UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CALCUL DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES TURBULENTS SUR DES MAILLAGES NON-STRUCTURÉS

ALI BENMEDDOUR
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU GRADE DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (PH. D.)
(GÉNIE MÉCANIQUE)
JANVIER 1997

©Ali Benmeddour, 1997.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26411-4

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

CALCUL DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES TURBULENTS SUR DES MAILLAGES NON-STRUCTURÉS

présenté par : BENMEDDOUR Ali

en vue de l'obtention du grade de : Philosophiae Doctor

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., président

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TRÉPANIER Jean-Yves, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre

M. GHALY Wahid, Ph.D., membre

À mes chers parents.

à mon épouse.

à mes enfants Soumia et Haroun.

à mes frères et soeurs.

à toute ma famille en Algérie.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mes directeurs de recherche, les professeurs Jean-Yves Trépanier et Ricardo Camarero pour leurs conseils, leur encadrement et leur support scientifique et matériel tout au long de cette étude.

J'adresse mes remerciements à M. Marcelo Reggio et M. Wahid Ghaly pour avoir accepté d'examiner ce travail ainsi qu'à M. Michel Prud'homme qui a accepté de présider le jury.

Mes remerciements s'adressent également:

A M. Farzad Mokhtarian de Canadair pour sa contribution et à M. Xudang Zhang pour ses conseils judicieux.

À tous mes amis et en particulier Hani Dawoud et Abdelkarim Zouani pour leur aide fortement appréciée.

À tous mes collègues du CERCA: François Côté, Paul Labbé, Juan Abanto, Marie-Isabelle Farinas, Andréa Froncioni et tous les autres qui ont rendu mon séjour agréable parmi eux et auxquels je souhaite une bonne continuation dans leur travail.

Au Ministère des Études Supérieures du Gouvernement de mon pays, l'Algérie, pour son support financier qui est fortement apprécié.

À tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Je remercie mon épouse pour sa patience et ses encouragements qui m'ont aidé à mener à terme cette thèse de doctorat.

Je tiens à remercier spécialement les membres de ma famille qui, bien que très loin de moi, m'ont soutenu moralement et surtout mes parents sans qui je ne serai jamais arrivé là où je suis.

Résumé

La présente étude constitue une contribution à l'utilisation des maillages non-structurés triangulaires anisotropes et des schémas en amont "upwind", dans le contexte de la méthode des volumes finis, pour calculer des écoulements compressibles turbulents, un domaine relativement non exploré. Notre intérêt porte sur la prédiction numérique des écoulements externes, stationnaires et bidimensionnels. Plus particulièrement, les écoulements autour des profils d'ailes d'avions à de grands nombres de Reynolds.

Les équations moyennes de Reynolds compressibles, obtenues à partir des équations de Navier-Stokes en utilisant la décomposition de Favre (moyenne pondérée par la masse), et complétées par un modèle de turbulence, sont utilisées pour simuler de tels écoulements. Ces équations, régissant l'écoulement moyen, sont résolues à l'aide de la méthode des volumes finis avec un stockage des variables aux centres des éléments. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide du schéma en amont standard de Roe. Les termes visqueux sont discrétisés par le théorème de Gauss.

Au premier ordre, les solutions sont supposées constantes par élément. L'extension du schéma de Roe au deuxième ordre est faite en substituant les solutions con-

stantes par des variations linéaires dans chaque triangle. Ces solutions linéaires sont reconstruites à partir des solutions constantes en utilisant la méthode de Barth et Jespersen. Afin de préserver la monotonie des solutions du schéma d'ordre supérieur, les limiteurs de Barth et de Venkatakrishnan sont utilisés.

Les équations moyennes de Reynolds compressibles sont intégrées dans le temps à l'aide d'un schéma explicite. Pour accélérer la convergence, la technique de pas de temps local et une méthode multigrilles par agglomération sont utilisées.

Pour simuler les effets de la turbulence, le modèle algébrique de Baldwin et Lomax, le modèle à une équation de Baldwin et Barth et le modèle à deux équations de transport $k - \omega$ standard de Wilcox ont été implantés. Les trois modèles sont basés sur le concept de la viscosité turbulente de Boussinesq.

Une nouvelle technique permettant l'implantation du modèle de Baldwin et Lomax sur des maillages non-structurés est développée dans la présente étude. Elle consiste à utiliser le maillage triangulaire pour l'écoulement moyen et pour la turbulence. Les quantités turbulentes, requises par le modèle, sont alors évaluées directement aux noeuds du maillage utilisé pour résoudre les équations moyennes de Reynolds, et la viscosité turbulente est calculée sans avoir à utiliser un maillage structuré auxiliaire comme cela fut la pratique.

Les équations de transport des modèles de Baldwin et Barth et $k-\omega$ sont résolues découplées des équations de l'écoulement moyen. Ceci permet un interchangement facile de nouveaux modèles de turbulence. Ces équations sont discrétisées aux noeuds du maillage et intégrées jusqu'à la paroi à l'aide de la méthode des volumes finis. Les termes convectifs sont discrétisés par une différentiation en amont du

premier ordre et l'intégration dans le temps est accomplie par un schéma implicite. À chaque pas de temps, le système matriciel, résultant de la discrétisation, est résolu par un algorithme GMRES préconditionné.

Afin d'établir les performances du schéma de Roe et des trois modèles de turbulence sur des maillages triangulaires anisotropes, le solveur a été validé en considérant des écoulements non-visqueux, des écoulements laminaires et des écoulements turbulents. Différents régimes d'écoulements sur une plaque plane et autour des profils aérodynamiques (NACA0012, Karman-Trefftz et RAE2822) ont alors été calculés. Les effets des maillages fortement élancés sur le schéma standard de Roe ont limité la validation à des maillages avec des élancements modérés. Dans l'ensemble, d'assez bonnes concordances avec les solutions analytiques, empiriques et les données expérimentales disponibles ont été obtenues.

Abstract

The present research work constitutes a contribution to the use of unstructured stretched triangular grids and upwind schemes, within the frame of the finite volume method, to compute compressible turbulent flows, a relatively unexplored subject. We are mainly interested in the numerical prediction of external, steady and 2-D flows. Particularly, flows around airfoils at high Reynolds numbers.

Compressible Reynolds averaged equations, obtained by Favre's mass weighted averaging of the Navier-Stokes equations and completed by a turbulence model, are used to simulate such flows. These mean flow equations are solved by means of a cell centred finite volume method. Convective terms are discretized by the widely used standard Roe's upwind scheme, and viscous terms are discretized using Gauss theorem.

Both first and second order version of Roe scheme are considered in this study. The first order scheme assumes piecewise constant approximation within each triangle, while the second ordre scheme uses a piecewise linear reconstruction of Barth and Jespersen. To respect the monotonicity of the solutions of the higher order scheme, both Barth and Venkatakrishnan limiters are used.

Integration to steady state is performed using an explicit scheme and convergence is accelerated by means of local time stepping technique and agglomeration multigrid algorithm.

To simulate the effects of turbulence, three eddy viscosity turbulence models are implemented. These are, Baldwin-Lomax algebraic model, Baldwin-Barth one-equation model and standard $k-\omega$ two-equation model.

A new procedure for implementing the Baldwin-Lomax model on unstructured meshes is developed in this study. This technique computes turbulent quantities, required by the model, directly at the nodes of the triangular grid, used to solve the mean flow equations, without using any auxiliary structured reference mesh.

The turbulence partial differential equations of Baldwin-Barth and $k-\omega$ models are solved decoupled from the mean flow equations, resulting in a process that allows for the easy interchange of new turbulence models. These equations are solved at the nodes and integrated down to the wall using a finite volume technique. The convective terms are discretized with first-order upwind differencing and integration in time is performed by means of an implicit scheme. At each time step, the resulting systems of linear equations are solved by an iterative solver based on a preconditioned GMRES algorithm.

To assess the performance of Roe's upwind scheme and the three turbulence models on unstructured stretched triangular grids, inviscid, laminar and turbulent flows have been considered for validation. Flows over a flat plate and around airfoils (NACA0012, Karman-Trefftz and RAE282) have been calculated. The effects of highly stretched meshes on Roe's standard scheme have limited the validations

to grids with moderate stretchings. In general, good agreements with analytical, empirical and available experimental data have been obtained.

Table des Matières

Dédicace iv

Remerciements v

Résumé vii

Abstract x

Liste des tableaux xvi

Liste des figures xvii

Liste des sigles et abréviations xxi

Introduction 1

Chapitre 1 Revue bibliographique 7

1.1 Modèles de turbulence 8

1.2 Méthodes de calcul des écoulements visqueux compressibles 17

1.3 Équations de Navier-Stokes et maillages non-structurés 26

1.4 Modèles de turbulence et maillages non-structurés 28

1.5 Motivations et objectifs 29

Chapitre 2 Formulation mathématique **33**

2.1 Équations de Navier-Stokes 33

2.2 Équations moyennes de Reynolds 36

2.2.1 Moyenne de Reynolds 37

2.2.2 Moyenne de Favre 37

2.3 Hypothèse de Boussinesq 39

2.4 Forme adimensionnelle des équations 41

2.5 Modélisation de la turbulence 43

2.5.1 Choix de modèles de turbulence 44

2.5.2 Modèle de Baldwin-Lomax (B-L) 46

2.5.3 Modèle de Baldwin-Barth (B-B) 47

2.5.4 Modèle $k-\omega$ de Wilcox 48

Chapitre 3 Résolution numérique **50**

3.1 Discrétisation des équations de l'écoulement moyen 51

3.1.1 Évaluation des flux 53

3.1.1.1 Évaluation des flux convectifs 53

3.1.1.2 Évaluation des flux visqueux 65

3.1.2 Discrétisation temporelle 65

3.1.3 Conditions aux frontières 67

3.2 Évaluation des gradients aux noeuds des frontières 71

3.3 Implantation des modèles de turbulence 73

3.3.1 Modèle algébrique 73

3.3.2 Modèles aux équations de transport 78

Chapitre 4 Résultats **83**

4.1 Écoulements non-visqueux 83

4.1.1 Profil NACA0012 84

4.1.2 Profil de Karman-Trefftz 94

4.2 Écoulements laminaires 96

4.2.1 Plaque plane 96

4.2.2 Profil NACA0012 110

4.3 Écoulements turbulents 119

4.3.1 Plaque plane 120

4.3.2 Profil NACA0012 126

4.3.3 Profil RAE2822 146

Chapitre 5 Conclusions et recommandations 155

Bibliographie 158

Liste des tableaux

4.1 Cas tests étudiés 84

4.2 Caractéristiques des maillages utilisés autour du profil NACA0012 . . 84

4.3 Caractéristiques des maillages utilisés pour la plaque plane laminaire. 97

4.4 Caractéristiques des maillages utilisés pour la plaque plane laminaire. 100

4.5 Prédictions de la position du point de séparation 119

Liste des figures

3.1 Type de maillage utilisé 51

3.2 Définition du problème de Riemann 54

3.3 Direction de propagation des ondes en 2-D 57

3.4 Volumes de contrôle pour le calcul des gradients 62

3.5 Élément fictif 68

3.6 Évaluation des gradients aux frontières 72

3.7 Illustartion de la technique d'implantation du modèle de Baldwin-Lomax 74

3.8 Profil NACA0012. Maillage et isodistances normales. 76

3.9 Profil RAE2822. Maillage et isodistances normales. 77

3.10 Volume de contrôle pour les modèles B-B et $k-\omega$. 78

4.1 Maillages utilisés autour du profil NACA0012. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG. 85

4.2 Cas test 1, schéma d'ordre 1: Lignes d'iso-Mach. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG. 87

4.3 Cas test 1, schéma d'ordre 1: Lignes d'iso-pression. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG. 88

4.4 Cas test 1, schéma d'ordre 1: Lignes d'iso-température. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG. 89
4.5 Cas test 1, schéma d'ordre 1: Courbes de convergence sur les trois maillages. 90
4.6 Cas test 1, schéma d'ordre 1: Distributions du coefficient de pression pour les trois maillages. 91
4.7 Cas test 1, schéma d'ordre 2: a) Lignes d'iso-Mach, b) Lignes d'iso-pression, c) Lignes d'iso-température. 92
4.8 Cas test 1, maillage EG: comparaison des coefficients de pression des schémas du 1er et du 2ième ordre. 93
4.9 Cas test 2: maillage et lignes d'iso-Mach. 95
4.10 Cas test 2: distributions des coefficients de pression. 96
4.11 Cas test 3: maillages utilisés. a)Maillage G1, b) Maillage G2 98
4.12 Cas test 3: Effet du maillage sur la solution. 99
4.13 Cas test 3: maillages utilisés. a)Maillage SM1, b) Maillage SM2, c) Maillage UM. 101
4.14 Cas test 3, schéma d'ordre 1, maillage SM1: profils de vitesse et de température à différentes positions. 102
4.15 Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet de l'élancement sur le profil de vitesse. 103
4.16 Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet de l'élancement sur le coefficient de friction. 104
4.17 Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet de l'élancement sur la convergence. 105
4.18 Cas test 3, schéma d'ordre 2, $x/Lref = 1$: a) profil de vitesse, b) profil de température. 106

4.19 Cas test 3, schéma d'ordre 2: coefficients de friction. 107

4.20 Cas test 3, schéma d'ordre 2: courbes de convergence. 107

4.21 Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet du type de maillage a) profil de vitesse, b) profil de température. 109

4.22 Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet du type de maillage sur le coefficient de friction. 110

4.23 Cas test 4, Lignes d'iso-Mach et champ de vitesse 113

4.24 Cas test 4, Coefficient de pression. 114

4.25 Cas test 4, Coefficient de friction. 114

4.26 Cas test 5, Lignes d'iso-Mach et champ de vitesse 115

4.27 Cas test 5, Coefficient de pression. 116

4.28 Cas test 5, Coefficient de friction. 116

4.29 Cas test 6, Lignes d'iso-Mach et champ de vitesse 117

4.30 Cas test 6, Coefficient de pression. 118

4.31 Cas test 6, Coefficient de friction. 118

4.32 Cas test 7: maillages utilisés pour les modèles BL et BB. 121

4.33 Cas test 7: maillage utilisés pour le modèle $k-\omega$. 121

4.34 Cas test 7, prédictions du profil de vitesse par les différents modèles. . 123

4.35 Cas test 7, prédictions de la loi logarithmique par les différents modèles. 123

4.36 Cas test 7, prédictions de la loi déficitaire par les différents modèles. . 124

4.37 Cas test 7, prédictions du coefficient de friction par les différents modèles. 125

4.38 Cas test 7, distribution de la viscosité pour les différents modèles. . . 125

4.39 Cas test 7, distribution de l'énergie cinétique de turbulence des modèles BB et $k-\omega$. 126

4.40 Cas test 8, modèle BL, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse 128

4.41 Cas test 8, lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle $k-\omega$. 129

4.42 Cas test 8. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction. 130

4.43 Cas test 8. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. 131

4.44 Cas test 8. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. . . . 132

4.45 Cas test 9, modèle BB, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse 134

4.46 Cas test 9, lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle BB, c) modèle $k-\omega$. 135

4.47 Cas test 9. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction. 136

4.48 Cas test 9. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. 137

4.49 Cas test 9. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. . . . 138

4.50 Cas test 10, modèle BL, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse 141

4.51 Cas test 10, lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle $k-\omega$. 142

4.52 Cas test 10. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction. 143

4.53 Cas test 10. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. 144

4.54 Cas test 10. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. . . 145

4.55 Maillages utilisés autour du profil RAE2822. 149

4.56 Cas test 11, modèle BL, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse 150

4.57 Cas test 11, lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle $k-\omega$. 151

4.58 Cas test 11. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction. 152

4.59 Cas test 11. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. 153

4.60 Cas test 11. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. . . 154

Liste des sigles et des abréviations

a	vitesse du son
A	aire d'un volume de contrôle
$\boldsymbol{A}$	matrice Jacobienne du vecteur flux
$\boldsymbol{B}$	matrice de projection dans le repère $(\boldsymbol{n}.\boldsymbol{t})$
C	corde du profil
C_f	coefficient de frottement
C_p	coefficient de pression ou chaleur spécifique à pression constante
D	fonction d'amortissement de Van Driest
$\boldsymbol{D}$	matrice
e	énergie interne par unité de masse
$\boldsymbol{e}$	vecteur propre de $\boldsymbol{A}$
E	énergie totale par unité de masse
f_2	fonction d'amortissement du modèle de Baldwin-Barth
$\boldsymbol{F}$	vecteur des flux convectifs
$\boldsymbol{G}$	vecteur des flux visqueux
h	enthalpie spécifique

H	enthalpie totale par unité de masse
$\boldsymbol{I}$	tenseur unitaire
k	énergie cinétique de la turbulence
K	conductivité thermique moléculaire
K_t	conductivité thermique turbulente
l	échelle de longueur de turbulence
L	longueur
M	nombre de Mach
$\boldsymbol{n}$	normale unitaire
n_x, n_y	composante de $\boldsymbol{n}$
N	noeud
p	pression
P	terme de production turbulente
Pr	nombre de Prandtl laminaire
Pr_t	nombre de Prandtl turbulent
$\boldsymbol{q}$	vecteur des flux de chaleur laminaires
$\boldsymbol{q}_t$	vecteur des flux de chaleur turbulents
$\boldsymbol{q}_{tot}$	vecteur des flux de chaleur total $(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}_t)$
R	constante du gaz ou variable de Baldwin-Barth
Re	nombre de Reynolds
R_T	nombre de Reynolds turbulent

s	facteur d'interpolation ou face d'un volume de contrôle
S_0	température effective
S_1	constante
t	temps
$\boldsymbol{t}$	vecteur tangentiel unitaire
T	température
t_x, t_y	composantes de $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{u}$	vecteur vitesse
u, v	composante du vecteur vitesse
u_τ	vitesse de friction
$\boldsymbol{U}$	vecteur des variables conservatives
U_n	composante normale du vecteur vitesse
U_t	composante tangentielle du vecteur vitesse
V	module du vecteur vitesse
x, y	coordonnées cartésiennes
Y	distance normale à la paroi

Lettres grecques

α	intensité des ondes ou angle déntrée de l'écoulement
γ	rapport des chaleurs spécifiques
κ	constante de Van Karmann

λ	second coefficient de viscosité ou valeur propre de $\boldsymbol{A}$
μ	viscosité dynamique laminaire
μ_t	viscosité dynamique turbulente
ν	viscosité cinématique laminaire
ν_t	viscosité cinématique turbulente
ρ	densité
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur des contraintes de cisaillement laminaires
$\boldsymbol{\tau}_t$	tenseur de Reynolds
$\boldsymbol{\tau}_{tot}$	tenseur total des contraintes $(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_t)$
ϕ	variable quelconque de l'écoulement
Φ	variable scalaire
$\boldsymbol{\omega}$	vorticité
ω	pseudo-vorticité du modèle $k - \omega$
Ω	aire du volume de contrôle

Indices

0	valeur moyenne au centre de l'élément ou valeur totale
e	élément du domaine
f	élément fictif
i	interne
L	état de gauche

max	valeur maximale
min	valeur minimale
n	composante normale
o	externe
r	valeur de référence ou valeur reconstruite
R	état de droite
t	variable turbulente
w	valeur à la paroi
∞	valeur à l'infini

Exposants

ext	externe
int	interne
n	instant t
$n+1$	instant $t+\delta t$
max	valeur maximale
min	valeur minimale

Symboles

$\bar{}$	moyenne de Reynolds
$\tilde{}$	moyenne de Favre

$\hat{}$	moyenne de Roe
$'$,$''$	composantes fluctuantes
$\times$	produit vectoriel
$\otimes$	produit tensoriel

Introduction

De nos jours, l'industrie aéronautique est devenue tellement compétitive que la conception et l'amélioration des performances aérodynamiques d'un avion moderne exigent, plus que jamais, une compréhension profonde et une prédiction précise des différents phénomènes, parfois très complexes, engendrés par l'écoulement de l'air autour des différentes composantes de l'appareil.

Dans le passé, les concepteurs se servaient généralement de leur expérience antérieure et des bases de données expérimentales, provenant des essais en soufleries et en vol, afin de concevoir de nouvelles configurations aérodynamiques plus performantes. Cependant, malgré le réalisme des résultats expérimentaux et la possibilité de traiter des géométries complexes, les coûts et le temps requis pour réaliser de telles expériences sont trés élevés. En plus, les soufferies ont leurs limites quant à la simulation des écoulements autour de la nouvelle génération d'avions, opérants souvent à de grands nombres de Mach et de Reynolds. Elles permettent rarement des simulations à des nombres de Reynolds réels [1] et des corrections pour effet de Reynolds sont requises..

Pour être compétitifs, les ingénieurs aérodynamiciens sont donc appelés à ex-

plorer de nouvelles voies afin de pouvoir améliorer les performances des appareils, en concevant des configurations aérodynamiques plus performantes, en un minimum de temps et avec les moindres coûts possible. Ces contraintes budgétaires et de temps ne permettent plus l'usage excessif des souffleries qui deviennent de plus en plus réservées à la validation des configurations jugées optimales (phase finale d'un processus de design).

Durant le dernier quart de siècle, des progrès considérables ont été enregistrés dans le développement du matériel informatique et des méthodes numériques. Ces progrès ont mené à l'émergence de la CFD "Computational Fluid Dynamics" comme nouvel outil de prédiction des écoulements fluides. Ce nouvel outil permet le calcul des propriétés de l'écoulement à chaque point du domaine et même dans les régions où les mesures expérimentales sont impossibles ou difficiles à réaliser. En plus, les ordinateurs actuels permettent des calculs rapides et moins coûteux que les simulations expérimentales [2]. En effet, aprés 25 années d'évolution rapide, la CFD occupe actuellement une place importante dans le processus de design d'un nouvel avion. Elle joue un rôle complémentaire aux souffleries, surtout, pendant la phase préliminaire de design [3].

Plusieurs des écoulements rencontrés autour des composantes de la nouvelle génération d'avions sont compressibles et turbulents, et les effets visqueux jouent un rôle très important. À de grands nombres de Reynolds (typiquement de l'ordre de 30 millions pour un avion [2]), ces effets visqueux sont souvent confinés dans de minces couches près des parois solides (couche limites) et dans les sillages. La présence de ces régions visqueuses, même minces, peut altérer le champ d'écoulement global. En régime transsonique, les effets visqueux sont plus prononcés. La présence de

la couche limite peut affecter la position de l'onde de choc, et son interaction avec cette dernière, dont l'intensité augmente avec le nombre de Mach, peut provoquer la séparation de l'écoulement dégradant ainsi les performances aérodynamiques de l'appareil. Pour mieux prédire ces écoulements, il faut donc tenir compte de tous les phénomènes présents.

Les écoulements visqueux compressibles et turbulents sont régis par les équations de Navier-Stokes. Malheureusement, la grande disparité entre les échelles de longueur et de temps au sein d'un écoulement turbulent exige des maillages avec un nombre de points de l'ordre de $Re^{9/4}$, où Re est le nombre de Reynolds, pour pouvoir effectuer une simulation directe qui consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes pour toutes les échelles de l'écoulement [4]. Ceci est de loin au-delà des capacités des ordinateurs actuels.

Pour pouvoir calculer des écoulements complexes d'intérêt pratique, à de grands nombres de Reynolds, une approche statistique est souvent utilisée afin de simplifier les équations. Dans cette approche, les variables instantannées de l'écoulement sont décomposées en une composante moyenne et une composante fluctuante et les équations de Navier-Stokes sont moyennées dans le temps pour ainsi obtenir les équations moyennes de Reynolds. Ces équations, qu'on peut résoudre à l'aide des ordinateurs de nos jours, constituent un système ouvert et représentent le modèle mathématique le plus pratique permettant de simuler des écoulements compressibles turbulents industriels. Leur résolution requiert, cependant, une représentation adéquate des effets de la turbulence.

Les modèles de fermeture (modèles de turbulence) des équations moyennes de Reynolds sont des relations semi-empiriques nécessaires pour relier les effets moyens

de la turbulence, introduits par l'opérateur de moyenne, aux propriétés de l'écoulement moyen. Les modèles de turbulence les plus utilisés en pratique sont de deux types, les modèles algébriques et les modèles aux équations de transport. Ces modèles sont basés sur le concept de la viscosité turbulente, formulé par Boussinesq, où les effets de la turbulence sont ramenés à ceux d'une viscosité et d'une diffusivité thermique apparentes ajoutés aux propriétés de transport moléculaires. Le problème de modélisation de la turbulence est alors réduit à celui de trouver les distributions des propriétés apparentes qui approximent le mieux les effets réels de la turbulence.

La résolution numérique des équations moyennes de Reynolds compressibles, complétées par un modèle de turbulence, a fait l'objet d'une recherche intense durant la dernière décennie. La majorité des solveurs développés sont basés sur la méthode des volumes finis où deux types de schémas sont en compétition. Les schémas centrés tel que celui de Jameson et al. [5] et les schémas en amont "upwind" tel que celui proposé par Roe [6]. Récemment, les schémas "upwind" ont suscité un grand intérêt de la part de la communauté CFD pour la résolution des équations régissant les écoulements compressibles. Étant naturellement dissipatifs, ces schémas disposent d'un mécanisme implicite de stabilisation, alors que les schémas centrés requièrent l'addition explicite d'un terme de dissipation artificielle pour assurer leur stabilité numérique.

Il est bien connu que les performances d'un solveur dépendent fortement du maillage utilisé. Ces maillages sont de deux types, les maillages structurés et les maillages non-structurés. Les maillages structurés ont été largement utilisés dans la simulation des écoulements fluides et ce depuis le tout début de la CFD. Mais, la complexité, de

plus en plus grandissante, des géométries rencontrées en pratique, a fait émerger les maillages non-structurés dont l'utilisation, pour simuler des écoulements compressibles à de grands nombres de Reynolds avec la méthode des volumes finis, est une approche récente. Ces maillages offrent plus de flexibilité en s'adaptant mieux aux géométries complexes. Les éléments géométriques les plus utilisés pour la génération de ce type de maillages sont les triangles en deux dimensions et les tétrahèdres en trois dimensions.

Les principaux problèmes rencontrés lors de la résolution numérique des équations moyennes de Reynolds compressibles, en utilisant des maillages non-structurés, surgissent à cause de la grande disparité entre les échelles de longeur et de temps qu'elles font intervenir. Cela est dû aux différents phénomènes physiques décrits par ces équations.

Pour aboutir à des solutions numériques suffisamment précises, ces échelles, au moins les plus importantes, doivent être résolues par le schéma numérique utilisé. Dans la plupart des écoulements externes, tels que les écoulements transsoniques autour des profils d'ailes d'avions, les deux principales régions d'écoulement sont, les couches visqueuses (couche limites et sillages) et l'écoulement externe caractérisé par des effets visqueux négligeables.

À de grands nombres de Reynolds, les régions d'effets visqueux deviennent de plus en plus minces et présentent de forts gradients dans la direction normale à l'écoulement. Une bonne prédiction de ces gradients requiert alors l'utilisation d'éléments élancés dans ces régions. Cette approche a été souvent utilisée avec des maillages quadrilatères où les élancements des éléments rectangulaires, dans les régions visqueuses, peuvent atteindre des rapports de 10000:1 pour des nombres de

Reynolds de l'ordre de 10 millions [7].

Malgré les progrès réalisés en aérodynamique numérique. les résoluteurs développés pour la simulation des écoulements compressibles. à de grands nombres de Reynolds, ne possèdent toujours pas les performances requises pour être intégrés dans un processus industriel de design. De ce fait. d'autres travaux de recherche sont nécessaires afin d'améliorer la précision et l'efficacité des méthodes numériques utilisées. Ces travaux doivent couvrir les différents aspects reliés à la résolution numérique des équations moyennes de Reynolds compressibles pour des écoulements turbulents autour des géométries complexes. Parmi ces aspects on peut citer. l'utilisation des maillages non-structurés. l'utilisation de différents schémas numériques, l'accélération de la convergence et également la modélisation de la turbulence.

Chapitre 1

Revue bibliographique

Il est généralement admis que les équations de Navier-Stokes constituent un modèle valable pour décrire les écoulements turbulents. Cependant, les échelles de temps et de longueur au sein de tels écoulements sont tellement petites, du moins à de grands nombres de Reynolds, que le nombre de points et le pas de temps requis pour calculer des écoulements industriels complexes, en utilisant directement les équations de Naviers-Stokes, dépassent les capacités des ordinateurs actuels.

Il est toutefois possible de calculer les valeurs moyennes des propriétés de l'écoulement, auxquelles on s'intéresse en pratique, en utilisant une approche statistique qui consiste à décomposer toutes les variables instantannées, qui décrivent l'écoulement, en une composante moyenne et une composante fluctuante et à prendre la moyenne temporelle des équations.

Pour décomposer les variables instantannées, deux types de moyennes sont souvent utilisées. La moyenne conventionnelle de Reynolds et la moyenne pondérée par

la masse de Favre [8]. Dans le cas des écoulements compressibles. la technique de Reynolds introduit dans les équations moyennes des termes contenant les fluctuations de la densité et donnant ainsi des équations de formes complexes. En plus. certains de ces termes. apparaissant dans l'équation de continuité. ne sont pas consistant avec le concept usuel de la ligne de courant [9]. Afin d'éviter l'apparition explicite de ces termes. la technique de moyenne pondérée par la masse est plus adéquate.

Cette approche statistique conduit aux équations moyennes de Reynolds qui constituent un système ouvert à cause des nouvelles corrélations inconnues introduites par l'opérateur de moyenne. Ces corrélations représentent le transport de la quantité de mouvement et de la chaleur dû aux fluctuations turbulentes (tenseur de Reynolds et flux de chaleur turbulents).

La façon la plus économique et pratique pour résoudre les problèmes pratiques d'écoulements turbulents demeure l'utilisation des équations moyennes de Reynolds. Cependant. ces équations doivent être fermées en reliant les corrélations turbulentes aux propriétés de l'écoulement moyen à l'aide de modèles de turbulence.

1.1 Modèles de turbulence

Les modèles de turbulence peuvent être divisés en deux catégories. les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente et les modèles aux tensions de Reynolds.

Le concept de la viscosité turbulente a été introduit par Boussinesq en 1877. Il a supposé. par analogie avec les contraintes visqueuses de la diffusion moléculaire

de la chaleur en écoulements laminaires, que le tenseur de Reynolds et le vecteur des flux de chaleur turbulents sont, respectivement, proportionnels aux gradients de la vitesse et de la température moyennes. Les coefficients de proportionalité sont la viscosité turbulente et la diffusivité thermique turbulente. Ces deux coefficients sont des propriétés de l'écoulement et non du fluide. L'analogie de Reynolds entre le transport de la quantité de mouvement et de la chaleur est généralement utilisée pour relier ces deux coefficients où la diffusivité thermique est supposée proportionnelle à la viscosité turbulente [10].

L'hypothèse de Boussinesq ne résout pas le problème de fermeture mais ramène la modélisation de la turbulence à la recherche d'une expression convenable pour la viscosité turbulente.

Les modèles de turbulence basés sur le concept de la viscosité turbulente sont de deux types. Les modèles algébriques et les modèles aux équations de transport. Ils diffèrent par le nombre d'équations de transport à résoudre pour déterminer la viscosité turbulente.

Modèles algébriques

Ces modèles expriment la viscosité turbulente en fonction des variables locales de l'écoulement moyen. Elle est directemnet reliée au champs des vitesses moyennes et aucune équation de transport n'est requise. Ils sont aussi appelés modèles à zéro équation.

Le premier modèle de ce genre a été proposé par Prandtl [11]. Par analogie avec

le libre parcourt moyen en théorie cinétique des gaz, Prandtl a introduit le concept de la longueur de mélange pour la détermination de la viscosité turbulente et son modèle a été appelé, depuis, le modèle de longueur de mélange.

Un autre modèle algébrique est celui proposé par Cebeci et Smith [9]. Il a été développé pour des écoulements de couche limite incompressibles et consiste en un modèle à deux couches basé sur le concept de la longueur de mélange. La couche limite est supposée formée de deux régions, une couche interne et une couche externe, avec deux expressions différentes pour la viscosité turbulente. Ce modèle a été ensuite étendu, par ses auteurs, au calcul des couches limites compressibles [12].

Un des inconvénients du modèle de Cebeci-Smith est qu'il requiert, pour son implantation numérique, la valeur de la vitesse de l'écoulement externe au bord de la couche limite et le calcul de l'épaisseur de déplacement pour déterminer la viscosité turbulente dans la couche externe. Pour remédier à cet inconvénient, Baldwin et Lomax [13] ont proposé un nouveau modèle algébrique qui consiste en une amélioration du modèle de Cebeci-Smith et qui ne diffère de ce dernier que par l'expression de la viscosité turbulente dans la couche externe. Ce modèle est mieux adapté à la résolution numérique des équations moyennes de Reynolds et de ce fait il est devenu très utilisé en aérodynamique numérique [14,15,16,17].

Les modèles algébriques ont été fréquement utilisés pour la prédiction numérique des écoulements attachés et faiblement séparés avec des résultats satisfaisants [12,18, 19]. Ils offrent l'avantage d'être économiques et faciles à mettre en oeuvre. Cependant, leur inconvénient majeur est qu'ils prédisent mal les écoulements séparés et les fortes intéractions entre les couches limites et les ondes de choc [20]. Cela est dû, d'une part, aux limites théoriques de l'hypothèse de longueur de mélange qui prédit

une viscosité turbulente nulle pour un gradient de vitesse nul. Ces modèles peuvent donc ne pas prédire aucune turbulence aux voisinages des points de séparation et de réattachement de la couche limite ce qui contredit les observations expérimentales. D'autre part, les modèles algébriques sont des modèles d'équilibre qui supposent que la turbulence est dissipée là où elle est générée et de ce fait ils ne tiennent pas compte des effets de transport et de diffusion de la turbulence.

Modèles à 1/2 équation

Un seul modèle figure dans cette catégorie, c'est le modèle de Johnson-King [21] dit modèle à 1/2 équation car il ne requiert la résolution que d'une équation différentielle ordinaire. C'est un modèle de non-équilibre qui a été développé pour inclure les effets de transport de la turbulence dans les modèles algébriques afin de pouvoir prédire les écoulements séparés.

Dans ce modèle, les effets de transport de la turbulence sont introduits à l'aide d'une équation différentielle ordinaire écrite pour décrire l'évolution du cisaillement turbulent maximum dans la direction de l'écoulement. Cette contrainte maximale est ensuite utilisée comme échelle de vitesse dans une distribution algébrique de la viscosité turbulente. Ce modèle donne de très bons résultats comparativement aux modèles à zéro équation, surtout dans la région de séparation induite par le choc dans des écoulements transsoniques autour des profils aérodynamiques [22,23]. Cependant, ses prédictions ne sont pas toujours bonnes dans les régions où l'écoulement turbulent est proche de l'équilibre [24]. De plus, son implantation numérique devient très difficile en présence de plusieurs couches de cisaillement, tel que l'écoulement

autour des profils multi-éléments [25].

Modèles à une équation

Afin de mieux tenir compte des effets de transport de la turbulence et surtout de l'histoire de la turbulence et de son évolution dans le temps, des modèles reliant la viscosité turbulente à certaines propriétés caractéristiques de la turbulence ont été développés. Ces propriétés sont déterminées à partir d'équations de transport écrites pour celles-ci.

Les premiers modèles développés [24,26,27] sont basés sur la résolution d'une équation additionnelle pour le transport de l'énergie cinétique de la turbulence qu'ils utilisent comme échelle de vitesse pour déterminer la viscosité turbulente. L'échelle de longueur doit être spécifiée de façon empirique, ce qui constitue la difficulté majeure.

Pour surmonter les problèmes reliés à l'échelle de longueur et le traitement de géométries de plus en plus complexes, Baldwin et Barth [28] ont développé, à partir d'une forme simplifiée des équations du modèle $k - \epsilon$, un nouveau modèle qui nécessite la résolution d'une équation de transport pour le nombre de Reynolds turbulent modifié par la viscosité dynamique. La variable de Baldwin et Barth est directement reliée à la viscosité turbulente.

Ce modèle a été développé dans le but de mieux prédire les écoulements transsoniques séparés autour des profils aérodynamiques et les écoulements à plusieures couches de cisaillement, tels que les écoulements autour des profils multi-éléments.

Ne nécissitant pas la spécification explicite d'une échelle de longueur, son implantation sur des maillage non-structurés est facilitée. Il offre aussi l'avantage de pouvoir être intégré jusqu'à la paroi solide. cependant, il nécessite la connaissance de la distance normale à la paroi. Pour le rendre indépendant de la distance normale, Goldberg et al. [29] ont proposé une modification au modèle original où d'autre formes de fonctions d'amortissement sont utilisées.

Ce modèle a fait l'objet de plusieurs comparaisons avec d'autres modèles sur des écoulements externes en deux et en trois dimensions. Ses résultats se comparent à ceux du modèle de Johnson-King [17,19,30,31] et sont parfois meilleurs [32].

En 1992, un autre modèle à une équation, basé sur la philosophie de celui de Baldwin-Barth, a été proposé par Spalart et Allmaras [33]. Ce modèle, dont la dérivation a été faite de façon empirique en se servant de l'analyse dimensionnelle, requiert la résolution d'une équation de transport écrite pour une viscosité turbulente adimensionnelle.

Ce modèle a été appliqué, par ses auteurs et par d'autres chercheurs [31,32,34,35, 36], pour calculer des écoulements externes autour des profils simples et multi-éléments. Ses prédictions ont été comparées à celles des modèles de Johnson-King et de Baldwin-Barth. Dans l'ensemble, il performe aussi bien que ces deux modèles.

Modèles à deux équations

Ces modèles représentent une autre façon de remédier à la spécification de l'échelle de longueur requise par les modèles à une équation. On les appelle souvent

des modèles complets, car les propriétés caractéristiques de la turbulence, utilisées pour déterminer la viscosité turbulente, sont toutes obtenues à partir d'équations de transport.

La plupart de ces modèles, rencontrés en pratique, utilisent une équation pour l'énergie cinétique de la turbulence et une autre pour une variable reliée à l'échelle de longueur de la turbulence. La principale différence entre les modèles à deux équations est le choix de la variable dépendante pour la deuxième équation. Le plus utilisé de ces modèles est le modèle $k-\epsilon$ proposé par Launder et Spalding [37]. Dans ce modèle, la deuxième variable utilisée pour déterminer l'échelle de longueur est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence.

Dans sa version standard, le modèle $k-\epsilon$ ne peut pas être intégré à travers la sous-couche laminaire. En pratique, sa mise en oeuvre est toujours complétée par les lois de paroi [38,39,40,41]. Ce modèle donne de bons résultats mais il ne performe pas bien dans les régions d'écoulements séparés. Son inconvénient est qu'il n'est pas sensible aux gradients de pression adverses, même modérés [42,43].

Plusieurs problèmes industriels requièrent l'intégration du modèle de turbulence jusqu'à la paroi. En particulier, les problèmes où l'écoulement est sujet à des séparations. Pour répondre à ce besoin, plusieurs modifications à la version standard du modèle $k-\epsilon$ ont été proposées [44,45,46]. Ces variantes sont appelées les modèles à faibles nombres de Reynolds. En plus d'être numériquement très coûteux, car ils nécessitent un maillage très fin près de la paroi, ces modèles n'apportent pratiquement aucune amélioration aux prédictions du modèle standard, surtout dans les couches limites soumises à des gradients de pression défavorables [45,47,48].

Pour remédier aux inconvénients du modèle $k - \epsilon$, d'autres modèles à deux équations ont été proposés [49,50,51]. Le plus performant d'entre eux est le modèle $k - \omega$ développé par Wilcox [49]. Dans ce modèle, l'échelle de longueur est reliée à une pseudo-vorticité ω qui représente le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence spécifique. Les avantages de ce modèle sont multiples. Il est reconnu pour sa robustesse et la précision de ses résultats. Il peut être intégré jusqu'à la paroi, il performe beaucoup mieux que les modèles $k - \epsilon$ dans les régions d'écoulements séparés et il possède une formulation mathématique simple. Il n'utilise aucune fonction d'amortissement près de la paroi et l'équation de ω possède des conditions aux frontières exactes à la paroi solide. Cependant, son inconvénient majeur est qu'il est très sensible aux valeurs de ω dans l'écoulement libre, et les résultats de ses prédictions dépendent fortement de ces valeurs [52].

Pour rendre le modèle $k - \omega$ moins sensible aux valeurs de ω dans l'écoulement libre, des modifications au modèle original ont été suggérées [42,43,53]. Les plus intéressantes de ces modifications sont celles proposées par Menter [42]. La première est le modèle $k-\omega$ BSL "Baseline" qui consiste à utiliser le modèle original près de la paroi et le modèle $k-\epsilon$ loin de la paroi. La deuxième est le modèle $k-\omega$ SST "Shear-Stress Transport" qui, en plus de la formulation BSL, utilise une modification de la définition de la viscosité turbulente, semblable à celle du modèle de Johnson-King, dans les régions d'écoulement soumises à des gradients de pression adverses.

Ces modèles ont été appliqués à différents types d'écoulements et comparés entre eux et avec d'autres modèles [30,35,46,54,55,56]. Mis à part la sensibilité du modèle original aux valeurs de ω dans l'écoulement libre, les trois modèles ont de bonnes performances. Cependant, malgrè le fait que le modèle original et le modèle BSL

performent mieux que le modèle $k - \epsilon$ pour des écoulements avec des gradients de pression défavorables, ils continuent à sous-estimer l'étendue de la séparation en présence de gradients de pression adverses sévères [30].

Modèles aux tensions de Reynolds

Ces modèles constituent la deuxième catégorie de modèles de turbulence. Il n'utilisent pas le concept de la viscosité turbulente et les tensions de Reynolds et les flux de chaleur turbulents sont déterminés à partir d'équations de transport contenant les tensions et les flux eux-mêmes. Ces modèles sont passés en revue par Launder [57] et évalués dans [58,59]. Ils sont plus élaborés que les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente et donnent, en général, des résultats plus précis.

Ces modèles ont été développés pour des écoulements incompressibles [60]. Ces dernières années, quelques extensions aux calculs des écoulements compressibles sont rapportées dans la littérature [61,62,63,64,65]. Cependant , leur complexité et le coût associé à leur implantation numérique, limite encore leur utilisation en pratique.

En se basant sur l'hypothèse de Morkovin [66], les effets de la turbulence en écoulements compressibles ont été modélisés à l'aide des modèles développés pour les écoulements incompressibles. En effet, Morkovin a montré expérimentalement, et cela a été confirmé par Bradshaw [67], que les effets de compressibilité, c'est-à-dire des fluctuations turbulentes de la masse volumique, sur la structure de la turbulence dans les couches limites et les sillages, demeurent faibles pour des nombres de Mach inférieurs à 5. La structure de la turbulence, pour de tels nombres de Mach, demeure

donc très semblable à celle des écoulements incompressibles correspondants.

1.2 Méthodes de calcul des écoulements visqueux compressibles

La résolution des équations moyennes de Reynolds, complétées par un modèle de turbulence, qui se ramènent aux équations de Navier-Stokes en régime laminaire, permet la simulation de nombreux problèmes d'intérêt pratique. Pour calculer des écoulements visqueux compressibles, ces équations sont généralement résolues en introduisant les termes visqueux et de transfert de chaleur dans un solveur d'équations d'Euler.

La plupart des méthodes numériques, utilisées aujourd'hui, pour résoudre ces équations, sont basées sur la technique des volumes finis. Ces méthodes peuvent être divisées en deux grandes catégories, les schémas aux différences centrées et les schémas avec différentiation en amont (schémas "upwind").

Schémas aux différences centrées

Afin de résoudre les équations d'Euler et de Navier-Stokes, plusieurs schémas aux différences centrées ont été développés. Le plus populaire d'entre eux est celui proposé par MacCormack [68,69] pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Il consiste en un schéma explicite utilisant une technique de prédicteur-correcteur et a été utilisé par Deiwert [70] pour calculer des écoulements visqueux autour de profils

aérodynamiques. L'intégration explicite dans le temps rendait ce schéma très long à converger. Pour remédier à cet inconvénient, Beam et Warming [71] ont suggéré l'utilisation d'une intégration implicite dans le temps. Ce schéma, développé pour les équations d'Euler, a été étendu pour traiter des écoulements visqueux avec une nette réduction du temps de calcul [72].

Les schémas précédents sont des schémas de différences finies. Avec l'apparition du schéma de Jameson et al. [73], la méthode des volumes finis a connu un essor considérable dans la résolution des équations d'Euler et de Navier-Stokes. Ce schéma, encore très utilisé dans l'industrie aéronautique, est un schéma aux différences centrées basé sur la technique des volumes finis et utilise l'algorithme de Runge-Kutta à plusieurs pas pour avancer dans le temps. Il a permis le calcul d'écoulements non-visqueux autour d'un avion au complet [74] et il a été étendu à la résolution des équations de Navier-Stokes [75].

Les schémas aux différences centrées donnent des solutions précises à l'ordre deux dans l'espace. Cependant, ils nécessitent l'addition explicite de la dissipation numérique pour assurer la stabilité des solutions au niveau des régimes supersoniques et des chocs.

Schémas avec différenciation en amont

Pour éviter l'instabilité numérique au niveau des chocs et mieux capter ceux-ci, de nouveaux schémas utilisant une différenciation en amont, basés sur les caractéristiques du système d'équations à résoudre, ont été développés. Ces schémas sont naturellement dissipatifs, bénéficiant ainsi d'un mécanisme implicite pour sta-

biliser la solution et sans l'addition de la viscosité artificielle. Ils ont à l'origine le schéma CIR proposé par Courant, Isaacson et Reeves [76]. La première catégorie de ces schémas est appelée Division du Vecteur des Flux (FVS "Flux Vector Splitting"). Elle englobe les schémas proposés par Steger et Warming [77] et Van Leer [78]. Cette méthode consiste à diviser le flux en un point de l'écoulement en deux composantes différenciées en amont suivant les signes des valeurs propres. Elle a les avantages suivants [79]: les formulations sont relativement simples et la division des flux est facile à linéariser pour être utilisée dans les schémas implicites.

Une forme non-conservative des schémas FVS a été proposée par Chakravarthy et al. [80] et utilisée par Moretti dans son schéma λ [81]. Ces schémas sont appelés Division des Coefficients de la Matrice (CSM "Split Coefficient Matrix"). N'étant pas conservatifs, ils sont incapables de résoudre les chocs.

La deuxième catégorie de schéma en amont est basée sur la résolution d'un problème de Riemann à chaque interface de deux cellules adjacentes. Cette catégorie est appelée Division de la Différence des Flux (FDS "Flux Difference Splitting") et elle consiste à diviser la différence des flux à l'interface suivant les signes des valeurs propres calculées à cette interface. Les schémas de cette catégorie sont aussi appelés les solveurs de Riemann.

Ces schémas ont été développés suite à une méthode originale proposée par Godunov [82] où il propose un schéma permettant la résolution exacte, à chaque interface, d'un problème unidimensionnel de Riemann. Ce schéma est, cependant, très coûteux. Pour réduire le temps de calcul, Osher et Solomon [83] ont suggéré de résoudre le problème de Riemann de façon approximative. Dans le même but, Roe [6,84], en linéarisant le problème de Riemann, a développé le premier schéma

FDS où les flux sont évalués en utilisant la solution exacte d'un problème linéarisé. L'inconvénient de ce schéma est qu'il peut admettre, comme solutions non-physiques, les ondes d'expansion. Pour éviter ce problème une correction d'entropie a été proposée par Harten [85]. Cette correction a fait du schéma de Roe le schéma le plus utilisé car il offre l'avantage de mieux capter les chocs et les discontinuités de contact et d'être le moins coûteux. Un autre schéma FDS, satisfaisant la condition d'entropie, a été développé par Enquist et Osher [86] mais l'exploitation de ce dernier est plus coûteuse.

Les schémas utilisant une différenciation en amont sont précis à l'ordre un dans l'espace. Afin d'améliorer leur précision, plusieurs extensions à des ordres de précision supérieurs ont été proposés. Parmi celles-ci, on retrouve le schéma FCT ("Flux Corrected Transport") introduit par Boris et Book [87], l'algorithme MUSCL ("Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws") proposé par Van Leer [88,89] et les schémas TVD ("Total Variation Diminishing") formulés par Harten [85,90] et Chakravarthy et Osher [91].

Pour prévenir les oscillations numériques qui peuvent survenir aux voisinages des discontinuités (ondes de chocs), et assurer ainsi la stabilité des schéma d'ordre supérieurs de même que la monotonie de la solution, des limiteurs [92,93] sont souvent utilisés. La construction de tels schémas est difficile et leur application en deux et en trois dimensions est problématique.

Dans le but d'étendre les schémas d'ordre supérieur à des maillages non-structurés, Barth et Jespersen [94] ont développé une nouvelle méthode de reconstruction avec un limiteur multi-dimensionnel. Ce limiteur éprouve des difficultés de convergence. En analysant ce problème, Venkatakrishnan [95] a proposé des modifications qui

améliorent la situation au détriment de la monotonie. Aftosmis et al. [96] ont aussi trouvé que les modifcations proposées dans [95] améliorent de façon significative la convergence ainsi que la précision de la solution pour certains cas tests.

Dans les problèmes unidimensionnels, l'information se propage selon une seule direction et la division du flux est évidente. En deux et en trois dimensions, la détermination de la direction de propagation de l'information est difficile. L'extension des solveurs FDS, les plus utilisés, au calcul des écoulements bidimensionnels a été toujours faite en résolvant une série de problèmes de Riemann unidimensionnels où les flux sont évalués suivant la direction normale à l'interface [97,98]. Pour tenir compte de la vraie direction de propagation de l'information Davis [99] et Dadone et Grossman [100] proposent des schémas tournés ("Rotated Upwind Schemes") qui consistent à évaluer les flux selon la direction normale à la direction du choc qu'ils déterminent à priori. De cette façon les chocs sont mieux résolus et leurs positions mieux prédites.

Dans le même ordre d'idée, Roe [101], dans le but de développer des schémas multidimensionnels, a proposé des modèles d'ondes qui consistent à décomposer, localement, le gradient de la solution en ondes acoustiques, d'entropie et de cisaillement afin de calculer la force, l'orientation et la vitesse de ces dernières. Ce schéma a été utilisé, récemment, pour la résolution exacte des ondes de choc et des discontinuités de contact [102].

Afin d'améliorer l'extension des schémas en amont à des problèmes multi-dimensionnels, Zhang et al. [103] ont suggéré récemment une différenciation en amont selon la direction de l'écoulement. Cette méthode à été appliquée avec succès à des écoulements non-visqueux.

Effets de la dissipation numérique

L'extension des méthodes de résolution des équations d'Euler à la résolution des équations de Navier-Stokes produit généralement des solveurs efficaces et stables même à de grands nombres de Reynolds. Cependant, la présence au sein de l'écoulement, de deux régions avec des échelles caractéristiques différentes (une région visqueuse et une région non-visqueuse pouvant contenir des discontinuités) nécessite une résolution suffisament précise de tous les phénomènes présents.

Il est bien connu que dans le calcul des écoulements visqueux compressibles à de grands nombre de Reynolds, la précision de la solution dépend essentiellement de la dissipation numérique introduite par la discrétisation des termes convectifs des équations de Navier-Stokes. Cette dissipation est toujours présente et peut, selon le solveur d'Euler utilisé, masquer la viscosité physique réelle menant ainsi à des solutions qui correspondent à des problèmes différents de ceux qu'on veut résoudre.

En utilisant les schémas aux différences centrées, la viscosité artificielle doit être réduite dans les régions visqueuses afin d'éviter la perte de précision [104]. La plupart de ces schémas sont basés sur la méthode de Jameson et al. [5] et ils ont été appliqués pour calculer plusieurs écoulements visqueux [16,105]. Les effets des termes de dissipation numérique sur la précision et le taux de convergence des solutions des équations de Navier-Stokes bi et tridimensionnelles sont discutés par Swanson et Turkel [106] et Caughey et Turkel [107].

Concernant les schémas en amont, en comparant certains solveurs de Riemann, Hänel [108] a montré qu'en les appliquant au calcul des écoulements visqueux compressibles, la précision de ces schémas dépend essentiellement des différentes formu-

lations des solveurs et de la façon dont les flux d'ordres supérieurs sont construits, c'est-à-dire du limiteur de flux et de la discrétisation. Une autre comparaison des schémas en amont a été faite par Van Leer et al. [109]. Cette dernière comparaison a montré que les FVS sont plus dissipatifs que les schémas FDS. Les effets des limiteurs de flux dans les régions visqueuses ont été étudiés par Hänel et al. [110] où ils ont montré la nécessité de réduire l'influence des limiteurs dans ces régions.

Conditions aux frontières

Contrairement aux équations d'Euler, la présence des termes visqueux et de conduction de la chaleur dans les équations de Navier-Stokes compressibles transforme les équations de mouvement et d'énergie en équations aux dérivées partielles de second ordre. Les équations de Navier-Stokes compressibles requièrent donc plus de conditions aux frontières que les équations d'Euler. L'application correcte de ces conditions aux frontières représente une partie importante dans la résolution des équations. Les conditions aux frontières visqueuses doivent être compatibles avec celles des équations d'Euler autrement un comportement non physique de la couche limite peut apparaitre [111]. D'autre part, Martinelli et al [16] ont mentionné qu'aux parois solides, un stockage aux centres des éléments convient plus à l'imposition des conditions de type Neumann alors qu'un stockage aux noeuds est plus convenable aux conditions de type Dirichlet.

Accélération de la convergence

La plupart des solveurs développés pour résoudre les équations d'Euler et de Navier-Stokes utilisent des schémas explicites à cause de leur facilité de mise en oeuvre et leur économie en espace mémoire. Cependant, le calcul des écoulements visqueux compressibles à de grands nombres de Reynolds nécessite le raffinement du maillage dans les régions visqueuses, qui deviennent de plus en plus minces, afin de bien prédire les forts gradients rencontrés dans ces régions. Les schémas explicites deviennent alors longs à converger à cause du critère de stabilité CFL que doit satisfaire le pas de temps. Pour accélérer la convergence, plusieurs approches ont été proposées. Parmi celles-ci, on retrouve l'utilisation de la technique du pas de temps local (LTS "Local Time Stepping"), telle que celle proposée par Osher et Sanders [112], améliorée par Berger [113] et généralisée ensuite par Kleb et al. [114] aux équations d'Euler et de Navier-Stokes bidimensionnelles. Une nouvelle technique LTS utilisant une procédure de mise à jours des flux a été proposée récemment par Zhang el al. [115]. Elle consiste à utiliser des pas de temps locaux très proches des pas de temps maximums permis après une analyse de stabilité locale. Cette approche permet de réduire le temps de calcul tout en améliorant la précision de la solution. Elle a été appliquée par ses auteurs pour résoudre les équations d'Euler et de Navier-Stokes.

Une autre approche très utilisée est la méthode multigrille proposée par Brandt [116]. Elle consiste à effectuer des pas de temps sur des maillages grossiers afin d'établir des corrections à une solution sur un maillage fin. Des algorithmes utilisant cette méthode pour la résolution des équations d'Euler et de Navier-Stokes ont été développés par Ni [117], Martinelli et al. [16], Siclari et al. [118] et Mavriplis

et Jameson [7]. Cette méthode a aussi été appliquée au calcul des écoulements compressibles turbulents [119].

Une autre méthode multigrille, utilisant le concept d'agglomération (regroupement des éléments des maillages fins) pour générer des maillages grossiers, a été développée ces dernières années [120]. Cette méthode a été appliquée pour la résolution des équations d'Euler et de Navier-Stokes en deux et en trois dimensions [121,122,123].

D'autres techniques sont aussi utilisées pour l'accélération de la convergence, telles que le lissage implicite des résidus ("Implicit Residual Smoothing") [124] et la surrelaxation [125]. Une étude comparative des différentes techniques d'accélération de convergence a été réalisée, récemment, par Côté [126].

Avec l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants, on peut contourner la restriction du critère CFL par l'utilisation des schémas implicites. Ces schémas ont l'avantage de permettre des pas de temps plus grands que ceux des schémas explicites. Leur inconvénient est, cependant, le besoin de beaucoup d'espace mémoire à cause des grandes tailles des systèmes matriciels à résoudre, surtout pour calculer des écoulements turbulents.

Des schémas semi-implicites [127], localement implicites [128] et globalement implicites ("Fully Implicit") [129] ont été développés pour des maillages structurés et non-structurés. Selon une synthèse d'algorithmes basés sur la technique des volumes finis et appliqués sur des maillages non-structurés pour résoudre les équations d'Euler, présentée par Whitaker et al. [130], les schémas globalement implicite utilisés avec une décomposition LU sont ceux qui convergent le plus rapidement

vers la solution stationnaire.

À la lumière de cette synthèse, une nouvelle méthode globalement implicite avec une décomposition LU, basée sur la technique des volumes finis et utilisant le schéma de Roe a été développé [131,132]. L'implantation de cette méthode pour la résolution des équations d'Euler a permis l'utilisation de grands nombre CFL et l'amélioration du taux de convergence.

Pour accélérer davantage la convergence, des formulations des schémas implicites avec le technique multigrille ont été proposées [133,134].

1.3 Équations de Navier-Stokes et maillages non-structurés

La résolution des équations régissant les écoulements fluides nécessite une bonne représentation du domaine de calcul et de la géométrie. Dans le passé, et à cause des ressources informatiques limitées, cette représentation a été faite à l'aide de maillages structurés tels que les maillages cartésiens [135], les maillages adaptés aux frontières (BFC "Boundary Fitted Coordinate") [136] et les maillages par zones ou multi-blocs [137]. Avec l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants, les chercheurs se sont intéressés à la simulation d'écoulements autour de géométries complexes rencontrées souvent en pratique. La génération des maillages structurés autour de telles géométries est alors devenue problématique. Cette situation a conduit, récemment, à l'utilisation des maillages non-structurés avec, comme éléments géométriques de base, le triangle en deux dimensions et le tétrahèdre en trois dimensions.

À cause de leur grande souplesse, l'utilisation de ces maillages s'est répandue, et avec succès, dans le calcul des écoulements compressibles non-visqueux en deux et en trois dimensions [130,138,139,94,140].

Si beaucoup d'algorithmes ont été développés sur des maillages non-structurés pour résoudre les équations d'Euler, cela n'est pas le cas pour les équations de Navier-Stokes. L'utilisation des maillages non-structurés pour résoudre ces équations est encore rare. De plus, la plupart des solutions obtenues en résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles sur des maillages triangulaires sont limitées à de faibles nombres de Reynolds et elles ont été obtenues en utilisant la méthode des éléments finis [7,141,142,143].

Récemment, un certain nombre d'algorithmes basés sur la technique des volumes finis ont été développés pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles sur des maillages non-structurés. Venkatakrishnan et al. [144,145] et Knight [129] ont proposé des algorithmes utilisant des schémas implicites, tandis que [146,147] utilisent des schémas explicites.

L'application de ces algorithmes a été limitée, dans la majorité des cas, aux calculs des écoulements laminaires. En augmentant le nombre de Reynolds, les régions visqueuses près des parois solides deviennent de plus en plus minces avec des variations beaucoup plus fortes dans la direction normale que tangentielle. Numériquement, cela requiert des éléments élancés pour pouvoir prédire de façon précise les gradients dans ces régions. L'utilisation de maillages triangulaires peut, cependant, dégrader la précision de l'algorithme à cause des petits angles qui apparaissent. C'est l'une des raisons qui a mené à l'utilisation des maillages hybrides [142,148] qui sont composés d' un maillage structuré près des parois solides et dans

les sillages complété par un maillage non-structuré dans le reste du domaine. Cette approche manque de généralité quant à son application à des géométries beaucoup plus complexes. L'utilisation des maillages non-structurés dans tout le domaine demeure alors le seul moyen pouvant produire des algorithmes plus généraux et plus flexibles pour le calcul des écoulements visqueux compressibles.

Plusieurs mailleurs ont été développés pour générer des maillages élancés. Ces mailleurs peuvent être divisés en trois types, le mailleur frontal généralisé développé par Péraire et al. [149] et Löhner et al. [150], le mailleur Delaunay généralisé développé par Mavriplis [151] et le mailleur incrémental généralisé développé par Yang et al. [152].

1.4 Modèles de turbulence et maillages non-structurés

Quelques tentatives ont été faites récemment pour simuler des écoulements turbulents sur des maillages non-structurés. Rostand [153] a implanté un modèle algébrique sur des maillages non-structurés pour calculer des écoulements hypersoniques sur une plaque plane et une rampe. Son approche a été reprise et raffinée par Mavriplis [154] pour calculer des écoulements compressibles subsoniques et turbulents autour des profils aérodynamiques simples et multi-éléments. Les deux implantations utilisent deux maillages, un maillage non-structurés pour résoudre les équations de l'écoulements moyen et un maillage localement structuré pour calculer la viscosité turbulente. L'utilisation d'un maillage localement structuré limite la

généralité d'une telle approche.

1.5 Motivations et objectifs

L'amélioration des performances aérodynamiques d'un avion est pratiquement une tâche interminable. La nouvelle génération de ces moyens de transport opère généralement à des nombres de Mach et de Reynolds suffisamment élevés pour que les écoulements qui se développent autour des ailes soient compressibles et turbulents. Même au décollage et à l'atterissage, où les vitesses de vol sont faibles, des effets de compressibilité ont été observés sur les dispositifs hypersustentateurs.

L'aile de géométrie tridimensionnelle, qui est la composante principale d'un avion, est constituée d'un ensemble de profils aérodynamiques qui, eux, sont des géométries bidimensionnelles.L'amélioration des performances aérodynamiques de ces profils est à la base de l'amélioration des performances de tout l'appareil.

La présence de la couche limite sur les profils aérodynamiques est responsable de la majeure partie de la trainée (trainée de frottement) que les concepteurs cherchent depuis des années à réduire pour améliorer les performances. Au décollage et à l'atterissage, la couche limite peut se séparer sous l'effet des grands angles d'incidence que peuvent atteindre les profils dans ces conditions "off-design". Cette séparation dégrade davantage les performances car elle est toujours accompagnée d'une augmentation de la trainée et d'une chute de la portance.

En régime transsonique, un autre phénomène, responsable lui aussi de la dégradation des performances, est la formation d'ondes de choc. Ces régions très minces

de l'ordre de $10^{-5}cm$, sont la cause de changements brusques dans les propriétés du fluide et d'une trainée additionnelle induite par le choc. La présence d'une couche limite dans un tel régime peut décaler la position de l'onde de choc d'une distance pouvant atteindre jusqu'à 20% de la corde du profil [2]. En plus, l'interaction onde de choc-couche limite peut devenir tellement forte qu'elle peut provoquer la séparation de l'écoulement dont les conséquences sont néfastes. L'amélioration des performances des profils aérodynamiques nécessite donc une meilleure prédiction de tous ces phénomènes complexes où les effets visqueux jouent un rôle très important.

Prédire des écoulements compressibles turbulents autour des profils aérodynamiques, que se soit en régime stationnaire ou instationnaire, est un aspect important du processus de design et d'évaluation des performances d'un avion. En régime transsonique, ceci demeure un des grands objectifs de l'aérodynamique numérique [155].

Durant la dernière décennie, les maillages non-structurés ont été utilisé pour calculer des écoulements bidimensionnels et des efforts considérables ont été déployés pour le développement des solveurs Navier-Stokes compressibles sur ce type de maillages. Cependant, ces efforts ce sont limités, dans la majorité des cas, à la simulation des écoulements à faibles nombres de Reynolds (écoulements laminaires) en utilisant des éléments isotropes.

Simuler des écoulements compressibles à de grands nombres de Reynolds sur des maillages non-structurés, même isotropes, en utilisant les équations moyennes de Reynolds et un modèle de turbulence, est pratiquement un domaine non-exploré [156]. Encore moins, en utilisant des maillages anisotropes (éléments élancés) nécessaires pour une bonne prédiction des écoulements à caractères unidimensionnels, tels

que les couches limites, les sillages et les ondes de choc. Les principaux obstacles à une meilleure prédiction des problèmes d'écoulements turbulents sur des maillages non-structurés sont, l'exigence d'éléments élancés dans les régions visqueuses, qui peut compromettre la précision et l'efficacité du schéma numérique utilisé, et la modélisation de la turbulence [119].

L'objectif principal de la présente étude est la simulation numérique des écoulements compressibles turbulents, bidimensionnels et stationnaires, autour des profils d'ailes d'avions, en utilisant des maillages triangulaires anisotropes et le schéma upwind standard de Roe. Ceci est important pour les ingénieurs aérodynamiciens qui cherchent à améliorer la prédiction des caractéristiques aérodynamiques moyennes, tel que le coefficient de frottement, ainsi que la prédiction du comportement global de l'écoulement, telle que l'amorce de la séparation. L'évaluation du schéma standard de Roe et l'implantation et l'évaluation de différents modèles de turbulence, sur le type de maillages utilisés, fait aussi partie des objectifs. Ainsi que le développement d'une nouvelle technique permettant de faciliter l'implantation des modèles algébriques sur des maillages triangulaires.

Le développement d'un solveur basé sur le schéma upwind standard de Roe pour simuler, numériquement, des écoulements compressibles turbulents en utilisant des maillages non-structurés triangulaires anisotropes représente alors une originalité. Les modèles algébriques de turbulence sont reconnus par leur économie en temps de calcul et leurs résultats satisfaisants dans le cas des écoulements attachés et faiblement séparés. Cependant, leur implantation sur des maillages non-structurés est une tâche difficile qui peut même compromettre leur économie. Les quelques tentatives d'implantation de ces modèles sur des maillages non-structurés, utilisent le maillage

non-structuré pour le calcul de l'écoulement moyen et un maillage structuré pour calculer la viscosité turbulente. L'utilisation d'un maillage structuré pour simuler les effets de la turbulence limite la généralité de cette approche. La nouvelle technique proposée pour implanter des modèles algébriques sur des maillages triangulaires et qui consiste à utiliser un seul maillage représente aussi une originalité.

Chapitre 2

Formulation mathématique

2.1 Équations de Navier-Stokes

Le meilleur modèle mathématique, disponible jusqu'à date, pour décrire les différents phénomènes aérodynamiques, aussi complexes soient-ils, rencontrés dans la majorité des problèmes de l'industrie aéronautique, est le système d'équations de Navier-Stokes. Ces équations représentent les équations de base de la dynamique des fluides et régissent aussi bien les écoulements laminaires que turbulents. Même si elles n'expriment que la conservation de la quantité de mouvement, ces équations sont souvent citées comme exprimant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Elles sont obtenues en appliquant les principes de conservation à un volume de contrôle infinitésimal.

La forme différentielle et conservative des équations de Navier-Stokes, pour un écoulement instationnaire d'un fluide compressible, peut s'écrire sous la forme vec-

torielle compacte suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) = 0 \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{U}$ est le vecteur des variables conservatives, $\boldsymbol{F}$ le vecteur des flux convectifs et $\boldsymbol{G}$ le vecteur des flux visqueux.

$$\boldsymbol{U} = [\, \rho,\ \rho \boldsymbol{u},\ \rho E \,]^T \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + p\boldsymbol{I} \\ (\rho E + p)\boldsymbol{u} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

ρ étant la densité, p la pression, $\boldsymbol{u} = (u, v)^T$ le vecteur vitesse, $\boldsymbol{I}$ le tenseur unitaire et E l'énergie totale par unité de masse. En négligeant l'énergie potentielle, E est alors exprimée par :

$$E = e + \frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.4}$$

où e est l'énergie interne spécifique. Les forces massiques ont été négligées car leurs effets sont très faibles en aérodynamique.

Dans le cas des fluides newtoniens, tel que l'air, le tenseur des contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$ est proportionnel aux taux de déformations et leur est relié par la relation linéaire suivante :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla^T \boldsymbol{u}) + \lambda \boldsymbol{I} \nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.5}$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide et λ est ce qu'on appelle communement le second coefficient de viscosité. En aérodynamique subsonique, transsonique et supersonique, la température et la pression de l'air atteignent des valeurs modérées. L'air peut alors être considéré en équilibre thermodynamique où

μ et λ sont reliés par la relation de Stokes :

$$2\mu + 3\lambda = 0 \tag{2.6}$$

d'où

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \tag{2.7}$$

Le flux de chaleur par conduction $\boldsymbol{q}$ est donné par la relation de Fourier :

$$\boldsymbol{q} = -K\nabla T \tag{2.8}$$

où K est la conductivité thermique du fluide et T la température.

Pour fermer le système d'équations (2.1), une équation d'état et des relations reliant les propriétés de transport μ et K aux variables thermodynamiques sont requises. Sachant que l'état d'un fluide en équilibre thermodynamique est complètement défini par deux des variables d'état, on peut choisir l'équation d'état sous la forme générale suivante :

$$p = p(\rho, e) \tag{2.9}$$

Dans le cas d'un gaz parfait, cette équation devient :

$$p = \rho RT \tag{2.10}$$

ou encore

$$p = (\gamma - 1)\rho(E - \frac{1}{2}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) \tag{2.11}$$

où R est la constante du gaz (pour l'air R=287 m^2/s^2 $K)et\gamma$ est une constante exprimant le rapport des chaleurs spécifiques à pression et à volume constants (pour l'air γ=1.4).

La viscosité moléculaire, μ, est reliée à la température par la relation empirique de Sutherland :

$$\mu = \mu_r \left(\frac{T}{T_r}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_r + S_0}{T + S_0} \tag{2.12}$$

où μ_r et T_r sont des valeurs de référence et S_0 une température effective constante (pour l'air S_0=110.4 °K).

Le coefficient de conductivité thermique, K, est relié à la viscosité, et donc à la température, par le nombre de Prandtl défini par :

$$Pr = \frac{C_p \mu}{K} \tag{2.13}$$

d'où

$$K = \frac{C_p \mu}{Pr} \tag{2.14}$$

où C_p est la chaleur spécifique à pression constante. Pour un gaz parfait, elle est donnée par :

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \tag{2.15}$$

Le flux de chaleur, $\boldsymbol{q}$, devient alors :

$$\boldsymbol{q} = -\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{\mu}{Pr} \nabla T \tag{2.16}$$

Pour l'air, à des températures modérées, $Pr = 0.72$.

2.2 Équations moyennes de Reynolds

La façon la plus pratique pour calculer des écoulements turbulents industriels demeure l'utilisation des équations moyennes de Reynolds. Ces équations peuvent

être obtenues à partir des équations de Navier-Stokes en décomposant les variables de l'écoulement en une composante moyenne et une composante fluctuante et en prenant la moyenne temporelle des équations. Deux types de moyennes sont généralement utilisées. La moyenne de Reynolds et la moyenne pondérée par la masse (moyenne de Favre).

2.2.1 Moyenne de Reynolds

La méthode conventionnelle de Reynolds consiste à décomposer toute variable ϕ de l'écoulement de la façon suivante :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi' \tag{2.17}$$

avec

$$\overline{\phi} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \phi dt \tag{2.18}$$

où $\overline{\phi}$ est la moyenne temporelle et ϕ' la composante fluctuante de ϕ. Par définition, la moyenne temporelle des fluctuations est nulle, $\overline{\phi} = 0$.

2.2.2 Moyenne de Favre

Cette technique consiste à décomposer la variable de l'écoulement, ϕ, comme suit :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \tag{2.19}$$

où $\tilde{\phi}$ est la moyenne pondérée par la masse, définie par :

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\rho}} \tag{2.20}$$

avec

$$\overline{\rho\phi''} = 0 \tag{2.21}$$

et

$$\overline{\phi''} = -\frac{\overline{\rho'\phi'}}{\overline{\rho}} \neq 0 \tag{2.22}$$

En appliquant la décomposition de Reynolds à la pression et à la densité et celle de Favre au reste des variables et en négligeant les fluctuations des propriétés de transport, μ et K, puis en prenant la moyenne de l'équation (2.1), on obtient les équations moyennes de Reynolds compressibles.

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{F}} - \tilde{\boldsymbol{G}}) = 0 \tag{2.23}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = [\, \overline{\rho},\ \overline{\rho}\tilde{\boldsymbol{u}},\ \overline{\rho}\overline{E}\,]^T \tag{2.24}$$

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \rho\tilde{\boldsymbol{u}} \\ \overline{\rho}\tilde{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{u}} + \overline{p}\boldsymbol{I} \\ (\overline{\rho}\overline{E} + \overline{p})\tilde{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_t \\ \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot (\overline{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_t) - (\overline{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}_t) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

où

$$\boldsymbol{\tau}_t = -\overline{\rho\boldsymbol{u}'' \otimes \boldsymbol{u}''} \tag{2.26}$$

et

$$\boldsymbol{q}_t = -\overline{\rho h''\boldsymbol{u}''} \tag{2.27}$$

où h'' est la composante fluctuante de l'enthalpie spécifique, $\overline{E}$ est l'énergie totale par unité de masse de l'écoulement moyen

$$\overline{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \tag{2.28}$$

et

$$\overline{\boldsymbol{\tau}} = \mu(\nabla\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla^T\tilde{\boldsymbol{u}}) + \lambda\boldsymbol{I}\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} + \mu(\nabla\overline{\boldsymbol{u}''} + \nabla^T\overline{\boldsymbol{u}''}) + \lambda\boldsymbol{\nabla} \cdot \overline{\boldsymbol{u}''} \tag{2.29}$$

$$\overline{q} = -K\nabla\tilde{T} = -\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\frac{\mu}{Pr}\nabla\tilde{T} \tag{2.30}$$

En pratique, les termes du tenseur des contraintes visqueuses, $\overline{\tau}$, contenant les composantes fluctuantes sont négligeables [157]. Ainsi, $\overline{\tau}$ est approximé par :

$$\overline{\tau} \approx \tilde{\tau} = (\nabla\tilde{u} + \nabla^T\tilde{u}) + \lambda I \nabla \cdot \tilde{u} \tag{2.31}$$

Grâce à l'emploi des moyennes pondérées par la masse, les équations moyennes de Reynolds ont une forme simple et similaire à celle des équations de Navier-Stokes. L'équation d'état du gaz garde, elle aussi, la même forme.

$$\overline{p} = \overline{\rho} R\tilde{T} \tag{2.32}$$

Les effets moyens de la turbulence sont introduits par les termes $\tau_t = -\overline{\rho u'' \otimes u''}$ qui représentent les composantes d'un tenseur appelé le tenseur de Reynolds, et $q_t = \overline{\rho h'' u''}$ qui représentent des flux de chaleur turbulents. Physiquement, ces termes représentent le transport de la quantité de mouvement et de la chaleur dû aux fluctuations turbulentes.

2.3 Hypothèse de Boussinesq

Le système d'équations (2.23) détermine l'écoulement moyen. Ces équations ne constituent plus un système fermé puisqu'on ne connait ni τ_t ni q_t qui sont des corrélations inconnues introduites par l'opérateur de moyenne. C'est le problème de fermeture des équations de la turbulence qui est résolu en exprimant le tenseur de Reynolds et le vecteur des flux de chaleur turbulents en fonction des grandeurs moyennes de l'écoulement. Cela est fait à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq.

Par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuses, les corrélations $-\overline{\rho \boldsymbol{u}'' \otimes \boldsymbol{u}''}$ sont supposées se comporter comme des contraintes alignées sur le tenseur des taux de déformation de l'écoulement moyen.

$$\boldsymbol{\tau}_t = -\overline{\rho \boldsymbol{u}'' \otimes \boldsymbol{u}''} = \mu_t \left(\nabla \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla^T \tilde{\boldsymbol{u}} - \frac{2}{3} \boldsymbol{I} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \right) - \frac{2}{3} \overline{\rho} k \boldsymbol{I} \tag{2.33}$$

où μ_t est la viscosité turbulente et k l'énergie cinétique moyenne de la turbulence par unité de masse, définie par:

$$k = \frac{\frac{1}{2}\overline{\rho \boldsymbol{u}'' \cdot \boldsymbol{u}''}}{\overline{\rho}} \tag{2.34}$$

De même, et par analogie avec le transport turbulent de la quantité de mouvement, le vecteur des flux de chaleur turbulents est supposé proportionnel au gradient de la température moyenne.

$$\boldsymbol{q}_t = \overline{\rho h'' \boldsymbol{u}''} = -K_t \nabla \tilde{T} \tag{2.35}$$

où K_t est la conductivité thermique turbulente.

Notons que, contrairement à la viscosité et la conductivité moléculaire du fluide, μ_t et K_t sont des propriétés de l'écoulement considéré et non du fluide. K_t est relié à μ_t par la relation:

$$K_t = C_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \tag{2.36}$$

où Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent supposé constant et égal à 0.9.

En reportant les relations (2.33) et (2.35) dans le système (2.23), $\tilde{\boldsymbol{F}}$ et $\tilde{\boldsymbol{G}}$ deviennent:

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix} \rho \tilde{\boldsymbol{u}} \\ \overline{\rho} \tilde{\boldsymbol{u}} \otimes \tilde{\boldsymbol{u}} + \overline{p} \boldsymbol{I} \\ (\overline{\rho} \overline{E} + \overline{p}) \tilde{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\tau}_{tot} \\ \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\tau}_{tot} - \boldsymbol{q}_{tot} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

avec

$$\overline{E} = \tilde{e} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} + k$$
$$\boldsymbol{\tau}_{tot} = \overline{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}_t = (\mu + \mu_t)\left(\nabla\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla^T\tilde{\boldsymbol{u}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{I}\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}\right) - \frac{2}{3}\overline{\rho}k\boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{q}_{tot} = \overline{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}_t = -\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\frac{\gamma R}{\gamma - 1}\nabla\tilde{T} \tag{2.38}$$

À l'aide de l'hypothèse de Boussinesq, le problème de fermeture du système d'équations moyennes de Reynolds (2.23) est réduit à la détermination d'une seule inconnue supplémentaire qui est la viscosité turbulente μ_t.

Afin d'alléger l'écriture, les symboles de moyenne "$\tilde{}$" et "$\overline{\ }$" seront omis dans le reste de la thèse et les variables représentent alors les valeurs moyennes.

2.4 Forme adimensionnelle des équations

En introduisant l'hypothèse de Boussinesq, les équations moyennes de Reynolds, en terme de $\boldsymbol{\tau}_{tot}$, $\boldsymbol{q}_{tot}$ et le reste des variables moyennes, ont exactement la même forme que les équations de Navier-Stokes (2.1) - (2.4). En normalisant les variables de l'écoulement moyen par des valeurs de référence appropriées, ces équations demeurent invariantes. Choisissons les variables de référence suivantes:

- p_r pour la pression
- T_r pour la température
- L_r pour la longeur
- $R_r = R$ pour la constante du gaz

- $\rho_r = \frac{p_r}{R_r T_r}$ pour la densité
- $V_r = \sqrt{\frac{p_r}{\rho_r}}$ pour la vitesse
- $t_r = \frac{L_r}{V_r}$ pour le temps
- $E_r = \frac{p_r}{\rho_r}$ pour l'énergie totale par unité de masse
- $e_r = \frac{p_r}{\rho_r}$ pour l'énergie interne spécifique
- μ_r pour la viscosité dynamique

Les variables adimensionnelles s'écrivent alors: $(.)_{adim.} = \frac{(.)_{dim.}}{(.)_r}$

Le tenseur total des contraintes de cisaillement $\boldsymbol{\tau}_{tot}$, le flux de chaleur total $\boldsymbol{q}_{tot}$, l'équation d'état et la loi de Sutherland, en terme des variables adimensionnelles, deviennent:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_{tot} &= \frac{\mu + \mu_t}{Re}\left(\nabla\tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla^T\tilde{\boldsymbol{u}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{I}\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}\right) - \frac{2}{3}\overline{\rho}k\boldsymbol{I} \\
\boldsymbol{q}_{tot} &= -\frac{1}{(\gamma-1)Re{M_r}^2}\left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)\nabla T \\
p &= \rho T \\
\mu &= T^{\frac{3}{2}}\frac{1+S_1}{T+S_1}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

où Re est le nombre de Reynolds basé sur les variables de référence.

$$Re = \frac{\rho_r V_r L_r}{\mu_r} \tag{2.40}$$

et M_r est un nombre de Mach de référence défini par:

$$M_r = \frac{V_r}{a_r} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \tag{2.41}$$

où a_r est une vitesse de son de référence exprimée par:

$$a_r = \sqrt{\gamma R_r T_r} \tag{2.42}$$

S_1 est une constante définie par:

$$S_1 = \frac{S_0}{T_r} \tag{2.43}$$

Le reste des relations demeurent valables pour les variables adimensionnelles. Les variables de référence choisies sont les valeurs de stagnation.

2.5 Modélisation de la turbulence

Afin de déterminer la viscosité turbulente μ_t et ainsi fermer le système d'équations moyennes de Reynolds, un modèle de turbulence est requis. Deux catégories de modèles sont disponibles. Les modèles aux tensions de Reynolds et les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente, introduit par l'hypothèse de Boussinesq. Dans les modèles aux tensions de Reynolds, le tenseur de Reynolds $\boldsymbol{\tau}_t$ et le flux de chaleur turbulent $\boldsymbol{q}_t$ sont déterminés à partir d'équations de transport écrites pour chacun de leurs termes. Ces modèles sont plus élaborés et plus généraux, mais le nombre d'équations additionnelles rend le système à résoudre plus complexe et augmente le temps de calcul associé à sa résolution. Ceci limite encore l'utilisation de ces modèles en pratique. Pour contourner ces difficultés, les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente sont le plus souvent utilisés pour calculer des écoulement d'intérêt pratique. Trois d'entre eux ont été choisis pour être utilisés dans cette étude.

2.5.1 Choix de modèles de turbulence

Les modèles choisis sont des modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente. Ces modèles varient des modèles algébriques les plus simples aux modèles à deux équations de transport. Chacun de ces modèles à ses limitations et aucun d'entre eux ne se veut universel. Le choix d'un modèle parmi ceux-ci est donc dicté par le type d'écoulement à calculer.

L'écoulement externe autour des profils aérodynamiques, dépendamment des conditions, peut être attaché ou séparé. Pour prédire les écoulements attachés, le modèle de Baldwin-Lomax [13] à été choisi. Ce choix est justifié par la facilité de mise en oeuvre informatique, l'économie en temps de calcul et en espace mémoire et par la qualité des résultats obtenus par différents chercheurs en utilisant les modèles algébriques pour calculer des écoulements attachés.

Quand le profil aérodynamique est soumis à des angles d'attaque élevés ou opère dans les conditions d'un régime transsonique, l'écoulement peut devenir séparé. Comme les modèles algébriques prédisent mal les écoulements séparés, d'autres modèles plus adéquats doivent être utilisés. Deux modèles aux équations de transports ont été retenus pour cette fin. Le modèle à une équation de Baldwin-Barth [28] et le modèle à deux équations $k - \omega$ de Wilcox [158].

Les raisons de ce choix sont les suivantes:

- **Modèle de Baldwin-Lomax**
  - C'est un modèle algébrique qui ne requiert aucune équation additionnelle.
  - Il est simple, pas coûteux et très utilisé en aérodynamique numérique.

- Il donne des résultats satisfaisants pour les écoulements attachés ou faiblement séparés.

- **Modèle de Baldwin-Barth**

  - Ce modèle a été développé et calibré pour le genre d'applications qui nous intéresse à savoir, les écoulements transsoniques séparés autour des profils aérodynamiques et les écoulements à plusieurs couches de cisaillement tel que l'écoulement autour des profil multi-éléments.
  - Il peut être intégré jusqu'à la paroi solide sans avoir à trop raffiner le maillage.
  - Numériquement, il est intermédiaire entre les modèle algébriques et les modèles à deux équations dans le sens où il ne nécessite que la résolution d'une équation différentielle partielle additionnelle.

- **Modèle $k-\omega$ de Wilcox**

  - C'est un modèle complet (deux équations de transport).
  - Il performe beaucoup mieux que les modèles $k-\epsilon$ dans les régions d'écoulements séparés.
  - Il possède une formulation mathématique simple.
  - Il n'utilise aucune fonction d'amortissement pour inclure les effets de la paroi (pas de paramètres géométriques).
  - Il peut être intégré jusqu'à la paroi solide en utilisant un maillage raisonnable.

Les trois modèles choisis sont décrits dans les sous-sections suivantes.

2.5.2 Modèle de Baldwin-Lomax (B-L)

Le modèle de Baldwin-Lomax est un modèle algébrique à deux couches. Dans ce modèle, la viscosité turbulente est formulée par:

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_i & pour \quad 0 \leq y \leq y_c \\ (\mu_t)_o & pour \quad y > y_c \end{cases} \tag{2.44}$$

où y est la distance normale mesurée à partir de la paroi et y_c la valeur minimale de y pour laquelle $(\mu_t)i = (\mu_t)_o$.

- **Couche interne**

Dans la couche interne, μ_t est exprimée par:

$$(\mu_t)_i = Re\, \rho\, l^2 \; |\omega| \tag{2.45}$$

avec

$$l = \kappa\, y\, D(y^+) \tag{2.46}$$

où $D(y^+)$ est la fonction d'amortissement de Van Driest donnée par:

$$D(y^+) = [1 - exp(-y^+/A^+)] \tag{2.47}$$

κ étant la constante de Von-Karman, $|\omega|$ le module de la vorticité, défini par:

$$|\omega| = |\nabla \times \boldsymbol{u}| \tag{2.48}$$

et y^+ une distance sans dimensions définie par:

$$y^+ = Re\, \frac{\rho_w u_\tau y}{\mu_w} = Re\, \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w}}{\mu_w}\, y \tag{2.49}$$

où ρ_w, τ_w et μ_w sont les valeurs à la paroi et u_τ est une vitesse de friction définie par $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho_w}$.

- **Couche externe**

Dans la couche externe, μ_t est exprimée par:

$$(\mu_t)_o = Re\, K\, C_{cp}\, \rho\, F_{wk}\, F_{klb}(y) \tag{2.50}$$

F_{wk} est une fonction définie par:

$$F_{wk} = y_{max}\, MIN(F_{max}, \frac{C_{wk}(\Delta V)^2_{max}}{F_{max}}) \tag{2.51}$$

où y_{max} est la valeur de y pour laquelle la fonction

$$F(y) = y\ |\omega|\ D(y^+) \tag{2.52}$$

atteint son maximum, et $(\Delta V)_{max}$ est la différence maximale de vitesse le long d'une station donnée.

$$(\Delta V)_{max} = V_{max} - V_{min} \tag{2.53}$$

où V est le module de la vitesse, $V = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^{1/2}$. Dans le cas d'une couche limite, $V_{min} = 0$. La fonction $F_{klb}(y)$ est le facteur d'intermittence de Klebanoff donné par:

$$F_{klb}(y) = \left[1 + 5.5\left(\frac{C_{klb}y}{y_{max}}\right)^6\right]^{-1} \tag{2.54}$$

Les six constantes du modèle sont:

$\kappa = 0.41$, $A^+ = 26$, $K = 0.0168$, $C_{cp} = 1.6$, $C_{wk} = 0.25$, et $C_{klb} = 0.3$.

Afin d'être consistant avec la forme adimensionnelle des équations de l'écoulement moyen, les variables de ce modèle sont normalisées par les même valeurs de référence.

2.5.3 Modèle de Baldwin-Barth (B-B)

Le modèle de Baldwin-Barth a été développé en combinant les équations de la version standard du modèle $k - \epsilon$. Il consiste en une équation de transport écrite

pour la variable scalaire $R = \nu R_T$, le produit de la viscosité cinématique et du nombre de Reynolds turbulent. Cette équation s'écrit:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla R = (\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon})\nabla^2 R - \frac{1}{\sigma_\epsilon}\nabla \nu_t \cdot \nabla R + (C_{\epsilon 2} f_2 - C_{\epsilon 1})\sqrt{RP} \tag{2.55}$$

Sous forme adimensionnelle et conservative, cette équation s'écrit:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}R) = \frac{1}{Re}\left[(\nu + \frac{2\nu_t}{\sigma_\epsilon})\nabla^2 R - \frac{1}{\sigma_\epsilon}\nabla \cdot (\nu_t \nabla R)\right] + (C_{\epsilon 2} f_2 - C_{\epsilon 1})\sqrt{RP} + R\nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.56}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\mu_t = \rho \nu_t \\
&\nu_t = C_\mu D_1(y^+) D_2(y^+) R \\
&\frac{1}{\sigma_\epsilon} = (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1})\frac{\sqrt{C_\mu}}{\kappa^2} \\
&D_1(y^+) = 1 - exp(-y^+/A^+) \\
&D_2(y^+) = 1 - exp(-y^+/A_2^+) \\
&P = \nu_t \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2\right] \\
&f_2(y^+) = \frac{C_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 2}} + \left(1 - \frac{C_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 2}}\right)\left(\frac{1}{\kappa y^+} + D_1 D_2\right) \\
&\qquad \left[\sqrt{D_1 D_2} + \frac{y^+}{\sqrt{D_1 D_2}}\left(\frac{D_2}{A^+} exp(-y^+/A^+) + \frac{D_1}{A_2^+} exp(-y^+/A_2^+)\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Les constantes recommandées pour ce modèle sont:

$\kappa = 0.41$, $C_{\epsilon 1} = 1.2$, $C_{\epsilon 2} = 2.0$, $C_\mu = 0.09$, $A^+ = 26$, et $A_2^+ = 10$.

2.5.4 Modèle $k - \omega$ de Wilcox

Le modèle $k - \omega$ de Wilcox est appliqué dans sa version standard. C'est un modèle à deux équations, une pour l'énergie cinétique de turbulence, k, et l'autre

pour le taux de dissipation spécifique, ω. Ces équations sont utilisées sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) &= \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\beta^*}{\mu_t}(\rho k)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_k \mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \\
\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \omega) &= \gamma\frac{\rho}{\mu_t}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta\rho\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Sous forme adimensionnelle, ces équations s'écrivent:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j k) &= \frac{\mu_t}{Re}P + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{Re}(\mu + \sigma_k \mu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] - \beta^*\frac{Re}{\mu_t}(\rho k)^2 \\
\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \omega) &= \frac{\gamma\rho}{Re}P + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{Re}(\mu + \sigma_\omega \mu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] - \beta Re\rho\omega^2
\end{aligned} \tag{2.59}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \rho k/\omega \\
S_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\
\tau_{ij} &= 2\mu_t\left(S_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \\
P &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2 + Re\frac{\rho k}{\mu_t}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Les constantes de ce modèle sont:

$\sigma_k = \sigma_\epsilon = 0.5$, $\beta^* = 0.09$, $\beta = 0.075$, et $\gamma = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_\omega k^2}{\sqrt{\beta^*}} = \frac{5}{9}$

Chapitre 3

Résolution numérique

La résolution numérique des équations moyennes de Reynolds (2.23), régissant l'écoulement moyen, et des équations de transport des modèles de turbulence, utilisés dans cette étude, requiert la discrétisation du domaine de calcul ainsi que la discrétisation spatiale et temporelle des équations elles-mêmes.

Le champ d'écoulement est discrétisé en utilisant un maillage non-structuré composé d'éléments triangulaires tel qu'illustré à la figure 3.1. Chaque élément e, de la triangulation possède une aire Ω_e, trois côtés s_1, s_2 et s_3 ayant pour longueurs respectives Δs_1, Δs_2 et Δs_3, et trois sommets N_1, N_2 et N_3 qui représentent les noeuds du maillage.

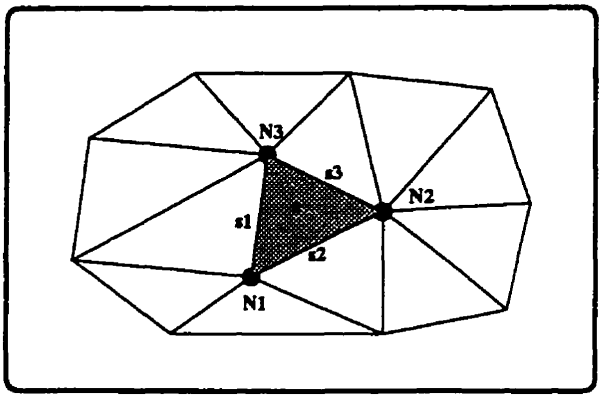


Figure 3.1: Type de maillage utilisé

3.1 Discrétisation des équations de l'écoulement moyen

Le système (2.23) est discrétisé, en espace, à l'aide de la méthode des volumes finis qui nécessite l'emploi de la forme intégrale des équations. Pour un volume (une surface en 2-D) de contrôle arbitraire Ω, délimité par la frontière $\partial\Omega$, la forme intégrale du système (2.23) s'écrit:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) d\Omega = 0 \tag{3.1}$$

Si le volume de contrôle est rigide (Ω constant dans le temps), l'équation (3.1) devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \boldsymbol{U} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) d\Omega = 0 \tag{3.2}$$

En appliquant le théorème de Gauss au second terme du membre de gauche de l'équation (3.2), cette dernière devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \boldsymbol{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} ds = 0 \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Les lois de conservation sont appliquées , dans leur forme intégrale (3.3), à chacun des volumes de contrôles élémentaires définis, à priori, par le type de maillage utilisé et le mode choisi pour le stockage des variables de l'écoulement. Pour un volume de contrôle élémentaire Ω_e, l'équation (3.3) s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_e} \boldsymbol{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega_e} (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} ds = 0 \tag{3.4}$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega_e} \boldsymbol{U} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega_e} (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} ds \tag{3.5}$$

Comme on ne connait pas les distributions des variables conservatives sur Ω_e, celles-ci sont représentées par leurs valeurs moyennes $\boldsymbol{U}_e$ (moyennes spatiales sur le volume de contrôle), définies par:

$$\boldsymbol{U}_e = \frac{1}{\Omega_e}\int_{\Omega_e} \boldsymbol{U} d\Omega \tag{3.6}$$

L'équation (3.5) devient alors:

$$\frac{\partial(\Omega_e \boldsymbol{U}_e)}{\partial t} = - \oint_{\partial\Omega_e} (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} ds \tag{3.7}$$

Pour un maillage fixe (Ω_e constant dans le temps), l'équation (3.7) devient:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_e}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_e} \oint_{\partial\Omega_e} (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} ds \tag{3.8}$$

On a choisi de stocker les valeurs moyennes, U_e, aux centres des éléments, avec les volumes de contrôle, pour ce mode de stockage, les triangles eux-mêmes (figure 3.1).

L'équation (3.8) stipule que le taux de variation de U_e dans Ω_e est égal au bilan des flux normaux à travers les trois côtés du triangle considéré. Ces trois côtés

forment la frontière $\partial\Omega_e$, du volume de contrôle élémentaire. Ce bilan est approximé par:

$$\oint_{\partial\Omega_e} (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n} ds = \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{F}_j - \boldsymbol{G}_j) \cdot \boldsymbol{n}_j \cdot \Delta s_j \tag{3.9}$$

La forme semi-discrète de l'équation (3.8) s'écrit alors:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}_e}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_e} \sum_{j=1}^{3} (\boldsymbol{F}_{nj} - \boldsymbol{G}_{nj}) \cdot \Delta s_j \tag{3.10}$$

où Ω_e est l'aire du triangle considéré et $\boldsymbol{F}_{nj} = \boldsymbol{F}_j \cdot \boldsymbol{n}_j$ et $\boldsymbol{G}_{nj} = \boldsymbol{G}_j \cdot \boldsymbol{n}_j$ les flux convectifs et visqueux, respectivement, à travers le côté j de longueur Δs_j.

Le problème de la détermination de $\boldsymbol{U}_e$ dans chaque triangle du maillage est réduit alors à l'évaluation des flux $\boldsymbol{F}_n$ et $\boldsymbol{G}_n$ à travers les trois côtés du triangle considéré.

3.1.1 Évaluation des flux

3.1.1.1 Évaluation des flux convectifs

Le stockage des valeurs moyennes des variable de l'écoulement aux centres des volumes de contrôle induit des discontinuités (sauts), dans les variables, à chaque interface entre deux triangles adjacents. Selon la théorie des équations hyperboliques d'Euler, ces sauts génèrent des problèmes de Riemann locaux où l'information est propagée, de part et d'autre de l'interface, par les différents phénomènes d'ondes rencontrés en dynamique des gaz.

Dans un écoulement unidimensionnel, le problème de Riemann, qui se manifeste comme une discontinuité entre deux états uniformes du fluide, est défini comme le

problème aux valeurs initiales suivant:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{3.11}$$

avec

$$U(x,0) = \begin{cases} U_L & pour \quad x \leq 0 \\ U_R & pour \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

où l'indice L indique les valeurs des variables conservatives à gauche de l'interface considérée et l'indice R celles à droite (figure 3.2).

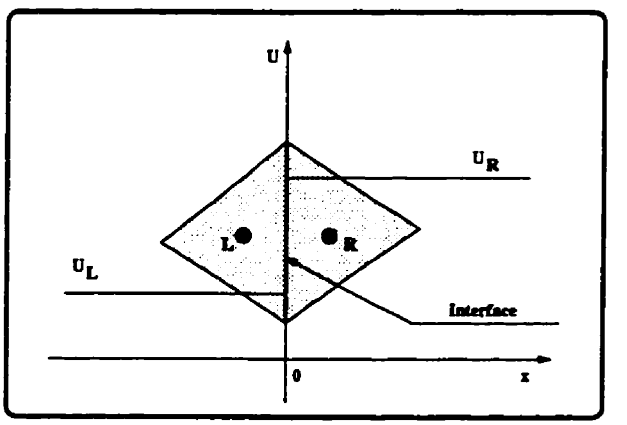


Figure 3.2: Définition du problème de Riemann

Les schémas upwind permettant d'évaluer les flux convectifs, F_n, à travers une interface donnée, en résolvant les problèmes de Riemann qui s'y manifestent, sont connus sous le nom des solveurs de Riemann ou de type Godunov. Le plus utilisé d'entre eux est le schéma de Roe [6]. Ce dernier a été choisi pour évaluer les flux convectifs à travers les faces des volumes de contrôle. Basé sur la division de la différence des flux, il offre l'avantage d'être moins coûteux et possède la propriété de bien capter les discontinuités (ondes de choc).

- **Schéma de Roe**

En linéarisant le problème de Riemann (3.11), Roe propose une solution exacte à un problème approché de Riemann. La forme linéaire de l'équation (3.11) s'écrit:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0 \tag{3.13}$$

où $\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}$ est la matrice Jacobienne provenant de la linéarisation du vecteur flux $\boldsymbol{F}$, par rapport aux variables conservatives $\boldsymbol{U}$.

Le schéma de Roe est basé sur la définition d'un état moyen, à partir des valeurs à gauche et à droite de l'interface considérée, permettant de remplacer la matrice Jacobienne $\boldsymbol{A}$ par une matrice $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)$ localement constante. Le système hyperbolique (3.13) devient alors:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} = 0 \tag{3.14}$$

La matrice $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)$ est construite de sorte que, pour deux états $\boldsymbol{U}_L$ et $\boldsymbol{U}_R$ donnés, elle satisfasse les conditions suivantes:

- 1. $\hat{\boldsymbol{A}}$ représente une application linéaire de l'espace vectoriel $\boldsymbol{U}$ dans l'espace vectoriel $\boldsymbol{F}$.
- 2. $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R) \longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ lorsque $\boldsymbol{U}_L \longrightarrow \boldsymbol{U}_R \longrightarrow \boldsymbol{U}$
- 3. $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)$ possède des valeurs propres réelles et des vecteurs propres linéairement indépendants.
- 4. $\boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L = \hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)(\boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L)$.

Les variables moyennes de Roe, permettant à $\hat{\boldsymbol{A}}$ de vérifier ces conditions, sont définies de façon unique par:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R} \\ \beta &= \frac{\sqrt{\rho_L}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \hat{\phi} &= \beta \phi_L + (1-\beta)\phi_R \quad , \quad \phi = \boldsymbol{U}.H \end{aligned} \tag{3.15}$$

où H est l'enthalpie totale par unité de masse définie par:

$$H = E + \frac{p}{\rho} \tag{3.16}$$

Une fois l'état moyen de Roe est connu, la solution exacte du problème de Riemann linéaire (3.14) peut s'écrire:

$$\Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_R - \boldsymbol{U}_L = \sum_j \alpha_j \boldsymbol{e}_j \tag{3.17}$$

En utilisant la propriété (4) de la matrice $\hat{\boldsymbol{A}}$, on peut obtenir la différence des flux à travers l'interface considérée. Celle ci est exprimée par:

$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_R - \boldsymbol{F}_L = \sum_j \alpha_j \lambda_j \boldsymbol{e}_j \tag{3.18}$$

où chaque terme de la somme représente l'effet d'une onde j d'intensité α_j se propageant à la vitesse λ_j, une valeur propre de $\hat{\boldsymbol{A}}$, selon la direction $\boldsymbol{e}_j$, le vecteur propre à droite de $\hat{\boldsymbol{A}}$ correspondant à λ_j.

Dans un écoulement unidimensionnel, la différence des flux (3.18) apparait comme la superposition des effets de trois ondes (deux ondes acoustiques et une onde d'entropie) se propageant dans la direction de l'écoulement, qui coincide avec la direction normale à l'interface considérée, et qui représente la direction de la différentiation en amont du flux, ou "upwinding".

En 2-D, les flux convectifs $\boldsymbol{F}_n$, sont évalués en appliquant le schéma de Roe pour résoudre le problème de Riemann qui se manifeste à chaque interface de deux triangles adjacents du maillage. Dans ce cas, Roe exprime la différence des flux comme la superposition des effets de quatres ondes simples (deux ondes acoustiques, une onde d'entropie et une onde de cisaillement). Pour calculer la différence des flux (3.18), une direction, qui sert pour la différentiation en amont du flux, doit être attribuée à la propagation des quatres ondes. Le schéma standard de Roe, utilisé dans la présente étude , repose sur l'hypothèse que ces ondes se propagent dans la direction normale à l'interface considérée (figure 3.3).

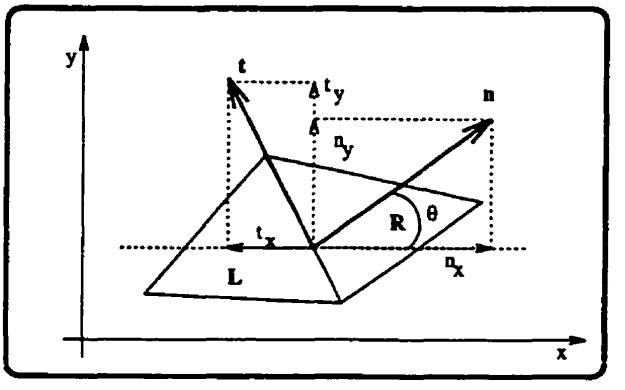


Figure 3.3: Direction de propagation des ondes en 2-D

La matrice $\hat{\boldsymbol{A}}$ s'écrit alors:

$$\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y & 0 \\ \frac{\gamma_1}{2} n_x \hat{V}^2 - \hat{u}\hat{U}_n & \hat{U}_n + (1-\gamma_1) n_x \hat{u} & \hat{U}_n n_y - \gamma_1 \hat{v} n_x & \gamma_1 n_x \\ \frac{\gamma_1}{2} n_y \hat{V}^2 - \hat{v}\hat{U}_n & \hat{v} n_x - \gamma_1 \hat{u} n_y & \hat{U}_n + (1-\gamma_1)\hat{v} n_y & \gamma_1 n_y \\ -\hat{U}_n(\hat{H} - \frac{\gamma_1}{2}\hat{V}^2) & \hat{H} n_x - \gamma_1 \hat{u}\hat{U}_n & \hat{H} n_y - \gamma_1 \hat{v}\hat{U}_n & \gamma_1 \hat{U}_n \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

avec

$$\gamma_1 = \gamma - 1$$

$$\hat{U}_n = \hat{\boldsymbol{U}} \cdot \boldsymbol{n} = \hat{u}n_x + \hat{v}n_y \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} = cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j}$$

Les intensités des ondes, α_j, s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\hat{a}^2}(\Delta p + \hat{\rho}\hat{a}\Delta U_n) \\ \frac{1}{2\hat{a}^2}(\Delta p - \hat{\rho}\hat{a}\Delta U_n) \\ \frac{1}{\hat{a}^2}(\hat{a}^2\Delta\rho - \Delta p) \\ \hat{\rho}\Delta U_t \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

avec

$$\Delta(.) = (.)_R - (.)_L$$

$$U_t = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{t} = ut_x + vn_y \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{t} = t_x\vec{i} + t_y\vec{j} = -n_y\vec{i} + n_x\vec{j}$$

et $\hat{a}$ est la vitesse du son exprimée à l'état moyen de Roe par:

$$\hat{a} = \left[(\gamma - 1)(\hat{H} - \frac{1}{2}\hat{V}^2)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

Les valeurs propres de $\hat{\boldsymbol{A}}$, λ_j, qui représentent les vitesses de propagation des différentes ondes, s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{U}_n + \hat{a} \\ \hat{U}_n - \hat{a} \\ \hat{U}_n \\ \hat{U}_n \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

et la matrice des vecteurs propres à droite de $\hat{\boldsymbol{A}}$, $[\boldsymbol{e}_j]$, correspondant aux différents

λ_j, s'écrit:

$$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hat{u} + \hat{a}n_x & \hat{u} - \hat{a}n_x & \hat{u} & t_x \\ \hat{v} + \hat{a}n_y & \hat{v} - \hat{a}n_y & \hat{v} & t_y \\ \hat{H} + \hat{a}\hat{U}_n & \hat{H} - \hat{a}\hat{U}_n & \frac{1}{2}\hat{V}^2 & \hat{U}_t \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Les variables $\hat{(.)}$ représentent les valeurs moyennes proposées par Roe.

Les flux convectifs $\boldsymbol{F}_n$, à travers l'interface peuvent alors être différenciés en amont par:

$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R) = \boldsymbol{F}_{nL} + \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \lambda_j^{(-)} \boldsymbol{e}_j \tag{3.26}$$

si on considère l'état de gauche, ou par:

$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R) = \boldsymbol{F}_{nR} - \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \lambda_j^{(+)} \boldsymbol{e}_j \tag{3.27}$$

si on considère l'état de droite.

L'équation (3.26) utilise les vitesses de propagation négatives $\lambda^{(-)}$ et l'équation (3.27) utilise les vitesses de propagation positives $\lambda^{(+)}$. $\lambda^{(-)}$ et $\lambda^{(+)}$ peuvent, cependant, être écrites sous les formes suivantes:

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(+)} &= \frac{\lambda_j + |\lambda_j|}{2} \\ \lambda_j^{(-)} &= \frac{\lambda_j - |\lambda_j|}{2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

où $|\lambda_j|$ est la valeur absolue de λ_j.

En remplaçant $\lambda^{(-)}$ et $\lambda^{(+)}$ par leur expressions respectives et en additionnant les équations (3.26) et (3.27), on obtient la forme utilisée dans la présente étude:

$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_{nL} + \boldsymbol{F}_{nR}) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} \alpha_j |\lambda_j| \boldsymbol{e}_j \tag{3.29}$$

- **Correction de Harten**

À cause de la linéarisation du problème de Riemann, le schéma de Roe peut admettre des ondes d'expansion non-physiques comme solution au problème, violant ainsi la condition d'entropie. Ceci peut se produire lors du passage d'une onde d'expansion par un point sonique où l'une des valeurs propres de la matrice linéarisée $\hat{\mathbf{A}}$ devient nulle. Le vecteur propre correspondant est alors multiplié par zéro, ayant pour conséquence l'annulation du terme dissipatif de la composante du flux associée à cette onde. Le schéma de Roe retient alors l'onde d'expansion non-physique et la propage au lieu de la dissiper.

Pour remédier à ce problème et imposer la condition d'entropie au schéma de Roe, Harten [159] a corrigé les valeurs propres de sorte à ajouter de la viscosité artificielle aux ondes lentes. Ces nouvelles valeurs propres s'écrivent:

$$|\lambda_{new}| = \begin{cases} \frac{\lambda_{old}^2+\epsilon^2}{2\epsilon} & si \quad |\lambda_{old}| < \epsilon \\ |\lambda_{old}| & si \quad |\lambda_{old}| \geq \epsilon \end{cases} \tag{3.30}$$

avec $0.1 \leq \epsilon \leq 0.3$

La correction de Harten ajoute de la dissipation artificielle partout dans le domaine de calcul où les vitesse de propagation des ondes sont faibles. Le schéma devient alors plus dissipatif ce qui peut affecter la précision de la prédiction des ondes de choc. Liou et Van leer [160], dans le but d'améliorer la correction de Harten, ont redéfini le paramètre ϵ de la façon suivante:

$$\epsilon = Kmax(\lambda_R - \lambda_L, 0) \tag{3.31}$$

où K est un coefficient généralement pris égal à 1. ϵ est construit de sorte qu'il ne soit non nul que lors de la formation des ondes d'expansion non-physiques. En effet,

la différence entre les valeurs propres de gauche et de droite, λ_L et λ_R repectivement, dans l'expression (3.31) n'est positive que si une onde d'expansion traverse l'interface séparant les deux états de Riemann.

L'ordre de précision du schéma de Roe est déterminé par la distribution des variables conservatives dans les triangles à gauche et à droite de l'interface considérée. Une distribution constante par élément aboutit à un schéma d'ordre un alors qu'une distribution linéaire par élément produit un schéma d'ordre deux.

- **Extension du schéma de Roe au deuxième ordre**

Une extension du schéma de Roe au deuxième ordre a été faite en considérant, comme mentionné au paragraphe précédent, des distributions linéaires des variables conservatives dans chaque élément du maillage.

La procédure de reconstruction proposée par Barth et Jespersen [94] et développée spécialement pour les maillages non-structurés, a été utilisée pour reconstruire ces distributions linéaires à partir des valeurs moyennes des variables stockées aux centres des éléments.

Dans un élément, e, donné, cette reconstruction s'écrit:

$$\boldsymbol{U}_{er}(x,y) = \boldsymbol{U}_{e0} + \nabla \boldsymbol{U}_{e0} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_e \tag{3.32}$$

où $\boldsymbol{U}_{e0}$ est la valeur moyenne au centre de l'élément, $\Delta \boldsymbol{r}_e$ le vecteur reliant le centre de l'élément et un point quelconque de ce dernier de coordonnées (x, y), et $\nabla \boldsymbol{U}_{e0}$ un meilleur estimé du gradient de la solution dans l'élément considéré. Le gradient $\nabla \boldsymbol{U}_{e0}$ est calculé à partir des valeurs aux centres de tous les éléments entourant l'élément e, et ayant un noeud commun avec ce dernier (figure 3.4). Les gradients

$\nabla \boldsymbol{U}_{e0}$ sont d'abord calculés aux noeuds en utilisant le théorème de Gauss et les cellules duales, autour de chaque noeud, comme volumes de contrôles (figure 3.4). Les gradients aux noeuds s'écrivent alors:

$$\nabla \boldsymbol{U}_{e0} = \frac{1}{A_e} \oint_{\partial A_e} \boldsymbol{U}_{e0} \cdot \boldsymbol{n} ds = \frac{1}{A_e} \sum_{j=1}^{NC} \boldsymbol{U}_{e0j} \cdot \boldsymbol{n}_j \Delta s_j \tag{3.33}$$

où A_e est l'aire de la cellule duale, NC le nombre de segments formant la frontière ∂A_e du volume de contrôle, $\boldsymbol{n}_j$ la normale unitaire extérieure au segment j de longueur Δs_j.

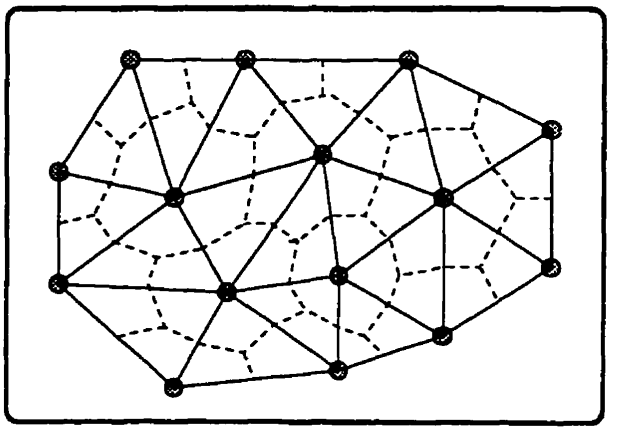


Figure 3.4: Volumes de contrôle pour le calcul des gradients

Une fois les gradients aux noeuds connus, les gradients $\nabla \boldsymbol{U}_{e0}$, dans chaque triangle, sont calculés comme la moyenne arithmétique des valeurs de ses trois sommets.

La solution reconstruite en utilisant l'équation (3.32) peut présenter de nouveaux extrémums violant ainsi le principe de monotonicité. Afin de prévenir ces nouveaux extrémums et préserver la monotonicité de la solution, des limiteurs de pentes sont souvent utilisés. Le principe consiste à moduler le gradient $\nabla \boldsymbol{U}_{e0}$ à l'aide d'un limiteur ψ pour réduire la pente là où c'est nécessaire. La reconstruction (3.32)

limitée par ψ s'écrit alors:

$$U_{er}(x,y) = U_{e0} + \psi_e \nabla U_{e0} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_e \quad , \quad 0 \leq \psi_e \leq 1 \tag{3.34}$$

Le premier limiteur utilisé dans cette étude est celui de Barth et Jespersen. Facile à implanter sur des maillages non-structurés, ce limiteur consiste à trouver la plus grande valeur admissible de ψ_e tout en respectant le principe de monotonicité qui exige que les valeurs de la solution linéaire reconstruite dans l'élément e, soient bornées par les valeurs aux centres de tous les triangles ayant contribué à sa recontruction y compris l'élément e lui même. Donc, si $U_e^{max} = max_j(U_{e0}, U_{e0j})$ et $U_e^{min} = min_j(U_{e0}, U_{e0j})$ où j indique le $j^{ème}$ triangle ayant contribué à reconstruire $U_{er}(x,y)$, Barth et Jespersen requierent que:

$$U_e^{min} \leq U_{er}(x,y) \leq U_e^{max} \tag{3.35}$$

Dans le cas d'une reconstruction linéaire, la solution reconstruite $U_{er}(x,y)$ atteint ses extrémums aux sommets des éléments (aux noeuds) . En calculant les valeurs non limitées de $U_{er}(x,y)$ (equation (3.32)) aux trois noeuds de chaque triangle, $U_{Nr} = U_{er}(x_N, y_N)(N = 1,2,3)$, le limiteur ψ_e satisfaisant la condition (3.35) est alors défini par:

$$\psi_{eN} = \begin{cases} min\left(1, \frac{\Delta_{max}}{\Delta}\right) & si \quad \Delta > 0 \\ min\left(1, \frac{\Delta_{min}}{\Delta}\right) & si \quad \Delta < 0 \\ 1 & si \quad \Delta = 0 \end{cases} \tag{3.36}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta_{max} &= U_e^{max} - U_{e0} \\ \Delta_{min} &= U_e^{min} - U_{e0} \\ \Delta &= U_{Nr} - U_{e0} \end{aligned} \tag{3.37}$$

et

$$\psi_e = min(\psi_{eN}) \tag{3.38}$$

Malgré le strict respect de la condition de monotonicité de la solution, des difficultés de convergence associées à l'utilisation du limiteur de Barth et Jespersen ont été rapportées dans la littérature [95,96]. Pour améliorer la situation, un deuxième limiteur proposé par Venkatakrishnan [95] a été implanté. Ce dernier, en tolérant de petites oscillations locales dans la solution discrète, permet une meilleure convergence du schéma. Le limiteur de Venkatakrishnan est exprimé par:

$$\psi_{eN} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}\frac{(\Delta^2_{max}+\epsilon^2)\Delta+2\Delta^2\Delta_{max}}{\Delta^2_{max}+2\Delta^2+\Delta_{max}\Delta+\epsilon^2} & si \quad \Delta > 0 \\ \frac{1}{\Delta}\frac{(\Delta^2_{min}+\epsilon^2)\Delta+2\Delta^2\Delta_{min}}{\Delta^2_{min}+2\Delta^2+\Delta_{min}\Delta+\epsilon^2} & si \quad \Delta < 0 \\ 1 & si \quad \Delta = 0 \end{cases} \tag{3.39}$$

où $\epsilon^2 = (K\Delta x)^3$ est une variable contrôlant le degré de la limitation, K un paramètre ajustable avec $0.1 \leq K \leq 5$ [95,96] et Δx un estimé de la taille moyenne de l'élément e.

L'expression (3.38) demeure valable pour le limiteur de Venkatakrishnan. Elle est utilisée pour déterminer la valeur de ψ_e.

Une fois ψ_e connu, l'équation (3.34) est alors appliquée, à chaque interface, pour déterminer les états de gauche et de droite $(\boldsymbol{U}_L, \boldsymbol{U}_R)$ nécessaires á l'évaluation du flux convectif à travers l'interface considérée (équation 3.29).

Le processus de reconstruction peut se résumer dans les étapes suivantes:

- 1. Calculer les gradients $\nabla \boldsymbol{U}_{e0}$ aux noeuds du maillage.
- 2. Calculer les valeurs de $\nabla \boldsymbol{U}_{e0}$ dans chaque triangle du maillage.
- 3. Déterminer les bornes de la solution linéaire reconstruite $(\boldsymbol{U}_e^{min}, \boldsymbol{U}_e^{max})$.

- 4. Calculer les valeurs du limiteur ψ_{eN} aux noeuds de chaque triangle.
- 5. Calculer la valeur du limiteur ψ_e dans le triangle considéré.
- 6. Reconstruire les états $\boldsymbol{U}_L$ et $\boldsymbol{U}_R$ limités à chaque interface.
- 7. Évaluer les flux convectifs à l'aide du schéma de Roe.

3.1.1.2 Évaluation des flux visqueux

L'évaluation des flux visqueux requiert les valeurs des gradients des vitesses, $\nabla \boldsymbol{u}$, et de la température, ∇T, à chaque interface du volume de contrôle, pour calculer les contraintes de cisaillement $\boldsymbol{\tau}$ et les flux de chaleur $\boldsymbol{q}$ intervenant dans le calcul de $\boldsymbol{G}_n$.

Les gradients au milieu de chaque interface sont déterminés à partir de leurs valeurs aux noeuds, déjà évaluées à l'aide de l'équation(3.33), comme la moyenne des gradients aux deux noeuds délimitants l'interface considérée pondérés par les aires des cellules duales correspondantes (figure 3.4).

$$\nabla_{interface} = \frac{A_{e1}\nabla_{N1} + A_{e2}\nabla_{N2}}{A_{e1} + A_{e2}} \tag{3.40}$$

3.1.2 Discrétisation temporelle

Aprés l'évaluation des flux convectifs et visqueux, le système d'équations (3.10) est intégré dans le temps à l'aide du schéma explicite d'Euler du premier ordre. La solution des variables conservatives à l'instant $(n+1)$ est alors exprimée par:

$$\boldsymbol{U}_e^{n+1} = \boldsymbol{U}_e^n - \frac{\Delta t}{\Omega_e}\sum_{j=1}^{3}(\boldsymbol{F}_{nj} - \boldsymbol{G}_{nj})^n \Delta s_j \tag{3.41}$$

où Δt est le pas de temps.

Dans la présente étude, on cherche à prédire des écoulements turbulents compressibles stationnaires. À cause de la finesse du maillage, requise par les équations moyennes de Reynolds pour fin de précision des solutions dans les régions visqueuses, la condition de stabilité CFL sur le pas de temps rend les schémas explicites très lents à converger. L'utilisation d'un schéma explicite précis dans le temps, pour calculer des écoulements stationnaires, devient alors prohibitive.

Pour accélérer la convergence, la technique du pas de temps local et un algorithme de multigrille par agglomération sont utilisés. Dans chaque élément du maillage, les équations sont avancées dans le temps en utilisant le maximum Δt permis par la condition de stabilité locale qui, dans le cas des écoulements turbulents, doit tenir compte des caractères convectifs et dissipatif des équations moyennes de Reynolds. Pour chaque triangle, le pas de temps local Δt_e est estimé par:

$$\Delta t_e = CFL \cdot min(\Delta t_{s1}, \Delta t_{s2}, \Delta t_{s3}) \tag{3.42}$$

où $s1$, $s2$ et $s3$ sont les trois côtés du triangle considéré et CFL est un facteur de sécurité.

Pour chaque côté j, le pas de temps est calculé comme,

$$\Delta t_j = \frac{\Delta s_{cj}}{|\lambda_{max}|_j + \Delta t_v} \tag{3.43}$$

avec

$$\Delta s_{cj} = \frac{min(A_L, A_R)}{\Delta s_j}$$
$$\Delta s_{vj} = \frac{\frac{1}{2}(A_{N1} + A_{N2})}{\Delta s_j}$$

$$|\lambda_{max}|_j = |\hat{U}|_j + \hat{a}_j \tag{3.44}$$
$$\Delta t_v = \frac{2(\mu + \mu_t)_j}{\rho_j Re \Delta s_{vj}}$$

où Δs_j est la longueur du côté considéré, A_L et A_R les aires respectives des triangles à gauche et à droite de j et A_{N1} et A_{N2} les aires respectives des cellules duales autour des noeuds $N1$ et $N2$ délimitant la face j.

L'algorithme multigrille par agglomération utilise un regroupement des éléments du maillage fin pour construire les différents niveaux de maillages grossier. L'algorithme utilisé est une adaptation de celui proposé par Venkatakrishnan et Mavriplis [121] à un stockage des variables aux centres des éléments. Les avantages et les détails de cet algorithme sont bien décrits dans [161] et dans [126]. Le processus d'agglomération, décrit dans [126], est arrêté lorsque le nombre d'éléments du dernier niveau des maillages grossiers est inférieur à 50.

Une fois les différents niveaux de maillages grossiers générés, l'algorithme multigrille est appliqué pour calculer la solution. Le bilan des flux est alors effectué sur l'ensemble des côtés de chaque élément grossier.

Cet algorithme a permis des gains d'un facteur de 4 à 5 pour les équations d'Euler. Pour les équations de Navier-Stokes et à cause de l'utilisation des maillages élancés, l'algorithme devient moins performant et le solveur demeure lent à converger.

3.1.3 Conditions aux frontières

Comme les variables de l'écoulement moyen sont stockées aux centres des triangles, les conditions aux frontières sont imposées en utilisant des éléments fictifs du

côté extérieur de chaque frontière (figure 3.5). Ces éléments représentent les cellules miroirs des triangles internes adjacents à la frontière considérée. Les propriétés de l'écoulement, correspondants aux différents types de conditions aux frontières, sont alors imposées dans ces cellules miroirs et le schéma de Roe est appliqué, à chaque interface de la frontière considérée, pour évaluer les flux.

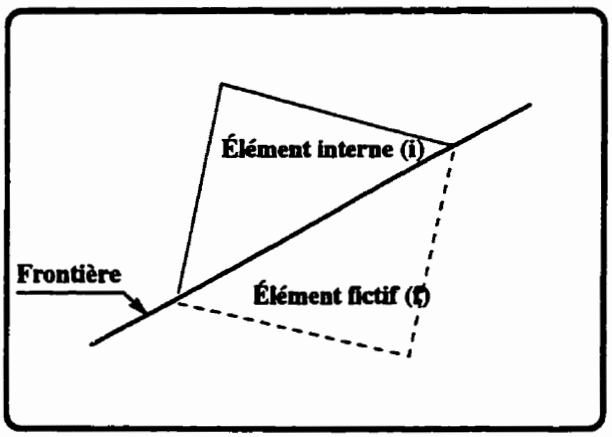


Figure 3.5: Élément fictif

Le nombre de conditions aux frontières à imposer à une frontière donnée dépend des caractéristiques physiques locales de l'écoulement. À l'entrée et à la sortie, les conditions aux frontières à imposer dépendent du nombre de Mach local. Dans un écoulement bidimensionnel, trois conditions sont nécessaires à une entrée subsonique et une à la sortie alors que quatre conditions doivent être imposées à une entrée supersonique et aucune condition n'est requise à la sortie.

- **Entrée**

Pour une entrée subsonique, trois variables sont imposées dans les éléments fictifs. Celles-ci sont: l'angle d'entrée de l'écoulement α_e, la pression totale p_0 et

la température totale T_0. La pression statique est extrapolée, à l'ordre zéro, de l'intérieur du domaine et le reste des variables de l'écoulement sont évaluées en considérant une détente isentropique entre un réservoir à T_0 et p_0 et le plan d'entrée. On a

$$p_f = p_i \tag{3.45}$$

où l'indice "i" indique l'élément interne adjacent à la frontière et l'indice "f" l'élément fictif miroir correspondant.

En tenant compte de l'adimensionalisation par rapport aux variable d'arrêt, la vitesse à l'entrée peut s'exprimer par:

$$V_f = \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(1 - {p_f}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.46}$$

Pour un angle d'entrée α_e donné et une pression p_f extrapolée de l'intérieur, les variables primitives à l'entrée sont obtenues par les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \rho_f &= {p_f}^{\frac{1}{\gamma}} \\ u_f &= V_f cos(\alpha_e) \\ v_f &= V_f sin(\alpha_e) \\ E_f &= \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p_f}{\rho_f} + \frac{1}{2}{V_f}^2 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Comme pour une entrée subsonique, les variables de l'écoulement moyen à une entrée supersonique, sont évaluées en considérant une détente isentropique entre le réservoir en amont et le plan d'entrée. Connaissant α_e, p_0, T_0 et le nombre de Mach M_∞, les variables primitives, dans les cellules miroirs, prennent les valeurs suivantes:

$$T_f = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}{M_\infty}^2\right)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
p_f &= T_f^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
\rho_f &= \frac{p_f}{T_f} \\
V_f &= M_\infty \sqrt{\gamma T_f}
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

u_f, v_f et E_f sont calculées à l'aide des expressions (3.47).

- **Sortie**

À une sortie subsonique, une des quatre conditions aux frontières doit être imposée. Dans la présente étude, la pression statique, P_b, est imposée. La densité et les vitesses sont extrapolées de l'intérieur du domaine et l'énergie est calculée. Ceci se traduit par:

$$
\begin{aligned}
p_f &= p_b \\
\rho_f &= \rho_i \\
u_f &= u_i \\
v_f &= v_i \\
E_f &= \frac{1}{\gamma-1}\frac{p_f}{\rho_f} + \frac{1}{2}({u_f}^2 + v^2)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Si la sortie est supersonique, toutes les variables sont extrapolées de l'intérieur du domaine.

- **Paroi solide**

Dans les éléments fictifs d'une paroi solide, les conditions aux frontières sur les vitesses sont imposées de sorte qu'elles respectent la condition de glissement pour un écoulement non-visqueux et la condition d'adhérence pour un écoulement visqueux.

Si l'écoulement est non-visqueux, la composante normale de vitesse, dans la cellule miroir, est réfléchie et la composante tangentielle est extrapolée de l'intérieur. Si l'écoulement est visqueux, les deux composantes sont réfléchies. Dans les deux cas, la densité et l'énergie sont extrapolées de l'intérieur du domaine. Ces conditions s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \rho_f &= \rho_i \\ U_{nf} &= -U_{ni} \\ U_{tf} &= \begin{cases} U_{ti} & non-visqueux \\ -U_{ti} & visqueux \end{cases} \\ E_f &= E_i \end{aligned} \tag{3.50}$$

- **Infini**

Pour une frontière externe, les valeurs isentropiques à l'infini sont imposées dans les éléments fictifs. Connaissant p_0, T_0, α_∞ et M_∞, les variables à l'infini sont évaluées en utilisant les relations (3.47) et (3.48).

3.2 Évaluation des gradients aux noeuds des frontières

Pout une évaluation plus précise des gradients aux noeuds des frontières, un sytème de coordonnées locales ($\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{t}$) est utilisé. Le gradient d'une variable ϕ, à un noeud d'une frontière, est alors évalué comme la somme d'une contribution de l'intérieur du domaine $\nabla^{int}\phi$ et une contribution de l'extérieur du domaine $\nabla^{ext}\phi$. $\nabla^{int}\phi$ représente la partie du gradient calculée en utilisant l'équation (3.33) et le volume de contrôle de la figure 3.6 ci-dessous. Une fois calculée, cette partie

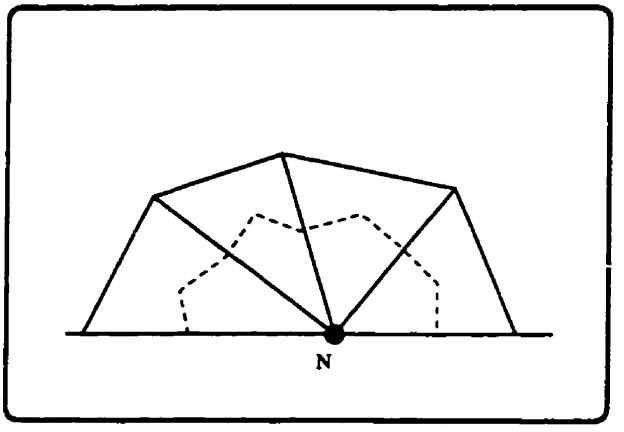


Figure 3.6: Évaluation des gradients aux frontières

est stockée au noeud N considéré. Dans le cas où les conditions aux frontières dans les cellules miroirs sont réfléchies ($\phi_f = \pm\phi_i$), selon le type de la frontière, la contribution de l'extérieur du domaine, $\nabla^{ext}\phi$, au calcul du gradient, est réflichie aussi. Cette contribution est obtenue en projetant $\nabla^{int}\phi$ dans le repère local $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$. On obtient alors:

$$\begin{pmatrix} \nabla_n^{int}\phi \\ \nabla_t^{int}\phi \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \begin{pmatrix} \nabla_x^{int}\phi \\ \nabla_y^{int}\phi \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

avec

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} n_x & n_y \\ -n_y & n_x \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

où $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y)$ est la normale unitaire extérieure à la frontière considérée. $\nabla^{ext}\phi$ s'écrit alors:

$$\begin{pmatrix} \nabla_n^{ext}\phi \\ \nabla_t^{ext}\phi \end{pmatrix} = \pm\boldsymbol{D} \begin{pmatrix} \nabla_n^{int}\phi \\ \nabla_t^{int}\phi \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

avec

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \nabla_x^{ext}\phi \\ \nabla_y^{ext}\phi \end{pmatrix} = \pm \boldsymbol{B}^{-}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} \nabla_x^{int}\phi \\ \nabla_y^{int}\phi \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

et

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \nabla_x\phi \\ \nabla_y\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_x^{int}\phi \\ \nabla_y^{int}\phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_x^{ext}\phi \\ \nabla_y^{ext}\phi \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

3.3 Implantation des modèles de turbulence

3.3.1 Modèle algébrique

Parmi les modèles algèbriques, celui de Baldwin-Lomax est le plus utilisé en aérodynamique externe. Cependant, son implantation sur des maillages non-structurés est rendue difficile par l'exigence de certaines quantités géométriques, telles que la distance normale à la paroi de chaque noeud du maillage, et de certaines propriétés globales caractérisant un profil entier de la couche limite, tels que f_{max}, y_{max}, V_{min}, V_{max}, ρ_w, μ_w et τ_w.

Peu de chercheurs ont implanté le modèle de Baldwin-Lomax sur des maillages non-structurés [153,154]. Cependant, toutes ces implantations emploient, en plus du maillage non-structuré, utilisé pour le calcul de l'écoulement moyen, un maillage structuré pour déterminer la viscosité turbulente. Les propriétés de l'écoulement moyen, requises par le modèle, et la viscosité turbulente sont alors interpolées entre les deux maillages.

L'utilisation d'un maillage structuré pour le calcul de μ_t limite la généralité de cette approche. La génération du maillage structuré devient complexe ainsi que

l'interpolation entre les deux maillages.

Pour remédier à ces inconvénients, une nouvelle technique est développée, dans la présente étude, pour faciliter l'implantation du modèle de Baldwin-Lomax sur des maillages triangulaires. Elle utilise un seul maillage et consiste à calculer les quantités turbulentes directement aux noeuds du maillage non-structuré. Dans cette technique on procède par avancement dans l'espace à partir des noeuds de la paroi. La figure 3.7 illustre cette procédure.

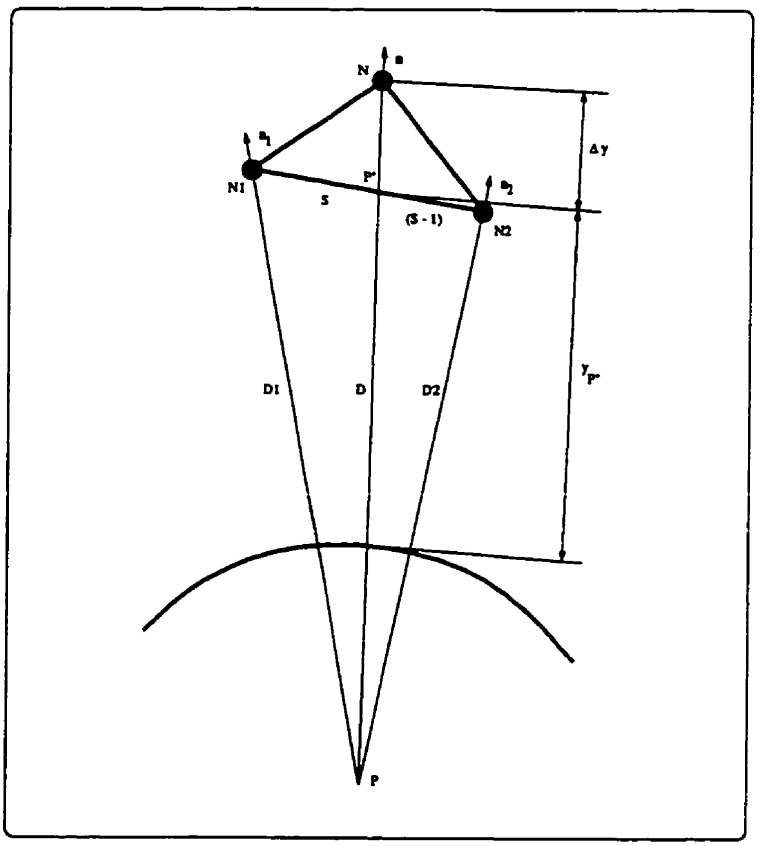


Figure 3.7: Illustartion de la technique d'implantation du modèle de Baldwin-Lomax

Pour un triangle donné, les propriétés recquises par le modèle sont déterminées

au noeud N à partir des noeuds $N1$ et $N2$ de façon suivante:

Dabord, on détermine le point d'intersection, P, des normales $D1$ et $D2$ passant par $N1$ et $N2$ respectivement. Ensuite, le point d'intersection, P', du segment $\overline{PN}$ et du côté $\overline{N1N2}$ ainsi que le facteur d'interpolation s. La distance Y'_P et toute autre quantité Φ'_p sont alors interpolées au point P' par:

$$Y_{P'} = sY_{N1} + (1-s)Y_{N2}$$

$$\Phi_{P'} = s\Phi_{N1} + (1-s)\Phi_{N2} \tag{3.57}$$

La distance normale au noeud N est alors calculée par

$$Y_N = Y_{P'} + \Delta Y \tag{3.58}$$

avec

$$\Delta Y = \sqrt{(x_N - x_{P'})^2 + (y_N - Y_{P'})^2} \tag{3.59}$$

Comme f_{max}, y_{max} et V_{max} apparaissent loin de la paroi, une deuxième passe, à partir des frontières externes, est nécessaire pour propager les valeurs de ces trois quantités jusqu'aux noeuds de la paroi.

Les figure 3.8 et 3.9 montrent les maillages utilisés et les lignes d'isodistances normales, obtenues en utilisant la présente technique, pour les profil NACA0012 et RAE2822 respectivement.

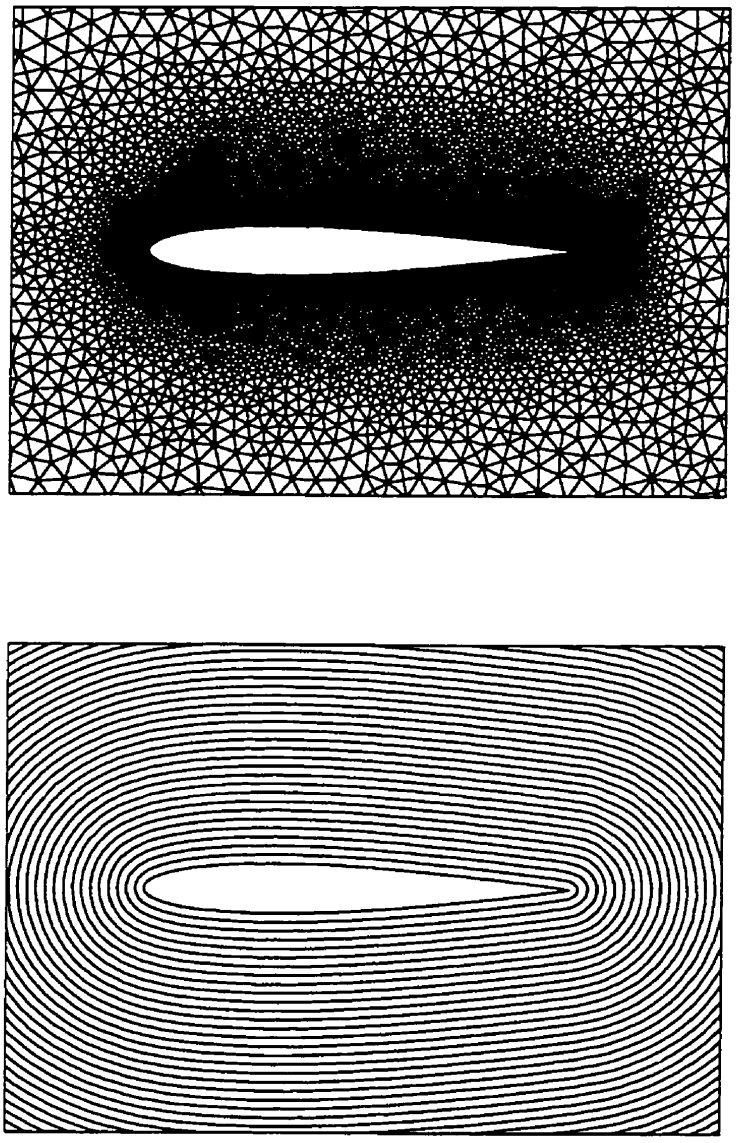


Figure 3.8: Profil NACA0012. Maillage et isodistances normales.

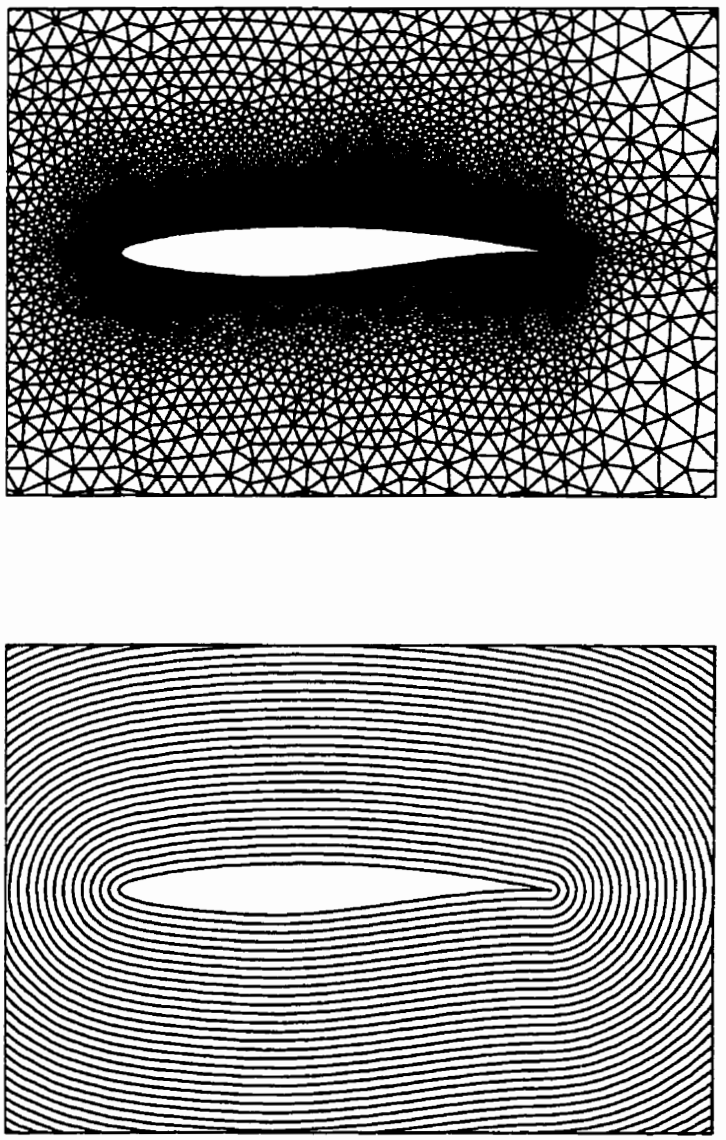


Figure 3.9: Profil RAE2822. Maillage et isodistances normales.

3.3.2 Modèles aux équations de transport

Les modèles de Baldwin-Barth et $k-\omega$, utilisés dans la présente étude, sont des modèles aux équations de transport. Leurs équations sont résolues découplées de celles de l'écoulement moyen, permettant ainsi un interchange facile de nouveaux modèles de turbulence.

Les équations aux dérivées partielles de ces deux modèles, sont résolues aux noeuds du maillage en utilisant la méthode des volumes finis et un volume de contrôle, d'aire Ω_N et délimité par la frontière $\partial\Omega_N$, tel que montré à la figure 3.10. Les termes convectifs sont dicrétisés à l'aide d'une différentiation en amont du premier ordre et les équations sont intégrées, jusqu'aux noeuds de la paroi, en utilisant une intégration implicite dans le temps. Pour les deux modèles, les termes de production sont traités comme des termes sources et les termes non-linéaires sont linéarisés par la méthode de Newton.

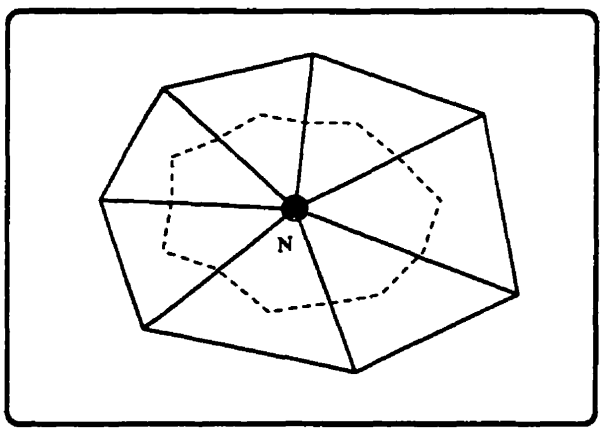


Figure 3.10: Volume de contrôle pour les modèles B-B et $k-\omega$.

Modèle de Baldwin-Barth

En utilisant le théorème de Gauss, la forme intégrale de l'équation du modèle de Baldwin-Barth (équation 2.26), pour un noeud N du maillage, s'écrit:

$$\Omega_N \frac{\partial R_N}{\partial t} + \oint_{\partial\Omega_N} \boldsymbol{u} R \boldsymbol{n} ds - \Omega_N R_N (\nabla \cdot \boldsymbol{u})_N = \frac{1}{Re}\left(\nu + \frac{2\nu_t}{\sigma}\right) \oint_{\partial\Omega_N} \nabla R \boldsymbol{n} ds -$$
$$\frac{1}{\sigma Re} \oint_{\partial\Omega_N} \nu_t \nabla R \boldsymbol{n} ds + \Omega_N \left[(C_{\epsilon 2} f_2 - C_{\epsilon 1})\sqrt{P}\right]_N (R_N)^{1/2} \tag{3.60}$$

La forme discrète de l'équation s'écrit alors:

$$\frac{1}{\Delta t}(R_N^{n+1} - R_N^n) + \frac{1}{\Omega_N}\sum_{j=1}^{NC}(U_n R^{n+1} \Delta s)_j - (\nabla \cdot \boldsymbol{u})_N^n R_N^{n+1} =$$
$$\frac{1}{\Omega_N}\left[\frac{1}{Re}\left(\nu + \frac{2\nu_t}{\sigma}\right)_N^n \sum_{j=1}^{NC}(\nabla R^{n+1} \boldsymbol{n} \Delta s)_j - \frac{1}{\sigma Re}\sum_{j=1}^{NC}(\nu_t^n \nabla R^{n+1} \boldsymbol{n} \Delta s)_j\right] +$$
$$\left[(C_{\epsilon 2} f_2 - C_{\epsilon 1})\sqrt{P}\right]_N^n (R_N^{n+1})^{1/2} \tag{3.61}$$

où j représente une face du volume de contrôle de longueur Δs et $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire extérieure à j.

En utilisant la différentiation en amont, l'équation (3.33) pour l'évaluation des gradients et la linéarisation de Newton, les termes de convection, de diffusion, d'antidiffusion et le terme non-linéaire s'écrivent:

$$\sum_{j=1}^{NC}(U_n R^{n+1} \boldsymbol{n} \Delta s) = \sum_{j=1}^{NC}\left[\left(\frac{U_n + |U_n|}{2}\right)_N^n \Delta s\right]_j R_N^{n+1} + \sum_{i=1}^{NV} A_{Ni}^n R_i^{n+1}$$
$$\sum_{j=1}^{NC}(\nabla R \boldsymbol{n} \Delta s)_j = B_N R_N^{n+1} + \sum_{i=1}^{NV} B_{Ni} R_i^{n+1} \tag{3.62}$$
$$\sum_{j=1}^{NC}(\nu_t^n \nabla R^{n+1} \boldsymbol{n} \Delta s)_j = C_N^n R_N^{n+1} + \sum_{i=1}^{NV} C_{Ni}^n R_i^{n+1}$$
$$(R_N^{n+1})^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{R_N^n}}(R_N^{n+1} - R_N^n)$$

où NV est le nombre de noeuds voisins du noeud N.

En substituant ces expressions dans l'équation (3.61), la forme discrète de l'équation du modèle de Baldwin-Barth s'écrit alors:

$$\left[\frac{1}{\Delta t} + D_N^n - \left(\frac{1}{2}(C_{\epsilon 2} f_2 - C_{\epsilon 1})\sqrt{\frac{P}{R}}\right)_N^n\right] R_N^{n+1} + \sum_{i=1}^{NV} E_{Ni}^n R_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left[(C_{\epsilon 2} f_2 - C_{\epsilon 1})\sqrt{PR}\right]_N^n \frac{1}{\Delta t} R_N^n \tag{3.63}$$

où D_N et E_N sont des ceofficient fonctions de $\boldsymbol{u}$, ν et ν_t.

Modèle $k - \omega$

Les équations de k et de ω (équations 2.59) ont des formes similaires et peuvent être représentées par l'équation modèle suivante:

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}\Phi - \bar{\alpha}\nabla\Phi) = \bar{\beta}P - \bar{\gamma}\Phi^2 \tag{3.64}$$

où Φ représente k ou ω et $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ les coefficients correspondants. Ces coefficients sont:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1}{Re}(\mu + \sigma_k \mu_t) \\ \bar{\beta} &= \frac{\mu_t}{Re} \\ \bar{\gamma} &= \frac{\beta^* Re \rho^2}{\mu_t} \end{aligned} \tag{3.65}$$

pour l'équation de k, et

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1}{Re}(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \\ \bar{\beta} &= \frac{5}{9}\frac{\rho}{Re} \\ \bar{\gamma} &= \beta Re \rho \end{aligned} \tag{3.66}$$

pour l'équation de ω.

En utilisant le théorème de Gauss, la forme intégrale de l'équation 3.64 s'écrit:

$$\Omega_N \rho_N \frac{\partial \Phi_N}{\partial t} + \oint_{\partial \Omega_N} (\rho \boldsymbol{u} \Phi - \bar{\alpha}_N \nabla \Phi) \boldsymbol{n} \Delta s = \Omega_N (\bar{\beta}_N P_N - \bar{\gamma}_N \Phi_N^2) \tag{3.67}$$

La forme discrète de cette équation s'écrit:

$$\begin{aligned} &\rho_N \frac{\Phi_N^{n+1} - \Phi_N^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Omega_N} \sum_{j=1}^{NC} \left[\left(\rho \Phi^{n+1} \boldsymbol{u} - \bar{\alpha}_N^n \nabla \Phi^{n+1} \right) \boldsymbol{n} \Delta s \right]_j \\ &= \bar{\beta}_N^n P_N^n - \bar{\gamma}_N^n (\Phi_N^{n+1})^2 \end{aligned} \tag{3.68}$$

En utilisant la différentiation en amont, l'équation 3.33 pour l'évaluation des gradients et la linéarisation de Newton, les terme convectifs, de diffusion et le terme non-linéaire s'écrivent:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Omega_N} \sum_{j=1}^{NC} \left[\left(\rho \Phi^{n+1} \boldsymbol{u} - \bar{\alpha}_N^n \nabla \Phi^{n+1} \right) \boldsymbol{n} \Delta s \right]_j = F_N^n R_N^{n+1} + \sum_{i=1}^{NV} G_{Ni}^n R_i^{n+1} \\ &(\Phi_N^{n+1})^2 = 2 \Phi_N^n (\Phi_N^{n+1} - \Phi_N^n) \end{aligned} \tag{3.69}$$

où F_N et G_N sont les coefficients correspondants.

Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières recommandées pour le modèle de Baldwin-Barth sont:

- Parois solides: $R_T = 0.0$
- Entrée ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} > 0$) et infini: spécifier $R_T = (R_T)_\infty < 1.0$
- Sortie ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} > 0$): R_T est extrapolé de l'intérieur

Pour le modèle $k-\omega$ standard, les conditions aux frontières ont un grand effet sur la solution [42,52]. À la paroi, l'énergie cinétique de turbulence, k, est imposée égale à zéro. Pour assurer de faibles valeurs de μ_t dans l'écoulement libre, la valeur de k à l'infini est imposé deux fois moins grande que celle de ω. Les valeurs de ω à la paroi et à l'infini sont imposées tel que proposé par [52]. À la sortie, les deux variables sont extrapolées de l'intérieur du domaine.

L'intégration implicite dans le temps est justifiée par l'économie en temps de calcul et par des espaces mémoire requis raisonables, car on ne résout qu'une seul équation à la fois. Les systèmes matriciels résultant de la discrétisation des équations de transport des deux modèles de turbulence, sont résolus à l'aide la méthode itérative GMRES [162] en utilisant l'algorithme de la librarie des méthodes itérative du CERCA [163]. Les matrices sont stockées sous le format CSR ("Compressed-Sparce-Row") et un préconditionneur diagonal est utilisé.

L'implantation du modèle de Baldwin-Barth requiert aussi les distances normales aux noeuds, ρ_w, μ_w et τ_w afin d'évaluer la fonction d'amortissement $f_2(y^+)$. Ces quantités sont déterminées à l'aide de la technique d'implantation du modèle de Baldwin-Lomax, décrite à la section 3.3.1.

Chapitre 4

Résultats

Les différentes techniques de résolution numérique, décrites dans le chapitre précédent, ont été appliquées pour calculer des écoulements externes compressibles, bidimensionnels et stationnaires. Le solveur a été validé en considérant des écoulements non-visqueux, des écoulements laminaires et des écoulements turbulents. Les différents cas tests utilisés dans la présente étude sont résumé dans le tableau (4.1).

4.1 Écoulements non-visqueux

Afin d'établir les performances du schéma de base (schéma standard de Roe), utilisé pour discrétiser les termes convectifs des équations moyennes de Reynolds compressibles, sur des maillages non-structurés triangulaires, les cas tests 1 et 2 (tableau 4.1) ont été considérés.

Cas test	Géométrie	Type d'écoulement	M_∞	α°_∞	Re_∞
1	NACA0012	Non-visqueux	0.8	0	-
2	Karman-Trefftz	Non-visqueux	0.125	0	-
3	Plaque plane	Laminaire	0.8	0	1000
4	NACA0012	Laminaire	0.5	0	5000
5	NACA0012	Laminaire	0.8	10	500
6	NACA0012	Laminaire	0.85	0	2000
7	Plaque plane	Turbulent	0.795	0	1.8×10^6
8	NACA0012	Turbulent	0.3	3.59	1.86×10^6
9	NACA0012	Turbulent	0.5	-0.06	2.89×10^6
10	NACA0012	Turbulent	0.799	2.26	9×10^6
11	RAE2822	Turbulent	0.725	2.54	6.5×10^6

Tableau 4.1: Cas tests étudiés

4.1.1 Profil NACA0012

Ce premier cas test (cas test 1) consiste à calculer un écoulement transsonique non-visqueux autour d'un profil NACA0012 avec $M_\infty = 0.8$ et $\alpha_\infty = 0°$. Trois maillages ont été utilisés pour calculer cet écoulement. Ces maillages sont représentés à la figure 4.1 et leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Maillage	Nb. noeuds	Nb. triangles	Élancement AR	$(\Delta y)_{min}$
UG	7077	13890	1:1	-
EG	9163	17981	4:1	5×10^{-3}
LG	11769	23231	100:1	2×10^{-4}

Tableau 4.2: Caractéristiques des maillages utilisés autour du profil NACA0012

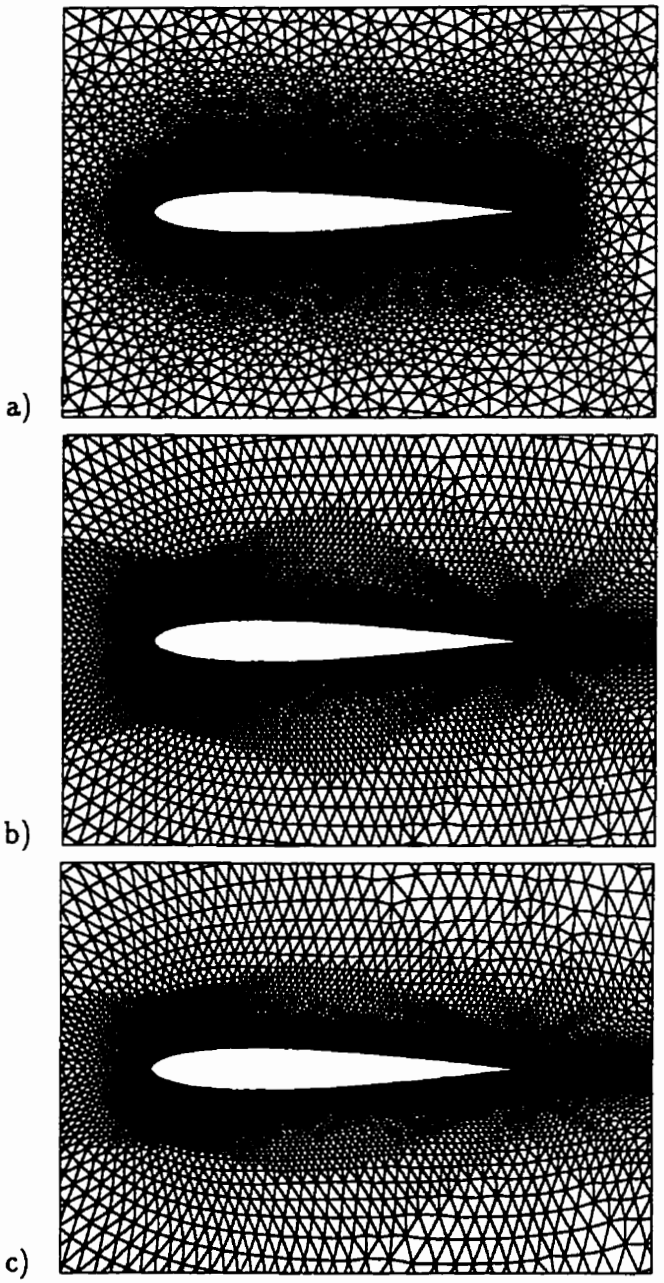


Figure 4.1: Maillages utilisés autour du profil NACA0012. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG.

Les figures 4.2, 4.3 et 4.4 montrent, respectivement, les lignes d'iso-Mach, d'iso-pression et d'iso-température pour les trois maillages. Ces solutions ont été obtenues à l'aide du schéma du premier ordre. On constate qu'en utilisant des maillages triangulaires réguliers et concentrés près de la paroi (maillages EG et LG), les iso-Mach (figures 4.2b et 4.2c) et les iso-température (figures 4.4b et 4.4c) présentent des effets visqueux non-physiques le long du profil et dans le sillage.

Ce comportement visqueux des solutions non-visqueuses est attribué à l'effet du maillage sur le schéma standard de Roe. En effet, pour des écoulements bidimensionnels, ce schéma résout une série de problèmes de Riemann unidimensionnels selon les directions normales aux interfaces. Ceci rend le schéma très dépendent de l'orientation des faces dans le maillage utilisé. En plus, le fait de forcer les quatre ondes à se propager dans la même direction (direction normale à la face) semble ne pas être la représentation physique la plus adéquate du problème, ce qui génère des solution non-physiques.

Les résultats obtenus montrent aussi que le choc est mieux résolu sur le maillage UG, qui est un maillage complètement non-structuré composé de triangles équilatéraux, que sur les maillgaes EG et LG. Ceci est dû d'une part au fait que le maillage UG est plus raffiné dans la direction de l'écoulement que les deux autres, et d'autre part, au fait que ce maillage est plus irrégulier et de ce fait il contient probablement plus de faces alignées avec le choc. Ceci permet au schéma de résoudre d'une façon plus exacte les problèmes de Riemann qui se manifestent au niveau de la discontinuité. Les références [164] et [165] présentent une étude exhaustive sur les effets du maillage sur les schémas "upwind" pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes.

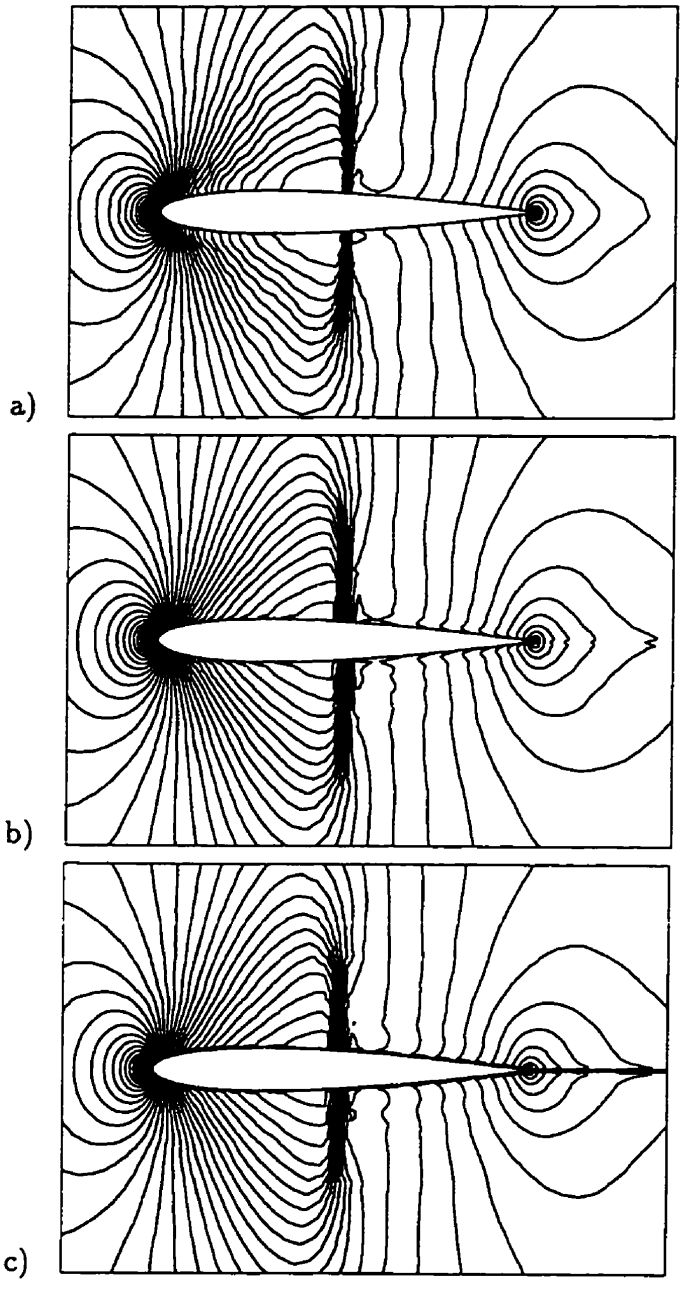


Figure 4.2: Cas test 1, schéma d'ordre 1: Lignes d'iso-Mach. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG.

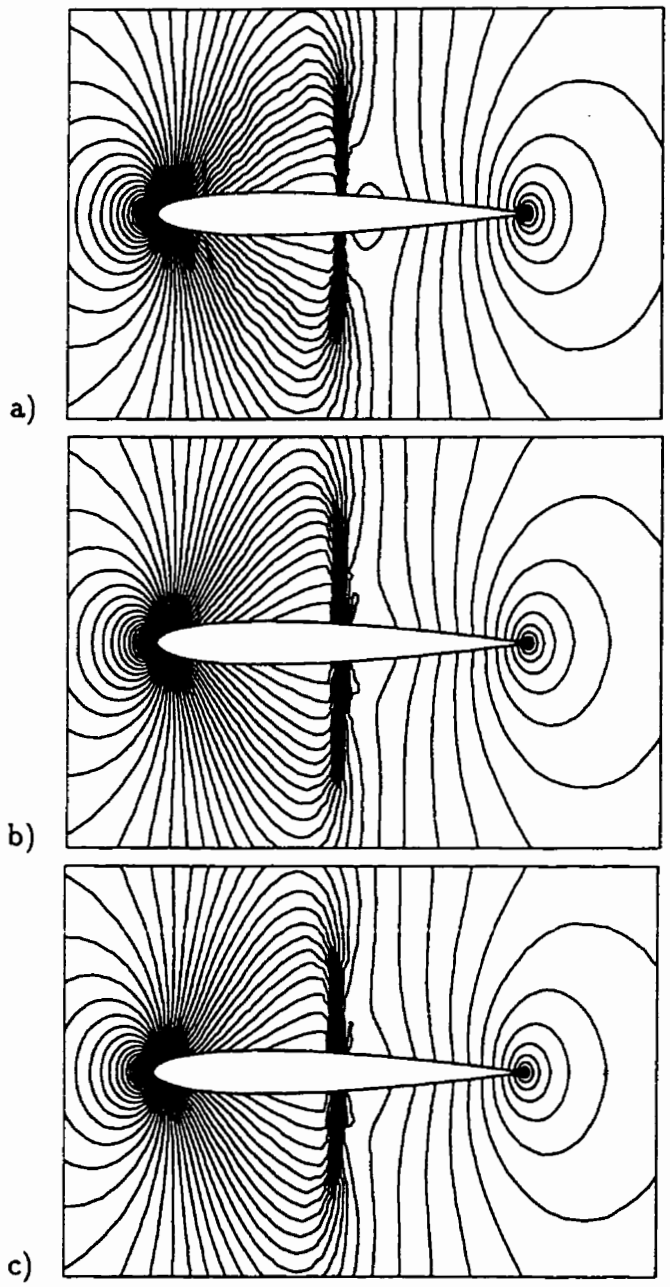


Figure 4.3: Cas test 1, schéma d'ordre 1: Lignes d'iso-pression. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG.

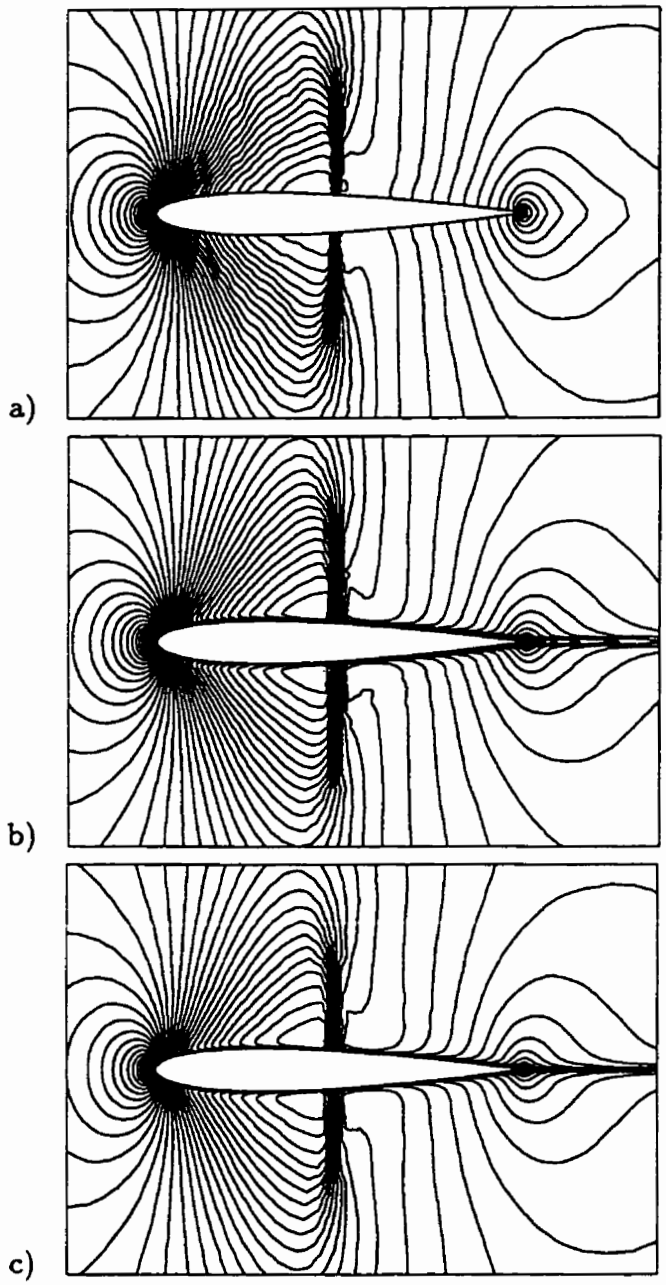


Figure 4.4: Cas test 1, schéma d'ordre 1: Lignes d'iso-température. a) Maillage UG, b) Maillage EG, c) Maillage LG.

Les différentes solutions de ce cas test ont été obtenues sur un ordinateur IBM 590 . Les courbes de convergence du schéma du premier ordre, sur les trois maillages, sont représentées à la figure 4.5 en fonction du temps CPU. On constate que la solution converge sur les trois maillages, sans difficulté jusqu'au zéro de la machine.

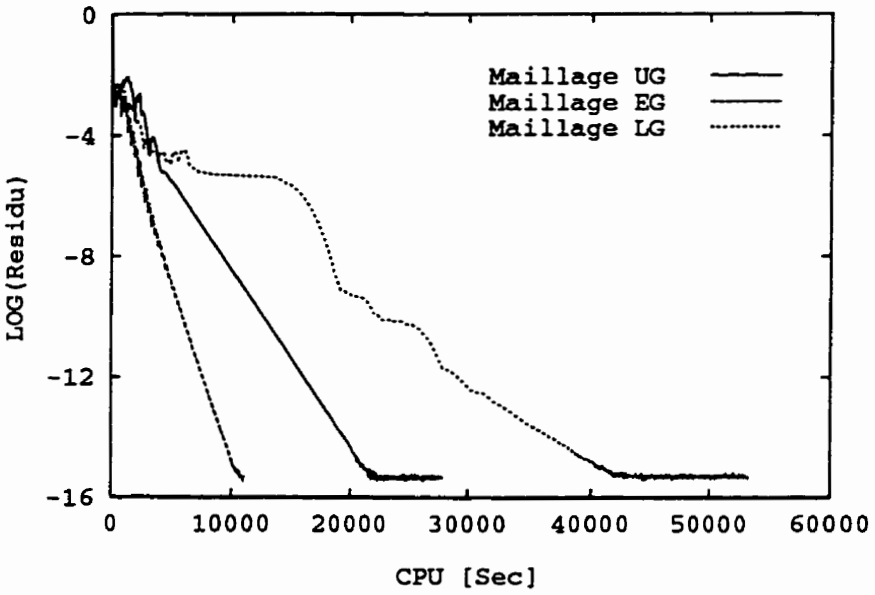


Figure 4.5: Cas test 1, schéma d'ordre 1: Courbes de convergence sur les trois maillages.

Pour mieux établir les performances du schéma standard de Roe sur des maillages non-structurés triangulaires, les prédictions du coefficient de pression sont comparées à celles obtenues, en utilisant un schéma centré, par Jameson et Mavriplis [138] (figure 4.6). On constate que le schéma d'ordre 1 prédit des valeurs $-Cp$ inférieures à celles du schéma centré dans la région $0.15 \leq x/c \leq 0.45$, et ceci pour les trois maillages, alors que pour le reste du profil les résultats du schéma de Roe se comparent assez bien avec ceux de Jameson et Mavriplis.

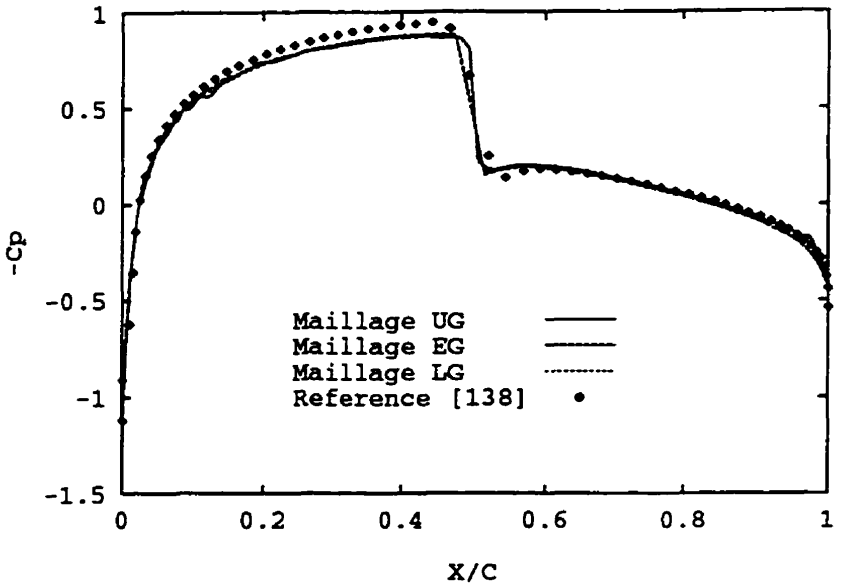


Figure 4.6: Cas test 1, schéma d'ordre 1: Distributions du coefficient de pression pour les trois maillages.

Dans le but de prévenir le comportement visqueux, non-physique, des solutions non-visqueuses et d'améliorer les résultats du schéma d'ordre 1, ce cas test a été calculé, sur le maillage EG, en utilisant le schéma du deuxième ordre et les limiteurs de Barth et de Venkatakrishnan. Les figures 4.7a, 4.7b et 4.7c montrent, respectivement, les lignes d'iso-Mach, d'iso-pression et d'iso-température obtenues en utilisant le limiteur de Venkatakrishnan. D'après ces figures, on remarque que le schéma d'ordre 2 améliore la solution mais n'arrive pas à éliminer totalement les effets visqueux qui demeurent visibles sur les iso-température (figure 4.7c). Le stockage aux centres des éléments semble être une des causes qui empêchent l'amélioration des solutions aux deuxième ordre. Car, Barth et Jespersen [94], avec un stockage aux noeuds du maillage, ont obtenu de meilleures améliorations à l'aide d'un schéma d'ordre 2.

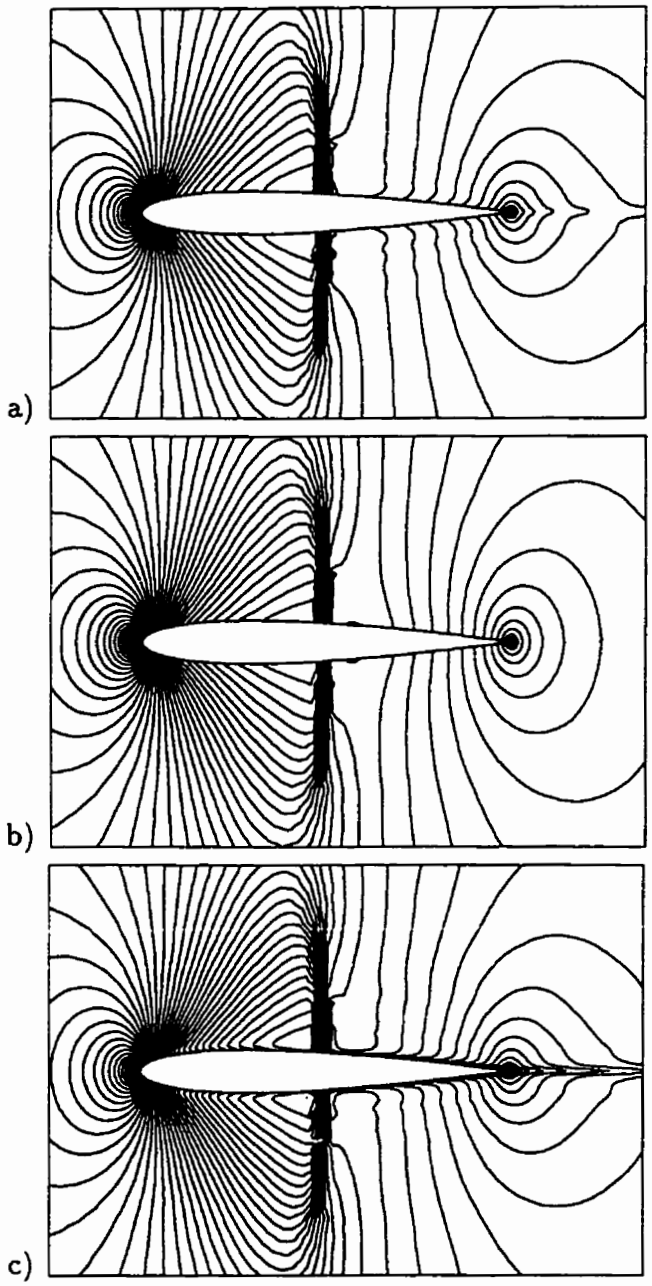


Figure 4.7: Cas test 1, schéma d'ordre 2: a) Lignes d'iso-Mach, b) Lignes d'iso-pression, c) Lignes d'iso-température.

À la figure 4.8, les prédictions du coefficient de pression du schéma d'ordre 1 et du schéma d'ordre 2 sont comparées entre elles et avec celles de Jameson et Mavriplis. Le schéma du deuxième ordre, en utilisant les limiteurs de Barth et de Venkatakrishnan, prédit des coefficients de pression similaires. Ces prédictions se comparent mieux avec les résultats du schéma centré que celles du schéma du premier ordre.

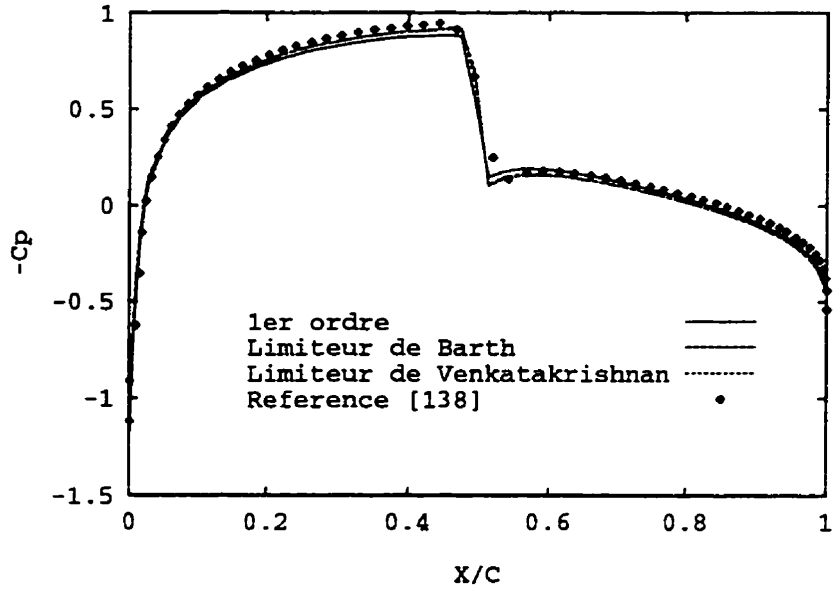


Figure 4.8: Cas test 1, maillage EG: comparaison des coefficients de pression des schémas du 1er et du 2ième ordre.

4.1.2 Profil de Karman-Trefftz

Le deuxième cas test est un écoulement non-visqueux incompressible autour d'un profil muni d'un volet braqué à 10° (configuration B du cas test de Williams [166]). Cet écoulement a été calculé à un nombre de Mach $M_\infty = 0.125$ et une incidence $\alpha_\infty = 0°$. Le maillage utilisé (figure 4.9a) contient 13781 noeuds (27042 triangles) et la largeur du domaine de calcul est de 20 fois la corde du profil. Les lignes d'iso-Mach, obtenus à l'aide du schéma d'ordre 2 en utilisant le limiteur de Venkatakrishnan, sont représentées à la figure 4.9b.

La figure 4.10 compare les coefficients de pression calulés à l'aide du schéma du premier et du deuxième ordre à la solution analytique de Williams [166]. Sur le volet, les résultats des deux schémas concordent assez bien avec la solution analytique avec une meilleure concordance du schéma d'ordre 2 sur l'extrados. Sur le profil, les deux schémas donnent des résultats acceptables à l'exception de la région du bord d'attaque où le schéma d'ordre 2 performe beaucoup mieux que le schéma d'ordre 1 mais n'arrive pas à prédire le pic de succion. Ceci est probablement dû à l'effet des conditions aux frontières à l'infini implantées, dans la présente étude, sans correction de vortex nécessaire pour les profils à haute portance comme celui de Karman-Trefftz.

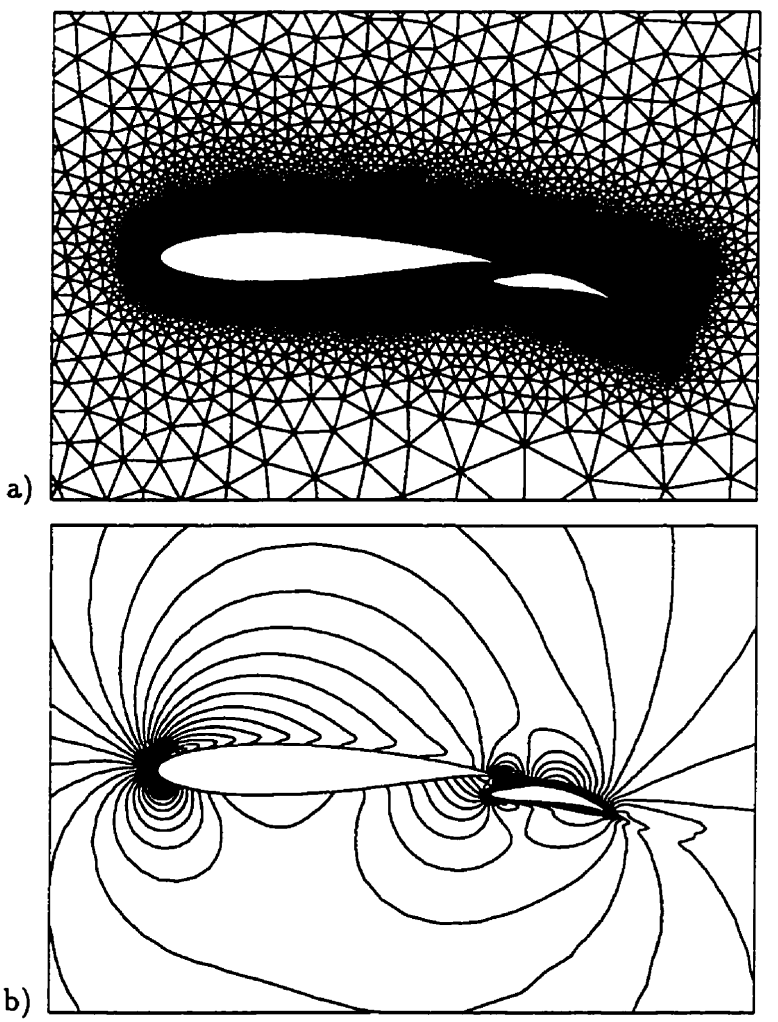


Figure 4.9: Cas test 2: maillage et lignes d'iso-Mach.

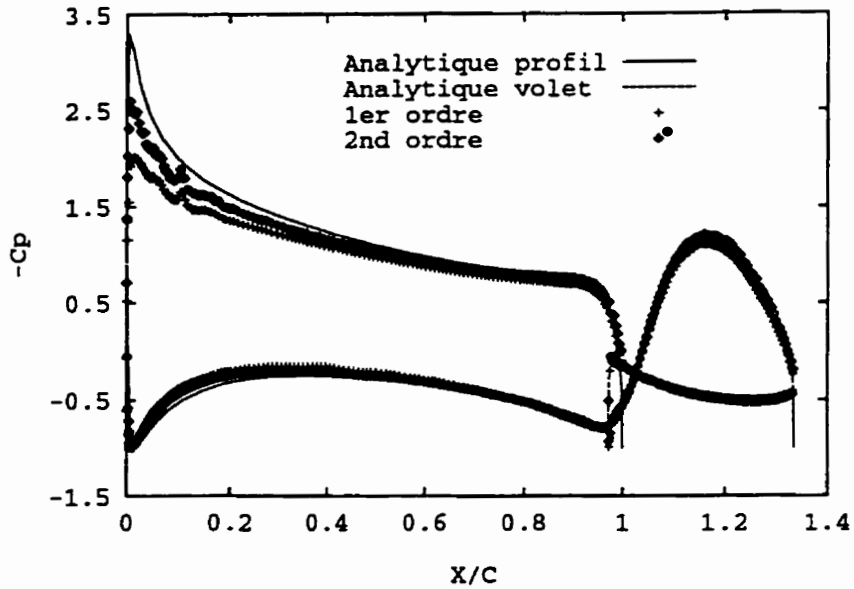


Figure 4.10: Cas test 2: distributions des coefficients de pression.

4.2 Écoulements laminaires

La deuxiéme série de cas tests consiste à valider l'implantation des termes visqueux des équations et établir les performances du solveur pour des écoulements à faible nombres de Reynolds (écoulements laminaires). Pour cela, les cas tests 3, 4, 5, et 6 (tableau 4.1) ont été considérés.

4.2.1 Plaque plane

Le développement d'une couche limite compressible laminaire sur une plaque plane adiabatique (cas test 3), pour lequel il existe une solution analytique [167] représente un cas test très intéressant. Cet écoulement a été calculé sous les conditions suivantes, $M_\infty = 0.8$, $\alpha_\infty = 0°$, $Re_\infty = 1000$, $Pr = 1$ et $\mu = T$. La plaque

considérée a une longueur de 2 et la hauteur du domaine de calcul est de 0.5.

Pour fin de représentation des résultats, la distance normale y est normalisée comme suit:

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu_\infty x}} \tag{4.1}$$

où "∞" indique les valeurs à l'infini et x la distance mesurée à partir du bord d'attaque de la plaque.

Quatre maillages, générés par raffinement régulier successif dans la direction normale à la plaque, ont été utilisés pour étudier l'effet du maillage sur la solution. Deux de ces maillage sont représentés à la figure 4.11 et leurs caractéristiques sont dressées dans le tableau 4.3 ci-dessous.

Maillage	Nb. noeuds	Nb. triangles	$(\Delta y)_{min}$
G1	1001	1904	1.8×10^{-2}
G2	1967	3808	9×10^{-3}
G3	3899	7616	4.5×10^{-3}
G4	7763	15232	2.25×10^{-3}

Tableau 4.3: Caractéristiques des maillages utilisés pour la plaque plane laminaire.

Les profils de vitesse et de température obtenus en utilisant les quatres maillages sont comparés à la figure 4.12. On constate que le maillage grossier $G1$ donne des solutions éloignées de la solution analytique. En raffinant le maillage, maillages $G2$, $G3$ et $G4$, les solutions se rapprochent de plus en plus des profils analytiques. On note toutefois que les maillages les plus fins, $G3$ et $G4$, donnent des solutions similaires qui concordent assez bien avec les solutions analytiques.

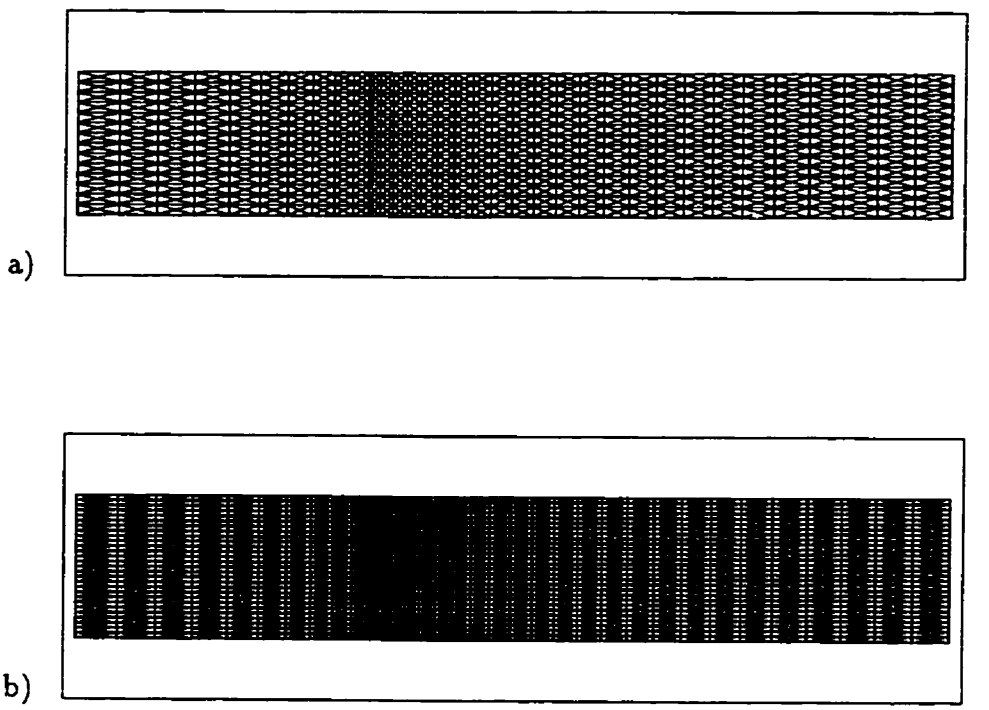


Figure 4.11: Cas test 3: maillages utilisés. a)Maillage G1, b) Maillage G2.

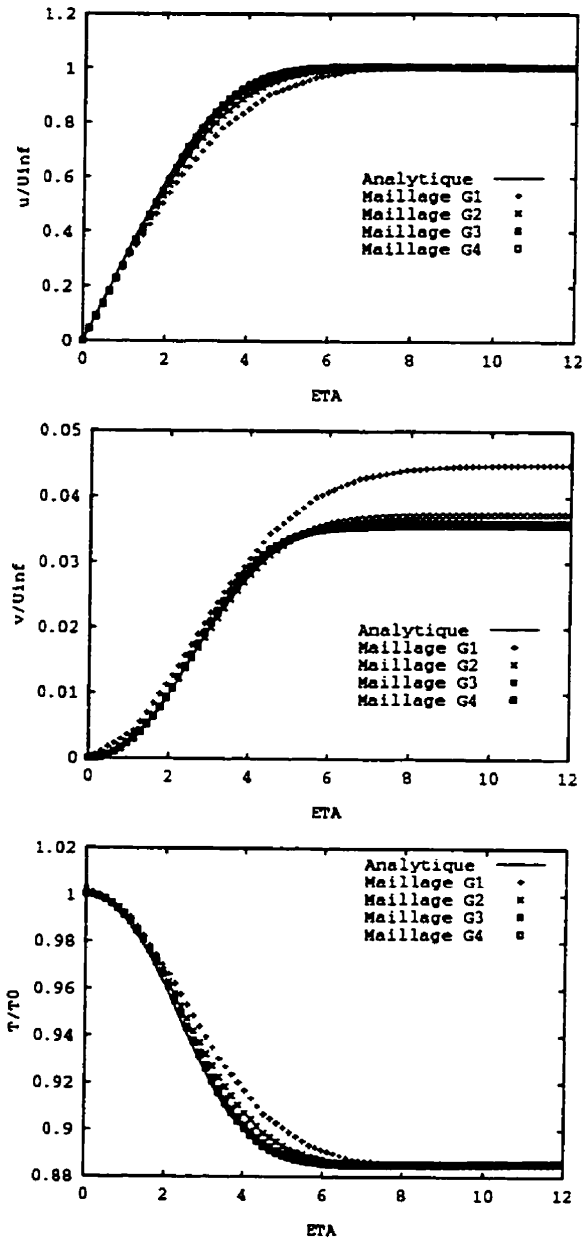


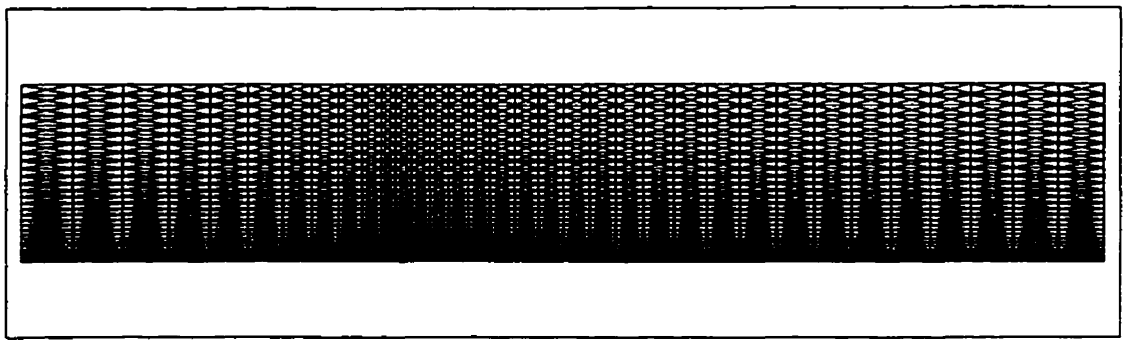
Figure 4.12: Cas test 3: Effet du maillage sur la solution.

Trois autres maillages ont ensuite été utilisés pour étudier les effets d'autres paramètres. Ces maillages sont représentés à la figure 4.13. Les maillages SM1 et SM2 (figures 4.13a et 4.13b) sont obtenus en divisant chaque quadrilatère du maillage structuré correspondant en quatre triangles, alors que le maillage UM est un maillage complètement non-structuré. Les caractéristiques des trois maillages sont résumées dans le tableau ci-dessous. Dans les maillages SM1 et SM2, les noeuds adjacents à la paroi sont, respectivement, situés à des distances normales de 2.5×10^{-3} et 2.5×10^{-4} alors que cette distance varie de 3.5×10^{-3} à 6.5×10^{-3} pour le maillage UM. La figure 4.14 montre une comparaison des profils de vitesse (figure 4.14a) et

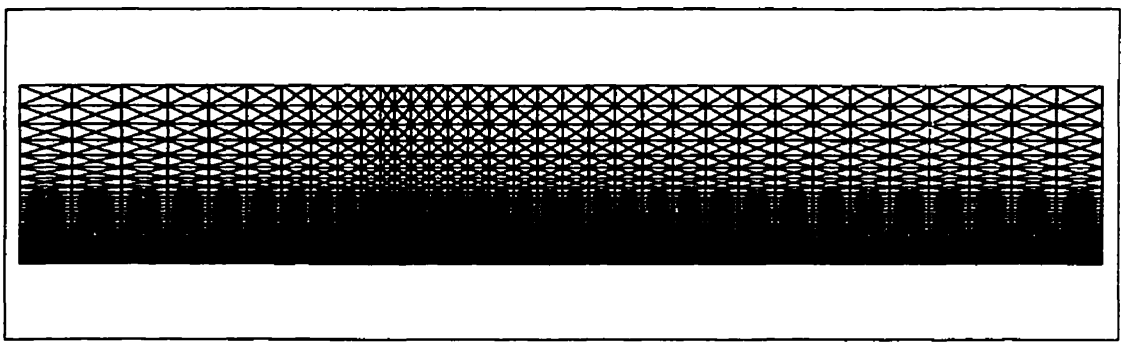
Maillage	Nb. noeuds	Nb. triangles	Élancement AR
SM1	2036	3944	50:1
SM2	2795	5440	500:1
UM	915	1739	50:1

Tableau 4.4: Caractéristiques des maillages utilisés pour la plaque plane laminaire.

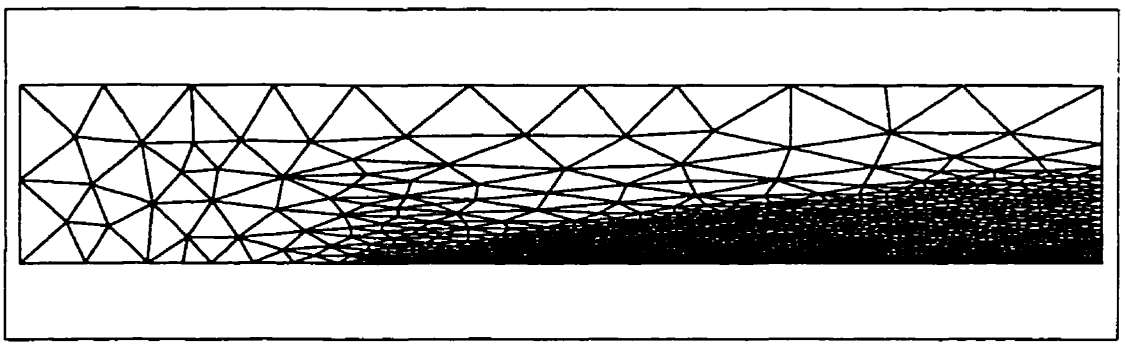
de température (figure 4.14b), à deux positions différentes sur la plaque, avec les profils analytiques. Ces résultats ont été obtenus en utilisant le schéma d'ordre 1 et le maillage SM1. On constate que le solveur reproduit la similarité de l'écoulement et donne des résultats qui concordent assez bien avec la solution analytique. On note, cependant, de légères sous-estimations des valeurs de la vitesse et de la température près du bord de la couche limite ($3 \leq \eta \leq 5$). Ceci est attribué au fait que le maillage utilisé n'est pas assez fin dans cette région du domaine de calcul.



a)



b)



c)

Figure 4.13: Cas test 3: maillages utilisés. a)Maillage SM1, b) Maillage SM2, c) Maillage UM.

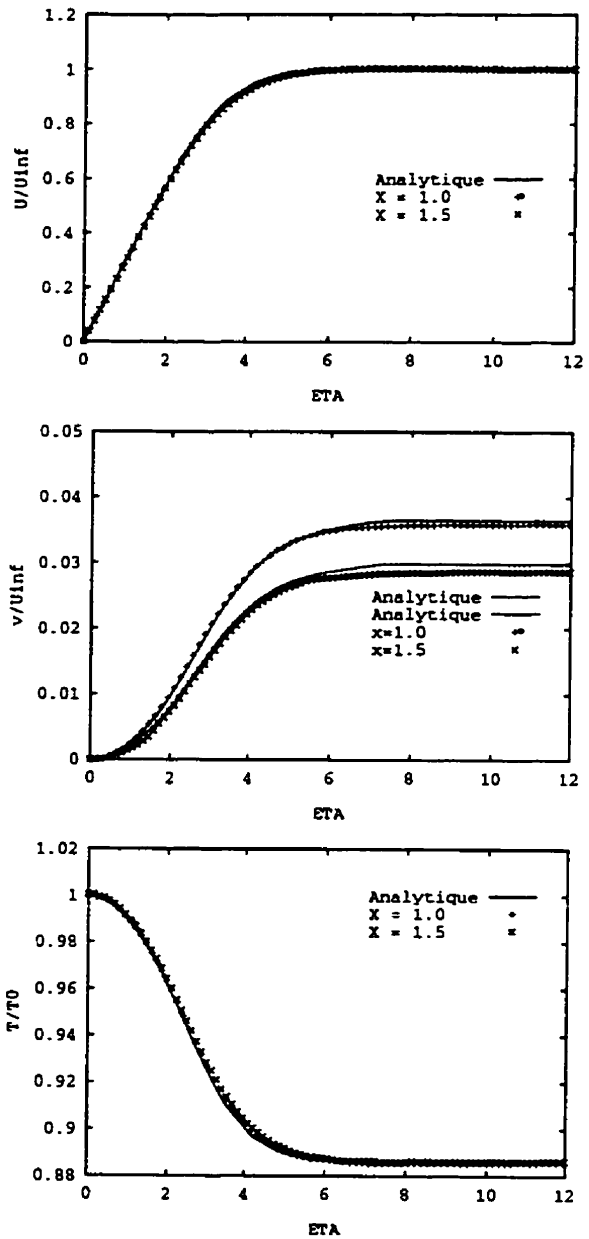


Figure 4.14: Cas test 3, schéma d'ordre 1, maillage SM1: profils de vitesse et de température à différentes positions.

Les figures 4.15, 4.16 et 4.17 montrent l'effet de l'élancement du maillage sur le profil de vitesse à $x/Lref = 1$, sur le coefficient de friction et sur la convergence. Ces résultats ont été obtenus en utilisant le schéma d'ordre 1. Concernant le profil de vitesse, la figure 4.15 montre que l'élancement du maillage, du moins jusqu'à 500:1, n'affecte pas beaucoup la solution. On constate que même si le maillage SM2 (AR=500) prédit des vitesses légèrement inférieures à celles prédites sur le maillage SM1 (AR=50), dans la région $1 \leq \eta \leq 4$, le profil de vitesse, dans son ensemble, concorde assez bien avec le profil analytique.

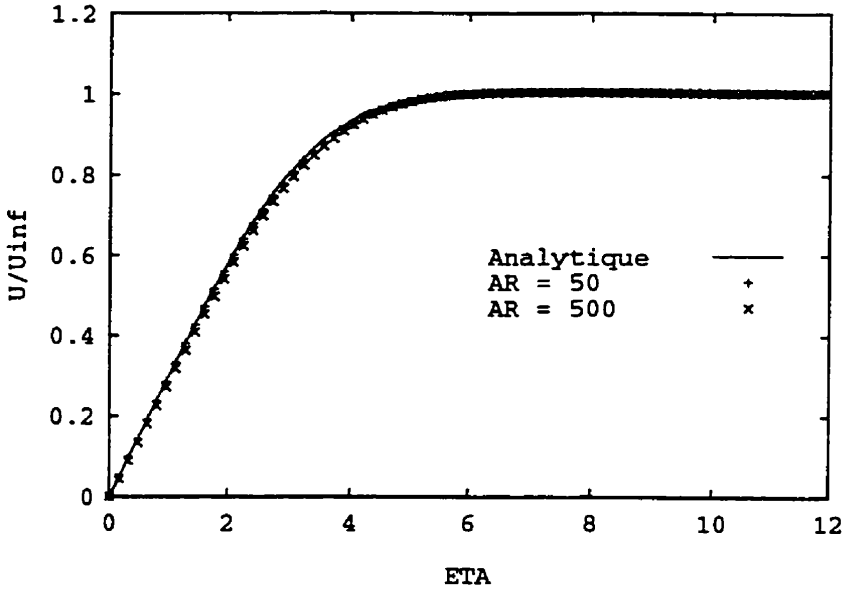


Figure 4.15: Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet de l'élancement sur le profil de vitesse.

Sur la figure 4.16 on remarque que le maillage SM2 prédit un meilleur coefficient Cf, surtout dans la région du bord d'attaque de la plaque. Ceci est attribué à la meilleure concentration de ce maillage près de la paroi. Pour le reste de la plaque,

les résultats des deux maillages sont très proches et concordent assez bien avec le Cf analytique.

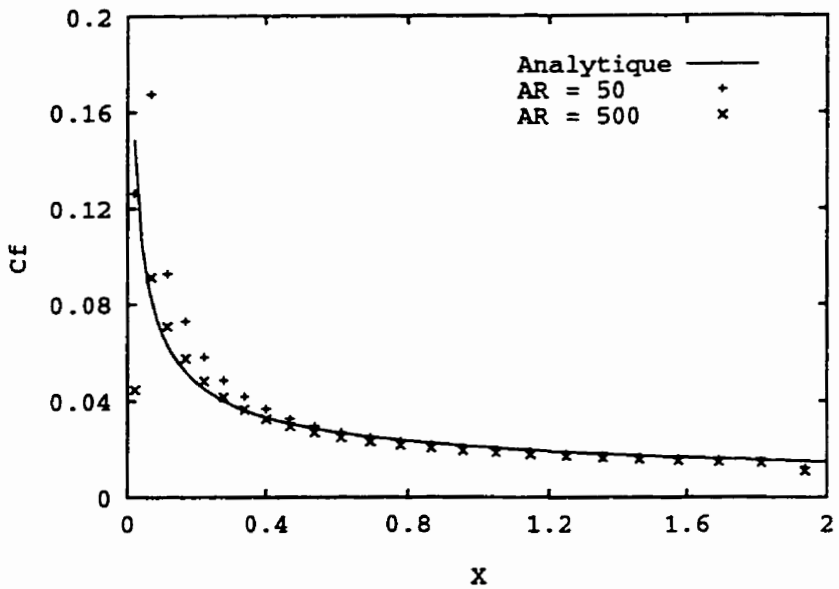


Figure 4.16: Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet de l'élancement sur le coefficient de friction.

Le fait de raffiner le maillage près de la paroi (augmenter l'élancement), dans la direction normale à la plaque, donne des pas de temps Δt très petits dans cette région de l'écoulement. Ceci affecte la convergence du schéma explicite utilisé, tel que montré à la figure 4.17. Sur cette figure, on note que les deux maillages convergent sans difficulté. Cependant, le maillage SM2 met beaucoup plus de temps à converger que le maillage SM1.

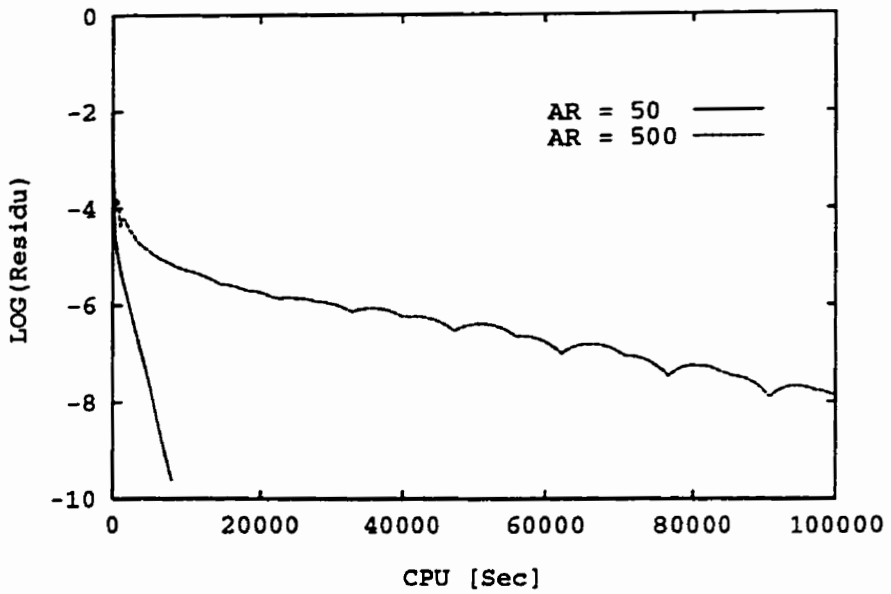
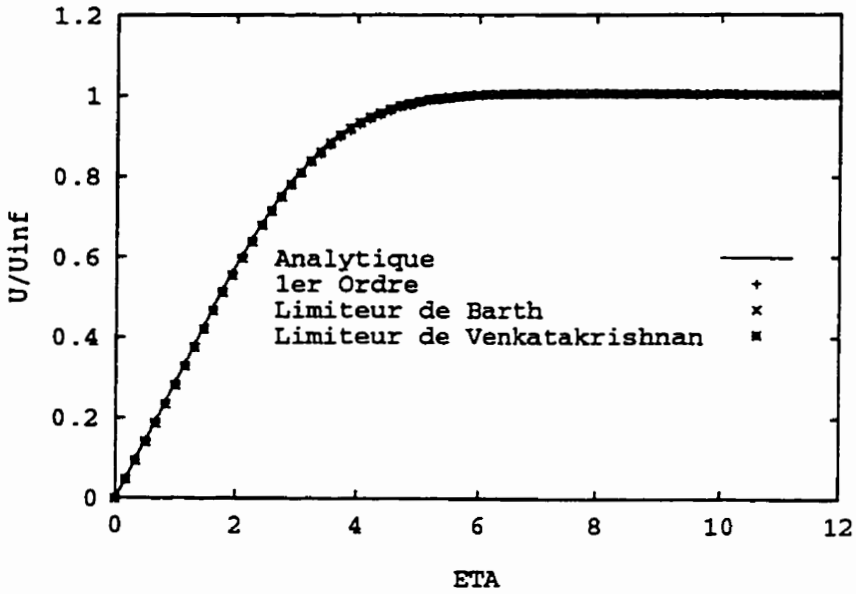
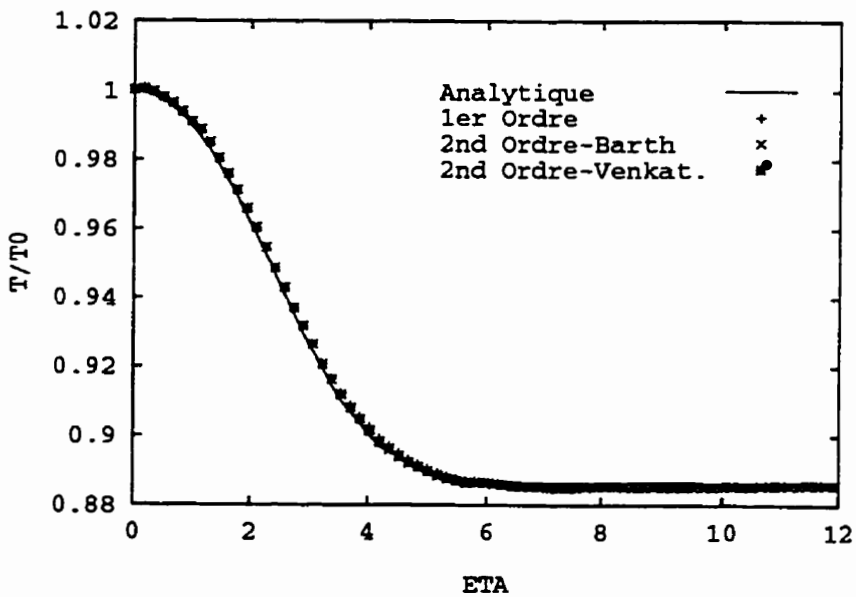


Figure 4.17: Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet de l'élancement sur la convergence.

Dans le but d'améliorer la précision des solutions du schéma d'ordre 1, cet écoulement a été calculé en utilisant le schéma d'ordre 2 et les limiteurs de Barth et de Venkatakrishnan. Les figures 4.18, 4.19, et 4.20 présentent les profils de vitesse (figure 4.18a) et de température (figure 4.18b) à $x/Lref = 1$, le coefficient de friction et la convergence du schéma pour les deux limiteurs en utilisant le maillage SM1. Ces figures montrent que les deux limiteurs produisent des résultats sensiblement identiques et sont légèrement plus précis que les prédictions du schéma du premier ordre. Cependant, le limiteur de Barth éprouve de la difficulté à converger (figure 4.20), même pour ce cas simple, alors que le limiteur de Venkatakrishnan converge jusqu'au zéro de la machine.



a)



b)

Figure 4.18: Cas test 3, schéma d'ordre 2, $x/Lref = 1$: a) profil de vitesse, b) profil de température.

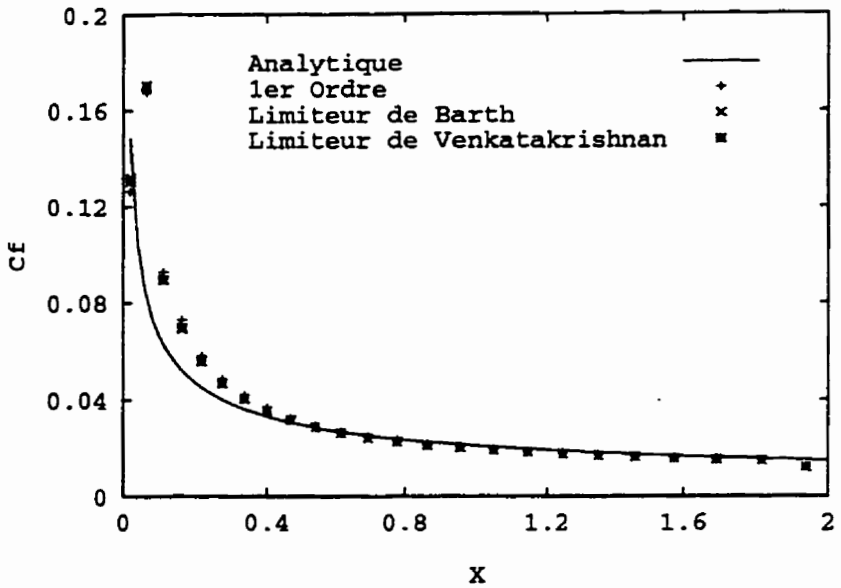


Figure 4.19: Cas test 3, schéma d'ordre 2: coefficients de friction.

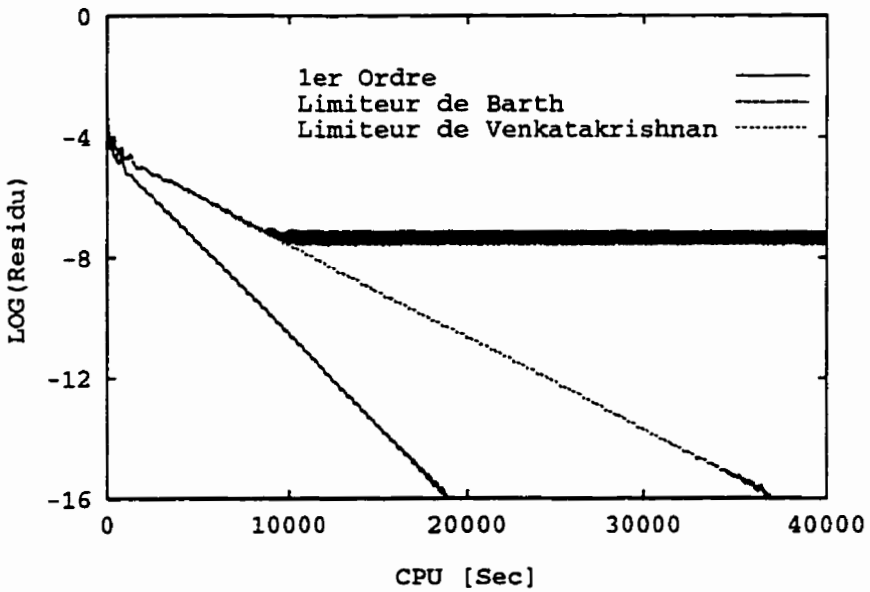


Figure 4.20: Cas test 3, schéma d'ordre 2: courbes de convergence.

Un troisième maillage triangulaire UM (tableau 4.4 et figure 4.13) a été utilisé pour calculer le même écoulement. Ce maillage est complètement non-structuré avec un élancement proche de celui du maillage SM1 (AR=50). Les figures 4.21 et 4.22 comparent les résultats de ce maillage, obtenus à l'aide du schéma d'ordre 1, à ceux du maillage SM1. La figure 4.21 compare les profils de vitesse (figure 4.21a) et de température (figure 4.21b) à $x/Lref = 1$, alors que la figure 4.22 compare les coefficients de friction. Les profils de vitesse et de température montrent que le maillage UM donne des résultats plus précis que le maillge SM1. Il semble que le maillage complètement non-structuré donne une meilleure répartition des noeuds et génère moins de viscosité artificielle. De ce fait, les solutions sont moins diffuses sur le maillage UM que sur SM1, surtout au voisinage du bord de la couche limite.

Concernant les prédictions de Cf, la figure 4.22 indique que, dans la région du bord du bord d'attaque de la plaque, le maillage SM1 prédit un Cf légèrement meilleur que celui du maillage complètement non-structuré UM. Ceci est attribué au fait que le maillage SM1 possède une concentration plus fine dans la direction normale près de la paroi.

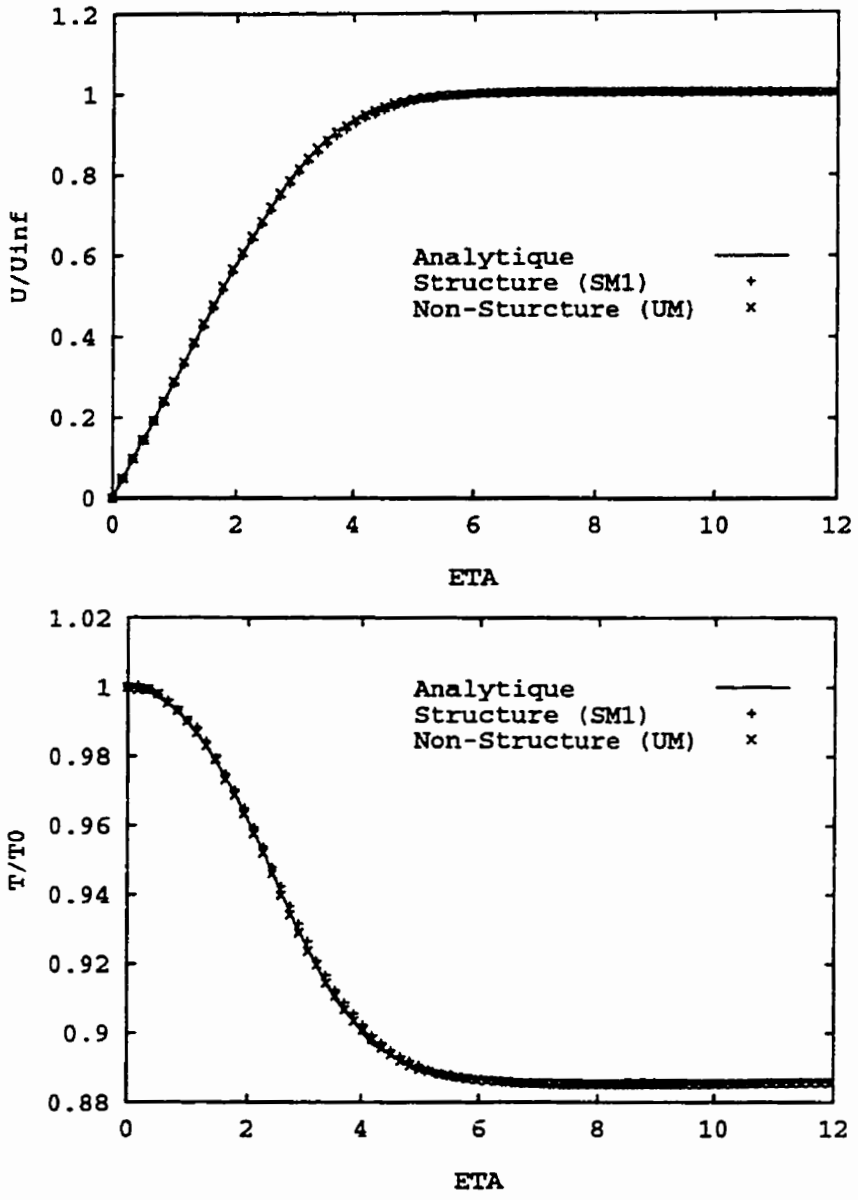


Figure 4.21: Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet du type de maillage a) profil de vitesse, b) profil de température.

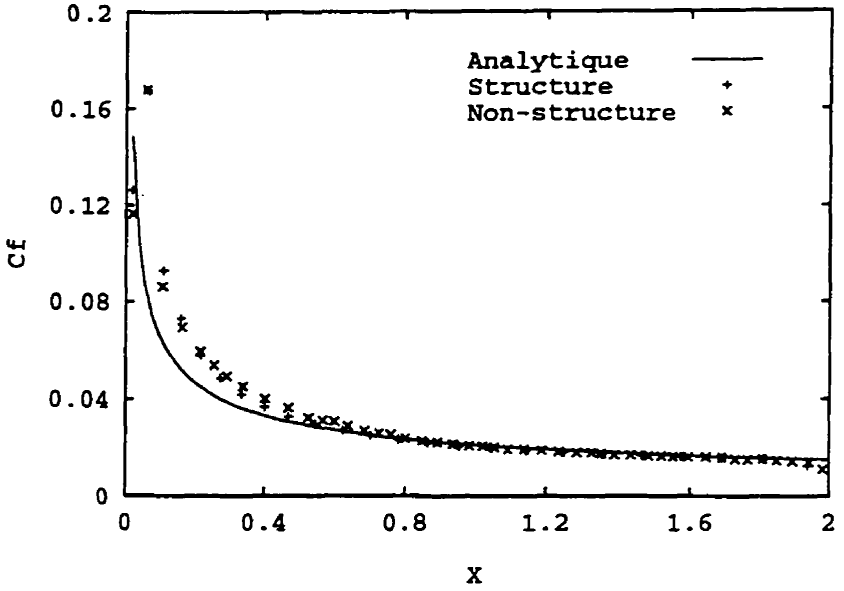


Figure 4.22: Cas test 3, schéma d'ordre 1: effet du type de maillage sur le coefficient de friction.

4.0.1 Profil NACA0012

Trois écoulements compressibles laminaires, à différentes conditions, ont été calculés autour du profil NACA0012 avec une paroi adiabatique. Ces trois cas tests sont le cas test 4, le cas test 5 et le cas test 6 du tableau 4.1. Ces écoulements ont été calculés par divers auteurs pour le GAMM-Workshop sur la résolution des écoulements Navier-Stokes compressibles [168].

Pour établir les performances du solveur pour ces écoulements, les résultats des schémas du premier et du deuxième ordre, en utilisant le limiteur de Venkatakrishnan, sont comparés aux prédictions du solveur NSU2D de Mavriplis. Ce code de calcul est basé sur un schéma centré [7] et les solutions ont été calculées à Canadair

par le Dr. Farzad Mokhtarian [169]. Le maillage LG (tableau 4.2 figure 4.1c) a été utilisé pour les cas tests 4 et 6, alors qu'un maillage de 14063 noeuds (27817 triangles) et ayant les mêmes caractéristiques que le maillage LG (un élancement AR=200 et les noeuds adjacents au profil sont situés à une distance normale de 2×10^{-4} fois la corde), a été utilisé pour le cas test 5. Les résultats de NSU2D ont été obtenus en utilisant ce dernier maillage pour les trois cas tests.

Les solutions du cas test 4 ($M_\infty = 0.5$, $\alpha_\infty = 0°$, $Re_\infty = 5000$) sont représentées aux figures 4.23, 4.24 et 4.25. La figure 4.23 montre les lignes d'iso-Mach et le champ de vitesse dans la région du bord de fuite du profil, la figure 4.24 le coefficient de pression et la figure 4.25 le coefficient de friction. Pour ce cas test, les lignes d'iso-Mach (figure 4.23a) montrent que l'écoulement décolle près du bord de fuite et une petite bulle, symmétrique, de recirculation est formée dans le sillage à proximité du bord de fuite du profil. Ce comportement global de l'écoulement ainsi que les coefficients de pression (figure 4.24) et de friction (figure 4.25) concordent assez bien avec les résultats de NSU2D. Cependant, on peut noter que le schéma d'ordre 1 diffuse légèrement le $-Cp$ près du bord d'attaque alors que la solution d'ordre deux est plus précise.

Les figures 4.26, 4.27 et 4.28 montrent les solutions du cas test 5 ($M_\infty = 0.8$, $\alpha_\infty = 10°$, $Re_\infty = 500$). Les lignes d'iso-Mach et le champ de vitesse au voisinage du bord de fuite sont représentés à la figure 4.26, le $-Cp$ à la figure 4.27 et le Cf à la figure 4.28. Dans ce cas, la couche limite se développe lentement et une forte expansion est observée près du bord d'attaque. La recompression de l'écoulement supersonique à l'écoulement subsonique se fait le long du bord supérieur de la couche visqueuse et l'écoulement est décollé sur une grande partie de l'extrados avec une

large zone de recirculation à proximité du bord de fuite. Ce comportement est similaire à celui obtenu à Canadair en utilisant NSU2D [169].

Concernant les coefficients de pression et de friction, on remarque que sur l'intrados du profil, les solutions du schéma standard de Roe concordent assez bien avec celles du schéma centré, alors que sur l'extrados, le schéma standard de Roe est un peu diffusif en amont du point de séparation. Cette diffusion est plus prononcée pour $-Cp$ que pour Cf où le schéma d'ordre 2 donne des Cf légèrement plus proche de ceux du schéma d'ordre 1. Ceci est attribué à l'effet du maillage sur le schéma standard de Roe.

Le cas test 6 ($M_\infty = 0.85$, $\alpha_\infty = 0°$, $Re_\infty = 2000$) est un deuxième écoulement symmétrique à un nombre de Mach plus élevé que celui du cas test 4 et un nombre de Reynolds moins élevé. Les solutions de cet écoulement sont montrées sur les figures 4.29,4.30 et 4.31. Dans ces conditions, la zone de séparation est plus grande avec une large bulle de recirculation qui s'étend dans le sillage à partir du bord de fuite. Encore une fois, ce comportement est semblable à celui obtenu à Canadair à l'aide du schéma centré [169]. Pour ce cas test, le schéma standard de Roe prédit des $-Cp$ et des Cf qui se comportent de la même façon que pour le cas test 5. Pour les trois cas test, le schéma centré donne des pics de Cf plus élevés au bord d'attaque du profil.

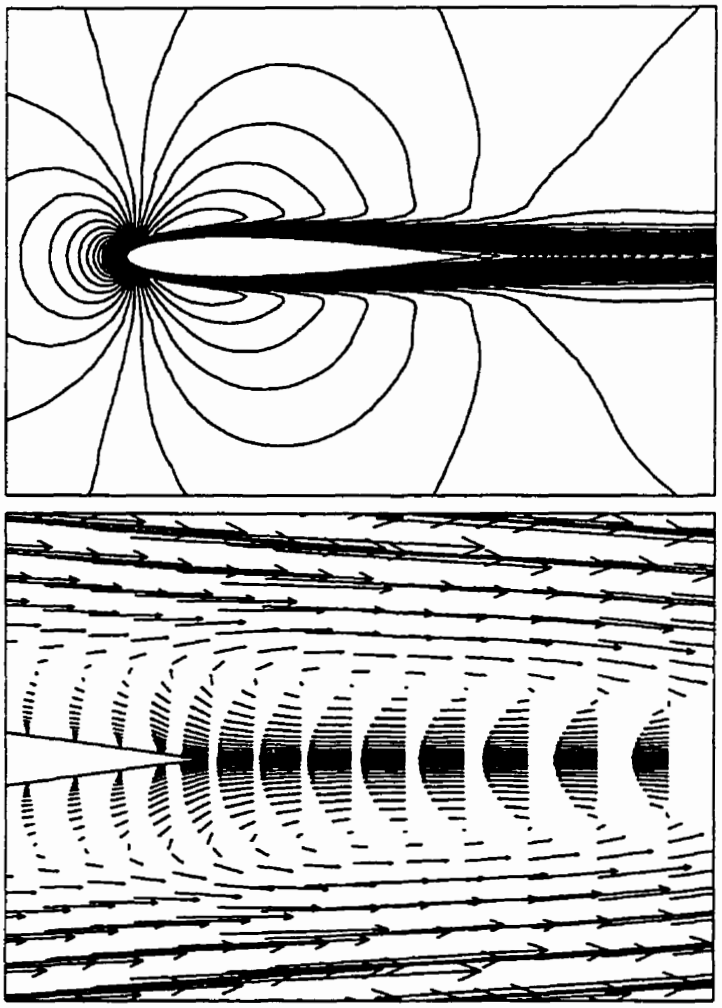


Figure 4.23: Cas test 4, Lignes d'iso-Mach et champ de vitesse

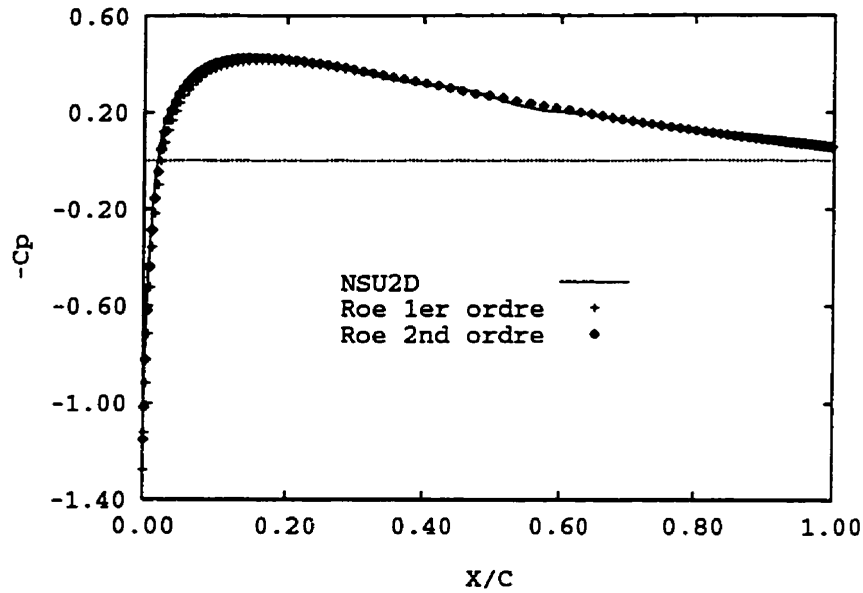


Figure 4.24: Cas test 4, Coefficient de pression.

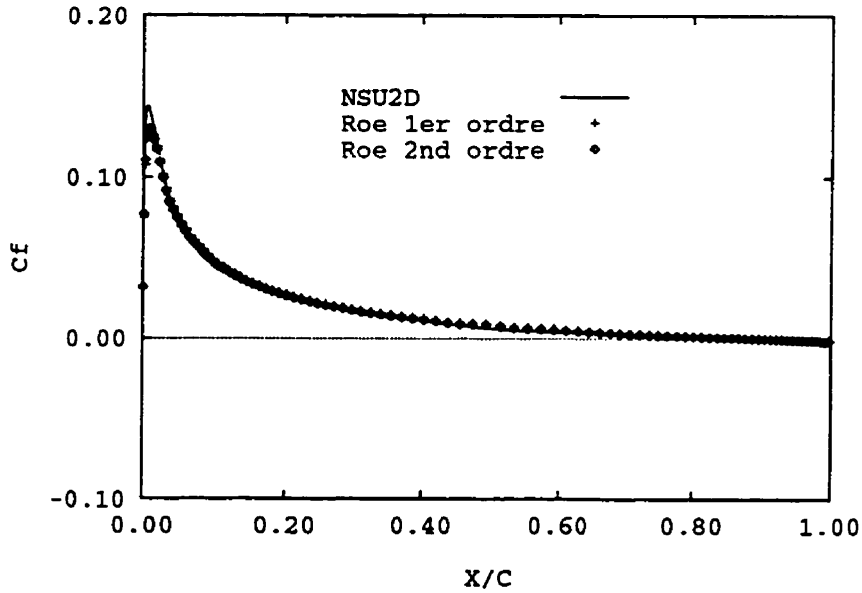


Figure 4.25: Cas test 4, Coefficient de friction.

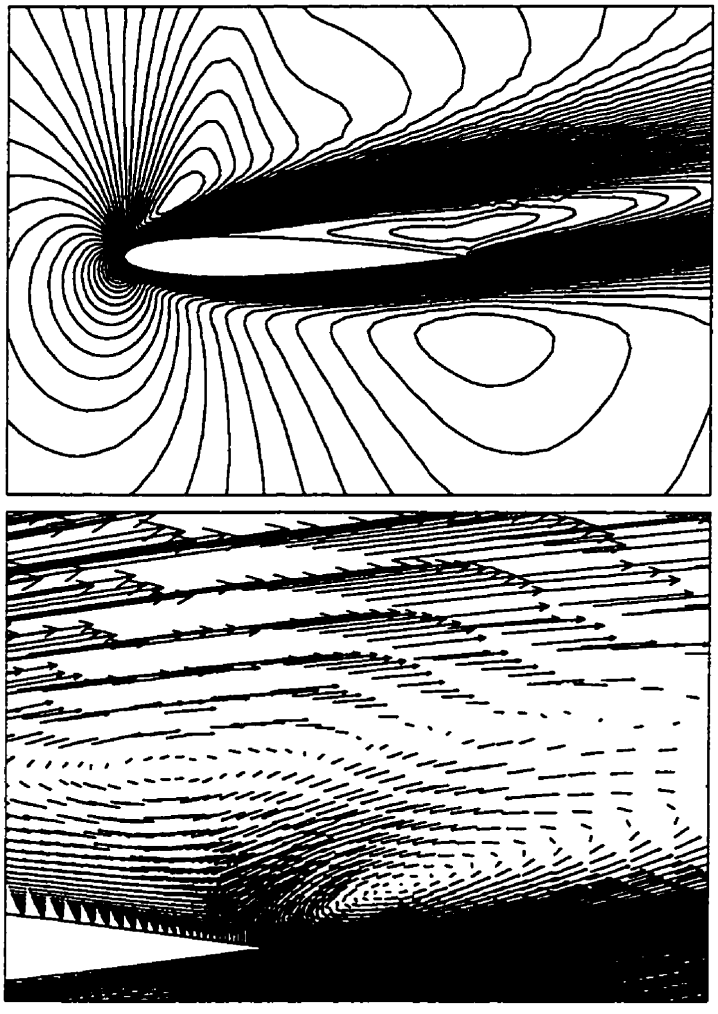


Figure 4.26: Cas test 5, Lignes d'iso-Mach et champ de vitesse

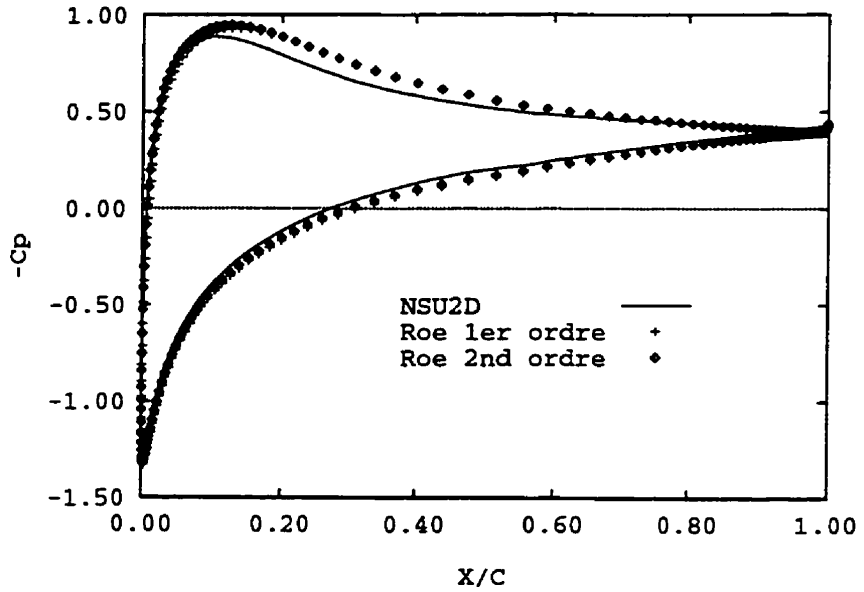


Figure 4.27: Cas test 5, Coefficient de pression.

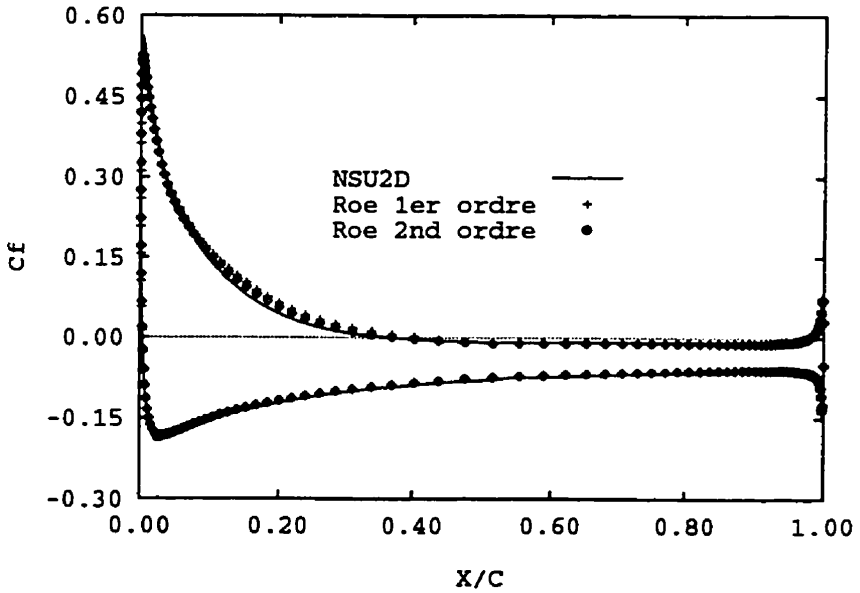


Figure 4.28: Cas test 5, Coefficient de friction.

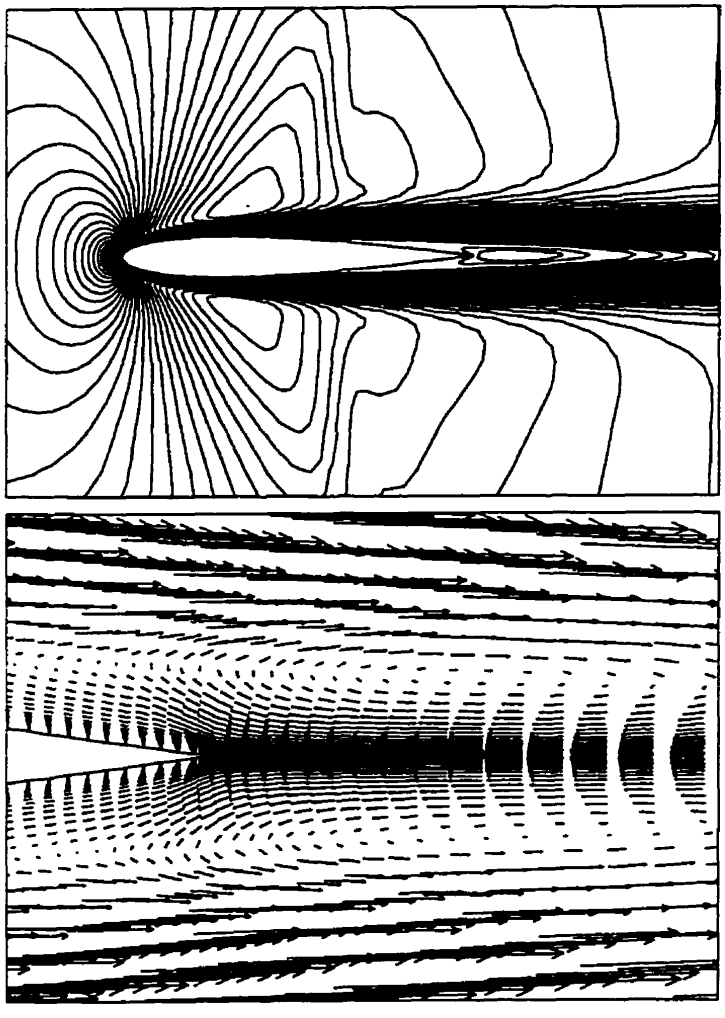


Figure 4.29: Cas test 6, Lignes d'iso-Mach et champ de vitesse

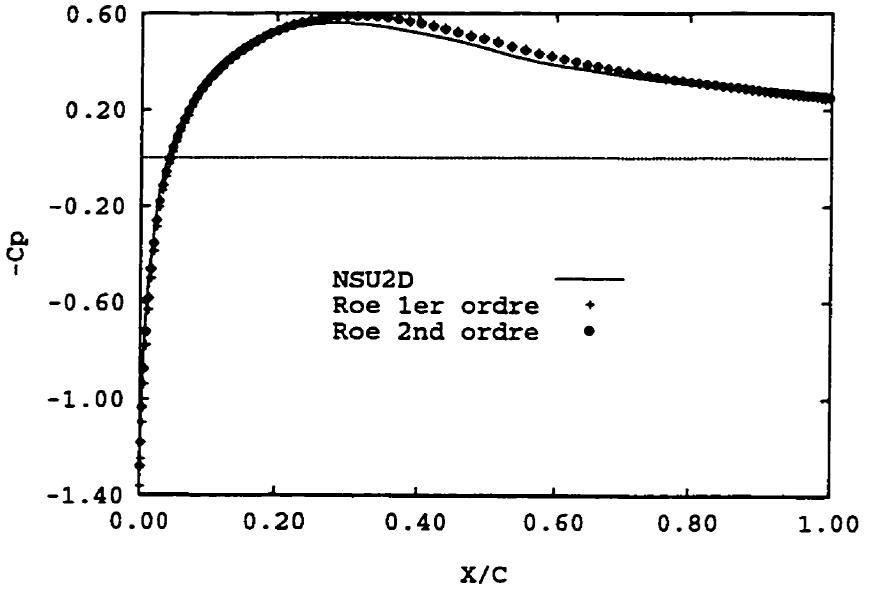


Figure 4.30: Cas test 6, Coefficient de pression.

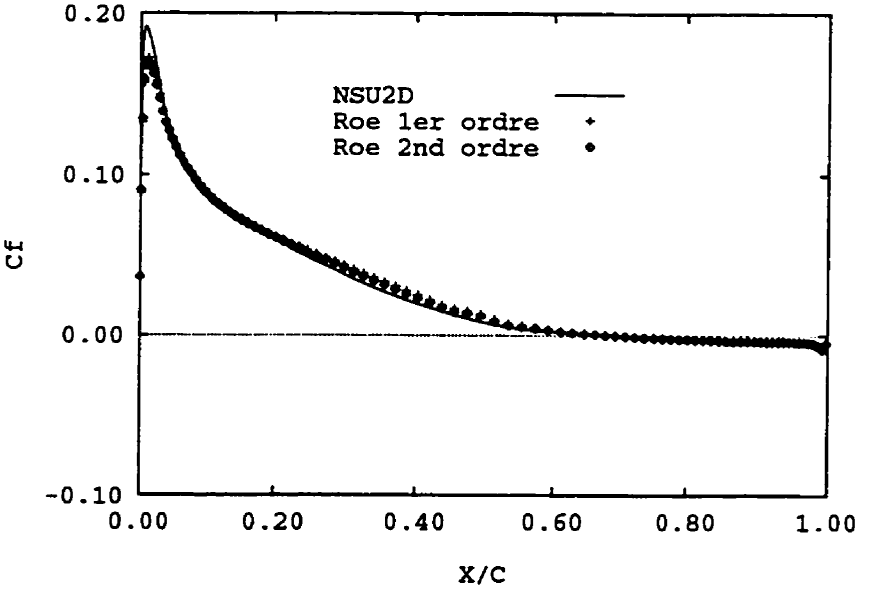


Figure 4.31: Cas test 6, Coefficient de friction.

Le tableau 4.5 compare les prédictions de la position du point de séparation sur l'extrados du profil avec celles de NSU2D et des références [170] et [171].

Schéma $\Downarrow$ *Castest* $\Longrightarrow$	4	5	6
Roe 1er Ordre	0.921	0.403	0.693
Roe 2nd Ordre	0.895	0.369	0.678
NSU2D	0.851	0.372	0.700
Réf. [170]	-	0.390	-
Réf. [171]	-	0.371	-

Tableau 4.5: Prédictions de la position du point de séparation

Pour le cas test 4, le schéma d'ordre 1 prédit le point de séparation un peu plus en aval. Pour le cas test 5, la position du point de séparation prédite par NSU2D est la même que celle de la référence [170] et elle est plus proche de la référence [171] que les prédictions du schéma standard de Roe. Les prédictions du point de séparation pour le cas test 6 sont sensiblement similaires.

4.3 Écoulements turbulents

Plusieurs écoulements externes compressibles à de grands nombres de Reynolds, autour de trois configurations géométriques différentes, ont été calculés pour valider l'implantation des trois modèles de turbulence considérés dans la présente étude. Ces cas tests sont, le cas test 7, les cas tests 8, 9, 10 et le cas test 11 (tableau 4.1). Ces calculs servent également à évaluer les performances du solveur pour la

prédiction des écoulements compressibles turbulents.

4.3.1 Plaque plane

Le premier cas test turbulent, cas test 7 ($M_\infty = 0.795$, $\alpha_\infty = 0°$, $Re_\infty = 1.8 \times 10^6$), consiste à simuler le développement d'une couche limite turbulente sur une plaque plane adiabatique. La longueur de la plaque est 1 et la largeur du domaine de calcul est de 0.1. La figure 4.32 montre le maillage utilisé pour les modèles de Baldwin-Lomax (BL) et le modèle de Baldwin-Barth (BB). Ce maillage est généré par la triangulation d'un maillage structuré et contient 1891 noeuds (3600 triangles) où les noeuds adjacents à la paroi sont situés à une distance normale d'environ 4.5×10^{-5} fois la longueur de la plaque. Ceci correspond à $y^+ \leq 3$. Comme le modèle $k - \omega$ standard est sensible aux valeurs de ω dans l'écoulement libre, un domaine de calcul 5 fois plus large que le précédent a été utilisé. Le maillage de ce domaine est représenté à la figure 4.33. Il contient 6188 noeuds (12060 triangles) et les noeuds adjacents à la paroi sont situés à une distance normale de 2×10^{-5} fois la longueur de la plaque. Ceci assure aussi des valeurs de y^+ inférieures à 3.

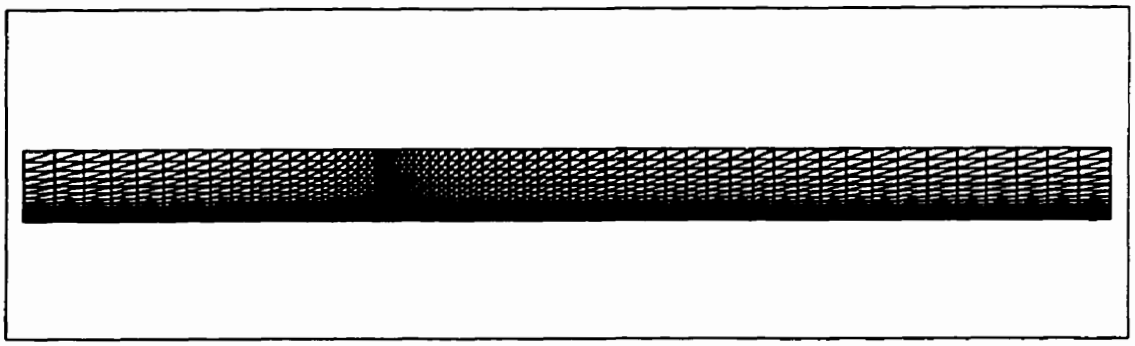


Figure 4.32: Cas test 7: maillages utilisés pour les modèles BL et BB.

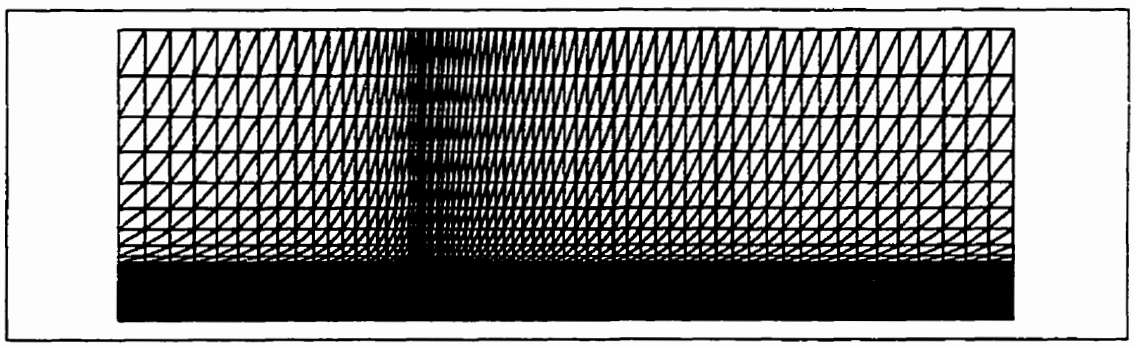


Figure 4.33: Cas test 7: maillage utilisés pour le modèle $k - \omega$.

Les figure 4.34, 4.35 et 4.36 montrent, respectivement, les prédictions, obtenues par les trois modèles à $x/Lref = 0.6$ ($Re_x = 1.08 \times 10^6$), du profil de vitesse, de la loi logarithmique donnée par:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} ln(y^+) + B \tag{4.2}$$

avec $\kappa = 0.41$ et $B = 5.0$, et de la loi déficitaire définie par:

$$\frac{u_e - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa}\left[2\Pi\left[1 - sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right] - ln\frac{y}{\delta}\right] \tag{4.3}$$

avec $\Pi = 0.55$ pour un gradient de pression nul.

On constate que les trois modèles produisent des profils de vitesse acceptables (figure 4.34) si on les compare aux données expérimentales de Dhawan [172] et aux prédictions de Cebeci et al. [12] obtenues à l'aide du modèle algébrique de Cebeci-Smith. Ils reproduisent assez bien aussi les distributions empiriques de la loi logarithmique (figure 4.35) et de la loi déficitaire (figure 4.36). Relativement aux prédictions du modèle de Cebeci-Smith, le modèle BL semble reproduire ces résultats mieux que les deux autres modèles.

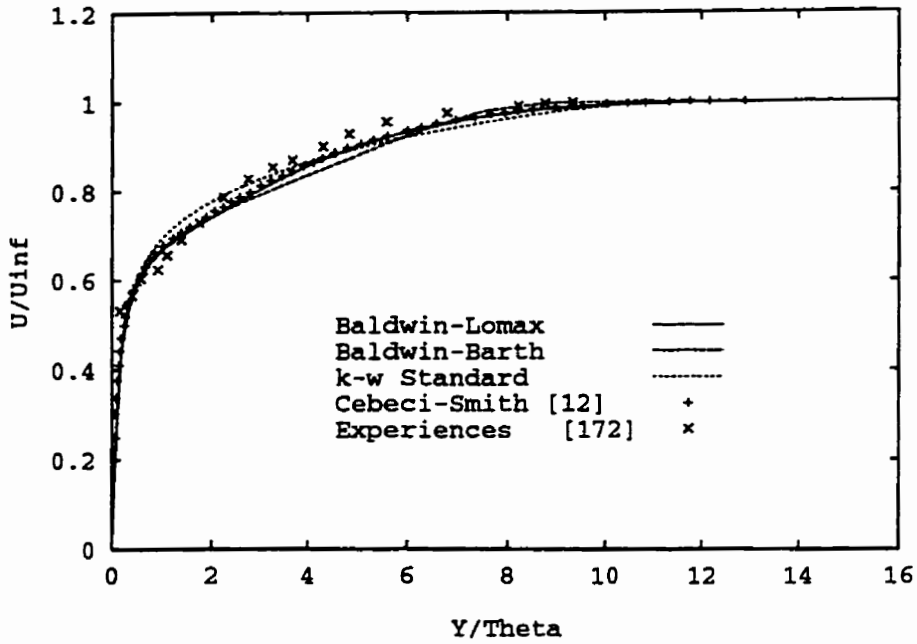


Figure 4.34: Cas test 7, prédictions du profil de vitesse par les différents modèles.

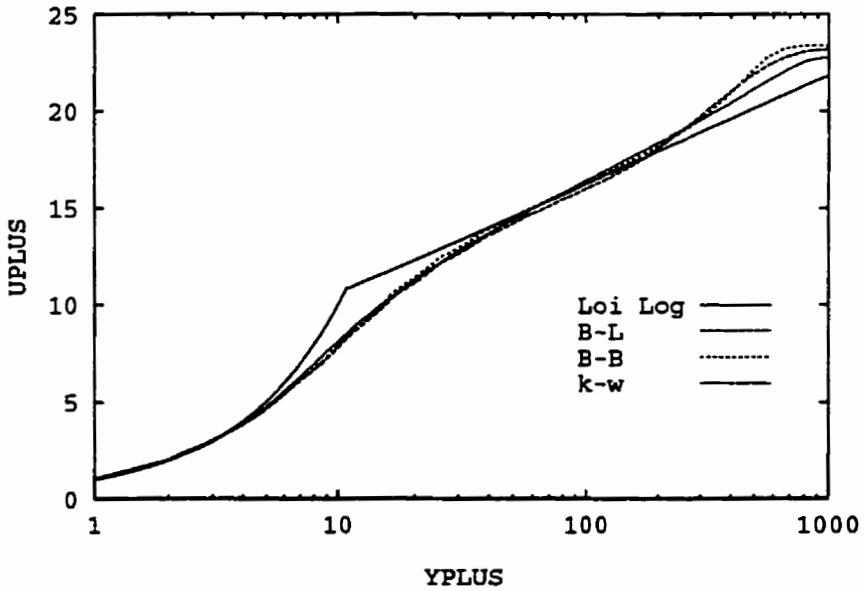


Figure 4.35: Cas test 7, prédictions de la loi logarithmique par les différents modèles.

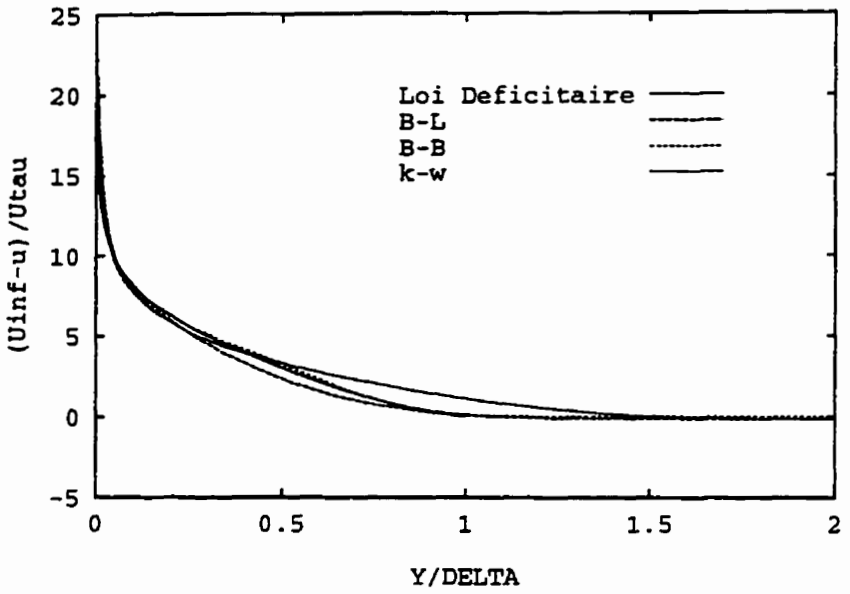


Figure 4.36: Cas test 7, prédictions de la loi déficitaire par les différents modèles.

Les prédictions du coefficient de friction sont comparées à la figure 4.37. On note que comparativement aux données expérimentales [172] et aux résultats de Cebeci-Smith [12], le modèle $k-\omega$ prédit un meilleur Cf. Ceci est attribué à la bonne concentration, près de la paroi, du maillage utilisé pour ce modèle.

Pour compléter l'évaluation, même si on ne dispose pas de données expérimentales pour comparer, les distributions de la viscosité turbulente à $x/Lref = 0.6$ ($Re_x = 1.08 \times 10^6$), des trois modèles, sont comparées entre elles à la figure 4.38. Les trois modèles produisent le bon comportement de μ_t avec des valeurs plus élevées pour $k-\omega$ et BB que BL.

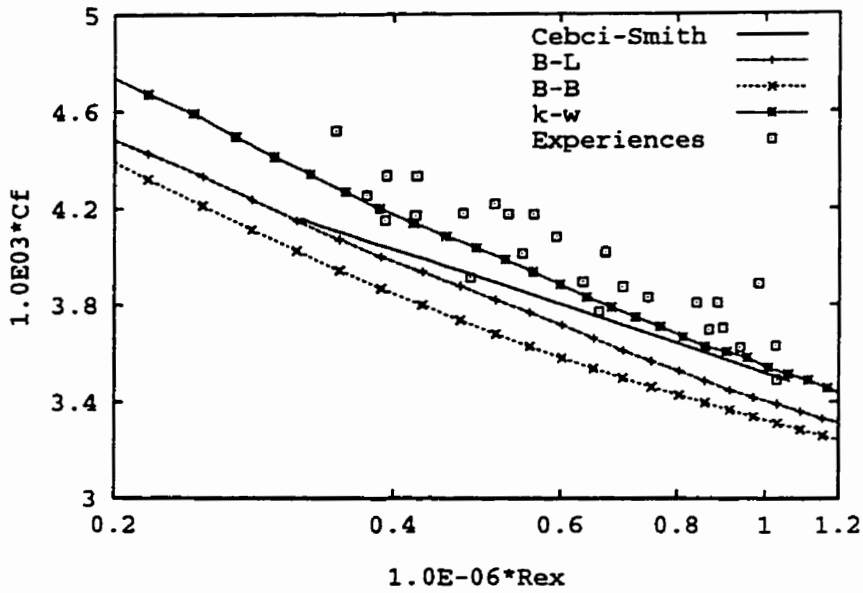


Figure 4.37: Cas test 7, prédictions du coefficient de friction par les différents modèles.

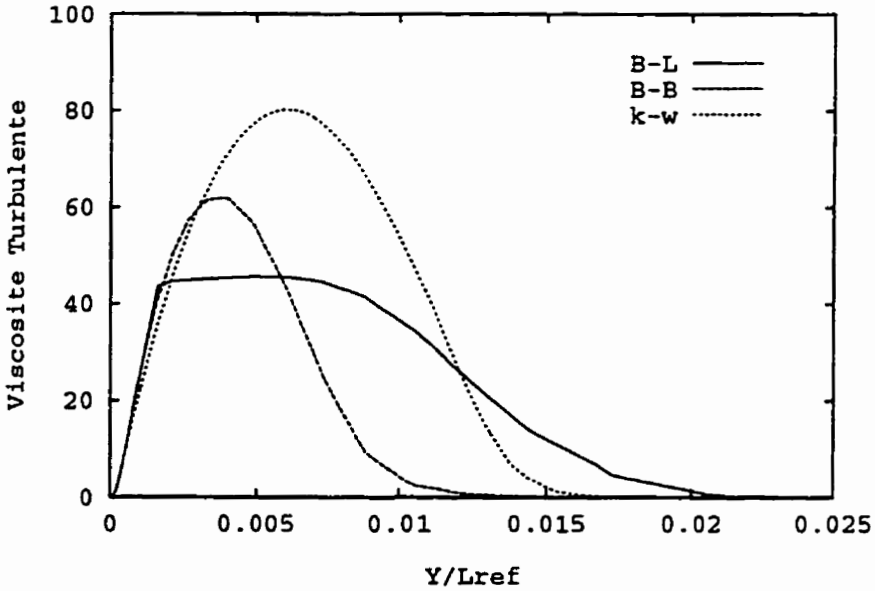


Figure 4.38: Cas test 7, distribution de la viscosité pour les différents modèles.

De même que pour la viscosité turbulente, les distributions de l'énergie cinétique de turbulence, à $x/Lref = 0.6$, des modèles BB et $k-\omega$ sont comparées à la figure 4.39. On note que les deux modèles prédisent un comportement réaliste de k^+ avec des valeurs plus élevées pour le modèle BB.

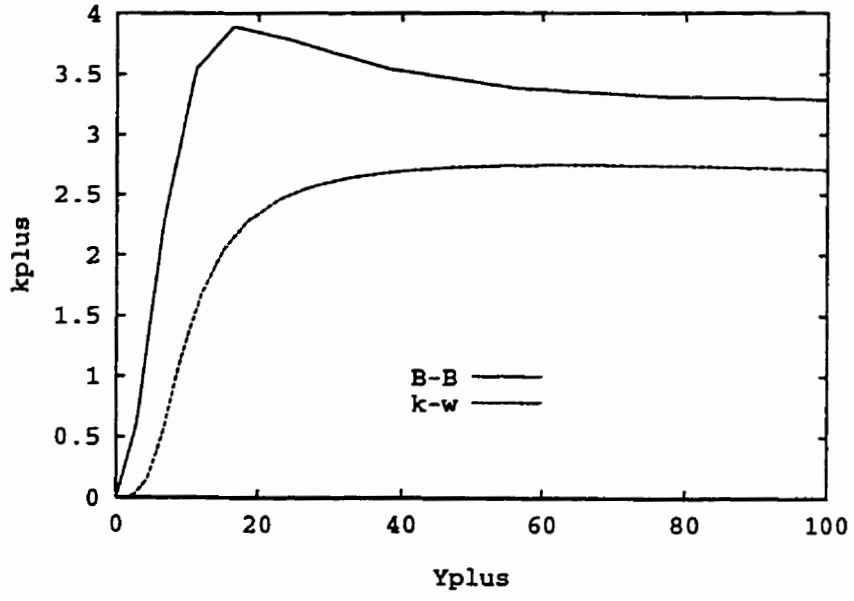


Figure 4.39: Cas test 7, distribution de l'énergie cinétique de turbulence des modèles BB et $k-\omega$.

4.0.1 Profil NACA0012

La deuxième série de cas tests turbulents, cas tests 8, 9 et 10 (tableau 4.1), consiste à calculer des écoulements subsoniques et transsoniques autour du profil NACA0012. Pour calculer des écoulements turbulents autour des profils aérodynamiques, les effets du maillage sur le schéma standard de Roe, mis en évidence à la section 4.1 de ce chapitre, nous ont contraint à utiliser des maillages avec des

élancements modérés. Le maillage LG (tableau 4.2, figure 4.1) a été alors utilisé pour l'ensemble de ces cas tests.

Les solutions du cas test 8 ($M_\infty = 0.3$, $\alpha_\infty = 3.59°$, $Re_\infty = 1.86 \times 10^6$) sont représentées par les figures 4.40-4.44. Les lignes d'iso-Mach et le champ de vitesse du modèle BL sont montrés à la figure 4.40, et la figure 4.41 compare les iso-μ_t des modèles BL et $k-\omega$. On remarque que le modèle $k-\omega$ produit une distribution plus lisse de μ_t que le modèle BL. Cependant, la distribution du modèle BL est moins diffuse que celle de $k-\omega$ surtout dans le sillage.

La figure 4.42 compare les distributions des coefficients de pression (figure 4.42a) et de friction (figure 4.42b). Les données expérimentales de $-Cp$ sont disponibles dans la référence [173]. Les prédictions de $-Cp$ des deux modèles concordent assez bien avec les résultats expérimentaux. Cependant, le schéma d'ordre 1 n'arrive pas à prédire le pic de succion du bord d'attaque, ce qui a été amélioré en utilisant le schéma d'ordre 2 avec le modèle $k-\omega$. Concernant le Cf, les deux modèles produisent sensiblement les mêmes distributions à l'exception de la région du bord d'attaque où le modèle BL semble prédire des valeurs plus élevées.

Les profils de vitesse et de μ_t à $x/c = 0.319$ et à $x/c = 0.95$ dans la direction normale à l'extrados du profil et à $x/c = 1.025$ dans le sillage sont, respectivement, comparés dans les figures 4.42 et 4.43. Pour ce cas test, les profils de vitesse des deux modèles, à ces trois positions, sont très proches et les deux modèles donnent un bon comportement de μ_t.

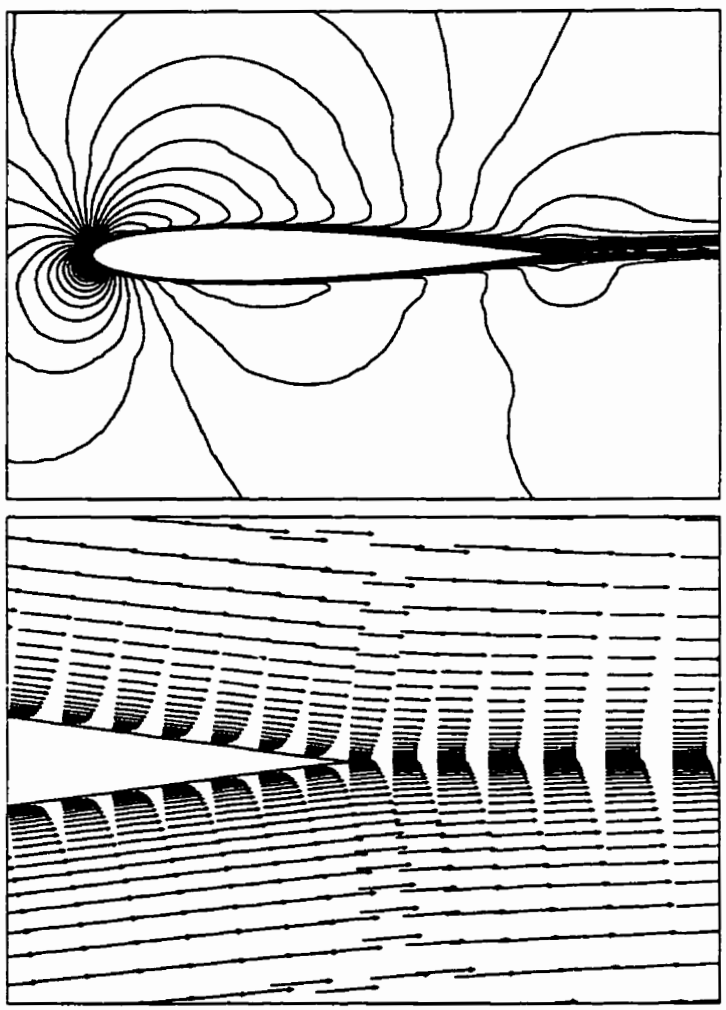


Figure 4.40: Cas test 8, modèle BL, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse

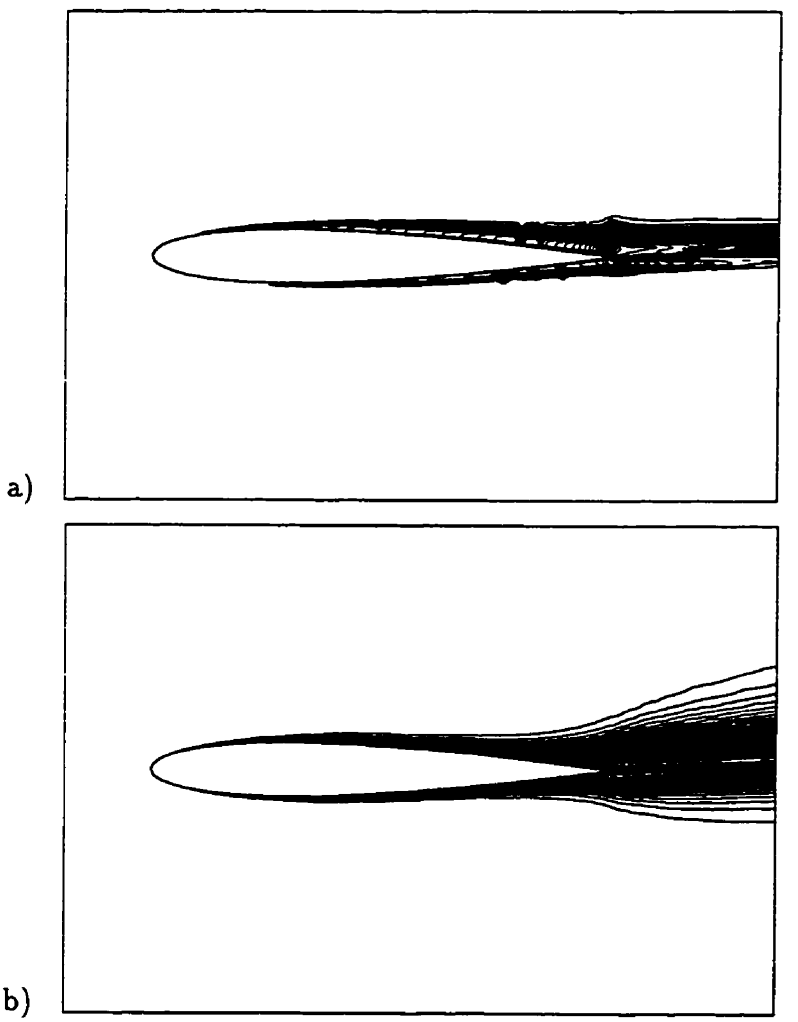
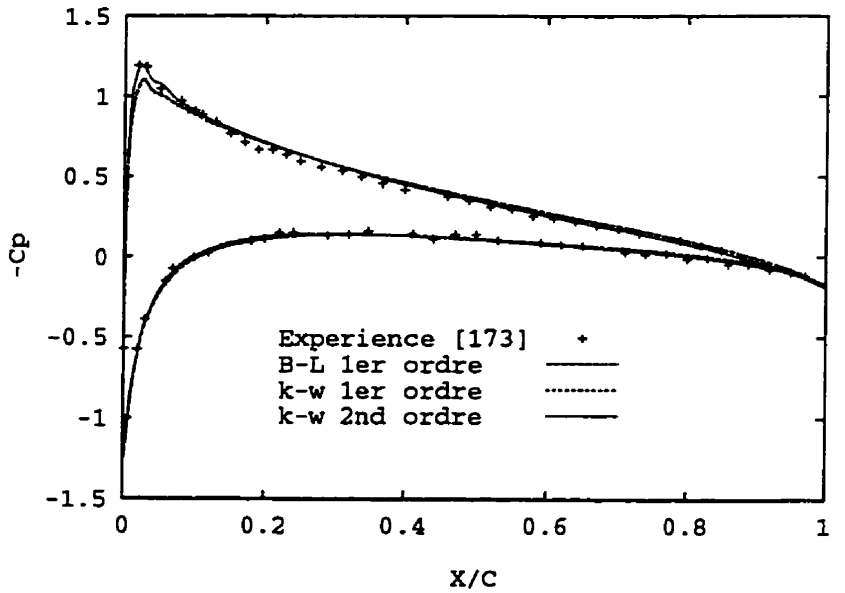
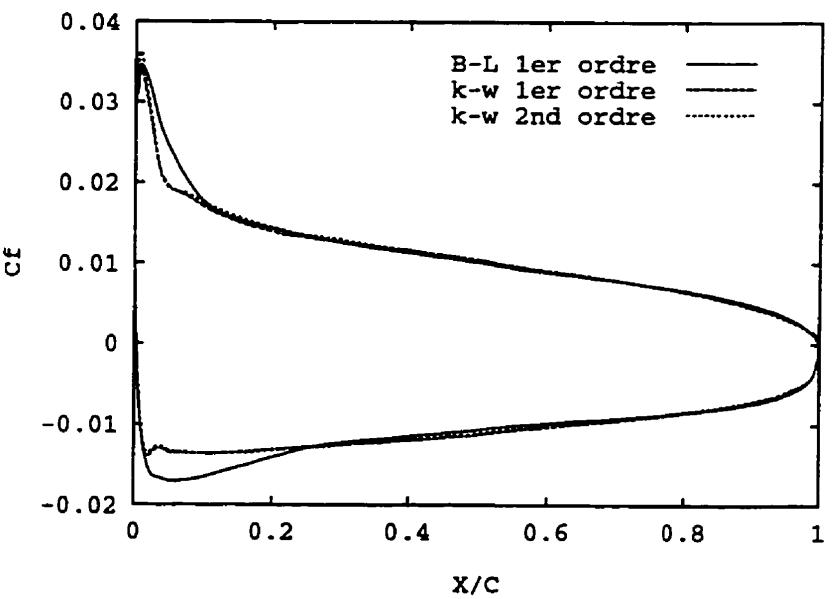


Figure 4.41: Cas test 8, lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle $k-\omega$.



a)



b)

Figure 4.42: Cas test 8. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction.

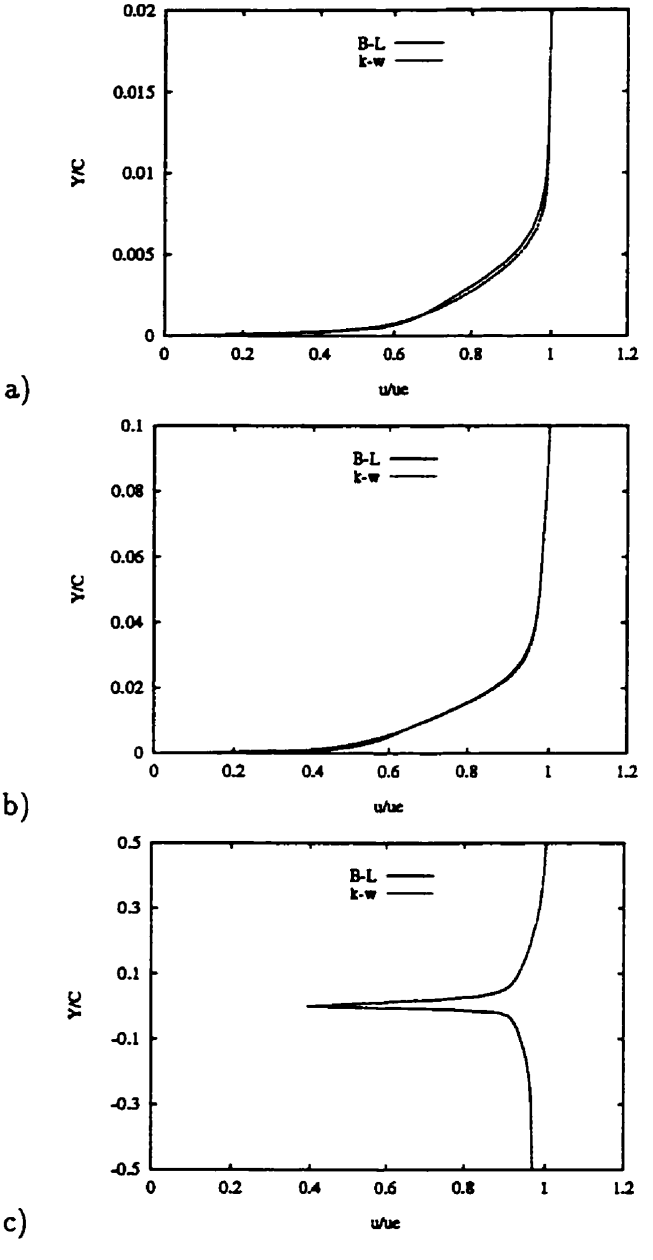


Figure 4.43: Cas test 8. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

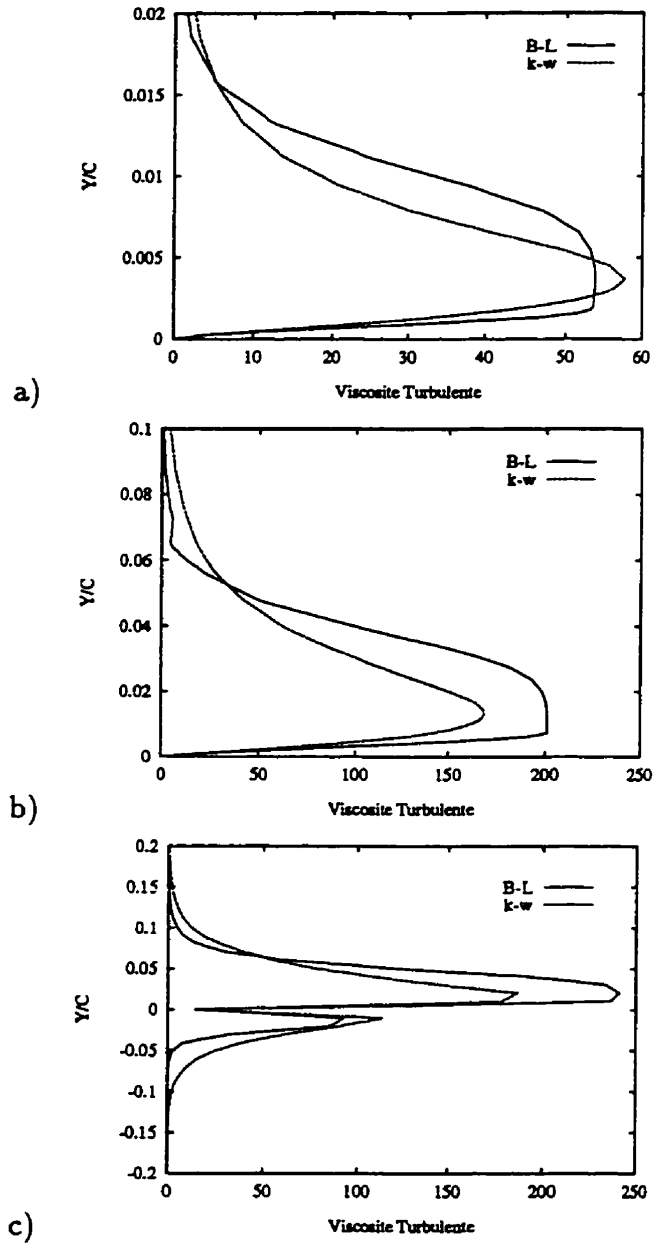


Figure 4.44: Cas test 8. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

Les figures 4.45-4.49 montrent les résultats du cas test 9 ($M_\infty = 0.5$, $\alpha_\infty = -0.06°$, $Re_\infty = 2.89 \times 10^6$). La figure 4.45 montre les lignes d'iso-Mach et le champ de vitesse dans la région du bord de fuite du modèle BB et la figure 4.46 compare les lignes d'iso-μ_t des trois modèles. On constate que les modèles aux équations de transports (BB et $k - \omega$), comme pour le cas test 8, produisent des distributions plus lisses de μ_t.

Les distributions de $-Cp$ des trois modèles concordent assez bien avec les données expérimentales [173] (figure 4.47a). Cependant, le schéma d'ordre 2, en utilisant le modèle $k - \omega$, donne des valeurs de $-Cp$ légèrement plus élevées près du bord d'attaque. Les modèles BL et $k - \omega$ donnent des distributions de Cf très proches l'une de l'autre mais légèrement inférieures aux valeurs produites par le modèle BB (figure 4.47b). Près du bord d'attaque du profil, le schéma du second ordre donne des Cf légèrement plus élevés.

Les profils de vitesse dans la direction normale à l'extrados et dans le sillage, aux mêmes positions que pour le cas test 8 (figure 4.48), montrent que les modèles BL et $k - \omega$ donnent des profils sensiblement identiques mais légèrement différents de ceux du modèle BB, surtout sur le profil.

Les trois modèles prédisent des viscosités turbulentes ayant un comportement similaire à différentes positions (figure 4.49).

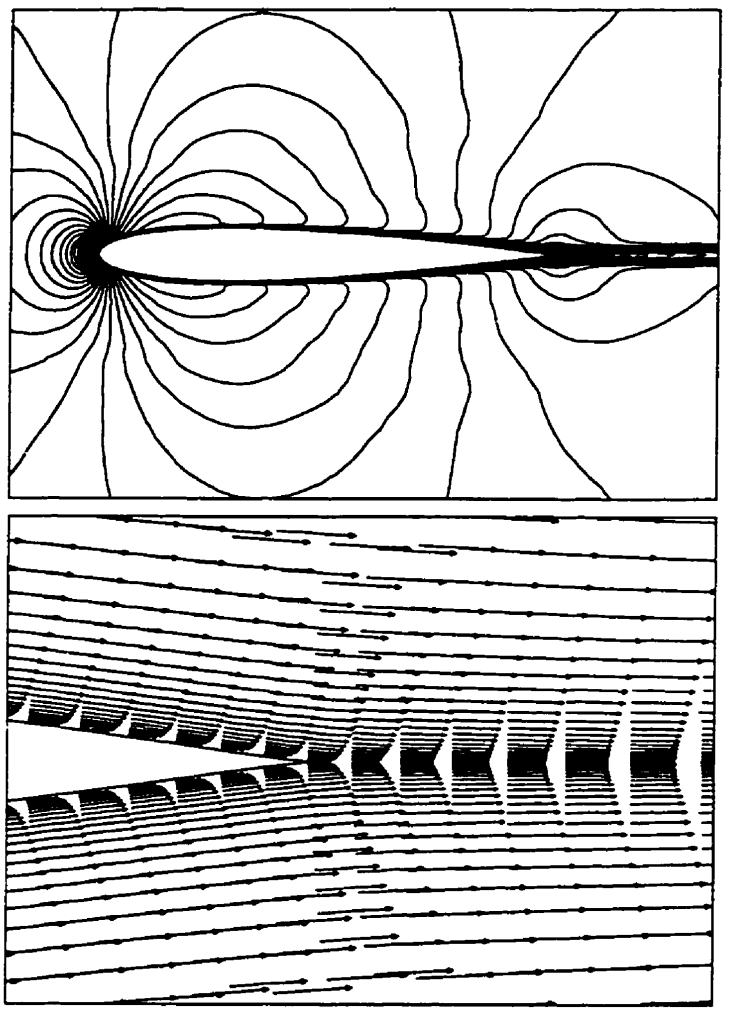


Figure 4.45: Cas test 9, modèle BB, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse

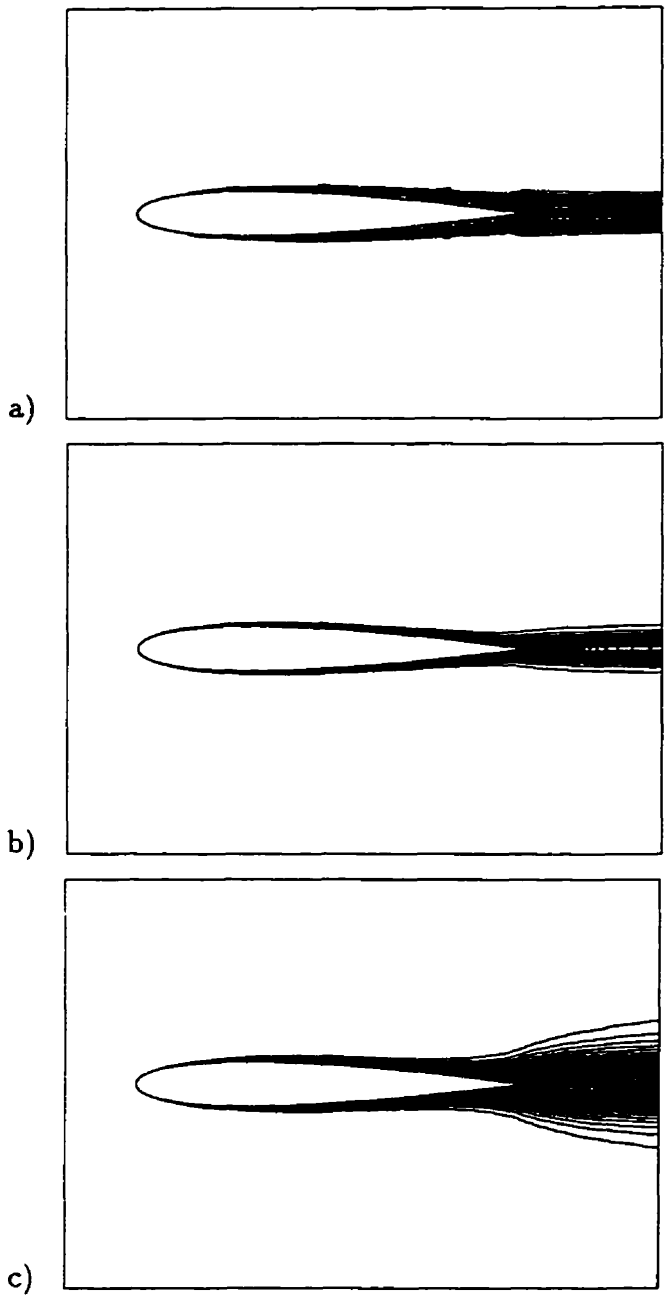
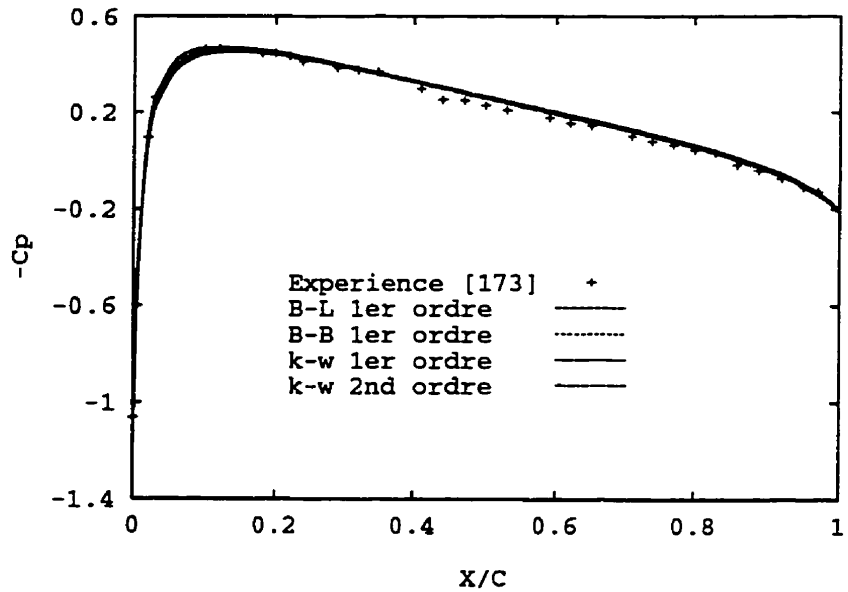
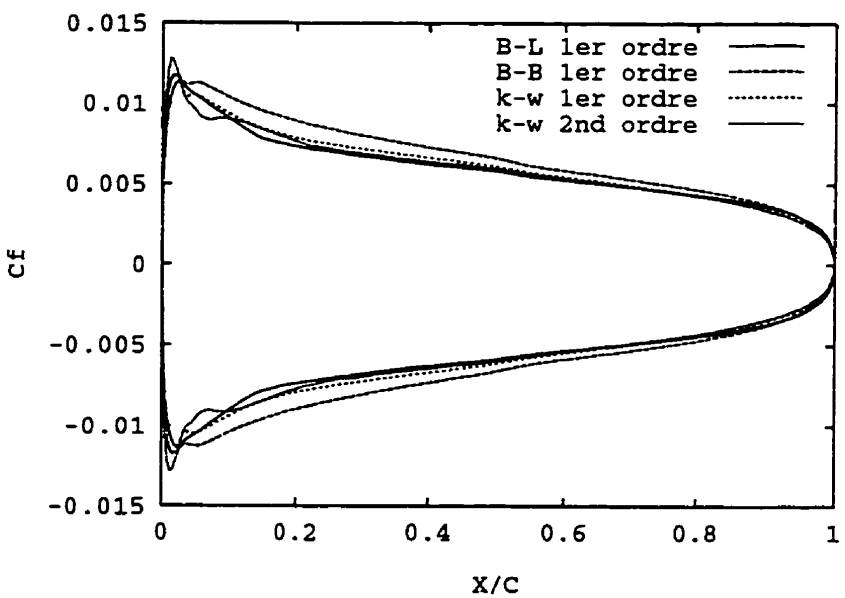


Figure 4.46: Cas test 9, lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle BB, c) modèle $k-\omega$.



a)



b)

Figure 4.47: Cas test 9. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction.

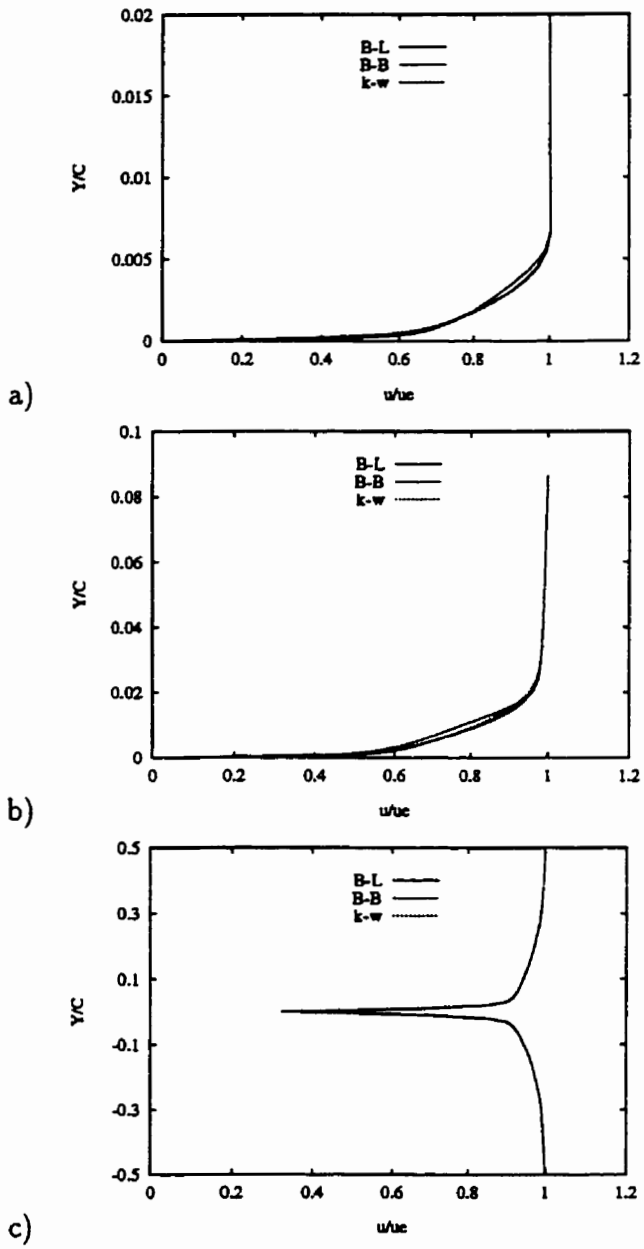


Figure 4.48: Cas test 5. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

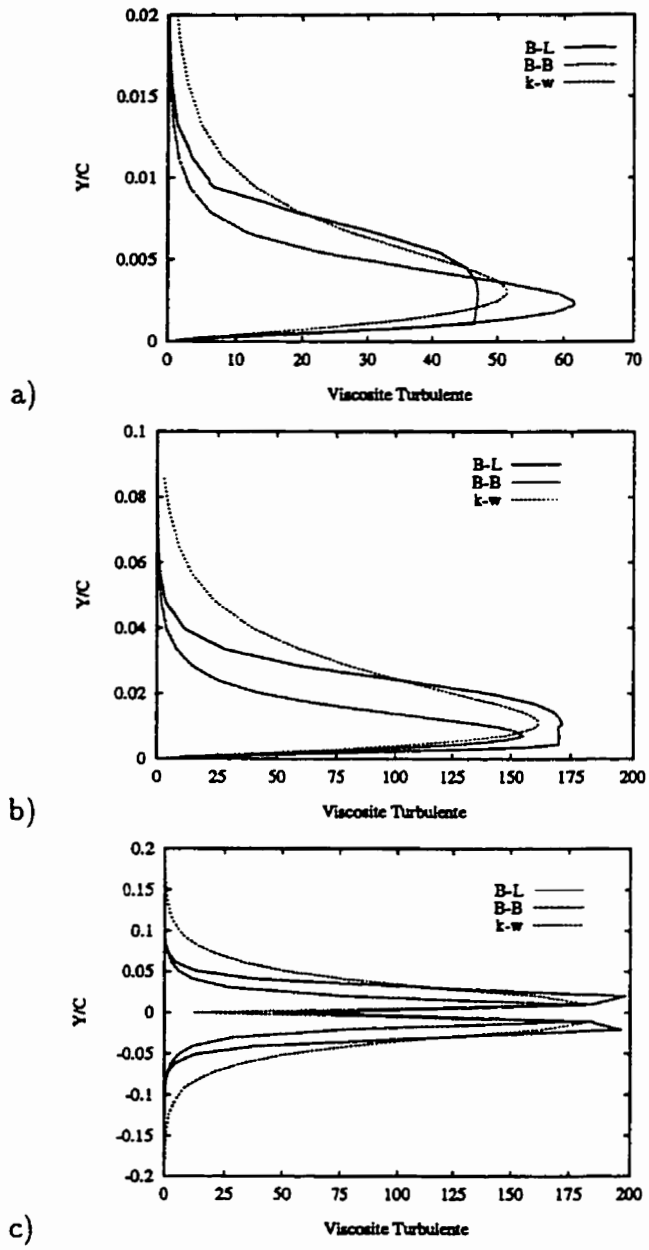


Figure 4.49: Cas test 9. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

Le troisième cas test turbulent, cas test 10 (tableau 4.1), autour du profil NACA-0012 est un écoulement transsonique à un nombre de Reynolds plus élevé que les deux précédents ($M_\infty = 0.799$, $\alpha_\infty = 2.26°$, $Re_\infty = 9 \times 10^6$). Les résultats de ce cas test sont représentés aux figures 4.50-4.54. Les lignes d'iso-Mach et le champ de vitesse à proximité du bord de fuite sont montrés à la figure 4.50 et les iso-μ_t des modèles BL et $k-\omega$ sont comparés à la figure 4.51. Encore une fois, le modèle $k-\omega$ produit des μ_t plus lisses et plus diffuses dans le sillage.

Comme prévu, le modèle algèbrique BL prédit la position du choc loin en aval de la position expérimentale [174] (figure 4.52a). Même si le modèle $k-\omega$ améliore un peu la position du choc par rapport au modèle BL, la position prédite par ce modèle demeure en aval de la position expérimentale. Ceci est attribué au fait que le maillage utilisé n'est pas assez fin dans la région du choc. Pour le reste du profil, les distributions de $-Cp$ des deux modèles concordent assez bien avec les données expérimentales. Cependant, le schéma d'ordre 1 diffuse légèrement la solution en amont du choc, sur l'extrados, alors que le schéma d'ordre 2, en utilisant le modèle $k-\omega$, donne des solutions plus précises dans cette région.

Les distributions de Cf sont comparées à la figure 4.52b. On constate que le modèle BL prédit une petite zone de séparation juste en aval du choc. Le modèle $k-\omega$ quant à lui, ne prédit cette séparation qu'en utilisant le schéma d'ordre 2.

Les profils de vitesse dans la direction normale à l'extrados montrent une grande différence entre les deux modèles (figure 4.53b), et ce en aval du choc ($x/c = 0.95$). Alors que les deux modèles donnent des profils similaires pour les deux autres positions. Malheureusement, on ne dispose pas de données expérimentales pour pouvoir tirer plus de conclusions.

Les profils de μ_t, à différentes x/c sont comparés à la figure 4.54. Pour ce cas test, les deux modèles prédisent un comportement de μ_t avec des valeurs plus élevées pour le modèle $k-\omega$ et ce aux trois stations considérées.

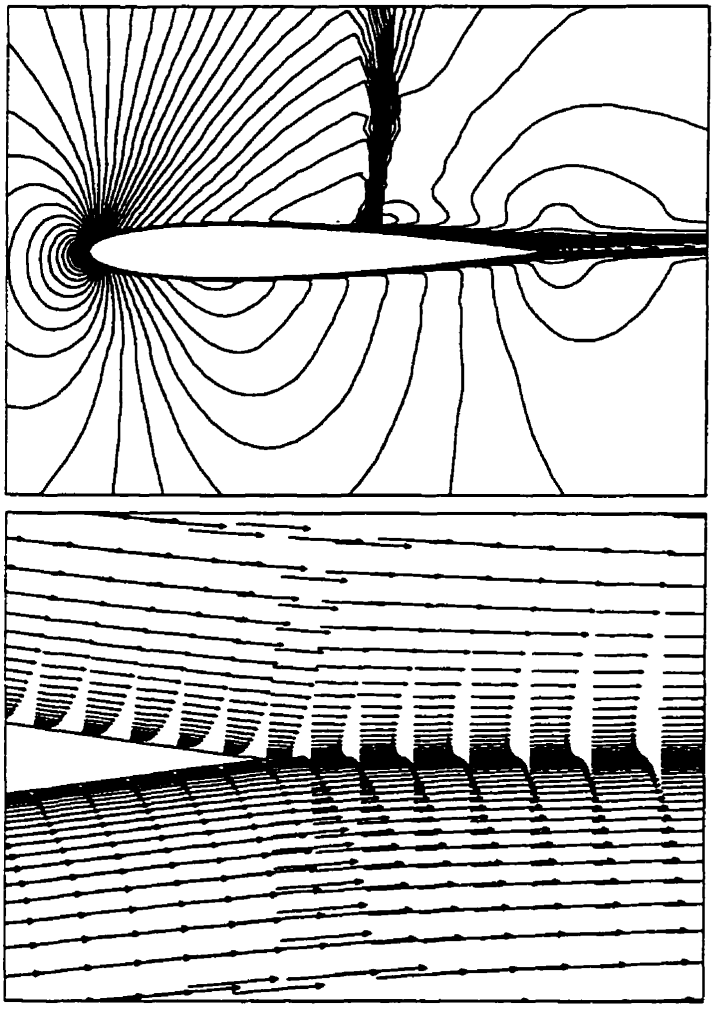


Figure 4.50: Cas test 10, modèle BL, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse

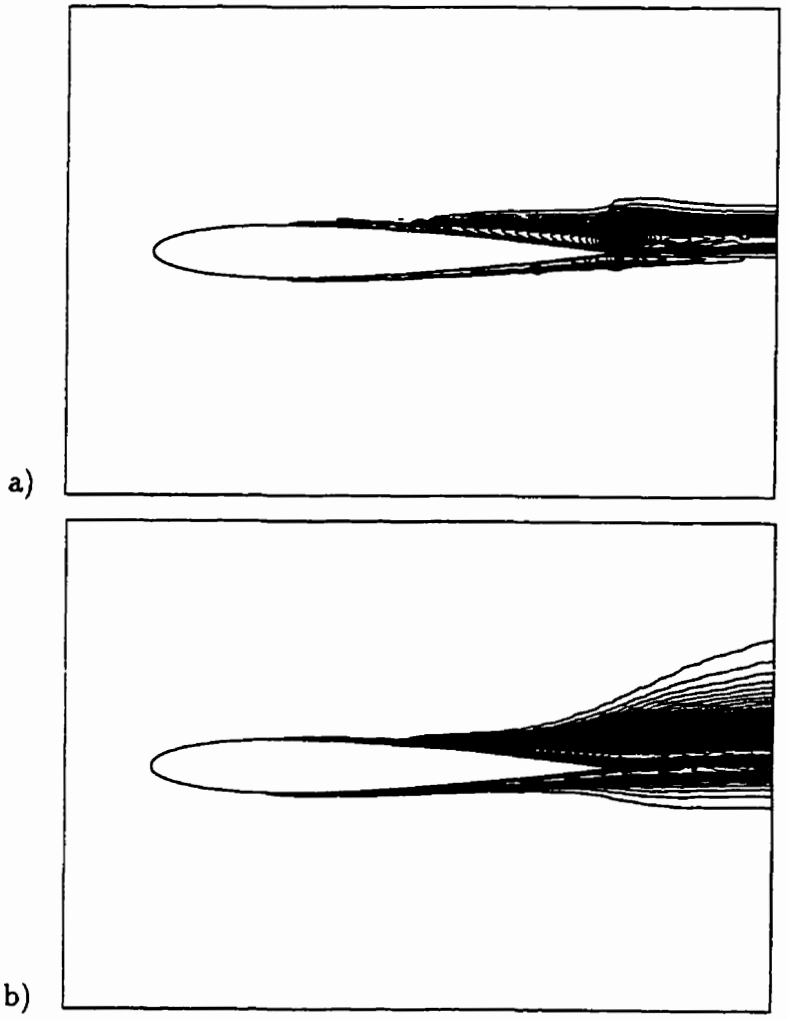
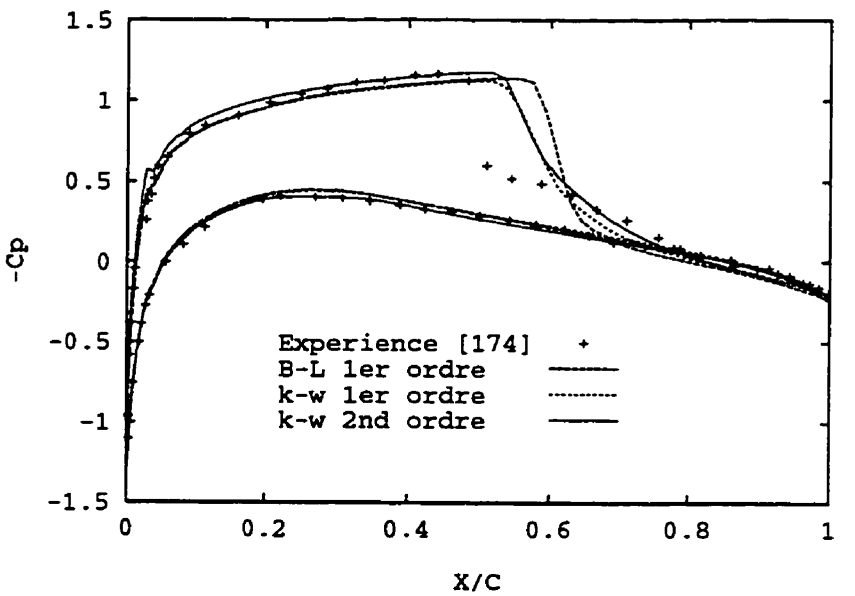
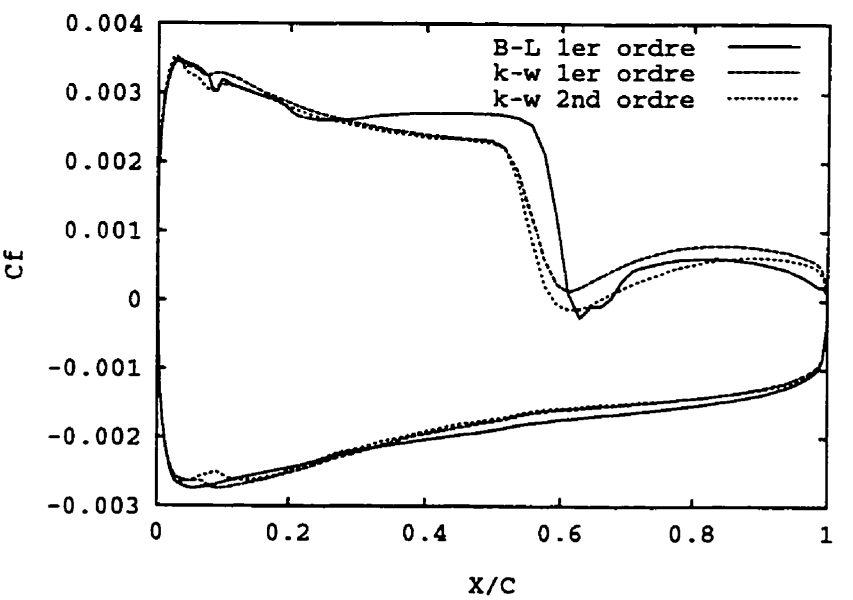


Figure 4.51: Cas test 10, lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle $k-\omega$.



a)



b)

Figure 4.52: Cas test 10. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction.

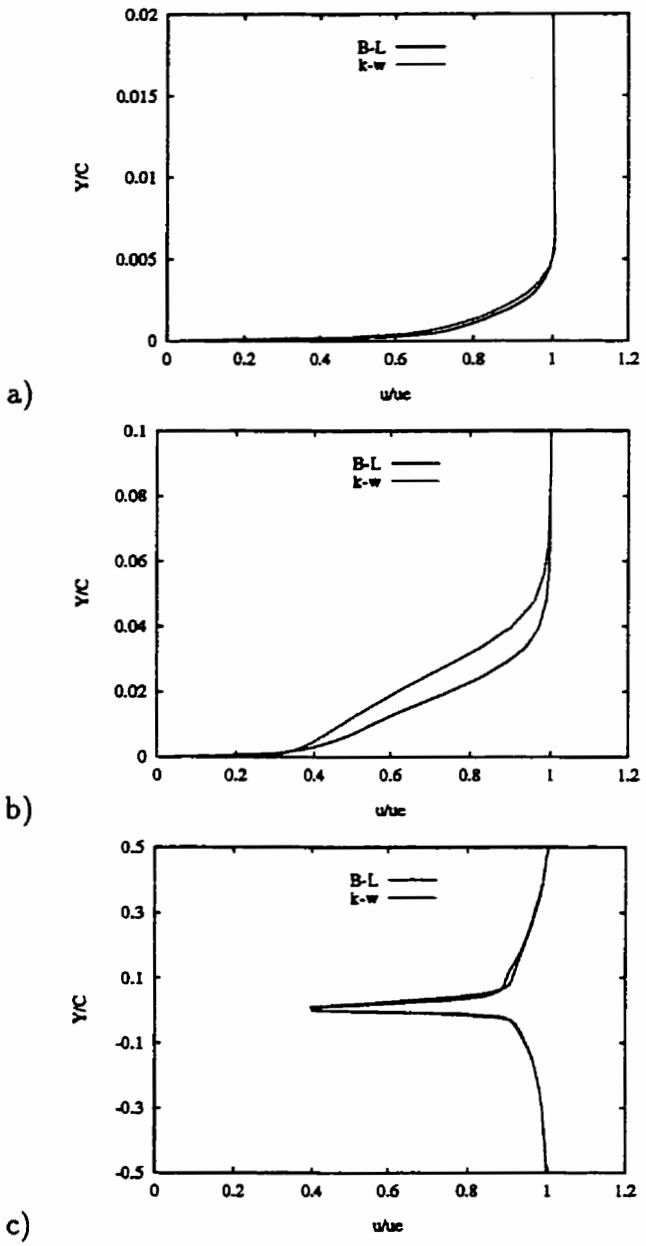


Figure 4.53: Cas test 10. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

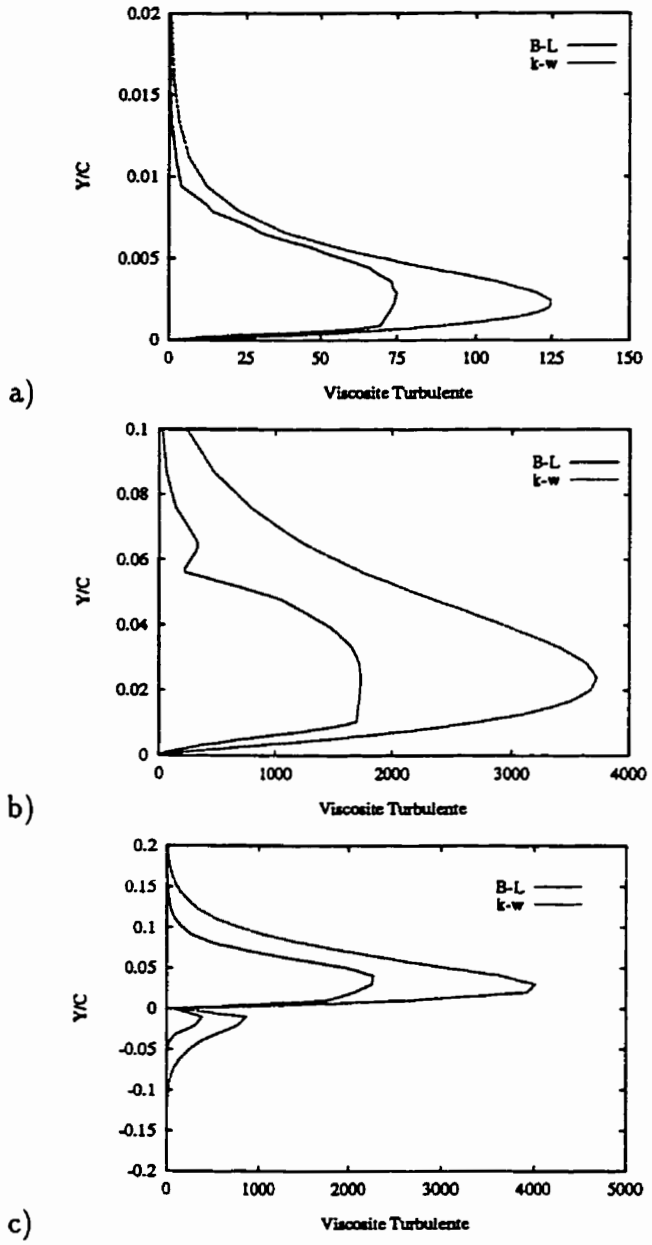


Figure 4.54: Cas test 10. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

4.3.3 Profil RAE2822

Le dernier cas test turbulent, cas test 11 (tableau 4.1), consiste à calculer un écoulement transsonique autour du profil RAE2822 (cas 6 de la référence [173], $M_\infty = 0.725$, $_\infty = 2.54°$ et $Re_\infty = 6.5 \times 10^6$). Ce cas test a été choisi à cause de la disponibilité des mesures expérimentales pour $-Cp$, Cf et les profils de vitesse à différentes positions sur le profil et dans le sillage. Ceci permet une meilleure évaluation des différents modèles de turbulence et du solveur en général. D'autres cas tests, pour le même profil, à différentes conditions d'écoulement, sont aussi disponibles dans la référence [173]. Comme pour le profil NACA0012, les effets du maillage sur le schéma standard de Roe nous ont contraint à utiliser un maillage avec des élancements modérés. La figure 4.55 montre une vue globale du maillage triangulaire (figure 4.55a) et un agrandissement près du profil (figure 4.55b). Ce maillage a été généré par la triangulation d'un maillage structuré en C. Il contient 13713 noeuds (26912 triangles) et les noeuds adjacents au profil sont situés à une distance normale d'environ 2×10^{-4}. Ce qui correspond à un élancement maximal $AR = 175$.

Les solutions pour ce cas test sont représentées dans les figures 4.56-4.60. La figure 4.54 montre les lignes d'iso-Mach (figure 4.56a), où on peut voir le comportement global de l'écoulement, et le champ de vitesse dans la région du bord de fuite (figure 4.56b) du modèle BL.

La figure 4.57 compare les iso-μ_t des deux modèles. Comme pour le profil NACA0012, le modèle $k - \omega$ produit une distribution plus lisse de μ_t.

Pour ce cas test, le modèle BL prédit le choc à une position très proche de la

position expérimentale (figure 4.58a) alors que la position prédite par le modèle $k-\omega$ est un peu plus en amont. Les distributions de $-Cp$ en aval du choc et sur l'intrados, des deux modèles, sont similaires et concordent assez bien avec les données expérimentales. En amont du choc, le schéma d'ordre 1, en utilisant les deux modèles, sous-estime les valeurs de $-Cp$. Ceci est attribué aux effets du maillage sur le schéma standard de Roe. En utilisant le schéma d'ordre 2 avec le modèle $k-\omega$, le solveur donne des résultats légèrement plus précis.

La figure 4.58b compare les distributions du coefficient de friction sur l'extrados du profil. L'irrégularité des courbes de Cf, surtout en aval du choc, est attribuée à l'irrégularité du maillage près du profil. Cependant, les résultats des deux modèles en utilisant le schéma d'ordre 1, sont comparables et plus proches des deux points expérimentaux en aval du choc que de ceux en amont, alors que le schéma d'ordre 2, en utilisant le modèle $k-\omega$, donne des résultats plus proches des quatre points expérimentaux.

La figure 4.59 compare les profils de vitesse dans la direction normale à l'extrados et dans le sillage. Les différents x/c sont les même que pour le profil NACA0012. Pour cet écoulement, on constate que le modèle BL donne des profils plus proches des profils expérimentaux, en amont du choc $x/c = 0.319$ et dans le sillage $x/c = 1.025$. Près du bord de fuite, en aval du choc ($x/c = 0.95$), le profil du modèle $k-\omega$ est plus proche des données expérimentales que celui du modèle BL.

Comme pour le cas test 10, les deux modèles prédisent des profils de μ_t ayant un comportement similaire (figure 4.58) avec des valeurs plus élevées pour le modèle $k-\omega$.

Il est à noter que pour tous les calculs turbulents, on n'a pas tenu compte de la transition laminaire-turbulent et les écoulements ont été supposés turbulents à partir du bord d'attaque. Il est à noter également que pour certains écoulements, l'imposition d'une limite inférieure pour la variable de Baldwin-Barth était nécessaire afin d'assurer la positivité de la viscosité turbulente, alors qu'en aucun cas cela n'était requis pour le modèle $k - \omega$.

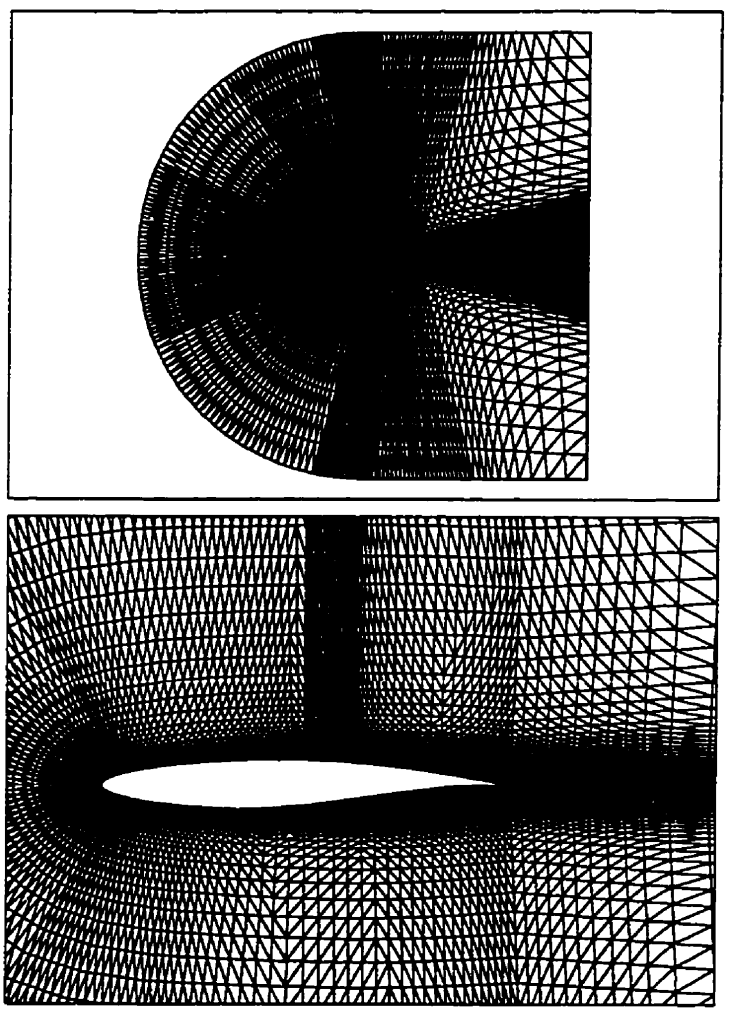


Figure 4.55: Maillages utilisés autour du profil RAE2822.

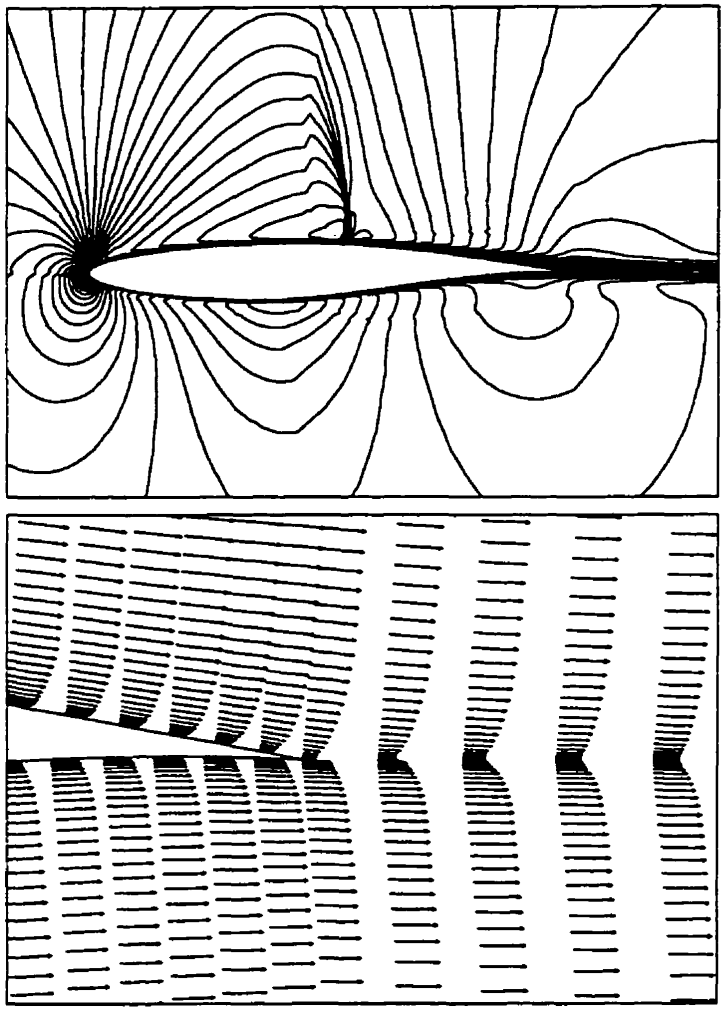


Figure 4.56: Cas test 11. modèle BL, lignes d'iso-Mach et champ de vitesse

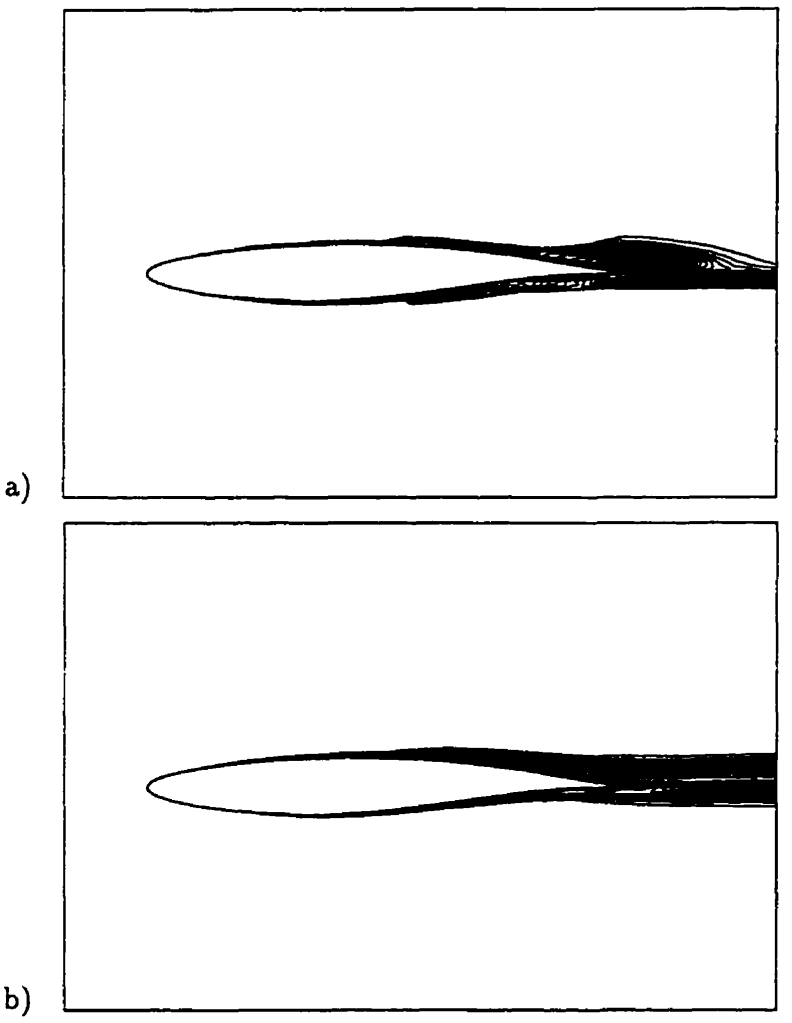
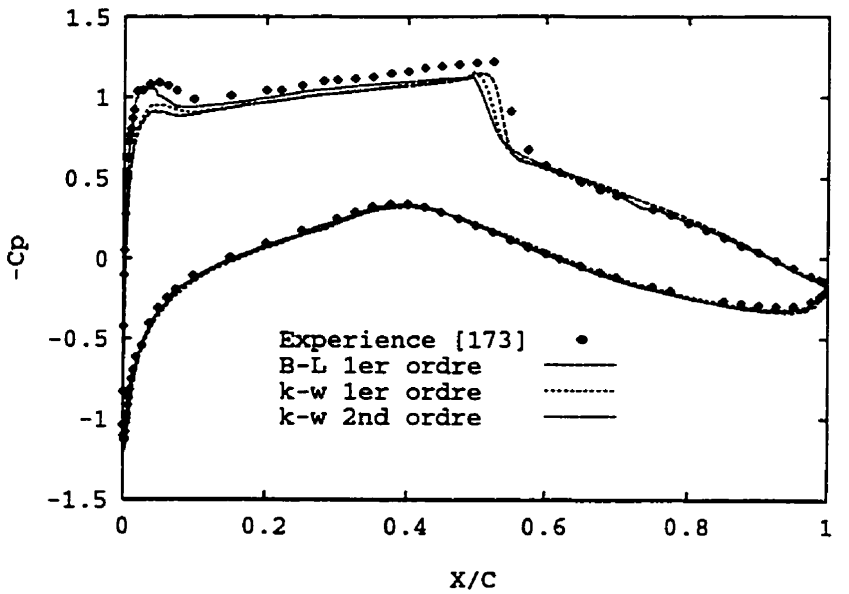
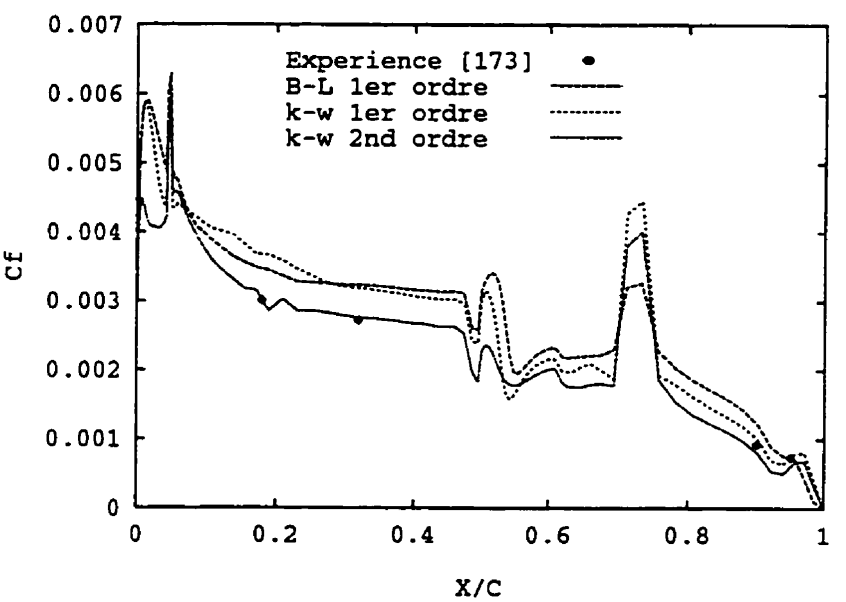


Figure 4.57: Cas test 11. lignes d'iso-μ_t. a) modèle BL, b) modèle $k-\omega$.



a)



b)

Figure 4.58: Cas test 11. a) coefficient de pression, b) coefficient de friction.

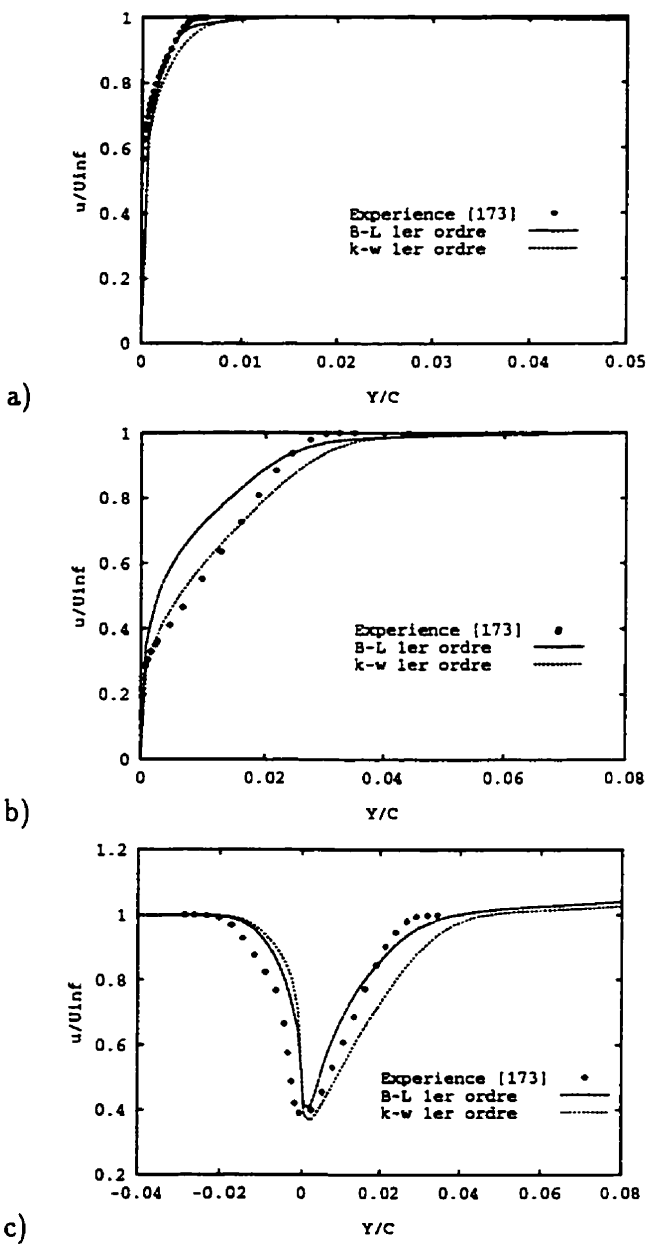


Figure 4.59: Cas test 11. Comparaison des profils de vitesse à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

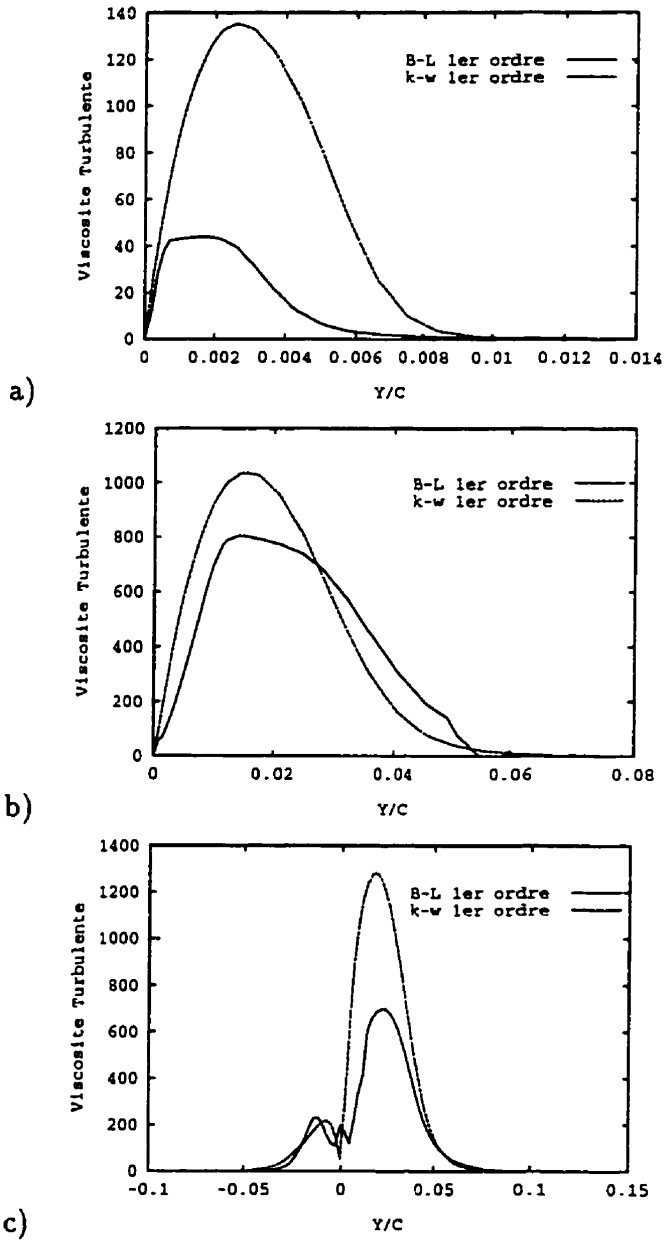


Figure 4.60: Cas test 11. Comparaison des profils de μ_t à différentes positions. a) x/c = 0.319, b) x/c = 0.95, x/c = 1.025.

Chapitre 5

Conclusions et recommandations

Par la présente étude, on a contribué à un domaine de recherche relativement non-exploré; celui de l'utilisation des maillages non-structurés et des schémas upwind pour résoudre les équations moyennes de Reynolds compressibles complétées par un modèle de turbulence. Ceci a permis de simuler numériquement des écoulements compressibles, à de grands nombres de Reynolds, autour de géométries relativement complexes (profils d'ailes d'avions). Dans ce travail, le schéma "upwind" standard de Roe et des maillages triangulaires anisotropes ont été utilisés.

Pour simuler les effets de la turbulence, le modèle de Baldwin-Lomax, le modèle de Baldwin-Barth et le modèle $k - \omega$ de Wilcox, dans sa version standard, ont été implantés. Une nouvelle technique permettant l'implantation du modèle de Baldwin-Lomax sur des maillages triangulaires a été developpée.

Afin d'établir les performances du schéma standard de Roe, de la nouvelle technique d'implantation du modèle de Baldwin-Lomax et des trois modèles de tur-

bulence, sur des maillages triangulaires anisotropes, plusieurs écoulements , sur la plaque plane et autour de différents profils aérodynamiques, ont été calculés.

En utilisant des maillages très élancés, les résultats obtenus pour les écoulements non-visqueux et laminaires ont révélé que le schéma standard de Roe dépend fortement du maillage utilisé et génère trop de viscosité artificielle. L'extension du schéma au deuxième ordre a permis d'améliorer légèrement la précision. Ce comportement du schéma standard de Roe, nous a contraint à l'utilisation des maillages avec des élancements modérés pour calculer les écoulements turbulents.

Les cas test laminaires ont montré que dans l'ensemble, les résultats du schéma standard de Roe concordent assez bien avec les solutions analytiques et celles de NSU2D. L'élancement du maillage a un faible effet sur la solution alors qu'il rend le solveur lent à converger. L'extension du schéma au deuxième ordre a révélé que le limiteur de Barth éprouve des difficultés de convergence mais donne des résultats sensiblement identiques à ceux du limiteur de Venkatakrishnan qui converge assez bien. Et l'utilisation des maillages complètement non-structurés a donné des résultats plus précis. Cependant, de faibles différences avec les résultats de NSU2D ont été observées sur l'extrados du profil NACA0012 dans des conditions d'écoulement séparés.

Malgrès l'utilisation de maillages avec élancements modérés, une assez bonne concordance des solutions turbulentes avec les données expérimentales et empiriques disponibles, a été obtenue à l'aide des trois modèles de turbulence. Ceci indique le succès de l'implantation des trois modèles ainsi que de la nouvelle technique d'implantation du modèle de Baldwin-Lomax, qui intervient aussi dans le calcul de certaines quantités requises par le modèle de Baldwin-Barth.

Pour des écoulements attachés, les trois modèles performent assez bien. Pour l'écoulement transsonique autour du profil NACA0012, le modèle $k-\omega$ standard améliore un peut la position du choc mais celle-ci demeure en aval de la position expérimentale alors que pour le profil RAE2822, le modèle de Baldwin-Lomax prédit le choc à une position très proche de la position expérimentale. La position prédite par le modèle $k-\omega$ est un peut plus en amont.

Dans [103], Xudang et al. ont proposé une modification au schéma standard de Roe afin de le rendre moins dépendent du maillage. Ils suggèrent d'effectuer la différentiation en amont selon la direction de l'écoulement au lieu de la direction normale à la face. Les résultats qu'ils ont obtenus pour des écoulements non-visqueux montrent que cette méthode semble prometteuse. Son extension à des écoulements visqueux peut permettre l'utilisation de maillages très élancés (plus fins) nécessaires pour des écoulements turbulents.

Comme l'élancement du maillage rend le solveur lent à converger, l'amélioration de l'accélération de la convergence est nécessaire aussi.

Il serait aussi intéresant d'étendre la nouvelle technique d'implantation du modèle de Baldwin-Lomax, et l'implantation des trois modèles de turbulence aux calculs d'écoulements autour de géométries plus complexes, tels que les profils multi-éléments.

Finalement, une étude des effets des méthodes numériques, utilisées pour résoudre les équations de l'écoulement moyen et celles de la turbulence, sur la qualité des solutions turbulentes, tel qu'effectuée par Ilinca [175], est recommandée.

Bibliographie

[1] CHAPMAN D. R. (Décembre 1979). Computational Aerodynamics Development and Outlook. AIAA Journal, 17(12):1293-1313.

[2] JAMESON A. (Décembre 1983). The Evolution of Computational Methods in Aerodynamics. Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 50:1052-1070.

[3] VENKATAKRISHNAN V. (1995). A Perspective on Unstructured Grid Flow Solvers. AIAA Paper 95-0667.

[4] JAMESON A. (Avril 1996). The Present Status, Challenges, and Future Developments in Computational Fluid Dynamics. AGARD-CP-578.

[5] JAMESON A., SCHMIDT W. et TURKEL E. (1981). Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Stepping Schemes. AIAA Paper 81-1259.

[6] ROE P. L. (1981). Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Scheme. Journal of Computational Physics, 43:357-372.

[7] MAVRIPLIS D. J. et JAMESON A. (1990). Multigrid Solution of The Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes. AIAA Journal, 28(8):1415-1425.

[8] FAVRE A. (1965). Équations des Gaz Turbulents Compressibles. Journal de Mécanique, 4(3):361-390.

[9] CEBECI T. et SMITH A.M.O. (1974). Analysis of Turbulent Boundary Layers. Academic Press, New York.

[10] RODI W. (1987). Turbulence Models for Practical Applications. Dans: Introduction to the Modelling of Turbulence. VKI Lecture Series 1987-06:1-26.

[11] PRANDTL L. (1925). Ober Die Ausgebildete Turbulenz ZAMM. 5:136-139.

[12] CEBECI T., SMITH A.M.O. et MOSINSKI S. J. (Novembre 1974). Calculation of Compressible Adiabatic Turbulent Boundary Layers. AIAA Journal, 8(11):1974-1982.

[13] BALDWIN B. S. et LOMAX H. (1978). Thin Shear Layer Formulation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flow. AIAA Paper 78-257.

[14] MARTINELLI L., JAMESON A. et GRASSO F. (1986). A Multigrid Method for the Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 86-0208.

[15] RUMSEY C. L. (1988). Parametric Study of Grid Size, Time Step, and Turbulence Modeling on Navier-Stokes Computaions Over Airfoils. AGARD-CP-437, 1.

[16] JOHNSTON L. J. (1991). Solution of the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations for Transonic Aerofoil Flows. Aeronautical Journal, 95(948):253-273.

[17] YU J. N., ALLMARAS S. R. et MOSCHETTI K. G. (1991). Navier-Stokes Calculations for Attached and Separated Flows Using Different Turbulence Models. AIAA Paper 91-1791.

[18] KLINE S. J., CANTWELL B. J. et LILLEY G. M. (1982). Proceedings of the 1980-1981 AFSOR-HTTM Stanford Conference on Complexe Turbulent Flows. Comparison of Computation and Experiment Stanford University, Stanford, CA, USA.

[19] RUMSEY C. L. et VASTA V. N. (1993). A Comparison of the Predictive Capabilities of Several Turbulence Models Using Upwind and Central-Difference Computer Codes. AIAA Paper 93-0192.

[20] MAKSYMIUK C. M. et PULLIAM T. H. (1987). Viscous Transonic Airfoil Workshop Results with ARC2D. AIAA Paper 87-0415.

[21] JOHNSON D. A. et KING L. S. (1985). A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers. AIAA Journal, 23(11):1684-1692.

[22] KING L. S. (1987). A Comparison of Turbulence Closure Models for Transonic Flows About Airfoils. AIAA Paper 87-0418.

[23] COAKLEY T. J. (1987). Numerical Simulation of Viscous Transonic Flows. AIAA Paper 87-0416.

[24] MICHELTREE R. A., SALAS M. D. et HASSAN H. A. (1990). One-Equation Turbulence Model for Transonic Airfoil Flows. AIAA Journal, 28(9):1625-1632.

[25] MARX Y. P. (1991). A Practical Implementation of Turbulence Models for the Computation of Three Dimensional Separated Flows. Int. Journal of Num. Meth. in Fluids, 13(6):775-796.

[26] BRADSHAW P., FERRISS D. H et ATWELL N. P. (1967). Calculation of Boundary-Layer Development Using Turbulent Energy Equation. Journal of Fluid Mechanics, 28(3):593-616.

[27] LAUNDER B. E., REYNOLDS W. C., RODI W., MATHIEU J. et JEANDEL D. (1984). Turbulence Models and their Application. Vol. 2. Ed. Eyrolls. France.

[28] BALDWIN S. B. et BARTH T. J. (1990). A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Numbers Wall-Bounded Flows. NASA TM-102847.

[29] GOLDBERG U. C. et RAMAKRISHNAN S. V. (1993). A Pointwise Version of Baldwin-Barth Turbulence Model. Journal of Comp. Fluid. Dyn., 1:321-338.

[30] MENTER F. R. (1991). Performance of Popular Turbulence Models for Attached and Separated Adverse Pressure Gradient Flows. AIAA Paper 91-1784.

[31] LALL V., PAPADAKIS M. et HOFFMAN K. (1995). Evaluation of Turbulence Models for Attached and Separated Airfoil Flows. AIAA Paper 95-0052.

[32] LONDERBERG W. K. (1993). Turbulence Model Evaluation for the Prediction of Flows Over a Supercritical Airfoil with Deflected Aileron at High Reynolds Number. AIAA Paper 93-0191.

[33] SPALART P. R. et ALLMARAS S. R. (1992). A One-Equation Turbulence Model for Aerodymanic Flows. AIAA Paper 92-0439.

[34] ANDERSON W. K. et BONHAUS D. L. (1993). Navier-Stokes Computations and Experimental Comparisons for Multielement Airfoil Configurations. AIAA Paper 93-0645.

[35] ROGERS S. E., MENTER F. R., DURBIN P. A. et MANSOUR N. N. (1994). A Comparison of Turbulence Models in Computing Multi-Element Airfoil Flows. AIAA Paper 94-0291.

[36] NELSON T. E., GODIN P. et ZINGG D. W. (1995). Multi-Element Airfoil Computations with One-Equation Turbulence Models. AIAA Paper 95-0357.

[37] LAUNDER B. E. et SPALDING D. B. (1974). The Numerical Computation of Turbulent Flows. Comp. Meth. in App. Mech. and Eng., 3:268-289.

[38] MAVRIPLIS D. J. et MARTINELLI L. (1990). Multigrid Solution of Compressible Turbulent Flow on Unstructured Meshes Using a Two-Equation Model. AIAA Paper 90-0237.

[39] STOLCIS L. et JOHNSTON L. J. (1991). Compressible Flow Calculation Using a Two-Equation Turbulence Model and Unstructured Grids. Dans: Proceedings of the 7th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Stanford, CA, USA.

[40] YANG H. Q. (1994). Numerical Simulation of Dynamic Stall at High Reynolds Numbers. AIAA Paper 94-0286.

[41] FORTIN F. et JONES D. J. (1994). Solution of Compressible Inviscid and Viscous Flows Around Single and Multi-Elemnt Airfoils on Unstructured Meshes. Dans: Comptes Rendus du Deuxième Congrés Annuel de la Société Canadienne de CFD, Toronto, Ontario, Canada.

[42] MENTER F. R. (1993). Zonal Two-Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows. AIAA Paper 93-2606.

[43] WILCOX D. C. (1993). A Two-Equation Turbulence Model for Wall-Bounded and Free-Shear Flows. AIAA Paper 93-2105.

[44] JONES W. P. et LAUNDER B. E. (1973). The Calculation of Low-Reynolds Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence. Int. Journal of Heat and Mass Transfer. 16:1119-1130.

[45] PATEL V. C., RODI W. et SHEUERE G. (1985). Turbulence Models for Near Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review. AIAA Journal. 23(9):1308-1319.

[46] WILCOX D. (1993). Comparison of Two-Equation Turbulence Models for Boundary Layers with Pressure Gradients. AIAA Journal. 31(8):1414-1421.

[47] RODI W. (1991). Some Current Approaches in Turbulence Modelling. AGARD-AR-291.

[48] SPEZIALE C. G., ABID R. et ANDERSON E. C. (1992). Critical Evaluation of Two-Eqaution Models for Near-Wall Turbulence. AIAA Journal. 30(2):324-331.

[49] WILCOX D. C. (1988). Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models. AIAA Journal. 26(11):1299-1310.

[50] COAKLEY T. J. (1983). Turbulence Modeling Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 83-1693.

[51] WILCOX D. C. et RUBESIN M. W. (1980). Progress in Turbulence Modeling for Complex Flow Fields Including the Effect of Compressibility. NASA - TP-1517.

[52] MENTER F. R. (1992). Influence of Freestream Values on $k-\omega$ Turbulence Model Predictions. AIAA Journal, 30(6):1657-1659.

[53] MENTER F. R. (1992). Improved Two-Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows. NASA-TM-103975.

[54] ROGERS S. E (1993). Progress in High-Lift Aerodynamic Calculations. AIAA Paper 93-0194.

[55] EKATERINARIS J. A. et MENTER F. R. (1994). Computation of Separated and Unsteady Flows with One and Two-Equation Turbulence Models. AIAA Paper 94-0190.

[56] JONES D. J. et FORTIN F. (1995). Two Dimensional Navier-Stokes Solutions Using a Combination of Structured and Unstructured Grids. Dans: Comptes Rendus du Troisième Congrés Annuel de la Société Canadienne de CFD. Banff, Alberta, Canada.

[57] LAUNDER B. E. (Décembre 1989). Second Moment Closure: Present and Future. Int. Journal of Heat and Fluid Flow, 10(4):282-300.

[58] SHABBIR A. et SHIH T-H (1993). Critical Assessement of Reynolds Stress Turbulence Models Using Homogeneous Flows. AIAA Paper 93-0082.

[59] HYTOPOULOS E. et SIMPSON R. L. (1993). Critical Evaluation of Second-Order Closure Models. AIAA Paper 93-0081.

[60] REYNOLDS W. C. (1976). Computation of Turbulent Flows. Ann. Rev. of Fluid Mech., 8:183-208.

[61] SARKAR S. et LAKSHMANAN B. (Mai 1991). Application of Reynolds Stress Turbulence Model to the Compressible Shear Layer. AIAA Journal, 29(5):743-749.

[62] SPEZIALE C. et SARKAR S. (1991). Second-Order Closure Models for Supersonic Turbulent Flows. AIAA Paper 91-0217.

[63] ZEMAN O. et BLAISDELL G. (1991). New Physics and Models for Compressible Turbulent Flows. Advances in Turbulence, 3:445-454. Springer-Verlag. Berlin.

[64] LEE J., TAULBEE D. B. et HOLDEN M. S. (Juin 1992). Study of Turbulence of Supersonic Compressible Surfaces Using Reynolds Stress Model. AIAA Journal. 30(7):1738-1746.

[65] GNEDIN M. et KNIGHT D. (1995). A Reynolds Stress Equation Turbulence Model for Compressible Flows. Part I: Flat Plate Boundary Layers. AIAA Paper 95-0860.

[66] MORKOVIN M. V. (1961). Effects of Compressibility on Turbulent Flow. Coll. Intern. CNRS. No. 108. Mécanique de la turbulence. Éd. CNRS. Paris.

[67] BRADSHAW P. (1977). Compressible Turbulent Shear Layers. Ann. Rev. of Fluid Mech., 9:33-54.

[68] MACCORMACK R. W. (1969). The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Catering. AIAA Paper 69-345.

[69] MACCORMACK R. W. (1982). A Numerical Method fot Solving the Equations of Compressible Viscous Flow. AIAA Journal, 20(9):1275-1281.

[70] DIEWERT J. S. (1975). Numerical Simulation of High Reynolds Number Transonic Flows. AIAA Journal, 13(10):1354-1359.

[71] BEAM R. W. et WARMING R. F. (1976). An Implicit Finite Difference Algorithm for Hyperbolic System in Conservation Flow. Journal of Computational Physics, 23.

[72] BEAM W. R. et WARMING R. F. (1978). An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA Journal, 16(4):393-402.

[73] JAMESON A., SCHMIDT W. et TURKEL E. (1981). Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Method Using Runge-Kutta Schemes. AIAA Paper 81-1259.

[74] JAMESON A., BAKER T. B. et WEATHRILL N. P. (1986). Calculation of Inviscid Transonic Flow Over Complete Aircraft. AIAA Paper 86-0102.

[75] MARINELLI L., JAMESON A. et GRASSO F. (1986). A Multigrid Method for the Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 86-0208.

[76] COURANT R., ISAACSON E. et REEVES M. (1952). On the Solution of Non-Linear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences. Comm. Pure and App. Math., 5:243-255.

[77] STEGER J. L. et WARMING R. F. (1981). Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas Dynamic Equation with Application to Finite Difference Method. Journal of Computational Physics, 40:263-293.

[78] VAN LEER B. (1982). Flux Vector Splitting of the Euler Equations. Lecture Notes in Physics, 170:507-512.

[79] COIRIER W. J. et VAN LEER B. (1991). Numerical Flux Fomula for the Euler and Navier-Stokes Equations. II. Progress in Flux Vector Splitting. AIAA Papper 91-1566.

[80] CHAKRAVARTHY S. R., ANDERSON D. A. et SALAS M. D. (1980). The Split-Coefficient Matrix Method for Hyperbolic Systems of Gas Dynamics Equations. AIAA Paper 80-0268.

[81] MORETTI G. (1979). The λ-Scheme. Comput. Fluids. 7:191-205.

[82] GODUNOV S. K. (1959). Finite-Difference Method for Numerical Computation of Discontinuous Solution of the Equations of Fluid Dynamics. Matema. Sbornik., 47:271-306.

[83] OSHER S. et SOLOMON F. (1982). Upwind Difference Schemes for Hyperbolic Systems of Conservation Laws. Math. Comp., 30(158):339-374.

[84] ROE P. L. (1986). Characteristic-Based Schemes for the Euler Equations. Ann. Rev. of Fluid Mech., 18:337-365.

[85] HARTEN A. (1983). High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. Journal of Comp. Phys., 49:357-393.

[86] ENQUIST B. et OSHER S. (1980). Stable and Entropy Satisfying Approximation for Transonic Flow Calculations. Journal of App. Math. and Comp., 34:45-74.

[87] BORIS J. P. et BOOK D. L. (1973). Flux Corrected Transport: I. SHASTA. A Fluid Transport Algorithm that Works. Journal of Comp. Phys., 11:38-69.

[88] VAN LEER B. (1974). Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme: II. Monotonic and Conservation Combined in a Second Order Scheme. Journal of Comp. Phys.. 14:361-370.

[89] VAN LEER B. (1979). Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme: V. A Second Order Sequel to Godunov's Method. Journal of Comp. Phys.. 32.

[90] HARTEN A. (1984). On a Class of High Rresolution Total Variation Stable Finite Difference Schemes. SIAM Journal of Num. Anal.. 21:1-23.

[91] SHAKRAVARTHY S. et OSHER S. (1985). A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. AIAA Paper 85-0363.

[92] SWEBY P. K. (1984). High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. SIAM Journal of Num. Anal.. 21:995-1011.

[93] ANDERSON W. K.. THOMAS J. L. et VAN LEER B. (Septembre 1986). A Comparison of Finite Volume Flux Vector Splittings for the Euler Equations. AIAA Journal, 24(9):1453-1460.

[94] BARTH T. J. et JESPERSEN D. C. (1989). The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes. AIAA Paper 89-0366.

[95] VENKATAKRISHNAN V. (1993). On the Accuracy of Limiters and Convergenve to Steady State Solutions. AIAA Paper 93-0880.

[96] AFTOSMIS M., GAITONDE D. et SEAN TAVARES T. (1994). On the Accuracy, Stability and Monotonicity of Various Reconstruction Algorithms for Unstructured Meshes. AIAA Paper 94-0415.

[97] TRÉPANIER J.-Y., ZHANG H., REGGIO M. et PARASCHIVOIU M. (1992). Periodic Euler and Navier-Stokes Solutions About Oscillating Airfoils. CASI Journal, 38(2):71-75.

[98] SELLS C. C. L. (1980). Solution of the Euler Equations for Transonic Flow Past Lifting Airfoil. Royal Aircraft Establishment, TR 80065.

[99] DAVIS F. S. (1984). A Rotationally Based Upwind Difference Scheme for the Euler Equations. Journal of Comp. Phys., 56:65-92.

[100] DADONE A. et GROSSMAN B. (1992). Characteristic Based Rotated Upwind Scheme for the Euler Equations. AIAA Journal, 30(9):2219-2226.

[101] ROE P. L. (1986). Discrete Models for the Numerical Analysis of Time-Dependent Multidimensional Gas Dynamics. Journal of Comp. Phys., 63:458-476.

[102] PARASCHIVOIU M. (1993). Une Méthode Adaptative pour la résolution Exacte des Ondes de Choc et des Discontinuités de Contact. Mémoire de Maitrise, École Plytechnique de Montréal.

[103] ZHANG X., TRÉPANIER J.-Y. et CAMARERO R. (1996). Revisiting the Streamwise Upwind Method for the Euler Equations. AIAA Paper 96-0765.

[104] HIRSCH C. (1990). Numerical Computation of Internal and External Flows. Vol. 2, John Wily and Sons.

[105] MARTINELLI L. et JAMESON A. (1988). Validation of Multigrid Method for the Reynolds Averaged Equations. AIAA Ppaper 88-0441.

[106] SWANSAN R. C. et TURKEL E. (1987). Artificial Dissipation and Central Difference Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 87-1107.

[107] CAUGHEY D. A. et TURKEL E. (1988) Effects of Numerical Dissipation on Finite Volume Solutions of Compressible Flow Problems. AIAA Paper 88-0621.

[108] HÄNEL D. (Janvier 1990). Computation of Compressible Viscous Flows. AGARD-R-764.

[109] VAN LEER B., THOMAS J. L., ROE P.L. et NEWSOME R. W. (1987). A Comparison of Numerical Flux Formulas for the Euler and Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 87-1104.

[110] HÄNEL D., SCHWANE R. et SEIDER G. (1987). On the Accuracy of Upwind Schemes for the Solution of Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 87-1105.

[111] GUSTAFSON B. et SUNDSTRÖM A. (1978). Incompletly Parabolic Problems in Fluid Dynamics. SIAM Journal of Appl. Math., 35:343-357.

[112] OSHER S. et SANDERS S. (1987). Numerical Approximation to Nonlinear Conservation Laws with Locally Varying Time and Space Grids. Math. of Comp., 41:321-336.

[113] BERGER M. J. (1987). On Conservation Grid Interfaces. SIAM Journal of Num. Anal., 24(5):967-984.

[114] KLEB W. L., BATINA T. T. et WILLIAMS M. H. (1992). Temporal Adaptive Euler/Navier-Stokes Algorithm Involving Unstructured Dynamic Meshes. AIAA Journal, 30(8):1980-1985.

[115] ZHANG X., TRÉPANIER J.-Y. et CAMARERO R. (1994). Time-Accurate Local Time Stepping Method Based on Flux Updating. AIAA Journal. 32(9):1926-1928.

[116] BRANDT A. (1981). Guide to Multigrid Development. Dans: Lecture Notes in Mathematics, 960:220-312.

[117] NI R. H. (1982). A Multigrid Scheme for Solving the Euler Equations. AIAA Journal, 20(11):1565-1571.

[118] SICLARI M. J., DEL GUIDIE P. et JAMESON A. (1989). A Multigrid Finite Volume Method for Solving the Euler and Navier-Stokes Equations for High Speed Flows. AIAA Paper 89-0283.

[119] MAVRIPLIS D. J. et MARTINELLI L. (1991). Multigrid Solution of Compressible Turbulent Flow on Unstructured Meshes Using a Two-Equation Model. AIAA Paper 91-0237.

[120] LALLEMAND L., STEVE H. et DERVIEUX A. (1992). Unstructured Multigrid by Volume Agglomeration: Current Status. Computers and Fluids. 21(3):397-433.

[121] VENKATAKRISHNAN V. et MAVRIPLIS D. J. (1994). Agglomeration Multigrid for Three-Dimensional Euler Equations. AIAA Paper 94-0069.

[122] MAVRIPLIS D. J. et VENKATAKRISHNAN V. (1994. Agglomeration Multigrid for Viscous Turbulent Flows. AIAA Paper 94-2332.

[123] MAVRIPLIS D. J. et VENKATAKRISHNAN V. (1995). A 3D Agglomeration Multigrid Solver for the Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes. AIAA Paper 95-0345.

[124] JAMESON A. (1987). Successes and Challenges in Computational Aerodynamics. AIAA Paper 87-1184.

[125] DICK E. (1983). The Calculation of Steady Transonic Flow by Euler Equations with Relaxation Method. Dans: Computational Methods for Turbulent, Transonic and Viscous Flows, Esser J. A. (Ed.):291-350.

[126] CÔTÉ F. (1996). Algorithmes d'Accélération de Convergence pour la Solution des Écoulements Compressibles sur des Maillages Non-Structurés. Mémoire de Maitrise, École polytechnique de Montréal.

[127] HASSAN O., MORGAN K. et PERAIRE J. (1989). An Implicit-Explicit Schemes for Compressible Viscous High-Speed Flows. AIAA Paper 89-0363.

[128] HWANG C. J. et LIU J. L. (1992). Locally Implicit Hybrid Algorithm for Steady and Unsteady Viscous Flows. AIAA Journal, 30(5):1228-1236.

[129] KNIGHT D. (1993). A Fully Implicit Navier-Stokes Algorithm Using an Unstructured Grid and Flux Difference Splitting. AIAA Paper 93-0875.

[130] WHITAKER D. L., SLACK D. C. et WALTERS R. W. (1990). Solution Algorithms for the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Meshes. AIAA Paper 90-0697.

[131] AIT ALI YAHIA D. (1991). Développement d'une Méthode Implicite pour la Résolution des Équations d'Euler sur un Maillage Triangulaire Adaptatif. Mémoire de Maitrise, École polytechnique de Montréal.

[132] TRÉPANIER J.-Y., REGGIO M. et AIT ALI YAHIA D. (Juillet 1991). Implicit Numerical Solution of Transonic Flows Using Adaptive Triangular Grids. Dans:
The 7th Int. Conference on Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flows. Stanford, CA, USA.

[133] SCHRÖDER W. et HÄNEL D. (1987). An Unfactored Implicit Scheme with Multigrid Acceleration for the Solution of the Navier-Stokes Equations. Comp. and Fluids, 15:313-336.

[134] YAKOTA J. W. et CAUGHEY D. A. (1988). LU Implicit Multigrid Algorithm for the Three Dimensional Euler Equations. AIAA Journal, 26(9):1061-1069.

[135] CLARKE D. K., SALAS M. D. et HASSAN H. A. (1986). Euler Calculations for Multielement Airfoils Using Cartesian Grids. AIAA Journal, 24(3):35-338.

[136] THOMPSON J. F., THOMAS F. C. et MARTIN C. W. (1977). TOMCAT A Code for Numerical Generation of Boundary Fitted Curvilinear Coordinate System on Fields Containing any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. Journal of Comp. Phys., 24.

[137] WALTERS R. W., REU T., THOMAS J. L. et MCGRORY W. D. (Octobre 1988). Zonal Techniques for Flowfield Simulation About Aircraft. Proc. Symp. on Advances and Trends in Computational Structural Mechanics and Fluid Dynamics.

[138] JAMESON A. et MAVRIPLIS D. J. (Avril 1986). Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh. AIAA Journal, 24(4):611-618.

[139] MAVRIPLIS D. J. (Juillet 1992). Three-Dimensional Unstructured Multigrid for the Euler Equations. AIAA Journal, 30(7):1753-1761.

[140] BARTH T. J. et FREDERICKSON P. O. (1990). High Order Solution of Euler Equations on Unstructured Grids Using Quatratic Reconstruction. AIAA Paper 90-0013.

[141] LÖHNER R., MORGAN B. K., PERAIRE J. et VAHDATI M. (1987). Finite Element Flux-Corrected Transport for the Euler and Navier-Stokes Equations. Int. Journal of Num. Meth. in Fluids, 7:1093-1109.

[142] BRISTEAU M. O., GLOWINSKI R., DIMOYET B., PERIAUX J., POERRIER P et PERONNEAU O. (1987). Finite Element Methods for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA Paper 87-1890.

[143] THAREJA R. R., PRABHU R. K., MORGAN K., PERIAU J., PEIRO J. et SOLTANI S. (1990). Application of an Adaptive Unstructured Solution Algorithm to the Analysis of High Speed Flows. AIAA Paper.

[144] VENKATAKRISHNAN V. et BARTH T. J. (1991). Application of Direct Solvers to Unstructured Meshes for the Euler and Navier-Stokes Equations Using Upwind Schemes. AIAA Paper 91-1537.

[145] VENAKTAKRISHNAN V. et MAVRIPLIS D. J. (1991). Implicit Solvers for Unstructured Meshes. AIAA Paper 91-1537-CP.

[146] BATINA J. (1989). Vortex Dominated Conical Flow Computations Using Unstructured Adaptively Refined Meshes. AIAA Paper 89-1816.

[147] ZHANG H., TRÉPANIER J.-Y., REGGIO M. et CAMARERO R. (1992). A Navier-Stokes Solver for Stretched Triangular Grids. AIAA Paper 92-0183.

[148] NAKAHASHI N. (Janvier 1987). FDM-FEM Zonal Approach for Viscous Flow Computations Over Multiple Bodies. AIAA Paper 87-0604.

[149] PERAIRE J. A., VAHDATI M., MORGAN K. et ZIENKIEWICK O. C. (1987). Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations. Journal of Comp. Phys., 72(2):449-466.

[150] LÖHNER R. et PARIKH P. (1988). Generation of Three-Dimensional Untructured Grids by The Advancing Front Method. AIAA Paper 88-0515.

[151] MAVRIPLIS D. J. (1990). Adaptive Mesh Generation for Viscous Flows Using Delaunay Triangulation. Journal of Comp. Phys., 90:271-291.

[152] TRÉPANIER J.-Y. et YANG H. (Février 1993). ADX : Algorithms for Adaptive Discretization Based on Triangular Grids. Rapport Technique. École polytechnique de Montréal, EPM/RT-93/3.

[153] ROSTAND P. (1989). Algebraic Turbulence Models for the Computationof Two-Dimensional High Speed Flows Using Unstructured Grids. Int. Journal of Num. Meth. in Fluids, 9:1121-1143.

[154] MAVRIPLIS D. J. (Décembre 1991). Algebraic Turbulence Modeling for Unstructured and Adaptive Meshes. AIAA Journal, 29(12):2086-2093.

[155] JOHNSTON L. J. (Octobre 1991). Solution of the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations for Transonic Aerofoil Flows. Aeronautical Journal, 95(948):253-273.

[156] BARTH T. J. (1994). Aspects of Unstructured Grids and Finite-Volume Solvers for the Euler and Navier-Stokes quations. Dans: Computational Fluid Dynamics. VKI Lecture Series. 1994-05.

[157] ANDERSON D. A., TANNEHILL J. C. et PLETCHER R. H. (1984). Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer. McGrawhill/Hemisphere.

[158] WILCOX D. C. (1993). Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries Inc., CA, USA.

[159] HARTEN A. (Février 1984). On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite Difference Schemes. SIAM Journal for Num. Anal., 21(1).

[160] LIOU M. S. et VAN LEER B. (1988). Choice of Implicit-Explicit Operators for the Upwind Differencing Scheme. AIAA Paper 88-0624.

[161] CÔTÉ F. et TRÉPANIER J.-Y. (1996). Comparison of Convergence Acceleration Methods for the Solution of Compressible Flow on Unstructured Grids. Comptes Rendus du 4ième Congré Annuel de la Société Canadienne de CFD. Ottawa, Ontario, Canada.

[162] SAAD Y. et SCHULTZ M. H. (1986). GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Non Symmetric Linear Systems. SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing, 7(3):856-869.

[163] DUTTO L. C., GUÈVREMENT G. et PAGE M. (1994). User's Guide for CERCA's Package of Preconditioned Iterative Linear Solvers. CERCA, Montréal, Québec, Canada.

[164] ZHANG X. D., TRÉPANIER J.-Y., REGGIO M., BENMEDDOUR A. et CAMARERO R. (1995). Grid Influence on the Solutions of Euler and Navier-Stokes Equations Using Upwind Schemes. AIAA Paper 95-0347.

[165] ZHANG X. D., TRÉPANIER J.-Y., REGGIO M., BENMEDDOUR A. et CAMARERO R. (1996). Grid Influence on Upwind Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations. AIAA Journal, 34(4):717-727.

[166] WILLIAMS B. R. (1973). An Exact Test Case for the Plane Potential Flow About Two Adjacent Lifting Aerofoils. ARC RM 3717.

[167] SCHLICHTING H. (1979). Boundary Layer Theory. McGraw-Hill.

[168] BRISTEAU M. O., GLOWINSKI R., PÉRIAUX J. et VIVIAND H. (1987). Numerical Simulation of Compressible Navier-Stokes Flows. Notes on Numerical Fluid Mechanics, 18, A GAMM-Workshop. Friedr. ViewegSohn. Braunschweig/Wisbaden.

[169] BENMEDDOUR A., ZHANG X. D., TRÉPANIER J.-Y. et MOKHTARIAN F. (1995). Performance of Roe's Upwind Scheme in Predicting Compressible Laminar Flows over Airfoils Using Unstructured Grids. Dans: Abstracts of Papers Presented at the 5th CASI Aerodynamics Symposium. Montréal. Québec, Canada.

[170] KALFON D., VOLPERT D. et BROCARD O. A. (1987). A Finite Element Method for Solving Navier-Stokes Equations. Notes on Numerical Fluid Mechanics, 18, A GAMM-Workshop, Friedr. ViewegSohn. Braunschweig/Wisbaden.

[171] MULLER B., BERGLIND T. et RIZZI A. (1987). Implicit Central Difference Simulation of Compressible Navier-Stokes Flow over NACA0012 Airfoil. Notes on Numerical Fluid Mechanics, 18, A GAMM-Workshop. Friedr. Vieweg-Sohn, Braunschweig/Wisbaden.

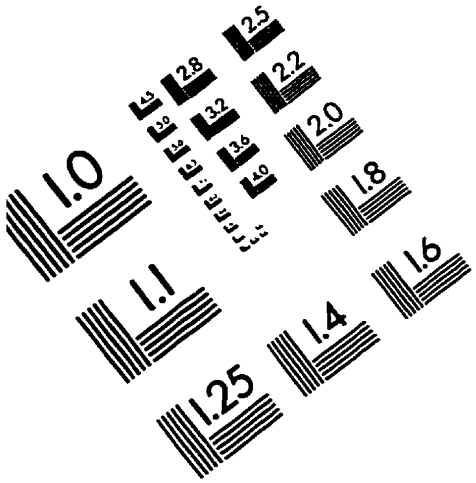
[172] DHAWAN S. (1952). Direct Measurments of Skin Friction. NACA TN-2567.

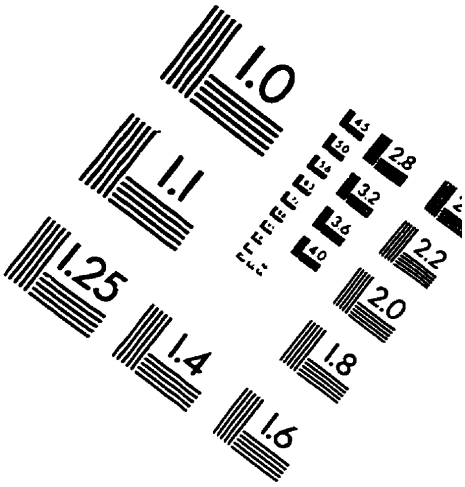
[173] THIBERT J. J., GRANJACQUE M. et OHMAN L. H. (1979). Experimental Data Base for Computer Programm Assessment. AGARD-AR-138.

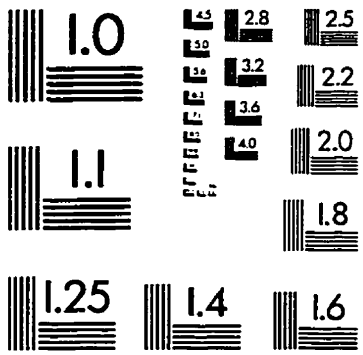
[174] HARRIS C. D. (1981). Two-Dimensional Aerodynamic Characteristics of NANA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Pressure Tunnel. NASA-TM-81929.

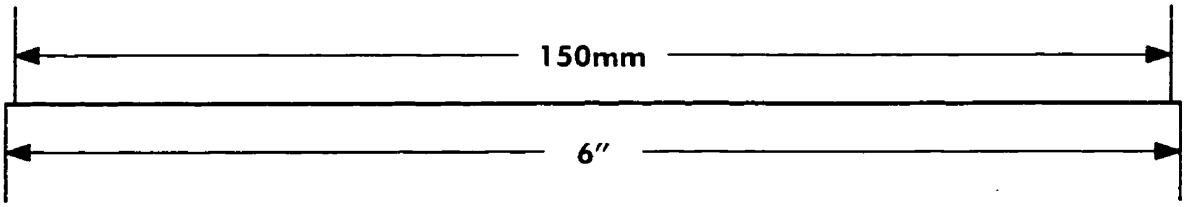
[175] ILINCA F. (1996). Méthode d'Éléments Finis Adaptative pour les Écoulements Turbulents. Thèse de Doctorat, École Plytechnique de Montréal.

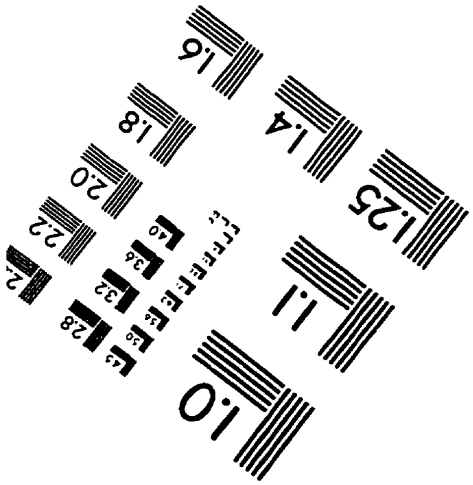
IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)

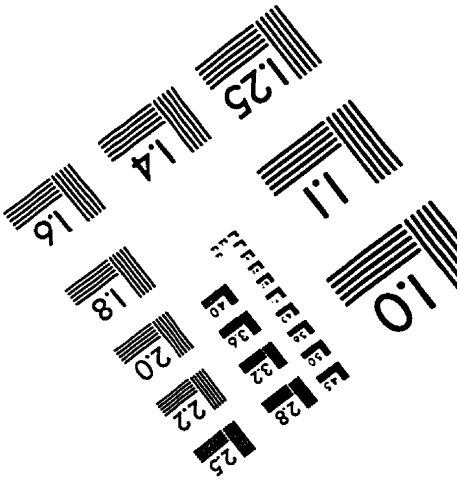










APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved