NOTE TO USERS

The original manuscript received by UMI contains pages with slanted print. Pages were microfilmed as received.

This reproduction is the best copy available

UMI ®

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UNE MODÉLISATION CONSTITUTIVE ET NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT RHÉOLOGIQUE DU SEL GEMME

MICHEL R. JULIEN
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE MINÉRAL)
DÉCEMBRE 1999

© Michel R. JULIEN, 1999.

National Library of Canada
Acquisitions and Bibliographic Services
395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale du Canada
Acquisitions et services bibliographiques
395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-48885-3

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Cette thèse intitulée:

UNE MODÉLISATION CONSTITUTIVE ET NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT RHÉOLOGIQUE DU SEL GEMME

présentée par: JULIEN MICHEL R.

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. SILVESTRI Vincent, Ph.D., président

M. AUBERTIN Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MASSICOTTE Bruno, Ph.D., membre

M. OUELLET Jacques, Ph.D., membre

... c'est en forgeant qu'on devient forgeron ...

(Antoine Furetière, fin $XVII^{e}$ s.)

À kiki et rachou

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ma famille, mes amis et collègues qui m'ont guidé et encouragé dans la réalisation de cette thèse. Parmi eux, je voudrais particulièrement remercier:

- Christine, ma conjointe, et Rachel, ma fille, pour leur soutien continuel sans lequel je n'aurais pu accomplir ces travaux;
- mes parents (Denise et André), ma famille et belle-famille pour l'appui de tout instant (un merci spécial à Monique et Marc-Aimé Guérin pour leur révision);
- le Professeur Michel Aubertin, qui a été un directeur de recherche exceptionnel et une source d'inspiration, et qui m'a permis de découvrir le sel;
- le Dr. Yahya Ould Lémine (Yahya) qui a été d'une aide très précieuse et une source de motivation au cours de la rédaction de cette thèse;
- Golder Associés Ltée., son président Rick Firlotte et ma collègue Mayana Kissiova pour leur confiance et leur collaboration;
- l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris, et plus particulièrement le Professeur Georges Cailletaud et le Dr. Ron Foerch pour leur collaboration;
- François Girard, avec qui j'ai couru tant de kilomètres, et sa famille, qui sont des amis fidèles depuis tant d'années;
- my friends in Minnesota, Dr. Steven L. Crouch and the University of Minnesota;
- et finalement, le C.R.S.N.G. pour son support financier.

RÉSUMÉ

Cette thèse présente une étude de certains aspects reliés à la modélisation du comportement mécanique du sel gemme d'un point de vue constitutif, expérimental et numérique. Le modèle SUVIC, développé à l'École Polytechnique de Montréal, a été utilisé dans le cadre de ces travaux. Il s'agit d'un modèle viscoplastique unifié à écrouissage mixte avec variables d'état internes. Il est reconnu comme suffisamment flexible pour permettre une description adéquate du comportement du sel gemme pour une vaste plage de conditions de sollicitation. Le modèle constitutif SUVIC a initialement été développé pour la phase ductile, là où les déformations intracristallines isovolumétriques dominent le comportement inélastique. Le modèle a plus tard été étendu afin de tenir compte des effets associés à la fracturation, la dilatance et la contrainte moyenne dans une version avec endommagement (SUVIC-D).

Suite à une revue des principales caractéristiques du comportement mécanique du sel, le document présente les aspects constitutifs propres au modèle SUVIC. On introduit ensuite le modèle dans un cadre modifié, plus général, permettant notamment l'inclusion de composantes non isothermales et certaines vérifications thermodynamiques au niveau du caractère dissipatif du modèle. En particulier, on peut mentionner l'utilisation d'une formulation non singulière pour décrire le comportement du sel gemme à l'état stationnaire. Cette formulation, basée sur une fonction en sinus hyperbolique (par rapport à la formulation précédente de type exponentielle), permet entre autres de représenter des taux de déformation inélastiques faibles à élevés.

Cette caractérisation de l'état stationnaire est complétée par une simplification dans la façon d'exprimer la grandeur des variables internes à saturation par rapport à la contrainte appliquée. Cette formulation linéaire, même si elle est plus restrictive que la formulation antérieure, s'avère plus stable sur le plan numérique. Ces travaux incluent de plus certains éléments novateurs en ce qui a trait à l'inclusion des effets de la température et au niveau de la généralisation du modèle dans un cadre plus classique dans lequel interviennent certaines grandeurs thermodynamiques.

La question de l'endommagement est abordée sommairement dans ce document pour fins de complémentarité, mais elle ne représente pas l'élément fondamental de ces travaux. Néanmoins, certaines améliorations de la formulation du modèle au niveau de l'écriture du module d'endommagement et du tenseur d'endommagement sont présentées.

Plusieurs aspects expérimentaux sont aussi abordés. Une banque de données d'essais de laboratoire sur le sel d'Avery Island, a ainsi été constituée à partir de données de la littérature. Cette banque comprend divers types d'essais avec cheminements propres. Des essais de laboratoire sur le sel d'Avery Island ont également été réalisés par l'auteur et ont permis de mettre en évidence une forte composante à écrouissage cinématique. Ces essais cycliques ont été effectués à contraintes de confinement relativement élevées et montrent que le sel gemme dans le régime ductile peut montrer une réponse avec un effet de type Bauschinger.

La question de la détermination des constantes est abondamment traitée. On présente une approche permettant d'obtenir un jeu préliminaire de constantes à partir d'observations expérimentales sur un sel particulier. Un tel exercice, en plus d'aider à préciser le sens physique de certaines variables et constantes, permet d'apprécier la nécessité d'inclure dans le modèle, la notion d'écrouissage mixte. Ces constantes sont par la suite optimisées en utilisant certains outils numériques. De façon spécifique, le processus d'identification débute par la détermination des constantes élastiques. Par la suite, des identifications sont faites pour les constantes visant à

décrire l'état stationnaire inélastique (pour différentes températures) en utilisant une formulation en sinus hyperbolique. En ce qui concerne la phase transitoire, qui est la clé de cet exercice de détermination des constantes, on procède tout d'abord par méthode analytique pour des conditions isothermales. On optimise les constantes obtenues pour ces mêmes conditions avec des méthodes de minimisation de l'erreur. Les résultats sont ensuite généralisés pour une plage de température de 20 à 200 degrés C.

Les outils numériques d'optimisation utilisés sont des algorithmes de régression non linéaires et d'intégration explicite. Ces outils permettent en outre d'obtenir un jeu de constantes unique valable pour des essais CSR, de fluage et de relaxation. Des simulations sont montrées avec des jeux de constantes optimisées et illustrant les caractéristiques du modèle et sa bonne concordance avec les résultats expérimentaux.

Le modèle SUVIC est de plus introduit dans un code d'éléments finis. L'utilisation du code ZéBuLoN comme plateforme pour l'implantation du modèle est présentée en détail, surtout au niveau de l'intégration du problème local avec les méthodes d'intégration explicite (Runge-Kutta) et implicite (θ). Ce code orienté objet, écrit en C++, a été développé pour les modèles à variables internes. Des simulations sont présentées pour des essais de laboratoire et pour un problème hyperstatique (les cylindres à paroi épaisse et mince). On fait la démonstration numérique que la déformation inélastique équivalente maximale peut survenir à une distance plus ou moins éloignée de la paroi. La description détaillée de la construction du Jacobien pour le modèle SUVIC et des simulations numériques permettant d'apprécier les avantages associés à l'utilisation de la méthode θ sont aussi incluses.

Les résultats des simulations et prédictions réalisées dans le cadre de ces travaux, montrent que le modèle SUVIC modifié, et tel qu'introduit dans le code ZéBuLoN, permet de bien décrire les observations expérimentales disponibles ainsi que certaines caractéristiques du comportement du sel gemme. En particuliers, les résultats numériques mettent clairement en évidence la nécessité de l'écrouissage mixte, de la

restauration et de la notion de variables évoluant vers des états de saturation.

ABSTRACT

This thesis presents a study on certain aspects of the modeling of the mechanical behavior of rocksalt from the constitutive, experimental and numerical points of view. The model SUVIC, developed at École Polytechnique de Montréal, has been used for these works. It is a unified viscoplastic model with kinematic and isotropic hardening and internal variables. This model is recognized to be sufficiently flexible to provide a proper description of the behavior of rocksalt for a wide range of loading conditions. The constitutive model SUVIC has been initially developed for the ductile phase, where isovolumetric intra-crystalline flow dominates. The model has later been extended to take into account the effects of cracking, dilatancy and mean stress in a version with damage (SUVIC-D).

Following the review of the main characteristics of the mechanical behavior of salt, the document presents the constitutive aspects applicable to the SUVIC model. The model is then introduced in a modified more general framework, suitable for the introduction of non-isothermal components. This representation helps in achieving certain thermodynamic verifications related to the dissipative nature of the model. In particular, one can mention the use of a non-singular formulation to describe the behavior of rocksalt at steady state. This formulation, based on a hyperbolic sine function (with respect to the original version, which was exponential), can accommodate small to large inelastic strain rates.

This characterization of the steady state conditions is followed by a simplification in the way to express the importance of the saturated values of the internal state

variables with respect to the applied stress. A linear formulation, more restrictive than the previous one, is found to be more stable numerically. Certain new elements related to the inclusion of the effects of temperature and the ability to generalize the model in a more classical framework from which certain thermodynamic variables can be inferred, are also presented.

The question of damage is briefly discussed in this document. This aspect which is not the core of the study is provided to discuss the links between SUVIC and SUVIC-D. Certain improvements in the way the damage component and the damage tensor are written, are nevertheless presented.

Several experimental aspects are also discussed. A database of laboratory tests on Avery Island rocksalt has been constructed from data available from the literature. This database includes several types of tests with detailed loading path. The author has also done additional laboratory tests. These tests illustrate a strong kinematics hardening component. They are cyclic tests done at relatively high confining stress. They demonstrate that salt in the ductile regime can have a Bauschinger type of response. The question of the material constants determination is discussed in details throughout this thesis. An approach providing a preliminary set of constants from experimental results from a particular salt is explained. This technique helps in understanding the physical sense of certain variables and constants and justifies the need to include kinematic and isotropic hardening.

The preliminary set of constants is optimized by using certain numerical tools. The identification process starts by the determination of the elastic constants, followed by the determination of the constants describing steady-state conditions (for different temperatures) using a hyperbolic sine formulation. For the transient phase, which is the key of this constant determination exercise, analytical methods are first used for isothermal conditions. The constants are then optimized for these conditions by using error minimization techniques. The results are generalized for a temperature interval of 20 to 200 deg. C.

The numerical tools used are non-linear regression tools and explicit integration. These tools provide a unique set of constants for CSR, creep and relaxation tests. Simulations are also shown with optimized sets of constants. They emphasize the characteristics of the model and its good agreement with experimental results.

The SUVIC model is also introduced in a finite element code. The use of ZéBuLoN as platform to implement the model is presented in details, in particular with respect to the integration of the local problem with explicit (Runge-Kutta) and implicit (θ) integration methods. This object-oriented code, written in C++, has been developed specifically for models with state variables. Simulations are shown for laboratory tests and hyperstatic problems (thick and thin wall cylinders). A numerical demonstration is provided showing that the maximum equivalent inelastic strain can occur at a certain distance away from the wall. The detailed description of the construction of the Jacobian matrix for SUVIC and numerical simulations showing the advantages associated with the use of the θ method are also included.

The results of the different simulations and predictions done through these works show that the modified SUVIC model as introduced in ZéBuLoN, can well describe the available experimental observations, as well as certain characteristics of rocksalt behavior. In particular, the numerical results clearly demonstrate the need to include isotropic and kinematic hardening, recovery and the notion of having variables evolving toward saturation states.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv

REMERCIEMENTS v

RÉSUMÉ vi

ABSTRACT x

TABLE DES MATIÈRES xiii

LISTE DES TABLEAUX xviii

LISTE DES FIGURES xxi

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xxxiv

LISTE DES ANNEXES xl

CHAPITRE I : INTRODUCTION 1

1.1 Préambule 1

1.2 Problématique 3

1.3 Méthodologie des travaux 6

1.4 Structure et contenu de la thèse 7

1.5 Présentation des éléments novateurs 10

CHAPITRE II : COMPORTEMENT MÉCANIQUE DU SEL GEMME 13

2.1 Comportement du sel gemme en laboratoire 13

2.1.1 Essais usuels 13

2.1.2 Observations générales 14
2.1.3 Comportement ductile 15
2.1.4 Comportement fragile 20
2.1.5 Comportement semi-fragile 21
2.2 Comportement du sel gemme in situ 26
2.2.1 Particularités 26
2.2.2 Facteurs d'influence 27
2.3 Modèles constitutifs existants 29
2.3.1 Déformation élastique 29
2.3.2 Déformation de fluage 30
2.3.3 Fluage tertiaire 39
2.4 Modèles avec variables d'état interne 39
2.4.1 Modélisation avec variables internes généralisées 41
2.4.2 Modèles à variables internes pour le sel gemme 47
2.5 Modèle SUVIC 54
2.5.1 Évolution du modèle SUVIC 54
2.5.2 Module viscoplastique 55
2.5.3 Module d'endommagement - SUVIC-D 57
2.6 Évaluation des constantes 64

CHAPITRE III : MODÈLES NUMÉRIQUES POUR LE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE 68

3.1 Modélisation numérique pour les géomatériaux 68
3.1.1 Méthodes pour les milieux continus 69
3.1.2 Méthodes pour les milieux discontinus 69
3.1.3 Méthodes hybrides 70
3.2 Analyses pour milieux continus 71
3.2.1 Différences finies 71
3.2.2 Éléments frontières 73

3.2.3 Éléments finis 74
3.3 Description de la méthode des éléments finis 75
3.3.1 Équations et principe de base 75
3.3.2 Assemblage 80
3.3.3 Inversion de la matrice de rigidité **K** 80
3.3.4 Intégration de la loi de comportement 83
3.4 Quelques détails sur la méthode θ 88
3.4.1 Équations de base 88
3.4.2 Résolution du système local 88
3.4.3 Généralisation de la notion de Jacobien 95
3.4.4 Contrôle du pas de temps 96
CHAPITRE IV : ESSAIS DE LABORATOIRE 97
4.1 Propriétés du sel d'Avery Island 98
4.2 Résultats d'essais disponibles 99
4.2.1 Essais de Senseny et al. 1993 99
4.2.2 Essais de Hansen et Mellegard 101
4.2.3 Essais de Mellegard et Senseny 102
4.3 Autres résulats d'essais 103
4.4 Essais réalisés à l'École Polytechnique 103
4.4.1 Méthodologie 103
4.4.2 Présentation des résultats 105
4.4.3 Particularités 107
4.5 Évaluation du seuil d'endommagement 113
CHAPITRE V : MODIFICATIONS DU MODÈLE SUVIC ET IMPLANTATION NUMÉRIQUE 119
5.1 Modifications apportées au modèle 120
5.1.1 Description de l'état stationnaire 120
5.1.2 Autres ajustements 124

5.1.3 Module d'endommagement 127
5.2 Formulation généralisée du modèle SUVIC 130
5.2.1 Pertinence d'une telle présentation 130
5.2.2 Fonction d'écoulement 132
5.2.3 Règle d'écoulement 133
5.2.4 Lois évolutives des variables internes 135
5.2.5 Consistance thermodynamique 141
5.3 Implantation numérique proposée 150
5.3.1 Modèle numérique proposé 150
5.3.2 Description du code ZéBuLoN 151
5.3.3 Obtention du Jacobien 154
CHAPITRE VI : APPLICATIONS DU MODÈLE SUVIC 166
6.1 Identification des constantes 167
6.1.1 Généralités 167
6.1.2 Outils numériques 168
6.1.3 Méthodologie 172
6.2 Optimisation de la valeur des constantes 199
6.2.1 Essais à court terme 200
6.2.2 Essais de Senseny et al. (93) 208
6.2.3 Autres essais à court et à long terme 225
6.2.4 Applications au sel artificiel 248
6.3 Applications réalisées avec le code ZéBuLoN 253
6.3.1 Tests numériques sur le sel artificiel 253
6.3.2 Tests numériques sur le cylindre à paroi épaisse 257
6.3.3 Prédictions numériques pour le cylindre à paroi mince 263
6.3.4 Influence de la méthode d'intégration 270
CHAPITRE VII : DISCUSSION 278
7.1 Écrouissage mixte ou isotrope 278

7.2 Modifications apportées au modèle SUVIC 285
7.3 Détermination des constantes 289
7.4 Observations sur l'évolution des VEI 291
7.5 Applications des outils de modélisation 293
CHAPITRE VIII : CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS . 297
RÉFÉRENCES 302
ANNEXES 336

LISTE DES TABLEAUX

3.1 Tableau sommaire des méthodes d'intégration explicites pour modèles incrémentaux (inspiré de Aubertin 1993 a). 85
3.2 Tableau sommaire des méthodes d'intégration implicites pour modèles incrémentaux (inspiré de Aubertin 1993 a). 87

4.1 Caractéristiques des essais CSR réalisés sur le sel d'Avery Island . . 108
4.2 Autres détails des essais CSR réalisés sur le sel d'Avery Island. . . . 108
4.3 Évaluation de la présence d'endommagement pour certains des essais à température de la pièce sur le sel d'Avery Island. 116

6.1 Valeurs du module d'élasticité E en (GPa) pour le sel d'Avery Island à la température de la pièce ($T = 24^o\ C$). 173
6.2 Sommaire des identifications des valeurs de σ_0, $\dot{\epsilon}_0$ et de n à l'état stationnaire. 176
6.3 Constantes pour la loi de Norton (équation 6.6) pour différents sels telles que publiées dans la littérature. La constante universelle des gaz est $\mathcal{R} = 8.3141 J/mole/K^o$. Ces données sont tirées de Carter et Hansen (1983), Hardy (1982), van Sambeek (1986), Morgan et Wawersik (1991) et Nelson et Kelsall (1984). 178
6.4 Estimation des valeurs de R et B pour l'essai jul0602 aux déformations $\epsilon^i = 0.005$ et 0.015. 194

6.5 Sommaire de l'estimation des constantes A_3, R_0, A_{1_s}, B_{0_s}, A_{1_l} et B_{0_l} pour l'essai jul0602. 196

6.6 Valeurs des constantes pour le sel d'Avery Island telles qu'obtenues de l'évaluation préliminaire présentée à la section 6.1 et après optimisation sur la banque d'essais de l'auteur en utilisant le code SiDoLo. Les constantes de restauration statique n'ont pas été identifiées (N.I.) avec ces essais de courtes durées. 201

6.7 Constantes pour le sel d'Avery Island telles qu'obtenues des identifications sur les résultats d'essais de Senseny et al. 1993. 212

6.8 Constantes optimisées obtenus pour le modèle SUVIC à une température de 25° C pour les essais de Hansen et Mellegard (1980a) et Mellegard et al. (1983). 226

6.9 Jeux de constantes optimaux obtenus pour le modèle SUVIC en fonction de la température pour les essais de Hansen et Mellegard (1980a). Les effets de la température sur les paramètres élastiques sont négligés. 243

6.10 Jeu de constantes préliminaires pour le sel artificiel tel qu'obtenu d'une identification en utilisant la fonction sinus hyperbolique. 252

6.11 Constantes pour le sel artificiel. La forme exponentielle est utilisée pour représenter l'état stationnaire. 253

I.1 Description du chargement pour les essais de compression triaxiale réalisés par Senseny et al. 1993 sur le sel d'Avery Island. Tous les essais ont été réalisés à une température de 25° C et à une contrainte de confinement constante de 15.0 MPa. 337

I.2 Description des essais de fluage à une température inférieure à $70°C$ (source Hansen et Mellegard 1980). 339

I.3 Description des essais de fluage à une température entre $70°C$ et $120°C$ (source Hansen et Mellegard 1980). 340

I.4 Description des essais de fluage à des températures plus élevées que $120°C$ (source Hansen et Mellegard 1980). 341
I.5 Description des essais de fluage à une température inférieure à $70°C$ (source Mellegard et al. 1983). 341
I.6 Description des essais de fluage à une température entre $70°C$ et $120°C$ (source Mellegard et al. 1983). 348
I.7 Description des essais de fluage à des températures plus élevées que $120°C$ (source Mellegard et al. 1983). 349

LISTE DES FIGURES

2.1 Influence de la température T lors d'essais de fluage typiques. On remarque que la déformation de fluage augmente lorsque la température augmente. 18

2.2 Influence de la contrainte déviatorique S lors d'essais de fluage typiques. On remarque que la déformation de fluage augmente lorsque la contrainte déviatorique augmente. 19

2.3 Schéma d'un essai de fluage typique. 22

2.4 Représentation schématique des limites des régimes ductiles, semi-ductiles, semi-fragiles et fragiles en termes du rapport des contraintes appliquées sur la résistance C_0. 24

2.5 Formulations de consolidation (AB) et d'écrouissage (AC) d'après Hult (1966) 33

2.6 Représentation schématique de l'évolution des variables internes lors d'un essai CTC-RTE (d'après Aubertin et al. 1994). 58

4.1 Représentation schématique du dôme de sel de la mine de Avery Island en Louisiane (élévation en pieds). Le dôme est composé de deux zones: un sel fin à grossier et un sel grossier dans la partie supérieure et centrale du dôme (source Carter et Hansen 1983). 100

4.2 Cheminement des contraintes lors d'un essai CTC-RTE (d'après Aubertin et al. 1994). 104

4.3 Essai jul0403 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. 109
4.4 Essai jul0502 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. 109
4.5 Essai jul0602 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails consulter les tableaux 4.1 et 4.2. 110
4.6 Essai jul0702 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 5.1 et 5.2. 110
4.7 Essai jul0802 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. 111
4.8 Essai jul0903 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. 111
4.9 Essai jul1003 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. 112
4.10 Essai jul1102 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. 112
4.11 Seuil d'endommagement pour le sel d'Avery Island en conditions CTC et RTE. La surface est définie par l'équation 4.1. Certains des essais de fluage utilisés dans le cadre de cette recherche sont aussi positionnés. 115
4.12 Évolution du seuil d'endommagement (en conditions CTC et RTE) dans le plan $\sqrt{J_2} - I_1$ en supposant une contrainte de confinement de 53.0 MPa (Essais de Julien). 117
4.13 Évolution du seuil d'endommagement (en conditions CTC) dans le plan $\sqrt{J_2} - I_1$ en supposant une contrainte de confinement de 15.0 MPa (Essais de Senseny et al. 1993). 118

5.1 Représentation des fonctions sinus hyperboliques *sinh*, inverses sinus hyperboliques *asinh*, exponentielles *exp* et logarithmiques *log*. 122

5.2 Comparaison du comportement des fonctions $exp(S_{eq}/\sigma_0)$ et sinus hyperbolique $sinh^n(S_{eq}/\sigma_0)$ avec $n = 1, 2, 3$, en termes du log de $\dot{\epsilon}^i/\dot{\epsilon}_0$ et du log de S_{eq}/σ_0. 123

6.1 Influence de la variation de température et de la contrainte déviatorique sur le taux de déformation stationnaire. Une approximation du taux de déformation stationnaire est faite avec les constantes $\dot{\epsilon}_0$, σ_0 et n du tableau 6.2 pour les différents intervalles de température. 179

6.2 Relation entre le taux de déformation stationnaire normalisé $\dot{\epsilon}^i_{eq}/\dot{\epsilon}_0$ et la contrainte déviatorique pour différentes températures pour le sel d'Avery Island. Les constantes $\sigma_0 = 15.08$ et $n = 3$ sont utilisées. . . 180

6.3 Taux de déformation stationnaire en fonction de la contrainte déviatorique S pour différents type de sel à une température $T = 25^o\ C$ estimés avec la loi de Norton (équation 6.6) et les constantes du tableau 6.3. 181

6.4 Comparaison entre la représentation de l'état stationnaire en utilisant la loi de Norton avec les constantes données par Carter et al. 1993 (équations 6.7 et 6.8) et des simulations avec la loi sinus hyperbolique avec les constantes $\dot{\epsilon}_0$, σ_0 et n données au tableau 6.2. 182

6.5 Variation du paramètre $\dot{\epsilon}_0$ en fonction de la température. Pour cette estimation, on utilise une énergie d'activation Q de 44.5 kJ/mole. . . 183

6.6 Représentation de la signification géométrique des paramètres h_0, h_1, m_1, m_2 et σ'. 185

6.7 Pour l'essai jul0602, on retranche la déformation élastique à la déformation totale pour ne conserver que la déformation inélastique ($E = 30.5GPa$). 188

6.8 Pour l'essai jul0602, on estime les résultats de l'essai à l'aide d'une forme bilinéaire pour les relations $h - S_{eq}$ de laquelle on tire $h_0 = 16300$, $h_1 = 2700$, $m_1 = -600$. 189

6.9 Enveloppe des contraintes totales estimées pour l'essai jul0602. . . . 190

6.10 Détermination par inspection visuelle de la limite des contraintes internes. Ceci permet de déterminer la grandeur de la surface d'écoulement $2R$ pour l'essai jul0602. Le centre de la surface d'écoulement est aussi positionné. 193
6.11 Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul06 (a) et jul07 (b). 204
6.12 Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul08 (a) et jul10 (b). 205
6.13 Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul09 (a) et jul11 (b). 206
6.14 Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul04 (a) et jul05 (b). 207
6.15 Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-1 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 215
6.16 Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-2 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 216
6.17 Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-3 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 217
6.18 Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-4 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 218

6.19 Comparaison entre la simulation de l'essai de fluage 4 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 219
6.20 Comparaison entre la simulation de l'essai de fluage 3 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 220
6.21 Comparaison entre la simulation de l'essai de fluage 1 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 221
6.22 Comparaison entre la simulation de l'essai de relaxation 4 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 222
6.23 Comparaison entre la simulation de l'essai de relaxation 3 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 223
6.24 Comparaison entre la simulation de l'essai de relaxation 1 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes. 224

6.25 Simulations des essais 24-1, 24-2 et 24-5 réalisés à $T = 25^o$ C, $\mathbf{S} = 10.3\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Mellegard et al. (1983)). Les contraintes de confinement sont $\sigma_{conf} = \{13.8, 3.4, 20.7\}\ MPa$ pour 24-1,24-2 et 24-5. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{24.0, 11.6, 30.8\}\ MPa$ pour 24-1,24-2 et 24-5 impliquant que les 3 essais sont sous le seuil d'endommagement. 228

6.26 Simulations des essais 24-3 et 24-4 réalisés à $T = 25^o$ C, $\mathbf{S} = 20.7\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Mellegard et al. (1983)). Les contraintes de confinement sont $\sigma_{conf} = \{13.8, 3.4\}\ MPa$ pour 24-3 et 24-4. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{24.1, 16.1\}\ MPa$ pour 24-3 et 24-4 impliquant que ce dernier essai serait un peu au-dessus du seuil. 229

6.27 Simulation pour l'essai par palier RT-1-RT-2 réalisé à $T = 25^o$ C, $\mathbf{S} = \{6.9, 10.3\}\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{3.5\}\ MPa$. Le seuil d'endommagement est $\mathbf{S}_{seuil} = \{11.7\}\ MPa$ impliquant que l'essai est totalement sous le seuil d'endommagement. 230

6.28 Simulation des essais RT-4 et RT-5 réalisés à $T = 25^o$ C, $\mathbf{S} = \{20.7, 31.0\}\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ pour RT4 et RT5 respectivement (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{3.5\}\ MPa$. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{16.2, 20.2\}\ MPa$ impliquant que les 2 essais sont au-dessus du seuil d'endommagement. 231

6.29 Simulation pour l'essai par palier RT-6-RT-7-RT-8 réalisé à $T = 25°$ C, S $= \{10.3, 20.7, 31.0\}$ MPa et $\dot{\sigma} = 0.011$ MPa/s (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{3.5\}$ MPa . Les seuils d'endommagement sont $S_{seuil} = \{11.7, 16.2, 20.3\}$ MPa impliquant que seul le premier palier est sous le seuil d'endommagement. 232

6.30 Simulation pour l'essai par palier RT-9-RT-10 réalisé à $T = 25°$ C, S $= \{10.3, 20.7\}$ MPa et $\dot{\sigma} = 0.011$ MPa/s (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{6.9\}$ MPa . Les seuils d'endommagement sont $S_{seuil} = \{16.1, 20.3\}$ MPa impliquant que seul le premier palier est sous le seuil d'endommagement. . 233

6.31 Simulation pour l'essai par palier RT-11-RT-12 réalisé à $T = 25°$ C, S $= \{10.3, 20.7\}$ MPa et $\dot{\sigma} = 0.011$ MPa/s (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{20.7\}$ MPa . Les seuils d'endommagement sont $S_{seuil} = \{20.2, 30.8\}$ MPa impliquant que les 2 paliers sont sous le seuil d'endommagement. . . 234

6.32 Effet du jeu de constantes lors de la simulation d'un essai CSR (jul07). Les constantes utilisées sont celles issues des essais de l'auteur (tableau 6.6) et des essais de Hansen et Mellegard 1980 (tableau 6.8). 237

6.33 Effet du jeu de constantes lors de la simulation d'un essai de fluage RT-6, RT-7 et RT-8. Les constantes utilisées sont celles issues des essais de l'auteur (tableau 6.6) et des essais de Hansen et Mellegard 1980 (tableau 6.8). 238

6.34 Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 80° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a). 240

6.35 Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 80° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a). 240
6.36 Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 115° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a). 241
6.37 Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 170° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a). 241
6.38 Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 200° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a). 242
6.39 Influence de la température sur l'évolution des constantes A_{1s} et A_{1l} du modèle SUVIC. 246
6.40 Influence de la température sur l'évolution de la constante R_0 du modèle SUVIC. 247
6.41 Influence de la température sur l'évolution du constante $a = (R_0 + \mathrm{B}_{0s} + \mathrm{B}_{0l})/\sigma_0$. On remarque que a diminue avec l'augmentation de la température (σ_0 = 15.08 MPa) impliquant que l'importance des contraintes internes diminue avec l'augmentation de la température. 247
6.42 Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai CSR. L'évolution des variables internes est aussi montrée. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 6.9\ MPa$ et $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. 250
6.43 Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai CSR avec un cycle CTC-RTE. L'évolution des variables internes **B** et R est aussi montrée. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 51.7\ MPa$ et $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. 250

6.44 Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai cyclique. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 52.0\ MPa$ et $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. 251

6.45 Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai CRS. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 11.3\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 6.9 * 10^{-3}\ MPa/s^{-1}$. 251

6.46 Comparaison entre les résultats expérimentaux pour l'essai A2 17cx et les simulations avec les méthodes d'intégration Runge Kutta et implicite θ. 254

6.47 Simulation numérique d'un essai cyclique sur le sel artificiel avec la méthode d'intégration implicite $\theta = 1$. 255

6.48 Simulation d'un essai avec endommagement en utilisant le module SUIVIC-D permettant une composante d'endommagement. Il s'agit d'un essai de compression triaxiale avec une contrainte de confinement de 10 MPa et un taux de déformation de $\dot{\epsilon} = 3 * 10^{-5}$. Les données expérimentales sont tirées de Aubertin et al. (1995b). L'intégration est faite avec la méthode explicite. 256

6.49 Représentation de la géométrie d'un cylindre à paroi épaisse analysé avec Z7. Le cylindre peut être soumis à une charge axiale, pression interne et externe indépendantes. La figure du bas montre une représentation schématique du maillage utilisé où l'épaisseur des éléments augmente progressivement de l'intérieur vers l'extérieur. 260

6.50 Simulation d'un essai numérique de fluage avec le cylindre à paroi épaisse lors d'un chargement complexe. Les différentes courbes montrent l'évolution de la contrainte appliquée en fonction du temps pour la contrainte axiale, de confinement externe et interne. 261

6.51 Simulation d'un essai numérique de fluage avec le cylindre à paroi épaisse lors d'un chargement complexe. La déformation équivalente est montrée au temps 0, 139, 300, 380, 514 et 633 heures. Elle atteint une valeur maximale à la fin de l'essai à l'intérieur de l'échantillon. . 262

6.52 Représentation du montage pour l'essai du cylindre à paroi mince (tirée de Mellegard et al. 1992). 266

6.53 Représentation du montage et de la position des jauges de déformation pour l'essai du cylindre à paroi mince (tirée de Mellegard et al. 1992). 267

6.54 Comparaison entre les résulats expérimentaux de l'essai C'1 (Mellegard et al. 1992) et les résultats de la prédiction faite avec ZéBuLoN en utilisant la fonction sinus hyperbolique. Les constantes utilisées sont celles obtenues des identifications sur les essais de Senseny at al. 1993. Les comparaisons sont faites pour les déformations axiales, radiales et tangentielles. 268

6.55 Effet de l'augmentation du nombre d'incréments 1-1 à 10-10 pour les méthodes d'intégration Runge-Kutta et θ pour un essai CSR-Relaxation. 271

6.56 Variation de l'erreur absolue en fin de calcul pour l'essai CSR-Relaxation en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = (0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta. 272

6.57 Variation du temps de calcul pour l'essai CSR-Relaxation en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = 0, 0.5, 1$ et Runge-Kutta. 272

6.58 Variation de la grandeur du résidu maximal en fin de calcul pour l'essai CSR-Relaxation en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta(= 0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta. 275

6.59 Chargement imposé pour un essai de fluage visant à tester la robustesse des méthodes d'intégration. 275

6.60 Effet de l'augmentation du nombre d'incréments 1-1-1 à 1-100-100 pour les méthodes d'intégration Runge-Kutta et θ pour l'essai de fluage. 276
6.61 Variation de l'erreur absolue en fin de calcul pour l'essai de fluage en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta(= 0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta. 276
6.62 Variation du temps de calcul pour l'essai de fluage en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = (0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta. 277
6.63 Variation de la grandeur du résidu maximal en fin de calcul pour l'essai de fluage en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = (0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta. 277

7.1 Comparaison entre les réponses des modèles SUVIC et les modèles d'écrouissage par la déformation (SH) et de consolidation ou par le temps (TH). On remarque que le comportement de SUVIC s'apparente aux résultats de l'essai SH après l'incrément de chargement. 280
7.2 Comparaison entre la réponse du modèle SH et du modèle SUVIC suite à un déchargement au cours d'un essai de fluage pour 3 niveaux de contraintes lors d'un essai de fluage numérique décrémental à deux paliers. On montre ici la déformation normalisée ϵ^i/ϵ_r, où ϵ_r est une déformation de référence, en fonction d'une unité de temps adimensionnel. 282
7.3 Comparaison entre la réponse obtenue des modèles SH et SUVIC pour un essai cyclique avec déchargements et rechargements. On montre ici la déformation normalisée ϵ^i/ϵ_r, où ϵ_r est une déformation de référence, en fonction d'une unité de temps adimensionnel. 283

7.4 Comparaison entre la réponse obtenue du modèle SH et du modèle SUVIC pour un essai cyclique avec déchargements et rechargements inversés. On montre ici la déformation normalisée ϵ^i/ϵ_r, où ϵ_r est une déformation de référence, en fonction d'une unité de temps adimensionnel. 284

I.1 Essais de relaxation sur le sel de Avery Island (référence Senseny et al. 1993) à température ambiante. La contrainte de confinement est de 15. MPa. Les déviateurs initiaux sont respectivement de 5.0, 10.0 et 15.0 MPa. 336

I.2 Essais de fluage sur le sel de Avery Island (référence Senseny et al. 1993) à température ambiante. La contrainte de confinement est de 15. MPa. Les déviateurs sont respectivement de 5.0, 10.0 et 15.0 MPa. 338

I.3 Essai CSR sur le sel d'Avery Island (Reférence Senseny et al. 93). La contrainte de confinement est de 15 MPa et la température est de $25°C$.338

I.4 Essais de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 RT-1, RT-2, RT-3. 342

I.5 Essai de laboratoire Hansen et Mellegard 1980 (Essai RT-4) 343

I.6 Essai de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 (Essai RT-5) . . . 344

I.7 Essais de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 RT-6, RT-7, RT-8. 345

I.8 Essais de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 RT-9 et RT-10. . 346

I.9 Essais de laboratoire Hansen et Mellegard 1980 RT-11, RT-12 et RT-13. 347

I.10 Essais de laboratoire 24-1 de Mellegard et al. 1983. 350

I.11 Essais de laboratoire 24-2 de Mellegard et al. 1983. 351

I.12 Essais de laboratoire 24-3 de Mellegard et al. 1983. 352

I.13 Essais de laboratoire 24-4 de Mellegard et al. 1983. 353

I.14 Essais de laboratoire 24-5 de Mellegard et al. 1983. 354

I.15 Essais CSR sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 90). La contrainte de confinement est de 15.0 MPa et le taux de déformation contrôlé fut fixé à 10-8 s-1 355

I.16 Essais CRS sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 1984). La température varie de 24 à 200°C. Le taux d'application de la contrainte est $\Delta\dot{\sigma} = 0.02\ MPa/seconde$. La contrainte de confinement est 3.45 MPa. 356

I.17 Essais de fluage sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 1984). La température varie de 24 à 200°C. Le taux d'application de la contrainte est $\Delta\dot{\sigma} = 0.02\ MPa/seconde$. La contrainte de confinement est 3.5 MPa. 356

I.18 Essais CSR sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 1990) à taux de déformation variables $\dot{\epsilon} = 10^{-4}, 10^{-6}$. La température est de 100°C. La contrainte de confinement est 3.4 MPa. 357

I.19 Essais CSR sur le sel d'Avery Island (référence Horseman et al. 92). La température varie de 50 à 100°C. Le taux de déformation varient au cours de l'essai de $10^{-8}\ s^{-1}$ à $10^{-9}\ s^{-1}$. 357

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Abréviations

CSR Essai à taux de déformation contrôlé

CRS Essai à taux de chargement contrôlé

CTC Essai de compression triaxiale

RTE Essai d'extension triaxiale

RCC Résistance au cisaillement critique

DIT Seuil d'initiation de l'endommagement

C.F.C. Matériau cubique à faces centrées

AE Activité acoustique

VEI Variables d'état internes

VOI Variables observables et variables internes

VOIA Variables observables et variables internes associées

E.N.S.M.P. École Nationale Supérieure des Mines de Paris

sinh sinus hyperbolique

asinh sinus hyperbolique inverse

WIPP Waste Isolation Pilot Plant

SH Écrouissage par la déformation

TH Écrouissage par le temps

Z7 ZéBuLoN version 7

iter	Itération

Symboles d'usage général

<>	Crochets de Mac-Auley ($< condition > = 0$ si $condition < 0$)
:	Produit contracté
Δ	Quantité incrémentale
δ	Variation d'un incrément
$\otimes$	Produit tensoriel
$\mathbf{G}$	Ensemble des variables observables et internes (VOI)
$\mathbf{g}$	Ensemble des variables observables et internes associées (VOIA)
$\boldsymbol{\xi}$	Variable tensorielle ou scalaire
$\boldsymbol{\xi}'$	Variable tensorielle ou scalaire à saturation (dynamique)
$\boldsymbol{\xi}''$	Variable tensorielle ou scalaire à saturation (statique)
$\dot{\boldsymbol{\xi}}$	Loi évolutive de la variable tensorielle ou scalaire $\boldsymbol{\xi}$
ξ_{eq}	Variable équivalente de la variable tensorielle ou scalaire $\boldsymbol{\xi}$
f	Fonction quelconque, aussi f_1, f_2, f_3, f_4
g	Fonction quelconque, aussi g_1, g_2, g_3, g_4
$\mathfrak{F}$	Fonction quelconque
$\mathbf{Z}$	Fonction de Zener
ϕ	Dissipation intrinsèque
ψ	Potentiel de dissipation thermique
$\mathbf{q}$	Flux thermique
$\mathbf{k}$	Tenseur des conductivités thermiques
$\mathbf{F}$	Fonction d'écoulement
$\mathbf{Q}$	Potentiel plastique
$\mathbf{n}$	Vecteur normal
Ψ	Énergie libre spécifique

Ψ^e Énergie libre spécifique élastique

Ψ^i Énergie libre spécifique inélastique

Φ Potentiel de dissipation

Ω Fonction scalaire de type potentiel

Variables pour éléments finis

$\mathbf{H}$ Matrice d'interpolation

$\mathcal{B}$ Matrice d'interpolation différenciée

$\mathbf{u}$ Déplacements

$\mathbf{U}$ Déplacements nodaux

F_{ext} Forces extérieures

F_{int} Forces intérieures

$\mathbf{K}$ Matrice de rigidité

$\bar{\mathbf{t}}$ Densité surfacique de forces appliquées

$\mathbf{f}$ Champ de forces internes

V Volume

S Surface

$\mathcal{R}$ Résidu

$\mathcal{F}$ Fonction résiduelle

$\nabla\mathcal{F}$ Jacobien de la fonction résiduelle $\mathcal{F}$

θ Constante de la méthode θ

$\mathcal{Z}$ Variables observables

$\mathcal{Z}^*$ Variables observables mesurées

$\mathbf{Y}$ Variables internes

Variables observables

T Température

T_m	Température de fusion
T_t	Température de transition
L	Longueur
D	Diamètre
t	Temps
σ	Contrainte (tenseur)
σ^{el}	Contrainte de charge élastique (tenseur)
σ^{in}	Contrainte de charge inélastique (tenseur)
$\mathbf{S}$	Contrainte déviatorique (tenseur)
$\mathbf{S}^{el}$	Contrainte de charge élastique déviatorique (tenseur)
ϵ	Déformation totale (tenseur)
ϵ^e	Déformation élastique (tenseur)
ϵ^i	Déformation inélastique (tenseur)
$\dot{\epsilon}$	Taux de déformation (tenseur)
$\dot{\nu}$	Vitesse de déformation
h	Module d'écrouissage

Variables d'état

$\mathbf{X}_i$	*ième* variable interne cinématique
$\mathbf{X}_{eq_i}$	*ième* variable interne équivalente cinématique
$\mathbf{X}_i^I$	Valeur à saturation de la *ième* variable interne cinématique
$\mathbf{X}_{eq_i}^I$	Valeur à saturation de la *ième* variable interne équivalente cinématique
$\mathbf{X}_i^{II}$	Valeur à saturation (statique) de la *ième* variable interne cinématique
α_i	*ième* variable interne cinématique associée
α_{eq_i}	*ième* variable interne équivalente cinématique associée
α_i^I	Valeur à saturation de la *ième* variable interne cinématique associée
$\alpha_{eq_i}^I$	Valeur à saturation de la *ième* variable interne équivalente cinématique associée

α_i''	Valeur à saturation (statique) de la *ième* variable interne cinématique associée
R_i	*ième* variable interne isotrope
R_i'	Valeur à saturation de la *ième* variable interne isotrope
R_i''	Valeur à saturation (statique) de la *ième* variable interne isotrope
p_i	*ième* variable interne isotrope associée
p_i'	Valeur à saturation de la *ième* variable interne isotrope associée
p_i''	Valeur à saturation (statique) de la *ième* variable interne isotrope associée
$\mathbf{B}_s$	Variable interne cinématique courte portée (tenseur)
$\mathbf{B}_l$	Variable interne cinématique longue portée (tenseur)
R	Variable interne isotrope
K	Variable interne isotrope de normalisation
α_s	Variable interne associée cinématique courte portée
α_l	Variable interne associée cinématique longue portée
r	Variable interne associée isotrope
k	Variable interne associée isotrope de normalisation
$\mathcal{D}$	Tenseur d'endommagement
$\mathbf{M}$	Tenseur de l'effet d'endommagement
Γ	Tenseur de continuité
$\hat{\sigma}$	Tenseur de contrainte nette

Constantes diverses

E, μ	Constantes élastiques (Module de Young et coefficient de Poisson)
$\mathbf{D}$	Tenseur liant la contrainte à la déformation
$\mathbf{D}_{el}$	Tenseur élastique
$\mathbf{D}_{el_0}$	Tenseur élastique non endommagé
$\mathbf{D}_{in}$	Tenseur inélastique
Q	Énergie d'activation

$\mathcal{R}$	Constante universelle des gaz
N	Exposant d'une loi de puissance
C	Constante
a	Constante aussi a_1, a_2, a_3 et a_4
b	Constante aussi b_1, b_2, b_3 et b_4
c	Constante aussi c_1, c_2, c_3 et c_4
σ_c	Constante de normalisation
A_{1s}, A_{1l}, A_3, A_5	Constantes de SUVIC (restauration dynamique)
A_{2s}, A_{2l}, A_4, A_6	Constantes de SUVIC (restauration statique)
A	Constante de SUVIC (loi cinétique)
$\mathrm{B}_{0s}, \mathrm{B}_{0l}, R_0, K_0, \phi$	Paramètres de SUVIC (valeurs de saturation)
$\dot{\epsilon}_0, \sigma_0, n, m$	Constantes de SUVIC pour l'état stationnaire
x_s, x_l, x_r, x_k	Constantes de SUVIC liant les valeurs de saturation
$b_{1s}, b_{1l}, b_{1r}, b_{1k}$	Constantes thermiques de SUVIC

LISTE DES ANNEXES

I Autres résultats d'essais de laboratoire sur le sel gemme de Avery Island 336

Chapitre I

INTRODUCTION

1.1 Préambule

Pourquoi étudier le comportement du sel? ...

Cette question toute simple est sans doute celle qui revient le plus souvent lorsqu'un tel projet est abordé.

Il est légitime de poser un telle question en guise de préambule à cette thèse. La réponse permet en outre d'introduire certaines caractéristiques d'un matériau fascinant, intimement lié à nos vies, dont le comportement montre plusieurs facettes, un matériau à la fois simple et complexe.

Le sel est une substance cristalline composée essentiellement de chlorure de sodium (NaCl). Elle figure parmi les substances les plus déterminantes pour la vie sur cette planète. À cause de sa grande solubilité dans l'eau, le sel s'accumule dans les mers et océans et permet de définir une démarcation entre de grands habitats.

La présence d'un certain niveau de salinité dans l'eau peut ainsi représenter, pour certaines espèces, des conditions assimilables à une toxicité aiguë, tandis que pour d'autres ce même environnement est essentiel à leur métabolisme.

L'être humain n'échappe pas à son influence. Même si du sel est naturellement présent dans nos organismes, nous ne pouvons nous abreuver directement d'eau de

mer. Malgré une certaine intolérance, l'être humain a néanmoins intégré au cours des temps, le sel dans sa vie de tous les jours. Le sel a été notamment utilisé comme agent de conservation et comme assaisonnement. À une certaine époque, le sel a même servi de monnaie. De nos jours, on l'utilise aussi abondamment sous nos climats comme agent de déglacage et dans l'industrie chimique.

Malgré son apparente simplicité et sa relative abondance, de nombreux chercheurs s'intéressent encore aujourd'hui à son comportement et à ses applications. D'où vient cette fascination?

Le sel se retrouve à l'état naturel dans le sous-sol sous forme de sel gemme (la roche), ou de halite (le minéral) qui est la forme cristallisée du chlorure de sodium. Le sel gemme se retrouve géologiquement surtout sous forme de couches dans des roches sédimentaires ou sous forme de dômes massifs pénétrant des couches sédimentaires déposées postérieurement.

La présence de quantités importantes de sel gemme en un lieu (comme un dôme de sel) constitue généralement une indication d'une certaine stabilité géologique et étanchéité naturelle contre les infiltrations d'eau. Le sel gemme peut alors s'avérer un matériau de prédilection pour des applications géomécaniques visant à éviter au maximum les contacts entre des matériaux toxiques ou ayant une valeur stratégique et les nappes d'eau souterraines. Les dépôts de sel gemme ont ainsi été envisagés comme lieu de disposition pour certains types de déchets (ex.: déchets nucléaires). Compte tenu des enjeux environnementaux et de sécurité publique liés à ces types d'application, il est important de bien comprendre le comportement de ce matériau.

La compréhension du comportement mécanique du sel, et plus spécifiquement du sel gemme, soulève de plus un intérêt qui déborde la description de ce matériau. Ainsi, divers autres matériaux géologiques à caractère salin, comme la potasse et le gypse, peuvent être étudiés avec les modèles et concepts développés pour le sel gemme. On peut de même exporter ces modèles et concepts vers d'autres matériaux qui ont des structures cristallines similaires, comme certains halides alcalins utilisés

couramment en électronique, certains métaux et alliages, et diverses céramiques sous certaines conditions de chargement peuvent se comporter comme le sel.

Il y a donc plusieurs raisons pour étudier le comportement du sel. Ici, ce sont les aspects constitutifs et numériques en relation avec les applications géomécaniques qui ont motivé les travaux.

1.2 Problématique

La modélisation du comportement mécanique de matériaux cristallins comme le sel gemme a été l'objet de plusieurs études visant à résoudre une vaste gamme de problèmes géomécaniques.

Parmi ceux particulièrement étudiés, on peut mentionner les aspects mécaniques associés aux sites d'entreposage de déchets nucléaires. Les travaux de modélisation les plus importants effectués ces dernières années sont sans doute ceux liés aux projets d'aménagement de sites d'entreposage de déchets nucléaires dans des dômes de sel aux USA (WIPP) et Pays-Bas-Allemagne (Asse). Dans le cadre des recherches du WIPP et du programme du site Asse, des efforts et moyens importants ont été investis dans la prédiction entre autres, du comportement des parois d'excavations souterraines et des bouchons de scellement de ces sites d'entreposage potentiels sous l'effet d'un chargement thermo-mécanique.

À cette fin, des modélisations pour prédire le comportement sur plus de 100 années ont été effectuées aux USA (Hansen et al. 1996; Stone et al. 1985; Callahan et al. 1990). La convergence d'une excavation située à 600 m de profondeur pour le site de Asse en Allemagne (Prij et al. 1996) a été simulée pour une période d'opération de 1000 ans. La notion de *retrievability* ou de reprise des déchets maintenant essentielle, du moins aux USA, doit être démontrée. Pour ce faire, l'opérateur du site doit alors démontrer que le niveau de fermeture des ouvertures souterraines est suffisamment faible pour permettre une reprise éventuelle sécuritaire des déchets. Ces

simulations sur de longues durées utilisent des lois constitutives (typiquement avec écrouissage isotrope) calibrées sur des essais de fluage (généralement monotones) de longues durées.

Un autre problème étudié de façon détaillée ces dernières années à cause de ses répercussions environnementales et économiques, est celui de la fermeture des cavernes artificielles ou des réservoirs naturels dans des massifs de sel servant à entreposer du gaz naturel, des hydrocarbures lourds ou des gaz divers (ex.: azote). Un de ces complexes, le complexe de cavernes de Manosque (Vouille et al. 1996) en France en opération depuis 1969 a permis d'entreposer 33 Mm^3 d'hydrocarbures de 1969 à 1993. Ses cavernes d'environ 400 m de hauteur furent minées par dissolution à une profondeur variant de 400 à 1500 m sous la surface. Elles ont une capacité d'environ $6.3Mm^3$ et permettent d'entreposer du pétrole brut, de l'huile, du naphte, etc.

Si on omet les problèmes associés à l'influence du type d'hydrocarbure sur la détérioration des parois de ces cavernes par diffusion moléculaire du fluide dans la structure cristalline du massif ou autre (Adler et al. 1996; Cosenza et Ghoreychi 1996; Horseman 1988), la prédiction de la subsidence et de la fermeture de ces cavernes demeurent des enjeux fondamentaux. La simulation du comportement de 14 cavernes en France (de Menezes 1998) a montré la grande influence sur les résultats du modèle constitutif particulièrement lorsque des extrapolations à long terme (plus de 50 années) sont tentées. Il apparaît aussi de plus en plus que les cycles de vidange et de remplissage de ces réservoirs constituent de véritables chargements non monotones assimilables à des chargements cycliques.

L'analyse de la stabilité d'ouvertures souterraines dans les mines de sel, de potasse ou diverses roches tendres est aussi un champ d'application intéressant. La question de l'optimisation du taux de défruitement et de la récupération des piliers demeurent constamment des questions fondamentales sur laquelle la profitabilité d'une opération se mesure, d'où l'importance de mieux comprendre le comportement et

tenter d'optimiser la séquence de minage.

Malgré les efforts importants investis dans le développement d'outils permettant la résolution de ces problèmes, la caractérisation constitutive des matériaux (comme le sel gemme) demeure toujours l'enjeu fondamental. En fait, la prédiction du comportement à long terme, particulièrement sous des conditions d'historiques de chargements complexes (par exemple avec chargements et déchargements comme dans le cas des réservoirs pétroliers) et sous des conditions non isothermales rendent ces exercices plutôt complexes. La prédiction du comportement doit s'inscrire dans une démarche méthodologique rigoureuse ayant à sa base un ou des modèles constitutifs rigoureux, flexibles, robustes et suffisamment généraux. En supposant que de tels modèles sont disponibles, il s'agit par la suite d'obtenir un cadre expérimental suffisamment riche permettant une identification adéquate des principales variables et constantes des modèles. Lorsque ces conditions sont réunies, il est alors nécessaire de disposer d'outils numériques puissants permettant de résoudre efficacement des problèmes complexes tridimensionnels.

Cette thèse vise à présenter une telle démarche, avec comme point de départ le modèle SUVIC (*Strain-rate-history-dependent Unified Viscoplastic model with Internal state variables for Crystalline materials*) (Aubertin 1989). Ce modèle est reconnu comme suffisamment flexible pour permettre une description adéquate du comportement du sel gemme à l'intérieure d'une grande plage de conditions de sollicitation. Le modèle constitutif SUVIC a été développé principalement pour la phase ductile, là où les déformations intracristallines dominent le comportement inélastique. Le modèle a plus tard été étendu pour tenir compte des effets associés à la fracturation, la dilatance et la contrainte moyenne dans une version avec endommagement SUVIC-D (SUVIC with Damage) (Sgaoula 1997).

1.3 Méthodologie des travaux

Lors de ces travaux, l'auteur a tout d'abord procédé à la réalisation d'une revue des aspects constitutifs et numériques pertinents à la description du comportement du sel gemme. Il est stimulant de remarquer dans ces domaines la profusion de travaux. Beaucoup de travaux originent des milieux de la mécanique appliquée classique et de la géomécanique. Les chercheurs s'intéressant au comportement du sel gemme ont des formations et des champs d'intervention variés; pour ces raisons, les contributions couvrent un large éventail de techniques et d'approches.

Une attention toute particulière a été accordée à la revue des travaux précurseurs du professeur Aubertin et de certains de ses collègues à l'École Polytechnique (ex.: Professeurs D.E. Gill et B. Ladanyi, maintenant à la retraite) et anciens étudiants (ex.: Dr. J. Sgaoula et Mr. S. Servant). Ces travaux sont importants, tant en nombre qu'en intérêt, et ils ont permis des percées intéressantes dans ce domaine. Ils ont évidemment servi de fondement à ces travaux.

L'étude de la littérature a aussi permis d'identifier des résultats expérimentaux importants et diversifiés disponibles pour le sel gemme.

La théorie est une chose, mais il était important que, dans le cadre de ces travaux, l'auteur puisse toucher à ce matériau (le sel gemme) et le voir réagir sous certains états de sollicitation. Cette thèse n'est pas de nature expérimentale, mais selon l'auteur, on ne pourrait espérer obtenir un niveau adéquat de compréhension du comportement d'un tel matériau sans le passage au laboratoire et l'observation directe de la réponse. Cet exercice a permis de constater que le comportement du sel gemme est intéressant à plusieurs égards. Les essais de laboratoire de l'auteur ont entre autre permis, comme on le verra plus loin, de mettre en évidence certains éléments fondamentaux du comportement du sel gemme.

L'auteur s'est aussi préocuppé de considérations d'ordre théorique vis-à-vis du modèle utilisé. Comment se compare t-il par rapport à d'autres modèles? Peut-on le mettre dans une format plus général à partir duquel on peut introduire certains

éléments nouveaux? Quelle est la signification physique de ces différentes variables et constantes? Comment peuvent-elles être déterminées? Voilà certaines des questions ayant animé les travaux à caractère plus théorique.

Encore une fois, la théorie est une chose, la pratique en est une autre. La partie la plus difficile de ces travaux a été sans nul doute la question de la détermination des constantes. Au début de ces travaux, l'auteur ne réalisait pas la complexité et les difficultés associées à cette question. L'espace théorique, aussi complet soit-il, ne représente que bien pâlement l'espace réel meublé d'hétérogénéités et de comportements inattendus. À cet égard, il était important de s'en tenir le plus possible à des considérations simples et physiquement rigoureuses afin de limiter le nombre de degrés de liberté lors de la détermination de constantes.

Des constantes préliminaires ont ainsi été obtenues de façon analytique à partir de résultats d'essais de laboratoire. Ces constantes ont par la suite été optimisées avec des simulations numériques afin d'obtenir des constantes optimales.

La dernière composante de ce travail a été essentiellement virtuelle. Des simulations numériques diverses ont ainsi été effectuées pour des conditions isothermales et anisothermales pour divers types de chargement. Ces simulations ont permis de tester la robustesse du modèle et son potentiel. Elles ont aussi confirmé certaines hypothèses de travail comme la nécessité d'utiliser des modèles à écrouissage mixte et la pertinence d'introduire dans le cadre constitutif des phénomènes de restauration statique et dynamique.

