POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Rangement et manutention dans les entrepôts : optimisation des charges moyenne et maximale
Auteur: Author:	Pierre Montulet
Date:	1996
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Montulet, P. (1996). Rangement et manutention dans les entrepôts : optimisation des charges moyenne et maximale [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/8932/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/8932/
Directeurs de recherche: Advisors:	André Langevin, & Diane Riopel
Programme: Program:	Non spécifié

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

RANGEMENT ET MANUTENTION DANS LES ENTREPÔTS: OPTIMISATION DES CHARGES MOYENNE ET MAXIMALE

PIERRE MONTULET
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
OCTOBRE 1996

© Pierre Montulet, 1996.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-26429-7

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

RANGEMENT ET MANUTENTION DANS LES ENTREPÔTS: OPTIMISATION DES CHARGES MOYENNE ET MAXIMALE

présentée par: MONTULET Pierre
en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor
est soumise au jury d'examen constitué de:

M. SMITH Benjamin T., Ph.D., président
M. LANGEVIN André, Ph.D., membre et directeur de recherche
Mme RIOPEL Diane, Doctorat, membre et codirectrice de recherche
M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., membre
M. GOETSCHALCKX Marc, Ph.D., membre externe

REMERCIEMENTS

Je remercie mes directeurs de recherche, M. André Langevin et Mme Diane Riopel, pour leurs confiance, patience et minutie. Sans aucun doute, ils ont par leur sens de la rigueur et par leur souci de la perfection marqué cette thèse de leur empreinte.

Je remercie aussi M. François Soumis pour sa collaboration. Ses commentaires et suggestions ont assurément été d'une grande utilité.

Je remercie également les autres membres du jury, M. Guy Desaulniers, M. Marc Goetschalckx et M. Benjamin Smith pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Leur lecture attentive a permis de détecter quelques subtiles erreurs et omissions.

Je remercie enfin mes parents, amis et collègues pour leur soutien et encouragements. Cette solidarité fut certainement indispensable à l'aboutissement de mes efforts.

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur la conception de plans de rangement, ou politiques d'affectation, dans des systèmes d'entreposage. Ces systèmes sont composés de technologies du type palettiers frontaux statiques où les placements et les prélèvements se font par palettes entières. L'objectif est de rationnaliser les mouvements de manutention. Les qualités des politiques sont mesurées à l'aide des critères quantitatifs les plus pertinents: la charge maximale, la charge moyenne et l'utilisation de l'espace. Le choix de ces critères est justifié par le fait qu'ils fixent dans leur quasi totalité les coûts de design et d'opération des composantes statique et dynamique du système d'entreposage. Par ailleurs, pour tenir compte du niveau de sophistication du système d'information, le type des politiques d'affectation considéré est soit le dédié, soit le partagé. En fait, avec le type dédié, chaque emplacement est dédié à un produit particulier; tandis qu'avec le partagé un même emplacement peut recevoir, les unes après les autres, des unités de produits différents.

Dans cette thèse, les charges moyenne et maximale de manutention des politiques de type dédié et partagé sont étudiées et comparées. De plus, le problème de la minimisation des heures supplémentaires est abordé. Même si le critère de l'utilisation de l'espace n'est jamais retenu en tant que tel –sa minimisation considérée isolément étant triviale– il est chaque fois évalué et comparé.

Certaines hypothèses quant à l'opération du système et à la disponibilité de l'information sont posées comme il est d'usage lors de la modélisation mathématique de problèmes complexes. Spécifiquement, les cycles de manutention sont considérés comme simples: une seule opération de placement ou de prélèvement est effectuée entre deux visites consécutives d'un point d'entrée/sortie. De plus, la disponibilité d'un horizon caractérisé par un certain déterminisme est toujours considérée; en fait,

l'ordre des arrivées et des départs des transporteurs desservant l'entrepôt est supposé connu sur cet horizon. Ces hypothèses simplifient la conception de méthodes et de principes d'affectation qui peuvent être transposés à des contextes différents.

Dans deux des quatre articles qui composent cette thèse, la charge maximale est choisie comme critère d'optimisation. Ce choix est original et est posé pour la première fois. Une méthode de résolution exacte basée sur la génération de colonnes est proposée dans trois articles. Cette méthode ne permet pas de résoudre en un temps raisonnable de grands problèmes. C'est pourquoi, des heuristiques, aux sources d'inspiration variées et à l'efficacité démontrée sur des problèmes préalablement résolus de façon exacte, sont proposées.

Chaque cas est accompagné d'une analyse comparative sur un ensemble important de problèmes tests générés aléatoirement. La conclusion de ces analyses est sans équivoque: les nouvelles politiques se justifient pleinement par rapport aux politiques classiques lorsque l'on se préoccupe de la charge maximale.

ABSTRACT

This thesis is about the design of storage assignment policies in storage/retrieval systems. Racks make up those systems and storage/retrieval operations imply full pallet loads. The purpose is to rationalize the material handling motions. The qualities of policies are evaluated using the more relevant quantitative criteria: the peak load, the average load, and the space utilization. These criteria are chosen because they set the designing and operating costs of the static and dynamic components of the storage system (racks and storage and retrieval machines). Moreover, either dedicated or shared storage policies are considered in order to take the sophistication level of the information system into account. Actually, with a dedicated storage policy, each slot is dedicated to a particular product; whereas with a shared storage policy, a given slot can receive successively pallets of different products.

In this thesis, both the average and peak loads are studied and compared. Furthermore, the overtime problem is approached. Even if the space utilization criterion is never studied just as it is, its separate minimization being straightforward, it is each time evaluated and compared.

Some assumptions about the operation of the system and about the availability of the information are made as is usual when mathematical modeling is complex. Precisely, we consider single command cycles: a single storage or retrieval operation is performed per round trip to an input/output point. Moreover, the availability of a deterministic horizon is assumed; the sequence of transporters arrivals and departures is assumed to be known over this horizon. These assumptions simplify the conception of rules and principles that can be transposed to different contexts.

The peak load is chosen as the optimization criterion for two out of the four

papers that make up this thesis. This choice is original and has never been made until now. An exact approach based on the column generation method is proposed for three papers. This approach is limited to problems with reasonable size. When the problems are too big, the computation time becomes too high. That is why various heuristics, validated over pre-solved problems, are suggested.

Each time, a comparative analysis over a wide range of randomly generated problems is given. The conclusion of these analysis is unequivocal: the new policies are fully justified compared to classical policies when the peak load is one's concern.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS ..... **iv**

RÉSUMÉ ..... **v**

ABSTRACT ..... **vii**

TABLE DES MATIÈRES ..... **ix**

LISTE DES TABLEAUX ..... **xii**

LISTE DES FIGURES ..... **xiii**

LISTE DES ANNEXES ..... **xv**

INTRODUCTION **1**

CHAPITRE 1 Revue de littérature **7**

1.1 Présentation **7**

1.1.1 Contexte 7

1.1.2 Problèmes typiques de décision 15

1.2 Revue de littérature **23**

1.2.1 Revue générale 23

1.2.2 Revue sur les méthodes de rangement 38

1.3 Conclusion **50**

CHAPITRE 2 Charge moyenne et entreposage partagé **51**

2.1 Présentation **51**

2.2 Le problème de l'optimisation de l'entreposage partagé: méthodes exacte et heuristique **53**

2.2.1 Introduction 55

2.2.2 Entreposage partagé et déterministe 58

2.2.3 Approche exacte 61

2.2.4 Approche heuristique 68

2.2.5 Implantation dynamique 76

2.2.6 Conclusion 79

2.3 Conclusion **83**

CHAPITRE 3 Charge maximale et entreposage dédié **85**

3.1 Présentation **85**

3.2 Minimizing the Peak Load: an Alternate Objective for Dedicated Storage Policies **88**

3.2.1 Introduction 89

3.2.2 A Simple Example 92

3.2.3 Peak Load Optimization Models 95

3.2.4 Solving the Peak Load Minimization Problem 99

3.2.5 Experimentation 105

3.2.6 Possible Extensions 111

3.2.7 Conclusion 114

3.3 Conclusion **116**

CHAPITRE 4 Charge maximale et entreposage partagé **117**

4.1 Présentation **117**

4.2 Exact and Heuristic Methods to Minimize the Peak Load of Shared Storage Policies **119**

4.2.1 Introduction 120

4.2.2 Models 122

4.2.3 Column Generation 126

4.2.4 Heuristics 132

4.2.5 Simulation 147

4.2.6 Conclusion 151

4.3 Conclusion **154**

CONCLUSION **156**

BIBLIOGRAPHIE **159**

ANNEXE **183**

LISTE DES TABLEAUX

2.1 Tests de la méthode exacte. 67

3.1 The products. 92

3.2 Throughput and load distributions over a week 93

3.3 Results. 108

4.4 Column Generation Experimentation. 130

4.5 Some Information on the Load Distributions. 130

4.6 The Products 138

4.7 Command-Cycle Durations 138

4.8 *COL* Solution 139

4.9 *TBD* Solution 140

4.10 *GGH* Solution 141

4.11 *CGM* Solution 142

4.12 *NGH* Solution 143

4.13 *NAH* Solution 144

4.14 Load Distributions 145

4.15 Comparison between *NGH* and the LP Relaxation of Model (4.5). 147

4.16 Average Relative Savings for 48 tests. 148

LISTE DES FIGURES

2.1 Graphe $G = (X, A)$; une unité arrive en ta et quitte en td. 62

2.2 Petit exemple: le séjour des unités. 69

2.3 Petit exemple: le graphe des séjours G associé. 70

2.4 Petit exemple: les deux solutions. 71

2.5 Gains relatifs de notre heuristique sur Greedy pour les 4800 tests. 72

2.6 Performances relatives moyennes de notre heuristique en fonction de la taille q des réapprovisionnements. 73

2.7 Performances relatives moyennes de notre heuristique en fonction du nombre M de produits. 73

2.8 Performances relatives moyennes de notre heuristique en fonction de la durée DIT moyenne entre deux demandes. 74

2.9 Organigramme pour une implantation dynamique. 77

3.1 The relevance of the criteria. 90

3.2 The rack and its command cycle times. 93

3.3 The ABC assignment. 93

3.4 The ACB assignment. 94

3.5 Daily load distributions. 95

3.6 Sampling of $\mathcal{G}_s$ 106

3.7 Comparisons in function of PR. 110

4.1 A location Graph of Stays $G = (X, A)$; unit u arrives in the morning of day x_a and departs in the afternoon of day x_d. 123

4.2 Relative Peak Load Savings versus Number of Products. 149

4.3 Relative Average Load Savings versus Number of Products. 149

4.4 Relative Space Utilization Savings versus Number of Products. 150

A.1 Graphe des séjours $G = (X, A)$; une unité arrive le jour xa et quitte la veille du jour xd. 185

A.2 Diagramme comparatif de la répartition de la charge de manutention. 193

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A: L'optimisation de l'entreposage partagé à capacité de traitement limitée **183**

A.1 Introduction 184

A.2 Modèles 185

A.3 Méthodes 189

A.4 Résultats 191

A.5 Conclusion 194

INTRODUCTION

Un système d'entreposage est un maillon critique de la chaîne logistique et sa mission est bien plus que d'abriter des accumulations de matières. Ces accumulations, appelées stocks, proviennent généralement de politiques de production, d'achat, de vente, ou de transport par lots et permettent ainsi des économies d'échelle. Une chaîne efficace requiert un système transmettant en bon état, les produits demandés, dans les quantités demandées, aux instants demandés.

Les problèmes que posent le design et la gestion des entrepôts sont selon Tompkins et al. (1996) réductibles à l'optimisation:

- de l'utilisation de l'espace;
- de l'utilisation des équipements;
- de l'utilisation de la main-d'oeuvre;
- de l'accessibilité à tous les produits;
- et à la protection de tous ces produits.

Hormis le dernier, qui est plutôt de nature qualitative, les objectifs énoncés correspondent aux trois critères quantitatifs suivants:

- l'espace utilisé;
- la charge maximale de manutention;
- la charge moyenne de manutention.

De façon plus systématique, les problèmes d'entrepôt peuvent être aussi classifiés selon la taxinomie suivante:

- les problèmes stratégiques;
- les problèmes tactiques;
- et les problèmes opérationnels.

Cette hiérarchie ordonne les problèmes selon la fréquence à laquelle ils se posent. Les problèmes stratégiques ne se posent en général qu'une seule fois. Les problèmes tactiques se posent aux changements majeurs dans les conditions d'opérations. Les problèmes opérationnels se posent quotidiennement ou bien même, plusieurs fois par jour.

Les problèmes stratégiques touchent en général au design de l'entrepôt et impliquent des décisions aux conséquences permanentes. Parmi ces problèmes, on reconnaît: ceux impliquant l'implantation, c'est-à-dire la configuration de l'entrepôt et la disposition de ses éléments statiques; ceux portant sur la capacité d'entreposage, c'est-à-dire le calcul de la quantité d'espace nécessaire; et finalement ceux portant sur la conception de la charge de manutention, c'est-à-dire la sélection d'un support et l'agencement des plus petits éléments sur ce dernier.

Les problèmes tactiques regardent essentiellement le choix et le développement de plans d'affectation des unités aux emplacements. Ce sont en fait les problèmes étudiés dans cette thèse. Le choix du type de politique dépend du système d'information. Si le système est manuel, les unités d'un même produit doivent être regroupées et toujours occuper les mêmes emplacements; le type de la politique est alors le dédié. Si le système est automatique, il n'est pas nécessaire lors du placement d'une unité, d'accorder quelque importance à l'identité du produit correspondant; le type de la politique est alors le partagé car différents produits peuvent successivement partager

un même emplacement.

Les problèmes opérationnels concernent principalement les systèmes à cycle de manutention multiple, où plusieurs placements ou prélèvements sont executés entre deux visites consécutives du quai. Dans ce cas, qui n'est pas considéré ici, il s'agit d'ordonnancer pour chaque cycle de cueillettes les emplacements à visiter ou bien de regrouper les cycles tout en respectant la capacité de l'engin de manutention. Cependant, dans un contexte de contrôle dynamique, certains problèmes opérationnels se posent aussi pour les systèmes à cycle simple. Il s'agit de la relocalisation des unités durant les longues périodes d'inactivité ou encore du positionnement de l'engin de desserte quand il est oisif durant les périodes d'activité moins intense.

Les problèmes étudiés dans cette thèse sont classés comme tactiques bien qu'ils portent sur une période de déterminisme relativement courte. En fait, les problèmes liés à la rationalisation des mouvements de manutention sont considérés. Cette rationalisation passe par l'adoption de méthodes de rangement, appelées aussi politiques d'affectation, appropriées. Car, de telles politiques permettent de contrôler la distribution temporelle des charges quotidiennes de manutention. Deux critères quantitatifs caractérisent cette distribution: la charge maximale et la charge moyenne. A ces deux critères, sont associés respectivement les coûts de design et les coûts d'opération. La charge maximale influe directement sur le dimensionnement du système de manutention: la capacité de traitement du système doit être suffisante pour accommoder la charge. La charge moyenne influe sur la consommation énergétique et l'usure des équipements: plus grande est la charge, plus importants sont l'usure et la consommation annuelles. Par ailleurs, si la politique d'affectation détermine la distribution des charges, elle détermine aussi le besoin en espace, qui est un critère important pour le contrôle des coûts de design.

Le système d'entreposage est unitaire: les charges, ou palettes, ne sont pas

décomposées. Les technologies de stockage offrent les mêmes caractéristiques au point de vue sélectivité que les palettiers frontaux statiques à simple profondeur. Les placements et les prélèvements des unités sont effectués soit au moyen d'un transtockeur, automatique ou manuel, soit au moyen d'un chariot élévateur, ou soit de manière totalement manuelle: en bref, une seule charge est manutentionnée à la fois. Les cycles de manutention sont simples, non-interfoliés. Les cycles débutent et finissent au même point. Un tel point est appelé point d'entrée/sortie et correspond en général à un quai ou à une station de transfert. Par ailleurs, un certain horizon de planification est donné; sur cet horizon, l'ordre des arrivées et des départs est connu.

Les deux types de rangement, les types dédié et partagé, sont considérés à des fins de comparaison mais aussi pour tenir compte du niveau, automatique ou manuel, de la gestion de l'information. Lorsque le système d'information permet de repérer efficacement les unités dans l'entrepôt, l'usage de méthodes du type partagé est de mise. Car alors, les méthodes de type dédié ne peuvent au plus que les égaler puisqu'elles impliquent des contraintes supplémentaires restreignant au même produit la nature des unités affectées à un emplacement donné.

Au chapitre 1 après avoir développé les notions sur l'entreposage présentées plus-haut, on présente une revue de littérature. Cette revue est divisée en deux: une générale et une orientée sur les méthodes de rangement. La revue générale porte sur un ensemble de systèmes un peu plus vaste que celui considéré dans le reste de la thèse. On inclut les entrepôts de détails, où les charges sont décomposées à la collecte et où les cycles de manutention sont multiples. Cette revue comprend les trois types de problème: stratégique, tactique et opérationnel. Quant à la revue détaillée, elle porte sur les entrepôts unitaires. On y présente en détail des articles

portant sur les deux types de politique d'affectation.

Au chapitre 2, on poursuit les travaux de Goetschalckx et Ratliff (1990). Des solutions optimales à des problèmes de taille moyenne sont obtenues pour la première fois. Ces problèmes sont résolus par la méthode de génération de colonnes. L'idée maîtresse est de ramener les problèmes à la recherche de chemins dans des graphes dont les arcs correspondent aux unités à entreposer. Ces mêmes graphes sont utilisés par une heuristique qui traite des problèmes de grande taille. La nouvelle heuristique résout optimalement tous les problèmes traités par la méthode de génération de colonnes. De plus, elle se montre systématiquement supérieure à une heuristique de Goetschalckx et Ratliff, qui est du même type et qui considère aussi la charge moyenne de manutention comme critère d'optimisation.

Au chapitre 3, on introduit un nouveau critère: la charge maximale de manutention. Le type des politiques considéré est le dédié. La pertinence du nouveau critère est d'abord démontrée en étudiant un petit exemple. Ensuite, on généralise un modèle de programmation mathématique présenté dans Francis et al. (1992). Ce modèle permet en particulier de fixer la charge maximale comme critère d'optimisation. Il s'agit en fait d'un programme linéaire en nombres entiers. Deux approches de résolution sont proposées: l'une basée sur une relaxation lagrangienne, l'autre basée sur la relaxation linéaire. Plusieurs problèmes de grande taille sont résolus à l'aide de la deuxième approche. Finalement, une étude comparative sur plusieurs problèmes tests montre que la charge maximale de la solution classique est réduite d'environ 10% au prix d'un accroissement de 1% de la charge moyenne.

Au chapitre 4, on considère une combinaison très prometteuse: la charge maximale de manutention et les méthodes de rangement du type partagé. Encore une fois, la méthode de génération de colonnes est utilisée et les problèmes sont ramenés à la recherche de chemins dans des graphes. Vu que seuls des problèmes de taille

moyenne peuvent être ainsi résolus, des heuristiques sont proposées. Une de ces heuristiques est très efficace et résout optimalement la plupart des problèmes traités par la méthode de génération de colonnes. Elle se distingue très nettement des politiques classiques: elle réduit la charge maximale jusqu'au tiers!

Le document se termine par une conclusion et une annexe. Dans la conclusion une synthèse des résultats est présentée et quelques nouvelles voies de recherche sont identifiées. L'annexe aborde le problème de la minimisation des heures supplémentaires, un problème similaire à celui étudié au chapitre 4. Un petit problème est résolu encore une fois par la méthode de génération de colonnes.

CHAPITRE 1
Revue de littérature

1.1 Présentation

1.1.1 Contexte

La raison d'être et les rôles de la fonction entreposage

Dans leur discussion sur "la vraie valeur" de la fonction entreposage, Tompkins et Smith (1982) indiquent que cette fonction fournit le temps et l'espace nécessaires pour transmettre les matières dans des conditions appropriées. C'est sur ces notions de temps et d'espace conjuguées à celle du coût que nous allons axer notre propos sur la raison d'être de la fonction entreposage. Nous situerons ensuite la mission de la fonction par la description des rôles que cette dernière doit remplir.

Dans une entreprise de transformation, chaque fois qu'il y a une accumulation de matières à un endroit donné, cette accumulation doit être prise en charge par la fonction entreposage. Chacune de ces accumulations a lieu soit à la frontière d'une paire de composantes du processus général de transformation, soit à la frontière d'une de ces composantes avec l'extérieur de l'entreprise. Par rapport à une accumulation donnée, on parle de client amont ou de client aval selon que la composante contribue à l'accroissement ou à la diminution de celle-ci; un client pouvant être interne ou externe à l'entreprise. En fait, une mauvaise synchronisation entre la sortie de matière du client amont et l'entrée désirée de matière chez le client aval est

principalement à l'origine de toute accumulation; Morin (1987) parle de "distorsion entre les capacités de l'entreprise et les possibilités constatées sur ses marchés amont et aval"; tandis que Le syndicat des industries des matériels de manutention (1983) parle de "différences ponctuelles des cadences entre deux opérations". Cette mauvaise synchronisation se présente dans des contextes liés à la production par lot, à l'acheminement non-continu de matière, etc... Ces accumulations qu'un gestionnaire désignera par inventaires sont dans un certain sens économiquement non-désirables, puisqu'elles représentent un capital figé auquel est associé un coût dit d'inventaire. Basé sur cette observation, il s'est développé un concept préconisant la suppression de tous ces inventaires: la production juste-à-temps. Même si dans certains cas, il est possible de supprimer ou de réduire substantiellement ces inventaires, il faut prendre garde de faire abstraction de la rentabilité globale de l'entreprise. Les économistes ont mis au point des stratégies d'approvisionnement en inventaires qui sont basées sur certaines hypothèses quant aux politiques générales et à la nature des coûts (voir par exemple Faure et al., 1974). Dans une perspective d'optimisation de la rentabilité globale de l'entreprise, les coûts ainsi considérés doivent intégrer non seulement les coûts liés à l'inventaire et aux modes de l'approvisionnement, mais également ceux propres à la fonction entreposage. Soulignons que, comme nous le comprendrons mieux plus loin, il est illusoire de penser qu'absolument tous ces coûts peuvent être pris en considération; vu qu'ils portent sur une énorme quantité de facteurs généralement de nature qualitative. On réalise ainsi que la raison d'être de la fonction entreposage est celle du maintien de ces inventaires et que cette dernière doit, idéalement, être perçue dans sa globalité. Donc si, sans altérer la rentabilité globale de l'entreprise, on trouvait un moyen d'éviter toutes ces accumulations, le maintien de la fonction entreposage serait alors inutile et même non souhaitable. Ceci constitue une définition par la négation de la raison d'être de la fonction entreposage.

En général, vu que la fonction entreposage n'est qu'une composante de l'entreprise qu'elle dessert, il ne lui appartient pas de décider seule de sa propre existence. On comprend ainsi que tout comme il n'est pas de son unique ressort de juger sa raison d'être, il n'est pas de son unique ressort de déterminer les tailles de ses approvisionnements en inventaires. Et on comprend parallèlement que tout comme il faut tenir compte de ses paramètres (ses coûts fixes et opérationnels, ses performances, etc...) dans les décisions portant sur son maintien, il faut tenir compte de ses paramètres dans les décisions portant sur les tailles de ses approvisionnements en inventaires. On a vu ci-dessus que la fonction entreposage doit dans sa mission prendre en charge les inventaires de l'entreprise. Mais relativement à la raison d'être de la fonction entreposage, cette mission c'est surtout de convertir, à moindre coût, le flot amont de produits en un flot aval compatible avec les exigences de l'aval; c'est-à-dire fournir, à moindre coût et en bon état, les produits demandés, dans les quantités demandées, aux instants demandés. Si l'on décompose la mission de la fonction en rôles, comme dans Morin (1987) ou à quelques détails près comme dans Tompkins et al. (1996) et dans Sule (1988), ils peuvent se partitionner en deux groupes: ceux qui concernent les tâches physiques et ceux qui concernent les tâches administratives. Le premier groupe comprend:

- la réception des produits de l'amont, suivie éventuellement de leurs mises en conditionnement;
- leur acheminement des points d'entrées à leurs emplacements pré-attribués;
- leur conservation sur une certaine période de temps dans des conditions appropriées, accompagnée de fréquents inventaires physiques (comptages);
- la sortie de leurs emplacements, suivie de leur acheminement vers les points de sorties;

- et leur expédition vers l'aval, précédée éventuellement de leurs mises en conditionnement.

Le second groupe, qui s'automatise facilement à l'aide de l'informatique, comprend:

- l'attribution des produits aux emplacements;
- la préparation des commandes;
- la tenue à jour du fichier des stocks;
- la rédaction des inventaires;
- et le déclenchement des approvisionnements.

Soulignons comme le font Tompkins et al. (1996) qu'il n'y a pas que des opérations liées à la fonction entreposage qui sont exécutées à l'intérieur d'un entrepôt. En effet on peut y effectuer des opérations telles que des inspections de matériels, des emballages, des désemballages, etc...

La place de la fonction entreposage dans l'entreprise

Fréquemment la fonction entreposage se matérialise par plus d'un entrepôt: on parle alors d'entrepôts multiples. Ces entrepôts se dissocient par leurs localisations non contiguës, par les organes administratifs distincts qui les gèrent, par les clients qu'ils desservent, etc... Avec une "vue système" l'entrepôt peut être considéré à l'intérieur ou à la frontière de l'entreprise selon que l'un et l'autre de ces clients, amont et aval, soient internes ou non. Une autre façon de distinguer les entrepôts est de considérer, comme dans Jabot (1979), la nature fonctionnelle des accumulations, des produits qu'ils prennent en charge:

- *Entrepôt de matières premières:* pour stocker les matières premières intervenant directement dans la composition des produits fabriqués après un certain nombre d'opérations de transformation.
- *Entrepôt des produits en cours:* pour abriter les matières ayant subies un certain nombre de transformations et qui seront repris ultérieurement pour devenir des produits finis.
- *Entrepôt de produits finis:* pour stocker les produits finis destinés à la clientèle. Ces produits pourront être expédiés soit directement à la clientèle, soit par grandes quantités à des entrepôts de distribution.
- *Magasin d'outillage:* pour abriter les outillages et outils destinés à exécuter, à faciliter ou à contrôler les opérations de transformation, de fabrication et d'assemblage.
- *Magasin de pièces détachées:* pour stocker les pièces, les sous-assemblages et les fournitures entrant dans la composition des produits finis. Ces magasins alimentent les ateliers d'assemblage et les magasins de pièces de rechange du service après-vente.
- *Magasin de pièces de rechange:* pour stocker les pièces, destinées au remplacement de celles usées par les clients, du service après-vente.
- *Magasin de fournitures générales:* pour stocker les objets, matières et fournitures contribuant indirectement à l'élaboration du produit (combustible, fournitures de bureaux, matériaux d'emballage, etc...).

La description des technologies de stockage

- *Stockage de masse au sol/accès par allée:* Moyen simple et économique de stockage restreint aux charges supportant le gerbage et une gestion de type

LIFO (dernier entré premier servi). Les charges sont disposées à même le sol en simple ou multiples profondeurs. Les charges sont normalement palettisées et gerbées. La manutention procède par des allées.

- *Stockage de masse au sol/accès par le haut:* Moyen avec bonne utilisation de l'espace mais demandant des moyens de manutention spécialisés et donc plus onéreux. Les charges sont disposées à même le sol et on ne peut accéder à chacune d'elles que par le haut. Les moyens de manutention en question sont typiquement le palan, la grue et le pont roulant.

- *Palettiers frontaux statiques:* Ils constituent la technologie la plus répandue. Les palettiers sont des rayonnages à palettes composés de supports verticaux de grande hauteur, appelées échelles, et de longerons horizontaux, appelés lisses, sur lesquels reposent les charges palettisées. Les charges sont donc superposées mais, au contraire du stockage de masse, elles restent indépendantes les unes des autres. Les palettiers sont à simple ou multiples profondeurs. Selon leurs profondeurs, les charges qu'ils contiennent sont d'accès relativement directs.

- *Casiers à accumulation statique:* On accumule dans un couloir un certain nombre de charges les unes derrière les autres. Le chariot élévateur circule à l'intérieur de ces couloirs.

- *Casiers à accumulation dynamique:* Un ensemble de systèmes de casiers où les objets sont introduits d'un côté et ressortent de l'autre. Aux structures de base sont incorporés les éléments de roulement et de freinage pour permettre aux charges de se déplacer dans leurs couloirs.

- *Casiers avec transtockeur:* Système de casiers desservis par un transtockeur. Un transtockeur est un appareil formé d'une tour roulant sur rail au sol, ou suspendue. Il se déplace dans l'allée entre deux casiers. Le transtockeur peut être automatisé et on parle alors d'entrepôt automatique.

- *Magasin mobile:* Afin d'économiser la surface nécessaire aux allées, les casiers sont posés sur des chariots.
- *Carrousel horizontal:* Système de casiers monté sur chaîne mobile en circuit fermé. Les casiers sont disposés en colonnes. L'accès pour l'entrée et la sortie des charges est le plus souvent à l'une des extrémités.
- *Carrousel vertical:* Il permet le défilement des stocks à l'appel des balancelles. Les casiers sont disposés par ligne horizontale dont l'accès est à la hauteur d'une table sur le devant du carrousel. Le carrousel vertical peut recevoir des charges moins lourdes et moins volumineuses que le carrousel horizontal. De plus, il faut assurer un certain équilibrage des charges.
- *Meuble à tiroirs:* Les tiroirs s'ouvrent en totalité. Ils sont divisés en cases modulaires, transformables et parfaitement ajustables à la dimension des pièces stockées. La manipulation se fait par le dessus, une fois le tiroir ouvert la visibilité est totale.
- *Structure en porte-à-faux:* Râteliers pour stockage horizontal: structures destinées au stockage de charges longues. Ces râteliers peuvent être desservis par des appareils de levage spécifiques tels les chariots élévateurs à prise latérale.
- *Râtelier pour stockage vertical:* Ces structures sont limitées en hauteur et la préhension y est manuelle. Ce type d'installation est surtout destiné aux ateliers d'entretien ou aux points de vente de détail.
- *Pupitre:* Cette structure est destinée au stockage de marchandises en plaques ou feuilles. Le principe est d'offrir une face d'appui suffisamment rigide pour résister aux efforts horizontaux.
- *Stockage sur transporteurs:* La charge repose directement sur un transporteur. Ce transporteur peut être un convoyeur libre ou mécanisé.

Les politiques de localisation des produits

Les politiques de localisation des produits établissent de quelles manières les produits seront affectés aux emplacements. Il existe deux grandes catégories de politiques:

- Celles où chaque emplacement est réservé à un produit donné, à une référence donnée; on parle alors de *localisation dédiée*; les unités d'un même produit sont affectées à des emplacements contigus.
- Et celles où un emplacement donné peut recevoir différents produits, différentes références sur l'horizon considéré; on parle alors de *localisation partagée.*

Dans la première catégorie, on rencontre deux variantes:

- L'une où les emplacements sont attribués aux produits d'après les séquences numériques de leurs codes de nomenclature. L'intérêt de son utilisation diminue beaucoup avec la possibilité de l'informatisation des tâches administratives sur les inventaires.
- L'autre où cette attribution se fait d'après une étude de rotation des stocks. Elle est souvent tout simplement désignée par entreposage dédié.

Dans la seconde catégorie, on retrouve plusieurs variantes dont la majorité se regroupe par la similarité de leurs comportements:

- Les variantes de ce groupe sont toutes désignées par *entreposage aléatoire.* Le choix de l'emplacement, parmi les libres, pour une unité entrante est soit aléatoire ou soit l'emplacement le plus accessible; le choix de l'emplacement pour une unité sortante, parmi les disponibles, est soit aléatoire, soit conforme à

une gestion de type FIFO (premier entré, premier servi), ou soit l'emplacement le plus accessible.

- N'appartenant pas à ce groupe, une dernière variante, utilisée en pratique, a récemment été étudiée par Goetschalckx et Ratliff (1990). Les unités sortent selon une gestion de type FIFO; mais à l'entrée, leurs emplacements leur sont attribués selon leurs propres durées de séjour dans l'entrepôt (on considère bien la durée de séjour de chaque unité lorsqu'elle est prise individuellement et non la durée moyenne de séjour des unités d'une même référence lorsqu'elles sont prises collectivement). Cette variante est désignée simplement par *entreposage partagé.*

Il existe une troisième catégorie de politiques de localisation qui est à mi-chemin entre les deux premières. Elle est dite *dédiée par classes.* Elle demande la formation préalable de classes de produits, de classes de références, basées sur leurs taux de rotation. Une partie donnée de l'entrepôt est alors dédiée à une classe donnée. Et une politique aléatoire est pratiquée à l'intérieur de chaque classe.

1.1.2 Problèmes typiques de décision

Le problème de la sélection du meilleur système complet d'entreposage est très complexe à résoudre ou même tout simplement à cerner; il suffit de penser à la quantité énorme d'alternatives, de paramètres, de contraintes et de critères quantitatifs mais surtout qualitatifs qui sont impliqués. C'est un peu là la marque de tous les problèmes de design (voir Francis et al., 1992); on ne sait trop par où les aborder. Au point de vue des objectifs, certaines grandes lignes peuvent, comme dans Tompkins et al. (1996), être énoncées: optimiser l'utilisation de l'espace, l'utilisation des équipements, l'utilisation de la main-d'oeuvre, l'accessibilité à tous les produits,

et la protection de tous ces produits. Même si ces objectifs étaient individuellement quantifiables, on imagine mal comment les fusionner objectivement: quelle pondération faudrait-il leur accorder? Dans la littérature, on rencontre de multiples formulations des problèmes d'entreposage, qui sont abordés de différentes façons: par des modèles analytiques descriptifs ou prescriptifs, par des modèles analogiques, etc... Cormier et Gunn (1992), Ashayeri et Gelders (1985) et Matson et White (1982) déplorent que, dans la littérature de la recherche opérationnelle, très peu de problèmes soient abordés de façon globale; ils préconisent, dans la mesure du possible, le développement de modèles plus "larges". Il est d'usage, face à des problèmes aussi difficiles à aborder, de les éclater pour les traiter selon une approche hiérarchisée (voir par exemple Bradley et al., 1977); les décisions prises à un niveau hiérarchique donné devant déterminer les contraintes du niveau inférieur et les coûts du niveau supérieur. Ainsi au problème global, on substitue des problèmes dits de niveau stratégique (i.e. de design), de niveau tactique, et de niveau opérationnel. C'est là la classification que nous allons adopter et nous l'élaborerons en nous servant des indications fournies par Cormier et Gunn (1992). Avant d'aborder ces problèmes plus en détails, il est important de souligner qu'ils ne sont pas indépendants, et donc que l'approche hiérarchisée ne signifie malheureusement pas un ordre absolu dans leurs prises en considération, mais qu'elle propose plutôt un simple guide qui n'est pas des plus commodes. En effet avec une progression selon ce guide, il faut bien souvent spéculer sur les solutions des niveaux inférieurs pour poursuivre le traitement d'un niveau donné. Une utilisation efficace de ce guide consisterait à : fixer les scénarios quant aux niveaux inférieurs, estimer leurs coûts marginaux, se servir de ces coûts pour traiter les niveaux supérieurs, utiliser les nouvelles précisions sur les contraintes pour reprendre l'évaluation des coûts marginaux, etc... On persévère dans ces évaluations successives jusqu'à l'obtention d'un niveau de précision satisfaisant. Dans un processus général de conception de la fonction entreposage, cette

approche est éventuellement reprise avec différents scénarios et les solutions obtenues sont comparées pour fin de sélection.

Les problèmes de niveau stratégique

Ce sont des problèmes qui touchent des décisions extrêmement importantes de par l'ampleur de leur impact sur la productivité de la fonction entreposage et leur nature pratiquement irréversible. Les décisions prises à ce niveau affectent directement et de façon quasi-permanente les niveaux suivants; elles ont un effet déterminant sur les contraintes et paramètres de ceux-ci. Ces problèmes doivent donc être analysés et traités avec le plus grand soin et la plus grande précision. Ils sont ceux auxquels fait face le designer de la fonction: déterminer l'implantation de l'entrepôt et sélectionner la ou les technologies de stockage jumelées des équipements de manutention appropriés. Un guide pour un ordre de traitement des problèmes de ce niveau pourrait être: la détermination de la charge unitaire (palettisation), la détermination de la capacité de l'entrepôt, la détermination de l'implantation générale, la détermination de l'implantation détaillée, et la sélection d'équipements de stockage dynamiques (de manutention). Mais là encore, il faut prendre garde de penser que tous les paramètres et contraintes d'un problème sont donnés par les solutions des problèmes précédents; on peut comme dans le cas de l'approche globale avoir recours à la fixation de certains paramètres et à des évaluations successives. De plus, pour pouvoir estimer les coûts intervenant dans ces problèmes, il faut, au préalable, que des choix aient été faits sur les politiques générales de la fonction, tels que par exemple sur la politique de gestion de l'entrepôt et sur celle de la préparation de commande. Ces choix peuvent provenir de la haute direction de l'entreprise, ou bien de l'étude d'un scénario fixé pour fin d'évaluation. Ashayeri et Gelders (1985) proposent l'utilisation

combinée de modèles analytiques et d'outils de simulation pour contourner le laborieux processus d'évaluation systématique de toutes les alternatives. En fait, ils suggèrent l'application d'une technique duale sur une version décomposée du problème original: les outils de simulation servant à traiter le problème maître tandis que les sous-problèmes sont abordés par des modèles analytiques. Voici une description davantage détaillée de chacun des différents problèmes déjà présentés:

- Problèmes de charge unitaire.

  On parle ici essentiellement de la définition, de la conception de la charge unitaire qui est l'unité de référence, l'unité de mesure de la manutention et de l'entreposage. Suivant la nature des produits concernés, cette unité peut être soit directement le conditionnement original des produits, soit constituée à partir d'un support, tel que la palette et le bac, ou à partir d'un conteneur. Ces problèmes ne sont pas propres à la fonction entreposage bien que celle-ci ait une grande influence. En effet, la charge unitaire doit également tenir compte du transport, de la manutention, ..., de toute la chaîne logistique. Dans le cas où le conditionnement du produit original n'est pas l'alternative retenue, il reste à déterminer:

  - la taille et les autres caractéristiques du support ou du conteneur qui minimisent les coûts relatifs à la manutention, au système d'entreposage, et à l'utilisation de l'espace.
  - la disposition des produits (le plan de palettisation dans le cas de la palette) de façon à minimiser l'espace non-utilisé, tout en offrant de bonnes qualités physiques (telles que la stabilité et la robustesse).

- Problèmes de capacité.

  Ils consistent, principalement, à déterminer le nombre d'emplacements attribués aux produits soit de façon individuelle, dans le cas d'une politique

de localisation de type dédié, soit de façon collective, dans le cas d'une politique de localisation de type partagé. Dans le contexte d'espace disponible limité, ils consistent également à optimiser l'utilisation de cet espace. Les paramètres de ces problèmes sont essentiellement: la demande en entreposage de chaque produit, l'espace disponible, le coût d'entreposage par emplacement, et les coûts associés à une pénurie d'espace. Selon la nature de la demande, déterministe ou stochastique, stationnaire ou dynamique, la complexité des problèmes correspondants varie.

- Problèmes d'implantation.

  Ils couvrent l'implantation générale et détaillée. L'implantation générale consiste surtout à optimiser le contour externe de l'entrepôt compte tenu des coûts opérationnels et des coûts d'investissement. Dans ces derniers sont inclus les coûts du terrain et des infrastructures externes. L'implantation générale est affectée par le nombre et la taille des équipements internes les plus imposants tels que par exemple les ponts roulants. L'implantation détaillée, pour sa part, consiste surtout en l'arrangement interne des équipements d'entreposage. Ainsi on cherche à optimiser la disposition des équipements statiques d'entreposage, le nombre d'allées, etc... Dans le cas où l'espace disponible est limité, on cherche à répartir cet espace entre différentes utilisations possibles.

- Problèmes de sélection d'équipements dynamiques.

  Comme pour ceux concernant la charge unitaire, les problèmes de sélection de l'équipement de manutention ne sont pas exclusivement liés à la fonction entreposage. Une formulation typique est l'affectation des tâches de manutention aux équipements potentiellement satisfaisants; ceci en tenant compte de coûts attachés aux différentes combinaisons possibles.

Soulignons que la sélection des équipements statiques, des équipements de stockage n'est pas, en général, considérée comme un problème de niveau stratégique. En effet les principaux facteurs influents, que sont la nature, la morphologie, et l'intensité des mouvements des produits à stocker, réduisent la latitude dans les choix de ces équipements; une approche classique consiste à intégrer les alternatives, qui sont en nombre relativement réduit, dans les différents scénarios à être eux-mêmes sélectionnés lors de l'évaluation comparative finale.

Les problèmes de niveau tactique

Ces problèmes se présentent non seulement lors de la conception d'un nouvel entrepôt, mais également à chaque changement des conditions d'opération. Les décisions prises à ce niveau sont relativement réversibles et leurs conséquences sur la productivité de la fonction ne s'étendent que sur une période limitée. Les contraintes de ces problèmes sont principalement définies par les solutions retenues au niveau stratégique. En contre-partie une analyse de sensibilité de ces problèmes fournit au niveau stratégique des informations sur les coûts. Ici la programmation linéaire est l'outil de traitement prédominant. Dans des contextes particuliers du genre système automatisé avec espace insuffisant, on retrouve des problèmes d'allocation d'espace aux produits. Mais les principaux problèmes impliqués à ce niveau sont ceux concernant la gestion de l'entrepôt (le choix du type de politique ayant déjà été fait); on désigne par gestion de l'entrepôt l'application, ou encore la planification périodique d'une politique pré-établie de localisation des produits. Voici, selon le type de politique adoptée, une description de chacun de ces derniers problèmes:

- Dans le cas d'une politique d'entreposage dédié, le problème consiste essentiellement à déterminer pour chaque produit les emplacements à lui réserver.

Ceci de façon à minimiser les coûts totaux de manutention.

- Dans le cas d'une politique d'entreposage dédié par classes, un premier problème consiste au développement d'une classification des produits basée sur leurs taux de roulement. Une fois les classes établies le problème se ramène à celui de l'entreposage dédié où les classes remplacent les produits.

- Dans le cas d'une politique d'entreposage partagé, les emplacements ne sont plus réservés aux produits et toutes les unités d'un même produit doivent être individuellement considérées. Le problème consiste toujours à minimiser les coûts de manutention.

Les problèmes de niveau opérationnel

Ces problèmes se présentent sur une base quotidienne. Même si, à ce niveau, l'impact des décisions prises durant une journée est négligeable, l'ensemble des décisions prises sur l'année est déterminant pour la productivité de la fonction. Vu la fréquence de leurs occurrences, ces problèmes doivent être traités avec le plus grand soin que l'on puisse leur consacrer compte tenu du temps limité dont on dispose. Ainsi, ce niveau constitue le lieu de prédilection des heuristiques rapides et efficaces. Les problèmes généralement rencontrés concernent la préparation de commandes: politiques de regroupement et de collecte. Dans un contexte de paramètres dynamiques, on rencontre aussi les problèmes relatifs au contrôle en temps réel de l'entrepôt: la re-localisation des palettes dont les probabilités de sorties, dans un avenir proche, sont élevées; et la localisation, dans les allées, des engins de desserte qui sont oisifs. Les problèmes de préparation de commande ne présentent de réelles difficultés que dans les entrepôts où les unités sont décomposables; c'est-à-dire dans les entrepôts de détail. Voici une description de ces problèmes ainsi que celle des circonstances

où ils se présentent:

- Dans les entrepôts où il n'y a pas d'opération de détail, chaque déplacement d'un équipement de manutention implique au plus une unité à la fois. Dans ces entrepôts, dits unitaires, un cycle composé de déplacements aller et retour au point d'entrée/sortie peut impliquer une ou deux unités de charge selon que l'on adopte ou non une politique de déplacements interfoliés (interleaving policies en anglais). Le problème consiste alors à déterminer pour chaque cycle, la paire des emplacements à être visitée. Cette politique, qui correspond en fait à des opérations consécutives de stockage et de reprise, est difficile à mettre en pratique pour des raisons de synchronisation.

- Dans les entrepôts de détail, la collecte des produits représente pratiquement la quasi-totalité des coûts d'opération: le stockage étant réalisé mécaniquement et par charges complètes. Il existe plusieurs politiques de préparation de commandes: un préparateur/une commande, plusieurs préparateurs/une commande, un préparateur/plusieurs commandes, plusieurs préparateurs/plusieurs commandes, etc... Indépendamment de la politique retenue, on cherchera à minimiser la somme des durées des parcours individuels: soit à minimiser la longueur totale de ces parcours tout en évitant la création de goulots d'étranglement. Dans certains contextes, on peut voir le problème de la collecte comme un problème de tournées de véhicules avec capacité limitée. Dans d'autres, il faut avant la collecte, attribuer des groupes de commandes à chaque cycle de collecte.

1.2 Revue de littérature

1.2.1 Revue générale

Ici sont présentées les grandes lignes de la littérature impliquant l'entreposage en général. Plus d'emphase est donnée aux articles les plus fréquemment cités dans la littérature et à ceux nous paraissant plus importants. Cette section est structurée selon les niveaux hiérarchiques (stratégique, tactique, ou opérationnel) auxquels appartiennent les problèmes traités. Un article traitant plusieurs niveaux est en général classé au niveau le plus élevé.

Le niveau stratégique

Rappelons que les problèmes de ce niveau incluent ceux de charge unitaire, ceux de capacité et ceux d'implantation.

- Au niveau de la charge unitaire, ce qui a surtout retenu l'attention des chercheurs est le plan de palettisation, c'est-à-dire la disposition des boîtes de produits sur une palette. Steudel (1979) traite le problème pour des boîtes identiques. Il propose une procédure qui est basée sur la programmation dynamique et qui cherche à minimiser l'espace non utilisé. Ce problème correspond à un problème de coupe à deux dimensions où l'on veut minimiser la quantité totale des chutes. De plus, les coupes ne sont pas restreintes au type guillotine à l'oppposé des problèmes classiques de coupe. Agrawal (1993) traite le même problème que celui de Steudel, sauf qu'il considère justement des coupes de type guillotine. Il présente une procédure basée sur la technique

de séparation et évaluation progressive qui aboutit rapidement à la solution optimale. Le cas des boîtes à dimensions variées excepté leur hauteur est traité par Tsai et al. (1988) (voir aussi Hodgson, 1982; Hodgson et al., 1983; et Abdou et Lee, 1991). Dowsland (1995) propose des procédures d'amélioration complètant les procédures de construction.

- Les modèles normatifs de capacité consistent essentiellement à déterminer la quantité d'espace à allouer aux produits. L'objectif est soit de satisfaire un niveau de service fixé, soit de minimiser les coûts relatifs à la construction de l'entrepôt, à l'opération de l'entrepôt et aux conséquences d'une pénurie en espace (sous-traitance). Le niveau de service est une mesure non standardisée du niveau de réponse de l'entrepôt à la demande en espace de chacun des produits. La demande en espace est généralement considérée stochastique.

  Francis et al. (1992) présentent le modèle suivant:

$$\max \ \prod_{j=1}^{n} F_{d_j}(Q_j)$$
$$s.c. \ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Q_j & \leq S \\ Q_j & \text{entiers naturels} \end{cases}$$

  où:

  - F_{d_j} est la fonction de répartition de la demande en espace d_j du produit j.
  - S la quantité totale de l'espace disponible.
  - Q_j la variable de décision représentant la quantité d'espace alloué au produit j.

  Ce modèle, qui suppose une politique de rangement du type dédié, exprime la minimisation de la probabilité de pénurie en espace (i.e. la maximisation du niveau de service) sous contrainte d'une limitation en espace disponible. Il peut être traité par programmation dynamique.

Francis et al. (1992) présentent également le modèle non-stationnaire suivant:

$$\min E[TC(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)]$$

avec:

$$TC(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) =$$
$$\sum_{j=1}^{n}[C_0 Q_j + \sum_{t \in T}(C_1 \min\{d_{t_j}, Q_j\} + C_2 \max\{d_{t_j} - Q_j, 0\})]$$

où:

- C_0 est le coût de construction de l'entrepôt par unité d'espace construit.
- C_1 est le coût d'opération de l'entrepôt par unité entreposée et par période de temps.
- C_2 est le coût de pénurie d'espace par unité en excès et par période de temps.
- d_{t_j} est la demande en espace pour le produit j durant la période t, c'est une variable aléatoire de distribution connue.

On voit que $E[TC(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)]$ est séparable selon les Q_j. Chaque composante TC_j s'écrit en fait comme une fonction convexe et linéaire par morceaux dont les points anguleux se situent aux différentes valeurs possibles des variables aléatoires d_{t_j} $t \in T$. Le problème se ramène donc à celui de la minimisation de chacune de ces composantes. Comme chaque minimum a lieu au point de changement de signe des pentes, une simple procédure composée d'un tri et de quelques opérations numériques conduit à la taille optimale Q_j^* de chaque composante TC_j. Cormier et Gunn (1996) développent des formules pour le calcul conjoint de la taille de l'entrepôt, de la quantité d'espace à louer et de la taille des réapprovisionnements. Le cas où des variations sur la capacité de l'entrepôt durant l'horizon étudié sont permises est formulé comme un problème de réseaux dans White et Francis (1971).

L'analyse du niveau de service qu'un entrepôt de capacité donnée fournit passe en général par le développement de modèles descriptifs de type simulation. Parmi les différentes contributions, nous nous restreindrons à la description sommaire de celles de Roll et Rosemblatt (1983, 1984 et 1988). Dans une première publication (Roll et Rosemblatt, 1983), ils étudient les effets de la politique de rangement. Des politiques en question, deux sont assez particulières et sont baptisées politiques d'entreposage de groupe et de zone. Avec la première, on exige que les unités reçues dans un même lot soient entreposées dans des emplacements adjacents. Avec la seconde politique, on exige que ces unités soient entreposées dans la même zone d'une partition pré-définie. Les auteurs utilisent un cas réel pour comparer les avantages et les inconvénients de ces politiques par rapport à ceux d'une politique aléatoire. Dans une seconde publication (Roll et Rosemblatt, 1984), ils intègrent leur dernier développement à une procédure traitant une formulation particulière du problème de design. Cette formulation tient compte des trois types de coût mentionnés en début de paragraphe. Dans une troisième publication (Roll et Rosemblatt, 1988), ils considèrent une politique d'entreposage aléatoire où l'inventaire de chaque produit est contrôlé par une politique de contrôle d'inventaire du type (r, Q) et où la demande quotidienne d de ce produit est une variable aléatoire uniformément distribuée. Par définition, avec une telle politique de contrôle d'inventaire, une requête en réapprovisionnement est lancée chaque fois que l'inventaire atteint le niveau r, et la taille de ce réapprovisionnement est de Q. Les auteurs établissent pour plusieurs scénarios la correspondance entre le niveau de service et la capacité de l'entrepôt. Chaque scénario est défini par le nombre N de références, les paramètres de la loi uniforme caractérisant la demande d, ainsi que les paramètres r et Q. Les résultats sont normalisés par l'utilisation du concept de la capacité nominale (Nominal Capacity Requirement) $NCR = N(r+Q/2)$.

Une analyse statistique des résultats montre que les paramètres Q et d sont les plus influents.

- La littérature propose différents modèles et outils d'aide à la conception des entrepôts. Certains auteurs (Jabot, 1979; Tompkins et Smith, 1982) proposent un genre d'approche systématique inspirée de la populaire méthode de Muther (1961). D'autres (Ackerman, 1985; Castaldi, 1985; Devaney, 1985; Footlik, 1985; Fowler, 1985; Huffman, 1985; Klein, 1985; Manley et Fowlston, 1985; Midgley, 1985; Nagey, 1985; Sanford, 1985; Strombeck, 1985; Tompkins, 1985; Weiss, 1985; Morin, 1987; Sule, 1988; et Tompkins et al., 1996) fournissent des éléments de design constitués de standards et de règles plus ou moins empiriques. Typiquement les articles de nature mathématique cherchent à optimiser une formulation d'un problème particulier ou à établir des règles de design (Roberts et Reed, 1972; Bassan et al., 1980; Pliskin et Dori, 1982; Bozer, 1985; et Bozer et White, 1990). L'usage de la simulation est très répandu (voir par exemple: Gray et al., 1992; Taboun et Bhole, 1993; Takakuwa, 1993; et Randhawa et Shroff, 1995). Des méthodes combinant optimisation et simulation sont proposées par certains comme Rosenblatt et al. (1993). Nous présentons maintenant deux articles portant sur l'optimisation des magasins automatiques dont le premier fait usage de la simulation.

  Azadivar (1989) traite l'allocation optimale d'une quantité limitée d'espace à deux types spécifiques d'aire d'entreposage. Avec le premier type, l'accès aux produits est instantané, mais les exigences en espace sont importantes. Avec le second type, les exigences en espace sont moindres, tandis qu'une requête à son accès est placée dans une file d'attente. Spécifiquement le premier type consiste en un entreposage au sol sans empilement; il est desservi par le système général de manutention. Tandis que le second type consiste en un palettier desservi par un transtockeur. L'objectif consiste à allouer l'espace disponible de façon à

maximiser la capacité de traitement du système ainsi composé. Cette capacité de traitement correspond à la cadence maximale à laquelle les requêtes de placement/prélèvement peuvent être traitées sans que le système n'explose. Comme l'environnement est stochastique, on accepte que cette contrainte soit violée une certaine fraction pré-fixée du temps. Le problème se formule alors à l'aide d'un modèle d'optimisation stochastique. Sa résolution passe par un modèle de simulation (pour l'évaluation de la capacité de traitement) et par une procédure de recherche unidimensionnelle.

Ashayeri et al. (1985) proposent un modèle d'optimisation du design d'un magasin automatique pour pallier aux faiblesses des processus conventionnels de design. Les variables de décision du modèle sont principalement la longueur du système, sa largeur, et le nombre N de ses allées (i.e. le nombre de ses transtockeurs). Les restrictions dictées par les dimensions du site, les limites physiques aux vitesses d'opération consécutives à la longueur des allées et les restrictions liant les dimensions du système à la capacité requise constituent les contraintes du modèle. La fonction objectif prend en compte le coût d'investissement du système (transtockeurs, fondations, toiture, murs, ...) et son coût d'opération (entretien et salaires indexés). Cette fonction objectif peut être réécrite comme: $AN + B/N + C$. Où l'unique coût que l'on retrouve dans B est le coût superficiel associé à la construction des murs, tandis que les autres coûts se retrouvent dans A et C. Ainsi on a en général $A \gg B$. La fonction étant convexe en N, son minimum est donc en général atteint en $N^* = 1$ (une seule grande allée). Dans ces conditions la simple procédure suivante: *incrémenter progressivement N jusqu'à la satisfaction des contraintes* mène à la solution optimale. Notons que les contraintes associées aux vitesses des transtockeurs sont établies à l'aide d'expressions analytiques estimant les temps moyens de déplacement. Dans ce cas, ces expressions supposent une

méthode de rangement aléatoire et un ordonnancement du type dual (une opération de placement et une opération de prélèvement sont exécutées entre deux visites du point d'entrée/sortie).

- Quand l'utilisation de l'espace est la préoccupation principale, le stockage de masse au sol est à considérer. Cependant, si cette approche est très pertinente au niveau de l'utilisation de l'espace et si elle ne demande pas d'investissement en technologie de stockage, elle soulève des problèmes de gestion d'un stock qui ne doit pas dépérir en restant "emprisonné dans la masse". Une gestion du type premier entré premier sorti interdit l'utilisation d'une rangée de produits tant qu'elle n'a pas été complètement vidée. Il se pose alors le problème de déterminer la profondeur des rangées, qui fixe d'une part l'espace frontale requis pour leur accès et d'autre part la durée de leur occupation. Ces deux facteurs sont compétitifs pour l'optimisation de l'occupation de l'espace. Goetschalckx et Ratliff (1991) étudient le problème pour un ou plusieurs produits.

Le niveau tactique

A ce niveau on retrouve essentiellement les méthodes de rangement. Bien qu'une section leur soit consacrée, nous les présentons également ici dans un contexte cependant plus général. Pratiquement seuls les rangements de type dédié sont considérés, les autres étant traités dans la prochaine section. Sont traités ici les cas où les cycles de déplacement sont multiples, c'est-à-dire les cas où entre deux visites consécutives du point d'entrée/sortie plusieurs emplacements sont impliqués. Sont également traités ici les modèles qui en plus de porter sur le rangement comprennent parmi leurs variables de décision la taille des approvisionnements en inventaire.

- Les premières contributions d'importance dans le domaine sont d'Heskett (1963 et 1964). On y retrouve une procédure pour les rangements de type dédié. Cette procédure affecte les produits les plus populaires et les produits occupant le moins de place aux emplacements les plus accessibles. Ballou (1967) propose le premier modèle de programmation mathématique pour de tels problèmes. Ce modèle considère un entrepôt comprenant une aire de réserve et une aire de prélèvement. Comme le souligne Geotschalchx (1983), le modèle proposé a le gros défaut d'ignorer les coûts de déplacement entre ces deux aires. Harmatuck (1976) et Malette et Francis (1972) ont séparément démontré l'optimalité de la procédure d'Heskett dans le cas où les cycles de déplacement sont simples (c'est-à-dire dans le cas où un seul emplacement est visité entre deux visites consécutives du point d'entrée/sortie). Harmatuck traite le cas où les unités ont éventuellement des tailles diverses, tandis que Malette et Francis proposent un modèle d'affectation généralisée pour les situations où il y a plusieurs quais (i.e. plusieurs points d'entrée/sortie). Ces modèles reposent sur l'hypothèse de l'indépendance entre les temps de déplacement et les types de produit. La procédure d'Heskett est adaptée par Hodgson et Lowe (1982) pour les situations où cette hypothèse ne peut pas être posée.

- Dans le cas où les cycles de déplacement sont composés de cycles simples et de cycles duaux (c'est-à-dire des cycles où de un à deux emplacements sont visités entre deux visites consécutives du point d'entrée/sortie), une extension quadratique à la formulation de Malette et Francis est obtenue si l'on considère que la fréquence des cycles duaux qui impliquent deux produits particuliers est donnée par le produit des fréquences des cycles simples qui impliquent chacune un de ces produits. La procédure d'Heskett a été démontrée optimale dans le cas dual sous cette hypothèse par Malmborg et Krishnakumar (1987). Dans un contexte plus général, Eynan et Rosenblatt (1993) traitent le

problème avec une politique du type plus proche voisin. Dans le cas où un cycle est composé de plusieurs prélèvements consécutifs, la procédure d'Heskett n'est pas nécessairement optimale. Jarvis et McDowell (1991) ont développé des algorithmes de placement pour des entrepôts constitués d'un seul bloc d'allées parallèles et pour des produits dont les demandes sont indépendantes. De leur côté van Oudheusden et Zhu (1992) traitent le cas où les commandes se répètent avec une distribution de probabilité connue. Ils obtiennent l'implantation optimale dans le cas d'un palettier unidimensionnel et des commandes disjointes pour développer ensuite des heuristiques au traitement de problèmes plus généraux (voir aussi Guenov et Raeside, 1992; et Moon-Kyu, 1992).

- Dans le cas de cycles simples, Wilson (1977) considère un modèle d'optimisation plus global qui cherche à minimiser non seulement les déplacements mais également les coûts d'inventaire. Ces coûts sont généralement utilisés dans les modèles les plus simples des approvisionnements en inventaire (c.f. Faure et al., 1974) et ils ont comme expression:

$$\sum_i (p\frac{d_i}{q_i} + hv_i\frac{q_i}{2})$$

où:

  - p est le coût associé à un approvisionnement.
  - h est le coût d'inventaire par dollar par unité de temps.
  - d_i est la demande du produit i.
  - v_i est la valeur unitaire du produit i.
  - q_i est la taille des approvisionnements individuels du produit i; il correspond également au nombre d'emplacements de l'entrepôt qui est alloué au produit i.

En intégrant ces coûts au modèle d'Harmatuck (1976), Wilson obtient un modèle non-linéaire qu'il traite par une procédure de type gradient qui applique itérativement la procédure d'Heskett. La solution ainsi obtenue n'est pas nécessairement un optimum global étant donné que l'objectif ne possède pas les propriétés requises sur la convexité.

Une autre formulation du même problème est proposée par Hodgson et Lowe (1982). Cette formulation est cette fois basée sur une approximation continue quant à la disposition des emplacements (la prochaine section fournit des détails à ce sujet). Les auteurs obtiennent une fonction objectif différentiable pour laquelle ils n'ont pu établir la pseudo-convexité. Un optimum local est trouvé par une méthode de recherche multidimensionnelle de type Newton. Les auteurs insistent sur la supériorité de leur approche au point de vue temps de calcul. Il faut cependant noter que cette approche repose sur l'hypothèse restrictive que les palettiers soient "carrés dans le temps" (les extrémités horizontales et verticales d'un tel palettier sont desservies à partir du point d'entrée/sortie dans des temps identiques). Une extension directe de la formulation de Wilson (1977) est proposée par Malmborg et Deutsch (1988) pour traiter les situations où il existe une certaine proportion de cycles duaux. Ils traitent le problème par une heuristique qui alterne entre l'application de la procédure d'Heskett et l'utilisation des formules classiques sur la taille des approvisionnements (voir par exemple Faure et al., 1974). Kim (1993) traite le problème de la détermination simultanée du groupement (batching), de l'allocation d'espace et de l'affectation des produits dans un système mini-charge (miniload AS/RS). Dans un tel système les produits sont éventuellement regroupés dans des bacs qui contiennent plusieurs unités. Lorsqu'une unité

doit être prélevée, c'est tout le bac qui est déplacé jusqu'à un poste de travail où un opérateur effectue un prélèvement. L'auteur propose une heuristique d'amélioration qui tient compte des coûts de déplacement, des coûts d'inventaire, et de la corrélation entre les demandes (voir aussi Frazelle et Sharp, 1989; et Hackman et Rosenblatt, 1990).

Le niveau opérationnel

A ce niveau il y a principalement deux types de système traités dans la littérature. Il s'agit des systèmes à cycles duaux et des systèmes à cycles multiples. Avec le premier type, une unité est placée et une unité est prélevée durant chaque cycle. Avec le second type, le nombre d'unités placées est en général plus grand que deux. Il existe également une autre catégorie de systèmes dits "pièces vers opérateurs" (part-to-picker) qui s'oppose aux autres systèmes dits "opérateurs vers pièces" (picker-to-part). Dans cette catégorie on retrouve les carrousels et les systèmes mini-charges (Miniload AS/RS). Une description de ces systèmes est donnée dans Castaldi (1985), Manley et Fowlston (1985), et Weiss (1985). Les systèmes à cycles multiples induisent des problèmes de type tournées de véhicules avec regroupements (batching). Dans les systèmes à cycles duaux ou même à cycles simples, on cherche à positionner le plus efficacement possible les engins de desserte en état oisif.

- Le problème de collecte consiste à déterminer la séquence selon laquelle l'engin de manutention doit visiter les emplacements. Dans le cas des systèmes à cycles duaux, ce problème se formule comme un problème d'affectation entre les emplacements qui doivent être visités à une fin de prélèvement et ceux qui doivent être visités à une fin de placement. Les coûts sur les arcs correspondent aux temps de déplacement direct entre ces emplacements. On comprend que les

temps de déplacement du point d'entrée/sortie aux emplacements et les temps de déplacement des emplacements au point d'entrée/sortie correspondent à des coûts fixes. En effet, ils ne dépendent pas de la séquence des visites. Goetschalckx (1983) traite ce problème spécifique ainsi qu'une variante où les cycles sont composés soit de deux prélèvements soit de deux placements. Pour un entrepôt unidimensionnel, c'est-à-dire pour un entrepôt à emplacements alignés, Goetschalckx propose une simple procédure de tri au traitement du premier problème (cycles duaux et engin à capacité unitaire). Cette procédure consiste à affecter successivement le plus éloigné des emplacements sur lequel un placement doit être effectué au plus éloigné des emplacements duquel un prélèvement doit être effectué. Tenant compte de la difficulté de beaucoup de système d'entreposage à modifier l'ordre des requêtes de placement et de la facilité de ces systèmes à modifier l'ordre des requêtes de prélèvement, Han et al. (1987) et Lee et Schaefer (1996) étudient le problème de l'ordonnancement des prélèvements. Il s'agit d'affecter les prélevements aux ouvertures du casier. Graves et al. (1977) et Schwarz et al. (1978) parmi d'autres étudient à l'aide de simulations et de modèles continus les performances relatives d'un système à cycles duaux versus un système à cycles simples. Plusieurs autres politiques sont aussi analysées.

Le problème de collecte pour les systèmes à cycles multiples est essentiellement un problème de voyageur de commerce avec une norme qui est soit rectilinéaire soit celle de Chebychev. La littérature portant sur le problème du voyageur de commerce est plutôt vaste (voir par exemple Laporte 1992). On connaît la complexité de ce problème et les limites temporelles à l'intérieur desquelles il doit être résolu. Comme ce problème peut atteindre de grandes tailles (des dizaines, voir des centaines d'unités à prélever), on comprend qu'il est rarement résolu de façon optimale. La littérature sur l'entreposage privilégie le développement

d'heuristiques simples et efficaces pour son traitement. Plusieurs heuristiques de construction et d'amélioration ont été appliquées et analysées: le plus proche voisin, l'enveloppe convexe, les deux-échanges, les trois-échanges etc ... (voir Bozer, 1985; Bozer et al., 1986; Han et al., 1987; et Bozer et al., 1990). Dans d'autres contributions, on traite soit le problème dans un contexte particulier, soit des variantes. Ainsi Goetschalckx et Ratliff (1988a) étudient et comparent plusieurs types de politiques de collecte destinées aux systèmes aux allées larges. Selon le type, une allée est traversée en y zigzagant (l'alterné) ou pas (le linéaire), en couvrant sa longueur à partir de ses deux extrémités (dents de peigne), ou en ayant fixé une fois pour toutes l'ordre de visite des emplacements ("z-pick policies"en anglais). Pour tous les types, les politiques optimales sont données et comparées par simulation. Une des politiques (l'alterné) se montre supérieure lorsque la densité des collectes est inférieure à 50% (voir aussi Ratliff et Rosenthal, 1983). Cormier (1987) considère un problème où l'objectif est de minimiser une somme pondérée des retards des unités non-prélevées à temps (voir aussi Ratliff et Rosenthal, 1983; Kanet et Ramirez, 1986; Guenov et Raeside, 1989; Hwang et Son, 1993; Elsayed et al., 1993; et Lee et Kim, 1995). Goetschalckx (1983) étudie le problème de collecte avec cycles duaux dans un système mini-charge (Miniload AS/RS) possédant une zone tampon de k unités. Dans un tel système le véhicule de capacité unitaire prélève un bac du rayonnage et le place à la queue d'une chaîne de $k-1$ unités pour ensuite retirer le bac en tête de la chaîne et le placer dans l'emplacement d'où il a été sorti. Le problème de collecte se formule alors comme un problème de $k-1$ voyageurs de commerce avec une contrainte supplémentaire sur la cardinalité des parcours. Goetschalckx développe des procédures optimales et polynomiales pour traiter le cas d'un entrepôt unidimensionnel (emplacements alignés). Il préconise le développement d'heuristiques pour traiter le cas

d'entrepôts bidimensionnels.

- Le regroupement (batching) éventuel des requêtes de différentes commandes est une opération menant à des lots d'unités qui seront prélevées sur un même cycle (une même tournée) de l'engin de manutention. Ces regroupements doivent donc être effectués avant la résolution du problème de collecte. Notons que l'application de tels regroupements implique une phase de consolidation afin d'accumuler et de séparer les commandes les unes des autres. Notons aussi qu'il existe plusieurs variantes au problème de base dont celle consistant à éclater les commandes selon des zones qui partitionnent l'entrepôt (voir Tompkins, 1985c; Bachers et al., 1988; et Bozer 1985). Le but du regroupement étant de réduire les distances parcourues, une formulation rigoureuse incorporerait comme sous-problèmes des problèmes de voyageur de commerce. C'est pourquoi la littérature propose plutôt des heuristiques. Barret (1977) étudie à l'aide de la simulation différentes politiques de regroupement sous différentes méthodes de rangement et sous une politique de collecte spécifique. Il considère une formulation équivalente à celle d'un problème standard dit d'empaquetage (packing) à une dimension. Les unités regroupées ne peuvent excéder en poids et en volume certaines limites caractérisant la palette qui les porte. De plus les unités doivent nécessairement être placées sur la même palette. L'objectif est de minimiser le nombre de lots (de palettes) ainsi constitués. La meilleure politique analysée consiste d'abord à trier les commandes par tailles décroissantes. Le premier lot est construit en intégrant progressivement dans l'ordre autant de commandes que la palette peut en recevoir. Les lots suivants sont construits de la même façon à partir des commandes restantes. Elsayed (1989) analysent des heuristiques semblables mais plus sophistiquées (voir aussi Elsayed et al., 1980; Elsayed, 1981; Elsayed et Stern, 1983; Gibson et al., 1992; et Elsayed et al., 1993).

Chez certains systèmes de collecte, l'engin de manutention est massif et est déplacé au centre d'une allée large; après un arrêt, le manutentionnaire collecte une par une les charges des alentours pour les déposer sur l'engin. Goetschalckx et Ratliff (1988b) considèrent le problème conjoint de la localisation des arrêts et de l'affectation des collectes à ces arrêts. Dans sa formulation générale, le problème est ramené à la recherche d'un plus court chemin dans un graphe acyclique.

- Egbelu et Wu (1993) étudient le problème du positionnement de l'engin de desserte d'un magasin automatique lorsque cet engin est dans un état oisif. Ils étudient à l'aide de simulation plusieurs stratégies sous différentes politiques de rangement. Ces stratégies comprennent celles proposées dans un travail antérieur (Egbelu, 1991). Leurs meilleures stratégies sont celles où l'engin est localisé de façon à minimiser soit l'espérance du temps de parcours au prochain emplacement à être visité, soit le plus grand des temps de parcours à tout emplacement. Sous l'hypothèse d'une même utilisation d'espace, la méthode de rangement de type dédié se montre supérieure aux autres. Hwang et Lim (1993) formulent le problème comme un problème de localisation d'une seule facilité et ils appliquent les résultats théoriques du domaine. Dans la littérature portant sur le niveau opérationnel, on rencontre aussi plusieurs articles qui traitent de l'aspect dynamique. Certains (Linn, 1987; Okasaka et Tsushima, 1987; Seidmann, 1988; et Linn et Wysk, 1990) proposent une approche système expert. D'autres (par exemple: Jaikumar et Solomon, 1990) traitent des problèmes comme celui de la relocalisation des unités devant être extraites dans un avenir proche. Cette opération est effectuée durant les périodes creuses, de sorte que la capacité globale du système est accrue. Muralidharan et al. (1995) proposent de résoudre un problème particulier de voyageur de commerce pour effectuer le plus de relocalisations pertinentes à l'intérieur de limites temporelles

fixées. Sadiq et al. (1996) étudient la reconfiguration des systèmes de collecte dynamiques sujets aux fluctuations saisonnières de la demande des produits.

1.2.2 Revue sur les méthodes de rangement

Les hypothèses et les objectifs

A moins de spécifications contraires, on considère un système ayant les caractéristiques suivantes:

- les emplacements de la technologie d'entreposage sont à positions discrètes comme le sont les alvéoles d'un palettier. De plus, ils sont considérés disposés de façon bidimensionnelle.
- aussi bien les unités que les emplacements sont uniformes, de sorte que n'importe quel emplacement peut abriter n'importe quelle unité.
- les coûts de manutention par unité de déplacement sont indépendants de l'assignation des unités aux emplacements.
- les unités d'un produit donné sont prélevées de façon à respecter une gestion du stock de type "premier entré, premier sorti".
- les cycles des déplacements entre points d'entrée/sortie et emplacements sont simples, c'est-à-dire qu'ils n'impliquent à la fois qu'une seule opération de placement/prélèvement de stock.
- on dispose en général d'un certain niveau d'information sur la courbe "inventaire vs. temps" associée à chaque produit. Ces informations pouvant se présenter sous la forme de la taille des réapprovisionnements Q_i (Reorder Quantity) et de la demande D_i de chaque produit i.

Ce sont là les hypothèses les plus fréquemment rencontrées dans la littérature sur les entrepôts à charges unitaires. (Soulignons que lorsqu'on parle d'un produit, on désigne un ensemble d'unités ayant une référence commune, un même code de nomenclature.)

Vu que la sélection de l'unité sortante est dictée par la commande traitée et par la politique de gestion du stock qui est appliquée (en l'occurrence celle du "premier entré, premier sorti"), la décision porte sur la sélection de l'emplacement qui doit recevoir l'unité entrante. L'objectif consiste à assigner ces unités de façon à minimiser les coûts de la manutention et éventuellement ceux des inventaires. Les coûts de manutention sont supposés proportionnels aux temps de manutention. Plus précisément, les temps de manutention considérés sont ceux passés dans les allées et excluent ceux des accélérations et des décélérations. Comme le soulignent Schwarz et al. (1978), ces simplifications n'altèrent pas systématiquement l'optimalité: ces temps se présentent souvent en pratique comme des temps fixes associés aux opérations de placement/prélèvement (opération p/p). Nous verrons que selon la méthode de rangement adoptée les exigences en espace varient, ce qui influe sur les temps de parcours lors des opérations p/p. C'est pourquoi nous considérons séparément les différentes méthodes de rangement.

Les emplacements dédiés aux produits

Avec cette méthode de rangement, chaque emplacement est dédié à un produit donné: ceci pour toute la durée de l'horizon planifié. Cela représente une contrainte qui s'ajoute au problème d'affectation de base. Vu le caractère permanent que prend l'affectation des unités, le problème se pose de façon équivalente comme celui de la localisation des produits aux emplacements. Avant tout, pour chaque produit i, il faut déterminer la quantité A_i des emplacements à lui allouer. Ces quantités

sont données par les maximums des courbes "inventaire vs. temps" de chaque produit. Lors de la modélisation on prend en règle générale comme A_i les tailles Q_i des réapprovisionnements en inventaire et on néglige les stocks de sécurité. Ces paramètres sont la plupart du temps imposés aux administrateurs de l'entrepôt par les gestionnaires du stock. Cependant certains modèles les intègrent comme variables de décisions (voir la section précédente). Mais comme le soulignent Cormier et Gunn (1992), si de tels modèles reflètent mieux le fait que l'entrepôt est un élément du système plus général que constitue celui de la distribution, ces sous-systèmes sont eux-mêmes administrés séparément, de sorte que les solutions issues de ces modèles peuvent être difficiles à implanter. Dans ce qui suit, on considère que ces Qi sont des paramètres connus à l'avance.

Heskett (1963) propose une procédure de résolution dans le cas où les déplacements ne concernent qu'un seul point d'entrée/sortie (qui peut être un quai de réception/expédition). Cette procédure consiste à:

- numéroter les emplacements selon l'ordre croissant de leurs proximités au quai,
- calculer pour chaque produit un index,
- assigner séquentiellement selon cet index les produits aux emplacements.

L'index en question est désigné par l'acronyme *COI* (cube-per-order index) et est obtenu en faisant le rapport de l'espace alloué sur la demande quotidienne moyenne. Cette procédure qui ne se voulait qu'heuristique s'est avérée plus tard optimale dans bien des cas (Malette et Francis, 1972; Harmatuck, 1976; et Malmborg et Krishnakumar, 1987). Elle s'explique par le fait qu'à l'optimalité:

- si les produits occupent tous la même quantité d'espace, on place nécessairement les produits à plus grandes demandes plus proches du quai.

- si les produits ont tous la même demande, on place nécessairement les produits à plus grandes occupations d'espace plus éloignés du quai.

Malette et Francis (1972) ont développé un modèle d'affectation généralisé pour la localisation d'équipements où les coûts sont uniquement fonction de la (proportionnel à la) distance entre ceux-ci et des points fixes. Ce modèle s'applique donc à l'implantation dédiée des produits dans un entrepôt à plusieurs quais (ou points d'entrée/sortie). Dans le cas où il y a indépendance statistique entre le quai et le produit concernés lors d'une opération p/p, ils ont développé une simple procédure de tri menant à une solution optimale. Cette procédure n'est en fait qu'une généralisation de celle proposée par Heskett.
Leur modèle général consiste à minimiser:

$$F(S_1, S_2, ..., S_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in S_i} \sum_{k=1}^{p} \frac{d_{ik}}{A_i} t_{kj}$$

où:

- d_{ik} représente, sur l'horizon planifié la quantité d'opérations p/p impliquant le produit i et le quai k.
- t_{kj} représente le temps de déplacement entre le quai k et l'emplacement j.
- S_i, $i = 1$ à m sont les variables de décision qui sont non pas des nombres mais des ensembles de cardinalité A_i représentant respectivement les emplacements dédiés aux produits i.

Une simple reformulation du modèle conduit à un modèle d'affectation généralisé avec la correspondance: $X_{ij} = 1$ si l'ensemble S_i contient l'élément j, 0 sinon.

Dans le cas où il y a indépendance entre le quai et le produit concernés par une

opération p/p, le modèle revient à minimiser:

$$F(S_1, S_2, ..., S_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in S_i} \frac{d_i}{A_i} t_j$$

où:

- d_i correspond à la demande du produit i
- t_j correspond à la distance de l'emplacement j.

En démontrant que l'existence de nombres $k_1, k_2, .., k_q, .., k_n$ vérifiant:

$$\begin{cases} t_j \leq k_q & \forall j \in \bigcup_{i=1}^{q} S_i^* \\ t_j \geq k_q & \forall j \in \overline{\bigcup_{i=1}^{q} S_i^*} \end{cases}$$

pour tout q, impliquent que $S_1^*, .., S_m^*$ sont optimaux, ils démontrent l'optimalité du *COI* d'Heskett dans ces circonstances.

Soulignons que ces modèles reposent sur l'hypothèse d'équiprobabilité lors de la sélection d'un emplacement parmi ceux dédiés à un même produit. (Dans le cas où les produits ne sont réapprovisionnés qu'après avoir prélevé tout le stock, cette hypothèse n'affecte aucunement les résultats). Pour plus de détails voir aussi Francis et White (1974), p. 251-256.

Dans des études comparant la méthode de rangement du type dédié à d'autres, Hausman et al. (1976) utilisent une approche continue pour estimer le temps de parcours moyen d'une opération de placement suivie d'une opération de prélèvement dans le cas où la norme est celle de Chebeychev. Cette représentation continue concerne autant la position des emplacements que la distribution de la demande des produits. La validité de cette représentation est ensuite éprouvée lors d'une confrontation à des mesures discrètes sur quelques exemples. Cette validité semble être affectée lors d'une importante disparité dans la popularité des produits conjuguée

à un nombre réduit d'emplacements. Francis, McGinnis et White (1992) p.294-310 présentent également une approche continue pour le traitement des problèmes de grandes tailles (en nombre d'emplacements). Bien qu'exposée avec une norme rectilinéaire, cette approche, qui considère une distribution discrète des demandes en produit, est valide pour une norme quelconque et pour d'éventuels points d'entrée/sortie multiples. Les auteurs suggèrent l'utilisation des lignes de contour pour la délimitation des espaces dédiés aux différents produits, de façon à ce que l'accès à ces derniers progresse dans l'ordre des numéros des régions qui les contiennent. De même en se basant sur ces mêmes lignes de contours, ils présentent des formules pour l'estimation de l'espérance mathématique des distances parcourues. Une fois établie la ligne de niveau (R_{i-1}, R_i), qui délimite la région d'aire A_i dédiée au produit i, la fonction de répartition de la distance d_i à une unité du produit i est évaluée par:

$$P[d_i \leq k/ \text{ région } i \text{ impliquée}] = \mathcal{A}(R_{i-1}, k)/\mathcal{A}(R_{i-1}, R_i) \text{ pour } R_{i-1} \leq k \leq R_i$$

où $\mathcal{A}(R_{i-1}, k)$ est l'aire comprise entre le niveau R_{i-1} et le niveau k.
On a alors immédiatement l'espérance de la distance au produit i:

$$E[d_i/ \text{ région } i \text{ impliquée}] = \int_{R_{i-1}}^{R_i} k \frac{d}{dk} P[d_i \leq k/ \text{ région } i \text{ impliquée}] dk$$

Ce qui directement permet d'exprimer l'espérance de la durée d'une opération de placement suivie d'une opération de prélèvement:

$$E = \frac{4 \sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{A_i} E[d_i/ \text{ région } i \text{ impliquée}]}{\sum_{i=1}^{m} \frac{d_i}{A_i}}$$

Des recherches plus récentes (Bozer et White, 1984; Kim et Seidman, 1990; Hwang et Song, 1993; Ha et Hwang, 1994; Kouvelis et Papanicolaou, 1995; et Pan et Wang, 1996) proposent des modèles spécialisés de calcul de l'espérance mathématique de la durée d'un cycle de commande.

Les emplacements partagés entre les produits

Avec cette méthode de rangement les emplacements ne sont pas dédiés aux produits, du moins aux produits référencés par leurs codes de nomenclature. Cette méthode dans sa version originale a le net avantage d'être optimale au point de vue consommation d'espace, puisque cette consommation est donnée par le maximum de la courbe des inventaires agrégés. Plus exactement, cette consommation est donnée par le maximum de la courbe composée de la somme des courbes "inventaire vs. temps" et non la somme des maximums des courbes "inventaire vs. temps". Hormis le cas très particulier où tous les produits sont réapprovisionnés simultanément, les réductions d'espaces peuvent être appréciables. Goetschalckx (1983) montre que cette réduction s'approche de 50% dans le cas des systèmes équilibrés (c.-à-d. lorsque l'inventaire agrégé reste constant). En fait, elle est aujourd'hui très répandue en pratique non pas sous forme optimale, mais sous forme de la règle du "plus proche emplacement disponible". Cette politique consiste à assigner un produit entrant à cet emplacement et à prélever un produit en demande selon une politique pré-établie telle que celle du "premier entré premier sorti". Il y a, sous certaines conditions, équivalence au point de vue performance entre cette règle et le mode de rangement aléatoire (voir les résultats de simulation dans Schwarz et al., 1978). Dans un rangement aléatoire l'emplacement assigné à un produit entrant est choisi aléatoirement parmi les emplacements non-occupés. Cette équivalence permet de traiter avec la méthode aléatoire qui est beaucoup plus facile à modéliser.

Goetschalckx et Ratliff (1983 et 1990) sont les seuls à avoir cherché à résoudre le problème de façon optimale. Au lieu de considérer les unités par leurs codes de nomenclature comme dans le cas du dédié, ils retiennent un caractère plus pertinent: leurs durées de séjour dans l'entrepôt. Ils élaborent une procédure d'assignation optimale dans le contexte très particulier où la quantité Z_p de produits ayant une

durée de séjour p donnée reste constante sur tout l'horizon planifié (ils parlent de "système parfaitement équilibré" qui se trouve en un certain sens aux antipodes du cas où les réapprovisionnements se font de façon simultanée pour tous les produits). On peut voir que cette procédure est équivalente à celle d'Heskett lorsqu'on remplace la notion de produit par celle de durée de séjour. Elle consiste en fait à dédier les Z_p emplacements les plus accessibles aux unités ayant la plus courte durée de séjour et ainsi de suite. Dans le cas général, Goetschalckx (1983) introduit la notion de systèmes précognitifs et celle de systèmes adaptatifs. Le premier type de systèmes suppose la disponibilité d'une information complète et détaillée sur le séjour dans l'entrepôt de chaque unité. Avec le second type l'information requise est plus générale et elle ne porte que sur des grandeurs moyennes. C'est ainsi que dans Goetschalckx et Ratliff (1990), les auteurs proposent selon les types respectifs une heuristique baptisée *GREEDY* et une autre baptisée *ADAPTATIVE*. Cette dernière étant inspirée directement de la procédure optimale traitant le cas "parfaitement équilibré". Les auteurs terminent en démontrant par voie de simulation la supériorité de l'emploi de telles heuristiques par rapport à l'emploi du mode dédié (réduction approximative de 25% au niveau du temps de parcours).

L'optimalité de la procédure du cas "parfaitement équilibré" repose sur un petit lemme qui s'énonce ainsi:

> un rangement est optimal et ce indépendamment des valeurs spécifiques des temps d'accès si et seulement si ce rangement maximise simultanément le nombre d'unités affectées à l'emplacement le plus accessible, le nombre d'unités affectées aux deux emplacements les plus accessibles, ..., et le nombre d'unités affectées aux N emplacements les plus accessibles (le nombre N d'emplacements disponibles étant suffisant pour contenir toutes les unités).

Dans le cas quelconque et pour un système précognitif, Goetschalckx donne au problème la formulation suivante:

$$\min \ \sum_{j,i} t_j x_{ij}$$

$$s.c. \begin{cases} \sum_j x_{ij} & = 1 \quad \forall i \\ \sum_i b_{it} x_{ij} & \leq 1 \quad \forall j, t \\ x_{ij} \in \{0,1\} & \quad \forall i, j \end{cases}$$

où:

- x_{ij} est la variable de décision prenant la valeur 1 si l'unité i est affectée à l'emplacement j, 0 sinon.
- b_{it} est l' élément it d'une matrice appelée la matrice d'occupation, il prend la valeur 1 si à la période t, l'unité i est dans l'entrepôt, et il prend la valeur 0 sinon.
- t_j est le temps d'accès à l'emplacement j.

Goetschalckx et Ratliff (1990) montrent par l'intermédiaire d'un exemple que l'intégralité des sommets de la relaxation *P.L.* d'une version "Set Packing" de cette formulation n'est pas garantie. Ils renoncent dès lors au traitement optimal du problème.

Comme alternative, ils proposent *GREEDY* une heuristique réservée au cas précognitif. En premier, elle maximise sur l'ensemble complet des unités le nombre d'unités affectées à l'emplacement le plus accessible. Ensuite, étant donné cette affectation, elle maximise sur l'ensemble des unités restantes, le nombre d'unités affectées au second emplacement le plus accessible. Et ainsi de suite. L'algorithme se ramène en fait à deux tris dont le premier est celui des unités par rapport à leurs dates de départ et le second est celui des emplacements par rapport à leurs accessibilités. De là, les unités sont affectées dans cet ordre aux premiers emplacements

qu'elles peuvent occuper. Soulignons que cette procédure n'aboutit pas en général à une solution satisfaisant la condition du lemme. En effet, cette solution est issue d'une maximisation séquentielle et non d'une maximisation simultanée. Une des conséquences est que cette solution peut occuper plus que l'espace minimum requis.

Dans le cas des systèmes adaptatifs, les auteurs proposent l'heuristique *ADAPTATIVE* suivante:

- Etant donné le nombre quotidien (par période de temps) moyen $\overline{n}_p$ d'unités qui entrent avec une durée de séjour p, calculer $Z_p = p\overline{n}_p$.
- En suivant l'ordre croissant des durées de séjour p, accumuler les Z_p jusqu'à l'obtention d'une partie entière non-nulle.
- Dédier aux durées de séjour qui ont conduit à cette accumulation, le nombre équivalent à cette partie entière d'emplacements parmi les plus accessibles.
- Recommencer, mais en partant de la partie fractionnaire de la dernière accumulation. Et ainsi de suite.

Cette heuristique s'inspire de la procédure optimale du cas "parfaitement équilibré" et d'un résultat sur les entrepôts unidimensionnels qui incite à combiner de préférence les durées de séjour aux $\overline{n}_p$ petits.

Mentionnons que les auteurs présentent, dans une section consacrée aux résultats de leur analyse par simulation, une variante de *ADAPTATIVE* qui n'utilise que deux classes. Ils ne donnent pas de détails sinon que cette variante est analogue aux méthodes dédiées à deux classes élaborées par Hausman et al. (1976) (voir le paragraphe suivant). Ils constatent que les résultats obtenus sont en deçà de ce que l'on s'attendrait (ces résultats sont comparables à ceux d'un rangement aléatoire et pires que ceux d'un rangement du type dédié à deux classes).

Terminons en soulignant que Thompson (1988) a également proposé des heuristiques similaires à *ADAPTATIVE*. A partir d'un problème de taille moyenne, il produit à l'aide de simulations une comparaison de différentes politiques de rangement. En caractérisant chaque politique par les éléments suivants: ségrégation d'unités (produit ou durée de séjour), partage d'espace (total, individuel, ou par classes) et sélection d'emplacement (ciblé ou le plus proche disponible), il obtient 8 combinaisons définissant autant de politiques.

Les emplacements dédiés à des classes de produits

Dans cette méthode de rangement les produits sont regroupés en classes selon leurs taux de rotation, tandis que l'aire d'entreposage est divisée en régions disjointes et individuellement dédiées à ces classes. Cette approche est un compromis entre la méthode purement dédiée et celle purement aléatoire: les classes de produits étant traitées par le mode aléatoire. L'avantage du regroupement par classes, où aucune distinction n'est faite entre les produits d'une même classe, est de pouvoir considérer des situations où la rotation des stocks varie dans le temps et n'est pas connue parfaitement. Kouvelis et Papanicolaou (1995) considèrent le cas plus général des entrepôts rectangulaires dans le temps (l'accès aux extrémités du palettier prennent des temps différents). Ils donnent des formules pour le calcul de l'espérance des durées des cycles simples et duaux.

Hausman, Schwarz et Graves (1976) ont utilisé l'approche continue pour étudier et classer les trois méthodes de rangement suivantes: l'aléatoire, la dédiée pure, et la dédiée par classe. Cette analyse, qui montre une nette supériorité des deux dernières méthodes, est basée sur l'hypothèse d'une même utilisation d'espace. Mentionnons que mis à part certains magasins où le taux d'utilisation ne varie pas dans le temps

tels les "systèmes mini-charges" (Miniload Systems), les situations où une telle hypothèse s'applique rigoureusement sont aussi peu usitées que celles où s'applique l'hypothèse du "système parfaitement équilibré" de Goetschalckx et al. (1990) (dans un "système mini-charge", seule une partie des items contenus dans la charge manutentionnée est prélevée; le reste et le support de la charge sont retournés dans le palettier). Le partitionnement optimal du palettier en trois classes est résolu dans Hausman et al. (1976) par des méthodes numériques complexes (méthodes multigrilles). En se basant sur les affinités entre des partitions de différentes tailles, Rosenblatt et Eynan (1989) proposent une méthode de résolution du problème du partitionnement optimal qui passe par les résolutions successives de problèmes unidimensionnels. Ils utilisent ensuite cette méthode pour étendre l'analyse de Hausman et al. (1976) aux entrepôts ayant jusqu'à vingt classes.

Toujours à l'aide de l'approche continue Graves, Hausman et Schwarz (1977) ont étendu leur précédente analyse pour y inclure des cycles duaux (une opération de placement et une opération de prélèvement sont exécutées consécutivement entre deux visites du point d'entrée/sortie). Ils mettent en évidence la nette supériorité des politiques de contrôle intégrant le mode dual et un rangement par classes. En utilisant l'outil simulation Schwarz, Graves et Hausman (1978) confirment leurs précédents résultats. En utilisant également l'outil simulation, Linn et Wysk (1987) préconisent le genre dédié lorsque le taux d'utilisation du palettier est grand et le genre partagé dans le cas contraire. Ha et Hwang (1994) transposent le concept des classes aux caroussels.

1.3 Conclusion

Les objectifs traditionnellement considérés lors du développement de méthodes de rangement de systèmes à cycle de manutention simple sont la minimisation des coûts de manutention et la minimisation des coûts d'utilisation d'espace. Les coûts de manutention sont ceux associés à la charge moyenne, c'est-à-dire ceux correspondant à la consommation énergétique et à l'usure des équipements. La littérature n'a presqu'exclusivement considéré que les méthodes dédiées pures ou les méthodes dédiées par classe.

Goetschalckx et Ratliff (1983 et 1990) ont démontré la supériorité des méthodes de type partagé pour les deux objectifs. Ils proposent des heuristiques dont l'une devient une procédure optimale dans le cas bien particulier des systèmes parfaitement équilibrés.

La qualité des résultats obtenus pour le type partagé et l'absence de procédures optimales générales ont motivé les recherches présentées au chapitre 2. Les recherches présentées dans le reste de la thèse ont été inspirées par la possibilité d'optimiser d'autres critères que la charge moyenne de manutention.

CHAPITRE 2

Charge moyenne et entreposage partagé

2.1 Présentation

Ce chapitre traite du problème de la minimisation de la charge moyenne de manutention associée aux politiques d'affectation du type partagé. Minimiser la charge moyenne, minimiser la charge totale, et minimiser l'espérance de la durée d'un cycle de manutention sont des objectifs équivalents. Aucune contrainte liée à la nature des produits n'est imposée à l'affectation puisque le type partagé est utilisé.

L'article inclut dans ce chapitre se présente comme une suite logique aux travaux de Goetschalckx et Ratliff (1990). Ces derniers démontrent incontestablement les grandes potentialités des politiques de type partagé. Les heuristiques qu'ils proposent sont très performantes en comparaison des politiques classiques. Mais, mise à part celle d'une classe très particulière, l'optimalité d'aucune solution n'est établie ou même appréciée. Le but poursuivi ici est d'une part de proposer une approche optimale pour les problèmes de taille moyenne et une approche heuristique pour les problèmes de grande taille, et d'autre part de se servir de l'approche optimale pour valider l'approche heuristique.

L'information sur le séjour des unités est regroupée dans un graphe baptisé graphe des séjours. Les noeuds de ce graphe correspondent aux journées de l'horizon tandis que les arcs correspondent aux unités. Les unités affectées à un même emplacement sont alors représentées par un chemin dans le graphe.

Le problème de l'affectation des unités aux emplacements se traduit par celui de l'affectation d'une sélection de chemins du graphe des séjours à ces emplacements. Ainsi, il s'apparente aux problèmes de tournées de véhicules où les clients à visiter sont des unités à entreposer, tandis que les véhicules sont des emplacements aux coûts d'utilisation croissant. Il se formule en fait comme un problème de partitionnement d'ensemble avec contraintes supplémentaires où les ensembles couvrants sont si nombreux qu'il est impensable de les énumérer explicitement.

La difficulté de l'énumération peut être contournée de deux manières: soit en construisant progressivement les ensembles a priori les plus pertinents, soit en intégrant implicitement tous ces ensembles. C'est là les principes respectifs des approches heuristique et optimale.

La construction progressive dans l'approche heuristique est conduite avec le soucis de satisfaire au mieux une condition suffisante d'optimalité énoncée par Goetschalckx et Ratliff (1990). L'intégration implicite dans l'approche optimale repose sur la méthode de génération de colonnes. Pour aboutir à des solutions entières, la méthode de génération de colonnes est inscrite dans un processus de séparation et d'évaluation progressive.

L'expérimentation est divisée en deux groupes de tests. Dans le premier, on résout optimalement quelques problèmes de taille moyenne. Ces problèmes sont à nouveau résolus mais cette fois par l'heuristique. Dans le second groupe de tests, on considère une grande quantité de problèmes dont la taille varie de moyenne à très grande. Les problèmes sont générés de la même façon que dans Goetschalckx et Ratliff. La nouvelle heuristique et une heuristique de Goetschalckx et Ratliff sont appliquées à des fins de comparaison. Les critères de comparaison sont la charge moyenne et l'utilisation de l'espace.

2.2 Le problème de l'optimisation de l'entreposage partagé: méthodes exacte et heuristique

Pierre Montulet André Langevin
Diane Riopel
Ecole Polytechnique de Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel et GERAD

RÉSUMÉ

L'entreposage partagé, contrairement à l'entreposage dédié, permet qu'une alvéole du palettier reçoive des unités de différents produits ou classes de produits. Ainsi, ce type d'entreposage peut conduire à des gains substantiels en espace et en temps de manutention. Nous nous intéressons au problème de la minimisation du temps de manutention dans le cadre d'entrepôts où les déplacements sont simples, non interfoliés, et où l'information est disponible en début d'horizon. Nous proposons et appliquons une méthode exacte pour des problèmes de taille raisonnable. Ensuite, nous proposons et analysons pour les problèmes de grande taille une méthode heuristique très performante.

Mots clefs: entrepôt, rangement de type partagé, manutention, optimisation.

ABSTRACT

The shared storage assignment policy, contrary to the dedicated one, allows a rack slot to receive units from different products or classes of products. This type of storage can lead to substantial savings in space and travel time. We focus on the problem of minimizing travel time for the context where motion cycles are simple, non-interleaved, and where information is available at the beginning of the horizon. We propose and apply an exact method for medium size problems. Then, we propose and analyse a very efficient heuristic method for large scale problems.

Key Words: Warehouse, Shared Storage Assignment Policy, Material Handling, Optimization.

2.2.1 Introduction

Durant ces dernières années, les problèmes relatifs au design, à l'opération et au contrôle des entrepôts ont fait l'objet de nombreuses publications (pour des revues récentes voir Cormier et Gunn 1992, Francis et al. 1992, et Montulet et al. 1995). Les problèmes considérés dans la littérature peuvent être classés en problèmes de capacité de traitement (*throughput problems*), qui ont trait au nombre d'opérations par unité de temps, en problèmes de capacité d'entreposage, qui concernent le volume emmagasinable, et en problèmes de design. Pour les problèmes de capacité de traitement, on retrouve entre autres les méthodes de rangement. Celles-ci sont fortement liées à la nature des opérations de placement et de prélèvement: dépendance entre opérations et nombre d'unités impliquées. La problématique du rangement varie selon les types de technologie et de règles générales d'opération. Plusieurs entrepôts automatiques ont des tailles de charge manutentionnée uniformes, et ont des cycles de manutention simples (les opérations sont indépendantes, non interfoliées). Nous nous intéressons à l'optimisation de méthodes de rangement partagé pour ce type d'entrepôt.

Avant la venue des systèmes d'information automatisés, il fallait souvent dédier les alvéoles (cases) du palettier (rayonnage pour palettes) à des produits spécifiques afin de faciliter la gestion aux niveaux du repérage et des inventaires. Le type de rangement qui en découle est appelé entreposage dédié (*dedicated storage* ou *fixed slot storage*). Dans ce contexte, le problème qui se pose est celui de l'affectation des produits aux emplacements de façon à minimiser les temps de manutention, les besoins en espace étant fixés par la somme des besoins maximaux individuels des produits (typiquement donnés par les tailles de réapprovisionnement). Heskett (1963, 1964) propose une méthode, alors empirique, qui revient à placer les produits dont les taux de rotation sont les plus élevés aux emplacements les plus

accessibles, la rotation d'un produit s'évaluant par le rapport de sa demande sur la taille de ses réapprovisionnements. Dans le cas des cycles simples, l'optimalité de cette procédure est indépendamment démontrée par Harmatuck (1976) et par Malette et Francis (1972). Ces derniers considèrent en fait le contexte plus général d'un entrepôt comprenant plusieurs quais, ou points d'entrée/sortie. L'optimalité est aussi établie par Malmborg et Krishnakumar (1987) dans le cas de cycles interfoliés, c'est-à-dire dans le cas où une opération de placement et une opération de prélèvement sont effectuées entre deux visites du point d'entrée/sortie. Cette forme optimale de la méthode dédiée est désignée dans la littérature anglaise sous les termes: *throughput based dedicated storage* ou *turnover based dedicated storage.* Cet entreposage dédié a été introduit pour concurrencer les formes non optimisées comme celles basées sur les codes séquentiels de nomenclature (*part number sequence storage*) et aussi pour concurrencer l'entreposage aléatoire (*random storage, floating slot storage, COL storage,* ou *closest open location storage*). En utilisant une approche continue et la simulation, Hausman, Schwarz et Graves (1976, 1977 et 1978) comparent le dédié, l'aléatoire et un hybride (*class based storage*). Ils concluent à la nette supériorité du dédié sous l'hypothèse très restrictive d'une même utilisation d'espace. Tenant compte de ce facteur, Linn et Wysk (1987) obtiennent par voie de simulation des résultats plus nuancés. En fait, Goetschalckx (1983) montre que par rapport au dédié des méthodes telles que l'aléatoire mènent dans certains cas à un gain en utilisation d'espace s'approchant de 50%.

Avec un entreposage aléatoire, des unités de produits différents peuvent partager, les unes après les autres, un même emplacement. On peut donc classer l'aléatoire dans la famille des méthodes d'entreposage partagé (*shared storages*). Ainsi, l'entreposage aléatoire peut être vu comme une forme non optimisée du partagé. Très peu de recherches ont été menées sur l'entreposage partagé dont l'expansion devrait suivre celle des systèmes d'information automatisés, auxquels on délègue les tâches

de gestion au niveau repérage et inventaire. Les seuls travaux portant sur cette méthode sont de Goetschalckx (1983), Goetschalckx et Ratliff (1990) et Thompson (1988). Les résultats présentés sont très concluants: en plus d'exiger beaucoup moins d'espace les méthodes partagées proposées mènent à d'importants gains en temps de manutention sur les méthodes dédiées. Nous décrivons en détail ces méthodes dans la prochaine section. Mentionnons seulement ici que dans le cadre d'une optimisation, les résultats ne peuvent aller qu'en ce sens puisqu'on ne fait que soustraire au problème un certain nombre de contraintes. Comme le présent article, les articles mentionnés font, pour la plupart, l'hypothèse de cycles de manutention simples. Avec des cycles de manutention multiples, les charges sont décomposées à la collecte et les charges partielles déplacées plusieurs à la fois (voir par exemple Jarvis et McDowell 1991 ou Oudheusden et Zhu 1992).

Pour formuler un programme mathématique modélisant le problème de l'entreposage partagé, nous faisons l'hypothèse que le système est déterministe (*precognitive* ou *static*), c'est-à-dire que les dates d'arrivée et de départ de chacune des unités sont connues a priori. Formellement, l'entreposage partagé et déterministe soulève le problème de l'affectation des unités aux emplacements uniquement sur la base des temps d'accès à ces emplacements et des dates d'arrivée et de départ de ces unités. Nous étudions ce problème dans le cadre de la minimisation des temps de manutention.

La section suivante précise le problème étudié; on y présente un résumé critique des travaux pertinents. A la section 2.2.3, une méthode exacte est proposée pour des problèmes de taille moyenne. Les bonnes performances d'une heuristique développée par Goetschalckx et al. (1983, 1990) sont mises en évidence. Ensuite, à la section 2.2.4, on démontre à l'aide de plusieurs centaines de tests de tailles relativement importantes la supériorité systématique d'une nouvelle heuristique. Cette nouvelle

heuristique est également comparée à la méthode exacte. A la section 2.2.5, on discute de la possibilité d'implantation dynamique des méthodes présentées. Enfin à la section 2.2.6, on conclut en suggérant quelques avenues de recherche et en présentant une autre application possible des méthodes étudiées.

2.2.2 Entreposage partagé et déterministe

Nous partons des hypothèses de base communément posées dans la littérature:

- l'entrepôt est à charge unitaire: les unités qui y sont stockées et manutentionnées sont toutes identiques aux yeux des technologies statique et dynamique de stockage;
- la technologie statique est à sélectivité totale et est uniforme: les palettiers frontaux sont typiquement à simple profondeur, et à alvéoles identiques;
- la technologie dynamique est à capacité unitaire: les équipements de desserte spécialisés sont en général des transtockeurs ou des chariots élévateurs dont les capacités sont toutes d'une unité;
- les cycles des déplacements sont simples: un seul emplacement est desservi entre deux passages consécutifs à un point d'entrée/sortie.

A ces hypothèses de base s'ajoutent celle portant sur la connaissance (*precognition*) de l'information: on suppose que l'on dispose en début d'horizon des dates d'arrivée et de départ de chacune des unités à entreposer. Soulignons que le mot date ne doit pas être pris au sens strict car, en fait, seul l'ordre chronologique des événements importe. Nous faisons également l'hypothèse que les vitesses de l'appareil de manutention sont telles que les unités à manutentionner durant une

journée (période) quelconque puissent l'être sans aucun débordement sur la journée suivante. Goetschalckx et Ratliff (1990) parlent d'un taux d'utilisation qui permet de négliger tout phénomène de file d'attente. Soulignons enfin qu'implicitement on suppose une aire tampon apte à contenir toutes les unités manutentionnées à l'intérieur d'une journée quelconque; cette aire est alors vide en fin de journée.

L'objectif premier associé au problème est la minimisation des temps de manutention, son atteinte s'accompagnant en général d'une faible consommation d'espace. Seuls Goetschalckx (1983) et Goetschalckx et Ratliff (1990) ont jusqu'ici abordé le problème de l'entreposage partagé et déterministe. Dans un premier temps, ils considèrent le modèle suivant:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i,j} t_j x_{ij} \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{rll} \sum_j x_{ij} & = 1 & \forall i \\ \sum_i b_{it} x_{ij} & \leq 1 & \forall j, t \\ x_{ij} \in \{0,1\} & & \forall i, j \end{array} \right. \end{array} \tag{2.1}$$

où:

- x_{ij} est la variable de décision prenant la valeur 1 si l'unité i est affectée à l'emplacement j, 0 sinon;
- b_{it} est l'élément it d'une matrice appelée la matrice d'occupation; il prend la valeur 1 si à la période t, l'unité i est dans l'entrepôt, et il prend la valeur 0 sinon;
- t_j est le temps d'accès à l'emplacement j.

En raison de la grande taille du problème et de l'absence de propriétés simplificatrices d'importance, les auteurs se tournent vers un traitement heuristique. Ce

traitement est basé sur un lemme (Goetschalckx et Ratliff 1990) qui peut être énoncé ainsi:

> un rangement est optimal et ce, indépendamment des valeurs spécifiques des temps d'accès, si et seulement si ce rangement maximise simultanément le nombre d'unités affectées au premier, aux deux premiers, aux trois premiers, ..., aux N premiers emplacements (les N emplacements sont considérés par ordre d'accessibilité).

La condition énoncée correspond à un problème multi-critères dont le traitement exact ne paraît certainement pas plus commode. D'une part, l'indépendance de la solution par rapport aux temps d'accès n'est pas imposée pour le problème original. D'autre part, la modélisation de ce problème multi-critères conduit aux contraintes du modèle (2.1), mais surtout elle implique autant d'objectifs qu'il y a d'emplacements! Cependant, comme l'expliquent les auteurs, le nombre d'unités affectées à un même emplacement peut être séparément maximisé sur tout sous-ensemble d'unités: il suffit, par exemple, de sélectionner les unités en tenant compte de leur compatibilité et en progressant selon l'antériorité des départs. Donc il est possible de donner une solution approchée aux maximisations simultanées en procédant en séquence à des maximisations séparées, celles des nombres d'unités affectées au premier, au second, au troisième, ..., au $N^{\text{ième}}$ emplacements.

Ainsi, tentant de satisfaire au mieux la condition du lemme, l'heuristique *Greedy* de Goetschalckx et Ratliff (1990) consiste, après avoir trié les unités par ordre croissant des dates de départ, à les affecter dans cet ordre aux emplacements libres les plus accessibles. Les unités aux même dates de départ sont affectées dans l'ordre croissant des dates d'arrivée.

Goetschalckx et Ratliff (1990) présentent une analyse comparative des performances de leur heuristique par rapport au rangement dédié (optimal). Les résultats sont probants: un gain moyen de 25%! Ils présentent également un volet adaptatif destiné aux systèmes non déterministes, moins exigeants au niveau de la précision de l'information requise en début d'horizon, mais auxquels on ne peut associer un vrai modèle d'optimisation. Notons que ce volet a également été abordé par Thompson (1988).

Revenons au niveau du déterministe et soulignons ici que *Greedy* "gaspille" lors des premières étapes de son traitement séquentiel, c'est-à-dire utilise prématurément les bonnes unités. La nature de la maximisation séparée appliquée à chaque étape en est la cause. En effet, la maximisation séparée d'une étape donnée peut utiliser inutilement de "bonnes" unités, c'est-à-dire des unités qui, lorsqu'elles ne sont pas utilisées immédiatemement, peuvent améliorer les résultats des maximisations séparées subséquentes. Ainsi, la valeur d'une unité dépend des possibilités de substitution qui lui sont associées. En fait, une unité dont le séjour est inclus dans celui d'une autre peut toujours lui être substituée et est ainsi meilleure. Donc, avec une relative subjectivité, on peut dire que les bonnes unités ont de courtes durées de séjour et que leur utilisation devrait être modérée lors des premières étapes du processus séquentiel. C'est de ce constat que l'approche heuristique présentée à la section 2.2.4 tire son inspiration. A la prochaine section, nous nous penchons sur la résolution optimale de problèmes de taille moyenne.

2.2.3 Approche exacte

Considérons le graphe des séjours $G = (X, A)$ (voir figure 2.1), où:

- X = l'ensemble des dates $\{1, 2, \ldots, T\}$ de l'horizon;

- à chaque unité à entreposer correspond un arc dans A. Cet arc, que l'on nomme *arc unité*, relie le noeud date d'arrivée au noeud date de départ;
- deux noeuds correspondant à deux dates consécutives sont reliés par un arc, désigné par *arc de connexion*.

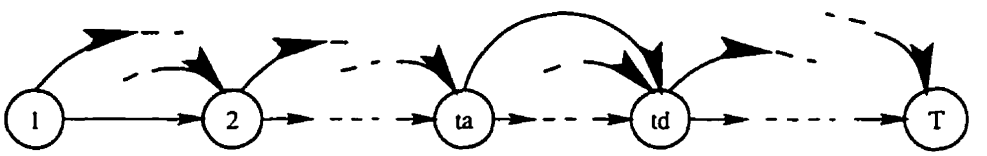


Figure 2.1 Graphe $G = (X, A)$; une unité arrive en *ta* et quitte en *td*.

Ce graphe sans circuit contient toute l'information sur le séjour des unités dans l'entrepôt. Cependant, il est bien plus qu'un simple mode de représentation des données: il y a correspondance biunivoque entre les chemins de ce graphe et les combinaisons d'unités aux séjours disjoints deux à deux. Désignons par *combinaison* j, une telle combinaison d'unités, qui peuvent être affectées à un même emplacement. Désignons par *classe* k, l'ensemble des emplacements ayant t_k comme temps d'accès. Le nombre total d'alvéoles de la classe k est désigné par η_k (on peut voir la classe k comme un seul emplacement de capacité η_k et de temps d'accès t_k). Le problème de l'entreposage partagé revient à sélectionner certaines combinaisons et à les affecter aux classes en couvrant toutes les unités et en respectant les contraintes de faisabilité, c'est-à-dire en n'affectant pas à une même classe plus de combinaisons que le nombre d'emplacements qui la composent. L'objectif consiste à minimiser le temps total de manutention. La contribution à l'objectif de chaque affectation est le produit entre la cardinalité de la combinaison c_j et le temps d'accès à la classe t_k. Voici le modèle correspondant:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{j,k} c_j t_k y_{jk} \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{rll} \sum_j a_{ij} \sum_k y_{jk} & = 1 & \forall i \\ \sum_j y_{jk} & \leq \eta_k & \forall k \\ y_{jk} \in \{0,1\} & & \forall j,k \end{array} \right. \end{array} \tag{2.2}$$

où:

- l'indice j identifie une combinaison;
- l'indice i identifie une unité à entreposer;
- l'indice k identifie une classe; t_k est alors le temps d'accès à la classe;
- $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si la combinaison } j \text{ comprend l'unité } i; \\ 0 \text{ sinon;} \end{cases}$
- $c_j =$ le nombre d'unités formant la combinaison $j = \sum_i a_{ij}$;
- $\eta_k =$ le nombre d'emplacements de la classe k;
- $y_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si la combinaison } j \text{ est affectée à un emplacement de la classe } k; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Avec cette formulation, les variables de décision sont les y_{jk}. Il est à noter que la somme $\sum_k y_{jk}$ prend la valeur 1 ou 0 selon que la combinaison j est sélectionnée ou non. Ainsi, le premier groupe de contraintes de (2.2) impose que chaque unité soit couverte. Plus précisément, il impose que chaque unité soit entreposée une et une seule fois. Le second groupe assure la faisabilité: quelle que soit la classe, il limite à la taille de celle-ci le nombre de combinaisons qui lui sont affectées. Quant au troisième groupe, il est tout simplement celui de l'intégrité des variables d'affectation.

Le problème étudié en est un de partitionnement d'ensemble avec contraintes supplémentaires. Le correspondant de l'élément à couvrir est l'unité i à entreposer

et celui de l'ensemble couvrant, le couple combinaison-classe jk. De plus, l'ensemble de ces ensembles couvrants est partitionné en classes et dans chacune de ces classes, le nombre d'ensembles couvrants que l'on peut y sélectionner est limité. Il s'agit en fait d'un programme linéaire en nombres entiers dont les variables, c'est-à-dire les couples combinaisons-classes, sont généralement en si grande quantité qu'il est impensable d'énumérer explicitement toutes les colonnes de la matrice des contraintes. La technique de la génération de colonnes (Dantzig-Wolfe) s'est montrée très efficace pour résoudre la relaxation linéaire de tels programmes, où il y a implicitement une composante réseau (Desaulniers et al. 1994). La résolution exacte du programme original, en nombres entiers, s'obtient en appliquant cette technique à chaque noeud d'un arbre de séparation et d'évaluation progressive (*branch&bound*).

La méthode de génération de colonnes opère avec un problème maître, c'est-à-dire avec un modèle limité à un nombre réduit de colonnes, et avec un sous-problème, dont la résolution génère les colonnes à ajouter au problème maître. Le problème maître est traité par l'algorithme du simplexe et le sous-problème l'est par un algorithme de réseau. En fait, ce problème maître fournit au sous-problème ses variables duales et classiquement, celui-ci retourne la colonne de plus petit coût réduit. Si ce coût est non négatif, la solution optimale du programme est trouvée. Sinon, un traitement complet par le simplexe est effectué et un nouveau cycle est lancé.

Spécifiquement, notre sous-problème consiste en la recherche du couple combinaison-classe au coût réduit le plus petit. Si dans le modèle (2.2), on désigne par μ le vecteur des multiplicateurs associé au premier groupe de contraintes et par ν celui associé au second groupe, on obtient pour le coût réduit de la variable y_{jk} l'expression suivante:

$$\overline{C}_{jk} = t_k c_j - \sum_i a_{ij}\mu_i - \nu_k,$$

qui, en remplaçant c_j par $\sum_i a_{ij}$, devient:

$$\overline{C}_{jk} = \sum_i a_{ij}(t_k - \mu_i) - \nu_k.$$

Soit encore:

$$\overline{C}_{jk} = \sum_{i \in \text{comb}_j} (t_k - \mu_i) - \nu_k,$$

où comb_j désigne la combinaison j. Cette dernière identité suggère une résolution en deux étapes:

- d'abord la recherche pour toute classe k du plus court chemin de 1 à T dans G, avec la pondération suivante: le poids de tout arc unité i est de $t_k - \mu_i$, tandis que celui de tout arc de connexion est nul;
- et ensuite la comparaison entre la longueur de tous ces plus courts chemins ajustés par les termes $-\nu_k$.

Pour obtenir une solution entière, l'utilisation de la méthode de génération de colonnes est répétée à chaque noeud d'un arbre de séparation et d'évaluation progressive. En général, la conjugaison de ces deux techniques est particulièrement délicate: il faut tenir compte des coupes antérieures et ne pas regénérer une colonne précédemment exclue. Les branchements doivent préserver les structures mathématiques du problème maître et des sous-problèmes. En fait, les décisions de branchement portent sur les "inter-tâches", c'est-à-dire sur la succession des unités affectées à un même emplacement. Pour chaque paire d'unités, le flot qui connecte les arcs correspondant est calculé; le flot est en fait une somme portant sur tous les réseaux de sous-problème. Ensuite, la paire définie par le plus grand flot est sélectionnée. Enfin, une séparation est obtenue dans l'arbre d'enumération: le flot de cette paire

est fixé à un dans une branche et à zéro dans l'autre. Chaque décision est prise au niveau de l'algorithme du plus court chemin, qui est modifié afin de manipuler des listes d'étiquettes non-comparables.

Nous avons utilisé *Gencol* (Desrosiers et al. 1992 et Desaulniers et al. 1994), un logiciel de génération de colonnes spécialement développé pour la résolution de problèmes de recouvrement/partitionnement dont les modèles se définissent à partir de chemins de graphes; les modèles comprennent éventuellement des contraintes et variables supplémentaires. Ce logiciel est destiné au traitement optimal de nombreux problèmes de tournées de véhicules et de fabrication d'horaires (Desaulniers et al. 1994). Précisons qu'avec ce logiciel, plusieurs colonnes à coût réduit négatif peuvent être retournées simultanément au problème maître selon les valeurs données à certains paramètres de calibrage. En fait, beaucoup d'autres paramètres et options permettent à l'utilisateur de personnaliser le processus de résolution. Voici dans notre cas, une liste de quelques éléments pertinents: la gestion des colonnes traitées par le simplexe, le contrôle des colonnes fournies par itération de la procédure de génération de colonnes, le critère de sélection de la variable entrante du simplexe, le passage éventuel au simplexe dual, la règle de parcours de l'arbre d'énumération, etc.

Le tableau (2.1) présente les performances de la méthode exacte au point de vue temps de résolution. Les tests ont été effectués sur une station *Sun Sparc* 20 *(Modèle* 612*)*. Les données du premier test sont tirées d'un exemple de la thèse de Goetschalckx (1983). Les données des autres sont générées aléatoirement, conformément aux indications de Goetschalckx et Ratliff (1990). La section suivante donne une description détaillée sur la façon dont elles sont produites ainsi que sur le système d'entreposage considéré. Ici, nous retenons surtout le nombre d'unités, le nombre moyen d'unités par emplacement (à l'optimalité), la taille de l'horizon et

la durée moyenne de séjour.

Tableau 2.1 Tests de la méthode exacte.

Taille de l'horizon	Durée moyenne de séjour (arrondie)	Nombre d'unités	Nombre moyen d'unités par emplacement	Temps de calcul h:mm:ss
12	4	42	2.2	0 : 00 : 01
40	12	164	4.1	0 : 01 : 56
60	8	141	9.4	0 : 09 : 48
80	6	160	16.0	0 : 52 : 14
20	10	62	6.9	0 : 00 : 11
20	7	164	5.5	0 : 03 : 24
30	6	661	5.0	3 : 58 : 12

Le coût optimal du 1er test coïncide avec celui obtenu par *Greedy*. Quant aux coûts *Greedy* des autres tests, ils ne sont jamais au-delà de 1% de l'optimalité! Cela démontre clairement la validité de l'heuristique pour des problèmes de ces tailles.

Par ailleurs, des 2e, 3e et 4e tests, on voit que le temps de calcul croît fortement avec le nombre moyen d'unités par emplacement, et ce pour un nombre d'unités plus ou moins fixé. Similairement, des trois derniers tests, on voit que le temps de calcul croît considérablement avec le nombre d'unités lorsque le nombre moyen d'unités par emplacement est gardé plus ou moins fixe. Cette dernière tendance est due à ce que le nombre de lignes de la matrice des contraintes est fixé par le nombre d'unités. Quant à la première tendance, elle est la manifestation de la présence de dégénérescence lors de résolution du problème maître. Mais elle s'explique aussi par le lien entre l'accroissement du nombre moyen d'unités par emplacement et l'accroissement du nombre de colonnes, soit l'accentuation du caractère combinatoire du problème. Pour s'en convaincre, il suffit de voir qu'à un extrême, si les n unités à entreposer sont incompatibles deux à deux, le nombre de combinaisons distinctes est n et le nombre moyen d'unités par emplacement est 1; tandis qu'à l'autre extrême, si ces

unités sont compatibles deux à deux, le nombre de combinaisons est $2^n - 1$ et le nombre moyen d'unités par emplacement est n.

En bref, ces tests montrent d'une part, les limites de l'approche optimale suivant la taille des problèmes exprimée en unités et suivant le nombre moyen d'unités par emplacement, et d'autre part, les bonnes performances de l'heuristique *Greedy* à l'intérieur de ces limites.

2.2.4 Approche heuristique

La section précédente révèle l'efficacité de l'heuristique *Greedy*. Mais comme nous l'avons indiqué à la section 2.2.2, cette approche peut être améliorée. En effet lorsque *Greedy* produit les combinaisons à affecter de l'emplacement le plus accessible à l'emplacement le moins accessible, elle procède à une séquence de maximisations séparées dont les premières sont peu soucieuses des suivantes. L'heuristique peut être améliorée si toute maximisation séparée n'utilise qu'en cas de besoin des unités aux courtes durées de séjour. Ainsi, tout comme *Greedy*, notre heuristique tente de satisfaire au mieux la condition d'optimalité du lemme en procédant en séquence à des maximisations séparées plutôt qu'à des maximisations simultanées. Plus précisément, si l'on désigne par la durée de séjour d'une combinaison la somme des durées de séjour de ses unités alors, à une étape donnée de la séquence, la maximisation séparée ne porte plus uniquement sur la cardinalité de la combinaison correspondante mais aussi sur sa durée de séjour: le premier point étant prioritaire. Concrètement, notre heuristique consiste en la recherche de plus longs chemins dans des graphes dérivés de $G = (X, A)$ où chaque arc unité est pondéré par $K + DS_{\text{unité}}$; K étant une constante plus grande que T, l'étendue de l'horizon, et $DS_{\text{unité}}$ étant l'étendue de la durée de séjour de l'unité. Voici un pseudo-code de l'heuristique:

Répéter tant que A contient des arcs unité:

- obtenir le plus grand chemin (sans circuit) de 1 à T;
- affecter les unités correspondant aux arcs de ce chemin à l'emplacement non encore affecté le plus accessible;
- exclure de A les arcs unité de ce chemin.

Avec un tel K, la maximisation de la cardinalité de la combinaison est prioritaire puisque sa durée de séjour n'excède jamais T. Notons qu'il est possible de reproduire le comportement de *Greedy* en pondérant les arcs unité par $K_1 - K_2 \times$ date_de_départ $-$ date_d'arrivée, avec $K_1 \gg K_2 \gg 1$, plutôt que par $K + DS_{\text{unité}}$.

Illustrons tout ceci à l'aide d'un petit exemple. On considère un entrepôt linéaire de trois emplacements, *e1*, *e2* et *e3*, aux temps d'accès respectifs de *1*, *2* et *3*. Il y a quatre unités *u1*, *u2*, *u3* et *u4* à entreposer sur un horizon de quatre journées. L'information sur le séjour des unités est donnée à la figure 2.2; le graphe des séjours G associé est présenté à la figure 2.3. Remarquons tout de suite que le maximum de l'inventaire sur les quatre journées est de deux unités et donc qu'aucune méthode n'utilisera moins de deux emplacements.

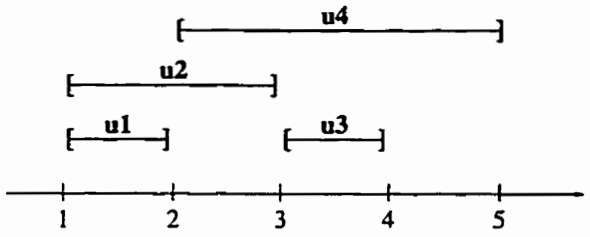


Figure 2.2 Petit exemple: le séjour des unités.

Voyons maintenant comment *Greedy* procède. Vu que les unités sont numérotées par ordre croissant des dates de départ, la procédure les considère dans l'ordre de la numérotation. Elle débute par l'affectation de *u1* à *e1*, l'emplacement le

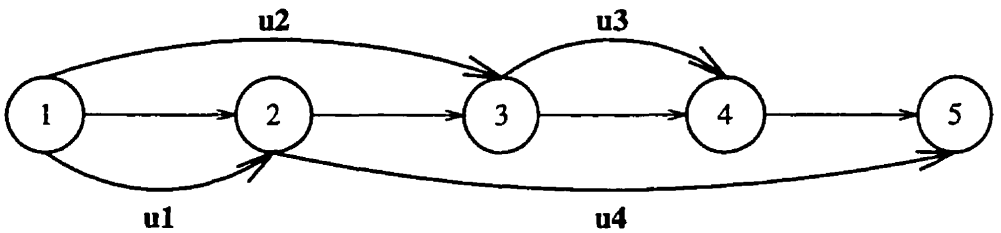


Figure 2.3 Petit exemple: le graphe des séjours G associé.

plus accessible. Comme *e1* est occupé quand *u2* entre, celle-ci est affectée à *e2*, le deuxième emplacement le plus accessible. Et ainsi de suite, de sorte que *u3* est affectée à *e1* et que *u4* l'est à *e3*. En bref, l'affectation se résume à: *u1* et *u3* à *e1*, *u2* à *e2* et *u4* à *e3*, pour un coût total de $4 \times (2 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3) = 4 \times 7$. Cette solution peut être également obtenue par la recherche, dans le graphe de la figure 2.3, de chemins disjoints par leurs arcs unité. En effet, on peut dire que la maximisation séparée de *Greedy* produit un chemin composé d'unités qui d'abord sont en nombre maximal et qui ensuite ont des départs avancés. Ainsi, lors de la première maximisation séparée, *u1* et *u3* sont choisies plutôt que par exemple *u1* et *u4*; alors que *u3* est meilleure que *u4* (le séjour de *u3* est inclus dans celui de *u4*) et lors de la maximisation séparée suivante *u3* est préférable à *u4*. Par ce mauvais choix, la flexibilité des maximisations séparées subséquentes est affectée: il y a besoin de deux emplacements additionnels pour les unités restantes *u2* et *u4*, plutôt que d'un seul pour *u2* et *u3*. La maximisation séparée de notre heuristique ne conduit pas à ce gaspillage car elle produit un chemin composé d'unités qui d'abord sont en nombre maximal et qui ensuite ont de longues durées de séjour. Dans notre cas, l'affectation est: *u1* et *u4* à *e1* et, *u2* et *u3* à *e2* pour un coût total de $4 \times (2 \times 1 + 2 \times 2) = 4 \times 6$. Les deux solutions sont présentées à la figure 2.4. Le résultat de la comparaison entre les deux approches est clair: deux emplacements utilisés plutôt que trois et un gain de 14% sur les temps de manutention! En fait, notre solution est optimale tant au niveau de l'espace utilisé qu'au niveau du temps de manutention.

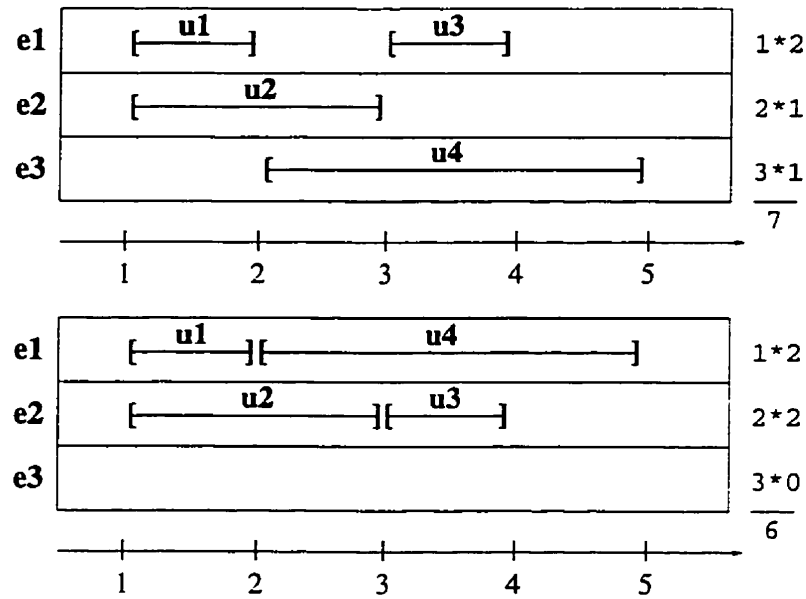


Figure 2.4 Petit exemple: les deux solutions.

Nous avons mené une étude comparative entre notre heuristique et *Greedy*. Cette étude a porté sur 4800 problèmes tests similaires à ceux considérés par Goetschalckx et Ratliff (1990) lors de leurs comparaisons entre les méthodes partagée, dédiée, et du plus proche emplacement disponible. Le système d'entreposage considéré, "carré dans le temps" (*square-in-time*), c'est-à-dire d'accès aux extrémités horizontale et verticale se faisant en des temps égaux, consiste en un palettier de taille suffisante à l'entreposage de toutes les unités et en un appareil de desserte qui se déplace cinq fois plus vite horizontalement que verticalement. On maintient l'hypothèse d'utilisation de la machine à faible taux comme expliqué à la section 2.2.2. Pour chaque test, les données sur les unités à entreposer se présentent sous forme d'une liste de dates d'arrivée et de départ. Cette liste est générée de façon stochastique avec certains paramètres de contrôle. Ces paramètres sont: le nombre M de produits, la taille q des réapprovisionnements, la durée moyenne DIT entre deux demandes (*Demand Interarrival Time*), et l'étendue T de l'horizon. Les produits sont tous réapprovisionnés avec la même taille q, et ces réapprovisionnements ont lieu aux

instants de ruptures de stocks. Par contre, les durées entre deux demandes varient d'un produit à l'autre. En effet, une durée dit_i particulière est obtenue par discrétisation d'une simulation de la loi exponentielle de moyenne DIT. Quant à la date du premier approvisionnement du produit i, elle est obtenue par simulation de la loi discrète équiprobable de valeurs $1, 2, 3, \cdots, q \times \mathrm{dit}_i$. L'étendue de l'horizon est fixée à $T = 10 \times q \times \mathrm{DIT}$, de sorte qu'en moyenne chaque produit est réapprovisionné 10 fois. Les paramètres ont été choisis de la façon suivante: M a pris les valeurs 10, 20, 40 et 80; q a pris les valeurs 5, 10, 20 et 40; tandis que les valeurs de DIT ont été 3, 4 et 6. A partir de chaque combinaison, 100 tests ont été produits en utilisant 100 germes différents pour la simulation stochastique. Cela nous a donné $4 \times 4 \times 3 \times 100 = 4800$ problèmes tests dont les tailles varient de quelques centaines d'unités à plusieurs milliers.

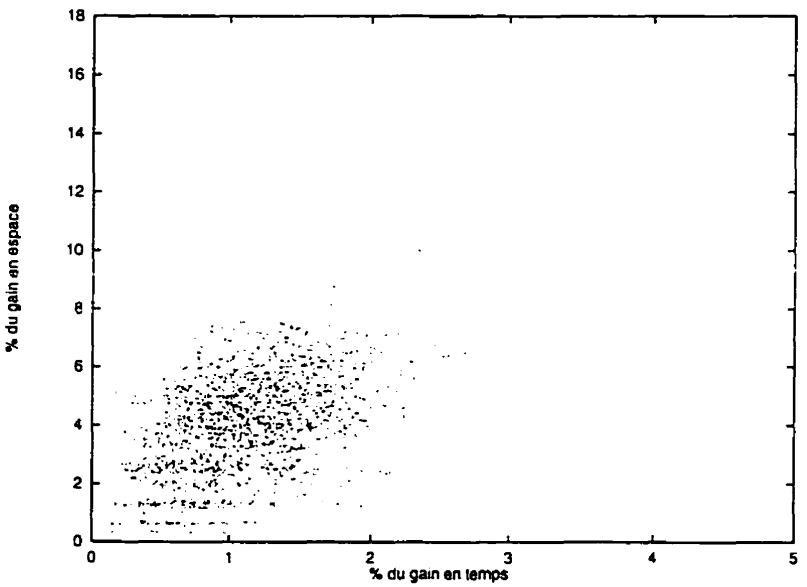


Figure 2.5 Gains relatifs de notre heuristique sur Greedy pour les 4800 tests.

La figure 2.5 présente les gains relatifs de notre heuristique sur *Greedy*. Chaque point représente un test: son abscisse correspond au gain en temps de manutention,

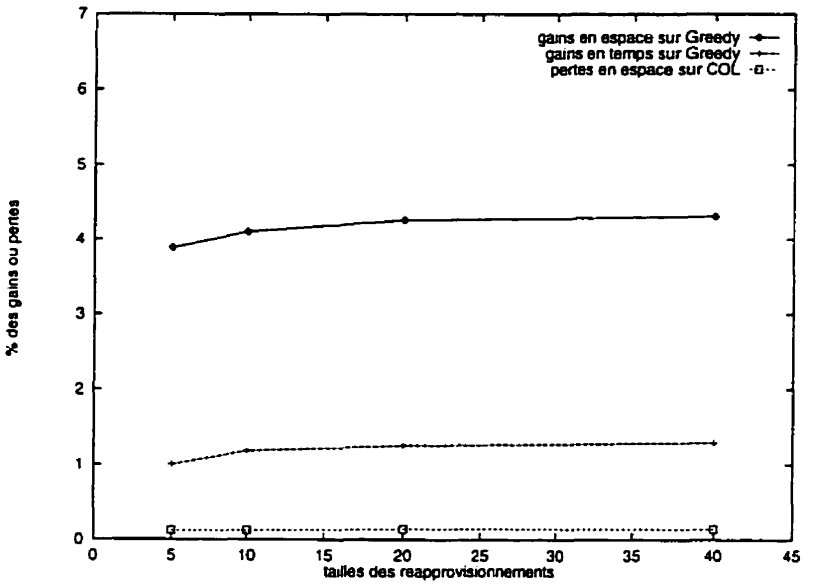


Figure 2.6 Performances relatives moyennes de notre heuristique en fonction de la taille q des réapprovisionnements.

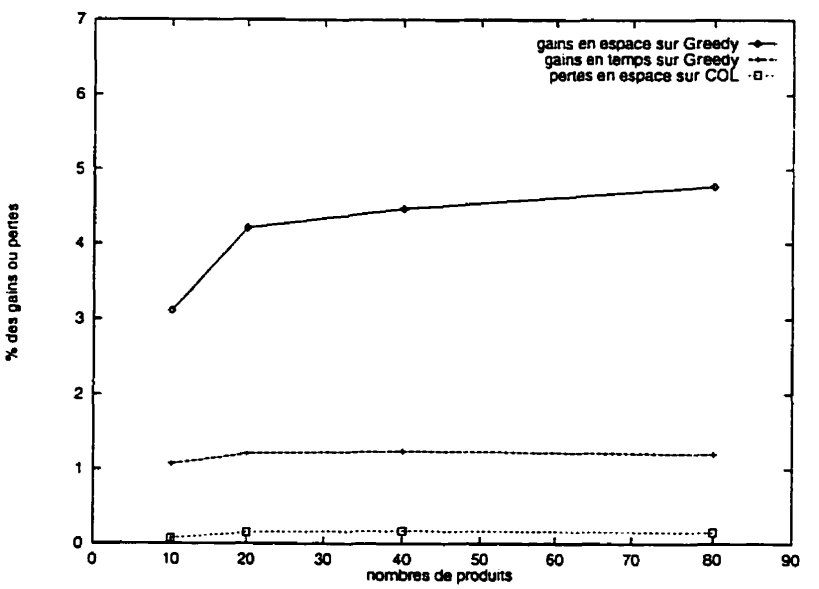


Figure 2.7 Performances relatives moyennes de notre heuristique en fonction du nombre M de produits.

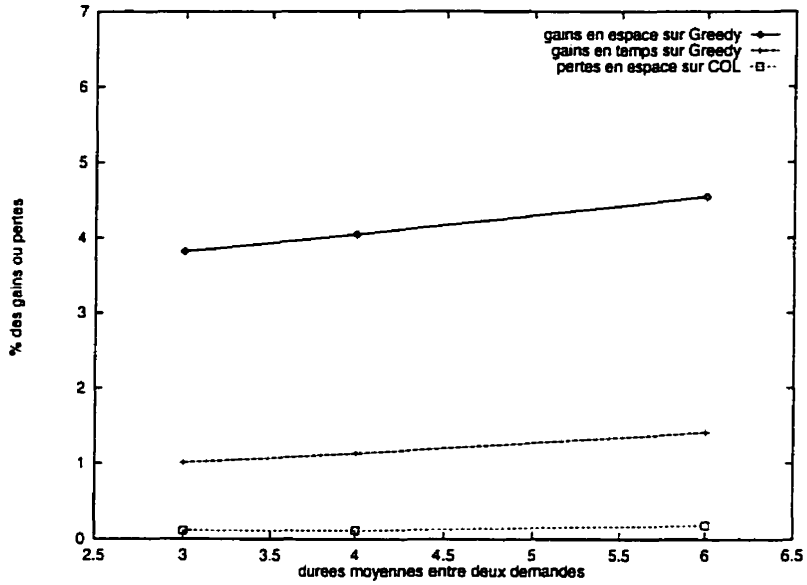


Figure 2.8 Performances relatives moyennes de notre heuristique en fonction de la durée DIT moyenne entre deux demandes.

tandis que son ordonnée correspond au gain d'espace. Les gains en temps de manutention s'étendent de 0% à 4.2% et ont une moyenne de 1.2%. Au point de vue exigence en espace, notre heuristique présente sur *Greedy* un gain relatif s'étendant de 0% à 15.2% et dont la moyenne est de 4.1%. Notre heuristique se montre donc systématiquement meilleure. Si elle donne une bonne vue d'ensemble, la figure 2.5 ne fournit aucune indication sur le lien entre les résultats et les paramètres des problèmes auxquels ils correspondent. Les figures 2.6, 2.7 et 2.8 établissent ce lien en considérant individuellement chacun des paramètres et en présentant les performances relatives moyennes en fonction des valeurs prises par ceux-ci. Chaque figure comporte trois courbes: une pour les gains relatifs moyens en espace, une autre pour ceux en temps de manutention, et une troisième pour le surplus de l'espace consommé par rapport à l'espace minimum requis. Cet espace minimum est calculé en prenant le maximum de l'inventaire agrégé. Comme la méthode du plus proche emplacement disponible (*Closest Open Location*) ne consomme pas plus que cet espace minimum, nous avons intitulé cette troisième courbe: pertes en espace

sur *COL*.

On observe que les courbes des gains en temps et en espace des trois figures sont en général croissantes et concaves. Vu que de la façon dont ils sont produits, les problèmes voient leur taille grandir avec la valeur des paramètres, il semble que notre heuristique se distingue d'autant plus que les problèmes sont de taille importante. La troisième courbe est, sur chaque figure, très basse et croît très peu. En fait de notre expérimentation, il ressort que les pertes en espace s'étendent de 0% à 4%, mais sont en moyenne de seulement 0.13%. De plus, 80 fois sur 100 notre heuristique utilise le nombre minimum N^* d'emplacements. Chez *Greedy*, ce taux tombe à 6%. Une solution qui est produite par une séquence de maximisations séparées et qui utilise ce nombre N^* maximise simultanément le nombre d'unités affectées au premier, aux N^* premiers, aux $N^* + 1$ premiers, aux $N^* + 2$ premiers, ..., aux N premiers emplacements (N étant le nombre total d'emplacements). A priori, rien ne garantit que la condition du lemme est satisfaite par une telle solution. En fait, on ne peut pas vraiment se prononcer quant à la maximisation du nombre d'unités affectées aux deux premiers, aux trois premiers, ..., aux N^*-1 premiers emplacements. Toutefois, notons que si avec notre heurisitique la fréquence des solutions qui maximisent le nombre d'unités affectées aux N^* premiers emplacements est de 80%, alors celle des solutions qui maximisent le nombre d'unités affectées aux $n < N^*$ premiers emplacements dépasse fort probablement cette valeur. Ainsi, en tenant compte du facteur corrélation, il est raisonnable de supposer que plusieurs de nos solutions satisfont la condition d'optimalité du lemme, en particulier les solutions qui utilisent un nombre N^* d'emplacements relativement petit.

Cette étude démontre la supériorité systématique de notre heuristique sur *Greedy* tant sur le plan du temps de manutention que sur le plan de la consommation d'espace. Les implantations de *Greedy* et de notre heuristique impliquent des temps

de calcul comparables, qui varient d'une fraction de seconde à une ou deux minutes suivant la taille des problèmes. Par ailleurs, nous avons traité tous les problèmes de la section précédente par notre heuristique. L'optimalité a été systématiquement atteinte. Ceci confirme l'excellent comportement de notre heuristique.

2.2.5 Implantation dynamique

Dans leur forme actuelle, les méthodes proposées ne peuvent être appliquées qu'une seule fois. Elles considèrent implicitement un entrepôt vide en début d'horizon et ne pourraient donc s'inscrire dans une implantation dynamique du type horizons fuyants. Nous montrons dans cette section qu'en adaptant ces méthodes, elles peuvent être appliquées dynamiquement; c'est-à-dire être utilisée répétitivement sur une séquence d'horizons fuyants.

Trois groupes d'actions pilotent alors le rangement: la formulation du problème d'affectation, sa résolution et l'implantation de la solution. Ces trois groupes sont eux-même coordonnés par le système d'information (voir figure 2.9). En fait, un horizon commence à chaque application de la méthode et s'étend sur une période pour laquelle l'hypothèse d'un système déterministe semble raisonnable. Une méthode rapide, telle que l'heuristique que nous proposons, peut être appliquée à chaque mise à jour de l'information (une mise à jour correspond à un ajout ou à une rectification). Ainsi, les affectations de fins d'horizons sont souvent révisées et sont de ce fait toujours réalisables même si les prédictions initiales ne sont éventuellement pas exactes.

Les adaptations requises pour chaque méthode portent essentiellement sur les imbrications des horizons voisins. Au point de vue faisabilité, il faut impérativement que la méthode soit applicable à un entrepôt non vide en début d'horizon. Au point

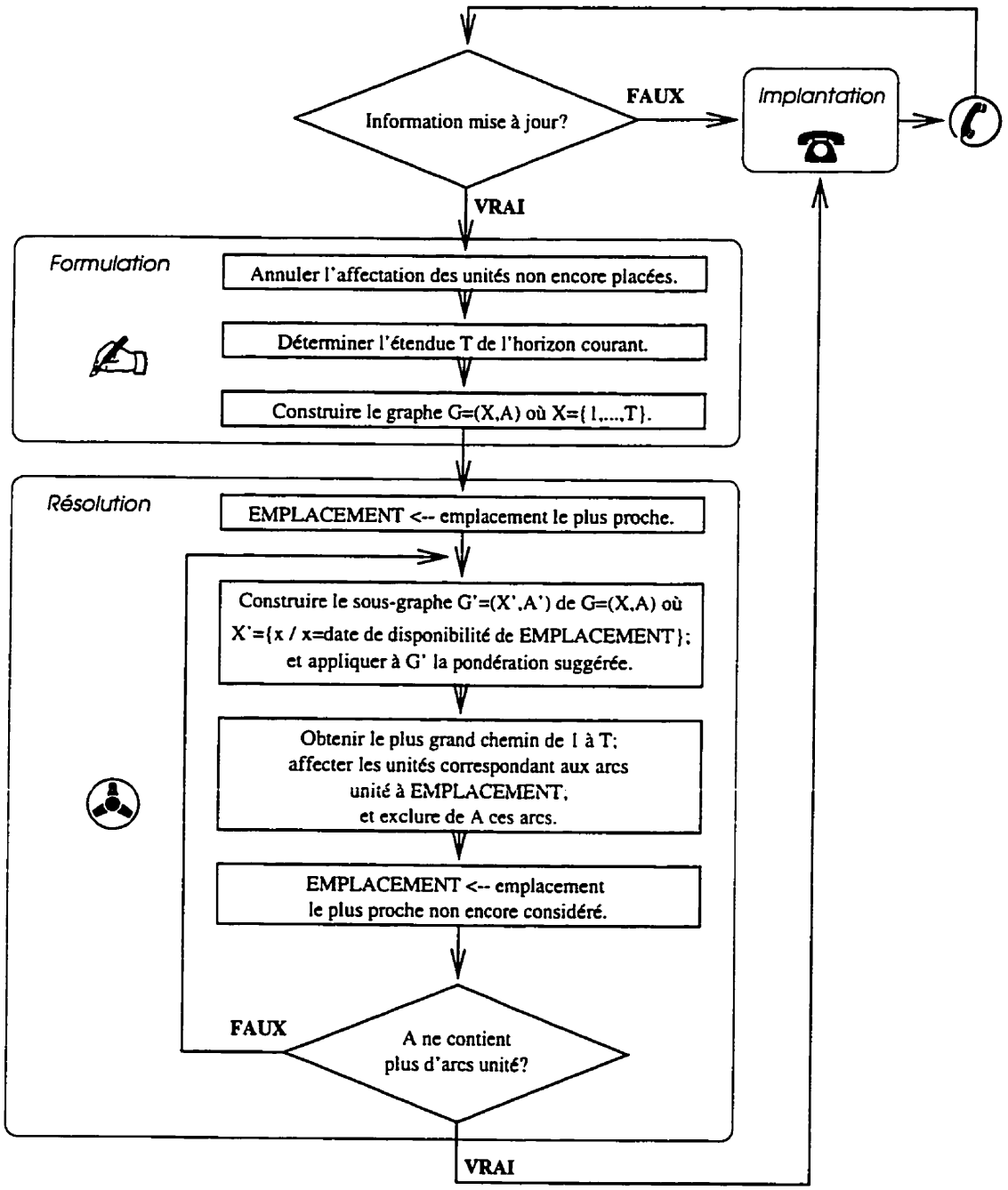


Figure 2.9 Organigramme pour une implantation dynamique.

de vue performance globale, il faut que les affectations des fins d'horizons prennent mieux en considération le traitement des horizons suivants.

Pour atteindre la faisabilité, il suffit de réduire quand cela est nécessaire le graphe $G = (X, A)$ du modèle (2.2) et de notre heuristique en un sous-graphe dont les noeuds correspondent aux dates de disponibilité des alvéoles; une alvéole étant disponible quand elle est physiquement vide. En fait, les classes du modèle (2.2) sont alors définies non seulement par les temps d'accès mais aussi par ces dates de disponibilité. L'adaptation a pour effet de multiplier ces classes et donc le nombre de sous-problèmes de la méthode de génération de colonnes. Cependant, l'adaptation n'a pas d'effet sur la complexité algorithmique de notre heuristique (voir la partie *Résolution* de l'organigramme donné à la figure 2.9). Notons que l'heuristique *Greedy* de Goetschalckx et Ratliff (1990) peut être appliquée à condition que dans les affectations successives de l'horizon courant, en plus de considérer les occupations prévues par les affectations antérieures, on considère les occupations physiques.

Pour atteindre une meilleure performance globale sur l'ensemble des horizons, il faut agir au niveau de la sélection de la dernière unité de chaque combinaison. En reprenant le petit exemple de la section précédente, on peut observer à la figure 2.4 que si la solution de la version actuelle de notre heuristique est optimale sur l'horizon considéré, elle n'est pas prompte à libérer le meilleur emplacement $e1$. En intervertissant les affectations entre $e1$ et $e2$, on obtient une solution de qualité égale sur l'horizon courant mais qui libère $e1$ une journée plus tôt. Cette modification conduit à une solution plus conciliante à l'égard d'une optimisation à venir et a certainement un impact sur la performance globale. Il s'agit donc de modifier la pondération actuelle de manière à inciter les maximisations séparées à affecter aux emplacements proches, les dernières unités qui quittent tôt. Cette pondération ne doit idéalement pas altérer les performances de l'heuristique au niveau de l'horizon

courant. En fait, en considérant comme *dernière unité* une unité de l'horizon courant qui n'est pas encore affectée et qui n'est pas suivie par d'autres, nous préconisons la pondération suivante:

$$\begin{cases} K_1 - \mathrm{TD}_u & \text{si l'unité } u \text{ est une dernière unité;} \\ K_1 + K_2 \times \mathrm{DS}_u & \text{sinon;} \end{cases}$$

où:

- $K_1 >> K_2 >> 1$;
- TD_u est la date de départ de l'unité u;
- DS_u est la durée de séjour de l'unité u.

Soulignons que la notion de dernière unité dépend de l'itération, et que par conséquent la pondération dépend elle aussi de cette itération.

Avec cette pondération, un plus long chemin maximise d'abord le nombre d'unités, ensuite la durée de séjour et enfin minimise la date de départ de la combinaison correspondante. La date de départ correspond à celle de la dernière unité et la durée de séjour à la somme des durées de séjour des autres unités. En fait, on peut vérifier sur le petit exemple de la section 2.2.4 que la nouvelle pondération produit bien l'effet escompté, c'est-à-dire d'affecter $u2$ et $u3$ à $e1$, et $u1$ et $u4$ à $e2$.

2.2.6 Conclusion

Nous avons proposé une méthode exacte et une méthode heuristique pour la résolution du problème de l'entreposage partagé et déterministe. Par la méthode exacte, nous avons résolu des problèmes de taille relativement importante, mais surtout, nous avons validé la méthode heuristique. Cette heuristique et l'heuristique de

Goetschalckx et Ratliff (1990) sont basées sur le même lemme. De nombreux tests comparatifs démontrent la supériorité systématique de la nouvelle heuristique. De plus, nous avons exploré superficiellement les possibilités d'implantation dynamique: des extensions ont été proposées.

L'analyse de ces extensions doit passer par des simulations beaucoup plus sophistiquées que celles utilisées ici. Elle peut probablement être l'objet d'une étude séparée où elle porterait aussi sur d'autres extensions et où seraient intégrées des données réelles. Par ailleurs, la minimisation des temps totaux de manutention sous l'hypothèse que le taux d'utilisation du système n'atteint jamais sa capacité de traitement ne convient certainement pas à toutes les situations réelles. Dans le cas où cette capacité de traitement est facilement atteinte, il semble plus intéressant de répartir la charge de travail de façon à éviter les phénomènes de files d'attente.

Terminons en mentionnant que le problème étudié ici correspond à un cas particulier du problème de l'affectation d'avions aux portes d'un aéroport où l'on cherche à minimiser les déplacements des passagers. En effet, il devient équivalent au problème formulé par Mangoubi et Mathaisel (1985) si l'on considère que le coût d'affectation d'un avion à une porte ne dépend que de la porte, ce qui revient à ne faire aucune distinction entre les avions.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à exprimer leur gratitude envers le Professeur François Soumis, directeur du GERAD, pour le précieux support fourni quant à l'utilisation du logiciel Gencol. Ils tiennent aussi à souligner la pertinence des commentaires des arbitres. Cette recherche a été rendue possible grâce à des subventions du F.C.A.R. (Québec) et du C.R.S.N.G. (Canada).

RÉFÉRENCES

1. Cormier, G., et Gunn, E. (1992). A Review of Warehouse Models, *European Journal of Operational Research* 58, 1–13.
2. Desaulniers, G., Desrosiers, J., Ioachim, I., Solomon, M.M., et Soumis, F. (1994). A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems, *Les Cahiers du GERAD G-94-46, Ecole Polytechnique, Montréal, Canada.*
3. Desrosiers, J., Dumas, Y., Solomon, M.M., et Soumis, F. (1992). Time Constrained Routing and Scheduling, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Volume on Networks, North-Holland.
4. Francis, R.L., McGinnis, L.F., et White, J.A. (1992). *Facility Layout and Location: an Analytical Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
5. Goetschalckx, M. (1983). *Storage and Retrieval Policies for Efficient Order Picking Operations*, Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology.
6. Goetschalckx, M., et Ratliff, H.D. (1990). Shared Storage Policies Based on the Duration of Stay of Unit Loads, *Management Science* 36, 9, 1120–1132.
7. Graves, S.C., Hausman, W.H., et Schwarz, L.B. (1977). Storage-Retrieval Interleaving in Automatic Warehousing Systems, *Management Science* 23, 9, 935–945.
8. Harmatuck, D.J. (1976). A Comparison of Two Approaches to Stock Location, *The Logistics and Transportation Review* 12, 4, 282–284.
9. Hausman, W.H., Schwarz, L.B., Graves, S.C. (1976). Optimal Storage Assignment in Automatic Warehousing Systems, *Management Science* 22, 6, 629–638.
10. Heskett, J.L. (1963). Cube-per-Order Index: A Key to Warehouse Stock Location, *Transportation and Distribution Management* 3, avril, 27–31.
11. Heskett, J.L. (1964). Putting the Cube-per-Order Index to Work in Warehouse Layout, *Transportation and Distribution Management* 4, août, 23–30.
12. Jarvis, J.M., McDowell, E.D. (1991). Optimal Product Layout in an Order

Picking Warehouse, *IIE Transactions* 23, 1, 93–102.

13. Linn, R.J., et Wysk, R. (1987). An Analysis of Control Strategies for Automated Storage and Retrieval Systems, *INFOR* 25, 1, 66–83.
14. Malette, A.J., et Francis, R.L. (1972). Generalized Assignment Approach to Optimal Facility Layout, *AIIE Transactions* 4, 2, 144–147.
15. Malmborg, C.J., et Krishnakumar, B. (1987). On the Optimality of the cube per Order Index for Warehouses with Dual Command Cycles, *Journal of Material Flow*, 4, 169–175.
16. Mangoubi, R.S., et Mathaisel, D.F.X. (1985). Optimizing Gate Assignments at Airport Terminals, *Transportation Science* 19, mai, 173-188.
17. Montulet, P., Langevin, A., et Riopel, D. (1995). Entreposage: méthodes de rangement, Les Cahiers du GERAD G-95-18, Ecole Polytechnique, Montréal, Canada.
18. Oudheusden, D.L. Van, et Zhu, W. (1992). Storage Layout of AS/RS racks based on recurrent orders, *European Journal of Operational Research*, 58, 1, 48–56.
19. Schwarz, L.B., Graves, S.C., et Hausman (1978). Scheduling Policies for Automatic Warehousing Systems: Simulation Results, *AIIE Transactions* 10, 3, 260–270.
20. Thompson, L.L. (1988). *Storage Location Characterization and Analysis Policies for Warehousing Systems*, Mémoire de maîtrise, Purdue University.

2.3 Conclusion

Le problème de la minimisation de la charge moyenne sous l'entreposage partagé a donc été résolu de manière exacte et de manière heuristique et ce dans le but de traiter des problèmes de toute taille. Dans les deux cas, les approches de résolution sont relativement différentes: l'une repose sur la méthode de génération de colonnes et l'autre sur un petit lemme. Mais, les deux approches utilisent la même représentation de l'information: le graphe des séjours.

La contribution de cet article est double: d'une part des solutions optimales à des problèmes généraux de taille moyenne sont présentées pour la première fois; et d'autre part le traitement heuristique de grands problèmes est amélioré tant au niveau de la charge moyenne que de l'utilisation de l'espace. La nouvelle heuristique résout optimalement et en quelques fractions de seconde tous les problèmes traités par la méthode de génération de colonnes. Elle traite presqu'aussi rapidement qu'une heuristique de Goetschalckx et Ratliff (1990) des problèmes de grande taille. Et enfin, elle se montre systématiquement meilleure tant au niveau de la charge moyenne que de l'utilisation de l'espace.

Cependant, comme dans toutes les publications traitant le sujet des politiques d'affectation, une hypothèse très restrictive est posée: la capacité de traitement du système de manutention est à toute fin pratique considérée comme infinie. C'est-à-dire que l'on ne soucie pas des pointes de la charge comme si le système était insaturable.

Le reste de la thèse traite justement du contrôle de ces pointes. Dans les deux derniers chapitres, les articles considèrent comme critère d'optimisation la charge maximale, qui correspond à la plus grande des pointes. En annexe, le problème de la

minimisation des heures supplémentaires est abordé par l'article intitulé "L'optimisation de l'entreposage partagé à capacité de traitement limité".

CHAPITRE 3

Charge maximale et entreposage dédié

3.1 Présentation

Ce chapitre traite du problème de la minimisation de la charge maximale de manutention associée aux politiques d'affectation du type dédié. La charge maximale est la plus grande des charges quotidiennes. Sous l'hypothèse du dédié, seules les unités d'un seul et même produit sont placées dans un emplacement donné. Lorqu'une unité d'un produit donné est demandée, elle est prélevée aléatoirement des emplacements non-vides qui sont dédiés au produit (une hypothèse qui, d'après Schwarz et al. 1978, conduit aux mêmes résultats qu'une gestion du type "premier entré premier sorti" mais qui surtout simplifie grandement la modélisation). La charge quotidienne est alors mesurée par l'espérance mathématique de la durée totale de manutention.

Le type dédié est étudié ici pour tenir compte des systèmes d'information non-automatisés mais aussi pour relever les faiblesses de l'affectation très connue qu'est celle basée sur la rotation des stocks. Les politiques de type dédié sont anciennes et correspondent certainement à la conception suivante du rangement:

> les objets de même nature sont regroupés ensemble et placés toujours aux mêmes endroits.

Ce point de vue est très défendable dans la vie de tous les jours puisqu'il permet de

minimiser les efforts de mémorisation et ainsi de limiter le temps perdu à chercher les objets. Ce raisonnement tient-il toujours pour les gros entrepôts modernes, où chaque unité peut être instantanément retracée par le système d'information? La réponse est donnée par le niveau d'automatisation du système. Il y a quelques années, les entrepôts ne pouvaient posséder de tels systèmes et l'adoption du type dédié se justifiait pleinement. En 1963, Heskett proposait pour le critère de la charge moyenne, la meilleure des politiques de type dédié, celle basée sur la rotation des produits.

Dans l'article qui suit, "Minimizing the Peak Load: An Alternate Objective for Dedicated Storage Policies", le but poursuivi est de trouver une méthode optimale de résolution du problème de la minimisation de la charge maximale sous les politiques de type dédié et de comparer la nouvelle solution à celle d'Heskett. Les critères de comparaison sont les charges maximales et moyennes.

Le modèle mathématique est une généralisation d'un programme linéaire présenté dans Francis et al. (1992). Ce modèle permet en particulier de considérer la charge maximale comme critère d'optimisation.

Des conditions suffisantes d'optimalité sont présentées. Elles sont basées d'une part sur une extension de la règle d'Heskett et d'autre part sur la relaxation Lagrangienne. Si ces conditions peuvent être utilisées pour aboutir rapidement à une solution, elles ne peuvent garantir l'atteinte de l'optimalité. La relaxation linéaire inscrite dans un processus de séparation et d'évalution progressive garantit l'optimalité mais peut en contre-partie requérir éventuellement un long temps de calcul.

L'expérimentation de l'article consiste à comparer la nouvelle solution à celle d'Heskett, qui est basée sur la rotation des produits, pour les critères de la charge maximale et de la charge moyenne. Vu que les performances de la solution d'Heskett

dépendent beaucoup du ratio de Pareto, une mesure de la forme de la distribution de la demande, l'expérimentation a été conduite en fonction de ce paramètre.

3.2 Minimizing the Peak Load: an Alternate Objective for Dedicated Storage Policies

Pierre Montulet André Langevin
Diane Riopel
Ecole Polytechnique de Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel et GERAD
June 1996

We consider the problem of minimizing, over a fixed horizon, the peak load in single-command cycle dedicated storage policies. The daily load is the expected total time of the command cycles and the peak load is an approximation of the maximum daily processing capacity requirement. We present mixed integer programming models and compare their solutions to turnover-based solutions, which are known to minimize the average load per day. It is shown that turnover-based solutions may not be suitable for the peak load criterion.

(Decision Analysis; Inventory/Production; Material Handling)

3.2.1 Introduction

Warehouse managers' concerns include storage assignment policies because they offer good opportunities to reduce operational costs. These policies are usually classified as *dedicated* or as *shared*. With dedicated storage policies, only units of the same product are stored in a specific location. The command cycle can be single or multiple. With a single-command cycle, only one storage or one retrieval is performed per round trip. Usually, a policy is said to be optimal if it minimizes the average load. The average load per day can be computed as the overall throughput (i.e., as the average number of all command cycles performed per day) times the expected duration of one command cycle. Since the overall throughput is a known constant, the average load and the expected duration of one command cycle represent the same criterion.

We propose minimizing the peak load as an alternate objective for the assignment. The peak load is the maximum value of the daily loads over a fixed planning horizon. The daily load is the expected total time of the command cycles.

Another important issue for warehouse managers is the maximum daily processing capacity requirement. It is relevant to keep low operational costs (energy consumption, equipment wear, ...). But this should happen without detriment to other important costs such as those related to the maximum daily processing capacity. Reducing the maximum capacity requirement lowers the initial investment costs of a new material handling system. For an existing system which is sometimes overloaded, reducing this requirement lowers or eliminates extension costs. Similarly labor costs are lowered by such a reduction. So, the initial investment costs of a material handling system, the opportunity to relieve a sometimes overloaded

system, and the overtime labor costs are all strongly related to the maximum processing capacity. Therefore, the storage assignment criterion should include these considerations. The average load value gives an accurate estimation of most of the operational costs. It is also an approximation of the maximium daily processing capacity requirement. But, the peak load value appears to be a better approximation of this requirement. Figure 3.1 gives the relevance of average load and peak load criteria to specific operation and design issues.

	Minimizing energy consumption and equipement wear	Limiting the initial investment	Controlling system saturation and overtime labor
Average load criterion	✓		
Peak load criterion		✓	✓

Figure 3.1 The relevance of the criteria.

A review of the literature related to the optimization of storage assignment policies shows that the almost sole studied criterion is the average load. Turnover-based solutions have been shown to be optimal for this criterion with single-command cycle dedicated storage policies (see Harmatuck 1976 and Malette & Francis 1972). These solutions are obtained by assigning products with the highest turnovers to the locations closest to the I/O points. In Francis et al. (1992), the turnover of the product j is computed as the ratio T_j/S_j, where T_j is the throughput (the average number of command cycles performed per day) and S_j the space storage requirement. Assuming that product j is depleted at a d_j rate and replenished with batches of size q_j, the turnover is then computed as the ratio d_j/q_j. Heskett (1963, 1964) was the first to suggest these solutions without actually proving they are optimal.

A transportation problem formulation to handle the more general situation of multiple loading docks, multiple I/O points, is proposed in Malette & Francis (1972) and reported in Francis et al. (1992). When the dock selection is independent of the product number, it is shown that turnover-based solutions are optimal. Malmborg & Krishnakunar (1987) extended the optimality proof to the dual-command cycle case, where both a retrieval and a storage are performed over a cycle.

Still in relation to the average load criterion, Goetschalckx & Ratliff (1988, 1990), Thompson (1988), and Montulet et al. (1995, 1996) consider the shared storage policies for which units of different products may be stored, one at a time, in the same location; random storage is a particular shared storage policy. Hausman et al. (1976) suggest continuous representations of product demand and distance distributions in order to compute the expected one way travel time; those representations allow them to compare turnover-based, random and class-based dedicated assignments. Since the expected one way travel time determines the average load, this load is again the considered criterion. However, Wilson (1977) and Hodgson & Lowe (1982) address dedicated storage assignment policies, with an objective function including both average load and inventory costs.

Here, we consider the peak load minimization approach and compare it with the turnover-based one. In the next section, a simple example is used to illustrate why the turnover-based solution can be irrelevant with respect to the peak load. Mixed integer programs, the objectives of which are to minimize the peak load, are proposed in section 3.2.3. Two ways of solving this problem are addressed in the following section. In section 3.2.5, an analysis over 24 simulated data sets shows that the program solution can significantly lower the peak load without affecting so much the average load. The Pareto's ratio of the product demand distribution is used as a parameter for the test data sets. Possible extensions of the assignment

problem formulation are proposed in section 3.2.6.

3.2.2 A Simple Example

The following simple example shows why the peak load of a turnover-based solution is not minimum and how much it can exceed the minimum value.

Three products A, B, and C are to be assigned to locations in a small automated storage/retrieval (S/R) rack. The system operates six days per week. The demand rate of each product is one unit per day of operation. The replenishment batch sizes, i.e the reorder quantities, and the replenishment days are given in Table 3.1. It is

Table 3.1 The products.

Product	Replenishment batch size	Replenishment days
A	1	Each morning from Monday to Saturday
B	3	Monday and Thursday mornings
C	6	Friday morning

easy to see that the overall inventory follows a week cycle. The rack is 5 location large and 2 location high. The S/R machine travels simultaneously in horizontal and vertical directions, but its horizontal speed is two times faster. The command cycle times for each of the locations are given in Figure 3.2.

Since all products have the same demand rate, the turnover-based solution assigns products with the smallest batch sizes to closest locations. That is, products are assigned in the ABC sequence as shown in Figure 3.3; the expected single-command cycle times, T_{SC}^{A}, T_{SC}^{B}, and T_{SC}^{C}, are computed beside the rack figure for

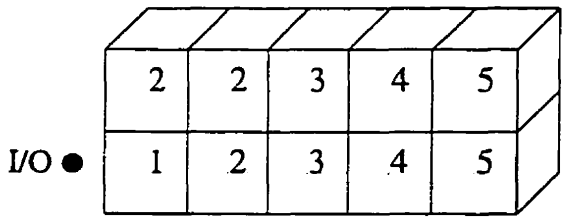


Figure 3.2 The rack and its command cycle times.

each product. Since product demand rates are one unit per day, two command

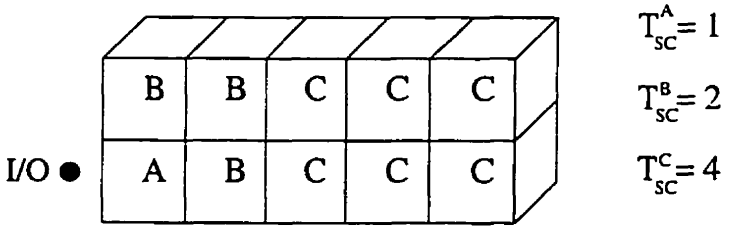


Figure 3.3 The *ABC* assignment.

cycles (corresponding to the storage and the retrieval of the unit) are, on average, performed each day for each product (this can also be computed from Table 3.2). Thus, the average load of the turnover-based solution is: $2T^A_{SC} + 2T^B_{SC} + 2T^C_{SC} = 14$, which is minimum.

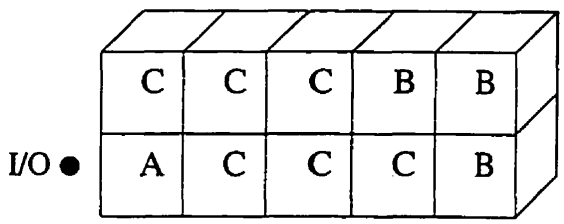
Table 3.2 Throughput and load distributions over a week

	Day	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat
Throughputs	A	2	2	2	2	2	2
	B	4	1	1	4	1	1
	C	1	1	1	1	7	1
	Totals	7	4	4	7	10	4
Loads	*ABC*	14	8	8	14	32	8
	ACB	23 1/3	9 1/3	9 1/3	23 1/3	25 1/3	9 1/3

However, the *ABC* assignment increases the load of the busiest day. The product throughputs are computed for each of the week days in Table 3.2. This table shows that Friday is the busiest day with one storage of *A*, six storages of *C*,

and one retrieval of each of the products. But by assigning the product C, the most important product for Friday throughput (7 out of 10 Friday command cycles include C), to remote locations, the ABC assignment raises the peak load to $2T_{SC}^{A} + 1T_{SC}^{B} + 7T_{SC}^{C} = 32$.

It is easy to lower the peak load. One simply has to assign the most important products for Friday throughput to closer locations. In section 3.2.4, it is seen that the ACB assignment of Figure 3.4 minimizes the Friday load. In Table 3.2, the



$T_{SC}^{A} = 1$

$T_{SC}^{B} = 4\ 2/3$

$T_{SC}^{C} = 2\ 2/3$

Figure 3.4 The ACB assignment.

loads of each of the week days are computed for both ABC and ACB assignments. Since the peak occurs on Friday, the day which has its load minimized, the ACB assignment is optimal for the peak load criterion. And the ACB peak load is 25 1/3 instead of 32 for ABC. Furthermore the average load is 16 2/3 for ACB instead of 14 for ABC. The ABC and ACB distributions are plotted in Figure 3.5.

Thus, with this simple example and compared to the turnover-based solution, the peak load minimization approach implies a relative improvement of 21% for its criterion and a relative degradation of 16% for the average load criterion. Nevertheless, with larger and more realistic problems, as illustrated in section 3.2.5, the peak load improvements are not always so significant whereas the average load degradations are much smaller.

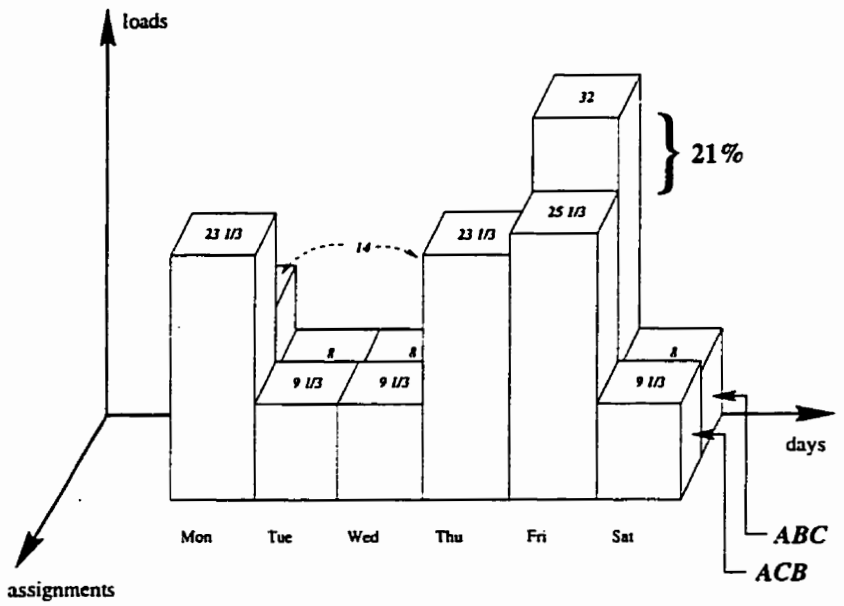


Figure 3.5 Daily load distributions.

3.2.3 Peak Load Optimization Models

We consider a multiple I/O point system with single-command cycles. A single S/R operation is performed per round trip. The storage policy type is dedicated and there are S_j storage locations assigned to product j. It is assumed that the S_j locations are equally likely to be selected when performing a product j command cycle. First, we are interested in the computation of the expected duration of a command cycle.

We are using p_{ij} to denote the conditional probability for some command cycle to use I/O point i given that it involves product j. Let t_{ik} be the time required to perform an I/O point i command cycle given that location k is chosen (this time covers the round trip and the load/unload operations). Hence, the expression $\sum_i p_{ij} t_{ik}$ computes the conditional expected duration of some command cycle given product j and location k.

It is assumed that the throughput T_{jl} is known for each product j and each day $l \in \{1, \ldots, T\}$. This throughput is the number of product j command cycles performed during day l. The product j throughput is $T_j = (1/T) \sum_l T_{jl}$, the average number of product j command cycles performed per day. Additionally, $\sum_j T_j$ is the overall throughput and $T_j / \sum_j T_j$ is the probability for some command cycle to involve product j.

Let x_{jk} be the binary assignment variable translating whether or not product j is assigned to location k. Then, x_{jk}/S_j computes the conditional probability for some command cycle to use location k given that it involves product j. And, $\sum_k (\sum_i p_{ij} t_{ik})(x_{jk}/S_j)$ is the conditional expected duration of some command cycle given that it involves product j.

Therefore, $\sum_j (\sum_k \sum_i p_{ij} t_{ik} x_{jk}/S_j)(T_j / \sum_j T_j)$ computes the expected duration of a command cycle. In other words multiplying the last expression by the overall throughput, $\sum_j T_j$, yields the average load, which is the criterion of the following model:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_j \frac{T_j}{S_j} \sum_k (\sum_i p_{ij} t_{ik}) x_{jk} \\ s.t. & \left\{ \begin{array}{lll} \sum_j x_{jk} & = 1 & \forall k \\ \sum_k x_{jk} & = S_j & \forall j \\ x_{jk} & \in \{0,1\} & \forall j, k \end{array} \right. \end{array} \tag{3.1}$$

where:

- i = an I/O point number;
- j = a product number;
- k = a location number;

- p_{ij} = the conditional probability for some command cycle to use I/O point i given that it involves product j;
- t_{ik} = the time required to perform an I/O point i command cycle given that location k is involved;
- S_j = the number of storage locations allocated to product j (i.e., the space storage requirement for product j);
- T_j = the product j throughput;
- x_{jk} = the binary assignment variable of product j to location k.

This formulation is almost identical to the one given in Francis et al. (1992). However in the latter, t_{ik} is a one way travel time (with the average load criterion, it does not matter if the return travel and the load/unload operation times are included or not). Formulation (3.1) corresponds to a transportation problem, the constraints of which ensuring that only one product is assigned to any location and that the right number of locations are assigned to any product.

On the other hand, with the introduction of the T_{jl} concept, the day l throughput can be computed by $\sum_j T_{jl}$ and the probability for a day l command cycle to involve product j by $T_{jl}/\sum_j T_{jl}$. Since the conditional expected duration of some command cycle, given that it involves product j is independent of the day on which the command cycle is performed, the expected duration of a day l command cycle is $\sum_j(\sum_k \sum_i p_{ij}t_{ik}(x_{jk}/S_j))(T_{jl}/\sum_j T_{jl})$. In other words, multiplying the last expression by the day l throughput, $\sum_j T_{jl}$, yields the day l load expression

$\sum_j (T_{jl}/S_j) \sum_k (\sum_i p_{ij} t_{ik}) x_{jk}$. From this, we suggest the following model:

$$\min \quad Z$$
$$s.t. \quad \begin{cases} \sum_j x_{jk} & = 1 & \forall k \\ \sum_k x_{jk} & = S_j & \forall j \\ Z & \geq \sum_j \frac{T_{jl}}{S_j} \sum_k (\sum_i p_{ij} t_{ik}) x_{jk} & \forall l \\ x_{jk} & \in \{0,1\} & \forall j,k \end{cases} \tag{3.2}$$

where:

- l = a day in $\{1, \ldots, T\}$;
- T_{jl} = the day l throughput of product j;
- Z = a continuous variable which is never less than any daily load.

At the optimality, the criterion of this formulation coincides with the maximum of daily loads, namely the peak load. The differences with the former model are the variable Z, the new objective function and the T supplementary constraints involving Z. Formulation (3.2) is very general and requires the knowledge of the T_{jl} throughputs. However, these throughputs are sometimes easily computed as in the following case.

Actually, there are two inventory control methods for the pull inventory management approach: the reorder point (Q-system) method and the periodic review (P-system) method (see Ballou 1992).

So, let us consider the common situation, related to the P-system, where products are depleted at known rates and replenished with batches at known regular time periods. Specifically, if product j has a demand rate of d_j and if its replenishment batch size is q_j, then product j replenishment period is equal to q_j/d_j, $S_j = q_j$,

and $T_{jl} = d_j + q_j\delta_{jl}$, where δ_{jl} is a binary parameter translating whether or not l is a replenishment day for product j. Setting r_j as the first replenishment day of product j yields:

$$\delta_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{l-r_j}{q_j/d_j} \text{ is an integer;} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Inserting into formulation (3.2), we obtain:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z \\ s.t. \quad & \begin{cases} \sum_j x_{jk} & = 1 & \forall k \\ \sum_k x_{jk} & = q_j & \forall j \\ Z & \geq \sum_j (d_j/q_j + \delta_{jl}) \sum_k (\sum_i p_{ij} t_{ik}) x_{jk} & \forall l \\ x_{jk} & \in \{0,1\} & \forall j,k \end{cases} \end{aligned} \tag{3.4}$$

where:

- d_j = the product j demand rate;
- q_j = the product j replenishment batch size;
- δ_{jl} = the binary parameter translating whether or not day l is a replenishment day for product j (see equation (3.3)).

Moreover, the planning horizon can be either arbitrary or set to the overall inventory cycle, the least common multiplier of product cycles:

$$T = \text{lcm}_j\{q_j/d_j\}. \tag{3.5}$$

3.2.4 Solving the Peak Load Minimization Problem

In many warehouses, I/O points (e.g., docks) are physically identical and the probabilities for their selection are statistically independent of the products. In other

words, $p_{ij} = p_i \ \forall i, j$. This means that $\sum_i p_{ij} t_{ik}$, the conditional expected duration of a command cycle given that it involves product j and location k, is reduced to a value t_k independent of j. Values t_k can be substituted in models (3.2) or (3.4). This independence is assumed in this section and in section 3.2.5.

A turnover-based solution assigns products with the highest turnovers, T_j/S_j, to locations with the lowest command cycle durations, t_k. Let us recall that this solution is shown to be optimal for the average load criterion (the proof uses a simple switching argument on the weighted sum $\sum_k w_k t_k$, where w_k is the turnover of the product assigned to location k).

An interesting question is when turnover-based solutions are optimal for the peak load criterion. A partial answer is given by the following proposition:

Proposition 1 *Turnover-based solutions are optimal with respect to the peak load criterion if product throughputs are constant over the planning horizon.*

The proof is straightforward. Product throughputs being constant over the planning horizon means that $T_{jl} = T_j \ \forall l, j$. Hence, daily loads are time independent and identical to the average load. Then, the peak and the average loads are simultaneously minimized.

This condition is unlikely to be satisfied in real situations. That is, turnover-based solutions are unlikely to minimize peak loads of real problems. The following proposition gives a more general optimality condition for the peak load criterion.

Proposition 2 *For a fixed day l, assigning products with the highest values of T_{jl}/S_j to locations with the lowest values of t_k results in a peak load optimal solution if the peak occurs on day l.*

The turnover-based and the suggested solutions are similar. In the latter, the turnover rates are restricted to take only the fixed day throughputs into account (i.e., T_{jl} is used instead of T_j). For exactly the same reason that turnover-based solutions minimize the average load (that is the switching argument) the proposed solution minimizes the day l load. If the peak occurs on a day which has its load minimized, then this peak is also minimized.

Applying this to the simple example of section 3.2.2, we obtain an optimal solution. From Table 3.2, we compute the following restricted-turnover rates for Friday:

$$\begin{cases} \frac{T_{A,Fri}}{S_A} = \frac{2}{1} \\ \\ \frac{T_{B,Fri}}{S_B} = \frac{1}{3} \\ \\ \frac{T_{C,Fri}}{S_C} = \frac{7}{6} \end{cases} \tag{3.6}$$

It follows that the ACB assignment of Figure 3.4 minimizes the Friday load. Since the peak occurs on Friday (see Table 3.2), this assignment is optimal for the peak load criterion.

The restricted-turnover-based assignment given in proposition 2 does not yield systematically a solution for which the peak occurs on the fixed day. Even fixing the day which has the greatest overall throughput (i.e., the busiest day) does not yield necessarily an optimal solution (its load can be lowered under the load of the next busiest day). However, heuristic methods can be constructed on a more sophisticated approach taking more than one day into account. We propose to use convex combinations of T_{jl}/S_j's as turnovers; that is $\sum_l \lambda_l (T_{jl}/S_j)$, where $\sum_l \lambda_l = 1$ and $\lambda_l \geq 0$. So, more than one busy day can be taken into account and be given relatively high λ_l's.

The combined-turnover-based solution gives a lower bound on the minimum peak load: the peak load of any assignment is greater than or equal to the corresponding convex combinations of the day l loads. Actually, this combined-turnover-based assignment is the optimal solution of a Lagrangian relaxation of program (3.2), where the day l constraints are brought into the objective function. The best lower bound is obtained by solving the Lagrangian dual program, that is by maximizing over λ_l's the combination of loads. There are several techniques for solving this problem: sub-gradient method, multiplier adjustment method, cutting plane method,.... Furthermore, the proposed Lagrangian relaxation approach yields feasible solutions for the basic assignment constraints. The computational effort to solve the relaxation is very low: it consists in sorting the combined-turnover rates. An indication of the quality of the solution obtained from the approach is given by the relative gap between the values of the actual peak load, an upper bound to (3.2), and the corresponding convex combination of daily loads, a lower bound to (3.2). The following sufficient optimality condition summarizes the Lagrangian relaxation idea applied to our problem.

Proposition 3 *For a fixed set of λ_l, assigning products with the highest values of $\sum_l \lambda_l(T_{jl}/S_j)$ to locations with the lowest values of t_k results in a peak load optimal solution, $\{x^*_{jk}\}$, if the peak is equal to $\sum_l \lambda_l \sum_{jk}(T_{jl}/S_j)t_k x^*_{jk}$.*

Branch&Bound can be used to solve exactly program (3.2) or (3.4). The lower bound can be based on either Lagrangian relaxation or linear programming relaxation. It is relevant to reduce the scale of the original formulation at both the column and the row number levels; especially to eliminate the redundant (i.e., always fulfilled) constraints. That may decrease significantly the processing time required to solve Branch&Bound subproblems.

If there is an important disparity between throughputs, we can expect that some load constraints are always fulfilled, because there are no assignments with which the corresponding loads reach the peak. Indeed, if an upper bound of a daily load is less than a lower bound of the peak, then the corresponding constraint can be eliminated. The upper bounds can be computed as the associated loads with the assumption that the daily command cycles involve the most remote locations. The peak lower bound can be computed as the maximum value of lower bounds. These bounds can be computed as the associated loads with the assumption that this time, the command cycles involve the closest locations.

Explicitly, setting $\mathrm{np}_l = \sum_j q_j \delta_{jl}$ (the number of day l storages) and $\mathrm{nr}_l = \sum_j d_j$ (the number of day l retrievals) we obtain $\overline{z_l}$ (the day l load upper bound) and $\underline{Z}$ (the peak load lower bound). That is:

$$\overline{z_l} = \sum_{k=N-\mathrm{np}_l}^{N} t_k + \sum_{k=N-\mathrm{nr}_l}^{N} t_k, \tag{3.7}$$

where $N = \sum_j q_j$,

$$\underline{Z} = \max_{l \in \{1,\ldots,T\}} \left\{ \sum_{k=1}^{\mathrm{np}_l} t_k + \sum_{k=1}^{\mathrm{nr}_l} t_k \right\}, \tag{3.8}$$

and a day l constraint is eliminated if $\overline{z_l} < \underline{Z}$.

On the other hand, it is possible to reduce the number of variables. First of all, since with real problems, locations can be grouped by their t_k's, they can be aggregated and each group be assigned a capacity $c_{k'}$ corresponding to its cardinality. Furthermore, most of the time, products can also be aggregated. They can be grouped by their $(q_j/d_j, r_j)$ pairs (i.e., by their daily throughput distributions). The set $E_{j'}$ of products sharing the same pair can be aggregated in a single product, with a demand rate of $\sum_{j \in E_{j'}} d_j$ and a batch size of $\sum_{j \in E_{j'}} q_j$.

Inserting into (3.4), yields the following reduced scale model:

$$\min \quad Z$$

$$s.t. \quad \begin{cases} \sum_{j'} x_{j'k'} & \leq c_{k'} & \forall k' \\ \sum_{k'} x_{j'k'} & = q_{j'} & \forall j' \\ Z & \geq \sum_{j'} (d_{j'}/q_{j'} + \delta_{j'l}) \sum_{k'} t_{k'} x_{j'k'} & \forall l : \overline{z_l} < \underline{Z} \\ x_{j'k'} & \in \{0,1\} & \forall j', k' \end{cases} \tag{3.9}$$

where:

- j' = an aggregated product;
- k' = an aggregated location;
- l = a non-eliminated day in $\{1, \ldots, T\}$;
- $c_{k'}$ = the capacity of the aggregated location k';
- $q_{j'} = \sum_{j \in E_{j'}} q_j$, the replenishment batch size of aggregated product j';
- $d_{j'} = \sum_{j \in E_{j'}} d_j$, the demand rate of aggregated product j';
- $t_{k'}$ = the command cycle expected time for aggregated product j';
- $\delta_{j'l}$ = the replenishment parameter for aggregated product j' (see 3.3);
- $\overline{z_l}$ and $\underline{Z}$ being respectively a day l load upper bound and a peak load lower bound (see equations (3.7) and (3.8)).

Actually, the tests reported in next section use this model. For each test it is indicated by how much the aggregations reduce the numbers of variables and constraints. Branching priority order is assigned to variables: variables with higher priorities correspond to closest locations. Detailed branching strategies are also presented.

3.2.5 Experimentation

In this section, optimal solutions for the peak and average load criteria are compared on 24 data sets. These data sets are developed according to Pareto's law. The tractability of the reduced scale model (3.9) is tested using a Branch&Bound approach, the lower bound of which is based on linear programming relaxation.

The experimentation is conducted using three parameters. The parameter D represents the total product demand per day and corresponds to half of the overall throughput. This sets up the amplitude of the cumulative demand distribution, i.e., the amplitude of the ranked cumulative demand versus the percentage of inventoried products. The parameter Q controls the product reorder quantities (i.e, the product replenishment batch sizes): the q_j's increase with Q. The parameter PR is the Pareto's Ratio of cumulative demand distributions. The corresponding curve passes through the point $(20\%, D \cdot PR\%)$, that is 20% of the products represents $PR\%$ of the total demand.

Product data sets are built on these parameters. Set elements correspond to products. Each element is composed of the demand rate d_j, the reorder quantity q_j, and the date r_j of the first replenishment. These data sets rely on continuous representations of cumulative demand distributions illustrated in Figure 3.6. These representations are from Hausman et al. (1976) and are given by the parameterized equation:

$$\mathcal{G}_s(j) = D \cdot j^s \quad j \in [0, 1]. \tag{3.10}$$

For a fixed PR, the parameter $s \in]0, 1]$ is chosen in such a way that the distribution curve passes through the point $(20\%, D \cdot PR\%)$, that is $D \cdot PR\% = \mathcal{G}_s(20\%)$.

Specifically, demand rates are sampled from the $\mathcal{G}_s$ distribution with D equally

spaced values of j (see Figure 3.6). That is

$$d_j = \begin{cases} \lfloor \mathcal{G}_s(\frac{1}{D}) \rfloor & \text{if } j = 1 \\ \lfloor \mathcal{G}_s(\frac{j}{D}) \rfloor - \lfloor \mathcal{G}_s(\frac{j-1}{D}) \rfloor & \text{if } j \in \{2, 3, \ldots, D\}, \end{cases} \tag{3.11}$$

where $\lfloor x \rfloor$ is the *floor function* which returns a value rounded down to the next lower integer. It does not mean that the sampling yields D true products, because some d_j's are set to zero. Nevertheless, the d_j 's verify the relation $\sum_j d_j = D$.

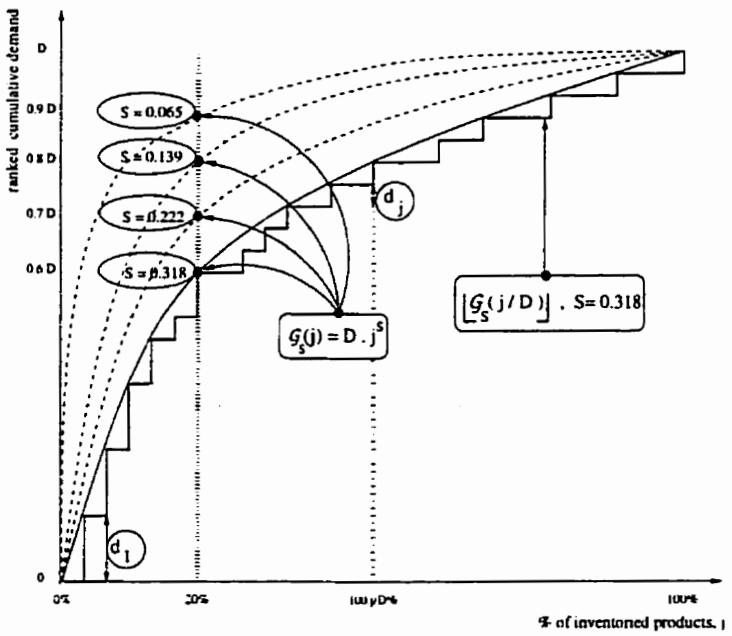


Figure 3.6 Sampling of $\mathcal{G}_s$.

Once, the demand rates are obtained, the reorder quantities are computed using a slight modification of the economic order quantity formula. Indeed, we assume, as in Hausman et al. (1976), that the order and holding costs are the same for every product, that is, the economic order quantities vary only with the demand rates. The purpose of the modification is to give to each product a replenishment period which is an integer multiple of the week length. So, every product has a constant replenishment week day, which can be, for instance, every Friday, every other Monday, ... Setting the week length equal to five days, we use the following

formula:

$$q_j = \mathcal{I}_{5d_j}(\frac{Q}{\sqrt{D}}\sqrt{d_j}), \tag{3.12}$$

where the integer value function $\mathcal{I}_{5d_j}(x)$ computes the smaller integer which is both a multiple of $5d_j$ and greater than the real argument x (that is $\mathcal{I}_{5d_j}(x) = (5d_j) \cdot \lfloor x/(5d_j) + 1 \rfloor$).

Now, the replenishment period q_j/d_j of each product can be computed. The first replenishment date of product j is randomly sampled from the set $\{1, 2, \ldots, q_j/d_j\}$.

We consider automated S/R racks which have the same characteristics as those considered in the experimentations of Goetschalckx & Ratliff (1988, 1990) and Montulet et al. (1996). Their size is large enough for the product requirements. They are square-in-time, that is the time to reach the farthest horizontal location is equal to the time to reach the highest vertical location. S/R machines travel simultaneously in horizontal and vertical directions, but the horizontal speed is five times faster.

The parameters are set as follows. D is set to 50, 100, 200, and 400. Q is set to 100 and 200. PR is set to 60, 70, 80, and 90, as in Hausman et al. (1976). The corresponding number of generated products, the required number of locations, and the length of the planning horizon (computed from equation (3.5)) are given in Table 3.3. Moreover, the table shows the aggregated and reduced values. With the generated data sets, the product turnovers are never all identical.

For each data set, the mixed integer program (3.9) is generated. This program is solved using the Branch&Bound technique. Actually, version 2.1 of the commercial optimizer *Cplex* is used on a station *Sun Sparc 20* (Model 612). Each *LP* sub-problem is solved by the default hybrid *algorithm* of primal and dual simplex methods; a limited number of iterations are performed with the dual, then the primal is used. The *nodeselect* parameter, which selects the next node to process when backtracking,

Table 3.3 Results.

D/Q	PR:	NBPR	NBLO	T	NBPR'	NBLO'	VACO	$\%I_{peak}$	$\%D_{aver}$	COTI (sec.)
50 100	60:	30	590	30	16	54	30	13.13	0.00	3
	70:	25	525	30	15	50	22	8.79	0.00	0
	80:	19	445	30	13	45	6	5.22	0.00	0
	90:	12	370	15	9	42	3	1.77	0.00	0
50 200	60:	30	1120	150	24	75	113	33.14	2.26	17
	70:	25	1020	300	22	70	36	5.93	0.05	1
	80:	19	880	300	17	65	30	5.44	0.00	0
	90:	12	540	150	11	50	37	2.84	0.07	1
100 100	60:	60	1100	30	23	74	30	17.79	1.54	9
	70:	50	995	30	22	70	27	14.93	1.80	2
	80:	38	870	30	19	65	17	7.98	1.08	1
	90:	23	730	30	16	60	6	1.28	0.04	1
100 200	60:	60	1725	150	32	91	150	23.89	2.04	38
	70:	50	1520	150	29	85	106	22.78	1.01	9
	80:	38	1270	150	24	80	66	8.99	0.19	3
	90:	23	960	75	17	69	17	3.69	0.14	0
200 100	60:	120	1625	10	14	90	10	12.87	0.56	8
	70:	99	1495	10	14	85	10	9.30	1.09	3
	80:	75	1360	10	14	80	6	5.36	0.63	0
	90:	46	1215	10	14	76	2	0.98	0.20	0
200 200	60:	120	2395	30	22	109	30	16.94	0.17	23
	70:	99	2135	30	23	102	30	9.42	1.18	18
	80:	75	1835	30	22	95	24	8.41	0.57	3
	90:	46	1510	30	19	85	6	1.69	0.09	1
400 100	60:	240	2980	10	15	120	10	13.06	0.95	9
	70:	198	2810	10	15	118	10	10.05	1.96	9
	80:	150	2620	10	15	114	6	5.30	0.56	2
	90:	92	2390	10	15	109	2	1.29	0.15	0
400 200	60:	240	4380	30	29	146	30	18.67	1.42	44
	70:	198	3970	30	28	140	30	17.59	1.80	29
	80:	150	3480	30	26	130	23	7.91	1.66	17
	90:	92	2890	30	26	120	6	2.00	0.31	1

NBPR = the number of products;
NBLO = the number of locations;
T = the lenght of the planning horizon;
$\%I_{peak}$ = the peak load relative improvement;
$\%D_{aver}$ = the average load relative degredation.

NBPR' = the number of aggregated products;
NBLO' = the number of aggregated locations;
VACO = the number of valid day constraints;
COTI = the computation time;

is set to the *best-estimate-search* strategy; estimations are computed by removing from the objective function all integer infeasibilities. The *backtrack* parameter, which dictates how much relative degradation is tolerated before backtracking, is kept to the default value of 0.85. The *order* parameter is set to *yes* and an *ORD file* is supplied, where $x_{j'k'}$ is assigned the weight k'. The *variableselect* parameter is set to *branch on variable with maximum infeasibility.* The *branch* parameter is set to *algorithm decides*; once the branching variable is selected, the magnitude of its integer infeasibility is used to decide whether to process up or down branch.

Results are summarized in the last three columns of Table 3.3. The program and a turnover-based solutions are compared for the peak and average load criteria. Column $\%I_{\text{peak}}$ gives the relative improvements for the peak load criterion (they are computed with the turnover-based solution peak loads as denominators). Column $\%D_{\text{aver}}$ gives the relative degradations for the average load criterion (they are computed with the turnover-based solution average loads as denominators). Column COTI gives the computation times to solve the mixed integer programs.

From Table 3.3, it appears that most of the times, peak load improvements are significant while average load degradations are low. Furthermore, computation times are very reasonable: all of them are less than one minute! Precisely, the mean improvement is 9.95%, the mean degradation is 0.74%, and the mean computation time is 7.5 seconds. Programs are easy to solve because integrality gaps are insignificant and the program sizes are reasonable. The aggregations reduce the number of variables by a factor of up to 397, with an average of 89. On average, the day constraints, the ones that compute the relevant daily loads, are reduced by a factor of 2.75. These reductions reach a factor of 10. Table 3.3 shows that the relative improvements and degradations are strongly related to the PR parameter values. The

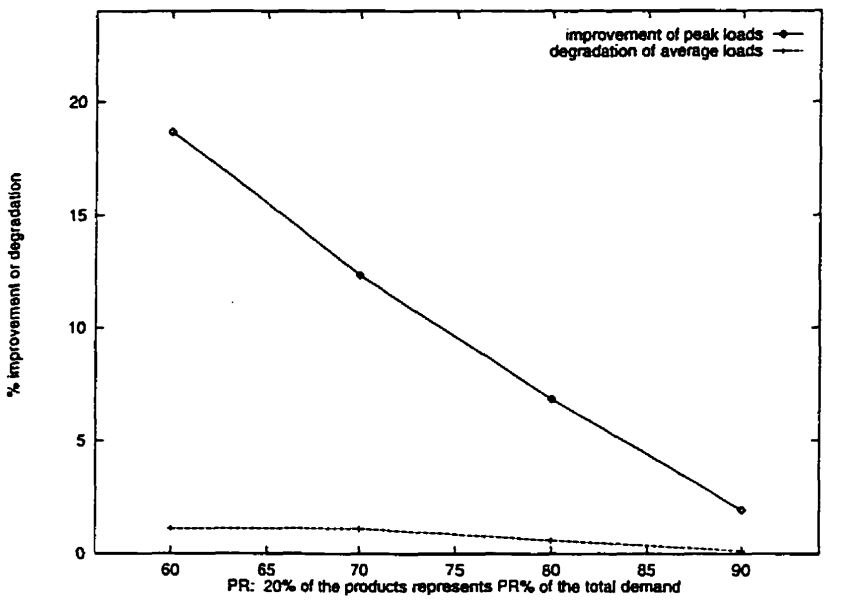


Figure 3.7 Comparisons in function of PR.

mean values of these improvements and degradations have been computed in function of the parameter PR and are ploted in Figure 3.7. The curve of improvements is almost a decreasing straight line. Indeed, both in Hausman et al. (1976) and in this paper, the same kind of performance dependency is observed for the turnover-based approach: the larger the parameter PR is, the better the turnover-based approach is.

This experimentation shows that real-life size problems can be solved in very reasonable computation times. It shows that considering the peak load criterion is relevant, especially when there is no important disparities in the product popularity (i.e., when PR is low). Furthermore, minimum peak load solutions of our data sets appear to be acceptable for the average load criterion. A possible explanation for this is the combination of both the way reorder quantities are computed and the frequent assignment of large reorder quantities to close locations. As busy days usually involve large q_j's, minimum peak load solutions often assign corresponding products to close

locations. Since, from equation (3.12), q_j is approximatively proportional to $\sqrt{d_j}$, the turnover d_j/q_j is itself approximatively proportional to $\sqrt{d_j}$, i.e., to q_j. Therefore, minimum peak load solutions generally assign highest turnovers to closest locations. We note that this is not true with the simple example of section 3.2.2, where the economic order quantity formula is not used.

3.2.6 Possible Extensions

The section 3.2.3 models can be extended in order to compute any expression of the daily loads of the planning horizon. Restrictions on these loads can translate into additional constraints. Moreover, some assignment variables of the models can be eliminated in order to impose turnover-based solutions.

As soon as products can be grouped according to their turnovers, there will be more than one turnover-based solution; and precise assignments inside same product groups will not matter if the sole criterion is the average load. But these precise assignments would be very important for someone wanting to keep the peak load low. The last section shows that minimum peak load solutions can be almost turnover-based. From this, one can be interested in finding the best turnover-based solution with respect to the peak load criterion. This means considering the average load as the first criterion and the peak load as the second.

To do this, one has just to begin by grouping products according to their turnovers. Then, the turnover-based solution has to be constructed. From this, the set $\mathcal{K}_j$ of locations assigned to the product j group has to be determined for each individual

product j . Finally, the following program has to be solved:

$$\min \quad Z$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_{j:k\in\mathcal{K}_j} x_{jk} & = 1 & \forall k \\ \sum_{k\in\mathcal{K}_j} x_{jk} & = S_j & \forall j \\ Z & \geq \sum_j \frac{T_{jl}}{S_j} \sum_{k\in\mathcal{K}_j} (\sum_i p_{ij} t_{ik}) x_{jk} & \forall l \\ x_{jk} & \in \{0,1\} & \forall j, k \in \mathcal{K}_j. \end{cases} \tag{3.13}$$

This program is actually a scaled down model of (3.2); the arc set of the corresponding transportation problem is drastically reduced. This formulation should be very easy to solve by a similar approach to the one presented in section 3.2.4. Aggregations of products and constraints are still possible.

On the other hand, since the daily loads are readily computed, one can be interested in minimizing any function of these loads. In the following general model, we propose such an objective. New constraints are added in order to limit daily loads to the processing capacities of the system.

$$\min \quad f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T)$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_j x_{jk} & = 1 & \forall k \\ \sum_k x_{jk} & = S_j & \forall j \\ z_l & = \sum_j \frac{T_{jl}}{S_j} \sum_k (\sum_i p_{ij} t_{ik}) x_{jk} & \forall l \\ z_l & \leq \zeta_l & \forall l \\ x_{jk} & \in \{0,1\} & \forall j, k \end{cases} \tag{3.14}$$

where:

- ζ_l = the day l processing capacity;
- z_l = the day l load;

- T = the number of days of the planning horizon.

This general model yields some other ones depending on the specific expression of the objective value f.

Defining f as:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T) = \frac{1}{T} \sum_l z_l, \tag{3.15}$$

the average load is minimized. This objective is identical to the objective of model (3.1), since $T_j = (1/T) \sum_l T_{jl}$. Furthermore, setting $\zeta_l = \infty$, $\forall l$, deactivates the processing capacity constraints and model (3.1), the classical model, is obtained. Keeping the capacity constraints activated appears to be more realistic.

Defining f as:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T) = \max\{z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T\}, \tag{3.16}$$

the peak load is minimized as it is with model (3.2). In this case, it seems appropriate to deactivate the capacity constraints, that is to set $\zeta_l = \infty$, $\forall l$. The non-linear objective function is readily linearized by introducing the variable Z as it is done in model (3.2).

Defining f as:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T) = \sum_l \max\{0, z_l - \zeta^1\}, \tag{3.17}$$

overtime is minimized, if ζ^1 is the regular time day length, and if $\zeta_l = \zeta^2 =$ constant $> \zeta^1$, $\forall l$, where ζ^2 is the maximum overall day length.

Some linear combinations of these models seem to be relevant too. Furthermore, it is still possible to impose turnover-based solutions as it is suggested with model (3.14). The Branch&Bound approach described in sections 3.2.4 and 3.2.5 should still be suitable.

3.2.7 Conclusion

The peak load seems to be a relevant criterion to manage warehouse systems, especially in contexts where the maximum daily processing capacity is a major concern. This study shows that minimizing the average load can yield significant suboptimalities for the peak load criterion, especially when there is no important disparities in the product popularity. The study also shows that it is possible to solve readily real size problems using the Branch&Bound technique.

The peak load minimization concept appears to be a very fertile research field. Everything that has been done in relation to the average load should be reconsidered for the new criterion. Moreover, putting the peak load minimization approach to work in a real warehouse should be addressed. Finally, models presented in section 3.2.6 should be more deeply studied in the future.

References

Ballou, R.H. (1992). *Business Logistic Management*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Francis, R.L., McGinnis, L.F., and White, J.A. (1992). *Facility Layout and Location: an Analytical Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Goetschalckx, M. (1983). *Storage and Retrieval Policies for Efficient Order Picking Operations*, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology.

Goetschalckx, M., and Ratliff, H.D. (1990). Shared Storage Policies Based on the Duration of Stay of Unit Loads, *Management Science* 36, 9, 1120–1132.

Harmatuck, D.J. (1976). A Comparison of Two Approaches to Stock Location, *The Logistics and Transportation Review* 12, 4, 282–284.

Hausman, W.H., Schwarz, L.B., Graves, S.C. (1976). Optimal Storage Assignment in Automatic Warehousing Systems, *Management Science* 22, 6, 629–638.

Heskett, J.L. (1963). Cube-per-Order Index: A Key to Warehouse Stock Location, *Transportation and Distribution Management* 3, april, 27–31.

Heskett, J.L. (1964). Putting the Cube-per-Order Index to Work in Warehouse Layout, *Transportation and Distribution Management* 4, august, 23–30.

Hodgson, T.J., and Lowe, T.J. (1982). Production Lot Sizing with Material Handling Cost Considerations, *IIE Transactions* 14, 1, 44–51.

Malette, A.J., and Francis, R.L. (1972). Generalized Assignment Approach to Optimal Facility Layout, *AIIE Transactions* 4, 2, 144–147.

Malmborg, C.J., and Krishnakumar, B. (1987). On the Optimality of the cube per Order Index for Warehouses with Dual Command Cycles, *Journal of Material Flow*, 4, 169–175.

Montulet, P., Langevin, A., and Riopel, D. (1995). L'optimisation de l'entreposage partagé à capacité de traitement limité, *Proceedings, International Industrial Engineering Conference*, Vol. 1, 13-22.

Montulet, P., Langevin, A., and Riopel, D. (1996). Le problème de l'optimisation de l'entreposage partagé: méthodes exacte et heuristique, to appear in INFOR.

Thompson, L.L. (1988). *Storage Location Characterization and Analysis Policies for Warehousing Systems*, Master Thesis, Purdue University.

Wilson, H.G. (1977). Order Quantity, Product Popularity, and the Location of Stock in a Warehouse, *AIIE Transactions* 9, 3, 230–237.

3.3 Conclusion

Un nouveau critère a donc été proposé et sa pertinence a été démontrée pour l'entreposage dédié. Le critère de la charge moyenne et la solution d'Heskett, qui l'optimise, doivent donc être considérés avec la plus grande prudence: la minimisation de la consommation d'énergie est un objectif très défendable, mais cela ne doit pas conduire à une saturation du système, qui, elle, peut impliquer des coûts d'une ampleur insoupçonnée.

Dans cet article, un nouveau modèle de programmation en nombres entiers a été proposé et résolu optimalement. De courts temps de calcul (moins d'une minute) ont permis de traiter de gros problèmes (plus de deux cents produits affectés à plus de quatre mille emplacements sous un cycle de trente jours). En moyenne, les nouvelles solutions réduisent la charge maximale de 10% alors que la charge moyenne n'est détériorée que de 1%. Les gains les plus substantiels sont obtenus pour un ratio de Pareto faible, c'est-à-dire lorsqu'il y a peu de disparité dans la demande des produits.

Comme cela a été sous-entendu plusieurs fois, il n'y a aucun doute que le type dédié est à proscrire dès que le système d'information permet un suivi complet des unités entreposées. Les contraintes qu'implique le dédié altèrent beaucoup la qualité des solutions à tous les niveaux: charge maximale, charge moyenne et utilisation de l'espace. Cet article est le seul de la thèse à considérer ce type de politique. L'objectif est surtout d'illustrer la pertinence du choix de la charge maximale comme critère d'optimisation.

L'article qui suit considère la combinaison la plus prometteuse: la charge maximale sous le partagé. Une réduction substantielle de la charge maximale de la solution d'Heskett est à anticiper.

CHAPITRE 4

Charge maximale et entreposage partagé

4.1 Présentation

Ce chapitre porte sur le problème de la minimisation de la charge maximale de manutention associée aux politiques d'affectation du type partagé. La charge maximale est la plus grande des charges quotidiennes. La charge quotidienne est la durée totale de manutention. Avec le type partagé, les unités sont affectées aux emplacements sans imposer de contrainte quant aux produits correspondants.

L'article qui suit, "Exact and Heuristic Methods to Minimize the Peak Load of Shared Storage Policies", retient les éléments les plus pertinents des deux articles précédents: l'entreposage partagé et la charge maximale. La pertinence du nouveau critère vient juste d'être démontrée dans le contexte contraint du dédié. Des résultats très intéressants sont donc à anticiper dans le contexte ouvert du partagé. Cet article a pour dessein de modéliser le problème, de le résoudre (de façon exacte ou approchée), et de comparer les affectations résultantes aux affectations classiques. Les affectations classiques consistent en la solution d'Heskett (1963), la solution du plus proche emplacement disponible (cette solution revient à placer une unité entrante dans l'emplacement libre le plus proche), et la solution de "Greedy" de Goetschalckx et Ratliff (1990) dont le critère est la charge moyenne. Les différentes affectations sont comparées en utilisant les critères de la charge maximale, de la charge moyenne et de l'utilisation de l'espace.

L'approche optimale consiste en une extension de celle présentée au chapitre 2. Elle utilise toujours le graphe des séjours, qui contient toute l'information sur le séjour des unités. Les chemins du graphe correspondent toujours aux combinaisons d'unités à affecter aux emplacements. Cependant, à toute combinaison on associe un compteur pour chaque journée de l'horizon. Le compteur calcule le nombre d'opérations, de placement ou de prélèvement, sur la combinaison qui sont effectuées la journée en question. Ainsi pour une affectation donnée, la charge de la journée peut être évaluée par une somme pondérée des compteurs où les poids correspondent aux temps de service des emplacements. Le problème de partitionnement d'ensemble du chapitre 2 est complété de contraintes servant aux calculs des charges quotidiennes.

L'approche heuristique de cet article est relativement nouvelle et présente deux volets: un premier volet dans le cas d'un parfait déterminisme et un second volet dans le cas contraire. Il s'agit dans les deux cas de délester les périodes naturellement chargées sur les périodes plus creuses. Une des heuristiques tire son inspiration des "Target Storage Policies" de Thompson (1988).

L'expérimentation est composée de trois étapes. Dans la première, quelques problèmes de taille moyenne sont résolus à l'optimalité. Dans la seconde, les relaxations linéaires de problèmes un peu plus grands sont traitées. Finalement dans la troisième, une des deux nouvelles heuristiques est appliquée à tous les problèmes précédents et les deux heuristiques sont comparées aux politiques classiques. Les problèmes tests sont générés de la même façon qu'au chapitre 2, c'est-à-dire à la façon de Goetschalckx et Ratliff.

4.2 Exact and Heuristic Methods to Minimize the Peak Load of Shared Storage Policies

Pierre Montulet André Langevin Diane Riopel
François Soumis
Ecole Polytechnique de Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel et GERAD

We study the problem of minimizing the peak load in single-command cycle shared storage policies. The peak load is the maximum of the daily material handling durations. We suggest exact and heuristic solutions. The exact solution is produced by column generation. This solution is obtainable in reasonable CPU time only for limited size problems. The new heuristic solutions assign units handled during busy days to close locations and are obtainable for large scale problems. For simulated problems, these policies reduce drastically the peak load compared to classical ones.

4.2.1 Introduction

This paper addresses the issue of minimizing the peak load of single command-cycle shared storage policies in storage/retrieval systems, especially automatic storage/retrieval systems (AS/RS). A daily load of a policy is the total duration of the material handling operations performed during a day. The peak load is the maximum of these loads. It is an alternate criterion: the common criterion is the average load. With a shared storage policy, the assignment of units of different products to a same location is allowed provided that the period of stay of any unit does not overlap that of another. Such a policy contrasts with dedicated storage policy, where locations are dedicated to products, that is, units of different products are never assigned to a same location. Only one storage or retrieval operation is performed per round trip when using single command-cycle storage policies, as opposed to two or more when using dual or multiple command-cycle storage policies.

In operational research literature, until recently, the most studied storage policy has been the dedicated one and the considered criterion was the average load. Moreover, it is generally assumed that the system is never overloaded as if the processing capacity of the material handling system were infinite. Heskett [7] suggests the Cube per Order Index (COI) rule in order to assign products to locations in the context of dedicated policies. The resulting storage policy is called turnover-based dedicated storage policy and its optimality for the average load criterion is studied and proven by Malette & Francis [8] and Harmatuck [5]. The policy consists in computing ratios, i.e., turnovers, related to products and in assigning units of products which have the highest ratios to the closest locations. So, for each product, an amount corresponding to its maximum inventory expressed in number of units is allocated. Under the assumption that the policies have a same space utilization, Hausman et al. [6] use continuous approximation to quantify the relative savings yield by the

turnover-based policy on random policy. They introduce also the class-based policy where products are grouped in classes of turnovers. With a shared storage policy, the space utilization can be reduced as can be the average load. Goetschalckx & Ratliff [3, 4] introduce the duration of stay-based policies which assign units with smallest duration of stay to closest locations. Their heuristics yield important average load and space reductions compared to the famous turnover-based dedicated policy. Thompson [6] presents similar shared policies and proposes a classification. Montulet et al. [10] consider also shared policies and they propose optimal solutions for limited size instances. They suggest a very efficient heuristic for large scale instances. The problem of minimizing the supplementary hours of a shared storage policy for a storage/retrieval system with a finite processing capacity is studied by Montulet et al. [9]. Furthermore, Montulet et al. [11] address the problem of minimizing the peak load of a dedicated storage policy; they show that substantial reductions of the peak load are possible.

Actually, warehouse managers' concerns include storage assignment policies because they offer good opportunities to reduce operational costs. Another important issue for warehouse managers is the maximum daily processing capacity requirement. It is relevant to keep low operational costs (energy consumption, equipment wear, ...). But this should happen without detriment to other important costs such as those related to the maximum daily processing capacity. Reducing the maximum capacity requirement lowers the initial investment costs of a new material handling system. For an existing system which is sometimes overloaded, reducing this requirement lowers or eliminates extension costs. Similarly labor costs are lowered by such a reduction. So, the initial investment costs of a material handling system, the opportunity to relieve a sometimes overloaded system, and the overtime labor costs are all strongly related to the maximum processing capacity. Therefore, the storage assignment criterion should include these considerations. The average load

value gives an accurate estimation of most of the operational costs. It is also an approximation of the maximum daily processing capacity requirement. But, the peak load value corresponds to this requirement.

Here, we consider the problem of minimizing the peak load in the promising shared storage context. In the next section, we present a general model for shared storage policies; a particular case considers the peak load as the criterion. The exact approach based on column generation is proposed in section 4.2.3. Some limited size instances are solved with this approach. In section 4.2.4, we present two new heuristics; a small example is used to compare in detail these heuristics with the column generation method and some classical policies. Simulation is used in section 4.2.5 to make a more comprehensive comparison between heuristics and classical policies. A conclusion follows.

4.2.2 Models

Here, we consider a general model for any shared assignment policy, the objective of which is expressed as a function of daily loads. The system has possibly a limited processing capacity. We present eventually some particular cases along with a model for minimizing the peak load.

We consider a storage system with single-command cycles, i.e., a single storage and retrieval (S/R) operation is performed per round trip. Precisely, we assume that for any given day, the S/R operations are performed separately on two distinct periods: first the storage operations, next the retrieval operations. Theoretically, that prevents a location to be filled the same day it is emptied. This is not as restrictive as it appears, because the notion of day is not here absolute: its length can be shortened or even lengthened. To this assumption we add that one on the

availability of precise information. We assume that we know the command-cycle duration of any rack location and the periods of stay of any units stored during the considered horizon.

Before modeling, we present some concepts and definitions. To each location, we associate a graph of stays $G = (X, A)$ (see Figure 4.1), where:

- a node x in $X = \{1, 2, \ldots, T+1\}$ corresponds to the night between day $x-1$ and day x;
- an arc in A corresponds either to the stay of a unit or to a one day vacancy:
  - there is an arc for each unit to be stored; this arc connects the arriving day storage node to the departure day retrieval node;
  - each pair of consecutive nodes is connected by an arc to allow vacancies of any lengths.

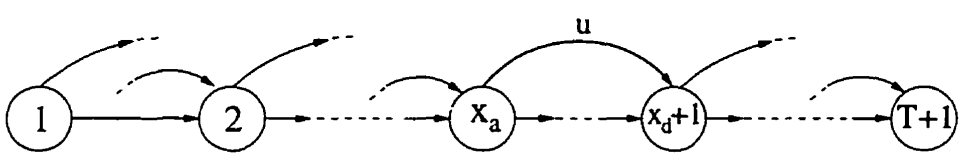


Figure 4.1 A location Graph of Stays $G = (X, A)$; unit u arrives in the morning of day x_a and departs in the afternoon of day x_d.

This acyclic graph contains all the relevant information on the stays of the units to store. Moreover, there is a bijective relation between paths in the graph and combinations of units for which the stay period of any unit does not overlap that of another one. We call a *combination* such a combination of units, that can be assigned to a same location, and a *class* the class of locations served with a same command-cycle duration.

Therefore, the problem is equivalent to select combinations and to assign them to classes in such a way that: all the units are covered, the number of combinations

assigned to a same class does not exceed its cardinality, and the processing capacity is respected. The objective is to minimize a function of daily loads. Actually, it is possible to minimize the average load, the peak load, the supplementary hours, or any mix of these elements. Here is the corresponding model:

$$\min \quad f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T)$$
$$s.t. \quad \begin{cases} \sum_j a_{ij} \sum_k y_{jk} & = 1 & \forall i \\ \sum_j y_{jk} & \leq \eta_k & \forall k \\ z_l & = \sum_{j,k} r_{jl} t_k y_{jk} & \forall l \\ z_l & \leq \zeta_l & \forall l \\ y_{jk} \in \{0,1\} & & \forall j,k \end{cases} \tag{4.1}$$

where:

- i = a unit to be stored;
- j = a combination;
- k = a class; t_k is the command-cycle duration of the class;
- l = a day of the horizon $(l \in \{1, 2, \ldots, T\})$;
- a_{ij} = the binary parameter translating whether or not combination j includes unit i;
- r_{jl} = the number of command-cycles performed during day l and involving units from combination j $(r_{jl} \in \{0, 1, 2\})$;
- η_k = the number of locations that class k comprises;
- ζ_l = the system processing capacity for day l = the maximal load allowed for day l;
- y_{jk} = the binary assignment variable of combination j to a location of class k;

- z_l = the load of day l.

With this formulation, the independent decision variables are the assignment variables y_{jk}. We note that $\sum_k y_{jk}$ takes the value 1 or 0 depending on whether or not combination j is selected. So, the first group of constraints states that each unit must be covered, that is, each unit must be stored once and only once. The second group limits the number of combinations assigned to any class to the number of locations that class comprises. The third group defines the dependent variables z_l, which computes the daily loads. The fourth group limits the daily loads to the daily processing capacities. The last group is the integrality constraint group on the assignment variables. This general model yields some other ones depending on the specific expression of the objective value f.

Defining f as:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T) = \frac{1}{T} \sum_l z_l \tag{4.2}$$

minimizes the average load. Furthermore, setting $\zeta_l = \infty$, $\forall l$, deactivates the processing capacity constraints and yields a model for the problem addressed by Goetschalckx et al. [3, 4] and by Montulet et al. [10]. Keeping the capacity constraints activated appears to be more realistic.

Defining f as:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T) = \sum_l \max\{0, z_l - \zeta^1\} \tag{4.3}$$

minimizes overtime, if ζ^1 is the regular time day length, and if ζ_l = constant $= \zeta^2 (> \zeta^1)$, $\forall l$, where ζ^2 is the maximum overall day length. This problem is addressed in Montulet et al. [9].

Defining f as:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T) = \max\{z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots, z_T\} \tag{4.4}$$

minimizes the peak load. In this case, it seems appropriate to deactivate the capacity constraints, that is, to set $\zeta_l = \infty$, $\forall l$. Actually, this is the problem addressed in the present paper.

Some linear combinations of these objective functions seem to be relevant too. All of these objective functions are convex and piecewise linear, so they can be readily linearized. We solve some instances of the peak load problems using the column generation method in the next section.

4.2.3 Column Generation

The peak load minimization model, defined by (4.4), is linearized to the following integer program:

$$\min \; Z$$
$$s.t. \begin{cases} \sum_j a_{ij} \sum_k y_{jk} & = 1 & \forall i \\ \sum_j y_{jk} & \leq \eta_k & \forall k \\ Z & \geq \sum_{j,k} r_{jl} t_k y_{jk} & \forall l \\ y_{jk} \in \{0,1\} & & \forall j,k. \end{cases} \tag{4.5}$$

At the optimality, the value of the objective function Z coincides with the maximum of the daily loads, namely with the peak load.

So, the problem is seen as a set partitioning problem with supplementary constraints. A unit i to be stored corresponds to an element to be covered and a couple of combination-class jk corresponds to a covering set. Supplementary constraints are used to linearize the original objective function or to impose the restrictions on the number of covering sets selected from a same class. Any combination as any couple of combination-class corresponds to a path in the graph of stays presented in the previous section.

Actually, the integer program comprises a tremendous number of variables (couples of combination-class), even for small scale problem, and it is impossible to manage the entire program. Linear relaxations of limited size instances of this kind of problem, where columns are obtainable from networks, can be efficiently solved using a column generation approach (see [1]). The integer solution is obtained by application of this technique to the nodes of a branch and bound enumeration tree.

A column generation approach works with a master problem, comprising a limited number of columns, and with one or several sub-problems, sending relevant columns to the master problem. The master problem is solved using the simplex algorithm. In our case, the sub-problems are solved using a network algorithm. The negative reduced cost columns with the smallest values are sent to the master problem. If no sub-problems yield a negative reduced cost column, the optimal solution is found. Otherwise, the simplex is used again and the process is repeated until there are no more negative reduced cost columns. To keep the master problem tractable, its size is controlled by excluding sometimes the least promising columns, that is, those with the highest reduced costs.

Indeed, our sub-problems consist in finding couples of combination-class with smallest reduced costs. If in model (4.5), we designate by μ the multiplier vector corresponding to the first constraint group, by ν the multiplier vector corresponding to the second constraint group, and by λ the multiplier vector corresponding to the third constraint group, then the reduced cost corresponding to the couple of combination-class jk is:

$$\overline{C}_{jk} = -\sum_i a_{ij}\mu_i - \nu_k - \sum_l \lambda_l r_{jl} t_k.$$

Introducing the parameter:

$$\rho_{il} = \begin{cases} 1 & \text{if unit } i \text{ is handled on day } l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

the following relation holds:

$$r_{jl} = \sum_i \rho_{il} a_{ij}$$

and the reduced cost becomes:

$$\overline{C}_{jk} = -\sum_i a_{ij}(\mu_i + \sum_l \lambda_l \rho_{il} t_k) - \nu_k.$$

In other words:

$$\overline{C}_{jk} = -\sum_{i \in \text{comb}_j} (\mu_i + \sum_l \lambda_l \rho_{il} t_k) - \nu_k$$

(comb_j = combination j). So, for any class k, the column with the smallest reduced cost can be found by solving the following sub-problem:

> solve the shortest path from 1 to $T+1$ in the graph of stays G where for each unit i the corresponding arc is weighted by $-\mu_i - t_k \sum_l \lambda_l \rho_{il}$ and where the other arcs are weighted by 0;

the reduced cost is obtained after subtracting ν_k from the path length. After applying a shortest path algorithm to all of the graphs of stays, the columns with negative reduced costs are sent to the master problem.

Once the column generation terminates, the integrality constraints are not necessarily respected since they are relaxed. So, the next step consists in branching, that is, in fixing variables and repeating the process until either the integrality constraints are respected or the problem is infeasible or the objective function value is worst than an upper bound. Actually, the overall process is equivalent to the exploration of a tree, the nodes of which are created each time variables are fixed. The optimal solution is found when all the branches are explored. The use of column generation inside a branch-and-bound enumeration is generally tricky at the branching level: any branching decision must keep the mathematical structure of the sub-problems

and previously excluded columns must not be regenerated. In our case, the branching decisions concern "inter-tasks" that is, the succession of the units to be store to a same location. For each pair of units, the flow connecting the corresponding arcs is computed; actually, this flow is a sum over all of the sub-problem networks. Then, the pair which has the biggest flow is selected. Eventually, a branching is done over the B&B tree: the flow of this pair is fixed to one into one branch and to zero into the other. Each branching decision is taken at the level of the shortest path algorithm, which is modified in order to handle non-comparable labels.

We have used *Gencol* (see [2, 1]), a column generation software intended for solving set partitioning/covering problems which can be modeled from paths of graph and where supplementary variables and constraints can be added. This software has been used to solve many real-life problems in Vehicle Routing and Crew Scheduling problems (see [1]). Many parameters and options allow a particular treatment of our problem.

Table 4.4 presents performances of the method versus characteristics of some considered test problems. On the other hand, some information on the load distributions is given in Table 4.5 The experimentation was made on a *Sun Sparc 20 (Model 612)* machine. Data from the first test comes from a small example studied by Goetschalckx [3] and Montulet et al. [10, 9]. This example is deeply studied in the next section and its solution is presented in Table 4.10. Data for the other tests were randomly generated. Four parameters control the generation of the units to be stored. Racks are square-in-time (the command-cycle durations of the extreme locations are identical). Section 4.2.5 gives more details on the way data are generated. Here, the important factors are the number of units to store, the average number of units per location (for the optimal assignment), the horizon length, the average duration of stay, and the load distributions.

Table 4.4 Column Generation Experimentation.

Problem number	Horizon length	Average duration of stay	Number of units	Average number of units per location	CPU time h:mm:ss	LP relaxation time h:mm:ss	Number of B&B nodes
1	12	3.6	42	2.1	0:00:01	0:00:01	2
2	40	5.4	164	4.0	0:05:53	0:02:09	22
3	60	4.4	141	8.3	0:19:00	0:02:27	36
4	80	2.9	160	16.0	2:37:08	0:01:52	200
5	20	2.4	62	5.6	0:00:06	0:00:04	1
6	20	2.6	164	5.1	0:06:56	0:00:57	29
7	60	6.1	225	5.8	1:39:45	0:12:51	89

Table 4.5 Some Information on the Load Distributions.

Problem number	Relative number (%) of the peak loads, with the load viewed:		Relative deviation (%) of the daily loads, with the load viewed:	
	as the number of S/R operations	as the total duration of S/R operations	as the number of S/R operations	as the total duration of S/R operations
1	8.3	25.0	85.7	23.5
2	2.5	2.5	204.9	151.2
3	1.7	3.3	176.6	123.5
4	1.3	6.3	75.0	57.2
5	5.0	5.0	45.2	69.7
6	5.0	30.0	22.0	17.5
7	1.7	11.7	126.7	74.7

The right-hand side columns of Table 4.4 present the CPU times to solve the integer program and its linear relaxation. The number of Branch & Bound (B&B) nodes is also given. Let us specify that the integrality gap equals zero for all of the seven problems. Table 4.5 displays the relative number of the peak loads, that is, the number of times that the peak occurs over the horizon length, and the relative deviation of the daily loads, that is, the difference between the peak load and the average load over the latest. This information is duplicated, once for the load viewed as the number of S/R operations (an assignment independent piece of information) and once for the load viewed as the total duration of S/R operations (the definition used in this paper). When we compare the second load (the one viewed as a duration) to the first (the one viewed as a number), we see how the resulting assignment flattens the natural load distribution: most of the times, the number of peaks increases and the deviation decreases.

From Table 4.4, we see that for the first test the problem is easily solved: in one second. However for the other tests, computations can last for hours. The first test is characterized by a small number of units and by a small average number of units per location.

We see from tests 2, 3, and 4 that for a roughly fixed number of units, the CPU time increases with the average number of units per location. Similarly, from the last three tests, we see that for a roughly fixed average number of units per location, the CPU time increases with the number of units. The explanation of the previous behavior is that the number of units sets the number of rows in the constraint matrix. On the other hand, the CPU time is high when the average number of units per location is high because degenerate iterations occur in the simplex algorithm. Moreover, the relation between the average number of units per location and the combinatorial character of the problem explains also this behavior. The greater the

average number of units per location is, the greater the number of combinations is, the greater the number of columns is (the converse is also true). This is easily seen by considering two extreme cases: if all the n units are incompatible two by two, the number of distinct combinations is n and the average number of units per location is 1; whereas, if all the units are compatible two by two, the number of distinct combinations is $2^n - 1$ and the average number of units per location is n.

In short, the considered tests show the limits of the column generation approach according to the size of the problem expressed by the number of units and according to the average number of units per location. The heuristics presented in the next section do not present such limitations.

4.2.4 Heuristics

In this section we present two new heuristics for the peak load criterion: *NGH*, a new greedy heuristic, and *NAH*, a new adaptative heuristic. We also recall some classical storage policies. We compare the policies and our heuristics using the small example studied by Goetschalckx [3] (the first test of the previous section).

Both *NGH* and *NAH* try to assign units handled during busiest days to the closest locations. But, while with *NAH*, the busiest days have by definition the highest numbers of command-cycles, with *NGH*, the busiest days have the highest loads (i.e., the highest total command-cycle durations). The orders with which units are assigned are different. With *NAH*, assignments respect the arrival sequence in such a way that the assignment decisions are taken daily. With *NGH*, no restrictions are imposed. As a result, while *NGH* requires exact and complete information, *NAH* works with estimations of the numbers of command-cycles that are performed at the departure dates of the arriving units. So, we can expect *NGH* to be better than

NAH.

NGH tries, at each iteration, to reduce the estimated peak load by performing the most appropriate assignment. It assigns to closest locations, units handled during estimated peak days and continuously updates the estimated loads. Estimations of daily loads are updated after each unit assignment. The initial estimations are computed as if the random storage policy were used. The update following an assignment consists in: first, computing the difference between the command-cycle duration of the selected location and that of the random storage policy; and second, adding this difference to the loads of the selected unit arrival and departure days. At a given iteration, the selected unit is the one which first, is handled during the day with the greatest load estimate and second, has the smallest duration of stay (this is done by computing index values and by selecting the unit corresponding to the greatest value). The selected location is the closest one which is not assigned yet during the period of stay of the selected unit. Formally, let:

- T_{RAN} be the average command-cycle duration of random storage policy;
- $\widetilde{L_l}$ be the estimation of the day l load;
- n_l be the number of command-cycles performed during day l;
- a_u and d_u be the arrival and departure dates of unit u;
- T_e be the duration of command-cycles using location e;
- $I_u = \max\{\widetilde{L_{a_u}}, \widetilde{L_{d_u}}\} - \epsilon(d_u - a_u)$ be the index value related to unit u ($\epsilon << 1$).

Then, *NGH* is described by the following pseudo-code:

1. • $\widetilde{L_l} \leftarrow n_l \times T_{RAN}$, $\forall l$;
   • compute I_u, $\forall u$;
2. • find:
     – $u^* = \text{argmax}\{I_u : u \text{ unassigned }\}$;
     – e^* the closest location unassigned during $[a_{u^*}; d_{u^*}]$;
   • assign u^* to e^*;
   • update estimations: $\begin{cases} \widetilde{L_{a_{u^*}}} \leftarrow \widetilde{L_{a_{u^*}}} - T_{RAN} + T_{e^*}; \\ \widetilde{L_{d_{u^*}}} \leftarrow \widetilde{L_{d_{u^*}}} - T_{RAN} + T_{e^*}; \end{cases}$
   • update I_u, $\forall u$ not assigned yet;
3. • if there is an unassigned unit go to step 2;
   • else END.

We can see that at the end the $\widetilde{L_l}$'s correspond to the true daily loads. Besides, considering the duration of stay as a second selection criterion for the current iteration has a twofold advantage: first, it increases the opportunity of a good assignment for the next iteration and second, it implies a smaller average load by assigning more units to the first locations (see [4]).

NAH computes for each arriving unit an index value and a target location. Units are assigned as close as possible to their target. Inside the batch of units arriving a same day, priority is given to units with highest index value. *NAH* requires estimations of the numbers of command-cycles that are performed at the departure dates of the arriving units plus estimations of the horizon extreme values of these numbers. These estimations are used when selecting units arriving at a given day and when computing the target location to which a selected unit should be assigned.

Each morning, just before their assignment, the arriving units are ordered according to the index which computes the maximum value between the loads of arriving and departure dates:

$$I_u = \max\{n_{a_u}, n_{d_u}\}.$$

Then, units are selected according to this order (ties are broken using the durations of stay criterion) and assigned as close as possible to their target location; if a target location is not open, the open one which is the closest to it is used. The target location e_I of an index I unit is computed by the recursive formula with a terminal condition:

$$\begin{cases} e_{\overline{I}} = \frac{1}{2}S_{\overline{I}} \\ e_I = e_{I+1} + \frac{1}{2}(S_I + S_{I+1}) \quad \forall I \in \{\overline{I}-1, \overline{I}-2, \cdots, \underline{I}\} \end{cases}, \tag{4.6}$$

where:

- $\underline{I}$ and $\overline{I}$ are the extreme values taken by the index (that is, the extreme values of the number of command-cycles);
- S_I is the storage space somewhat allocated to units of index I (that is, $\frac{1}{2}(S_I + S_{I+1})$ is the distance between the two consecutive targets e_{I+1} and e_I).

There are different empirical ways to compute the S_I's. We choose to use this formula:

$$S_I = \frac{I}{\sum_{J=\underline{I}}^{\overline{I}} J} E \qquad \forall I \in \{\underline{I}, \cdots, \overline{I}\},$$

where E is the minimum space required to store all the units. So, the resulting assignment yields the minimum space utilization. Actually, the "target storage policies" of Thompson [6] are the inspiration for the location selection part in the assignment process (especially for the computations of the S_I's).

Recall that the turnover-based dedicated storage policy (*TBD*) dedicates locations to products (with this policy, it is not allowed to store units of different products to the same location) and assigns products with high turnovers to close locations. The turnover is computed as the ratio between the demand of the product and its reorder quantities. The *TBD* policy has the least average load among those of dedicated policies. Since there are no precise rules for the assignment of units from a same location, we assume the least duration of stay rule which corresponds to a somewhat greedy behavior.

With the closest open location policy (*COL*), the arriving unit is assigned to the closest open location. Actually as does Thompson [6], this policy is improved by assigning first the arriving units with short duration of stay; so, again we assume the least duration of stay rule.

Finally, with the Goetschalckx et al. [4] greedy heuristic (*GGH*), units are assigned to the closest open location according to their departure date increasing order (ties are broken by assigning first the earliest departure times). This heuristic is very efficient for the average load criterion.

We consider the small example studied in Goetschalckx [3]. The problem consists in assigning units of the products described in Table 4.6 to locations of a rack, the command-cycle durations of which are given in Table 4.7. In that table, each division corresponds to a rack location and inside is given the duration of command-cycles using this location. In Table 4.6, the first column displays the product numbers, the second the reorder quantities and the third the days of first replenishments. We consider an horizon of twelve days. Tables 4.8 to 4.13 represent the assignments of the turnover-based dedicated policy (*TBD*), the closest open location (*COL*), the Goetschalckx greedy heuristic (*GGH*), the column generation method (*CGM*), the new adaptative heuristic (*NAH*), and finally the new greedy heuristic (*NGH*). Each

assignment is represented by a temporal occupation diagram of the rack, containing characters '*' and '+', where a consecutive horizontal sequence of identical characters represents a same unit. In this diagram, there is a column per day and a row per location. On the left-hand side of each row, the command-cycle duration of the corresponding location is given, whereas on the right-hand side, the product numbers of the units are given. Beside the *NAH* diagram, the targets corresponding to the relevant loads (13, 10, 8, 7, 5, and 4) are indicated. To these diagrams we join a comparative table of the load distributions (see Table 4.14). The first column gives the day numbers, the second the numbers of daily command-cycles (#C-C), and the remaining columns the daily loads of each assignment policy. The first twelve rows correspond to the horizon days, whereas the last two rows correspond to the peak and average loads (Peak and Aver.).

Table 4.6 The Products

product	reorder quantity	first replenishment day
1	12	1
2	6	4
3	4	3
4	3	2

Table 4.7 Command-Cycle Durations

3	3	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Table 4.8 *COL* Solution

```
Loc.\Day          |        Prod.
--------------------------------------------
   123456789012
--------------------------------------------
 1 |+****+ *+ *+   |1  4  3  2  4  3  4  2  4
 2 |**++****+ **   |1  3  4  3  2
 2 |+++** ++****   |1  2  3  2
 2 |++++****++ *   |1  4  4  3
 3 |+++++ ******++ |1  3  4
 3 |****** +++**   |1  4  3
 3 |+++++++        |1
 3 |********       |1
 3 |+++++++++      |1
 4 |**********     |1
 4 |++++++++++     |1
 4 |************   |1
 5 | ++***         |4  2
 5 | +++           |4
 5 |  ***          |3
 6 |  ++++         |3
 6 |   ****        |2
 6 |   +++++       |2
 7 |   ******      |2
```

Table 4.9 *TBD* Solution

```
Loc.\Day          |        Prod.
-------------------------------------------
   123456789012
-------------------------------------------
 1 | +  *  +  *   |4  4  4  4
 2 | ++ ** ++ **  |4  4  4  4
 2 | +++++++++    |4  4  4
 2 |  *   +   *   |3  3  3
 3 |  ++  **  ++  |3  3  3
 3 |  *** +++     |3  3
 3 |  ********    |3  3
 3 |   *     +    |2  2
 3 |   **    ++   |2  2
 4 |   ***   +++  |2  2
 4 |   ****       |2
 4 |   +++++      |2
 5 |   ******     |2
 5 |+             |1
 5 |**            |1
 6 |+++           |1
 6 |****          |1
 6 |+++++         |1
 7 |******        |1
 7 |+++++++       |1
 7 |********      |1
 8 |+++++++++     |1
 8 |**********    |1
 8 |++++++++++++  |1
 9 |************  |1
```

Table 4.10 *GGH* Solution

```
Loc.\Day          |        Prod.
---------------------------------------------
   123456789012
---------------------------------------------
 1 |+*+*+ *+ *+   |1  4  3  2  4  3  4  2  3
 2 |**++++++ **   |1  3  4  3  2
 2 |+++** +++ *   |1  2  3  4
 2 | ++*** ++***  |4  2  4  2
 3 |++++*****++**|1  4  4  3
 3 | +++  ****++  |4  3  4
 3 |*****         |1
 3 |  +++         |3
 3 |******        |1
 4 |  ++++        |3
 4 |*******       |1
 4 |   ++++       |2
 5 |********      |1
 5 |   +++++      |2
 5 |*********     |1
 6 |   ++++++     |2
 6 |**********    |1
 6 |+++++++++++   |1
 7 |************  |1
```

Table 4.11 *CGM* Solution

```
Loc.\Day          |        Prod.
---------------------------------------------
   123456789012
---------------------------------------------
 1 |+ **+***  +++  |1  3  2  4  2
 2 |****++  ***+   |1  2  4  3
 2 |** +++++  **   |1  2  3
 2 |++++  ****     |1  3
 3 |+++++****      |1  3
 3 |++++++++**     |1  2
 3 |+++++++   **   |1  4
 3 |+++++++++++++  |1
 3 |*****          |1
 4 |++++++++++     |1
 4 |**********     |1
 4 |++++++++       |1
 5 |  **++**       |3  4  3
 5 |   ++++*       |2  4
 5 | +++           |4
 6 | **+++++++     |4  2
 6 |   ***         |2
 7 |  +++          |3
 8 | *  + *++*+    |4  4  3  4  2  4
 8 |  ****         |3
```

Table 4.12 *NGH* Solution

```
Loc.\Day          |        Prod.
-------------------------------------------
   123456789012
-------------------------------------------
 1 |+*+*+ *+ *+   |1  4  3  2  4  3  4  2  3
 2 |** ++ **  +   |1  2  3  4
 2 |***++++****+  |1  2  3  2
 2 |*****++** ++  |1  4  4  3
 3 |***** ++++**  |1  3  4
 3 |++++++ ***    |1  4
 3 |+++++++  ***  |1  2
 3 |++++++++      |1
 3 |*********     |1
 4 |++++++++++    |1
 4 |************  |1
 4 |+++++++++++++ |1
 5 |  **++        |3  4
 5 | ***          |4
 5 | ++****       |4  2
 6 |   +++++      |2
 6 |   ******     |2
 6 |  +++         |3
 7 |  ****        |3
```

Table 4.13 *NAH* Solution

```
   Loc.\Day          |        Prod.
   ----------------------------------------
       123456789012
   ----------------------------------------
    1 |+  *          |1  2
 13 2 |++ **         |1  2
    2 |+++***        |1  2
    2 |++++*         |1  4
    3 |+++++         |1
    3 |******+       |1  3
    3 |*******+      |1  4
    3 |********      |1
 10 3 |+++++++++ *   |1  4
    4 |++++++++++*   |1  3
    4 |++++++++++    |1
    4 |************  |1
  8 5 | +++*******   |4  4  4  2
    5 |  ++***++ *++ |3  4  3  2  4
  7 5 | **++++****++ |4  2  4  3
    6 |  *++++++ ***|3  2  2
    6 |  +++ ***     |3  3
  5 6 | +********    |4  3  3
  4 7 |   ******     |2
```

Table 4.14 Load Distributions

Day	#C-C	TBD	COL	GGH	CGM	NAH	NGH
1	13	87	35	48	35	35	35
2	5	11	14	9	29	24	14
3	7	21	22	15	30	36	27
4	10	37	37	29	35	36	35
5	7	18	16	15	34	25	20
6	4	16	16	11	22	16	17
7	8	26	20	20	35	36	19
8	7	20	18	19	31	30	18
9	4	18	14	15	20	21	13
10	7	26	16	18	28	36	17
11	8	22	18	20	32	33	17
12	4	18	12	15	9	20	12
Peak		87	37	48	35	36	35
Aver.		26.7	19.8	19.5	28.3	29.0	20.3

From the Tables 4.4 to 4.9, we see that *TBD* assignment requires more space than any other one: it requires twenty five locations. All the other assignments except assignment *CGM* require nineteen locations; the *CGM* assignment requires one additional location.

From Table 4.14, we see that the best assignments for the peak load criterion are *CGM* and *NGH* with a peak of 35. The *NAH* and *COL* assignments are very good and the *GGH* is not so bad. But the peak of the *TBD* heuristic is very high, 87, that is, 2.5 times higher than the minimum! For the average load criterion, the best assignment is *GGH*, which is actually optimal (see [10]). Some other assignments are rather bad for this criterion as is *NAH*, with an average load of 29, that is, 1.5 times higher than the minimum. We can observe from Table 4.8 to 4.13 that the higher the number of units assigned to first locations is, the lower the average load is (this is demonstrated by [4]).

So, from this short experimentation it appears that the *NGH* is a very good heuristic for all the criteria and that *NAH* is rather bad for the average load criterion. The simulations of the next section confirm this tendency for larger problems.

If *NGH* is excellent compare to other policies, is it close to the optimality for the peak load criterion? A partial answer to this question is given if we compare the objective values of *NGH* and of the linear relaxation of model (4.5). Since for the seven problems studied in the last section, the integrality gap equals zero, we can expect the lower bound corresponding to the linear relaxation to be good for largest problems. Table 4.15 presents a comparison between *NGH* and the linear relaxation of model (4.5) for twelve problems, the seven first of which being the ones considered in last section. From this table *NGH* is very fast to solve these sizes of problems. Moreover eight out of twelve problems are solved optimally and the average gap with the lower bound is 1.7%.

Table 4.15 Comparison between *NGH* and the LP Relaxation of Model (4.5).

Problem number	Horizon length	Average duration of stay	Number of units	Average number of units per location	LP relaxation time h:mm:ss	*NGH* time seconds	Relative gap %
1	12	3.6	42	2.1	0:00:01	0.02	0.0
2	40	5.4	164	4.0	0:02:09	0.06	0.0
3	60	4.4	141	8.3	0:02:27	0.05	0.0
4	80	2.9	160	16.0	0:01:52	0.06	0.0
5	20	2.4	62	5.6	0:00:04	0.02	0.0
6	20	2.6	164	5.1	0:00:57	0.06	0.0
7	60	6.1	225	5.8	0:12:51	0.09	4.0
8	100	6.1	442	9.8	4:10:56	0.15	0.0
9	120	11.3	450	6.0	5:24:54	0.15	6.3
10	60	5.9	455	6.7	2:46:40	0.17	0.0
11	96	10.1	490	6.0	2:57:03	0.19	1.5
12	120	12.4	611	5.9	17:54:07	0.28	8.6

4.2.5 Simulation

In this section, we repeat the previous comparison between policies for 48 large scale instances obtained by simulation. All the heuristics are again considered but not the column generation method. The experimentation is conducted in the same way as it is in Goetschalckx et al. [4] and in Montulet et al. [10].

The storage systems are square-in-time, that is, the command-cycle durations of the extreme locations are identical. The racks are large enough to store all the units whatever the assignment. The S/R machine travels in both horizontal and vertical directions simultaneously; but their horizontal speed is five times faster.

Data on the units to be stored are represented by lists of arrival and departure dates. The lists are generated randomly with some parameters of control. The parameters are: the number M of products, the reorder quantity Q, the average demand inter-arrival time DIT, and the horizon length T. All the products have the same reorder quantity Q. Products are replenished as soon as their stock reaches the

zero level. On the other hand, the demand inter-arrival times (dit) of the products are different. A specific demand inter-arrival time dit_p is given by a stochastic simulation using an exponential law of mean DIT (numbers are rounded). The first replenishment date of product p is randomly sampled from the set $\{1, 2, \cdots, Q \times \text{dit}_p\}$. The horizon length is set to $T = 10 \times Q \times \text{DIT}$, in such a way that on average, products are replenished 10 times.

The parameters are set as follows. M is set to 10, 20, 40, and 80. Q is set to 5, 10, 20, and 40. DIT is set to 3, 4, and 6. This yields $4 \times 4 \times 3 = 48$ instances, the size of which ranges from some hundred to several thousand units (sixty four thousands). These instances are solved in some minutes; the biggest ones are solved in around one hour. Table 4.16 gives the average relative savings (which can be negative) for the turnover-based dedicated policy (*TBD*), the closest open location (*COL*), the Goetschalckx greedy heuristic (*GGH*), the new adaptative heuristic (*NAH*), and finally the new greedy heuristic (*NGH*). The following values are included: the peak load, the average load, and the space utilization. Since *TBD* yields most of the time

Table 4.16 Average Relative Savings for 48 tests.

	TBD	COL	GGH	NAH	NGH
Peak Load	0.0%	7.8%	24.0%	31.3%	49.7%
Average Load	0.0%	17.1%	26.5%	−10.6%	20.0%
Space Utilization	0.0%	28.9%	26.3%	28.9%	26.5%

the worst results, the references are the *TBD* values (that is, each entry is computed after subtracting the corresponding value from the *TBD* value and after dividing by the latest). Figures 4.2, 4.3, and 4.4 present respectively the relative peak load savings, the relative average load savings, and the relative space utilization savings in function of the parameter M, that is, in function of the number of products. The results are plotted in the order of the efficiency for the considered criteria.

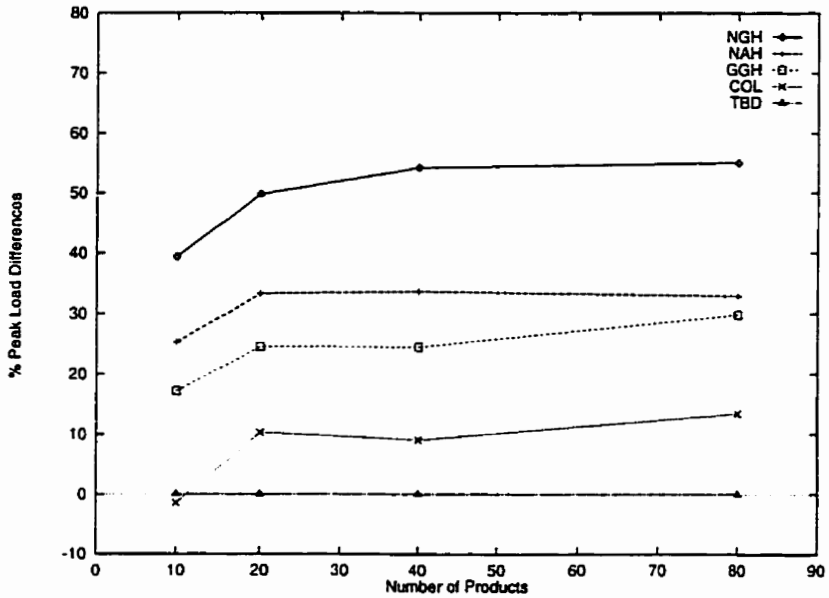


Figure 4.2 Relative Peak Load Savings versus Number of Products.

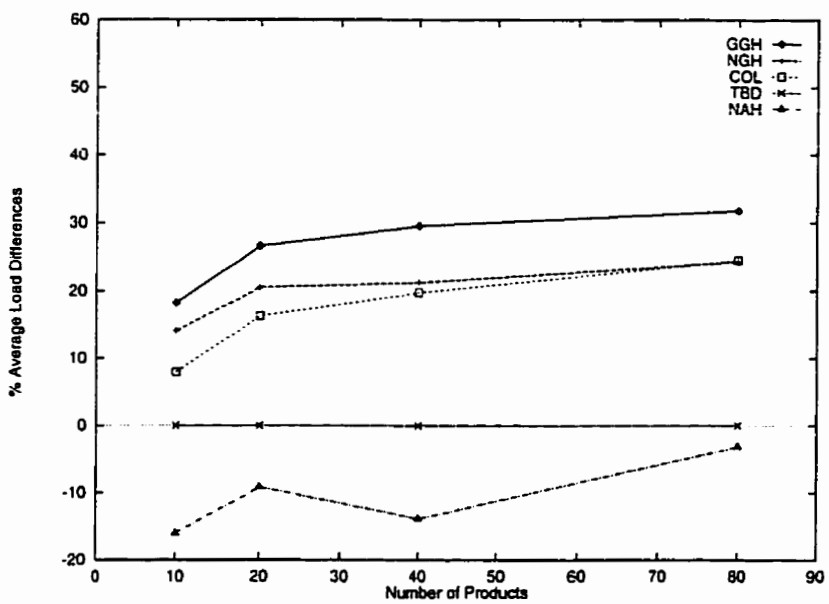


Figure 4.3 Relative Average Load Savings versus Number of Products.

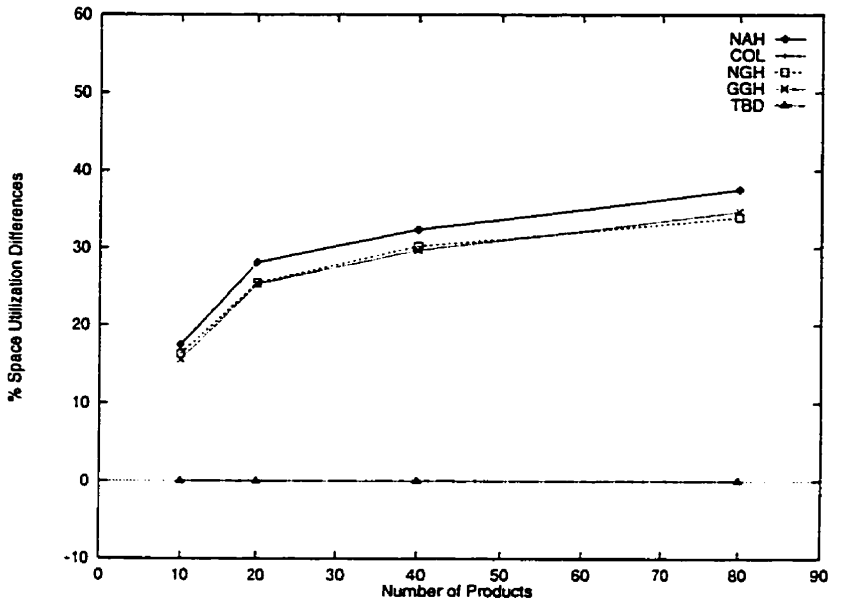


Figure 4.4 Relative Space Utilization Savings versus Number of Products.

NGH appears to be very efficient in controlling the peak load: on average, its value is half the *TBD* value! For one instance, the peak of *TBD* is divided by a factor greater than 3. Compared to the two other classical policies, *NGH* is still very efficient: the average savings are 41.9% (= 49.7% − 7.8%) on *COL* and 25.7% on *GGH*. *NAH* is noticeably worse than *NGH* with a relative average difference of 18.7%. Figure 4.2 shows that in general the savings on *TBD* increase with the Number of Products for all the policies. Since the size of the problem increases with this parameter, it means that the bigger the problem is, the worse *TBD* is. We observe also, that the curves, except the *TBD* one, are roughly parallel. That means that the relative differences between them are roughly constant.

GGH is the best policy for the peak load criterion. The average savings are 26.5% on *TBD*, 37.1% on *NAH*, 9.4% on *COL*, and only 6.5% on *NGH*. Curves of Figure 4.3 present similar characteristics than those of Figure 4.2, except the *NAH* curve, which does not appear to respond to any law. Elsewhere, the space utilization is optimal

with the use of *NAH* and *COL* policies. Beside, with *GGH* and *NGH* policies, this utilization is very close to the minimum: around 2%. However, the space utilization of the *TBD* policy is very high: 28.9% higher than the minimum. In Figure 4.4, we can see how close the other policies are for this criterion, whatever the number of products.

So, *NGH* appears to be the best policy for the peak load criterion, and a good policy for the average load and space utilization criteria. The main drawback of this policy is its requirement in precise and complete information. *NAH* performs worse for the two first criteria, but it does not have this drawback. Let us specify that similar observations are made by Goetschalckx et al. [4] about *TBD*, *COL*, and *GGH* policies for the average load criterion, except the worse performances of *COL*. This is explained by the slight improvement that we use here (see previous section).

4.2.6 Conclusion

We have studied the peak load minimization problem of shared storage policies. We have proposed exact and heuristic approaches. The exact approach has been used to solve limited size instances of the problem, and this approach has served to validate the heuristic approach. Using simulation we have demonstrated the important possible peak load savings that imply our policies compared to classical ones; for the average load and space utilization criteria, one of the new heuristics performs very well.

We have presented here two new heuristics with noticeable performance differences. But, the worst heuristic requires less precision in the information: an important issue in real life problem. These two policies are somewhat at the two extremes

of the efficiency and the precision requirement for the information. In industrial contexts, hybrid heuristics should be developed to take advantage of the entire available information.

In this paper, we have introduced an alternate assignment principle which can be stated as follows: "assign busy days to close locations". This principle is intended to the peak load criterion. For the average load criterion, similar principle were stated in the past: "assign high turnovers to close locations" (see [7]) and "assign short durations of stay to close locations" (see [4]).

References

[1] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Ioachim, I., Solomon, M.M., and Soumis, F. (1994). *A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems*, Les Cahiers du GERAD G-94-46, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.

[2] Desrosiers, J., Dumas, Y., Solomon, M.M., and Soumis, F. (1992). Time Constrained Routing and Scheduling, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Volume on Networks, North-Holland.

[3] Goetschalckx, M. (1983). *Storage and Retrieval Policies for Efficient Order Picking Operations*, Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Technology.

[4] Goetschalckx, M., and Ratliff, H.D. (1990). Shared Storage Policies Based on the Duration of Stay of Unit Loads, *Management Science* 36, 9, 1120–1132.

[5] Harmatuck, D.J. (1976). A Comparison of Two Approaches to Stock Location, *The Logistics and Transportation Review* 12, 4, 282–284.

[6] Hausman, W.H., Schwarz, L.B., Graves, S.C. (1976). Optimal Storage Assignment in Automatic Warehousing Systems, *Management Science* 22, 6, 629–638.

[7] Heskett, J.L. (1963). Cube-per-Order Index: A Key to Warehouse Stock Location, *Transportation and Distribution Management* 3, April, 27–31.

[8] Malette, A.J., and Francis, R.L. (1972). Generalized Assignment Approach to Optimal Facility Layout, *AIIE Transactions* 4, 2, 144–147.

[9] Montulet, P., Langevin, A., Riopel, D., and Soumis, F. (1995b). L'optimisation de l'entreposage partagé à capacité de traitement limité, *Proceedings, International Industrial Engineering Conference, Montréal*, Vol. 1, 13-22.

[10] Montulet, P., Langevin, A., and Riopel, D. (1996). *Le problème de l'optimisation de l'entreposage partagé: méthodes exacte et heuristique*, to appear in INFOR.

[11] Montulet, P., Langevin, A., and Riopel, D. (1996). *Minimizing the Peak Load: An Alternate Objective for Dedicated Storage Policies*, Les Cahiers du GERAD G-96-34, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.

[12] Thompson, L.L. (1988). *Storage Location Characterization and Analysis Policies for Warehousing Systems*, Master Thesis, Purdue University.

4.3 Conclusion

Encore une fois, le problème considéré, c'est-à-dire le problème de la minimisation de la charge maximale sous l'entreposage partagé, a été résolu de manière exacte et de manière heuristique et ce toujours dans le but de traiter des problèmes de toute taille. La méthode de génération de colonnes est à la base de l'approche optimale. Tandis que des considérations de logique élémentaire sont à la base de l'approche heuristique.

Cet article se distingue non tant par les techniques de résolution utilisées que par l'intérêt du problème traité et la qualité des résultats obtenus. Si la plus performante des deux heuristiques se compare à l'approche optimale, elle surpasse de loin toutes les politiques d'affectation classiques.

En effet, la plus performante des heuristiques résout optimalement et en une fraction de seconde la plupart des problèmes traités avec la méthode de génération de colonnes. Mais la comparaison avec les autres politiques est spectaculaire. La charge maximale de la politique d'Heskett (1963) est réduite en moyenne de moitié; cette réduction atteint même les deux-tiers. La charge maximale du plus proche emplacement disponible est réduite en moyenne de 41%. Celle de Greedy de Goetschalckx et Ratliff (1990) de 18%. De plus, dans tous les cas la nouvelle heuristique compétitionne très bien pour les critères de la charge moyenne et de l'utilisation de l'espace.

L'article annexé étudie un problème voisin dont le modèle peut être dérivé du modèle unifié présenté dans ce chapitre. Il s'agit de minimiser une fonction particulière des charges quotidiennes de manutention, la partie au-delà d'un certain seuil (le seuil entre les heures régulières et les heures supplémentaires), tout en restant au-deçà d'un autre seuil (la capacité du système). Encore une fois, la méthode de

génération de colonnes est l'approche de résolution utilisée. Un seul exemple est considéré. Les résultats sont encourageants mais ils mériteraient d'être suivis d'une étude plus poussée. Une approche heuristique devrait être envisagée.

CONCLUSION

Dans cette thèse, quatre classes de problèmes de rangement ont été étudiées et plusieurs méthodes de résolution ont été proposées. Une grande quantité de tests ont été menés. Les résultats sont concluants et les problèmes considérés pertinents.

Les politiques d'affectation ont été étudiées dans le contexte du partagé et du dédié et pour les critères de la charge moyenne et de la charge maximale. De ces quatre combinaisons, trois ont été traitées, l'étude de la combinaison charge maximale et entreposage dédié étant déjà achevée. Cette thèse présente aussi le cas des heures supplémentaires sous le partagé. Des méthodes optimales sont proposées dans tous les cas. Elles sont basées soit sur la méthode de génération de colonnes ou soit tout simplement sur le simplexe. Comme la plupart des fois ces méthodes ne peuvent résoudre de grands problèmes, des heuristiques sont proposées. Les sources d'inspiration de ces heuristiques sont variées: une condition suffisante d'optimalité ou tout simplement l'intuition.

Les résultats des tests effectués sont en général très concluants. Au chapitre 2, lorsque la charge moyenne est considérée sous le partagé, la réduction de la charge moyenne d'une politique existante est plutôt modeste; mais elle est accompagnée d'une réduction sensible des besoins en espace. Au chapitre 3, où la charge maximale est considérée sous le dédié, la réduction de la charge maximale de la méthode classique est appréciable, alors que la charge moyenne est peu dégradée. Au chapitre 4, quand la charge maximale est considérée sous le partagé, la charge maximale est considérablement abaissée par rapport aux politiques classiques, alors que la charge moyenne et la consommation d'espace sont basses. De plus, les heuristiques ont

d'excellentes performances par rapport aux méthodes optimales: les temps de calcul sont incomparablement moins élevés et les résultats presque toujours identiques.

Pris ensemble, la minimisation de la charge maximale et les politiques de type partagé produisent certainement la meilleure chimie pour la gestion des entrepôts automatiques modernes. Elles permettent d'abaisser substantiellement les coûts associés au design des composantes dynamique et statique, fixés respectivement par la charge maximale et l'utilisation de l'espace, tout en gardant bas les coûts d'opération, fixés par la charge moyenne. Ce mariage n'a pas jusqu'ici été considéré dans la littérature.

La plus importante conclusion de la thèse s'énonce par le principe d'affectation suivant:

> "les journées les plus chargées aux emplacements les plus proches."

Dans le passé des principes similaires ont été, implicitement ou explicitement, suggérés. L'affectation basée sur les rotations d'Heskett (1963) se résume à: "les plus grandes rotations aux emplacements les plus proches." Tandis que l'affectation basée sur les durées de séjour de Goetschalckx et Ratliff (1990) se formule en: "les plus petites durées de séjour aux emplacements les plus proches." Chacun de ces principes s'applique à son contexte.

Si le critère de la charge maximale a été étudié en profondeur dans cette thèse, le sujet n'est certainement pas épuisé au niveau de la recherche. Une première avenue consiste à traiter les variantes contenues dans les modèles unifiés présentés ici. Une autre possibilité est de reprendre des travaux passés en subsituant la charge maximale à la charge moyenne. Et enfin, il peut être intéressant de corroborer les résultats des simulations par l'intégration de données de source industrielle.

Aux chapitres 3 et 4, deux modèles unifiés ont été présentés, l'un pour le dédié, l'autre pour le partagé. Ces modèles ont tous deux une expression générale des charges quotidiennes comme fonction objectif. Ils intègrent aussi les contraintes de capacité du système de manutention. Ces formulations permettent ainsi de considérer des ensembles vastes de critères dont les charges moyenne et maximale. En particulier, ils permettent de modéliser le problème de la minimisation des heures supplémentaires. Ce problème n'est qu'abordé dans l'article annexé: les tests peuvent être multipliés et une approche heuristique peut être envisagée. La minimisation des heures supplémentaires peut être aussi considérée dans le cas du dédié.

La charge maximale peut être substituée à la charge moyenne dans plusieurs études menées sur les systèmes d'entreposage. En particulier, il peut être intéressant de voir comment réduire la charge maximale des systèmes opérant avec des cycles multiples (en particulier duaux) ou bien celle de systèmes effectuant de la relocalisation durant les heures creuses.

Finalement, en plus de considérer des données de source industrielle, il peut être intéressant de considérer des petites variantes aux problèmes comme la recherche de la meilleure (au point de vue charge maximale) affectation dédiée qui est basée sur les rotations.

BIBLIOGRAPHIE

ABDOU, G. et LEE, E. (1991). Physical model for Robotics Palletization, *Computers in Industry*, 16, 255–266.

ACKERMAN, K.B. (1985a). Warehouse Automation, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 703–707.

ACKERMAN, K.B. (1985b). Metrication in the Warehouse, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 707–708.

AGRAWAL, P.K. (1993). Minimizing Trim Loss in Cutting Rectangular Blanks of a Single Size from a Rectangular Sheet Using Orthogonal Guillotine Cuts, *European Journal of Operational Research* 64, 3, 410–422

ARMSTRONG, R.D., COOK, W.D. et SAIPE, A.L. (1979). Optimal Batching in a Semi-Automated Order Picking System, *Journal of the Operational Research Society* 30, 8, 701–720.

ASHAYERI, J. et GELDERS, L.F. (1985). Warehouse Design Optimization, *European Journal of Operational Research 21, 285–294.*

ASHAYERI, J. et GELDERS, L.F. (1989). Simulation Program Generator for AS/RS Systems, *Proceedings of the* 10th *International Conference on Automation in Warehousing* 211–219

ASHAYERI, J., GELDERS, L.F. et VANLOOY, P.M. (1983). A Simulation Package for Automated Warehouses, *Material Flow* 1, 3, 189–198.

ASHAYERI, J., GELDERS, L.F. et VANWASSENHOVE, L. (1985). A Microcomputer-Based Optimization Model for the Design of Automated Warehouses, *International Journal of Production Research* 23, 4, 825–839.

ASKIN, R.G. et STANDRIDGE, C.R. (1993). *Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, John Wiley & Sons, Inc.

AZADIVAR, F. (1984). A Simulation Optimization Approach to Optimum Storage and Retrieval Policies in an Automated Warehousing System, *Proceedings of the Winter Simulation Conference* 207–213.

AZADIVAR, F. (1986). Maximisation of the Throughput of a Computerized Automated Warehousing System Under System Constraints, *International Journal of Production Research* 24, 3, 551–566.

AZADIVAR, F. (1987). Minimum-Cost Modular Design of Automated Warehousing Systems, *Material Flow* 4, 3, 177–188.

AZADIVAR, F. (1989). Optimum Allocation of Resources Between the Random Access and Rack Storage Spaces in an Automated Warehousing System, *International Journal of Production Research* 27, 1, 119–131.

BACHERS, R., DANGELMAIER, W. et WARNECKE, H.J. (1988). Selection and use of Order Picking Strategies in a High Bay Warehouse, *Material Flow* 4, 4, 233–245.

BALLOU, R.H. (1967). Improving the Physical Layout of Merchandise in a Warehouse, *Journal of Marketing* 31, 60–64.

BAILEY, M. (1984). Economic Modelling of AS/RS, *Proceedings of the 5^{t}h International Conference on Automation in Warehousing* 44–55.

BARTHOLDI, J.R. et PLATZMAN, L.K. (1986). Retrieval Strategies for a Carousel Conveyor, *IIE Transactions* 18, 2, 166–173.

BARRET, B.G. (1977). A Further Disgression on the Over-Automated Warehouse: Some Evidences, *Interfaces*, 8, 1, 46–49.

BASSAN, Y., ROLL, Y. et ROSENBLATT, M.J. (1980). Internal Layout Design of a Warehouse, *AIIE Transactions* 12, 4, 317–322.

BERRY, J.R. (1968). Elements of Warehouse Layout, *International Journal of Production Research* 7, 2, 105–121.

BOZER, Y.A. (1978). A Minimum Cost Design for an Automated Warehouse, mémoire de maîtrise, Georgia Institute of Technology, Atlanta.

BOZER, Y.A. (1985). *Optimizing Throughput Performance in Designing Order Picking Systems*, Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology.

BOZER, Y.A., SCHORN, E.C. et SHARP, G.P. (1986). Analysing Picker-to-Part Order Picking Problems, *Proceedings of the 7^{t}h International Conference on Automation in Warehousing.*

BOZER, Y.A., SCHORN, E.C. et SHARP, G.P. (1990). Geometric Approaches to Solve the Chebyshev Traveling Salesman Problem, *IIE Transactions* 22, 3, septembre, 238–254.

BOZER, Y.A. et WHITE, J.A. (1984). Travel-Time Models for Automated Storage/Retrieval Systems, *IIE Transactions* 16, Décembre, 329–338.

BOZER, Y.A. et WHITE, J.A. (1990). Design and Performance Models for End-of-Aisle Order Picking Systems, *Management Science* 36, 7, 852–866.

BOZER, Y.A. et WHITE, J.A. (1996). A Generalized Design an Performance Analysis Model for End-of-Aisle Order-Picking Systems, *IIE Transactions*, 28, 271-280.

BRADLEY, S., P., HAX, A.C. et MAGNANTI, T.L. (1977). *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Massachusetts.

CASTALDI, J. (1985). Miniload Systems, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 643–652.

CHANG, D.-T., WEN, U.-P. et LIN, J.T. (1995) Impact of Acceleration/decelaration on Travel-Time Models for Automated Storage/Retrieval Systems, *IIE Transactions* 27, 1, 108–111.

CHRISTOFIDES, N. et Colloff, I. (1972). The rearrangement of Items in a Warehouse, *Operations Research* 21, 2, 577–589.

CORMIER, G. (1987). On the Scheduling of Order Picking Operations in Single-Aisle Automated Storage and Retrieval Systems, dans Kusiak (ed.) *Modern Production Management Systems*, North-Holland, 75–87.

CORMIER, G. et GUNN, E. (1991). Mathematical Models to Optimize Storage Capacity, *Proceedings of the* 11th *International Conference on Automation in Warehousing* 441–450.

CORMIER, G. et GUNN, E. (1992). A Review of Warehouse Models, *European Journal of Operational Research* 58, 1–13.

CORMIER, G. et GUNN, E. (1996). On Coordinating Warehouse Sizing, Leasing and Inventory Policy, *IIE Transactions* 28, 2, 149–154.

DANNENBRING, D. et KHUMAWALA, B. (1973). An Investigation of Branch-and-Bound Methods for Solving Segregated Problems, *AIIE Transactions* 5, 265–274.

DEVANEY, W. (1985). Modular Storage Drawers, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 565–571.

DOWLATSHAHI, S. (1994). Modelling Approach to Design of Integrated Facilities, *International Journal of Production Research* 32, 6, 1313-1330.

DOWSLAND, W.B. (1995). Improving Palletisation Efficiency - the Theorical Basis and Pratical Application, *International Journal of Production Research* 33, 8, 2213–2222.

DOWSLAND, K.A. et GREAVES, A.M (1994). Collision Avoidance in Bi-Directional AGV Systems, *Journal of Operational Research Society* 45, 7, 817–826.

ELLIOT, K.A. (1988). A Guide to Systematic Data Gathering for a Warehouse Facility Design, *Industrial Engineering* 20, 6, 34–38.

ELSAYED, E.A. (1981). Algorithms for Optimal Material Handling in Automatic Warehousing Systems, *International Journal of Production Research* 19, 5, 525–535.

ELSAYED, E.A. (1989). Order Batching Algorithms and Travel-Time Estimation for Automated Storage/Retrieval Systems, *International Journal of Production Research* 27, 7, 1097–1114.

ELSAYED, E.A., DUBE, R. et PROCTOR, L.C. (1980). Heuristic Algorithms for Handling Orders Within a Warehouse, *Unit and Bulk Materials Handling*, ASME Publication, 225–233.

ELSAYED, E.A., LEE, M.-K. et SCHERER, E. (1993). Sequencing and Batching Procedures for Minimizing Earliness and Tardiness Penalty of Order Retrievals, *International Journal of Production Research* 31, 3, 727–738.

ELSAYED, E.A. et STERN, J. (1983). Computerized Algorithms for Order Processing in Automated Warehousing Systems, *International Journal of Production Research* 21, 4, 579–586.

EGBELU, P.J. (1991). Framework for Dynamic Positioning of Storage/Retrieval Machines in an Automated Storage/Retrieval System, *International Journal of Production Research* 29, 1, 17–37.

EGBELU, P.J. et WU, C.-T. (1993). A Comparison of Dwell Point in an Automated Storage/Retrieval System, *International Journal of Production Research* 31, 11, 2515–2530.

EVANS, J.R. et CULLEN, F.H. (1977). The Segregated Storage Problem: Some Properties and an Effective Heuristic, *AIIE Transactions* 9, 4, 409–413.

EVANS, J.R. et TSUBAKITANI, S. (1993). Solving the Segregated Storage Problem with Benders' Partitioning, *Journal of the Operational Research Society* 44, 2, 175–184.

EYNAN, A. et ROSENBLATT, M.J. (1993). An Interleaving Policy in Automated Storage/Retrieval Systems, *International Journal of Production Research* 31, 1, 1–18.

FAURE, R., BOSS, J.P. et LE GARFF, A. (1974). *La recherche opérationnelle*, Que sais-je?, Presses universitaires de France.

FISHER, E.L., FARBER, J.B. et KAY, M.G. (1988). MATHES: An Expert System for Material Handling Equipement Selection, *Engineering Costs and Production Economics* 14, 4, 297–310.

FOLEY, R.D. et FRAZELLE, E.H. (1988). *Analytical Results for Miniload Throughput and the Distribution of Dual Command Travel Time*, Working Paper, Georgia Institute of Technology.

FOOTLIK, R.B. (1985). Outdoor Storage Layout and Handling, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 578–583.

FOOTLIK, R.B. (1985). Storage Mezzanines, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 572–576.

FRANCIS, R.L. (1967). On Some Problems of Rectangular Warehouse Design and Layout, *Journal of Industrial Engineering* 18, 10, 595–604.

FRANCIS, R.L., MCGINNIS, L.F. et WHITE, J.A. (1992). *Facility Layout and Location: an Analytical Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

FRANCIS, R.L. et WHITE, J.A. (1974). *Facility Layout and Location: an Analytical Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

FOWLER, W.S. (1985). Shelvings and Bins, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 556–560.

FRAZELLE, E.H. et SHARP, G.P. (1989). Correlated Assignment Strategy can Improve any Order-Picking Operation, *Industrial Engineering*, 21, 33–77.

GIBSON, D.R. et SHARP, G.P. (1992). Order Batching Procedures, *European Journal of Operational Research* 58, 57–67.

GRAY, A.E., KARKAMAR, U.S. et SEIDMANN, A. (1992). Design and Operation of an Order-Consolidation Warehouse: Models and Application. *European Journal of Operational Research* 58, 10, 14–36.

GOETSCHALCKX, M. (1983). *Storage and Retrieval Policies for Efficient Order Picking Operations*, Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology.

GOETSCHALCKX, M. et RATLIFF, H.D. (1988a). Order Picking in Aisle, *IIE Transactions* 20, 1, 53–62.

GOETSCHALCKX, M. et RATLIFF, H.D. (1988b). An Efficient Algorithm to Cluster Order Picking Items in a Wide Aisle, *Engineering Costs and Production Economics* 13, 263–271.

GOETSCHALCKX, M. et RATLIFF, H.D. (1990). Shared Storage Policies Based on the Duration of Stay of Unit Loads, *Management Science* 36, 9, 1120–1132.

GOETSCHALCKX, M. et RATLIFF, H.D. (1991). Optimal Lane Depths for Single and Multiple Products in Block Stacking Storage Systems, *IIE Transactions* 23, 3, 245–258.

GOETSCHALCKX, M., SONG, S. et COLE, M. (1991). The Location-Allocation-Inventory-Routing Model in the Design of Strategic Distribution Systems, *Proceedings of the* 11th *International Conference on Automation in Warehousing* 329–341.

GRAJO, E.S. (1995). Strategic Layout Planning and Simulation for Lean Manufacturing: a LayOPT Tutorial, *Winter Simulation Conference Proceedings 1995*, 510–514.

GRAVES, S.C., HAUSMAN, W.H. et SCHWARZ, L.B. (1977). Storage-Retrieval Interleaving in Automatic Warehousing Systems, *Management Science* 23, 9, 935–945.

GRAY, A.E., KARMARKAR, U.S. et SEIDMANN A. (1992). Design and Operation of an Order Consolidation Warehouse: Models and Application, *European Journal of Operational Research* 58, 14–36.

GUENOV, M. et RAESIDE, R. (1989). Real Time Optimization of Man on Board Order Picking, *Proceedings of the* 10th *International Conference on Automation in Warehousing* 89–93.

GUENOV, M. et RAESIDE, R. (1992). Zone Shapes in Class Based Storage and Multicommand Order Picking when Storage/Retrieval Machines are Used, *European Journal of Operational Research* 58, 37–47.

HA, J.-W. et HWANG, H. (1994). Class-Based Storage Assignment Policy in Carousel System, *Computers & Industrial Engineering* 26, 3, 489–499.

HACKMAN, S.T. et ROSENBLATT, M.J. (1990). Allocating Items to an Automated Storage an Retrieval System, *IIE Transactions* 22, 1, 7–14.

HALL, R.W. (1993). Distance Approximations for Routing Manual Pickers in a Warehouse, *IIE Transactions* 25, 4, 76–87.

HAN, M.H., MCGINNIS, L.F., SHIEH, J.S. et WHITE, J.A. (1987). On Sequencing Retrievals in an Automated Storage/Retrieval System, *IIE Transactions* 19, 1, 56–66.

HARIGA, M.A. et JACKSON, P.L. (1996). The Warehouse Scheduling Problem: Formulation and Algorithms, *IIE Transactions*, 28, 115–127.

HARMATUCK, D.J. (1976). A Comparison of Two Approaches to Stock Location, *The Logistics and Transportation Review* 12, 4, 282–284.

HAUSMAN, W.H., SCHWARZ, L.B., GRAVES, S.C. (1976). Optimal Storage Assignment in Automatic Warehousing Systems, *Management Science* 22, 6, 629–638.

HESKETT, J.L. (1963). Cube-per-Order Index: A Key to Warehouse Stock Location, *Transportation and Distribution Management* 3, avril, 27–31.

HESKETT, J.L. (1964). Putting the Cube-per-Order Index to Work in Warehouse Layout, *Transportation and Distribution Management* 4, août, 23–30.

HODGSON, T.J. (1982). A Combined Approach to the Pallet Loading Problem, *IIE Transactions* 14, 3, 175–182.

HODGSON, T.J., HUGES, D.S. et MARTIN-VEGA, L.A. (1983). A Note on a Combined Approach to the Pallet Loading Problem, *IIE Transactions* 15, 3, 268–271.

HODGSON, T.J. et LOWE, T.J. (1982). Production Lot Sizing with Material Handling Cost Considerations, *IIE Transactions* 14, 1, 44–51.

HUFFMAN, J.R. (1985). Computers in the Warehouse, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 669–703.

HWANG, H., BAEK, W. et LEE, M.-K. (1988). Clustering Algorithms for Order Picking in an Automated Storage and Retrieval System, *International Journal of Production Research* 26, 2, 189–201.

HWANG, H., BAEK, W. et KO, C.S. (1988). A Study on Multi-Aisle System Served by a Single Storage/Retrieval Machine, *International Journal of Production Research* 26, 11, 1727–1737.

HWANG, H. et HA, J.-W. (1991). Cycle Time Models for Single/Double Carousel System, *International Journal of Production Economics* 25, 129–140.

HWANG, H. et LIM, J.M. (1993). Deriving an Optimal Dwell Point of the Storage/Retrieval Machine in an Automated Storage/Retrieval System, *International Journal of Production Research* 31, 11, 2591–2602.

HWANG, H. et SONG, J.Y. (1993). Sequencing Picking Operations and Travel Time Models for a Man-on-Board Storage and Retrieval Warehousing System, *International Journal of Production Economics* 29, 1,75–88.

JABOT, R. (1979). *Les magasins de stockage, conception et organisation*, Les éditions d'organisation, Paris.

JAIKUMAR, R. et SOLOMON, M. (1990). Dynamic Operational Policies in an Automated Warehouse, *IIE Transactions* 22, 4, 370–376.

JARVIS, J.M. et MCDOWELL, E.D. (1991). Optimal Product Layout in an Order Picking Warehouse, *IIE Transactions* 23, 1, 93–102.

JUCKER, J.V., CARLSON, R.C et KROPP, D. H. (1982). The Simultaneous Determination of Plant and Leased Warehouse Capacities for a Firm Facing Uncertain Demand in Several Regions, *IIE Transactions* 14, 2, 99–108.

KALLINA, C. et LYNN (1976). Application of the Cube-per-Order Index Rule for Stock Location in a Distribution Warehouse, *Interfaces* 7, 1, 37–46.

KANET, J.J. et RAMIREZ, R.G. (1986). Optimal Stock Picking Decisions in Automatic Storage and Retrieval Systems, *OMEGA International Journal of Management Science* 14, 3, 234–239.

KARASAWA, Y., NAKAYAMA, H. et DOHI, S. (1980). Trade-Off Analysis for Optimal Design of Automated Warehouses, *International Journal of System Science* 11, 5, 567–576.

KIM, J. et SEIDMANN, A. (1990). A Framework for the Exact Evaluation of Expected Cycle Times in Automated Storage/Systems with Full-Turnover Item Allocation and Random Service Requests, *Computers & Industrial Engineering* 18, 4, 601–612.

KIM, K.H. (1993). A Joint Determination of Storage Locations and Space Requirements for Correlated Items in Miniload Automated Storage-Retrieval System, *International Journal of Production Research* 31, 11, 2649–2659.

KIND, D.A. (1965). Measuring Warehouse Space Utilization, *Transportation and Distribution Management*, 5, 22–33.

KLEIN, H.H. (1985). Storage Racks, Flow Racks, and Stacking Frames, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 535–555.

KOENIGSBERG, E. (1986). Analysis of the Efficiency of Carousel and Tote-Stacker Performance, *Proceedings of the $7^{t}h$ International Conference on Automation in Warehousing.*

KOUVELIS, P. et PAPANICOLAOU, V. (1995). Expected Travel Time and Optimal Boundary Formulas for a Two-Class-Based Automated Storage/Retrieval System, *International Journal of Production Research* 33, 10, 2889–2905.

KUNDER, R. et GUDEHUS, T. (1975). Mean Time for Collecting Items from a Rectangular System of Shelves, *Zeitschrift fur Operations Research* 19, 2, B53–B72.

LAPORTE, G. (1992). The Traveling Salesman Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms. *European Journal of Operational Research*, 59, 231-247.

LEE, H.F. et SCHAEFER, S.K. (1996). Retrieval Sequencing for Unit-Load Automated Storage and Retrieval Systems with Multiple Openings, *International Journal of Production Research*, 34, 10, 2943–2962.

LEE, M.-K. (1992). Storage Assignment Policy in a Man-on-Board Automated Storage/Retrieval System, *International Journal of Production Research* 30, 10, 2281–2292.

LEE, M.-K. et HWANG, H. (1988). An Approach in the Design of a Unit-Load Automated Carousel Storage System, *Engineering Optimization* 13, 197–210.

LEE, M.-K. et KIM, S.-Y. (1995). Scheduling of Storage/Retrieval Orders under a Just-in-Time Environment, *International Journal of Production Research* 33, 12, 3331–3348.

LE SYNDICAT DES INDUSTRIES DE MATÉRIELS DE MANUTENTION (1983). *Encyclopédie de la manutention, stockage et distribution physique des marchandises*, afnor/somia.

LEVY, J. (1974). The Optimal Size of a Storage Facility, *Naval Research Logistics Quaterly*, 319–326.

LINN, R.J. (1987). *An Expert System Approach to the Control of an Automated Storage/Retrieval System*, Thèse de doctorat, The Pennsylvania State University.

LINN, R.J. et WYSK, R. (1984). A Simulation Model for Evaluating Control Algorithms of an Automated Storage/Retrieval System, *Proceedings of the 1984 Winter Simulation Conference*, 331–339.

LINN, R.J. et WYSK, R. (1987). An Analysis of Control Strategies for Automated Storage and Retrieval Systems, *INFOR* 25, 1, 66–83.

LINN, R.J. et WYSK, R. (1990). An Expert System Framework for Automated Storage and Retrieval System Control, *Computers & Industrial Engineering*, 18, 1, 37–48.

LINN, R.J. et Xie, X. (1993). Simulation Analysis of Sequencing Rules for AS/RS in a Pull-Based Assembly Facility, *International Journal of Production Research* 31, 10, 2355–2367.

LOWE, T., FRANCIS, R.A. et REINHARDT, E.W. (1979). A Greedy Network Flow Algorithm for a Warehouse Leasing Problem, *AIIE Transactions*, 11, 3, 170–182.

MALETTE, A.J. et FRANCIS, R.L. (1972). Generalized Assignment Approach to Optimal Facility Layout, *AIIE Transactions* 4, 2, 144–147.

MALMBORG, C.J. (1994). Heuristic Model for Simultaneous Storage Space Allocation and Block Layout Planning, *International Journal of Production Research* 32, 3, 517–530.

MALMBORG, C.J. et DEUTSCH, S.J. (1988). A Stock Location Model for Dual Address Order Picking Systems, *IIE Transactions* 20, 1, 44–52.

MALMBORG, C.J. et KRISHNAKUMAR, B. (1987). On the Optimality of the cube per Order Index for Warehouses with Dual Command Cycles, *Journal of Material Flow*, 4, 169–175.

MALMBORG, C.J., KRISHNAKUMAR, B. et SIMONS, G.R. (1988). A Mathematical Overview of Warehousing Systems With Single/Dual Order-Picking Cycles, *Applied Mathematical Modelling*, 12, février, 2–8.

MANLEY, C.E. et FOWLSTON, D.L. (1985). Man-Aboard Systems, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 591–599.

MARSH, W.H. (1979). Elements of Block Storage Design, *International Journal of Production Research*, 4, 377–394.

MATSON, J.O. et WHITE, J.A. (1982). Operational Research and Material Handling, *European Journal of Operational Research* 11, 309–318.

MIDGLEY, W.R. (1985). Rack-Supported Buildings, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 628–638.

MCGINNIS, L.F., HAN, M.H. et WHITE, J.A. (1986). Analysis of Rotary Rack Operations, *Proceedings of the 7th International Conference on Automation in Warehousing.*

MODERN MATERIALS HANDLING (1992). *Warehouse Planning Guidebook Issue*, A Canners Publication, mi-mars 1992.

MODERN MATERIALS HANDLING (1993). *Planning Guidebook Issue Warehousing and Manufacturing Solutions*, A Canners Publication, mi-mars 1993.

MONTULET, P., LANGEVIN, A. et RIOPEL, D. (1995a). *Entreposage: méthodes de rangement*, Les Cahiers du GERAD G-95-18, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.

MONTULET, P., LANGEVIN, A. et RIOPEL, D. (1996a). Le problème de l'optimisation de l'entreposage partagé: méthodes exacte et heuristique, à paraître dans *INFOR.*

MONTULET, P., LANGEVIN, A. et RIOPEL, D. (1996b). *Minimizing the Peak Load: An Alternate Objective for Dedicated Storage Policies*, Les Cahiers du GERAD G-96-34, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.

MONTULET, P., LANGEVIN, A., RIOPEL, D. et SOUMIS, F. (1995). L'optimisation de l'entreposage partagé à capacité de traitement limité, *Proceedings, International Industrial Engineering Conference, Montréal*, Vol. 1, 13-22.

MONTULET, P., LANGEVIN, A., RIOPEL, D. et SOUMIS, F. (1996). *Exact and Heuristic Methods to Minimize the Peak Load of Shared Storage Policies*, Les Cahiers du GERAD G-96-47, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.

MOON-KYU Lee (1992). A Storage Assignment Policy in a Man-on-Board Automated Storage/Retrieval System, *International Journal of Production Research* 30, 10, 2281–2292.

MORIN, M. (1987). *Les magasins de stockage: s'organiser pour réduire les coûts*, Les éditions d'organisation, Paris.

MURALIDHARAN, B., LIN, R.J. et PANDIT, R. (1995). Shuffling Heuristics for the Storage Location Assignment in an AS/RS, *International Journal of Production Research* 33, 6, 1661–1672.

MUTHER, R. (1961). *Systematic Layout Planning*, Industrial Education Institute, Boston.

NAGEY, A.J. (1985). Automated High-Rise Rack Systems, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 604–624.

NEEBE A.W. (1987). An Improved, Multiplier Adjustement Procedure for the Segregated Storage Problem, *Journal of the Operational Research Society* 38, 9, 815–825.

OKASAKA, K. et TSUSHIMA, I. (1987). Automated Storage and Retrieval Systems Using AI, *Proceedings of the 8^{t}h International Conference on Automation in Warehousing*, 181–199.

OSER,J. (1991). Analysis and Design of a High Speed Performance Rotary Rack, *Proceedings of the 11^{t}h International Conference on Automation in Warehousing*, 365–375.

OUDHEUSDEN, D.L. Van, TZEN, Y.J. et KO, H. (1988). Improving Storage and Order Picking in a Person-on-Board AS/R System, *Engineering Costs and Production Economics*, 13, 273–283.

OUDHEUSDEN, D.L. Van et ZHU, W. (1992). Storage Layout of AS/RS racks based on recurrent orders, *European Journal of Operational Research*, 58, 1, 48–56.

PAN, C.-H. et WANG, C.-H. (1996). A Framework for the Dual Command Cycle Travel Time Model in Automated Warehousing Systems, *International Journal of Production Research*, 34, 8, 2099–2117.

PARK, Y.H. et WEBSTER, D.B. (1989a). Modelling of Three-Dimensional Warehouse Systems, *International Journal of Productions Research* 27, 6, 985–1003.

PARK, Y.H. et WEBSTER, D.B. (1989b). Design of Class-Based Storage Racks for Minimizing Travel Time in a Three-Dimensional Storage System, *International Journal of Productions Research* 27, 9, 1589–1601.

PERRY, R.F., HOOVER, S.V. et FREEMAN, D.R. (1984). An Optimum Seeking Approach to the Design of Automated Storage/Retrieval Systems, *Proceedings of the Winter Simulation Conference* 349–354.

PLISKIN, J.S. et DORI, D. (1982). Ranking Alternative Warehouse Area Assignments: A Multiattribute Approach, *IIE Transactions* 14, 1, 19–26.

QUINN, E.B. et NORMAN, T.A. (1979). Application of Simulation to Order-Picking Planning and Design, *Fall IE Conference Proceedings* 126–134.

RANDHAWA, S.U., MCDOWELL, E.D. et WANG, W.-T. (1991). Evaluation of Scheduling Rules for Single and Dual Dock Automated Storage/Retrieval System, *Computers and Industrial Engineering* 20, 4, 401–410.

RANDHAWA, S.U. et SHROFF, R. (1995). Simulation-Based Design Evaluation of Unit Load Automated Storage/Retrieval Systems, *Computers & Industrial Engineering* 28, 1, 71–79.

RATLIFF, H.D. et ROSENTHAL, A.S. (1983). Order-Picking in a Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Travelling Salesman Problem, *Operations Research* 31, 3, 507–521.

RATTIGAN, B.F. (1989). Selecting the Optimum Warehouse System Design, *Proceedings of the 1989 International Industrial Engineering Conference* 456–462.

RIAZ, K.M. (1984). An Efficiency Measurement Model for a Computerized Warehousing System, *International Journal of Production Research* 22, 3, 443–452.

ROBERTS, S.D. et REED, R. (1972). Optimal Warehouse Bay Configurations, *AIIE Transactions* 4, 178–185.

ROLL, Y. et ROSENBLATT, M.J. (1983). Random Versus Grouped Storage Policies and their Effect on Warehouse Capacity, *Material Flow* 1, 3, 199–205.

ROLL, Y. et ROSENBLATT, M.J. (1987). Shifting in Warehouses, *Material Flow* 4, 147–157.

ROLL, Y., ROSENBLATT, M.J. et KADOSH, D. (1989). Determining the Size of a Warehouse Container, *International Journal of Production Research* 27, 10, 1693–1704.

ROSENBLATT, M.J. et EYNAN, A. (1989). Deriving the Optimal Bounderies for Class-Based Automatic Storage/Retrieval Systems, *Management Science* 35, 12, 1519–1524.

ROSENBLATT, M.J. et ROLL, Y. (1984). Warehouse Design with Storage Policy Considerations, *International Journal of Production Research* 22, 5, 809–821.

ROSENBLATT, M.J. et ROLL, Y. (1988). Warehouse Capacity in a Stochastic Environment, *International Journal of Production Research* 26, 12, 1847–1851.

ROSENBLATT, M.J., ROLL, Y. et ZYSER, V. (1989). *A Combined Optimization and Simulation Approach for Designing Automated Storage/Retrieval Systems*, Working Paper, Technion-Israel Institute of Technology, Avril.

ROSENBLATT, M.J., ROLL, Y. et ZYSER, V. (1993). Combined Optimization and Simulation Approach for Designing Automated Storage/Retrieval Systems, *IIE Transactions* 25, 1, 40–50.

ROSENBLATT, M.J. et ROTHBLUM, U.R. (1990). On the Single Resource Capacity Problem for Multi-Item Inventory Systems, *Operations Research*, 38, 4, 686–693.

SADIQ, M., LANDERS, T.L. et TAYLOR, G.D. (1996). An Assignment Algorithm for Dynamic Picking Systems, *IIE Transactions*, 28, 607–616.

SANFORD, B.W. (1985). High-Density Systems, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 625–628.

SCHWARZ, L.B., GRAVES, S.C. et HAUSMAN, W.H. (1978). Scheduling Policies for Automatic Warehousing Systems: Simulation Results, *AIIE Transactions* 10, 3, 260–270.

SEIDMANN, A. (1988). Intelligent Control Schemes for Automated Storage and Retrieval Systems, *International Journal of Production Research* 26, 5, 931–952.

SHARP, G.P., KITTEL, R. et HOLLENDER, K.J. (1989). Factors Affecting the Productivity of a Pallet AS/RS, *Proceedings of the* 10th *International Conference on Automation in Warehousing* 105–111.

STERN, H.I. (1986). Parts Location and Optimal Picking Rules for a Carousel Conveyor Automatic Storage and Retrieval System, *Proceedings of the* 7th *International Conference on Automation in Warehousing.*

STEUDEL, H.J. (1979). Generating Pallet Loading Patterns: A Special Case of the Two-Dimensional Cutting Stock Problem, *Management Science* 25, 997–1004.

STROMBECK, T. (1985). Mobile Storage Systems, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 584–588.

SULE, D.R. (1988). *Manufacturing Facilities*, PWS-Kent Publishing Company, Boston.

TABOUN, S.M. et BHOLE, S.D. (1993). A Simulator for an Automated Warehousing System, *Computers and Industrial Engineering* 24, 2, 281–290.

TAKAKUWA, S. (1993). Design and Cost-Effectiveness Analysis of Large-Scale AS/RS-AGV Systems, *Proceedings of the 1993 Winter Simulation Conference*, 851–856.

TAKAKUWA, S. (1995). Flexible Modeling and Analysis of Large-Scale AS/RS-AGV Systems, *Winter Simulation Conference Proceedings 1995*, 872-880.

THOMPSON, L.L., (1988). *Storage Location Charcaterization and Analysis Policies for Warehousing Systems*, Mémoire de maîtrise, Purdue University.

TOMPKINS, J.A. (1985a). Facility Design, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 654–666.

TOMPKINS, J.A. (1985b). Storage Approaches, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 667–668.

TOMPKINS, J.A. (1985c). Order Picking Methods, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 668–669.

TOMPKINS, J.A. et SMITH, J.D. (1982). *How to Plan and Manage Warehouse Operations*, Education for Management, Inc.

TOMPKINS, J.A., WHITE, J.A., BOZER, Y.A., FRAZELLE, E.H., TANCHOCO, J.M.A. et TREVINO, J. (1996). *Facilities Planning*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

TREVINO, J., LIAO, F. et CHOPRA, S. (1994). Cardes - Carousel design, *International Journal of Production Research* 32, 5, 1013–1026.

TSAI, R., MALSTROM, E.M. et MEEKS, H.D. (1988). A Two-Dimensional Palletizing Procedure for Warehouse Loading Operations, *IIE Transactions* 20, 2, 418–425.

WEISS, D.J. (1985). Carousel Systems, dans Kulwiec, R.A., *Materials Handling Handbook*, 2nd ed., Wiley-Interscience 639–643.

WEN, U.-P. et Chang, D.-T. (1988). Picking Rules for a Carousel Conveyor in an Automated Warehouse, *OMEGA International Journal of Management Science* 16, 2, 145–151.

WEN, U.-P., LIN, J.T. et CHANG, D.-T. (1989). Order Picking for a Two-Carousel-Single-Server System in an Automated Warehouse, *Proceedings of the* 10th *International Conference on Automation in Warehousing*, 65–70.

WHITE, J.A. (1972). On the Optimum Design of Warehouses Having Radial Aisles, *AIIE Transactions* 4, 4, 333–336.

WHITE, J.A., DEMARS, N.A. et MATSON, J.O. (1981). Optimizing Storage System Selection, *Proceedings of the* 4th *International Conference on Automation in Warehousing*, 1–16.

WHITE, J.A. et FRANCIS, R.L. (1971). Solving a Segregated Storage Problem Using Branch and Bound and Extreme Point Methods, *AIIE Transactions* 3, 1, 37–44.

WHITE, J.A. et FRANCIS, R.L. (1971). Normative Models for Some Warehouse Sizing Problems, *AIIE Transactions* 9, 3, 185–190.

WILSON, H.G. (1977). Order Quantity, Product Popularity, and the Location of Stock in a Warehouse, *AIIE Transactions* 9, 3, 230–237.

YANG, M. (1988). *Analysis and Optimization of Class-Based Dedicated Storage Systems*, Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology.

ZRNIC, D.J.N., CUPRIC, N.L.J. et RADENKOVIC, B.L.J. (1992). A Study of Material Flow Systems (input/output) in High-Bay Warehouses, *International Journal of Production Research* 30, 9, 2137–2149.

ANNEXE A:

L'optimisation de l'entreposage partagé à capacité de traitement limitée

Pierre Montulet André Langevin Diane Riopel
François Soumis
Ecole Polytechnique de Montréal
Département de Mathématiques et de Génie Industriel et GERAD

RÉSUMÉ

Nous nous penchons sur la modélisation et le traitement de problèmes d'entreposage du type partagé. Nous supposons que l'entrepôt est à charge unitaire et que les cycles de manutention sont simples, non-interfoliés. Les modèles considérés intègrent des éléments de réalisme qui sont généralement ignorés par les modèles classiques.

A.1 Introduction

L'étude de l'entreposage partagé est relativement récente (voir [3, 4, 5, 6]). Contrairement à l'entreposage dédié, l'entreposage partagé permet à des unités de produits différents d'occuper les unes après les autres un même emplacement. Le problème se pose comme celui de l'affectation des unités aux emplacements sur une base individuelle: les rotations des produits correspondants n'interviennent pas directement. Les premiers travaux (voir [3, 4, 6]) démontrent la supériorité de ce type d'entreposage sur les plans temps total de manutention et espace requis.

Les modèles considérés à ce jour ne se soucient que de la minimisation du temps total de manutention. En fait, ces modèles ne sont valides que sous l'hypothèse restrictive d'un sur-dimensionnement de la capacité de traitement du système avec laquelle la minimisation de la consommation énergétique des mouvements de manutention devient alors un objectif pertinent. Cet objectif perd son intérêt si l'on considère un système dont la capacité peut potentiellement être atteinte durant certaines journées. Car, il est alors primordial d'utiliser une affectation réduisant la manutention des journées chargées au détriment éventuel de la minimisation globale des temps de manutention. Nous nous plaçons dans ce contexte, qui sans aucun doute est celui de la plupart des systèmes réels où du temps supplémentaire est fréquemment nécessaire. Formellement, nous retenons surtout une fonction objectif dont la composante dominante est la minimisation des débordements quotidiens au-delà du temps régulier.

A la section suivante, nous proposons un modèle intégré qui en induit plusieurs autres. A la section A.3 nous discutons du traitement de ces modèles tandis qu'à la section A.4 nous présentons une comparaison des résultats de deux de ces modèles. A la section A.5 on conclut avec la présentation de quelques avenues de recherche.

A.2 Modèles

Nous considérons un système à charge unitaire où les cycles de manutention sont simples: une opération de placement ou de prélèvement ne concerne qu'une seule unité et un cycle ne comporte qu'une seule de ces opérations. En fait, on suppose que dans toute journée, les placements et les prélèvements se font séparément sur deux intervalles disjoints, les placements d'abord et les prélèvements ensuite. A ces hypothèses s'ajoute celle de la disponibilité de l'information sur les différents temps associés aux opérations de placement/prélèvement, sur le temps régulier, sur les coûts du temps supplémentaire et sur les séjours des unités à entreposer durant l'horizon considéré.

Avant de modéliser, introduisons quelques concepts et définitions. Soit le graphe des séjours $G = (X, A)$ (voir figure A.1), où:

- à un noeud x de $X = \{1, 2, \ldots, T+1\}$ sont associés les placements du jour x et les prélèvements du jour $x - 1$;
- à chaque unité à entreposer correspond un arc dans A; cet arc, que l'on nomme *arc unité*, relie le noeud des placements du jour d'arrivée au noeud des prélèvements du jour de départ;
- deux noeuds consécutifs sont reliés par un arc, désigné par *arc de connexion.*

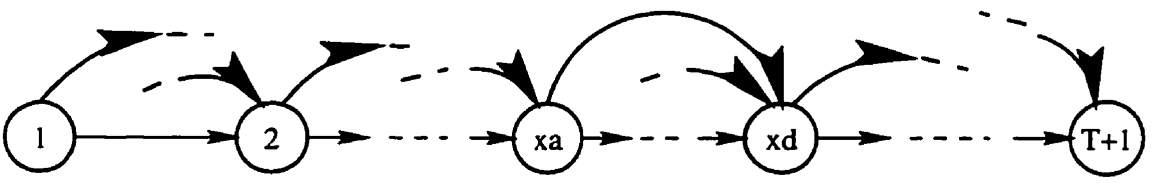


Figure A.1 Graphe des séjours $G = (X, A)$; une unité arrive le jour xa et quitte la veille du jour xd.

Ce graphe sans circuit contient toute l'information sur le séjour des unités dans l'entrepôt. Cependant, il est bien plus qu'un simple mode de représentation des données: il y a correspondance biunivoque entre les chemins de ce graphe et les combinaisons d'unités aux séjours disjoints deux à deux. Désignons par *combinaison* j une telle combinaison d'unités qui peuvent être affectées à un même emplacement. Désignons par *classe* k, la classe des emplacements ayant t_k comme temps de service, lequel correspond à la durée d'une opération.

Ainsi notre problème revient à sélectionner certaines combinaisons et à les affecter aux classes en couvrant toutes les unités et en respectant les contraintes de faisabilité, c'est-à-dire en n'affectant pas à une même classe plus de combinaisons que le nombre d'emplacements qui la composent et en s'assurant que les charges quotidiennes soient compatibles avec la capacité de traitement du système. L'objectif est la minimisation d'une fonction des charges quotidiennes de manutention. En fait, il est possible de minimiser la charge totale de manutention, le temps supplémentaire, ..., ou une somme pondérée de ces éléments. Voici le modèle correspondant:

$$\min \quad f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots)$$

$$s.c. \quad \begin{cases} \sum_j a_{ij} \sum_k y_{jk} & = 1 & \forall i \\ \sum_j y_{jk} & \leq \eta_k & \forall k \\ z_l & = \sum_j r_{jl} \sum_k t_k y_{jk} & \forall l \\ z_l & \leq \zeta_l & \forall l \\ y_{jk} \in \{0,1\} & & \forall j,k \end{cases} \tag{A.1}$$

où:

- l'indice i identifie une unité à entreposer;
- l'indice j identifie une combinaison;
- l'indice k identifie une classe; t_k est alors le temps de service de la classe;

- l'indice l identifie un jour de l'horizon $(l \in \{1, 2, \ldots, T\})$;
- $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si la combinaison } j \text{ comprend l'unité } i; \\ 0 \text{ sinon;} \end{cases}$
- r_{jl} = le nombre d'opérations qui ont lieu le jour l et qui impliquent des unités de la combinaison j $(r_{jl} \in \{0, 1, 2\})$;
- η_k = le nombre d'emplacements de la classe k;
- ζ_l = capacité de traitement du système au jour l = charge maximale en temps de manutention au jour l;
- $y_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si la combinaison } j \text{ est affectée à un emplacement de la classe } k; \\ 0 \text{ sinon;} \end{cases}$
- z_l = charge en temps de manutention du jour l.

Avec cette formulation, les variables de décision indépendantes sont les variables d'affectation y_{jk}. Il est à noter que la somme $\sum_k y_{jk}$ prend la valeur 1 ou 0 selon que la combinaison j est sélectionnée ou non. De plus, la somme $\sum_k t_k y_{jk}$ équivaut au temps de service d'une unité de la combinaison j si celle-ci est sélectionnée et équivaut à zéro sinon. Ainsi, le premier groupe de contraintes impose que chaque unité soit couverte, c'est-à-dire que chaque unité soit entreposée une et une seule fois. Le second groupe assure la faisabilité au niveau occupation des emplacements: quelle que soit la classe, il limite à la taille de celle-ci le nombre de combinaisons qui lui sont affectées. Le troisième groupe définit les variables dépendantes z_l, qui sont les charges quotidiennes de manutention. Le quatrième groupe assure la faisabilité au niveau charge: quelle que soit la journée, il limite à la capacité de traitement de celle-ci la durée de la manutention. Quant au cinquième et dernier groupe, il est tout simplement celui de l'intégrité des variables d'affectation y_{jk}. Ce modèle intégré en induit plusieurs autres selon la définition de la fonction objectif f.

En définissant f par:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots) = \sum_l z_l, \tag{A.2}$$

on minimise la somme des temps de manutention sur tout l'horizon. C'est-à-dire que l'on ne se préoccupe que de la consommation d'énergie associée à la manutention. Si de plus, on pose $\zeta_l = \infty$, $\forall l$, on considère que le système n'est jamais saturé et on modélise le problème classique traité par Goetschalckx et Ratliff [3, 4] et par Montulet et al. [5].

En définissant f par:

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots) = \sum_l \max\{0, z_l - \zeta^1\}, \tag{A.3}$$

où ζ^1 est la longueur des journées régulières et en posant $\zeta_l = \zeta^2 = constante > \zeta^1$, $\forall l$, où ζ^2 est la longueur maximale des journées, on minimise le temps supplémentaire. Ce modèle-ci semble davantage approprié dès qu'une part significative du système utilise de la ressource humaine: le salaire des manutentionnaires domine généralement le coût énergétique associé à la manutention.

Dans ce qui suit, nous retenons surtout le modèle dont l'objectif est obtenu de la combinaison suivante de (A.2) et (A.3).

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_l, \ldots) = K \sum_l \max\{0, z_l - \zeta^1\} + \sum_l z_l = \sum_l \max\{z_l, K(z_l - \zeta^1) + z_l\}, \tag{A.4}$$

avec K majorant $\sum_l z_l$ quelle que soit l'affectation. Ainsi, la minimisation du temps supplémentaire est le premier critère, tandis que la minimisation du temps total de manutention est le second critère.

A.3 Méthodes

Les modèles présentés peuvent tous être facilement transformés en programmes linéaires à variables mixtes lorsqu'ils ne sont pas déjà sous cette forme. En particulier, le modèle défini par l'objectif (A.4) peut être linéarisé étant donné que la fonction f est convexe linéaire par morceaux et séparable selon les variables de charge z_l. En effet, il suffit pour tout l de remplacer la variable z_l par la somme de deux nouvelles variables non-négatives z_l^1 et z_l^2, qui représentent respectivement la charge en temps régulier et la charge en temps supplémentaire, de limiter z_l^1 à ζ^1 et z_l^2 à $\zeta^2 - \zeta^1$, et d'utiliser l'objectif suivant:

$$\sum_l (z_l^1 + (K+1)z_l^2). \tag{A.5}$$

Le bon ordre du "remplissage des variables" (z_l^1 avant z_l^2) est assuré par la convexité de l'objectif original. On obtient le programme ainsi linéaire à variables mixtes suivant:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_l (z_l^1 + (K+1)z_l^2) \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{rll} \sum_j a_{ij} \sum_k y_{jk} & = 1 & \forall i \\ \sum_j y_{jk} & \leq \eta_k & \forall k \\ z_l^1 + z_l^2 & = \sum_{j,k} r_{jl} t_k y_{jk} & \forall l \\ 0 \leq z_l^1 & \leq \zeta^1 & \forall l \\ 0 \leq z_l^2 & \leq \zeta^2 - \zeta^1 & \forall l \\ y_{jk} \in \{0,1\} & & \forall j,k. \end{array} \right. \end{array} \tag{A.6}$$

Le problème (A.1) en est un de partitionnement avec contraintes supplémentaires et coût non nécessairement linéaire. Le correspondant de l'élément à couvrir est l'unité i à entreposer et celui de l'ensemble couvrant, le couple combinaison-classe jk. Lorsque linéarisé comme en (A.6), il s'agit alors d'un programme linéaire en nombres entiers dont les variables, c'est-à-dire les couples combinaisons-classes, sont

généralement en si grande quantité qu'il est impensable d'énumérer explicitement toutes les colonnes de la matrice des contraintes. La technique de la génération de colonnes (également appelée méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe) s'est montrée très efficace pour résoudre la relaxation linéaire de tels programmes, où il y a implicitement une composante réseau (voir [1]). La solution exacte du programme original, en nombres entiers, s'obtient en appliquant cette technique à chaque noeud d'un arbre de séparation et d'évaluation progressive (branch & bound). La méthode de génération de colonnes opère avec un problème maître, c'est-à-dire avec un modèle limité à un nombre réduit de colonnes, et avec un sous-problème, dont la résolution génère les colonnes à ajouter au problème maître. Le problème maître est traité par l'algorithme du simplexe et le sous-problème l'est par un algorithme de réseau. En fait, ce problème maître fournit au sous-problème ses variables duales et classiquement, celui-ci retourne la colonne de plus petit coût réduit. Si ce coût est non-négatif, la solution optimale du programme est trouvée. Sinon, un traitement complet par le simplexe est effectué et un nouveau cycle est lancé.

Cette technique optimale est utilisée par Montulet et al. [5] pour traiter le modèle linéaire défini par (A.2). Des exemples de quelques centaines d'unités ont pu être ainsi résolus. Des heuristiques rapides ont permis de résoudre efficacement des exemples de taille pratiquement illimitée (voir [3, 4, 5]). L'heuristique de [5] s'est particulièrement distinguée et a aboutit à l'optimum de tous les exemples traités de façon exacte. De telles heuristiques devraient pouvoir être développées pour traiter (A.6).

A.4 Résultats

Nous avons traité des exemples correspondant au modèle (A.6) en utilisant *Gencol* (voir [1, 2]), un logiciel de génération de colonnes spécialement développé pour la résolution de problèmes de recouvrement/partitionnement dont les modèles se définissent à partir de chemins de graphes; les modèles comprennent éventuellement des contraintes et variables supplémentaires. Ce logiciel permet le traitement optimal de nombreux problèmes de tournées de véhicules et de fabrication d'horaires (voir [1]).

Nous considérons ici un exemple déjà traité par [3, 5]. Cet exemple dont l'objectif original est de minimiser (A.2) repose uniquement sur une liste de dates d'arrivées et de départs caractérisant les unités à entreposer et sur une liste de temps d'accès aux emplacements (ces données sont entre autres représentées par les diagrammes d'occupation temporelle qui suivent). Ils nous faut donc compléter ces données par celles des contraintes de capacité. En prenant comme unité de temps la durée du parcours d'une longueur d'emplacement par l'engin de manutention, nous avons considéré une journée régulière de $\zeta^1 = 100$ unités de temps et une journée maximale de $\zeta^2 = 150$ unités de temps. De même, nous avons considéré un temps fixe par opération de 5 unités de temps; ce temps fixe additionné au double du temps d'accès constitue le temps de service t_k. Voici les représentations des affectations obtenues

par le traitement des modèles (A.2) et (A.6).

```
Empl.\Jour        |        Prod.
-------------------------------------------
   123456789012
-------------------------------------------
 1| +*+++++* *++ |1  4  3  2  4  3  4  2  3
 2| *****+ +++++ |1  3  4  3  4
 2|  ++++++++** |4  4  4  2
 2| ++++++++++** |1  2  3  2
 3|   ++++++  + |3  3  3
 3|  ****+  *** |4  2  4
 3| +++++++++** |1  4
 3| ++++        |1
 3|    ******   |2
 4| +++++++     |1
 4| *****       |1
 4|    ++++     |2
 5| ************ |1
 5| ++++++++++  |1
 5| *********   |1
 6|    +++++    |2
 6| ********    |1
 6| ++++++      |1
 7|   ***       |3
```

Solution du modèle (2)

```
Empl.\Jour        |        Prod.
-------------------------------------------
   123456789012
-------------------------------------------
 1| +*+*+ *+ *+ |1  4  3  2  4  3  4  2  3
 2| ************* |1  3  4  4  3
 2| ++++++++++** |1  4  3  2
 2| ++++++++++** |1  2  3  4
 3|  ++*****  + |4  2  4
 3| *****  ++   |1  4
 3| *******  +++ |1  2
 3| *******+    |1  3
 3|    *****    |2
 4| ++++++++++++ |1
 4| ***********  |1
 4| +++++++++   |1
 5| ********    |1
 5| ++++++++++  |1
 5|  ***        |4
 6|    ++++++   |2
 6|   ****      |3
 6|    ++       |2
 7|   ***       |3
```

Solution du modèle (6)

Ces représentations, que l'on dénomme diagrammes d'occupation temporelle de l'entrepôt, contiennent chacune un tableau composé de caractères '*' et '+', où une suite horizontale de caractères identiques représente une même unité. Dans ce tableau, il y a une colonne par journée et une ligne par emplacement occupé. A gauche de chaque ligne est indiqué le temps d'accès à l'emplacement correspondant, tandis qu'à droite sont indiqués dans l'ordre les numéros des produits correspondant

aux unités vis à vis. A ces diagrammes d'occupation, nous joignons un diagramme comparatif des charges quotidiennes de manutention (voir figure A.2). A chaque journée de l'horizon correspond une paire de bâtonnets; celui de gauche, en traits continus, est associé au modèle (A.2) tandis que celui de droite, en traits pointillés, l'est au modèle (A.6). La partie inférieure de chaque bâtonnet correspond à la partie fixe de la charge quotidienne, tandis que la partie supérieure correspond à la partie variable. Notons que les parties fixes sont proportionnelles par un facteur 5 aux nombres d'opérations quotidiennes effectuées et qu'ainsi leur représentation donne un aperçu en termes de ces nombres de la répartition de la charge. Les deux lignes horizontales correspondent aux longueurs $\zeta^1 = 100$ et $\zeta^2 = 150$ des journées régulières et maximales.

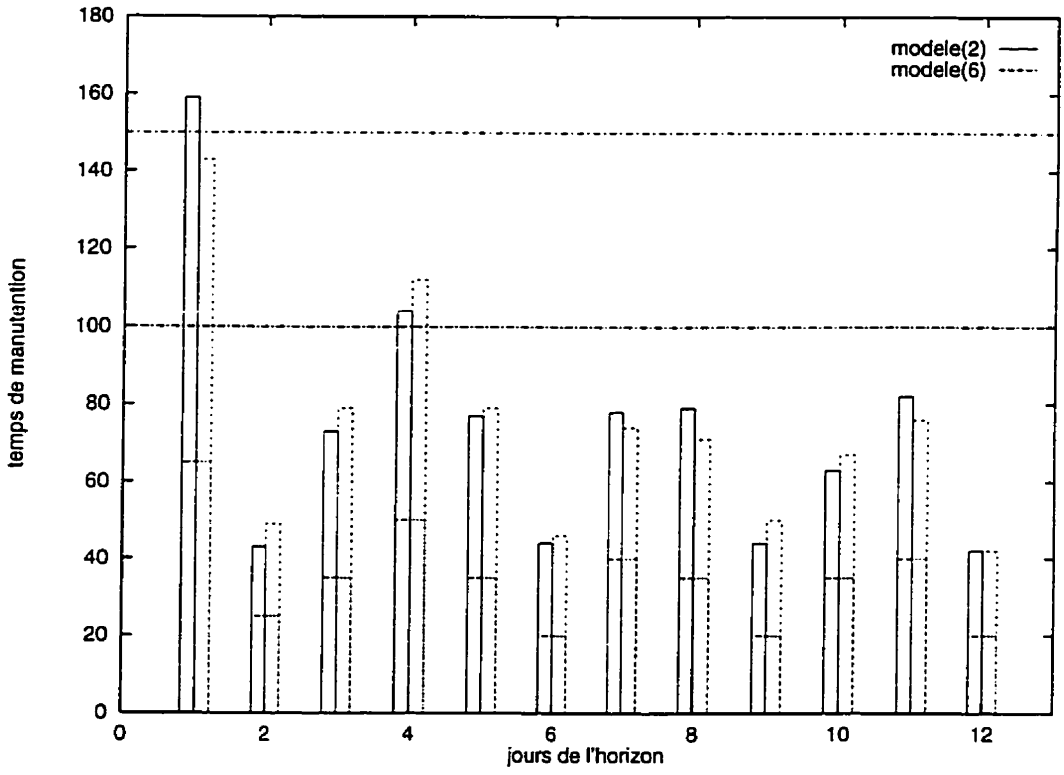


Figure A.2 Diagramme comparatif de la répartition de la charge de manutention.

Pour les deux modèles, on obtient des temps d'accès moyens identiques de 5.57.

Comme on peut le voir à la figure A.2, il y a dépassement de la capacité au jour 1 avec le modèle (A.2). Par ailleurs, ce modèle (A.2) implique 63 unités de temps supplémentaire alors que le modèle (A.6) n'en implique que 55. De cette comparaison, on voit que l'utilisation d'un modèle approprié (le modèle A.6) permet ici d'obtenir et la réasibilité et une réduction de 13% du temps supplémentaire sans affecter le temps total de manutention.

A.5 Conclusion

Nous avons présenté un modèle intégré de l'entreposage partagé auquel on peut associer plusieurs fonctions objectif. Nous avons proposé un traitement exact pour les modèles dérivant de quelques fonctions particulières. Dans un travail antérieur [5], nous avions traité de façons optimale et heuristique plusieurs exemples. Ici, nous nous sommes penchés sur le traitement optimal d'une version affinée d'un exemple traité précédemment. Le modèle considéré possède comme premier critère la minimisation du temps supplémentaire et comme second critère la minimisation du temps total de manutention. Ce modèle comprend de nouvelles contraintes reflétant la capacité du système. La comparaison entre les résultats obtenus du modèle considéré précédemment et de ceux obtenus du nouveau modèle montre une supériorité de ce dernier, qui a permis sans aucune altération de prendre en compte deux éléments jusqu'ici ignorés: le temps supplémentaire et la capacité de traitement du système.

Dans des travaux ultérieurs, nous multiplierons les tests et développerons un volet heuristique que nous confronterons à l'approche exacte proposée ici. Des extensions au modèle seront probablement intégrées: on pense à l'attente des camions et à l'existence éventuelle d'une zone tampon d'entreposage.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Desaulniers, G., Desrosiers, J., Ioachim, I., Solomon, M.M., et Soumis, F. (1994). A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems, *Les Cahiers du GERAD G-94-46, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.*

[2] Desrosiers, J., Dumas, Y., Solomon, M.M., et Soumis, F. (1992). Time Constrained Routing and Scheduling, *Les Cahiers du GERAD G-92-42, Ecole des Hautes Etudes Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.*

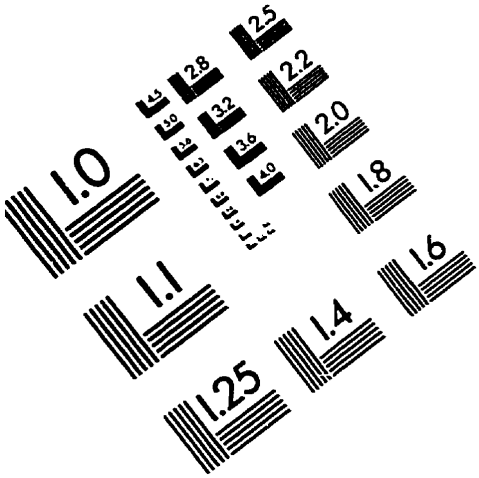
[3] Goetschalckx, M. (1983). *Storage and Retrieval Policies for Efficient Order Picking Operations*, Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology.

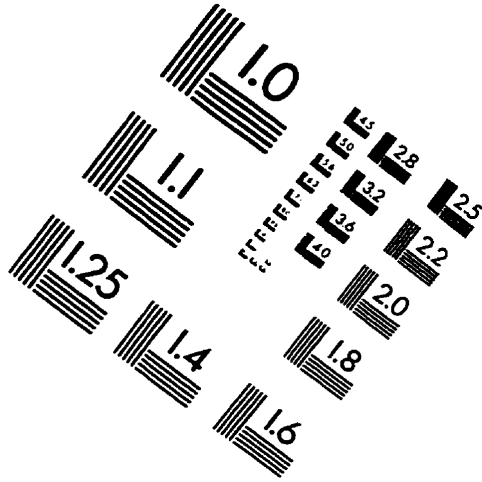
[4] Goetschalckx, M., et Ratliff, H.D. (1990). Shared Storage Policies Based on the Duration of Stay of Unit Loads, *Management Science* 36, 9, 1120–1132.

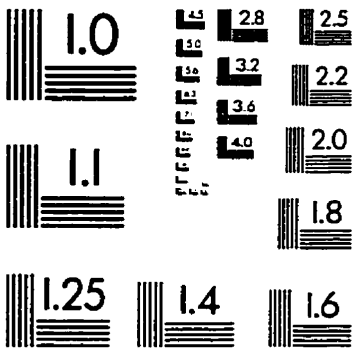
[5] Montulet, P., Langevin, A., et Riopel, D. (1995). Le problème de l'optimisation de l'entreposage partagé: méthodes exacte et heuristique, à paraître dans INFOR.

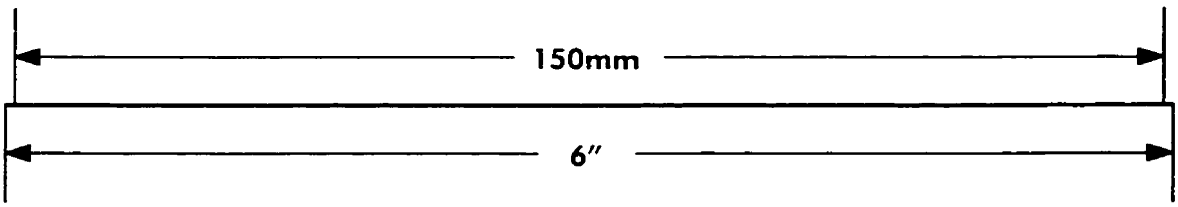
[6] Thompson, L.L., (1988). *Storage Location Charcaterization and Analysis Policies for Warehousing Systems*, Mémoire de maîtrise, Purdue University.

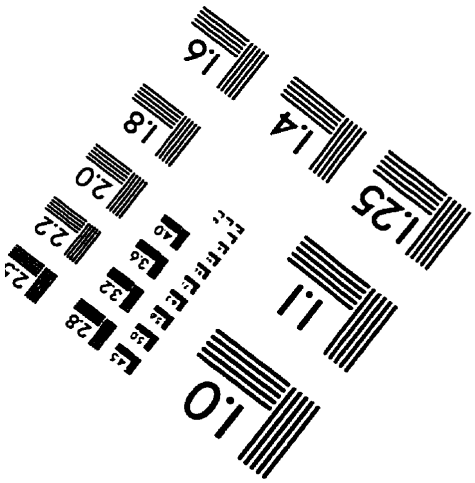
IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)

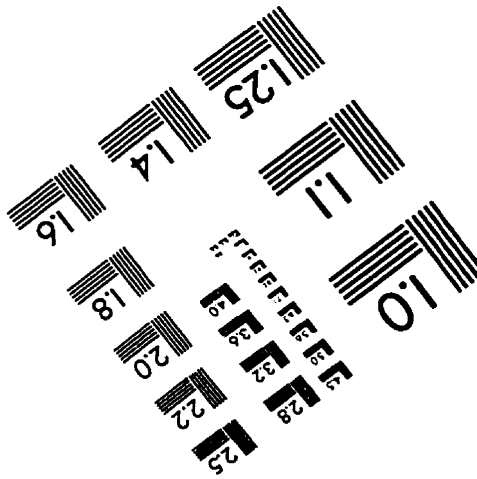












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved