POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Modélisation numérique tridimensionnelle des écoulements à surface libre appliquée à des environnements de bathymétrie quelconque
Auteur: Author:	André Hess
Date:	1996
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Hess, A. (1996). Modélisation numérique tridimensionnelle des écoulements à surface libre appliquée à des environnements de bathymétrie quelconque [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/9018/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/9018/
Directeurs de recherche: Advisors:	Marcelo Reggio
Programme: Program:	Non spécifié

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION NUMÉRIQUE TRIDIMENSIONNELLE DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE APPLIQUÉE À DES ENVIRONNEMENTS DE BATHYMÉTRIE QUELCONQUE

ANDRÉ HESS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
NOVEMBRE 1996

©André Hess, 1996.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26481-5

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION NUMÉRIQUE TRIDIMENSIONNELLE
DES ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE APPLIQUÉE
À DES ENVIRONNEMENTS DE BATHYMÉTRIE QUELCONQUE

présenté par : André HESS

en vue de l'obtention du grade de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., président

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ILINCA Adrian, Ph.D., membre et co-directeur de recherche

M. MARCHE Claude, Ph.D., membre

A Mlle Florence Scardigli, perdue dans les remous de cette étude...

Chacun d'entre nous est responsable de tout, devant tous !

Dostoïevski.

Remerciements

Je tiens à remercier Messieurs Adrian Ilinca, Marcelo Reggio, Jean-Yves Trépanier ainsi que Monsieur Ricardo Camarero, de m'avoir donné l'opportunité d'intégrer la section « Aérothermie » du Département de Génie Mécanique de l'École Polytechnique de Montréal, de m'avoir proposé, soutenu et encouragé, dans l'établissement de ce sujet et tout au long de l'accomplissement de ce mémoire de maîtrise.

Je tiens tout particulièrement à remercier Monsieur Adrian Ilinca pour sa confiance, son intérêt et son soutien précieux lors des moments difficiles du déroulement de ce travail de recherche et au cours des étapes importantes de l'élaboration de ce mémoire.

Je souhaite également saluer et exprimer ma sympathie et ma reconnaissance envers tous les membres présents et passés que j'ai côtoyés au cours de mon passage au sein du groupe de recherche M.I.A.O., pour leur disponibilité, leur bonne humeur et leurs conseils éclairés. Il s'agit parmi d'autres de Juan Abanto, Stéphane Rouillon, Samir Rida, Hervé Pellegrin, François Beaumont, Roberto Marrano, Didier Artigue, Siamak Kaveh-Khorie, Eric Brouillette, Stéphane Halé, Michel Théophanides et sa femme Anna-Paula, Jean Turcot, ainsi que de... Marc, Dominique, Serge, Eric,

Cristian, Florin, Luminata, Hani, Benoît, Yann, Ali, Marie-Isabelle...

Je remercie aussi la Fondation de l'Université du Québec à Rimouski pour leur apport financier.

Et finalement, je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance toute particulière envers ma lointaine famille, mon père, ma mère, mon ami Sammy Kachouri et sa compagne Marie-Josée Stulb... plus proche de moi, ma soeur Liliane et son ami Gérard Leckey, pour le soutien chaleureux, de toute nature, qu'ils ont su me témoigner durant cette période.

Résumé

Le contenu de ce mémoire consiste en une description et une modélisation des écoulements fluides à surface libre, tels que les fleuves, les rivières ou les portions de côtes océaniques. Les écoulements décrits sont appliqués à des domaines de calcul tridimensionnels qui tiennent compte, dans la construction même du maillage 3-D, ainsi que dans l'écriture des équations de mouvement, de la variation de bathymétrie du domaine étudié.

La modification d'un modèle bidimensionnel des équations en eaux peu profondes (Shallow Water Equation), consistant en l'intégration sur la verticale des équations générales du mouvement, est le point de départ de cette étude. Ce schéma est ensuite modifié sous forme d'un schéma multi-couches qui nous permet de modéliser des écoulements tridimensionnels sur des géométries plus complexes.

Une analogie est faite entre les écoulements régis par les équations en eaux peu profondes (S.W.E.) et un système d'équations d'Euler généralement utilisé en dynamique des gaz.

La discrétisation de ces équations utilise de manière explicite la technique de résolution communément nommée « la technique de division de la différence de flux

(Flux-Difference-Splitting) », développée par Roe. Le modèle quasi-3D, appliqué par couches, est ensuite utilisé pour mettre à jour les champs scalaires de tout le domaine.

La discrétisation spatiale du domaine à étudier consiste en l'utilisation d'une méthode de volumes finis appliquée à des prismes de base triangulaire, représentant l'élément de base d'une cellule de contrôle.

La comparaison des résultats obtenus avec certains cas typiques pour lesquels il existe une solution analytique, ainsi que d'autres résultats d'observation, nous démontrent que suite à l'utilisation de cette méthode, l'implantation des vitesses intermédiaires u, v, w obtenues avec le modèle 2-D par couches, peut être orientée vers la résolution quasi-3D sur des cas plus complexes. La vérification de la validité de cette technique de combinaison peut également se faire sur des cas simples, telle qu'une couche classique d'Ekman. Ceci peut se traduire sur une configuration simple, comme un bassin rectangulaire soumis à une condition de vent en surface, ou encore à l'imposition d'une condition d'élévation d'eau (condition de marée) sur une ou plusieurs des frontières ouvertes du domaine.

Le travail présenté ci-après vise à démontrer que le schéma numérique bidimensionnel, étendu à sa version tridimensionnelle, basé sur une technique de volumes finis est, au moins, aussi précis que les autres méthodes existantes, tout en permettant des prédictions fiables avec moins de ressources informatiques. À travers l'introduction du concept multi-couches et une meilleure définition du maillage du domaine, la résolution du système nous permet d'évaluer de façon plus rigoureuse les termes issus du gradient de bathymétrie et donc une meilleure conservation de la masse, du momentum et de l'énergie du système.

Abstract

This research consists of 3-D multiple-level model to describe and compute free surface flows as applied to rivers, lakes or sea shore parts. The starting point of this work is a modified two dimensional model used to treat the Shallow Water Equations (SWE) in varying bed environments. Since the vertical integration of the general basic equations (Navier-Stokes) to obtain a set of SWE is merely the same as for a single constant layer, it is easy to extend this purpose of depth integration over a multiple vertically averaged layers. Vertical integration of the momentum equations is considered so as to allow this two dimensional scheme to evolve in a multiple-level geometry, taking into account the contribution of vertical convective-flux resulting from the continuity equation. For SWE, as thus for a nearly horizontal flow which exhibits negligible vertical acceleration, this vertical convective-flux is ignored. In the two dimensional part, an analogy is made between flows governed by SWE and Euler system of equations, used in gas dynamics.

This 3-D solution strategy follows four major steps: first explicitly computing the velocity field at each level of the spatial domain, second evaluating the vertical convective-flux, the shear-stress at the interface of different layers, three the addition of the hydrostatic pressure coming from the layers (on top) facing a under-layer and

finally add the Coriolis force to complete the system of momentum equations.

The spatial discretization uses triangular-based elements and a finite volume method is applied to solve the governing equations. The flow solver is based on Roe's Flux-Difference-Splitting (FDS) solver, initially developed for solving inviscid compressible flows, but well suited for other hyperbolic type equations. The data obtained from the experiments or analytical solutions for typical test cases have been used to evaluate the performance of the method. It is observed that this method is able to predict the behavior of classical Ekman surface layer or a simple tide wave fixed on an open boundary of a rectangular domain. Finally, the results for the combined 2-D, 3-D model allow us to say that this method is as efficient as other classical methods, like the method of characteristics combined with an other 3-D integration or finite elements techniques. Furthermore, this multi-level finite volume approach is robust, require less computer resources than classical finite elements methods and makes easier the use of adaptive grids.

Table des matières

Dédicace iv

Remerciements v

Résumé vii

Abstract ix

Table des matières xi

Liste des Figures xiv

Liste des Tableaux xvi

Liste des notations et des symboles xvii

Liste des Annexes xxi

1 Introduction 1

2 Revue Bibliographique 5

3 Le modèle numérique 9

3.1 Les équations en eaux peu profondes (SWE) 9

3.2 Schéma Numérique de division de la différence de flux (FDS) de ROE 11

3.2.1 Propriétés du schéma de ROE 1-D (unidimensionnel) 11

3.2.2 Propriétés du schéma de ROE 2-D pour les équations S.W.E. . 12

3.3 Technique et approche de la méthode des volumes finis 16

3.4 Conditions limites et conditions aux ≪ frontières ouvertes ≫ d'un domaine 19

3.5 Présentation des éléments et description de la technique d'évaluation des hauteurs d'eau 23

3.5.1 Utilisation de ces interfaces pour une gestion multi-couches . . 24

4 Modèle multi-couches **25**

4.1 Analyse du modèle 25

4.1.1 Présentation 25

4.2 Équations du modèle multi-couches 27

4.2.1 Les équations de base 27

4.2.2 Intégration et discrétisation 28

4.2.3 Schéma du domaine multi-couches 32

4.2.4 Approche ≪ Volume Finis ≫, quasi-3D 32

5 Validation des schémas numériques **34**

5.1 Modèles 2D 34

5.1.1 Propagation d'une onde dans un canal rectangulaire 34

5.1.2 Modèle de marée 41

5.2 Modèle quasi-3D 46

5.2.1 Modèle de vent 46

5.3 Configuration réelle : Estuaire du fleuve Saint-Laurent. 55

5.3.1 À propos du fleuve Saint-laurent 55

5.3.2 Origine du fleuve 55

5.3.3 Quelques caractéristiques du fleuve 56

5.4 Calcul d'un champ de vitesse avec une condition d'élévation sur la frontière ouverte sur l'océan 60

5.4.1 Explicatif 60

5.4.2 Maillage de surface du domaine 63

5.4.3 Découpage multi-couches du domaine 64

5.4.4 Scénario temporel de l'évolution du champ de vitesse 65

5.4.5 Vues des champs scalaires sur tout le domaine multi-couches . 70

6 Conclusion et recommandations **73**

Bibliographie **78**

Annexes **82**

Liste des Figures

3.1 Domaine spatial pour les équations S.W.E. 11

3.2 Interface d'un élément de contrôle 13

3.3 Solution de l'équation (3.6) 22

3.4 Vue des éléments pour l'évaluation des hauteurs d'eau 23

4.1 Modèle multi-couches 32

5.1 Configuration du maillage et 2 types de bathymétrie 35

5.2 Stockage des variables au niveau des éléments 36

5.3 Hauteur d'eau à $t = 2,0\,h$, pente linéaire = 1.10^{-3} 37

5.4 Vitesse linéaire suivant l'axe X à $t = 2.25\,h$, pente $= 1.10^{-3}$ 38

5.5 Hauteur d'eau à $t = 2,0\,h$, pente $= 0$ 39

5.6 Vitesse linéaire suivant l'axe X à $t = 2,25\,h$, pente = 0 40

5.7 Vue du domaine : portion de côte 41

5.8 3 types de bathymétrie 41

5.9 Hauteur d'eau constante à HWT (High Water Time) 42

5.10 Hauteur d'eau à HWT pente linéaire 43

5.11 Hauteur d'eau à HWT pente quadratique 44

5.12 Vitesse radiale : Domaine quadratique 45

5.13 Comparaison analytique et numérique du modèle de vent 47

5.14 Vue 3-D du canal rectangulaire avec condition de vent en surface . . . 47
5.15 Élévation : solution 2D, analytique et numérique. 49
5.16 Norme de la vitesse sans la couche de surface 50
5.17 Norme de la vitesse 51
5.18 Profil adimensionnel au point milieu suivant X 52
5.19 Profil adimensionnel au point milieu suivant Y 52
5.20 Profil en courbe spline suivant X 53
5.21 Profil en courbe spline suivant Y 53
5.22 Élévation : solution 2D. versus quasi-3D. (bassin 200*100*50). 54
5.23 Le bassin versant du Saint-Laurent 57
5.24 Les courants océaniques 58
5.25 Les courants de l'estuaire maritime 59
5.26 Vue des frontières du domaine de l'estuaire du fleuve St-Laurent . . . 63
5.27 Vue du découpage multi-couches de l'estuaire du fleuve St-Laurent . . 64
5.28 Premier intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent 65
5.29 Deuxième intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent . . . 66
5.30 Troisième intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent . . . 67
5.31 Quatrième intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent . . . 68
5.32 Solution finale sur l'estuaire du fleuve St-Laurent 69
5.33 Champ de vitesse longitudinale 70
5.34 Champ de vitesse transversale 71
5.35 Champ de vitesse verticale 72

Liste des Tableaux

5.1 Valeurs associées à la figure [5.3] 37

5.2 Valeurs associées à la figure [5.4] 38

5.3 Valeurs associées à la figure [5.5] 39

5.4 Valeurs associées à la figure [5.6] 40

Liste des notations et des symboles

a	amplitude d'élévation d'eau (condition frontière)
$\boldsymbol{A}$	matrice jacobienne de transformation
$\tilde{\boldsymbol{A}}$	matrice de transformation paramétrée
$\boldsymbol{B}$	matrice intermédiaire de transformation
$\boldsymbol{Bot}$	tenseur des composantes de friction de fond
c	vitesse d'une onde, donnée par $\sqrt{gh}$
C_1, C_2	matrices intermédiaires de transformation
C_D	coefficient de traînée
C_f	coefficient de friction
C_ν	coefficient de friction diffusif
D	matrice diagonale des valeurs propres
Det	Déterminant
$\boldsymbol{Dif}$	tenseur des composantes de diffusion
f	force de Coriolis

$\boldsymbol{f}$	tenseur des variables conservatives
$\boldsymbol{f}_L$	tenseur des variables conservatives à gauche d'une interface
$\boldsymbol{f}_R$	tenseur des variables conservatives à droite d'une interface
$\boldsymbol{F}$	tenseur normal de flux à l'interface de 2 éléments
f_{ric}	coefficient de friction à l'interface de 2 couches
g	accélération de la pesanteur
$\boldsymbol{G}$	tenseur de flux convectif suivant x
$\bar{h}$	élévation d'eau moyenne
h	hauteur d'eau pour un élément (sur une couche)
$\boldsymbol{H}$	tenseur de flux convectif suivant y
H	hauteur totale au sommet d'une couche (ou plusieurs couches), donnée par $h + Z$
h_L	hauteur d'eau, à gauche de l'interface de 2 éléments
h_R	hauteur d'eau, à droite de l'interface de 2 éléments
$\boldsymbol{I}$	tenseur unitaire
$\vec{\imath}$	vecteur unitaire suivant x
$\vec{\jmath}$	vecteur unitaire suivant y
k	paramètre d'amortissement (pour solution analytique)
$\vec{\boldsymbol{n}}$	vecteur normal au côté d'un élément
n_x	composante du vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}$ suivant x
n_y	composante du vecteur $\vec{\boldsymbol{n}}$ suivant y

N	coefficient de Manning
p	pression du fluide
$p_*^{(l)}$	pression hydrostatique des couches supérieures
$\boldsymbol{R}$	tenseur des composantes du gradient de bathymétrie
S	matrice des vecteurs propres
S_c	Surface d'une face d'un élément
$\boldsymbol{S}ou$	tenseur formé des termes sources
t	temps
u, v, w	composantes cartésiennes de la vitesse du fluide
u_L	composante de la vitesse u à gauche d'une interface
u_R	composante de la vitesse u à droite d'une interface
v_L	composante de la vitesse v à gauche d'une interface
v_R	composante de la vitesse v à droite d'une interface
uh, vh	flux des composantes de la vitesse suivant x et y, respectivement.
$\boldsymbol{u}$	vecteur vitesse du fluide
$\boldsymbol{U}$	vecteur flux
V_c	volume de contrôle d'un élément
x, y, z	coordonnées cartésiennes
Z	Bathymétrie
δ	incrément de calcul
α_k	forces des ondes caractéristiques

λ_k	vitesses des ondes caractéristiques
e_k	vecteurs propres
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	valeurs propres
μ	viscosité dynamique du fluide
ν	viscosité cinématique du fluide
ρ	densité du fluide
σ_i	tenseur $\boldsymbol{F}$ de flux simplifié
τ_{ij}	cisaillement suivants les axes respectifs ex : $\tau_{xx}, \tau_{yz}, etc...$
ω	fréquence angulaire
ω	vitesse angulaire de la terre
ϕ	latitude terrestre
Δt	pas de temps
Δuh	variation de flux suivant x
Δvh	variation de flux suivant y
$\boldsymbol{W}$	vecteur paramètre
$\overline{W_1}, \overline{W_2}, \overline{W_3}$	composantes moyennes du vecteur paramètre $\boldsymbol{W}$
W_x	composante de la vitesse du vent en surface suivant x
W_y	composante de la vitesse du vent en surface suivant y
$[.....]^T$	tenseur transposé
∇	opérateur nabla
$\|\ \|$	norme maximum

Liste des Annexes

Annexe I 82
Annexe II 83
Annexe III 84
Annexe IV 86
Annexe V 87
Annexe VI 89

Chapitre 1

Introduction

L'avènement de l'ère informatique moderne nous permet aujourd'hui de modéliser et de représenter des phénomènes physiques qui, il y a une vingtaine d'années encore, nécessitaient l'emploi de coûteux moyens expérimentaux pour corroborer des résultats mathématiques et théoriques.

Dans le domaine de la mécanique des fluides que ce soit en aérodynamique ou en hydrodynamique, la simulation numérique se révèle comme étant la technique la plus appropriée et la plus souple pour pallier à ces coûteuses campagnes d'expérimentations. Néanmoins ayant recours aux simulations numériques, souvent plus précises et suivant des modèles physiques et géométriques réalistes, les limites des ordinateurs actuels sont parfois très vite atteintes.

Le contenu de ce mémoire traite de la modélisation et de la simulation numérique des écoulements à surface libre régis par un système d'équations décrivant un écoulement quasi-horizontal, incompressible et éventuellement inhomogène.

La formulation la plus générale des équations de mécanique des fluides étant donnée par les équations de Navier-Stokes, si l'on néglige les termes visqueux apparaissant dans leur formulation, nous obtenons les équations d'Euler. Ce sont les mêmes équations qui servent ici pour l'élaboration des différentes formulations et discrétisations proposées dans ce mémoire.

Tout comme certains auteurs décrivant sensiblement les mêmes systèmes d'équations et plus particulièrement ceux ayant employé une méthode des caractéristiques, nous proposons ici une approche similaire. La formulation des principes de base soutendus par le schéma de Roe utilisant ces mêmes équations d'Euler sera brièvement mentionnée dans le chapitre 3. L'analogie entre les deux méthodes réside dans le calcul d'une succession de problèmes de Riemann sur des lignes ou des surfaces caractéristiques, suivant que l'on se trouve en deux ou trois dimensions.

Dans la continuité de cette approche et pour décrire des écoulements sur des géométries plus complexes, impliquant une topographie (bathymétrie) plus accidentée du fond d'un domaine, il est proposé d'introduire un modèle multi-couches représentant plus fidèlement les profils de vitesse, suivant les directions longitudinale, transversale et verticale.

Les équations utilisées pour modéliser de tels systèmes sont les équations de Navier-Stokes moyennées par couches, où le vecteur vitesse de l'écoulement sera donné comme étant la somme d'une vitesse moyenne plus une fluctuation. Cette méthode introduit dans les équations de départ de nouvelles composantes reconnues sous le terme générique de « contraintes de Reynolds » qui prennent le caractère physique d'une friction. D'une façon plus générale ces contraintes sont la résultante du produit moyen de deux composantes de fluctuation de vitesse.

Sur la base des résultats obtenus avec le modèle bidimensionnel par couches utilisant les équations d'Euler et la technique de division de la différence de flux proposée par Roe, le calcul des grandeurs physiques caractéristiques, c'est-à-dire, les vitesses $\langle u \rangle$ et $\langle v \rangle$ dans le plan horizontal, le frottement $\langle \tau \rangle$ à l'interface des couches ainsi que l'élévation du niveau d'eau de la surface libre $\langle h \rangle$, est ensuite orienté vers l'intégration verticale par éléments de ces quantités. Éléments qui superposés, couche par couche, représentent une colonne d'eau partant de la surface libre jusqu'au fond.

Cette opération est rendue nécessaire du fait que le champ de vitesse obtenu par couches ne traduit pas la véritable valeur pour tout le domaine étudié. Le développement principal réside dans l'intégration sur la verticale d'un champ de vitesse intermédiaire obtenu sur un domaine subdivisé en plusieurs couches. Les coefficients de viscosité turbulente, les forces de Coriolis ainsi qu'une condition radiative d'élévation du niveau d'eau sur une frontière ouverte ont été pris en compte pour le cas réel de l'estuaire du fleuve St-Laurent.

Plus loin nous ferons la description de la formulation numérique de la méthode employée pour résoudre le système complet. Cette méthode consiste à calculer de manière découplée certaines caractéristiques de l'écoulement, principalement le pas de temps, la vitesse d'élévation de la hauteur d'eau de chacune des couches ainsi que de la prise en compte de l'influence de la pression hydrostatique des couches supérieures sur les couches inférieures. La méthode de résolution pour les deux types de formulation (2D et quasi-3D) se fait de manière explicite.

Le dernier chapitre de ce mémoire présente quelques cas typiques de validation du schéma numérique et de la méthode utilisée. Ces tests représentent ce

qu'il est commun de vérifier lors de toute utilisation d'un code numérique dédié à l'hydrodynamique. La comparaison est soutenue avec les résultats présentés par d'autres auteurs ou encore avec des solutions analytiques faciles à obtenir.

Le cas classique de la réflection d'une onde de marée est appliquée à un domaine rectangulaire. Vient ensuite le même genre de test, mais cette fois appliqué à une portion de côte océanique avec trois types de profil de bathymétrie. Quelques cas de modèles de vent pour la validation de la formulation quasi-3D sont ensuite présentés, soutenus pour la comparaison, avec des solutions analytiques. En fin de chapitre, la description d'un cas réel donné par le basssin estuarien du fleuve St-Laurent débutant de Québec et allant jusqu'à l'embouchure sur l'océan. Quelques types de modélisation seront décrits. Ceux-ci consistent en l'imposition de conditions frontières et conditions initiales spécifiques pour reproduire correctement l'écoulement physique et la circulation du fluide au cours du temps. Il s'agit essentiellement soit d'une condition d'élévation d'eau spécifiée sur une ou plusieurs frontières ouvertes du domaine, d'une condition de vent sur la surface libre du domaine ou encore de l'imposition d'un champ de densité connue à la frontière sur l'océan que nous laissons se propager vers l'intérieur du domaine. Le shéma numérique doit être susceptible de fonctionner avec une combinaison quelconque de ces trois variantes.

Chapitre 2

Revue Bibliographique

Plusieurs schémas numériques modélisant les systèmes hydrodynamiques utilisant différentes formulations des équations en eaux peu profondes -Shallow Water Equation (S.W.E.)- ont été développés depuis plusieurs années pour modéliser les écoulements à surface libre, tels que les rivières, les lacs, les estuaires, les régions océaniques côtières etc...

Parmi tous ces schémas, on peut mentionner le travail préliminaire de STRELKOFF[25] et de TERZIDIS & STRELKOFF[26], qui les premiers ont fait l'analogie entre les équations de dynamique des gaz et les équations de St-Venant en utilisant une méthode des caractéristiques pour décrire un système hydrodynamique.

MATSOUKIS[17] utilise une combinaison de shémas 2-D, 3-D, faisant appel à une méthode des caractéristiques. Certains résultats, pour des cas typiques utilisés avec sa méthode de surfaces caractéristiques, ont servi de comparaison pour la validation du schéma numérique contenu dans ce rapport de maîtrise.

Le présent travail fait appel à une technique de volumes finis s'inspirant de la méthode de Flux-Difference-Splitting, développée par ROE[21][20], régissant les systèmes d'équations hyperboliques en dynamique des gaz et étendu aux équations en eaux peu profondes par ZHANG[27].

CHASSÉ[4], développe un shéma pleinement 3-D avec une décomposition spatiale multi-couches suivant la profondeur du domaine. Son shéma utilise une discrétisation de différences finies ainsi qu'une technique combinée de résolution implicite-explicite pour certaines équations du système et se montre très efficace quant à la modélisation de la circulation des courants et la prédiction des élévations du niveau d'eau dans l'estuaire du Saint-Laurent.

Il existe d'autres formulations bi-dimensionnelles décrivant l'intégration sur la profondeur des équations du mouvement qui utilisent un schéma aux différences finies, comme celui décrit par CASULLI[3].

Pour représenter de manière plus précise les variations abruptes sur un domaine quelconque, SOULIS[23][24], HAEUSER & al.[8] proposent un maillage curviligne appliqué à la géométrie pour mieux suivre l'écoulement et les discontinuités pouvant apparaître, comme pour le cas d'un bris de barrage par exemple, ou encore un changement brusque de la direction de l'écoulement.

La méthode des éléments finis est également très largement utilisée pour simuler ces écoulements, les travaux de DHATT & al. [7] servent de support comparatif à la première validation présentée dans ce mémoire. Une autre formulation des équations en eaux peu profondes utilisant une méthode d'éléments finis et faisant intervenir un maillage adaptatif (qui suit une onde d'élévation du niveau d'eau) aux

frontières ouvertes du domaine, développée par SIDEN & LYNCH [22][13], permet de modéliser fidèlement les éventuels débordements de fronts de mer, ou les élévations d'eau sur des domaines confinés, tels que les secteurs portuaires.

Dans le contenu de deux articles importants, LYNCH & WERNER[15] ont abordé le problème tri-dimensionnel d'un domaine hydrodynamique sous la forme d'une linéarisation harmonique des équations en découplant les termes du momemtum horizontal et de la variation verticale de la vitesse. Du fait de cette séparation, la solution 3-D du problème se ramène à un système 2-D moyenné verticalement, en résolvant une équation d'onde de type HELMHOLTZ (équation différentielle du 2 ième ordre) pour obtenir l'inconnue du système, c'est-à-dire, dans ce cas-ci, l'élévation d'eau. Dans une deuxième partie, les mêmes auteurs LYNCH & WERNER[16] présentent un algorithme semi-implicite à deux pas de temps pour la résolution des équations hydrodynamiques 3-D avec une technique de discrétisation sur des éléments prismatiques. Une transformation du domaine spatial (x, y, z) en un domaine de calcul (x, y, ε) permet aussi de tenir compte, dans le terme temporel des équations, de la vitesse de déplacement vertical du maillage dont les noeuds sont et restent parfaitement alignés sur la verticale.

Une combinaison d'un schéma aux différences finies, utilisant une intégration temporelle en séparation de mode, comprenant deux couches et une transformation de coordonnées du domaine spatial, est proposée par CHAU & JIN[5]. Leur méthode présente aussi l'originalité de tenir compte de l'introduction d'une longueur de mélange au niveau de l'interface des deux couches et donc d'obtenir une bonne résolution de la densité de stratification de l'écoulement.

Un autre modèle multi-couches pleinement 3-D, celui de KAWAHARA & al.[11],

fait appel à une technique d'éléments finis, prenant en compte non seulement l'élévation du niveau d'eau sur la frontière ouverte, une condition de vent en surface et les forces de Coriolis, mais également le débit des rivières adjacentes au domaine formé par la Baie de Tokyo, pour vérifier la validité de leur schéma. Un traitement spécial est donné à la condition d'élévation sur la frontière ouverte pour éliminer complètement l'onde réfléchie de l'onde incidente. CHASSÉ[4], utilise une approche un peu différente en imposant une condition de type ORLANSKI[19] sur la frontière ouverte avec l'océan pour mieux laisser irradier l'onde d'élévation vers l'intérieur du domaine.

Chapitre 3

Le modèle numérique

3.1 Les équations en eaux peu profondes (SWE)

Les équations en eaux peu profondes sont des approximations bidimensionnelles des équations de Navier-Stokes, basées sur l'hypothèse d'une couche de profondeur relativement uniforme pour laquelle la variation des vitesses verticales est négligeable.

Les équations bi-dimensionnelles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} = -\boldsymbol{R} + \nabla \cdot \boldsymbol{Dif} - \boldsymbol{Bot} \tag{3.1}$$

avec

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} uh \\ uuh + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ vvh + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh.\frac{\partial Z}{\partial x} \\ gh.\frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Dif} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu\left[\nabla \boldsymbol{U} + \left(\nabla \boldsymbol{U}\right)^T\right] \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Bot} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_f uh \\ C_f vh \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

avec les variables dimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
t &= \textit{temps } [s], \\
u &= \textit{vitesse dans la direction } x \ [m/s], \\
v &= \textit{vitesse dans la direction } y \ [m/s], \\
h &= \textit{hauteur d'eau } [m], \\
Z &= \textit{élévation du fond : la bathymétrie } [m], \\
H &= h + Z : \ \textit{Hauteur Totale } [m], \\
\nu &= \textit{viscosité cinématique } [m^2/s], \\
C_f &= \frac{gN^2(u^2+v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \ [s^{-1}], \\
g &= \textit{accélération de la pesanteur } [m/s^2], \\
N &= \textit{coefficient de Manning } [s/m^{1/3}], \\
\boldsymbol{U} &= (uh, vh)^T, \\
(\ldots..)^T &= \textit{transposée.}
\end{aligned}$$

Le coefficient de viscosité cinématique peut être assumé constant, ou bien calculé par la relation[27] :

$$\nu = C_\nu g N^2 (u^2 + v^2) h^{2/3}$$

où C_ν est une constante.(normalement $C_\nu = 1,167$)

Le système de coordonnées utilisé pour le développement des équations est montré à la figure [3.1] .

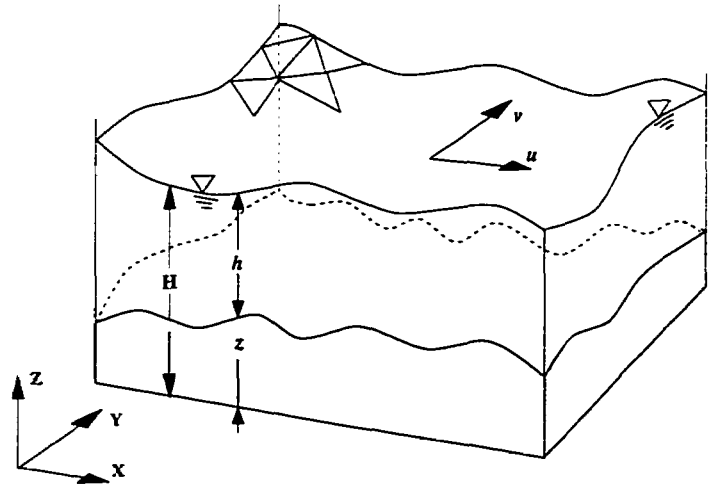


Figure 3.1: Domaine spatial pour les équations S.W.E.

3.2 Schéma Numérique de division de la différence de flux (FDS) de ROE

3.2.1 Propriétés du schéma de ROE 1-D (unidimensionnel)

Pour résoudre un problème de Riemann, la méthode de ROE[20] consiste à trouver la solution exacte au problème approximé de Riemann.

Pour un système d'équations d'Euler unidimensionnel :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x} = 0 \ ,$$

la méthode de ROE propose une linéarisation du type :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \ ,$$

où $\boldsymbol{A}$ est la matrice jacobienne du vecteur flux $\boldsymbol{f}$ par rapport au vecteur de variables conservatives $\boldsymbol{u}$. De plus, en décomposant le système d'Euler en plusieurs problèmes de Riemann, ROE[20] remplace la matrice jacobienne $\boldsymbol{A}$ par une matrice moyenne $\tilde{\boldsymbol{A}}$ dont les éléments sont localement constants, tel que : $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_L + \boldsymbol{u}_R)\right)$, où $\boldsymbol{u}_L$ *et* $\boldsymbol{u}_R$ sont respectivement les états de gauche et de droite du fluide par rapport à une interface. Le système devient donc :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_R)\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x} = 0 \ ,$$

où $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_R)$ doit satisfaire certaines conditions :

1) $\tilde{\boldsymbol{A}}$ représente une transformation linéaire du vecteur $\boldsymbol{u}$ vers le vecteur $\boldsymbol{f}$.

2) pour $\boldsymbol{u}_L \longrightarrow \boldsymbol{u}_R \longrightarrow \boldsymbol{u}$: $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_R) \longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u})$; où $\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}$.

3) pour chaque état $(\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_R)$; nous avons : $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{u}_L, \boldsymbol{u}_R).(\boldsymbol{u}_L - \boldsymbol{u}_R) = \boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R$.

4) les vecteurs propres de $\tilde{\boldsymbol{A}}$ doivent être linéairement indépendants.

Ces quatre conditions sont connues comme étant « les propriétés $\boldsymbol{u}$ ».

3.2.2 Propriétés du schéma de ROE 2-D pour les équations S.W.E.

En considérant à nouveau le système d'équations (3.1), (3.2) : le flux normal à l'interface des deux volumes de contrôle peut s'exprimer par :

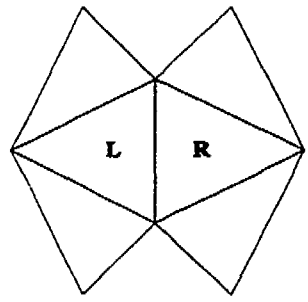


Figure 3.2: Interface d'un élément de contrôle

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{G}.\vec{\imath} + \boldsymbol{H}.\vec{\jmath}\,).(n_x.\vec{\imath} + n_y.\vec{\jmath}\,)$$

où n_x et n_y sont les composantes du vecteur normal extérieur à l'interface :

$\vec{n} = (n_x.\vec{\imath} + n_y.\vec{\jmath}\,)$ alors $\boldsymbol{F} = (n_x.\boldsymbol{G} + n_y.\boldsymbol{H})$. Par analogie avec le cas 1-D, on obtient la matrice jacobienne : $\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{f}}$,
donc : $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{f}_L, \boldsymbol{f}_R) = \dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta \boldsymbol{f}}$ avec $\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_L - \boldsymbol{F}_R$ et $\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R$ et nous pouvons réécrire : $\Delta \boldsymbol{F} = \Delta \boldsymbol{G}.n_x + \Delta \boldsymbol{H}.n_y$

Pour les équations SWE, il est avantageux de construire un vecteur paramètre $\boldsymbol{W}$, pour lequel les composantes de $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ sont fonction quadratique des composantes de $\boldsymbol{W}$. On pose alors :

$$\boldsymbol{W} = h^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad \text{que l'on peut noter} \quad \boldsymbol{W} = [W_1, W_2, W_3]^T,$$

$$\text{avec} \quad \overline{\boldsymbol{W}} = \frac{\boldsymbol{W}_L + \boldsymbol{W}_R}{2}$$

et on définit également les valeurs moyennes suivantes :

$$h = \sqrt{h_R h_L} \qquad\qquad c^2 = gh = \tfrac{1}{2} g(h_R + h_L)$$

$$u = \frac{\sqrt{h_R}u_R + \sqrt{h_L}u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} = \frac{\overline{W_2}}{\overline{W_1}} \qquad v = \frac{\sqrt{h_R}v_R + \sqrt{h_L}v_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}} = \frac{\overline{W_3}}{\overline{W_1}}$$

Les matrices de transformations sont déterminées en écrivant,

- Pour le vecteur $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{B} = \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{W}}$ et $\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{B}.\Delta \boldsymbol{W}$

avec $\boldsymbol{f} = [f_1, f_2, f_3]^T$

$f_1 = W_1{}^2$

$f_2 = W_1.W_2$

$f_3 = W_1.W_3$

- Pour le vecteur $\boldsymbol{G}$, on écrit : $\boldsymbol{C}_1 = \dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{W}}$ et $\Delta \boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}_1.\Delta \boldsymbol{W} = \boldsymbol{C}_1.\boldsymbol{B}^{-1}.\Delta \boldsymbol{f}$

avec $\boldsymbol{G} = [G_1, G_2, G_3]^T$

$G_1 = W_1.W_2$

$G_2 = W_1{}^2 + \frac{1}{2}gW_1{}^4$

$G_3 = W_2.W_3$

- Pour le vecteur $\boldsymbol{H}$, on écrit : $\boldsymbol{C}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{W}}$ et $\Delta \boldsymbol{H} = \boldsymbol{C}_2.\Delta \boldsymbol{W} = \boldsymbol{C}_2.\boldsymbol{B}^{-1}.\Delta \boldsymbol{f}$

avec $\boldsymbol{H} = [H_1, H_2, H_3]^T$

$H_1 = W_1.W_3$

$H_2 = W_2.W_3$

$H_3 = W_3{}^2 + \frac{1}{2}gW_1{}^4.$

Finalement la matrice jacobienne s'écrit : $\tilde{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta \boldsymbol{f}} = n_x \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{B}^{-1} + n_y \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{B}^{-1}$.

Les coefficients des matrices $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1}, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$, sont présentés à l'Annexe I.

La matrice de transformation : $\tilde{\boldsymbol{A}} = (n_x \boldsymbol{C}_1 + n_y \boldsymbol{C}_2)\ \boldsymbol{B}^{-1}$ nous donne finalement,

$$\check{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ c^2 n_x - u_n u & 2u n_x + v n_y & u n_y \\ c^2 n_y - u_n v & v n_x & 2v n_y + u n_x \end{bmatrix},$$

avec $u_n = u.n_x + v.n_y$ et $v_n = v.n_x + u.n_y$

Les conditions nécessaires 1) et 4), énoncées ci-dessus, nous assurent que la matrice $\check{\boldsymbol{A}}$ possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants et par conséquent qu'elle est factorisable sous la forme :

$$\check{\boldsymbol{A}} = S\, D\, S^{-1}$$

où D représente la matrice diagonale des valeurs propres de $\check{\boldsymbol{A}}$, $D = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, S étant la matrice des vecteurs propres.

Les valeurs propres (les vitesses des ondes caractéristiques) sont données par les racines du déterminant suivant :

$$det\ (\check{\boldsymbol{A}} - \lambda\, \boldsymbol{I}) = 0\,,$$

les valeurs obtenues sont :

$$\lambda_1 = u + c \qquad \lambda_2 = u - c \qquad \lambda_3 = u$$

De même les matrices de vecteurs propres S et S^{-1} sont données par :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ u + c n_x & u - c n_x & n_y \\ v + c n_y & v - c n_y & -n_x \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} c - u_n & n_x & n_y \\ c + u_n & -n_x & -n_y \\ 2c v_n & 2c n_y & -2c n_x \end{bmatrix}$$

En utilisant l'information précédente et suivant l'état considéré du fluide à gauche (L) ou à droite (R), on évalue le flux $\boldsymbol{F}$ à l'interface de deux éléments par deux différenciations amont, soit :

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f}_L, \boldsymbol{f}_R) = \boldsymbol{F}_L + SD^{(-)}S^{-1}(\boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R)$$

et

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f}_L, \boldsymbol{f}_R) = \boldsymbol{F}_R - SD^{(+)}S^{-1}(\boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R)$$

avec $D^{(-)} \equiv$ matrice des valeurs propres négatives.

avec $D^{(+)} \equiv$ matrice des valeurs propres positives.

données par : $D^{(-)} = \dfrac{D - |D|}{2}$, $D^{(+)} = \dfrac{D + |D|}{2}$ où $|D| = diag\ (\ |\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\ )$

En sommant les deux expressions, on obtient le flux moyen à l'interface :

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f}_L, \boldsymbol{f}_R) = \frac{1}{2}\ [\ \boldsymbol{F}_L + \boldsymbol{F}_R - S|D|S^{-1}(\boldsymbol{f}_L - \boldsymbol{f}_R)\ ] \tag{3.3}$$

3.3 Technique et approche de la méthode des volumes finis

La discrétisation des équations est menée de telle sorte que l'on considère les variables conservatives du flux $\boldsymbol{f}$ pratiquement constantes au niveau des cellules de calcul. La solution est avancée dans le temps de manière explicite.

L'intégration sur le volume, pour une cellule de contrôle-type V_c , de l'équation (3.1), se note comme suit :

$$\int_{V_c} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t}\, dV + \int_{V_c} \nabla \cdot (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} - \boldsymbol{D}if)\, dV = -\int_{V_c} (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{B}ot)\, dV$$

et nous donne à l'aide du théorème de la divergence, l'expression suivante :

$$V_c\,(\boldsymbol{f}_c^n - \boldsymbol{f}_c) + \Delta t\,\Sigma\,S_c\,(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} - \boldsymbol{Dif}\,) \;=\; -\Delta t\,V_c\,[\,\boldsymbol{R}_c + (\boldsymbol{Bot})_c)\,] \qquad (3.4)$$

où V_c représente le volume d'une cellule et les grandeurs, $\boldsymbol{f}_c^n$ et $\boldsymbol{f}_c$ représentent les quantités évaluées au temps $t+\Delta t$ et au temps t respectivement. S_c représente la surface d'une face de la cellule.

Les termes apparaissant dans la formule (3.4) sont calculés comme suit :

• Les termes convectifs : ceux-ci sont calculés à l'aide de l'équation (3.3) ci-dessus.

• Le gradient de bathymétrie : en introduisant l'élévation du fond du domaine comme étant la moyenne algébrique de l'élévation de deux cellules voisines, le terme $\boldsymbol{R}_c$ au travers de l'interface d'une cellule est donné par (Annexe V) :

$$V_c\,\boldsymbol{R}_c \;=\; \sum\,S_c\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ c^2 n_x \\ c^2 n_y \end{bmatrix}\,\Delta Z$$

• Les termes de diffusion : le processus de diffusion sera discuté ultérieurement suivant que l'on considère un schéma visqueux ou non-visqueux. Il est également à noter qu'une diffusion artificielle est introduite par le schéma de discrétisation de ROE.

• Le terme de friction de fond : le terme de friction s'évalue directement. Celui-ci sera introduit implicitement dans la boucle de calcul de l'évaluation du flux $\boldsymbol{f}_c^n$. Ce terme de friction provient du résultat de l'intégration, suivant l'axe Z, $\int_{Bot}^{Top} \frac{\partial}{\partial z}\,\tau_{xz}\,dz$, du terme de viscosité turbulente verticale, ou plutôt de cisaillement, noté : $\tau_{xz} \;=\; \nu\left(\frac{\partial uh}{\partial z}\right)$. Cette intégration, bornée du fond jusqu'à la surface, nous donne normalement deux conditions frontières. Dans un premier temps, et avant

de considérer les cas multi-couches, nous allons ajouter plus tard la condition de surface (condition de vent), nous ne modélisons que le terme de friction de fond qui s'écrit dans notre notation tensorielle :

$$V_c\,(\boldsymbol{Bot})_c \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ C_f\; uh\; n_x \\ C_f\; vh\; n_y \end{bmatrix}$$

En prenant l'expression de l'équation (3.4), le traitement numérique (voir Annexe II) de ce terme de friction, s'introduit comme suit dans la boucle de calcul des flux $\boldsymbol{f}_c^n$:

$$\begin{bmatrix} f_{c_1}^n \\ f_{c_2}^n \\ f_{c_3}^n \end{bmatrix} = \frac{1}{V_c}\cdot \begin{bmatrix} (1+\Delta t\; C_f) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{1+\Delta t\; C_f}\right) \cdot \begin{bmatrix} V_c\; f_{c_1} + \Delta t\; \delta f_{c_1} \\ V_c\; f_{c_2} + \Delta t\; \delta f_{c_2} \\ V_c\; f_{c_3} + \Delta t\; \delta f_{c_3} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

où les incréments $\delta \boldsymbol{f}_c$ résultants, de la division du flux à l'interface de deux éléments du domaine, de la solution sont donnés par les expressions suivantes :

$$\delta \boldsymbol{f}_{c\,L} = \delta \boldsymbol{f}_{c\,L} - S_c(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} - \boldsymbol{Dif} + \boldsymbol{R}_{c\,L})$$

$$\delta \boldsymbol{f}_{c\,R} = \delta \boldsymbol{f}_{c\,R} - S_c(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} - \boldsymbol{Dif} + \boldsymbol{R}_{c\,R})$$

- <u>Le critère de stabilité</u> : le pas de temps pour le schéma explicite est sujet à la condition CFL suivante :

$$\Delta t \;=\; CFL\,.\,max\left(\frac{min(V_{c\,R}, V_{c\,L})}{S(|u|+c)}\right) \qquad \textit{pour un schéma non} - \textit{visqueux}$$

et

$$\Delta t \;=\; CFL\,.\,max\left(\frac{min(V_{c\,R}, V_{c\,L})}{S(|u|+c+2\nu\frac{S}{V_d})}\right) \qquad \textit{pour un schéma visqueux}$$

où la valeur maximale est prise par rapport à tous les côtés du domaine. Le CFL, généralement compris entre 0 et 1, est de $0,8$ pour toutes les applications.

3.4 Conditions limites et conditions aux « frontières ouvertes » d'un domaine

Pour l'imposition des conditions aux frontières du domaine, il nous faut définir l'état de gauche et de droite du domaine en question. Nous allons donc considérer l'état de gauche à l'intérieur du domaine et l'état de droite comme étant la frontière elle-même. Pour un schéma non-visqueux, nous avions pour le flux à l'interface, l'équation suivante :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_R + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F} - \frac{1}{2}S|D|S^{-1}\Delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}_L$$

où d'après la notation de ROE[21], et je cite *"la différence de flux entre deux états* $\boldsymbol{W}_L, \boldsymbol{W}_R$ *(le vecteur paramètre) peut toujours s'exprimer de manière unique comme étant* $\boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L = \sum_k \alpha_k \lambda_k \mathbf{e}_k$ *avec* $\mathbf{e}_k$*, les vecteurs propres de* $\boldsymbol{A}$*;* α_k*, la force des ondes; et* λ_k*, les valeurs propres de* $\boldsymbol{A}$*, les vitesses d'ondes. Une linéarisation locale de notre matrice* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ *permet de satisfaire la relation* $\boldsymbol{W}_R - \boldsymbol{W}_L = \sum_k \alpha_k \mathbf{e}_k$ *et on peut alors obtenir au niveau d'une ligne ou d'une surface caractéristique, l'expression :* $\boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L = V_s(W_R - W_L)$*,* V_s*, étant la vitesse de la caractéristique."* Dans notre cas, nous allons ramener l'expression ci-dessus du flux à l'interface à : $(\boldsymbol{\sigma}_i + \mathbf{1})\boldsymbol{\alpha}_i = 0$, i allant de 1 à 3, avec $\alpha = DS^{-1}\Delta\boldsymbol{f}$, modifiant en cela la notation de ROE qui utilise $\alpha = S^{-1}\Delta\boldsymbol{f}$. (Voir aussi Annexe IV). Nous avons donc pour, D, S^{-1} et $\Delta\boldsymbol{f}$:

$$D = \begin{bmatrix} u+c & 0 & 0 \\ 0 & u-c & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2c}\begin{bmatrix} c-u_n & n_x & n_y \\ c+u_n & -n_x & -n_y \\ 2cv_n & 2cn_y & -2cn_x \end{bmatrix}, \quad \Delta\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \Delta h \\ \Delta uh \\ \Delta vh \end{bmatrix}$$

ce qui après quelques développements, nous amène l'expression :

$$\alpha = \frac{1}{2c}\begin{bmatrix} c\Delta uh + uh\Delta u + c^2\Delta h \\ c\Delta uh - uh\Delta u - c^2\Delta h \\ -2cuh\Delta v \end{bmatrix}$$

A l'aide de cette expression, nous allons pouvoir extrapoler tous les types de conditions possibles sur l'état de l'écoulement aux frontières :

- <u>Écoulement sous-critique à l'entrée</u> : Pour ce type d'écoulement nous avons $-c < u \leq 0$ avec $\sigma_1 = 1$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = -1$ et cela nous donne à résoudre $2\alpha_1 = 0$, ou plutôt $\alpha_1 = 0$. Les cas triviaux $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$ nous permettent de spécifier deux conditions sur ce type d'entrée. Généralement, il s'agit soit d'un flux spécifique, soit d'une élévation d'eau.

- <u>Écoulement super-critique à l'entrée</u> : Pour ce cas, nous avons $u < -c$, les trois valeurs propres du système sont négatives. Trois conditions doivent être spécifiées à cet endroit.

- <u>Écoulement sous-critique à la sortie</u> : Pour une frontière sous-critique sur la sortie $c > u > 0$; $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ et $\sigma_2 = -1$ ce qui nous donne $2\alpha_1 = 2\alpha_3 = 0$, ou encore $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$. Cela a l'avantage de pouvoir être traité de la même façon qu'une entrée sous-critique.

- <u>Écoulement super-critique à la sortie</u> : Pour cette configuration $u > c$ les trois valeurs propres sont positives. Le calcul du flux $\boldsymbol{f}$ est explicite dans ce cas-là et $\boldsymbol{f}_R = \boldsymbol{f}_L$.

Nous devons porter une attention particulière à la résolution de $\alpha_1 = 0$ pour le cas sous-critique.

Comme stipulé plus haut pour cette configuration, deux types de conditions peuvent être imposées : soit une hauteur d'eau, soit un débit. Si un débit est imposé, pour obtenir le flux spécifique correspondant, il suffit de diviser ce débit par la dimension de la frontière où le débit est fixé.

- Dans le premier cas, où l'élévation est fixée, nous avions $\alpha_1 = 0$, ce qui nous donne pour cette expression : $c\Delta uh + uh\Delta u + c^2\Delta h = 0$, en simplifiant par c et avec le terme central égal à zéro (voir en Annexe III), nous obtenons explicitement la relation $u_R = u_L - \frac{c}{h}\Delta h$.

- Dans le deuxième cas, si un débit est fixé, donc associé à un flux spécifique, donné par $u_R h_R$, la relation $\alpha_1 = 0$ sera fonction de h_R et la résolution de l'équation $u_R = u_L - \frac{c}{h}\Delta h$ fera appel à une méthode de Newton. En exprimant cette équation sous forme adimensionnelle (Annexe III), et en introduisant un pseudo nombre de Froude $\mathcal{F}$, celle-ci nous donne alors :

$$\alpha_1 \sim \phi(a) = \mathcal{F}_R - \mathcal{F}_L a^2 - a(1-a^2)\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+a^2)}$$

$$\phi(a) = \mathcal{F} - \mathcal{F}_L a^2 - \overline{\mathcal{F}}(a) \tag{3.6}$$

avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}_R = \dfrac{u_R h_R}{c_L h_L}$; $\mathcal{F}_L = \dfrac{u_L h_L}{c_L h_L}$; $a = \sqrt{\dfrac{h_R}{h_L}}$; $c_L = \sqrt{g h_L}$

et $\overline{\mathcal{F}}(a) = a(1-a^2)\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+a^2)}$.

Les solutions possibles pour l'équation (3.6) polynômiale en a sont présentées sur les figures ci-après. Pour les courbes représentées en figures [3.3 a)] et [3.3 b)],

nous constatons que si l'expression $\mathcal{F} - \mathcal{F}_L a^2$ est plus grande que $\overline{\mathcal{F}}(a)$, l'équation (3.6) n'a pas de solution. Cela peut se produire si le débit devient trop important sur la frontière de sortie, il en résulte un écoulement supercritique à la sortie. Si cela se produit, nous utilisons un artifice de calcul pour limiter la valeur de $\mathcal{F}_\mathcal{R}$ à l'aide de l'expression suivante $\mathcal{F}_\mathcal{R} = max\,[\mathcal{F}_L a^2 + \overline{\mathcal{F}}(a)]$, et une solution acceptable pour a est ensuite obtenue en s'assurant que la dérivée de l'équation (3.7) est nulle :

$$-\,\phi(a)' = [\mathcal{F}_L a^2 + \overline{\mathcal{F}}(a)]' = 0 \tag{3.7}$$

L'équation $\phi(a)'$ est donc résolue par une méthode de Newton en donnant une valeur initiale pour a de telle sorte que $\phi(a) > 0$. L'analyse nous a montré qu'une valeur initiale acceptable pouvait être prise comme le maximum entre 1 *et* $\mathcal{F}_L$. Tant que la valeur de la dérivée $\phi(a)'$ n'a pas convergé vers zéro, la sous-routine de Newton poursuit son processus. Une fois la boucle itérative achevée la valeur de $\mathcal{F}_R$ est remise à jour avec la dernière valeur obtenue pour a , et cela à l'aide de l'expression $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_L a^2 + a(1-a^2)\sqrt{\frac{1}{2}(1+a^2)}$.

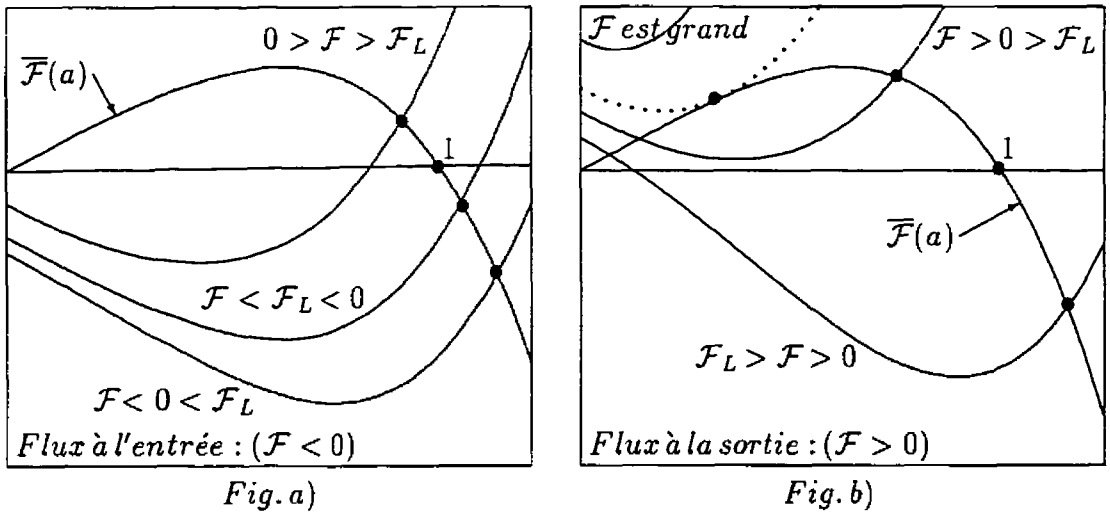


Fig. a) *Fig. b)*

Figure 3.3: Solution de l'équation (3.6)

3.5 Présentation des éléments et description de la technique d'évaluation des hauteurs d'eau

La construction du maillage du domaine se fait à l'aide d'un éditeur de géométrie ainsi qu'un mailleur 2-D (Geo. Mars) pour ce qui est des frontières extérieures (coordonnées suivant X et Y) ainsi que du choix du type de quadrilatères et de la taille de ceux-ci, une deuxième interface pour le logiciel (Callisto) reprend le maillage au complet à l'aide duquel on installe de façon automatique ou manuelle le nombre de points de fond (coordonnées suivant X, Y et Z) désirés. Une sous-routine d'interpolation linéaire se charge ensuite de calculer la véritable « hauteur d'eau de fond », h en chacun des points des sommets des quadrilatères.

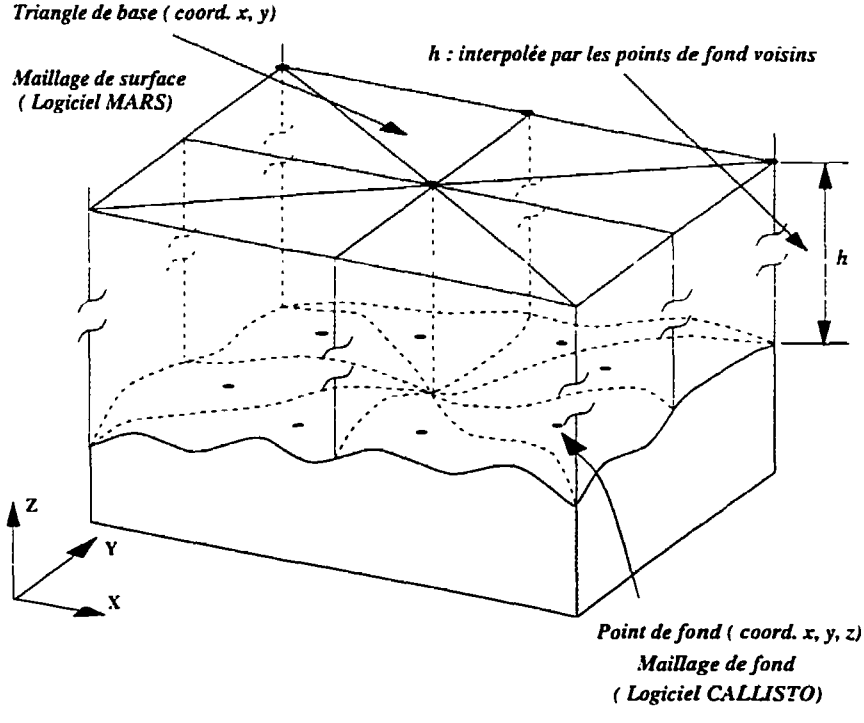


Figure 3.4: Vue des éléments pour l'évaluation des hauteurs d'eau

3.5.1 Utilisation de ces interfaces pour une gestion multi-couches

Pour pouvoir utiliser le même type de construction et de définition de la géométrie d'un domaine, la même souplesse de modification du maillage de la surface libre de ce domaine et d'implantation des points de piquets de fond à l'aide des logiciels cités précédemment, nous proposons simplement d'intégrer, dans le menu de définition des conditions initiales du problème, une variable supplémentaire relative au nombre de couches désirées.

En fonction de la bathymétrie du domaine considéré (très accidentée ou pas) nous allons donc pouvoir opter, sous-forme de pré-traitement, à partir de ce même menu, au choix du schéma numérique de résolution désiré. « SWE ou multi-couches ». Une boucle de calcul se charge ensuite automatiquement de redéfinir la (les) zone(s), le nombre et la connectivité des différents éléments triangulaires (par couche) et le type de frontières restant impliquées (entrée, sortie, solide) suivant la profondeur des couches choisie dans la direction verticale du domaine.

Dans le chapitre suivant nous allons faire l'analyse du modèle multi-couches, le descriptif des équations de base, ainsi que l'intégration suivant la verticale du domaine de ces mêmes équations et donner les expressions semi-discrètes des nouveaux termes à considérer qui sont apparus dans la formulation.

Chapitre 4

Modèle multi-couches

4.1 Analyse du modèle

4.1.1 Présentation

Dans le chapitre précédent la modélisation des écoulements, pour lesquels nous avons fait certaines approximations (accélération verticale négligeable), et l'intégration sur la verticale de ces équations, nous a conduit vers les équations et l'utilisation d'un schéma numérique en eaux peu profondes.

Pour une meilleure description des phénomènes qui peuvent être présents sur la direction verticale, du fond du domaine jusqu'à la surface, comme les effets de cisaillement, la stratification des couches (effet de variation de densité, ici entre l'eau douce et l'eau salée), les effets du vent en surface, la bathymétrie plus accidentée du fond du domaine, en plus de l'ajout des forces de Coriolis, nous avons choisi

d'étendre le modèle bi-dimensionnel vers une résolution multi-couches.

Cette alternative s'avère plus judicieuse qu'un modèle pleinement 3-D qui, lui, aurait été plus coûteux en temps de développement, en gestion d'espace et de ressources informatiques. En conservant la souplesse d'utilisation du modèle 2-D ainsi que la formulation mathématique des équations (par couches) qui reste sensiblement la même, l'option multi-couches (quasi-3D) présente des capacités et des résultats tout aussi précis par rapport à n'importe quel autre modèle 3-D.

Les prédictions des courants de marée au niveau d'une structure tri-dimensionnelle se révèle d'une importance primordiale dans les champs d'application, tels que la gestion de l'environnement et les techniques d'ingénierie hydrauliques, parce qu'elles sont capables de mettre en évidence les flux de courant principaux dans toutes les directions, horizontales et verticales et ne limitent plus l'analyse à la simple hypothèse des équations en eaux peu profondes.

L'extension du modèle bi-dimensionnel (S.W.E.) vers un modèle multi-couches est un problème relativement aisé à résoudre; la formulation mathématique de cette transformation réside essentiellement dans l'implantation de nouvelles variables dans la structure du schéma 2-D existant. Ces nouvelles variables sont par ordre d'importance, la somme des termes de pression hydrostatique des couches supérieures par rapport aux couches inférieures, les termes de flux-convectif verticaux (négligés dans la formulation S.W.E.) et les termes de cisaillement verticaux faisant intervenir la viscosité turbulente verticale ainsi que les termes dus aux forces de Coriolis, lorsqu'il s'agit de modéliser des domaines relativement grands. (Estuaire, portions de côte océaniques, etc...)

La capacité du modèle multi-couches de prédire certaines caractéristiques de l'écoulement est alors améliorée pour ce qui relève de la détermination des courants au niveau des inter-couches. Avec de telles prédictions, vérifiées dans cette formulation, il est généralement beaucoup plus facile d'introduire, sous cette forme, d'autres équations de transport (sédiments, température, polluants).

4.2 Équations du modèle multi-couches

L'utilisation de ce type de modélisation et de formulation, suit celle proposée par KAWAHARA[11] et les équations s'expriment de la manière suivante :

4.2.1 Les équations de base

Pour la continuité et les équations de momentum nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \ . \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) + fv \ , \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial (vv)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) - fu \ , \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \ . \tag{4.4}$$

où u, v, w représentent les vitesses suivant les directions X, Y, Z, p la pression, ρ la densité, τ_{ij} les cisaillements suivants leurs axes respectifs, f la force de Coriolis.

Remarque : Les termes surlignés en gras n'apparaissent pas dans la formulation des équations en eaux peu profondes (S.W.E.). Il est à noter que le paramètre de Coriolis est donné par la relation $f = 2\omega\, sin\phi$ où $\omega = 0.000084\, rad.s^{-1}$ est la vitesse angulaire de la terre et ϕ la latitude. Pour le cas typique du fleuve Saint-Laurent, la latitude moyenne est de $48.5^o N$.

4.2.2 Intégration et discrétisation

Ce sont ces équations de Navier-Stokes qui intégrées sur la verticale, nous donnent les expressions discrètes par couches. Les flux des composantes des vitesses horizontales moyennées par couches sont données par les formules suivantes :

$$u^{(k)}.\, h^{(k)} = \int_{Z_B^{(k)}}^{Z_T^{(k)}} u\, dz \tag{4.5}$$

$$v^{(k)}.\, h^{(k)} = \int_{Z_B^{(k)}}^{Z_T^{(k)}} v\, dz \tag{4.6}$$

où les indices T et B réfèrent respectivement au sommet et au bas d'une couche (k). Pour l'équation de continuité et les deux expressions de momentum des quantités conservatives h, uh, vh nous avons, en omettant l'indice (k), les relations analytiques et semi-discrètes par couche :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0 \ , \qquad ^{(*)} \tag{4.7}$$

(*) *Pour ces différents termes, voir l'annexe VI (obtention des équations)*

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial(uuh + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} + \frac{\partial uvh}{\partial y} + [\,(\boldsymbol{uw})^{(k+1/2)} - (\boldsymbol{uw})^{(k-1/2)}\,] \;=\; -gh.\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$+ \quad fv^{(k)}h^{(k)} \quad + \quad \frac{1}{\rho}\int_{Z_B^{(k)}}^{Z_T^{(k)}} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) dz \quad + \quad \frac{1}{\rho}\,[\,\boldsymbol{\tau}_{xT}^{(k)} - \tau_{xB}^{(k)}\,] \quad . \qquad (4.8)$$

$$\frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial(vvh + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial y} + [\,(\boldsymbol{vw})^{(k+1/2)} - (\boldsymbol{vw})^{(k-1/2)}\,] \;=\; -gh.\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$- \quad fu^{(k)}h^{(k)} \quad + \quad \frac{1}{\rho}\int_{Z_B^{(k)}}^{Z_T^{(k)}} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}\right) dz \quad + \quad \frac{1}{\rho}\,[\,\boldsymbol{\tau}_{yT}^{(k)} - \tau_{yB}^{(k)}\,] \quad . \qquad (4.9)$$

Les expressions (4.7) à (4.9) constituent donc le système d'équations à partir desquelles nous allons dériver notre notation propice à la formulation de Roe. Les composantes surlignés en gras ci-dessus forment avec les termes de force de Coriolis, le vecteur des « termes sources ».

Il est à noter que le terme de pression est séparé de la manière suivante, voir aussi en Annexe V :

$$p \;=\; \rho g \int dz \;=\; \rho g H \qquad \text{avec } H \;=\; h + Z \;.$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{suivant } x \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{suivant } y$$

La hauteur H étant considérée au niveau des interfaces des couches(voir fig. 4.1). Ce qui résulte en un gradient de pression à gauche [3ième terme des équations (4.8) (4.9)] et à droite [1ier terme à droite des équations (4.8) (4.9)] pour les expressions de momentum :

l'un égal à : $\nabla\frac{1}{2}gh^2$ à gauche ; l'autre égal à : $-gh\nabla Z$ à droite

Comme les équations (4.8) et (4.9) sont exprimées ***par couche***, il faut absolument considérer la pression hydrostatique des couches supérieures par rapport à celle où s'effectue le calcul. Dans cette présentation nous ne tenons pas compte, pour ce qui tient de la validation du schéma quasi-3D sur les configurations simples, des variations de densité des couches l'une par rapport à l'autre, nous ajoutons donc simplement le terme suivant au terme de gradient de bathymétrie :

$$p_*^{(l)} = -\sum_{k=l+1}^{k_{max}} g\, h^{(k)}$$

Les termes de cisaillement pour les couches de fond et de surface, sont donnés respectivement par :

$$\text{fond :} \quad \frac{\tau_{xB}^{(k)}}{\rho} = C_f\, uh \quad ; \quad \frac{\tau_{yB}^{(k)}}{\rho} = C_f\, vh \qquad \text{avec} \quad C_f = \frac{gN^2(u^2+v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \; [s^{-1}],$$

$$\text{surface :} \quad \frac{\tau_{xT}^{(k)}}{\rho} = C_D\, W_x\, ({W_x}^2 + {W_y}^2)^{1/2} \quad ; \quad \frac{\tau_{yT}^{(k)}}{\rho} = C_D\, W_y\, ({W_x}^2 + {W_y}^2)^{1/2}$$

avec C_D : coefficient de traînée (1.5×10^{-4} à 2.5×10^{-6})

Si la condition de vent en surface ne s'applique pas, les termes associés à cette condition disparaissent des équations ci-dessus.

Pour les couches intermédiaires le coefficient de viscosité turbulente verticale, (parfois signalé dans la littérature par ${A_z}^{(k)}$), et noté ici f_{ric} . Nous avons utilisé la valeur 0.01 pour les cas présentés plus loin. Les termes qui sont associés à ce coefficient sont donnés par les expressions suivantes :

$$\text{intermédiaire}\,(Top) \; : \; \frac{\tau_{xT}^{(k)}}{\rho} = f_{ric}\,(u^{k+1} - u^k)^2 \quad ; \quad \frac{\tau_{yT}^{(k)}}{\rho} = f_{ric}\,(v^{k+1} - v^k)^2$$

$$\text{intermédiaire}\,(Bot) \; : \; \frac{\tau_{xB}^{(k)}}{\rho} = f_{ric}\,(u^k - u^{k-1})^2 \quad ; \quad \frac{\tau_{yB}^{(k)}}{\rho} = f_{ric}\,(v^k - v^{k-1})^2$$

Pour les couches intermédiaires le coefficient de viscosité turbulente horizontale, généralement exprimé par $A_l{}^{(k)}$ ou encore $A_x{}^{(k)}$ et $A_y{}^{(k)}$, apparaissant dans le terme de diffusion, est considéré constant. Dans ce qui suit nous le noterons ν, et vaut pour les cas présentés ci-après $\nu = 0.01\ m^2 s^{-1}$.

Les termes de flux-convectifs dans les expressions (4.8) et (4.9) sont approximés par les relations suivantes :

$$(uw)^{(k+1/2)} = w^{(k)}\frac{1}{2}(u^{(k+1)} + u^{(k)}) \quad ; \quad (vw)^{(k+1/2)} = w^{(k)}\frac{1}{2}(v^{(k+1)} + v^{(k)}) \ ;$$

$$(uw)^{(k-1/2)} = w^{(k)}\frac{1}{2}(u^{(k-1)} + u^{(k)}) \quad ; \quad (vw)^{(k-1/2)} = w^{(k)}\frac{1}{2}(v^{(k-1)} + v^{(k)}) \ ;$$

où $w^{(k)}$ représente la composante verticale de la vitesse dans le $k^{ième}$ volume de contrôle de la $k^{ième}$ couche. De l'équation de continuité nous obtenons l'expression de $w^{(l)}$, la vitesse verticale de la couche (l), en sommant la contribution des couches situées en dessous de celle-ci.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = w^{(l)} = -\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{\partial u^{(k)}\, h^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(k)}\, h^{(k)}}{\partial y}\right)$$

4.2.3 Schéma du domaine multi-couches

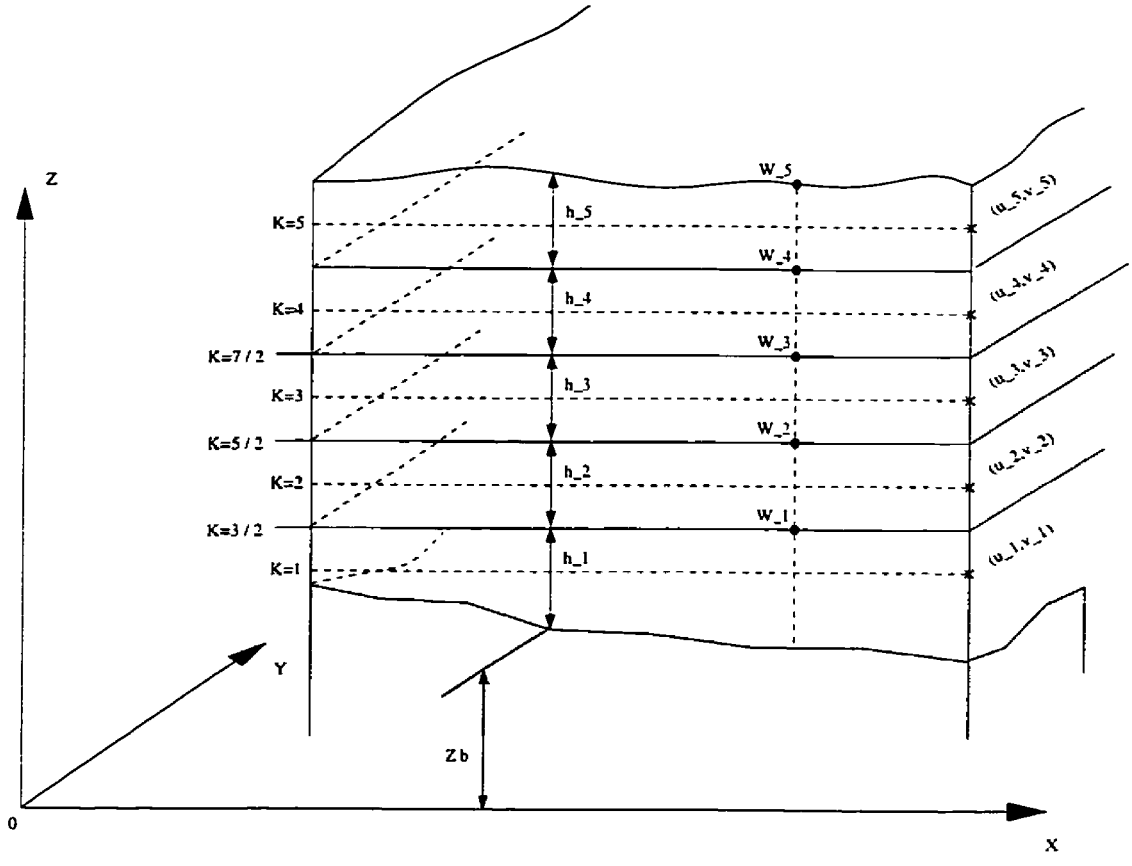


Figure 4.1: Modèle multi-couches

4.2.4 Approche « Volume Finis », quasi-3D

Le système d'équations, décrit plus haut, peut se noter sous forme compacte :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial y} = -\boldsymbol{R} + \nabla \cdot \boldsymbol{Dif} - \boldsymbol{Bot} - \boldsymbol{Sou} \tag{4.10}$$

où

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} uh \\ uuh + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ vvh + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ gh.\frac{\partial Z}{\partial x} \\ gh.\frac{\partial Z}{\partial y} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Dif} = \begin{bmatrix} 0 \\ \nu\left[\nabla \boldsymbol{U} + \left(\nabla \boldsymbol{U}\right)^T\right] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Bot} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_f uh \\ C_f vh \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Sou} = \begin{bmatrix} 0 \\ So_x \\ So_y \end{bmatrix}.$$

avec

$$So_x = [(uw)^{(k+1/2)} - (uw)^{(k-1/2)}] - fv^{(k)}h^{(k)} - \frac{1}{\rho}[\tau_{xT}^{(k)} - \tau_{xB}^{(k)}]$$

et

$$So_y = [(vw)^{(k+1/2)} - (vw)^{(k-1/2)}] + fu^{(k)}h^{(k)} - \frac{1}{\rho}[\tau_{xT}^{(k)} - \tau_{xB}^{(k)}]$$

et également $\boldsymbol{U} = [uh, vh]^T$

La formulation quasi-3D ne présente donc pas de changement fondamental par rapport à la formulation bi-dimensionnelle si ce n'est dans le traitement des conditions frontières sur chacune des couches et le rajout du terme source ($\boldsymbol{Sou}$), pour chaque élément d'une même couche suivant que ce même élément possède ou non un voisin identique (une image) sur les couches qui sont situées au-dessus ou en-dessous de lui et dont les coordonnées spatiales suivant les directions X et Y sont identiques pour toutes ces couches. Nous obtenons donc un domaine discret formé d'une succession de colonnes d'eau empilées l'une sur l'autre qui restent parfaitement alignées de la surface libre jusqu'au fond du domaine.

Chapitre 5

Validation des schémas numériques

5.1 Modèles 2D

5.1.1 Propagation d'une onde dans un canal rectangulaire

En utilisant le schéma 2-D décrit ci-dessus, la première application étudiée porte sur la propagation d'une onde linéaire sur un domaine prismatique représentant un conduit fermé à une extrémité. La présente étude est comparée, ici, par rapport à celle fournie en référence[7].

Nous considérons les conditions aux frontières suivantes :

$$u = 0 \quad \text{à} \quad x = x_0 \qquad \text{et} \qquad h = a\cos(wt) \quad \text{à} \quad x = L$$

avec $a \equiv$ amplitude $= 0,1\ m$.

$w = 2\pi f$ la fréquence périodique; $f = \frac{1}{T}$ et $T \equiv$ la période d'une composante de marée, par exemple.

Remarque : Il existe différents types de composantes principales de la marée, dont les plus usitées en modélisation sont les suivantes :

M_2 dont la période en heures, $T = 12,42h$

S_2 dont la période en heures, $T = 12,00h$

K_1 dont la période en heures, $T = 23,93h$

O_1 dont la période en heures, $T = 25,82h$

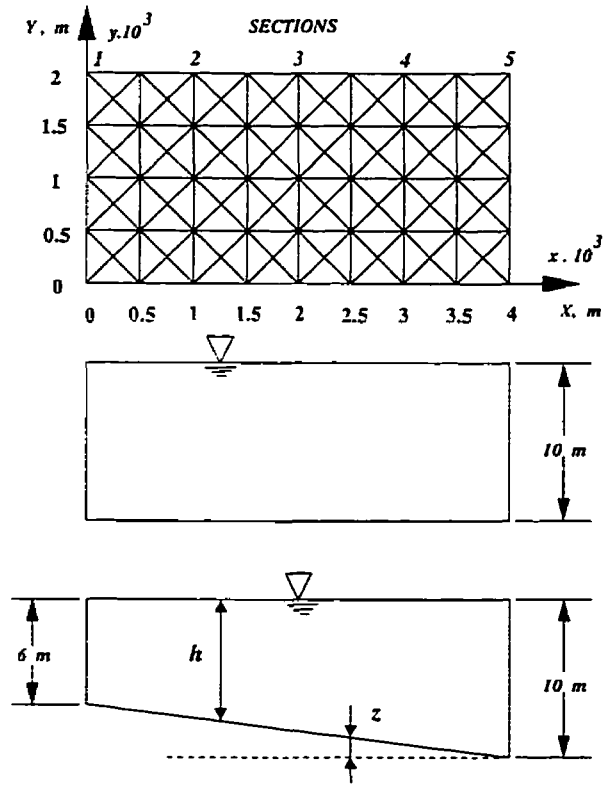
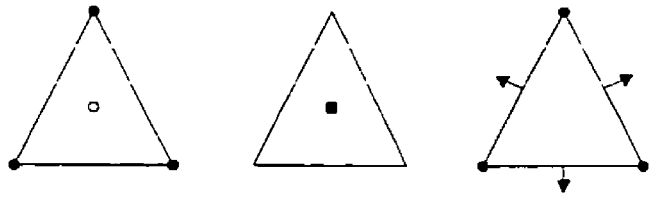


Figure 5.1: Configuration du maillage et 2 types de bathymétrie

Les résultats présentés ci-dessous sous forme de tableaux et de graphiques ont été obtenus après 2 à 3 cycles d'une période d'une heure avec un Δt évalué automatiquement à l'intérieur de la boucle de calcul du pas de temps. Les résultats sont illustrés à partir de la figure [5.3] jusqu'à la figure [5.6].

Les fichiers de valeurs utilisées pour soutenir la comparaison par rapport à la présente méthode sont donnés ci-après pour les figures et les tableaux correspondants. Les types d'éléments utilisés par G.Dhatt & al.[7] ainsi que pour la présente étude sont illustrés sur la figure [5.2] ci-dessous. Nous avons choisi ici de ne comparer qu'avec deux types d'éléments. Les auteurs cités utilisent une méthode d'éléments finis appliquée sur des triangles pour lesquels le calcul des variables caractéristiques de l'écoulement s'effectue à différents endroits de ces mêmes éléments. Leurs résultats soutiennnent parfaitement la comparaison avec les résultats présentés dans cette étude.



T3B ***Présente méthode*** ***T6N***

- ***Point de calcul de hauteur et de vitesse***
- ***Point de calcul de vitesse***
- ***Vitesse normale au côté***
- ***Point de calcul de toutes les grandeurs caractéristiques***

Figure 5.2: Stockage des variables au niveau des éléments

• *Comparaison des résultats numériques (présente étude vs. Dhatt & al.) et la solution exacte de la propagation d'une onde linéaire :*

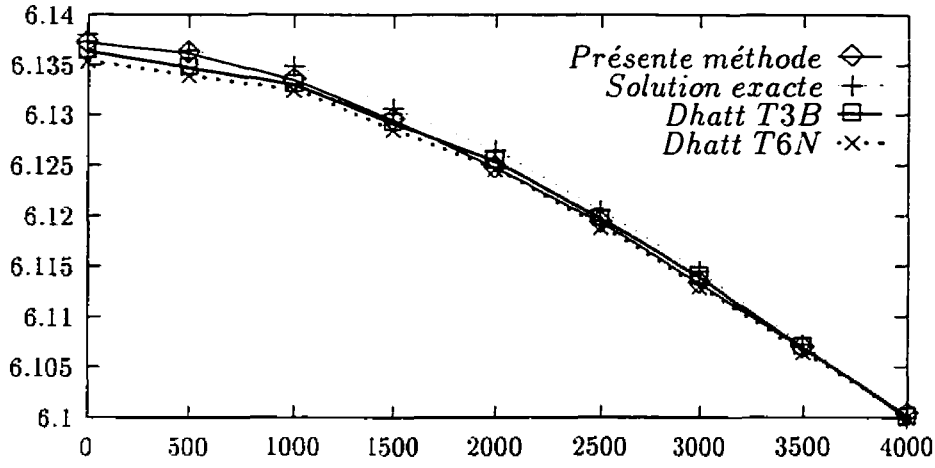


Figure 5.3: Hauteur d'eau à $t = 2,0\,h$, pente linéaire $= 1.10^{-3}$

Tableau 5.1: Valeurs associées à la figure [5.3]

(Tableau comparatif repris en référence [7] pour les sections données en figure [5.1])

Sections	1	2	3	4	5
Solution exacte	0,1381	0,1349	0,1265	0,1145	0,1000
Présente étude	0,1372	0,1334	0,1247	0,1132	0,1000
Élément T3B	0,1364	0,1330	0,1254	0,1139	0,1000
Élément T6N	0,1354	0,1325	0,1246	0,1130	0,1000

• *Comparaison des résultats numériques (présente étude vs. Dhatt & al.) et la solution exacte de la propagation d'une onde linéaire :*

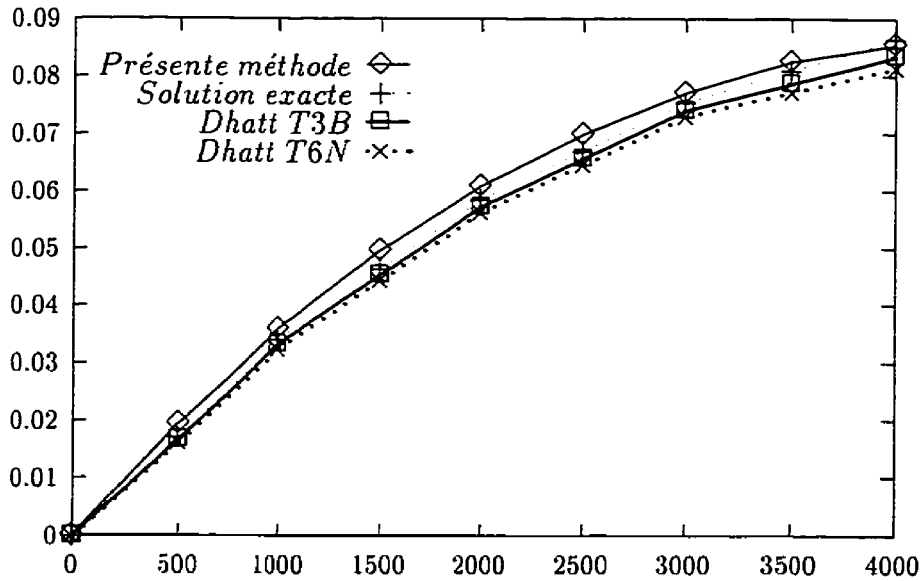


Figure 5.4: Vitesse linéaire suivant l'axe X à $t = 2,25\,h$, pente $= 1.10^{-3}$

Tableau 5.2: Valeurs associées à la figure [5.4]

(Tableau comparatif repris en référence [7] pour les sections données en figure [5.1])

Sections	1	2	3	4	5
Solution exacte	0,0000	0,0342	0,0585	0,0754	0,0866
Présente étude	0,0000	0,0359	0,0608	0,0770	0,0856
Élément T3B	0,0000	0,0333	0,0572	0,0740	0,0834
Élément T6N	0,0000	0,0325	0,0563	0,0730	0,0814

• *Comparaison des résultats numériques (présente étude vs. Dhatt & al.) et la solution exacte de la propagation d'une onde linéaire :*

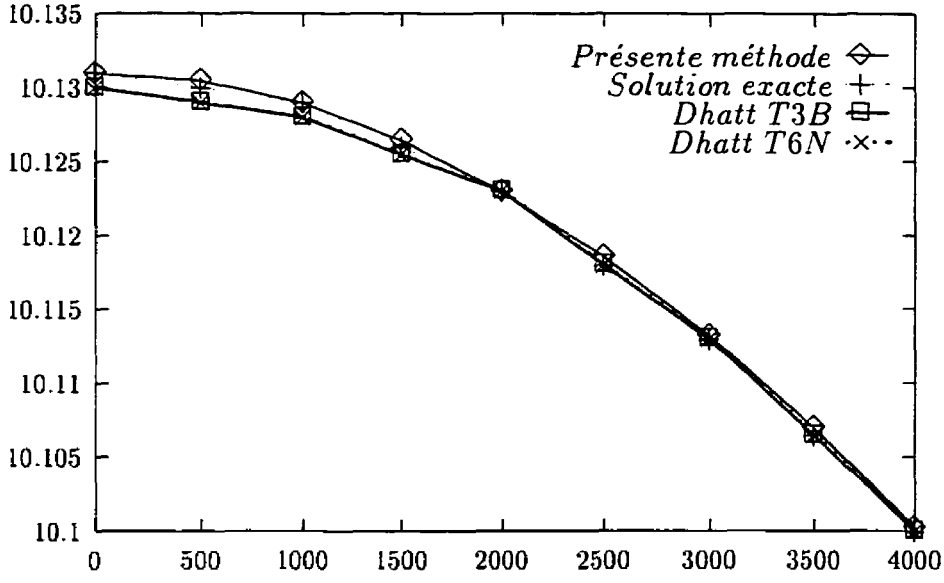


Figure 5.5: Hauteur d'eau à $t = 2,0\,h$, pente $= 0$

Tableau 5.3: Valeurs associées à la figure [5.5]

(Tableau comparatif repris en référence [7] pour les sections données en figure [5.1])

Sections	1	2	3	4	5
Solution exacte	0,1310	0,1290	0,1230	0,1130	0,1000
Présente étude	0,1309	0,1289	0,1229	0,1132	0,1000
Élément T3B	0,1300	0,1280	0,1230	0,1130	0,1000
Élément T6N	0,1300	0,1280	0,1230	0,1130	0,1000

• *Comparaison des résultats numériques (présente étude vs. Dhatt & al.) et la solution exacte de la propagation d'une onde linéaire :*

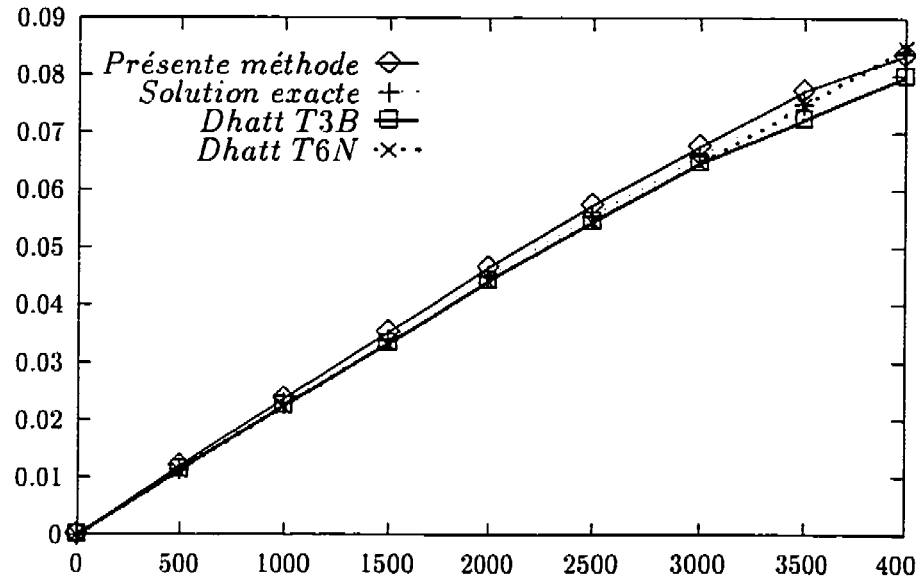


Figure 5.6: Vitesse linéaire suivant l'axe X à $t = 2,25\,h$, pente = 0

Tableau 5.4: Valeurs associées à la figure [5.6]

(Tableau comparatif repris en référence [7] pour les sections données en figure [5.1])

Sections	1	2	3	4	5
Solution exacte	0,0000	0,0230	0,0450	0,0660	0,0840
Présente étude	0,0000	0,0237	0,0465	0,0675	0,0835
Élément T3B	0,0000	0,0225	0,0442	0,0646	0,0798
Élément T6N	0,0000	0,0225	0,0443	0,0648	0,0850

5.1.2 Modèle de marée

Le domaine en question représente un quart de cercle annulaire pouvant schématiquement modéliser une île ou une portion de côte. Pour ce type de configuration, il existe également une série de solutions analytiques développées par LYNCH & GRAY [14] qui sont avec le canal rectangulaire, les tests les plus couramment utilisés pour valider un schéma numérique dédié aux équations en eaux peu profondes. Comme précédemment, le même type de démarche a été employé pour la configuration de la bathymétrie. Le front d'onde est fixé sur le rayon le plus grand $R2$.

Domaine et types de bathymétrie :

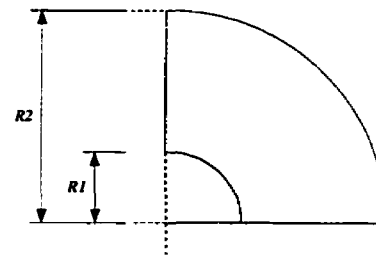


Figure 5.7: Vue du domaine : portion de côte

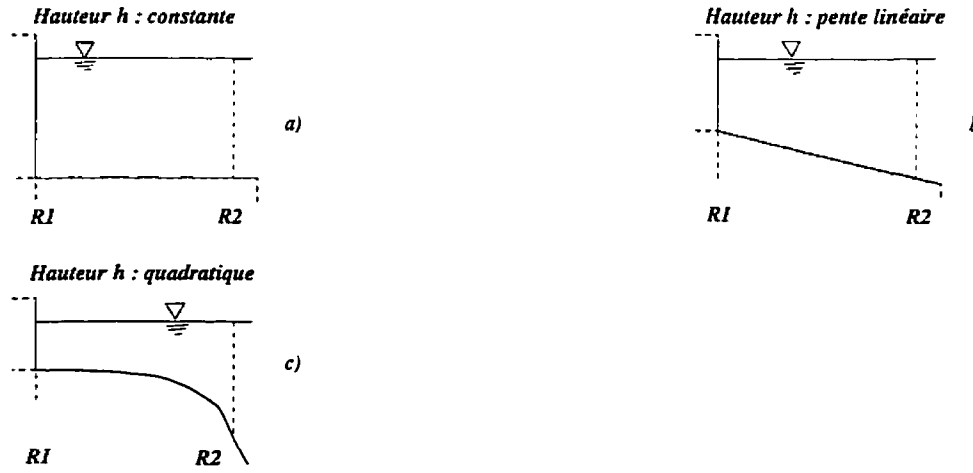


Figure 5.8: 3 types de bathymétrie

Dimensions et configurations des domaines respectifs :

La bathymétrie variant suivant la loi $h = h_0\, r^n$, où h_0 est une constante, r est la distance radiale et n un entier, nous avons adopté pour le cas [5.8 a)] une profondeur constante de 9 *mètres* (30 *feet*), $(n = 0)$; pour le cas [5.8 b)], une variation linéaire d'une profondeur de 6 *mètres* (20 *ft*) à $r = R_1$ jusqu'à 15 *m* (50 *ft*) à $r = R_2$, $(n = 1)$; pour le cas [5.8 c)], une variation quadratique d'une profondeur de 3 *m* (10 *ft*) à $r = R_1$ jusqu'à 18,75 *m* (62,5 *ft*) à $r = R_2$, $(n = 2)$. Les autres paramètres de ces configurations sont les suivants :

$\Delta r = 15\ km\ (5.10^4\ ft)$

$R_1 = 4\Delta r \quad R_2 = 10\Delta r$

une période $T = 12,4\ h$, avec a l'amplitude $= 0,03\ m\ (0,1\ ft)$ à $r = R_2$

Plusieurs tailles de maillage ont été testées, pour les figures qui suivent nous avons choisi d'en présenter deux types : Un premier maillage grossier de 7 points suivant la direction radiale, et un 2 ième maillage de 14 points suivant cette même direction.

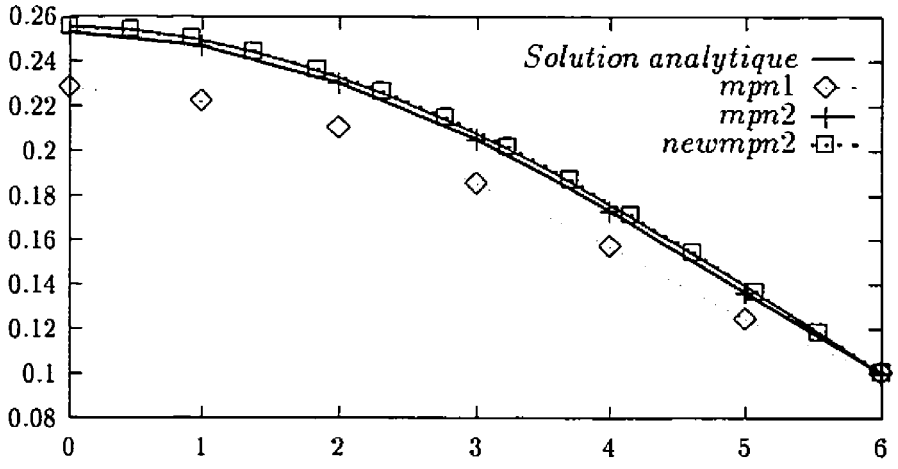


Figure 5.9: Hauteur d'eau constante à HWT (High Water Time)

Pour l'évaluation de la vitesse radiale sur le type de bathymétrie, fig.[5.8 c)], nous avons choisi un 3 ième maillage de 28 points pour illustrer le fait que plus on raffine le maillage, plus la solution numérique tend vers celle analytique (voir figure [5.12]). La figure [5.9] représente l'évaluation de la hauteur d'eau, pour une bathymétrie nulle : type a), avec l'imposition d'une condition d'élévation oscillante sur la frontière droite $h = h + a.cos(wt)$. La solution analytique ainsi que les résultats numériques sont représentées pour les maillages fin et grossier, nous pouvons constater que les solutions sont confondues. Le fichier "$mpn1$" est la première solution obtenue sur le maillage grossier (7 points) avec un coefficient de Manning de $N = 0,025$. C'est la plus éloignée. Après calibration sur le même maillage, la solution "$mpn2$" avec un coefficient $N = 0,015$ se rapproche très bien de la solution analytique. C'est avec cette valeur de Manning $N = 0,015$ que la solution sur le maillage fin (14 points) a été obtenue.

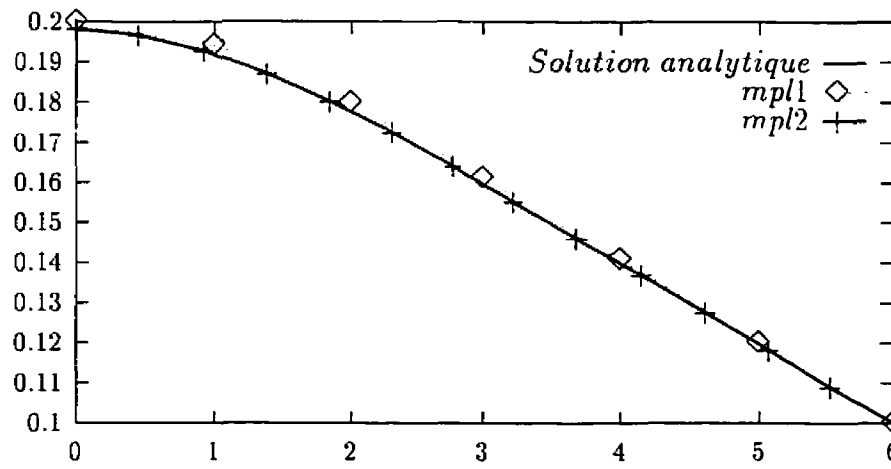


Figure 5.10: Hauteur d'eau à HWT pente linéaire

Pour une bathymétrie linéaire : type b), figure [5.10], le coefficient de Manning est de $N = 0,027$. La solution analytique correspond parfaitement à la

solution numérique pour ce qui est du maillage fin *fichier "mpl2"* et grossier *fichier "mpl1"* . Il est à noter que les dimensions données suivant l'espace d'ordonnée Y sont en pieds (ft), ceci pour supporter une comparaison plus aisée avec les figures de MATSOUKIS[17], ceci étant valable pour toutes les figures présentées. On rappelle que celui-ci utilise une méthode des caractéristiques et une combinaison de schémas numériques 2-D, 3-D, appliquée aux équations en eaux peu profondes.

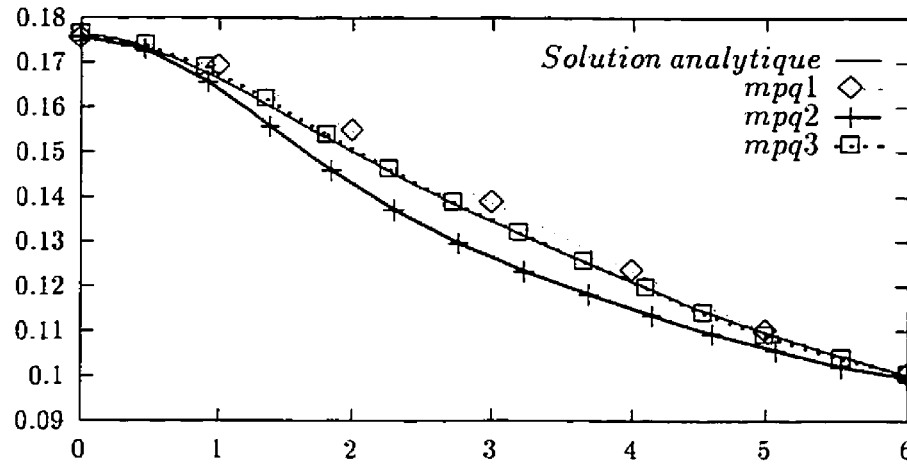


Figure 5.11: Hauteur d'eau à HWT pente quadratique

Pour une bathymétrie quadratique : type c), figure [5.11], la solution analytique correspond bien à la solution numérique fichier *mpq3* pour le maillage fin. Le coefficient de Manning de $N = 0,022$. La solution du fichier *mpq2* sur le maillage fin correspond à un résultat obtenu après 2 cycles de calcul. La solution du fichier *mpq1* correspond au maillage grossier. Il est à noter que l'élévation maximale de la hauteur d'eau en ordonnée sous-estime, pour ce cas-là, de $0,005$ ft la valeur obtenue en référence [17].

Sur la figure [5.12], la vitesse radiale est donnée en ft/s et correspond à la vitesse le long d'un rayon r du domaine, lorsque l'élévation d'eau est maximum à la frontière $r = R_2$.

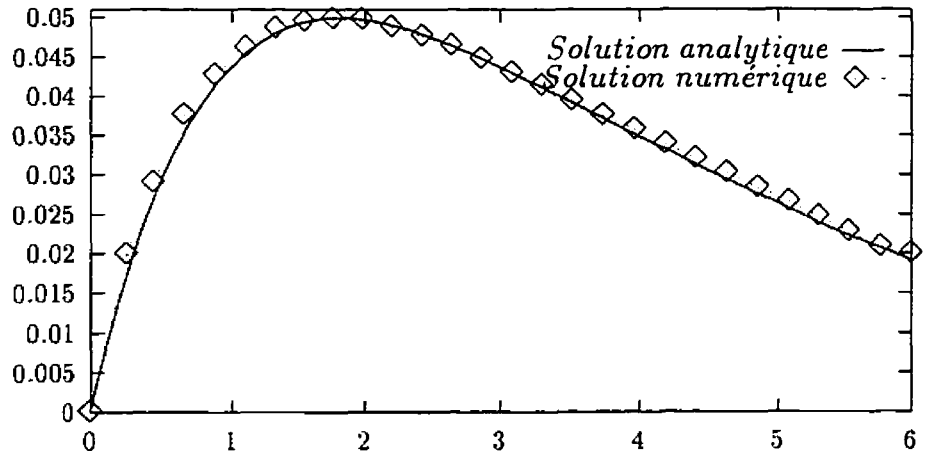


Figure 5.12: Vitesse radiale : Domaine quadratique

Le coefficient de Manning est de $N = 0,03$. Pour les maillages plus grossiers (7 *et* 14 *points*) , les courbes se situent en moyenne 10 % au dessus de celles montrées en figure [5.12].

5.2 Modèle quasi-3D

5.2.1 Modèle de vent

Plusieurs études, qui traitent des modèles de vent et des modèles de marée en hydrodynamique, peuvent être trouvées dans la littérature et leurs auteurs proposent des résultats, autant expérimentaux que théoriques, faisant appel à différentes méthodes de résolution, ayant sensiblement la même précision pour ce qui tient des cas tests proposés pour la validation.

Le cas d'un canal rectangulaire d'une profondeur de $10\,m$, d'une longueur de $1000\,m$ et d'une largeur unitaire est un classique du genre. Pour ce test une vitesse de vent en surface égale à $10\,m\,s^{-1}$ a été utilisée. Les valeurs des autres coefficients des variables utiles sont celles mentionnées ci-dessous avec entre autre pour la couche de fond, un terme de friction de fond de type quadratique (coefficient de Manning de 0,015). Pour la figure [5.13] ci-après nous comparons le résultat numérique obtenu, fichier *o172.out* , avec celui de la solution analytique *kawa.exa* donnée par Koutitas & O'Connor[12] et également présentée par Kawahara[11].

L'expression normalisée de la vitesse horizontale suivant la profondeur adimensionnalisée du domaine est donnée par :

$$u = Z(3Z - 2) .$$

Nous pouvons remarquer sur la figure [5.13] que les solutions, analytique et numérique, sont presque semblables.

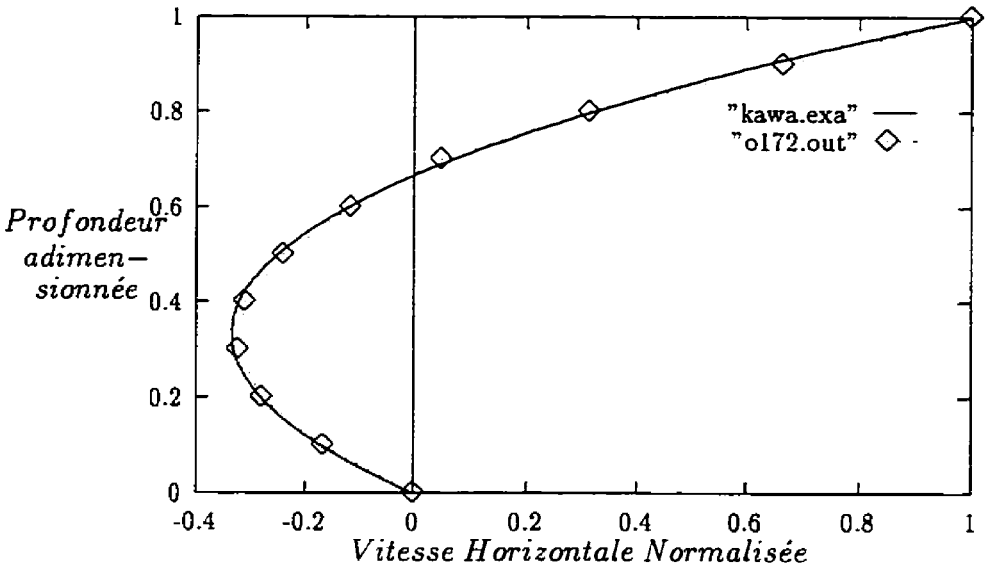


Figure 5.13: Comparaison analytique et numérique du modèle de vent

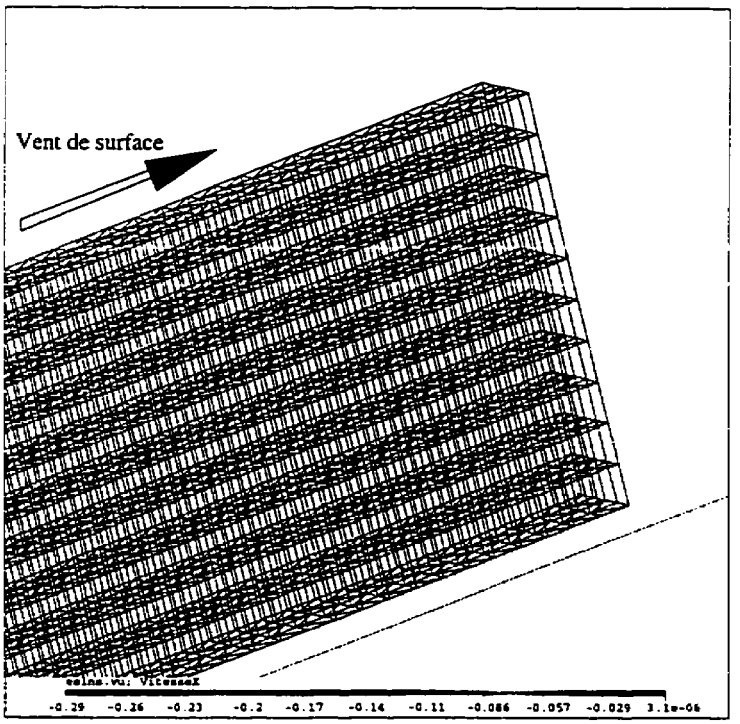


Figure 5.14: Vue 3-D du canal rectangulaire avec condition de vent en surface

• La deuxième validation consiste en un bassin rectangulaire de grande taille dont les dimensions sont de $600\,km * 1200\,km$ pour une profondeur de $100\,m$. En l'absence de force de Coriolis et en présence d'un terme de friction de fond de type quadratique (Manning $0,03$), avec un terme de cisaillement en surface tel qu'exprimé ci-dessus et une vitesse de vent de $10\,m\,s^{-1}$ suivant l'axe le plus long (dans ce cas X), une solution analytique peut être dérivée qui ne dépend alors que de l'autre variable spatiale Y et du temps t. Elle est donnée pour ce qui est de l'élévation moyenne $\bar{h}(y,t)$, par la relation suivante (voir réf.[10]) :

$$\bar{h}(y,t) \;=\; \frac{4\,\tau_w^y}{\pi\,\rho\,h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(kt/2h)}}{(2\,n+1)\,\theta_{2n+1}}\,\sin(\theta_{2n+1}\,t)\;\sin\frac{(2\,n+1)\,\pi\,y}{L}$$

avec $\tau_w^y \equiv \tau_{yT}^{(k)}$, le cisaillement du au vent en surface donné plus haut compris entre $0,1\,N\,m^{-2}$ et $0,25\,N\,m^{-2}$ et également $k = 0,003\,m\,s^{-1}$ pour le calcul de l'expression analytique.

$$\text{et} \qquad \theta_{2n+1} \;=\left\{\frac{(2\,n+1)^2\,\pi^2\,gh}{L^2}-\left(\frac{k}{2h}\right)^2\right\}^{1/2}$$

Le résultat obtenu pour cette deuxième validation est visible sur la figure [5.15], où l'élévation d'eau en cm est donnée au point $X = 0$, $Y = 30\,km$ du domaine considéré.

• La troisième validation représente le même bassin rectangulaire de dimensions plus réduites que le premier, ouvert sur la gauche de la figure [5.14] qui est considéré comme l'entrée du domaine et la droite du domaine comme une paroi réfléchissant l'onde de surface. La longueur du bassin est de $200\,km$, la largeur de $100\,km$ et la profondeur est de $H = 50\,m$. Le vent en surface est de $10\,m\,s^{-1}$ et les valeurs des coefficients sont les mêmes que précédemment.

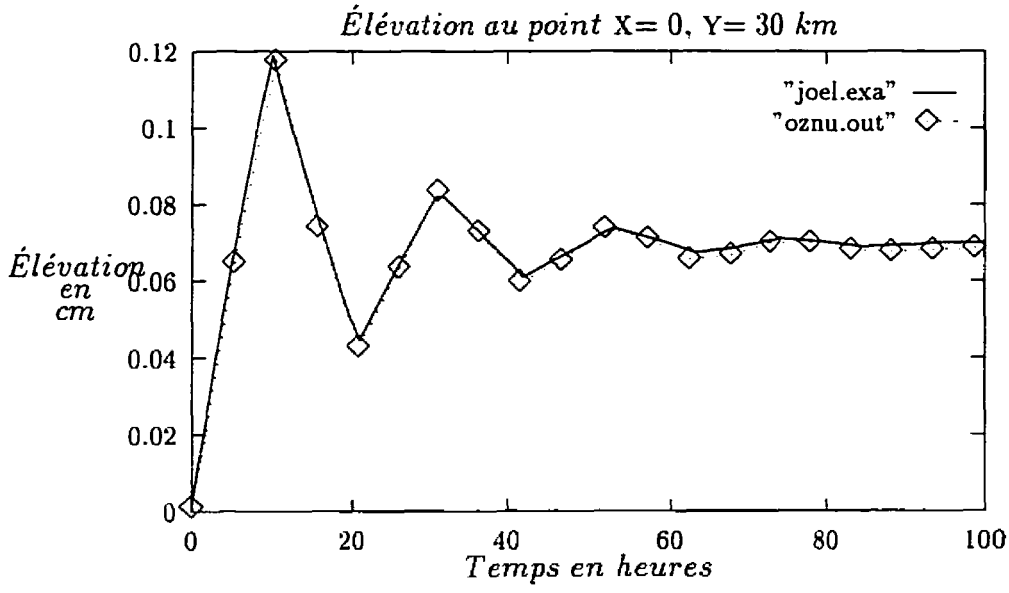


Figure 5.15: Élévation : solution 2D, analytique et numérique.

Les 6 figures suivantes montrent, pour les deux premières, les champs de vitesses horizontales pour les 9 premières couches, figure [5.16], l'autre pour la couche de surface, figure [5.17], ainsi que les profils de vitesse au centre du bassin suivant les directions X et Y pour les 4 derniers graphes. Ces résultats, sans être parfaitement comparables à ceux obtenus par MATSOUKIS[17], qui utilise une méthode des caractéristiques ainsi qu'une combinaison alternée d'un schéma numérique 2-D : 3-D, ils rejoignent la théorie d'Ekman qui énonce que pour ce cas-ci la vitesse moyenne, au centre du bassin suivant la verticale, est proche de zéro. Ces résultats probants démontrent que l'emploi de cette méthode de volumes finis est tout aussi propice à la modélisation hydrodynamique que toute autre méthode ainsi qu'à l'analyse sur des cas réels plus complexes.

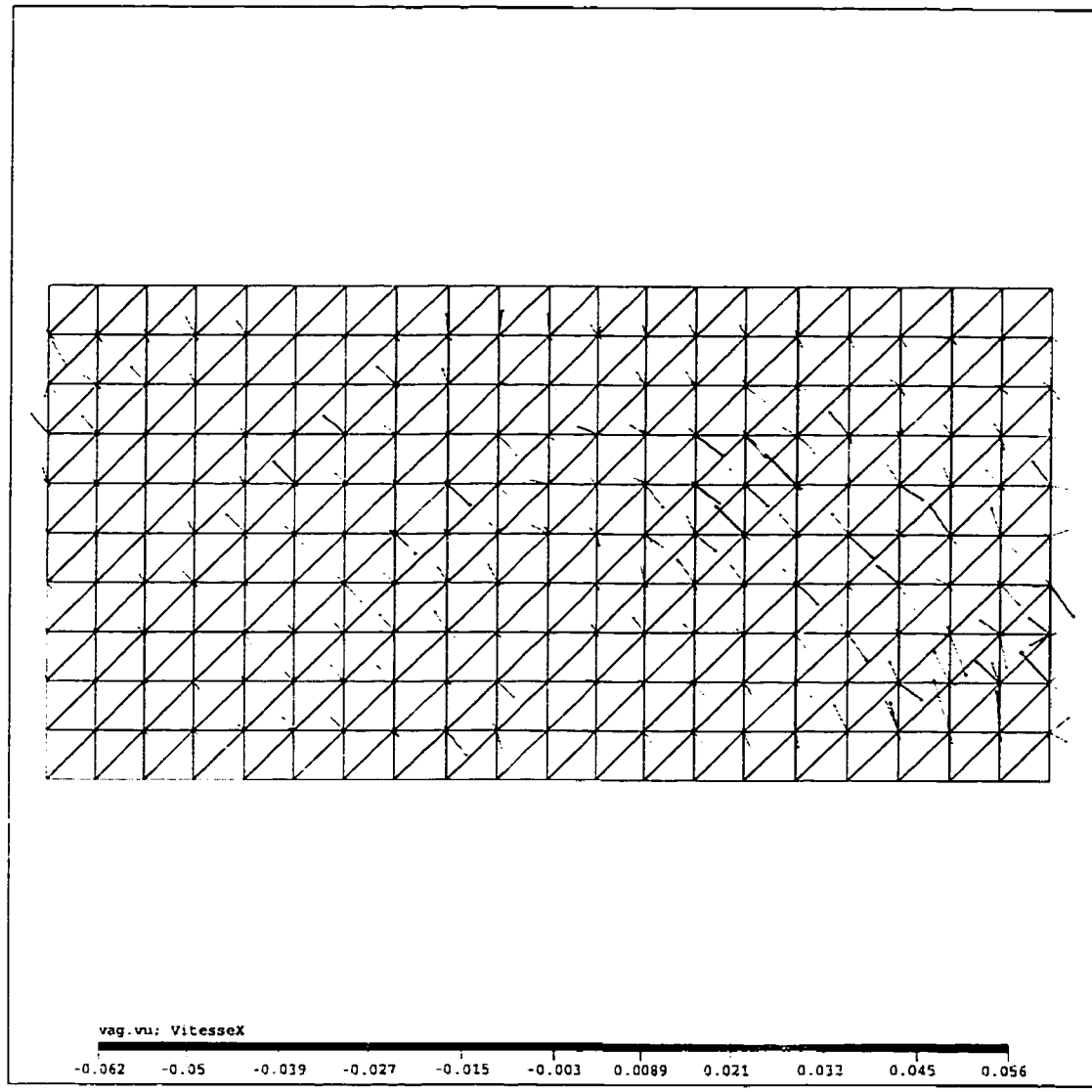


Figure 5.16: Norme de la vitesse sans la couche de surface

Couleur suivant la vitesse dans la direction X et cela sur 9 couches

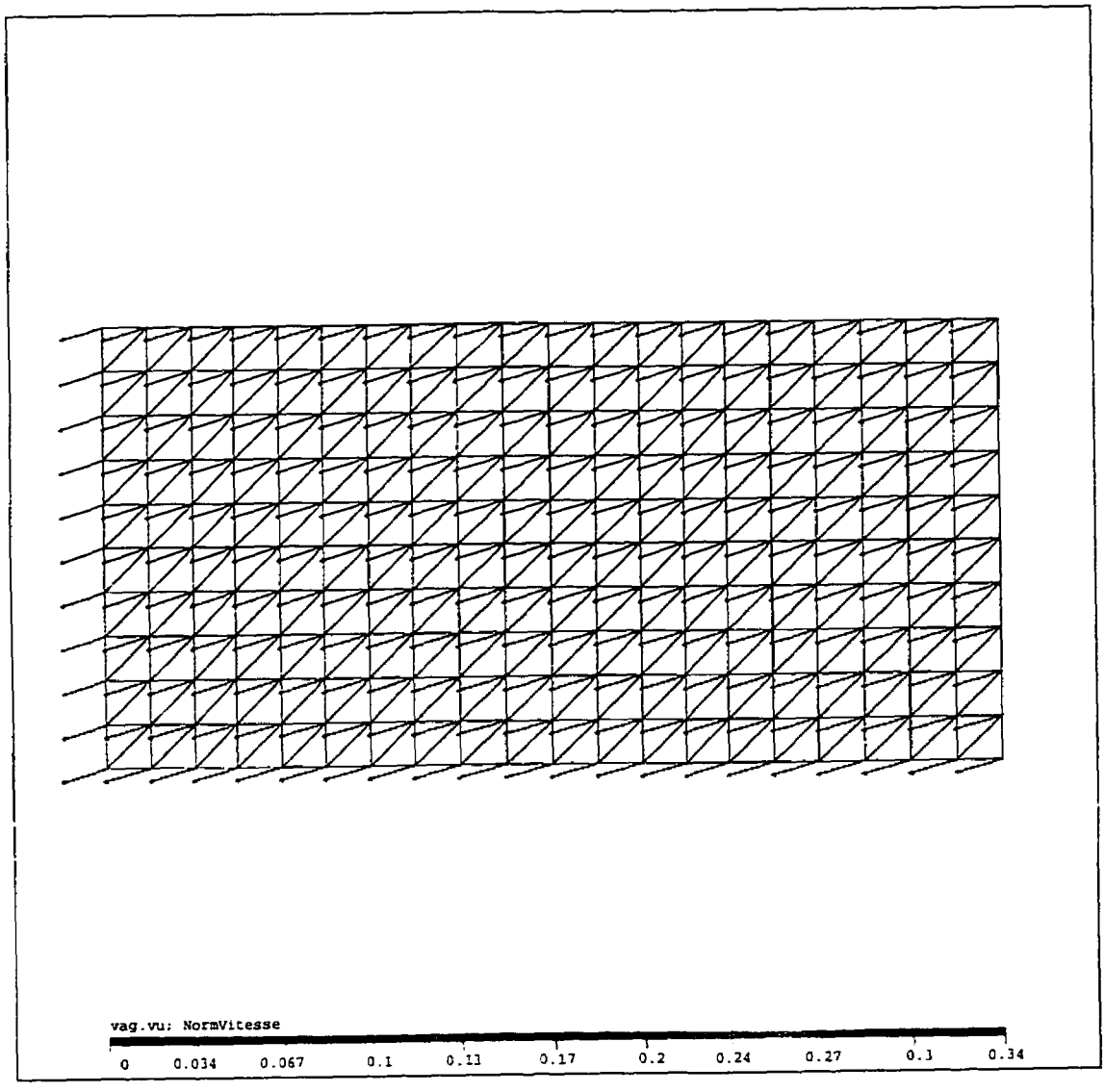


Figure 5.17: Norme de la vitesse

Couleur suivant la norme de la vitesse sur la couche de surface

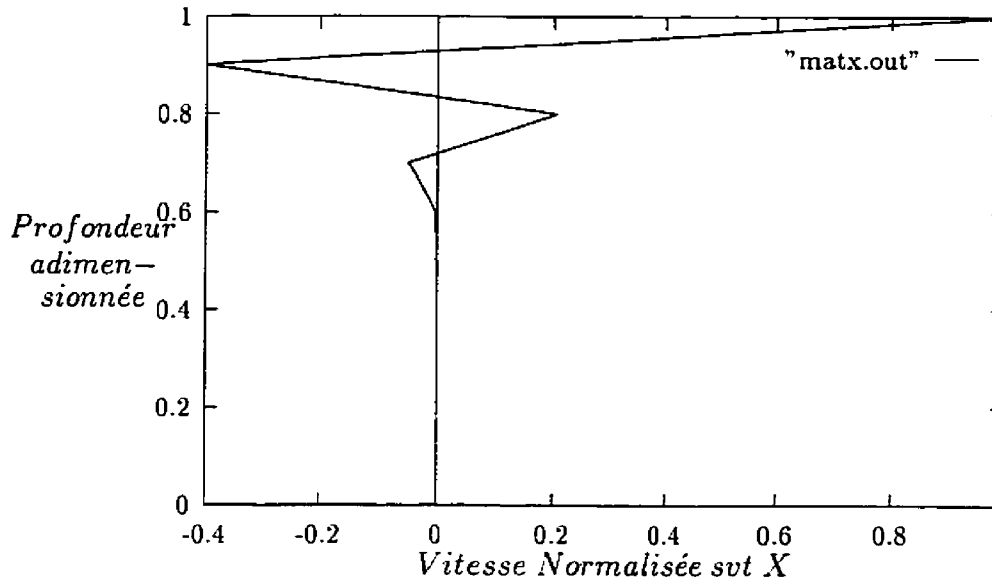


Figure 5.18: Profil adimensionnel au point milieu suivant X

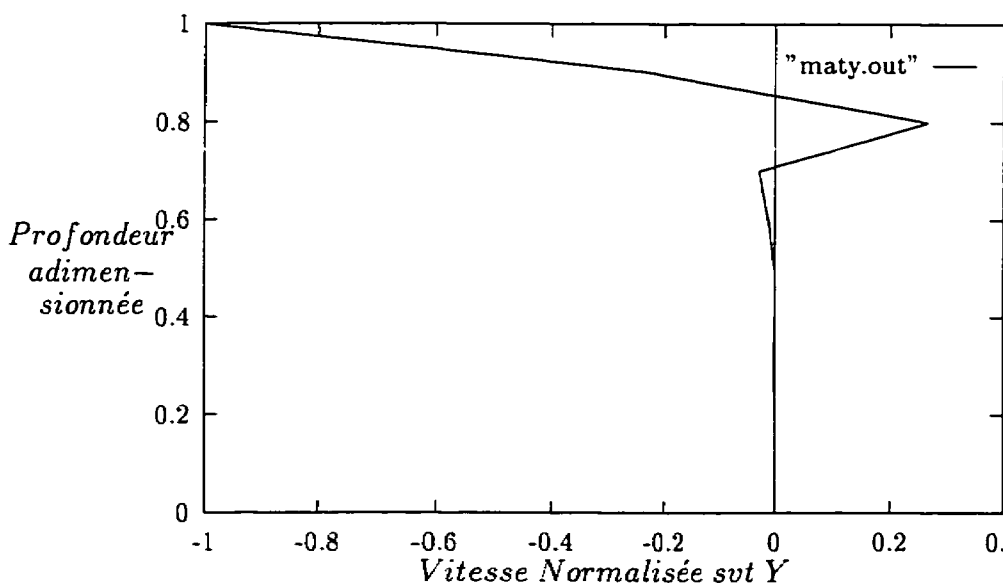


Figure 5.19: Profil adimensionnel au point milieu suivant Y

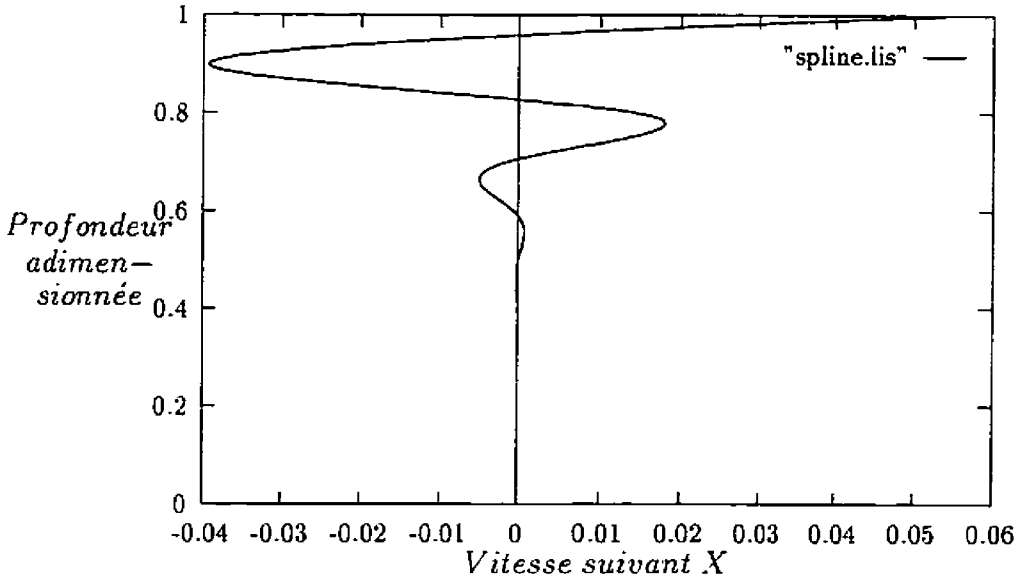


Figure 5.20: Profil en courbe spline suivant X

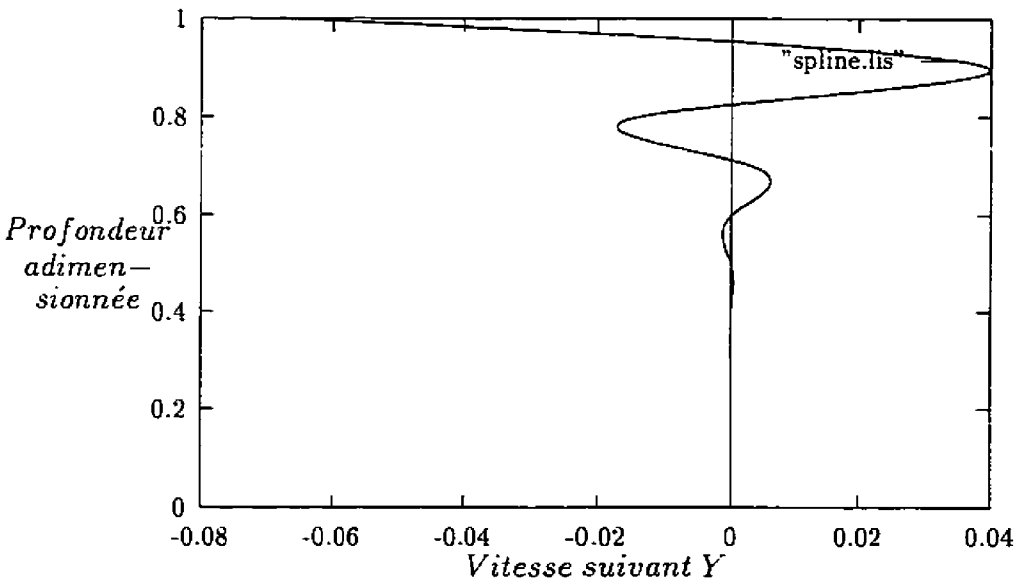


Figure 5.21: Profil en courbe spline suivant Y

La figure [5.22] représente l'élévation moyenne $\bar{h}$ pour le cas multi-couches (quasi-3D). Bien que pour ce cas-ci, il n'existe pas de solution analytique suffisamment précise en fonction de toutes les variables présentes (spatiales et temporelle). Il est quand même possible d'obtenir une bonne approximation analytique de la solution qui présente une amplitude plus grande que pour le cas 2D, due à l'impulsion donnée par les couches inférieures sur la couche de surface[10]. En introduisant dans l'expression analytique un paramètre adimensionnel $\varepsilon = A_Z/kh$ qui disparaît lorsqu'on se trouve au niveau de la couche de fond, cette élévation analytique est donnée par la relation : (voir réf.[10])

$$\bar{h}(y) = \frac{3}{2}\frac{\tau_w^y}{\rho g h}\frac{(1+2\varepsilon)}{(1+3\varepsilon)}\left(y - \frac{L}{2}\right)$$

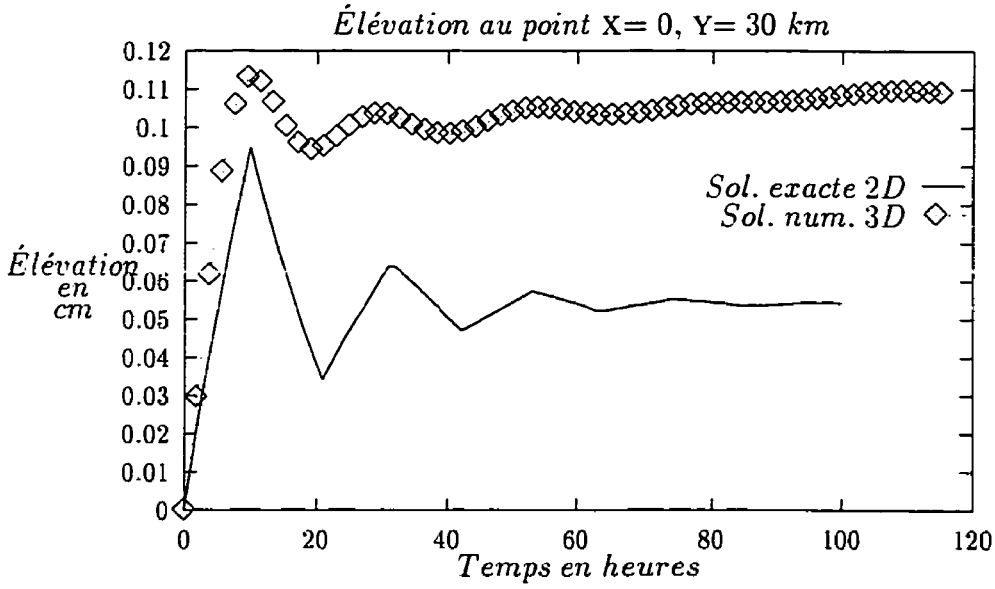


Figure 5.22: Élévation : solution 2D, versus quasi-3D, (bassin 200*100*50).

L'amplitude de l'élévation de la hauteur d'eau pour le cas-3D est plus importante au début de la résolution mais est amortie plus rapidement dans le temps par les élévations répercutées des couches inférieures vers la couche de surface.

5.3 Configuration réelle : Estuaire du fleuve Saint-Laurent.

5.3.1 À propos du fleuve Saint-laurent

"Le fleuve Saint-Laurent, si proche de nous, illustre de manière exemplaire le drame universel de l'eau. Au fil du temps, la technologie nous a éloignés de la réalité, et notre relation avec ce fleuve qui coule tout près de nous se limite bien souvent au seul usage domestique du robinet ou de la chasse d'eau. Pourtant l'attention tardive que nous portons aujourd'hui sur ce fleuve agonisant devrait au travers d'informations, d'études et de connaissances nouvelles, nous permettre de mieux le comprendre, de susciter un regain d'intérêt, pour ce qui représente de manière silencieuse mais ô combien majestueuse l'un des éléments les plus essentiels de la vie. (Frédéric BACK)" [1]

5.3.2 Origine du fleuve

Sous l'effet de la fonte des glaces, la déglaciation, le niveau de l'océan se gonfle rapidement sous l'effet combiné de l'apport des eaux de fonte et de la dilatation thermique. Des zones de rencontre entre eaux douces et eaux salées se forment en couches stratifiées et la vallée du fleuve Saint-Laurent est le résultat de cette dépression de la couche terrestre située en bordure de continent. [1]

5.3.3 Quelques caractéristiques du fleuve

Chaque fleuve possède son caractère propre, mais aucun n'est à la fois aussi changeant et aussi impressionnant que le Saint-Laurent. Ce fleuve nordique draine un bassin versant de 1 307 000 kilomètres carrés incluant cinq des plus grands lacs du monde. Il prend ses sources à plus de 4000 kilomètres à l'intérieur des terres et mesure près de 120 kilomètres de largeur à son embouchure sur l'océan et se situe entre le treizième et le dix-septième rang quant à sa taille (combinaison entre le débit, la longueur et la superficie du bassin versant), dans la hiérarchie des grands fleuves du globe. [1]

Il est représenté, sur les trois figures qui suivent, la carte du bassin versant du fleuve St-Laurent, les courants océaniques ainsi que les courants de l'estuaire maritime.

LE BASSIN VERSANT DU SAINT-LAURENT

On appelle bassin versant le territoire géographique drainé par un cours d'eau. Les bassins versants se combinent et s'additionnent lorsque deux cours d'eau se rencontrent pour en former un plus grand. Ainsi, le bassin versant du Saint-Laurent se compose du bassin versant des Grands Lacs ainsi que des bassins de ses propres affluents, entre autres l'Outaouais, le Saint-François, le Saint-Maurice et le Saguenay.

La grandeur du bassin versant dépend de la topographie du territoire. Plus on s'approche des sommets, plus les bassins versants sont petits et plus ils divergent. Par exemple, dans les Rocheuses canadiennes, on trouve un ruisseau qui se divise en deux branches, l'une qui va vers l'Arctique par le fleuve Mackenzie, l'autre vers le Pacifique par le fleuve Fraser.

Dans le bassin versant du Saint-Laurent, au relief peu accentué, les sous-bassins ont tendance à converger rapidement, en suivant les vallées creusées par les glaciers, et à se réunir en grandes rivières. Ainsi, même si la pluviosité sur le territoire n'est pas exceptionnelle, le fleuve Saint-Laurent présente un débit très important de plus de 10 000 mètres cubes à la seconde.

Figure 5.23: Le bassin versant du Saint-Laurent

Reproduction autorisée par les auteurs, Frédéric Back & Claude Villeneuve, les éditions Québec/Amérique inc., tirée du livre « Le Fleuve aux Grandes Eaux ».

L'ESTUAIRE

Dans un estuaire, l'eau salée de l'océan se mélange à l'eau douce d'une rivière ou d'un fleuve. Deux phénomènes se combinent pour provoquer ce mélange : les marées et les courants.

La marée montante pousse l'eau salée de l'océan vers l'amont. Cette eau salée passe d'abord sous l'eau douce, qui est moins dense. Le mélange s'effectue par la suite, lorsque les courants et le relief sous-marin font remonter l'eau salée à la surface.

Une circulation particulière en deux couches s'établit sous l'effet des débits d'eau douce et des différences de salinité entre l'amont et l'aval. Le courant superficiel, constitué d'un mélange d'eau douce et d'eau salée, va de l'amont vers l'aval, alors qu'un courant d'eau salée remonte en sens contraire en suivant le fond.

Les vents et certains phénomènes comme les débâcles provoquent des courants qui peuvent contribuer aussi au brassage des eaux douces et des eaux salées, particulièrement dans les zones peu profondes.

Le mélange qui s'effectue ainsi fait de l'estuaire un des écosystèmes aquatiques les plus productifs qui soient. En effet, ce brassage permet la mise en circulation d'éléments nutritifs essentiels à la production végétale.

LA ZONATION EN MILIEU OCÉANIQUE

Selon la zone qu'ils occupent dans le milieu océanique et la façon dont ils s'y déplacent, on distingue différents types d'organismes marins. Leur répartition dans les diverses zones océaniques peut varier au cours de leur cycle vital. Ainsi, un poisson de fond peut-il avoir une larve planctonique, qui effectue son développement près de la surface. De même, les organismes se répartissent dans l'espace en fonction de leur tolérance à certains facteurs écologiques, en particulier la salinité dans les estuaires. On trouvera donc des espèces de plus en plus tolérantes à la salinité à mesure qu'on se dirigera vers l'aval d'un fleuve. Certaines espèces, comme le saumon atlantique, fréquentent les eaux douces pendant une période de leur vie et les eaux saumâtres ou salées par la suite. On les retrouve donc à la fois en milieu océanique et en milieu estuarien.

LES COURANTS OCÉANIQUES

Plusieurs facteurs influencent les courants océaniques, les plus importants étant la rotation de la Terre et les différences de température. Les courants de surface sont différents des courants de profondeur. Les premiers, tel le Gulf Stream, prennent naissance à l'équateur ou dans les zones tropicales. Les seconds sont généralement alimentés près des zones arctiques par des eaux qui descendent et suivent le relief sous-marin.

En effet, l'eau atteint sa plus grande densité à une température de 4 °Celsius. À cette température, elle [illegible] pour être remplacée en surface par des [illegible] plus froides. Le courant du Labrador est un exemple de courant froid qui suit la côte du Labrador pour entrer dans le golfe du Saint-Laurent par le détroit de Belle-Isle. Il se crée ainsi des courants de la surface vers le fond. Ces eaux froides sont ensuite poussées par les marées, qui les ramènent en surface en fonction des accidents topographiques. De tels courants ont une très grande importance, car ils alimentent les fonds marins en oxygène, l'eau froide provenant de la surface en étant saturée. Pendant leur séjour au fond, les eaux froides se chargent de gaz carbonique qu'elles relâchent [illegible] réchauffant à nouveau en surface.

Figure 5.24: Les courants océaniques

Reproduction autorisée par les auteurs, Frédéric Back & Claude Villeneuve, les éditions Québec/Amérique inc., tirée du livre « Le Fleuve aux Grandes Eaux ».

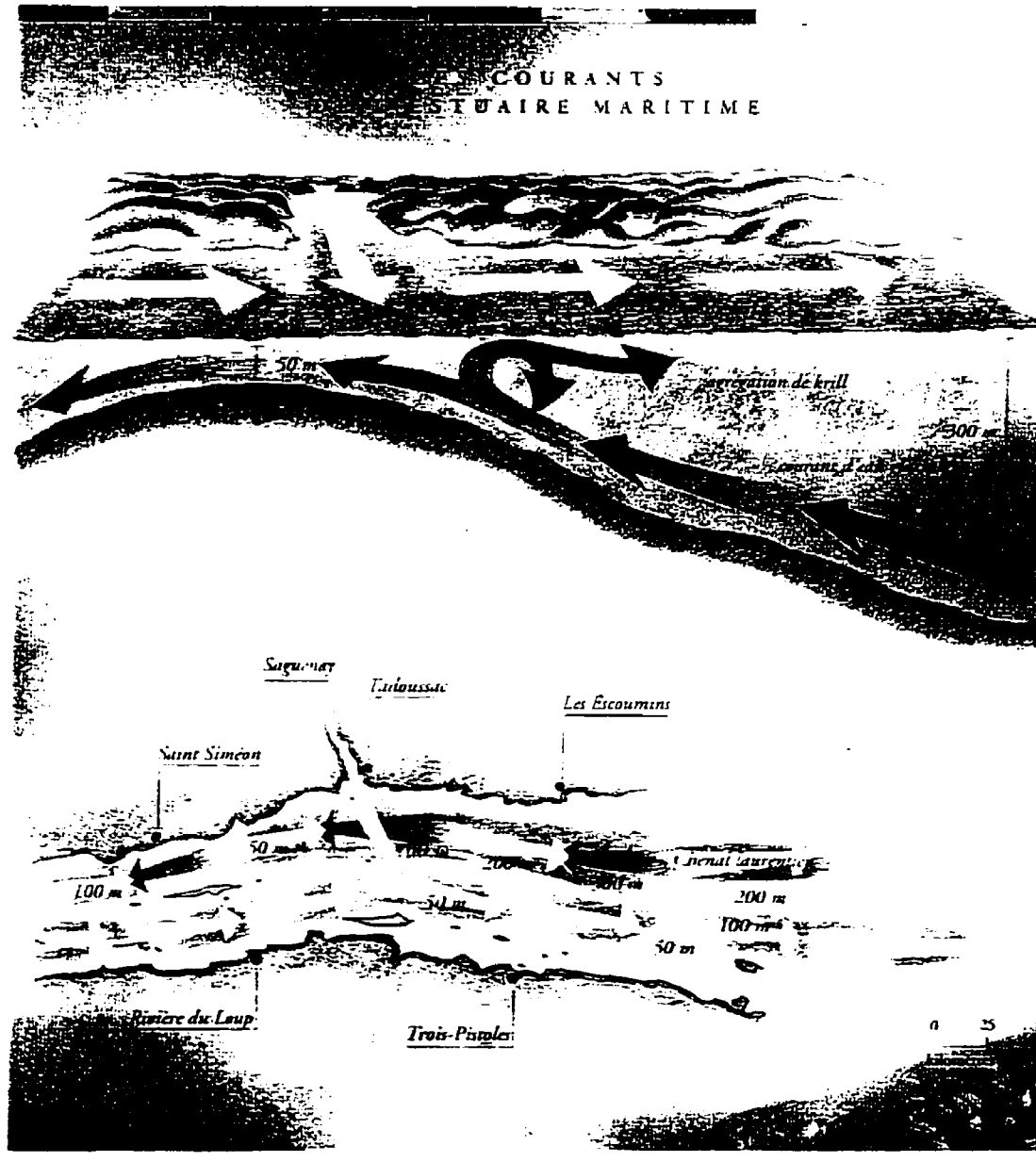


Figure 5.25: Les courants de l'estuaire maritime

Reproduction autorisée par les auteurs, Frédéric Back & Claude Villeneuve, les éditions Québec/Amérique inc., tirée du livre ≪ Le Fleuve aux Grandes Eaux ≫.

5.4 Calcul d'un champ de vitesse avec une condition d'élévation sur la frontière ouverte sur l'océan

La modélisation tri-dimensionnelle pour ce cas complexe relève d'une importance primordiale pour les différentes catégories de scientifiques et de personnes qui s'attachent à mieux comprendre les phénomènes qui s'y déroulent. Cette étude est donc plus versée dans l'analyse et la reproduction virtuelle de courants principaux qui s'opèrent dans le bassin géographique et hydrologique tout au long de cet estuaire pris dans son ensemble, plutôt qu'en une description fine et détaillée des différents phénomènes observables par secteurs sur ce même estuaire.

5.4.1 Explicatif

Pour les figures suivantes, nous avons considéré un découpage vertical par couches pour mieux tenir compte des variations abruptes de la topographie du fond de l'estuaire du St-Laurent. Ici encore, il s'agissait de fixer une condition d'élévation sur la frontière ouverte du domaine et cela sur toute les couches et de la laisser pénétrer dans l'estuaire, tout en contrôlant l'évolution de la solution.

Les champs de vitesses obtenus, tout en restant relativement qualitatifs pour cette étude de cas complexe, se montrent particulièrement probants et se comparent même très bien à certains résultats obtenus par CHASSÉ [4].

Pour les cinq figures suivantes, il s'agit donc d'un champ instantané de vitesses

$(u,\ v,\ w)$, obtenu à différents temps de résolution. Pour une durée totale de résolution d'approximativement 30 heures, un pas de temps de 5 min., nous pouvons constater qu'au début du processus de calcul la solution a tendance à évoluer par vagues et présente la particularité de suivre les lignes principales d'iso-élévation qui sont présentes au voisinage des lignes de courants les plus intenses.

Toujours selon CHASSÉ, ces lignes de cophase sont inclinées par rapport à l'axe de l'estuaire et ce quelque soit le type de composantes principales de la marée (M_2, S_2, N_2, K_1, O_1). La variation temporelle d'une composante de la marée, quant à elle, s'exprime toujours selon un cosinus dont l'amplitude et la différence de phase dépendent du point considéré à l'aide de l'expression suivante :

$$E_i(x,y,t) = A_i(x,y)\cos(\omega_i t + \phi_i(x,y))$$

où

$E_i(x,y,t) =$ *élévation de la composante i au temps t, au point* (x,y).

$A_i(x,y) =$ *amplitude de la composante i au point* (x,y).

$\omega_i =$ *fréquence angulaire de la composante i.*

$\phi_i =$ *différence de phase de la composante i.*

L'inclinaison de ces lignes de courant épouse très certainement ce que l'on nomme la cophase (en degrés) dans la littérature océanographique et ces inclinaisons signifient que les ondes de marée pénètrent bien dans l'estuaire le long de la rive nord avant de toucher la rive sud [4].

La circulation anticyclonique présente dans l'estuaire maritime commence à être visible au bout de quelques heures de calcul.

Tout comme c'est le cas pour CHASSÉ, le resserrement des lignes de cophase

dans l'estuaire supérieur correspond à une diminution de la vitesse de propagation des ondes due à une diminution de la profondeur. A l'opposé, et pour des raisons de conservation de l'énergie, les amplitudes de ces ondes doivent augmenter vers l'aval du fleuve et c'est effectivement ce que l'on observe.

Les jets côtiers les plus forts, observables au niveau de la côte sud sur les figures suivantes, ainsi que la circulation anti-cyclonique s'effectuant en amont de l'embouchure sur l'océan, montrent que ceux-ci sont dus à un courant de remontée des zones profondes de la côte nord qui se combinent aux courants de surface déjà présents dans les zones moins profondes de la côte sud.

Les plus fortes remontées sont bien évidemment rencontrées en tête du chenal laurentien, bien qu'il puisse y avoir une alternance des courants de remontée du haut vers le bas et cela en plusieurs endroits de l'estuaire maritime du fleuve.

5.4.2 Maillage de surface du domaine

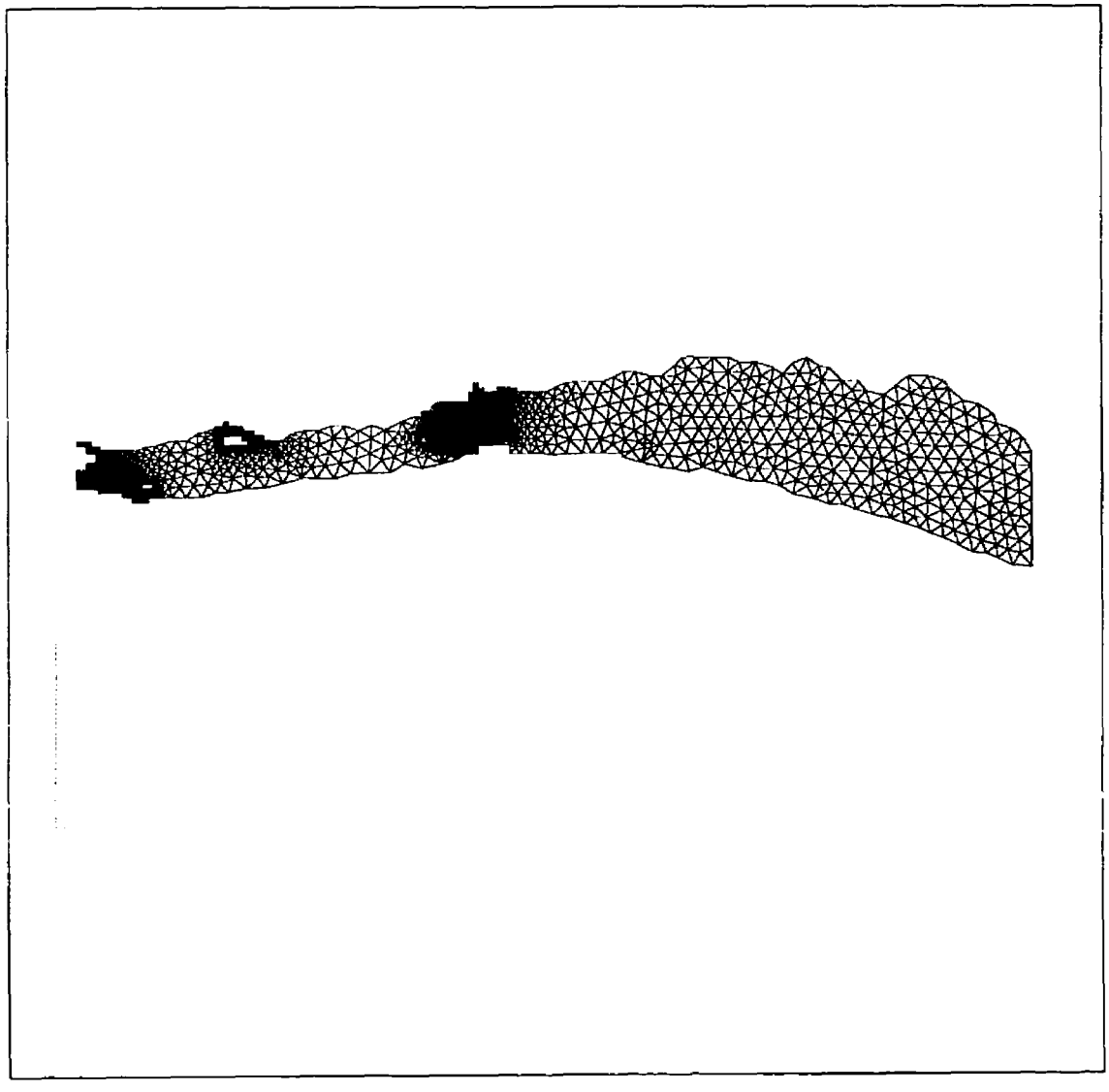


Figure 5.26: Vue des frontières du domaine de l'estuaire du fleuve St-Laurent

5.4.3 Découpage multi-couches du domaine

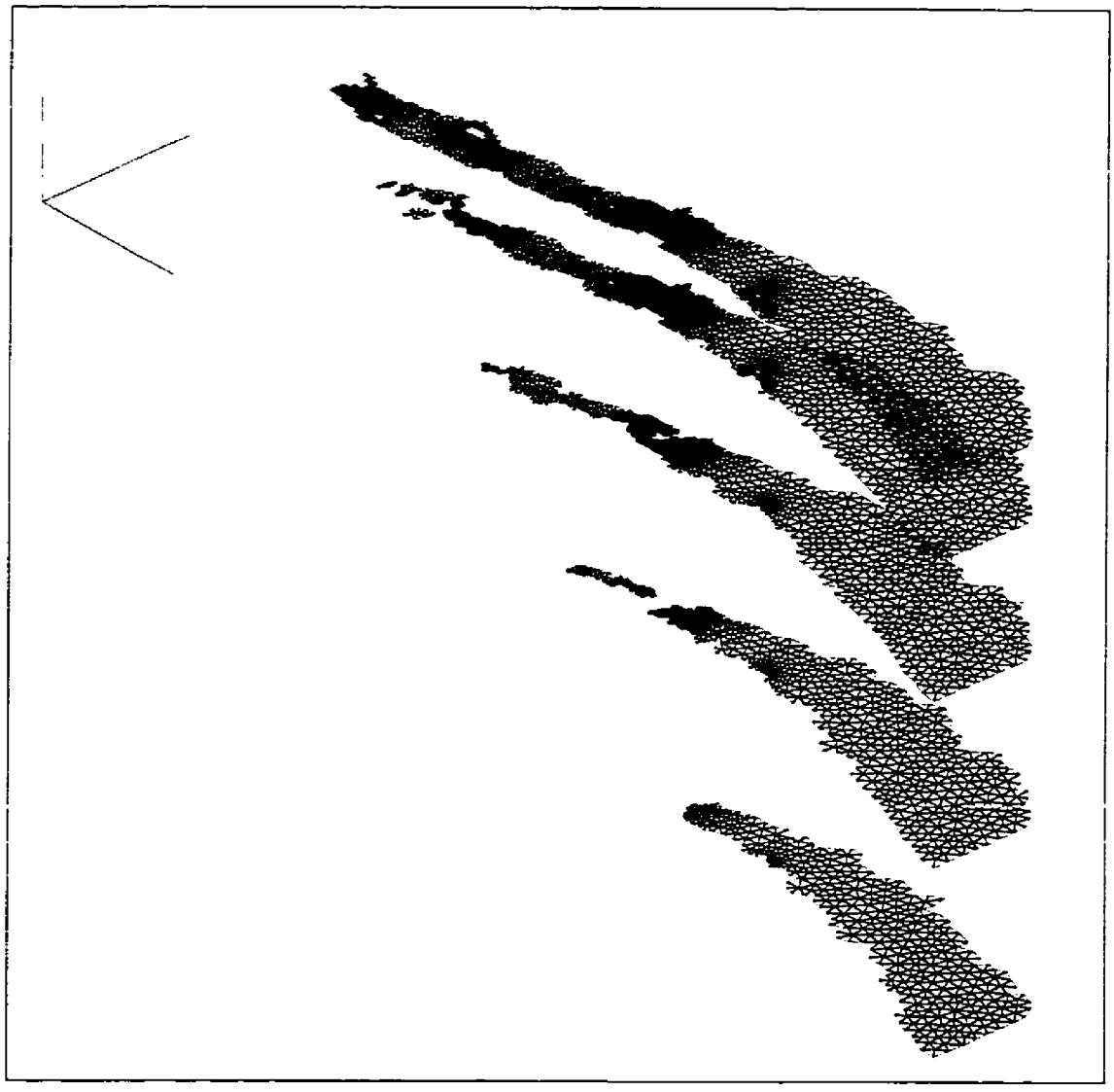


Figure 5.27: Vue du découpage multi-couches de l'estuaire du fleuve St-Laurent

5.4.4 Scénario temporel de l'évolution du champ de vitesse

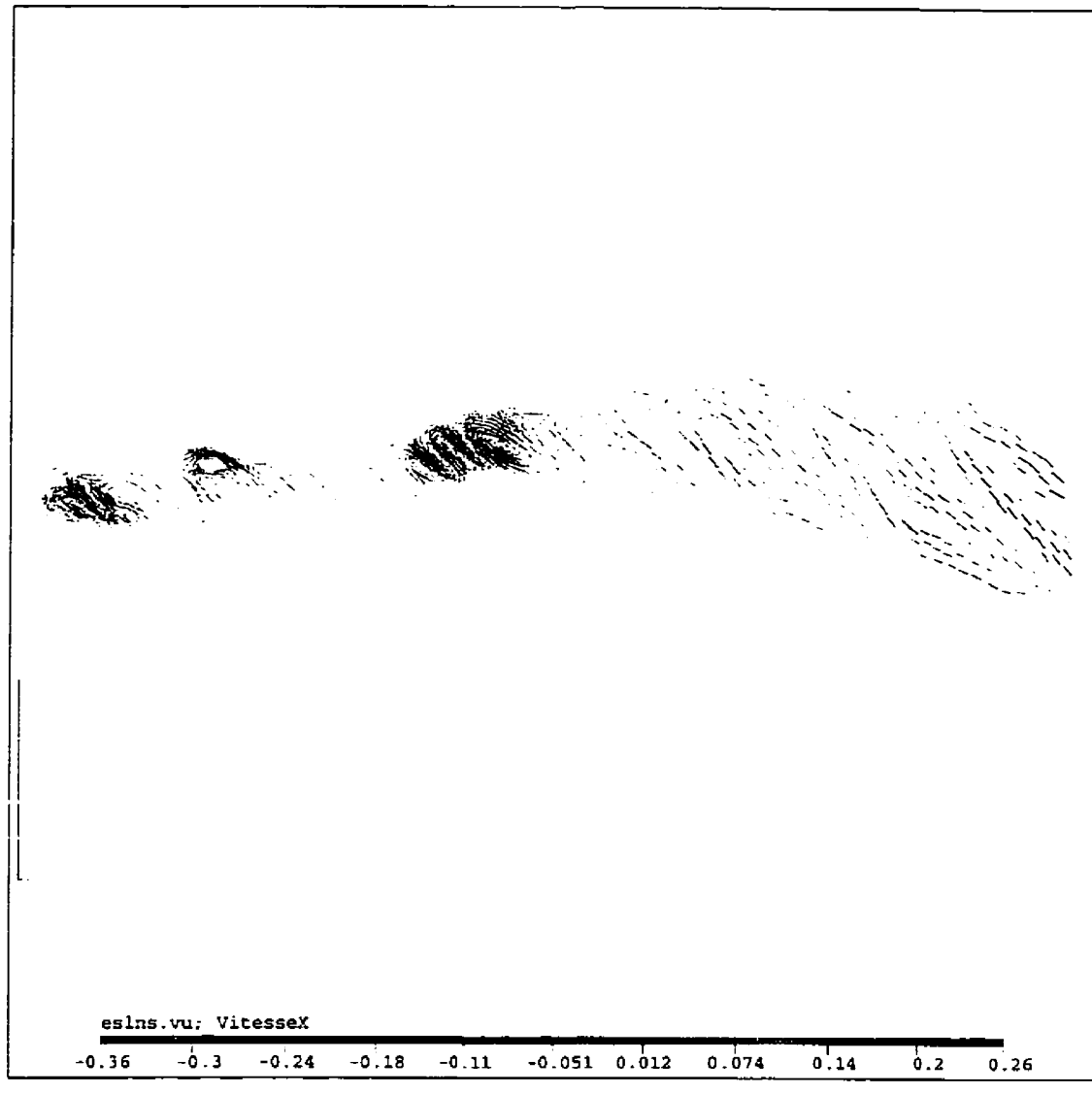


Figure 5.28: Premier intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent

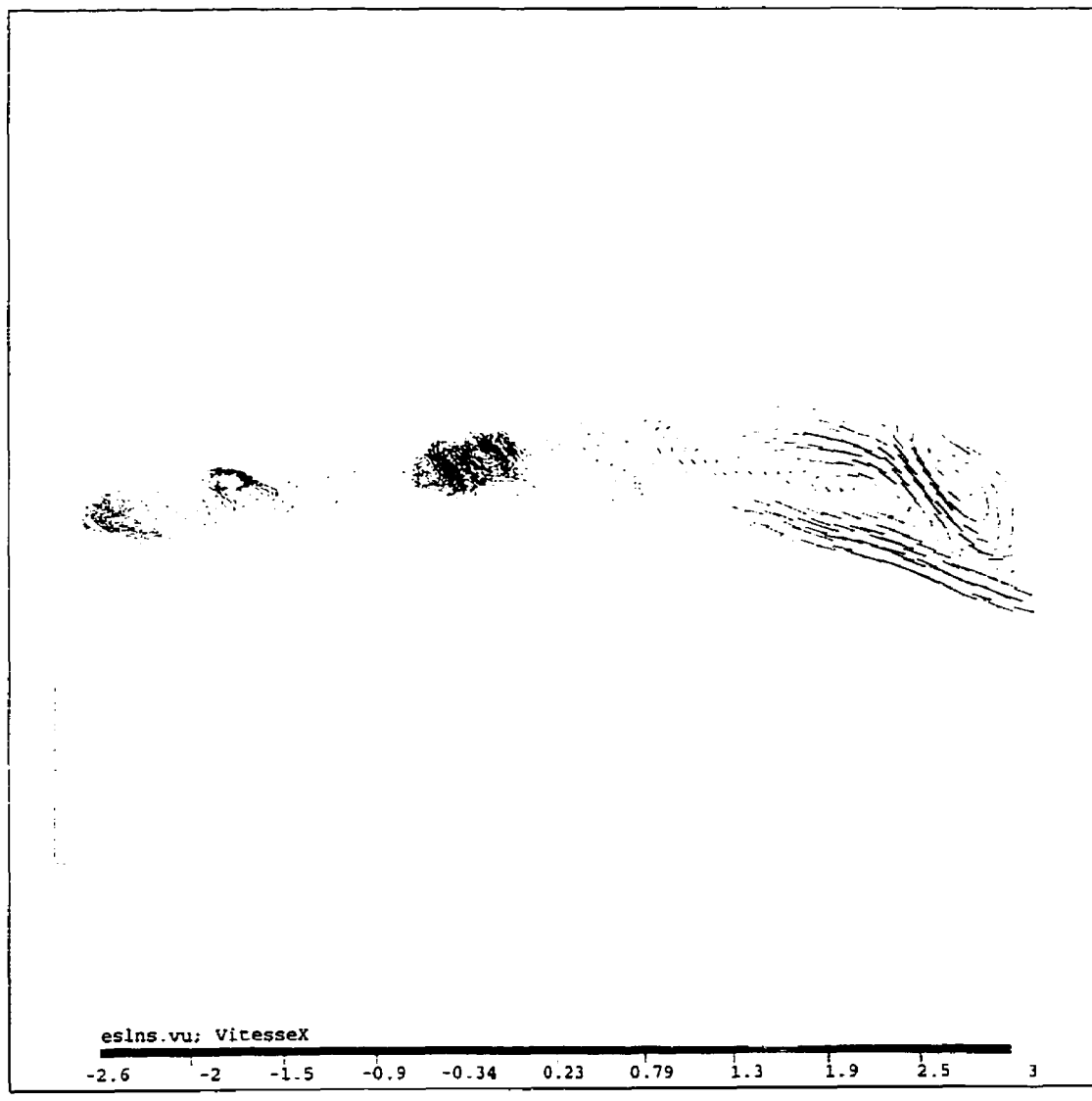


Figure 5.29: Deuxième intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent

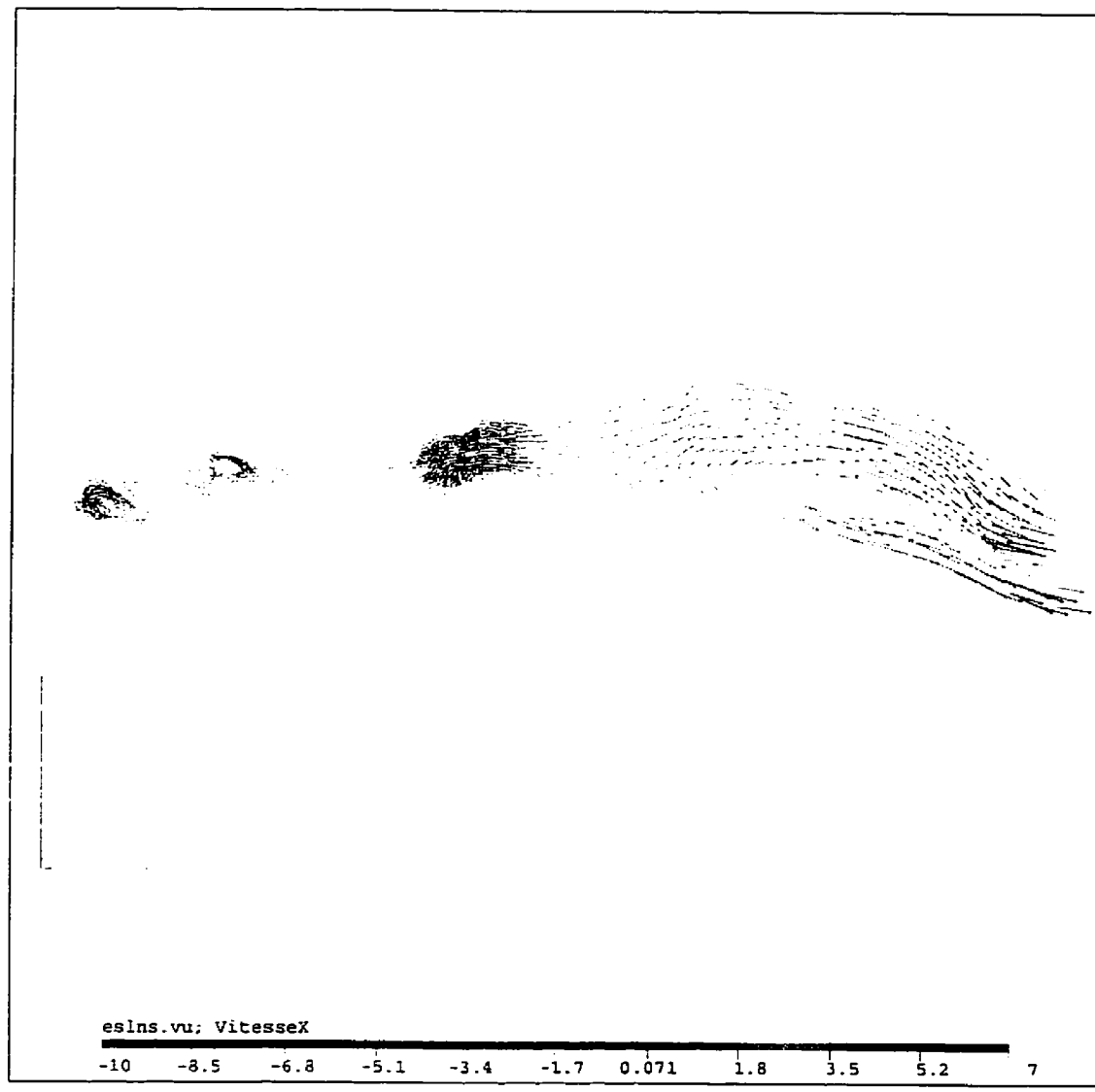


Figure 5.30: Troisième intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent

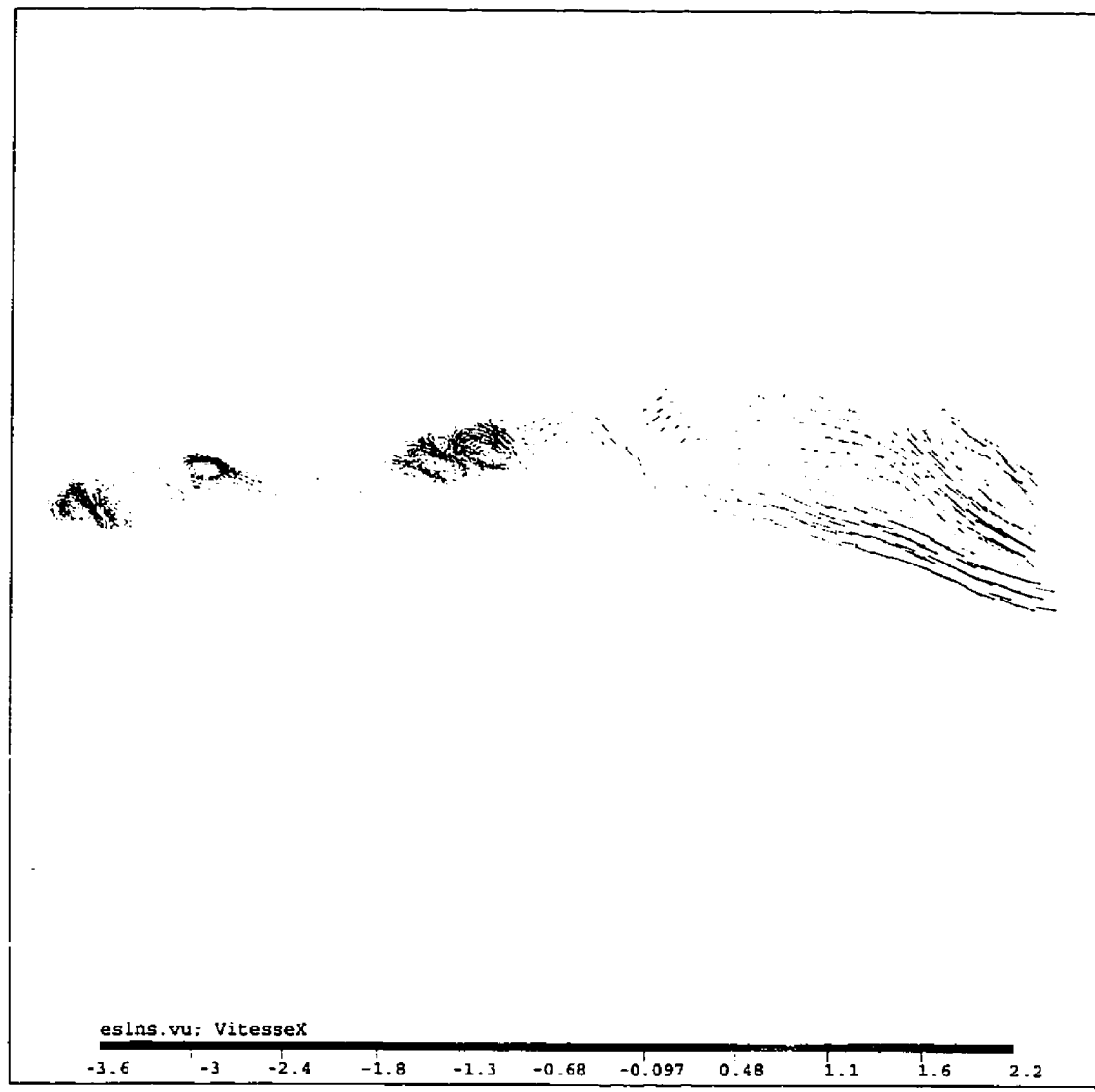


Figure 5.31: Quatrième intervalle de calcul sur l'estuaire du fleuve St-Laurent

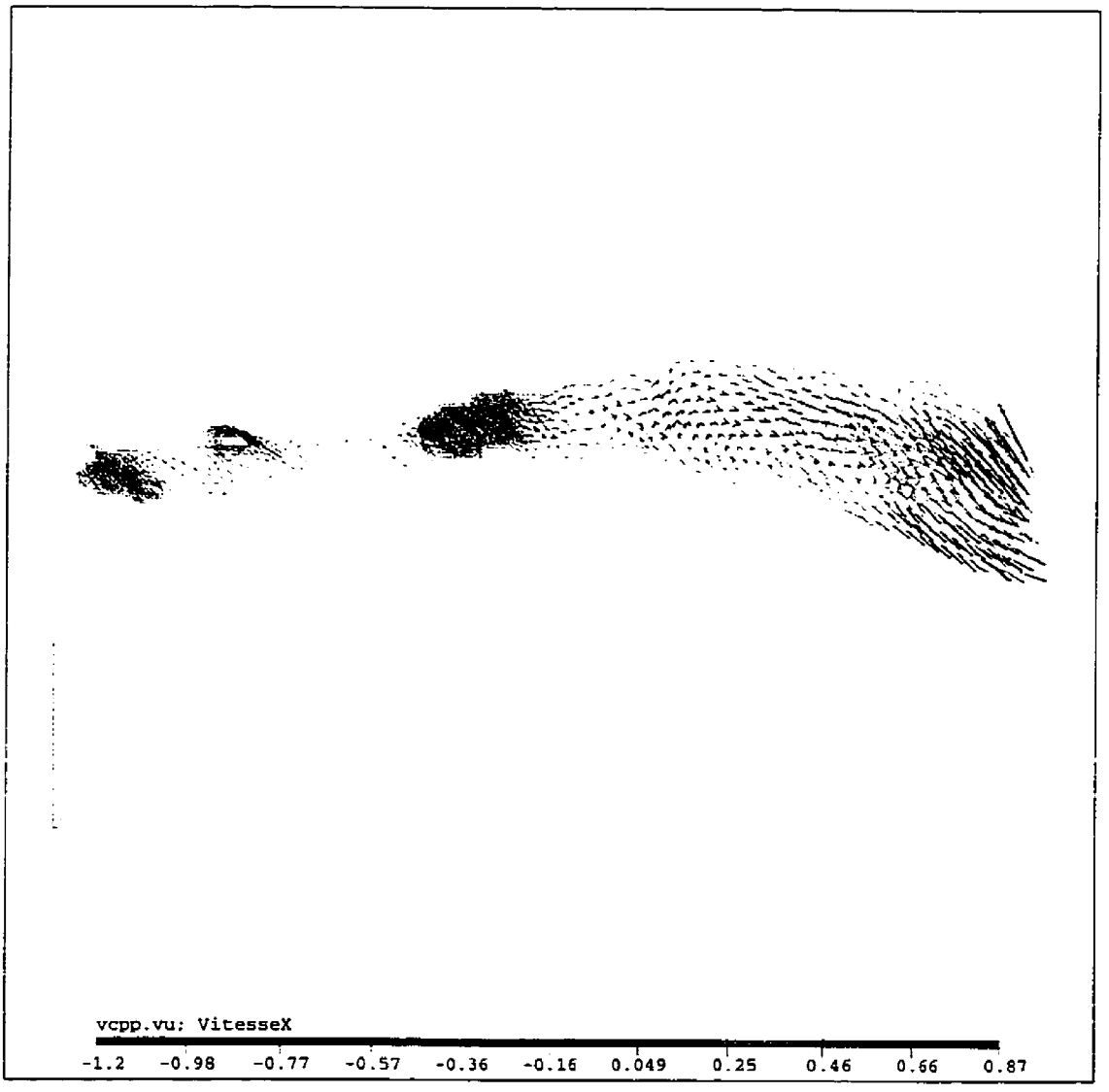


Figure 5.32: Solution finale sur l'estuaire du fleuve St-Laurent

5.4.5 Vues des champs scalaires sur tout le domaine multi-couches

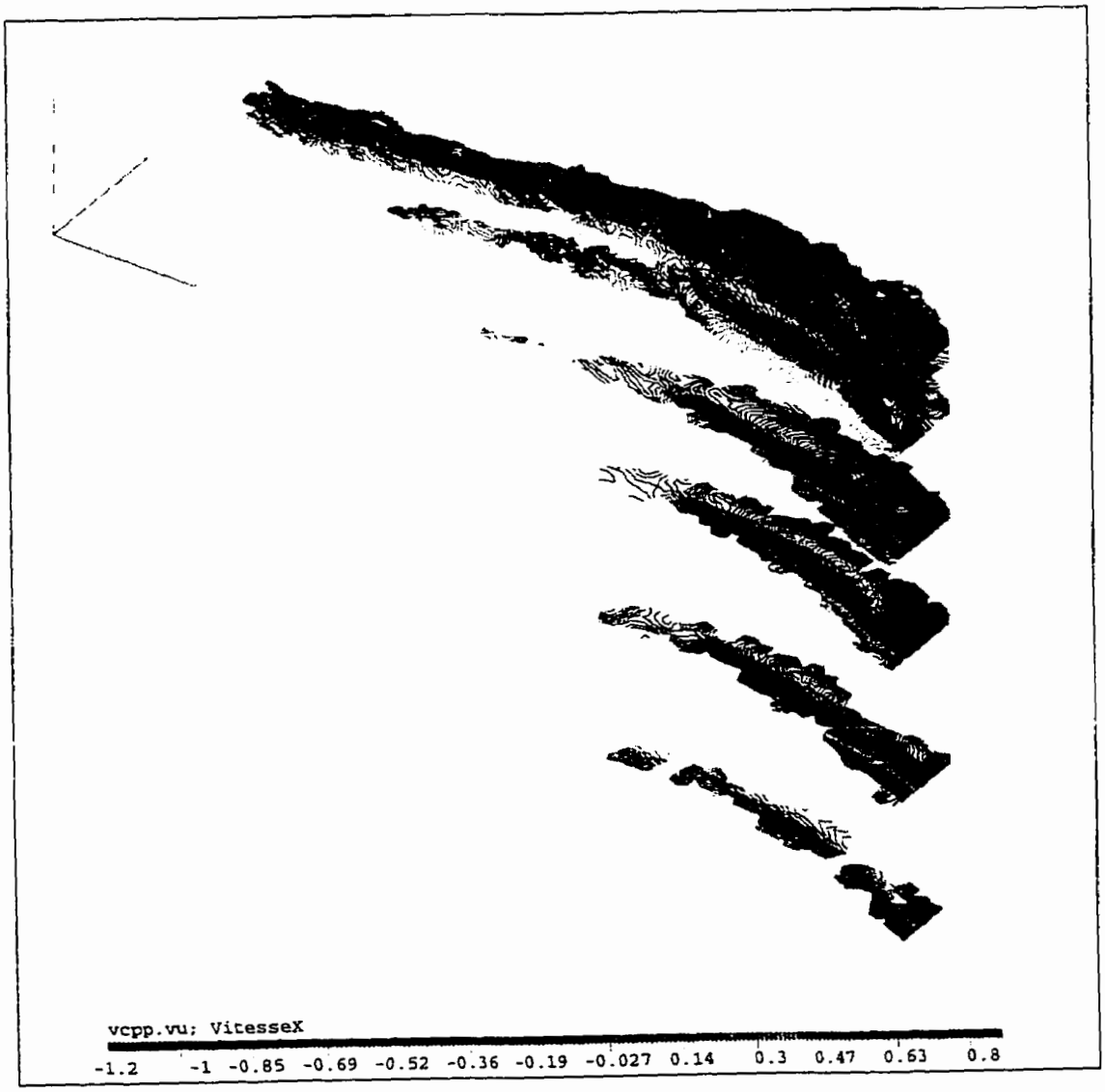


Figure 5.33: Champ de vitesse longitudinale

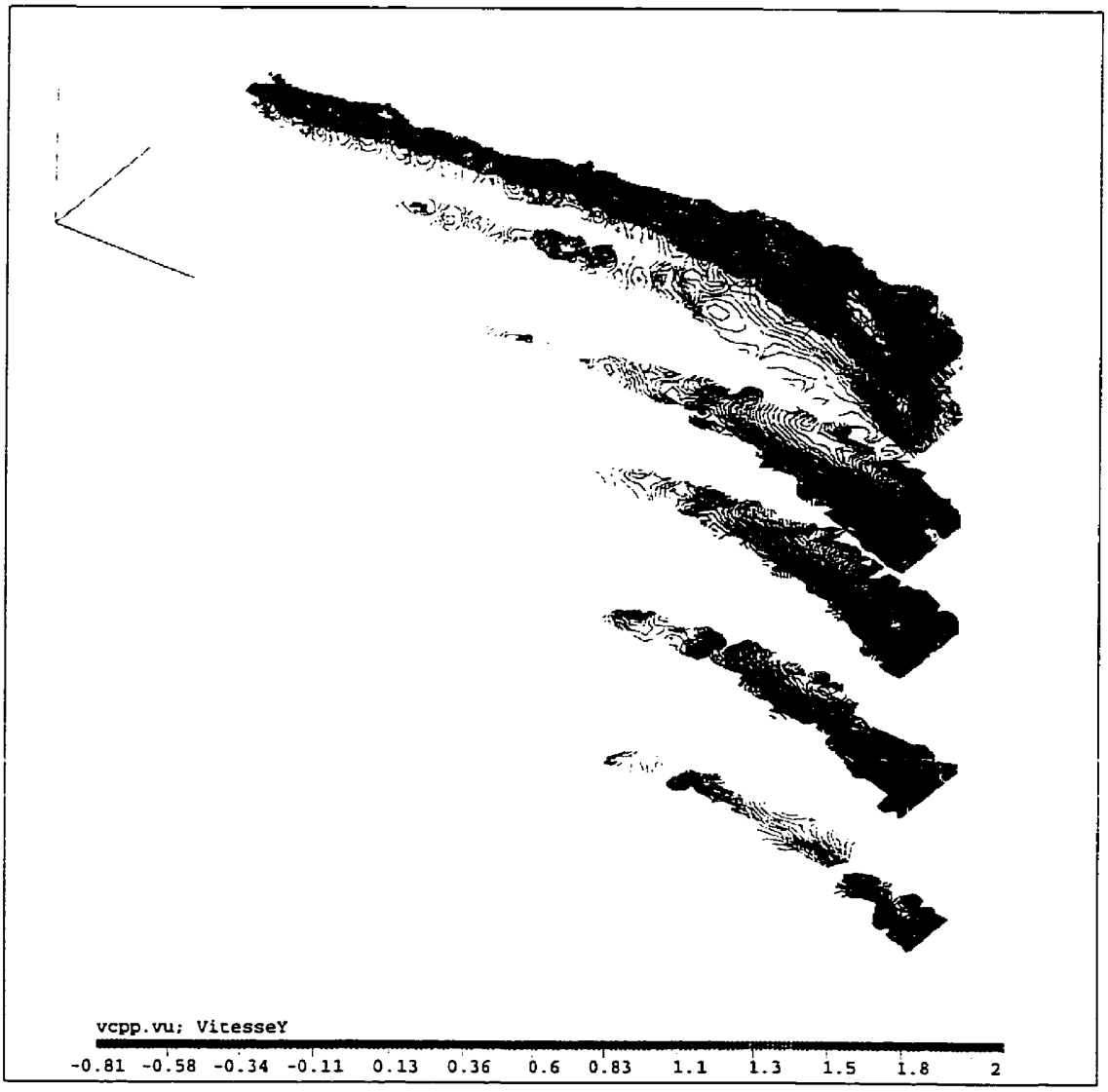


Figure 5.34: Champ de vitesse transversale

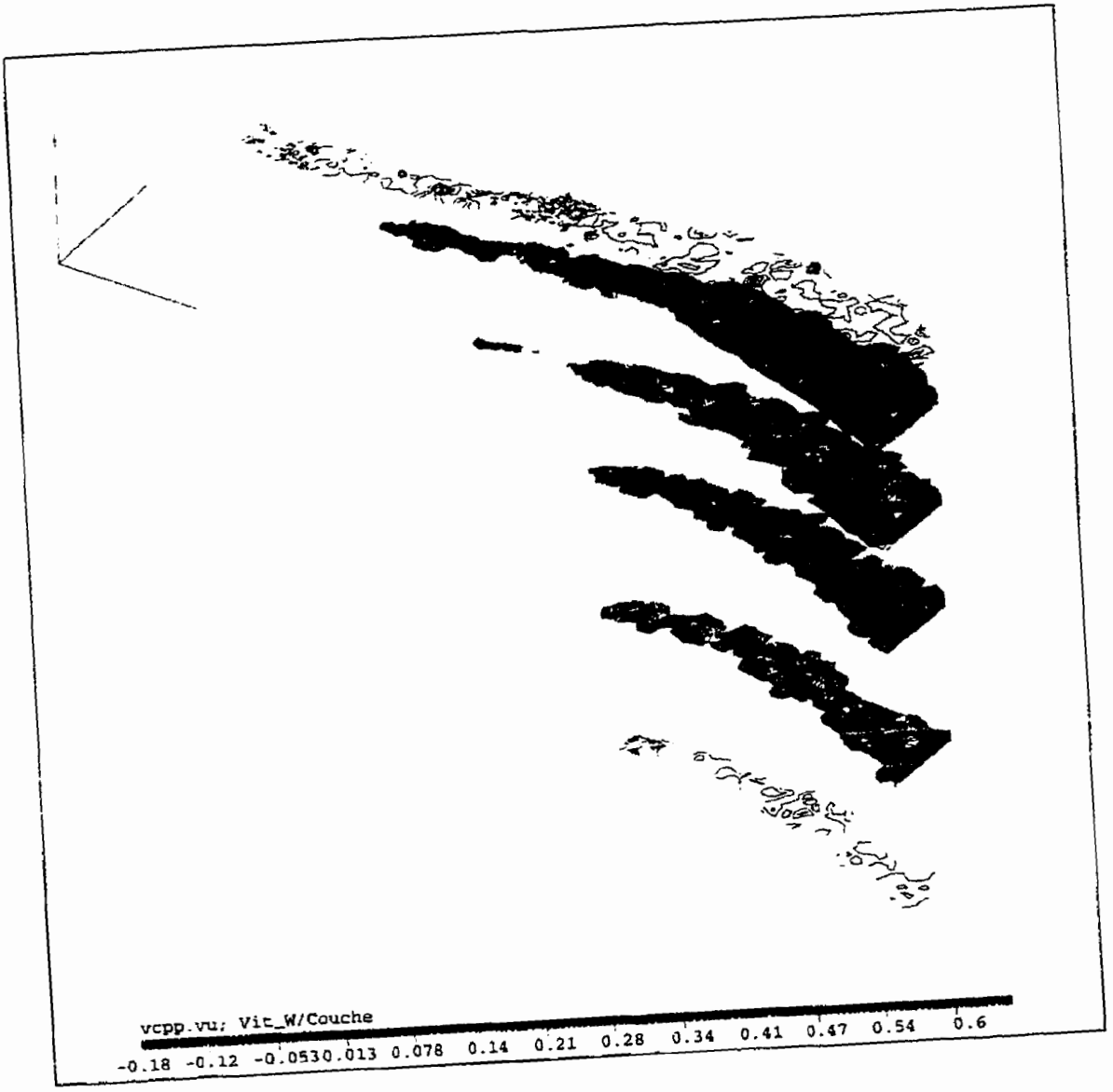


Figure 5.35: Champ de vitesse verticale

Chapitre 6

Conclusion et recommandations

Ce mémoire de maîtrise traite de la formulation bi-dimensionnelle ainsi que d'une nouvelle approche quasi tri-dimensionnelle originale pour le traitement et la simulation d'écoulements à surface libre, tels que les fleuves, les rivières ou les portions de côtes océaniques.

La formualtion bi-dimensionnelle des équations d'Euler propre à de tels systèmes a été étendue vers une combinaison multi-couches permettant de mieux traduire les phénomènes physiques caractéristiques observés suivant toutes les directions spatiales et propres aux grands domaines. Comme ce sont en fait les équations de Navier-Stokes qui régissent le comportement de ces systèmes à surface libre, il s'est avéré plus judicieux de transformer partiellement la formulation bi-dimensionnelle en rajoutant une combinaison d'expressions de termes sources à celle existante, plutôt que d'élaborer un schéma pleinement 3D.

La méthode numérique utilisée est celle des volumes finis utilisant la formulation

développée par ROE [21] et largement utilisée en CFD, tout particulièrement en dynamique des gaz. Cette méthode fait appel à la technique de la division de la différence des flux au niveau de l'interface de deux cellules de calcul et le schéma évolue de manière explicite dans le temps.

La validation de ces deux approches de résolution et de discrétisation a été accomplie sur des géométries simples, telles que le canal rectangulaire, le quart de cercle annulaire représentant une portion de côte océanique, et cela pour différentes configurations de bathymétrie et de conditions frontières, pour lesquelles il existe des solutions analytiques relativement aisées à reproduire.

La validation de la discrétisation quasi-3D par couches a ensuite été éprouvée sur d'autres domaines simples avec la particularité du rajout d'une condition de cisaillement (condition de vent en surface), ainsi que d'un terme de friction à l'interface des couches. La résolution effectuée couche par couche, avec le calcul d'un pas de temps global à chaque itération, la prise en compte de l'influence de la pression hydrostatique des couches supérieures sur celles inférieures ainsi que des termes de flux-convectif verticaux, nous a démontré la simplicité et la robustesse d'une telle approche par rapport à une formulation pleinement 3D.

La capacité du modèle à s'appliquer à tout type de configuration est aussi représentée avec le calcul purement qualitatif effectué sur un domaine réel complexe bien connu, celui de l'estuaire du fleuve Saint-Laurent.

Une des premières recommandations à faire dans le but d'améliorer encore cette approche de résolution, serait de développer une variante de cette technique d'intégration et de discrétisation et de la reformuler vers une cinématique eulérienne-lagrangienne, où l'intégration se ferait non plus sur un volume de contrôle fixe mais mobile. Cela permettrait de mieux suivre par exemple l'évolution de la variation de vitesse de la surface libre. Une telle approche tridimensionnelle pour des problèmes hydrodynamiques, utilisant une technique d'éléments finis, est donnée par D.R.LYNCH & F.WERNER [16].

Toujours pour gagner en temps de calcul, mais peut-être pas en ressources informatiques, il serait également judicieux de transformer et de comparer la résolution explicite dans le temps de ce schéma à un schéma implicite de résolution qui permettrait de s'affranchir du critère restrictif de contrôle du pas de temps.

D'autres améliorations propres à chaque domaine modélisé peuvent être apportées pour ce qui a trait à un meilleur relevé topographique et bathymétrique du domaine étudié ainsi qu'une technique d'adaptativité du maillage en fonction de l'évolution de l'erreur de la solution, ce qui implique une technique de remaillage dynamique en fonction du temps et de l'espace capable de traiter également les situations critiques d'assèchement ou de débordement du milieu fluide au delà de ses frontières initiales.

Cette méthode s'avère d'une souplesse d'utilisation tout aussi aisée que d'autres techniques de calcul décrivant sensiblement les mêmes phénomènes, telles que les méthodes d'éléments finis, la méthode des caractéristiques ou toute autre combinaison de schémas de résolution explicite-implicite, avec l'avantage de rester relativement simple dans la formulation et d'être avec cette méthode explicite quasi-3D,

économe quant aux ressources informatiques utilisées.

L'utilisation de ce modèle est susceptible d'intéresser différents secteurs d'activités, comme par exemple les gestionnaires de ressources hydrographiques et hydrologiques, les environnementalistes et autres observateurs des phénomènes liés aux ressources naturelles, comme les météorologues, les pêcheurs mais aussi toutes autres personnes concernées par les études d'observation et d'analyse des milieux fluviaux, côtiers ou océaniques. Ce modèle peut-être également utile pour le transport maritime qui se doit de respecter des règles strictes de navigation et doit donc parfaitement connaître la circulation des courants maritimes sur ces voies navigables. Voies maritimes qui sont, elles, parfois sujettes à des modifications de fond dues au dragage et au transport de sédiments ainsi qu'à l'hydrodynamique complexe du milieu, comme celui de l'estuaire du fleuve St-Laurent. Le suivi et la surveillance de la dissémination de substances toxiques, la migration de substances biologiques, sont, en tenant compte de l'ajout de certaines caractéristiques au modèle actuel, des champs d'application possibles pour ce modèle hydrodynamique aux capacités variables et étendues.

Pour finir, il serait également souhaitable de pouvoir coupler ce modèle de résolution hydrodynamique avec un modèle de turbulence atmosphérique, surtout dans les cas de modélisation de grands domaines, pour lesquels le simple fait du changement de direction de la contrainte de vent en surface, entraîne bien évidemment le changement des patrons de circulation du milieu fluide confiné, tels que les lacs, les estuaires ou les milieux marins. Modèle de turbulence qui pourrait également s'appliquer au milieu liquide et tout particulièrement au niveau des interfaces des couches, où l'introduction de la théorie de longueur de mélange peut- être

proposée pour évaluer le terme de viscosité turbulente verticale dans un cas comme l'estuaire du fleuve Saint-Laurent qui a la caractéristique de présenter des couches fortement stratifiées [5].

Bibliographie

[1] BACK Frédéric, VILLENEUVE Claude "Le Fleuve aux Grandes Eaux". Les éditions Québec/Amérique inc. 1995.

[2] BOVA S.W., CAREY G.F. "An Entropy Variable Formulation and Applications for the Two-Dimensional Shallow Water Equations". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 23, p. 29-46, 1996.

[3] CASULLI, V., "Semi-Implicit Finite Difference Methods for the Two-Dimensional Shallow Water Equation". Journal of Computational Physics, Vol. 86, p. 56-74, 1990.

[4] CHASSÉ, J., "Modélisation Numérique tridimensionnelle de la Circulation dans l'Estuaire du Saint-Laurent". Thèse de Doctorat, Département d'Océanographie de l'Université du Québec à Rimouski, Avril 1994.

[5] CHAU, K.W., JIN, H.S., "Numerical Solution of Two-Layer, Two-Dimensional Tidal Flow in a Boundary-Fitted Orthogonal Curvilinear Co-ordinate System". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 21, p. 1087-1107, 1995.

[6] CORNETTI, G. M. "Single-Layer Finite Element Approximation of 3D Navier-Stokes Equations with Free Boundaries for Shallow Water Flows". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 23, p. 143-161, 1996.

[7] DHATT, G., SOULAIMANI, A., OUELLET, Y., FORTIN, M., "Development of New Triangular Elements for Free Surface Flows". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 6, p. 895-911, 1986.

[8] HAEUSER, J., PAAP, H.G., EPPEL, D., MUELLER, A., "Solution of Shallow Water Equations For Complex Flow Domains via Boundary-Fitted Coordinates". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 5, p. 727-744, 1985.

[9] ILINCA Adrian, "Calcul des Écoulements compressibles Tridimensionnels sur des Maillages en Mouvement et Adaptatifs". Thèse de Doctorat, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal, Mars 1994.

[10] JAMART B.M., JOSÉ OZER "Numerical Boundary Layers and Spurious Residual Flows". Journal of Geophysical Research, Vol. 91, NO.C9, p. 10621-10631, 1986.

[11] KODAMA, K., WANG, S.S.Y., KAWAHARA, M., "Model Verification on 3-D Tidal Current Analysis in Tokyo Bay". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 22, p. 43-66, 1996.

[12] KOUTITAS, C., O'CONNOR B., "Modeling three-dimensional wind-induced flows". Journal of the hydraulics division, ASCE, Vol. 107 : p. 1843-1865, November 1980.

[13] LYNCH, D.R., GRAY, W.G. "Analytic Solution for Computer Flow Model Testing". Journal of the hydraulics division, ASCE, Vol. 104 : p. 1409-1428, October 1978.

[14] LYNCH, D.R., GRAY, W.G. "Finite Element Simulation of Flow in Deforming Regions". Journal of Computational Physics, Vol. 36, p. 135-153, 1980.

[15] LYNCH, D.R., WERNER, F.E. "Three-Dimensional Hydrodynamics on Finite Elements. Part I: Linearized Harmonic Model". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 7, p. 871-909, 1987.

[16] LYNCH, D.R., WERNER, F.E. "Three-Dimensional Hydrodynamics on Finite Elements. Part II: Non-Linear Time-Stepping Model". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 12, p. 507-533, 1991.

[17] MATSOUKIS, P.F.C., "The Application of the Method of Characteristics for the Simulation of Nearly Horizontal Flow in Two and Three Spatial Dimensions". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 14, p. 379-401, 1992.

[18] OOSTERLEE C.W., RITZDORF H. "Flux Difference Splitting for Three-Dimensional Steady Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Co-Ordinates". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 23, p. 347-366, 1996.

[19] ORLANSKI, I., "A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows". Journal of Computational Physics, Vol. 21, p. 251-269, 1976.

[20] ROE, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes". Journal of Computational Physics, Vol. 43, p. 357-372, 1981.

[21] ROE, P.L., "Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations". Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 18, 337-365, 1986.

[22] SIDEN, G.L.D., LYNCH, D.R., "Wave Equation Hydrodynamics on Deforming Elements". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 8, p. 1071-1093, 1988.

[23] SOULIS, J.V., "Two-Dimensional Subcritical and Supercritical Open Channel Flow Calculation Using a Time-Marching Method". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 9, p. 1331-1352, 1989.

[24] SOULIS, J.V., "Computation of Two-Dimensional Dam-Break Flood Flow". Int. J. for Num. Methods in Fluids, Vol. 14, p. 631-664, 1992.

[25] STRELKOFF, Th., "Numerical Solution of the St-Venant Equations". Journal of the hydraulics division, ASCE, Vol. 96 : p. 223-251, January 1970.

[26] TERZIDIS, G., STRELKOFF, Th., "Computation of Open-Channel Surges and Shocks". Journal of the hydraulics division, ASCE, Vol. 96 : p. 2581-2609, December 1970.

[27] ZHANG, H., REGGIO, M.,"A Finite-Volume Solver for the Shallow Water Equations In Varying Bed Environments". (non publié)

Annexes

- **Annexe I**

Coefficients des matrices utilisées dans le calcul des flux $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1}, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$:

Après quelques calculs et en utilisant la formulation d'une différentielle totale exacte pour chacun des éléments de ces matrices, on peut montrer que :

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2W_1 & 0 & 0 \\ W_2 & W_1 & 0 \\ W_3 & 0 & W_1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{W_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{W_2}{W_1} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{W_3}{W_1} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1 = W_1 \begin{bmatrix} \frac{W_2}{W_1} & 0 & 0 \\ 2c^2 & 2\frac{W_2}{W_1} & 0 \\ 0 & \frac{W_3}{W_1} & \frac{W_2}{W_1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}_2 = W_1 \begin{bmatrix} \frac{W_3}{W_1} & 0 & 0 \\ 2c^2 & \frac{W_3}{W_1} & \frac{W_2}{W_1} \\ 2c^2 & 0 & 2\frac{W_3}{W_1} \end{bmatrix}.$$

- **Annexe II**

Développement et traitement mathématique du terme de friction :

Dans la boucle de calcul du flux, il s'agit de vérifier l'équivalence des expressions données par les équations (3.4) et (3.5) : En multipliant l'équation (3.4) par $\frac{1}{V_c}$ et en arrangeant les termes, nous obtenons :

$$\boldsymbol{f}_c^n = \boldsymbol{f}_c - \frac{\Delta t \, \Sigma \, S_c}{V_c}(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} - \boldsymbol{Dif} + \boldsymbol{R}_c\ ) \ - \Delta t \, (\boldsymbol{Bot})_c$$

l'incrément de flux est noté $\delta \boldsymbol{f}_c = \Sigma \ S_c(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{H} - \boldsymbol{Dif} + \boldsymbol{R}_c\ )$ nous obtenons finalement l'expression :

$$\left[\boldsymbol{f}_c^n\right] + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ C_f \boldsymbol{U} \end{bmatrix} = \frac{1}{V_c}\left[V_c \boldsymbol{f}_c + \Delta t \delta \boldsymbol{f}_c\right]$$

vérifions ce résultat avec l'expression (2.5) :

$$\begin{bmatrix} f_{c_1}^n \\ f_{c_2}^n \\ f_{c_3}^n \end{bmatrix} \cdot (1 + \Delta t C_f) = \frac{1}{V_c} \begin{bmatrix} (V_c \, f_{c_1} + \Delta t \ \delta f_{c_1}).(1 + \Delta t C_f) \\ (V_c \, f_{c_2} + \Delta t \ \delta f_{c_2}).(1 + \ 0) \\ (V_c \, f_{c_3} + \Delta t \ \delta f_{c_3}).(1 + \ 0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{c_1}^n \\ f_{c_2}^n \\ f_{c_3}^n \end{bmatrix} + \Delta t C_f \cdot \begin{bmatrix} f_{c_1}^n \\ f_{c_2}^n \\ f_{c_3}^n \end{bmatrix} = \frac{1}{V_c}\left[V_c \boldsymbol{f}_c + \Delta t \delta \boldsymbol{f}_c\right] + \frac{\Delta t C_f}{V_c} \begin{bmatrix} V_c \, f_{c_1} + \Delta t \ \delta f_{c_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{f}_c^n\right] + \Delta t C_f \cdot \begin{bmatrix} f_{c_1}^n - f_{c_1} - \frac{\Delta t \, \delta f_{c_1}}{V_c} \\ f_{c_2}^n \\ f_{c_3}^n \end{bmatrix} = \frac{1}{V_c}\left[V_c \boldsymbol{f}_c + \Delta t \delta \boldsymbol{f}_c\right]$$

La première composante du vecteur flux, dans le 2ième terme à gauche de l'égalité, est nulle puisqu'elle correspond à l'équation de continuité, nous avons donc :

$$\left[\boldsymbol{f}_c^n\right] + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ C_f \boldsymbol{U} \end{bmatrix} = \frac{1}{V_c}\left[V_c \boldsymbol{f}_c + \Delta t \delta \boldsymbol{f}_c\right] \qquad C.Q.F.D.$$

- **Annexe III**

Développement mathématique des conditions aux frontières :

Pour le cas où un débit est fixé sur une frontière, il nous faut résoudre l'équation suivante :

$$\alpha_1 = [c\Delta uh + uh\Delta u + c^2\Delta h] = 0$$

en divisant par c et en regroupant les 2 premiers termes, nous obtenons

$$\alpha_1 = [(1 + \frac{u}{c})\ \Delta uh + c\Delta h] = 0$$

L'écoulement est sous-critique à l'entrée, nous avons comme condition :

$-c \leq u \leq 0$, en divisant ici aussi par c chacun de ces termes, la relation devient $-1 \leq \frac{u}{c} \leq 0$.

Pour $-1 = \frac{u}{c}$, l'expression de $\alpha_1 = 0$ est alors triviale : $c\Delta h = 0$ et cela nous donne $h_R = h_L$.

Pour $\frac{u}{c} = 0$, cela nous donne :

$$\Delta uh + c\Delta h = 0$$

Dans le 1er terme h est donnée par sa valeur moyenne au sens de ROE $h = \sqrt{h_R h_L}$ et l'équation se ramène à :

$$\Delta u = -\frac{c}{h}\Delta h \qquad \text{ce qui s'écrit finalement} \qquad u_R = u_L - \frac{c}{h}\Delta h$$

La forme adimensionnelle de l'équation $u_R = u_L - \frac{c}{h}\Delta h$ s'obtient en définissant tout d'abord :

$$a = \sqrt{\frac{h_R}{h_L}} \quad \text{donc} \quad a^2 = \frac{h_R}{h_L}\ ; \quad h = \sqrt{h_R h_L}\ ; \quad c = \sqrt{\frac{1}{2}\, g\ (h_R + h_L)}\ ; \quad c_L = \sqrt{g h_L}\ ;$$

$\Delta h = h_R - h_L$ en changeant de signe et en divisant par h_L

$$-\frac{\Delta h}{h_L} = \frac{h_L}{h_L} - \frac{h_R}{h_L} = 1 - a^2 : \quad \text{et aussi}$$

$$\frac{c}{c_L} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\, g\, (h_R + h_L)}}{\sqrt{g h_L}} \quad \text{ce qui donne} \quad \frac{c}{c_L} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a^2)}$$

en reprenant l'équation ci-dessus et en multipliant chacun des termes par $\frac{a^2}{c_L}$, nous obtenons :

$$\frac{u_R}{c_L}a^2 - \frac{u_L}{c_L}a^2 - \frac{c}{c_L}a^2 \frac{\Delta h / h_L}{\frac{\sqrt{h_R h_L}}{\sqrt{h_L h_L}}} = 0$$

ce qui donne en simplifiant et en remplaçant les valeurs respectives :

$$\frac{u_R}{c_L}\frac{h_R}{h_L} - \frac{u_L}{c_L}a^2\frac{h_L}{h_L} - \frac{a^2(1 - a^2)\sqrt{\frac{1}{2}(1 + a^2)}}{a} = 0$$

et finalement en introduisant un pseudo nombre de Froude $\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F}_R = \frac{u_R h_R}{c_L h_L}$ et $\mathcal{F}_L = \frac{u_L h_L}{c_L h_L}$. nous obtenons. la relation suivante :

$$\mathcal{F}_R - \mathcal{F}_L a^2 - a(1 - a^2)\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + a^2)} = 0$$

- **Annexe IV**

Le calcul des flux aux interfaces des éléments du domaine, s'effectue de manière simplifiée en considérant la relation suivante :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_R + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{F} - \frac{1}{2}S|D|S^{-1}\Delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}_L$$

et comme $\Delta\boldsymbol{F} = \tilde{\boldsymbol{A}}\Delta\boldsymbol{f} = SDS^{-1}\Delta\boldsymbol{f}$ nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_L + \frac{1}{2}S(\,DS^{-1}\Delta\boldsymbol{f} - |D|D^{-1}\,DS^{-1}\Delta\boldsymbol{f})$$

ou encore :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_L + \frac{1}{2}S(\,1 - |D|D^{-1})\,DS^{-1}\Delta\boldsymbol{f}$$

avec la relation $\alpha = DS^{-1}\Delta\boldsymbol{f}$ nous ramenons effectivement le calcul des flux aux interfaces au seul traitement du signe ($\sigma = |D|D^{-1}$) de ces flux, comme il est décrit en (Annexe III).

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_L + \frac{1}{2}(1-\sigma)\,\alpha = \boldsymbol{F}_R$$

- **Annexe V**

Dans ce présent travail le terme de pression $gh\nabla H$ apparaissant dans les équations de momentum est séparé en deux. L'un $\nabla(gh^2/2)$ dans le terme de flux $\boldsymbol{F}$ et l'autre $gh\nabla Z$ dans le terme de gradient de bathymétrie $\boldsymbol{R}$.

À partir de l'intégration, sur un volume de contrôle, du terme de pression et une séparation en deux du terme $gh\nabla Z$, nous obtenons :

$$\int_{V_c} gh\nabla Z dV = \int_{V_c} \nabla[gh(Z - Z_0)]\, dV - \int_{V_c} (Z - Z_0)\nabla(gh)\, dV$$

où Z_0 est la valeur moyenne de la bathymétrie pour un volume de contrôle. Au niveau d'une interface entre deux cellules de contrôle, Z_0 correspond à la quantité Z_L introduite dans le texte. Le 2ième terme de l'équation ci-dessus est négligé du fait que lors de sa discrétisation et d'un développement en série de Taylor, il en résulte une expression du 4ième ordre, comme montré ci-dessous :

$$\nabla(gh) = (\nabla gh)_0 + \Delta x \cdot (\nabla(\nabla gh))_0 + o(||\Delta x||^2)$$

avec $\Delta x = x - x_0$ cela donne pour,

$$\begin{aligned}\int_{V_c} (Z - Z_0)\nabla(gh)\, dV &= \int_{V_c} (Z - Z_0)\nabla(gh)_0\, dV \\ &+ \int_{V_c} (Z - Z_0)\Delta x \cdot (\nabla(\nabla gh))_0\, dV \\ &+ o(||\Delta x||^4)\end{aligned}$$

en développant encore une fois $Z - Z_0$ en série de Taylor, et en effectuant le produit, nous constatons que le 1er terme à droite de la dernière équation est nul, ce qui confirme la nature du 4ième ordre de cette expression :

$$\int_{V_c} gh\nabla Z dV \equiv o(||\Delta x||^4)$$

En appliquant le théorème de la divergence sur cette expression simplifiée nous obtenons :

$$\int_{V_c} \nabla[gh(Z - Z_0)]\, dV = \int_{S_c} gh(Z - Z_0)\, dS$$

en considérant maintenant la moyenne de l'élévation Z pour 2 cellules voisines comme étant $\frac{Z_R + Z_L}{2}$ et en notant que $gh = c^2$ nous pouvons écrire :

$$\sum S_c \boldsymbol{n} c^2 \Big(\frac{Z_R + Z_L}{2} - Z_L\Big) = \sum S_c \frac{1}{2} \boldsymbol{n} c^2 \Delta Z$$

avec $\Delta Z = Z_R - Z_L$ nous obtenons finalement,

$$V_c\, \boldsymbol{R}_c = \sum S_c \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ c^2 n_x \\ c^2 n_y \end{bmatrix} \Delta Z$$

- **Annexe VI**

Obtention des équations en eaux peu profondes à partir des équations générales du mouvement :

La formulation des équations en eaux peu profondes fait appel aux équations suivantes :

Conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$

$$avec\ :\ \rho\ =\ masse\ volumique$$

$$\vec{v}\ =\ vecteur\ vitesse\ (u,\ v,\ w)$$

$$et\ :\ \frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\ ;\quad différentielle\ totale\ exacte$$

L'eau étant considérée comme incompressible, nous obtenons :

l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

l'équation générale du mouvement est donnée par :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{f}_r$$

où : $\vec{\omega} = (0,\ 0,\ \omega_Z)$: *est le vecteur rotation de la terre.*

P : *la pression hydrostatique*

$\vec{g}$: *l'accélération gravitationnelle.*

$\vec{f}_r$: *les forces de friction agissant sur le fluide.*

Ce qui nous donne pour les trois composantes de mouvement :

$$\frac{\boldsymbol{Du}}{\boldsymbol{Dt}} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(A_x\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z\frac{\partial u}{\partial z})$$

$$\frac{\boldsymbol{Dv}}{\boldsymbol{Dt}} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(A_x\frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z\frac{\partial v}{\partial z})$$

$$\frac{\boldsymbol{Dw}}{\boldsymbol{Dt}} + g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(A_x\frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(A_y\frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z\frac{\partial w}{\partial z})$$

Ces équations de Navier-Stokes décrivent un écoulement, incompressible et homogène. À partir de ce système d'équations, et pour obtenir un système d'équations en eaux peu profondes (écoulement quasi-horizontal), la première hypothèse à faire, c'est de considérer que les termes d'accélération verticale (3ième équation de momentum) sont négligeables devant l'accélération gravitationnelle et que les termes de flux-convectifs verticaux $\frac{\partial uw}{\partial z}$ et $\frac{\partial vw}{\partial z}$ pour la 1ière et 2ième équation de momentum sont négligés.

La dernière équation de momentum se ramène alors à :

$$g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

Pour obtenir un système d'équations en eaux peu profondes :

Intégrons suivant la verticale:

$$\int_0^H = \int_0^Z + \int_Z^H$$

nous obtenons pour la lière équation de momentum, par exemple. et les deux termes de convection restants, les expression suivantes :

$$\int u\frac{\partial u}{\partial x}dz + \int v\frac{\partial u}{\partial y}dz = \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\int u'u'dz + \frac{\partial}{\partial y}\int u'v'dz$$

$$\int u'u'dz = D_x\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \qquad et \qquad \int u'v'dz = D_y\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$avec \qquad \bar{u} = \frac{1}{h}\int udz \qquad et \qquad \bar{v} = \frac{1}{h}\int vdz$$

où les composantes u, v sont maintenant formées par une composante moyenne $\bar{u}$, $\bar{v}$ et un terme de fluctuation u', v' respectivement. Cette intégration se fait à l'aide de la règle de LEIBNITZ pour gérer les termes de dérivées partielles sous le signe intégrale et entraîne l'apparition d'autres termes résultants. Pour traiter ces derniers termes et fermer le système d'équations, il faut donc faire appel aux conditions frontières suivantes :

Condition frontière cinématique en surface :

$$w(z) = \frac{Dh}{Dt}$$

$$ou\ encore \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = \left(w(z) - u\frac{\partial h}{\partial x} - v\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{z=h}$$

Condition frontière cinématique au fond :

$$w(z) = \frac{DZ}{Dt}$$

$$\textit{ou encore} \qquad \left(w(z) + u\frac{\partial Z}{\partial x} + v\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{z=Z} = 0$$

Nous obtenons finalement le système d'équations suivant, formé de l'équation de continuité et des deux équations de mouvement. Notons que suite à l'intégration du terme $\frac{\partial w}{\partial z}$ de l'équation de continuité de départ, celui-ci s'est maintenant transformé en un terme temporel qui représente la vitesse d'élévation de la surface libre.

Continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial vh}{\partial y} = 0$$

Mouvement suivant x :

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial uuh}{\partial x} + \frac{\partial vuh}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(D_x\frac{\partial uh}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y\frac{\partial uh}{\partial y}) + fv + \frac{\tau_{sx}}{\rho H} - \frac{\tau_{bx}}{\rho H}$$

Mouvement suivant y :

$$\frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial uvh}{\partial x} + \frac{\partial vvh}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(D_x\frac{\partial vh}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y\frac{\partial vh}{\partial y}) - fu + \frac{\tau_{sy}}{\rho H} - \frac{\tau_{by}}{\rho H}$$

Le terme de pression :

$$P = \rho g \int dz = \rho g H$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -g\frac{\partial H}{\partial x} \qquad avec\, H = h + Z$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial y}$$

Ce gradient de pression sera séparé en deux:

l'un égal à $\nabla\frac{1}{2}gh^2$ *dans le terme de gauche des équations.*

l'autre égal à $gh\nabla Z$ *dans le terme de droite des équations.*

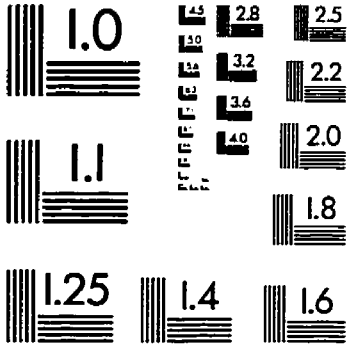
Les termes de cisaillement en surface et au fond :

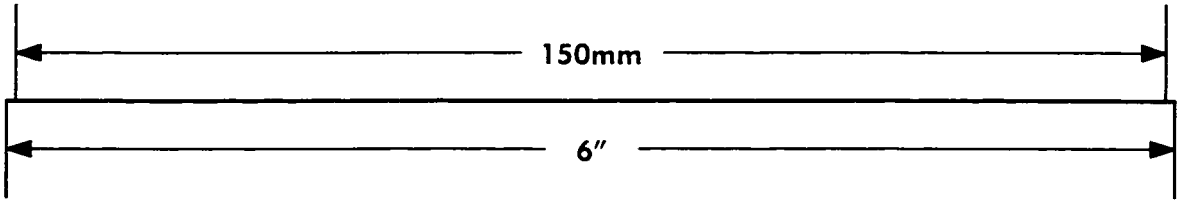
$$\frac{\tau_{bx}}{\rho H} \equiv C_f\, uh \qquad avec \qquad C_f = \frac{gN^2\sqrt{(u^2+v^2)}}{h^{4/3}}$$

N : Coefficient de Manning

$$\frac{\tau_{sx}}{\rho H} \equiv C_D\, U_{vent}\sqrt{(U^2{}_{vent} + V^2{}_{vent})} \qquad avec \qquad C_D = coefficient\ de\ traînée$$

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)





APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved