PolyPublie
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Imagerie par modulation acoustique de conductivité électrique destinée au diagnostic du cancer du sein
Auteur: Author:	Mathieu Gendron
Date:	2012
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Gendron, M. (2012). Imagerie par modulation acoustique de conductivité électrique destinée au diagnostic du cancer du sein [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/906/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/906/
Directeurs de recherche: Advisors:	Michel Bertrand, & Robert Guardo
Programme: Program:	Génie biomédical

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

IMAGERIE PAR MODULATION ACOUSTIQUE DE CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE DESTINÉE AU DIAGNOSTIC DU CANCER DU SEIN

MATHIEU GENDRON
INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE BIOMÉDICAL)
AOÛT 2012

© Mathieu Gendron, 2012.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

IMAGERIE PAR MODULATION ACOUSTIQUE DE CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE DESTINÉE AU DIAGNOSTIC DU CANCER DU SEIN

présentée par : GENDRON Mathieu
en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. SAVARD Pierre, Ph.D., président
M. BERTRAND Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. GUARDO Robert, Ph.D., membre et codirecteur de recherche
M. POULIOT Philippe, Ph.D., membre
M. LINA Jean-Marc, Ph.D., membre

À mon épouse Yannie

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier mes directeurs pour leur soutien scientifique et leur encadrement, les membres du jury pour la révision de cette thèse et leurs commentaires constructifs, Dr Isabelle Trop pour m'avoir enseigné divers aspects de la pratique médicale et de l'imagerie du cancer du sein, Johanne Raymond pour la révision linguistique de ce document, Claude Turcotte pour le soutien informatique qui a été nécessaire tout au long de ce projet, Steve Dubé pour son aide technique dans la réalisation de la cellule de mesure du montage expérimental, les responsables du département de génie chimique pour l'accès au matériel de laboratoire, mes collègues du laboratoire pour avoir créé un environnement de travail agréable et pour les discussions techniques qui ont contribué à l'avancement de ce projet, ma famille pour son soutien moral et mon épouse pour son appui inconditionnel pendant toutes ces années.

J'aimerais également remercier la Fondation canadienne pour l'innovation (FCI), le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) et le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies (FQRNT) pour leurs contributions financières aux ressources matérielles et humaines.

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur une nouvelle technique d'imagerie médicale qui permet de déterminer la distribution de conductivité électrique des tissus d'une région du corps avec une résolution comparable à celle de techniques courantes d'imagerie par ultrasons. Cette nouvelle technique, appelée imagerie par « modulation acoustique de conductivité électrique » (MACE), est basée sur l'interaction entre une onde acoustique et un champ électrique. Dans sa réalisation expérimentale la plus simple, quatre électrodes placées à proximité de la région à imager appliquent un courant électrique de faible amplitude et mesurent la différence de potentiel résultant du passage du courant dans les tissus. Un transducteur ultrasonore focalisé vient insonifier un voxel de la région d'intérêt, modifiant la distribution de conductivité et, ce faisant, l'amplitude du potentiel mesuré par les électrodes. Une image de la distribution de conductivité peut être obtenue en déplaçant l'ensemble capteur-électrodes pour balayer la région d'intérêt ; l'onde acoustique sert alors d'agent de localisation, tandis que la mesure de potentiel quantifie la variation de conductivité dans chaque voxel insonifié.

L'imagerie par MACE présente de nombreux avantages mais aussi des défis importants de mise en œuvre. Puisque ces avantages et défis dépendent de l'application visée, notre démarche a été orientée vers un objectif particulier, soit l'application de l'imagerie par MACE au diagnostic du cancer du sein. Ce choix est justifié par le potentiel que présente cette technique pour discriminer une tumeur maligne des autres tissus mammaires. En effet, des études expérimentales sur des tissus excisés réalisées durant près d'un siècle ainsi que l'apport plus récent des techniques de mesure d'impédance confirment qu'il existe une différence significative dans les spectres fréquentiels de conductivité électrique des tissus cancéreux et sains. Le développement de systèmes de tomographie d'impédance électrique (TIE) orientés vers l'imagerie du sein ne semble pas pouvoir réaliser ce potentiel, principalement parce que la résolution spatiale de la TIE est insuffisante pour détecter les tumeurs à un stade précoce. L'imagerie par MACE pourrait contourner cette limite fondamentale de la TIE.

Deux modèles sont proposés dans cette thèse pour réaliser l'imagerie par MACE. Ces modèles comprennent la formulation des problèmes direct et inverse. Le problème direct vise à obtenir les signaux de MACE à partir de la connaissance de la distribution de conductivité électrique du milieu d'intérêt et du protocole d'acquisition de données, tandis que le problème inverse vise à reconstruire la distribution de conductivité électrique du milieu à partir de données acquises expérimentalement.

Le premier modèle présenté dans la thèse est basé sur l'utilisation d'une onde acoustique bipolaire. Cette forme d'onde est généralement employée avec des transducteurs ayant

une faible largeur de bande. L'onde produite par une excitation en train d'ondes sinusoïdales présente des oscillations rapprochées. Lorsque l'épaisseur de l'objet à analyser est petite comparativement à la longueur d'onde acoustique, il est possible d'obtenir des signaux de MACE d'amplitude suffisante pour réaliser une imagerie en effectuant une translation du transducteur. En extrayant de ces signaux l'amplitude de la composante fréquentielle correspondante à la fréquence d'excitation, nous obtenons une carte de la sensibilité du système électrique permettant ensuite de reconstruire la distribution de conductivité électrique.

Le second modèle présenté dans la thèse utilise une onde unipolaire pour générer des signaux de relativement grande amplitude. Deux aspects sont liés au choix de ce type d'onde. Le premier est que la modulation acoustique est unidirectionnelle car la pression appliquée est (généralement) aussi unidirectionnelle. En d'autres termes, une pression qui ne produit qu'une augmentation de la conductivité électrique produira un grand signal résultant de l'intégration volumique de cette distribution. Le second aspect concerne la forme du champ acoustique. Puisque l'onde unipolaire n'est pas focalisée, elle insonifie de façon non uniforme tout le volume conducteur. Dans ce modèle, les données nécessaires à la reconstruction d'images sont obtenues en faisant une rotation du transducteur autour de l'objet.

Un montage expérimental a été réalisé durant notre projet pour obtenir des informations nécessaires à l'élaboration des modèles. Ce montage comprend un bassin rempli d'eau dans lequel sont immergés le transducteur ultrasonore, un hydrophone et une cellule de mesure dans laquelle se produit l'interaction entre les champs acoustique et électrique. Un système de positionnement à contrôle numérique permet de déplacer le transducteur relativement à l'hydrophone et à la cellule de mesure. Cette dernière comporte une cavité dans laquelle nous plaçons l'objet à analyser et que nous remplissons ensuite d'une solution électrolytique. La cavité est fermée sur deux faces par une fenêtre acoustique permettant le passage de l'onde ultrasonore et sur une autre face par des électrodes Ag/AgCl servant à l'application du courant et à la mesure du potentiel électrique résultant. Un élément novateur de cette cellule est l'inclusion dans un compartiment étanche des circuits de premier niveau de la chaîne d'acquisition de données. Le fait de placer ces circuits près des électrodes améliore le rapport signal sur bruit en réduisant la captation d'interférences électromagnétiques par les câbles coaxiaux relativement longs qui seraient autrement requis pour compléter la chaîne de mesure.

Un programme de simulation a été écrit pour la résolution des problèmes direct et inverse. Ce programme intègre divers éléments de la littérature portant sur la résolution numérique sans maillage. La résolution des problèmes direct et inverse requiert la résolution de problèmes électrostatiques où le calcul des distributions de potentiel électrique sur le domaine conducteur sert de base au calcul de la sensibilité acousto-électrique. Le signal de MACE

est ensuite calculé en intégrant sur le volume d'intérêt le produit de la sensibilité acousto-électrique et de la pression. Quant à la reconstruction d'images, elle est réalisée par une méthode de descente de gradient.

Divers problèmes de complexité croissante ont été traités avec le programme de simulation. Le dernier problème présenté dans la thèse représente une première version d'un système qui pourrait être utilisé en pratique pour la détection du cancer du sein *in vivo*. La géométrie du problème comprend une cavité de forme hémisphérique de 13,5 cm de diamètre où 9 électrodes placées en retrait sont utilisées pour l'application du courant et la mesure de différences de potentiel selon une séquence prédéfinie. Cette approche multi-électrodes permet d'optimiser la distribution de sensibilité acousto-électrique. La détection d'objets représentant des inclusions dans le sein a été quantifiée par un ensemble de critères incluant l'amplitude de la conductivité reconstruite pour chaque objet, la position de leur centre de masse, leur forme dans l'image et l'amplitude des artefacts autour des objets.

La mammographie est présentement la modalité d'imagerie médicale la plus couramment utilisée pour le dépistage du cancer du sein. Sa sensibilité moyenne se situe autour de 80 % et elle est plus faible chez les patientes plus jeunes. L'IRM offrirait, selon des études récentes, une meilleure sensibilité et la possibilité de détecter des tumeurs de plus petites dimensions permettant ainsi un traitement précoce. Les coûts d'exploitation des systèmes d'IRM rendent pour le moment cette modalité inaccessible pour des programmes de dépistage à grande échelle. L'imagerie par MACE pourrait à terme constituer un compromis intéressant entre la sensibilité requise pour l'ensemble des patientes et les coûts d'exploitation. Pour atteindre cet objectif, d'importants progrès devront être réalisés autant dans la modélisation du processus de formation d'image que dans l'instrumentation servant à l'acquisition de données. Nous croyons que les travaux décrits dans cette thèse contribueront à l'atteinte de cet objectif.

ABSTRACT

This thesis describes a new medical imaging technique for determining the electrical conductivity distribution of tissues in a body region with a resolution comparable to that of current ultrasound techniques. The new technique, henceforth referred to as "Acousto-Electric Conductivity Modulation" (AECM) imaging, is based on the interaction of a sound wave with an electrical field. In its simplest form, four electrodes located near the region to be imaged apply a low-amplitude electrical current and measure the potential difference arising from current flow in the tissues. A focused ultrasound transducer directs a pressure wave to a voxel of the region of interest, modifying its conductivity distribution and, as a result, the amplitude of the potential measured by the electrodes. An image of the conductivity distribution can thus be constructed point-by-point by moving the electrodes and transducer to scan the object. In this context, the acoustic wave acts as the localization agent while the electrical potential provides a measure of the local conductivity change that occurs in the voxel.

AECM imaging presents several advantages but also implies addressing significant difficulties in its deployment. Since the advantages and implementation difficulties depend on the intended application, we have focused on achieving a specific objective: applying AECM imaging to the diagnosis of breast cancer. The rationale for this choice is the potential presented by AECM imaging for discriminating cancerous tumors from healthy breast tissue. Indeed, experimental studies on excised tissues carried out over nearly a century, supported by more recent wideband tissue impedance measurements, have shown that there are significant differences in the electrical conductivity spectra of cancerous and normal tissues. Yet electrical impedance tomography (EIT) systems specifically designed for breast imaging do not seem to be capable of providing the required tissue discrimination characteristics, mainly because the low spatial resolution of EIT prevents detecting tumors at an early stage. AECM imaging could overcome this inherent limitation of EIT.

Two models are proposed in this thesis for implementing AECM imaging. Formulations for the forward and inverse problems are provided for both models. The forward problem involves computing the AECM signals given the electrical conductivity distribution of the medium and the data acquisition protocol. The inverse problem involves reconstructing the electrical conductivity distribution of the medium from experimentally acquired AECM signals.

The first model presented in the thesis is based on the use of bipolar acoustic waves for excitation. This waveform is generally used with narrow band transducers. Acoustic

waves generated by an ultrasound transducer driven with a burst of sine waves consists of alternating compression and rarefaction phases which tend to cancel each other in terms of the conductivity changes they produce. However when the thickness of the target object is small compared to the wavelength of the acoustic wave, this cancelling effect will not occur and the AECM signals will have sufficiently high amplitude to achieve image reconstruction using successive transducer positions to scan the region of interest. By extracting from the spectra of the AECM signals the amplitude of the peak at the excitation frequency, a map of the acousto-electric sensitivity of the system can be obtained. This map is then used to reconstruct the electrical conductivity distribution.

The second model presented in the thesis uses a unipolar acoustic wave to generate AECM signals of relatively large amplitude. There are two aspects related to this type of wave. The first aspect is that the acoustic modulation is unidirectional if the applied pressure is unidirectional. As a result, a positive pressure only produces an increase in electrical conductivity and this will result in a large AECM signal even when the thickness of the object is large. The second aspect concerns the shape of the acoustic field. Since the unipolar acoustic wave is not focused, it modulates the conductivity over a large area, and thus the associated AECM signals needs to be processed through a reconstruction algorithm so as to recover local conductivity. In this model, the data required for image reconstruction are acquired by rotating the transducer around the target object.

An experimental setup has been developed during our project to get values of certain parameter that are required to define the numerical models. The setup comprises a large tank which is filled with water and in which are immersed the ultrasound transducer, a hydrophone and a measurement cell. The acousto-electric interaction takes place within this cell. A computer controlled positioning system allows precise displacements of the transducer relative to the hydrophone and the measurement cell. This cell comprises a cavity in which the object to be analyzed is placed and that is then filled with an electrolytic solution. The cavity is closed on two sides by an acoustic window to allow propagation of the ultrasound wave and on another side by six Ag/AgCl electrodes that are used to apply current and to measure the resulting electrical potential. A novel aspect of this cell design is the inclusion, within a watertight compartment, of the critical front-end circuits of the data acquisition chain. Placing these circuits close to the electrodes improves the system's signal-to-noise ratio since coupling of electromagnetic interference is minimal, compared to a more common setup where electrodes must be connected to the rest of the measurement chain by relatively long coaxial cables.

A simulation program has been developed to solve the forward and inverse problems. This program integrates several elements from the literature on meshless numerical techniques for

solving boundary-value problems. The forward and inverse problems require solving electrostatic problems and the computed potential fields are then used to obtain the acousto-electric sensitivity field of the configuration. The AECM signal is finally computed by integrating over the volume of interest the product of the acousto-electric sensitivity field and the pressure field. Image reconstruction is performed with a gradient-descent method.

Several problems of increasing complexity have been solved with the simulation program. The last problem described in the thesis represents what could be a first practical system for AECM imaging applied to breast cancer detection. The geometry for this problem is that of a 13.5 cm diameter hemispherical cavity encircling the breast with 9 recessed electrodes that are used to apply current and measure potential differences in a predefined sequence. This multi-electrode configuration allows optimizing the acousto-electric sensitivity field. Detection of objects representing inclusions in the breast has been tested with this numerical model and quantified by a set of criteria including the reconstructed conductivity of each object, the position of their center of gravity, the objects shape deformation and the amplitude of artefacts surrounding the objects.

Mammography is presently the most widely used medical imaging procedure for breast cancer screening. The average sensitivity of this technique is 80 % but it is less for younger women. According to recent studies, MRI offers a higher sensitivity and the possibility of detecting very small tumors, thus allowing earlier treatment. The operating costs of MRI systems are at the moment too high to consider using the modality for breast cancer screening on a large scale. AECM imaging could eventually provide an interesting compromise between operating costs and the sensitivity required for screening patients of all ages. To achieve this goal, significant progress will be needed in both the modeling of AECM image formation and in the instrumentation for acquiring data *in vivo*. We believe that the work described in this thesis contributes to attaining this objective.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iii

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT viii

TABLE DES MATIÈRES xi

LISTE DES TABLEAUX xv

LISTE DES FIGURES xvi

LISTE DES ANNEXES xxiii

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xxiv

CHAPITRE 1 INTRODUCTION 1
- 1.1 Objectifs de recherche 5
- 1.2 Contributions originales 6
- 1.3 Plan de la thèse 7

CHAPITRE 2 MODÉLISATION 8
- 2.1 Revue de littérature 8
  - 2.1.1 Interactions acousto-électriques concomitantes : modulation de conductivité et effet Debye 8
  - 2.1.2 Phénoménologie de la modulation acoustique de conductivité électrique 11
  - 2.1.3 Imagerie par modulation acoustique de conductivité électrique 15
- 2.2 Modèle pour onde bipolaire 19
  - 2.2.1 Problème direct 20
  - 2.2.2 Problème inverse 23
- 2.3 Modèle pour onde unipolaire 24
  - 2.3.1 Génération d'une onde acoustique unipolaire 24
  - 2.3.2 Problème direct 25
  - 2.3.3 Problème inverse 28

2.4 Comparaison et limitations des modèles présentés 30

CHAPITRE 3 EXPÉRIMENTATION 31
3.1 Montage réalisé 31
3.1.1 Cellule de mesure 31
3.1.2 Transducteur ultrasonore 35
3.1.3 Sources de courant 36
3.1.4 Amplificateur différentiel 37
3.1.5 Système de positionnement 38
3.2 Protocoles d'acquisition des données 38
3.3 Résultats expérimentaux 39
3.3.1 Forme des signaux obtenus, traitement du signal et observation de l'effet de Debye 40
3.3.2 Cavitation 40
3.3.3 Mesure de l'amplitude du signal de MACE en fonction de l'amplitude du courant injecté 43
3.3.4 Mesure de la sensibilité acousto-électrique de la cellule de mesure . . 44

CHAPITRE 4 MISE EN ŒUVRE DE LA MÉTHODE DE RÉSOLUTION NUMÉRIQUE 48
4.1 Avant-propos : note sur l'interpolation 48
4.2 Problème direct 50
4.2.1 Géométrie 50
4.2.2 Conditions aux frontières 54
4.2.3 Solution du problème électrostatique 55
4.2.4 Sensibilité acousto-électrique 56
4.2.5 Acoustique 56
4.2.6 Signal de modulation acoustique de conductivité électrique 58
4.3 Problème inverse 58
4.3.1 Méthode bipolaire 58
4.3.2 Méthode unipolaire 62
4.3.3 Reconstruction : résolution du système d'équations intégro-différentielles 63

CHAPITRE 5 ÉTUDE DE MODÉLISATION POUR UN OBJET MINCE 69
5.1 Problème : Application de la méthode basée sur le champ acoustique bipolaire 69
5.1.1 Commentaires généraux 69
5.1.2 Géométrie 69

5.1.3 Conditions frontières 69
5.1.4 Résolution des problèmes électrostatiques 71
5.1.5 Acoustique 79
5.1.6 Signaux de synthèse (solution du problème direct) 79
5.1.7 Reconstruction 85
5.1.8 Discussion des résultats de ce problème 93
5.2 Problème : Application de la méthode basée sur le champ acoustique unipolaire 94
5.2.1 Commentaires généraux 94
5.2.2 Acoustique 94
5.2.3 Signaux résultants (solution du problème direct) 95
5.2.4 Reconstruction 101
5.2.5 Discussion des résultats de ce problème 107

CHAPITRE 6 PROBLÈME : MULTI-ÉLECTRODES 108
6.1 Géométrie 108
6.2 Conditions frontières 108
6.3 Résolution des problèmes électrostatiques 109
6.4 Acoustique 116
6.5 Signaux résultants (solution du problème direct) 116
6.6 Reconstruction 120
6.7 Critères de détection 122
6.8 Discussion générale des résultats de ce problème 124

CHAPITRE 7 RÉSULTATS DE SIMULATION POUR DES OBJETS PROFONDS 133
7.1 Problème : Volume profond 133
7.1.1 Géométrie 133
7.1.2 Conditions frontières 133
7.1.3 Résolution des problèmes électrostatiques 133
7.1.4 Acoustique 137
7.1.5 Signaux résultants (solution du problème direct) 137
7.1.6 Reconstruction 140
7.1.7 Discussion générale des résultats de ce problème 147
7.2 Problème : Application au cancer du sein 147
7.2.1 Commentaires généraux 147
7.2.2 Définition du problème 147
7.2.3 Conditions frontières 147
7.2.4 Acoustique 148

7.2.5 Signaux résultants (solution du problème direct) 148
7.2.6 Reconstruction 152
7.2.7 Discussion générale des résultats de ce problème 153

CHAPITRE 8 CONCLUSION 158
8.1 Synthèse des travaux 158
8.2 Limitations de la solution proposée 160
8.3 Améliorations futures 161

RÉFÉRENCES 162

ANNEXES 168

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1 Séquence d'acquisition 39
Tableau 5.1 Définition des gaussiennes pour la distribution de conductivité électrique 70
Tableau 5.2 Définition des conditions frontières (situation I) 70
Tableau 5.3 Définition des conditions frontières (situation L) 70
Tableau 5.4 Équations à résoudre selon le domaine d'application (lieu du point associé à l'équation) 72
Tableau 5.5 Paramètres du transducteur acoustique pour la simulation 79
Tableau 5.6 Paramètres du transducteur acoustique pour la simulation de l'onde unipolaire 95
Tableau 6.1 Définition de la gaussienne pour la distribution de conductivité électrique 108
Tableau 6.2 Définition des conditions frontières (situation I) 110
Tableau 6.3 Définition des conditions frontières (situation L) 110
Tableau 7.1 Définition des inclusions pour la distribution de conductivité électrique 135
Tableau 7.2 Définition de la gaussienne pour la distribution de conductivité électrique 148
Tableau 7.3 Spécifications des paramètres de rotation pour les orientations acoustiques 149
Tableau 7.4 Quantification de la détection de l'objet 153
Tableau C.1 Valeurs des variables pour la simulation de l'effet de Debye 196

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 Illustration de la modulation de la conductivité électrique par une onde acoustique. 2
Figure 1.2 Illustration de la modulation de la conductivité électrique d'un objet mince par une ondelette acoustique focalisée. 3
Figure 1.3 Signal de MACE pour un échantillon profond. 4
Figure 1.4 Représentation en coordonnées polaires d'une distribution de pression acoustique unipolaire axisymétrique simulée. 5
Figure 2.1 Validation expérimentale : montage, cellule de mesure et signal mesuré. 10
Figure 2.2 Viscosité de l'eau en fonction de la pression pour différentes températures. 14
Figure 2.3 Schéma des interactions entre les principaux phénomènes à l'origine de la MACE. 14
Figure 2.4 Montage utilisé par Zhang et Wang (2004) pour cartographier la conductivité électrique d'un échantillon (schéma redessiné et traduit). 15
Figure 2.5 Illustration de la sensibilité acousto-électrique. 20
Figure 2.6 Positionnement du transducteur par rapport à l'objet mince à analyser dans la méthode pour onde bipolaire. 21
Figure 2.7 Exemple d'onde acoustique unipolaire. 25
Figure 2.8 Excitation pouvant produire une onde acoustique unipolaire. 26
Figure 2.9 Échantillonnage du signal de MACE produit par l'onde unipolaire en transition. 27
Figure 3.1 Schéma du montage expérimental réalisé. 32
Figure 3.2 Montage complet. 32
Figure 3.3 Cellule de mesure et transducteur ultrasonore. 33
Figure 3.4 Schéma de la cellule de mesure. 33
Figure 3.5 Photographie de la cellule de mesure assemblée. 34
Figure 3.6 Photographies du circuit imprimé des préamplificateurs et des sources de courant. 34
Figure 3.7 Photographie de la cellule de mesure avec un objet à analyser. 36
Figure 3.8 Signal de pression au foyer du transducteur et spectre de ce signal. . 37
Figure 3.9 Photographie du circuit imprimé de l'amplificateur isolé par un transformateur audio et de l'amplificateur différentiel. 38
Figure 3.10 Exemple de signaux obtenus à la sortie de l'amplificateur et du traitement pour séparer les contributions de la MACE et de l'effet de Debye. 41

Figure 3.11 Exemple de signal montrant la présence de cavitation 43
Figure 3.12 Somme des amplitudes des composantes des signaux de MACE entre 1,07 et 1,27 MHz en fonction de l'amplitude du courant injecté. . . . 45
Figure 3.13 Somme des amplitudes des composantes des signaux de MACE entre 1,00 et 1,18 MHz en fonction de la position d'excitation acoustique. . 46
Figure 3.14 Signal de MACE à la position du maximum d'amplitude. 47
Figure 4.1 Schéma bloc du problème direct. 51
Figure 4.2 Exemple d'une représentation de géométrie conçue sur Blender. . . . 53
Figure 4.3 Exemple d'une représentation de géométrie sur Matlab. 54
Figure 4.4 Schéma bloc du problème inverse de la méthode bipolaire. 59
Figure 4.5 Schéma bloc du problème inverse de la méthode unipolaire. 60
Figure 5.1 Définition de la géométrie du problème (partie électrique). 71
Figure 5.2 Illustration de la géométrie du problème (partie électrique). 72
Figure 5.3 Distribution de conductivité électrique. 73
Figure 5.4 Solution du problème électrostatique (situation I). 74
Figure 5.5 Solution du problème électrostatique (situation L). 75
Figure 5.6 Densité de courant du problème électrostatique près de l'électrode de mesure suiveuse (situation I). 76
Figure 5.7 Densité de courant du problème électrostatique près de l'électrode de mesure suiveuse (situation L). 77
Figure 5.8 Sensibilité du problème électrostatique. 78
Figure 5.9 Réponse électromécanique du transducteur. 80
Figure 5.10 Excitation électrique du transducteur. 81
Figure 5.11 Densité de force $f_s(t)$ du transducteur. 81
Figure 5.12 Enveloppe du champ acoustique du transducteur (tranche centrale). . 82
Figure 5.13 Positionnement du transducteur par rapport à la géométrie du problème électrique. 83
Figure 5.14 Signal de MACE pour la configuration de la figure 5.13. 84
Figure 5.15 Distribution de points de la grille d'acquisition. 84
Figure 5.16 Valeurs de sensibilité utilisées pour la reconstruction. 88
Figure 5.17 Valeurs de sensibilité pour la conductivité électrique exacte obtenues par la résolution du problème électrostatique sur la grille électrique grossière. 89
Figure 5.18 Valeurs de sensibilité reconstruites. 90
Figure 5.19 Valeurs de conductivité électrique reconstruites. 91
Figure 5.20 Distribution de conductivité électrique exacte. 92

Figure 5.21 Densité de force $f_s(t)$ du transducteur. 96
Figure 5.22 Enveloppe du champ acoustique du transducteur (tranche centrale). . 97
Figure 5.23 Positionnement du transducteur par rapport à la géométrie du problème électrique pour la première orientation. 98
Figure 5.24 Signal de MACE pour la configuration de la figure 5.23. 99
Figure 5.25 Représentation des 16 orientations du transducteur. 100
Figure 5.26 Signal de MACE obtenu avec les grilles du cas #2 pour la configuration de la figure 5.23. 102
Figure 5.27 Signal de MACE obtenu avec les grilles du cas #2 filtré par $\tilde{E}(t)$. . . 103
Figure 5.28 Vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE}$. 104
Figure 5.29 Différence absolue entre le vecteur $\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R1}$ exact et celui approximé. 105
Figure 5.30 Erreur entre le vecteur de données et celui obtenu par la reconstruction du cas #1. 105
Figure 5.31 Erreur entre le vecteur de données et celui obtenu par la reconstruction du cas #2. 105
Figure 5.32 Valeurs de conductivité électrique reconstruites. 106
Figure 6.1 Illustration de la géométrie du problème (partie électrique). 109
Figure 6.2 Distribution de conductivité électrique. 111
Figure 6.3 Solution du problème électrostatique (situation I) pour la configuration #1. 112
Figure 6.4 Solution du problème électrostatique (situation L) pour la configuration #1. 112
Figure 6.5 Densité de courant du problème électrostatique (situation I) pour la configuration #1. 113
Figure 6.6 Densité de courant du problème électrostatique (situation L) pour la configuration #1. 113
Figure 6.7 Observation de l'orientation relative des vecteurs de densité de courant. 114
Figure 6.8 Sensibilité acousto-électrique du problème électrostatique pour la configuration #1. 115
Figure 6.9 Représentation des 16 orientations du transducteur. 117
Figure 6.10 Vue du dessus des 16 orientations du transducteur. 118
Figure 6.11 Signaux de MACE pour la configuration électrique #1. 119
Figure 6.12 Distribution de points de la grille de reconstruction. 121
Figure 6.13 Vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$ pour les situations à 1 et à 4 configurations électriques (sans bruit ajouté). 122

Figure 6.14 Signal de MACE de l'orientation #2 en présence de bruit (RSB = 40 dB). 123
Figure 6.15 Reconstruction pour différents RSB. Une combinaison d'électrodes. . 126
Figure 6.16 Reconstruction pour différents RSB. Quatre combinaisons d'électrodes. 127
Figure 6.17 Reconstruction pour différents RSB (pixels de la distribution réduite affichés). Une combinaison d'électrodes. 128
Figure 6.18 Reconstruction pour différents RSB (pixels de la distribution réduite affichés). Quatre combinaisons d'électrodes. 129
Figure 6.19 Réponse en amplitude (RA) en fonction du RSB. 130
Figure 6.20 Erreur de position (EP) en fonction du RSB. 131
Figure 6.21 Résolution (RES) en fonction du RSB. 131
Figure 6.22 Déformation de l'objet (DO) en fonction du RSB. 132
Figure 6.23 Oscillations (OSC) en fonction du RSB. 132
Figure 7.1 Définition de la géométrie du problème (partie électrique). 134
Figure 7.2 Distribution de conductivité électrique (schématique). 134
Figure 7.3 Distribution de conductivité électrique (surfaces de niveau). 135
Figure 7.4 Solution du problème électrostatique (situation I). 136
Figure 7.5 Solution du problème électrostatique (situation L). 136
Figure 7.6 Représentation des 19 orientations du transducteur. 138
Figure 7.7 Signal de MACE pour l'orientation #2. 139
Figure 7.8 Distribution de points de la grille de reconstruction. 141
Figure 7.9 Vecteur $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx}$. 142
Figure 7.10 Distribution de conductivité électrique reconstruite. 142
Figure 7.11 Tranches de la distribution de conductivité électrique. 143
Figure 7.12 Disposition des tranches de la distribution de conductivité électrique. 144
Figure 7.13 Réponse en amplitude (RA) des inclusions. 144
Figure 7.14 Erreur de position (EP) des inclusions. 145
Figure 7.15 Résolution (RES) des inclusions. 145
Figure 7.16 Déformation des inclusions (DO). 146
Figure 7.17 Oscillations (OSC) des inclusions. 146
Figure 7.18 Illustration de la géométrie du problème (partie électrique). 148
Figure 7.19 Distribution de conductivité électrique. 149
Figure 7.20 Représentation des 28 orientations du transducteur. 150
Figure 7.21 Signal de MACE pour la configuration électrique #1 avec la première orientation acoustique. 151
Figure 7.22 Distribution de points de la grille de reconstruction. 153

Figure 7.23 Distribution de conductivité électrique reconstruite. 156
Figure 7.24 Distribution de conductivité électrique reconstruite (surfaces de niveau). 157
Figure B.1 Signal de pression mesuré par l'hydrophone. 188
Figure B.2 Représentation du transducteur et des variables géométriques. 189
Figure B.3 Courbes des réponses impulsionnelles h_a et h_a^Y. 191
Figure B.4 Courbe extraite représentant la densité de force $\tilde{f}_s(t)$ du transducteur. 193
Figure B.5 Signaux de pression mesurés à la position de l'hydrophone. 194
Figure B.6 Signal de pression au point ($\rho = 0$ m, $z = 0,1$ m). 195
Figure B.7 Signal de pression au point ($\rho = 0$ m, $z = 1,0$ m). 195
Figure C.1 Somme des amplitudes des composantes des signaux de Debye entre 1,00 et 1,18 MHz en fonction de la position d'excitation acoustique. . 199
Figure E.1 Distribution de points de la grille électrique. 203
Figure E.2 Distribution de conductivité électrique. 204
Figure E.3 Solution du problème électrostatique (situation I). 204
Figure E.4 Solution du problème électrostatique (situation L). 205
Figure E.5 Sensibilité du problème électrostatique. 205
Figure E.6 Distribution de points de la grille acoustique. 206
Figure E.7 Distribution de points de la grille d'intégration. 207
Figure E.8 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction des cas #3 et #4. 208
Figure E.9 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction du cas #4. 209
Figure E.10 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction du cas #4. 210
Figure E.11 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #1. 211
Figure E.12 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #2. 211
Figure E.13 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #3. 212
Figure E.14 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #4. 212
Figure E.15 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #1. 213
Figure E.16 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #2. 213
Figure E.17 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #3. 214
Figure E.18 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #4. 214

Figure E.19 Grille acoustique. 215
Figure E.20 Grille acoustique grossière pour la reconstruction du cas #2. 216
Figure E.21 Vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE}$. 217
Figure E.22 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #1. 218
Figure E.23 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #2. 218
Figure E.24 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #1. 219
Figure E.25 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #2. 219
Figure E.26 Distribution de points de la grille électrique. 220
Figure E.27 Distribution de conductivité électrique. 221
Figure E.28 Distribution de points de la grille acoustique. 222
Figure E.29 Distribution de points de la grille d'intégration. 223
Figure E.30 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction. 224
Figure E.31 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction. 225
Figure E.32 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction. 226
Figure E.33 Distribution de points de la grille électrique. 227
Figure E.34 Distribution de points de la grille acoustique. 228
Figure E.35 Distribution de points de la grille d'intégration. 229
Figure E.36 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction. 230
Figure E.37 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction. 231
Figure E.38 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction. 232
Figure E.39 Distribution de points de la grille électrique. 233
Figure E.40 Distribution de points de la grille acoustique. 234
Figure E.41 Distribution de points de la grille d'intégration. 235
Figure E.42 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction. 236
Figure E.43 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction. 237

Figure E.44 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction. 238

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	Aspects numériques tirés de la littérature	168
Annexe B	Méthode d'extraction du signal de densité de force d'un transducteur à partir d'un signal de pression mesuré près de la surface	187
Annexe C	Modèle de formation des signaux de Debye	196
Annexe D	Variation de la tension produite par une variation de conductivité électrique	200
Annexe E	Figures supplémentaires	203

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

A	Amplitude d'une distribution
A_0	Nombre de pixels de l'image
A_q	Nombre de pixels d'une distribution de conductivité électrique réduite
AIT	Amplificateur isolé par un transformateur audio
a	Fonction d'excitation du transducteur
a	Fonction d'agrandissement
a	Rayon du transducteur
α	Coefficient de dissociation
α	Paramètre de la méthode de gradients conjugués
$\boldsymbol{b}$	Vecteur de termes sources, de conditions de Dirichlet et de Neumann
$\boldsymbol{b}$	Variable intermédiaire des méthodes de descente de gradient
$\boldsymbol{b}^I$	Vecteur $\boldsymbol{b}$ pour la situation I
$\hat{b}$	Forme du champ acoustique
$\hat{b}^{transverse}$	Section transverse du champ acoustique au foyer
β_S	Compressibilité adiabatique
C	Concentration volumique
C	Disque pour les critères de détection
C	Élément de la matrice de covariance $\mathbf{C}$
CC	Courant continu
CM	Centre de masse
$\mathbf{C_D}$	Matrice de covariance des données objectives
$\mathbf{C_T}$	Matrice de covariance de la représentation théorique du modèle
$\mathbf{C_d}$	Matrice de covariance des données observées
$\mathbf{C_m}$	Matrice de covariance des variables du modèle
c	Coefficient de correction
$\boldsymbol{c}$	Vecteur de coefficients de correction
$\bar{\boldsymbol{c}}$	Vecteur réduit de coefficients de correction
c	Célérité de l'onde acoustique
$\mathscr{C}$	Fonction de correction
DO	Déformation de l'objet
Δ	Déphasage
$\Delta\mathbf{K}$	Matrice de variation de $\mathbf{K}$

ΔS	Aire d'un triangle composant la triangulation de surface d'une électrode
ΔV_I	Taille de la région associée au point I
$\delta\varphi^I$	Variation de potentiel électrique φ^I
$\delta\varphi^L$	Variation de potentiel électrique φ^L
δP	Pression acoustique
$\delta\sigma$	Perturbation de conductivité électrique
δT	Variation de température
$\delta\tau$	Épaisseur d'une tranche du volume d'intégration
δV	Variation de tension mesurée
d	Distance entre les points de grille
d_1, d_2	Coordonnées selon une direction donnée
$\boldsymbol{d}$	Vecteur des données exactes
$\boldsymbol{d}_{obs}$	Vecteur des données observées
ddp	Différence de potentiel
E	Excitation électrique du transducteur
$\tilde{E}$	Signal de filtrage
EP	Erreur de position
ϵ	Constante diélectrique du solvant
η	Viscosité
η_S	Viscosité de l'eau
η	Écart-type d'une distribution
F	Constante de Faraday
f	Terme source de l'équation différentielle
f_s	Densité de force
$\tilde{f}_s$	Densité de force extraite
f_{seuil}	Fraction de l'amplitude déterminant le seuil pour les distributions réduites
f_+, f_-	Coefficient de friction du cation et de l'anion, respectivement
$\boldsymbol{\phi}$	Direction de plus forte ascension pour un sous-espace donné
φ	Fonction noyau
φ	Potentiel électrique
φ^I	Potentiel électrique produit par l'injection du courant par la paire d'électrodes de courant
$\boldsymbol{\varphi}^I$	Vecteur de φ^I
$\hat{\varphi}^I$	Poids nodal de φ^I

$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I$	Vecteur de $\hat{\varphi}^I$
φ^I_{mes}	Potentiel électrique produit par l'injection du courant par la paire d'électrodes de courant obtenu sur σ_{mes}
φ^I_{ref}	Potentiel électrique produit par l'injection du courant par la paire d'électrodes de courant obtenu sur σ_{ref}
φ^L	Potentiel électrique produit par l'injection du courant par la paire d'électrodes de mesure
$\boldsymbol{\varphi}^L$	Vecteur de φ^L
$\hat{\varphi}^L$	Poids nodal de φ^L
$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L$	Vecteur de $\hat{\varphi}^L$
φ^L_{mes}	Potentiel électrique produit par l'injection du courant par la paire d'électrodes de mesure obtenu sur σ_{mes}
φ^L_{ref}	Potentiel électrique produit par l'injection du courant par la paire d'électrodes de mesure obtenu sur σ_{ref}
G	Élément de $\mathbf{G}$
$\mathbf{G}$	Matrice des dérivées des équations du modèle par rapport aux variables du modèle
$G0$	Grille de points où les valeurs sont connues
$G1$	Grille de points où les valeurs sont souhaitées
$GACQ$	Grille d'acquisition
$GINT$	Grille d'intégration
$GINT_{inv}$	Grille d'intégration du problème inverse
GJ	Grille électrique
GJ_{inv}	Grille électrique du problème inverse
GR	Grille de reconstruction
GUS	Grille acoustique
GUS_{inv}	Grille acoustique du problème inverse
GPIB	*General Purpose Interface Bus*
Γ	Surface du volume conducteur
Γ_{el}	Frontière des électrodes
Γ^{Δ}_{el}	Triangulation de surface d'une électrode
Γ_g	Frontière du volume conducteur où une condition de Dirichlet est appliquée
Γ_h	Frontière du volume conducteur où une condition de Neumann est appliquée
Γ_{isol}	Frontière isolée

Γ_{mi}	Frontière de l'électrode de mesure inverseuse
Γ_{ms}	Frontière de l'électrode de mesure suiveuse
Γ_p	Frontière de l'électrode puits
Γ_s	Frontière de l'électrode source
Γ_0 à Γ_7	Frontière des électrodes #0 à #7
g	Condition de Dirichlet
g	Relation non linéaire théorique
$\boldsymbol{g}$	Ensemble des relations non linéaires théoriques
$\boldsymbol{\gamma}$	Direction de plus forte ascension
$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$	Gradient de la fonctionnelle
$\mathbf{H}$	Opérateur de courbure
$\hat{\mathbf{H}}$	Matrice hessienne
H_P	Coefficient de variation de viscosité avec la pression
h	Condition de Neumann
h_0	Hauteur du transducteur
h_a	Pression acoustique spatio-temporelle produite par une impulsion de densité de force du transducteur
h_a^Y	Pression acoustique spatio-temporelle produite par une impulsion de densité de force du transducteur et incluant la sensibilité angulaire de l'hydrophone
I	Valeur de l'intégration du champ acoustique sur une région
I^t	Valeur de l'intégration du champ acoustique sur la région transversale totale
I^f	Valeur de l'intégration du champ acoustique sur la région transversale limitée à la zone focale
I	Courant
I	Situation où le courant est injecté par la paire d'électrodes de courant
I^I	Courant injecté par la paire d'électrodes de courant
I^L	Courant injecté par la paire d'électrodes de mesure
I_{el}	Courant total passant par une électrode
I_{el}^I	Courant total passant par une électrode en situation I
I_{el}^L	Courant total passant par une électrode en situation L
IAE	Interaction acousto-électrique
IRM	Imagerie par résonance magnétique
i	Nombre imaginaire $\sqrt{-1}$
$\boldsymbol{J}$	Densité de courant

$\boldsymbol{J}^I$	Densité de courant produite par l'injection du courant par la paire d'électrodes de courant
$\boldsymbol{J}^L$	Densité de courant produite par l'injection du courant par la paire d'électrodes de mesure
$\boldsymbol{J}^{US}$	Densité de courant produite par l'onde ultrasonore
K	Élément de $\mathbf{K}$
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité
K_f	Facteur d'amplitude de pression
K_I	Coefficient d'interaction entre la pression et la conductivité électrique
$K_{I,mes}$	Coefficient d'interaction entre la pression et la conductivité électrique σ_{mes}
$K_{I,ref}$	Coefficient d'interaction entre la pression et la conductivité électrique σ_{ref}
$k_\pm$	Activité ionique moyenne
L	Situation où le courant est injecté par la paire d'électrodes de mesure
Λ_g	Frontière des points de potentiel électrique fixé
$\boldsymbol{\lambda}$	Direction de plus forte ascension
λ	Longueur du volume conducteur
λ	Facteur de dilatation
$\mathscr{L}$	Opérateur différentiel de l'équation différentielle
M	Élément de $\mathbf{M}$
$\mathbf{M}$	Matrice des moments
$\bar{\mathbf{M}}$	Matrice réduite des moments
M^S	Élément de $\mathbf{M}^S$
$\mathbf{M}^S$	Matrice des moments incluant la translation des fonctions de base
MACE	Modulation acoustique de conductivité électrique
MCE	Modulation de conductivité électrique
m	Nombre de fonctions de la base
m_T	Coefficient thermique de mobilité ionique
m_{T+}, m_{T-}	Coefficient thermique de mobilité ionique du cation et de l'anion, respectivement
m_+, m_-	Masse du cation et de l'anion, respectivement
μ	Paramètre des méthodes de descente de gradient
m	Variable du modèle
$\boldsymbol{m}$	Vecteur des variables du modèle
$\boldsymbol{m}_0$	Vecteur des valeurs initiales des variables du modèle

$\boldsymbol{m}_{prior}$	Vecteur des valeurs *a priori* des variables du modèle
$\boldsymbol{m}_{ML}$	Point de maximum de vraisemblance
N	Fonction d'interpolation
N	Nombre de particules
N	Nombre d'acquisitions
$\boldsymbol{N}$	Vecteur de la matrice d'interpolation $\mathbf{N}$
$\mathbf{N}$	Matrice d'interpolation
N_d	Nombre de points soumis à une condition de Dirichlet
N_{el}	Nombre d'électrodes
N_n	Nombre de points soumis à une condition de Neumann
N_r	Nombre de points à l'intérieur du domaine
N^S	Fonction d'interpolation incluant la translation des fonctions de base
N^θ	Nombre d'orientations du transducteur
N^t	Nombre d'échantillons temporels tirés d'une acquisition
N^t	Nombre d'instants de calcul du champ acoustique
NP	Nombre de points de grille
NP_{el}	Nombre de points de grille sur une électrode
NP_{G0}	Nombre de points de la grille $G0$
NP_{G1}	Nombre de points de la grille $G1$
NP_{GJ}	Nombre de points de la grille GJ
NP_{GR}	Nombre de points de la grille GR
NP_{GUS}	Nombre de points de la grille GUS
$\boldsymbol{n}$	Vecteur normal à la surface
ν	Sensibilité acousto-électrique
ν_{mes}	Sensibilité acousto-électrique obtenue sur σ_{mes}
ν_{ref}	Sensibilité acousto-électrique obtenue sur σ_{ref}
ν^{xy}	Distribution selon le plan xy de la sensibilité acousto-électrique
ν^{xy}_{mes}	Distribution de ν^{xy} obtenue sur σ_{mes}
ν^{xy}_{ref}	Distribution de ν^{xy} obtenue sur σ_{ref}
ν^{z}	Distribution selon la direction z de la sensibilité acousto-électrique
ν^{z}_{mes}	Distribution de ν^{z} obtenue sur σ_{mes}
ν^{z}_{ref}	Distribution de ν^{z} obtenue sur σ_{ref}
OSC	Oscillations
Ω	Domaine du volume conducteur
ω	Fréquence angulaire
P	Pression

P_0	Amplitude du champ acoustique
P^Y	Pression acoustique mesurée par l'hydrophone
$\tilde{P}^Y$	Pression acoustique qui serait mesurée par l'hydrophone pour une densité de force $\tilde{f}_s$
PCB	*Printed Circuit Board* (carte de circuit imprimé)
p	Fonction de la base
$\boldsymbol{p}$	Base de fonctions
$\bar{\boldsymbol{p}}$	Base réduite de fonctions
R	Distance focale du transducteur
R	Rayon d'une inclusion
$R0$	Représentation expérimentale du problème
$R1$	Représentation de reconstruction du problème
R_{EM}	Réponse électromécanique du transducteur
RA	Réponse en amplitude
RES	Résolution
RF	Radiofréquence
RMS	*Root-Mean-Square* (valeur efficace)
RSB	Rapport signal sur bruit
r	Distance entre le point d'observation et le point source du transducteur
r_z	Distance entre le point d'observation et le point source du transducteur projeté sur l'axe de symétrie
$\boldsymbol{r}$	Vecteur position
$\boldsymbol{r}_b$	Vecteur de translation du champ acoustique
$\boldsymbol{r}_\Omega$	Vecteur position du référentiel électrique
ρ	Distance d'un point avec l'axe de symétrie radiale du transducteur
ρ	Coefficient de corrélation
ρ_0	Résistivité électrique initiale
$\rho_{solvant}$	Densité volumique du solvant
S	Fonctionnelle (« fonction de coût »)
$\hat{\mathbf{S}}$	Opérateur de préconditionnement
S^f	Région d'intégration transversale limitée à la zone focale
S^t	Région d'intégration transversale totale
$S_{transducteur}$	Aire de la surface du transducteur
SCCT	Source de courant contrôlée par une tension
σ	Écart-type de la variable de modèle

σ	Conductivité électrique
$\boldsymbol{\sigma}$	Vecteur de σ
$\bar{\sigma}$	Paramètre de conductivité électrique pour la reconstruction
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Vecteur de $\bar{\sigma}$
$\hat{\sigma}$	Poids nodal de σ
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Vecteur de $\hat{\sigma}$
σ_0	Conductivité électrique initiale
σ_0, σ_{mes}	Conductivité électrique à mesurer
σ_1, σ_{ref}	Conductivité électrique de référence
σ_b	Conductivité électrique de fond
σ_e, σ_{exact}	Distribution de la conductivité électrique exacte
$\boldsymbol{\sigma}_e$	Vecteur des valeurs de la distribution de conductivité électrique exacte
$\sigma_r, \sigma_{reconstruit}$	Conductivité électrique reconstruite
$\boldsymbol{\sigma}_r$	Vecteur des valeurs de la distribution de conductivité électrique reconstruite
$\boldsymbol{\sigma}_{\bar{e}}$	Vecteur des valeurs de la distribution de conductivité électrique exacte réduite
$\sigma_{\bar{r}}$	Conductivité électrique reconstruite réduite
$\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}}$	Vecteur des valeurs de la distribution de conductivité électrique reconstruite réduite
σ_{gauss}	Conductivité électrique ajoutée par une distribution gaussienne
$\sigma_{inclusion}$	Conductivité électrique ajoutée par une inclusion
$\sigma_{\boldsymbol{m}}$	Densité de probabilité représentant l'information des variables du modèle
T	Température
T	Délai entre deux impulsions de pression produites par un transducteur excité avec une impulsion électrique
TIE	Tomographie d'impédance électrique
Θ	Taux d'augmentation de la température avec la pression
θ	Angle d'incidence d'une onde sphérique élémentaire sur la membrane de l'hydrophone
θ	Orientation du transducteur
θ_1 à θ_3	Paramètres de rotation pour les orientations acoustiques
t	Temps
t	Triangles composant la triangulation de surface d'une électrode
t_0	Limite inférieure de la fenêtre temporelle d'analyse

t_f	Limite supérieure de la fenêtre temporelle d'analyse
τ	Épaisseur du volume d'intégration
u	Mobilité ionique
u_+, u_-	Mobilité du cation et de l'anion, respectivement
u	Fonction approximée
$\hat{u}$	Fonction exacte
$\hat{\boldsymbol{u}}$	Vecteur de poids nodaux
$\boldsymbol{u}_{G0}$	Vecteur des valeurs sur la grille $G0$
$\boldsymbol{u}_{G1}$	Vecteur des valeurs sur la grille $G1$
V	Volume
V	Valeur du potentiel électrique fixé
V	Différence de potentiel (tension) électrique
V_0	Tension mesurée sans perturbation acoustique
V^{Debye}	Signal de Debye
$\tilde{V}^{Debye}$	Transformée du signal V^{Debye}
V^{MACE}	Signal de modulation acoustique de conductivité électrique
V^{MACE}_{mes}	Signal de modulation acoustique de conductivité électrique obtenu sur σ_{mes}
V^{MACE}_{ref}	Signal de modulation acoustique de conductivité électrique obtenu sur σ_{ref}
$\boldsymbol{V}^{MACE}$	Vecteur d'échantillons des signaux de MACE
$\tilde{V}^{MACE}$	Transformée du signal V^{MACE}
$\tilde{V}^{MACE}_{mes}$	Transformée du signal V^{MACE}_{mes}
$\tilde{V}^{MACE}_{ref}$	Transformée du signal V^{MACE}_{ref}
$V^{MACE}_{\sigma_0,R0}$	Signal de MACE obtenu sur σ_0 dans la représentation $R0$
$V^{MACE}_{\sigma_0,R1}$	Signal de MACE obtenu sur σ_0 dans la représentation $R1$
$V^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$	Signal de MACE approximé sur σ_0 dans la représentation $R1$
$V^{MACE,exact}_{\sigma_0,R1}$	Signal de MACE obtenu sur σ_0 dans la représentation $R1$
$V^{MACE}_{\sigma_1,R0}, V^{MACE}_{\sigma_{ref},R0}$	Signal de MACE obtenu sur σ_1 dans la représentation $R0$
$V^{MACE}_{\sigma_1,R1}, V^{MACE}_{\sigma_{ref},R1}$	Signal de MACE obtenu sur σ_1 dans la représentation $R1$
$\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R0}$	Vecteur d'échantillons des signaux $V^{MACE}_{\sigma_0,R0}$
$\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R1}$	Vecteur d'échantillons des signaux $V^{MACE}_{\sigma_0,R1}$
$\boldsymbol{V}^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$	Vecteur d'échantillons des signaux $V^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$
$\boldsymbol{V}^{MACE,exact}_{\sigma_0,R1}$	Vecteur d'échantillons des signaux $V^{MACE,exact}_{\sigma_0,R1}$
$\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_1,R0}, \boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_{ref},R0}$	Vecteur d'échantillons des signaux $V^{MACE}_{\sigma_1,R0}, V^{MACE}_{\sigma_{ref},R0}$
$\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_1,R1}, \boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_{ref},R1}$	Vecteur d'échantillons des signaux $V^{MACE}_{\sigma_1,R1}, V^{MACE}_{\sigma_{ref},R1}$

V_{bruit}^{RMS}	Valeur efficace du bruit
$\boldsymbol{V}_{bruit,\sigma_0,R0}^{RMS}$	Vecteur de V_{bruit}^{RMS} sur les signaux de $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R0}^{MACE}$
$\boldsymbol{V}_{bruit,\sigma_1,R0}^{RMS}$	Vecteur de V_{bruit}^{RMS} sur les signaux de $\boldsymbol{V}_{\sigma_1,R0}^{MACE}$
V_{signal}	Signal échantillonné
V_{signal}^{RMS}	Valeur efficace du signal
v_+, v_-	Valence du cation et de l'anion, respectivement
w	Fonction de forme du noyau
$\boldsymbol{x}$	Vecteur des coordonnées x des pixels de l'image
$\boldsymbol{x}$	Vecteur position
$\boldsymbol{x}_{foyer}$	Vecteur position du foyer du transducteur
$\boldsymbol{x}_H$	Vecteur position de l'hydrophone
Y	Fonction de sensibilité angulaire de l'hydrophone
$\boldsymbol{y}$	Vecteur des coordonnées y des pixels de l'image
z_+, z_-	Nombre de charges du cation et de l'anion, respectivement

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Le cancer du sein est, à l'heure actuelle, le type de cancer le plus fréquent chez les femmes [1] et le second type de cancer le plus mortel pour les femmes au Canada (Comité directeur de la Société canadienne du cancer, 2011). Il atteint environ une femme sur neuf et est la cause de décès d'environ une femme sur 29. Ainsi, chaque année dans ce pays, environ 23 000 nouveaux cas sont diagnostiqués et 5100 décès sont associés à cette maladie. Il est reconnu qu'un dépistage précoce de cette maladie et des traitements médicaux adaptés permettent d'améliorer les chances de survie.

La mammographie est la modalité d'imagerie médicale la plus couramment utilisée pour le dépistage des tumeurs mammaires malignes. La sensibilité de cette modalité, soit la proportion de cancers détectés à partir des mammogrammes lorsqu'il y a tumeurs dans le tissu (National Cancer Institute, 2012), est globalement d'environ 80 % et est plus faible chez les femmes jeunes où les tissus sont plus denses. Cela tient au fait qu'hormis les microcalcifications qui peuvent les accompagner, les tumeurs du sein présentent un faible contraste radiologique, et leur détection précoce est alors d'autant plus difficile qu'à ce stade leur taille est petite. On reproche souvent à la mammographie d'utiliser un rayonnement ionisant, contribuant ainsi à élever le risque de développement du cancer que l'on cherche à détecter. On reconnait toutefois que, chez les femmes de plus de 40 ans, l'accroissement du risque est largement compensé par les avantages du dépistage. Cela étant, il demeure qu'il y a toujours un intérêt pour viser à remplacer la mammographie par des modalités d'imagerie non ionisantes, principalement l'ultrasonographie, et l'imagerie par résonance magnétique (IRM). Pour l'instant, ces modalités servent surtout à la compléter (Lee *et al.*, 2010) pour obtenir un meilleur diagnostic. En effet, même à plus de 80 % de sensibilité globale, les tumeurs qui échappent au diagnostic précoce sur examen des mammogrammes sont encore trop nombreuses ; pour les cas difficiles ou douteux, on fait alors appel à l'utilisation de méthodes adjuvantes pour poursuivre l'examen. À cet égard, l'ultrasonographie est en effet particulièrement utile chez les sujets ayant des tissus denses, où la sensibilité de la mammographie est moindre ; elle est aussi utile pour guider les biopsies à partir desquelles sera posé le diagnostic final de la pathologie. Pour ce qui est de l'IRM, bien que de récentes études de Kuhl *et al.* (2010) avancent qu'elle serait supérieure à la mammographie pour son rendement diagnostic

1. Ceci exclut la catégorie « cancer de la peau autre que le mélanome ». Les cancers de cette catégorie sont directement responsables de très peu de décès.

(un terme lié à la sensibilité), on ne peut envisager son utilisation à grande échelle pour le dépistage pour des raisons d'accessibilité et de coûts.

Parmi les nouvelles techniques non invasives qui ont été suggérées pour l'imagerie du cancer du sein figure la cartographie de la conductivité électrique (Holder, 2005) ; le cancer peut y être révélé du fait que la conductivité électrique d'une tumeur maligne est significativement plus élevée que celle des autres tissus mammaires (Jossinet, 1996; Surowiec *et al.*, 1988). Cette cartographie peut être présentement obtenue par une modalité d'imagerie appelée tomographie d'impédance électrique (TIE). La TIE utilise les signaux de tension captés autour de l'organe en réponse à l'application d'un courant. Cette modalité possède une résolution [2] qui permet difficilement de détecter les tumeurs à un stade précoce.

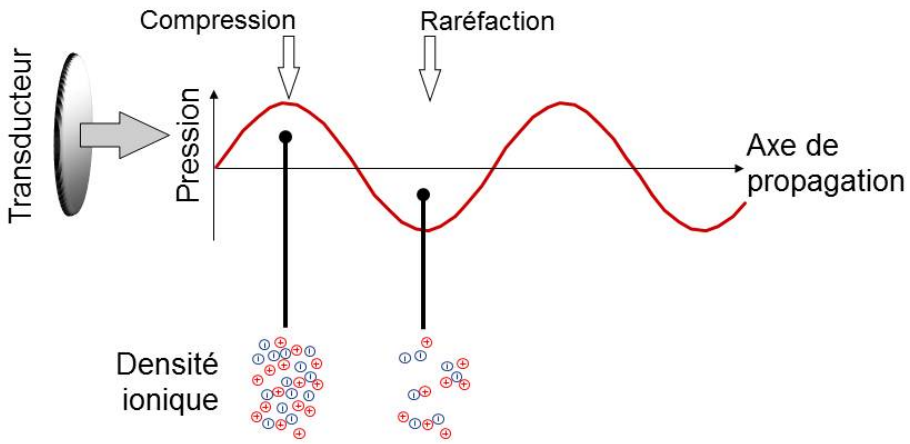

Figure 1.1 Illustration de la modulation de la conductivité électrique par une onde acoustique. La conductivité augmente durant la phase de compression en raison de l'augmentation de la densité ionique.

Récemment, Zhang et Wang (2004) ont proposé une nouvelle méthode d'imagerie de conductivité électrique ayant le potentiel d'offrir une résolution supérieure à celle de la TIE. Cette méthode repose sur un effet qu'exerce une onde acoustique se propageant dans une solution ionique. Cet effet est illustré ci-dessus à la figure 1.1 pour une onde de compression du type produit par un transducteur ultrasonore. Compte tenu de la compressibilité de la solution, l'onde fera augmenter la densité ionique durant sa phase de compression et, inversement, la fera réduire durant la phase de raréfaction, modulant ainsi la conductivité électrique [3] de la solution à la fréquence de l'onde. On peut observer cette modulation en injectant un courant dans la solution, puis en enregistrant les variations de potentiels associés (voir figure 1.2).

2. En TIE, avec un ensemble de 16 électrodes, la résolution est de l'ordre de 10 % de la taille de l'organe imagé, soit environ 1,5 cm pour un sein de 15 cm.

3. La pression acoustique module aussi la conductivité électrique par d'autres mécanismes que celui lié à la densité ionique. Ceux-ci seront présentés à la section 2.1.1.

L'amplitude de ces variations enregistrées est proportionnelle à l'inverse de la conductivité. Puisqu'elles ne proviennent que de la région insonifiée, on sera en mesure de cartographier la conductivité en déplaçant le transducteur dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, de manière à balayer tout le tissu. La résolution du système d'imagerie sera d'autant meilleure que l'onde ultrasonore pourra être focalisée, et donc confinée à une région de petite taille, qui sera typiquement de l'ordre du millimètre.

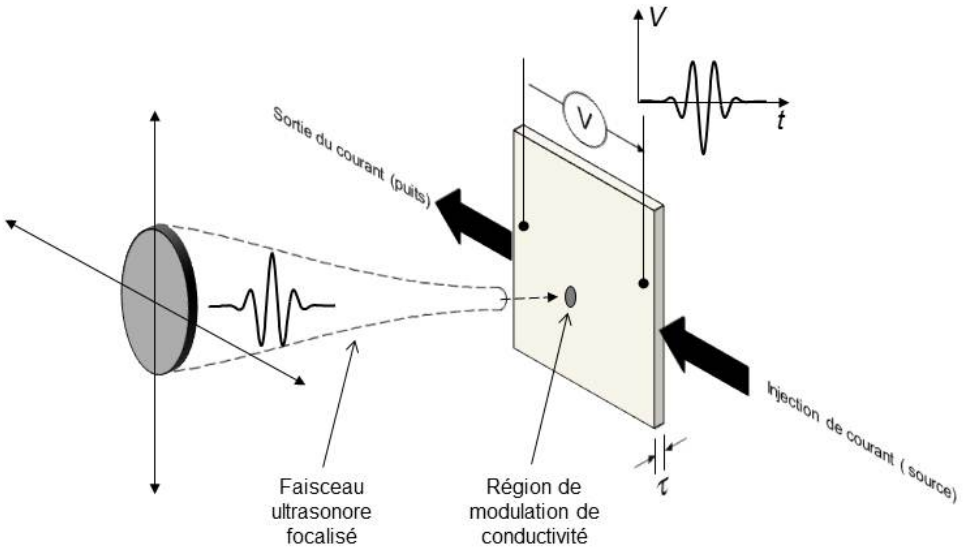

Figure 1.2 Illustration de la modulation de la conductivité électrique d'un objet mince par une ondelette acoustique focalisée. Seule une petite région subit l'effet de modulation. Grâce au passage d'un courant entre une électrode source et une électrode puits, la région de conductivité modulée est à l'origine d'une différence de potentiel V, qui varie à la fréquence du signal acoustique et dont l'amplitude de l'enveloppe est proportionnelle au courant injecté et à l'amplitude de l'ondelette. La phase est toutefois inversée.

Ce principe d'imagerie ne peut toutefois s'appliquer qu'à des structures minces, d'épaisseurs plus faibles que la demi-longueur d'onde acoustique. Au-delà de cette épaisseur, la variation nette de conductivité diminuera, au point même de devenir nulle pour une épaisseur d'une longueur d'onde, l'effet d'un demi-cycle du signal de pression annulant celui du demi-cycle précédent.

La figure 1.3 illustre la formation du signal de MACE au moment où l'onde acoustique traverse une région de conductivité uniforme, le courant étant injecté comme à la figure 1.2. Dans le premier cas, la région est balayée par une ondelette acoustique de moyenne nulle (onde bipolaire), dans le deuxième par une onde unipolaire. Comme le montre cette figure (partie (b)), l'onde bipolaire produit un signal de MACE nul pour toute la région insonifiée, sauf aux interfaces d'entrée et de sortie. Ceci peut être vu comme le résultat d'un filtrage passe-bande de la distribution de conductivité qui, dans ce cas-ci, se présente comme un

créneau. Comme le montre la figure 1.3c, l'onde unipolaire est pour sa part associée à un filtrage passe-bas et permet de produire un signal non nul dans la région insonifiée. Une telle onde serait ici mieux adaptée pour obtenir un signal de MACE reflétant plus fidèlement la distribution de conductivité.

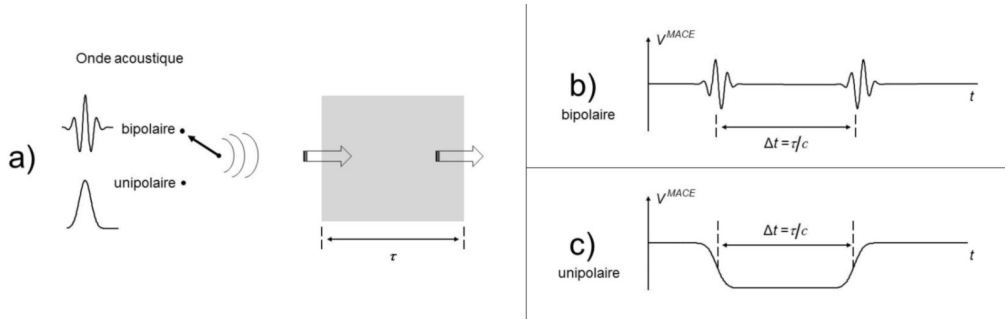

Figure 1.3 Signal de MACE pour un échantillon profond. L'échantillon d'épaisseur τ est disposé comme à la figure 1.2, mais est de plus grande épaisseur. (a) L'échantillon est homogène et on suppose, pour simplifier, que la densité de courant injectée est uniforme. L'onde acoustique est soit bipolaire, soit unipolaire, et se propage à la vitesse c. (b) Réponse pour une onde bipolaire : le signal V^{MACE} est nul pour tout le temps où l'onde acoustique traverse l'échantillon, à l'exception seulement de transitoires à l'entrée et à la sortie de celui-ci. (c) Réponse pour une onde unipolaire : le signal V^{MACE} est non nul pour tout l'échantillon.

Dans un travail de modélisation, Yang *et al.* (2011) ont ainsi proposé d'utiliser un tel signal unipolaire pour produire des signaux de MACE destinés à faire l'imagerie 3D à haute résolution (de l'ordre du mm) de propriétés électriques de tissus [4]. Pour ce faire, ils définissent un champ acoustique confiné à une petite région, tant en direction latérale (comme à la figure 1.2) que dans la direction axiale de propagation. La figure 1.4, que nous avons obtenue par simulation de la réponse d'un transducteur, illustre la difficulté que pose la mise en œuvre de leur approche. Alors qu'effectivement la focalisation permet, dans cet exemple, d'obtenir une zone d'environ 1 mm $\times$ 4 mm où l'amplitude de la pression est très élevée, il est clair que le champ de pression couvre une région beaucoup plus grande que cette zone focale. Il s'ensuit que le signal de MACE enregistré par les électrodes de mesure contiendra, en plus des effets acousto-électriques désirés de la zone focale, ceux d'une multitude de points de régions distales. Ce qui est plus étonnant, c'est que, dans cet exemple, la contribution des régions distales au signal de MACE se trouve à être beaucoup plus importante que celle de la région focale. En effet, dans un cas où les électrodes seraient situées loin de la région d'interaction acousto-électrique, la région focale ne contribuerait que pour 0,04 % de tout le signal de tension produit [5]. En somme, pour l'imagerie de conductivité 3D utilisant un

4. Ces auteurs ont étudié un problème de reconstruction de densité de courant par interaction acousto-électrique.

5. On calcule ceci en faisant l'intégrale volumique de la pression acoustique pour la région focale définie

champ unipolaire focalisé, il faut réaliser que le signal de MACE intègre la réponse acousto-électrique d'une région beaucoup plus grande que la zone focale, et ne reflète pas seulement une propriété locale au foyer. En termes d'un modèle de formation du signal de MACE, on devrait donc considérer que ce signal est produit par une projection en un point temporel de valeurs pondérées de la conductivité, l'axe temporel correspondant à celui de la propagation de l'onde acoustique. À cause de cela, nous estimons que des méthodes dites de reconstruction (au sens de reconstructions tomographiques), ou encore plus généralement de résolution de problèmes inverses, s'imposent pour l'imagerie de MACE de structures profondes. Le développement d'une telle méthode de reconstruction pour l'imagerie de conductivité du sein constitue l'objectif principal de cette thèse.

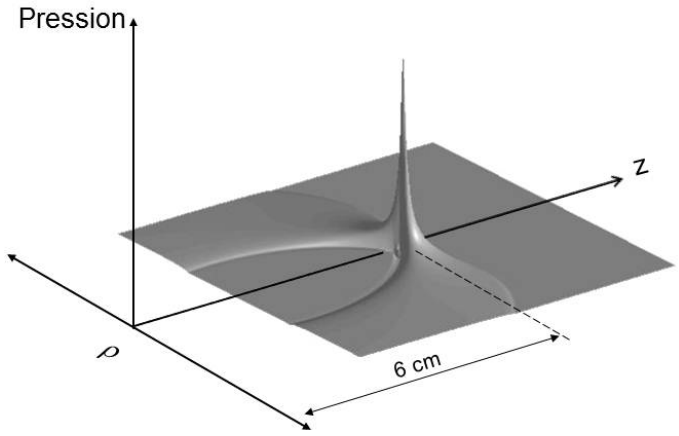

Figure 1.4 Représentation en coordonnées polaires d'une distribution de pression acoustique unipolaire axisymétrique simulée. On simule un transducteur circulaire de 6,4 cm de diamètre focalisé à environ 6 cm. La taille au foyer de la région à mi-intensité est d'environ 1×4 mm^2 en direction de propagation (z) et en direction radiale (ρ), respectivement. La distribution en 3D est obtenue par rotation de la distribution polaire autour de l'axe z.

1.1 Objectifs de recherche

L'objectif principal de ce projet est de contribuer au développement d'une nouvelle modalité d'imagerie de la conductivité destinée au diagnostic du cancer du sein et utilisant un effet de modulation de conductivité par une onde acoustique. Cette modalité est donc de nature multiphysique, faisant appel à des notions du domaine de l'électromagnétisme et du domaine de l'acoustique, et pourrait être utilisée comme méthode adjuvante à la mammographie. Plus spécifiquement, il s'agit :

au-dessus de la pression crête à mi-hauteur par rapport à l'intégrale sur tout le volume.

1. de développer les modèles mathématiques décrivant les effets de la modulation acoustique de conductivité électrique en vue de leur application à la formation de l'image de conductivité ;
2. d'obtenir les données expérimentales requises pour la mise en œuvre numérique des modèles mathématiques ;
3. de résoudre le problème direct de formation de signaux acousto-électriques pour des structures minces (problème quasi 2D) et profondes en vue d'obtenir des signaux de synthèse ;
4. de valider expérimentalement la résolution du problème direct d'imagerie par modulation acoustique de conductivité électrique ;
5. de résoudre le problème inverse de conductivité électrique utilisant les signaux de synthèse.

1.2 Contributions originales

Cette thèse contribue à l'avancement de l'imagerie de la conductivité électrique par modulation acoustique de conductivité électrique, en particulier pour une application éventuelle au diagnostic du cancer du sein.

La principale contribution de la thèse est le développement d'un modèle et d'une méthode originale pour déterminer la conductivité électrique 3D d'un tissu de la taille du décimètre en utilisant une interaction acousto-électrique qui la module. À notre connaissance, il s'agit à ce jour du seul modèle et de la seule méthode applicables à la résolution de ce problème acousto-électrique. Ceci tient au fait principalement que nous y utilisons un champ acoustique unipolaire physiquement réalisable, plus spécifiquement un champ unipolaire qui n'a pas à être confiné à la zone focale du transducteur. En outre, le modèle et la méthode sont développés pour une distribution de conductivité arbitraire et ne sont pas restreints aux cas où cette distribution décrirait un milieu légèrement inhomogène.

Les autres contributions sont essentiellement reliées à la mise en œuvre du modèle et de la méthode. Ainsi, la conductivité est déterminée en résolvant numériquement, de façon itérative, un problème inverse, lequel, à son tour, fait appel à la résolution d'un problème direct. Pour résoudre le problème direct, une méthode numérique dite « sans maillage » originale a été développée ; par la suite, la représentation discrète sans maillage a servi à développer l'application originale que constitue la résolution numérique du problème inverse acousto-électrique en 3D.

Certains paramètres du modèle ont été définis à partir de mesures expérimentales effectuées dans notre laboratoire. Les expériences ont permis d'observer certains effets acousto-

électriques et ont, en outre, servi à valider certaines parties du modèle. Pour ce faire, une cellule de mesure a été développée, puis caractérisée.

1.3 Plan de la thèse

Le chapitre 2, à la suite de cette introduction, expose les développements théoriques associés aux problèmes direct et inverse de l'imagerie par modulation acoustique de conductivité électrique. Ce chapitre débute par une présentation d'éléments trouvés dans la littérature scientifique avant de traiter des contributions apportées par ce projet.

Le chapitre 3 traite de la réalisation expérimentale. Quelques configurations de montages tirées de la littérature sont d'abord illustrées. Le montage réalisé dans le cadre de ce projet pour l'acquisition de signaux de MACE est ensuite détaillé. Puis, une analyse des signaux recueillis et leur interprétation permettent de tirer des conclusions sur différentes manières d'améliorer ce montage.

Le chapitre 4 décrit la mise en œuvre de la méthode de résolution numérique.

Les chapitres 5 à 7 servent à illustrer l'application de la méthode proposée pour la résolution de problèmes acousto-électriques. Le premier de ces chapitres traite de l'application des modèles d'onde bipolaire et unipolaire sur un objet mince. Le second de ces chapitres contient une analyse pour la méthode d'onde unipolaire sur un objet mince possédant plusieurs configurations d'électrodes. Une analyse de détection d'un objet présent dans la scène est réalisée pour un système d'acquisition soumis à un bruit de mesure. Le troisième de ces chapitres traite de l'imagerie de conductivité électrique sur des géométries profondes par la méthode d'onde unipolaire. Un problème dont la géométrie est adaptée à l'imagerie du sein y est analysé.

Le chapitre 8 termine le document en faisant un sommaire des contributions apportées par ce travail de doctorat et discute des avenues de recherche ouvertes.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION

Ce chapitre présente les modèles d'imagerie par modulation acoustique de conductivité électrique qui seront utilisés dans ce projet. Ces modèles incluent une représentation du faisceau acoustique utilisé afin d'obtenir une résolution adéquate de la distribution de conductivité électrique sur le domaine visé. Ces modèles sont aussi adaptés aux conditions expérimentales qui seront présentes afin d'obtenir une représentation correcte de cette variable. Ces modèles ont été développés afin de permettre une imagerie robuste au bruit de mesure et aux différentes incertitudes (positionnement, conditions expérimentales...).

Le but de ces modèles est d'obtenir une formulation permettant d'appliquer l'imagerie par MACE sur de grands volumes et de décrire les conditions à satisfaire pour que cette technique puisse s'appliquer à la détection du cancer du sein. Pour ce faire, le domaine imagé doit atteindre plusieurs centimètres dans les trois dimensions. De plus, la conductivité électrique dans ce domaine pourra être fortement inhomogène, tel qu'observé expérimentalement (Jossinet, 1996; Surowiec *et al.*, 1988). Les modèles proposés ici visent à respecter ces conditions.

Ce chapitre débute par un sommaire de la phénoménologie de la MACE et des modèles relatifs à l'imagerie par MACE suggérés dans la littérature. Deux modèles ont été développés dans le cadre de ce projet. Le premier modèle, décrit à la section 2.2, est basé sur une méthode par onde bipolaire. Le second modèle, décrit à la section 2.3, repose sur l'utilisation d'une onde acoustique unipolaire large et sera celui préconisé pour l'imagerie de grands volumes.

2.1 Revue de littérature

2.1.1 Interactions acousto-électriques concomitantes : modulation de conductivité et effet Debye

On observe, depuis quelques années, un regain d'intérêt pour étudier l'effet de la pression sur la conductivité électrique d'un électrolyte, notamment en vue d'applications éventuelles dans le domaine biomédical (Jossinet *et al.*, 1998). Cet effet est toutefois connu depuis plus d'un siècle, selon ce qui est rapporté dans les résumés d'articles publiés par The Royal Society of Chemistry (1899, 1909). En effet, Körber (Körber, 1909), faisant suite aux travaux de Bogojawlensky et Tammann (1898), avait déjà observé l'effet de la pression statique sur la conductivité électrique de solutions salines et montré qu'une augmentation de pression

faisait augmenter proportionnellement la conductivité électrique [1]. Fox *et al.* (1946) semblent toutefois être les premiers à avoir utilisé une onde acoustique de 0,5-2,5 MHz pour moduler la conductivité de l'électrolyte, leur but étant d'utiliser le phénomène pour concevoir un dispositif de mesure de l'intensité d'un signal ultrasonore.

La modulation de conductivité n'est cependant pas le seul effet de nature électrique que produit le passage d'une onde ultrasonore dans un électrolyte. À la propagation de l'onde est associé un déplacement particulaire que l'on peut décrire comme un mouvement de va-et-vient autour d'un point d'équilibre. Ce mouvement se fait selon l'axe de propagation et peut différer pour l'une et l'autre des espèces ioniques, notamment à cause de leurs mobilités respectives. Ceci donne lieu en quelque sorte à une séparation momentanée des ions positifs et négatifs. Cet état de polarisation, dont l'amplitude et l'orientation changent à tous les demi-cycles de l'onde, est la source d'un potentiel appelé potentiel de vibration ou, à l'origine, effet Debye.

Les articles de Jossinet *et al.* (1999) et de Lavandier *et al.* (2000a,b) présentent une validation expérimentale de ces phénomènes et précisent l'amplitude des effets. Le montage ainsi qu'une des cellules de mesure utilisées sont illustrés à la figure 2.1. La cellule de mesure est constituée d'une paire d'électrodes reliées à une source de courant et d'une paire d'électrodes mesurant la tension. Le signal acoustique modulant la conductivité est un train d'ondes sinusoïdales de 10 cycles. Lorsqu'il y a passage de courant, la tension mesurée contient ce qui provient du potentiel de vibration, auquel s'ajoute ce qui provient de la modulation de conductivité. Un exemple de signal mesuré est montré à la figure 2.1c. Cette tension (qui ici a été moyennée par l'oscilloscope) est de l'ordre de la centaine de microvolts, mais pourrait être beaucoup plus faible si les électrodes étaient plus éloignées les unes des autres. Lorsqu'il n'y a pas de courant injecté, le signal de tension mesuré ne résulte que du potentiel de vibration ; lorsqu'il y a injection de courant, ce signal mesuré résulte de la somme de la tension provenant de l'effet Debye et de celle provenant de la modulation de conductivité, laquelle est proportionnelle au courant. Pour isoler la composante provenant de la modulation de conductivité, il suffit donc de soustraire deux mesures de tension, l'une prise en présence de courant, l'autre sans courant. Un tel traitement est nécessaire pour obtenir le signal de modulation de conductivité, compte tenu que les tensions provenant de l'effet de Debye et de la modulation de conductivité sont du même ordre de grandeur lorsqu'on utilise la cellule de mesure de la figure 2.1b.

1. Selon Fox *et al.* (1946), cette augmentation de conductivité surviendrait jusqu'à environ 1000 atmosphères.

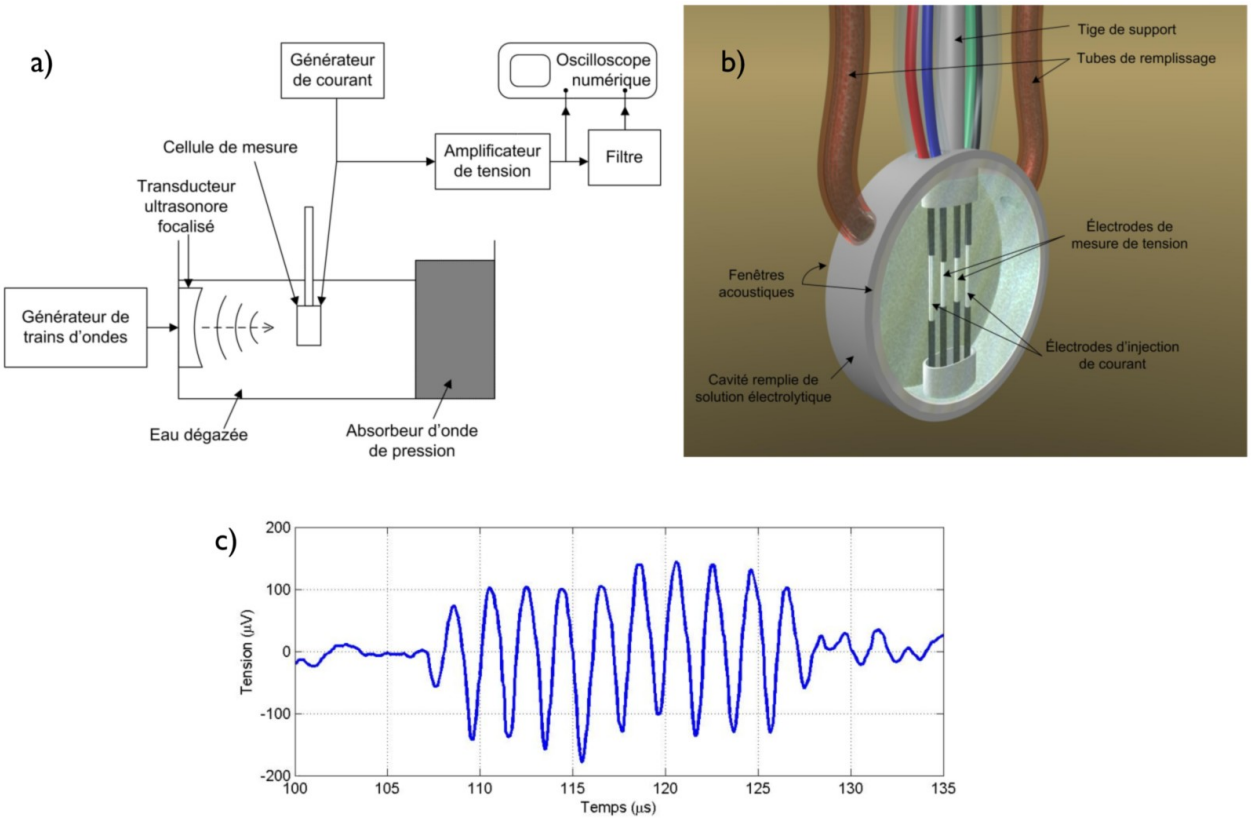

Figure 2.1 Validation expérimentale : montage, cellule de mesure et signal mesuré. (a) Schéma d'un montage pour la mesure de signaux provenant de la modulation acoustique de la conductivité et de l'effet Debye (Lavandier *et al.*, 2000a) (schéma redessiné et traduit). (b) Cellule de mesure constituée de 4 électrodes dégainées dans la région centrale. La paire d'électrodes externes, distantes l'une de l'autre d'environ 7 mm, sert à injecter le courant. La paire interne d'électrodes sert à mesurer la différence de potentiel résultant de l'interaction acousto-électrique. (c) Exemple de signal de tension mesuré et moyenné par l'oscilloscope numérique lorsque le train d'ondes acoustique de 10 cycles, d'amplitude crête de l'ordre de 1 MPa, traverse la cellule de mesure (adapté de Lavandier *et al.* (2000a)). L'amplitude de ce signal correspond à celle à l'entrée de l'amplificateur. Une amplitude beaucoup plus faible serait observée si la distance entre les électrodes était de l'ordre du centimètre.

2.1.2 Phénoménologie de la modulation acoustique de conductivité électrique

La phénoménologie de la MACE dans des solutions électrolytiques ayant des ions monovalents a été décrite par Jossinet *et al.* (1998, 1999). Les auteurs décrivent quantitativement la manière avec laquelle les variations de pression et de température induites par l'onde acoustique ont une influence sur la concentration ionique et sur la mobilité des ions. Les éléments principaux de cette description sont repris ici.

L'équation de la conductivité électrique pour une solution contenant un électrolyte binaire est :

$$\sigma = F k_{\pm} \alpha C (z_+ u_+ + z_- u_-) \tag{2.1}$$

avec

σ : conductivité électrique de la solution (S/m) ;
F : constante de Faraday (96 500 C/mol) ;
$k_{\pm}$: activité ionique moyenne ;
α : coefficient de dissociation ;
C : concentration volumique (mol/m^3) ;
z_+, z_- : nombre de charges du cation et de l'anion, respectivement ;
u_+, u_- : mobilité du cation et de l'anion, respectivement (m^2/s/V).

La variation relative de la conductivité s'exprime par :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = \frac{\mathrm{d}C}{C} + \frac{\mathrm{d}k_{\pm}}{k_{\pm}} + \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} + \frac{\mathrm{d}(z_+ u_+ + z_- u_-)}{z_+ u_+ + z_- u_-} \tag{2.2}$$

Ces variables sont affectées par les variations de pression et de température produites lors de la propagation de l'onde acoustique. Pour une petite région contenue dans le faisceau ultrasonore, les cycles rapides de compression et de décompression s'accompagnent simultanément d'une augmentation, puis d'une diminution de la température. Ces variations étant de courte durée, les échanges de chaleur dus à la diffusion pourront être négligés et le cycle de compression/décompression sera alors considéré comme adiabatique.

L'influence de cette onde acoustique sur les différentes variables est décrite ici.

Concentration (C) Comme présenté dans l'introduction, les variations de pression dans l'électrolyte s'accompagnent de variations de concentration ionique. Le changement de concentration dC peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{d}C}{C} \approx \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial P}\mathrm{d}P = \frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial P}\mathrm{d}P = \left(\frac{V}{N}\right)\left(-\frac{N}{V^2}\right)\frac{\partial V}{\partial P}\mathrm{d}P = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P}\mathrm{d}P = \beta_S \mathrm{d}P \tag{2.3}$$

où P est la pression, β_S est la compressibilité adiabatique et N est le nombre d'ions contenus dans le volume V.

Coefficient d'activité ionique moyen ($k_\pm$) Ce coefficient décrit l'influence des forces coulombiennes et l'encombrement au mouvement des ions. Pour des solutions très diluées, les ions interagissent très peu et la conductivité est pratiquement proportionnelle à la concentration du soluté. Le facteur $k_\pm$ vaut alors approximativement 1. Cependant, lorsque la concentration est augmentée, cette relation de proportionnalité est de moins en moins vérifiée. La force ionique totale ne peut alors plus être approximée comme étant la somme des contributions individuelles des ions isolés. Puisque le coefficient de l'activité ionique moyenne sert à prendre en compte l'effet global, il devient alors <1.

Dans le cas présent, où les solutions utilisées seront diluées (solution de NaCl de l'ordre de 9 g/L), cette variation de $k_\pm$ sera négligée.

Coefficient de dissociation (α) Ce coefficient représente la fraction du soluté solubilisé. Pour les électrolytes forts comme le NaCl, où le coefficient de dissociation est près de 1, cette valeur varie très peu selon la pression et la température. Pour la situation présente, le terme $\mathrm{d}\alpha/\alpha$ sera donc négligé.

Mobilité ionique (u_+, u_-) et viscosité La mobilité ionique représente la facilité d'un ion à se déplacer dans un fluide. Elle correspond à la vitesse maximale atteinte lorsque l'ion est soumis à un champ électrique unitaire et uniforme. Cette facilité de déplacement est liée à la viscosité du fluide et à la taille de l'ion. Selon le modèle de Stokes, la mobilité est inversement proportionnelle à la viscosité.

La viscosité du solvant varie selon la température et la pression. Pour tous les solvants, la viscosité diminue lorsque la température augmente. La mobilité ionique augmente alors d'environ 2 % par degré Kelvin, mais elle dépend du type d'ions. Ce coefficient thermique est exprimé par m_T.

Pour ce qui est de l'influence de la pression, en règle générale, son augmentation provoquera l'augmentation de la viscosité du solvant. Ceci peut être compris en définissant la viscosité comme la difficulté des molécules à se déplacer les unes par rapport aux autres. L'augmentation de la pression fait diminuer le volume contenant un nombre fixe de molécules. L'augmentation de la densité volumique fait augmenter l'achalandage et rend les mouvements plus difficiles.

Le cas de l'eau sous les 33 °C et sous 150 MPa est cependant l'exception à cette dernière règle. La relation de la viscosité en fonction de la pression est présentée à la figure 2.2. La

présence de liaisons hydrogènes entre les molécules produit une structure très forte dans l'eau, faisant augmenter la viscosité. Cependant, ces liaisons hydrogènes sont affaiblies par la hausse de pression, ce qui produit une diminution de la viscosité. À basse température, ce dernier effet l'emporte sur celui de la hausse de la densité volumique, causant ainsi une diminution nette de la viscosité (Franks, 1972).

L'expression de la variation de la mobilité u selon les variations de pression P et de température T est donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{u} &= \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial T}\mathrm{d}T + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial P}\mathrm{d}P = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial T}\mathrm{d}T + \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial P}\mathrm{d}P \\ &= \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial T}\mathrm{d}T + \frac{1}{u}\left(-\frac{u}{\eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial P}\mathrm{d}P = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\mathrm{d}P - \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial P}\mathrm{d}P \\ &= m_T\Theta\mathrm{d}P - H_P\mathrm{d}P \end{aligned} \tag{2.4}$$

où η est la viscosité, m_T est le coefficient thermique de la mobilité ionique et H_P est le coefficient de variation de viscosité avec la pression. La troisième égalité a utilisé la relation de proportionnalité inverse entre la mobilité et la viscosité. Le coefficient $\Theta = \frac{\partial T}{\partial P}$ liant l'augmentation de la température avec la pression a été inclus pour rendre l'équation dépendante de la variation de pression uniquement.

Forme finale du changement de conductivité Le changement de conductivité peut alors s'exprimer ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \approx \frac{\mathrm{d}C}{C} + \frac{\mathrm{d}(z_+u_+ + z_-u_-)}{z_+u_+ + z_-u_-} = \beta_S\mathrm{d}P + \frac{z_+u_+\left(m_{T+}\Theta - H_P\right) + z_-u_-\left(m_{T-}\Theta - H_P\right)}{z_+u_+ + z_-u_-}\mathrm{d}P \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\sigma \approx \sigma\left[\beta_S - H_P + \Theta\frac{z_+u_+m_{T+} + z_-u_-m_{T-}}{z_+u_+ + z_-u_-}\right]\mathrm{d}P = \sigma K_I\mathrm{d}P \tag{2.6}$$

où les coefficients thermiques de mobilité ionique m_{T+} et m_{T-} ont été spécifiés respectivement pour le cation et l'anion.

Un schéma résumant ces différents effets à l'origine des changements de conductivité est montré à la figure 2.3.

Typiquement, pour un électrolyte comme le NaCl ou le KCl dans l'eau, la valeur de K_I est de 95×10^{-11} Pa^{-1}. Ce résultat provient de la constante de compressibilité β_S d'environ 46×10^{-11} Pa^{-1}, du coefficient de proportionnalité entre la viscosité et la pression $H_P = -17,3 \times 10^{-11}$ Pa^{-1} et de la variation de mobilité ionique avec la pression d'environ 32×10^{-11} Pa^{-1}. Cette dernière valeur provient du produit de $\Theta \approx 1,4 \times 10^{-8}$ K Pa^{-1} avec m_{T+} ou m_{T-}. Par exemple, la modulation de conductivité électrique qui serait produite par une

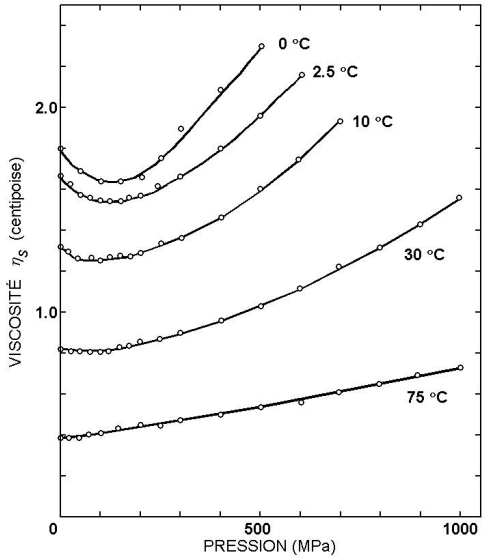

Figure 2.2 Viscosité de l'eau η_S en fonction de la pression pour différentes températures (Franks, 1972)(figure rééditée et traduite).

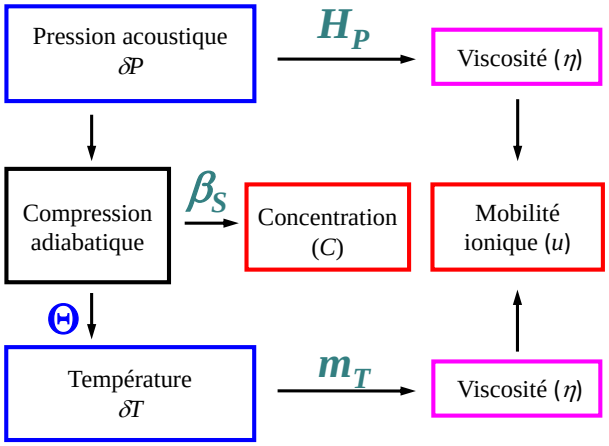

Figure 2.3 Schéma des interactions entre les principaux phénomènes à l'origine de la MACE. La variation de concentration résulte d'une variation de pression acoustique lors de cycles adiabatiques. La variation de mobilité ionique résulte des variations de viscosité induites par deux mécanismes découlant l'un et l'autre de la variation de pression.

pression acoustique de 1 MPa est :

$$\mathrm{d}\sigma = \sigma K_I \mathrm{d}P = \sigma(95 \times 10^{-11}\ \mathrm{Pa}^{-1}) \times (10^6\ \mathrm{Pa}) = 95 \times 10^{-5}\sigma \approx 0,001\sigma \qquad (2.7)$$

2.1.3 Imagerie par modulation acoustique de conductivité électrique

Les premiers travaux

Zhang et Wang (2004) sont les premiers à avoir démontré expérimentalement le potentiel de la MACE pour produire une image de conductivité électrique. Leur expérience consiste à appliquer une pression acoustique locale au moyen d'un faisceau ultrasonore et à mesurer à l'aide d'électrodes la variation d'impédance produite (figure 2.4). Cette mesure renseigne sur la conductivité électrique à la position spécifique de la perturbation. La procédure est reprise en déplaçant le transducteur pour balayer la région à analyser. La résolution de l'image est limitée par la taille du faisceau ultrasonore, pouvant atteindre l'ordre du millimètre au foyer. L'image de la conductivité est ici produite directement, sans avoir à recourir à un processus de reconstruction. Ceci est rendu possible du fait que le transducteur et les électrodes sont solidaires et qu'ainsi la tension mesurée ne varie qu'en fonction de la conductivité.

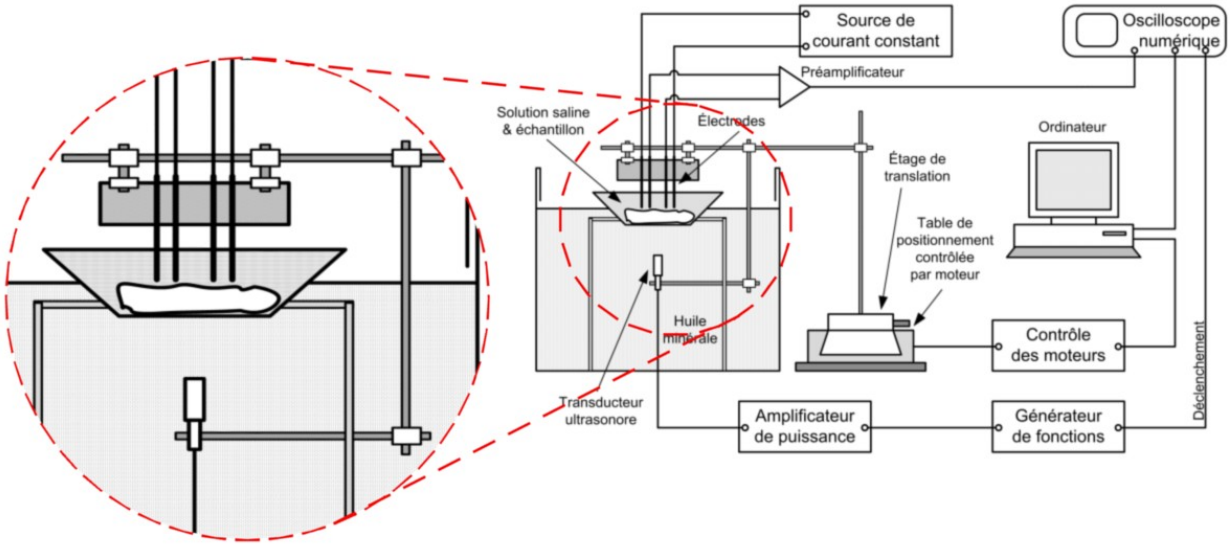

Figure 2.4 Montage utilisé par Zhang et Wang (2004) pour cartographier la conductivité électrique d'un échantillon (schéma redessiné et traduit). Un courant est appliqué avec les deux électrodes externes et le potentiel résultant est enregistré par les deux électrodes internes. Un transducteur excité par un train d'ondes (5 cycles à 1 MHz) émet une onde ultrasonore focalisée le long de l'axe médian des électrodes. Le balayage est effectué en déplaçant le transducteur et les électrodes dans un plan parallèle à l'échantillon.

Leur montage soulève toutefois certains problèmes d'interprétation des résultats. L'échantillon analysé est d'une épaisseur de plusieurs longueurs d'ondes et le signal acoustique devant moduler la conductivité est bipolaire. Comme mentionné dans l'introduction de la thèse, ceci donne lieu à une situation où, pour chacun des cycles, les effets de l'augmentation et ceux de la diminution de conductivité se superposent, pouvant ainsi réduire de beaucoup l'amplitude du signal de MACE. La disposition particulière des électrodes qu'utilisent ces auteurs permet toutefois de contrer cet effet. Comme nous le verrons plus loin, les électrodes de mesure ont une zone de captation effective [2] qui est étroite, ce qui favorise les signaux acousto-électriques provenant de leur voisinage immédiat.

Ce montage nécessite de déplacer simultanément les électrodes et le faisceau ultrasonore. Une méthode plus intéressante consisterait à utiliser des électrodes fixes disposées sur la frontière de l'échantillon, le faisceau ultrasonore pouvant être translaté par déplacement du transducteur ou électroniquement. Dans ce cas, la zone de captation serait beaucoup plus grande, et la méthode ne pourrait être utilisée avec efficacité qu'avec des échantillons d'une épaisseur plus petite que la demi-longueur d'onde. De plus, le signal de tension capté ne serait pas déterminé uniquement par la conductivité au site d'interaction acousto-électrique, mais aussi (entre autres) par la distribution de conductivité de la région qui se situe entre l'électrode de mesure et le site d'interaction. Dans ce cas, la cartographie de la conductivité devient un problème de reconstruction de conductivité résolu à partir d'un ensemble de mesures.

Méthodes de reconstruction de conductivité présentées dans la littérature

Il existe présentement dans la littérature deux variantes d'une même proposition de reconstruction de la conductivité électrique par modulation acoustique. L'une et l'autre font l'hypothèse d'une perturbation acousto-électrique locale connue.

Telle que décrite dans l'article de Ammari *et al.* (2008), la première proposition associe cette perturbation à un changement de volume qu'induirait l'onde acoustique dans une petite région (la région focale) ; cette variation du volume produirait un changement local de conductivité qui lui serait proportionnel. Comme pour la tomographie d'impédance électrique, leur approche utilise les potentiels captés à la frontière du domaine à analyser. Deux configurations d'électrodes d'injection de courant particulières sont utilisées ; celles-ci doivent en effet être telles que les densités de courant produites par l'une et l'autre soient localement orthogonales. Pour chacune de ces configurations, le domaine est balayé par une compression

2. La zone de captation est grossièrement de l'ordre de grandeur de l'espacement entre les électrodes. C'est aussi cette caractéristique qui fait que la cellule utilisée par Lavandier *et al.* (2000a) permet d'observer un signal de MACE à 500 kHz malgré le fait que l'épaisseur de la cellule de mesure soit de 20 mm.

locale ultrasonore et les perturbations de potentiel résultantes sont captées à la frontière par toutes les électrodes, y compris celles où se fait l'injection de courant. En supposant la conductivité connue au voisinage de la frontière, les auteurs sont en mesure de déterminer la différence d'énergie injectée par les électrodes de courant en réponse à chacune des perturbations acoustiques. Cette différence d'énergie est ensuite utilisée dans la formulation d'une équation différentielle dont la solution permet, de façon itérative, de faire la mise à jour de la conductivité. Quelques simulations numériques présentées dans cet article démontrent le concept dans des conditions idéales : mesures non bruitées, perturbation acoustique unipolaire ponctuelle connue en tout point, champs de densité de courant orthogonaux pour les deux configurations d'électrodes d'injection, mesure de potentiel aux sites mêmes d'injection de courants, etc. La proposition n'aborde pas les nombreux problèmes d'application de la méthode en dehors de ce contexte idéal, notamment en ce qui a trait à la réalisation d'une perturbation acoustique unipolaire qui doit être locale.

La seconde proposition, illustrée par l'article de Kuchment et Kunyansky (2011), s'apparente à celle d'Ammari *et al.* (2008) pour faire la reconstruction 2D et 3D de la conductivité, en utilisant respectivement 2 ou 3 configurations d'électrodes de courant ; on capte les mêmes données de potentiel et de courant de frontières, toujours en utilisant une pression acoustique unipolaire locale pour produire la MACE. Le problème de reconstruction est lui aussi formulé en termes d'équations différentielles à résoudre. Toutefois, leurs équations sont linéaires, ayant été développées en supposant une distribution de conductivité de référence qui est près de la distribution réelle. Pour ce qui est de la réalisation d'une pression acoustique unipolaire locale, les auteurs proposent d'utiliser une technique de synthèse d'ouverture qui équivaut à superposer un grand nombre d'ondes sphériques à grande largeur de bande, chacune produisant ainsi une coquille de pression sphérique se propageant radialement. Ces ondes sphériques sont émises à partir de sources réparties tout autour de l'objet à imager. La synthèse de l'effet d'une perturbation acoustique locale peut se faire par sommation des signaux de tension captés à la frontière tout au cours de la propagation de chacune des ondes et en effectuant, pour chaque point du domaine, un décalage temporel approprié ; l'effet du décalage temporel est de renforcer la réponse de MACE qui proviendrait d'un point particulier de l'objet. Cette méthode est analogue à celle utilisée en échographie pour faire la focalisation en réception. Sa mise en œuvre serait présentement très difficile à réaliser, en particulier pour des applications biomédicales cliniques. Entre autres, elle nécessiterait un grand nombre de sources (256 dans leur exemple en 2D) autour de l'objet.

Méthode à la base de la thèse pour la reconstruction de conductivité

Les modèles proposés dans cette thèse reprennent le formalisme développé par Olafsson *et al.* (2008) pour faire l'imagerie de la densité de courant, en l'adaptant au problème de l'imagerie de la conductivité. Ces modèles utilisent un système conventionnel de mesure d'impédances à deux paires d'électrodes (Roth, 2006). Dans cette configuration, une paire d'électrodes injecte un courant I^I, créant une densité de courant $\boldsymbol{J}^I$ dans le volume conducteur Ω, tandis que la tension produite est mesurée par la seconde paire d'électrodes. Pour une distribution de conductivité électrique initiale σ_0, cette tension V_0 est, par le principe de réciprocité :

$$V_0 = \iiint_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{2.8}$$

où σ_0 est la conductivité électrique, φ^I est le potentiel électrique créé par l'injection du courant I^I par la paire d'électrodes de courant, tandis que φ^L est le potentiel électrique qui serait produit par l'injection d'un courant I^L de 1 ampère circulant par les électrodes de mesure sur cette même géométrie. À ce potentiel φ^L est associée la densité de courant $\boldsymbol{J}^L = -\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^L$, aussi connue sous le nom de champ de dérivation, ou « lead field » (Malmivuo et Plonsey, 1995, chap. 11).

Lorsqu'une variation de conductivité électrique se produit, les distributions de densité de courant et de potentiel électrique sont, en général, affectées sur l'ensemble du domaine et la tension mesurée varie. Pour une petite perturbation de la conductivité électrique $\delta\sigma$, en ne considérant que les termes du premier ordre, nous observons que la variation de la tension mesurée δV est (voir annexe D) :

$$\delta V = -\iiint_\Omega \delta\sigma(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{2.9}$$

Notons que les potentiels électriques utilisés dans cette dernière équation sont les mêmes que ceux de l'équation 2.8, qui sont ceux produits pour une conductivité électrique σ_0.

L'équation 2.6 montre que l'application d'une pression acoustique d'amplitude δP aura pour effet de produire une perturbation de conductivité électrique $\delta\sigma$. La tension mesurée est alors :

$$\begin{aligned} V &= V_0 + \delta V \\ &= \underbrace{\iiint_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{V_0 \text{ : signal de basse fréquence}} \\ &\quad + \underbrace{\iiint_\Omega -(K_I\sigma_0\delta P)(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{V^{MACE} \text{ : signal de fréquence ultrasonore}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Le premier terme du membre de droite de 2.10 est la tension V_0 enregistrée sans perturbation acoustique. Cette tension est à la fréquence de la source de courant. Dans cette thèse, cette fréquence est basse par rapport à celle de l'onde ultrasonore. Le second terme, V^{MACE}, est le signal acousto-électrique à haute fréquence produit par l'onde acoustique. Ces deux contributions peuvent être isolées l'une de l'autre par un traitement de signal comportant un filtrage approprié. Le second terme, attribuable à la modulation acoustique de conductivité électrique, est celui d'intérêt. Il peut être réécrit en termes des densités de courant $\boldsymbol{J}^I$ et $\boldsymbol{J}^L$:

$$V^{MACE} = -K_I \iiint_{\Omega} \nu \, \delta P \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.11}$$

où

$$\nu = \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L) = \frac{1}{\sigma_0}((-\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^I) \cdot (-\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^L)) = \rho_0(\boldsymbol{J}^I \cdot \boldsymbol{J}^L) \tag{2.12}$$

et où ρ_0 est la résistivité électrique initiale.

La quantité ν décrit un champ scalaire qui est déterminé par la géométrie, les conditions frontières et la distribution de conductivité électrique σ_0. Ce champ ν quantifie la contribution de la pression acoustique locale δP à la tension de MACE. Il sera désigné par l'expression « sensibilité acousto-électrique ». La figure 2.5 illustre les termes de l'équation 2.11 qui définissent cette sensibilité.

Dans cette figure, la densité de courant est plus grande au voisinage des électrodes, ce qui signifie généralement que, pour une même perturbation de conductivité produite par une onde acoustique, celle appliquée près des électrodes génèrera une tension plus grande que celle appliquée dans une région distale. Il existe cependant des lieux où cette sensibilité est nulle (en blanc sur la figure 2.5c, selon le code de couleur utilisé) ; ceci provient du fait que les vecteurs $\boldsymbol{J}^I$ et $\boldsymbol{J}^L$ y sont orthogonaux. Enfin, il existe une zone de sensibilité négative entre les électrodes #1 et #2 et une autre entre les électrodes #3 et #4. Ceci signifie qu'une onde de pression qui y serait appliquée produirait un signal de tension inversé par rapport à la situation précédente.

Les modèles présentés dans cette thèse supposent une sensibilité acousto-électrique indépendante du temps. Cette hypothèse est justifiée lorsque le tissu à imager est stationnaire et lorsque la fréquence de la source de courant est telle que son amplitude instantanée varie peu durant tout le temps que prend le signal acoustique pour le traverser.

2.2 Modèle pour onde bipolaire

Cette section introduit le premier modèle proposé dans cette thèse pour l'imagerie par MACE d'un tissu mince. Ce modèle a pour but d'évaluer la faisabilité d'une méthode de reconstruction de conductivité électrique utilisant une onde acoustique bipolaire qui insonifie

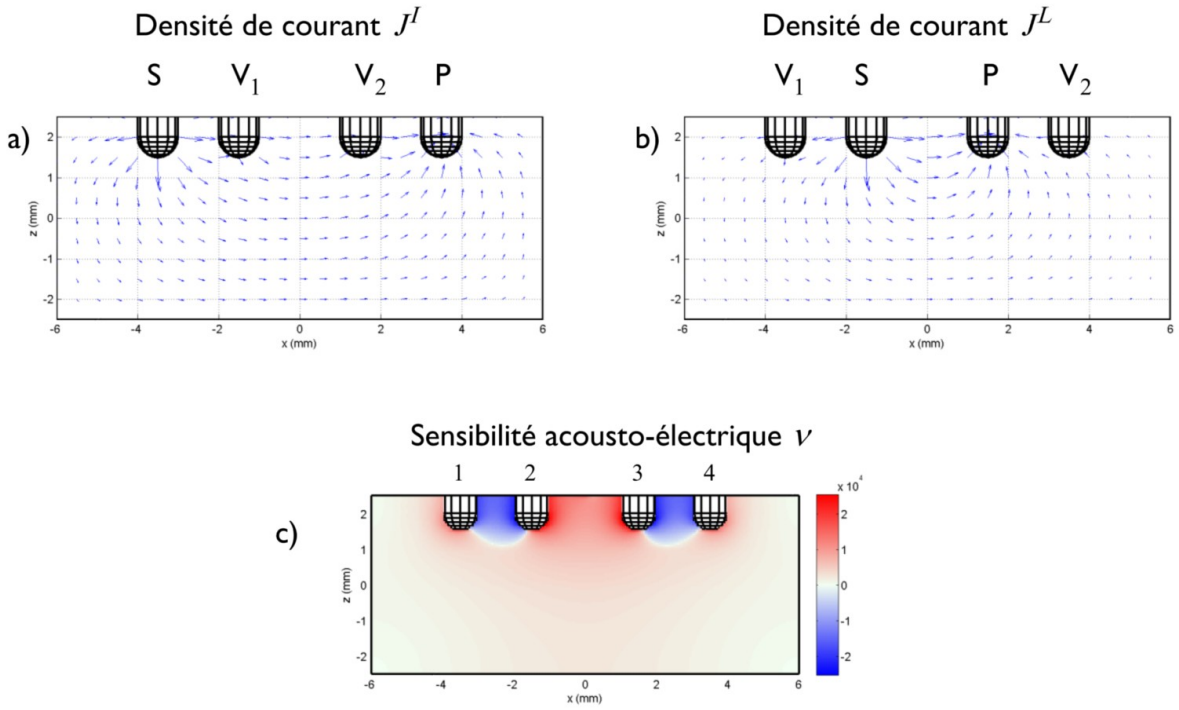

Figure 2.5 Illustration de la sensibilité acousto-électrique. (a) Champ vectoriel de la densité de courant $\boldsymbol{J}^I$; les électrodes externes sont celles de la source (S) et du puits (P) de courant, et la tension est mesurée par les électrodes internes V_1 et V_2. La racine carrée de la norme des vecteurs est utilisée pour mieux voir l'ensemble du champ vectoriel. (b) Champ vectoriel de la densité de courant complémentaire $\boldsymbol{J}^L$; par rapport à la figure (a), le rôle des électrodes est inversé. (c) Sensibilité acousto-électrique. Pour mieux apprécier la forme de cette distribution, la racine carrée de l'amplitude de la sensibilité réelle est affichée. Cette configuration modélise celle du montage de Zhang et Wang (2004).

un tissu mince mais d'épaisseur finie. Comme dans le montage de Zhang et Wang (2004), le champ acoustique est focalisé et est produit par un transducteur excité par un signal en bande étroite ou, plus simplement, par un train d'ondes sinusoïdales. Le balayage du tissu est fait par translation du faisceau ultrasonore dans un plan parallèle à l'échantillon. Toutefois, à la différence du montage utilisé par ces auteurs, les électrodes sont fixes et distantes les unes des autres.

2.2.1 Problème direct

Le modèle pour le problème direct utilise les mêmes éléments de base que celui d'Olafsson *et al.* (2008), tels qu'exprimés aux équations 2.6 et 2.10. En utilisant $\delta P(\boldsymbol{r}, t) = P_0 \hat{b}(\boldsymbol{r}, t)$, qui est une fonction spatio-temporelle décrivant le faisceau ultrasonore, l'expression de la tension

produite par la MACE devient :

$$V^{MACE}(\boldsymbol{r}_b, t) = -K_I \iiint_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{r}_\Omega) \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_\Omega) \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_\Omega) \right) P_0 \, \hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega - \boldsymbol{r}_b, t) \, \mathrm{d}\Omega \quad (2.13)$$

$$= -K_I \iiint_\Omega \nu(\boldsymbol{r}_\Omega) P_0 \, \hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega - \boldsymbol{r}_b, t) \, \mathrm{d}\Omega \quad (2.14)$$

où $\boldsymbol{r}_\Omega$ est la coordonnée (x, y, z) d'un point dans le domaine Ω et $\boldsymbol{r}_b$ est celle du centre de la région focale du transducteur telle qu'illustrée à la figure 2.6 ; le foyer, centré à l'origine selon z, est à la coordonnée $\boldsymbol{r}_b = (x_b, y_b, 0)$.

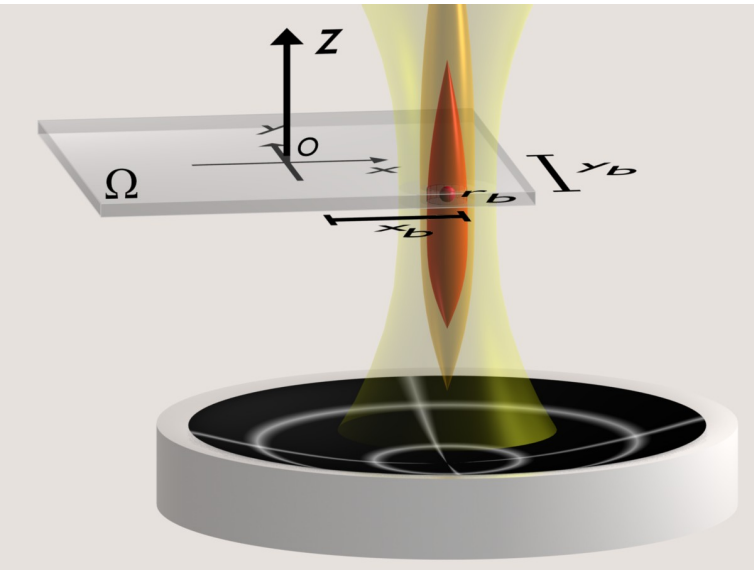

Figure 2.6 Positionnement du transducteur par rapport à l'objet mince à analyser dans la méthode pour onde bipolaire. Le point focal du transducteur est en $\boldsymbol{r}_b = (x_b, y_b, 0)$.

Pour une perturbation acoustique provenant d'un transducteur focalisé excité par un train d'ondes sinusoïdales de fréquence ω, nous obtenons un signal de MACE ayant généralement la forme de celui tracé à la figure 2.1c. Le spectre de ce signal présente une harmonique importante à cette fréquence ω. La mesure d'intérêt provenant de ce signal est l'amplitude du train d'ondes. En présence de bruit fort, cette mesure peut être difficile à obtenir précisément à partir du signal temporel (par exemple, en prenant la valeur maximale du signal acquis). Puisque nous sommes intéressés particulièrement par la fréquence ω, nous prendrons

la mesure suivante :

$$\tilde{V}^{MACE}(\boldsymbol{r}_b,\omega) = \left|\int_{t_0}^{t_f} V^{MACE}(\boldsymbol{r}_b,t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right| \tag{2.15}$$

$$= -K_I P_0 \iiint_{\Omega} \sigma_0(\boldsymbol{r}_\Omega)\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_\Omega)\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_\Omega)\right) \times\left|\int_{t=t_0}^{t_f}\hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega-\boldsymbol{r}_b,t)\,e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\Omega \tag{2.16}$$

où l'intervalle $t=[t_0,t_f]$ est limité à une région temporelle contenue dans le train d'ondes de V^{MACE}.

Quelques hypothèses peuvent être évoquées afin de simplifier ces équations. Dans la région focale, le champ acoustique s'approche d'une onde plane se déplaçant dans la direction de propagation z et dont la taille de la section transverse (dans le plan xy) est petite. Ceci peut être approximé ainsi :

$$\hat{b}(\boldsymbol{r}) \approx \hat{b}^{transverse}(x,y)a(z-ct) \approx \delta(x,y)a(z-ct) \tag{2.17}$$

où $\hat{b}^{transverse}(x,y)$ est la fonction qui décrit le profil latéral et en élévation de l'intensité du faisceau ultrasonore, et $a(z)$ est la réponse du transducteur à l'excitation appliquée.

Nous ferons également l'approximation d'une distribution de conductivité invariante selon z, soit $\sigma(x,y,z)=\sigma(x,y)$, et d'une séparabilité dans l'expression de la sensibilité acousto-électrique :

$$\nu(x,y,z) \approx \nu^{xy}(x,y)\nu^z(z) \tag{2.18}$$

avec $\nu^z(z)=\mathrm{rect}(z/\tau)$, où τ est l'épaisseur de l'échantillon. Cette approximation sera généralement bien respectée loin des électrodes pour un volume conducteur beaucoup plus mince que profond.

Avec 2.17 et 2.18, l'équation 2.16 devient :

$$\tilde{V}^{MACE}(\boldsymbol{r}_b,\omega) = -K_I P_0 \iint_{x,y} \nu^{xy}(x,y)\delta(x-x_b,y-y_b)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\cdot\left|\int_{t=t_0}^{t_f}\left[\int_z \nu^z(z)a(z-ct)\,\mathrm{d}z\right]e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right| \tag{2.19}$$

$$\Rightarrow \tilde{V}^{MACE}(\boldsymbol{r}_b,\omega) = -K_I P_0 \nu^{xy}(x_b,y_b)\cdot\left|\int_{t=t_0}^{t_f}\left[\int_z \nu^z(z)a(z-ct)\,\mathrm{d}z\right]e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right| \tag{2.20}$$

Cette équation exprime que la mesure effectuée correspond à un échantillonnage de la distribution de sensibilité à la position du foyer acoustique avec certains facteurs de pondéra-

tion. L'intégrale sur z est analogue à un produit de convolution entre la fonction de sensibilité $\nu^z(z)$ et la forme de l'onde dans cette direction.

2.2.2 Problème inverse

La formulation de ce problème inverse est à la base de la méthode développée pour estimer la conductivité électrique σ_0 à partir d'un ensemble de N mesures de $\tilde{V}^{MACE}$, compte tenu de diverses connaissances *a priori*, notamment de connaissances sur l'acquisition telles la forme du faisceau ultrasonore et les conditions imposées de courant. De façon plus formelle, nous cherchons à résoudre le système d'équations :

$$\sigma_0(\boldsymbol{r}_{b_i}) \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_{b_i}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_{b_i}) \right) = \nu_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.21}$$

où l'information des mesures est contenue dans les N valeurs de ν.

Pour le problème inverse, les inconnues sont la conductivité électrique σ_0 et les potentiels électriques φ^I et φ^L. Ces potentiels dépendent de la conductivité σ_0 et de paramètres liés à la géométrie et aux conditions de frontières que nous supposerons connues. La conductivité sera alors la seule variable indépendante. La résolution de cette équation sera faite par un processus itératif où une fonctionnelle doit être minimisée. Cette démarche est traitée plus spécifiquement au chapitre 4, qui traite de la résolution numérique de ce problème. Mentionnons pour l'instant qu'il s'agit de mettre en œuvre une procédure qui vise à minimiser un écart entre les prédictions d'un modèle et les observations. Il est important de noter que, dans ce modèle, le processus de reconstruction s'effectuera en ayant comme valeurs de données objectives celles de la sensibilité acousto-électrique ν ; la partie acoustique n'apparaît pas de façon explicite dans ce processus.

À partir de l'équation 2.20, nous pouvons écrire :

$$\frac{-K_{I,mes} P_0 \nu^{xy}_{mes}(x_b, y_b) \cdot \left| \int_{t=t_0}^{t_f} \left[\int_z \nu^z_{mes}(z) a(z - ct)\, \mathrm{d}z \right] e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \right|}{-K_{I,ref} P_0 \nu^{xy}_{ref}(x_b, y_b) \cdot \left| \int_{t=t_0}^{t_f} \left[\int_z \nu^z_{ref}(z) a(z - ct)\, \mathrm{d}z \right] e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \right|} = \frac{\tilde{V}^{MACE}_{mes}(\boldsymbol{r}_b, \omega)}{\tilde{V}^{MACE}_{ref}(\boldsymbol{r}_b, \omega)} \tag{2.22}$$

où les indices *mes* et *ref* renvoient respectivement à la situation de la mesure où la conductivité est inconnue et doit être estimée, et à celle de données de référence où les données sont acquises, alors que la conductivité est connue. Les autres conditions (électrodes, conditions de frontières, transducteur…) sont les mêmes dans les 2 cas.

Sous l'approximation que $\nu^z_{mes}(z) = \nu^z_{ref}(z)$, l'équation 2.22 devient :

$$\frac{K_{I,mes} \nu^{xy}_{mes}(x_b, y_b)}{K_{I,ref} \nu^{xy}_{ref}(x_b, y_b)} = \frac{\tilde{V}^{MACE}_{mes}(\boldsymbol{r}_b, \omega)}{\tilde{V}^{MACE}_{ref}(\boldsymbol{r}_b, \omega)} \tag{2.23}$$

$$\Rightarrow \nu_{mes}^{xy}(x_b, y_b) = \frac{K_{I,ref}}{K_{I,mes}} \nu_{ref}^{xy}(x_b, y_b) \frac{\tilde{V}_{mes}^{MACE}(\boldsymbol{r}_b, \omega)}{\tilde{V}_{ref}^{MACE}(\boldsymbol{r}_b, \omega)} \tag{2.24}$$

Dans l'équation 2.24, V_{ref}^{MACE} (contenu dans $\tilde{V}_{ref}^{MACE}$) peut être attribué à un signal de calibration pour une conductivité électrique donnée. En pratique, ce signal serait acquis sur un objet de conductivité électrique connue (comme un salin) avec les mêmes paramètres d'acquisition (champ acoustique, conditions frontières...) que pour V_{mes}^{MACE}. Dans ce cas, la connaissance explicite du champ acoustique n'est pas requise pour obtenir ν_{mes}^{xy}. Cependant, il faut calculer les quantités $\boldsymbol{\nabla}\varphi_{ref}^{I}$ et $\boldsymbol{\nabla}\varphi_{ref}^{L}$ présentes dans ν_{ref}^{xy}. Dans l'éventualité où ce signal de calibration ne serait pas disponible en pratique, il faudrait obtenir les mesures de V_{ref}^{MACE} par simulation. Le champ acoustique doit alors être évalué.

Par 2.24, le système d'équations 2.21 à résoudre devient :

$$\sigma_0(x_{b_i}, y_{b_i}) \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(x_{b_i}, y_{b_i}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L(x_{b_i}, y_{b_i}) \right) = \frac{K_{I,ref}}{K_{I,mes}} \nu_{ref}^{xy}(x_{b_i}, y_{b_i}) \frac{\tilde{V}_{mes}^{MACE}(x_{b_i}, y_{b_i}, \omega)}{\tilde{V}_{ref}^{MACE}(x_{b_i}, y_{b_i}, \omega)}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.25}$$

2.3 Modèle pour onde unipolaire

Cette section introduit le modèle décrivant la formation de signaux de MACE d'un échantillon mince, en utilisant un champ acoustique unipolaire à large bande et non focalisé. La formation des signaux repose sur les mêmes équations que celles présentées ci-dessus pour l'onde bipolaire. Toutefois, la méthode de balayage diffère. La méthode utilisée pour estimer la conductivité diffère aussi principalement du fait que le champ acoustique n'est pas focalisé.

2.3.1 Génération d'une onde acoustique unipolaire

Les articles de Holé et Lewiner (1996, 1998) exposent diverses méthodes pour produire un champ acoustique unipolaire. L'une d'entre elles utilise un transducteur d'une épaisseur telle que l'onde acoustique provenant de la face arrière du transducteur soit suffisamment retardée pour pouvoir être occultée. Un exemple décrit dans l'article de Lavandier *et al.* (2000b) est reproduit à la figure 2.7, où un transducteur monoélément de forte épaisseur (15,4 mm) est excité par un échelon de tension. L'onde de pression obtenue au foyer du transducteur pour ce type d'excitation électrique comporte une première région où l'amplitude est à dominance positive ; ceci est suivi 3,5 μs plus tard d'une deuxième région à dominance négative. Un tel intervalle de 3,5 μs permet d'insonifier un tissu mou sur une profondeur allant jusqu'à 5,4 mm [3] et d'isoler une réponse acousto-électrique qui ne serait due qu'à la partie positive.

3. La vitesse du son d'un tissu mou est en moyenne de 1540 m/s.

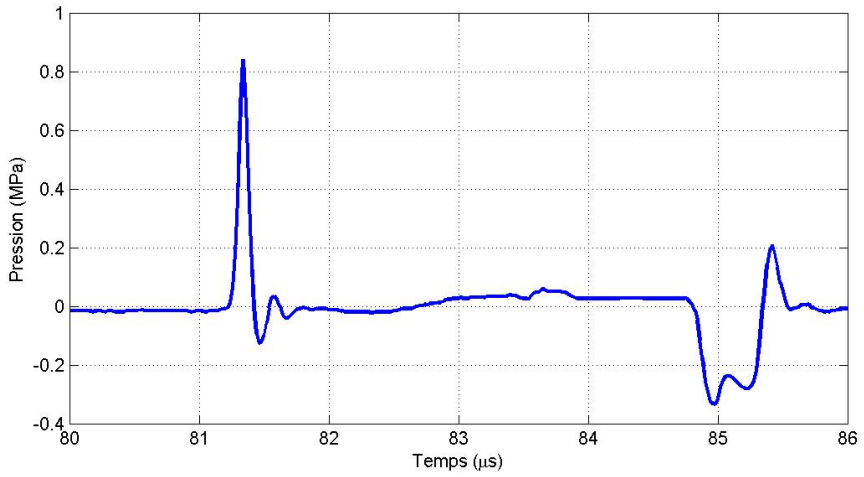

Figure 2.7 Exemple d'onde acoustique unipolaire. L'onde est produite suite à l'excitation par un échelon de tension d'un transducteur mono-élément (céramique PZT) de 50 mm de diamètre et de 15,4 mm d'épaisseur. La première partie positive provient de la face avant du transducteur ; 3,5 μs plus tard, une seconde partie négative provient de la face arrière. Cet intervalle correspond au temps de transit acoustique entre les deux faces du transducteur, la vitesse du son dans le PZT étant d'environ 4200 m/s.

Il est aussi possible d'utiliser des transducteurs plus minces, et donc pour lesquels l'onde provenant de la face arrière du transducteur surviendra plus tôt. Cette onde dont la polarité est l'inverse de celle provenant de la face avant peut être neutralisée en excitant le transducteur avec une rampe dont la durée est égale au temps de transit entre les deux faces (figure 2.8a). Dans ce cas, l'onde à dominance négative ne surviendra qu'au moment où la tension d'excitation retournera au repos.

Dans cette thèse, nous modéliserons l'onde de pression acoustique à partir des caractéristiques d'un signal obtenu expérimentalement par Sferruzza *et al.* (1999). Ce signal est celui enregistré au voisinage de la face externe d'un transducteur et est illustré à la figure 2.8b. Il s'agit d'un transducteur circulaire plat (non focalisé) de 20 mm de diamètre. L'annexe B décrit la méthode utilisée pour générer cette réponse. Cette onde de pression ressemble à une coquille d'une calotte quasi sphérique qui se propage en s'éloignant du transducteur.

2.3.2 Problème direct

L'équation de base du problème direct ressemble beaucoup à celle du modèle pour onde acoustique bipolaire (équation 2.13), mais elle exprime aussi un positionnement angulaire θ du transducteur plutôt qu'une simple translation :

$$V^{MACE}(\theta,t) = -K_I \iint_{\Omega} \sigma_0(\boldsymbol{r}_\Omega) \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_\Omega) \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_\Omega) \right) P_0 \, \hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega,\theta,t) \, \mathrm{d}\Omega \tag{2.26}$$

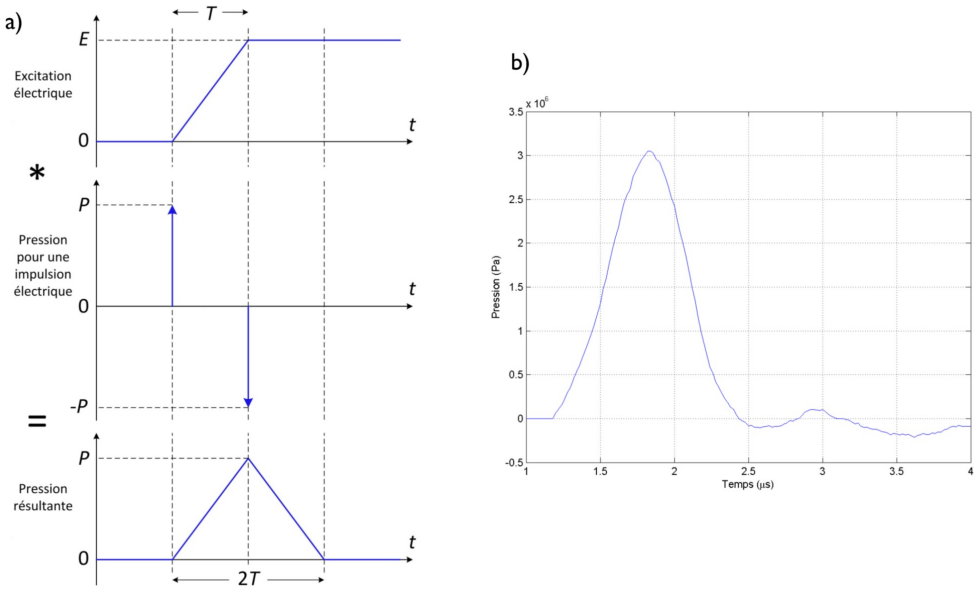

Figure 2.8 Excitation pouvant produire une onde acoustique unipolaire. (a) L'excitation est une rampe dont le temps de montée est égal au temps de transit dans le cristal du transducteur. (b) Signal de pression enregistré à la face externe du transducteur. (Sferruzza *et al.*, 1999)

La méthode que nous proposons ici pour l'imagerie de conductivité utilise l'inclinaison du faisceau ultrasonore pour balayer tout l'objet à chacun des tirs. La coquille de pression atteignant la cible obliquement, la région de MACE a la forme d'un arc et balaie la cible alors que l'onde continue à se propager. La figure 2.9 illustre ceci de même que la formation d'un signal de MACE capté par une paire d'électrodes. Connaissant la forme de l'onde, il est alors possible de relier à chaque instant une valeur d'amplitude de signal de MACE à la région d'interaction acousto-électrique. L'échantillonnage temporel du signal de MACE fournira un vecteur de données qui sera utilisé pour la reconstruction de conductivité. Le nombre de données indépendantes sera fonction de l'épaisseur de la coquille de pression et de la longueur de son parcours dans l'échantillon. Il est donc proportionnel à la largeur de bande du transducteur et est limité par cette dernière. Tout comme ce qui est fait en tomographie, diverses orientations du faisceau seront utilisées pour recueillir une quantité suffisante de données indépendantes pour faire une reconstruction de qualité.

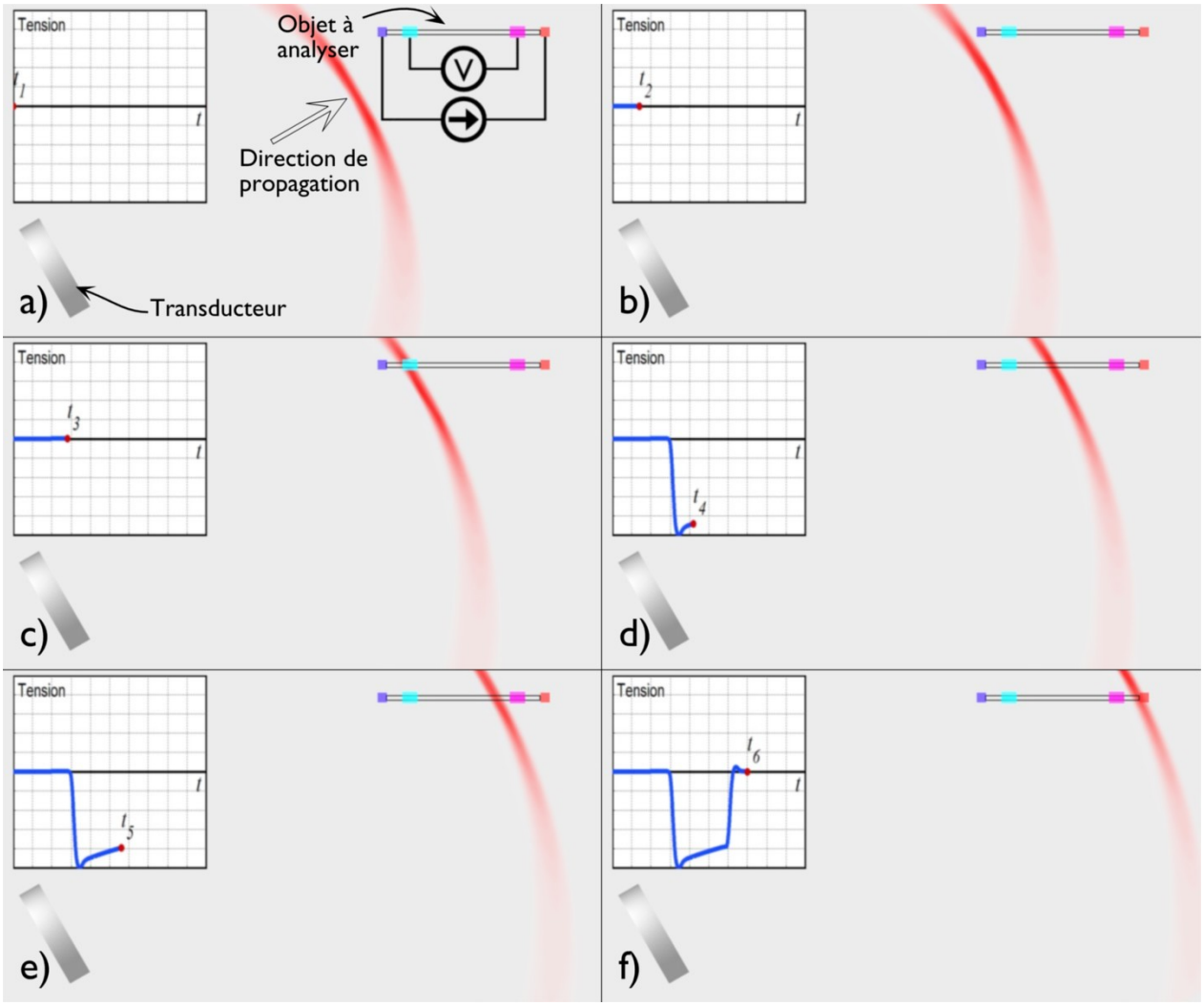

Figure 2.9 Échantillonnage du signal de MACE produit par l'onde unipolaire en transition. La tension V^{MACE} est mesurée par la paire d'électrodes internes, tandis qu'un courant est injecté par la paire d'électrodes externes. Dans cette configuration, la région de sensibilité acousto-électrique est limitée principalement à la région entre les électrodes de mesure. (a), (b) L'onde unipolaire progresse vers la région de sensibilité. (c) L'onde entre dans la région de sensibilité. (d), (e) Les échantillons à $t = t_4$ et t_5 renseignent sur l'objet conducteur. (f) L'onde est à l'extérieur de la région de sensibilité.

2.3.3 Problème inverse

Comme pour le modèle par onde bipolaire, un processus itératif par minimisation de fonctionnelle sert à la résolution du problème inverse. Cependant, dans le présent modèle, c'est le signal de MACE qui fournit les données objectives pour la reconstruction de la conductivité. Ainsi, la variable ν n'a pas à être isolée spécifiquement avant de procéder à la reconstruction. Une formulation similaire à une calibration doit cependant être employée dans la résolution de ce problème inverse pour obtenir une bonne estimation de l'inconnue σ_0. Elle a pour but de réduire les erreurs de représentation des connaissances *a priori* dans le modèle. Par exemple, la distribution de potentiel électrique, qui est déterminante pour la sensibilité acousto-électrique, est fortement liée à la position des électrodes, qui, par ailleurs, peut ne pas être connue avec précision. En prenant la formulation décrite ci-dessous, cette connaissance exacte de la position des électrodes devient moins critique. Ce raisonnement s'applique également au problème numérique, où la distribution de potentiel électrique obtenue pour une géométrie donnée dépend beaucoup de la discrétisation du domaine. La méthode proposée pour gérer ce type de problèmes dans le modèle consiste à redéfinir la mesure V^{MACE} en fonction de mesures de référence.

Nous sommes intéressés par deux représentations. La première, qui sera identifiée par $R0$, spécifie que les variables associées (géométrie, champ acoustique...) caractérisent les distributions obtenues lors de l'acquisition expérimentale (ou de la simulation de telles acquisitions). La seconde représentation, qui sera identifiée par $R1$, spécifie que les variables associées caractérisent les distributions obtenues par le modèle que nous nous faisons de ces conditions réelles.

Nous ferons l'approximation que les signaux $V^{MACE}_{\sigma_0,R1}$ prédits par le modèle, associés à la conductivité σ_0 à estimer, concordent avec ceux acquis en pratique ($V^{MACE}_{\sigma_0,R0}$), sauf pour un effet multiplicatif par une fonction f inconnue :

$$V^{MACE}_{\sigma_0,R1}(\theta,t) = f(\theta,t)V^{MACE}_{\sigma_0,R0}(\theta,t) \tag{2.27}$$

Cette fonction $f(\theta,t)$ pourrait, par exemple, représenter une atténuation globale du champ acoustique en fonction de la profondeur de pénétration dans l'échantillon. Elle pourrait aussi inclure un facteur sur le courant effectivement injecté dans l'échantillon.

Nous ferons ensuite l'hypothèse que nous avons accès à un ensemble de mesures de référence $V^{MACE}_{\sigma_1,R0}$ produites sur une conductivité σ_1 connue, et que ces mesures sont soumises aux mêmes conditions d'acquisition que celles sur σ_0. Nous ferons alors l'approximation que les signaux $V^{MACE}_{\sigma_1,R1}$ prédits par le même modèle, associés à cette conductivité σ_1, concordent

avec ceux de l'acquisition, sauf pour ce qui est de cette même fonction f multiplicative :

$$V^{MACE}_{\sigma_1,R1}(\theta,t) = f(\theta,t)V^{MACE}_{\sigma_1,R0}(\theta,t) \tag{2.28}$$

En combinant les équations 2.27 et 2.28, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{V^{MACE}_{\sigma_0,R1}}{V^{MACE}_{\sigma_1,R1}} = \frac{f\,V^{MACE}_{\sigma_0,R0}}{f\,V^{MACE}_{\sigma_1,R0}} \tag{2.29}$$

$$\Rightarrow V^{MACE}_{\sigma_0,R1} = V^{MACE}_{\sigma_1,R1}\frac{V^{MACE}_{\sigma_0,R0}}{V^{MACE}_{\sigma_1,R0}} \tag{2.30}$$

L'équation 2.30 est celle qui servira à calculer les valeurs V^{MACE} correspondantes à la représentation du modèle pour la conductivité σ_0 à estimer.

Le système d'équations du problème inverse à résoudre est une équation intégro-différentielle, soit :

$$V^{MACE}_{\sigma_0,R1}(\theta_i,t_j) = \left[-K_I \iiint_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{r}_\Omega)\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_\Omega)\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_\Omega)\right) P_0\,\hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega,\theta_i,t_j)\,\mathrm{d}\Omega\right]_{R1} \tag{2.31}$$

où $i = 1,\ldots,N^\theta$ et $j = 1,\ldots,N^t$. La valeur N^θ correspond au nombre d'orientations du transducteur, tandis que N^t correspond au nombre d'échantillons temporels tirés d'une acquisition. Ce système d'équations comporte alors $N^\theta \times N^t$ équations. La forme discrète de l'équation 2.30 devient alors :

$$V^{MACE}_{\sigma_0,R1}(\theta_i,t_j) = V^{MACE}_{\sigma_1,R1}(\theta_i,t_j)\frac{V^{MACE}_{\sigma_0,R0}(\theta_i,t_j)}{V^{MACE}_{\sigma_1,R0}(\theta_i,t_j)} \tag{2.32}$$

Un filtrage temporel du signal de MACE peut s'avérer utile pour en réduire le bruit [4]. L'équation 2.31 devient alors :

$$V^{MACE}_{\sigma_0,R1}(\theta_i,t) = \tilde{E}(t) \overset{t}{*} \left[-K_I \iiint_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{r}_\Omega)\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_\Omega)\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_\Omega)\right) P_0\,\hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega,\theta_i,t)\,\mathrm{d}\Omega\right]_{R1} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow V^{MACE}_{\sigma_0,R1}(\theta_i,t_j) \;=\; & \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}(\tau)\left[-K_I\iiint_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{r}_\Omega)\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_\Omega)\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_\Omega)\right)\right. \\ & \left.\times P_0\,\hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega,\theta_i,t_j-\tau)\,\mathrm{d}\Omega\right]_{R1}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{2.34}$$

L'équation 2.34 montre qu'en absence de bruit, filtrer temporellement V^{MACE} équivaut à

4. Dans le cas où le filtre est de type passe-bas, le lissage obtenu peut contribuer à stabiliser l'algorithme de reconstruction.

filtrer temporellement le signal acoustique. Dans le cas où le transducteur a un comportement linéaire par rapport à son signal d'excitation, cette opération de filtrage pourrait aussi être faite directement sur le signal de commande.

2.4 Comparaison et limitations des modèles présentés

Les modèles présentés aux sections 2.2 et 2.3 ont plusieurs points communs, mais ont aussi des différences importantes.

Dans les deux cas, le but est d'obtenir la conductivité électrique sur la grille de reconstruction à partir des signaux mesurés, en respectant aussi les conditions d'acquisition. De plus, cette conductivité électrique sera la seule variable indépendante, tandis que les variables de potentiel électrique φ^I et φ^L seront dépendantes de cette conductivité électrique. Enfin, la résolution du problème inverse se fera par une minimisation d'une fonctionnelle en utilisant l'approche décrite au chapitre 4.

Une des différences principales entre ces modèles est que le modèle pour l'onde unipolaire permet d'extraire plusieurs mesures à partir du signal de MACE obtenu à une position donnée du transducteur, tandis que le modèle avec l'onde bipolaire associe seulement une mesure à la position d'excitation. Cette différence provient de l'exploitation de la propagation de l'onde acoustique pour balayer l'échantillon. Une autre différence notable est que le modèle basé sur l'onde unipolaire effectue le processus de reconstruction en ayant comme valeurs de données objectives celles du signal de MACE plutôt que celles de la sensibilité acousto-électrique.

Plusieurs hypothèses sont implicitement faites dans les modèles proposés afin de simplifier la formulation. De manière générale, l'onde acoustique est modélisée comme étant indépendante des hétérogénéités du milieu dans lequel elle se propage. Ceci comprend la diffraction, les variations de vitesse du son et les interactions avec les objets de la géométrie électrique. Ensuite, l'atténuation acoustique n'est pas incluse. Enfin, la valeur de K_I (la constante qui exprime l'amplitude de la modulation de la conductivité par la pression) sera considérée comme étant la même pour tous les milieux conducteurs.

CHAPITRE 3

EXPÉRIMENTATION

Ce chapitre présente quelques observations expérimentales qui ont été faites dans le but de mieux comprendre la formation des signaux de MACE et de définir certains paramètres qui seront utilisés dans la mise en œuvre numérique des modèles.

La section 3.1 décrit le montage réalisé dans le cadre de ce projet. Elle reprend l'essentiel du contenu d'un article de conférence (Gendron *et al.*, 2009). La section 3.2 décrit la procédure qui a été suivie pour obtenir les signaux de MACE. Ces signaux ont été acquis avec une excitation acoustique du même type que celle utilisée pour étudier la méthode pour onde bipolaire décrite dans ce projet. Les signaux recueillis et leur analyse sont discutés à la section 3.3.

3.1 Montage réalisé

Le montage expérimental réalisé est illustré aux figures 3.1 à 3.3. Un bassin d'eau contient le transducteur ultrasonore produisant la MACE à l'intérieur de la cellule de mesure. Cette cellule de mesure est constituée d'une cavité scellée remplie d'une solution électrolytique de 0.9 % NaCl et d'une chambre étanche pouvant accueillir les circuits électroniques de premier niveau servant à l'application des courants et à la mesure des tensions. La seconde partie des circuits électroniques nécessaires à ces fonctions est située à l'extérieur de ce bassin. Cette configuration a été choisie afin de placer les sources de courant et les préamplificateurs aussi près que possible des électrodes. Puisque nous utilisons alors des câbles d'interconnexion très courts (quelques cm) entre les électrodes et les circuits de premier niveau, nous préservons la grande impédance de sortie des sources de courant et la grande impédance d'entrée des préamplificateurs qui seraient autrement réduites par les capacités parasites des câbles.

3.1.1 Cellule de mesure

La cellule de mesure, représentée à la figure 3.4 et montrée à la figure 3.5, est constituée des composants suivants :

Chambre étanche

Cette chambre est conçue pour loger le circuit imprimé (PCB) de $35,6 \times 25,4$ mm^2 contenant les préamplificateurs et les sources de courant. Ce PCB est montré à la figure 3.6.

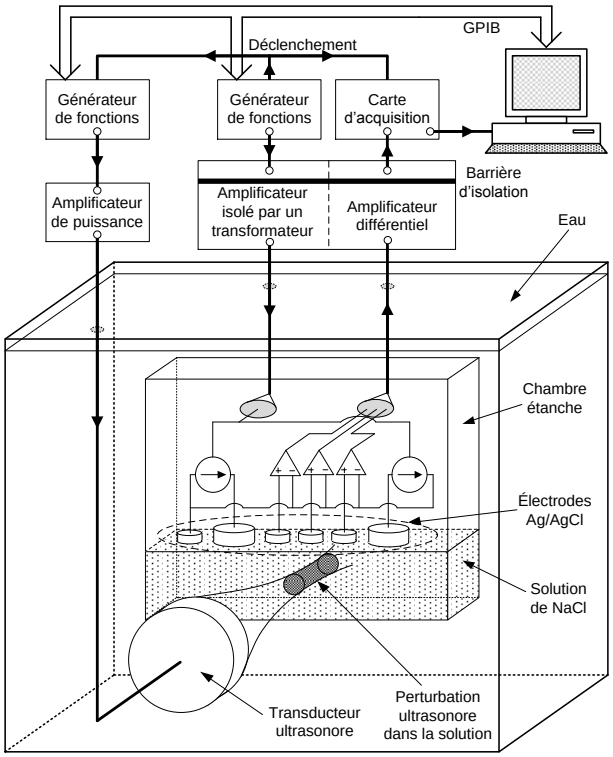

Figure 3.1 Schéma du montage expérimental réalisé.

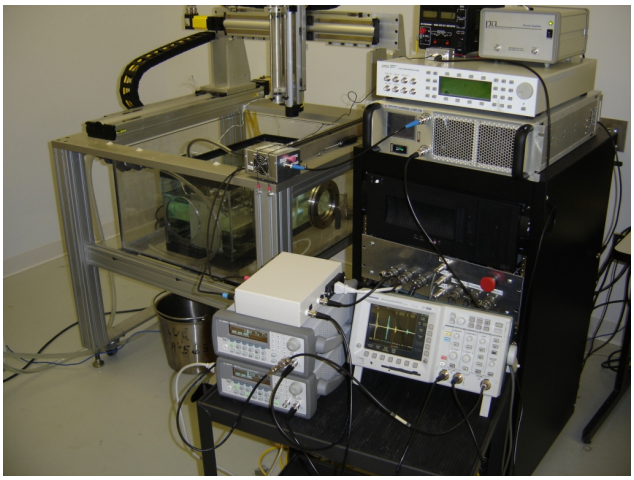

Figure 3.2 Montage complet. Sur cette figure, un oscilloscope est utilisé au lieu de la carte d'acquisition.

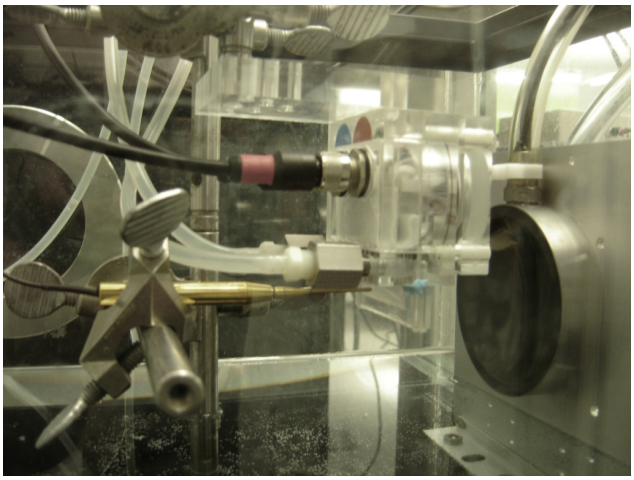

Figure 3.3 Cellule de mesure et transducteur ultrasonore. Un hydrophone aiguille (visible à gauche) est placé pour mesurer le champ acoustique traversant la cavité électrolytique.

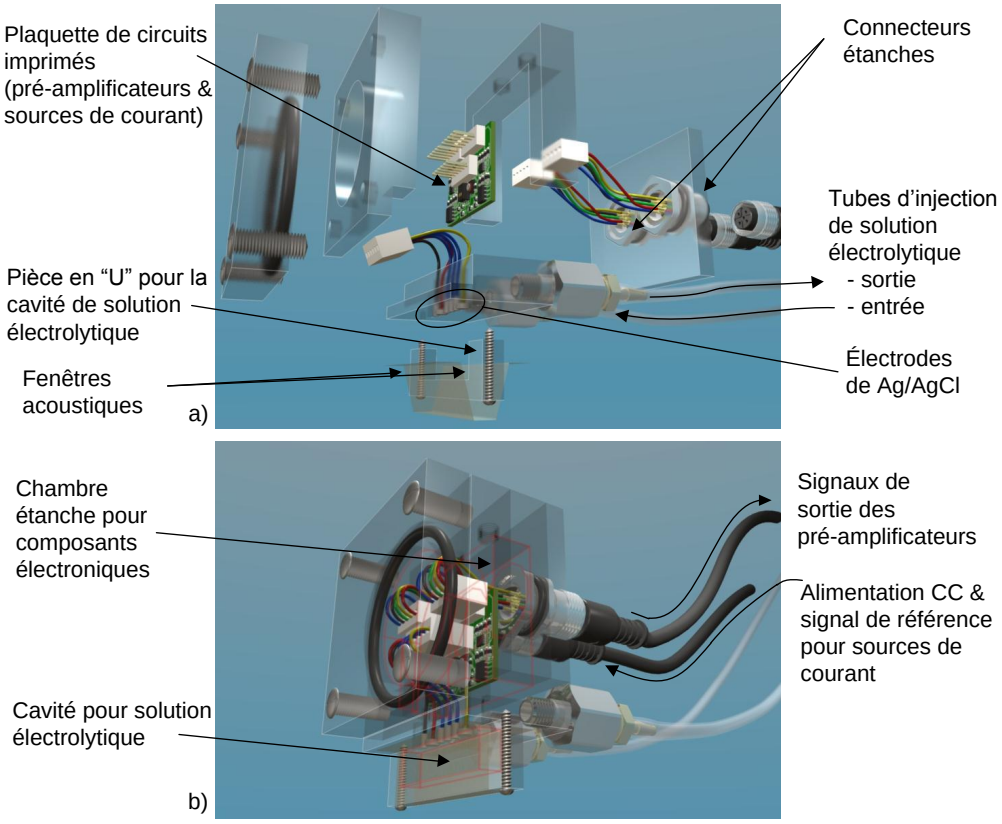

Figure 3.4 Cellule de mesure. (a) Vue avant l'assemblage. (b) Vue de la cellule assemblée.

Figure 3.5 Photographie de la cellule de mesure assemblée. De petits morceaux de mastic de fixation sont installés aux extrémités des plis concaves des membranes acoustiques pour assurer l'étanchéité de la cavité électrolytique.

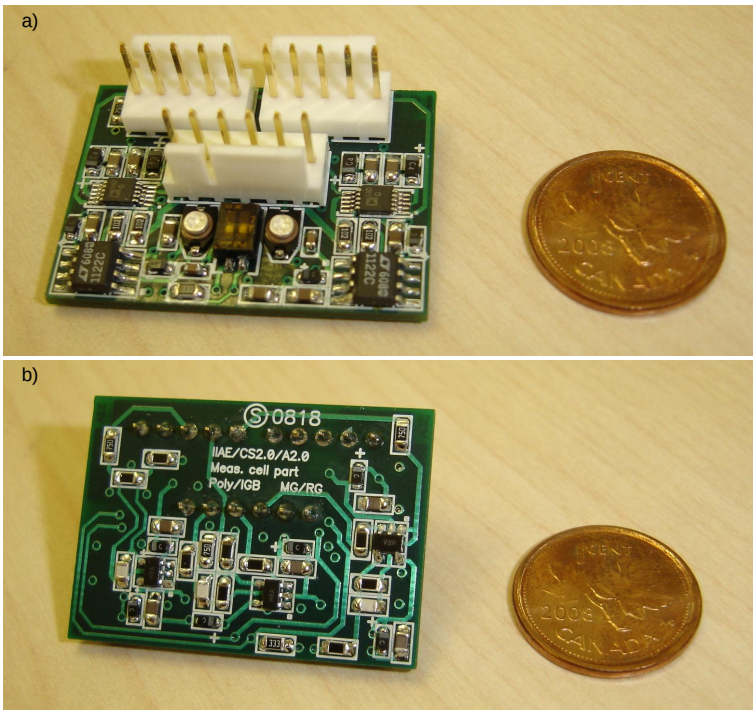

Figure 3.6 Photographies du circuit imprimé des préamplificateurs et des sources de courant. (a) Vue du dessus. (b) Vue du dessous.

Cavité électrolytique

La partie inférieure de la cellule de mesure comporte une cavité pouvant accueillir une solution électrolytique qui sera insonifiée pour observer la MACE. La taille de la cavité est déterminée par une pièce en « U » fixée par des vis. Dans la configuration actuelle, cette cavité mesure $42,0 \times 10,0 \times 6,9$ mm^3. Elle est fermée par deux fenêtres acoustiques de ruban adhésif de $0,05$ mm d'épaisseur. Ces fenêtres ont pour but de laisser passer les ondes acoustiques en affectant le moins possible leur propagation. Elles permettent aussi de contenir la solution électrolytique dans un volume restreint et limitent la sensibilité du système de mesure à cette région. Notons aussi que cette cavité peut contenir un objet à analyser, tel que montré sur la figure 3.7.

Entrée et sortie de fluide

Deux entrées filetées situées dans la partie de la cavité électrolytique permettent de fixer des tubes de plastique servant à remplir et à drainer cette cavité. Il s'agit d'une manière efficace de remplacer la solution électrolytique durant une expérimentation sans modifier le montage. Il est alors possible d'étudier l'effet de la concentration saline ou sa composition sur les signaux recueillis.

Électrodes

Six électrodes d'Ag/AgCl sont situées sur la partie supérieure de la cavité électrolytique. Une électrode de $2,1$ mm de diamètre agit comme référence du potentiel électrique, deux électrodes de $4,2$ mm de diamètre servent à l'injection du courant, et trois autres électrodes de $2,1$ mm de diamètre servent à la mesure de différences de potentiel. Telles que représentées à la figure 3.1, ces trois dernières électrodes sont reliées à des préamplificateurs situés dans la chambre étanche à proximité de la cellule. Les signaux de sortie de ces préamplificateurs sont acheminés par un câble de $1,5$ m à un module d'amplification. Le choix de la paire de signaux appliqués à cet amplificateur différentiel se fait par des interrupteurs placés sur la face avant de ce module. Le choix de signaux provenant de différentes paires d'électrodes a pour but d'étudier l'effet de l'espacement des électrodes sur les signaux obtenus.

Des électrodes en Ag/AgCl ont été choisies en raison de leur faible potentiel de polarisation.

3.1.2 Transducteur ultrasonore

Le transducteur ultrasonore utilisé (H-101 S/N -080, Sonic Concepts Inc., Bothell, WA) est constitué d'un seul élément piézoélectrique dont la surface active a un diamètre de

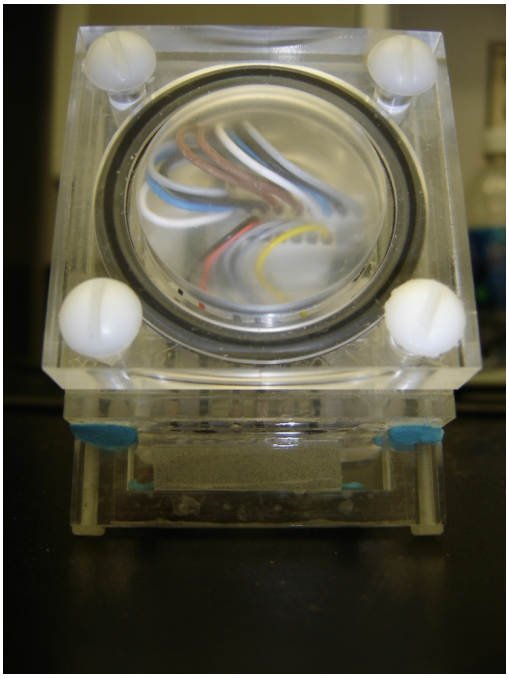

Figure 3.7 Photographie de la cellule de mesure avec un objet à analyser. Un bloc de gélatine est placé dans la cavité électrolytique. Un salin vient ensuite entourer le bloc de gélatine.

64, 00 mm et un rayon de courbure de 62, 64 mm. Son mode fondamental a une fréquence centrale de 1, 078 MHz. Le foyer a une largeur à mi-hauteur de 1, 75 mm et une longueur de 13 mm. Ces caractéristiques ont été mesurées avec un hydrophone aiguille (Precision Acoustics Ltd., Dorchester, Dorset, United Kingdom) de 1, 0 mm de diamètre.

Le signal d'excitation pour le transducteur provient d'un générateur de fonctions (33220A, Agilent Technologies Inc., Santa Clara, CA). Il est transmis à un amplificateur de puissance RF (BBS0D3FOQ, Empower RF Systems Inc., Inglewood, CA) avant de passer dans un réseau d'adaptation d'impédance et d'être acheminé au transducteur ultrasonore.

Le signal de pression mesuré au voisinage du foyer de ce transducteur pour une excitation par un créneau de 100 V durant 20 ns est tracé à la figure 3.8a, et son spectre d'amplitude est tracé à la figure 3.8b. La position de mesure est celle où l'hydrophone enregistre le signal ayant le maximum d'amplitude pour cette excitation quasi impulsionnelle.

3.1.3 Sources de courant

Les sources de courant sont constituées de deux circuits : (a) un amplificateur isolé par un transformateur audio (AIT) et (b) deux sources de courant contrôlées par une tension (SCCT) à entrée différentielle. Les circuits de l'AIT sont situés sur le PCB montré à la figure 3.9, tandis que les SCCT partagent la plaque avec les préamplificateurs du PCB à l'intérieur

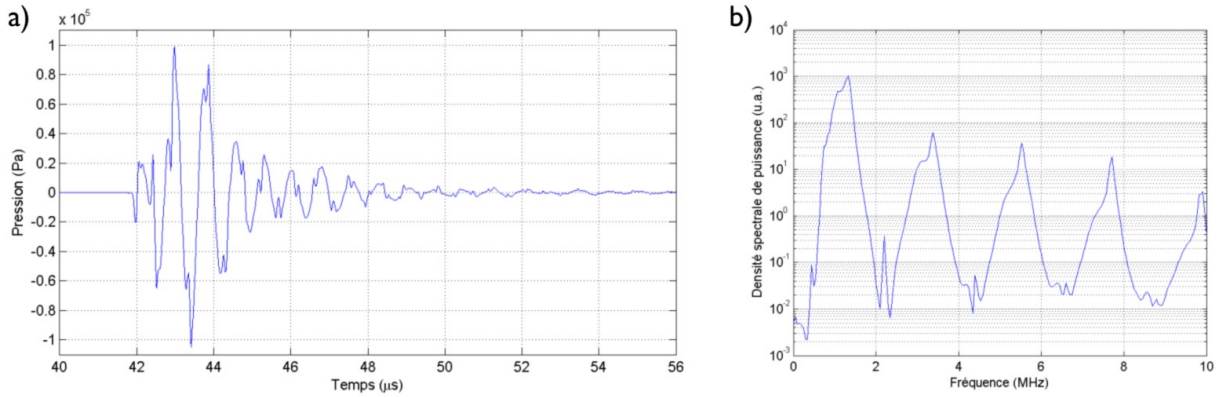

Figure 3.8 Signal de pression au foyer du transducteur et spectre de ce signal. (a) Signal de pression au foyer du transducteur pour une excitation par un créneau de 100 V durant 20 ns. Ce signal d'excitation a été obtenu par l'amplification de 40 dB (avec l'amplificateur de puissance) d'un créneau de 1 V durant 20 ns produit par le générateur de fonctions. La valeur de pression est obtenue par la multiplication du signal électrique en sortie de l'hydrophone avec le facteur de transduction de 850 nV/Pa spécifique à cet hydrophone. Le délai de 41,9 μs entre l'émission de l'onde et sa réception par l'hydrophone au foyer correspond bien à celui attendu pour une onde se déplaçant à environ 1480 m/s sur 62,64 mm. (b) Spectre du signal de pression. La composante principale de ce spectre est à environ 1,3 MHz et une première harmonique importante est à environ 3,4 MHz.

de la chambre étanche (figure 3.6). Le signal d'entrée de l'AIT provient d'un générateur de fonctions (33220A, Agilent). La sortie de l'AIT active les deux SCCT en opposition de phase, produisant ainsi une source et un puits de courant. Avec cette configuration, le courant circule principalement entre les deux électrodes d'injection de courant. Cependant, les asymétries des SCCT peuvent entraîner une légère fuite de courant par l'électrode de masse surtout lorsque la fréquence d'excitation est élevée. Ceci peut conduire à de la distorsion dans le champ de dérivation attendu et à la création d'un potentiel de mode commun pouvant introduire des erreurs dans les signaux mesurés. Le choix de la fréquence et de l'amplitude du courant injecté sont alors critiques au bon fonctionnement du système.

3.1.4 Amplificateur différentiel

Les préamplificateurs sont situés près des électrodes dans la chambre étanche. L'amplificateur différentiel est situé sur le PCB contenu dans un boîtier de plastique éloigné du bassin d'eau. La sortie différentielle de cet amplificateur est isolée par un transformateur à large bande. Les signaux au secondaire de ce transformateur sont envoyés à une carte d'acquisition (AL12250, Acquisition Logic, Chantilly, VA) pour l'enregistrement.

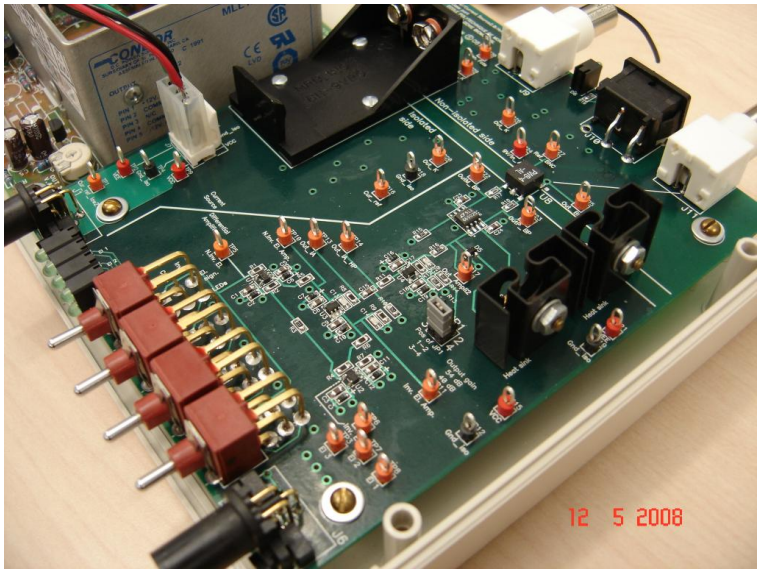

Figure 3.9 Photographie du circuit imprimé de l'amplificateur isolé par un transformateur audio et de l'amplificateur différentiel. Les composants et les traces du circuit de l'amplificateur isolé par un transformateur audio sont situés sur la face du dessous.

Cet amplificateur différentiel a un gain de tension de 50, soit 34 dB, et une largeur de bande à -3 dB allant de 40 kHz à 2,5 MHz.

3.1.5 Système de positionnement

La procédure d'imagerie par méthode d'onde bipolaire requiert le déplacement du champ acoustique du transducteur par rapport au système d'acquisition. Le montage réalisé utilise un système de positionnement contrôlé par moteurs sur 3 axes principaux où nous fixons la cellule de mesure. Ces moteurs sont commandés par un système de contrôle Galil (DMC-1850, Galil, Rocklin, CA). Les commandes de déplacement sont émises depuis un programme développé sur LabVIEW (National Instruments Corporation, Austin, TX) pour obtenir une procédure d'acquisition coordonnée complète.

3.2 Protocoles d'acquisition des données

La mesure précise des signaux de MACE requiert le retrait de la contribution de l'effet de Debye (Lavandier *et al.*, 2000a). Puisque l'effet de Debye a une amplitude indépendante du courant injecté, et que le signal de MACE est linéairement dépendant de ce courant (Lavandier *et al.*, 2000a), il est possible de retirer la contribution de l'effet de Debye en soustrayant deux signaux obtenus en appliquant des courants d'amplitude différente. La procédure choisie consiste à acquérir un premier signal lors de la crête positive de l'onde

sinusoïdale de courant et d'y soustraire le signal acquis lors de la crête négative.

Un signal d'interférence au repos (c'est-à-dire sans excitation acoustique) a été observé dans le montage. Ce signal est synchronisé à la séquence d'acquisition. Il peut être retiré partiellement en soustrayant le signal acquis au repos (obtenu lorsque le courant est injecté, en absence d'excitation acoustique) à celui acquis lorsque le courant est injecté et qu'il y a excitation acoustique. Tel que montré ci-dessous, le protocole d'acquisition permet de mesurer ces signaux au repos pour chaque polarité de courant.

La séquence d'acquisition de signaux est résumée au tableau 3.1.

Tableau 3.1 Séquence d'acquisition

# Acquisition	Courant appliqué	Excitation acoustique appliquée
1	$+I$	oui
2	$+I$	non
3	$-I$	oui
4	$-I$	non
5	0	oui

Les acquisitions 1 et 3 sont celles des signaux de MACE, acquis respectivement aux crêtes positives et négatives de l'onde de courant. Les acquisitions 2 et 4 sont celles des signaux au repos (sans excitation acoustique appliquée) mesurés aussi pour les deux polarités de courant. L'acquisition 5 est pour la mesure de l'effet de Debye (sans courant appliqué, mais avec l'excitation acoustique).

Pour chacune de ces 5 acquisitions, nous obtenons une moyenne de 200 événements. Cette procédure est répétée 5 fois pour mieux évaluer les signaux de repos qui seront soustraits des signaux avec excitation acoustique.

Cette séquence d'acquisition requiert le changement fréquent de configuration des générateurs de fonction et le transfert de données de la carte d'acquisition vers l'ordinateur. Ces appareils sont contrôlés par un programme développé sur LabVIEW (National Instruments Corporation) et reliés par une connexion GPIB.

3.3 Résultats expérimentaux

Cette section a pour but de montrer et de discuter quelques résultats de réalisations expérimentales produites avec le montage décrit à la section 3.1.

Quelques exemples de signaux mesurés et le traitement effectué pour faire ressortir le signal de MACE sont illustrés à la section 3.3.1. Elle illustre également la présence de l'effet de Debye dans les signaux mesurés. La section 3.3.2 donne un exemple de signal affecté par

la cavitation. La mesure de l'amplitude du signal de MACE en fonction de l'amplitude du courant injecté suit à la section 3.3.3, suivie de l'évaluation quantitative de la conductivité électrique de solutions salines de diverses concentrations. Pour terminer, la mesure de la sensibilité acousto-électrique de la cellule de mesure est décrite.

3.3.1 Forme des signaux obtenus, traitement du signal et observation de l'effet de Debye

Un exemple de signaux obtenus par le montage décrit précédemment est donné à la figure 3.10. Cette figure présente également le traitement effectué pour retirer les contributions de la MACE et de l'effet de Debye à partir des signaux bruts.

Cet exemple d'acquisition montre à la fois la manière avec laquelle l'effet de Debye affecte les signaux mesurés et le traitement requis pour retirer cet effet et conserver la contribution de la MACE. Ce traitement repose sur le fait que l'amplitude de l'effet de Debye est indépendante du courant injecté, tandis que la MACE est linéairement dépendante de ce courant. Cet exemple montre bien que le signal de MACE est plus net en effectuant le retrait des signaux de base à courant imposé et sans excitation acoustique. L'amplitude crête-à-crête du signal de Debye (avant amplification) capté par les électrodes est d'environ 49 μV, tandis que celle du signal de MACE est d'environ 28 μV.

Le rapport signal sur bruit (RSB) de ce signal de MACE est calculé de la façon suivante. La valeur V_{signal}^{RMS} du signal échantillonné est calculée par : $V_{signal}^{RMS} = \sqrt{\sum_k [V_{signal}]_k^2}$ sur une période de temps donnée, soit, dans le cas présent, sur la période comprise entre 45 et 55 μs. La valeur V_{bruit}^{RMS} est calculée de manière analogue sur une partie identifiée comme étant uniquement du bruit, soit entre 60 et 70 μs. Le rapport signal sur bruit est calculé par : $\text{RSB(dB)} = 20 \times \log_{10}(V_{signal}^{RMS}/V_{bruit}^{RMS})$. Les valeurs suivantes sont obtenues : $V_{signal}^{RMS} = 0,007688$ V, $V_{bruit}^{RMS} = 0,002908$ V, $V_{signal}^{RMS}/V_{bruit}^{RMS} = 2,64$, $\text{RSB} = 8,44$ dB.

3.3.2 Cavitation

La cavitation n'est pas identifiée comme étant un mécanisme d'interaction acousto-électrique, mais son effet sur la mesure de conductivité électrique peut être important.

La cavitation consiste en la création de cavités (bulles) dans un liquide lorsqu'une forte décompression locale sépare les molécules au point de briser leur cohésion et de créer un vide à cet endroit (Mason et Lorimer, 2002). Les conditions d'excitation acoustique (intensité, fréquence) et l'environnement (température, pression externe, viscosité du fluide...) affecteront directement la pression acoustique requise pour produire ces bulles. Ainsi, dans le cas où cette bulle se trouve dans un champ de pression oscillant, plusieurs scénarios peuvent se

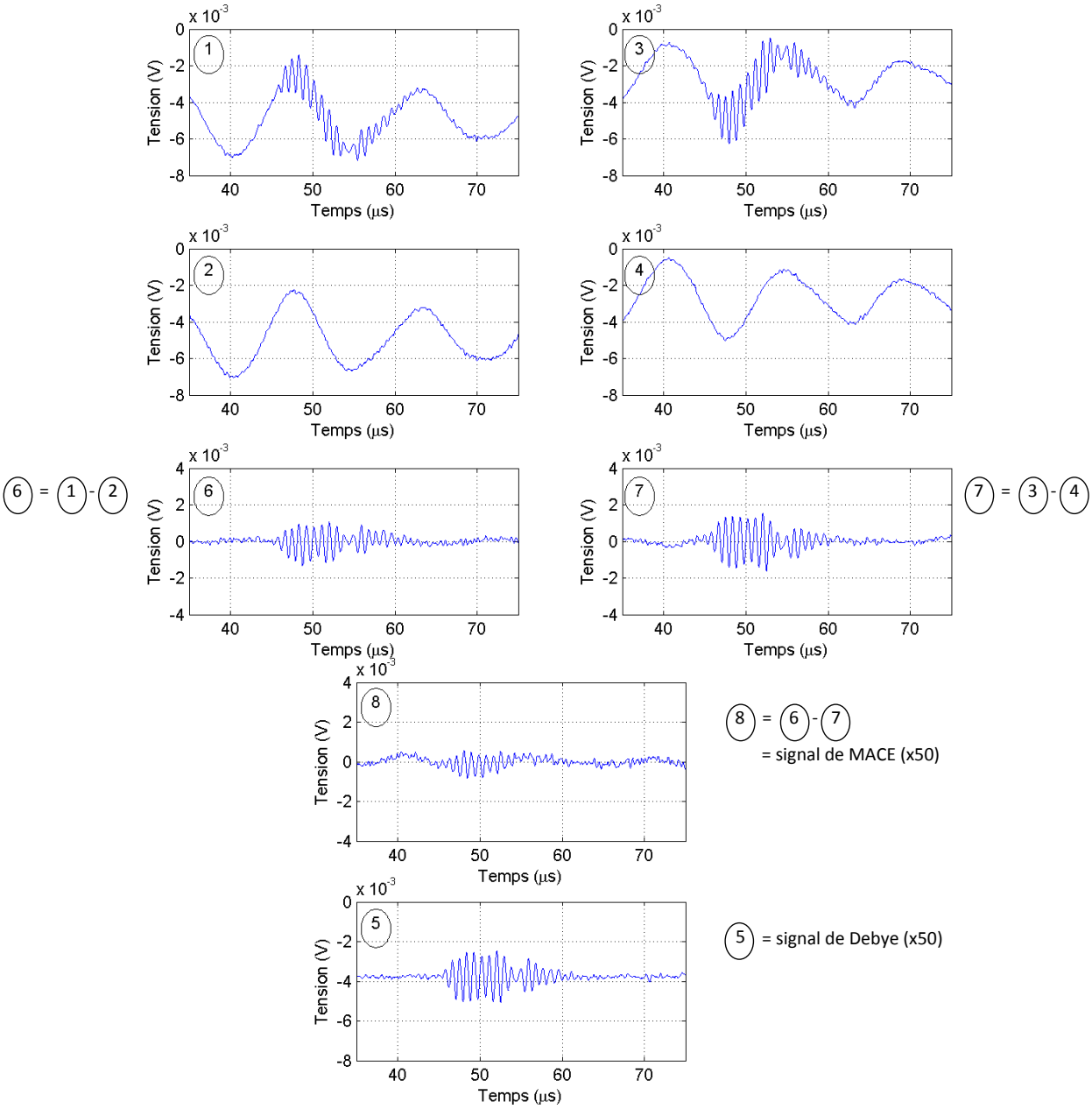

Figure 3.10 Exemple de signaux obtenus à la sortie de l'amplificateur et du traitement pour tirer l'information de MACE. Les signaux #1 à #5 correspondent aux acquisitions décrites à la table 3.1. L'effet de Debye se manifeste de manière indépendante du courant injecté. Le gain d'amplification de tension est de 50. L'amplitude du courant injecté est de 4,675 mA. Le signal d'excitation au transducteur est un train d'ondes sinusoïdales de 8 cycles à 1,100 MHz et de 40 V d'amplitude crête. La pression produite au foyer est estimée à environ 1,5 MPa.

réaliser. Par exemple, il est possible que cette bulle s'effondre immédiatement après avoir été produite. Il se peut aussi que sa taille oscille de façon stable en suivant le cycle de compression/décompression pour plusieurs cycles. Généralement, la disparition de la bulle s'accompagne d'une implosion pouvant produire une onde de choc de forte énergie et endommager son environnement (par exemple, elle peut éroder une surface de métal ou un tissu biologique).

La cavitation est parfois recherchée dans les applications biomédicales où l'objectif est de détruire des tissus (comme pour l'ablation de tumeurs cancéreuses ou la fragmentation de calculs rénaux), car elle accompagne le processus de destruction produit par la chaleur et la pression (Holt et Roy, 2001; Xu *et al.*, 2007; Yoshizawa *et al.*, 2009). Cependant, pour les applications d'imagerie, il faudra l'éviter ou la minimiser en s'assurant que la condition de pression de raréfaction acoustique maximale se trouve à l'intérieur des limites médicales reconnues.

D'autre part, la cavitation a un effet perturbateur très important sur la mesure de conductivité électrique, car les bulles produites sont des régions de très faible conductivité. De plus, lorsqu'elles n'implosent pas, ces bulles vont osciller à la même fréquence que l'onde acoustique, contribuant ainsi à moduler la conductivité tout comme ce qui est à l'origine du signal de MACE, qu'il ne sera pas possible d'isoler par filtrage. Pour ajouter à cela, la présence de ces bulles affectera significativement la propagation de l'onde acoustique, car elles ont une impédance acoustique très différente de celle du fluide. La cavitation devra donc être évitée pour obtenir des signaux de MACE utiles.

La figure 3.11 montre un signal de MACE où apparaissent de fortes perturbations sous forme d'impulsions négatives que nous attribuons à la cavitation. Cette affirmation est soutenue par les arguments suivants. D'une part, l'amplitude de l'onde de pression de 0,90 MPa est de l'ordre de ce qui est rapporté pour produire de la cavitation dans l'eau (non dégazée). D'autre part, ces impulsions négatives sont détectées à partir d'une certaine valeur seuil de pression acoustique et leur amplitude augmente alors rapidement avec la pression. Enfin, nous pouvons prévoir que la présence de bulles se manifestera principalement lors de la phase de décompression de l'onde, la cavitation étant justement amorcée par une forte décompression et les bulles ayant tendance à prendre de l'expansion lors de la décompression et à se comprimer lors de la phase de compression. Ce comportement, où l'influence des bulles est grande lors de la décompression, tandis qu'elle est faible lors de la compression, se traduit sur les signaux mesurés par des pics présents seulement dans une direction (ici, vers le bas). Notons aussi que ces pics de grande amplitude débutent de façon très abrupte, ce qui est caractéristique d'un phénomène comportant un seuil.

Nous avons pu confirmer la création de bulles de cavitation dans des conditions similaires,

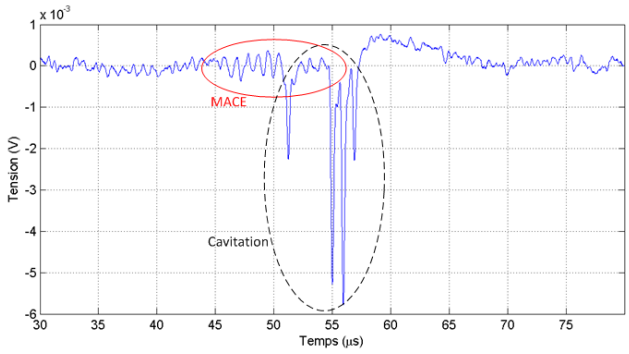

Figure 3.11 Exemple de signal montrant la présence de cavitation. La contribution de la MACE est également visible. Ce signal est celui obtenu à la sortie de l'amplificateur. L'excitation acoustique est un train d'ondes sinusoïdales de 8 cycles à 1,078 MHz et de 25 V d'amplitude crête, produisant une pression au foyer d'environ 0,90 MPa.

en utilisant un montage semblable à ceux de Thomas *et al.* (2005) et Farny *et al.* (2009). Ce montage inclut la partie acoustique du montage de base pour la mesure de MACE, soit le transducteur, un générateur de fonctions et l'amplificateur de puissance pour produire un champ acoustique périodique. La détection de bulles se fait par un autre transducteur ultrasonore focalisé, placé en mode de réception, dont l'axe de propagation est perpendiculaire au premier transducteur et où le foyer correspond à celui du premier. Ce transducteur en mode de réception capte à quelques occasions des signaux de pression dont la forme correspond à l'excitation utilisée et dont le délai entre l'excitation et la réception correspond au temps nécessaire pour une onde se déplaçant dans l'eau pour parcourir le trajet du transducteur d'excitation jusqu'à son foyer, puis de cet endroit au transducteur en réception. Cette onde de pression provient fort probablement de la diffusion de l'onde incidente sur une bulle produite lors d'une excitation (train d'ondes) précédente (Farny *et al.*, 2009).

3.3.3 Mesure de l'amplitude du signal de MACE en fonction de l'amplitude du courant injecté

Une première validation du montage est faite en mesurant l'amplitude du signal de MACE en fonction du courant injecté. Une relation de proportionnalité est attendue, tel qu'indiqué par le modèle et obtenu expérimentalement par Lavandier *et al.* (2000a).

Pour obtenir des signaux de MACE de la plus grande amplitude possible, tout en restant dans les limites de fonctionnement du système, nous avons utilisé une solution saline ayant une faible conductivité, soit 0,35 S/m.

L'équation 2.15 permet d'extraire l'amplitude du signal de MACE, $\tilde{V}^{MACE}(\omega)$, pour les fréquences désirées. La fenêtre de signal retenu pour le calcul de l'amplitude du signal de

MACE est bornée par l'intervalle $t_0 = 40$ μs et $t_f = 55$ μs. Nous obtenons une mesure de l'amplitude du signal de MACE en faisant la somme de composantes du spectre de Fourier dans la bande passante [1,07 - 1,27] MHz, soit 100 kHz de part et d'autre de la fréquence d'excitation du transducteur à 1,175 MHz. Cette mesure d'amplitude est tracée à la figure 3.12.

Sur cette figure, une régression linéaire est également tracée. L'ordonnée à l'origine de la droite de régression n'est pas nulle. Sa valeur correspond à l'amplitude quadratique moyenne du bruit (additif) de mesure dans la plage de fréquence du signal.

3.3.4 Mesure de la sensibilité acousto-électrique de la cellule de mesure

Cette expérience a été réalisée avec une excitation acoustique par un train de 8 cycles d'ondes sinusoïdales à 1,100 MHz. L'amplitude du courant injecté est de 4,675 mA. La conductivité électrique est de 0,35 S/m.

Le balayage acoustique est effectué sur une grille régulière de 33 points espacés de 0,25 mm selon x par 5 points espacés de 1,00 mm selon y.

La plage temporelle choisie pour l'extraction des composantes fréquentielles et le calcul de l'amplitude des signaux de MACE est $[t_0 = 45\ \mu\text{s}, t_f = 55\ \mu\text{s}]$. Les composantes fréquentielles considérées sont celles comprises entre 1,00 et 1,18 MHz.

La figure 3.13a illustre l'amplitude obtenue pour les signaux de MACE sur la grille d'acquisition. Les signaux ont été validés pour écarter ceux pour lesquels il y avait présence de cavitation qui aurait rendu difficile l'évaluation de l'amplitude du signal de MACE.

La position et la taille des électrodes sont à l'échelle. Pour ce qui est du positionnement latéral du transducteur par rapport à la cellule de mesure, il a été établi par un recalage des distributions d'amplitude des signaux de Debye (annexe C).

Il est utile de comparer ces observations des signaux de MACE avec ce qui pourrait être obtenu à partir de la résolution numérique du problème direct général présenté au chapitre précédent (équations 2.13 et 2.14). La figure 3.13b montre les résultats de la simulation dans des conditions reproduisant celles de l'expérimentation : géométrie 3D, tailles et positions des électrodes, amplitude du courant injecté et onde de pression 3D générée à partir des mesures expérimentales de la réponse électromécanique du transducteur. La méthode de calcul de l'amplitude des signaux simulés est la même que celle utilisée avec les signaux expérimentaux. Les résultats expérimentaux et de simulation concordent généralement bien, tant pour ce qui est de l'amplitude que de la distribution spatiale de la MACE. La région principale de grande sensibilité se situe dans les 4 premiers millimètres sous les électrodes de mesure.

Avec la résolution spatiale de l'acquisition expérimentale qui a été réalisée, le patron

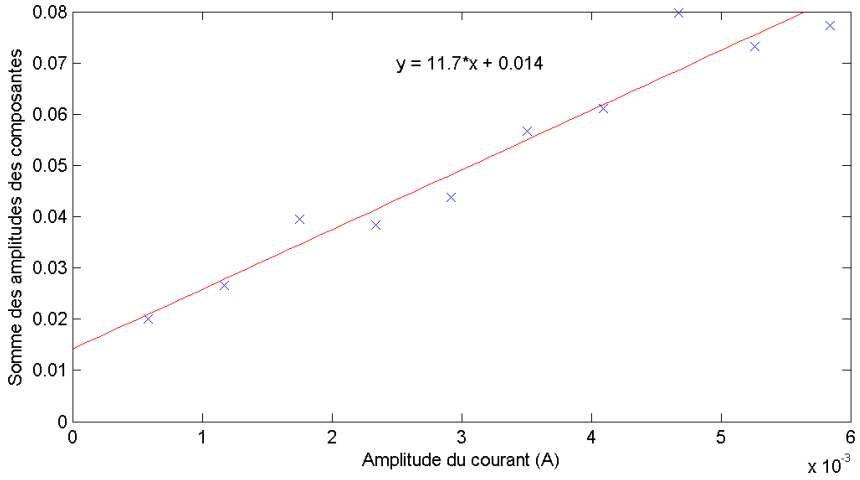

Figure 3.12 Somme des amplitudes des composantes des signaux de MACE entre 1,07 et 1,27 MHz en fonction de l'amplitude du courant injecté. La somme des amplitudes est exprimée en unités arbitraires. Pour cette série d'acquisitions, le moyennage des signaux s'est fait sur 2560 événements (10 répétitions de 256 événements chacune).

d'amplitude en fonction de la position demeure difficilement observable. Celui fourni par la simulation montre que ce patron contient des variations rapides, et ce, principalement dans la région près des électrodes. Il faut principalement retenir, de cette expérience, les similitudes de la forme générale de ces patrons plutôt que de celle détaillée. Cette forme détaillée dépend de plusieurs facteurs de position et d'orientation qui sont difficiles à retrouver exactement par simulation, d'autant plus que le modèle de formation du signal est relativement élémentaire. De plus, une comparaison rigoureuse et beaucoup plus complexe serait celle où la forme complète de chacun des signaux serait mise en correspondance avec sa version de simulation. Dans l'étude conduite ici, la seule information ayant servi à produire un patron visuel d'amplitude est une caractéristique fréquentielle du signal.

Il est intéressant à ce moment de comparer l'amplitude des signaux expérimentaux avec ceux obtenus par simulation. Le signal de MACE à la position d'acquisition (x = 2,75 mm, y = -3,00 mm) est tracé à la figure 3.14. Il s'agit de celui ayant l'amplitude maximale de cet ensemble d'acquisitions. Son amplitude est d'environ $(0,50 - -0,80)/2$ mV $= 0,65$ mV à la sortie du système d'amplification (dont le gain est de 34 dB à 1 MHz). En comparaison, le point sur la distribution provenant de la simulation, atteignant un maximum dans cette région, est à la position (x = 2,125 mm, y = -2,00 mm). Le signal de MACE à cette position est tracé également sur cette figure. Son amplitude est de 0,0089 mV avant amplification, c'est-à-dire qu'à la sortie du système d'acquisition, il devrait être d'environ $50 \times 0,0089$ mV $= 0,45$ mV. Ainsi, l'ordre de grandeur des signaux semble être bien respecté.

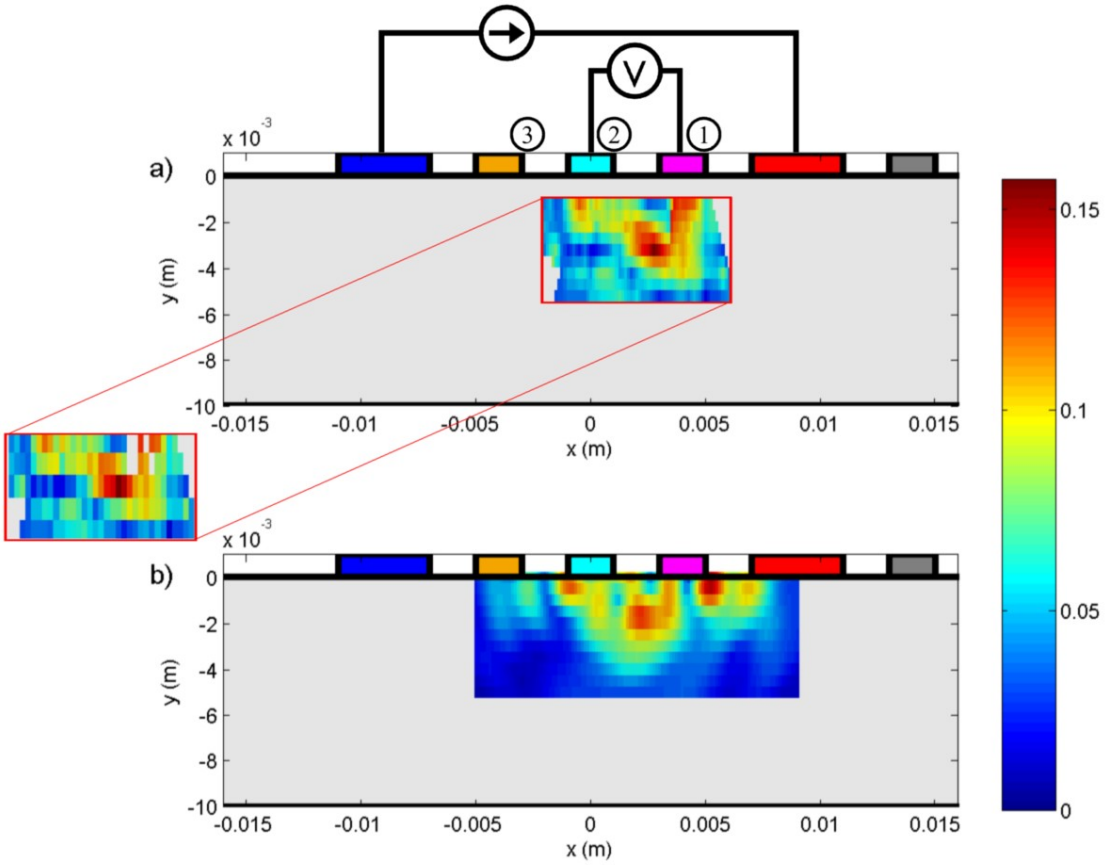

Figure 3.13 Somme des amplitudes des composantes (en unités arbitraires) des signaux de MACE entre 1,00 et 1,18 MHz en fonction de la position d'excitation acoustique. Le foyer du transducteur est positionné sur le plan médian passant par le centre des électrodes. La tension est mesurée entre les électrodes #1 et #2. L'électrode #3 est déconnectée. (a) Données acquises expérimentalement. Une interpolation a été réalisée sur une grille ayant la même finesse qu'en (b) pour faciliter la comparaison des résultats. Cette interpolation est réalisée à partir des données originales, affichées en retrait sur la gauche. La région d'acquisition est délimitée par le rectangle rouge. Pour les lieux où la cavitation se manifeste dans les signaux acquis, la valeur de l'amplitude du signal de MACE est indéterminée et est alors affichée en blanc. (b) Résultat de simulation utilisant la méthode et les programmes développés pour résoudre les problèmes directs présentés aux chapitres suivants. Dans cette simulation, le transducteur a été tourné de 2 degrés autour de l'axe y, ce qui a pour effet d'enlever un peu de symétrie dans la forme générale de l'amplitude du signal de MACE en fonction de la position. De plus, son foyer est placé dans le plan $z = -4,0$ mm. Cette position a été déterminée par le délai d'arrivée du train d'ondes sur les signaux expérimentaux.

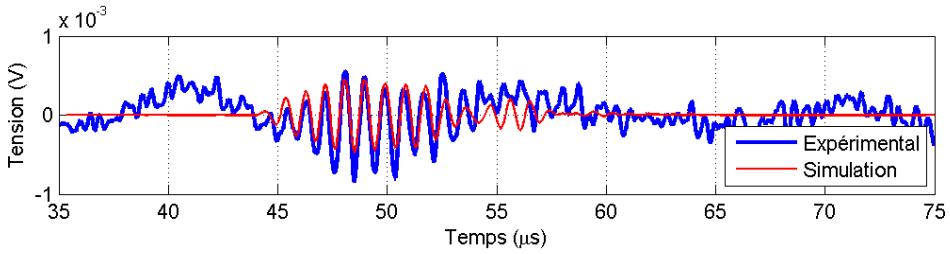

Figure 3.14 Signal de MACE à la position du maximum d'amplitude. Le signal expérimental tracé est celui à la sortie de l'amplificateur d'instrumentation. Le signal de simulation tracé est celui obtenu dans les conditions similaires et multiplié par un facteur 50 (représentant l'amplification du système d'acquisition). Le signal de simulation a été faiblement retardé (0,35 μs) pour ajuster les phases, de manière à faciliter la comparaison.

CHAPITRE 4

MISE EN ŒUVRE DE LA MÉTHODE DE RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

La résolution numérique du problème direct, et par la suite du problème inverse, consiste, dans une large mesure, à solutionner des équations différentielles sur un domaine discrétisé et assujetti à des conditions de frontières. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser une méthode sans maillage basée sur celle appelée « Finite-Cloud », par opposition aux méthodes dites d'« éléments finis » d'usage plus courant. Ce type de méthode sans maillage est bien adapté aux problèmes multiphysiques (Aluru et Li, 2001) où des échelles ou encore des stratégies différentes de discrétisation du domaine peuvent être requises pour solutionner de façon efficace le problème de chacun des types de physique. Par exemple, dans ce travail, nous trouverons une plus grande densité de points de discrétisation au voisinage des électrodes pour ce qui est de résoudre les problèmes électrostatiques et de calculer les densités de courant, et une plus grande densité de points au voisinage du foyer pour ce qui est de la représentation de l'onde acoustique bipolaire. Cette gestion raisonnée de l'échantillonnage des diverses fonctions est appréciée en particulier pour résoudre des problèmes en 3D ou en 4D, où l'utilisation d'une même discrétisation assez fine pour résoudre toutes les physiques devient rapidement prohibitive.

La méthode sans maillage qui a été développée pour la résolution d'équations différentielles de cette thèse est décrite à l'annexe A. Sa mise en œuvre a été programmée en Matlab (MathWorks Inc., Natick, MA). La validation des programmes a été réalisée par plusieurs tests de base présentés dans la littérature des méthodes sans maillage, dont ceux de Lam *et al.* (2006) et de Jin *et al.* (2005). Les performances obtenues concordent avec ce qui est décrit dans les articles. En guise de tests de validation additionnels, les solutions de quelques problèmes (dont en électrostatique) ont été comparées à celles obtenues par un logiciel commercial d'éléments finis (COMSOL Multiphysics, COMSOL AB, Stockholm, Suède) ; les solutions étaient en étroite concordance.

4.1 Avant-propos : note sur l'interpolation

Une des conséquences de la discrétisation propre à chacune des physiques apparaît au moment où il faut coupler les solutions, par exemple lorsqu'il faut calculer le produit de la pression avec la sensibilité acousto-électrique (équation 2.11). Pour faire ce produit, il faut naturellement connaître la valeur des différentes fonctions en jeu aux mêmes points du

domaine. Cette correspondance est réalisée par des fonctions d'interpolation. Ces fonctions vont ici opérer sur plusieurs grilles [1] de discrétisation en 3D, notamment :

- pour le calcul du potentiel électrique ; sur cette grille, la densité de points est plus élevée au voisinage des électrodes ;
- pour la représentation de l'onde acoustique ; sur cette grille, les points sont regroupés autour de la zone focale pour l'onde de pression bipolaire. Pour l'onde unipolaire, ils peuvent occuper tout le volume ;
- pour l'intégration servant au calcul du signal de MACE ; la position des points servant au calcul d'une intégrale volumique par quadrature de Gauss est obtenue par un algorithme particulier sur la géométrie donnée ;
- pour les données d'acquisition ;
- pour la reconstruction ; les points de cette grille sont ceux pour lesquels la conductivité est estimée.

Certaines grilles sont définies de façon distincte pour le problème direct et pour le problème inverse ; ceci concerne les grilles électrique, acoustique et d'intégration.

Une manière courante de calculer une interpolation à partir de valeurs connues sur un ensemble de points aux environs de l'endroit voulu est d'obtenir une triangulation de ces points, puis d'utiliser une linéarisation sur le triangle (ou le tétraèdre en 3D). Cependant, puisque la technique numérique employée repose sur une approche sans maillage et qu'aucune connectivité de type maillage n'est obtenue lors du processus de génération de la distribution de points, il serait exigeant de produire une connectivité à la manière d'une triangulation sur la distribution donnée en respectant les frontières de la géométrie, bien que ce soit envisageable (Chew, 1989; Shewchuk, 2000). La technique qui sera plutôt employée pour ce projet sera la même que celle ayant servi à la résolution d'équations différentielles (voir section A.1). Le principe est de spécifier, dans l'équation A.12, les coordonnées (x, y) comme étant celles du point d'évaluation où la valeur interpolée est souhaitée, tandis que les $\hat{u}_I$ sont les valeurs de la fonction aux points connus. Le passage de la grille où les valeurs sont connues ($G0$) à celle où les valeurs sont souhaitées ($G1$) se fait par le produit matriciel suivant :

$$\boldsymbol{u}_{G1} = \mathbf{N}_{G1}^{G0} \boldsymbol{u}_{G0} \tag{4.1}$$

La matrice $\mathbf{N}$ est de taille $\mathrm{NP}_{G1} \times \mathrm{NP}_{G0}$, où NP_{G1} est le nombre de points de la grille $G1$ et NP_{G0} est le nombre de points de la grille $G0$.

1. Nous utilisons le terme « grille » dans ce contexte pour désigner l'ensemble des points de discrétisation du domaine pour un problème donné, même s'il s'agit d'une dispersion de points sans connectivité de type maillage.

De la même manière, il est aussi possible d'obtenir une dérivée de la fonction initiale aux points d'interpolation en construisant la matrice de transformation incorporant les dérivées, puis d'obtenir le résultat voulu en effectuant le produit matriciel entre cette matrice de transformation et le vecteur original de la fonction. Par exemple :

$$\boldsymbol{u}_{G1,x} = \frac{\partial \mathbf{N}_{G1}^{G0}}{\partial x} \boldsymbol{u}_{G0} \tag{4.2}$$

Notons que, dans le cas où nous voulons obtenir une interpolation de cette manière pour passer d'une grille à une autre, la modification de formulation pour le renforcement de la propriété de Kronecker présentée à la section A.4 n'est pas applicable.

4.2 Problème direct

Nous entendons par la résolution du problème direct, ce qui sert à produire des signaux de synthèse pour cette étude. Plusieurs éléments du problème direct seront repris plus loin dans la résolution du problème inverse, mais leur fonction sera alors différente puisqu'il s'agira alors de produire les données prédites par un modèle pour les comparer aux observations.

La résolution du problème direct calcule les signaux temporels V^{MACE} pour chacune des positions du transducteur. Le schéma bloc de la figure 4.1 en montre les différentes étapes. Ces étapes sont décrites ici.

4.2.1 Géométrie

L'étape de la définition de la géométrie a plusieurs fonctions, dont :

1. représenter la géométrie physique du volume conducteur ;
2. identifier les régions où diverses conditions frontières seront appliquées. Ceci permet par exemple de spécifier la position des électrodes ;
3. spécifier la distribution de la conductivité électrique ;
4. générer la distribution de points utilisée par la technique de résolution numérique d'équations différentielles (grille de la situation électrique) ;
5. calculer la distribution de points pour l'intégration numérique sur ce volume.

Représentation de la géométrie Telle que décrite dans la section A.6, la génération de la distribution de points est basée sur une représentation de la géométrie où les faces formant la frontière du volume conducteur sont des triangles. Au cours de ce projet, plusieurs géométries complexes ont été étudiées et ont été définies avec le logiciel Blender (Blender Foundation,

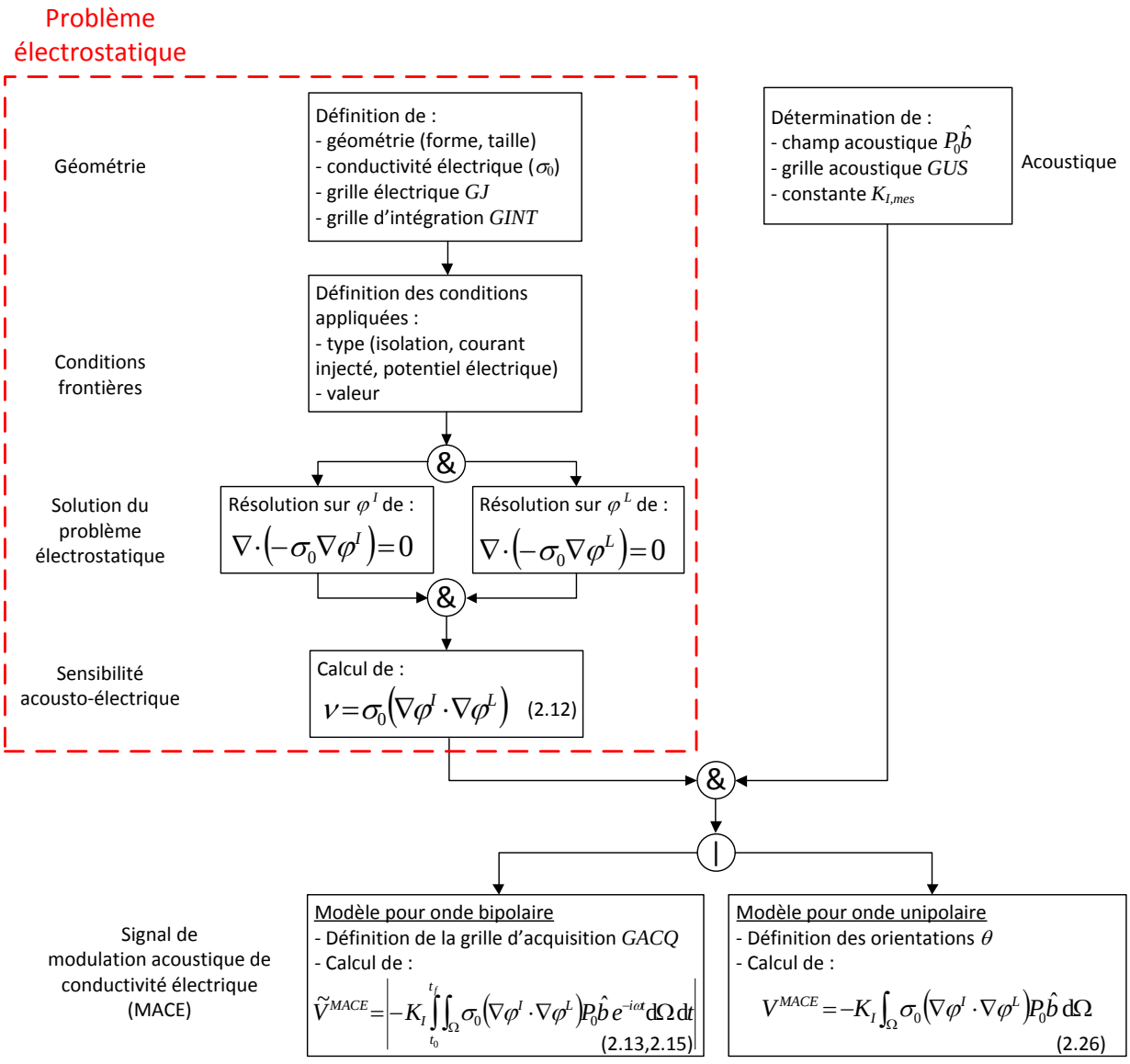

Figure 4.1 Schéma bloc du problème direct. Le symbole « & » signifie une combinaison : toutes les entrées ou toutes les sorties sont requises pour passer à l'étape suivante. Le symbole « | » signifie un choix : une des entrées ou une des sorties doit être sélectionnée pour passer à l'étape suivante.

Amsterdam, Pays-Bas), un puissant logiciel libre pouvant être utilisé pour la CAO 3D. Dans cette thèse, ce logiciel sert à constituer les informations à fournir au programme de génération de distribution de points. Les figures 4.2 et 4.3 illustrent respectivement l'interface graphique du logiciel Blender et l'interprétation effectuée par Matlab pour une géométrie qui sera étudiée plus loin.

L'identification des régions où seront appliquées les conditions frontières doit être faite à ce moment-ci, car elle a un rôle à jouer dans la création de la distribution de points de la grille électrique présentée plus loin. En effet, une bonne représentation de la géométrie par la distribution de points doit marquer les frontières entre les régions. Par exemple, lorsqu'une électrode est placée sur une face plane, il est important que le contour de l'électrode soit identifié sur cette face par la distribution de points. Les régions de conditions aux frontières sont étiquetées dans Blender.

Spécification de la conductivité électrique La conductivité électrique σ_0 du problème électrique doit être spécifiée à ce moment-ci. De façon générale, elle sera donnée comme une expression qui sera ensuite évaluée aux points de la distribution, mais il est aussi possible de fournir une valeur pour chacun des points de la distribution de la grille électrique. Cette dernière option sera utilisée lors de la résolution du problème inverse.

Génération de la distribution de points (grille électrique) Le programme de génération qui a été développé reprend la majorité des éléments présentés par Löhner et Oñate (1998), tels que décrits à la section A.6. Toutefois, plutôt que de remplir directement le volume à partir d'une distribution de points sur les surfaces respectant les distances entre les points, la méthode développée requiert une triangulation des surfaces formant les frontières de la géométrie. L'information de ces faces sera utilisée dans plusieurs contextes différents, mais ne constituera pas la triangulation des surfaces adaptée à la distribution de points finale. Ceci permet de créer une géométrie de manière générale, puis de spécifier les distances entre les points *a posteriori*.

Note technique sur la génération de points Puisque, de manière générale, les seuls points fournis dans la définition de la géométrie sont ceux requis pour la spécification des surfaces de cette géométrie, la technique employée pour la génération de points consiste alors à générer ces points en procédant d'abord sur les arêtes, puis sur les surfaces et ensuite dans le volume. Le patron utilisé pour la génération sur les arêtes possède deux points, tandis que le patron pour la génération sur les surfaces en a quatre et celui pour la génération dans le volume, six. L'orientation du patron dépend de la situation. Par exemple, la génération de points sur une arête produit seulement des points sur cette arête. Ainsi, le patron est orienté dans la direction de l'arête. Pour la génération sur la surface,

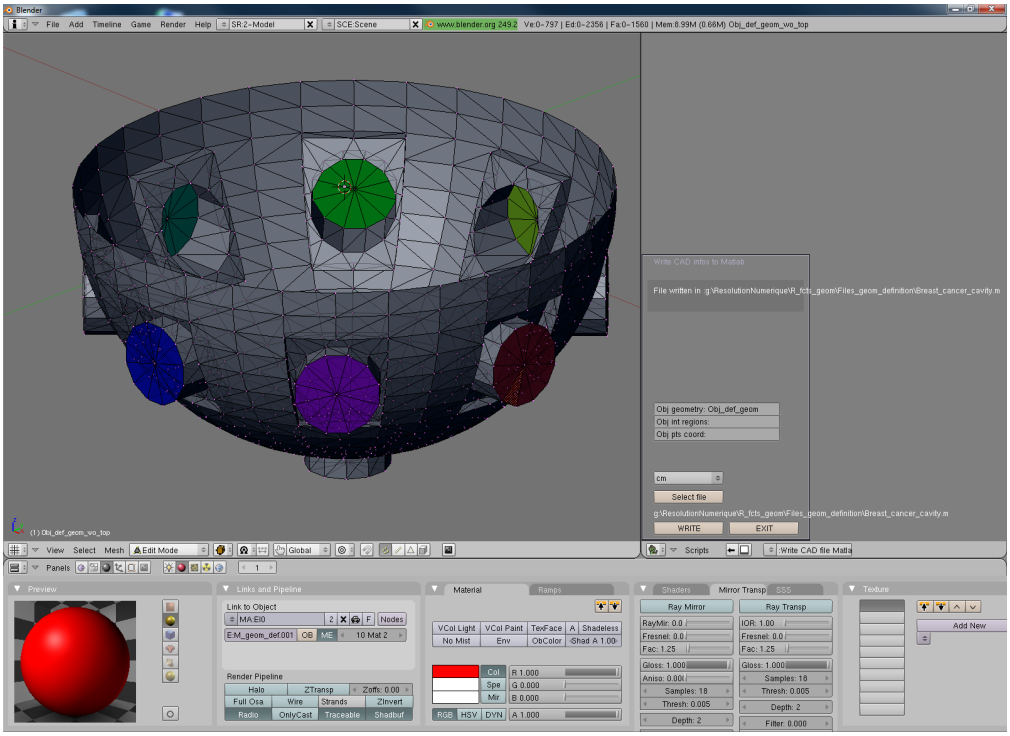

Figure 4.2 Exemple d'une représentation de géométrie conçue sur Blender. Cet objet représente une cavité pour l'imagerie du sein (problème de la section 7.2). Les régions colorées représentent les électrodes. Les fonctionnalités de création et d'édition d'objets ont servi pour la représentation de cette géométrie. Une fois l'objet créé, l'exportation des propriétés (coordonnées des nœuds, combinaisons des numéros de ces nœuds formant les triangles élémentaires de la triangulation des faces...) se fait en les écrivant dans un fichier texte. Ceci est réalisé par un script développé et écrit en langage Python pouvant être exécuté dans ce logiciel.

un point source sur l'extrémité de la surface (donc sur une arête) oriente le patron de façon normale à l'arête, de telle sorte que le front de points se propage dans la direction de la normale à l'arête sur cette surface. Les points générés qui agissent comme source par la suite conservent cette orientation. Pour la génération dans le volume, deux directions principales orthogonales sont nécessaires pour orienter le patron, la troisième étant orthogonale aux deux premières. Pour les points sur les surfaces agissant comme sources, la première direction principale est celle ayant été utilisée pour la génération des points sur cette surface, tandis que la seconde direction principale est la normale à cette surface. La distance des points dans les différentes directions par rapport au point source est obtenue à partir des valeurs des distances selon les directions principales x, y et z fournies. Ces distances constituent les longueurs des demi-axes d'un ellipsoïde orienté selon ces directions principales et centré au point source. Les points à créer dans des directions arbitraires seront à l'intersection de cet ellipsoïde et de la droite orientée dans la direction voulue.

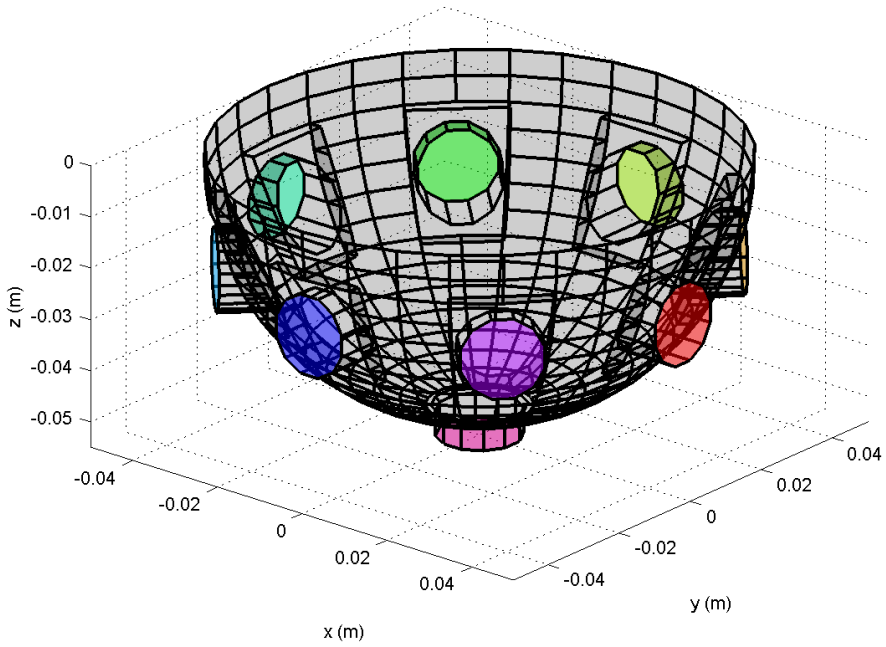

Figure 4.3 Exemple d'une représentation de géométrie sur Matlab. Elle est obtenue à partir de l'information écrite dans le fichier texte généré par Blender.

Calcul de la distribution de points (grille d'intégration) La détermination de la grille d'intégration est faite dès que la géométrie est définie. Cependant, elle ne sera requise qu'à l'étape de la production des signaux de MACE.

4.2.2 Conditions aux frontières

Les conditions frontières représentent les valeurs physiques de la solution à la périphérie du volume conducteur où se produit la MACE. L'identification passe, par exemple, par des conditions de courant, où une quantité de courant est injectée dans une électrode métallique, par des conditions d'isolation électrique, où aucun courant ne peut traverser une frontière, ou par des valeurs fixées de potentiel électrique.

Il faudra considérer deux situations. La première, identifiée par I, est celle où les électrodes d'injection de courant appliquent véritablement leur courant. La paire d'électrodes de mesure de potentiel est alors considérée comme inactive et aucun courant ne peut s'échapper du domaine. Ces électrodes agiront néanmoins comme des régions de très faible résistance où du courant pourra être conduit d'un point à l'autre de l'électrode. Ceci apparaît naturellement lorsque nous spécifions, dans les équations, que le potentiel est constant sur toute la surface d'une électrode.

Dans la seconde situation, identifiée par L, les électrodes d'injection de courant sont inactives, de manière analogue aux électrodes de mesure de potentiel de la situation I. Les électrodes de mesure de potentiel ont, quant à elles, une condition d'injection de courant unitaire (1 ampère).

Dans ces deux cas, un potentiel électrique de référence doit être appliqué à au moins un point afin de produire une solution unique. L'application peut se faire à un point défini ou sur la surface d'une électrode supplémentaire agissant comme masse.

4.2.3 Solution du problème électrostatique

Nous procédons à trouver la distribution des potentiels électriques φ^I et φ^L. Ces distributions sont considérées comme indépendantes, par principe de superposition. Il est alors possible de résoudre chaque problème individuellement. L'équation gouvernante à résoudre est celle exprimant la conservation du courant en tout point, soit l'équation de Laplace sur le domaine de conductivité électrique inhomogène ($\boldsymbol{\nabla} \cdot (-\sigma \boldsymbol{\nabla} \varphi) = 0$) et soumis aux conditions frontières. Une fois ces potentiels calculés, leurs dérivées sont obtenues à partir des matrices d'interpolation ayant servi dans cette résolution de problème électrostatique (équation A.32).

Telle que décrite à la section A.1, la détermination de la taille de la fonction noyau est d'une grande importance. Dans le cas présent, cette taille est calculée, pour chacun des points où est construite la fonction noyau, comme étant un multiple prédéterminé de la distance entre les points ayant servi durant la génération de la distribution de points. Dans le cas où le conditionnement de la matrice des moments $\mathbf{M}$ est supérieur à une valeur prédéterminée, la taille de cette fonction noyau est augmentée légèrement jusqu'à ce que ce conditionnement descende sous le seuil fixé.

Une mesure importante à prendre pour obtenir une solution réaliste sur une géométrie possédant des régions concaves est la dépendance des points près des frontières (Organ *et al.*, 1996). En effet, les méthodes sans maillage ne se soucient implicitement pas de la géométrie, mais, puisque les fonctions d'interpolation expriment une dépendance entre les points où les équations sont discrétisées, le choix des points appartenant à une fonction noyau doit bien représenter la condition physique présente. Par exemple, dans le problème de la plaque fissurée, bien étudié dans la littérature (Ortega *et al.*, 2007; Liu et Tu, 2002), il est naturel de penser que des points situés de part et d'autre de la fissure (loin de la pointe) sont pratiquement indépendants, étant donné que le lien mécanique entre ces régions n'est plus direct et que la solution n'est pas continue au-delà de la fissure puisqu'une nouvelle frontière s'est créée lors de la propagation de la fissure. Il existe plusieurs stratégies pour répondre à cette condition. La première consiste à prendre seulement les points pour lesquels un segment de droite reliant ces points au point central ne croise aucune face (dans la littérature, ceci

est nommé le critère de visibilité). En quelque sorte, ce sont ceux qui sont visibles en ligne droite à partir du point central. Cette méthode ne fonctionne pas très bien pour les géométries présentant de fortes concavités. La méthode de diffraction (Organ *et al.*, 1996) n'a pas permis d'obtenir de meilleurs résultats en combinaison avec la méthode de résolution numérique présentée. La méthode qui a servi dans ce projet est basée sur une proposition de Ortega *et al.* (2007). Dans cette méthode, les fonctions noyaux des points présents dans le volume ou sur une surface sont calculées selon le critère de visibilité. Pour les points présents sur un coin ou une arête, un plan passant par ce point et de même orientation que ce point est créé. Les points situés du côté extérieur de ce plan sont considérés comme non visibles pour la fonction noyau de ce point. Ceci permet de limiter la visibilité de telle sorte que les points de part et d'autre de la concavité ne soient pas pris simultanément. Il s'agit d'une méthode rapide qui apporte beaucoup de stabilité à ce type de problème.

4.2.4 Sensibilité acousto-électrique

Une fois les distributions de potentiel électrique φ^I et φ^L trouvées, le champ de sensibilité acousto-électrique $\nu = \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)$ est calculé directement, car ces variables sont exprimées sur la même grille, soit celle ayant servi à la résolution du problème électrique.

4.2.5 Acoustique

Dans ce travail, le transducteur acoustique est un piézoélectrique monoélément, circulaire et concave. La méthode qui semble la plus adaptée pour représenter le champ acoustique produit par ce dispositif dans différentes conditions est celle décrite par Jensen (1991) et Jensen et Svendsen (1992). Ce modèle fait l'hypothèse que le système est linéaire. Il repose sur la connaissance d'une expression pour le champ acoustique spatio-temporel produit par le transducteur dont la surface applique une impulsion de densité de force. Dans le cas d'un transducteur monoélément, circulaire et concave, une description analytique de cette réponse impulsionnelle $h_a(\boldsymbol{x}, t)$ est donnée par Penttinen et Luukkala (1976). Par linéarité, le champ acoustique $P(\boldsymbol{x}, t)$ produit par un transducteur appliquant une densité de force $f_s(t)$ est :

$$P(\boldsymbol{x}, t) = f_s(t) \overset{t}{*} h_a(\boldsymbol{x}, t) \tag{4.3}$$

où $\overset{t}{*}$ est l'opérateur de convolution sur la variable de temps t. La densité de force $f_s(t)$ émise à la surface du transducteur peut également être exprimée par :

$$f_s(t) = E(t) \overset{t}{*} R_{EM}(t) \tag{4.4}$$

où $E(t)$ est l'excitation électrique fournie au transducteur et $R_{EM}(t)$ est la réponse électro-mécanique du transducteur correspondant au signal de densité de force émis à la surface du transducteur lorsqu'il est excité par une impulsion électrique. Dans la description de Penttinen et Luukkala (1976), la réponse impulsionnelle $h_a(\boldsymbol{x}, t)$ au foyer de ce transducteur monoélément, circulaire et concave, a la forme d'une impulsion, soit :

$$h_a(\boldsymbol{x}_{foyer}, t) = \frac{S_{transducteur}}{2\pi R}\delta(t - R/c) \tag{4.5}$$

où $S_{transducteur}$ est l'aire de la surface du transducteur, R est la distance focale et c est la vitesse de propagation de l'onde. En utilisant l'équation 4.5 dans 4.3, il est possible d'obtenir aisément la valeur de $f_s(t)$ à partir de la connaissance de $P(\boldsymbol{x}_{foyer}, t)$, puisque le signal de pression mesuré reproduit le signal $f_s(t)$ avec un facteur d'échelle et un délai correspondant au temps de propagation entre la surface du transducteur et le foyer. Ceci aura été fait pour une excitation électrique donnée. Cette connaissance de $f_s(t)$ et de $h_a(\boldsymbol{x}, t)$ permet alors de trouver le champ acoustique $P(\boldsymbol{x}, t)$ produit par le transducteur pour cette excitation électrique à toutes les coordonnées $\boldsymbol{x}$ pour les instants de temps t souhaités. Si ce signal de pression au foyer a été obtenu pour une excitation électrique impulsionnelle, la valeur de $f_s(t)$ qui a été obtenue correspond à $R_{EM}(t)$, et il est alors possible d'obtenir le champ acoustique pour une excitation électrique arbitraire.

Le champ acoustique du transducteur est calculé sur les NP_{GUS} points constituant la grille acoustique (GUS) pour les N^t instants spécifiés, produisant ainsi une matrice de taille $\mathrm{NP}_{GUS} \times N^t$. Les valeurs de temps spécifiées sont constitués de multiples entiers de 20 ns, reproduisant un échantillonnage à 50 MHz dont l'origine est déterminée par le moment où l'excitation électrique débute.

L'étendue de la grille acoustique dépend de la région où cette pression acoustique est non négligeable. Avec la méthode par onde bipolaire, le champ acoustique est produit par une excitation en bande étroite. Dans ce cas, le champ acoustique produit a une amplitude très grande dans la région focale et faible hors de cette zone. Il est donc justifié de faire l'approximation que le champ acoustique est nul loin du foyer. La grille acoustique pourra alors être restreinte à cette région focale. Cependant, avec la méthode d'onde unipolaire, le champ acoustique produit a la forme d'une coquille quasi sphérique plus ou moins épaisse occupant un très large volume et qui se propage en s'éloignant du transducteur. La focalisation du transducteur est alors beaucoup moins efficace. Dans ce cas, il est critique d'employer une grille acoustique très large couvrant la région de sensibilité acousto-électrique. Bien que cette grille doive occuper un espace beaucoup plus grand que celle du champ focalisé, sa représentation n'a par contre pas besoin d'être aussi fine puisque les variations spatiales sont

plus larges.

4.2.6 Signal de modulation acoustique de conductivité électrique

Le calcul du signal de MACE qui est produit pour une position d'excitation donnée revient principalement à effectuer l'intégration numérique du produit du champ acoustique avec la sensibilité électrique. Ces deux champs scalaires doivent d'abord être interpolés sur la grille d'intégration. Nous considérons que la sensibilité électrique est la même pour tous les instants de temps.

4.3 Problème inverse

La résolution du problème inverse, permettant d'obtenir la distribution de conductivité électrique, est représentée par le schéma bloc de la figure 4.4 pour la méthode bipolaire et celui de la figure 4.5 pour la méthode unipolaire.

À plusieurs égards, les étapes de résolution sont semblables pour l'un et l'autre des problèmes inverses. Les principales différences sont notées dans la description qui suit.

4.3.1 Méthode bipolaire

Le problème inverse pour la méthode bipolaire consiste à résoudre le système d'équations suivant :

$$\sigma_0(x_{b_i}, y_{b_i}) \left(\boldsymbol{\nabla} \varphi^I(x_{b_i}, y_{b_i}) \cdot \boldsymbol{\nabla} \varphi^L(x_{b_i}, y_{b_i}) \right) = \frac{K_{I,ref}}{K_{I,mes}} \nu^{xy}_{ref}(x_{b_i}, y_{b_i}) \frac{\tilde{V}^{MACE}_{mes}(x_{b_i}, y_{b_i}, \omega)}{\tilde{V}^{MACE}_{ref}(x_{b_i}, y_{b_i}, \omega)},$$
$$i = 1, \ldots, N \qquad (2.25')$$

Le terme de droite est établi à partir :

1. des mesures (V^{MACE}_{mes}) dont nous avons calculé l'amplitude à une fréquence donnée ;
2. de signaux de référence (V^{MACE}_{ref}) produits par simulation ou acquis expérimentalement utilisant un objet de référence ;
3. d'*a priori* telles les constantes K_I d'interaction entre la pression et la conductivité ;
4. d'une fonction de sensibilité de référence établie à partir d'*a priori* sur la géométrie et utilisant une distribution de conductivité qui, en principe, pourrait être arbitraire, mais que nous posons homogène en pratique.

Ce terme de droite est aussi appelé ν_{mes} (équation 2.24) car il décrit la sensibilité associée à la conductivité électrique que nous cherchons à mesurer.

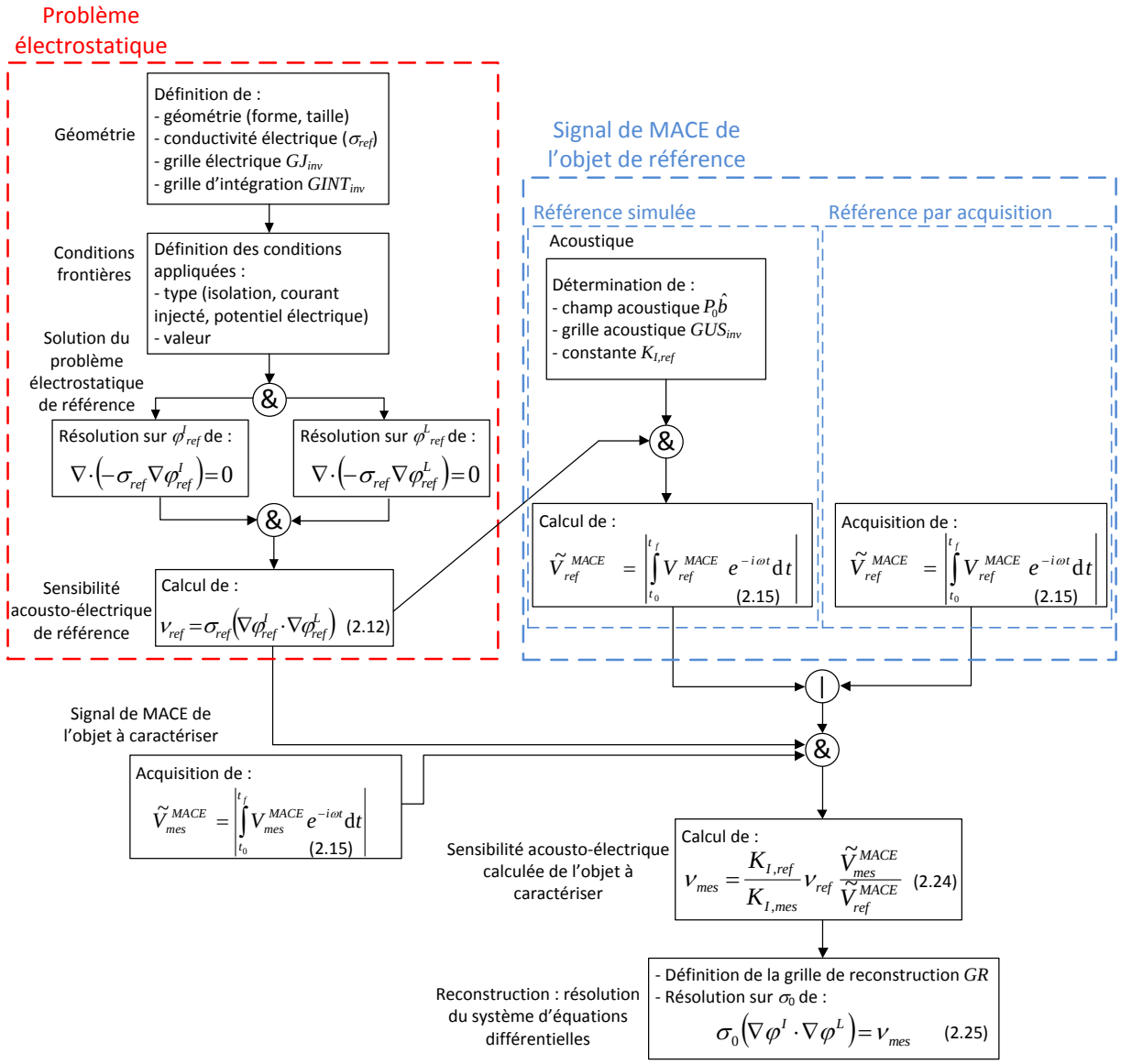

Figure 4.4 Schéma bloc du problème inverse de la méthode bipolaire.

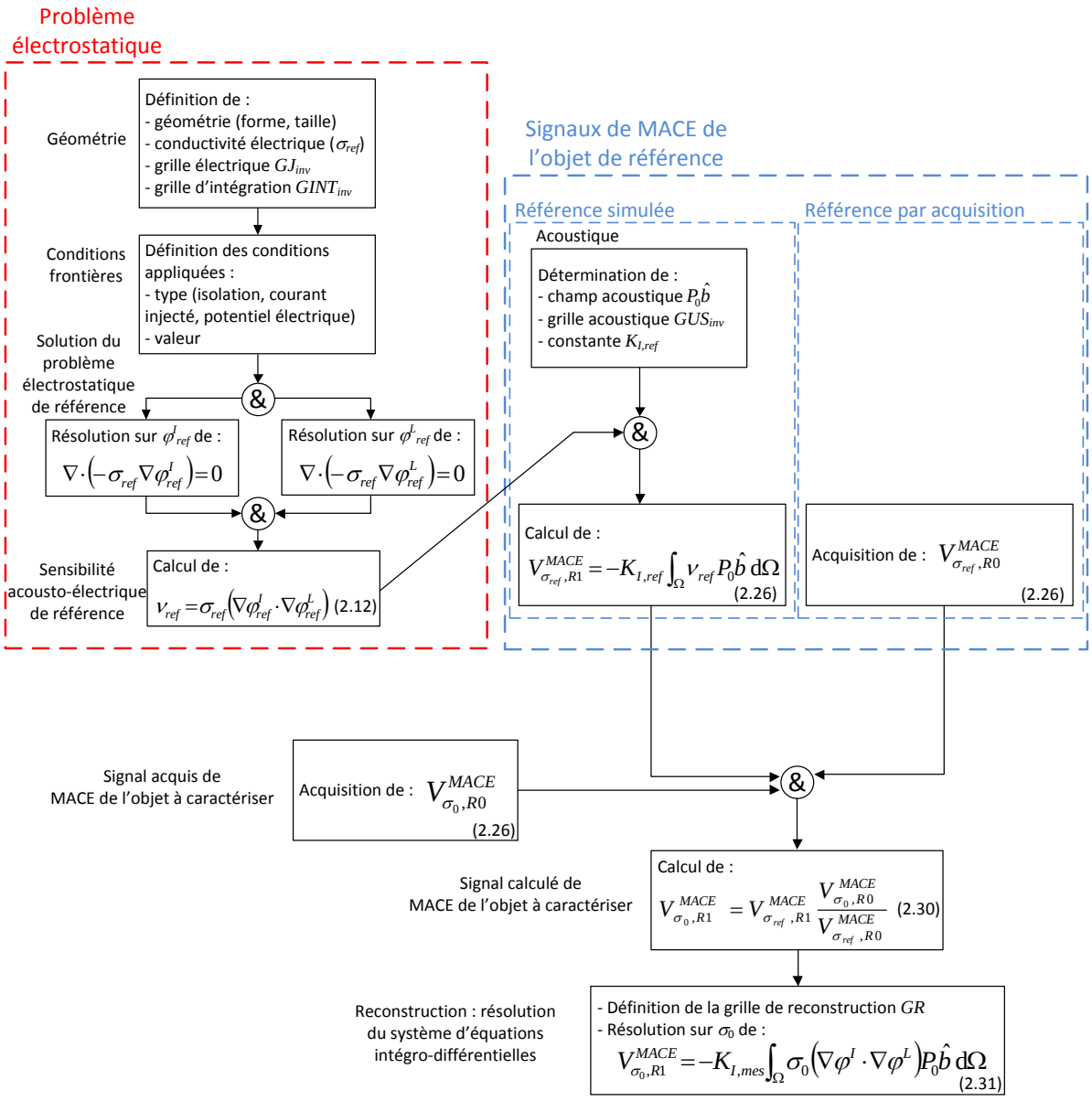

Figure 4.5 Schéma bloc du problème inverse de la méthode unipolaire.

Le terme de gauche contient la solution σ_0 recherchée et apparaît explicitement ainsi qu'implicitement à l'intérieur des potentiels φ.

Problème électrostatique Ce bloc (en encadré) reprend les premières étapes de la résolution du problème direct décrites à la figure 4.1. Son rôle est de générer une fonction de sensibilité acousto-électrique de référence ν_{ref} à partir d'une distribution de conductivité de référence σ_{ref} et d'*a priori* sur la géométrie et les conditions de frontières. Dans le cas où nous disposons de signaux de MACE acquis expérimentalement sur un fantôme de conductivité connue, σ_{ref} est la conductivité du fantôme. Dans le cas où nous n'avons pas de telles données de calibration, σ_{ref} est une conductivité arbitraire, que nous posons homogène et du même ordre de grandeur que la conductivité recherchée.

La fonction de sensibilité acousto-électrique de référence ainsi produite est utilisée par le bloc de calcul de sensibilité acousto-électrique de l'objet à caractériser, décrit plus loin. Advenant le cas où des signaux de MACE de calibration acquis expérimentalement ne seraient pas disponibles, elle sert aussi au calcul d'un signal de MACE de référence simulé.

Signal de MACE de l'objet de référence Tel que suggéré à la fin de la section 2.2.2, il existe deux façons de trouver $\tilde{V}_{ref}^{MACE}$. La première consiste à poursuivre la résolution du problème direct par simulation avec l'expression du champ acoustique. La seconde consiste à réaliser une acquisition de calibration pour un objet dont la conductivité électrique correspond à σ_{ref}, mais où toutes les autres conditions (positionnement, courant injecté...) sont les mêmes que pour l'imagerie sur σ_0.

L'encadré « Référence simulée » reprend les fonctions utilisées pour le calcul de V^{MACE} du modèle direct (figure 4.1). Le résultat produit est l'amplitude de V_{ref}^{MACE} à la fréquence centrale du transducteur.

Note Dans le bloc « Acoustique », les constantes d'interaction K_I entre la pression et la conductivité ainsi que la grille acoustique GUS sont des entités distinctes de celles utilisées dans la résolution du problème direct. La résolution numérique du problème direct décrit à la section 4.2 a pour but de produire des signaux de synthèse les plus fidèles possibles aux équations. Pour cela, par exemple, des grilles fines sont définies. Pour la résolution numérique du problème inverse, dans un travail de simulation tel celui de cette thèse, il est souhaitable de ne pas prendre les mêmes grilles que celles spécifiées pour produire les signaux de synthèse, de manière à éviter de commettre ce qui est communément appelé le « crime inverse », où des éléments communs (telles les grilles) sont utilisées pour résoudre les problèmes direct et inverse. D'une certaine manière, cela équivaut à introduire des *a priori* qui ne sont pas disponibles avec des données réelles, faussant ainsi l'évaluation de la méthode d'inversion.

Signal de MACE de l'objet à caractériser Ce bloc identifie l'étape de calcul d'amplitude des signaux de MACE acquis sur l'objet réel dont la conductivité électrique σ_0 doit être mesurée. Cette amplitude est évaluée à la fréquence centrale du transducteur.

Sensibilité acousto-électrique calculée de l'objet à caractériser Pour cette étape, il s'agit d'effectuer le calcul de ν_{mes}, qui agira en tant qu'information de mesure de sensibilité acousto-électrique de l'objet à caractériser.

Ce bloc traduit les données de signaux de MACE de l'objet à caractériser en termes de ν_{mes}, sa sensibilité acousto-électrique « mesurée ». L'inversion proprement dite, décrite à la section 4.3.3, a pour but de retrouver la conductivité σ_0 à partir des données de sensibilité acousto-électrique.

4.3.2 Méthode unipolaire

Le problème inverse pour la méthode unipolaire consiste à résoudre le système d'équations suivant :

$$V_{\sigma_0,R1}^{MACE}(\theta_i,t_j) = -K_I \iiint_{\Omega} \sigma_0(\boldsymbol{r}_\Omega)\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I(\boldsymbol{r}_\Omega)\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi^L(\boldsymbol{r}_\Omega)\right) P_0\,\hat{b}(\boldsymbol{r}_\Omega,\theta_i,t_j)\,\mathrm{d}\Omega$$
$$i=1,\ldots,N^\theta; j=1,\ldots,N^t \qquad (2.31')$$

avec :

$$V_{\sigma_0,R1}^{MACE} = V_{\sigma_1,R1}^{MACE}\frac{V_{\sigma_0,R0}^{MACE}}{V_{\sigma_1,R0}^{MACE}} \qquad (2.30')$$

Problème électrostatique Ce bloc (en encadré) est exécuté de manière similaire à celui du problème inverse pour le modèle bipolaire. La sensibilité acousto-électrique de référence qui est obtenue ne sert toutefois qu'à la simulation des signaux de MACE sur l'objet de référence. Cet objet de référence a une conductivité σ_{ref} correspondante à celle du fantôme pour lequel les signaux de MACE sont acquis expérimentalement.

Signaux de MACE de l'objet de référence Ce bloc (en encadré) contient deux parties. La première partie, identifiée par « Référence simulée », correspond à la simulation des vecteurs de signaux temporels de MACE pour la conductivité de référence σ_{ref}. La seconde partie, identifiée par « Référence par acquisition », consiste en l'acquisition expérimentale des signaux sur l'objet ayant cette même conductivité σ_{ref}. Autrement, les conditions d'acquisition doivent être identiques à celles servant pour l'acquisition sur l'objet à caractériser

(de conductivité σ_0) [2]. Les signaux de MACE acquis d'un objet de référence sont essentiels pour la reconstruction unipolaire, ce qui n'était pas le cas pour la méthode bipolaire.

Signal acquis de MACE de l'objet à caractériser Ce bloc identifie le vecteur de signaux temporels de MACE acquis avec l'objet dont la conductivité électrique σ_0 doit être estimée.

Signal calculé de MACE de l'objet à caractériser Ce calcul fournit les données temporelles qui seront utilisées pour la reconstruction et qui vont constituer les observations de l'algorithme décrit plus loin. Il s'agit des échantillons temporels des signaux de MACE acquis ($V^{MACE}_{\sigma_0,R0}$) puis pondérés par un rapport de signaux V^{MACE} acquis et simulés de la référence. Numériquement, les produits et quotients du calcul se font élément par élément d'échantillons temporels. Tel que spécifié à la section 2.3.3, ces vecteurs d'échantillons sont filtrés avant le calcul.

4.3.3 Reconstruction : résolution du système d'équations intégro-différentielles

Grille de reconstruction

Pour la méthode bipolaire, la grille de reconstruction GR est la même que la grille d'acquisition $GACQ$ créée lors de l'étape antérieure pour la résolution du problème direct. Pour la méthode unipolaire, c'est à la présente étape de reconstruction qu'elle doit être déterminée ; l'usager peut alors réaliser différentes reconstructions à partir de ce seul ensemble d'acquisitions. Il s'agit d'un aspect important de cette méthode unipolaire car cette flexibilité permet d'étudier le processus de reconstruction indépendamment des acquisitions réalisées précédemment.

Choix de la méthode de résolution

Pour la reconstruction proprement dite, il s'agit de retrouver la conductivité électrique σ_0 de l'objet mesuré à partir des mesures et des informations générales ayant servi lors de l'acquisition. Il s'agit d'un problème non linéaire sur φ^I_{mes}, φ^L_{mes} et σ_0 pour lequel il existe plusieurs techniques de résolution : Monte-Carlo, algorithme génétique, etc. Un des groupes de techniques de résolution procède par une suite d'étapes où le problème est linéarisé, l'inversion linéaire servant alors à redéfinir la valeur des paramètres recherchés, pour ensuite procéder à la prochaine étape jusqu'au moment où un critère d'arrêt est satisfait.

2. Il s'agit, notamment, de la position et de la géométrie des électrodes, des positions du transducteur et des orientations du faisceau acoustique, de la fréquence d'échantillonnage temporel et du filtrage des signaux de MACE.

Nous avons opté pour une telle technique de descente de gradient, où le formalisme permet aussi d'inclure sans trop de difficulté les paramètres d'incertitudes liés au bruit de mesure, au modèle utilisé et à la configuration du montage.

La méthode de descente dans la direction de plus forte pente a peu d'intérêt comparativement à la méthode de gradients conjugués compte tenu de son faible taux de convergence et ne sera pas adoptée. Quant à la méthode de quasi-Newton, elle est intéressante lorsque le nombre de points d'acquisition est faible (de l'ordre de la centaine), car l'inversion de la matrice hessienne est relativement aisée et permet d'obtenir une convergence très rapide, surtout lorsque la tâche la plus coûteuse en calculs est l'évaluation de la matrice jacobienne. Pour la suite de ce travail, nous nous intéresserons alors à la méthode de gradients conjugués (qui sera employée pour tous les problèmes résolus dans les chapitres 5 à 7, sauf indication contraire) et de quasi-Newton.

La section A.9 décrit la formulation générale qui sert à résoudre le problème non linéaire d'estimation de la conductivité électrique. Pour ce faire, nous utilisons un estimateur à maximum de vraisemblance où la recherche de l'extrémum est faite avec une méthode de gradients conjugués. D'autres variantes de cette méthode de gradient sont aussi présentées dans cette section A.9 [3]. L'une d'entre elles est utilisée ci-dessous pour illustrer certains aspects de la mise en œuvre numérique, notamment en ce qui a trait au calcul du gradient.

Expression des variables impliquées dans la formulation de maximum de vraisemblance

Nous cherchons à exprimer les variables impliquées dans l'algorithme itératif A.71 en correspondance avec la formulation numérique qui a été développée jusqu'ici. Ces variables sont principalement exprimées dans la première équation de cet algorithme, décrivant la direction de plus forte ascension $\boldsymbol{\gamma}$ au point $\boldsymbol{m}_n$:

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}\mathbf{G}_n^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n) - \boldsymbol{d}_{obs}) + (\boldsymbol{m}_n - \boldsymbol{m}_{prior})$$

Les variables auxquelles nous allons maintenant porter une attention spéciale sont $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{d}_{obs}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})$ et $\mathbf{G}$.

Nous voulons estimer la conductivité électrique sur la grille de reconstruction (qui aura un relativement petit nombre de points) par un ensemble de paramètres $\bar{\sigma}$ qui feront en sorte que la sensibilité produite pour une telle configuration soit la plus près possible de celle à atteindre. Pour évaluer l'erreur entre ces deux valeurs, il faut solutionner le problème

3. Il s'agit de la méthode préconditionnée de descente dans la direction de plus forte pente et de la méthode préconditionnée de gradients conjugués.

électrique des situations I et L. Pour ce faire, nous devons obtenir un équivalent sur la grille électrique de la conductivité électrique estimée sur la grille de reconstruction. Ceci est réalisé par une interpolation pour les points de la grille électrique à l'intérieur des limites de la grille de reconstruction, tandis qu'une extrapolation constante donnée par le point le plus près de la géométrie de la grille de reconstruction est prise pour les points de la grille électrique à l'extérieur de ces limites. Cette transformation s'écrit :

$$\sigma(x_J, y_J) = \sum_{a=1}^{\mathrm{NP}_{GR}} N_a(x_J, y_J)\bar{\sigma}_a, \quad J = 1, \ldots, \mathrm{NP}_{GJ} \tag{4.6}$$

Avec la même notation qu'à l'équation 4.1, nous avons :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_{GJ}^{GR}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{4.7}$$

Le problème électrostatique est résolu sur cette conductivité électrique $\boldsymbol{\sigma}$ pour obtenir $\boldsymbol{\varphi}^I$ et $\boldsymbol{\varphi}^L$ ainsi que leurs dérivées spatiales.

Les variables du modèle $\boldsymbol{m}$ sont simplement l'ensemble de paramètres $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, soit :

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \bar{\sigma}_{\mathrm{NP}_{GR}} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Quant au vecteur de données objectives $\boldsymbol{d}_{obs}$, il est obtenu à l'étape précédente du problème inverse (au bloc de « Sensibilité acousto-électrique calculée de l'objet à caractériser ») :

$$\boldsymbol{d}_{obs} = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{\mathrm{NP}_{GR}} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Ces données objectives demeurent inchangées durant tout le processus itératif de reconstruction.

L'opérateur non linéaire $\boldsymbol{g}$ contient l'ensemble des équations à résoudre et est fonction des variables du modèle $\boldsymbol{m}$. Cet ensemble a été exprimé par le système d'équations 2.21. Nous

avons, en forme détaillée :

$$\begin{aligned}
&\sum_{J=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}} N_{GR}^{GJ,a}(x_J,y_J,z_J)\left\{\left[\sum_{p=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}} N_p(x_J,y_J,z_J)\hat{\sigma}_p\right]\right.\\
&\left[\left(\sum_{p=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}}\frac{\partial N_p}{\partial x}(x_J,y_J,z_J)\hat{\varphi}_p^I\right)\left(\sum_{p=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}}\frac{\partial N_p}{\partial x}(x_J,y_J,z_J)\hat{\varphi}_p^L\right)\right.\\
+&\left.\left(\sum_{p=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}}\frac{\partial N_p}{\partial y}(x_J,y_J,z_J)\hat{\varphi}_p^I\right)\left(\sum_{p=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}}\frac{\partial N_p}{\partial y}(x_J,y_J,z_J)\hat{\varphi}_p^L\right)\right.\\
+&\left.\left.\left(\sum_{p=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}}\frac{\partial N_p}{\partial z}(x_J,y_J,z_J)\hat{\varphi}_p^I\right)\left(\sum_{p=1}^{\mathrm{NP}_{GJ}}\frac{\partial N_p}{\partial z}(x_J,y_J,z_J)\hat{\varphi}_p^L\right)\right]\right\}\\
&= g(x_a,y_a,z_a),\quad (x_a,y_a,z_a)\in GR
\end{aligned}\tag{4.10}$$

où les coordonnées (x_J, y_J, z_J) renvoient aux points de la grille GJ, tandis que le a de $N_{GR}^{GJ,a}$ spécifie la ligne de la matrice $\mathbf{N}_{GR}^{GJ}$ correspondant au point (x_a, y_a, z_a) de la grille de reconstruction. Les $\hat{\cdot}$ sont pour identifier les valeurs de poids nodaux, tels que formulés en A.31. En forme compacte, l'équation 4.10 s'écrit :

$$g^a = N_{GR}^{GJ,aJ}\left\{\left[\boldsymbol{N}^J\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right]\left[(\boldsymbol{N}_{,x}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,x}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)+(\boldsymbol{N}_{,y}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,y}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)+(\boldsymbol{N}_{,z}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,z}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)\right]\right\},\ \boldsymbol{x}_a\in GR \tag{4.11}$$

où l'écriture $\boldsymbol{N}_{,x}^J$ signifie « la ligne J de la matrice d'interpolation $\mathbf{N}$ ayant une dérivation selon x ». Ainsi, des produits matriciels sont effectués entre les vecteurs lignes $\boldsymbol{N}_{\bullet}^J$ et les vecteurs colonnes $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L$ et $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, en plus de celui requis pour le passage de la grille GJ à la grille GR (par la sommation sur l'indice J).

L'opérateur $\mathbf{G}_n$ contient, par définition, les dérivées évaluées au point $\boldsymbol{m}_n$ de l'opérateur $\boldsymbol{g}$ par rapport à chacune des variables contenues dans $\boldsymbol{m}$, soit :

$$G_n^{a\alpha} = \left(\frac{\partial g^a}{\partial m^\alpha}\right)_{\boldsymbol{m}_n} \tag{4.12}$$

Ceci exprime comment varie chacune des équations lorsque les paramètres de la conductivité électrique sur la grille de reconstruction varient d'une unité. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
G_n^{a\alpha} \;=\;& N_{GR}^{GJ,aJ}\left\{\left[N_{GJ}^{GR,J\alpha}\right]\left[(\boldsymbol{N}_{,x}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,x}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)+(\boldsymbol{N}_{,y}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,y}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)+(\boldsymbol{N}_{,z}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,z}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)\right]\right.\\
&+\left[\boldsymbol{N}^J\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right]\left[(\boldsymbol{N}_{,x}^J\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I}{\partial\bar{\sigma}_\alpha})(\boldsymbol{N}_{,x}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)+(\boldsymbol{N}_{,x}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,x}^J\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L}{\partial\bar{\sigma}_\alpha})+(\boldsymbol{N}_{,y}^J\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I}{\partial\bar{\sigma}_\alpha})(\boldsymbol{N}_{,y}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)\right.\\
&\left.\left.+\;(\boldsymbol{N}_{,y}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,y}^J\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L}{\partial\bar{\sigma}_\alpha})+(\boldsymbol{N}_{,z}^J\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I}{\partial\bar{\sigma}_\alpha})(\boldsymbol{N}_{,z}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L)+(\boldsymbol{N}_{,z}^J\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I)(\boldsymbol{N}_{,z}^J\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}^L}{\partial\bar{\sigma}_\alpha})\right]\right\}
\end{aligned}\tag{4.13}$$

La dérivation des variables de potentiel électrique par rapport aux paramètres de conductivité électrique $\bar{\sigma}$ est obtenue ainsi. Rappelons que le problème électrique est, pour la situation I :

$$\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I = \boldsymbol{b}^I \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\varphi}}^I = \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{b}^I \tag{4.14}$$

où la matrice $\mathbf{K}$ est créée pour la conductivité électrique $\boldsymbol{\sigma}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\varphi}}^I}{\partial \bar{\sigma}_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}_\alpha}\left(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{b}^I\right) \\
&= \frac{\partial(\mathbf{K}^{-1})}{\partial \bar{\sigma}_\alpha}\boldsymbol{b}^I \\
&= -\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial \bar{\sigma}_\alpha}\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{b}^I \\
&= -\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial \bar{\sigma}_\alpha}\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I \\
&= -\mathbf{K}^{-1}\Delta\mathbf{K}^\alpha\hat{\boldsymbol{\varphi}}^I
\end{aligned} \tag{4.15}$$

où l'expression de la dérivée de l'inverse d'une matrice a pu être remplacée par une expression équivalente (en général, nous avons : $\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial x} = -\mathbf{A}^{-1}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\mathbf{A}^{-1}$). Nous avons aussi utilisé le fait que le vecteur $\boldsymbol{b}^I$ est indépendant de la conductivité électrique. Dans la dernière équation, $\Delta\mathbf{K}^\alpha$ correspond à la variation de la matrice $\mathbf{K}$ pour une variation de $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_{GJ}^{GR}\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ où tous les éléments de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ sont nuls, sauf l'élément α qui vaut 1.

La formulation ci-dessus, décrite sur la sensibilité ν, contient la base de mise en œuvre de la méthode d'onde unipolaire. Les étapes supplémentaires, qui ne seront pas détaillées ici, consistent principalement à inclure le champ acoustique dans les équations 4.11 et 4.13 et à réaliser l'intégration numérique. Ces éléments sont indépendants de la conductivité électrique.

Nous allons maintenant porter notre attention sur les matrices de covariance. L'opérateur $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$ permet à l'usager de spécifier la variance des variables du modèle et la covariance entre ces variables. De manière générale, les éléments de cette matrice s'écrivent :

$$C_{\boldsymbol{m}}^{ij} = \rho^{ij}\sigma^i\sigma^j \tag{4.16}$$

où, dans ce contexte, ρ^{ij} correspond au coefficient de corrélation entre les variables m^i et m^j, tandis que σ^i correspond à l'écart-type de la variable m^i. Les coefficients de corrélation ρ^{ij} respectent les conditions $\rho^{ii} = 1$ et $-1 \leqslant \rho^{ij} \leqslant +1$. Ce coefficient de corrélation permet de donner une spécification de la dépendance entre les variables du modèle. Ceci peut servir à introduire de l'information sur la connectivité des variables. Par exemple, la conductivité électrique en un point donné est généralement similaire à celle aux environs de ce point.

L'introduction d'une corrélation importante dans cette matrice aura pour effet de forcer un lissage de la solution. Dans le cas où les coefficients de corrélation $\rho^{ij},\ i \neq j$ seraient mis à zéro, toutes les variables seraient indépendantes.

L'opérateur $\mathbf{C_d}$, contenu dans $\mathbf{C_D}$, est construit de manière similaire à $\mathbf{C_m}$, mais spécifie les variances et covariances des données $\boldsymbol{d}_{obs}$. Il permet alors d'inclure, par exemple, l'incertitude expérimentale associée à l'amplitude du courant injecté et le niveau de bruit présent dans les mesures.

L'opérateur $\mathbf{C_T}$, aussi contenu dans $\mathbf{C_D}$, permet de spécifier les incertitudes théoriques liées à la formulation du modèle et aux erreurs numériques (dont les approximations de la méthode numérique utilisée).

En plus d'introduire la mesure des variables du modèle, l'opérateur $\mathbf{C_m}$ joue un rôle de régularisation du problème inverse. Lorsque les valeurs de $\mathbf{C_m}$ sont faibles comparativement à celles de $\mathbf{C_D}$, il indique que $\boldsymbol{m}_{prior}$ est connu avec une relativement bonne précision et que relativement peu de confiance est mise dans les valeurs de $\boldsymbol{d}_{obs}$. Une telle spécification fera en sorte que la solution obtenue restera près de l'*a priori* fourni. Dans la situation inverse, où les valeurs de $\mathbf{C_m}$ sont grandes devant celles de $\mathbf{C_D}$, la régularisation est moins forte et beaucoup d'importance est accordée aux observations. Avec ce système moins régularisé, la solution pourra cependant être moins stable numériquement.

Quant à la matrice de préconditionnement $\hat{\mathbf{S}}$, une mise à jour est effectuée à chaque itération puisque le nombre de variables sur lesquelles la résolution sera effectuée est assez petit. Dans l'algorithme exposé au système d'équations A.71, il faut alors remplacer $\hat{\mathbf{S}}_0$ par $\hat{\mathbf{S}}_n = \mathbf{H}_n^{-1}$, où l'équation A.62 sert à calculer $\mathbf{H}_n$.

CHAPITRE 5

ÉTUDE DE MODÉLISATION POUR UN OBJET MINCE

5.1 Problème : Application de la méthode basée sur le champ acoustique bipolaire

5.1.1 Commentaires généraux

Ce premier problème sert à illustrer la méthode de résolution par méthode d'onde bipolaire sur un cas simple. Il s'agit d'un objet rectangulaire mince dont la conductivité électrique est inhomogène dans la région centrale et où la configuration d'électrodes permet une injection de courant très uniforme dans la zone d'intérêt. La conductivité électrique varie seulement selon les dimensions x et y, et ne dépend pas de z. Ainsi, nous chercherons à obtenir cette distribution de conductivité seulement pour la tranche centrale du domaine, bien que le problème soit résolu en trois dimensions.

5.1.2 Géométrie

La géométrie du problème électrique est montrée à la figure 5.1, tandis qu'une représentation matérielle est illustrée à la figure 5.2. La partie qui est modélisée pour le problème est celle de l'électrolyte ; les électrodes sont supposées métalliques et seulement leur interface avec l'électrolyte est considérée. Le comportement à l'interface constitue une condition frontière.

La distribution de plus de 24 000 points répartis sur cette géométrie constitue la grille électrique. À titre de référence, elle est reproduite à la figure E.1.

La conductivité électrique pour ce problème est montrée à la figure 5.3. Elle est exprimée comme la somme de trois gaussiennes de conductivité s'ajoutant à un fond homogène de 1,0 S/m. Les positions et tailles de ces gaussiennes sont données au tableau 5.1.

5.1.3 Conditions frontières

La résolution du problème direct requiert le calcul des distributions de potentiel φ^I et φ^L. Le calcul de chacune de ces distributions est faite séparément au moyen des conditions frontières décrites aux tableaux 5.2 et 5.3.

Dans ce problème, la référence de potentiel se trouve à la coordonnée ($x = 0$ m, $y = 0$ m, $z = 0,5 \times 10^{-3}$ m) (par symétrie de la géométrie). Puisqu'il s'agit d'un point unique

Tableau 5.1 Définition des gaussiennes pour la distribution de conductivité électrique

#	A (S/m)	x_c (mm)	y_c (mm)	η_x (mm)	η_y (mm)
1	1,0	2,0	2,5	1,5	1,5
2	1,0	2,0	-2,5	1,5	1,5
3	-0,4	-4,0	-2,0	1,5	2,5
La conductivité électrique produite par chacune des gaussiennes est : $\sigma_{gauss}(x,y,z) = A\ e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\eta_x^2}-\frac{(y-y_c)^2}{2\eta_y^2}}$					

Tableau 5.2 Définition des conditions frontières (situation I)

Région	Condition	Valeur
Parties isolées (Γ_{isol})	Amplitude du courant	0 A
Électrode source (Γ_s)	Amplitude du courant	-0,010 A
Électrode puits (Γ_p)	Amplitude du courant	+0,010 A
Électrode mesure suiveuse (Γ_{ms})	Amplitude du courant	0 A
Électrode mesure inverseuse (Γ_{mi})	Amplitude du courant	0 A
Point de potentiel électrique fixé (Λ_g)	Potentiel électrique	0 V

Tableau 5.3 Définition des conditions frontières (situation L)

Région	Condition	Valeur
Parties isolées (Γ_{isol})	Amplitude du courant	0 A
Électrode source (Γ_s)	Amplitude du courant	0 A
Électrode puits (Γ_p)	Amplitude du courant	0 A
Électrode mesure suiveuse (Γ_{ms})	Amplitude du courant	-1 A
Électrode mesure inverseuse (Γ_{mi})	Amplitude du courant	+1 A
Point de potentiel électrique fixé (Λ_g)	Potentiel électrique	0 V

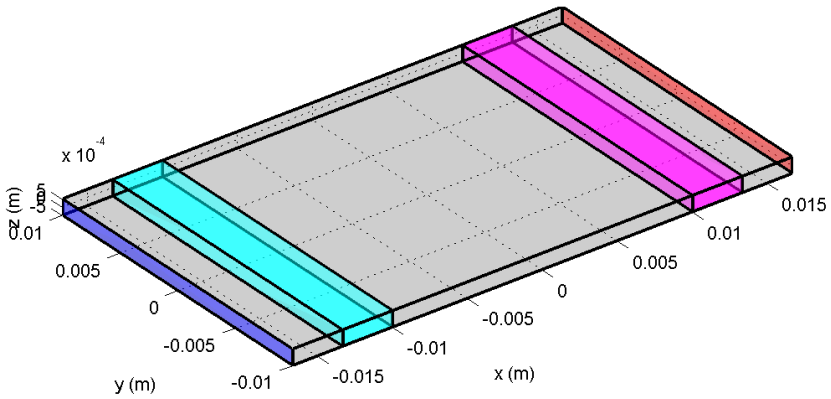

Figure 5.1 Définition de la géométrie du problème (partie électrique). Région grise : frontière du volume conducteur. Région rouge : électrode source. Région bleue : électrode puits. Région magenta : électrode de mesure suiveuse. Région cyan : électrode de mesure inverseuse.

dont la valeur est fixée arbitrairement, la position a peu d'importance et ne sert qu'à assurer une solution unique au problème.

5.1.4 Résolution des problèmes électrostatiques

La résolution des problèmes électrostatiques correspond à trouver φ^I (situation I) et φ^L (situation L). Rappelons que φ^I est la distribution de potentiel produite par l'application du courant aux électrodes de source et de puits lorsque les électrodes de mesure sont déconnectées, tandis que φ^L est la distribution de potentiel produite par l'application d'un courant de 1 ampère aux électrodes de mesure lorsque les électrodes de source et de puits sont déconnectées. Cette résolution se fait sur la grille électrique. Le problème électrique formulé contient autant d'équations que d'inconnues. Les inconnues sont les valeurs $\hat{\varphi}$ associées au potentiel électrique sur les points de cette grille. Notons toutefois que, puisque la formulation utilisée dans cet exemple contient le renforcement de Kronecker, tel qu'expliqué à la section A.4, les inconnues $\hat{\varphi}$ ont la même valeur que le potentiel électrique φ.

À chaque point de la grille est associée une équation à résoudre. Ces équations sont décrites au tableau 5.4.

Dans ce tableau, Γ_{el}^{Δ} correspond à la triangulation de la surface de l'électrode el, comportant un ensemble de triangles t d'aire ΔS_t. La première équation pour le domaine de type « Électrode » exprime, sous forme discrétisée, que le courant total passant au travers de la surface de l'électrode est la somme des produits de la densité de courant sur chacun des triangles constituant cette surface avec l'aire du triangle respectif. Dans cette équation, les valeurs de conductivité électrique et de potentiel électrique sont obtenues par :

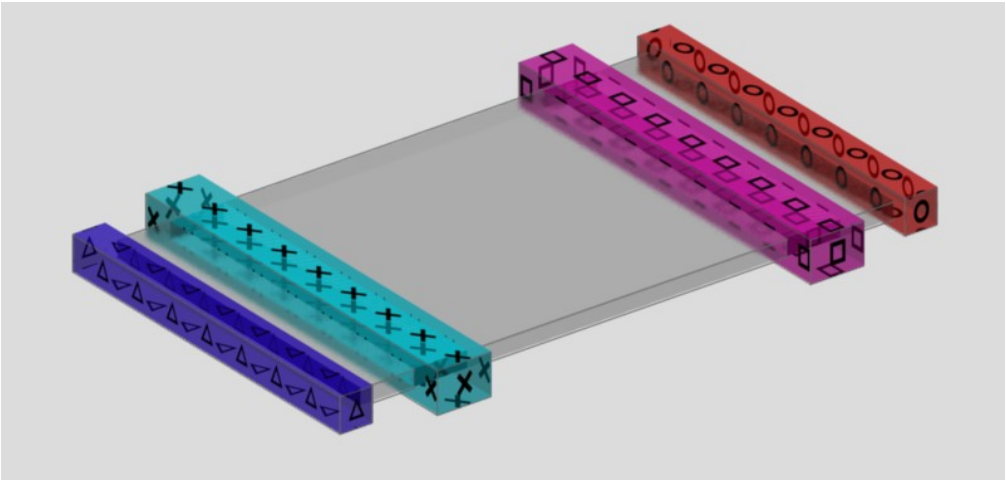

Figure 5.2 Illustration de la géométrie du problème (partie électrique). Il faut noter, en particulier, que les électrodes de mesure font le tour de l'échantillon. ◯ : Électrode source. △ : Électrode puits. □ : Électrode mesure suiveuse. × : Électrode mesure inverseuse.

Tableau 5.4 Équations à résoudre selon le domaine d'application (lieu du point associé à l'équation)

Domaine	Équation(s)
Intérieur (Ω/Γ)	$\boldsymbol{\nabla} \cdot (-\sigma_i \boldsymbol{\nabla} \varphi_i) = 0$
Potentiel fixé (Γ_g)	$\varphi_i = V$
Isolation électrique (Γ_{isol})	$(-\sigma_i \boldsymbol{\nabla} \varphi_i) \cdot \boldsymbol{n} = 0$
Électrode (Γ_{el})	$\sum_{t \in \Gamma_{el}^{\Delta}} ((-\sigma_t \boldsymbol{\nabla} \varphi_t) \cdot \boldsymbol{n}) \Delta S_t = I_{el}, \quad i = \Gamma_{el}\{1\}$ $\varphi_{i+1} = \varphi_{\Gamma_{el}\{1\}}, \quad i = \Gamma_{el}\{2\}, \ldots, \Gamma_{el}\{\mathrm{NP}_{el}\}$

$\sigma_t \boldsymbol{\nabla} \varphi_t = \left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i \boldsymbol{\nabla} \varphi_i \right) /3$, où les points i utilisés sont ceux formant le triangle t. La seconde forme d'équation pour ce domaine exprime que le potentiel électrique est le même pour tous les points appartenant à cette région.

Pour la résolution de ces problèmes électrostatiques, l'ordre de la base de fonctions pour l'interpolation est de 2 (base quadratique) et les fonctions d'agrandissement déterminant la largeur de la fonction noyau pour chacun des points sont posées par :

$$\begin{aligned} &[a_x(x_K, y_K, z_K), a_y(x_K, y_K, z_K), a_z(x_K, y_K, z_K)] = \\ &\quad 1,17 \times [d_x^{GJ}(x_K, y_K, z_K), d_y^{GJ}(x_K, y_K, z_K), d_z^{GJ}(x_K, y_K, z_K)] \end{aligned} \tag{5.1}$$

où les $d_\bullet^G$ expriment la distance entre les points spécifiée sur la grille G désignée (ici, la grille électrique) selon la dimension x, y ou z, pour chacune des coordonnées (x_K, y_K, z_K) de cette grille.

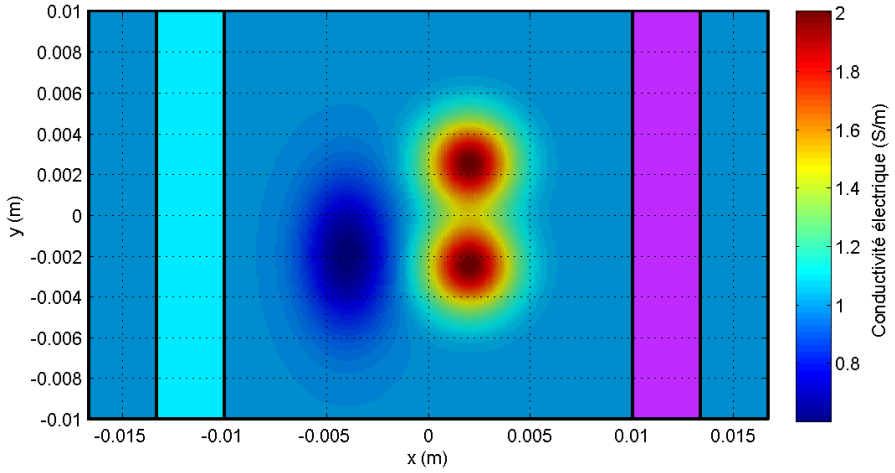

Figure 5.3 Distribution de conductivité électrique. Sa représentation discrète sur la grille électrique est montrée à la figure E.2.

Les solutions obtenues pour les deux situations sont calculées en 3D. La coupe de ces solutions en $z = 0$ m est illustrée aux figures 5.4 et 5.5.

Les distributions de densité de courant correspondantes sont illustrées aux figures 5.6 et 5.7. À des fins de visibilité, seule la partie du domaine près de l'électrode de mesure suiveuse est représentée.

Le produit de sensibilité $\sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)$ à $z = 0$ m est tracé en élévation à la figure 5.8.

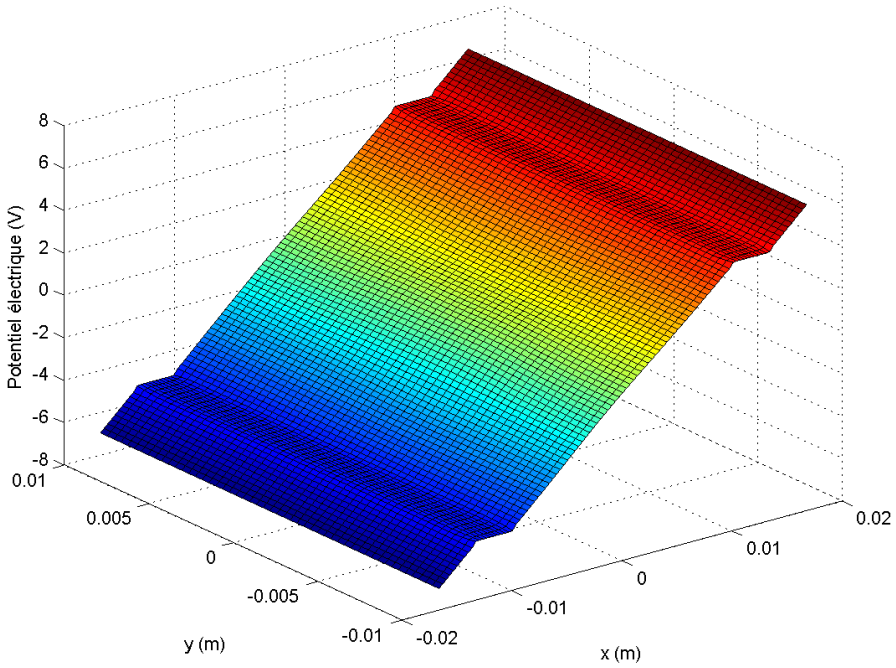

Figure 5.4 Solution du problème électrostatique (situation I). Un courant de 10 mA circule entre les électrodes de source et de puits, placées aux extrémités du domaine conducteur. Cette figure trace en élévation la distribution de potentiel au plan $z = 0$ m. À titre de référence, cette solution sur les points de grille est reproduite à la figure E.3. Les deux plateaux de potentiel, vers les extrémités, sont produits par les électrodes de mesure qui agissent à proximité comme des courts-circuits, créant ainsi des équipotentielles.

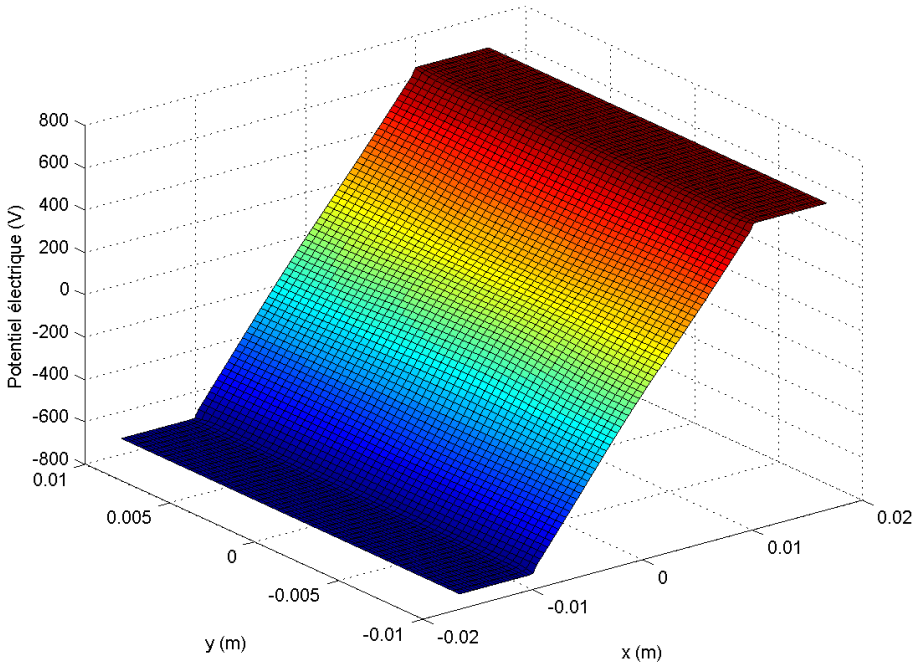

Figure 5.5 Solution du problème électrostatique (situation L). Un courant de 1 A circule entre les électrodes de mesure. Cette figure trace en élévation la distribution de potentiel au plan $z = 0$ m. À titre de référence, cette solution sur les points de grille est reproduite à la figure E.4. Les deux plateaux de potentiel, aux extrémités, proviennent du fait que le courant circulant dans les régions correspondantes (c'est-à-dire des électrodes de mesure vers les extrémités du volume conducteur) est pratiquement nul.

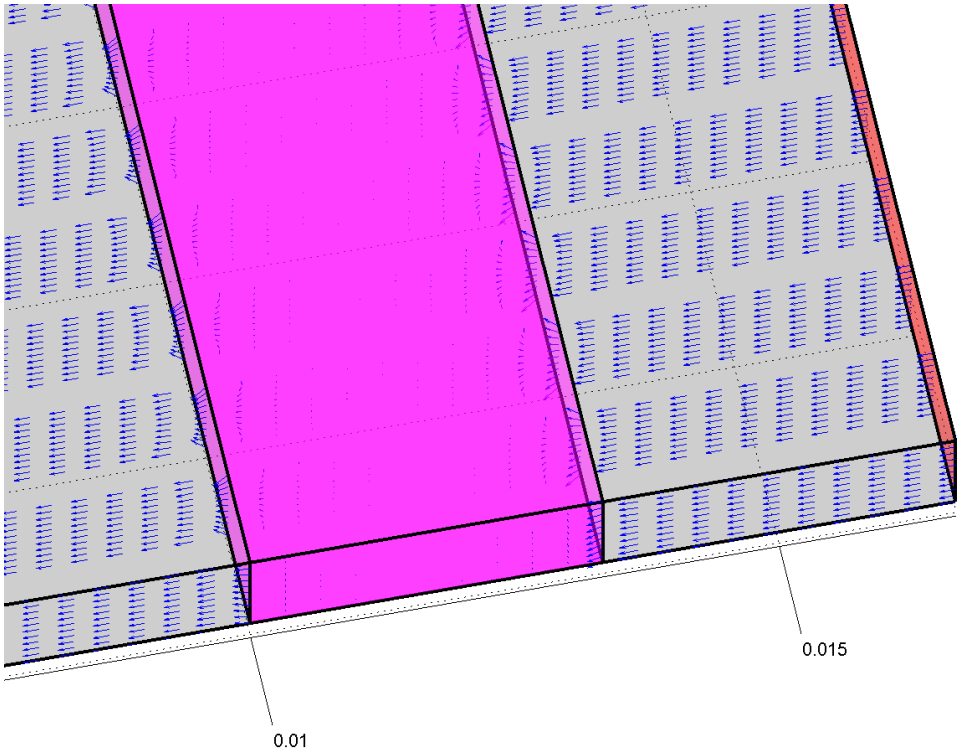

Figure 5.6 Densité de courant du problème électrostatique près de l'électrode de mesure suiveuse (situation I). L'effet « court-circuit » de l'électrode de mesure est manifeste par la forte courbure des lignes de courant. Puisque la plaque est beaucoup plus mince que la longueur de l'électrode de mesure (selon x), très peu de courant circule dans le volume conducteur au niveau de cette électrode.

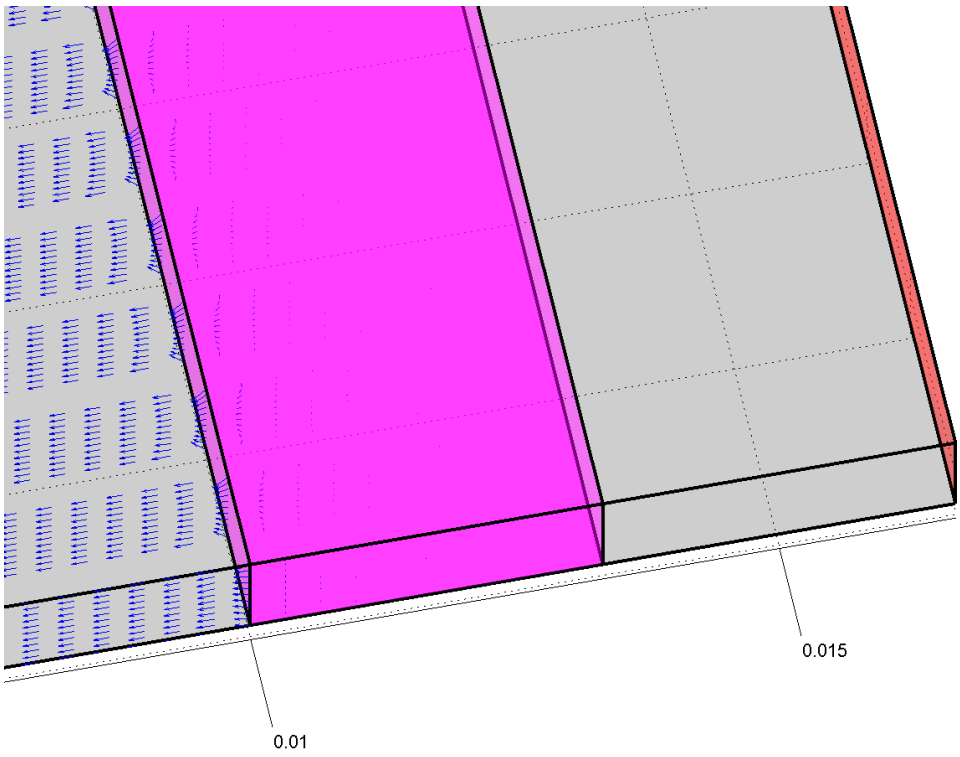

Figure 5.7 Densité de courant du problème électrostatique près de l'électrode de mesure suiveuse (situation L).

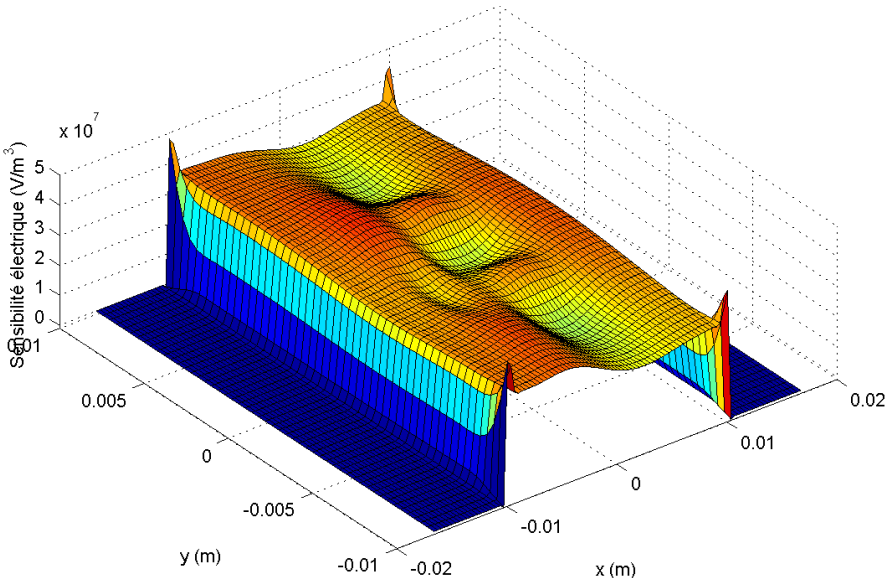

Figure 5.8 Sensibilité du problème électrostatique. Cette figure trace en élévation la distribution de sensibilité acousto-électrique au plan $z = 0$ m. À titre de référence, cette solution sur les points de grille est reproduite à la figure E.5. Cette sensibilité est positive dans la région entre les électrodes de mesure car les densités de courant $\boldsymbol{J}^I$ et $\boldsymbol{J}^L$ y ont la même orientation. En dehors de cette région centrale, la sensibilité est pratiquement nulle car $\boldsymbol{J}^L$ est très faible.

5.1.5 Acoustique

Le champ acoustique est produit par un transducteur monoélément, sphérique et concave. La simulation vise à reproduire les caractéristiques du transducteur qui est utilisé dans la partie expérimentale (voir section 3.1.2 pour les détails sur les instruments). Les paramètres de ce transducteur, qui ont été utilisés pour la simulation, sont donnés au tableau 5.5.

Tableau 5.5 Paramètres du transducteur acoustique pour la simulation

Paramètre	Valeur
Diamètre de la région active	64,0 mm
Distance focale	63,0 mm

La réponse électromécanique $R_{EM}(t)$ du transducteur qui a été utilisée pour la simulation provient d'une mesure prise par un hydrophone (Precision Acoustics Ltd., Dorchester, Dorset, United Kingdom) de 1,0 mm de diamètre placé au foyer du transducteur. Cette réponse électromécanique est tracée à la figure 5.9. Le signal d'excitation $E(t)$ appliqué au transducteur est tracé à la figure 5.10. La densité de force $f_s(t)$ résultante, obtenue par l'équation 4.4, est tracée à la figure 5.11. L'enveloppe du champ acoustique produit dans ces conditions, sur la tranche centrale de ce transducteur, est montrée à la figure 5.12.

La grille utilisée pour la discrétisation du problème acoustique contient un peu plus de 8100 points distribués régulièrement autour du foyer. Elle est reproduite à la figure E.6.

Le positionnement du transducteur par rapport à la géométrie du problème électrique est illustré à la figure 5.13.

5.1.6 Signaux de synthèse (solution du problème direct)

Cette section décrit le calcul des signaux de synthèse qui serviront plus loin à étudier la méthode de reconstruction de conductivité que nous proposons pour le modèle bipolaire.

La simulation des signaux résultant du processus de MACE revient principalement à calculer l'intégrale discrétisée du produit de la sensibilité électrique avec le champ acoustique. Pour ce faire, la grille d'intégration constituée d'environ 46 000 points de quadrature de Gauss est d'abord créée sur le volume de la géométrie du problème électrique. L'interpolation de la sensibilité électrique et du champ acoustique aux points de la grille d'intégration est ensuite effectuée. Pour chaque point, le produit de la sensibilité électrique avec le champ acoustique et le poids associé à ce point de quadrature est calculé. La valeur de cette intégrale est donnée par la somme de ces produits.

Pour la configuration de la figure 5.13, le signal de MACE obtenu est tracé à la figure 5.14. Une valeur de $K_I = 100 \times 10^{-11}$ Pa^{-1} a été utilisée. Aucun bruit n'a été ajouté et aucun

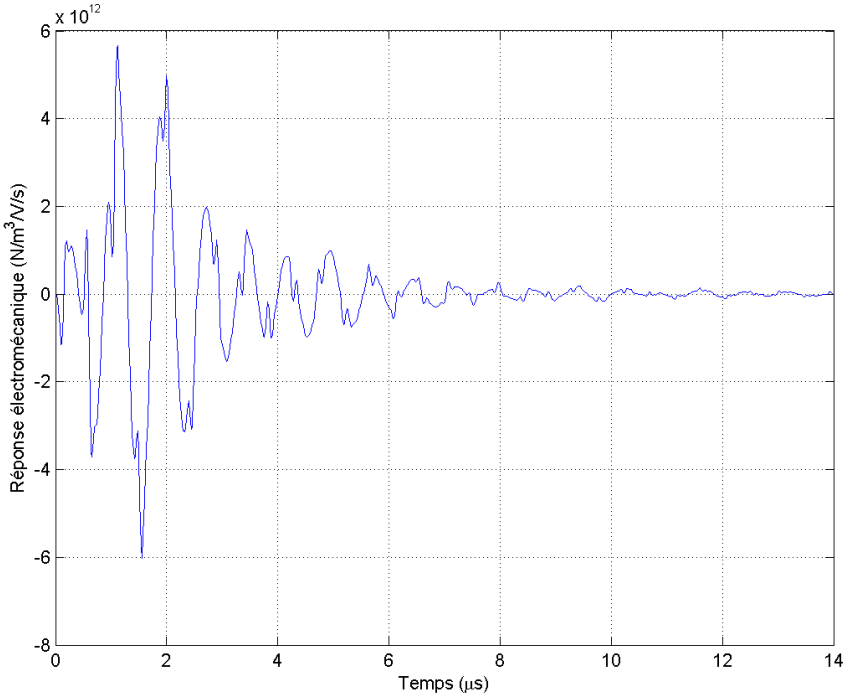

Figure 5.9 Réponse électromécanique du transducteur. Elle est obtenue à partir de la mesure de la pression au foyer pour une excitation quasi impulsionnelle. Cette mesure expérimentale est donnée à la figure 3.8 pour une excitation de 100 V durant 20 ns. Par les équations 4.3 et 4.5, avec $\frac{S_{transducteur}}{2\pi R} = 0,0087$ m, nous en déduisons que la densité de force $f_s(t)$ émise par le transducteur, pour cette excitation électrique quasi impulsionnelle, a une amplitude de $1,15 \times 10^7$ N/m^3. Le délai qui a été appliqué pour obtenir la densité de force à partir du signal de pression mesuré est de 41,86 μs $\approx R/c$. Puisque l'excitation électrique a une valeur intégrale de 100 V $\times$ 20 ns $= 2 \times 10^{-6}$ V $\cdot$ s, l'équation 4.4 nous indique que la réponse électromécanique a une amplitude de $(1,15 \times 10^7$ N/m$^3)/(2 \times 10^{-6}$ V $\cdot$ s$) = 5,75 \times 10^{12}$ N/m^3/V/s.

filtrage n'a été appliqué à ce signal.

Pour la réalisation de la reconstruction, les signaux de MACE doivent être acquis pour plusieurs positions d'excitation acoustique. Ceci est fait en déplaçant le transducteur à différentes positions prédéfinies. Ces positions constituent la grille d'acquisition. Pour ce problème, la grille d'acquisition est montrée à la figure 5.15. Les 11×11 points de la grille sont distribués régulièrement dans une sous-région de la géométrie du problème électrique. Ces points sont choisis assez loin des électrodes pour demeurer dans la région où la sensibilité électrique varie lentement.

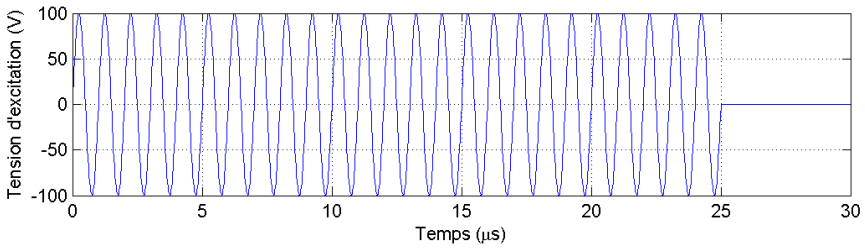

Figure 5.10 Excitation électrique du transducteur. Il s'agit d'un train d'ondes sinusoïdales de 25 cycles à 1 MHz.

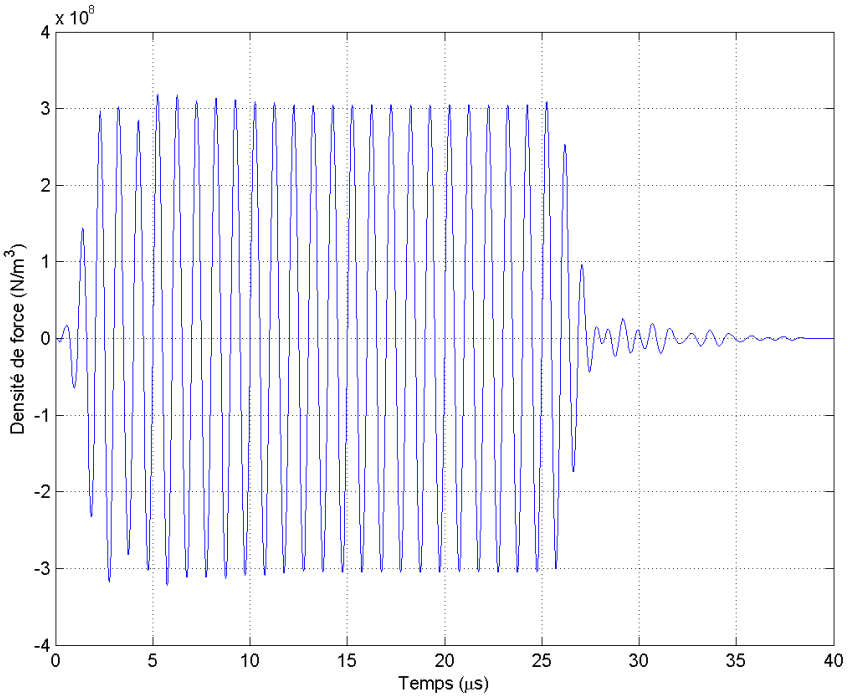

Figure 5.11 Densité de force $f_s(t)$ du transducteur. Tel qu'exprimé aux équations 4.3 et 4.5, en multipliant ce signal par $\frac{S_{transducteur}}{2\pi R}$, qui est égal à 0,0087 m pour ce transducteur, nous obtenons le signal de pression au foyer, atteignant environ 2,6 MPa.

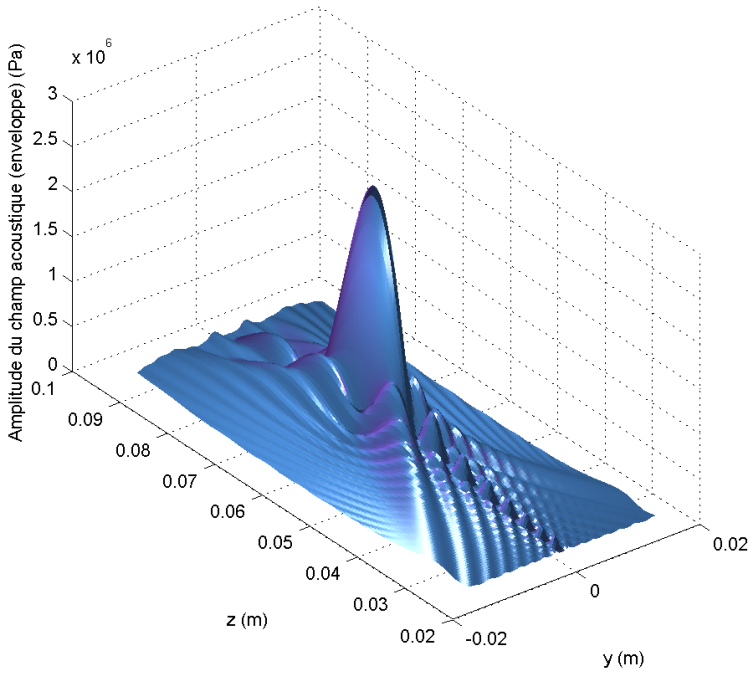

Figure 5.12 Enveloppe du champ acoustique du transducteur (tranche centrale). L'axe identifié par z correspond à la direction de propagation de l'onde. Cette enveloppe décrit la pression maximale atteinte pour chaque point de l'espace. Le lobe principal, correspondant à la région focale, a une largeur à mi-hauteur de 2 mm et une longueur de 13 mm. Plusieurs lobes secondaires, de plus faible amplitude que la région focale, sont visibles.

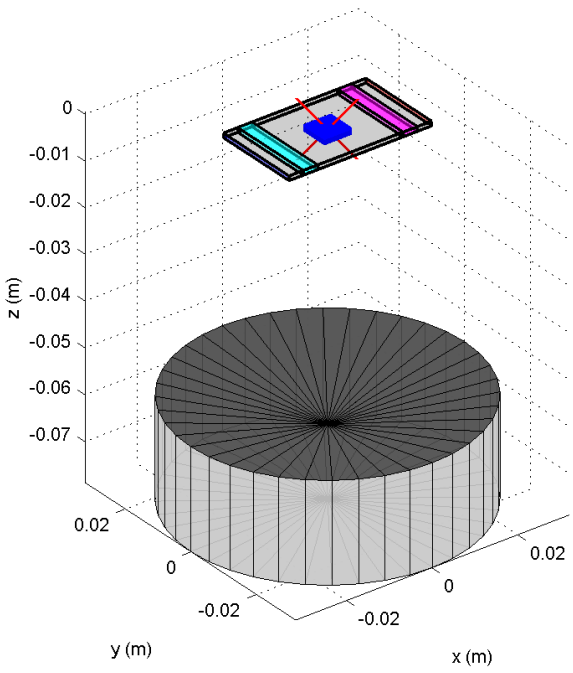

Figure 5.13 Positionnement du transducteur par rapport à la géométrie du problème électrique. Sur cette représentation, le foyer du transducteur (indiqué par une croix rouge) est au centre du volume conducteur.

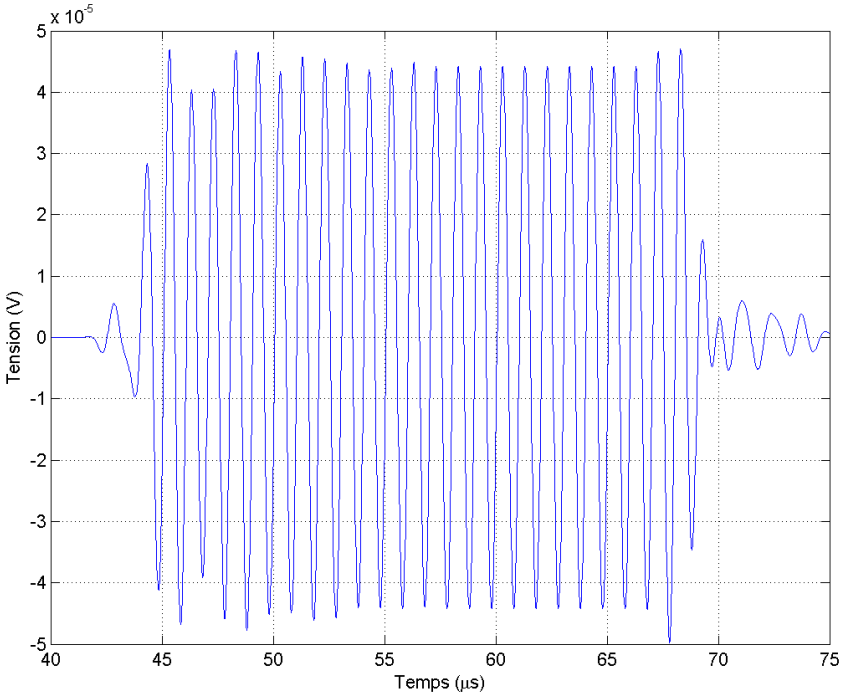

Figure 5.14 Signal de MACE pour la configuration de la figure 5.13. Le nombre de cycles du train d'ondes correspond bien avec celui de l'excitation du transducteur. Plusieurs microsecondes sont nécessaires à la stabilisation de l'amplitude de ce signal. Ceci est dû, entre autres, à la longue réponse électromécanique utilisée (variant sur au moins 4 μs).

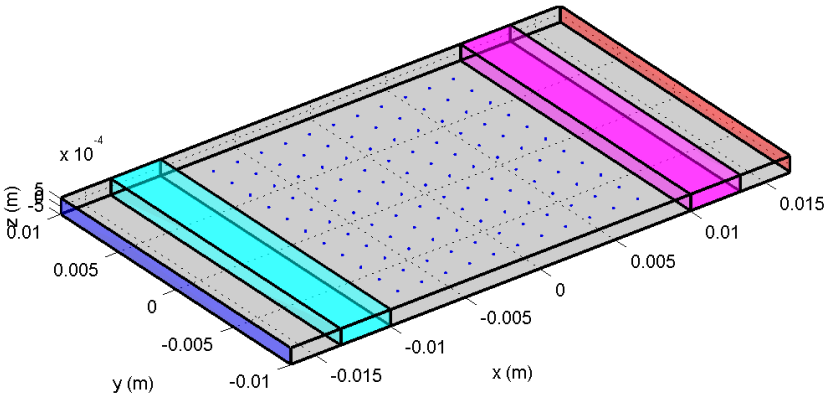

Figure 5.15 Distribution de points de la grille d'acquisition. Elle comporte $11 \times 11 = 121$ points distribués régulièrement sur la région centrale de taille 16 mm $\times$ 16 mm.

5.1.7 Reconstruction

La méthode de reconstruction de conductivité électrique proposée est destinée à être appliquée sur des mesures de MACE acquises expérimentalement et devrait être validée avec de tels signaux. Néanmoins, durant la phase de développement, l'utilisation de signaux de synthèse en remplacement de signaux réels s'avère toujours très utile pour évaluer ses performances dans des conditions contrôlées. Souvent plus simple à mettre en œuvre que ne le serait le montage expérimental, ceci n'est pas sans soulever certains problèmes que l'analyse de Lionheart (2004) peut permettre d'éviter. Cet auteur expose certains critères à rencontrer pour évaluer correctement la résolution d'un problème inverse à partir de données de synthèse. Selon l'expression consacrée, ne pas rencontrer ces critères donne lieu à commettre un crime de problème inverse[1]. Ceci peut se produire, entre autres, via la représentation des grilles des problèmes direct et inverse.

Dans ce qui suit, quatre cas sont examinés, ordonnés par degré de « crime inverse ». Cette organisation permet d'introduire graduellement les sources d'erreurs et d'identifier leur importance dans le résultat final :

- Cas #1 : les valeurs de sensibilité utilisées pour la reconstruction sont celles obtenues par le problème direct électrique, sans tenir compte de la partie acoustique. La reconstruction est faite sur la même grille électrique que celle utilisée pour la résolution du problème direct. Ceci est fait dans le but de montrer la performance et le comportement de la reconstruction dans des conditions quasi idéales ;
- Cas #2 : les valeurs de sensibilité utilisées pour la reconstruction proviennent de l'expression 2.24 et sont calculées à partir des signaux V^{MACE} ; la partie acoustique est prise en compte, les signaux V^{MACE} temporels sont utilisés et leur amplitude à la fréquence centrale du transducteur est évaluée. La grille électrique employée pour calculer la sensibilité ν_{ref} apparaissant dans cette expression 2.24 est la même que celle ayant servi à produire les signaux V^{MACE} mesurés. La source d'erreur introduite dans ce cas #2 est celle liée aux approximations qui ont mené à l'équation 2.24. Les valeurs de sensibilité ainsi calculées sont donc différentes de celles du premier cas, qui dispose de la sensibilité « exacte ». Nous nous attendons à ce que la conductivité électrique reconstruite diffère de celle exacte. Le but ici est de montrer l'ampleur de cette différence provoquée par la formulation approximative de la sensibilité (équation 2.24) ;
- Cas #3 : ce cas simule les conditions où un signal de calibration est disponible. Il est similaire au deuxième pour ce qui est de l'utilisation de l'expression approximant la sensibilité (équation 2.24) et employant les signaux V^{MACE} mesurés. Pour ce qui est des signaux V^{MACE} de référence, ils sont calculés avec la grille électrique fine comme si des

1. En anglais, les expressions « inverse crime » ou « inverse problems crimes » sont retrouvées.

signaux de calibration avaient été acquis. Toutefois, la reconstruction est effectuée sur une grille électrique plus grossière. Ces conditions s'approchent de celles qui pourraient être obtenues en pratique et constitue une situation où nous évitons de commettre un « crime inverse » ;

– Cas #4 : ce cas simule les conditions où un signal de calibration n'est pas disponible et que ces données de référence doivent être simulées. Il fait la reconstruction de la conductivité électrique à partir des valeurs de sensibilité obtenues par la formule 2.24, alors que la simulation des signaux de référence se fait sur la grille électrique grossière ; la reconstruction se fait aussi sur la grille électrique grossière. Nous évitons ici de commettre un « crime inverse ».

Selon les besoins des cas #3 et #4, les grilles utilisées pour la reconstruction sont les suivantes : grille électrique grossière (figure E.8), grille acoustique grossière (figure E.9) et grille d'intégration grossière (figure E.10).

Pour ce problème, la conductivité électrique de référence a été posée à 1,0 S/m sur tout le domaine. Pour l'utilisation de l'équation 2.24, les valeurs suivantes ont été prises : fréquence ω de 1,0 MHz, plage temporelle $[t_0 = 60\,\mu\text{s}, t_f = 65\,\mu\text{s}]$, $K_{I,mes}$ et $K_{I,ref}$ à 100×10^{-11} Pa^{-1}.

Les valeurs des paramètres de reconstruction pour ce problème sont les suivantes :

– valeurs *a priori* des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_{prior}$) : 1,0 S/m ;
– valeurs initiales des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_0$) : 1,0 S/m ;
– écart-type sur les paramètres du modèle (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$) : 100 S/m. Aucune covariance entre ces paramètres ;
– écart-type sur les données $\boldsymbol{d}$ de sensibilité (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{d}}$) : $1 \times 10^{-3} \times \text{abs}(\boldsymbol{d}_{obs})$. Aucune covariance entre ces paramètres ;
– écart-type sur la modélisation (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{T}}$) : 0 V/m^3 ;
– critère d'arrêt : norme du gradient à atteindre ($\|\boldsymbol{\gamma}_n\|$) : 0,1.

Le choix de très faibles valeurs d'écarts-types sur les données et de très grandes valeurs d'écarts-types sur les paramètres du modèle fait en sorte que la reconstruction est très peu régularisée par l'ajout de l'*a priori*. Il est donc attendu que la reconstruction atteigne le point où les valeurs des données fournies par le modèle soient presque égales à celles spécifiées comme objectif. Ces circonstances sont choisies dans le présent problème pour montrer les performances de convergence de la reconstruction vers une solution pour laquelle les données n'ont subi l'inclusion d'aucun bruit.

Pour cette méthode, la grille de reconstruction est identique à celle d'acquisition. Pour faire l'interpolation des valeurs de conductivité électrique de la grille de reconstruction à la grille électrique, l'ordre des fonctions d'interpolation a été fixé à 1 (base linéaire de fonctions),

et les fonctions d'agrandissement déterminant la largeur de la fonction noyau pour chacun des points sont posées par :

$$[a_x(x_K, y_K, z_K), a_y(x_K, y_K, z_K), a_z(x_K, y_K, z_K)] = \\ 0,585 \times [d_x^{GR}(x_K, y_K, z_K), d_y^{GR}(x_K, y_K, z_K), d_z^{GR}(x_K, y_K, z_K)] \tag{5.2}$$

où les $d_\bullet^G$ expriment la distance entre les points spécifiée sur la grille G désignée (ici, la grille de reconstruction) selon la dimension x, y ou z, pour chacune des coordonnées (x_K, y_K, z_K) de la grille électrique. La valeur de 0,585 = 1,17/2 a été choisie à partir de la valeur 1,17 habituellement spécifiée pour l'interpolation avec une base quadratique.

Les valeurs de sensibilité servant à la reconstruction pour chacun des cas de ce problème sont montrées à la figure 5.16. Pour référence, la figure 5.17 montre la distribution de sensibilité pour la conductivité électrique exacte obtenue pour la solution du problème électrostatique sur la grille électrique grossière. La reconstruction effectuée pour chacun de ces cas atteint les valeurs de sensibilité montrées à la figure 5.18. La figure 5.19 présente les distributions reconstruites de conductivité électrique interpolées sur la tranche en $z = 0$ m. Pour référence, la conductivité électrique exacte sur cette tranche est montrée à la figure 5.20. Les distributions reconstruites sur l'ensemble du volume sont affichées aux figures E.11 à E.14, tandis que l'erreur absolue, soit $\sigma_{reconstruit} - \sigma_{exact}$, est présentée aux figures E.15 à E.18.

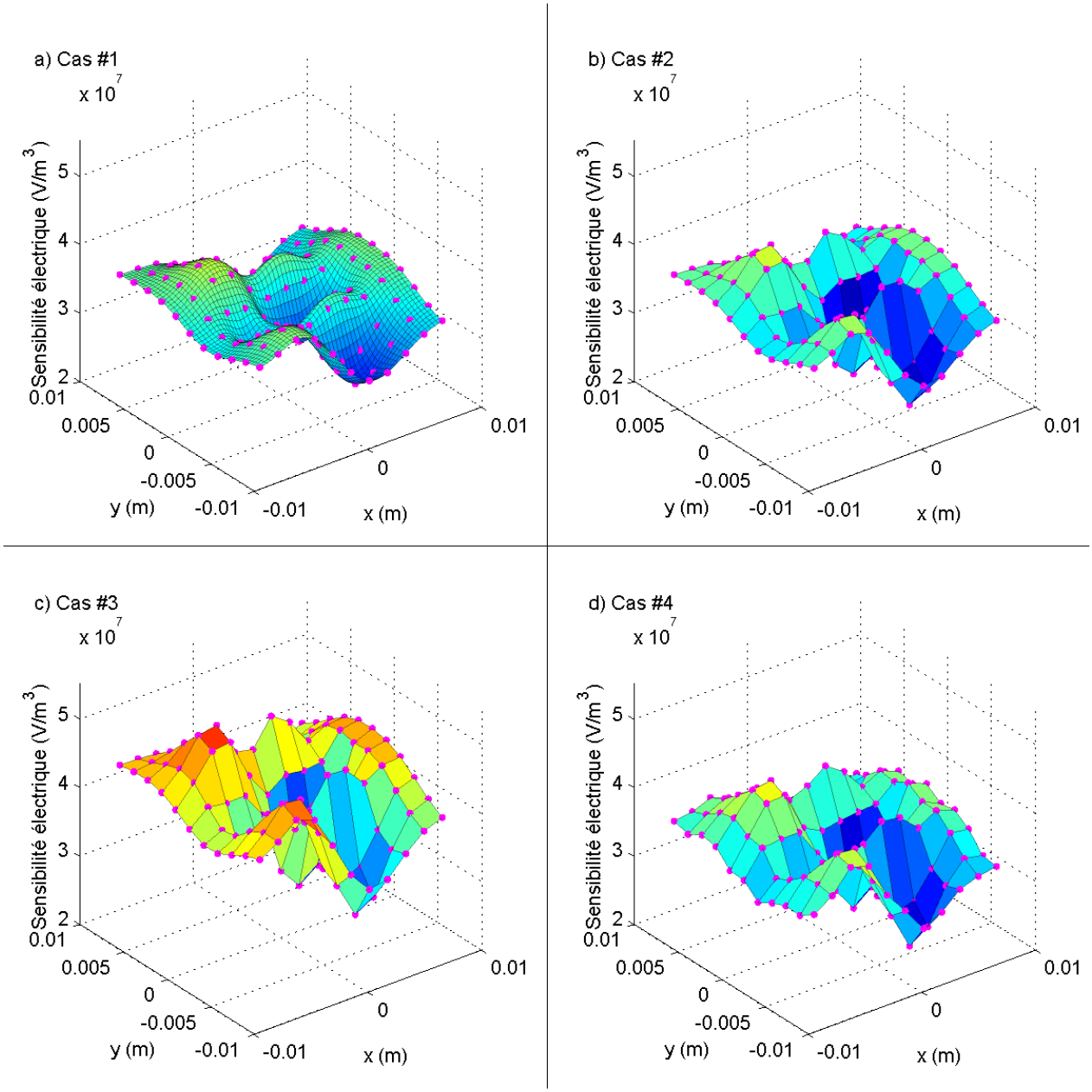

Figure 5.16 Valeurs de sensibilité utilisées pour la reconstruction. Sur ces graphiques, les points sont les échantillons (sur la grille de reconstruction) servant de données objectives. En (a), la surface provient d'une interpolation fine, sur la tranche en $z = 0$ m, de la sensibilité exacte. Sur les graphiques (b) à (d), une telle interpolation n'est pas possible puisque les valeurs de sensibilité sont obtenues directement à partir des mesures réalisées à ces positions.

Le cas en (c) a des valeurs objectives beaucoup plus élevées que les cas en (a) et en (b) dû à une représentation différente de la grille électrique. Ces valeurs sont près de celles de la figure 5.17. En (d), bien que la même grille électrique qu'en (c) soit utilisée, des valeurs similaires à celles en (a) et en (b) sont obtenues.

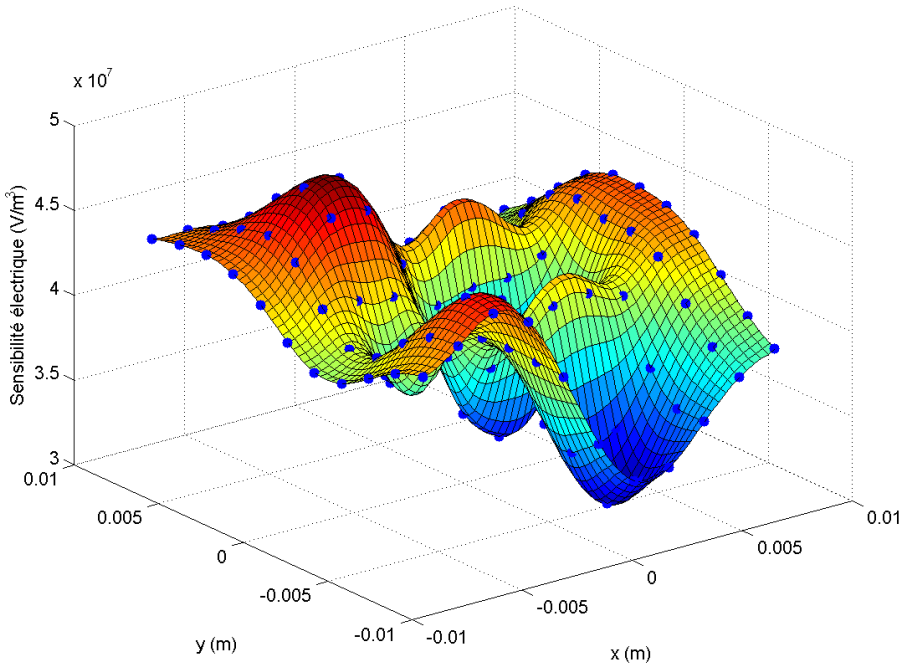

Figure 5.17 Valeurs de sensibilité pour la conductivité électrique exacte obtenues par la résolution du problème électrostatique sur la grille électrique grossière. Les points sont les échantillons de cette surface aux coordonnées des points de la grille de reconstruction.

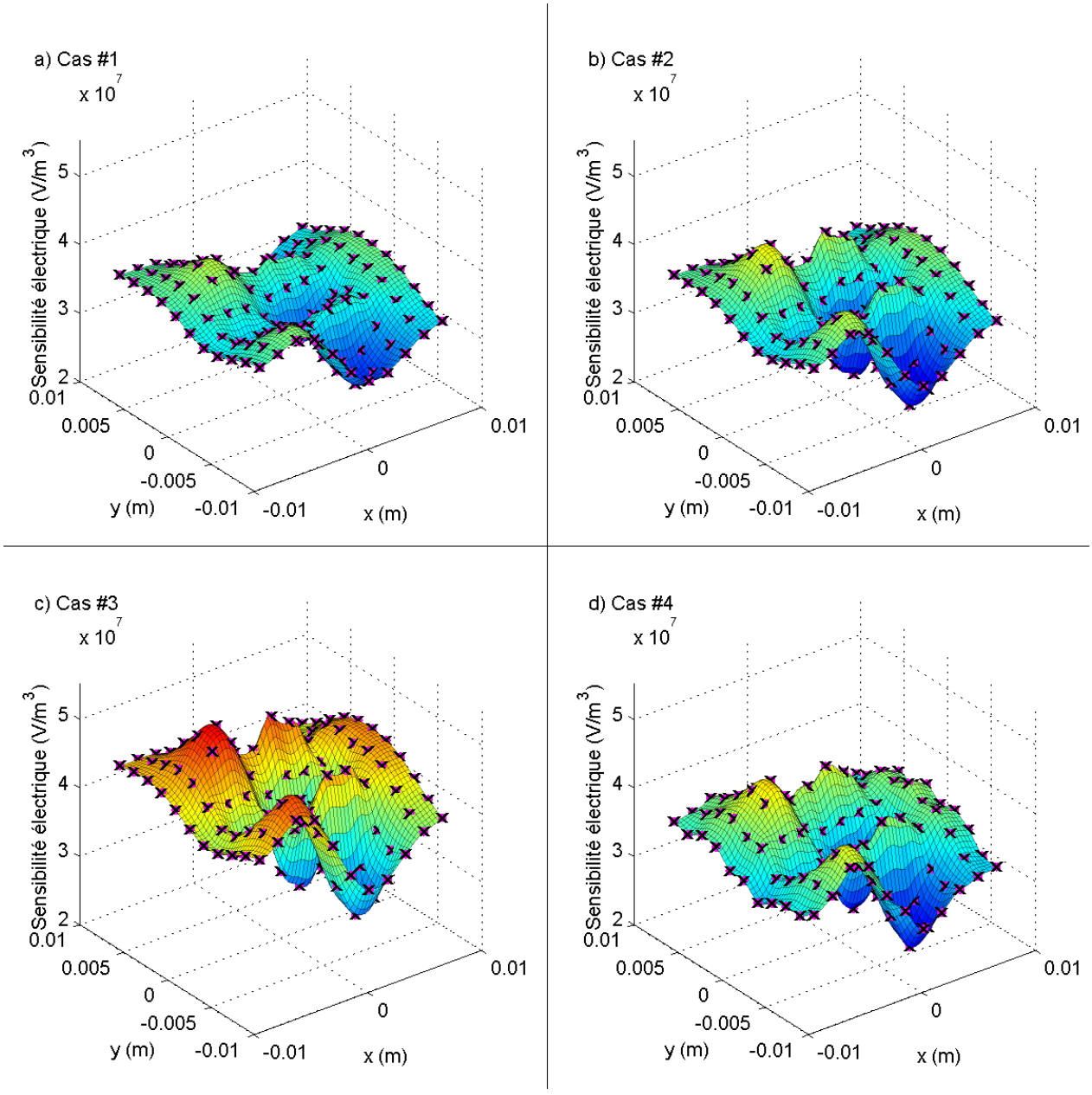

Figure 5.18 Valeurs de sensibilité reconstruites. Tel que décrit à la section 4.3.3, le processus de reconstruction doit calculer la sensibilité, sur la grille électrique, pour la conductivité électrique obtenue à chaque itération. Cette sensibilité est ensuite interpolée sur la grille de reconstruction pour être comparée aux données objectives. Sur ces graphiques, une interpolation fine de la sensibilité est représentée par les surfaces afin d'illustrer la forme générale de la sensibilité reconstruite. Les échantillons de ces surfaces aux coordonnées de la grille de reconstruction sont marqués par les croix noires. Les points roses (affichés sous les croix noires) sont les valeurs objectives (identiques aux valeurs de la figure 5.16).

Ces graphiques montrent que les valeurs de sensibilité interpolées sur la grille de reconstruction, à la fin du processus itératif, sont très près des valeurs objectives et ce, pour les 4 cas présentés.

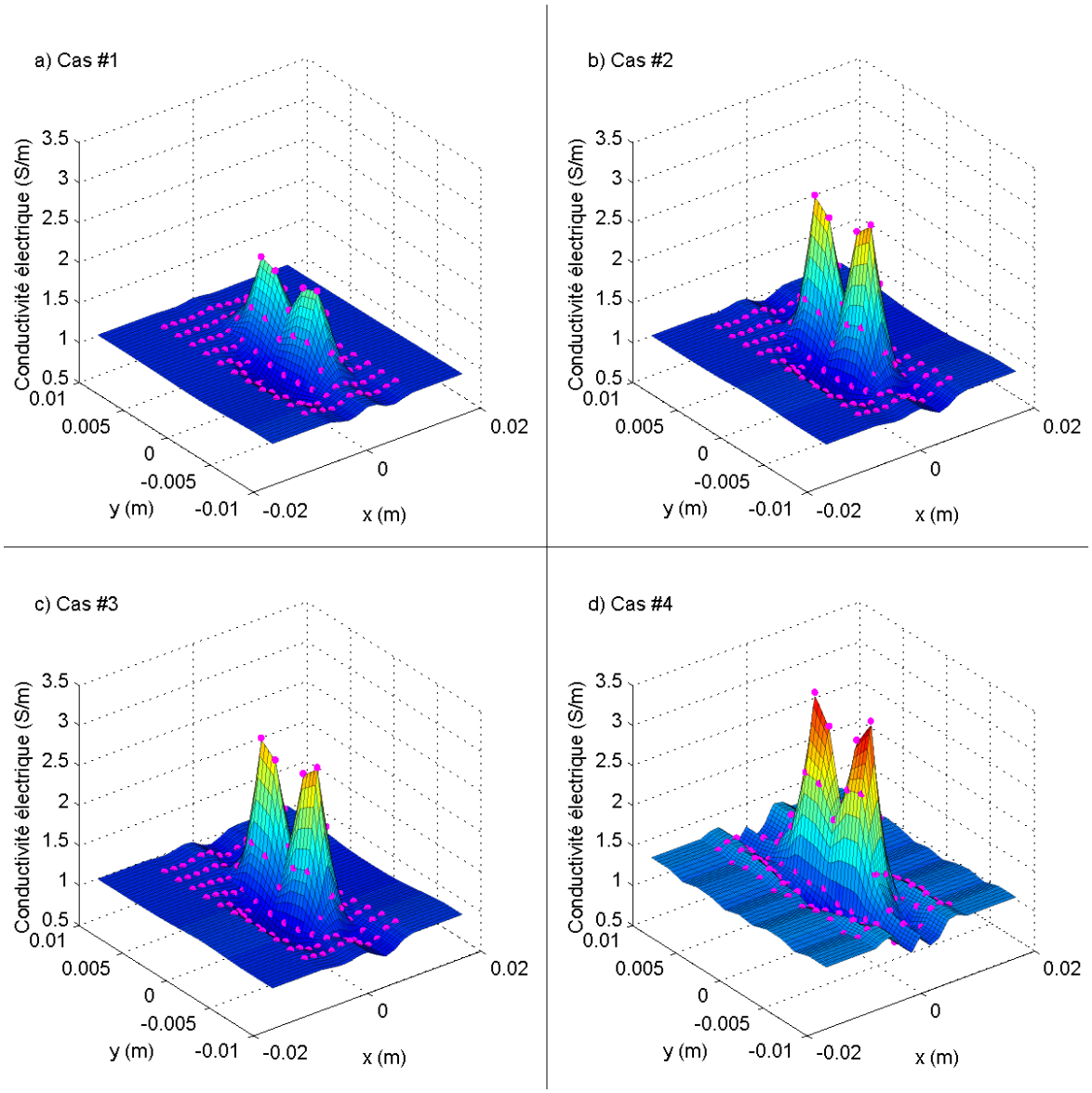

Figure 5.19 Valeurs de conductivité électrique reconstruites. Les points correspondent aux valeurs estimées de conductivité électrique (obtenues sur la grille de reconstruction). Les surfaces montrent les valeurs obtenues à partir de celles sur la grille de reconstruction. Rappelons que l'interpolation est produite par une base linéaire de fonctions.
En (a), la distribution de conductivité électrique estimée est fortement similaire à la distribution exacte. En (b), la distribution surévalue celle exacte dans la région des inclusions gaussiennes. Cette différence est attribuable à la différence de forme de la distribution de sensibilité objective fournie (à la figure 5.16, l'amplitude des rebondissements est significativement plus grande en (b) qu'en (a)). En (c), les valeurs estimées de conductivité électrique sont très similaires à celles obtenues en (b). Cette similitude provient du fait que la distribution de sensibilité objective fournie, bien que différente dans les deux cas, concorde avec la représentation de la grille électrique pour la reconstruction. En (d), la sensibilité fournie en valeurs objectives sous-évalue de manière générale celle attendue selon la représentation de la grille électrique pour la reconstruction. Ainsi, la conductivité électrique estimée est généralement surévaluée.
La racine carrée de l'erreur quadratique, soit $\sqrt{\int_\Omega (\sigma_{reconstruit} - \sigma_{exact})^2 \mathrm{d}\Omega}$, est de : (a) $1,5 \times 10^{-5}$, (b) $7,2 \times 10^{-5}$, (c) $7,4 \times 10^{-5}$, (d) $24,2 \times 10^{-5}$ S/m $\cdot$ m$^{3/2}$.

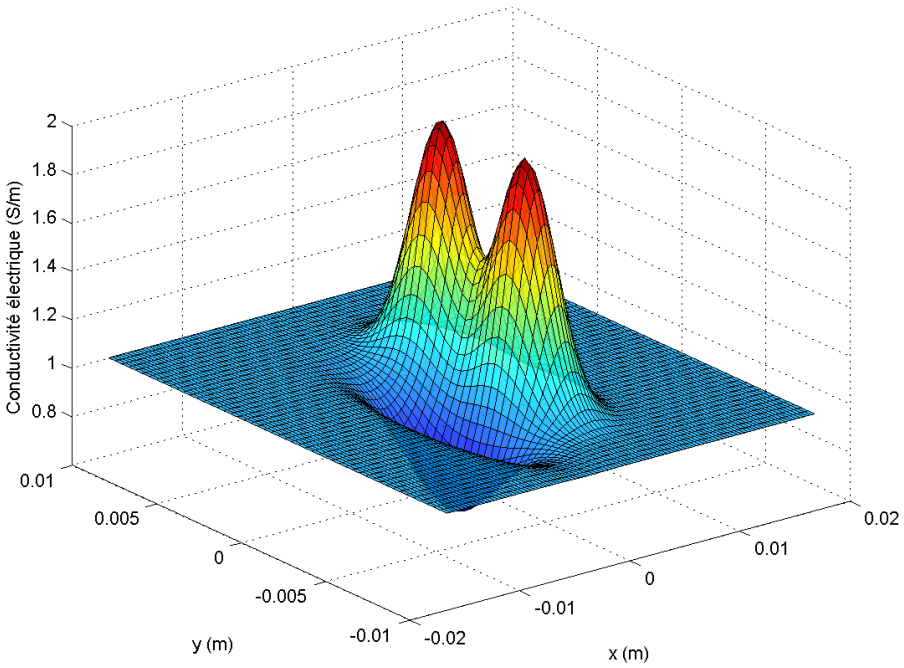

Figure 5.20 Distribution de conductivité électrique exacte.

Le nombre d'itérations requis pour atteindre la convergence souhaitée est généralement faible (environ 6 pour les cas ci-dessus). Ce critère est basé sur la norme maximale permise du gradient pour arrêter le processus itératif. Sur un ordinateur possédant deux processeurs à double cœur fonctionnant à 2,60 GHz, le temps de calcul pour effectuer la reconstruction est de l'ordre de la dizaine de minutes. L'opération la plus exigeante en calculs est l'inversion des $2 \times \mathrm{NP}_{GR}$ systèmes linéaires à chacune des itérations servant à la création de la matrice $\mathbf{G}_n$.

5.1.8 Discussion des résultats de ce problème

La position du point de potentiel électrique nul spécifié en tant que condition frontière fait en sorte que chacune de ces solutions doit être symétrique selon la direction x. Or, il existe un petit décalage dans ces distributions de potentiel, comme si une fuite de courant existait au point de potentiel fixé. Ce phénomène est principalement causé par la discrétisation du problème et l'interpolation requise des variables dans cette discrétisation.

Cette discrétisation affecte également l'amplitude de la solution obtenue. Ceci a pour effet de produire une amplitude reconstruite différente selon la résolution de la grille. Ainsi, pour la grille électrique grossière servant à la reconstruction, la sensibilité électrique calculée a une amplitude différente de celle obtenue sur la grille électrique fine (comparer les figures 5.17 et 5.16a). Pour le présent problème, la sensibilité sur la grille grossière est environ 1,2 fois plus grande que celle de la grille fine. Ceci a un impact direct sur les valeurs de sensibilité utilisées pour la reconstruction lorsque les signaux simulés sont obtenus par simulation sur la grille électrique grossière (ce qui a été fait au cas #4). Cependant, la forme générale des cibles reconstruites est très similaire.

Concernant le processus itératif de reconstruction, il est intéressant de noter son bon comportement général menant à l'estimation de la conductivité électrique à partir d'un petit nombre de paramètres (ici, 121). Dans les 4 cas présentés, la forme générale de la solution révèle assez bien la distribution de conductivité. Naturellement, la meilleure reconstruction de conductivité est obtenue avec le cas #1, où la « vraie » sensibilité acousto-électrique est utilisée. Avec le cas #2, nous montrons que l'effet des approximations dans le calcul de la sensibilité (équation 2.24) est de produire une surestimation de la conductivité et de dégrader la qualité de la reconstruction de conductivité en introduisant des rebondissements. Cet effet de surestimation se répercutera dans les 2 autres cas (#3 et #4) où cette équation 2.24 est aussi utilisée.

Dans les conditions où un crime inverse n'est pas commis, la meilleure reconstruction est celle obtenue lorsqu'un signal de calibration est disponible (cas #3) ; lorsque ce signal n'est pas disponible, la conductivité est surévaluée et des rebondissements sont plus importants.

Notons aussi que la reconstruction du cas #4 a fait appel à une grille d'intégration très grossière qui aurait pu être aisément raffinée afin de produire des signaux simulés plus précis. Le but de garder ces grilles dans un état assez grossier était d'illustrer le comportement de la méthode de reconstruction dans des conditions plus difficiles.

Pour ce qui est des oscillations présentes dans les distributions de conductivité électrique et de sensibilité reconstruites, une cause a été identifiée dans la représentation assez abrupte de la conductivité électrique sur la grille électrique obtenue par l'interpolation utilisant une base linéaire. Une manière de contrôler cet effet est d'augmenter les facteurs d'agrandissements déterminant la taille de la fonction noyau (« kernel »). Ceci a pour effet de produire un lissage dans la distribution interpolée. Quant aux oscillations fortes du cas #4, il faut remarquer que les valeurs de sensibilité fournies au problème inverse présentent déjà ce comportement oscillatoire. Une condition favorisant le lissage de la solution pourrait s'avérer intéressante dans ce cas, mais elle pourrait aussi avoir comme effet indésirable de dégrader l'identification de la partie d'intérêt, pour laquelle la conductivité électrique varie rapidement.

5.2 Problème : Application de la méthode basée sur le champ acoustique unipolaire

5.2.1 Commentaires généraux

Ce problème sert à illustrer l'application de la méthode basée sur le champ acoustique unipolaire. Bien que cette méthode se démarque de la méthode par onde bipolaire principalement pour l'imagerie sur de grands volumes, il demeure qu'elle est aussi applicable aux objets minces. La définition du problème électrique considérée dans cet exemple est la même que celle du problème précédent (section 5.1), donc les éléments relatifs à la géométrie du problème électrique, aux conditions frontières et à la résolution des problèmes électrostatiques ne seront pas repris, car ils sont identiques à ceux décrits précédemment.

5.2.2 Acoustique

Dans le but d'obtenir une représentation adéquate d'un champ acoustique unipolaire pouvant être produit par un transducteur dans des conditions pratiques, les simulations basées sur le modèle de l'onde unipolaire présentées dans ce document utilisent les données expérimentales de l'article de Sferruzza *et al.* (1999). La figure #8 de cet article montre le signal de pression obtenu près de la surface d'un transducteur monoélément circulaire pour une excitation électrique ressemblant à une rampe (figure #7 de l'article). Ce transducteur a une épaisseur de 2,4 mm et sa face émettrice est plane (transducteur non focalisé). Ce signal de pression a une très forte composante unipolaire durant un peu plus de 1 μs et atteint

3 MPa à une distance d'environ 1,75 mm du transducteur. Ces informations ont été prises pour calculer le champ acoustique sur tout le volume. Les paramètres qui ont été utilisés pour représenter le transducteur pour la simulation sont donnés au tableau 5.6. Une longue distance focale est utilisée pour reproduire le comportement recherché d'un transducteur non focalisé.

Tableau 5.6 Paramètres du transducteur acoustique pour la simulation de l'onde unipolaire

Paramètre	Valeur
Diamètre de la région active	20,0 mm
Distance focale	1000,0 mm

Le signal utilisé pour représenter l'onde unipolaire est illustré à la figure 5.21. Il s'agit d'un signal de densité de force calculé selon la méthode décrite à l'annexe B à partir du signal de pression provenant de l'article de Sferruzza *et al.* (1999). Ce signal de pression (déjà illustré à la figure 2.8) avait été enregistré par un hydrophone placé près de la surface du transducteur. Le signal de densité de force de la figure 5.21 est qualitativement très semblable à celui de la pression ; toutefois, il représente quantitativement ce qui apparaît sur toute la face externe du transducteur et qui, par la suite, se propage. Grâce à cela, il est ainsi possible de modéliser un signal de pression acoustique de façon quantitativement correcte et d'en connaître l'amplitude en tout point lors de la propagation.

L'enveloppe du champ acoustique produit sur la tranche centrale de ce transducteur pour cette densité de force est montrée à la figure 5.22. Contrairement au champ de l'onde bipolaire, qui occupe une région étroite de l'ordre du millimètre, le champ unipolaire occupe un espace beaucoup plus large, de l'ordre du centimètre. Par conséquent, la grille acoustique nécessaire pour en faire la discrétisation devra couvrir un espace plus grand (en fait, elle couvre toute la géométrie du problème). Celle utilisée contient près de 84 000 points espacés régulièrement sur tout le volume. À titre de référence, elle est reproduite à la figure E.19.

Le positionnement du transducteur par rapport à la géométrie du problème électrique, pour la première orientation d'acquisition du signal de MACE, est illustré à la figure 5.23.

5.2.3 Signaux résultants (solution du problème direct)

Dans la méthode reposant sur l'onde unipolaire, la simulation des signaux résultant du processus de MACE procède par un calcul d'intégration volumique semblable à celui présenté pour la méthode bipolaire. Ainsi, nous utilisons une grille d'intégration avec ses poids de quadrature où sont interpolées les valeurs de sensibilité acousto-électrique et de pression acoustique. Cette grille d'intégration est la même que pour le problème précédent (voir figure

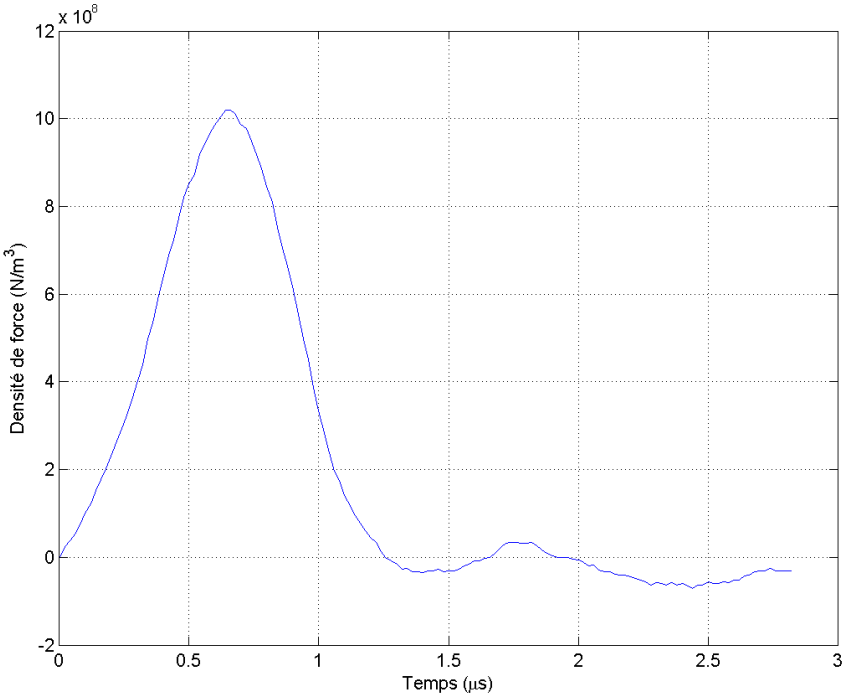

Figure 5.21 Densité de force $f_s(t)$ du transducteur.

E.7).

Pour la configuration de la figure 5.23, le signal de MACE obtenu est tracé à la figure 5.24. Une valeur de $K_I = 100 \times 10^{-11}$ Pa^{-1} a été utilisée. Aucun bruit n'a été ajouté et aucun filtrage n'a été appliqué à ces signaux.

Pour la reconstruction, les signaux de MACE doivent être acquis pour plusieurs orientations d'excitation acoustique. Ceci est fait en spécifiant la direction de propagation de l'onde ainsi que le point situé à une distance donnée du transducteur. Pour le présent problème, le transducteur est situé à une distance de 0,1 m du point P_0, de coordonnées (0 m, 0 m, 0 m) (référentiel de la géométrie électrique). La première orientation est obtenue en plaçant le transducteur en position $\mathrm{P_t} = (0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, -0,1\ \mathrm{m})$ avec une direction de propagation selon l'axe z, puis en effectuant une rotation du transducteur autour de l'axe y de -60 degrés. Les orientations successives sont obtenues en faisant une rotation du transducteur autour de l'axe z d'un angle donné. Seize (16) orientations ont ainsi été définies en spécifiant un incrément angulaire de $360/16 = 22,5$ degrés. Une représentation de ces orientations est donnée à la figure 5.25.

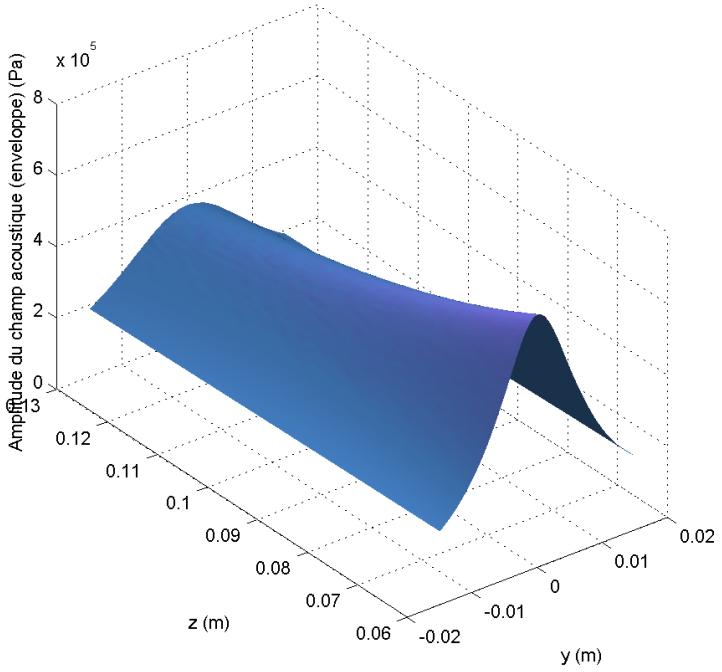

Figure 5.22 Enveloppe du champ acoustique du transducteur (tranche centrale). L'axe identifié par z correspond à la direction de propagation de l'onde. L'utilisation de l'onde unipolaire ne produit pas de lobes secondaires. L'amplitude maximale se trouve sur l'axe de propagation. Pour ce transducteur non focalisé, l'amplitude de la pression décroît lorsque la coordonnée z augmente.

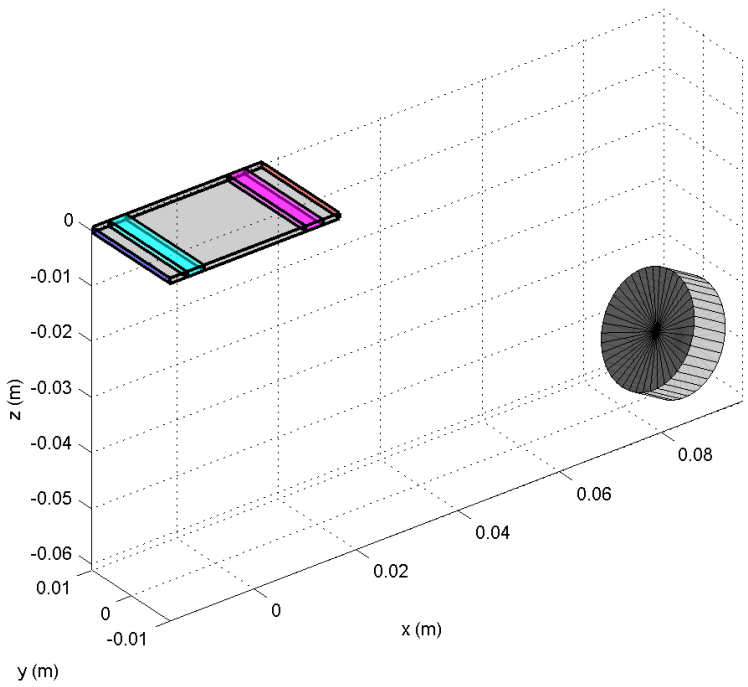

Figure 5.23 Positionnement du transducteur par rapport à la géométrie du problème électrique pour la première orientation.

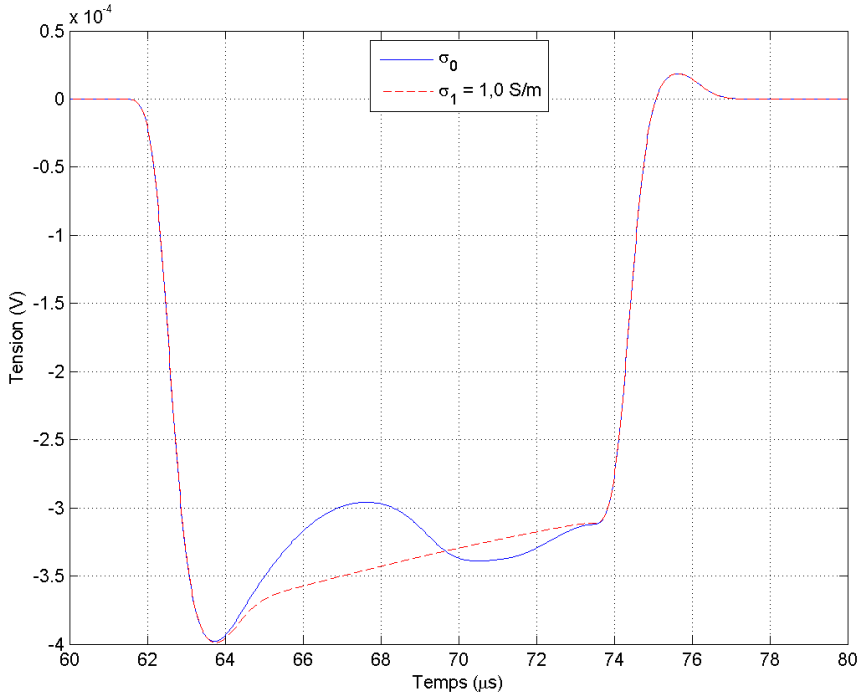

Figure 5.24 Signal de MACE pour la configuration de la figure 5.23. Il est obtenu pour la distribution de conductivité inhomogène σ_0 de la figure 5.3. Pour fins de comparaison, le signal de MACE obtenu pour une conductivité électrique homogène de $\sigma_1 = 1,0$ S/m y est également tracé. L'onde unipolaire entre dans le volume conducteur du côté des x positifs et se déplace vers les x négatifs. Elle passe d'abord par une région de sensibilité acousto-électrique plus faible que celle obtenue pour la conductivité électrique σ_1. Par conséquent, dans la portion allant de $t = 64$ μs à $69,5$ μs, le signal de MACE a une plus faible amplitude que pour le cas homogène. De $t = 69,5$ μs à 73 μs, le phénomène inverse se produit car la sensibilité acousto-électrique est plus grande avec la conductivité électrique σ_0 que pour le cas homogène.

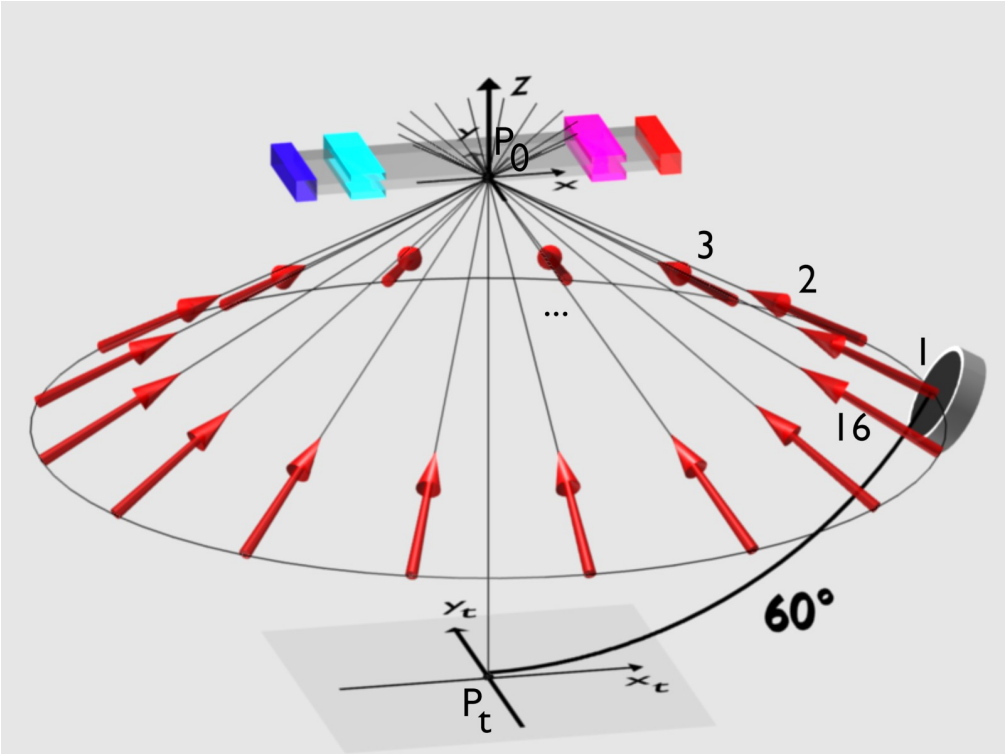

Figure 5.25 Représentation des 16 orientations du transducteur. Pour plus de clarté, la géométrie électrique est représentée seulement pour la partie des y positifs. Les flèches rouges représentent la direction de propagation de l'onde pour chacune des orientations. $\mathrm{P_t} = (0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, -0,1\ \mathrm{m})$, $\mathrm{P_0} = (0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m})$.

5.2.4 Reconstruction

Comme pour le problème précédent, la résolution du problème inverse est réalisée à partir de données provenant de la résolution du problème direct.

Pour ce problème, seulement deux cas de reconstruction seront examinés :

- Cas #1 : les grilles pour le processus de reconstruction sont les mêmes que celles ayant servi pour la résolution du problème direct. Ce cas sert à montrer la performance et le comportement de la reconstruction dans des conditions presque idéales ;
- Cas #2 : les grilles pour le processus de reconstruction sont plus grossières que celles ayant servi pour la résolution du problème direct. Ces conditions s'approchent de celles qui pourraient être obtenues en réalité et constitue une situation où nous évitons de commettre un « crime inverse ». La formulation proposée à l'équation 2.30 est appliquée. Les grilles électriques et d'intégration grossières pour la reconstruction dans ce problème sont les mêmes que celles du problème précédent (voir respectivement les figures E.8 et E.10). La grille acoustique grossière est cependant spécifique au présent problème (figure E.20).

La conductivité électrique de référence σ_1 a été fixée à 1,0 S/m sur tout le domaine. Pour l'utilisation de l'équation 2.34, les valeurs suivantes ont été prises : $t_j = [64,98\,\mu\text{s}, 65,48\,\mu\text{s}, 65,98\,\mu\text{s}, \ldots, 71,98\,\mu\text{s}]$, $K_I = 100 \times 10^{-11}$ Pa^{-1}, tandis que l'ensemble d'orientations $[\theta_i]$ est formé des 16 orientations présentées plus haut (voir figure 5.25).

Les valeurs des paramètres de reconstruction pour ce problème sont les suivantes :

- valeurs *a priori* des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_{prior}$) : 1,0 S/m ;
- valeurs initiales des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_0$) : 1,0 S/m ;
- écart-type sur les paramètres du modèle (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$) : 10 S/m. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur les données $\boldsymbol{d}$ de tension électrique (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{d}}$) : 5×10^{-6} V. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur la modélisation (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{T}}$) : 0 V ;
- critère d'arrêt : norme du gradient à atteindre ($\|\boldsymbol{\gamma}_n\|$) : 0,1.

Comme pour le problème précédent, ces valeurs ont été choisies de façon à observer le comportement de la reconstruction lorsque le bruit ajouté aux signaux est nul.

Dans la méthode d'onde unipolaire, aucune grille d'acquisition n'est requise. La grille de reconstruction est choisie selon divers critères, dont la résolution souhaitée pour l'image de conductivité électrique. Pour le présent problème et dans le but de pouvoir mieux comparer les résultats obtenus avec ceux du problème précédent, la grille de reconstruction est la même que celle du problème précédent (voir figure 5.15). L'interpolation de la grille de reconstruction

à la grille électrique utilise alors les mêmes paramètres (ordre des fonctions d'interpolation, taille des fonctions d'agrandissement...).

Le signal de MACE produit pour la première orientation du transducteur, tel que montré à la figure 5.24, est obtenu avec des grilles suffisamment fines pour que le signal résultant montre une bonne continuité. Toutefois, comme le montre la figure 5.26, lorsque des grilles plus grossières du cas #2 sont utilisées, un bruit ondulatoire s'ajoute au signal de MACE. Ce bruit provient des diverses interpolations requises pour la reconstruction et est lié à une discrétisation trop grossière de l'onde acoustique. Plus spécifiquement, c'est l'épaisseur de l'onde acoustique dans la direction de propagation qui est petite par rapport à la distance entre les points de la grille d'intégration. Pour réduire ces oscillations et ainsi réduire l'erreur de représentation, le signal $\tilde{E}(t)$ choisi pour effectuer un filtrage passe-bas du signal de MACE est un créneau de valeur 10^6 s^{-1}, non nul sur une durée de 10^{-6} s et débutant à $t = 0$ s. Le résultat du traitement de ce signal de MACE est présenté à la figure 5.27. Ce même $\tilde{E}(t)$ est utilisé pour filtrer tous les vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE}$ présentés ci-dessous.

La figure 5.28 montre les vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE}$ pour les distributions σ_0 et σ_1 avec les représentations $R0$ et $R1$. La figure 5.29 montre la différence absolue entre les vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE,exact}_{\sigma_0,R1}$ et $\boldsymbol{V}^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$. Suivant l'équation 2.32, le vecteur $\boldsymbol{V}^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$ a été obtenu par :

$$\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R1} = \boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_1,R1} \frac{\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R0}}{\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_1,R0}} \tag{5.3}$$

où les produits sont effectués élément par élément.

L'erreur absolue entre le vecteur de données $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R1}$ fourni pour la reconstruction et celui atteint à convergence de ce processus est présenté à la figure 5.30 pour le cas #1 et à la figure 5.31 pour le cas #2.

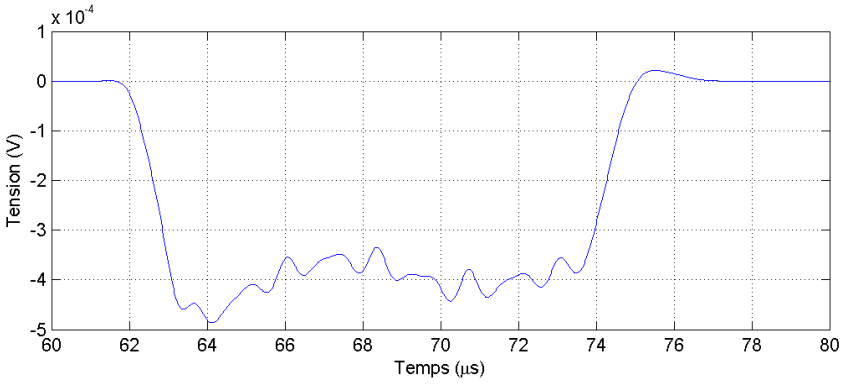

Figure 5.26 Signal de MACE obtenu avec les grilles du cas #2 pour la configuration de la figure 5.23. La discrétisation du problème est à l'origine des oscillations rapides.

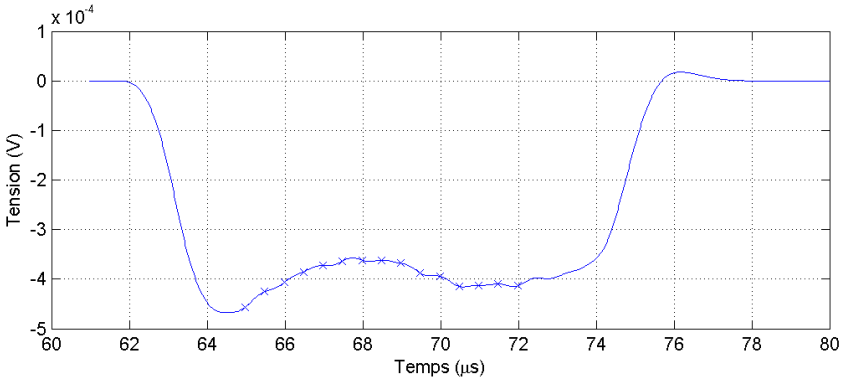

Figure 5.27 Signal de MACE obtenu avec les grilles du cas #2 filtré par $\tilde{E}(t)$. Il s'agit du signal de MACE de la figure 5.26 convolué par un créneau d'aire unitaire dont la partie non nulle a une durée de 1 μs. Les échantillons marqués d'un « × » sont ceux retenus pour la reconstruction.

La figure 5.32 présente les distributions reconstruites de conductivité électrique interpolées sur la tranche en $z = 0$ m (la distribution exacte est affichée à la figure 5.20). Les distributions reconstruites sur l'ensemble du volume sont affichées aux figures E.22 et E.23, tandis que l'erreur absolue entre la distribution de conductivité électrique exacte et celle reconstruite est montrée aux figures E.24 et E.25.

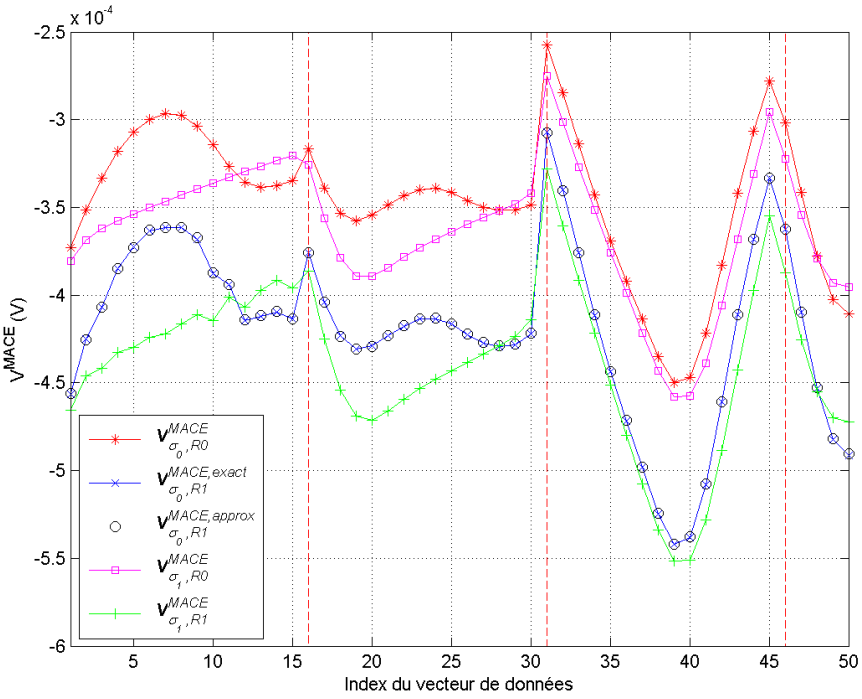

Figure 5.28 Vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE}$. Seuls les premiers éléments des vecteurs sont affichés ; la figure E.21 affiche les vecteurs complets. L'index des vecteurs augmente en faisant d'abord l'échantillonnage temporel pour une orientation, puis les mêmes valeurs de temps sont prises pour les orientations suivantes. Ces orientations sont délimitées par les traits verticaux. Par exemple, les 15 premiers éléments du vecteur $\boldsymbol{V}^{MACE,exact}_{\sigma_0,R1}$ sont les échantillons temporels sélectionnés du signal de MACE de la figure 5.27. Ces vecteurs montrent que le choix de la grille électrique (spécifié selon la représentation $R0$ ou $R1$) a une effet sur l'amplitude des signaux. Le vecteur $\boldsymbol{V}^{MACE,exact}_{\sigma_0,R1}$ est celui obtenu avec la représentation $R1$ en appliquant la conductivité électrique exacte σ_0 tandis que le vecteur $\boldsymbol{V}^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$ provient de l'équation 5.3. Puisque le vecteur $\boldsymbol{V}^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$ obtenu est très près de $\boldsymbol{V}^{MACE,exact}_{\sigma_0,R1}$, cette information $\boldsymbol{V}^{MACE,approx}_{\sigma_0,R1}$, fournie au processus de reconstruction en tant que valeurs objectives, représente bien le système analysé.

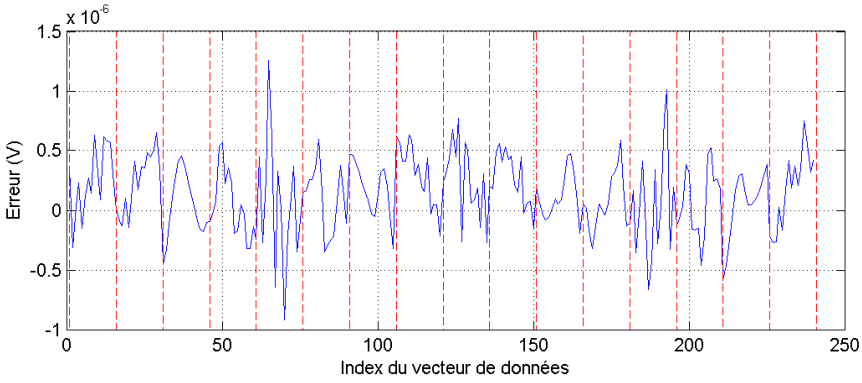

Figure 5.29 Différence absolue entre le vecteur $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE}$ exact et celui approximé, soit $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx} - \boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,exact}$. Par conséquent, l'erreur relative, soit $(\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx} - \boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,exact})/\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,exact}$, est de l'ordre de 0,1 %.

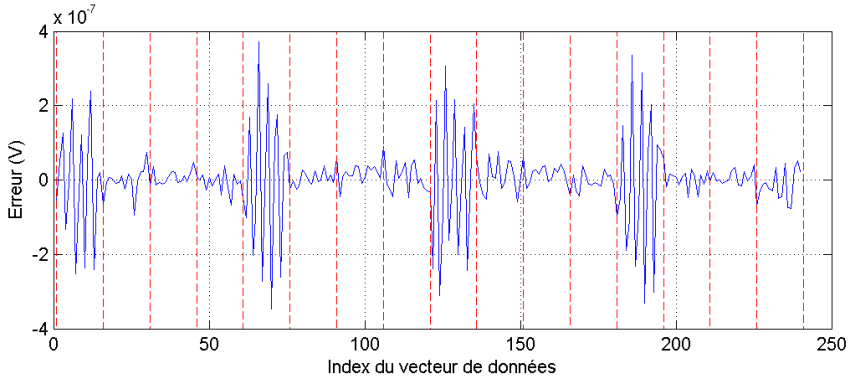

Figure 5.30 Erreur entre le vecteur de données et celui obtenu par la reconstruction du cas #1. L'amplitude d'erreur la plus grande est contenue selon les 4 orientations où la direction de propagation du champ acoustique projetée sur le plan xy est parallèle à l'axe x ou à l'axe y. Ceci provient de la discrétisation plutôt grossière du problème selon des grilles régulières.

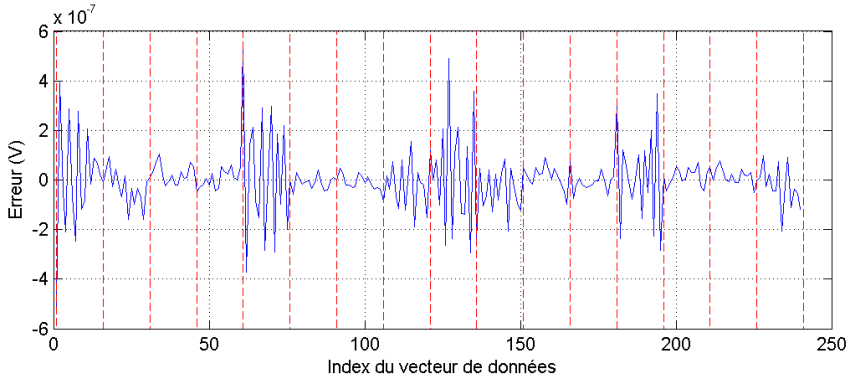

Figure 5.31 Erreur entre le vecteur de données et celui obtenu par la reconstruction du cas #2.

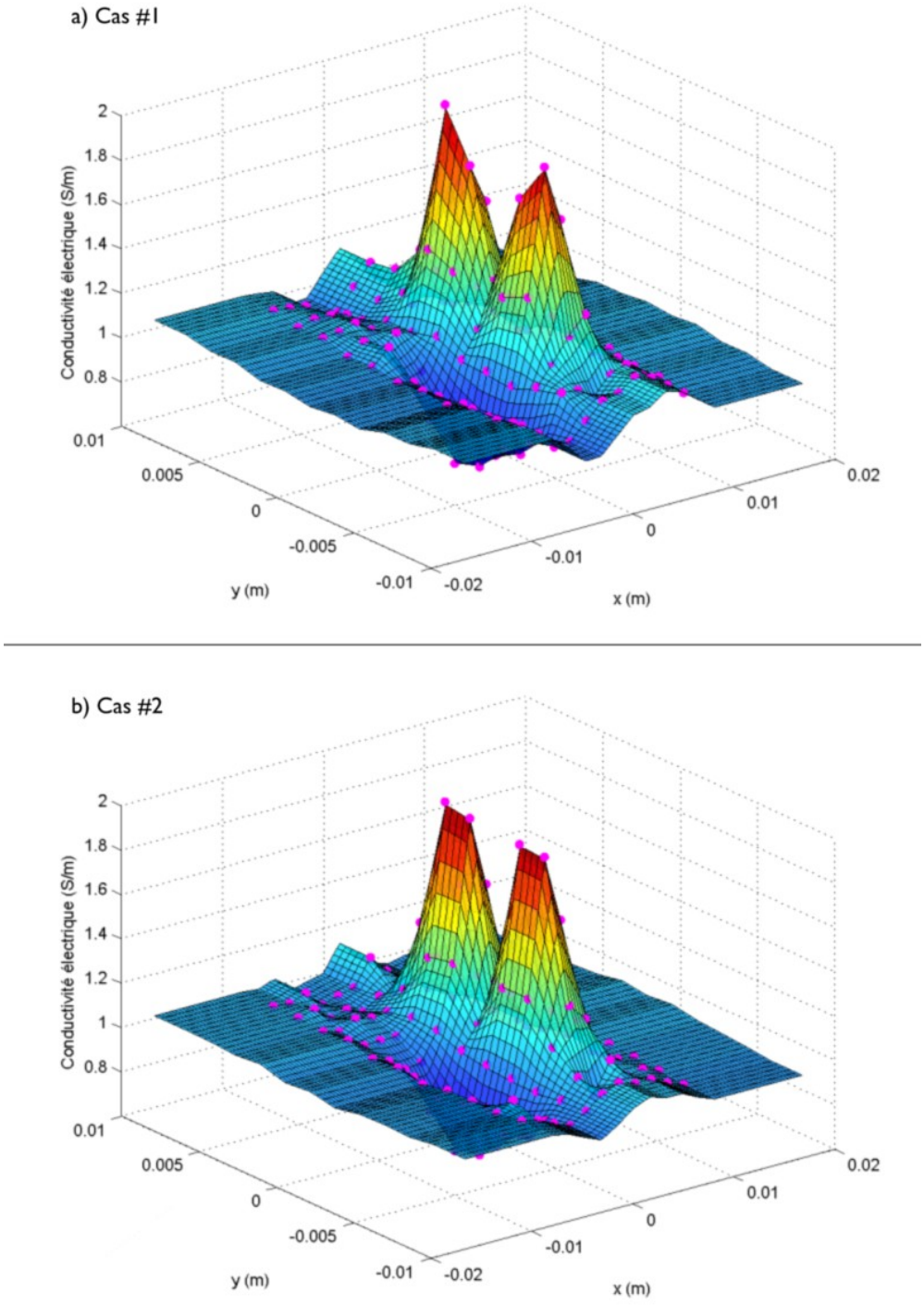

Figure 5.32 Valeurs de conductivité électrique reconstruites. Les points correspondent aux valeurs estimées de conductivité électrique (obtenues sur la grille de reconstruction). La surface est obtenue par interpolation à partir des valeurs sur la grille de reconstruction.
La racine carrée de l'erreur quadratique, soit $\sqrt{\int_\Omega (\sigma_{reconstruit} - \sigma_{exact})^2 \mathrm{d}\Omega}$, est de : (a) $3,2 \times 10^{-5}$, (b) $2,3 \times 10^{-5}$ S/m $\cdot$ m$^{3/2}$.

Le nombre d'itérations requis pour atteindre la convergence souhaitée est généralement faible. Comme pour le problème précédent, le temps de calcul pour effectuer la reconstruction est de l'ordre de la dizaine de minutes. L'opération la plus exigeante en calculs est l'inversion des $2 \times \mathrm{NP}_{GR}$ systèmes linéaires à chacune des itérations servant à la création de la matrice $\mathbf{G}_n$.

5.2.5 Discussion des résultats de ce problème

Un premier élément à noter est que la forme générale de la distribution de conductivité électrique reconstruite respecte très bien celle de la distribution exacte. Ainsi, il est possible de distinguer la présence des objets malgré l'utilisation d'une onde acoustique non focalisée. De plus, l'amplitude de la solution reconstruite a une très bonne correspondance avec celle de la distribution exacte, en comparaison avec celles du problème précédent. La cause exacte de cette divergence n'a pas été identifiée, mais une explication envisageable est que la méthode par onde bipolaire fait une approximation d'un champ acoustique parfaitement focalisé qui peut être mauvaise. Cette bonne récupération de l'amplitude de la conductivité électrique pour la méthode basée sur l'onde unipolaire est très intéressante pour une application où la quantification de la conductivité électrique est nécessaire. Rappelons aussi que le nombre d'acquisitions pour l'obtention de ces résultats est beaucoup plus faible que pour la méthode par onde bipolaire en raison de l'extraction de plusieurs valeurs à partir de chaque signal acquis.

Il est intéressant aussi de voir le bon comportement de l'équation 5.3 pour produire un bon vecteur de données pour la reconstruction, même en évitant le « crime inverse ». En effet, les figures 5.28 et 5.29 montrent que le vecteur $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx}$ est une très bonne approximation de $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,exact}$. La reconstruction du cas #2 montre aussi que cette approximation conduit à un très bon résultat. D'autre part, la figure 5.28 montre clairement cette variabilité des résultats de simulation pour le calcul numérique basé sur deux grilles électriques différentes (par exemple, les vecteurs $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R0}^{MACE}$ et $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,exact}$ sont décalés de manière significative, faisant en sorte qu'il n'est pas possible de prendre directement le vecteur $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R0}^{MACE}$ pour obtenir une bonne reconstruction sur la grille $R1$).

CHAPITRE 6

PROBLÈME : MULTI-ÉLECTRODES

Ce problème vise à démontrer le bon fonctionnement d'une méthode où un système est composé de plusieurs configurations d'électrodes. Ce système conduit à une meilleure reconstruction lorsque du bruit est présent dans les mesures, en comparaison avec un système fonctionnant avec seulement une configuration d'électrodes. Cette analyse est basée sur l'identification d'un objet, à partir de critères quantitatifs de détection. Par la même occasion, ce problème permet d'analyser les performances de reconstruction pour différents niveaux de bruit. Un champ acoustique unipolaire sert à obtenir les signaux de MACE.

La géométrie du problème électrique est plus complexe que pour les problèmes précédents, ce qui permet d'illustrer le comportement de la méthode de résolution numérique dans des conditions plus difficiles.

6.1 Géométrie

La géométrie du problème électrique, telle que présentée à la figure 6.1, est une plaque de 6 mm d'épaisseur où 8 électrodes sont placées sur le pourtour, en retrait, et une électrode de masse est placée au centre.

La distribution de plus de 19 000 points répartis sur cette géométrie constitue la grille électrique. À titre de référence, elle est reproduite à la figure E.26.

La distribution de conductivité électrique est montrée à la figure 6.2. Elle est constituée d'un fond homogène à 0,06 S/m où s'ajoute une gaussienne dont les paramètres sont spécifiés au tableau 6.1.

Tableau 6.1 Définition de la gaussienne pour la distribution de conductivité électrique

A (S/m)	x_c (mm)	y_c (mm)	η_x (mm)	η_y (mm)
0,15	-19,0	-4,0	10,0	10,0
avec $\sigma_{gauss}(x,y,z) = A\ e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\eta_x^2} - \frac{(y-y_c)^2}{2\eta_y^2}}$				

6.2 Conditions frontières

Les conditions frontières appliquées pour la résolution des problèmes électrostatiques sont décrites aux tableaux 6.2 et 6.3 pour les 4 configurations électriques analysées. Ces configu-

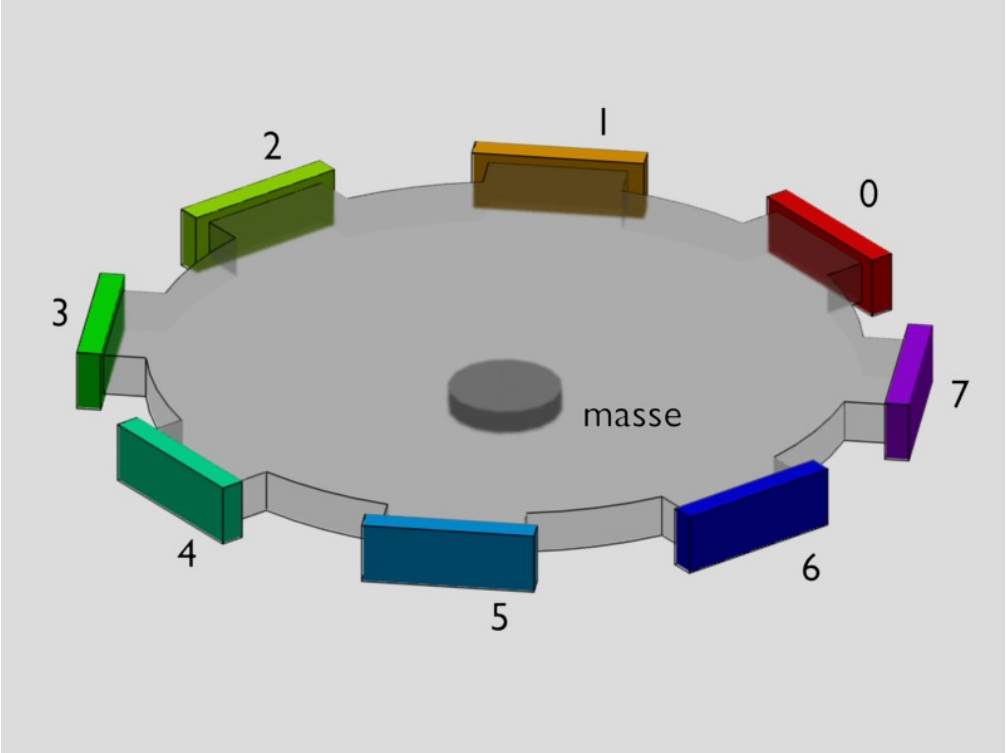

Figure 6.1 Illustration de la géométrie du problème (partie électrique). Les électrodes sur le pourtour de la plaque sont en retrait, ce qui produit des concavités dans la géométrie. Ces concavités constituent une difficulté pour la résolution numérique du problème électrique, qui est bien contrôlée par la mise en œuvre des détails décrits à la section 4.2.3 (concernant la coupure de visibilité des fonctions noyau selon un plan).

rations électriques sont telles qu'une paire d'électrodes de mesure se trouve entre la paire d'électrodes d'injection de courant.

6.3 Résolution des problèmes électrostatiques

Les figures 6.3 à 6.6 présentent respectivement, pour la configuration #1, la solution du problème électrostatique des situations I et L et la distribution de densité de courant des situations I et L. L'orientation relative des vecteurs constituant ces distributions de densité de courant est illustrée à la figure 6.7. Les calculs doivent être effectués pour obtenir les solutions des autres configurations, mais puisque ces solutions sont analogues à celles de la configuration #1 par rotations de 90 degrés autour de l'axe z, elles ne seront pas montrées ici.

La distribution de sensibilité acousto-électrique de la figure 6.8 présente des régions de valeur négative aux endroits où les densités de courant des situations I et L ont des composantes anti-parallèles. Il y a aussi des régions de valeur nulle aux endroits où ces densités

Tableau 6.2 Définition des conditions frontières (situation I). $I_{el}^{I} = 0,010$ A

Région	Condition	Valeur pour configuration #			
		1	2	3	4
Parties isolées (Γ_{isol})	Courant sortant	0 A	0 A	0 A	0 A
Électrode #0 (Γ_0)	Courant sortant total	$-I_{el}^{I}$	0 A	0 A	0 A
Électrode #1 (Γ_1)	Courant sortant total	0 A	0 A	0 A	$+I_{el}^{I}$
Électrode #2 (Γ_2)	Courant sortant total	0 A	$-I_{el}^{I}$	0 A	0 A
Électrode #3 (Γ_3)	Courant sortant total	$+I_{el}^{I}$	0 A	0 A	0 A
Électrode #4 (Γ_4)	Courant sortant total	0 A	0 A	$-I_{el}^{I}$	0 A
Électrode #5 (Γ_5)	Courant sortant total	0 A	$+I_{el}^{I}$	0 A	0 A
Électrode #6 (Γ_6)	Courant sortant total	0 A	0 A	0 A	$-I_{el}^{I}$
Électrode #7 (Γ_7)	Courant sortant total	0 A	0 A	$+I_{el}^{I}$	0 A
Électrode de masse (Γ_g)	Potentiel électrique	0 V	0 V	0 V	0 V

Tableau 6.3 Définition des conditions frontières (situation L). $I_{el}^{L} = 1,000$ A

Région	Condition	Valeur pour configuration #			
		1	2	3	4
Parties isolées (Γ_{isol})	Courant sortant	0 A	0 A	0 A	0 A
Électrode #0 (Γ_0)	Courant sortant total	0 A	0 A	0 A	$+I_{el}^{L}$
Électrode #1 (Γ_1)	Courant sortant total	$-I_{el}^{L}$	0 A	0 A	0 A
Électrode #2 (Γ_2)	Courant sortant total	$+I_{el}^{L}$	0 A	0 A	0 A
Électrode #3 (Γ_3)	Courant sortant total	0 A	$-I_{el}^{L}$	0 A	0 A
Électrode #4 (Γ_4)	Courant sortant total	0 A	$+I_{el}^{L}$	0 A	0 A
Électrode #5 (Γ_5)	Courant sortant total	0 A	0 A	$-I_{el}^{L}$	0 A
Électrode #6 (Γ_6)	Courant sortant total	0 A	0 A	$+I_{el}^{L}$	0 A
Électrode #7 (Γ_7)	Courant sortant total	0 A	0 A	0 A	$-I_{el}^{L}$
Électrode de masse (Γ_g)	Potentiel électrique	0 V	0 V	0 V	0 V

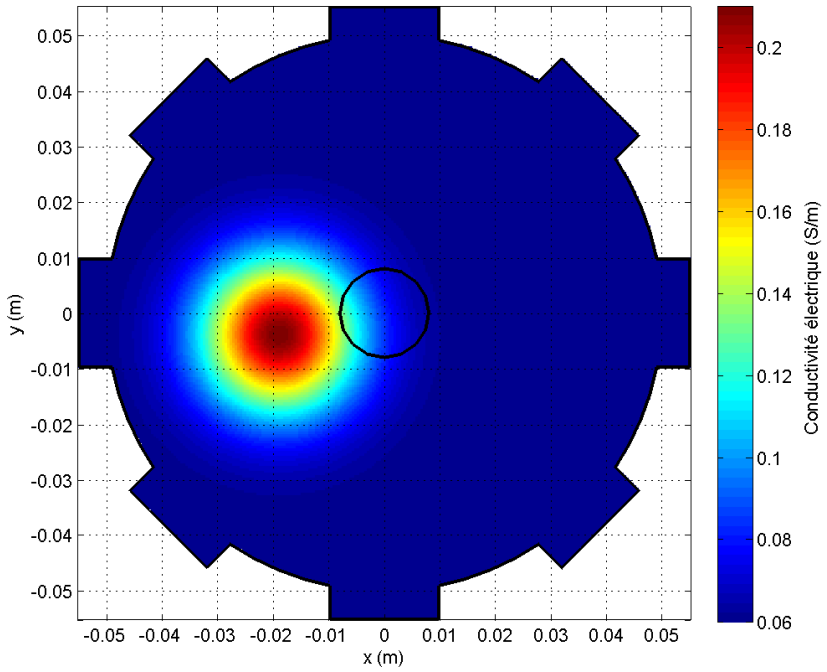

Figure 6.2 Distribution de conductivité électrique. Sa représentation discrète sur la grille électrique est montrée à la figure E.27. Le cercle noir, au centre, représente l'électrode de masse.

de courant sont perpendiculaires. La région de plus grande sensibilité (en valeur absolue) est concentrée près des électrodes et elle tend vers 0 loin de ces électrodes. Ceci est un élément clé de l'utilisation des différentes combinaisons d'électrodes qui sera analysé plus loin.

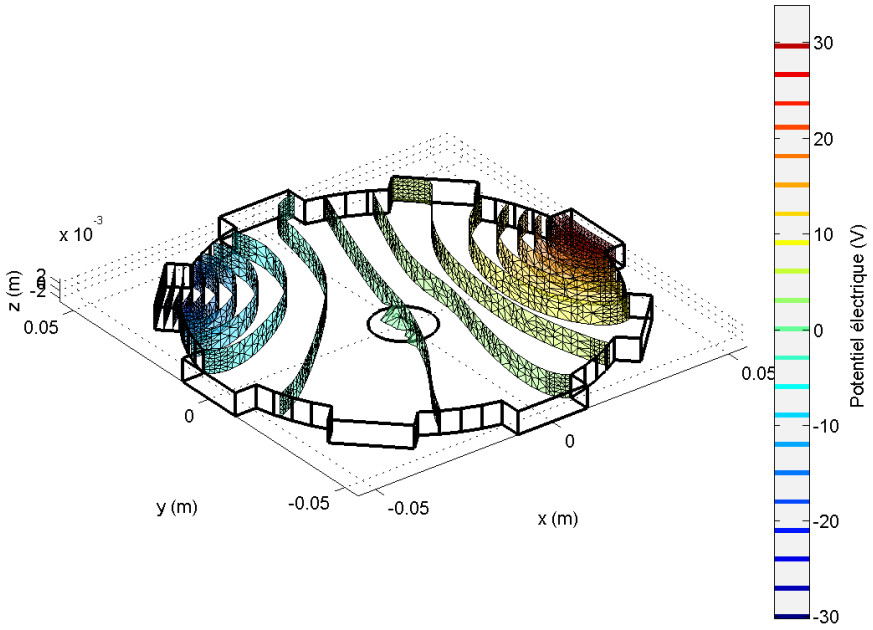

Figure 6.3 Solution du problème électrostatique (situation I) pour la configuration #1.

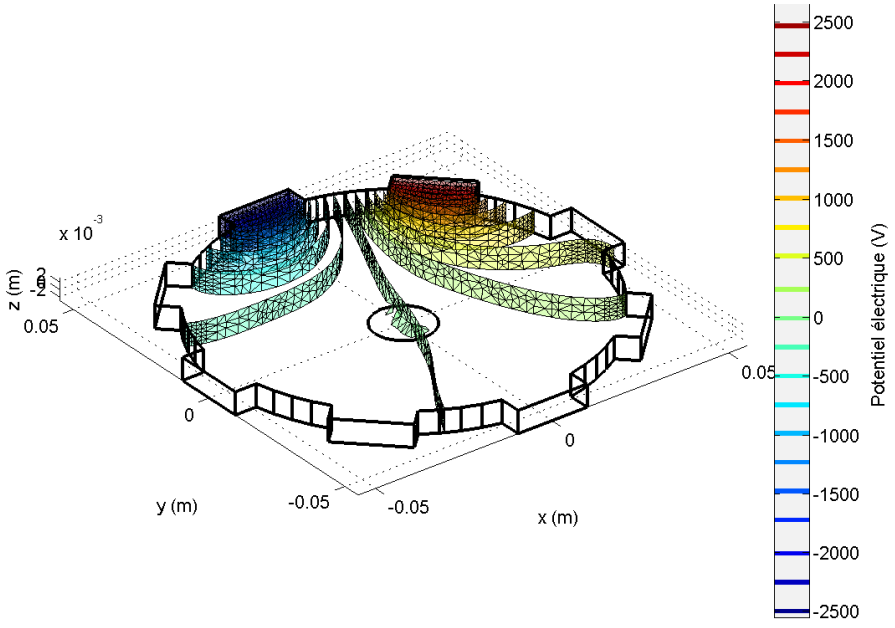

Figure 6.4 Solution du problème électrostatique (situation L) pour la configuration #1.

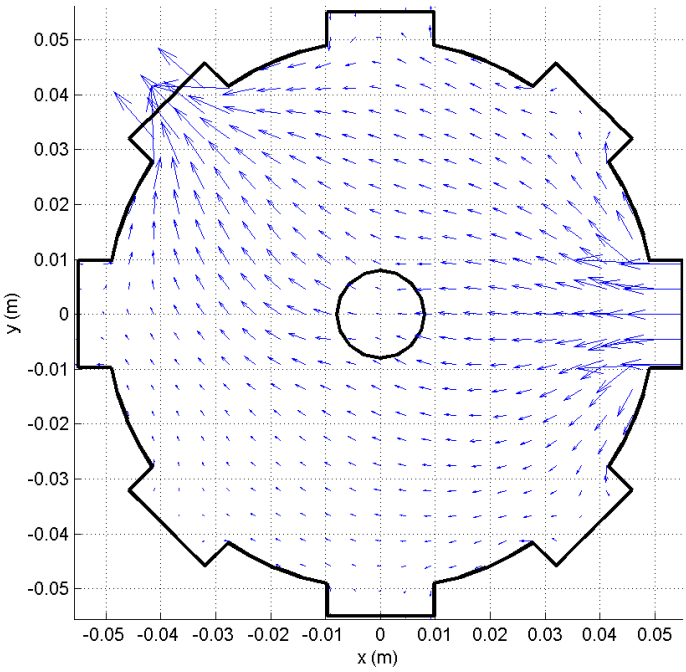

Figure 6.5 Densité de courant du problème électrostatique (situation I) pour la configuration #1.

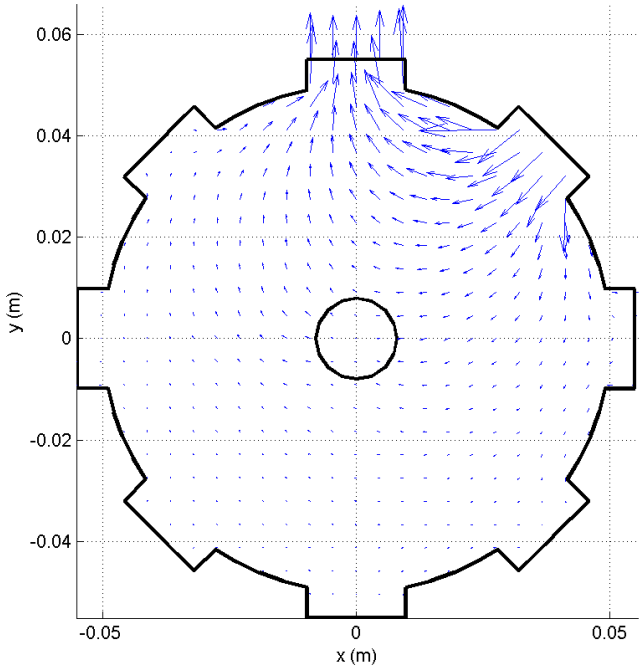

Figure 6.6 Densité de courant du problème électrostatique (situation L) pour la configuration #1.

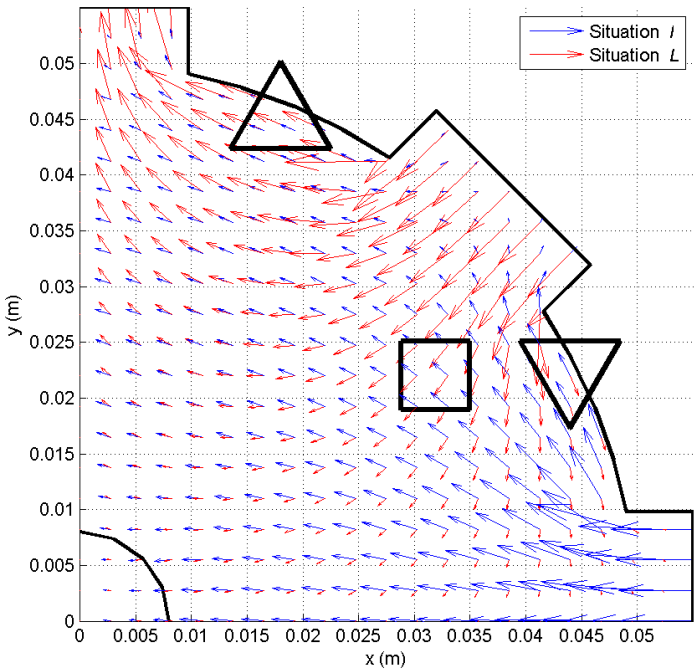

Figure 6.7 Observation de l'orientation relative des vecteurs de densité de courant. Seul le premier quadrant est affiché. Les champs vectoriels sont ceux des figures 6.5 et 6.6. $\triangle$, $\square$, $\bigtriangledown$: régions où les vecteurs sont respectivement quasi parallèles, quasi perpendiculaires et quasi anti-parallèles. Par conséquent, la sensibilité acousto-électrique est respectivement positive, nulle et négative (comparer avec la figure 6.8).

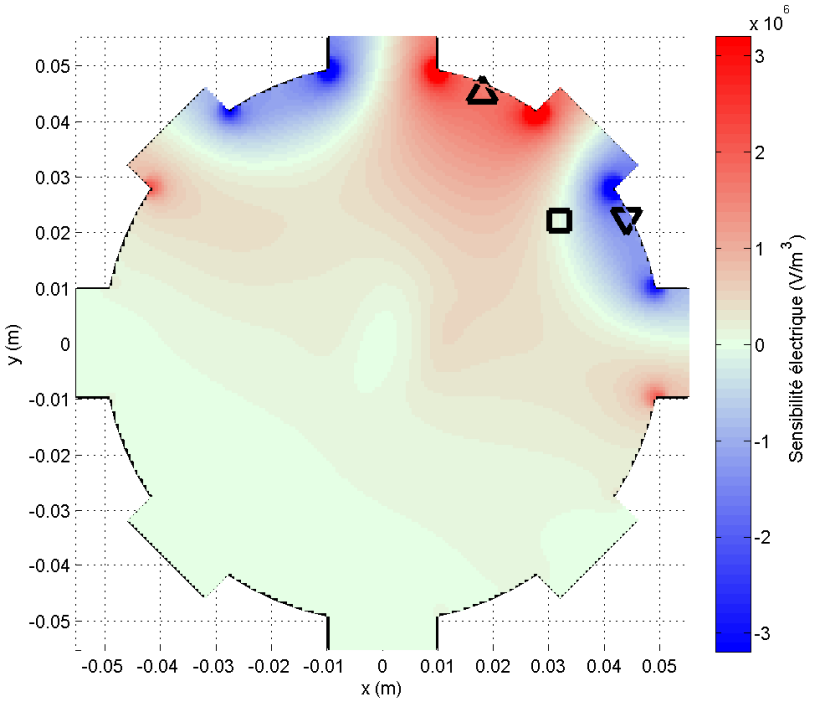

Figure 6.8 Sensibilité acousto-électrique du problème électrostatique pour la configuration #1. Les identificateurs $\triangle$, $\square$ et $\triangledown$ sont aux mêmes positions que sur la figure 6.7.

6.4 Acoustique

Pour ce problème, le transducteur est le même que pour le problème de la section 5.2, c'est-à-dire qu'il s'agit du transducteur non focalisé produisant une onde unipolaire dans les conditions d'excitation décrites. Ainsi, le signal de densité de force du transducteur pour ce problème sera le même que celui présenté à la figure 5.21.

La grille utilisée pour la discrétisation du problème acoustique contient approximativement 13 000 points distribués régulièrement et couvre tout le volume conducteur. Elle est reproduite à la figure E.28.

6.5 Signaux résultants (solution du problème direct)

La grille d'intégration pour la résolution du problème direct est composée de deux sous-régions. La première de ces sous-régions couvre les environs de la bordure avec une grande finesse, tandis que la sous-région du centre contient des points plus espacés. À titre de référence, cette grille de plus de 108 000 points est présentée à la figure E.29.

Pour ce problème à caractère principalement 2D, les orientations acoustiques choisies auront toutes le même angle d'incidence, soit 60 degrés. Un ensemble de 16 orientations réparties régulièrement par rotation autour de l'axe z est choisi. La position de la première de ces orientations est décrite ici.

Une situation d'intérêt pour ce problème est celle où les 4 configurations électriques sont utilisées dans l'examen du volume conducteur. Dans cette situation, la configuration électrique #1 produira les signaux de MACE avec les 4 premières orientations de transducteur, la configuration électrique #2 utilisera les orientations 5 à 8, la configuration électrique #3 utilisera les orientations 9 à 12, tandis que la configuration électrique #4 utilisera les orientations 13 à 16. Par souci de symétrie avec les conditions électriques, l'orientation 1 sera en position symétrique de l'orientation 4, tandis que l'orientation 2 sera en position symétrique de l'orientation 3, où le plan de symétrie passe au centre du domaine et au milieu des électrodes 1 et 2. Puisque les orientations acoustiques sont espacées régulièrement par rotation autour de l'axe z, la composante de l'orientation 1 sur le plan xy fait un angle de 33,75 degrés avec l'axe x. Les autres orientations sont consistantes avec ce principe pour les autres configurations électriques. Ceci est illustré aux figures 6.9 et 6.10. La seconde situation d'intérêt examinée dans ce problème est celle où seulement la première configuration électrique sert à l'analyse du volume conducteur. Dans cette situation, ces 16 orientations acoustiques ainsi définies sont également utilisées.

La figure 6.11 présente les signaux de MACE pour la configuration électrique #1 avec les orientations acoustiques 2 et 10. Ceci est dans le but de comparer la forme et l'ampli-

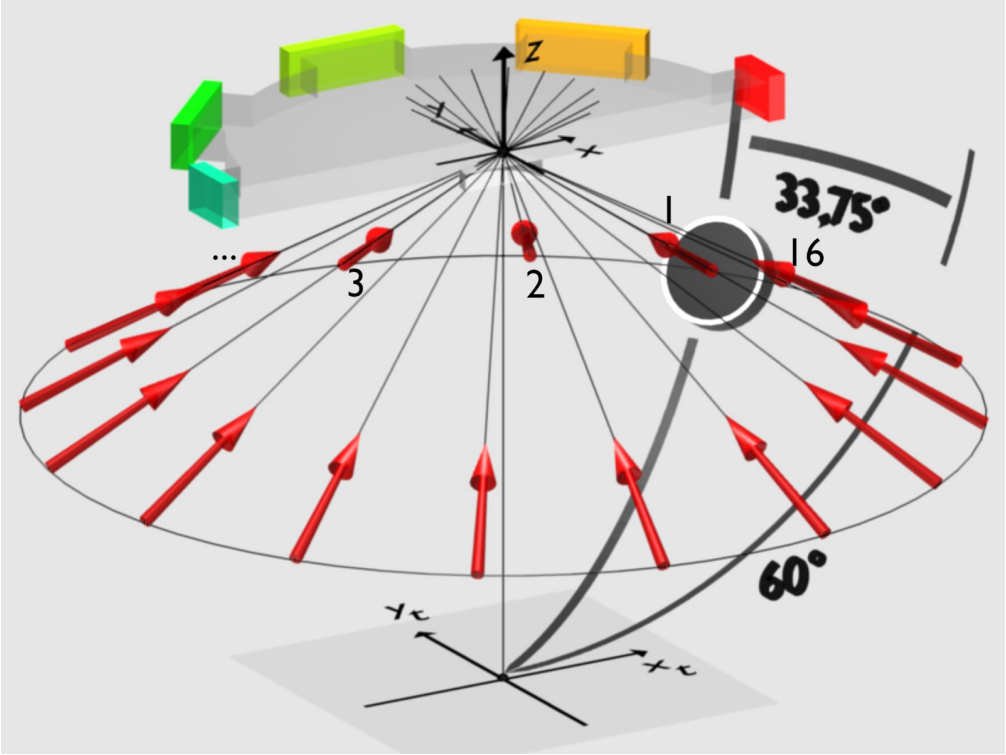

Figure 6.9 Représentation des 16 orientations du transducteur. Pour plus de clarté, la géométrie électrique est représentée seulement pour la partie des y positifs. Les flèches rouges représentent la direction de propagation de l'onde pour chacune des orientations.

tude des signaux de MACE pour une configuration électrique donnée avec deux orientations acoustiques opposées.

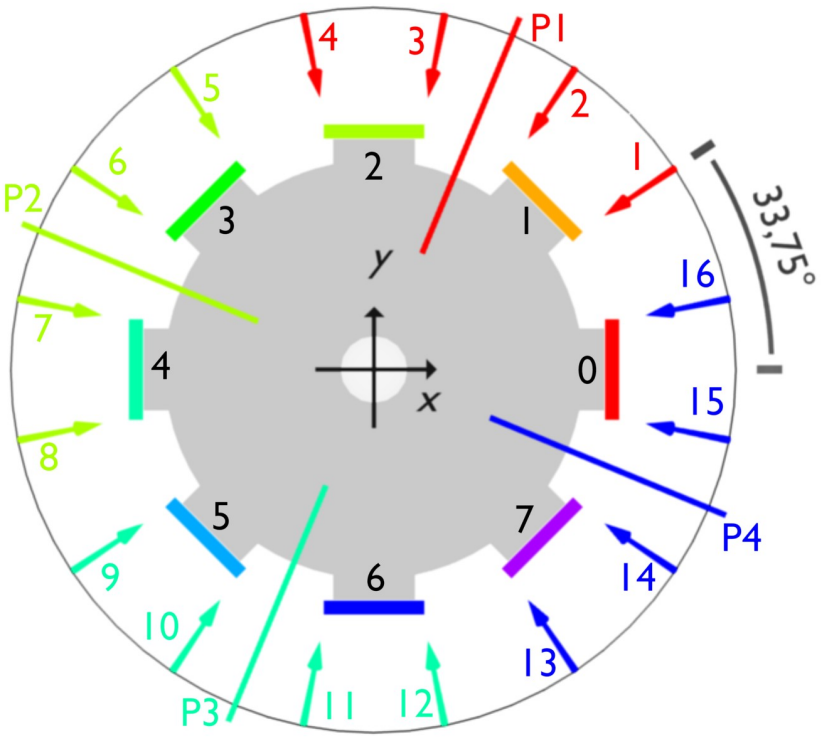

Figure 6.10 Vue du dessus des 16 orientations du transducteur. Chacun des 4 ensembles d'orientations correspond à une configuration électrique. Les plans P1 à P4 décrivent la symétrie pour chacun des ensembles d'orientations.

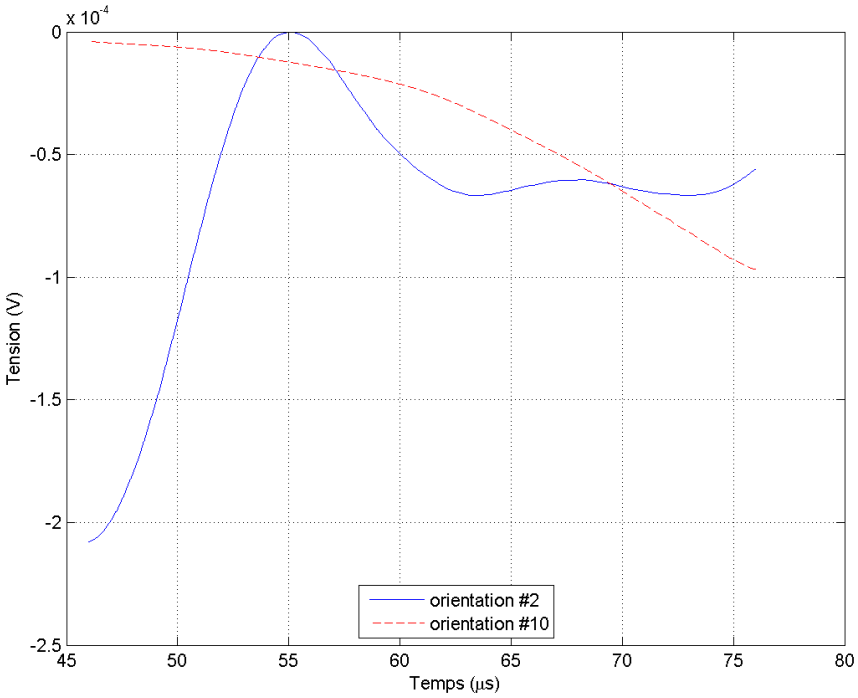

Figure 6.11 Signaux de MACE pour la configuration électrique #1.

6.6 Reconstruction

Pour ce problème, le seul cas examiné est celui où nous évitons de commettre le « crime inverse ». Pour référence, les grilles électrique, acoustique et d'intégration utilisées pour la résolution du problème inverse sont montrées aux figures E.30 à E.32.

La conductivité électrique de référence σ_1 a été fixée à 1,0 S/m sur tout le domaine. Pour l'utilisation de l'équation 2.34, les valeurs suivantes ont été prises : $t_j = [46,98\,\mu\text{s},\ 47,48\,\mu\text{s},\ 47,98\,\mu\text{s}, \ldots, 73,48\,\mu\text{s}]$, $K_I = 100 \times 10^{-11}\,\text{Pa}^{-1}$, tandis que l'ensemble d'orientations $[\theta_i]$ est formé des 16 orientations présentées plus haut (voir figure 6.9).

Pour ce problème, la grille de reconstruction est une distribution de points espacés régulièrement, mais occupant un domaine octogonal pour s'insérer aisément dans la géométrie électrique circulaire. Cette grille est présentée à la figure 6.12. Les conditions d'interpolation sont les mêmes que celles des problèmes précédents (passage de la grille de reconstruction à la grille électrique).

Les valeurs des paramètres de reconstruction pour ce problème sont les suivantes :

- valeurs *a priori* des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_{prior}$) : 0,06 S/m ;
- valeurs initiales des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_0$) : 0,06 S/m ;
- écart-type sur les paramètres du modèle (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$) : 0,02 S/m pour les points de la grille de reconstruction sur la bordure (les points encerclés de la figure 6.12), 0,2 S/m pour les autres points. Ceci est fait pour restreindre les variations de la conductivité électrique des points vers l'extérieur du domaine. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur les données $\boldsymbol{d}$ de tension électrique (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{d}}$) : dépendante du problème. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur la modélisation (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{T}}$) : 0 V ;
- critère d'arrêt : norme du gradient à atteindre ($\|\boldsymbol{\gamma}_n\|$) : 0,1.

De la même manière que pour les problèmes précédents, un signal $\tilde{E}(t)$ produisant un effet passe-bas sur le signal de MACE acquis est choisi. Pour ce problème, le signal $\tilde{E}(t)$ est un créneau de valeur 10^6 s^{-1}, non nul sur une durée de 10^{-6} s et débutant à $t = 0$ s. Ceci aura surtout pour effet de réduire l'effet du bruit sur les signaux acquis.

Les vecteurs $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx}$ pour les situations à 1 et à 4 configurations électriques (sans bruit ajouté) sont tracés à la figure 6.13.

L'analyse de performance décrite ici sur la reconstruction en présence de bruit a pour but d'illustrer la différence de comportement pour les deux situations (1 *vs* 4 configurations d'électrodes) et d'évaluer la qualité de la reconstruction en fonction du niveau de bruit. Pour

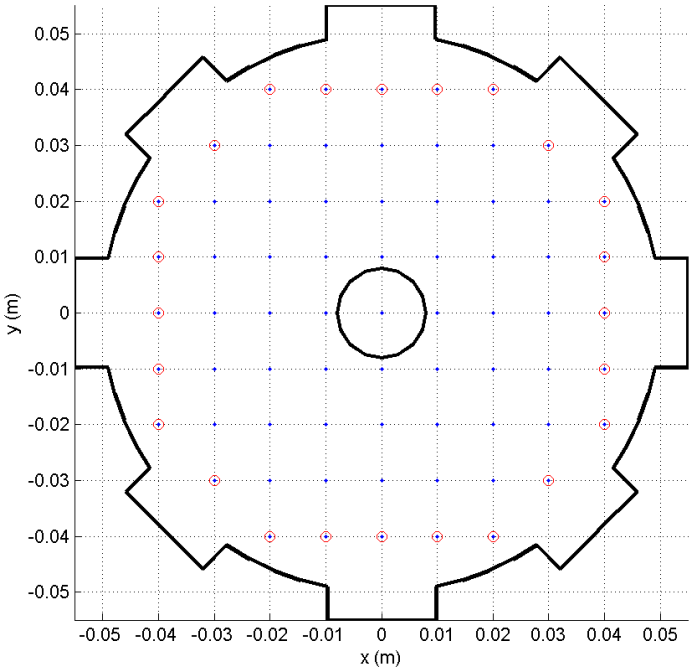

Figure 6.12 Distribution de points de la grille de reconstruction. Un faible écart-type sur les paramètres du modèle est fixé pour les points encerclés. Cette grille comporte 69 points.

ce faire, un bruit blanc d'amplitude donnée est additionné aux signaux de MACE provenant du problème direct (c'est-à-dire aux signaux à la source de $\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R0}$ et de $\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_1,R0}$). Le bruit blanc est généré en obtenant, pour chaque échantillon temporel des signaux de MACE, un nombre aléatoire suivant une loi normale qui est ensuite multiplié par l'amplitude (écart-type) souhaitée. Cette amplitude est déterminée par le rapport signal sur bruit (RSB) désiré : $V^{RMS}_{bruit} = V^{RMS}_{signal} \times 10^{\frac{-\text{RSB}}{20}}$, où la valeur V^{RMS}_{signal} pour un signal échantillonné est calculée par : $V^{RMS}_{signal} = \sqrt{\sum_k [V_{signal}]^2_k}$ sur une période de temps donnée. Par exemple, la figure 6.14 montre le signal de MACE pour la conductivité électrique exacte produit par le problème direct et celui bruité avec un RSB de 40 dB (orientation acoustique #2, 1 configuration électrique).

Les valeurs de RSB testées pour ce problème sont de 60 dB, 52 dB, 40 dB, 32 dB, 20 dB, 12 dB et 0 dB. Les reconstructions effectuées supposent que ce RSB est connu pour spécifier l'écart-type sur les données (pour construire la matrice $\mathbf{C}_{\boldsymbol{d}}$). Pour une valeur $\boldsymbol{V}^{RMS}_{bruit,\sigma_\bullet,R0}$ obtenue sur le vecteur $\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_\bullet,R0}$, le vecteur d'écart-types sur les données est : 1×10^{-6} V + abs $\left(\boldsymbol{V}^{RMS}_{bruit,\sigma_0,R0} \times \frac{\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R1}}{\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R0}}\right)$ + abs $\left(\boldsymbol{V}^{RMS}_{bruit,\sigma_1,R0} \times \frac{\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_0,R1}}{\boldsymbol{V}^{MACE}_{\sigma_1,R0}}\right)$. Cette forme provient de la dérivation de la formule 5.3 par rapport aux différentes variables et où est ajoutée une petite constante indépendante du niveau de bruit. Notons que la dérivation par rapport au

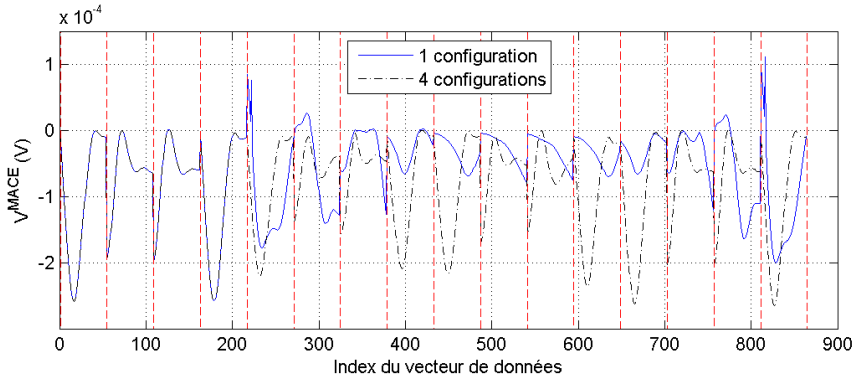

Figure 6.13 Vecteurs $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx}$ pour les situations à 1 et à 4 configurations électriques (sans bruit ajouté). Les valeurs pour les orientations 1 à 4 sont identiques pour les deux situations, car la même configuration électrique est utilisée. Pour les autres orientations, le système à 4 configurations électriques produit, en général, des signaux de plus grande amplitude.

terme $\boldsymbol{V}_{\sigma_1,R1}^{MACE}$ n'apparaît pas car aucun bruit n'est ajouté sur ces signaux de référence qui doivent être produits par simulation.

Les planches des figures 6.15 et 6.16 présentent les résultats de reconstruction pour les différents RSB testés pour les situations à 1 et à 4 combinaisons électriques. Les distributions affichées ont été produites par interpolation sur la tranche en $z = 0$ m à partir des valeurs sur la grille de reconstruction. Les histogrammes de ces distributions renseignent sur l'étalement de ces distributions.

6.7 Critères de détection

Certains critères quantitatifs de détection sont proposés ici pour évaluer la performance générale de reconstruction en fonction du RSB. Ils sont inspirés de ceux décrits dans l'article de Adler *et al.* (2009). Deux distinctions sont toutefois à noter. D'abord, la méthode de reconstruction décrite dans le présent projet produit une distribution de conductivité électrique absolue, tandis que l'application décrite dans l'article est pour une imagerie de conductivité électrique relative à une référence. Ensuite, l'objet de test du présent problème est une gaussienne, tandis que l'objet de l'article a une conductivité électrique uniforme. Les critères de détection seront alors adaptés pour satisfaire ces différences.

Pour calculer certains de ces critères, il est d'abord requis de produire une distribution réduite où seuls les pixels de l'image de conductivité électrique reconstruite σ_r dont l'amplitude est supérieure à un seuil sont conservés. Ce seuil dépend de la valeur de conductivité

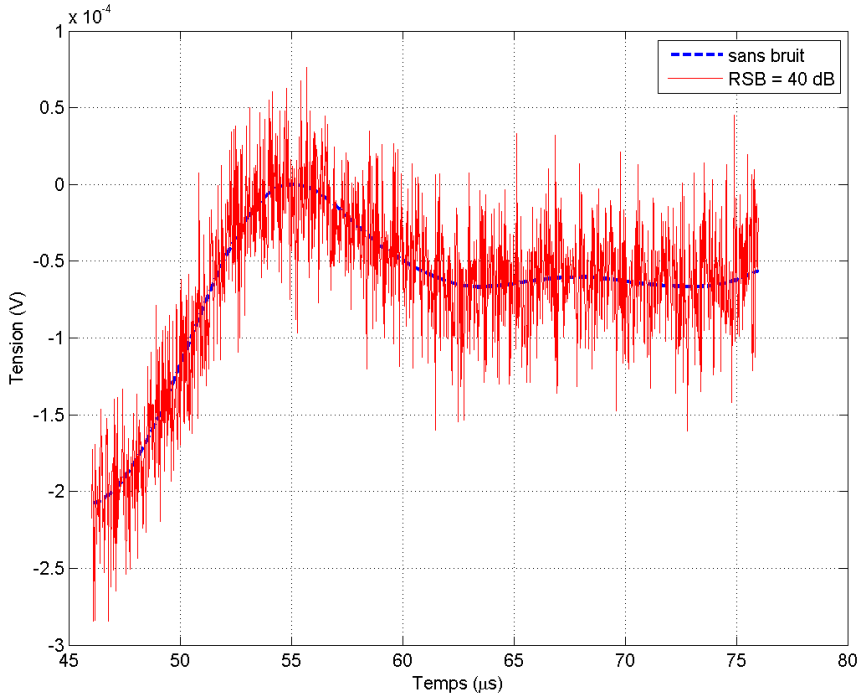

Figure 6.14 Signal de MACE de l'orientation #2 en présence de bruit (RSB = 40 dB).

électrique σ_b du fond (0,06 S/m dans le cas présent). Cette distribution réduite est :

$$[\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}}]_i = \begin{cases} 1, & \text{si } [\boldsymbol{\sigma}_r]_i \geqslant (\sigma_b + f_{seuil}(\max(\boldsymbol{\sigma}_r) - \sigma_b)) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.1}$$

où $f_{seuil} = 1/4$ pour ce problème.

Les critères sont :

- réponse en amplitude (RA) : ce critère mesure le rapport entre les valeurs de conductivité électrique de la distribution reconstruite et celles de la distribution exacte. Il est défini par :

$$\mathrm{RA} = \frac{\sum_k([\boldsymbol{\sigma}_r]_k - \sigma_b)}{\sum_k([\boldsymbol{\sigma}_e]_k - \sigma_b)} \tag{6.2}$$

  où σ_r, σ_e et σ_b sont respectivement les conductivités électriques reconstruite, exacte et de fond. L'indice d'itération k passe sur les pixels de l'image interpolée ;
- erreur de position (EP) : ce critère mesure la distance entre la position de l'objet reconstruit et celle exacte. Ceci fait intervenir la notion du centre de masse (CM) des distributions :

$$\mathrm{CM}(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\sum_k([\boldsymbol{\sigma}]_k \cdot [\boldsymbol{x}]_k)}{\sum_k [\boldsymbol{\sigma}]_k}, \frac{\sum_k([\boldsymbol{\sigma}]_k \cdot [\boldsymbol{y}]_k)}{\sum_k [\boldsymbol{\sigma}]_k} \right) \tag{6.3}$$

où $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont les vecteurs de coordonnées spatiales x et y des pixels de l'image. L'erreur de position est alors définie par la distance Euclidienne entre les centres de masse :

$$\mathrm{EP} = \sqrt{([\mathrm{CM}(\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}})]_x - [\mathrm{CM}(\boldsymbol{\sigma}_{\bar{e}})]_x)^2 + ([\mathrm{CM}(\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}})]_y - [\mathrm{CM}(\boldsymbol{\sigma}_{\bar{e}})]_y)^2} \tag{6.4}$$

– résolution (RES) : ce critère mesure le rapport entre la taille de l'objet reconstruit et celle du domaine complet. Il est défini par :

$$\mathrm{RES} = \sqrt{\frac{A_q}{A_0}} \tag{6.5}$$

où $A_q = \sum_k [\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}}]_k$ et A_0 est le nombre total de pixels.

– déformation de l'objet (DO) : ce critère mesure de combien l'objet reconstruit s'approche d'un disque. Il est défini par :

$$\mathrm{DO} = \frac{\sum_{k \notin C} [\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}}]_k}{\sum_k [\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}}]_k} \tag{6.6}$$

où C est un disque centré en $\mathrm{CM}(\boldsymbol{\sigma}_{\bar{r}})$ et d'aire A_q.

– oscillations (OSC) : ce critère mesure le rapport entre la réponse en amplitude des points à l'extérieur du disque C ayant une conductivité électrique inférieure à σ_b et celle pour les points inclus dans C :

$$\mathrm{OSC} = \frac{\sum_{(k \notin C \ \&\ [\boldsymbol{\sigma}_r]_k < \sigma_b)} [\boldsymbol{\sigma}_r]_k}{\sum_{k \in C} [\boldsymbol{\sigma}_r]_k} \tag{6.7}$$

Les images des reconstructions, où seuls les pixels faisant partie de la distribution réduite $\sigma_{\bar{r}}$ sont affichés, sont présentées aux planches des figures 6.17 et 6.18.

Les valeurs des divers critères pour les différents RSB sont présentées aux figures 6.19 à 6.23.

6.8 Discussion générale des résultats de ce problème

Dans les résultats de reconstruction présentés, la détection est bien réussie pour les niveaux de bruit au-dessus de 30 dB, tandis qu'elle ne permet pas d'identifier l'objet voulu pour les niveaux inférieurs. Parmi les critères de détection décrits plus haut, seuls la réponse en amplitude (RA), l'erreur de position (EP) et la résolution (RES) semblent être significatifs pour l'identification de cet objet. En accordant davantage d'importance à la réponse en amplitude et à l'erreur de position, ils indiquent que le système à 4 configurations d'électrodes produit un meilleur résultat que celui à 1 configuration. Cette meilleure performance provient

principalement du fait que le système à 4 configurations d'électrodes a une sensibilité mieux distribuée sur l'ensemble du domaine.

La résolution de ce problème a aussi montré que l'approche proposée pour la résolution du problème inverse est robuste au bruit de mesure. Il s'agit d'un élément important puisqu'il montre sa capacité à bien réagir à un ensemble de données entachées d'incertitudes, comme celles obtenues expérimentalement.

Pour la résolution du problème inverse, la reconstruction requiert l'inversion de « 2 $\times$ NP_{GR} $\times$ nombre de configurations d'électrodes » systèmes linéaires. Ainsi, bien que la reconstruction soit en général meilleure avec un système possédant plusieurs configurations électriques, la charge de calculs augmente rapidement avec le nombre de configurations électriques. Il est alors important de faire un compromis éclairé entre ces deux aspects. Il faut aussi noter que la reconstruction se fait sur un système ayant la même taille, peu importe le nombre de configurations d'électrodes. Une autre manière aurait pu être de prendre l'ensemble de ces configurations pour chacune des orientations acoustiques, bien que ceci fasse augmenter la taille du problème de reconstruction du côté des données. D'un point de vue pratique, ceci nécessiterait un système d'acquisition comportant plusieurs canaux et pouvant supporter la situation où des électrodes injectent un courant en même temps qu'elles mesurent le potentiel.

Le but de ce problème était de montrer l'intérêt de l'utilisation d'une géométrie pouvant combiner les distributions de sensibilité acousto-électrique de différentes combinaisons électriques pour couvrir l'ensemble du domaine d'analyse afin d'identifier un objet malgré la présence de bruit dans les signaux acquis. Ceci est un élément important à considérer pour l'imagerie sur de grands volumes. L'effort de calcul pour la reconstruction est cependant augmenté par l'ajout de systèmes linéaires à résoudre. Puisque cette partie est l'une des plus exigeantes en termes de calculs pour la méthode proposée, un compromis doit être fait entre le nombre de configurations électriques utilisées et la charge de calcul acceptable.

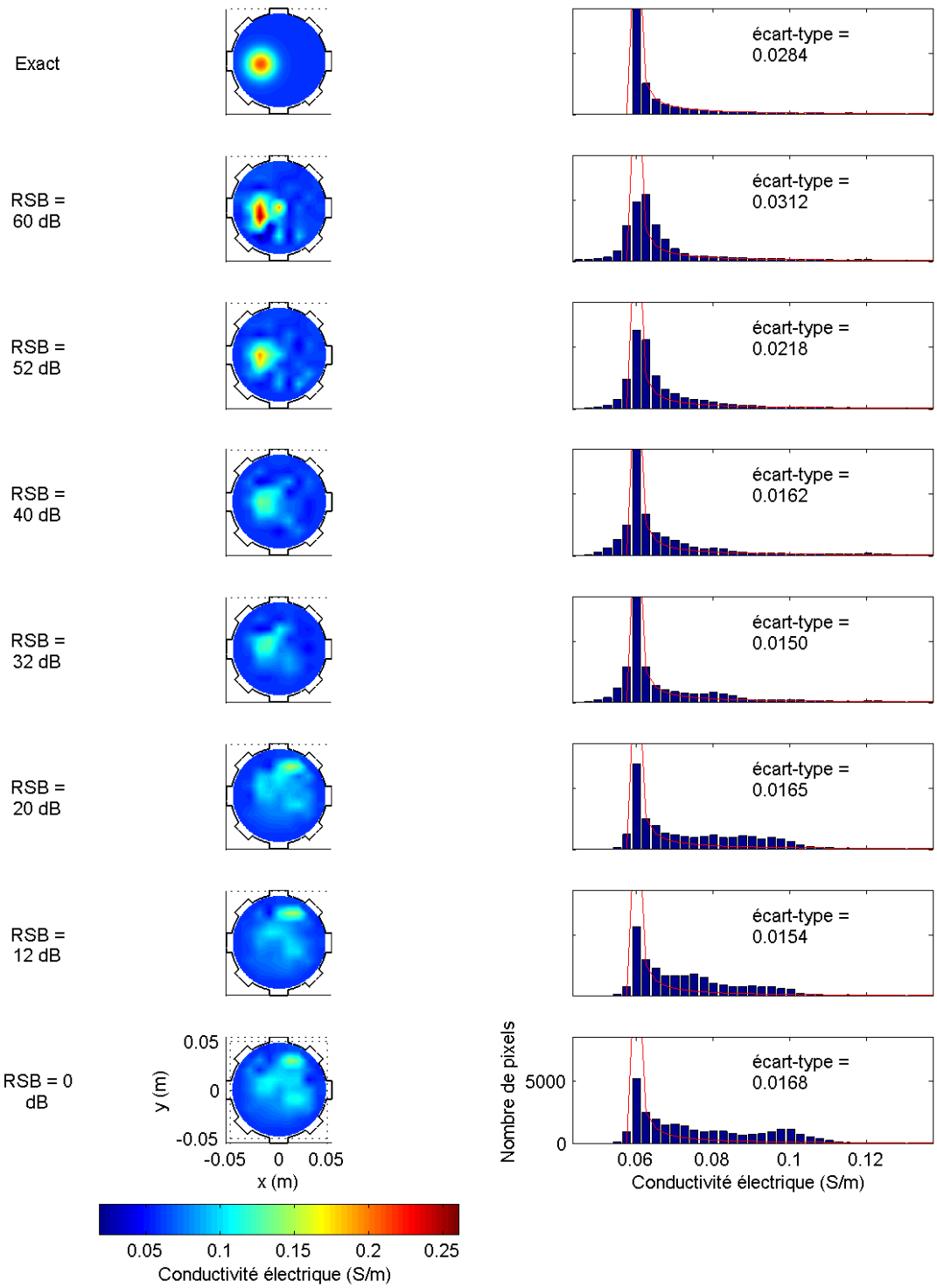

Figure 6.15 Reconstruction pour différents RSB. Une combinaison d'électrodes.

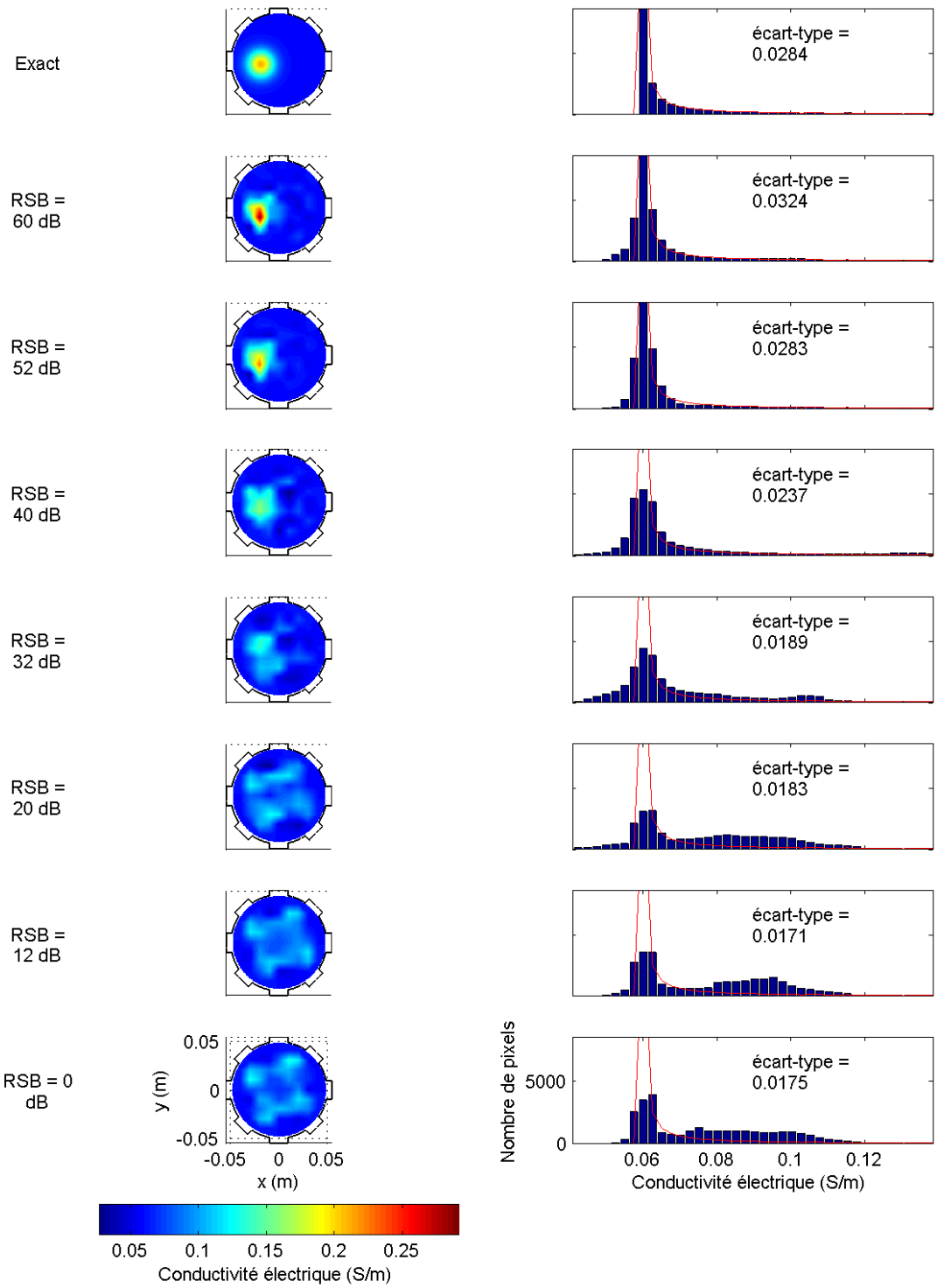

Figure 6.16 Reconstruction pour différents RSB. Quatre combinaisons d'électrodes.

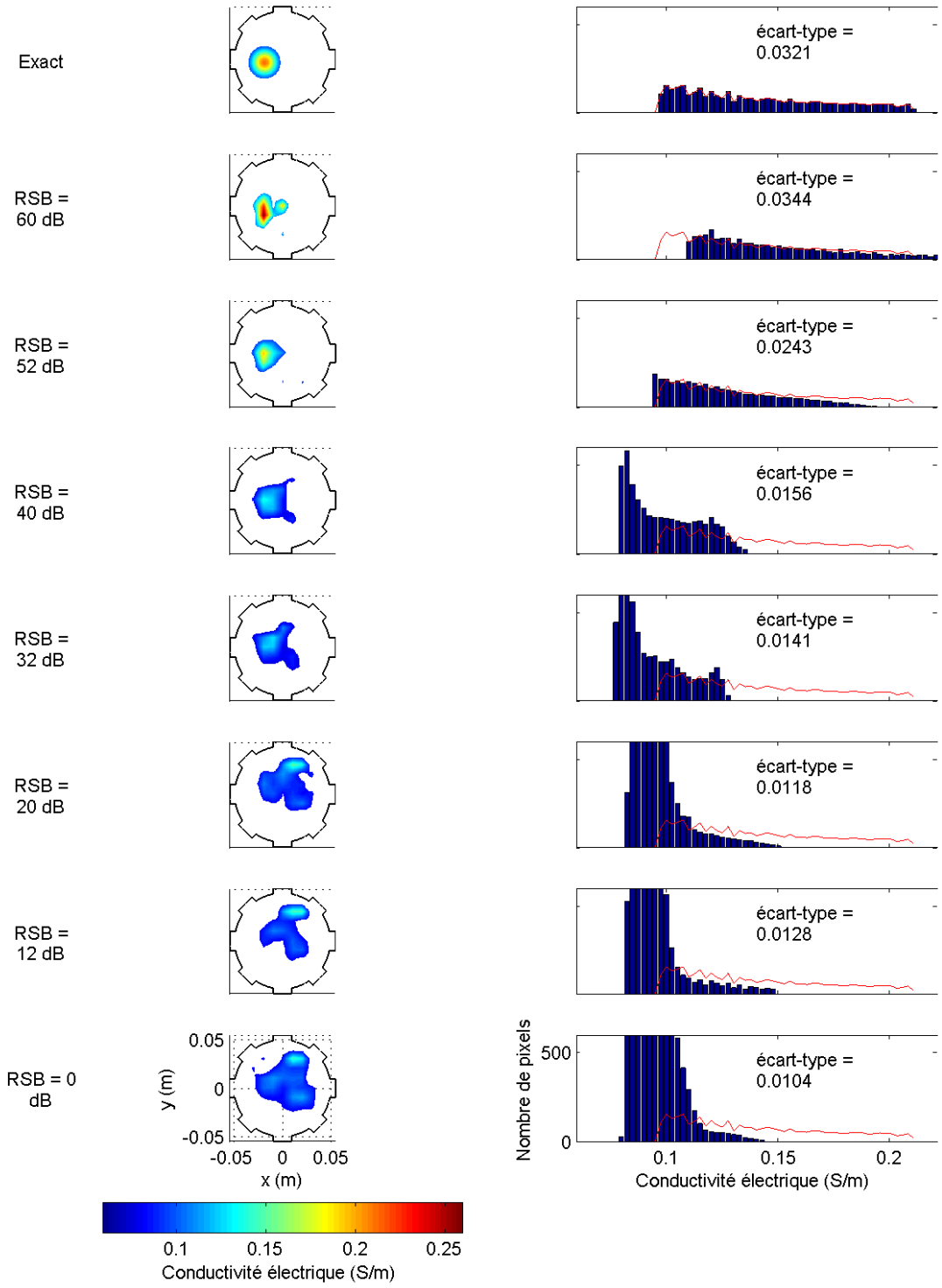

Figure 6.17 Reconstruction pour différents RSB (pixels de la distribution réduite affichés). Une combinaison d'électrodes.

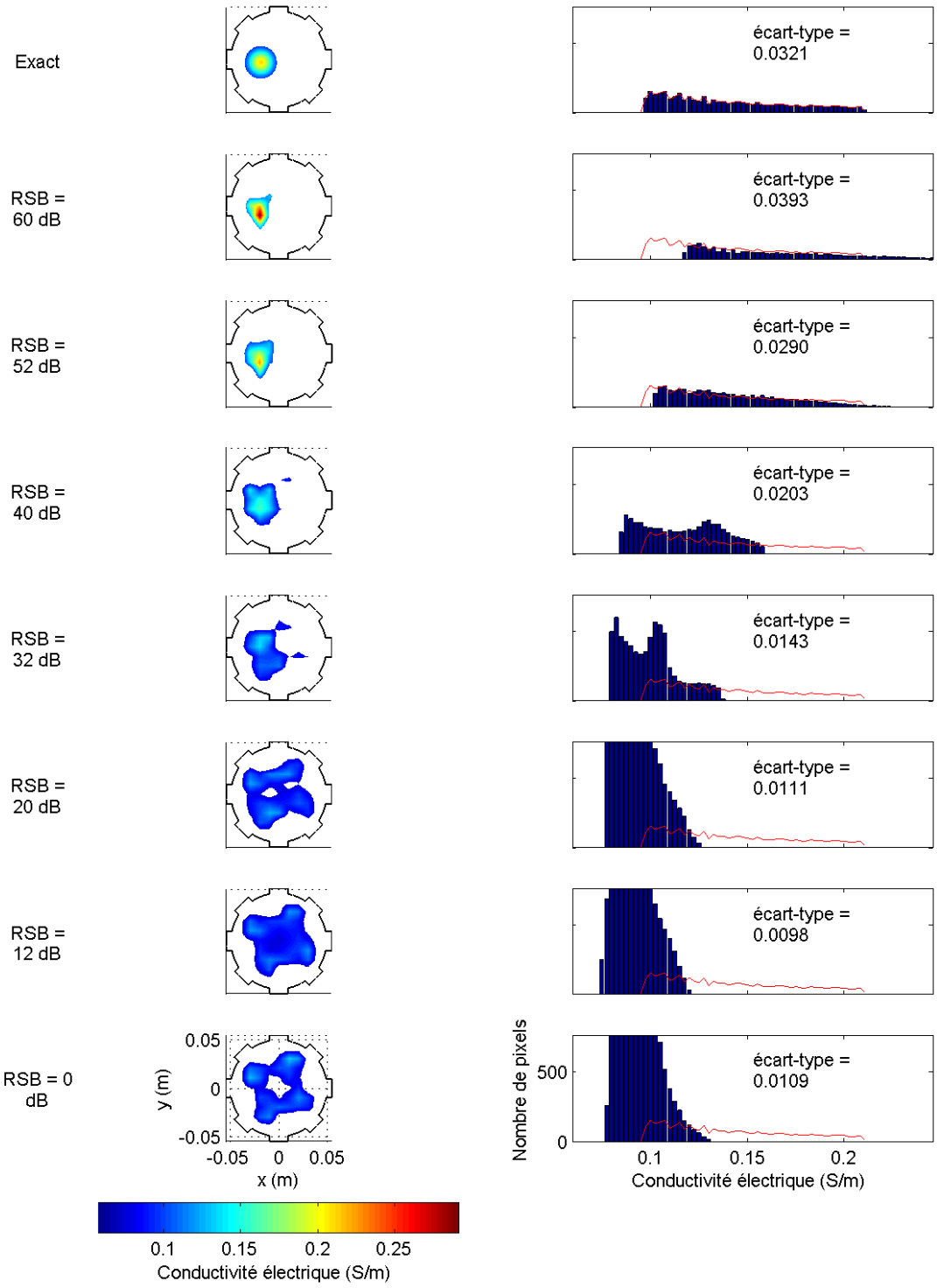

Figure 6.18 Reconstruction pour différents RSB (pixels de la distribution réduite affichés). Quatre combinaisons d'électrodes.

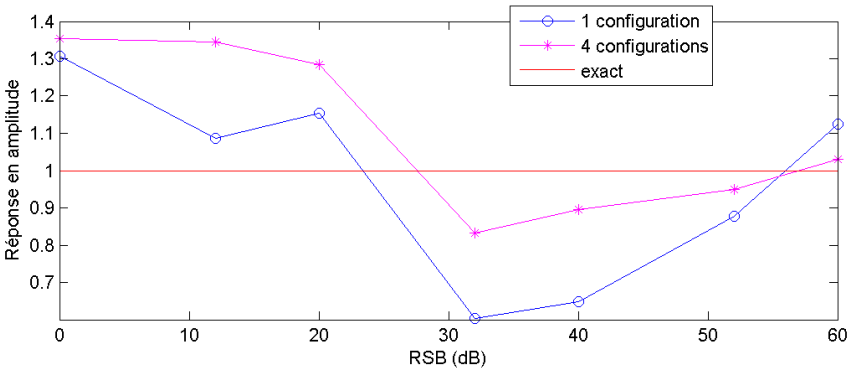

Figure 6.19 Réponse en amplitude (RA) en fonction du RSB. Pour les hauts niveaux de RSB (>30 dB), le système à 4 configurations d'électrodes produit une RA plus près de la distribution exacte que celui à 1 configuration. Ainsi, pour ces niveaux de bruit, le système à 4 configurations produit un estimé qui est quantitativement plus près de la solution exacte que celui à 1 configuration. Sous les 30 dB, la reconstruction est généralement mauvaise pour les deux systèmes. Ainsi, pour ces niveaux de bruit, bien que le système à 1 configuration ait une RA plus près de celle exacte que celui à 4 configurations, nous ne pouvons pas conclure immédiatement que sa performance soit nécessairement meilleure.

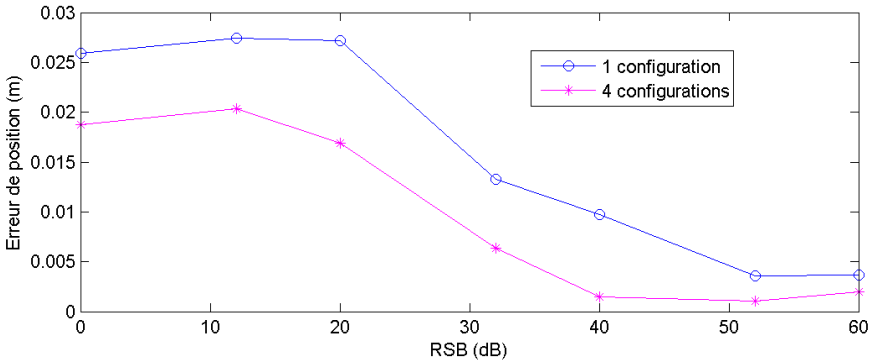

Figure 6.20 Erreur de position (EP) en fonction du RSB. Ces courbes montrent que la position du centre de masse de l'objet estimé est généralement plus près de celle exacte avec le système à 4 configurations d'électrodes. Le lieu de l'objet semble être bien retrouvé pour les RSB $>$ 30 dB, tandis qu'il n'est plus représentatif sous ce seuil.
Pour les niveaux de bruit <30 dB, les distributions reconstruites présentent une tendance à moduler leur variations de conductivité selon les patrons de sensibilité disponibles. En somme, le système à 1 configuration électrique affiche une variation de conductivité pratiquement proportionnelle à la distribution de sensibilité (comparer la figure 6.15, pour la conductivité reconstruite à 0 dB, avec la sensibilité du système électrique (figure 6.8)). Dans le système à 4 configurations, chacune des distributions de sensibilité, produites par les différentes configurations, contribue à mieux balancer les variations de conductivité sur l'ensemble du domaine. Ces variations sont situées principalement dans les régions de sensibilité maximale.

Dans le système à 1 configuration d'électrodes, la distribution de sensibilité a un centre de masse situé dans le premier quadrant. Par conséquent, à fort niveau de bruit, la détection produit une estimation de position à cet endroit. L'erreur de position est alors très grande, puisque l'objet était situé dans le troisième quadrant. Si l'objet à retrouver avait été placé dans le premier quadrant, l'erreur de position aurait été beaucoup plus petite. Cependant, nous n'aurions pas pu placer davantage de confiance dans cette estimation, puisque le centre de masse de l'objet estimé varie peu lorsque la position de l'objet à retrouver est modifiée.

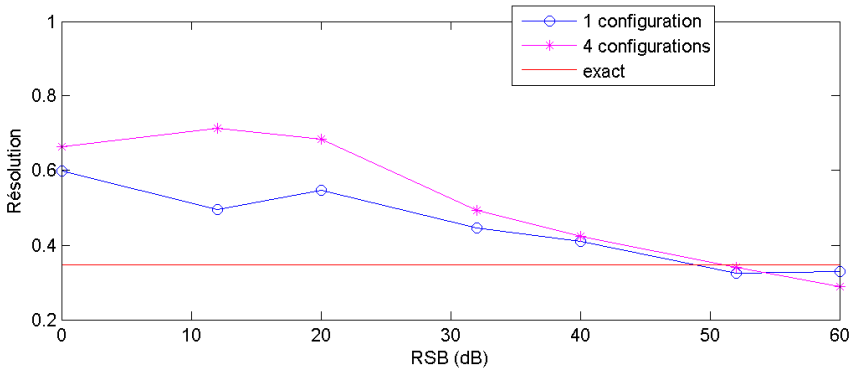

Figure 6.21 Résolution (RES) en fonction du RSB. La taille de l'objet détecté semble légèrement meilleure pour le système à 1 configuration lorsque le niveau de bruit est faible. Pour les forts niveaux de bruit (<30 dB), cette valeur de RES est généralement mauvaise.

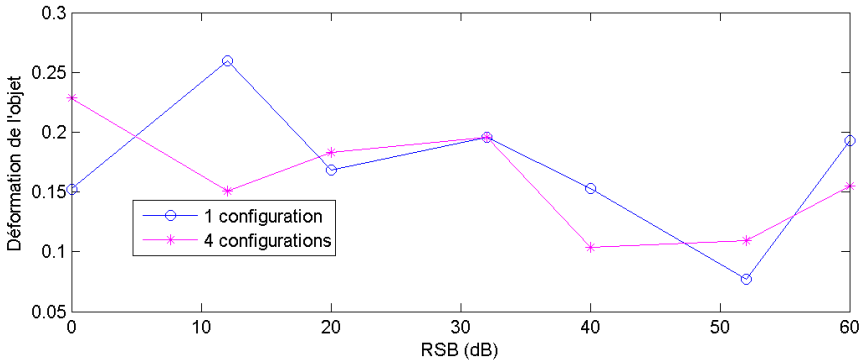

Figure 6.22 Déformation de l'objet (DO) en fonction du RSB. Cette déformation d'objet semble être peu significative dans ce problème car elle est très variable pour les différents niveaux de bruit. Ainsi, même pour un très faible bruit, l'objet estimé n'a pas de forme circulaire très nette. La cause semble être liée au fait que la grille de reconstruction est régulière, qu'elle possède un faible nombre de points et que l'interpolation vers la grille plus fine se fasse par une base linéaire de fonctions.

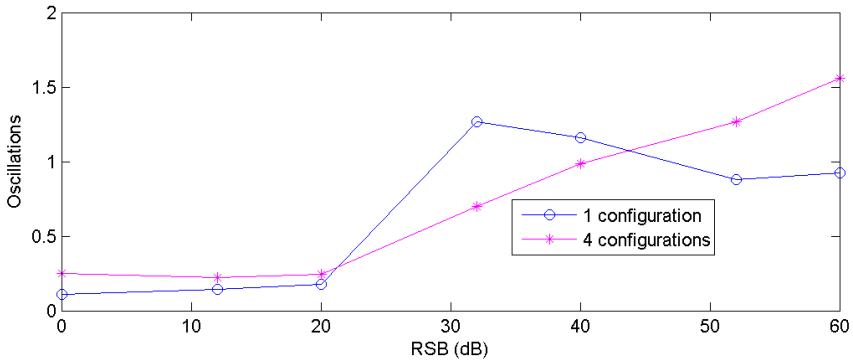

Figure 6.23 Oscillations (OSC) en fonction du RSB. La tendance générale est que ces oscillations diminuent lorsque le niveau de bruit augmente. Ce comportement est, entre autres, dicté par le fait que la régularisation du problème de reconstruction est renforcée lorsque le niveau de bruit augmente. Cette régularisation a pour effet de limiter les écarts de la conductivité autour de la valeur de fond. Elle ne permet pas, toutefois, de mieux cerner l'objet à détecter.

CHAPITRE 7

RÉSULTATS DE SIMULATION POUR DES OBJETS PROFONDS

Les problèmes de ce chapitre ont pour but d'illustrer l'application de la méthode unipolaire à l'imagerie de volumes plus larges que les précédents. La géométrie du premier problème est simple, tandis qu'elle est beaucoup plus complexe pour le second.

7.1 Problème : Volume profond

7.1.1 Géométrie

La géométrie décrivant le problème électrique a une forme similaire à celle du problème de la section 5.1. Elle est montrée à la figure 7.1. La différence principale est l'épaisseur du domaine (taille selon z), qui est maintenant de 50 mm comparativement à 1 mm.

La distribution de plus de 45 000 points répartis sur cette géométrie constitue la grille électrique. À titre de référence, elle est reproduite à la figure E.33.

La distribution de conductivité électrique est montrée à la figure 7.2 sous forme schématique et à la figure 7.3 par des surfaces de niveau. Elle est exprimée par une valeur uniforme de 1,4 S/m sur tout le domaine où sont ajoutées des distributions sphériques de taille et d'amplitude différentes. Les positions et tailles de ces inclusions sont données au tableau 7.1.

7.1.2 Conditions frontières

Les conditions frontières appliquées sont les mêmes qu'au problème de la section 5.1. Ces conditions sont exprimées aux tableaux 5.2 et 5.3. Les régions où s'appliquent ces conditions sont évidemment celles de la géométrie du problème actuel.

7.1.3 Résolution des problèmes électrostatiques

La résolution des problèmes électrostatiques est effectuée de la même manière que pour le problème de la section 5.1. Les solutions obtenues pour les deux situations sont montrées aux figures 7.4 et 7.5.

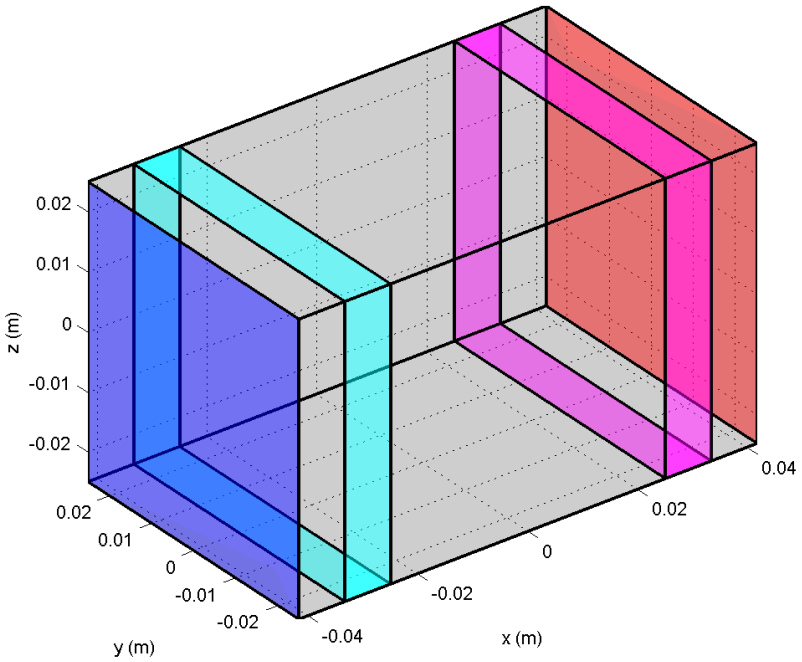

Figure 7.1 Définition de la géométrie du problème (partie électrique).

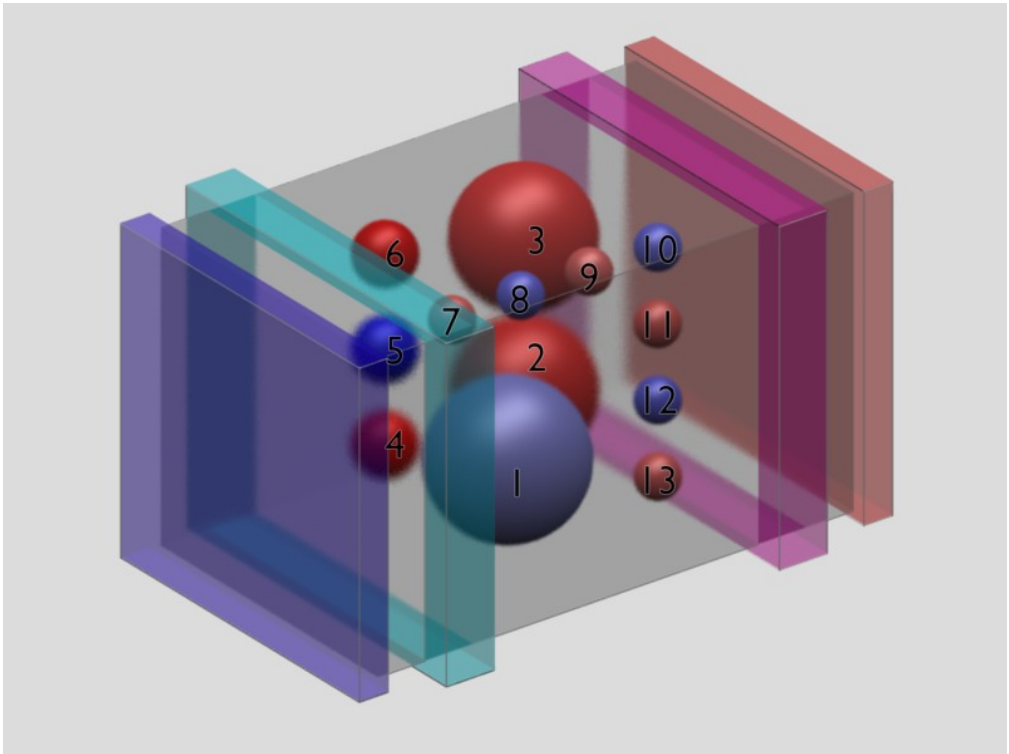

Figure 7.2 Distribution de conductivité électrique (schématique).

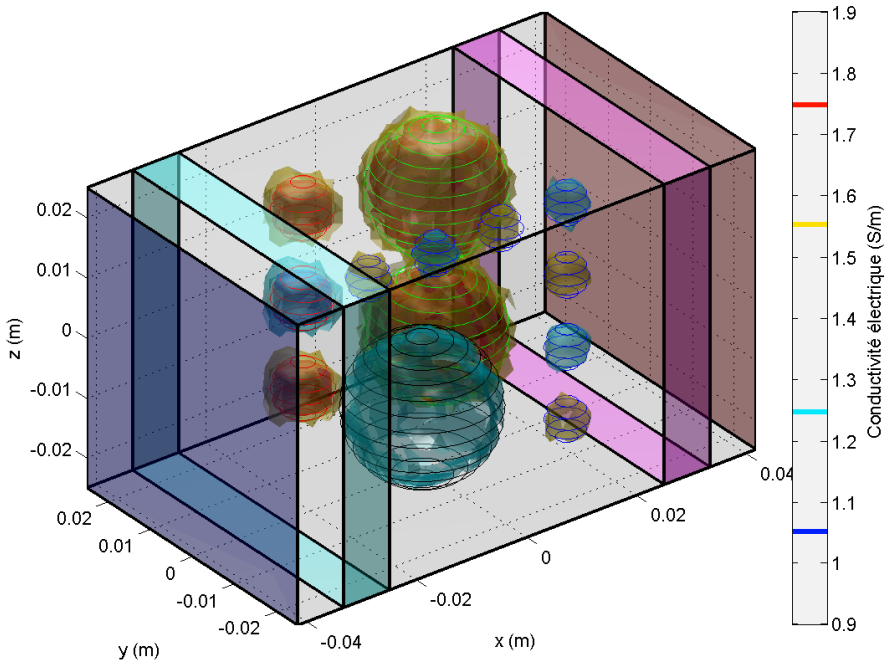

Figure 7.3 Distribution de conductivité électrique (surfaces de niveau). La création de surfaces de niveau à partir d'un champ scalaire connu sur une distribution de points irrégulière a été développée à partir des articles de Rosenthal et Linsen (2006) et de Oblonsek et Guid (1998).

Tableau 7.1 Définition des inclusions pour la distribution de conductivité électrique

#	A (S/m)	x_c (mm)	y_c (mm)	z_c (mm)	R (mm)
1	-0,2	-6,0	-8,0	-9,0	12,0
2	0,4	12,0	12,0	-12,0	10,6
3	0,4	12,0	12,0	12,0	10,6
4	0,5	-10,0	15,0	-15,0	4,8
5	-0,5	-10,0	15,0	0,0	4,8
6	0,5	-10,0	15,0	15,0	4,8
7	0,3	-18,0	-11,0	18,0	3,4
8	-0,3	-6,0	-11,0	18,0	3,4
9	0,3	6,0	-11,0	18,0	3,4
10	-0,3	18,0	-11,0	18,0	3,4
11	0,3	18,0	-11,0	6,0	3,4
12	-0,3	18,0	-11,0	-6,0	3,4
13	0,3	18,0	-11,0	-18,0	3,4

La conductivité électrique produite par chacune des inclusions est :

$$\sigma_{inclusion}(x,y,z) = \begin{cases} A, & \text{si } (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 + (z-z_c)^2 <= R^2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

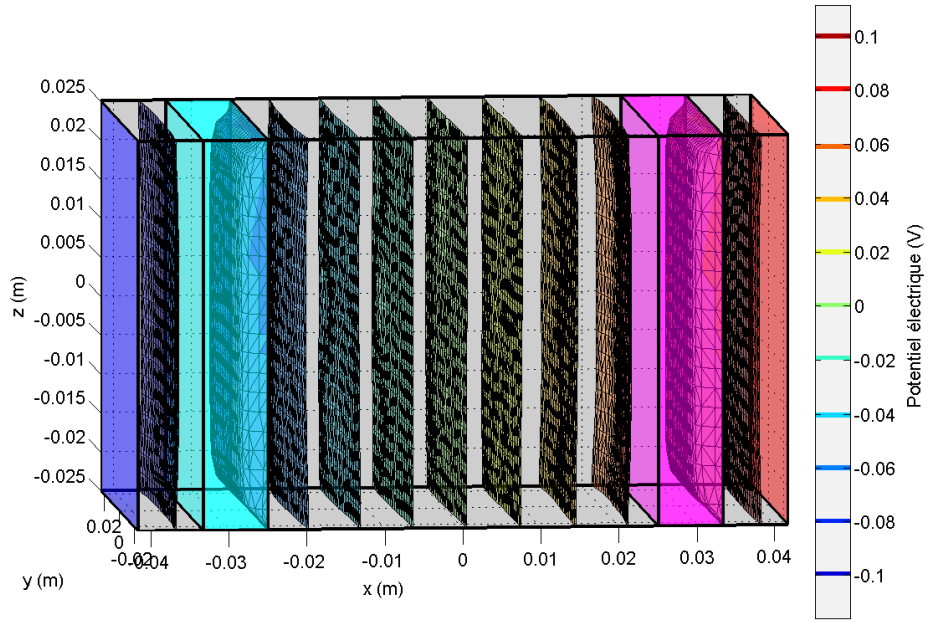

Figure 7.4 Solution du problème électrostatique (situation I).

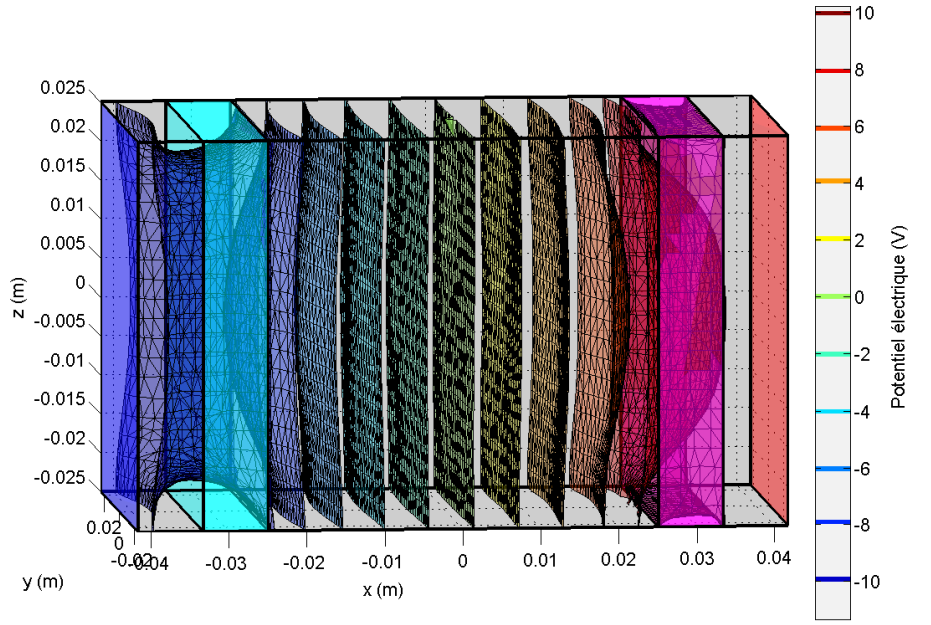

Figure 7.5 Solution du problème électrostatique (situation L).

7.1.4 Acoustique

Pour ce problème, le transducteur est le même que pour le problème de la section 5.2, c'est-à-dire qu'il s'agit du transducteur non focalisé produisant une onde unipolaire dans les conditions d'excitation décrites. Ainsi, le signal de densité de force du transducteur pour ce problème sera le même que celui présenté à la figure 5.21.

La grille utilisée pour la discrétisation du problème acoustique contient plus de 210 000 points distribués régulièrement et couvre tout le volume conducteur. Elle est reproduite à la figure E.34.

7.1.5 Signaux résultants (solution du problème direct)

Pour ce problème, où le volume conducteur est large dans les trois dimensions, le choix des orientations pour les acquisitions des signaux de MACE est d'une grande importance. En effet, pour obtenir une bonne représentation de la distribution de sensibilité acousto-électrique par les signaux de MACE, cet ensemble d'orientations doit être constitué de différents angles d'attaque. L'ensemble choisi est représenté à la figure 7.6.

Pour l'orientation #2 (la première avec l'angle d'incidence de 30 degrés), le signal de MACE acquis est présenté à la figure 7.7.

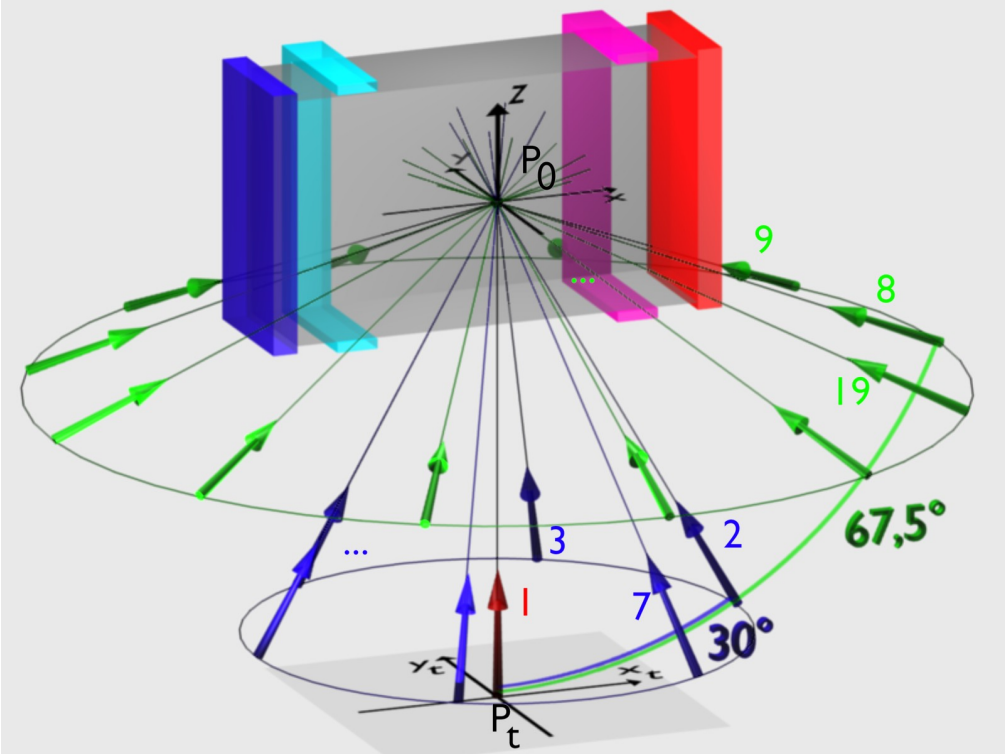

Figure 7.6 Représentation des 19 orientations du transducteur. Pour plus de clarté, la géométrie électrique est représentée seulement pour la partie des y positifs.
Les orientations sont divisées en trois groupes. Le premier groupe comporte une seule orientation. Il s'agit de celle en rouge, où la direction de propagation est selon l'axe z. Le second groupe, en bleu, comporte 6 orientations réparties uniformément par rotation de 60 degrés autour de l'axe z, où la première orientation provient d'une rotation de -30 degrés autour de l'axe y du transducteur initialement placé en $\mathrm{P_t} = (0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, -0,1\ \mathrm{m})$. Le troisième groupe, en vert, comporte 12 orientations réparties uniformément par rotation de 30 degrés autour de l'axe z, où la première orientation provient d'une rotation de -67,5 degrés autour de l'axe y du transducteur initialement placé en $\mathrm{P_t} = (0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, -0,1\ \mathrm{m})$. $\mathrm{P_0} = (0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m})$.

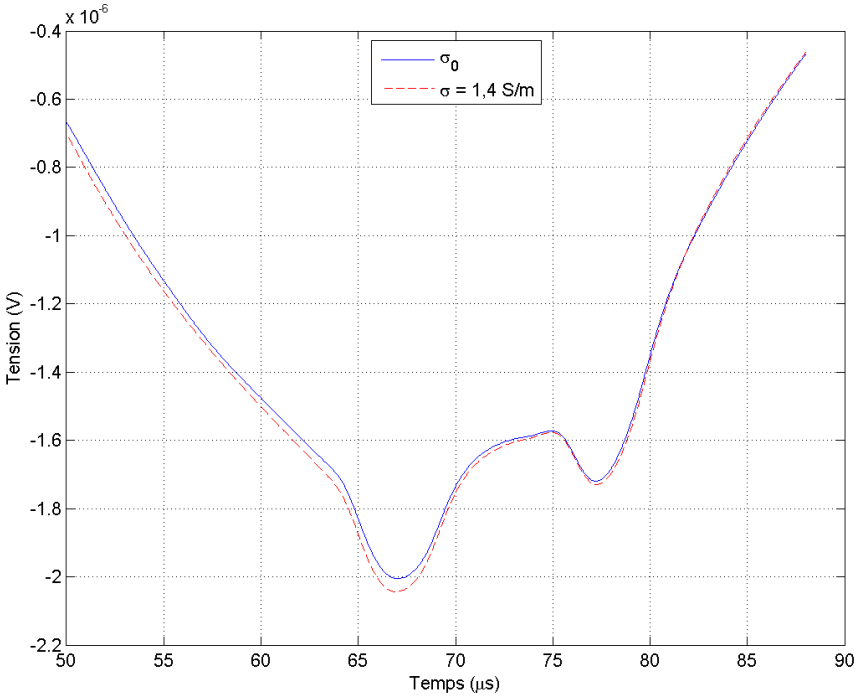

Figure 7.7 Signal de MACE pour l'orientation #2. Il est obtenu pour la distribution de conductivité inhomogène σ_0 de la figure 7.3. Pour fins de comparaison, le signal de MACE obtenu pour une conductivité électrique homogène de 1,4 S/m, correspondant à la valeur de fond de la distribution σ_0, y est également tracé. Cette figure montre que la présence d'inclusions dans le volume n'a qu'un léger effet sur l'amplitude du signal mesuré, mais la différence entre les deux signaux varie lentement.

7.1.6 Reconstruction

Pour ce problème, le seul cas examiné est celui où nous évitons de commettre le « crime inverse ». Pour référence, les grilles électrique, acoustique et d'intégration utilisées pour la résolution du problème inverse sont montrées aux figures E.36 à E.38.

La conductivité électrique de référence σ_1 a été fixée à 1,0 S/m sur tout le domaine. Pour l'utilisation de l'équation 2.34, les valeurs suivantes ont été prises : $t_j = [50,98\,\mu\text{s},\ 51,30\,\mu\text{s},\ 51,62\,\mu\text{s}, \ldots, 80,74\,\mu\text{s}]$, $K_I = 100 \times 10^{-11}\,\text{Pa}^{-1}$, tandis que l'ensemble d'orientations $[\theta_i]$ est formé des 19 orientations présentées plus haut (voir figure 7.6).

Les valeurs des paramètres de reconstruction pour ce problème sont les suivantes :

- valeurs *a priori* des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_{prior}$) : 1,4 S/m ;
- valeurs initiales des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_0$) : 1,4 S/m ;
- écart-type sur les paramètres du modèle (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$) : 10,0 S/m pour les points de la grille de reconstruction dont la coordonnée en x est comprise dans l'intervalle [-21 mm, 21 mm], 0,1 S/m pour les autres points. Ceci est fait pour restreindre les variations de la conductivité électrique des points à l'extérieur de la région centrale sous hypothèse que nous connaissons avec beaucoup de précision cette valeur exacte. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur les données $\boldsymbol{d}$ de tension électrique (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{d}}$) : 1×10^{-6} V. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur la modélisation (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{T}}$) : 0 V ;
- critère d'arrêt : norme du gradient à atteindre ($\|\boldsymbol{\gamma}_n\|$) : 0,1.

Pour ce problème, une résolution par méthode de quasi-Newton a été employée. Cependant, la reconstruction par la méthode de gradients conjugués donne un résultat très similaire à celui présenté ici.

La grille de reconstruction est une distribution régulière de $11 \times 11 \times 11$ points. Cette distribution est présentée à la figure 7.8. Les mêmes conditions d'interpolation sont utilisées que pour les problèmes précédents (passage de la grille de reconstruction à la grille électrique).

Pour ce problème où les grilles occupent un plus grand volume que pour les problèmes précédents, il devient coûteux en termes de calculs de garder la même finesse (résolution) de ces distributions. Un compromis a alors été trouvé entre précision des résultats et charge de calcul. De la même manière que pour le problème mince, il est utile de prendre un signal $\tilde{E}(t)$ produisant un effet passe-bas sur le signal de MACE acquis pour réduire l'imprécision provenant de la discrétisation. Le signal $\tilde{E}(t)$ choisi pour ce problème est un créneau de valeur 5×10^5 s^{-1}, non nul sur une durée de 2×10^{-6} s et débutant à $t = 0$ s. Le vecteur $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx}$ résultant est montré à la figure 7.9.

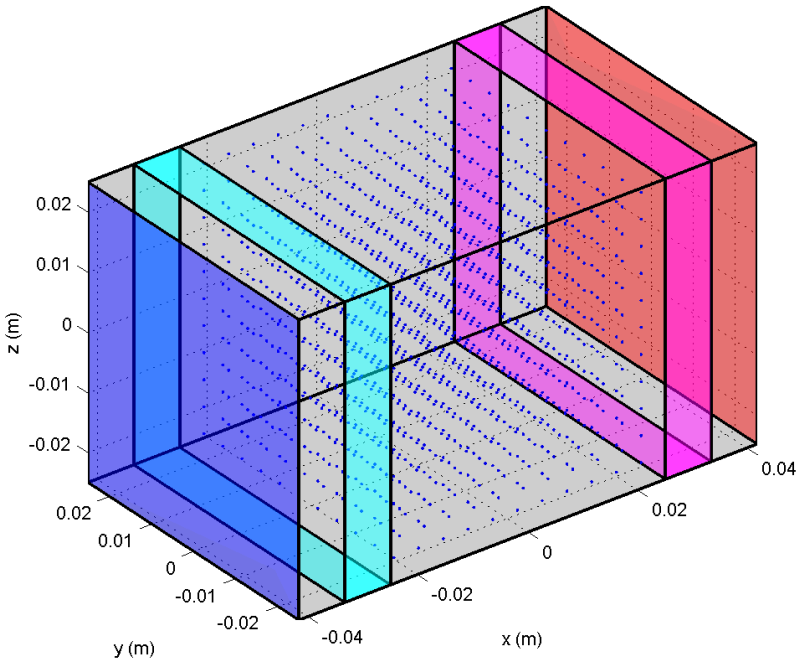

Figure 7.8 Distribution de points de la grille de reconstruction. Elle occupe un volume de $45 \times 45 \times 45$ mm^3 et est centrée en $(0\text{ mm}, 0\text{ mm}, 0\text{ mm})$. Elle comporte $11 \times 11 \times 11 = 1331$ points distribués régulièrement.

Le processus de reconstruction atteint la convergence en seulement 2 itérations. La distribution de conductivité électrique reconstruite est présentée à la figure 7.10. Elle est également affichée à la figure 7.11 pour un ensemble de tranches passant par le centre de différentes inclusions.

Pour ce problème, où plusieurs objets sont présents dans la scène, l'analyse de détection de ces objets est légèrement différente de celle du problème précédent. Pour chacune des inclusions du tableau 7.1, une sous-région de forme sphérique est considérée. Cette sous-région a le même centre que l'inclusion exacte et son rayon est fixé de sorte à ne contenir que cette inclusion et une partie de son environnement. Un ensemble de points distribués régulièrement dans cette région est généré et la conductivité électrique estimée est interpolée à ces points à partir des valeurs sur la grille de reconstruction. Les valeurs des critères de détection décrits à la section 6.7 sont ensuite calculées (dans leur version 3D). Pour les inclusions ayant un A négatif (tableau 7.1), les calculs sont réalisés sur une distribution opposée par rapport à la conductivité électrique du fond, c'est-à-dire $[\boldsymbol{\sigma}_r]_k \leftarrow -([\boldsymbol{\sigma}_r]_k - \sigma_b) + \sigma_b$. Les figures 7.13 à 7.17 montrent les valeurs des différents critères pour chacune des inclusions.

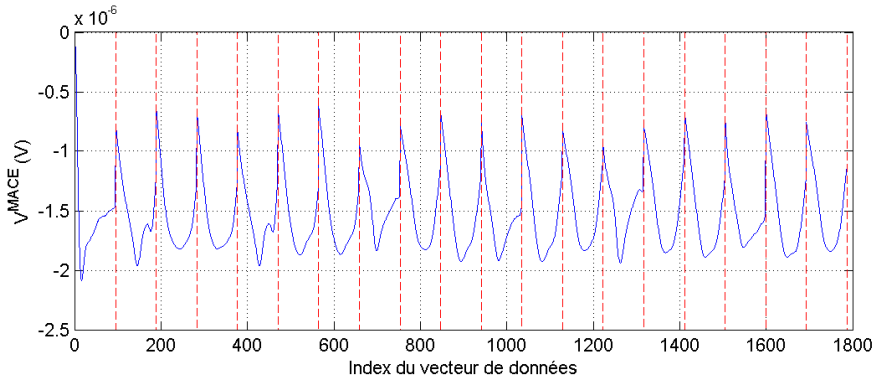

Figure 7.9 Vecteur $\boldsymbol{V}_{\sigma_0,R1}^{MACE,approx}$. Les échantillons des 19 orientations sont séparés par les traits verticaux.

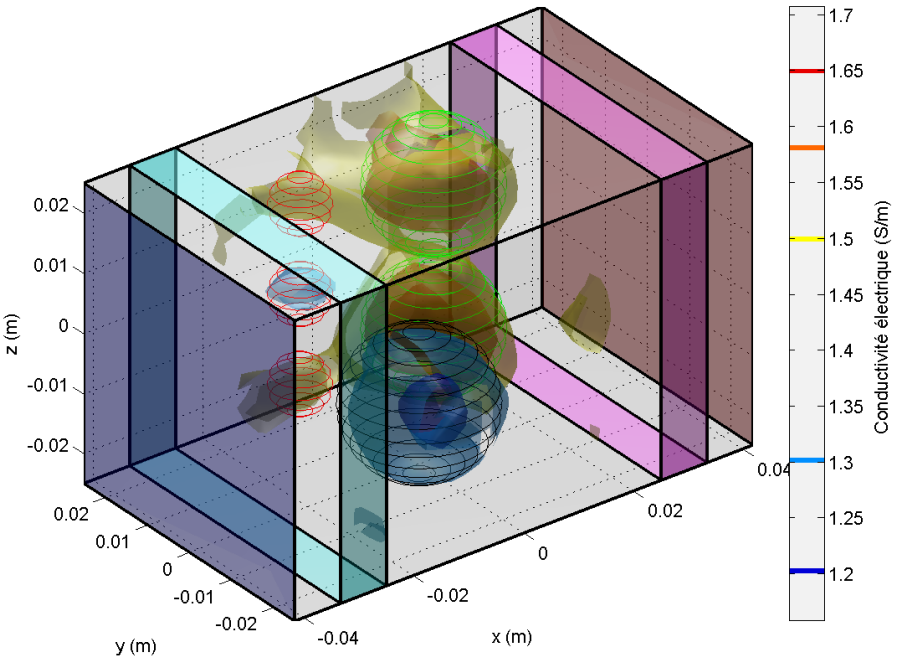

Figure 7.10 Distribution de conductivité électrique reconstruite. Une inspection visuelle permet d'identifier certaines des inclusions les plus grosses, mais non les plus petites. Les sphères #1 à #6 sont identifiées par les traits de couleur.

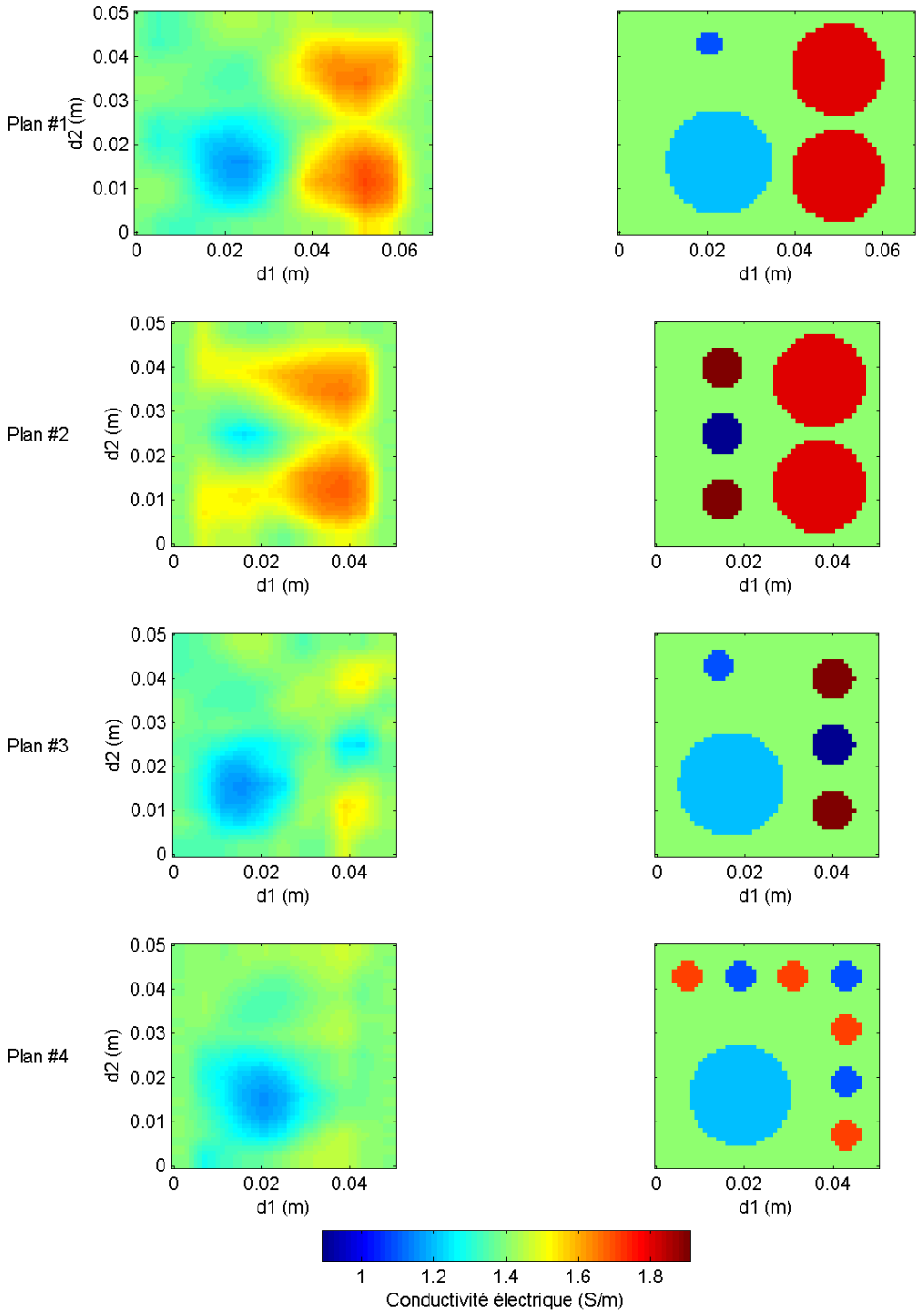

Figure 7.11 Tranches de la distribution de conductivité électrique. La colonne de gauche contient les tranches de la conductivité électrique reconstruite. La colonne de droite contient la distribution de conductivité électrique exacte pour ces mêmes tranches. Chacune des lignes est pour une tranche. La disposition de ces tranches dans le volume conducteur est affichée à la figure 7.12.

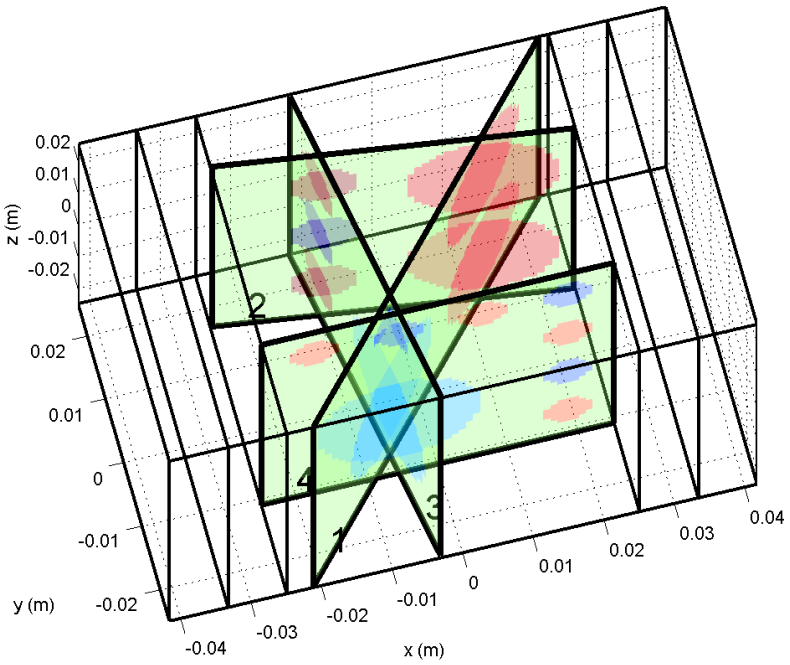

Figure 7.12 Disposition des tranches de la distribution de conductivité électrique. Les tranches passent par le centre de ces inclusions : tranche #1 : inclusions #1 à #3 ; tranche #2 : inclusions #2 à #6 ; tranche #3 : inclusions #1 et #4 à #6 ; tranche #4 : inclusions #7 à #13.

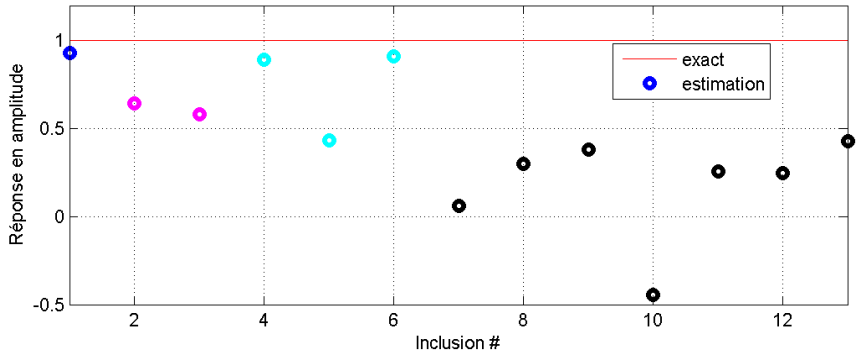

Figure 7.13 Réponse en amplitude (RA) des inclusions. En général, la RA est meilleure pour les objets de grande taille et ayant un grand contraste avec le fond. Cette RA est très mauvaise pour les petits objets (inclusions #7 à #13). Elle est si faible que nous ne voyons aucune modification significative de la conductivité électrique dans ces régions.

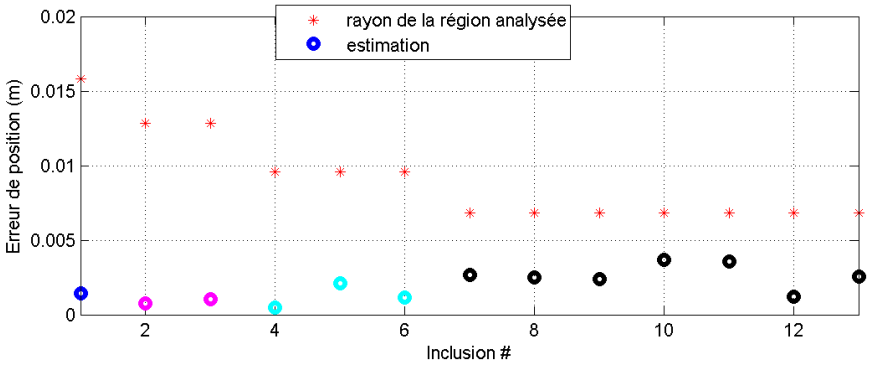

Figure 7.14 Erreur de position (EP) des inclusions. Les valeurs de rayon des sous-régions d'analyse sont également affichées. Le positionnement est meilleur pour les objets de grande taille et ayant un grand contraste. Pour les très petits objets (inclusions #7 à #13), cette erreur est relativement grande par rapport à la taille de la région d'évaluation.

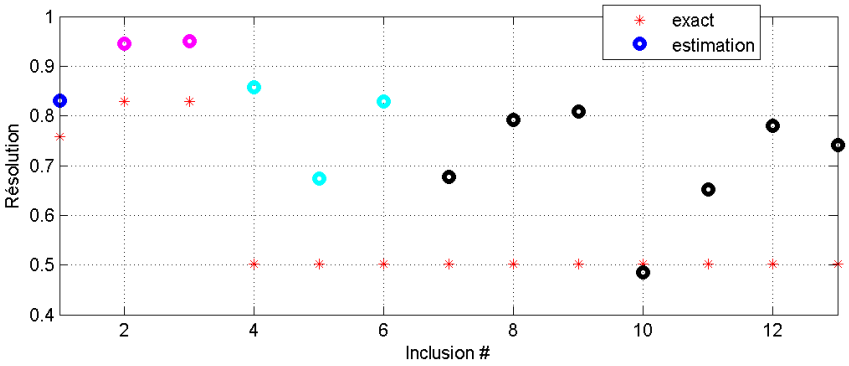

Figure 7.15 Résolution (RES) des inclusions. De manière générale, la résolution des inclusions est mieux identifiée pour les objets de grande taille et ayant un grand contraste avec le fond. La surévaluation du RES des inclusions #4 et #6, en comparaison avec l'inclusion #5, semble provenir de leur proximité avec celles #2 et #3. Ces dernières induisent une forte modification positive de la conductivité dans leur environnement qui se propage vers les inclusions #4 et #6, tel qu'observable sur la figure 7.11 (plan #2).

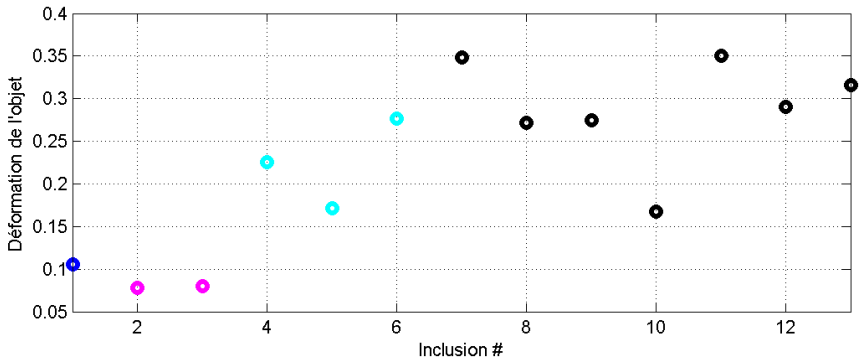

Figure 7.16 Déformation des inclusions (DO). De manière générale, la forme sphérique des objets est mieux retrouvée pour les objets plus gros.

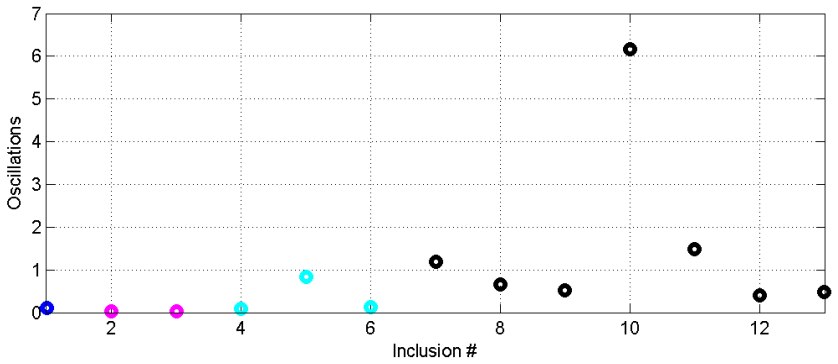

Figure 7.17 Oscillations (OSC) des inclusions. Les faibles oscillations autour des objets de grande et de moyenne tailles (inclusions #1 à #6) facilitent leur identification visuelle sur la figure 7.11.

7.1.7 Discussion générale des résultats de ce problème

Un objectif de ce problème était d'illustrer la performance du processus d'imagerie par MACE pour un objet volumineux à partir d'une onde acoustique unipolaire. Le résultat de reconstruction de la conductivité électrique présenté à la figure 7.10 permet l'identification visuelle des grosses inclusions (#1 à #3 du tableau 7.1) avec une bonne confiance, tandis que les inclusions moyennes (#4 à #6) sont identifiables mais moins distinctes. Les petites inclusions (#7 à #13) ne sont pas apparentes. Quant à la figure 7.11, elle montre que les grosses et moyennes inclusions peuvent être généralement bien séparées spatialement. Cependant, cette tâche de séparation est plus complexe dans un contexte où les objets à retrouver ne sont pas connus à l'avance. Les critères de détection qui ont été calculés supportent ces observations.

7.2 Problème : Application au cancer du sein

7.2.1 Commentaires généraux

L'objectif général de ce problème est d'appliquer la démarche complète de résolution (problèmes direct et inverse) pour une géométrie adaptée à l'imagerie du sein. Toutefois, puisque cette application est complexe, seulement certains éléments essentiels sont inclus dans ce problème.

7.2.2 Définition du problème

La géométrie de ce problème est dictée par l'application souhaitée, soit la détection du cancer du sein. Le volume conducteur proposé, présenté à la figure 7.18, est une hémisphère de 135 mm de diamètre, comportant 8 électrodes disposées sur un plan et une électrode de masse placée à la base.

La distribution de plus de 95 000 points répartis sur cette géométrie constitue la grille électrique. À titre de référence, elle est reproduite à la figure E.39.

La distribution de conductivité électrique est montrée à la figure 7.19. Elle est constituée d'un fond homogène à 0,06 S/m où s'ajoute une gaussienne dont les paramètres sont spécifiés au tableau 7.2.

7.2.3 Conditions frontières

Les conditions frontières appliquées pour la résolution des problèmes électrostatiques sont les mêmes que celles du problème multi-électrodes, pour l'ensemble de 4 configurations électriques (voir tableaux 6.2 et 6.3).

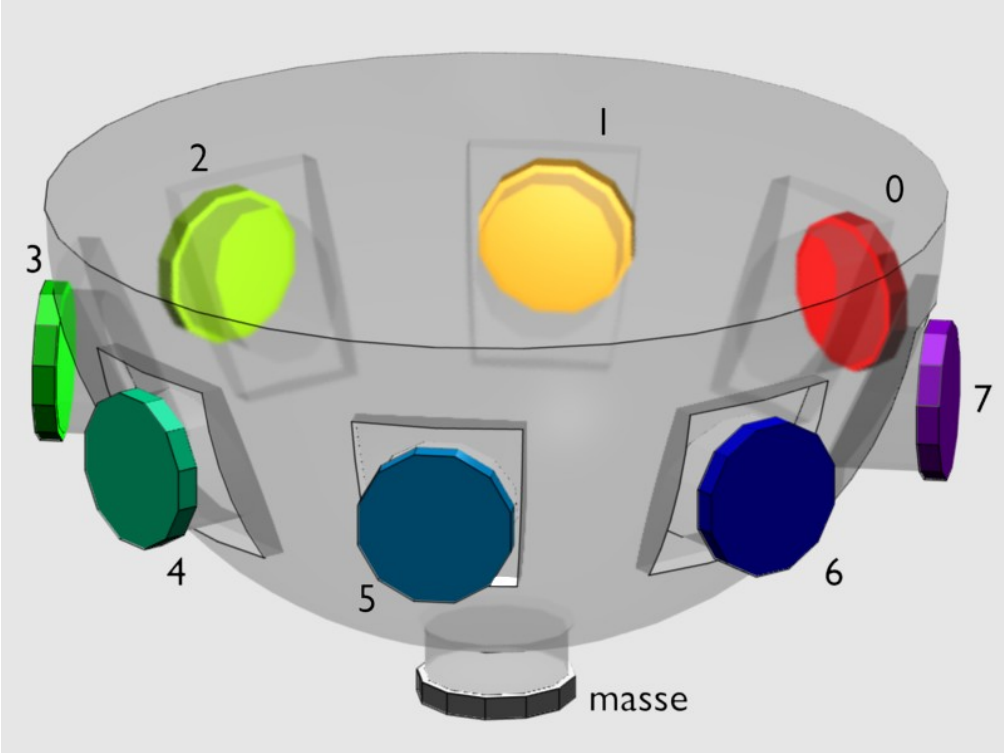

Figure 7.18 Illustration de la géométrie du problème (partie électrique). Les 9 électrodes sont placées en retrait.

7.2.4 Acoustique

Pour ce problème, le transducteur et les conditions d'excitation sont les mêmes que ceux des derniers problèmes (onde unipolaire).

7.2.5 Signaux résultants (solution du problème direct)

L'ensemble choisi pour l'orientation du transducteur est constitué de trois groupes. La première orientation d'un groupe est obtenue en plaçant la face du transducteur à la coordonnée $\mathrm{P_t} = (0\ \mathrm{mm}, 0\ \mathrm{mm}, -120\ \mathrm{mm})$, puis en effectuant une rotation de θ_1 degrés autour de la droite y_c, passant par le point $\mathrm{P_c} = (0\ \mathrm{mm}, 0\ \mathrm{mm}, -20\ \mathrm{mm})$, suivie d'une rotation de

Tableau 7.2 Définition de la gaussienne pour la distribution de conductivité électrique

A (S/m)	x_c (mm)	y_c (mm)	z_c (mm)	η_x (mm)	η_y (mm)	η_z (mm)
0,25	-12,0	-6,0	-15,0	10,0	10,0	12,0

avec $\sigma_{gauss}(x,y,z) = \begin{cases} A\ e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\eta_x^2} - \frac{(y-y_c)^2}{2\eta_y^2} - \frac{(z-z_c)^2}{2\eta_z^2}}, & \text{si } \frac{(x-x_c)^2}{(3\eta_x)^2} + \frac{(y-y_c)^2}{(3\eta_y)^2} + \frac{(z-z_c)^2}{(2\eta_z)^2} \leqslant 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

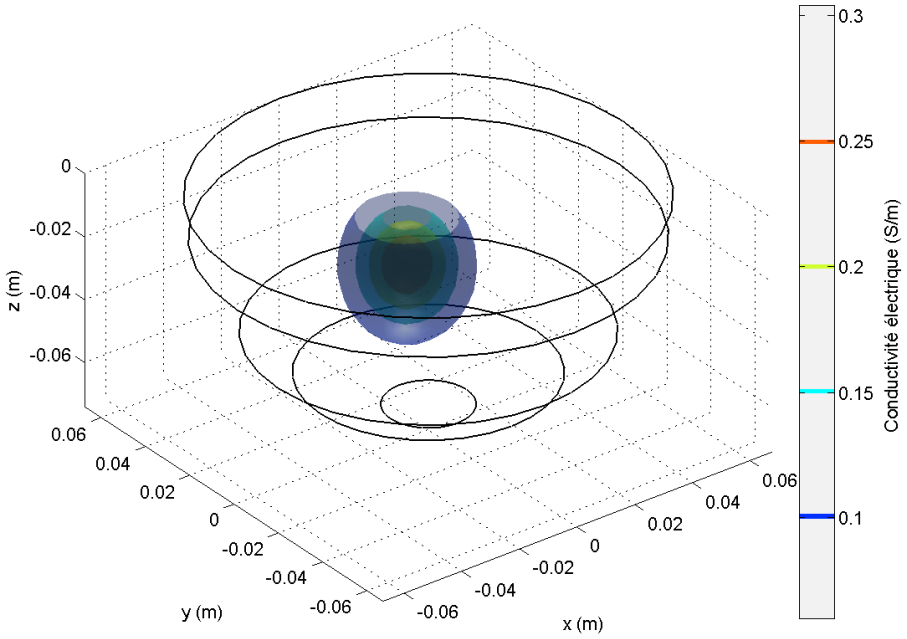

Figure 7.19 Distribution de conductivité électrique. Les traits noirs représentent la cavité hémisphérique.

θ_2 degrés autour de l'axe z. Les orientations suivantes du groupe sont obtenues par rotations successives de θ_3 degrés autour de l'axe z. Le tableau 7.3 donne les spécifications pour ce problème. Une représentation de ces 28 orientations est présentée à la figure 7.20.

Tableau 7.3 Spécifications des paramètres de rotation pour les orientations acoustiques

Groupe #	Nombre d'orientations	θ_1 (degrés)	θ_2 (degrés)	θ_3 (degrés)
1	4	-15,0	67,50	90,0
2	8	-30,0	45,00	45,0
3	16	-60,0	33,75	22,5

La figure 7.21 présente le signal de MACE pour la configuration électrique #1 avec la première orientation acoustique.

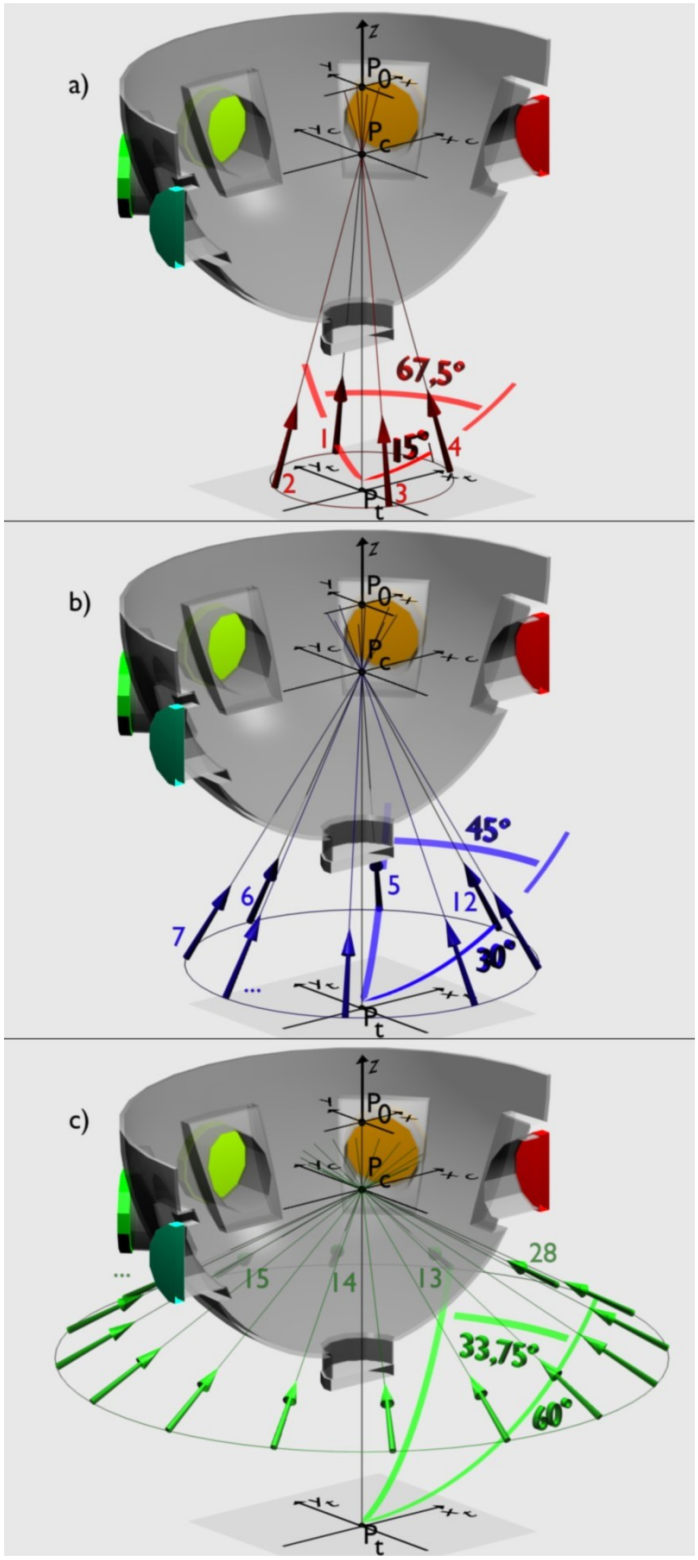

Figure 7.20 Représentation des 28 orientations du transducteur. (a) Groupe #1 : orientations 1 à 4. (b) Groupe #2 : orientations 5 à 12. (c) Groupe #3 : orientations 13 à 28. $P_t = (0\text{ mm}, 0\text{ mm}, -120\text{ mm})$, $P_c = (0\text{ mm}, 0\text{ mm}, -20\text{ mm})$, $P_0 = (0\text{ mm}, 0\text{ mm}, 0\text{ mm})$.

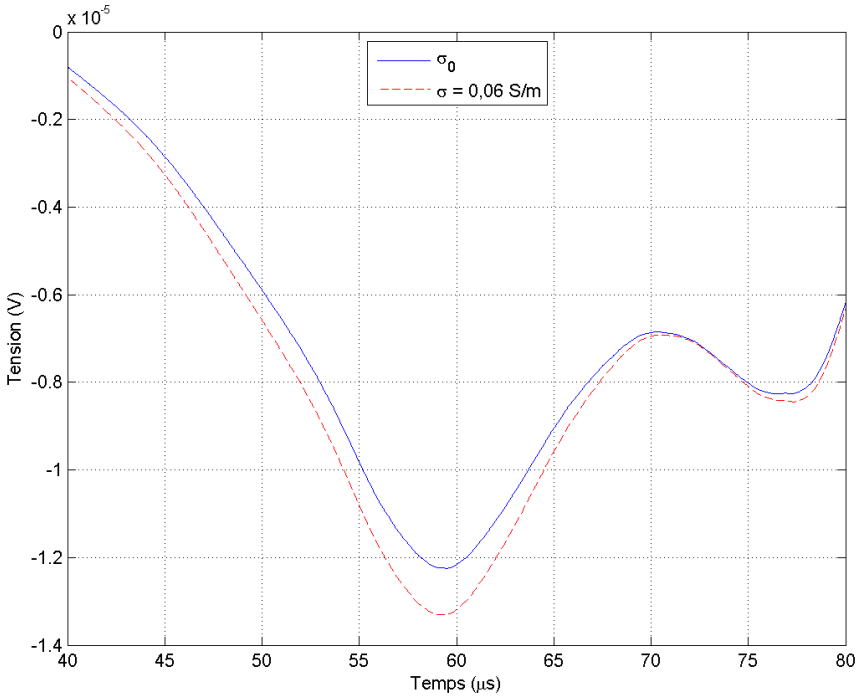

Figure 7.21 Signal de MACE pour la configuration électrique #1 avec la première orientation acoustique. Le signal de MACE obtenu pour une conductivité électrique homogène de 0,06 S/m, correspondant à la valeur de fond de la distribution σ_0, est également tracé.

7.2.6 Reconstruction

Pour ce problème, le seul cas examiné est celui où nous évitons de commettre le « crime inverse ». Pour référence, les grilles électrique, acoustique et d'intégration utilisées pour la résolution du problème inverse sont montrées aux figures E.42 à E.44.

La conductivité électrique de référence σ_1 a été fixée à 1,0 S/m sur tout le domaine. Pour l'utilisation de l'équation 2.34, les valeurs suivantes ont été prises : $t_j = [41,98\,\mu\text{s},\ 42,28\,\mu\text{s},\ 42,58\,\mu\text{s}, \ldots, 77,68\,\mu\text{s}]$ et $K_I = 100 \times 10^{-11}\,\text{Pa}^{-1}$. Les orientations acoustiques sont celles décrites plus haut.

Pour ce problème, la grille de reconstruction est une distribution de 2693 points espacés régulièrement. Cette grille est présentée à la figure 7.22. Les conditions d'interpolation sont les mêmes que celles des problèmes précédents (passage de la grille de reconstruction à la grille électrique).

Les valeurs des paramètres de reconstruction pour ce problème sont les suivantes :

- valeurs *a priori* des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_{prior}$) : 0,06 S/m ;
- valeurs initiales des paramètres du modèle ($\boldsymbol{m}_0$) : 0,06 S/m ;
- écart-type sur les paramètres du modèle (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$) : 0,01 S/m pour les points de la grille de reconstruction en périphérie et à la base, 0,03 S/m pour les points sur la couche intérieure de ces points (mais non à la base), 0,2 S/m pour les autres points. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur les données $\boldsymbol{d}$ de tension électrique (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{d}}$) : 1×10^{-6} V. Aucune covariance entre ces paramètres ;
- écart-type sur la modélisation (pour la construction de la matrice de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{T}}$) : 0 V ;
- critère d'arrêt : 2 itérations.

Pour ce problème, une résolution par méthode de quasi-Newton a été employée.

Le signal $\tilde{E}(t)$ choisi pour ce problème est un créneau de valeur 5×10^5 s^{-1}, non nul sur une durée de 2×10^{-6} s et débutant à $t = 0$ s. Ceci est particulièrement important pour ce problème de grand volume (en comparaison à la minceur de la lame acoustique) pour réduire l'erreur de discrétisation tout en permettant de garder un nombre de points raisonnable dans les différentes grilles.

Le processus de reconstruction est limité à 2 itérations car la charge de calculs est très grande (il faut environ une journée de calculs par itération). La distribution de conductivité électrique reconstruite est présentée aux figures 7.23 et 7.24.

Concernant la détection de l'objet, le tableau 7.4 résume les valeurs obtenues pour quelques critères définis à la section 6.7 pour la distribution de conductivité électrique reconstruite et celle exacte.

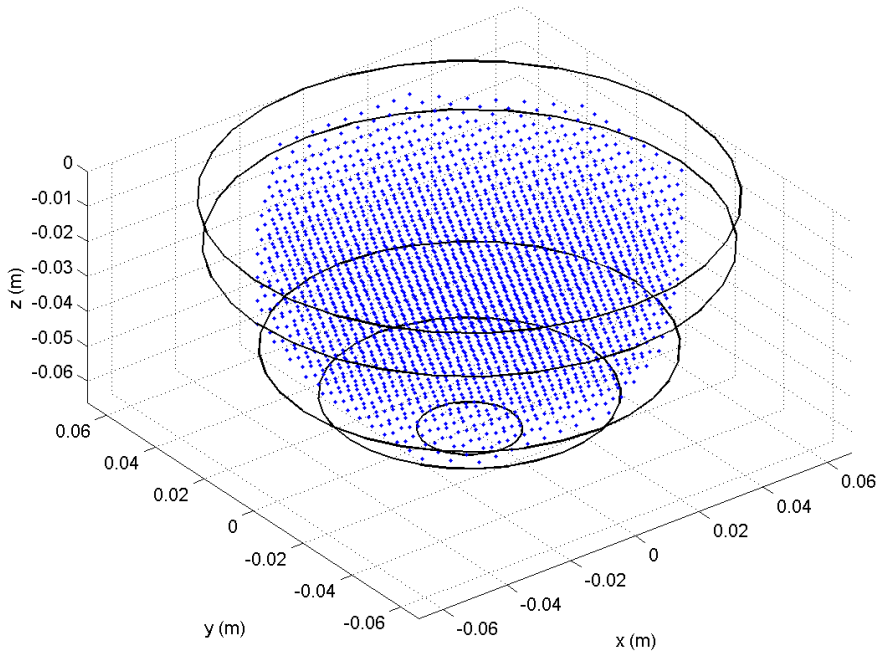

Figure 7.22 Distribution de points de la grille de reconstruction. La géométrie de cette grille s'insère dans celle du problème électrique (presque hémisphérique). Les 2693 points sont distribués régulièrement.

7.2.7 Discussion générale des résultats de ce problème

Les valeurs obtenues pour la position du centre de masse de l'objet estimé sont très bonnes, présentant une erreur absolue de l'ordre du millimètre. La performance est un peu moins bonne pour l'estimation de la taille de l'objet, qui est surévaluée de 41 % pour $f_{seuil} = 1/4$ et de 24 % pour $f_{seuil} = 1/2$. La valeur maximale de la conductivité électrique estimée est bien en-dessous de celle exacte (d'au moins 50 %), mais la taille de l'objet estimé est plus grande que celle exacte. C'est pourquoi la réponse en amplitude est significativement

Tableau 7.4 Quantification de la détection de l'objet

Critère	σ_{exact}		$\sigma_{reconstruit}$	
	$f_{seuil} = 1/4$	$f_{seuil} = 1/2$	$f_{seuil} = 1/4$	$f_{seuil} = 1/2$
Réponse en amplitude	1,000	1,000	0,689	0,689
Centre de masse (x)	-0,01198 m	-0,01198 m	-0,01243 m	-0,01350 m
Centre de masse (y)	-0,00598 m	-0,00601 m	-0,00899 m	-0,00807 m
Centre de masse (z)	-0,01558 m	-0,01500 m	-0,01508 m	-0,01863 m
Résolution	0,332	0,237	0,467	0,293
Déformation de l'objet	0,059	0,074	0,227	0,241
Oscillations	0,00	0,00	2,81	9,00

différente de celle exacte, mais ne la sous-évalue que de 31 %. Quant à la déformation de l'objet, il faut d'abord noter qu'elle est non nulle même pour la distribution exacte, car l'objet est une gaussienne ayant différents d'écarts-types selon les trois dimensions ; elle n'a pas une forme parfaitement sphérique. Pour l'objet estimé, tel qu'observable sur la figure 7.23, plusieurs ramifications sont apparentes autour de la région d'intensité maximale, ce qui détériore l'aspect sphérique cherché. Cependant, l'affichage en surfaces de niveau (figure 7.24) permet de mieux apprécier cet aspect sphérique. La présence importante d'oscillations est aussi gênante pour la détection visuelle de l'objet à partir des images de la figure 7.23, mais l'est moins pour la figure 7.24 car les seules surfaces de niveau affichées sont pour des valeurs de conductivité électrique supérieures à celle du fond.

Ces valeurs obtenues des critères de détection sont de bons indicateurs d'une détection réussie de l'objet, particulièrement si nous nous basons sur la position du centre de masse et sur la résolution, qui renseignent respectivement sur la localisation et la taille de l'objet. De plus, cet objet issu de la reconstruction présente une région interne de forme passablement sphérique, qui était la forme à retrouver. Concernant la valeur de réponse en amplitude beaucoup plus faible que celle exacte, une cause possible est l'arrêt prématuré du processus itératif. Il est toutefois possible que, même à convergence de ce processus, cette réponse en amplitude sous-estime la conductivité électrique exacte. Ce comportement est affecté par les conditions imposées pour la reconstruction, dont l'écart-type des paramètres du modèle, jouant un rôle important sur la régularité du processus de convergence et de la solution obtenue.

Il est important de souligner que plusieurs conditions ayant servi à cette reconstruction sont bien meilleures que celles pouvant être attendues en réalité. Par exemple, aucun bruit n'a été ajouté aux signaux et la modélisation géométrique et acoustique sont parfaites (sauf pour ce qui touche à leur représentation sur les différentes grilles). De plus, ce problème a été fait pour une distribution de conductivité électrique simple ; d'autres distributions plus complexes requièrent des grilles plus raffinées faisant augmenter considérablement la tâche de calculs, ce qui était difficilement réalisable pour ce projet. La résolution de ce problème permet, tout de même, de valider la fonctionnalité de la méthode proposée pour ce cas présentant plusieurs difficultés.

Certains des éléments clés ayant permis cette réalisation sont :

- champ acoustique unipolaire, permettant d'obtenir l'information sur l'ensemble du volume à partir d'un petit nombre d'acquisitions ;
- système multi-électrodes, permettant une meilleure distribution spatiale de la sensibilité du système électrique ;
- méthode d'optimisation utilisant les matrices de covariance, permettant de spécifier

individuellement la variance des paramètres du modèle selon leur position ;
– méthode de résolution numérique adaptée aux géométries concaves, permettant la résolution du problème électrostatique avec une stabilité suffisante.

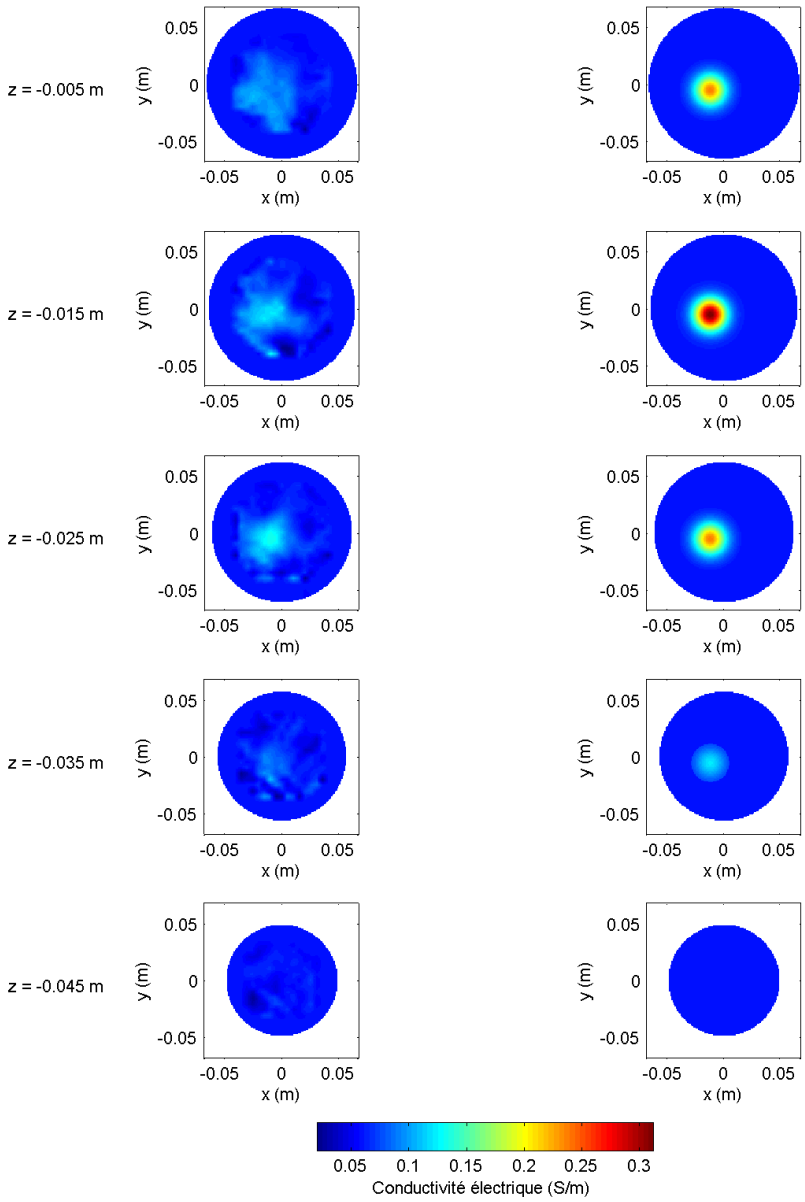

Figure 7.23 Distribution de conductivité électrique reconstruite. La colonne de gauche contient les tranches de la conductivité électrique reconstruite. La colonne de droite contient la distribution de conductivité électrique exacte pour ces mêmes tranches. Chacune des lignes est pour une tranche. L'objet à détecter n'a pas de frontière bien définie sur la reconstruction, mais sa localisation est bonne.

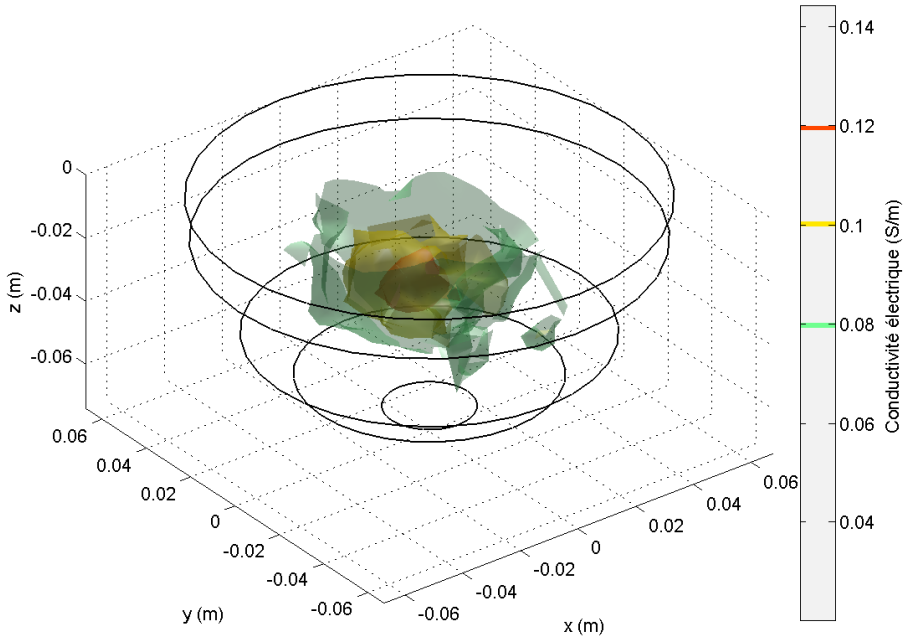

Figure 7.24 Distribution de conductivité électrique reconstruite (surfaces de niveau). La forme à caractère sphérique de l'objet peut être observée particulièrement par les surfaces de niveau en rouge et en jaune.

CHAPITRE 8

CONCLUSION

Cette thèse avait pour objectif principal de contribuer au développement d'une modalité d'imagerie de la conductivité destinée au diagnostic du cancer du sein et basée sur la modulation acoustique de conductivité électrique. Le but visé d'une telle application médicale est d'agir en tant que méthode adjuvante à la mammographie. Le problème général identifié consistait à effectuer une reconstruction de la conductivité électrique à partir d'un ensemble de données d'interaction entre cette conductivité électrique et un champ acoustique affectant globalement la région d'intérêt.

8.1 Synthèse des travaux

Le chapitre de modélisation avait pour but de présenter deux nouveaux modèles de formation d'image. Le premier était basé sur l'utilisation d'une onde acoustique bipolaire focalisée, renseignant sur la sensibilité acousto-électrique à l'endroit de la perturbation acoustique. Pour une perturbation effectuée au foyer acoustique, cette information est locale et la mesure de sensibilité peut être attribuée à la position de perturbation. Un balayage du transducteur permet d'obtenir la distribution de la sensibilité du système électrique. Une reconstruction à partir de ces mesures permet d'estimer la conductivité électrique. L'amplitude des signaux est fortement affectée par l'épaisseur du volume conducteur pour une épaisseur plus grande qu'une demi-longueur d'onde acoustique ; elle diminue rapidement dû à une compensation des effets de modulation. Le second modèle était basé sur une onde acoustique unipolaire non focalisée. Le signal de tension mesuré renseigne sur différentes projections de la sensibilité lors de la propagation de l'onde dans le volume conducteur. Les acquisitions sont réalisées pour diverses orientations du transducteur autour de ce volume. Une reconstruction est essentielle pour estimer la conductivité électrique.

Le chapitre d'expérimentation avait pour but de présenter un nouveau montage permettant l'acquisition de signaux de modulation acoustique de conductivité électrique en vue de l'imagerie de conductivité électrique. La présence de l'effet de Debye, et possiblement de la cavitation, dans les signaux mesurés a été considérée afin de suggérer un protocole d'acquisition permettant la mesure précise de la conductivité électrique. Il a été montré que ce montage comprend les éléments de base permettant de mesurer quantitativement la conductivité électrique de solutions salines. Une démonstration de la dépendance de l'amplitude des

signaux de MACE et de Debye en fonction de la position d'excitation acoustique a également été réalisée afin de caractériser la sensibilité acousto-électrique de la cellule de mesure. Cette mise en œuvre expérimentale a aussi servi à déterminer diverses conditions requises dans la partie de résolution numérique.

Un programme de résolution numérique a été développé à partir d'une technique sans maillage dans le but de résoudre les problèmes direct et inverse exposés. La mise en œuvre de cette résolution, conjointement avec la procédure d'interpolation numérique, a été décrite. La résolution du problème inverse inclut l'estimation de la conductivité électrique à partir des mesures, de l'information sur l'acquisition et des incertitudes sur les données et les variables du modèle. Cette estimation a été réalisée par deux techniques de descente de gradients, soit de gradients conjugués et quasi-Newton.

La résolution d'un problème à géométrie mince a été réalisée pour les deux modèles présentés. La procédure complète de résolution y a été exposée, c'est-à-dire la résolution du problème électrostatique, la représentation du champ acoustique bipolaire et unipolaire, la simulation des signaux de MACE, l'extraction des données objectives pour la reconstruction et la reconstruction. Ces simulations ont permis de montrer la capacité de ces deux modèles à bien estimer une distribution de conductivité électrique inhomogène.

Un problème a été résolu pour une géométrie mince constituée de plusieurs configurations d'électrodes où les mesures sont entachées de bruit. Une analyse de détection, servant à quantifier la qualité d'identification d'un objet, a été réalisée pour différents niveaux de bruit. De plus, cette analyse a été réalisée sur deux systèmes, le premier étant constitué d'une seule configuration d'électrodes et le second possédant quatre configurations d'électrodes. Pour un niveau de bruit donné, le système ayant plusieurs configurations d'électrodes a une meilleure performance de détection de l'objet. Cette différence provient principalement du fait que la sensibilité combinée est mieux distribuée sur l'ensemble du domaine. Cependant, cette amélioration de performance vient avec une charge de calculs significativement plus importante.

Pour terminer, deux problèmes ayant une géométrie profonde ont été résolus avec le modèle d'onde unipolaire. Le premier de ces problèmes a permis d'illustrer la qualité de la reconstruction sur un objet constitué de sphères de différentes tailles et contrastes. L'utilisation des critères de détection a permis de quantifier l'identification de ces sphères pour des régions prédéfinies. En général, les sphères les plus grosses ont bien été identifiées (amplitude, position et taille), mais non les plus petites. Le second de ces problèmes avait pour but d'appliquer la méthode de résolution exposée pour une géométrie adaptée à l'imagerie du sein. Sa taille était de l'ordre de la dizaine de centimètres de côté. Un système composé de quatre configurations électriques a servi pour l'acquisition des signaux et la reconstruction

de la conductivité électrique. La distribution de conductivité à retrouver était composée d'un fond homogène où était superposée une gaussienne plus conductrice et simulant une tumeur. Une amplitude de signal de l'ordre de la dizaine de microvolts (avant amplification) a été obtenue. La reconstruction a permis d'obtenir une estimation de la distribution de conductivité électrique pour laquelle la position de l'objet détecté a bien été identifiée. La taille de cet objet était légèrement surévaluée, tandis que l'amplitude était sous-évaluée. Un affichage en surfaces de niveau a permis d'apprécier l'aspect sphérique de l'objet cherché.

Par les modèles exposés, la mise en œuvre proposée et les exemples de problèmes résolus dans cette thèse, la contribution principale attendue par ces travaux a été atteinte. Cette contribution visait à décrire un modèle et une méthode originale pour déterminer la conductivité électrique 3D d'un tissu de la taille du décimètre en utilisant une interaction acousto-électrique. Cette méthode devait utiliser un champ acoustique physiquement réalisable et être applicable à une géométrie arbitraire. Il a aussi été démontré par ces exemples que la méthode numérique implémentée a une précision et une flexibilité suffisantes pour être appliquée dans son ensemble avec les modèles présentés.

8.2 Limitations de la solution proposée

Diverses limitations doivent être mentionnées à ce moment-ci pour remettre les résultats de ce document dans le contexte de l'imagerie médicale pour une application *in vivo*.

Les résultats expérimentaux ont été obtenus dans des conditions de laboratoire avec une cellule de mesure. Il faut s'attendre à ce que les performances *in vivo* soient de plus faible qualité compte tenu de la forte inhomogénéité des tissus à traiter. De plus, d'autres difficultés devront être envisagées, tel le mouvement de l'objet pendant l'acquisition des signaux.

Les doses acoustique et électrique devront être également être prises en compte pour s'assurer que toutes les normes de sécurité pertinentes soient respectées. Ainsi, la puissance acoustique et les paramètres du courant électrique injectés (amplitude et fréquence) devront être évalués. La cavitation a été identifiée comme un agent important pouvant détériorer la qualité des signaux et compromettre l'extraction de l'information pour l'estimation de la conductivité électrique. Elle doit également être évitée dans un contexte d'imagerie *in vivo* pour réduire les dommages causés aux tissus. L'utilisation d'une onde unipolaire de compression permet de bien éviter cette cavitation, mais les effets biologiques d'une telle onde doivent tout de même être bien évalués (Bailey *et al.*, 1996).

Pour la réalisation d'une modalité d'imagerie pratique, il est important d'évaluer le temps d'acquisition nécessaire pour atteindre la résolution et la précision souhaitée et le temps requis pour accéder aux informations souhaitées. Dans les conditions actuelles, le temps d'acquisition

pour un petit objet était de plusieurs minutes. Cependant, il est possible de s'attendre à une réduction du temps d'acquisition par la mise en place de la méthode unipolaire et d'un système pouvant faire l'acquisition de plusieurs canaux en parallèle. Du côté de la résolution du problème inverse donnant accès à l'information de conductivité électrique, le calcul requis était de plusieurs minutes à plusieurs heures, mais ce dernier problème est moins critique que le premier, car diverses stratégies d'accélération de calcul peuvent être mises en place, tandis que le premier dépend de conditions physiques plus difficilement contrôlables.

8.3 Améliorations futures

Une confrontation des techniques touchant la modélisation et l'approche numérique choisie avec celles bien connues doit être effectuée. Cette comparaison sera nécessaire pour évaluer l'utilité et l'efficacité de ces méthodes. À présent, cette comparaison demeure difficile à réaliser puisque peu d'études ont été publiées sur ce sujet.

Le développement du montage expérimental réalisé dans ce projet a permis de valider la technique de traitement des signaux pour le modèle d'onde bipolaire. D'un autre côté, la résolution du problème inverse a été faite pour obtenir des images de conductivité électrique à partir de signaux simulés tels qu'ils auraient été obtenus. Ceci a été fait pour montrer la faisabilité de l'approche. Toutefois, l'imagerie avec une série de signaux acquis expérimentalement n'a pas été réalisée avec succès dans les présentes conditions. Ceci demeure cependant une tâche d'un grand intérêt pour la validation de l'approche proposée. De plus, la réalisation du montage basé sur la méthode unipolaire et l'imagerie quantitative de conductivité électrique sur un objet de grande taille demeurent à effectuer.

L'application au problème d'imagerie de densité de courant de la méthode d'onde unipolaire décrite dans ce document mérite une évaluation sérieuse pour réaliser une telle imagerie sur un organe large comme le cœur ou le cerveau sans y insérer d'électrodes. D'autres considérations pratiques spécifiques à ces applications devront toutefois y être analysées, telle la disposition de l'organe d'intérêt par rapport aux structures anatomiques environnantes.

RÉFÉRENCES

ADLER, A., ARNOLD, J. H., BAYFORD, R., BORSIC, A., BROWN, B., DIXON, P., FAES, T. J. C., FRERICHS, I., GAGNON, H., GÄRBER, Y., GRYCHTOL, B., HAHN, G., LIONHEART, W. R. B., MALIK, A., PATTERSON, R. P., STOCKS, J., TIZZARD, A., WEILER, N. et WOLF, G. K. (2009). GREIT : a unified approach to 2D linear EIT reconstruction of lung images. *Physiological Measurement*, 30, S35–S55.

ALURU, N. R. (2000). A point collocation method based on reproducing kernel approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 1083–1121.

ALURU, N. R. et LI, G. (2001). Finite cloud method : a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 2373–2410.

AMMARI, H., BONNETIER, E., CAPDEBOSCQ, Y., TANTER, M. et FINK, M. (2008). Electrical impedance tomography by elastic deformation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 68, 1557–1573.

BAILEY, M. R., DALECKI, D., CHILD, S. Z., RAEMAN, C. H., PENNEY, D. P., BLACKSTOCK, D. T. et CARSTENSEN, E. L. (1996). Bioeffects of positive and negative acoustic pressures *in vivo*. *Journal of the Acoustical Society of America*, 100, 3941–3946.

BOGOJAWLENSKY, A. et TAMMANN, G. (1898). Influence of pressure on the electrical conductivity of solutions. *Zeits. Physik. Chemie*, 27, 457–473.

CHEW, L. P. (1989). Constrained Delaunay triangulations. *Algorithmica*, 4, 97–108.

COMITÉ DIRECTEUR DE LA SOCIÉTÉ CANADIENNE DU CANCER (2011). Statistiques canadiennes sur le cancer 2011. Rapport technique, Société canadienne du cancer, Toronto.

FARNY, C. H., HOLT, R. G. et ROY, R. A. (2009). Temporal and spatial detection of HIFU-induced inertial and hot-vapor cavitation with a diagnostic ultrasound system. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 35, 603–615.

FOX, F. E., HERZFELD, K. F. et ROCK, G. D. (1946). The effect of ultrasonic waves on the conductivity of salt solutions. *Physical Review*, 70, 329–339.

FRANKS, F. (1972). *Water, a comprehensive treatise*, vol. 1 ; The Physics and Physical Chemistry of Water. Plenum Press.

GENDRON, M., GUARDO, R. et BERTRAND, M. (2009). Experimental setup for developing acousto-electric interaction imaging. *Engineering in Medicine and Biology Society, 2009. EMBC 2009. Annual International Conference of the IEEE*, 2279–2283.

HOLDER, D. (2005). *Electrical impedance tomography : methods, history and applications*. The Institute of Physics.

HOLT, R. G. et ROY, R. A. (2001). Measurements of bubble-enhanced heating from focused, MHz-frequency ultrasound in a tissue-mimicking material. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 27, 1399–1412.

HOLÉ, S. et LEWINER, J. (1996). Single transducer generation of unipolar pressure waves. *Applied Physics Letters*, 69, 3167–3169.

HOLÉ, S. et LEWINER, J. (1998). Design and optimization of unipolar pressure pulse generators with a single transducer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104, 2790–2797.

HUEBNER, K. H., DEWHIRST, D. L., SMITH, D. E. et BYROM, T. G. (2001). *The finite element method for engineers*. Wiley, quatrième édition.

JENSEN, J. A. (1991). A model for the propagation and scattering of ultrasound in tissue. *Journal of the Acoustical Society of America*, 89, 182–190.

JENSEN, J. A. et SVENDSEN, N. B. (1992). Calculation of pressure fields from arbitrarily shaped, apodized, and excited ultrasound transducers. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 39, 262–267.

JIN, X., LI, G. et ALURU, N. R. (2001). On the equivalence between least-squares and kernel approximations in meshless methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2, 447–462.

JIN, X., LI, G. et ALURU, N. R. (2004). Positivity conditions in meshless collocation methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 1171–1202.

JIN, X., LI, G. et ALURU, N. R. (2005). New approximations and collocation schemes in the finite cloud method. *Computer & Structures*, 83, 1366–1385.

JOSSINET, J. (1996). Variability of impedivity in normal and pathological breast tissue. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 34, 346–350.

JOSSINET, J., LAVANDIER, B. et CATHIGNOL, D. (1998). Phenomenology of acousto-electric interaction signals in aqueous solutions of electrolytes. *Ultrasonics*, 36, 607–613.

JOSSINET, J., LAVANDIER, B. et CATHIGNOL, D. (1999). Impedance modulation by pulsed ultrasound. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 873, 396–407.

KHOSRAVIFARD, A. et HEMATIYAN, M. R. (2010). A new method for meshless integration in 2D and 3D Galerkin meshfree methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 30–40.

KONESHAN, S., LYNDEN-BELL, R. M. et RASAIAH, J. C. (1998). Friction coefficients of ions in aqueous solution at 25 °C. *Journal of the American Chemical Society*, 120, 12041–12050.

KUCHMENT, P. et KUNYANSKY, L. (2011). 2D and 3D reconstructions in acousto-electric tomography. *Inverse Problems*, 27, 055013 (21 pp.).

KUHL, C., WEIGEL, S., SCHRADING, S., ARAND, B., BIELING, H., KÖNIG, R., TOMBACH, B., LEUTNER, C., RIEBER-BRAMBS, A., NORDHOFF, D., HEINDEL, W., REISER, M. et SCHILD, H. H. (2010). Prospective multicenter cohort study to refine management recommendations for women at elevated familial risk of breast cancer : The EVA trial. *Journal of Clinical Oncology*, 28, 1450–1457.

KÖRBER, F. (1909). Influence of pressure on the electrolytic conductivity of solutions. *Zeits. Physik. Chemie*, 67, 212–248.

LAM, K. Y., LI, H., YEW, Y. K. et NG, T. Y. (2006). Development of the meshless Hermite-Cloud method for structural mechanics applications. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48, 440–450.

LAVANDIER, B., JOSSINET, J. et CATHIGNOL, D. (2000a). Experimental measurement of the acousto-electric interaction signal in saline solution. *Ultrasonics*, 38, 929–936.

LAVANDIER, B., JOSSINET, J. et CATHIGNOL, D. (2000b). Quantitative assessment of ultrasound-induced resistance change in saline solution. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 38, 150–155.

LEE, C. H., DERSHAW, D. D., KOPANS, D., EVANS, P., MONSEES, B., MONTICCIOLO, D., BRENNER, R. J., BASSETT, L., BERG, W., FEIG, S., HENDRICK, E., MENDELSON, E., D'ORSI, C., SICKLES, E. et BURHENNE, L. W. (2010). Breast cancer screening with imaging : Recommendations from the Society of Breast Imaging and the ACR on the use of mammography, breast MRI, breast ultrasound, and other technologies for the detection of clinically occult breast cancer. *Journal of the American College of Radiology*, 7, 18–27.

LI, H., NG, T. Y., CHENG, J. Q. et LAM, K. Y. (2003). Hermite-cloud : a novel true meshless method. *Computational Mechanics*, 33, 30–41.

LIONHEART, W. R. B. (2004). EIT reconstruction algorithms : pitfalls, challenges and recent developments. *Physiological Measurement*, 25, 125–142.

LIU, G. R. (2003). *Mesh free methods : moving beyond the finite element method*. CRC Press.

LIU, G. R. et GU, Y. T. (2003). A meshfree method : meshfree weak-strong (mws) form method, for 2-d solids. *Computational Mechanics*, 33, 2–14.

LIU, G. R. et GU, Y. T. (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming.* Springer.

LIU, G. R. et TU, Z. H. (2002). An adaptive procedure based on background cells for meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 1923–1943.

LIU, W. K., CHEN, Y., URAS, R. A. et CHANG, C. T. (1996). Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 91–157.

LÖHNER, R. et OÑATE, E. (1998). An advancing front point generation technique. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 14, 1097–1108.

MALMIVUO, J. et PLONSEY, R. (1995). *Bioelectromagnetism.* Oxford University Press.

MASON, T. J. et LORIMER, J. P. (2002). *Applied sonochemistry : the uses of power ultrasound in chemistry and processing.* Wiley.

NATIONAL CANCER INSTITUTE (2012). Breast cancer screening modalities. Consulté le 29 mai 2012, Tiré de http ://www.cancer.gov/cancertopics/pdq/screening/breast/health-professional/page4.

OBLONSEK, C. et GUID, N. (1998). A fast surface-based procedure for object reconstruction from 3d scattered points. *Computer Vision and Image Understanding*, 69, 185–195.

O'BRIEN, R. W., GARSIDE, P. et HUNTER, R. J. (1994). The electroacoustic reciprocal relation. *Langmuir*, 10, 931–935.

OLAFSSON, R., WITTE, R., HUANG, S.-W. et O'DONNELL, M. (2008). Ultrasound current source density imaging. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55, 1840–1848.

ORGAN, D., FLEMING, M., TERRY, T. et BELYTSCHKO, T. (1996). Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computational Mechanics*, 18, 225–235.

ORTEGA, E., OÑATE, E. et IDELSOHN, S. (2007). An improved finite point method for tridimensional potential flows. *Computational Mechanics*, 40, 949–963.

OÑATE, E., IDELSOHN, S., ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. et SACCO, C. (1996). A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 315–346.

OÑATE, E., PERAZZO, F. et MIQUEL, J. (2001). A finite point method for elasticity problems. *Computer & Structures*, 79, 2151–2163.

PENTTINEN, A. et LUUKKALA, M. (1976). The impulse response and pressure nearfield of a curved ultrasonic radiator. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 9, 1547–1557.

POLAK, E. et RIBIÈRE, G. (1969). Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 16, 35–43.

POLYDORIDES, N. et LIONHEART, W. R. B. (2002). A Matlab toolkit for three-dimensional electrical impedance tomography : a contribution to the Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software project. *Measurement Science and Technology*, 13, 1871–1883.

ROSENTHAL, P. et LINSEN, L. (2006). Direct isosurface extraction from scattered volume data. *Eurographics/IEEE-VGTC Symposium on Visualization*. The Eurographics Association, 99–106.

ROTH, B. J. (2006). The electrical conductivity of tissues. J. D. Bronzino, éditeur, *Biomedical engineering fundamentals*, CRC Press, chapitre 21. Troisième édition, 21–1–21–13.

SFERRUZZA, J.-P., BIRER, A., THEILLÈRE, Y. et CATHIGNOL, D. (1999). Generation of high power unipolar pulse with a piezocomposite transducer. *Ultrasonics Symposium, 1999. Proceedings. 1999 IEEE*. vol. 2, 1125–1128.

SHEWCHUK, J. R. (2000). Sweep algorithms for constructing higher-dimensional constrained Delaunay triangulations. *Proceedings of the Annual Symposium on Computational Geometry*. ACM, New York, NY, United States, 350–359.

SUROWIEC, A. J., STUCHLY, S. S., BARR, J. R. et SWARUP, A. (1988). Dielectric properties of breast carcinoma and the surrounding tissues. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 35, 257–263.

TARANTOLA, A. (1987). *Inverse Problem Theory*. Elsevier.

THE ROYAL SOCIETY OF CHEMISTRY (1899). General and physical chemistry. *J. Chem. Soc., Abstr.*, 76, B137–B148.

THE ROYAL SOCIETY OF CHEMISTRY (1909). General and physical chemistry. *J. Chem. Soc., Abstr.*, 96, B713–B725.

THOMAS, C. R., FARNY, C. H., COUSSIOS, C. C., ROY, R. A. et HOLT, R. G. (2005). Dynamics and control of cavitation during high-intensity focused ultrasound application. *Acoustics Research Letters Online*, 6, 182–187.

XU, Z., RAGHAVAN, M., HALL, T. L., CHANG, C.-W., MYCEK, M.-A., FOWLKES, J. B. et CAIN, C. A. (2007). High speed imaging of bubble clouds generated in pulsed ultrasound cavitational therapy - histotripsy. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 54, 2091–2101.

YANG, R., LI, X., LIU, J. et HE, B. (2011). 3d current source density imaging based on the acoustoelectric effect : a simulation study using unipolar pulses. *Physics in Medicine and Biology*, 56, 3825–3842.

YEAGER, E., BUGOSH, J., HOVORKA, F. et MCCARTHY, J. (1949). The application of ultrasonic waves to the study of electrolytic solutions. *Journal of Chemical Physics*, 17, 411–415.

YOSHIZAWA, S., IKEDA, T., ITO, A., OTA, R., TAKAGI, S. et MATSUMOTO, Y. (2009). High intensity focused ultrasound lithotripsy with cavitating microbubbles. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 47, 851–860.

ZANA, R. et YEAGER, E. (1967). Ultrasonic vibration potentials and their use in the determination of ionic partial molal volumes. *Journal of Physical Chemistry*, 71, 521–536.

ZHANG, H. et WANG, L. V. (2004). Acousto-electric tomography. *Photons Plus Ultrasound : Imaging and Sensing*. SPIE – International Society for Optical Engineering, vol. 5320, 145–149.

ZHDANOV, M. S. (2002). *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*. Elsevier.

ANNEXE A

Aspects numériques tirés de la littérature

Cette annexe traite de la méthode numérique sans maillage utilisée dans cette thèse pour résoudre les problèmes direct et inverse de l'imagerie par MACE.

Il existe plusieurs techniques numériques pour la résolution d'équations différentielles soumises à des conditions frontières. Les performances varient d'une technique à l'autre, selon le type de problème et les conditions. De plus, nous retrouvons souvent des variantes d'une même technique développées dans le but d'améliorer la technique de base. Souvent, ces variantes fonctionnent bien seulement pour un ensemble de cas spécifiques. La méthode devra alors être adaptée au contexte où elle est utilisée.

En général, l'intérêt principal des méthodes sans maillage, par rapport à celles requérant un maillage, réside dans l'élimination de cette étape dans le processus de résolution du problème (Jin *et al.*, 2005). Le calcul d'un maillage doit produire un ensemble d'éléments respectant certaines conditions pour permettre d'atteindre une bonne solution. Il constitue souvent un facteur limitant d'une méthode numérique (Huebner *et al.*, 2001). La tâche est particulièrement exigeante pour les problèmes nécessitant une modification du maillage pour compenser la distorsion des éléments causée, par exemple, par une forte déformation de la géométrie ou par des frontières mobiles. D'autre part, les méthodes sans maillage comme « Finite-Cloud » sont bien adaptées aux problèmes multiphysiques et à ceux dont la solution varie sur plusieurs échelles (Aluru et Li, 2001). Dans le cas du présent projet, le problème à résoudre s'effectue sur une géométrie fixe relativement simple, mais où le gradient de potentiel électrique peut être très grand à proximité des électrodes.

L'argument principal du choix d'une méthode sans maillage pour ce projet réside dans la simplicité de la mise en œuvre de la méthode pour l'ensemble du problème.

Il est clair que la validité des résultats de simulation et la reconstruction à effectuer à partir de résultats expérimentaux dépendent de la stabilité et de la précision de la méthode choisie. Les méthodes mieux connues comme celle des éléments finis utilisent une formulation faible et offrent généralement une meilleure stabilité, mais cet aspect peut être contrôlé dans une certaine mesure par différentes stratégies comme celles présentées à la section A.5.

Dans cette annexe, l'accent sera mis sur les éléments de techniques dites « meshless », c'est-à-dire celles ne requérant pas de maillage. En premier lieu, la méthode Finite-Cloud proposée dans un article de Aluru et Li (2001) est décrite à la section A.1. Des améliorations suggérées par différents auteurs sont présentées aux sections A.2 à A.5. D'autres éléments

d'intérêt, non présentés ici, peuvent être trouvés dans les articles de Liu (2003), Liu et Gu (2005) et Liu *et al.* (1996). La génération de points sur un domaine arbitraire est couverte à la section A.6. Une formulation pour l'intégration numérique sur un domaine arbitraire est présentée à la section A.7. Enfin, les sections A.8 et A.9 couvrent la résolution d'équations différentielles non linéaires.

A.1 Méthode Finite-Cloud

Le texte de cette section reprend essentiellement le contenu de l'article de Aluru et Li (2001). La notation de l'article original a été conservée autant que cela était possible pour faciliter la comparaison des documents. Cependant, quelques aspects de cette notation ont été modifiés par souci d'uniformité avec le reste de la thèse. L'écriture pour un problème bidimensionnel sera employée pour alléger le texte, mais l'extension au cas tridimensionnel est directe.

La description de cette technique est divisée en deux parties. La première est consacrée à la création des fonctions d'interpolation, tandis que la seconde explique la technique de discrétisation permettant de résoudre un problème aux conditions frontières.

A.1.1 Fonctions d'interpolation

La méthode Finite-Cloud utilise une technique connue sous le nom de « Fixed Reproducing Kernel » pour la création des fonctions d'interpolation. Avec cette formulation, l'approximation d'une fonction $\hat{u}(x, y)$ dans un domaine Ω donné peut s'écrire :

$$u(x, y) = \int_{\Omega} \mathscr{C}(x, y, s, t)\varphi(x_K, y_K, s - x_K, t - y_K)\hat{u}(s, t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{A.1}$$

où $\hat{u}(x, y)$ est la fonction exacte que nous voulons approximer par $u(x, y)$, $\mathscr{C}$ est une fonction de correction et φ est la fonction noyau (« kernel »). Pour l'instant, considérons x_K et y_K comme des constantes qui doivent être déterminées pour chaque position (x, y). En général, nous aurons $(x_K, y_K) = (x, y), \forall x, y$. Par une approche de collocation de point, ces constantes x_K et y_K seront indépendantes de x et y, et la dérivation de $\varphi(x_K, y_K, s - x_K, t - y_K)$ par rapport à x ou y sera nulle. Ceci sera discuté plus loin.

La fonction de correction $\mathscr{C}$ s'écrit :

$$\mathscr{C}(x, y, s, t) = \boldsymbol{p}^T(s, t)\boldsymbol{c}(x, y) \tag{A.2}$$

où $\boldsymbol{p}(s, t) = [p_1, \ldots, p_m]^T$ est un vecteur $m \times 1$ représentant une base de fonctions, tandis que $\boldsymbol{c}(x, y) = [c_1, \ldots, c_m]^T$ est un vecteur $m \times 1$ représentant un ensemble de coefficients de cor-

rection. Le choix des fonctions de base pour $\boldsymbol{p}(s,t)$ est arbitraire, mais constitue généralement une base complète. Par exemple, une base complète linéaire en 2 dimensions est :

$$\boldsymbol{p}(s,t) = [1, s, t], \quad m = 3 \tag{A.3}$$

et une base complète quadratique en 2 dimensions est :

$$\boldsymbol{p}(s,t) = [1, s, t, s^2, st, t^2], \quad m = 6 \tag{A.4}$$

Les coefficients de correction c_i peuvent être déterminés en imposant les conditions de reproductibilité :

$$\int_\Omega \boldsymbol{p}^T(s,t)\boldsymbol{c}(x,y)\varphi(x_K, y_K, s - x_K, t - y_K)p_i(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = p_i(x,y), \quad i = 1, \ldots, m \tag{A.5}$$

L'approximation discrétisée de cette dernière équation est :

$$\sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} \boldsymbol{p}^T(x_I, y_I)\boldsymbol{c}(x,y)\varphi(x_K, y_K, x_I - x_K, y_I - y_K)p_i(x_I, y_I)\Delta V_I = p_i(x,y),\ i = 1, \ldots, m \tag{A.6}$$

où NP est le nombre de points sur le domaine Ω et ΔV_I est la taille de la région associée au point I.

Sous forme matricielle, cette équation peut être écrite :

$$\mathbf{M}\boldsymbol{c}(x,y) = \boldsymbol{p}(x,y) \tag{A.7}$$

où $\mathbf{M}$ est la matrice $m \times m$ des moments M_{ij} :

$$M_{ij} = \int_\Omega p_j(s,t)\varphi(x_K, y_K, s - x_K, t - y_K)p_i(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \quad i,j = 1, \ldots, m \tag{A.8}$$

Sous forme discrétisée, cette équation s'écrit :

$$M_{ij} = \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} p_j(x_I, y_I)\varphi(x_K, y_K, x_I - x_K, y_I - y_K)p_i(x_I, y_I)\Delta V_I \tag{A.9}$$

Les coefficients de correction peuvent être obtenus par inversion du système linéaire A.7 :

$$\boldsymbol{c}(x,y) = \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{p}(x,y) \tag{A.10}$$

En substituant A.10 dans A.2 avec A.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_\Omega \boldsymbol{p}^T(s,t)\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{p}(x,y)\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K)\hat{u}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{p}^T(x,y)(\mathbf{M}^{-1})^T\boldsymbol{p}(s,t)\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K)\hat{u}(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{A.11}$$

où la dernière équation est obtenue en transposant le scalaire $\boldsymbol{p}^T(s,t)\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{p}(x,y)$.

Sous forme discrétisée, cette équation s'écrit :

$$u(x,y) = \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} N_I(x,y)\hat{u}_I \tag{A.12}$$

où $\hat{u}_I$ est le poids nodal attribué au point I et N_I est la fonction d'interpolation définie par :

$$N_I(x,y) = \boldsymbol{p}^T(x,y)(\mathbf{M}^{-1})^T\boldsymbol{p}(x_I,y_I)\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)\Delta V_I \tag{A.13}$$

Notons qu'en fixant toutes les valeurs ΔV_I à 1, nous retrouvons une écriture équivalente à celle des moindres carrés (Oñate *et al.*, 1996). Cette opération équivaut à inclure les valeurs ΔV_I dans la fonction de correction $\mathscr{C}$ qui devra être calculée pour satisfaire les conditions de reproductibilité (Aluru, 2000). Ainsi, il n'est pas nécessaire de calculer la taille de la région associée à chaque point.

Revenons maintenant à la fonction noyau $\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K)$. Bien que le choix de cette fonction soit arbitraire, certaines propriétés sont recherchées afin d'assurer une continuité des fonctions d'interpolation. Ces propriétés sont les suivantes (Liu et Gu, 2005) :

- $\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K) > 0$ à l'intérieur de son support ;
- $\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K) = 0$ à l'extérieur de son support ;
- $\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K)$ a une décroissante monotone depuis le point d'intérêt (x_K,y_K) ;
- $\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K)$ est suffisamment lisse, particulièrement près des bordures de son support.

Les propriétés de positivité à l'intérieur du support et de nullité à l'extérieur de celui-ci donnent à la méthode son caractère local. Ainsi, l'interpolation pour un point (x,y) dépend des points à proximité. La troisième condition permet de donner davantage d'importance aux points les plus près. La quatrième condition permet une inclusion progressive des points situés près des frontières du support lorsque différents points (x,y) sont choisis.

Les formes généralement considérées pour cette fonction noyau sont les gaussiennes, les fonctions en inverse de la distance et les splines. Certains articles utilisent une fonction noyau

de forme radiale. Pour ce projet, nous utiliserons la forme suivante :

$$\varphi(x_K, y_K, x_I - x_K, y_I - y_K) = \frac{1}{a_x(x_K, y_K)} w\left(\frac{x_I - x_K}{a_x(x_K, y_K)}\right) \frac{1}{a_y(x_K, y_K)} w\left(\frac{y_I - y_K}{a_y(x_K, y_K)}\right) \tag{A.14}$$

où a_x et a_y sont des fonctions déterminant l'agrandissement de la fonction de base w. Pour une fonction noyau φ choisie telle que la seconde condition est respectée, ces facteurs d'agrandissement auront pour effet de déterminer quels points seront inclus dans le support. Ce choix est d'une grande importance pour s'assurer que la matrice de moments ait un bon conditionnement. La grandeur du support affecte également la résolution spatiale de la solution. Ainsi, il est pertinent de chercher à modifier la taille de ce support selon la densité de points dans la région où le calcul doit être effectué. Les régions où une densité de points est plus grande pourront utiliser un support plus étroit, offrant une meilleure résolution, tandis que les régions ayant une plus faible densité de points devront utiliser un support plus étendu, ce qui produira une résolution plus faible. Notons que ces facteurs d'agrandissement peuvent être déterminés individuellement pour chaque position (x_K, y_K), mais la régularité des fonctions d'agrandissement $a_x(x_K, y_K)$ et $a_y(x_K, y_K)$ affectera aussi la régularité des fonctions d'interpolation.

La fonction w qui sera utilisée est définie par une spline cubique :

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{1}{6}(x+2)^3, & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{2}{3} - x^2\left(1 + \frac{x}{2}\right), & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{2}{3} - x^2\left(1 - \frac{x}{2}\right), & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{6}(x-2)^3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & 2 \leq x \end{cases} \tag{A.15}$$

Il est important à ce moment-ci d'expliquer le choix des valeurs de x_K et y_K. La technique de collocation de point qui sera utilisée plus loin requiert que nous spécifiions sur quels points une certaine équation devra être respectée. Puisque nous aurons à résoudre chaque équation pour un seul point à la fois, il nous est possible de spécifier quel sera le couple (x_K, y_K) pour ce point particulier. Ainsi, nous pouvons considérer que nous déterminons un ensemble de constantes (x_K, y_K) pour chaque équation, mais cette équation ne sera résolue qu'à un seul endroit.

Selon ce formalisme, la dérivée des fonctions d'interpolation s'écrit directement à partir

de A.13 :

$$\frac{\partial^{\alpha_x+\alpha_y} N_I}{\partial x^{\alpha_x}\partial y^{\alpha_y}}(x,y) = \frac{\partial^{\alpha_x+\alpha_y}\boldsymbol{p}^T}{\partial x^{\alpha_x}\partial y^{\alpha_y}}(x,y)(\mathbf{M}^{-1})^T\boldsymbol{p}(x_I,y_I)\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)\Delta V_I \quad \text{(A.16)}$$

Ainsi, par exemple, la seconde dérivée selon x s'écrit :

$$\frac{\partial^2 N_I}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2\boldsymbol{p}^T}{\partial x^2}(x,y)(\mathbf{M}^{-1})^T\boldsymbol{p}(x_I,y_I)\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)\Delta V_I \quad \text{(A.17)}$$

Cette écriture très simple, et nécessitant relativement peu de calculs, découle de ce que x_K et y_K sont considérés constants.

Il est intéressant de noter que cette formulation peut être utilisée en tant que technique d'interpolation. Elle peut servir, par exemple, à trouver une valeur à une coordonnée (x_a, y_a) à partir de valeurs connues et distribuées sur les points (x_I, y_I) dans la région entourant cette coordonnée. Cette propriété est employée dans la section 4.1.

A.1.2 Discrétisation

Pour la résolution d'un problème aux conditions frontières, les équations à résoudre prennent habituellement la forme suivante :

$$\mathscr{L}\hat{u} = f \quad \text{sur } \Omega \quad \text{(A.18)}$$

$$\hat{u} = g \quad \text{sur } \Gamma_g \quad \text{(A.19)}$$

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial n} = h \quad \text{sur } \Gamma_h \quad \text{(A.20)}$$

où $\mathscr{L}$ est l'opérateur différentiel sur l'intérieur du domaine Ω, $\hat{u}$ est la fonction inconnue dont la solution est cherchée, f est le terme de source, g est la condition de Dirichlet appliquée aux points de la frontière Γ_g et h est la condition de Neumann appliquée aux points de la frontière Γ_h.

La résolution numérique de ce système se fait en obtenant une solution approximative u pour un ensemble de points sur le domaine d'intérêt. Cette solution u s'approchera d'autant de la solution exacte $\hat{u}$ que la distribution de points tend vers la continuité. La solution approximative devra alors satisfaire le système d'équations suivant :

$$\mathscr{L}u \approx f \quad \text{sur } \Omega \quad \text{(A.21)}$$

$$u \approx g \quad \text{sur } \Gamma_g \quad \text{(A.22)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx h \quad \text{sur } \Gamma_h \quad \text{(A.23)}$$

Avec une distribution de points comportant N_r points à l'intérieur du domaine Ω (non soumis à une condition de frontière), N_d points soumis à une condition de Dirichlet sur la frontière Γ_g et N_n points soumis à une condition de Neumann sur la frontière Γ_h, nous avons $\mathrm{NP} = N_r + N_d + N_n$. L'ensemble des équations à satisfaire devient :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}u(x_R, y_R) &= f(x_R, y_R), \quad R = 1, \ldots, N_r && \text{(A.24)} \\ u(x_D, y_D) &= g(x_D, y_D), \quad D = 1, \ldots, N_d && \text{(A.25)} \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x_N, y_N) &= h(x_N, y_N), \quad N = 1, \ldots, N_n && \text{(A.26)} \end{aligned}$$

En utilisant la forme discrétisée A.12, nous pouvons écrire ce système sous la forme matricielle :

$$\mathbf{K}\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{b} \tag{A.27}$$

où $\mathbf{K}$ est une matrice de taille NP $\times$ NP dont les valeurs sont connues et $\hat{\boldsymbol{u}}$ est le vecteur colonne d'inconnues de longueur NP. Le vecteur colonne $\boldsymbol{b}$, de longueur NP, contient les termes sources et les conditions de Dirichlet et de Neumann. Les éléments de la matrice $\mathbf{K}$ sont calculés à partir des équations A.24 à A.26 :

$$\begin{aligned} K_{RI} &= \mathscr{L}N_I(x_R, y_R), \quad I = 1, \ldots, \mathrm{NP}, \quad R = 1, \ldots, N_r && \text{(A.28)} \\ K_{DI} &= N_I(x_D, y_D), \quad I = 1, \ldots, \mathrm{NP}, \quad D = 1, \ldots, N_d && \text{(A.29)} \\ K_{NI} &= \frac{\partial N_I}{\partial n}(x_N, y_N), \quad I = 1, \ldots, \mathrm{NP}, \quad N = 1, \ldots, N_n && \text{(A.30)} \end{aligned}$$

La solution du problème A.27 donne le vecteur d'inconnues $\hat{\boldsymbol{u}}$, c'est-à-dire les valeurs $\hat{u}_I$ pour $I = 1, \ldots, \mathrm{NP}$. La solution approximée est alors obtenue par :

$$u(x_J, y_J) = \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} N_I(x_J, y_J)\hat{u}_I, \quad J = 1, \ldots, \mathrm{NP} \tag{A.31}$$

Les dérivées de la fonction approximée sont obtenues directement à partir des dérivées des fonctions d'interpolation calculées précédemment :

$$\frac{\partial^{\alpha_x+\alpha_y} u}{\partial x^{\alpha_x} \partial y^{\alpha_y}}(x_J, y_J) = \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} \frac{\partial^{\alpha_x+\alpha_y} N_I}{\partial x^{\alpha_x} \partial y^{\alpha_y}}(x_J, y_J)\hat{u}_I, \quad J = 1, \ldots, \mathrm{NP} \tag{A.32}$$

A.2 Translation des fonctions de base

Une amélioration proposée par Jin *et al.* (2001) pour accroître la stabilité numérique des problèmes comportant un grand nombre de points ou utilisant des fonctions de base d'ordre élevé est d'écrire la fonction de correction $\mathscr{C}$ de l'équation A.2 sous la forme :

$$\mathscr{C}(x, y, x_K - s, y_K - t) = \boldsymbol{p}^T(x_K - s, y_K - t)\boldsymbol{c}(x, y) \tag{A.33}$$

Par conséquent, les expressions de la matrice des moments et des fonctions d'interpolation (équations A.9 et A.13) deviennent :

$$M_{ij}^S = \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} p_j(x_K - x_I, y_K - y_I)\varphi(x_K, y_K, x_I - x_K, y_I - y_K)p_i(x_I, y_I)\Delta V_I \tag{A.34}$$

$$N_I^S(x, y) = \boldsymbol{p}^T(x, y)\left((\mathbf{M}^S)^{-1}\right)^T \boldsymbol{p}(x_K - x_I, y_K - y_I)\varphi(x_K, y_K, x_I - x_K, y_I - y_K)\Delta V_I \tag{A.35}$$

Cette formulation accroît la stabilité de la solution numérique, car la matrice des moments $\mathbf{M}^S$ a un meilleur conditionnement qu'avec la formulation précédente.

A.3 Dilatation des fonctions de base

En plus de la translation des fonctions de base, il est important d'inclure un facteur de dilatation à ces fonctions pour améliorer le conditionnement de la matrice de moments (Ortega *et al.*, 2007). Ceci est d'une grande importance lorsque l'ordre de ces fonctions est élevé et que le nombre de fonctions de base augmente. Nous pouvons observer ceci par la forme que prend la matrice des moments tirée de l'équation A.9. Par exemple, pour une base complète quadratique en 2 dimensions telle qu'écrite à l'équation A.4 et en excluant la translation des fonctions de base et fixant $\Delta V_I = 1$, la matrice de moments prend la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sum\varphi_I & \sum\varphi_I x_I & \sum\varphi_I y_I & \sum\varphi_I x_I^2 & \sum\varphi_I x_I y_I & \sum\varphi_I y_I^2 \\ \sum\varphi_I x_I & \sum\varphi_I x_I^2 & \sum\varphi_I x_I y_I & \sum\varphi_I x_I^3 & \sum\varphi_I x_I^2 y_I & \sum\varphi_I x_I y_I^2 \\ \sum\varphi_I y_I & \sum\varphi_I x_I y_I & \sum\varphi_I y_I^2 & \sum\varphi_I x_I^2 y_I & \sum\varphi_I x_I y_I^2 & \sum\varphi_I y_I^3 \\ \sum\varphi_I x_I^2 & \sum\varphi_I x_I^3 & \sum\varphi_I x_I^2 y_I & \sum\varphi_I x_I^4 & \sum\varphi_I x_I^3 y_I & \sum\varphi_I x_I^2 y_I^2 \\ \sum\varphi_I x_I y_I & \sum\varphi_I x_I^2 y_I & \sum\varphi_I x_I y_I^2 & \sum\varphi_I x_I^3 y_I & \sum\varphi_I x_I^2 y_I^2 & \sum\varphi_I x_I y_I^3 \\ \sum\varphi_I y_I^2 & \sum\varphi_I x_I y_I^2 & \sum\varphi_I y_I^3 & \sum\varphi_I x_I^2 y_I^2 & \sum\varphi_I x_I y_I^3 & \sum\varphi_I y_I^4 \end{bmatrix} \tag{A.36}$$

où $\varphi_I = \varphi(x_K, y_K, x_I - x_K, y_I - y_K)$. Avec des valeurs $x_I, y_I \ll 1$ ou $x_I, y_I \gg 1$, cette matrice contiendra des valeurs de différents ordres de grandeurs, ce qui fera augmenter considéra-

blement son conditionnement et rendra plus instable son inversion numérique. Ainsi, il est suggéré de recourir à des facteurs de dilatation λ_s et λ_t sur les fonctions de base de la manière suivante :

$$\boldsymbol{p}\left(\frac{s}{\lambda_s},\frac{t}{\lambda_t}\right)=\left[1,\frac{s}{\lambda_s},\frac{t}{\lambda_t},\left(\frac{s}{\lambda_s}\right)^2,\frac{s}{\lambda_s}\frac{t}{\lambda_t},\left(\frac{t}{\lambda_t}\right)^2\right],\quad m=6 \tag{A.37}$$

et de choisir ces facteurs (λ_s,λ_t) tels que s/λ_s et t/λ_t soient près de 1.

A.4 Renforcement de la condition de Kronecker

Il a été observé que les méthodes de collocation de point pour la discrétisation des équations différentielles deviennent moins stables pour des distributions de points irrégulières. Pour éviter ces instabilités, certaines conditions de positivité à appliquer aux fonctions d'interpolation ont été suggérées (Jin *et al.*, 2004). Dans le contexte présenté ci-dessus, la première de ces conditions revient à obtenir des fonctions d'interpolation ayant la propriété d'un delta de Kronecker, c'est-à-dire :

$$N_I(x_J,y_J)=\begin{cases}1, & I=J\\ 0, & I\neq J\end{cases} \tag{A.38}$$

Pour respecter cette condition, une approche proposée par Jin *et al.* (2005) et basée sur le formalisme présenté plus haut est décrite ici.

L'idée de base est de réécrire l'équation A.1 sous la forme suivante :

$$u(x,y)-\hat{u}(x_K,y_K)=\int_\Omega \mathscr{C}(x,y,s,t)\varphi(x_K,y_K,s-x_K,t-y_K)[\hat{u}(s,t)-\hat{u}(x_K,y_K)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \tag{A.39}$$

L'expression A.6 exprimant les équations de consistance s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{I=1}^{\mathrm{NP}}\boldsymbol{p}^T(x_I,y_I)\boldsymbol{c}(x,y)\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)[p_i(x_I,y_I)-p_i(x_K,y_K)]\Delta V_I=\\ p_i(x,y)-p_i(x_K,y_K),\quad i=1,\ldots,m\end{aligned} \tag{A.40}$$

L'équation A.7 devient alors :

$$\mathbf{M}\boldsymbol{c}(x,y)=\boldsymbol{p}(x,y)-\boldsymbol{p}(x_K,y_K) \tag{A.41}$$

où la matrice des moments $\mathbf{M}$ est (comparer avec A.9) :

$$M_{ij}=\sum_{I=1}^{\mathrm{NP}}p_j(x_I,y_I)\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)[p_i(x_I,y_I)-p_i(x_K,y_K)]\Delta V_I \tag{A.42}$$

En utilisant une base de fonctions telle qu'exprimée en A.4 où $p_1(s,t) = 1$, nous avons :

$$p_1(x_I, y_I) - p_1(x_K, y_K) = 1 - 1 = 0, \quad \forall x_I, y_I, x_K, y_K \tag{A.43}$$

et

$$p_1(x, y) - p_1(x_K, y_K) = 1 - 1 = 0, \quad \forall x, y, x_K, y_K \tag{A.44}$$

Ainsi, nous avons :

$$M_{1j} = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, m \tag{A.45}$$

et la première équation de consistance

$$\sum_{j=1}^{m} M_{1j} c_j(x, y) = 0 \tag{A.46}$$

est satisfaite pour $\boldsymbol{c}(x, y)$ arbitraire. La première équation étant triviale, le système contient une inconnue de plus que d'équations. Afin de retrouver un système ayant autant d'équations que d'inconnues, nous pouvons poser $c_1 = 0$. Le système s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_2(x, y) \\ c_3(x, y) \\ c_4(x, y) \\ c_5(x, y) \\ c_6(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p_2(x, y) - p_2(x_K, y_K) \\ p_3(x, y) - p_3(x_K, y_K) \\ p_4(x, y) - p_4(x_K, y_K) \\ p_5(x, y) - p_5(x_K, y_K) \\ p_6(x, y) - p_6(x_K, y_K) \end{bmatrix} \tag{A.47}$$

ou, plus simplement :

$$\begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2(x, y) \\ c_3(x, y) \\ c_4(x, y) \\ c_5(x, y) \\ c_6(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2(x, y) - p_2(x_K, y_K) \\ p_3(x, y) - p_3(x_K, y_K) \\ p_4(x, y) - p_4(x_K, y_K) \\ p_5(x, y) - p_5(x_K, y_K) \\ p_6(x, y) - p_6(x_K, y_K) \end{bmatrix} \tag{A.48}$$

et qui peut être aussi écrit :

$$\bar{\mathbf{M}}\bar{\boldsymbol{c}}(x, y) = \bar{\boldsymbol{p}}(x, y) - \bar{\boldsymbol{p}}(x_K, y_K) \tag{A.49}$$

De la même manière qu'en A.10, nous obtenons les coefficients de correction par inversion

de ce système linéaire pour obtenir :

$$\bar{\boldsymbol{c}}(x,y) = \bar{\mathbf{M}}^{-1}[\bar{\boldsymbol{p}}(x,y) - \bar{\boldsymbol{p}}(x_K,y_K)] \tag{A.50}$$

La fonction de correction s'écrit alors :

$$\mathscr{C}(x,y,s,t) = \bar{\boldsymbol{p}}^T(s,t)\bar{\boldsymbol{c}}(x,y) = \bar{\boldsymbol{c}}^T(x,y)\bar{\boldsymbol{p}}(s,t) \tag{A.51}$$

L'équation A.39 peut être réécrite sous forme discrétisée par :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} \mathscr{C}(x,y,s,t)\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)\hat{u}(x_I,y_I)\Delta V_I \\ &\quad -\hat{u}(x_K,y_K)\sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} \mathscr{C}(x,y,s,t)\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)\Delta V_I \\ &\quad +\hat{u}(x_K,y_K) \end{aligned} \tag{A.52}$$

Dans le cas où nous utilisons l'approche de collocation de point, nous fixons $(x_K,y_K) = (x,y), \forall x,y$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{x=x_K,y=y_K} &= \sum_{I=1,I\neq K}^{\mathrm{NP}} N_I(x,y)|_{x=x_K,y=y_K}\hat{u}(x_I,y_I) \\ &\quad -\hat{u}(x_K,y_K)\sum_{I=1,I\neq K}^{\mathrm{NP}} N_I(x,y)|_{x=x_K,y=y_K} + \hat{u}(x_K,y_K) \\ &= \sum_{I=1}^{\mathrm{NP}} N_I(x,y)|_{x=x_K,y=y_K}\hat{u}(x_I,y_I) \end{aligned} \tag{A.53}$$

où

$$N_I(x,y) = \begin{cases} [\bar{\boldsymbol{p}}(x,y) - \bar{\boldsymbol{p}}(x_K,y_K)]^T \left(\bar{\mathbf{M}}^{-1}\right)^T \bar{\boldsymbol{p}}(s,t) \\ \qquad \times\varphi(x_K,y_K,x_I-x_K,y_I-y_K)\Delta V_I,\ I\neq K \\ -\sum_{J=1,J\neq K}^{\mathrm{NP}}[\bar{\boldsymbol{p}}(x,y) - \bar{\boldsymbol{p}}(x_K,y_K)]^T \left(\bar{\mathbf{M}}^{-1}\right)^T \bar{\boldsymbol{p}}(s,t) \\ \qquad \times\varphi(x_K,y_K,x_J-x_K,y_J-y_K)\Delta V_J + 1,\ I = K \end{cases} \tag{A.54}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$N_I(x,y)|_{x=x_K,y=y_K} = \begin{cases} 0,\ I\neq K \\ 1,\ I = K \end{cases} \tag{A.55}$$

Les dérivées des fonctions d'interpolation prennent la forme suivante. Par exemple, pour

la première dérivée selon x, A.54 devient :

$$\frac{\partial N_I}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{p}}^T}{\partial x}(x,y)\left(\bar{\mathbf{M}}^{-1}\right)^T \bar{\boldsymbol{p}}(s,t) \\ \qquad \times\varphi(x_K, y_K, x_I - x_K, y_I - y_K)\Delta V_I,\ I \neq K \\ -\sum_{J=1,J\neq K}^{\mathrm{NP}} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{p}}^T}{\partial x}(x,y)\left(\bar{\mathbf{M}}^{-1}\right)^T \bar{\boldsymbol{p}}(s,t) \\ \qquad \times\varphi(x_K, y_K, x_J - x_K, y_J - y_K)\Delta V_J,\ I = K \end{cases} \tag{A.56}$$

Les dérivées d'ordre supérieur prennent la même forme, car seul le facteur $\bar{\boldsymbol{p}}^T$ dépend des variables spatiales x et y.

A.5 Stabilisation des conditions frontières naturelles

La littérature portant sur les techniques sans maillage fait état d'une instabilité plus importante pour les techniques utilisant une formulation forte que pour celles employant une formulation faible (Liu, 2003; Liu et Gu, 2005) et ce, principalement pour des distributions de points irrégulières. Il a été identifié que cette instabilité provient des conditions frontières comportant une dérivée (Liu et Gu, 2005) (conditions naturelles). Plusieurs stratégies ont été proposées pour améliorer la stabilité de la solution dans ce cas. Quelques-unes sont mentionnées ici à titre indicatif.

- Utiliser une distribution de points régulière à proximité du point ayant une condition de dérivation et utilisation d'une formulation adaptée ;
- Augmenter la densité de points près des frontières ayant une condition de dérivation ;
- Effectuer une collocation de type Hermite. Dans ce cas, la dérivée normale de la variable à chaque point possédant une condition frontière de dérivation est une nouvelle variable qui est ajoutée au problème à résoudre (Jin *et al.*, 2005; Li *et al.*, 2003). Le problème à résoudre inclut alors deux équations à résoudre pour chacun de ces points, soit la résolution de l'équation gouvernante et de la condition frontière. Les fonctions d'interpolation doivent être calculées selon le formalisme adapté à ces circonstances ;
- Ajouter des termes de stabilisation d'ordre supérieur dans les équations à résoudre (Oñate *et al.*, 2001, 1996) ;
- Combiner les formulations forte et faible. Les conditions frontières de dérivation sont exprimées sous la forme d'une formulation faible, tandis que le reste du problème est solutionné par une formulation forte (Liu et Gu, 2003, 2005; Jin *et al.*, 2005). Nous tirons alors avantage des deux formulations.

A.6 Génération de la distribution de points

L'utilisation d'une méthode numérique sans maillage requiert un ensemble de points distribués dans le volume représentant la géométrie du problème physique. Puisque la qualité de cette distribution joue un rôle important sur la solution obtenue, la méthode de génération de points devra répondre aux critères suivants :

- produire une distribution de points régulière. Ceci a un effet important dans les conditions de positivité des fonctions d'interpolation (Jin *et al.*, 2004) ;
- bien contrôler la distance entre les points et donner la possibilité d'ajuster les distances inter point selon la région. Ceci est d'une grande importance, car l'erreur numérique obtenue pour la solution du problème dépend fortement de la distance entre les points, et ce, principalement dans les régions où la solution varie fortement. Ceci est lié à la précision de l'interpolation. D'autre part, une plus grande quantité de points sur la géométrie implique une plus grande charge de calcul. Pour des problèmes tridimensionnels, cette charge augmente très rapidement lorsque la densité de points augmente. Il est alors important de choisir judicieusement la densité de points de chaque région tout en s'assurant d'une bonne continuité entre ces régions ;
- permettre une bonne adaptabilité aux géométries arbitraires.

La technique « Advancing Front Point » (Löhner et Oñate, 1998) a été retenue dans cette thèse, car elle répond bien à ces critères. Cette technique est décrite sommairement ici.

Une représentation de la géométrie doit être fournie. Pour ce faire, une triangulation des surfaces formant les frontières du volume doit être donnée en spécifiant les coordonnées des nœuds et leurs connexions pour former chaque face. La direction de la normale aux faces vers l'intérieur du volume doit également être fournie, en plus d'une spécification de la distance souhaitée entre les points de chaque région.

La procédure pour créer la distribution de points est la suivante. La distance souhaitée entre les points est déterminée pour l'ensemble des points formant la triangulation initiale. Ces points forment des sources où de nouveaux points émergeront. Le processus itératif consiste à prendre le point dont la distance spécifiée est la plus petite, d'appliquer ensuite un patron autour de ce point pour obtenir une liste de nouveaux points potentiels, puis de vérifier la validité de leur présence. Si leur présence est acceptée, ces nouveaux points agiront comme de nouvelles sources pour une itération future. Le point ayant agi comme source est retiré de la liste des sources, produisant ainsi un nouveau front de sources. La validité de la présence des nouveaux points est déterminée par plusieurs conditions, dont la localisation à l'intérieur du volume et la distance minimale entre ce point et le point le plus près existant dans la distribution. La procédure est répétée jusqu'à ce que tous les points sources aient été

utilisés. Le volume devrait alors être rempli correctement, dans la mesure où les conditions de remplissage sont adaptées à la géométrie.

Cette méthode permet généralement d'obtenir des distributions de points très régulières dans les régions où la distance entre les points est constante. Ceci est dû à l'utilisation de patrons de création des nouveaux points depuis les points sources. Diverses approches sont possibles pour spécifier la distance entre les points selon la région. La distance spécifiée est généralement respectée, car les points sont d'abord créés à partir des régions les plus denses pour se terminer dans les régions de plus faible densité. L'algorithme utilisé permet également d'adapter la distribution à une géométrie arbitraire, car la génération se produit des faces vers l'intérieur du volume.

A.7 Intégration numérique

La simulation des signaux de MACE nécessite l'intégration d'un produit de fonctions sur le volume constituant la géométrie. Un des objectifs de notre projet étant de réaliser les simulations sur des géométries arbitraires, l'intégration numérique devra également satisfaire cette condition. L'article de Khosravifard et Hematiyan (2010) présente une méthode adaptée à ce genre de problème dans le contexte actuel.

Les détails de cette méthode ne seront pas explicités ici. Mentionnons seulement qu'il s'agit d'une méthode reposant sur l'utilisation d'une quadrature de Gauss, où les points et les poids associés tiennent compte de la géométrie. Ceci permet d'utiliser un nombre de points d'intégration relativement faible, comparativement à d'autres méthodes utilisant une grille indépendante de la géométrie. La méthode présentée fonctionne bien en 2 et en 3 dimensions, et ce, même avec des fonctions variant rapidement. Une fois les valeurs de la fonction identifiées sur les points d'intégration, le résultat de l'intégration est obtenu par un produit matriciel entre ce vecteur et celui des poids associés.

A.8 Méthodes de résolution de systèmes d'équations différentielles non linéaires

La résolution d'équations différentielles non linéaires est très difficile à réaliser de manière analytique pour une géométrie arbitraire. Il faut alors envisager les approches numériques. Dans le cas présent, ceci s'applique pour la résolution du problème inverse, où nous cherchons à identifier des paramètres caractérisant la conductivité électrique de telle sorte à minimiser une erreur entre ce que le modèle prédit et les données fournies. Plusieurs méthodes ont été développées et décrites par divers auteurs (dont Tarantola (1987) et Zhdanov (2002)). Cette section survole cet aspect. L'approche retenue est celle où une fonctionnelle doit être minimisée afin de répondre aux conditions posées par les équations et d'autres paramètres.

Une première technique consiste à faire plusieurs essais de valeurs pour les diverses variables et à évaluer les régions pour lesquelles la fonctionnelle tend à être minimale. Ceci peut bien fonctionner pour un problème où seulement quelques variables sont impliquées.

Une seconde technique est basée sur les réalisations aléatoires (comme la méthode de Monte-Carlo). Cependant, cette approche n'est pas très robuste pour obtenir une convergence sur un problème ayant un grand nombre de variables.

Une troisième technique est basée sur les algorithmes génétiques. Cette approche a un intérêt particulier principalement pour les équations fortement non linéaires.

Une quatrième technique repose sur la minimisation d'une fonctionnelle à partir du calcul de son gradient. Ce formalisme permet d'inclure, dans la fonctionnelle, des paramètres d'incertitudes sur les données recueillies et sur les erreurs de modélisation. Plusieurs algorithmes proposés se basent sur une même formulation, et se distinguent par l'identification de la direction de recherche de solution et de la longueur du pas effectué dans cette direction. L'ouvrage de Tarantola (1987) fournit bon nombre de détails sur ce sujet, pour les méthodes linéaires et non linéaires, directes et itératives. Il traite de préconditionnement et de régularisation par l'utilisation de matrices de covariance.

A.9 Gradients conjugués

Cette section a pour but de présenter la technique numérique qui sera utilisée pour la résolution des équations différentielles non linéaires présentes dans le problème inverse. Cette description se veut sommaire afin d'illustrer la manière avec laquelle les informations relatives à l'expérimentation seront introduites dans la reconstruction, mais la majorité des détails et des preuves sont laissées aux différents ouvrages traitant du sujet. La notation qui sera utilisée ici est basée sur celle de Tarantola (1987).

La relation non linéaire théorique reliant les variables du modèle $\boldsymbol{m}$ aux données $\boldsymbol{d}$ est exprimée par $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})$. Ces variables du modèle $\boldsymbol{m}$ constituent les inconnues du problème à résoudre, tandis que les données $\boldsymbol{d}$ correspondent aux informations mesurables. Lors d'une expérimentation, la mesure de la valeur exacte $\boldsymbol{d}$ donne une observation $\boldsymbol{d}_{obs}$. Ces valeurs sont différentes, car plusieurs sources de bruit affectent la mesure expérimentale. Une manière de quantifier la déviation de l'observation par rapport à la vraie valeur est de spécifier une incertitude gaussienne qui sera contenue dans un opérateur $\mathbf{C}_{\boldsymbol{d}}$. L'information sur les variables du modèle $\boldsymbol{m}$ est décrite par une valeur *a priori* $\boldsymbol{m}_{prior}$ et une incertitude gaussienne contenue dans un opérateur de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$. Cette covariance permet de spécifier l'écart-type par rapport à la moyenne pour chacune des variables et la corrélation entre ces variables. Cette information est une composante importante pour la régularisation du problème. Finalement,

la relation théorique $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})$ est basée sur un modèle approximatif, et les incertitudes gaussiennes correspondantes peuvent être incluses également dans un opérateur de covariance $\mathbf{C}_{\boldsymbol{T}}$. Dans ce cas, la densité de probabilité représentant l'information des variables du modèle est :

$$\begin{aligned}\sigma_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{m}) &= \text{const} \\ &\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left((\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})-\boldsymbol{d}_{obs})^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})-\boldsymbol{d}_{obs})+(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_{prior})^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_{prior})\right)\right)\end{aligned} \tag{A.57}$$

où $\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}} = \mathbf{C}_{\boldsymbol{d}} + \mathbf{C}_{\boldsymbol{T}}$.

Selon l'hypothèse que le problème à résoudre est faiblement non linéaire, la valeur maximale de cette densité de probabilité $\sigma_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{m})$ peut être représentée par un estimateur à maximum de vraisemblance. Il s'agira alors de minimiser la fonctionnelle (aussi appelée « fonction de coût ») :

$$S(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})-\boldsymbol{d}_{obs})^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})-\boldsymbol{d}_{obs})+(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_{prior})^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_{prior})\right) \tag{A.58}$$

Le point où $S(\boldsymbol{m})$ est minimal est appelé le point de maximum de vraisemblance $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_{ML}$.

La résolution d'un problème non linéaire de cette sorte peut être approchée par la résolution successive (itérative) d'un problème linéarisé où chacune des itérations doit (idéalement) fournir une meilleure approximation de la solution exacte. L'index « n » sera alors utilisé pour identifier le numéro de l'itération.

La dérivée de cette fonction $S(\boldsymbol{m})$ par rapport aux variables du modèle $\boldsymbol{m}$ renseigne sur la direction où il faut chercher pour obtenir une valeur inférieure de la fonctionnelle. Cette dérivée est le gradient $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ et est exprimée par :

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n = \mathbf{G}_n^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n)-\boldsymbol{d}_{obs})+\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1}(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_{prior}) \tag{A.59}$$

Dans cette équation, $\mathbf{G}_n$ correspond aux dérivées évaluées au point $\boldsymbol{m}_n$ des équations du modèle $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})$ pour chacune des variables. La matrice hessienne, qui est la seconde dérivée de $S(\boldsymbol{m})$ par rapport aux variables du modèle, est donnée au premier ordre par :

$$\hat{\mathbf{H}}_n = \mathbf{G}_n^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}\mathbf{G}_n + \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1} \tag{A.60}$$

La multiplication des quantités $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n$ et de $\hat{\mathbf{H}}_n$ avec la matrice $\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}$ définissant la métrique donne les quantités suivantes :

$$\boldsymbol{\gamma}_n = \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n = \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}\mathbf{G}_n^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n)-\boldsymbol{d}_{obs})+(\boldsymbol{m}_n-\boldsymbol{m}_{prior}) \tag{A.61}$$

qui est la direction de plus forte ascension au point $\boldsymbol{m}_n$ selon cette métrique et

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}\hat{\mathbf{H}}_n = \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}\mathbf{G}_n^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}\mathbf{G}_n + \mathbf{I} \tag{A.62}$$

qui est l'opérateur de courbure à ce même point.

La pente de la fonctionnelle S au point $\boldsymbol{m}_n$ est donnée par la norme du gradient et, de manière équivalente, par la norme du vecteur de direction de plus forte ascension :

$$\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n\| = \|\boldsymbol{\gamma}_n\| = \sqrt{\hat{\boldsymbol{\gamma}}_n^T\boldsymbol{\gamma}_n} \tag{A.63}$$

La minimisation de la fonctionnelle consiste alors à trouver une nouvelle position $\boldsymbol{m}_{n+1}$ à partir de la position $\boldsymbol{m}_n$, à partir des quantités exprimés ci-dessus, et à répéter le processus jusqu'à l'obtention d'un niveau d'erreur souhaité entre les données $\boldsymbol{d}$ et les valeurs $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n)$, compte tenu des incertitudes. Il existe cependant des difficultés liées à cette démarche comme l'obtention d'un minimum local, qui n'est pas la solution optimale, mais qui pourra faire bloquer le processus de convergence. Une formulation simple pour obtenir cette nouvelle position peut s'écrire :

$$\boldsymbol{m}_{n+1} = \boldsymbol{m}_n - \mu_n\boldsymbol{\gamma}_n \tag{A.64}$$

où la direction de plus forte ascension a été utilisée. La valeur μ_n est un nombre positif réel faisant en sorte que la valeur de la fonctionnelle $S(\boldsymbol{m}_{n+1})$ soit inférieure à $S(\boldsymbol{m}_n)$. La détermination de ce μ_n peut se faire de différentes façons. Il est possible par exemple de procéder par essais et erreurs. Une autre façon consiste à calculer $S(\boldsymbol{m}_{n+1})$ pour trois valeurs de μ_n, d'exprimer l'équation d'une parabole passant par ces points puis de trouver la valeur correspondant au minimum de cette parabole. Une troisième façon consiste à linéariser $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})$ autour de $\boldsymbol{m}_n$ pour obtenir :

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n - \mu_n\boldsymbol{\gamma}_n) \approx \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n) - \mu_n\mathbf{G}_n\boldsymbol{\gamma}_n \tag{A.65}$$

La convergence vers la solution peut être grandement améliorée en utilisant l'information de courbure, introduite dans l'algorithme :

$$\boldsymbol{m}_{n+1} = \boldsymbol{m}_n - \mu_n\hat{\mathbf{S}}_n\boldsymbol{\gamma}_n \tag{A.66}$$

Le choix de l'opérateur $\hat{\mathbf{S}}_n$ est important. Le cas trivial $\hat{\mathbf{S}}_n = \mathbf{I}$ redonne l'algorithme précédent, où $\boldsymbol{m}_n$ est modifié par un vecteur pointant dans la direction de descente la plus forte. Cette procédure converge généralement lentement. Le cas $\hat{\mathbf{S}}_n = \mathbf{H}_n^{-1}$ correspond, quant à lui, à la méthode de Newton, qui converge rapidement, mais peut être impraticable pour les problèmes

de grande taille. Ce problème vient principalement de l'inversion de cette matrice qui doit être faite à chaque itération. Plus particulièrement, en employant l'approximation de l'opérateur de courbure de l'équation A.62 et $\mu_n = 1$, nous obtenons la méthode de quasi-Newton. Le problème revient alors à trouver un opérateur $\hat{\mathbf{S}}_n$ s'approchant le plus possible de $\mathbf{H}_n^{-1}$, permettant l'accélération de la convergence et assez simple à manipuler pour que l'algorithme puisse être réalisé pratiquement. Une manière d'utiliser cet opérateur consiste à le déterminer comme une constante $\hat{\mathbf{S}}_0$, indépendante de l'itération. Il s'agit du cas « préconditionné », qui peut être utilisé pour l'algorithme utilisant la direction de descente la plus forte et l'algorithme de gradients conjugués. Une suggestion basée sur l'approximation initiale de l'opérateur de courbure (voir équation A.62) est :

$$\hat{\mathbf{S}}_0 = \left(\mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}\mathbf{G}_0^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}\mathbf{G}_0 + \mathbf{I}\right)^{-1} \tag{A.67}$$

Une autre solution consiste à utiliser une méthode à métrique variable où l'opérateur $\hat{\mathbf{S}}_n$ est mis à jour à chaque itération pour tendre vers $\mathbf{H}_n^{-1}$, ce qui lui permettra d'atteindre une meilleure convergence près de la solution.

Le texte qui suit décrit sommairement l'algorithme de deux méthodes, soit la méthode préconditionnée de descente dans la direction de plus forte pente et la méthode préconditionnée de gradients conjugués.

A.9.1 Méthode préconditionnée de descente dans la direction de plus forte pente

La méthode préconditionnée de descente dans la direction de plus forte pente est basée sur l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\gamma}_n = \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}\mathbf{G}_n^T\mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n) - \boldsymbol{d}_{obs}) + (\boldsymbol{m}_n - \boldsymbol{m}_{prior}) & (\boldsymbol{m}_0 \text{ arbitraire}) \\
\boldsymbol{\phi}_n = \hat{\mathbf{S}}_0\boldsymbol{\gamma}_n & (\hat{\mathbf{S}}_0 \text{ arbitraire}) \\
\boldsymbol{m}_{n+1} = \boldsymbol{m}_n - \mu_n\boldsymbol{\phi}_n & (\text{obtenir } \mu_n \text{ par recherche linéaire})
\end{array} \tag{A.68}$$

Dans cet algorithme, le choix des variables initiales du modèle contenues dans $\boldsymbol{m}_0$ est arbitraire. Le choix de différentes valeurs initiales permet d'observer si la solution obtenue est toujours la même ou si d'autres solutions sont trouvées par l'algorithme, ce qui informe sur la fiabilité de la solution proposée pour ce problème.

Quant à l'opérateur de préconditionnement $\hat{\mathbf{S}}_0$, une suggestion basée sur la courbure initale est donnée à l'équation A.67.

Pour la valeur de μ_n, une possibilité est d'utiliser une linéarisation de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m})$ autour de

$\boldsymbol{m}_n$ pour obtenir :

$$\mu_n \approx \frac{\boldsymbol{\gamma}_n^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1} \boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1} \boldsymbol{\phi}_n + \boldsymbol{b}_n^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1} \boldsymbol{b}_n} \tag{A.69}$$

où

$$\boldsymbol{b}_n = \mathbf{G}_n \boldsymbol{\phi}_n \tag{A.70}$$

A.9.2 Méthode préconditionnée de gradients conjugués

La base de l'algorithme de la méthode de gradients conjugués est la même que celle de descente dans la direction de pente la plus forte. La différence est que la minimisation de la fonctionnelle S à une itération N n'est pas trouvée pour une direction $\boldsymbol{\gamma}_N$, mais dans l'espace généré par les directions $\boldsymbol{\gamma}_n,\ n = 0, \ldots, N$. L'algorithme s'écrit alors :

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\gamma}_n = \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}} \mathbf{G}_n^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{D}}^{-1} (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_n) - \boldsymbol{d}_{obs}) + (\boldsymbol{m}_n - \boldsymbol{m}_{prior}) & (\boldsymbol{m}_0 \text{ arbitraire}) \\
\boldsymbol{\lambda}_n = \hat{\mathbf{S}}_0 \boldsymbol{\gamma}_n & (\hat{\mathbf{S}}_0 \text{ arbitraire}) \\
\boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\lambda}_n + \alpha_n \boldsymbol{\phi}_{n-1} & (\boldsymbol{\phi}_0 = \boldsymbol{\lambda}_0)\ (\alpha_n \text{ défini ci-dessous}) \\
\boldsymbol{m}_{n+1} = \boldsymbol{m}_n - \mu_n \boldsymbol{\phi}_n & (\text{obtenir } \mu_n \text{ par recherche linéaire})
\end{array} \tag{A.71}$$

Les commentaires de la méthode précédente à propos de $\boldsymbol{m}_0$ et $\hat{\mathbf{S}}_0$ sont applicables également ici, tout comme les équations A.69 et A.70 relatives au calcul de μ_n. Quant à la variable α, elle peut s'écrire de différentes façons. Par exemple, une suggestion de Polak et Ribière (1969) est :

$$\alpha_n = \frac{(\boldsymbol{\gamma}_n^T - \boldsymbol{\gamma}_{n-1}^T) \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1} \boldsymbol{\lambda}_n}{\boldsymbol{\gamma}_{n-1}^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{m}}^{-1} \boldsymbol{\lambda}_{n-1}} \tag{A.72}$$

Un intérêt de cette méthode comparativement à celle de descente dans la direction de plus forte pente est qu'elle a un taux de convergence nettement supérieur bien qu'elle ne requière que très peu de calculs supplémentaires.

ANNEXE B

Méthode d'extraction du signal de densité de force d'un transducteur à partir d'un signal de pression mesuré près de la surface

Cette annexe a pour but d'expliquer la procédure ayant servi à estimer le signal de densité de force $f_s(t)$ du transducteur de 2,4 mm d'épaisseur décrit dans l'article de Sferruzza *et al.* (1999) pour l'excitation électrique fournie.

La première étape a été de numériser l'image du signal de pression obtenu par l'hydrophone placé près de la surface du transducteur. Cette image a ensuite été traitée pour extraire le signal de pression présenté à la figure B.1. Ce signal montre que le délai entre l'excitation du transducteur et le début de la réception est d'environ 1,18 μs. Avec une vitesse de propagation (célérité) d'environ 1480 m/s, nous en déduisons que l'hydrophone est situé à environ 1,75 mm du transducteur.

Une représentation du transducteur avec les variables géométriques est présentée à la figure B.2.

Selon la description de Penttinen et Luukkala (1976), la réponse impulsionnelle $h_a(\boldsymbol{x}, t)$ au point $\boldsymbol{x}$ situé à une distance z sur l'axe de symétrie en face du transducteur ayant une distance focale R et un rayon a est (pour $z < R$) :

$$h_a(0,z,t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{Rc}{R-z} & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t_2 < t \end{cases} , \quad \begin{array}{l} t_1 = z/c \\ t_2 = \left[a^2 + (z-h_0)^2\right]^{1/2}/c \end{array} \tag{B.1}$$

où la notation $h_a(\rho, z, t)$ a été utilisée. Avec cette notation, les coordonnées de positionnement ρ et z correspondent respectivement à la distance du point avec l'axe de symétrie et à la distance de ce point avec la surface du transducteur. Ces variables de positionnement reprennent le système de coordonnées cylindriques où la position angulaire autour de l'axe de symétrie n'est pas nécessaire due à la symétrie circulaire du transducteur. La variable c correspond à la célérité de l'onde, tandis que h_0 est la longueur dans la direction z correspondant à la hauteur du transducteur :

$$h_0 = R - (R^2 - a^2)^{1/2} = \frac{S_{transducteur}}{2\pi R} \tag{B.2}$$

où $S_{transducteur}$ est l'aire de la surface du transducteur.

Cette réponse impulsionnelle $h_a(0, z, t)$, exprimée à l'équation B.1, montre une valeur

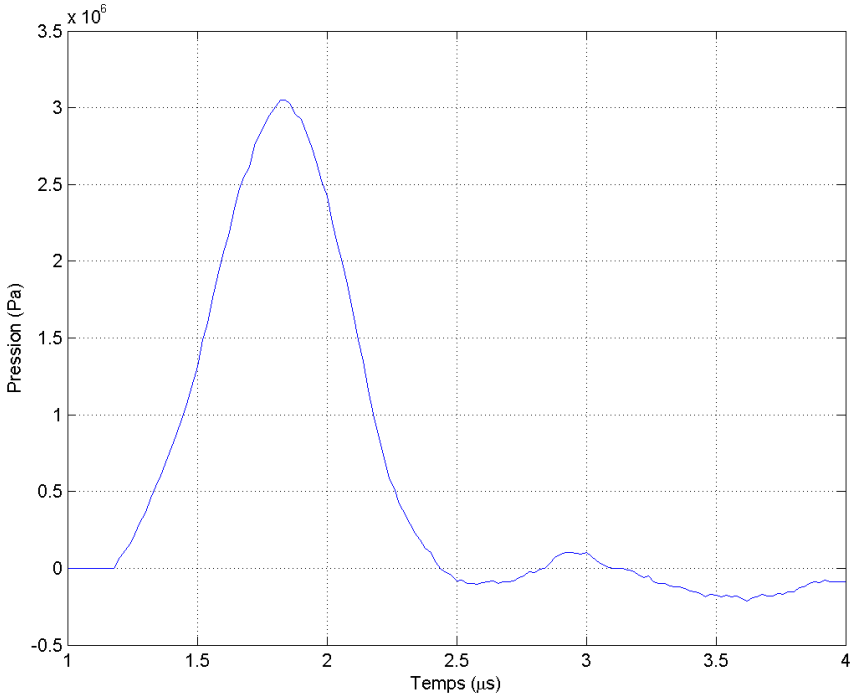

Figure B.1 Signal de pression mesuré par l'hydrophone.

constante sur une période qui varie selon la position du point d'observation. Le début, à $t = t_1$, correspond au temps de vol entre le point au centre de la face du transducteur (en $(\rho = 0, z = 0)$) et le point d'observation, tandis que la fin, à $t = t_2$, correspond à celui entre les points formant la bordure de la face du transducteur (en $(\rho = a, z = h_0)$) et le point d'observation. Plus le point d'observation est situé près de la face du transducteur et plus cette durée entre t_1 et t_2 sera grande. Dans le cas où l'hydrophone est situé à 1,75 mm de la face du transducteur ayant une distance focale $R = 1,0$ m et un rayon $a = 0,010$ m, cette durée est d'environ 5,7 μs, ce qui est loin d'être une impulsion en comparaison avec le signal de pression dont la partie positive a une durée de moins de 1,5 μs.

Un autre aspect servant à quantifier plus précisément $f_s(t)$ est d'inclure la réponse angulaire de la sensibilité de l'hydrophone. En effet, dans la situation actuelle, l'hydrophone est situé si près de la face du transducteur que les ondes sphériques élémentaires provenant de chaque point de cette face auront un angle d'incidence θ sur la membrane de l'hydrophone, qui sera très variable. Le profil de sensibilité angulaire pour l'hydrophone ayant servi à la mesure n'est pas connu. Il sera alors supposé que cette sensibilité est proportionnelle à la composante selon z de la direction de propagation de chacune des ondes sphériques élémentaires au niveau de la membrane de l'hydrophone. En somme, il s'agit d'une sensibilité variant

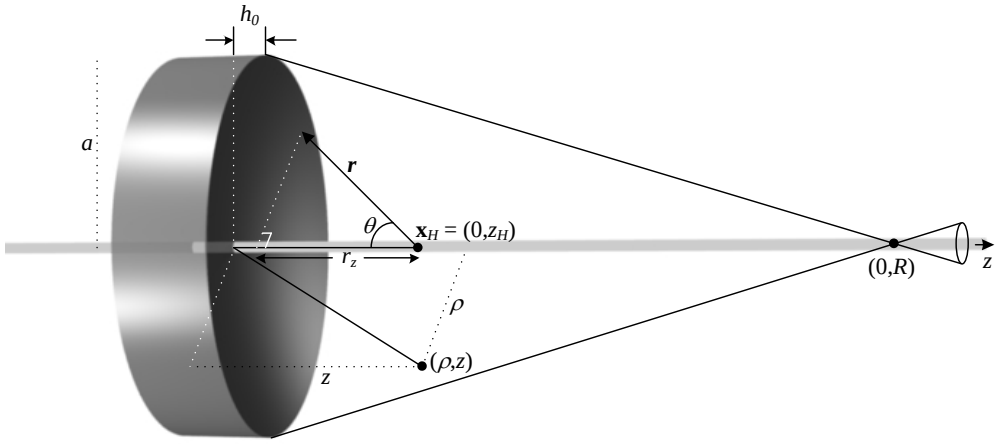

Figure B.2 Représentation du transducteur et des variables géométriques.

selon le cosinus de l'angle d'incidence par rapport à la direction normale de cette membrane :

$$Y(\theta) = \cos(\theta) = \frac{r_z}{r} = \frac{z-(z-r_z)}{r} \approx \frac{z-h_0}{r} = \frac{z-h_0}{ct} \tag{B.3}$$

où $r = |\boldsymbol{r}|$ correspond à la distance entre le point d'observation et le point source sur la surface du transducteur, tandis que r_z est la longueur de la projection de $\boldsymbol{r}$ sur l'axe z. L'approximation qui a été faite dans cette équation a pour effet de retourner une sensibilité plus faible ou égale à celle de $\cos(\theta)$. Elle est justifiée lorsque $h_0 \ll z$. Dans le pire cas, où $r = r_z = z$, nous avons :

$$\frac{z-h_0}{r} = \frac{z-h_0}{z} = \frac{(1,75-0,05)\text{ mm}}{1,75\text{ mm}} = 0,97 \tag{B.4}$$

Ainsi, dans ce pire cas, où la sensibilité exprimée par le cosinus est égale à 1,00, elle est approximée par une valeur dont l'erreur est de 3 %. L'approximation de l'équation B.3 sera alors suffisante pour les besoins de la démonstration.

Cette composante angulaire $Y(\theta)$ peut être incluse dans la réponse impulsionnelle, qui sera alors identifiée par $h_a^Y(\rho,z,t)$ et qui devient, pour les points sur l'axe de symétrie (pour $z < R$) :

$$h_a^Y(0,z,t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{Rc}{R-z}\frac{z-h_0}{ct} & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t_2 < t \end{cases}, \quad \begin{array}{l} t_1 = z/c \\ t_2 = \left[a^2+(z-h_0)^2\right]^{1/2}/c \end{array} \tag{B.5}$$

La figure B.3 montre les courbes de $h_a(\rho,z,t)$ et de $h_a^Y(\rho,z,t)$ au point de mesure de l'hydrophone (en ($\rho = 0$ m, $z = z_H = 1,75$ mm)). Cette figure illustre la différence si-

gnificative de la réponse impulsionnelle lorsque la composante angulaire de la sensibilité de l'hydrophone est incluse dans le modèle de mesure du signal de pression pour un point près du transducteur.

Pour obtenir la meilleure description de $f_s(t)$, permettant de reproduire le signal de pression mesuré par l'hydrophone, il faudrait passer par une déconvolution entre ce signal de pression et $h_a^Y(\rho, z, t)$ au point considéré. Une méthode plus simple, mais très approximative, consiste plutôt à utiliser la même forme du signal de pression (comme si $h_a^Y(\rho, z, t)$ avait la forme d'une impulsion) et à trouver le facteur d'amplitude K_f servant à quantifier correctement la pression émise. Pour ce faire, la quantité d'intérêt servant à produire un signal de MACE d'une amplitude donnée dans un volume de sensibilité acousto-électrique constante est l'intégrale de la pression sur le temps. Par exemple, dans une région de sensibilité acousto-électrique constante, une pression donnée durant un temps donné produira un signal pratiquement de même amplitude que pour une pression deux fois plus faible mais durant deux fois plus longtemps.

La formulation mathématique décrivant cette méthode est la suivante. Tel qu'exprimé à l'équation 4.3, la pression acoustique $P(\boldsymbol{x}, t)$ produite au point $\boldsymbol{x}$ au temps t par une densité de force $f_s(t)$ émise du transducteur ayant une réponse impulsionnelle spatio-temporelle $h_a(\boldsymbol{x}, t)$ est :

$$P(\boldsymbol{x}, t) = f_s(t) \overset{t}{*} h_a(\boldsymbol{x}, t) \tag{B.6}$$

Pour ce même transducteur excité par cette densité de force $f_s(t)$, la mesure de pression $P^Y(\boldsymbol{x}, t)$ par l'hydrophone est :

$$P^Y(\boldsymbol{x}, t) = f_s(t) \overset{t}{*} h_a^Y(\boldsymbol{x}, t) \tag{B.7}$$

où, comme précédemment, $h_a^Y(\boldsymbol{x}, t)$ identifie la réponse impulsionnelle spatio-temporelle du transducteur incluant un facteur de sensibilité angulaire. La densité de force cherchée est alors exprimée par :

$$\tilde{f}_s(t) = K_f \, P^Y(\boldsymbol{x}_H, t + t_1) \tag{B.8}$$

permettant d'écrire :

$$\tilde{P}^Y(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{f}_s(t) \overset{t}{*} h_a^Y(\boldsymbol{x}, t) = K_f \, P^Y(\boldsymbol{x}_H, t + t_1) \overset{t}{*} h_a^Y(\boldsymbol{x}, t) \tag{B.9}$$

et où nous exigeons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} P^Y(\boldsymbol{x}_H, t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{P}^Y(\boldsymbol{x}_H, t) \, \mathrm{d}t \tag{B.10}$$

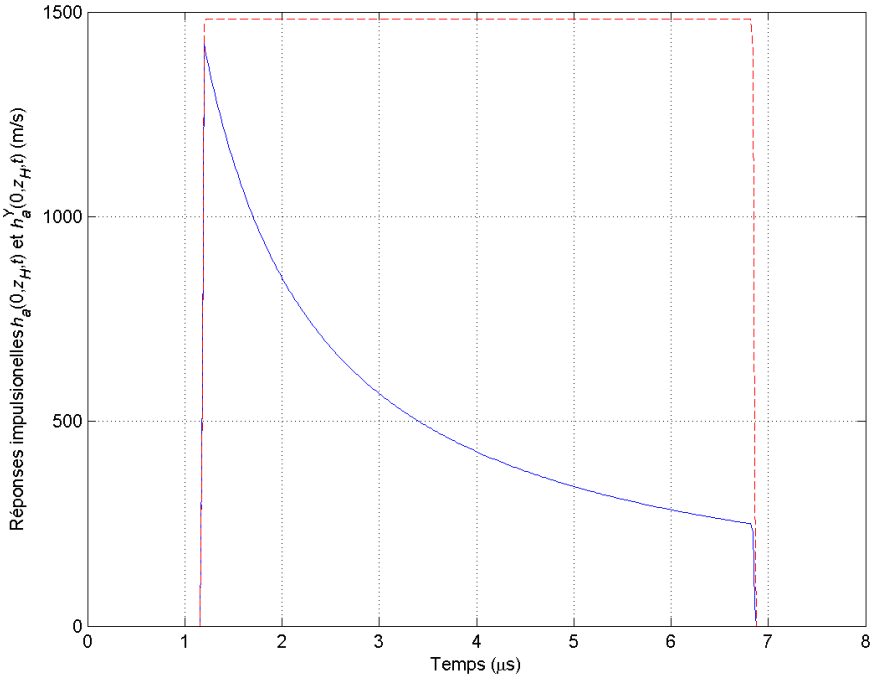

Figure B.3 Courbes des réponses impulsionnelles $h_a(0,1,75\text{ mm},t)$ (trait tireté) et $h_a^Y(0,1,75\text{ mm},t)$ (trait plein).

au point de mesure de l'hydrophone $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_H$. Cette dernière équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} P^Y(\boldsymbol{x}_H,t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} K_f\, P^Y(\boldsymbol{x}_H,t+t_1) \overset{t}{*} h_a^Y(\boldsymbol{x}_H,t)\,\mathrm{d}t \\
&= K_f \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_a^Y(\boldsymbol{x}_H,\tau) P^Y(\boldsymbol{x}_H,t+t_1-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&= K_f \int_{-\infty}^{\infty} h_a^Y(\boldsymbol{x}_H,\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} P^Y(\boldsymbol{x}_H,t+t_1-\tau)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \\
&= K_f \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_a^Y(\boldsymbol{x}_H,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} P^Y(\boldsymbol{x}_H,t)\,\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que l'intégrale sur t de $P^Y(\boldsymbol{x}_H,t+t_1-\tau)$ est indépendante de t_1 et de τ, car elle procède de $-\infty$ à ∞ avec une valeur de t_1 constante, tandis qu'il est possible de limiter l'intégration sur τ à l'intervalle $[t_1,t_2]$ (puisque $h_a^Y(\boldsymbol{x}_H,\tau)$ est non nul seulement dans cet intervalle de temps). Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
K_f \int_{-\infty}^{\infty} h_a^Y(\boldsymbol{x}_H,\tau)\,\mathrm{d}\tau &= 1 \\
\Rightarrow K_f &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} h_a^Y(\boldsymbol{x}_H,\tau)\,\mathrm{d}\tau}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

L'intégrale temporelle de $h_a^Y(0,z,t)$ est, à partir de l'expression en B.5 :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h_a^Y(0,z,t)\,\mathrm{d}t &= \int_{z/c}^{\left(\left[a^2+(z-h_0)^2\right]^{1/2}/c\right)} \frac{R}{R-z}\frac{z-h_0}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{R}{R-z}(z-h_0)\ln(t)\Big\|_{t=z/c}^{\left[a^2+(z-h_0)^2\right]^{1/2}/c} \\
&= \frac{R}{R-z}(z-h_0)\left[\ln\left(\frac{\left[a^2+(z-h_0)^2\right]^{1/2}}{c}\right)-\ln\left(\frac{z}{c}\right)\right] \\
&= \frac{R}{R-z}(z-h_0)\ln\left(\frac{\left[a^2+(z-h_0)^2\right]^{1/2}}{z}\right) \qquad \text{(B.12)}
\end{aligned}$$

À partir du signal de pression mesuré par l'hydrophone $P^Y(\boldsymbol{x}_H,t)$ (présenté à la figure B.1) et des expressions en B.8, B.11 et B.12, le signal $\tilde{f}_s(t)$ obtenu pour ce transducteur est tracé à la figure B.4.

Par l'équation B.9, le signal de pression $\tilde{P}^Y(\boldsymbol{x}_H,t)$ qui serait mesuré par l'hydrophone selon ce modèle est tracé à la figure B.5. Pour référence, celui effectivement mesuré ($P^Y(\boldsymbol{x}_H,t)$) y est tracé de nouveau. La valeur de l'intégrale temporelle de ce signal de pression $\tilde{P}^Y(\boldsymbol{x}_H,t)$ est de 1.7287 Pa·s et est égale à celle sur $P^Y(\boldsymbol{x}_H,t)$, ce qui respecte la condition exprimée en B.10.

En faisant l'hypothèse que la densité de force $\tilde{f}_s(t)$ obtenue correspond assez bien à la densité de force réelle ($f_s(t)$), l'équation B.6 peut alors servir à calculer la pression acoustique produite par ce transducteur aux endroits et aux instants voulus. Les figures B.6 et B.7 montrent respectivement le signal de pression $P(\boldsymbol{x},t)$ aux points ($\rho = 0$ m, $z = 0,1$ m) et ($\rho = 0$ m, $z = 1,0$ m). Ces figures montrent que, pour ces points situés loin du transducteur, la forme du signal de pression s'apparente à celle de la densité de force $f_s(t)$ avec peu de déformation. Ceci provient du fait que la réponse impulsionnelle $h_a(\boldsymbol{x},t)$ tend vers une impulsion de courte durée en comparaison avec celle de $f_s(t)$.

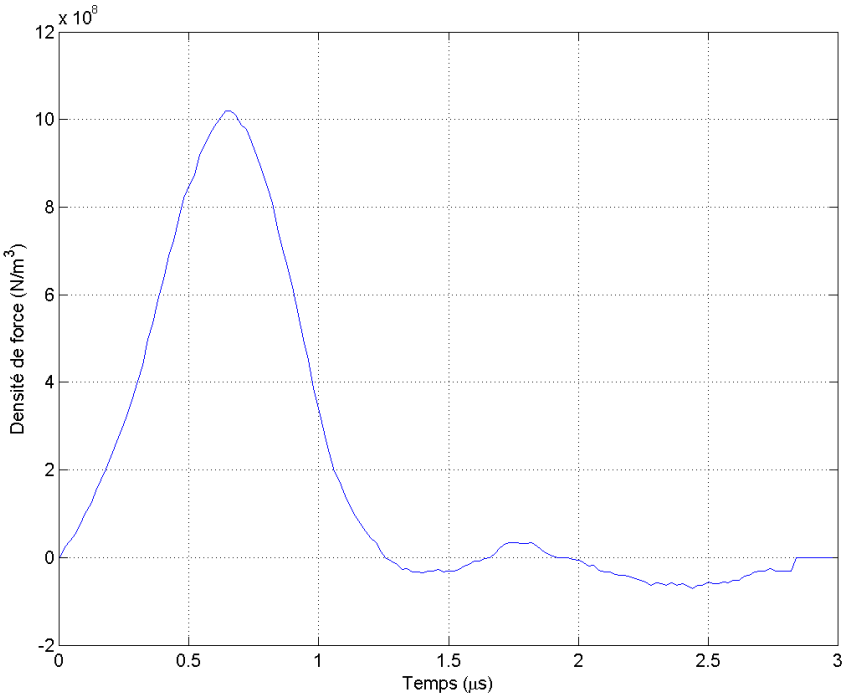

Figure B.4 Courbe extraite représentant la densité de force $\tilde{f}_s(t)$ du transducteur.

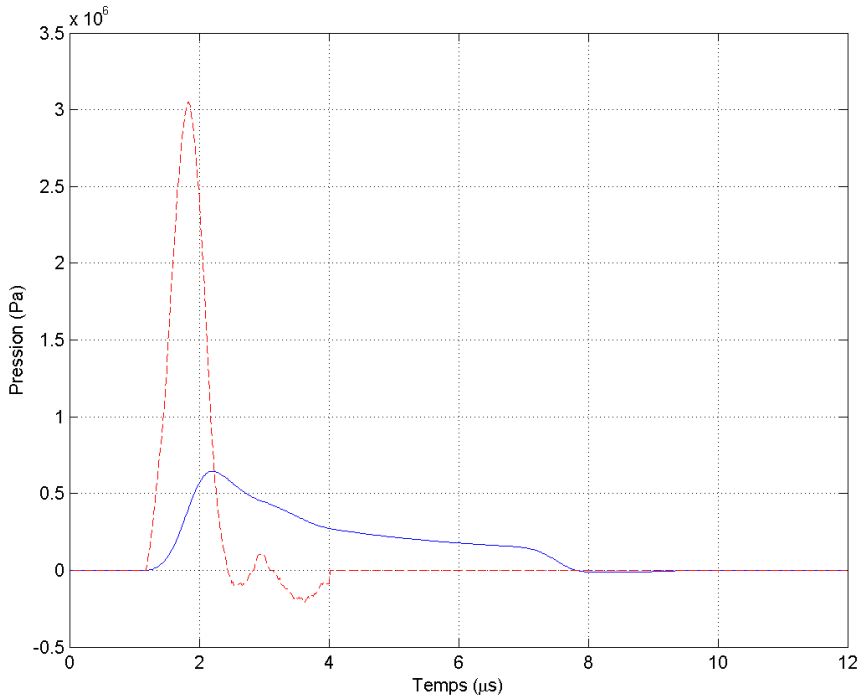

Figure B.5 Signaux de pression mesurés à la position de l'hydrophone. La courbe en tireté correspond au signal effectivement mesuré par l'hydrophone, tandis que la courbe en trait plein correspond au signal modélisé où la densité de force $\tilde{f}_s(t)$ a la même forme que le signal de pression réellement mesuré.

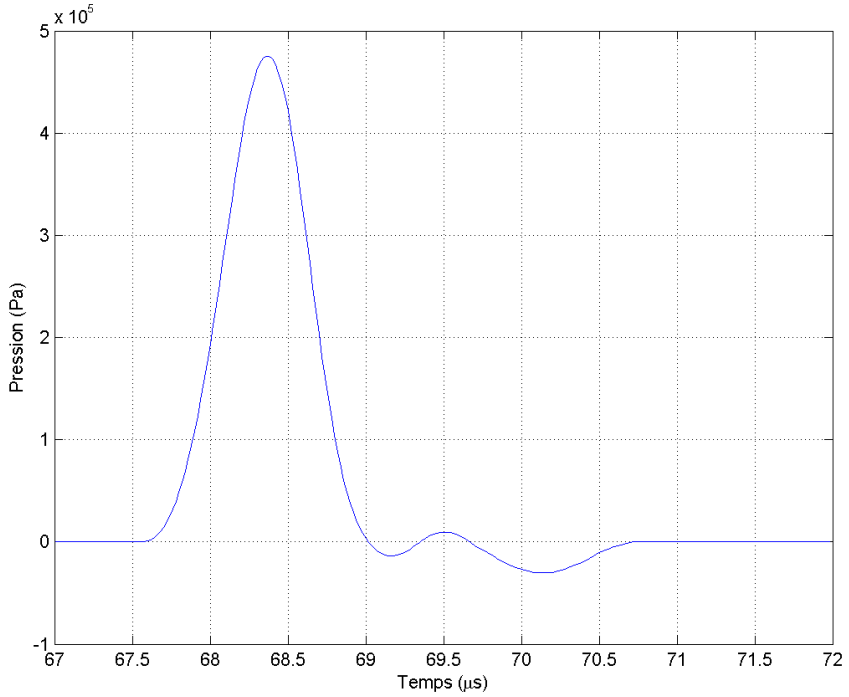

Figure B.6 Signal de pression au point ($\rho = 0$ m, $z = 0,1$ m).

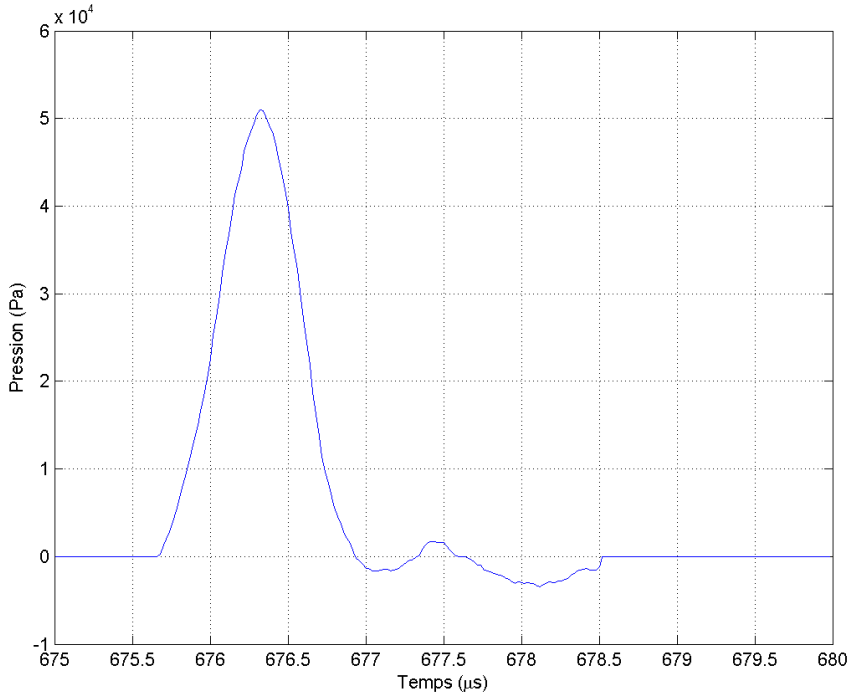

Figure B.7 Signal de pression au point ($\rho = 0$ m, $z = 1,0$ m).

ANNEXE C

Modèle de formation des signaux de Debye

Cette annexe décrit un modèle de formation des signaux de Debye. De plus, elle présente une comparaison de la distribution d'amplitude de signaux simulés sur la base de ce modèle avec ceux acquis conjointement aux signaux de MACE dans les expérimentations décrites à la section 3.3.4.

Le modèle de formation de signaux de Debye présenté ici repose sur celui de O'Brien *et al.* (1994). Pour un électrolyte binaire, nous avons :

$$\boldsymbol{J}^{US} = \frac{FC}{\rho_{solvant}} \left(\frac{v_+ m_+}{f_+} + \frac{v_- m_-}{f_-} \right) \cdot -\boldsymbol{\nabla} P \tag{C.1}$$

avec

$\boldsymbol{J}^{US}$: densité de courant (C/s/m^2) ;
F : constante de Faraday (96 500 C/mol) ;
C : concentration volumique (mol/m^3) ;
$\rho_{solvant}$: densité volumique du solvant (kg/m^3) ;
v_+, v_- : valence du cation et de l'anion, respectivement ;
m_+, m_- : masse du cation et de l'anion, respectivement (kg) ;
f_+, f_- : coefficient de friction du cation et de l'anion, respectivement (kg/s) ;
P : pression acoustique (kg/s^2/m).

Le tableau C.1 présente les valeurs de ces variables utilisées pour la simulation de l'effet de Debye.

Tableau C.1 Valeurs des variables pour la simulation de l'effet de Debye

Variable	Valeur
C	$0,35 \frac{\text{S}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{9 g NaCl/L}}{\text{1,4 S/m}} \cdot \frac{\text{1 mol NaCl}}{\text{58,5 g NaCl}} \cdot \frac{\text{1000 L}}{\text{m}^3}$
$\rho_{solvant}$	$\frac{\text{1,000 kg}}{\text{L}} \cdot \frac{\text{1000 L}}{\text{m}^3}$
(v_+, v_-)	(+1,-1)
(m_+, m_-)	$\frac{\text{(23,0,35,5) g}}{\text{mol}} \cdot \frac{\text{1 kg}}{\text{1000 g}} \cdot \frac{\text{mol}}{1{,}6 \times 10^{23} \text{ ions}}$
(f_+, f_-) (Koneshan *et al.*, 1998)	$(5,2 \times 10^{-12}, 4,1 \times 10^{-12}) \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

Pour obtenir le signal capté par la paire d'électrodes de mesure, les équations 2.8 et 2.12

sont reprises pour obtenir :

$$V^{Debye} = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sigma_0}(\boldsymbol{J}^{US} \cdot \boldsymbol{J}^{L})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(C.2)}$$

$$= \iiint_{\Omega} (\boldsymbol{J}^{US} \cdot -\boldsymbol{\nabla}\varphi^{L})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(C.3)}$$

Dans cette équation, $\boldsymbol{J}^{US}$ représente la densité de courant produite par le déplacement des ions résultant du gradient de pression acoustique.

Il faut toutefois comprendre que ce modèle est une approximation. En effet, la réaction dynamique des ions soumis à un champ acoustique fait intervenir plusieurs termes, tels la force électrophorétique et la diffusion, qui tiennent compte de la situation électrochimique plus complexe (Zana et Yeager, 1967). Cette réponse dépend aussi de la fréquence de vibration et de la concentration ionique. Le modèle présenté ici ne tient pas compte de tous ces effets et suppose que le mouvement des ions est instantané à l'application du champ acoustique. Pour évaluer le déphasage qui pourrait survenir dans les conditions actuelles, nous prenons l'équation suivante (Yeager *et al.*, 1949) :

$$\Delta = \mathrm{atan}(\omega\epsilon/4\pi\sigma_0) \quad \text{(C.4)}$$

où Δ est le déphasage, ω est la fréquence angulaire de l'excitation acoustique et ϵ est la constante diélectrique du solvant. Par exemple, pour une excitation à 1 MHz et le solvant caractérisé par les valeurs du tableau C.1, nous avons :

$$\Delta = \mathrm{atan}\left(\frac{(2\pi \cdot 1 \times 10^{6}\ \mathrm{s}^{-1}) \cdot (80 \times 8,85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m})}{4\pi \cdot 0,35\ \mathrm{S/m}}\right)$$

$$= \mathrm{atan}(0,0010) = 0,058 \text{ degrés}$$

Ainsi, l'approximation d'instantanéité est justifiée dans ce cas-ci par un déphasage très faible.

Il est intéressant de noter que, pour un milieu homogène, l'équation C.2 décrit un signal V^{Debye} dont l'amplitude est indépendante de la conductivité. En effet, $\boldsymbol{J}^{US}$ est proportionnel à σ_0 [1], ce qui annule ce terme présent au dénominateur. De plus, pour un milieu homogène, $\boldsymbol{J}^{L}$, la densité de courant produite en appliquant un courant unitaire aux électrodes de mesure, est indépendante de σ_0. Ainsi, ce modèle reproduit bien cet aspect décrit dans la littérature (Yeager *et al.*, 1949) pour les solutions qui ne sont pas très diluées.

La figure C.1 montre l'amplitude des signaux de Debye acquis expérimentalement et

1. Selon l'équation C.1, $\boldsymbol{J}^{US}$ est proportionnel à la concentration C, lequel est proportionnel à la conductivité (voir équation 2.1).

obtenus par simulation. Cette amplitude est évaluée avec la même méthode et les mêmes paramètres qu'à la section 3.3.4. L'aspect général de la distribution de potentiel de Debye expérimental concorde bien avec celui simulé : deux régions de plus forte intensité sont observées au voisinage des électrodes de mesure. Toutefois, la symétrie révélée par la simulation n'est pas reproduite par la distribution expérimentale : la région de haute amplitude est bien reproduite au voisinage de l'électrode #2, alors que celle de l'électrode #1 est environ 30 % plus faible. Ceci pourrait s'expliquer, en partie, par la dérive de l'instrumentation, la région de l'électrode #1 ayant été balayée à la fin de l'expérience.

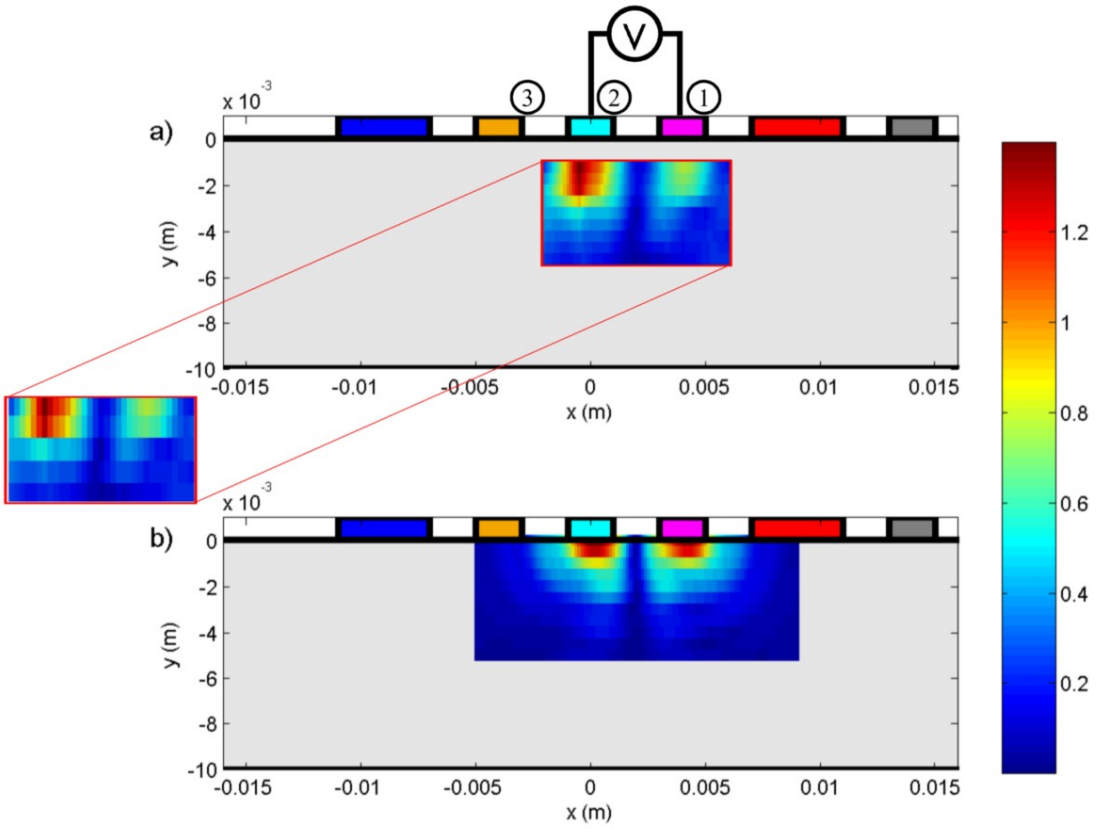

Figure C.1 Somme des amplitudes des composantes (en unités arbitraires) des signaux de Debye entre 1,00 et 1,18 MHz en fonction de la position d'excitation acoustique. Le foyer du transducteur est positionné sur le plan médian passant par le centre des électrodes. La tension est mesurée entre les électrodes #1 et #2. L'électrode #3 est déconnectée. (a) Données acquises expérimentalement. Une interpolation a été réalisée sur une grille ayant la même finesse qu'en (b) pour faciliter la comparaison des résultats. Cette interpolation est réalisée à partir des données originales, affichées en retrait sur la gauche. La région d'acquisition est délimitée par le rectangle rouge. (b) Résultat de simulation utilisant la méthode et les programmes développés pour résoudre les problèmes directs présentés aux chapitres 5 à 7. Le transducteur a été tourné de 2 degrés autour de l'axe y et son foyer est placé dans le plan $z = -4,0$ mm. Cette position a été déterminée par le délai d'arrivée du train d'ondes sur les signaux expérimentaux.

ANNEXE D

Variation de la tension produite par une variation de conductivité électrique

Le modèle utilisé par Olafsson *et al.* (2008) pour exprimer la tension mesurée par modulation acoustique de conductivité électrique (MACE) requiert une clarification. En effet, bien que ce modèle soit correct, aucun commentaire n'est fait dans l'article sur les variables de densité de courant présentes implicitement dans l'équation 2.10, qui sont pourtant dépendantes de la conductivité électrique. Puisque cette équation constitue la base des modèles qui seront utilisés tout au long de ce projet, une clarification est présentée ici. Cette clarification s'inspire d'un article portant sur la tomographie d'impédance électrique (Polydorides et Lionheart, 2002).

L'équation pour la différence de potentiel V_0 mesurée par une paire d'électrodes lorsqu'un courant I^I circule par deux autres électrodes dans un milieu fermé de conductivité électrique σ_0 peut être obtenue en appliquant le principe de réciprocité :

$$V_0 = \int_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega \tag{D.1}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi^L\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^I)\,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \varphi^L\boldsymbol{\nabla}\cdot(\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^I)\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi^L\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^I)\,\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{D.2}$$

La dernière égalité résulte de la loi de conservation de charge $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0$, avec $\boldsymbol{J} = -\sigma\boldsymbol{\nabla}\varphi$.

Nous utilisons ensuite le théorème de Green

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Gamma \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Gamma \tag{D.3}$$

sur D.2 pour obtenir :

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi^L\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^I)\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Gamma \varphi^L\sigma_0\boldsymbol{\nabla}\varphi^I\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{D.4}$$

L'équation D.4 représente une intégration sur la surface du volume conducteur. Nous invoquons les conditions aux frontières du problème pour affirmer que cette surface est isolée électriquement (donc la composante de $\boldsymbol{J}$ normale à cette surface est nulle), sauf aux électrodes. Nous considérons des électrodes métalliques et faisons l'hypothèse que le potentiel sur les électrodes est constant. L'équation D.4 peut alors être réécrite :

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_\Gamma \varphi^L \sigma_0 \boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma \\ &= \sum_{l=1}^{N_{el}} \int_{\Gamma_l} \varphi^L \sigma_0 \boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma \\ &= \sum_{l=1}^{N_{el}} \varphi_l^L \int_{\Gamma_l} \sigma_0 \boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma \\ &= \sum_{l=1}^{N_{el}} \varphi_l^L I_l^I \end{aligned} \tag{D.5}$$

où N_{el} est le nombre d'électrodes présentes sur la surface. Le passage de la première à la deuxième ligne de D.5 est justifié par le fait que $\boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur toute cette surface Γ, sauf aux électrodes. Notons aussi que I_l^I est le courant total entrant dans le volume conducteur par l'électrode l. Ce courant I_l^I vaut $+I^I$ à l'électrode l désignée comme source de courant, et $-I^I$ à l'électrode l désignée comme puits de courant. Le courant est nul aux autres électrodes.

Par réciprocité, nous avons aussi :

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_\Omega \sigma_0 (\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\, \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Gamma \varphi^I \sigma_0 \boldsymbol{\nabla}\varphi^L \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\Gamma \\ &= \sum_{l=1}^{N_{el}} \varphi_l^I I_l^L \end{aligned} \tag{D.6}$$

Similairement, le courant I_l^L est le courant entrant dans le volume conducteur par l'électrode l pour la situation L, c'est-à-dire la situation où les électrodes de mesure agissent comme source et puits de courant, tandis que les autres électrodes sont inactives (le courant total sur ces électrodes est nul).

En faisant varier la conductivité électrique de σ_0 à $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$, les potentiels électriques passent respectivement de φ^I et φ^L à $\varphi^I + \delta\varphi^I$ et $\varphi^L + \delta\varphi^L$. La différence de potentiel mesurée passe de V_0 à $V = V_0 + \delta V$. En prenant seulement les termes du premier ordre, la variation

de potentiel δV pour une variation de conductivité $\delta\sigma$ est :

$$\begin{aligned}
\delta V &= \int_\Omega \delta\sigma(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}(\delta\varphi^I) \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \sigma_0(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}(\delta\varphi^L))\,\mathrm{d}\Omega \\
&= \int_\Omega \delta\sigma(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \delta\varphi^I \sigma_0 \boldsymbol{\nabla}\varphi^L \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_\Gamma \delta\varphi^L \sigma_0 \boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\Gamma \\
&= \int_\Omega \delta\sigma(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega + \sum_{l=1}^{N_{el}} \delta\varphi_l^I I_l^L + \sum_{l=1}^{N_{el}} \delta\varphi_l^L I_l^I \qquad \text{(D.7)}
\end{aligned}$$

Par D.5 et D.6, nous remarquons que les deuxième et troisième termes de droite de D.7 représentent également la variation de tension mesurée δV, car les conditions frontières sont inchangées. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\delta V &= \int_\Omega \delta\sigma(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega + \sum_{l=1}^{N_{el}} \delta\varphi_l^I I_l^L + \sum_{l=1}^{N_{el}} \delta\varphi_l^L I_l^I \\
&= \int_\Omega \delta\sigma(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega + \delta V + \delta V \\
\Rightarrow \delta V &= -\int_\Omega \delta\sigma(\boldsymbol{\nabla}\varphi^I \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi^L)\,\mathrm{d}\Omega \qquad \text{(D.8)}
\end{aligned}$$

ANNEXE E

Figures supplémentaires

Les figures ci-dessous servent à compléter les diverses analyses faites dans ce document.

E.1 Figures supplémentaires du problème : Application de la méthode basée sur le champ acoustique bipolaire

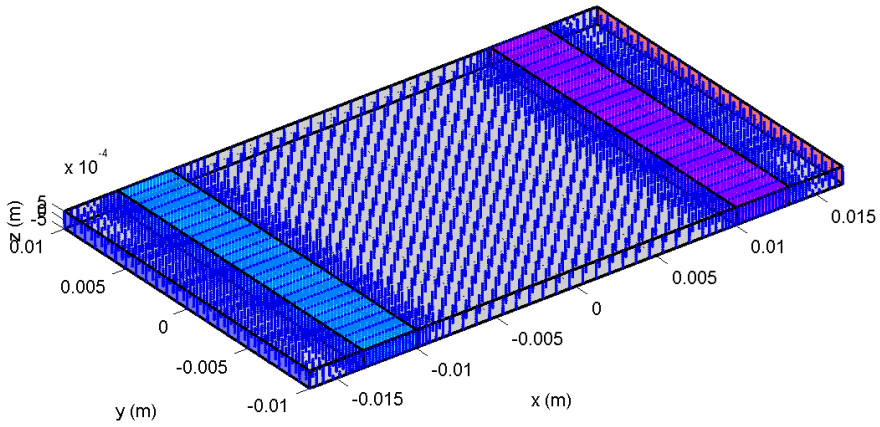

Figure E.1 Distribution de points de la grille électrique. La densité de points près des électrodes est plus grande que dans la partie centrale afin d'obtenir une solution plus précise. Ceci est important principalement près des bords des électrodes de mesure, car la variation de la densité de courant est grande. Cette distribution comporte 24 071 points.

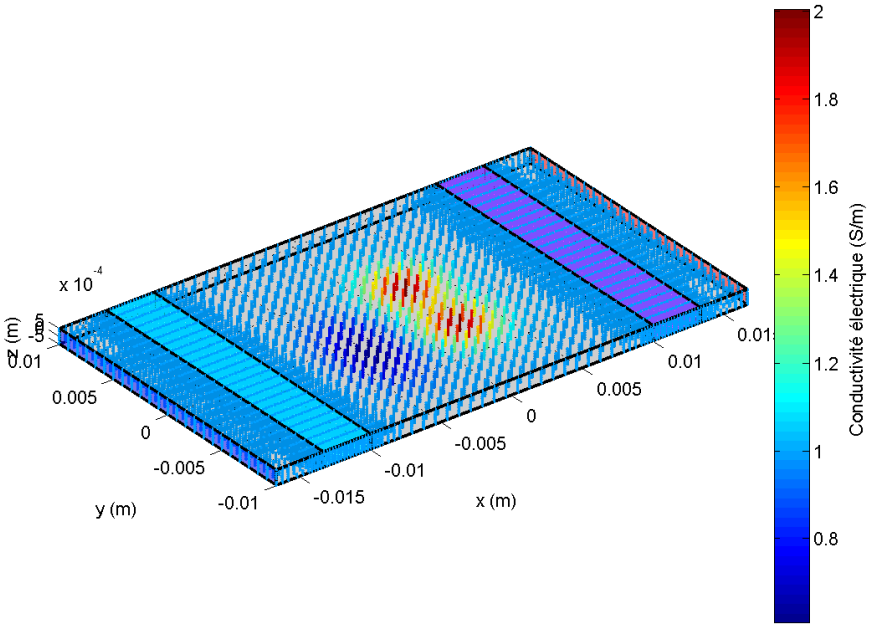

Figure E.2 Distribution de conductivité électrique.

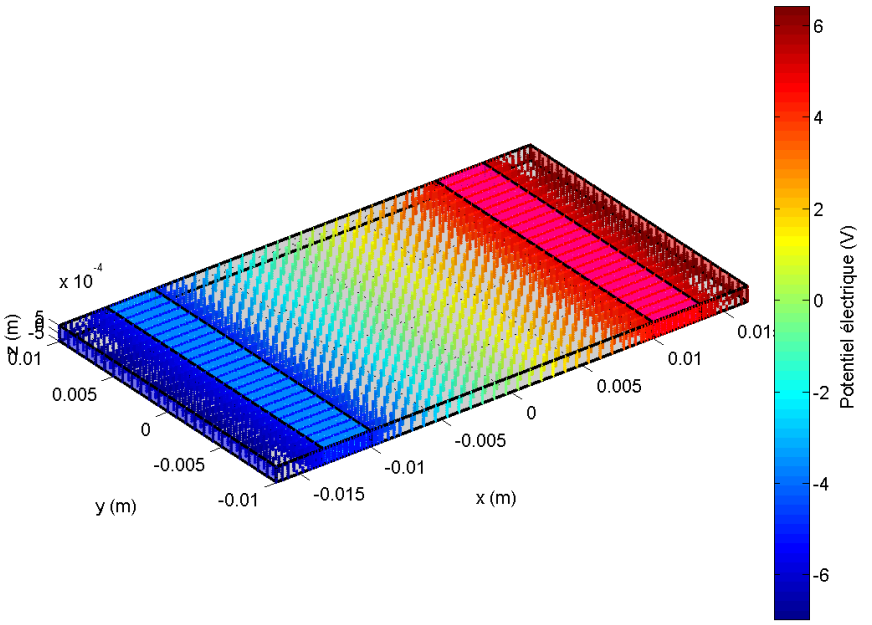

Figure E.3 Solution du problème électrostatique (situation I).

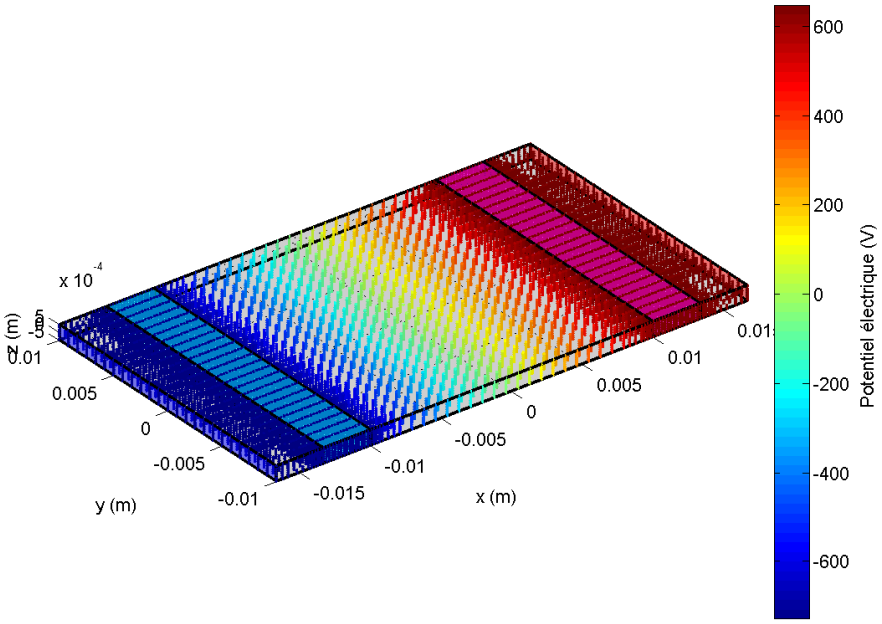

Figure E.4 Solution du problème électrostatique (situation L).

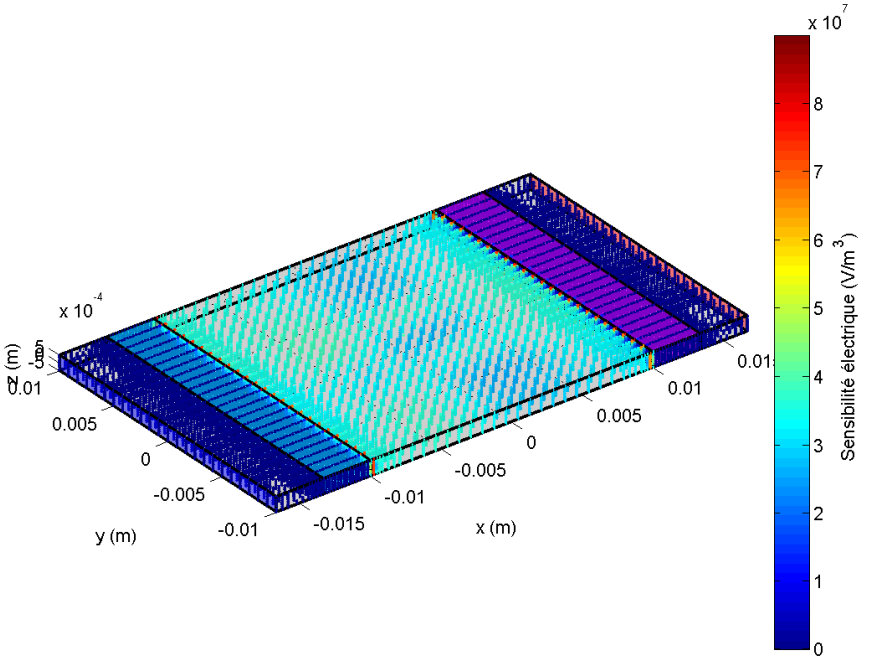

Figure E.5 Sensibilité du problème électrostatique.

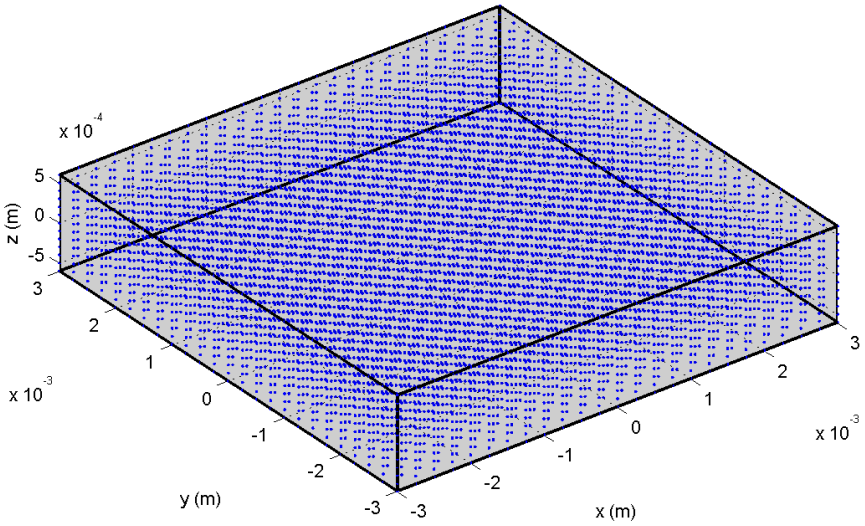

Figure E.6 Distribution de points de la grille acoustique. Son étendue est limitée à la région autour du foyer du transducteur. Elle comporte $25 \times 25 \times 13 = 8125$ points distribués régulièrement. Le pas d'échantillonnage selon x et y est de 0,25 mm. Selon z, ce pas d'échantillonnage est de 0,1 mm. Dans cette direction axiale, puisque la longueur d'onde est de $\frac{1480 \text{ m/s}}{1 \times 10^6 \text{ s}^{-1}} = 1,48$ mm, il y a près de 15 échantillons par cycle.

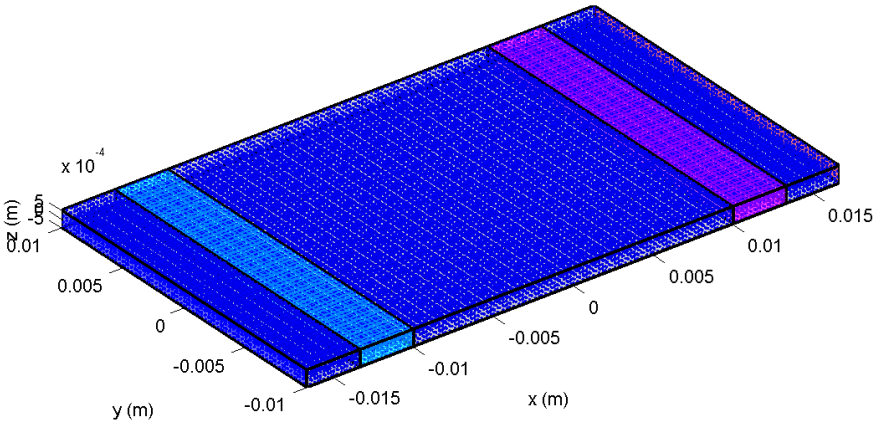

Figure E.7 Distribution de points de la grille d'intégration. Elle comporte 46 080 points.

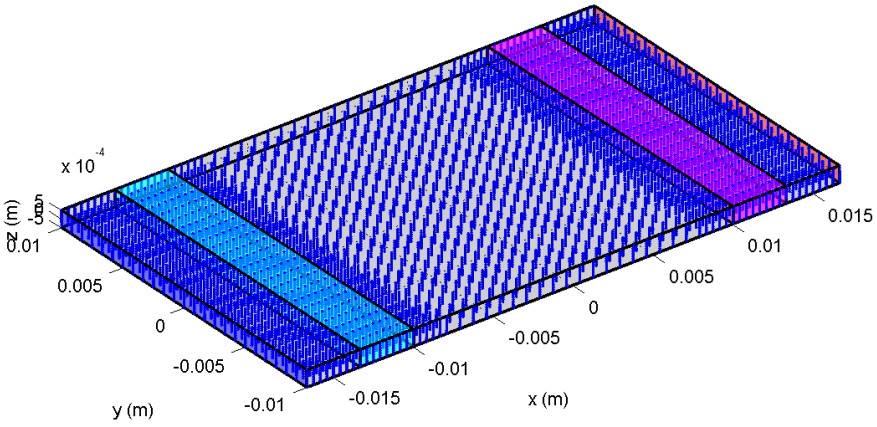

Figure E.8 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction des cas #3 et #4. Comme pour la distribution fine (figure E.1), la densité de points est plus grande près des électrodes. Elle comporte 17 049 points.

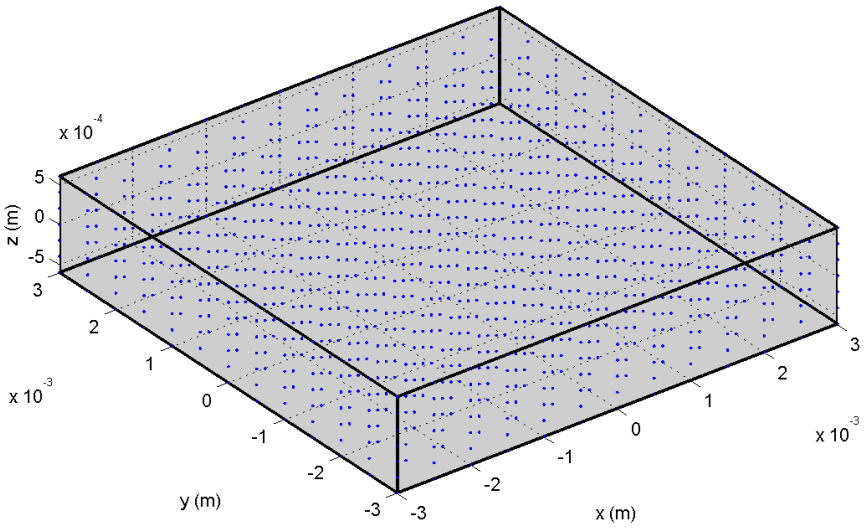

Figure E.9 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction du cas #4. Elle comporte $13 \times 13 \times 7 = 1183$ points distribués régulièrement.

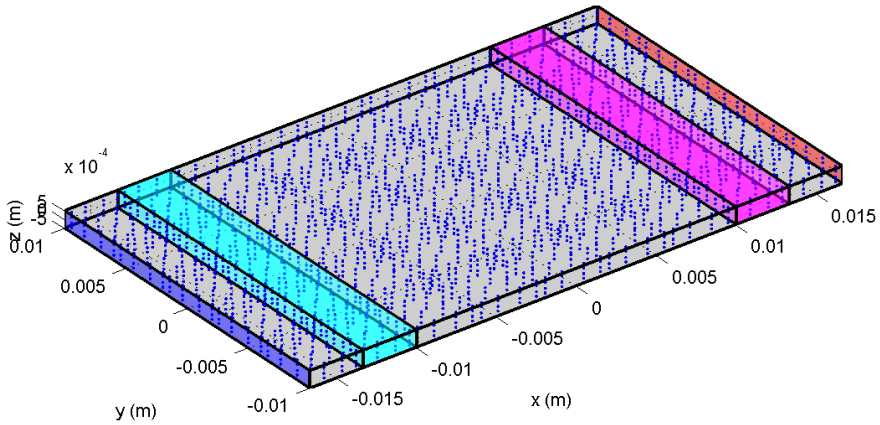

Figure E.10 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction du cas #4. Elle comporte 2880 points.

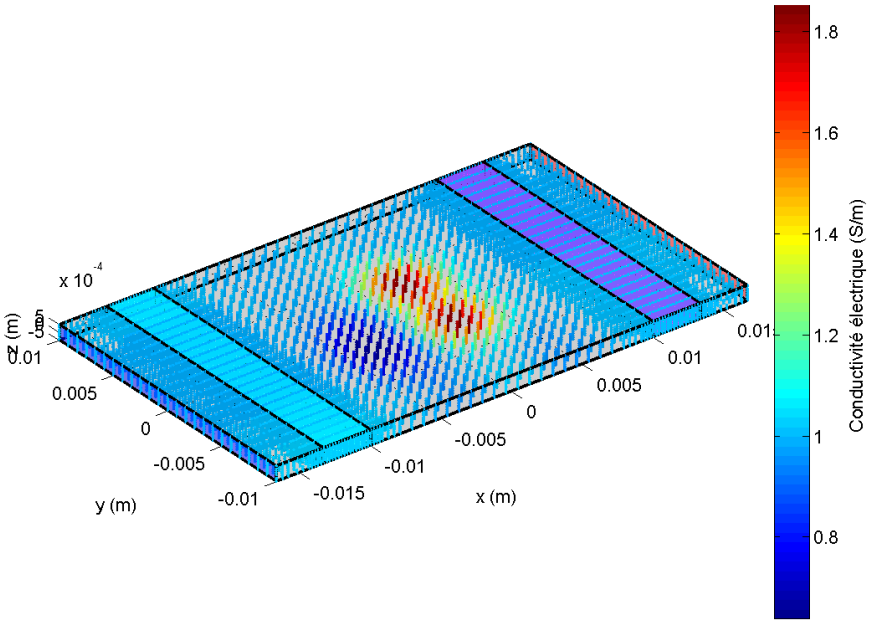

Figure E.11 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #1.

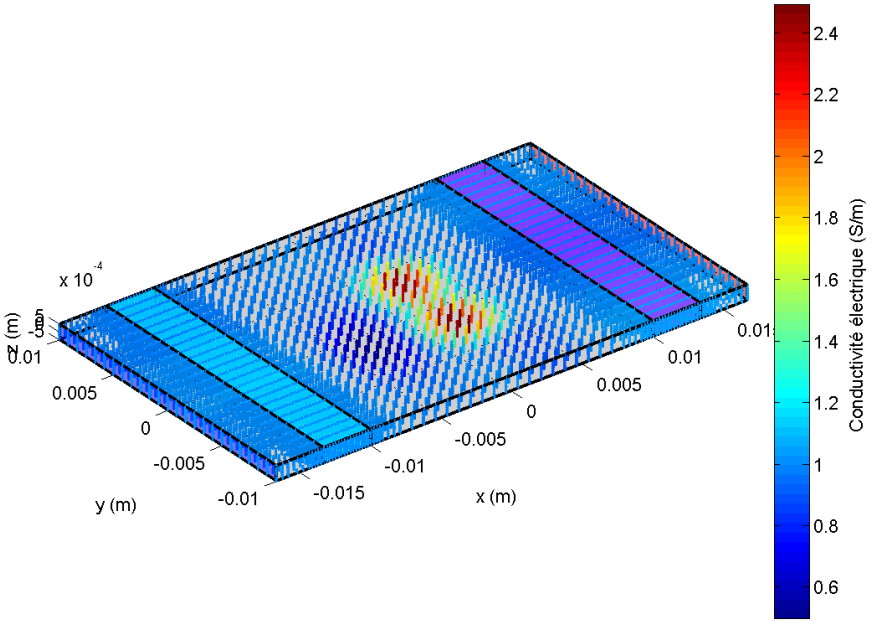

Figure E.12 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #2.

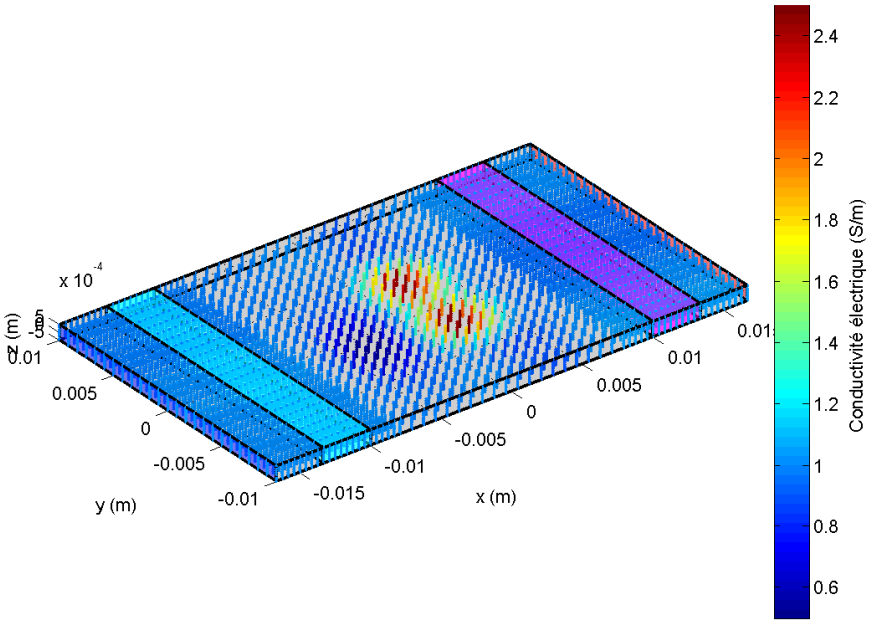

Figure E.13 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #3.

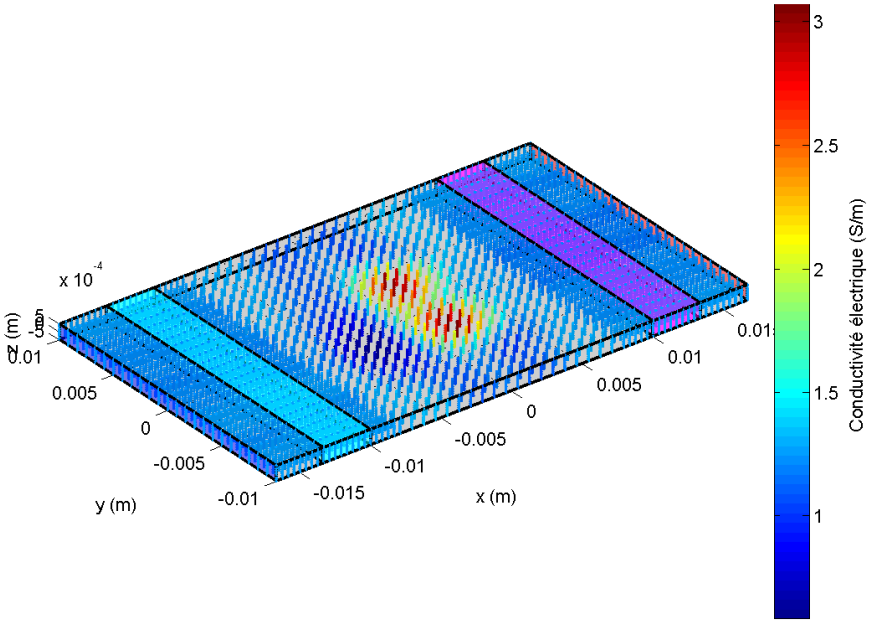

Figure E.14 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #4.

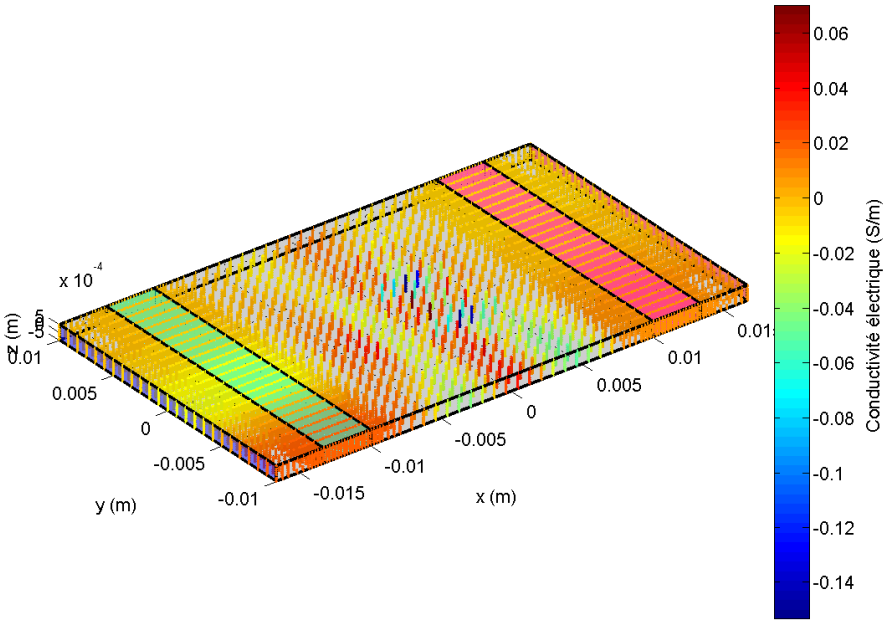

Figure E.15 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #1.

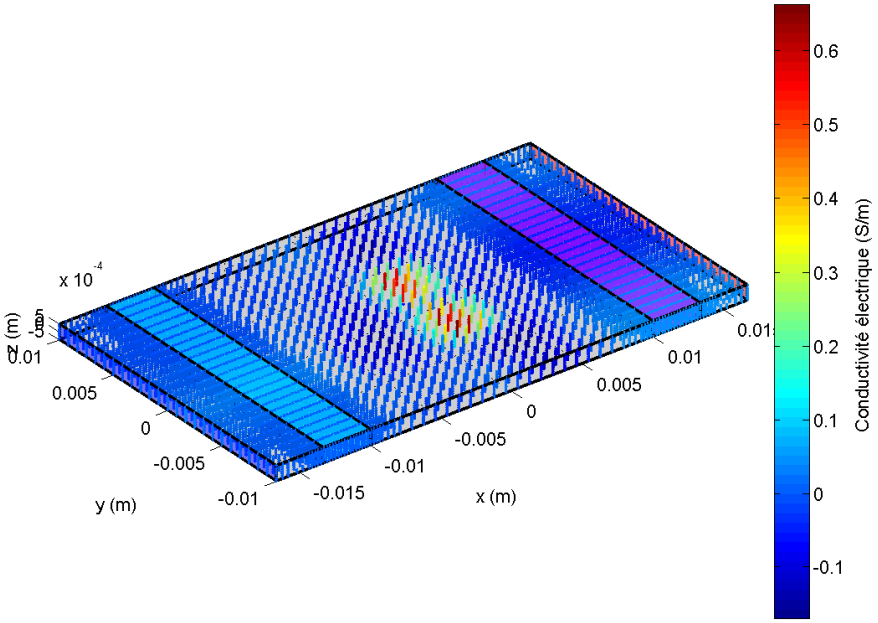

Figure E.16 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #2.

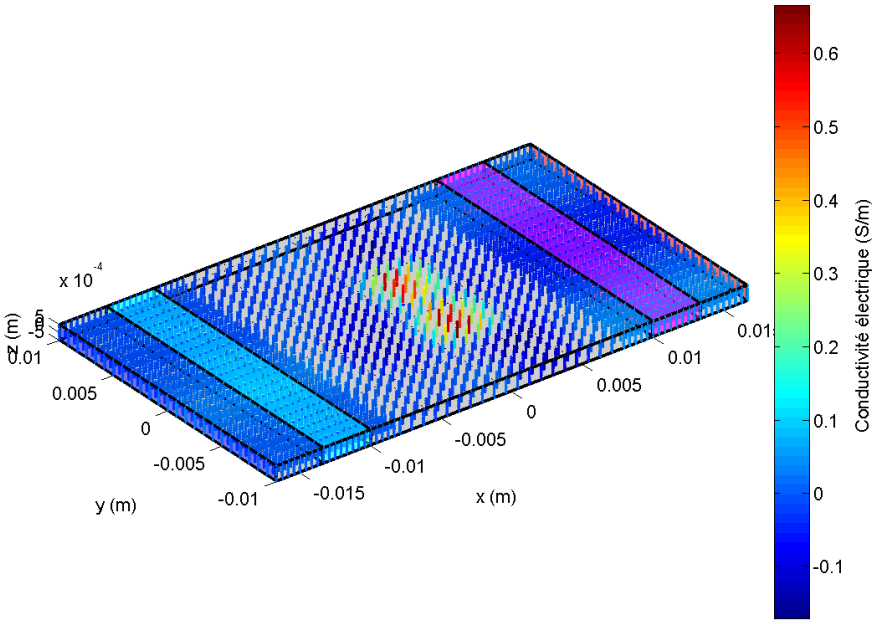

Figure E.17 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #3.

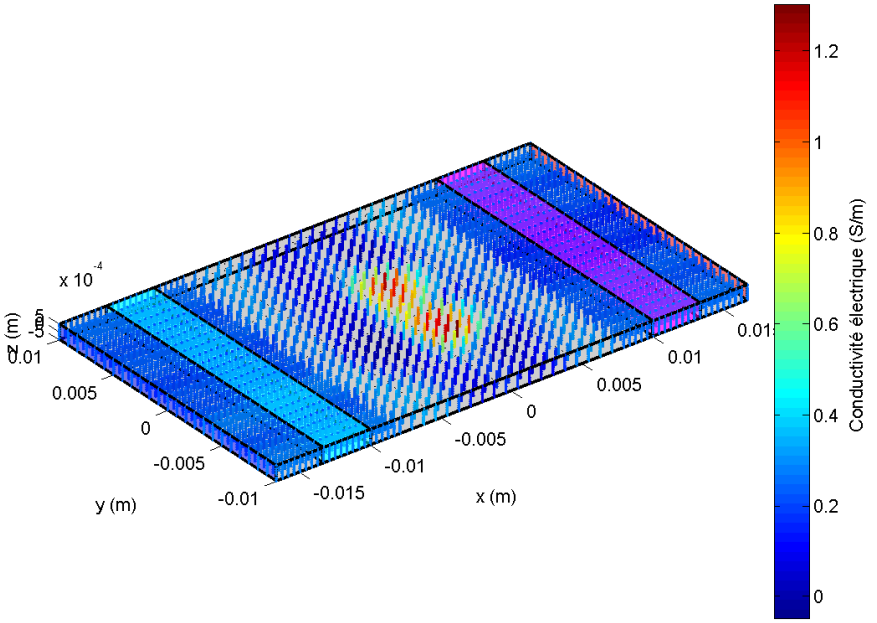

Figure E.18 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #4.

E.2 Figures supplémentaires du problème : Application de la méthode basée sur le champ acoustique unipolaire

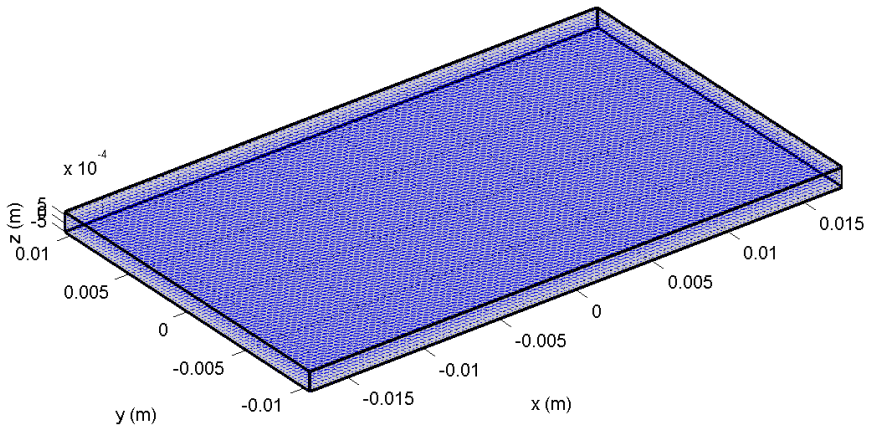

Figure E.19 Grille acoustique. Puisque l'onde acoustique a une amplitude non négligeable sur tout le volume de l'objet insonifié, la grille acoustique couvre tout cet espace. Elle comporte $141 \times 85 \times 7 = 83\ 895$ points distribués régulièrement.

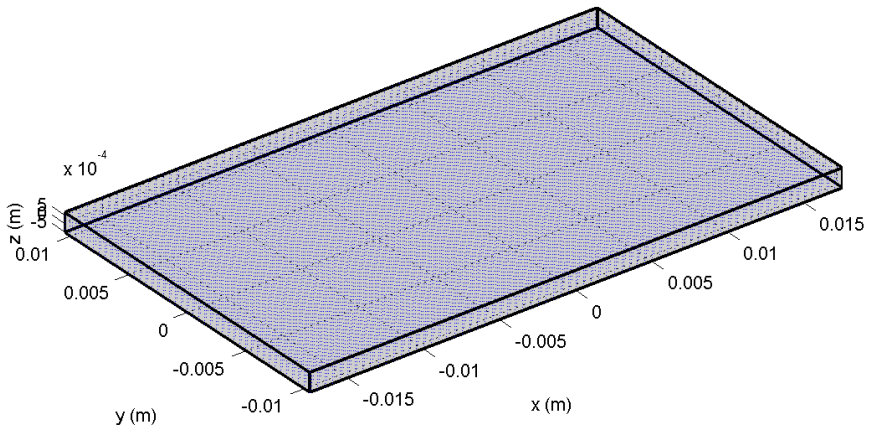

Figure E.20 Grille acoustique grossière pour la reconstruction du cas #2. Elle comporte $71 \times 43 \times 7 = 21\,371$ points distribués régulièrement.

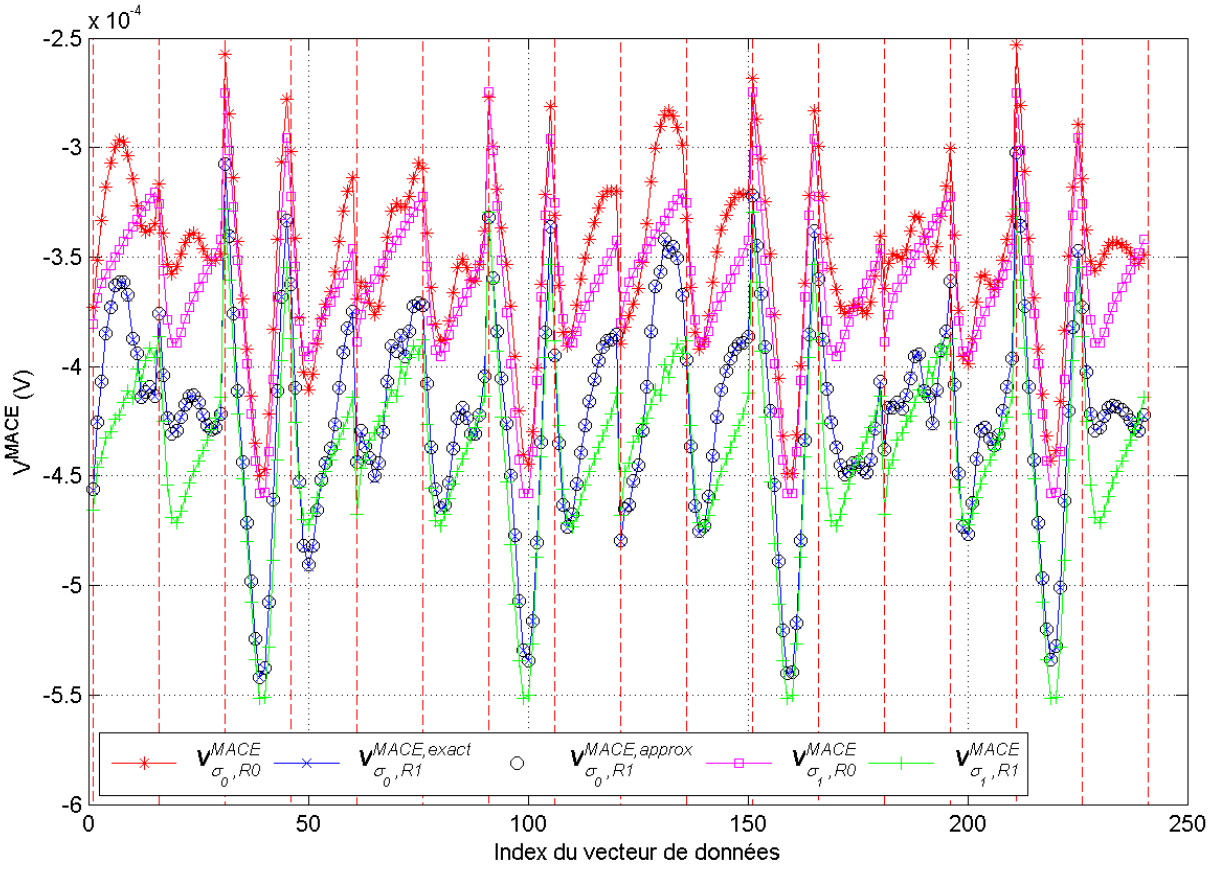

Figure E.21 Vecteurs $\boldsymbol{V}^{MACE}$.

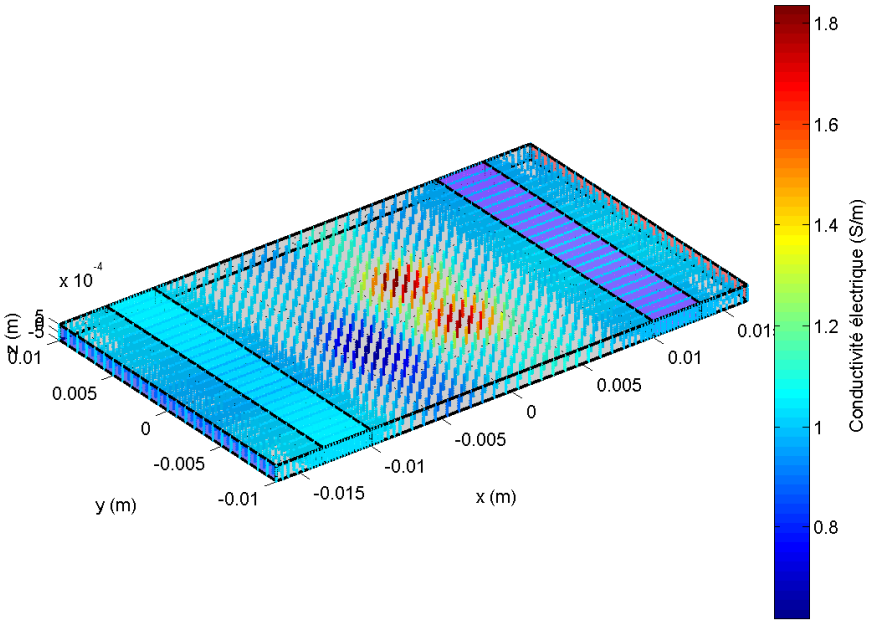

Figure E.22 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #1.

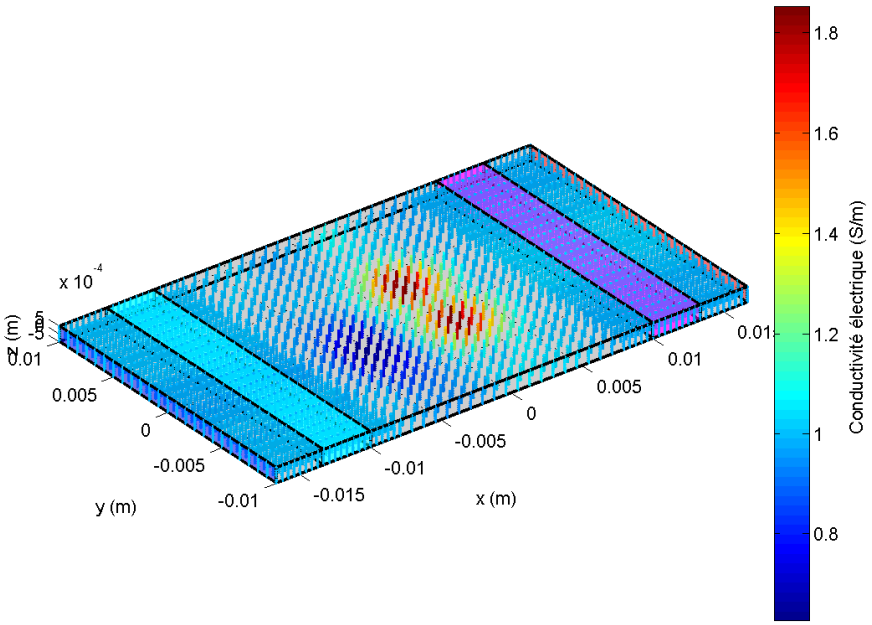

Figure E.23 Valeurs de conductivité électrique reconstruites du cas #2.

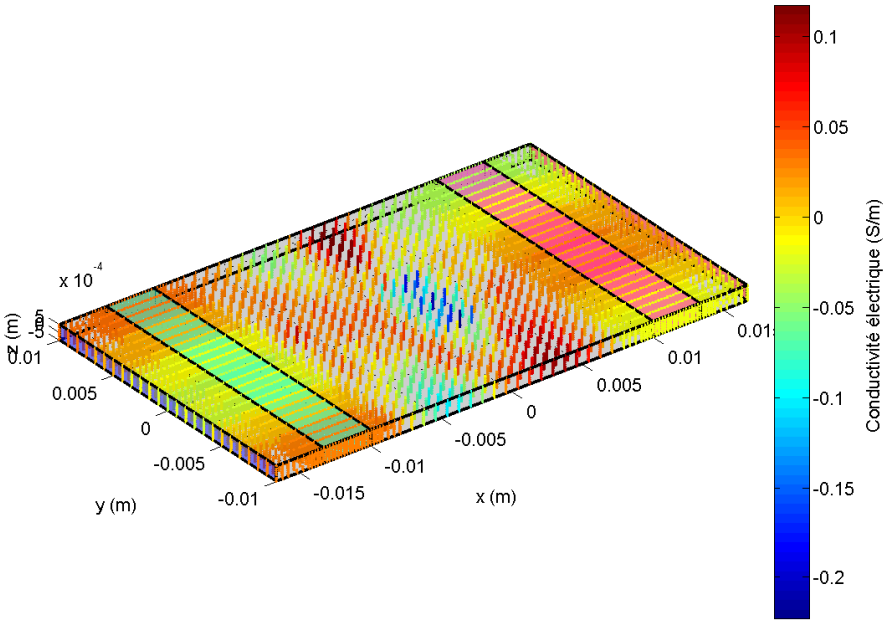

Figure E.24 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #1.

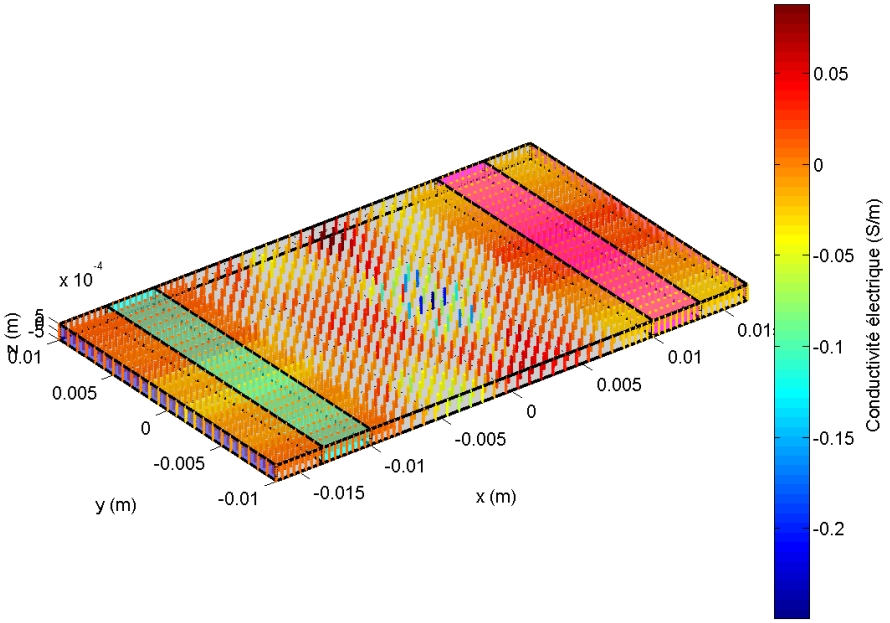

Figure E.25 Erreur entre la conductivité électrique exacte et celle reconstruite du cas #2.

E.3 Figures supplémentaires du problème : Multi-électrodes

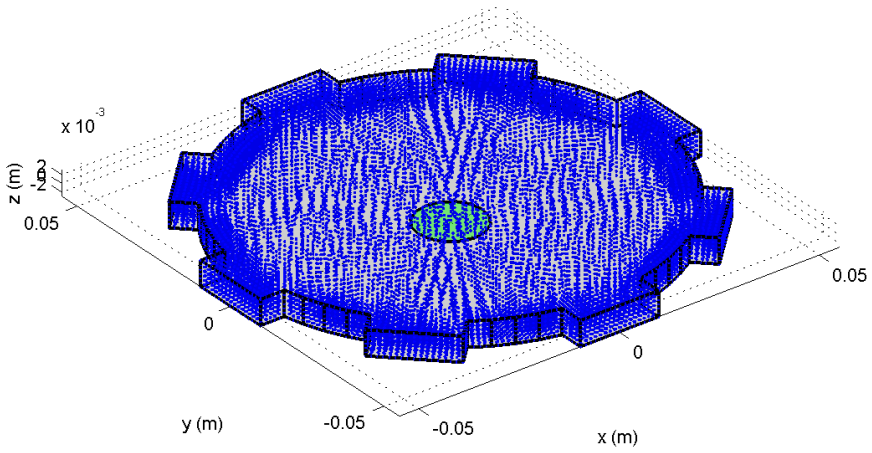

Figure E.26 Distribution de points de la grille électrique. Une densité de points plus grande est utilisée près du pourtour car la densité de courant y varie rapidement. Cette distribution comporte 19 491 points.

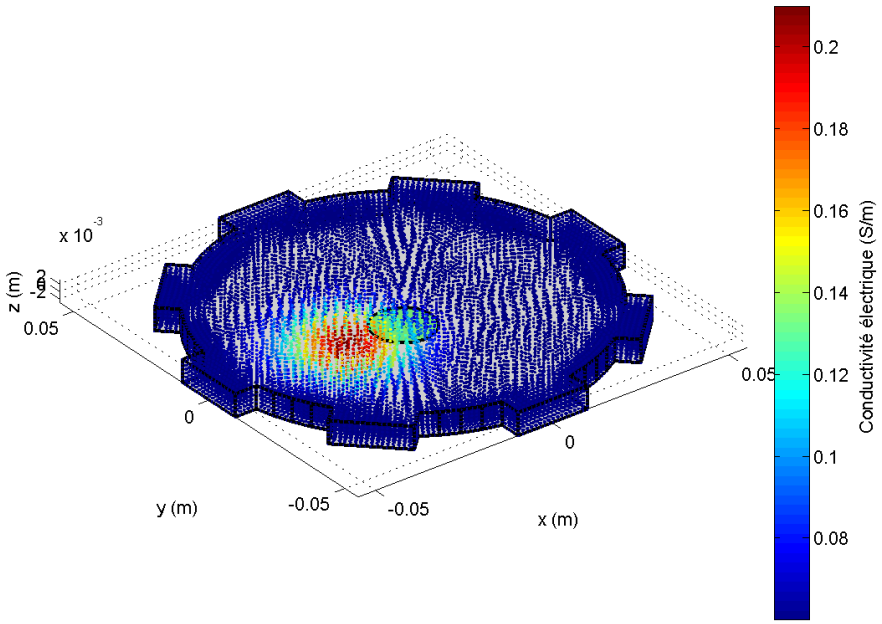

Figure E.27 Distribution de conductivité électrique.

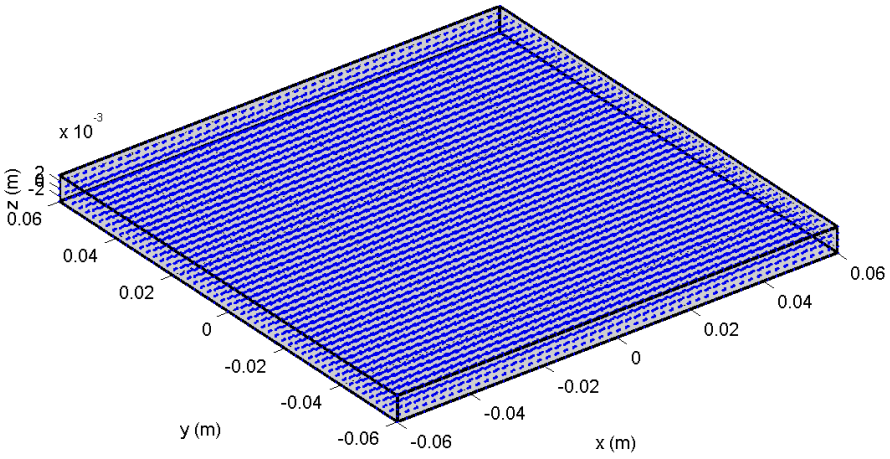

Figure E.28 Distribution de points de la grille acoustique. Elle comporte $51 \times 51 \times 5 = 13\ 005$ points distribués régulièrement.

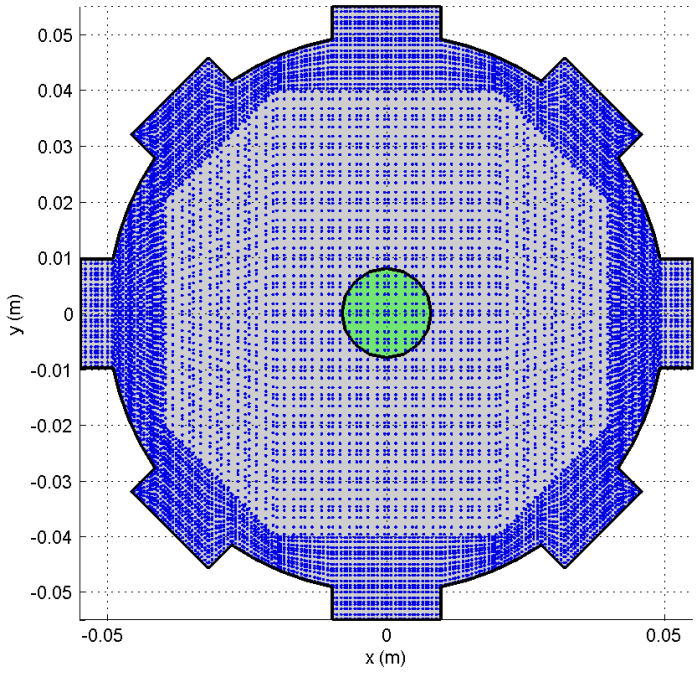

Figure E.29 Distribution de points de la grille d'intégration. Elle est montrée avec une vue du dessus pour mieux observer le patron produit selon le plan xy. Cette distribution 2D est reproduite selon la coordonnée z par 2×4 points de quadrature. Le volume d'intégration a été divisé en deux régions ; la partie centrale (de forme octogonale) a une spécification de distance entre les points plus grande que pour la région près de la bordure. Ceci permet de conserver une grande finesse aux endroits où les variations des fonctions électriques sont rapides, tout en ayant un relativement petit nombre de points d'intégration, soit 108 544 points.

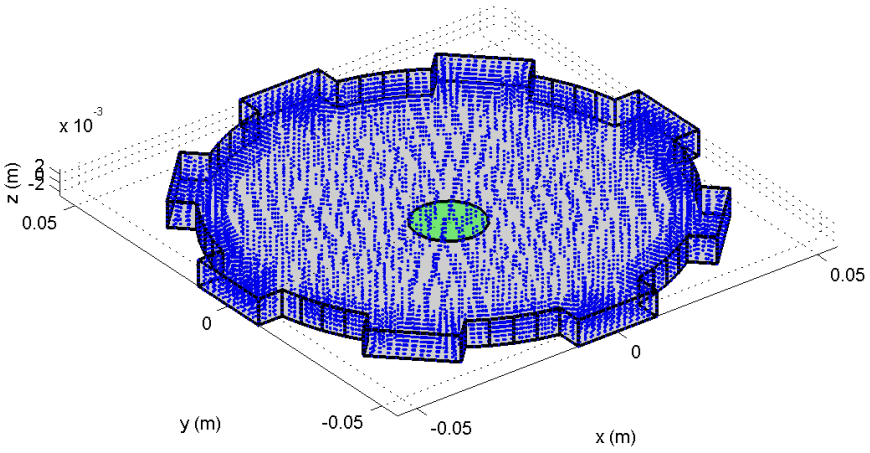

Figure E.30 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction. Elle comporte 10 185 points.

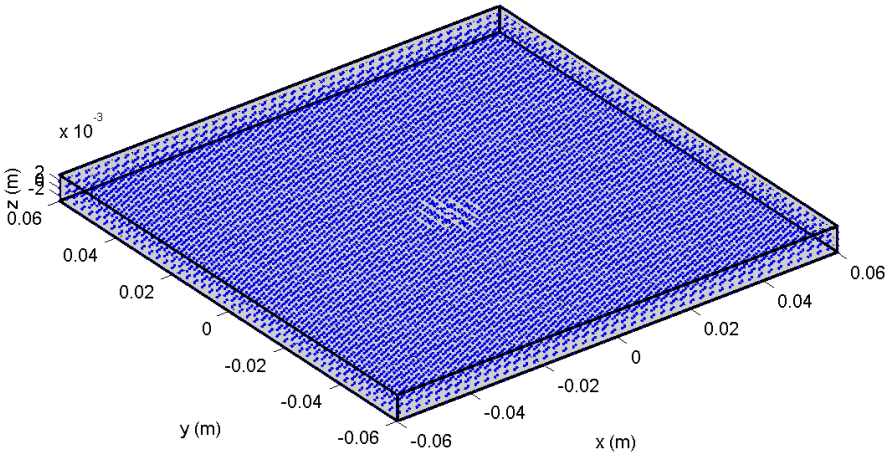

Figure E.31 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction. Elle est construite sur une base régulière de $46 \times 46 \times 5$ points, mais a une petite irrégularité dans la région centrale. Elle comporte 10 563 points.

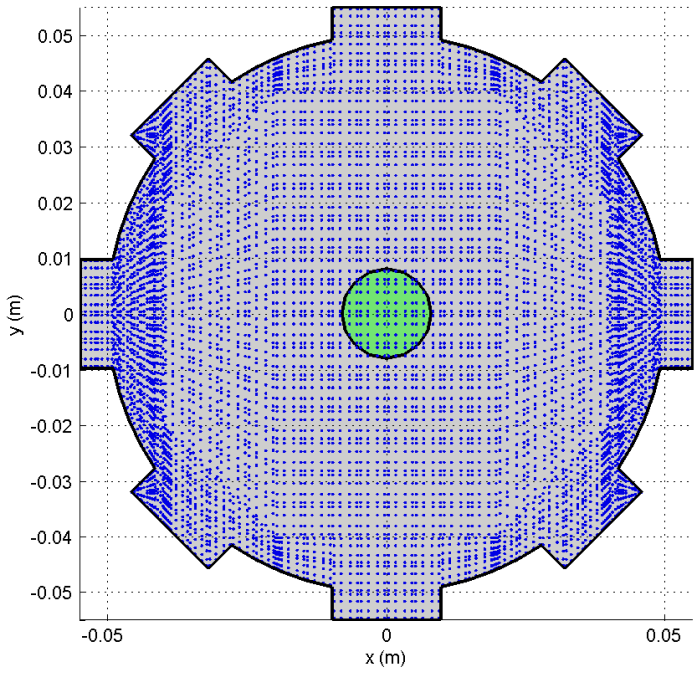

Figure E.32 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction. Cette distribution, vue du dessus, est reproduite selon la coordonnée z par 2×4 points de quadrature. Elle comporte 60 448 points.

E.4 Figures supplémentaires du problème : Volume profond

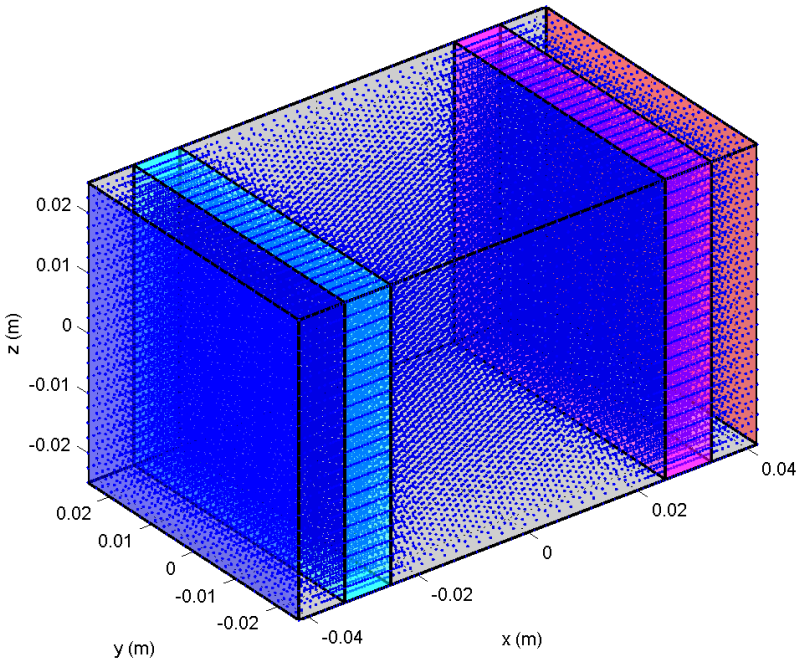

Figure E.33 Distribution de points de la grille électrique. La densité de points est généralement uniforme, mais elle est plus élevée près des électrodes de mesure de potentiel afin de réduire l'erreur numérique à cet endroit, où un fort gradient de potentiel électrique est présent. Cette distribution comporte 45 149 points.

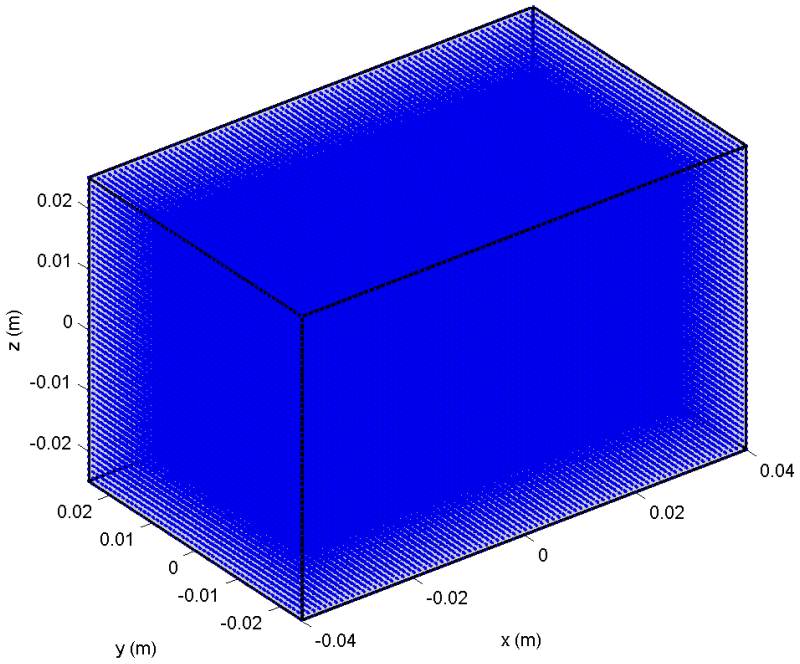

Figure E.34 Distribution de points de la grille acoustique. Cette grille occupe un volume beaucoup plus grand que pour les problèmes précédent car le volume conducteur est très large. Elle comporte $81 \times 51 \times 51 = 210\ 681$ points distribués régulièrement.

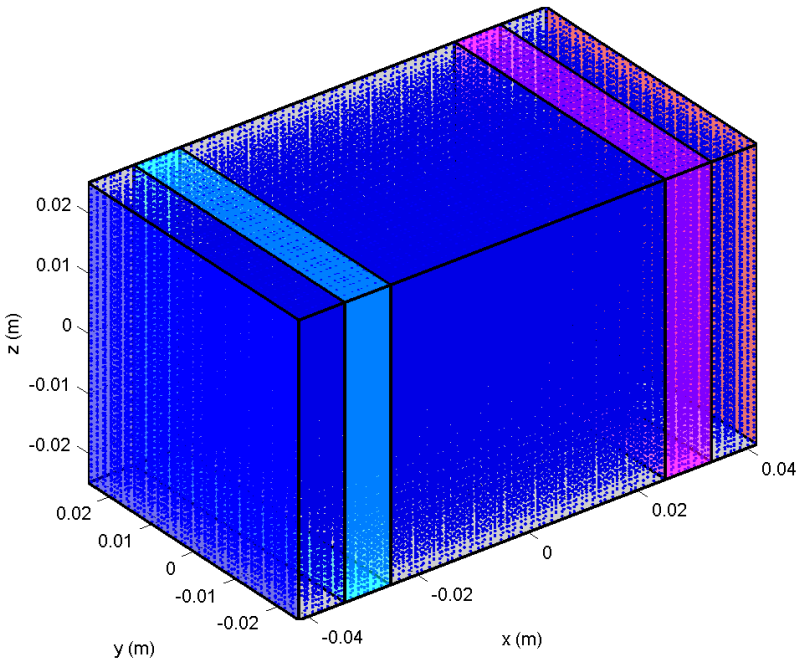

Figure E.35 Distribution de points de la grille d'intégration. Elle comporte 166 464 points.

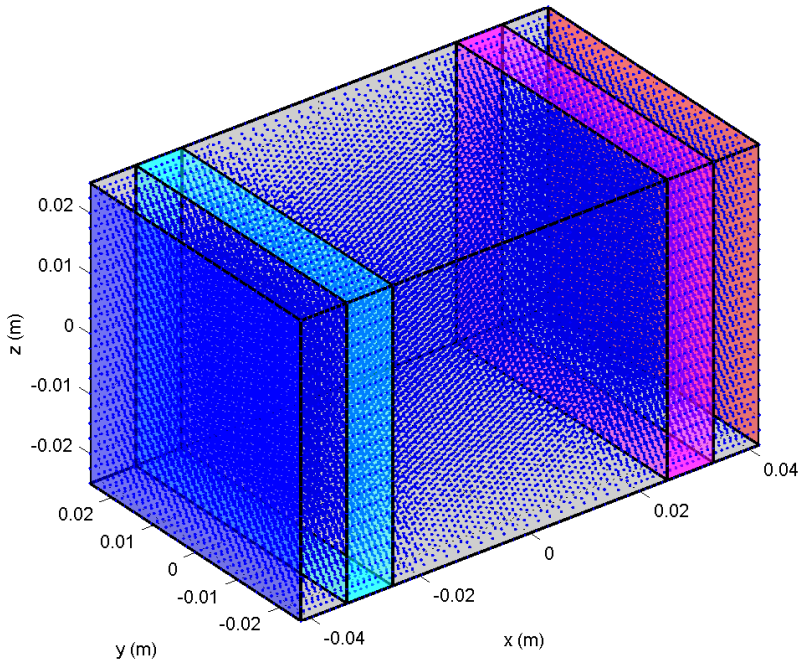

Figure E.36 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction. Elle comporte 32 549 points.

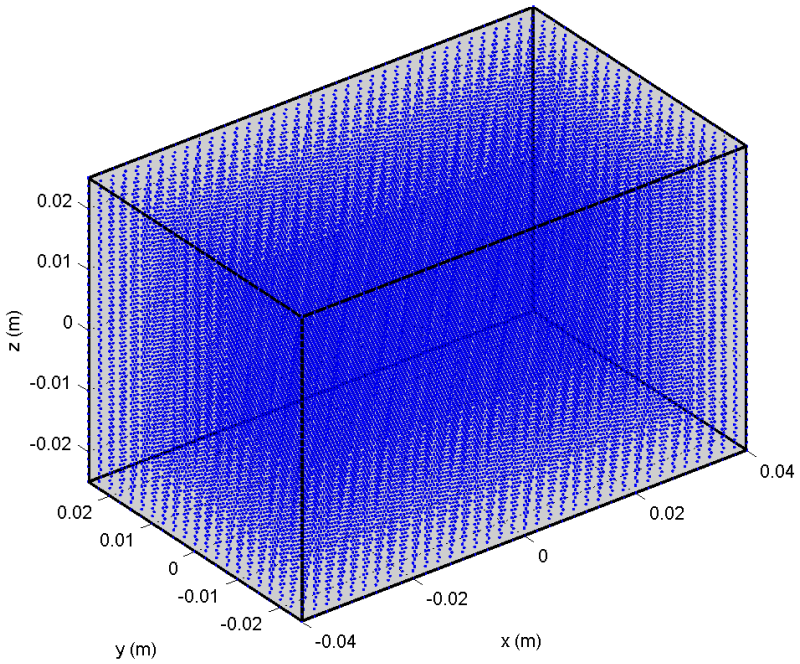

Figure E.37 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction. Elle comporte $37 \times 21 \times 41 = 31\ 857$ points distribués régulièrement.

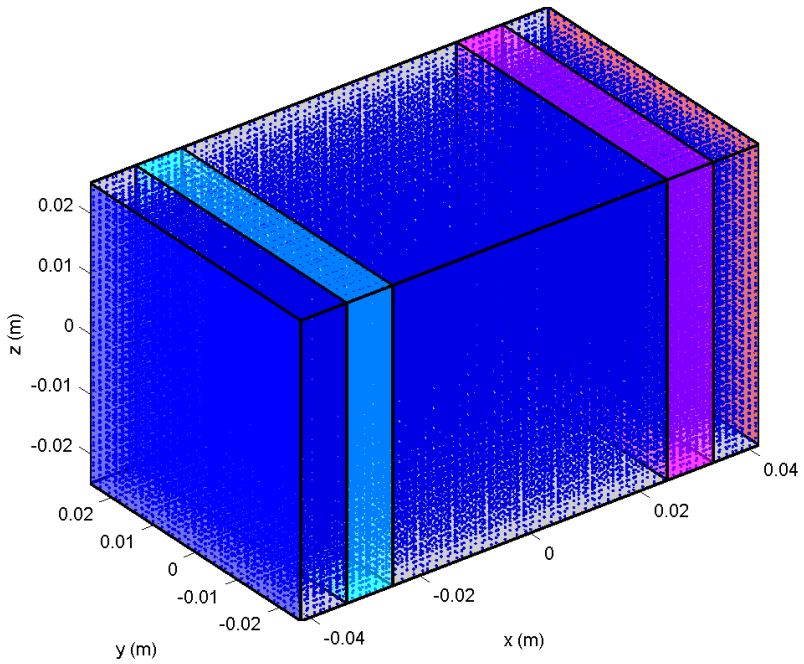

Figure E.38 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction. Elle comporte 122 880 points.

E.5 Figures supplémentaires du problème : Application au cancer du sein

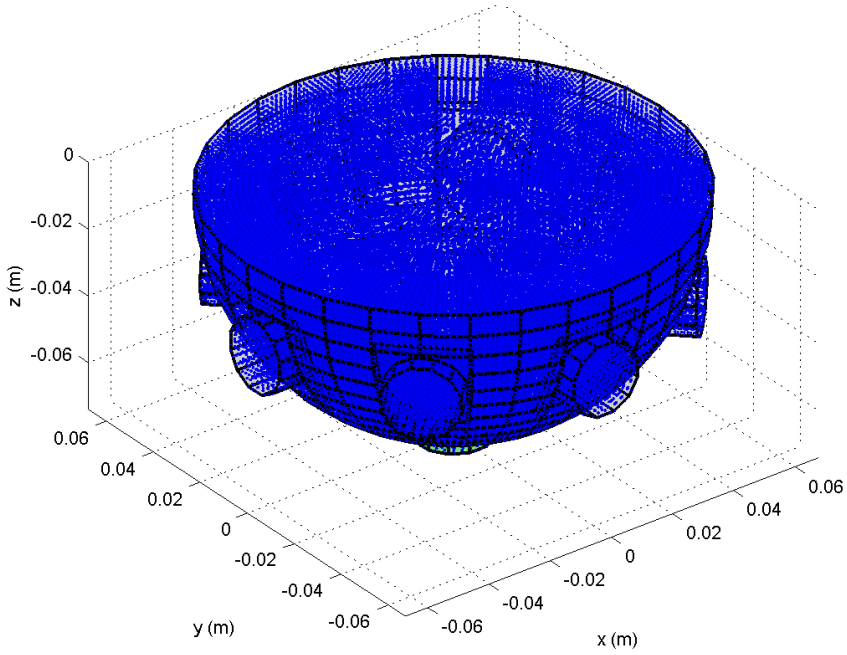

Figure E.39 Distribution de points de la grille électrique. Une densité de points plus grande est donnée près du pourtour car la densité de courant y varie rapidement. Cette distribution comporte 95 654 points.

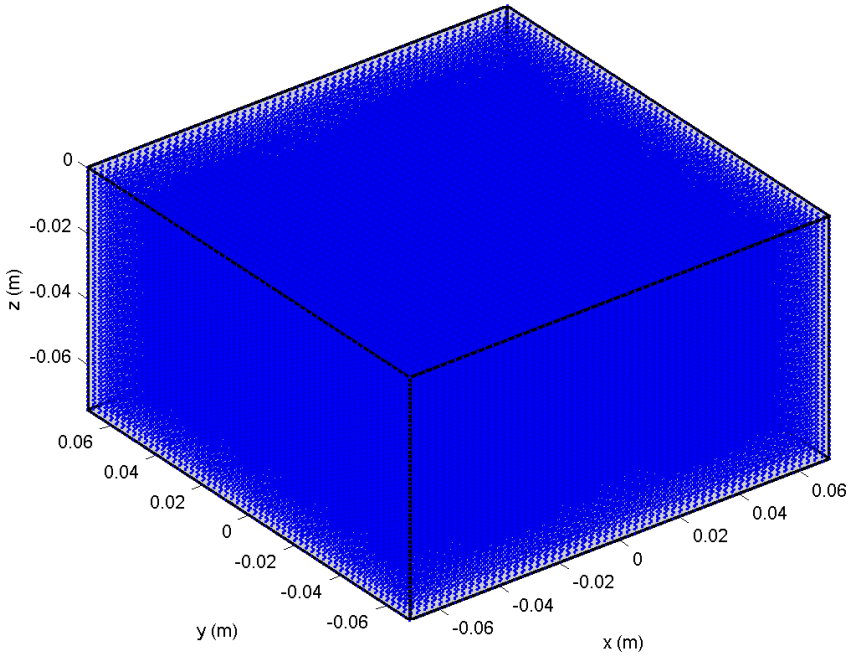

Figure E.40 Distribution de points de la grille acoustique. Elle occupe un volume de $140 \times 140 \times 74$ mm^3 et est centrée en $(0\text{ mm}, 0\text{ mm}, -37\text{ mm})$. Elle comporte $57 \times 57 \times 55 = 178\,695$ points distribués régulièrement.

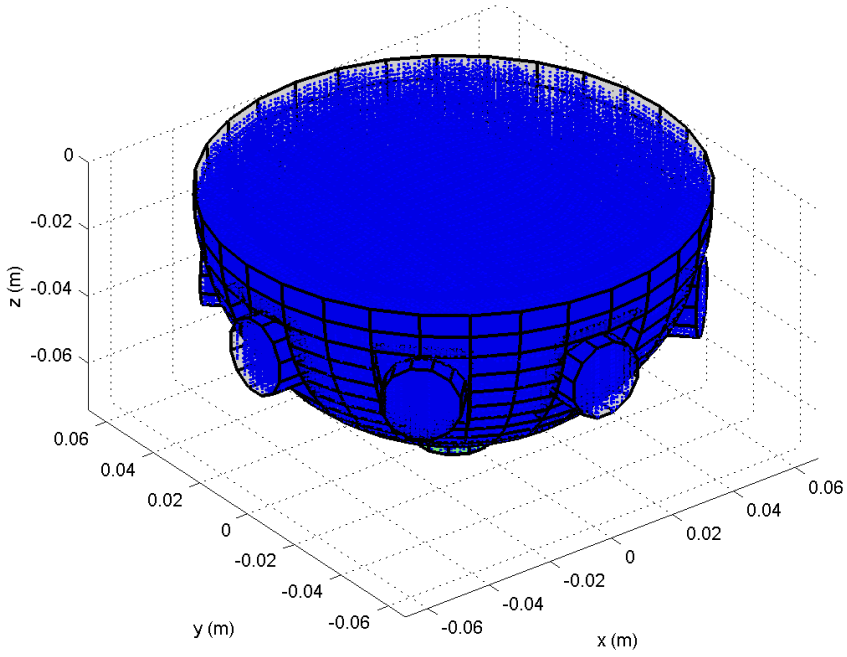

Figure E.41 Distribution de points de la grille d'intégration. Le volume d'intégration a été divisé en trois régions, soit 2 pour couvrir finement la périphérie et 1 pour couvrir plus grossièrement le centre. Cette distribution comporte 184 972 points.

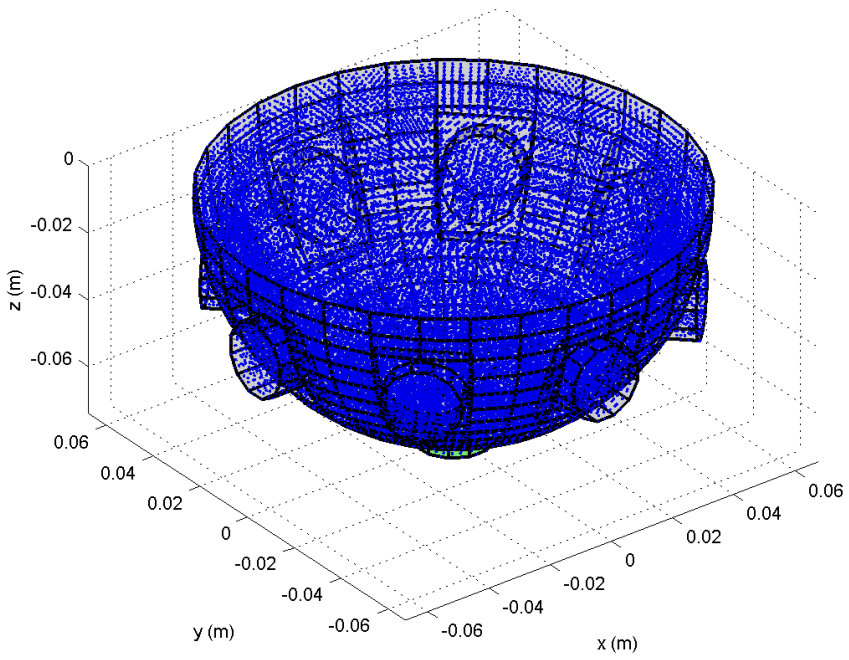

Figure E.42 Distribution de points de la grille électrique grossière pour la reconstruction. Elle comporte 39 432 points.

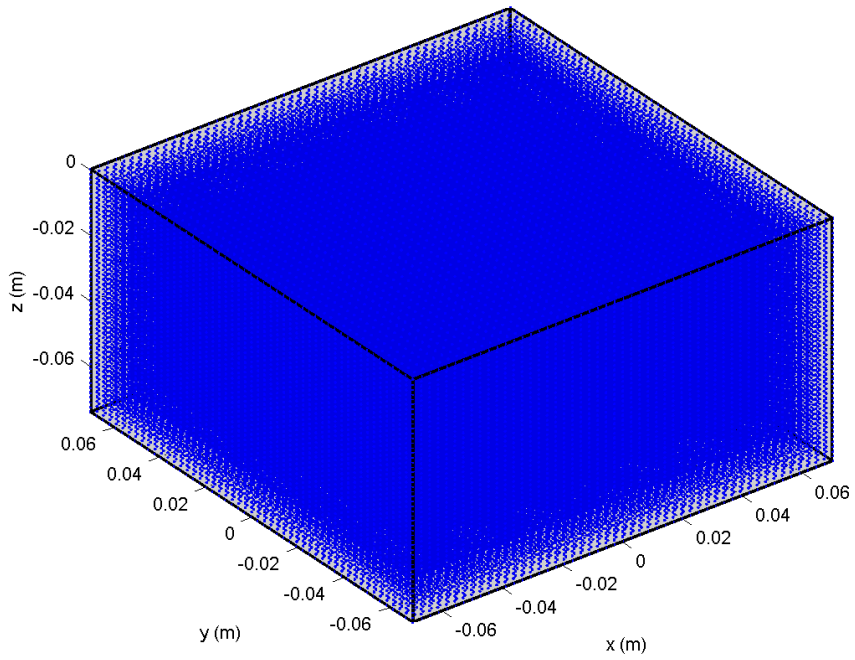

Figure E.43 Distribution de points de la grille acoustique grossière pour la reconstruction. Elle occupe un volume de $140 \times 140 \times 74$ mm^3 et est centrée en $(0\text{ mm}, 0\text{ mm}, -37\text{ mm})$. Elle comporte $51 \times 51 \times 51 = 132\,651$ points distribués régulièrement.

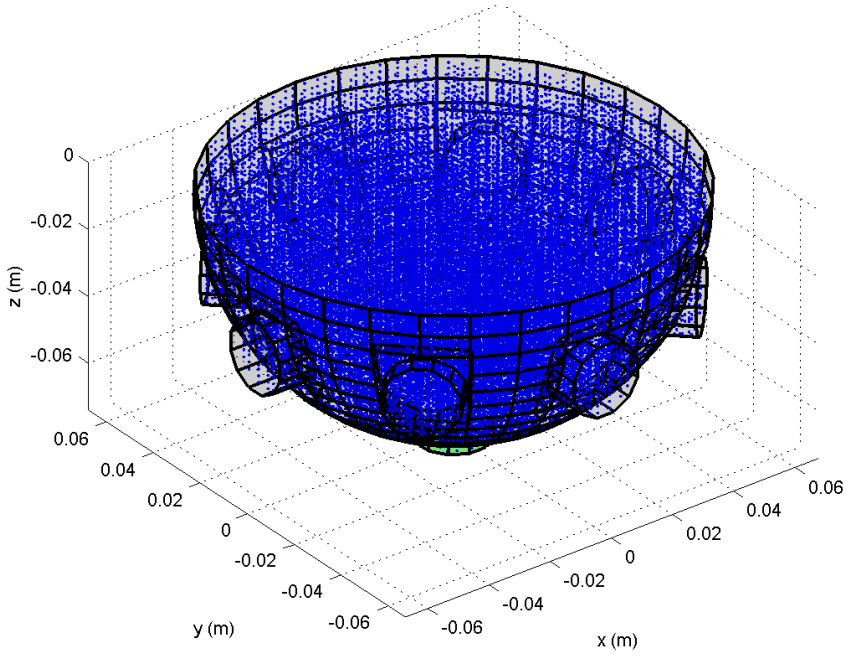

Figure E.44 Distribution de points de la grille d'intégration grossière pour la reconstruction. Le volume d'intégration est divisé selon les mêmes régions que pour le problème direct. Cette distribution comporte 36 765 points.