UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

# INSTABILITÉ DYNAMIQUE
# ET
# RÉSONANCES PARAMÉTRIQUES DE
# PLAQUES GÉOMÉTRIQUEMENT IMPARFAITES

LYNE ST-GEORGES

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

(GÉNIE MÉCANIQUE)

OCTOBRE 1996

© Lyne St-Georges, 1996.

National Library of Canada
Acquisitions and Bibliographic Services
395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale du Canada
Acquisitions et services bibliographiques
395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26519-6

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

# INSTABILITÉ DYNAMIQUE ET RÉSONANCES PARAMÉTRIQUES DE PLAQUES GÉOMÉTRIQUEMENT IMPARFAITES

présenté par: ST-GEORGES Lyne

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. ROUSSELET Jean, Ph.D., président

M. OSTIGUY Germain, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. LAKIS Aouni, Ph.D., membre

*À mes parents*

*pour m'avoir appris que nul effort n'est vain.*

# Remerciements

Je tiens à remercier le Dr. Germain Ostiguy pour avoir accepté d'être mon directeur de recherche et pour m'avoir aidé et soutenu moralement et financièrement tout au long de ce travail. Je veux aussi le remercier pour m'avoir proposé ce sujet de recherche. Celui-ci m'a permis de découvrir de nombreux domaines scientifiques.

En second lieu, je veux remercier tous les membres de la section de mécanique appliquée qui m'ont apporté une aide technique ou qui ont contribué à améliorer mon climat de travail.

En dernier lieu, je me dois de remercier tous les membres de ma famille qui m'ont encouragé à poursuivre mes études et qui m'ont toujours donné un soutient aussi bien technique que moral.

# Résumé

Cet ouvrage porte sur l'influence des imperfections géométriques initiales sur le comportement dynamique de plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique. Son principal objectif est de déterminer les effets des imperfections géométriques initiales sur l'allure des courbes de résonance.

Le modèle étudié consiste en une plaque rectangulaire mince, isotrope, élastique, homogène, avec une légère déviation de l'état plan et excitée dans son plan par des forces uniformément distribuées le long de deux arêtes opposées. De plus, la plaque est libre de contrainte interne lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur elle. Quatre conditions de support sont considérées: (1) les quatres arêtes de la plaque sont simplement supportées, (2) les deux arêtes chargées sont simplement supportées et les deux autres sont encastrées, (3) les deux arêtes chargées sont encastrées et les deux autres sont simplement supportées, (4) les quatres arêtes sont encastrées.

Les équations utilisées pour décrire le mouvement latéral de la plaque sont une version dynamique des équations de von Kármán pour les grandes déformations et incluent la présence d'imperfections géométriques initiales. Ces équations tiennent compte de l'étirement de la surface moyenne mais négligent le cisaillement et l'inertie de rotation.

Une méthode d'intégration directe est utilisée pour solutionner les équations du mouvement. L'intégrateur utilisé est basé sur l'algorithme d'Adams-Bashforth de deuxième ordre. Cet intégrateur permet une convergence rapide vers la solution. Cette méthode de résolution a cependant le désavantage de calculer uniquement la branche stable des courbes de résonance.

Les résultats temporels obtenus montrent que les vibrations sont asymétriques par rapport à la position d'équilibre statique. La plaque se déforme plus du côté intérieur de la courbure, côté pour lequel le mouvement diminue la courbure initiale.

L'étude d'une résonance paramétrique simple révèle que lorsque l'amplitude de l'imperfection devient suffisante, le comportement en ressort dur se transforme en un comportement en ressort mou pour les vibrations de faible amplitude, suivi d'un comportement en ressort dur pour les vibrations de grande amplitude. Le passage d'un type de comportement à l'autre est caractérisé par un phénomène de saut en début de résonance paramétrique. De plus, la présence du comportement en ressort mou est influencé par l'amplitude de l'imperfection, la grandeur du chargement statique, le mode de vibration, le rapport de forme de la plaque et le type de conditions aux frontières.

# Abstract

This work deals with the effects of initial geometric imperfections on the dynamic behaviour of rectangular plates acted upon by a parametric excitation. The main objective is to evaluate the influence of the imperfections on the resonance curve.

The study is performed for a thin plate, isotropic, elastic and homogeneous. This plate is subjected to the action of periodic in-plane forces uniformly distributed along two opposite edges. Moreover, the plate under investigation is initially stress free. Four sets of boundary conditions are considered: (1) all edges are simply supported, (2) loaded edges are simply supported and the other two are clamped, (3) loaded edges are clamped and the other two are simply supported, (4) all edges are clamped.

A dynamic version of the non-linear theory of Von Karman is used to evaluate the lateral displacement of the plate. The temporal equations used include the presence of geometric imperfections and consider mid-plane stretching. However, shear stress and rotational inertia are neglected.

A direct integration method is used to solve temporal equations of movement. This resolution is performed by a second order Adams-Bashforth integrator and

converges rapidly to the solution. However with this method, only the stable part of the resonance curve can be obtained.

The temporal response obtained for parametric vibrations is non symmetric relative to the static position of equilibrium. The predominantly "inward" deflection response (as viewed from the centre of curvature) of an imperfect plate is found.

For a structure with a sufficiently large initial imperfection, the well-known hard-spring behaviour of the principal parametric resonance curve becomes a soft-spring behaviour for small vibration amplitudes. However, for large vibration amplitudes, the curve exhibits the usual hard-spring behaviour. This kind of resonance curve is characterised by a jump phenomenon at the beginning of the parametric resonance. Moreover, the soft-spring behaviour is influenced by the size of the imperfection, the vibration mode, the size of the static force, the aspect ratio of the plate and the boundary conditions.

# Table des matières

DÉDICACE ..... IV

REMERCIEMENTS ..... V

RÉSUMÉ ..... VI

ABSTRACT ..... VIII

TABLE DES MATIÈRES ..... X

LISTE DES TABLEAUX ..... XV

LISTE DES FIGURES ..... XVI

LISTE DES SYMBOLES ..... XXII

LISTE DES ANNEXES ..... XXV

CHAPITRE 1 - INTRODUCTION ..... 1

1.1 - Généralités ..... 1

1.2 - Revue historique et bibliographique ..... 4

1.3 - But et plan de la recherche ..... 14

CHAPITRE 2 - ÉLABORATION DES ÉQUATIONS TEMPORELLES DU MOUVEMENT ... 17

2.1 - Introduction ..... 17

2.2 - Formulation du problème ..... 17

2.3 - Équations de base ..... 19

2.4 - Conditions aux frontières ..... 22

2.4.1 - Conditions naturelles ..... 22

2.4.2 - Conditions géométriques ..... 23

2.5 - Développement des équations de base ..... 25

2.6 - Solution de l'équation de compatibilité et de l'équation du mouvement ..... 29

**CHAPITRE 3 - SOLUTION DES ÉQUATIONS TEMPORELLES DU MOUVEMENT PAR LA MÉTHODE D'INTÉGRATION DIRECTE ..... 33**

3.1 - Introduction ..... 33

3.2 - Méthode de résolution ..... 33

3.2.1 - Calcul des coefficients ..... 33

3.2.2 - Méthode d'intégration ..... 36

3.3 - Forme des résultats obtenus ..... 39

**CHAPITRE 4 - RÉSONANCES PARAMÉTRIQUES PRINCIPALES DES PLAQUES IMPARFAITES ..... 44**

4.1 - Introduction ..... 44

4.2 - Modélisation utilisée ..... 45

4.3 - Description des plaques étudiées et chargement dynamique ..... 45

4.4 - Comportement général ..... 46

4.4.1 - Type de vibration ..... 46

4.4.2 - Forme de la réponse temporelle ..... 51

4.4.3 - Diagramme de phase ..... 53

4.5 - Influence de l'amplitude de l'imperfection ..... 57

4.6 - Influence du chargement statique ..... 57

4.7 - Influence du mode de vibration ..... 68

4.8 - Influence du rapport de forme de la plaque ..... 69

4.9 - Influence du type de conditions aux frontières ..... 71

4.10 - Validation des résultats obtenus ..... 90

4.11 - Conclusion ..... 90

**CHAPITRE 5 - INTERACTION ENTRE RÉSONANCE PARAMÉTRIQUE ET RÉSONANCE FORCÉE ..... 91**

5.1 - Introduction ..... 91

5.2 - Modélisation utilisée ..... 92

5.3 - Résultats et discussion ..... 93

**CHAPITRE 6 - RÉSONANCES INTERNES ET SIMULTANÉES DES PLAQUES IMPARFAITES ..... 109**

6.1 - Introduction ..... 109

6.2 - Rapport de forme optimal pour l'obtention des résonances internes multiples ..... 111

6.2.1 - Calcul des fréquences naturelles ..... 111

6.2.2 - Résonances internes impliquant 2 modes de vibration ..... 112

6.2.2.1 - Premier cas: Résonances internes multiples, une charge statique ..... 114

6.2.2.2 - Deuxième cas: Résonances internes multiples, charges statiques différentes ..... 116

6.2.3 - Résonances internes impliquant 3 modes de vibration ..... 122

6.3 - Modélisation utilisée ..... 126

6.4 - Résultats numériques ..... 128

6.5 - Conclusion ..... 134

**CHAPITRE 7 - INTERACTION ENTRE RÉSONANCE SIMULTANÉE ET RÉSONANCE FORCÉE ..... 135**

7.1 - Introduction ..... 135

7.2 - Application de la méthode asymptotique en première approximation ..... 136

7.2.1 - Réponse cas général ..... 137

7.2.2 - Réponse stationnaire ..... 138

7.3 - Résolution des équations décrivant la réponse stationnaire ..... 141

7.3.1 - Méthode de solution ..... 141

7.3.2 - Résultats obtenus ..... 147

7.4 - Comparaison entre méthode asymptotique et intégration directe ..... 158

7.5 - Conclusion ..... 163

**CHAPITRE 8 - APPROCHE EXPÉRIMENTALE POUR L'ÉTUDE DES PLAQUES GÉOMÉTRIQUEMENT IMPARFAITES ..... 164**

8.1 - Introduction ..... 164

8.2 - Utilisation d'une plaque quelconque ..... 165

8.2.1 - Détermination des coefficients $W_{oi}$ : méthode des moindres carrés ..... 166

8.3 - Modelage de la plaque ..... 170

8.3.1 - Utilisation d'un polymère ..... 171

8.3.2 - Utilisation d'un matériau métallique ..... 174

8.4 - Conclusion ..... 176

**CHAPITRE 9 - CONCLUSIONS ET TRAVAUX FUTURS** ..... **177**

9.1 - Conclusions ..... 177

9.2 - Travaux futurs ..... 179

**RÉFÉRENCES** ..... **180**

# Liste des tableaux

Tableau 3.1 - Description des programmes Fortran utilisés ..... 34

Tableau 4.1 - Influence du rapport de forme sur les déformations statiques et sur la sensibilité des divers modes de vibration aux imperfections ..... 46

Tableau 4.2 - Influence du rapport de forme sur les déformations statiques et sur la sensibilité des divers modes de vibration aux imperfections ..... 70

# Liste des figures

Figure 2.1 - Modèle de la plaque étudiée ..... 18

Figure 3.1 - Procédure de calcul utilisée pour obtenir les coefficients des équations du mouvement ..... 35

Figure 3.2 - Courbes de résonances possibles pour une plaque imparfaite, partie stable et instable et régions d'instabilité paramétrique ..... 41

Figure 3.3 - Allure des réponses fréquentielles obtenues avec l'intégration directe ..... 42

Figure 4.1 - Réponse paramétrique type d'une plaque avec faible imperfection ..... 47

Figure 4.2 - Réponse paramétrique type d'une plaque avec grande imperfection ..... 47

Figure 4.3 - Réponse fréquentielle générale ..... 49

Figure 4.4 - Réponse fréquentielle générale: zones avec long régime transitoire ..... 50

Figure 4.5 - Réponse temporelle d'une plaque imparfaite ..... 51

Figure 4.6 - Représentation physique de la terminologie utilisée pour différencier le sens du mouvement ..... 53

Figure 4.7 - Excitation paramétrique et mouvement latéral de la plaque ..... 54

Figure 4.8 - Résonance forcée et diagramme de phase d'une plaque imparfaite ..... 55

Figure 4.9 - Résonance paramétrique et diagramme de phase d'une plaque imparfaite .. 56

Figure 4.10 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,1, $N_{YO}$=0,5 ..... 58

Figure 4.11 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,2, $N_{YO}$=0,5 ..... 58

Figure 4.12 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,25, $N_{YO}$=0,5 ..... 59

Figure 4.13 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 59

Figure 4.14 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,35, $N_{YO}$=0,5 ..... 60

Figure 4.15 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,3 ..... 61

Figure 4.16 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,4 ..... 61

Figure 4.17 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 62

Figure 4.18 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 62

Figure 4.19 - Résonance paramétrique du 3$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{03}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 63

Figure 4.20 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 64

Figure 4.21 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 64

Figure 4.22 - Résonance paramétrique du 3$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{03}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 65

Figure 4.23 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=3,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 66

Figure 4.24 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=3,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 66

Figure 4.25 - Résonance paramétrique du 3$^{ième}$ mode, R=3,0, $W_{03}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 ..... 67

Figure 4.26 - Graphiques illustrant l'influence du mode de vibration sur le comportement en ressort mou ..... 68

Figure 4.27 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^{c}$S ..... 73

Figure 4.28 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^{c}$E ..... 74

Figure 4.29 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^{c}$S ..... 75

Figure 4.30 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$E ..... 76

Figure 4.31 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$S ..... 77

Figure 4.32 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$E ..... 78

Figure 4.33 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$S ..... 79

Figure 4.34 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$E ..... 80

Figure 4.35 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$S ..... 81

Figure 4.36 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$E ..... 82

Figure 4.37 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$S ..... 83

Figure 4.38 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$E ..... 84

Figure 4.39 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$S ..... 85

Figure 4.40 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$E ..... 86

Figure 4.41 - Résonance paramétrique du 2ième mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque $E^cS$ ..... 87

Figure 4.42 - Résonance paramétrique du 2ième mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque $E^cE$ ..... 88

Figure 4.43 - Effet des imperfections géométriques initiales, résultats tirés de la référence [9] ..... 89

Figure 5.1 - Réponses fréquentielles pour une résonance paramétrique avec des vibrations de grande amplitude ..... 94

Figure 5.2 - Allure du 1er mode de vibration en présence d'une imperfection selon le 3ième mode: $W_{03}$=0,3 ..... 96

Figure 5.3 - Allure du 1er mode de vibration en présence d'une imperfection selon le 2ième mode: $W_{02}$=0,3 ..... 96

Figure 5.4 - Allure du 2ième mode de vibration en présence d'une imperfection selon le 3ième mode: $W_{03}$=0,3 ..... 96

Figure 5.5 - Interaction entre une résonance paramétrique du 1er mode et une résonance forcée du 3ième mode, R=2,1, $W_{03}$=0,3 ..... 99

Figure 5.6 - Interaction entre une résonance paramétrique du 1er mode et une résonance forcée du 3ième mode, R=2,521, $W_{03}$=0,3 ..... 100

Figure 5.7 - Interaction entre une résonance paramétrique du 1er mode et une résonance forcée du 2ième mode, R=1,5, $W_{02}$=0,3 ..... 101

Figure 5.8 - Interaction entre une résonance paramétrique du 2ième mode et une résonance forcée du 3ième mode, R=1,5, $W_{03}$=0,3 ..... 102

Figure 5.9 - Interaction entre une résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R=1,7, $W_{03}$=0,3 ..... 103

Figure 5.10 - Interaction entre une résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R=1,0, $W_{03}$=0,3 ..... 104

Figure 5.11 - Interaction entre une résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R=1,15, $W_{03}$=0,3 ..... 105

Figure 5.12 - Interaction entre une résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R=1,3, $W_{03}$=0,3 ..... 106

Figure 6.1 - Résonances internes, $\Lambda=2\Omega_3$, R=2,425, $W_{01}$=0,2 ..... 130

Figure 6.2 - Résonances internes, $\Lambda=2\Omega_3$, R=2,425, $W_{01}$=0,5 ..... 131

Figure 6.3 - Courbes expérimentales de résonances simultanées, tirées de la référence [9] ..... 133

Figure 7.1 - Algorithme de résolution utilisé pour étudier l'interaction entre résonance simultanée et résonance forcée ..... 145

Figure 7.2 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,05 ..... 149

Figure 7.3 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,12 ..... 150

Figure 7.4 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,2 ..... 151

Figure 7.5 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I2, $W_{02}$=0,05 ..... 152

Figure 7.6 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I2, $W_{02}$=0,1 ..... 153

Figure 7.7 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I3, $W_{02}$=0,2 ..... 154

Figure 7.8 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I4, $W_{02}$=0,15 ..... 155

Figure 7.9 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I5, $W_{02}$=0,2 ..... 156

Figure 7.10 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I6, $W_{02}$=0,1 ..... 157

Figure 7.11 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,05, comparaison entre méthode asymptotique et intégration numérique .... 159

Figure 7.12 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,12, comparaison entre méthode asymptotique et intégration numérique .... 160

Figure 7.13 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,2, comparaison entre méthode asymptotique et intégration numérique ..... 161

# Liste des symboles

| SYMBOLE | DESCRIPTION |
|---|---|
| a | Largeur de la plaque (direction x) |
| b | Longueur de la plaque (direction y) |
| $C_m$ | Coefficient d'amortissement linéaire associé à un mode spatial particulier (1,m) de vibration |
| $C_{ij}$ | Coefficient d'amortissement |
| $d_{kl}$ | Amplitude de la déflexion latérale due à la composante statique du chargement |
| D | Rigidité en flexion de la plaque ( $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ) |
| E | Module d'élasticité de Young |
| $e_v$ | Amplitude des vibrations forcées du mode v |
| f | Fonction de contraintes d'Airy |
| F(X,Y,T) | Fonction de contraintes d'Airy non dimensionnelle |
| $F^*(X,Y)$ | Contribution dans la fonction de contraintes d'Airy due à la composante statique du chargement |
| $F_{mn}$ | Coefficients généralisés de contraintes |
| h | Épaisseur de la plaque |
| $H_v^{lqs}$ | Coefficients de non linéarité définis par l'équation 2.24 |

| | |
|---|---|
| $k$ | Nombre entier |
| $M_v^{lqs}$ | Coefficients de non linéarité |
| $n^*_{pq}$ | Charge critique correspondant au mode pq de flambement |
| $n_y(t)$ | Chargement extérieur dans le plan de la plaque par unité de longueur dans le plan de la plaque |
| $n_{yo}$ | Composante statique du chargement, par unité de longueur |
| $n_{yt}$ | Composante dynamique du chargement par unité de longueur |
| $N_Y(T)$ | Chargement extérieur non dimensionnel dans le plan de la plaque |
| $N_{YO}$ | Composante statique non dimensionnelle du chargement |
| $N_{YT}$ | Composante dynamique non dimensionnelle du chargement |
| $P_{ij}$ | Matrice de chargement |
| $R$ | Rapport de forme de la plaque ($R = b/a$ ) |
| $t$ | Temps réel |
| $T$ | Temps non dimensionnel |
| $w(x,y,t)$ | Déflexion latérale de la surface moyenne dans la direction z |
| $w_o$, $w_{okl}$ | Imperfection géométrique initiale |
| $W(X,Y,T)$ | Déflexion latérale non dimensionnelle dans la direction z |
| $W_o$, $W_{ok}$ | Imperfection géométrique initiale non dimensionnelle |
| $x$, $y$, $z$ | Coordonnées spatiales cartésiennes |
| $X$, $Y$, $Z$ | Coordonnées spatiales non dimensionnelles |
| $X_l$ | Déviation statique totale de l'état plan non dimensionnelle |
| $X_m(X)$, $Y_n(Y)$ | Fonctions propres de poutre données par les équations 2.18 |

| | |
|---|---|
| $\alpha_i$ | Racines de l'équation transcendante 2.20 |
| $\beta_i$ | Constantes données par l'équation 2.19 |
| $\gamma_i$ | Coefficients définis par l'équation 2.19 |
| $\theta$ | Angle de phase de l'excitation harmonique |
| $\Lambda$ | Fréquence d'excitation non dimensionnelle |
| $\lambda(t)$ | Fréquence d'excitation instantanée ( $\lambda = d\theta/dt$ ) |
| $\mu_m^n$ | Paramètre d'excitation |
| $\nu$ | Coefficient de Poisson |
| $\rho$ | Densité de la plaque par unité de volume |
| $\Phi_p(X)$, $\Psi_q(Y)$ | Fonctions propres de poutres données par les équations 2.18 |
| $\Psi_m$ | Angle de phase de la réponse paramétrique |
| $\varphi_m$ | Angle de phase de la réponse forcée |
| $\omega_v$ | Pulsation naturelle du mode v de la plaque parfaite non chargée |
| $\Omega_v$ | Pulsation naturelle du mode v de la plaque parfaite chargée |
| $\bar{\Omega}_v$ | Pulsation naturelle du mode v de la plaque imparfaite chargée |
| $\pi$ | Nombre irrationnel Pi |

# Liste des annexes

**ANNEXE A - PROGRAMMES FORTRAN UTILISÉS ..... 192**

A.1 - Programme INTNUM3DL.FOR ..... 192

A.2 - Programme ISIFOR.FOR ..... 198

A.3 - Programme INTNUM1DL.FOR ..... 203

A.4 - Programme INTNUM2DL.FOR ..... 213

**ANNEXE B - FICHIERS UTILISÉS POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE ..... 225**

B.1 - Système à un degré de liberté ..... 225

B.1.1 - Diagramme fonctionnel ..... 225

B.1.2 - Fichiers TUTSIM ..... 226

B.1.3 - Programme TURBO-PASCAL ..... 226

B.2 - Système à deux degrés de liberté ..... 233

B.2.1 - Diagramme fonctionnel ..... 233

B.2.2 - Fichiers TUTSIM ..... 234

B.2.3 - Programme TURBO-PASCAL ..... 236

B.3 - Système à trois degrés de liberté ..... 245

B.3.1 - Diagramme fonctionnel ..... 245

B.3.2 - Fichiers TUTSIM ..... 247

B.3.3 - Programme TURBO-PASCAL ..... 252

ANNEXE C - PROGRAMMES UTILISÉS POUR DÉTERMINER UN RAPPORT DE FORME OPTIMAL ..... 261

C.1 - Résonance interne impliquant deux modes de vibration ..... 261

C.1.1 - Programme MATLAB principal ..... 261

C.1.2 - Fichier contenant une fonction ..... 265

C.2 - Résonance interne impliquant trois modes de vibration ..... 266

C.2.1 - Programme MATLAB principal ..... 266

C.2.2 - Fichier contenant une fonction ..... 271

ANNEXE D - PROGRAMMES UTILISÉS POUR ÉTUDIER L'INTERACTION ENTRE RÉSONANCE SIMULTANÉE ET RÉSONANCE FORCÉE ..... 272

D.1 - Programme MATLAB principal ..... 272

D.2 - Fichier de données ..... 277

ANNEXE E - PROGRAMMES UTILISÉS POUR MODÉLISER L'IMPERFECTION D'UNE PLAQUE IMPARFAITE ..... 278

E.1 - Programme MATLAB principal ..... 278

E.2 - Fichiers connexes ..... 284

E.2.1 - Fichier contenant une fonction ..... 284

E.2.2 - Fichier de données ..... 284

E.3 - Exemple graphique des résultats obtenus ..... 285

# Chapitre 1

# Introduction

## 1.1 - GÉNÉRALITÉS

Le développement sans cesse croissant de structures plus légères et plus performantes dans des domaines tels que l'aéronautique, l'aérospatiale et autres transports nécessite une bonne compréhension du comportement dynamique des éléments constituant les structures (plaque, coque, ...). Parmi tous les domaines de recherche actuels, beaucoup d'emphase est ainsi mis sur la stabilité dynamique des structures, et plus particulièrement sur le comportement de celles-ci sous des forces d'excitation périodiques. Ce type particulier d'instabilité est connu sous le nom d'instabilité paramétrique ou résonance paramétrique.

Le phénomène d'instabilité paramétrique est caractérisé par une excitation perpendiculaire au mouvement résultant. Pour ce cas précis, l'excitation apparaît mathématiquement dans l'équation du mouvement comme un coefficient dépendant du temps, ou paramètre, d'où le nom d'excitation paramétrique.

Ce type de problème est intéressant du point de vue stabilité car le système ne vibre latéralement que si certaines conditions sont remplies par l'excitation et par le

système mécanique. De plus, le système devient instable pour une charge inférieure à la charge critique de flambage et pour des fréquences d'excitation différentes des fréquences naturelles du système.

Un cas particulier d'instabilité paramétrique est celui d'une plaque rectangulaire chargée dans son plan. La plaque est chargée par une force statique et une force dynamique ( $n_y(t) = n_{yo} + n_{yt} \cos \lambda t$ ), la somme des deux composantes étant toujours inférieure à la charge critique de flambage. Pour certaines régions de l'espace paramétrique ($n_{yo}$, $n_{yt}$, $\lambda$), une instabilité paramétrique se produit et la plaque est animée de vibrations latérales. Ce type de vibration donne lieu à des résonances appelées résonances paramétriques. Ces résonances surviennent lorsque la fréquence d'excitation et les fréquences modales satisfont approximativement la relation suivante:

$$\lambda = \frac{2\Omega}{k} \qquad \text{où} \qquad k = 1,2,3,... \qquad (1.1)$$

Les résonances décrites par l'équation 1.1 sont appelées résonances paramétriques simples. Le terme simple signifie qu'un seul mode est en résonance. De plus, le cas pour lequel $k=1$ est le cas le plus important et est appelé résonance paramétrique principale.

Contrairement aux résonances simples, les résonances simultanées impliquent plus d'un mode de vibration. Elles se produisent lorsqu'une résonance interne survient avec une résonance paramétrique (combinaison d'une résonance paramétrique simple et d'une résonance interne). La caractéristique principale de ce type de résonance est la vibration

du système selon deux ou plusieurs modes naturels, et ce même si un seul de ces modes est directement excité par l'excitation paramétrique.

Les études analytiques traitant des résonances paramétriques principales des plaques parfaites montrent que celles-ci ont un comportement en ressort dur pour l'ensemble de ces résonances. Cependant, certains résultats obtenus d'études expérimentales divergent de ces études analytiques pour des vibrations de faible amplitude. Des études effectuées ont pu expliquer cet écart entre les résultats analytiques et expérimentaux par la présence d'imperfections géométriques.

Aucune structure réelle n'est parfaite. Par conséquent, tout modèle réaliste doit inclure la présence d'imperfections géométriques initiales. Dans les dernières années, un nombre impressionnant d'études traitant de l'influence de ces imperfections sur le comportement dynamique des structures ont vu le jour. Parmi ces études, certaines ont montré que les imperfections géométriques peuvent modifier considérablement le comportement des plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique. La présence d'imperfections fait apparaître des vibrations forcées, même si l'excitation est perpendiculaire au mouvement latéral de la plaque. De plus, on a observé que le comportement global du type "ressort dur" de ces plaques peut être transformé en comportement du type "ressort mou" pour les vibrations de faible amplitude. Cependant, les études visant à déterminer à quelle amplitude cette transition a lieu sont peu nombreuses.

Ce travail porte principalement sur l'effet des imperfections géométriques initiales sur le comportement de plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique. On se propose d'y étudier comment la présence d'imperfections géométriques modifie le comportement de ces plaques et quel est l'influence des vibrations forcées sur les divers types de résonances qui sont rencontrés lorsqu'une plaque est excitée par une excitation paramétrique. Plus particulièrement, nous nous intéresserons aux résonances paramétriques, internes et simultanées. Cette étude se limitera toutefois au cas particulier pour lequel la fréquence d'excitation est fixe (cas stationnaire).

## 1.2 - REVUE HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE

Les équations de von Kármán décrivent depuis longtemps le comportement des plaques planes pour de grandes déformations. Levy [1] a donné une solution exacte de ces équations en employant une double série de Fourier pour exprimer les fonctions de déplacement, de contrainte et de pression normale. La portée de ses travaux a été par la suite élargie par Pai, Lunquist et Batdorf [2] pour traiter les plaques comportant une déviation de l'état plan. L'équation de von Kármán a ainsi été modifiée pour incorporer la présence d'imperfections géométriques initiales. Les équations utilisées dans cet ouvrage sont la version dynamique de ces équations de von Kármán modifiées.

Bolotin [3] fut le premier à étudier la réponse non linéaire des plaques élastiques à une excitation paramétrique (1964). Ses travaux incluent les effets non linéaires engendrés par les forces de membrane, dues aux oscillations de grande amplitude, et les non linéarités dues à l'inertie dans le plan d'une barre de chargement.

Un peu plus tard , Somerset [4] reprit le problème non linéaire amorcé par Bolotin pour y inclure l'effet de l'inertie de la plaque dans son plan. Les travaux expérimentaux de Somerset [5, 6] vérifièrent les prédictions théoriques à l'exception de sauts se produisant dans la région des vibrations paramétriques. Il supposa que ces phénomènes étaient reliés à la présence d'imperfections géométriques. Cette hypothèse fut vérifiée par la suite par Silver [7].

Une étude approfondie et détaillée des plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique a été effectuée par Ostiguy [8]. Ses travaux expérimentaux ont permis une meilleure compréhension des phénomènes reliés à la présence d'imperfections géométriques. Il a montré la présence de vibrations forcées dues aux imperfections et leur influence directe sur le comportement paramétrique des plaques. Il a fait ressortir les interactions possibles entre les vibrations forcées et les vibrations paramétriques. Plus précisément, il a étudié le cas pour lequel une région de résonance forcée chevauche une région de résonance paramétrique. Il a aussi constaté la présence de sauts dans la région d'instabilité paramétrique, qu'il a relié à la présence d'imperfections géométriques.

Samson [9] a poursuivi les travaux expérimentaux de Ostiguy. Il a observé les mêmes phénomènes de sauts pour les résonances paramétriques et pour les résonances combinées. Il a expliqué ces phénomènes par une modification du comportement des plaques imparfaites pour les vibrations paramétriques de faible amplitude. Celles-ci auraient un comportement en ressort mou qui se transformerait en un comportement en ressort dur pour les vibrations de grande amplitude. Dans un autre ouvrage mené en collaboration avec Ostiguy et Nguyen [10], il a observé des résonances combinées non prévues par la théorie. Celles-ci seraient aussi dues à la présence d'imperfections.

Dans les dix dernières années, les travaux portant sur l'influence des imperfections géométriques sur le comportement dynamique de divers éléments structuraux se sont multipliés.

Récemment, l'effet des imperfections géométriques initiales sur la réponse paramétrique d'une plaque a été étudié par Sassi [11, 12]. À l'aide de la méthode asymptotique en première approximation, il a montré l'existence de deux types de comportement (comportement en ressort mou et en ressort dur) pour les résonances paramétriques des plaques imparfaites. La transition d'un comportement à l'autre se traduit physiquement par un phénomène de saut, et dépend de la forme et de l'amplitude de l'imperfection. Il a aussi examiné les interactions entre une résonance forcée et une résonance paramétrique de même qu'entre une résonance forcée et une résonance combinée [13]. Ses travaux ont aussi montré que les imperfections induisent un

couplage entre les modes, ce qui se traduit par des phénomènes de revirement ou de coalescence sur les courbes de variation des fréquences de vibration en fonction de l'amplitude des imperfections.

Les plaques rectangulaires imparfaites ont été étudiées par plusieurs auteurs. Tous s'accordent sur le fait que les fréquences de vibrations sont augmentées en présence d'imperfections géométriques initiales. Selon Celep [14], Bhimaraddi [15, 16] et Liu et Yeh [17], la présence d'imperfections génère un comportement en ressort mou pour des vibrations de faible amplitude et un comportement en ressort dur pour des vibrations de grande amplitude. Ces comportements sont gouvernés par l'amplitude de l'imperfection initiale et le type de conditions frontières.

Hui [18] a confirmé la présence d'un comportement en ressort mou pour les vibrations de faible amplitude des plaques rectangulaires. Il a aussi relevé un autre point intéressant sur les vibrations des plaques imparfaites. Les vibrations de ces plaques sont asymétriques. L'amplitude des vibrations vers le centre de la courbure de l'imperfection est prédominante lorsque le système imparfait est non amorti.

Les vibrations paramétriques d'une plaque rectangulaire laminée comportant des imperfections géométriques a été traité par Birman et Zahed [19]. Contrairement au cas d'une plaque parfaite, une excitation paramétrique impulsionnelle (harmonique) produit un mouvement transversal pour toutes les fréquences d'excitations. Les régions

d'instabilité dynamique telles que définies dans l'analyse des structures parfaites n'existent plus.

Yu, Mostaghel et Fu [20] ont étudié l'influence de divers modes d'imperfection initiale sur le comportement dynamique d'une plaque mince. Pour tous les modes d'imperfection, les fréquences d'oscillation augmentent avec un accroissement de l'amplitude des imperfections. Cet effet est plus marqué lorsque le mode spatial de l'imperfection correspond au mode spatial de vibration ou à un mode similaire à celui-ci.

De nombreux travaux effectués sur les plaques rectangulaires imparfaites ont inclus l'effet du cisaillement transversal. Cependant, Librescu [21] a mis en évidence l'effet du cisaillement sur les fréquences naturelles d'une plaque laminée simplement supportée soumise à un chargement biaxial. Lorsque les charges appliquées sur la plaque sont inférieures à la charge critique, la théorie incluant le cisaillement transversal donne des fréquences naturelles plus faibles que celles où le cisaillement est négligé. Pour un chargement supérieur au chargement critique, la conclusion contraire s'applique.

Celep [14, 22] a étudié l'influence du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation sur le comportement de plaques imparfaites de formes rectangulaire et circulaire. La réponse de ces plaques imparfaites présente un comportement en ressort mou pour des oscillations de faible amplitude et un comportement en ressort dur pour de grandes amplitudes. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation sont plus

prononcés lorsque le comportement du système change, i.e. au point de transition entre le comportement en ressort mou et le comportement en ressort dur.

L'effet des imperfections géométriques initiales sur le comportement d'une coque cylindrique circulaire soumise à une excitation paramétrique a été étudié par Koval'chuk et Krasnopol'skaya [23, 24]. La présence d'imperfections augmente la taille de la région d'instabilité principale et en modifie les frontières. Cette perte de stabilité est constatée pour tous les modes de vibration. De plus, cet élargissement des zones d'instabilité rend possible la transition d'un mode d'instabilité à un autre en variant la fréquence d'excitation.

La théorie utilisée pour l'étude des panneaux cylindriques imparfaits menée par Fu et Chia [25] considère elle aussi le cisaillement transversal et l'inertie de rotation. La présence de ces deux paramètres n'altère pas la nature non linéaire des réponses dynamiques mais dans tous les cas entraîne une diminution des fréquences naturelles de vibration.

L'inertie de rotation et l'inertie dans le plan de la plaque ont été incluses dans l'étude des plaques rectangulaires orthotropes menée par Bhimaraddi [26]. Contrairement aux imperfections initiales, la présence de termes d'inertie non linéaires entraîne une diminution des fréquences naturelles.

Les conditions frontières jouent un rôle important dans le comportement des fréquences naturelles d'une structure imparfaite. Ilanko [27] a démontré que les fréquences naturelles d'une poutre ne sont pas influencées par la présence d'une courbure initiale lorsque celle-ci est libre de se déplacer selon son axe longitudinal. Si la poutre est fixée axialement, l'effet de la courbure sur les fréquences naturelles est alors maximal. Cependant, Ravinger [28] a montré que les fréquences naturelles d'un panneau mince plan sont influencées par les imperfections initiales, et ce même dans le cas où le panneau peut se déplacer selon son axe longitudinal.

Les effets des imperfections géométriques initiales sur les fréquences de vibration des poutres ont aussi été étudiés par Tomski et Kukla [29] et Elishakoff, Bhirman et Singer [30].

Les fréquences fondamentales sont sensibles à la présence de faibles imperfections. Pour certaines géométries de structure, la direction de ces imperfections est une caractéristique importante. Du et Hui [31] ont étudié les panneaux cylindriques en matériaux composites, formés de plusieurs couches de fibres orientées. Lorsque l'imperfection géométrique accroît la courbure du panneau, les fréquences de vibration du panneau imparfait augmentent avec l'amplitude de l'imperfection. Si l'imperfection géométrique réduit la courbure, les fréquences diminuent avec une augmentation de l'amplitude de l'imperfection initiale. Ils ont aussi remarqué un comportement similaire pour les coques cylindriques ovoïdales [32].

Les calottes sphériques sont elles aussi influencées par la direction de l'imperfection initiale. En l'absence de défauts, la réponse fréquentielle de la calotte sphérique en fonction de son amplitude de vibration présente un faible comportement en ressort mou. Xu [33] a constaté que la présence d'une imperfection qui tend à accroître la courbure de la calotte peut modifier la nature non linéaire du système pour un comportement en ressort dur.

Dans son étude sur les coques sphériques, Hui [34] a constaté que la présence d'imperfections peut modifier le comportement général de la réponse dynamique.

Les coques cylindriques en matériau composite ont été traitées par Iu et Chia [35]. La présence d'imperfections asymétriques réduit le degré de non linéarité du système tandis que les imperfections symétriques en modifient le comportement non linéaire. Une imperfection symétrique qui diminue le rayon de courbure de la coque rigidifie le comportement général du système. Dans le cas contraire, le comportement général du système est ramolli.

Byun et Kapania [36] ont pour leur part étudié les coques hyperboliques (e.g. tours de refroidissement). Les imperfections géométriques considérées sont radiales et locales. La position des imperfections selon l'axe longitudinal de la coque influence le comportement dynamique de celle-ci. Au voisinage des imperfections, la réponse dynamique de la coque est considérablement modifiée. De plus, la variation temporelle

des contraintes circonférentielles dépend de la forme de l'imperfection géométrique. Ces effets s'atténuent en s'éloignant des imperfections.

De leur coté, Badalov et Éshmatov [37] ont étudié les plaques rectangulaires et circulaires viscoélastiques imparfaites et reposant sur une fondation élastique. Le comportement d'une plaque rectangulaire en matériaux composites reposant sur une fondation élastique a été traité par Battacharya [38] et celui d'une plaque de forme circulaire par Xu et Chia [39].

La majorité des études qui sont effectuées sur le comportement de plaques et de coques comportant des imperfections géométriques initiales sont basées sur des équations spécifiques à la structure étudiée. Cependant, Wedel-Heinen [40] a développé une théorie générale qui permet d'analyser l'effet de ces imperfections sur les fréquences de vibration de poutres et de coques élastiques non amorties avec un chargement conservatif. Cette théorie est valide pour les vibrations de faible amplitude. Les résultats obtenus pour une coque conique tronquée démontrent que les fréquences des vibrations peuvent être significativement diminuées par la présence d'imperfections géométriques.

Ravinger [28] a étudié l'effet de différentes imperfections sur le comportement d'un panneau plan à paroi mince. Les imperfections considérées sont les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles. Il en ressort que les fréquences des vibrations libres sont très sensibles à ces imperfections initiales. Dans un deuxième article,

Ravinger[41] a effectué une vérification expérimentale de la théorie développée. Dans cette étude expérimentale, un panneau mince est comprimé jusqu'à ce qu'il présente la déflexion désirée. Les contraintes associées à cette déflexion sont calculées et insérées dans le modèle mathématique sous la forme des contraintes résiduelles initiales.

Il existe beaucoup de travaux théoriques traitant des imperfections géométriques, mais rares sont les travaux expérimentaux. Le point critique de ce type d'étude est la mise en forme ou la modélisation de l'imperfection géométrique.

Dans leurs travaux expérimentaux portant sur les vibrations et le comportement après flambage de plaques rectangulaires imparfaites et simplement supportées, Ilanko et Dickinson [42] ont mesuré l'imperfection géométrique des plaques utilisées pour comprendre l'influence des imperfections géométriques sur le comportement dynamique de celles-ci.

De leur côté, Phillips et Jubb [43] ont effectué une étude expérimentale pour déterminer l'influence d'une distorsion latérale sur les fréquences naturelles d'une plaque rectangulaire encastrée. Les plaques utilisées sont pliées à l'aide d'une presse hydraulique de façon à obtenir une déflexion latérale ayant une forme presque sinusoïdale, d'amplitude variable. Cette étude démontre que pour une déflexion latérale ayant une amplitude inférieure à deux fois l'épaisseur de la plaque, les contraintes résiduelles induites par la méthode de façonnage utilisée ont un niveau insuffisant pour avoir une influence

significative sur les fréquences naturelles de la plaque. Cette étude est l'une des rares dans laquelle une tentative de mise en forme de l'imperfection a été effectuée.

### 1.3 - BUT ET PLAN DE LA RECHERCHE

Le principal objectif de ce mémoire est de déterminer l'effet des imperfections géométriques initiales sur le comportement paramétrique des plaques imparfaites. Nous voulons y préciser la présence d'un comportement de ressort mou pour les vibrations de faible amplitude. Ce travail a aussi pour but de déterminer le point de transition entre le comportement de ressort mou et le comportement de ressort dur, de même que l'influence des divers paramètres du système sur celui-ci. Pour cela, les équations du mouvement élaborées par Sassi [13] seront résolues en utilisant une méthode d'intégration directe.

Un autre objectif est d'étudier l'influence des imperfections sur les résonances internes et simultanées et leur interaction possible avec une résonance forcée. Finalement, il est essentiel d'élaborer une méthode pour procéder à une étude expérimentale des plaques imparfaites, dans le but de vérifier ultérieurement les prédictions analytiques.

Pour atteindre tous ces objectifs, ce mémoire est divisé comme suit:

- le chapitre 2 explique comment les équations du mouvement décrivant le comportement des plaques imparfaites sont obtenues et quelles sont les hypothèses limitatrices de la théorie utilisée;

- le chapitre 3 décrit la méthode numérique et la procédure utilisée pour résoudre les équations du mouvement;

- le chapitre 4 traite en détail les résonances paramétriques principales des plaques imparfaites;

- le chapitre 5 porte sur les mécanismes d'interaction entre une résonance paramétrique et une résonance forcée;

- au chapitre 6, les résonances internes et simultanées des plaques imparfaites sont étudiées;

- le chapitre 7 présente les interactions possibles entre une résonance simultanée et une résonance forcée;

- le chapitre 8 propose un méthode expérimentale pour étudier le comportement des plaques imparfaites et valider les résultats analytiques obtenus;

- finalement, le chapitre 9 présente les principales conclusions tirées de ce mémoire, tout en y précisant ses lacunes et les développements qui devraient suivre.

# Chapitre 2

# Élaboration des équations temporelles du mouvement

## 2.1 - INTRODUCTION

Ce chapitre résume les étapes utilisées pour modéliser et dériver l'équation temporelle du mouvement caractérisant les vibrations latérales des plaques rectangulaires minces avec imperfections géométriques initiales sous l'action d'une excitation périodique axiale. Ce qui est présenté dans ce chapitre n'est qu'un bref résumé du développement complet effectué par Sassi [13].

## 2.2 - FORMULATION DU PROBLÈME

Le modèle physique analysé consiste en une plaque rectangulaire imparfaite, mince, d'épaisseur uniforme, élastique, homogène, isotrope et excitée dans son plan idéal (correspondant à la plaque parfaite) par une charge périodique et une charge statique uniformément distribuées. Ce modèle est illustré à la figure 2.1.

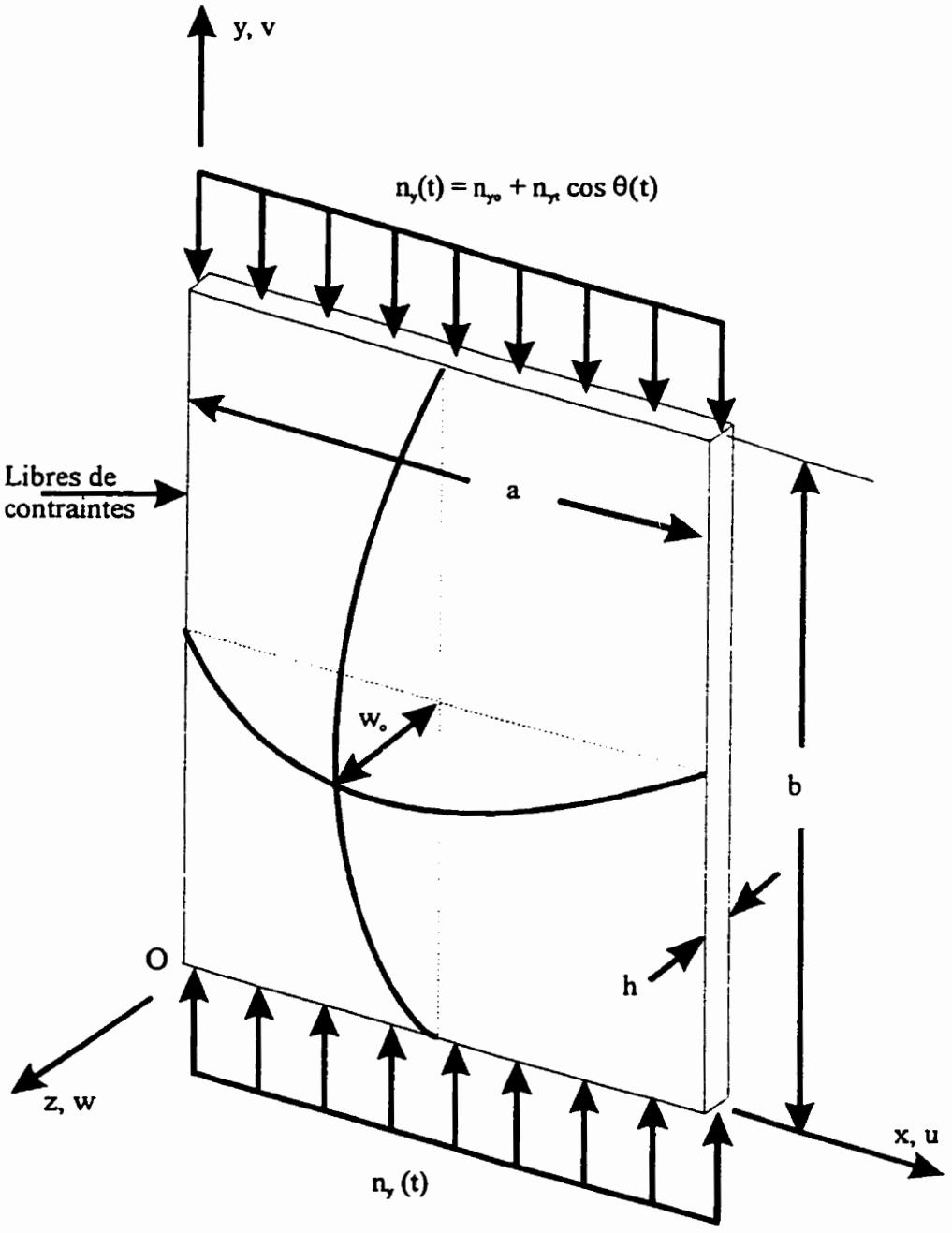



Figure 2.1 - Modèle de la plaque étudiée

L'origine du système de coordonnées est choisie au coin inférieur gauche du plan médian de la plaque non déformée. La largeur de la plaque est dans la direction $Ox$ et est notée $a$, sa longueur $b$ est dans la direction $Oy$ et son épaisseur $h$ est dans la direction $Oz$.

## 2.3 - ÉQUATIONS DE BASE

L'analyse est basée sur les équations non-linéaires correspondant à la version dynamique des équations de von Kármán pour le cas des grandes déformations. Elle tient compte de l'étirement de la surface moyenne et des imperfections géométriques initiales de la plaque ($W_o$). Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation sont toutefois négligés.

Le déplacement latéral d'une plaque imparfaite peut être exprimé à l'aide de deux équations de base. Ces équations sont les suivantes:

- Équation de compatibilité:

$$f_{,xxxx}+2f_{,xxyy}+f_{,yyyy}=E\left[(w+w_o)_{,xy}^{2}-w_{o,xy}^{2}-(w+w_o)_{,xx}(w+w_o)_{,yy}+w_{o,xx}\cdot w_{o,yy}\right] \quad (2.1)$$

- Équation d'équilibre:

$$w_{,xxxx}+2w_{,xxyy}+w_{,yyyy}=\frac{h}{D}\left[f_{,yy}(w+w_o)_{,xx}-2f_{,xy}(w+w_o)_{,xy}+f_{,xx}(w+w_o)_{,yy}-\rho w_{,tt}\right] \quad (2.2)$$

où les indices placés après la virgule représentent des dérivées partielles par rapport à ces indices, et pour lesquelles

$w(x,y,t)$ : déplacement latéral de la plaque

$w_0(x,y)$ : imperfection géométrique initiale

$f(x,y,t)$ : fonction de contrainte d'Airy

$\rho$ : densité de la plaque

$t$ : temps

$E$ : module d'Young

$\nu$ : coefficient de Poisson

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ : rigidité en flexion de la plaque

Ces équations sont valides lorsque la déviation initiale de la plaque de l'état plan est faible comparativement à l'épaisseur de la plaque, plus précisément pour $w_o \leq h$ 10 [2, 48, 51]. Elles sont basées sur l'hypothèse que le principe de superposition est valide. Dans le cadre de ce travail, des imperfections avec une amplitude allant jusqu'à 0,3h sont étudiées. Pour de telles imperfections, on suppose que l'erreur obtenue est assez faible et que les résultats sont encore représentatifs de la réalité. Par ailleurs, le plus grand mode de vibration étudié est le troisième mode. La théorie de von Kármán néglige l'effet de l'inertie de rotation et du cisaillement. À partir du quatrième mode, ces effets peuvent devenir non négligeables.

En effectuant les changements de variables,

$$X = \frac{x}{a}, \qquad Y = \frac{y}{b}, \qquad W = \frac{w}{h}, \qquad W_0 = \frac{w_0}{h}$$

$$F = \frac{f}{Eh^2}, \qquad T = t\left[\frac{Eh^2}{\rho a^4}\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

les équations de base peuvent être écrites sous la forme non dimensionnelle suivante:

- Équation de compatibilité non dimensionnelle:

$$\begin{aligned} &R^4 F_{,XXXX} + 2R^2 F_{,XXYY} + F_{,YYYY} = \\ &R^2\left[(W+W_0)^2_{,XY} - W_o^2{}_{,XY} - (W+W_0)_{,XX}\cdot(W+W_0)_{,YY} + W_{0,XX}\cdot W_{0,YY}\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

- Équation d'équilibre non dimensionnelle:

$$\begin{aligned} &R^4 W_{,XXXX} + 2R^2 W_{,XXYY} + W_{,YYYY} = \\ &\zeta R^2\left[F_{,YY}\cdot(W+W_0)_{,XX} - 2F_{,XY}\cdot(W+W_0)_{,XY} + F_{,XX}\cdot(W+W_0)_{,YY}\right] - \zeta R^4\, W_{,TT} \end{aligned} \tag{2.5}$$

où $R = \dfrac{b}{a}$ (rapport de forme de la plaque) et $\zeta = 12\left(1-\nu^2\right)$.

Le chargement appliqué sur la plaque peut aussi être écrit sous forme non dimensionnelle:

$$N_Y(T) = N_{Y0} + N_{YT}\cos\Lambda T \tag{2.6}$$

où

$$\left[N_Y(T), N_{Y0}, N_{YT}\right] = \frac{a^2}{Eh^3}\left[n_y(t), n_{y0}, n_{yt}\right] \tag{2.7}$$

et $$\Lambda = \lambda\left[\frac{\rho a^4}{Eh^2}\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

De plus, les efforts de membrane non dimensionnels $N_X$, $N_Y$, $N_{XY}$ sont reliés à la fonction de contrainte d'Airy $F$:

$$(N_X, N_Y, N_{XY}) = \left(\frac{F_{,YY}}{R^2}, F_{,XX}, \frac{-F_{,XY}}{R}\right) \tag{2.9}$$

où $$(N_X, N_Y, N_{XY}) = \left(\frac{a^2}{Eh^3}\right)(n_x, n_y, n_{xy}) \tag{2.10}$$

et $n_x$, $n_y$ et $n_{xy}$ sont les vraies forces de membrane.

## 2.4 - Conditions aux frontières

### 2.4.1 - Conditions naturelles

La plaque étudiée est comprimée dans son plan médian idéal par un chargement uniformément distribué le long des arêtes $Y=0$ et $Y=1$. Les deux autres arêtes ($X=0$ et $X=1$) sont libres de contraintes. Par conséquent, les conditions aux limites reliées à la fonction d'Airy sont:

$$F_{,YY} = 0 \quad ; \quad F_{,XY} = 0 \quad \text{pour } X = 0,\ 1$$

$$F_{,XX} = -N_y(T) \quad ; \quad F_{,XY} = 0 \quad \text{pour } Y = 0,\ 1 \tag{2.11}$$

### 2.4.2 - Conditions géométriques

Deux types de conditions aux rives sont utilisés dans cette étude: l'encastrement et le support simple. Les déflexions latérales et les moments fléchissants sont nuls le long des arêtes simplement supportées. Le long des arêtes encastrées, les déflexions latérales et les rotations sont nulles. Ces conditions de support sont schématisées ainsi:

------ : arête simplement supportée

—— : arête encastrée

Dans ce travail, quatre cas distincts sont étudiés:

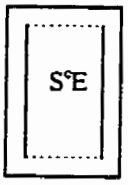
1) la plaque est simplement supportée sur son pourtour ($S^CS$),




d'où $W = R^2 W_{,XX} + \nu W_{,YY} = 0$ pour $X=0,\ 1$

$W = W_{,YY} + \nu R^2 W_{,XX} = 0$ pour $Y=0,\ 1$ (2.12a)

2) les deux arêtes chargées sont simplement supportées et les deux autres sont encastrées (S$^c$E),




d'où $W = W_{,X} = 0$ pour $X=0,\ 1$

$W = W_{,YY} + \nu R^2 W_{,XX} = 0$ pour $Y=0,\ 1$ (2.12b)

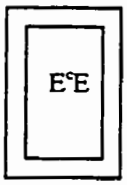
3) les deux arêtes chargées sont encastrées et les deux autres sont simplement supportées (E$^c$S),




d'où $W = R^2 W_{,XX} + \nu W_{,YY} = 0$ pour $X=0,\ 1$

$W = W_{,Y} = 0$ pour $Y=0,\ 1$ (2.12c)

4) la plaque est encastrée sur son pourtour (E$^c$E),




d'où $W = W_{,X} = 0$ pour $X=0,\ 1$

$W = W_{,Y} = 0$ pour $Y=0,\ 1$ (2.12d)

Le problème consiste donc à trouver les fonctions $F$ et $W$ qui satisfont l'équation d'équilibre, l'équation de compatibilité et les conditions aux frontières.

## 2.5 - DÉVELOPPEMENT DES ÉQUATIONS DE BASE

Lorsqu'une plaque est comprimée dans un plan moyen par des forces uniformément réparties le long de deux arêtes opposées, Timoshenko [44] a démontré que les fonctions propres correspondant au flambement sont identiques à celles correspondant aux vibrations libres.

Le déplacement latéral de la plaque peut donc être présenté par une double série des fonctions propres du système linéaire associé:

$$W(X,Y,T) = \sum_{p}\sum_{q} W_{pq}(T)\Phi_{p}(X)\Psi_{q}(Y) + W^{*}(X,Y) \qquad (2.13)$$

où $W_{pq}(T)$ sont les coordonnées généralisées et $W^{*}(X,Y)$ est la déformation causée par la composante statique du chargement. Les indices $p$ et $q$ indiquent le nombre de demi-ondes selon les axes $OX$ et $OY$.

L'expression analytique des imperfections est aussi représentée par une double série des fonctions propres:

$$W_0(X,Y) = \sum_k \sum_l W_{0kl} \Phi_k(X) \Psi_l(Y) \qquad (2.14)$$

où les $W_{0kl}$ sont les amplitudes des différents modes d'imperfection.

Une étude expérimentale des relations entre les contraintes et les déformations de plaques encastrées, chargées dans le plan parallèle à l'axe de courbure a été effectuée par Jackson et Hall [45]. Ces plaques présentent une forme d'imperfection géométrique initiale; elles ont une légère courbure de forme cylindrique. Les essais effectués montrent que les déflexions statiques de faible amplitude ont la même forme que l'imperfection géométrique initiale. Cependant, pour des plaques de 1 mm d'épaisseur, les imperfections ne peuvent croître au delà d'une demi-fois l'épaisseur de la plaque. Au delà de cette déformation statique, une certaine instabilité se produit et le mode de flambage, généralement de forme différente de l'imperfection, commence à se développer.

Sous l'action du chargement statique initial appliqué sur la plaque initialement imparfaite, la déformation statique engendrée est donc supposée de la même forme que l'imperfection,

$$W^*(X,Y) = \sum_k \sum_l d_{kl} \cdot \Phi_k(X) \cdot \Psi_l(Y) \qquad (2.15)$$

Cette forme supposée pour la déflexion statique est cependant uniquement valide pour des déformations inférieures ou de l'ordre d'une demi-fois l'épaisseur de la plaque étudiée. La présente étude est donc restreinte aux cas pour lesquels $d_{kl} \leq h / 2$.

La solution pour la fonction d'Airy est supposée sous la forme d'une double série des fonctions propres satisfaisant les conditions de contrainte aux rives:

$$F(X,Y,T)=\sum_{m}\sum_{n}F_{mn}(T)X_{m}(X)Y_{n}(Y)-\frac{1}{2}X^{2}N_{Y0}+F^{*}(X,Y) \qquad (2.16)$$

où $F_{mn}(T)$ sont les coefficients généralisés de contraintes et $F^{*}(X,Y)$ représente la contribution due à la composante statique du chargement. Elle a pour expression

$$F^{*}(X,Y)=\sum_{m}\sum_{n}\varphi_{mn}X_{m}(X)Y_{n}(Y) \qquad (2.17)$$

Les expressions analytiques des fonctions propres utilisées, $X_m(X)$, $Y_n(Y)$, $\Phi_p(X)$ et $\Psi_q(Y)$ sont données par:

$$\begin{aligned}
X_{m}(X)&=\left[\cosh(\alpha_{m}X)-\cos(\alpha_{m}X)\right]-\gamma_{m}\left[\sinh(\alpha_{m}X)-\sin(\alpha_{m}X)\right]\\
Y_{n}(Y)&=\left[\cosh(\alpha_{n}Y)-\cos(\alpha_{n}Y)\right]-\gamma_{n}\left[\sinh(\alpha_{n}Y)-\sin(\alpha_{n}Y)\right]\\
\Phi_{p}(X)&=A_{p}\left[\cosh(\beta_{p}X)-\cos(\beta_{p}(X))\right]+B_{p}\sinh(\beta_{p}X)+\sin(\beta_{p}X)\\
\Psi_{q}(Y)&=A_{q}\left[\cosh(\beta_{q}Y)-\cos(\beta_{q}(Y))\right]+B_{q}\sinh(\beta_{q}Y)+\sin(\beta_{q}Y)
\end{aligned} \qquad (2.18)$$

Dans ces fonctions, les coefficients $\beta_i$ , $\gamma_i$ , $A_i$ et $B_i$ dépendent des conditions aux limites:

- pour un bord simplement supporté,

$$A_i = B_i = 0 \ , \ \beta_i = i\pi \ , \qquad \gamma_i = \frac{\cosh(\alpha_i) - \cos(\alpha_i)}{\sinh(\alpha_i) - \sin(\alpha_i)} \tag{2.19a}$$

- pour un bord encastré,

$$A_i = \frac{1}{\gamma_i} = \frac{\sinh(\alpha_i) - \sin(\alpha_i)}{\cosh(\alpha_i) - \cos(\alpha_i)}, \quad B_i = -1, \qquad \beta_i = \alpha_i \tag{2.19b}$$

Les coefficients $\alpha_i$ sont issus de l'équation transcendante suivante:

$$1 - \cos(\alpha_i)\cosh(\alpha_i) = 0 \tag{2.20}$$

De plus, les fonctions propres utilisées possèdent des propriétés d'orthogonalité:

$$\int_0^1 X_i X_j \cdot dX = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \quad * \quad \int_0^1 Y_i Y_j \cdot dY = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

$$\int_0^1 \Phi_i \Phi_j \cdot dX = \begin{cases} 0, i \neq j \\ D_i, i = j \end{cases} \quad * \quad \int_0^1 \Psi_i \Psi_j \cdot dY = \begin{cases} 0, i \neq j \\ D_j, i = j \end{cases} \tag{2.21}$$

où $\quad D_i = \begin{cases} 1/2 & \text{pour un bord simplement supporté} \\ A_i & \text{pour un bord encastré} \end{cases}$

## 2.6 - SOLUTION DE L'ÉQUATION DE COMPATIBILITÉ ET DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT

Les développements 2.13 à 2.17 sont insérés dans les équations de base. Les fonctions propres utilisées dans ces développements vérifient exactement les conditions aux frontières, mais pas nécessairement les équations de base sur tout le domaine de la plaque. La méthode de Galerkin est donc appliquée aux deux équations de base pour minimiser les erreurs, en se servant des propriétés d'orthogonalité des fonctions choisies (équation 2.21).

Après plusieurs simplifications et transformations, l'équation de compatibilité est modifiée en une nouvelle relation entre les coefficients généralisés de contraintes $F_{mn}$ et les coordonnées généralisées $W_{pq}$ et est insérée dans l'équation d'équilibre.

Lorsqu'une plaque est comprimée dans son plan moyen par des forces uniformément réparties le long de deux arêtes opposées, il a été démontré [44] que le flambement est tel qu'il peut y avoir plusieurs demi-ondes dans la direction de compression mais une seule dans la direction perpendiculaire. On suppose que la plaque a un comportement dynamique similaire et par conséquent que les modes de vibration de celle-ci comportent une seule demi-onde dans la direction $OX$.

De plus, ayant représenté l'imperfection de la même forme que les modes de vibration, on suppose que l'imperfection géométrique initiale comporte elle aussi une seule demi-onde dans la direction $OX$. Tous les indices associés à la direction $OX$ sont donc égaux à 1 et seront omis dans les équations suivantes.

En considérant toutes ces nouvelles hypothèses et en effectuant de nombreux développements, l'équation temporelle du mouvement prend la forme

$$\ddot{W}_v + \sum_q K_v^q \cdot W_q + \sum_l K_v^l d_l - N_T(T)\left[\sum_q P_v^q \cdot W_q + \sum_l P_v^l (W_{ol} + d_l)\right]$$

$$+ \sum_r \sum_q \sum_s M_v^{qrs} W_r W_q W_s$$

$$+ \sum_q \sum_s \sum_l \left[M_v^{qsl} + M_v^{qls} + M_v^{lqs}\right] W_q W_s (W_{ol} + d_l)$$

$$+ \sum_q \sum_l \sum_h \left(\left[M_v^{lqh} + M_v^{lhq} + M_v^{qlh}\right](W_{ol} + d_l)(W_{oh} + d_h) - M_v^{qlh} W_{ol} W_{oh}\right) W_q$$

$$+ \sum_j \sum_l \sum_h M_v^{ljh} (W_{oj} + d_j)\left[(W_{ol} + d_l)(W_{oh} + d_h) - W_{ol} W_{oh}\right] \quad = \quad 0 \qquad (2.22)$$

L'expression des rigidités linéaires $K_v^q$, des rigidités cubiques $M_v^{qrs}$ et des coefficients de chargement $P_v^q$ utilisés dans cette équation se retrouvent dans les travaux de Sassi [13].

La relation entre le chargement statique $N_{YO}$ et la déformation $d_l$ peut être obtenue de l'équation précédente, en considérant le cas statique, cas pour lequel

$$W_v = 0 \qquad ; \qquad \ddot{W}_v = 0 \qquad ; \qquad N_Y(T) = N_{YO}$$

Pour ce cas particulier, l'équation 2.22 est réduite et donne la relation reliant $N_{YO}$ et $d_l$ :

$$\sum_l K_v^l d_l - N_{YO} \sum_l P_v^l (W_{ol} + d_l)$$

$$+ \sum_i \sum_l \sum_h M_v^{jlh} (W_{oj} + d_j)\left[(W_{ol} + d_l)(W_{oh} + d_h) - W_{ol} W_{oh}\right] = 0 \qquad (2.23)$$

Cette relation statique doit aussi être satisfaite lorsque la plaque est en mouvement. En tenant compte de cette relation et en ajoutant l'effet de l'amortissement visqueux linéaire pour plus de généralité, on obtient après quelques transformations la forme finale de l'équation du mouvement:

$$\ddot{W}_v + 2C_v \dot{W}_v - N_{YT} \cos\theta \sum_l P_v^l (W_{ol} + d_l) + \sum_q \left[K_v^q - N_Y(T) P_v^q\right] W_q$$

$$+ \sum_q \left( \sum_l \sum_h \left[H_v^{qlh} (W_{ol} + d_l)(W_{oh} + d_h) - M_v^{qlh} W_{ol} W_{oh}\right]\right) W_q + \sum_r \sum_q \sum_s M_v^{rqs} W_r W_q W_s$$

$$+ \sum_q \sum_s \sum_l H_v^{lqs} W_q W_s (W_{ol} + d_l) = 0$$

où $\qquad H_m^{pqr} = M_m^{pqr} + M_m^{qpr} + M_m^{qrp} \qquad (2.24)$

Dans l'expression précédente, on remarque qu'il existe un couplage linéaire entre les équations. Ce couplage est causé par la présence des imperfections géométriques initiales, et existe quel que soit le type de conditions aux frontières. Les résonances internes peuvent donc se produire pour tous les types de conditions aux frontières pour des plaques ayant des imperfections géométriques initiales.

L'équation générale du mouvement d'une plaque imparfaite, excitée dans son plan, peut aussi être réécrite sous la forme suivante:

$$\ddot{W}_m + 2C_m \dot{W}_m + \sum_q \left[K_m^q - N_y(T) P_m^q\right] W_q + \sum_q \left( \sum_l \sum_h \left[H_m^{qlh} X_l X_h - M_m^{qlh} W_{ol} W_{oh}\right]\right) W_q$$
$$+ \sum_r \sum_q \sum_s M_m^{rqs} W_r W_q W_s + \sum_q \sum_s \sum_l H_m^{qsl} W_q W_s X_l$$
$$= N_{yT} \cos\theta \sum_l P_m^l X_l$$

où $$X_l = W_{ol} + d_l \qquad (2.25)$$

Le terme situé à droite de l'égalité est indépendant du mouvement mais fonction de l'imperfection géométrique et représente une excitation dynamique ou forcée. Ainsi, les imperfections initiales génèrent une force fictive dans la direction du mouvement, et ce pour tous les modes de vibration. Cependant, pour le cas où le mode de vibration a la même forme que l'imperfection géométrique, le terme représentant l'excitation forcée est plus grand.

# Chapitre 3

# Solution des équations temporelles du mouvement par la méthode d'intégration directe

## 3.1 - INTRODUCTION

Il existe plusieurs méthodes de solution pour résoudre les équations du mouvement. Une étude comparative des principales méthodes, effectuée par Lavigne [46], a permis de mettre en valeur la simplicité et l'efficacité de l'intégration numérique directe. Les cas traités ici diffèrent légèrement de celui pour lequel la comparaison des diverses méthodes de solution a été effectuée. Il est cependant justifié de croire que la méthode d'intégration directe est encore la plus efficace.

## 3.2 - MÉTHODE DE RÉSOLUTION

### 3.2.1 - Calcul des coefficients

Les divers coefficients contenus dans les équations du mouvement sont calculés à l'aide de programmes FORTRAN. Certains programmes ont été élaborés par Sassi et peuvent être retrouvés dans la référence [13]. D'autres programmes ont été conçus dans le cadre de ce mémoire pour obtenir les valeurs nécessaires à l'intégration numérique et

sont présentés à l'annexe A. Le tableau 3.1 donne les noms et les buts de tous les programmes utilisés. L'ordre dans lequel ceux-ci sont utilisés est illustré à la figure 3.1.

| Nom du programme | Buts |
|---|---|
| ***Programmes conçus par Sassi [13]*** | |
| roots.for | trouver les racines de l'équation transcendante |
| coefs.for | évaluer des paramètres nécessaires au calcul des coefficients $M_{\bullet}^{***}$ |
| strec.for | évaluer des coefficients de contraintes |
| sycha.for | évaluer les caractéristiques de la plaque parfaite:<br>- mode critique de flambement<br>- fréquences naturelles<br>- charge critique |
| cubic.for | évaluer les coefficients cubiques $M_{\bullet}^{***}$ |
| imper.for | évaluer les caractéristiques de la plaque imparfaite:<br>- déflexion statique $d_{\bullet}$<br>- fréquences naturelles<br>- coefficients d'amortissement |
| norma.for | évaluer les $M_{\bullet}^{***}$ en coordonnées normales |
| ***Programmes conçus dans le cadre de la présente étude*** | |
| intnum3dl.for | extraire les coefficients nécessaires à l'intégration directe du système à trois d.d.l. |
| isifor.for | extraire les coefficients nécessaires pour évaluer l'interaction entre les vibrations simultanées et forcées |
| intnum1dl.for | extraire les coefficients nécessaires à l'intégration directe du système à un d.d.l. |
| intnum2dl.for | extraire les coefficients nécessaires à l'intégration directe du système à deux d.d.l. |

Tableau 3.1 - Description des programmes FORTRAN utilisés

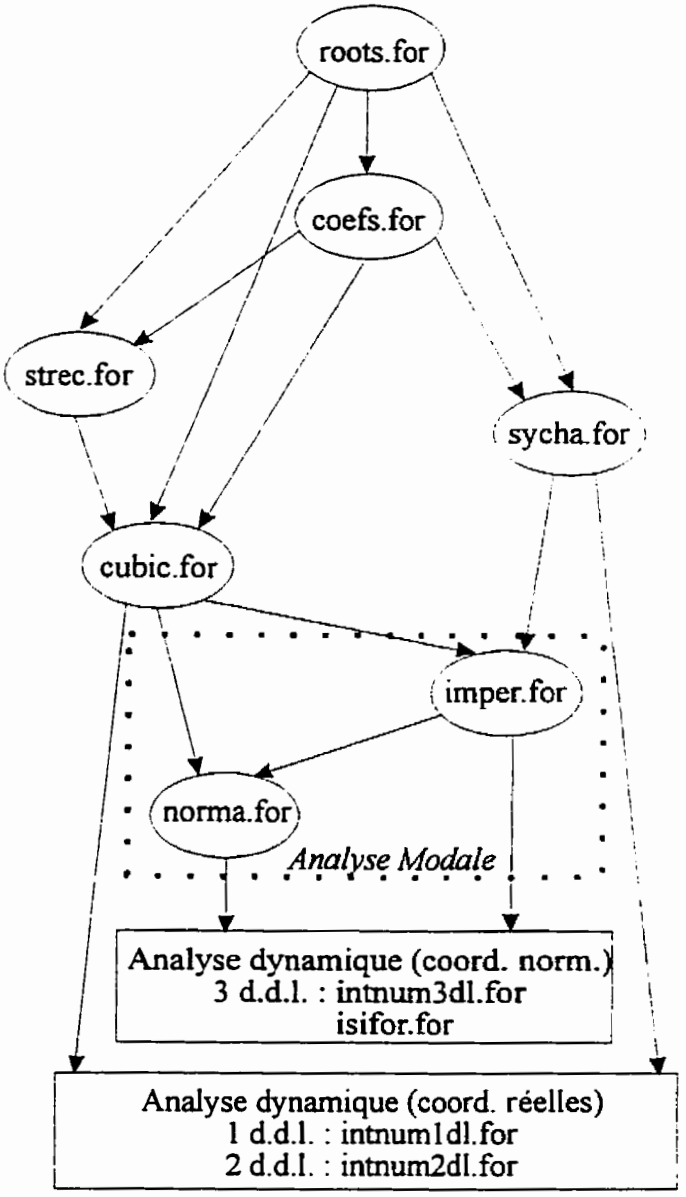



Figure 3.1 - Procédure de calcul utilisée pour obtenir les coefficients des équations du mouvement

### 3.2.2 - Méthode d'intégration

Les équations du mouvement sont solutionnées en utilisant une méthode d'intégration directe, à l'aide du logiciel TUTSIM. Ce logiciel exécute une simulation dynamique des équations du mouvement en effectuant une intégration numérique avec l'algorithme d'Adams-Bashforth de deuxième ordre.

Soit $f(t)$, la fonction recherchée décrite par

$$f(t) = \int_{t_i}^{t_f} y(t)dt$$

Les valeurs de $f(t)$ sont calculées à divers temps $t$ espacés par un intervalle temporel $\Delta$. Les étapes décrites par l'algorithme d'Adams-Bashforth sont les suivantes:

$$f(t=0) = f_o \qquad \text{(première itération)}$$

$$f(t=\Delta) = f_o + 1{,}5 \cdot y(t=\Delta) \qquad \text{(deuxième itération)}$$

$$f(t) = f(t=\Delta) + \Delta\left[1{,}5 \cdot y(t-\Delta) - 0{,}5 \cdot y(t-2\Delta)\right] + O\left(\Delta^3\right)$$

(itérations successives)

où $f_o$ : condition initiale sur $f$ à $t = 0$

$O\left(\Delta^3\right)$ : erreur numérique locale d'ordre 3

Le pas d'intégration ($\Delta$) est la variable qui détermine la précision des résultats obtenus. Il doit être assez faible pour minimiser l'erreur locale et éviter le recouvrement spectral. Cependant, lorsque le pas est trop faible, le nombre de calculs devient rapidement excessif et le cumul des erreurs peut devenir considérable.

Il existe une procédure qui permet de vérifier et d'ajuster le pas temporel utilisé. Deux simulations sont effectuées en utilisant un pas égal à $\Delta/2$ et un autre égal à $2\Delta$. Si les résultats de ces deux simulations sont consistants et essentiellement les mêmes, le plus grand des pas utilisés ($2\Delta$) est adéquat. Si les résultats diffèrent, le pas le plus faible doit être utilisé.

Le logiciel TUTSIM utilise un langage de simulation modulaire. Son principe de fonctionnement repose sur la possibilité de décomposer une équation quelconque en une succession d'opérations ou de modules élémentaires (intégration, addition, multiplication,...). Cette décomposition peut être illustrée par un diagramme fonctionnel et traduite en un langage compréhensible pour TUTSIM. Dans ce langage, chaque commande correspond à une opération élémentaire.

L'intégration numérique effectuée par TUTSIM permet d'obtenir la réponse temporelle de la plaque pour une fréquence d'excitation. Pour élaborer une courbe de

réponse en fréquence, plusieurs simulations doivent être effectuées à différentes fréquences d'excitation.

Une caractéristique importante de TUTSIM est qu'il peut être utilisé conjointement avec des programmes en TURBO-PASCAL. De tels programmes ont été élaborés pour effectuer une série de simulation avec TUTSIM. Ceux-ci sont basés sur les travaux similaires effectués par Lavigne [46].

Les résultats obtenus de chaque intégration dépendent des conditions initiales imposées. Celles-ci doivent être le plus près possible de la solution que l'on désire obtenir. Au début de chaque simulation (instant t = 0), la valeur de $cos\theta$ est unitaire et la force d'excitation est maximale. Les conditions initiales imposées doivent donc décrire le plus fidèlement possible le comportement du système lorsque la force d'excitation atteint un maximum.

Les conditions initiales sont extraites d'une simulation précédente effectuée avec TUTSIM à une fréquence d'excitation très rapprochée. Le programme TURBO-PASCAL permet de conserver l'amplitude et la vitesse du signal obtenu, pour l'instant où la force d'excitation passe par un maximum, et de les introduire comme conditions initiales pour une simulation suivante ayant une fréquence d'excitation légèrement différente. Les fréquences d'excitation de deux simulations successives doivent être

suffisamment rapprochées pour que les conditions initiales tirées d'une simulation correspondent bien au régime permanent de la simulation suivante.

Cette procédure permet d'atteindre rapidement le régime permanent, diminuant ainsi le nombre de calculs nécessaire et l'erreur totale accumulée. De plus, elle facilite le choix des conditions initiales. En réalité, celles-ci doivent être choisies avec beaucoup de soin si on veut tracer la quasi totalité des résonances étudiées.

À partir de cette réponse temporelle on détermine l'amplitude et la fréquence du mouvement ainsi que sa phase. Les résultats obtenus sont présentés sous la forme de réponse en fréquence.

### 3.3 - FORME DES RÉSULTATS OBTENUS

Pour une plaque imparfaite, trois types distincts de résonance simple sont à prévoir:

a) résonance forcée: comportement global de ressort dur;

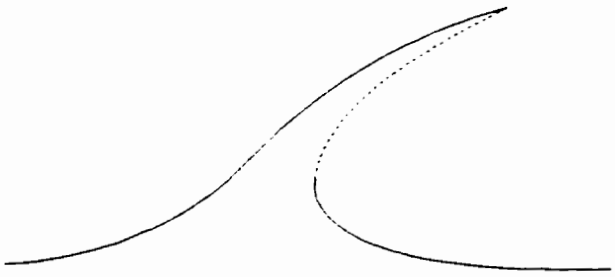
b) résonance paramétrique (type I): comportement global de ressort dur;

c) résonance paramétrique (type II): comportement de ressort mou suivi d'un comportement de ressort dur.

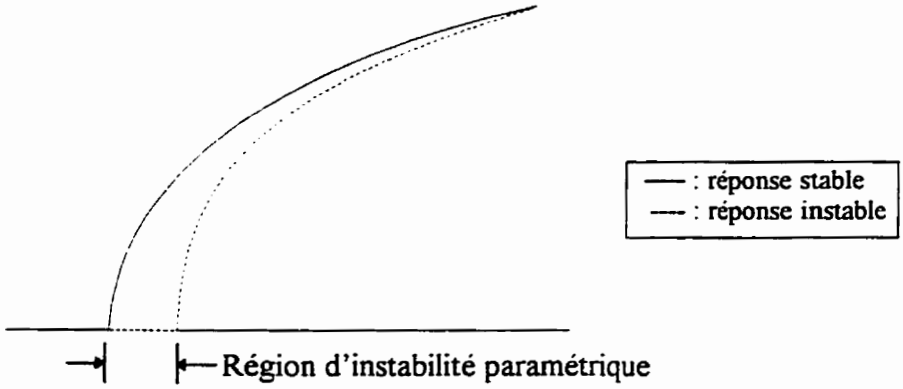
Des études analytiques de stabilité [8, 11] ont permis de déterminer les parties stables et instables de ces courbes de résonance. Celles-ci sont illustrées à la figure 3.2 en faisant une distinction entre les deux types de réponse (stable et instable). La partie stable de ces courbes est représentée à l'aide d'un trait continu, tandis que la partie instable est représentée par une ligne pointillée. Les réponses paramétriques simples comportent un domaine fréquentiel pour lequel les vibrations paramétriques d'amplitude nulle sont instables. Ce domaine est appelé région ou zone d'instabilité paramétrique.

La méthode d'intégration directe permet d'obtenir uniquement la partie stable des courbes de résonance, tout comme le système physique. Cette méthode ne permet pas de visualiser la partie instable, mais fournit suffisamment d'information pour prévoir et comprendre le comportement du système physique. Par conséquent, on s'attend à ce que les réponses obtenues en utilisant la méthode d'intégration directe aient une des formes présentées à la figure 3.3.

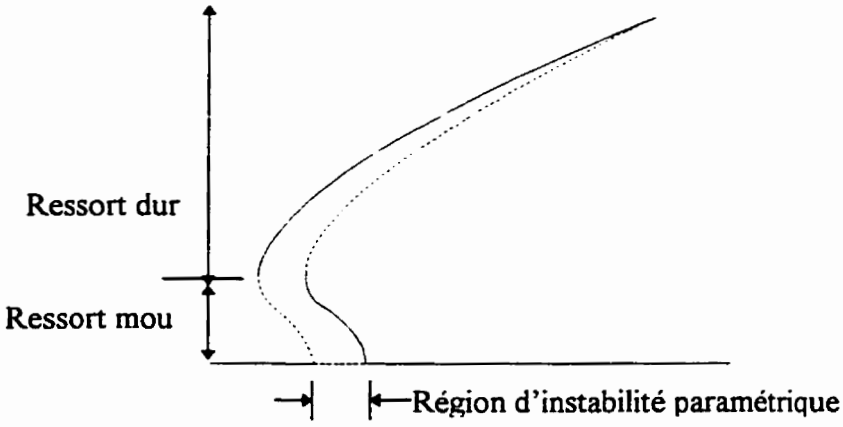
Le trait large et continu de la figure 3.3 représente la réponse calculée à l'aide de l'intégration directe (réponse stable) tandis que le trait pointillé représente la forme complète de la courbe de résonance (réponses stables et instables).



a) Résonance forcée

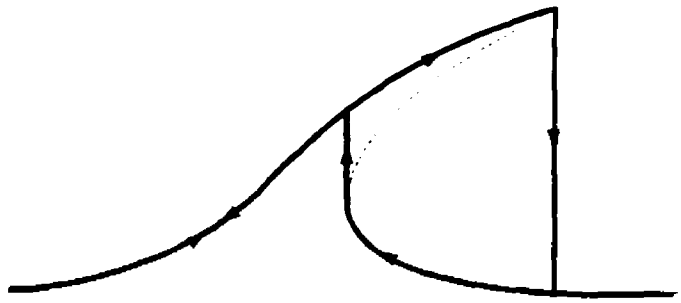



b) Résonance paramétrique (type I)

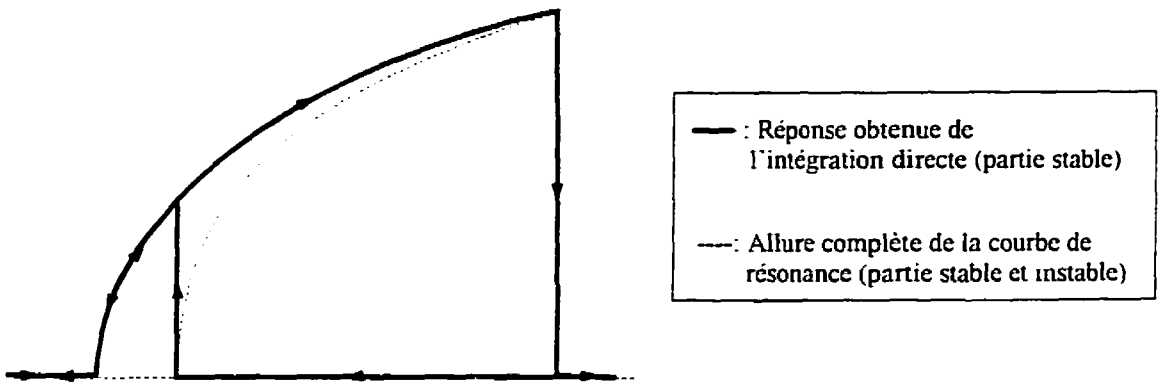



c) Résonance paramétrique (type II)

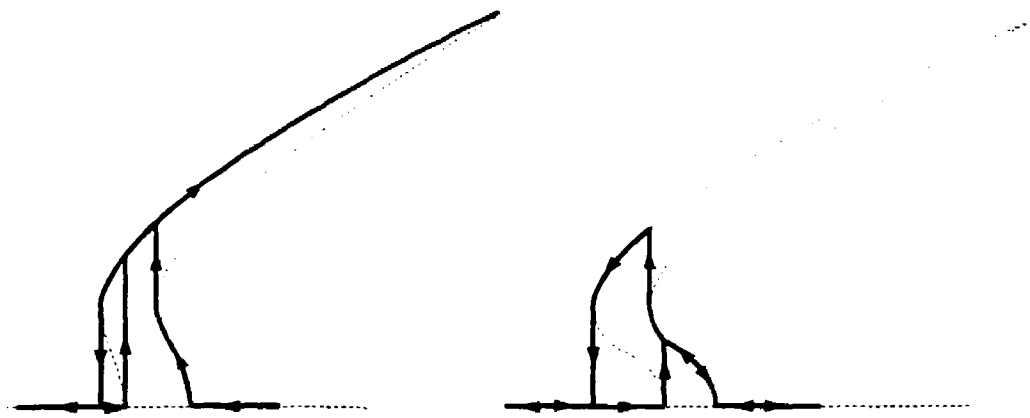
Figure 3.2 - Courbes de résonances possibles pour une plaque imparfaite, partie stable et instable et régions d'instabilité paramétrique



a) Résonance forcée




b) Résonance paramétrique (type I)



Comportement en ressort mou faible  Comportement en ressort mou important

c) Résonance paramétrique (type II)

Figure 3.3 - Allure des réponses fréquentielles obtenues avec l'intégration directe

À partir des réponses fréquentielles obtenues de l'intégration directe et à l'aide de la figure 3.3, il est possible d'identifier quel est le comportement complet de la plaque en se référant aux courbes de référence correspondantes. Cette identification permet, dans les chapitres qui suivent, d'analyser et de comprendre le comportement dynamique des plaques imparfaites.

# Chapitre 4

# Résonances paramétriques principales des plaques imparfaites

## 4.1 - INTRODUCTION

Pour simplifier l'étude des résonances paramétriques des plaques imparfaites, on suppose que la plaque vibre selon un seul mode ($m$). Le mouvement latéral de la plaque peut alors être décrit par un système mécanique à un seul degré de liberté. L'imperfection géométrique de la plaque peut prendre différentes configurations. Cette étude est cependant restreinte au cas pour lequel l'imperfection géométrique est de la même forme que le mode de vibration.

Dans ce chapitre, les vibrations paramétriques d'une plaque imparfaite sont étudiées en variant le mode de l'imperfection (mode de vibration), son amplitude, le rapport de forme de la plaque, le chargement statique appliqué et le type de conditions aux frontières.

## 4.2 - MODÉLISATION UTILISÉE

Pour le cas particulier d'une résonance paramétrique simple d'une plaque imparfaite pour laquelle le mode d'imperfection correspond au mode de vibration, l'équation générale du mouvement (2.24) est simplifiée et prend la forme suivante:

$$\ddot{W}_m + 2C_m \dot{W}_m + 2\bar{\Omega}_m^2 W_m - 2\mu_m^m \bar{\Omega}_m^2 \cos\theta \left(W_m + X_m\right) + M_m^{mmm}\left(3W_m^2 X_m + W_m^3\right) = 0$$

où

$$\bar{\Omega}_m^2 = K_m^m - N_{YO} P_m^m + M_m^{mmm}\left(3X_m^2 - W_{om}^2\right)$$

$$2\mu_m^m \bar{\Omega}_m^2 = N_{YT} P_m^m \qquad (4.1)$$

Pour procéder à l'intégration directe de cette nouvelle équation, celle-ci doit être préalablement transformée en un diagramme fonctionnel. Ce diagramme et le fichier utilisé par TUTSIM sont présentés à l'annexe B. La procédure de calcul utilisée est celle décrite précédemment à la section 3.2.

## 4.3 - DESCRIPTION DES PLAQUES ÉTUDIÉES ET CHARGEMENT DYNAMIQUE

Dans ce chapitre, trois plaques sont étudiées. Celles-ci se distinguent par leur rapport de forme. Leurs dimensions sont données au tableau 4.1.

| $R = 1,2$ | | | $R = 2,0$ | | | $R = 3,0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ (mm) | $b$ (mm) | $h$ (mm) | $a$ (mm) | $b$ (mm) | $h$ (mm) | $a$ (mm) | $b$ (mm) | $h$ (mm) |
| 416,6 | 500 | 1,02 | 250 | 500 | 1,02 | 166,6 | 500 | 1,02 |

Figure 4.1 - Dimensions des plaques étudiées

Toutes les plaques sont en polycarbonate. Leurs propriétés mécaniques sont les suivantes:

- Module de Young ($E$) = 2,3856 Mpa
- Densité ($\rho$) = 1205,48 kg/m$^3$
- Coefficient de Poisson ($\nu$) = 0,38
- Décrément d'amortissement linéaire = 0,1

Dans ce chapitre, l'influence du chargement dynamique n'est pas considérée. Pour tous les calculs, la charge dynamique appliquée est la même: $N_{YT} = 0,2$.

## 4.4 - Comportement général

### 4.4.1 - Vibrations forcée vs vibrations paramétriques

Une plaque ayant une imperfection initiale de faible amplitude présente uniquement un comportement en ressort dur:

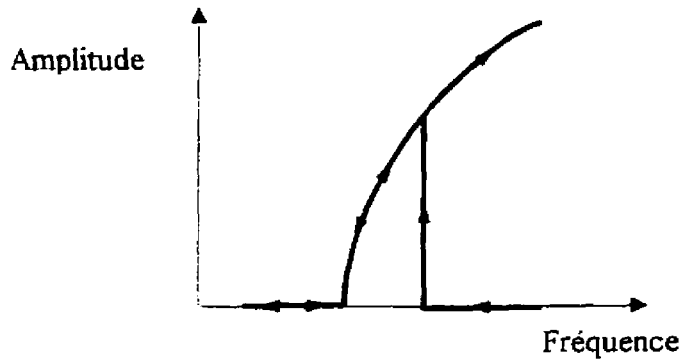



Figure 4.1 - Réponse paramétrique type d'une plaque avec faible imperfection

Lorsque l'amplitude de l'imperfection géométrique s'accroît, la réponse fréquentielle de la plaque imparfaite est composée d'un comportement en ressort mou pour des vibrations de faible amplitude, suivi d'un comportement en ressort dur pour des vibrations de plus grande amplitude. De plus, la résonance paramétrique est caractérisée par des sauts. Ces sauts sont représentatifs du point de transition entre les deux types de comportement.

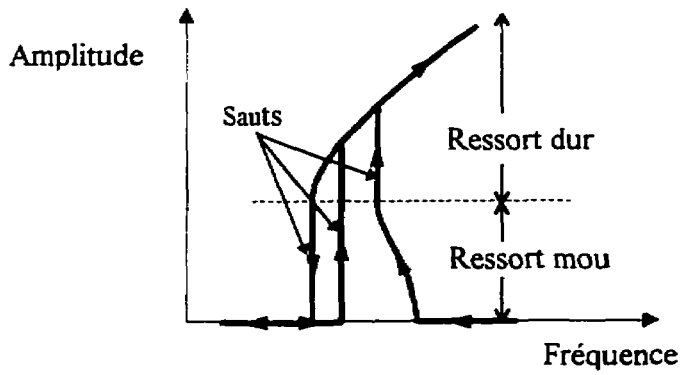
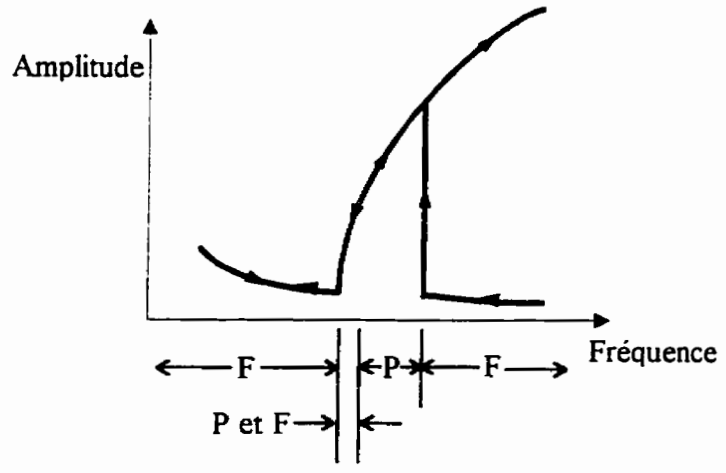



Figure 4.2 - Réponse paramétrique type d'une plaque avec grande imperfection

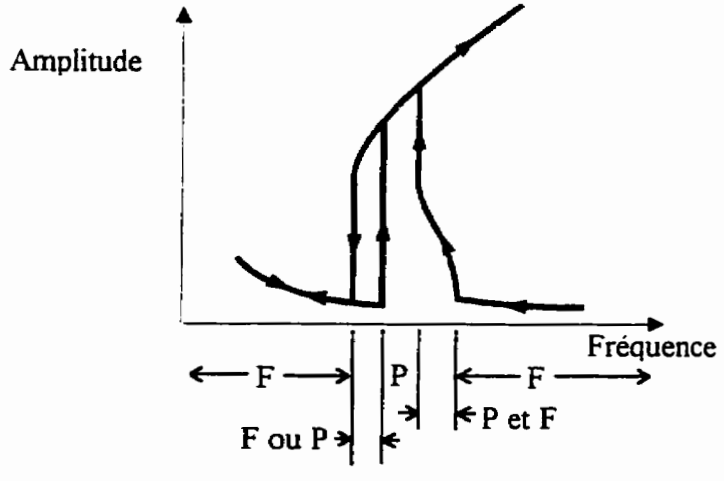
La réponse de la plaque imparfaite à une excitation paramétrique est composée de vibrations forcées ayant la même fréquence que l'excitation et de vibrations paramétriques ayant une fréquence égale à la moitié de la fréquence d'excitation. En dehors de la cloche de résonance paramétrique, les vibrations sont uniquement forcées ou dynamiques. Lorsque les vibrations paramétriques ont une faible amplitude (de l'ordre de une à trois fois l'amplitude des vibrations forcées), celles-ci coexistent avec les vibrations forcées.

Pour une plaque présentant uniquement un comportement en ressort dur (faible imperfection), ce phénomène est observable en début de résonance paramétrique, lorsqu'on augmente la fréquence d'excitation. En présence d'un comportement en ressort mou, on observe une coexistence des vibrations forcées et paramétriques en début de résonance paramétrique lorsqu'on diminue la fréquence d'excitation. Ce phénomène est illustré à la figure 4.3.

Pour les fréquences auxquelles coexistent vibrations forcées et paramétriques, le signal temporel obtenu est une superposition de deux mouvements de fréquences différentes. Il est nécessaire de séparer ces deux mouvements pour tracer la courbe de résonance paramétrique. L'amplitude des vibrations paramétriques est extraite en appliquant une transformée rapide de Fourier (FFT) sur le signal temporel.




a) Plaque avec faible imperfection

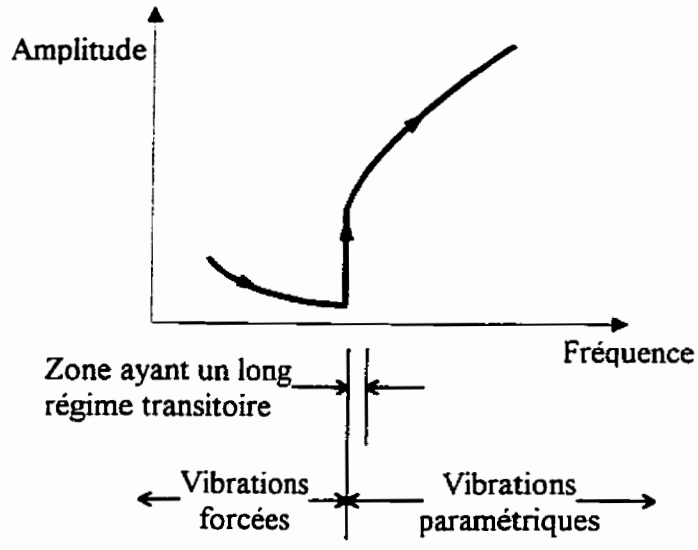



b) Plaque avec grande imperfection

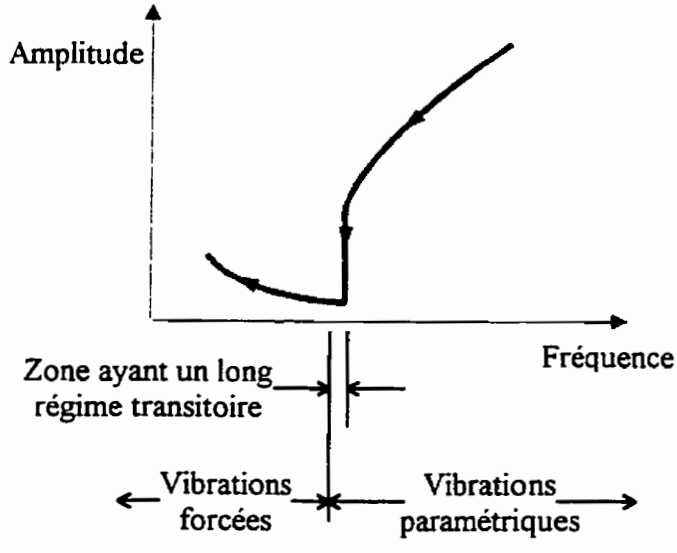
où P : vibrations paramétriques

F : vibrations forcées

Figure 4.3 - Réponse fréquentielle générale




a) Fréquence d'excitation croissante




b) Fréquence d'excitation décroissante

Figure 4.4 - Réponse fréquentielle générale: zones avec long régime transitoire

Une attention particulière doit être apportée dans le cas ou une résonance paramétrique est composée d'un comportement en ressort mou suivi d'un comportement en ressort dur. Pour les fréquences d'excitation proches de celle où se produit un passage soudain des vibrations forcées aux vibrations paramétriques, le mouvement temporel de la plaque comporte un long régime transitoire dans lequel on retrouve des vibrations forcées et paramétriques (figure 4.4). À la fin de ce régime transitoire, le mouvement de la plaque atteint un régime permanent composé de vibrations forcées ou paramétriques (un seul type de vibration).

### 4.4.2 - Forme de la réponse temporelle

Lorsqu'une plaque ayant une imperfection géométrique selon le mode $m$ est en résonance paramétrique pour ce mode $m$, le signal temporel décrivant le mouvement latéral de la plaque prend l'allure suivante:

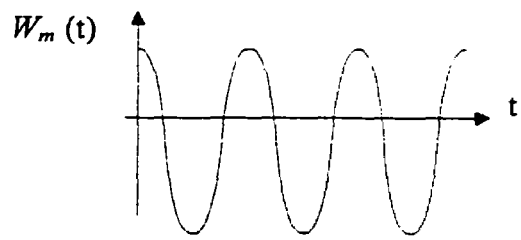
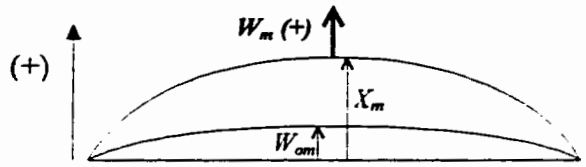



Figure 4.5 - Réponse temporelle d'une plaque imparfaite
(mode d'imperfection et mode de vibration similaires)

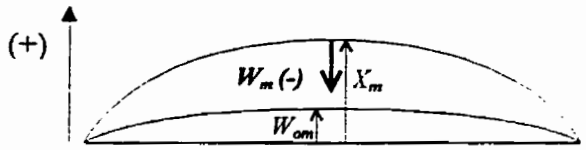
Ce mouvement oscillatoire est asymétrique par rapport à la position d'équilibre statique. Quand la plaque se déforme du même côté que l'imperfection, l'amplitude de son mouvement est inférieur à l'amplitude du mouvement du côté opposé à l'imperfection. Le mouvement qui cherche à augmenter la courbure de la plaque est moins prononcé que celui qui en diminue initialement la courbure. Ce phénomène a déjà été observé pour une plaque imparfaite par Hui [18]. Des oscillations asymétriques ont aussi été observées dans une étude effectuée par Leissa et Kadi [47] considérant l'effet de la courbure sur les vibrations des coques minces.

D'autre part, Timoshenko [48] a étudié l'influence d'une faible courbure initiale cylindrique sur le comportement de plaques uniformément chargées latéralement. Lorsque la courbure de la plaque augmente, celle-ci devient plus difficile à plier et se déforme moins qu'une plaque plane sous l'action d'une force extérieure. Par analogie à ce cas statique, on peut supposer qu'un mouvement qui tend à augmenter la courbure initiale aura une amplitude moindre que celui qui en diminue la courbure.

Pour ce genre de mouvement, on doit distinguer le déplacement qui s'effectue dans le même sens que l'imperfection de celui qui s'effectue dans le sens opposé. Les courbes de réponse en fréquence seront tracées en utilisant une nouvelle terminologie:




a) Amplitude $W_m$ positive




b) Amplitude $W_m$ négative

Figure 4.6 - Représentation physique de la terminologie utilisée pour différencier le sens du mouvement

### 4.4.3 - Diagramme de phase

La plaque étudiée est soumise à une charge statique et à une charge dynamique. La composante dynamique de ce chargement produit un mouvement latéral qui oscille à la moitié de la fréquence d'excitation.

L'angle de phase est habituellement défini pour un mouvement oscillatoire ayant la même fréquence que l'excitation. Dans ce cas ci, on doit déterminer l'allure du mouvement qui est en phase avec l'excitation, et mesurer la phase qui existe entre le mouvement obtenu et ce mouvement de référence.

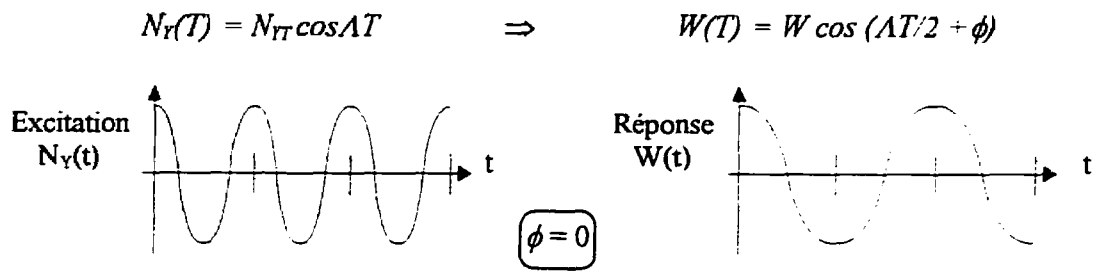



Figure 4.7 - Excitation paramétrique et mouvement latéral de la plaque

Lorsque la fréquence d'excitation est faible et inférieure à la fréquence de résonance, le déphasage devrait être presque nul. La réponse *W(t)* dessinée ci-haut est obtenue pour une telle fréquence et correspond à un déphasage nul et peut donc être utilisé comme mouvement de référence.

Des courbes représentatives des résonances avec leur diagramme de phase respectif sont présentées aux figures 4.8 et 4.9. Pour une résonance forcée, le déphasage est presque nul pour les fréquences inférieures à la fréquence de résonance et tend vers 180° pour les fréquences supérieures. Le déphasage est presque nul pour la branche supérieure de la cloche de résonance et tend vers 180° pour la branche inférieure. Pour une résonance paramétrique, le déphasage tend vers zéro pour la branche supérieure de la cloche de résonance et vers 90° pour la branche inférieure.

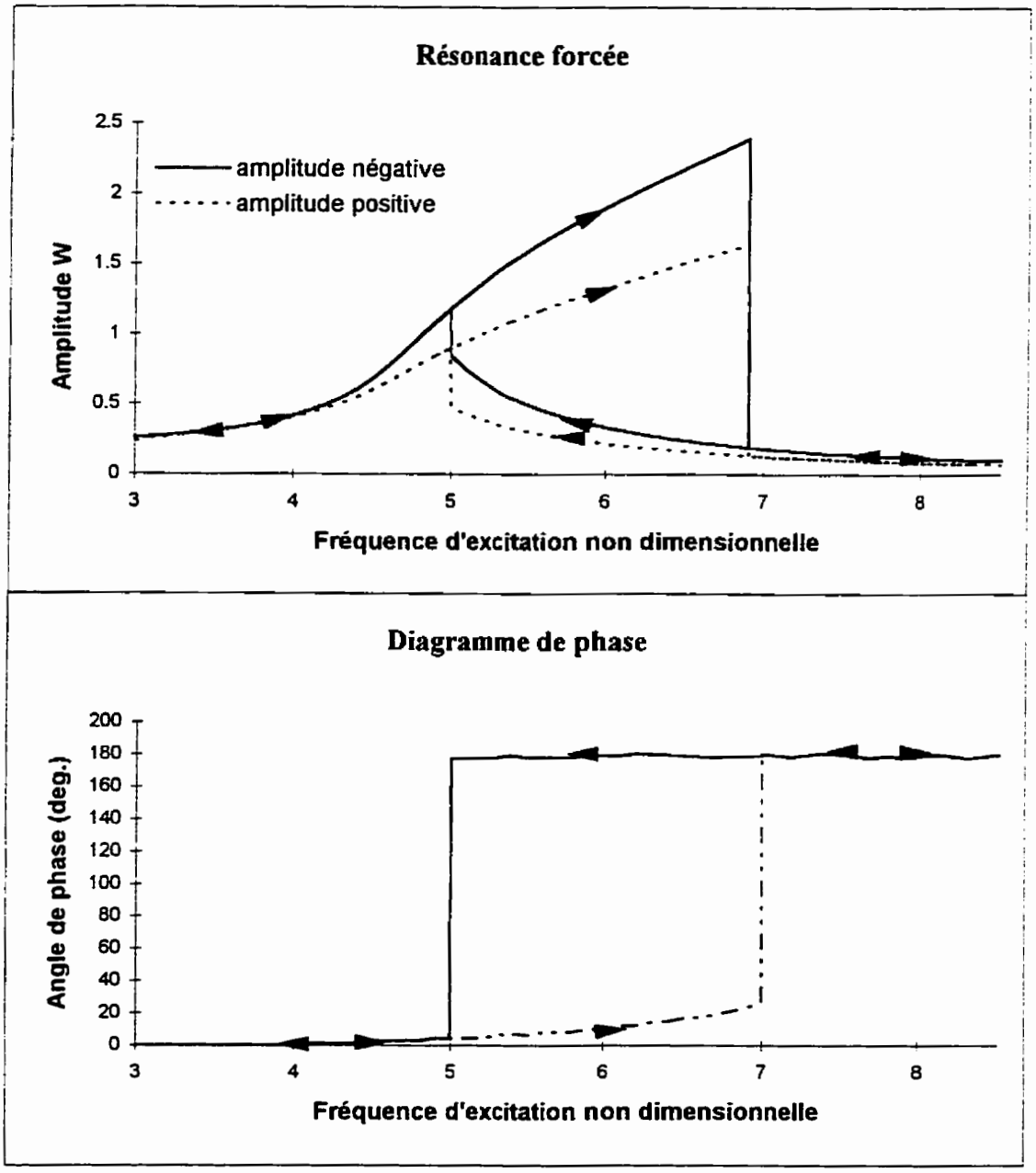



Figure 4.8 - Résonance forcée et diagramme de phase d'une plaque imparfaite

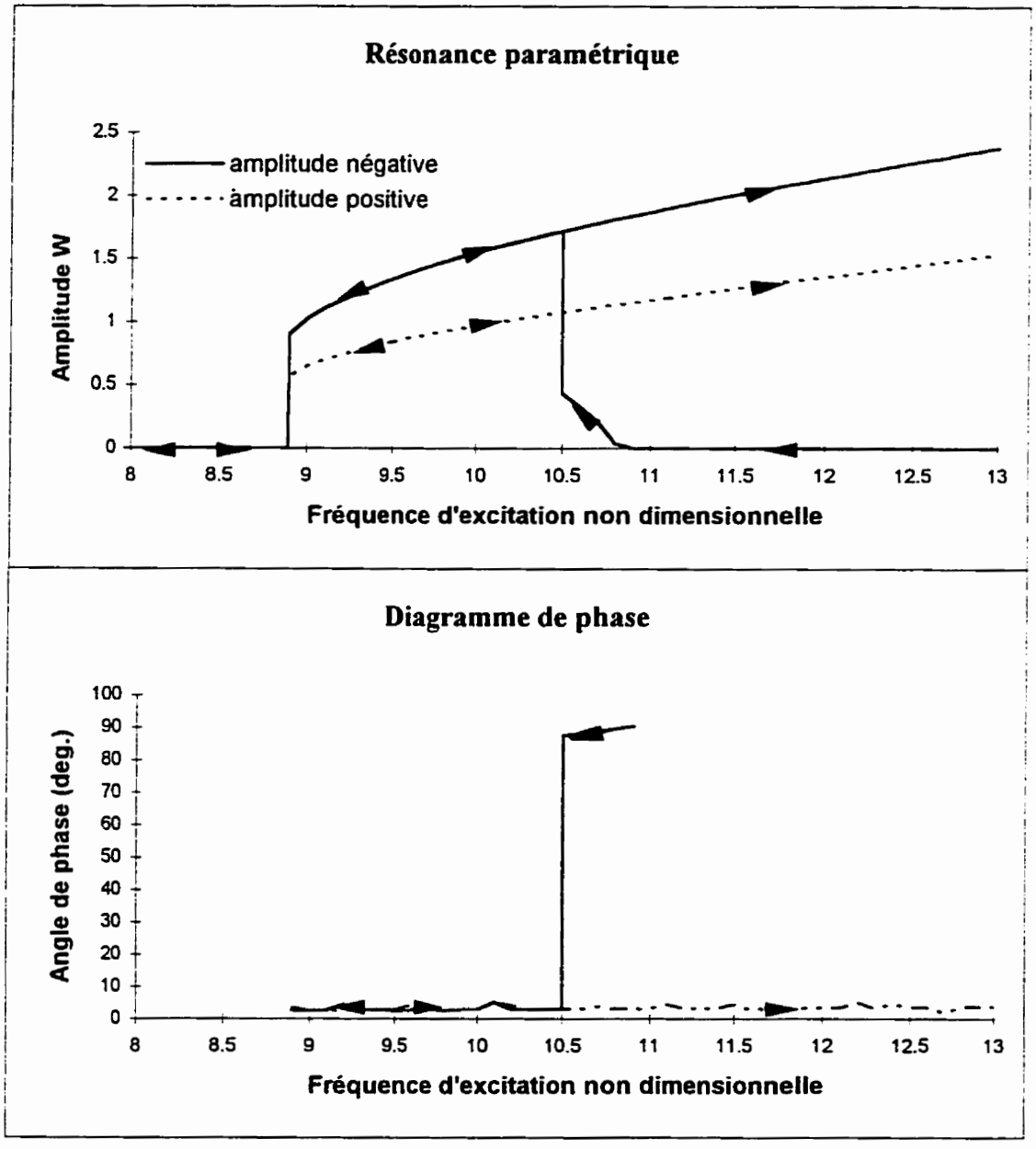



Figure 4.9 - Résonance paramétrique et diagramme de phase d'une plaque imparfaite

## 4.5 - INFLUENCE DE L'AMPLITUDE DE L'IMPERFECTION

Les résultats obtenus en variant uniquement l'amplitude de l'imperfection sont présentés aux figures 4.10 à 4.14. Pour une imperfection de faible amplitude, la plaque a un comportement en ressort dur. En augmentant l'amplitude de l'imperfection, le comportement de la plaque s'amollit pour les vibrations de faible amplitude et se rapproche d'un comportement linéaire, pour finalement devenir un comportement de ressort mou pour de grandes imperfections.

## 4.6 - INFLUENCE DU CHARGEMENT STATIQUE

La diminution de la charge statique appliquée dans le plan de la plaque entraîne une diminution du comportement en ressort mou de la plaque. Ce phénomène est illustré aux figures 4.13, 4.15 et 4.16.

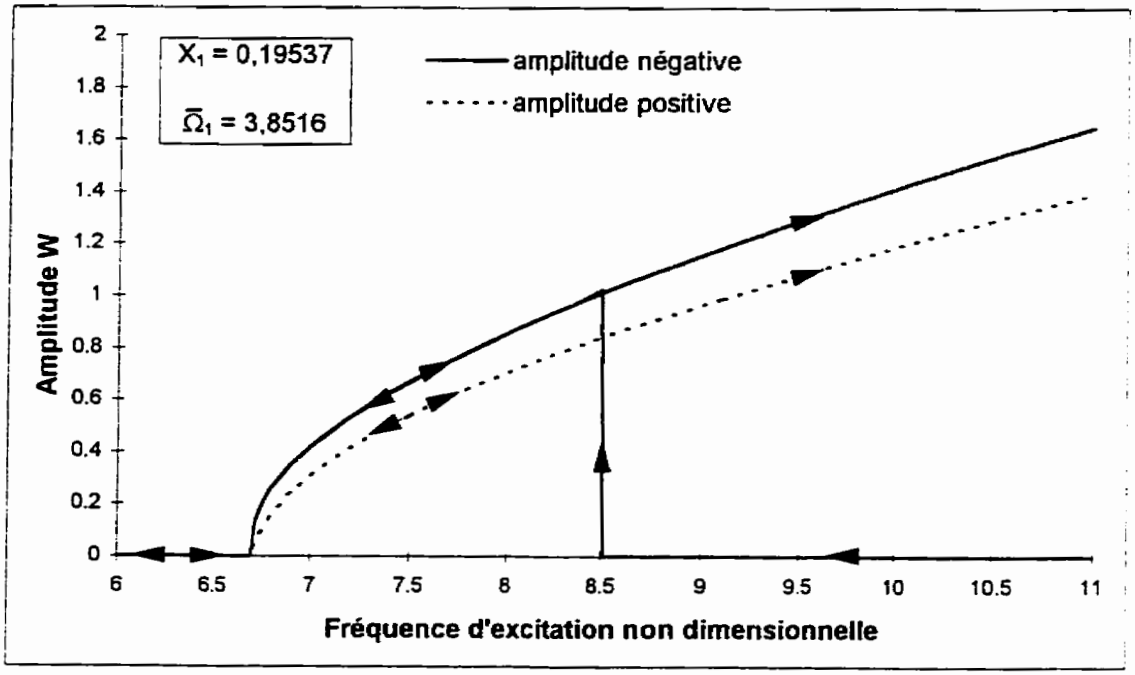



Figure 4.10 - Résonance paramétrique du 1er mode, R=1,2,
$W_{01}$=0,1, $N_{YO}$=0,5

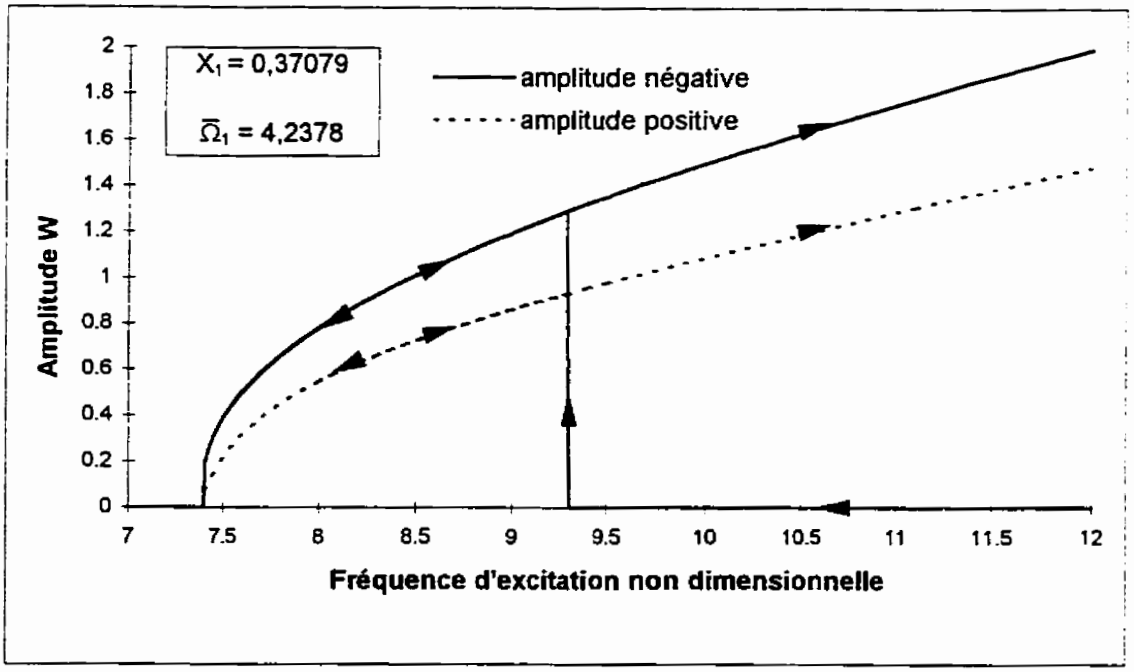



Figure 4.11 - Résonance paramétrique du 1er mode, R=1,2,
$W_{01}$=0,2, $N_{YO}$=0,5

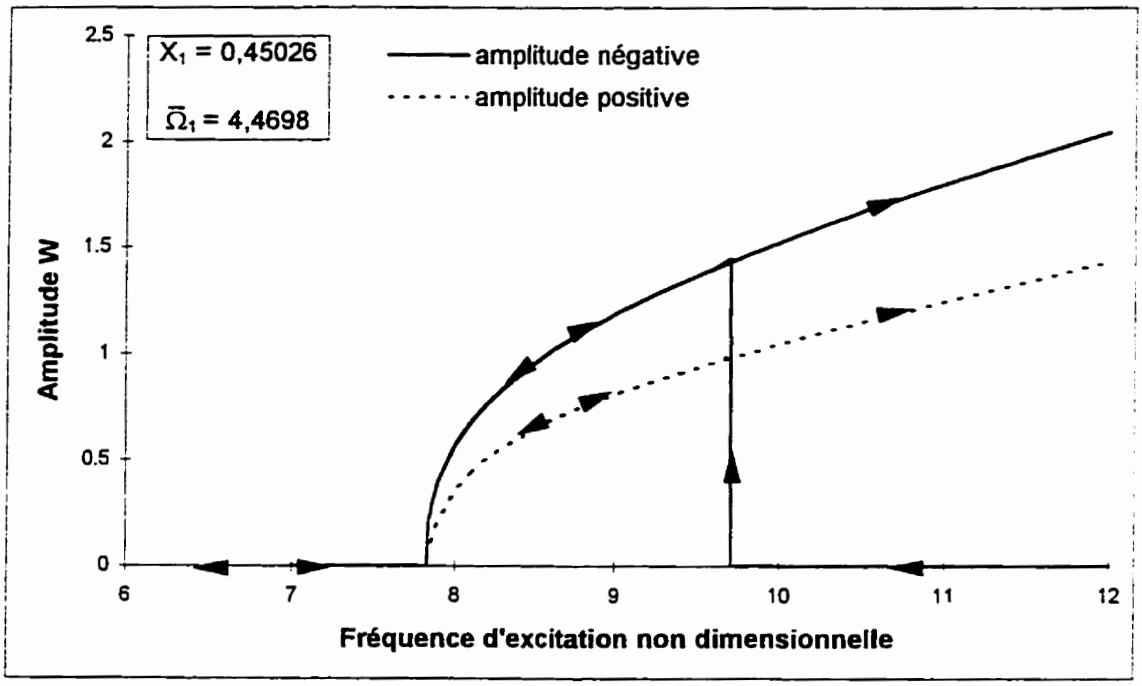



Figure 4.12 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,25, $N_{YO}$=0,5

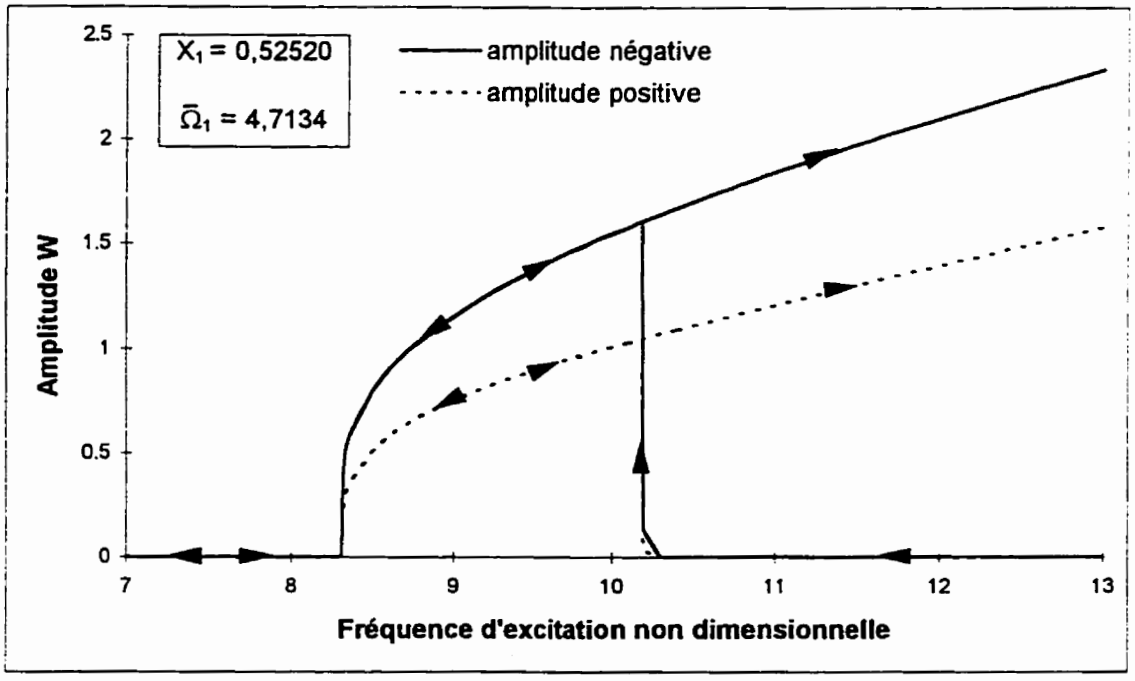



Figure 4.13 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

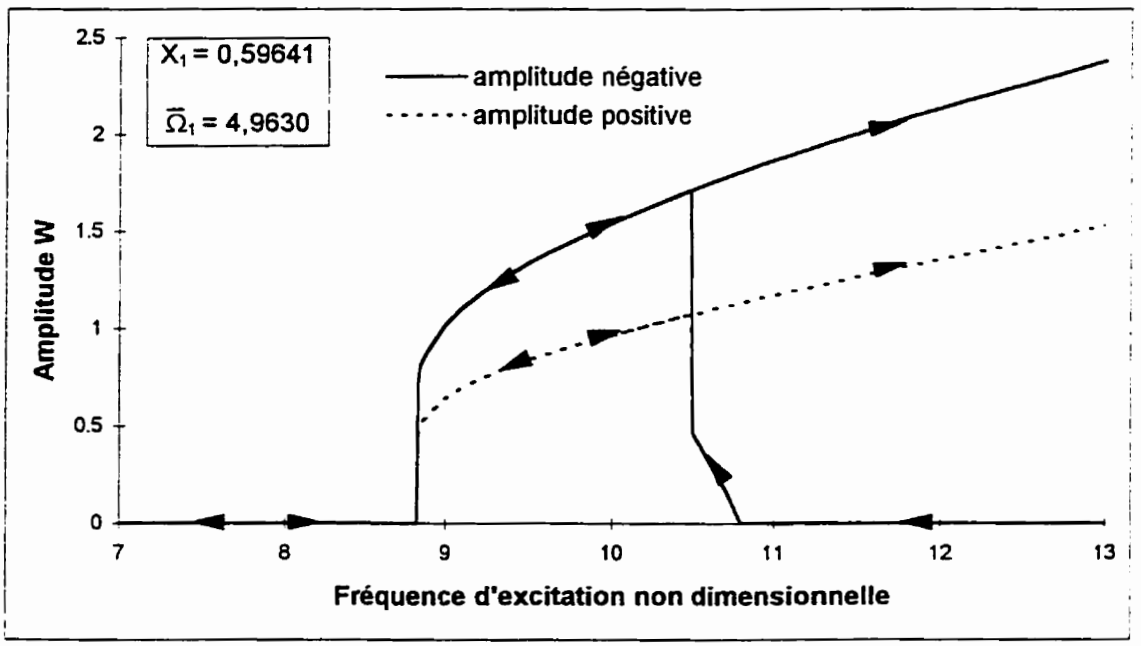



Figure 4.14 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,35, $N_{YO}$=0,5

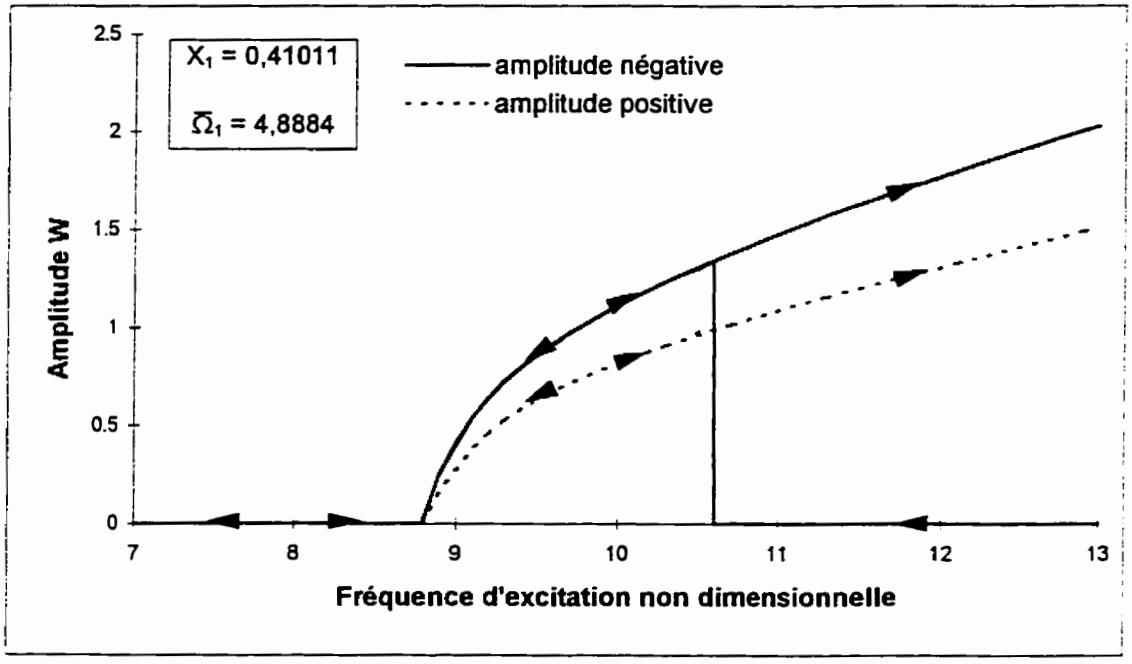



Figure 4.15 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,3

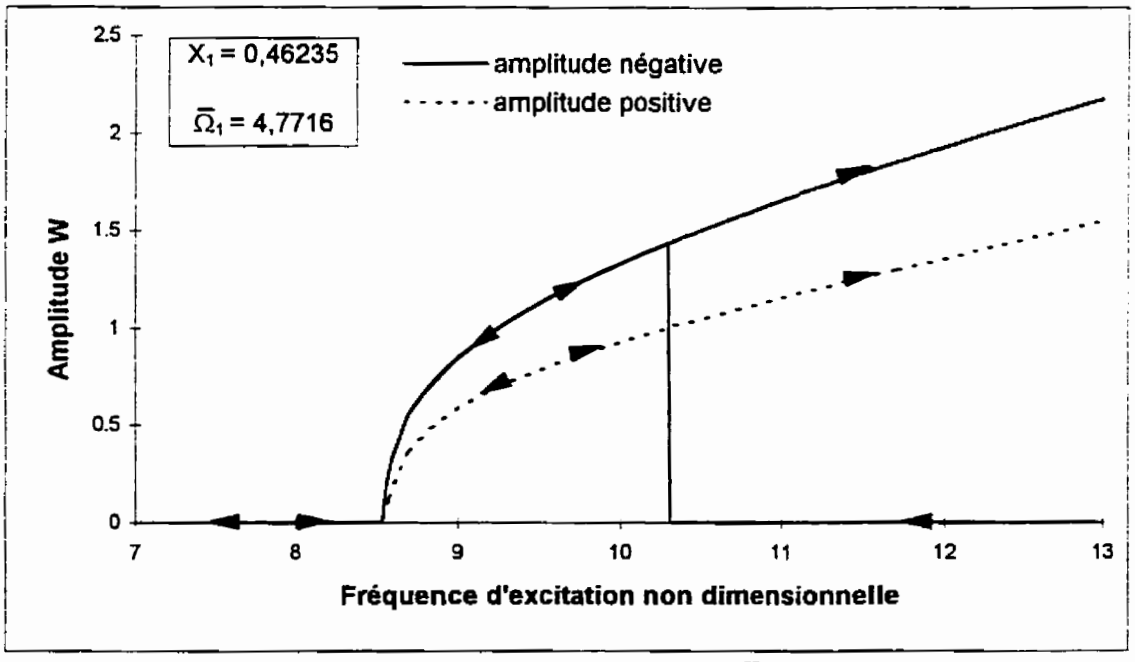



Figure 4.16 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,4

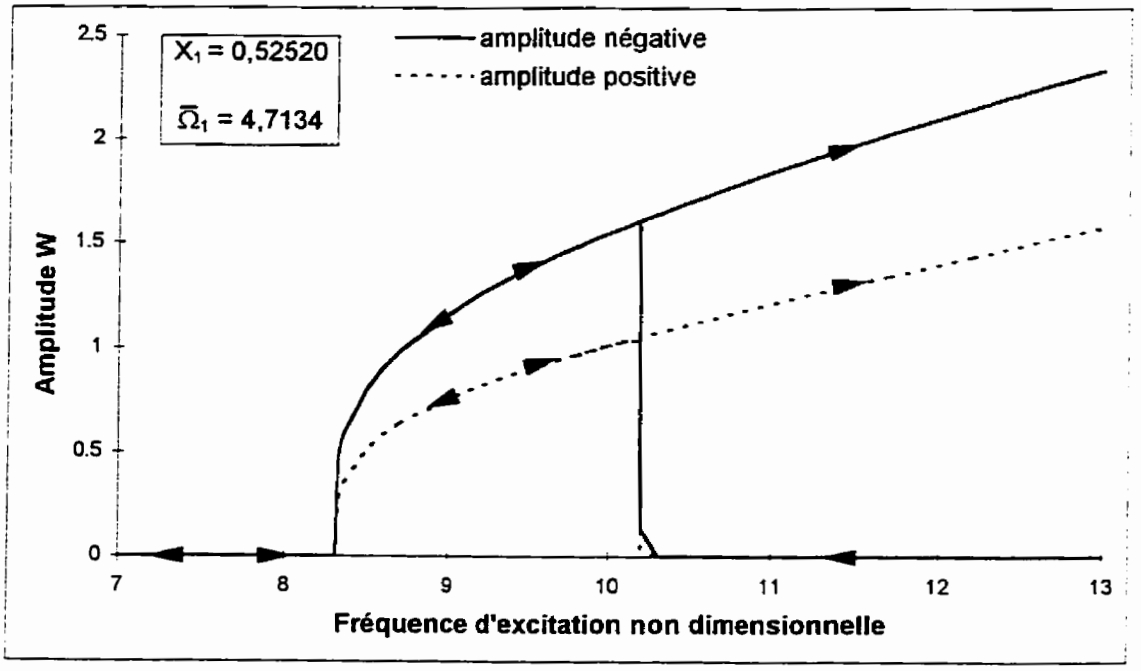



Figure 4.17 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

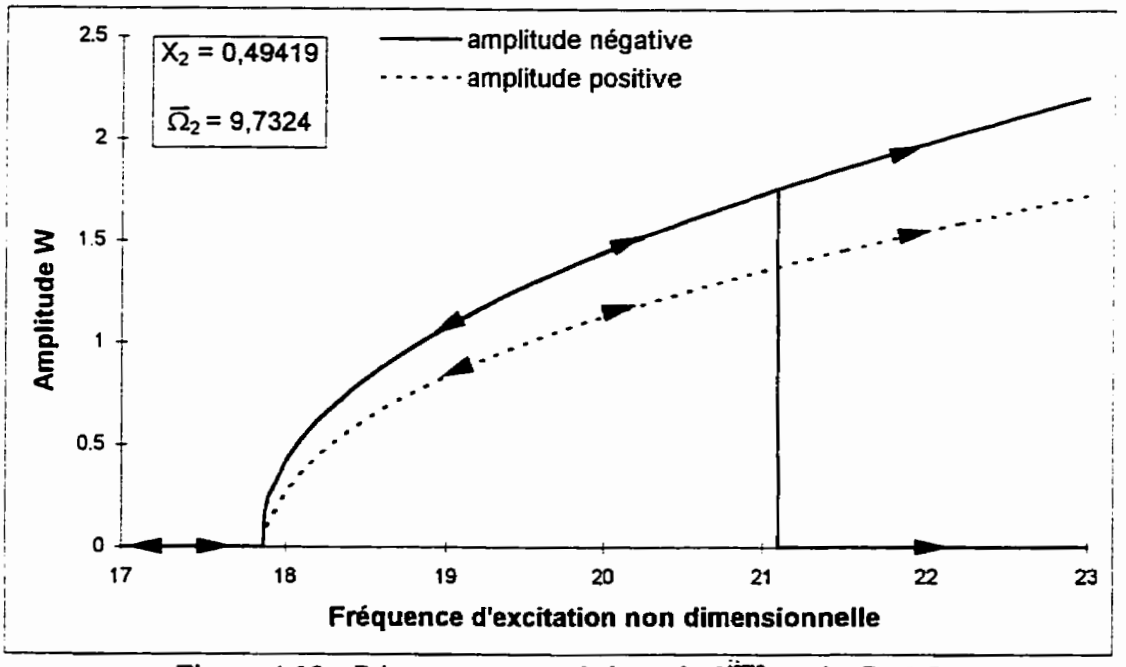



Figure 4.18 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

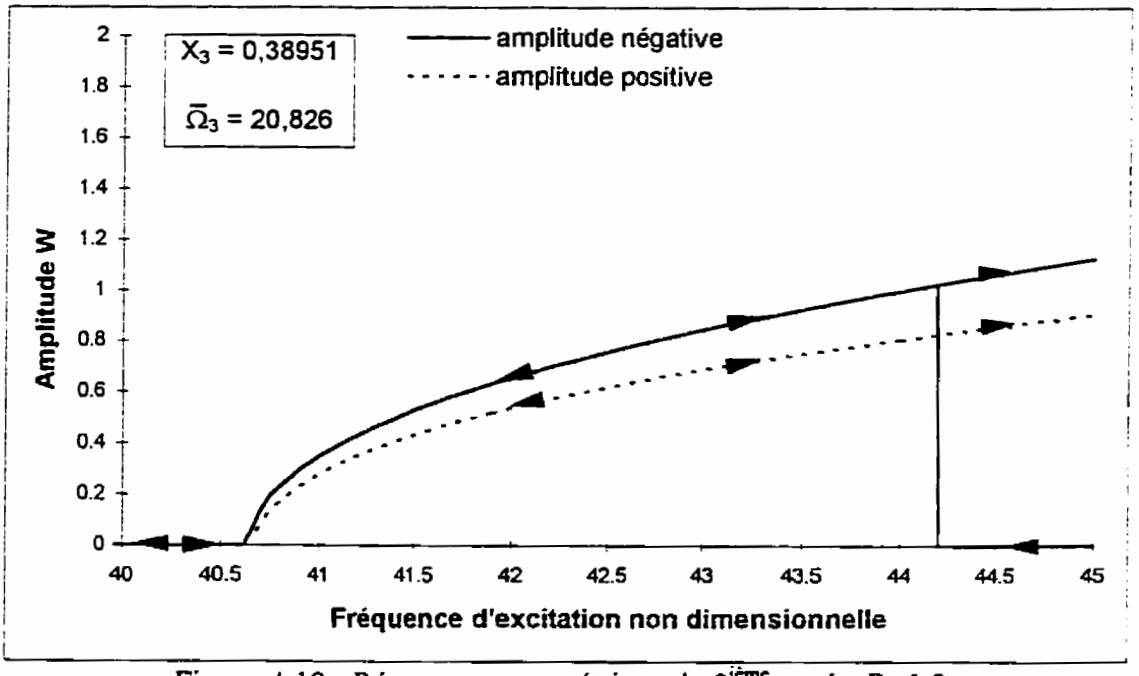



Figure 4.19 - Résonance paramétrique du 3$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{03}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

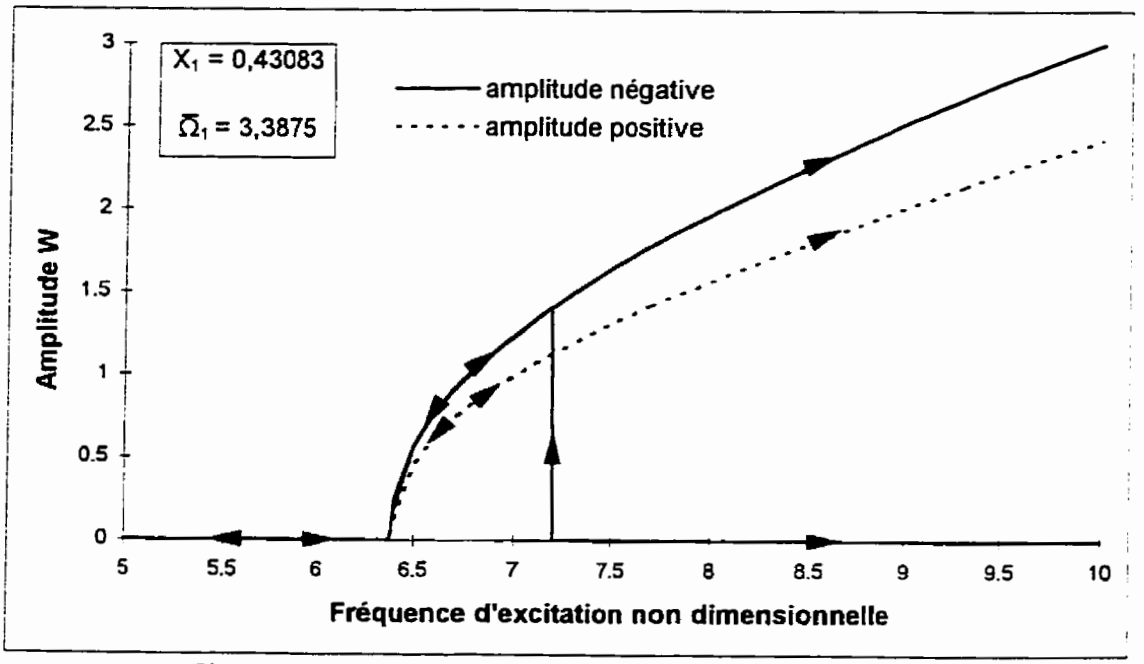



Figure 4.20 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

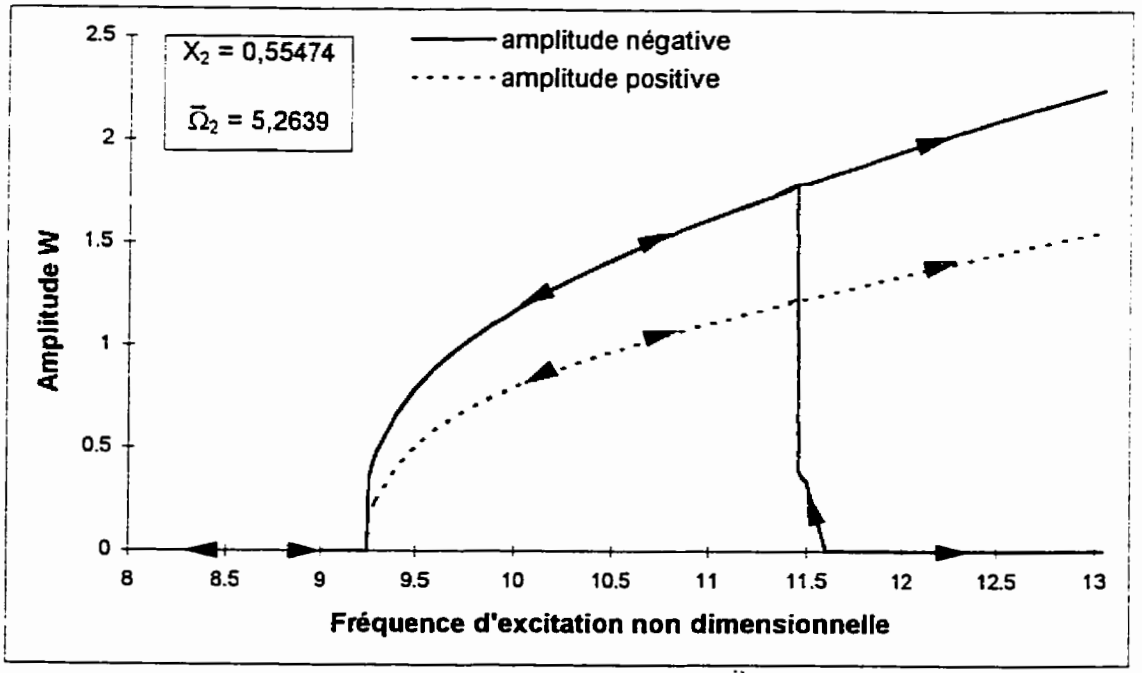



Figure 4.21 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

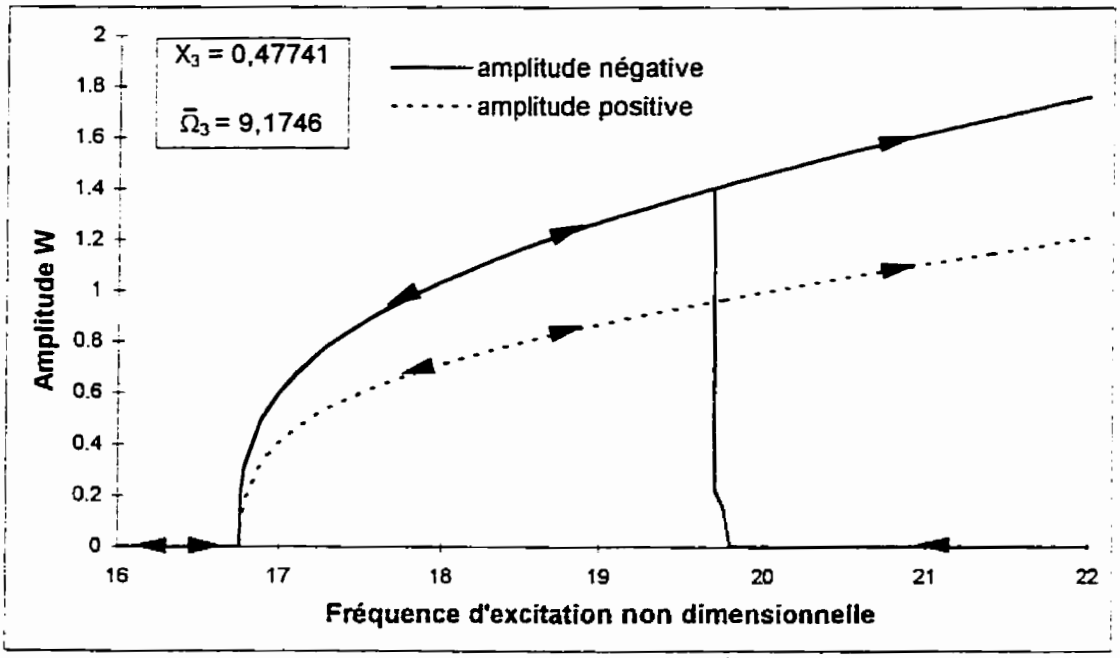



Figure 4.22 - Résonance paramétrique du 3$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{03}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

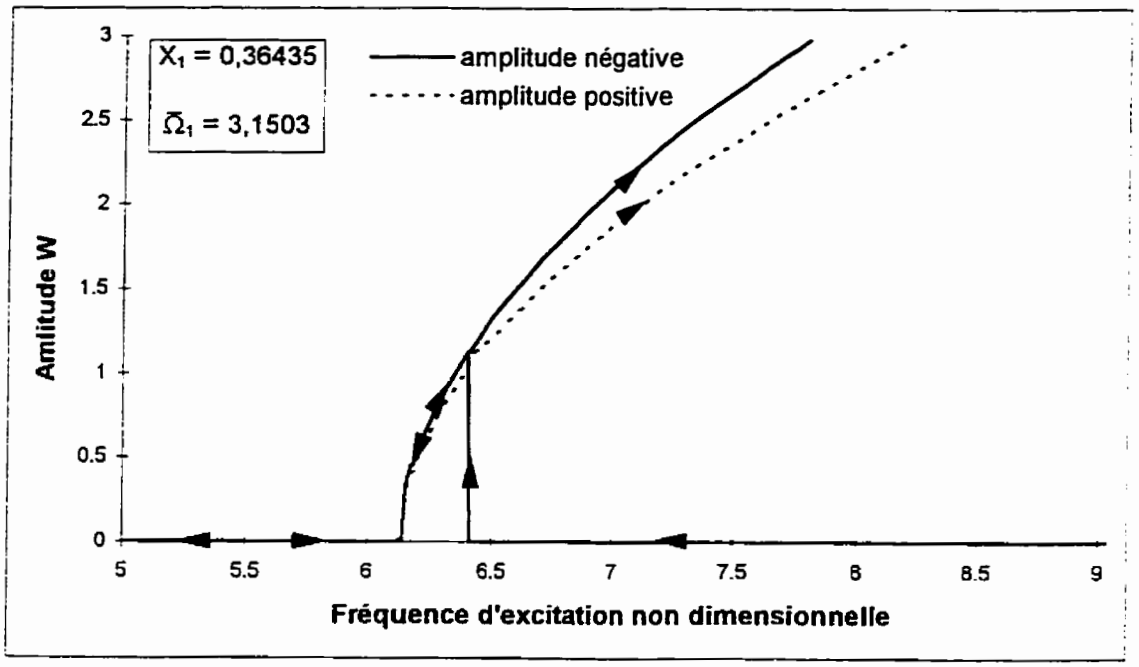



Figure 4.23 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=3,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

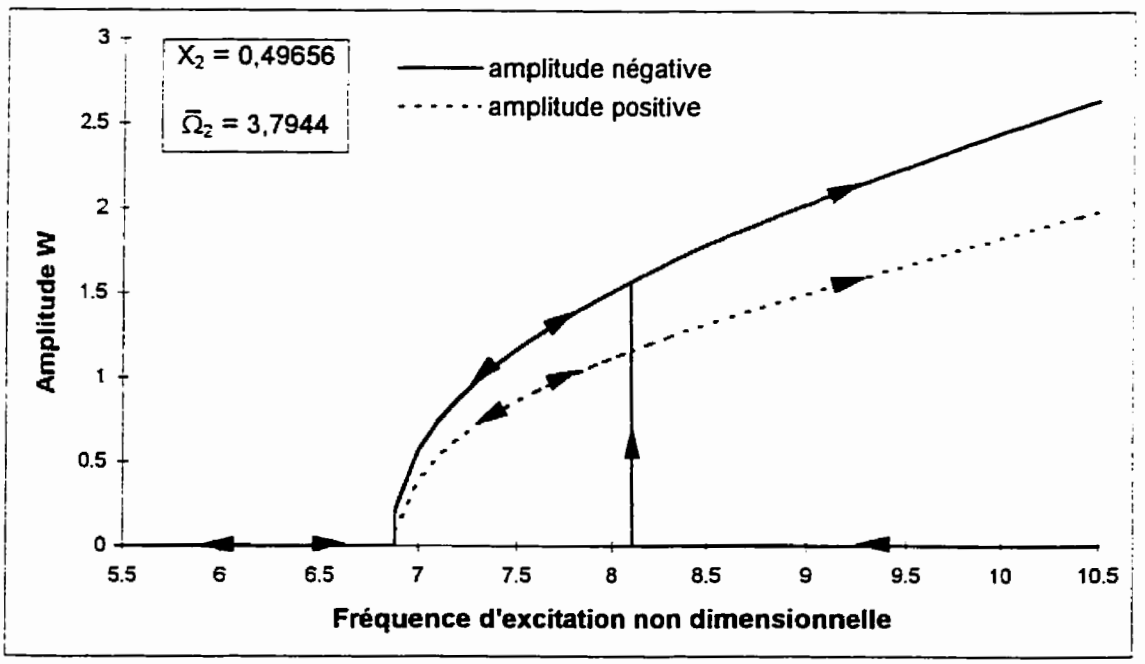



Figure 4.24 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=3,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

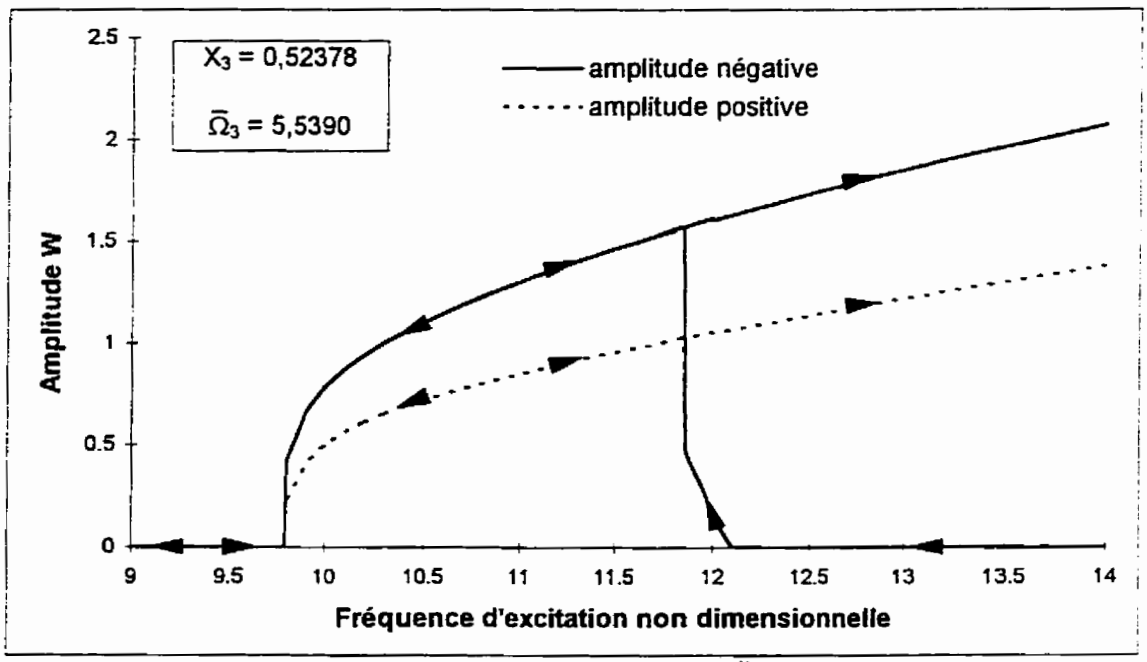
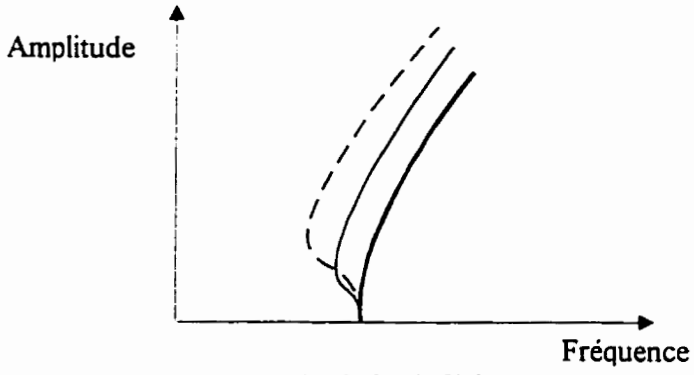


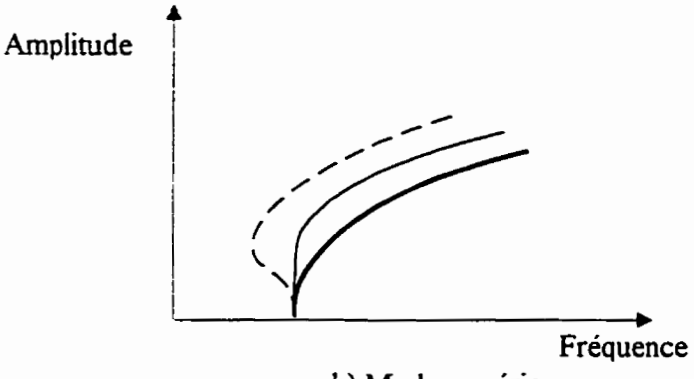

Figure 4.25 - Résonance paramétrique du 3$^{ième}$ mode, R=3,0, $W_{03}$=0,3, $N_{YO}$=0,5

## 4.7 - INFLUENCE DU MODE DE VIBRATION

En général, les modes supérieurs ont un comportement en ressort mou moins prononcé que le premier mode. Pour une plaque parfaite, les modes supérieurs ont un comportement en ressort dur plus accentué que les premiers modes. Par conséquent, quand tous les modes de vibrations subissent le même amollissement de leur comportement, les modes inférieurs ont un comportement de ressort mou plus grand.




a) Modes inférieurs




b) Mode supérieurs

Figure 4.26 - Graphiques illustrant l'influence du mode de vibration sur le comportement en ressort mou

Les courbes de résonances paramétriques principales des trois premiers modes d'une plaque imparfaite ayant un rapport de forme $R$ = 1,2 sont tracées aux figures 4.17 à 4.19. Ces courbes font ressortir la plus grande sensibilité du 1$^{er}$ mode de vibration aux imperfections (comportement en ressort mou plus prononcé). Cette sensibilité du premier mode diminue lorsqu'on augmente le rapport de forme de la plaque.

D'autre part, le mode deuxième mode de vibration est le mode le plus influencé par la présence d'imperfections lorsque la plaque utilisée a un rapport de forme $R$ = 2,0. Les résultats obtenus pour une plaque avec une rapport de forme $R$ = 3,0 (figure 4.23 à 4.25) montrent que le troisième mode est le plus sensible aux imperfections (résultats similaires à ceux obtenus par Sassi [11]). Ces résultats illustrent clairement l'influence du rapport de forme sur la sensibilité d'une plaque aux imperfections géométriques initiales. Il est donc essentiel d'attacher une attention particulière à ce paramètre.

## 4.8 - INFLUENCE DU RAPPORT DE FORME DE LA PLAQUE

Les principes gouvernant le comportement dynamique des structures sont souvent le reflet des comportements statiques. En étudiant l'influence des imperfections sur le comportement statique des plaques imparfaites, il est peut être possible de comprendre un peu plus la sensibilité des vibrations aux imperfections. Le cas statique de plaques imparfaites simplement supportées a déjà été traité par Bulson[49].

Pour toutes les plaques, le mode de vibration le plus influencé par une imperfection est celui pour lequel la déformation statique est la plus grande. Ce phénomène est représentée au tableau 4.2.

| *R=1,2* | | *R=2,0* | | *R=3,0* | |
|---|---|---|---|---|---|
| modes de vibration en ordre croissant de sensibilité aux imperfections | mode de déformation en ordre croissant de déformation statique ($X_m$) | modes de vibration en ordre croissant de sensibilité aux imperfections | mode de déformation en ordre croissant de déformation statique ($X_m$) | modes de vibration en ordre croissant de sensibilité aux imperfections | mode de déformation en ordre croissant de déformation statique ($X_m$) |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |

Tableau 4.2 - Influence du rapport de forme sur les déformations statiques et sur la sensibilité des divers modes de vibration aux imperfections

Au moins une étude statique [49] effectuée sur les plaques imparfaites permet de savoir quel est le mode pour lequel la déflexion statique $X_m$ est la plus grande en connaissant le rapport de forme de la plaque. Il est donc possible de prédire quel est le mode de vibration pour lequel le comportement en ressort mou sera le plus prononcé en connaissant le rapport de forme de la plaque.

## 4.9 - INFLUENCE DU TYPE DE CONDITIONS AUX FRONTIÈRES

Plusieurs courbes illustrant les résonances paramétriques de plaques imparfaites ont été tracées pour différents types de conditions aux frontières. Celles-ci illustrent le comportement de quatre plaques différentes pour quatre combinaisons de conditions aux frontières. Elles sont présentées aux figure 4.27 à 4.42.

Pour toutes les plaques, on remarque que la présence d'encastrements sur le pourtour de la plaque augmente l'inclinaison vers la droite de la courbe de résonance (comportement en ressort dur plus prononcé). Lorsque le comportement en ressort dur est plus accentué, les sauts (associé à la transition entre un comportement de ressort mou à un comportement de ressort dur) ont une amplitude moindre, même si le comportement en ressort mou est plus prononcé. Par conséquent, la hauteur des sauts est influencé par le type de conditions frontières.

Dans tous les cas étudiés, le comportement en ressort mou est plus faible quand la plaque est simplement supportée sur son pourtour et atteint sa plus grande envergure lorsque la plaque est complètement encastrée. Pour les cas de conditions aux frontières mixtes, le comportement de ressort mou est généralement plus accentué lorsque le chargement est appliqué sur les arêtes encastrées, tout en étant assez similaire. Cependant, cette dernière observation peut s'avérer fausse lorsque que le mode critique

de flambage d'une plaque chargée sur ses arêtes simplement supportées correspond au mode de vibration et que ce n'est pas le cas lorsque la plaque est chargée sur ses arêtes encastrées (figures 4.32 et 4.33).

Dans certains cas (figure 4.30), la présence d'un comportement en ressort mou est tel que la résonance paramétrique ne se produit pas complètement. Ainsi, les imperfections ont un effet stabilisateur car elles empêchent les vibrations paramétriques de forte amplitude de se produire.

Pour tous les types de conditions aux frontières, le comportement en ressort mou est plus important lorsque le mode de vibration (mode d'imperfection) correspond au mode critique de flambage.

De plus, en comparant deux cas différents ayant une déflexion statique de même forme et de même amplitude (figures 4.31 et 4.42), on peut affirmer qu'il n'existe pas de lien direct entre l'amplitude des sauts et l'amplitude des déflexions statiques. À la figure 4.42, le comportement en ressort mou est beaucoup plus prononcé que celui de la figure 4.31 et par conséquent le saut est plus grand.

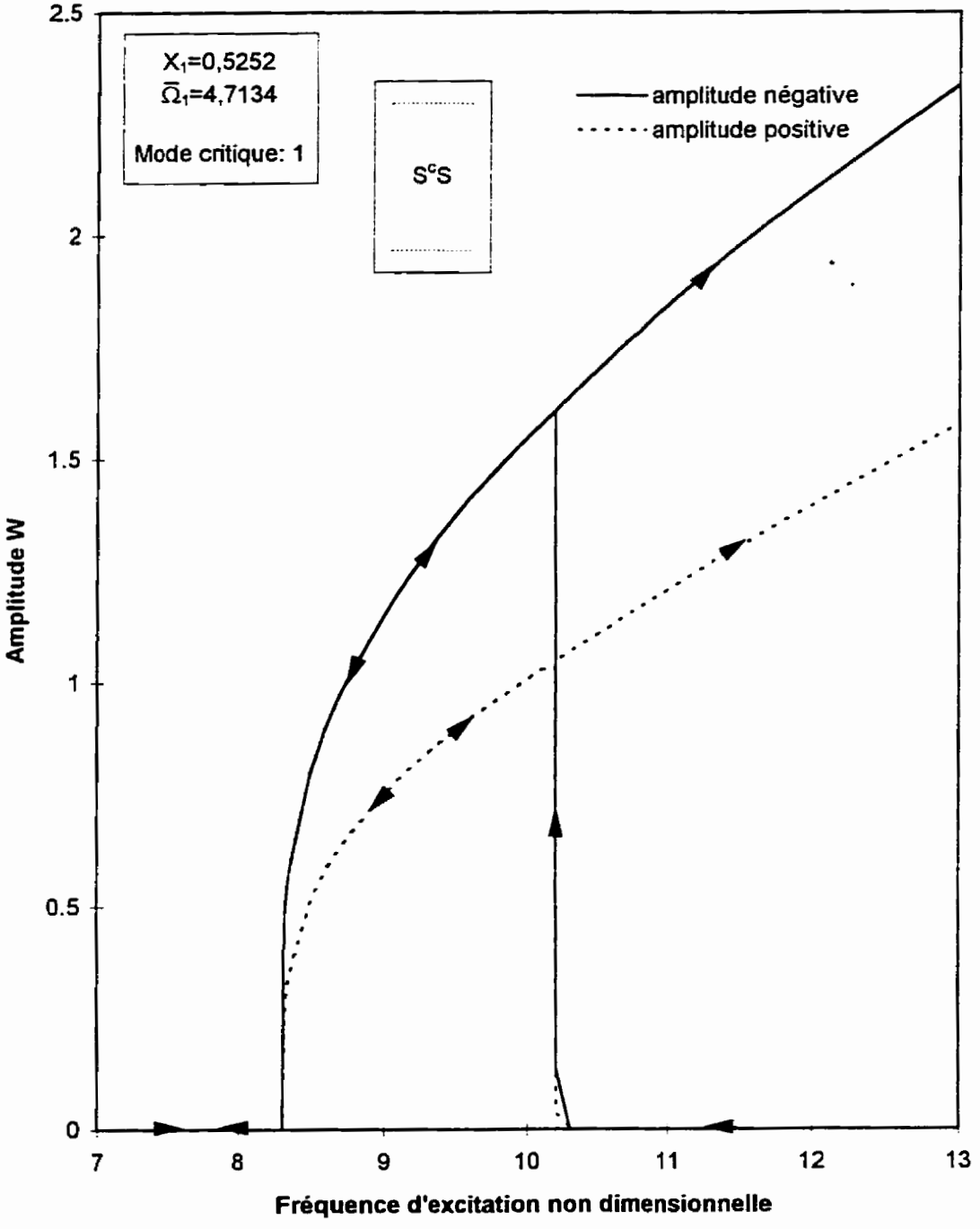



Figure 4.27 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2,
$W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$S

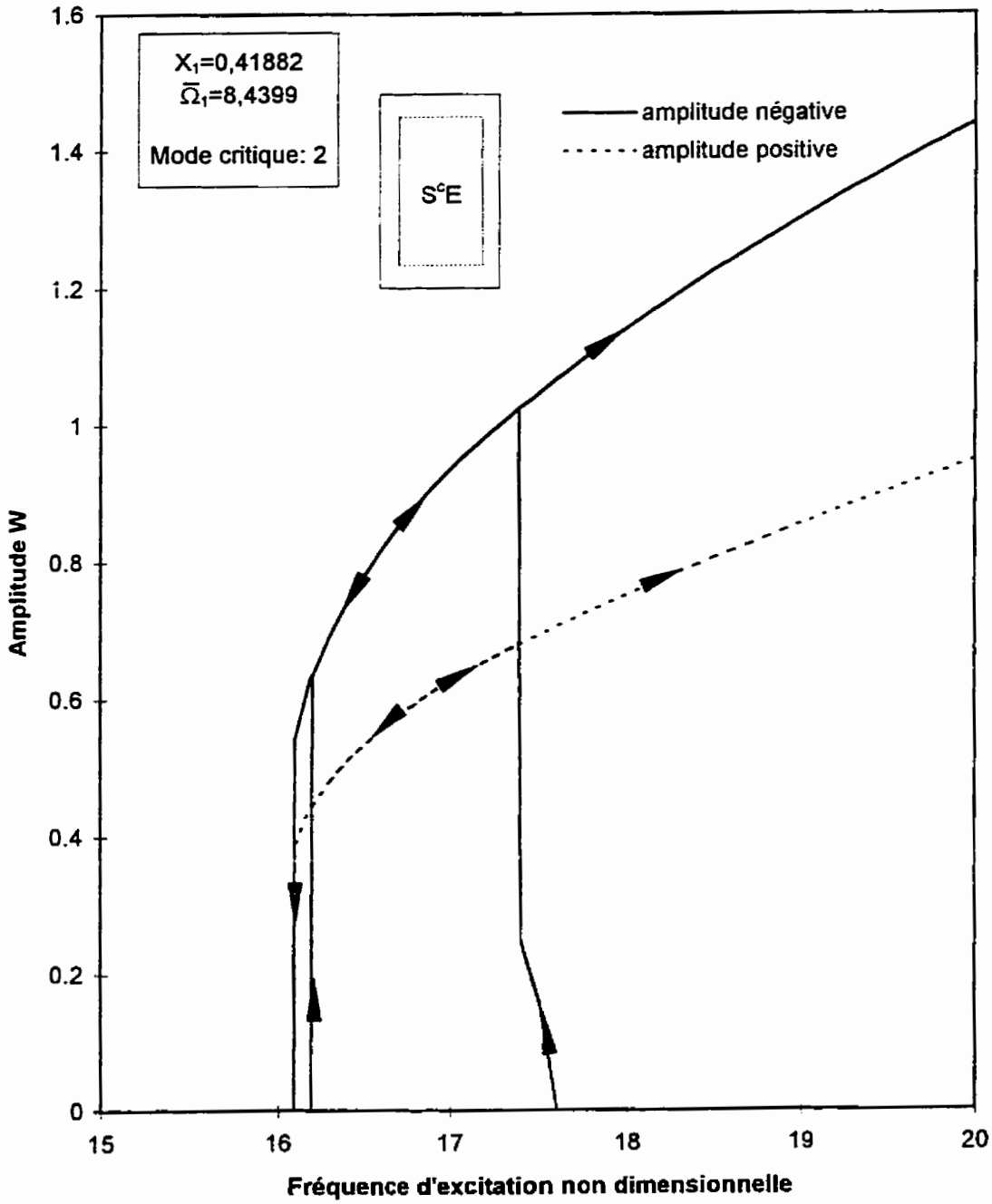



Figure 4.28 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S°E

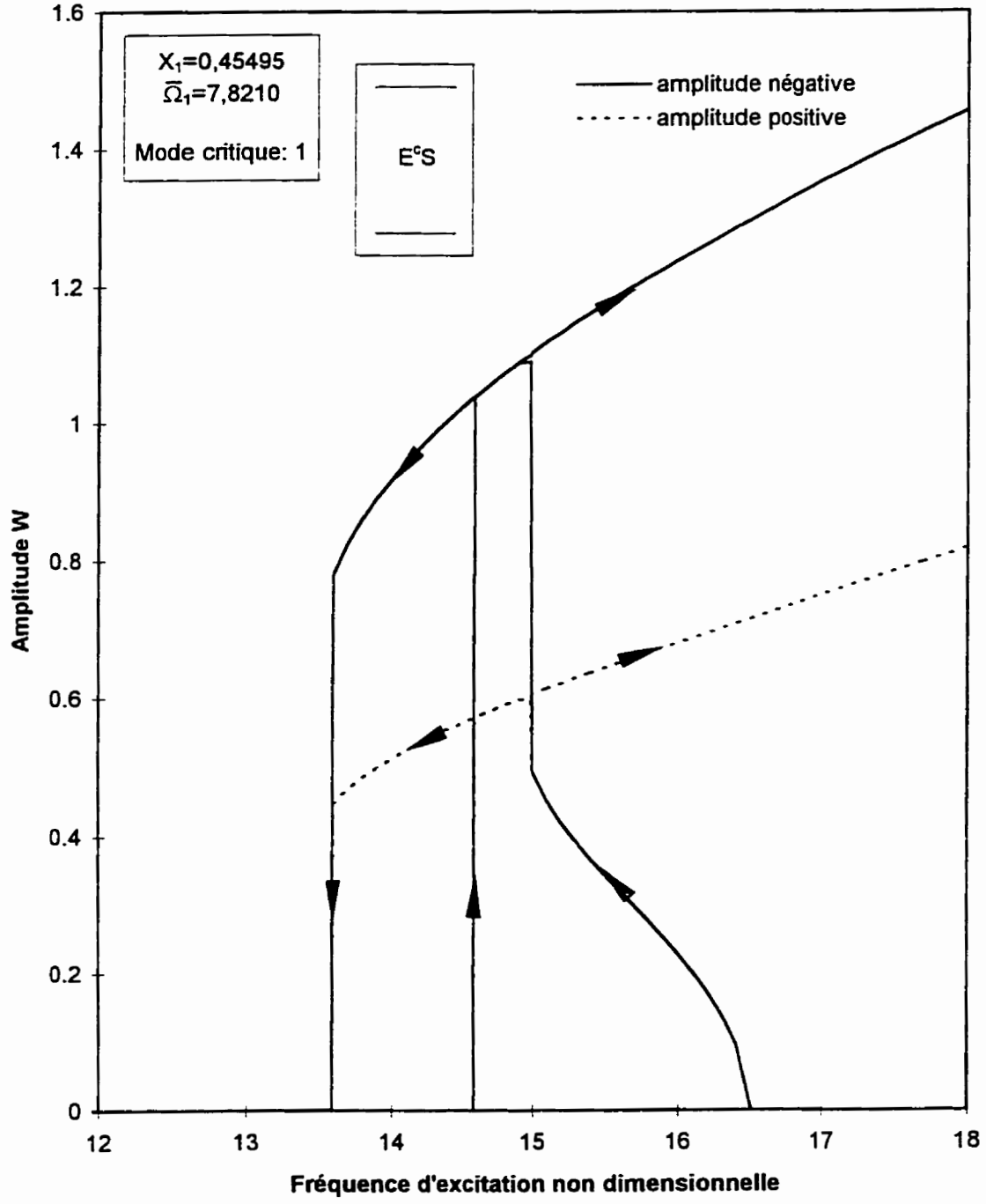



Figure 4.29 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$S

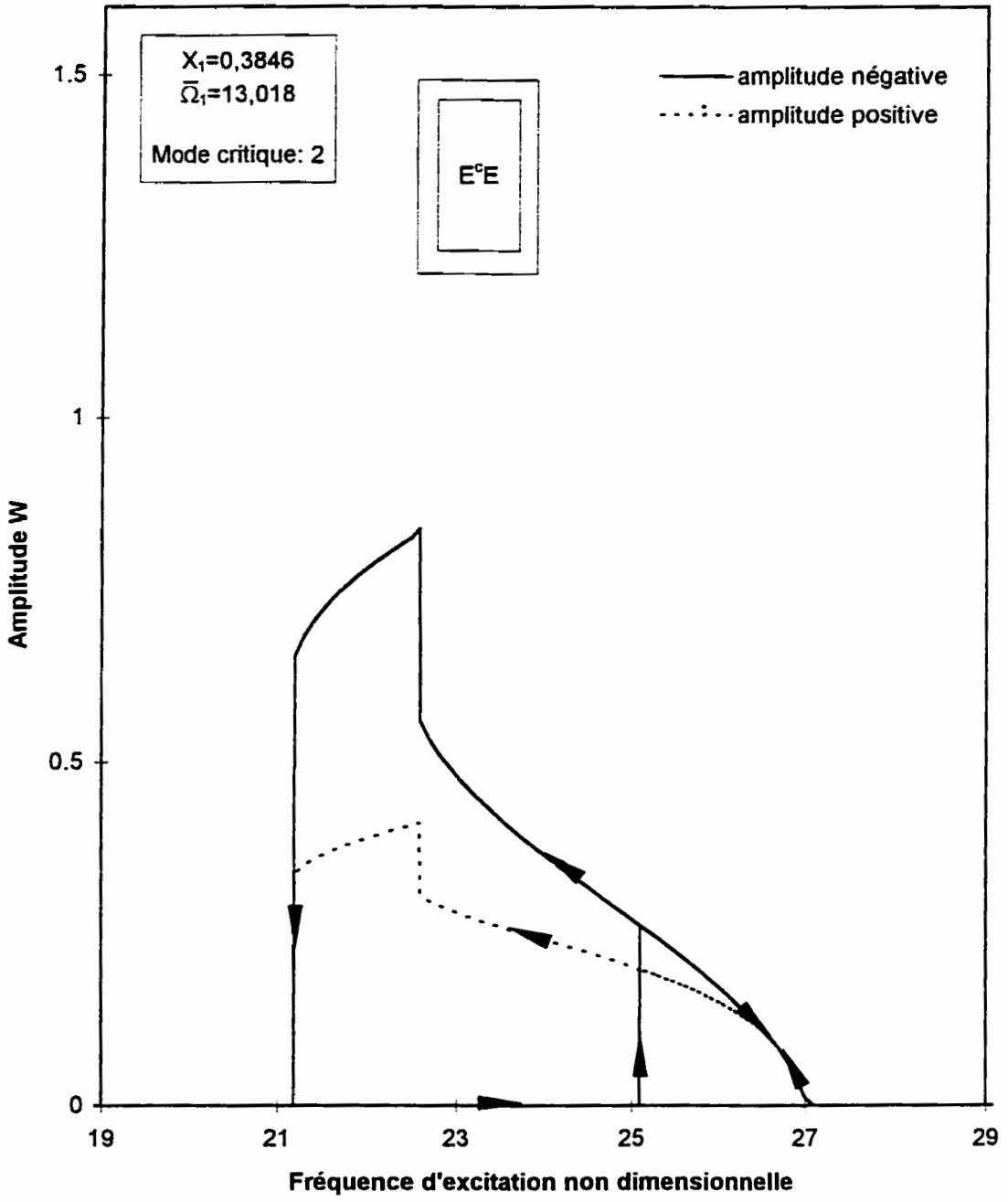



Figure 4.30 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=1,2,
$W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$E

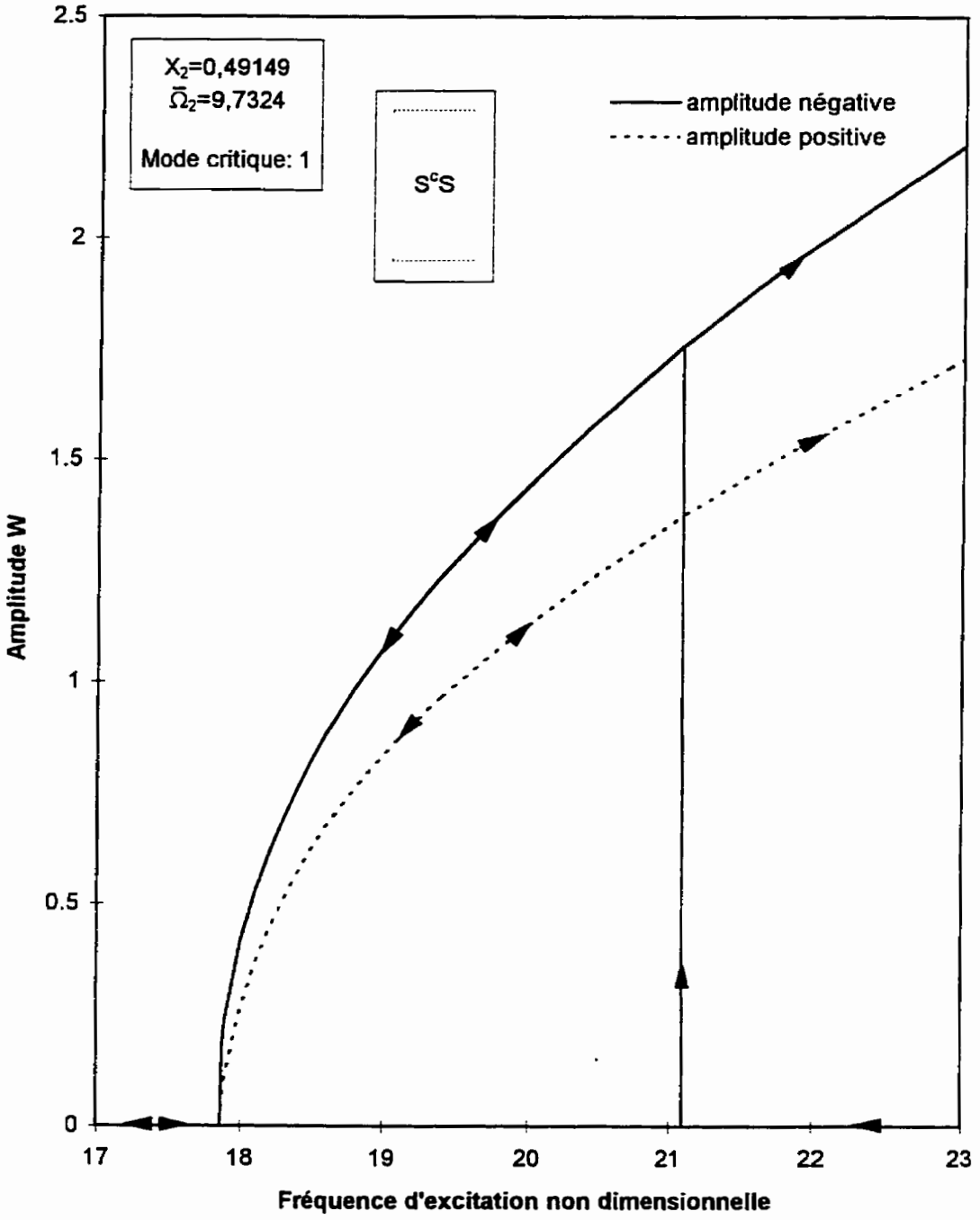



Figure 4.31 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$S

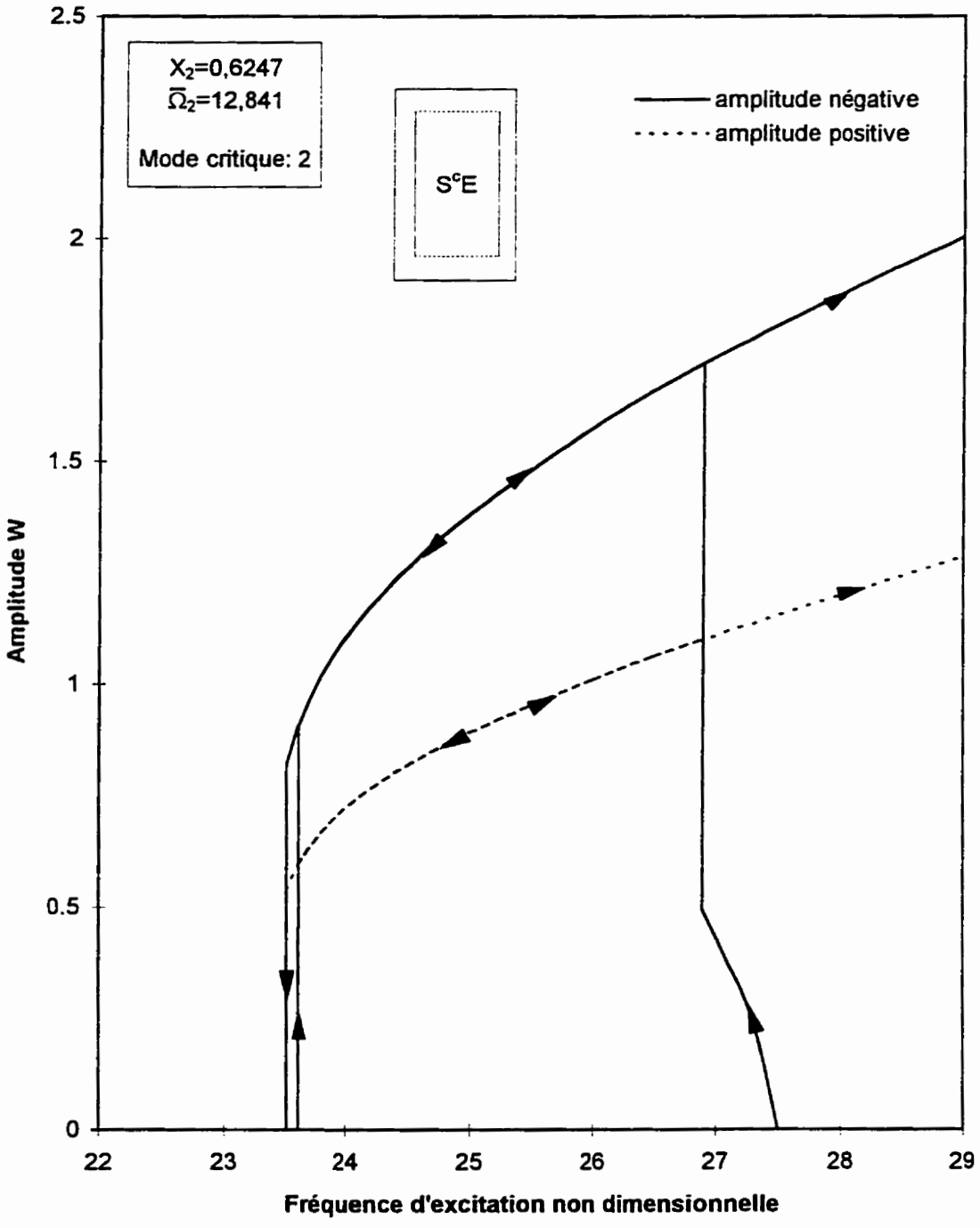



Figure 4.32 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$E

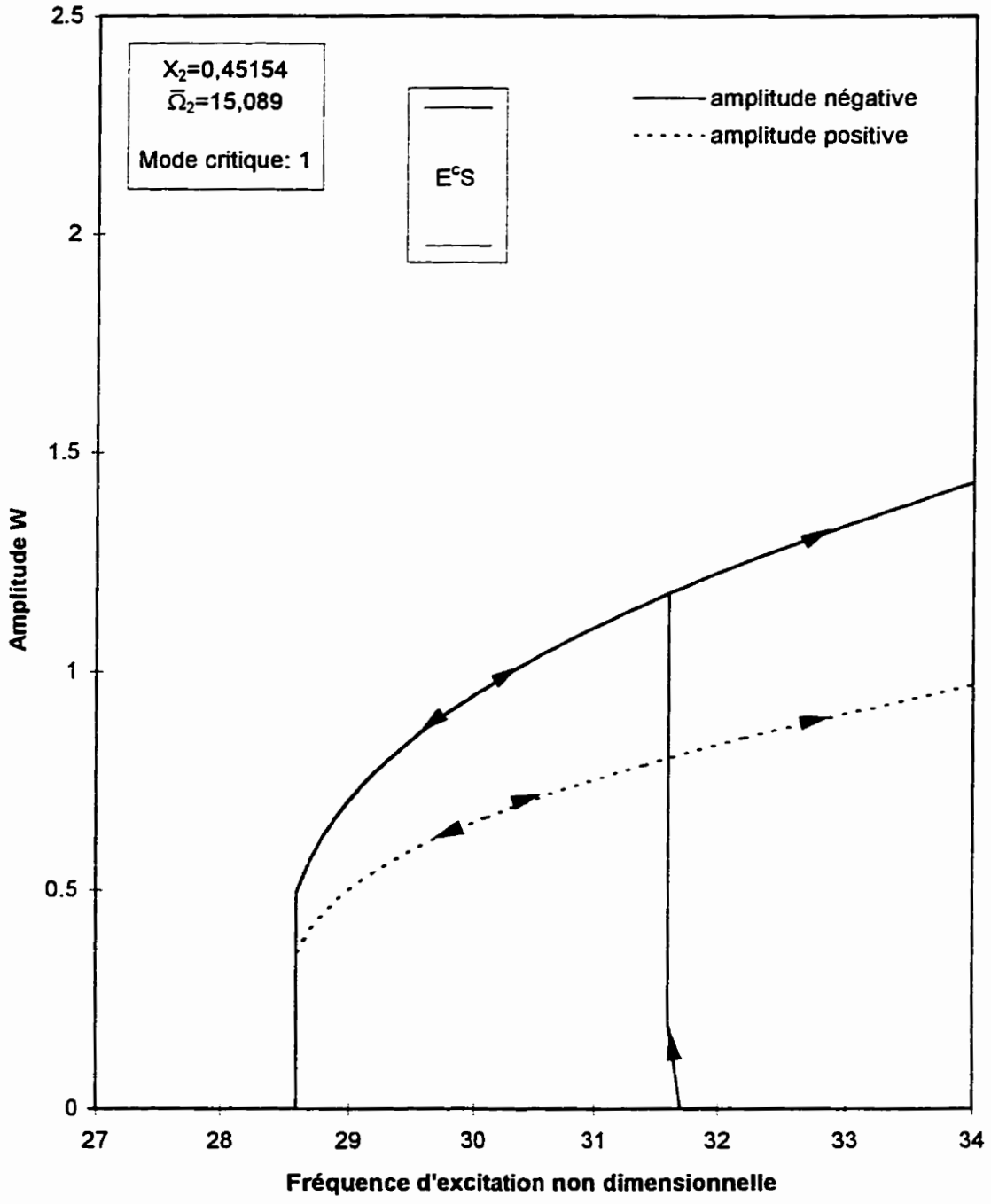



Figure 4.33 - Réponse paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=1,2,
$W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$S

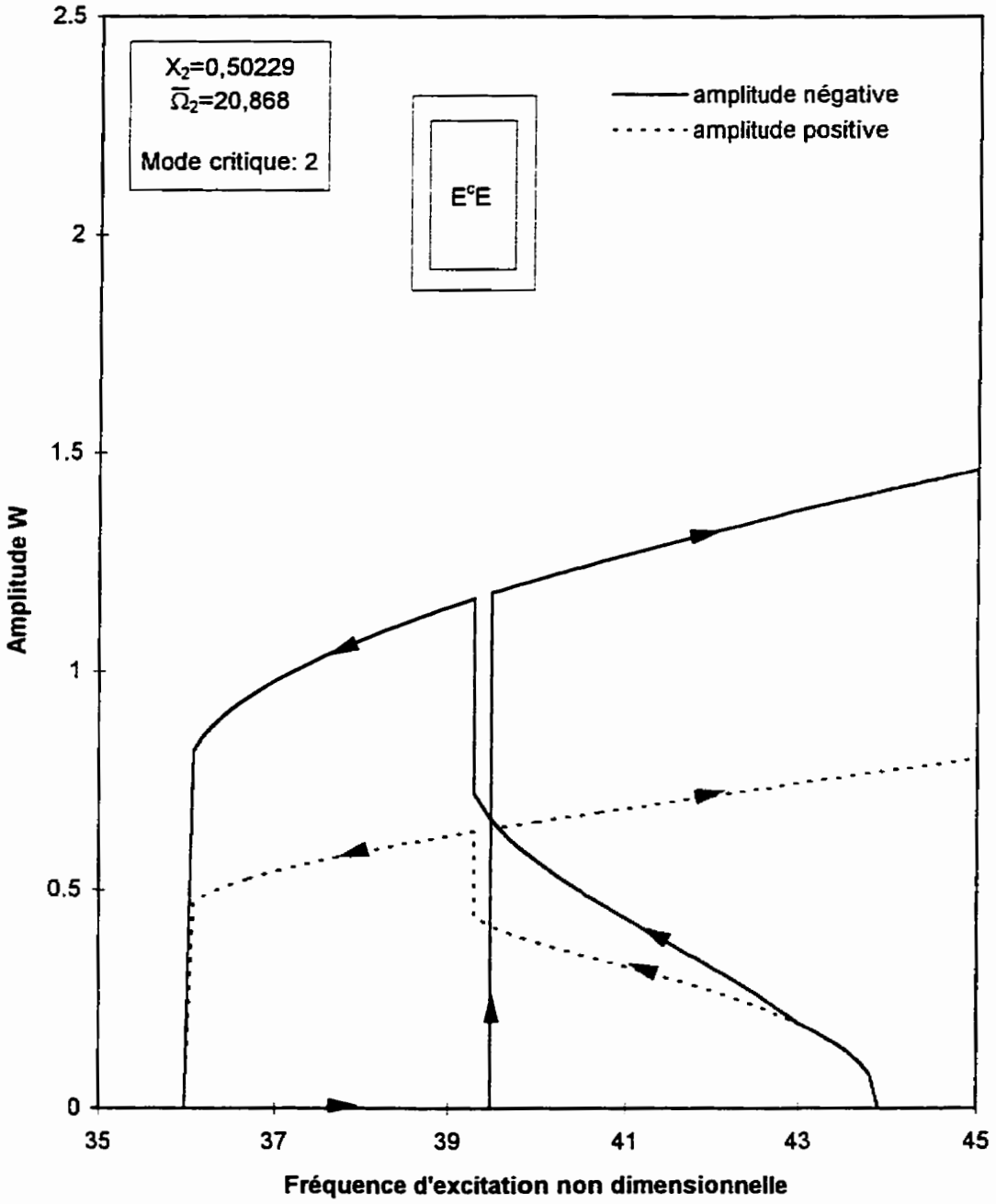



Figure 4.34 - Résonance paramétrique du 2ième mode, R=1,2, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,3, plaque E°E

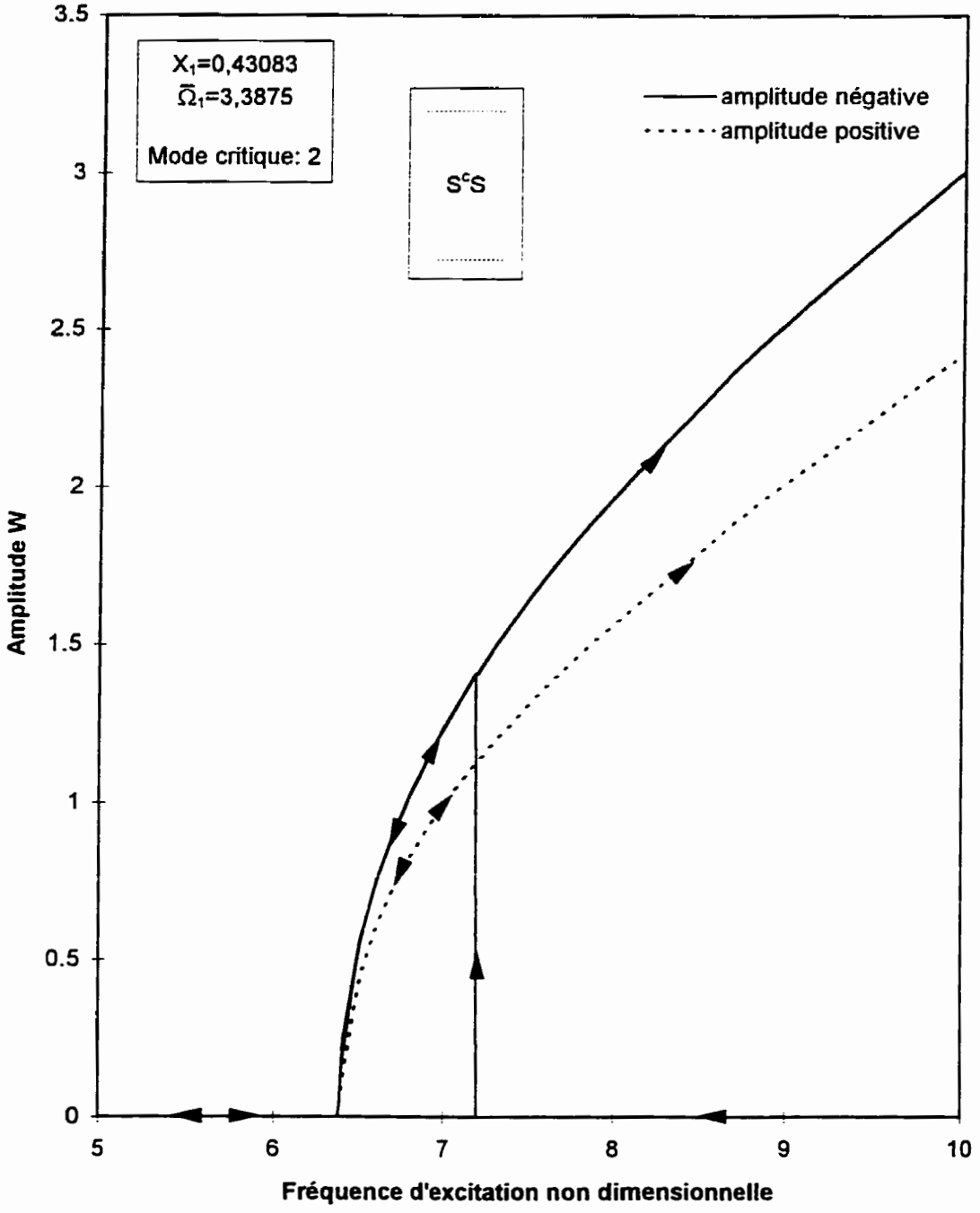



Figure 4.35 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$S

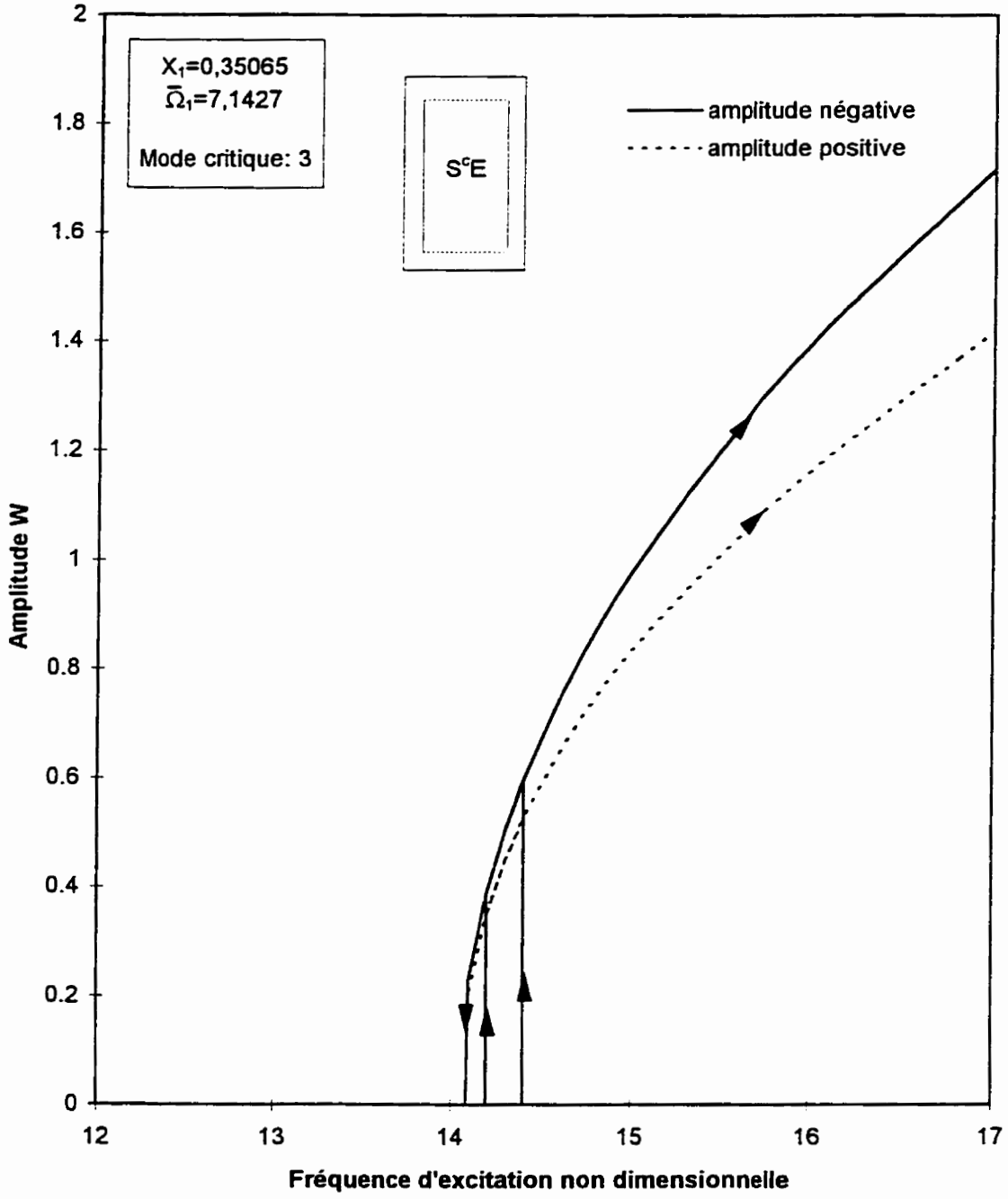



Figure 4.36 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$E

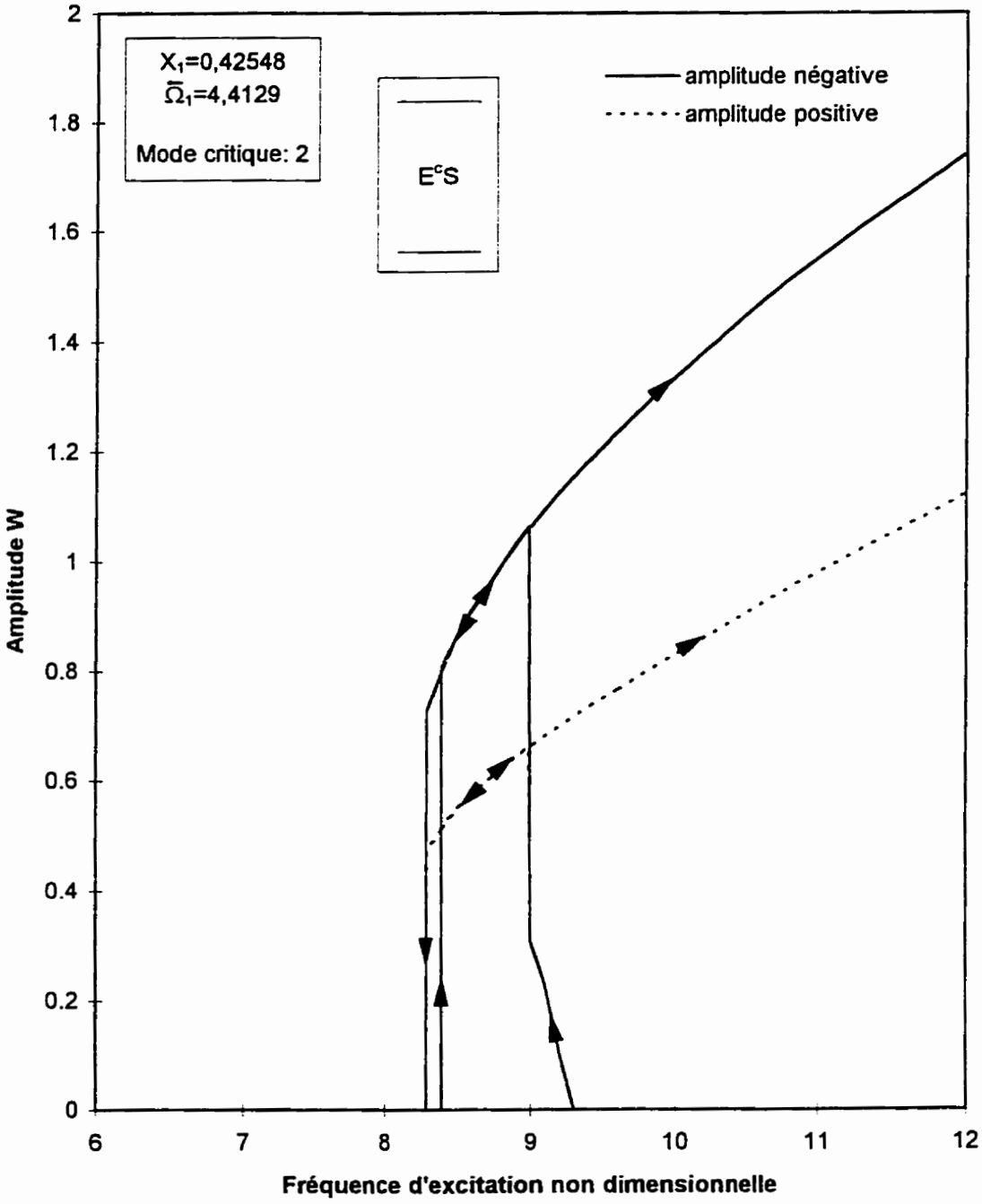



Figure 4.37 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0,
$W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5 plaque E$^c$S

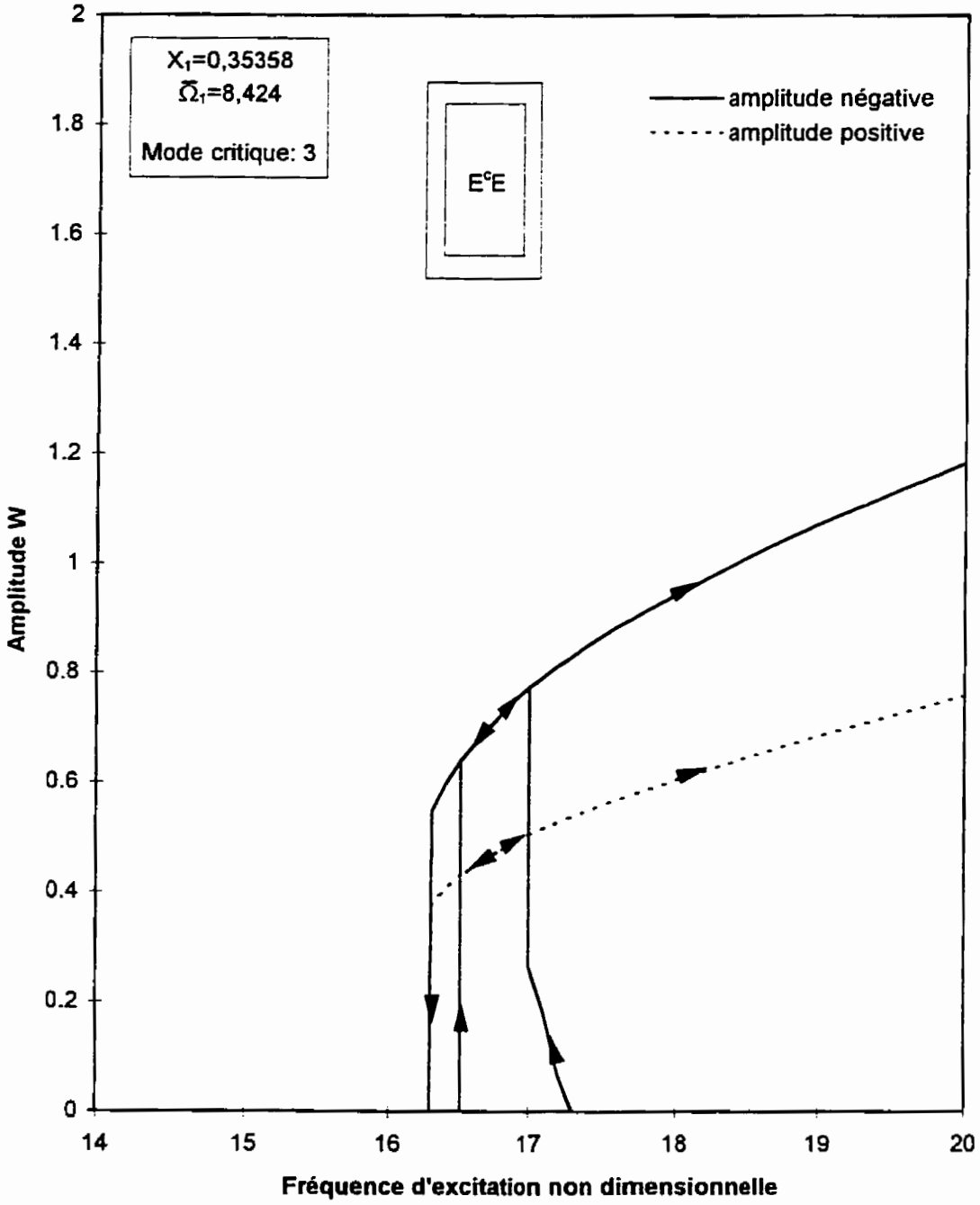



Figure 4.38 - Résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode, R=2,0, $W_{01}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$E

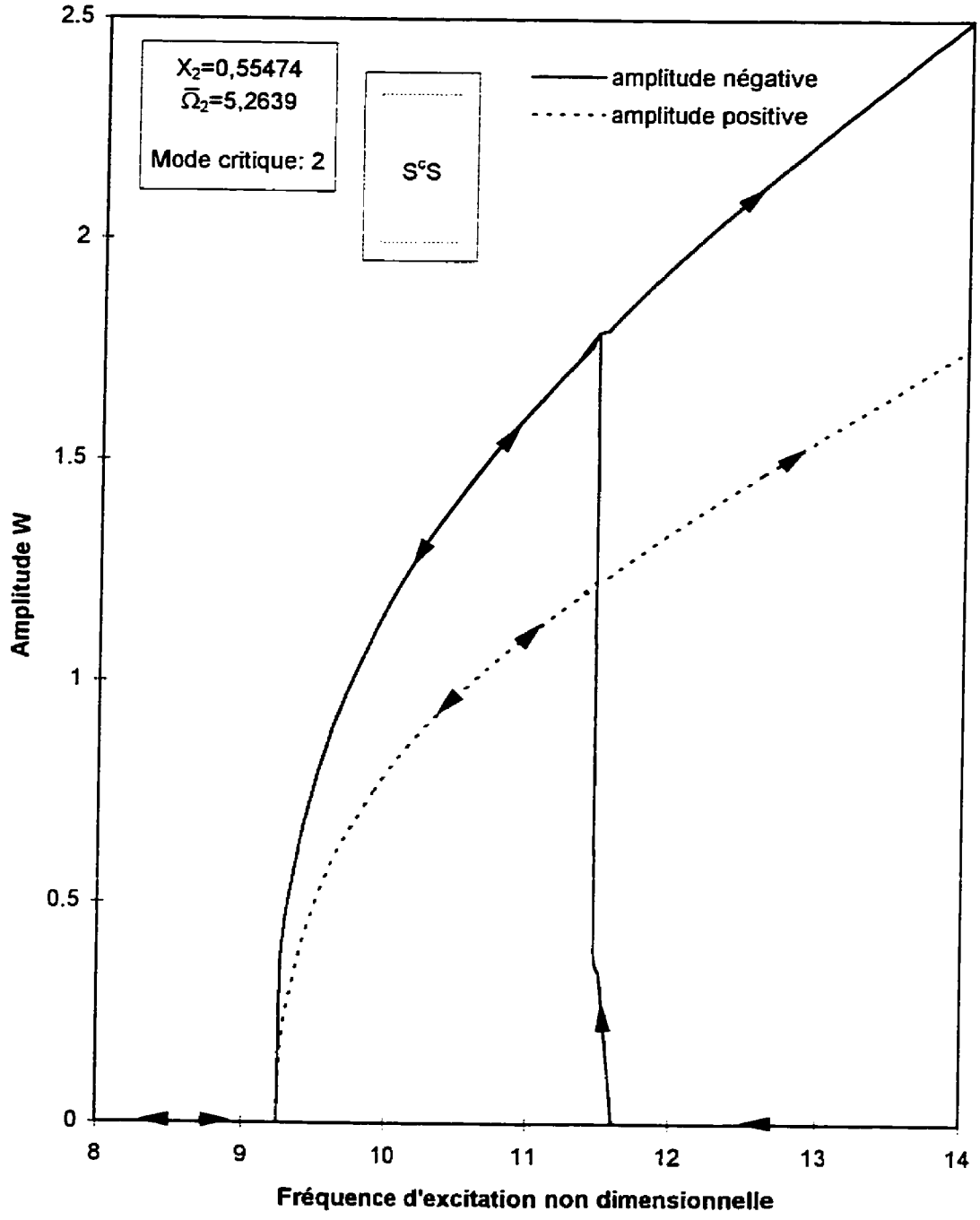



Figure 4.39 - Résonance paramétrique du 2ième mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S°S

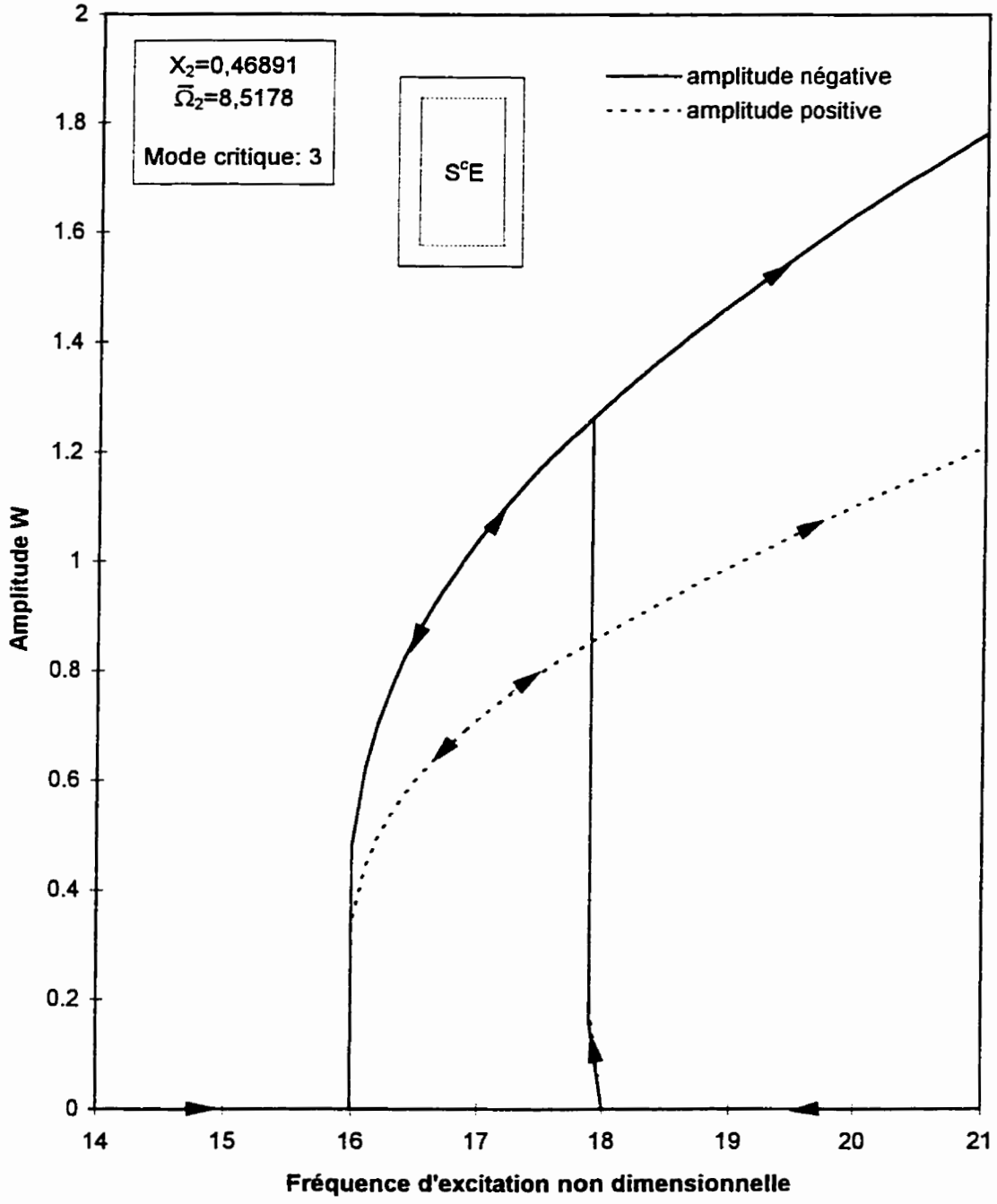



Figure 4.40 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque S$^c$E

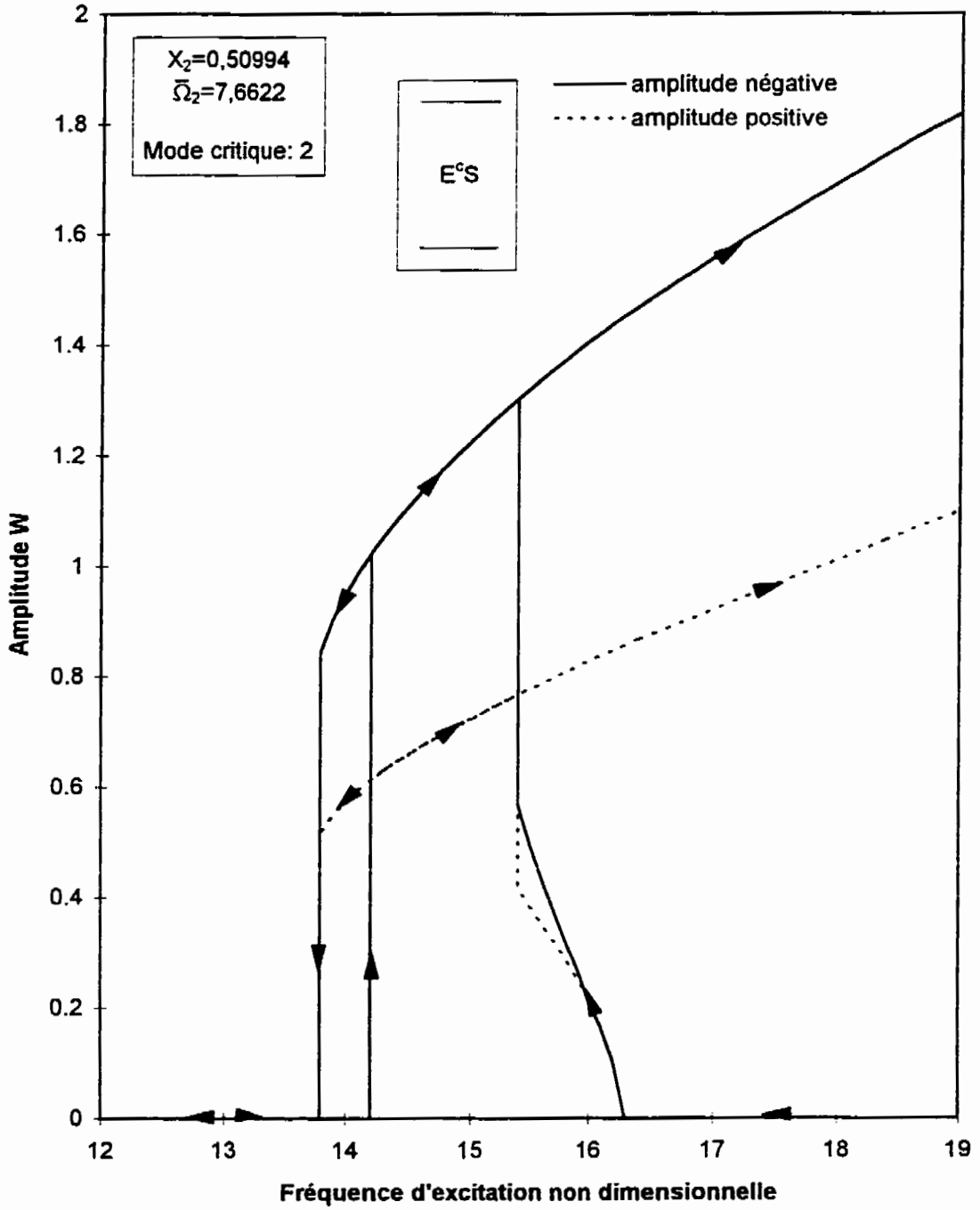



Figure 4.41 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E°S

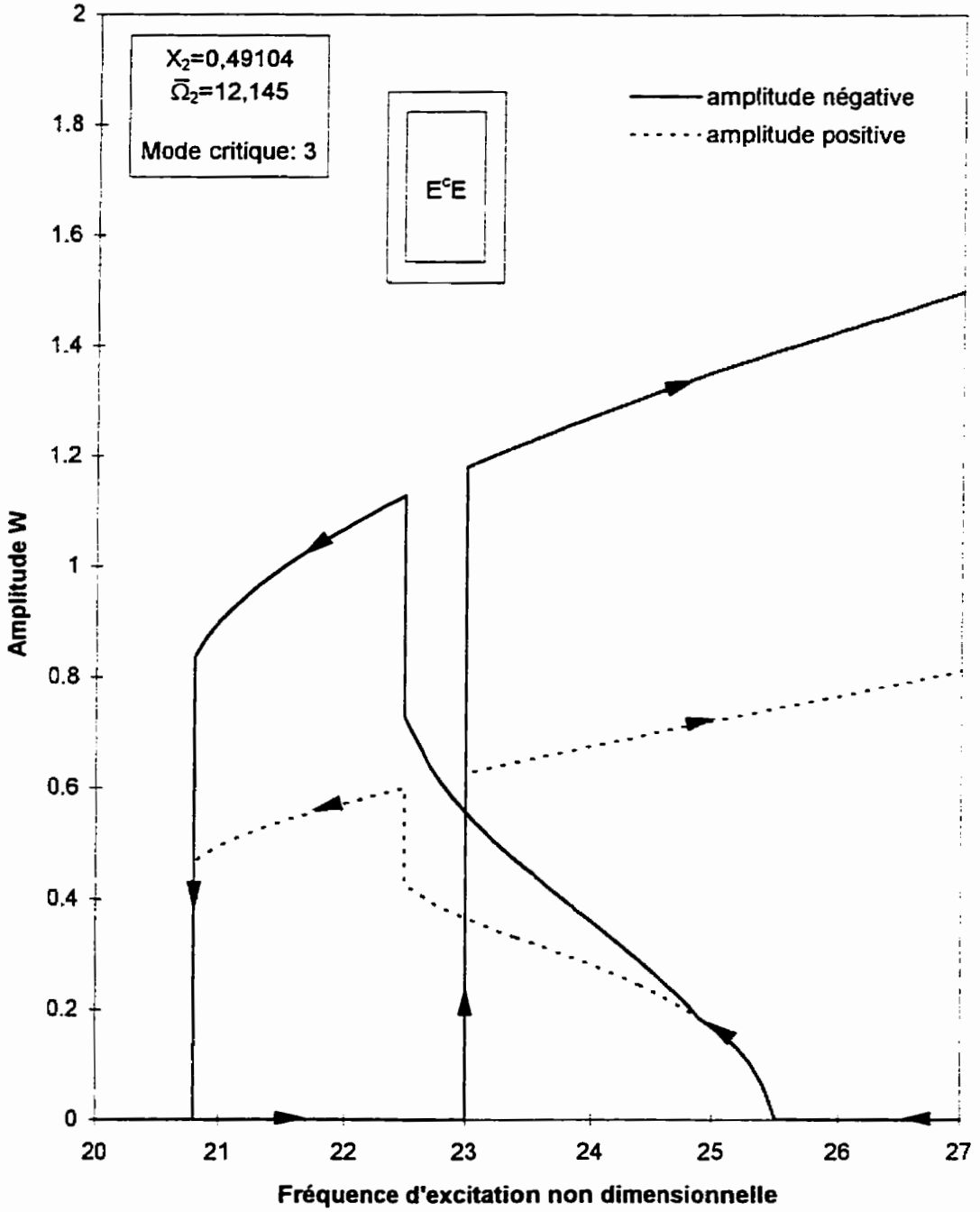
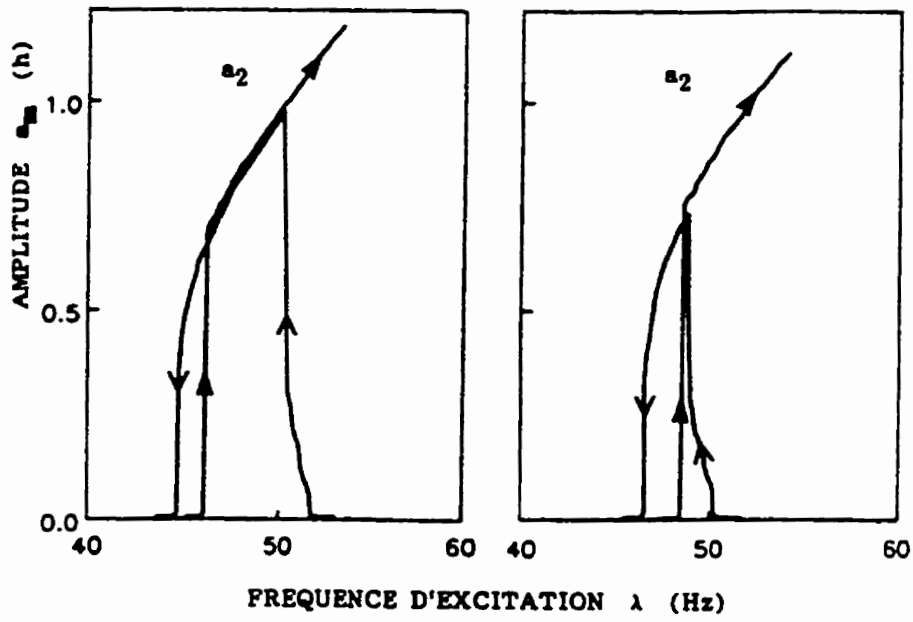



Figure 4.42 - Résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode, R=2,0, $W_{02}$=0,3, $N_{YO}$=0,5, plaque E$^c$E




a) Niveau modéré b) Niveau critique

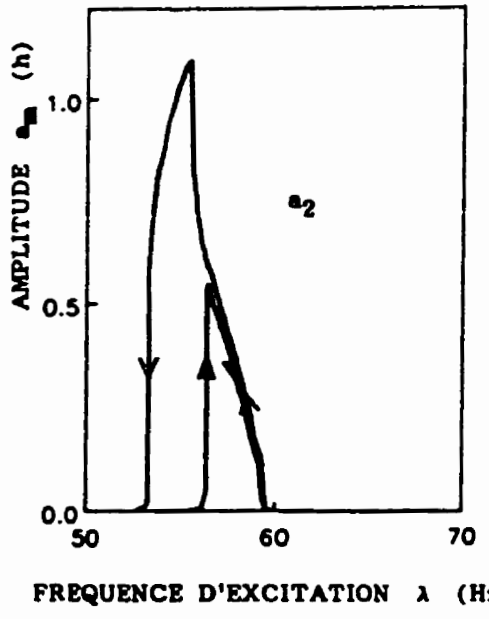



Figure 4.43 - Effet des imperfections géométriques initiales,

résultats tirés de la référence[9]

## 4.10 - VALIDATION DES RÉSULTATS OBTENUS

Les résultats obtenus doivent être comparés avec des résultats expérimentaux pour s'assurer de leur validité. Quelques résultats expérimentaux de Samson [9] sont présentés à la figure 4.43 à titre de comparaison. Ces courbes ont la même forme générale que celles obtenues. Elles sont caractérisées par un saut en début de résonance paramétrique lors d'un balayage croissant de la fréquence d'excitation, conséquence de la présence d'un comportement en ressort mou. Le comportement en ressort mou obtenu est donc un phénomène réel, et non la conséquence d'une mauvaise modélisation ou d'une extension abusive du domaine de validité de celle-ci.

## 4.11 - CONCLUSION

La présence d'imperfections géométriques initiales peut modifier le comportement de ressort dur pour les vibrations de faible amplitude en comportement de ressort mou, suivi d'un comportement de ressort dur pour les vibrations de grande amplitude. Le point de transition entre les deux types de comportement est cependant influencé par toutes les caractéristiques du système. Il est donc difficile voir impossible d'établir une relation simple qui permette de prévoir celui-ci.

# Chapitre 5

# Interaction entre résonance paramétrique et résonance forcée

## 5.1 - INTRODUCTION

Les imperfections initiales génèrent une force effective dans la direction du mouvement, et ce pour tous les modes de vibration. Cependant, quand le mode de vibration a la même forme que l'imperfection géométrique, le terme d'excitation forcé est plus grand et l'amplitude des vibrations forcées est plus importante.

L'interaction entre une résonance forcée suivant un mode précis et la résonance paramétrique d'un autre mode est étudiée en utilisant un modèle à deux degrés de liberté. Le mode de résonance forcée est celui selon lequel on retrouve une imperfection. Cette condition permet d'obtenir une résonance forcée ayant la plus grande amplitude possible et ainsi de visualiser plus facilement l'interaction entre les deux types de résonance considérés.

## 5.2 - MODÉLISATION UTILISÉE

L'équation du mouvement pour le modèle à deux degrés de liberté, basée sur les observations précédentes, prend la forme suivante:

$$\ddot{W}_m + 2C_m\dot{W}_m - N_{YT}\cos\theta\left[P_m^v W_v + P_m^j W_j\right] + KT_m^v W_v + KT_m^j W_j + M_m^{vvv} W_v^3 + M_m^{jjj} W_j^3$$

$$+ G_m^{vvj} W_v^2 W_j + G_m^{vjj} W_v W_j^2 + H_m^{jvv} W_v^2 X_j + H_m^{jjj} W_j^2 X_j + HH_m^{vj} W_v W_j X_j$$

$$= N_{YT}\cos\theta \cdot P_m^j X_j \qquad (5.1)$$

où $m=v,j$: - $v$: 1$^{er}$ mode de vibration;

- $j$: 2$^{ième}$ mode de vibration (mode ayant la même forme que l'imperfection);

et pour laquelle

$$KT_m^n = K_m^n - N_{YO} P_m^n + H_m^{njj} X_j^2 - M_m^{njj} W_{oj}^2$$

$$G_m^{vvj} = M_m^{vvj} + M_m^{vjv} + M_m^{jvv}$$

$$G_m^{vjj} = M_m^{vjj} + M_m^{jvj} + M_m^{jjv}$$

$$HH_m^{vj} = H_m^{jvj} + H_m^{jjv}$$

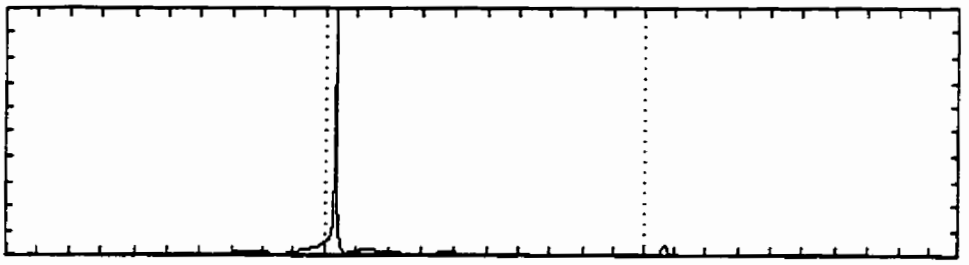
Le système à deux degrés de liberté est ainsi modélisé à l'aide de deux équations couplées. Le digramme fonctionnel d'une de ces équations (un des deux degrés de

liberté) est présenté à l'annexe B avec le fichier TUTSIM correspondant, pour l'intégration directe de ce système d'équations. Le programme TURBO-PASCAL utilisé y est aussi présenté.

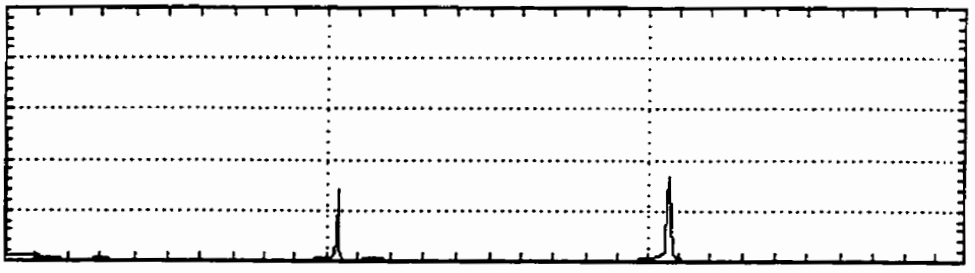
Les courbes de résonance sont tracées en effectuant un balayage croissant de la fréquence d'excitation. La procédure utilisée permet d'obtenir la branche supérieure des courbes de résonance (points ayant la plus grande amplitude). Cette partie de la courbe contient toute l'information nécessaire pour comprendre le processus d'interaction entre les résonances paramétriques et les résonances forcées.

## 5.2 - RÉSULTATS ET DISCUSSION

Lorsqu'un mode est en résonance paramétrique et oscille avec une grande amplitude, la réponse du mode forcé a une composante non négligeable à la même fréquence que le mode résonant. La figure 5.1 donne une représentation fréquentielle de ce phénomène.



a) Réponse fréquentielle du premier mode



b) Réponse fréquentielle du deuxième mode



c) Force d'excitation de fréquence Λ

Figure 5.1 - Réponses fréquentielles pour une résonance paramétrique avec des vibrations de grande amplitude

Le premier graphique de réponse en fréquence représente la réponse paramétrique du premier mode ( $\Lambda = 2\Omega_1$ ). Le deuxième graphique donne la réponse fréquentielle du deuxième mode (mode forcé). Celle-ci a deux composantes fréquentielles non négligeables, l'une de même fréquence que l'excitation et l'autre ayant la même fréquence que le mode résonant. L'origine de cette dernière composante peut être expliquée par la présence des imperfections géométriques initiales. En effet, celles-ci induisent un couplage linéaire entre les équations du mouvement. Par conséquent, les vibrations de la plaque suivant un mode peuvent exciter un autre mode par couplage interne. Dans ce cas particulier, la fréquence de vibration du mode excité par couplage est celle du mode qui l'excite.

Dans les développements utilisés, la déflexion réelle de la plaque ( $W(X,Y,T)$ ) est constituée d'une superposition des réponses de tous les modes considérés. La forme réelle de la plaque lors d'une résonance paramétrique peut donc être déterminée en superposant toutes les réponses obtenues ayant une fréquence égale à une demi-fois la fréquence d'excitation. Cette superposition est facile à effectuer car les réponses temporelles qui sont à la même fréquence sont toujours en phase ou en opposition de phase ($\phi = 0°$ ou $180°$). Il est clair que les déformées ainsi obtenues pour les vibrations de grande amplitude ne sont qu'une grossière approximation des déformées réelles, car le nombre de degrés de liberté utilisé est trop restreint (seulement deux degrés de liberté). Des déformées dynamiques obtenues sont présentées aux figures 5.2 à 5.4.

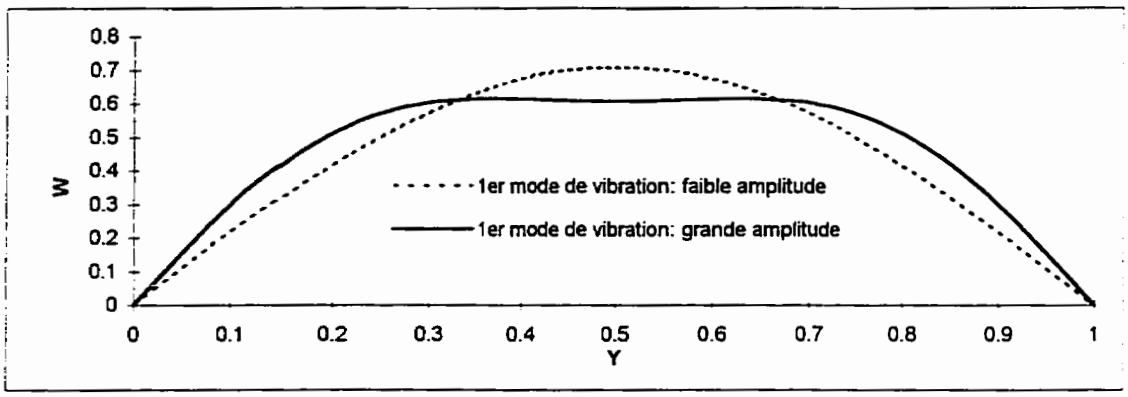



Figure 5.2 - Allure du 1$^{er}$ mode de vibration en présence d'une imperfection selon le 3$^{ième}$ mode: $W_{03} = 0,3$

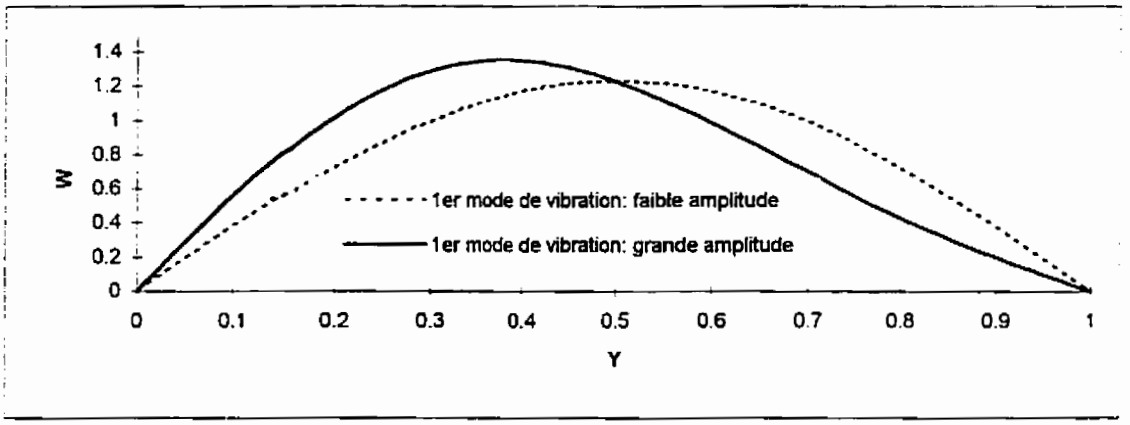



Figure 5.3 - Allure du 1$^{er}$ mode de vibration en présence d'une imperfection selon le 2$^{ième}$ mode: $W_{02} = 0,3$

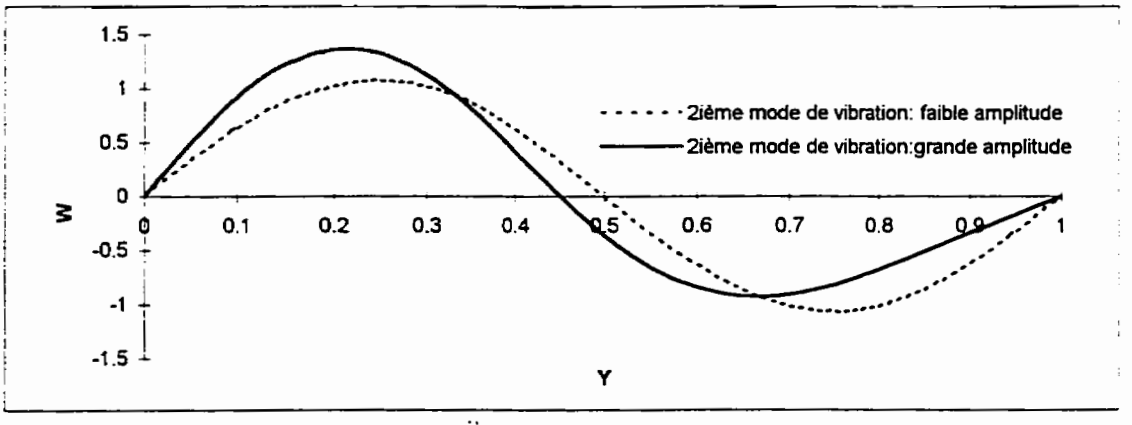



Figure 5.4 - Allure du 2$^{ième}$ mode de vibration en présence d'une imperfection selon le 3$^{ième}$ mode de vibration: $W_{03} = 0,3$

Dans une étude sur les plaques soumises à une excitation paramétrique, Somerset[4] a inclus des termes de distorsion dans l'expression de la déflexion latérale de la plaque. Ces termes de distorsion mesurent la déviation temporelle et spatiale du mouvement comparativement au mode fondamental des vibrations libres. Les résultats obtenus montrent que la déflexion latérale prend une allure différente du mode fondamental des vibrations libres pour les mouvements de grande amplitude.

D'autre part, selon Sassi [13], les modes de vibration d'une plaque imparfaite sont plus complexes que ceux d'une plaque parfaite. La présence d'une imperfection géométrique initiale transforme la forme des modes de vibration.

Le rapport d'amplitude entre les diverses composantes fréquentielles obtenues varie lors d'une résonance. L'apport des autres modes à la forme du mode de résonance n'est pas linéaire, mais varie avec l'amplitude des vibrations et le mode d'imperfection. On peut donc présumer que l'amplitude des vibrations et la présence d'imperfections géométriques initiales influencent la forme des modes de vibration.

Les courbes de résonances sont tracées en supposant que les modes de la plaque parfaite décrivent bien le comportement de la plaque imparfaite (on suppose que $W_n$ décrit correctement le mouvement du $n^{ième}$ mode). Pour les cas de résonances avec de grandes amplitudes, il est donc nécessaire d'appliquer une transformée rapide de Fourier (FFT) sur le signal temporel obtenu pour séparer les différentes composantes

fréquentielles et conserver uniquement celles qui nous intéressent. Cette procédure ne permet pas de séparer l'amplitude positive de l'amplitude négative des diverses composantes fréquentielles. Les courbes tracées présentent l'amplitude moyenne du mouvement.

Le système à deux degrés de liberté développé permet d'étudier des cas plus complexes que ceux pour lesquels vibrations forcées et paramétriques sont distantes. Il permet d'étudier les cas pour lesquels les résonances forcées et paramétriques se chevauchent. Les caractéristiques physiques des plaques sont ajustées de façon à obtenir le chevauchement d'une résonance forcée avec une résonance paramétrique. Cette procédure permet d'étudier une interaction possible entre ces deux types de résonance. Les résultats ainsi obtenus sont présentés aux figures 5.5 à 5.12.

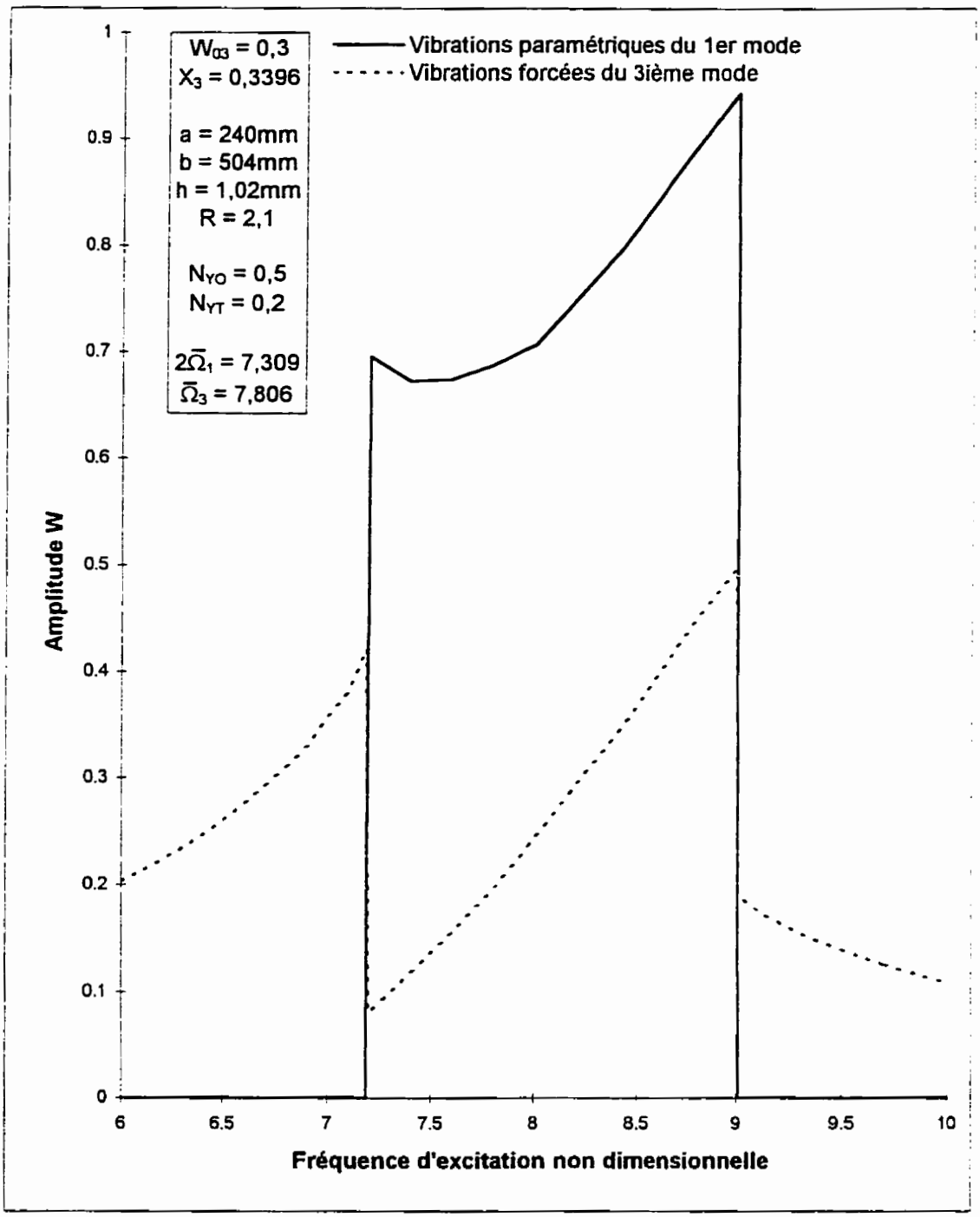



Figure 5.5 - Interaction entre une résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R=2,1, $W_{03}$=0,3

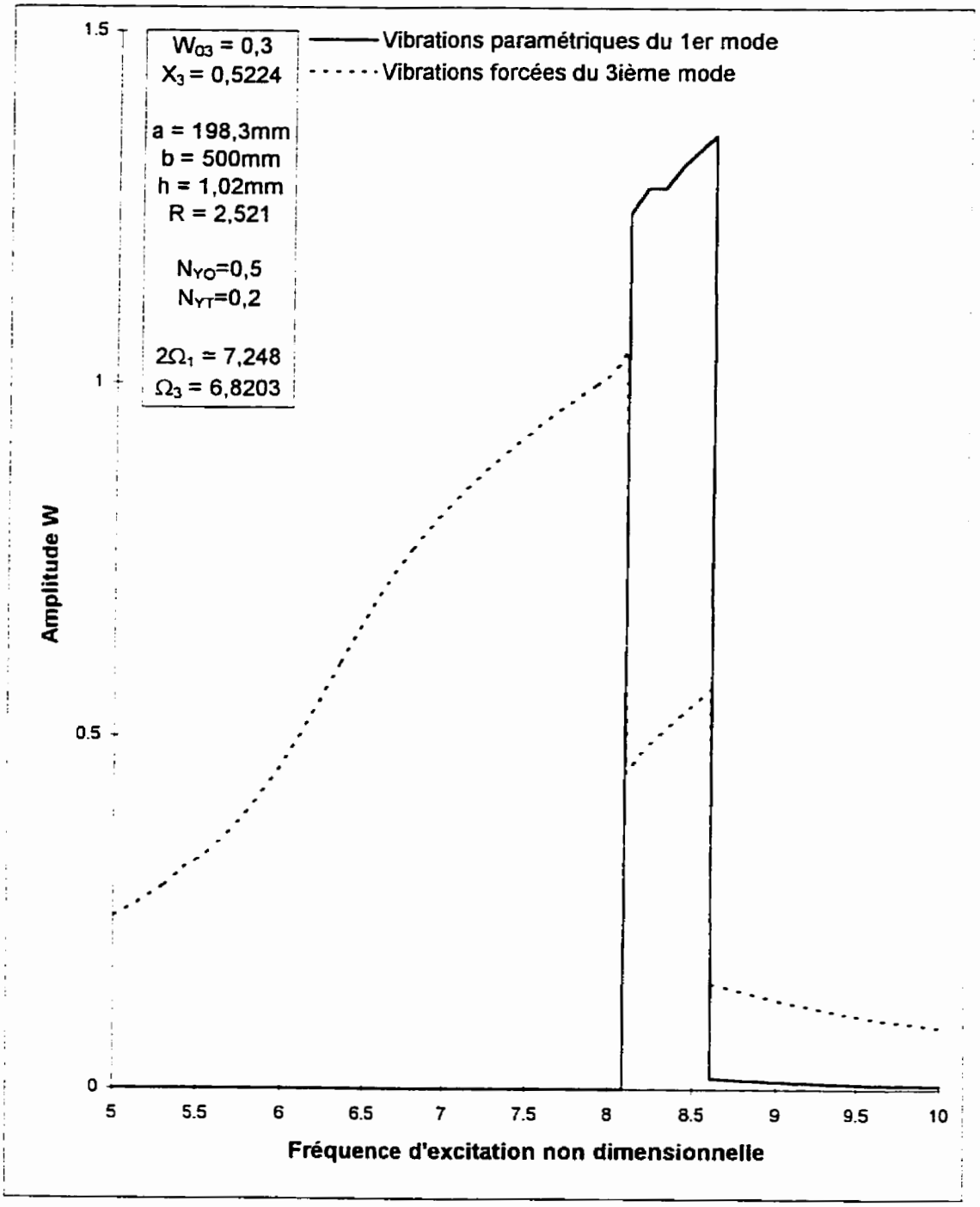



Figure 5.6 - Interaction entre une résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R = 2,521, $W_{03}$ = 0,3

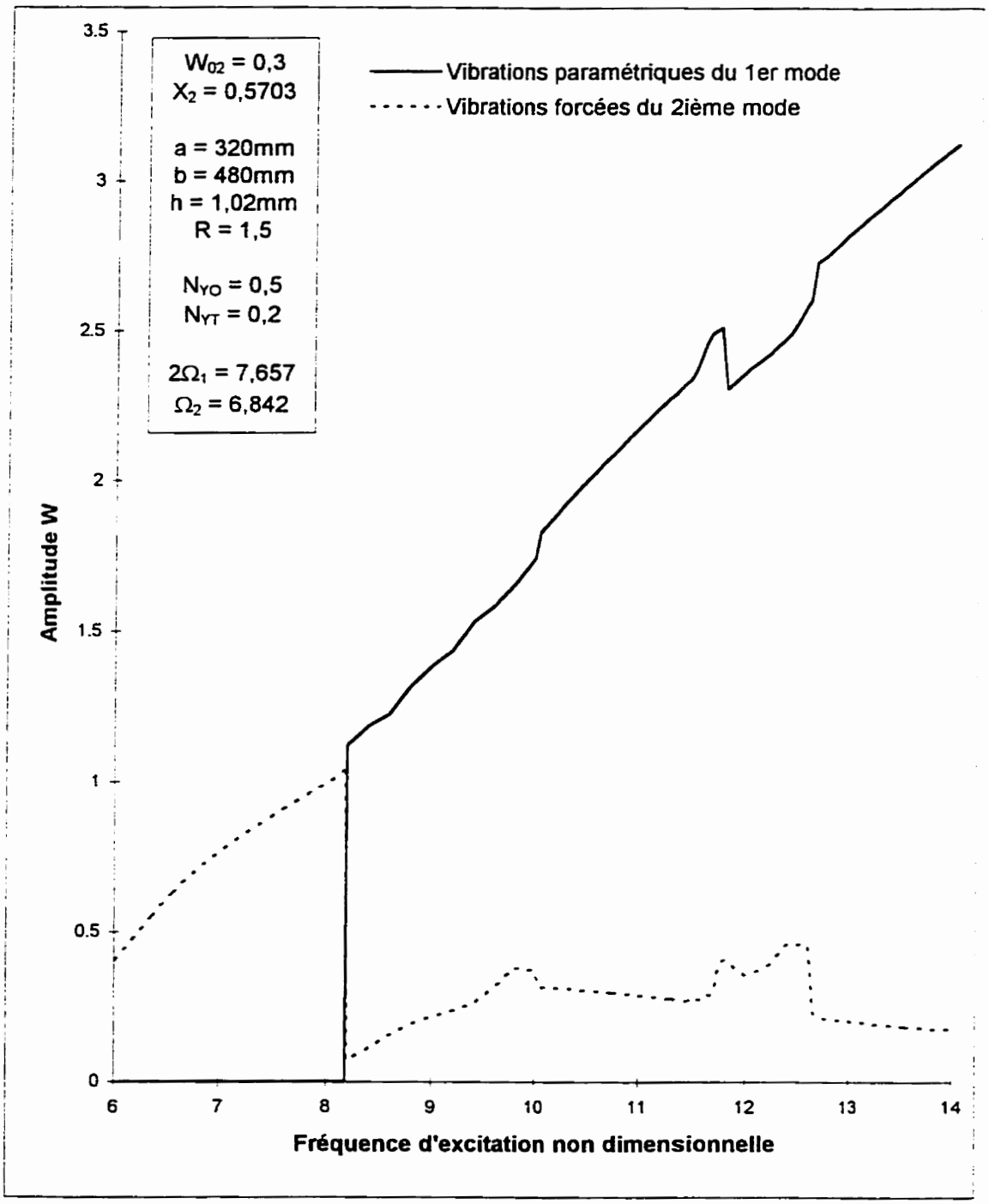



Figure 5.7 - Interaction entre une résonance paramétrique du 1$^{er}$ mode et une résonance forcée du 2$^{ième}$ mode, R = 1,5, $W_{02}$=0,3

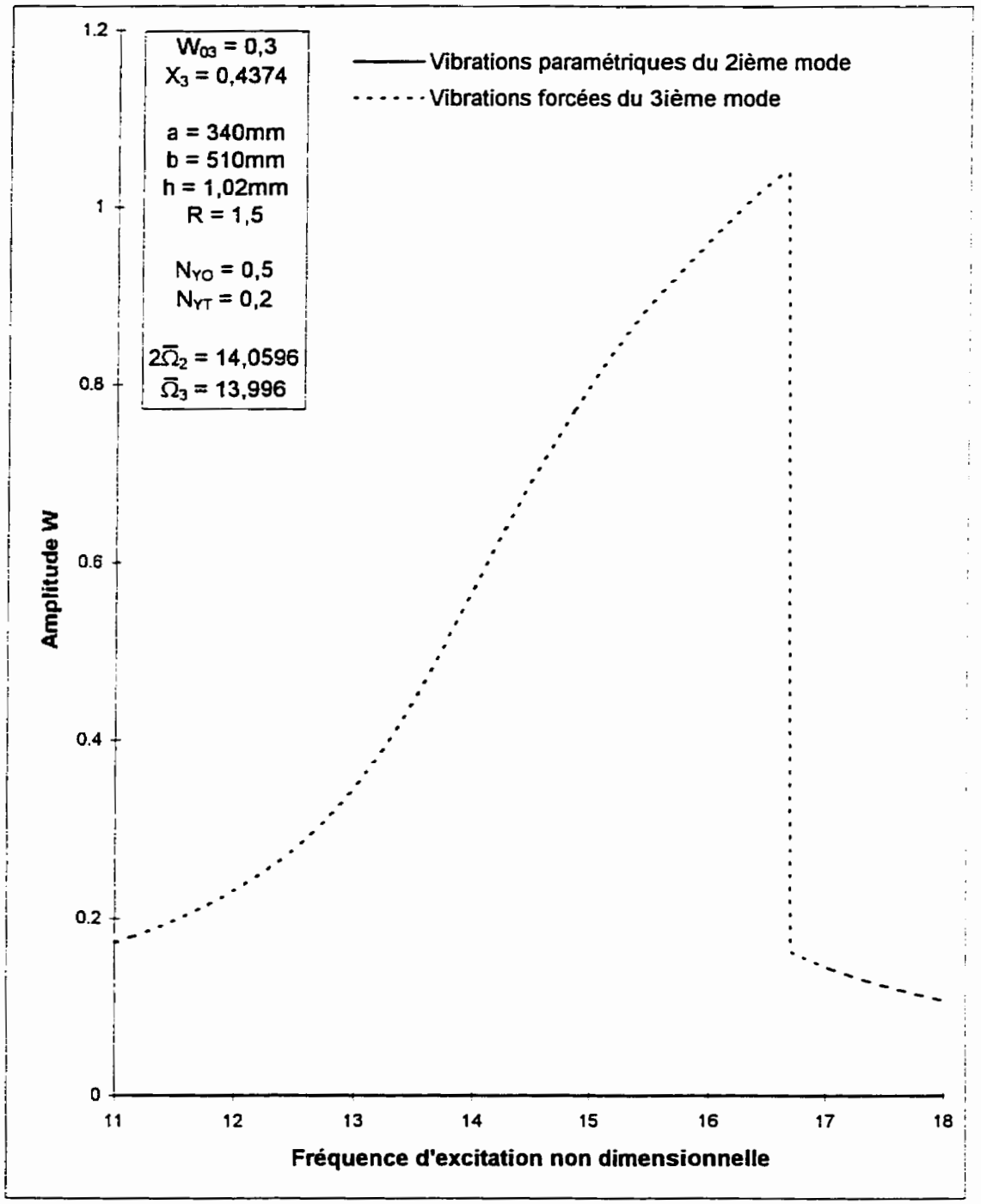



Figure 5.8 - Interaction entre une résonance paramétrique du $2^{ième}$ mode et une résonance forcée du $3^{ième}$ mode, R = 1,5, $W_{03} = 0,3$

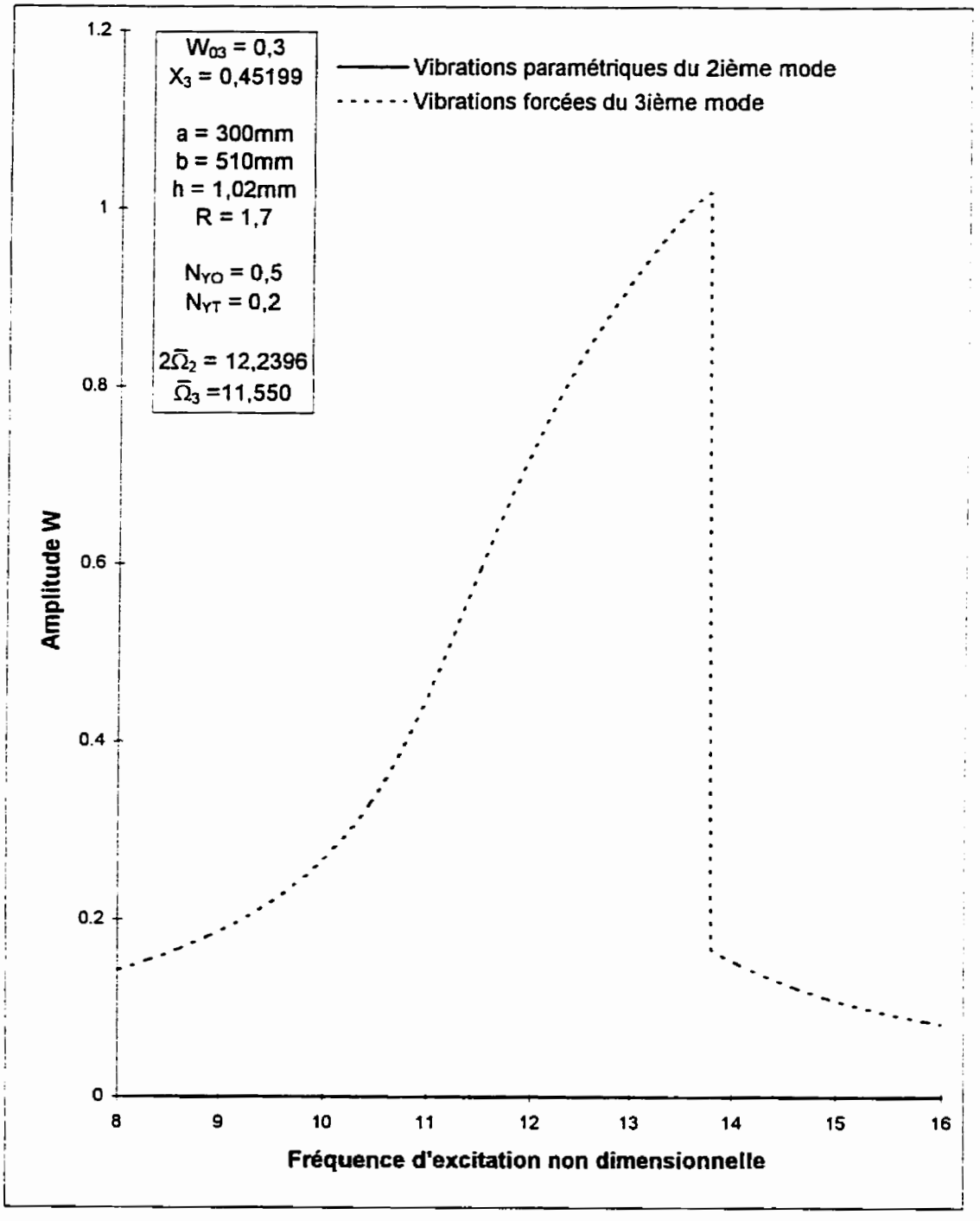



Figure 5.9 - Interaction entre une résonance paramétrique du $2^{ième}$ mode et une résonance forcée du $3^{ième}$ mode, R = 1,7, $W_{03}$ = 0,3

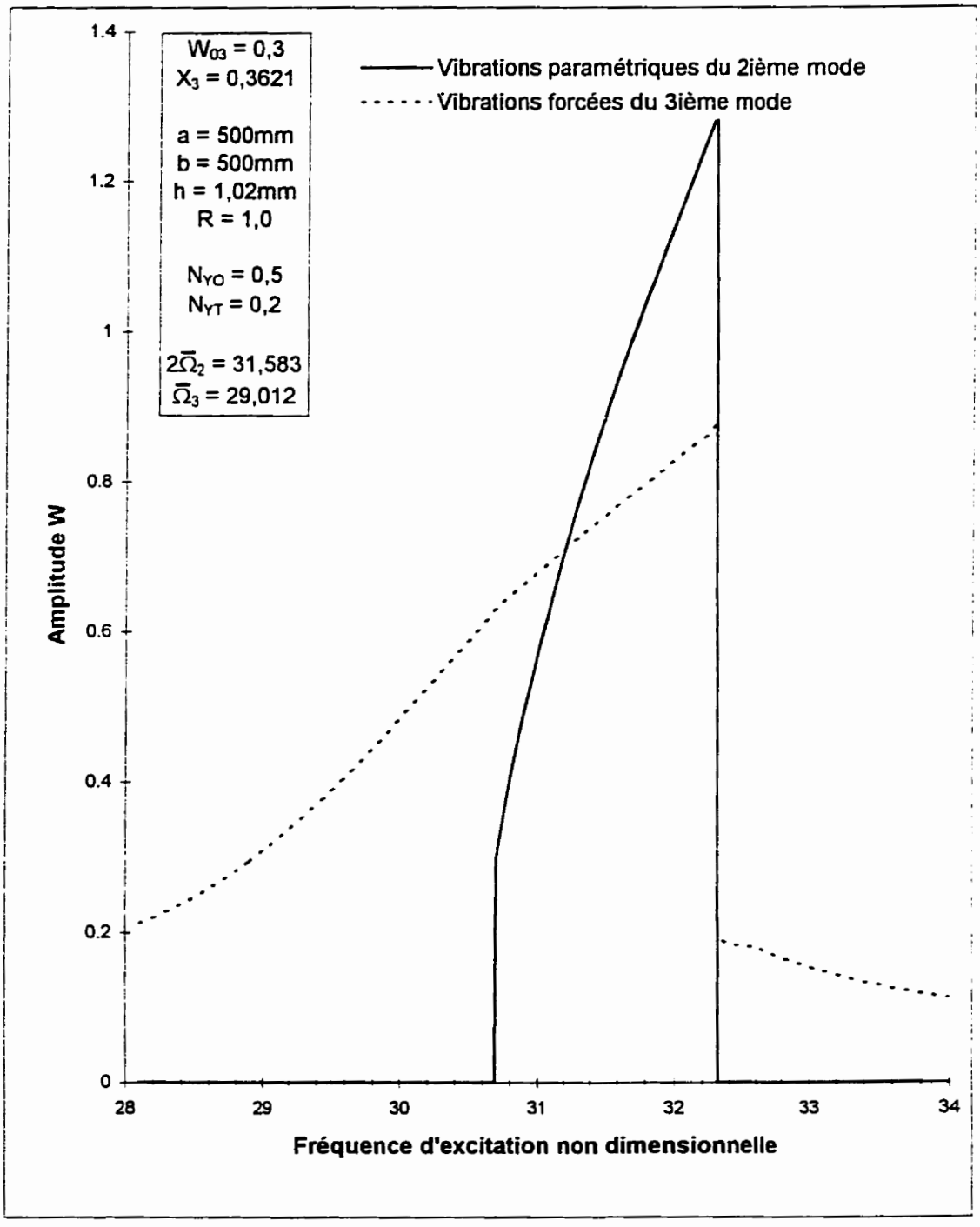



Figure 5.10 - Interaction entre une résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R = 1,0, $W_{03}$ = 0,3

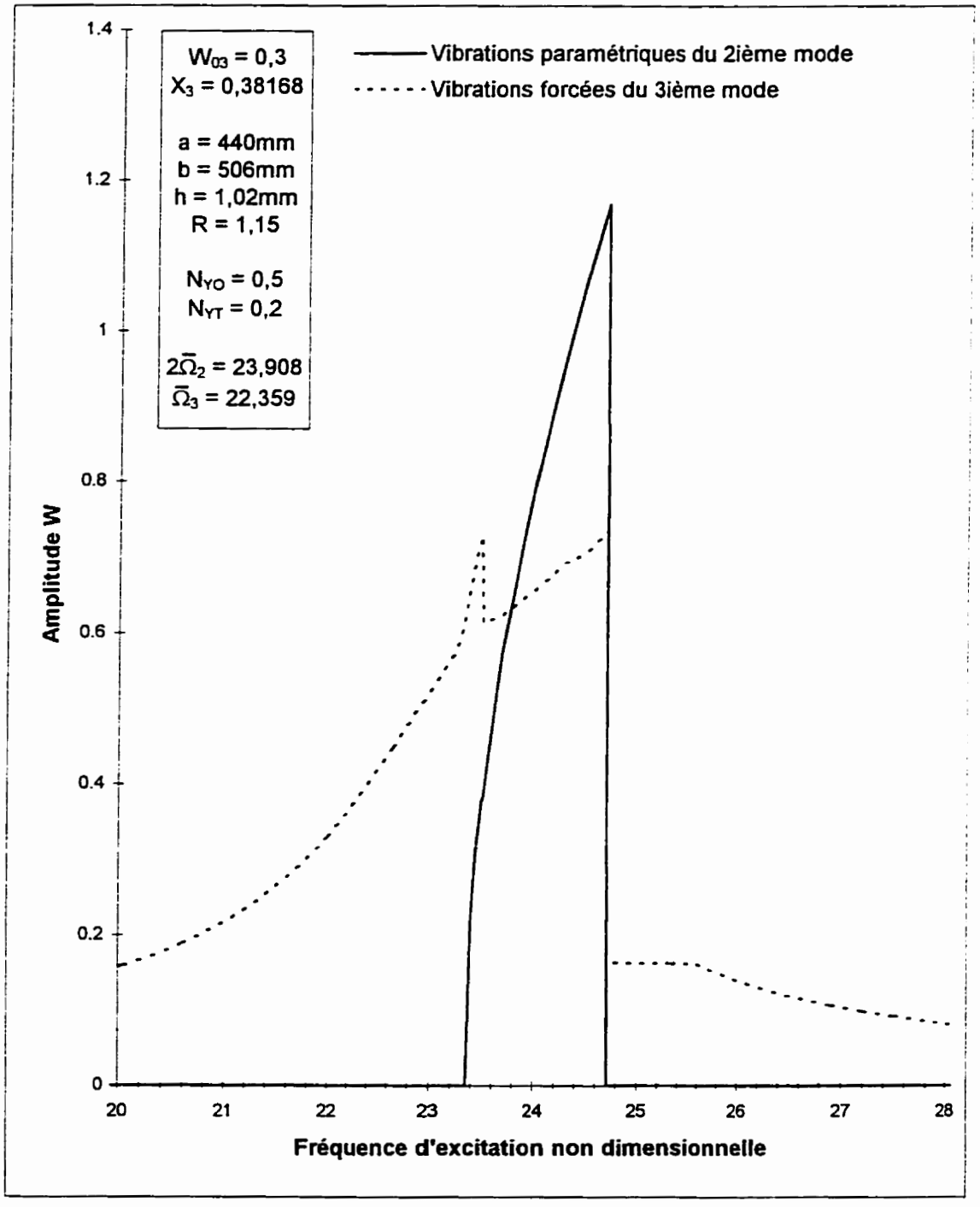



Figure 5.11 - Interaction entre une résonance paramétrique du 2$^{ième}$ mode et une résonance forcée du 3$^{ième}$ mode, R = 1,15, $W_{03}$ = 0,3

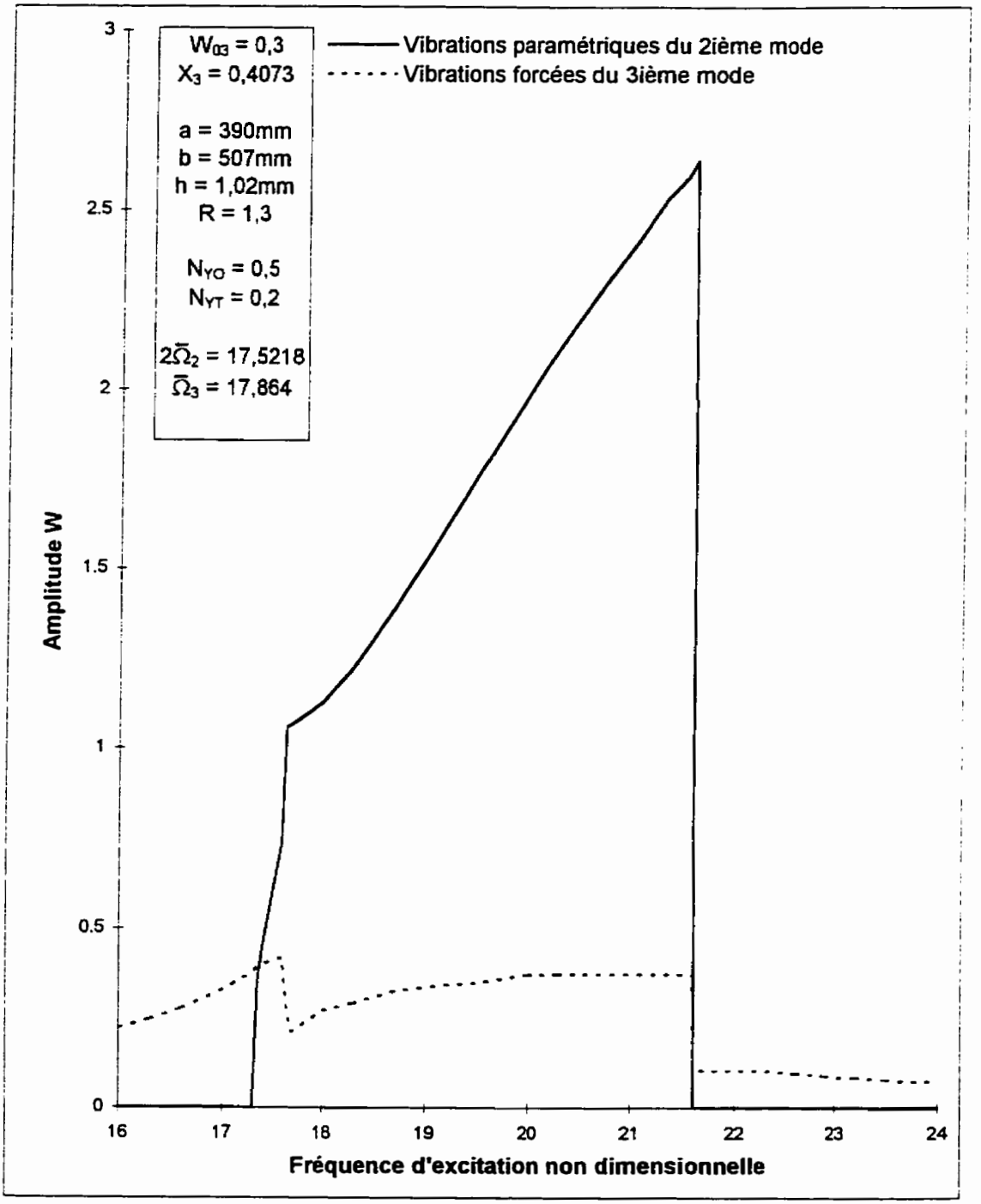



Figure 5.12 - Interaction entre une résonance paramétrique du $2^{ième}$ mode et une résonance forcée du $3^{ième}$ mode, R = 1,3, $W_{03}$ = 0,3

Lorsqu'une résonance forcée se développe avant le début de la résonance paramétrique (amplitude des vibrations forcées supérieure à environ h/2), les vibrations forcées dominent et empêchent les vibrations paramétriques de se développer. Cependant, dans certains cas une partie de la résonance paramétrique peut être obtenue avant la fin de la résonance forcée. La résonance paramétrique survient lorsque l'amplitude des vibrations forcées permet un saut vers la branche supérieure de la résonance paramétrique (figure 5.5 et 5.6).

Pour les cas où la résonance forcée prend fin à l'extérieur de la région d'instabilité, la présence de la résonance paramétrique dépend essentiellement de l'amplitude des oscillations à la fin de la résonance forcée. Une résonance paramétrique est présente quand l'amplitude des oscillations est telle qu'un saut vers la branche supérieure de la résonance paramétrique est possible (figure 5.7). Dans le cas contraire, la branche stable inférieure est rejointe et aucune résonance paramétrique ne se produit (amplitude des vibrations paramétriques nulle). Ce cas est illustré aux figures 5.8 et 5.9.

Lorsqu'une résonance paramétrique se développe avant ou simultanément avec une résonance forcée, les deux types de vibration coexistent (figures 5.10 à 5.12). L'amplitude d'un type de vibration est cependant amoindrie par la présence de l'autre type de vibration. De plus, à la fin de la résonance paramétrique, les vibrations paramétriques disparaissent et l'amplitude des vibrations forcées chute pour rejoindre

l'autre solution physique possible d'amplitude moindre. Par conséquent, les deux types de résonance prennent fin en même temps.

Dans tous les cas, un transfert d'énergie existe entre les deux types de vibrations. Quand l'amplitude d'un type de vibration augmente, l'amplitude de l'autre type de vibration diminue.

# Chapitre 6

# Résonances internes et simultanées des plaques imparfaites

## 6.1 - INTRODUCTION

Parmi les différents types de résonance que peut développer une plaque, on retrouve les résonances internes. Ces résonances sont caractérisées par une oscillation simultanée du système selon plusieurs modes naturels. Elles se produisent quand les fréquences modales $\Omega_i$ satisfont une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \Omega_i = 0 \qquad (6.1)$$

où les $K_i$ sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls.

Aucune résonance interne stationnaire n'est possible en l'absence d'une résonance externe. L'étude des résonances internes des plaques imparfaites se fera par l'intermédiaire de l'étude des résonances simultanées. Ces résonances sont caractérisées par l'excitation directe d'un seul mode paramétrique (résonance externe) qui, par transfert d'énergie, permet l'excitation d'un ou de plusieurs autres modes correspondant

à des résonances internes. L'ensemble de ces résonances doit satisfaire les équations régissant ce phénomène:

$$\lambda = 2\Omega_i \qquad \sum_{j=1}^{n} K_j \Omega_j = 0 \tag{6.2}$$

La caractéristique principale de ce type de résonance est la vibration du système suivant deux ou plusieurs modes naturels et ce, même si un seul de ces modes est excité directement par l'excitation paramétrique.

La présence des résonances internes dépend des fréquences modales de la plaque. Celles-ci sont influencées par les caractéristiques physiques de la plaque, par ses conditions aux frontières, par l'ampleur de la charge statique appliquée dans son plan et par la présence d'imperfections géométriques. Les imperfections géométriques modifient les fréquences naturelles, mais aucune formulation analytique simple n'a été élaborée pour quantifier leur influence.

Il existe peu de travaux expérimentaux sur les résonances internes et simultanées. Il est assez laborieux de trouver une de ces résonances et, dans la plupart des cas, une seule résonance est observée par plaque. Pour faciliter cette approche expérimentale, il faudrait déterminer s'il existe un rapport de forme qui permet d'obtenir plus d'une résonance interne.

Le but de ce chapitre est de déterminer un rapport de forme qui permet d'obtenir des résonances internes multiples. Cette étude est restreinte au cas des plaques parfaites simplement supportées, cas pour lequel il existe une formulation claire et simple des fréquences naturelles de la plaque. Les conclusions obtenues seront ensuite vérifiées en intégrant les équations du mouvement.

## 6.2 - RAPPORT DE FORME OPTIMAL POUR L'OBTENTION DE RÉSONANCES INTERNES MULTIPLES

### 6.2.1 - Calcul des fréquences naturelles

La plaque étudiée est simplement supportée sur son pourtour et est chargée dans son plan par une force statique $n_{yo}$. En l'absence de charge, les fréquences naturelles de cette plaque sont données par:

$$\varpi_{pq} = \frac{\pi^2}{a^2 R}\left(Rp^2 + \frac{q^2}{R}\right)\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \tag{6.3}$$

où $R = \frac{b}{a}$ : rapport de forme de la plaque

$p, q$ : nombre de demi-ondes selon x et y

Les fréquences modales de la plaque chargée sont fonction de la charge statique appliquée et des fréquences naturelles de la plaque non chargée. Elles s'expriment par

$$\Omega_{pq} = \varpi_{pq}\sqrt{1-\frac{n_{yo}}{n^{*}_{pq}}} \tag{6.4}$$

où $n^{*}_{pq}$ : charge critique correspondant au mode $pq$ de flambement

$$n^{*}_{pq} = \frac{\pi^2 D}{a^2 q^2}(Rp^2+\frac{q^2}{R})^2$$

Pour une plaque chargée selon la direction $y$, les divers modes de vibrations comportent une seule demi-onde selon la direction $x$. À partir des équations précédentes et après quelques transformations, on obtient l'expression des fréquences naturelles de la plaque chargée:

$$\Omega_q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\rho h a^4 R^2}\left\langle \pi^2 D(R+\frac{q^2}{R})^2 - n_{yo}\cdot a^2 q^2 \right\rangle} \tag{6.5}$$

### 6.2.2 - Résonances internes impliquant 2 modes de vibration

Le cas le plus simple de résonance interne est celui qui implique deux modes de vibration. Ce cas particulier survient lorsque les fréquences modales satisfont la relation suivante:

$$K_i\Omega_i + K_j\Omega_j = 0 \qquad (6.6)$$

En remplaçant l'expression des fréquences naturelles dans l'équation 6.6, on obtient une équation polynomiale en $R$ (rapport de forme de la plaque):

$$\frac{\pi^2 D}{2}(K_i^2 - K_j^2)R^4 + \left(\pi^2 D - \frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}\right)\left(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2\right)R^2 + \frac{\pi^2 D}{2}(K_i^2 i^4 - K_j^2 j^4) = 0$$

où $K_i, K_j$ : nombres entiers positifs ou négatifs

$i, j$ : nombres entiers positifs (6.7)

Cette équation permet de déterminer le rapport de forme d'une plaque en fonction de la résonance interne désirée. Ce rapport de forme est cependant fonction de la largeur de la plaque ($a$) et de la charge statique qui est appliquée dans son plan ($n_{yo}$.). En résolvant cette équation, on obtient l'expression du rapport de forme:

$$R = \sqrt{\frac{\left(\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2} - \pi^2 D\right)\left(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2} - \pi^2 D\right)^2 \left(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2\right)^2 - \pi^4 D^2 (K_i^2 - K_j^2)(K_i^2 i^4 - K_j^2 j^4)}}{\pi^2 D(K_i^2 - K_j^2)}}$$

(6.8)

En considérant cette équation, on peut dire qu'il existe un rapport de forme avec lequel une plaque peut présenter plusieurs résonances internes, s'il existe au moins deux

combinaisons différentes de $K_i$, $K_j$, $i$, $j$ pour lesquelles on obtient un même rapport de forme $R$. Par conséquent, une plaque simplement supportée peut permettre l'observation de plusieurs résonances internes si la relation suivante est satisfaite:

$$R_{ij} = R_{pq} \qquad \text{où} \qquad R_{ij} : \text{rapport de forme associé à la résonance interne}$$

$$K_i\Omega_i + K_j\Omega_j = 0$$

$$R_{pq} : \text{rapport de forme associé à la résonance interne}$$

$$K_p\Omega_p + K_q\Omega_q = 0$$

Pour une plaque spécifique, on doit cependant distinguer deux cas. Le premier cas consiste à étudier la possibilité d'obtenir au moins deux résonances internes avec la même charge statique, tandis que le second cas consiste à étudier la possibilité d'obtenir deux résonances internes pour deux charges statiques différentes.

#### *6.2.2.1 - Premier cas: Résonances internes multiples, une charge statique*

Ce cas particulier est celui pour lequel deux résonances internes distinctes peuvent être observées avec une seule plaque et le même chargement statique. Le rapport de forme requis pour obtenir une première résonance interne entre les modes $i$ et $j$ et une seconde résonance entre les modes $p$ et $q$ doit satisfaire l'expression 6.9.

$$R_{ij} = R_{pq} \qquad \text{pour} \quad n_{yo.ij} = n_{yo.pq} = n_{yo}$$

d'où

$$\frac{\left(\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)\left(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2\right)\sqrt{\left(\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)^2\left(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2\right)^2 - \pi^4 D^2 (K_i^2 - K_j^2)(K_i^2 i^4 - K_j^2 j^4)}}{\pi^2 D(K_i^2 - K_j^2)}$$

$$= \frac{\left(\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)\left(K_p^2 p^2 - K_q^2 q^2\right)\sqrt{\left(\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)^2 (K_p^2 p^2 - K_q^2 q^2)^2 - \pi^4 D^2 (K_p^2 - K_q^2)(K_p^2 p^4 - K_q^2 q^4)}}{\pi^2 D(K_p^2 - K_q^2)}$$

(6.9)

Après quelques transformations de l'égalité précédente, on obtient une relation (6.10) entre les composantes des deux résonances internes considérées, qui constitue la condition d'existence des résonances internes multiples pour une plaque soumise à une seule charge.

$$\frac{\pi^4 D^2}{4\left(\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)^2}\left[(K_i^2 i^4 - K_j^2 j^4)(K_p^2 - K_q^2) - (K_p^2 p^4 - K_q^2 q^4)(K_i^2 - K_j^2)\right]^2$$

$$= (K_i^2 i^4 - K_j^2 j^4)\left[(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2)(K_p^2 p^2 - K_q^2 q^2)(K_p^2 - K_q^2) - (K_p^2 p^2 - K_q^2 q^2)^2 (K_i^2 - K_j^2)\right]$$

$$+ (K_p^2 p^4 - K_q^2 q^4)\left[(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2)(K_p^2 p^2 - K_q^2 q^2)(K_i^2 - K_j^2) - (K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2)^2 (K_p^2 - K_q^2)\right]$$

(6.10)

Le terme de droite de l'équation précédente est constitué d'une succession d'opérations algébriques effectuées sur des nombres entiers, ayant pour résultat un nombre entier. Dans le terme de gauche, le résultat des termes contenus dans l'accolade est un nombre entier. Par conséquent, pour que l'égalité soit satisfaite et que les résonances internes multiples soient possibles, les conditions suivantes doivent être remplies:

$$\frac{\pi^4 D^2}{\left(\frac{n_{yo} \cdot a^2}{2} - \pi^2 D\right)^2} = \text{nombre entier ou rationnel}$$

d'où

$$\frac{n_{yo}^{\ 2} \cdot a^4}{4} - n_{yo} \cdot a^2 \pi^2 D = \text{multiple de } \pi^4 D^2 \qquad \text{ou} \qquad \text{nombre rationnel} * \pi^4 D^2$$

### *6.2.2.2 - Deuxième cas: Résonances internes multiples, charges statiques différentes*

Une autre cas intéressant est celui pour lequel une plaque peut développer des résonances internes distinctes pour des chargements statiques différents. Dans ce cas ci, le rapport de forme de la plaque doit rencontrer les critères suivants:

$$R_{ij} = R_{pq} \qquad \text{pour} \qquad n_{yo,ij} \neq n_{yo,pq}$$

d'où

$$\frac{\left(\frac{n_{yo,ij}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)\left(K_i^{\,2}i^2-K_j^{\,2}j^2\right)\sqrt{\left(\frac{n_{yo,ij}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)^2\left(K_i^{\,2}i^2-K_j^{\,2}j^2\right)^2-\pi^4 D^2(K_i^{\,2}-K_j^{\,2})(K_i^{\,2}i^4-K_j^{\,2}j^4)}}{\pi^2 D(K_i^{\,2}-K_j^{\,2})}$$

$$=\frac{\left(\frac{n_{yo,pq}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)\left(K_p^{\,2}p^2-K_q^{\,2}q^2\right)\sqrt{\left(\frac{n_{yo,pq}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)^2\left(K_p^{\,2}p^2-K_q^{\,2}q^2\right)^2-\pi^4 D^2(K_p^{\,2}-K_q^{\,2})(K_p^{\,2}p^4-K_q^{\,2}q^4)}}{\pi^2 D(K_p^{\,2}-K_q^{\,2})}$$

(6.11)

Après quelques transformations on obtient une relation entre les composantes des résonances internes (6.12).

$$\left[(K_i^{\,2}i^4-K_j^{\,2}j^4)(K_p^{\,2}-K_q^{\,2})-(K_p^{\,2}p^4-K_q^{\,2}q^4)(K_i^{\,2}-K_j^{\,2})\right]^2$$

$$=\frac{-4}{\pi^4 D^2}\Bigg[\left(\frac{n_{yo,ij}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)^2(K_p^{\,2}p^2-K_q^{\,2}q^2)(K_i^{\,2}i^4-K_j^{\,2}j^4)(K_i^{\,2}-K_j^{\,2})$$

$$+\left(\frac{n_{yo,pq}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)^2(K_i^{\,2}i^2-K_j^{\,2}j^2)(K_p^{\,2}p^4-K_q^{\,2}q^4)(K_p^{\,2}-K_q^{\,2})$$

$$-\left(\frac{n_{yo,ij}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)\left(\frac{n_{yo,pq}\cdot a^2}{2}-\pi^2 D\right)\Big\{(K_i^{\,2}i^2-K_j^{\,2}j^2)(K_p^{\,2}p^2-K_q^{\,2}q^2)$$

$$\left((K_i^{\,2}i^4-K_j^{\,2}j^4)(K_p^{\,2}-K_q^{\,2})+(K_p^{\,2}p^4-K_q^{\,2}q^4)(K_i^{\,2}-K_j^{\,2})\right)\Big\}\Bigg]$$

(6.12)

Cette relation représente la condition pour laquelle une plaque peut développer diverses résonances internes pour divers cas de chargement. Par analogie au cas précédent, les trois conditions suivantes doivent être remplies:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{n_{yo.ij}^{\,2}\cdot a^4}{4} - n_{yo.ij}\cdot a^2\pi^2 D \\ \dfrac{n_{yo.pq}^{\,2}\cdot a^4}{4} - n_{yo.pq}\cdot a^2\pi^2 D \\ \dfrac{n_{yo.ij}\cdot n_{yo.pq}\cdot a^4}{2} - \left(n_{yo.ij}+n_{yo.pq}\right)a^2\pi^2 D \end{array}\right\rangle = \text{multiple de } \pi^4 D^2 \text{ ou nb rationnel} * \pi^4 D^2$$

Dans les deux cas de résonances internes énoncés plus haut, les conditions imposées sur l'amplitude des charges statiques et sur la largeur de la plaque pour satisfaire exactement la relation $R_{ij} = R_{pq}$ entraîne de grandes limitations sur les possibilités d'existence des résonances internes multiples. De plus, les équations explicitant les conditions d'existence de ces résonances sont difficilement interprétables. Il est préférable de procéder à une analyse numérique pour déterminer, s'il existe, le rapport de forme qui permet d'obtenir le plus grand nombre de résonances internes.

Dans les diverses études expérimentales effectuées sur les vibrations des plaques simplement supportées, la majorité des résonances internes observées impliquent les premières fréquences modales de vibration. De plus, les facteurs de proportionnalité

entre ces fréquences sont généralement inférieurs à dix. En se basant sur ces observations, on calcule le rapport de forme requis pour obtenir toutes les résonances pour lesquelles

$$K_i\Omega_i + K_j\Omega_j = 0 \qquad \pm 1 < K_i, K_j < \pm 10$$

$$1 < \quad i, j \quad < 5$$

et pour lesquelles un seul chargement statique est appliqué.

Ces calculs ont été effectués pour trois chargements distincts et trois largeurs de plaque, c'est-à-dire pour $n_{yo}$ = 25N, 50N, 75N et $a$ = 250mm, 300mm, 350mm. Le programme conçu et utilisé est présenté à l'annexe C. Les résultats obtenus pour les neuf combinaisons possibles ne présentent jamais deux rapports de forme identiques pour deux résonances internes différentes. Parmi les rapports de forme obtenus, l'écart entre deux rapports de forme associés à deux résonances internes différentes est parfois assez faible (de l'ordre de 10e-3).

Dans les études expérimentales, plusieurs résonances internes ont parfois été observées avec la même plaque. On peut supposer que les résonances internes multiples sont observables si la relation gouvernant leur présence est satisfaite approximativement,

c'est-à-dire si deux résonances internes sont obtenues avec deux rapports de forme suffisamment rapprochés.

Lorsque l'amplitude d'un mode de vibration augmente ou diminue, sa fréquence naturelle varie. Les fréquences naturelles utilisées pour le calcul du rapport de forme sont associées à un mouvement d'amplitude nulle. Au moment où la plaque se met à vibrer, ses fréquences naturelles sont modifiées et des résonances internes prévues pour un rapport de forme légèrement différent peuvent survenir. Par conséquent, selon l'écart assumé acceptable entre deux valeurs de $R$, on peut déterminer quel rapport de forme est le plus susceptible de développer plusieurs résonances internes.

D'autre part, en reconsidérant l'expression qui permet de calculer le rapport de forme d'une plaque nécessaire pour obtenir une résonance interne désirée, on observe que lorsque

$$(K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2) = 0$$

le terme contenant $a$ et $n_{yo}$ disparaît. Par conséquent, les résonances internes pour lesquelles

$$\pm K_i i = \pm K_j j$$

se produisent toujours pour un même rapport de forme, sans égard à la largeur de la plaque et à la charge statique. Dans ce cas particulier, $R$ peut être déterminé en utilisant l'équation suivante:

$$R = \sqrt[4]{\frac{(K_j^2 j^4 - K_i^2 i^4)}{(K_i^2 - K_j^2)}} \qquad \text{pour} \quad \pm K_i \cdot i = \pm K_j \cdot j \qquad (6.13)$$

Après quelques transformations, on peut simplifier les termes $K_i$ et $K_j$ à l'aide de la relation entre ceux-ci et on obtient l'expression finale du rapport de forme:

$$R = \sqrt{ij} \qquad (6.14)$$

Il existe donc un rapport de forme pour lequel deux fréquences naturelles $(i,j)$ ont toujours le même rapport de proportionnalité, et ce peu importe la charge statique appliquée dans le plan de la plaque.

Ce rapport de forme est celui pour lequel la charge critique de ces deux modes $(i,j)$ est la même. Pour une plaque simplement supportée sur son pourtour, la charge critique est donnée par

$$n_m^* = \frac{4\pi^2 D}{a^2}\left(m + \frac{1}{m}R^2\right)^2 \qquad (6.15)$$

Les modes $(i,j)$ auront la même charge critique lorsque

$$n_i^* = n_j^*$$

qui peut être réécrit

$$\left(i + \frac{1}{i}R^2\right)^2 = \left(j + \frac{1}{j}R^2\right)^2$$

Après quelques simplifications, on trouve l'expression du rapport de forme qui permet aux modes (i,j) d'avoir la même charge critique:

$$R = \sqrt{ij} \tag{6.16}$$

L'expression 6.14 et 6.16 sont identiques. Par conséquent, le rapport de forme pour lequel deux fréquences naturelles $(i,j)$ ont toujours le même rapport de proportionnalité, quelque soit la charge statique appliquée et la largeur de la plaque, correspond au rapport de forme pour lequel les modes $(i,j)$ ont la même charge critique.

### 6.2.3 - Résonances internes impliquant 3 modes de vibration:

Pour qu'une résonance interne impliquant trois modes de vibrations puisse exister, la relation suivante doit être remplie:

$$K_i\Omega_i + K_j\Omega_j + K_k\Omega_k = 0 \tag{6.17}$$

Ce cas de résonance interne est beaucoup plus complexe et très difficile a traiter de façon analytique. Il est cependant possible de calculer, s'il existe, quel est le rapport de forme qui permet d'obtenir une résonance interne impliquant trois modes précis de vibration. Ces calculs sont effectués en utilisant les mêmes chargements, les mêmes différentes largeurs pour la plaque et les même limitations que dans le cas des résonances

internes impliquant deux modes de vibration. Le programme utilisé se retrouve à l'annexe C. On détermine ainsi les rapports de forme requis pour obtenir toutes les résonances pour lesquelles

$$K_i\Omega_i + K_j\Omega_j + K_k\Omega_k = 0 \qquad \pm 1 < K_i, K_j, K_k < \pm 10$$

$$1 < i, j, k < 5$$

Tous les rapports de forme obtenus sont différents. Certains d'entre eux sont cependant presque identiques. Comme pour le cas avec deux modes de vibration, on peut supposer que ces résonances internes multiples sont observables si la relation gouvernant leur présence est satisfaite approximativement.

De plus, par analogie avec le cas de résonance interne impliquant 2 modes de vibration, il est intéressant de vérifier la possibilité d'existence d'une résonance interne impliquant 3 modes de vibration et indépendante du chargement statique et de la largeur de la plaque (cas pour lequel on devrait théoriquement avoir la même charge critique pour trois modes de flambage).

Dans le cas d'une résonance interne impliquant 3 modes de vibration, l'équation polynomiale en $R$ prend l'allure suivante:

$$\left[\frac{\pi^4 D^2}{4}\left\{K_i^2(K_i^2-K_j^2-K_k^2)+K_j^2(K_j^2-K_i^2-K_k^2)+K_k^2(K_k^2-K_i^2-K_j^2)\right\}\right]R^8$$

$$+\left[\pi^2 D\left(\pi^2 D-\frac{n_{yo}\cdot a^2}{4}\right)\left\{K_i^2(K_i^2 i^2-K_j^2 j^2-K_k^2 k^2)\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_j^2(K_j^2 j^2-K_i^2 i^2-K_k^2 k^2)+K_k^2(K_k^2 k^2-K_i^2 i^2-K_j^2 j^2)\right\}\right]R^6$$

$$+\left[\frac{\pi^4 D}{2}\left\{K_i^2 i^4(K_i^2-K_j^2-K_k^2)+K_j^2 j^4(K_j^2-K_i^2-K_k^2)+K_k^2 k^4(K_k^2-K_i^2-K_j^2)\right\}\right.$$

$$+\left(\pi^2 D-\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}\right)\left\{K_i^2 i^2(K_i^2 i^2-K_j^2 j^2-K_k^2 k^2)+K_j^2 j^2(K_j^2 j^2-K_i^2 i^2-K_k^2 k^2)\right.$$

$$\left.\left.+K_k^2 k^2(K_k^2 k^2-K_i^2 i^2-K_j^2 j^2)\right\}\right]R^4$$

$$+\left[\pi^2 D\left(\pi^2 D-\frac{n_{yo}\cdot a^2}{2}\right)\left\{K_i^2 i^4(K_i^2 i^2-K_j^2 j^2-K_k^2 k^2)\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_j^2 j^4(K_j^2 j^2-K_i^2 i^2-K_k^2 k^2)+K_k^2 k^4(K_k^2 k^2-K_i^2 i^2-K_j^2 j^2)\right\}\right]R^2$$

$$+\left[\frac{\pi^4 D}{4}\left\{K_i^2 i^4(K_i^2 i^4-K_j^2 j^4-K_k^2 k^4)+K_j^2 j^4(K_j^2 j^4-K_i^2 i^4-K_k^2 k^4)\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_k^2 k^4(K_k^2 k^4-K_i^2 i^4-K_j^2 j^4)\right\}\right]=0 \qquad (6.18)$$

Pour obtenir une résonance interne pour laquelle le rapport de forme nécessaire est indépendant du chargement statique et de la largeur de la plaque, les termes contenant

$a$ et $n_{yo}$ doivent être nuls. La condition d'existence d'un tel rapport de forme peut être exprimé par la solution du système d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} K_i^2 & K_j^2 & K_k^2 \\ K_i^2 i^2 & K_j^2 j^2 & K_k^2 k^2 \\ K_i^2 i^4 & K_j^2 j^4 & K_k^2 k^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2 - K_k^2 k^2) \\ (K_j^2 j^2 - K_i^2 i^2 - K_k^2 k^2) \\ (K_k^2 k^2 - K_i^2 i^2 - K_j^2 j^2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6.19}$$

Il existe deux solutions possibles à ce système d'équations. La première solution consiste en un vecteur nul. Cette solution implique que $K_i = K_j = K_k = 0$, ce qui correspond à une absence de résonance interne. Elle doit donc être rejetée. La seconde solution peut être déterminée en égalant le déterminant de la matrice à zéro. On obtient ainsi la condition d'existence d'une résonance interne pour laquelle le rapport de forme est indépendant de la largeur de la plaque et de son chargement statique. Cette condition d'existence s'exprime par

$$\left(k^2 - j^2\right)i^4 + \left(j^4 - k^4\right)i^2 + \left(j^2 k^4 - j^4 k^2\right) = 0 \tag{6.20}$$

Les solutions de cette équation sont

$$i = j \quad \text{et} \quad i = k$$

Ces solutions correspondent à une résonance interne impliquant seulement 2 modes de vibration. On peut conclure qu'il n'existe pas de rapport de forme permettant d'obtenir une résonance interne impliquant trois modes qui est indépendant de la largeur de la

plaque et de la charge appliquée dans son plan. Cette conclusion est certifiée par le fait qu'il n'y a pas de rapport de forme pour lequel trois modes distincts ont la même charge critique.

## 6.3 - MODÉLISATION UTILISÉE

Les équations du mouvement qui décrivent le comportement d'une plaque imparfaite chargée dans son plan par une excitation paramétrique sont couplées pour tous les types de support. Ces équations ont été résolues par Sassi [13] en utilisant la méthode asymptotique en première approximation. Cette méthode est généralement utilisée pour résoudre des équations différentielles découplées. Les équations du mouvement ont par conséquent été découplées à l'aide de l'analyse modale et transformées en coordonnées normales. Les résultats obtenus sont aussi présentés en coordonnées normales.

Une méthode de résolution similaire à celle utilisée précédemment pour le modèle à un degré de liberté est employée. L'équation générale du mouvement en coordonnées normales est utilisée car celle-ci contient moins de termes et est plus facile à intégrer. Cependant, les résultats sont présentés après avoir été retransformés en coordonnées réelles. Cette transformation est nécessaire pour obtenir des résultats ayant une signification physique. En prenant comme degrés de liberté les trois premiers modes de

vibration, on obtient l'équation du mouvement en coordonnées normales pour chacun de ces modes:

$$\ddot{W}_m = 2\cos\theta\left[\mu_m^1\bar{\Omega}_1^2(W_1+X_1)+\mu_m^2\bar{\Omega}_2^2(W_2+X_2)+\mu_m^3\bar{\Omega}_3^2(W_3+X_3)\right]-2\left[C_m^1\dot{W}_1+C_m^2\dot{W}_2+C_m^3\dot{W}_3\right]$$
$$-\bar{\Omega}_m^2 W_m-\left[\Gamma_{m1}W_1^3+\Gamma_{m6}W_2^3+\Gamma_{m9}W_3^3+W_1^2\left(\Gamma_{m2}W_2+\Gamma_{m3}W_3+\varepsilon_m^{11}\right)+W_2^2\left(\Gamma_{m4}W_1+\Gamma_{m7}W_3+\varepsilon_m^{22}\right)\right.$$
$$\left.+W_3^2\left(\Gamma_{m5}W_1+\Gamma_{m8}W_2+\varepsilon_m^{33}\right)+W_1W_2W_3(\Gamma_{m10})+W_1W_2(\varepsilon_m^{12})+W_1W_3(\varepsilon_m^{13})+W_2W_3(\varepsilon_m^{23})\right]$$

où $m$=1,2,3

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m^{11} &= H_m^{111}X_1+H_m^{112}X_2+H_m^{113}X_3\\
\varepsilon_m^{22} &= H_m^{221}X_1+H_m^{222}X_2+H_m^{223}X_3\\
\varepsilon_m^{33} &= H_m^{331}X_1+H_m^{332}X_2+H_m^{333}X_3\\
\varepsilon_m^{12} &= \left(H_m^{121}+H_m^{211}\right)X_1+\left(H_m^{122}+H_m^{212}\right)X_2+\left(H_m^{123}+H_m^{213}\right)X_3\\
\varepsilon_m^{13} &= \left(H_m^{131}+H_m^{311}\right)X_1+\left(H_m^{132}+H_m^{312}\right)X_2+\left(H_m^{133}+H_m^{313}\right)X_3\\
\varepsilon_m^{23} &= \left(H_m^{231}+H_m^{321}\right)X_1+\left(H_m^{232}+H_m^{322}\right)X_2+\left(H_m^{233}+H_m^{323}\right)X_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{m1} &= M_m^{111} & \Gamma_{m6} &= M_m^{222}\\
\Gamma_{m2} &= M_m^{112}+M_m^{121}+M_m^{211} & \Gamma_{m7} &= M_m^{223}+M_m^{232}+M_m^{322}\\
\Gamma_{m3} &= M_m^{113}+M_m^{131}+M_m^{311} & \Gamma_{m8} &= M_m^{233}+M_m^{323}+M_m^{332}\\
\Gamma_{m4} &= M_m^{122}+M_m^{212}+M_m^{221} & \Gamma_{m9} &= M_m^{333}\\
\Gamma_{m3} &= M_m^{133}+M_m^{313}+M_m^{331} & \Gamma_{m10} &= M_m^{123}+M_m^{132}+M_m^{231}+M_m^{213}+M_m^{312}+M_m^{321}
\end{aligned}$$

(6.21)

La partie linéaire de ces équations est découplée, mais des termes de couplage persistent au niveau des non-linéarités. Le problème se résume donc à résoudre trois équations différentielles couplées.

Le diagramme fonctionnel d'une équation de ce système matriciel est présenté à l'annexe B. Celui-ci a été élaboré pour un degré de liberté, mais s'applique pour tous les degrés de liberté. Le fichier TUTSIM correspondant se retrouve aussi en annexe.

## 6.4 - RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Pour comprendre la vraie nature des réponses obtenues, celles-ci doivent être retransformées en coordonnées réelles. Les principales composantes fréquentielles des réponses des trois modes sont donc extraites à l'aide d'une FFT. La réponse de chaque mode, décrite par ses composantes fréquentielles, est ensuite retransformée en coordonnées réelles à l'aide de la matrice modale.

La réponse temporelle réelle d'une plaque imparfaite, décrite par le système d'équations 6.21 est constituée de trois composantes. Lors des résonances paramétriques, les modes non résonants oscillent toujours à la même fréquence que le mode résonant. Ce phénomène a été remarqué et discuté précédemment pour le système à deux degrés de liberté. Aucune explication supplémentaire ne peut être apportée avec

le modèle à trois degrés de liberté. De plus, la procédure utilisée pour tracer les courbes de résonances avec le système à deux degrés de liberté est reprise ici.

À partir de l'étude faite sur les rapports de forme, des essais numériques ont été effectués pour des plaques ayant des rapports de forme devant permettre l'obtention de résonances internes. Les résonances internes prévues sont rarement observées, ou ont une amplitude très faible, et ce même avec des plaques ayant des imperfections géométriques minimes. Les imperfections géométriques modifient toutes les fréquences naturelles et changent ainsi considérablement les rapports de proportionnalité entre celles-ci. De plus, dès que la plaque se met à vibrer, les fréquences naturelles changent et dévient des prédictions théoriques.

Le passage d'une résonance forcée à une résonance paramétrique est parfois accompagné d'un long régime transitoire à la fin duquel on obtient un régime permanent sensible aux conditions de départ. Les phénomènes d'hésitation généralement associés à ce passage entre deux types différents de résonance disparaissent en diminuant le pas et en augmentant le temps total d'intégration.

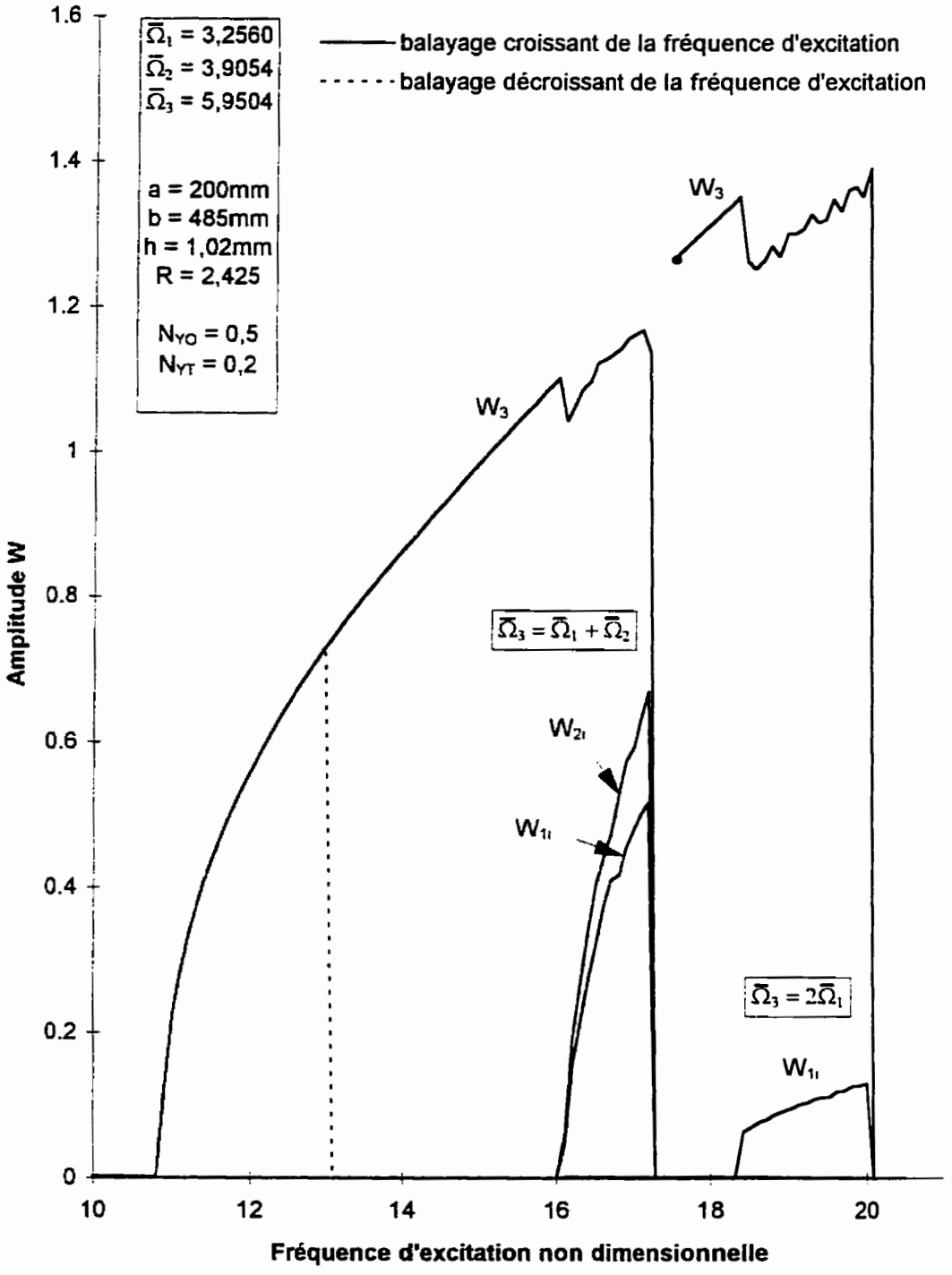



Figure 6.1 - Résonances internes, $\Lambda = 2\bar{\Omega}_3$, R = 2,425, $W_{01}$ = 0,2

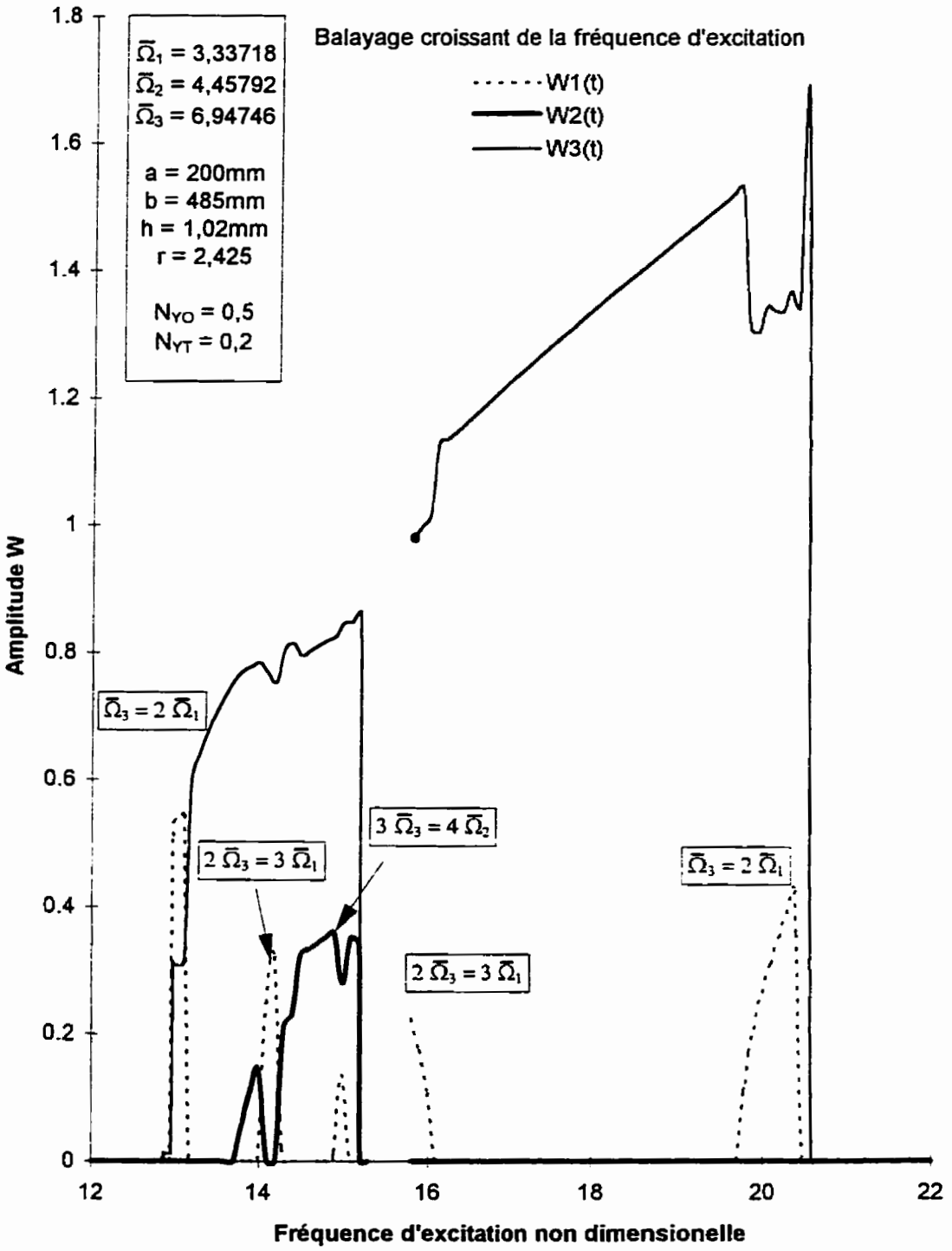
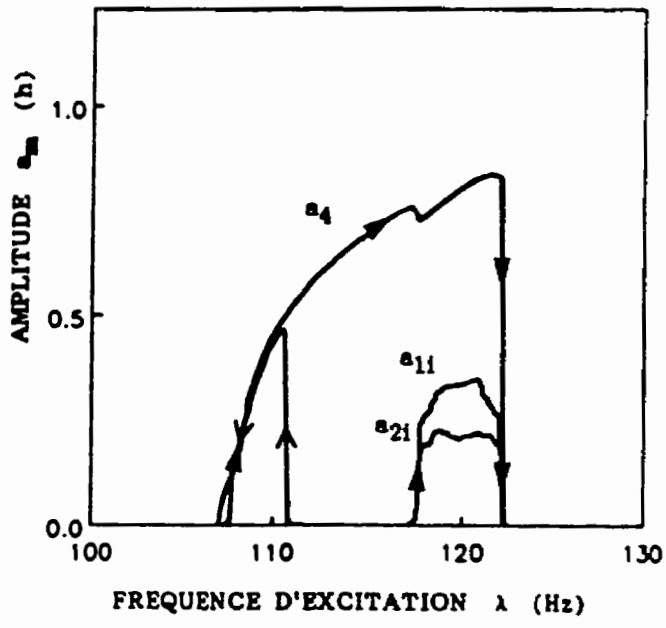


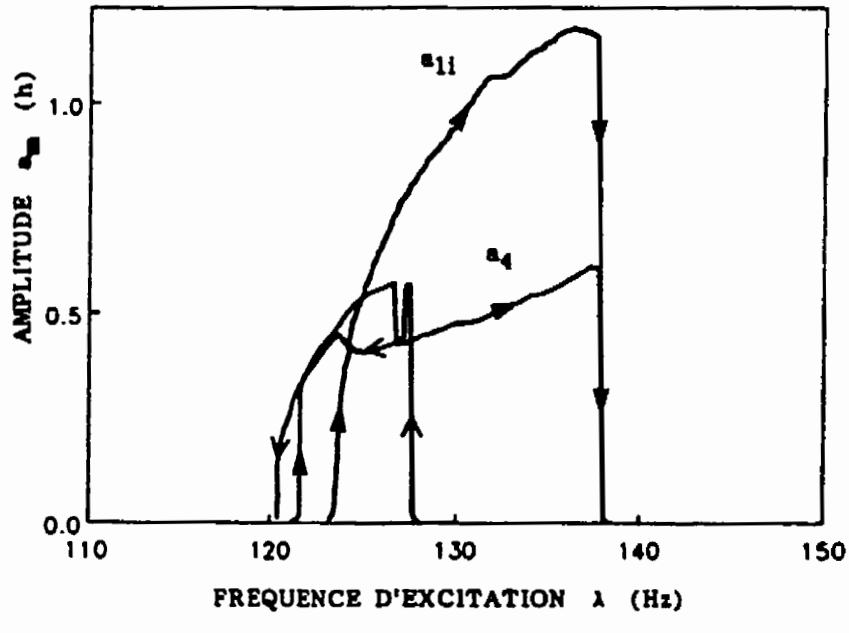

Figure 6.2 Résonances internes, $\Lambda = 2\bar{\Omega}_3$, R = 2,425, $W_{01} = 0,5$

Quand une résonance interne prend forme, l'amplitude du mode excité diminue. Lors d'une résonance interne, l'énergie du mode excité est transmis à un autre mode par un mécanisme de couplage interne. Un tel transfert d'énergie est possible seulement si l'amplitude du mode excité diminue. Dans la figure 6.2, ce transfert d'énergie est tellement fort que l'amplitude du troisième mode devient inférieur à celle du premier mode, et ce même si le mode directement excité est le troisième mode. Ces mécanismes de transfert d'énergie ont été observés expérimentalement. Deux courbes de réponse en fréquence type, tirées des travaux expérimentaux de Samson [9] sont présentés à la figure 6.3.

Aux figures 6.1 et 6.2, les résonances paramétriques disparaissent à des fréquences en dehors de la région d'instabilité paramétrique et inférieures à la fréquence de chute calculée avec un système à un degré de liberté. Loin de la région d'instabilité paramétrique, certaines résonances internes prennent forme, ce qui entraîne une modification de l'amplitude et de la phase de la réponse paramétrique. Celle-ci devient alors instable et disparaît. Le mode directement excité ayant disparu, les résonances internes ne sont plus excitées et décroissent de façon logarithmique (vibrations libres amorties). Par conséquent, il est impossible d'obtenir une résonance paramétrique pour une certaine zone fréquentielle. Après cette zone, la fin de la résonance paramétrique est obtenue en imposant des conditions initiales correspondant au régime permanent de la résonance paramétrique avant cette zone.




a) Cas pour lequel le transfert d'énergie est faible




b) Cas pour lequel le transfert d'énergie est élevé

Figure 6.3 - Courbes expérimentales de résonances simultanées, tirées de la référence [9]

Le phénomène de saut causé par la présence d'un comportement en ressort mou pour les vibrations de faible amplitude est encore observable lorsque l'amplitude de l'imperfection est grande (figure 6.2). Pour un cas particulier de résonance paramétrique, les résonances internes obtenues en variant uniquement l'amplitude de l'imperfection sont complètement différentes. Une modification de l'imperfection modifie les fréquences naturelles, les facteurs de proportionnalité entre les fréquences changent et les résonances internes ne sont plus les mêmes (figures 6.1 et 6.2).

## 6.5 - CONCLUSION

Les résonances internes sont affectées par la présence d'imperfections géométriques. Celles-ci modifient les fréquences modales et les rapports de proportionalité entre elles. La recherche d'un facteur de forme optimal, basée sur le calcul des fréquences naturelles de plaques parfaites, semble être inappropriée pour les plaques imparfaites. Selon les résultats numériques obtenus, aucune des résonances internes prévues ne se développe avec une amplitude importante. Cependant, ces conclusions devraient être vérifiées expérimentalement.

# Chapitre 7

# Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée

## 7.1 - INTRODUCTION

Les résonances simultanées et forcées sont bien connues. Cependant, le phénomène de transition entre les résonances simultanées et les résonances forcées (résonances propres aux plaques imparfaites sous excitation paramétrique) est moins connu. Lors de cette transition, des interactions peuvent survenir entre les divers types de vibration.

Pour étudier ces interactions, il est nécessaire d'utiliser un modèle à plusieurs degrés de liberté. La plaque est ainsi discrétisée par un système à trois degrés de liberté et son mouvement est décrit par un système de trois équations différentielles couplées.

## 7.2 - APPLICATION DE LA MÉTHODE ASYMPTOTIQUE EN PREMIÈRE APPROXIMATION

Le système d'équations obtenu qui décrit le comportement général d'une plaque imparfaite est ici résolu en utilisant la méthode asymptotique en première approximation. Cette méthode permet de résoudre des équations différentielles ayant une partie linéaire découplée. À l'aide de l'analyse modale, les parties linéaires des équations générales du mouvement sont découplées et transformées en coordonnées normales. Elles prennent alors la forme

$$\ddot{W}_m + \bar{\Omega}_m^2 W_m + 2\sum_n C_m^n \dot{W}_n - 2\cos\theta \sum_n \mu_m^n \bar{\Omega}_n^2 (W_n + X_n) + \sum_i \sum_j \sum_k M_m^{ijk} W_i W_j W_k + \sum_i \sum_j \sum_l H_m^{jl} W_i W_j X_l = 0$$

où $m = 1, 2$ et $3$ (7.1)

La méthode asymptotique permet de traiter une résonance particulière. La résonance simultanée étudiée est celle qui satisfait les conditions suivantes:

$$\lambda = 2\bar{\Omega}_i$$
$$\bar{\Omega}_j = 3\bar{\Omega}_i$$
$$W_{oi} = 0 \qquad W_{oj} = 0 \qquad W_{ok} \neq 0 \tag{7.2}$$

Le mode excité est le mode $i$ qui, par résonance interne excite le mode $j$, et ce en présence d'une imperfection selon le mode $k$. Les développements analytiques de la méthode asymptotique pour ce cas ont été effectués par Sassi. Un bref aperçu de ses travaux et des équations obtenues est présenté ici. La méthode de solution de ces équations est ensuite élaborée en détail et les résultats obtenus sont présentés.

### 7.2.1 - Réponse: cas général non stationnaire

Dans le but d'étudier l'interaction entre les résonances forcées et les résonances simultanées , on suppose que chaque mode spatial a un seul type de vibrations:

$$W_i = a_i \cos\Psi_i \qquad [e_i = 0, W_{oi} = 0]$$
$$W_j = a_j \cos\Psi_j \qquad [e_j = 0, W_{oj} = 0]$$
$$W_k = e_k \cos\varphi_k \qquad [a_k = 0, W_{ok} \neq 0]$$

où $\begin{cases} a_n : \text{amplitude des vibrations paramétriques} \\ e_n : \text{amplitude des vibrations forcées} \end{cases}$

Avec cette hypothèse simplificatrice, les équations du mouvement sont solutionnées en utilisant la méthode asymptotique en première approximation. Après de nombreux développements et plusieurs simplifications, la réponse non stationnaire d'une

plaque imparfaite animée simultanément de vibrations forcées, paramétriques et internes est décrite par le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dot{a}_i = -C_i a_i + \dfrac{1}{\Lambda}\mu_i' \bar{\Omega}_i^2\, a_i \sin(\theta - 2\Psi_i) + \dfrac{\Gamma_{i2}\, a_i^2 a_j}{4\left(\bar{\Omega}_j - \bar{\Omega}_i\right)} \sin\left(3\Psi_i - \Psi_j\right) - \dfrac{a_i}{2\bar{\Omega}_i}\dfrac{d\bar{\Omega}_i}{dT} \\ \dot{\Psi}_i = \bar{\Omega}_i - \dfrac{1}{\Lambda}\mu_i' \bar{\Omega}_i^2 \cos(\theta - 2\Psi_i) + \dfrac{\Gamma_{i2}\, a_i a_j}{4\left(\bar{\Omega}_j - \bar{\Omega}_i\right)} \cos\left(3\Psi_i - \Psi_j\right) + \dfrac{3\Gamma_{i1}\, a_i^2}{8\bar{\Omega}_i} + \dfrac{\Gamma_{i4}\, a_j^2}{4\bar{\Omega}_i} + \dfrac{\Gamma_{i5}\, e_k^2}{4\bar{\Omega}_i} \end{cases}$$

(7.3 et 7.4)

$$\begin{cases} \dot{a}_j = -C_j a_j - \dfrac{\Gamma_{j1}\, a_i^3}{4\left(3\bar{\Omega}_i + \bar{\Omega}_j\right)} \sin\left(3\Psi_i - \Psi_j\right) - \dfrac{a_j}{2\bar{\Omega}_j}\dfrac{d\bar{\Omega}_j}{dT} \\ \dot{\Psi}_j = \bar{\Omega}_j + \dfrac{\Gamma_{j1}\, a_i^3 / a_j}{4\left(3\bar{\Omega}_i + \bar{\Omega}_j\right)} \cos\left(3\Psi_i - \Psi_j\right) + \dfrac{\Gamma_{j2}\, a_i^2}{4\bar{\Omega}_j} + \dfrac{3\Gamma_{j6}\, a_j^2}{8\bar{\Omega}_j} + \dfrac{\Gamma_{j8}\, e_k^2}{4\bar{\Omega}_j} \end{cases}$$

(7.5 et 7.6)

$$\begin{cases} \dot{e}_k = -C_k e_k + \dfrac{2\mu_k^k \bar{\Omega}_k^2 \left(W_{ok} + d_k\right)}{\left(\bar{\Omega}_k + d_k\right)} \sin(\theta - \varphi_k) - \dfrac{e_k}{2\bar{\Omega}_k}\dfrac{d\bar{\Omega}_k}{dT} \\ \dot{\varphi}_k = \bar{\Omega}_k - \dfrac{2\mu_k^k \bar{\Omega}_k^2 \left(W_{ok} + d_k\right)}{e_k\left(\bar{\Omega}_k + \Lambda\right)} \cos(\theta - \varphi_k) + \dfrac{\Gamma_{k3} a_i^2}{4\bar{\Omega}_k} + \dfrac{\Gamma_{k7}\, a_j^2}{4\bar{\Omega}_k} + \dfrac{3\Gamma_{k9}\, e_k^2}{8\bar{\Omega}_k} \end{cases}$$

(7.7 et 7.8)

### 7.2.2 - Réponse stationnaire

En régime stationnaire, les amplitudes de vibration des divers modes et la fréquence d'excitation sont des paramètres constants:

$$\dot{a}_i = \dot{a}_j = \dot{e}_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\Lambda} = 0$$

En tenant compte de ces hypothèses et de la forme de la réponse non stationnaire pour les divers modes de vibration, on peut conclure que les termes en sinus et cosinus doivent être constants, ce qui implique que leurs arguments doivent être aussi constants:

$$\begin{cases} \theta - 2\Psi_i = cte \\ 3\Psi_i - \Psi_j = cte \\ \theta - \varphi_k = cte \end{cases} \tag{7.9}$$

Les relations 7.9 sont dérivées par rapport au temps pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{\theta} - 2\dot{\Psi}_i = \Lambda - 2\dot{\Psi}_i = 0 \\ 3\dot{\Psi}_i - \dot{\Psi}_j = 0 \\ \dot{\theta} - \dot{\varphi}_k = \Lambda - \dot{\varphi}_k = 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

En combinant ces nouvelles relations avec la réponse non stationnaire et après quelques transformations, on obtient les équations du mouvement en régime stationnaire élaborées par Sassi:

$$\begin{cases} -C_i a_i + \dfrac{1}{\Lambda}\mu_i' \bar{\Omega}_i^{\,2} a_i \sin\Psi + \dfrac{\Gamma_{i2}\, a_i^{\,2} a_j}{4(\bar{\Omega}_j - \bar{\Omega}_i)} \sin\Psi' = 0 \\ \Lambda - 2\bar{\Omega}_i - \dfrac{3\Gamma_{i1}}{4\bar{\Omega}_i} a_i^{\,2} - \dfrac{\Gamma_{i4}}{2\bar{\Omega}_i} a_j^{\,2} - \dfrac{\Gamma_{i5}}{2\bar{\Omega}_i} e_k^{\,2} + \dfrac{2}{\Lambda}\mu_i' \bar{\Omega}_i^{\,2} \cos\Psi - \dfrac{\Gamma_{i2}\, a_i a_j}{2(\bar{\Omega}_j - \bar{\Omega}_i)} \cos\Psi' = 0 \end{cases}$$

(7.11 et 7.12)

$$\begin{cases} -C_j a_j - \dfrac{\Gamma_{j1}\, a_i^{\,3}}{4(3\bar{\Omega}_i + \bar{\Omega}_j)} \sin\Psi' = 0 \\ 3\bar{\Omega}_i - \bar{\Omega}_j + \left[\dfrac{9\Gamma_{i1}}{8\bar{\Omega}_i} - \dfrac{\Gamma_{j2}}{4\bar{\Omega}_j}\right] a_i^{\,2} + \left[\dfrac{3\Gamma_{i4}}{4\bar{\Omega}_i} - \dfrac{3\Gamma_{j6}}{8\bar{\Omega}_j}\right] a_j^{\,2} + \left[\dfrac{3\Gamma_{i5}}{4\bar{\Omega}_i} - \dfrac{\Gamma_{j8}}{4\bar{\Omega}_j}\right] e_k^{\,2} - \dfrac{3}{\Lambda}\mu_i' \bar{\Omega}_i^{\,2} \cos\Psi \\ \qquad + \left[\dfrac{3\Gamma_{i2}\, a_i a_j}{4(\bar{\Omega}_j - \bar{\Omega}_i)} - \dfrac{\Gamma_{j1}\, a_i^{\,3}}{4a_j(3\bar{\Omega}_i - \bar{\Omega}_j)}\right] \cos\Psi' = 0 \end{cases}$$

(7.13 et 7.14)

$$\begin{cases} -C_k e_k + \dfrac{2\mu_k^k \bar{\Omega}_k^{\,2}(W_{ok} + d_k)}{\left(\bar{\Omega}_k + \Lambda\right)} \sin\Psi'' = 0 \\ \Lambda - \bar{\Omega}_k + \dfrac{2\mu_k^k \bar{\Omega}_k^{\,2}(W_{ok} + d_k)}{e_k\left(\bar{\Omega}_k + \Lambda\right)} \cos\Psi'' - \dfrac{\Gamma_{k3}}{4\bar{\Omega}_k} a_i^{\,2} - \dfrac{\Gamma_{k7}}{4\bar{\Omega}_k} a_j^{\,2} - \dfrac{3\Gamma_{k9}}{8\bar{\Omega}_k} e_k^{\,2} = 0 \end{cases}$$

(7.15 et 7.16)

pour lesquelles $\begin{cases} \Psi = \theta - 2\Psi_i \\ \Psi' = 3\Psi_i - \Psi_j \\ \Psi'' = \theta - \varphi_k \end{cases}$

## 7.3 - RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DÉCRIVANT LA RÉPONSE STATIONNAIRE

### 7.3.1 - Méthode de solution

Le système de six équations obtenu par Sassi qui décrit le mouvement en régime stationnaire est couplé et non linéaire (équations 7.11 à 7.16). La résolution directe de ces équations est assez complexe. L'utilisation de sous routines appropriées pour solutionner ces équations est presque impossible. En réalité, pour tous les types de logiciel, il est nécessaire de fournir des valeurs de départ très rapprochées des valeurs vraies pour assurer la convergence du processus itératif. Cette technique de solution devient rapidement fastidieuse et semble être inutilisable.

Le système d'équations peut être solutionné beaucoup plus facilement après quelques modifications, c'est-à-dire en réduisant le nombre d'équations et en les transformant sous forme d'équations polynomiales. Les racines d'équations polynomiales se trouvent rapidement et sans problème.

En combinant les diverses équations, on peut faire disparaître les angles de phase et obtenir des équations polynomiales pour déterminer l'amplitude de chaque mode. Ainsi, en combinant les équations 7.15 et 7.16, on obtient l'équation polynomiale en $e_k^2$ suivante:

$$(KA^2)e_k^{\,6} + (2 \cdot KA \cdot KB)e_k^{\,4} + (KB^2 + C_k^{\,2})e_k^{\,2} - KD^2 = 0$$

où

$$\begin{cases} KA = \dfrac{3\Gamma_{k9}}{8\bar{\Omega}_k} \\ KB = \bar{\Omega}_k - \Lambda + \dfrac{\Gamma_{k3}}{4\bar{\Omega}_k} a_i^{\,2} + \dfrac{\Gamma_{k7}}{4\bar{\Omega}_k} a_j^{\,2} \\ KD = \dfrac{2\mu_k^k \bar{\Omega}_k^{\,2}(W_{ok} + d_k)}{(\bar{\Omega}_k + \Lambda)} \end{cases} \tag{7.17}$$

Des expressions pour $sin\,\Psi$ et $sin\,\Psi'$ sont obtenues en combinant les équations 7.11 et 7.13. Ces expressions sont dégagées et permettent de faire disparaître les angles de phase $\Psi$ et $\Psi'$ de d'autres équations:

$$sin\,\Psi = \frac{a_j^{\,2}\Gamma_{i2}}{a_i^{\,2}\Gamma_{j1}} \cdot \frac{C_j \Lambda}{\mu_i' \bar{\Omega}_i^{\,2}} \cdot \frac{\left(3\bar{\Omega}_i + \bar{\Omega}_j\right)}{\left(\bar{\Omega}_j - \bar{\Omega}_i\right)} + \frac{C_i \Lambda}{\mu_i' \bar{\Omega}_i^{\,2}} \tag{7.18}$$

$$sin\,\Psi' = \frac{-C_j a_j \cdot 4\left(3\bar{\Omega}_i + \bar{\Omega}_j\right)}{\Gamma_{j1} a_i^{\,3}} \tag{7.19}$$

Dans chacune des équations 7.12 et 7.14, l'expression $cos\,\Psi$ peut être isolée. En égalant les deux expressions ainsi obtenues, en éliminant les termes en $\Psi'$ à l'aide de

l'expression 7.19 et après quelques transformations on peut écrire une équation polynomiale en $a_j^2$ :

$$(B^2)a_j^6 + (2AB)a_j^4 + \left(A^2 + \frac{C_j^2}{9}\right)a_j^2 - D^2 = 0$$

où
$$\begin{cases} A = \dfrac{\bar{\Omega}_j}{3} - \dfrac{\Lambda}{2} + \dfrac{\Gamma_{j2}}{12\bar{\Omega}_j}a_i^2 + \dfrac{\Gamma_{j8}}{12\bar{\Omega}_j}e_k^2 \\ B = \dfrac{\Gamma_{j6}}{8\bar{\Omega}_j} \\ D = \dfrac{\Gamma_{j1}a_i^3}{12\left(3\bar{\Omega}_i + \bar{\Omega}_j\right)} \end{cases} \qquad (7.20)$$

L'expression $cos\,\Psi'$ peut aussi être isolée dans les équations 7.12 et 7.14. Les deux nouvelles expressions ainsi obtenues sont égalées pour obtenir une nouvelle équation. Les termes en $\Psi$ peuvent être éliminés avec l'expression 7.18. Après quelques transformations on peut écrire l'équation polynomiale en $a_i^2$ qui suit:

$$(W^2)a_i^8 + (2VW)a_i^6 + \left(V^2 + 2UW - X^2 + \frac{X^2C_i^2\Lambda^2}{\mu_i'^2\bar{\Omega}_i^4}\right)a_i^4$$

$$+\left(2UV + \frac{2C_iC_j\Lambda Xa_j^2}{\mu_i'\bar{\Omega}_i^2}\right)a_i^2 + \left(U^2 + C_j^2a_j^4\right) = 0$$

où

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\Gamma_{j1}}{\Gamma_{i2}}\cdot\dfrac{\left(\bar{\Omega}_j-\bar{\Omega}_i\right)}{\left(3\bar{\Omega}_i+\bar{\Omega}_j\right)} \\ U = \left(\dfrac{3\Lambda}{2}-\bar{\Omega}_j\right)a_j^{\,2} - \dfrac{3\Gamma_{j6}}{8\bar{\Omega}_j}a_j^{\,4} - \dfrac{\Gamma_{j8}}{4\bar{\Omega}_j}a_j^{\,2}e_k^{\,2} \\ V = 2\alpha\bar{\Omega}_i - \alpha\Lambda + \left(\dfrac{\Gamma_{i4}\alpha}{2\bar{\Omega}_i} - \dfrac{\Gamma_{j2}}{4\bar{\Omega}_j}\right)a_j^{\,2} + \dfrac{\Gamma_{i5}\alpha}{2\bar{\Omega}_i}e_k^{\,2} \\ W = \dfrac{3\Gamma_{i1}\alpha}{4\bar{\Omega}_i} \\ X = \dfrac{2}{\Lambda}\mu_i'\bar{\Omega}_i^{\,2}\alpha = \dfrac{\mu_i'\bar{\Omega}_i^{\,2}}{\Lambda}\cdot\dfrac{\Gamma_{j1}\left(\bar{\Omega}_j-\bar{\Omega}_i\right)}{\Gamma_{i2}\left(3\bar{\Omega}_i+\bar{\Omega}_j\right)} \end{cases} \tag{7.21}$$

L'amplitude de chaque mode de vibration est décrite par les trois équations polynomiales élaborées précédemment (équations en $e_k^2$, $a_j^2$ et $a_i^2$ ). Le mouvement réel de la plaque est celui qui satisfait simultanément ces trois équations. Ce nouveau système d'équations est résolu pour différentes fréquences d'excitation en utilisant un programme MATLAB basé sur l'algorithme présenté à la figure 7.1. Ce programme a été conçu pour élaborer la branche supérieure des courbes de résonances (branche ayant la plus grande amplitude et qui, dans ce cas ci, correspond à la réponse stable lors d'un balayage croissant de la fréquence d'excitation). Une transcription du programme se trouve à l'annexe D.

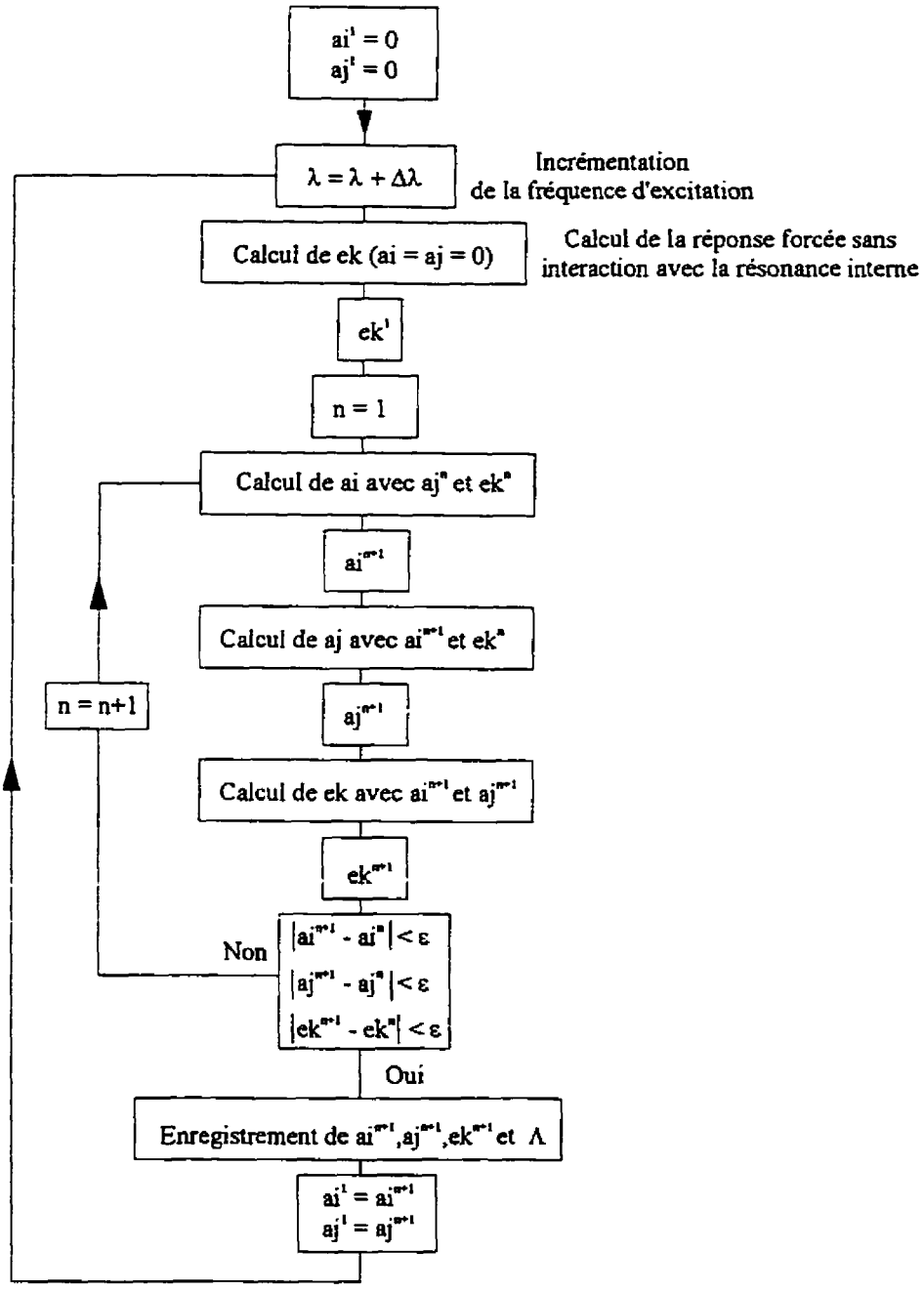



Figure 7.1 - Algorithme de résolution utilisé pour étudier l'interaction entre résonances simultanées et résonances forcées

Le processus itératif démarre à une fréquence d'excitation donnée $\Lambda$, supposée inférieure à la fréquence à laquelle débute la zone d'instabilité paramétrique. Pour cette fréquence d'excitation les amplitudes des vibrations paramétriques et internes sont nulles et on peut poser $a_i = a_j = 0$. Une valeur initiale pour $e_k$ est calculée en supposant qu'il n'y a aucune interaction entre les vibrations forcées et les autres types de vibrations. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée mais elle donne une valeur approximative réaliste. Les amplitudes $a_i$, $a_j$ et $e_k$ sont ensuite calculées successivement à l'aide des équations polynomiales élaborées, en utilisant toujours les dernières valeurs d'amplitude obtenues (calculées ou supposées). Les trois nouvelles valeurs calculées sont ensuite comparées aux valeurs initiales. Si celles-ci diffèrent d'un écart supérieur à celui jugé acceptable ( $> \varepsilon$ ), alors de nouvelles valeurs pour $e_k$, $a_i$ et $a_j$ sont calculées et le processus itératif continue.

Si l'écart entre les valeurs initiales et les valeurs nouvellement calculées est jugé assez faible ( $< \varepsilon$ ), alors le processus itératif se termine. La fréquence d'excitation est augmentée et les dernières valeurs pour $a_i$ et $a_j$ sont conservées pour servir de valeurs initiales aux itérations de la prochaine fréquence d'excitation. Une valeur initiale pour $e_k$ est ensuite calculée en supposant qu'il n'y a aucune interaction entre les résonances forcées et simultanées et le processus itératif recommence.

Dans tous les cas, lorsqu'une valeur calculée est complexe, le résultat est posé égal à zéro et le processus continue. Un telle valeur est physiquement impossible (absence de mouvement ou amplitude nulle).

### 7.3.2 - Résultats obtenus

La réponse dynamique de plusieurs plaques est ainsi calculée. Les résultats obtenus sont retransformés en coordonnées réelles. Après cette transformation, les divers modes de vibration comportent plus d'une composante fréquentielle. Cependant, l'une d'entre elles est nettement prépondérante. Les autres composantes fréquentielles sont négligeables devant celle-ci (inférieures à cinq pour cent). Les résultats présentés sont en coordonnées réelles et négligent ces faibles termes.

Les résultats les plus représentatifs obtenus sont présentés aux figures 7.2 à 7.10. Pour chaque essai, les paramètres de la plaque sont ajustés pour satisfaire les conditions nécessaires entre les fréquences naturelles pour étudier les interactions possibles entre résonances simultanées et résonances forcées.

Cette méthode permet d'observer l'interaction entre la résonance forcée du mode $k$ et la résonance simultanée impliquant les modes $i$ et $j$. En général, lorsqu'une résonance forcée et une résonance simultanée peuvent survenir pour le même domaine

fréquentiel, la résonance forcée se développe et empêche la résonance simultanée de se produire. À la fin de la résonance forcée, la résonance simultanée survient comme en l'absence de résonance forcée et sans modifier le comportement des vibrations forcées.

Les figures 7.2, 7.3 et 7.4 sont tracées pour la même plaque mais avec des imperfections géométriques de différentes amplitudes. Lorsque l'imperfection géométrique initiale est plus importante, les vibrations forcées ont une plus grande amplitude à la résonance. De plus, les vibrations forcées de grande amplitude s'étendent sur un plus grand domaine fréquentiel. La résonance simultanée qui prend forme à la fin de la résonance forcée est ainsi retardée et commence à se produire à des fréquences d'excitation plus élevées.

Les figures 7.5 et 7.6 sont tracées pour une autre plaque. À la figure 7.5, l'imperfection est faible et la résonance forcée n'influence pas la résonance simultanée. Cependant à la figure 7.6, l'imperfection est plus grande, la résonance forcée est plus imposante et aucune résonance simultanée ne se produit. La résonance forcée domine et anéantit toute possibilité de résonance simultanée. Ce phénomène est aussi présent pour d'autres cas, comme à la figure 7.7.

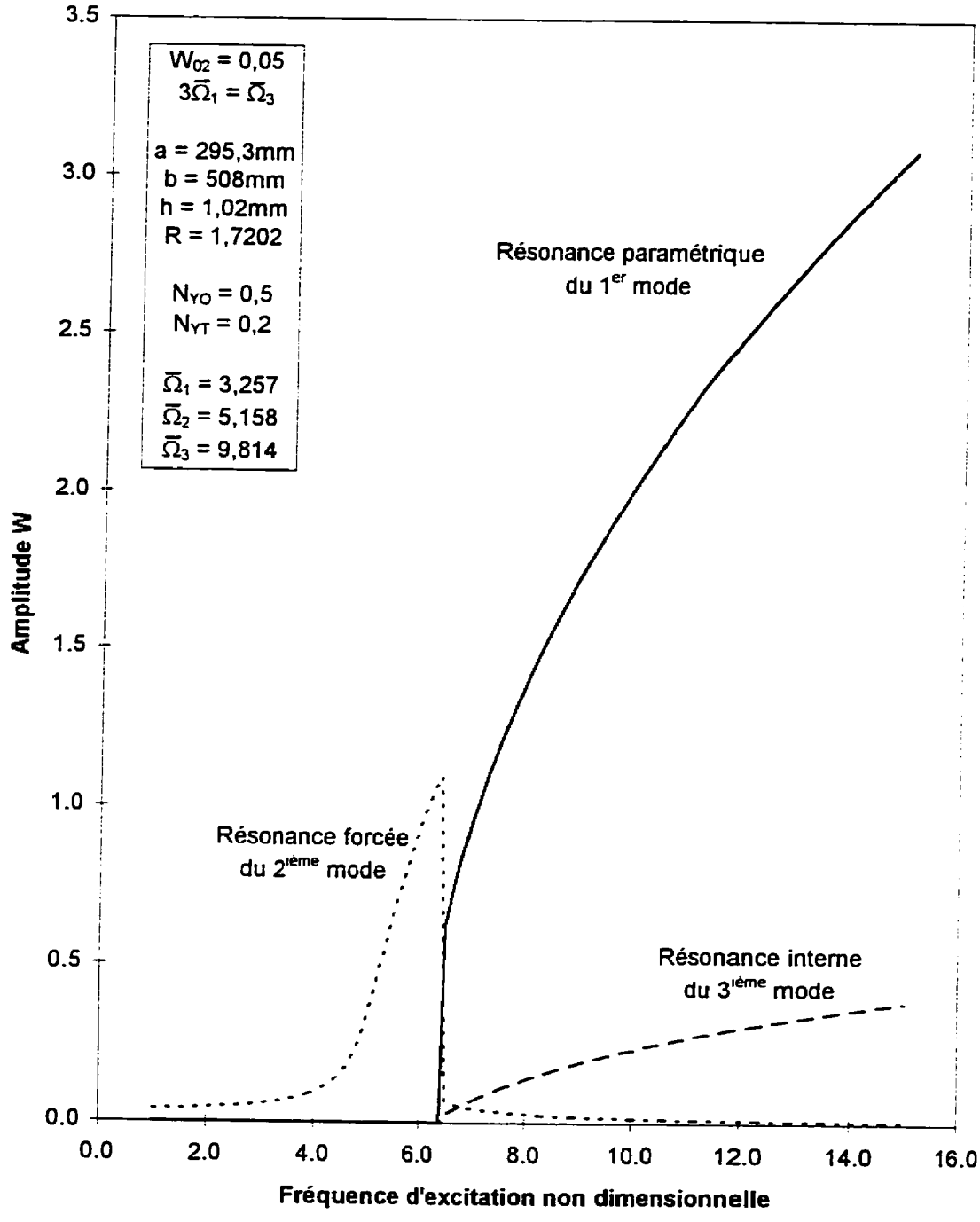



Figure 7.2 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02} = 0,05$

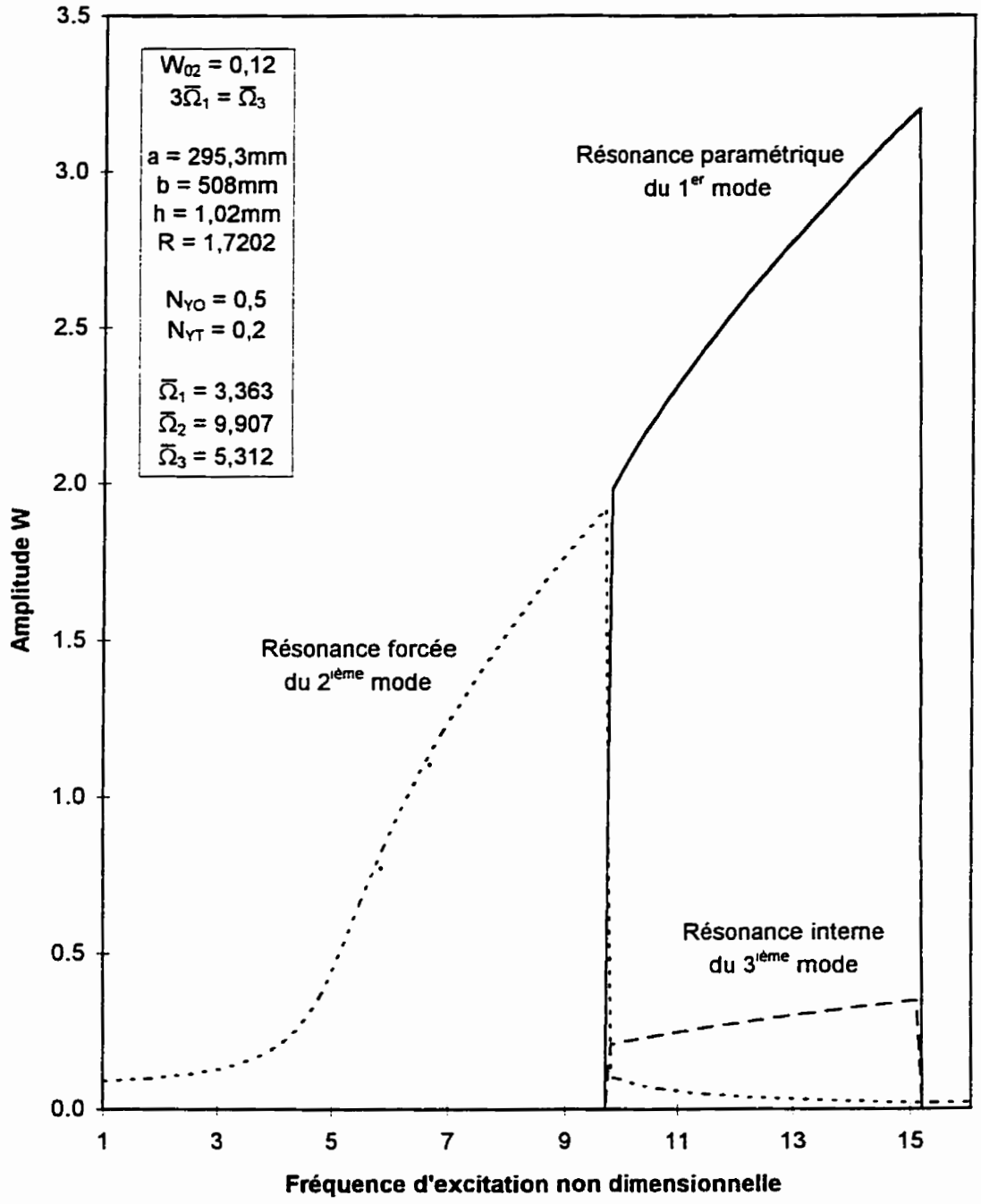



Figure 7.3 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$ = 0,12

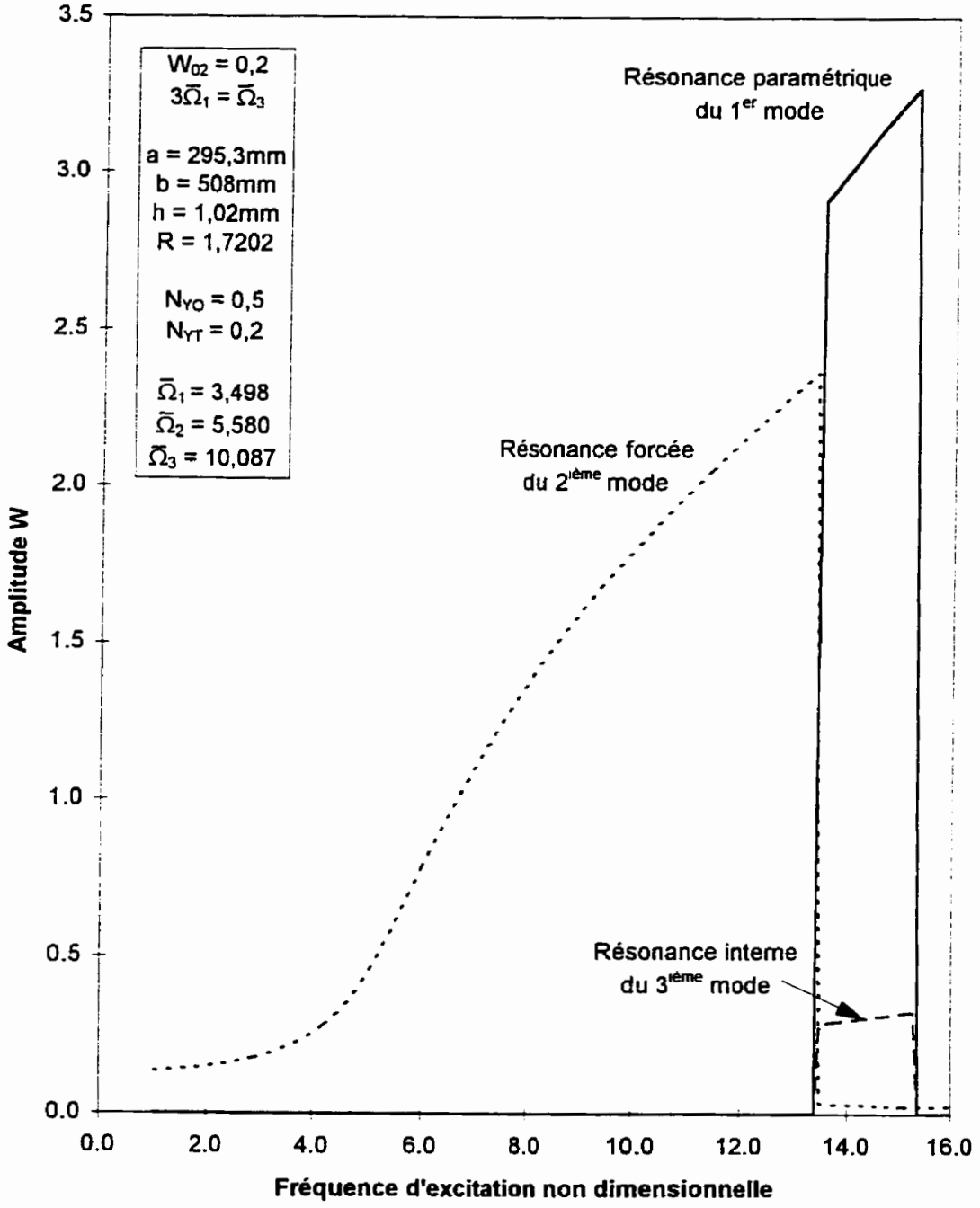



Figure 7.4 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque II, $W_{02} = 0,2$

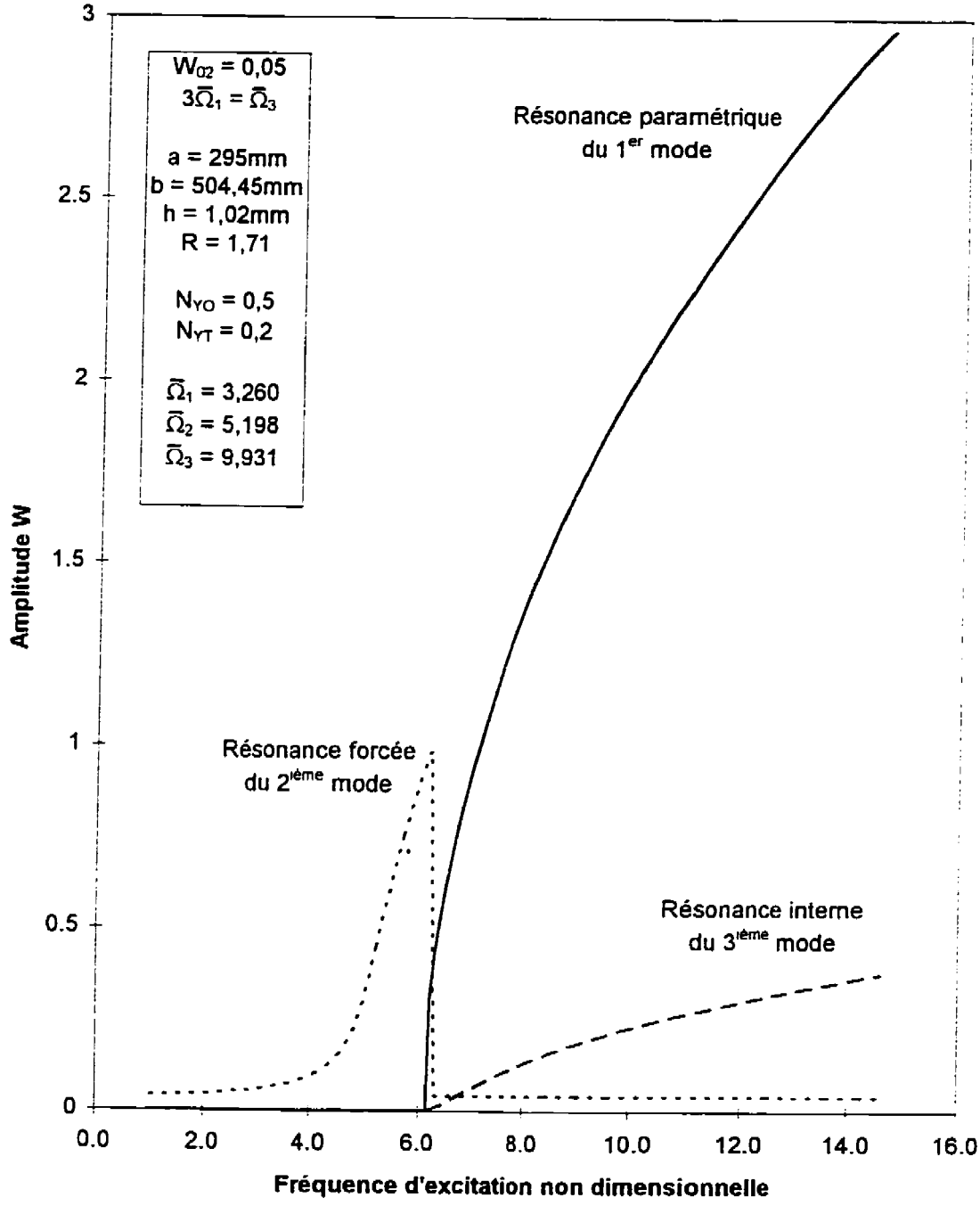



Figure 7.5 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I2, $W_{02} = 0,05$

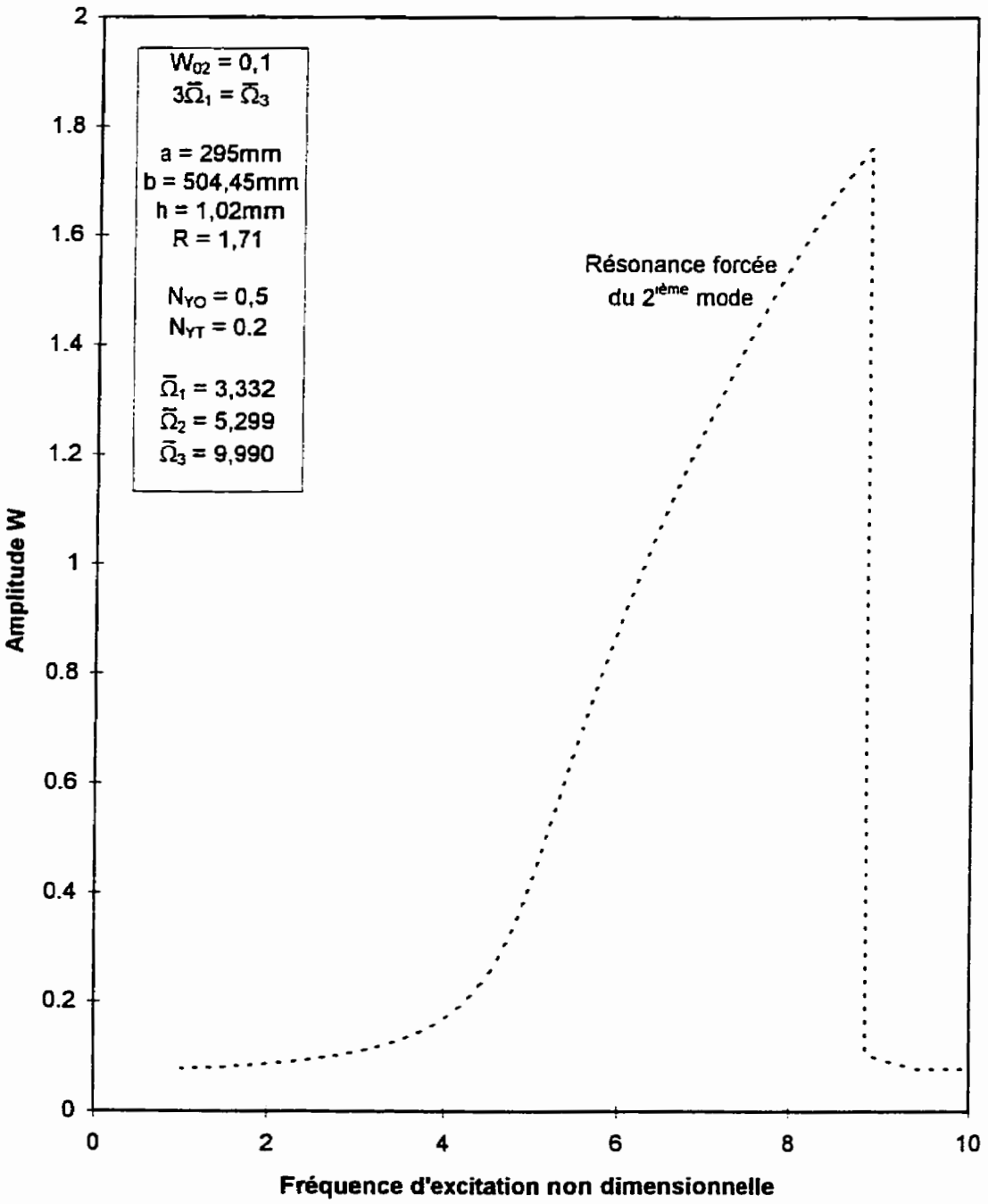



Figure 7.6 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I2, $W_{02} = 0,1$

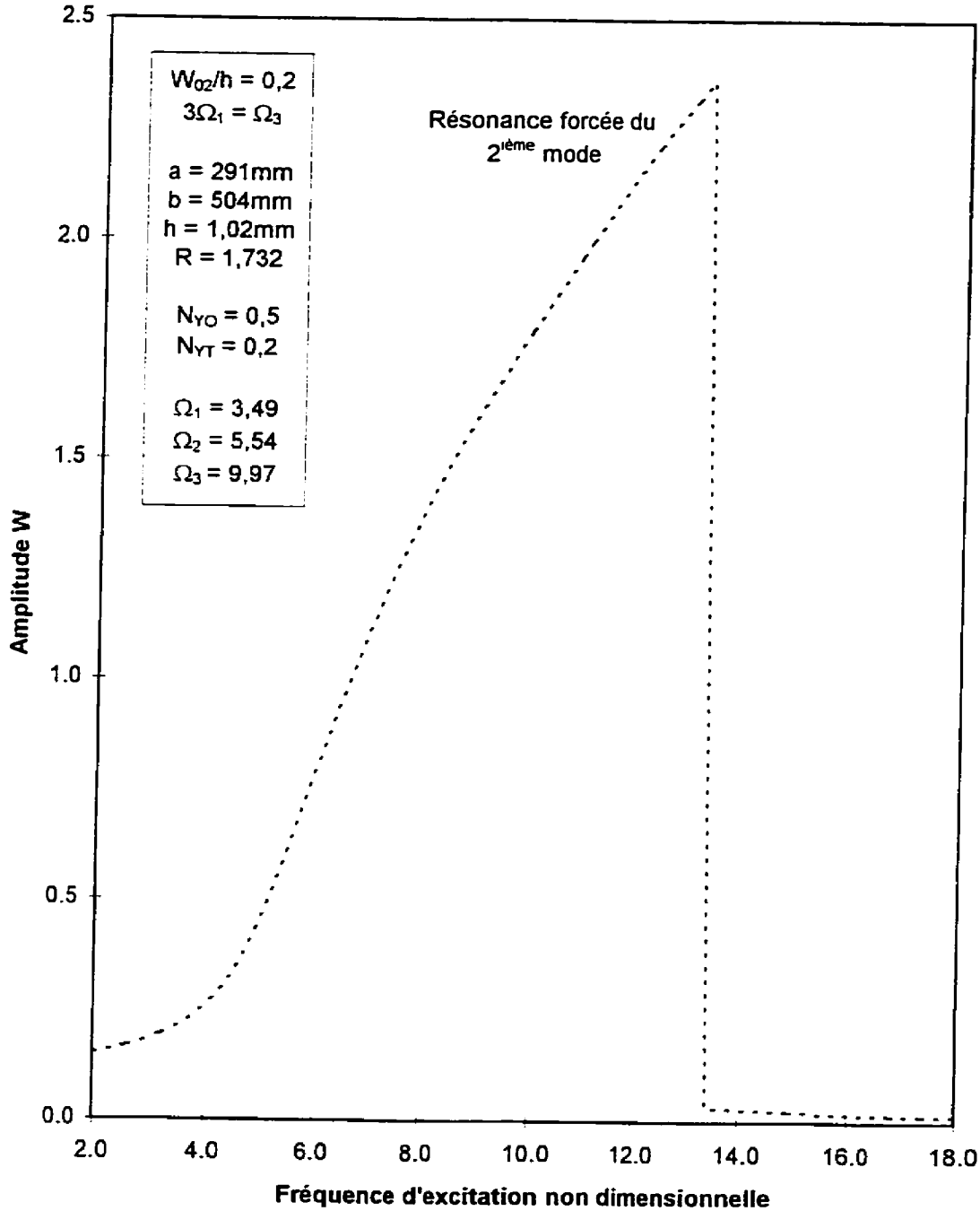



Figure 7.7 - Intéraction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I3, $W_{02}/h = 0,2$

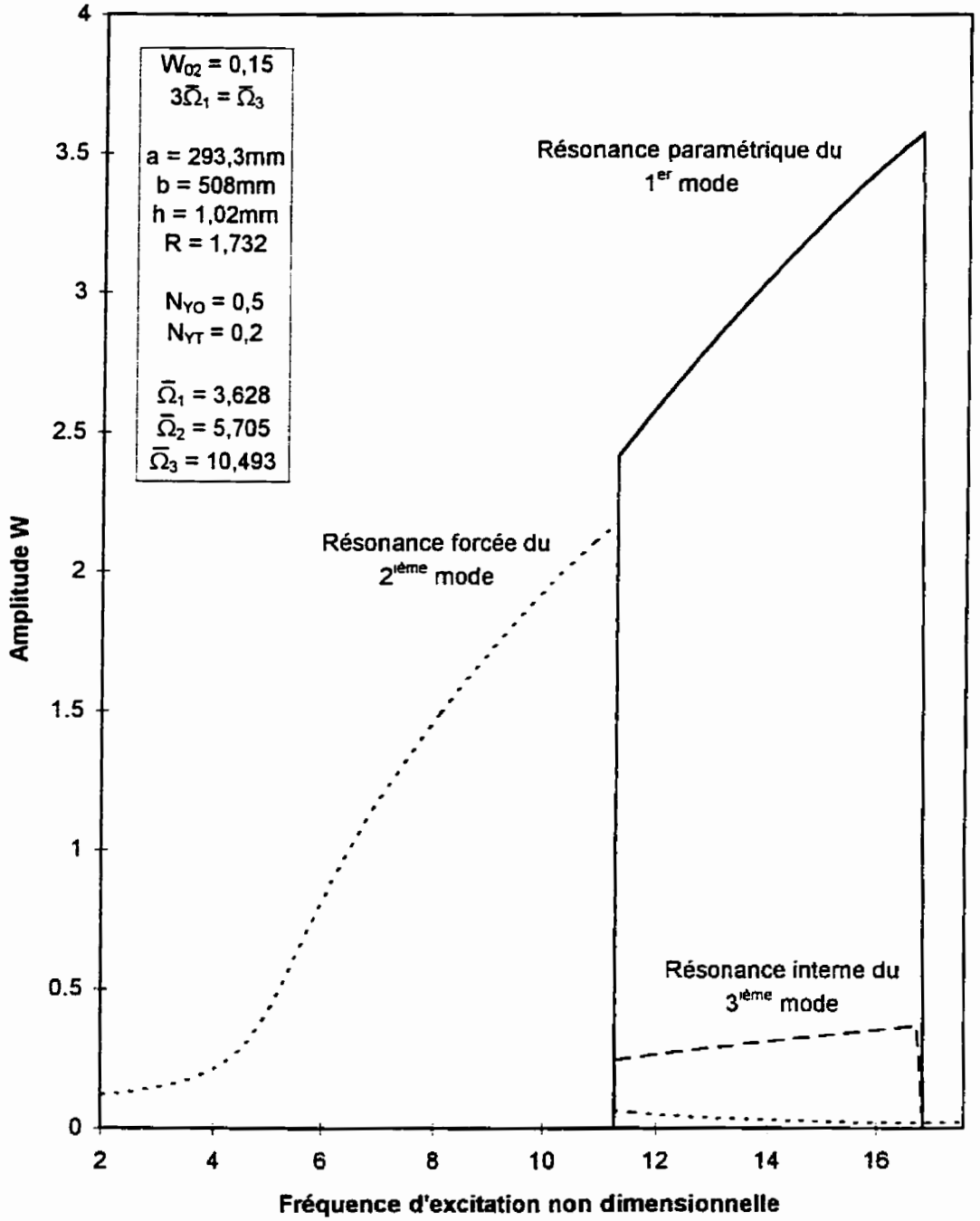



Figure 7.8 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I4, $W_{02} = 0,15$

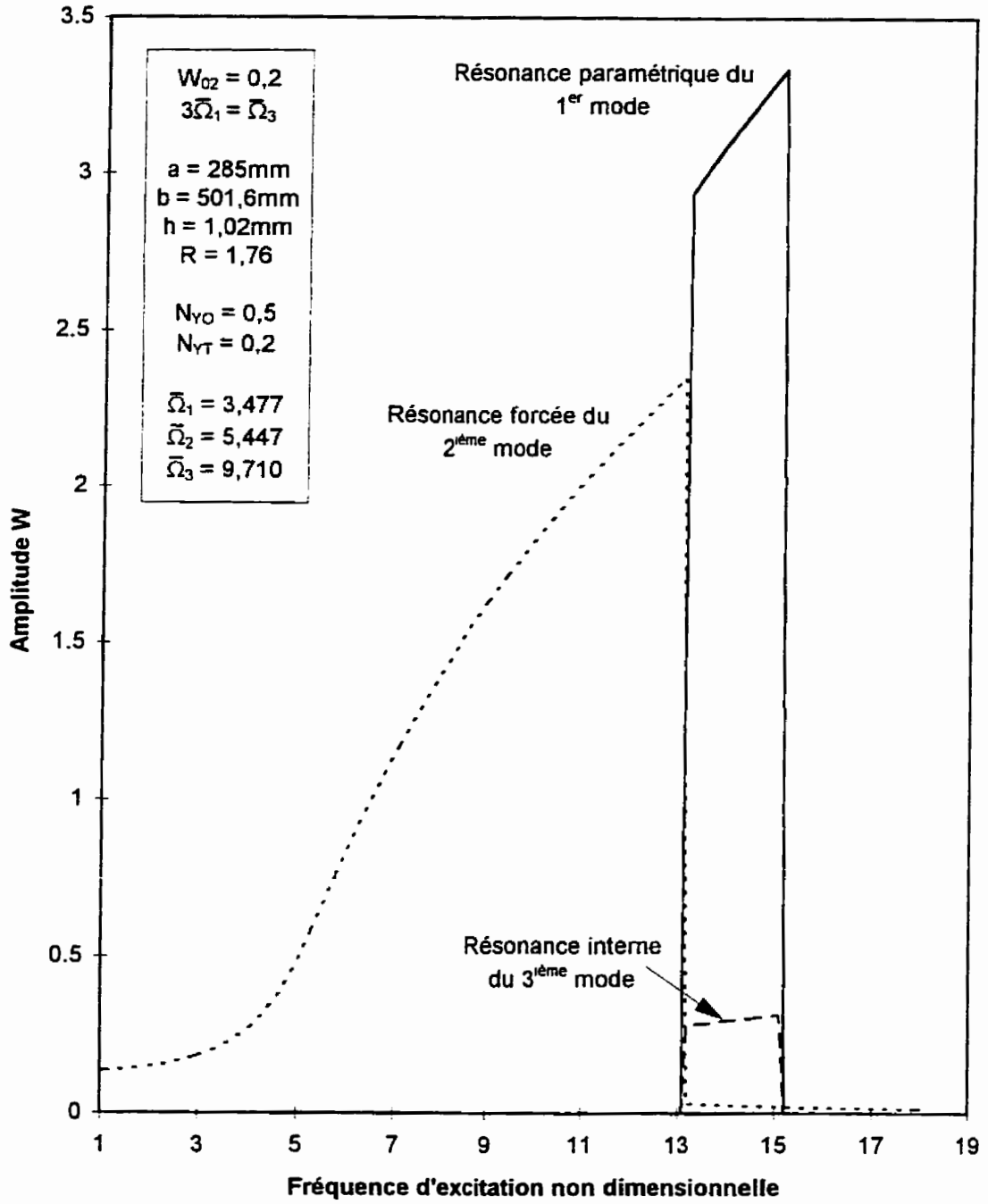



Figure 7.9 - Interaction résonance simultanée résonance forcée, plaque I5, $W_{02} = 0,2$

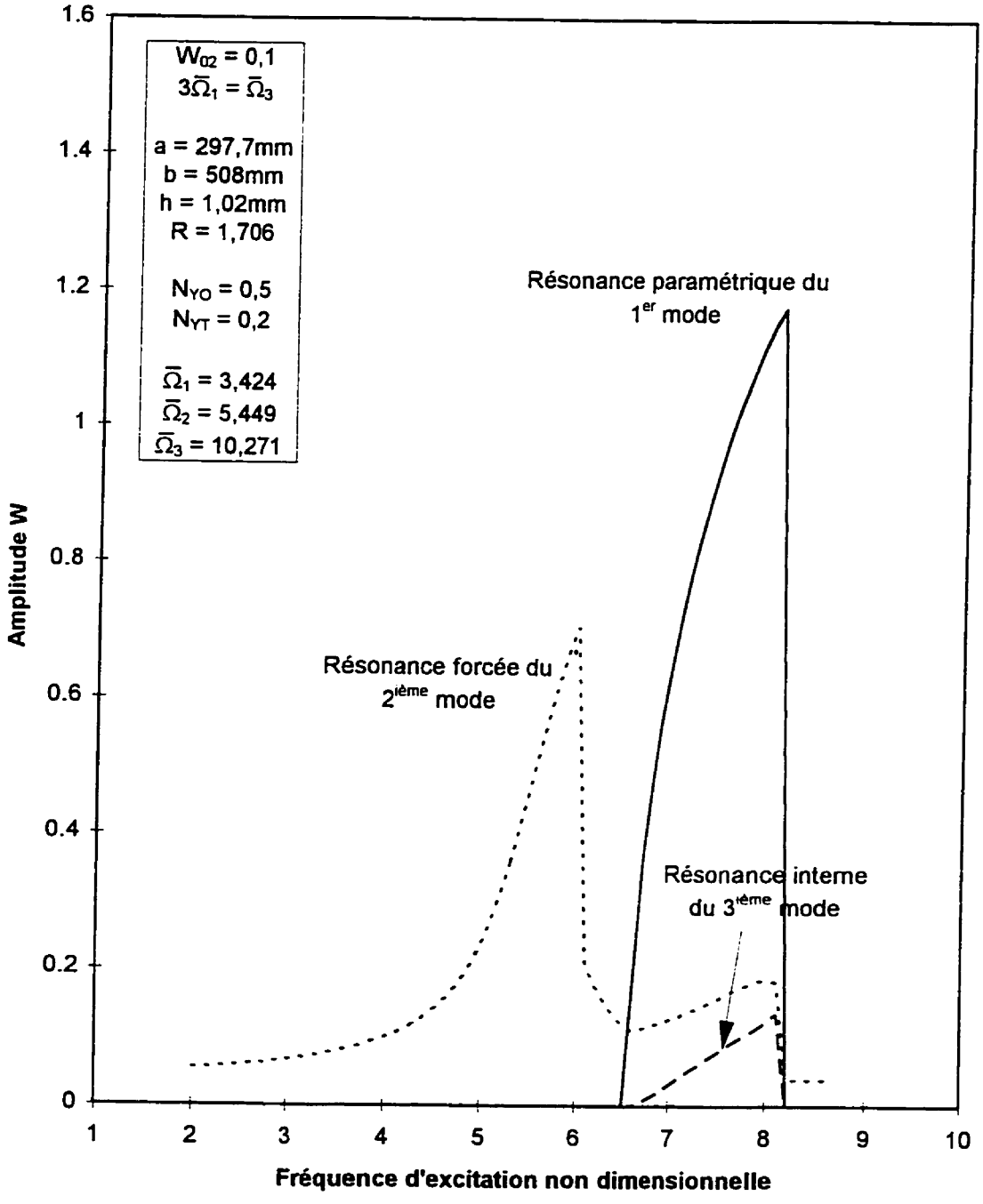



Figure 7.10 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I6, $W_{02} = 0,1$

Lorsque la résonance forcée se termine avant le début de la résonance simultanée, la résonance simultanée se produit presque sans interaction avec la résonance forcée (figures 7.2 et 7.5). Parfois, celle-ci entretient le mouvement du mode forcé à une amplitude supérieure à celle qui existe en l'absence de la résonance simultanée (figure 7.10).

## 7.4 - Comparaison entre méthode asymptotique et intégration directe

Dans l'utilisation de la méthode asymptotique, on pose la solution sous la forme de la résonance que l'on désire étudier. Les résultats ainsi obtenus ne sont valides que sur un certain domaine, domaine au-delà duquel d'autres types de vibrations ayant une forme complètement différente de la forme de la solution supposée peuvent survenir. Contrairement à la méthode asymptotique, aucune forme de réponse temporelle n'est supposée avec l'intégration numérique. La solution obtenue dépend des conditions initiales et n'est pas limitée par la méthode de résolution des équations du mouvement mais par les équations elles-mêmes.

Trois cas pour lesquels une interaction est possible entre une résonance forcée et une résonance simultanée ont été étudiés en utilisant les développements de la méthode asymptotique en première approximation et l'intégration directe (modélisation utilisée à la section 6.3). Ces cas sont présentés aux figures 7.11 à 7.13.

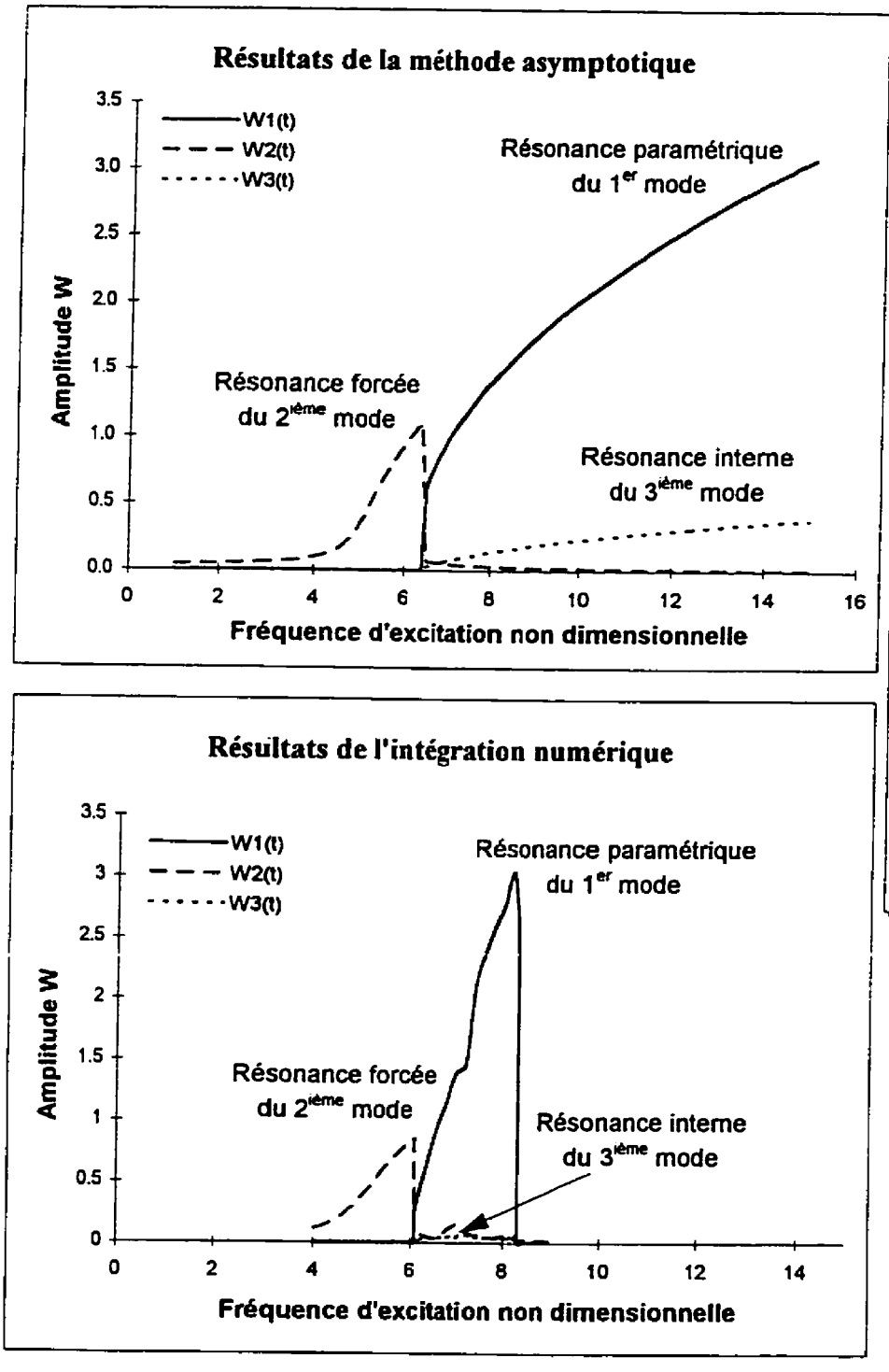
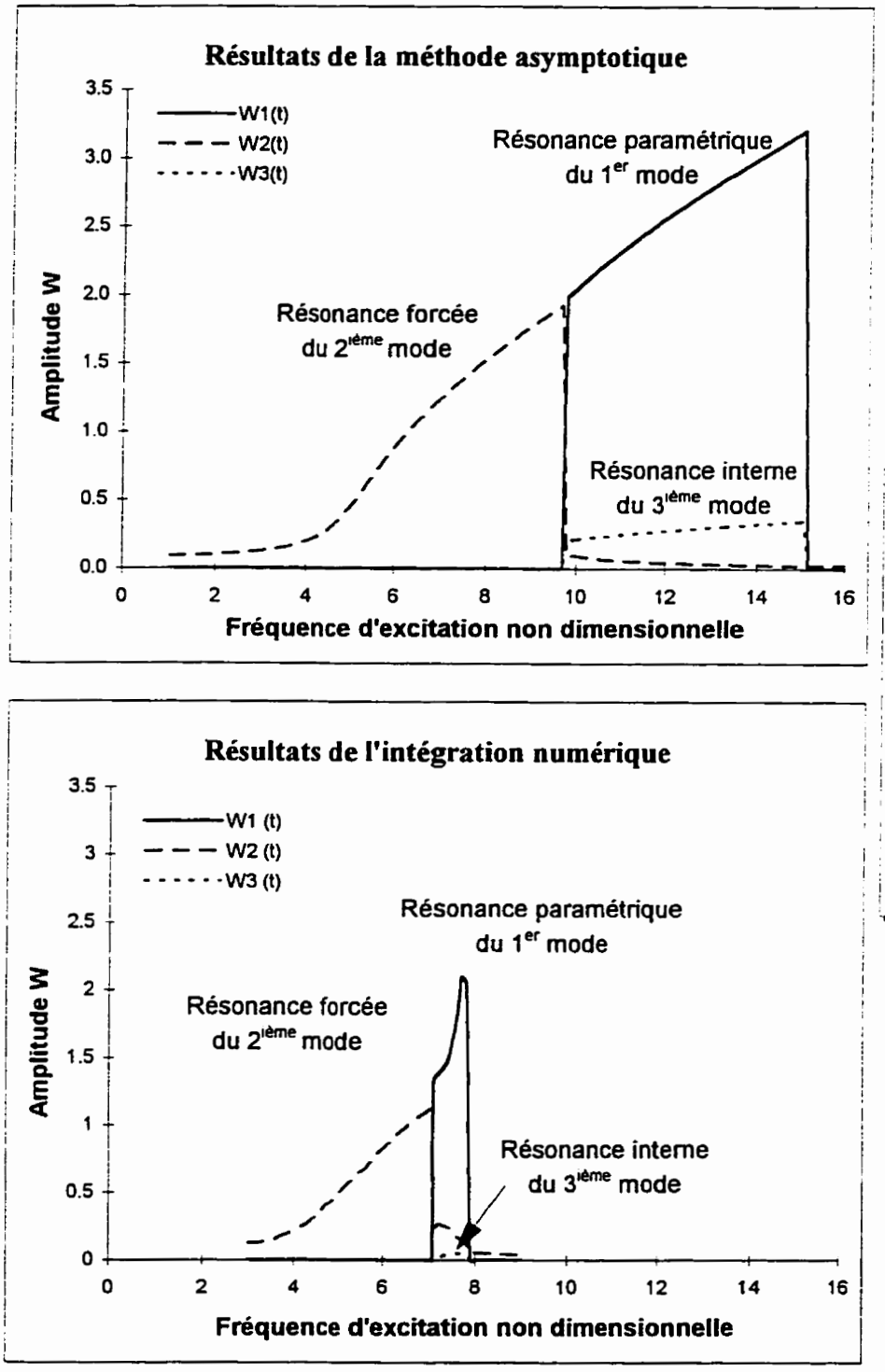



Figure7.11 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,05, comparaison entre méthode asymptotique et intégration numérique




$W_{02} = 0,12$
$3\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_3$

a = 295,3mm
b = 508mm
h = 1,02mm
R = 1,7202

$N_{YO} = 0,5$
$N_{YT} = 0,2$

$\bar{\Omega}_1 = 3,363$
$\bar{\Omega}_2 = 9,907$
$\bar{\Omega}_3 = 5,312$

Figure 7.12 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,12, comparaison entre méthode asymptotique et intégration numérique

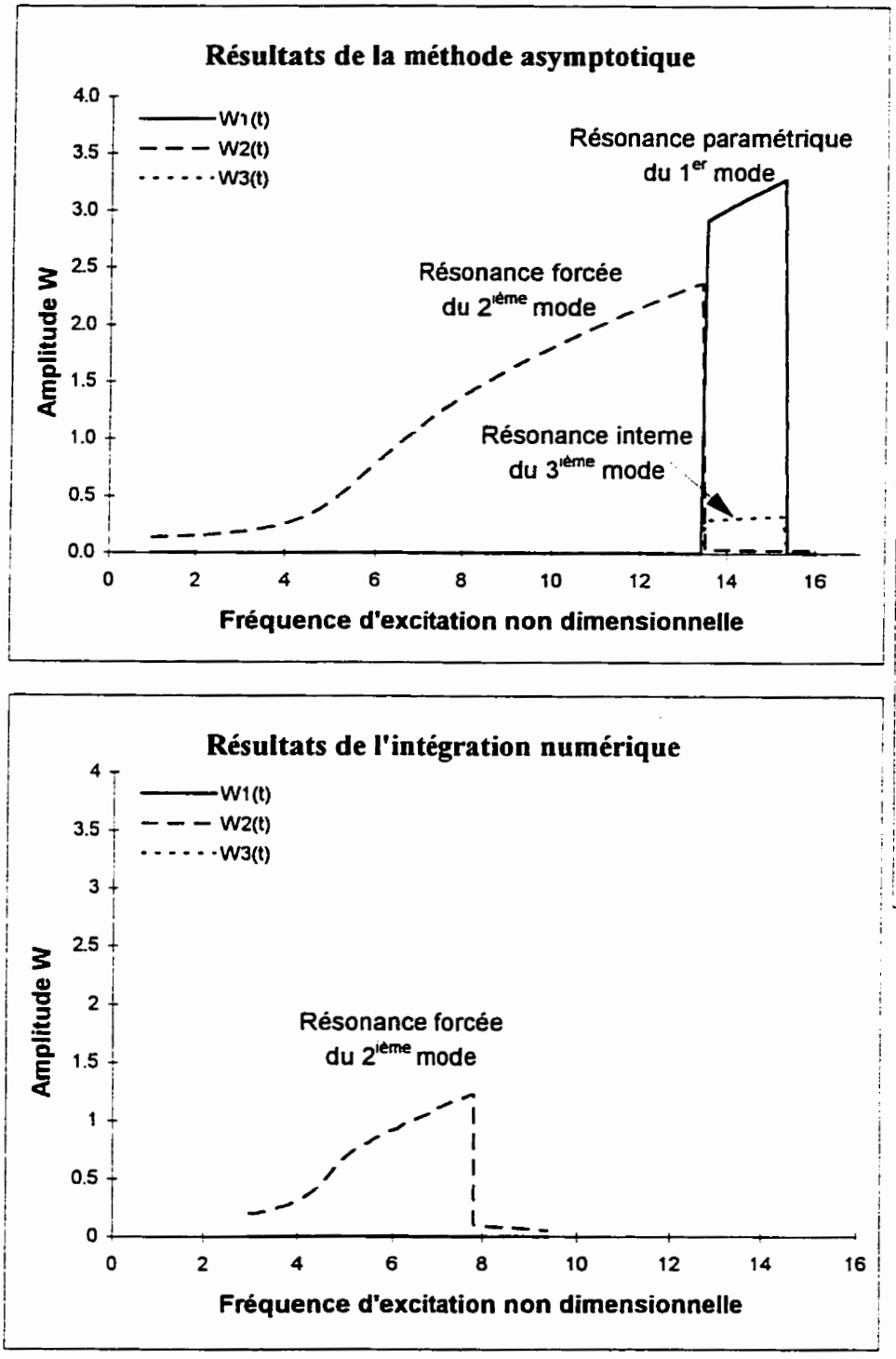



Figure 7.13 - Interaction entre résonance simultanée et résonance forcée, plaque I1, $W_{02}$=0,2, comparaison entre méthode asymptotique et intégration numérique

Aux figures 7.11 et 7.12, une résonance simultanée est observée pour les deux méthodes de solution. L'amplitude de la résonance simultanée est cependant moindre pour les cas étudiés en utilisant l'intégration numérique. Dans les développements de la méthode asymptotique, on suppose que la fréquence naturelle du troisième mode est toujours environ égale à trois fois la fréquence naturelle du premier mode. Par conséquent, dès que le premier mode entre en résonance paramétrique, le troisième mode entre en résonance interne. Pour l'intégration numérique, la résonance interne ne se produit que si les fréquences naturelles satisfont réellement la relation gouvernant la résonance interne. Dans les cas étudiés, le rapport entre les fréquences naturelles ne permet pas de satisfaire assez précisément la relation gouvernant la résonance interne et celle-ci ne se développe pas complètement (transfert partiel de l'énergie transmissible).

D'autre part, le domaine fréquentiel pour lequel on observe une résonance simultanée est plus restreint pour l'intégration numérique. La résonance simultanée tracée à l'aide de la méthode asymptotique est plus étendue et sort peut-être du domaine pour lequel la solution supposée est valide.

À la figure 7.13, la résonance paramétrique du premier mode (et par conséquent la résonance interne) n'est pas observée dans les résultats obtenus avec l'intégration numérique. Les courbes tracées avec la méthode asymptotique illustrent dans tous les cas les plus grandes amplitudes de vibration en régime permanent que le système peut atteindre (cas critiques), et non nécessairement les courbes obtenues en effectuant un

balayage croissant et très lent de la fréquence d'excitation. Lors de l'intégration numérique, les conditions initiales imposées correspondent au régime permanent du système pour une fréquence d'excitation légèrement inférieure, ce qui simule un balayage très lent de la fréquence d'excitation. Dans ce cas ci, la fin de la résonance forcée est trop différente de la résonance paramétrique pour permettre à celle-ci de prendre forme, bien qu'un tel mouvement soit possible.

## 7.5 - CONCLUSION

La méthode asymptotique en première approximation permet d'étudier plus facilement les mécanismes d'interaction. Cependant, le domaine de validité de cette méthode est difficile à cerner. L'intégration directe est beaucoup plus complexe d'utilisation, car les résonances simultanées importantes sont rarement observées.

Il existe des interactions entre les résonances forcée et les résonances internes. Ces interactions sont gouvernées par l'amplitude des imperfections et la position relative des courbes de résonance. Dans certain cas, les vibrations forcées empêchent les vibrations paramétriques de faible et de grande amplitude de se produire, et stabilise ainsi le comportement dynamique de la plaque imparfaite.

# Chapitre 8

# Approche expérimentale pour l'étude des plaques géométriquement imparfaites

## 8.1 - INTRODUCTION

Les études expérimentales traitant de l'influence des imperfections géométriques initiales sur le comportement dynamique des plaques sont rares. La principale difficulté rencontrée dans ce type d'étude est la modélisation de l'imperfection géométrique des plaques utilisées.

Les équations énoncées précédemment décrivent le comportement d'une plaque imparfaite soumise à une excitation paramétrique. En l'absence de chargement, la plaque imparfaite a une déflexion caractérisée par son amplitude $W_o$ et est libre de contrainte interne. Les contraintes résiduelles dans la plaque doivent donc être nulles ou faibles comparativement aux contraintes engendrées lors du mouvement latéral de la plaque.

Deux approches différentes peuvent être utilisées pour valider expérimentalement l'étude des plaques imparfaites. La première approche consiste à

utiliser des plaques quelconques, et à mesurer leurs imperfections pour les incorporer dans les développements analytiques. La seconde approche consiste à modeler une plaque avec l'imperfection désirée, en lui donnant une forme similaire aux modes de vibration ou à une combinaison de ceux-ci. Les résultats expérimentaux obtenus pourront ainsi être comparés aux résultats analytiques.

## 8.2 - UTILISATION D'UNE PLAQUE QUELCONQUE

Cette approche a déjà été utilisée par Ilanko et Dickinson [42] dans leur étude portant sur les vibrations libres d'une plaque imparfaite soumise à un chargement statique. Dans cette approche, aucune tentative n'est effectuée pour façonner la plaque. Les imperfections de la plaque utilisée sont mesurées pour être introduites dans le modèle analytique à valider. Pour mesurer l'imperfection, on mesure la déflexion $W_o$ de la plaque en divers endroits ayant des coordonnées connues $(xi,yi)$. Les points ainsi obtenus $( xi,yi, W_o (xi,yi) )$ sont utilisés pour déterminer les coefficients de l'expression analytique de l'imperfection.

L'imperfection est exprimée par une double série

$$W_o(X,Y) = \sum_k \sum_l W_{okl} \Phi_k(X) \Psi_l(Y)$$

où $W_o(X,Y)$ : amplitudes mesurées

$\Phi$ (X) et $\Psi$ (Y) : fonctions propres du système linéaire associé

$X = x/a$ et $Y = y/b$

Dans ce travail, seulement les trois premiers modes de vibration et une seule demi-onde dans la direction $OX$ sont considérés. L'expression analytique de l'imperfection géométrique prend ainsi la forme suivante:

$$W_o(X,Y) = \Phi_1(X)\left[W_{01}\Psi_1(Y) + W_{02}\Psi_2(Y) + W_{03}\Psi_3(Y)\right] \qquad (8.1)$$

Dans cette expression, les coefficients $W_{oi}$ peuvent être déterminés en utilisant la méthode des moindres carrés.

### 8.2.1 - Détermination des coefficients $W_{oi}$ : méthode des moindres carrés

Soit $S = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2$ (8.2)

où $e_i = W_o(X_i,Y_i) - \Phi_1(X_i)\left[W_{01}\Psi_1(Y_i) + W_{02}\Psi_2(Y_i) + W_{03}\Psi_3(Y_i)\right]$

$S$ : somme des erreurs, c'est-à-dire des écarts entre les valeurs $W_o$ mesurées et les valeurs calculées à l'aide de l'expression analytique pour l'imperfection.

Pour obtenir les coefficients $W_{oi}$ qui donnent la meilleure représentation de l'imperfection mesurée, la somme des erreurs ($S$) doit être minimisée par rapport à ces coefficients:

$$\frac{\partial S}{\partial W_{01}} = \frac{\partial S}{\partial W_{02}} = \frac{\partial S}{\partial W_{03}} = 0 \tag{8.3}$$

Après avoir effectué ces dérivations et avoir rassemblé les équations sous un système matriciel, on obtient le système d'équations à résoudre:

$$\begin{bmatrix} \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_1^2(Y_i) & \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_1(Y_i)\Psi_2(Y_i) & \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_1(Y_i)\Psi_3(Y_i) \\ \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_1(Y_i)\Psi_2(Y_i) & \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_2^2(Y_i) & \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_1(Y_i)\Psi_2(Y_i) \\ \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_1(Y_i)\Psi_3(Y_i) & \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_1(Y_i)\Psi_2(Y_i) & \sum_i \Phi_1^2(X_i)\Psi_3^2(Y_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{o1} \\ W_{o2} \\ W_{o3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_i W_o(X_i,Y_i)\Phi_1(X_i)\Psi_1(Y_i) \\ \sum_i W_o(X_i,Y_i)\Phi_1(X_i)\Psi_2(Y_i) \\ \sum_i W_o(X_i,Y_i)\Phi_1(X_i)\Psi_3(Y_i) \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

Dans cette approximation pour obtenir l'allure de l'imperfection initiale, on assume que les coordonnées *(xi,yi)* sont sans erreur. Les erreurs sur les coordonnées sont négligeables comparativement aux erreurs sur les $W_o(xi,yi)$. En réalité, l'erreur sur les valeurs mesurées est du même ordre de grandeur pour *xi*, *yi* et $W_o(xi,yi)$. Cependant, les

erreurs sur les valeurs $W_o(xi,yi)$ sont l'écart entre les valeurs données par le développement en série et les valeurs mesurées. Cet écart peut être considérable, car l'allure de l'imperfection peut être totalement différente de celle d'un des modes propres de vibration ou d'une combinaison de ceux-ci.

Un programme a été écrit avec MATLAB pour déterminer les coefficients $W_{oi}$, basé sur cette approche. Ce programme permet de visualiser la forme de l'imperfection géométrique mesurée et celle décrite par les coefficients calculés. Il est ainsi possible de comparer la forme de l'imperfection mesurée avec celle qui sera utilisée subséquemment pour les calculs analytiques. Ce programme et un exemple des résultats graphiques obtenus sont présentés à l'annexe E.

En mesurant l'imperfection initiale de la plaque utilisée en un nombre de points égal au nombre de termes dans la série, la fonction $W_o(X,Y)$ obtenue à l'aide de la méthode des moindres carrés passe par tous les points mesurés. On peut cependant obtenir une meilleure approximation en utilisant un plus grand nombre de points de mesure. Le nombre optimal de points de mesure peut être déterminé par une étude de convergence. Ce nombre optimal est cependant fonction de la plaque, et cette étude devra être recommencée pour chaque spécimen.

La déflexion de la plaque, caractéristique de ses imperfections, peut être mesurée en plusieurs endroits avec un instrument de mesure sans contact mécanique. Un capteur

optique peut être utilisé. Si tel est le cas, il est peut s'avérer nécessaire d'appliquer un revêtement spécial sur la plaque pour la rendre réfléchissante. L'utilisation de capteurs capacitifs est aussi possible mais nécessite un revêtement conducteur. Pour l'étude expérimentale du comportement dynamique de ces plaques, un montage similaire à celui de Samson [9] peut être utilisé sans aucune modification.

L'usage de plaques métalliques peut simplifier l'étape de mesure des imperfections. Une fois la plaque installée dans le montage expérimental, les imperfections peuvent être mesurées directement par les capteurs de déplacement capacitifs et les potentiomètres linéaires. Dans tous les cas, les fréquences naturelles des plaques utilisées doivent être très faibles comparativement aux fréquences naturelles du montage pour éviter que ce dernier entre en résonance. Les plaques métalliques doivent donc être très minces pour avoir des fréquences naturelles faibles. De plus, l'influence des imperfections étant fonction du rapport entre l'amplitude des imperfections et l'épaisseur de la plaque, l'amplitude des imperfections devra être plus faible pour ce type de plaque.

Pour ce cas, le montage de Samson doit cependant subir des modifications. Le silicone utilisé dans la fabrication des supports est trop mou pour être utilisé avec les plaques métalliques. Celles-ci ont des charges critiques très élevées, ce qui nécessite l'application de grandes forces sur les spécimens. L'utilisation d'un silicone plus rigide pourrait solutionner le problème. Dans leur étude expérimentale, Ilanko et Dickinson[42]

ont utilisé une barre de chargement en acier trempé, dans laquelle une rainure en "V" est usinée pour supporter la plaque. Ce type de support a cependant le désavantage de ne pas offrir une répartition uniforme du chargement sur tout le coté de la plaque.

Dans tous les cas, le système de chargement doit aussi être apte à fournir un chargement du même ordre de grandeur que la charge critique. De plus, le système de mesure doit avoir une gamme dynamique assez étendue pour pouvoir mesurer les mouvements de la plaque.

Cette méthode de validation est simple mais limitative. Certains phénomènes, tel que les phénomènes de revirement et coalescence, ont été observés pour un type d'imperfection précis. Un autre phénomène remarquable est le changement de comportement d'une plaque imparfaite lorsque le mouvement de celle-ci atteint une certaine amplitude. Ce phénomène est généralement plus marqué lorsque l'imperfection à la même forme que le mode de vibration. L'utilisation de plaques avec une imperfection géométrique quelconque, ne permet pas de vérifier facilement de tels phénomènes.

### 8.3 - MODELAGE DE LA PLAQUE

Le but de cette nouvelle approche est de concevoir une plaque ayant une imperfection déterminée. Il n'est plus question de mesurer les imperfections inhérentes à

une plaque. Il s'agit de mettre en forme diverses imperfections géométriques pour comprendre plus facilement leur influence. Les principes de base des deux procédés suggérés reposent sur le type de matériau utilisé pour fabriquer les plaques imparfaites: les polymères et les métaux.

### 8.3.1 - Utilisation d'un polymère

Les matériaux plastiques, plus précisément les thermoplastiques, sont facilement mis en forme. Lorsqu'ils sont chauffés à une température supérieure à leur température de transition vitreuse, leur structure moléculaire devient mobile. Il est alors possible de leur donner une forme précise sans les faire fondre: ce procédé est appelé thermoformage. Cette mise en forme a la particularité de ne pas engendrer de contraintes résiduelles car la structure moléculaire du matériau est alors mobile.

On retrouve deux grandes classes de thermoplastiques: les thermoplastiques amorphes et les thermoplastiques semi-cristallins. Les thermoplastiques amorphes sont plus facile à former par thermoformage que les semi-cristallins car ils ont un comportement très élastique sur une vaste gamme de température. Habituellement, les thermoplastiques amorphes sont utilisés pour la fabrication de pièces par thermoformage, mais il est aussi possible d'utiliser des semi-cristallins.

Les caractéristiques propres aux thermoplastiques permettent de modeler une plaque avec une forme quelconque, c'est-à-dire avec une imperfection donnée. La première étape consiste à concevoir un moule ayant la forme désirée. Après avoir conçu ce moule, on peut procéder à la mise en forme de la plaque. On préchauffe le four et le moule à la température requise pour le thermoformage. On y dépose ensuite la plaque et on laisse le tout refroidir tranquillement dans la four. Les contraintes résiduelles présentes à la fin du processus seront presque inexistantes si celui-ci est très lent.

Il est possible que la plaque rétrécisse lors du thermoformage à cause d'une réorganisation des chaînes moléculaires. Si cela se produit, le contour de la plaque peut être fixée sur le moule à l'aide de mords (encastrements), en s'assurant que les distances entre les mords correspondent aux dimensions que l'on désire pour la plaque. Cet ajout à la technique de mise en forme n'engendre pas de contraintes résiduelles supplémentaires si le procédé de formage est lent.

Le thermoplastique utilisé pour la fabrication de la plaque doit avoir une température de transition vitreuse supérieure à la température à laquelle les essais seront effectués (température ambiante), car la plaque doit être dure et rigide lors de ceux-ci. Parmi les thermoplastiques répondant à ce critère, les plus utilisés sont le polycarbonate, le polystyrène, le polyméthylmétacrylate (plexiglas) et le polychlorure de vinyle (PVC).

Le polyméthylmétacrylate et le polychlorure de vinyle se forment mal par thermoformage et doivent être rejetés. Le polycarbonate est un matériau semi-cristallin ayant une température de transition vitreuse de 150°C. Il peut être façonné par thermoformage en élevant sa température à environ 170°C. Cependant, ce matériau colle facilement lors de sa mise en forme. Il est presque toujours nécessaire d'appliquer une fine couche de teflon en vaporisation sur la surface du moule utilisé pour éviter ce problème. Le polystyrène est un thermoplastique amorphe et peut donc être formé plus facilement que le polycarbonate. Sa température de transition vitreuse se situant autour de 100°C, il peut être formé par thermoformage à une température approchant les 120°C. Avec ce matériau, il n'existe aucun problème à l'interface plaque moule.

En plaçant la plaque sur le moule dans le four, il faut faire attention pour ne pas surchauffer le matériau ou le conserver trop longtemps à haute température. La plaque pourrait s'amincir aux endroits élevés du moule et épaissir dans les creux (écoulement du matériau plastique).

Le moule doit résister à la température à laquelle la plaque sera moulée, sans se déformer ou se détériorer. De plus, il est préférable que le moule soit en un matériau bon conducteur de chaleur pour que sa paroi ait une température uniforme. Ceci assure un chauffage et un refroidissement uniforme de la plaque. Ce dernier critère est très important, car la forme et l'épaisseur finale de la plaque dépendront de la température du matériau et de sa distribution lors du chauffage.

Cette approche permet d'utiliser le même montage que Samson [9] pour observer le comportement dynamique des plaques imparfaites. De plus, les plaques utilisées par ce dernier peuvent être formées et réutilisées, ce qui élimine l'étape de pulvérisation de peinture conductrice requise pour pouvoir mesurer les déplacements latéraux de la plaque (à condition que le peinture ne soit pas altérée par le chauffage de la plaque).

### 8.3.2 - Utilisation d'un matériau métallique

L'utilisation de plaques en matériau métallique présente certains avantages. Elle permet de mesurer directement les déplacements latéraux de la plaque à l'aide de capteurs capacitifs (pas de pulvérisation de peinture conductrice). De plus, l'amortissement interne dans ces matériaux est faible, ce qui facilite l'observation de divers types de résonance.

Dans leur étude expérimentale, Phillipps et Jubb [43] ont utilisé des plaques en acier mou pour déterminer l'influence d'une distorsion latérale sur les fréquences naturelles d'une plaque rectangulaire encastrée. Les plaques utilisées sont pliées à l'aide d'une presse hydraulique de façon à obtenir une déflexion latérale ayant une forme presque sinusoïdale (une demi-onde), d'amplitude variable. La plaque est encastrée sur son pourtour dans un cadre très rigide, et est déformée en lui appliquant un chargement latéral avec une presse, à l'aide d'un bloc en bois mou. Les dimensions de ce bloc sont

déterminées expérimentalement, de façon à ce que ce dernier permette d'obtenir une déflexion permanente selon la forme désirée.

Cette étude démontre que pour une déflexion latérale ayant une amplitude inférieure à une fois et demie l'épaisseur de la plaque, les contraintes résiduelles induites par la méthode de façonnage utilisée ont une distribution telle que leur influence sur les fréquences naturelles de la plaque n'est pas significative. L'élimination des contraintes résiduelles dans les plaques pliées entraîne une légère modification de leurs fréquences naturelles. Leur influence sur l'allure des modes propres de vibration n'y est pas discutée.

En se basant sur les conclusions de ces travaux, on peut étudier l'effet d'une imperfection géométrique ayant une forme se rapprochant du premier mode de vibration. Pour les modes plus élevés, la courbure de la plaque s'accroît et avec elle les contraintes internes. Par conséquent, les conclusions obtenues pour une imperfection façonnée selon le premier mode de vibration peuvent s'avérer fausses pour les modes plus élevés.

Les plaques utilisées doivent être libres de toutes contraintes avant leur mise en forme. Les procédés d'écrouissage utilisés pour la fabrication de plaques engendrent des contraintes résiduelles qui, superposées aux contraintes engendrées par la mise en forme de la plaque, peuvent avoir une influence non négligeable. L'utilisation de plaques métalliques implique des modifications du montage expérimental de Samson [9]. Ces modifications ont été explicitées plus haut.

## 8.4 - CONCLUSION

Les méthodes pour modeler la plaque permettent d'étudier l'effet d'une imperfection géométrique choisie. Cependant, aucune de ces méthodes ne permet d'obtenir une imperfection parfaite, c'est-à-dire une imperfection ayant exactement la forme désirée. L'allure générale de l'imperfection peut être similaire à un mode de vibration, mais ne peut être identique.

Par conséquent, la meilleure approche est celle qui consiste à donner une forme générale à la plaque, se rapprochant d'un mode de vibration, et d'y combiner une mesure de l'imperfection façonnée. Ainsi, les termes prépondérants dans le développement analytique de l'imperfection seront ceux correspondant à l'imperfection modelée, et les autres termes seront des termes de correction. Cette approche permet d'étudier les phénomènes désirés tout en conservant une bonne validation du modèle analytique.

# Chapitre 9

# Conclusions et travaux futurs

## 9.1 - Conclusions

Les imperfections géométriques initiales modifient le comportement dynamique des plaques rectangulaires. Le comportement général en ressort dur est transformé en comportement en ressort mou pour les vibrations de faible amplitude lorsque l'amplitude des imperfections devient suffisante. Le passage entre les deux types de comportement provoque des sauts. L'amplitude du comportement en ressort mou est influencé par l'amplitude de l'imperfection, le mode de vibration, le rapport de forme de la plaque, le chargement statique appliqué et le type de conditions aux frontières. Par conséquent, la hauteur des sauts est difficile à prévoir.

En présence d'imperfections géométriques, les vibrations deviennent asymétriques. Les déformations dynamiques ont une plus faible amplitude lorsque le mouvement est tel qu'il accentue la courbure initiale de la plaque imparfaite.

De plus, les imperfections induisent des vibrations et des résonances forcées ou dynamiques. Ces résonances surviennent parfois dans le même domaine fréquentiel que

les résonances paramétriques et simultanées. Lorsque cela se produit, des interactions sont possibles entre les deux types de résonances. Celles-ci modifient l'allure générale des courbes de résonance.

Les résonances internes et simultanées des plaques imparfaites sont difficiles à prévoir de façon analytique. La principale lacune de ce genre d'étude est qu'il n'existe pas de formulation analytique simple pour calculer les fréquences naturelles des plaques imparfaites. L'utilisation des relations connues pour les plaques parfaites ne donnent pas de bons résultats. Les résonances internes et simultanées obtenues avec cette approche sont de faible amplitude et presque inexistantes.

D'autre part, la validation expérimentale du comportement dynamique des plaques géométriquement imparfaites, tel qu'analysé dans le présent document, est assez complexe. Pour étudier une plaque ayant l'imperfection désirée, certaines méthodes de mise en forme des imperfections existent et peuvent être utilisées. La principale difficulté consiste à modeler la plaque sans induire de contraintes résiduelles. La meilleure procédure consiste à mouler une plaque en un polymère thermoplastique.

## 9.2 - TRAVAUX FUTURS

La grande majorité des travaux effectués jusqu'à ce jour sur le comportement dynamique des plaques imparfaites sont de nature analytique. Rares sont les travaux expérimentaux. Il serait donc souhaitable sinon nécessaire de procéder à des études expérimentales poussées afin de combler cette lacune et de disposer d'une base de données expérimentales pour valider les résultats analytiques obtenus dans cet ouvrage.

De plus, cette étude repose sur une version dynamique des équations de von Kármán, dans lesquelles les imperfections géométriques sont inclues. Le domaine de validité de ces équations est toutefois limité à de très faibles imperfections (de l'ordre de un dixième de l'épaisseur de la plaque). Pour des plaques minces, il est presque impossible de mettre en forme une telle imperfection, et par conséquent de procéder à une validation expérimentale des résultats obtenus. Il serait donc intéressant de développer un modèle analytique valide pour de plus grandes imperfections.

Par ailleurs, dans tous les travaux futurs, une attention particulière devrait être accordée à la forme des modes vibration. L'influence des imperfections géométriques initiales et de l'amplitude des vibrations sur la forme des modes propres devrait être étudiée.

# Références

[1] LEVY, S. (1943). *Large Deflection Theory of Curved Sheet*, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note no. 895, Washington D.C..

[2] PAI, C. HU, LUNQUIST, E.E. et BATDORF, S.B. (1946). Effect of Small Deviations From Flatness on Effective Width and Buckling of Plates in Compression, *NACA Technical Report no. 1124.*

[3] BOLOTIN, V.V. (1964). *The dynamic stability of elastic systems*, Holden-Day Series in Mathematical Physics, San Fransisco.

[4] SOMERSET, J.H. (1965). *Large Amplitude Stabilization of Parametrically Excited Plate Vibrations*, Ph.D. Disseration, Syracuse University Research Institute, Technical Report 1620-1053, No.30, Applied Mechanics Laboratory, Syracuse University, Syracuse.

[5] SOMERSET, J.H. (1967). Transition Mechanisms Attendant to Large Amplitude Parametric Vibrations of Rectangular Plates, *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol. 89, Series B, no.4*, 619-625.

[6] SOMERSET, J.H. et EVAN-IWANOWSKI, R.M. (1967). Experiment on Large Amplitude Parametric Vibration of Rectangular Plates, *Developments in Theoretical and Applied Mechanics, 3*, Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics held in Columbia, Edited by W.A. Shaw, Pregamon Press, 331-335.

[7] SILVER, R.L. (1972). *The Effect of Initial Curvature on the Parametric Vibration of Rectangular Plates Subjected to an In-Plane Sinusoïdal Load*, Ph.D. Dissertation, Syracuse University, Syracuse New York.

[8] OSTIGUY, G.L. (1976). *Effects of Aspect Ratio on Parametric Response of Nonlinear Rectangular Plates*, Ph. D. Dissertation, Syracuse University, Syracuse New York.

[9] SAMSON, L.P. (1987). *Étude expérimentale de la stabilité dynamique des plaques rectangulaires excitées paramétriquement*, Mémoire de Maîtrise en Sciences Appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[10] OSTIGUY, G.L., SAMSON, L.P. et NGUYEN, H. (1993). On the Ocurrence of Simultaneous Resonances in Parametrically-Excited Rectangular Plates, *Journal of Vibration and Acoustics, 115*, 344-352.

[11] SASSI, S. (1989), *Effet des imperfections initiales sur la stabilité dynamique et la réponse des plaques rectangulaire*, Mémoire de maîtrise en sciences appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[12] SASSI, S. et OSTIGUY, G.L. (1994). Effects of Initial Geometric Imperfections on the Interaction Between Forces and Parametric Vibrations, *Journal of Sound and Vibration, 178 (1)*, 41-54.

[13] SASSI, S. (1993). *Stabilité dynamique et résonances des plaques rectangulaires imparfaites*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[14] CELEP, Z. (1980). Shear and Rotatory Inertia Effects on the Large Amplitude Vibration of the Initially Imperfect Plates, *Journal of Applied Mechanics, 47 (3)*, 662-666.

[15] BHIMARADDI, A. (1992). Nonlinear Dynamics of In-plane Loaded Imperfect Rectangular Plates, *Journal of Applied Mechanics, 59 (4)*, 893-901.

[16] BHIMARADDI, A. (1993). Large Amplitude Vibrations of Imperfect Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates, *Journal of Sound and Vibration, 162 (3)*, 457-470.

[17] LIU, W.H. et YEH, F.H. (1993). Non-Linear Vibrations of Initially Imperfect Orthotropic, Moderately Thick Plates with Edge Restraints, *Journal of Sound and Vibration, 165 (1)*, 101-122.

[18] HUI, D. (1990). Accurate Backbone Curves for a Modified-Duffing Equation for Vibrations of Imperfect Structures With Viscous Damping, *Journal of Vibration and Acoutics, 112 (3)*, 304-311.

[19] BIRMAN, V. et ZAHED, H. (1989). Nonlinear Problems of Parametric Vibrations of Imperfect Laminated Plates, *Composite Structures, 12 (3)*, 181-191.

[20] YU, Q. , MOSTAGHEL, N. et FU, K.C. (1994). Effect of Initial Curvature on Natural Frequency of Thin Plate on Hinge Supports, *Jounal of Engineering Mechanics, 120 (4)*, 796-813.

[21] LIBRESCU, L. (1992). Vibration of Compressively Loaded Shear Deformable Flat Panels Exhibiting Initial Geometric Imperfections, *AIAA Journal, 30 (11)*, 2793-2795.

[22] CELEP, Z. (1982). Vibrations of Initially Imperfect Circular Plates Including the Shear and Rotary Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration, 85 (4)*, 513-523.

[23] KOVAL'SHUK, P.S. et KRASNOPOL'SKAYA, T.S. (1979). Resonance Phenomena in Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells with Initial Imperfections. *Soviet Applied Mechanics, 15 (9)*, 867-872.

[24] KOVAL'SHUK, P.S., KRASNOPOL'SKAYA, T.S. et PODCHASOV, N.P. (1982). Dynamic Instability of Circular Cylindrical Shells with Initial Camber. *Soviet Applied Mechanics, 18 (3)*, 208-212.

[25] FU, Y.M. et CHIA, C.Y. (1989). Multi-Mode Non-Linear Vibration and Postbuckling of Anti-Symmetric Imperfect Angle-Ply Cylindrical Thick Panels, *International Journal of Non-Linear Mechanics, 24 (5)*, 365-381.

[26] BHIMARADDI, A. (1989). Nonlinear Vibrations of In-Plane Loaded, Imperfect, Orthotropic Plates Using the Perturbation Technique, *International Journal of Solids and Structures, 25 (5)*, 563-575.

[27] ILANKO, S. (1990). The Vibration Behavior of Intially Imperfect Simply Supported Beams Subject to Axial Loading, *Journal of Sound and Vibration, 142 (2)*, 355-359.

[28] RAVINGER, J. (1994). Vibration of an Imperfect Thin-Walled Panel. Part I: Theory and Illustrative Examples, *Thin-Walled Structures, 19*, 1-22.

[29] TOMSKI, L. et KUKLA, S. (1990). Free Vibrations of a certain Geometrically Nonlinear System with Initial Imperfection, *AIAA Journal, 28 (7)*, 1240-1245.

[30] ELISHAKOFF, I., BHIRMAN, V. et SINGER, J. (1985). Influence of Initial Imperfections on Nonlinear Free Vibration of Elastic Bars, *Acta Mechanica, 55 (3-4)*, 191-201.

[31] DU, I. et HUI, D. (1987). Frequency-Load Interaction of Imperfect Angle-Ply Cylindrical Panels Under Compression and Pressure, *AIAA Journal, 25 (3)*, 484-491.

[32] HUI, D. et DU, I.H.Y. (1986). Effects of Axial Imperfections on Vibrations of Anti-Symmetric Cross-Ply, Oval Cylindrical Shells, *Journal of Applied Mechanics, 53 (3)*, 675-680.

[33] XU, C. (1992). Multi-Mode Nonlinear Vibration and Large Deflection of Symmetrically Laminated Imperfect Spherical Caps on Elastic Foundations, *International Journal of Mechanical Science, 34 (6)*, 459-474.

[34] HUI, D. (1983). Large-Amplitude Vibrations of Geometrically Imperfect Shallow Spherical Shells with Structural Damping, *AIAA Journal, 21 (12)* , 1736-1741.

[35] IU, V.P. et CHIA, C.Y. (1988). Non-Linear Vibration and Postbuckling of Unsymmetric Cross-Ply Circular Cylindrical Shells, *International Journal of Solids and Structures, 24 (2)*, 195-210.

[36] BYUN, C. et KAPANIA, R.K. (1992. Nonlinear Transient Response of Imperfect Hyperbolic Shells Using a Reduction Method, *Computers and Structures, 44 (1-2)*, 255-262.

[37] BADALOV, F.B. et ÉSHMATOV, K. (1991). Investigation of Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Plates with Initial Imperfections, *Soviet Applied Mechanics, 26 (8)*, 799-804.

[38] BATTACHARYA, A.P. (1986). Effects of Edge Restraints on the Non-Linear Flexural Vibrations of an Imperfect Cross-Ply Laminated Plate Restings on an Elastic Fondation, *Journal of Sound and Vibration, 105 (2)*, 265-274.

[39] XU, C.S. et CHIA, C.Y. (1993). Large-Amplitude Vibrations of Unsymmetrically Laminated Imperfect Thick Circular Plates on an Elastic Fondation, *Composites Science and Technology, 49*, 131-137.

[40] WEDEL-HEINEN, J. (1991). Vibration of Geometrically Imperfect Beam and Shell Structures, *International Journal of Solids and Structures, 27 (1)*, 29-47.

[41] RAVINGER, J. (1994). Vibration of an Imperfect Thin-Walled Panel. Part II: Numerical Results and Experiment, *Thin-Walled Structures, 19*, 23-36.

[42] ILANKO, S. et DICKINSON, S.M. (1987). The Vibration and Post-Buckling of Geometrically Imperfect, Simply Supported, Rectangular Plates Under Uni-Axial Loading, Part II: Experimental Investigation, *Journal of Sound and Vibration, 118 (2)*, 337-351.

[43] PHILLIPS, I.G. et JUBB, J.E.M. (1974). The effect of Distorsion on the Lowest Natural Frequency of a Rectangular Steel Plate, *Journal of Sound and Vibration, 33 (1)*, 31-48.

[44] TIMOSHENKO, S.P. et GERE, J.M. (1961). *Theory of Elastic Stability*, Second Edition, Engineering Societies Monographs, McGraw Hill Book Co., New York.

[45] JACKSON, K.B. et HALL, A.H. (1951). Experimental Diagrams of Deformation and Strain Distribution in Curved Plates Under Compression, *National Research Council of Canada, Aeronautical Report AR-9*, Canada.

[46] LAVIGNE, P. (1993). *Étude de diverses méthodes de solution d'équations différentielles non-linéaires associées aux résonances paramétriques principales*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[47] LEISSA, A.W. et KADI, A.S. (1971). Curvature Effects on Shallow Shell Vibrations, *Journal of Sound and Vibration, 16 (2)*, 173-187.

[48] TIMOSHENKO, S.P. (1951). *Théorie des plaques et des coques*, Paris et Liège, Librairie Polytechnique Ch. Bélanger, Paris.

[49] BULSON, P.S. (1969). *Stability of Flat Plates*, American Elsevier Publishing Company inc., New York.

[50] CHEN, L.W. et YANG, J.Y. (1993). Nonlinear Vibration of Antisymmetric Imperfect Angle-Ply Laminated Plates, *Composite Structures, 23 (1)*, 39-46.

[51] COAN, J.M. (1951). Large-Deflexion Theory for Plates With Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, *Journal of Applied Mechanics, 73*, 143-151.

[52] EVAN-IWANOWSKI, R.M. (1976). *Resonance Oscillations in Mechanical Systems*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.

[53] HUI, D. (1985). Soft-Spring Nonlinear Vibrations of Antisymmetrically Laminated Rectangular Plates, *International Journal of Mechanical Science, 27 (6)*, 397-408.

[54] HUMPHREYS, J.S. (1966). On Dynamic Snap Buckling of Shallow Arches, *AIAA Journal, 4(5)*, 878-886.

[55] ILANKO, S. et DICKINSON, S.M. (1987). The Vibration and Post-Buckling of Geometrically Imperfect, Simply Supported, Rectangular Plates Under Uni-Axial Loading, Part I: Theoretical Approach, *Journal of Sound and Vibration, 118 (2)*, 313-336.

[56] JACKSON, K.B. et HALL, A.H. (1947). Curved Plates in Compression, *National Research Council of Canada, Aeronautical Report AR-1*, Canada.

[57] KANDEM, L. (1991). *Réponse non-stationnaire d'une plaque rectangulaire soumise à une excitation pramétrique*, Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[58] LIN, C.C et CHIEN, L.W. (1989). Large-Amplitude Vibration of an Initially Imperfect Moderately Thick Plate, *Journal of Sound and Vibration, 135 (2)*, 213-224.

[59] MITROPOLSKI, Y.A. (1966). *Problèmes de la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires*, Gauthier-Villars éditeur, Paris.

[60] NGUYEN, H. (1982). *Instabilité dynamique et réponse des plaques rectangulaires*, Mémoire de maîtrise en sciences appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[61] NGUYEN, H. (1987). *Effect of Boundary Conditions on the Dynamic Instability and Response of Rectangular Plates*, Ph. D. Dissertation, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[62] OSTIGUY, G.L. et EVAN-IWANOWSKI, R.M. (1982). Étude expérimentale sur la stabilité dynamique et la réponse des plaques rectangulaires, *Mécanique Matériau Électricité, no.394-395*, 472-478.

[63] OSTIGUY, G.L. et NGUYEN, H. (1982). Stabilité dynamique et résonance des plaques rectangulaires, *Mécanique Matériaux Électricité, no. 394-395*, 465-471.

[64] OSTIGUY, G.L. et NGUYEN, H. (1982). Recent Developments on the Nonlinear Parametric Vibrations of Rectangular Plates, *Design and Analysis of Plates and Shells, 105*, 127-135.

[65] OSTIGUY, G.L. et SASSI, S. (1992). Effects of Initial Geometric Imperfections on Dynamic Behaviour of Rectangular Plates, *Journal of NonlinearDynamics, 3*, 165-181.

[66] ROSEN, A. et SINGER, J. (1974). Effect of Axisymmetric Imperfections on the Vibrations of Cylindrical Shells Under Axial Compression, *AIAA Journal, 12 (7)*, 995-997.

[67] TSENG, W.-Y. et DUGUNDJI, J. (1971). Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam Under Harmonic Excitation, *Journal of Applied Mechanics, 38(2)*, 467-476.

[68] YANG, J.Y. et CHEN, L.W. (1993). Large Amplitude Vibration of Antisymmetric Imperfect Cross-Ply Laminated Plates, *Composite Structures, 24 (2)*, 149-159.

# Annexe A

# Programmes FORTRAN utilisés

## A.1 - PROGRAMME INTNUM3DL.FOR

```
C ******************************************************************
C *        INSTABILITE DYNAMIQUE ET RESONANCES                     *
C *       DES PLAQUES RECTANGULAIRES IMPARFAITES                   *
C * ****************************************************************
C *          EXTRACTION DES DONNEES NECESSAIRES                    *
C *        POUR EFFECTUER UNE INTEGRATION NUMERIQUE                *
C *          DU SYSTEME D'EQUATIONS A 3 D.L.                       *
C ******************************************************************
C
C              NOM DU PROGRAMME :  INTNUM3DL.FOR
C              FICHIERS D'ENTREE :  INTER.IN
C                                   SYCHA.IN
C                                   NORMA.OUT
C                                   IMPER.OUT
C
C OBJECTIFS
C ----------
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C --------------------------------------
C  X          - DEVIATION TOTALE DE L'ETAT PLAN, APRES
C               APPLICATION DU CHARGEMENT STATIQUE
C  ILF        - DIMENSIONLESS LOADED FREQUENCY - PLAQ. IMP
C  IMF        - LOADED NATURAL FREQUENCY      - PLAQ. IMP.
C  CN         - COEFFICIENT OF DAMPING
C  PEX        - EXCITATION PARAMETER.
C  GN         - NORMALISED CUBIC NONLINEARITIES.
C  HN         - SOMMES DE COEFFICIENTS CUBIQUES NORMALISES
C  EPN        - COMBINAISONS DE HN ET X
C
C  . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
C
```

```
      INTEGER OUT,PLATE,BC
      INTEGER M,P,Q,R,S,V
      REAL*8 AR,PCR,DCR,TIME,E,RHO,H
      REAL*8 ISLF(3),ILF(3),IMF(3)
      REAL*8 ETA
      REAL*8 CN(3,3),PEX(3,3),GGN(3,27),MM(3,3,3,3),GN(3,10)
      REAL*8 EPN(3,3,3),HN(3,3,3,3),EV(3,3)
      REAL*8 W0(3),DI(3),W0N(3),DIN(3),X(3)
      REAL*8 PI/3.141592653589793D0/
      EQUIVALENCE (GGN,MM)
      DATA N/2/,NE/4/,ITMAX/999/,MY/3/,MX/1/,ZERO/0./
      NG=MY*MY*MY
C
C     ..... ENTREE: SYCHA.IN
C
      READ(*,520) PLATE,BC
      READ(*,522) A,B,H
      READ(*,524) E,NU,RHO
      READ(*,526) PCR,DCR,DECR
C     ..... ENTREE: NORMA.OUT
C
      READ(*,540)
  540 FORMAT(1(/))
      READ(*,542) ((GGN(V,L),L=1,NG),V=1,MY)
      READ(*,544) (W0N(L),L=1,MY)
      READ(*,544) (DIN(L),L=1,MY)
      READ(*,540)
      READ(*,542) ((CN(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
C     ..... ENTREE: IMPER.OUT
C
      READ(*,501) (W0(L),L=1,MY)
      READ(*,501) (DI(L),L=1,MY)
  501 FORMAT(//22X,D23.16,/22X,D23.16,/22X,D23.16)
      READ(*,551)
  551 FORMAT(1(/))
      READ(*,552) (ISLF(V),V=1,MY)
      READ(*,551)
      READ(*,554) ((PEX(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(*,551)
      READ(*,507) ((EV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
C
```

```
C..... DEFINITION DES PARAMETRES ADIMENSIONNELS
C
      AR = B/A
      TIME = 2.*PI*DSQRT(RHO*(A**4)/(E*(H**2)))
C
C     ..... DEFLEXION STATIQUE TOTALE
      DO 40 P=1,MY
        X(P) = W0N(P) + DIN(P)
   40 CONTINUE
C
C     ..... COEFFICIENTS NON LINEAIRES CUBIQUES
C
DO 10 M = 1,MY
        GN(M,1)  = MM(M,1,1,1)
        GN(M,2)  = MM(M,1,1,2) + MM(M,1,2,1) + MM(M,2,1,1)
        GN(M,3)  = MM(M,1,1,3) + MM(M,1,3,1) + MM(M,3,1,1)
        GN(M,4)  = MM(M,1,2,2) + MM(M,2,1,2) + MM(M,2,2,1)
        GN(M,5)  = MM(M,1,3,3) + MM(M,3,1,3) + MM(M,3,3,1)
        GN(M,6)  = MM(M,2,2,2)
        GN(M,7)  = MM(M,2,2,3) + MM(M,2,3,2) + MM(M,3,2,2)
        GN(M,8)  = MM(M,2,3,3) + MM(M,3,2,3) + MM(M,3,3,2)
        GN(M,9)  = MM(M,3,3,3)
        GN(M,10) = MM(M,1,2,3) + MM(M,1,3,2) + MM(M,2,3,1)
     #          + MM(M,2,1,3) + MM(M,3,1,2) + MM(M,3,2,1)
C
      DO 15 P = 1,MY
      DO 20 Q = 1,MY
      DO 25 R = 1,MY
        HN(M,P,Q,R) = MM(M,P,Q,R) + MM(M,Q,P,R) + MM(M,Q,R,P)
   25 CONTINUE
   20 CONTINUE
   15 CONTINUE
      DO 30 S = 1,MY
        EPN(M,S,S)=HN(M,S,S,1)*X(1)+HN(M,S,S,2)*X(2)+HN(M,S,S,3)*X(3)
   30 CONTINUE
      EPN(M,1,2) = ( HN(M,1,2,1) + HN(M,2,1,1) ) * X(1)
     #          + ( HN(M,1,2,2) + HN(M,2,1,2) ) * X(2)
     #          + ( HN(M,1,2,3) + HN(M,2,1,3) ) * X(3)
      EPN(M,1,3) = ( HN(M,1,3,1) + HN(M,3,1,1) ) * X(1)
     #          + ( HN(M,1,3,2) + HN(M,3,1,2) ) * X(2)
     #          + ( HN(M,1,3,3) + HN(M,3,1,3) ) * X(3)
      EPN(M,2,3) = ( HN(M,2,3,1) + HN(M,3,2,1) ) * X(1)
     #          + ( HN(M,2,3,2) + HN(M,3,2,2) ) * X(2)
     #          + ( HN(M,2,3,3) + HN(M,3,2,3) ) * X(3)
```

```
  10 CONTINUE
C
C     .....FREQUENCES NAT. CHARGEE NON DIM.(ILF)
C               ET FREQUENCES NAT. CHARGE DIMENSIONNELLE(IMF, HZ)
C
      DO 50 P=1,MY
        ILF(P) = DSQRT(ISLF(P))
        IMF(P) = ILF(P)/TIME
  50 CONTINUE
C
C     .....SORTIE : ISIFOR.OUT
C
      WRITE(*,600)
      WRITE(*,601) PLATE
      WRITE(*,620) A,B,H
      WRITE(*,602) BC
      WRITE(*,603) AR
      WRITE(*,604) PCR
      WRITE(*,605) DCR
      WRITE(*,609) DECR
      WRITE(*,614)
      WRITE(*,615) (L,W0(L),L=1,MY)
      WRITE(*,610)
      WRITE(*,611) (P,IMF(P),P=1,MY)
      WRITE(*,612)
      WRITE(*,613) ((P+1),P,ILF(P),P=1,MY)
      WRITE(*,700)
      WRITE(*,701) ((Q+9),1,Q,PEX(1,Q),Q=1,MY)
      WRITE(*,701)((Q+39),2,Q,PEX(2,Q),Q=1,MY)
      WRITE(*,701)((Q+69),3,Q,PEX(3,Q),Q=1,MY)
      WRITE(*,702)
      WRITE(*,703) ((Q+12),1,Q,CN(1,Q),Q=1,MY)
      WRITE(*,703) ((Q+42),2,Q,CN(2,Q),Q=1,MY)
      WRITE(*,703) ((Q+72),3,Q,CN(3,Q),Q=1,MY)
      WRITE(*,704)
      WRITE(*,705) ((P+4),P,X(P),P=1,MY)
      DO 55 M=1,MY
        IND=16+((M-1)*30)
        WRITE(*,800) M
        WRITE(*,801) IND,M,EPN(M,1,1)
        WRITE(*,802) (IND+1),M,EPN(M,2,2)
        WRITE(*,803) (IND+2),M,EPN(M,3,3)
        WRITE(*,804) (IND+3),M,EPN(M,1,2)
        WRITE(*,805) (IND+4),M,EPN(M,1,3)
```

```
      WRITE(*,806) (IND+5),M,EPN(M,2,3)
   55 CONTINUE
      WRITE(*,809)
      WRITE(*,810) (((21+P+(M-1)*30),M,P,GN(M,P),P=1,10),M=1,MY)
      WRITE(*,900) TIME
      WRITE(*,901)
      WRITE(*,902) (((399+V),V,Q,EV(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
C
C     .....FORMATS D'ENTREE
C
  507 FORMAT(16X,D23.16)
  512 FORMAT(I5,I5,I5)
  520 FORMAT(2I5)
  522 FORMAT(3D15.4)
  524 FORMAT(D20.10,D10.3,D20.5)
  526 FORMAT(2D10.3,F10.2)
  542 FORMAT(19X,D23.16)
  544 FORMAT(//22X,D23.16,/22X,D23.16,/22X,D23.16)
  552 FORMAT(13X,D23.16)
  554 FORMAT(16X,D23.16)
C
C     .....FORMATS DE SORTIE
C
  600 FORMAT(13X,'STABILITE DYNAMIQUE DES PLAQUES IMPARFAITES',//)
  601 FORMAT(1X,'SPECIMEN P.',I1)
  602 FORMAT(1X,'CONDITIONS FRONTIERES :',I2)
  603 FORMAT(1X,'RAPPORT DE FORME (R)=',F6.3)
  604 FORMAT(1X,'RAPPORT DE CHARGEMENT STATIQUE  (PCR)=',F5.2)
  605 FORMAT(1X,'RAPPORT DE CHARGEMENT DYNAMIQUE (DCR)=',F5.2)
  609 FORMAT(/1X,'LOGARITHMIC DECREMENT OF DAMPING
 (DELTA)=',F5.2)
  610 FORMAT(/1X,'FREQ. NAT. CHARGEE (HZ) - PLAQ. IMP. =',/)
  611 FORMAT(25X,I1,' MODE : ',F9.5)
  612 FORMAT(/1X,'FREQ. NAT. CHARGEE (NORMALISEE) - PLAQ.IMP. =',/)
  613 FORMAT(1X,'(',I1,')',25X,I1,' MODE : ',F9.5)
  614 FORMAT(1X,'IMPERFECTIONS DE LA PLAQUE :')
  615 FORMAT(25X,'W0',I1,' = ',D10.5)
  620 FORMAT(1X,'DIMENSIONS DE LA PLAQUE (A X B X H) : ',
     #      F9.5,' X ',F9.5,' X ',F9.5)
  700 FORMAT(/1X,'PARAMETRES  EXCITATION = ',/)
  701 FORMAT(1X,'(',I2,')',1X,I1,2X,I1,5X,F9.5)
  702 FORMAT(//1X,'COEFFICIENTS  AMORTISSEMENT = ',/)
  703 FORMAT(1X,'(',I2,')',1X,I1,2X,I1,5X,F9.5)
  704 FORMAT(/1X,'DEFORMATION STATIQUE (X=W0+D) = ')
```

```
705 FORMAT(1X,'(',I1,')',15X,I1,' MODE = ',F9.5)
800 FORMAT(/1X,'COEFF-E-(SOMME DE H ET X) POUR LE MODE ',I1,/)
801 FORMAT(1X,'(',I2,')',10X,'  E(',I1,',1,1) = ',D23.16)
802 FORMAT(1X,'(',I2,')',10X,'  E(',I1,',2,2) = ',D23.16)
803 FORMAT(1X,'(',I2,')',10X,'  E(',I1,',3,3) = ',D23.16)
804 FORMAT(1X,'(',I2,')',10X,'  E(',I1,',1,2) = ',D23.16)
805 FORMAT(1X,'(',I2,')',10X,'  E(',I1,',1,3) = ',D23.16)
806 FORMAT(1X,'(',I2,')',10X,'  E(',I1,',2,3) = ',D23.16,/)
809 FORMAT (/1X,'COEFF. DE NON-LINEARITE CUBIQUE (GAMMA) = ',/)
810 FORMAT (1X,'(',I2,')',1X,I2,2X,I2,5X,D23.16)
900 FORMAT(/1X,'TIME (FACTEUR NORMALISATION POUR FREQ.) = ',F9.5)
901 FORMAT(/1X,'MATRICE MODALE = ',/)
902 FORMAT(1X,'(',I3,')',1X,I2,1X,I2,10X,D23.16)
    END
```

## A.2 - PROGRAMME ISIFOR.FOR

```
C ****************************************************************
C *         INSTABILITE DYNAMIQUE ET RESONANCES                  *
C *        DES PLAQUES RECTANGULAIRES IMPARFAITES                *
C ****************************************************************
C *           RESONANCE SIMULTANEE                               *
C *           ----------------------                             *
C *       RESONANCES PARAMETRIQUES : LAMBDA = 2*OMEGA(I)         *
C *           RESONANCE INTERNES : OMEGA(J)= 3*OMEGA(I)          *
C *            RESONANCE FORCEE : LAMBDA = OMEGA(R)              *
C ****************************************************************
C
C              NOM DU PROGRAMME :  ISIFOR.FOR
C              FICHIERS D'ENTREE :  INTER.IN
C                                   SYCHA.IN
C                                   NORMA.OUT
C                                   IMPER.OUT
C
C OBJECTIFS
C ------------
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C ----------------------------------------
C  ILFI,ILFJ,ILFK  - FREQUENCE NETURELLE ADIMENSIONELLE DE LA
C                PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE POUR LES MODES I, J ET K.
C  IFMI,IFMJ,IFMK  - FREQUENCE NATURELLE EN HZ DE LA PLAQUE
C                IMPARFAITE CHARGEE POUR LES MODES I, J ET K.
C  CI, CJ, CK      - COEFFICIENTS D'AMORTISSNEMENT DES MODES I, J ET K.
C  MUI, MUJ, MUK - PARAMETRE D'EXCITATION POUR LES MODES I,J ET K.
C  GI., GJ.,GK.        - NONLINEARITES CUBIQUES DES MODES I, J ET K.
C  . . . . . .
C
      INTEGER OUT,PLATE,I,J,K
      REAL*8 AR,PCR,DCR,TIME,E,RHO,H,CI,CJ,CK,MUI,MUJ,MUK
      REAL*8 ISLF(3)
      REAL*8 ETA,GI1,GI2,GI4,GI5,GJ1,GJ2,GJ6,GJ8,GK3,GK7,GK9
      REAL*8 CN(3,3),PEX(3,3),GGN(3,27),MM(3,3,3,3)
      REAL*8 W0(3),DI(3),W0N(3),DIN(3)
      REAL*8 ILFI,ILFJ,ILFK,IMFI,IMFJ,IMFK
      REAL*8 PI/3.141592653589793D0/
      EQUIVALENCE (GGN,MM)
      DATA N/2/,NE/4/,ITMAX/999/,MY/3/,MX/1/,ZERO/0./
      NG=MY*MY*MY
```

```
C
C     ..... ENTREE : ISIFOR.IN
C
      READ(*,512) I,J,K
C     ..... ENTREE : SYCHA.IN
C
      READ(*,520) PLATE,BC
      READ(*,522) A,B,H
      READ(*,524) E,NU,RHO
      READ(*,526) PCR,DCR,DECR
C     ..... ENTREE : NORMA.OUT
C
      READ(*,540)
  540 FORMAT(1(/))
      READ(*,542) ((GGN(V,L),L=1,NG),V=1,MY)
      READ(*,544) (W0N(L),L=1,MY)
      READ(*,544) (DIN(L),L=1,MY)
      READ(*,540)
      READ(*,542) ((CN(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
C     ..... ENTREE : IMPER.OUT
C
      READ(*,501) (W0(L),L=1,MY)
      READ(*,501) (DI(L),L=1,MY)
  501 FORMAT(//22X,D23.16,/22X,D23.16,/22X,D23.16)
      READ(*,551)
  551 FORMAT(1(/))
      READ(*,552) (ISLF(V),V=1,MY)
      READ(*,551)
      READ(*,554) ((PEX(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
C
C
      AR = B/A
      TIME = 2.*PI*DSQRT(RHO*(A**4)/(E*(H**2)))
C
C     ..... COEFFICIENTS CUBIQUES NONLINEAIRES
C
C              (LES RIGIDITES CUBIQUES SONT CALCULES POUR UN MODES
C                PARTICULIER ET EN CONSIDERANT LE NOMBRE DE MODES)
      GI1=MM(I,I,I,I)
      GI2=MM(I,I,I,J)+MM(I,I,J,I)+MM(I,J,I,I)
      GI4=MM(I,I,J,J)+MM(I,J,I,J)+MM(I,J,J,I)
      GI5=MM(I,I,K,K)+MM(I,K,I,K)+MM(I,K,K,I)
      GJ1=MM(J,I,I,I)
      GJ2=MM(J,I,I,J)+MM(J,I,J,I)+MM(J,J,I,I)
```

```
      GJ6=MM(J,J,J,J)
      GJ8=MM(J,J,K,K)+MM(J,K,J,K)+MM(J,K,K,J)
      GK3=MM(K,I,I,K)+MM(K,I,K,I)+MM(K,K,I,I)
      GK7=MM(K,J,J,K)+MM(K,J,K,J)+MM(K,K,J,J)
      GK9=MM(K,K,K,K)
C     ..... PARAMETRES D'EXCITATION
C
      MUI = PEX(I,I)
      MUJ = PEX(J,J)
      MUK = PEX(K,K)
C     ..... FREQUENCES NATURELLES CHARGEES ADIMENSIONELLES
C
      ILFI = DSQRT(ISLF(I))
      ILFJ = DSQRT(ISLF(J))
      ILFK = DSQRT(ISLF(K))
C
C     ..... FREQUENCES NATURELLES CAHRGEES (HZ)
C
      IMFI=ILFI/TIME
      IMFJ=ILFJ/TIME
      IMFK=ILFK/TIME
C
C     ..... DEFLEXION STATIQUE INITIALE TOTALE
C
      W0DI = W0N(I) + DIN(I)
      W0DJ = W0N(J) + DIN(J)
      W0DK = W0N(K) + DIN(K)
C     ..... COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT VISQUEUX
C
      CI = CN(I,I)
      CJ = CN(J,J)
      CK = CN(K,K)
C
C     .....SORTIE : ISIFOR.OUT
C
      WRITE(*,600)
      WRITE(*,601) PLATE
      WRITE(*,602) BC
      WRITE(*,603) AR
      WRITE(*,604) PCR
      WRITE(*,605) DCR
      WRITE(*,607) I,MUI,J,MUJ,K,MUK
      WRITE(*,608) GI1,GI2,GI4,GI5,GJ1,GJ2,GJ6,GJ8,GK3,GK7,GK9
      WRITE(*,650) I,J,K
```

```
      WRITE(*,609) DECR
      WRITE(*,610) I,CI,J,CJ,K,CK
      WRITE(*,630) (L,W0N(L),L=1,MY)
      WRITE(*,631) (L,DIN(L),L=1,MY)
      WRITE(*,632) I,IMFI,J,IMFJ,K,IMFK
      WRITE(*,633) I,ILFI,J,ILFJ,K,ILFK
      WRITE(*,634) TIME
C
C
C     .....CALCUL DES AMPLITUDES
C
C
C     ..... FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
C
  512 FORMAT(I5,I5,I5)
  520 FORMAT(2I5)
  522 FORMAT(3D15.4)
  524 FORMAT(D20.10,D10.3,D20.5)
  526 FORMAT(2D10.3,F10.2)
  542 FORMAT(19X,D23.16)
  544 FORMAT(//22X,D23.16,/22X,D23.16,/22X,D23.16)
  552 FORMAT(13X,D23.16)
  554 FORMAT(16X,D23.16)
C
  600 FORMAT(13X,'STABILITE DYN. DES PLAQUES
IMPARFAITES',/13X,37(1H-),
     #     /31X,1H*,/7X,'INTERACTION ENTRE VIBRATIONS SIMULTANEES',
     #     ' ET FORCEES',/7X,51(1H-),/31X,1H*,/)
  601 FORMAT(1X,'SPECIMEN P.',I1)
  602 FORMAT(1X,'CONDITIONS LIMITES :',I2)
  603 FORMAT(1X,'RAPPORT DE FORME (R)=',F6.3)
  604 FORMAT(1X,'RAPPORT DE CHARGEMENT STATIQUE (PCR)=',F5.2)
  605 FORMAT(1X,'RAPPORT DE CHARGEMENT DYNAMIQUE (DCR)=',F5.2)
  607 FORMAT(/1X,'PARAMETRES D EXCITATION =',/(22X,I1,' MODE:',F7.4))
  608 FORMAT(/1X,'COEFF. CUBIQUES NONLINEAIRES (G) =',/22X,'GI1:',
     #     D23.16,/22X,'GI2:',D23.16,/22X,'GI4:',D23.16,/22X,'GI5:',
     #     D23.16,/22X,'GJ1:',D23.16,/22X,'GJ2:',D23.16,/22X,'GJ6:',
     #     D23.16,/22X,'GJ8:',D23.16,/22X,'GK3:',D23.16,/22X,'GK7:',
     #     D23.16,/22X,'GK9:',D23.16)
  609 FORMAT(/1X,'DECREMENT LOGARITHMIQUE D
AMORTISSEMENT(DELTA)=',F5.2)
  610 FORMAT(1X,'COEFFICIENTS D AMORTISSEMENT VISQUEUX (C)=',
     #     /(35X,I1,' MODE:',F7.4))
```

```
 630 FORMAT(/1X,'IMPERFECTIONS GEOMETRIQUES INITIALES
ADIM.(W0/H)= ',
   #     /25X,I1,' MODE : ',F9.5,/25X,I1,' MODE : ',F9.5,/25X,
   #     I1,' MODE : ',F9.5,/)
 631 FORMAT(/1X,'DEFLEXIONS STATIQUES INITIALES ADIM. (D/H)= ',/24X,
   #     I1,' MODE : ',F9.5,/24X,I1,' MODE : ',F9.5,/24X,
   #     I1,' MODE : ',F9.5,/)
 632 FORMAT(/1X,'FREQ. DE LA PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE  =',/15X,
   #     I1,' MODE PARAMETRIQUE : ',F9.5,' HZ',/15X,
   #     I1,' MODE INTERNE      : ',F9.5,' HZ',/15X,
   #     I1,' MODE FORCE        : ',F9.5,' HZ',/)
 633 FORMAT(/1X,'FREQ. DE LA PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE (ADIM.) =',
   #     /15X,I1,' MODE PARAMETRIQUE : ',F9.5,
   #     /15X,I1,' MODE INTERNE      : ',F9.5,
   #     /15X,I1,' MODE FORCE        : ',F9.5)
 634 FORMAT(/1X,'TIME (FACTEUR NORMALISATION FREQUENCE) = ',F9.5)
 650 FORMAT(10X,'POUR LESQUELS I = ',I1' - J = ',I1,' - K = ',I1)
     END
```

### A.3 - PROGRAMME INTNUM1DL.FOR

```
C ******************************************************************
C *              EFFETS DES IMPERFECTIONS                          *
C ******************************************************************
C
C            NOM DU PROGRAMME :   INTNUM1DL.FOR
C           FICHIERS D'ENTREE :   IMPER.IN
C                                 SYCHA.OUT
C                                 CUBIC.OUT
C          FICHIERS DE SORTIE :   IMPER.OUT
C             ROUTINE IMSL :      DNEQNJ
C                                 DMRRRR
C                                 DEVCRG
C
C OBJET
C -------
C  PREMIEREMENT CE PROGRAMME EST UTILISE POUR DETERMINER LA
C  DEFORMATION DUE A LA COMPOSANTE SATATIQUE DU CHARGEMENT
C  DANS LA PLAN.
C  DEUXIEMEMENT, IL DETERMINE LES FREQUENCES NATURELLES DE LA
C  PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE.
C
C  IL EST UTILISE UNIQUEMENT POUR OBTENIR LES DONNEES
C  NECESSAIRES POUR PROCEDER A L'INTEGRATION NUMERIQUE DU
C  SYSTEME A 1 D.D.L.
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C -----------------------
C  TIME    - FACTEUR DE CONVERSION DU TEMPS ADIMENSIONNEL AU
C  TEMPS DIMENSIONNEL.
C  NY0, DN0 - COMPOSANTE STATIQUE DU CHARGEMENT FORME
C  ADIMENSIONNELLE ET DIMENSIONNELLE.
C  SFF, SLF - FREQUENCE LIBRE ET CHARGEE AU CARREES.
C  FNF, LNF - FREQUENCE LIBRE ET CHARGEE AU CARREES EN HERTZ.
C  ILF     - FREQUENCE DE LA PLAQUE IMPARFAITE CAHRGEE EN HERTZ.
C
C  W0      - AMPLITUDE DE L'IMPERFECTION GEOMETRIQUE INITIALE
C  DI      - AMPLITUDE DE LA DEFORMATION STATIQUE
C  .....................................................................
C
      INTEGER P,Q,R,S,U,V,BC,IN1,IN2,IN3,OUT,NG,ITMAX
      REAL   ERRREL
```

```
      REAL*8 PI,NY0,NYT,DN0,DNT
      REAL*8 W0(3),DI(3),GG(3,27),MM(3,3,3,3),MMM(3,3,3,3),GGG(3,27)
      REAL*8 MM1(3,3,3,3),MM2(3,3,3,3),MM3(3,3,3,3)
      REAL*8 GG1(3,27),GG2(3,27),GG3(3,27),LAR(3,3),MAT(3,3)
      REAL*8 SFF(3),FNF(3),SLF(3),LNF(3),ISLF(3),ILNF(3),RPF(3)
      REAL*8 ILNF1,ILNF2,ILNF3,ISLF1,ISLF2,ISLF3,RPF1,RPF2,RPF3,MU(3,3)
      REAL*8 FEP(3,3),KI(3,3),EV(3,3),PN(3,3),LP(3,3),LQ(3,3),INEV(3,3)
      REAL*8 FCN,FNORM,XGUESS(3),X(3),DAMP(3,3),DECR,FRQNAT(3)
      REAL*8 PARTA,PARTB,PP(3),KK(3),CC(3)
      COMPLEX*16 RF(3),REV(3,3)
      COMPLEX*16 TEMP
      REAL*8 VTEMP(3)
      EXTERNAL FCN,DNEQNF,DEVCRG,DMRRRR
      EQUIVALENCE (GG1,MM1)
      EQUIVALENCE (GG2,MM2)
      EQUIVALENCE (GG3,MM3)
      EQUIVALENCE (GG,MM)
      COMMON /ZONE/ MM,PN,FEP,W0,NY0
      DATA PI/3.141592653589793D0/
      DATA P/1/,R/1/,U/1/
      DATA MX/1/,MY/3/,N/3/
      DATA ITMAX/999/
      NG=MY*MY*MY
C
C                                   ENTREE: IMPER.IN
      READ(*,500) (W0(L),L=1,MY)
      READ(*,550) DECR
      READ(*,500) ERRREL
C
C                                   ENTREE: SYCHA.OUT
C
      READ(*,500) TIME
      READ(*,800)
  800 FORMAT(20(/))
      READ(*,500) NY0
      READ(*,500) NYT
      READ(*,802)
  802 FORMAT(' ')
      READ(*,504) (SFF(V),FNF(V),V=1,MY)
      READ(*,504) (SLF(V),LNF(V),V=1,MY)
      READ(*,803)
  803 FORMAT(8(/))
      READ(*,500) ((FEP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(*,500) ((PN(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
```

```
      READ(*,804)
  804 FORMAT(10(/))
C
C
C                                        ENTREE: CUBIC.OUT
      READ(*,509) ((GG(V,J),J=1,NG),V=1,MY)
C
C
C
C       =-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=( * )=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=
C
      DO 2 V=1,MY
      PP(V)=PN(V,V)
      KK(V)=FEP(V,V)
    2 CONTINUE
C
C
      DO 1 V=1,MY
      DO 1 Q=1,MY
      MU(V,Q)  =0.
      LQ(V,Q)  =0.
      DAMP(V,Q)=0.
    1 CONTINUE
C
C     ..... RECHERCHE DE LA DEFORMATION STATIQUE
C
      DO 6 L = 1,MY
      XGUESS(L) = W0(L)
    6 CONTINUE
C
      CALL DNEQNF (FCN,ERRREL,N,ITMAX,XGUESS,X,FNORM)
C
      DO 8 L = 1,MY
      DI(L) = X(L)-W0(L)
    8 CONTINUE
C
      IF((W0(1).NE.0.).AND.(W0(2).EQ.0.).AND.(W0(3).EQ.0.)) GOTO 50
      IF((W0(1).EQ.0.).AND.(W0(2).NE.0.).AND.(W0(3).EQ.0.)) GOTO 52
      IF((W0(1).EQ.0.).AND.(W0(2).EQ.0.).AND.(W0(3).NE.0.)) GOTO 54
   50 DI(2) = 0.
      DI(3) = 0.
      GOTO 56
   52 DI(1) = 0.
      DI(3) = 0.
```

```
      GOTO 56
   54 DI(1) = 0.
      DI(2) = 0.
      GOTO 56
   56 CONTINUE
C
C     ..... DETERMINATION DE LA MATRICE "KI"
C
      DO 9 I = 1,MY
      DO 9 J = 1,MY
      LAR(I,J) = 0.
    9 CONTINUE
C
      DO 14 V = 1,3
      DO 14 Q = 1,3
      LAR(V,Q) = 0.
      DO 13 L = 1,3
      DO 13 H = 1,3
      LAR(V,Q) = LAR(V,Q)
     #         +(MM(V,Q,L,H)+MM(V,L,H,Q)+MM(V,L,Q,H))*X(L)*X(H)
     #         - MM(V,Q,L,H)*W0(L)*W0(H)
C
   13 CONTINUE
      MAT(V,Q) = FEP(V,Q) - NY0*PN(V,Q)
      KI(V,Q)  = FEP(V,Q) - NY0*PN(V,Q) + LAR(V,Q)
   14 CONTINUE
C
C
C     ..... FREQUENCES DE LA PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE
C
      CALL DEVCRG(MY,KI,MY,RF,REV,MY)
      DO 43 I = 1,3
      DO 43 J = 1,3
      EV(I,J) = DREAL(REV(I,J))
   43 CONTINUE
C
C     .....REMISE EN ORDRE DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES
C                  (ON SUPPOSE QU'ILS SONT AU NOMBRE DE TROIS)
C
      TEMP = RF(1)
      RF(1)= RF(3)
      RF(3) = TEMP
      DO 5 J = 1,MY
      VTEMP(J) = EV(1,J)
```

```
      EV(1,J) = EV(3,J)
      EV(3,J) = VTEMP(J)
    5 CONTINUE
C
      ISLF1 = DABS(DREAL(RF(1)))
      ISLF2 = DABS(DREAL(RF(2)))
      ISLF3 = DABS(DREAL(RF(3)))
C
      ILNF1 = DSQRT(ISLF1)/TIME
      ILNF2 = DSQRT(ISLF2)/TIME
      ILNF3 = DSQRT(ISLF3)/TIME
C
C
      RPF1 = ILNF1/LNF(1)
      RPF2 = ILNF2/LNF(2)
      RPF3 = ILNF3/LNF(3)
C
      ISLF(1) = ISLF1
      ISLF(2) = ISLF2
      ISLF(3) = ISLF3
      ILNF(1) = ILNF1
      ILNF(2) = ILNF2
      ILNF(3) = ILNF3
      RPF(1)  = RPF1
      RPF(2)  = RPF2
      RPF(3)  = RPF3
C
C
      CALL DLINRG(MY,EV,MY,INEV,MY)
C
C     ..... PARAMETRES D'EXCITATION
C
      DO 35 V=1,MY
      DO 35 Q=1,MY
      PN(V,Q) = NYT*PN(V,Q)
   35 CONTINUE
      CALL DMRRRR(MY,MY,PN,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,LP,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,LP,MY,MY,MY,PN,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,KI,MY,MY,MY,LQ,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,LQ,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,KI,MY)
      CALL DLINRG(MY,KI,MY,LP,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,PN,MY,MY,MY,LP,MY,MY,MY,LQ,MY)
      DO 36 V=1,MY
      DO 36 Q=1,MY
```

```
      MU(V,Q) = LQ(V,Q)/2.
   36 CONTINUE
C
C     .....COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT VISQUEUX
C
      DO 37 V=1,MY
      DAMP(V,V) = DECR*DSQRT(ISLF(V))/(2.*PI)
   37 CONTINUE
C
C     ..... CALCUL DE LA DEFLEXION STATIQUE TOTALE
      DO 38 V=1,MY
      X(V)=W0(V)+DI(V)
   38 CONTINUE
C
C     ..... CALCUL DE FREQUENCE NATURELLE DU SYSTEME A 1 D.D.L.
C
      DO 39 V=1,MY
      PARTA=KK(V)-(NY0*PP(V))
      PARTB=MM(V,V,V,V)*((3*X(V)**2)-W0(V)**2)
      FRQNAT(V)=DSQRT(PARTA+PARTB)
   39 CONTINUE
C
C     ..... CALCUL DE 2*C POUR LE SYSTEME A 1 D.D.L.
      DO 40 V=1,MY
      CC(V)=DAMP(V,V)
   40 CONTINUE
C
C     ..... SORTIE: IMPER.OUT
C
      WRITE(*,600)
      WRITE(*,601) (L,W0(L),L=1,MY)
      WRITE(*,604)
      WRITE(*,605) (L,DI(L),L=1,MY)
      WRITE(*,610)
      WRITE(*,611) (V,ISLF(V),ILNF(V),RPF(V),V=1,MY)
      WRITE(*,619)
      WRITE(*,620) ((V,Q,MU(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(*,621)
      WRITE(*,620) ((V,Q,EV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(*,623)
      WRITE(*,620) ((V,Q,INEV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(*,625)
      WRITE(*,620) ((V,Q,DAMP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
C
```

```
      WRITE(*,700)
      WRITE(*,701) (V,W0(V),V,X(V),V=1,MY)
      WRITE(*,702) (CC(1),CC(2),CC(3))
      WRITE(*,703) (PP(1),PP(2),PP(3))
      WRITE(*,704) (NYT)
      WRITE(*,705) (MM(1,1,1,1),MM(2,2,2,2),MM(3,3,3,3))
      WRITE(*,706) (V,FRQNAT(V),V=1,MY)
C
C     ..... FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
C
  400 FORMAT(7X,F5.3)
  450 FORMAT(7X,I2)
  500 FORMAT(7X,D23.16)
  501 FORMAT(21(/),7X,D23.16)
  502 FORMAT(7X,D23.16)
  503 FORMAT(3(/7X,D23.16,1X,D23.16))
  504 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16)
  509 FORMAT(11X,D23.16)
  550 FORMAT(3X,F4.2)
C
  600 FORMAT(/15X,'IMPERFECTION INITIALE')
  601 FORMAT(11X,I2,' MODE : ',1X,D23.16)
  604 FORMAT(/15X,'DEPLACEMENT STATIQUE INITIAL')
  605 FORMAT(11X,I2,' MODE : ',1X,D23.16)
  610 FORMAT(/15X,'FREQUENCE PLAQ.IMP. CHARGEE',25X,'RATIO')
  611 FORMAT(2X,I2,' MODE : ',1X,D23.16,2X,D23.16,' HZ',2X,F6.4)
  619 FORMAT(/15X,'PARAMETRES D EXCITATION')
  620 FORMAT(10X,I2,1X,I2,1X,D23.16)
  621 FORMAT(/15X,'MATRICE DE PASSAGE')
  623 FORMAT(/9X,'INVERSE DE LA MATRICE DE PASSAGE')
  625 FORMAT(/15X,'MATRICE D□AMORTISSEMENT')
C
  700 FORMAT(//2X,'PARAMETRES UTILISES POUR LE SYSTEME A 1 D.D.L.',/)
  701 FORMAT(5X,'W0',I1,'/H = ',D10.5,'    X',I1,' = ',D10.5)
  702 FORMAT(5X,'COEFF. AMORT. (2*C1,2*C2,2*C3): ',D10.5,' ',
     #       D10.5,' ',D10.5)
  703 FORMAT(5X,'COEFF. DE CHARGE (P1,P2,P3): ',D10.5,' ',
     #       D10.5,' ',D10.5)
  704 FORMAT(5X,'CHARGEMENT DYN. (NON DIMENSIONNEL): ',D10.5)
  705 FORMAT(5X,'NON-LINEARITES (MM1,MM2,MM3): 'D10.5,' ',
     #       D10.5,' ',D10.5,)
  706 FORMAT(5X,'OMEGA ',I1,' = ',D10.5)
C     .
C
```

```
 999 STOP
     END
C
C        ------------------ * ------------------
C
     SUBROUTINE FCN(X,F,N)
     INTEGER   N
     REAL*8    X(N),F(N),T(3,3),NY0
     REAL*8    W0(3),MM(3,3,3,3),FEP(3,3),PN(3,3)
     COMMON /ZONE/ MM,PN,FEP,W0,NY0
C
     T(1,1) = FEP(1,1)-NY0*PN(1,1)
     T(1,2) = FEP(1,2)-NY0*PN(1,2)
     T(1,3) = FEP(1,3)-NY0*PN(1,3)
     T(2,1) = FEP(2,1)-NY0*PN(2,1)
     T(2,2) = FEP(2,2)-NY0*PN(2,2)
     T(2,3) = FEP(2,3)-NY0*PN(2,3)
     T(3,1) = FEP(3,1)-NY0*PN(3,1)
     T(3,2) = FEP(3,2)-NY0*PN(3,2)
     T(3,3) = FEP(3,3)-NY0*PN(3,3)
C
     F(1) = T(1,1)*X(1) + T(1,2)*X(2) + T(1,3)*X(3)
    #     - FEP(1,1)*W0(1) - FEP(1,2)*W0(2) - FEP(1,3)*W0(3)
    #     + MM(1,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
    #     + MM(1,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
    #     + MM(1,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
    #     + MM(1,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
    #     + MM(1,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
    #     + MM(1,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
    #     + MM(1,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
    #     + MM(1,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
    #     + MM(1,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
    #     + MM(1,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
    #     + MM(1,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
    #     + MM(1,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
    #     + MM(1,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
    #     + MM(1,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
    #     + MM(1,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
    #     + MM(1,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
    #     + MM(1,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
    #     + MM(1,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
    #     + MM(1,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
    #     + MM(1,3,1,2) * ( X(3)*X(1)*X(2) - X(3)*W0(1)*W0(2) )
    #     + MM(1,3,1,3) * ( X(3)*X(1)*X(3) - X(3)*W0(1)*W0(3) )
```

```
     #     + MM(1,3,2,1) * ( X(3)*X(2)*X(1) - X(3)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,2,2) * ( X(3)*X(2)*X(2) - X(3)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(1,3,2,3) * ( X(3)*X(2)*X(3) - X(3)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(1,3,3,1) * ( X(3)*X(3)*X(1) - X(3)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,3,2) * ( X(3)*X(3)*X(2) - X(3)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(1,3,3,3) * ( X(3)*X(3)*X(3) - X(3)*W0(3)*W0(3) )
C
      F(2) = T(2,1)*X(1) + T(2,2)*X(2) + T(2,3)*X(3)
     #     - FEP(2,1)*W0(1) - FEP(2,2)*W0(2) - FEP(2,3)*W0(3)
     #     + MM(2,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(2,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(2,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(2,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
C
      F(3) = T(3,1)*X(1) + T(3,2)*X(2) + T(3,3)*X(3)
     #     - FEP(3,1)*W0(1) - FEP(3,2)*W0(2) - FEP(3,3)*W0(3)
     #     + MM(3,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(3,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(3,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(3,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(3,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(3,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(3,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(3,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(3,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(3,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(3,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(3,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(3,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
```

```
     #    + MM(3,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #    + MM(3,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #    + MM(3,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #    + MM(3,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #    + MM(3,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,1,2) * ( X(3)*X(1)*X(2) - X(3)*W0(1)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,1,3) * ( X(3)*X(1)*X(3) - X(3)*W0(1)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,2,1) * ( X(3)*X(2)*X(1) - X(3)*W0(2)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,2,2) * ( X(3)*X(2)*X(2) - X(3)*W0(2)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,2,3) * ( X(3)*X(2)*X(3) - X(3)*W0(2)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,3,1) * ( X(3)*X(3)*X(1) - X(3)*W0(3)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,3,2) * ( X(3)*X(3)*X(2) - X(3)*W0(3)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,3,3) * ( X(3)*X(3)*X(3) - X(3)*W0(3)*W0(3) )
C
      RETURN
      END
```

## A.4 - PROGRAMME INTNUM2DL.FOR

```
C ***************************************************************
C *              EFFETS DES IMPERFECTIONS: SYST. A 2D.D.L        *
C ***************************************************************
C
C          NOM DU PROGRAMME :    INTNUM2DL.FOR
C          FICHIERS D'ENTREE :   IMPER.IN
C                                SYCHA.IN
C                                SYCHA.OUT
C                                CUBIC.OUT
C          FICHIERS DE SORTIE :  IMPER.OUT
C          ROUTINE IMSL :     DNEQNJ
C                             DMRRRR
C                             DEVCRG
C OBJECTIFS
C ---------------
C  PREMIEREMENT CE PROGRAMME EST UTILISE POUR DETERMINER LA
C  DEFORMATION DUE A LA COMPOSANTE STATIQUE DU CHARGEMENT
C  DANS LA PLAN.
C  DEUXIEMEMENT, IL DETERMINE LES FREQUENCES NATURELLES DE LA
C  PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE.
C  IL EST UTILISE UNIQUEMENT POUR OBTENIR LES DONNEES
C  NECESSAIRES POUR PROCEDER A L'INTEGRATION NUMERIQUE DU
C  SYSTEME A 2 D.D.L.
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C -------------------------
C TIME        - FACTEUR DE CONVERSION DU TEMPS ADIMENSIONNEL AU
C               TEMPS DIMENSIONNEL.
C  NY0, DN0 - COMPOSANTE STATIQUE DU CHARGEMENT FORME
C               ADIMENSIONNELLE ET DIMENSIONNELLE.
C  SFF, SLF  - FREQUENCE LIBRE ET CHARGEE AU CARREES.
C  FNF, LNF - FREQUENCE LIBRE ET CHARGEE AU CARREES EN HERTZ.
C  ILF     - FREQUENCE DE LA PLAQUE IMPARFAITE CAHRGEE EN HERTZ.
C  W0      - AMPLITUDE DE L'IMPERFECTION GEOMETRIQUE INITIALE
C  DI      - AMPLITUDE DE LA DEFORMATION STATIQUE
C   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
C
   INTEGER Y,Z,L,H,P,Q,R,S,U,V,BC,IN1,IN2,IN3,OUT,NG,ITMAX
   REAL   ERRREL
   REAL*8 PI,NY0,NYT,DN0,DNT,E,NU,RHO,A,B,HP,AR,PCR,DCR
   REAL*8 W0(3),DI(3),GG(3,27),MM(3,3,3,3),MMM(3,3,3,3),GGG(3,27)
```

```
      REAL*8 MM1(3,3,3,3),MM2(3,3,3,3),MM3(3,3,3,3)
      REAL*8 GG1(3,27),GG2(3,27),GG3(3,27),LAR(3,3),MAT(3,3)
      REAL*8 SFF(3),FNF(3),SLF(3),LNF(3),ISLF(3),ILNF(3),RPF(3)
      REAL*8 ILNF1,ILNF2,ILNF3,ISLF1,ISLF2,ISLF3,RPF1,RPF2,RPF3,MU(3,3)
      REAL*8 FEP(3,3),KI(3,3),EV(3,3),PN(3,3),LP(3,3),LQ(3,3),INEV(3,3)
      REAL*8 FCN,FNORM,XGUESS(3),X(3),DAMP(3,3),DECR,FRQNAT(3)
      REAL*8 PP(3,3),KK(3,3)
      REAL*8 HH(3,3,3,3),KTZZ,KTYZ,KTZY,KTYY,GZZZY
      REAL*8 HHZZYY,HHYZYY,GYZZY,GZZYY,GYZYY
      COMPLEX*16 RF(3),REV(3,3)
      COMPLEX*16 TEMP
      REAL*8 VTEMP(3)
      EXTERNAL FCN,DNEQNF,DEVCRG,DMRRRR
      EQUIVALENCE (GG1,MM1)
      EQUIVALENCE (GG2,MM2)
      EQUIVALENCE (GG3,MM3)
      EQUIVALENCE (GG,MM)
      COMMON /ZONE/ MM,PN,FEP,W0,NY0
      DATA PI/3.141592653589793D0/
      DATA P/1/,R/1/,U/1/
      DATA MX/1/,MY/3/,N/3/
      DATA ITMAX/999/
      NG=MY*MY*MY
C
C                                   ENTREE: ST2DDL.IN
      READ(*,520) Z
C
C                                   ENTREE: IMPER.IN
      READ(*,500) (W0(L),L=1,MY)
      READ(*,550) DECR
      READ(*,500) ERRREL
C
C                                   ENTREE: SYCHA.IN
C
      READ(*,530) PLATE,BC
      READ(*,531) A,B,HP
      READ(*,532) E,NU,RHO
      READ(*,533) PCR,DCR,DECR
C
C                                   ENTREE: SYCHA.OUT
C
      READ(*,500) TIME
      READ(*,800)
  800 FORMAT(20(/))
```

```
      READ(*,500) NY0
      READ(*,500) NYT
      READ(*,802)
  802 FORMAT(' ')
      READ(*,504) (SFF(V),FNF(V),V=1,MY)
      READ(*,504) (SLF(V),LNF(V),V=1,MY)
      READ(*,803)
  803 FORMAT(8(/))
      READ(*,500) ((FEP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(*,500) ((PN(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(*,804)
  804 FORMAT(10(/))
C
C
C                                    ENTREE: CUBIC.OUT
      READ(*,509) ((GG(V,J),J=1,NG),V=1,MY)
C
C       =-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=( * )=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=
C
      DO 2 P=1,MY
      DO 3 Q=1,MY
      PP(P,Q)=PN(P,Q)
      KK(P,Q)=FEP(P,Q)
    3 CONTINUE
    2 CONTINUE
C
C
      DO 1 V=1,MY
      DO 1 Q=1,MY
      MU(V,Q)  =0.
      LQ(V,Q)  =0.
      DAMP(V,Q)=0.
    1 CONTINUE
C
C     ..... RECHERCHE DE LA DEFORMATION STATIQUE
C
      DO 6 L = 1,MY
      XGUESS(L) = W0(L)
    6 CONTINUE
C
      CALL DNEQNF (FCN,ERRREL,N,ITMAX,XGUESS,X,FNORM)
C
      DO 8 L = 1,MY
      DI(L) = X(L)-W0(L)
```

```
    8 CONTINUE
C
      IF((W0(1).NE.0.).AND.(W0(2).EQ.0.).AND.(W0(3).EQ.0.)) GOTO 50
      IF((W0(1).EQ.0.).AND.(W0(2).NE.0.).AND.(W0(3).EQ.0.)) GOTO 52
      IF((W0(1).EQ.0.).AND.(W0(2).EQ.0.).AND.(W0(3).NE.0.)) GOTO 54
   50 DI(2) = 0.
      DI(3) = 0.
      GOTO 56
   52 DI(1) = 0.
      DI(3) = 0.
      GOTO 56
   54 DI(1) = 0.
      DI(2) = 0.
      GOTO 56
   56 CONTINUE
C
C     ..... DETERMINATION DE LA MATRICE "KI"
C
      DO 9 I = 1,MY
      DO 9 J = 1,MY
      LAR(I,J) = 0.
    9 CONTINUE
C
      DO 14 V = 1,3
      DO 14 Q = 1,3
      LAR(V,Q) = 0.
      DO 13 L = 1,3
      DO 13 H = 1,3
      LAR(V,Q) = LAR(V,Q)
     #         +(MM(V,Q,L,H)+MM(V,L,H,Q)+MM(V,L,Q,H))*X(L)*X(H)
     #         - MM(V,Q,L,H)*W0(L)*W0(H)
C
   13 CONTINUE
      MAT(V,Q) = FEP(V,Q) - NY0*PN(V,Q)
      KI(V,Q)  = FEP(V,Q) - NY0*PN(V,Q) + LAR(V,Q)
   14 CONTINUE
C
C
C     ..... FREQUENCES DE LA PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE
C
      CALL DEVCRG(MY,KI,MY,RF,REV,MY)
      DO 43 I = 1,3
      DO 43 J = 1,3
      EV(I,J) = DREAL(REV(I,J))
```

```
  43 CONTINUE
C
C     .....REMISE EN ORDRE DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES
C                    (ON SUPPOSE QU'ILS SONT AU NOMBRE DE TROIS)
C
      TEMP = RF(1)
      RF(1)= RF(3)
      RF(3) = TEMP
      DO 5 J = 1,MY
      VTEMP(J) = EV(1,J)
      EV(1,J) = EV(3,J)
      EV(3,J) = VTEMP(J)
   5 CONTINUE
C
      ISLF1 = DABS(DREAL(RF(1)))
      ISLF2 = DABS(DREAL(RF(2)))
      ISLF3 = DABS(DREAL(RF(3)))
C
      ILNF1 = DSQRT(ISLF1)
      ILNF2 = DSQRT(ISLF2)
      ILNF3 = DSQRT(ISLF3)
C
C
      RPF1 = ILNF1/LNF(1)
      RPF2 = ILNF2/LNF(2)
      RPF3 = ILNF3/LNF(3)
C
      ISLF(1) = ISLF1
      ISLF(2) = ISLF2
      ISLF(3) = ISLF3
      ILNF(1) = ILNF1
      ILNF(2) = ILNF2
      ILNF(3) = ILNF3
      RPF(1)  = RPF1
      RPF(2)  = RPF2
      RPF(3)  = RPF3
C
C
      CALL DLINRG(MY,EV,MY,INEV,MY)
C
C     ..... PARAMETRES D'EXCITATION
C
      DO 35 V=1,MY
      DO 35 Q=1,MY
```

```
      PN(V,Q) = NYT*PN(V,Q)
   35 CONTINUE
      CALL DMRRRR(MY,MY,PN,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,LP,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,LP,MY,MY,MY,PN,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,KI,MY,MY,MY,LQ,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,LQ,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,KI,MY)
      CALL DLINRG(MY,KI,MY,LP,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,PN,MY,MY,MY,LP,MY,MY,MY,LQ,MY)
      DO 36 V=1,MY
      DO 36 Q=1,MY
      MU(V,Q) = LQ(V,Q)/2.
   36 CONTINUE
C
C     .....COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT VISQUEUX
C
      DO 37 V=1,MY
      DAMP(V,V) = DECR*DSQRT(ISLF(V))/(2.*PI)
   37 CONTINUE
C
C     ..... CALCUL DE LA DEFLEXION STATIQUE TOTALE
      DO 38 V=1,MY
      X(V)=W0(V)+DI(V)
   38 CONTINUE
C
C     ..... CACUL DU RAPPORT DE FORME DE LA PLAQUE
      AR = B/A
C
C     ..... PARAMETRES NEC. POUR L'INTEGRATION NUM. DU SYST A 2
D.D.L.
C
C
      IF (W0(1).NE.0) GOTO 511
      IF (W0(2).NE.0) GOTO 512
      IF (W0(3).NE.0) GOTO 513
  511 Y = 1
      GOTO 515
  512 Y = 2
      GOTO 515
  513 Y = 3
      GOTO 515
  515 CONTINUE
C
      DO 60 M = 1,MY
      DO 61 P = 1,MY
```

```
      DO 62 Q = 1,MY
      DO 63 R = 1,MY
      HH(M,P,Q,R) = MM(M,P,Q,R) + MM(M,Q,P,R) + MM(M,Q,R,P)
   63 CONTINUE
   62 CONTINUE
   61 CONTINUE
   60 CONTINUE
C
C
      KTZZ = KK(Z,Z) - (NY0*PP(Z,Z))
     #       + (HH(Z,Z,Y,Y)*X(Y)**2) - (MM(Z,Z,Y,Y)*W0(Y)**2)
      KTZY = KK(Z,Y) - (NY0*PP(Z,Y))
     #       + (HH(Z,Y,Y,Y)*X(Y)**2) - (MM(Z,Y,Y,Y)*W0(Y)**2)
      GZZZY = MM(Z,Z,Z,Y) + MM(Z,Z,Y,Z) + MM(Z,Y,Z,Z)
      GZZYY = MM(Z,Z,Y,Y) + MM(Z,Y,Z,Y) + MM(Z,Y,Y,Z)
      HHZZYY = HH(Z,Y,Z,Y) + HH(Z,Y,Y,Z)
C
      KTYZ = KK(Y,Z) - (NY0*PP(Y,Z))
     #       + (HH(Y,Z,Y,Y)*X(Y)**2) - (MM(Y,Z,Y,Y)*W0(Y)**2)
      KTYY = KK(Y,Y) - (NY0*PP(Y,Y))
     #       + (HH(Y,Y,Y,Y)*X(Y)**2) - (MM(Y,Y,Y,Y)*W0(Y)**2)
      GYZZY = MM(Y,Z,Z,Y) + MM(Y,Z,Y,Z) + MM(Y,Y,Z,Z)
      GYZYY = MM(Y,Z,Y,Y) + MM(Y,Y,Z,Y) + MM(Y,Y,Y,Z)
      HHYZYY= HH(Y,Y,Z,Y) + HH(Y,Y,Y,Z)
C
C     ..... SORTIE: IMPER2DL.OUT
C
      WRITE(*,599)
      WRITE(*,601) (BC)
      WRITE(*,602) (E,NU,RHO)
      WRITE(*,603) (A,B,HP)
      WRITE(*,604) (AR)
      WRITE(*,605) (PCR)
      WRITE(*,606) (DCR)
      WRITE(*,607) (DECR)
      WRITE(*,600) (L,ILNF(L),L=1,MY)
      WRITE(*,730) (Y,Z)
      WRITE(*,700)
      WRITE(*,701) (V,W0(V),V,X(V),V=1,MY)
      WRITE(*,703) (X(Y))
      WRITE(*,705) (NYT)
      WRITE(*,706) (PP(Z,Z))
      WRITE(*,707) (PP(Z,Y))
      WRITE(*,708) (PP(Y,Z))
```

```
      WRITE(*,709) (PP(Y,Y))
      WRITE(*,710) (DAMP(Z,Z))
      WRITE(*,711) (KTZZ)
      WRITE(*,712) (KTZY)
      WRITE(*,713) (MM(Z,Z,Z,Z))
      WRITE(*,714) (MM(Z,Y,Y,Y))
      WRITE(*,715) (GZZZY)
      WRITE(*,716) (GZZYY)
      WRITE(*,717) (HH(Z,Y,Z,Z))
      WRITE(*,718) (HH(Z,Y,Y,Y))
      WRITE(*,719) (HHZZYY)
      WRITE(*,720) (DAMP(Y,Y))
      WRITE(*,721) (KTYZ)
      WRITE(*,722) (KTYY)
      WRITE(*,723) (MM(Y,Z,Z,Z))
      WRITE(*,724) (MM(Y,Y,Y,Y))
      WRITE(*,725) (GYZZY)
      WRITE(*,726) (GYZYY)
      WRITE(*,727) (HH(Y,Y,Z,Z))
      WRITE(*,728) (HH(Y,Y,Y,Y))
      WRITE(*,729) (HHYZYY)
C
C     ..... FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
C
  400 FORMAT(7X,F5.3)
  450 FORMAT(7X,I2)
  500 FORMAT(7X,D23.16)
  501 FORMAT(21(/),7X,D23.16)
  502 FORMAT(7X,D23.16)
  503 FORMAT(3(/7X,D23.16,1X,D23.16))
  504 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16)
  509 FORMAT(11X,D23.16)
  520 FORMAT(5X,I1)
  530 FORMAT(2I5)
  531 FORMAT(3D15.4)
  532 FORMAT(D20.10,D10.3,D20.5)
  533 FORMAT(2D10.3,F10.2)
  550 FORMAT(3X,F4.2)
C
  599 FORMAT(1X,'*** INTEGRATION NUMERIQUE SYSTEME A 2 D.D.L.,
     # COORD. REELLES ***',//)
  600 FORMAT(15X,'FREQ. NAT. (FORME ADIM.) DU ',I2,'MODE : ',D10.5)
  601 FORMAT(1X,'CONDITIONS AUX FRONTIERES DE LA PLAQUE :',I2)
  602 FORMAT(1X,'CARACT.  DU MATERIAU (E-NU-RHO) : ',D10.5,' - ',
```

```
     #      D10.3,' - ',D10.5)
  603 FORMAT(1X,'DIMENSIONS DE LA PLAQUE (A X B X H): ',F9.5,' X ',
     #      F9.5,' X ',F9.5)
  604 FORMAT(1X,'RAPPORT DE FORME DE LA PLAQUE : ',F6.3)
  605 FORMAT(1X,'RAPPORT DE CHARGEMENT STATIQUE (PCR) : ',F5.2)
  606 FORMAT(1X,'RAPPORT DE CHARGEMENT DYNAMIQUE (DCR) : ',F5.2)
  607 FORMAT(1X,'DECREMENT LOG. D AMORTISSEMENT (DELTA) : ',F5.2)
  700 FORMAT(//5X,'PARAMETRES UTILISES POUR LE SYSTEME A 2 D.D.L.',/)
  701 FORMAT(10X,'W0',I1,'/H = ',D10.5,'    X',I1,' = ',D10.5)
  703 FORMAT(/5X,'(3) ',D15.7)
  705 FORMAT(5X,'(5)  ',D15.7)
  706 FORMAT(5X,'(6)  ',D15.7)
  707 FORMAT(5X,'(7)  ',D15.7)
  708 FORMAT(5X,'(8)  ',D15.7)
  709 FORMAT(5X,'(9)  ',D15.7)
  710 FORMAT(5X,'(10) ',D15.7)
  711 FORMAT(5X,'(11) ',D15.7)
  712 FORMAT(5X,'(12) ',D15.7)
  713 FORMAT(5X,'(13) ',D15.7)
  714 FORMAT(5X,'(14) ',D15.7)
  715 FORMAT(5X,'(15) ',D15.7)
  716 FORMAT(5X,'(16) ',D15.7)
  717 FORMAT(5X,'(17) ',D15.7)
  718 FORMAT(5X,'(18) ',D15.7)
  719 FORMAT(5X,'(19) ',D15.7)
  720 FORMAT(5X,'(20) ',D15.7)
  721 FORMAT(5X,'(21) ',D15.7)
  722 FORMAT(5X,'(22) ',D15.7)
  723 FORMAT(5X,'(23) ',D15.7)
  724 FORMAT(5X,'(24) ',D15.7)
  725 FORMAT(5X,'(25) ',D15.7)
  726 FORMAT(5X,'(26) ',D15.7)
  727 FORMAT(5X,'(27) ',D15.7)
  728 FORMAT(5X,'(28) ',D15.7)
  729 FORMAT(5X,'(29) ',D15.7)
  730 FORMAT(//5X,'MODE AVEC IMPERFECTION :',I2,
     #      /5X,'2E MODE DE VIBRATION   :',I2)
C
C
  999 STOP
      END
C
C       ------------------- * -------------------
C
```

```
      SUBROUTINE FCN(X,F,N)
      INTEGER   N
      REAL*8    X(N),F(N),T(3,3),NY0
      REAL*8    W0(3),MM(3,3,3,3),FEP(3,3),PN(3,3)
      COMMON /ZONE/ MM,PN,FEP,W0,NY0
C
      T(1,1) = FEP(1,1)-NY0*PN(1,1)
      T(1,2) = FEP(1,2)-NY0*PN(1,2)
      T(1,3) = FEP(1,3)-NY0*PN(1,3)
      T(2,1) = FEP(2,1)-NY0*PN(2,1)
      T(2,2) = FEP(2,2)-NY0*PN(2,2)
      T(2,3) = FEP(2,3)-NY0*PN(2,3)
      T(3,1) = FEP(3,1)-NY0*PN(3,1)
      T(3,2) = FEP(3,2)-NY0*PN(3,2)
      T(3,3) = FEP(3,3)-NY0*PN(3,3)
C
      F(1) = T(1,1)*X(1) + T(1,2)*X(2) + T(1,3)*X(3)
     #     - FEP(1,1)*W0(1) - FEP(1,2)*W0(2) - FEP(1,3)*W0(3)
     #     + MM(1,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(1,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(1,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(1,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(1,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(1,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(1,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(1,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(1,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(1,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(1,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(1,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(1,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(1,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(1,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(1,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(1,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(1,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(1,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,1,2) * ( X(3)*X(1)*X(2) - X(3)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(1,3,1,3) * ( X(3)*X(1)*X(3) - X(3)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(1,3,2,1) * ( X(3)*X(2)*X(1) - X(3)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,2,2) * ( X(3)*X(2)*X(2) - X(3)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(1,3,2,3) * ( X(3)*X(2)*X(3) - X(3)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(1,3,3,1) * ( X(3)*X(3)*X(1) - X(3)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,3,2) * ( X(3)*X(3)*X(2) - X(3)*W0(3)*W0(2) )
```

```
     #     + MM(1,3,3,3) * ( X(3)*X(3)*X(3) - X(3)*W0(3)*W0(3) )
C
      F(2) = T(2,1)*X(1) + T(2,2)*X(2) + T(2,3)*X(3)
     #     - FEP(2,1)*W0(1) - FEP(2,2)*W0(2) - FEP(2,3)*W0(3)
     #     + MM(2,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(2,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(2,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(2,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
C
      F(3) = T(3,1)*X(1) + T(3,2)*X(2) + T(3,3)*X(3)
     #     - FEP(3,1)*W0(1) - FEP(3,2)*W0(2) - FEP(3,3)*W0(3)
     #     + MM(3,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(3,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(3,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(3,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(3,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(3,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(3,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(3,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(3,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(3,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(3,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(3,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(3,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(3,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(3,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(3,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(3,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(3,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
```

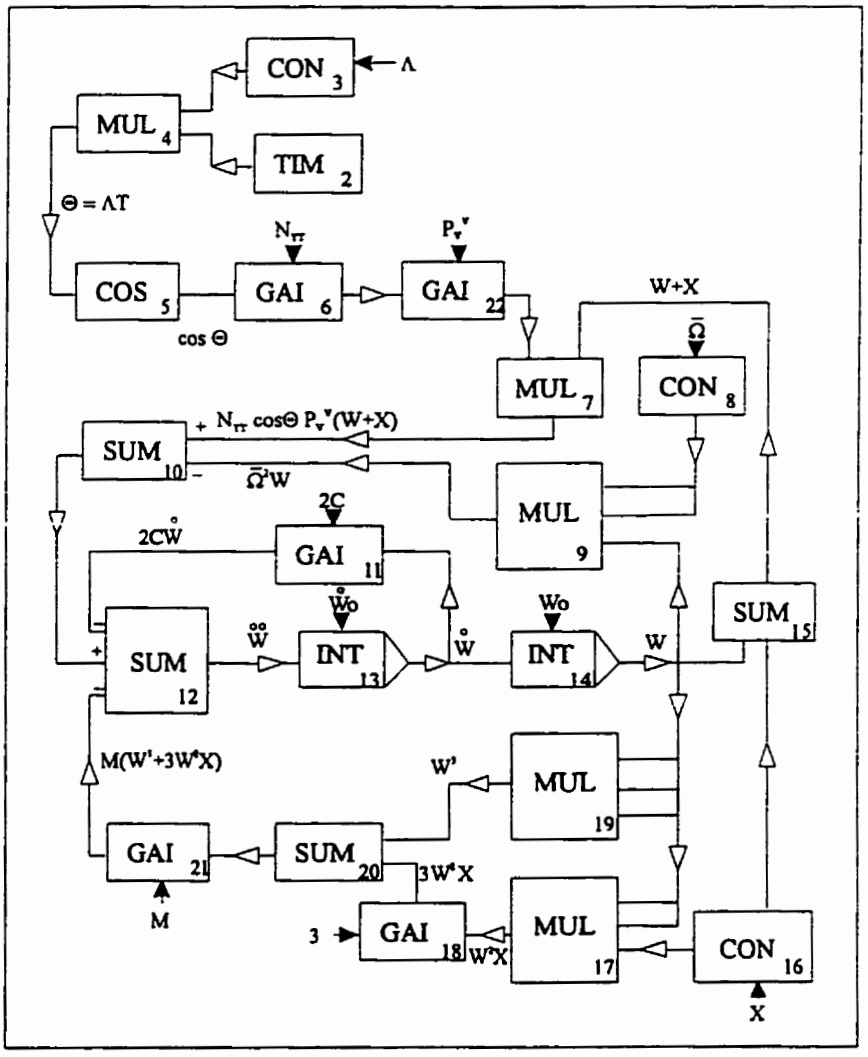
```
     #    + MM(3,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,1,2) * ( X(3)*X(1)*X(2) - X(3)*W0(1)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,1,3) * ( X(3)*X(1)*X(3) - X(3)*W0(1)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,2,1) * ( X(3)*X(2)*X(1) - X(3)*W0(2)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,2,2) * ( X(3)*X(2)*X(2) - X(3)*W0(2)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,2,3) * ( X(3)*X(2)*X(3) - X(3)*W0(2)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,3,1) * ( X(3)*X(3)*X(1) - X(3)*W0(3)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,3,2) * ( X(3)*X(3)*X(2) - X(3)*W0(3)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,3,3) * ( X(3)*X(3)*X(3) - X(3)*W0(3)*W0(3) )
C
      RETURN
      END
```

# Annexe B

# Fichiers utilisés pour l'intégration numérique

## B.1 - Système à un degré de liberté

### B.1.1 - Diagramme fonctionnel



### B.1.2 - Fichiers TUTSIM

Modèle utilisé pour l'intégration numérique du système à 1 d.d.l.
par le logiciel TUTSIM

Fichier STAT1DL.SIM

```
1     REM
2     TIM                                        ;temps
3     CON                 P1=9.0000              ;entree: F.exc.adim.
4     MUL   2     3                              ;lambda*t = teta
5     COS   4                                    ;cos(teta)
6     GAI   5             P1=0.96128             ;entree: 2*mu
7     MUL   22    15
8     CON                 P1=3.1503              ;entree: F.plaque imp. charg.
9     MUL   8     8       14
10    SUM   7     -9
11    GAI   13            P1=0.0498230           ;entree: 2*C
12    SUM   10    -11     -21                    ;d²W/dt²
13    INT   12            P1=0.000000            ;dW/dt
14    INT   13            P1=0.000000            ;W
15    SUM   14    16                             ;W+X
16    CON                 P1=0.364350            ;entree: X=(Wo+d)
17    MUL   14    14      16
18    GAI   17            P1=3.000000
19    MUL   14    14      14
20    SUM   18    19
21    GAI   20            P1=1.0389              ;entree: coef. cubique d'elasticite
22    GAI   6             P1=1.0957
```

### B.1.3 - Programme TURBO-PASCAL

```
{*****************************************************************}
{*                      Programme STAT1DL.PAS                    *}
{*     Permet d'élaborer une courbe de réponse en fréquence pour le *}
{*     système à un degré de liberté avec le logiciel TUTSIM et le fichier *}
{*                          stat1dl.sim                          *}
{*****************************************************************}
{$M $4000,0,0 }
Program Stationnaire;
USES
```

```
  crt,dos;
CONST
  nbpts = 500; {calcule pour F.exc.min=5 et F.exc.max=100, deltat=0.005s}
  imax=trunc(nbpts/2)+1;
  pi=3.1416;
VAR
  i, j, k, ind, indw, indc                    : integer;
  temps, vecteur1, vecteur2, vecteur3         : array[0..nbpts] of real;
  modelpath, tutsimpath, fichier_res          : string[40];
  freq, pas                                   : real;
  freqinf, freqsup                            : real;
  freqst, amplist, vitst                      : string[10];
  amplitude_inf, amplitude_sup, phi           : real;
  vci, pci                                    : real;
  Wmax, cosmax, tw, tc, Tdelai                : real;
  ecriture, conditions                        : text;
  nbiter                                      : integer;
  disque                                      : string[30];
  fichier_ci, fichier_temp                    : string[40];
  resultats                                   : text;
  a                                           : string[5];

{*****************************************************************}
{*          Procedure qui debute le programme en fixant les parametres          *}
{*                          essentiels a son utilisation                        *}
{*****************************************************************}
Procedure Initialisation;
begin
  Clrscr;
  writeln('*****************************************************************');
  writeln('*          SIMULATION DYNAMIQUE A L"AIDE DE TUTSIM              *');
  writeln('*****************************************************************');
  writeln('Entrez le nom du disque dans lequel peut etre enregistre des');
  writeln('     fichiers temporaires  (ex.: c:\)   ');
  write('---->');
  readln(disque);
  writeln('Entrez le nom du fichier du modele Tutsim de l"E.D.M. utilise');
  write('---->');
  readln(modelpath);
  writeln('Entrez le chemin pour acceder au fichier tutsim.exe');
  write('---->');
  readln(tutsimpath);
  writeln('Entrez le nom du fichier de sortie');
  write('---->');
```

```
    readln(fichier_res);
    writeln('Le logiciel stockera temporairement des donnees de resultats');
    writeln('intermediaires durant l''execution dans le fichier ',disque,'temp.res');
    writeln;writeln;
    writeln('Entrez la frequence inferieure au dixieme pres');
    write('---->');
    readln(freqinf);
    writeln('Entrez le deplacement initial correspondant a la frequence inferieure');
    write('---->');
    readln(pci);
    writeln('Entrez la vitesse initiale correspondant a la frequence inferieure');
    write('---->');
    readln(vci);
    writeln('Entrez la frequence superieure au dixieme pres');
    write('---->');
    readln(freqsup);
    writeln;
    writeln(' DEFINITION DU PAS FREQUENTIEL : le pas frequentiel est');
    writeln(' l''increment de frequences qui sera utilisee entre 2 iterations');
    writeln;
    writeln('Entrez le pas frequentiel desire entre 2 iterations');
    write('---->');
    readln(pas);
    assign(ecriture,fichier_res);
    rewrite(ecriture);
    writeln(ecriture,'frequence  ampl.neg   ampl.pos.  phi(deg)  (*** EN
                        AUGMENTANT F.EXC. ***)');
    fichier_ci:=disque + 'ci.res';
    fichier_temp:=disque + 'temp.res';
    assign(conditions,fichier_ci);
    rewrite(conditions);
    for i:=0 to nbpts do
      begin
        temps[i]:=0.0;
        vecteur1[i]:=0.0;
        vecteur2[i]:=0.0;
        vecteur3[i]:=0.0;
      end;
    nbiter:=trunc((freqsup-freqinf) / pas + 1);
    writeln;
    assign(resultats,fichier_temp);
    rewrite(resultats);
    close(resultats);
  end;          {fin de la procedure initialisation}
```

```
{*********************************************************************}
{*          Procedure qui permet de faire une iteration dans Tutsim          *}
{*********************************************************************}
Procedure Iteration_dans_Tutsim;
VAR
  param1, param2     :     string[100];
  param              :     string[200];
begin
  Str(freq:0:3,freqst);
  Str(pci:0:5,amplist);
  Str(vci:0:5,vitst);
  param1:= '/d=0 /f='+modelpath+' /a=sf,3 /w=0';
  param2:= '/o='+fichier_temp+' /c=3,1,'+freqst+' /c=14,1,'+amplist+' /c=13,1,'+vitst;
  param:= param1 + param2;
  exec(tutsimpath,param);
end;          {fin de la procedure iteration dans tutsim}

{*********************************************************************}
{*                  Procedure qui lit le fichier de sortie cree lors d'une      *}
{*                              simulation avec Tutsim                          *}
{*********************************************************************}
Procedure Lecture_dans_Tutsim;
VAR    sigle     :     char;
begin
  reset(resultats);
  repeat
    readln(resultats,sigle);
  until sigle <> '=';
  for i:=0 to nbpts do
    begin
      readln(resultats,temps[i],vecteur1[i],vecteur2[i],vecteur3[i]);
    end;
  writeln(' ******* Lecture de ',fichier_temp,' terminee *******');
  writeln;
  erase(resultats);
end;          {fin de la procedure lecture dans tutsim}

{*********************************************************************}
{*                  Procedure qui recherche l'amplitude maximale du signal      *}
{*                    temporel obtenu lors d'une simulation avec Tutsim et      *}
{*              qui fait une distinction entre l'amplitude du mouvement neg. et pos  *}
{*********************************************************************}
Procedure Recherche_Amplitude_et_Phase;
begin
```

```
amplitude_inf:= 0.0;
amplitude_sup:= 0.0;
Wmax:=0.0;
indw:=0;
tw:=0.0;
cosmax:=0.0;
indc:=0;
tc:=0.0;
{ ********** Recherche des amplitudes maximales **********}
for i:=0 to nbpts do
  begin
    if vecteur1[i]>amplitude_sup then
      begin
        amplitude_sup:=vecteur1[i];
      end;
    if vecteur1[i]<amplitude_inf then
      begin
        amplitude_inf:=vecteur1[i];
      end;
  end;
{ ********** Recherche de l'angle de phase (phi) **********}
for i:=1 to trunc(imax/2) do
  begin
    if vecteur3[i] > cosmax then
      begin
        cosmax:=vecteur3[i];
        indc:=i;
        tc:=temps[i];
      end;
  end;
k:=indc;
while wmax=0 do
  begin
    if (vecteur1[k] > vecteur1[k-1]) and (vecteur1[k] > vecteur1[k+1]) then
      begin
        wmax:=vecteur1[k];
        indw:=k;
        tw:=temps[k];
      end;
    k:=k+1;
  end;
Tdelai:= tw - tc;
phi:= (freq/2 * Tdelai) * (360/(2*pi));  {phi calcule en degres}
                        {phi[cycles]=f/2*Tdel=F/Kt*Tdelai*Kt=F*Tdelai}
```

```
    if phi>=180 then
      phi:=phi-180;  {pour obtenir une angle de phase compris entre 0 et 360}
    append(ecriture);
    writeln(ecriture,freq:8:3,' ',amplitude_inf:10:5,' ',amplitude_sup:10:5,' ',phi:10:5);
    close(ecriture);
  end;              {fin de la procedure recherche amplitude2}

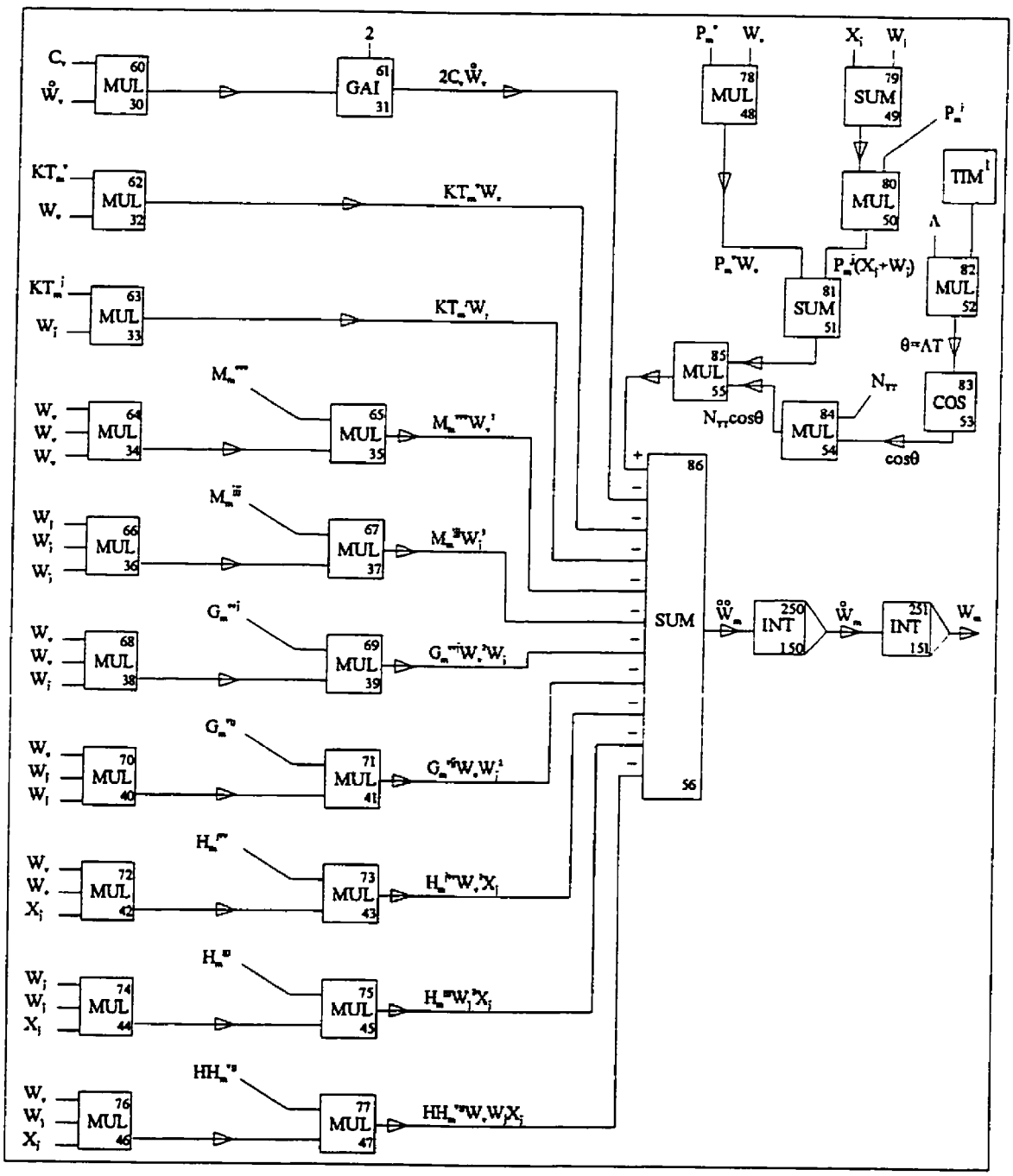
{*********************************************************************}
{*          Procedure qui recherche les conditions initiales necessaires pour          *}
{*                    une simulation subsequente dans Tutsim                           *}
{*********************************************************************}
Procedure Conditions_initiales;
begin
  ind:=0;
  cosmax:=0;
  for i:=0 to imax do
    begin
      if vecteur3[i] > cosmax then
        begin
          ind:=i;
          cosmax:=vecteur3[i];
        end;
    end;
  pci:=(vecteur1[ind]);
  vci:=(vecteur2[ind]);
  append(conditions);
  writeln(conditions,pci:10:5,' ',vci:10:5,'      ',cosmax:5:5);
  close(conditions);
end;              {fin de la procedure conditions initiales}

{*********************************************************************}
{*                Procedure qui affiche la frequence a laquelle                    *}
{*                          est rendue la boucle iterative                         *}
{*********************************************************************}
Procedure Affichage;
begin
  writeln;
  writeln('*************************************************************');
  writeln('  Le prochain calcul est effectue pour F.exc. = ',freq:2:2);
  writeln('*************************************************************');
end;
```

```
{*****************************************************************}
{*                      PROGRAMME PRINCIPAL                      *}
{*****************************************************************}
BEGIN
  Initialisation;
  Clrscr;
  writeln('*************************************************************');
  writeln('*          Elaboration de la courbe de reponse en frequence     *');
  writeln('*                  en augmentant la frequence d''excitation     *');
  writeln('*************************************************************');
  freq:=freqinf;
  for j:=1 to nbiter do
    begin
      Affichage;
      Iteration_dans_Tutsim;
      Lecture_dans_Tutsim;
      Recherche_amplitude_et_Phase;
      Conditions_Initiales;
      freq:=freq + pas;
    end;
 writeln('*************************************************************');
  writeln('*          Elaboration de la courbe de reponse en frequence     *');
  writeln('*                  en diminuant la frequence d''excitation      *');
  writeln('*************************************************************');
  freq:=freqsup;
  pci:=0;
  vci:=0;
  append(ecriture);
  writeln(ecriture,'frequence   ampl.neg.   ampl.pos.   phi   (*** EN DIMINUANT
                F.EXC. ***)');
  close(ecriture);
  for j:=1 to nbiter do
    begin
      Affichage;
      Iteration_dans_Tutsim;
      Lecture_dans_Tutsim;
      Recherche_amplitude_et_Phase;
      Conditions_Initiales;
      freq:=freq - pas;
    end;
END.
```

## B.2 - SYSTÈME À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

### B.2.1 - Diagramme fonctionnel



### B.2.2 - Fichiers TUTSIM

Modèle utilisé pour l'intégration numérique du système à 2 d.d.l.
par le logiciel TUTSIM

Fichier STAT2DL.SIM

```
1    TIM                                  ;temps
2    CON      P1=0.0000                   ;Freq. excitation
3    CON      P1=0.407298                 ;Xj
5    CON      P1=0.8231820                ;Nyt
6    CON      P1=5.84                     ;P_v^v
7    CON      P1=0.0000                   ;P_v^j
8    CON      P1=0.0000                   ;P_j^v
9    CON      P1=52.5600                  ;P_j^j
10   CON      P1=0.0763108                ;Cv
11   CON      P1=26.2365                  ;Kt_v^v
12   CON      P1=-11.6893                 ;Kt_v^j
13   CON      P1=9.5633                   ;M_v^vvv
14   CON      P1=-28.6731                 ;M_v^iii
15   CON      P1=-73.7364                 ;G_v^vvj
16   CON      P1=144.5730                 ;G_v^vii
17   CON      P1=-73.7364                 ;H_v^vii
18   CON      P1=-86.0193                 ;H_v^iii
19   CON      P1=289.1460                 ;Hh_v^vii
20   CON      P1=0.2843120                ;Cj
21   CON      P1=-23.5045                 ;Kt_j^v
22   CON      P1=325.2820                 ;Kt_j^j
23   CON      P1=-14.5721                 ;M_j^vvv
24   CON      P1=132.0780                 ;M_j^iii
25   CON      P1=159.0090                 ;G_j^vvj
26   CON      P1=-261.2060                ;G_j^vii
27   CON      P1=159.0090                 ;H_j^jvv
28   CON      P1=396.2330                 ;H_j^iii
29   CON      P1=-522.4120                ;Hh_j^vii
30   MUL  10  150
31   GAI  30  P1=2.000
32   MUL  11  151
33   MUL  12  251
34   MUL  151 151  151
35   MUL  13  34
36   MUL  251 251  251
37   MUL  14  36
```

```
38    MUL  151   151   251
39    MUL  15    38
40    MUL  151   251   251
41    MUL  16    40
42    MUL  151   151   3
43    MUL  17    42
44    MUL  251   251   3
45    MUL  18    44
46    MUL  151   251
47    MUL  19    46
48    MUL  6     151
49    SUM  3     251
50    MUL  7     49
51    SUM  48    50
52    MUL  1     2                                        ;teta
53    COS  52                                             ;cos(teta)
54    MUL  5     53
55    MUL  51    54
56    SUM  55    -31   -32   -33   -35   -37   -39   -41   -43   -45
      -47
60    MUL  20    250
61    GAI  60
62    MUL  21    151
63    MUL  22    251
64    MUL  151   151   151
65    MUL  23    64
66    MUL  251   251   251
67    MUL  24    66
68    MUL  151   151   251
69    MUL  25    68
70    MUL  151   251   251
71    MUL  26    70
72    MUL  151   151   3
73    MUL  27    72
74    MUL  251   251   3
75    MUL  28    74
76    MUL  151   251   3
77    MUL  29    76
78    MUL  8     151
79    SUM  3     251
80    MUL  9     79
81    SUM  78    80
82    MUL  2     1                                        ;teta
83    COS  82                                             ;cos(teta)
```

```
84      MUL  5      83
85      MUL  81     84
86      SUM  85     -61    -62    -63    -65    -67    -69    -71    -73    -75
        -77
150     INT  56             P1=0.0000                    ;dWv/dt
151     INT  150            P1=0.0000                    ;Wv
250     INT  86             P1=0.0000                    ;dWj/dt
251     INT  250            P1=0.0000                    ;Wj
```

### B.2.3 - Programme TURBO-PASCAL

```
{*********************************************************************}
{*                      Programme STAT2DL.PAS                        *}
{*     Permet d'élaborer une courbe de réponse en fréquence pour le  *}
{*     système à un degré de liberté avec le logiciel TUTSIM et le fichier *}
{*                          stat2dl.sim                              *}
{*********************************************************************}
{$M $4000,0,0 }
Program Stationnaire;
USES
  crt,dos;
CONST
  nbpts = 500; {calcule pour F.exc.min=5 et F.exc.max=100, deltat=0.005s}
  imax=trunc(nbpts/2)+1;
  pi=3.1416;
VAR
  i, j, ind                              : integer;
  W1, W2, dW1, dW2, cos                  : array[0..nbpts] of real;
  mod_amplitude, mod_vitesse, tutsimpath : string[40];
  freq, pas                              : real;
  freqinf, freqsup                       : real;
  pos_1, pos_2, vit_1, vit_2             : real;
  ecriture, conditions                   : text;
  nbiter                                 : integer;
  disque                                 : string[30];
  fichier_ci, fichier_temp, fichier_res  : string[40];
  a                                      : string[1];
  adjectif                               : string[10];
  montee, descente                       : char;
  resultats                              : text;
```

```
{*****************************************************************}
{*          Procedure qui debute le programme en fixant les parametres          *}
{*                          essentiels a son utilisation                        *}
{*****************************************************************}
Procedure Initialisation;
begin
  Clrscr;
  writeln('*************************************************************');
  writeln('*    SIMULATION DYNAMIQUE A L"AIDE DE TUTSIM                *');
  writeln('*          Systeme a 2DL, ou seulement l"amplitude positive  *');
  writeln('*          est consideree.   -   C.I.: Amplitudes et Vitesses *');
  writeln('*************************************************************');
  writeln('Entrez le nom du disque dans lequel peut etre enregistre des');
  writeln('    fichiers temporaires  (ex.: c:\)  ');
  write('---->');
  readln(disque);
  writeln('AMPLITUDE - Entrez le nom du fichier du modele Tutsim de l"E.D.M.
           utilise');
  write('---->');
  readln(mod_amplitude);
  writeln('VITESSE - Entrez le nom du fichier du modele Tutsim de l"E.D.M.
           utilise');
  write('---->');
  readln(mod_vitesse);
  writeln('Entrez le chemin pour acceder au fichier tutsim.exe');
  write('---->');
  readln(tutsimpath);
  writeln('Entrez le nom du fichier de sortie');
  write('---->');
  readln(fichier_res);
  writeln('Le logiciel stockera temporairement des donnees de resultats');
  writeln('intermediaires durant l"execution dans le fichier ',disque,'temp.res');
  writeln;
  writeln('Pressez une touche pour continuer');
  a:=readkey;
  Clrscr;
  writeln('*************************************************************');
  writeln('*                  Definition des frequences utilisees      *');
  writeln('*************************************************************');
  writeln('Entrez la frequence inferieure au dixieme pres');
  write('---->');
  readln(freqinf);
  writeln('Entrez la frequence superieure au dixieme pres');
  write('---->');
```

```
readln(freqsup);
writeln('Desirez-vous effectuer un balayage croissant des frequences (O/N) ?');
write('---->');
readln(montee);
writeln('Desirez vous effectuer un balayage decroissant des frequence (O/N) ?');
write('---->');
readln(descente);
writeln;
writeln(' DEFINITION DU PAS FREQUENTIEL : le pas frequentiel est ');
writeln('l''incrément de frequences qui sera utilisee entre 2 iterations');
writeln;
writeln('Entrez le pas frequentiel desire entre 2 iterations');
write('---->');
readln(pas);
montee:=Upcase(montee);
descente:=Upcase(descente);
if montee='O' then
  adjectif:='inferieure';
if montee='N' then
  adjectif:='superieure';
Clrscr;
writeln('*************************************************************');
writeln('*          DEFINITION DES CONDITIONS INTITIALES             *');
writeln('*************************************************************');
writeln('Entrez le deplacement initial ** W1 ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(pos_1);
writeln('Entrez le deplacement initial ** W2 ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(pos_2);
writeln('Entrez la vitesse initiale ** dW1/dt ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(vit_1);
writeln('Entrez la vitesse initiale ** dW2/dt ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(vit_2);
assign(ecriture,fichier_res);
rewrite(ecriture);
writeln(ecriture,'frequence  W1  W2    (*** EN AUGMENTANT F.EXC. ***)');
fichier_ci:=disque + 'ci.res';
fichier_temp:=disque + 'temp.res';
assign(conditions,fichier_ci);
rewrite(conditions);
append(conditions);
```

```
  writeln(conditions,'freq.    W1      W2      dW1      dW2');
  close(conditions);
  for i:=0 to nbpts do
    begin
      W1[i]:=0.0;
      W2[i]:=0.0;
      dW1[i]:=0.0;
      dW2[i]:=0.0;
      cos[i]:=0.0;
    end;
  nbiter:=trunc((freqsup-freqinf) / pas + 1);
  writeln;
  assign(resultats,fichier_temp);
  rewrite(resultats);
  close(resultats);
end;          {fin de la procedure initialisation}

{*********************************************************************}
{*     Procedure qui permet de determiner la vitesse dans Tutsim     *}
{*********************************************************************}
Procedure Iteration_vitesse_dans_Tutsim;
VAR
  param1, param2, param3                    : string[100];
  param                                     : string[200];
  freqst,ampli1st,ampli2st,vit1st,vit2st    : string[10];
begin
  Str(freq:0:3,freqst);
  Str(pos_1:0:5,ampli1st);
  Str(pos_2:0:5,ampli2st);
  Str(vit_1:0:5,vit1st);
  Str(vit_2:0:5,vit2st);
  param1:= '/d=0 /f='+mod_vitesse+' /a=sf,3 /w=0';
  param2:= '/o='+fichier_temp+' /c=2,1,'+freqst+' /c=151,1,'+ampli1st+'
           /c=251,1,'+ampli2st+";
  param3:= '/c=150,1,'+vit1st+' /c=250,1,'+vit2st;
  param:= param1 + param2 + param3;
  exec(tutsimpath,param);
end;          {fin de la procedure iteration vitesse dans tutsim}

{*********************************************************************}
{*          Procedure qui lit le fichier de sortie cree lors de la   *}
{*          simulation avec Tutsim visant a determiner une amplitude *}
{*********************************************************************}
Procedure Recherche_ci_amplitude_dans_Tutsim;
```

```
begin
  ind:=0;
  i:=0;
  while ind=0 do
    begin
      i:=i+1;
      if (cos[i-1] < cos[i]) and (cos[i] > cos[i+1]) then
        begin
          ind:=i;
          pos_1:=W1[i];
          pos_2:=W2[i];
        end;
    end;
end;            {fin de la procedure recherche amplitude dans tutsim}

{*********************************************************************}
{*              Procedure qui lit le fichier de sortie cree lors de la          *}
{*              simulation avec Tutsim visant a determiner une vitesse          *}
{*********************************************************************}
Procedure Recherche_ci_vitesse_dans_Tutsim;
VAR
  sigle         : char;
  abscisse      : real;
begin
  reset(resultats);
  repeat
    readln(resultats,sigle);
  until sigle <> '=';
  for i:=0 to nbpts do
    begin
      readln(resultats,abscisse,dW1[i],dW2[i],cos[i]);
    end;
  writeln(' ******* Lecture de ',fichier_temp,' terminee *******');
  writeln;
  erase(resultats);
  ind:=0;
  i:=0;
  while ind=0 do
    begin
      i:=i+1;
      if (cos[i-1] < cos[i]) and (cos[i] > cos[i+1]) then
        begin
          ind:=i;
          vit_1:=dW1[i];
```

```
          vit_2:=dW2[i];
        end;
      end;
end;            {fin de la procedure recherche vitesse dans tutsim}

{*********************************************************************}
{*      Procedure qui recherche les conditions initiales necessaires pour      *}
{*                    une simulation subsequente dans Tutsim                   *}
{*********************************************************************}
Procedure Conditions_initiales;
VAR freqci     : real;
begin
  freqci:=freq+pas;
  append(conditions);
  writeln(conditions,freqci:5:5,'  ',pos_1:5:5,' ',pos_2:5:5,' ',vit_1:5:5,' ',vit_2:5:5);
  close(conditions);
end;            {fin de la procedure conditions initiales}

{*********************************************************************}
{*      Procedure qui permet d'effectuer une simulation dans Tutsim, et ce     *}
{*              en utilisant les C.I. determinee precedemment                  *}
{*********************************************************************}
Procedure Iteration_dans_Tutsim;
VAR
  param1, param2, param3                    : string[100];
  param                                     : string[200];
  freqst,ampli1st,ampli2st,vit1st,vit2st    : string[10];
begin
  Str(freq:0:3,freqst);
  Str(pos_1:0:5,ampli1st);
  Str(pos_2:0:5,ampli2st);
  Str(vit_1:0:5,vit1st);
  Str(vit_2:0:5,vit2st);
  param1:= '/d=0 /f='+mod_amplitude+' /a=sf,3 /w=0';
  param2:= '/o='+fichier_temp+' /c=2,1,'+freqst+' /c=151,1,'+ampli1st+'
/c=251,1,'+ampli2st+";
  param3:= '/c=150,1,'+vit1st+' /c=250,1,'+vit2st;
  param:= param1 + param2 + param3;
  exec(tutsimpath,param);
end;            {fin de la procedure iteration dans tutsim}
```

```
{*****************************************************************}
{*          Procedure qui lit le fichier de sortie cree lors d'une          *}
{*                          simulation avec Tutsim                          *}
{*****************************************************************}
Procedure Lecture_dans_Tutsim;
VAR
  sigle        : char;
  abscisse     : real;
begin
  reset(resultats);
  repeat
    readln(resultats,sigle);
  until sigle <> '=';
  for i:=0 to nbpts do
    begin
      readln(resultats,abscisse,W1[i],W2[i],cos[i]);
    end;
  writeln(' ******* Lecture de ',fichier_temp,' terminee *******');
  writeln;
  erase(resultats);
end;          {fin de la procedure lecture dans tutsim}

{*****************************************************************}
{*          Procedure qui recherche l'amplitude maximale du signal          *}
{*          temporel obtenu lors d'une simulation avec Tutsim et            *}
{*     qui fait une distinction entre l'amplitude du mouvement neg. et pos.  *}
{*****************************************************************}
Procedure Recherche_Amplitude;
VAR
  ampl_1,ampl_2     :  real;
begin
  ampl_1:= 0.0;
  ampl_2:= 0.0;
{ ********** Recherche des amplitudes positives seulement **********}
  for i:=0 to nbpts do
    begin
      if W1[i] > ampl_1 then
        ampl_1:=W1[i];
      if W2[i] > ampl_2 then
        ampl_2:=W2[i];
    end;
  append(ecriture);
  writeln(ecriture,freq:8:3,' ',ampl_1:10:5,' ',ampl_2:10:5);
  close(ecriture);
```

```
end;            {fin de la procedure recherche amplitude2}

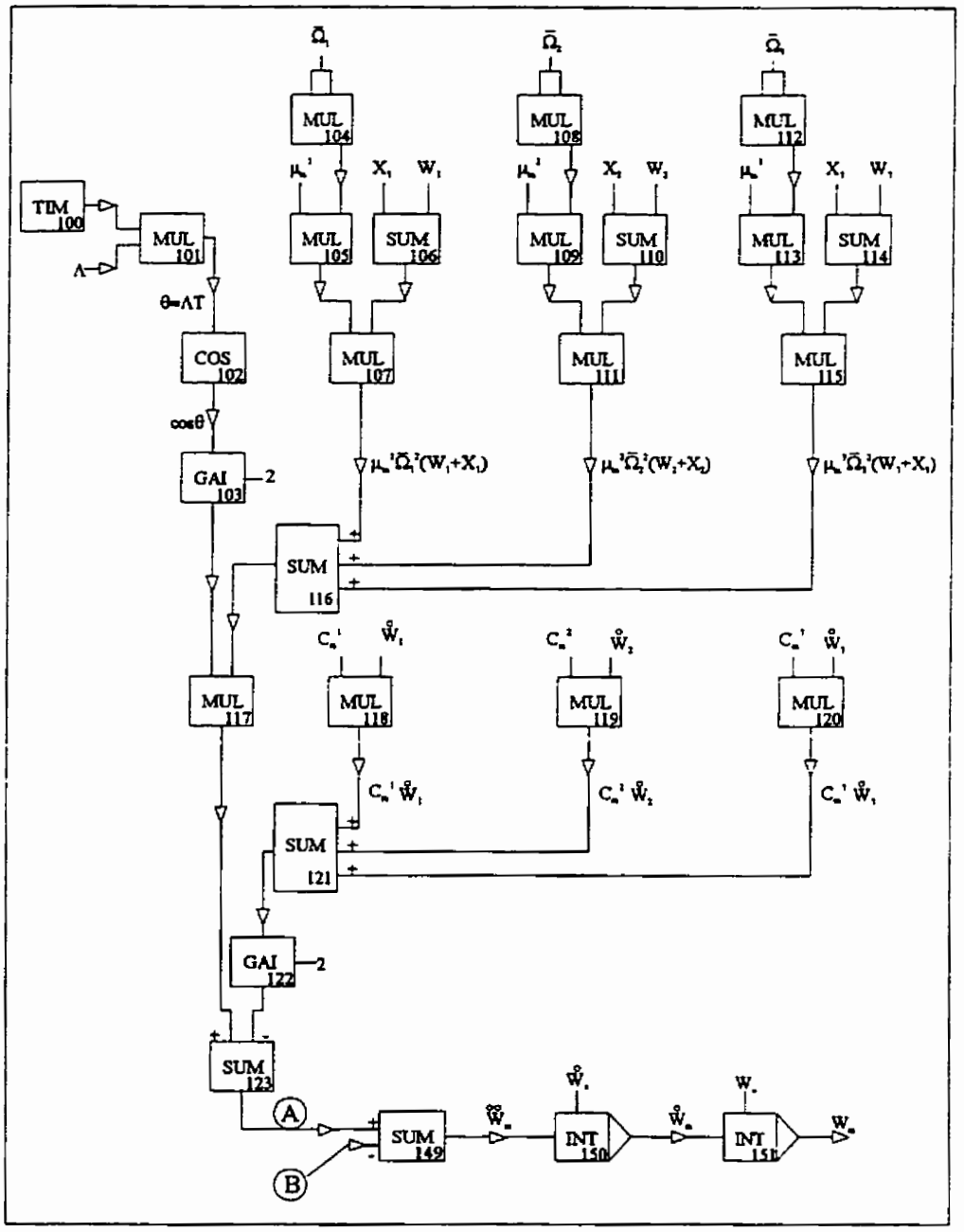
{*****************************************************************}
{*              Procedure qui affiche la frequence a laquelle    *}
{*                    est rendue la boucle iterative             *}
{*****************************************************************}
Procedure Affichage;
begin
  writeln;
  writeln('*************************************************');
  writeln('  Le prochain calcul est effectue pour F.exc. = ',freq:2:2);
  writeln('*************************************************');
end;

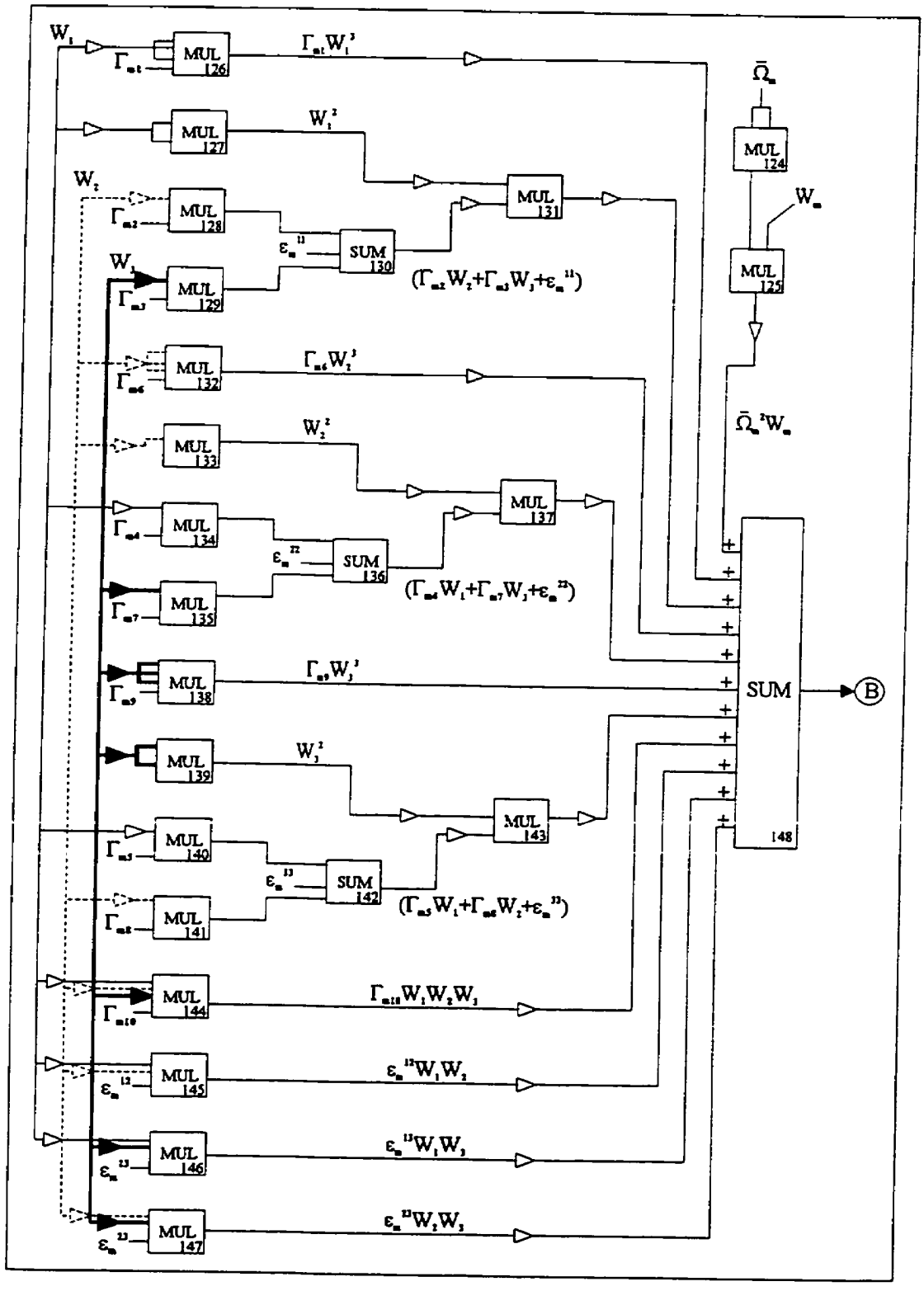
{*****************************************************************}
{*                      PROGRAMME PRINCIPAL                      *}
{*****************************************************************}
BEGIN
  Initialisation;
  if montee='O' then
    begin
      Clrscr;
      writeln('*************************************************');
      writeln('*        Elaboration de la courbe de reponse en frequence      *');
      writeln('*              en augmentant la frequence d"excitation         *');
      writeln('*************************************************');
      freq:=freqinf;
      for j:=1 to nbiter do
        begin
          Affichage;
          Iteration_dans_Tutsim;
          Lecture_dans_Tutsim;
          Recherche_Amplitude;
          Recherche_ci_amplitude_dans_Tutsim;
          Iteration_vitesse_dans_Tutsim;
          Recherche_ci_vitesse_dans_Tutsim;
          Conditions_Initiales;
          freq:=freq + pas;
        end;
    end;
  if descente='O' then
    begin
      Clrscr;
      writeln('*************************************************');
```

```
        writeln('*          Elaboration de la courbe de reponse en frequence          *');
        writeln('*                en diminuant la frequence d"excitation              *');
        writeln('*************************************************************');
        freq:=freqsup;
    if montee='O' then
      begin
        pos_1:=0;
        pos_2:=0;
        vit_1:=0;
        vit_2:=0;
      end;
        append(ecriture);
        writeln(ecriture,'frequence   W1   W2    (*** EN DIMINUANT F.EXC. ***)');
        close(ecriture);
        for j:=1 to nbiter do
          begin
            Affichage;
            Iteration_dans_Tutsim;
            Lecture_dans_Tutsim;
            Recherche_Amplitude;
            Recherche_ci_amplitude_dans_Tutsim;
            Iteration_vitesse_dans_Tutsim;
            Recherche_ci_vitesse_dans_Tutsim;
            Conditions_Initiales;
            freq:=freq - pas;
          end;
    end;
END.
```

## B.3 - SYSTÈME À TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ

### B.3.1 - Diagramme fonctionnel




MUL 126
MUL 127
MUL 128
MUL 129
SUM 130
MUL 131
MUL 132
MUL 133
MUL 134
MUL 135
SUM 136
MUL 137
MUL 138
MUL 139
MUL 140
MUL 141
SUM 142
MUL 143
MUL 144
MUL 145
MUL 146
MUL 147
MUL 124
MUL 125
SUM
148
B

### B.3.2 - Fichiers TUTSIM

Modèle utilisé pour l'intégration numérique du système à 3 d.d.l.
par le logiciel TUTSIM

Fichier STAT3DL.SIM

```
1 CON      P1= 21.5000      ;Frequence d'excitation
2 CON      P1=  3.3458      ;Ω1
3 CON      P1=  5.3073      ;Ω2
4 CON      P1= 10.1461      ;Ω3
5 CON      P1=-60.000E-06   ;X-1
6 CON      P1= 0.2399500    ;X-2
7 CON      P1=240.000E-06   ;X-3
10 CON     P1= 0.1257200    ;mu-11
11 CON     P1= 60.000E-06   ;mu-12
12 CON     P1=-20.000E-06   ;mu-13
13 CON     P1=0.0535250     ;C-11
14 CON     P1=-10.000E-06   ;C-12
15 CON     P1= 20.000E-06   ;C-13
16 CON     P1=-0.0317224    ;e-111
17 CON     P1=-0.0785105    ;e-122
18 CON     P1=-0.0923491    ;e-133
19 CON     P1= 0.1507030    ;e-112
20 CON     P1= 0.0194767    ;e-113
21 CON     P1= 0.1333380    ;e-123
22 CON     P1= 0.0268515    ;g-11
23 CON     P1=-0.1096880    ;g-12
24 CON     P1=-0.2095100    ;g-13
25 CON     P1= 0.2379200    ;g-14
26 CON     P1= 0.6638640    ;g-15
27 CON     P1=-0.1091510    ;g-16
28 CON     P1= 0.2776630    ;g-17
29 CON     P1=-0.1589430    ;g-18
30 CON     P1=-0.1318620    ;g-19
31 CON     P1=-0.0076041    ;g-110
40 CON     P1=270.000E-06   ;mu-21
41 CON     P1= 0.1998600    ;mu-22
42 CON     P1=110.000E-06   ;mu-23
43 CON     P1=-10.000E-06   ;C-21
44 CON     P1= 0.0844700    ;C-22
45 CON     P1=-70.000E-06   ;C-23
46 CON     P1= 0.0521392    ;e-211
```

```
47 CON          P1= 0.0920430          ;e-222
48 CON          P1= 0.0971986          ;e-233
49 CON          P1=-0.1729260          ;e-212
50 CON          P1= 0.1054310          ;e-213
51 CON          P1=-0.1492210          ;e-223
52 CON          P1=-0.0365657          ;g-21
53 CON          P1= 0.2379380          ;g-22
54 CON          P1=-0.0037777          ;g-23
55 CON          P1=-0.3274470          ;g-24
56 CON          P1=-0.1589870          ;g-25
57 CON          P1= 0.1279780          ;g-26
58 CON          P1=-0.3421790          ;g-27
59 CON          P1= 0.4123270          ;g-28
60 CON          P1=-0.2055560          ;g-29
61 CON          P1= 0.5552680          ;g-210
70 CON          P1=-150.000E-06        ;mu-31
71 CON          P1= 160.000E-06        ;mu-32
72 CON          P1= 0.1230500          ;mu-33
73 CON          P1= 20.000E-06         ;C-31
74 CON          P1=-80.000E-06         ;C-32
75 CON          P1= 0.1614800          ;C-33
76 CON          P1=-0.0115711          ;e-311
77 CON          P1=-0.0819845          ;e-322
78 CON          P1=-0.1209770          ;e-333
79 CON          P1= 0.1643640          ;e-312
80 CON          P1=-0.0560521          ;e-313
81 CON          P1= 0.1684210          ;e-323
82 CON          P1=-0.0698286          ;g-31
83 CON          P1=-0.0037847          ;g-32
84 CON          P1= 0.6638710          ;g-33
85 CON          P1= 0.2776520          ;g-34
86 CON          P1=-0.3956850          ;g-35
87 CON          P1=-0.1140580          ;g-36
88 CON          P1= 0.4123140          ;g-37
89 CON          P1=-0.6167150          ;g-38
90 CON          P1= 0.3949660          ;g-39
91 CON          P1=-0.3179140          ;g-310
99 REM                                 ;Déf. de l'équation pour W1
100 TIM                                ;t
101 MUL    1                           ;θ
102 COS    101                         ;cos θ
103 GAI    102                         ;2 cos θ
104 MUL    2       2                   ;Ω1^2
```

```
105 MUL   10    104                    ;Ω1^2 * mu-11
106 SUM   5     151                    ;X-1 + W1
107 MUL   105   106
108 MUL   3     3                      ;Ω2^2
109 MUL   11    108                    ;Ω2^2 * mu-12
110 SUM   6     251                    ;X-2 + W2
111 MUL   109   110
112 MUL   4     4                      ;Ω3^2
113 MUL   12    112                    ; Ω3^2 * mu-13
114 SUM   7     351                    ;X-3 + W3
115 MUL   113   114
116 SUM   107   111   115
117 MUL   103   118
118 MUL   13    150                    ;C-11 * dW1/dt
119 MUL   14    250                    ;C-12 * dW2/dt
120 MUL   15    350                    ;C-13 * dW3/dt
121 SUM   118   119   120
122 GAI   121         P1= 2.0000
123 SUM   117   -122                   ;Somme A1
124 MUL   2     2                      ;Ω1^2
125 MUL   151   124                    ;Ω1^2 * W1
126 MUL   22    151   151    151       ;g-11 * W1^3
127 MUL   151   151                    ;W1^2
128 MUL   23    251                    ;g-12 * W2
129 MUL   24    351                    ;g-13 * W3
130 SUM   128   129   16
131 MUL   127   130
132 MUL   251   251   251    27        ;g-16 * W2^3
133 MUL   251   251                    ;W2^2
134 MUL   25    151                    ;g-14 * W1
135 MUL   28    351                    ;g-17 * W3
136 SUM   134   135   17
137 MUL   133   136
138 MUL   30    351   351    351       ;W3^3 * g-19
139 MUL   351   351                    ;W3^2
140 MUL   26    151                    ;g-15 * W1
141 MUL   29    251                    ;g-18 * W2
142 SUM   140   141   18
143 MUL   139   142
144 MUL   31    151   251    351       ;g-110 * W1 * W2 * W3
145 MUL   19    151   251              ;e-112 * W1 * W2
146 MUL   20    151   351              ;e-113 * W1 * W3
147 MUL   21    251   351              ;e-123 * W2 * W3
```

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 148 SUM | 125 | 126 | 131 | 132 | 137 | 138 | 143 | 144 | 145 | 146 |
| | 147 | | | | | | ;Somme B1 | | | |
| 149 SUM | 123 | -148 | | | | | ;$d^2W_1 / dt^2$ | | | |
| 150 INT | | 149 | | P1= 0.0000 | | | ;$dW_1/dt$ | | | |
| 151 INT | | 150 | | P1= 0.0000 | | | ;$W_1$ | | | |
| 199 | | | | | | | ;Déf de l'éq. pour $W_2$ | | | |
| 205 MUL | 40 | 104 | | | | | ;$\Omega_1^2$ * mu-21 | | | |
| 207 MUL | 205 | 106 | | | | | | | | |
| 209 MUL | 41 | 108 | | | | | ;$\Omega_2^2$ * mu-22 | | | |
| 211 MUL | 209 | 110 | | | | | | | | |
| 213 MUL | 42 | 112 | | | | | ; $W_3^2$ * mu-23 | | | |
| 215 MUL | 114 | 213 | | | | | | | | |
| 216 SUM | 207 | 211 | 215 | | | | | | | |
| 217 MUL | 216 | 103 | | | | | | | | |
| 218 MUL | 43 | 150 | | | | | ;C-21 * $dW_1/dt$ | | | |
| 219 MUL | 44 | 250 | | | | | ;C-22 * $dW_2/dt$ | | | |
| 220 MUL | 45 | 350 | | | | | ;C-23 * $dW_3/dt$ | | | |
| 221 SUM | 218 | 219 | 220 | | | | | | | |
| 222 GAI | 221 | | P1= 2.0000 | | | | | | | |
| 223 SUM | 217 | -222 | | | | | ;Somme A2 | | | |
| 224 MUL | 3 | 3 | | | | | ;$\Omega_2^2$ | | | |
| 225 MUL | 251 | 224 | | | | | ;$\Omega_2^2$ * $W_2$ | | | |
| 226 MUL | 52 | 151 | 151 | 151 | | | ;g-21 * $W_1^3$ | | | |
| 227 MUL | 151 | 151 | | | | | ;$W_1^2$ | | | |
| 228 MUL | 53 | 251 | | | | | ;g-22 * $W_2$ | | | |
| 229 MUL | 54 | 351 | | | | | ;g-23 * $W_3$ | | | |
| 230 SUM | 228 | 229 | 46 | | | | | | | |
| 231 MUL | 227 | 230 | | | | | | | | |
| 232 MUL | 251 | 251 | 251 | 57 | | | ;g-26 * $W_2^3$ | | | |
| 233 MUL | 251 | 251 | | | | | ;$W_2^2$ | | | |
| 234 MUL | 55 | 151 | | | | | ;g-24 * $W_1$ | | | |
| 235 MUL | 58 | 351 | | | | | ;g-27 * $W_3$ | | | |
| 236 SUM | 234 | 235 | 47 | | | | | | | |
| 237 MUL | 233 | 236 | | | | | | | | |
| 238 MUL | 60 | 351 | 351 | 351 | | | ;g-29 * $W_3^3$ | | | |
| 239 MUL | 351 | 351 | | | | | ;$W_3^2$ | | | |
| 240 MUL | 56 | 151 | | | | | ;g-25 * $W_1$ | | | |
| 241 MUL | 59 | 251 | | | | | ;g-28 * $W_2$ | | | |
| 242 SUM | 240 | 241 | 48 | | | | | | | |
| 243 MUL | 239 | 242 | | | | | | | | |
| 244 MUL | 61 | 151 | 251 | 351 | | | ;g-210 * $W_1$ * $W_2$ * $W_3$ | | | |
| 245 MUL | 49 | 151 | 251 | | | | ;e-212 * $W_1$ * $W_2$ | | | |
| 246 MUL | 50 | 151 | 351 | | | | ;e-213 * $W_1$ * $W_3$ | | | |
| 247 MUL | 51 | 251 | 351 | | | | ;e-223 * $W_2$ * $W_3$ | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 248 SUM | 225 247 | 226 | 231 | 232 | 237 | 238 | 243 | 244 | 245 | 246 |
| | | | | | | | ;Somme B2 | | | |
| 249 SUM | 223 | -248 | | | | | ;$d^2 W_2/dt^2$ | | | |
| 250 INT | 249 | | P1= 0.0000 | | | | ;$dW_2/dt$ | | | |
| 251 INT | 250 | | P1= 0.0000 | | | | ;$W_2$ | | | |
| 299 | | | | | | | ;Déf. de l'éq. pour $W_3$ | | | |
| 305 MUL | 70 | 104 | | | | | ;$\Omega_1^2$ * mu-31 | | | |
| 307 MUL | 106 | 305 | | | | | | | | |
| 309 MUL | 71 | 108 | | | | | ;$\Omega_2^2$ * mu-32 | | | |
| 311 MUL | 309 | 110 | | | | | | | | |
| 313 MUL | 72 | 112 | | | | | ; $\Omega_3^2$ * mu-33 | | | |
| 315 MUL | 114 | 313 | | | | | | | | |
| 316 SUM | 307 | 311 | 315 | | | | | | | |
| 317 MUL | 103 | 316 | | | | | | | | |
| 318 MUL | 73 | 150 | | | | | ;C-31 * $dW_1/dt$ | | | |
| 319 MUL | 74 | 250 | | | | | ;C-32 * $dW_2/dt$ | | | |
| 320 MUL | 75 | 350 | | | | | ;C-33 * $dW_3/dt$ | | | |
| 321 SUM | 318 | 319 | 320 | | | | | | | |
| 322 GAI | 321 | | P1= 2.0000 | | | | | | | |
| 323 SUM | 317 | -322 | | | | | ;Somme A3 | | | |
| 324 MUL | 4 | 4 | | | | | ;$\Omega_3^2$ | | | |
| 325 MUL | 351 | 324 | | | | | ;$\Omega_3^2$ * $W_3$ | | | |
| 326 MUL | 82 | 151 | 151 | 151 | | | ;g-31 * $W_1^3$ | | | |
| 327 MUL | 151 | 151 | | | | | ;$W_1^2$ | | | |
| 328 MUL | 83 | 251 | | | | | ;g-32 * $W_2$ | | | |
| 329 MUL | 84 | 351 | | | | | ;g-33 * $W_3$ | | | |
| 330 SUM | 328 | 329 | 76 | | | | | | | |
| 331 MUL | 327 | 330 | | | | | | | | |
| 332 MUL | 251 | 251 | 251 | 87 | | | ;g-36 * $W_2^3$ | | | |
| 333 MUL | 251 | 251 | | | | | ;$W_2^2$ | | | |
| 334 MUL | 85 | 151 | | | | | ;g-34 * $W_1$ | | | |
| 335 MUL | 88 | 351 | | | | | ;g-37 * $W_3$ | | | |
| 336 SUM | 334 | 335 | 77 | | | | | | | |
| 337 MUL | 333 | 336 | | | | | | | | |
| 338 MUL | 90 | 351 | 351 | 351 | | | ;g-39 * $W_3^3$ | | | |
| 339 MUL | 351 | 351 | | | | | ;$W_3^2$ | | | |
| 340 MUL | 86 | 151 | | | | | ;g-35 * $W_1$ | | | |
| 341 MUL | 89 | 251 | | | | | ;g-38 * $W_2$ | | | |
| 342 SUM | 340 | 341 | 78 | | | | | | | |
| 343 MUL | 339 | 342 | | | | | | | | |
| 344 MUL | 91 | 151 | 251 | 351 | | | ;g-310 * $W_1$ * $W_2$ * $W_3$ | | | |
| 345 MUL | 79 | 151 | 251 | | | | ;e-312 * $W_1$ * $W_2$ | | | |
| 346 MUL | 80 | 151 | 351 | | | | ;e-313 * $W_1$ * $W_3$ | | | |

```
347 MUL     81    251   351                                  ;e-323 * W2 * W3
348 SUM     325   326   331   332   337   338   343   344   345   346
            347                                              ;Somme B3
349 SUM     323   -348                                       ;d²W3/dt²
350 INT     349         P1= 0.0000                           ;dW3/dt
351 INT     350         P1= 0.0000                           ;W3
```

### B.3.3 - Programme TURBO-PASCAL

```
{*********************************************************************}
{*                      Programme STAT3DL.PAS                        *}
{*     Permet d'élaborer une courbe de réponse en fréquence pour le   *}
{*     système à un degré de liberté avec le logiciel TUTSIM et le fichier *}
{*                          stat3dl.sim                              *}
{*********************************************************************}
{$M $4000,0,0 }
Program Stationnaire;
USES
  crt,dos;
CONST
  nbpts = 500; {calcule pour F.exc.min=5 et F.exc.max=100, deltat=0.005s}
  imax=trunc(nbpts/2)+1;
  pi=3.1416;
VAR
  i, j, ind                                  : integer;
  W1, W2, W3, dW1, dW2, dW3, cos             : array[0..nbpts] of real;
  mod_amplitude, mod_vitesse, tutsimpath     : string[40];
  freq, pas                                  : real;
  freqinf, freqsup                           : real;
  pos_1, pos_2, pos_3, vit_1, vit_2, vit_3   : real;
  ecriture, conditions                       : text;
  nbiter                                     : integer;
  disque                                     : string[30];
  fichier_ci, fichier_temp, fichier_res      : string[40];
  a                                          : string[1];
  adjectif                                   : string[10];
  montee, descente                           : char;
  resultats                                  : text;
{*********************************************************************}
{*          Procedure qui debute le programme en fixant les parametres *}
{*                      essentiels a son utilisation                   *}
{*********************************************************************}
```

```
Procedure Initialisation;
begin
  Clrscr;
  writeln('*************************************************************');
  writeln('*        SIMULATION DYNAMIQUE A L"AIDE DE TUTSIM            *');
  writeln('*             Systeme a 3DL, ou seulement l"amplitude positive est  *');
  writeln('*        est consideree.   -   C.I.: Amplitudes et Vitesses  *');
  writeln('*************************************************************');
  writeln('Entrez le nom du disque dans lequel peut etre enregistre des');
  writeln('    fichiers temporaires  (ex.: c:\)  ');
  write('---->');
  readln(disque);
  writeln('AMPLITUDE - Entrez le nom du fichier du modele Tutsim de l"E.D.M.
              utilise');
  write('---->');
  readln(mod_amplitude);
  writeln('VITESSE - Entrez le nom du fichier du modele Tutsim de l"E.D.M.
              utilise');
  write('---->');
  readln(mod_vitesse);
  writeln('Entrez le chemin pour acceder au fichier tutsim.exe');
  write('---->');
  readln(tutsimpath);
  writeln('Entrez le nom du fichier de sortie');
  write('---->');
  readln(fichier_res);
  writeln('Le logiciel stockera temporairement des donnees de resultats');
  writeln('intermediaires durant l"execution dans le fichier ',disque,'temp.res');
  writeln;
  writeln('Pressez une touche pour continuer');
  a:=readkey;
  Clrscr;
  writeln('*************************************************************');
  writeln('*                Definition des frequences utilisees        *');
  writeln('*************************************************************');
  writeln('Entrez la frequence inferieure au dixieme pres');
  write('---->');
  readln(freqinf);
  writeln('Entrez la frequence superieure au dixieme pres');
  write('---->');
  readln(freqsup);
  writeln('Desirez-vous effectuer un balayage croissant des frequences (O/N) ?');
  write('---->');
  readln(montee);
```

```
writeln('Desirez vous effectuer un balayage decroissant des frequence (O/N) ?');
write('---->');
readln(descente);
writeln;
writeln(' DEFINITION DU PAS FREQUENTIEL : le pas frequentiel est ');
writeln('l''increment de frequences qui sera utilisee entre 2 iterations');
writeln;
writeln('Entrez le pas frequentiel desire entre 2 iterations');
write('---->');
readln(pas);
montee:=Upcase(montee);
descente:=Upcase(descente);
if montee='O' then
  adjectif:='inferieure';
if montee='N' then
  adjectif:='superieure';
Clrscr;
writeln('*************************************************************');
writeln('*              DEFINITION DES CONDITIONS INITIALES          *');
writeln('*************************************************************');
writeln('Entrez le deplacement initial ** W1 ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(pos_1);
writeln('Entrez le deplacement initial ** W2 ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(pos_2);
writeln('Entrez le deplacement initial ** W3 ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(pos_3);
writeln('Entrez la vitesse initiale ** dW1/dt ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(vit_1);
writeln('Entrez la vitesse initiale ** dW2/dt ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(vit_2);
writeln('Entrez la vitesse initiale ** dW3/dt ** pour la frequence ',adjectif);
write('---->');
readln(vit_3);

assign(ecriture,fichier_res);
rewrite(ecriture);
writeln(ecriture,'frequence  W1 W2  W3  (*** EN AUGMENTANT F.EXC. ***)');
fichier_ci:=disque + 'ci.res';
fichier_temp:=disque + 'temp.res';
```

```
    assign(conditions,fichier_ci);
    rewrite(conditions);
    append(conditions);
    writeln(conditions,'freq.    W1      W2      W3      dW1     dW2     dW3');
    close(conditions);
    for i:=0 to nbpts do
      begin
        W1[i]:=0.0;
        W2[i]:=0.0;
        W3[i]:=0.0;
        dW1[i]:=0.0;
        dW2[i]:=0.0;
        dW3[i]:=0.0;
        cos[i]:=0.0;
      end;
    nbiter:=trunc((freqsup-freqinf) / pas + 1);
    writeln;
    assign(resultats,fichier_temp);
    rewrite(resultats);
    close(resultats);
end;            {fin de la procedure initialisation}
{*****************************************************************}
{*          Procedure qui permet de determiner la vitesse dans Tutsim          *}
{*****************************************************************}
Procedure Iteration_vitesse_dans_Tutsim;
VAR
  param1, param2, param3                    : string[100];
  param                                     : string[200];
  freqst,ampli1st,ampli2st,ampli3st,vit1st,vit2st,vit3st : string[10];
begin
  Str(freq:0:3,freqst);
  Str(pos_1:0:5,ampli1st);
  Str(pos_2:0:5,ampli2st);
  Str(pos_3:0:5,ampli3st);
  Str(vit_1:0:5,vit1st);
  Str(vit_2:0:5,vit2st);
  Str(vit_3:0:5,vit3st);
  param1:= '/d=0 /f='+mod_vitesse+' /a=sf,3 /w=0';
  param2:= '/o='+fichier_temp+' /c=1,1,'+freqst+' /c=151,1,'+ampli1st+'
/c=251,1,'+ampli2st+";
  param3:= '/c=351,1,'+ampli3st+' /c=150,1,'+vit1st+' /c=250,1,'+vit2st+'
/c=350,1,'+vit3st;
  param:= param1 + param2 + param3;
  exec(tutsimpath,param);
```

```
end;            {fin de la procedure iteration vitesse dans tutsim}
{*****************************************************************}
{*                    Procedure qui lit le fichier de sortie cree lors de la     *}
{*           simulation avec Tutsim visant a determiner une amplitude            *}
{*****************************************************************}
Procedure Recherche_ci_amplitude_dans_Tutsim;
begin
  ind:=0;
  i:=0;
  while ind=0 do
    begin
     i:=i+1;
     if (cos[i-1] < cos[i]) and (cos[i] > cos[i+1]) then
       begin
         ind:=i;
         pos_1:=W1[i];
         pos_2:=W2[i];
         pos_3:=W3[i];
       end;
    end;
end;            {fin de la procedure recherche amplitude dans tutsim}
{*****************************************************************}
{*                    Procedure qui lit le fichier de sortie cree lors de la     *}
{*              simulation avec Tutsim visant a determiner une vitesse           *}
{*****************************************************************}
Procedure Recherche_ci_vitesse_dans_Tutsim;
VAR
  sigle       :     char;
  abscisse    :     real;
begin
  reset(resultats);
  repeat
    readln(resultats,sigle);
  until sigle <> '=';
  for i:=0 to nbpts do
    begin
      readln(resultats,abscisse,dW1[i],dW2[i],dW3[i],cos[i]);
    end;
  writeln(' ******* Lecture de ',fichier_temp,' terminee *******');
  writeln;
  erase(resultats);
  ind:=0;
  i:=0;
  while ind=0 do
```

```
    begin
     i:=i+1;
     if (cos[i-1] < cos[i]) and (cos[i] > cos[i+1]) then
       begin
         ind:=i;
         vit_1:=dW1[i];
         vit_2:=dW2[i];
         vit_3:=dW3[i];
       end;
    end;
end;            {fin de la procedure recherche vitesse dans tutsim}


{*********************************************************************}
{*        Procedure qui recherche les conditions initiales necessaires pour        *}
{*                        une simulation subsequente dans Tutsim                   *}
{*********************************************************************}
Procedure Conditions_initiales;
VAR  freqci  :  real;
begin
  freqci:=freq+pas;
  append(conditions);
  writeln(conditions,freqci:5:5,'  ',pos_1:5:5,' ',pos_2:5:5,' ',pos_3:5:5,'  ',vit_1:5:5,'
              ',vit_2:5:5,' ',vit_3:5:5);
  close(conditions);
end;            {fin de la procedure conditions initiales}

{*********************************************************************}
{*      Procedure qui permet d'effectuer une simulation dans Tutsim, et ce        *}
{*              en utilisant les C.I. determinee precedemment                    *}
{*********************************************************************}
Procedure Iteration_dans_Tutsim;
VAR
  param1, param2, param3                                    : string[100];
  param                                                     : string[200];
  freqst,ampli1st,ampli2st,ampli3st,vit1st,vit2st,vit3st    : string[10];
begin
  Str(freq:0:3,freqst);
  Str(pos_1:0:5,ampli1st);
  Str(pos_2:0:5,ampli2st);
  Str(pos_3:0:5,ampli3st);
  Str(vit_1:0:5,vit1st);
  Str(vit_2:0:5,vit2st);
  Str(vit_3:0:5,vit3st);
```

```
   param1:= '/d=0 /f='+mod_amplitude+' /a=sf,3 /w=0';
   param2:= '/o='+fichier_temp+' /c=1,1,'+freqst+' /c=151,1,'+ampli1st+'
                /c=251,1,'+ampli2st+";
   param3:= '/c=351,1,'+ampli3st+' /c=150,1,'+vit1st+' /c=250,1,'+vit2st+'
                /c=350,1,'+vit3st;
   param:= param1 + param2 + param3;
   exec(tutsimpath,param);
end;            {fin de la procedure iteration dans tutsim}

{*********************************************************************}
{*                  Procedure qui lit le fichier de sortie cree lors d'une          *}
{*                              simulation avec Tutsim                              *}
{*********************************************************************}
Procedure Lecture_dans_Tutsim;
VAR
  sigle      :      char;
  abscisse   :      real;
begin
  reset(resultats);
  repeat
    readln(resultats,sigle);
  until sigle <> '=';
  for i:=0 to nbpts do
    begin
      readln(resultats,abscisse,W1[i],W2[i],W3[i],cos[i]);
    end;
  writeln(' ******* Lecture de ',fichier_temp,' terminee *******');
  writeln;
  erase(resultats);
end;            {fin de la procedure lecture dans tutsim}

{*********************************************************************}
{*            Procedure qui recherche l'amplitude maximale du signal             *}
{*              temporel obtenu lors d'une simulation avec Tutsim et             *}
{*        qui fait une distinction entre l'amplitude du mouvement neg. et pos.   *}
{*********************************************************************}
Procedure Recherche_Amplitude;
VAR   ampl_1,ampl_2,ampl_3 :  real;
begin
  ampl_1:= 0.0;
  ampl_2:= 0.0;
  ampl_3:= 0.0;
{ ********** Recherche des amplitudes positives seulement ************}
  for i:=0 to nbpts do
```

```
      begin
        if W1[i] > ampl_1 then
          ampl_1:=W1[i];
        if W2[i] > ampl_2 then
          ampl_2:=W2[i];
        if W3[i] > ampl_3 then
          ampl_3:=W3[i];
      end;
    append(ecriture);
    writeln(ecriture,freq:8:3,' ',ampl_1:10:5,' ',ampl_2:10:5,' ',ampl_3:10:5);
    close(ecriture);
  end;              {fin de la procedure recherche amplitude2}

{*****************************************************************}
{*                  Procedure qui affiche la frequence a laquelle                *}
{*                        est rendue la boucle iterative                         *}
{*****************************************************************}
Procedure Affichage;
begin
  writeln;
  writeln('*************************************************************');
  writeln('  Le prochain calcul est effectue pour F.exc. = ',freq:2:2);
  writeln('*************************************************************');
end;

{*****************************************************************}
{*                      PROGRAMME PRINCIPAL                                  *}
{*****************************************************************}
BEGIN
  Initialisation;
  if montee='O' then
    begin
      Clrscr;
      writeln('*********************************************************');
      writeln('*         Elaboration de la courbe de reponse en frequence          *');
      writeln('*                 en augmentant la frequence d"excitation           *');
      writeln('*********************************************************');
      freq:=freqinf;
      for j:=1 to nbiter do
        begin
          Affichage;
          Iteration_dans_Tutsim;
          Lecture_dans_Tutsim;
          Recherche_Amplitude;
```

```
                Recherche_ci_amplitude_dans_Tutsim;
                Iteration_vitesse_dans_Tutsim;
                Recherche_ci_vitesse_dans_Tutsim;
                Conditions_Initiales;
                freq:=freq + pas;
            end;
        end;
    if descente='O' then
        begin
            Clrscr;
            writeln('*************************************************************');
            writeln('*          Elaboration de la courbe de reponse en frequence          *');
            writeln('*                  en diminuant la frequence d"excitation            *');
            writeln('*************************************************************');
            freq:=freqsup;
    if montee='O' then
        begin
            pos_1:=0;
            pos_2:=0;
            pos_3:=0;
            vit_1:=0;
            vit_2:=0;
            vit_3:=0;
        end;
            append(ecriture);
            writeln(ecriture,'frequence   W1  W2  W3  (** EN DIMINUANT F.EXC. **)');
            close(ecriture);
            for j:=1 to nbiter do
                begin
                    Affichage;
                    Iteration_dans_Tutsim;
                    Lecture_dans_Tutsim;
                    Recherche_Amplitude;
                    Recherche_ci_amplitude_dans_Tutsim;
                    Iteration_vitesse_dans_Tutsim;
                    Recherche_ci_vitesse_dans_Tutsim;
                    Conditions_Initiales;
                    freq:=freq - pas;
                end;
        end;
END.
```

# Annexe C

# Programmes utilisés pour déterminer un rapport de forme optimal

## C.1 - Résonance interne impliquant deux modes de vibration

### C.1.1 - Programme MATLAB principal

```
%*************************************************************************
%              NOM DU PROGRAMME: RFOPT2.m                                 *
%              FICHIER D'ENTRÉE: CPOLYR2.m                                *
%                                                                         *
% Programme recherchant un rapport de forme optimal qui permet d'avoir une *
%              résonance interne impliquant 2 modes de vibration          *
%                                                                         *
% OBJECTIF : Ce programme est basé sur l'étude de plaques parfaites simplement *
% supportées. Pour ce type particulier de plaque, seule les resonances internes sont *
% possibles. Ce programme a pour but de déterminer un rapport de forme qui  *
% permet d'obtenir le plus de résonances internes.                          *
%                                                                         *
% PARAMÈTRES LIMITES FIXÉS :                                              *
%     rmin          :rapport de forme minimum accepté                     *
%     rmax          :rapport de forma maximum accepté                     *
%     modemax       :mode de resonance maximum considéré                  *
%     Kmax          :facteur de proportionalité max entre 2 modes         *
%     precisionr    :erreur assumée négligeable entre 2 valeurs de r      *
%*************************************************************************

% Paramètres
rmin=0.5;
rmax=5;
modemax=5;
Kmax=10;
```

```
precisionr=0.001;

% Donnees
a=0.150;
h=0.001016;
E=0.2388585922E10;
nu=0.45;
rho=1205.48172;
D=E*h^3/(12*(1-nu^2));
Nyo=25;

% Mise à zéro des tableaux
KII=[];
KJI=[];
II=[];
JI=[];
RI=[];
RITOT=[];

% Résonance interne
nbr=0;
for i=1:modemax
for j=1:modemax
 if j<=i
   for Ki=1:Kmax
   for Kj=-Kmax:-1
   if (i>j & abs(Kj)>Ki) | (i<j & Ki>abs(Kj));
         cpolyr2;
         sizer=size(r);
         n=sizer(2);
         test=0;
         for cpt=1:n
           if r(cpt)>rmin & r(cpt)<rmax;
             if test==0
                  nbr=nbr+1;
                  KII(nbr)=Ki;
                  KJI(nbr)=Kj;
                  II(nbr)=i;
                  JI(nbr)=j;
                  RI(nbr)=r(cpt);
                  test=1;
             end;
           end;
         end;
```

```
    end;
    end;
    end;
  end;
end;
end;

% Comptage des facteurs de forme r
sizeri=size(RI);
n=sizeri(2);
for rno=1:n
  rcherche=RI(rno);
  ntot=0;
  indice=2;
  for nbri=1:n
    if abs(RI(nbri)-rcherche)<precisionr
        indice=indice+1;
        ntot=ntot+1;
        RITOT(rno,indice)=nbri;
    end;
  end;
  RITOT(rno,1)=RI(rno);
  RITOT(rno,2)=ntot;
end;

% Élimination des colonnes redondantes (r redondants)
size1=size(RITOT);
n1=size1(1);
for z=1:n1
 if z<=n1
   ressai=RITOT(z,1);
   for q=(1+z):n1
       if q<=n1
         if abs(ressai-RITOT(q,1))<precisionr
           RITOT([q],:)=[];
         end;
         size1=size(RITOT);
         n1=size1(1);
       end;
   end;
 end;
end;
```

```
% Mise en forme des résultats et enregistrement
result=[];
sizeritot=size(RITOT);
n1=sizeritot(1);
n2=sizeritot(2);
cpt=1;
for q=1:n1
  result(cpt,1)=RITOT(q,1);
  index=cpt;
  cpt=cpt+1;
  ind=0;
  i=0;
  j=0;
  nombr=0;
  for z=3:n2
    indprec=ind;
    iprec=i;
    jprec=j;
    ind=RITOT(q,z);
    if ind~=0;
        i=II(ind);
        j=JI(ind);
        Ki=KII(ind);
        Kj=KJI(ind);
        if ~(iprec==i & jprec==j)
          result(cpt,3)=Ki;
          result(cpt,4)=i;
          result(cpt,5)=Kj;
          result(cpt,6)=j;
          cpt=cpt+1;
          nombr=nombr+1;
        end;
    end;
  end;
  result(index,2)=nombr;
end;

% Enregistrement des rapports de forme obtenus dans le fichier "ration.m"
save ratio.m result  -ascii
```

### C.1.2 - Fichier contenant une fonction

```
%*********************************************************************
%              NOM DE LA FONCTION : CPOLYR2.m                         *
%              Fonction nécessaire a l'utilisation du programme RFOPT2.m *
%*********************************************************************

% Création d'une équation polynomiale en r
r=[ ];
A=pi^4*D/(16*a^4*rho*h);
B=pi^2*(pi^2*D-2*Nyo*a^2)/(8*a^4*rho*h);
%
V=A^2*(Ki^2-Kj^2)^2;;
W=2*A*B*(Ki^2*i^2-Kj^2*j^2)*(Ki^2-Kj^2);
X=2*A^2*(Ki^2*i^4-Kj^2*j^4)*(Ki^2-Kj^2)+B^2*(Ki^2*i^2-Kj^2*j^2)^2;
Y=2*A*B*(Ki^2*i^4-Kj^2*j^4)*(Ki^2*i^2-Kj^2*j^2);
Z=A^2*(Ki^2*i^4-Kj^2*j^4)^2;
%
polyr=[V,W,X,Y,Z];
sqrr=roots(polyr);
nbzero=max(size(sqrr));
for cpt=1:nbzero
  if imag(sqrt(sqrr(cpt)))~=0;
    r(cpt)=0;
  end;
  if imag(sqrt(sqrr(cpt)))==0;
    r(cpt)=sqrt(sqrr(cpt));
  end;
end;
```

## C.2 - RÉSONANCE INTERNE IMPLIQUANT TROIS MODES DE VIBRATION

### C.2.1 - Programme MATLAB principal

```
%*****************************************************************
%              NOM DU PROGRAMME: RFOPT3.m                        *
%              FICHIER D'ENTRÉE: CPOLYR3.m                       *
%                                                                *
% Programme recherchant un rapport de forme optimal qui permet d'avoir une *
%               résonance interne impliquant 3 modes de vibration *
%                                                                *
% OBJECTIF : Ce programme est basé sur l'étude de plaques parfaites simplement *
% supportées. Pour ce type particulier de plaque, seule les résonances internes sont *
% possibles. Ce programme a pour but de déterminer un rapport de forme qui *
% permet d'obtenir le plus de résonances internes.               *
%                                                                *
% PARAMÈTRES LIMITES FIXÉS :                                     *
%      rmin          :rapport de forme minimum accepté           *
%      rmax          :rapport de forme maximum accepté           *
%      modemax       :mode de résonance maximum considéré        *
%      Kmax          :facteur de proportionalité max entre 2 modes *
%      precisionr    :erreur assumé négligeable entre 2 valeurs de r *
%      erreur        :écart assumé négligeable pour satisfaire la relation *
%                    de proportionalité entre les fréquences naturelles *
%*****************************************************************

% Paramètres limites
rmin=0.5;
rmax=5;
modemax=5;
Kmax=10;
precisionr=10e-6;
erreur=10e-6;

% Données
a=0.125;
h=0.001016;
E=0.2388585922E10;
nu=0.45;
rho=1205.48172;
D=E*h^3/(12*(1-nu^2));
```

```
Nyo=50;

% Mise à zéro des tableaux
KII=[];
KJI=[];
KKI=[];
II=[];
JI=[];
KI=[];
RI=[];
RITOT=[];

% Résonance interne
nbr=0;
for i=1:modemax
for j=1:modemax
for k=1:modemax
  if ~(i==j | j==k | k==i)
    for Ki=1:Kmax
    for Kj=-Kmax:-1
    for Kk=-Kmax:0
      cpolyr3;
      n=max(size(r));
      test=0;
      for cpt=1:n
        if r(cpt)>rmin & r(cpt)<rmax;
          R=r(cpt);
          omegi=sqrt(pi^2/(16*rho*h*a^4*R^2)*(pi^2*D*(R+i^2/R)^2-
                Nyo*4*a^2*i^2));
          omegj=sqrt(pi^2/(16*rho*h*a^4*R^2)*(pi^2*D*(R+j^2/R)^2-
                Nyo*4*a^2*j^2));
          omegk=sqrt(pi^2/(16*rho*h*a^4*R^2)*(pi^2*D*(R+k^2/R)^2-
                Nyo*4*a^2*k^2));
          if abs(Ki*omegi+Kj*omegj+Kk*omegk)<=erreur
            if r(cpt)~=test
              nbr=nbr+1;
                KII(nbr)=Ki;
                KJI(nbr)=Kj;
              KKI(nbr)=Kk;
                II(nbr)=i;
                JI(nbr)=j;
              KI(nbr)=k;
                RI(nbr)=r(cpt);
              test=r(cpt);
```

```
                end;
              end;
            end;
          end;
        end;
        end;
        end;
      end;
    end;
    end;
    end;
    % Comptage des facteurs de forme r
    n=max(size(RI));
    for rno=1:n
      rcherche=RI(rno);
      ntot=0;
      indice=2;
      for nbri=1:n
        if abs(RI(nbri)-rcherche)<precisionr
          indice=indice+1;
          ntot=ntot+1;
          RITOT(rno,indice)=nbri;
        end;
      end;
      RITOT(rno,1)=RI(rno);
      RITOT(rno,2)=ntot;
    end;

    % Élimination des colonnes redondantes (r redondants)
    size1=size(RITOT);
    n1=size1(1);
    for z=1:n1
     if z<=n1
       ressai=RITOT(z,1);
       for q=(1+z):n1
         if q<=n1
           if abs(ressai-RITOT(q,1))<precisionr
             RITOT([q],:)=[];
           end;
           n1=max(size(RITOT));
         end;
       end;
     end;
    end;
```

```
% Mise en ordre des résulats par ordre de rapport de forme croissant
rsup=0;
for n=1:(max(size(RITOT))-1);
  for m=(n+1):max(size(RITOT));
    if RITOT(n,1)>RITOT(m,1);
      temp=RITOT(n,:);
      RITOT(n,:)=RITOT(m,:);
      RITOT(m,:)=temp;
    end;
  end;
end;
%*****************************************************************
%      Mise en forme des résultats, enregistrement de ceux-ci      *
%                              &                                   *
%     Création d'une matrice 'resultsup' contentant les valeurs de r pour  *
%            lesquelles on obtient plusieurs résonances internes   *
%*****************************************************************
rsup=0;
resultsup=[];
result=[];
sizeritot=size(RITOT);
n1=sizeritot(1);
n2=sizeritot(2);
cpt=1;
for q=1:n1
  result(cpt,1)=RITOT(q,1);
  index=cpt;
  cpt=cpt+1;
  ind=0;
  i=0;
  j=0;
  nombr=0;
  for z=3:n2
    indprec=ind;
    iprec=i;
    jprec=j;
    ind=RITOT(q,z);
    if ind~=0;
      i=II(ind);
      j=JI(ind);
      k=KI(ind);
      Ki=KII(ind);
      Kj=KJI(ind);
      Kk=KKI(ind);
```

```
        if ~(iprec==i & jprec==j)
          result(cpt,3)=Ki;
          result(cpt,4)=i;
          result(cpt,5)=Kj;
          result(cpt,6)=j;
          result(cpt,7)=Kk;
          result(cpt,8)=k;
          cpt=cpt+1;
          nombr=nombr+1;
        end;
      end;
    end;
    result(index,2)=nombr;
    if nombr>1;
      rsup=rsup+1;
      resultsup([rsup],:)=result([(cpt-1)],:);
      resultsup(rsup,1)=result(index,1);
      resultsup(rsup,2)=result(index,2);
    end;
end;

% Enregistrement des rapports de forme obtenus dans le fichier "ration.m" et de ceux %
pour lesquels on obtient plus d'une résonance interne dans le fichier "ratopt.m"
%
save ratio.m result  -ascii
save ratopt.m resultsup  -ascii
```

### C.2.2 - Fichier contenant une fonction

```
%*************************************************************************
%              NOM DE LA FONCTION : CPOLYR3.m                             *
%              Fonction nécessaire a l'utilisation du programme RFOPT3.m  *
%*************************************************************************
% Création d'une équation polynomiale en r
r=[ ];
A=pi^4*D/(16*a^4*rho*h);
B=pi^2*(pi^2*D-2*Nyo*a^2)/(8*a^4*rho*h);
%
V=A^2*((Ki^2-Kj^2)^2+Kk^4-2*Kk^2*(Ki^2+Kj^2));
W=2*A*B*(Ki^2*i^2*(Ki^2-Kj^2-Kk^2)
        +Kj^2*j^2*(Kj^2-Ki^2-Kk^2)+Kk^2*k^2*(Kk^2-Ki^2-Kj^2));
X=2*A^2*(Ki^2*i^4*(Ki^2-Kj^2-Kk^2)+Kj^2*j^4*(Kj^2-Ki^2-
        Kk^2)+Kk^2*k^4*(Kk^2-Ki^2-Kj^2))+B^2*((Ki^2*i^2-Kj^2*j^2)^2+Kk^4*k^4-
2*Kk^2*k^2*(Ki^2*i^2+Kj^2*j^2));
Y=2*A*B*(Ki^2*i^4*(Ki^2*i^2-Kj^2*j^2-Kk^2*k^2)+Kj^2*j^4*(Kj^2*j^2- Ki^2*i^2-
Kk^2*k^2)+Kk^2*k^4*(Kk^2*k^2-Ki^2*i^2-Kj^2*j^2));
Z=A^2*((Ki^2*i^4-Kj^2*j^4)^2+Kk^4*k^8-2*Kk^2*k^4*(Ki^2*i^4+Kj^2*j^4));
%
polyr=[V,W,X,Y,Z];
racine;
nbzero=max(size(sqrr));
for cpt=1:nbzero
  if imag(sqrt(sqrr(cpt)))~=0;
    r(cpt)=0;
  end;
  if imag(sqrt(sqrr(cpt)))==0;
    r(cpt)=sqrt(sqrr(cpt));
  end;
end;
```

# Annexe D

# Programmes utilisés pour étudier l'interaction entre résonance simultanée et résonance forcée

## D.1 - PROGRAMME MATLAB PRINCIPAL

```
%*****************************************************
%                    Programme ISIFOR.M                *
% Programme qui calcule l'amplitude des résonances simultanées  *
%     avec intéraction avec résonance forcée           *
%*****************************************************
% Lecture du fichier de données contenant la valeur des paramètres contenus
%          dans les équations à résoudre
isifor1
%$$$$$$$$$$$$  Contrôle sur les itérations et les points de calcul $$$$$$$$$$$$$$
erreurmax=10^(-4);
nbitermax=1000;
incfreq=0.1;
freqmin=8;
freqmax=45;
% ************************ Début du programme ************************
aio=0;ajo=0;
aitest=aio;ajtest=ajo;
nofreq=0;
stop=0;
stopai=0;
stopek=0;
freqexc=[];
amplitudei=[];
amplitudej=[];
amplitudek=[];
lambda=freqmin-incfreq;
%@@@@@@@@@@@@ Boucle pour chaque fréquence @@@@@@@@@@@@
while lambda<=freqmax
  nofreq=nofreq+1;
  lambda=lambda+incfreq;
% ***      Calcul de l'amplitude de la réponse forcée en l'absence d'intéraction      ***
```

```
% ***  avec les résonances simultanées pour déterminer une valeur initiale de ek    ***
  KA=(3/8)*gk9/ok;
  KB=ok-lambda;
  KD=(2*mukk*ok^2*(Wok+dk))/(ok+lambda);
  RA=KA^2;
  RB=2*KA*KB;
  RC=KB^2+Ck^2;
  RD=-(KD^2);
  polyek=[RA,RB,RC,RD];
  racinek=roots(polyek);
  nbzero=max(size(racinek));
  EK=0;
  for k=1:nbzero;
    if imag(sqrt(racinek(k)))~=0
      racinek(k)=0;
    end;
    if imag(sqrt(racinek(k)))==0
      racinek(k)=(sqrt(racinek(k)));
    end;
    if racinek(k)>EK
      EK=racinek(k);
    end;
  end;
  ektest=EK;
%
% ************************* Boucle Itérative ***************************
% Boucle pour chaque itération à une fréquence d'excitation donnée
%
% Calcul des équations polynomiales
  continue=1;
  nbiter=0;
  while continue==1
%
% Équation en ai (a partir d`un aj test)
%
    nbiter=nbiter+1;
    aj=ajtest;
    ek=ektest;
    alpha=(1/2)*(gj1/gi2)*(oj-oi)/(3*oi+oj);
    U=((3*lambda/2-oj)*aj^2)-((3*gj6/(8*oj))*aj^4)-((1/4)*gj8*ek^2*aj^2/oj);
    V=(((1/2)*gi4*alpha/oi)-((1/4)*gj2/oj))*aj^2+((2*oi-
                          lambda)*alpha)+((1/2)*gi5*alpha*ek^2/oi);
    W=(3/4)*gi1*alpha/oi;
    X=muii*oi^2*2*alpha/lambda;
```

```
RA=W^2;
RB=2*V*W;
RC=(V^2)+(2*U*W)-(X^2)+(X^2*Ci^2*lambda^2/(muii^2*oi^4));
RD=(2*U*V)+(2*Ci*Cj*lambda*X*aj^2/(muii*oi^2));
RE=(U^2)+(Cj^2*aj^4);
polyai=[RA,RB,RC,RD,RE];
racinei=roots(polyai);
nbzero=max(size(racinei));
AI=0;
for i=1:nbzero;
  if imag(sqrt(racinei(i)))~=0
    racinei(i)=0;
  end;
  if imag(sqrt(racinei(i)))==0
    racinei(i)=sqrt(racinei(i));
  end;
  if racinei(i)>AI
    AI=racinei(i);
  end;
end;
%
% Équation en aj (a partir du ai calculé précédemment)
%
ai=AI;
A=(oj/3)-(lambda/2)+(gj2*ai^2/(12*oj))+(gj8*ek^2/(12*oj));
B=gj6/(8*oj);
D=gj1*ai^3/(12*(3*oi+oj));
RA=B^2;
RB=2*A*B;
RC=(A^2)+(Cj^2/9);
RD=-(D^2);
polyaj=[RA,RB,RC,RD];
racinej=roots(polyaj);
nbracine=size(racinej);
nbzero=nbracine(1);
AJ=0;
for j=1:nbzero;
  if imag(sqrt(racinej(j)))~=0
    racinej(j)=0;
  end;
  if imag(sqrt(racinej(j)))==0
    racinej(j)=sqrt(racinej(j));
  end;
  if racinej(j)>AJ
```

```
        AJ=racinej(j);
      end;
    end;
%
% Équation en ek (à partir des ai et aj calculés précédemment)
%
    ai=AI;
    aj=AJ;
    KA=(3/8)*gk9/ok;
    KB=ok-lambda+((1/4)*gk3*ai^2/ok)+((1/4)*gk7*aj^2/ok);
    KD=(2*mukk*ok^2*(Wok+dk))/(ok+lambda);
    RA=KA^2;
    RB=2*KA*KB;
    RC=KB^2+Ck^2;
    RD=-(KD^2);
    polyek=[RA,RB,RC,RD];
    racinek=roots(polyek);
    nbracine=size(racinek);
    nbzero=nbracine(1);
    EK=0;
    for k=1:nbzero;
      if imag(sqrt(racinek(k)))~=0
        racinek(k)=0;
      end;
      if imag(sqrt(racinek(k)))==0
        racinek(k)=sqrt(racinek(k));
      end;
      if racinek(k)>EK
        EK=racinek(k);
      end;
    end;
%
% Contrôle de convergence sur les ai, aj et ek
%
    ecarti=abs(AI-aitest);
    ecartj=abs(AJ-ajtest);
    ecartk=abs(EK-ektest);
    if ecarti<erreurmax & ecartj<erreurmax & ecartk<erreurmax
      continue=0;
      amplitudei(nofreq)=AI;
      amplitudej(nofreq)=AJ;
      amplitudek(nofreq)=EK;
      freqexc(nofreq)=lambda;
    end;
```

```
    if nbiter>=nbitermax
      lambda=freqmax+1;
      essai=0
      continue=0;
    end;
%Pondération des nouvelles valeurs pour accroître la convergeance
  if nbiter>200
    aitest=aitest+0.001*(AI-aitest);
    ajtest=ajtest+0.001*(AJ-ajtest);
    ektest=ektest+0.001*(EK-ektest);
  end;
  if nbiter<200 | AI~=0
    aitest=aitest+0.05*(AI-aitest);
    ajtest=ajtest+0.05*(AJ-ajtest);
    ektest=ektest+0.05*(EK-ektest);
  end;
  end;
%
% ***************** Fin de la boucle itérative ***************************
%
end;
%
%@@@@@@@@@@ Fin de la boucle pour chaque fréquence @@@@@@@@@@
%
% Graphique des résulats obtenus
%
fin=1
pause;
clg;
xlabel('Frequence d''excitation normalisee');
ylabel('Amplitude reelle (h)');
title('Interaction resonance simultanee-forcee');
hold;
plot(freqexc,amplitudei)
hold;
plot(freqexc,amplitudej)
hold;
plot(freqexc,amplitudek)
hold;
pause;
```

## D.2 - FICHIER DE DONNÉES

```
%*********************************************************************
%       Fichier de données ISIF1.M nécessaire pour le programme ISIFOR.M      *
%       qui contient les divers coefficients caractérisant une plaque imparfaite      *
%*********************************************************************

Nyo = 0.50;
muii=0.1146;
mujj=0.1221;
mukk=0.1874;
gi1=0.4242574678797788D+01;
gi2=-0.3079738814999639D+02;
gi4=0.7522146402772354D+02;
gi5=0.2726753397858013D+02;
gj1=-0.6841626443509438D+01;
gj2=0.7921413409580546D+02;
gj6=0.6121987080445679D+02;
gj8=0.4563271042859258D+02;
gk3=0.3189531325737300D+02;
gk7=0.5868188320234939D+02;
gk9=0.1683805971612878D+02;
Ci= 0.0536;
Cj= 0.1571;
Ck= 0.0851;
Woi= -0.00274;
Wok= 0.11953;
Woj= 0.01065;
di= -0.00264;
dk= 0.11514;
dj= 0.01026;
oi= 3.36283;
oj= 9.90674;
ok= 5.31223;
time = 0.38185;
```

# Annexe E

# Programmes utilisés pour modéliser l'imperfection d'une plaque imparfaite

## E.1 - PROGRAMME MATLAB PRINCIPAL

```
%*********************************************************************
%     PROGRAMME CIMP.M QUI CALCULE LES COEFFICIENTS Woi              *
%                                                                    *
%   PROGRAMME D'ENTREE                                               *
%     donnees.m :    fichier de donnees renfermant les caracteristiques *
%                    physiques de la plaque                          *
%     calculf.m :    fichier contenant une fonction, fonction propre *
%                    utilisee pour decrire le mvt lateral de la plaque *
%                                                                    *
%   CONSTANTES UTILISEES                                             *
%     nmodex:        nombre de mode en x                             *
%     nmodey:        nombre de mode en y                             *
%     alpha:         racine l'equation transcendante, n=nb de mode max. *
%*********************************************************************

% DEFINITION DES CONSTANTES
nmodex=1;nmodey=3;
alpha=[0.4730040744862704E1,0.7853204624095838E1,0.1099560783800167E2];

% CALCUL DES COEFFICIENTS 1/gamma
for n=1:3
  igamma(n)=(sinh(alpha(n))-sin(alpha(n)))/(cosh(alpha(n))-cos(alpha(n)));
end

% LECTURE DU FICHIER DE DONNEES
plaq;
for n=1:(nbpts)
```

```
  points(n,1)=coordx(n)/dimx;
  points(n,2)=coordy(n)/dimy;
  points(n,3)=imp(n)/epais;
end

% CALCUL DES VALEURS PONCTUELLES DES FONCTIONS PROPRES

% CONDITION FRONTIERE S-S-S-S
if cf==1
  for p=1:nmodex
    ai=0;bi=0;betai=p*pi;
    ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
    for n=1:nbpts
      x=points(n,1);
      fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
    end;
  end;
  for q=1:nmodey
    ai=0;bi=0;betai=q*pi;
    ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
    for n=1:nbpts
      y=points(n,2);
      fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
    end;
  end;

% CONDITION FRONTIERE S-E-S-E
elseif cf==2
  for p=1:nmodex
    ai=igamma(p);bi=-1;betai=alpha(p);
    ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
    for n=1:nbpts
      x=points(n,1);
      fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
    end;
  end;
  for q=1:nmodey
    ai=0;bi=0;betai=q*pi;
    ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
    for n=1:nbpts
      y=points(n,2);
      fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
    end;
  end;
```

```
% CONDITION FRONTIERE E-S-E-S
elseif cf==3
  for p=1:nmodex
    ai=0;bi=0;betai=p*pi;
    ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
    for n=1:nbpts
      x=points(n,1);
      fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
    end;
  end;
  for q=1:nmodey
    ai=igamma(q);bi=-1;betai=alpha(q);
    ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
    for n=1:nbpts
      y=points(n,2);
      fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
    end;
  end;

% CONDITION FRONTIERE E-E-E-E
elseif cf==4
  for p=1:nmodex
    ai=igamma(p);bi=-1;betai=alpha(p);
    ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
    for n=1:nbpts
      x=points(n,1);
      fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
    end;
  end;
  for q=1:nmodey
    ai=igamma(q);bi=-1;betai=alpha(q);
    ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
    for n=1:nbpts
      y=points(n,2);
      fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
    end;
  end;
end

% CREATION DES MATRICES A ET B (AX=B)
B=[];
for n=1:nbpts
  i=0;
  for k=1:nmodex
```

```
    for l=1:nmodey
      i=i+1;
      A(n,i)=fctpx(n,k)*fctpy(n,l);
    end
  end
  B(n,1)=points(n,3);
end

% RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS
Woi=((inv(A'*A))*A')*B;

save b:coeff.dat Woi  -ascii
Woi
pause

%*********************************************************************
%          TRACAGE GRAPHIQUE DE L'IMPERFECTION MESUREE              *
%           Cette procedure peut etre utilisee pour le cas ou les points de mesure     *
%      de l'imperfection sont situes sur tous les points d'intersection d'un plan      *
%      quadrille. De plus, l'enumeration des points doit etre faite en procedant      *
%      par rangee de points ayant la meme coordonnee X. Cette procedure               *
%      suppose que le pourtour de la plaque est parfaitement plat.  Dans tous les     *
%      autres cas, il est impossible de faire un "mesh" pour illustrer l'imperfection *
%*********************************************************************

cx=[];
cy=[];
cz=[];
k=1;
j=1;
finy=0;
x=coordx(1);
y=coordy(1);
xdiff(1)=x;
ydiff(1)=y;
nbx=1;
nby=1;
for i=2:nbpts
    if coordx(i)~=x
    j=j+1;
    nbx=j;
    xdiff(j)=coordx(i);
    x=xdiff(j);
  end;
```

```
    if coordy(i)==coordy(1);
      finy=1;
    end;

    if coordy(i)~=y
      if finy==0
        k=k+1;
        nby=k;
        ydiff(k)=coordy(i);
        y=ydiff(k);
      end;
    end;
  end;

 for x=2:(nbx+1)
   for y=1:(nby+2)
     cx(1,y)=0;
     cx((nbx+2),y)=dimx;
     cx(x,y)=xdiff(x-1);
   end;
 end;

 for y=2:(nby+1)
   for x=1:(nbx+2)
     cy(x,1)=0;
     cy(x,(nby+2))=dimy;
     cy(x,y)=ydiff(y-1);
   end;
 end;

 for x=1:(nbx+2)
  cz(x,1)=0;
   cz(x,(nby+2))=0;
 end;

 for y=1:(nby+2)
  cz(1,y)=0;
  cz((nbx+2),y)=0;
 end;

 i=0;
 for x=2:(nbx+1)
   for y=2:(nby+1)
```

```
    i=i+1;
    cz(x,y)=imp(i);
  end;
end;

% TRACAGE GRAPHIQUE DE Wo
clg
r=[1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1];
for n=0:10
  X((n+1),:)=r*n*.1;
end
Y=X';
for m=1:11
  for n=1:11

Wo(m,n)=calculf(ax(1),bx(1),betax(1),X(m,n))*(Woi(1)*calculf(ay(1),by(1),betay(1),Y(
m,n))+Woi(2)*calculf(ay(2),by(2),betay(2),Y(m,n))+Woi(3)*calculf(ay(3),by(3),betay(3),
Y(m,n)));
  end
end

% RETOUR AUX COORDONNEES REELLES
x=X*dimx;
y=Y*dimy;
mimp=Wo*epais;
clg;
subplot(121),mesh(cx,cy,cz);
grid;
title('Plaque - imperfection initiale')
xlabel('axe x')
ylabel('axe y')
hold;
pause;
hold;
subplot(122),mesh(x,y,mimp);
grid;
title('Plaque - imperfection modelisee')
xlabel('axe x')
ylabel('axe y')
pause;
end;
```

## E.2 - FICHIERS CONNEXES

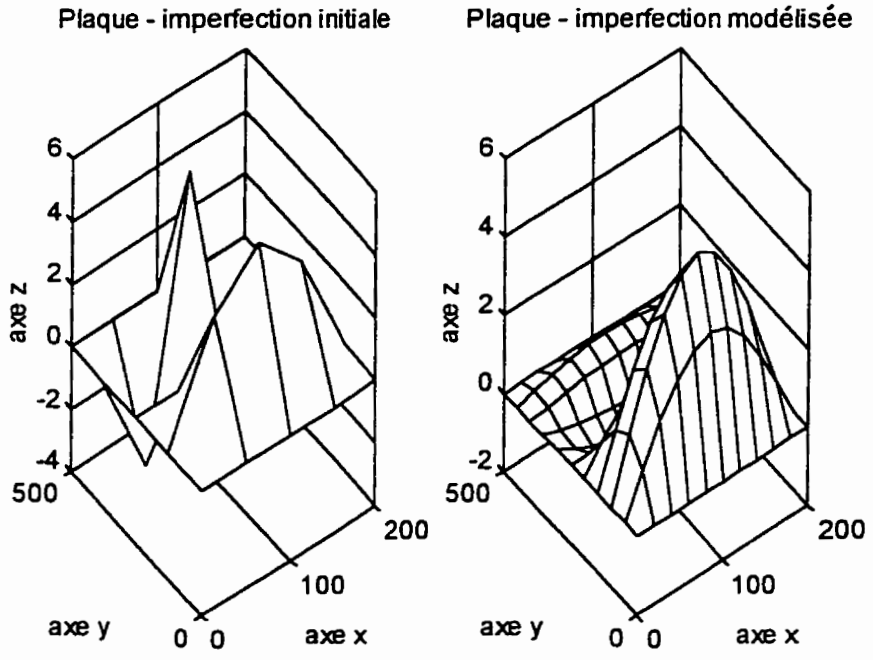
### E.2.1 - Fichier contenant une fonction

```
%*********************************************************************
%                          FICHIER CALCULF.M                          *
%     Fichier qui decrit la fonction propre utilisee et qui est nécessaire à   *
%     l'utilisation du programme  cimp.m                              *
%*********************************************************************
function c=calculf(a,b,beta,val)
c=a*(cosh(beta*val)-cos(beta*val))+b*sinh(beta*val)+sin(beta*val);
```

### E.2.2 - Fichier de données

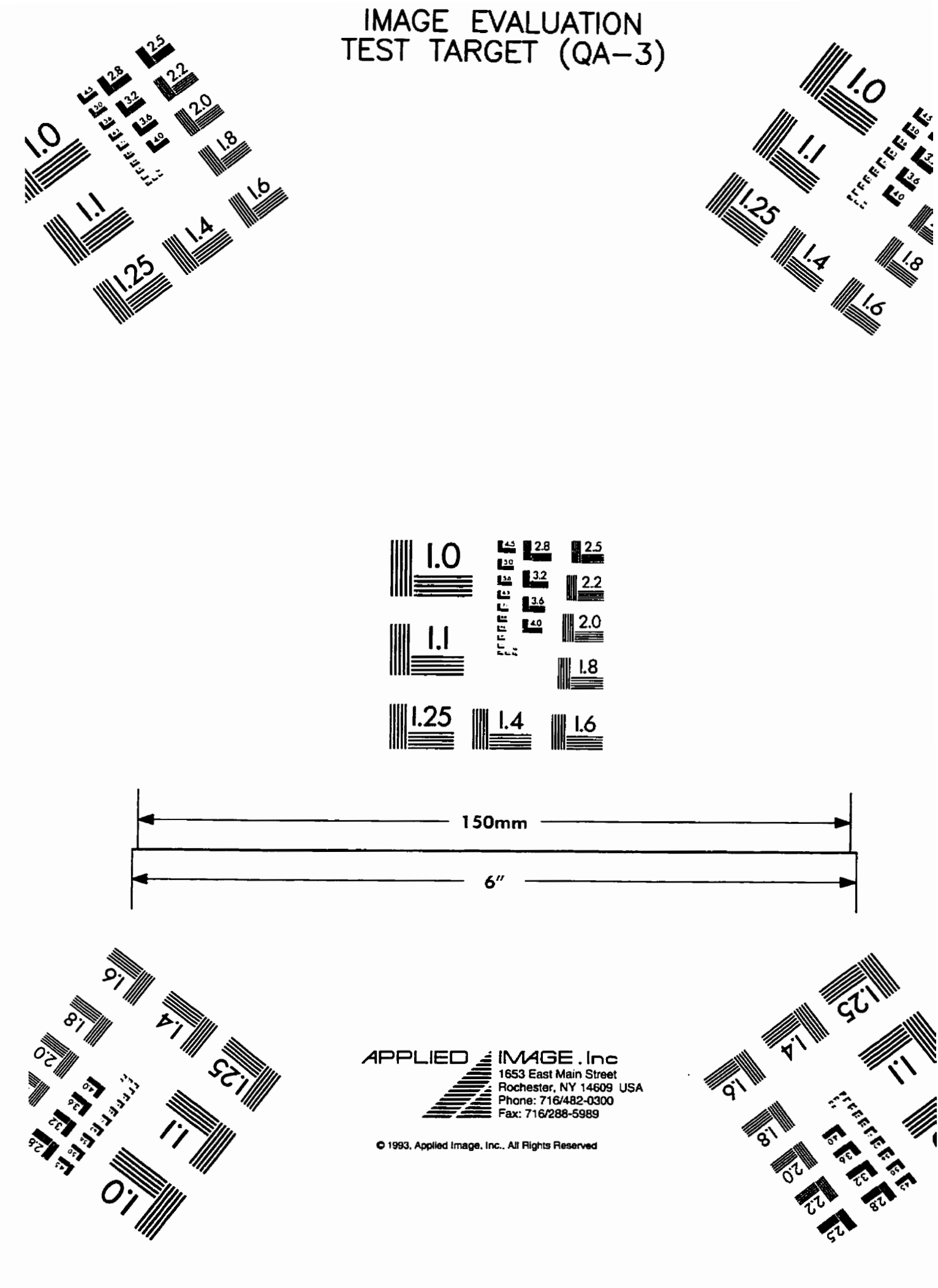
```
%*********************************************************************
%                          FICHIER PLAQ.M                             *
%     Fichier de donnees qui decrit l'imperfection géométrique mesurée et qui   *
%     est nécessaire à l'utilisation du programme cimp.m              *
%                                                                     *
%  CONSTANTES UTILISEES                                               *
%     cf:     type conditions aux limites                             *
%             - 1: S-S-S-S (S°S)          - 2: S-E-S-E (S°E)          *
%             - 3: E-S-E-S (E°S)          - 4: E-E-E-E (E°E)          *
%     nbpts:  nombre de points utilisés pour caractériser l'imperfection  *
%     dimx:   dimension de la plaque selon la direction x             *
%     dimy:   dimension de la plaque selon la direction y             *
%     epais:  épaisseur de la plaque                                  *
%     coordx et coordy:    coordonnées des points de mesure de l'imperfection  *
%     imp:    imperfection mesurée (déviation de l'état plan selon z)     *
%*********************************************************************
cf=1;
nbpts=9;
dimx=200;
dimy=500;
epais=1;
coordx=[50,50,50,100,100,100,150,150,150];
coordy=[125,250,375,125,250,375,125,250,375];
imp=[3.5355,0,-3.5355,5,0,5,3.5355,0,-3.5355];
end
```

## E.3 - EXEMPLE GRAPHIQUE DES RÉSULTATS OBTENUS




a) forme de l'imperfection mesurée

b) forme de l'imperfection modélisée qui sera utilisée dans la formulation analytique



© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved