UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FORMULATION D'UN MODÈLE CONSTITUTIF INCLUANT LES EFFETS DES TRANSFORMATIONS MICROSTRUCTURALES

SÉBASTIEN BOIRE-LAVIGNE

DÉPARTEMENT DE MÉTALLURGIE ET DE GÉNIE DES MATÉRIAUX

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

(GÉNIE MÉTALLURGIQUE)

SEPTEMBRE 1995

©Sébastien Boire-Lavigne, 1995.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26459-9

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

FORMULATION D'UN MODÈLE CONSTITUTIF INCLUANT LES EFFETS DES TRANSFORMATIONS MICROSTRUCTURALES

présenté par: BOIRE-LAVIGNE Sébastien

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. DICKSON Yvan, Ph.D., président

M. MARCHAND Norman, Ph.D. membre et directeur de recherche

M. TROCHU François, Ph.D. membre

Remerciements

J'aimerais remercier Dr Norman Marchand pour son aide technique et pour ces précieux conseils, AMRA Technologies Inc. pour son support technique et financier et le fonds FCAR pour son aide financière. Je remercie également Stéphane Gendron pour son aide et ses conseils techniques et Valérie pour son support, sa patience et son aide.

Résumé

La simulation de procédés par ordinateur (Virtual Manufacturing) est un outil qui permet aux entreprises d'améliorer leurs procédés et de réduire leurs coûts sans avoir à effectuer des essais sur leurs lignes de production. Pour que les simulations par ordinateur soient utiles pour l'industrie manufacturière de mise en forme, il faut qu'elles modélisent correctement l'évolution des matériaux lors des procédés de fabrication. Ce travail a pour objet de développer un cadre de travail ("framework") et un modèle qui décrit correctement la réponse mécanique du matériau et qui permet de connaître l'évolution de l'état du matériau déformé. Dans cette optique, une nouvelle formulation élasto-viscoplastique unifiée est développée sur les bases des modèles physiques existants. La formulation se distingue des modèles actuels par l'élimination du terme d'adoucissement dynamique des lois d'évolution des variables internes. Le modèle est tel que l'extraction des paramètres est simple et que chaque paramètre a une base physique bien établie.

Le modèle décrit le comportement du matériau comme étant la moyenne pondérée des réponses mécaniques de chaque structure de dislocation. L'adoucissement dynamique est obtenu par la transformation d'une structure à durcissement rapide (structure planaire) en une structure à durcissement lent (structure cellulaire). L'état de chaque structure de dislocation est décrit par deux variables internes, la contrainte interne et la contrainte de friction. L'alliage d'aluminium 1100 a été choisi pour valider le modèle et

la technique de détermination des paramètres. Des simulations 3D par éléments finis ont été utilisées pour la validation du présent modèle. Le modèle corrèle bien des essais de compression simple et des essais avec des variations subites de la vitesse de déformation et il permet de décrire correctement l'influence de la température et de la vitesse de déformation sur la contrainte d'écoulement plastique et sur le taux de consolidation.

Contrairement aux modèles existants, le cadre de travail développé est tel que la recristallisation dynamique et les transformations de phases peuvent être directement intégrées dans le modèle sans devoir en changer la formulation. Cet avantage est particulièrement intéressant pour modéliser les procédés de mise en forme, au cours du quels des transformations de la microstructure ont lieu.

Abstract

Computer simulations of manufacturing processes (also refers as "Virtual Manufacturing") are a tools that allows industries to improve their processes and to reduce their costs without having to rely on expensive trial-and-error iterations on their production lines. For the metal forming industry, it is now necessary that computer simulations model correctly the evolution of the materials during of fabrication processes since in addition to the macrostructure (the geometry) of the product, the bulk microstructure and residual stresses evolve during processing and are important to the final customer. The aim of this project was to develop a framework and a model that describes correctly the material mechanical response and allows the tracking of material's state. Thus, a new unified elasto-viscoplastic formulation was developed based on already sound existing physical models. The formulation distinguishes itself from current models by the elimination of the dynamic softening term found in the internal variables evolutionary laws. The model is such that the determination of the parameters is simple because each parameter comes from fundamental well-established physics. The model was implemented into a 3D fully updated lagrangian finite element code (ABAQUS).

The model describes the behavior of a material as being an average of the mechanical behavior of each dislocation structures. Dynamic softening is obtained by explicitly modeling the transformation from a high hardening rate structure (planar structure) to a

low hardening rate structure (cellular structure). The state of each dislocation structure is described using two internal variables, the back stress (tensor variable) and the drag stress(scalar variable).

The 1100 aluminum alloy has been chosen to validate the model and the parameter determination technique. The three dimensional simulations have been carried out for the validation of the present model. The result from the simulations of deformation experiments showed that the model fits well simple compression tests and the tests with sudden changes in the strain rate (strain rate jump). The model was also shown to correctly describe the influence of the temperature and the strain rate on the plastic flow stresses.

Contrarily to other models, the proposed framework is such that phenomena like dynamic recrystallization and phase transformations can be directly integrated in the model without having to change anything in the formulation. This advantage is fundamental to model metal forming processes, where such transformations take place and influence the final properties of the product.

Table des matières

Remerciements iv

Résumé v

Abstract vii

Table des matières ix

Liste des annexes xii

Liste des tableaux xiii

Liste des figures xiv

Liste des symboles xvii

Chapitre 1: Introduction 1

1.1 Mise en situation 1

1.2 Objectifs du projet 4

1.3 Méthodologie 5

Chapitre 2: Revue de la littérature 6

2.1.1 Les modèles rigides-plastiques 6

2.1.2 Les modèles élasto-viscoplastiques unifiés 8

2.1.3 Les faiblesses des modèles existants 10

Chapitre 3: Formulation du nouveau modèle MetForm© 14

3.1 Les fondements théoriques 14

3.2 La formation des structures de dislocations 19

3.3 Le modèle constitutif d'une structure de dislocations 21

3.3.1 La loi d'évolution de la contrainte interne et de la contrainte de friction 21

3.3.2 La loi d'écoulement plastique 22

3.3.3 La relation constitutive des déformations 31

3.3.4 La formulation multi-structure 32

Chapitre 4: Mesure des paramètres microstructuraux 34

4.1 La loi d'écoulement et la contrainte de friction 34

4.2 La loi d'évolution de la contrainte interne 40

4.2.1 Le terme de durcissement dynamique 40

4.2.2 Le terme d'adoucissement thermique 42

4.2.3 Transformation des structures 45

Chapitre 5: Validation des approches proposées 49

5.1 Détermination des paramètres de l'alliage d'aluminium Al1100 49

5.1.1 La loi d'écoulement et la contrainte de friction 53

5.1.2 La loi d'évolution de la contrainte interne 54

5.1.3 La loi de transformation des structures de dislocations 55

5.2 Résultats des simulations 58

5.2.1 Comparaison des simulations avec des résultats expérimentaux 58

5.2.2 Extrapolation des capacités du formalisme proposé 64

Conclusion 70

Références 73

Liste des annexes

Annexe A: Définitions de base 79

Annexe B: Méthode des éléments finis 84

Annexe C: Formulation asymptotique 98

Annexe D: Résultats 109

Liste des tableaux

Tableau 5-1 : Composition de l'alliage d'aluminium 1100 50

Tableau 5-2 : Constantes élastiques de l'alliage d'aluminium 1100 51

Tableau 5-3 : Paramètres de la loi d'écoulement de l'alliage d'aluminium 1100 53

Tableau 5-4 : Coefficients de durcissement dynamique de l'alliage d'aluminium 1100 .. 55

Tableau 5-5 : paramètres de la loi de transformation des structures de dislocations de l'aluminium 1100 56

Liste des figures

Figure 2-1 : Courbe de la contrainte en fonction de la déformation plastique 12

Figure 3-1 : Courbe contrainte-déformation d'un acier 4340[20] 17

Figure 3-2 : Micrographies des structures de dislocations d'un acier 4340 pour (a)ε=0.0 (b)ε=0.12 (c)ε=0.18 (d)ε=0.30 (e)ε=0.4 (f)ε=0.7[20] 18

Figure 3-3 : Courbe contrainte déformation, représentation des structures de dislocations 20

Figure 4-1: schéma d'un essai de compression suivi d'un essai de traction 37

Figure 4-2 : Essais de relaxation 44

5.1 Détermination des paramètres de l'alliage d'aluminium Al1100 49

Figure 5-1 : Courbes expérimentales utilisées pour la détermination des paramètres ... 52

Figure 5-2 : Comparaison de la loi d'écoulement de puissance et des points expérimentaux 54

Figure 5-3 : Comparaison la loi de puissance de Ω_t et des points calculés 57

Figure 5-4: Schéma du maillage de la simulation par éléments finis 59

Figure 5-5: comparaison entre les paramètres et la loi dArrhenius 66

Figure B-1: Algorithme de Newton 97

Figure D-1 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.001$[28] 110

Figure D-2 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.001$ 111

Figure D-3 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.01$[28] 112

Figure D-4 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.01$ 113

Figure D-5 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.1$[28] 114

Figure D-6 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.1$ 115

Figure D-7 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 1.0$[28] 116

Figure D-8 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 1.0$ 117

Figure D-9 Courbes de sauts de vitesse de déformation expérimentales de l'aluminium 1100, à une température de 350 °C[28] 118

Figure D-10 Courbes de sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100, à une température de 350 °C 119

Figure D-11 Courbes de sauts de vitesse de déformation expérimentales de l'aluminium 1100, à une température de 400 °C[28] 120

Figure D-12 Courbes de sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100, à une température de 400 °C 121

Figure D-13 Courbes de sauts de vitesse de déformation expérimentales de l'aluminium 1100, à une température de 450 °C[28] 122

Figure D-14 Courbes de sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100, à une température de 450 °C 123

Figure D-15 Courbes de double sauts de vitesse de déformation expérimentale de l'aluminium 1100[28] 124

Figure D-16 Courbes de double sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100 125

Liste des symboles

Conventions:

L'utilisation du point au dessus d'une variable désigne la dérivée de celle-ci:

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

L'utilisation d'une barre sous une variable signifie qu'elle est un tenseur du premier ordre (un vecteur):

$$\underline{\vartheta} = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix}$$

L'utilisation de deux barres sous une variable signifie qu'elle est un tenseur du deuxième ordre:

$$\underline{\underline{\vartheta}} = \begin{Bmatrix} \vartheta_{11} \\ \vartheta_{22} \\ \vartheta_{33} \\ \vartheta_{23} \\ \vartheta_{13} \\ \vartheta_{12} \end{Bmatrix}$$

L'utilisation de quatre barres sous une variable signifie qu'elle est un tenseur du quatrième ordre:

$$\underline{\underline{\vartheta}} = \begin{Bmatrix} \vartheta_{11} & \vartheta_{12} & \vartheta_{13} & \vartheta_{14} & \vartheta_{15} & \vartheta_{16} \\ \vartheta_{21} & \vartheta_{22} & \vartheta_{23} & \vartheta_{24} & \vartheta_{25} & \vartheta_{26} \\ \vartheta_{31} & \vartheta_{32} & \vartheta_{33} & \vartheta_{34} & \vartheta_{35} & \vartheta_{36} \\ \vartheta_{41} & \vartheta_{42} & \vartheta_{43} & \vartheta_{44} & \vartheta_{45} & \vartheta_{46} \\ \vartheta_{51} & \vartheta_{52} & \vartheta_{53} & \vartheta_{54} & \vartheta_{55} & \vartheta_{56} \\ \vartheta_{61} & \vartheta_{62} & \vartheta_{63} & \vartheta_{64} & \vartheta_{65} & \vartheta_{66} \end{Bmatrix}$$

L'utilisation d'une barre au dessus d'une variable désigne qu'elle est une valeur effective. La définition des valeurs effectives sont décrites dans l'annexe A.

Liste des symboles:

Étant donné le très grand nombre de variables utilisées dans ce travail et pour conserver leurs significations dans leurs théorie respectives, le même symbole peut avoir plusieurs significations. La table suivante décrit la signification des symboles et la théorie à laquelle ils appartiennent dans les cas de multiple définitions.

ε : Déformation total

ε^{p} : Déformation plastique

ε^{el} : Déformation élastique

ε^{th}	: Déformation thermique
e	: Déformation déviatorique
σ	: Contrainte
s	: Contrainte déviatorique
K_1, K_2, K_3	: Constante relative aux lois rigide plastique
m, n	: Exposants relatifs aux lois rigide plastique
X_i, A_i	: Variables internes
T	: Température
Y	: Contrainte d'écoulement
Ω	: Back stress
K	: Drag stress
φ	: Multiplicateur plastique
τ	: Cission réduite
τ_0	: Cission réduite critique
α	: facteur de proportionnalité
b	: Vecteur de Burger
ρ	: Densité des dislocations

μ	: Module de cisaillement
v	: module de poisson
F	: Facteur de probabilité qui modifie la contrainte dans une structure de Taylor ($F \equiv 0.8$)
f	: Fraction de structure cellulaire
Ω_t	: Énergie critique de transition planaire/structure cellulaire
v	: Exposant de la fonction de transformation
c	: Exposant de la fonction de l'énergie critique
B	: Constante de la fonction de l'énergie critique
t	: Temps
h	: Coefficient de durcissement d'une structure
a	: Coefficient d'adoucissement d'une structure
m	: Exposant du terme d'adoucissement d'une structure
Ω^0	: Back stress de saturation
K^0	: Drag stress d'une structure de dislocation
$\dot{\gamma}$	: Vitesse de cisaillement réduite
τ^{th}	: Contrainte théorique de cisaillement réduite

$\dot{\gamma}_0$	: Constante de proportionnalité relié au glissement des dislocations
ℓ	: Distance moyenne entre des obstacles
ΔF	: Énergie libre de Helmholtz relié au glissement des dislocations
D_c	: Taille des cellules
D_g	: Taille de grains
g	: Constante empirique relié au structure cellulaire
ΔF_t	: Énergie libre de Helmholtz relié au maclage
τ_t	: Contrainte critique pour obtenir du maclage
$\dot{\gamma}_t$	: Constante de proportionnalité relié au maclage
D_v	: Coefficient de diffusion du réseau
a_c	: Section de diffusion d'une dislocation
D_c	: Coefficient de diffusion atomique
A	: Constante de la loi de puissance
n	: exposant de la loi de puissance
Ω	: Volume d'interaction atomique
δ	: Épaisseur de diffusion d'un grain
D_b	: Coefficient de diffusion frontière

A_1, B_1 : Constantes de la loi d'écoulement reliées au glissement des dislocations

A_2, n_2 : Constantes de la loi d'écoulement reliées au fluage dislocation

A_3 : Constantes de la loi d'écoulement reliées au fluage diffusion

S_c : Contrainte de transition de la loi de puissance et la loi exponentielle

λ : Constante de Lamé (i.e. constante d'élasticité)

ε_1 : Premier invariant de la déformation

X_i : Fraction de $i^{ième}$ structure de dislocation

σ_t : Contrainte de traction

σ_c : Contrainte de compression

σ_y : Contrainte d'écoulement

E : Module de Young

Ω^{init} : Back stress initial

$\Delta\Omega_{sat}$: Valeur de saturation de la variation du back stress

$\Delta\sigma_{sat}$: Valeur de saturation de la variation de la contrainte

H : Contrainte de durcissement

X : Paramètre du modèle

X^0 : Constante athermique

R	: constante universelle des gaz
Q	: Énergie d'activation du paramètre
X^{ph}	: Fraction volumique d'une phase
X^{st}	: Fraction volumique d'une structure de dislocation dans une phase
σ_1	: Premier invariant de la contrainte
e^{el}	: Déformation élastique déviatorique
t	: Force surfacique
f	: Force volumique
u	: Position
ρ	: Densité
D	: Taux de transformation
Ω	: Taux de rotation
Ψ	: Polynômes d'interpolation

Chapitre 1 : Introduction

1.1 Mise en situation

Dans un contexte de globalisation des marchés et de libéralisation des échanges commerciaux, les entreprises doivent utiliser tous les moyens qui sont à leur disposition pour maintenir ou améliorer leur compétitivité. De façon générale, l'industrie manufacturière cherche à déterminer la méthode la plus efficace pour fabriquer des produits de qualité à un coût minimum, pour minimiser les temps de design et de production. La simulation de procédés par ordinateur (Virtual Manufacturing) est un outil qui permet aux entreprises d'améliorer leurs procédés et de réduire leurs coûts sans avoir à effectuer des essais sur leurs lignes de production.

La simulation par ordinateur n'est pas une solution miracle à tous les problèmes, c'est un outil qui doit être utilisé avec intelligence et discernement. Pour être en mesure d'obtenir des résultats fiables, la simulation doit décrire correctement les phénomènes physiques et les paramètres de base des matériaux doivent être déterminés avec précision. Avec l'accroissement continu des vitesses de calcul des ordinateurs, la modélisation des procédés de fabrication, comme la mise en forme des métaux, est possible à prix raisonnable.

Pour modéliser les procédés de mise en forme, il est possible de diviser l'analyse en trois parties. Premièrement, il y a l'analyse thermique qui décrit les échanges de chaleur entre la pièce, les outils et l'environnement. L'analyse thermique tient également compte de la génération de chaleur dans la pièce due à la déformation plastique et aux transformations de phases. Deuxièmement, il y a l'analyse de contact qui décrit les efforts qui résultent du contact entre les outils et la pièce. Finalement, l'analyse des contraintes décrit le comportement mécanique de la pièce (déformation élasto-viscoplastique) et celui des outils (déformation élastique). Les analyses thermiques présentent des difficultés numériques, mais la description mathématique des phénomènes physiques est bien établie. Dans le cas des analyses de contact, beaucoup de recherche ont encore lieu et les difficultés numériques sont énormes. Le traitement des problèmes spécifiques au contact n'entre pas dans le cadre de la présente recherche, qui se concentre sur les modèles constitutifs décrivant le comportement mécanique des matériaux. Les modèles constitutifs décrivant le comportement élastique des matériaux sont bien connus, mais il n'existe pas de formulation générale équivalente pour décrire leur comportement plastique.

Les transformations internes du matériau lors de la déformation plastique sont à l'origine de la difficulté de modéliser correctement le comportement mécanique des métaux. Cependant, si un modèle ne tient pas compte de ces transformations microstructurales, il lui est impossible de décrire correctement le comportement plastique des métaux.

Ce travail a pour objet de développer et d'implanter un modèle constitutif dans un code d'éléments finis 3D afin de modéliser le comportement mécanique et l'évolution microstructurale des métaux. La formulation de nouveau modèle constitutif (MetForm©) est fondée, dans la mesure du possible, sur des mécanismes physiques bien établis. Cette formulation est la contribution majeure de ce travail car elle diffère des formulations conventionnelles en introduisant une approche multi-structure/multi-phase. MetForm© est un modèle général; il a été spécifiquement développé pour décrire le comportement des métaux dans une large gamme de conditions possibles de mise en forme. Cette approche contraste avec les techniques qui prônent l'utilisation de modèles et de techniques numériques particulières selon les conditions de mise en forme.

L'utilisation d'un modèle général n'est toutefois pas sans inconvénients. Les systèmes d'équations à résoudre sont plus complexes et les paramètres du modèle sont également plus difficiles à obtenir que ceux des modèles simples. Les avantages sont néanmoins importants: les résultats sont plus près du comportement du matériau et permettent de prédire les propriétés mécaniques finales avec plus de précision que les modèles traditionnels.

1.2 Objectifs du projet

Le projet peut se diviser en six grands objectifs:

i) Montrer les faiblesses des modèles existants.

ii) Développer un nouveau modèle constitutif (MetForm°) qui décrit adéquatement le comportement plastique des matériaux tout en respectant dans la mesure du possible les mécanismes physiques de la déformation plastique.

iii) Déterminer les méthodes expérimentales pour obtenir les paramètres de MetForm°.

iv) Développer une technique numérique permettant d'accélérer les temps de calcul.

v) Implanter MetForm° dans le logiciel d'éléments finis ABAQUS.

vi) Valider MetForm° avec un alliage afin vérifier si le modèle permet de reproduire des comportements complexes.

1.3 Méthodologie

Dans un premier temps, les différents modèles existants seront analysés afin de mettre en évidence leurs composantes communes. Les forces et les faiblesses de ces modèles seront également discutées. Une brève description de la théorie de la plasticité et de ses relations avec les structures de dislocations sera faite pour en arriver à la formulation d'un nouveau modèle constitutif. Par la suite, la méthode pour obtenir les paramètres sera décrite et sera appliquée à l'alliage d'aluminium 1100. Finalement, des simulations réalisées avec le logiciel d'éléments finis ABAQUS seront utilisées pour vérifier la capacité du modèle à décrire le comportement des matériaux.

Chapitre 2: Revue de la littérature

Il y a deux grandes approches pour modéliser le comportement des métaux, les modèles rigides-plastiques et les modèles élasto-viscoplastiques[1]. Bien que les deux approches soient présentées, l'auteur insiste plus particulièrement sur la théorie des modèles élasto-viscoplastiques, puisqu'il privilégie ce type de modèle pour la modélisation du comportement mécanique des métaux dans les procédés de mise en forme.

2.1.1 Les modèles rigides-plastiques

Tout comme les modèles élasto-viscoplastiques, les modèles rigides-plastiques sont basés sur une loi d'écoulement qui permet de déterminer la réponse mécanique du matériau.

Dans le cas des modèles rigides-plastiques, la déformation élastique est négligée et la déformation totale se résume à la composante plastique:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{p} \qquad \text{Éq. 2-1}$$

Les lois d'écoulement rigides-plastiques isothermes sont des équations qui relient le tenseur de contrainte déviatorique à la déformation totale. La loi d'écoulement peut prendre plusieurs formes, les plus courantes étant les suivantes:

$$\underline{\underline{s}} = K_1\left(\sqrt{3}\cdot\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^m \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \qquad \text{Éq. 2-2}$$

$$\underline{\underline{s}} = K_2\left(\bar{\varepsilon}\right)^n \underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \text{Éq. 2-3}$$

$$\underline{\underline{s}} = K_3\left(\sqrt{3}\cdot\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^{m-1}\left(\bar{\varepsilon}\right)^m \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \qquad \text{Éq. 2-4}$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}},\underline{\underline{\varepsilon}}^p$ sont respectivement les tenseurs de déformation totale et plastique. $\underline{\underline{s}}$ est le tenseur de contrainte déviatorique et $\bar{\varepsilon}$ est la déformation effective. Toutes les définitions des déformations et des contraintes effectives sont présentées en annexe A. Finalement K_1,K_2,K_3,m,n sont des paramètres qui dépendent de la température.

Les Éq. 2-2, 2-3 et 2-4 sont respectivement des formulations rigide-visco parfaitement plastique, rigide-plastique et rigide-viscoplastique. L'Éq. 2-2 est appelée la loi de Norton-Hoff et est la forme la plus utilisée, surtout pour les déformations à chaud. La déformation effective est utilisée dans les Éq. 2-2 et 2-3 comme variable interne pour modéliser le durcissement isotropique. Il est possible de constater que l'on doit imposer artificiellement l'incompressibilité plastique car la déformation totale n'est pas un tenseur déviatorique comme la déformation plastique.

Les modèles rigides-plastiques sont intéressants pour deux raisons: la simplicité des mesures expérimentales de leurs paramètres et leur efficacité dans les codes d'éléments finis. Il est cependant important de mentionner que ce type de modèle permet difficilement d'expliquer certains comportements observés, soit:

- le fluage;

- l'effet Bauchinger;

- les boucles d'hystérisis;

- les déformations élastiques (retour élastique).

Plusieurs auteurs constatent que les modèles rigides-plastiques ne permettent d'obtenir qu'une solution grossière et que des formulations plus précises, comme celles des modèles élasto-viscoplastiques, sont nécessaires pour être en mesure de décrire correctement le comportement mécanique des métaux[2].

2.1.2 Les modèles élasto-viscoplastiques unifiés

Tous les modèles élasto-viscoplastiques unifiés sont constitués d'une loi d'écoulement (Éq. 2-6) et des lois d'évolution des variables internes (Éq. 2-7 et 2-8).

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{el} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} \qquad \text{Éq. 2-5}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} = \psi\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i, A_1, A_2, \cdots, A_j, T, Y\right) \qquad \text{Éq. 2-6}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\underline{X}}}_1 &= \xi_1\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i, A_1, A_2, \cdots, A_j, T\right)\\ \dot{\underline{\underline{X}}}_2 &= \xi_2\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i, A_1, A_2, \cdots, A_j, T\right)\\ &\vdots\\ \dot{\underline{\underline{X}}}_i &= \xi_i\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i, A_1, A_2, \cdots, A_j, T\right)\end{aligned} \qquad \text{Éq. 2-7}$$

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \vartheta_1\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i, A_1, A_2, \cdots, A_j, T\right)\\ \dot{A}_2 &= \vartheta_2\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i, A_1, A_2, \cdots, A_j, T\right)\\ &\vdots\\ \dot{A}_j &= \vartheta_j\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i, A_1, A_2, \cdots, A_j, T\right)\end{aligned} \qquad \text{Éq. 2-8}$$

où $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{el}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p}, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{th}$ sont respectivement les tenseurs de déformation totale, élastique, plastique et thermique. $\underline{\underline{s}}, T, Y$ sont respectivement le tenseur de la contrainte déviatorique, la température et la limite élastique. $\underline{\underline{X}}_1, \underline{\underline{X}}_2, \cdots, \underline{\underline{X}}_i$ sont les i variables internes tensorielles et $A_1, A_2, \cdots, A_j$ sont les j variables internes scalaires. Finalement, $\psi(), \xi_1(), \xi_2(), \cdots, \xi_i(), \vartheta_1(), \vartheta_2(), \cdots, \vartheta_j()$ sont des fonctions qui varient selon le modèle.

La plupart des modèles se limitent généralement à deux variables internes: la contrainte interne ("back stress") et la contrainte de friction ("drag stress"). Bien qu'il soit possible d'en faire intervenir plusieurs, la complexité des essais pour déterminer les paramètres des équations d'évolution de ces variables en limite le nombre. L'utilisation de deux variables internes est donc un compromis entre une bonne description de l'évolution de l'état du matériau et la facilité de la détermination des paramètres.

Les modèles faisant intervenir la contrainte interne comme variable interne tensorielle et la contrainte de friction comme variable interne scalaire, sont généralement consitués de la loi d'écoulement (Éq. 2-9), de la loi d'évolution de la contrainte interne (Éq. 2-10) et d'un loi d'évolution de la contrainte de friction (Éq. 2-11).

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p} = \varphi\left(\underline{\underline{s}}, \underline{\underline{\Omega}}, K, T, Y\right)\left(\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{\Omega}}\right) \qquad \text{Éq. 2-9}$$

$$\dot{\underline{\underline{\Omega}}} = f_1\left(\underline{\underline{\Omega}}, K\right)\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} - \dot{f}_2\left(\underline{\underline{\Omega}}, K, T, \underline{\underline{\varepsilon}}^{p}\right)\underline{\underline{\Omega}} - f_3\left(\underline{\underline{\Omega}}, K, T\right)\underline{\underline{\Omega}} \qquad \text{Éq. 2-10}$$

$$\dot{K} = f_5\left(\underline{\underline{\Omega}}, K\right)\dot{\bar{\varepsilon}}^{p} - \dot{f}_6\left(\underline{\underline{\Omega}}, T, \bar{\varepsilon}^{p}\right)K - f_7(K, T)K \qquad \text{Éq. 2-11}$$

Où Ω est la contrainte interne, K la contrainte de friction, $\phi()$ une fonction de proportionnalité entre la contrainte effective et le taux de déformation plastique et f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7 sont des fonctions qui dépendent du modèle. Les fonctions f_1 et f_5 sont reliées au durcissement dynamique, f_2 et f_6 à l'adoucissement dynamique et f_3 et f_7 à l'adoucissement thermique.

Plusieurs auteurs ont fait d'excellentes revues de l'ensemble des modèles élasto-viscoplastiques unifiés, les lecteurs désireux d'en connaître davantage sur les particularités de chaque modèle peuvent consulter ces articles[3,4,5].

2.1.3 Les faiblesses des modèles existants

Les faiblesses des modèles existants sont principalement de deux ordres: les paramètres des équations sont difficiles à obtenir[6,7] et la formulation des équations d'évolution des variables internes est complexe. Certains auteurs font intervenir des termes complexes dans leurs lois d'évolution [8,9,10,11], alors que d'autres multiplient le nombre de variables internes pour être en mesure de décrire correctement le comportement thermomécanique de métaux[12]. Dans les deux cas, la détermination des paramètres par des essais expérimentaux est très complexe car il devient impossible d'isoler les mécanismes. De plus, dans beaucoup de cas, il n'y a pas de support physique aux variables utilisées. Puisque que la complexité de la mesure des paramètres est l'une des principales raisons de leur sous-utilisation dans l'industrie en générale, certains auteurs simplifient leur modèle même si la précision en est diminuée [13,14].

La formulation de la loi d'évolution de la contrainte interne est l'équation critique des modèles existants, car celle-ci doit refléter la transformation du matériau avec la déformation viscoplastique. Actuellement, trois types de termes sont utilisés pour décrire l'évolution de la contrainte interne, soit: le durcissement dynamique, l'adoucissement dynamique et l'adoucissement thermique. Le durcissement dynamique et l'adoucissement thermique sont des mécanismes physiques dont la signification est très claire dans la « théorie des dislocations ». L'adoucissement thermique est relié aux mécanismes thermiquement activés tels que le glissement dévié, la montée des

dislocations, le glissement des joints de grains, le fluage-dislocation, etc.[15]. Le durcissement dynamique s'explique par l'augmentation du nombre de dislocations et par la diminution de leur parcours moyen.

L'adoucissement thermique ne peut expliquer la saturation de la contrainte et la présence du deuxième stade de la courbe de contrainte-déformation (Figure 2-1). Dans la littérature, l'adoucissement dynamique est utilisé pour expliquer la présence de ce stade[15,16]. L'adoucissement dynamique serait le résultat du glissement dévié assisté par la contrainte[15].

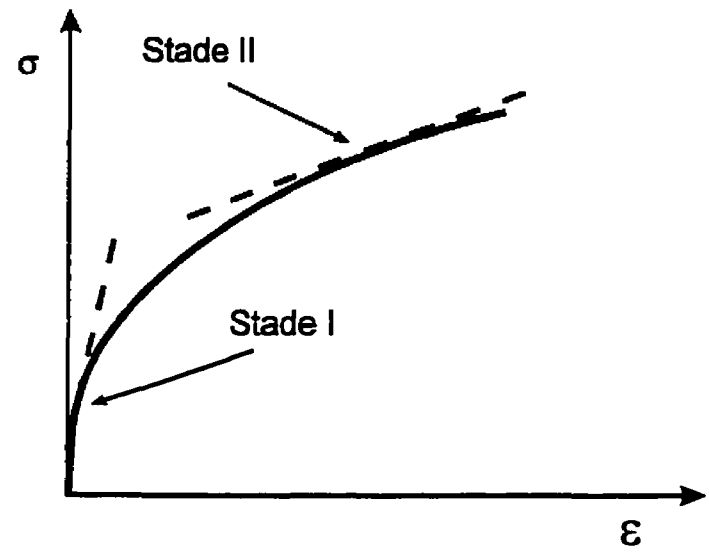


Figure 2-1 : Courbe de la contrainte en fonction de la déformation plastique

Pour déterminer la quantité d'adoucissement dynamique, les modèles font intervenir un terme qui dépend soit de la contrainte interne soit de la déformation plastique dans la loi d'évolution de la contrainte interne. Bien que les modèles qui utilisent la déformation

plastique décrivent correctement le comportement du matériau, l'utilisation de la déformation plastique comme variable interne pose un problème. Comme les déformations totale et élastique, la déformation plastique est une variable externe. Contrairement aux variables internes, comme la contrainte interne et la contrainte de friction, la déformation plastique ne décrit pas l'état du matériau[17]. Le même montant de déformation plastique peut produire différentes structures de dislocations. Les variables internes peuvent être mesurées expérimentalement alors que la déformation plastique accumulée ne peut être déduite qu'à partir des variables internes décrivant l'état du matériau.

Les modèles actuels décrivent bien le comportement des métaux et la majorité des concepts de ces modèles sont récupérés dans la formulation MetForm^{c}; la nouvelle formulation doit toutefois être plus simple et fondée sur les fondements physiques de la déformation plastique. Dans cette optique, voici les grandes lignes du développement de MetForm^{c}:

- Le modèle devrait avoir une loi d'écoulement dont la forme sera déterminée par les mécanismes physiques;
- Le modèle devrait avoir au moins deux variables internes, soit la contrainte interne et la contrainte de friction;
- L'adoucissement dynamique ne devrait pas être directement utilisé dans la formulation des lois d'évolution des variables internes.

Chapitre 3: Formulation du nouveau modèle MetForm©

3.1 Les fondements théoriques

Le comportement plastique des différents métaux dépend de deux mécanismes[18]:

i) La façon dont les dislocations sont générées et annihilées;

ii) L'évolution des structures de dislocations.

La théorie classique propose une contrainte d'écoulement proportionnelle à la racine carrée de la densité de dislocations, quelle que soit leur structure[19]. Ainsi la cission réduite τ s'écrit:

$$\tau = \tau_0 + \alpha \mu b \rho^{1/2} \qquad \text{Éq. 3-1}$$

où τ_0 est la cission critique pour mettre en mouvement les dislocations, α un facteur de proportionnalité, μ le module de cisaillement, b le vecteur de Burgers et ρ la densité de dislocations.

Des théories plus récentes formulent la cission réduite de la façon suivante[16]:

$$\tau = \tau_0 + f(\upsilon) \mu b \rho^{1/2} \qquad \text{Éq. 3-2}$$

où $f(\upsilon)$ est un facteur qui dépend de la structure de dislocations et υ est le coefficient de Poisson.

Par exemple pour une structure cellulaire:

$$f(\upsilon) = \frac{(1-\upsilon/2)}{6\pi(1-\upsilon)} \ln\left(\frac{3}{b\rho^{1/2}}\right) \qquad \text{Éq. 3-3}$$

et pour une structure de Taylor (structure planaire):

$$f(\upsilon) = \frac{F}{8\pi(1-\upsilon)} \qquad \text{Éq. 3-4}$$

L'Éq. 3-2 montre que la contrainte d'écoulement dépend d'une part, de la densité de dislocations, c'est à dire de leurs façons de se multiplier et s'annihiler **(i)** et de $f(\upsilon)$, un facteur qui dépend de la structure de dislocations **(ii)**.

À la lumière de ces informations, on peut se poser la question s'il ne serait pas plus simple de décrire le comportement des différentes structures de dislocations de façon indépendante. Le principe de similitude[16,19] vient renforcer cette approche. Ce principe stipule qu'une structure accommode une augmentation de la contrainte en se contractant jusqu'à ce qu'elle ne soit plus en mesure d'accommoder une contrainte plus élevée. Ainsi les stades linéaires de la courbe de contrainte-déformation sont interprétés comme étant contrôlés par une structure de dislocations dans un état de similitude (voir Figure 2-1).

Par exemple, le premier stade de la courbe contrainte-déformation d'un acier 4340 normalisé[20] se termine a 0.2 de déformation environ (Figure 3-1). Cuddy et Bassim[20] rapportent l'apparition de structures cellulaires pour des déformations supérieures à 0.18. D'autre part ils constatent que la structure cellulaire atteint un équilibre pour des déformations situées entre 0.4 et 0.5, ce qui correspond approximativement au début du deuxième stade linéaire. Il serait donc permis de croire qu'il existe une relation directe entre les changements des stades linéaires et la transformation des structures de dislocations. La Figure 3-2 montre les micrographies des structures de dislocations associées à différentes déformations plastiques.

Le principe voulant que chaque structure de dislocations possède son propre comportement constitutif est à la base de la formulation du modèle proposé. Ainsi la courbe de contrainte-déformation à deux stades d'un polycristal sera modélisée par deux structures de dislocations. Le premier stade est contrôlée par une structure à glissement planaire et le deuxième stade, par une structure cellulaire (figure 3-3). Entre ces deux stades ont obtient un mélange de structures, c'est-à-dire un mélange d'arrangement planaire et cellulaire en accord avec les observations (figure 3-1 et 3-2).

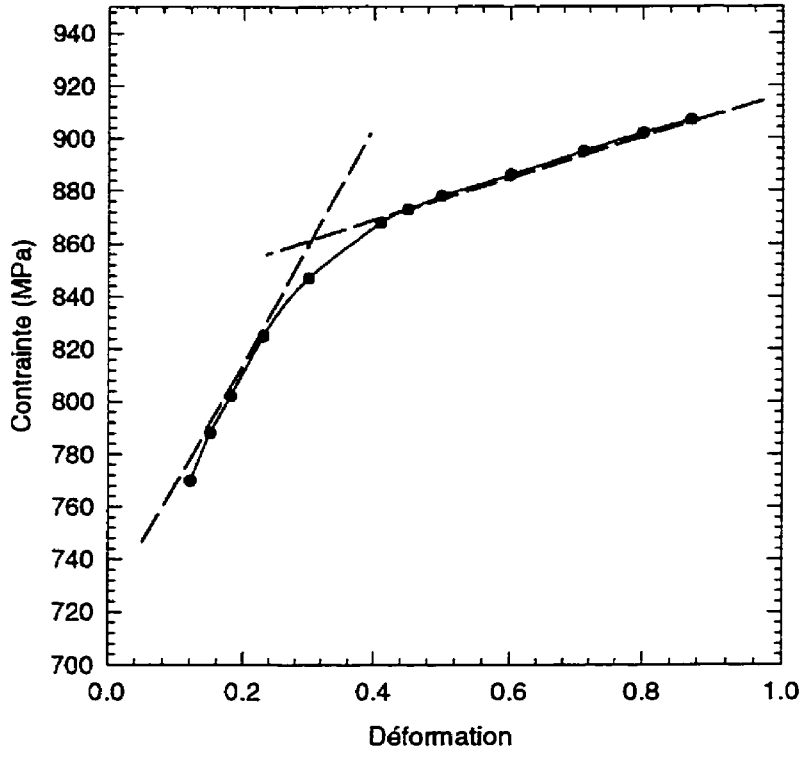


Figure 3-1 : Courbe contrainte-déformation d'un acier 4340[20]

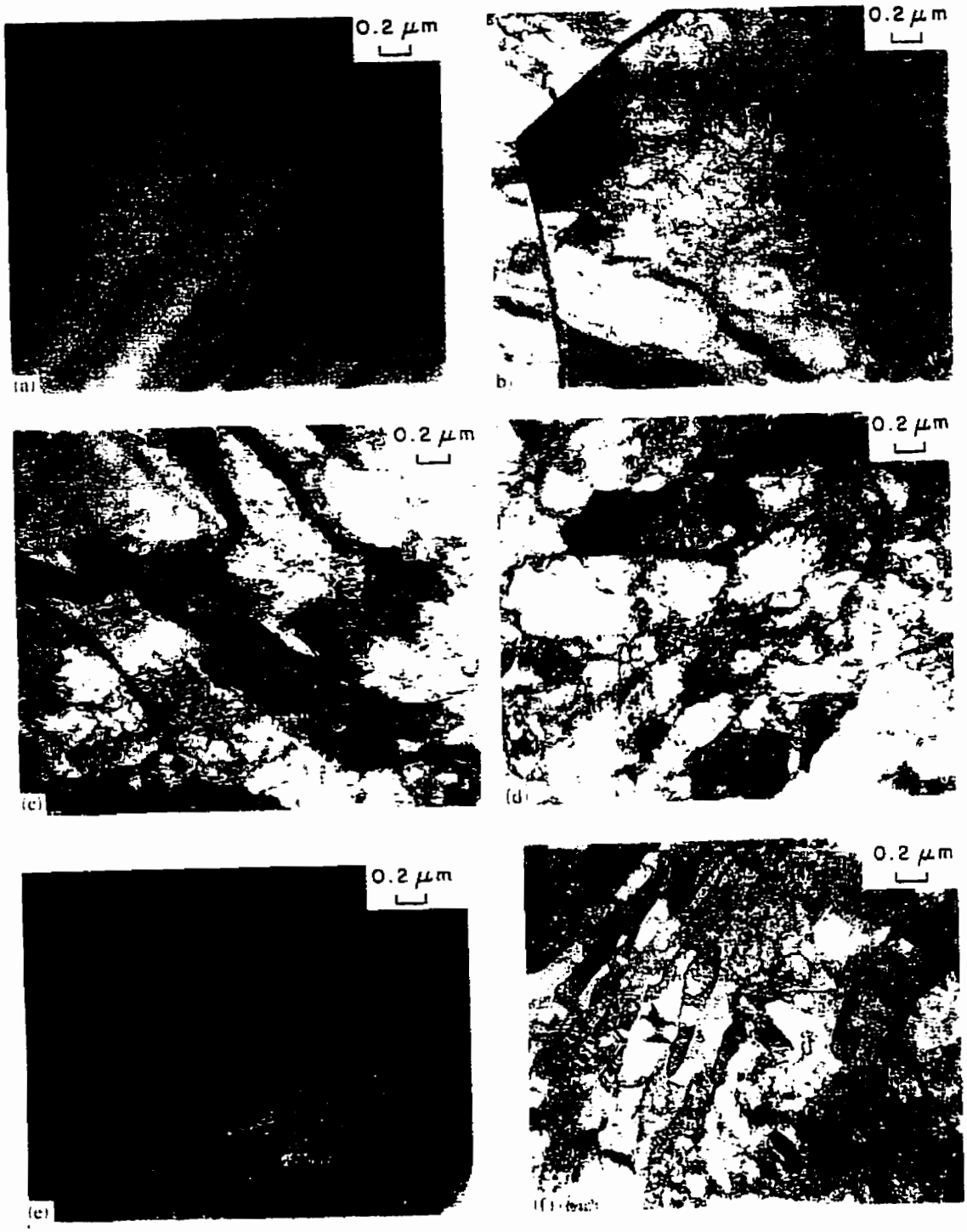


Figure 1-2 : Micrographies des structures de dislocations d'un acier 4340 pour (a) ε=0.0 (b)ε=0.12 (c)ε=0.18 (d)ε=0.30 (e)ε=0.4 (f)ε=0.7[3]

3.2 La formation des structures de dislocations

Chaque type de structure de dislocations a un comportement mécanique qui lui est propre. Avant de décrire formellement le modèle constitutif de chaque structure, il faut déterminer la relation qui contrôle la formation de ces structures. Par exemple, puisque la formation d'une structure cellulaire est liée au glissement dévié, il est donc nécessaire de déterminer une fonction qui permet de le quantifier. Cette fonction permettra de déterminer l'apport à la réponse mécanique du matériau du mécanisme de déformation associé à la structure planaire et de celui associé à la structure cellulaire.

La revue des théories actuelles n'a pas permis d'identifier clairement une loi pour décrire la formation de la structure cellulaire. Des recherches fondamentales pourraient être faites pour identifier une telle loi, mais ceci sortirait du cadre de ce travail. Même si la forme n'est pas connue, il est clair que cette loi devrait tenir compte de la contrainte et de la vitesse de déformation, les deux facteurs qui influencent le plus le glissement dévié. Voici la formulation proposée pour évaluer la fraction de structure cellulaire:

$$f = 1 - e^{-\left(\frac{\bar{\Omega}}{\Omega_t}\right)^{\gamma}} \qquad \text{Éq. 3-5}$$

avec

$$\Omega_t = B\left(\dot{\bar{\varepsilon}}^{p}\right)^{c} \qquad \text{Éq. 3-6}$$

ici B, c et v sont des constantes pour une température donnée et $\overline{\Omega}$ est la contrainte interne effective. Ω_t représente l'énergie de déformation (par unité de volume) critique pour la transition structure planaire à structure cellulaire.

Avec l'Éq. 3-5, il est possible d'évaluer la proportion des mécanismes associés aux structures planaires et cellulaires qui contribuent à la réponse mécanique du matériau pour des valeurs de la contrainte interne et de la vitesse de déformation connues.

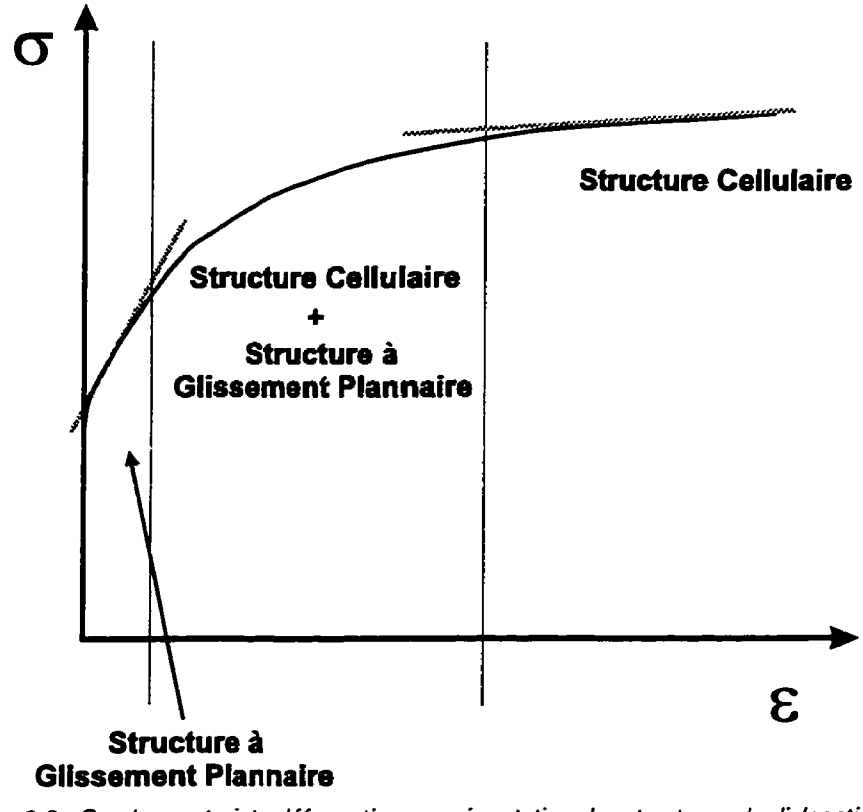


Figure 3-3 : Courbe contrainte déformation, représentation des structures de dislocations

3.3 Le modèle constitutif d'une structure de dislocations

Le modèle constitutif élasto-viscoplastique proposé décrit la réponse mécanique de chaque structure de dislocations. La réponse globale du matériau est obtenue par la moyenne pondérée des réponses des structures.

3.3.1 La loi d'évolution de la contrainte interne et de la contrainte de friction

À partir de l'équation d'Orowan[15] qui exprime l'évolution de la contrainte interne on a:

$$d\Omega = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}\right)_{t,\sigma} d\varepsilon^p + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{\varepsilon^p,\sigma} dt \qquad \text{Éq. 3-7}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}\right)_{t,\sigma} \frac{d\varepsilon^p}{dt} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{\varepsilon^p,\sigma} \qquad \text{Éq. 3-8}$$

À partir de l'Éq. 3-8 il est possible de écrire la loi d'évolution de la contrainte interne pour une structure de dislocations:

$$\dot{\underline{\underline{\Omega}}} = h \cdot \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - a\,\overline{\Omega}^{m-1}\left(\underline{\underline{\Omega}} - \frac{\underline{\underline{\Omega}}}{\overline{\Omega}}\Omega^0\right) \qquad \text{Éq. 3-9}$$

on notera que les coefficients h, a, Ω^0, m sont des constantes qui varient en fonction de la température pour chaque structure de dislocations. Cette formulation exclut volontairement le terme d'adoucissement dynamique pour les raisons mentionnées

précédemment et le terme d'adoucissement thermique est dérivée de celui utilisé par K.P. Walker[8] dans la formulation de sont modèle élasto-viscoplastique.

La contrainte de friction d'une structure de dislocations est constante par rapport à la déformation, i.e.

$$K = K^0 \qquad \text{Éq. 3-10}$$

la constante K^0 varie en fonction de la température pour chaque structure de dislocations.

On constate que les formes décrivant l'évolution des variables internes sont simples car elles décrivent ce qui se passe pour une structure donnée. Chaque structure (planaire ou cellulaire) est relié a une série de coefficients qui lui est propre, c'est-à-dire h, a, m, Ω^0 et K^0.

3.3.2 La loi d'écoulement plastique

La loi d'écoulement peut prendre plusieurs formes, selon les mécanismes qui contrôlent la déformation plastique. Ces mécanismes sont divisés en cinq grandes catégories[21]:

i) Déformation idéale:

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{\gamma} = \infty & \dfrac{\tau}{\mu} > \dfrac{\tau^{th}}{\mu} \\ \dot{\gamma} = 0 & \dfrac{\tau}{\mu} < \dfrac{\tau^{th}}{\mu} \end{array}\right\} \qquad \text{Éq. 3-11}$$

où τ^{th} est la contrainte théorique de cisaillement et μ le module de cisaillement.

ii) Glissement des dislocations:

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \cdot e^{-\frac{\Delta F}{kT}\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)} & \dfrac{\tau}{\mu} > \dfrac{\tau_0}{\mu} \\ \dot{\gamma} = 0 & \dfrac{\tau}{\mu} < \dfrac{\tau_0}{\mu} \end{array}\right\} \qquad \text{Éq. 3-12}$$

où $\tau_0, \Delta F, k, T, \dot{\gamma}_0$ sont respectivement la limite d'élasticité, l'énergie libre de Helmholtz, la constante de Boltzmann, la température et une constante de la loi exponentielle.

Si le glissement est contrôlé par des obstacles discrets faibles:

$$0.2 \cdot \mu b^3 < \Delta F \quad \text{et} \quad \frac{\mu b}{\ell} < \tau_0 \qquad \text{Éq. 3-13}$$

Si le glissement est contrôlé par des obstacles discrets forts:

$$\Delta F < 2\mu b^3 \quad \text{et} \quad \tau_0 < \frac{\mu b}{\ell} \qquad \text{Éq. 3-14}$$

Si le glissement est contrôlé par l'interaction entre les dislocations:

$$\Delta F \equiv 0.1\,\mu b^3$$
$$\tau_0 \equiv \mu b\sqrt{\rho} \qquad \text{Éq. 3-15}$$

où ρ est la densité de dislocations. Dans ce dernier cas ℓ, c'est à dire la distance moyenne entre les obstacles, est relié à la densité de dislocations $\left(\ell = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$ mais pourrait également être relié à la taille des cellules ou à la taille de grains par:

$$\ell = \frac{D_c}{g} \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{D_g}{g} \qquad \text{Éq. 3-16}$$

où D_c, D_g, g sont respectivement la taille des cellules, la taille de grains et le rapport entre le parcours moyen libre des dislocations et leur espacement. Dans le cas des structures cellulaires $g \equiv 25$[19]. Dans le cas où ℓ est relié à la taille de grains, les relations pour décrire g ne correspondent pas avec les observations (il y a beaucoup d'incertitude sur g).

iii) Maclage:

$$\left.\begin{array}{ll} \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_t \cdot e^{\frac{\Delta F_t}{kT}\left(1-\frac{\tau}{\tau_t}\right)} & \frac{\tau}{\mu} > \frac{\tau_t}{\mu} \\ \dot{\gamma} = 0 & \frac{\tau}{\mu} < \frac{\tau_t}{\mu} \end{array}\right\} \qquad \text{Éq. 3-17}$$

où $\gamma_t, \Delta F_t, \tau_t$ sont respectivement une constante de la loi exponentielle, l'énergie libre de Helmholtz et la limite d'élasticité.

iv) Fluage-dislocation:

$$\dot{\gamma} = \frac{AD_{eff}\mu b}{kT}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^n$$
$$D_{eff} = D_v + 10\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^2 \frac{a_c D_c}{b^2} \qquad \text{Éq. 3-18}$$

où D_v, a_c, D_c sont respectivement le coefficient de diffusion du réseau, la section de diffusion d'une dislocation et le coefficient de diffusion volumique

v) Fluage-diffusion:

$$\dot{\gamma} = \frac{42\tau\Omega}{kTD_g^2} D_{eff}$$
$$D_{eff} = D_v + \frac{\pi\delta D_b}{D_g} \qquad \text{Éq. 3-19}$$

où D_g, Ω, D_b, δ et A, sont respectivement la taille de grains, le volume d'interaction atomique, le coefficient de diffusion frontière, l'épaisseur de diffusion d'un grain et une constante de la loi de puissance.

Pour être en mesure de faire le lien entre les lois d'écoulements macroscopiques et les mécanismes de déformation, les différentes constantes sont regroupées à l'intérieur de chaque équation.

Premièrement, dans le cas des mécanismes contrôlés par le glissement des dislocations et pour ceux contrôlés par le maclage, il est possible de reformuler les Éq. 3-12 et 3-17:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_o \cdot e^{\frac{\Delta F}{kT}\left(1-\frac{\tau}{\tau_o}\right)} = \dot{\gamma}_0 \cdot e^{\frac{\Delta F}{kT}} e^{\frac{\Delta F}{kT\tau_o}\tau} = A \cdot e^{B\tau} \qquad \text{Éq. 3-20}$$

En posant $\tau = \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{3}}$ et $\dot{\gamma} = \sqrt{3}\,\dot{\overline{\varepsilon}}^p$,

pour le glissement de dislocation et le maclage, l'Éq. 3-12 et 3-17 deviennent:

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^p = A_1 e^{B_1\overline{\sigma}} \qquad \text{Éq. 3-21}$$

pour le fluage-dislocation, l'Éq. 3-18 devient:

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^p = A_2\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{3}\,\mu}\right)^{n_2} \qquad \text{Éq. 3-22}$$

et pour le fluage-diffusion, l'Éq. 3-19 devient:

$$\dot{\overline{\varepsilon}}^p = A_3\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{3}\mu}\right) \qquad \text{Éq. 3-23}$$

À partir de la loi de Prandlt-Reuss:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\overline{\varepsilon}}^p}{\overline{\sigma}}\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} \qquad \text{Éq. 3-24}$$

et en lui introduisant la contrainte interne, l'Éq 3-24 devient:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^p}{\bar{\Sigma}} \underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 3-25}$$

où

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{3}{2} \underline{\underline{s}} - \underline{\underline{\Omega}} \qquad \text{Éq. 3-26}$$

En remplaçant $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ de l'Éq 3-25 par les Éq. 3-20, 3-21 et 3-22 les lois d'écoulement tensorielles se réécrivent respectivement:

Pour le glissement de dislocation et le maclage:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{A_1 e^{B_1 \bar{\Sigma}}}{\bar{\Sigma}} \underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 3-27}$$

Pour le fluage-dislocation:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{A_2 \left(\frac{\bar{\Sigma}}{\sqrt{3}\,\mu} \right)^{n_2}}{\bar{\Sigma}} \underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 3-28}$$

Pour le fluage-diffusion:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \frac{A_3 \left(\frac{\bar{\Sigma}}{\sqrt{3}\mu} \right)}{\bar{\Sigma}} \underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 3-29}$$

avec

$$A_1 = \frac{e^{\frac{\Delta F}{kT}}}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad B_1 = \frac{\Delta F}{\sqrt{3} kT \tau_0} \qquad \text{Éq. 3-30}$$

et

$$A_2 = \frac{A\mu b}{\sqrt{3}kT} D_v + \frac{10}{\sqrt{3}} \left(\frac{\overline{\Sigma}}{\mu} \right)^2 \frac{a_c D_c}{b^2} \quad \text{et} \quad n_2 = n \qquad \text{Éq. 3-31}$$

et

$$A_3 = \frac{42\Omega\sqrt{3}\mu}{kTD_g^2} \left(D_v + \frac{\pi\delta D_b}{D_g} \right) \qquad \text{Éq. 3-32}$$

Les lois d'écoulement (Éq. 3-27, 3-28 et 3-29) sont fondées sur le mécanismes de déformation plastique. Pour déterminer quelle loi doit être utilisée, il est possible de choisir celle qui permet mieux corréler le comportement du matériau ou d'utiliser les cartes des mécanismes de déformation ("deformation mechanism maps") pour déterminer leurs respectifs domaines d'application.

MetForm© est un modèle où la limite élastique n'est pas définie, les déformations plastique et élastique sont donc possibles dès qu'un chargement est appliqué. Dans la zone élastique de la courbe contrainte-déformation, la plasticité est faible par rapport à la déformation élastique. Pour l'Éq. 3-27, le mécanisme de déformation plastique n'est pas défini pour des contraintes inférieures à la limite élastique $\left(\frac{\overline{\Sigma}}{\mu\sqrt{3}} < \frac{\tau_0}{\mu} \right)$, il est alors impossible de l'utiliser dans notre modèle. Voici trois méthodes pour modifier l'Éq. 3-27 afin de la rendre compatible à la formulation de MetForm©:

i) Modifier l'Éq. 3-27 pour que la vitesse de déformation plastique soit nulle pour une contrainte nulle:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p} = \frac{A_1\left(e^{B_1\frac{\overline{\Sigma}}{\sqrt{3}\mu}} - 1\right)}{\overline{\Sigma}}\underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 3-33}$$

ii) Utiliser une formulation "Power law breakdown":

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p} &= \frac{A_2\left(\frac{\overline{\Sigma}}{S_c\mu\sqrt{3}}\right)^{n_2}}{\overline{\Sigma}}\underline{\underline{\Sigma}} & \frac{\overline{\Sigma}}{\mu} \le S_c \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p} &= \frac{A_1 e^{B_1\frac{\overline{\Sigma}}{S_c\mu\sqrt{3}}}}{\overline{\Sigma}}\underline{\underline{\Sigma}} & \frac{\overline{\Sigma}}{\mu} > S_c \end{aligned}\right\} \qquad \text{Éq. 3-34}$$

où S_c est la contrainte à laquelle il y a une transition entre les mécanismes décrits par la loi de puissance et la loi exponentielle, le "Power law breakdown":

iii) Utiliser une formulation en sinus hyperbolique:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p} = \frac{A_3\left(\sinh\left(B_3\frac{\overline{\Sigma}}{\mu\sqrt{3}}\right)\right)^{n_3}}{\overline{\Sigma}}\underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 3-35}$$

où

$$n_3 = n_2, B_3 = \frac{B_1}{n_2} \quad \text{et} \quad A_3 = \frac{A_2}{B_3^{n_2}} = \frac{A_2 n_2}{B_1} \qquad \text{Éq. 3-36}$$

La formulation en sinus hyperbolique n'a aucun fondement théorique, ce n'est qu'un outil mathématique pour obtenir une transition entre la loi de puissance et la loi exponentielle. En effet, pour des contraintes faibles, le sinus hyperbolique se réduit en une loi de puissance et en une loi exponentielle pour des contraintes élevées. Plusieurs auteurs ont constaté que cette formulation corrèle assez bien avec les résultats expérimentaux[21,22].

Il est important de constater qu'aucun paramètre des lois de fluage ne dépend des variables internes. Il est donc probable que la variation de la contrainte de friction soit faible pour les matériaux dont les mécanismes de déformation sont associés à une loi de puissance. Dans le cas de la loi exponentielle (glissement des dislocations et maclage), le paramètre τ_0 agit comme une variable interne; l'Éq. 3-37 est alors une représentation de la contrainte de friction. Dans le cas du fluage dislocation et du fluage diffusion, la contrainte de friction est respectivement décrite par les Éq. 3-38 et 3-39.

$$K = \frac{\sqrt{3}\mu}{B_1} \qquad \text{Éq. 3-37}$$

$$K = \frac{\sqrt{3}\mu}{A_2^{n_2}} \qquad \text{Éq. 3-38}$$

$$K = \frac{\sqrt{3}\mu}{A_3} \qquad \text{Éq. 3-39}$$

L'objectif du développement présenté ci-dessus est qu'il permet de comprendre l'influence des paramètres microstructuraux sur les lois d'écoulement. On notera que les constantes de ces lois ne sont pas obtenues à partir des Éq. 3-30, 3-31, 3-32 et 3-36, mais sont estimées directement par des essais expérimentaux pour augmenter la fiabilité des calculs.

3.3.3 La relation constitutive des déformations

La déformation plastique est reliée à la déformation totale par:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} = \dot{\underline{\underline{e}}} - \frac{\dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{(3\lambda + 2\mu)}{3}\underline{\underline{I}}\,\dot{\varepsilon}_1}{2\mu} \qquad \text{Éq. 3-40}$$

Notons que cette équation peut être réécrite sont la forme suivante:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} = \left(\lambda \underline{\underline{I}}\,\dot{\varepsilon}_1 + 2\mu\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\sigma}}}\right)\frac{1}{2\mu} \qquad \text{Éq. 3-41}$$

où $\dot{\underline{\underline{e}}}$ est la composante déviatorique de la déformation totale, μ et λ sont les deux constantes de Lamé, ε_1 est le premier invariant de la déformation totale et $\underline{\underline{I}}$ le tenseur identité. La démonstration de l'Éq. 3-40 est décrite en annexe A.

3.3.4 La formulation multi-structure

Le comportement global du matériau est relié au comportement de chacune des i structures par les relations suivantes:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_i \qquad \text{Éq. 3-42}$$

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \sum_{i=1}^{n} X_i \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_i \qquad \text{Éq. 3-43}$$

$$\dot{\underline{\underline{\Omega}}} = \sum_{i=1}^{n} X_i \dot{\underline{\underline{\Omega}}}_i \qquad \text{Éq. 3-44}$$

$$K = \sum_{i=1}^{n} X_i \underline{\underline{K}}_i \qquad \text{Éq. 3-45}$$

où X_i est la fraction de la $i^{ième}$ structure.

Ce qu'il faut noter dans le comportement multi-structure proposé, c'est l'hypothèse que les structures subissent le même champ de vitesse de déformation. Cette hypothèse entraîne des niveaux de contrainte différents dans chacune des structures, mais permet de garantir la compatibilité géométrique entre les structures. Pour améliorer la convergence numérique il est possible d'introduire une correction du type Eshelby[23], qui tient compte du fait qu'il ne peut pas y avoir de discontinuité de contraintes et qu'un champ de contraintes supplémentaires ("mismatch stress field") vient s'additionner pour maintenir la compatibilité des champs de contraintes entre les structures[24]. Cette

correction est nécessaire lorsque la déformation plastique est faible, mais négligeable aux grandes déformations.

Chapitre 4: Mesure des paramètres microstructuraux

Pour déterminer les constantes du modèle associées à chacune des structures du matériau, deux types de tests sont utilisés: des essais de traction/compression et des essais de relaxation. Les mesures décrites dans cette section doivent être réalisées pour différentes températures.

4.1 La loi d'écoulement et la contrainte de friction

La détermination des paramètres de la loi d'écoulement plastique et celle de la loi d'évolution de la contrainte de friction de chaque structure sont reliées et seront traitées conjointement dans cette section.

L'algorithme de Levenberg-Marquardt[25] peut être utilisé pour déterminer les paramètres de la loi d'écoulement, qu'elle soit exponentielle, de puissance ou en sinus hyperbolique. Cet algorithme itératif permet d'optimiser les paramètres afin de minimiser l'erreur entre une loi et les résultats expérimentaux. Si la fonction peut être réduite à une relation linéaire, comme dans le cas de la loi de puissance et de la loi exponentielle, une simple régression linéaire est alors utilisée. La loi d'écoulement est choisie selon le mécanisme de déformation connu ou en cherchant celle qui permet la meilleure corrélation avec les résultats expérimentaux (si le mécanisme est inconnu).

Pour déterminer la contrainte de friction, on recherche la contrainte la plus faible pour mettre en mouvement et/ou multiplier les dislocations dans le matériau. Pour déterminer cette contrainte, une vitesse de déformation de $10^{-8}\ s^{-1}$ a été arbitrairement choisie car elle est bien inférieure aux vitesses généralement rencontrées dans les procédés de mise en forme. Ainsi, la contrainte d'écoulement plastique à cette vitesse est considérée comme étant une représentation de la contrainte de friction.

La contrainte de friction de la première structure est facile à déterminer puisque la contrainte interne du matériau étant initialement nulle, la limite élastique d'un essai uniaxial de compression peut être directement utilisée pour évaluer la contrainte de friction.

La contrainte de friction de la deuxième structure est plus difficile à évaluer car il faut la différencier de la contrainte interne. Lorsque l'on déforme le matériau pour obtenir la deuxième structure, la contrainte interne devient non nulle et modifie la valeur de la contrainte d'écoulement. Pour discerner la contrainte de friction de la contrainte interne, on effectue une traction après l'essai de compression[26]; la différence entre les contraintes d'écoulement correspond alors à deux fois la valeur de la contrainte interne (Figure 4-1), c'est à dire égal à $\Delta\sigma / 2$, où:

$$\Delta\sigma = \sigma_t - \sigma_c \qquad \text{Éq. 4-1}$$

Si la contrainte interne est nul, la demi-différence entre la limite élastique en tension et la limite en compression est égale à zéro:

$$\text{si} \quad \Omega = 0 \quad \Rightarrow \frac{\Delta\sigma}{2} \equiv 0 \qquad \text{Éq. 4-2}$$

Si la contrainte interne est non nul, la demi-différence entre la limite élastique en tension et celle en compression est égale à la valeur de la contrainte interne:

$$\text{si} \quad \Omega > 0 \quad \Rightarrow \frac{\Delta\sigma}{2} = \Omega \qquad \text{Éq. 4-3}$$

L'évaluation exacte de σ_t et σ_c est la principale difficulté de cette technique[27]. Pour éviter la relaxation thermique de la contrainte interne lors du changement de direction durant l'essai, la vitesse de déformation doit être assez grande. Mais si la vitesse de chargement est grande, il faut alors tenir compte des effets de la vitesse de déformation sur la contrainte d'écoulement.

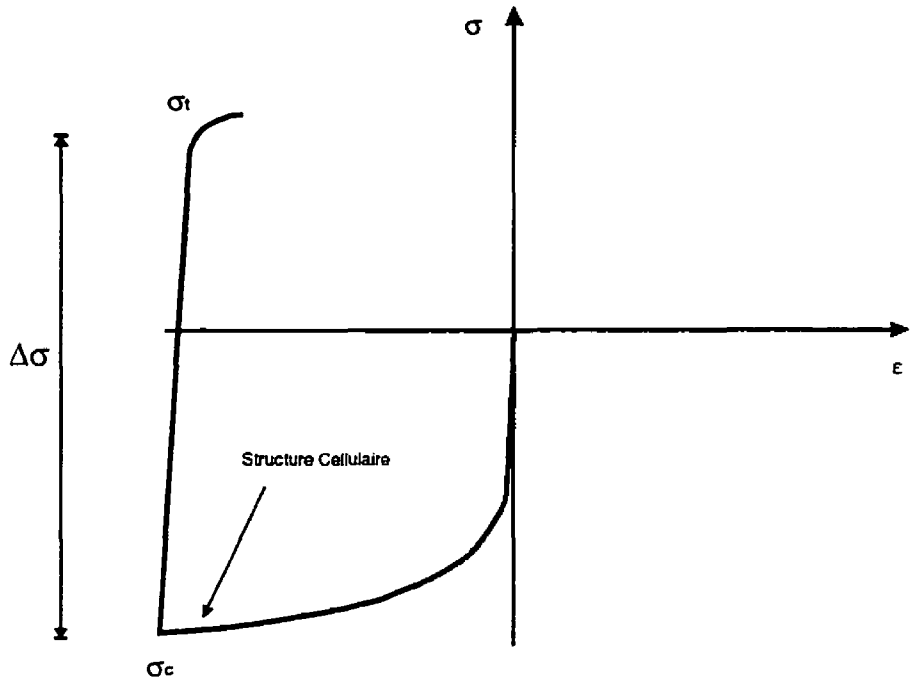


Figure 4-1: schéma d'un essai de compression suivi d'un essai de traction

La forme générale de la loi d'écoulement est la suivante:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \varphi(\ )\,\underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 4-4}$$

où φ() peut prendre une forme exponentielle, de puissance ou de sinus hyperbolique.

Pour illustrer la méthode de détermination des paramètres, nous utiliserons la loi de puissance; la loi d'écoulement s'écrit donc:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{A\left(\frac{\overline{\Sigma}}{K}\right)^n}{\overline{\Sigma}}\underline{\underline{\Sigma}} \qquad \text{Éq. 4-5}$$

où A et n sont les paramètres de la loi d'écoulement et K la contrainte de friction de la structure.

Dans le cas d'un essai uniaxial, l'Éq. 4-2 se résume à:

$$\dot{\varepsilon}^p = A\left(\frac{\Sigma}{K}\right)^n \qquad \text{Éq. 4-6}$$

Les limites élastiques sont utilisées pour déterminer les paramètres de la loi d'écoulement et la contrainte de friction de la première structure puisque dans ce cas $\Sigma = \sigma$ (i.e. la contrainte interne initial est nul). Les paramètres sont déterminés à partir de l'équation suivante:

$$\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_y}{E} = A\left(\frac{\sigma_y}{K}\right)^n \qquad \text{Éq. 4-7}$$

où σ_y est une contrainte pour laquelle la valeur de la contrainte interne est négligeable avec une déformation plastique suffisamment élevée pour que les valeurs mesurées soient précises (ex. 2 % de déformation). Dans le cas de la loi de puissance, l'optimisation se résume à une régression linéaire de l'équation suivante:

$$\log\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_y}{E}\right) = \log(A) - n \cdot \log(K) + n \cdot \log(\sigma_y) \qquad \text{Éq. 4-8}$$

Il est important de noter que A et K sont <u>dépendants</u> et que n ne peut prendre qu'une seule valeur. Il existe toutefois une infinité de combinaisons de A et K qui permettent de corréler avec les résultats expérimentaux. Selon l'Éq. 3-18, la loi de puissance ne fait intervenir que deux paramètres. L'utilisation de trois paramètres n'est pas une nécessité mais permet de garder une homogénéité, dans la formulation des lois

d'écoulement. Pour trouver ces trois paramètres, il faut donc passer une étape intermédiaire, soit:

$$\log\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_y}{E}\right) = \log(A') + n \cdot \log(\sigma_y) \qquad \text{Éq. 4-9}$$

La valeur de la contrainte pour une vitesse de déformation de 10^{-8} est trouvée avec l'Éq. 4-9, cette contrainte est égale à la contrainte de friction. Les valeurs de n et de K sont alors utilisées dans l'Éq. 4-8 pour déterminer A.

La même procédure est utilisée pour déterminer les paramètres de la loi d'écoulement de la deuxième structure, mais la valeur de la contrainte interne doit, dans ce cas, être préalablement déterminée avec un essai de compression/tension. On a alors:

$$\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_y}{E} = A\left(\frac{\sigma_y - \Omega}{K}\right)^n \qquad \text{Éq. 4-10}$$

et

$$\log\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_y}{E}\right) = \log(A) - n \cdot \log(K) + n \cdot \log(\sigma_y - \Omega) \qquad \text{Éq. 4-11}$$

4.2 La loi d'évolution de la contrainte interne

4.2.1 Le terme de durcissement dynamique

Avec des essais de compression où $\dot{\varepsilon}$ est très grand, les effets de l'adoucissement thermique peuvent être négligés et les effets du terme de durcissement dynamique s'en trouvent isolés.

De la loi d'écoulement de la contrainte interne, on a:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\Omega}}}{\partial t} = h\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{p}}{\partial t} - a\overline{\Omega}^{m-1}\left(\underbrace{\cancel{\underline{\underline{\Omega}} - \frac{\underline{\underline{\Omega}}}{\Omega}\Omega^{0}}}_{0}\right) \qquad \text{Éq. 4-12}$$

où

$$\frac{\partial \underline{\underline{\Omega}}}{\partial t} = h\frac{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{p}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{\underline{\Omega}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^{p}} = h \qquad \text{Éq. 4-13}$$

De l'Éq. 3-26 On obtient

$$d\underline{\underline{s}} = \frac{2}{3}\left(d\underline{\underline{\Sigma}} + d\underline{\underline{\Omega}}\right) \qquad \text{Éq. 4-14}$$

et que

$$\dot{\underline{\underline{\Sigma}}} = f\left(K, \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p}\right) \qquad \text{Éq. 4-15}$$

on a $d\underline{\underline{\Sigma}} = 0$ si la contrainte de friction et la vitesse de déformation plastique sont constantes. Dans ces conditions, l'Éq. 4-14 se résume à:

$$d\underline{\underline{s}} = \frac{2}{3} d\underline{\underline{\Omega}} \qquad \text{Éq. 4-16}$$

Or Pour un essais uniaxial l'Éq. 4-16 et 4-13 deviennent:

$$d\sigma = d\Omega \qquad \text{Éq. 4-17}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{\Omega}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^p} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon^p} \qquad \text{Éq. 4-18}$$

En substituant l'Éq. 4-17 dans Éq. 4-18 on obtient alors:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon^p} = h \qquad \text{Éq. 4-19}$$

Le paramètre h est déterminé pour les deux structures à l'aide de la pente de la courbe contrainte-déformation plastique. Ce sont les deux stades linéaires qui sont utilisés pour déterminer chacune des ces pentes (voir Figures 2-1 et 3-1).

La précision de cette mesure est limitée de deux façons. Premièrement, les essais expérimentaux étant réalisés à déformation imposée, la déformation plastique n'est donc pas réellement constante. Deuxièmement, si le premier stade est très court ou si le deuxième stade linéaire n'est pas complètement atteint, alors les paramètres sont difficiles à évaluer.

4.2.2 Le terme d'adoucissement thermique

Avec des essais où $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}$ tend vers 0, les effets du terme de durcissement dynamique peuvent être négligés et les termes d'adoucissement thermique sont isolés. La loi d'évolution de la contrainte interne devient alors:

$$\underline{\underline{\dot{\Omega}}} \equiv a \cdot \overline{\Omega}^{m-1}\left(\underline{\underline{\Omega}} - \frac{\underline{\underline{\Omega}}}{\overline{\Omega}}\Omega^0\right) \qquad \text{Éq. 4-20}$$

Dans un cas uniaxial, l'Éq 4-19 se résume à:

$$\dot{\Omega} = a\,\Omega^{m-1}\left(\Omega - \Omega^0\right) \qquad \text{Éq. 4-21}$$

Il y a deux possibilités: m=1 et m≠1.

i) Cas où m=1

En intégrant les deux côtés de l'Éq. 4-20, on obtient

$$\int_{\underline{\Omega}^{m}}^{\underline{\underline{\Omega}}} \frac{d\Omega}{\left(\Omega - \Omega^0\right)} = \int_{t_m}^{t} a \cdot dt \qquad \text{Éq. 4-22}$$

et la solution de l'équation différentielle est:

$$\ln\left(\Omega - \Omega^0\right)\Big|_{\underline{\Omega}^{m}}^{\underline{\underline{\Omega}}} = a \cdot \Delta t \qquad \text{Éq. 4-23}$$

d'où

$$\ln\left(\frac{(\Omega-\Omega^0)}{(\Omega^{init}-\Omega^0)}\right)=a\cdot\Delta t \qquad \text{Éq. 4-24}$$

En posant:

$$\Delta\Omega=(\Omega^{init}-\Omega) \quad \text{et} \quad \Delta\Omega^{sat}=(\Omega^{init}-\Omega_0) \qquad \text{Éq. 4-25}$$

on peut écrire:

$$(\Omega-\Omega^0)=(\Omega-\Omega^{init}+\Omega^{init}-\Omega^0)=-\Delta\Omega^{sat}+\Delta\Omega \qquad \text{Éq. 4-26}$$

et l'Éq. 4-27 devient alors:

$$\ln\left(\frac{\Delta\Omega}{\Delta\Omega^{sat}}-1\right)=a\cdot\Delta t \qquad \text{Éq. 4-27}$$

En supposant que seul la contrainte interne peut relaxer lors de l'essai, le changement de contrainte est alors directement associé à la relaxation de la contrainte interne, et:

$$\Delta\Omega=\Delta\sigma \quad \text{et} \quad \Delta\Omega^{sat}=\Delta\sigma^{sat} \qquad \text{Éq. 4-28}$$

L'Éq. 4-26 devient donc:

$$\ln\left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma^{sat}}-1\right)=a\cdot\Delta t \qquad \text{Éq. 4-29}$$

Si la contrainte interne initiale est connue, alors Ω^0 est obtenu à partir de:

$$\Omega^0=\Omega^{init}-\Delta\sigma^{sat} \qquad \text{Éq. 4-30}$$

On obtient ainsi a et Ω^0 pour chacune des structures avec des essais de relaxation, comme le montre la Figure 4-2.

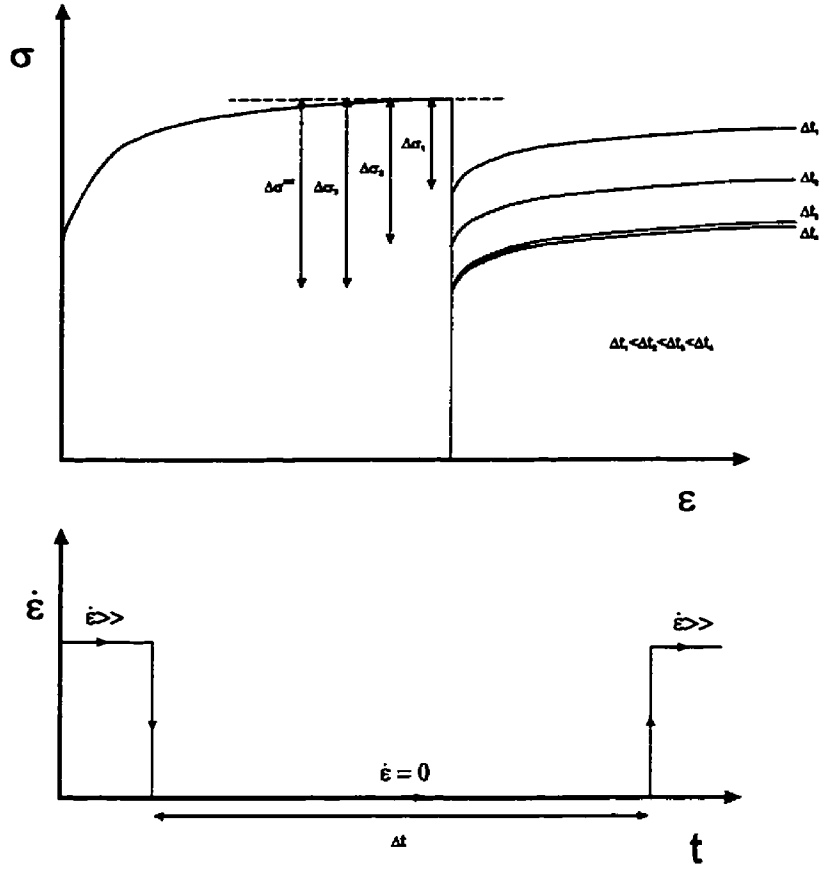


Figure 4-2 : Essais de relaxation

ii) Cas où m ≠ 1

On a:

$$\int_{\Omega^{\infty}}^{\Omega} \frac{d\Omega}{\Omega^{m-1}\left(\Omega-\Omega^{0}\right)} = -a \cdot t \qquad \text{Éq. 4-31}$$

La méthode de détermination des paramètres est la même que pour m=1, sauf que l'on doit utiliser l'intégration numérique et trouver la solution d'un système non-linéaire (2x2) pour obtenir a et m pour chacune des structures (Ω^0 est déterminé avec l'Éq. 4-29).

4.2.3 Transformation des structures

L'évaluation des paramètres de l'équation qui détermine la proportion des mécanismes associés aux structures de dislocations, se fait en comparant la courbe de compression expérimentale avec les résultats générés par le modèle. Pour y arriver, il faut simplifier ce dernier. Ainsi, en supposant que la vitesse de déformation plastique est constante, on a, dans un cas uniaxial, que la contrainte ne dépend que de la variation des variables internes et se résume à:

$$\sigma = \sigma_0 + H \qquad \text{Éq. 4-32}$$

où σ_0 et H sont respectivement la limite élastique et le durcissement relié aux variables internes.

Le durcissement est calculé de façon incrémentale, soit:

$$dH = d\Omega + dK \qquad \text{Éq. 4-33}$$

avec:

$$\begin{gathered} d\Omega = \left[(1-f)\cdot h_1 + f\cdot h_2\right]\cdot d\dot{\varepsilon}^p - \\ \left\{(1-f)\cdot a_1\cdot \Omega^{m_1}\left(\Omega-\Omega_1^0\right)\cdot dt + f\cdot a_2\cdot \Omega^{m_2}\left(\Omega-\Omega_2^0\right)\cdot dt\right\} \end{gathered} \qquad \text{Éq. 4-34}$$

$$dK = \Delta f\cdot\left(K_2 - K_1\right) \qquad \text{Éq. 4-35}$$

et

$$f = 1 - \exp^{-\left(\frac{\Omega}{\Omega_t}\right)^v} \qquad \text{Éq. 3-5}$$

où f est la fraction de structure cellulaire et h_1, K_1,a^1,m^1, $\Omega^0{}_1$, h_2, K_2, a^2, m^2, $\Omega^0{}_2$, sont respectivement le coefficient de durcissement, la contrainte de friction, le coefficient d'adoucissement thermique, les exposants d'adoucissement et les contraintes de saturation de la relaxation de la première et de la deuxième structure. Ω_t et v sont les paramètres de la fonction de transformation que l'on recherche. Ω_t est lui-même une fonction faisant intervenir deux autres paramètres (B et c), c'est à dire:

$$\Omega_t = B \cdot \left(\dot{\varepsilon}^p\right)^c \qquad \text{Éq. 3-6}$$

Pour simplifier le traitement, les paramètres sont obtenus en deux étapes. On évalue tout d'abord Ω_t et v pour différentes vitesses de déformation, vient ensuite la détermination de B et c.

Avec ce modèle simplifié, il est possible d'utiliser l'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt pour obtenir les paramètres Ω_t et v de la fonction de transformation à partir des courbes de compression expérimentales. Les paramètres sont déterminés pour différentes vitesses de déformation. Le paramètre v est considéré comme constant alors que Ω_t varie en fonction de la vitesse de déformation. Les différentes valeurs de Ω_t obtenues sont utilisées pour déterminer les paramètres B et c par régression linéaire, soit:

$$\log\Omega_t = \log B + c \cdot \log \dot{\varepsilon}^p \qquad \text{Éq. 4-36}$$

La procédure de détermination des paramètres se résume donc à:

i) Déterminer les paramètres de la loi d'écoulement (A_1 et n_1) et la valeur de la contrainte de friction (K_1) de la première structure à l'aide des contraintes d'écoulement obtenues à partir des courbes de compression pour différentes vitesses de déformation.

ii) Déterminer la valeur des coefficients de durcissement de la contrainte interne (h_1 et h_2) pour les deux structures à partir d'une courbe contrainte-déformation plastique.

iii) Déterminer la valeur de la contrainte interne au moment où la transformation de la première à la deuxième structure est terminée lors d'une traction (précédée d'une compression). Une fois cette valeur déterminée, la méthode utilisée pour la première structure est appliquée à la deuxième afin d'évaluer les paramètres de la loi d'écoulement (A_2 et n_2) et la contrainte de friction (K_2).

iv) Déterminer la valeur des paramètres du terme de relaxation de la contrainte interne avec des essais de relaxation sur la première structure (a_1,m_1,$\Omega^0{}_1$) et la deuxième structure (a_2,m_2,$\Omega^0{}_2$).

v) Déterminer les paramètres de la fonction de transformation (v,B,c) avec successivement, une optimisation à partir des courbes de compression et une régression linéaire des valeurs de Ω_t en fonction de la vitesse de déformation.

Chapitre 5: Validation des approches proposées

Cette section a pour objet de valider le modèle ainsi que la procédure élaborée pour l'évaluation des paramètre microstructuraux nécessaires au modèle. En premier lieu, les paramètres du modèle sont déterminés à partir de courbes de compression. En second lieu, l'écoulement plastique est modélisé pour diverses conditions et les résultats des simulations numériques sont comparés avec les résultats expérimentaux. Sont finalement présentées, les capacités du modèle à pouvoir tenir compte des phénomènes de transformation de phases.

5.1 Détermination des paramètres de l'alliage d'aluminium Al1100

L'alliage d'aluminium Al1100 a été choisi parce qu'il existe des données fiables dans la littérature qui permettent une caractérisation partielle de l'alliage. Les données ont été tirées d'une étude la modélisation de forgeage à haute température où l'auteur utilise l'aluminium 1100 pour valider son modèle [28]. Différentes courbes de compression (au nombre de 24), vitesses de déformation (1.0, 0.1, 0.01, 0.001 s^{-1}) et températures (300, 350, 400, 450, 500, 600 °C) seront utilisées pour caractériser les paramètres de MetForm°. Les échantillons utilisés par Brown et al.[28] ont été usinés à partir de barres extrudées puis recuits avant les essais. La composition de l'alliage est décrite dans le

Tableau 5-1 et les courbes de compression sont présentées à la Figure 5-1. Les courbes montrent le comportement du matériau pour différente température et vitesse de déformation, en effet la contrainte d'écoulement augmente lorsque la température diminue et lorsque la vitesse de déformation augmente. Une étude plus approfondie de des phénomènes physiques causant causent ces effets sera réalisée dans la prochaine section.

Tableau 5-1 : Composition de l'alliage d'aluminium 1100

Élément	Composition (w%)
Al	99.72
Fe	0.16
Si	0.08
Ti	0.03
V	0.01

Les données disponibles dans la littérature étant limitées à de simples courbes de compression, certains paramètres du modèle ne peuvent être déterminés. Ainsi, certaines approximations ont dû être faites afin de caractériser l'alliage:

i) les deux structures ont la même contrainte de friction;

ii) la loi d'écoulement et les paramètres qui s'y rattachent sont les mêmes pour les deux structures de dislocations;

iii) la relaxation des deux structures est négligée;

iv) seuls les paramètres de la loi d'évolution de la contrainte interne sont différents pour les deux structures.

Nous réalisons que de telles suppositions ainsi que la source des données entraînent des erreurs importantes. Ces dernières ne nous empêchent toutefois pas de tester la capacité du modèle à décrire correctement le comportement du matériau.

Les modules élastiques du Al1100 ont été tirés de l'étude[28], le Tableau 5-2 présente les constantes élastiques pour différentes températures.

Tableau 5-2 : Constantes élastiques de l'alliage d'aluminium 1100

Température (°C)	E (Mpa)	v
300	59.4	0.356
350	57.3	0.359
400	55.1	0.362
450	52.9	0.365
500	50.7	0.368
600	46.4	0.377

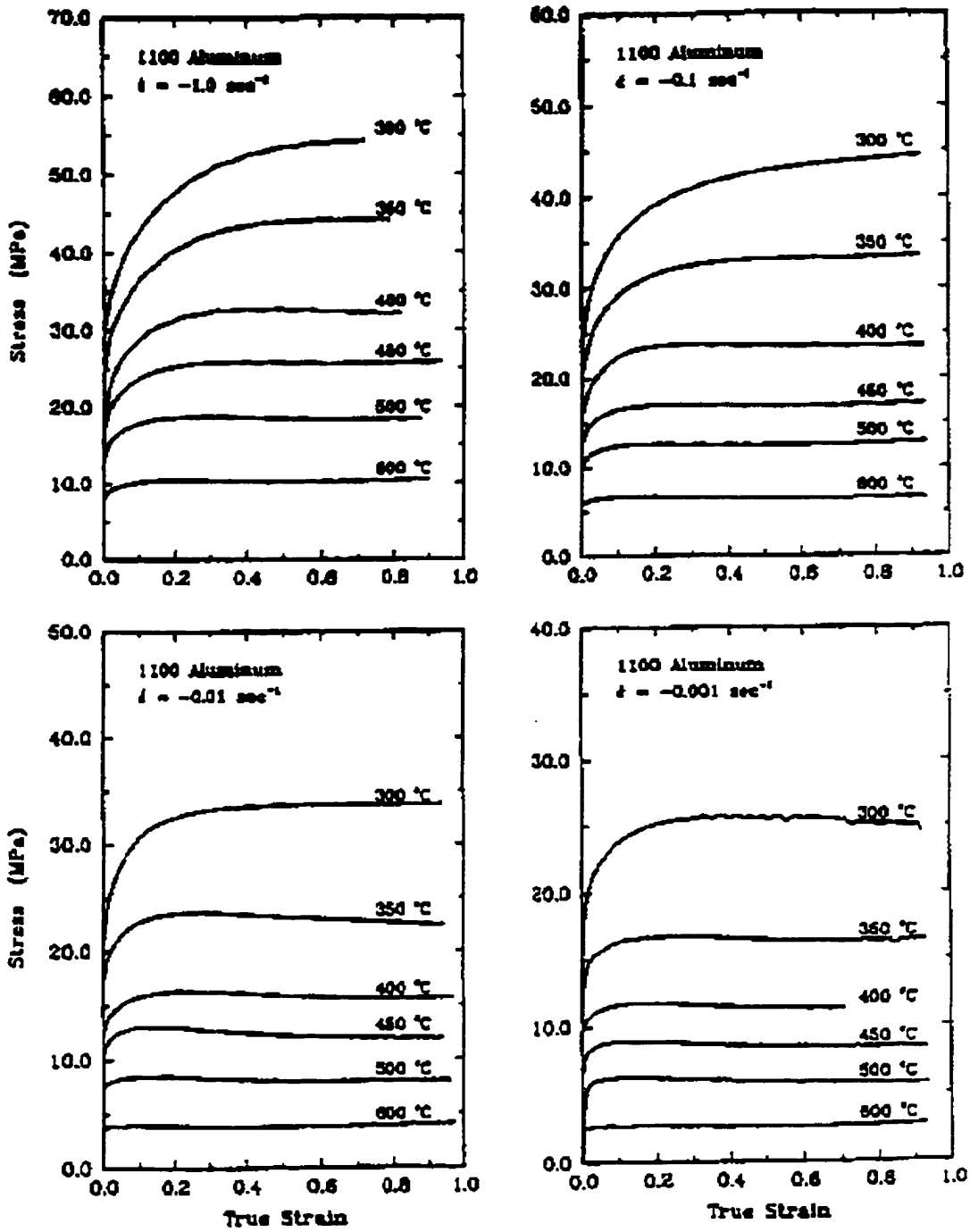


Figure 5-1 : Courbes expérimentales utilisées pour la détermination des paramètres

5.1.1 La loi d'écoulement et la contrainte de friction

Les paramètres de la loi d'écoulement de puissance et de la contrainte de friction, obtenus à partir des courbes présentées à la Figure 5-1, sont les suivants:

Tableau 5-3 : Paramètres de la loi d'écoulement de l'alliage d'aluminium 1100

Température (°C)	A (s^{-1})	K (MPa)	n
300	8.73×10^{-9}	6.3	12.3
350	8.63×10^{-9}	4.5	11.0
400	6.59×10^{-9}	3.6	11.8
450	9.56×10^{-9}	1.4	7.33
500	1.20×10^{-8}	0.97	7.09
600	1.00×10^{-8}	0.23	5.28

Le tableau 5-3 montre les résultats de la régression linéaire obtenue à partir de données extraites des courbes expérimentales de la Figure 5-1. Il faut noter que la valeur de la contrainte de friction (K) a été extrapolée à partir de la contrainte d'écoulement pour une vitesse de 10^{-8} s^{-1}. Mentionnons qu'après quelques essais d'optimisation des paramètres, la loi de puissance s'est révélée comme étant la loi d'écoulement qui corrélait le mieux avec les données. La Figure 5-2 montre la comparaison entre les données expérimentales et la loi d'écoulement de puissance pour les six températures.

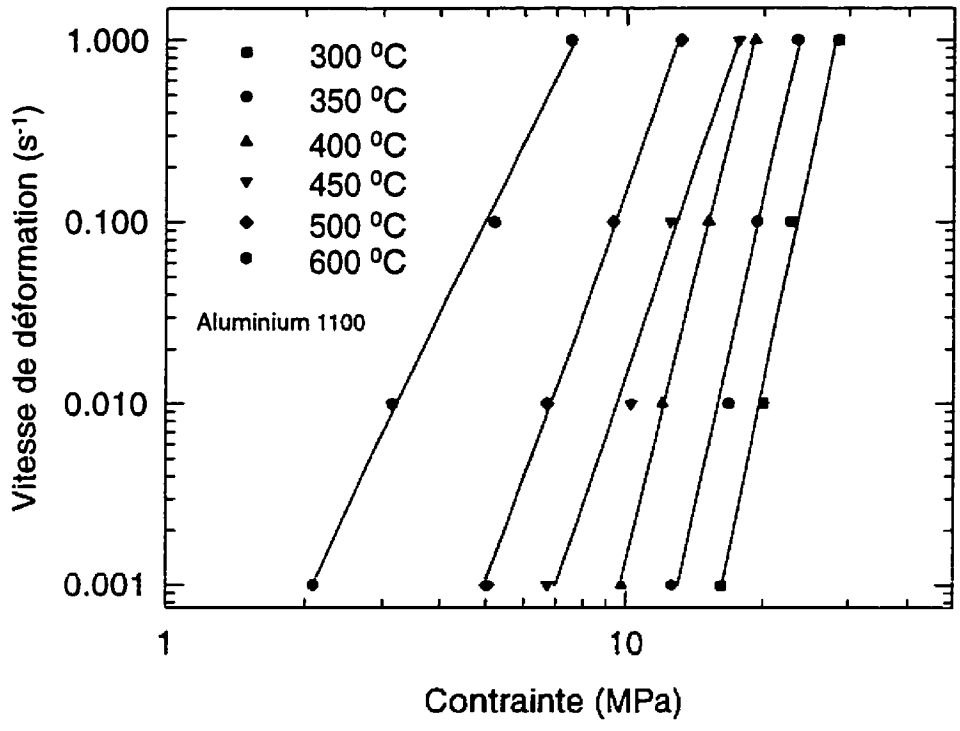


Figure 5-2 : Comparaison de la loi d'écoulement de puissance et des points expérimentaux

5.1.2 La loi d'évolution de la contrainte interne

Étant donné que la relaxation est ici négligée, le seul paramètre à déterminer est le coefficient de durcissement dynamique. Ce paramètre est évalué d'après la courbe contrainte-déformation ayant la vitesse la plus élevée (1.0 s^{-1}). Les coefficients de la première et de la deuxième structure sont respectivement déterminés à partir des pentes initiale et finale de la courbe σ-ε^p. Le Tableau 5-4 présente les coefficients de

durcissement de la contrainte interne pour les deux structures de dislocations en fonction de la température.

Tableau 5-4 : Coefficients de durcissement dynamique de l'alliage d'aluminium 1100

Température (°C)	h_1 (structure 1) (MPa)	h_2 (structure 2) (Mpa)
300	175	1.5
350	155	0.0
400	135	0.0
450	88	0.0
500	62	0.0
600	38	0.0

Certains phénomènes comme la recristallisation dynamique et la relaxation peuvent fausser les résultats et ainsi faire apparaître des coefficients de durcissement négatifs pour la deuxième structure. Toutefois, comme ces coefficients ne peuvent en réalité être négatifs, ils ont arbitrairement été fixés à zéro.

5.1.3 La loi de transformation des structures de dislocations

Les différents paramètres de la loi de transformation des structures de dislocations ont été obtenus avec la méthode décrite précédemment à la section 4.2.3. Par contre, en négligeant les termes de relaxation et de variation de la contrainte de friction, l'Éq 4-31 ce résume à:

$$dH = \left[(1-f)\cdot h_1 + f\cdot h_2\right]\cdot d\dot{\varepsilon}^p \qquad \text{Éq. 5-1}$$

Le Tableau 5-5 présente les résultats obtenus et la Figure 5-3 montre la comparaison entre la relation de puissance et les valeurs estimées du paramètre Ω_t pour différentes vitesses de déformation.

Tableau 5-5 : paramètres de la loi de transformation des structures de dislocations de l'aluminium 1100

Température (°C)	B (Mpa)	c	v
300	26.86	0.159	1.0
350	21.56	0.245	1.0
400	16.34	0.315	1.0
450	7.16	0.188	1.0
500	5.15	0.209	1.5
600	2.71	0.229	1.5

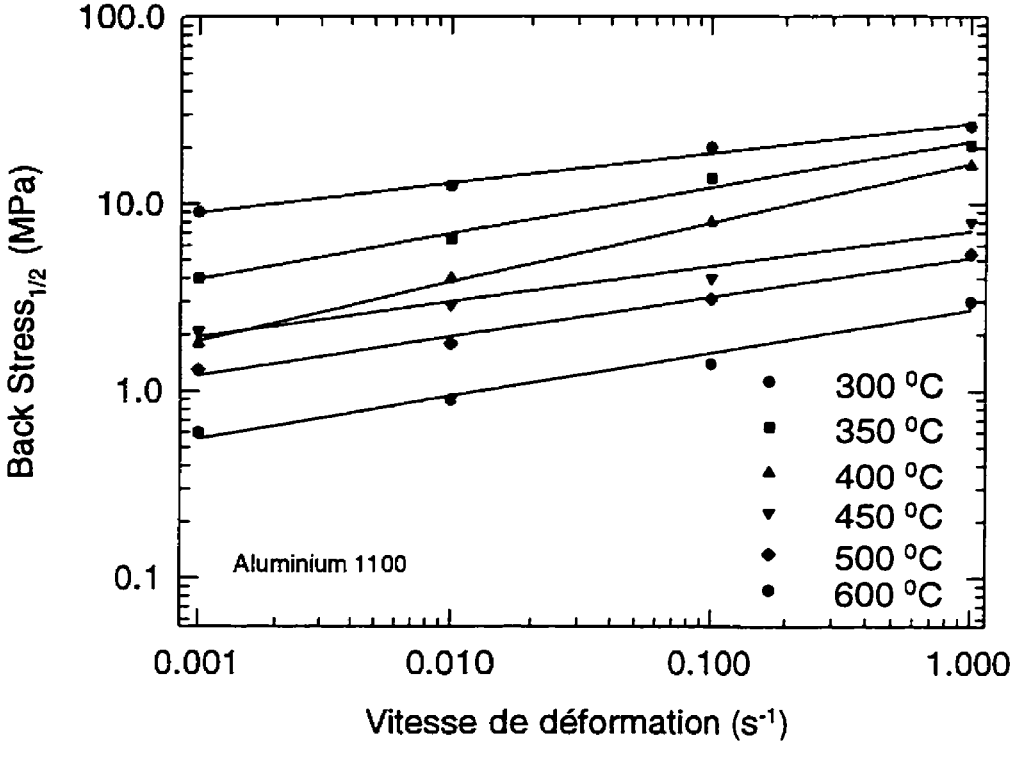


Figure 5-3 : Comparaison la loi de puissance de Ω_t et des points calculés

5.2 Résultats des simulations

5.2.1 Comparaison des simulations avec des résultats expérimentaux

Afin d'en vérifier l'habileté à décrire correctement le comportement mécanique du matériau, le modèle a été inséré dans le code d'éléments finis logiciel ABAQUS. Ce logiciel permet à l'usager d'écrire une sous-routine dans laquelle la réponse du matériau est codée. Les détails de cette implantation sont décrits dans l'annexe B. Pour trouver la réponse mécanique du modèle, il faut solutionner un système de 12 équations/inconnues. Il est possible d'utiliser la méthode de Newton, mais le temps de calcul est long. Pour pallier à ce problème, la méthode de l'intégration asymptotique a été utilisée. Cette méthode, décrite dans l'annexe C, est fondée sur le fait que les lois d'écoulement et les lois d'évolution des variables sont des équations différentielles non homogènes du premier ordre. L'intégration asymptotique permet de réduire les temps de calcul sans toutefois en diminuer de façon significative la précision. Plusieurs tests de comparaison entre la méthode de Newton et celle de l'intégration asymptotique ont conclu à des solutions équivalentes pour des déformations monotonique et cyclique (voir figure C-2 et C-3).

Les simulations des essais uniaxiaux isothermes ont été réalisées avec deux éléments 3D quadratiques, soit des briques à 20 noeuds et 27 points d'intégration. Comme trois plans de symétrie ont été utilisés, la simulation a été réalisée sur 1/8 d'échantillon (voir

figure 5-4). La traction ou la compression était imposée en fixant la vitesse des noeuds en surface. L'échantillon était en contrainte plane, alors que le champs de déformation était uniforme et dans la direction du chargement.

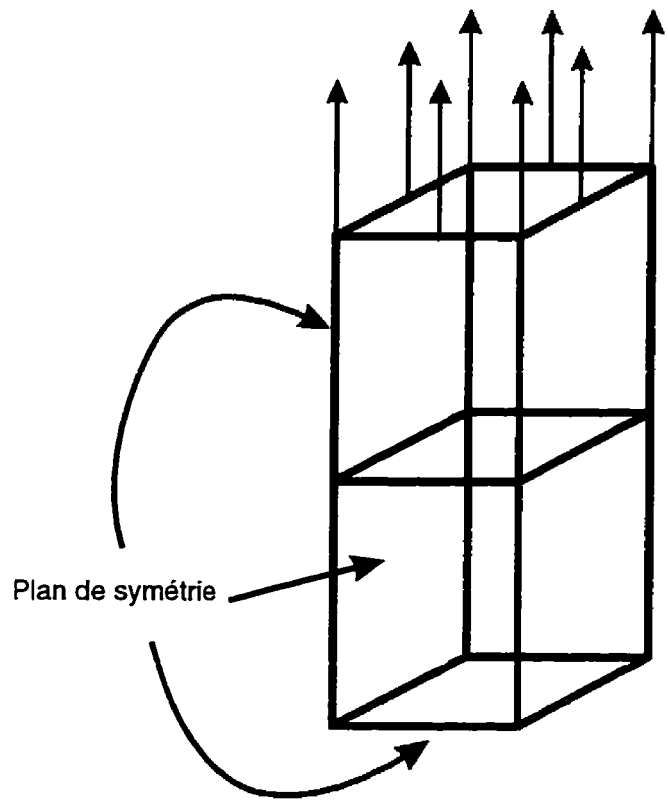


Figure 5-4: Schéma du maillage de la simulation par éléments finis

Les paramètres de l'alliage d'aluminium 1100 sont utilisés pour valider le modèle (voir les Tableaux 5-2 à 5-5). Toutes les figures présentant les comparaisons entre les résultats expérimentaux et ceux des simulations se trouvent dans l'annexe D. Entre autres, les Figures D-1, D-3, D-5 et D-7 montrent les résultats expérimentaux d'essais

de compression uniaxiale, alors que les Figures D-2, D-4, D-6 et D-8 montrent les résultats des simulations correspondantes. Les résultats de ces dernières concordent généralement bien avec les résultats expérimentaux. Le modèle suit correctement les tendances du comportement par rapport à la température et la vitesse de déformation. La contrainte d'écoulement diminue lorsque la vitesse de déformation diminue et lorsque la température augmente. Le taux de consolidation obtenu par le modèle représente également bien le comportement du matériau, alors qu'il augmente avec la vitesse de déformation et diminue lorsque la température augmente.

Ce type de comportement est naturel dans la formulation du modèle et il aurait été surprenant que des effets différents soient observés. Les effets de la température et de la vitesse de déformation sur la contrainte d'écoulement sont obtenus par la loi d'écoulement. En effet, la loi de puissance utilisée semble montrer que la montée des dislocations, couplée au glissement des dislocations, est l'un des mécanismes de déformation dominants. La montée est un mécanisme relié à la diffusion de lacunes, elle est donc activée thermiquement. De plus, dans les métaux à structure cubique à faces centrées (CFC), le glissement dévié est important et ce, surtout si l'énergie de faute d'empilement est élevée. L'étape critique pour obtenir le glissement dévié est le pincement des dislocations partielles. Le pincement est un mécanisme qui est activé thermiquement et assisté par la contrainte.

Pour l'aluminium, un CFC dont l'énergie de faute d'empilement est très élevée, le glissement dévié se produit facilement et est grandement influencé par la vitesse de déformation et la température. Ainsi, la loi de transformation (Éq. 3-5) qui représente le passage d'un mécanisme de déformation relié à une structure planaire à celui relié à une structure cellulaire, tient compte de la vitesse de déformation et de la température. Lorsque la vitesse de déformation augmente et que la température diminue, la probabilité d'obtenir du glissement dévié diminue car le mécanisme est thermiquement activé. Ceci a pour effet d'augmenter la consolidation car les mécanismes associés à la formation de la structure cellulaire, qui sont directement reliés au glissement dévié, sont retardés au profit de ceux de la structure planaire, dont le taux de consolidation est plus grand. Le passage du stade I (structure planaire) au stade II (structure cellulaire) est alors plus lent lorsque la température est faible et que la vitesse de déformation est élevée.

Le modèle ne décrit pas correctement toutes les courbes expérimentales. Les simulations à une température de 450 °C, par exemple, surestiment la contrainte d'écoulement de 1 à 2 MPa. Des problèmes dans l'interprétation des données ou des phénomènes comme la recristallisation dynamique pourraient être à l'origine des erreurs observées à cette température. D'autres exemples de problèmes rencontrés, pour les simulations à très grandes vitesses de déformation et à basses températures qui surestiment la contrainte d'écoulement. Il est possible que des effets d'échauffement adiabatique, pour des vitesses de déformation très élevées (1.0 s^{-1}), aient faussé la mesure des paramètres. Les courbes expérimentales réalisées à grandes vitesses

décriraient donc le comportement d'un matériau dont la température réelle est plus élevée que celle de la température nominale des essais. La mesure de tels paramètres entraînerait alors une surestimation des contraintes d'écoulement.

Il était prévisible que le modèle décrive correctement les courbes de compression uniaxiale puisque ces dernières ont été utilisées pour obtenir les paramètres du modèle. Il est toutefois plus intéressant de comparer le modèle avec de nouvelles conditions de chargement. Des simulations d'essais de compression avec variations de vitesse de déformation ont été réalisées pour vérifier la capacité de prédiction du modèle. Les Figures D-9, D-11 et D-13 présentent les résultats expérimentaux obtenus pour un saut de vitesse de déformation donné, alors que les Figures D-10, D-12 et D-14 montrent les simulations réalisées à partir de la même variation de vitesse de déformation. Pour les courbes simulées, la contrainte d'écoulement initiale correspond bien à celle des résultats expérimentaux, alors que la consolidation obtenue est de beaucoup supérieure à celle des résultats expérimentaux. Il semblerait que la relaxation thermique prenne de l'importance pour des vitesses de déformation de l'ordre de $10^{-4}s^{-1}$. Les sauts de contrainte et les formes des courbes sont bien décrits par les simulations. Encore une fois, les simulations à 450 °C surestiment la valeur de la contrainte d'écoulement. Les figures D-15 et D-16 présentent respectivement les résultats expérimentaux et des simulations pour des courbes avec un double saut de vitesse de déformation. À nouveau, les résultats obtenus par simulation corrèlent bien avec les résultats expérimentaux, à l'exception de ceux obtenus à 450 °C.

Lorsque la vitesse de déformation fait un saut, le taux de consolidation augmente brutalement, c'est à dire que les mécanismes reliés à la structure planaire sont alors favorisés par rapport à ceux reliés à la structure cellulaire. Ceci est consistant avec le fait que les mécanismes associés aux structures cellulaires sont reliés au glissement dévié. Lorsque la vitesse de déformation augmente, la probabilité d'obtenir du glissement dévié diminue et favorise la déformation par des mécanismes associés à la structure planaire.

De façon générale le modèle proposé décrit bien le comportement de l'alliage d'aluminium 1100. Les forces de MetForm© sont d'être à la fois simple et le plus près possible des mécanismes physiques de la déformation, ce qui permet au modèle de correspondre de façon naturelle au comportement du matériau. La démarcation de MetForm© par rapport aux autres modèles viscoplastiques, réside dans sa formulation, où le comportement du matériau est considéré comme une combinaison de mécanismes reliés aux structures de dislocations. Cette approche flexible permet de corréler avec les résultats expérimentaux, tout en simplifiant la mesure de paramètres.

5.2.2 Extrapolation des capacités du formalisme proposé

Le modèle présente de nombreuses qualités, mais certaines améliorations pourraient être apportées pour le simplifier davantage ou pour modéliser adéquatement des cas plus complexes.

La première modification qui pourrait être apportée au modèle serait de rendre les paramètres dépendants de la température. Une telle dépendance pourrait être évaluée à partir de la loi d'Arrhenius:

$$X = X^0 e^{\frac{Q}{RT}} \qquad \text{Éq. 5-2}$$

Il serait alors possible de définir le paramètre X à toutes les températures avec les paramètres X^0 et Q, respectivement une constante préexponentielle et l'énergie d'activation. Cette équation permet également d'extrapoler la valeur du paramètre en dehors de l'intervalle de température dans lequel les mesures ont été faites. Cette extrapolation est valable tant que le mécanisme d'activation thermique reste le même.

La Figure 5-2 montre l'influence de la température sur le coefficient de durcissement de la première structure (h_1), sur la constante de proportionnalité de la loi d'écoulement (A), sur le drag stress (K) et sur la constante de proportionnalité de la loi de transformation (B). L'Éq. 5-1 permet une bonne corrélation pour ce qui est des paramètres h_1, K et B, mais est moins satisfaisante en ce qui a trait au paramètre A. Notons que l'influence de

la température sur le coefficient d'adoucissement thermique pourrait être également modélisée par l'Éq. 5-2.

La Figure 5-5 nous permet de constater qu'il y a probablement un changement du mécanisme d'activation thermique car il y a un changement de pente entre 400 et 450 °C (i.e. 1/T = 0.00143). Pour être en mesure de vérifier cette hypothèse, des mesures de paramètres plus précises doivent être réalisées ainsi que des vérifications par observations en microscopie électronique à transmission.

De l'Éq. 5-3, on obtient la relation utilisée pour réaliser la régression linéaire des paramètres (voir Figure 5-5):

$$\ln A = \ln A^0 - \frac{Q}{R}\frac{1}{T} \qquad \text{Éq. 5-3}$$

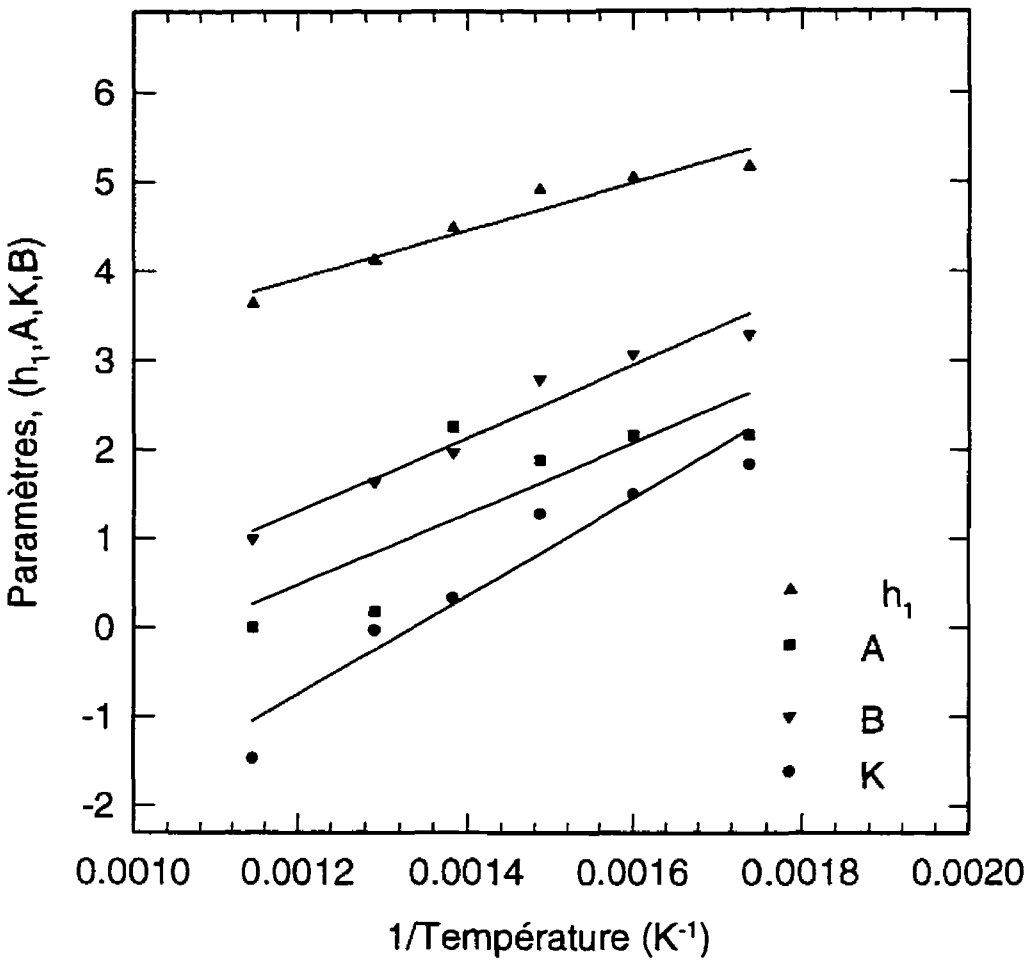


Figure 5-5: comparaison entre les paramètres et la loi d'Arrhenius

Idéalement, le modèle ne devrait contenir aucun paramètre déterminé arbitrairement alors qu'en réalité, il dépend de la température. Les exposants devraient rester contants si les mécanismes demeurent inchangés. Les paramètres qui dépendent de la température devraient également être modélisés à partir de l'Éq. 5-2. Pour un intervalle de température où le mécanisme d'activation reste inchangé, Q serait le même pour

tous les paramètres et seuls les X^0 seraient différents. Dans un tel cas, le nombre de paramètres décrivant le modèle diminuerait grandement. Il est probable que le modèle serait moins précis, mais la simplification des mesures des paramètres est un enjeu aussi important que la précision du modèle.

La forme de la loi de transformation entre les mécanismes associés à la structure planaire et ceux associées à la structure cellulaire pourrait être améliorée. Il est clair que la loi utilisée représente un des points faibles du modèle. Bien que la forme actuelle décrive bien le comportement du matériau, elle ne présente pas un fondement physique aussi solide que ceux des lois d'évolution du back stress et des lois d'écoulement. Des recherches pour trouver une nouvelle forme qui reposerait sur des assises solides, contribueraient grandement à l'amélioration du modèle.

L'incorporation de la recristallisation dynamique et des transformations de phases entraînerait le développement d'une version du modèle plus flexible et plus précise. **La formulation multi-structure du modèle permet d'intégrer facilement ces deux phénomènes**. La recristallisation dynamique s'intègre dans le modèle en effectuant une transformation des structures cellulaires et planaires en une structure planaire dont le back stress est nul. D'autre part les transformations de phases peuvent être introduites en ajoutant de nouvelles structures au modèle.

Chaque phase possède deux structures et le comportement du matériau correspond à la somme des réponses de chacune de ces structures selon l'équation suivante:

$$X^i = X^{ph} X^{st} \qquad \text{Éq. 5-4}$$

$$X^{ph} = \Psi^{ph}(\ ) \quad \text{et} \quad X^{st} = \Psi^{st}(\ ) \qquad \text{Éq. 5-5}$$

L'Éq. 5-4 montre que la fraction globale de la $i^{ème}$ structure (X^i) devient le produit de la fraction de la phase (X^{ph}) et de la fraction de la structure dans la phase (X^{st}). Les fractions de phases et de structures peuvent être calculées indépendamment avec leurs fonctions respectives de transformation (Éq. 5-5). L'auteur suppose que la fraction des phases pourrait être calculée par un module externe couplé au modèle. **La possibilité d'intégrer des transformations microstructurales sans aucun changement à la formulation du modèle est un grand avantage par rapport aux modèles élasto-viscoplastique conventionnels.** En effet, des simulations tenant compte de ce type de transformations pourraient être intégrées aux sous-routines du modèle proposé, mais le travail entourant la détermination et la validation des paramètres de telles équations n'entrent pas dans le cadre du présent ouvrage.

D'autres paramètres peuvent être également incorporés au modèle; le drag stress pourrait, par exemple, être utilisé pour introduire la dépendance de la taille de grains. L'effet de la taille de grains devrait être beaucoup plus important pour les structures planaires que pour les structures cellulaires. La taille de grains modifie la contrainte d'écoulement en limitant le parcours moyen des dislocations (Éq. 3-16). Dans le cas de la structure cellulaire, la taille de grains étant beaucoup plus grande que la taille des cellules, elle influence donc peu la contrainte d'écoulement. Ainsi, le modèle permet

d'avoir un drag stress qui dépend de la taille de grains pour la structure planaire et qui est indépendant de celle-ci pour la structure cellulaire.

Conclusion

Le principal objectif de ce travail était de développer une nouvelle approche et de formuler un modèle près des mécanismes physiques de la déformation plastique. Ce modèle devait permettre de bien décrire le comportement des matériaux dans le but de modéliser les procédés de mise en forme.

Le modèle développé dans ce travail est unique dans sa façon de décrire "l'adoucissement dynamique". Généralement, l'adoucissement dynamique est explicitement décrit par un terme dans les équations d'évolution des variables internes. MetForm° ne fait pas intervenir de terme d'adoucissement dynamique comme le font les autres modèles existants, il décrit plutôt l'adoucissement dynamique via une transformation de structures de dislocations. En plus, dans le modèle proposé, les stades linéaires des courbes contrainte-déformation sont associés aux mécanismes de déformation de chaque structure. Ce type de formulation simplifie la mesure des paramètres et décrit tout aussi bien le comportement des matériaux. Le modèle n'a pas la maturité de ceux dont la formulation s'est raffinée avec les années. Par contre, le type de formulation utilisée dans MetForm° est prometteuse, elle est plus flexible que celle de ses prédécesseurs et permet de décrire de façon naturelle des phénomènes complexes comme la recristallisation dynamique et les transformations de phases.

Certaines améliorations peuvent être apportées au modèle. La formulation des paramètres qui varient avec la température peut être modifiée pour tenir compte explicitement de l'effet de la température en utilisant une loi d'Arrhenius. La formulation de la loi d'évolution de la contrainte de friction pourrait être modifiée pour tenir compte de l'influence de la taille de grains.

Le modèle décrit bien le comportement de l'aluminium 1100, dans la mesure des erreurs réalisées lors de l'estimation des paramètres avec l'utilisation d'un modèle incomplet et d'une source de données imprécise. Des caractérisations plus poussées avec différents alliages doivent être réalisées pour vérifier la validité du modèle. La réalisation des essais expérimentaux est un point critique du modèle. Ce document indique comment obtenir les paramètres à partir de courbes expérimentales, mais ne décrit pas comment les essais doivent être réalisés. Pour obtenir de bons paramètres, les montages expérimentaux doivent être bien réalisés et leur élaboration pourrait faire l'objet d'un rapport d'envergure équivalente au présent travail.

En conclusion, nous pensons que l'approche proposée et le modèle développé dans ce travail permettent une grande flexibilité grâce à la formulation utilisée. Plusieurs améliorations peuvent être apportées au modèle sans qu'il soit nécessaire d'en modifier la structure interne. Il décrit bien le comportement des matériaux même dans les cas où des chargements mécaniques complexes, comme des sauts de la vitesse de déformation, sont appliqués. Le modèle permet d'espérer des simulations de mises en

forme qui soient beaucoup plus précises que celles obtenues avec les modèles rigides-plastiques traditionnels, car il décrit mieux le comportement mécanique des matériaux. De plus, le modèle est applicable sur un vaste intervalle de températures (à froid, à tiède et à chaud), contrairement aux formulations rigides-plastiques. Le modèle permet également de simuler les effets de durcissement directionnel (comme l'effet Bauchinger) observés dans la plupart des matériaux. Parce que le modèle a été développé dès le départ à partir de considérations microstructurales, son potentiel de simulation de l'évolution de la microstructure, lors des procédés thermomécaniques, est très grand.

Références

[1] BOËR, C.R., REBELO N. and al., "Process modeling of metal forming and thermomecanical treatment", Springer Verlag (1986),p. 410.

[2] MAJERUS, J.N., JEN K.P. and H. GONG, "Quantitative comparison between precision closed-die forging-force data and computer simulations", J. of Engng Mater. & Technol., V. 114 (1992), p. 465-471.

[3] MARCHAND, J.N., MOOSBRUGGER, J.C., "Non-linear structural modeling for life predictions: Physical mechanisms and continuum theories", Int. J. Ves. & Piping, V. 47 (1991), p. 79-112.

[4] LINDHOLM, U.S., "Unified viscoplastic constitutive equations and their applications", source inconnue (1987).

[5] CHAN K.S., BRODNER S.R., WALKER K.P. and LINDHOLM U.S., "A survey of unified constitutive theories", Second Symposium on Nonlinear Constitutive Relations for High Temperature Applications, Cleveland, Ohio (1984).

[6] JAMES G.H. and al., " An Experimental Comparison of Several Current Viscoplastic Constitutive Models at Elevated Temperature ", J. of Engng Mater. & Technol., V. 109 (1987), p. 130-139.

[7] CHAN K.S. and al. "High Temperature Inelastic Deformation Under Uniaxial Loading: Theory and Experiment", Journal of Engineering Materials and Technology, V. 111 (1989), p. 345-353.

[8] WALKER, K. P., "Research and development program for non-linear structural modeling with advanced time-temperature dependent constitutive relationships", Nasa Report CR-165533, United Technologies Research center, East Hartford, CT (1981).

[9] MILLER, A. K., "An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation: Part I-Equations development and analytical procedures", J. Engng Mater. & technol., V. 96 (1976), p. 97-110.

[10] HART, E. W., J. Engng Mater. & technol., V. 98 (1976), p. 193-202.

[11] KRIEG, R.D., SWAERENGEN, J.C. & ROHDE, R.W., "A physically based internal variable model for rate-dependent plasticity", Proc. ASME/CSME PVP Conference, p. 15-28.

[12] CHABOCHE, J.L. & ROUSSELIER, G.J., J. Pres. Ves. & Technol., V. 105 (1983), p. 33-42.

[13] FREED, A.D. & VERRILLI, M.J., In The Inelastic Behavior of solids: Models and Utilization, ed. G. Cailletaud & al. MECAMAT, Besançon, France (1988), p. 27-39.

[14] FREED, A.D., WALKER, K.P., "Viscoplastic Model Development with an eye toward characterization", J. Engng Mater. & technol., V. 117 (1995), p. 8-12.

[15] MEYERS, M.A, CHAWLA K.K., "Mechanical metallurgy, principles and applications", Prentice-Hall (1984), 761 p.

[16] KUHLMANN-WILSDORF D. "Theory of Plastic Deformation: Properties of Low Energy Dislocation Structures". Materials Science and Engineering, V. A113 (1989), p. 1-41.

[17] HART E.W., LI C.Y. and al., "Constitutive equations in plasticity, MIT press, Cambridge.

[18] SACHDEV A.K., "Development of an Aluminum Sheet Alloy with Improved Formability", Metallurgical Transaction, V. 21A (1990), p. 165-175.

[19] KUHLMANN-WILSDORF D. "Theory of Workhardening 1934-1984", Metallurgical Transaction A, V. 16A (1985), p. 2091-2108.

[20] CUDDY J., BASSIM M.N., "Study of Dislocation Cell Structures from Uniaxial Deformation of AISI 4350 Steel", Materials Science and Engineering, V. A113 (1989), p. 421-429.

[21] FROST, H.J. and ASHBY M.F., "Deformation-mechanism maps for metals and alloys", CUED/C/MATS (1981).

[22] GARAFALO F., "An empirical relation defining the stress dependence of minimum creep rate", AIME Trans., V. 227 (1963), p. 351-356.

[23] ESHELBY J.D., Proc. Royal Soc. London A, V. 241 (1957),p. 891.

[24] FREED A.D., RAJ S.V. and WALKER K.P., "Three dimensional deformation analysis of two phase dislocation substructures", Script. Metal. and Mat., V. 27(1992), p. 223-238.

[25] PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., and al., Numerical recipes in C, 2nd ed., Cambridge University Press, 994 p.

[26] KUHLMANN-WILSDORF D. and LAIR C., Mater. Sci. Eng., V 37, p. 111, (1979).

[27] DICKSON, J. I., BOUTIN J. and HANDFIELD L., "A comparison of two simple methods for measuring cyclic internal and effective stresses", Mater. Sci. Eng., V 37, p. L7-L11, (1984).

[28] BROWN, S.B., KIM K.H., ANAND L., "An internal Variable constitutive model for hot working of metals", International journal of plasticity, V. 5, p. 95-130, (1989).

[29] REDDY , J.N., "An introduction to the finite element method", 2nd ed., McGrawHill, 1993, 684 p.

[30] HKS, "ABAQUS theory manual", HKS, Ver. 5.4 (1995).

[31] CHULYA A. and WALKER K.P., "A new uniformly valid asymptotic integration algorithm for elasto-plastic creep and unified viscoplastic theories including continuum damage", Int. J. for Num. Met. in Eng., V. 32 (1991), p. 385-418.

[32] WALKER K.P. and FREED A.D., "Asymptotic integration algorithms for nonhomogeneous, nonlinear, first order, ordinary differential equation", NASA technical Memorandum, 103793 (1991).

[33] WALKER K.P. "Exponential integration Algorithms applied to viscoplasticity", NASA technical Memorandum, 104461 (1992).

Annexe A

Définitions de Base

Contrainte effective et déformation effective

Contrainte effective pour un tenseur de contrainte non déviatorique:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2\right] + 3\sigma_{23}^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{12}^2} \qquad \text{Éq. A-1}$$

Contrainte effective pour un tenseur de contrainte deviatorique:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(s_{11}-s_{22})^2 + (s_{22}-s_{33})^2 + (s_{11}-s_{33})^2\right] + 3s_{23}^2 + 3s_{13}^2 + 3s_{12}^2} \qquad \text{Éq. A-2}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[2s_{11}^2 + 2s_{22}^2 + 2s_{33}^2 - 2s_{11}s_{22} - 2s_{22}s_{33} - 2s_{11}s_{33}\right] + 3s_{23}^2 + 3s_{13}^2 + 3s_{12}^2} \qquad \text{Éq. A-3}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[3\cdot(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) - (s_{11}+s_{22}+s_{33})^2\right] + 3s_{23}^2 + 3s_{13}^2 + 3s_{12}^2} \qquad \text{Éq. 1-4}$$

puisque $s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0$, alors:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{13}^2 + 2s_{12}^2)} \qquad \text{Éq. A-5}$$

Déformation effective pour un tenseur de déformation (Green-Lagrange) non déviatorique:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\left[(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})^2 + 6\varepsilon_{23}^2 + 6\varepsilon_{13}^2 + 6\varepsilon_{12}^2\right]} \qquad \text{Éq. A-6}$$

Déformation effective pour un tenseur de déformation (Green-Lagrange) déviatorique:

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\left[(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{11} - e_{33})^2 + 6e_{23}^2 + 6e_{13}^2 + 6e_{12}^2\right]} \qquad \text{Éq. A-7}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\left[2e_{11}^2 + 2e_{22}^2 + 2e_{33}^2 - 2e_{11}e_{22} - 2e_{22}e_{33} - 2e_{11}e_{33} + 6e_{23}^2 + 6e_{13}^2 + 6e_{12}^2\right]} \qquad \text{Éq. A-8}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}\left[3\cdot(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) - (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + 6e_{23}^2 + 6e_{13}^2 + 6e_{12}^2\right]} \qquad \text{Éq. A-9}$$

puisque que $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$, alors

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{23}^2 + 2e_{13}^2 + 2e_{12}^2)} \qquad \text{Éq. A-10}$$

Relations entre la déformation plastique et la déformation élastique

La loi de Hooke généralisée s'écrit sous forme tensorielle de la façon suivante:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}\,\underline{\underline{\varepsilon}}^{el} \qquad \text{Éq. A-11}$$

et sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix}^{el} \qquad \text{Éq. A-12}$$

La loi de Hooke peut être également réécrite avec les constantes de Lamé:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \cdot \varepsilon_1^{el} \cdot \underline{\underline{I}} + 2\mu \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^{el} \qquad \text{Éq. A-13}$$

et inversement

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{el} = \frac{1}{2\mu}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{3\nu}{E}\sigma_1 \underline{\underline{I}} \qquad \text{Éq. A-14}$$

Sous la forme déviatorique, l'Éq. A-18 se simplifie à:

$$\underline{\underline{s}} = 2\mu \cdot \underline{\underline{e}}^{el} \qquad \text{Éq. A-15}$$

En supposant l'additivité des déformations élastique et plastique, on a:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{p} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{el} \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{el}$$
$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{p} + \underline{\underline{e}}^{el} \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\underline{e}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} + \dot{\underline{\underline{e}}}^{el} \qquad \text{Éq. A-16}$$

et en combinant l'Éq. A-20 et l'Éq. A-21, il est possible d'obtenir:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{p} = \underline{\underline{e}} - \frac{\underline{\underline{s}}}{2\mu} \quad \text{et} \quad \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} = \dot{\underline{\underline{e}}} - \frac{\dot{\underline{\underline{s}}}}{2\mu} \qquad \text{Éq. A-17}$$

Ces deux relations sont très utilisées dans les modèles développés dans ce travail, i.e.:

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \text{Éq. A-18}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{s}}$ sont les tenseurs de contrainte et de contrainte déviatorique. $\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{el}, \underline{\underline{e}}^{el}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{p}$ sont respectivement les tenseur de déformation totale, totale déviatorique, élastique, élastique déviatorique et plastique. λ et μ sont les constantes de Lamé, E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. Il est important de mentionner que la définition de la déformation de Green-Lagrange est utilisée dans tous les développements de ce travail.

Annexe B

Méthode des éléments finis

Application des éléments finis à la déformation des solides

Soit V le volume d'une partie d'un objet et S sa surface; avec t un vecteur de force surfacique, f un vecteur de force volumique, u le vecteur position et ρ la densité. De la généralisation de la loi « F=M*A », on obtient:

$$\oint_S \underline{t}\, ds + \int_V \underline{f}\, dv = \int_V \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}\, dv \qquad \text{Éq. B-1}$$

avec:

$$\underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \qquad \text{Éq. B-2}$$

et avec le théorème de Gauss:

$$\oint_s \underline{n} \cdot (\ )\, ds = \int_V \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) \cdot (\ )\, dv \qquad \text{Éq. B-3}$$

L'Éq. B-1 devient:

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \underline{\underline{\sigma}}\, ds + \int_V \underline{f}\, dv = \int_V \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}\, dv \qquad \text{Éq. B-4}$$

Étant donné que le choix du volume est arbitraire, l'Éq. B-4 doit s'appliquer en tous points de l'objet et elle devient:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \qquad \text{Éq. B-5}$$

Pour développer les équations d'éléments finis, il est nécessaire de trouver la formulation variationnelle « weak form » de l'Éq. B-5. Soit υ^*, une fonction comprise dans H^1, c'est à dire:

$$\begin{aligned} \upsilon \in H^1(\Omega) &\Leftrightarrow \left\{ \upsilon \in L^2(\Omega) \wedge \frac{\partial \upsilon}{\partial \underline{x}} \in L^2(\Omega) \right\} \\ \omega \in L^2(\Omega) &\Leftrightarrow \left\{ \int_\Omega \omega^2 d\underline{x} < \infty \right\} \end{aligned} \qquad \text{Éq. B-6}$$

Si la fonction est comprise dans H^1 et qu'elle respecte les conditions du théorème de Lax-Milgram, alors il est possible de montrer que la formulation variationnelle possède une solution unique[29]. La formulation variationnelle de l'équation Éq. B-5 est:

$$\int_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right\} \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv + \int_V \underline{f}^T \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv = \int_V \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^T}{\partial t^2} \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv \qquad \text{Éq. B-7}$$

Or:

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\upsilon}^* \right) dv = \int_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right\} \cdot \underline{\upsilon}^* + \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \left(\frac{\partial \underline{\upsilon}^*}{\partial \underline{x}} \right) dv \qquad \text{Éq. B-8}$$

en utilisant le Théorème de Gauss, on obtient:

$$\int_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right\} \cdot \underline{\upsilon}^* = \oint_S \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\upsilon}^* \, ds - \int_V \underline{\underline{\sigma}} : \left(\frac{\partial \underline{\upsilon}^*}{\partial \underline{x}} \right) dv \qquad \text{Éq. B-9}$$

En utilisant le théorème de Cauchy et en substituant Éq. B-9 dans Éq. B-7, on obtient la version finale de la forme variationnelle:

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \left(\frac{\partial \underline{\upsilon}^*}{\partial \underline{x}} \right) dv + \int_V \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^T}{\partial t^2} \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv + \oint_S \underline{t}^T \cdot \underline{\upsilon}^* \, ds = \int_V f^T \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv \qquad \text{Éq. B-10}$$

Voici les définitions de quelques relations importantes:

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \quad , \quad \underline{\underline{L}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} \quad , \quad \underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad , \quad \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

et

$$\underline{\underline{D}} = \text{sym}(\underline{\underline{L}}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T\right) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Omega}} = \text{asym}(\underline{\underline{L}}) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T\right)$$

où $\underline{x}$ est le vecteur position de la configuration actuelle, $\underline{X}$ le vecteur position de la configuration initiale, $\underline{v}$ le vecteur vitesse de transformation de la configuration actuelle, $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de la transformation, $\underline{\underline{L}}$ est le gradient de la vitesse de transformation de la configuration actuelle, $\underline{\underline{D}}$ est le taux de transformation, et $\underline{\underline{\Omega}}$ est le taux de rotation.

Sachant que $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$, alors on peut voir que:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \qquad \text{Éq. B-11}$$

Avec ces relations, il est possible de réécrire l' Éq. B-10 comme suit:

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}^* \, dv + \int_V \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^T}{\partial t^2} \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv + \oint_S \underline{t}^T \cdot \underline{\upsilon}^* \, ds = \int_V \underline{f}^T \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv \qquad \text{Éq. B-12}$$

Quel que soit le choix du conjugué contrainte-déformation, le développement de la formulation reste le même. Nous utilisons donc de façon générique, le conjugué contrainte τ -déformation ε [1]:

$$\int_V \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^* \, dv + \int_V \rho \frac{\partial^2 \underline{u}^T}{\partial t^2} \cdot \underline{v}^* dv - \int_V \underline{f}^T \cdot \underline{v}^* \, dv - \oint_S \underline{t}^T \cdot \underline{v}^* \, ds \qquad \text{Éq. B-13}$$

L'interpolation par éléments finis s'écrit:

$$\underline{u} = \sum_{i=0}^{n} \underline{u}_i^e \Psi_i^e \quad \text{et} \quad \underline{v}^* = \sum_{i=0}^{n} \underline{v}_i^{*e} \Psi_i^e \qquad \text{Éq. B-14}$$

où sous forme matricielle:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{n} u_i^1 \Psi_i \\ \sum_{i=0}^{n} u_i^2 \Psi_i \\ \sum_{i=0}^{n} u_i^3 \Psi_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_n^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_n^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_n^3 \end{Bmatrix}$$

[1] Ici $\underline{\underline{\tau}}$ n'est pas le tenseur de Cauchy mais l'état de contrainte de Kirchoff, c'est à dire le Cauchy corrigé pour le changement de volume du à l'élasticité.

$$= \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 & \Psi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_2 & 0 & 0 & \Psi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \\ u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \\ u_n^1 \\ u_n^2 \\ u_n^3 \end{Bmatrix} \qquad \text{Éq. B-15}$$

Alors:

$$\underline{u} = [\Psi]\{\Delta\} \quad , \quad \underline{\upsilon}^{\bullet} = [\Psi]\{\Delta^{\bullet}\} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = [\Psi]\{\ddot{\Delta}\} \qquad \text{Éq. B-16}$$

Sachant qu'il existe un opérateur de transformation [T] propre à chaque définition de la déformation tel que:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [T] \cdot \underline{u} \qquad \text{Éq. B-17}$$

alors:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = [B]\{\Delta\} \quad , \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^{\bullet} = [B]\{\Delta^{\bullet}\} \quad \text{où} \quad [B] = [T] \cdot [\Psi] \qquad \text{Éq. B-18}$$

où u_i^1 u_i^2 u_i^3 sont les trois composantes des positions nodales d'un élément à n noeuds et Ψ_i sont les fonctions d'interpolation. Ainsi, l'Éq. B-13 devient:

$$\int_V \{\Delta^{\bullet}\}^T \left([B]^T : \underline{\underline{\tau}} + \rho [\Psi]^T [\Psi] \{\ddot{\Delta}\}\right) dv - \int_V \{\Delta^{\bullet}\}^T [\Psi]^T \underline{f}\, dv - \oint_S \{\Delta^{\bullet}\}^T [\Psi]^T \underline{t}\, ds = 0$$

Éq. B-19

Soit que:

$$\{\Delta^*\}^T\left([K]+[M]\{\ddot{\Delta}\}-\{f\}-\{Q\}\right)=0 \qquad \text{Éq. B-20}$$

étant donné que $\{\Delta^*\}^T$ est arbitraire mais non nul, nous obtenons le système d'équations d'un élément:

$$[K^e]+[M^e]\{\ddot{\Delta}^e\}-\{f^e\}-\{Q^e\}=0 \qquad \text{Éq. B-21}$$

où

$$[K^e]=\int_V [B^e]^T:\underline{\underline{\tau}}\,dv \qquad \text{Éq. B-22}$$

$$[M^e]=\int_V \rho[\Psi^e]^T[\Psi^e]\,dv \qquad \text{Éq. B-23}$$

$$\{f^e\}=\int_V [\Psi^e]^T\underline{f}\,dv \qquad \text{Éq. B-24}$$

$$\{Q^e\}=\oint_S [\Psi^e]^T\underline{t}\,ds \qquad \text{Éq. B-25}$$

M^e étant la matrice masse de l'élément et K^e la matrice de rigidité, matrices qui sont d'ordre 3nx3n, où n est le nombre de noeuds dans l'élément. f^e et Q^e sont les vecteurs forces d'ordre 3nx1.

Dans le logiciel ABAQUS, le terme de la matrice masse est négligé dans les analyses de plasticité. L'équation d'équilibre solutionnée par ABAQUS est la suivante[30]:

$$\left[K^e\right]-\left\{f^e\right\}-\left\{Q^e\right\}=0 \qquad \text{Éq. B-26}$$

Dans le but d'utiliser la méthode de Newton Ralphson pour solutionner le système non linéaire, il est primordial de trouver la matrice Jacobienne de l'élément. Cette matrice est obtenu à partir d'une variation de l'Éq. B-13, soit:

$$\int_V \left(d\tau:\varepsilon^* + \tau:d\varepsilon^*\right) dv - \oint_S d\underline{t}^t \cdot \underline{\upsilon}^* \, ds - \oint_S \underline{t}^t \cdot \underline{\upsilon}^* \frac{dA_\tau}{A_\tau} ds - \int_V d\underline{f}^t \cdot \underline{\upsilon}^* \, dv - \int_V \underline{f}^t \cdot \underline{\upsilon}^* \frac{dJ}{J} dv = 0$$

Éq. B-27

où

$$A_\tau = \left|\frac{ds}{ds^0}\right| \quad \text{et} \quad J = \left|\frac{dv}{dv^0}\right| \qquad \text{Éq. B-28}$$

Des relations constitutives (formulation incrémentale), on tire:

$$d\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}:d\underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{g}} \qquad \text{Éq. B-29}$$

Á partir de la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial\{\Delta\}} = \left\{\frac{\partial}{\partial u_1^1} \quad \frac{\partial}{\partial u_1^2} \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial u_n^3}\right\} \qquad \text{Éq. B-30}$$

on peut écrire:

$$\frac{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}{\partial\{\Delta\}} = [B] \quad \text{et} \quad \frac{\partial\underline{\underline{\tau}}}{\partial\{\Delta\}} = \underline{\underline{\underline{\underline{H}}}}:[B] \qquad \text{Éq. B-31}$$

Le premier terme du jacobien s'écrit donc:

$$\int_V \{\Delta^{\bullet}\}^T \left([B]^T : \underline{\underline{\underline{H}}} : [B]\right) dv + \int_V \{\Delta^{\bullet}\}^T \left(\frac{\partial [B]^T}{\partial \{\Delta\}} : \underline{\tau}\right) dv \qquad \text{Éq. B-32}$$

et avec

$$[W] = \frac{\partial \underline{t}}{\partial \{\Delta\}} + \underline{t} \frac{1}{A_\tau} \frac{\partial A_\tau}{\partial \{\Delta\}} \qquad \text{Éq. B-33}$$

$$[Y] = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \{\Delta\}} + \underline{f} \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \{\Delta\}} \qquad \text{Éq. B-34}$$

alors les deux derniers termes s'écrivent:

$$-\int_V \{\Delta^{\bullet}\}^T \left([\Psi]^T [Y]\right) dv - \oint_S \{\Delta^{\bullet}\}^T \left([\Psi]^T [W]\right) ds \qquad \text{Éq. B-35}$$

Étant donné que $\{\Delta^{\bullet}\}^T$ est arbitraire, alors la matrice complète du jacobien s'écrit:

$$[J^e] = \int_V [B^e]^T : \underline{\underline{\underline{H}}} : [B^e] \, dv + \int_V \frac{\partial [B^e]^T}{\partial \{\Delta^e\}} : \underline{\tau} \, dv - \int_V [\Psi^e]^T [Y^e] \, dv - \oint_S [\Psi^e]^T [W^e] \, ds$$

Éq. B-36

Il est nécessaire d'assembler les éléments avant de solutionner les systèmes avec la méthode appropriée. L'assemblage est déterminé par la table de connectivité, le résultat à la forme suivante:

$$[K^G] + [M^G]\{\ddot{\Delta}^G\} - \{f^G\} - \{Q^G\} = 0 \qquad \text{Éq. B-37}$$

et l'on trouve également la matrice jacobienne globale $[J^G]$.

M^G est la matrice masse globale, K^G est la matrice de rigidité globale, (3m-c)x(3m-c), où m est le nombre de noeuds dans l'ensemble du maillage et c est le nombre de degrés de liberté contraints. f^G et Q^G sont les vecteurs forces globaux d'ordre (3m-c)x1. Finalement la matrice jacobienne du système non linéaire, J^G, est d'ordre (3m-c)x(3m-c).

Pour solutionner le système d'équation (3m-c)x(3m-c) décrit par l'Éq. B-26, le logiciel ABAQUS utilise directement la matrice jacobienne globale $[J^G]$. Pour évaluer les termes du système d'Éq B-26 et de son jacobien, ABAQUS doit évaluer plusieurs intégrales. Ces intégrales sont évaluées en trois étapes. Premièrement, on effectue une projection de l'élément déformé sur un élément de référence, deuxièmement, la méthode d'intégration de Gauss est utilisée sur l'élément de référence[2] et finalement, on effectue la transformation inverse pour transférer les résultats de l'intégrale sur l'élément déformé. La méthode d'intégration de Gauss s'écrit:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \cdot f(x_j, y_j, z_j) + R \qquad \text{Éq. B-38}$$

où ω_j est le poids du $j^{ième}$ point d'intégration dont les coordonnées sont (x_j,y_j,z_j), $f(x_j,y_j,z_j)$ est la valeur de la fonction à être intégrée aux coordonnées du $j^{ième}$ point d'intégration et R est le résidu de l'approximation de la méthode. Par exemple:

$$\left[K^e\right] = \int_V \left[B^e\right]^T : \underline{\underline{\tau}}\, dv \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \left[B^e\right]_i^T : \underline{\underline{\tau}}_i \qquad \text{Éq. B-39}$$

Pour trouver l'intégrale, ABAQUS évalue la fonction en chaque point d'intégration. C'est pour cette raison qu'il utilise la sous-routine UMAT à chaque point d'intégration. Le travail de cette sous-routine est de calculer la réponse mécanique (la contrainte) pour un certain chargement (une déformation).

[2] L'intégration par la méthode de Gauss nécessite la connaissance de la géométrie de l'élément pour déterminer les points de Gauss. La projection sur un élément de référence dont la géométrie est fixe, permet l'intégration par la méthode Gauss pour des géométrie variées.

La méthode de Newton

Soit le système non linéaire de nxn équations/inconnues de la forme:

$$\begin{aligned} &f_1(u_1,u_2,\ldots,u_n)=0 \\ &f_2(u_1,u_2,\ldots,u_n)=0 \\ &\vdots \\ &f_n(u_1,u_2,\ldots,u_n)=0 \end{aligned} \qquad \text{Éq. B-40}$$

Le système peut être réécrit de la façon suivante:

$$\begin{aligned} &f_1(u_1+\delta u_1,u_2+\delta u_2,\ldots,u_n+\delta u_n)=0 \\ &f_2(u_1+\delta u_1,u_2+\delta u_2,\ldots,u_n+\delta u_n)=0 \\ &\vdots \\ &f_n(u_1+\delta u_1,u_2+\delta u_2,\ldots,u_n+\delta u_n)=0 \end{aligned} \qquad \text{Éq. B-41}$$

Où les u_i sont des approximations de la solution et δu_i sont des corrections de la solution approximée.

Par le développement de Taylor, nous avons:

$$\begin{aligned} &0=f_1(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0)+\frac{\partial}{\partial u_1}f_1(u_1,u_2,\cdots,u_n)+\frac{\partial}{\partial u_2}f_1(u_1,u_2,\cdots,u_n)+\cdots \\ &0=f_2(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0)+\frac{\partial}{\partial u_1}f_2(u_1,u_2,\cdots,u_n)+\frac{\partial}{\partial u_2}f_2(u_1,u_2,\cdots,u_n)+\cdots \\ &\vdots \\ &0=f_n(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0)+\frac{\partial}{\partial u_1}f_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)+\frac{\partial}{\partial u_2}f_n(u_1,u_2,\cdots,u_n)+\cdots \end{aligned} \qquad \text{Éq. B-42}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \\ \vdots \\ \delta u_n \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} f_1(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0) \\ f_2(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0) \\ \vdots \\ f_n(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0) \end{Bmatrix} \qquad \text{Éq. B-43}$$

$$[J]\{\delta u\} = -\{R\} \qquad \text{Éq. B-44}$$

Avec une évaluation initiale $\left(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0\right)$, on solutionne l'Éq. B-44 pour trouver le vecteur correction $(\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_n)$. La nouvelle évaluation s'écrit alors:

$$\left(u_1^1, u_2^1, \cdots, u_n^1\right) = \left(u_1^0 + \delta u_1, u_2^0 + \delta u_2, \cdots, u_n^0 + \delta u_n\right) \qquad \text{Éq. B-45}$$

La figure B-1 présente l'algorithme de la méthode de Newton

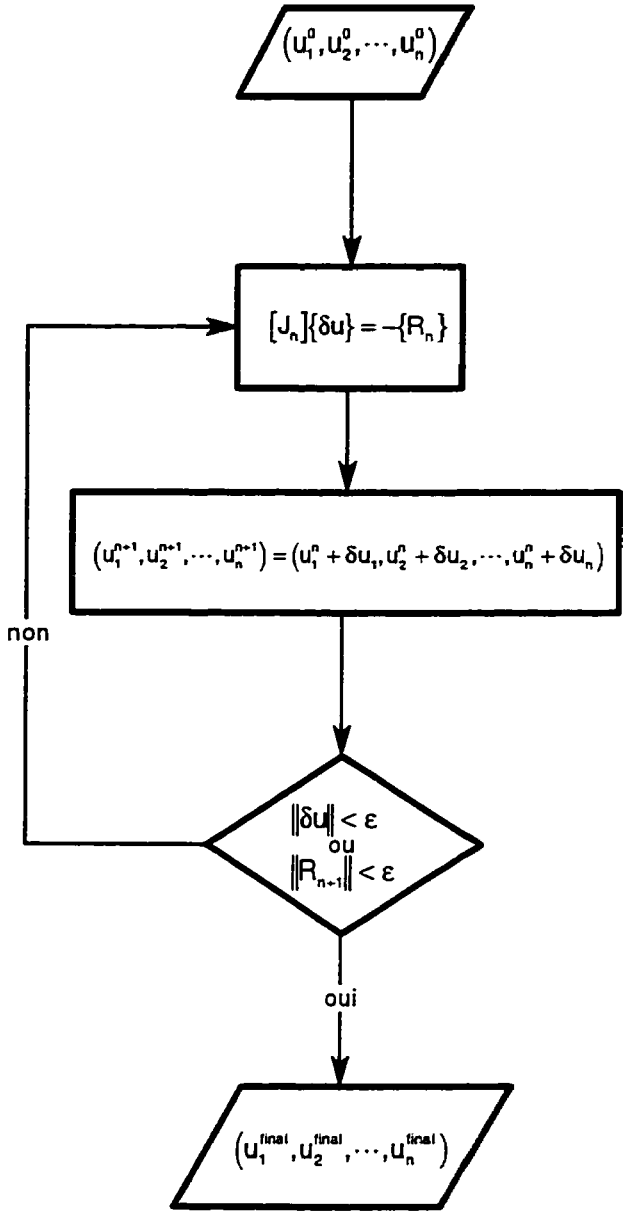


Figure B-1: Algorithme de Newton

Annexe C

Formulation asymptotique

Formulation Asymptotique

L'algorithme d'intégration asymptotique a été développé pour solutionner les équations différentielles linéaires non homogènes du premier ordre. Cette méthode a été adaptée pour résoudre les équations des modèles élasto-viscoplastiques[30,31,32]. Ainsi, l'intégration asymptotique sera utilisée pour résoudre le modèle de chacune des structures du modèle constitutif. Dans un premier temps, on retrouvera dans cette annexe, une description des bases théoriques utilisées pour obtenir la formulation asymptotique. Il s'en suivra la présentation de l'application de la méthode à MetForm$^{\circledcirc}$.

Soit l'équation différentielle linéaire non homogène du premier ordre suivante:

$$y' + a'(t)\, y = f'(t) \qquad \text{Éq. C-1}$$

où a'(t) et f'(t) sont les dérivées de fonctions quelconques.

La solution de cette équation est:

$$y(t) = y(0)\, e^{-\left\{\int_0^t \frac{\partial a(\xi)}{\partial \xi} d\xi\right\}} + \int_0^t f'(\xi)\, e^{-\left\{\int_\xi^t \frac{\partial a(\tau)}{\partial \tau} d\tau\right\}} d\xi \qquad \text{Éq. C-2}$$

Pour un temps t+Δt l'équation devient :

$$y(t+\Delta t) = y(0)\, e^{-\{a(t+\Delta t)-a(0)\}} + I(t+\Delta t) \qquad \text{Éq. C-3}$$

où

$$I(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} e^{-\{a(t+\Delta t)-a(\xi)\}} f'(\xi)\, d\xi \qquad \text{Éq. C-4}$$

En y insérant deux exponentielles (i.e. 1), il est possible de simplifier davantage l'expression pour obtenir:

$$I(t+\Delta t) = \int_0^t e^{-\{a(t+\Delta t)-a(\xi)\}}\left(e^{a(t)}e^{-a(t)}\right)f'(\xi)\,d\xi + \int_t^{t+\Delta t} e^{-\{a(t+\Delta t)-a(\xi)\}}f'(\xi)\,d\xi \qquad \text{Éq. C-5}$$

et

$$I(t+\Delta t) = e^{-\{a(t+\Delta t)-a(t)\}}\int_0^t e^{-\{a(t)-a(\xi)\}}f'(\xi)\,d\xi + \int_t^{t+\Delta t} e^{-\{a(t+\Delta t)-a(\xi)\}}f'(\xi)\,d\xi \qquad \text{Éq. C-6}$$

La première intégrale de l'équation Éq. C-6 peut être remplacée par I(t)

et avec $\Delta a = a(t+\Delta t) - a(t) = a'(t)\cdot\Delta t$, l'Éq. C-6 devient:

$$I(t+\Delta t) = I(t)\,e^{-\Delta a} + \int_t^{t+\Delta t} e^{-\{a(t+\Delta t)-a(\xi)\}}f'(\xi)d\xi \qquad \text{Éq. C-7}$$

avec:

$$I(t) = y(t) - y(0)e^{-\{a(t)-a(0)\}} \qquad \text{Éq. C-8}$$

Et avec l'expansion asymptotique de $I(\Delta t)$:

$$I(\Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} e^{-\{a(t+\Delta t)-a(\xi)\}}f'(\xi)\,d\xi = \Delta f\cdot\left(\frac{1-e^{-\Delta a}}{\Delta a}\right) \qquad \text{Éq. C-9}$$

où $\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t)$.

L'expression de la solution de $y(t+\Delta t)$ peut alors s'écrire:

$$y(t+\Delta t) = y(0)\, e^{-\{a(t+\Delta t)-a(0)\}} + \left(y(t) - y(0)\, e^{-\{a(t)-a(0)\}}\right) e^{-\Delta a} + \Delta f \cdot \left(\frac{1-e^{-\Delta a}}{\Delta a}\right)$$

Éq. C-10

Si y(0) = 0, l'expression devient:

$$y(t+\Delta t) = y(t)\, e^{-\Delta a} + \Delta f \cdot \left(\frac{1-e^{-\Delta a}}{\Delta a}\right) \qquad \text{Éq. C-11}$$

L'Éq. C-11 est la formulation asymptotique de l'Éq. C-1.

Application au nouveau modèle

La formulation du modèle se fait à partir de la loi d'écoulement plastique suivante:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p} = \phi(\,)\left(\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{\Omega}}\right) = \frac{\dot{Q}}{2\mu}\left(\underline{\underline{s}} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}\right) \qquad \text{Éq. C-12}$$

où $\dot{Q} = 3\mu \cdot \phi(\,)$, sachant que $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{p} = \underline{\underline{\dot{e}}} - \frac{\underline{\underline{\dot{s}}}}{2\mu}$, alors l'Éq. C-12 peut se réécrire:

$$\left(\underline{\underline{\dot{s}}} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\dot{\Omega}}}\right) + \dot{Q}\left(\underline{\underline{s}} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}\right) = 2\mu \cdot \underline{\underline{\dot{e}}} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\dot{\Omega}}} \qquad \text{Éq. C-13}$$

Or avec:

$$\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{s}} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}} \quad , \quad a'(t) = \dot{Q} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{f}}(t) = 2\mu \cdot \underline{\underline{e}} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}$$

et en considérant $\left(\underline{\underline{s}} - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}\right) = 0$ pour t=0, la solution de l'Éq. C-13 se résume à:

$$\left(\underline{\underline{s}}(t+\Delta t) - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}(t+\Delta t)\right) = \left(\underline{\underline{s}}(t) - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}(t)\right) e^{-\Delta Q} + \left(2\mu \cdot \Delta\underline{\underline{e}} - \frac{2}{3}\Delta\underline{\underline{\Omega}}\right)\left(\frac{1-e^{-\Delta Q}}{\Delta Q}\right)$$

Éq. C-14

En substituant maintenant l'équation suivante:

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\underline{\underline{I}}\,\varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{I}}\,\varepsilon_1$$

Éq. C-15

dans l'équation Éq. C-14, la solution devient:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\sigma}}(t+\Delta t) &= \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}(t+\Delta t) + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\underline{\underline{I}} \cdot \varepsilon_1(t+\Delta t) \\
&+ \left\{\underline{\underline{\sigma}}(t) - \frac{2}{3}\underline{\underline{\Omega}}(t) - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\underline{\underline{I}} \cdot \varepsilon_1(t)\right\} \cdot e^{-\Delta Q} \\
&+ \left\{2\mu \cdot \Delta\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{2}{3}\mu\underline{\underline{I}} \cdot \Delta\varepsilon_1 - \frac{2}{3}\left(\underline{\underline{\Omega}}(t+\Delta t) - \underline{\underline{\Omega}}(t)\right)\right\}\left(\frac{1-e^{-\Delta Q}}{\Delta Q}\right)
\end{aligned}$$

Éq. C-16

où

$$\Delta Q = 3\mu\,\phi(\,)\,\Delta t$$

Éq. C-17

L'équation Éq. C-16 est utilisée pour solutionner les 6 équations/inconnues associées à la loi d'écoulement plastique.

Pour la loi d'évolution de la contrainte interne, nous avons:

$$\dot{\underline{\underline{\Omega}}} = h\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - a\,\overline{\Omega}^{m-1}\left(\underline{\underline{\Omega}} - \frac{\underline{\underline{\Omega}}}{\overline{\Omega}}\Omega^0\right)$$

Éq. C-18

avec:

$$\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{\Omega}} \quad , \quad a'(t) = \dot{G} = a\,\overline{\Omega}^{m-1} \quad \text{et} \quad f(t) = h \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \text{Éq. C-19}$$

en considérant $\underline{\underline{\Omega}} = 0$ pour t=0, la solution de l'Éq. C-18 est:

$$\underline{\underline{\Omega}}(t+\Delta t) = \underline{\underline{\Omega}}(t) \cdot e^{-\Delta G} + h\,\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^{p}\left(\frac{1-e^{-\Delta G}}{\Delta G}\right) \qquad \text{Éq. C-20}$$

En substituant maintenant:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \frac{\dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \lambda\,\underline{\underline{I}} \cdot \dot{\varepsilon}_1}{2\mu} \qquad \text{Éq. C-21}$$

dans l'Éq. C-20, la solution devient:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Omega}}(t+\Delta t) &= \underline{\underline{\Omega}}(t) \cdot e^{-\Delta G} \\ &+ h\left\{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\underline{\underline{\sigma}}(t+\Delta t) - \underline{\underline{\sigma}}(t)}{2\mu} + \frac{\lambda}{2\mu}\underline{\underline{I}} \cdot \Delta\varepsilon_1\right\}\left(\frac{1-e^{-\Delta G}}{\Delta G}\right) \end{aligned} \qquad \text{Éq. C-22}$$

où

$$\Delta G = a\,\overline{\Omega}^{m-1}\left(1 - \frac{\Omega^0}{\overline{\Omega}}\right) \qquad \text{Éq. C-23}$$

L'Éq. C-22 est utilisée pour solutionner les 6 équations/inconnus de la loi d'évolution de la contrainte interne.

Si l'on suppose que ΔG et ΔQ sont constants dans les Éq. C-16 et C-22, alors les composantes du stress et de la contrainte interne sont indépendantes les unes des autres; le lien entre les composantes se faisant par les valeurs scalaires ΔG et ΔQ.

Cela se traduit par le découplage des solutions des composantes. Il est alors possible d'utiliser une méthode à double résolution successive pour trouver la solution du système. Dans un premier temps, les solutions des 6 composantes des équations asymptotiques de la contrainte et de la contrainte interne sont trouvées indépendamment, avec un algorithme de Newton. Les nouvelles valeurs de ΔG et ΔQ sont calculées avec une solution complète des tenseurs de la contrainte et de la contrainte interne. La convergence est atteinte lorsque les valeurs de ΔG et ΔQ se stabilisées. La figure C-1 montre l'algorithme de solution de la méthode asymptotique.

Le grand avantage de cette méthode est de faire passer le système d'équations de « 12x12 » pour la formulation différentielle à « 6 systèmes 2x2 » pour la formulation intégrale. Sachant que le nombre d'opérations pour trouver la solution d'un système linéaire est de l'ordre de n^3, alors pour n=12 le nombre d'opérations est environ 1728 pour la formulation différentielle. Pour 6 systèmes avec n=2, le nombre d'opérations est de l'ordre de 48 pour la formulation asymptotique. Par contre, le nombre d'itérations pour obtenir la solution est plus grand avec la méthode d'intégration asymptotique. De façon générale, la diminution du temps de calcul est d'un ordre de grandeur avec la méthode asymptotique.

Comme le montrent les figures C-2 et C-3, les résultats ne semblent pas être influencés par la technique utilisée car plusieurs simulations ont donné des résultats identiques pour les deux méthodes. Ces simulations ont été réalisées à partir du logiciel ABAQUS

avec deux éléments 3D paraboliques (brique 20 noeuds et 27 points d'intégration). D'autres simulations, comme du forgeage 2D et 3D, ont été réalisées sans que des différences notables soient constatées au niveau des résultats.

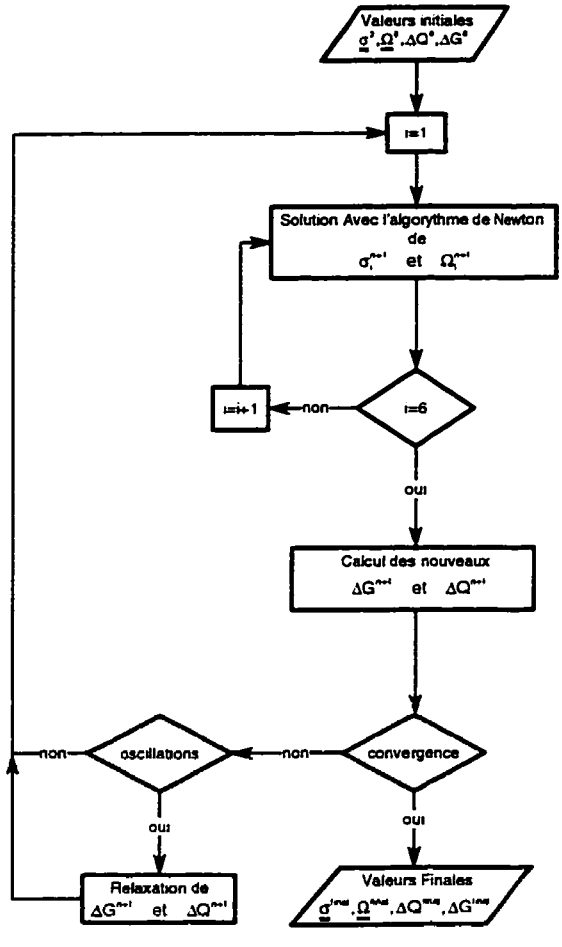


Figure C-1: Algorithme de solution de l'intégration asymptotique

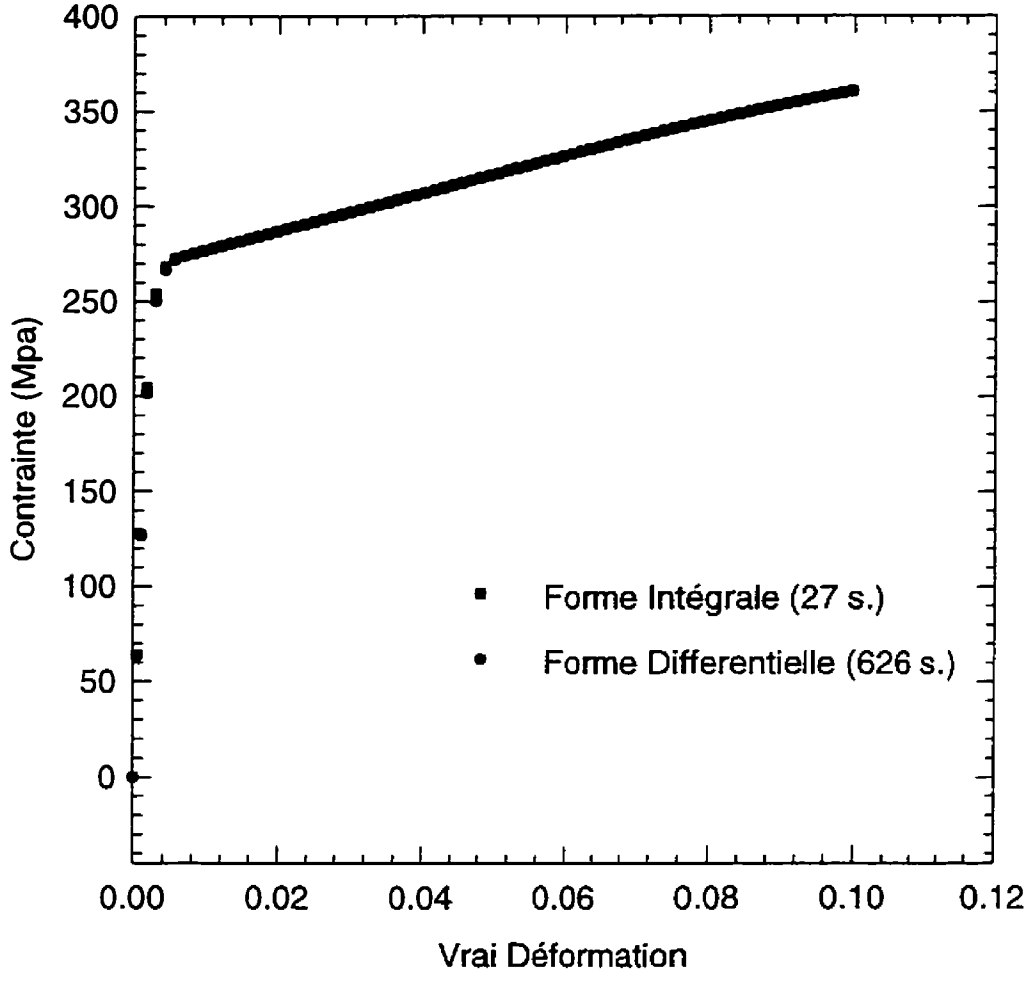


Figure C-2 : Comparaison de la méthode différentielle et asymptotique pour un essai de traction

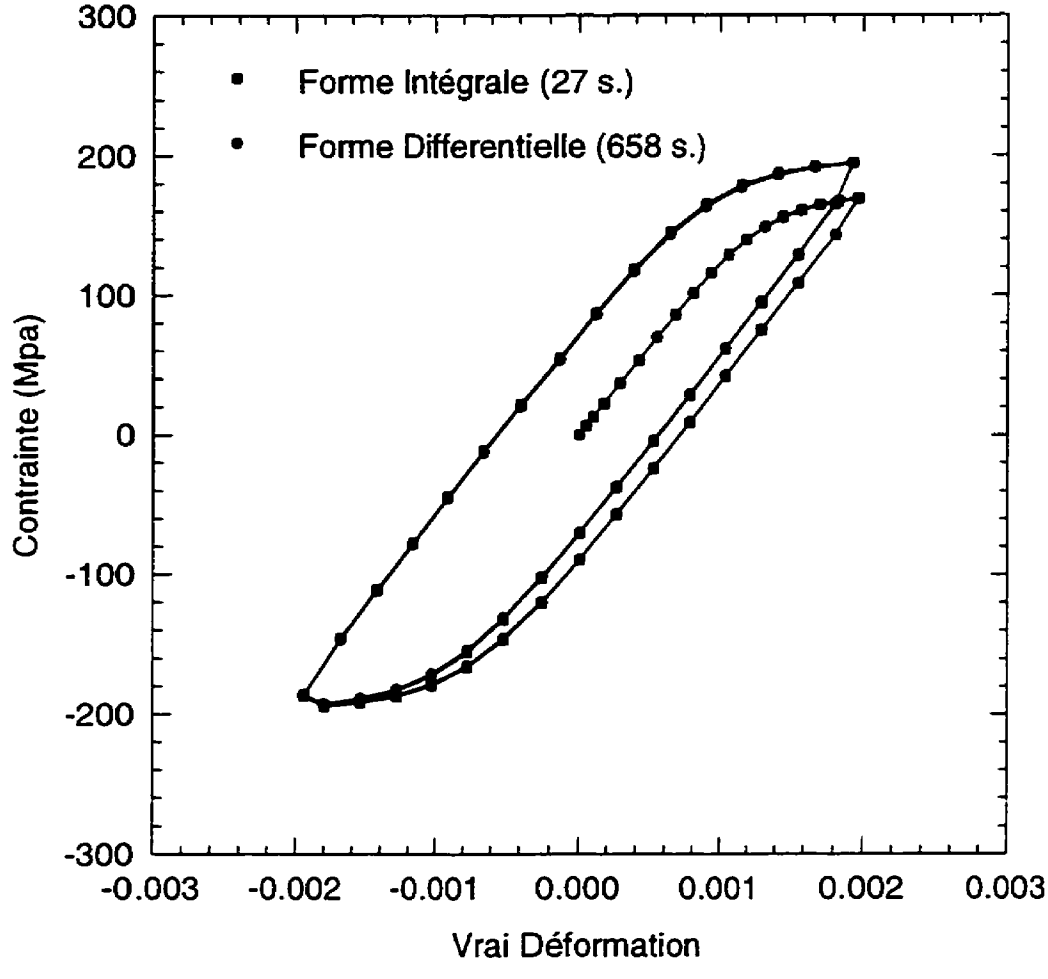


Figure C-3 : Comparaison de la méthode différentielle et asymptotique pour un essai de traction

Annexe D

Résultats

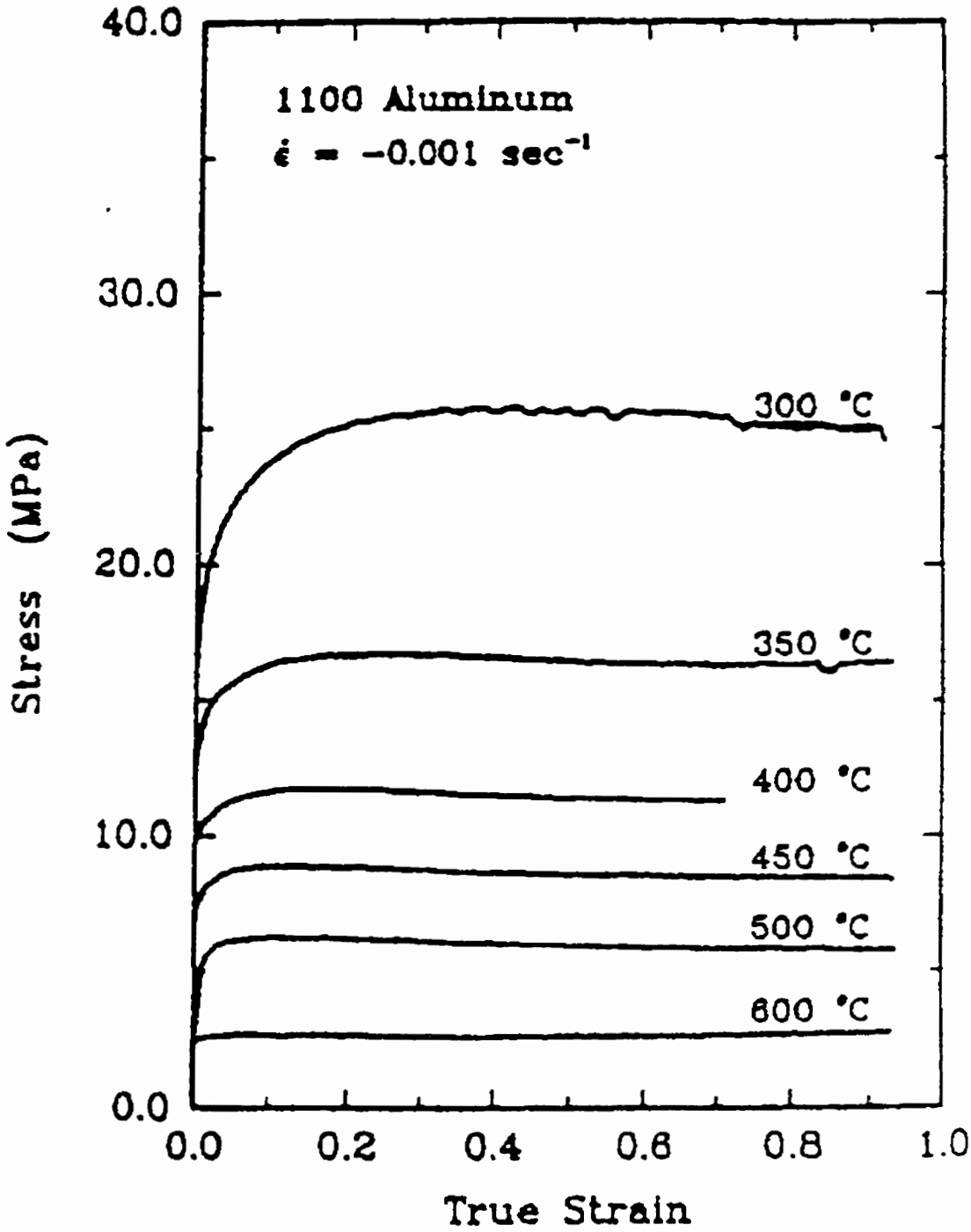


Figure D-1 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon}$ = 0.001[28]

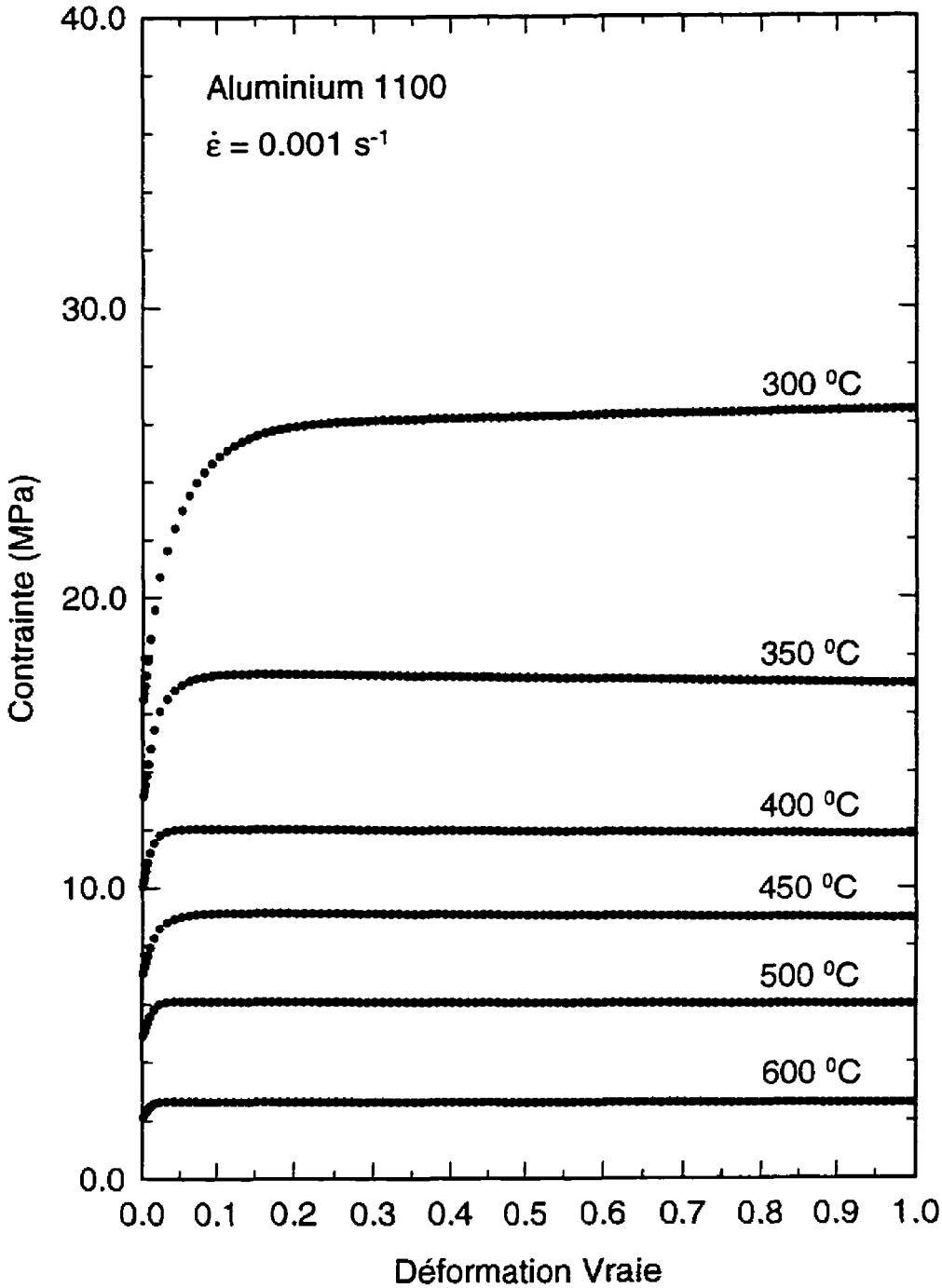


Figure D-2 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.001$

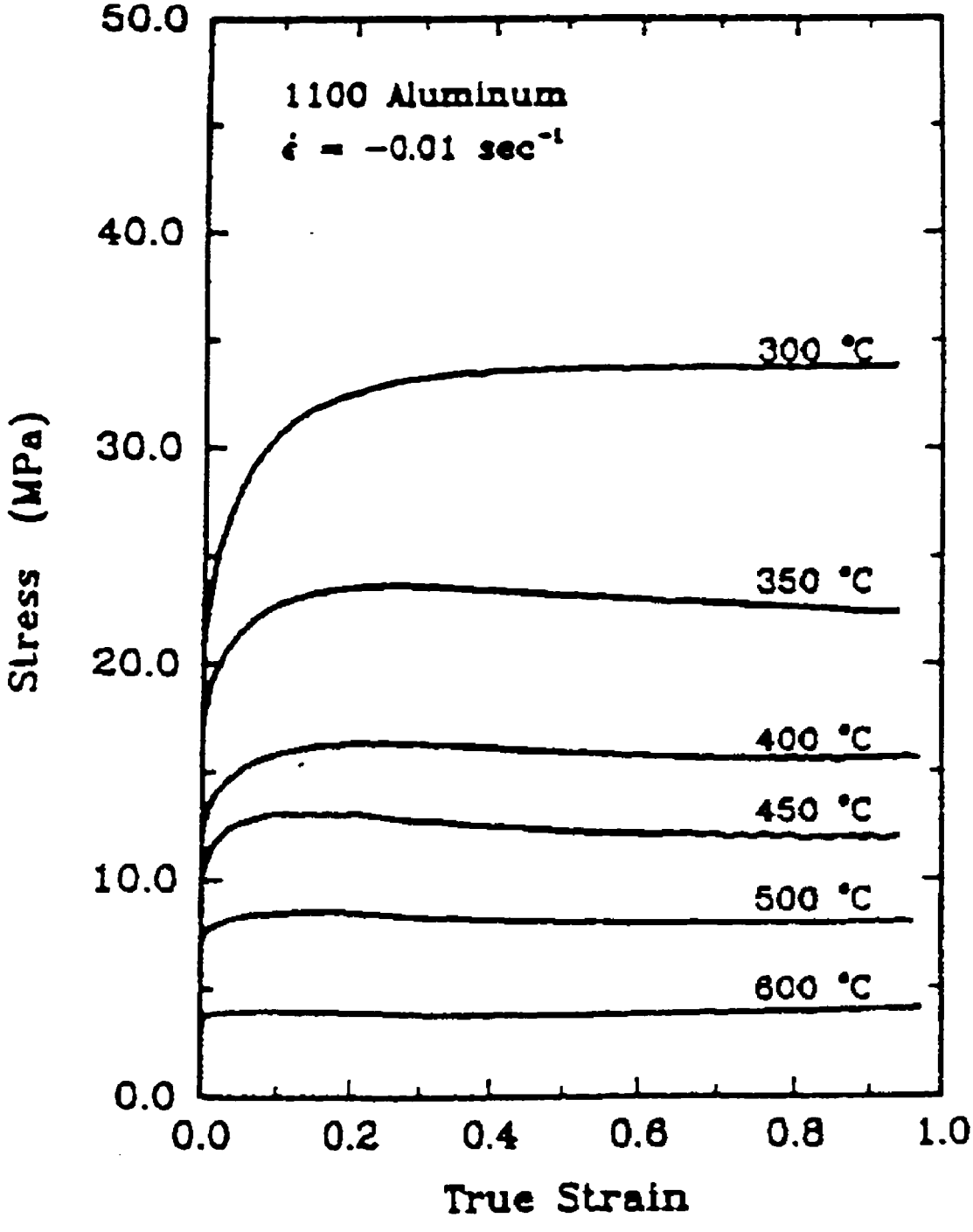


Figure D-3 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon}$ = 0.01[28]

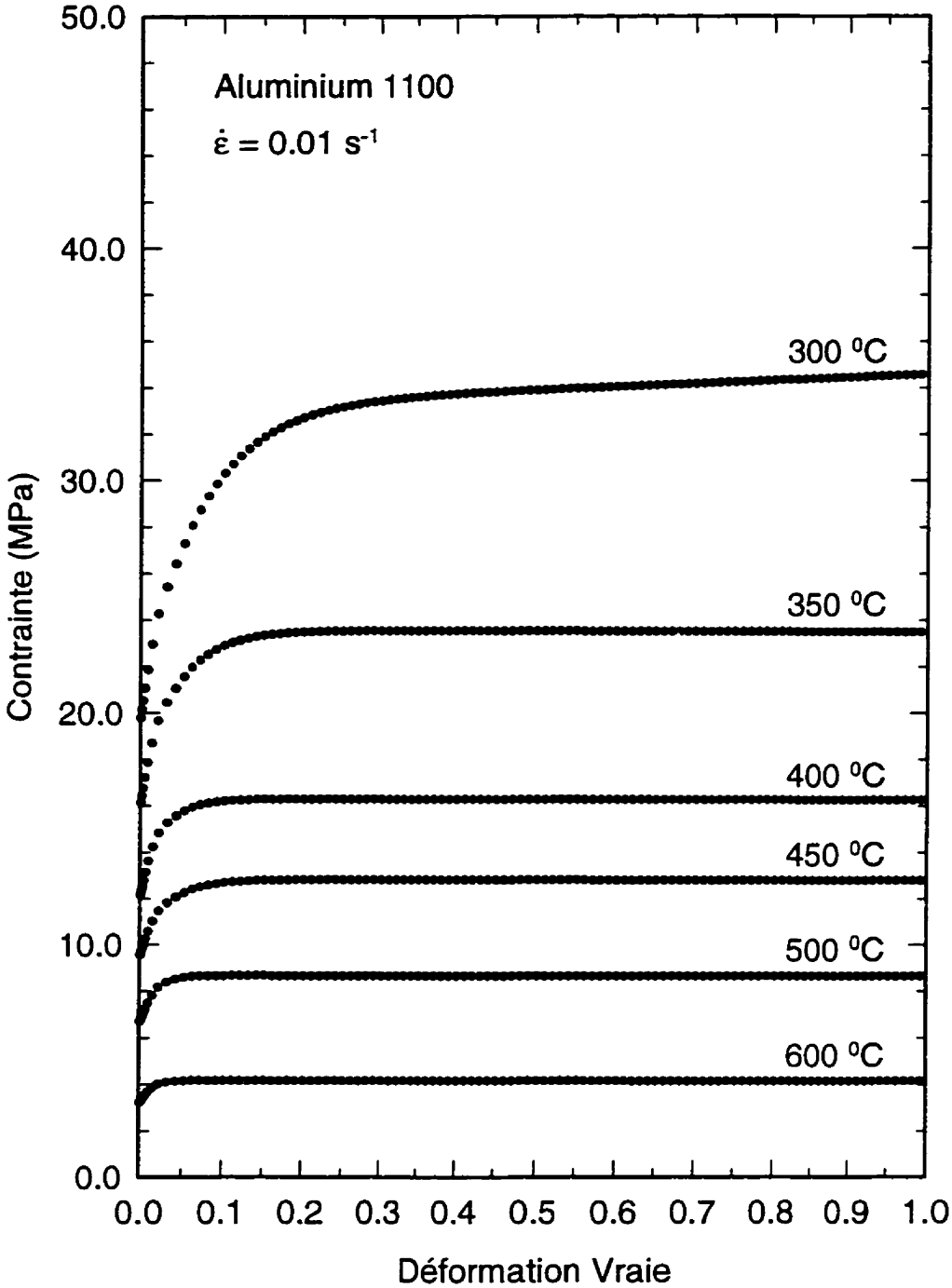


Figure D-4 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.01$

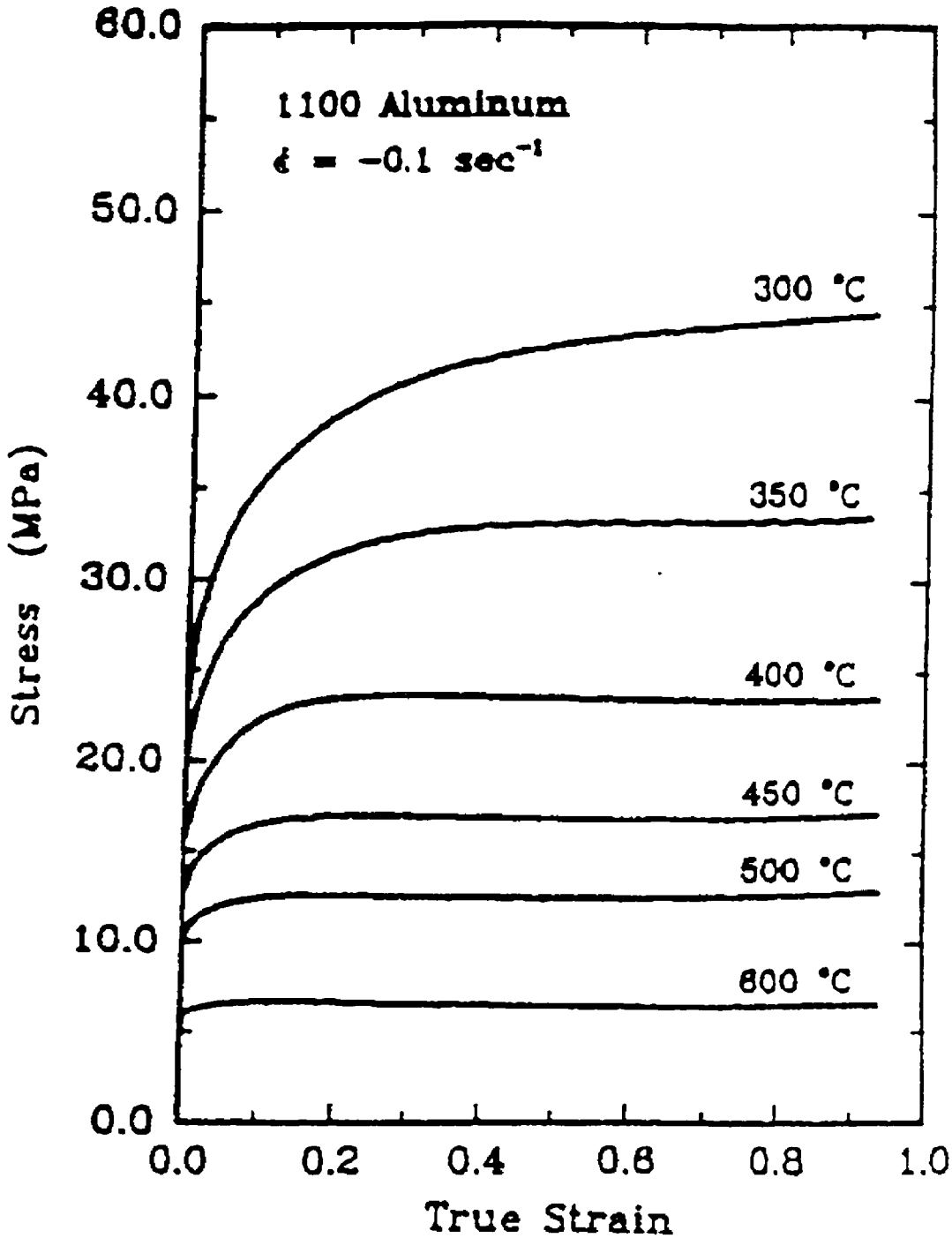


Figure D-5 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.1$[28]

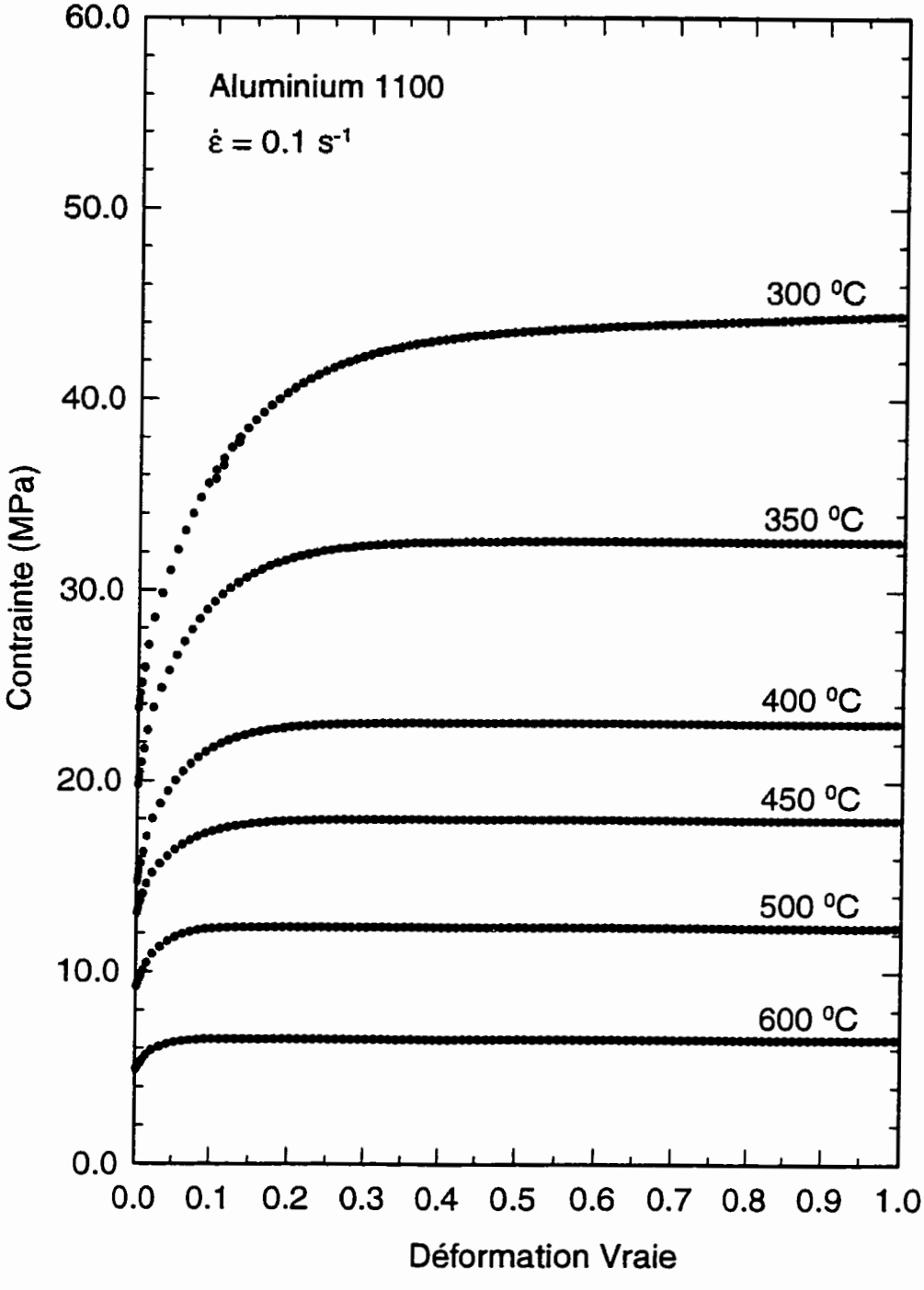


Figure D-6 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 0.1$

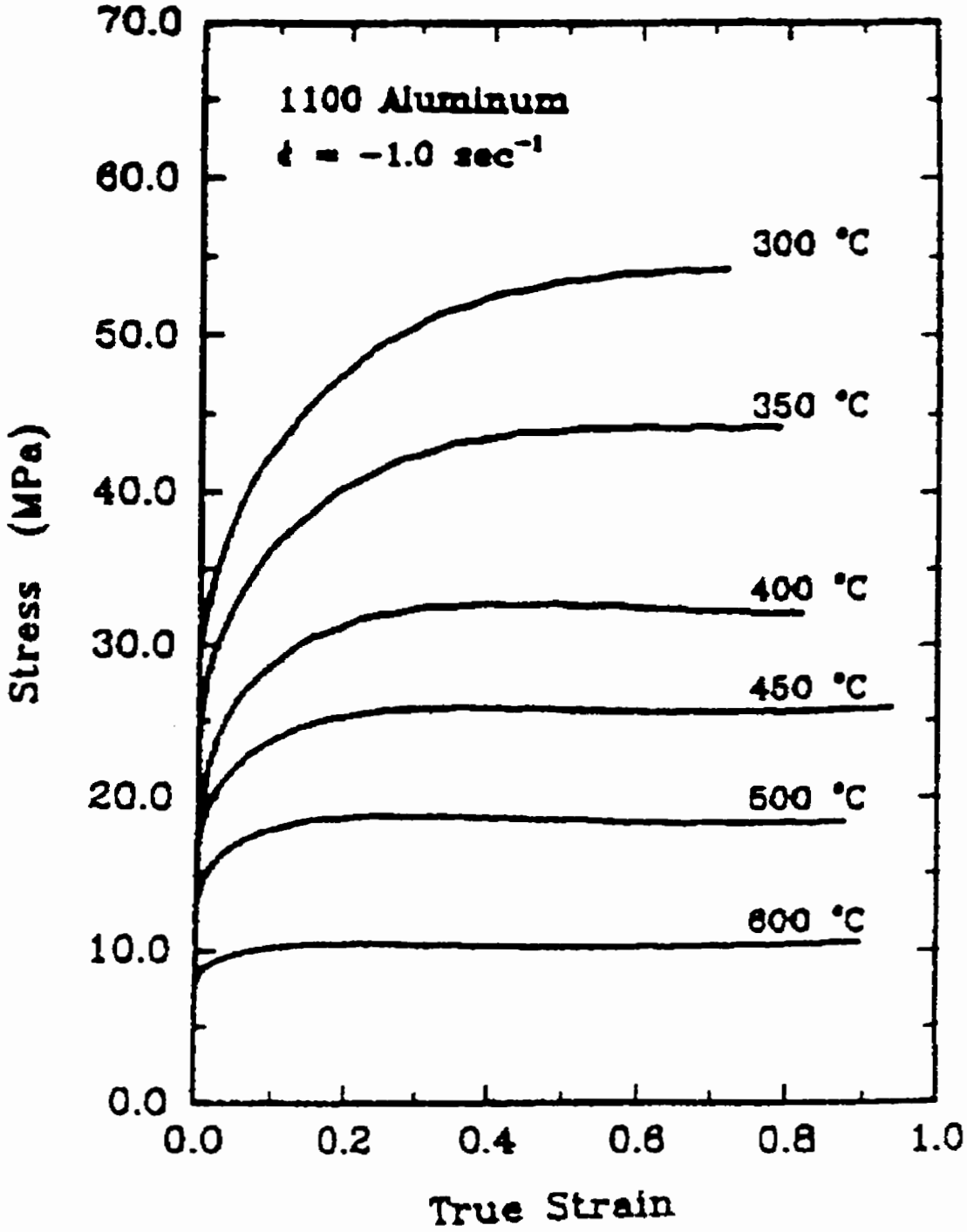


Figure D-7 Courbes de compression uniaxiales expérimentales de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon} = 1.0$[28]

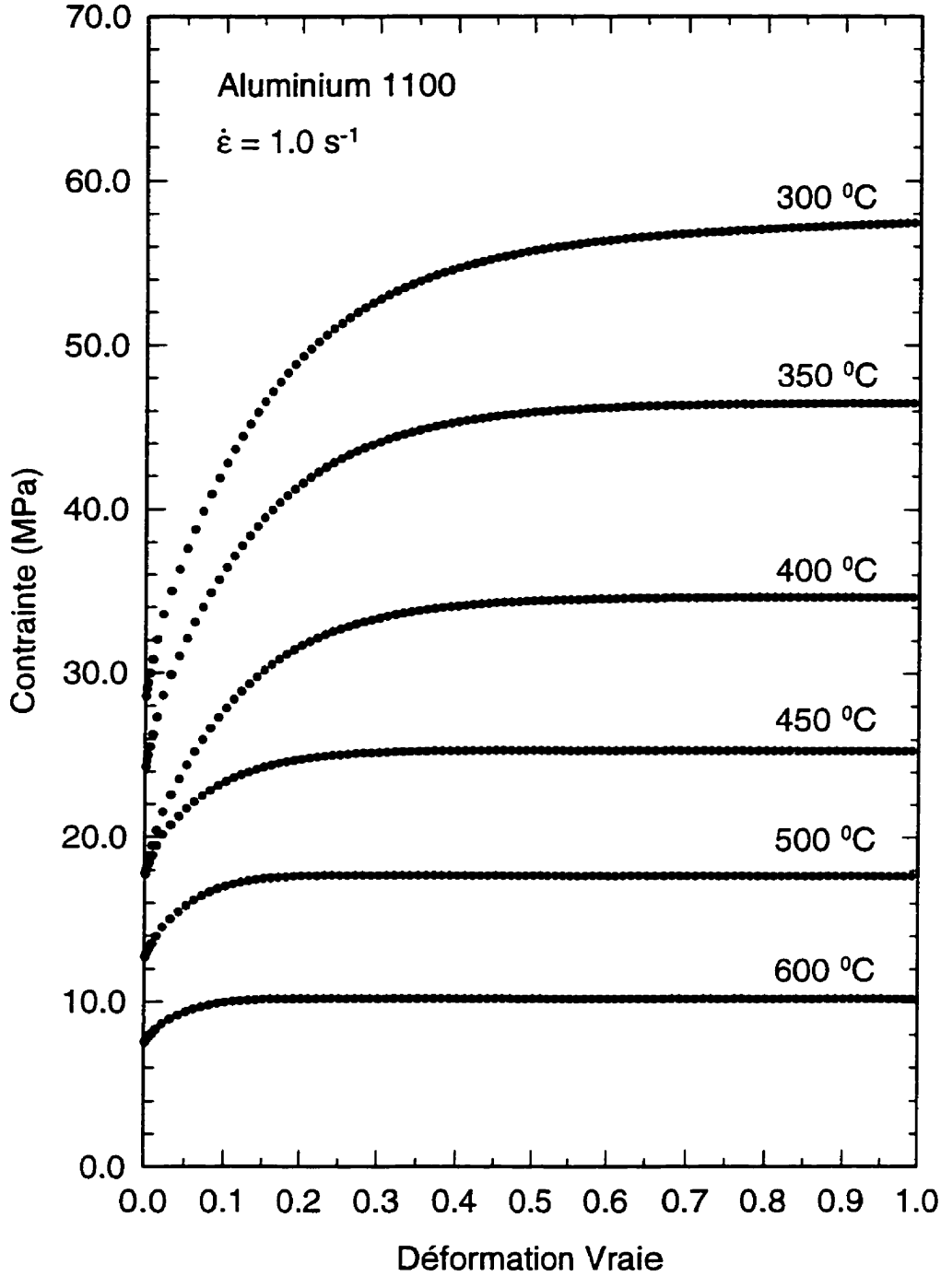


Figure D-8 : Courbes de compression uniaxiales simulées de l'aluminium 1100, $\dot{\varepsilon}$ = 1.0

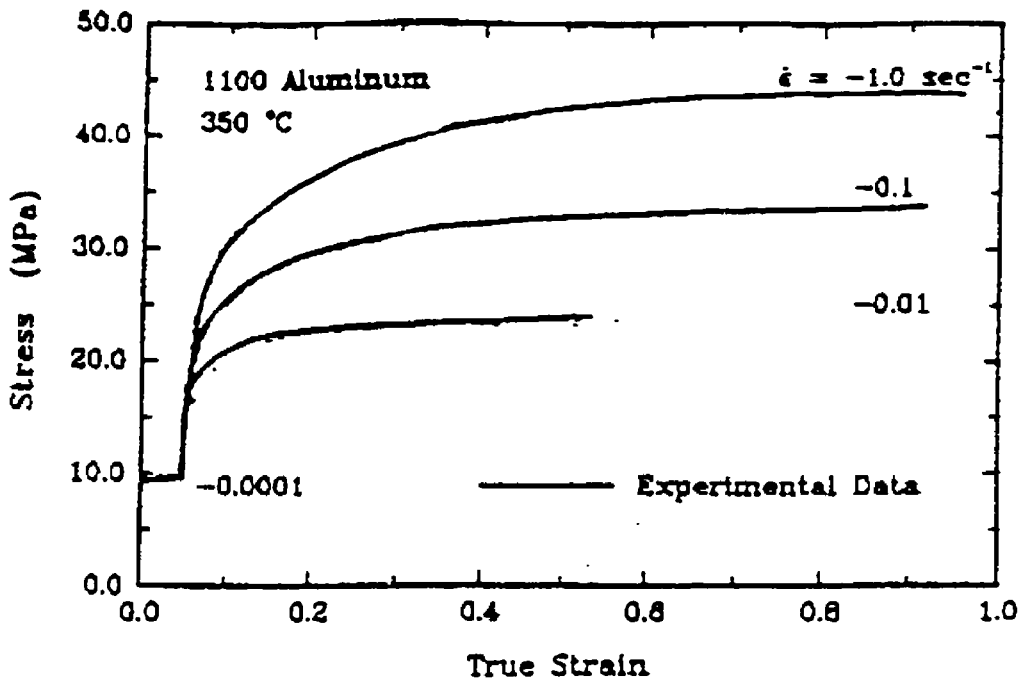


Figure D-9 Courbes de sauts de vitesse de déformation expérimentales de l'aluminium 1100, à une température de 350 °C[28]

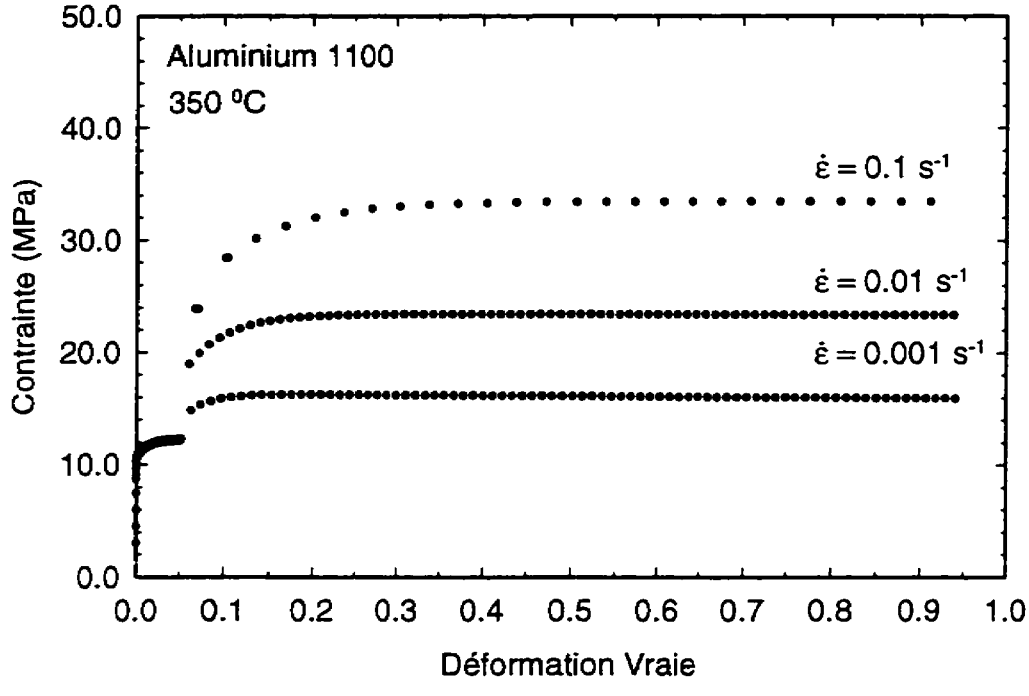


Figure D-10 Courbes de sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100, à une température de 350 °C

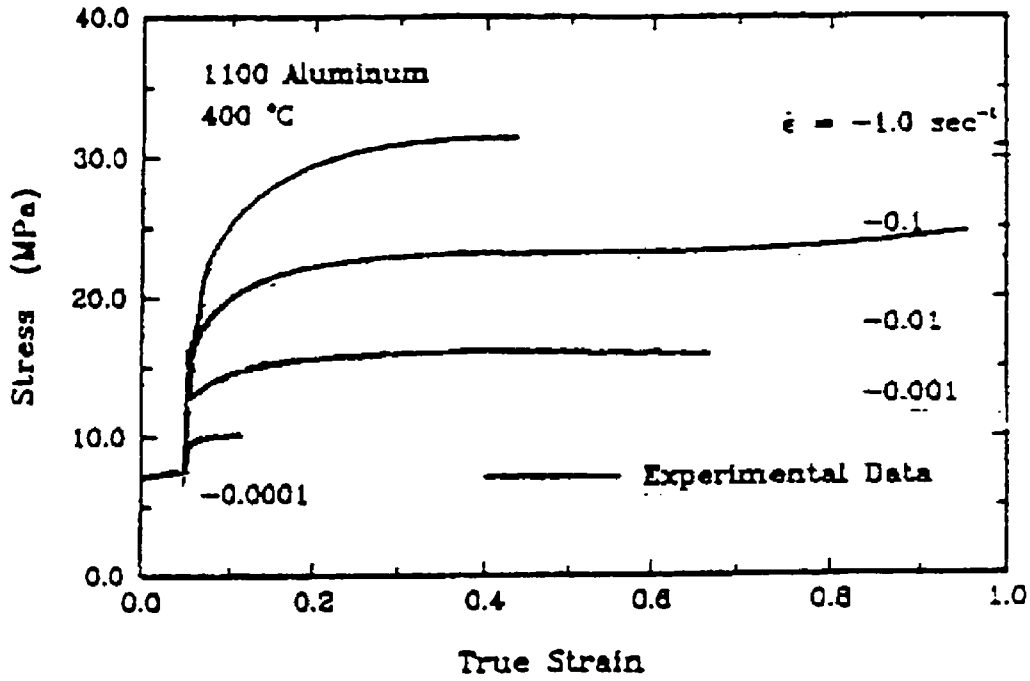


Figure D-11 Courbes de sauts de vitesse de déformation expérimentales de l'aluminium 1100, à une température de 400 °C[28]

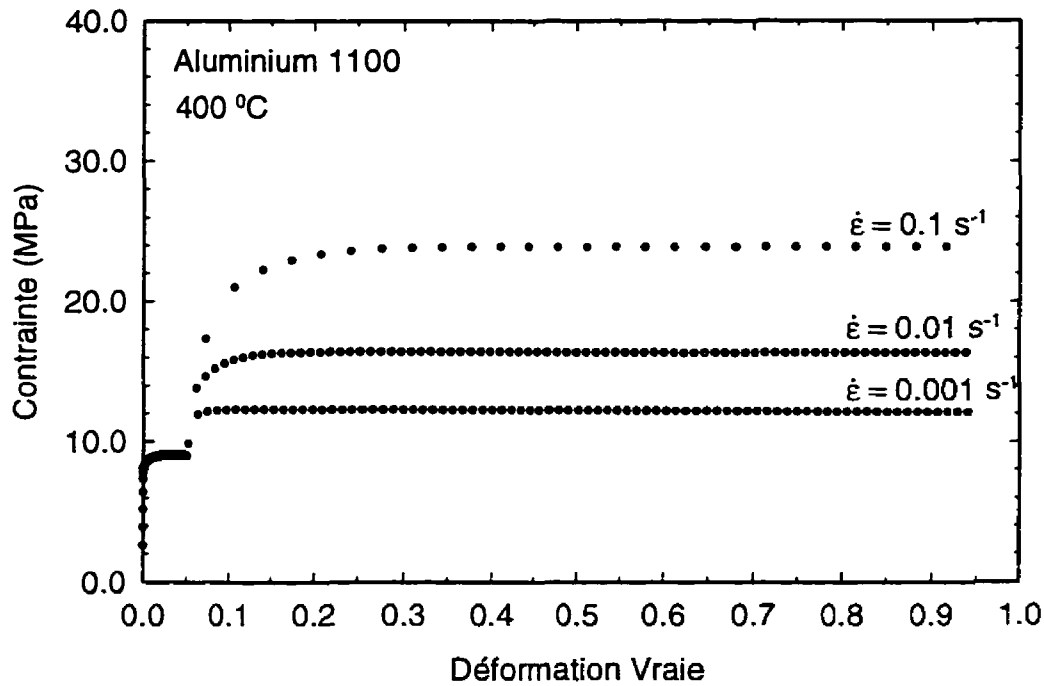


Figure D-12 Courbes de sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100, à une température de 400 °C

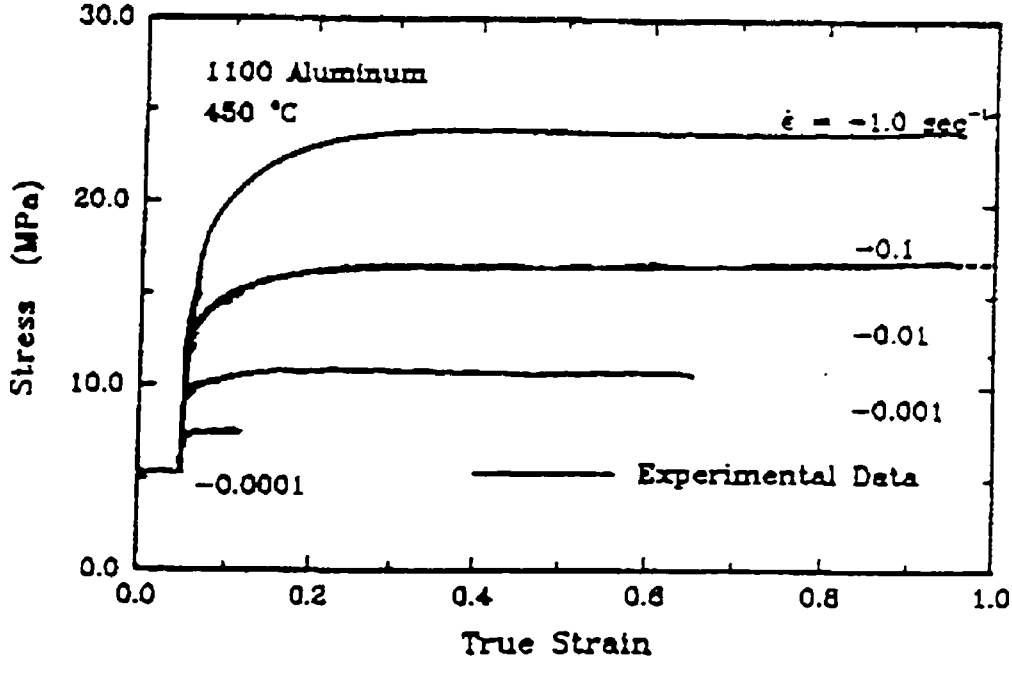


Figure D-13 Courbes de sauts de vitesse de déformation expérimentales de l'aluminium 1100, à une température de 450 °C[28]

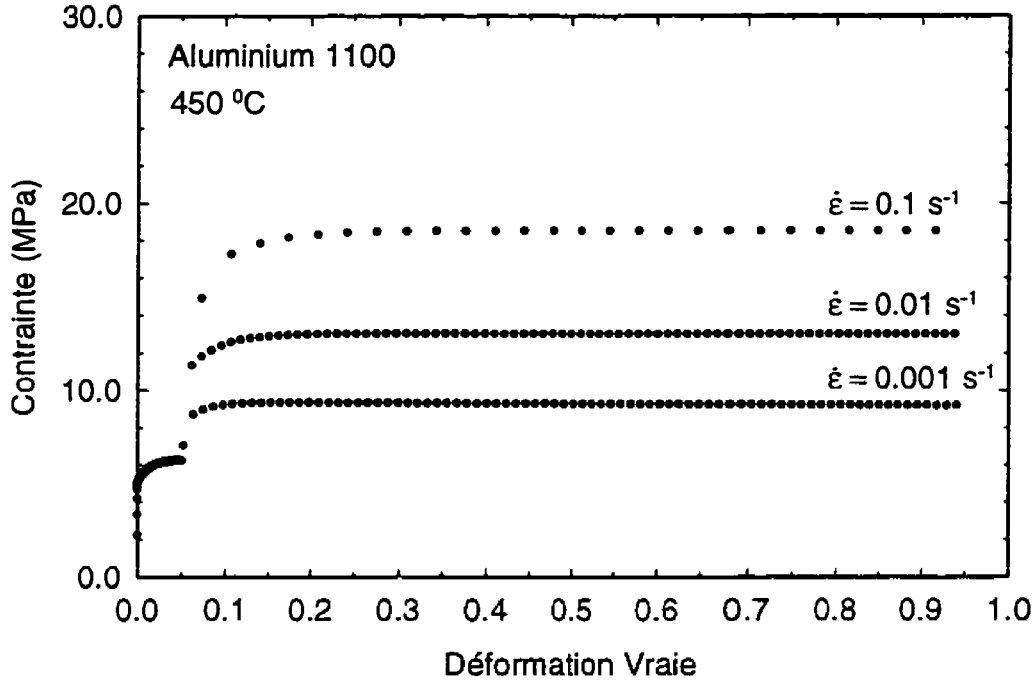


Figure D-14 Courbes de sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100, à une température de 450 °C

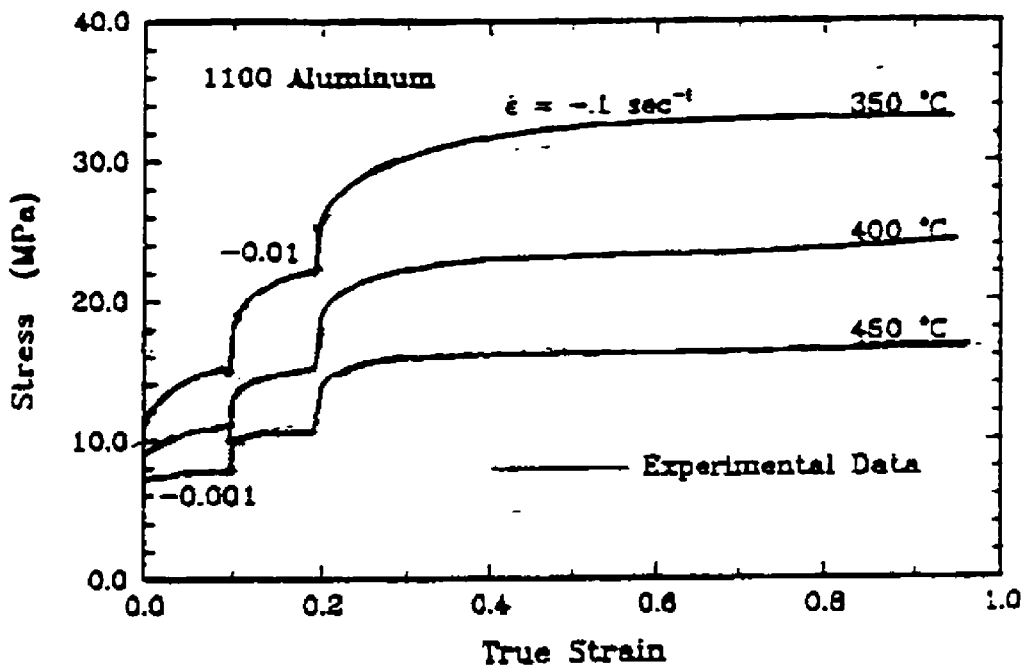


Figure D-15 Courbes de double sauts de vitesse de déformation expérimentale de l'aluminium 1100 [28]

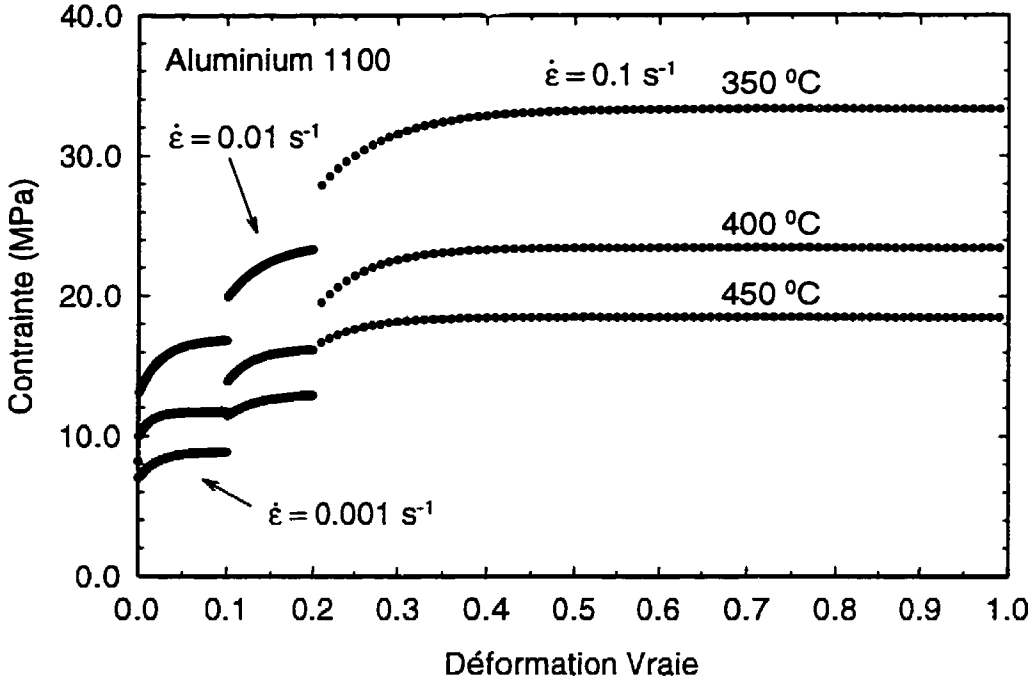
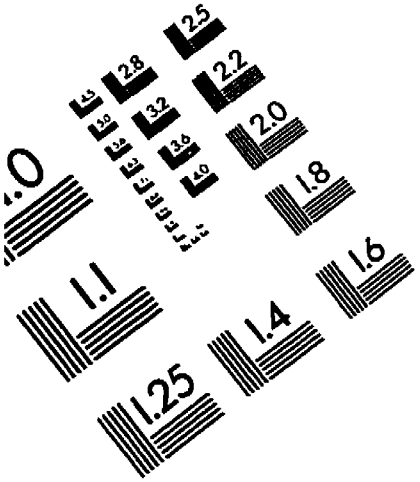
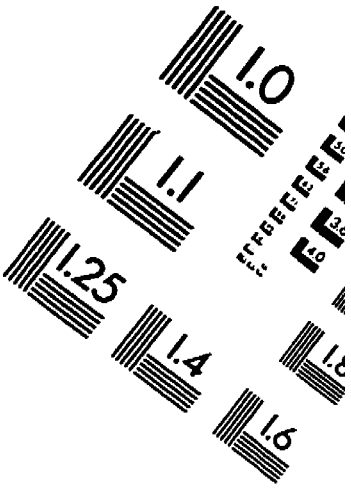
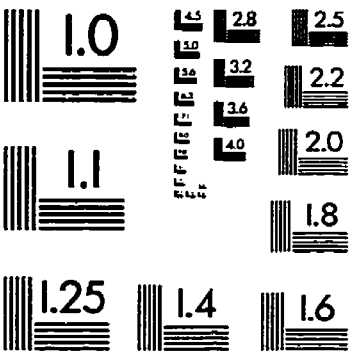


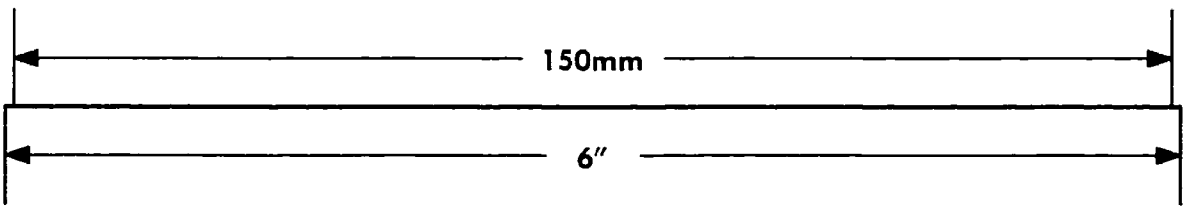
Figure D-16 Courbes de double sauts de vitesse de déformation simulés de l'aluminium 1100

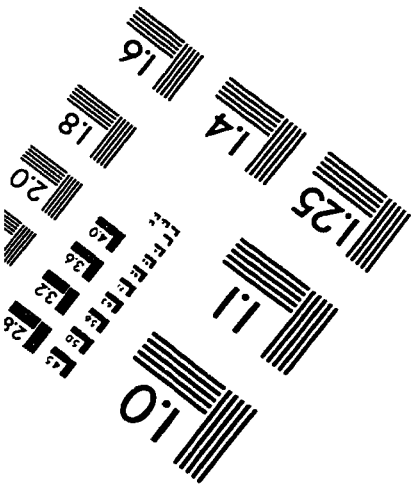
IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)

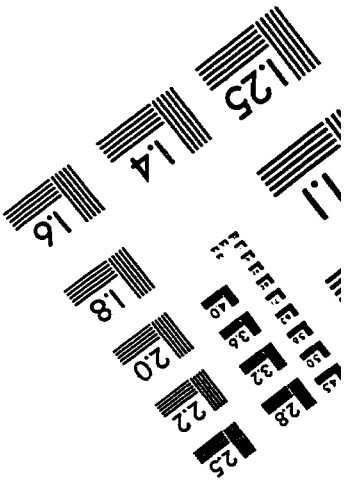










APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved