UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT ET DU TRANSFERT DE CHALEUR DANS LES CAVITÉS CYLINDRIQUES EN ROTATION

GUSTAVO URQUIZA BELTRAN
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE MÉCANIQUE)
FÉVRIER 1996

© Gustavo Urquiza Beltrán. 1996.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26438-6

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT ET DU TRANSFERT DE CHALEUR DANS LES CAVITÉS CYLINDRIQUES EN ROTATION

présentée par: URQUIZA BELTRAN Gustavo

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor (Ph.D.)

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. PRUD'HOMME Michel	Ph.D.	Président rapporteur
M. NGUYEN Hung T.	Ph.D.	Membre et directeur de recherche
Mme. ZHANG Xiao Li	Ph.D.	Membre et codirectrice de recherche
M. MASSON Christian	Ph.D.	Membre interne
Mme. GOUJON-DURAND Sophie	Ph.D.	Membre externe

Remerciements

Je désire exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mes directeurs de recherche. Dr. H. T. Nguyen et Dr. X. L. Zhang. du département de génie mécanique à l'École Polytechnique de Montréal. pour mon encadrement. leurs conseils judicieux et leurs encouragements. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier le professeur Dr. Michel Prud'homme pour avoir accepté d'être le président rapporteur du jury. Je remercie également le Dr. Christian Masson et le Dr. Sophie Goujon-Durand pour avoir bien voulu examiner ce travail. en acceptant de faire partie du jury.

Je n'oublie pas de remercier:

- El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) du Mexique pour le support financier qu'il m'a accordé durant les deux premières années de ce travail.

- Le Conseil International D'Études Canadiennes (CIEC) pour le support financier qu'il m'a accordé durant la dernière année de ce travail.

- El Instituto de Investigaciones Eléctricas (IIE) pour son appui et encouragement durant la réalisation de la thèse.

- Tous mes collègues du groupe thermique de l'École Polytechnique de Montréal. pour leurs encouragement et l'ambiance de discussion si chaleureuse qu'ils ont su créer.

- Le personnel du département de génie mécanique pour leurs attentions qui

ont rendu mon séjour agréable parmi eux.

Enfin, je remercie vivement mes parents, mes frères et soeurs et ma famille pour leurs aides, leurs soutiens et leur encouragements.

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des écoulements et du transfert de chaleur à l'intérieur des systèmes rotatifs génériquement liés au problème classique de Taylor.

Nous considérons d'abord le cas d'un système composé de deux cylindres concentriques de longueur finie. Nous traitons ensuite le problème d'un disque rotatif à l'intérieur d'une cavité cylindrique. La dernière partie est consacrée à un moteur composé d'un rotor tournant à l'intérieur d'un stator, tous deux de forme cylindrique.

L'étude est basée sur le système d'équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion d'un fluide incompressible. La solution est obtenue par la méthode de volume de contrôle. Les paramètres caractéristiques du problème sont le rapport de forme, le rapport de rayons, les nombres de Reynolds, Grashof (ou Rayleigh), et le nombre de Prandtl.

La première partie est consacrée au problème d'écoulement et de transfert de chaleur entre deux cylindres concentriques verticaux. Nous avons d'abord étudié, en négligeant la convection naturelle, le développement des vortex de Taylor sous l'effet des bouts. Nous avons ainsi obtenu deux modes d'écoulement, soit le mode primaire et le mode secondaire dont le développement est conforme à la théorie générale des bifurcations de *Benjamin*. Nous avons cependant trouvé qu'en présence de la convection naturelle, dans une gamme de nombre de Grashof variant de 0 à 5×10^4, le développement et la mutation des modes sont tout-à-fait différents de l'évolution prévue par la théorie classique des écoulements isothermes.

Dans la deuxième partie, nous avons étudié l'écoulement et le transfert de chaleur autour d'un disque attaché à un cylindre et enfermé dans une cavité

cylindrique. L'accent a été mis sur les effets de la longueur du disque, et de la convection naturelle, sur le développement des vortex de Taylor. En négligeant d'abord la convection naturelle, nous avons trouvé que l'influence du disque dépend fortement du rapport de forme et du nombre de Reynolds, aussi bien que de la longueur du disque. Lorsque la convection naturelle est en jeu, les notions d'écoulements primaires et secondaires rencontrés dans des écoulements isothermes ne s'appliquent plus. En fait, l'interprétation et la prédiction du développement des écoulements doivent être basées sur l'interaction entre la force de pousée d'Archimède, la force centrifuge du disque et celle du cylindre intérieur.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous étudions le problème d'un moteur électrique composé d'un rotor et d'un stator de forme cylindrique. Les écoulements du fluide enfermé dans les espacements inférieur et supérieur (entre le rotor et le stator) doivent être étudiés séparément à cause de la convection naturelle. Nous avons trouvé que, dans l'espace supérieur du moteur, la structure de l'écoulement dépend fortement de l'intensité relative des forces de poussé et de rotation: si l'une de ces forces est dominante, on trouve un écoulement unicellulaire; autrement, l'écoulement devient multicellulaire. En plus, aux grands nombres de Reynolds et de Rayleigh, il n'est plus possible d'atteindre un régime permanent. Ainsi, lorsque $Ra = 10^7$ et $Re = 900$, nous avons obtenu un écoulement périodique dont la structure passe cycliquement de deux à quatre cellules. Dans l'espace inférieur du moteur, l'écoulement peut être unicellulaire ou bicellulaire, mais tournant toujours dans un même sens.

Il est à noter qu'à l'exception du chapitre consacré à une revue exhaustive des travaux portant sur les sujets de notre travail, tous les résultats présentés dans cette thèse sont nouveaux et représentent l'essentiel de notre contribution au domaine des écoulements thermoconvectifs dans les systèmes rotatifs.

Abstract

The present study is focused on the development of fluid flow and heat transfer in rotating systems directly related to the generic Taylor apparatus. At first, we consider the case of two concentric cylinders of finite length. Next, we consider the problem of a circular rotating disk enclosed within a cylindrical cavity. The last part is devoted to the problem of a rotating rotor enclosed in a cylindrical stator.

The study is based on the set of Navier-Stokes and convection-diffusion equations for an incompressible fluid. The method of solution is based on the control volume approach. Results are obtained in terms of various characteristic parameters, namely the aspect ratio, the radius ratio, the Reynolds, Grashof (or Rayleigh) and Prandtl numbers.

In the first part of this work on fluid flow and heat transfer in concentric rotating cylinders, we have studied the end effects on the development of Taylor vortices by considering forced convection only. We thus found two different flow modes, namely the primary and secondary modes, whose development follows the general bifurcation theory proposed by *Benjamin*. However, when natural convection was taken into account, for Grashof numbers varying from 0 to 5×10^4, it was found that the development and mutation of flow modes are completely different from the classical theory of isothermal flows.

In the second part, we have studied the flow and heat transfer around a disk attached to a rotating cylinder and enclosed in a cylindrical cavity. The study was focused on the effect of the disk length and of natural convection on the development of Taylor vortices. By neglecting natural convection, it was found that the effects

of the disk strongly depend on the aspect ratio and the Reynolds as well as on the disk length. When natural convection enters into play, the so-called primary and secondary flows that appear in isothermal fluids are completely changed. The interpretation and the prediction of these flows must therefore be based on the interaction between three forces, namely the buoyancy force, the centrifugal force of the rotating disk, and the centrifugal force of the inner cylinder.

In the last part of this thesis, we considered the problem of an electric motor consisting of a cylindrical rotor and stator. Due to the presence of buoyancy forces, the convective flows in the upper and lower gaps (between the rotor and stator) have been studied separately. We have thus found that the flow structure in the upper gap strongly depends on the relative strength of the buoyancy and centrifugal forces: if one of them is dominating, the flow is unicellular, otherwise it becomes multicellular. Furthermore, at high Reynolds and Rayleigh numbers, steady state flows are no more possible. In fact, we have observed, at $Ra = 10^7$ and $Re = 900$, an oscillating flow whose structure periodically changes between 2 and 4 vortices. In the lower gap of the motor, it was found that the flow may consist of either only one, or two corotating cells.

It should be noted that, except for an exhaustive review of literature on the subjects related to the present study, all results presented in this thesis are new and represent our main contribution to the problems of thermoconvective flows in rotating systems.

Table des matières

Remerciements iv

Résumé vi

Abstract viii

Table des matières x

Liste des figures xiii

Liste des tableaux xviii

Liste des symboles xix

1 Introduction 1

1.1 Généralités 1

1.2 Objectifs de la thèse 3

1.3 Plan de développement 3

2 Revue bibliographique 5

2.1 Écoulement dans un fluide isotherme 5

2.2 Écoulement couplé au transfert de chaleur 13

2.3 Convection avec un disque en rotation 17

2.4 Convection dans un système rotor-stator 23

3 Formulation générale du problème 24

3.1 Introduction 24

3.2 Hypothèses 24

3.3 Formulation mathématique 25

3.4 Méthode de solution 30

4 Étude de la convection entre deux cylindres rotatifs 36

4.1 Introduction 36

4.2 Description du problème 40

4.3 Résultats et discussion 41

4.4 Conclusion 52

5 Étude de la convection avec un disque en rotation 66

5.1 Introduction 66

5.2 Description du problème 67

5.3 Résultats et discussion 68

5.4 Conclusion 75

6 Convection dans un système rotor-stator 89

6.1 Introduction 89

6.2 Description du problème 90

6.3 Résultats et discussion 91

6.4 Conclusion 96

7 Conclusion Générale 108

Références 112

Liste des figures

2.1 Écoulement de Taylor - Diagramme de stabilité d'après *Coles* (1965). 6

2.2 Profils de vitesse tangentielle dans une cellule de Taylor (*Alonso et Macagno*, 1973). 11

2.3 Evolution de la fonction de courant ψ et de la vitesse angulaire Ω dans un espace annulaire avec $R = 0.933$ et H/d = 10 (*Alziary et Grillaud*, 1978). 12

2.4 Nombre de Nusselt vs. nombre de Taylor sans écoulement axial et avec cylindre interne en rotation (*Baker et Kaye*, 1962). 14

2.5 Nombre de Nusselt vs. nombre de Taylor pour le cas du cylindre interne en rotation avec la surface lisse (*Lee et Minkowycz*, 1989). . . 16

3.1 Schéma général de la cavité cylindrique. 33

3.2 Distribution des noeuds sur le volume de contrôle. 34

3.3 Lignes de courant pour $Re = 150$, $Gr = 100$ et $\Gamma = 3.8$: (a) Ball et Farouk: (b) présente étude. 35

4.1 Géométrie du système. 55

4.2 Lignes de courant du mode à 2 cellules : (a) Re = 20, $\psi_{max} = 0.0064$; (b) Re = 70, $\psi_{max} = 0.0325$; (c) Re = 100, $\psi_{max} = 0.0476$; (d) Re = 150, $\psi_{max} = 0.0688$. 56

4.3 Profils de vitesse locale : (a) u le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire (b) Vitesse verticale le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire (c) Vitesse radiale dans le plan de symétrie. 57

4.4 Interaction entre les cellules aux extrémités et les cellules de Taylor. . 58

4.5 Diagrammes de bifurcation : (a) Bifurcation supercritique: (b) Bifurcation supercritique à deux branches discontinues. 58

4.6 Lignes de courant du mode secondaire : (a) Re = 100, v_{max} = 0.0535; (b) Re = 150, v_{max} = 0.0628. 59

4.7 Profils de vitesse locale pour les modes primaire et secondaire : (a) Vitesse radiale dans le plan de symétrie (b) Vitesse verticale le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire (c) u le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire. 60

4.8 Lignes de courant et isothermes pour : (a) Re = 20, Pr = 1, Pr = 10; (b) Re = 70, Pr = 1, Pr = 10; (c) Re = 150 (2-cellules), Pr = 1, Pr = 10; (d) Re = 150 (4-cellules), Pr =1, Pr = 10. 61

4.9 Température maximale en fonction du nombre de Reynolds : Pr = 1, branche primaire (1), branche secondaire (2); Pr = 10, branche primaire (3), branche secondaire (4). 62

4.10 Transfert de chaleur à travers le cylindre externe : (a) branche primaire; (b) branche secondaire. 62

4.11 Transfert de chaleur global à travers le cylindre externe : (a) Le mode primaire, pour Pr =10 et (1) Re = 20; (2) Re = 60; (3) Re = 100; (4) Re = 150. (b) Les modes à 2 et à 4 cellules, pour Re = 150, Pr = 10. 63

4.12 Lignes de courant et isothermes: (a) Re = 20, Gr = 0; (b) Re = 20, Gr = 400; (c) Re = 20, $Gr = 2 \times 10^4$. 64

4.13 Lignes de courant et isothermes: (a) Re = 70, Gr = 0; (b) Re = 70, $Gr = 4 \times 10^3$; (c) Re = 70, $Gr = 2.2 \times 10^4$. 64

4.14 Lignes de courant et isothermes: (a) Re = 150, Gr = 0; (b) Re = 150, $Gr = 2 \times 10^4$; (c) Re = 150, $Gr = 5 \times 10^4$. 65

5.1 Schéma de définition 77

5.2 Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 0; (b) l/d = 2/28. 78

5.3 Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 3/28; (b) l/d = 4/28. 79

5.4 Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 5/28; (b) l/d = 7/28. 80

5.5 Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 14/28; (b) l/d = 21/28. 81

5.6 Lignes de courant et isothermes pour Re = 200 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 0; (b) l/d = 2/28. 82

5.7 Lignes de courant et isothermes pour Re = 200 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 8/28; (b) l/d = 14/28. 83

5.8 Lignes de courant et isothermes pour Re = 100 et $\Gamma = 2$: (a) l/d = 0; (b) l/d = 2/3. 84

5.9 Lignes de courant et isothermes pour $Re = 75$: (a) l/d = 28/28, $Gr = 10^4$; (b) l/d = 28/28, $Gr = 5.5 \times 10^4$. 85

5.10 Lignes de courant et isothermes pour $Re = 75$: (a) l/d = 28/28, $Gr = 6 \times 10^4$; (b) l/d = 28/28, $Gr = 7.5 \times 10^4$. 85

5.11 Lignes de courant et isothermes pour $Re = 75$, l/d = 28/28, $Gr = 10^5$ pour différents pas de temps. 86

5.12 Solution périodique pour $Re = 75$, $Gr = 6 \times 10^4$, 7.5×10^4, 10^5, l/d = 28/28, (a)ψ_{max} vs. t; (b)ψ_{min} vs t. 87

5.13 Solution périodique pour $Re = 75$, $Gr = 6 \times 10^4$, 7.5×10^4, 10^5, l/d = 28/28, (a)Nu_i vs t; (b)Nu_e vs t. 88

6.1 Géométrie du domaine annulaire en rotation. 97

6.2 Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur, $Re = 100$, $R = 2$ et $\Gamma = 0.5$ 98

6.3 Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur, $Re = 100$, $Ra = 5 \times 10^5$ et $\Gamma = 0.25$ 99

6.4 Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur, $Re = 500$, $Ra = 5 \times 10^5$ et $\Gamma = 0.25$; $R = 2$, ψ_{min} = -5.07 $\times 10^{-4}$, $\psi_{max} = 17.5$. 100

6.5 Lignes de courant dans l'espace annulaire inférieur, $Ra = 10^4$, $R = 2$ et $\Gamma = 0.25$ 101

6.6 Comparaison de ψ_{min} et ψ_{max} pour différents pas de temps 102

6.7 Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur au cours d'un cycle pour $Re = 900$, $Ra = 10^7$ et $R = 2$ 103

6.8 Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur au cours d'un cycle pour $Re = 900$, $Ra = 10^7$ et $R = 2$ 104

6.9 Variation de Nu pour différents Ra, pour $R = 2$, $\Gamma = 0.5$ et $Re = 100$: a) paroi supérieure, b) paroi droite. 105

6.10 Variation de Nu pour différents R, pour $Ra = 5 \times 10^5$, $\Gamma = 0.25$ et $Re = 100$: a) paroi supérieure, b) paroi droite. 106

6.11 Evolution de Nu et ψ_{min} en fonction du temps pour $R = 2$, $Ra = 10^7$, $\Gamma = 0.25$ et $Re = 900$: a) Nu_t, b) ψ_{min}. 107

Liste des tableaux

2.1 Expériences sur la transition vers la turbulence entre deux cylindres concentriques avec le cylindre interne en rotation ($R \simeq 7/8$) (*DiPrima et al.*, 1984). 10

4.1 Conditions aux limites dynamiques et thermiques. 40

6.1 Conditions aux limites dynamiques et thermiques. 90

Liste des symboles

u_r	vitesse de l'écoulement dans la direction radiale
u_z	vitesse de l'écoulement dans la direction longitudinale
H	hauteur de la cavité
Ω	vitesse angulaire
U	vitesse aximutale
R_i	rayon du cylindre intérieur
R_o	rayon du cylindre extérieur
d	espace annulaire $(R_o - R_i)$
R_d	rayon adimensionnel du disque
l	longueur adimensionnelle du disque $R_d - 1$
Re	nombre de Reynolds. $(R_i^2\Omega_i/\nu)$
Re_c	nombre de Reynolds critique
Pr	nombre de Prandtl. $Pr = \nu/\alpha$
Gr	nombre de Grashof. $Gr = g\beta\Delta T R_i^3/\nu^2$
Ra	nombre de Raleigh. $Ra = GrPr$
T	température adimensionnelle
τ	temps sans dimension
p	pression. (pression absolue - pression hydrostatique)
r	coordonnée sans dimension dans la direction radiale. (r^*/R_i)
z	coordonnée sans dimension dans la direction verticale. (z^*/R_i)
R	rayon sans dimension. (R_o/R_i)
g	accélération gravitationnelle
Ta	nombre de Taylor. $(Re(d/R_i)^{1/2})$

T_c	nombre de Taylor critique
S_T	source uniforme de chaleur

Symboles grecs

Ω	vitesse angulaire
Γ	rapport de forme, (H/d)
ψ	fonction courant
ω	vorticité
α	diffusivité thermique
ν	viscosité cinématique du fluide
ρ	densité du fluide

Exposants

*	variables dimensionnelles
$_{max}$	maximum
$_{min}$	minimum

Indices

$_o$	réfère à la paroi extérieure
$_i$	réfère à la paroi intérieure
$_b$	réfère à la paroi inférieure
$_t$	réfère à la paroi supérieure

Autres symboles

∇^2	Laplacien

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

On considère d'abord le phénomène de base de cette étude qui est la formation de tourbillons de Taylor provoqués par l'instabilité de l'écoulement de Couette entre deux cylindres concentriques de longueur infinie où le cylindre extérieur est immobile. La rotation du cylindre intérieur, caractérisée par le nombre de Reynolds (Re), nulle tout d'abord, augmente ensuite progressivement.

Pour une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre intérieur correspondant à un nombre de Reynolds (Re_c), l'écoulement de Couette devient instable et cède la place à un nouveau régime dans lequel le liquide s'organise en une succession de couches empilées verticalement les unes sur les autres. Chaque élément de fluide est alors animé d'un mouvement ayant deux composantes: l'une, correspond au déplacement azimutal autour de l'axe des cylindres, la seconde est associée à un mouvement cellulaire dans le plan méridien. On est donc en présence d'un empilement de tores. Ceux-ci ont été observés pour la première fois par Sir *G. Taylor* en 1922, et sont désignés depuis sous le nom de vortex de Taylor. Par référence à la théorie mathématique, on dit qu'une bifurcation s'est produite, faisant passer le système d'un régime à un autre qualitativement différent.

Ensuite, les recherches se sont orientées vers les effets de bout aux extrémités des cylindres, car en pratique, ceux-ci ne sont jamais de longueur infinie. Il en résulte que dès que le nombre de Reynolds est différent de zéro, il se forme des cellules tourbillonaires aux extrémités des cylindres. Celles-ci ne sont pas dues à l'instabilité de l'écoulement de Couette mais à la condition de non glissement du fluide sur la paroi fixe. Celle-ci impose une vitesse du fluide nulle à la paroi et donc un fort gradient pour la force centrifuge qui ne peut être compensée par la pression. Ainsi, les cellules se développent à l'extrémité dès que la vitesse de rotation du cylindre intérieur est non nulle. Le sens de rotation de ces cellules est tel que le fluide au voisinage de la paroi fixe se dirige vers l'intérieur. Pour de faibles nombres de Reynolds, les effets de bords seront prédominants et les cellules d'extrémités se développeront en priorité, tandis que si le nombre de Reynolds augmente, les forces centrifuges à l'intérieur de la cavité prendront de plus en plus d'importance et finalement, les effets de bords seront de moins en moins significatifs pour la taille des cellules. Toutefois, si les conditions initiales sont normales, la condition de non glissement sur la paroi fixe imposera toujours le sens de rotation des cellules d'extrémités : le fluide proche de la paroi est rentrant. Ainsi, pour une longueur donnée, l'écoulement possède un nombre pair de cellules définies comme étant le mode *normal*.

Mais il peut également apparaître des modes dits *anormaux* où se développent des cellules d'extrémités tourbillonant dans l'autre sens: le fluide proche de la paroi se dirige vers l'extérieur. Ces modes sont générés à partir de conditions initiales et de modes d'excitation particuliers.

On remarque depuis de nombreuses années, que le problème de Taylor a fait l'objet d'une importante bibliographie, rapportant des études aussi bien théoriques qu'expérimentales. En revanche, les problèmes portant sur la convection thermique

à l'intérieur d'une cavité cylindrique en rotation ont été peu étudiés jusqu'à présent.

C'est dans cet esprit qu'on a entamé la présente étude. La configuration d'une cavité annulaire, en présence de la convection thermique, est en effet très fréquente dans les refroidissements des rotors de turbines ou des rotors de moteurs électriques (*Kreith*, 1987) ainsi que dans les échangeurs de chaleur et de masse avec un fluide en rotation (*Kataoka et al.*, 1977).

1.2 Objectifs de la thèse

Dans le but d'approfondir les problèmes d'écoulement et de transfert de chaleur des cavités cylindriques en rotation, nous nous proposons d'étudier:

- l'évolution du champ de l'écoulement d'un fluide non-isotherme entre deux cylindres concentriques de longueur finie. On s'intéressera au taux de transfert de chaleur à travers les cylindres aussi bien qu'à la distribution de la température en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl.

- le problème de l'écoulement et du transfert de chaleur engendrés par la rotation d'un disque dans un espace annulaire.

- le problème de l'écoulement et du transfert de chaleur à l'intérieur d'un système rotor-stator.

1.3 Plan de développement

Le premier chapitre est consacré à une introduction au problème de base (écoulement de Taylor-Couette) traité dans cette étude.

Le chapitre 2 est consacré à une revue bibliographique approfondie, concernant l'étude de l'écoulement dans les systèmes rotatifs de Taylor avec et sans transfert de chaleur qui présentent des points communs avec notre sujet de thèse.

Le chapitre 3 est consacré à la formulation générale du problème de la convection dans des cavités cylindriques en rotation. Les hypothèses simplificatrices utilisées sont précisées, de même que la méthode numérique utilisée. Les conditions aux frontières, relatives à chaque cas traité, seront spécifiées dans les chapitres où ces différents cas seront étudiés.

Le chapitre 4 porte sur l'étude de la convection entre deux cylindres concentriques de longueurs finies avec une source interne de chaleur. Une attention particulière sera donnée à l'interaction entre les extrémités et les forces centrifuges en fonction du nombre de Reynolds et des conditions initiales.

Le chapitre 5 traite du problème de la convection dans une cavité avec un disque en rotation. L'influence des principaux paramètres géométriques (longueur du disque et rapport de forme) qui gouvernent le problème, sera étudiée.

Le chapitre 6 traite de la convection dans un moteur composé d'un stator et d'un rotor cylindriques en rotation. Le système sera étudié sous différentes conditions thermiques aux frontières (flux de chaleur imposé et température constante) pour démontrer l'existence de différents modes de convection.

Le chapitre 7 constitue les conclusions générales et recommandations du présent travail.

Chapitre 2

Revue bibliographique

2.1 Écoulement dans un fluide isotherme

Une revue des travaux analytiques et expérimentaux, pour les cas d'instabilités hydrodynamiques dans l'écoulement de Taylor, a été présentée par *Stuart* (1958), *DiPrima* et *Swinney* (1981), *Cognet* (1984), *Maron* et *Cohen* (1991) et plus récemment par *Koschmieder*, (1993).

Dans cette partie, nous allons analyser, à partir d'une série de résultats expérimentaux, comment les variations du nombre de Reynolds influencent les écoulements et comment s'opère la transition entre les différents régimes.

En 1965, les expériences de visualisation de *Coles*, avec un dispositif correspondant à un rapport des rayons $R = 0.88$ et un rapport de forme $\Gamma = 28$, ont montré que lorsque le nombre de Reynolds Re croît au-delà d'un second seuil Re'_c, les lignes de séparation des cellules ne sont plus dans des plans perpendiculaires à l'axe, mais présentent des ondulations qui affectent l'ensemble des vortex et progressent dans le sens de rotation du cylindre intérieur. Le mouvement qui perd ainsi son axisymétrie, possède alors une double périodicité identifiée par un nombre d'ondes axiales (n) et un nombre d'ondes azimutales (m). Il apparaît en outre un caractère de non unicité de l'écoulement. Selon la manière dont on atteint la

vitesse recherchée, on observe différents états correspondant chacun à un couple d'entiers (n,m) (*Coles* répertorie ainsi jusqu'à 26 états pour un nombre de Reynolds donné). Ce phénomène s'accompagne d'effets d'hystérésis, la succession d'états étant généralement différente pour des valeurs croissantes puis décroissantes de la vitesse. *Coles* note également l'apparition de perturbations localisées "turbulentes" alors que l'aspect de l'écoulement devient de plus en plus complexe tout en conservant dans l'ensemble un caractère ordonné.

La Fig. 2.1 présente les résultats obtenus par *Coles* pour $R = 0.88$ en fonction des nombres de Reynolds relatifs aux deux cylindres.

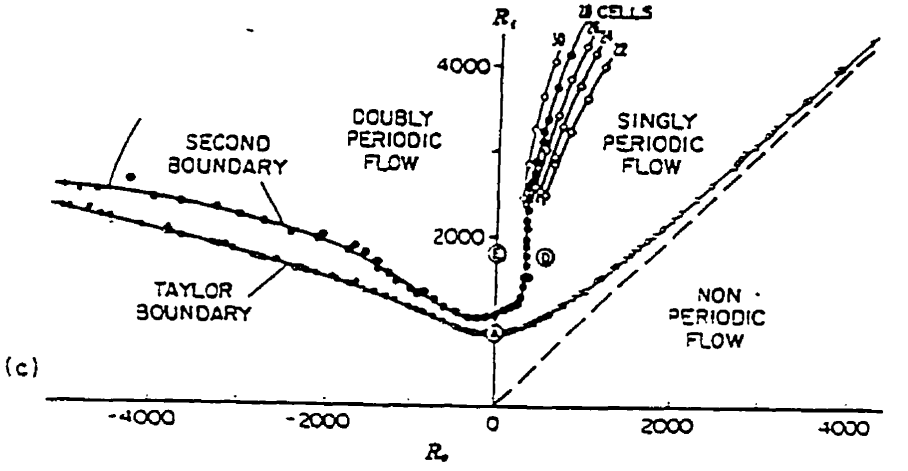


Figure 2.1: Écoulement de Taylor - Diagramme de stabilité d'après *Coles* (1965).

Ces résultats semblaient accréditer le type d'évolution de l'écoulement vers la turbulence décrit par *Landau* (1944), à travers un large domaine de transition, constitué par une suite infinie d'instabilités introduisant chacune une nouvelle fréquence dans le mouvement jusqu'à ce que les propriétés de celui-ci ne se distinguent plus de celle du régime turbulent.

Pour une valeur de la vitesse supérieure à la vitesse critique ($Re > Re_c$), la théorie linéaire prévoit une croissance exponentielle de la perturbation initialement infinitésimale. Ce type de croissance ne peut se maintenir car les termes quadratiques des équations du mouvement perturbé deviennent non négligeables, ce qui a pour effet d'introduire une première harmonique et de modifier le mouvement moyen. Par interaction avec le mode fondamental, il y a alors apparition d'une seconde harmonique et le processus se poursuit ainsi par la génération d'une suite infinie d'harmoniques.

Kogelman et DiPrima (1970) prenant en compte les effets non linéaires ont montré que l'intervalle d'une bande de longueurs d'onde était en fait 3 fois plus étroit que celui défini à partir de la courbe de stabilité neutre. Les expériences de *Burkhalter et Koschmieder* (1974) confirment cette tendance; cependant les valeurs qu'ils observent pour différentes procédures de mise en régime restent relativement proches de la longueur d'onde critique.

Le fait que l'analyse non linéaire (*Davey*, 1962) dans le cas d'un petit espace annulaire ne convienne pas aux mesures du couple effectuées pour $Re > 3Re_c$ indique que l'écoulement se fait alors selon un mode différent de celui prévu par le premier type d'instabilité. Les expériences de visualisation montrent en effet l'apparition d'ondes azimutales qui affectent en particulier les frontières des cellules. Ce second seuil critique Re'_c est d'autant plus rapproché du premier que R est voisin de 1. Ainsi, il est de quelques pourcents supérieur à Re_c pour $R = 0.95$ et vaut plus de $10Re_c$ pour $R = 0.5$ (*Snyder et al.*, 1964). Par ailleurs, il apparaît que Re'_c est aussi fonction du rapport de forme $\Gamma = H/d$, et comme l'a montré *Cole* (1976), il est difficile de comparer précisement les différentes valeurs de la littérature pour cette seconde transition. On peut cependant considérer que pour $\Gamma > 40$, Re'_c est proche de la valeur $Re'_{c\infty}$ obtenues pour des cylindres infinis.

Le cas des cylindres courts est fondamentalement différent en ce sens que les effets de bouts font que les cellules se développent progressivement avec l'augmentation de la vitesse de rotation, tout d'abord lentement, puis très rapidement ensuite lorsque le nombre de Reynolds approche le seuil critique Re_c correspondant aux cylindres infiniment longs.

Cole (1976), à l'aide de techniques de visualisation et de mesure du couple dans des enceintes avec une surface libre, pour une gamme de paramètres 1 <H'/d< 107 et 0.894 <R< 0.954, a montré que la valeur du premier nombre de Reynolds critique est peu modifiée si le rapport de forme n'est pas infini, ce qui est évidemment le cas de tous les dispositifs expérimentaux, mais que le second seuil critique est fortement affecté par la diminution du rapport de forme de l'enceinte. Ainsi, Re'_c augmente d'au moins 50% par rapport à la valeur prévue pour un cylindre infini lorsque $H'/d = 10$ et du double lorsque $H'/d = 5$, et ce, pour tous les R examinés.

Benjamin (1978a) a le premier mis en évidence le fait que la prise en compte des effets d'extremité peut donner lieu à des effets d'hystérésis et changer les bifurcations en transitions lentes. Des expériences portant sur des cylindres très courts avec des extrémités fixes ($0 < \Gamma < 6$ et $R = 0.615$) lui ont permis de conforter son approche formelle (*Benjamin*, 1978b). *Blennerhasset et Hall* (1979) ont étudié théoriquement la stabilité linéaire du mouvement en faible espace annulaire pour des cylindres de longueur finie. Les conditions aux extrémités sont choisies de telle sorte que l'écoulement circulaire de Couette est une solution exacte du problème. Ils démontrèrent que le problème admet des solutions multiples, dépendamment des conditions initiales.

Mullin et al. (1982) ont étudié expérimentalement la transition de 4 à 6 cellules dans un dispositif court à large espace annulaire ($R = 0.507$) et discuté les phénomènes d'hystérésis d'après la théorie développée par *Benjamin* (1978a).

DiPrima et al. (1984) ont précisé l'influence du rapport des rayons sur la stabilité de l'écoulement de Taylor. Ces auteurs montrent que lorsque Γ décroît, le nombre de modes normaux instables, en régime de Couette, à un nombre de Reynolds donné, décroît rapidement. Ils obtiennent par ailleurs une valeur critique de $R(R \simeq 0.65)$ en-dessous de laquelle il n'y a pas d'instabilité de l'écoulement cellulaire. La prévision des états de l'écoulement en régime ondulatoire nécessite la conaissance précise du développement et la stabilité des cellules de Taylor. C'est l'objectif poursuivi en particulier par *Dominguez-Lerma et al.* (1984) qui ont conduit des calculs de haute précision couvrant le domaine $0.1 < R < 0.975$.

Walgraef et al. (1984) ont décrit la transition cellules de Taylor - ondes azimutales par une équation d'amplitude. Conformément aux résultats expérimentaux, ils montrent que les effets de bord sélectionnent les nombres d'ondes azimutaux supérieurs à 1 et que $Re'_c(\Gamma)$ croît sensiblement lorsque le rapport de forme décroît.

Dans le Tableau 2.1 nous donnons un résumé qui rassemble les résultats expérimentaux sur le phénomène de la transition vers la turbulence présenté par *DiPrima et Swinney* (1981).

Parallèlement aux travaux expérimentaux cités plus haut, il existe un grand nombre d'études numériques dont une des premières a été conduite par *Meyer* (1967). Il considère un écoulement de cellules de Taylor à partir de l'état initial d'un écoulement de Couette, en supposant une périodicité axiale (i. e. un cylindre infini) et en imposant une perturbation initiale de longeur d'onde axiale spécifiée. Il a utilisé la technique des différences finies (méthode explicite) pour résoudre les équations de Navier-Stokes en termes d'une fonction de courant méridionale, d'une composante tangentielle des vecteurs vitesse, et de la vorticité.

Tableau 2.1: Expériences sur la transition vers la turbulence entre deux cylindres concentriques avec le cylindre interne en rotation ($R \simeq 7/8$) (*DiPrima et al.*, 1984).

R_i/R_o	$Re_{c\infty}$	H/d	Re/Re_c (max.)	Re/Re_c (bruit)	Re/Re_c (ondes)
0.840	105.1	50	200	≈ 10	18-38
0.874	117.7	27.9	15	≈ 11	-
0.889	125.1	30	25	-	23
0.877	119.1	20	45	≈ 12	21.9
0.875	118.2	18-80	67	≈ 11	21-25
0.909	137.8	40	70	≈ 12	19.5
0.896	129.1	123	62	≈ 10	26
0.908	137.1	65	320	≈ 5.5	21

Alonso et Macagno (1973) ont effectué des calculs similaires utilisant la méthode générale ADI (Alternating Direction Implicit). Ils ont fait varier le nombre de Reynolds de 760, à 1000, ensuite à 2000 utilisant un maillage uniforme espacé de $\Delta z = \Delta r = 0.02$, avec un nombre total de noeuds compris entre 275 et 385 et avec $R = 1.2$. Ils ont mis en évidence l'effet de la vitesse tangentielle en fonction du nombre de Reynolds (voir Fig. 2.2). Ces résultats ont montré un bon accord avec les résultats obtenus par *Meyer* (1967).

De la Fig. 2.2 on remarque que la vitesse tangentielle près du centre de la cellule tend à augmenter avec la distance radiale si on augmente le nombre de Reynolds. Ce fait implique que pour un grand nombre de Reynolds le centre des cellules de Taylor tourne à peu près comme un corps solide autour de l'axe longitudinal du cylindre. Ils ont observé que les cellules sont constituées d'un coeur non visqueux entouré par une couche visqueuse de cisaillement.

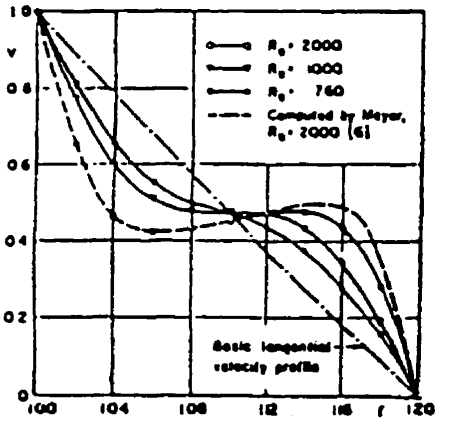


Figure 2.2: Profils de vitesse tangentielle dans une cellule de Taylor (*Alonso et Macagno*, 1973).

Alziary et Grillaud (1978) ont conduit un calcul numérique dans le cas d'un rapport de forme $\Gamma = 10$ pour $R = 0.933$. Leurs résultats mettent en évidence une transition lente lorsque Re croît. Ils observent successivement 2, 4 puis 8 et enfin 10 cellules de même taille qui constituent l'écoulement de Taylor proprement dit (voir Fig.2.3). Ils remarquent que les vortex apparaissent à mi-hauteur de l'espace annulaire et que leur intensité augmente très rapidement lorsqu'on dépasse le nombre de Reynolds critique. A partir des conditions initiales variées, ils ont pu obtenir différents états pour une valeur donnée de $Re > Re_c$ retrouvant ainsi une caractéristique de l'écoulement : la non-unicité.

Marcus (1984) a conduit aussi une simulation numérique résolvant les équations de Navier-Stokes en régime instationnaire avec les conditions aux limites de l'écoulement de Taylor. Il utilise une méthode pseudo-spectrale où chaque paire de cellules est représentée par 32 modes axiaux, 32 modes azimutaux et 32 modes radiaux. Ses résultats montrent qu'au-dessus d'un nombre de Reynolds critique Re'_c ($Re > Re'_c$):

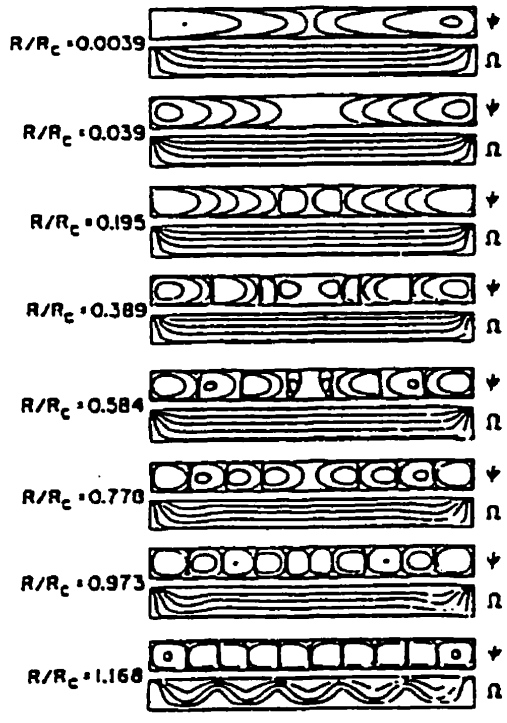


Figure 2.3: Evolution de la fonction de courant ψ et de la vitesse angulaire Ω dans un espace annulaire avec $R = 0.933$ et H/d = 10 (*Alziary et Grillaud*, 1978).

- les ondes azimutales sont des instabilités secondaires résultant de l'important mouvement radial existant à la frontière des cellules de Taylor lorsque l'écoulement est dirigé vers l'extérieur;

- à l'apparition des ondes, leur vitesse angulaire est égale à la vitesse du fluide au centre de la cellule de Taylor;

- les ondes ont leur maximum d'amplitude sur la surface où le fluide a la même vitesse que les ondes.

Au cours des dernières années, on trouve le travail de *Tavener et al.* (1991) qui ont étudié la stabilité hydrodynamique non linéaire dans l'intention de trouver un comportement dynamique complexe, proche du chaos. Ils ont utilisé une technique de bifurcation numérique en résolvant, par la méthode des éléments finis, les équations de Navier-Stokes pour les nombres de Reynolds très élevés.

2.2 Écoulement couplé au transfert de chaleur

Dans de nombreux problèmes de convection rencontrés dans les applications d'ingénièrie, les écoulements et les échanges de chaleur à l'intérieur d'un espace annulaire cylindrique résultent de la compétition entre deux phénomènes élémentaires: la *convection naturelle* due aux forces de gravité au sein du fluide (poussée d'Archimède) et la *convection forcée* générée par un mouvement imposé : rotation du cylindre intérieur par exemple. On a l'habitude de regrouper ces problèmes sous la dénomination de *convection mixte.*

Une des premières tentatives pour étudier ce problème est due à *Baker* et *Kaye* (1962), qui se sont intéressés expérimentalement aux cas d'un écoulement axial sans rotation, d'une rotation du cylindre interne sans la présence d'un écoulement axial à travers l'espace annulaire, et au cas général combiné d'un écoulement axial et de la rotation du cylindre interne. Le but principal était de déterminer le taux global de transfert thermique à travers l'espace annulaire, et non pas la stabilité hydrodynamique de l'écoulement. La Fig. 2.4 présente une synthèse des résultats expérimentaux sur le transfert thermique pour le cas du cylindre interne en rotation. On remarque que dans cette analyse, la force de poussée a été négligée.

Snyder et Karlsson (1964) ont mené une étude théorique et expérimentale sur la stabilité de l'écoulement de Couette dans un espace annulaire, pour $\Gamma = 349$, et

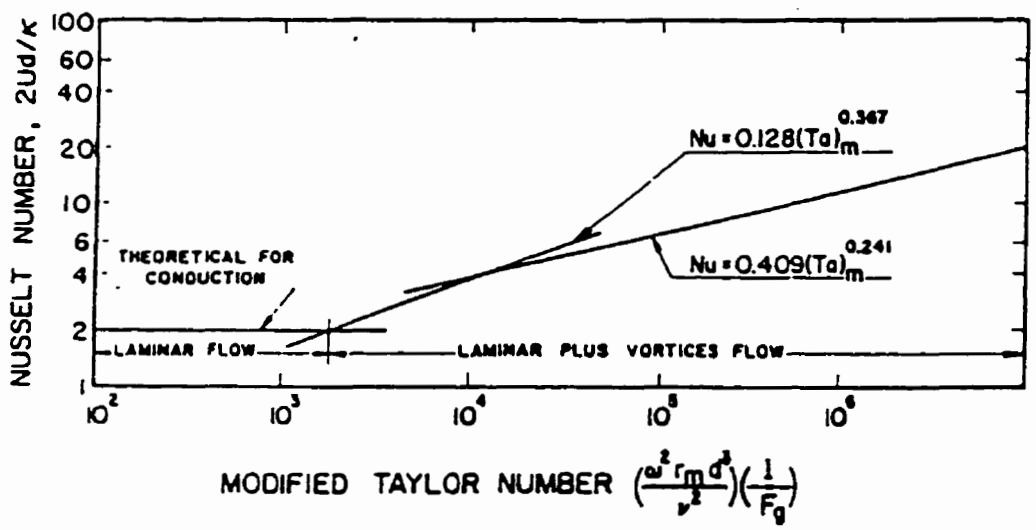


Figure 2.4: Nombre de Nusselt vs. nombre de Taylor sans écoulement axial et avec cylindre interne en rotation (*Baker et Kaye*, 1962).

R = 0.959, en présence d'un gradient de température radial. Ils remarquent qu'un gradient de température positif à travers l'espace annulaire (i. e. un cylindre externe chauffé et un cylindre interne refroidi) est déstabilisant, tandis qu'un gradient de température négatif est stabilisant. *Walowit et al.* (1964) remarquent que dans le régime de conduction ($Gr \leq 10^3$), la convection naturelle a très peu d'effet sur le transfert thermique, et par conséquent, peu d'effet sur la stabilité de l'écoulement. Cependant, *Snyder et Karlsson* (1964) ont montré que l'écoulement axial induit par la force de poussée a une influence significative sur la stabilité de l'écoulement. Ils trouvent qu'un gradient de température radial assure la stabilité de l'écoulement lorsque ΔT est petit. Pour un grand ΔT, une forme de spirale d'instabilité à

été observée. Des études expérimentales plus récentes ont confirmé les effets de stabilisation d'un gradient positif (*Gardner et Sabersky*, 1978).

Randriamamppianina et al. (1987) ont réalisé une étude numérique pour décrire le mouvement d'un fluide Boussinesq en rotation soumis à un gradient thermique radial. Le modèle physique correspond à un fluide contenu entre deux cylindres verticaux isothermes et limité par deux plaques planes. Ils ont imposé une répartition linéaire de température sur les parois radiales. L'approche numérique est basée sur la méthode spectrale de type Tau-Chebyschev, dont les résultats sont confrontés à des approches asymptotiques. Les équations de Navier-Stokes sont couplées à l'équation d'énergie par les forces gravitationnelles, centrifuge et de Coriolis. Les résultats concernent principalement les mouvements d'un gaz (Pr = 0.71) confiné dans un anneau de section carré ($\Gamma = 1$) lorsque le paramètres physiques varient : $0 \leq Re \leq 2500$; $10^2 \leq Ra \leq 10^5$; $0 \leq Fr \leq 25$ (Fr est le nombre de Froude de rotation et représente l'importance relative de l'accéleration centrifuge par rapport à la pesanteur). La transition entre les deux régimes convectif et conductif, pour lequel la rotation a stabilisé la convection, est mise en évidence lorsque $Ra/Re^2 \leq 0.04$, à Ra fixé à 10^4. Ces différents régimes sont caractérisés par les variations des maxima de vitesses.

L'étude numérique de *Ball et Farouk* (1988) concerne la formation des différentes cellules de Taylor ainsi que l'influence de la pousée d'Archimède et les effets de rotation sur le phénomène de bifurcation. Le nombre $\sigma = Gr/Re^2$ est utilisé pour décrire la convection mixte. Le rapport de forme Γ varie de 4 à 5.9 tandis que le rapport des rayons est maintenu à la valeur de 0.5 pour les résultats présentés.

Lee et Minkowycz (1989) se sont attachés à étudier expérimentalement les caractéristiques du transfert thermique entre deux cylindres concentriques de longueurs finies. Le cylindre intérieur étant en rotation pour une gamme de

nombres de Taylor $10^3 \leq Ta \leq 2.10^7$. Ils ont effectué des mesures de transfert massique de naphtaline pour obtenir les coefficients de transfert thermique. Quatre configurations ont été choisies pour étudier les phénomènes fondamentaux dans les espaces annulaires. Les surfaces des cylindres constituant l'espace annulaire sont : une surface lisse et les autres axialement rainurées. La Fig. 2.5 présente les résultats obtenus pour le cas de la surface lisse avec $\Gamma = 12.4$ et R = 1.1. La Fig. 2.5 montre que le nombre de Nusselt moyen (Nu_m) augmente avec le nombre de Reynolds pour de faibles nombres de Taylor. Qualitativement, ces résultats montrent un bon accord avec les résultats obtenus par *Becker et Kaye* (1962).

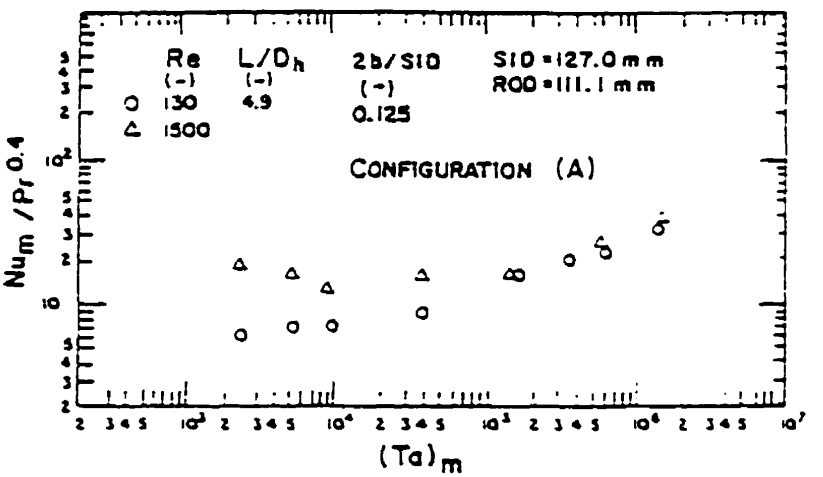


Figure 2.5: Nombre de Nusselt vs. nombre de Taylor pour le cas du cylindre interne en rotation avec la surface lisse (*Lee et Minkowycz*, 1989).

Yang et Farouk (1992) ont étudié l'existence d'instabilités hydrodynamiques et thermiques pour des écoulements de Taylor dans l'espace annulaire entre deux

cylindres horizontaux concentriques. Les auteurs présentent les résultats d'une analyse tridimensionnelle numérique avec le cylindre interne chaud et en rotation. Les gammes de paramètres utilisées sont : $0 < Re < 130$, $1 < \Gamma < 10$ et $0 < Gr < 6944$ tandis que le rapport de rayons R est maintenu à la valeur de 2.6. La méthode de solution utilisé est du type SIMPLE (*Patankar*, 1980).

Ho et Tu (1993) ont réalisé une étude numérique de la convection mixte instationnaire à l'intérieur d'un espace annulaire rempli d'eau froide, proche du point d'inversion de densité. La simulation numérique de l'écoulement est basée sur la méthode des différences finies, avec un maillage de 31 noeuds dans la direction horizontale et 121 noeuds dans la direction verticale, et avec un pas de temps $\Delta\tau = 10^{-4}$. Les paramètres caractéristiques utilisés dans les simulations sont : $\Gamma = 8$, $R = 2$, $50 < Re < 150$, $Ra > 10^6$, $Pr = 12.5$ et le paramètre d'inversion de densité $\Theta_m = 0.4$ et 0.5.

La revue bibliographique des travaux disponibles dans la littérature, concernant l'écoulement de Taylor entre deux cylindres de longueur finie, montre que ce problème constitue en soi un champ d'étude distinct du problème classique, et n'a été que relativement peu exploré jusqu'ici.

2.3 Convection avec un disque en rotation

Pour le cas d'un écoulement engendré par la rotation d'un disque enfermé dans une cavité cylindrique, le mouvement du fluide résultant a une apparence complexe. Des études théoriques et expérimentales existen dont une grande partie concerne les problèmes liés aux machines tournantes, turbomachines (*Owen*, 1992), système de disques de stockage dans l'industrie électronique (*Humphrey et al.*, 1991), chambres de combustion à turbulence (*Riahi*, 1993) et centrifugeuses (*Matsuda et*

al., 1976). Des applications plus spécifiques existent également dans le cadre de turbines à gaz modernes, où certaines composantes peuvent être assimilées à des cavités cylindriques si l'on utilise des hypothèses appropriées (*Morse*, 1987). A l'aide de considérations théoriques et expérimentales *Daily et Nece* (1960), ont apporté une contribution importante pour la compréhension du problème de l'écoulement laminaire et turbulent d'un disque tournant à l'intérieur d'une cavité cylindrique. Ils ont montré que l'écoulement est caractérisé par quatre régimes permanents dépendant du nombre de Reynolds et du rapport de forme de la cavité (Γ):

1. Le régime laminaire: petite distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe (écoulement de Couette),

2. Le régime laminaire: grande distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe.

3. Le régime turbulent: petite distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe,

4. Le régime turbulent: grande distance entre le disque en rotation et le cylindre externe fixe.

Dans plusieurs applications d'ingénierie couvrant le domaine des machines en rotation, les problèmes de frottement du disque, les pertes de couple et de puissance, et les problèmes de transfert de chaleur, sont toujours reliés à la circulation d'un écoulement secondaire engendré par la rotation du système. Pour cela, les modèles d'écoulements turbulents doivent avoir une bonne précision, ce qui demande une compréhension fondamentale du phénomène physique responsable de la transition vers la turbulence d'un écoulement initialement laminaire.

La première tentative de résolution numérique de l'écoulement à l'intérieur d'une cavité en rotation est due à *Pao* (1970), qui s'est intéressé à l'étude de l'écoulement permanent engendré par la rotation d'un disque à l'intérieur d'une cavité cylindrique de rapport de forme $\Gamma = 1$. *Pao* a utilisé la méthode des différences finies pour résoudre les équations de quantité de mouvement en régime laminaire. Il a eu de la difficulté pour atteindre la convergence pour des nombres de Reynolds supérieurs à 200.

La méthode des élements finis a été utilisée par *Bar-Yoseph et al.* (1981), dont principal avantage est la flexibilité pour traiter les configurations géométriques complexes. Cependant, ils ont toujours eu un problème de convergence pour des nombres de Reynolds élevés. *Chew* (1984) a montré que la faible vitesse de convergence de la solution numérique est associée à l'instabilité de l'écoulement physique. Il propose donc, de considérer une meilleure résolution de la couche d'Eckman (couche limite formée sur la surface du disque en rotation) pour améliorer ainsi la convergence, et aussi quelques améliorations de la méthode de correction de pression de l'algorithme SIMPLE (*Patankar*, 1980).

Dijkstra et von Heijst (1983) ont étudié, numériquement et expérimentalement, l'écoulement entre deux disques en rotation dans une cavité cylindrique. Ces auteurs ont considéré un disque fixe et un disque en rotation ainsi que les deux disques en rotation, avec une cavité de rapport de forme $\Gamma = 0.07$, et pour des nombres de Reynolds compris entre 100 et 1000. Les résultats expérimentaux ont montré un bon accord avec les résultats obtenus par la methode des différences finies. Dans le but d'obtenir une solution numérique satisfaisante, ils ont utilisé une transformation de coordonnées. La plupart des calculs ont été réalisés avec un maillage de 20×20, où chaque couche limite sur les disques contient 30 % des points du maillage selon l'axe axial. Un test numérique montre, pour $Re = 1000$ et un maillage uniforme

selon l'axe axial, la présence d'oscillations. Ces oscillations disparaissent lorsque la transformation de coordonnées est utilisée.

Les simulations numériques de *Chew et Vaughan* (1988) montrent les résultats pour un écoulement laminaire et turbulent généré par un disque en rotation à l'intérieur d'une cavité cylindrique, avec et sans injection radiale d'un fluide de refroidissement. Ils utilisent un modèle de turbulence de longueur de mélange en considérant un fluide en état permanent et axisymétrique. Les résultats numériques ont été obtenus en utilisant trois codes de calculs différents, basés sur la méthode des volumes de contrôle, avec le but de faire les comparaisons parmi les trois codes et ainsi s'assurer qu'il n'y a pas d'inconsistance. Ils ont utilisé un maillage resserré pour les vitesse radiales et axiales et ils montrent un test pour un nombre de Reynolds $Re = 2.10^6$, un rapport de forme $\Gamma = 0.07$, un rapport de rayons $R = 0.11$, avec trois maillages de 33×33, de 49×49 et de 65×65 respectivement. Le seuls résultats affectés sensiblement par l'erreur de troncature ont été ceux du maillage grossier. La contrainte de cisaillement sur le rotor est plus sensible à cette erreur de troncature que les profils de vitesses. Le temps de calcul requis pour une exécution typique, avec un maillage de 65×65 et $Re = 4.4.10^6$, sur un ordinateur VAX 8500 est de 4h de CPU. Ils remarquent qu'un algorithme avec la méthode de multigrid réduit de 40 minutes le temps de calcul. Les coefficients de moment du disque, théoriques et expérimentaux, montrent un bon accord, pendant que les vitesses théoriques et expérimentales montrent un accord raisonnable.

Morse (1991) a étudié numériquement la transition vers la turbulence d'un écoulement engendré par la rotation d'un disque à l'intérieur d'une cavité cylindrique pour un rapport de forme $\Gamma = 0.1$. La solution est obtenue en utilisant un modèle de turbulence ($k-\epsilon$) pour de faibles nombres de Reynolds. La transition de l'écoulement laminaire-turbulent est realisée en faisant intervenir une faible quantité de "viscosité

turbulente" dans le terme de production d'énergie. Le système étudié est le système dit rotor-stator, dont l'influence du nombre de Reynolds de rotation (d'environ $10^5 - 10^7$) a été mise en evidence. La méthode retenue est du type différences finies pour la solution d'un écoulement à l'état permenent, axisymétrique et incompressible. Ils ont utilisé une version modifiée du code TEACH avec un maillage non-uniforme de 65×115 (axiale-radiale). Deux simulations typiques ont consommé 3.5h de CPU pour $Re = 10^7$ et 1h de CPU pour $Re \leq 10^6$, sur un ordinateur VAX VMS/8530. Le premier signe de turbulence sur le rotor a été observé à $Re = 4.10^5$, où il apparaît à l'intérieur des cellules une non-uniformité due aux effets de la transition.

Nakata et al. (1992), pour leur part, ont étudié numériquement le transfert de chaleur ainsi que l'écoulement engendré par la rotation d'un disque à l'intérieur d'une cavité cylindrique avec et sans fluide de refroidissement. Ils montrent des résultats pour $Re = 25\ 000$ et $\Gamma = 0.2$. Ils remarquent, d'une part qu'il n'existe aucune règle pour estimer le facteur de relaxation, et d'autre part le comportement de la solution est très sensible aux valeurs de celui-ci, surtout pour les grands nombres de Reynolds. Ils montrent que, pour une valeur du facteur de relaxation de 0.7 et $Re < 12\ 500$, on obtient la convergence desirée après 200 itérations, mais au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente, cette convergence devient de plus en plus difficile à obtenir, et une croissance du temps de calcul s'en suivit. Pour $Re = 20\ 000$, le facteur de relaxation fut réduit à 0.5 et plus de 1 000 itérations furent requises. Pour $Re \geq 25\ 000$ la solution commence à osciller ou à diverger pour un facteur de relaxation de 0.5. Cependant, ils ont trouvé que pour un facteur de relaxation inférieur à 0.4 et pour 500 itérations initiales, la solution atteint la convergence en utilisant des conditions initiales adéquates. Le comportement de la solution montre que l'écoulement physique est effectivement irrégulier et/ou instable dans cette gamme de nombre de Reynolds. Ils ont aussi montré que l'écoulement sur la surface du disque en rotation est similaire à la solution trouvée par *von Karman*

pour le cas d'un disque libre.

L'étude d'*Urquiza* et *Nguyen* (1993) traite numériquement la convection forcée engendrée par la rotation d'un disque dans un espace annulaire. Une grande partie de l'étude consiste à déterminer l'influence du disque sur l'écoulement originel de Couette-Taylor entre deux cylindres concentriques, en fonction de différents paramètres comme la longueur du disque, le rapport de forme de la cavité et le nombre de Reynolds qui caractérise la vitesse de rotation de l'ensemble cylindre intérieur-disque. De plus, les auteurs ont trouvé que, à part le mode *normal*, des modes *anormaux* sont apparus pour certaines valeurs des paramètres et pour des conditions initiales particulières.

Hadid (1993) a résolu les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes pour le cas d'un fluide incompressible à l'intérieur d'une cavité cylindrique avec un disque en rotation pour un rapport de forme $\Gamma = 0.0284$ et un rapport de rayons $R = 10$, similaire à l'expérience réalisée par *Daily et Nece* (1960). L'étude s'adresse à l'évolution d'un écoulement en état permanent vers la transition à la turbulence faible au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de Reynolds. Il a utilisé un shéma implicite de premier ordre, les différences finies centrées pour les termes de diffusion, et un schéma upwind du second ordre pour les termes de convection. Il a utilisé aussi, l'analyse de Fourier pour obtenir les spectres des variables dynamiques typiques qui caractérisent les différentes régimes d'écoulement. Les résultats obtenus montrent que la transition d'un régime laminaire permanent vers la turbulence se présente via une séquence d'instabilités. Dans un premier temps, un écoulement laminaire permanent bifurque vers un régime périodique. Le spectre de puissance (somme des carrés des parties réelle et imaginaire des amplitudes de l'écoulement) comporte une fréquence fondamentale et quelques unes de ses harmoniques. En augmentant le nombre de Reynolds, on observe une transition vers un régime quasi-

périodique avec deux fréquences fondamentales dans le spectre de puissance. Pour des nombres de Reynolds plus élevés, il apparaît dans le spectre de fréquence une bande large, dont l'amplitude et l'étendue vont croissant. En d'autres termes, le mouvement est devenu très désordonné, irrégulier, voie chaotique, ce qui indique une route vers la turbulence.

2.4 Convection dans un système rotor-stator

Les études de convection liées au problème spécifique d'un système rotor-stator sont assez très peu nombreuses.

De Vahl Davis et al. (1989) ont étudié numériquement l'écoulement et le transfert de chaleur dans des espaces rotor-stator de petits moteurs électriques. Ils ont étudié l'influence du nombre de Reynolds et du nombre de Rayleigh sur l'écoulement dans une cavité de rapport de forme $\Gamma = 1$ et de rapport de rayons $R = 2$. Plus tard, en utilisant le même algorithme numérique, *Hessami et al.* (1987) ont étendu cette étude pour différents rapports de rayons ($1.2 \leq R \leq 8$) et des rapports de forme modérés ($0.25 \leq \Gamma \leq 4$). Ils traitent numériquement le problème de la convection mixte dans un espace annulaire axisymétrique entre deux cylindres verticaux de longueur finie. Cette géométrie simule aussi l'espace entre les extrémités du rotor d'un petit moteur électrique refroidi par air. Ils ont étudié l'influence de la géométrie (Γ et R), du nombre de Rayleigh (Ra) et du nombre de Reynolds (Re) sur les distributions de vitesse et de température. Des solutions sont obtenues pour $10 \leq Re \leq 300$ et $10^3 \leq Ra \leq 10^5$. Ils ont trouvé que, pour les faibles valeurs de R et les grandes valeurs de Re, l'écoulement est dominé par les forces centrifuges, tandis que pour Γ et Ra grands, les effets des forces gravitationelles déterminent les configurations de l'écoulement et, par conséquent, le transfert thermique.

Chapitre 3

Formulation générale du problème

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une formulation générale de la convection naturelle et de la convection forcée, pour un régime d'écoulement axisymétrique entre deux cylindres verticaux concentriques (voir Fig. 3.1). Les cylindres intérieur et extérieur tournent à deux vitesses angulaires constantes Ω^i et Ω^o, respectivement. Dans les extrémités supérieure et inférieure des cylindres sont placés deux disques de rayons R_d^t et R_d^b tel que $R_i \leq (R_d^t, R_d^b) \leq R_o$, où R_o et R_i sont les rayons des cylindres extérieur et intérieur, respectivement. Les deux disques peuvent rester fixes ou tourner à une vitesse angulaire constante Ω^t et Ω^b, respectivement. Les conditions de surfaces libres sont appliqués pour le reste des extrémités (c'est-à-dire, $R_d^t \leq r \leq (R_o, R_d^b) \leq r \leq R_o$).

Les conditions thermiques aux limites peuvent être un flux de chaleur imposé, une température imposée, ou un échange convectif.

3.2 Hypothèses

Les principales hypothèses considérées sont les suivantes:

•fluide incompressible et newtonien;

•propriétés thermophysiques constantes, excepté le terme de poussée d'Archimède dans le cas de la convection mixte (approximation de Boussinesq);

•dissipation visqueuse négligeable;

•régime d'écoulement axisymétrique.

3.3 Formulation mathématique

Les équations de base gouvernant le problème de la convection mixte à l'intérieur d'une cavité cylindrique en présence d'une source de chaleur interne S_T^* sont:

$$\nabla \cdot \vec{u}^* = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\vec{u}^* \vec{u}^* - \nu^* \nabla \vec{u}^*) = -\frac{1}{\rho_o} \nabla p^* + \frac{1}{\rho_o} \rho g \beta \vec{k} (T^* - T_o^*) \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \nabla \cdot (\vec{u}^* T^* - \alpha \nabla T^*) = S_T^* \tag{3.3}$$

Pour adimensionnaliser ces équations, les facteurs d'échelle suivants ont été utilisés:

$\frac{\nu}{R_i^*}$: facteur d'échelle pour la vitesse

$\frac{R_i^{*2}}{\nu}$: facteur d'échelle pour le temps

R_i^* : facteur d'échelle pour la longueur

$\Delta T = T_i^* - T_o^*$: facteur d'échelle pour la température

avec condition isothermique

$\Delta T = QR_i^*/k$: facteur d'échelle pour la température

avec condition de flux de chaleur constant

T_o^* : température de référence

Nous obtenons alors les équations sous forme adimensionnelle:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\vec{u}\vec{u} - \nabla \vec{u}) = -\nabla p + GrT\vec{k} \tag{3.5}$$

$$Pr\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla \cdot \vec{u}T\right) - \nabla^2 T = S_T \tag{3.6}$$

avec:

le nombre de Prandtl: $Pr = \nu/\alpha$

le nombre de Grashof: $Gr = g\beta\Delta T R_i^3/\nu^2$

et la température: $T = T^* - T_o^*/T_i^* - T_o^*$

Sous l'hypothèse d'un écoulement axisymétrique, nous pouvons formuler le problème en termes de fonction de courant et de vorticité définis par

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{3.7}$$

$$u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{3.8}$$

et

$$w = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{3.9}$$

Nous avons alors le système d'équations suivant:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = -r\omega \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u_r\frac{\partial \omega}{\partial r} + u_z\frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u_r\omega}{r} - \frac{2}{r^3}U\frac{\partial U}{\partial z} = \left[\nabla^2(\omega) - \frac{\omega}{r^2}\right] - Gr\frac{\partial T}{\partial r} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + u_r\frac{\partial U}{\partial r} + u_z\frac{\partial U}{\partial z} = \left[\nabla^2 U - \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right] \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u_r\frac{\partial T}{\partial r} + u_z\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr}\nabla^2 T + S_T \tag{3.13}$$

Conditions initiales

Au temps initial ($\tau = 0$), le fluide est au repos

$$u_r = u_z = \omega = \psi = 0 \tag{3.14}$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites thermiques et dynamiques, associées au système d'équations (3.7) - (3.13) sont:

pour r = 1

$$\left.\begin{aligned} u_r = u_z = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \\ \omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\ U = Re^i r^2 \\ A_i T + B_i \frac{\partial T}{\partial r} = C_i \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

pour r = R

$$\left.\begin{aligned} u_r = u_z = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \\ \omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \\ U = Re^o r^2 \\ A_o T + B_o \frac{\partial T}{\partial r} = C_o \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

pour z = 0

$$\left.\begin{aligned} u_r = u_z = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \\ \omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad 1 < r < R_d^b \\ \omega = 0; \quad R_d^b < r < R \\ U = Re^b r^2; \quad 1 < r < R_d^b \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad R_d^b < r < R \\ A_b T + B_b \frac{\partial T}{\partial r} = C_b \end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

pour z = H

$$\left.\begin{aligned}
u_r = u_z = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \\
\omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad 1 < r < R_d^t \\
\omega = 0; \quad R_d^t < r < R \\
U = Re^t r^2; \quad 1 < r < R_d^t \\
\frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad R_d^t < r < R \\
A_t T + B_t \frac{\partial T}{\partial r} = C_t
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

où les paramètres géométriques sans dimension définis s'écrivent:

$$H = \frac{H^*}{R_i^*}, \qquad R = \frac{R_o^*}{R_i^*}, \qquad R_d^t = \frac{R_d^{*t}}{R_i^*}, \qquad R_d^b = \frac{R_d^{*b}}{R_i^*}$$

et avec les nombres de Reynolds:

$$Re^t = R_i^2 \Omega^t / \nu$$

$$Re^b = R_i^2 \Omega^b / \nu$$

$$Re^i = R_i^2 \Omega^i / \nu$$

$$Re^o = R_i^2 \Omega^o / \nu$$

A, B et C sont des constantes à préciser selon le type de conditions thermiques imposées aux frontières, i.e. si on impose une température le terme B est nul, alors que pour un flux de chaleur imposé, le terme A devient nul.

3.4 Méthode de solution

Une méthode de solution basée sur le concept des volumes de contrôle, développée par *Zhang* 1994, avec un maillage uniforme et décalé a été utilisée pour obtenir la solution numérique. Les équations discrétisées ont été dérivées en intégrant d'abord dans chaque volume de contrôle et ensuite en utilisant les différences centrées pour calculer le flux et les différences avant pour la discrétisation dans le temps. Pour de grands nombres de Prandtl, le terme convectif dans l'équation de température est approximé par un schéma d'interpolation de loi de puissance (voir par exemple *Patankar*, 1980).

Discrétisation des équations

Les dérivées spatiales sont approximées par des différences finies centrées, d'ordre deux. Par exemple, à un noeud quelconqe (i,j) les dérivées spatiales par rapport à r sont données par

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta r}$$

où f désigne une des variables ω, ψ, U, ou T.

La dérivée dans le temps est approximée par une discrétisation implicite du premier ordre, c'est-à-dire:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n}}{\Delta t}$$

La résolution des équations discrétisées est basée sur la technique ADI (méthode implicite aux directions alternées) à chaque pas de temps. Cette méthode divise un pas de temps en deux : dans le premier demi pas, le système est résolu implicitement dans la direction r et explicitement dans la direction z. Dans le second demi pas,

la procédure est inversée. La distribution des noeuds sur les volume de contrôle est montrée à la figure 3.2.

Selon les valeurs des paramètres caractéristiques du système (nombre de Reynolds, nombre de Rayleigh, rapport de forme), le pas de temps peut varier de 10^{-3} à 10^{-5} tandis que le maillage varie de 21×21 à 51×201.

Le programme numérique utilisé dans cette étude a été validé par comparaison avec les résultats obtenus par *Ball et Farouk* (1988), et *Fazel et Booz* (1984). Les résultats présentés par *Ball et Farouk* (1988), dans leurs Figs. 3 et 11 ont été reproduits (voir figure 3.3), ainsi que la distribution des vitesses et du champ de l'écoulement pour $Re = 150$, montrés dans la Fig. 6 et Fig. 7 de l'article de *Fazel et Booz* (1984).

Procédure de calcul

Pour chaque pas de temps, la procédure de calcul suivante est utilisée pour calculer les champs de vitesse et de température:

1. Initialisation des champs de température, de vorticité et de la fonction de courant, ou utilisation de la solution au temps précédent.
2. Calcul de u_r et u_z grâce à la fonction de courant, équations (3.7) et (3.8).
3. Calcul de U grâce à u_r et u_z et à l'équation (3.12).
4. Calcul de la vorticité grâce à T, U, u_r, u_z et l'équation (3.11).
5. Calcul de la fonction de courant grâce à la vorticité et à l'équation (3.10).
6. Calcul du champ de température par l'équation (3.13).
7. Répéter jusqu'à obtenir la convergence.

Nous considérons cette convergence atteinte lorsque la condition de convergence, appliquée pour chaque quantité et à tous les points du maillage, obtenu à l'étape 6 est suffisamment petite pour que son calcul n'introduise pas de changement appréciable, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{|f^{k+1} - f^k|}{max\ |f^k|} \leq 10^{-6} \tag{3.19}$$

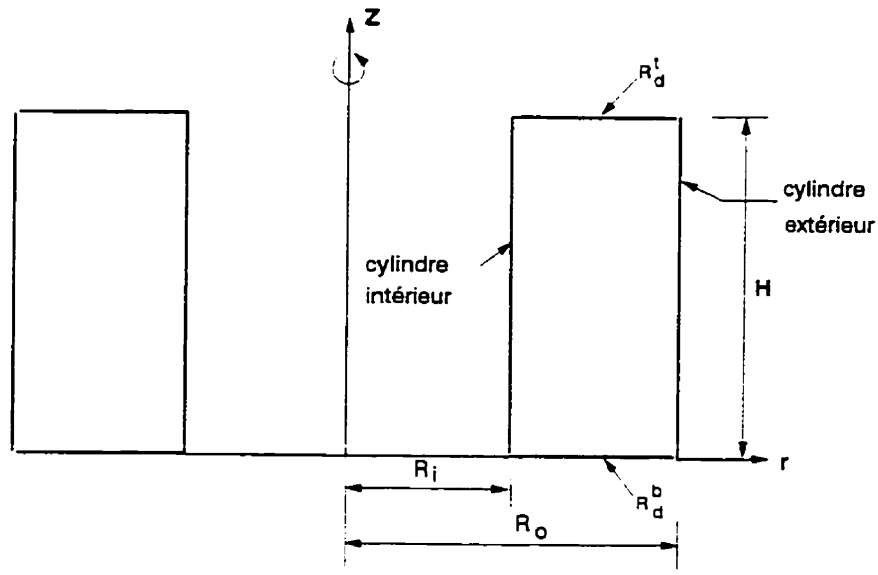


Figure 3.1: Schéma général de la cavité cylindrique.

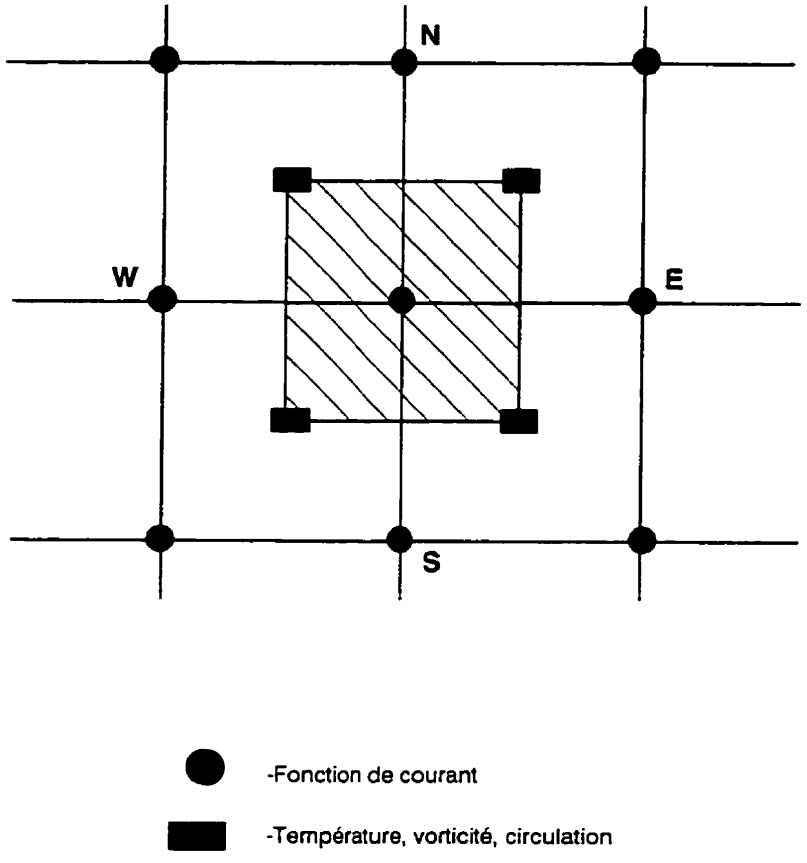


Figure 3.2: Distribution des noeuds sur le volume de contrôle.

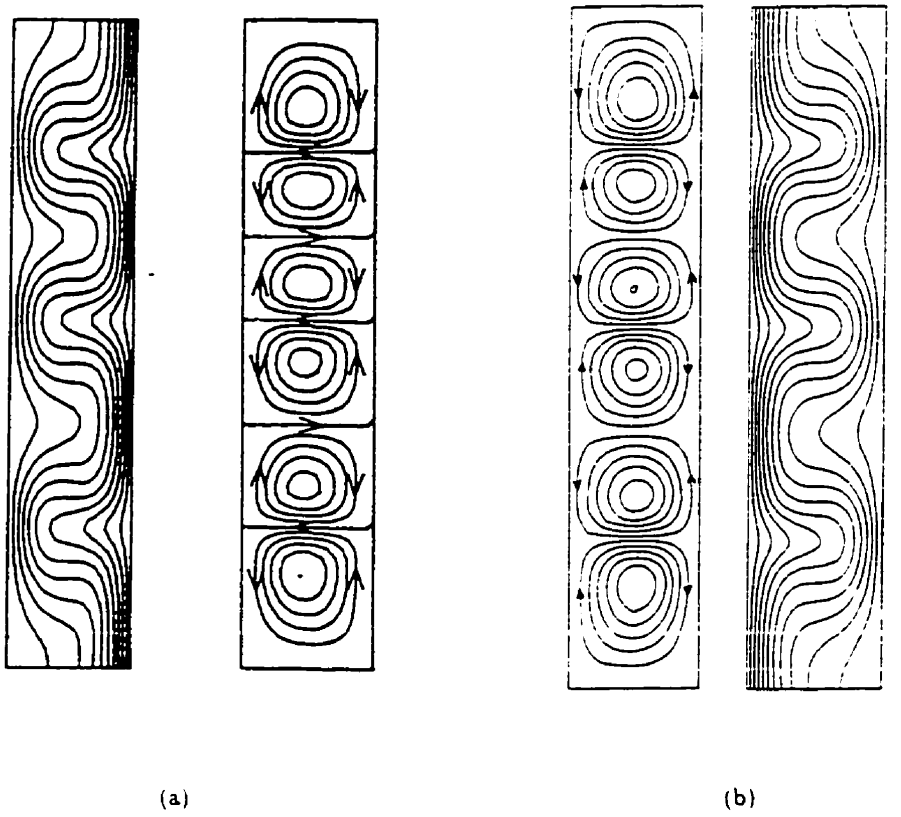


Figure 3.3: Lignes de courant pour $Re = 150$, $Gr = 100$ et $\Gamma = 3.8$: (a) Ball et Farouk; (b) présente étude.

Chapitre 4

Étude de la convection entre deux cylindres rotatifs

4.1 Introduction

Le problème de l'écoulement de Taylor-Couette continue à susciter de l'intérêt, d'une part pour les applications dans les machines rotatives et d'autre part, par son importance fondamentale dans la théorie de la bifurcation.

Dans le modèle classique idéal de l'écoulement de Taylor-Couette, les cylindres sont supposés infiniment longs, ce qui permet au système d'admettre une solution exacte, c'est à dire un écoulement de Couette circulaire, qui dépend de deux paramètres sans dimensions, le rapport de rayons R et le nombre de Reynolds Re. À la limite d'un très petit espace annulaire, i. e. $R \rightarrow 1$, ces deux paramètres peuvent être combinés en un seul (le nombre de Taylor Ta) pour décrire le système.

Pour un espace annulaire infini de rapport des rayons R fixé, il existe un nombre de Reynolds critique Re_c au-dessus duquel un écoulement périodique transversal se développe sous forme des cellules de Taylor. En réalité, pour un nombre de Reynolds supercritique, la solution de l'écoulement n'est pas unique mais peut couvrir un spectre continu de longueur d'onde. Les recherches sur ce problème ont été principalement orientées vers le phénomène de bifurcation et le mécanisme de

sélection du nombre d'onde à travers tous les modes possibles. Une revue détaillée a été présentée par *DiPrima et Swinney* (1981).

En pratique, le rapport de forme de la cavité n'est jamais assez grand pour appliquer le modèle idéal de Taylor-Couette. Les effets de bouts deviennent progressivement importants à mesure que le rapport de forme se réduit : Premièrement, l'écoulement circulaire de Couette n'est plus une solution exacte pour les cylindres de longueur finie. Deuxièmement, comme le problème dépend maintenant des deux coordonnées radiale et axiale, le vecteur vitesse doit être tridimensionnel, à l'exception du cas trivial d'un nombre de Reynolds zéro. Autrement dit, l'écoulement tangentiel principal entraînera toujours un écoulement cellulaire transversal, même pour de très petits nombres de Reynolds (*Blennerhasset et Hall*, 1979; *Hall*, 1980 et *Lucke et al*, 1984). Les solutions du problème dans un espace annulaire de cylindres courts peuvent différer significativement, aussi bien d'un point de vue qualitatif que quantitatif, du modèle idéal de Taylor-Couette, comme il a été clairement démontré par *Benjamin* (1978a, 1978b) dans les deux articles intitulés "Bifurcation Phenomena in steady flows of a viscous fluid" (Parts I and II).

Dans le premier article, basé sur la théorie mathématique abstraite, *Benjamin* (1978a) donne une description qualitative du phénomène de bifurcation et de la morphogénèse de la structure de l'écoulement dans un espace annulaire (rapport de forme d'ordre 1). Dans le deuxième article, des résultats expérimentaux sont présentés pour la localisation des points critiques et des profils d'écoulement pour les différents modes dans le plan (Γ, Re), (Γ étant le rapport de forme de la cavité). Le phénomène observé semble être en bon accord avec la description qualitative présentée dans le premier article.

Les caractéristiques distinctes de l'écoulement dans une cavité de cylindres

courts et la dépendence vis à vis des conditions initiales et frontière, telles que décrites dans ces deux articles, ont suscité un intérêt croissant pour l'étude de ce phénomène.

Plus tard, les travaux de *Benjamin et Mullin* (1981), *Cliffe* (1988) et *Lucke et al* (1984) ont été consacrés à la bifurcation des écoulements dans des cylindres avec un rapport de forme compris entre 0.4 et 6. Ces travaux ont deux objectifs, le premier, de décrire les diagrammes de bifurcation et de localiser les points critiques dans le plan (Γ, Re), et le deuxième, d'expliquer comment différents modes peuvent apparaître, soit expérimentalement soit numériquement. En général, ces études montrent que:

1. Lorsque le nombre de Reynolds augmente graduellement, les cellules qui se présentent dans les cylindres courts ne sont pas dues directement à l'instabilité de l'écoulement de Couette, mais à l'évolution continue d'une paire de cellules primaires développées aux extrémités.

2. Le couplage entre les extrémités fixes et le cylindre interne en rotation présente une forte interaction non linéaire qui ne peut être traitée par la théorie des perturbations.

3. D'autre part, bien que l'écoulement dans les cylindres courts ne possède qu'un petit nombre de modes, il n'est pas encore possible d'avoir une image précise de la morphogénèse de la structure de l'écoulement, de la mutation et de l'effondrement des modes, du domaine d'attraction de chaque branche de solution, etc..

Évidement, les difficultés rencontrées ici sont dues au fait que d'une part, on doit traiter un espace paramétrique tridimensionnel (R, Γ, Re), et d'autre part, il y a une forte interaction (entre les extrémités fixes et le cylindre en rotation) qui peut

être sensible aux petites variations des paramètres (R, Γ, Re) ainsi qu'aux conditions initiales du système.

Toutes les études citées ont été consacrées aux écoulements isothermes, sans convection forcée ni convection naturelle, dans l'espace annulaire. En fait, il y a relativement peu d'études sur le couplage entre l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur dans des cylindres en rotation, surtout pour le cas de cylindres courts. Un resumé des dernières recherches sur ce sujet, a été presenté dans l'article de *Ball et Farouk* (1988) qui ont trouvé que, contrairement aux nombreux résultats obtenus pour l'écoulement isotherme, l'interaction entre la température et le champ de l'écoulement n'a pas encore été traitée suffisamment.

Dans ce chapitre, nous présentons une étude sur le transfert de chaleur entre deux cylindres concentriques de longueur finie. L'écoulement forcé est entraîné par la rotation du cylindre intérieur pendant que les extrémités et le cylindre extérieur sont fixes. L'espace annulaire est rempli d'un fluide en présence d'une source de chaleur interne (due à la dissipation visqueuse ou à une réaction exothermique) qui donne naissance à la convection naturelle.

D'abord, le problème de convection forcée sera étudié pour présenter une description quantitative de l'évolution du champ de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds et des conditions initiales. Une attention particulière sera portée sur l'évolution du mode primaire et à l'effondrement catastrophique du mode secondaire à 4 cellules. Les effets de cet écoulement sur le champ de température dans l'espace annulaire sont étudiés par la suite. On s'intéressera au taux de transfert de chaleur à travers les cylindres, à la répartition des isothermes et aux valeurs maximales de la température en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl. Les gammes de paramètres considérés dans cette étude sont $0 \leq Re \leq 375$ et $0.7 \leq Pr \leq 10$.

Le problème de convection mixte sera ensuite étudié pour démontrer l'influence de la convection naturelle tant sur la structure de l'écoulement forcé que sur le transfert de chaleur entre les deux cylindres.

4.2 Description du problème

Le système physique consiste en deux cylindres concentriques dont l'espace annulaire est rempli d'un fluide avec une génération uniforme de chaleur, tel que présenté dans la Fig. 4.1. Les extrémités et le cylindre extérieur sont fixes pendant que le cylindre intérieur tourne avec une vitesse angulaire Ω constante. Les parois interne et externe sont maintenues à une température constante T_w et les extrémités sont considérées adiabatiques.

Les équations qui régissent la convection, en utilisant la formulation de vorticité-fonction de courant, ont été définies au chapitre 3 (équations (3.7) à (3.10)) de même que la méthodologie de calcul.

Pour le cas de la convection forcée, nous posons $Gr = 0$ dans l'équation (3.8).

Les conditions frontières sont resumées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1: Conditions aux limites dynamiques et thermiques.

$r = 1$	$r = R$	$z = 0$	$z = H$	
$U = 1$	$U = 0$	$U = 0$	$U = 0$	$S_T = 1$
$T = 0$	$T = 0$	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$	

A partir des équations gouvernantes, des conditions aux limites, et de la géométrie de la cavité, il apparaît que le problème de convection forcée est gouverné par trois paramètres adimensionnels: le rapport de forme Γ, le nombre de Reynolds Re ainsi que le nombre de Prandtl Pr.

Notons que les résultats présentés dans cette étude ont été obtenus avec un maillage de 21×49. Ce choix du maillage a été adopté après que le test de dépendance du maillage a montré qu'un maillage plus fin, de 41×49, change seulement d'environ 0.2% la valeur maximale de la fonction de courant du mode à 2-cellules pour $Re = 200$ et $Gr = 0$.

4.3 Résultats et discussion

Quand la convection forcée est considérée, le champ de vitesse est découplé du champ de température. Nous allons donc discuter séparément du champ de l'écoulement et du champ de température dans les sections suivantes. Les résultats ont été obtenus pour un espace annulaire de rapport de forme $\Gamma = 3.8$ et un rapport de rayons $R = 2$. Dans ce cas, le nombre de Reynolds, basé sur le rayon interne, est égal à celui basé sur la largeur de l'espace annulaire.

L'évolution de l'écoulement primaire

On considère d'abord l'évolution de l'écoulement primaire à partir d'un système initialement au repos, pour ensuite augmenter progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur. i. e. augmenter le nombre de Reynolds à partir de zéro. On a trouvé que l'écoulement primaire se développe suivant les régimes de 2 cellules, de 4 cellules et de 2 cellules au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Dans la gamme de $0 \leq Re \leq 45$, l'écoulement est constitué de deux vortex contra-rotatifs attachés aux extrémités des cylindres. Dans la gamme de $50 \leq Re \leq 74$, une autre paire de très petits vortex (par rapport à ceux attachés aux extrémités) apparaissent au milieu de la cavité, formant ce qu'on appelle un écoulement "faible" à 4 cellules. Pour $Re > 75$, la paire de petits vortex disparaît, et l'écoulement redevient bicellulaire. La Fig. 4.2 montre une série de lignes de courant dans les régimes de 2,4

et 2 cellules pour $Re = 20$, 70, 100 et 150 (dans toutes ces figures et les suivantes, le cylindre intérieur est sur le côté gauche). On remarque que ces résultats ont été obtenus en utilisant les résultats à un nombre de Reynolds plus faible comme condition initiale. En particulier, la solution pour $Re = 20$ a été obtenue en utilisant le système au repos comme condition initiale.

La Fig. 4.2a montre les profils d'écoulement pour $Re = 20$. Pour ce faible nombre de Reynolds, l'existence de deux cellules s'explique par le fait que les extrémités réduisent la vitesse à zéro, et de cette façon, créent un fort gradient dans la force centrifuge. Comme la pression ne peut pas équilibrer cette force, les cellules se présentent aux extrémités dès que le cylindre commence à tourner, bien qu'elles restent faibles et attachées aux extrémités de l'espace annulaire.

La Fig. 4.2b montre une structure "faible" de 4 cellules pour $Re = 70$. L'intensité des cellules dans la région centrale est beaucoup plus petite que celle des cellules aux extrémités. Cette paire de cellules disparaît lorsque $Re > 75$.

Quand le nombre de Reynolds augmente, le nombre de cellules reste inchangé, et il ne se développe plus de cellules de Taylor, quoi que le modèle idéal prévoit l'apparition de 4 vortex dès que le nombre de Reynolds dépasse la valeur critique $Re_c \approx 68$. En réalité, l'écoulement reste bicellulaire, bien que la force centrifuge augmente l'intensité de l'écoulement (vers l'extérieur) dans la région centrale à plusieurs fois l'intensité de l'écoulement (se dirigeant vers l'intérieur) dans la région des extrémités. Les Figs. 4.2c et 4.2d représentent la structure de l'écoulement dans cette région. La Fig. 4.3 montre les effets combinés des extrémités et de la force centrifuge. La Fig. 4.3a montre, pour la vitesse normale u, que l'écoulement rentrant se développe principalement dans la zone $0 < z < 0.8$ (et, symétriquement dans la zone $3 < z < 3.8$), i. e. autour de 1/5 de la hauteur de l'espace annulaire. Bien que cet écoulement se développe rapidement lorsque Re augmente de 0 à 60, il

semble atteindre une valeur asymptotique si Re augmente davantage. Dans cette même figure, l'écoulement vers l'extérieur dans la région centrale est insignifiant pour de faibles nombres de Reynolds, et continue à augmenter pour des nombres de Reynolds plus grands. Pour $Re = 150$, la vitesse vers l'extérieur est $u = 0.19$ alors que la vitesse vers l'intérieur garde la valeur de $u \leq 0.05$ obtenue pour $Re = 60$.

La distribution de la composante de vitesse verticale u_z dans le plan médian (r = 1.5) est présentée à la Fig. 4.3b. On retrouve essentiellement le même développement d'écoulement que dans la dernière figure. Il est intéressant de remarquer que la vitesse verticale pour différents nombres de Reynolds s'annule approximativement à une même hauteur z = 1.1 (et symétriquement pour z = 2.7, et z =1.9).

La vitesse radiale à travers le plan de symétrie est montrée à la Fig. 4.3c. Nous remarquons que la vitesse radiale vers l'extérieur augmente rapidement avec Re, et que la localisation de ses maximums se déplace vers le cylindre externe, ce qui indique que les centres des cellules se déplacent non seulement vers le plan de symétrie mais aussi vers le cylindre externe à mesure que l'écoulement devient plus intense.

Ces résultats montrent clairement que la branche primaire de solutions (dans le sens de Benjamin) consiste de 2, 4, et 2 modes de cellules, ce qui démontre une grande influence des extrémités. En réalité, comme les cellules près des extrémités précèdent les cellules de Taylor, elles atteignent une telle importance qu'elles empêchent le développement des vortex de Taylor ayant un sens contraire de rotation, même pour de forts nombres de Reynolds.

Dans le cas présent, la paire de cellules obtenues pour de grands nombres de Reynolds, est en fait une combinaison des cellules primaires aux extrémités et d'une paire de "cellules de Taylor" ayant le même sens de rotation (voir Fig. 4.4). Cette interprétation est en accord avec les résultats présentés sur la Fig. 4.3a.

Afin d'apprécier la forte interaction entre les effets des extrémités et les cellules de Taylor dans des cylindres courts, il est intéressant de comparer avec les résultats obtenus par *Alziary et Grillaud* (1978) pour un espace annulaire de rapport de forme $\Gamma = 10$ et de rapport de rayons $R_i/R_o = 0.933$. L'évolution de l'écoulement primaire en fonction du nombre de Reynolds est montrée à la Fig. 2.3.

Dans ce cas, l'écoulement primaire de 2 cellules observé pour Re = 0.039 Re_c se développe successivement en 4,6,8 et finalement 10 cellules pour Re = 0.195 Re_c, 0.389 Re_c, 0.584 Re_c et 0.973 Re_c. Les effets des extrémités dans ce long espace annulaire sont contraires à ceux d'un espace annulaire court. Au lieu de supprimer la présence des cellules de Taylor, ils stimulent leurs développement pour des nombres de Reynolds au-dessous de la valeur critique. Ce comportement complexe demande une étude plus approfondie.

L'évolution de l'écoulement secondaire

Si les effets de bout sont négligeables, e. g. dans un espace annulaire aux extrémités libres, on prévoit un mode de 4 cellules pour des nombres de Reynolds au-dessus d'une certaine valeur critique Re_c. Dans la terminologie de la théorie des bifurcations, on a donc une bifurcation supercritique de zéro à 4 cellules, tel qu'illustré dans la Fig. 4.5a. Dans l'espace annulaire de longueur finie, le diagramme de bifurcation se sépare en deux branches discontinues non symétriques, telles que montrées à la Fig. 4.5b. La branche supérieure correspond maintenant au mode primaire décrit dans la section précédente alors que la branche inférieure représente le mode de 4 cellules. Celui-ci est considéré comme un *mode secondaire*, en ce sens que la solution de 4 cellules, pour un nombre de Reynolds donné, ne peut pas être atteinte par l'augmentation progressive du nombre de Reynolds à partir de zéro, mais seulement pour certains conditions initiales, et par de modes d'excitation particuliers, par exemple, on obtient ce mode avec un écoulement initial de 4 cellules,

ou par un départ brusque (conditions initiales à zéro) pour certaines valeurs de Re (par exemple, pour $Re = 85$ ou 300, *mais non* pour $Re = 100$ ou 200). Une autre propriété importante de la branche secondaire est l'effondrement *catastrophique* de l'écoulement secondaire de 4 cellules au fur et à mesure que Re diminue au-dessous du point critique C.

Ici, une structure de l'écoulement à 4 cellules a été obtenue pour $Re = 300$, par un départ brusque du système. Cette solution a été utilisée ensuite pour initialiser l'écoulement aux plus faibles nombres de Reynolds. De cette façon, la solution pour la branche à 4 cellules se continue jusqu'au $Re \approx 83$ où il n'est plus possible de diminuer davantage Re. De plus, en utilisant le mode de 4 cellules pour $Re = 300$ comme condition initiale, nous avons obtenu le mode de 4 cellules pour de plus grands nombres de Reynolds, jusqu'à $Re = 375$.

La Fig. 4.6 montre les profils d'écoulement pour $Re = 100$ et 150, respectivement. La répartition de vitesse est présentée sur la Fig. 4.7. Dans la même figure, on présente aussi la vitesse correspondante à l'écoulement primaire de 2 cellules pour montrer la différence entre les deux modes. On remarque que la vitesse radiale à travers le plan de symétrie de l'espace annulaire est positive pour un écoulement à 2 cellules et négative pour un écoulement à 4 cellules. La vitesse du mode à 2 cellules est à peu près deux fois plus grande que celle du mode à 4 cellules (Fig. 4.7a). L'inverse est observé pour la composante de vitesse verticale à travers le plan médian de l'espace annulaire (r=1.5), représenté à la Fig. 4.7b.

Un aperçu plus global de la différence d'intensités des modes à 2 et à 4 cellules est présenté sur la Fig. 4.7c qui montre la vitesse normale u à travers le plan médian de l'espace annulaire: le mode à 2 cellules a un maximum très prononcé à $z = \Gamma/2$, où il est à peu près deux fois plus grand que le mode à 4 cellules. Cependant, ce mode atteint l'intensité maximale à $z = 0.3\Gamma$ (et 0.7Γ, par symétrie) ce qui est comparable

au mode de 2 cellules à z = $\Gamma/2$. En général, il apparaît que les vitesses maximales des modes primaire à 2 cellules et secondaire à 4 cellules sont comparables. Les deux modes sont symétriques par rapport au plan z = $\Gamma/2$, avec l'écoulement rentrant au voisinage des extrémités. Ils sont considérés ainsi comme deux *modes normaux* d'après *Benjamin* (1978a,b). Pour la gamme de paramètres considérés dans cette étude, nous avons étudié seulement les modes normaux du système. Il pourrait également apparaître des *modes anormaux*, qui ne font pas l'objet de cette étude.

Champs de température

Afin de considérer les effets de la convection forcée sur le champ thermique, il est instructif de noter que la distribution de température due seulement à la conduction est donnée par

$$T = \frac{1-r^2}{4} + (\frac{R^2-1}{4lnR})ln\ r \tag{4.1}$$

Pour la valeur de $R = 2$ considérée dans cette étude, cette équation devient

$$T = \frac{1-r^2}{4} + (\frac{3}{4ln2})ln\ r \tag{4.2}$$

qui nous permet de déterminer la température maximale

$$T_{max} = 0.012644$$

sur la ligne chaude

$$r = 1.4711$$

Ces valeurs sont considérées comme références pour l'analyse de la convection forcée dont l'effet global est de réduire la température maximale dans la cavité et de briser la ligne chaude en plusieurs points chauds isolés.

Une autre quantité d'intérêt est le taux de transfert de chaleur qui représente le flux de chaleur par unité d'angle à travers la frontière du système, i. e.

$$q_i = -\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=1}$$

$$q_o = -R\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}$$

Les flux de chaleur à travers les cylindres interne et externe sont donnés par

$$Q_{i,o} = \int_o^H q_{i,o} dz \tag{4.3}$$

À l'état permanent, le flux total de chaleur à travers les frontières doit être égal à la chaleur générée à l'intérieur de la cavité, c'est-à-dire

$$Q_i + Q_o = H(R^2 - 1)/2 = 5.7 \tag{4.4}$$

Il a été verifié que tous les résultats présentés dans cette étude ont satisfait la condition

$$\left|\frac{Q_i + Q_o - 5.7}{5.7}\right| < 10^{-3}$$

Dans les sous-sections suivantes les résultats concernant les isothermes, la température maximale et le taux de transfert de chaleur sont respectivement présentés en fonction des deux paramètres principaux Re et Pr, et des modes d'écoulement (lorsque Re se situe dans la zone de solutions multiples).

Isothermes

Un cas d'écoulement faible, avec $Re = 20$, est présenté à la Fig. 4.8a, pour deux nombres de Prandtl, Pr =1 et 10. Lorsque $Pr = 1$, la température n'est presque pas affectée et les isothermes sont essentiellement parallèles comme dans un état de conduction pure. Lorsque $Pr = 10$, la déformation des isothermes devient visible.

Les champs d'écoulement et de température pour un mode "faible" à 4 cellules, avec $Re = 70$, sont présentés à la Fig. 4.8b. Lorsque $Pr = 1$, les isothermes sont faiblement déformées de l'état de conduction pure mais restent encore presque parallèles. Lorsque $Pr = 10$, les isothermes sont nettement déformées par l'écoulement de convection, ce qui résulte en trois points chauds dans le système.

Lorsque $Re = 150$, deux modes d'écoulement peuvent avoir lieu: La Fig. 4.8c correspond à l'écoulement primaire de 2 cellules alors que la Fig. 4.8d correspond à l'écoulement secondaire de 4 cellules. Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, le champ de température est fortement affecté par la convection forcée, et la ligne chaude observée dans le cas précédent ($Re = 20$) se brise en plusieurs points chauds, pour $Pr = 10$ et $Pr = 1$. Les isothermes se concentrent surtout aux points où le fluide heurte les parois, et par conséquent le gradient de température est assez élevé. Ces figures montrent clairement que la distribution de température dépend fortement du type d'écoulement et du nombre de Prandtl.

Température maximale

La variation de la température maximale en fonction du nombre de Reynolds est illustré par la Fig. 4.9 pour $Pr = 1$ et $Pr = 10$. Lorsque $Re > 83$, ce qui correspond à deux modes possibles d'écoulement, la température maximale du mode à 2 cellules est plus élevée que le mode à 4 cellules. Ceci est dû au fait que l'écoulement de 4 cellules répartit plus uniformement la chaleur vers les frontières, donc plus efficacement que le mode à 2 cellules. Pour un mode d'écoulement donné,

la température maximale est beaucoup plus faible lorsque le nombre de Prandtl du fluide est élevé : Pour $Re = 200$, T_{max} est presque deux fois plus faible lorsque $Pr = 10$ que lorsque $Pr = 1$.

Taux de transfert de chaleur

Le flux de chaleur Q_o à travers le cylindre externe, en fonction du nombre de Reynolds, est représenté dans la Fig. 4.10. En écoulement primaire, lorsque $Pr = 10$ (Fig. 4.10a) Q_o présente un minimum correspondant à $Re \approx 20$ pour subir de brusques variations lorsque $60 \leq Re \leq 82$ puis une croissance monotone proportionnelle à Re. Selon la loi de la conservation de l'énergie, le flux de chaleur Q_i à travers la paroi intérieure montrerait une tendance inverse. Le minimum obtenu pour $Re \approx 20$ peut être expliqué de la manière suivante. Lorsque le nombre de Reynolds est petit ($Re < 20$), l'écoulement est essentiellement dû aux effets de la viscosité aux extrémités puis s'étend graduellement vers l'intérieur de la cavité. L'écoulement rentrant au niveau des extrémités est par conséquent plus important que l'écoulement sortant au niveau de la zone centrale de la cavité, et à mesure que Re augmente, il transporte davantage de chaleur vers le cylindre intérieur. Lorsque le nombre de Reynolds augmente ($Re > 80$) la force centrifuge augmente ainsi que l'écoulement sortant et plus de chaleur est dirigée vers le cylindre extérieur. Dans la gamme $60 \leq Re \leq 80$, l'écoulement primaire connaît une transition (de 4 cellules à 2 cellules), faisant subir une brusque variation à Q_o dans cette zone.

Lorsque $Pr = 1$ (Fig. 4.10a), on observe la même tendance que celle décrite précédement pour $Pr = 10$ bien que trop faible pour être perçue sur les graphiques.

Lorsque le nombre de Reynolds est plus grand, les deux modes d'écoulement sont possibles et plus de chaleur est dirigée vers le cylindre externe par l'écoulement à 4 cellules que par l'écoulement à 2 cellules (Fig. 4.10b).

Une description plus détaillée du taux de transfert de chaleur est représentée à la Fig. 4.11. En mode primaire, le flux de chaleur local q_o le long du cylindre externe se concentre de plus en plus au milieu de la paroi à mesure que Re augmente (voir Fig. 4.11a). Inversement, le mode secondaire produit un taux de transfert de chaleur minimal dans la partie centrale, et un taux maximal autour de deux points (z = 1 et 2.8) où le flux empiéte sur la paroi extérieure (voir Fig. 4.11b).

Effets de la convection naturelle

Pour étudier les effets de la convection sur le champ d'écoulement et le transfert de chaleur, les résultats présentés dans cette section ont été obtenus pour $0 < Re < 150$ et $0 < Gr < 5 \times 10^4$ avec $R = 2$, $H = 3.8$ et $Pr = 0.7$. Les conditions aux frontières sont les mêmes que définies précédemment.

Dans la Fig. 4.12 on montre les résultats pour $Re = 20$, avec $Gr = 0; 400$ et 2×10^4.

La Fig. 4.13 présente les cas pour $Re = 70$ et $Gr = 0; 4 \times 10^3$ et 2.2×10^4.

Dans la Fig. 1.14 on décrit les résultats pour $Re = 150$ et $Gr = 0; 2 \times 10^4; 5 \times 10^4$.

Rappelons-nous qu'en l'absence de convection naturelle ($Gr = 0$), l'écoulement est composé de deux cellules tournant en sens contraire, au voisinage des parois supérieures et inférieures pour $Re < 50$. Dans la gamme de $50 < Re < 74$, une autre paire de cellules faibles apparaissent dans la région centrale de l'espace annulaire, formant un écoulement "faible" à 4 cellules. Pour $Re > 75$, la paire de cellules centrales dispparaît et l'écoulement redevient bi-cellulaire. Au fur et à mesure que Re augmente, l'écoulement se développe dans les régimes de 2, 4 et 2 cellules comme cela a été montré dans la section précédente.

En présence de convection naturelle ($Gr > 0$), la structure de l'écoulement est

complètement modifiée, comme ce qui est montré, par exemple, dans la Fig. 4.14c.

Pour $Re = 20$ et $Gr = 400$ (Fig. 4.12b), le système est en état de pseudo conduction, mais la structure de l'écoulement est déjà complètement modifiée: les 2 cellules sont maintenant en rotation l'une à coté de l'autre, le fluide est en mouvement vers le bas le long des cylindres interne et externe. Cet écoulement ressemble à celui qu'on appelle écoulement *anormal* d'aprés *Benjamin* (1978a,b): il n'a pas de symétrie et l'écoulement tourne dans le sens inhabituel au voisinage des extrémités fixes. Pour $Gr = 2 \times 10^4$, l'écoulement est divisé en 2 cellules verticales contrôlées par les forces de poussée.

Pour $Re = 70$ et $Gr = 4 \times 10^3$ (Fig. 4.13b), l'écoulement "faible" à 4 cellules, observé avec $Gr = 0$, a suivi une mutation pour passer à une structure à 2 cellules.

En fait, chaque cellule englobe une petite cellule-fille tournant dans le même sens et noyée dans la partie centrale de l'éspace annulaire. Lorsqu'on augmente Gr à 2.2×10^4, les deux cellules s'étendent verticalement sous l'effet de la poussée. La grande cellule adjacente au cylindre externe, enveloppe maintenant deux cellules-filles, toutes deux tournant dans le même sens que la cellule-mère, tel que montré dans la Fig. 4.13c.

Pour $Re = 150$, la Fig. 4.14a montre un mode secondaire observé en l'absence de convection naturelle. Les Fig. 4.14b et 4.14c montrent clairement la nature caractéristique de cette structure sous l'effet de la convection naturelle: une mutation est en progrès avec la paire de cellules corotatives (adjacentes au cylindre externe) englobées toujours dans une grande cellule. On observe également la gestation d'une troisème cellule à l'intérieur de cette cellule mère. Plus tard, celle-ci se développe au dépens des deux cellules independentes et adjacentes au cylindre interne.

Pour le transfert de chaleur, il suffit de dire qu'il est étroitement lié à la structure

de l'écoulement décrit précédement, et peut être facilement interprété à partir des isothermes montrés à côté de chaque figure correspondant aux lignes de courant. En particulier, on peut noter la formation des endroits chauds dans le système tel que montré sur la Fig. 4.14b-c où la chaleur semble être piègée dans les yeux de la cellule.

Dans les résultats précédents, nous avons mis en évidence la relation entre forces centrifuge et forces de poussée pour des valeurs moderées. De fortes interactions pour des grandes valeurs de Re et Gr demandent une étude plus approfondie.

4.4 Conclusion

La convection entre deux cylindres concentriques dotés d'une source de chaleur interne a été étudiée pour $R = 2$, $\Gamma = 3.8$, $1 \leq Pr \leq 10$, $0 \leq Re \leq 375$ et $0 \leq Gr \leq 5 \times 10^4$. Une analyse détaillée du champ d'écoulement et de température démontre que:

Lorsque la convection naturelle est négligée (i.e. $Gr = 0$):

1. Deux modes normaux sont obtenus pour un espace annulaire de cylindres courts: Un mode primaire de 2 cellules et un mode secondaire de 4 cellules. Le mode primaire est obtenu en augmentant Re. Le mode secondaire ne s'obtient qu'en ayant initialement un écoulement à 4 cellules, ou par un départ brusque du système, et pour $Re > 83$.

2. Bien que la structure des modes primaire et secondaire est aussi différente que 2 et 4, leur intensité est comparable pour un nombre de Reynolds typique où tous les deux peuvent exister (e. g. $Re = 150$).

3. Le champ de température est plus déformé et le transfert de chaleur augmente

lorsque le nombre de Reynolds, ou le nombre de Prandtl augmentent, ou qu'il y a un plus grand nombre de cellules.

4. Lorsque Re, Pr ou le nombre de cellules augmentent, plus de chaleur est évacuée par le cylindre externe que par le cylindre interne.

5. D'après les résultats précédents, on remarque d'abord que l'évolution du mode primaire de 2, 4 et 2 cellules et du mode secondaire de 4 cellules étudiés concorde avec la description fournie dans les articles de *Benjamin* (1978a,b), et de *Ball et Farouk* (1988) concernant le phénomène de bifurcation en écoulement visqueux entre des cylindres courts.

6. *Ball et Farouk* (1988) ont montré dans leur Fig. 12 un effet d'hystérésis lorsque Re varie entre 73 et 76. Cependant, le phénomène d'hystérésis n'a pas été observé dans la présente étude. En realité, d'après le diagramme de bifurcation de *Benjamin* (1978b), Fig 5 et de *Ball et Farouk* (1988) Fig. 2, la zone d'hystérésis est très étroite et dépend sensiblement du rapport de forme. L'étroitesse de la zone d'hystérésis ainsi que sa sensibilité au facteur de forme, combinées à la précision numérique, ne facilitent pas la localisation avec certitude du phénomène d'hystérésis.

D'autre part, lorsque $Gr > 0$, l'écoulement et le transfert de chaleur résultant de la convection naturelle et forcée montrent que:

1. La symétrie à travers la section centrale de la cavité ainsi que la direction de l'écoulement vers l'intérieur dans les extrémités fixes ont été détruites au fur et à mesure que les forces de poussée deviennent importantes. Par conséquent, l'ordre ou le désordre dans le développement des modes d'écoulements d'après les diagrammes biens établis de bifurcation des systèmes isothermiques sont fortement modifiés.

2. Les notions d'écoulement primaire et secondaire, ainsi que la classification en modes normaux et anormaux, doivent être révisées ou abandonnées en interprétant la structure de l'écoulement résultant à la fois d'une interaction entre les forces de poussées et les forces centrifuges avec les forces visqueuses.

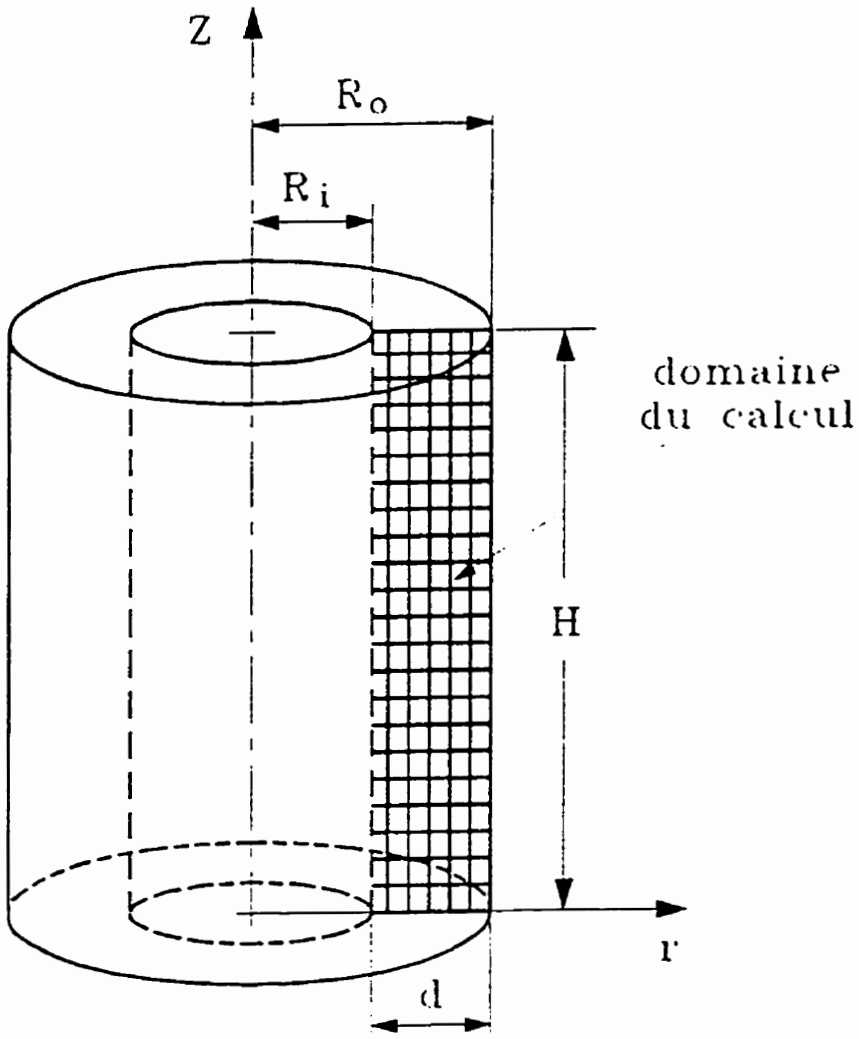


Figure 4.1: Géométrie du système.

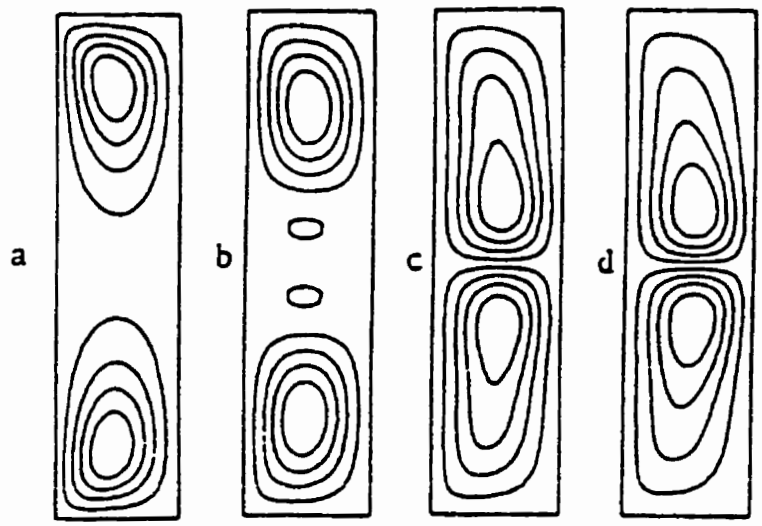


Figure 4.2: Lignes de courant du mode à 2 cellules : (a) Re = 20, ψ_{max} = 0.0064; (b) Re = 70, ψ_{max} = 0.0325; (c) Re = 100, ψ_{max} = 0.0476; (d) Re = 150, ψ_{max} = 0.0688.

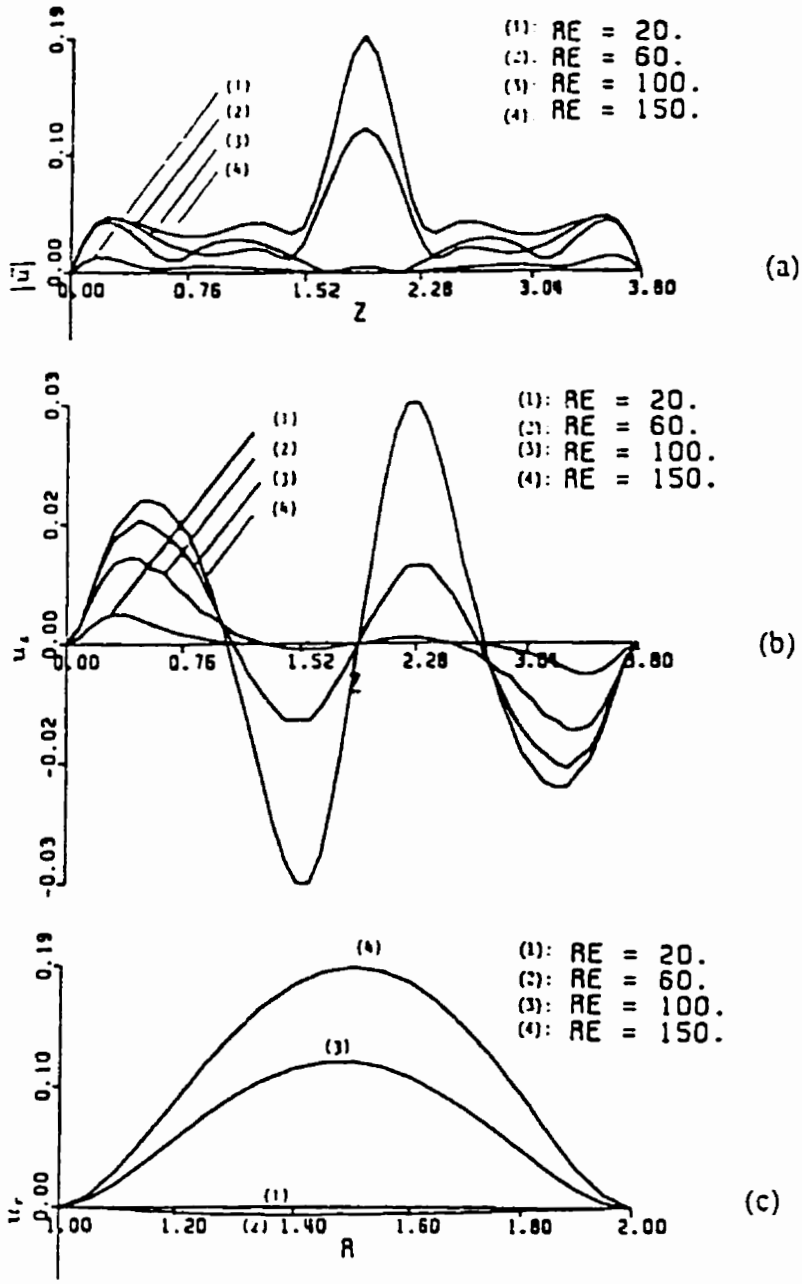


Figure 4.3: Profils de vitesse locale : (a) u le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire (b) Vitesse verticale le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire (c) Vitesse radiale dans le plan de symétrie.

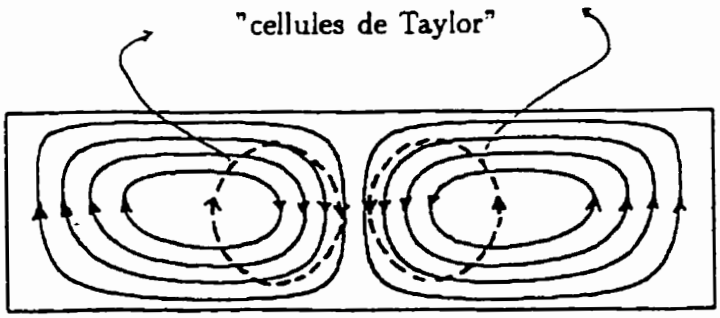


Figure 4.4: Interaction entre les cellules aux extrémités et les cellules de Taylor.

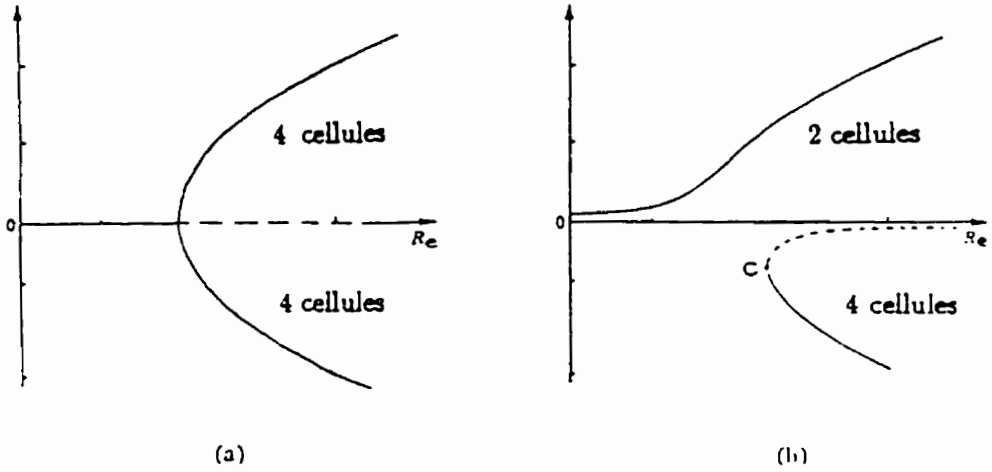


Figure 4.5: Diagrammes de bifurcation : (a) Bifurcation supercritique; (b) Bifurcation supercritique à deux branches discontinues.

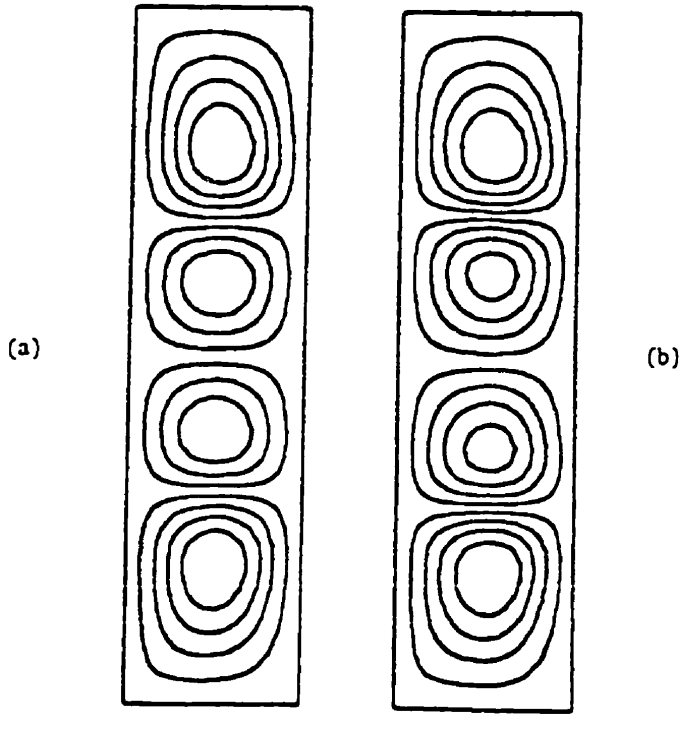


Figure 4.6: Lignes de courant du mode secondaire : (a) Re = 100, ψ_{max} = 0.0535; (b) Re = 150, ψ_{max} = 0.0628.

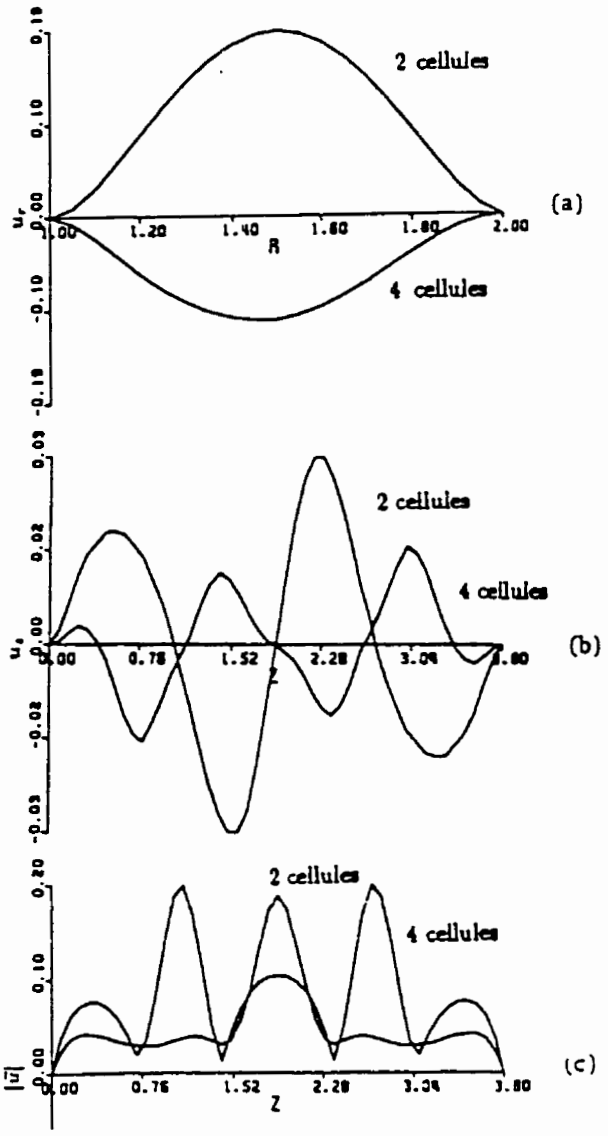


Figure 4.7: Profils de vitesse locale pour les modes primaire et secondaire : (a) Vitesse radiale dans le plan de symétrie (b) Vitesse verticale le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire (c) u le long de la ligne centrale verticale de l'espace annulaire.

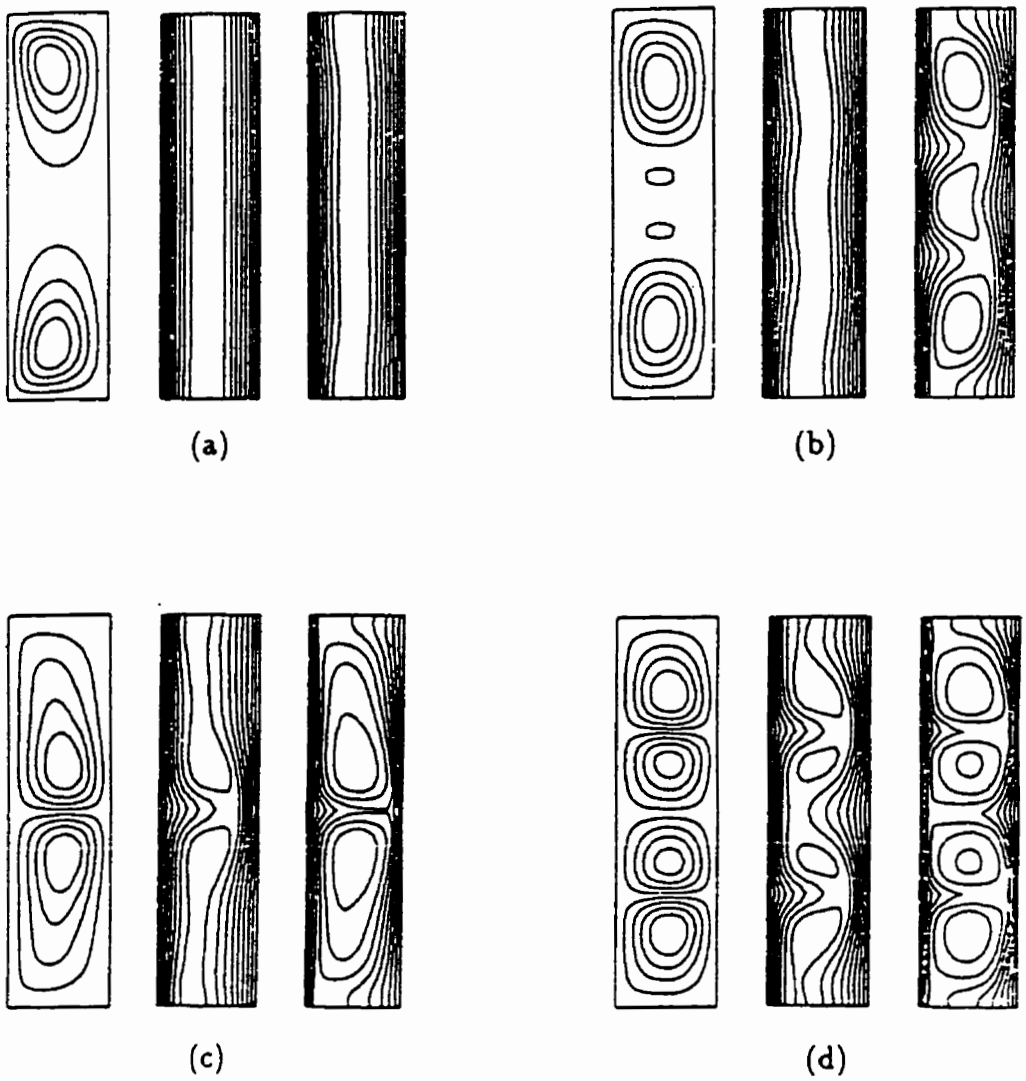


Figure 4.8: Lignes de courant et isothermes pour : (a) Re = 20, Pr = 1, Pr = 10; (b) Re = 70, Pr = 1, Pr = 10; (c) Re = 150 (2-cellules), Pr = 1, Pr = 10; (d) Re = 150 (4-cellules), Pr =1, Pr = 10.

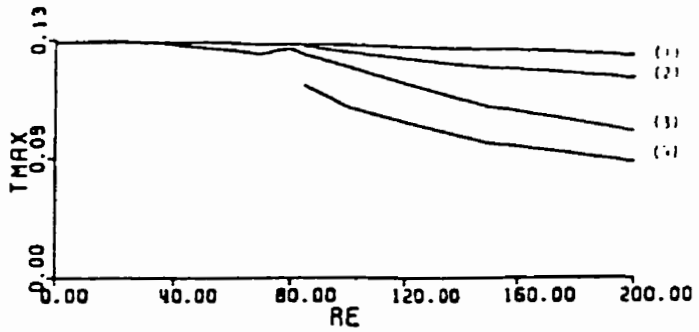


Figure 4.9: Température maximale en fonction du nombre de Reynolds : Pr = 1, branche primaire (1), branche secondaire (2); Pr = 10, branche primaire (3), branche secondaire (4).

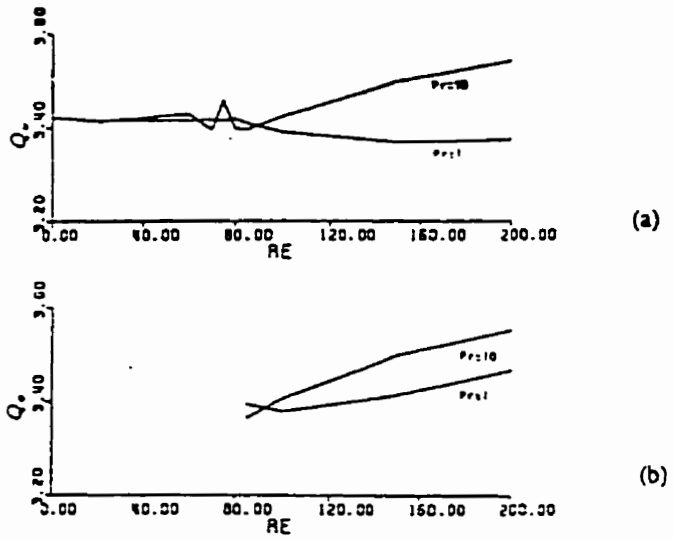


Figure 4.10: Transfert de chaleur à travers le cylindre externe : (a) branche primaire; (b) branche secondaire.

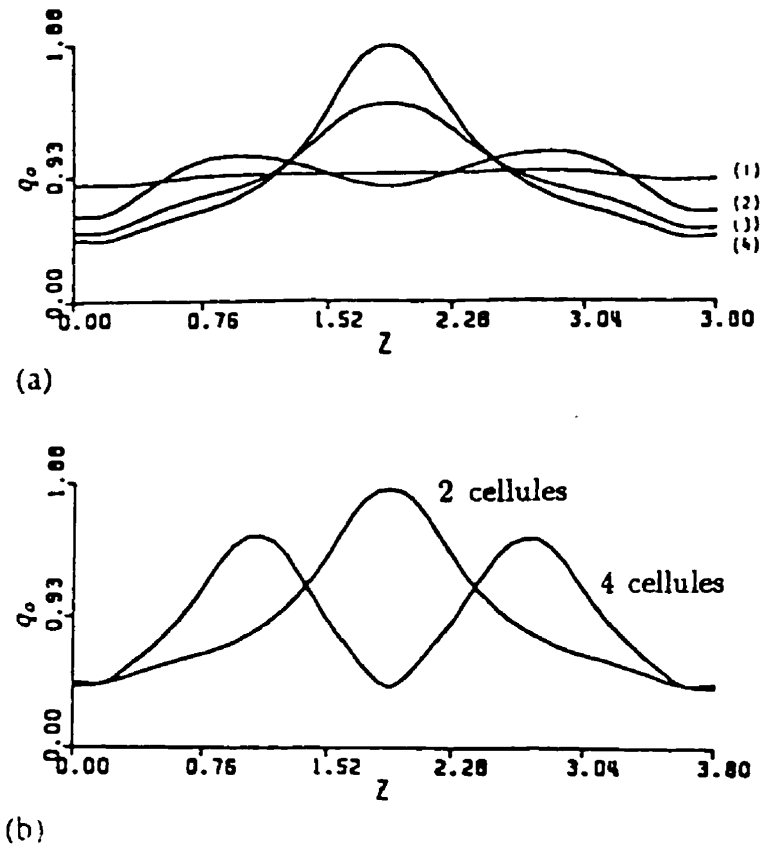


Figure 4.11: Transfert de chaleur global à travers le cylindre externe : (a) Le mode primaire, pour Pr =10 et (1) Re = 20; (2) Re = 60; (3) Re = 100; (4) Re = 150, (b) Les modes à 2 et à 4 cellules, pour Re = 150, Pr = 10.

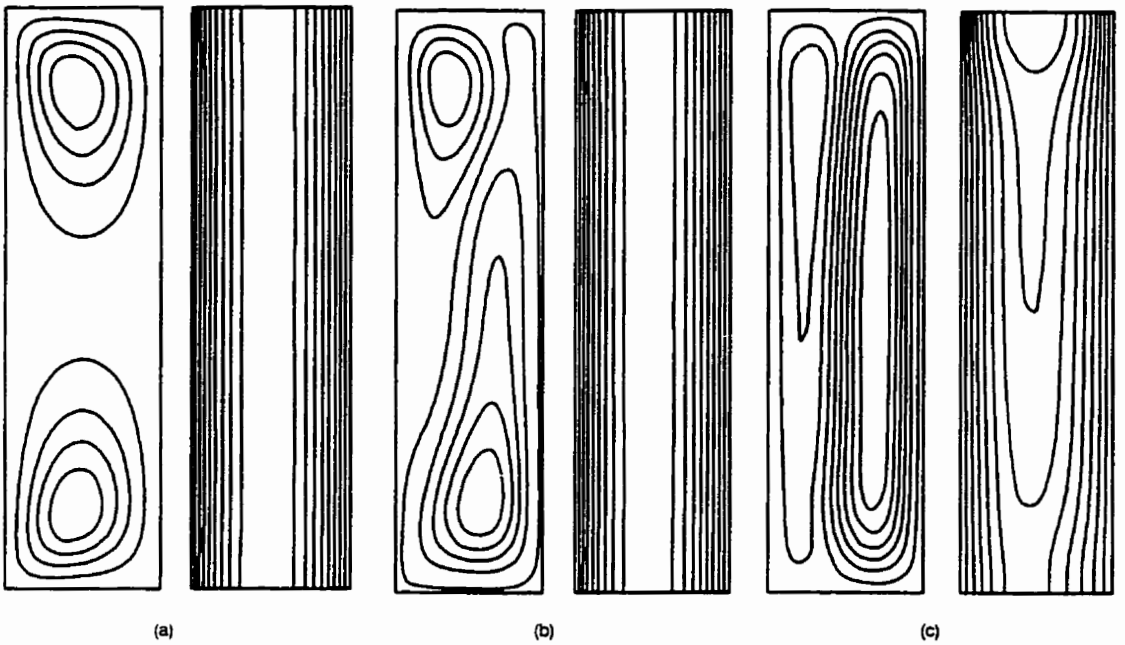


Figure 4.12: Lignes de courant et isothermes: (a) Re = 20, Gr = 0; (b) Re = 20, Gr = 400; (c) Re = 20, $Gr = 2 \times 10^4$.

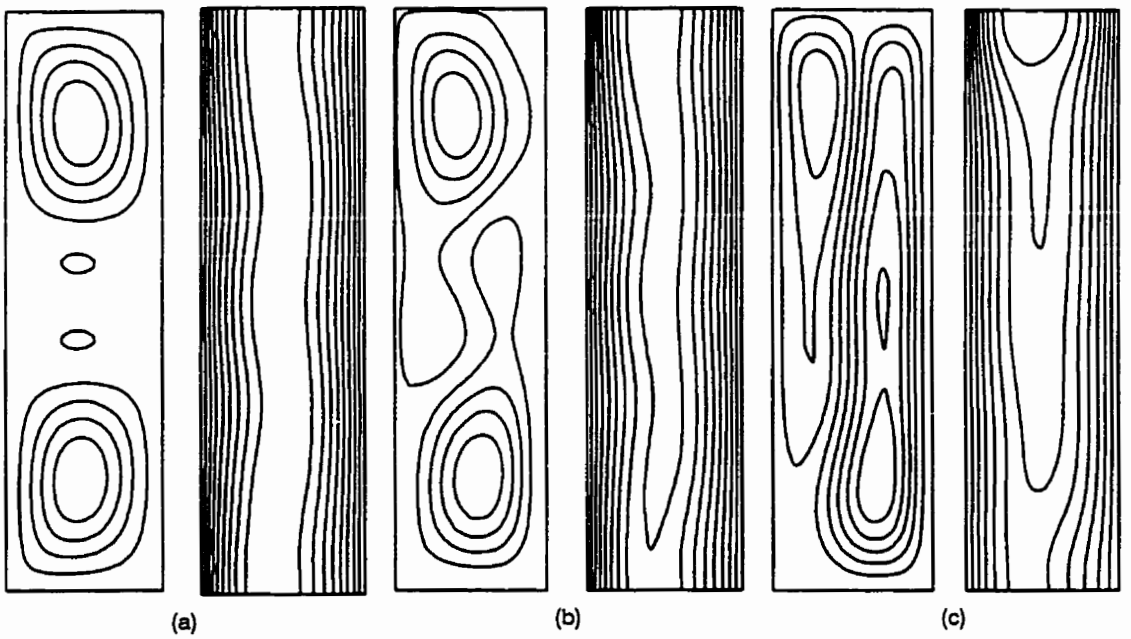


Figure 4.13: Lignes de courant et isothermes: (a) Re = 70, Gr = 0; (b) Re = 70, $Gr = 4 \times 10^3$; (c) Re = 70, $Gr = 2.2 \times 10^4$.

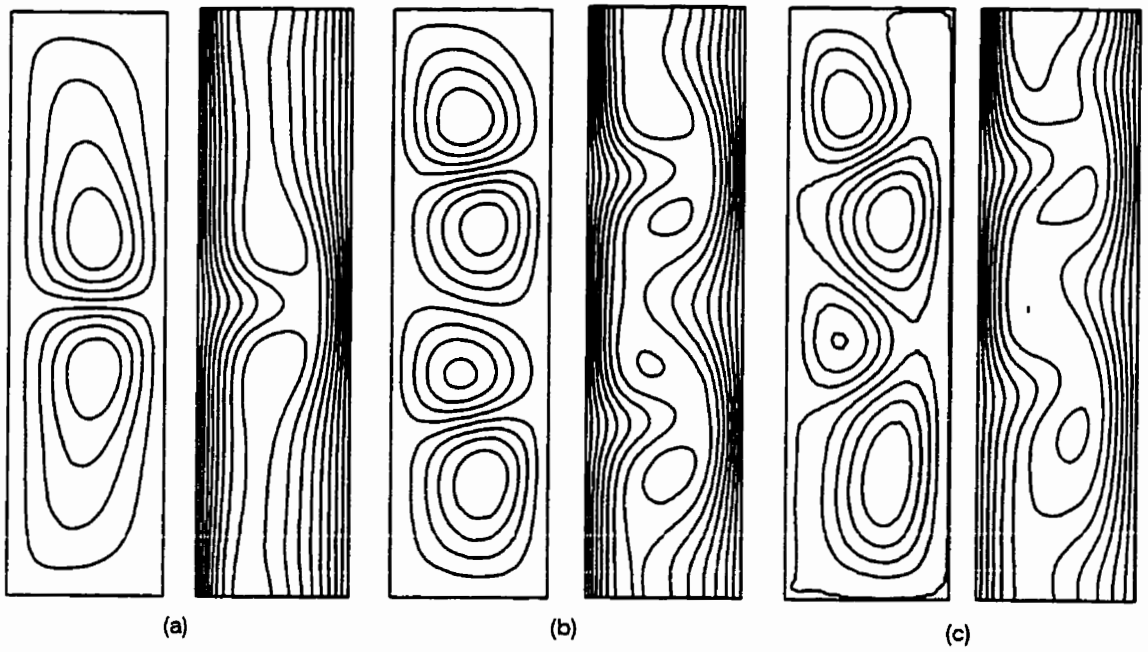


Figure 4.14: Lignes de courant et isothermes: (a) Re = 150, Gr = 0; (b) Re = 150, $Gr = 2 \times 10^4$; (c) Re = 150, $Gr = 5 \times 10^4$.

Chapitre 5

Étude de la convection avec un disque en rotation

5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la convection en présence d'un disque en rotation dans un espace annulaire, attaché à la mi-hauteur du cylindre intérieur.

Nous considérons d'abord la convection forcée en résolvant séparement les équations qui décrivent les champs de vitesse et de température. Aussi, une grande partie de l'étude consiste à déterminer l'influence du disque sur l'écoulement originel de Taylor-Couette entre deux cylindres coaxiaux, en fonction de différents paramètres comme la longueur du disque, le rapport de forme de la cavité et le nombre de Reynolds qui caractérise la vitesse de rotation de l'énsemble cylindre intérieur-disque.

La condition de non glisssement du fluide sur le disque impose à celui-ci une vitesse tangentielle égale à celle du disque. C'est-à-dire qu'elle croît linéairement avec le rayon du disque. Ceci crée de fortes forces centrifuges. Ainsi, le sens de rotation de la cellule est imposé au voisinage du disque. L'écoulement doit donc répondre à deux conditions: le fluide proche de l'extrémité fixe doit se diriger vers l'intérieur et celui proche du disque vers l'extérieur. Ces caractéristiques jouent un rôle important sur

la structure de l'écoulement: suivant le rapport de forme et le nombre de Reynolds, il peut y avoir un nombre pair ou impair de cellules dans la demi-cavité. Les simulations effectuées ont pour but d'étudier ces différentes possibilités.

Nous étudions ensuite l'effet de la convection naturelle sur l'écoulement forcé par le disque, en faisant varier le nombre de Grashof entre 0 et 10^5.

5.2 Description du problème

On considère l'écoulement de convection d'un fluide incompressible entre deux cylindres verticaux concentriques en présence d'une génération interne de chaleur. Un disque est fixé sur le cylindre intérieur. Afin de limiter les paramètres de l'étude, le disque est supposé infiniment mince et placé au niveau du plan de symétrie de l'ensemble tel que montré à la figure 5.1. Le domaine de l'étude se réduit ainsi à la demi-cavité dont les côtés sont limités par les cylindres interne et externe, les extrémités par une paroi fixe d'une part et par une combinaison disque-surface libre d'autre part. Le cylindre intérieur de rayon R_i et de température Tw_i, et le disque de rayon R_d, tournent à une vitesse angulaire constante Ω. Le cylindre extérieur de rayon R_o est à la température $T_{w_o} = T_{w_i}$. Les extrémités des cylindres et le disque sont supposés adiabatiques.

La formulation mathématique et les conditions aux limites suivent les équations générales présentées au chapitre 3. Pour résoudre le problème dans une demi-cavité

seulement, nous posons comme condition à z = H/2:

$$\left.\begin{aligned} u_r = u_z = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \\ \omega = -\tfrac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}; \quad 1 < r < R_d \\ \omega = 0; \quad R_d < r < R \\ U = r^2; \quad 1 < r < R_d \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad R_d < r < R \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Méthode de solution

La méthode numérique présentée précédemment, a été utilisée pour effectuer toutes les simulations. La longueur du disque est représentée par le rapport l/d où $l = R_d - R_i$ et $d = R_o - R_i$.

Les résultats ont été obtenus avec un maillage de 15 × 15 pour un rapport de forme de 2 et un maillage de 29 × 56 pour un rapport de forme de 4. Il faut noter que grâce à la symétrie du système, on ne calcule l'écoulement que dans une demi cavité. On a testé un maillage plus fin (29 × 80) pour un nombre de Reynolds de 200 et une longueur de disque l/d = 8/28 et on a trouvé une variation de la valeur maximale de la fonction de courant inférieure à 1%. Le maillage 29 × 56 est ainsi suffisant pour la présente étude.

5.3 Résultats et discussion

Description des écoulements

On a effectué deux séries de simulations pour $Re = 75$ et $Re = 200$, avec $\Gamma = 4$, et pour $Re = 100$ avec $\Gamma = 2$. On traite d'abord le cas de la convection forcée en posant $Gr = 0$.

Résultats pour Re = 75

Pour cette valeur de Re, la formation de cellules est déterminée par la prépondérance des forces de viscosité proche des extrémités. Sans disque, l'écoulement se présente sous forme de 4 cellules dans la cavité, c'est-à-dire, 2 dans la demi-cavité, voir Fig. 5.2a. Les cellules d'extrémité sont plus importantes et plus intenses que les cellules centrales. On considère ensuite différentes longueurs de disque. L'effet de celui-ci se fait sentir à partir de l/d = 2/28 (Fig. 5.2b). Les cellules centrales proches du disque tournent encore à l'inverse de la direction compatible avec la rotation du disque car celui-ci est encore trop petit, mais l'intensité du tourbillon diminue grandement. Pour l/d = 4/28 (Fig. 5.3b), il n'existe plus qu'une seule cellule dans la demi-cavité et son sens de rotation est compatible avec les directions du fluide imposées par l'extrémité des cylindres d'une part et la rotation du disque d'autre part. La perturbation créée par la présence du disque est suffisante pour désorganiser le système originel. L'oeil de la cellule est décentré vers la paroi d'extrémité, ce qui signifie que les forces de viscosité à la paroi sont prédominantes par rapport aux forces d'inertie générées par la rotation du disque. Si on prend un disque de longueur plus grande, il se développe un deuxième oeil à la cellule principale, décentré vers le disque, voir figures 5.4a et 5.4b. Plus le disque est grand, plus cet oeil se développe, au détriment de celui décentré vers la paroi. Quand l/d = 3/4 (Fig. 5.5b), il ne reste plus que celui décentré vers le disque. Ceci s'explique par le fait que les forces d'inertie générées par la rotation du disque au sein du fluide sont devenues plus importantes que les forces de viscosité à la paroi. On remarque également que plus le disque est grand, plus l'intensité du tourbillon s'amplifie, car

le fluide est soumis à des forces centrifuges de plus en plus importantes au voisinage du disque, ce qui accélère la vitesse radiale.

On peut faire également une remarque sur la convergence numérique des résultats, en rappelant qu'ils ont tous été obtenus à partir de conditions initiales au repos. Dans le cas où il n'y a pas de disque, celle-ci est rapidement obtenue, elle ne demande pas beaucoup d'itérations: environ 1000 avec un facteur de relaxation de 0.35. Par contre, pour de petites longueurs de disque, et jusqu'à $l/d = 1/4$, il est plus difficile d'obtenir l'état permanent. Il faut jouer sur le paramètre de relaxation et le nombre d'itérations afin d'obtenir un résultat convenable: on a effectué environ 4000 itérations avec un paramètre de relaxation de 0.20. Si le paramètre de relaxation est trop grand, on observe des oscillations du système. Ce phénomène traduit en fait l'évolution physique de celui-ci. Le disque de faible longueur, introduit une légère perturbation qui est juste suffisante pour déstabiliser l'écoulement de Taylor. Le système a besoin de beaucoup de temps pour atteindre l'état permanent. Par contre, pour un disque de plus grand rayon, la convergence est très facile à obtenir: on peut utiliser un facteur de relaxation assez élevé sans avoir d'oscillations et peu d'itérations suffisent. Ceci s'explique par le fait que la perturbation créée par le disque est le facteur prépondérant à l'établissement de l'écoulement. Le système est géré par la présence du disque. Il pourrait être intéressant dans une prochaine étude de s'attarder sur les phénomènes transitoires de l'écoulement en fonction du rayon du disque.

Résultats pour Re = 200

La Fig. 5.6a montre que pour $Re = 200$ et sans disque, l'écoulement se présente sous forme de deux cellules dans la demi-cavité. Mais maintenant, la taille et l'intensité de chacune d'elles sont pratiquement identiques. Cela signifie que les effets de bord ont une faible influence sur l'écoulement. Les forces d'inertie dues

à la rotation du cylindre prédominent largement sur les forces de viscosité à la paroi.

La Fig. 5.6b montre qu'en présence du disque, l'écoulement évolue vers un système à une seule cellule dans la demi-cavité, même pour un petit disque: l/d = 2/28. L'oeil de la cellule est décentré vers le disque car c'est à cet endroit que les forces d'inertie sont les plus grandes, le fluide étant centrifugé par le disque. Quelleque soit la longueur du disque, la configuration de l'écoulement reste unicellulaire et seul l'intensité de la cellule varie: elle augmente si la longueur du disque augmente.

Pour $Re = 200$, l'écoulement est ainsi entièrement géré par la présence du disque, il n'existe plus, comme pour $Re = 75$, de balancement entre les forces d'inertie et de viscosité pour définir la configuration de l'écoulement en fonction de la dimension du disque.

Résultats pour Re = 100 et $\Gamma = 2$

On a également examiné l'influence du disque sur l'écoulement dans le cas d'un rapport de forme de 2. Pour la vitesse de rotation considérée, et en l'absence du disque, l'écoulement se présente sous forme d'une seule cellule dans la demi-cavité. Le sens de rotation de celle-ci est bien évidement dicté par la condition de non glissement à la paroi inférieure fixe. Aussi, au plan de symétrie du système, le fluide se dirige vers l'extérieur. Comme ceci est compatible avec la condition résultant de la présence du disque, l'allure de l'écoulement n'est pratiquement pas modifiée par celui-ci. Seule l'intensité du tourbillon augmente si la longueur du disque augmente.

Notons que pour toutes ces simulations, la convergence a été facile à obtenir.

Description des champs de température

On considère ici qu'il existe une génération interne de chaleur uniforme dans toute la cavité ($S_T = 1$). Les parois verticales des cylindres sont à température constante T_w, et les parois d'extrémités et le disque sont adiabatiques. Le champ de température est calculé grâce à l'équation de convection-diffusion de la chaleur.

Résultats pour Re = 75 et $\Gamma = 4$

Dans ce cas, c'est le phénomène de conduction de la chaleur à l'intérieur du fluide qui prévaut: les isothermes se rapprochent de lignes verticales parallèles. La Fig. 5.2a montre qu'en l'absence de disque, la chaleur est quand même légèrement convectée par les deux cellules. La convection a pour effet de dissiper la chaleur suivant le sens de rotation de cellules. La température locale diminue et les lignes verticales parallèles sont déformées dans le sens de l'écoulement.

Pour l/d = 3/28, la Fig. 5.3a montre que la convection reste encore très faible: les gradients de vitesse sont très faibles et l'intensité de la cellule n'est pas très importante. Les isothermes sont pratiquement des lignes verticales. Pour l/d = 5/28 (Fig. 5.4a), l'intensité de la cellule s'amplifie et la formation de l'oeil décentré vers le disque crée de forts gradients de vitesse proche du disque. La chaleur se trouve convectée à cet endroit: il s'y forme un léger point chaud. Par contre, dans le reste de la cellule, les gradients de vitesse sont faibles et la chaleur n'est pratiquement pas convectée.

La Fig. 5.5b montre que pour l/d = 3/4, il existe une zone de forts gradients de vitesse et de grande intensité de vitesse radiale au niveau du disque qui convecte bien la chaleur. On peut observer que le développement du point chaud au niveau de l'oeil de la cellule s'intensifie. Par contre, vers la paroi fixe, les gradients sont faibles et le phénomène de conduction prédomine.

Résultats pour Re = 200 et $\Gamma = 4$

En l'absence de disque (Fig. 5.6a), le phénomène de convection est très intense: il se forme clairement deux points chauds à l'emplacement des yeux des cellules. On peut également remarquer que la température maximale de l'écoulement est plus faible que dans les autres cas. La chaleur est bien dissipée par convection.

Les figures 5.6b et 5.7b montrent que pour $l/d = 2/28$ et $1/2$, le phénomène de convection reste intense à proximité du disque car les gradients de vitesse sont forts: il existe un important point chaud à l'emplacement du coeur de la cellule. Par contre, le phénomène prédominant le transfert de chaleur dans le reste de la cellule est la conduction: les isothermes retrouvent l'allure de lignes parallèles. La température maximale est la plus grande dans le cas où $l/d = 2/28$, ce qui signifie que le transfert de chaleur est moins efficace que pour $l/d = 1/2$. Pour ce nombre de Reynolds et ce rapport de forme, l'écoulement perturbé par un petit disque s'avère défavorable au transfert de chaleur. Par contre, si la longueur du disque est suffisamment grande, l'intensité tourbillonaire imposé par celui-ci à l'écoulement permet d'obtenir un transfert de chaleur proche au cas sans disque. Si le disque peut favoriser le transfert de chaleur par convection dans certaines zones de la cavité (i. e. proche du disque pour $l/d = 8/28$), il se crée des zone où c'est la conduction qui prévaut (i. e. proche des parois d'extrémité) car les gradients de vitesse y sont faibles.

Résultats pour Re = 100 et $\Gamma = 2$

Dans ce cas, la convection est amplifiée quand on augmente la longueur du disque car l'intensité de la cellule augmente. Le phénomène de convection prévaut globalement sur le transfert de chaleur dans la cavité, voir Fig. 5.8.

Flux de chaleur à travers les parois

Ces observations sur les différentes configurations des isothermes permettent de

tirer quelques conclusions sur les phénomènes de transfert de chaleur entre le fluide et les parois verticales des cylindres.

Dans le cas où ce transfert ne se fait que par conduction, on sait que les isothermes sont des lignes verticales parallèles, ce qui signifie que le flux de chaleur evacué par les parois est constant sur toute la longueur des cylindres. Par contre, quand le phénomène de convection intervient, ces isothermes ne sont plus parallèles, ce qui fait que le flux de chaleur à travers les parois verticales devient non uniforme. Plus le gradient de température dans la direction radiale (normale à la paroi) est fort, plus le flux évacué est important. Pour $Re = 200$, on peut clairement mettre en évidence les zones où ce transfert de chaleur prédomine: en l'absence de disque celui ci se fait vers le milieu de la demi-cavité, sur le cylindre extérieur, alors que pour l/d = 2/28 (Fig. 5.6b) et 1/2 (Fig. 5.7b), il s'effectue toujours sur le cylindre extérieur mais au niveau du disque. Ces zones correspondent aux endroits où la rotation de l'écoulement est intense et où le fluide se dirige vers l'extérieur. Pour $Re = 75$, seul le cas où l/d = 3/4 (Fig. 5.5b) met en évidence une zone où les gradients de température sont plus importants: au niveau du disque, du côté du cylindre extérieur. C'est précisement une zone où l'intensité de l'écoulement est forte et où le fluide se dirige vers l'extérieur de la cavité. Dans les autres cas, les gradients de vitesse n'engendrent pas une intensité de l'écoulement suffisante pour favoriser la convection.

Globalement, quand le phénomène de convection est important, on remarque que la température maximale du fluide dans la cavité est plus faible qu'avec la condution pure. Grâce à la convection, on évacue beaucoup plus facilement la chaleur générée au sein du fluide. Si le coefficient local de transfert de chaleur n'est pas constant le long de la paroi, contrairement au cas de conduction pure, le coefficient global de transfert de chaleur est plus important que pour la conduction pure.

Effets de la convection naturelle

Pour étudier l'effet de la convection naturelle, on a effectué une série de simulations pour $Re = 75$, $\Gamma = 4$, et $10^4 \leq Gr \leq 10^5$.

Pour cette valeur de Re, sans disque et en l'absence de convection naturelle ($Gr = 0$), l'écoulement se présente sous forme de 4 cellules dans la cavité, c'est-à-dire, 2 dans la demi-cavité, comme on l'a déjà constaté précédemment. On considère ensuite l'effet de la convection naturelle pour $Gr > 10^4$.

Pour $Re = 75$, l/d = 28/28 et $Gr = 10^4$ on trouve la convergence sans problème. Le renforcement de l'état convectif, lorsque l'on augmente Gr, est mis en évidence sur les figures 5.9 et 5.10. Pour $Gr = 10^4$, la convection thermique est faible par rapport aux effets de la rotation et la solution thermique est du type essentiellement pseudo-conductif. Pour $Gr = 5.5 \times 10^4$, la convection thermique commence à l'emporter sur les forces centrifuges. La structure unicellulaire devient maintenant bicellulaire, avec le fluide descendant le long des parois intérieure et extérieure, respectivement (voir figure 5.9b). Lorsque $Gr = 6 \times 10^4$ on observe une faible oscillation amortie. Pour $Gr \geq 7.5 \times 10^4$ on observe un écoulement périodique bien établi (voir figures 5.11 - 5.13).

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le phénomène de convection entre deux cylindres concentriques en présence d'un disque en rotation avec le cylindre intérieur. On a étudié en détail l'influence des différents paramètres sur l'écoulement notamment le nombre de Reynolds, le rapport de forme, la longueur du disque et le nombre de Grashof.

L'influence du disque dépendra essentiellement du rapport de forme et du nombre de Reynolds. Si l'écoulement non perturbé (sans disque) est compatible avec la présence de celui-ci (les cellules d'extrémités et voisines du plan de symétrie tournant dans le bons sens), les caractéristiques générales de l'écoulement ne seront que peu modifiées par la présence du disque. C'est le cas pour $\Gamma = 2$ et $Re = 100$. Dans les autres cas ($\Gamma = 4$), le sens de rotation de la cellule voisine du plan de symétrie n'est pas compatible avec la présence du disque. L'écoulement se trouve alors très perturbé. Si la longueur du disque est suffisamment grande, i. e. $l/d = 2/28$ pour $Re = 200$ et $l/d = 3/4$ quand $Re = 75$, les caractéristiques de l'écoulement sont dictées par celui-ci: il se forme une seule cellule, de grande intensité et dont le coeur est décentré vers le disque, ce qui crée une zone à forts gradients de vitesse. Ces caractéristiques peuvent avoir une grande influence sur le transfert de chaleur.

Quant au phénomène de convection mixte, on a trouvé un nombre de Grashof critique pour un Re fixe. L'écoulement devient oscillant si $Gr > 6 \times 10^4$.

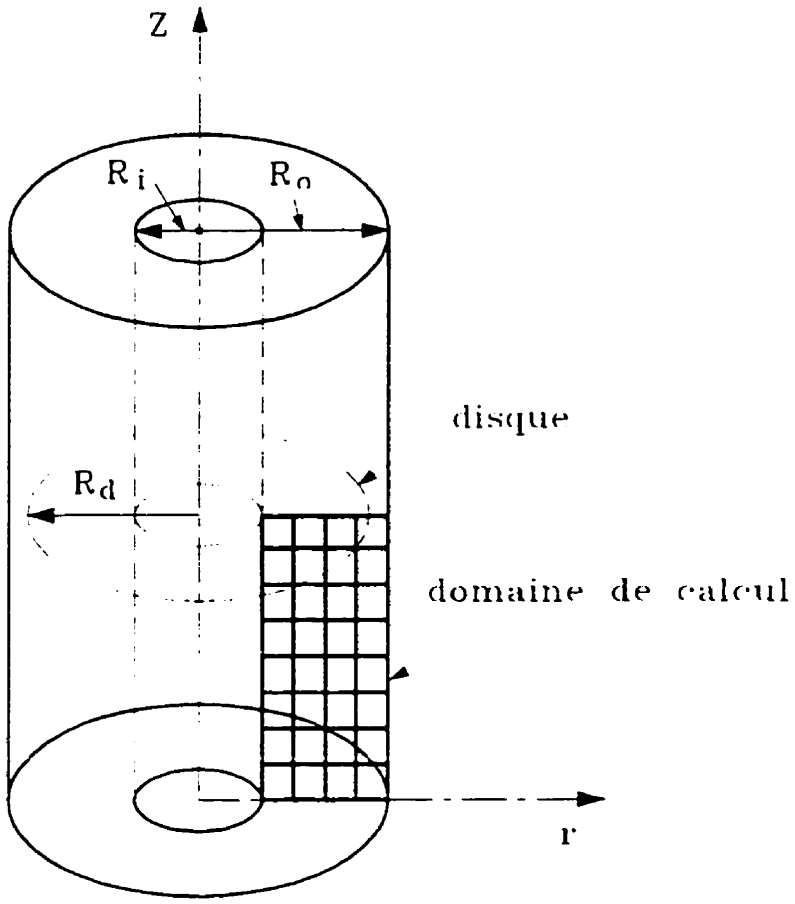


Figure 5.1: Schéma de définition

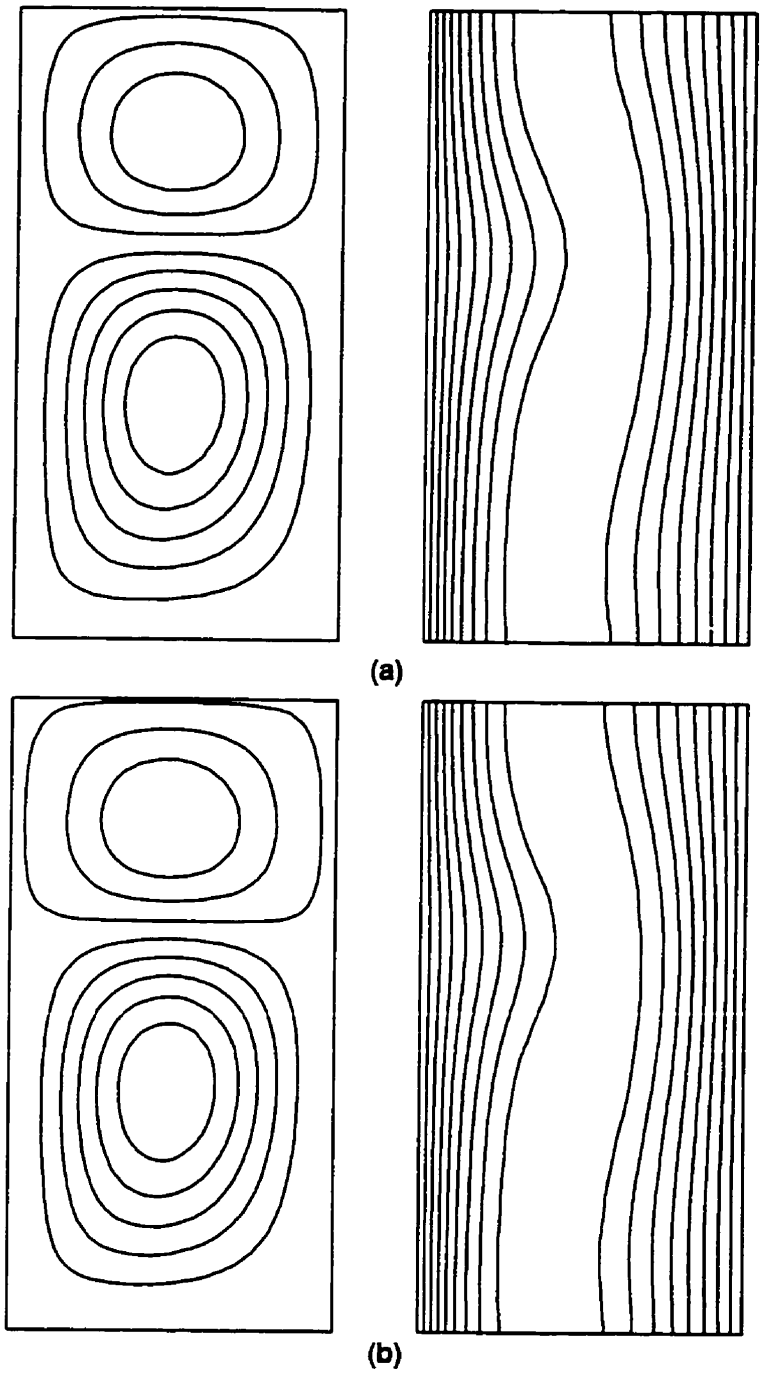


Figure 5.2: Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) $l/d = 0$; (b) $l/d = 2/28$.

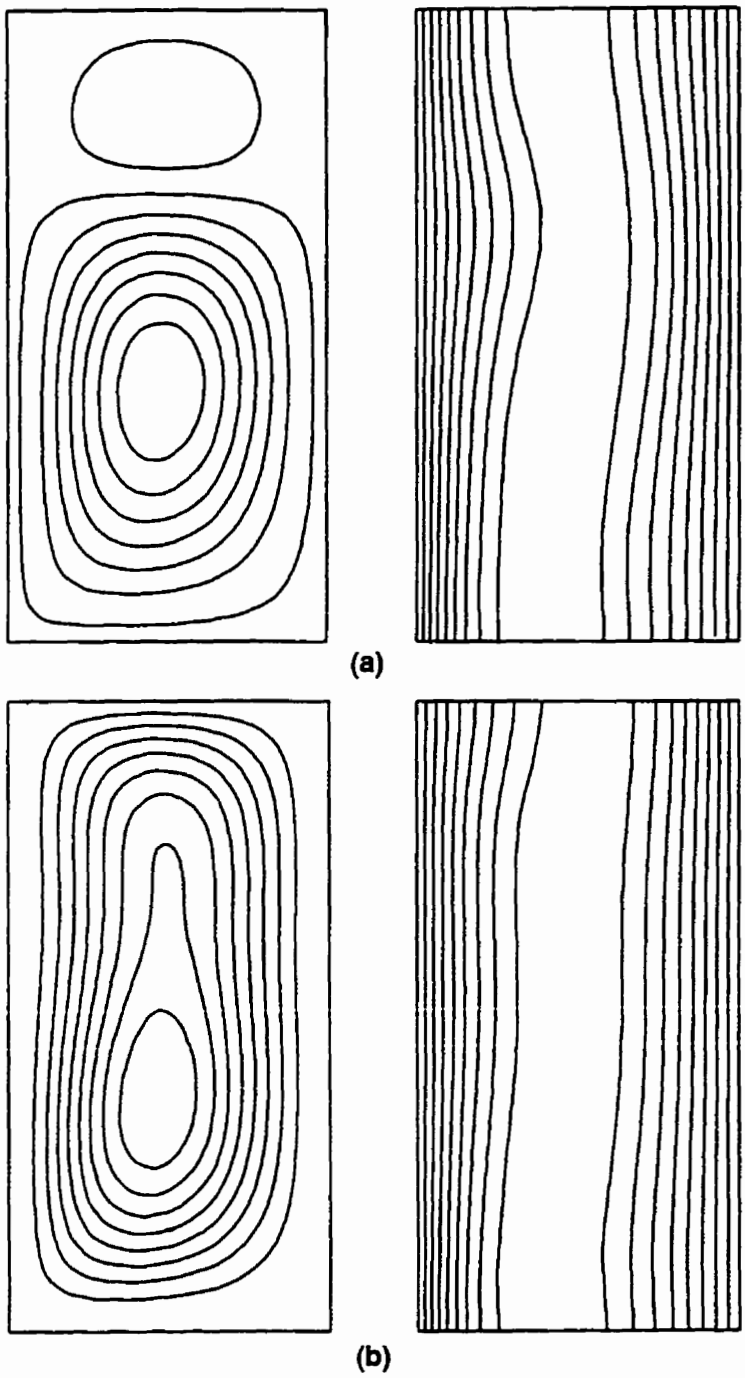


Figure 5.3: Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) $l/d = 3/28$; (b) $l/d = 4/28$.

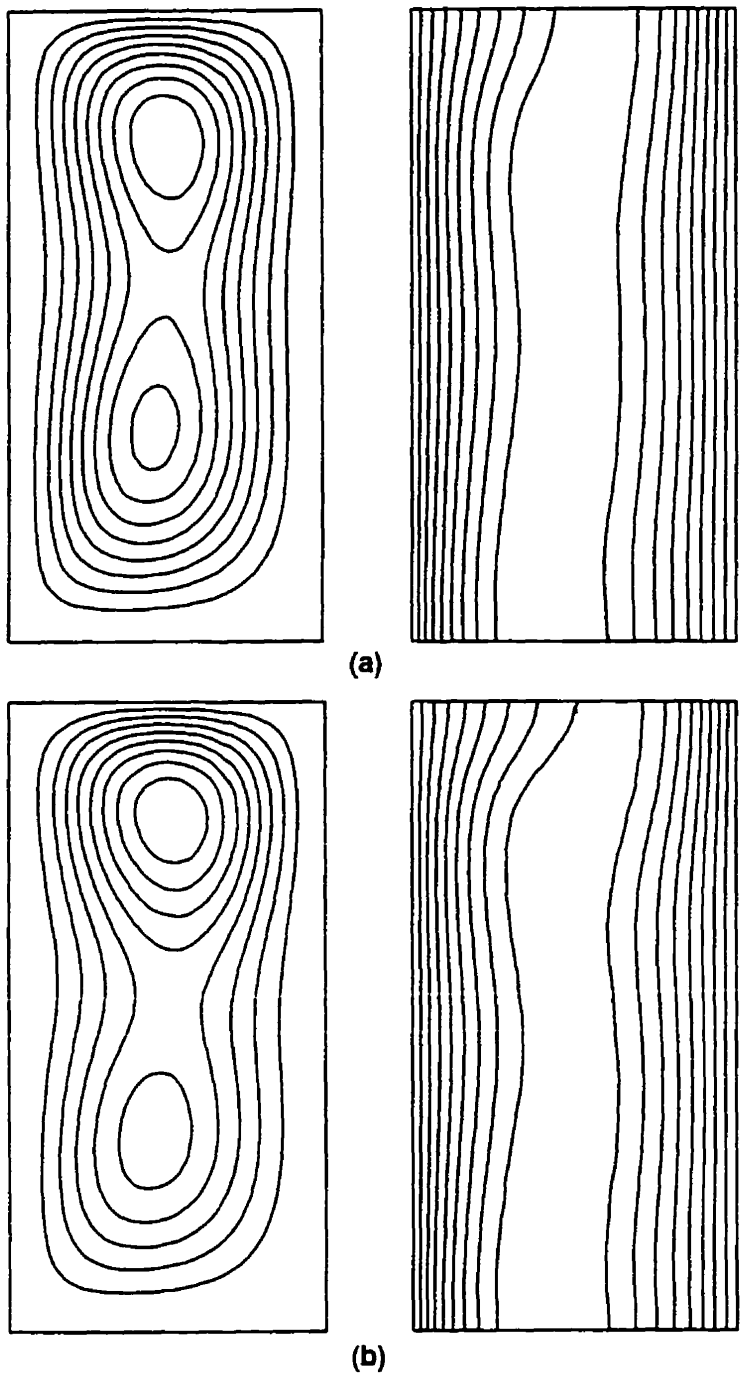


Figure 5.4: Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) $l/d = 5/28$; (b) $l/d = 7/28$.

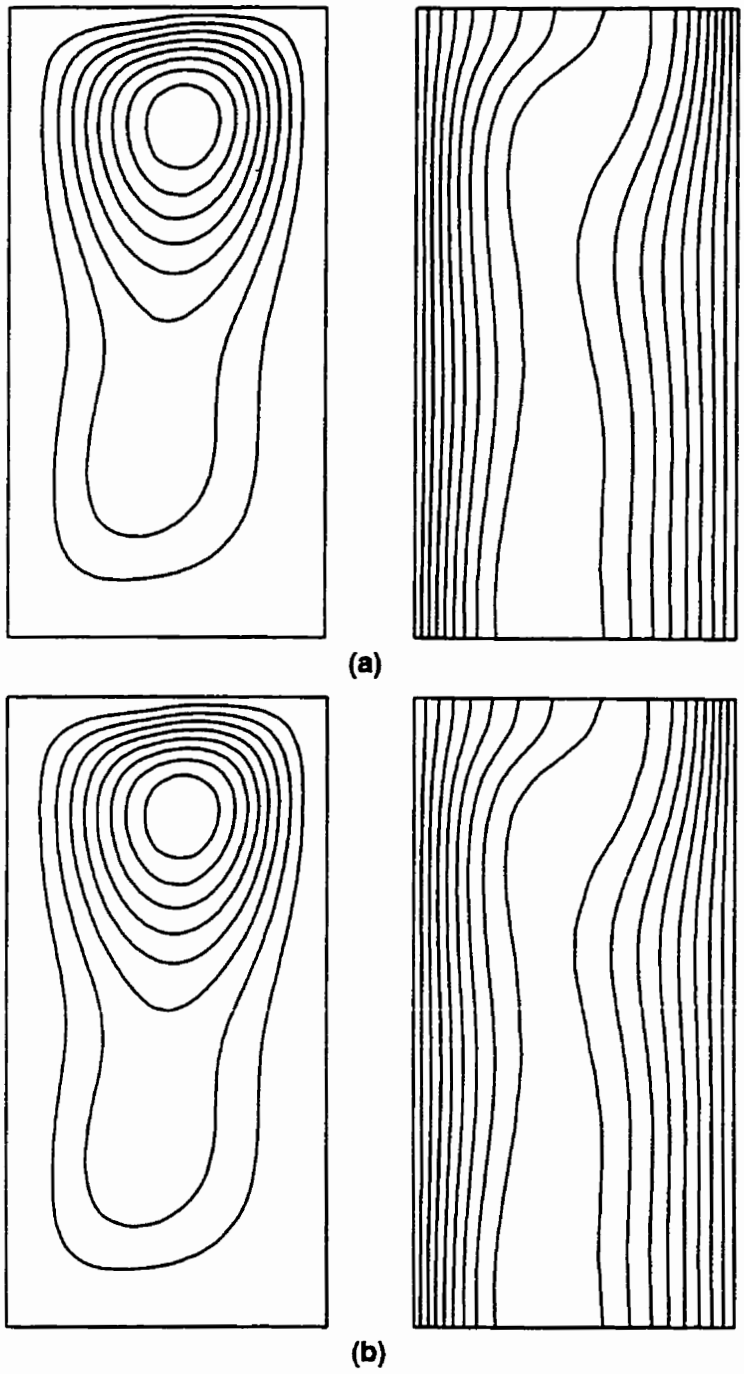


Figure 5.5: Lignes de courant et isothermes pour Re = 75 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 14/28; (b) l/d = 21/28.

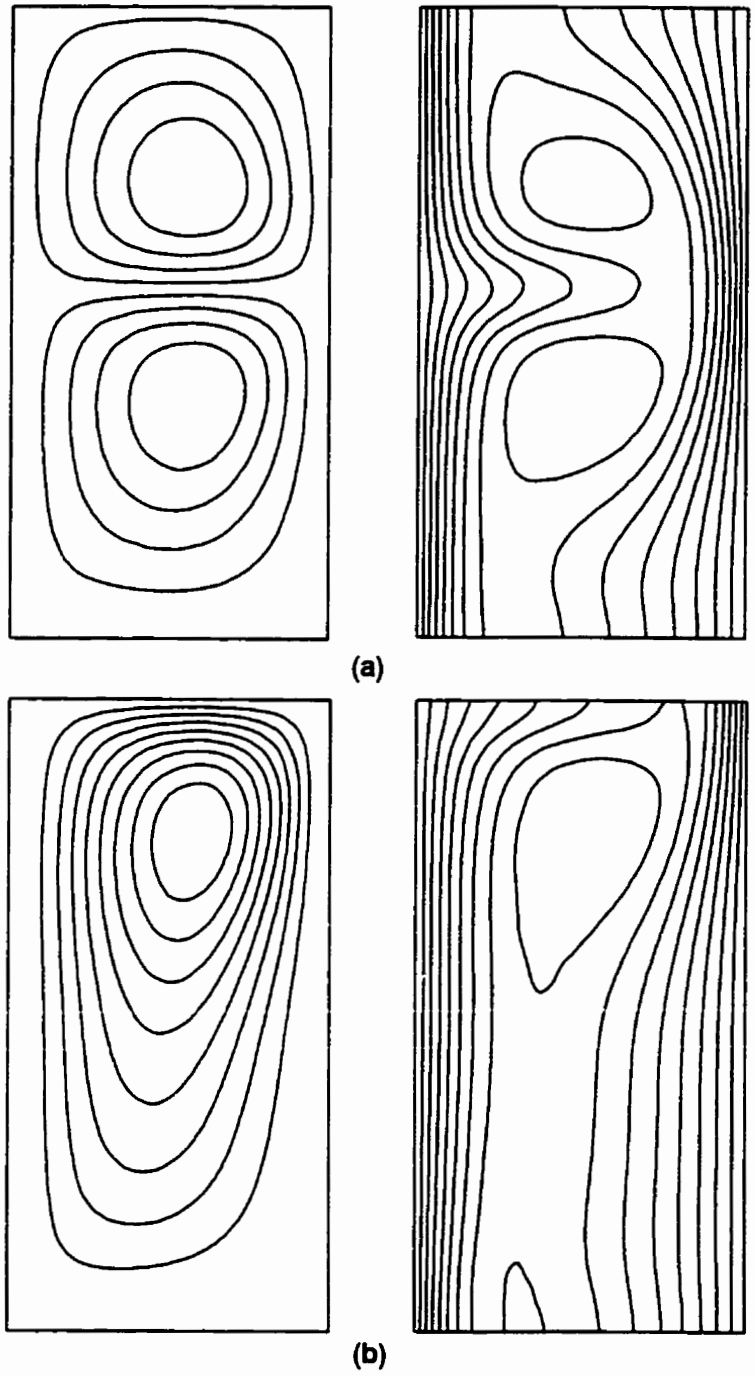


Figure 5.6: Lignes de courant et isothermes pour Re = 200 et $\Gamma = 4$: (a) $l/d = 0$; (b) $l/d = 2/28$.

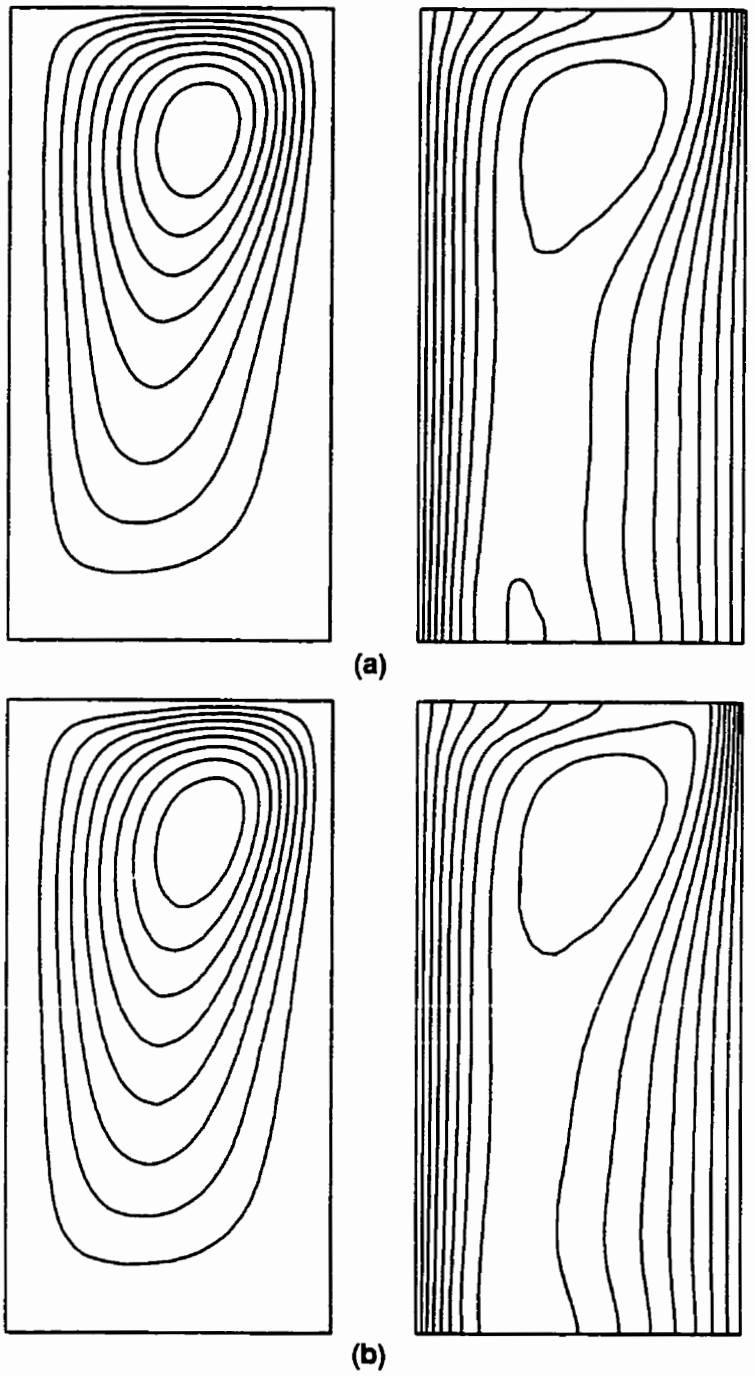


Figure 5.7: Lignes de courant et isothermes pour Re = 200 et $\Gamma = 4$: (a) l/d = 8/28; (b) l/d = 14/28.

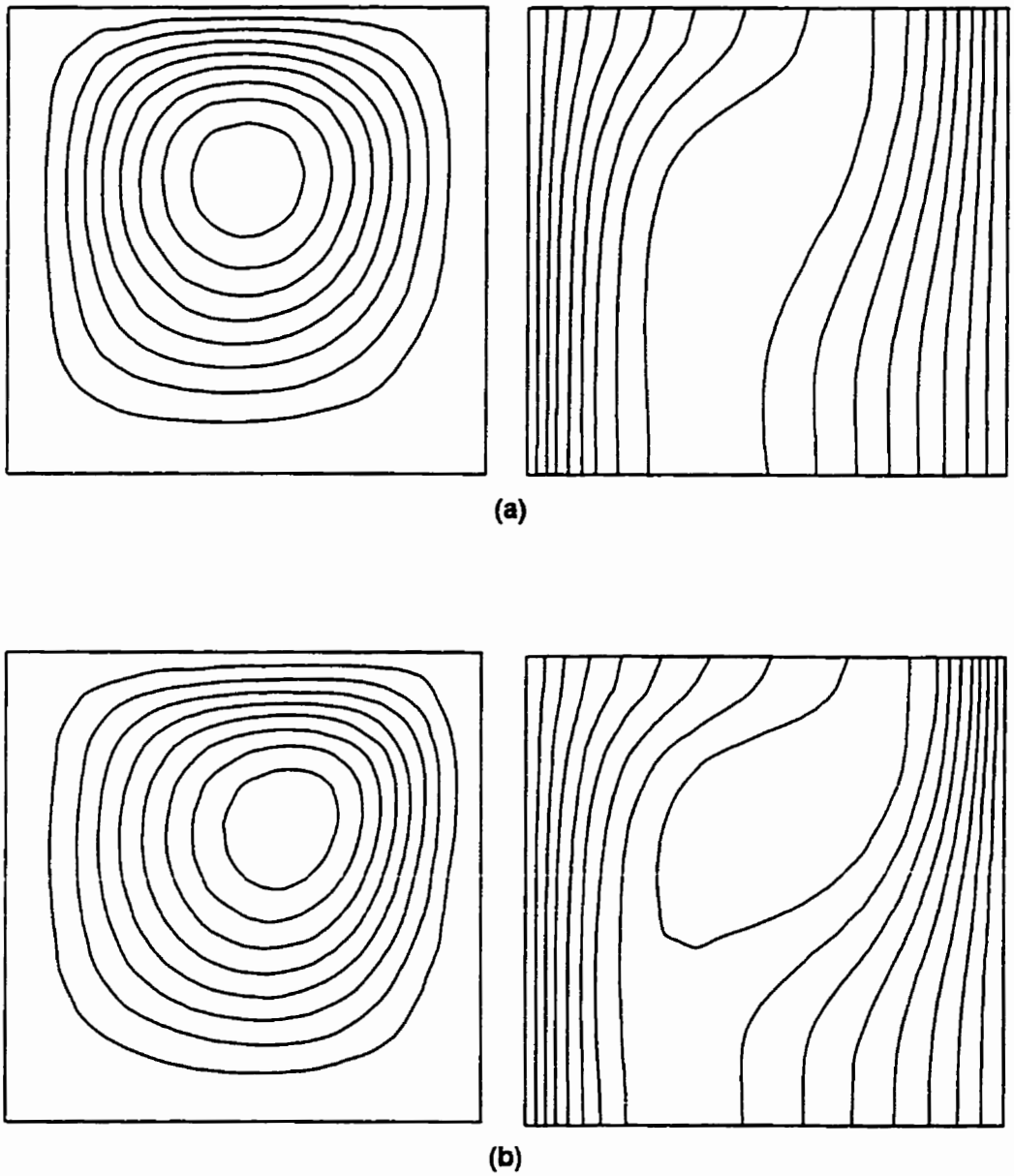


Figure 5.8: Lignes de courant et isothermes pour Re = 100 et $\Gamma = 2$: (a) $l/d = 0$; (b) $l/d = 2/3$.

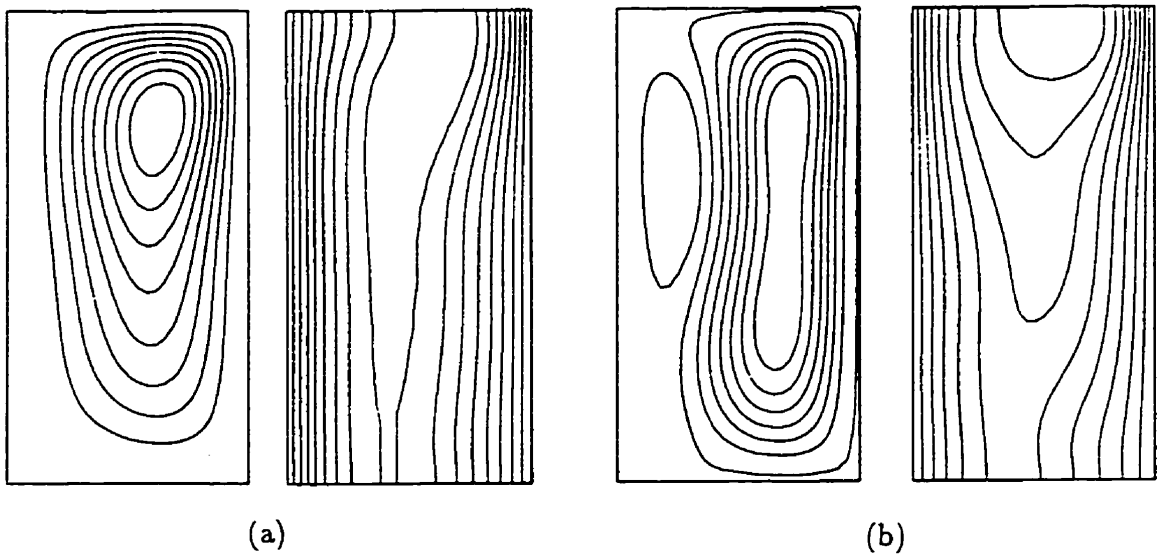


Figure 5.9: Lignes de courant et isothermes pour $Re = 75$: (a) l/d = 28/28, $Gr = 10^4$; (b) l/d = 28/28, $Gr = 5.5 \times 10^4$.

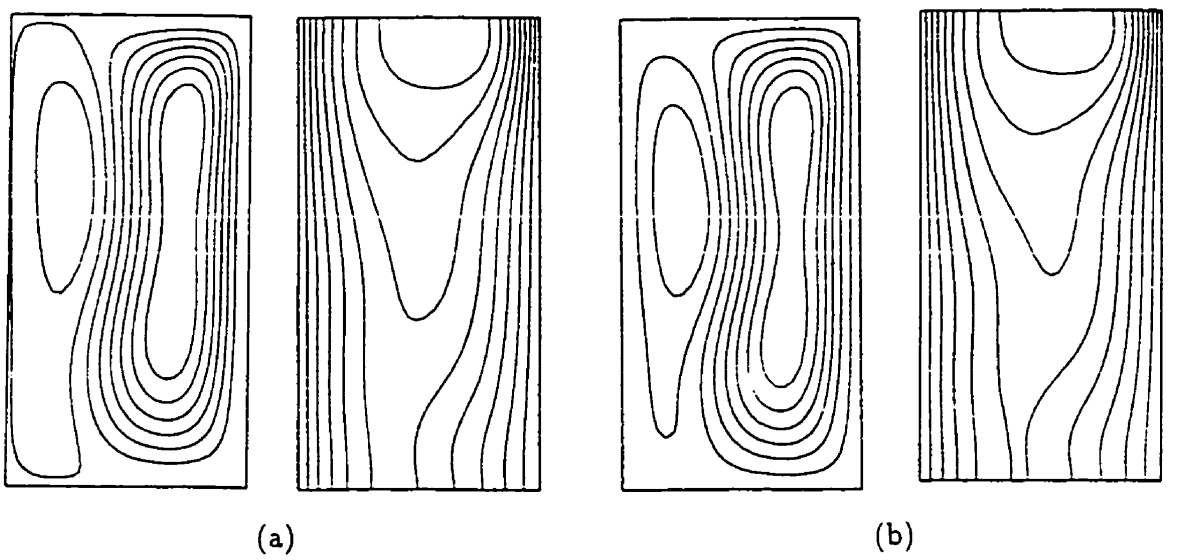
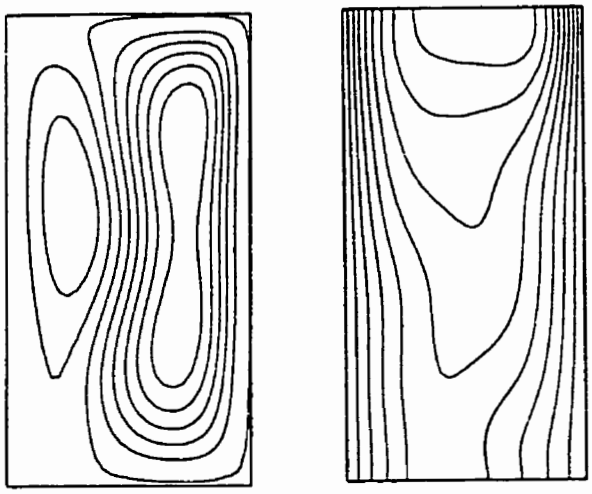
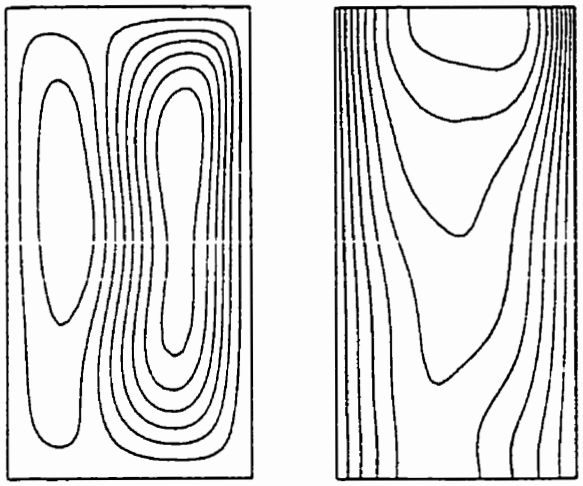


Figure 5.10: Lignes de courant et isothermes pour $Re = 75$: (a) l/d = 28/28, $Gr = 6 \times 10^4$; (b) l/d = 28/28, $Gr = 7.5 \times 10^4$.



a) $\Delta t = 0.5$



b) $\Delta t = 2.0$

Figure 5.11: Lignes de courant et isothermes pour $Re = 75$, l/d = 28/28, $Gr = 10^5$ pour différents pas de temps.

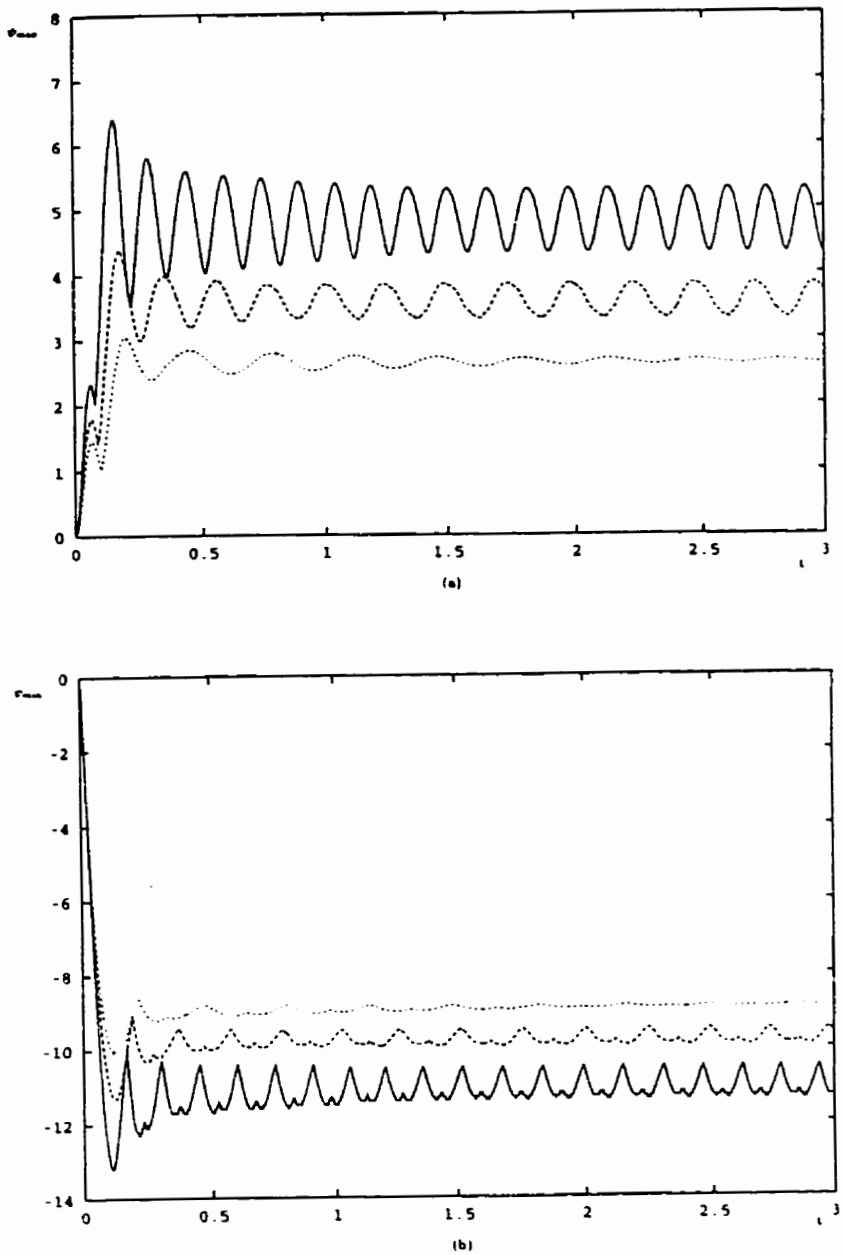


Figure 5.12: Solution périodique pour $Re = 75$, $Gr = 6 \times 10^4$, 7.5×10^4, 10^5, l/d = 28/28, (a)ψ_{max} vs. t; (b)ψ_{min} vs t.

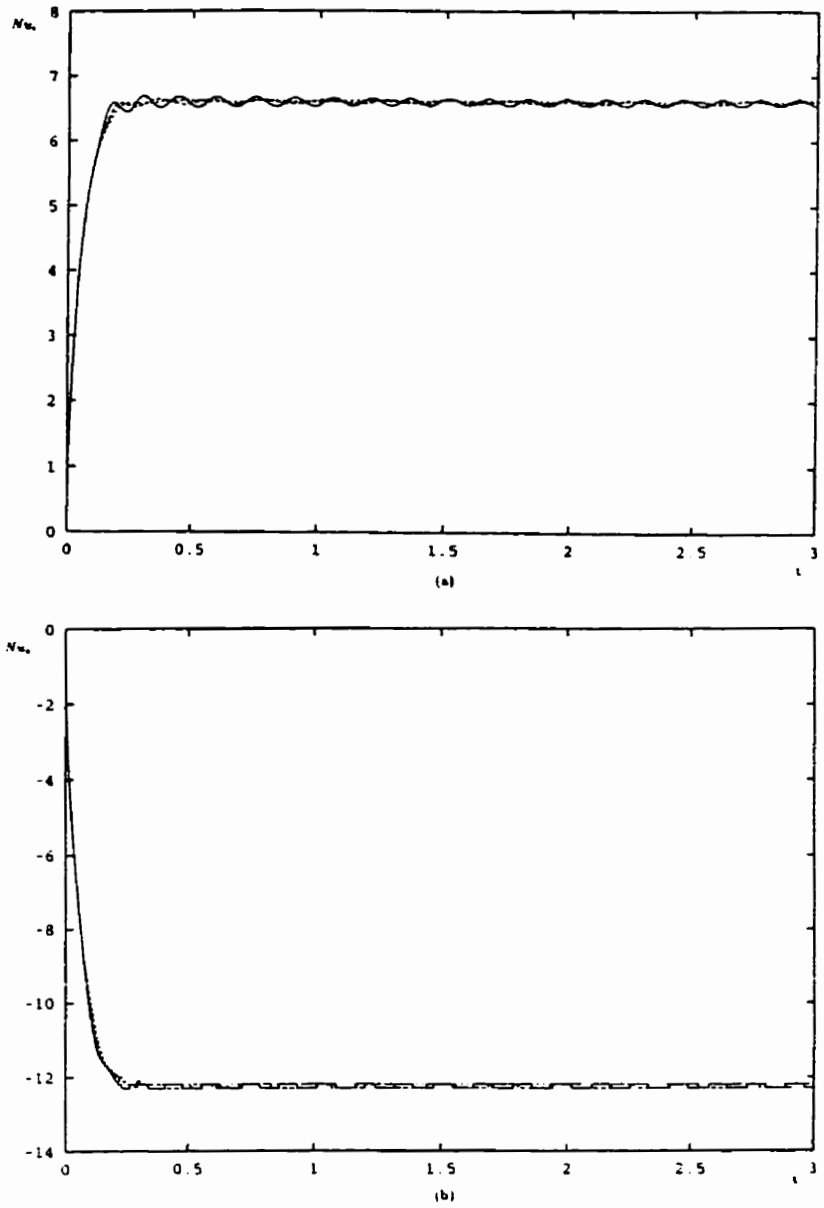


Figure 5.13: Solution périodique pour $Re = 75$, $Gr = 6 \times 10^4$, 7.5×10^4, 10^5, l/d = 28/28, (a)Nu_i vs t; (b)Nu_e vs t.

Chapitre 6

Convection dans un système rotor-stator

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de convection naturelle et forcée, dans un système rotatif composé d'un rotor et un stator tel que présenté à la figure 6.1. L'étude du système peut être divisée en deux parties. Dans la première, on considère un espace annulaire supérieur en rotation. Le cylindre intérieur et la paroi inférieure tournent à une vitesse angulaire constante $\Omega^i = \Omega^b$. Dans la deuxième partie, on considère l'espace annulaire inférieur. Le cylindre intérieur et la paroi supérieure tournent à une vitesse angulaire constante $\Omega^i = \Omega^t$. Dans les deux cas le cylindre extérieur (stator) demeure fixe.

L'intensité relative de l'écoulement forcé, caractérisée par le nombre de Reynolds Re, ainsi que les effets de la force de pousée, caractérisés par le nombre de Rayleigh, Ra, sont étudiés pour des larges plages de Re, Ra et de rapport de rayons R. Le développement du régime oscillatoire est aussi présenté dans cette étude.

6.2 Description du problème

Les équations qui régissent la convection, en utilisant la formulation vorticité-fonction de courant, ont été définies au chapitre 3 (équations (3.7) à (3.10)) de même que la méthodologie de calcul.

Les conditions aux frontières du système sont les suivantes: le stator (cylindre extérieur et ses extrémités) est maintenu à une température constante. Le rotor (cylindre intérieur et ses extrémités) dégage un flux de chaleur uniforme et constant. Le rotor tourne avec une vitesse angulaire constante correspondant à un nombre de Reynolds Re tandis que le stator est fixe.

Les conditions dynamiques et thermiques sont resumés dans le tableau 6.1 où H représente dans ce cas l'espacement entre les extrémités du stator et rotor.

Tableau 6.1: Conditions aux limites dynamiques et thermiques.

cas	frontière				
	$r = 1$	$r = R$	$z = 0$	$z = H$	
S	$U = Rer^2$	$U = 0$	$U = Rer^2$	$U = 0$	$S_T = 0$
	$Q = +1$	$T = 0$	$Q = +1$	$T = 0$	
I	$U = Rer^2$	$U = 0$	$U = 0$	$U = Rer^2$	$S_T = 0$
	$Q = +1$	$T = 0$	$T = 0$	$Q = -1$	

A partir des équations gouvernantes, des conditions aux limites, et de la géometrie de la cavité, il apparaît que le problème est gouverné par quatre paramètres adimensionnels: le rapport de forme Γ, le nombre de Reynolds Re, le nombre de Rayleigh Ra et le nombre de Prandtl Pr.

6.3 Résultats et discussion

La plupart des études sur la convection ont été faites pour les cavités cylindriques où les frontières sont à températures constantes (*Hessami et al.*, 1987). Cependant, ce modèle ne représente pas adéquatement les cas pratiques où les frontières sont soumises à un flux de chaleur constant (*Kimura et Bejan*, 1984; *Lavoie et al.*, 1986).

On présente dans ce chapitre les résultats numériques pour le calcul de l'écoulement et du transfert de chaleur avec condition de flux de chaleur constant, sur les parois du rotor tandis que le stator est maintenu à une température constante. Selon les valeurs des paramètres Ra et Re, on choisit des pas de temps variant entre 10^{-3} et 5×10^{-6} et un maillage de 201×51 pour bien traiter les phénomène de l'instabilité oscillatoire avec des grands Ra. Les champs de vitesses et de température ont été déterminés pour une large gamme des paramètres: $10 < Ra < 10^7$, $10 < Re < 900$, $R = 2, 3, 4, 5$, $\Gamma = 0.25$ et 0.5, et $Pr = 0.7$.

Structure de l'écoulement

Espace annulaire supérieur

Les principales forces qui déterminent la structure de l'écoulement dans l'espace annulaire sont: (1) la force de gravité (poussée d'Archimède) [$Gr \dfrac{\partial T}{\partial r}$ dans l'équation (3.8)] qui cause la monté du fluide le long du cylindre intérieur et son déplacement vers l'extérieur le long de la surface supérieure, et (2) la force centrifuge [$\dfrac{2U}{r^3} \dfrac{\partial U}{\partial z}$ dans l'équation (3.8)] qui pousse le fluide le long de la surface inférieure en rotation vers l'extérieur, créant ainsi un mouvement opposé. À cause de l'effet opposé de ces forces, si l'un est plus intense que l'autre, un écoulement unicellulaire sera généré. Cependant, quand ces forces sont comparables, un écoulement multicellulaire peut

se développer comme montré dans les figures 6.2 et 6.3 où l'axe de l'espace annulaire est localisé du côté gauche de chaque figure.

L'influence de la variation de Ra sur les lignes de courant et des isothermes pour Γ, R et Re constants est montré dans les Fig. (6.2a,b,c). Une augmentation de Ra contrebalance l'influence des forces centrifuges dans la cavité. La rotation de la cellule dans le sens trigonométrique (force centrifuge dominante) est inversée (force de poussée dominante) en passant par un régime d'écoulement multicellulaire. Les valeurs maximales et minimales des fonctions de courant pour différents cas, illustrées dans les figures, montrent que la cellule centrifuge originale de la Fig. (6.2a) perd de la force au fur et à mesure que la cellule de convection naturelle se développe. Il en résulte une cellule de convection naturelle (Fig. 6.2c) tournant dans le sens opposé à la cellule de convection forcée de la Fig. (6.2a).

La comparaison des lignes de courant montrées dans ces figures montre bien l'influence de la convection naturelle à mesure que Ra change de 10^4 à 10^6. La diminution des valeurs de la fonction de courant est due aux effets opposés des forces centrifuges et de pousée d'Archimèmede, ce qui se manifeste aussi dans le temps nécessaire pour atteindre la convergence; le cas montré à la Fig. 6.2c a demandé plus d'itérations que les autres cas.

La Fig. 6.3 présente l'effet du rapport de rayons R sur le développement de l'écoulement pour $Re = 100$, $Ra = 5 \times 10^5$ et $2 \leq R \leq 5$. Sur la figure 6.3a, on observe que la cellule positive du centre tourne dans le sens trigonométrique (force centrifuge) alors que les cellules négatives des extrémités de la cavité tournent dans le sens inverse. Ce phénomène est du aux forces de poussée générées par le gradient de température horizontal présent aux extrémités de la cavité, c'est-à-dire, par la chaleur transmise du cylindre intérieur chaud vers la paroi supérieure froide, et de la paroi inférieure chaude vers le cylindre extérieur froid. La cellule près du cylindre

extérieur est plus intense que les deux autres. Si R augmente, la différence relative entre les deux cellules des extrémités augmente au bénéfice de la cellule près du cylindre extérieur.

Lorsque Re augmente, les cellules tournant dans le sens horaire disparaissent et la force centrifuge devient dominante (figure 6.4).

Espace annulaire inférieur

Contrairement à l'espace annulaire supérieur, les forces centrifuges et de poussée s'additionnent, et on trouve un écoulement plus intense dans le sens horaire caractérisé par une ou deux cellules. Le champs d'écoulement à deux cellules est trouvé pour des valeurs très faibles du nombre de Reynolds. Notons que dans l'écoulement à deux cellules montré dans la figure 6.5a, les deux cellules tournent dans le même sens (horaire), créeant ainsi un mouvement lent du fluide situé entre les deux cellules. Cependant, pour des valeurs plus grandes de Re, les deux cellules se joignent pour former une seule cellule. La figure 6.5 montre les lignes de courant et les isothermes pour les cas étudiés ici.

L'instabilité oscillatoire

Les différents pas de temps Δt de 10^{-5}, 5×10^{-5}, 10^{-6} et 5×10^{-6} ont été testés. Les résultats obtenus ont été quasiment les mêmes mais avec un certain décalage dans le temps (voir Fig. 6.6). Le pas de temps $\Delta t = 5 \times 10^{-5}$ a été retenu pour les résultats presentés dans cette section.

On a vu auparavant l'absence d'oscillations périodiques pour Re et Ra modérés, cependant, celles-ci se manifestent clairement en augmentant Re et Ra. En effet, si on considère l'espace annulaire supérieur pour Re=900, le régime stationnaire est atteint pour $Ra = 10^6$. En revanche lorsque $Re = 900$ et $Ra = 10^7$, nous observons

des oscillations, caractérisées par des variations cycliques en fonction du temps. Les figures 6.7 et 6.8 présentent les lignes de courant et les isothermes obtenues à $Re = 900$ et $Ra = 10^7$ tout au long d'une période.

La figure 6.7a montre une cellule négative dans la partie gauche de la cavité et une cellule positive dans la partie droite. La cellule négative augmente en importance au temps t = 0.075. On observe ensuite l'apparition d'un écoulement à 4 cellules (figure 6.7c). Un processus inverse est engagé dans l'autre moité du cycle pour permettre à nouveau l'apparition d'un écoulement à 2 cellules (figure 6.7h) à la fin du cycle d'évolution. Le fluide est donc animé d'un mouvement de 2 à 4 cellules, en passant par une succession d'états intermédiaires correspondant à ceux décrits entre les figures 6*a* et 6*h*. Ces figures nous montrent qu'au cours d'une période d'oscillation de l'écoulement, une des cellules grossit au détriment de l'autre jusqu'à une certaine limite, pour s'affaiblir ensuite jusqu'à ce que l'autre limite soit atteinte et ainsi de suite.

Transfert de chaleur

Le taux de transfert de chaleur à travers le cylindre extérieur correspond au nombre de Nusselt moyen défini par:

$$Nu = \int_o^H \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} dz \tag{6.1}$$

tandis que le transfert de chaleur à travers les parois horizontales est donné par:

$$Nu = \int_1^R \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0,H} r dr \tag{6.2}$$

Les variations du nombre de Nusselt moyen sur les parois supérieure et droite en fonction de Ra et de R, sont montrées sur la Fig. 6.9 et 6.10 dans lesquelles les

régimes permanents sont atteints.

La Fig. 6.11 montre l'évolution du nombre de Nusselt moyen sur la paroi supérieure de la cavité Nu_t, ainsi que la valeur minimale de la fonction de courant ψ_{min} au cours du temps pour $Ra = 10^7$ et $Re = 900$. On peut voir que l'évolution de Nu_t, est comparable à celle de ψ_{min}. En effet, ψ_{min} et Nu_t atteignent leurs valeurs maximums et minimums au même instant. En examinant l'évolution de Nu en même temps que les lignes de courant et les isothermes des Fig. 6.7 et 6.8, on peut remarquer que le nombre de Nusselt et les lignes de courant atteignent leurs valeur minimale lorsque l'écoulement devient quadri-cellulaire.

6.4 Conclusion

L'étude de l'écoulement et du transfert de chaleur résultant de la convection naturelle et forcée dans une cavité cylindrique en rotation a permis d'aboutir aux conclusions suivantes:

- Des solutions permanentes ainsi que des solutions oscillantes sont obtenues pour ce type de géometrie soumise aux conditions de flux de chaleur.

- On a trouvé que les lignes de courant dans l'espace annulaire supérieur sont dépendent fortement de l'intensité relative des forces de poussée et de rotation: si l'une des forces est dominante, on trouve un écoulement unicellulaire; autrement, la structure de l'écoulement est multi-cellulaire. Pour de faibles Ra et de grands Re, les forces centrifuges sont dominantes et on trouve un écoulement dans le sens trigonométrique. Pour des grands Ra on trouve un écoulement dans le sens horaire dominé par les forces de poussée.

- Pour l'espace annulaire inférieur, les deux forces (centrifuge et de poussée) génèrent un écoulement unicellulaire ou bicellulaire, toujours dans le sens trigonométrique.

- Le régime d'écoulement oscillant montre que Nu_t et ψ_{min} sont généralement en phase.

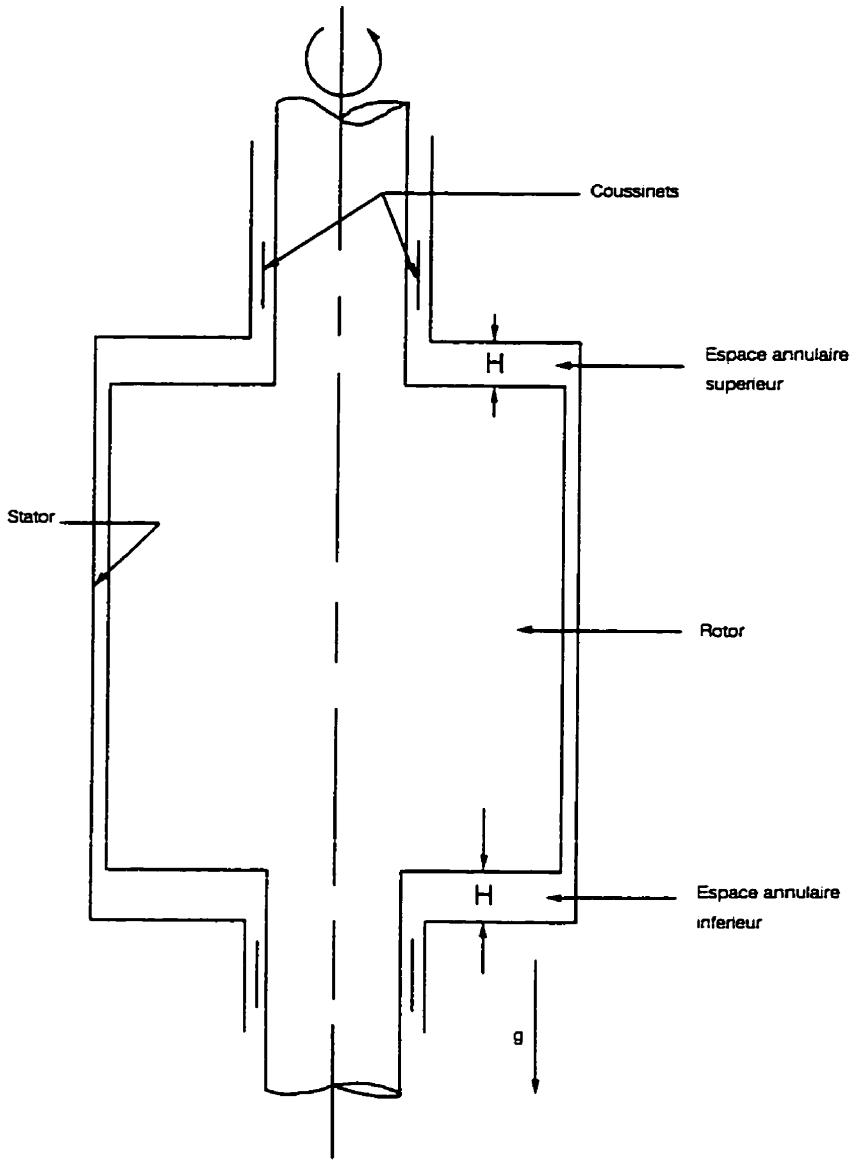
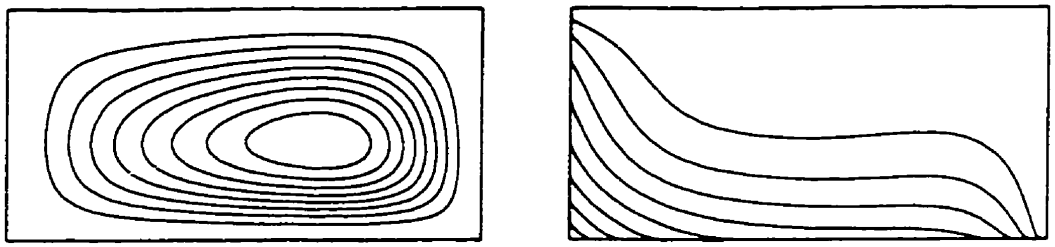
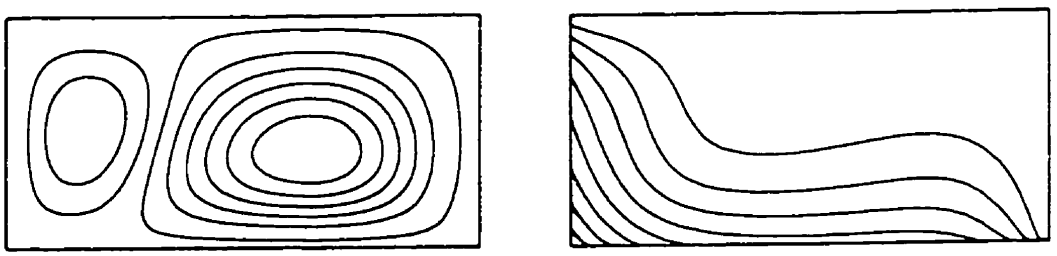


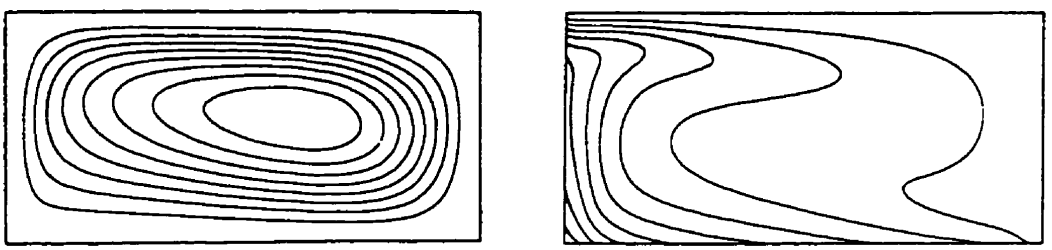
Figure 6.1: Géométrie du domaine annulaire en rotation.



a) $Ra = 10^4$, $\psi_{min} = -0.793 \times 10^{-4}$, $\psi_{max} = 4.62$

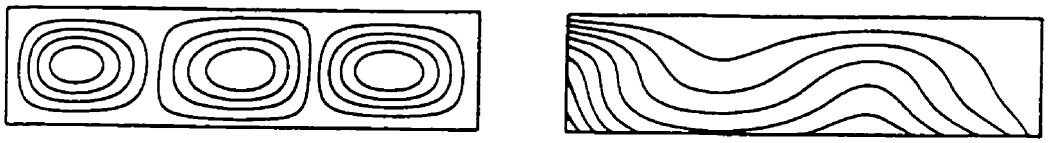


b) $Ra = 10^5$, ψ_{min} = -1.92, $\psi_{max} = 4.26$

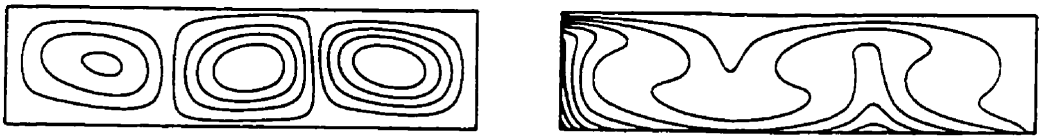


c) $Ra = 10^6$, ψ_{min} = -35.8, $\psi_{max} = 2.76 \times 10^{-4}$

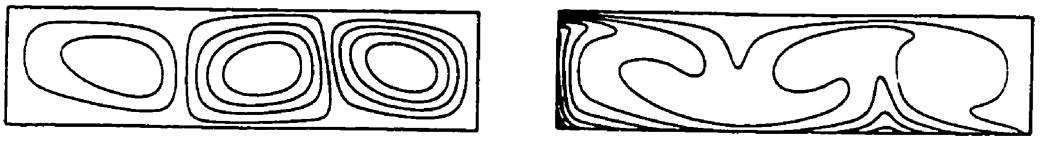
Figure 6.2: Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur. $Re = 100$, $R = 2$ et $\Gamma = 0.5$



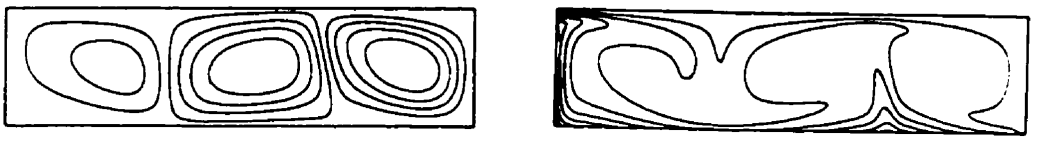
a) $R = 2$, ψ_{min} = -4.10, ψ_{max} = 3.72



b) $R = 3$, ψ_{min} = -34.7, ψ_{max} = 30.5



c) $R = 4$, ψ_{min} = -89.5, ψ_{max} = 78.8



d) $R = 5$, ψ_{min} = -171.0, ψ_{max} = 151.0

Figure 6.3: Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur, $Re = 100$, $Ra = 5 \times 10^5$ et $\Gamma = 0.25$

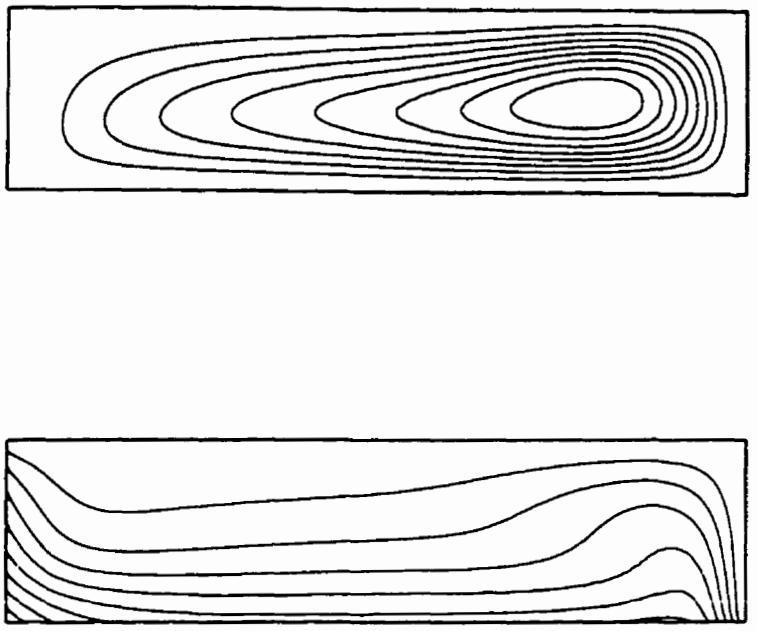
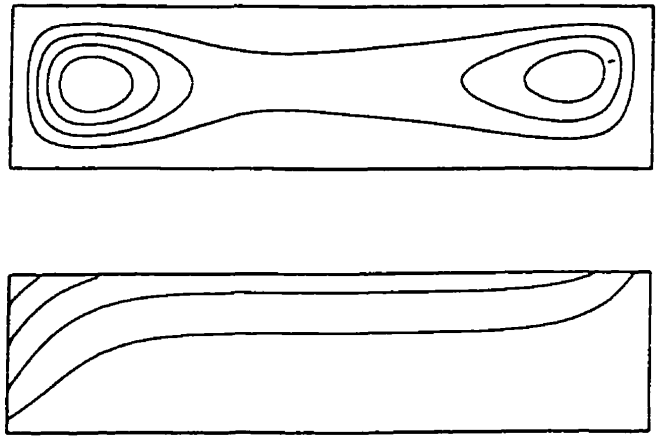
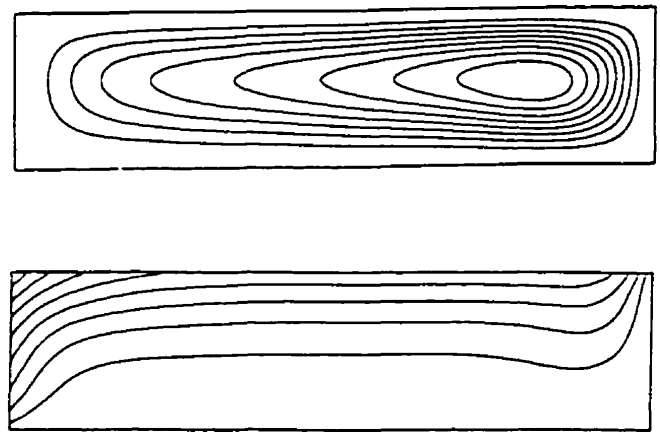


Figure 6.4: Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur, $Re = 500$, $Ra = 5 \times 10^5$ et $\Gamma = 0.25$: $R = 2$, ψ_{min} = -5.07 $\times 10^{-4}$, $\psi_{max} = 17.5$.

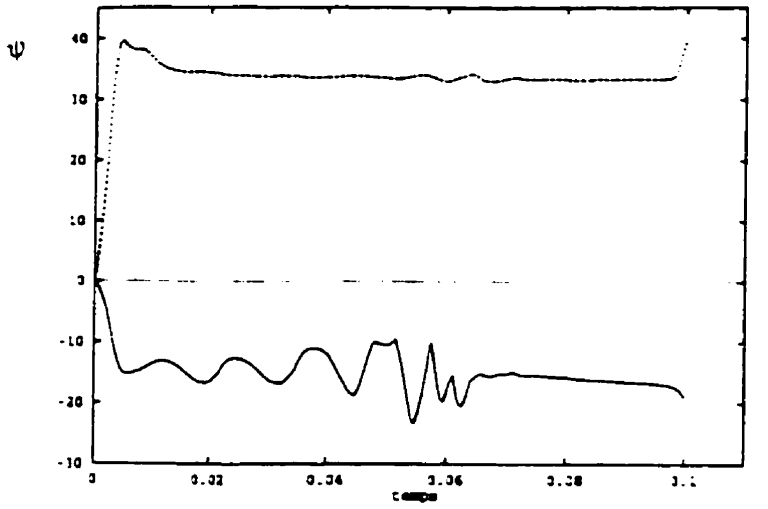


a) $Re = 10$, ψ_{min} = -0.028, $\psi_{max} = 0.3 \times 10^{-6}$

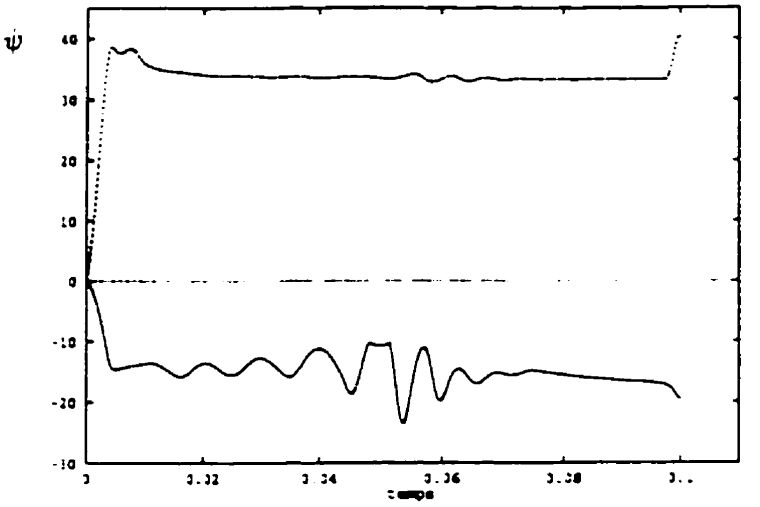


b) $Re = 300$, ψ_{min} = -8.5, $\psi_{max} = 1.72 \times 10^{-4}$

Figure 6.5: Lignes de courant dans l'espace annulaire inférieur, $Ra = 10^4$, $R = 2$ et $\Gamma = 0.25$

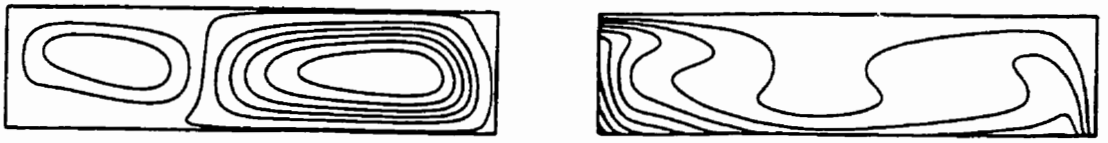


a) $\Delta t = 10^{-5}$

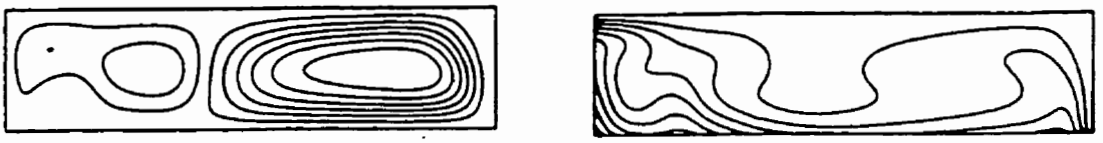


b) $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$

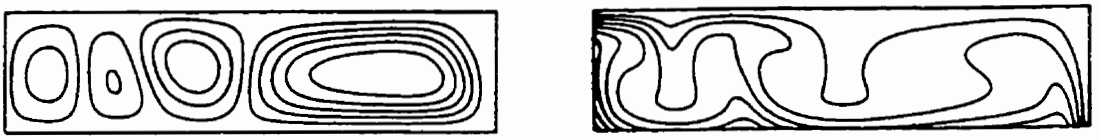
Figure 6.6: Comparaison de ψ_{min} et ψ_{max} pour différents pas de temps



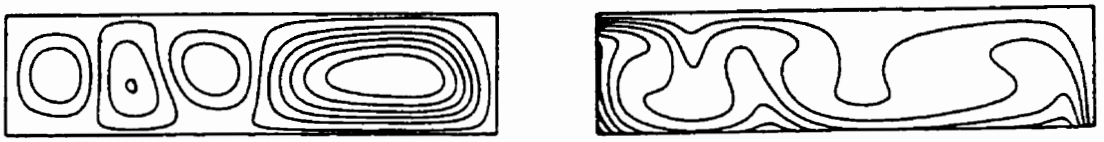
a) $t = 0.0625$, ψ_{min} = -16.4, $\psi_{max} = 33.7$



b) $t = 0.075$, ψ_{min} = -12.4, $\psi_{max} = 33.7$



c) $t = 0.0875$, ψ_{min} = -19.0, $\psi_{max} = 33.7$

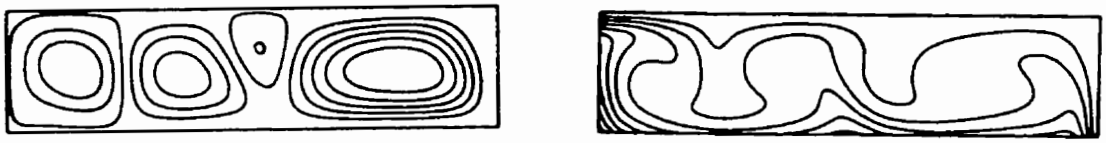


d) $t = 0.1$, ψ_{min} = -15.1, $\psi_{max} = 33.2$

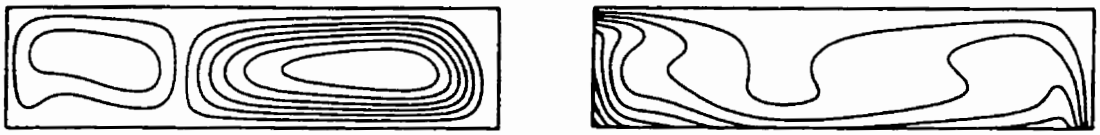
Figure 6.7: Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur au cours d'un cycle pour $Re = 900$, $Ra = 10^7$ et $R = 2$

e) $t = 0.1125$, ψ_{min} = -15.9, $\psi_{max} = 33.1$

f) $t = 0.125$, ψ_{min} = -16.5, $\psi_{max} = 33.0$



g) $t = 0.1375$, ψ_{min} = -17.0, $\psi_{max} = 33.1$



h) $t = 0.150$, ψ_{min} = -11.1, $\psi_{max} = 32.5$

Figure 6.8: Lignes de courant et isothermes dans l'espace annulaire supérieur au cours d'un cycle pour $Re = 900$, $Ra = 10^7$ et $R = 2$

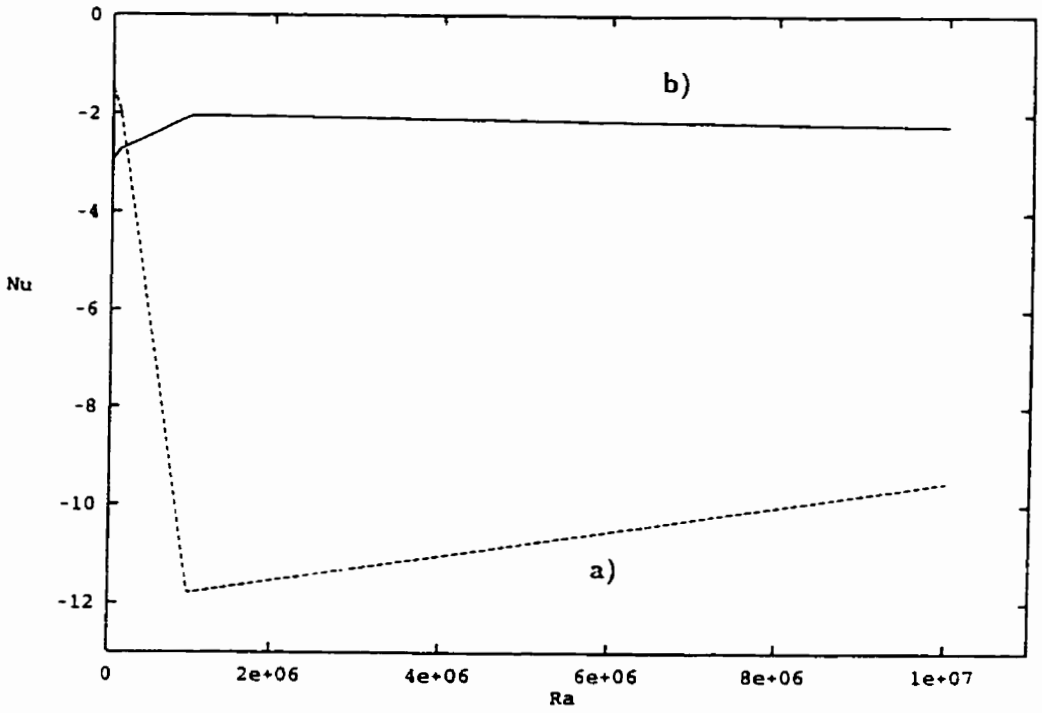


Figure 6.9: Variation de Nu pour différents Ra, pour $R = 2$, $\Gamma = 0.5$ et $Re = 100$: **a)** paroi supérieure, **b)** paroi droite.

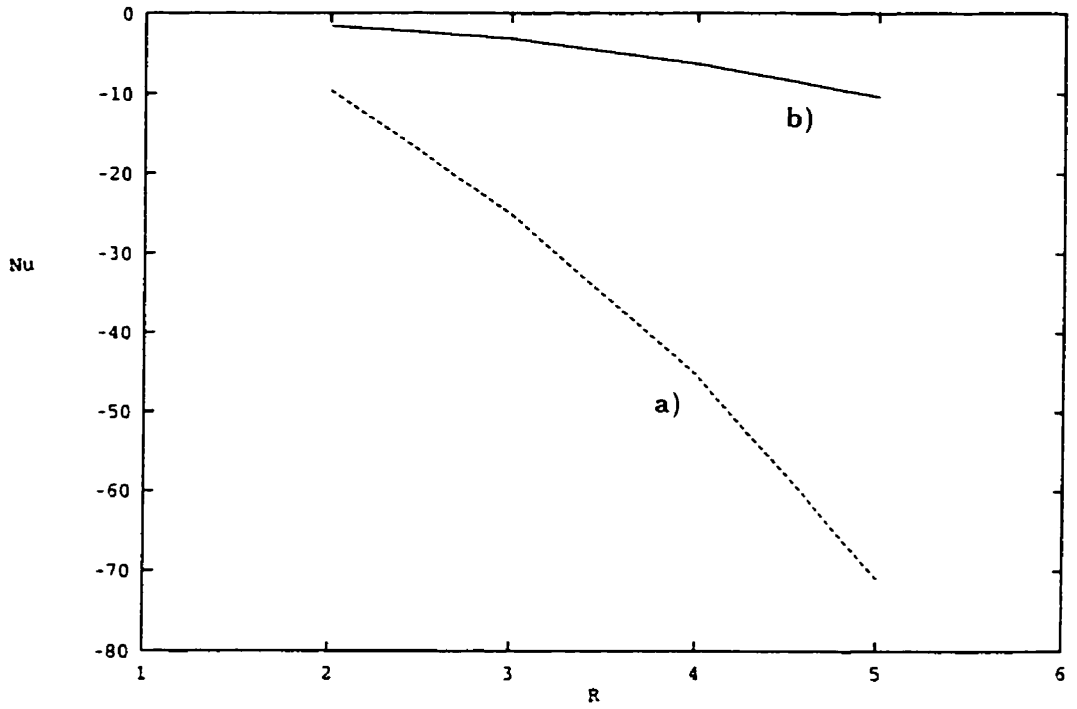


Figure 6.10: Variation de Nu pour différents R, pour $Ra = 5 \times 10^5$, $\Gamma = 0.25$ et $Re = 100$: a) paroi supérieure, b) paroi droite.

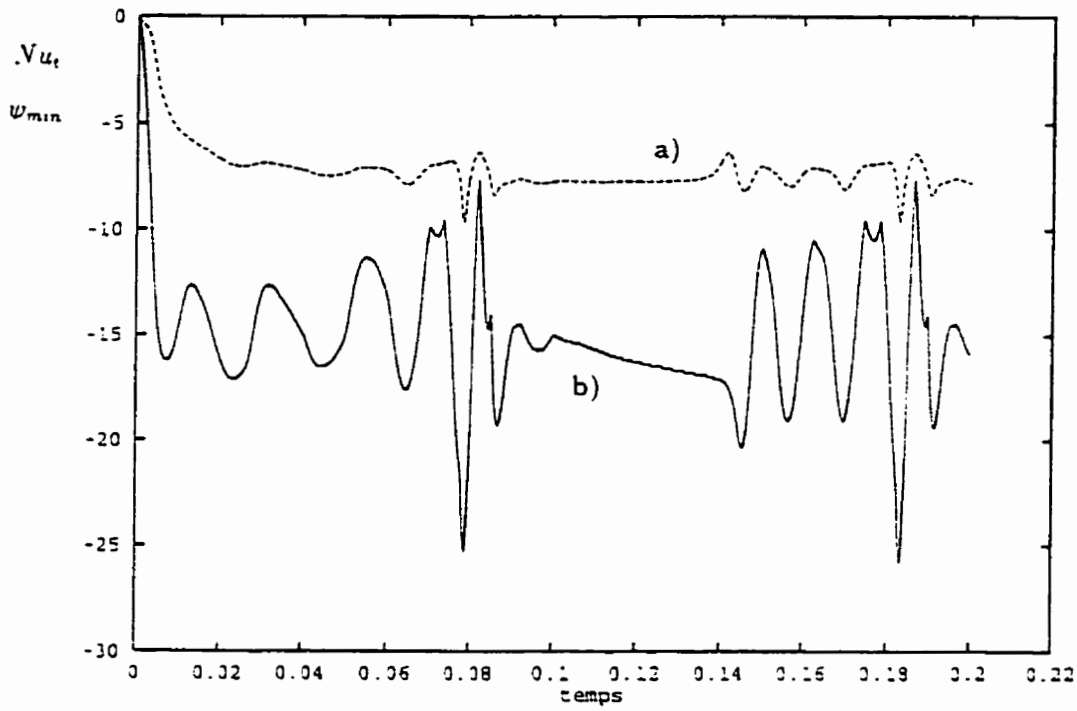


Figure 6.11: Evolution de Nu et ψ_{min} en fonction du temps pour $R = 2$, $Ra = 10^7$, $\Gamma = 0.25$ et $Re = 900$: a) Nu_t, b) ψ_{min}.

Chapitre 7

Conclusion Générale

Dans ce travail nous avons étudié l'écoulement et le transfert de chaleur à l'intérieur de trois systèmes rotatifs génériquement liés au problème classique de Taylor.

La première partie est consacrée à l'étude de la convection entre deux cylindres concentriques dotés d'une source de chaleur interne. Une analyse détaillée des champs d'écoulement et de température a d'abord été faite pour la convection forcée et ensuite pour la convection mixte.

L'étude de la convection forcée a permis d'étudier le développement de l'écoulement de Taylor sous l'effet des bouts. Nous avons ainsi démontré qu'en l'absence de la convection naturelle:

1. Deux modes normaux sont obtenus pour un espace annulaire de cylindres courts: un mode primaire et un mode secondaire. Bien que les structures des modes primaire et secondaire soient différentes, leurs intensités sont comparables lorsque toutes deux peuvent exister à un même nombre de Reynolds.

2. Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, l'évolution du mode primaire et du mode secondaire concordent avec les résultats de *Benjamin* (1978a,b), et

de *Ball et Farouk* (1988) concernant le phénomène de bifurcation dans des cylindres courts.

En tenant compte de la convection naturelle, pour une gamme de nombre de Grashof variant entre 0 et 5×10^4, nous avons trouvé que:

1. Le développement et la mutation des écoulements primaire et secondaire, ainsi que les concepts de modes normaux et anormaux, doivent être révisés en interprétant la structure de l'écoulement en fonction de l'interaction entre les forces de poussées, les forces centrifuges et les forces visqueuses.

2. Sous l'effet de la convection naturelle, la symétrie à travers la section centrale de la cavité, ainsi que la direction privilégiée de l'écoulement vers l'intérieur dans les extrémités fixes, ne sont plus respectées à mesure que les forces de poussée deviennent importantes. Ainsi, le développement des modes d'écoulements est tout-à-fait différent de celui prévu par la théorie de bifurcation des systèmes isothermiques.

La deuxième partie de cette thèse est consacrée au problème de convection entre deux cylindres concentriques quand l'écoulement est perturbé par la presence d'un disque attaché au milieu du cylindre intérieur. Nous avons étudié en détail l'influence des différents paramètres sur l'écoulement, notamment le nombre de Reynolds, le nombre Grashof, le rapport de forme de la cavité et la longueur du disque.

Lorsque la convection naturelle est négligée, il a été démontré que l'influence du disque dépendra grandement du rapport de forme et du nombre de Reynolds. En effet, si l'écoulement non perturbé (sans disque) est compatible avec la présence de celui-ci (les cellules d'extrémités et voisines du plan de symétrie tournant dans le bons sens), les caractéristiques de l'écoulement ne seront que peu modifiées par la

présence du disque. Dans les cas où le sens de rotation de la cellule voisine du plan de symétrie n'est pas compatible avec la rotation du disque, l'écoulement sera très perturbé et ses caractéristiques sont dictées par la rotation du disque.

Lorsque la convection naturelle est en jeu, les notions d'écoulement primaire et secondaire doivent être révisées en fonction des interactions entre les forces de poussées volumétriques et centrifuges d'une part, et les forces visqueuses de l'autre.

Dans la troisième partie, nous avons étudié l'écoulement et le transfert de chaleur résultant de la convection naturelle et forcée dans un système rotor-stator tel un moteur électrique avec un flux de chaleur imposé au rotor et une température uniforme imposée au stator.

Nous avons trouvé que les lignes de courant dans l'espace annulaire supérieur sont déterminées par l'intensité relative des forces de poussée et de rotation: si l'une des forces est dominante, on trouve un écoulement unicellulaire; autrement, la structure de l'écoulement est multi-cellulaire.

Aux grands nombres de Reynolds et de Rayleigh, il n'est plus possible d'obtenir un régime permanent. Ainsi, lorsque $Re = 900$ et $Ra = 10^7$, on obtient un écoulement périodique dont la structure passe à travers un cycle multicellulaire de 2 à 4 cellules.

Dans l'espace annulaire inférieur, les deux forces (centrifuge et de poussée) peuvent générer un écoulement soit unicellulaire ou soit multicellulaire, mais toujours dans le sens trigonométrique.

En conclusion, les résultats présentés dans cette thèse démontrent clairement que la convection naturelle joue un rôle crucial dans la morphogénèse des vortex (tourbillons) de Taylor à l'intérieur des systèmes rotatifs. Par conséquent, la théorie

classique de bifurcation des écoulements isothermes doit être complètement revisée pour les fluides non-isothermes.

Références

ALONSO, C.V. et MACAGNO, E.O. (1973). Numerical integration of the time-dependent equations of motion for Taylor vortex flow. Comput. Fluids, 1, 301-316.

ALZIARI De ROQUEFORT, T. et GRILLAUD, G. (1978). Computation of Taylor vortex flow by a transient implicit method. Comput. Fluids, 6, 259-269.

BALL, K.S. et FAROUK, B. (1988). Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow with bouyancy effects. J. Fluid Mech., 197, 479-501.

BAR-YOSEPH P., BLECH, J.J. et SOLAN, A. (1981). Finite element solution of the Navier-Stokes equations in rotating flow. Int. J. Num. Meth. in Eng., 17, 1123-1146.

BECKER K.M. et KAYE, J. (1962). The influence of a radial temperature gradient on the instability of fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder. Trans. ASME: J. Heat Transfer, 84, 106-110.

BENJAMIN, T.B. (1978). Bifurcation phenomena in steady flow of a viscous fluid I. Theory. Proc. Roy. Soc., London A 359, 1-26.

BENJAMIN, T.B. (1978). Bifurcation phenomena in steady flow of a viscous fluid II. Experiments. Proc. Roy. Soc., London A 359, 27-43.

BENJAMIN, T.B. et MULLIN, T. (1981). Anomalous modes in the Taylor experiments. Proc. R. Soc., London A 337, 221-249.

BLENNERHASSET, P. et HALL, P. (1979). Centrifugal instabilities of circonferential flow in finite cylinders : linear theory. Proc. Roy. Soc., London A 365,

191-207.

BURKHALTER, J.E. et KOSCHMIEDER, E.L. (1974). Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts, Phys. Fluids, 17, 1929-1935.

CHEW, J.W. (1984). Development of a computer program for the prediction of flow and heat transfer in a rotating cavity. Int. J. Num. Meth. in Fluids, 4, 667-683.

CHEW, J.W. et VAUGHAN, C.M. (1988). Numerical prediction for the flow induced by an enclosed rotating disc. 33rd ASME Int. Gas Turbine Conference, Amsterdam, 88-GT-127.

COGNET, G. (1984). Les étapes vers la turbulence dans l'écoulement de Couette-Taylor entre cylindres coaxiaux. J. de Mec. Théorique et Appliqué, 7-44.

COLE, J.A. (1976). Taylor-Vortex instability and annulus-length effects. J. Fluid Mech., 75, 1-15.

COLES, D. (1965). Transition in circular Couette flow, J. Fluid Mech., 21, 385-425.

CLIFFE, K.A. (1988). Numerical calculation of the primary flow exchange process in the Taylor problem. J. Fluid Mech., 197, 57-79.

DAILY, J.W. et NECE, R.E. (1960). Chamber dimension effects on induced flow and frictional resistance of enclosed rotating disks. Trans. ASME: J. Basic Eng., 82, 217-232.

DAVEY, A. (1962). The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 14, 336-368.

DE VAL DAVIS, G., LEONARDI, E. et REIZES J.A. (1962). Convection in a rotating annular cavity. In Heat and Mass Transfer in Rotating Machinery, Hemisphere, Washington, DC, 131-142.

DIJKSTRA, D. et VAN HEIJST, G.J.F. (1983). The flow between two finite rotating disks enclosed by a cylinder. J. Fluid Mech., 128, 123-154.

DIPRIMA, R.C., EAGLES, P.M. et NG, B.S. (1984). The effect of radius ratio on the stability of Couette flow and Taylor vortex flow. Phys. Fluids, 27, 2403-2411.

DIPRIMA, R.C. et SWINNEY, H.L. (1981). Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders. In Hydrodinamic Instabilities and the Transition to turbulence, Springer, 139-180.

DOMINGUEZ-LERMA, M. et AHLERS, D.G. (1984). Cannel, Marginal stability curve and linear growth rate for rotating Couette-Taylor flow and Rayleigh-Benard convection, Phys. Fluids, 27, 856-860.

FAZEL, H. et O. BOOZ, O. (1984). Numerical investigation of supercritical Taylor-vortex flow for a wide gap. J. Fluid Mech., 138, 21-52.

GARDNER, S.R.M. et SABERSKY, R.H. (1978). Heat transfer in an annular gap. Int. J. Heat Mas Transfer, 21, 1459-1466.

HADID, A.H., Chaotic flow in rotating lid cavities. Phys. Fluids A, 5 (8), (1993).

HALL, P. (1980). Centrifugal instabilities of circumferential flows in finite cylinders : non linear theory. Proc. Roy. Soc., London A 372, 317-356.

HESSAMI, M.A., DE VAHL DAVIS, G., LEONARDI, E. et REIZES, J.A. (1987). Mixed convection in vertical, cylindrical annuli. Int. J. Heat Mass Transfer 1, 30, 151-164.

HO, C.J. et TU, F.J. (1993). An investigation of transient mixed convection heat transfer of cold water in a tall vertical annulus with a heated rotating inner cylinder. Int. J. Heat Mass Transfer 11, 36, 2847-2859.

HUMPHREY, J.A.C., CHANG, C.J., LI, H. et SCHULER, C. (1991). Unobstructed and obstructed rotating disk flows: a summary review relevant to information storage Systems. Adv. in Information Storage Systems, 1, 79-110.

KATAOKA, K., DOI, H. et T. KOMAI, T. (1977). Heat/Mass transfer in Taylor vortex flow with constant axial flow rates. Int. J. Heat Mass Transfer, 20, 57-63.

KIMURA, S. et BEJAN, A. (1984). The boundary layer natural convection regime in a rectangular cavity with uniforme heat flux from the side. Trans. ASME: J. Heat Transfer, 106, 98-103.

KOGELMAN, S. et DIPRIMA, R.C. (1970). Stability of spatially periodic supercritical flows in hydrodynamics. Phys. Fluids, 13, 1-11.

KOSCHMIEDER, E.L. (1993). Bénard cells and Taylor vortices. Cambridge University Press.

KREITH, F. (1968). Convection heat transfer in rotating systems. In Adv. in Heat Transfer, 5, (Ed. Irvine and J. P. Hartnett), Academic Press, N.Y., 129-250.

LANDAU, L.D. (1944). On the problem of turbulence. C. R. Acad. Sc., 44, URSS, 311-314.

LAVOIE, S., NGUYEN, T.H. et LABERGE, C.A. (1986). Transfert de chaleur par convection naturelle entre deux cylindres verticaux soumis à un flux de chaleur constant. Rapport technique EP 86-29, École Polytechnique de Montréal, Canada.

LEE, Y.N. et MINKOWYCZ, W.J. (1989). Heat transfer characteristics of the annulus of two-axial cylinders with one cylinder rotating. Int. J. Heat Mass Transfer 4, 32, 711-722.

LUCKE, M., MICHELCIC, M. et WINGERATH, K. (1984). Flow in a small annulus between concentric cylinder. J. Fluid Mech., 140, 343-353.

MARCUS, P. (1984). Simulation of Taylor-Couette flow: Part 1: Numerical methods and comparison with experiment. Part 2: Numerical results for wavy-vortex flow with one travelling wave. J. Fluid Mech., 146, 45-64 et 65-113.

MARON, D.M. et COHEN, S. (1991). Hydrodynamics and heat/mass transfer near rotating surfaces. Adv. in Heat Transfer, 21, (Ed. J. M. Hartnett, T. F. Irvine Jr. and Y. I. Cho). Ademic Press, N.Y., 141-183.

MATSUDA, T., HASHIMOTO, K. et TAKEDA, H. (1976). Thermally driven flows in a gas centrifuge with an insulated side-wall. J. Fluid Mech., 73, 389-399.

MEYER, K. A. (1967). Time dependent numerical study of Taylor vortex flow. Phys. Fluids, 10, 1874-1879.

MORSE, A.P. (1987). Numerical prediction of turbulent flow in rotating cavities. ASME paper No. 87-GT-74.

MORSE, A.P. (1991). Assesement of laminar-turbulent transition in closed disk geometries. Trans. ASME: J. of Turbomachinery, 113, 131-138.

MULLIN, T., PFISTER, G. et LORENZEN, A. (1982). New observations on hysteresis effects in Taylor-Couette flow. Phys. Fluids, 25, 1134-1136.

NAKATA, Y., MURTHY, J.Y. et METZGER, D.E. (1992). Computation of laminar flow and heat transfer over an enclosed rotating disk with and without jet impingement. Trans. ASME J. of Turbomachinery, 114, 881-890.

OWEN, J.M. (1992). Flow and heat transfer in rotating-disc systems. ICHMT Int. in Heat Transfer in Turbomachinery, Athens.

PAO, H.P. (1970). A numerical computation of a confined rotating flow. Trans. ASME: J. Appl. Mech., 91, 480-487.

PATANKAR, S.V. (1980). Numerical heat transfer and fluid flow. McGraw Hill, New York.

RANDRIAMAMPIANINA, A., BONTOUX, P. et ROUX, B. (1987). Écoulements induits par la force gravifique dans une cavité cylindrique en rotation. Int. J. Heat Mass Transfer 7, 30, 1275-1292.

RIAHI, A. (1993). Turbulent swirling flow in short cylindrical chambers. J. of Fluids Eng., 115, 444-451.

SHAEFFER, D.G. (1980). Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., 87, 307-337.

SNYDER, H.A. et KARLSSON, K.F. (1964). Experiments on the stability of Couette motion with a radial thermal gradient. Phys. Fluids, 7, 1696-1706.

SNYDER, H. et LAMBERT, R. (1966). Harmonic generation in Taylor vortices between rotating cylinders. J. Fluid Mech., 26, 545-562.

STUART, J. T. (1958). On the non-linear mechanics of hydrodynamics instability. J. Fluid Mech., 4, 1-21.

TAYLOR, G.I. (1923). Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. Roy. Soc., London A 223, 289-343.

TAVENER, S.J., MULLIN, T. et CLIFFE, K.A. (1991). Novel bifurcation phenomena in a rotating annulus. J. Fluid Mech., 229, 483-497.

URQUIZA, B.G. et NGUYEN, T.H. (1993). Forced flow and heat transfer around a rotating disc enclosed in a cylindrical cavity. 2nd. Latinoamerican

Conference on Turbomachinery, Cuernavaca, México, 4271-4279.

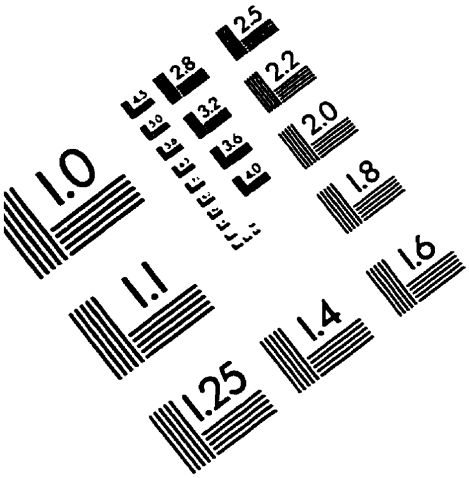
WALGRAEF, D., BORCKMANS, P. et DEWEL, G. (1984). Onset of wavy vortex flow in finite geometries. Phys. Rev., A 29, 1514-1519.

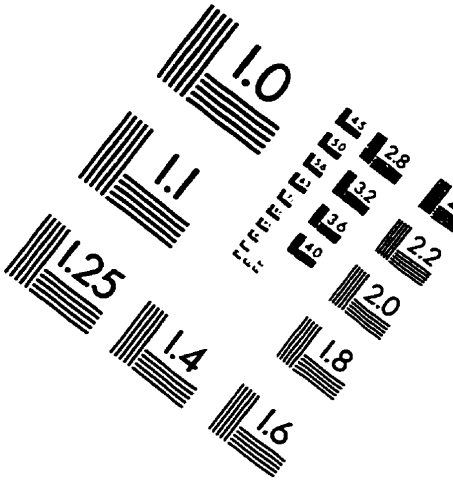
WALOWIT, J., TSAO, S. et DIPRIMA, R.C. (1964). Stability of flow between arbitrarily spaced concentric cylindrical surfaces including the effect of a radial temperature gradiant. Trans. ASME E: J. Appl. Mech., 31, 585-593.

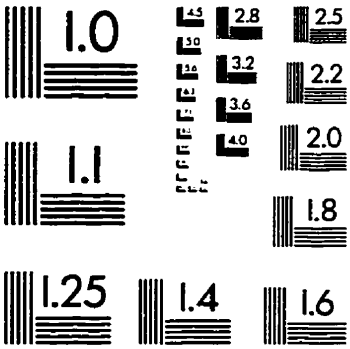
YANG, L. et FAROUK, B. (1992). Three-dimensional mixed convection flows in a horizontal annulus with a heated rotating inner circular cylinder. Int. J. Heat Mass Transfer 8, 35, 1947-1956.

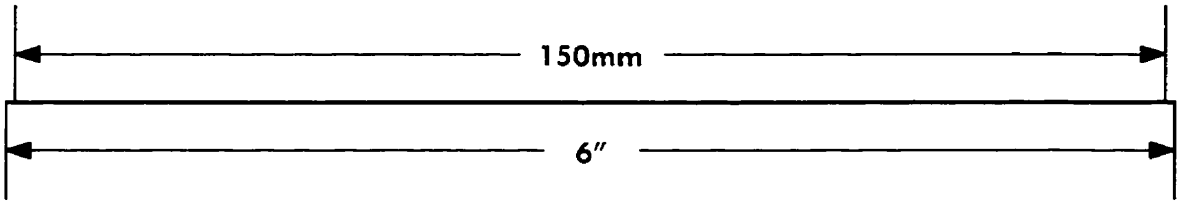
ZHANG, X. (1994). Notes on rotating system. Personal communication.

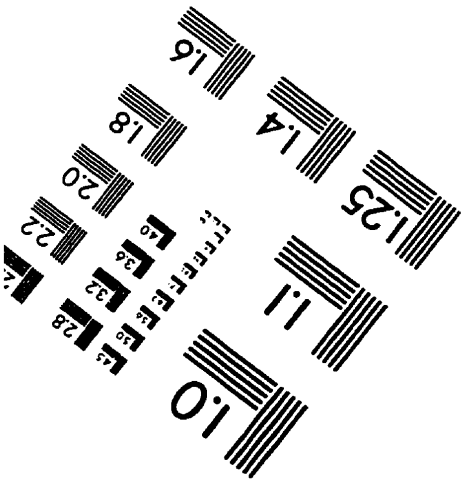
TEST TARGET (QA-3)

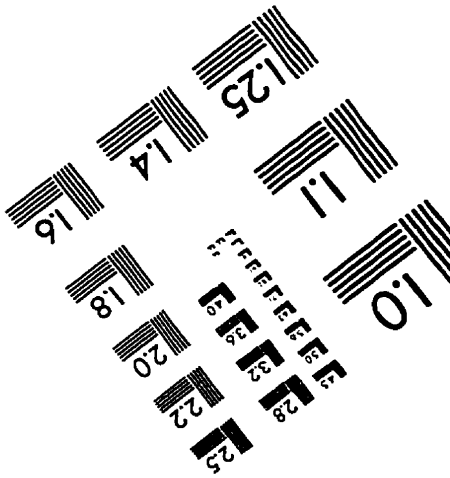










APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved