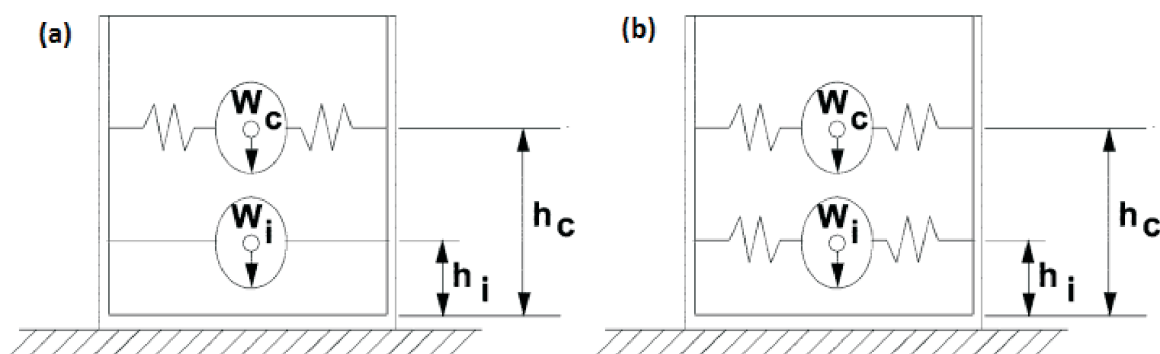


Figure 2.19 (a) Modèle de Housner-(b) Modèle de Malhotra (Source :)

Un développement sur le modèle mécanique équivalent de Housner a été réalisé en annexe C.

2.5.3 Pressions hydrodynamiques et périodes temporelles

On observe différents types de pressions hydrodynamiques au sein d'un réservoir en fonction des conditions d'excitation :

- [a] Pression hydrodynamique impulsive rigide due à une accélération horizontale du sol
- [b] Pression hydrodynamique convective rigide due à une accélération horizontale du sol
- [c] Pression hydrodynamique impulsive flexible due à une accélération horizontale du sol
- [d] Pression hydrodynamique convective flexible due à une accélération horizontale du sol
- [e] Pression hydrodynamique impulsive rigide due à une accélération verticale du sol
- [f] Pression hydrodynamique convective rigide due à une accélération verticale du sol
- [g] Pression hydrodynamique impulsive flexible due à une accélération verticale du sol
- [h] Pression hydrodynamique convective flexible due à une accélération verticale du sol

Cependant, compte tenue des hypothèses et des études réalisées par le passé, seules les pressions [a], [b], [c], [e] et [g] sont traitées dans les normes actuelles. D'après les études antérieurs, les pressions [d], [f] et [h] ont des effets très faibles et peuvent donc être négligées.

Excitation latérale des réservoirs rectangulaires rigides

L'**Eurocode 8** fournit la formule suivante pour déterminer la distribution verticale des pressions sur les parois rigides perpendiculaires à l'excitation sismique latérale

$$p(z, t) = p_i(z, t) + p_c(z, t) \quad (2.14)$$

Avec z la direction verticale. Ou la pression impulsive s'exprime comme suit

$$p_i(z, t) = q_0(z) \rho L A_g(t) \quad (2.15)$$

Avec :

L : représente la demi-largeur du réservoir dans la direction du chargement

$q_0(z)$: est une fonction exprimant la variation de la pression impulsive en fonction de la hauteur. (fonction représentée par des abaques Fig.2.21)

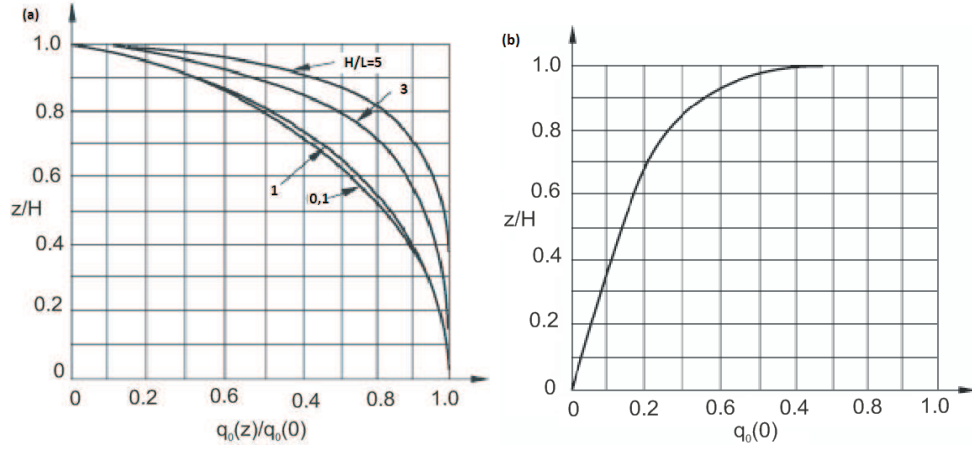


Figure 2.20 (a) Distribution en fonction de la hauteur de la pression impulsive a dimensionnée-
(b) Valeur maximale de la pression a dimensionnée (Source : Eurocode8(2003))

La pression convective est donnée par la sommation des contributions modales. La contribution modale dominante étant celle du mode fondamentale :

$$p_{c1}(z, t) = q_{c1}(z) \rho L A_1(t) \quad (2.16)$$

Avec :

$q_{c1}(z)$: pression convective a dimensionnée donnée dans l'abaque de la Fig.2.21

$A_1(t)$: La réponse en accélération d'un oscillateur à un degré de liberté ayant pour fréquence fondamentale, la fréquence du premier mode de sloshing et une valeur d'amortissement adaptée, à une accélération au sol $A_g(t)$.

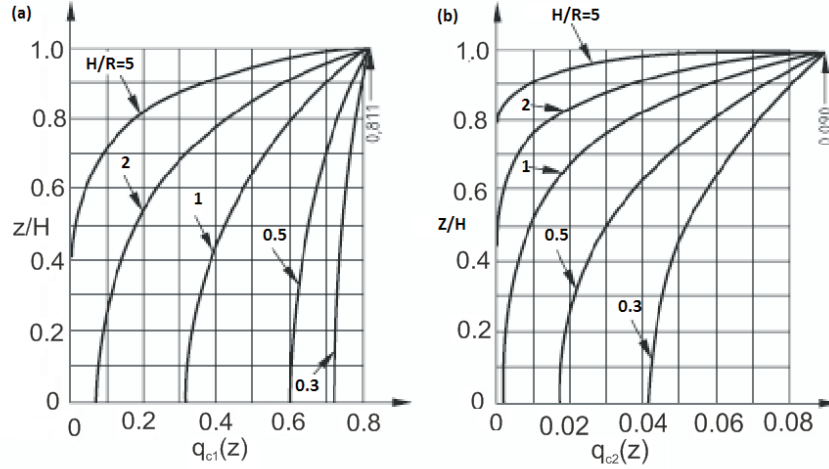


Figure 2.21 (a) Pression convective a dimensionnée du premier mode de sloshing -(b) Pression convective a dimensionnée du second mode de sloshing (Source : Eurocode8(2003))

La période du N^{eme} mode de sloshing est donnée par la formule suivante

$$T_N = 2\pi \left[\frac{L}{g} / \left(\frac{(2N-1)\pi}{2} \tanh \left(\frac{(2N-1)\pi}{2L} H \right) \right) \right]^{0.5} \quad (2.17)$$

L'**ACI 350.3** évalue les caractéristiques impulsives et convectives des réservoirs flexibles à l'aide des modèles de réservoirs rigides (voir la partie qui suit). Les réservoirs sont traités de manière pseudo-flexible.

Excitation latérale des réservoirs rectangulaires flexibles

Les normes réutilisent la distribution verticale de pression convective des réservoirs rigides dans le cas des réservoirs flexibles soumis à une excitation latérale. L'**Eurocode 8** préconise la formule suivante pour calculer la distribution de la pression impulsive

$$p_i(z, t) = q_0(z) \rho L A_{i1}(t) \quad (2.18)$$

ou $A_{i1}(t)$ correspond à la réponse en accélération d'un système à un degré de liberté soumis à l'accélération au sol $A_g(t)$ et possédant le taux d'amortissement et la fréquence fondamentale du premier mode de vibration de la pression impulsive. Une estimation de la période du premier mode impulsif est donnée par la formule suivante

$$T_f = 2\pi (d_f/g)^{1/2} \quad (2.19)$$

avec

d_f : le déplacement du mur par rapport à la ligne neutre verticale au niveau du point de fixation de la masse impulsive, quand le mur est chargé de manière uniforme dans la direction de l'accélération au sol avec la pression : $m_i g/4 H$;

$2 B$: la largeur du mur dans la direction perpendiculaire à l'excitation sismique

La masse m_i est calculée à l'aide de la formule pour les réservoir cylindriques :

$$m_i = 2 m \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_1(\nu_n/\gamma)}{\nu_n^3 I_1'(\nu_n/\gamma)} \quad (2.20)$$

ou $m = \rho \pi R^2 H$; $\gamma = H/R$; $\nu_n = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ et I_1 et I_1' représentent respectivement la fonction de Bessel d'ordre 1 et sa dérivée.

L'**ACI 350.3** fournit les formules suivantes pour les pressions impulsives et convectives respectivement

$$P_{iy}(y) = \frac{P_i}{2} \left[4 H_L - 6 h_i - (6 H_L - 12 h_i) \left(\frac{y}{H_L} \right) \right] / H_L^2 \quad (2.21)$$

$$P_{cy}(y) = \frac{P_c}{2} \left[4 H_L - 6 h_c - (6 H_L - 12 h_c) \left(\frac{y}{H_L} \right) \right] / H_L^2 \quad (2.22)$$

ou :

$$P_i = C_i I \left[\frac{W_i}{R_i} \right]; \quad P_c = C_c I \left[\frac{W_c}{R_c} \right] \quad (2.23)$$

avec

C_i : Coefficient de réponse sismique impulsif (déterminé à l'aide d'un spectre de réponse)

C_c : Coefficient de réponse sismique convectif (déterminé à l'aide d'un spectre de réponse)

I : Facteur d'importance

W_i et W_c : Poids de la masse impulsive et convective du fluide respectivement

R_i et R_c : Facteurs de modification de la réponse

H_L : Hauteur du liquide

h_i et h_c : Hauteur de la masse impulsive et convective respectivement

La période du premier mode impulsif est donnée par la formule suivante

$$T_i = 2 \pi \sqrt{\frac{m_w + m_i}{k}} \quad (2.24)$$

avec

$$m_w = H_w \frac{t_w}{12} \left(\frac{\gamma_c}{g} \right); \quad m_i = \left(\frac{W_i}{W_L} \right) \left(\frac{L}{2} \right) H_L \left(\frac{\gamma_L}{g} \right); \quad h = \frac{(h_w m_w + h_i m_i)}{(m_w + m_i)}; \quad k = \frac{E_c}{48} \left(\frac{t_w}{h} \right)^3 \quad (2.25)$$

Les masses convective et impulsive peuvent être obtenue directement par lecture du graphe de la figure Fig.2.22

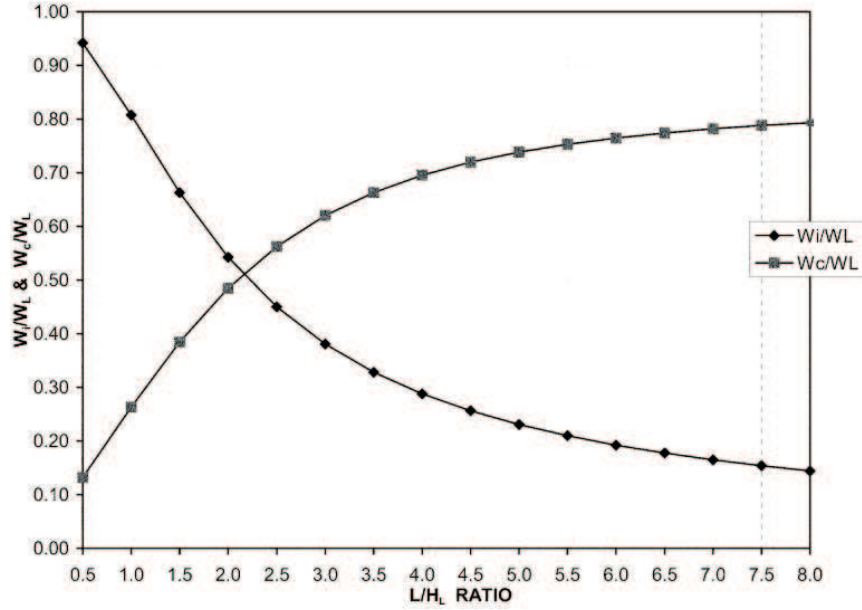


Figure 2.22 Poids du premier mode impulsif et du premier mode convectif en fonction du rapport L/H_L dans un réservoir rectangulaire (Source : ACI-Committee-350 (2006))

Les hauteurs de fixation de la masse impulsive h_i et de la masse convective h_c peuvent être déterminés graphiquement en fonction du rapport L/H_L du réservoir.(voir Fig.2.23)

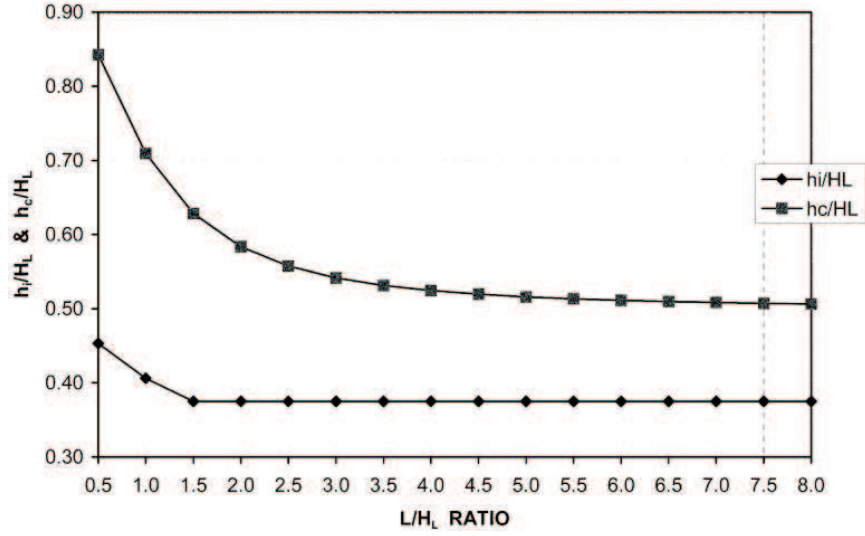


Figure 2.23 Hauteurs d'application des masses impulsive et convective en fonction du rapport L/H_L dans un réservoir rectangulaire (Source : ACI-Committee-350 (2006))

Excitation verticale des réservoirs rectangulaires

L'**Eurocode 8** fourni une formule permettant d'estimer la distribution des pressions sur les murs de réservoirs rectangulaires rigides uniquement.

$$p_{vr}(\xi, t) = \rho H (1 - \xi) A_v(t) \quad (2.26)$$

avec

ρ : la masse volumique de l'eau

H : la hauteur de liquide

$\xi = z/H$

$A_v(t)$: l'accélération verticale temporelle du sol

L'**ACI 350.3** fourni également une formule permettant d'estimer la distribution des pressions sur les murs de réservoirs rectangulaires rigides uniquement.

$$p_{vy}(y) = \gamma_L (H_L - y) \ddot{u}_v \quad (2.27)$$

avec \ddot{u}_v : Accélération spectrale prenant en compte l'effet de l'accélération verticale

$$\ddot{u}_v = C_t I \left[\frac{b}{R_i} \right]$$

C_t : Coefficient de réponse sismique

Comme on peut constater, la distribution verticale des pressions dues à une accélération au

sol verticale possède une forme triangulaire inversée comme celle de la pression hydrostatique.

2.5.4 Combinaison des différentes forces dynamiques dans le réservoir

Comme on a pu le constater dans la partie précédente, les forces hydrodynamiques dans l'**Eurocode 8** sont évaluées dans le domaine temporel. Dans ce domaine, la norme recommande l'addition simple des composantes impulsive et convective. En plus des force hydrodynamiques présentées dans la partie précédente, il est nécessaire de prendre en compte l'inertie du mur, qui peut parfois faire partie intégrante de la pression impulsive.

Pour le calcul de la réponse dynamique maximale, la méthode du spectre de réponse peut être employée. Dans ce cas étant donné les grands écarts existant entre les fréquences dominantes des spectres des différents types de pression, notamment entre la fréquence fondamentale de sloshing et la fréquence fondamentale impulsive, la méthode de combinaison SRSS est jugée non conservative, la méthode de sommation des valeurs absolues des maximas est conseillée.

Dans la norme **ACI 350.3**, la méthode du spectre de réponse est employée tout du long. La méthode de combinaison des différentes composantes dynamiques, incluant l'inertie du mur est la méthode SRSS contrairement à l'**Eurocode 8**. La formule proposée est la suivante

$$P_y = \sqrt{(P_{iy} + P_{wy})^2 + P_{cy}^2 + P_{vy}^2} \quad (2.28)$$

avec

P_{iy} : la résultante de la pression impulsive à la hauteur y

P_{wy} : la résultante de la force d'inertie à la hauteur y

P_{cy} : la résultante de la pression convective à la hauteur y

P_{vy} : la résultante de la pression verticale à la hauteur y

CHAPITRE 3

ARTICLE 1 - SEISMIC ANALYSIS OF RECTANGULAR WATER-CONTAINING STRUCTURES WITH FLOATING ICE BLOCKS

Article soumis a : **Journal of Cold Regions Science and Technology**

Auteurs : **Goulmot, D., Bouaanani, N.**

Date de soumission : **19 Juin 2012**

This paper presents a new formulation to investigate the effects of floating ice blocks on seismically-excited rectangular water-containing structures. The proposed method is based on a sub-structuring approach, where the flexible containing structure and ice-added mass are modeled using finite elements, while water effects are modeled analytically through interaction forces at the water-structure and water-ice interfaces, thus eliminating the need for reservoir finite element discretization. In addition to accounting for the influence of floating ice blocks and container walls' flexibility, the developed frequency- and time-domain techniques also include the effects of container geometrical or material asymmetry as well as the coupling between convective and impulsive components of hydrodynamic pressure. The proposed formulation is illustrated through a numerical example illustrating the dynamic response of an asymmetric water-containing structure covered with floating ice blocks. Obtained time- and frequency-domain responses are successfully validated against advanced finite element analyses including Fluid-Structure interaction capabilities. For the water-containing structure studied, the results show that the presence of floating ice blocks affects the frequency content and amplitudes of the dynamic responses corresponding to convective and impulsive modes.

Dynamic response ; Water-containing structure ; Ice effects ; Floating ice blocks ; Sloshing ice ; Hydrodynamic pressure.

3.1 Introduction

The dynamic behavior of water-containing structures has been widely studied in the last five decades to predict their response to seismic excitations and prevent heavy damage as observed during the 1960 Chilean Earthquakes (Steinbrugge and Flores (1963)), the 1964

Alaska Earthquake (Hanson (1973)), the 1964 Niigata Earthquake, and more recently the 1994 Northridge Earthquake (Hall (1995)), the 1999 Turkey Earthquake (Steinberg and Cruz (2004)) and the 2003 Tokachi-oki Earthquake (Koketsu et al. (2005)).

In earlier analytical work, the containing structure was assumed rigid and the studies mainly focused on the dynamic behavior of the contained liquid (Jacobsen (1949); Werner et Sundquist (1949); Jacobsen et Ayre (1951); Housner (1957); Housner (1963)). Significant observed post-earthquake damage showed that the rigid assumption may lead to the underestimation of the seismic response of such structures, and clearly indicated the necessity of including the flexibility and vibrating response of the containing structure as well as its coupled interaction with the contained liquid.

The work of Chopra (1967,1968,1970), Veletsos (1974), Haroun (1980) and many others subsequently (Veletsos et Yang (1976); Veletsos et Young (1977); Haroun and Housner (1981a); Haroun and Housner (1981b); Haroun (1983); Balendra et al. (1982)), confirmed that structural flexibility affects considerably the coupled dynamic response of water-containing structures. Another phenomenon which attracted the attention of many researchers is the effect of surface gravity waves and corresponding sloshing at the surface of the contained liquid during earthquake excitation. Indeed, it has been evidenced that liquid sloshing was generally a source of most damage observed in the upper part of liquid containing structures (Krausmann et al. (2011)). In numerical analyses, dynamic fluid pressures are generally decomposed into (i) a convective component generated by the sloshing of a portion of the fluid near the surface, and (ii) an impulsive component generated by a portion of the fluid accelerating with the containing structure. It has been shown that the coupling between liquid sloshing modes and container vibration modes is generally weak (Veletsos (1974); Haroun (1980); Haroun and Housner (1982)). Convective and impulsive pressures can then be first determined separately and their effects combined later to obtain the total dynamic response (Kana (1979); Malhotra *et al.* (2000)). Several researchers proposed refined analytical and numerical methods to assess sloshing effects in seismically-excited tanks, such as Veletsos and Tang (1976), Gupta and Hutchinson (1990), Fisher and Rammerstorfer (1999), and Ghaemmaghami and Kianoush (2010).

In cold climates, water-containing structures such as dams, tanks or navigation locks are generally covered with 1 to 2 m-thick ice sheets for significant periods of time during the year. Increasing exploration of natural resources in northern regions has motivated a variety of research programs which mainly focused on the dynamic response of ice-surrounded offshore platforms to drifting ice cover action as well as to seismic excitation (Cammaert and Muggeridge (1988); Croteau (1983); Miura et al. (1988); Sun (1993); Kiyokawa and Inada (1989)). Forced vibration tests were carried out on a large gravity dam in Quebec under both

summer and severe winter conditions including the presence of an ice cover (P. Paultre et Carbonneau (2002)). The experimental results and subsequent numerical studies have shown that the ice cover affects the dynamic response of gravity dams as well as the hydrodynamic pressure distribution in the reservoir (N. Bouaanani et Proulx (2002)). In all previous studies, the ice-covered water domain was assumed infinite, or delimited at a given truncating distance from the structure by a transmitting boundary condition to account for energy radiation at infinity (Bouaanani et Paultre (2005)). However, the dynamic or seismic response of ice-covered water reservoirs of limited extent such as water storages, channels and navigation locks received almost no attention in the literature.

In this paper, we investigate the effect of floating ice blocks on the dynamic characteristics and seismic response of rectangular water-containing structures such as the one illustrated in Fig. 3.1. The dynamic analysis of such systems, commonly encountered in cold regions, requires the modeling of simultaneous dynamic interactions between floating ice blocks, water and the containing structure. The analytical method developed in this work will address the dynamic and seismic behavior of such systems using a sub-structuring technique where structural and hydrodynamic responses are coupled through interface forces. Finite element modeling is then restricted to the containing structure, while water effects are accounted for analytically, thus eliminating the need for reservoir finite element discretization. In addition to accounting for the influence of floating ice blocks and container walls' flexibility, the developed frequency- and time-domain techniques will also include the effects of possible geometrical or material asymmetry of the containing structure as well as the coupling between convective and impulsive components of hydrodynamic pressure.

3.2 Mathematical formulation

3.2.1 General assumptions and governing equations

We consider a rectangular water-containing structure as the one depicted in Fig. 3.1. We assume that : (i) the longitudinal dimensions of the structure are sufficiently large so that it can be modeled as a two-dimensional plane-strain elasticity problem, (ii) the constitutive material of the containing structure has a linear elastic behavior, (iii) the lateral walls are flexible and have vertical faces at the interfaces with the reservoir, (iv) water is compressible, inviscid, with its motions irrotational and limited to small amplitudes, (v) water surface is covered by floating ice blocks, vibrating vertically without friction, and (iv) the containing-structure can be geometrically or materially asymmetrical.

The reservoir has a length $L_r = 2b_r$ and height H_r as indicated in Fig. 3.1. We adopt a Cartesian coordinate system with origin at the reservoir bottom, a horizontal axis x and

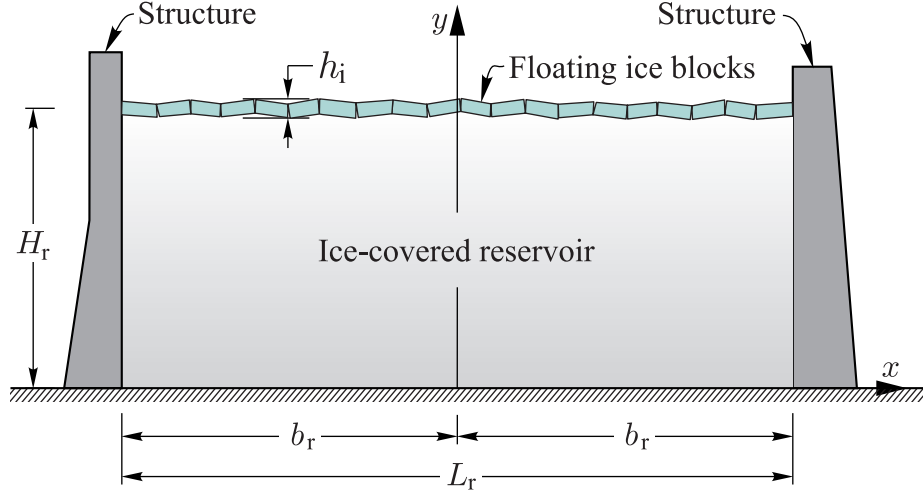


Fig. 3.1 General geometry of the studied ice-water-structure systems.

a vertical axis y coincident with the axis of symmetry of the reservoir. As mentioned previously, we will apply a sub-structuring approach as illustrated in Fig. 3.2, where the flexible containing structure and ice-added mass are modeled using finite elements, while water effects are modeled analytically through interaction forces at the water-structure and water-ice interfaces.

The hydrodynamic pressure $p(x, y, t)$ within the reservoir is governed by the classical wave equation

$$\nabla^2 p = \frac{1}{C_r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

where ∇^2 is the Laplace differential operator, t the time variable, ρ_r the mass density of water and C_r the compression wave velocity. We consider harmonic ground accelerations $\ddot{u}_g(t) = a_g e^{i\omega t}$ where ω denotes the exciting frequency. Hydrodynamic pressure in the reservoir can then be expressed in frequency domain as $\bar{p}(x, y, t) = \bar{p}(x, y, \omega) e^{i\omega t}$, where $\bar{p}(x, y, \omega)$ is a complex-valued frequency response function (FRF). Eq. (3.1) becomes then the classical Helmholtz equation

$$\nabla^2 \bar{p} + \frac{\omega^2}{C_r^2} \bar{p} = 0 \quad (3.2)$$

Using a modal superposition analysis, the FRFs for structural displacements and accelerations

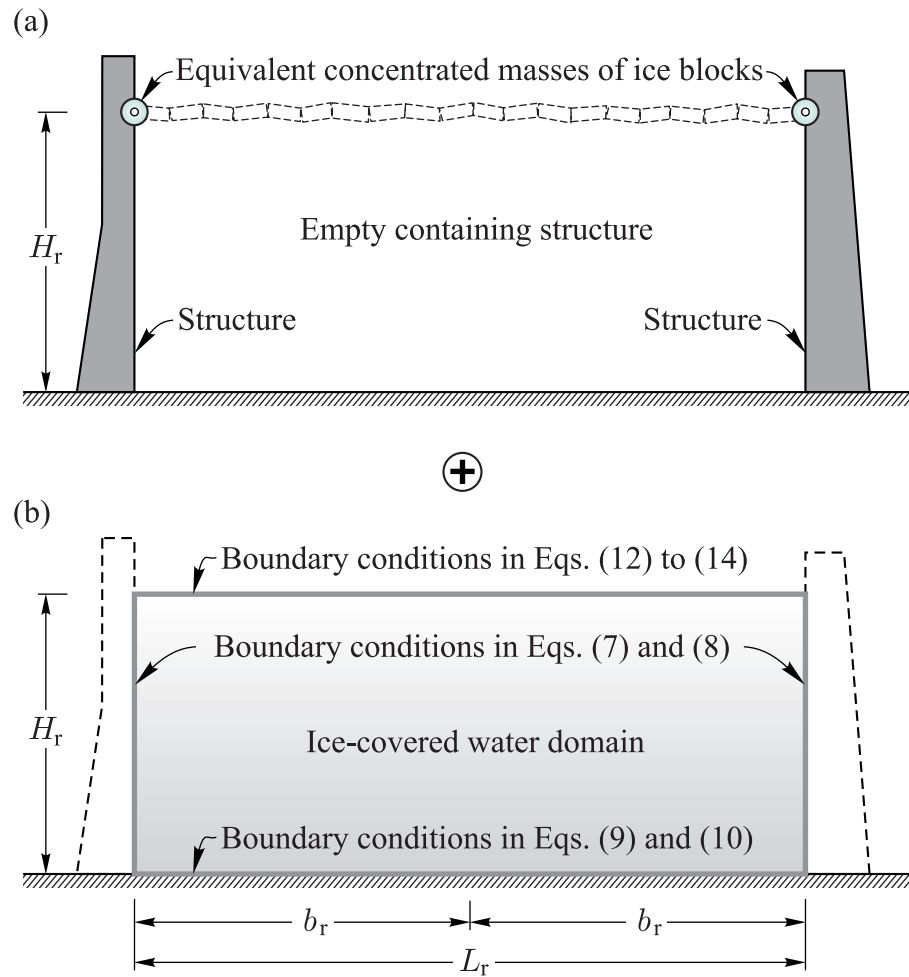


Fig. 3.2 Sub-structuring approach : (a) Containing structure and ice added mass ; (b) reservoir model.

can be expressed as

$$\bar{u}(x, y, \omega) = \sum_{j=1}^{m_s} \psi^{(x)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega); \quad \bar{v}(x, y, \omega) = \sum_{j=1}^{m_s} \psi^{(y)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega) \quad (3.3)$$

$$\bar{\ddot{u}}(x, y, \omega) = -\omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \psi^{(x)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega); \quad \bar{\ddot{v}}(x, y, \omega) = -\omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \psi^{(y)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega) \quad (3.4)$$

where \bar{u} and \bar{v} denote the horizontal and vertical displacements, respectively, $\bar{\ddot{u}}$ and $\bar{\ddot{v}}$ the horizontal and the vertical accelerations, respectively, $\psi_j^{(x)}$ and $\psi_j^{(y)}$ the x - and y -components of the j th structural mode shape, respectively, \bar{Z}_j the generalized coordinate, and m_s the number of structural mode shapes included in the analysis. The FRF \bar{p} for hydrodynamic pressure can be written as (Chopra et Fenves (1984); Bouaanani and Lu (2009))

$$\bar{p}(x, y, \omega) = \bar{p}_0(x, y, \omega) - \omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \bar{Z}_j(\omega) \bar{p}_j(x, y, \omega) \quad (3.5)$$

where \bar{p}_0 is the FRF for hydrodynamic pressure due to rigid body motion of the containing structure subjected to ground acceleration $\bar{\ddot{u}}_g$, and where \bar{p}_j is the FRF for hydrodynamic pressure due to horizontal ground accelerations $\psi_j^{(x)}(-b_r, y)$ and $\psi_j^{(x)}(b_r, y)$ of the lateral walls vibrating along structural mode j . Hydrodynamic pressure FRF \bar{p} can be decomposed into an impulsive component \bar{p}_I and a convective component \bar{p}_C , yielding

$$\begin{aligned} \bar{p}(x, y, \omega) &= \bar{p}_I(x, y, \omega) + \bar{p}_C(x, y, \omega) \\ &= \bar{p}_{I,0}(x, y, \omega) + \bar{p}_{C,0}(x, y, \omega) \\ &\quad - \omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} [\bar{p}_{I,j}(x, y, \omega) + \bar{p}_{C,j}(x, y, \omega)] \bar{Z}_j(\omega) \end{aligned} \quad (3.6)$$

The boundary conditions to be satisfied by FRFs $\bar{p}_{I,0}$, $\bar{p}_{C,0}$, $\bar{p}_{I,j}$ and $\bar{p}_{C,j}$ are as follows

– *At structure-reservoir vertical interfaces*

$$\frac{\partial \bar{p}_{I,0}}{\partial x}(\pm b_r, y, \omega) = -\rho_r \bar{\ddot{u}}_g(\omega); \quad \frac{\partial \bar{p}_{C,0}}{\partial x}(\pm b_r, y, \omega) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{I,j}}{\partial x}(\pm b_r, y, \omega) = -\rho_r \psi_j(\pm b_r, y); \quad \frac{\partial \bar{p}_{C,j}}{\partial x}(\pm b_r, y, \omega) = 0 \quad (3.8)$$

– *At reservoir bottom*

$$\frac{\partial \bar{p}_{I,0}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0; \quad \frac{\partial \bar{p}_{C,0}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{I,j}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0; \quad \frac{\partial \bar{p}_{C,j}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0 \quad (3.10)$$

– *At reservoir surface*

$$(\rho_r g - \rho_i h_i \omega^2) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}(x, H_r, \omega) = \rho_r \omega^2 \bar{p}(x, H_r, \omega) \quad (3.11)$$

$$\bar{p}_{I,0}(x, H_r, \omega) = \bar{p}_{I,0}(x, H_r, \omega) = \bar{p}_{I,j}(x, H_r, \omega) = 0 \quad (3.12)$$

where ρ_i denotes the mass density of the floating ice blocks, h_i their average thickness and g the gravity constant. Adopting the decomposition of hydrodynamic pressure into a convective and an impulsive pressure as per Eq. (3.6), and substituting Eq. (3.12) into Eq. (3.11), the surface boundary condition in Eq. (3.11) yields the two following boundary conditions expressed in terms of FRFs $\bar{p}_{I,0}$, $\bar{p}_{C,0}$, $\bar{p}_{I,j}$ and $\bar{p}_{C,j}$, $j=1 \dots m_s$

$$(\rho_r g - \rho_i h_i \omega^2) \frac{\partial \bar{p}_{C,0}}{\partial y}(x, H_r, \omega) - \rho_r \omega^2 \bar{p}_{C,0}(x, H_r, \omega) = -(\rho_r g - \rho_i h_i \omega^2) \frac{\partial \bar{p}_{I,0}}{\partial y}(x, H_r, \omega) \quad (3.13)$$

$$(\rho_r g - \rho_i h_i \omega^2) \frac{\partial \bar{p}_{C,j}}{\partial y}(x, H_r, \omega) - \rho_r \omega^2 \bar{p}_{C,j}(x, H_r, \omega) = -(\rho_r g - \rho_i h_i \omega^2) \frac{\partial \bar{p}_{I,j}}{\partial y}(x, H_r, \omega) \quad (3.14)$$

The FRF \bar{p} for total hydrodynamic pressure is given by Eq. (3.6) where the vector $\bar{\mathbf{Z}}$ of generalized coordinates \bar{Z}_j , $j=1 \dots m_s$, is obtained by solving the system of equations

$$\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (3.15)$$

in which elements of matrices $\bar{\mathbf{S}}$ and $\bar{\mathbf{Q}}$ are obtained for $n=1 \dots m_s$ and $j=1 \dots m_s$ as

$$\begin{aligned} \bar{S}_{nj}(\omega) = & \left[-\omega^2 + (1 + i\eta_s) \omega_n^2 \right] \delta_{nj} \\ & + \omega^2 \left\{ \int_0^{H_r} [\bar{p}_{I,j}(b_r, y, \omega) + \bar{p}_{C,j}(b_r, y, \omega)] \psi_n^{(x)}(b_r, y) dy \right. \\ & \left. - \int_0^{H_r} [\bar{p}_{I,j}(-b_r, y, \omega) + \bar{p}_{C,j}(-b_r, y, \omega)] \psi_n^{(x)}(-b_r, y) dy \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_n(\omega) = & -\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{1} + \int_0^{H_r} [\bar{p}_{I,0}(b_r, y, \omega) + \bar{p}_{C,0}(b_r, y, \omega)] \psi_n^{(x)}(b_r, y) dy \\ & - \int_0^{H_r} [\bar{p}_{I,0}(-b_r, y, \omega) + \bar{p}_{C,0}(-b_r, y, \omega)] \psi_n^{(x)}(-b_r, y) dy \end{aligned} \quad (3.17)$$

where δ denotes the Kronecker symbol, ω_n is the vibration frequency corresponding to structural mode shape ψ_n of the empty containing structure combined to ice-added mass, \mathbf{M} is the ice-container's mass matrice, η_s is the structural hysteretic damping factor, and $\mathbf{1}$ is a column-vector with the same dimension as the vector of nodal relative displacements, containing zeros except along horizontal degrees of freedom which correspond to the direction of earthquake excitation.

3.2.2 Impulsive hydrodynamic pressure

Solutions for FRFs $\bar{p}_{I,0}$ and $\bar{p}_{I,j}$, $j = 1 \dots m_s$, are developed next using Eq.(3.2), and the associated boundary conditions described in the previous section. Considering a unit horizontal ground acceleration $\ddot{u}_g(\omega) = 1$, we show in Appendix A that FRF $\bar{p}_{I,0}$ can be expressed as

$$\bar{p}_{I,0}(x, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2 [I_{0,n}^-(\omega) X_n^-(x, \omega) - I_{0,n}^+(\omega) X_n^+(x, \omega)]}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} \cos[\lambda_n(\omega) y] \quad (3.18)$$

in which m_r is the number of impulsive pressure reservoir modes included in the analysis, and the parameters λ_n , $\beta_n(\omega)$, $\kappa_n(\omega)$, $X_n^+(x, \omega)$, $X_n^-(x, \omega)$, $I_{0,n}^+(\omega)$ and $I_{0,n}^-(\omega)$ are given in Appendix A. We also show in Appendix A that FRFs $\bar{p}_{I,j}$, $j=1 \dots m_s$, can be written as

$$\bar{p}_{I,j}(x, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2 [I_{j,n}^-(\omega) X_n^-(x, \omega) - I_{j,n}^+(\omega) X_n^+(x, \omega)]}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} \cos[\lambda_n(\omega) y] \quad (3.19)$$

where $I_{j,n}^+(\omega)$ and $I_{j,n}^-(\omega)$ are given in Appendix A.

3.2.3 Convective hydrodynamic pressure

In this work, we consider rectangular water-containing structures that can be geometrically or materially asymmetric, i.e. with different lateral walls. As a consequence, the horizontal accelerations at wall-water interfaces on each side of the reservoir can be different and thus generate both symmetric and asymmetric hydrodynamic pressure waves. To account for this behavior, the FRF for convective hydrodynamic pressure \bar{p}_C will be decomposed into a symmetric term $\hat{\bar{p}}_C$ and an antisymmetric term $\tilde{\bar{p}}_C$, which correspond to symmetric and antisymmetric modes of sloshing, respectively. FRFs $\bar{p}_{C,0}$, and $\bar{p}_{C,j}$, $j=1 \dots m_s$, can then be expressed as

$$\bar{p}_{C,0}(x, y, \omega) = \hat{\bar{p}}_{C,0}(x, y, \omega) + \tilde{\bar{p}}_{C,0}(x, y, \omega) \quad (3.20)$$

$$\bar{p}_{C,j}(x, y, \omega) = \hat{\bar{p}}_{C,j}(x, y, \omega) + \tilde{\bar{p}}_{C,j}(x, y, \omega) \quad (3.21)$$

FRFs $\bar{p}_{C,0}$ and $\bar{p}_{C,j}$ are solutions of Eq. (3.2), and satisfy the boundary conditions described in Section 3.2.1, among which Eqs. (3.13) and (3.14) which relate the FRFs for convective hydrodynamic pressure to those for impulsive hydrodynamic pressure determined in Section 3.2.2. Accordingly, FRFs for convective hydrodynamic pressure are developed in Appendix B using the decompositions in Eqs. (3.20) and (3.21).

Considering a unit horizontal ground acceleration $\bar{u}_g(\omega) = 1$, we show in Appendix B that FRF $\bar{p}_{C,0}$ and $\bar{p}_{C,j}$ can be obtained as

$$\begin{aligned} \bar{p}_{C,\ell}(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{m_c} \sum_{n=1}^{m_r} \{ & \hat{\Lambda}_{\ell,n,m}(\omega) \cosh[\hat{\kappa}_m(\omega) y] \cos[\hat{\lambda}_m(\omega) x] \\ & + \tilde{\Lambda}_{\ell,n,m}(\omega) \cosh[\tilde{\kappa}_m(\omega) y] \sin[\tilde{\lambda}_m(\omega) x] \}; \quad \ell = 0, j \end{aligned} \quad (3.22)$$

where m_c is the number of reservoir convective modes and

$$\hat{\Lambda}_{\ell,n,m}(\omega) = \frac{2 \times (-1)^{m+n} \rho_r g H_r \lambda_n^3(\omega) [I_{\ell,n}^+(\omega) - I_{\ell,n}^-(\omega)]}{b_r \beta_n(\omega) \hat{\chi}_m(\omega) [\kappa_n^2(\omega) + \hat{\lambda}_m^2(\omega)] [\hat{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \cosh[\hat{\kappa}_m(\omega) H_r]}; \quad \ell = 0, j \quad (3.23)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\ell,n,m}(\omega) = \frac{-2 \times (-1)^{m+n} \rho_r g H_r \lambda_n^3(\omega) [I_{\ell,n}^+(\omega) + I_{\ell,n}^-(\omega)]}{b_r \beta_n(\omega) \tilde{\chi}_m(\omega) [\kappa_n^2(\omega) + \tilde{\lambda}_m^2(\omega)] [\tilde{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \cosh[\tilde{\kappa}_m(\omega) H_r]}; \quad \ell = 0, j \quad (3.24)$$

in which the frequency-dependent functions $\hat{\gamma}_m^2$ and $\tilde{\gamma}_m^2$ are given for $m=1 \dots m_c$ by

$$\hat{\gamma}_m^2(\omega) = \frac{g \hat{\kappa}_m(\omega)}{\hat{\chi}_m(\omega)} \tanh[\hat{\kappa}_m(\omega) H_r]; \quad \tilde{\gamma}_m^2(\omega) = \frac{g \tilde{\kappa}_m(\omega)}{\tilde{\chi}_m(\omega)} \tanh[\tilde{\kappa}_m(\omega) H_r] \quad (3.25)$$

where the parameters $\hat{\chi}_m$, $\tilde{\chi}_m$, $\hat{\kappa}_m$ and $\tilde{\kappa}_m$ are obtained as

$$\hat{\chi}_m(\omega) = 1 + \frac{\rho_i h_i}{\rho_r} \hat{\kappa}_m(\omega) \tanh[\hat{\kappa}_m(\omega) H_r]; \quad \tilde{\chi}_m(\omega) = 1 + \frac{\rho_i h_i}{\rho_r} \tilde{\kappa}_m(\omega) \tanh[\tilde{\kappa}_m(\omega) H_r] \quad (3.26)$$

$$\hat{\kappa}_m(\omega) = \sqrt{\hat{\lambda}_m^2 - \frac{\omega^2}{C_r^2}}; \quad \tilde{\kappa}_m(\omega) = \sqrt{\tilde{\lambda}_m^2 - \frac{\omega^2}{C_r^2}} \quad (3.27)$$

in which the eigenvalues $\hat{\lambda}_m$ and $\tilde{\lambda}_m$ corresponding to convective symmetric and antisymmetric modes, respectively, are given for $m=1 \dots m_c$ by

$$\hat{\lambda}_m = \frac{m \pi}{b_r}; \quad \tilde{\lambda}_m = \frac{(2m-1) \pi}{2 b_r} \quad (3.28)$$

The natural convective symmetric and antisymmetric frequencies correspond to the frequencies $\hat{\omega}_m$ and $\tilde{\omega}_m$, respectively, that satisfy the equations

$$\hat{\gamma}_m^2(\hat{\omega}_m) - \hat{\omega}_m^2 = 0; \quad \tilde{\gamma}_m^2(\tilde{\omega}_m) - \tilde{\omega}_m^2 = 0 \quad (3.29)$$

for $m=1 \dots m_c$. If water is assumed incompressible, then the parameters $\hat{\kappa}_m$ and $\tilde{\kappa}_m$ become frequency-independent, and Eq. (3.27) simplifies to

$$\hat{\kappa}_m = \hat{\lambda}_m; \quad \tilde{\kappa}_m = \tilde{\lambda}_m \quad (3.30)$$

The natural convective symmetric and antisymmetric frequencies $\hat{\omega}_m$ and $\tilde{\omega}_m$, respectively, become also frequency-independent, and can be obtained for $m=1 \dots m_c$ as

$$\hat{\omega}_m = \sqrt{\frac{g \hat{\kappa}_m}{\hat{\chi}_m} \tanh(\hat{\kappa}_m H_r)}; \quad \tilde{\omega}_m = \sqrt{\frac{g \tilde{\kappa}_m}{\tilde{\chi}_m} \tanh(\tilde{\kappa}_m H_r)} \quad (3.31)$$

3.2.4 Time responses for a seismic loading

The generalized coordinate vector $\bar{\mathbf{Z}}$ is computed after substituting the impulsive and convective FRFs into Eq. (3.15), then the total pressure in the frequency-domain is computed according to Eq. (3.6). The time-history displacements and accelerations of a point of the

lateral walls subjected to a ground acceleration $\ddot{u}_g(t)$ can be obtained as

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} \psi_j^{(x)}(x, y) Z_j(t); \quad \ddot{u}(x, y, t) = \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(x, y) \ddot{Z}_j(t) \quad (3.32)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} \psi_j^{(y)}(x, y) Z_j(t); \quad \ddot{v}(x, y, t) = \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(y)}(x, y) \ddot{Z}_j(t) \quad (3.33)$$

where the time-domain generalized coordinates Z_j are given by the Fourier integrals

$$Z_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Z}_j(\omega) \bar{\ddot{u}}_g(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad \ddot{Z}_j(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \bar{Z}_j(\omega) \bar{\ddot{u}}_g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.34)$$

in which $\bar{\ddot{u}}_g(\omega)$ is the Fourier transform of the ground acceleration $\ddot{u}_g(t)$

$$\bar{\ddot{u}}_g(\omega) = \int_0^{t_a} \ddot{u}_g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.35)$$

with t_a denoting the time duration of the applied accelerogram.

The time-history response for total hydrodynamic pressure p and vertical displacement η at reservoir surface under the effect of ground acceleration $\ddot{u}_g(t)$ can also be obtained as

$$p(x, y, t) = p_0(x, y, t) + \sum_{j=1}^{m_s} p_j(x, y, t) \ddot{Z}_j(t) \quad (3.36)$$

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\rho_r g} p(x, H, t) \quad (3.37)$$

Based on the above relations, other quantities of interest such as shear forces or overturning moments, can also be determined.

In the coupled systems studied, two types of damping should be accounted for to model the dissipation of energy in the solid containing structure and in the contained fluid. A viscous damping has to be applied to represent energy dissipation in the vibrating structure and associated impulsive modes. A damping for convective modes is introduced to mainly account for energy dissipation within the contained fluid, and is generally assumed to be less than 0.5% for light viscosity liquids without dissipative devices. Various design codes like the Eurocode 8 (2003) or the ACI 350.3 (2006) specify 0.5% damping for convective modes and 5% damping for impulsive modes. These conservative values are based on several studies such as (Scarsi (1971); Martel et al. (1998); Ghaemmaghami and Kianoush (2010)). They are used in the numerical models presented next.

In the analytical formulation, damping for impulsive modes is represented by a hysteretic damping factor η_s included in Eq. (B31). Damping for convective modes is accounted for through a viscous damping ξ_c introduced into Eqs. (3.38) and (3.39) to yield

$$\hat{\Lambda}_{\ell,n,m}(\omega) = \frac{2 \times (-1)^{m+n} \rho_r g H_r \lambda_n^3(\omega) [I_{\ell,n}^+(\omega) - I_{\ell,n}^-(\omega)]}{b_r \beta_n(\omega) \hat{\chi}_m(\omega) [\kappa_n^2(\omega) + \hat{\lambda}_m^2(\omega)] [\hat{\gamma}_m^2(\omega) + 2i \xi_c \omega \hat{\gamma}_m(\omega) - \omega^2] \cosh[\hat{\kappa}_m(\omega) H_r]} \quad (3.38)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\ell,n,m}(\omega) = \frac{-2 \times (-1)^{m+n} \rho_r g H_r \lambda_n^3(\omega) [I_{\ell,n}^+(\omega) + I_{\ell,n}^-(\omega)]}{b_r \beta_n(\omega) \tilde{\chi}_m(\omega) [\kappa_n^2(\omega) + \tilde{\lambda}_m^2(\omega)] [\tilde{\gamma}_m^2(\omega) + 2i \xi_c \omega \tilde{\gamma}_m(\omega) - \omega^2] \cosh[\tilde{\kappa}_m(\omega) H_r]} \quad (3.39)$$

for $\ell = 0, j$.

The proposed method is validated in the next section through a numerical example illustrating the dynamic response of an asymmetric water-containing structure covered with floating ice blocks.

3.3 Illustrative numerical example

3.3.1 Properties of the studied system and numerical modeling

The studied geometrically asymmetric wall-water system is illustrated in Fig. 3.3. It consists of two lateral walls impounding a reservoir of height $H_r = 20$ m and a length $L_r = 20$ m, covered with floating ice blocks. The following properties are adopted for the constitutive material of the walls : modulus of elasticity $E = 25$ GPa, Poisson's ratio $\nu_s = 0.2$, and mass density $\rho_s = 2400$ kg/m³. The water is assumed compressible, with a velocity of pressure waves $C_r = 1440$ m/s, and a mass density $\rho_r = 1000$ kg/m³. An ice mass density $\rho_i = 917$ kg/m³ is adopted (US Army (2002)). Although the thickness of the ice blocks may vary from one point to another, an average uniform thickness $h_i = 1.0$ m is considered for this numerical example.

The application of the proposed method requires first the determination of the mode shapes ψ_j , $j = 1 \dots m_s$, of the lateral walls without water, i.e. dry structure. For this purpose, both walls are discretized into 4-node plane-strain solid finite elements using the software ADINA (2010) as illustrated in Fig. 3.4 (a). Fig. F.4 illustrates the obtained first four mode shapes, i.e. $m_s = 4$, given by ADINA (2010) as well as the corresponding frequencies and horizontal effective modal masses expressed in percentage of total mass of the walls. Convergence studies showed that $m_c = 30$ convective modes are required. A viscous damping ratio $\xi_c = 0.5\%$ and a hysteretic damping factor $\eta_s = 0.1$ are applied damp-out convective and

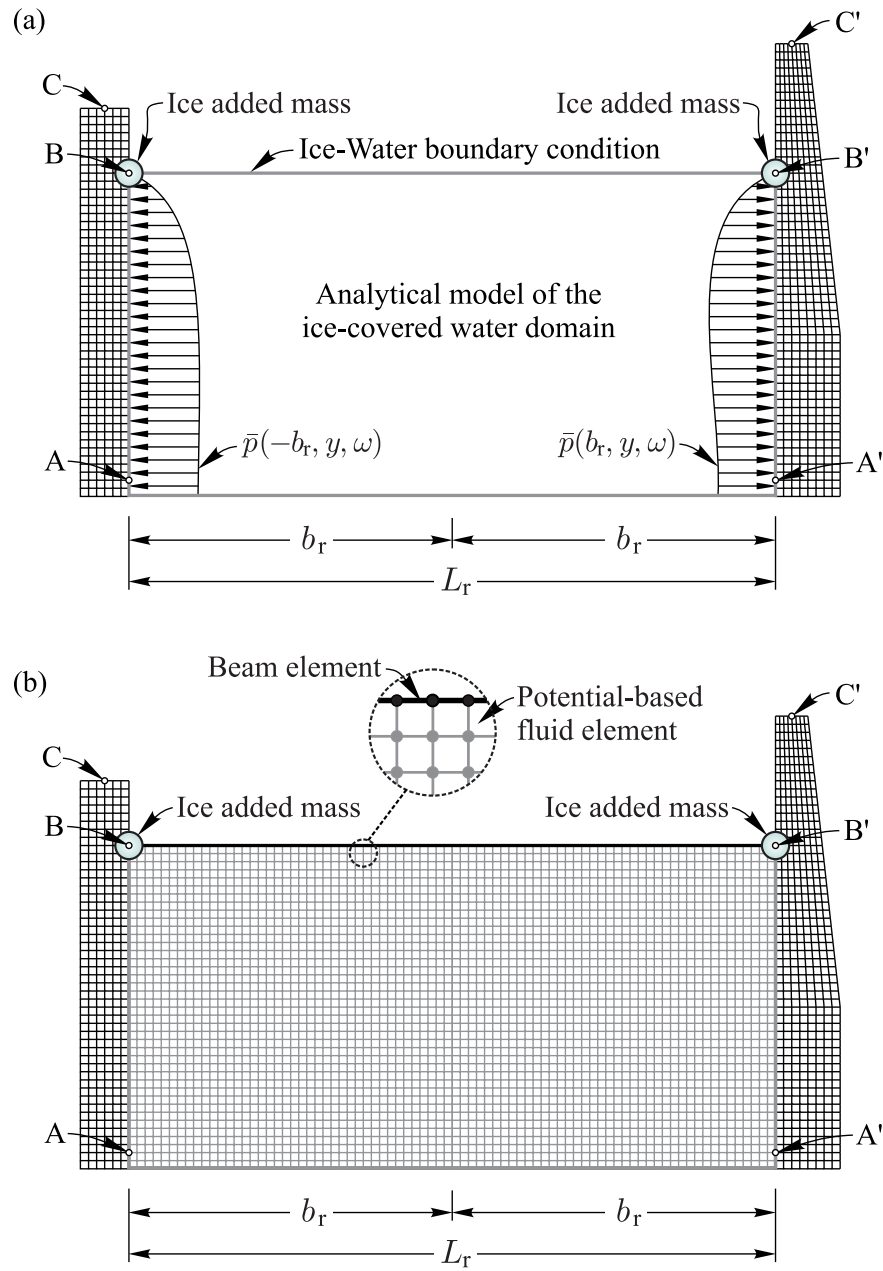


Fig. 3.4 Numerical models : (a) Analytical model of the fluid domain and finite element model of the dry containing structure ; (b) Coupled fluid-structure interaction finite element model.

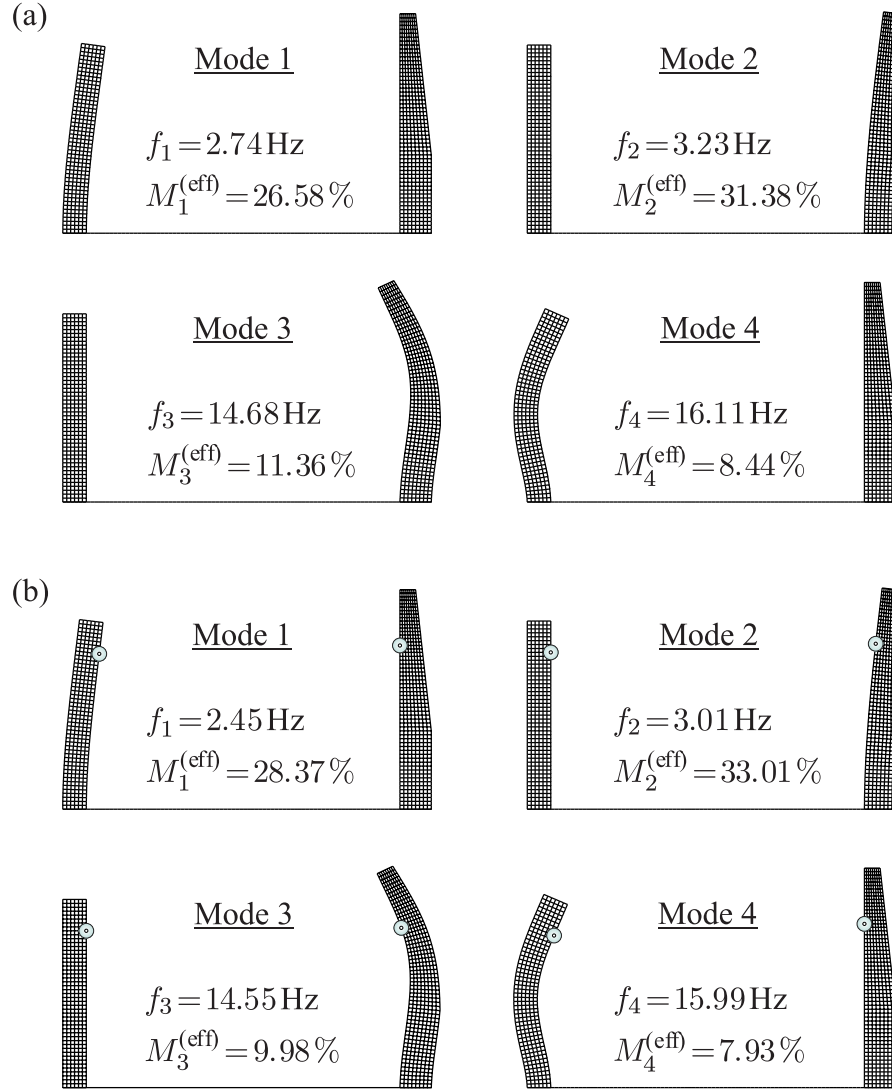


Fig. 3.5 First four mode shapes and corresponding frequencies and effective modal masses of the empty wall-water-ice system : (a) Walls without ice added mass effects ; (b) Walls with ice added mass effect.

ments $|\bar{u}/u_{st}|$ at points C and C', where u_{st} is the lateral static displacement under the effect of hydrostatic pressure. The results are determined at points A and C located on the left wall, and points A' and C' belonging to the right wall as indicated in Fig. 3.4. The vertical positions of the points are $y_A = y_{A'} = 1$ m, $y_C = 24$ m and $y_{C'} = 28$ m. The FRFs in Fig. 3.6 clearly show that the proposed formulation yields excellent results when compared to those obtained through finite element modeling with or without the presence of floating ice blocks. Each frequency curve exhibits : (i) a lower frequency range part, i.e. ≈ 0.5 Hz, corresponding to convective modes, and (ii) a higher frequency range part, i.e. ≈ 1.5 Hz, corresponding to impulsive modes. The hydrodynamic pressures at reservoir's bottom and the displacements at the top of the walls show that the presence of floating ice blocks affects dynamic responses corresponding to convective modes and to a much larger extent those corresponding to the impulsive ones. As can be seen, the main effect is an increase of resonant frequencies, a behavior that can be related to the added mass from the floating ice blocks.

The techniques described previously are applied next to determine convective and impulsive hydrodynamic pressure profiles corresponding to frequencies $0.9\tilde{\omega}_1$, $1.1\tilde{\omega}_1$, $0.9\bar{\omega}_1$ and $1.1\bar{\omega}_1$, where $\tilde{\omega}_1$ and $\bar{\omega}_1$ denote the natural frequencies corresponding to the first antisymmetric convective mode and first impulsive mode, respectively. The resulting hydrodynamic profiles illustrated in Fig. 3.7 confirm that the proposed formulation is in excellent agreement with the advanced finite element solution. The profiles also reveal that the presence of the ice blocks : (i) slightly decreases the amplitude of convective hydrodynamic pressure along the height of the reservoir, and (ii) increases the amplitude of impulsive hydrodynamic pressure, with maximum amplification observed at reservoir surface.

3.3.3 Time-domain response

In this section, we investigate the performance of the proposed method in assessing the seismic response of the previously described wall-water system. Fig. F.7 illustrates the horizontal acceleration component of Imperial Valley earthquake (1940) at El Centro selected to conduct the analyses using the proposed and finite element techniques described above. The obtained time-histories of nondimensionalized horizontal relative displacements $|u/u_{st}|$ at points C and C', the nondimensionalized shear forces V/F_{stat} at sections A and A' where $F_{stat} = \rho_r g H_r^2 / 2$ denotes the hydrostatic force, and the vertical displacements η at points B and B' at reservoir surface are shown in Figs. 3.9 and 3.10 for the reservoir with free surface and ice-covered, respectively. The figure shows that the time-history results given by the developed formulation and the finite element solution are practically coincident.

We observe that the amplitudes of all the quantities studied increase with the presence of the floating ice blocks. This effect is maximum for the vertical displacements η at reservoir

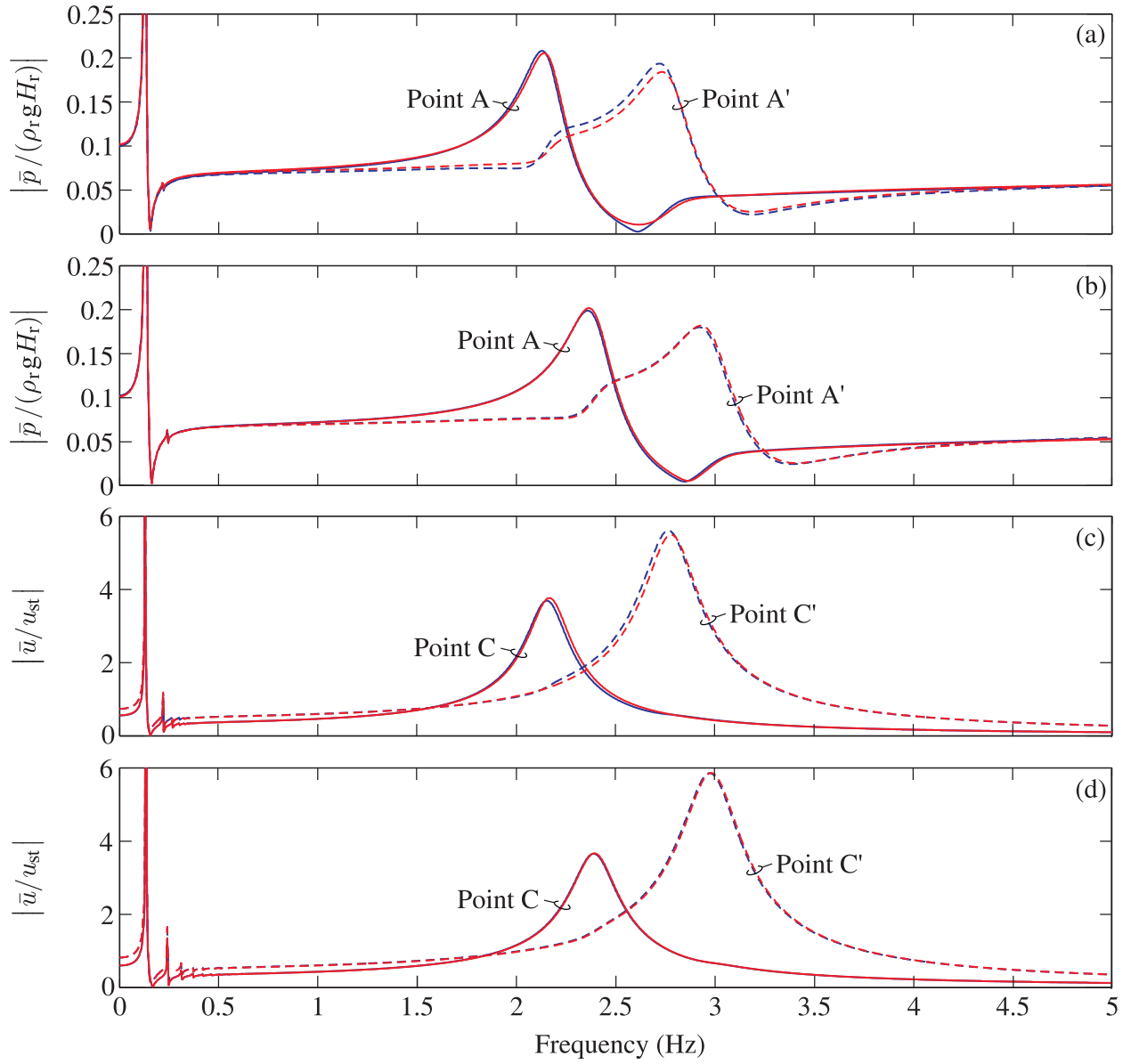


Fig. 3.6 Frequency response of nondimensionalized hydrodynamic pressures and displacements : (a) Hydrodynamic pressures without ice cover, (b) Hydrodynamic pressures with ice cover, (c) Horizontal displacements without ice cover, (d) Horizontal displacements with ice cover. — Finite element solution ; — Proposed solution.

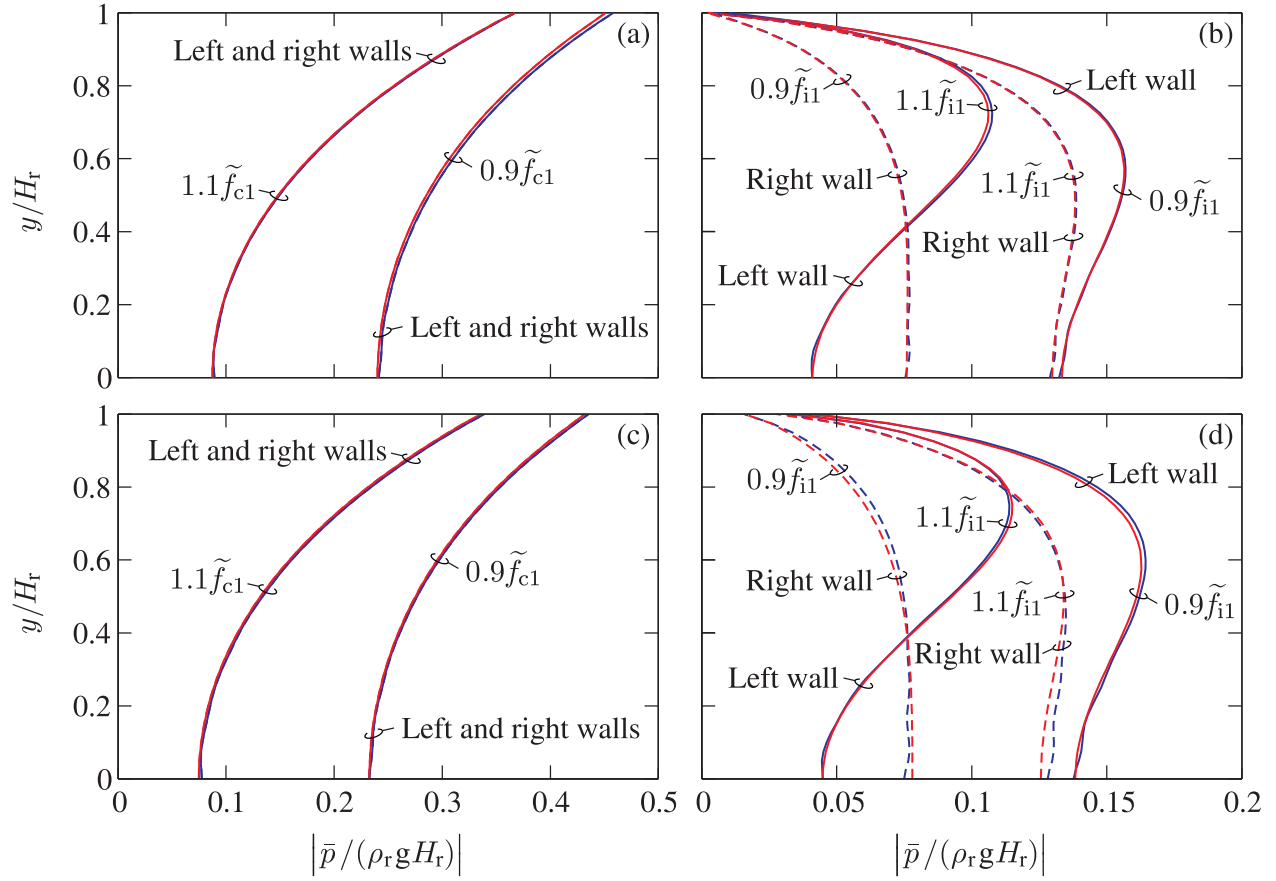


Fig. 3.7 Nondimensionalized hydrodynamic pressure profiles on the walls of the studied system : (a) Convective hydrodynamic pressures without ice cover, (b) Impulsive hydrodynamic pressures without ice cover, (c) Convective hydrodynamic pressures with ice cover, (d) Impulsive hydrodynamic pressures with ice cover. — Finite element solution; - - Proposed solution.

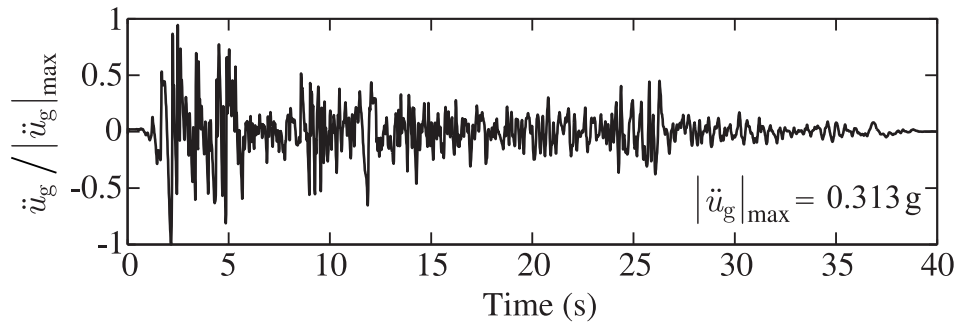


Fig. 3.8 Horizontal acceleration component of Imperial Valley earthquake (1940) at El Centro.

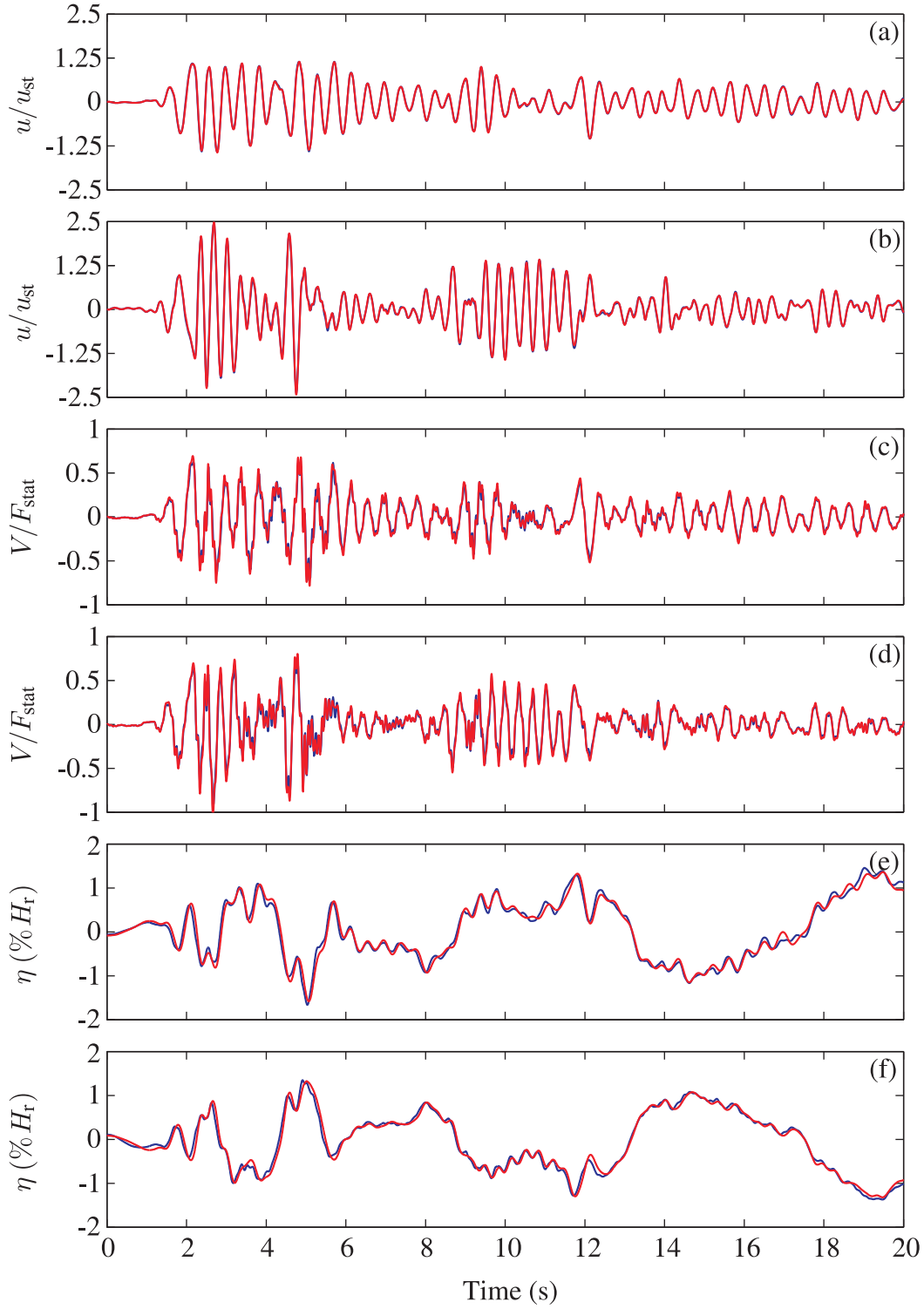


Fig. 3.9 Time-history response of the studied wall-water system without ice : (a) Nondimensionalized displacement at point C ; (b) Nondimensionalized displacement at point C' ; (c) Nondimensionalized shear force at section A ; (d) Nondimensionalized shear force at section A' ; (e) Nondimensionalized shear force at section A ; . — Finite element solution ; — Proposed solution.

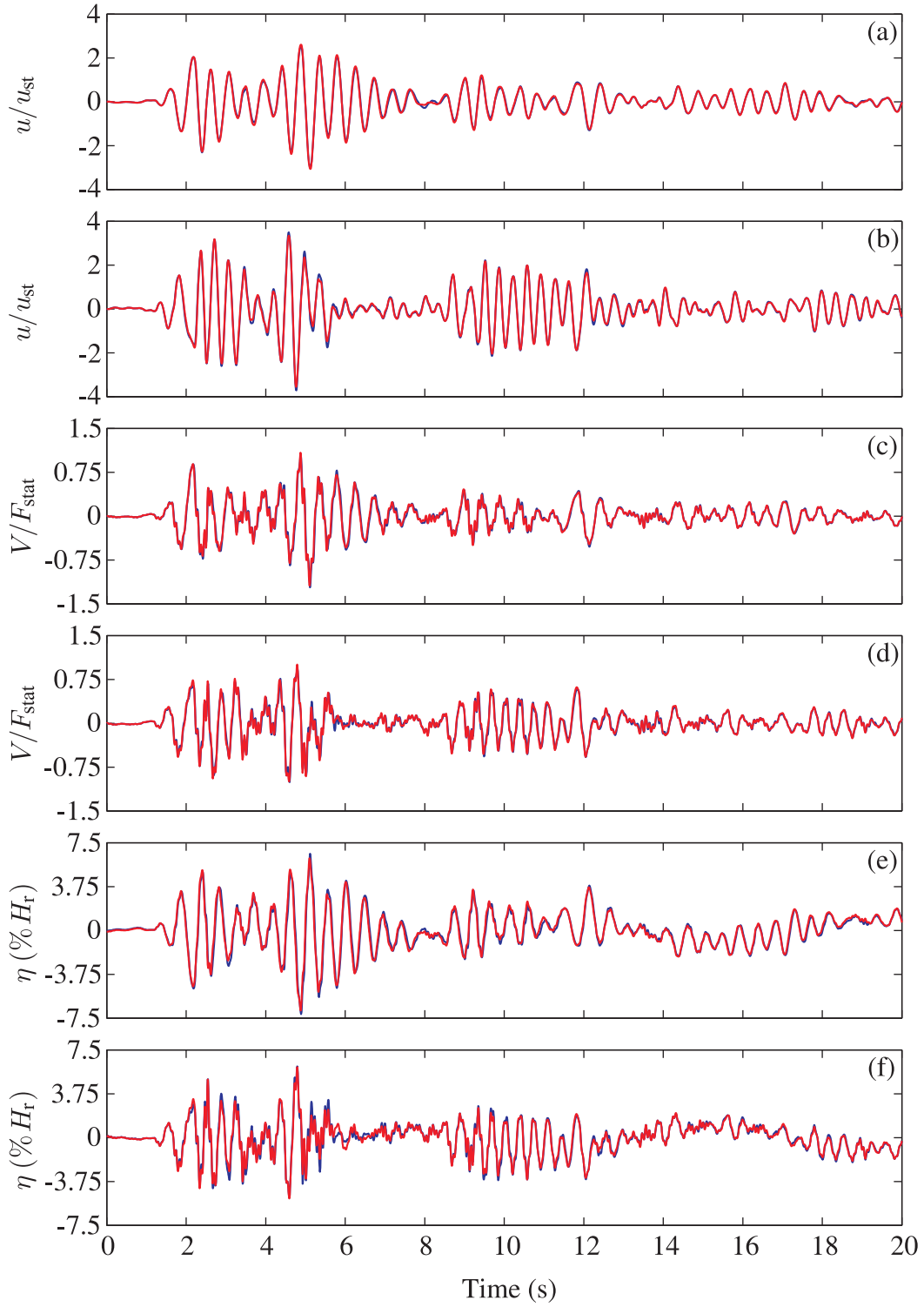


Fig. 3.10 Time-history response of the studied wall-water system with ice : (a) Nondimensionalized displacement at point C ; (b) Nondimensionalized displacement at point C' ; (c) Nondimensionalized shear force at section A ; (d) Nondimensionalized shear force at section A' ; (e) Nondimensionalized shear force at section A ; . — Finite element solution ; — Proposed solution.

surface, with displacements approximately 5 times larger with an ice-covered reservoir than with a free surface. We also note that the frequency content of the response curves is affected by the presence of ice blocks. This is more pronounced in the response curves of reservoir surface vertical displacements, as comparison of Figs. 3.9 (e) and (f) and Figs. 3.10 (e) and (f) shows that low frequencies dominate the response with free surface, while high frequencies corresponding to the first impulsive mode are predominant in the response with floating ice blocks. Concerning structural response, maximum displacements at top of the walls are amplified by about 1.5 times due to the presence of floating ice blocks, while the shear force at the base of the walls is not significantly affected.

3.4 Conclusions

This paper presented a new formulation to investigate the effects of floating ice blocks on seismically-excited rectangular water-containing structures. The proposed method is based on a sub-structuring approach, where the flexible containing structure and ice-added mass are modeled using finite elements, while water effects are modeled analytically through interaction forces at the water-structure and water-ice interfaces, thus eliminating the need for reservoir finite element discretization. In addition to accounting for the influence of floating ice blocks and container walls' flexibility, the developed frequency- and time-domain techniques also include the effects of container asymmetry as well as the coupling between convective and impulsive components of hydrodynamic pressure. The application of the proposed formulation is illustrated through a numerical example illustrating the dynamic response of an asymmetric water-containing structure covered with floating ice blocks. The obtained time- and frequency-domain responses showed that the proposed formulation yields excellent results when compared to those from coupled fluid-structure finite element modeling either with or without the presence of floating ice blocks. For the water-containing structure studied, we observed that the presence of floating ice blocks affects dynamic responses corresponding to convective and impulsive modes as follows : (i) a slight increase of convective frequencies and a more important increase of impulsive ones, mainly due to the added mass from the floating ice blocks ; (ii) a slight decrease of the amplitude of convective hydrodynamic pressure along the height of the reservoir ; (iii) an increase of the amplitude of impulsive hydrodynamic pressure, with maximum amplification observed at reservoir surface ; (iv) an increase of the amplitudes of displacements, shear forces and, in particular, vertical sloshing displacements at reservoir surface.

Acknowledgements

The authors would like to acknowledge the financial support of the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) and the Québec Fund for Research on Nature and Technology (FQRNT).

APPENDIX A

Using Eqs.(3.2), (3.12) and the boundary conditions in the left column of Eqs. (3.9) and (3.10), we show that FRFs $\bar{p}_{I,0}$ and $\bar{p}_{I,j}$, $j=1 \dots m_s$, can be expressed as

$$\bar{p}_{I,0}(x, y, \omega) = \sum_{n=1}^{m_r} \left[A_{n,0}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)x} + A'_{n,0}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)x} \right] \cos(\lambda_n y) \quad (A1)$$

$$\bar{p}_{I,j}(x, y, \omega) = \sum_{n=1}^{m_r} \left[A_{n,j}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)x} + A'_{n,j}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)x} \right] \cos(\lambda_n y) \quad (A2)$$

where m_r is the number of impulsive pressure reservoir modes and frequency-dependent coefficients $A_{n,0}$, $A_{n,j}$, $A'_{n,0}$ and $A'_{n,j}$ are to be determined later, and eigenvalues λ_n and frequency-dependent parameters κ_n are given for $n=1 \dots m_r$ by

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H_r}; \quad \kappa_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{\omega^2}{C_r^2}} \quad (A3)$$

Substitution of Eqs. (A1) and (A2) into the boundary conditions in the left column of Eqs. (3.7) and (3.8) yields

$$\sum_{n=1}^{m_r} \kappa_n(\omega) \left[-A_{n,0}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)b_r} + A'_{n,0}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)b_r} \right] \cos(\lambda_n y) = -\rho_r \quad (A4)$$

$$\sum_{n=1}^{m_r} \kappa_n(\omega) \left[-A_{n,0}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)b_r} + A'_{n,0}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)b_r} \right] \cos(\lambda_n y) = -\rho_r \quad (A5)$$

$$\sum_{n=1}^{m_r} \kappa_n(\omega) \left[-A_{n,j}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)b_r} + A'_{n,j}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)b_r} \right] \cos(\lambda_n y) = -\rho_r \psi_j^{(x)}(b_r, y) \quad (A6)$$

$$\sum_{n=1}^{m_r} \kappa_n(\omega) \left[-A_{n,j}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)b_r} + A'_{n,j}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)b_r} \right] \cos(\lambda_n y) = -\rho_r \psi_j^{(x)}(-b_r, y) \quad (A7)$$

Multiplying Eqs. (A4) to (A7) by $\cos(\lambda_n y)$, integrating over reservoir height and using the orthogonality properties of trigonometric functions yields to a system of $4m_r$ linear equations which can be solved for coefficients $A_{n,0}$, $A'_{n,0}$, $A_{n,j}$ and $A'_{n,j}$, $n=1 \dots m_r$, $j=1 \dots m_s$, as follows

$$A_{n,\ell}(\omega) = \frac{\rho_r H_r \lambda_n^2 \left[I_{\ell,n}^-(\omega) e^{b_r \kappa_n(\omega)} - I_{\ell,n}^+(\omega) e^{-b_r \kappa_n(\omega)} \right]}{2\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]}; \quad \ell = 0, j \quad (A8)$$

$$A'_{n,\ell}(\omega) = \frac{\rho_r H_r \lambda_n^2 \left[I_{\ell,n}^-(\omega) e^{-b_r \kappa_n(\omega)} - I_{\ell,n}^+(\omega) e^{b_r \kappa_n(\omega)} \right]}{2\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]}; \quad \ell = 0, j \quad (A9)$$

in which

$$\beta_n = H_r \lambda_n^2 \quad (A10)$$

and $I_{0,n}^-$, $I_{0,n}^+$, $I_{j,n}^-$ and $I_{j,n}^+$ are given by

$$I_{0,n}^-(\omega) = I_{0,n}^+(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} \cos(\lambda_n y) dy = \frac{2 \times (-1)^{n+1} H_r}{2n-1} \quad (\text{A11})$$

$$I_{j,n}^-(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} \psi_j^{(x)}(-b_r, y) \cos(\lambda_n y) dy \quad (\text{A12})$$

$$I_{j,n}^+(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} \psi_j^{(x)}(b_r, y) \cos(\lambda_n y) dy \quad (\text{A13})$$

Substituting Eqs. (A8) and (A9) in Eqs. (A1) and (A2) yields the expressions of $\bar{p}_{\text{I},0}$ and $\bar{p}_{\text{I},j}$ given in Eqs. (3.18) and (3.19), respectively, with the coefficients X_n^- and X_n^+ obtained as

$$X_n^-(x, \omega) = \cosh [(x - b_r) \kappa_n(\omega)] ; \quad X_n^+(x, \omega) = \cosh [(x + b_r) \kappa_n(\omega)] \quad (\text{A14})$$

APPENDIX B

Using Eqs. (3.2), and the boundary conditions in the right column of Eqs. (3.7), (3.8), (3.9) and (3.10), we show that FRFs $\bar{p}_{C,0}$ and $\bar{p}_{C,j}$, $j=1 \dots m_s$, can be expressed as

$$\bar{p}_{C,0}(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{m_c} \left\{ B_{m,0}(\omega) \cosh [\hat{\kappa}_m(\omega) y] \cos(\hat{\lambda}_m x) + B'_{m,0}(\omega) \cosh [\tilde{\kappa}_m(\omega) y] \sin(\tilde{\lambda}_m x) \right\} \quad (\text{B1})$$

$$\bar{p}_{C,j}(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{m_c} \left\{ B_{m,j}(\omega) \cosh [\hat{\kappa}_m(\omega) y] \cos(\hat{\lambda}_m x) + B'_{m,j}(\omega) \cosh [\tilde{\kappa}_m(\omega) y] \sin(\tilde{\lambda}_m x) \right\} \quad (\text{B2})$$

where m_c is the number of reservoir convective modes and frequency-dependent coefficients $B_{m,0}$, $B_{m,j}$, $B'_{m,0}$ and $B'_{m,j}$ are to be determined later, and eigenvalues $\hat{\lambda}_m$ and $\tilde{\lambda}_m$, and frequency-dependent parameters $\hat{\kappa}_m$ and $\tilde{\kappa}_m$ are given for $m=1 \dots m_c$ by

$$\hat{\lambda}_m = \frac{m\pi}{b_r}; \quad \hat{\kappa}_m(\omega) = \sqrt{\hat{\lambda}_m^2 - \frac{\omega^2}{C_r^2}} \quad (\text{B3})$$

$$\tilde{\lambda}_m = \frac{(2m-1)\pi}{2b_r}; \quad \tilde{\kappa}_m(\omega) = \sqrt{\tilde{\lambda}_m^2 - \frac{\omega^2}{C_r^2}} \quad (\text{B4})$$

Substitution of Eqs. (B1) and (B2) into the boundary conditions in Eqs. (3.13) and (3.14) yields

$$\sum_{m=1}^{m_c} \left\{ B_{m,0}(\omega) \hat{\chi}_m(\omega) \cosh [\hat{\kappa}_m(\omega) H_r] \cos(\hat{\lambda}_m x) [\hat{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \right. \\ \left. + B'_{m,0}(\omega) \tilde{\chi}_m(\omega) \cosh [\tilde{\kappa}_m(\omega) H_r] \sin(\tilde{\lambda}_m x) [\tilde{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \right\} = -g \frac{\partial \bar{p}_{I,0}}{\partial y}(x, H_r, \omega) \quad (\text{B5})$$

$$\sum_{m=1}^{m_c} \left\{ B_{m,j}(\omega) \hat{\chi}_m(\omega) \cosh [\hat{\kappa}_m(\omega) H_r] \cos(\hat{\lambda}_m x) [\hat{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \right. \\ \left. + B'_{m,j}(\omega) \tilde{\chi}_m(\omega) \cosh [\tilde{\kappa}_m(\omega) H_r] \sin(\tilde{\lambda}_m x) [\tilde{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \right\} = -g \frac{\partial \bar{p}_{I,j}}{\partial y}(x, H_r, \omega) \quad (\text{B6})$$

where the derivatives $\frac{\partial \bar{p}_{I,0}}{\partial y}$ and $\frac{\partial \bar{p}_{I,j}}{\partial y}$ can be determined using Eqs. (3.18) and (3.19), respectively, the functions $\hat{\gamma}_m$ and $\tilde{\gamma}_m$ are given by Eq. (3.25), and the parameters $\hat{\chi}_m$ and $\tilde{\chi}_m$ are defined by Eq. (3.26).

Multiplying Eqs.(B5) and (B6) by $\cos(\hat{\lambda}_m x)$ and $\sin(\tilde{\lambda}_m x)$, integrating over reservoir length $2b_r$ and using orthogonality properties of trigonometric functions yields the following expression for

coefficients $B_{m,0}(\omega)$, $B'_{m,0}(\omega)$, $B_{m,j}(\omega)$ and $B'_{m,j}(\omega)$, $m=1 \dots m_r$, $j=1 \dots m_s$

$$B_{m,\ell}(\omega) = \sum_{n=1}^{m_r} \frac{2 \times (-1)^{m+n} \rho_r g H_r \lambda_n^3(\omega) [I_{\ell,n}^+(\omega) - I_{\ell,n}^-(\omega)]}{b_r \beta_n(\omega) \hat{\chi}_m(\omega) [\kappa_n^2(\omega) + \hat{\lambda}_m^2(\omega)] [\hat{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \cosh[\hat{\kappa}_m(\omega) H_r]}; \quad \ell = 0, j \quad (\text{B7})$$

$$B'_{m,\ell}(\omega) = \sum_{n=1}^{m_r} \frac{-2 \times (-1)^{m+n} \rho_r g H_r \lambda_n^3(\omega) [I_{\ell,n}^+(\omega) + I_{\ell,n}^-(\omega)]}{b_r \beta_n(\omega) \tilde{\chi}_m(\omega) [\kappa_n^2(\omega) + \tilde{\lambda}_m^2(\omega)] [\tilde{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2] \cosh[\tilde{\kappa}_m(\omega) H_r]}; \quad \ell = 0, j \quad (\text{B8})$$

Bibliographie

- ACI committee 350, 2006. Seismic Design of Liquid-Containing Concrete Structures and Commentary (ACI 350.3-06).
- ADINA Theory and Modeling Guide. Report ARD 06-7. ADINA R & D, Inc., (2010).
- Balendra, T., Ang, K.K., Paramasivam, P. Lee, S.V., 1982. Seismic Design of Flexible Cylindrical Liquid Storage Tanks. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 10(3), 477–496.
- Bouaanani, N., Paultre, P., Proulx, J., 2002. Two-dimensional modelling of ice cover effects for the dynamic analysis of concrete gravity dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, 2083–2102.
- Bouaanani, N., Paultre, P. 2005. A new boundary condition for energy radiation in covered reservoirs using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29, 903–911.
- Bouaanani, N., Lu, F.Y., 2009. Assessment of potential-based fluid finite elements for seismic analysis of dam-reservoir systems. *Journal of Computers and Structures* 87, 206–224.
- Croteau, P., 1983. Dynamic interactions between floating ice and offshore structures. University of California, Berkeley, Calif. Report No. UCB/EERC-83/06.
- Chopra, A.K., 1967. Reservoir-Dam Interaction During Earthquake. *Bull. Seismological Soc. of America* 57, 675–687.
- Chopra, A.K., 1968. Earthquake behavior of Reservoir-Dam Systems. *Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE* 94, 1475–1500.
- Chopra, A.K., 1970. Earthquake Response of Concrete Gravity Dams. *Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE* 96, 443–454.
- Cammaert, A.B., Muggeridge, D.B., 1988. Ice interaction with offshore structures. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Everstine, G.C., 1981. A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration* 79(1), 157–160.
- Fenves, G., Chopra, A.K., 1984. Earthquake analysis and response of concrete gravity dams. Earthquake engineering research center.
- Fisher, F.D., Rammerstorfer, F.G., 1999. A refined analysis of sloshing effects in seismically excited tanks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 76, 693–709.
- Gupta, R.K., Hutchinson, G.L., 1990. Effects of wall flexibility on the dynamic response of liquid storage tanks. *Engineering Structures* 13, 253–267.
- Haroun, M.A., Housner, G.W., 1982. Complications in free vibration analysis of tanks. *Proc., ASCE Engineering Mechanics Division* 108(5), 801–818.

- Haroun, M.A., 1980. Dynamic analyses of liquid storage tanks. EERL80-04, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology.
- Hall, J.F. (ed)., 1995. Northridge Earthquake of January 17, 1994 : Reconnaissance Report. Earthquake Spectra, Supplement C to Volume 11, Earthquake Engineering Research Institute, Oakland, CA.
- Hanson, R.D., 1973. Behavior of storage tanks, the great alaska earthquake of 1964. Proc., National Academy of Science, Washington, D.C., 331–339.
- Haroun, M.A., 1983. Vibration Studies and Tests of Liquid Storage Tanks. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 11(2), 179–206.
- Housner, G.W., 1957. Dynamic pressures on accelerated fluid containers. Bulletin of the Seismological Society of America 47, 15–35.
- Housner, G.W., 1963. The dynamic behavior of water tanks. Bulletin of the seismological society of america 53(2), 381–387.
- Haroun, M.A., Housner, G.W., 1981a. Seismic Design of Liquid Storage Tanks. Journal of Technical Council of ASCE 107, 191–207.
- Haroun, M.A., Housner, G.W., 1981b. Earthquake response of deformable liquid storage tanks. Journal of Applied Mechanics 48(2), 411–418.
- Jacobsen, L.S., 1949. Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier. Bulletin of the Seismological Society of America 39(3), 189–204.
- Jacobsen, L.S., Ayre, R.S., 1951. Hydrodynamic experiments with rigid cylindrical tanks subjected to transient motions. Bulletin of the Seismological Society of America 41, 313–346.
- Kana, D.D., 1979. Seismic response of flexible cylindrical liquid storage tanks. Nuclear Engineering and Design 52(1), 185–199.
- Ghaemmaghami, A.R., Kianoush, M.R., 2010. Effect of wall flexibility on dynamic response of concrete rectangular liquid storage tanks under horizontal and vertical ground motions 136(4), 441–451.
- Kiyokawa, T., Inada, H., 1989. Hydrodynamic forces acting on axisymmetric bodies immersed in ice covered sea during earthquakes. Proceedings of 8th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, The Hague, The Netherlands, 19-23 March 1989. American Society of Mechanical Engineers, New York, 153–159.
- Koketsu, K., Hayatama, K., Furumura, T., Ikegami, Y., Akiyama, S., 2005. Damaging long-period ground motions from the 2003 Mw 8.3 Tokachi-Oki, Japan earthquake. Seismological Research Letters 76(1), 58–64.
- Krausmann, E., Renni, E., Campedel, M. and Cozzani, V., 2011. Industrial accidents triggered by earthquakes, floods and lightning : lessons learned from a database analysis. Natural Hazards 59, 285–300.

- Malhotra, P.K., Norwood, M.A., Wieland, M., 2000. Simple Procedure for Seismic Analysis of Liquid-Storage Tanks. *IABSE Structural Engineering International* 3, 197–201.
- Martel, C., Nicolas, J.A., Vega, J.M., 1998. Surface-wave damping in a brimful circular cylinder, *J. Fluid Mech.* 360, 213–228.
- Miura, F., Nozawa, I., Sakaki, N., Hirano, K., 1988. Dynamic stability of an off-shore structure surrounded by thick ice during strong earthquake motions. *Proceedings of the 9th World Conference on Earthquake Engineering*, Tokyo-Kyoto, Japan, August 1988. Japan Association for earthquake Disaster Prevention, Yokyo, Japan. 465–470.
- Paultre, P., Proulx, J., and Carbonneau, C. 2002. An experimental evaluation of ice cover effects on the dynamic behaviour of a concrete gravity dam. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 31, 2067—2082.
- Scarsi, G., 1971. Natural frequencies of viscous liquids in rectangular tanks, *Meccanica* 6(4), 223–234.
- Steinberg, L.J., Cruz, A.M., 2004. When Natural and Technological Disasters Collide : Lessons from the Turkey Earthquake of August 17, 1999. *Natural Hazards Review* 5(3), 121–130.
- Steinbrugge, K. V., Flores, R., 1963. “The Chilean earthquakes of May, 1960 : A structural engineering viewpoint.” *Bulletin of the Seismological Society of America* 53(2), 225–307.
- Sun, K., 1993. Effects of ice layer on hydrodynamic pressure of structures. *ASCE Journal of Cold Regions Engineers* 7(3), 63–76.
- US Army, 2002. Ice Engineering - Engineer Manual 1110-2-1612. US Army Corps of Engineers, Washington DC. 30 October 2002
- Veletsos, A.S., Tang, Y., 1990. Soil-structure interaction effects for laterally excited liquid-storage tanks. *Earthquake Engrg. Struct. Dyn.* 19, 473–496.
- Veletsos, A.S., 1974. Seismic effects in flexible liquid storage tanks. *Proc. of Fifth World Conf. on Earthquake Eng.*, 630–639.
- Veletsos, A.S., Yang, J.Y., 1976. Dynamics of Fixed-Base Liquid Storage Tanks. *US-Japan Seminar for Earthquake Engineering Research*, Tokyo, Japan, 317–341.
- Veletsos, A.S., Yang, J.Y., 1977. Earthquake Response of Liquid Storage Tanks. *Proc. Second EMD Specialty Conference*, ASCE, Raleigh, NC, 1–24.
- Werner, P.W., Sundquit, K.J., 1949. On hydrodynamic earthquake effects. *Transactions of American Geophysical Union* 30(5), 636–657.
- Westergaard, H.M., 1933. Water pressures on dams during earthquakes. *Transactions, ASCE* 98, 418–472.

CHAPITRE 4

APPROFONDISSEMENTS ET RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES

Ce chapitre a pour objectif d’approfondir certains points non développés dans les articles et de fournir des résultats complémentaires.

4.1 Modélisation des réservoirs à l’aide d’ADINA

4.1.1 Construction des modèles

Dans les articles du chapitre 3 et de l’annexe F, trois types de modèles ont été employés :

Modèle 1 : Condition de surface liquide au repos

Modèle 2 : Condition de ballottement du liquide en surface

Modèle 3 : Condition de ballottement d’une poutre sans rigidité flexionnelle en surface

Dans le cas du Modèle 1, la structure est modélisée par des éléments solides bidimensionnels à 8 nœuds Q8 de formulation "plain stress" et le liquide est modélisé par des éléments fluides bidimensionnels Q8. Les données concernant la géométrie et les matériaux sont donnés dans l’article en annexe F. L’interface entre les éléments fluides et les éléments solides est faite en dédoublant les nœuds fluide-structure et en appliquant une condition sur le potentiel de type "Fluid-Structure". Pour ce type de modèles, les degrés de liberté potentiel du fluide en surface sont fixés. La pression est donc nulle en surface.

Le Modèle 2 est identique au Modèle 1, à l’exception de la condition de surface, qui cette fois autorise l’élévation du fluide. Pour prendre en compte le ballottement de l’eau, il est nécessaire d’appliquer une condition sur les degrés de liberté potentiels de la surface de type "Free Surface" et d’appliquer une charge "Mass Proportionnal" verticale de type "Body Force" afin de prendre en compte l’accélération verticale de la gravité $g = 9.81m/s^2$.

En ce qui concerne le Modèle 3, les éléments de solide et de fluide sont modélisés par des éléments à 4 nœuds Q4. La condition de ballottement de la glace en surface est réalisée à l’aide de poutres de Bernouillis à 2 nœuds. Les extrémités de la poutre sont libres, seul le degré de liberté en rotation est bloqué aux extrémités. Les nœuds de la poutre et du liquide en surface sont dédoublés, et une condition potentielle de type "Fluid-Structure" est appliquée. Tous les déplacements horizontaux de la poutre sont bloqués.

4.1.2 Définition du maillage pour la prise en compte du ballotement

La prise en compte du phénomène de ballotement nécessite un maillage adapté à la propagation des ondes de gravité dans le fluide. Dans l'étude du ballotement d'un fluide au sein d'un réservoir, le maillage employé pour le liquide ballotté influe directement sur le nombre et la précision des modes convectifs. Cette partie présente une petite analyse paramétrique des modes convectifs en fonction du raffinement vertical du maillage du liquide.

Dans le tableau 4.1 on peut voir l'évolution des fréquences naturelles de ballotement en fonction du nombre de divisions verticales.

Tableau 4.1 Convergence des fréquences de sloshing en fonction du nombre de divisions verticales

m	théorique	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.1337	0.1421	0.1376	0.1359	0.1351	0.1347	0.1344	0.1343	0.1342	0.1341
2	0.1971	0.2072	0.2135	0.2072	0.2037	0.2018	0.2005	0.1998	0.1992	0.1988
3	0.2419		0.2541	0.2645	0.2588	0.2541	0.251	0.2489	0.2475	0.2465
4	0.2794			0.2935	0.3064	0.3023	0.2974	0.2935	0.2907	0.2887
5	0.3123				0.3283	0.3426	0.3405	0.3358	0.3316	0.3283
6	0.3421					0.3598	0.3749	0.3746	0.3706	0.3664
7	0.3696						0.3888	0.4043	0.4057	0.4025
8	0.3951							0.4159	0.4316	0.4343
9	0.4191								0.4415	0.4572
10	0.4417									0.4657

Dans le tableau (4.1), la colonne "m" correspond au numéro du mode convectif considéré. La première ligne du tableau définit le nombre de subdivisions verticales considéré. Un premier résultat de cette étude montre que le nombre de modes de ballotement calculés dépend directement du nombre de subdivisions verticales du domaine liquide (et plus particulièrement de la subdivision de la surface liquide). Si le liquide est maillé avec deux subdivisions verticales, seules deux modes convectifs vont être calculés. Si le liquide est maillé avec trois subdivisions verticales, trois modes convectifs vont être calculés...etc. L'annexe D présente la forme des premiers modes convectifs en fonction du maillage verticale adopté.

Comme on peut constater au tableau 4.1, si le nombre de divisions horizontale du maillage du liquide influe sur le nombre de modes convectifs calculés, en revanche il n'assure pas la convergence immédiate des fréquences naturelles de ces modes. En effet, comme dans le problème de propagation des ondes sismiques dans le sol, les ondes de gravité se propageant dans un réservoir suite à une excitation de ce dernier, possèdent une longueur d'onde spatiale ℓ_m . La représentation du phénomène de propagation de ces ondes dans le fluide nécessite que la dimension horizontale de la plus grande maille du liquide soit inférieur ou égale à la longueur d'onde spatiale de l'onde considérée. Dans le

cas des ondes de gravité se propageant dans un réservoir d'eau ne comportant pas d'obstacle à la propagation des ondes, chaque mode convectif possède une longueur d'onde spatiale donnée par la formule suivante :

$$\ell_m = \frac{2 b_r}{m \pi} \quad (\text{B1})$$

Ou b_r représente la demie longueur du réservoir et le paramètre m représente l'ordre du mode convectif considéré. On peut exprimer l'équation (B1) pour les modes convectifs anti-symétriques et les modes convectifs symétriques respectivement par les formules suivantes :

$$\ell_{m,as} = \frac{4 b_r}{(2m - 1)} \quad \ell_{m,s} = \frac{2 b_r}{m} \quad (\text{B2})$$

Tableau 4.2 Longueur d'onde spatiales (en m) des 20 premiers modes convectifs

m	$\ell_{m,as}$	$\ell_{m,s}$
1	79.9994	39.9994
2	26.6665	19.9994
3	15.9995	13.3329
4	11.4285	9.9997
5	8.8888	7.9998
6	7.2721	6.6664
7	6.1537	5.7139
8	5.3331	4.9995
9	4.7054	4.4440
10	4.2103	3.9998

Tableau 4.3 Etude paramétrique des 3 premières fréquences naturelles anti-symétriques en fonction de la taille du maillage

m	$f_{m,as}$	ℓ_m	$\delta = 1 \ell_m$	$\delta = 1/2 \ell_m$	$\delta = 1/5 \ell_m$	$\delta = 1/10 \ell_m$	$\delta = 1/20 \ell_m$
1	0.1337	12.7323	0.1358	0.1342	0.1338	0.1337	0.1337
3	0.2419	4.2441	0.2464	0.2431	0.2421	0.2420	0.2419
5	0.3123	2.5464	0.3188	0.3141	0.3128	0.3126	0.3126

Le tableau 4.3 montre les résultats d'une étude de convergence des 3 premières fréquences naturelles de sloshing en fonction de la dimension horizontale des mailles de liquide. On constate dans cette étude de convergence locale, qu'une subdivision horizontale du maillage de la taille de la longueur d'onde spatiale assure une convergence de la fréquence naturelle spatiale propagée avec une erreur inférieure à 2%, une subdivision horizontale du maillage 10 fois inférieure à la longueur d'onde spatiale propagée assure une convergence avec une erreur inférieure à 0.1%.

4.1.3 Analyses temporelles par la méthode des éléments finis

Dans la modélisation par éléments finis, la méthode temporelle employée dans les analyses est la méthode de superposition des modes. Dans cette méthode, les déplacements sont calculés en employant une décomposition dans la base des modes généralisés :

$$U = \sum_{i=r}^s \phi_i x_i \quad (\text{B3})$$

ou ϕ_i représentent les fonctions de forme et x_i représentent les coordonnées généralisées. Les coordonnées généralisées x_i sont déterminées à l'aide des équations découplées de la dynamique :

$$\ddot{x}_i + 2 \omega_i \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = r_i \quad (\text{B4})$$

ou $r_i = \phi_i^T R$. Ces équations sont résolues à l'aide de la méthode de Newmark (méthode des trapèzes). Des détails concernant la méthode temporelle employée dans les analyses analytiques sont donnés en annexe E.

Dans les modèles prenant en compte les ondes de gravité, l'accélération verticale g , entraîne la prise en compte de la pression hydrostatique. L'application de la pression hydrostatique dans une analyse temporelle provoque un phénomène dynamique de vibrations libres des parois, et introduit une distribution triangulaire statique de pression. On peut voir à la figure (4.1) la réponse en pression à l'application de la pression hydrostatique dans une analyse temporelle en un point de la paroi gauche proche du fond d'un réservoir du type du Modèle 2.

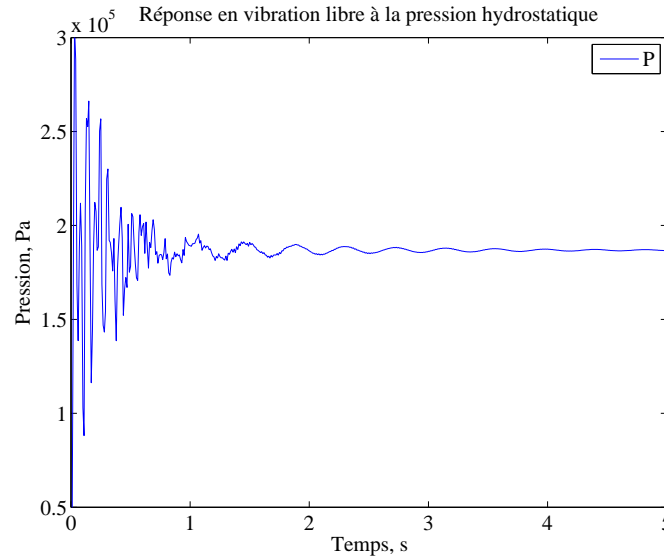


Fig. 4.1 Effet de la pression hydrostatique

On peut constater à la figure Fig (4.1) que les vibrations libres sont amorties au bout d'une

d'une durée d'environ 2s. La pression en ce point de la paroi gauche du réservoir se stabilise alors autour d'une pression d'équilibre égale à : $\rho g H = 1000 \times 9.81 \times 20 = 1.962.10^5 \text{Pa}$.

Lors de l'étude de la réponse d'une telle structure à un séisme, les deux effets induits par la pressions hydrostatique s'additionnent à la réponse dynamique aux vibrations forcées. Un méthode simple permettant de dissocier la réponse de la structure due à la pression hydrostatique de la réponse en vibration forcée, est de considérer un séisme modifié comportant une première plage de zéros d'une certaine période permettant de faire converger la réponse en vibration libre, et une seconde plage comportant l'accélérogramme du séisme appliqué. (voir Fig. (4.2))

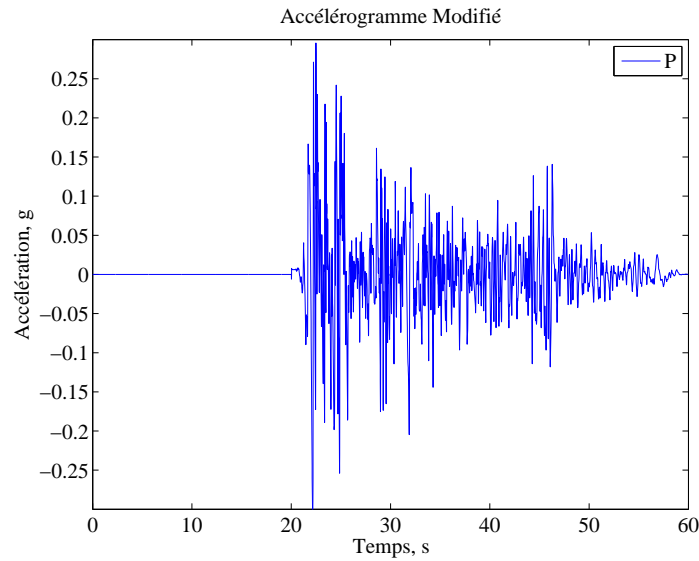


Fig. 4.2 Accélérogramme modifié

La fonction temporelle représentée à la figure (4.2) a été employée dans une analyse d'une structure du type du Modèle 2. La pression en un point de la paroi proche du fond du réservoir a été relevée à la figure (4.3).

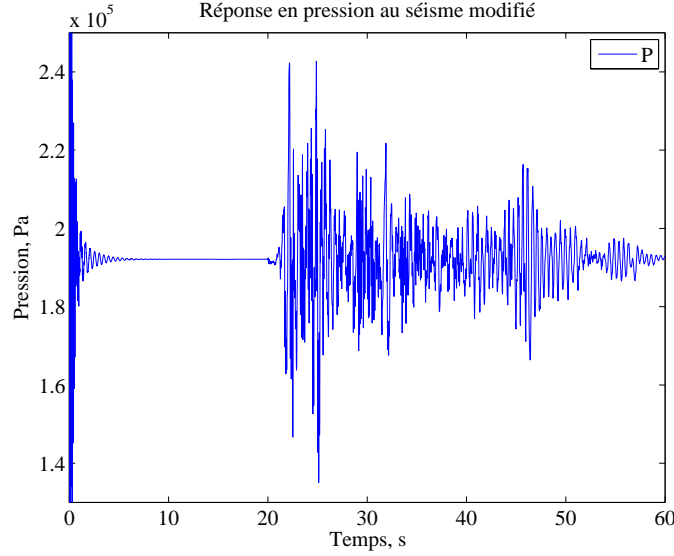


Fig. 4.3 Découplage de la réponse en vibrations libres et de la réponse en vibrations forcées

Comme on peut constater à la figure Fig. (4.3), avec l'application de l'accélérogramme modifié, les effets de la pression hydrostatique peuvent être séparés de la réponse en vibrations forcées de manière aisée.

4.2 Equation d'équilibre des réservoirs asymétriques

Cette partie présente une démonstration de l'équation d'équilibre de la structure des réservoirs rectangulaires asymétriques partiellement remplis. L'une des directions du réservoir est supposée suffisamment longue devant les autres dimensions pour pouvoir étudier le réservoir en deux dimensions dans l'hypothèse des déformations planes. L'équation de la dynamique du système va être établie à l'aide du principe variationnel d'Hamilton et des équations de Lagrange en considérant m_s degrés de libertés.

L'équation d'Hamilton peut s'écrire sous la forme variationnelle suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta [T(t) - V(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (B5)$$

Où $T(t)$ représente l'énergie cinétique de la structure, $V(t)$ représente l'énergie potentielle et W_{nc} représente le travail des forces non conservatives.

L'équation du mouvement de la structure du réservoir comportant m_s degrés de libertés peut être directement déduite de l'équation d'Hamilton (B5) en différenciant les quantités $T(t)$, $V(t)$ et δW_{nc}

en fonction des coordonnées généralisées et de leurs premières dérivées :

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial T}{\partial z_2} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial z_{m_s}} \delta z_{m_s} + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \delta \dot{z}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2} \delta \dot{z}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_{m_s}} \delta \dot{z}_{m_s} \quad (\text{B6})$$

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial V}{\partial z_2} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial z_{m_s}} \delta z_{m_s} \quad (\text{B7})$$

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta z_1 + Q_2 \delta z_2 + \dots + Q_{m_s} \delta z_{m_s} \quad (\text{B8})$$

Ou m_s représente le nombre de modes structuraux, z_1, z_2, \dots, z_{m_s} représentent les coordonnées généralisées de la structure et Q_1, Q_2, \dots, Q_{m_s} représentent les forces généralisées.

En exploitant le fait que $\delta z_i(t_1) = \delta z_i(t_2) = 0$, on obtient la propriété suivante pour tout $i = 1 \dots m_s$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \delta \dot{z}_i dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta z_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta z_i dt \quad (\text{B9})$$

Ainsi, en substituant les Eqs. (B6), (B7) et (B8) dans l'équation l'Eq. (B5), on aboutit au système d'équation suivantes :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{m_s} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial z_i} - \frac{\partial V}{\partial z_i} + Q_i \right] \delta z_i \right\} dt = 0; \quad i = 1 \dots m_s \quad (\text{B10})$$

Le système d'équations ci-dessus devant être vérifié pour toutes valeurs de δz_i , on en déduit le système d'équations suivants :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_i} + \frac{\partial V}{\partial z_i} = Q_i; \quad i = 1 \dots m_s \quad (\text{B11})$$

Le système d'Eqs. (B11) correspond aux équations de Lagrange.

Dans le cas des systèmes linéaires sujets à de faibles oscillations, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle peuvent être exprimées sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_s} m_{ij} \dot{z}_i \dot{z}_j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{z}} \quad (\text{B12})$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_s} k_{ij} z_i z_j = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{k} \mathbf{z} \quad (\text{B13})$$

En considérant les équations (B16) et (B13) de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, l'équation Eq. (B11) peut être réécrite comme suit, pour $i = 1, 2, \dots, m_s$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} + \frac{\partial V}{\partial z_i} = Q_i \quad (\text{B14})$$

En décomposant les déplacements dans la base des coordonnées généralisées comme suit,

$$\mathbf{U} = \left(\sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(x, y) z_j^{(\xi)}(t) \quad \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(y)}(x, y) z_j^{(\xi)}(t) \right)^T \quad (\text{B15})$$

Ou les indices (x) et (y) indiquent la direction des fonctions de forme et l'indice (ξ) correspond à la direction de la sollicitation sismique.

L'énergie cinétique est donnée par la formule suivante :

$$T = \frac{1}{2} \int_{A_{s1}} m(x, y) \dot{\mathbf{U}}^2 dA + \frac{1}{2} \int_{A_{s2}} m(x, y) \dot{\mathbf{U}}^2 dA \quad (\text{B16})$$

Ou A_{s1} désigne l'aire délimitée par la paroi gauche du réservoir et A_{s2} désigne l'aire de la paroi droite du réservoir. En substituant l'Eq. (B15) dans l'Eq. (B16), l'énergie cinétique peut être réécrite de la manière suivante :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_s} (m_{1ij} + m_{2ij}) \dot{z}_i^{(\xi)}(t) \dot{z}_j^{(\xi)}(t) \quad (\text{B17})$$

Avec

$$m_{1ij} = \int_{A_{s1}} m(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \quad (\text{B18})$$

$$m_{2ij} = \int_{A_{s2}} m(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \quad (\text{B19})$$

L'énergie potentielle élastique est donnée par l'expression suivante :

$$V = \frac{1}{2} \int_{A_{s1}} k(x, y) \mathbf{U}^2 dA + \frac{1}{2} \int_{A_{s2}} k(x, y) \mathbf{U}^2 dA \quad (\text{B20})$$

En adoptant la décomposition dans la base des coordonnées généralisées, l'équation peut se réécrire comme suit,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m_s} \sum_{i=1}^{m_s} (k_{1ij} + k_{2ij}) z_i^{(\xi)}(t) z_j^{(\xi)}(t) \quad (\text{B21})$$

Avec

$$k_{1ij} = \int_{A_{s1}} k(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \quad (\text{B22})$$

$$k_{2ij} = \int_{A_{s2}} k(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \quad (\text{B23})$$

Trois forces non conservatives s'exercent sur la structure, la force interne due à l'amortissement de la structure, les forces de pression hydrodynamique et les forces d'inertie. Le travail des forces non conservatives est donné par l'expression suivante :

$$\delta W_{nc, totale} = \delta W_{nc, extp} + \delta W_{nc, exti} - \delta W_{nc, int} \quad (\text{B24})$$

Avec

$$\delta W_{nc,exp} = \int_0^H \mathbf{P}_1^T \delta \mathbf{U}_1 dy + \int_0^H \mathbf{P}_2^T \delta \mathbf{U}_2 dy \quad (\text{B25})$$

$$\delta W_{nc,exti} = - \int_{A_{s1}} m(x, y) \mathbf{1}^{(\xi)T} a_g^{(\xi)}(t) \delta \mathbf{U} dA - \int_{A_{s2}} m(x, y) \mathbf{1}^{(\xi)T} a_g^{(\xi)}(t) \delta \mathbf{U} dA \quad (\text{B26})$$

$$\delta W_{nc,int} = \int_{A_{s1}} c(x, y) \dot{\mathbf{U}}^T \delta \dot{\mathbf{U}} dA + \int_{A_{s2}} c(x, y) \dot{\mathbf{U}}^T \delta \dot{\mathbf{U}} dA \quad (\text{B27})$$

Avec,

$$\mathbf{P}_1 = (0 \quad -p(-br, y, t))^T; \quad (\text{B28})$$

$$\mathbf{U}_1 = \left(\sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(-br, y) z_j^{(\xi)}(t) \quad \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(-br, y) z_j^{(\xi)}(t) \right)^T; \quad (\text{B29})$$

$$\mathbf{P}_2 = (0 \quad p(br, y, t))^T; \quad (\text{B30})$$

$$\mathbf{U}_2 = \left(\sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(br, y) z_j^{(\xi)}(t) \quad \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(br, y) z_j^{(\xi)}(t) \right)^T \quad (\text{B31})$$

et

$$\mathbf{1}^{(\xi=x)} = (1 \quad 0)^T; \quad \mathbf{1}^{(\xi=y)} = (0 \quad 1)^T \quad (\text{B32})$$

En substituant l'Eq. (B15) dans les trois équations précédentes, on peut écrire le travail des forces non conservatives sous la forme :

$$\delta W_{nc,totale} = \sum_{i=1}^{m_s} [p_{1i}(t) + p_{2i}(t) - (L_{1i}^{(\xi)} + L_{2i}^{(\xi)}) a_g^{(\xi)}(t) - \sum_{j=1}^{m_s} (c_{1ij} + c_{2ij}) \dot{z}_j^{(\xi)}(t)] \delta z_i^{(\xi)}(t) \quad (\text{B33})$$

Avec

$$p_{1i}(t) = \int_0^H -p(-br, y, t) \psi_i^{(x)}(-br, y) dy \quad (\text{B34})$$

$$p_{2i}(t) = \int_0^H p(br, y, t) \psi_i^{(x)}(br, y) dy \quad (\text{B35})$$

$$c_{1ij} = \int_{A_{s1}} c(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \quad (\text{B36})$$

$$c_{2ij} = \int_{A_{s2}} c(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \quad (\text{B37})$$

$$L_{1i}^{(\xi)} = \int_{A_{s1}} m(x, y) \psi_i^{(\xi)}(x, y) dA \quad (\text{B38})$$

$$L_{2i}^{(\xi)} = \int_{A_{s2}} m(x, y) \psi_i^{(\xi)}(x, y) dA \quad (\text{B39})$$

Par identification des équations Eqs. (B8) et (B33), on en déduit l'expression des forces généralisées :

$$Q_i = p_{1i}(t) + p_{2i}(t) - (L_{1i}^{(\xi)} + L_{2i}^{(\xi)}) a_g^{(\xi)}(t) - \sum_{j=1}^{m_s} (c_{1ij} + c_{2ij}) \dot{z}_j^{(\xi)}(t) \quad i = 1, \dots, m_s \quad (\text{B40})$$

En substituant les Eqs. (B5), (B6), (B40) dans l'Eq. (B14), on obtient les équations d'équilibre de la structure :

$$\sum_{j=1}^{m_s} \left[m_{sij} \ddot{z}_j^{(\xi)}(t) + c_{sij} \dot{z}_j^{(\xi)}(t) + k_{sij} z_j^{(\xi)}(t) \right] = -L_{si}^{(\xi)} a_g^{(\xi)}(t) + p_{1i}(t) + p_{2i}(t) \quad i = 1, \dots, m_s \quad (\text{B41})$$

En adoptant les notations suivantes pour désigner les quantités relatives à la structure entière :

$$m_{sij} = m_{1ij} + m_{2ij} \quad (\text{B42})$$

$$c_{sij} = c_{1ij} + c_{2ij} \quad (\text{B43})$$

$$k_{sij} = k_{1ij} + k_{2ij} \quad (\text{B44})$$

$$L_{si}^{(\xi)} = L_{1i}^{(\xi)} + L_{2i}^{(\xi)} \quad (\text{B45})$$

En utilisant la m-orthonormalité des modes de vibration de la structure, on a la propriété suivante

$$m_{sij} = \int_{A_{stotale}} m(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \cdot \delta_{ji} \quad (\text{B46})$$

Où δ_{ji} désigne la fonction de Kronecker et $A_{stotale} = A_{s1} \cup A_{s2}$.

En considérant le système d'équations des vibrations libres de la structure non amortie, on obtient les relations suivantes :

$$k_{sij} = \int_{A_{stotale}} k(x, y) [\psi_i^{(x)}(x, y) \psi_j^{(x)}(x, y) + \psi_i^{(y)}(x, y) \psi_j^{(y)}(x, y)] dA \cdot \delta_{ji} \quad (\text{B47})$$

et pour chaque mode de structure i :

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_{sii}}{m_{sii}}} \quad (\text{B48})$$

En considérant les Eqs. (B46) et (B47), et en supposant un amortissement visqueux pour la structure, l'Eq. (B41), peut alors être simplifiée comme suit :

$$m_{sii} \left[\ddot{z}_i^{(\xi)}(t) + 2 \xi_i \omega_i \dot{z}_i^{(\xi)}(t) + \omega_i^2 z_i^{(\xi)}(t) \right] = -L_{si}^{(\xi)} a_g^{(\xi)}(t) + p_{1i}(t) + p_{2i}(t); \quad i = 1..m_s \quad (\text{B49})$$

Avec la propriété de m-orthonormalité des modes, $m_{sij} = \delta_{ji}$ l'Eq. (B49) se simplifie comme suit :

$$\ddot{z}_i^{(\xi)}(t) + 2 \xi_i \omega_i \dot{z}_i^{(\xi)}(t) + \omega_i^2 z_i^{(\xi)}(t) = -L_{si}^{(\xi)} a_g^{(\xi)}(t) + p_{1i}(t) + p_{2i}(t); \quad i = 1, \dots, m_s \quad (\text{B50})$$

L'équation précédente est résolue dans le domaine fréquentiel en adoptant les écritures suivantes :

$$p_{1i}(t) = - \int_0^H \left[\bar{p}_0(-br, y, \omega) - \omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \bar{p}_j(-br, y) \bar{z}_j(\omega) \right] \psi_i^{(x)}(-br, y) dy \cdot e^{(i\omega t)} \quad (B51)$$

$$p_{2i}(t) = \int_0^H \left[\bar{p}_0(br, y, \omega) - \omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \bar{p}_j(br, y) \bar{z}_j(\omega) \right] \psi_i^{(x)}(br, y) dy \cdot e^{(i\omega t)} \quad (B52)$$

$$z_i^{(\xi)}(t) = \bar{z}_i^{(\xi)}(\omega) \cdot e^{(i\omega t)} \quad (B53)$$

$$a_g^{(\xi)}(t) = \bar{a}_g^{(\xi)}(\omega) \cdot e^{(i\omega t)} \quad (B54)$$

En utilisant les Eqs. (B51), (B52), (B53) et (B54), l'Eq.(B50) peut s'écrire de la manière suivante dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 + 2i\xi_i \omega \omega_i + \omega_i^2 + \omega^2 \left(\int_0^H \bar{p}_i(br, y) \psi_i^{(x)}(br, y) dy - \int_0^H \bar{p}_i(-br, y) \psi_i^{(x)}(-br, y) dy \right) \right] \bar{z}_i^{(\xi)}(\omega) \\ & + \omega^2 \left(\sum_{j=1, j \neq i}^{m_s} \left[\int_0^H \bar{p}_j(br, y) \psi_i^{(x)}(br, y) dy - \int_0^H \bar{p}_j(-br, y) \psi_i^{(x)}(-br, y) dy \right] \bar{z}_j^{(\xi)}(\omega) \right) \\ & = -L_{si}^{(\xi)} a_g^{(\xi)}(\omega) + \int_0^H \bar{p}_0(br, y, \omega) \psi_i^{(x)}(br, y) dy - \int_0^H \bar{p}_0(-br, y, \omega) \psi_i^{(x)}(-br, y) dy \quad i = 1, \dots, m_s \end{aligned} \quad (B55)$$

Enfin, le système d'équations Eq. (B55) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{Z}}^{(\xi)} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (B56)$$

Avec

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij} &= [-\omega^2 + 2i\xi_i \omega \omega_i + \omega_i^2] \delta_{ji} \\ &+ \omega^2 \left[\int_0^H \bar{p}_j(br, y) \psi_i^{(x)}(br, y) dy - \int_0^H \bar{p}_j(-br, y) \psi_i^{(x)}(-br, y) dy \right] \\ \bar{Q}_i &= -L_{si}^{(\xi)} a_g^{(\xi)}(\omega) + \int_0^H \bar{p}_0(br, y, \omega) \psi_i^{(x)}(br, y) dy - \int_0^H \bar{p}_0(-br, y, \omega) \psi_i^{(x)}(-br, y) dy \\ \bar{Z}_i^{(\xi)} &= \bar{z}_i^{(\xi)}(\omega) \end{aligned} \quad (B57)$$

Les pressions $\bar{p}_0(\pm br, y, \omega)$ et $\bar{p}_j(\pm br, y)$ avec j variant de $1, \dots, m_s$ sont déterminées en résolvant l'équation d'onde avec les conditions aux frontières comme mentionné dans les articles.

A partir des quantités de base comme les déplacements de la structure et la pression au sein du liquide, il est possible de déterminer d'autres quantités d'intérêts tel que le cisaillement dans les parois ou le moment de renversement.

Le cisaillement (dynamique) dans une paroi à une hauteur de coupe H_c est due aux forces d'inertie

et à la pression hydrodynamique :

$$F_{c,\pm br} = \int \int_{A_{Sc}} m(x, y) \left[\ddot{u}^{(\xi)}(x, y, t) + a_g(t) \right] dA + \int_{H_c}^H p(\pm br, y, t) dy \quad (\text{B58})$$

Ou A_{Sc} désigne l'aire de la surface de la paroi située au-dessus de la hauteur de coupe H_c .

Le moment de renversement à la hauteur de coupe H_c se déduit de la force de cisaillement

$$M_{c,\pm br} = \int \int_{A_{Sc}} m(x, y) \left[\ddot{u}^{(\xi)}(x, y, t) + a_g(t) \right] y dA + \int_{H_c}^H p(\pm br, y, t) y dy \quad (\text{B59})$$

4.3 Résultats complémentaires

4.3.1 Résultats complémentaires concernant l'article de l'annexe F

Effet de la condition d'absorption sédimentaire

Cette partie s'intéresse à l'effet du coefficient d'absorption α due à une couche de sédimentation dans un réservoir symétrique défini à la figure (4.4)

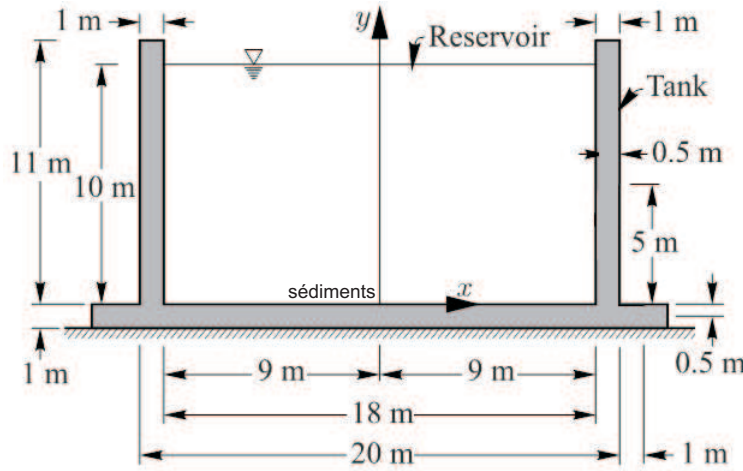


Fig. 4.4 Géométrie du réservoir symétrique

On rappelle que le coefficient α est défini par :

$$\alpha = \frac{1 - q C_r}{1 + q C_r}; \quad q = \frac{\rho_r}{\rho_f C_f} \quad (\text{B60})$$

La figure (4.5) présente les résultats d'une étude paramétrique de la pression impulsive en un point d'une des parois proche du fond du réservoir en fonction du coefficient d'absorption. Le coefficient α prend les valeurs : 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 et 1.

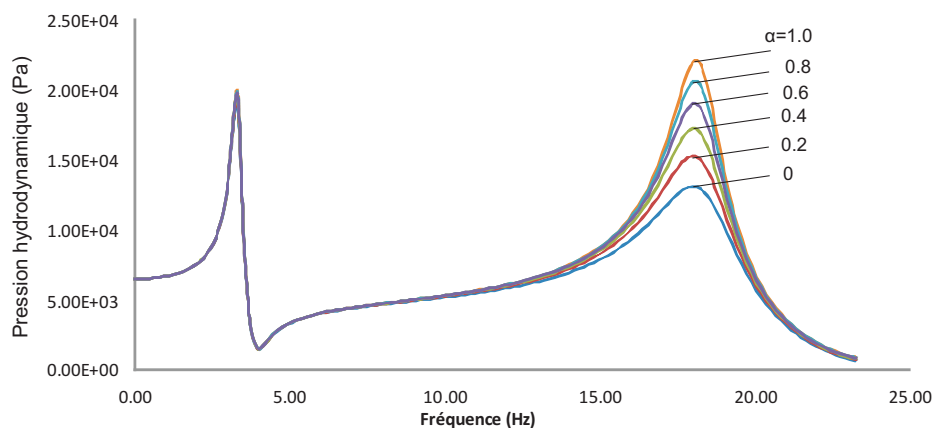


Fig. 4.5 Effet du coefficient d'absorption pour un réservoir symétrique standard

On constate à la figure (4.5) que le coefficient d'absorption influe exclusivement sur le second mode couplé fluide-structure et n'a aucun effet dans les basses fréquences.

Intensité du couplage entre les parois et effet de l'asymétrie

Ce paragraphe s'intéresse à l'intensité du couplage entre les deux murs d'un modèle de réservoirs asymétriques. Le modèle étudié est présenté en figure (4.6).

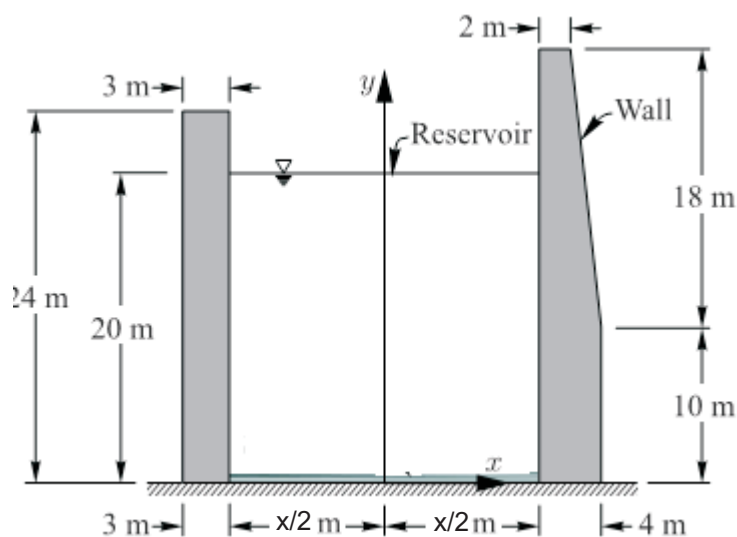


Fig. 4.6 Géométrie du réservoir asymétrique étudié

La figure (4.7) présente les résultats d'une étude paramétrique du déplacement en crête de la paroi gauche en fonction de la distance d'écartement des murs :

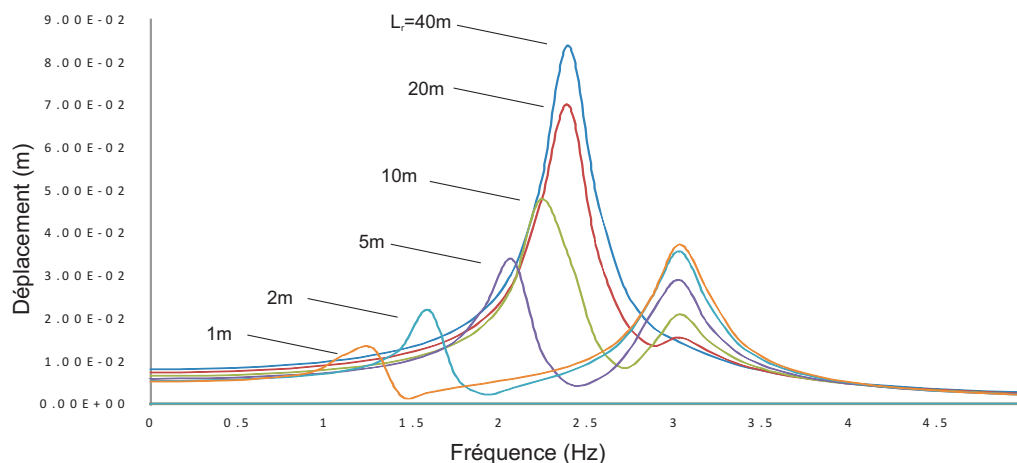


Fig. 4.7 Effet de la largeur du réservoir sur le couplage des deux parois

On constate à la figure (4.7) que le couplage entre les premiers modes impulsifs des deux murs devient négligeable lorsque la largeur du réservoir est environ égale à $L = 2 H_r$ avec H_r la hauteur de liquide et L la largeur du réservoir. Le couplage entre ces modes est maximum lorsque la distance qui les sépare est environ égale à $L = H_r/4$.

4.3.2 Résultats complémentaires concernant l'article du chapitre 3

Étude du couplage entre les modes impulsifs et les modes convectifs dans le cas d'un réservoir avec blocs de glace flottants

Lors du calcul de la pression convective, les codes de conception parasismique des réservoirs recommandent en général de négliger le couplage entre les modes impulsifs et les modes convectifs. Ceci s'explique par le fait que ces deux types de mode n'appartiennent pas aux mêmes gammes de fréquences. Ainsi, le code recommande de calculer de manière séparée les pressions hydrodynamiques impulsives et convectives et de réaliser ensuite une combinaison de ces pressions.

On peut se demander si le même principe peut s'appliquer au cas de la pression convective dans le cas des réservoirs avec couvert de blocs de glace.

Une étude du couplage entre les quantités convectives et impulsives de la structure asymétrique de l'article du chapitre 3 a été réalisée. Des analyses temporelles ont été réalisées à l'aide d'ADINA, prenant en compte le couplage entre les modes impulsifs et les modes convectifs. D'autres analyses ont été réalisées calculant les quantités impulsives et convectives de manière séparée et réalisant la combinaison s'appliquant au ballotement des réservoirs non couverts de glace. Les réponses calculées de manière séparée puis recombinaées par la suite, et les réponses couplées sont représentées aux figures (4.8) et (4.9) :

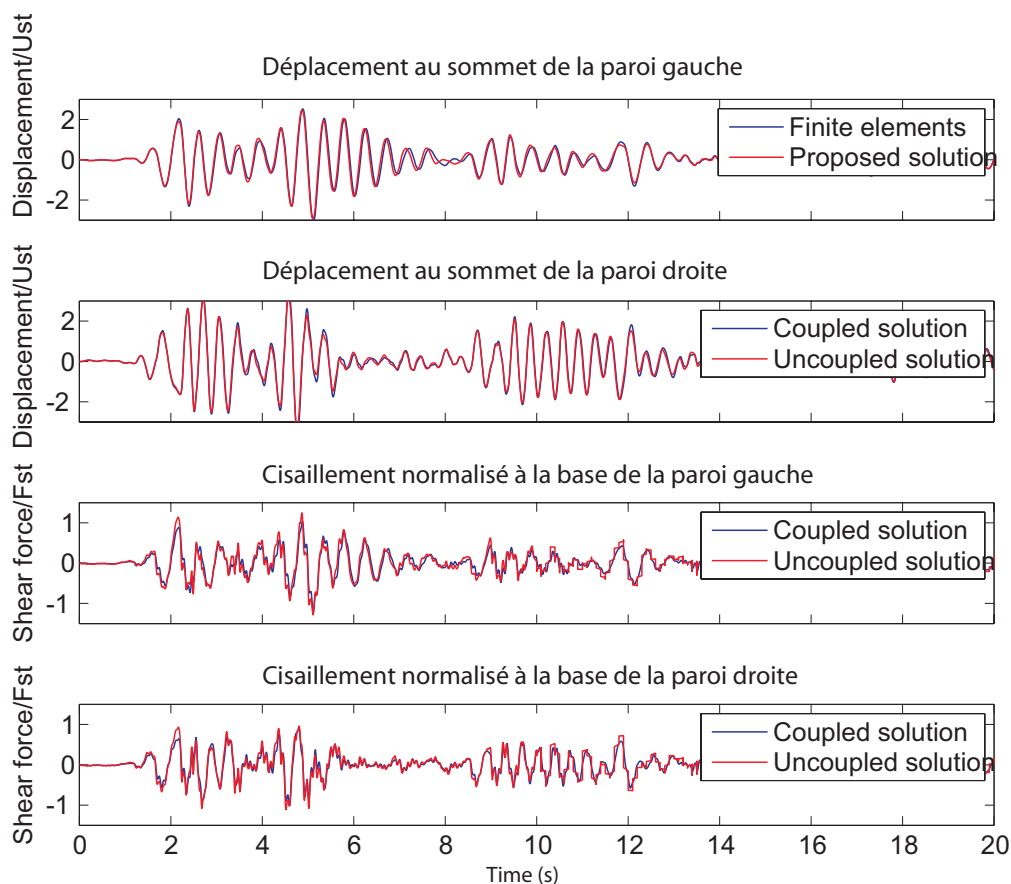


Fig. 4.8 Réponses structurales temporelles : cisaillement et déplacement en crête de mur

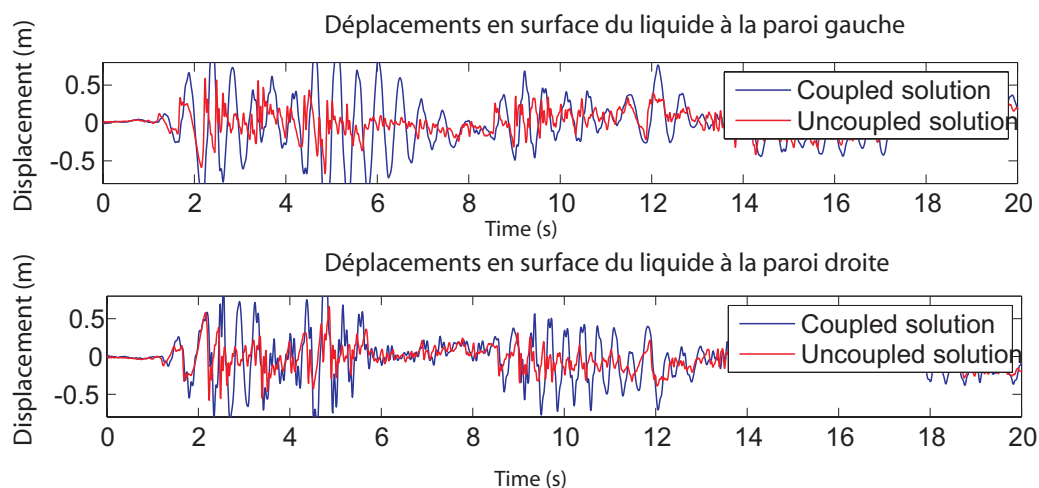


Fig. 4.9 Déplacement temporels verticaux des blocs de glace en surface

Aux figures Figs. (4.8) et (4.9), "uncoupled solution" désigne la solution ou les composantes

convectives et impulsives sont calculées de manière séparée puis recombinaée et "coupled solution" désigne la solution ou les composantes convectives et impulsives sont calculées de manière combinée. On déduit de cette étude que le couplage entre les deux types de modes peut être considéré faible en ce qui concerne la réponse structurelle. En outre, on constate que le couplage n'est pas négligeable dans le cas de la réponse en pression du liquide. Ainsi si l'on désire mesurer avec précision la hauteur d'élévation des blocs de glace, il est nécessaire de prendre en compte le couplage entre la pression convective et la pression impulsive.

CHAPITRE 5

DISCUSSION GÉNÉRALE

Ce chapitre a pour but de réaliser une discussion générale sur la méthode proposée dans ce mémoire. Dans l'ensemble des travaux réalisés, la méthode de sous-structuration a été employée pour résoudre analytiquement le problème d'interaction fluide-structure dans les réservoirs à géométrie rectangulaire.

5.1 Discussion générale autour de l'article 0 (ANNEXE F)

Dans cet article, la méthode semi-analytique proposée prend en compte les propriétés suivantes : la dissymétrie des parois, la compressibilité de l'eau, une condition d'absorption par sédimentation au fond du réservoir et une condition de repos de la surface du liquide. L'article se focalise sur la réponse impulsive des réservoirs asymétriques soumis à une excitation sismique. La méthode a été testée sur deux types de réservoirs distincts, un réservoir présentant une asymétrie géométrique des parois et un réservoir présentant une asymétrie matérielle des parois. Les vérifications des analyses fréquentielles harmoniques et temporelles par superposition des modes ont été faites à l'aide du logiciel de calcul par éléments finis ADINA.

L'un des principaux résultats de cet article est l'effet de l'asymétrie sur le couplage entre les deux parois. L'action d'une paroi sur l'autre se traduit dans le domaine fréquentiel par l'apparition d'un pic supplémentaire lors de l'analyse harmonique des deux murs. Les doubles pics des modes couplés fluide-structure correspondent aux premiers modes de vibration structurelle de chacun des deux murs respectivement. Le couplage entre les deux murs peut ainsi être mesuré en fonction de l'amplitude relative des deux premiers pics observés dans l'analyse harmonique des murs. Des résultats complémentaires à l'article on montré que l'amplitude des deux pics varie en fonction de l'éloignement des deux murs et qu'il existe une longueur à partir de laquelle les deux murs peuvent être considéré découplés, c'est-à-dire que l'on observe plus qu'un pic de résonance autour du premier mode couplé fluide-structure pour les deux parois respectivement.

Cet article s'est également intéressé à l'amortissement en fond de réservoir du à une couche de sédiment. Il apparaît que la présence d'une couche de sédiment semble affecter en amplitude uniquement le second mode couplé pour chacune des deux parois respectivement.

Dans ce travail, la pression convective a été supposée découplée de la pression impulsive et négligée.

5.2 Discussion générale autour de l'article 1 (CHAPITRE 3)

Dans cet article, la méthode semi-analytique proposée prend en compte les propriétés suivantes : la dissymétrie des parois, la compressibilité de l'eau, le ballotement de la surface libre et la flottaison

de blocs de glace. Cet article s'inscrit dans la lignée de l'article 0 et propose une méthode prenant en compte le couplage entre les pressions de nature impulsive et convective. Dans ce travail, un type de réservoir asymétrique a été considéré, il s'agit d'une structure de type écluse. L'effet d'un couvert de glace modélisé par des blocs de glace flottant sans rigidité, sur le comportement dynamique des murs du réservoir soumis à un séisme a été évalué. Les analyses ont été réalisées dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel.

Il ressort de cette étude que la présence de blocs de glace affecte les réponses en fréquence et en amplitude du réservoir étudié. L'un des résultats le plus remarquable est la présence d'une pression hydrodynamique non négligeable dans la partie haute des parois due aux blocs de glace. En comparaison la pression hydrodynamique d'un réservoir à surface libre ballottant est négligeable. Des résultats complémentaires à cet article ont montré que le découplage des pressions convective et impulsive réalisé dans le cas des réservoirs à surface libre ballottant est possible dans les réservoirs avec blocs de glace flottant mais restreint. En effet, il a été montré que pour le réservoir étudié et une couche de glace de 1m, le couplage entre quantités structurelles impulsive et convective semble négligeable, en revanche le couplage entre quantités convective et impulsive décrivant le liquide n'est du tout négligeable, particulièrement en ce qui concerne les pressions à la surface du liquide. Si, la hauteur d'élévation des blocs de glace doit être évaluée, il est nécessaire de prendre en compte le couplage.

CHAPITRE 6

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Ce chapitre présente les principales conclusions et recommandations pour d'éventuelles recherches à venir.

6.1 Synthèse des travaux

En conclusion, cette recherche a permis de développer et de valider une formulation originale basée sur le principe de sous-structuration, permettant de calculer la réponse sismique de structures rectangulaires à parois flexibles contenant un liquide, en prenant en compte le comportement dynamique propre de chacune des parois, et en intégrant un certains nombre d'hypothèses telles que : une condition d'absorption en fond de réservoir, la compressibilité du liquide, le ballotement du liquide en surface, la flottaison de masses en surface. Ce travail a donné lieu à deux publications, l'une présentée dans le corps du rapport et l'autre en dernière annexe.

Le premier article présenté en annexe, propose une formulation permettant de calculer la réponse à une excitation sismique latérale, de conteneurs liquides comportant des parois asymétriques flexibles. Dans cet article, le liquide est supposé compressible ou incompressible, une condition à la frontière d'absorption est considérée au fond du réservoir et le ballotement du liquide en surface est négligé. Ce travail ne prend ainsi en compte que le comportement impulsif du liquide. Deux modèles de réservoirs asymétriques, l'un présentant une asymétrie géométrique et l'autre présentant une asymétrie matérielle, ainsi qu'un modèle test de réservoir symétrique ont été analysés à l'aide de la méthode développée. Les résultats de ces analyses ont été validés avec succès par la méthode des éléments finis. Des résultats complémentaires à cet article ont mis en évidence que le coefficient d'absorption pris en compte dans les analyses analytiques du type de réservoirs analysés, ne semble avoir d'effets que pour le second mode couplé du fluide et de la structure, qui possède une fréquence supérieure à 10 Hz. Par ailleurs, selon des études numériques complémentaires, il a été mis en évidence que l'effet du couplage entre les deux murs d'un réservoir rempli semble s'estomper lorsque la distance séparant les deux murs dépasse une distance environ égale à deux fois la hauteur du liquide.

Le second article présenté dans le chapitre 3, propose une formulation permettant d'analyser la réponse à un séisme, de composante horizontale, des réservoirs de liquide présentant deux murs flexibles, un fluide pouvant être considéré compressible ou non, une condition de mur rigide en fond de réservoir et une condition à la surface pouvant prendre en compte la flottaison de blocs de glace. Cette formulation est également capable de prendre en compte le ballotement du liquide

en surface. Dans cet article, les comportements impulsif et convectif du fluide sont représentés et le couplage entre ces deux types de pression est pris en compte. Un amortissement proportionnel visqueux habituellement employé pour amortir les modes convectifs a été proposé pour amortir les modes convectifs prenant en compte la condition de flottaison de blocs de glace. Dans ce travail des exemples numériques ont été validés avec succès avec des modèles éléments finis. Il a été mis en évidence que la prise en compte de blocs de glace en surface amplifie les réponses du fluide et de la structure. Cette condition à la surface affecte particulièrement la pression impulsive du fluide qui prend des valeurs non-négligeables en surface. Des études complémentaires à cet article ont montré la nécessité de prendre en compte le couplage entre le comportement impulsif et le comportement convectif du fluide pour représenter la réponse en pression du fluide. En revanche, il semblerait que pour les hauteurs de glace considérées, le couplage entre l'impulsif et le convectif puisse être négligé pour calculer la réponse de la structure.

Tout au long des différentes études menées, des modèles plus ou moins élaborés, ont été réalisés et analysés par la méthode des éléments finis. Dans le cas des modèles prenant en compte le comportement convectif du fluide, les modèles nécessitent un maillage très raffiné, fonction du nombre de modes convectifs demandés dans l'analyse. Ce raffinement du maillage est un raffinement horizontal et ne s'applique que dans le domaine du liquide. Il est nécessaire pour la bonne prise en compte de la propagation des ondes de gravité en surface du liquide, mais augmente considérablement le coût des calculs. La prise en compte du comportement convectif et impulsif simultanément du fluide est très difficile par la méthode des éléments finis, étant donné l'écart fréquentiel existant entre les premiers modes convectifs et les premiers modes impulsifs. Dans le cas des modèles de réservoirs avec un liquide pouvant balloter, les normes soutenues par de nombreuses études, y compris ce mémoire, ont montré qu'il est possible de calculer les réponses convectives et impulsives du système de manière séparée. En pratique pour l'analyse d'un réservoir, un modèle rigide du réservoir est réalisé avec une condition en surface de ballotement pour calculer la réponse convective et un modèle flexible avec une condition de pression nulle en surface est réalisée pour calculer la réponse impulsive. Les deux réponses obtenues de manière séparée sont ensuite combinées pour obtenir la réponse totale du système. Dans le cas de la flottaison de blocs de glace, il a été mis en évidence que cette technique ne s'applique pas.

6.2 Limitations de la solution proposée

L'une des limitations de la méthode analytique proposée dans ce mémoire vient du fait qu'il s'agit d'une méthode semi-analytique. Cette méthode suppose une décomposition des déplacements structuraux dans la base des coordonnées généralisées et utilise les modes de vibration de la structure sèche, fournis par la méthode des éléments finis pour pouvoir calculer la réponse couplée à une excitation sismique de l'ensemble du système.

Dans le cas du ballotement, la méthode emploie les équations différentielles de frontière de la théorie

des ondes de surface linéaires. L'emploi de la théorie de Stokes à un ordre deux pourrait fournir une meilleure approximation de l'élévation du fluide ou des blocs de glace en surface.

Une autre limitation de cette technique provient de son caractère linéaire qui n'est pas capable de prendre en compte les phénomènes de variation brusque de pression ou de vitesse dans le fluide.

6.3 Améliorations futures

Dans les recherches à venir, cette technique pourrait être adaptée pour analyser les structures réelles en trois dimensions dans le cas des réservoirs rectangulaires possédant une profondeur du même ordre de grandeur que les autres dimensions.

Il serait intéressant de développer une méthode simplifiée à partir de cette méthode, en modélisant les murs par des poutres dont les modes de vibration sont calculables de manière analytique. Cela permettrait de développer une méthode entièrement analytique.

Dans le cas des structures avec couvert de glace, il pourrait être judicieux de réaliser des modèles éléments finis prenant en compte les impacts horizontaux de la glace sur la structure du réservoir.

RÉFÉRENCES

- ACI-COMMITTEE-350 (2006). Seismic design of liquid-containing concrete structures and commentary. Rapport technique, American Concrete Institute.
- APPLIED TECHNOLOGY COUNCIL (2011). Reducing the risks of nonstructural earthquake damage-a practical guide. Rapport technique, FEMA.
- BALENDRA, T. (1978). Earthquake analysis of a cylindrical liquid storage tank with a dome by finite element method. Rapport technique, Departement of civil Engineering, University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts.
- BAUER, H. (1993). Frequencies of a hydroelastic rectangular system. *Forschung im Ingenieurwesen-Engineering Research Bd*, vol. 59, pp. 18–28.
- BOUAANANI, N. et PAULTRE, P. (2005). A new boundary condition for energy radiation in covered reservoirs using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 29, pp. 903–911.
- CAKIR, T. et LIVAOGLU, R. (2012). Fast practical analytical model for analysis of backfill-rectangular tank-fluid interaction systems. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 37, pp. 24–37.
- CHEN, J. Y. et CHIANG, C. C. (2000). Emergency Response and Restoration During Chi-Chi Earthquake. Rapport technique, Chinese Petroleum Corp.
- CHEN, W., HAROUN, M. A. et LIU, F. (1996). Large amplitude liquid sloshing in seismically excited tanks. *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 25, pp. 653–669.
- CHOPRA, A. et FENVES, G. (1984). A computer program for earthquake analysis of concrete gravity dams. Rapport technique EERC-84-11, University of California, Earthquake Engineering Research Center.
- CHOPRA, A. K. (1967). Reservoir-Dam Interaction During Earthquakes. *Bull. Seismological Soc. Of Am.*, vol. 57, pp. 675–687.
- CHOPRA, A. K. (1968). Earthquake Behavior of Reservoir-Dam Systems. *Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE*, vol. 94, pp. 1475–1500.
- CHOPRA, A. K. (1970). Earthquake Response of Concrete Gravity Dams. *Journal of the Eng. Mech. Div., ASCE*, vol. 96, pp. 443–454.
- CLOUGH, D. P. (1977). Experimental evaluation of seismic design methods for broad cylindrical tanks. Rapport technique EERC 77-10, University of California, Earthquake Engineering Research Center.
- CLOUGH, D. P. et CLOUGH, R. W. (1978). Earthquake simulator studies of cylindrical tanks. *Nuclear Engrg. And Des.*, vol. 46, pp. 367–380.

- CLOUGH, R. W., NIWA, A. et CLOUGH, D. P. (1978). Experimental seismic study of cylindrical tanks. *J. struct. Div. ASCE*, vol. 105, pp. 2565–2590.
- EDWARDS, N. W. (1969). *A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquid storage tanks subjected to lateral ground motions*. Thèse de doctorat, University of Michigan.
- EPSTEIN, H. I. (1976). Seismic design of life liquid storage tanks. *Journal of the Structural Division*, vol. 102, pp. 1659–1673.
- FABBROCINO, G., IERVOLINO, I., ORLANDO, F. et SALZANO, E. (2005). Quantitative risk analysis of oil storage facilities in seismic areas. *Journal of Hazardous Materials*, vol. 123, pp. 61–69.
- FISHER, F. D. et RAMMERSTORFER, F. G. (1999). A refined analysis of sloshing effects in seismically excited tanks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 76, pp. 693–709.
- GRAHAM, E. W. et RODRIQUEZ, M. (1952). Characteristics of Fuel Motion Which Affect Airplane Dynamics. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 19.
- GUPTA, R. K. et HUTCHISON, G. L. (1990). Effects of wall flexibility on the dynamic response of liquid storage tanks. *Engineering structures*, vol. 13, pp. 253–267.
- HANSON, R. D. (1973). Behavior of storage tanks, the Great Alaska Earthquake of 1964. National Academy of Science, Washington, D.C., 331–339.
- HAROUN, M. A. (1980). Dynamic analyses of liquid storage tanks. EERL 80-04, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology.
- HAROUN, M. A. (1983). Vibration studies and Tests of liquid storage tanks. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 11, pp. 19–206.
- HAROUN, M. A. (1984). Stress analysis of rectangular walls under seismically induced hydrodynamic loads. *Bull. Seismological Soc. Of Am.*, vol. 74, pp. 1031–1041.
- HAROUN, M. A. (1985). Response of tanks to vertical Seismic Excitations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, vol. 13, pp. 583–589.
- HAROUN, M. A. et ABOU-IZZEDINE, W. (1992a). Parametric study of seismic soil-Tank interaction.I : Horizontal Excitation. *Journal of structural Engineering, ASCE*, vol. 118, pp. 783–797.
- HAROUN, M. A. et ABOU-IZZEDINE, W. (1992b). Parametric study of seismic soil-Tank interaction.I : Vertical Excitation. *Journal of structural Engineering, ASCE*, vol. 118, pp. 798–811.
- HAROUN, M. A. et ELLAITHY, H. (1985). Model for flexible tanks undergoing rocking. *J. Engrg. Mech., ASCE*, vol. 111, pp. 143–157.
- HAROUN, M. A. et HOUSNER, G. (1981). Seismic design of liquid storage tanks. *Journal of Technical Councils of ASCE*, vol. 107, pp. 191–207.
- HATAYAMA, K. (2007). Lessons from the 2003 Tokachi-Oki, Japan, earthquake for prediction of long-period strong ground motions and sloshing damage of oil storage tanks. *Journal of Seismology*, vol. 12, pp. 255–263.

- HOSKIN, L. M. et JACOBSEN, L. S. (1934). Water Pressure in a tank caused by a simulated earthquake. *Bulletin Seism. Soc. America*, vol. 24, pp. 1–32.
- HOUSNER, G. W. (1957). Dynamic pressures on accelerated fluid containers. *Bull., Seismological Soc. Of Am.*, vol. 47, pp. 15–35.
- HOUSNER, G. W. (1963). The dynamic behavior of water tanks. *Bull., Seismological Soc. Of Am.*, vol. 53, pp. 381–389.
- IBRAHIM, R. (2005). *Liquid Sloshing Dynamics : Theory And Applications*. Cambridge University Press.
- JACOBSEN, L. S. (1949). Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of a fluid surrounding a cylindrical pier. *Bulletin Seism. Soc. America*, vol. 39, pp. 189–204.
- JACOBSEN, L. S. et AYRE, R. S. (1951). Hydrodynamics experiments with rigid cylindrical tanks subjected to transient motions. *Bulletin Seism. Soc. America*, vol. 41, pp. 313–346.
- KIANOUSH, M. R. et GHAEMMAGHAMI, A. R. (2011). The effect of earthquake frequency content on the seismic behavior of concrete rectangular liquid tanks using the finite element method incorporating soil-structure interaction. *Engineering structures*, vol. 33, pp. 2186–2200.
- KIM, J. K., KOH, H. M. et KWAHK, I. J. (1996). Dynamic response of rectangular flexible fluid containers. *Journal of engineering mechanics*, vol. 122, pp. 807–817.
- KORKMAZ, K. A., SARI, A. et CARHOGLU, A. I. (2011). Seismic risk assessment of storage tanks in Turkish industrial facilities. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, vol. 24, pp. 314–320.
- KRAUSMANN, E., RENNI, E., CAMPEDEL, M. et COZZANI, V. (2011). Industrial accidents triggered by earthquakes, floods and lightning : lessons learned from a database analysis. *Natural Hazards*, vol. 59, pp. 285–300.
- LIVAOGLU, R. (2008). Investigation of seismic behavior of fluid-rectangular tank-soil/ foundation systems in frequency domain. *Soil dynamics and earthquake engineering*, vol. 28, pp. 132–146.
- LUFT, R. W. (1984). Vertical accelerations in prestressed concrete tanks. *J. Struct. Engrg., ASCE*, vol. 110, pp. 706–714.
- MALHOTRA, P. K. (2006). Seismic design of liquid storage tanks. Rapport technique, American Society of Civil Engineers (ASCE).
- MALHOTRA, P. K., WENK, T. et WIELAND, M. (2000). Simple procedure for seismic analysis of liquid storage tanks. *Structural Engineering, IABSE*, vol. 10, pp. 197–201.
- MATSUI, T. (2007). Sloshing in a cylindrical liquid storage tank with a floating roof under seismic excitation. *Journal of pressure vessel technology, ASME*, vol. 129, pp. 557–566.
- MATSUI, T. (2009). Sloshing in a cylindrical liquid storage tank with a single-deck type floating roof under seismic excitation. *Journal of pressure vessel technology, ASME*, vol. 131, pp. 1–10.

- N. BOUAANANI, P. P. et PROULX, J. (2002). Two-dimensional modelling of ice cover effects for the dynamic analysis of concrete gravity dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 31, pp. 2083–2102.
- NAGASHIMA, T. (2010). Seismic response analysis models of an oil storage tank with a floating roof. *Engineering computations : International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, vol. 28, pp. 701–716.
- P. PAULTRE, J. P. et CARBONNEAU, C. (2002). An experimental evaluation of ice cover effects on the dynamic behaviour of a concrete gravity dam. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 31, pp. 2067–2082.
- PARK, J. H., KOH, H. M. et KIM, J. (1990). Fluid-structure interaction analysis by coupled boundary element-finite element method in time domain. *7th Int. Conf. on Boundary Element Technol.* Computational Mechanics Publ. Southampton, England, 89–92.
- RINE, J. E. (1967). *The Prince William Sound, Alaska, Earthquake of 1964, and Aftershocks*, Washington : Government Printing Office, vol. II, chapitre Oil Storage tanks. 245–252.
- RUGE, A. C. (1938). Earthquake Resistance of Elevated Water Towers. *Trans. Am. Soc. Civil Engineers*, vol. 30, pp. 889–938.
- SEZEN, H., ELWOOD, K. J., WHITTAKER, A. S., MOSALAM, K. M., WALLACE, J. W. et STANTON, J. F. (2000). Structural engineering reconnaissance of the august 17, 1999 earthquake : Kocaeli (izmit), turkey. PEER Report 2000/09, Pacific Earthquake Engineering Research Center.
- SHAABAN, S. H. (1975). Finite element analysis of a seismically excited cylindrical storage tank, ground supported, and partially filled with liquid. Rapport technique, National Science Foundation, University of Massachussetts.
- STEINBERG, L. J., CRUZ, A. M., VARDAR, F. et ERSOZ, Y. (2000). Risk Management Practices at Industrial Facilities during the Turkey Earthquake of August 17, 1999 : Case Study Report. Rapport technique.
- STEINBRUGGE, K. V. et FLORES, R. (1963). The Chilean earthquakes of May, 1960 : A structural engineering viewpoint. *Bull., Seismological Soc. Of Am.*, vol. 53, pp. 225–307.
- TIMOSHENKO, S. et WOINOWSKY, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, New York.
- VELETSOS, A. S. (1974). Seismic effects in flexible liquid storage tanks. *Proc. of Fifth World Conf. on Earthquake Engrg.* pp. 630.
- VELETSOS, A. S. (1984). Seismic response and design of liquid storage tanks. *Guidelines for Seismic design of oil gas pipelines system*, ASCE, NY, pp. 255–370.
- VELETSOS, A. S. et TANG, Y. (1985). Dynamics of vertically excited liquid storage tanks. *J. Struct. Engrg.*, ASCE, vol. 112, pp. 1228–1246.

- VELETSOS, A. S. et TANG, Y. (1990). Soil-Structure interaction effects for laterally excited liquid storage tanks. *Earthquake Engrg. And Struct. Dyn.*, vol. 19, pp. 473–496.
- VELETSOS, A. S. et YANG, J. Y. (1976). Dynamics of fixed-base liquid storage tanks. *Proc. of U.S.-Japan Seminar on Earthquake Engrg Res.* pp. 317.
- VELETSOS, A. S. et YOUNG (1977). Earthquake response of liquid storage tanks. *Proc. of 2nd Engg. Mechanics specialty conf.*
- VIRELLA, J. C., CARLOS, A. et GODOY, L. (2008). Linear and nonlinear 2D finite element analysis of sloshing modes and pressures in rectangular tanks subject to horizontal harmonic motions. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 312, pp. 442–460.
- WERNER, P. W. et SUNDQUIST, K. (1949). On hydrodynamic Earthquake Effects. *Trans. Amer. Geophysical Union*, vol. 30, pp. 636–657.
- WESTERGAARD, H. M. (1933). Water Pressures on Dams During Earthquakes. *Transaction, America Society of Civil Engineers*, vol. 98, pp. 418–472.
- WOZNIAK, R. S. et MITCHELL, W. W. (1978). Basis of seismic design provisions for welded steel oil storage tanks. Rapport technique, American Petroleum Institute 43rd midyear meeting, session on Advances in Storage Tank Design, Toronto, Canada.

ANNEXE A

APPROFONDISSEMENT SUR LES ONDES DE GRAVITÉ

Cette partie a pour objectif d'apporter quelques précisions sur le phénomène d'onde de gravité dans les réservoirs. L'expression : ondes de gravité désigne le phénomène de propagation d'ondes transversales mécaniques en surface des liquides soumis à la gravité.

La première partie de cette annexe présente un développement de la théorie des ondes d'Airy. La seconde partie de cette annexe présente de manière succincte les principales théories sur les ondes de surface non-linéaires.

A.1 Théorie sur les ondes de surface linéaires

La théorie des ondes de gravité est basée sur les hypothèses d'un fluide non visqueux, irrotationnel et incompressible.

Le fluide étant irrotationnel, on dispose de la relation $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ qui implique l'existence d'un potentiel des vitesses ϕ tel que :

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (\text{B1})$$

Le concept de potentiel des vitesses est très important car il permet de représenter l'état du fluide travers son domaine, à l'aide d'un scalaire (une valeur) plutôt qu'avec un vecteur (plusieurs valeurs). Le fluide est décrit par l'équation d'Euler :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho \mathbf{g} \quad (\text{B2})$$

Avec

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (\text{B3})$$

Dans la théorie des ondes linéaires, le second terme $\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ de la dérivée particulaire est négligée. L'équation d'Euler se réduit alors à :

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] = -\nabla p - \rho \mathbf{g} \quad (\text{B4})$$

En substituant l'Eq. (B1) dans l'Eq.(B4), l'équation d'Euler linéaire devient :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) = -\nabla p - \rho \mathbf{g} \quad (\text{B5})$$

En intégrant l'Eq. (B5) entre la surface du liquide au repos et la surface dynamique du liquide, on obtient :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) = -\rho g (y - H) - (p - p_0) + f(t) \quad (\text{B6})$$

Où $f(t)$ est une fonction arbitraire ne dépendant pas de l'espace et p_0 désigne la pression atmosphérique au niveau de la surface au repos du liquide. En prenant, la fonction $f(t)$ égale à zéro et en introduisant la pression hydrodynamique $p_{dyn} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$, la pression à une hauteur y du liquide est donné par la formule suivante :

$$p(x, y, t) = p_0(x, t) - \rho g (y - H) + p_{dyn} \quad (B7)$$

Soit $\eta(x, t)$, l'élévation du liquide à partir de la surface au repos, la pression au niveau de la surface dynamique du liquide est donnée par :

$$p(x, H + \eta(x, t), t) = p_0(x, t) - \rho g \eta(x, t) - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}_{y=H+\eta(x,t)} \quad (B8)$$

Cette dernière équation s'appliquant à une frontière mouvante peut être linéarisé en supposant que les déplacement relatifs de la surface du liquide η sont faibles. Dans ce dernier cas on fait les suppositions suivantes :

$$p(x, H + \eta(x, t), t) = p(x, H, t) = p_0(x, t) \quad (B9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}_{y=H+\eta(x,t)} = \frac{\partial \phi}{\partial t}_{y=H} \quad (B10)$$

En substituant les Eqs. (B9) et (B10) dans l'Eq. (B8) on obtient l'expression de l'élévation relative η suivante :

$$\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}_{y=H} \quad (B11)$$

Une autre condition à la frontière peu être obtenue en considérant la cinématique de la surface libre :

$$y(x, t) = H + \eta(x, t) \quad (B12)$$

En différenciant cette dernière expression par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (B13)$$

Si la hauteur physique de l'onde est très petite devant sa longueur d'onde : $\eta \ll \lambda$, alors le terme $\frac{\partial y}{\partial t}$ peut être approximé par la vitesse $v_y(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y}$. En tenant compte de cette approximation et de l'Eq.(B11), l'Eq.(B13) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0; \quad \text{en} \quad y = H \quad (B14)$$

Enfin, en exprimant l'Eq.(B14) en fonction de la pression hydrodynamique introduite à l'Eq.(B7), on obtient la condition à la frontière pour la pression hydrodynamique suivante :

$$\frac{\partial^2 p_{dyn}}{\partial t^2} + g \frac{\partial p_{dyn}}{\partial y} = 0; \quad \text{en} \quad y = H \quad (B15)$$

A.2 Théories sur les ondes de surface non-linéaires

Cette partie a pour but d'introduire de manière succincte, les principales théories permettant de traiter de manière plus ou moins élaborée, le problème des ondes de gravité non-linéaires. La première sous-partie présente la théorie des ondes du second ordre découlant directement de la théorie linéaire. La seconde sous-partie s'intéresse à la théorie des ondes de Stokes. Enfin la dernière sous-partie donne un aperçu de théories plus avancées.

A.0.2.1 Théorie des ondes de surface du second ordre

De manière générale, la condition cinématique non-linéaire exacte à considérer à la surface du fluide est donnée par la formule suivante :

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta \right)_{y=\eta} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=\eta} \quad (\text{B16})$$

Et la condition dynamique non-linéaire exacte est donnée par l'équation suivante :

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)_{y=\eta} \quad (\text{B17})$$

Si on fait l'hypothèse de vagues à la surface du liquide de faible dénivellation :

$$|\nabla \eta| = O(\epsilon) \quad (\text{B18})$$

Où ϵ est un petit paramètre. Il est possible d'utiliser la théorie des perturbations et d'employer les décompositions suivantes :

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots \quad (\text{B19})$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \dots \quad (\text{B20})$$

Où $\eta_i = O(\epsilon^i)$ et ϕ_i est proportionnel à ϵ^i ou $O(\epsilon^i)$. En réalisant des développements en série de Taylor des Eqs. (B16) et (B17), on obtient les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta \right)_{y=H} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta \right)_{y=H} + \dots = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=H} + \eta \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{y=H} + \dots \quad (\text{B21})$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)_{y=H} - \frac{1}{g} \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right)_{y=H} + \dots \quad (\text{B22})$$

En ne gardant que les termes d'ordre 2 au maximum dans les Eqs. (B19) et (B20), en substituant ces termes dans les Eqs. (B21) et (B22) et réalisant un développement limité à l'ordre 2, on obtient les équations suivantes :

Condition cinématique à l'ordre 2

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - \nabla \phi_1 \cdot \nabla \eta_1; \quad y = H \quad (\text{B23})$$

Condition dynamique à l'ordre 2

$$\eta_2 + \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{g} \left(\frac{1}{2} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 + \eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial t} \right)_{y=H} \quad (\text{B24})$$

Ces équations sont obtenues et résolues en se servant des équations du premiers ordre de la théorie linéaire :

Condition cinématique à l'ordre 1

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}; \quad y = H \quad (\text{B25})$$

Condition dynamique à l'ordre 1

$$\eta_1 = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t}; \quad y = H \quad (\text{B26})$$

La pression en un point M(x,y) du fluide est donnée par la formule générale suivante découlant de l'équation de Bernouilli :

$$P = -\rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + g y \right) \quad (\text{B27})$$

En réalisant un développement limité de l'Eq.(B27) à l'ordre 2, on obtient :

$$P = -\rho \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 + g y \right) \quad (\text{B28})$$

$$= P_0 + P_1 + P_2 \quad (\text{B29})$$

Avec P_0 , la pression hydrostatique :

$$P_0 = -\rho g y \quad (\text{B30})$$

P_1 , la pression hydrodynamique d'ordre 1 :

$$P_1 = -\rho \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad (\text{B31})$$

Et P_2 , la pression hydrodynamique d'ordre 2 :

$$P_2 = -\rho \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 \right) \quad (\text{B32})$$

La solution linéaire doit d'abord être calculée puis utilisée pour déterminer une solution au problème du second ordre.

A.0.2.2 Théorie de Stokes

La théorie du second ordre présentée ci-avant peut se généraliser à l'ordre n et fut initialement proposée par Stokes.

En réalisant un développement limité à l'ordre n , les équations adimensionnelles des conditions cinématique et dynamique à la surface sont données par les expressions suivantes respectivement :

$$\bar{\eta}_n + \frac{\partial \Phi_n}{\partial \bar{t}} = f_n(\Phi_{n-1}, \bar{\eta}_{n-1}); \quad Y = 1 \quad (\text{B33})$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}_n}{\partial \bar{t}} - D \frac{\partial \Phi_n}{\partial Y} = g_n(\Phi_{n-1}, \bar{\eta}_{n-1}); \quad Y = 1 \quad (\text{B34})$$

Avec

$$\bar{t} = t \Omega; \quad \Phi = \frac{\Omega \phi}{a g}; \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{a}; \quad T = y k \quad (\text{B35})$$

Où "a" représente l'amplitude de l'onde, k représente le nombre d'onde et Ω représente la pulsation excitatrice.

Le système d'équation définit ci-avant doit être résolu de manière séquentielle en fonction des solutions des ordres inférieurs.

A.0.2.3 Autres théories

D'autres théories permettent de décrire la propagation des ondes de surface longitudinales selon certaines hypothèses. Cette sous-partie a pour but de rappeler et de classer en fonction des domaines de validité, quelques théories existantes :

- **Théorie de Korteweg-de Vries (KdV)** : permet la description des ondes faiblement non-linéaires et des ondes dispersives telles que $\lambda > 7h$ (ou λ désigne la longueur d'onde). Les ondes Cnoidal constituent une solution des équations KdV.
- **Les équations de Saint Venant** : permettent la description des ondes non-linéaire et permettent de prendre en compte la dispersion en amplitude mais pas la dispersion en fréquence. Elles sont valides pour $\lambda > 20h$.
- **Les équations de Boussinesq** : ont le même domaine de validité que les équation KdV mais autorisent la modélisation des ondes omnidirectionnelles.
- **Théorie des ondes d'Airy** (théorie linéaire) : permet de prendre en compte la dispersion fréquentielle, valide pour n'importe quelle profondeur et longueur d'onde. Ne permet pas la prise en compte de la dispersion en amplitude et est limitée aux faibles amplitudes.
- **Théorie de Stokes** : Approche par la méthode des perturbations des ondes faiblement non-linéaires et des ondes dispersives. Conseillée pour l'étude des milieux profonds et les petits ratio de longueur d'onde sur profondeur de fluide. En 1960, Skjelbreia et Hendrickson ont proposé une

solution à l'ordre 5 des équations de Stokes.(solution très employée dans la pratique)

Le graphe de la figure (A.1) représente une synthèse des domaines de validité des différentes théories sur la propagation des ondes de surface.

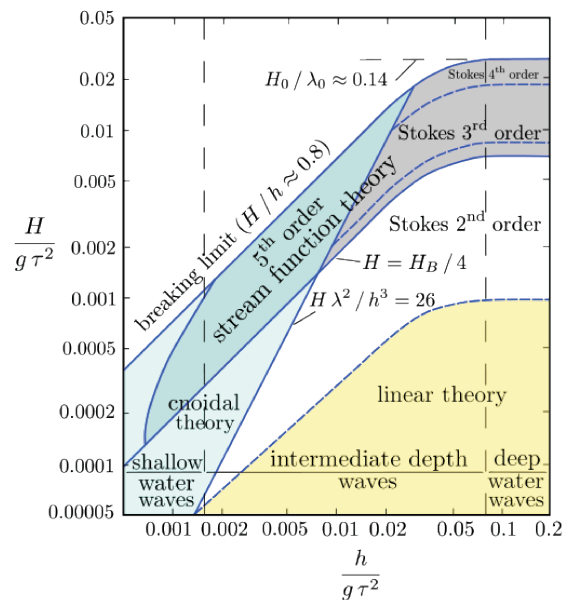


Fig. A.1 Domaines de validité de quelques théories sur la propagation des ondes de surface[ref : wikipedia]

ANNEXE B

CAS PARTICULIERS DU BALLOTEMENT DANS LES RÉSERVOIRS RIGIDES

Cette annexe a pour objectif de présenter quelques développements concernant la pression convective dans les réservoirs rectangulaires à paroi rigide sous l'hypothèse des ondes de surface linéaires.

B.1 Pression convective dans les réservoirs rigides non couverts

La pression convective correspond à la pression associée au mouvement du fluide en surface. Cette section présente le calcul de la pression convective dans le cas de la théorie linéaire de propagation des ondes pour un réservoir à parois rigides et à surface fluide découverte. Une démonstration similaire peut être trouvée dans Ibrahim (2005).

Le fluide contenu dans le réservoir est supposé irrotationnel, non visqueux et compressible. La pression hydrodynamique vérifie l'équation d'onde :

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{C^2} \right) \bar{p}_c(x, y, \omega) = 0 \quad (\text{B1})$$

En appliquant le principe de séparation des variables, la pression peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{p}_c(x, y, \omega) = \bar{p}_{cx}(x, \omega) \bar{p}_{cy}(y, \omega) \quad (\text{B2})$$

La substitution de l'Eq.(B2) dans l'Eq. (B1) conduit aux équations d'Helmholtz :

$$\frac{d^2 \bar{p}_{cx}}{dx^2} - \lambda^2 \bar{p}_{cx} = 0 \quad (\text{B3})$$

$$\frac{d^2 \bar{p}_{cy}}{dy^2} + \kappa^2 \bar{p}_{cy} = 0 \quad (\text{B4})$$

Les solutions aux Eqs. (B3) et (B4) sont données par les formules suivantes :

$$\bar{p}_{cx}(x, \omega) = A_1(\omega) e^{-i\lambda_c x} + A_2(\omega) e^{i\lambda_c x} \quad (\text{B5})$$

$$\bar{p}_{cy}(y, \omega) = A_3(\omega) e^{-\kappa_c y} + A_4(\omega) e^{\kappa_c y} \quad (\text{B6})$$

Dans le cas d'une sollicitation sismique horizontale, les coefficients d'intégration A_{1i} , A_{2i} , A_{3i} et A_{4i} sont déterminés à l'aide des conditions aux frontières d'un réservoir rigide suivantes :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}(\pm br, y, \omega) = -\rho \bar{a}_g^{(x)}(\omega) \quad (\text{B7})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0 \quad (\text{B8})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}(x, H, \omega) = \frac{\omega^2}{g} \bar{p}(x, H, \omega) \quad (\text{B9})$$

Ces conditions aux frontières peuvent être satisfaites en décomposant la pression convective en deux constituantes, l'une reprenant l'accélération du sol $\bar{a}_g^{(x)}$ et l'autre satisfaisant les conditions aux frontières complémentaires par le principe de superposition tel que :

$$\bar{p}_c = \bar{p}_{c1} + \bar{p}_{c2} \quad (\text{B10})$$

Avec \bar{p}_{c1} la pression convective vérifiant les conditions aux frontières suivantes :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}(\pm br, y, \omega) = -\rho \bar{a}_g^{(x)}(\omega) \quad (\text{B11})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0 \quad (\text{B12})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}(x, H, \omega) = 0 \quad (\text{B13})$$

Ayant pour solution :

$$\bar{p}_{c1}(x, y, \omega) = -\rho \bar{a}_g^{(x)}(\omega) x \quad (\text{B14})$$

Et \bar{p}_{c2} la pression convective vérifiant :

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}(\pm br, y, \omega) = 0 \quad (\text{B15})$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0 \quad (\text{B16})$$

$$\frac{\partial \bar{p}_{c2}}{\partial y}(x, H, \omega) = \frac{\omega^2}{g} [\bar{p}_{c1}(x, H, \omega) + \bar{p}_{c2}(x, H, \omega)] \quad (\text{B17})$$

L'application de la condition à la frontière horizontale Eq. (B15) à p_{c2} implique la vérification du système d'équations suivant :

$$[A_2(\omega) - A_1(\omega)] \cos(\lambda_c br) = 0 \quad (\text{B18})$$

$$[A_1(\omega) + A_2(\omega)] \sin(\lambda_c br) = 0 \quad (\text{B19})$$

Ce système d'équations admet deux types de solutions :

$$A_{1m}(\omega) = A_{2m}(\omega) \quad \text{et} \quad \sin(\lambda_{cm} br) = 0 \quad m = 1 \dots m_c \quad (\text{B20})$$

$$A_{1m}(\omega) = -A_{2m}(\omega) \quad \text{et} \quad \cos(\lambda_{cm} br) = 0 \quad m = 1 \dots m_c \quad (\text{B21})$$

Le premier type de solution Eq. (B20) correspond aux modes de ballotement symétriques du liquide, et a pour pression convective associée $\hat{\bar{p}}$:

$$\hat{\bar{p}}_{c2}(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{m_c} 2 \hat{A}_{1m}(\omega) \cos(\hat{\lambda}_{cm} x) \hat{\bar{p}}_{c2m}^{(y)}(y, \omega) \quad (\text{B22})$$

Avec

$$\hat{\lambda}_{cm} = \frac{m \pi}{br} \quad m = 1 \dots m_c \quad (\text{B23})$$

Le second type de solution Eq. (B21) correspond aux modes de ballotement antisymétriques du liquide, et a pour pression convective associée $\tilde{\bar{p}}$:

$$\tilde{\bar{p}}_{c2}(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{m_c} 2 \tilde{A}_{1m}(\omega) \sin(\tilde{\lambda}_{cm} x) \tilde{\bar{p}}_{c2m}^{(y)}(y, \omega) \quad (\text{B24})$$

Avec

$$\tilde{\lambda}_{cm} = \frac{(2m-1)\pi}{2br} \quad m = 1 \dots m_c \quad (\text{B25})$$

La pression convective \bar{p}_{c2} totale est donnée par l'expression suivante :

$$\bar{p}_{c2}(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{m_c} 2 [\hat{A}_{1m}(\omega) \cos(\hat{\lambda}_{cm} x) \hat{\bar{p}}_{c2m}^{(y)}(y, \omega) + \tilde{A}_{1m}(\omega) \sin(\tilde{\lambda}_{cm} x) \tilde{\bar{p}}_{c2m}^{(y)}(y, \omega)] \quad (\text{B26})$$

L'application de la condition à la frontière Eq.(B16) permet de simplifier l'expression Eq.(B26) comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{c2}(x, y, \omega) = \sum_{m=1}^{m_c} 4 [\hat{A}_{1m}(\omega) \hat{A}_{3m}(\omega) \cos(\hat{\lambda}_{cm} x) \cosh(\hat{\kappa}_{cm}(\omega) y) \\ + \tilde{A}_{1m}(\omega) \tilde{A}_{3m}(\omega) \sin(\tilde{\lambda}_{cm} x) \cosh(\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) y)] \end{aligned} \quad (\text{B27})$$

Les produits de constantes $\hat{A}_{1m} \hat{A}_{3m}$ et $\tilde{A}_{1m} \tilde{A}_{3m}$ sont déterminées à l'aide de l'équation à la frontière (B17) qui après substitution de l'Eq. (B27) devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{m_c} 4 \left[\hat{A}_{1m}(\omega) \hat{A}_{3m}(\omega) \cos(\hat{\lambda}_{cm} x) \cosh[\hat{\kappa}_{cm}(\omega) H] [\hat{\kappa}_{cm}(\omega) \tanh[\hat{\kappa}_{cm}(\omega) H] - \frac{\omega^2}{g}] + \right. \\
\left. \tilde{A}_{1m}(\omega) \tilde{A}_{3m}(\omega) \sin(\tilde{\lambda}_{cm} x) \cosh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) H] [\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) \tanh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) H] - \frac{\omega^2}{g}] \right] \\
= -\frac{\rho \omega^2}{g} a_g^{(x)}(\omega) x
\end{aligned} \tag{B28}$$

En multipliant l'Eq. (B28) par $\cos(\lambda_c x)$ et $\sin(\lambda_c x)$ respectivement, en intégrant l'équation ainsi obtenue entre $-br$ et br et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, les coefficients d'intégration $\hat{A}_{1m} \hat{A}_{3m}$ et $\tilde{A}_{1m} \tilde{A}_{3m}$ peuvent s'exprimer comme suit :

$$\hat{A}_{1m} \hat{A}_{3m} = 0 \tag{B29}$$

$$\tilde{A}_{1m} \tilde{A}_{3m} = \frac{(-1)^m \rho \omega^2 a_g^{(x)}(\omega)}{2 br \tilde{\lambda}_{cm}^2 \cosh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) H] [g \tilde{\kappa}_{cm}(\omega) \tanh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) H] - \omega^2]} \tag{B30}$$

for $m = 1 \dots m_c$

La pression totale est alors donnée par la formule suivante :

$$\bar{p}_c(x, y, \omega) = -\rho \bar{a}_g^{(x)}(\omega) \left(x + \sum_{m=1}^{m_c} \frac{2 (-1)^m \sin(\tilde{\lambda}_{cm} x) \cosh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) y]}{b_r \tilde{\lambda}_{cm}^2 \cosh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) H]} \frac{\omega^2}{\tilde{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2} \right) \tag{B31}$$

Comme on peut constater, les coefficients d'intégration correspondants aux modes symétriques sont nuls, ce qui implique que pour un réservoir aux parois rigides, seules les modes de ballotement antisymétriques sont susceptibles de se produire.

Dans le cas où la flexibilité des parois est prise en compte et lorsque ces dernières ont des caractéristiques dynamiques différentes (asymétrie matérielle ou géométrique), les modes convectifs symétriques sont présents et non nuls.

La résultante des forces de pression horizontale est donnée par la formule suivante :

$$\bar{F} = 2b \int_0^H \bar{p}_c(b_r, y, \omega) dy \tag{B32}$$

$$= -\bar{a}_g^{(x)}(\omega) m_L \left(1 + \sum_{m=1}^{m_c} \frac{2 \tanh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) H]}{b_r^2 H \lambda_{cm}^2 \tilde{\kappa}_{cm}(\omega)} \frac{\omega^2}{\tilde{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2} \right) \tag{B33}$$

Avec $m_L = 2b_r H b$ la masse totale de fluide.

Le moment des forces de pression au niveau de la surface au repos du liquide, est donné par la

formule suivante :

$$M_b = 2 \int_0^H \bar{p}_c(b_r, y, \omega) b (y - H) dy \quad (\text{B34})$$

$$= -m_L H \bar{a}_g(\omega) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{m_c} \frac{2\omega^2}{(\tilde{\gamma}_m^2(\omega) - \omega^2) (b_r H)^2 \tilde{\lambda}_{cm}^2 \tilde{\kappa}_{cm}^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh[\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) H]} \right) \right] \quad (\text{B35})$$

On peut déduire des Eqs. (B35) et (B33), la position du centre de pression pour chaque mode convective à partir du fond du réservoir.

$$h_m = H - \frac{\tanh \left[\tilde{\kappa}_m(\omega) \frac{H}{2} \right]}{\tilde{\kappa}_m(\omega)} \quad (\text{B36})$$

B.2 Pression convective dans les réservoirs rigides couverts

Dans cette partie, les équations vont être exprim  es en fonction du potentielle des vitesses. Les conditions aux frontières v  rifi  es par $\bar{\phi}$ sont les suivantes :

- *Aux interfaces verticales fluide-structure*

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}(\pm b_r, y, \omega) = \bar{u}_g(\omega) \quad (\text{B37})$$

ou $\bar{u}_g(\omega)$ est la fonction de transfert de la vélocité au sol.

- *Au fond du réservoir*

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0 \quad (\text{B38})$$

- *A l'interface plaque-fluide*

La plaque est mod  lis  e à l'aide de la théorie d'Euler-Bernouilli

$$EI \frac{\partial^4 \bar{\eta}}{\partial x^4}(x, \omega) - \omega^2 \mu \bar{\eta}(x, \omega) = \bar{p}_b(x, \omega) \quad (\text{B39})$$

Ou EI est la rigidité flexionnelle suppos  e constante selon l'axe x, μ est la masse par unité d'aire, $\bar{\eta}(x, \omega)$ est la fonction de transfert des déplacements verticaux de la surface, avec $\eta(x, t) = \bar{\eta}(x, \omega) e^{i\omega t}$ et $\bar{p}_b(x, \omega)$ est la charge par unité d'aire exerc  e par le fluide sur la plaque.

Le terme de pression $\bar{p}_b(x, \omega)$ de l'Eq.(B39) est obtenue à partir de l'équation de Bernouilli lin  aris  e autour de $y = H_r$ en faisant l'hypothèse qu'il n'y ai pas de cavitation entre la plaque et le fluide :

$$\bar{p}_b(x, \omega) = -i\omega \rho_o \phi(x, H_r, \omega) - \rho_o g \bar{\eta}(x, \omega) \quad (\text{B40})$$

La condition de compatibilité des déplacements entre la plaque et le fluide est donn  e par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}(x, H, \omega) = i\omega \bar{\eta}(x, \omega) \quad (\text{B41})$$

Dans le cas d'un réservoir couvert sismiquement excité, la fonction de transfert $\bar{\phi}$ du potentiel des vitesses doit satisfaire l'Eq.(B1) ainsi que les conditions aux frontières Eqs.(B37), (B38) and (B39).

En résolvant l'équation d'onde Eq.(B1) avec les conditions aux frontières Eqs.(B37) and (B38) on en déduit l'expression suivante pour le potentiel des vitesses :

$$\bar{\phi}(x, y, \omega) = \bar{u}_g(\omega) x + \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\omega) \sin(\lambda_m x) \cosh(\kappa_m(\omega) y) \quad (\text{B42})$$

Avec

$$\lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2H_r} \quad \kappa_m(\omega) = \sqrt{\lambda_m^2 - \frac{\omega^2}{C}} \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B43})$$

Lorsqu'on considère un fluide incompressible, $C_r \rightarrow \infty$ et les quantités données par l'Eq.(B43) deviennent :

$$\lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2H_r} \quad \kappa_m = \lambda_m \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B44})$$

En utilisant les Eqs.(B40) et (B41), l'Eq.(B39) peut s'écrire en fonction de $\bar{\phi}$ comme suit :

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}(x, H_r, \omega) + \frac{(\rho_o g - \mu \omega^2)}{EI} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}(x, H_r, \omega) - \frac{\omega^2 \rho_o}{EI} \bar{\phi}(x, H_r, \omega) = 0 \quad (\text{B45})$$

En substituant l'expression de $\bar{\phi}$ donnée par l'Eq.(B42) dans l'Eq.(B45) on obtient l'équation suivante d'inconnue $A_m(\omega)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m(\omega) \alpha_m(\omega) \sin(\lambda_m x) \cosh[\kappa_m(\omega) H_r] [\gamma_m^2(\omega) - \omega^2] = \omega^2 \bar{u}_g(\omega) x \quad (\text{B46})$$

Avec

$$\alpha_m(\omega) = 1 + \frac{\mu}{\rho_o} \kappa_m(\omega) \tanh[\kappa_m(\omega) H_r] \quad (\text{B47})$$

$$\gamma_m^2(\omega) = \left(g + \frac{EI \lambda_m^4}{\rho_o} \right) \frac{\kappa_m(\omega)}{\alpha_m(\omega)} \tanh[\kappa_m(\omega) H_r] \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B48})$$

En multipliant l'Eq.(B46) par $\sin(\lambda_m x)$, en intégrant sur la longueur du réservoir et en se servant des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, on obtient pour $m = 1, 2, \dots$

$$A_m(\omega) = \frac{2(-1)^m \omega^2}{\lambda_m^2 b_r \alpha_m(\omega) \cosh[\kappa_m(\omega) H_r] [\gamma_m^2(\omega) - \omega^2]} \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B49})$$

La substitution de l'Eq.(B49) dans l'Eq.(B42) permet d'exprimer $\bar{\phi}$ comme suit :

$$\bar{\phi}(x, y, \omega) = \bar{u}_g(\omega) \left[x + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \omega^2 \sin(\lambda_m x) \cosh[\kappa_m(\omega) y]}{b_r \lambda_m^2 \alpha_m(\omega) \cosh[\kappa_m(\omega) H_r] [\gamma_m^2(\omega) - \omega^2]} \right] \quad (\text{B50})$$

Les fréquences naturelles de ballotement peuvent être obtenue en résolvant l'équation suivante (where ω is the unknown)

$$\gamma_m^2(\omega) - \omega^2 = 0 \quad (\text{B51})$$

Quand le fluides est supposé incompressible, les fréquences naturelles sont données par les formules suivantes :

$$\omega_m = \sqrt{\left(g + \frac{EI \lambda_m^4}{\rho_o}\right) \frac{\lambda_m}{\alpha_m} \tanh[\lambda_m H_r]} \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B52})$$

Avec

$$\alpha_m = 1 + \frac{\mu}{\rho_o} \tanh(\lambda_m H_r) \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{B53})$$

La fonction de transfert \bar{p} pour la pression hydrodynamique est donnée par :

$$\bar{p}(x, y, \omega) = -\rho_o \bar{u}_g(\omega) \left[x + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \omega^2 \sin(\lambda_m x) \cosh[\kappa_m(\omega) y]}{b_r \lambda_m^2 \alpha_m(\omega) \cosh[\kappa_m(\omega) H_r] [\gamma_m^2(\omega) - \omega^2]} \right] \quad (\text{B54})$$

Et l'élévation en un point de la plaque $\bar{\eta}$ peut s'exprimer avec l'Eq.(??) comme suit :

$$\bar{\eta}(x, \omega) = \frac{\bar{u}_g(\omega)}{g} \left[x + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \omega^2 \sin(\lambda_m x)}{b_r \lambda_m^2 \alpha_m(\omega) [\gamma_m^2(\omega) - \omega^2]} \right] \quad (\text{B55})$$

ANNEXE C

MODÈLES MÉCANIQUES ÉQUIVALENTS

Cette présente une méthode pour déterminer les paramètres du modèle mécanique de Housner (1957) de réservoirs rigides soumis à une excitation sismique latérale. Le modèle considéré est donné à la figure (C.1), les équations analytiques du modèle réel ont été démontrées à l'annexe B.

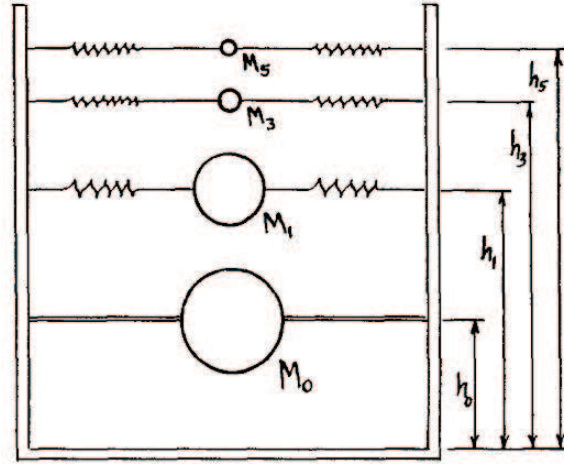


Fig. C.1 Modèle mécanique équivalent de Housner

Le modèle mécanique équivalent doit satisfaire la condition de masse suivante :

$$m_L = m_0 + \sum_{m=1}^{m_c} m_m \quad (B1)$$

Où m_L , m_0 et m_m représentent respectivement la masse totale du fluide, la masse impulsive et la m^{eme} masse convective.

La position du centre de masse du réservoir est donnée par la formule du barycentre suivante :

$$h_g = \frac{m_0 h_0 + \dots + m_m h_m}{m_0 + \dots + m_m} \quad (B2)$$

Les rigidité k_m des ressorts des masses convectives sont déterminées à l'aide de la définition des fréquences naturelles :

$$\omega_m^2 = \frac{k_m}{m_m} = g \tilde{\kappa}(\omega) \tanh[\tilde{\kappa}_m(\omega) H] \quad (B3)$$

Notons x_m le déplacement relatif de la m^{eme} masse convective par rapport au réservoir et x le déplacement des parois du réservoir. On peut déterminer l'équation dynamique du modèle mécanique

à l'aide des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} L \right) - \frac{\partial}{\partial z_i} L = Q_i \quad (\text{B4})$$

Où $L = T - V$ correspond au Lagrangien, z_i représentent les coordonnées généralisées, Q_i représentent les forces généralisées et T et V sont les énergies potentielles et cinétiques respectivement. L'énergie cinétique est donnée par l'équation suivante :

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m_c} m_m (\dot{x}_m + \dot{x})^2 \quad (\text{B5})$$

L'énergie potentielle est donnée par :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m_c} k_m x_m^2 \quad (\text{B6})$$

Les coordonnées généralisées z_i et les forces généralisées Q_i sont données par les vecteurs suivant :

$$\{q_i\} = \{x \quad x_m\}^T; \quad \{Q_i\} = \{-F_x \quad 0\}^T \quad (\text{B7})$$

En appliquant l'équation de Lagrange (B4) et les Eqs. (B5), (B6) et (B7), on en déduit l'équation du mouvement suivante :

$$m_0 \ddot{x} + \sum_{m=1}^{m_c} m_m (\ddot{x}_m + \ddot{x}) = -F_x \quad (\text{B8})$$

et l'équation du ballotement pour chaque mode convectif m :

$$m_m (\ddot{x} + \ddot{x}_m) + k_m x_m = 0 \quad (\text{B9})$$

Dans le cas d'une excitation sismique latérale $\ddot{x}(t) = \bar{a}_g(\omega) \sin(\omega t)$, les équation du mouvement s'écrivent :

$$m_m \ddot{x}_m + k_m x_m = -m_m \bar{a}_g(\omega) \sin(\omega t) \quad (\text{B10})$$

L'équation d'équilibre de la structure est donnée par :

$$x_m = \frac{-\bar{a}_g(\omega) \sin(\omega t)}{\omega_m^2 - \omega^2} \quad (\text{B11})$$

L'équation de force est donnée par :

$$F_x = -m_0 \ddot{x} - \sum_{m=1}^{m_c} m_m (\ddot{x}_m + \ddot{x}) = -\bar{a}_g(\omega) \sin(\omega t) \left[m_0 + \sum_{m=1}^{m_c} m_m \left(\frac{\omega^2}{\omega_m^2 - \omega^2} + 1 \right) \right] \quad (\text{B12})$$

$$= -m_L \bar{a}_g(\omega) \sin(\omega t) \left[1 + \sum_{m=1}^{m_c} \frac{m_m}{m_L} \left(\frac{\omega^2}{\omega_m^2 - \omega^2} \right) \right] \quad (\text{B13})$$

En comparant l'Eq. (B13) à l'Eq. (B33), on en déduit l'expression des masses convectives :

$$\frac{m_m}{m_L} = \frac{2 \tanh [\tilde{\kappa}_{cm}(\omega) \frac{H}{2}]}{b_r^2 H \tilde{\lambda}_{cm}^2 \tilde{\kappa}_{cm}(\omega)} \quad (\text{B14})$$

La hauteur des masses convectives est située au niveau des centres de pression des masse convectives donnés par l'Eq. (B36) :

$$\frac{h_m}{H} = 1 - \frac{\tanh \left[\tilde{\kappa}_m(\omega) \frac{H}{2} \right]}{H \tilde{\kappa}_m(\omega)} \quad (\text{B15})$$

La masse impulsive m_0 est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{m_0}{m_L} = 1 - \sum_{m=1}^{m_c} \frac{m_m}{m_L} \quad (\text{B16})$$

Et la hauteur d'application de m_0 est obtenue grace à l'Eq. (B2) :

$$\frac{h_0}{H} = \frac{m_L h_g - \sum_{m=1}^{m_c} m_m h_m}{m_0} \quad (\text{B17})$$

$$= \frac{m_L 0.5 H - \sum_{m=1}^{m_c} m_m h_m}{m_0} \quad (\text{B18})$$

En remarquant que le centre de gravité du liquide homogène est situé au centre de l'aire géométrique occupée par le liquide en $h_g = H/2$. Dans le cas d'un liquide incompressible, les ratio de masse en fonction des dimensions géométriques d'un réservoir rectangulaires sont représentée à la figure (C.2).

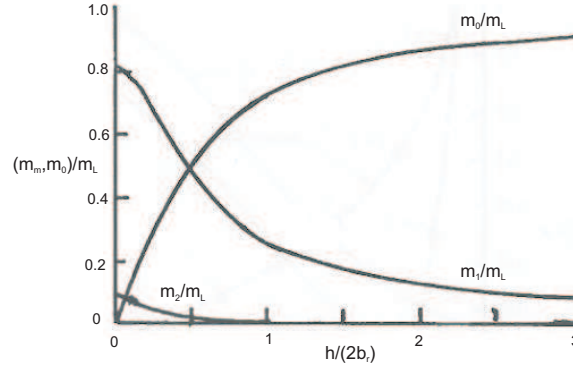


Fig. C.2 Ratios de masse impulsive et convectives en fonction des dimensions du réservoir (Graham et Rodriquez (1952))

ANNEXE D

MODÉLISATION DU BALLOTEMENT PAR LA MÉTHODE DES
ÉLÉMENTS FINIS

Cette annexe présente l'influence du maillage sur les caractéristiques dynamiques des modes de vibration convectifs dans un réservoir asymétrique, pour deux types de maillages, l'un comportant deux subdivisions horizontales et l'autre comportant dix subdivisions horizontales.

La figure (D.1) présente les caractéristiques modales convectives d'un réservoir comportant deux subdivisions horizontales :

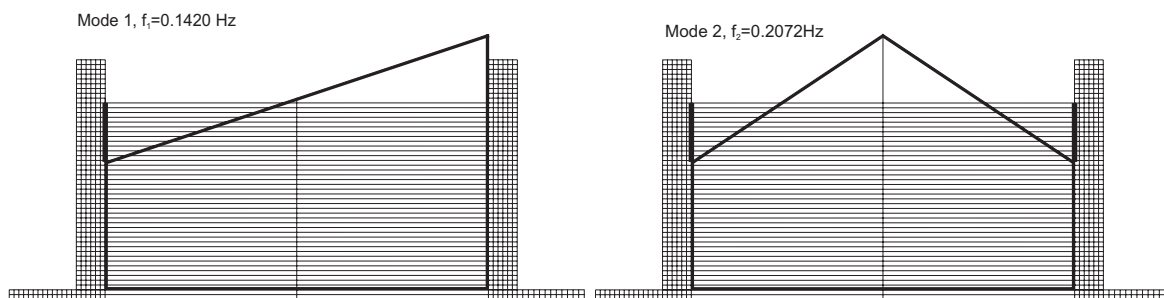


Fig. D.1 Modes convectifs dans le cas d'un maillage à 2 divisions horizontales

La figure (D.2) présente les caractéristiques modales convectives d'un réservoir comportant dix subdivisions horizontales :

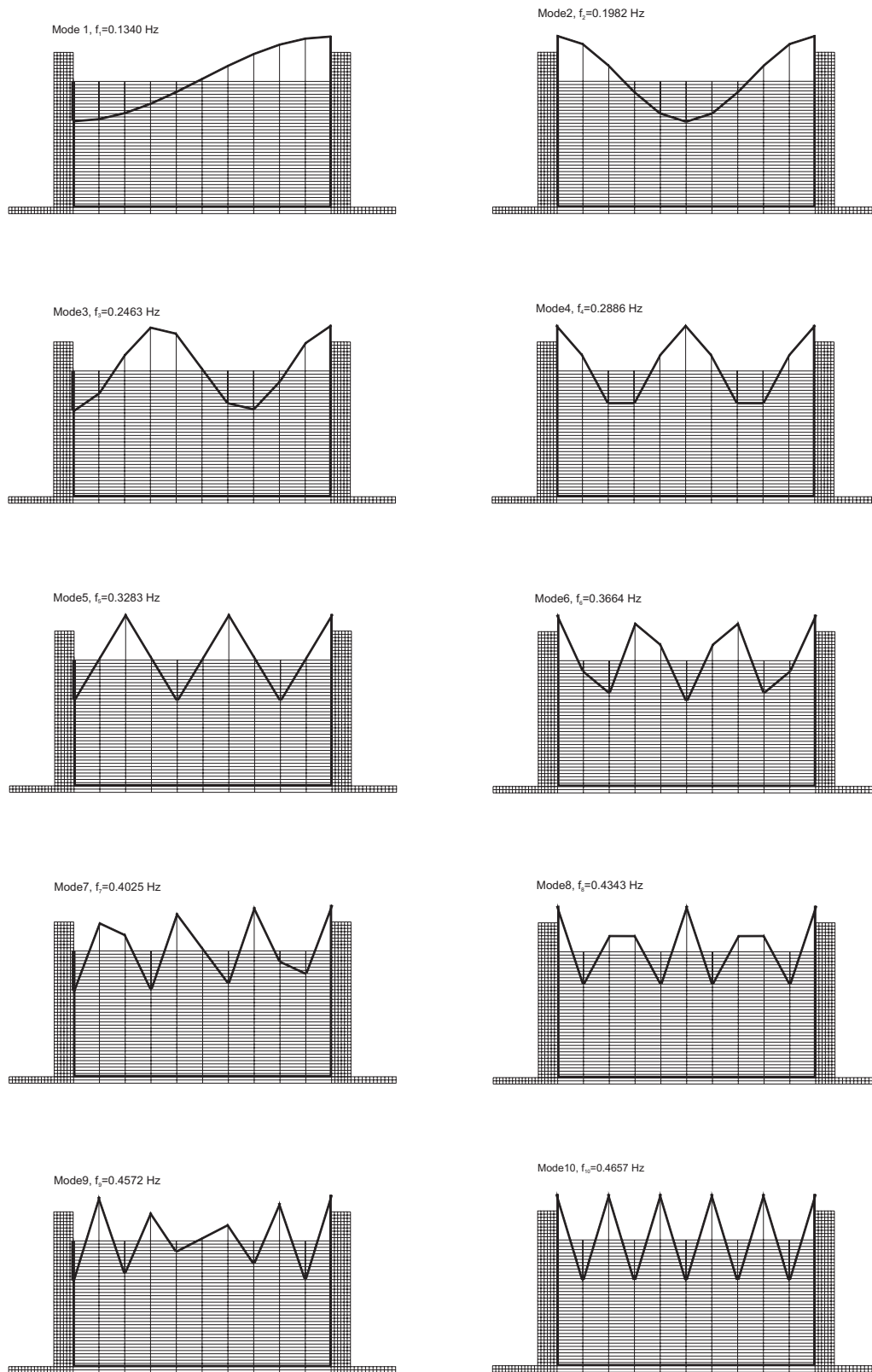


Fig. D.2 Modes convectifs dans le cas d'un maillage à 10 divisions horizontales

Le nombre de subdivisions horizontales du maillage du fluide contrôle le nombre de modes convectifs calculés dans l'analyse mais n'assure pas la convergence des fréquences naturelles ni des fonctions de forme des modes comme on peut s'en rendre compte aux figures (D.1) et (D.2).

ANNEXE E

MÉTHODES POUR LES ANALYSES TEMPORELLES

Cette annexe présente le principe et des méthodes pour les analyses temporelles dans la formulation analytique et dans ADINA.

E.1 Analyses temporelles dans la méthode analytique

La figure (E.1) présente un schéma de principe du calcul des pressions hydrodynamiques à l'aide de la méthode analytique.

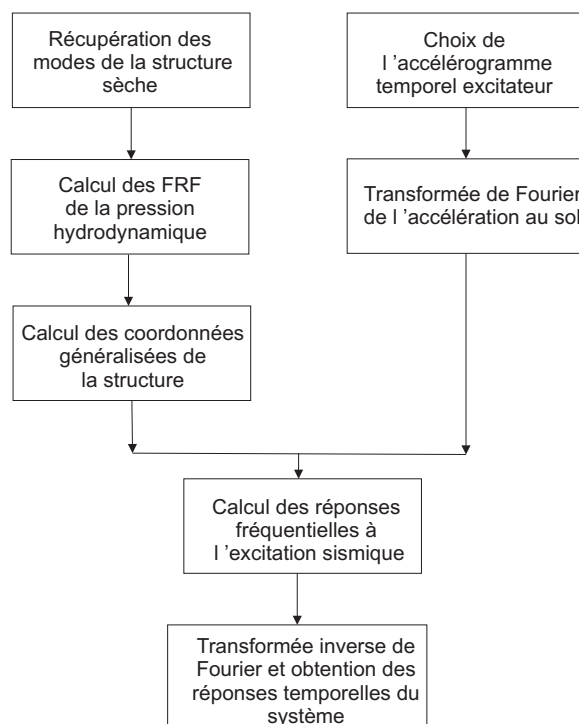


Fig. E.1 Schéma de principe des analyses temporelles

La méthode temporelle analytique calcule l'ensemble des réponses du système dans le domaine fréquentiel puis se ramène au domaine temporel à l'aide d'une transformée inverse de Fourier. En pratique, la programmation a été réalisée en se servant des transformées rapide directe (fft) et inverse (ifft) de MATLAB. Le choix des paramètres de la fft va influencer sur la précision numérique de la réponse temporelle du système.

Les analyses réalisées sont des analyses discrètes, il importe donc de bien choisir le nombre de points et la fréquence d'échantillonnage de l'accélérogramme afin d'éviter les problèmes de repliement du

spectre ou un mauvais fenêtrage fréquentiel.

Au départ, l'accélérogramme possède les paramètres suivant :

dt_{in} : pas de temps initial de l'accélérogramme de départ

N : nombre de points initial

T_{in} : durée de l'accélérogramme

Le nombre de points de l'accélérogramme de départ est modifié de manière à constituer une puissance entière de 2 pour la fft :

$N_{DATA} = 2^{N_{exp}}$: nouveau nombre de points de l'accélérogramme avec N_{exp} , un coefficient entier compris entre 10 et 20.

Le pas fréquentiel de la réponse fréquentielle est défini par l'expression suivante :

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T_{in}}$$

D'après la relation précédente, on constate que la précision fréquentielle peut être augmenté en augmentant la durée de l'accélérogramme de départ par une série de zéros qui n'auront aucune participation dans la fft de l'accélérogramme ainsi modifié.

Dans la pratique, les réponses fréquentielles sont calculées jusqu'à la fréquence de Nyquist, environ égale à $\frac{1}{2dt}$, avec dt le pas de temps de l'accélérogramme. Cela permet d'éviter de tracer le spectre "miroir" de l'accélération (spectre des fréquences négatives). La fft de MATLAB, est "shifté" d'une fréquence égale à la fréquence de Nyquist dans les fréquences positives.

Les figures (E.2), (E.3) et (E.4) extrait de Chopra et Fenves (1984) résument la manière dont sont réalisées la fft et la ifft.

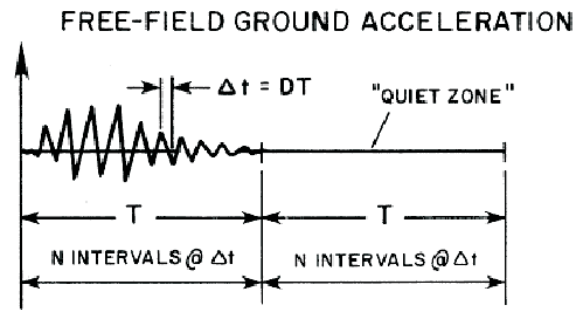


Fig. E.2 Prolongement du signal de départ d'une période

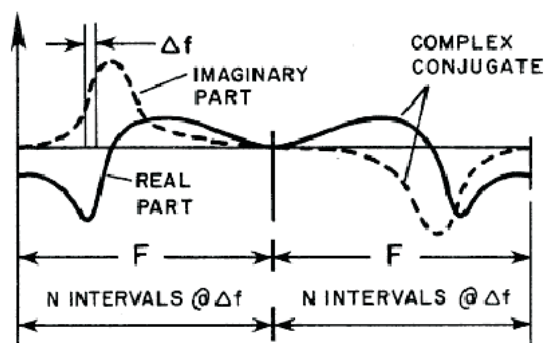


Fig. E.3 Opérations sur le spectre fréquentiel pour la ifft

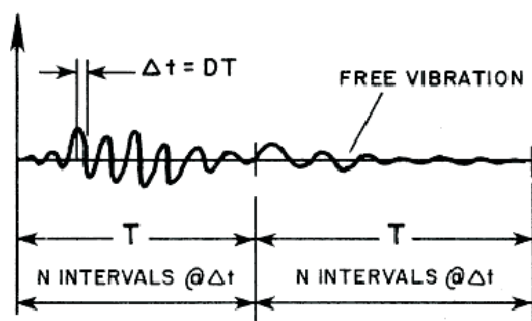


Fig. E.4 Réponse temporelle après ifft

E.2 Analyses temporelles croisées ADINA/MATLAB

Il est possible de réaliser les analyses temporelles à l'aide d'une méthode croisée *ADINA/MATLAB*. Les analyses fréquentielles harmoniques sont réalisées sur *ADINA* en prenant soin d'enregistrer l'amplitude maximale et la phase de la quantité mesurée, puis ces données sont insérées dans le programme *MATLAB* réalisant la ifft.

ANNEXE F

ARTICLE0-SEISMIC RESPONSE OF ASYMMETRIC RECTANGULAR LIQUID CONTAINING STRUCTURES

This study proposes and validates a new formulation to investigate the dynamic response of symmetric and asymmetric rectangular liquid containing structures in two dimensional space. A finite elements program is used to validate the accuracy of the method. The proposed analytical equations can take account of the flexibility of each wall independently such enabling to compute the impulsive response of both symmetric and asymmetric rectangular fluid containing structures. The paper presents a frequential method able to describe the dynamic response of fluid structures system considering : (i) flexibility of each wall, (ii) water compressibility, (iii) reservoir bottom wave absorption. The method is validated with two cases : a case of geometrically asymmetric wall-water with a bottom absorptive condition and a case of rectangular asymmetric tank. An excellent agreement is obtained with both cases against the finite elements results. Moreover it is shown that the absorptive boundary condition only has effects on higher modes for the kind of structures studied here.

Seismic response ; Fluid-structure interaction ; Liquid-containing structures ; Tanks ; Analytical formulations ; Hydrodynamic pressure ; Finite elements.

F.1 Introduction

The dynamic response of liquid containing structures has been extensively investigated since the early works of Hoskins and Jacobsen ?, Jacobsen Jacobsen (1949), Werner Werner et Sundquist (1949), Jacobsen and Ayre Jacobsen et Ayre (1951), Graham and Rodriguez Graham et Rodriguez (1952), and Housner Housner (1957, 1963). The continuous impetus for more refined research on this topic has been sustained by severe damage to liquid containing structures caused by events such as the 1960 Chilean earthquakes Steinbrugge and Flores (1963), the 1964 Alaska earthquake Hanson (1973), the 1994 Northridge earthquake ?, and the 1999 Turkey Earthquake Steinberg and Cruz (2004). During such events, liquid containing structures must be damage-proof to avoid spillage of hazardous materials such as toxic chemicals and highly inflammable products. Water storage tanks are also crucial post-earthquake lifeline structures, providing water to extinguish fires occurring in the aftermath of earthquakes, as well as safe supplies of drinking water.

The authors of the earlier studies Jacobsen (1949); Werner et Sundquist (1949); Jacobsen et Ayre (1951); Housner (1957, 1963) developed analytical methods to evaluate the effects of dynamic fluid pressure assuming that the containers are rigid, and that the fluid is incompressible and inviscid, with its motion limited to small displacements. The work of Chopra Chopra (1967, 1968, 1970) on gravity dams showed that structural flexibility influences significantly the dam's interaction with the impounded reservoir, and consequently the overall seismic response. Subsequent studies on

liquid containing structures also confirmed that the flexibility of container walls affects considerably the coupled dynamic response of the fluid-container system and should thus be included in such analyses Veletsos (1974); Veletsos et Yang (1976); Veletsos et Young (1977); Haroun (1980, 1983); Haroun and Housner (1981a,b); Balendra et al. (1982). The dynamic fluid pressures within liquid containing structures are generally decomposed into (i) a convective component generated by the sloshing of a portion of the fluid near the free surface, and (ii) an impulsive component generated by a portion of the fluid accelerating with the container. It has been shown that the coupling between liquid sloshing modes and container vibration modes is weak Veletsos (1974); Haroun (1980); Haroun and Housner (1982). Consequently, convective and impulsive pressures can first be determined separately and their effects combined later to obtain the total dynamic response Kana (1979); ?. In practice, convective pressures are determined assuming that the container is rigid, and impulsive pressures are obtained by analyzing the interacting liquid-structure system while neglecting sloshing effects Veletsos (1974); Haroun and Housner (1981b).

Although significant work has been dedicated to the dynamics of liquid-containing structures, there is no available practical analytical technique to evaluate the dynamic and seismic responses of asymmetric rectangular liquid-containing structures. The non-symmetry of a liquid-containing structure is common and may originate from various sources, such as different geometries of the lateral walls, i.e. *geometric asymmetry*, as illustrated in Fig. F.1, or their different constitutive materials, i.e. *material asymmetry*, due to intentional design, asymmetric damage or asymmetric retrofitting for example. In such cases, the walls's flexibilities and consequently the fluid boundary conditions at the lateral walls are no longer symmetric as assumed in available analytical approaches.

In this paper, we propose an original analytical method to investigate the dynamic and seismic responses of symmetric and asymmetric rectangular liquid-containing structures. In addition to accounting for walls' flexibility, the developed frequency- and time-domain solutions will also include the effects of water compressibility as well as energy dissipation through wave absorption at the container's bottom, two parameters which did not receive much attention in the literature relating to liquid-containing structures.

F.2 Governing equations

F.2.1 Reservoir dynamics and boundary conditions

We consider an asymmetric liquid containing structure as illustrated in Fig. F.1. For clarity, the terms structure and reservoir are used in this paper to refer to the solid and fluid domains of the system, respectively. We assume that : (i) the longitudinal dimension of the structure is sufficiently large so that it can be modeled as a two-dimensional plane-strain elasticity problem ; (ii) all materials have a linear elastic behavior ; (iii) the walls are flexible and have vertical faces at the interface with the reservoir ; (iv) the contained liquid is compressible, inviscid, with its motion irrotational and limited to small amplitudes ; (v) sediment deposits may accumulate at the reservoir bottom, (vi) gravity surface waves and convective effects are neglected. The reservoir is of length $L_r = 2b_r$ and

height H_r as illustrated in Fig.F.1. We adopt a Cartesian coordinate system with origin at the reservoir bottom, a horizontal axis x and a vertical axis y coincident with the axis of symmetry of the reservoir as shown in Fig. F.1. We note that the structure can have a geometric and/or material asymmetry as described before.

Under the above-mentioned assumptions, the hydrodynamic pressure $p(x, y, t)$ is governed by the classical wave equation

$$\nabla^2 p = \frac{1}{C_r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{B1})$$

where ∇^2 is the Laplace differential operator, t the time variable, ρ_r the mass density of water and C_r the compression wave velocity. Considering a unit horizontal harmonic ground accelerations $\ddot{u}_g(t) = e^{i\omega t}$, the hydrodynamic pressure in the reservoir can be expressed in the frequency domain as $p(x, y, t) = \bar{p}(x, y, \omega) e^{i\omega t}$, where $\bar{p}(x, y, \omega)$ is a complex-valued Frequency Response Function (FRF). Introducing this transformation into Eq. (B1) yields the classical Helmholtz equation

$$\nabla^2 \bar{p} + \frac{\omega^2}{C_r^2} \bar{p} = 0 \quad (\text{B2})$$

The empty structure is first modeled using finite elements. The dynamic equilibrium of the structure-reservoir system can then be expressed in the frequency domain as

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + (1 + i\eta_s) \mathbf{K}] (\boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{M} \mathbf{1} + \bar{\mathbf{F}}_h(\omega) \quad (\text{B3})$$

where $\boldsymbol{\omega}$ is a column-vector containing the FRFs of the structure's nodal displacements relative to the ground, \mathbf{M} and \mathbf{K} are the structure's mass and stiffness matrices, respectively, η_s is the structural hysteretic damping factor assumed constant, $\bar{\mathbf{F}}_h$ is a column-vector containing the FRFs of hydrodynamic pressure loads exerted at lateral walls, and $\mathbf{1}$ is a column-vector with the same dimension as the vector of nodal relative displacements, containing zeros except along horizontal degrees of freedom which correspond to the direction of earthquake excitation. Using modal superposition, the FRFs of relative displacement and acceleration components at coordinate (x, y) can be expressed as

$$\bar{u}(x, y, \omega) = \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega); \quad \ddot{\bar{u}}(x, y, \omega) = -\omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(x)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega) \quad (\text{B4})$$

$$\bar{v}(x, y, \omega) = \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(y)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega); \quad \ddot{\bar{v}}(x, y, \omega) = -\omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \psi_j^{(y)}(x, y) \bar{Z}_j(\omega) \quad (\text{B5})$$

where \bar{u} and \bar{v} denote the horizontal and vertical relative displacements of a given point of the structure, respectively, $\ddot{\bar{u}}$ and $\ddot{\bar{v}}$ the horizontal and vertical accelerations, respectively, $\psi_j^{(x)}$ and $\psi_j^{(y)}$ the x - and y -components of the j^{th} mode shape of the empty structure, \bar{Z}_j the generalized coordinate, and m_s the number of structural mode shapes included in the analysis. The hydrodynamic pressure

FRF \bar{p} can be decomposed as Chopra et Fenves (1984); Bouaanani and Lu (2009)

$$\bar{p}(x, y, \omega) = \bar{p}_0(x, y, \omega) - \omega^2 \sum_{j=1}^{m_s} \bar{Z}_j(\omega) \bar{p}_j(x, y, \omega) \quad (\text{B6})$$

where \bar{p}_0 is the FRF for hydrodynamic pressure due to rigid body motion of the empty structure, and where \bar{p}_j is the FRF corresponding to hydrodynamic pressure due to horizontal accelerations $\psi_j^{(x)}(-b_r, y)$ and $\psi_j^{(x)}(b_r, y)$ along structural mode shape j of the empty structure. The boundary conditions to be satisfied by FRFs \bar{p}_0 and \bar{p}_j are as follows :

- *At the structure-reservoir vertical interfaces*

These boundary conditions are based on compatibility between hydrodynamic pressures and displacements at the lateral walls located at $x = -b_r$ and $x = b_r$, yielding

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial x}(-b_r, y, \omega) = -\rho_r; \quad \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x}(-b_r, y, \omega) = -\rho_r \psi_j^{(x)}(-b_r, y) \quad (\text{B7})$$

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial x}(b_r, y, \omega) = -\rho_r; \quad \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x}(b_r, y, \omega) = -\rho_r \psi_j^{(x)}(b_r, y) \quad (\text{B8})$$

- *At reservoir free surface*

Neglecting the effect of gravity waves at reservoir free surface, hydrodynamic pressures at this location are assumed null

$$\bar{p}_0(x, H_r, \omega) = \bar{p}_j(x, H_r, \omega) = 0 \quad (\text{B9})$$

- *At reservoir bottom*

An absorptive boundary condition introduced by Hall and Chopra (1982) to account for energy dissipation through one-dimensional partial absorption of incident compression waves normal to the reservoir boundary

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial y}(x, 0, \omega) = i\omega q \bar{p}_0(x, 0, \omega); \quad \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial y}(x, 0, \omega) = i\omega q \bar{p}_j(x, 0, \omega) \quad (\text{B10})$$

where q is a damping coefficient defined at the reservoir bottom as

$$q = \frac{\rho_r}{\rho_f C_f} \quad (\text{B11})$$

with ρ_f and C_f denoting the mass density and the compression wave velocity within the reservoir foundation, respectively. The portion of the wave amplitude reflected back to the reservoir is represented by the wave reflection coefficient α defined by

$$\alpha = \frac{1 - q C_r}{1 + q C_r} \quad (\text{B12})$$

where α may vary from 0 for full wave absorption, to 1 for full wave reflection. In the latter

case, Eq. (B10) simplifies to

$$\frac{\partial \bar{p}_0}{\partial y}(x, 0, \omega) = \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial y}(x, 0, \omega) = 0 \quad (\text{B13})$$

F.2.1 New formulation for coupled vibrations of structure-reservoir systems

Using Eq. (B2) and the above-mentioned boundary conditions, we show in Appendix A that FRFs \bar{p}_0 and \bar{p}_j can be expressed as

$$\bar{p}_0(x, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2 [I_{0n}^-(\omega) X_n^-(x, \omega) - I_{0n}^+(\omega) X_n^+(x, \omega)]}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} Y_n(y, \omega) \quad (\text{B14})$$

$$\bar{p}_j(x, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2 [I_{jn}^-(\omega) X_n^-(x, \omega) - I_{jn}^+(\omega) X_n^+(x, \omega)]}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} Y_n(y, \omega) \quad (\text{B15})$$

in which the parameters $\beta_n(\omega)$, $\kappa_n(\omega)$, $X_n^-(x, \omega)$, and $X_n^+(x, \omega)$ are given by Eqs. (A12), (A14), (A25) and (A26) of Appendix A, respectively, and where the integrals $I_{0n}^-(\omega)$, $I_{0n}^+(\omega)$, $I_{jn}^-(\omega)$ and $I_{jn}^+(\omega)$ are obtained from Eqs. (A19) and (A20) of Appendix A as

$$\begin{aligned} I_{0n}^-(\omega) &= I_{0n}^+(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} Y_n(y, \omega) dy \\ &= \frac{ie^{-iH_r \lambda_n(\omega)}}{H_r \lambda_n^2(\omega)} [\lambda_n(\omega) - \omega q + \omega q e^{iH_r \lambda_n(\omega)}] \end{aligned} \quad (\text{B16})$$

$$I_{jn}^-(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} \psi_j^{(x)}(-b_r, y) Y_n(y, \omega) dy \quad (\text{B17})$$

$$I_{jn}^+(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} \psi_j^{(x)}(b_r, y) Y_n(y, \omega) dy \quad (\text{B18})$$

We note that

$$I_{jn}^-(\omega) = 0 \quad \text{when the wall at } x = -b_r \text{ is rigid} \quad (\text{B19})$$

$$I_{jn}^+(\omega) = 0 \quad \text{when the wall at } x = b_r \text{ is rigid} \quad (\text{B20})$$

Evaluating the FRFs \bar{p}_0 and \bar{p}_j at the structure's vertical walls, i.e. $x = -b_r$ and $x = b_r$, gives

$$\bar{p}_0(-b_r, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2(\omega) \{ \cosh[2 b_r \kappa_n(\omega)] - 1 \} I_{0n}(\omega)}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} Y_n(y, \omega) \quad (\text{B21})$$

$$\bar{p}_j(-b_r, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2(\omega) \{ I_{jn}^-(\omega) \cosh[2 b_r \kappa_n(\omega)] - I_{jn}^+(\omega) \}}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} Y_n(y, \omega) \quad (\text{B22})$$

and

$$\bar{p}_0(b_r, y, \omega) = -\bar{p}_0(-b_r, y, \omega) \quad (\text{B23})$$

$$\bar{p}_j(b_r, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2 \left\{ I_{j,n}^-(\omega) - I_{j,n}^+(\omega) \cosh[2 b_r \kappa_n(\omega)] \right\}}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} Y_n(y, \omega) \quad (\text{B24})$$

If water is assumed incompressible, Eq. (A14) simplifies to

$$\kappa_n = \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H_r} \quad (\text{B25})$$

and hydrodynamic pressures \bar{p}_0 and \bar{p}_j become

$$\bar{p}_0(-b_r, y) = \frac{4\rho_r H_r}{\pi^2} \sum_{n=1}^{m_r} \frac{(-1)^{n-1} [\cosh(2 b_r \kappa_n) - 1]}{(2n-1)^2 \sinh(b_r \kappa_n) \cosh(b_r \kappa_n)} \cos(\lambda_n y) \quad (\text{B26})$$

$$\bar{p}_j(-b_r, y) = \frac{2\rho_r H_r}{\pi} \sum_{n=1}^{m_r} \frac{[I_{j,n}^- \cosh(2 b_r \kappa_n) - I_{j,n}^+]}{(2n-1) \sinh(b_r \kappa_n) \cosh(b_r \kappa_n)} \cos(\lambda_n y) \quad (\text{B27})$$

and

$$\bar{p}_0(b_r, y) = -\bar{p}_0(-b_r, y, \omega) \quad (\text{B28})$$

$$\bar{p}_j(b_r, y) = \frac{2\rho_r H_r}{\pi} \sum_{n=1}^{m_r} \frac{[I_{j,n}^- - I_{j,n}^+ \cosh(2 b_r \kappa_n)]}{(2n-1) \sinh(b_r \kappa_n) \cosh(b_r \kappa_n)} \cos(\lambda_n y) \quad (\text{B29})$$

The FRF for total hydrodynamic pressure is given by Eq. (B6) where the vector $\bar{\mathbf{Z}}$ of generalized coordinates \bar{Z}_j , $j=1 \dots m_s$, is obtained by solving the system of equations

$$\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Q}} \quad (\text{B30})$$

in which elements of matrices $\bar{\mathbf{S}}$ and $\bar{\mathbf{Q}}$ are obtained for $n=1 \dots m_s$ and $j=1 \dots m_s$ as

$$\bar{S}_{nj}(\omega) = \left[-\omega^2 + (1 + i\eta_s) \omega_n^2 \right] \delta_{nj} + \omega^2 \left[\int_0^{H_r} \bar{p}_j(b_r, y, \omega) \psi_n^{(x)}(b_r, y) dy - \int_0^{H_r} \bar{p}_j(-b_r, y, \omega) \psi_n^{(x)}(-b_r, y) dy \right] \quad (\text{B31})$$

$$\bar{Q}_n(\omega) = -\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{1} + \int_0^{H_r} \bar{p}_0(b_r, y, \omega) \psi_n^{(x)}(b_r, y) dy - \int_0^{H_r} \bar{p}_0(-b_r, y, \omega) \psi_n^{(x)}(-b_r, y) dy \quad (\text{B32})$$

where δ denotes the Kronecker symbol and ω_n is the vibration frequency corresponding to structural

mode shape ψ_n of the structure without water. A convergence study must be conducted to determine the sufficient numbers m_s and m_r of structural and reservoir mode shapes to be included into each specific analysis. We note that if the containing structure is symmetric, Eqs. (B31) and (B32) simplify to

$$\bar{S}_{nj}(\omega) = \left[-\omega^2 + (1 + i\eta_s) \omega_n^2 \right] \delta_{nj} + 2\omega^2 \int_0^{H_r} \bar{p}_j(b_r, y, \omega) \psi_n^{(x)}(b_r, y) dy \quad (\text{B33})$$

$$\bar{Q}_n(\omega) = -\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{1} + 2 \int_0^{H_r} \bar{p}_0(b_r, y, \omega) \psi_n^{(x)}(b_r, y) dy \quad (\text{B34})$$

The structural displacement and acceleration time-history responses to a ground acceleration $u_g(t)$ can be obtained as

$$u(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} \psi_j^{(x)}(x, y) Z_j(t); \quad \ddot{u}(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} \psi_j^{(x)}(x, y) \ddot{Z}_j(t) \quad (\text{B35})$$

$$v(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} \psi_j^{(y)}(x, y) Z_j(t); \quad \ddot{v}(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_s} \psi_j^{(y)}(x, y) \ddot{Z}_j(t) \quad (\text{B36})$$

where the time-domain generalized coordinates Z_j are given by the Fourier integrals

$$Z_j(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Z}_j(\omega) \bar{u}_g(\omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad \ddot{Z}_j(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \bar{Z}_j(\omega) \bar{u}_g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{B37})$$

in which $\bar{u}_g(\omega)$ is the Fourier transform of the ground acceleration $u_g(t)$

$$\bar{u}_g(\omega) = \int_0^{t_a} u_g(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B38})$$

with t_a denoting the time duration of the applied accelerogram.

The shear forces at a given horizontal cutting section at position y_A of each wall can also be obtained by expressing the dynamic equilibrium of the wall's portion above the cutting section, yielding

$$V^-(y_A, t) = \int_{y_A}^{H_r} p(-b_r, y, t) dy - \iint_{\mathcal{A}^-(y_A)} \rho_s(x, y) \left[u_g(t) + \ddot{u}(x, y, t) \right] dx dy \quad (\text{B39})$$

$$V^+(y_A, t) = \int_{y_A}^{H_r} p(b_r, y, t) dy - \iint_{\mathcal{A}^+(y_A)} \rho_s(x, y) \left[u_g(t) + \ddot{u}(x, y, t) \right] dx dy \quad (\text{B40})$$

where V^- and V^+ is the shear forces at the left and right walls of the liquid-container, respectively, \mathcal{A}^- and \mathcal{A}^+ are the areas of the portions located above the cutting sections of the left and right walls, respectively, and ρ_s is the density of the constitutive material(s) of the liquid container.

F.3 Validation examples

The dynamic response of symmetric and asymmetric liquid containing structures are investigated in this section to validate the proposed method and illustrate its application. The description as well as the frequency- and time-domain analyses of the studied systems are presented in the next two subsections.

F.3.1 Geometrically asymmetric wall-water system

In this section, we investigate the geometrically asymmetric wall-water system illustrated in Fig. F.2. The following properties are adopted for the structure's material : modulus of elasticity $E = 25$ GPa, Poisson's ratio $\nu_s = 0.2$, and mass density $\rho_s = 2400$ kg/m³. The reservoir contains water of mass density $\rho_r = 1000$ kg/m³, and has a height $H_r = 20$ m and a length $L_r = 20$ m. Water is considered compressible with a velocity of pressure waves $C_r = 1440$ m/s. A constant structural hysteretic damping factor $\eta_s = 0.1$ is assumed. To obtain the mode shapes ψ_j , $j = 1 \dots m_s$, of the walls without water and corresponding modal participation factors, the structures are discretized into 8-node plane-strain solid finite elements using the software ADINA ?. Fig. F.3 (a) illustrates the finite element mesh used. Application of the proposed method described in Section F reveals that frequency response convergence up to 20 Hz requires that the first eight modes of the empty structure be included in the analysis, i.e. $m_s = 8$. Fig. F.4 illustrates the first eight mode shapes given by ADINA ? as well as the corresponding frequencies and horizontal effective modal masses expressed in percentage of total mass of the walls. As can be seen, mode 6 is a vertical mode, and can therefore be neglected in the analysis. We also note that a wide frequency range up to 20 Hz was studied for purpose of illustration although a lower cutting frequency could have been selected considering the usual frequency content of interest under seismic excitation. The same frequency range will be used in the next examples. To validate the results, we conduct a finite element analysis where both the walls and the reservoir are modeled using 8-node plane strain and 8-node potential-based finite elements programmed in ADINA ?, respectively. Fig. F.3 (b) illustrates the finite element model used. In this case, dynamic interaction between the walls and the reservoir is achieved through fluid-structure interface elements and a potential-based formulation of the fluid domain Everstine (1981); Bouaanani and Lu (2009).

Fig. F.5 shows the obtained FRFs of nondimensionalized scaled hydrodynamic pressures $|p/(\rho g H_r)|$ and scaled horizontal relative displacements $|u/u_{st}|$ where u_{st} is the lateral static displacement under the effect of hydrostatic pressure. The results are determined at points A, B, and C located on the left wall, and points A', B' and C' belonging to the right wall as indicated in Fig. F.3. The vertical positions of the points are $y_A = y_{A'} = 1$ m, $y_B = y_{B'} = 10$ m, $y_C = 24$ m and $y_{C'} = 28$ m. The FRFs in Fig. F.5 clearly show that the results of the proposed method are in excellent agreement with the finite element solutions over a wide frequency range up to 20 Hz. The proposed method is then used to determine the FRFs including a reflection wave coefficient $\alpha = 0.2$ at reservoir's bottom. The obtained FRFs are superposed to those in Fig. F.5 and show that, in this case, the influence

of reservoir bottom absorption affects mainly hydrodynamic pressures at higher frequencies larger than 10 Hz. The techniques described previously are also applied next to determine hydrodynamic pressure profiles corresponding to frequencies $0.8 \tilde{f}_1$ and $1.2 \tilde{f}_1$, where \tilde{f}_1 denotes the coupled vibration frequency of the wall-water system. The obtained profiles presented in Fig. F.6 confirm that the proposed procedure yields excellent results when compared to advanced finite element formulations.

Next, we investigate the performance of the proposed method in assessing the seismic response of the previously described wall-water system. Fig. F.7 illustrates the horizontal acceleration component of Imperial Valley earthquake (1940) at El Centro selected to conduct the analyses using the proposed and finite element techniques described above. The obtained time-histories of nondimensionalized horizontal relative displacements $|u/u_{st}|$ at points C and C' are shown in Fig. F.8 (a) and (b). Fig. F.8 (c) and (d) illustrate the nondimensionalized shear forces V/F_{stat} at sections A and A' where $F_{stat} = \rho_r g H_r^2 / 2$ denotes the hydrostatic force. Fig. F.8 clearly shows that the time-history responses predicted by the proposed method are almost identical to those from finite element analyses.

F.3.2 Materially asymmetric tank-reservoir system

We consider the tank-reservoir system illustrated in Fig. F.9. The tank has a material asymmetry due to the retrofitting of one of its damaged lateral walls using a high performance material. The following properties are adopted for the structure's materials : moduli of elasticity of the original and reinforcing materials $E^{(1)} = 25$ GPa and $E^{(2)} = 55$ GPa, respectively, Poisson's ratio $\nu_s = 0.2$, and mass density $\rho_s = 2400$ kg/m³. The tank is filled with water with a mass density $\rho_r = 1000$ kg/m³ up to a height $H_r = 10$ m. The length of the reservoir is $L_r = 18$ m. Water is considered compressible with a velocity of pressure waves $C_r = 1440$ m/s. A constant structural hysteretic damping factor $\eta_s = 0.1$ is assumed. Fig. F.10 (a) illustrates the finite element model of the empty tank used to obtain the modal properties required for the proposed method, while Fig. F.3 (b) shows the tank-reservoir system's finite element model constructed for comparison purposes. 8-node solid and fluid finite elements from ADINA ? are used as in the previous models.

In this case, we show that the first six modes of the empty reinforced tank are to be included in the analysis for convergence up to 20 Hz, i.e. $m_s = 6$. Fig. F.11 presents the six mode shapes of the empty reinforced tank obtained using ADINA ? as well as the corresponding frequencies and horizontal effective modal masses expressed in percentage of total mass of the empty tank. By comparing these modes to those of the original symmetric tank, we observe that asymmetry affects the frequencies of modes 2, 4 and 6, as well as the corresponding modal masses which are now non-null.

The dynamic response of the reinforced tank-reservoir system is then studied using the previously described analytical and finite element models shown in Figs. F.10 (a) and (b). Fig. F.12 presents the resulting FRFs of nondimensionalized hydrodynamic pressures $|p/(\rho_r g H_r)|$ obtained at points A, B, A' and B', as well as the nondimensionalized horizontal relative displacements $|u/u_{st}|$ at points

C and C'. The positions of the points are illustrated in Fig. F.10 and are located at $y_A = y_{A'} = 0.5$ m, $y_B = y_{B'} = 5$ m, and $y_C = y_{C'} = 11$ m. Fig. F.12 shows that the agreement between the proposed method and the finite element solution is excellent over the wide frequency range studied. The hydrodynamic pressure profiles are also determined using the proposed and finite element methods. Fig. F.13 illustrates the profiles corresponding to frequencies $0.8 \tilde{f}_1$ and $1.2 \tilde{f}_1$, where \tilde{f}_1 denotes the coupled vibration frequency of the tank-reservoir system. These results confirm that the proposed method and advanced finite element modeling yield almost identical hydrodynamic profiles.

The seismic response of the tank-reservoir system is investigated next using the proposed and finite element techniques described above. The tank-reservoir is subjected to the horizontal component of the El Centro ground motion from Imperial Valley earthquake (1940) shown in Fig. F.7. Fig. F.8 illustrates the obtained nondimensionalized horizontal relative displacements $|u/u_{st}|$ at points C and C' as well as the shear forces V/F_{stat} at sections A and A', where $F_{stat} = \rho_r g H_r^2 / 2$ denotes the hydrostatic force as previously. Again, the time-history results confirm that the proposed procedure yields excellent results when compared to advanced finite element formulations.

F.4 Conclusions

This paper presented and validated an original formulation to study horizontally accelerated symmetrical and asymmetrical liquid-containing structures. The new formulation is based on a substructuring approach, where the containing structure is modeled using finite elements, while the effect of fluid domain is modeled analytically through interaction forces at the fluid-structure interfaces. The detailed mathematical derivations accounting for geometrical or material asymmetry of the containing structure are developed, considering both incompressible or compressible water assumptions. The proposed formulation also includes the effects of energy dissipation through reservoir bottom absorption. The technique was programmed and its application illustrated through examples highlighting the effects of geometrical and material asymmetry on the frequency- and time-domain dynamic responses of liquid-containing structures. It is seen that geometrical or material asymmetry affects the dynamic behavior of liquid containing structures, namely in terms of frequency response functions and time history responses of various quantities of interest. The obtained hydrodynamic pressures, displacements and shear forces were illustrated and successfully validated against advanced finite element analyses. The proposed technique is formulated in such a way that it can be easily coded into a practical and computationally efficient program.

Acknowledgements

The authors would like to acknowledge the financial support of the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

Appendix A

For clarity and brevity, the following notation is used $\ell(x, y, \omega) = \bar{p}_0(x, y, \omega)$ if $\ell = 0$ and $\bar{p}_j(x, y, \omega)$ if $\ell = j$ and

$$f_0^-(y) = 1; \quad f_0^+(y) = 1 \quad (\text{A1})$$

$$f_j^-(y) = \psi_j^{(x)}(-b_r, y); \quad f_j^+(y) = \psi_j^{(x)}(+b_r, y) \quad (\text{A2})$$

Throughout this appendix, subscript ℓ can take the values 0 or j .

Using the technique of separation of variables, we can show that hydrodynamic pressure can be expressed as

$$\bar{p}_\ell(x, y, \omega) = \bar{p}_{\ell x}(x, \omega) \bar{p}_{\ell y}(y, \omega) \quad (\text{A3})$$

where the pressures $\bar{p}_{\ell x}$ and $\bar{p}_{\ell y}$ are given by

$$\bar{p}_{\ell x}(x, \omega) = \gamma_1^{(\ell)}(\omega) e^{-\kappa x} + \gamma_2^{(\ell)}(\omega) e^{\kappa x} \quad (\text{A4})$$

$$\bar{p}_{\ell y}(y, \omega) = \gamma_3^{(\ell)}(\omega) e^{-i\lambda y} + \gamma_4^{(\ell)}(\omega) e^{i\lambda(\omega)y} \quad (\text{A5})$$

in which λ and κ are complex constants related by

$$\kappa(\omega)^2 = \lambda(\omega)^2 - \frac{\omega^2}{C^2} \quad (\text{A6})$$

and the coefficients $\gamma_1^{(\ell)}(\omega)$, $\gamma_2^{(\ell)}(\omega)$, $\gamma_3^{(\ell)}(\omega)$ and $\gamma_4^{(\ell)}(\omega)$ are to be determined by imposing appropriate boundary conditions.

Using the transformation of Eq. (A3) into Eqs. (B9) and (B13), we obtain the boundary conditions to be satisfied by function $\bar{p}_{\ell y}$ as

$$\frac{d\bar{p}_{\ell y}}{dy}(0, \omega) - i\omega q \bar{p}_{\ell y}(0, \omega) = 0 \quad (\text{A7})$$

$$\bar{p}_{\ell y}(H_r, \omega) = 0 \quad (\text{A8})$$

Substituting $\bar{p}_{\ell y}(y, \omega)$ by its expression in Eq. (A5) into Eqs. (A7) and (A8) yields to a Sturm-Liouville problem with complex-valued frequency-dependent eigenvalues $\lambda_n(\omega)$ to be obtained by solving the characteristic equation

$$e^{2i\lambda_n(\omega)H_r} = -\frac{\lambda_n(\omega) - \omega q}{\lambda_n(\omega) + \omega q} \quad (\text{A9})$$

and eigenvectors

$$Y_n(y, \omega) = \frac{[\lambda_n(\omega) - \omega q]e^{-i\lambda_n(\omega)y} + [\lambda_n(\omega) + \omega q]e^{i\lambda_n(\omega)y}}{2\lambda_n(\omega)} \quad (\text{A10})$$

satisfying the orthogonality relations for $n = 1 \dots m_r$ and $s = 1 \dots m_r$

$$\int_0^{H_r} Y_s(y, \omega) Y_n(y, \omega) dy = \frac{\beta_n(\omega)}{2\lambda_n^2(\omega)} \delta_{sn} \quad (\text{A11})$$

where δ denotes the Kronecker symbol and where the parameter β_n is given by

$$\beta_n(\omega) = H_r [\lambda_n^2(\omega) - \omega^2 q^2] + i\omega q \quad (\text{A12})$$

Using Eqs. (A3) and (A4) and the eigenvectors in Eq. (A10), we show that hydrodynamic pressure can be expressed as

$$\begin{aligned} \bar{p}_\ell(x, y, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)x} + \gamma_{2,n}^{(\ell)}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)x} \right] Y_n(y, \omega) \\ &\approx \sum_{n=1}^{m_r} \left[\gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)x} + \gamma_{2,n}^{(\ell)}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)x} \right] Y_n(y, \omega) \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

in which the sum is truncated to include only the first m_r reservoir modes, and where the frequency-dependent parameter κ_n is given by Eq. (A6) as

$$\kappa_n(\omega) = \sqrt{\lambda_n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{C_r^2}} \quad (\text{A14})$$

The coefficients $\gamma_{1,n}(\omega)$ and $\gamma_{2,n}(\omega)$ are obtained by substituting Eq. (A13) into Eqs. (A4) and (A5), yielding

$$\sum_{n=1}^{m_r} \kappa_n(\omega) \left[\gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)b_r} - \gamma_{2,n}^{(\ell)}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)b_r} \right] Y_n(y, \omega) = \rho_r f_\ell^-(y) \quad (\text{A15})$$

$$\sum_{n=1}^{m_r} \kappa_n(\omega) \left[\gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) e^{-\kappa_n(\omega)b_r} - \gamma_{2,n}^{(\ell)}(\omega) e^{\kappa_n(\omega)b_r} \right] Y_n(y, \omega) = \rho_r f_\ell^+(y) \quad (\text{A16})$$

Adding Eqs. (A15) to (A16) gives

$$\sum_{n=1}^{m_r} 2 \left[\gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) - \gamma_{2,n}^{(\ell)}(\omega) \right] \kappa_n(\omega) \cosh[b_r \kappa_n(\omega)] Y_n(y, \omega) = \rho_r [f_\ell^-(y) + f_\ell^+(y)] \quad (\text{A17})$$

Multiplying Eq.(A17) by eigenvectors $Y_n(y, \omega)$, $s = 1 \dots m_r$, integrating over reservoir height H_r and using trigonometric orthogonality relationships yields for each reservoir mode n

$$\gamma_{2,n}^{(\ell)}(\omega) = \gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) - \frac{\rho_r H_r \lambda_n^2(\omega) [I_{\ell n}^+(\omega) + I_{\ell n}^-(\omega)]}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} \quad (\text{A18})$$

where the parameters $I_{\ell n}^-(\omega)$ and $I_{\ell n}^+(\omega)$ are given by

$$I_{\ell n}^-(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} f_{\ell}^-(y) Y_n(y, \omega) dy \quad (\text{A19})$$

$$I_{\ell n}^+(\omega) = \frac{1}{H_r} \int_0^{H_r} f_{\ell}^+(y) Y_n(y, \omega) dy \quad (\text{A20})$$

Substituting Eq. (A18) into Eq. (A16) yields

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m_r} \kappa_n(\omega) \left\{ -2 \gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \right. \\ \left. + \frac{\rho_r H_r \lambda_n^2(\omega) [I_{\ell n}^+(\omega) + I_{\ell n}^-(\omega)]}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} e^{b_r \kappa_n(\omega)} \right\} Y_n(y, \omega) = \rho_r f_{\ell}^+(y) \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

Multiplying Eq.(A21) by eigenvectors $Y_n(y, \omega)$, $s = 1 \dots m_r$, integrating over reservoir height H_r and using trigonometric orthogonality relationships, gives for each reservoir mode n

$$\gamma_{1,n}^{(\ell)}(\omega) = \frac{\rho_r H_r \lambda_n^2(\omega) [I_{\ell n}^-(\omega) e^{b_r \kappa_n(\omega)} - I_{\ell n}^+(\omega) e^{-b_r \kappa_n(\omega)}]}{2 \beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} \quad (\text{A22})$$

and using Eq. (A18)

$$\gamma_{2,n}^{(\ell)}(\omega) = \frac{\rho_r H_r \lambda_n^2(\omega) [I_{\ell n}^-(\omega) e^{-b_r \kappa_n(\omega)} - I_{\ell n}^+(\omega) e^{b_r \kappa_n(\omega)}]}{2 \beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} \quad (\text{A23})$$

Substituting Eqs. (A22) and (A23) into Eq. (A13) leads to the following expressions of hydrodynamic pressures within the vibrating reservoir

$$\bar{p}_{\ell}(x, y, \omega) = \rho_r H_r \sum_{n=1}^{m_r} \frac{\lambda_n^2(\omega) [I_{\ell n}^-(\omega) X_n^-(x, \omega) - I_{\ell n}^+(\omega) X_n^+(x, \omega)]}{\beta_n(\omega) \kappa_n(\omega) \sinh[b_r \kappa_n(\omega)] \cosh[b_r \kappa_n(\omega)]} Y_n(y, \omega) \quad (\text{A24})$$

in which

$$X_n^-(x, \omega) = \cosh[(x - b_r) \kappa_n(\omega)] \quad (\text{A25})$$

$$X_n^+(x, \omega) = \cosh[(x + b_r) \kappa_n(\omega)] \quad (\text{A26})$$

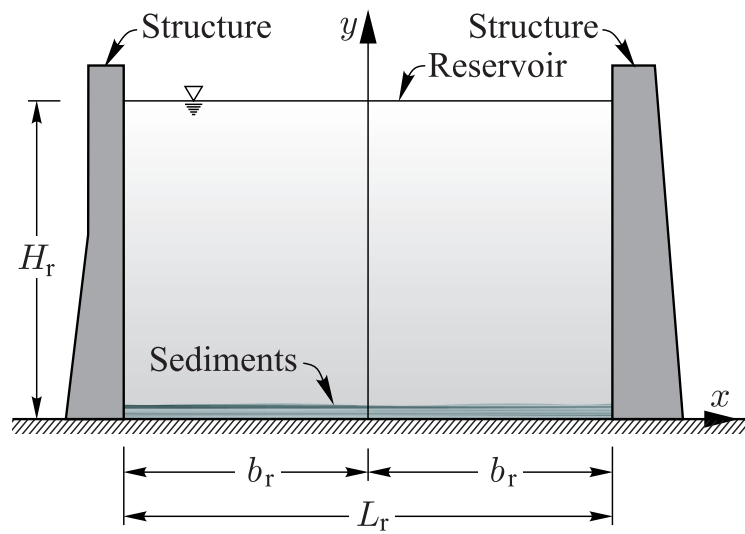


Fig. F.1 General geometry of the studied geometrically or materially asymmetric liquid containing structures.

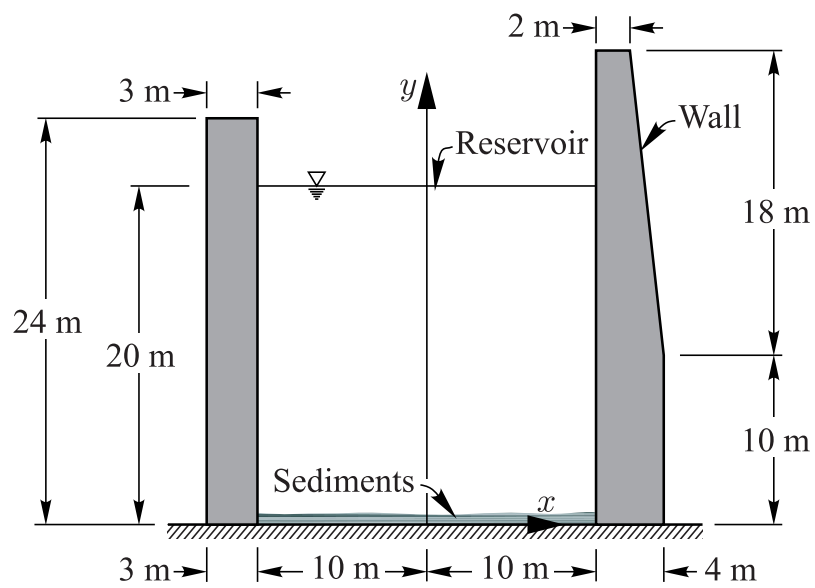


Fig. F.2 Geometry of the studied geometrically asymmetric wall-water system.

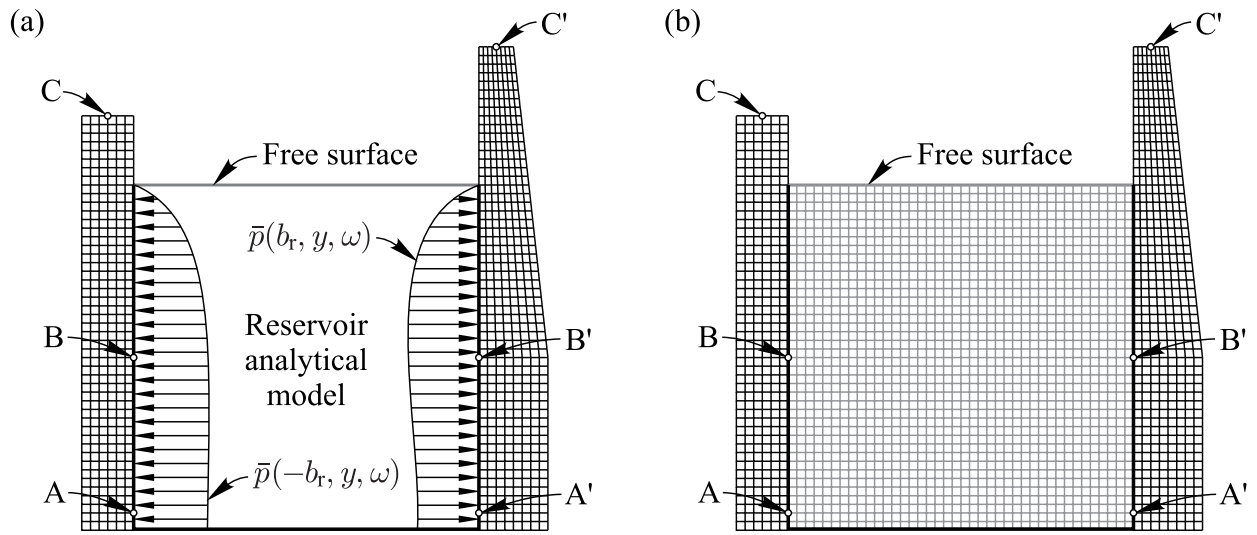


Fig. F.3 Geometry of the studied geometrically asymmetric wall-water system.

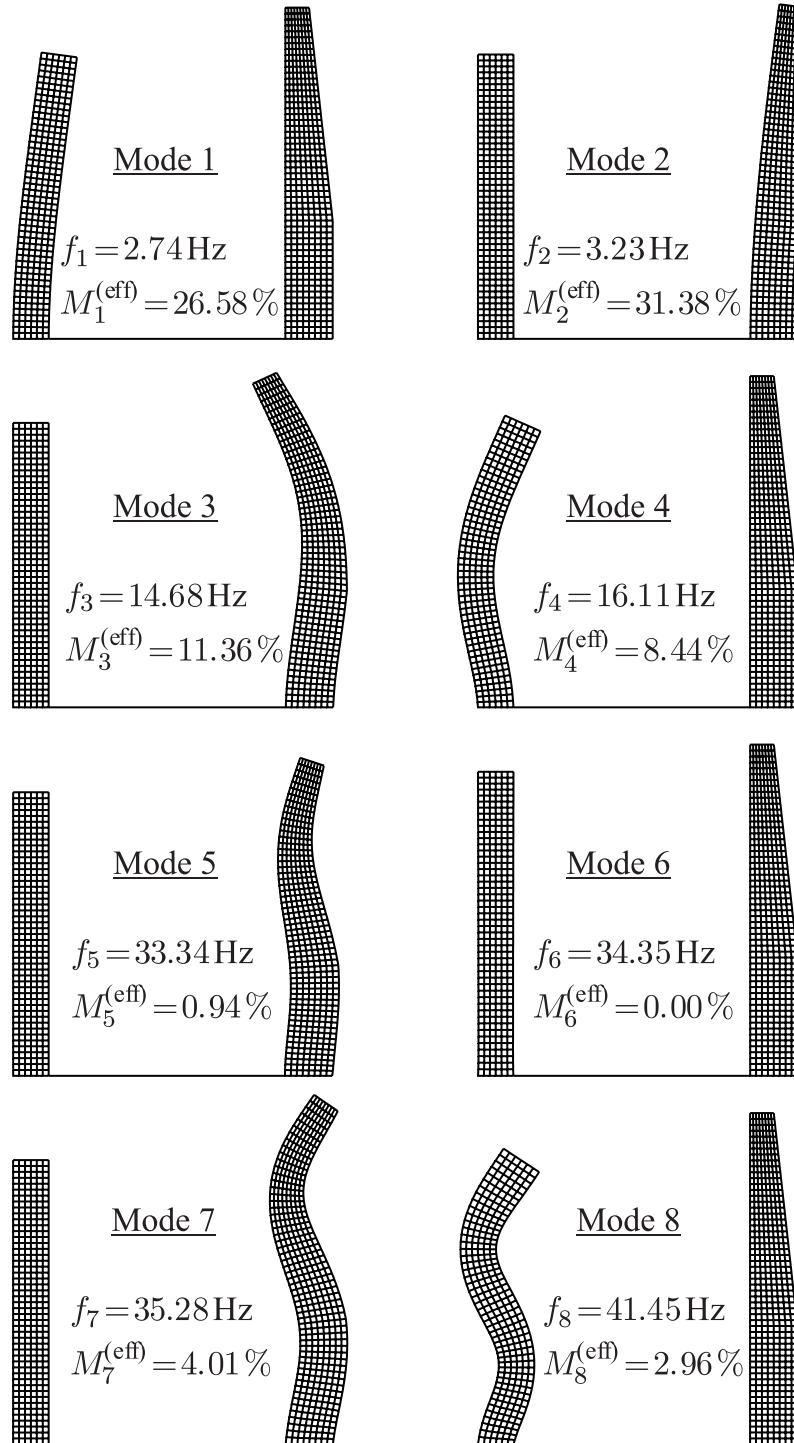


Fig. F.4 First eight mode shapes and corresponding frequencies and effective modal masses of the walls without water.

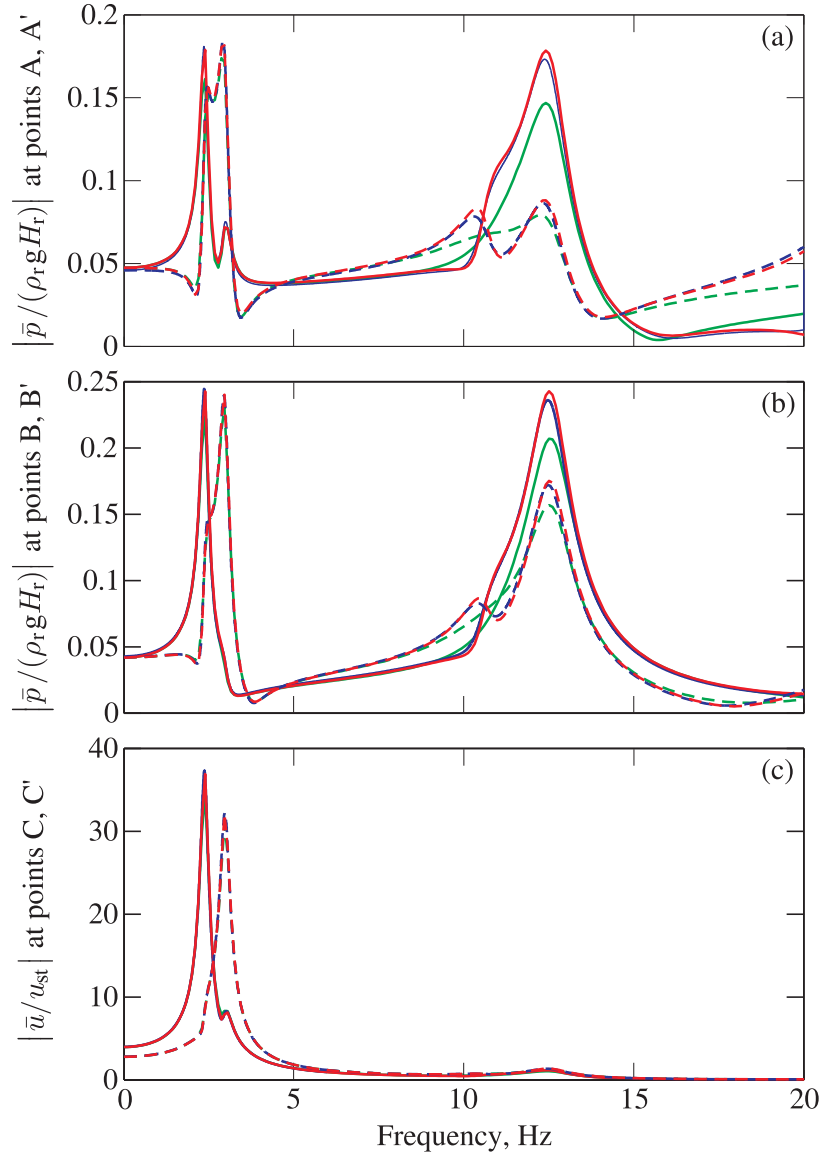


Fig. F.5 Nondimensionalized hydrodynamic pressures and displacements for the geometrically asymmetric wall-water system : (a) and (b) hydrodynamic pressures, (c) displacements. Continuous lines : Points A, B and C. Dotted lines : Points A', B' and C'. — Finite element solution ; — Proposed solution with $\alpha=1.0$; — Proposed solution with $\alpha=0.2$.

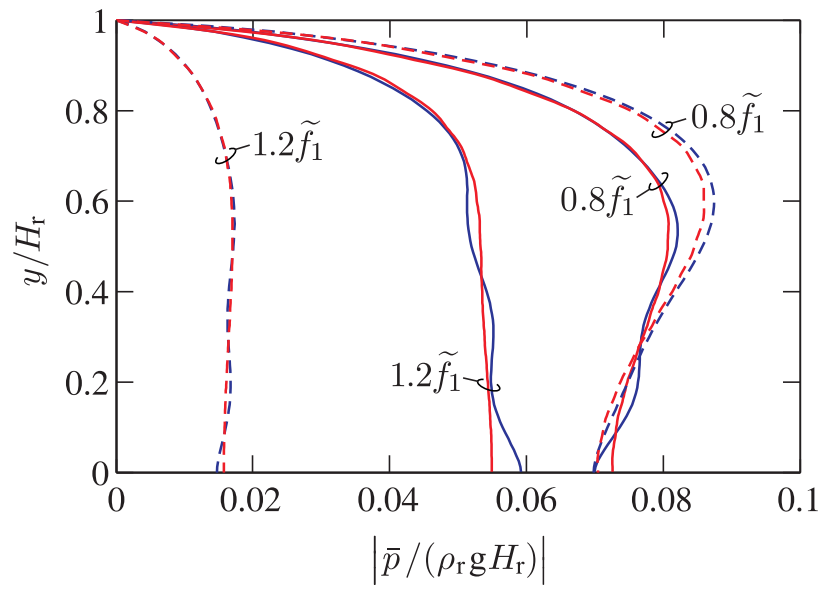


Fig. F.6 Nondimensionalized hydrodynamic pressure profiles on the walls of the asymmetric wall-water system. Continuous lines : Left wall. Dotted lines : Right wall. — Finite element solution ; — Proposed solution.

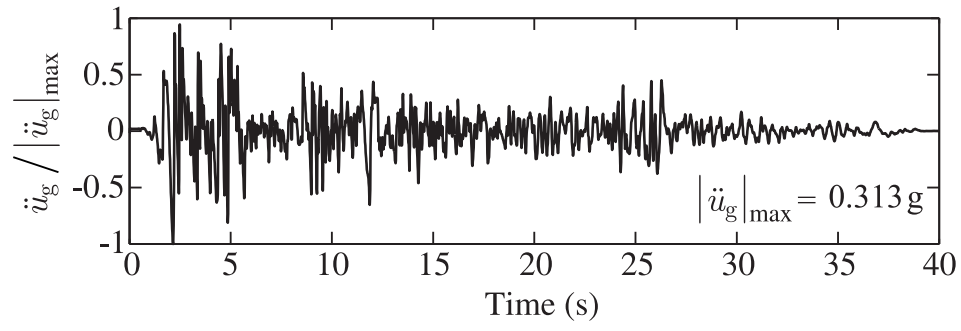


Fig. F.7 Horizontal acceleration component of Imperial Valley earthquake (1940) at El Centro.

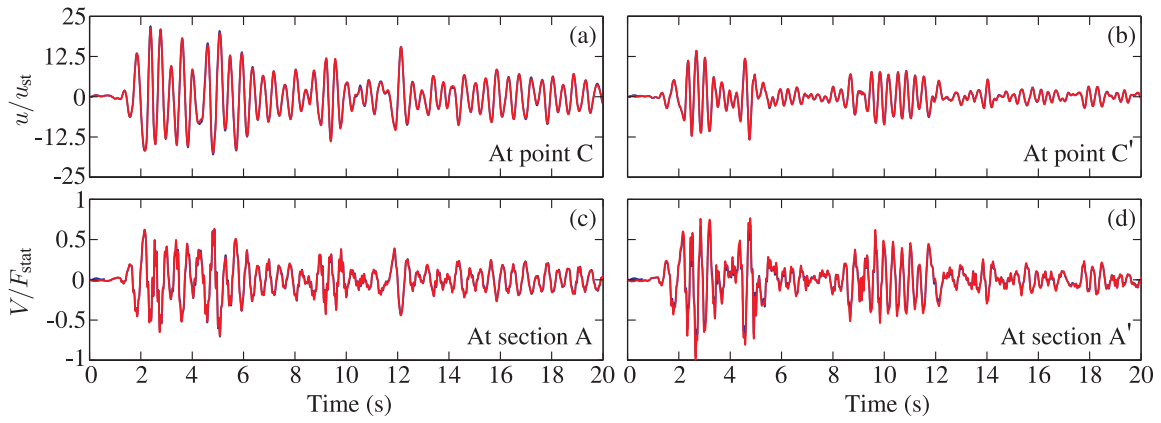


Fig. F.8 Time-history response of the geometrically asymmetric wall-water system : (a) Non-dimensionalized displacement at point C ; (b) Nondimensionalized displacement at point C' ; (c) Nondimensionalized shear force at section A ; (d) Nondimensionalized shear force at section A'. — Finite element solution ; — Proposed solution.

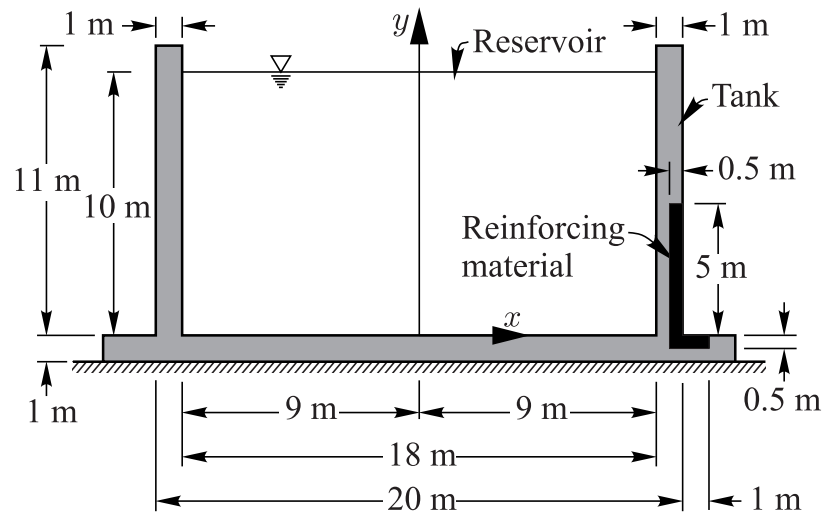


Fig. F.9 Geometry of the studied materially asymmetric tank-reservoir system.

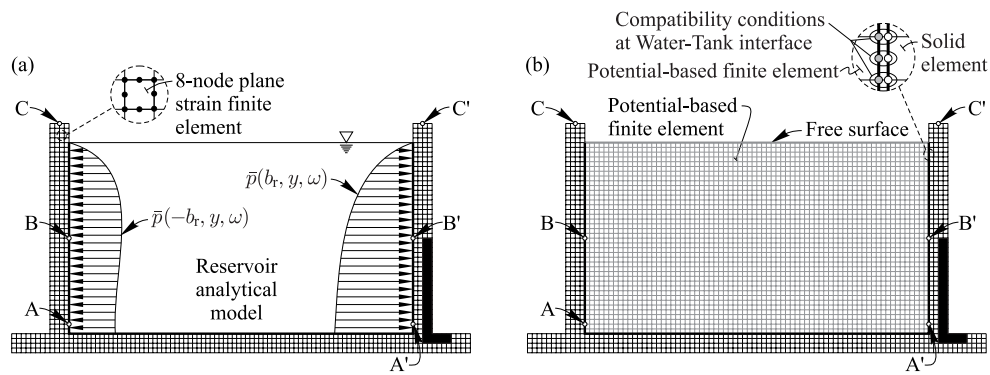


Fig. F.10 Finite elements models : (a) Retrofitted tank and analytical model for hydrodynamic pressure; (b) Retrofitted tank-water system.

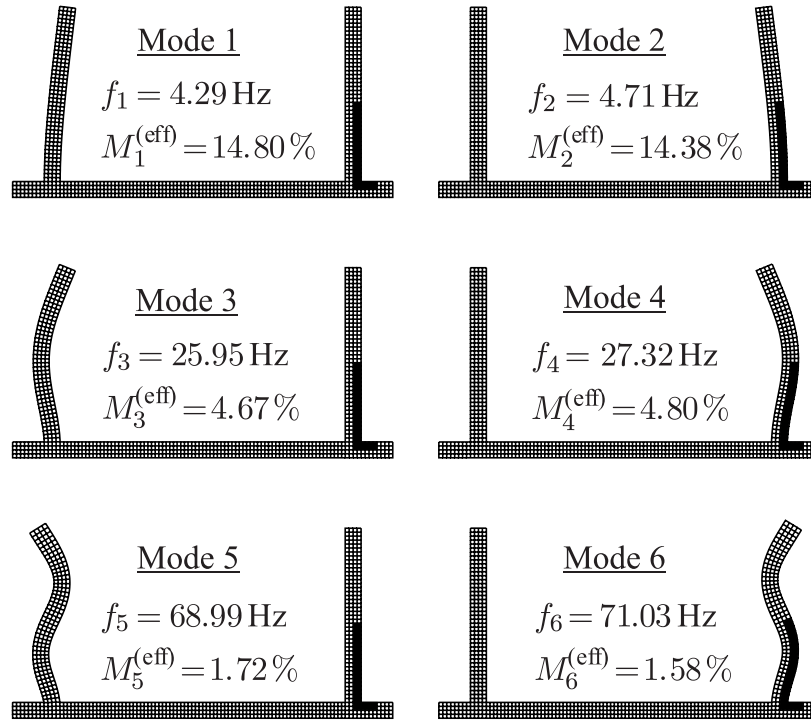


Fig. F.11 First six mode shapes and corresponding frequencies and effective modal masses of the asymmetrical tank.

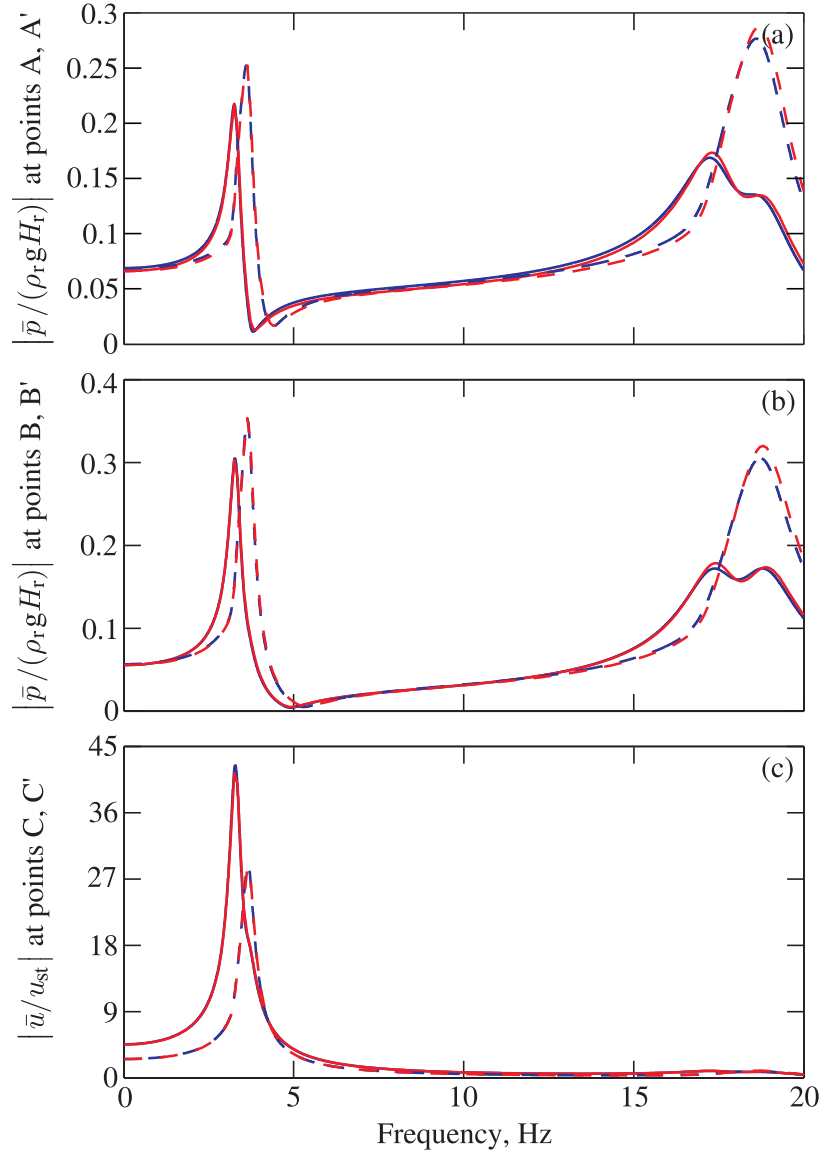


Fig. F.12 Nondimensionalized hydrodynamic pressures and displacements for the materially asymmetric tank-reservoir system : (a) and (b) hydrodynamic pressures, (c) displacements. Continuous lines : Points A, B and C. Dotted lines : Points A', B' and C'. — Finite element solution ; — Proposed solution.

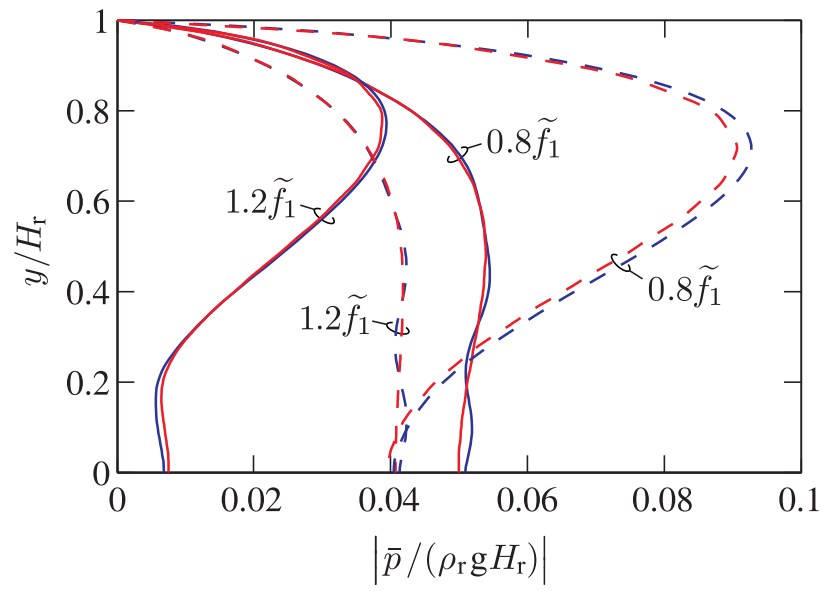


Fig. F.13 Nondimensionalized hydrodynamic pressure profiles on the walls of the materially asymmetric tank-reservoir system. Continuous lines : Left wall. Dotted lines : Right wall. — Finite element solution; — Proposed solution.

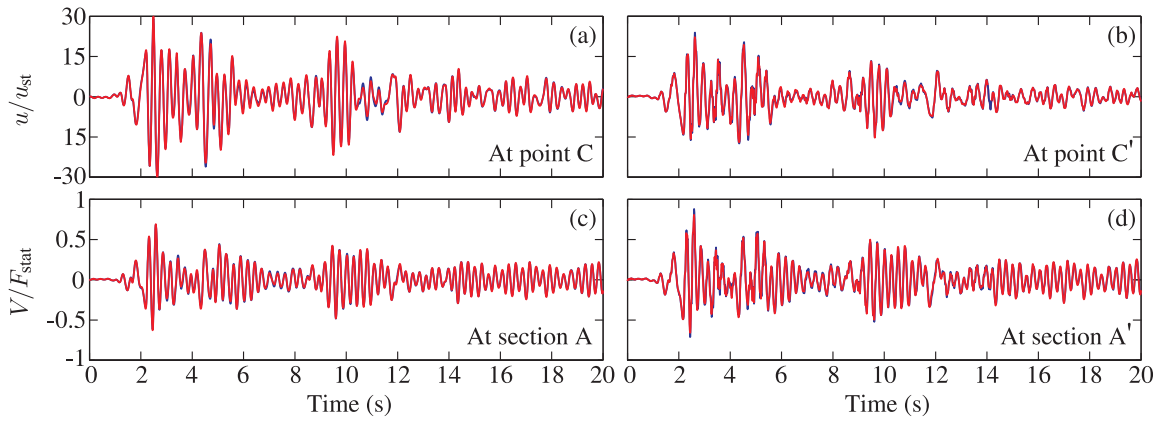


Fig. F.14 Time-history response of the materially asymmetric tank-reservoir system : (a) Nondimensionalized displacement at point C ; (b) Nondimensionalized displacement at point C' ; (c) Nondimensionalized shear force at section A ; (d) Nondimensionalized shear force at section A'. — Finite element solution ; — Proposed solution.