En bout de ligne, on visait une validation du modèle constitutif et des outils numériques, et la méthodologie adoptée a permis de bien rencontrer ces objectifs.

1.4 Structure et contenu de la thèse

Les différents points qui seront traités dans cette thèse incluent :

- la revue des aspects constitutifs associés au comportement inélastique du sel gemme et sa description avec le modèle SUVIC;
- la présentation du modèle SUVIC dans un cadre plus général permettant, entre autre, l'inclusion de composantes non isothermales;
- la réalisation de certaines vérifications thermodynamiques au niveau du caractère dissipatif du modèle;
- la présentation détaillée d'une approche d'identification des constantes pouvant permettre l'obtention d'un jeu préliminaire à partir d'observations expérimentales pour un sel particulier;
- l'obtention des valeurs optimales de ces mêmes constantes à partir d'outils de minimisation;
- la description de l'environnement et des modèles numériques utilisés pour l'implantation du modèle dans un code d'éléments finis en trois dimensions;
- la simulation et la prédiction de divers essais de laboratoire;
- la réalisation d'applications sur des problèmes uni et tridimensionnels.

Plus spécifiquement, le chapitre 2 présente certains aspects du comportement mécanique du sel gemme et les principaux essais utilisés. La notion d'historique du chargement y est présentée en termes généraux. On y décrit les principaux facteurs d'influence affectant le comportement dans la plage de comportement ductile et semi-fragile. Certains des modèles constitutifs les plus importants pour décrire le comportement du sel gemme sont aussi introduits. Le modèle SUVIC est par la suite décrit dans la version qui était utilisée au début de ces travaux. Il s'agit d'un modèle unifié, avec trois types de variables internes, soit une variable cinématique B et deux variables isotropes R et K. Le module endommagement SUVIC-D est

aussi présenté. Ce chapitre se termine par une discussion sur la détermination des constantes du modèle.

Le chapitre 3 comporte d'abord une courte présentation sur les méthodes numériques utilisées pour décrire le comportement viscoplastique pour les géomatériaux. On y discute des principales méthodes disponibles pour les milieux continus et discontinus. Une attention particulière est portée à la méthode des éléments finis, utilisée dans ces travaux, pour laquelle les équations de base sont présentées. On traite plus en détails des aspects critiques liés à l'analyse des problèmes non linéaires comme l'inversion de la matrice de rigidité et l'intégration de la loi de comportement. Parmi les méthodes d'intégration, on traite plus particulièrement de la méthode θ pour laquelle on explique de façon détaillée la procédure de construction du Jacobien.

Le chapitre 4 présente des résultats d'essais expérimentaux réalisés par l'auteur. On y rappelle les raisons ayant motivé le choix d'un sel particulier comme matériau de référence (sel d'Avery Island). On décrit aussi, brièvement, la base expérimentale disponible obtenue de la littérature. Des résultats d'essais à taux de chargement contrôlé et à contraintes de confinement élevées, réalisés par l'auteur, sont présentés. On aborde aussi l'évaluation et la détermination du seuil d'endommagement pour ces différents essais à partir de travaux antérieurs réalisés sur ce matériau.

Le chapitre 5 traite des modifications apportées par l'auteur au modèle SUVIC et certaines considérations au niveau de son implantation numérique. Plus précisément, on y présente les modifications apportées à la description de l'état stationnaire et des ajustements simplifiant la détermination de la contrainte interne par rapport à la contrainte appliquée. Une brève présentation est aussi faite de certains éléments relatifs au module d'endommagement. Une section importante du chapitre 5 porte sur la réécriture du modèle dans un cadre plus général incluant les notions de fonction d'écoulement, de règle d'écoulement, et de lois évolutives écrites dans un cadre non isothermal. Également on présente une vérification de la consistance thermodynamique des équations du modèle. Le chapitre se termine par une présentation

sur l'implantation numérique du modèle dans le code d'éléments finis ZéBuLoN, développé initialement à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris et modifié ici pour les besoins du projet. On y décrit l'environnement utilisé, le code et la méthode de construction du Jacobien pour SUVIC.

Le chapitre 6 porte sur les applications du modèle SUVIC. Il peut être divisé en trois sections principales. Dans un premier temps, on décrit en détail une méthode visant l'obtention des constantes du modèle SUVIC. Cette méthode repose sur l'analyse de données expérimentales et sur des considérations micro-mécanistiques. Dans un deuxième temps, on raffine le jeu de constantes en procédant à des exercices de minimisation en utilisant des codes numériques. Dans un troisième temps, on procède à diverses analyses numériques afin de montrer le potentiel du modèle pour résoudre des problèmes uni et tridimensionnels.

Cette thèse est complétée par une discussion générale au chapitre 7 dans laquelle la nécessité d'utiliser des modèles à écrouissage mixte comme SUVIC est abordée. Au chapitre 8, une conclusion et des recommandations sont présentées. En annexe, des résultats détaillés d'essais de laboratoire utilisés dans cette thèse sont présentés.

1.5 Présentation des éléments novateurs

Les éléments novateurs présentés dans cette thèse sont relativement nombreux et ils se situent aux plans théoriques, expérimentaux et numériques. Cette recherche avait comme objectif original, l'introduction du modèle SUVIC dans un cadre numérique approprié. Mais, au fil du travail, certains autres éléments ont émergé. Il est apparu qu'il y avait place pour une amélioration de la formulation du modèle et qu'une attention particulière devait être portée à la question de la détermination des constantes. On peut résumer de façon succincte les principales contributions contenues dans cette thèse comme:

- la reconstruction d'un ensemble de résultats d'essais de laboratoire réalisés sur le sel d'Avery Island depuis 20 ans, dans le but d'inclure la totalité de l'historique de chargement des éprouvettes (même pour les essais de fluage et de relaxation);

- la réalisation d'essais de laboratoire mettant en évidence les composantes d'écrouissage isotrope et cinématique du modèle;

- l'utilisation dans le modèle SUVIC d'une fonction en sinus hyperbolique pour décrire l'état stationnaire de l'écoulement inélastique;

- le développement pour SUVIC d'une représentation quelque peu simplifiée de la grandeur des variables internes à saturation;

- le développement d'un traitement plus général du modèle SUVIC permettant de définir celui-ci dans le cadre de la viscoplasticité classique. Cette présentation permet aussi d'inclure de façon plus naturelle l'effet de la température;

- la vérification de la consistance thermodynamique et du caractère dissipatif de SUVIC et la détermination de conditions pour lesquelles ces conditions sont satisfaites;

- l'introduction d'une écriture plus complète du module d'endommagement de SUVIC-D permettant le passage de conditions axisymétriques aux conditions tridimensionnelles;

- l'implantation de SUVIC et SUVIC-D dans un code d'éléments finis tridimensionnel orienté objet;

- la construction des différentes fonctions résiduelles requises pour l'utilisation de la méthode d'intégration implicite θ;

- le développement d'une méthodologie analytique basée sur des données expérimentales macroscopique et sur des considérations micro-mécanistiques pour déterminer un jeu de constantes préliminaires pour un matériau donné;
- l'utilisation de méthodes numériques afin d'optimiser le jeu de constantes de SUVIC;
- la réalisation de simulations pour des conditions isothermales et anisothermales visant à décrire les résultats d'essais de laboratoire;
- la réalisation de calculs numériques pour des géométries complexes comme le cylindre à paroi épaisse et le cylindre à paroi mince.

L'ensemble des travaux réalisés ici devrait favoriser la compréhension du comportement du sel gemme et des modèles à variables d'état internes, tel le modèle SUVIC. Avec des outils numériques des plus performants, on peut croire que la communauté géomécanique est présentement prête à utiliser de tels modèles, qui offrent, comme on le verra dans ce qui suit, d'enviables possibilités.

Chapitre II

COMPORTEMENT MÉCANIQUE DU SEL GEMME

2.1 Comportement du sel gemme en laboratoire

2.1.1 Essais usuels

Cette section présente les principales caractéristiques du comportement mécanique du sel gemme. Comme plusieurs types de géomatériaux, le sel gemme et les roches salines en général, montrent une déformation différée lorsqu'ils sont soumis à un chargement soutenu (ex.: Cristescu et Gioda 1994). L'analyse du comportement du sel gemme passe par l'étude de son comportement en laboratoire. Les essais de laboratoire couramment utilisés incluent (ex.: Senseny et al. 1993; Hunsche et al. 1994):

- l'essai de fluage pour lequel on mesure la déformation en fonction du temps d'un matériau soumis à une contrainte unidimensionnelle ou triaxiale constante ($\dot{\sigma} = 0$) et à température constante ou variant par paliers.
- l'essai à taux de déformation contrôlé (CSR pour *constant strain rate*) pour lequel on mesure la charge (contrainte) appliquée en fonction de la déformation

lors d'un essai où le taux de déformation ($\dot{\epsilon} =$ *constante*) et la température sont constantes ou variant par paliers.

- l'essai à taux de chargement contrôlé (CRS pour *constant rate of stress*) pour lequel on mesure la charge appliquée ($\dot{\sigma} =$ *constante*) en fonction de la déformation lors d'un essai où le taux de chargement et la température sont constants ou variant par paliers.

- l'essai de relaxation pour lequel on mesure la contrainte appliquée en fonction du temps lors d'un arrêt de la mise en charge dans le cadre d'un essai de fluage ou CSR (plusieurs variantes sont possibles à ce niveau mais habituellement $t_0 \leq t \leq t_1 \Rightarrow \dot{\epsilon} \geq 0$ et $t > t_1 \Rightarrow \dot{\epsilon} = 0$).

- D'autres essais sont aussi utilisés comme les essais avec cylindre à paroi épaisse. Ces essais permettent de mettre en évidence d'autres éléments du comportement de ce matériau.

Il est à noter qu'il est difficile d'effectuer pour le sel gemme, comme pour tous les géomatériaux, des essais de traction analogues à ceux réalisés sur les métaux pour lesquels des éprouvettes sont formées en conséquence. Pour créer des états de traction dans les éprouvettes, on utilise plutôt des astuces de laboratoire comme c'est le cas pour l'essai CTC-RTE (*Confined Triaxial Compression test - Reduced Triaxial Extension*) lors d'un essai CSR où l'on produit un état de traction axial en créant un déviateur approprié. D'autres essais permettent de mesurer la résistance en traction de façon indirecte comme l'essai brésilien, par exemple.

2.1.2 Observations générales

De ces différents essais on peut remarquer que, indéniablement, les effets du temps sont plus prononcés pour le sel gemme et les roches salines que pour toute autre roche (Aubertin et al. 1999). Lorsque chargé lors d'un essai de compression uniaxiale, la

résistance du sel gemme à la rupture C_0 est de l'ordre de 20 à 40 MPa, c.-à-d. comparable à celle du béton. Le sel gemme, lorsqu'il est comparé aux autres roches à faible porosité, est sans doute la roche ayant la plus faible résistance. De plus, lorsqu'il est chargé lors d'un essai triaxial, le sel gemme montre un comportement plus ductile que le plupart des autres roches. Dans certaines conditions de chargement induites dans le cadre d'un essai de compression triaxiale, le sel gemme (et les roches salines) montrent un comportement qui peut être considéré comme presque purement plastique et isovolumétrique (Senseny et al. 1989). Ce comportement dit ductile est comparable en fait à celui des métaux (la ductilité est définie comme la propriété des matériaux de se déformer sans se rompre).

Même si le sel gemme est le plus déformable de tous les types de roches à température ambiante et à faible pression, il demeure que ce matériau ne peut habituellement pas, dans ces conditions, se déformer de façon homogène et purement plastique. Les déformations permanentes importantes du sel gemme sont considérées comme partiellement fragiles, d'où l'intérêt d'analyser le comportement de ce matériau dans l'optique de la notion de semi-fragilité, qui représente essentiellement une zone transitionnelle entre un régime purement fragile et purement ductile. On décrit dans ce qui suit chacun des régimes d'écoulement inélastique afin de présenter leurs caractéristiques et de montrer les différences.

2.1.3 Comportement ductile

Très peu de roches peuvent être considérées comme vraiment ductiles (ou purement plastiques) pour les plages usuelles de chargement. Le régime ductile est observé pour certains métaux et autres matériaux cristallins soumis à des conditions de chargement particulières. Certaines roches et minéraux peuvent néanmoins être analysés en utilisant la notion de ductilité, compte tenu des similitudes de comportement offertes, des points de vue macroscopique et microscopique, avec les métaux et certains autres matériaux cristallins (Nicolas et Poirier 1976; Poirier 1985; Barber 1985;

Barber 1990; Munson et Wawersik 1993).

Dans le régime ductile, on considère lors d'un essai CSR, par exemple, que le matériau se comporte de façon élastique jusqu'à ce que la contrainte déviatorique atteigne une résistance d'écoulement plastique σ_y fonction de la résistance au glissement sur les plans de dislocations et représentée par la résistance au cisaillement critique (RCC). La résistance au cisaillement critique (RCC) peut être aussi faible que $1MPa$ pour des cristaux de NaCl et KCl (Aubertin et al. 1998).

Le comportement du sel gemme a souvent été étudié au niveau microstructural, c'est-à-dire directement à l'échelle des dislocations. Les paragraphes suivants fournissent un rappel de certains éléments importants du comportement microstructural du sel gemme dans le régime ductile.

L'écoulement ductile est contrôlé par la réorganisation et le mouvement interne de systèmes de glissement disponibles sans création de vides. Le mouvement des dislocations est alors régi par des considérations du réduction de bilan énergétique interne global du matériau (Skrotzki et Haasen 1984). En ce sens, les métaux cubiques à faces centrées (C.F.C.) sont intéressants en raison des affinités qu'ils offrent avec le sel gemme (un matériau C.F.C. lui-même) (Senseny et al. 1993). On remarque pour ces matériaux deux modes de déformation:

- mouvement des dislocations (glissement, glissement dévié et montée);
- diffusion moléculaire (mécanismes de Nabarro-Herring et de Cobble).

On peut mentionner à l'instar de Poirier (1985) que le glissement et le glissement dévié des dislocations impliquent essentiellement le déplacement et la réorganisation des défauts cristallins. La montée des dislocations et les mécanismes de diffusion impliquent, pour leur part, des déplacements de matière ou des ruptures de liens cristallins. Ces différents modes de déformation sont évidemment distincts au niveau énergétique et correspondent à des états de température et de contraintes particuliers.

Les observations faites sur le sel gemme ont montré que cette roche peut se

comporter de façon ductile à température ambiante si le taux de déformation est suffisamment faible et la pression de confinement suffisamment élevée (Sgaoula 1997). Un des facteur contrôlant le comportement ductile du sel gemme est la multiplicité des systèmes de glissement. Pour le cas de la plasticité parfaite, un matériau nécessite un minimum de 5 systèmes de glissement pour maintenir une continuité du matériau aux frontières des grains (Murrell 1990). Le sel gemme est caractérisé à température ambiante par deux systèmes de glissement indépendants. Toutefois, l'augmentation de la température et de la contrainte de confinement permettent l'activation d'autres systèmes de glissement.

La ductilité, conséquemment, augmente avec l'augmentation de la température (Hirth 1982). L'effet de la température est montré de façon schématique à la figure 2.1. L'augmentation de la température tend à diminuer la résistance intrinsèque entre les plans de glissement définies plus haut comme la résistance au cisaillement critique (RCC) sur les plans de glissement et réduit ainsi la différence de résistance observée entre les différentes familles de systèmes de glissement. Toutefois, à mesure que le nombre de dislocations augmente dans le matériau, l'interaction entre elles et avec les autres obstacles (ex.: inclusions, inhomogénéités, etc.) tend à induire une rigidification du matériau assimilable à l'écrouissage (c.-à-d. une diminution du taux de déformation dans un essai de fluage, par exemple).

Afin de minimiser l'énergie de déformation accumulée, les dislocations tendent progressivement à se distribuer d'une manière hétérogène en formant des éléments microstructuraux souvent appelés murs et cellules (Nix et al. 1985). Ces murs et ces cellules ont des rigidités différentes. Les contraintes à l'intérieur du matériau ne sont alors pas distribuées de façon uniforme. Il y a des régions où la contrainte locale peut excéder la contrainte appliquée et d'autres où elle est moindre. On parle alors de contraintes internes différant de la contrainte appliquée.

À la température de fusion T_m, le matériau devient théoriquement *parfaitement* visqueux. À température modérée, lorsque $\frac{1}{4}T_m \leq T \leq \frac{1}{2}T_m$, la déformation vis-

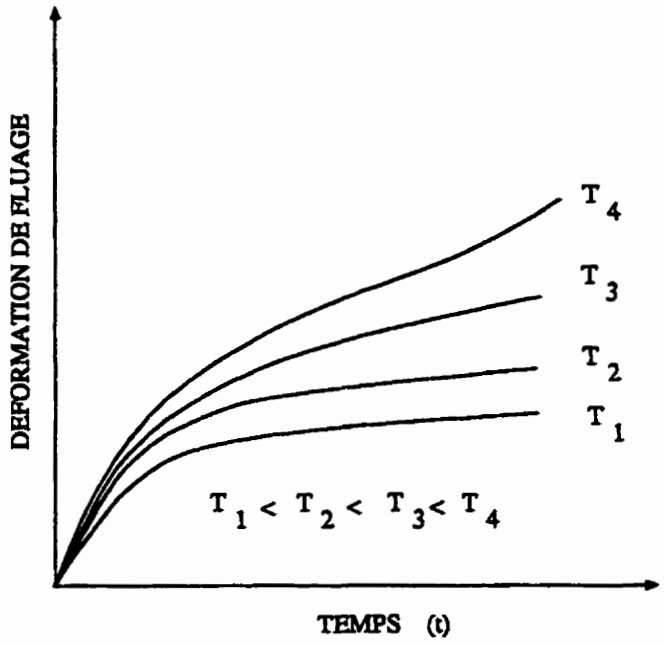


Figure 2.1: Influence de la température T lors d'essais de fluage typiques. On remarque que la déformation de fluage augmente lorsque la température augmente.

coplastique est surtout contrôlée par le glissement et le glissement dévié des dislocations. Les obstacles et leur réorganisation dans la structure contrôlent alors le mode de déformation observé (Kocks 1976). À température élevée, lorsque $\frac{1}{2}T_m \leq T < T_m$, la déformation devient surtout contrôlée par des mécanismes diffusifs et par la remontée de dislocations.

La réduction du taux de déformation $\dot{\epsilon}$ favorisera l'augmentation du caractère ductile du matériau (Hunsche 1988; Hunsche et Albrecht 1990). Cela est attribuable au fait qu'un faible $\dot{\epsilon}$ permet à la contrainte déviatorique de demeurer sous le seuil d'endommagement (qui sera traité plus loin) puisque la contrainte d'écoulement à un certain niveau de déformation sera plus grande si le taux de déformation est plus élevé. Une augmentation rapide de la contrainte d'écoulement peut être observée si le taux de déformation est augmenté soudainement (Handin et al. 1986; Senseny et al. 1993). Un déchargement partiel durant un essai CSR induit habituellement une réponse élastique.

La figure 2.2 montre que la déformation en fluage augmente avec la contrainte déviatorique. L'augmentation de la contrainte déviatorique accroît aussi le caractère fragile de la déformation. Lorsque la contrainte déviatorique (S) est faible, les mécanismes de déformation dominants sont surtout associés à la remontée des dislocations (déplacements de matière lors de la déformation, ex.: Spiers et Carter 1998).

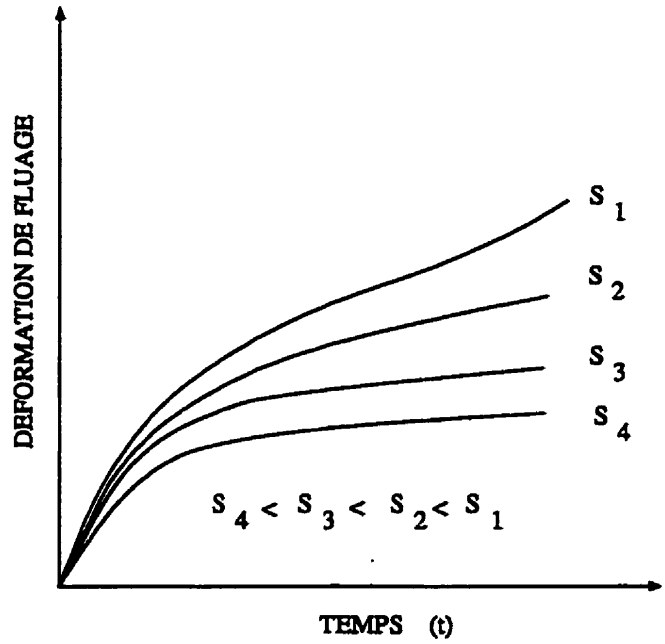


Figure 2.2: Influence de la contrainte déviatorique S lors d'essais de fluage typiques. On remarque que la déformation de fluage augmente lorsque la contrainte déviatorique augmente.

De façon générale, on peut dire que le régime ductile est caractérisé par l'absence de dilatance (c.-à-d. les déformations sont isovolumétriques) et par une très faible sensibilité à la contrainte moyenne (Evans et al. 1990). L'augmentation de la contrainte de confinement σ_c favorise l'augmentation de la ductilité (Handin et al. 1986; Senseny et Hansen 1987; Hallam et Ashby 1990), puisqu'elle rehausse le seuil d'endommagement en inhibant la formation de microfissures.

2.1.4 Comportement fragile

Les roches considérées fragiles à température ambiante sont caractérisées par une RCC élevée (Aubertin et al. 1998). Les dislocations demeurent pratiquement immobiles, même à des niveaux de contraintes où la croissance et la nucléation des microfissures peuvent avoir lieu. Le processus de déformation fragile devient alors essentiellement un processus de microfissuration.

Sommairement, la déformation inélastique en régime fragile débute lorsqu'il y a déviation de la linéarité sur la courbe contrainte-déformation. On remarque alors une apparition (ou une hausse) de l'activité acoustique (AE) (Sammonds et al. 1989; Eberhardt et al. 1996). Cette condition identifiée comme le seuil d'initiation de l'endommagement (DIT - le Damage Iniation Threshold) (Aubertin et al. 1992; Aubertin et al. 1993; Aubertin et al. 1995) survient typiquement entre 30 et 70 % de la contrainte de rupture. Ce seuil peut être décrit avec un critère dans l'espace des contraintes (Cristescu 1989; Gramberg 1989; Hallam et Ashby 1990; Aubertin et Simon 1997). Le DIT semble indépendant du taux de chargement et peut être considéré comme une vraie propriété du matériau. Au cours du régime fragile, les processus de microfissuration progressent avec l'augmentation de la densité et la longueur des défauts jusqu'à ce qu'une relation clairement non linéaire apparaisse sur la courbe de déformation axiale. La déformation volumétrique devient alors proche d'un minimum. La déformation latérale, pour sa part, évolue de plus en plus rapidement. Le module de déformation axiale commence alors à décroître à mesure que des fissures plus longues sont créées à la suite de la coalescence des défauts existants. Durant tout le chargement, la distribution des microfissures demeure néanmoins plus ou moins uniforme. Près du pic, la déformation se localise et des plans de fractures macroscopiques se forment (Santarelli et Brown 1989; Wawersik 1988; Hobbs et al. 1990). La valeur de la résistance au pic dépend non seulement de la contrainte de confinement mais aussi du taux de déformation et de l'histoire mécanique de l'échantillon.

On peut ajouter que des résultats expérimentaux montrent clairement (Schmidtke

et Lajtai 1985) que le comportement fragile des roches dépend aussi du temps. Le comportement fragile partage de plus avec le comportement ductile la nécessité que soit introduite la notion de directionnalité dans l'analyse des mécanismes de déformation. Les deux régimes nécessitent donc une représentation constitutive avec expressions tensorielles (Aubertin et al. 1998). Toutefois, contrairement au comportement ductile, le comportement fragile induit un ramollissement microscopique qui modifie les paramètres élastiques. Il est aussi moins sensible à la température. Dans le régime fragile, la contrainte moyenne joue un rôle majeur puisqu'elle influence le seuil de microfissuration et l'ampleur des déformations axiales et radiales.

Le comportement fragile est en résumé contrôlé par l'initiation, la propagation et la coalescence de microfissures (Sgaoula et al. 1995). Lorsque les microfissures se regroupent, on obtient des fissures macroscopiques. L'apparition et la propagation de microfissures provoquent une dilatance et conduit à une perte, subite ou progressive, de la résistance à la suite de la localisation de la déformation. Pour les roches tendres, la propagation de microfissures et le glissement frictionnel sur les faces exposées sont dominants lors de chargements en traction et en compression à faibles contraintes de confinement (Aubertin et al. 1994).

2.1.5 Comportement semi-fragile

Une zone transitoire existe entre les deux états précédents. Elle est caractérisée par une microfissuration (ou endommagement) distribuée et une certaine plasticité (Evans et al. 1990). Les matériaux semi-fragiles présentent souvent initialement un comportement ductile suivi d'une phase d'endommagement dont l'étendue dépend des conditions de chargement. Le régime semi-fragile a surtout été observé pour les roches constituées de minéraux mous comme la calcite (marbre), la halite (sel gemme) et la sylvite (potasse) (Aubertin et al. 1998). Ce comportement transitionnel a aussi été observé pour des minéraux durs et des roches dures comme la clinopyroxénite et le granite à des températures et des pressions élevées (Carter et Tsenn 1987).

L'essai de fluage permet pour le sel gemme de caractériser la notion de semi-fragilité. On peut ainsi remarquer de la figure 2.3, 4 phases d'écoulement typique lors de cet essai:

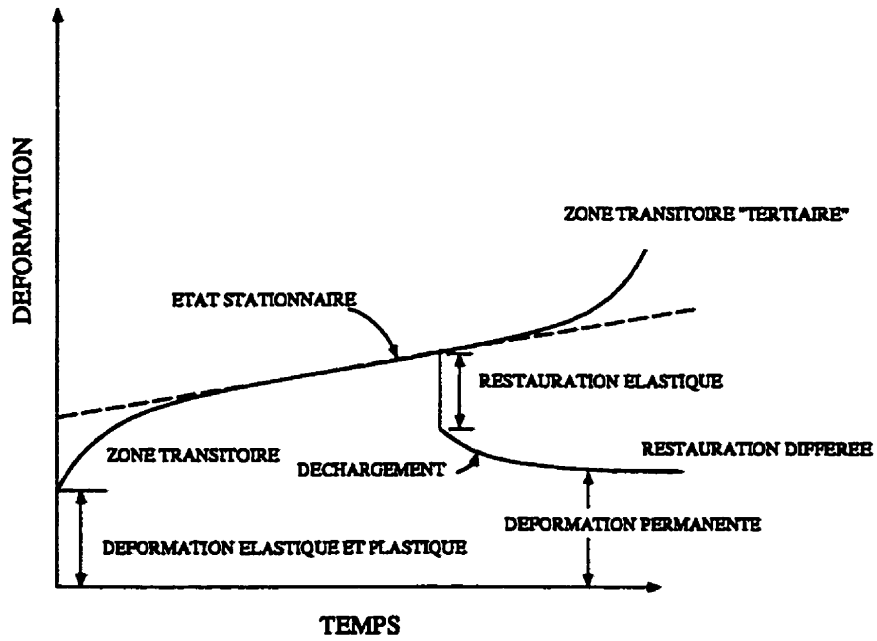


Figure 2.3: Schéma d'un essai de fluage typique.

1. une phase élastique instantanée;

2. une phase de fluage primaire durant laquelle de l'écrouissage produit un ralentissement de la vitesse de déformation;

3. une phase de fluage secondaire dite stationnaire durant laquelle la vitesse de déformation est relativement constante. Selon l'échelle et les conditions de l'essai, elle peut ne pas être visible. Durant cette phase, on pourra observer l'existence d'un taux de déformation stationnaire $\dot{\epsilon}$ essentiellement indépendant de l'historique du chargement pour un écoulement ductile (Aubertin et al. 1991a; Ohashi et al. 1986);

4. Une phase de fluage tertiaire où le caractère fragile devient progressivement dominant. La vitesse de déformation augmente progressivement et les phénomènes d'endommagement deviennent plus importants.

Il est à noter que le fluage secondaire ou l'écoulement en phase stationnaire est un cas particulier d'écoulement viscoplastique dans lequel le matériau ne semble pas subir d'écrouissage.

Lors d'un déchargement, on peut observer:

1. une restauration élastique instantanée;

2. une restauration différée dans le temps.

La difficulté de décrire le comportement d'un matériau semi-fragile comme le sel gemme est inhérente au fait que les caractères ductile et fragile peuvent avoir une importance très variable selon les conditions de chargement. La figure 2.4 donne une représentation schématique des limites des différentes plages de comportement exprimées en termes de la résistance à la compression uniaxiale C_0. On remarque de cette figure que l'augmentation de la contrainte de confinement favorise un comportement à caractère plus ductile et que l'augmentation de la contrainte déviatorique favorise un comportement plus fragile.

La transition entre le domaine semi-fragile et ductile est caractérisée par une absence de dilatance et de sensibilité de la résistance à la pression de confinement (Evans et al. 1990). Le passage du régime ductile au régime semi-fragile est initié lorsque la contrainte déviatorique excède le DIT. Le régime de transition entre le régime ductile et le régime fragile montre que la plasticité intracristalline et la fracturation (fragilité) peuvent coexister simultanément (Carter et Hansen 1983). Le seuil de propagation des microfissures au début du régime semi-fragile dépend de la contrainte de confinement, de la température et à un degré moindre du taux de déformation (Aubertin et al. 1992; Aubertin et Gill 1993; Sgaoula 1997).

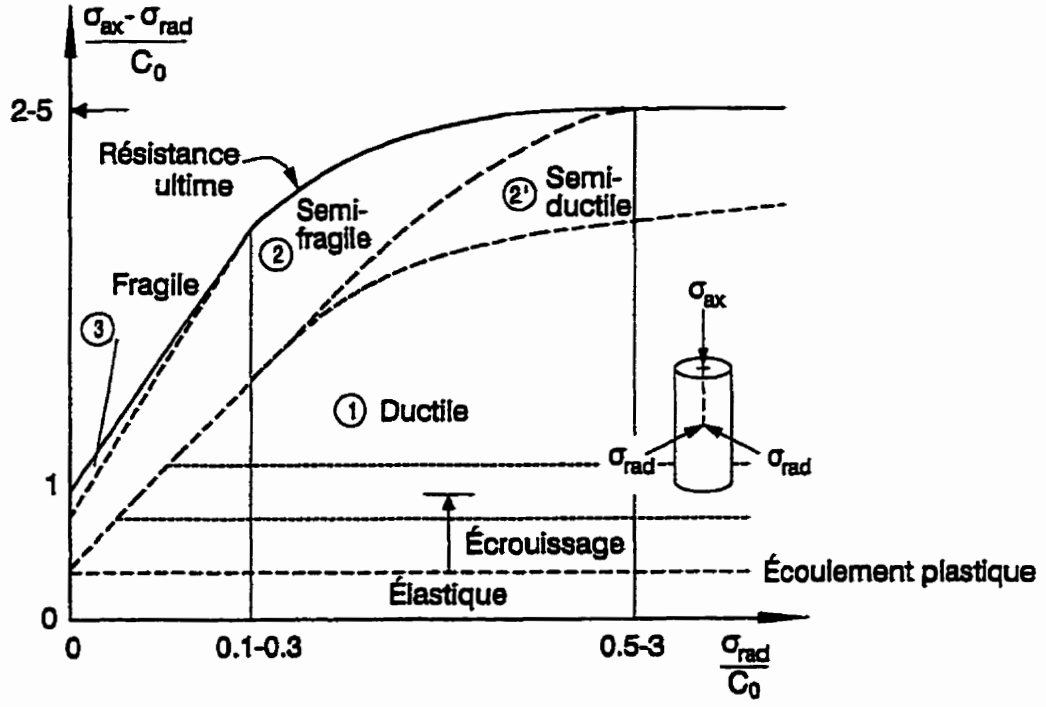


Figure 2.4: Représentation schématique des limites des régimes ductiles, semi-ductiles, semi-fragiles et fragiles en termes du rapport des contraintes appliquées sur la résistance C_0.

À noter que le régime semi-fragile est atteint différemment selon que l'on parle de roches dures ou de roches molles. Pour les roches molles, la microfissuration est amorcée lorsque le DIT est dépassé en augmentant suffisamment la contrainte déviatorique ou en réduisant la contrainte moyenne. Dans le cas de roches dures, le passage de la déformation fragile à semi-fragile est caractérisé par une virtuelle disparition des phénomènes de localisation des déformations (Sgaoula et al. 1992). Pour les roches dures, le DIT est généralement atteint avant que la résistance à l'écoulement plastique ne soit atteinte. Afin d'obtenir un comportement semi-fragile (ou même ductile), la pression et (ou) la température doivent être augmentées suffisamment pour que l'écoulement plastique ait lieu avant que la résistance au pic ne soit atteinte (Aubertin et al. 1998).

Dans tous les cas, une diminution du taux de chargement (lors d'un essai CSR) favorise le comportement plus ductile puisque en réduisant la contrainte d'écoulement

déviatorique, on peut rester proche et même sous le DIT. Plus la contrainte déviatorique sera grande (au dessus du DIT), plus les processus fragiles seront actifs, c'est-à-dire produisant plus de dilatance et d'endommagement dans le matériau (Aubertin et al. 1998).

La courbe contrainte déformation dans le régime semi-fragile montre des similitudes avec les courbes contraintes-déformation ductiles et fragiles. De la dilatance survient au-delà du DIT et la déformation est dépendante de la pression mais à un degré moindre que dans le régime fragile. Les déformations volumétriques sont donc plus petites dans le régime semi-fragile que dans le régime fragile. La microfissuration demeure diffuse jusqu'à la résistance au pic.

Comme il a été démontré expérimentalement pour le sel gemme à contraintes de confinement faibles et moyennes (Sgaoula 1997), la localisation générale ne semble pas coïncider avec la résistance au pic maximale mais se développe au-delà de la résistance ultime. Au niveau de l'échantillon, le matériau peut donc être considéré comme un continuum, même au début de la phase de ramollissement. Une certaine localisation survient néanmoins mais elle est restreinte par les processus de déformation plastique.

La microfissuration est généralement considérée comme un processus irréversible, mais dans certaines roches semi-fragiles, l'effet de la microfissuration peut être réduit en raison d'une cicatrisation. Ceci réduit les effets de chargement antérieurs sur la détérioration des paramètres de résistance, tel qu'on a pu l'observer pour le sel gemme à pressions élevées en présence d'humidité (Brodsky 1990).

Par ailleurs, à fortes contraintes de confinement et déviatoriques (voir la figure 2.4), le matériau peut devenir semi-ductile (Shimamoto 1989). Un tel comportement est quelque peu similaire à celui des métaux ductiles dans lesquels la croissance des vides est induite par l'accumulation des dislocations durant la déformation inélastique (Ashby 1983; Cocks et Leckie 1987).

2.2 Comportement du sel gemme in situ

2.2.1 Particularités

L'écoulement naturel du sel survient habituellement dans les 5 premiers kilomètres de la croûte terrestre. Les températures mesurées in situ sont généralement inférieures à 150° C. Pour cette raison, le comportement du sel gemme a surtout été analysé pour l'intervalle de température 20 – 200° C. Les taux de déformation mesurés et utilisés en laboratoire sont généralement plus faibles que $10^{-10}s^{-1}$ et les pressions de confinement inférieures ou égales à 30 MPa (Spiers et Carter 1998).

Le sel gemme, tel qu'il existe dans des conditions in situ, est un matériau pouvant être plus ductile, semi-fragile ou fragile selon les conditions de chargement. Les principaux facteurs d'influence sur son comportement in situ sont évidemment les mêmes qu'en laboratoire. Les différences importantes entre le comportement en laboratoire et le comportement in situ résident dans le fait que le sel gemme in situ est souvent inhomogène et anisotrope. Il est constitué de couches plus molles ou plus raides, ce qui affecte son comportement de façons différentes. Par exemple, le sel du site du WIPP est constitué de couches aux propriétés diverses devant être considérées lors de la modélisation du site (DeVries et al. 1998; Munson et Devries 1991; Munson et al. 1993). L'anhydrite est couramment associée au sel gemme et peut avoir un effet prépondérant sur son écoulement tel que Peach (1996) l'a montré. Lorsque le contenu en anhydrite augmente, la contrainte déviatorique nécessaire pour générer un certain écoulement s'accroît progressivement.

De plus, la granulométrie du sel gemme peut varier de façon importante à la suite des phénomènes de recristallisation causés par de la dissolution localisée sur des plans structuraux. Or, la granulométrie a un effet sur le comportement mécanique du sel gemme. Soit d le diamètre moyen des grains, on remarque que la contrainte d'écoulement est inversement proportionnelle à d et ceci indépendamment des autres variables (lorsque le diamètre diminue, la contrainte déviatorique requise augmente).

La relation suivante a été développée pour le sel d'Avery Island (Carter et al. 1993):

$$d\ (\mu m) = 214\ \mathbf{S}^{-1.15}\ , \qquad (\mathbf{S}\ en\ MPa). \tag{2.1}$$

avec **S** est la contrainte déviatorique associée à l'écoulement stationnaire.

L'inhomogénéité est problématique, mais elle demeure beaucoup moins difficile à cerner que l'historique du chargement subie par le matériau. Au cours des essais de laboratoire, on procède souvent à une homogénéisation des échantillons avant les essais. Cette homogénéisation cause l'effacement quasi-complet des structures de dislocations et aussi de la microfissuration pouvant exister dans l'échantillon et considérée comme une trace de l'historique du chargement (Guessous et al. 1987; Guessous 1987).

2.2.2 Facteurs d'influence

Le comportement du sel gemme in situ est affecté par une série de facteurs.

- L'eau ou la saumure

  Pour les matériaux grossiers, on considère que si une quantité d'eau suffisante est présente aux frontières des grains et que la contrainte de confinement est suffisamment élevée afin d'empêcher la microfissuration, des phénomènes de recristallisation dynamique peuvent s'ajouter aux phénomènes de mouvement de dislocations. Ces phénomènes semblent avoir un impact mineur sur le comportement en fluage du sel gemme en général (Spiers et Carter 1998). Toutefois, la présence d'eau ou de la saumure a un effet prépondérant sur le comportement en fluage des matériaux à grains fins (d =80-2000 μm). Les résultats expérimentaux de Spiers et Brzesowsky (1993) montrent que la déformation est amplifiée par des phénomènes de diffusion assistée par les fluides et par la mise en solution (pressure solution). L'effet de l'eau ou de la saumure peut être traité comme une contribution séparée s'ajoutant au taux de déformation inélastique.

- Température (T)

  Comme il a été mentionné, la température, lorsqu'elle augmente, tend à accroître le caractère ductile de la déformation. Donc, à mesure qu'on descend en profondeur, la déformation devient de plus en plus ductile en réponse à l'effet du gradient géothermique naturel, qui fait augmenter la température.

- Contrainte de confinement σ_{conf}

  L'augmentation de la contrainte de confinement tend à réduire la possibilité de glissement frictionnel et d'extension de microfissures (Hori et Nemat-Nasser 1986; Charlez 1991). La déformation à contrainte de confinement σ_{conf} faible a un caractère plus fragile. À contrainte de confinement plus élevée, comme c'est le cas en profondeur, la ductilité devient de plus en plus l'élément dominant in situ.

- Taux de déformation ($\dot{\epsilon}$)

  Le taux de déformation $\dot{\epsilon}$ lorsqu'il augmente a pour effet d'augmenter le caractère fragile du matériau (Skrotzki et Haasen 1984; Cristescu 1987). Le régime ductile est obtenu, pour la plupart des matériaux semi-fragiles (comme le sel gemme), à des taux de déformation faibles, voire très faibles. Le taux de déformation in situ est notamment associé à la séquence d'excavation préconisée pour creuser une excavation souterraine ou au fluage naturel du sel soumis à un champ de contraintes déviatoriques.

- Contrainte déviatorique (S)

  L'augmentation du déviateur, en supposant que la contrainte de confinement demeure constante, tend à favoriser l'obtention d'un caractère plus fragile de la déformation. La notion de déviateur en conditions in situ se retrouve à deux niveaux:

- le volume élémentaire est soumis à un état de contraintes pas nécessairement hydrostatiques. En fait, dans la plupart des cas, les contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 ne sont pas tout à fait hydrostatiques. Il existe un faible déviateur à cause du caractère visqueux du matériau. Ce petit déviateur induit une déformation naturelle continuelle mais faiblement perceptible.
- le volume élémentaire étudié est soumis à une redistribution de contraintes causée par la création de perturbations locales comme c'est le cas lors de l'excavation d'ouvertures souterraines. Cette redistribution de contraintes génère des déviateurs locaux induisant un taux de déformation variable selon le confinement offert.

2.3 Modèles constitutifs existants

Étant donné la complexité du comportement du sel gemme, il est important que des outils constitutifs robustes et flexibles soient utilisés. À cet égard, plusieurs modèles et types de modèles constitutifs ont été développés au fil des ans. Des revues détaillées des modèles existants sont disponibles dans la littérature (ex.: Munson et Wawersik 1993; Aubertin et al. 1993). Les paragraphes suivants décrivent et comparent certains de ces modèles.

2.3.1 Déformation élastique

Les processus complexes agissant au niveau microstructural lors de la déformation du sel gemme induisent des déformations inélastiques et élastiques. Il est supposé de façon classique que ces deux contributions n'interagissent pas ensemble (du moins en l'absence d'endommagement). En fait, on considère qu'elles s'ajoutent pour former la déformation totale ϵ:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^i , \tag{2.2}$$

où ϵ^e est la déformation élastique récupérable de la structure et ϵ^i la déformation inélastique. Seulement les petites perturbations sont considérées ici. Pour le sel gemme, ϵ^e est habituellement obtenu de la loi de Hooke classique pour les matériaux linéairement élastiques et isotropes. La contribution ϵ^i peut être formulée de plusieurs façons mais est fortement dépendante de l'historique du chargement. Pour cette raison, l'équation 2.2 est typiquement exprimée sous forme différentielle:

$$\dot{\epsilon} \quad = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^i \,, \tag{2.3}$$

pour laquelle $\dot{\epsilon}$, $\dot{\epsilon}^e$ et $\dot{\epsilon}^i$ sont respectivement les taux de déformation total, élastique et inélastique.

2.3.2 Déformation de fluage

Si, lors de l'écoulement, les effets de la viscosité ne peuvent être négligés (fluage, relaxation, etc.), on utilise des modèles viscoplastiques pour décrire le comportement du matériau. L'approche traditionnelle au niveau de l'analyse rhéologique du sel gemme a été de fragmenter la contribution inélastique en deux composantes:

$$\dot{\epsilon}^i \quad = \dot{\epsilon}^p + \dot{\epsilon}^c \,, \tag{2.4}$$

où $\dot{\epsilon}^p$ est une déformation plastique pseudo-instantannée et $\dot{\epsilon}^c$ une déformation dite de fluage qui est fonction du temps. La composante de fluage $\dot{\epsilon}^c$ est typiquement la plus importante et elle est souvent fragmentée en trois sous-composantes:

$$\dot{\epsilon}^c \quad = \dot{\epsilon}^t + \dot{\epsilon}^s + \dot{\epsilon}^a \,, \tag{2.5}$$

correspondant au taux de déformation transitoire (ou primaire) $\dot{\epsilon}^t$, secondaire (ou stationnaire) $\dot{\epsilon}^s$ et tertiaire (ou accélérée) $\dot{\epsilon}^a$ (Leite 1991; Mendelson 1968). Chaque composante dans cette équation est habituellement décrite de façon empirique par des fonctions dérivées de lissages de courbes. Il est à noter que si la contribution originant des pressions de fluides (eau - saumure) est ajoutée, on peut réécrire l'équation

précédente à l'instar de Spiers et Carter (1998):

$$\dot{\epsilon}^c = \dot{\epsilon}^t + \dot{\epsilon}^s + \dot{\epsilon}^a + \dot{\epsilon}^{ps} , \tag{2.6}$$

avec $\dot{\epsilon}^{ps}$ la contribution originant des fluides intersticiels présents dans le matériau. Cette dernière contribution est fonction de la contrainte de confinement et de la granulométrie. Par exemple, pour le sel d'Avery Island, cette équation peut s'écrire (Spiers et Carter 1998):

$$\dot{\epsilon}^{ps} = 4.7 \times 10^{-4}\ \mathrm{S}/Td^3\ exp^{-Q/\mathcal{R}T} , \tag{2.7}$$

avec d le diamètre moyen des grains en mm, T la température absolue et $\mathcal{R}$ la constante universelle des gaz et Q l'énergie d'activation ($Q \approx 24,5\ kJ/mole$). Dans les présentations suivantes, cet effet est négligé. On suppose que le sel gemme est sec.

2.3.2.1 Modélisation du fluage primaire

Dans le régime ductile, le fluage primaire peut être décrit par une fonction du type (Mendelson 1968):

$$\epsilon^i = \epsilon^t = f_1(\mathrm{S})\ f_2(T)\ f_3(t) , \tag{2.8}$$

où f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions de la contrainte déviatorique (S), de la température (T) et du temps (t), suggérant implicitement que ces effets sont découplés. On peut réécrire l'équation 2.8 en termes du temps:

$$t = f_1'(\mathrm{S})\ f_2'(T)\ f_3'(\epsilon^i) , \tag{2.9}$$

où f_1', f_2' et f_3' sont des fonctions obtenues de l'inversion de l'équation 2.8. La fonction f_3' est une fonction exprimée en terme de ϵ^i. Le taux de fluage pendant la phase primaire peut alors s'exprimer par:

1. dans le cas d'une formulation de type consolidation (time hardening), ce taux est obtenu en dérivant par rapport au temps l'équation 2.8:

$$\dot{\epsilon}^i = f_1(\mathrm{S})\ f_2(T)\ \frac{df_3(t)}{dt} , \tag{2.10}$$

2. dans le cas d'une formulation de type écrouissage (strain hardening ou work hardening), on dérive par rapport au temps l'équation 2.9, on l'inverse, et on la ramène en terme de ϵ^i, tel que:

$$\dot{\epsilon}^i = g_1(S)\, g_2(T)\, g_3(\epsilon^i)\,, \tag{2.11}$$

avec les fonctions g_1, g_2 et g_3, des fonctions particulières obtenues de l'inversion et de la dérivation des fonctions précédentes.

Les deux fonctions (équations 2.10 et 2.11) donneront les mêmes courbes si la contrainte est constante (courbes en traits pleins sur la figure 2.5). Si on applique un incrément, alors les deux fonctions diffèrent. La figure 2.5 montre la différence entre ces deux formulations par un essai de fluage à contraintes variables pour deux niveaux de contrainte (σ_1 et σ_2). Dans le cas de la formulation de consolidation (courbe AB), le taux de fluage à la suite du changement de la contrainte appliquée peut être obtenu par la translation de la courbe de fluage parallèlement à l'axe des déformations (Hult 1966; Mendelson 1968; Odqvist 1974). Dans le cas de la formulation d'écrouissage, l'ajustement se fait par un déplacement de la courbe de fluage parallèlement à l'axe du temps (courbe AC). Il est considéré pour le cas d'une sollicitation à contrainte incrémentale que la formulation de type écrouissage est supérieure puisqu'elle tient mieux compte de l'historique de la déformation (ex.: Lemaitre et Chaboche 1988), mais il est clair qu'une telle représentation ne peut accommoder les phénomènes de restauration discutés plus haut, et d'autres effets de l'histoire mécanique (tel que discuté plus loin).

Les formulations les plus courantes pour la description du fluage primaire sont définies par la façon dont la fonction $f_3(t)$ est exprimée:

- Loi de puissance. On exprime la fonction $f_3(t)$ (équation 2.8) tel que:

$$f_3(t) = t^b\,, \tag{2.12}$$

où b est une constante. Parmi les lois particulières, on peut mentionner la loi d'Andrade généralisée ou de Cottrell qui est une forme répandue de la fonction

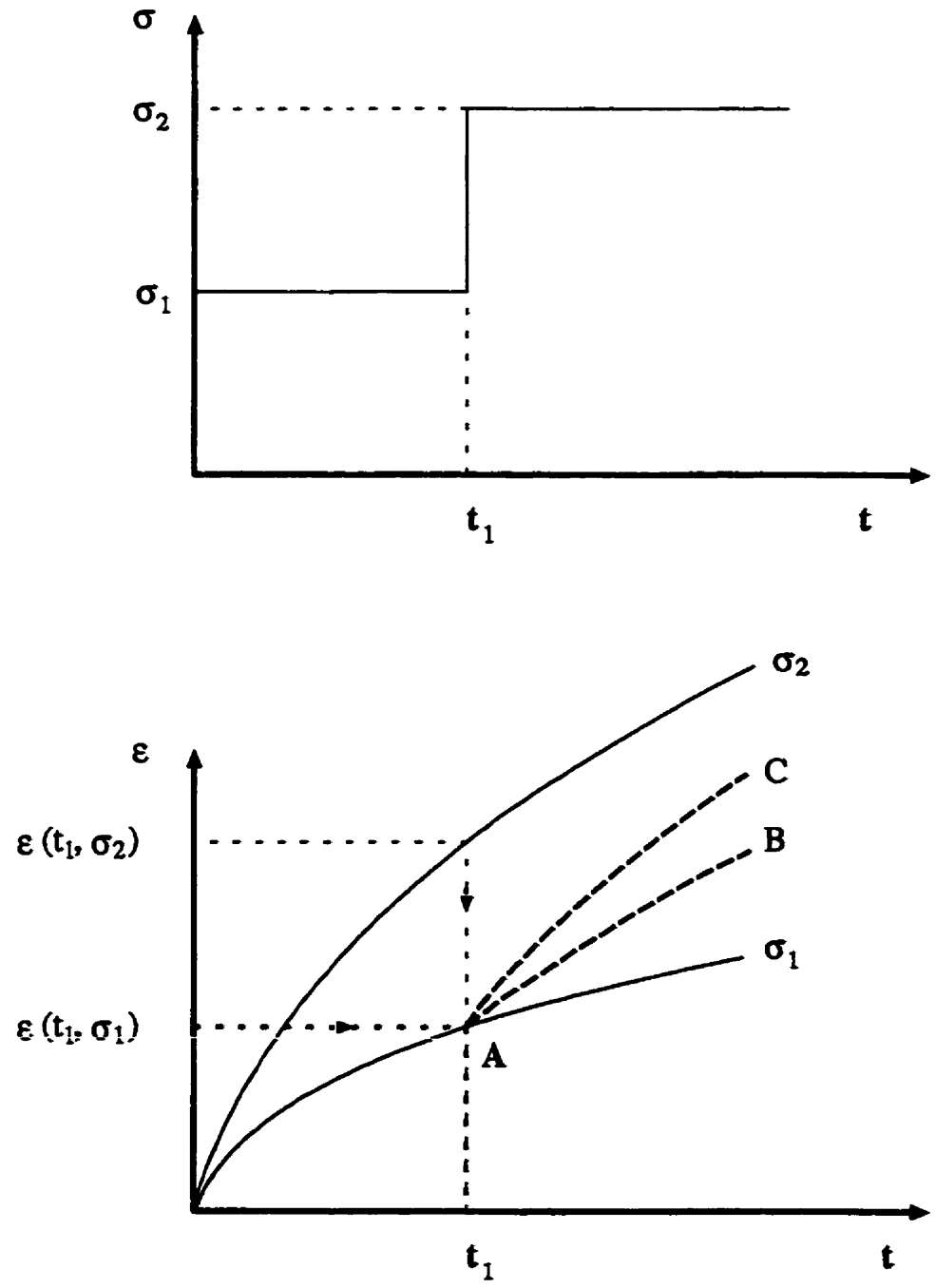


Figure 2.5: Formulations de consolidation (AB) et d'écrouissage (AC) d'après Hult (1966)

2.8 et qui fait intervenir une loi de puissance pour la fonction $f_1(\mathbf{S}) = K\mathbf{S}^N$ avec N et K des constantes, d'où:

$$\epsilon^i = K\,\mathbf{S}^N\,f_2(T)\,t^b\,. \tag{2.13}$$

Pour la formulation de type consolidation, on obtient après dérivation les relations (Mendelson 1968):

$$\dot{\epsilon}^i = b\,K\,\mathbf{S}^N\,f_2(T)\,t^{b-1}\,. \tag{2.14}$$

De même, la formulation d'écrouissage peut s'écrire après dérivation:

$$\dot{\epsilon}^i = b\,(K\,f_2(T))^{\frac{1}{b}}\,\mathbf{S}^{\frac{N}{b}}\,(\epsilon^i)^{(1-\frac{1}{b})}\,, \tag{2.15}$$

La loi de Lemaitre (Lemaitre et Chaboche 1988) constitue une autre version de cette formulation d'écrouissage par la déformation.

Un exemple particulier d'une telle loi est la loi utilisée pour représenter le fluage primaire par Leite (1991):

$$\epsilon^i_{eq} = \left[\frac{\dot{\epsilon}_p}{b}\right]^b \left[\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_p}\right]^N t^b\,, \tag{2.16}$$

où ϵ^i_{eq} est la déformation équivalente de von Mises ($\epsilon^i_{eq} = \sqrt{(\frac{2}{3}\epsilon^i : \epsilon^i)}$; σ_{eq} la contrainte équivalente de von Mises ($\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}}$); $\dot{\epsilon}_p$ un taux de fluage de référence. b, N et σ_p sont des paramètres fonction de la température.

- Loi exponentielle. Une seconde forme courante fait intervenir une fonction exponentielle pour la fonction $f_3(t) = b(1 - exp(at))$ (Odqvist 1974) d'où:

$$\epsilon^i = b\,f_1(\mathbf{S})\,f_2(T)\,(1 - exp(at))\,, \tag{2.17}$$

où a et b sont des constantes. De façon similaire, on peut obtenir une formulation incrémentale en termes de formulations de consolidation ou d'écrouissage.

- Loi logarithmique. Une troisième forme particulière de la fonction $f_3(t)$ est la fonction logarithmique $f_3(t) = c\ log(a + bt)$ où a, b c sont constantes d'où

$$\dot{\epsilon}^i = c\ f_1(\mathrm{S})\ f_2(T)\ log(a + bt)\ . \tag{2.18}$$

Les modèles de type consolidation ou d'écrouissage sont encore couramment utilisés en pratique pour le sel gemme (ex.: Vouille et al. 1996). Ils peuvent être plus ou moins complexes. Ils peuvent représenter de façon efficace les essais de fluages en laboratoire. Ces modèles ont par ailleurs tous en commun l'absence de composantes de restauration permettant de représenter ces effets lors d'essais complexes.

2.3.2.2 Modélisation du fluage secondaire

Pour ce qui est du cas du fluage secondaire (ou stationnaire) dans le régime ductile, le taux de déformation peut être représenté par une loi du type:

$$\dot{\epsilon}^i = \dot{\epsilon}^c = \dot{\epsilon}^s = f_4(T)\ f_5(\mathrm{S})\ , \tag{2.19}$$

où f_4 et f_5 sont des fonctions de la température et de la contrainte déviatorique (on suppose que ces effets également sont découplés). Par opposition à l'équation 2.8, la déformation ou le temps n'interviennent pas puisqu'ils n'ont pas d'effet sur le taux de déformation durant cette phase de fluage. Plusieurs formes sont également possibles:

- Loi de puissance. Pour la phase d'écoulement secondaire du sel et des métaux, on utilise fréquemment pour $f_5(\mathrm{S})$ une loi de puissance. La loi de Bailey-Norton est la plus largement répandue:

$$\dot{\epsilon}^i = a\ f_4(T)\ \mathrm{S}^N\ , \tag{2.20}$$

où a et N sont des constantes.

- loi exponentielle. On peut aussi exprimer $f_5(\mathbf{S})$ par une loi exponentielle (loi de Eyring-Soderberg) (Garafalo 1963).

$$\dot{\epsilon}^i = a\, f_4(T)\, exp(b\mathbf{S}) , \tag{2.21}$$

où a et b sont des constantes.

- Loi sinus hyperbolique. La fonction $f_5(\sigma)$ peut être également exprimée par une loi sinus hyperbolique (loi de Prandtl-Nadai) (Aubertin 1989; Garafalo 1963):

$$\dot{\epsilon}^i = a\, f_4(T)\, sinh(b\mathbf{S})^N , \tag{2.22}$$

où a et b et N sont des constantes.

2.3.2.3 Généralisation du fluage secondaire

Selon Freed et Walker (1995), il est important qu'un modèle viscoplastique généralisé puisse se réduire à un des modèles classiques pour le fluage secondaire (ou stationnaire) puisque certains de ces modèles sont reconnus comme décrivant bien la relation entre le taux de déformation inélastique, l'état de contrainte et la température.

Pour les essais de fluage et les essais CSR en phase stationnaire, le taux de déformation inélastique $\dot{\epsilon}^i$ peut être représenté par une formulation plus générale que celles évoquées précédemment. On peut ainsi écrire (Odqvist 1974):

$$\dot{\epsilon}^i = \dot{\nu} \frac{\mathbf{S}}{\| \mathbf{S} \|} , \tag{2.23}$$

où $\dot{\nu}$ est la vitesse de déformation inélastique correspondant dans le cas du fluage stationnaire à la norme de l'incrément inélastique $\| \dot{\epsilon}^i \|$. Cette relation indique implicitement que l'incrément de déformation inélastique à l'état stationnaire est coaxial avec le déviateur de σ puisqu'on la multiplie par la norme obtenue du rapport $\frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}$. De façon analogue à ce qui a été décrit précédemment, la quantité isotrope, $\dot{\nu}$, peut de plus être représentée par le produit de deux fonctions (Freed et Walker

1995). Si de façon similaire à l'équation 2.8 un découplage mécanique et thermique est adopté, alors on peut écrire:

$$\dot{\nu} \quad = \Im_V(\sigma, K)\ \Im_T(T)\ , \tag{2.24}$$

où $\Im_V(\sigma, K)$ est une fonction de l'état de contrainte (du déviateur S, $\sqrt{J_2}$ ou σ_e) et au moins d'un paramètre isotrope K normalisant l'état de contrainte. La fonction $\Im_V(\sigma, K)$ est souvent identifiée comme le paramètre de Zener Z caractérisant l'écoulement stationnaire.

La fonction $\Im_T(T)$ est une fonction de la température et est découplée de l'état de contrainte. On identifie deux cas principaux selon le niveau de température par rapport à une température critique identifiée comme la température de transition T_t. La température de transition T_t est pour les métaux C.F.C. et le sel gemme à peu près égale à $\frac{1}{2}T_m$ où T_m est la température de fusion. La température de transition caractérise la transition entre deux modes d'activation thermique distincts (Freed et Walker 1995). Pour la halite, la température de fusion et de transition sont typiquement de l'ordre de $T_m = 1074^o K$ et $T_t \simeq \frac{1}{2}T_m$ (Aubertin et al. 1998).

- Température supérieure à la température de transition

  À température élevée lorsque ($T_t \leq T < T_m$), la déformation est surtout contrôlée par des mécanismes diffusifs et de remontées de dislocation (c.-à-d. déplacements de matière) (Poirier 1985). La fonction $\Im_T(T)$, dans ce cas, peut être exprimée par une loi de type Arrhenius de la forme (Freed et Walker 1995):

  $$\Im_T(T) = \exp\left(\frac{-Q}{\mathcal{R}\,T}\right)\ , \tag{2.25}$$

  $\mathcal{R}$ étant la constante universelle des gaz (Boltzmann), et Q l'énergie d'activation.

- Température inférieure à la température de transition

  À température modérée lorsque ($0 < T \leq T_t$), la déformation est contrôlée par un glissement de dislocation dont l'ampleur dépend des obstacles et de leur

réorganisation dans la structure (Kocks 1976). Tel que l'ont mentionné Miller (1976) et Freed et Walker (1995), la fonction $\Im_T(T)$, dans ce cas, peut être exprimée par une loi de type Arrhenius modifiée:

$$\Im_T(T) = \exp\left(\frac{-Q}{\mathcal{R}\,T_t}\left(ln\left(\frac{T_t}{T}\right)+1\right)\right) . \tag{2.26}$$

Les équations précédentes sont continues à la température T_t.

La fonction de Zener $\mathbf{Z} = \Im_V(\sigma, K)$ peut être exprimée sous plusieurs formes. On cite ci-dessous quelques-unes des représentations les plus courantes en termes de la contrainte équivalente de von Mises σ_{eq}:

- une loi de puissance

$$\mathbf{Z} = c\left[\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0}\right]^N , \tag{2.27}$$

où c, σ_0, N sont des constantes du matériau;

- une loi exponentielle

$$\mathbf{Z} = \dot{\epsilon}_0\, exp\left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0}\right) , \tag{2.28}$$

où $\dot{\epsilon}_0$ et σ_0 sont des paramètres;

- une loi avec sinus hyperbolique

$$\mathbf{Z} = \dot{\epsilon}_0\, sinh^N\left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0}\right) , \tag{2.29}$$

où $\dot{\epsilon}_0$, σ_0 et N sont des constantes.

L'exposant N de la loi de puissance est déterminé à partir des résultats expérimentaux. Lorsque le mécanisme dominant est contrôlé par la montée des dislocations, l'exposant N doit tendre vers 3, qui est une valeur théorique (Argon et Takeuchi 1981; Cadek 1987; Carter et Hansen 1983). Les résultats expérimentaux pour le fluage du sel montrent que N peut varier de 3 à plus de 7. De façon générale, N tend à

augmenter avec l'état de contrainte. On explique cette différence par l'interaction entre les dislocations fraîches et les dislocations déjà présentes dans le matériau. Dans d'autres modèles, on explique l'augmentation de l'exposant par la contribution croissante des variables internes qui ne sont pas prises en compte dans les formulations classiques (Aubertin et al. 1991a).

2.3.3 Fluage tertiaire

Le fluage tertiaire est une phase durant laquelle il y a accélération de la déformation. Cette accélération est imputable à l'effet grandissant de l'endommagement. C'est donc une phase associée aux régimes semi-fragiles ou fragiles. La microfissuration progresse avec l'augmentation de la densité et la longueur des microdéfauts jusqu'à ce que la non-linéarité apparaisse clairement. La déformation volumétrique se renverse et le matériau devient dilatant. La déformation latérale évolue de plus en plus rapidement, signe de phénomènes de glissement frictionnel (Huang 1993). La modélisation du fluage tertiaire peut faire usage des notions de la mécanique de l'endommagement (Aubertin et al. 1993; Aubertin et al. 1996; Aubertin et al. 1999). La section 2.5.3 présentera cet aspect plus en détail.

2.4 Modèles avec variables d'état interne

Les modèles précédents, fort utilisés au fil des ans, souffrent de certaines lacunes au niveau de leur représentation de la notion d'écrouissage. À l'échelle microstructurale, les phénomènes d'écrouissage sont typiquement accompagnés de processus de restauration. Ces phénomènes observés doivent être introduits dans les équations constitutives pour l'état transitoire qui, lui, est fonction de l'historique de chargement. Il y a plusieurs façons de tenir compte de ces effets. Une approche puissante est l'utilisation des variables d'état internes (VEI). Les bases fondamentales des modèles avec VEI ont été formulées par Cristescu et Siliciu (1982), Swearengen et Holbrook

(1985), Miller (1987), Lubliner (1990), Lemaitre et Chaboche (1988), Freed et Kevin (1993), Krausz et Krausz (1996).

Pour de tels modèles, les variables internes (ou cachées) sont utilisées en conjonction avec les variables externes (observables) pour définir complètement, à chaque instant, l'état du matériau et sa réponse mécanique. Différentes caractéristiques du matériau ont été utilisées pour les VEI. Une de ces caractéristiques est la contrainte interne $\boldsymbol{\sigma}_i$. Le concept de contraintes internes a été introduit il y a déjà plusieurs décennies afin de mieux exprimer le comportement macroscopique des matériaux polycristallins (Orowan 1947). De telles contraintes s'opposent généralement à la contrainte appliquée. Elles peuvent être évaluées par des techniques expérimentales appropriées impliquant habituellement des baisses soudaines de niveau de contrainte (Cadek 1987; Orlova 1991). Lorsqu'elles sont introduites dans les équations constitutives, les contraintes internes apparaissent explicitement dans la loi cinétique. On peut donc écrire à l'instar de l'équation 2.19 (Aubertin 1989; Aubertin et al. 1991a):

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i = f_4(T)\ f_5\left[\frac{\mathbf{S}-\boldsymbol{\sigma}_i}{K}\right] , \tag{2.30}$$

où f_4 et f_5 sont des fonctions choisies de façon appropriée, K un paramètre de normalisation. La fonction f_4 peut être introduite directement dans les constantes du matériau pour des conditions isothermales. À l'équation 2.30, la contrainte interne $\boldsymbol{\sigma}_i$ agit contre la contrainte appliquée pour former la contrainte active $\boldsymbol{\sigma}_a(= \mathbf{S} - \boldsymbol{\sigma}_i)$. Les origines physiques et la signification de $\boldsymbol{\sigma}_i$ pour les roches salines ont été présentées dans les références suivantes: Aubertin et al. (1991a; 1991b; 1992; 1996) et Weidinger et al. (1998). À l'état stationnaire, la valeur de $\boldsymbol{\sigma}_i$ n'est pas absolument requise car elle peut être définie comme une fonction explicite de la contrainte déviatorique appliquée S ou du taux de déformation inélastique $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i$. On rappelle que, pour l'état stationnaire qui n'est pas fonction de l'histoire mécanique, une représentation strictement basée sur les variables observables est possible.

2.4.1 Modélisation avec variables internes généralisées

Cette partie présente la notion de variables internes dans un contexte plus généralisé. On introduit notamment deux types de lois: la loi cinétique et les lois évolutives. La loi cinétique définit l'évolution du taux de déformation inélastique $\dot{\epsilon}^i$ et le lien avec la contrainte σ et les VEI. Elle correspond à l'équation 2.30. Les lois évolutives définissent, pour leur part, l'évolution du taux de variation des variables d'état internes. L'ensemble de ces lois forment le modèle constitutif.

Tel qu'il a été mentionné, on peut définir deux classes de variables pour représenter l'état de contrainte: les variables observables (mesurables) et les variables d'état internes (Argon et Takeuchi 1981; Aubertin 1989). Les variables mesurables correspondent aux variables classiques: en petites déformations, on parle de la contrainte de Cauchy avec sa forme duale, la déformation (Lemaitre et Chaboche 1988). Elles sont donc calculables et/ou mesurables directement à partir d'essais de laboratoire. Les variables internes (Ajaja 1991; Allen et Meek 1985) correspondent, quant à elles, essentiellement à une représentation de l'énergie accumulée dans le matériau au niveau des dislocations, des frontières entre les grains, de la structure, etc. Elles peuvent représenter de 5 à 90 % de l'énergie appliquée selon le matériau et le niveau de déformation. En général, elles sont faibles. Elles diminuent avec la déformation et augmentent avec la complexité du matériau (alliages ou arrangements complexes des dislocations).

De façon générale, l'existence de ces énergies accumulées dans la structure affecte le mouvement des dislocations libres (Aubertin et al. 1991a). Ces effets peuvent ainsi agir *avec* ou *contre* la contrainte appliquée. L'accumulation de ces énergies peut produire des concentrations locales de contrainte importantes. Par exemple, près des zones d'empilement de dislocations (Mughrabi 1983), les contraintes internes σ_i peuvent être très importantes et elles peuvent alors s'ajouter à la contrainte appliquée. Mais, même si la contrainte active σ_a locale est élevée, le taux de déformation $\dot{\epsilon}^i$ est faible, car les dislocations sont peu mobiles. Dans les zones plus molles, où la densité

des dislocations est plus faible et leur mobilité plus élevée, les contraintes internes locales agissent contre la contrainte appliquée; on parle alors d'écrouissage. Globalement, l'influence des zones molles est généralement plus importante sur le taux de déformation en raison de la plus grande mobilité des dislocations et des volumes plus grands, comme il a été montré expérimentalement (Lowe et Miller 1984a; Lowe et Miller 1984b).

Classiquement, on sépare souvent σ_i en contraintes internes cinématiques et isotropes. Lorsqu'elles sont associées à la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes, les variables caractérisant le centre de la surface d'écoulement sont dites cinématiques, et celles décrivant l'étendue de la surface sont dites isotropes pour l'hypothèse d'un écrouissage mixte avec critère de von Mises sans distorsion de la surface. Il est à noter que d'autres critères d'écoulement avec distorsion de la surface peuvent être utilisés (ex.: Tresca).

La variable cinématique ou directionnelle $\mathbf{X}$ (représentée habituellement par un tenseur d'ordre 2) est associée à une variable interne duale α (Lemaitre et Chaboche 1988). La variable isotrope R représente l'écrouissage isotrope subi par le matériau, et elle est associée à une variable interne duale p. La variable p réfère quelquefois à la déformation plastique cumulée:

$$p = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^i : \dot{\epsilon}^i \right) dt \,, \tag{2.31}$$

mais ceci n'est pas exclusif. L'écrouissage isotrope peut aussi se faire par l'intermédiaire du paramètre de normalisation K (voir équation 2.30).

Il est à noter que nous ne sommes pas limités à utiliser seulement deux variables internes. Généralement, on suppose que M_1, variables internes cinématiques, et M_2, variables internes isotropes, existent.

Plusieurs modèles ont été développés avec plusieurs variables internes. Le modèle SUVIC, décrit à la section suivante (Aubertin et al. 1998), utilise deux variables internes cinématiques et deux variables isotropes. Si on désire utiliser $M_1 > 1$ et $M_2 > 1$, respectivement des variables internes cinématiques et isotropes, il est alors

nécessaire d'introduire une condition de compatibilité entre ces variables. Il a été montré que 2 à 3 variables cinématiques et isotropes permettent de décrire *très correctement* le comportement inélastique des matériaux (McDowell 1995) et qu'on peut ainsi se satisfaire d'un nombre réduit de variables internes.

Par extension, on définit aussi l'espace des contraintes augmentées (Pycko et Maier 1995), comme l'espace des contraintes observables auquel on ajoute les contraintes internes. On introduit à cette fin 2 ensembles. Pour les Variables Observables et variables Internes (VOI), on définit G en termes des contraintes observables et contraintes internes tel que:

$$\mathbf{G} = \{\sigma, \mathbf{X}_1 ... \mathbf{X}_{M_1}, R_1 ... R_{M_2}\} \ . \tag{2.32}$$

L'ensemble G des VOI est constitué de $0 \leq m_1 \leq M_1$, composantes directionnelles $\mathbf{X}_{m1}$ et de $0 \leq m_2 \leq M_2$ composantes isotropes R_{m2}.

On définit aussi l'ensemble des Variables Observables et variables Internes Associées (VOIA) g étant exprimé en termes des variables de la déformation et des mesures équivalentes associées aux contraintes internes, tel que:

$$\mathbf{g} = \{\epsilon^e, \alpha_1 ... \alpha_{M_1}, p_1 ... p_{M_2}\} \ . \tag{2.33}$$

L'ensemble g est constitué de M_1, composantes directionnelles α_{m1} et de M_2, composantes isotropes p_{m2}.

Dans l'espace des contraintes augmentées, les deux ensembles (G et g) sont liés termes à termes:

$$\{\sigma, \mathbf{X}_{m1}, R_{m2}\} \leftrightarrow \left\{\left(\epsilon^e = \epsilon - \epsilon^i\right), \alpha_{m1}, p_{m2}\right\} \ . \tag{2.34}$$

Cette distinction entre les ensembles des VOI et VOIA constitue un élément particulièrement utile d'un point de vue conceptuel et numérique, comme on le verra plus loin au chapitre 5. Au même titre qu'on suppose qu'il existe une relation entre les variables observables et les variables observables associées (contrainte - déformation),

on suppose qu'il en existe une entre les variables internes et les variables internes associées.

Les M_1, variables internes cinématiques $\mathbf{X}_{m1}$, réfèrent à ce qu'on identifie fréquemment comme les *backstress*. Elles sont considérées comme déviatoriques. On associe souvent ces variables dans l'espace des contraintes à la position du centre de la surface d'écoulement. L'évolution de ces variables représente un changement rapide du module d'écrouissage dans le régime inélastique et contrôle les différents phénomènes directionnels tels que l'effet Bauschinger et l'effet de rochet (Aubertin et al. 1993).

L'écoulement inélastique induit (Aubertin et al. 1991a) une structure hétérogène des dislocations donnant naissance à des contraintes internes de courte portée s'opposant à la contrainte appliquée (Lowe 1986). En raison de leur caractère directionnel, lors d'un essai CTC-RTE, les contraintes internes $\mathbf{X}$ s'opposent à la contrainte appliquée lors de la portion CTC, mais elles peuvent s'ajouter à celle-ci dans la portion RTE (Aubertin et al. 1991a). De plus, les variables cinématiques $\mathbf{X}$ ne sont pas nécessairement coaxiales avec le taux de déformation. L'évolution des variables cinématiques est contrôlée par la contribution de l'écrouissage dans la direction du tenseur du taux de déformation inélastique $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i$ et une contribution de restauration dans la direction de la variable cinématique considérée (Lemaitre et Chaboche 1988; Delobelle 1988). D'un point de vue microstructural, les variables cinématiques peuvent avoir plusieurs origines mais deux composantes sont couramment utilisées dans les modèles avec VEI: une variable cinématique à portée courte saturant très vite et une variable cinématique à plus longue portée saturant plus lentement (Lowe et Miller 1984a; Lowe et Miller 1984b; Freed et al. 1994; Freed et al. 1991; Aubertin et al. 1993).

Les M_2, variables internes isotropes R_{m2}, tendent à évoluer plus lentement que l'une des variables cinématiques si bien qu'il peut être difficile pour certaines d'entre elles d'atteindre la saturation dans le cadre d'essais standard (Aubertin et al. 1991b). L'évolution de ces variables représente l'écrouissage subi par le matériau et l'accumu-

lation des déformations inélastiques (Freed et Walker 1995). On associe, dans l'espace des contraintes, ces variables au rayon de la surface d'écoulement. Au niveau cristallin, elles représentent l'écrouissage progressif attribuable à l'augmentation de la densité des dislocations. L'augmentation de la densité des dislocations (Nadgornyi et Strunk 1987), est un effet à courte portée s'opposant au mouvement des dislocations. Ces nouvelles barrières ont surtout un effet homogène représenté par les variables isotropes.

Dans certains modèles où $M_2 = 2$ (ex.: SUVIC), on distingue les variables isotropes R et K respectivement comme le rayon de la surface d'écoulement et une variable de normalisation de la contrainte active. La variable K présentée dans l'équation 2.24 est souvent assimilée à une variable interne isotrope indépendante qui, à l'instar de R, représente l'écrouissage isotrope général subi par le matériau à la suite de l'augmentation de la densité des dislocations (Aubertin et al. 1991a). Lorsque le matériau est déformé de façon inélastique cette densité augmente. Il y a alors accumulation d'énergie de déformation additionnelle à ces barrières (Nix et al. 1985; Nadgornyi et Strunk 1987; Aubertin et al. 1991a). On considère qu'une telle augmentation de la densité de dislocations produit un effet isotrope ou nondirectionnel.

L'énergie accumulée peut progressivement se dissiper par des phénomènes de restauration. Elle est fréquemment associée (Freed et Walker 1995) à une classe de variables internes représentant la résistance de traînée (*drag strength*) ou la variable de normalisation K (Aubertin et al. 1992). Elle est utilisée pour représenter le durcissement général isotrope du matériau induit par l'augmentation de la densité des dislocations et par leur réarrangement dans un patron cellulaire plus rigide (Hart 1976; Krieg 1982; Anand 1982; Estrin et Mecking 1984; Lowe 1986; Aubertin et al. 1991a).

La plupart des modèles viscoplastiques prennent K comme une constante (Chaboche et Rousselier 1983; Mroz 1986; Delobelle 1988). Pour les halides alcalins, on ne peut

considérer K comme une constante à cause de l'apparition très tôt de la déformation inélastique (autrement, on aurait un segment quasi-linéaire σ-ϵ). Il a été considéré par les développeurs de SUVIC, modèle présenté à la section suivante, que cette variable interne a une valeur de saturation K' égale à la résistance macroscopique $(\sigma_y)_{0.2\%}$ du matériau vierge non écroui (Aubertin et al. 1992). On prend typiquement $K = 1.0$ MPa comme valeur initiale correspondant approximativement à la résistance au cisaillement critique des polycristaux.

L'utilisation ou non de cette variable interne permet de classifier les modèles à variables d'état internes en trois groupes principaux:

1. les modèles UCP (unified creep plasticity) (Hart 1976; Miller 1976; Pugh et Robinson 1987; Bodner et Partom 1975; Krieg 1982; Anand 1982; Krempl 1984; Estrin et Mecking 1984) dont la loi cinétique a une forme générale:

$$\dot{\epsilon}^i = \Im_V \left[\frac{\mathbf{S} - \mathbf{X}}{K} \right] . \tag{2.35}$$

   Ces modèles n'ont pas de surfaces d'écoulement ($R = 0$) et nécessitent une formulation plus élaborée de leur loi cinétique (Aubertin et al. 1991a). La variable K est ici une variable de normalisation de l'état de contrainte;

2. les modèles viscoplastiques (Legac et Duval 1980; Chaboche et Rousselier 1983; Mroz et Trampczynski 1984; Delobelle et al. 1984) avec la loi cinétique de la forme:

$$\dot{\epsilon}^i = \Im_V [\mathbf{S} - (\mathbf{X} + R)] . \tag{2.36}$$

   Ils n'utilisent pas la variable K comme une variable interne isotrope de normalisation mais utilisent par opposition des variables internes isotropes agissant comme surface d'écoulement. Occasionnellement, K peut alors servir comme une constante de normalisation;

3. les modèles viscoplastiques unifiés avec la loi cinétique (Aubertin 1989; Freed

et al. 1992; Freed et Kevin 1993) de la forme:

$$\dot{\epsilon}^i = \Im_V \left[\frac{\sqrt{J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X})} - R}{K} \right] , \tag{2.37}$$

où

$$J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}-\mathbf{X}) : (\mathbf{S}-\mathbf{X}) \ . \tag{2.38}$$

Ces modèles sont caractérisés au numérateur par une fonction d'écoulement (avec centre et surface dans l'espace des contraintes) normalisée par la variable interne K. Il est à noter que dans l'approche classique développée par Lemaitre et Chaboche (1988), cette variable K est traitée comme une constante. Le traitement de K comme variable interne évolutive rend la détermination d'un potentiel viscoplastique plus difficile.

2.4.2 Modèles à variables internes pour le sel gemme

Les principaux modèles récents à variables d'état pour le sel gemme sont décrits dans les paragraphes suivants. Ces différents modèles ont généralement tous en commun le fait qu'ils ont progressivement été améliorés et modifiés par l'ajout de modules. Le modèle SUVIC développé à l'École Polytechnique est traité séparément dans la section suivante. Les paragraphes suivants décrivent quelques modèles récents importants pour décrire le comportement du sel gemme.

- Modèle de Krieg

  Le modèle UCP (Krieg 1982; Krieg 1983) dont la loi cinétique est le produit de fonctions linéaires et exponentielles incluant une variable cinématique $\mathbf{X}$ et isotrope K est relativement important. Il a été le premier véritable modèle avec VEI développé pour le sel gemme. Les lois évolutives des VEI comprennent des termes de restauration statique et dynamique. La loi cinétique et les lois

évolutives des variables cinématiques et isotropes $\mathbf{X}$ et K sont exprimées pour une version relativement récente du modèle par (Krieg et al. 1987):

$$\dot{\epsilon}^i = b_1 \, (\mathbf{S} - \mathbf{X}) \, exp\left\{ \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X})}}{R_0 + K} \right\} , \tag{2.39}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = b_2 \, \dot{\epsilon}^i \, exp\left\{ -c \frac{\mathbf{X} \cdot (\mathbf{S}-\mathbf{X})}{\sqrt{J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X})}} \right\} - b_3 \, \mathbf{X} \, \mathbf{X}_{eq} , \tag{2.40}$$

$$\dot{K} = (b_4 - K \, b_5) \, \dot{\epsilon}^i_{eq} - b_6 \, K^3 - f(\dot{T}) , \tag{2.41}$$

avec les constantes b_i définies pour

$$b_i = b_{i_0} exp\left\{ -\frac{Q_i}{\mathcal{R} \, T} \right\} \qquad i = 1, 2, ..., 6 \tag{2.42}$$

où R_0, c, Q_i et b_{i_0} pour $i = 1, 2...., 6$, sont des constantes. L'indice eq réfère à une grandeur équivalente. La fonction f est une fonction du taux de variation de la température $\dot{T}$.

- Modèle Munson-Dawson

Le modèle Munson-Dawson (Munson et Dawson 1982) est sans doute un des modèles les plus connus pour le sel gemme. Son développement a été motivé par la nécessité de prédire la fermeture à long terme d'excavations souterraines dans des dômes de sel gemme pour l'entreposage de déchets nucléaires. Deux versions importantes du modèle existent: le modèle M-D modifié (Munson et Devries 1991) et le modèle M-D extensionné Munson (1997). La principale différence entre ces versions réside dans le traitement qui y est fait de la phase transitoire. Le modèle M-D extensionné est constitué de 2 contributions additives: une contribution stationnaire $\dot{\epsilon}^s$ et une contribution transitoire $\dot{\epsilon}^t$. Le taux de déformation de fluage $\dot{\epsilon}^c$ y est ainsi défini:

$$\dot{\epsilon}^c = \dot{\epsilon}^s + \dot{\epsilon}^t . \tag{2.43}$$

La loi cinétique pour le fluage stationnaire est décrite par la somme de trois lois constitutives (2 lois de puissance et 1 loi sinus hyperbolique):

$$\dot{\epsilon}^s = \sum_{i=1}^{3} \dot{\epsilon}^{s_i} , \tag{2.44}$$

où,

$$\dot{\epsilon}^{s_1} = A_1 exp^{-\frac{Q_1}{RT}} \left[\frac{\sigma_{gen}}{\mu}\right]^{n_1} , \tag{2.45}$$

$$\dot{\epsilon}^{s_2} = A_2 exp^{-\frac{Q_2}{RT}} \left[\frac{\sigma_{gen}}{\mu}\right]^{n_2} , \tag{2.46}$$

$$\dot{\epsilon}^{s_3} = \| H(\sigma_{gen}-\sigma_0) \| \left[B_1 exp^{-\frac{Q_1}{RT}} + B_2 exp^{-\frac{Q_2}{RT}}\right] sinh\left[\frac{q(\sigma_{gen}-\sigma_0)}{\mu}\right] , \tag{2.47}$$

où H est la fonction de Heaviside de l'argument $(\sigma_{gen} - \sigma_0)$; A_1, A_2, B_1, B_2, n_1, n_2, q sont des constantes; Q_1, Q_2, des énergies d'activation; T, la température absolue; μ, le module de cisaillement; σ_0 est une contrainte limite de glissement sur des plans de dislocation; et la variable σ_{gen} est la contrainte généralisée telle qu'elle est obtenue du critère de Tresca (Munson 1997).

La loi cinétique pour la contribution transitoire $\dot{\epsilon}^t$ est, quant à elle, la somme de contributions de fluage transitoire récupérable $\dot{\epsilon}^{t_{rec}}$ et irrécupérable $\dot{\epsilon}^{t_{irr}}$, tel que:

$$\dot{\epsilon}^t = \dot{\epsilon}^{t_{irr}} + \dot{\epsilon}^{t_{rec}} , \tag{2.48}$$

Ces variables sont assimilables à des variables d'état internes représentant respectivement des contributions d'écrouissage et de restauration.

$$\dot{\epsilon}^{t_{irr}} = F\dot{\epsilon}^s , \tag{2.49}$$

avec F représentant la réponse transitoire:

$$F = \left\{ \begin{array}{cc} exp^{+a_1\left(1-\frac{R}{\epsilon^*}\right)^2} & R \leq \epsilon^* \\ 1 & \\ exp^{-a_2\left(1-\frac{R}{\epsilon^*}\right)^2} & R \geq \epsilon^* \end{array} \right\}, \tag{2.50}$$

où les paramètres a_1 et a_2 sont respectivement des paramètres d'écrouissage et de restauration, fonction de la contrainte, et ϵ^* est défini comme la limite de déformation transitoire irréversible, fonction de l'état de contrainte et de la température. La variable interne isotrope R a une loi évolutive exprimée en terme du taux de déformation stationnaire:

$$\dot{R} = (F-1)\dot{\epsilon}^s \, . \tag{2.51}$$

La description de ces fonctions peut être obtenue de Munson et al. (1993) et (Munson 1997). Ce modèle limité à l'écrouissage isotrope a récemment été modifié par l'introduction de la notion d'endommagement. Les résultats de prédiction obtenus avec ce modèle sont présentés dans plusieurs publications (Chalal 1996; Dawson et Munson 1983; DeVries et al. 1998; Munson 1991; Munson et Devries 1991; Munson et al. 1993). Le modèle apparaît relativement efficace à prédire la restauration observée au cours de certains essais pour les sels du WIPP, Gorleben et de Asse (Munson 1997).

- Modèle de Lemaitre

Le modèle de Lemaitre peut s'exprimer avec une loi cinétique, qui inclut une variable interne isotrope R. La loi évolutive de cette variable isotrope est une loi de puissance de la contrainte divisée par la constante K, multipliée par une loi d'Arrhenius. Le modèle est caractérisé par 5 constantes et semble se comparer favorablement au modèle Munson-Dawson (Chalal 1996; Durup et Xu 1996). L'écrouissage est isotrope par la déformation. La déformation inélastique est donnée par:

$$\dot{\epsilon}^i = R^a \, , \tag{2.52}$$

avec a étant une constante du matériau et R une variable interne isotrope. La loi évolutive de R est donnée par:

$$\dot{R} = \left(\left\langle \frac{S_{eq}}{K} \right\rangle^{b} exp\left[-\frac{Q}{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \right)^{\frac{1}{a}} , \tag{2.53}$$

b et K étant des constantes.

- Modèle de Senseny

Le modèle de Senseny (Senseny et al. 1993; Senseny et Fossum 1995; Senseny et Fossum 1998) est un modèle à variables internes qui s'apparente au modèle MATMOD (Miller 1976) et au modèle de Freed et Walker présenté plus bas. Ce modèle est composé d'une variable isotrope de normalisation associée k et d'une variable cinématique associée α. Il est à noter que l'écriture du modèle n'évoque pas de façon explicite l'idée de variables internes associées. Mais il est évident à l'analyse des équations qu'on parle bien de variables internes associées. La loi cinétique est ainsi exprimée par la contrainte divisée par le tenseur élastique, c.-à-d. la déformation élastique. La loi cinétique qui utilise la fonction sinus hyperbolique, peut s'écrire:

$$\dot{\epsilon}^{i} = a_1 \left[sinh\left(\frac{\sqrt{J_2(\epsilon^e - \alpha)}}{\sqrt{k}} \right)^{1.5} \right]^{a_2} \frac{\epsilon^e - \alpha}{\sqrt{J_2(\epsilon^e - \alpha)}} , \tag{2.54}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes. Les lois évolutives des 2 variables internes qui contiennent des termes de restauration dynamique et statique sont respectivement données par:

$$\dot{\alpha} = b_1 \, exp\left(-b_3 \, \alpha_{eq}\right) \left\{ \dot{\epsilon}^{i} - a_1 \frac{\alpha}{\alpha_{eq}} \left[sinh(c_1 \, \alpha_{eq}) \right]^{a_2} \right\} , \tag{2.55}$$

et,

$$\begin{aligned} \dot{k} = {} & b_2 \left(c_3 \epsilon^{e}_{eq} + (\alpha_{eq})^{\frac{1}{1.5}} - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{1.5}} (k - k_0) \right) \dot{\epsilon}^{i}_{eq} \\ & - b_2 a_1 c_3 \left[sinh(c_2 (k - k_0)^{1.5}) \right]^{a_2} . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Les paramètres b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 et k_0 sont des constantes.

Ce modèle est un des modèles pour le sel gemme permettant de simuler avec un certain succès les variations du taux de chargement lors d'un essai de relaxation. Ce modèle offre une certaine similitude avec le modèle SUVIC décrit plus loin. Toutefois, il contient une formulation particulièrement convolutée au niveau de l'usage de certaines constantes qui apparaissent dans plus d'une équation.

- Modèle de Cristescu et Hunsche

Le modèle de Cristescu et Hunsche (Cristescu 1992; Cristescu et Hunsche 1996) se veut un modèle à variables internes couvrant les régimes ductiles et semi-fragiles. Ce modèle demeure très classique dans sa construction. Il repose sur l'idée que le taux de déformation inélastique est obtenu par la somme d'une contribution transitoire et stationnaire. La contribution transitoire est caractérisée par une variable interne isotrope représentant l'écrouissage par le travail subi par le matériau, $R = W(t) = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i \, dt$. Les différentes contributions transitoires et stationnaires sont exprimées en termes de potentiels, qui, eux, sont des fonctions de l'état de contrainte, du niveau de déformation et de la température. La loi cinétique peut ainsi s'écrire:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i = b_1 \left\langle 1 - \frac{W(t)}{F_1(\mathbf{S})} \right\rangle \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{S}} + b_2 \frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{S}} , \tag{2.57}$$

F_1 étant une fonction d'écoulement, F_2 un potentiel viscoplastique pour la phase transitoire et F_3 un potentiel pour l'écoulement stationnaire. Les constantes b_1 et b_2 sont des constantes de viscosité. Les détails des potentiels peuvent être obtenus de Cristescu et Hunsche (1996). Ce modèle a été surtout utilisé pour des problèmes de calcul de convergence d'excavations souterraines pour les sites d'enfouissement de déchets nucléaires en Allemagne.

- Modèle de Freed et collaborateurs

Le modèle de Freed et Walker (Freed et al. 1991; Freed et Kevin 1993; Freed et Walker 1995) a une loi cinétique exprimée en termes de fonctions hyperboliques. Ce modèle comprend une variable cinématique $\mathbf{X}$ et une variable isotrope K dont les lois évolutives permettent la restauration statique et dynamique. Ce modèle a surtout été utilisé pour les matériaux métalliques et le sel gemme. Une des variantes simplifiées récentes du modèle a été développée par Neilsen et al. (1996). La loi cinétique peut être exprimée avec:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i} = b_1 \, sinh^{b_2}\left(\frac{\mathbf{S}-\mathbf{X}}{b_3 \, K}\right) , \tag{2.58}$$

où les constantes b_1, b_2 et b_3 sont des fonctions de la température. Les lois évolutives des VEI sont données par:

$$\dot{\mathbf{X}} = a_1 \, (\mathbf{X}_{eq})^{a_2} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i} - a_4 \, \mathbf{X} \, \mathbf{X}_{eq} , \tag{2.59}$$

et

$$\dot{K} = a_5 \, (K - K_0)^{a_6} \dot{\epsilon}^{i}_{eq} - a_7 \, (K - K_0)^2 . \tag{2.60}$$

Les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 et a_7 sont des constantes du matériau. Ce modèle, qui s'apparente au modèle SUVIC présenté plus loin, est un modèle populaire pour lequel des exercices de détermination de constantes assez sophistiqués ont été réalisés (Fossum 1998).

- Modèle de Pudewills et Hornberger

Le modèle de Pudewills et Hornberger (Pudewills 1998) s'apparente aussi au modèle SUVIC décrit en détail à la section suivante. Il inclut une loi cinétique de la forme d'une loi de puissance du type:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i} = \left\langle \frac{J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X})}{K} - 1 \right\rangle^{N} \frac{\mathbf{S}-\mathbf{X}}{\sqrt{2J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X})}} , \tag{2.61}$$

avec une variable interne cinématique d'écrouissage $\mathbf{X}$ (*backstress*) et isotrope K (*drag stress*). Les lois évolutives de ces variables incluent des termes d'écrouis-

sage et de restauration. Ainsi,

$$\dot{\mathbf{X}} = a_1 \left[\frac{J_2(\mathbf{X})}{a_2}\right]^{-\beta} \dot{\epsilon}^i - b(T) \left[\frac{J_2(\mathbf{X})}{a_2}\right]^{m-\beta} \mathbf{X}, \tag{2.62}$$

où a_1, a_2, β et m sont des constantes. La constante $b(T)$ est, pour sa part, fonction de la température.

La variable isotrope K a une loi évolutive composée de 2 contributions dans lesquelles la contribution de la température et du gradient de température apparaissent. Cette formulation impute l'écrouissage à l'effet du travail et de la température, et la restauration à la température:

$$\dot{\mathbf{K}} = f_1(T)\ \mathbf{S} : \dot{\epsilon}^i - f_2(T)\dot{T}, \tag{2.63}$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions incluant une certain nombre de constantes, fonction de la température.

D'autres modèles non présentés ici sont aussi disponibles dans la littérature, par exemple Russell (1988), Russell et al. (1990) et Zaman et al. (1992). Ces modèles développés pour le sel gemme ont eu une utilisation limitée.

2.5 Modèle SUVIC

2.5.1 Évolution du modèle SUVIC

Le modèle SUVIC (Strain-rate-history-dependent Unified Viscoplastic model with Internal variables for Crystalline materials) (Aubertin 1989) est une loi constitutive développée originalement pour les matériaux en phase ductile comme le sel gemme. Sa loi cinétique est une loi de puissance. Le modèle contenait à l'origine 3 variables d'état (1 variable cinématique et 2 variables isotropes). Le modèle a progressivement été extensionné pour inclure au total 2 variables cinématiques et 2 variables isotropes.

Les lois évolutives contiennent des termes additifs d'écrouissage et de restauration statique et dynamique. Ce modèle a été amélioré et modifié au fil des ans (voir

chapitre 5). Un module additionnel SUVIC-D a plus tard été créé pour inclure les effets d'endommagement (Sgaoula 1997).

2.5.2 Module viscoplastique

Cette section décrit le module viscoplastique SUVIC. Le module, dans sa version antérieure aux présents travaux, est composé de 2 variables internes cinématiques $\mathbf{X} = \{\mathbf{B}_s, \mathbf{B}_l\}$ et 2 variables isotropes R et K. On rappelle que la formulation de la loi cinétique générale pour les modèles avec VEI est:

$$\dot{\epsilon}^i = f_4(T)\, f_5\left[\frac{\mathbf{S} - \sigma_i}{K}\right] . \tag{2.64}$$

Le modèle SUVIC a été développé pour des conditions isothermales et de petites perturbations faisant en sorte que la fonction $f_4(T)$ n'est pas explicitement définie dans la formulation mais intervient au niveau des constantes du modèle.

La loi cinétique explicite de SUVIC s'apparente aux lois de puissance vues précédemment:

$$\dot{\epsilon}^i = A\left\langle \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X})} - R}{K} \right\rangle^N \frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}-\mathbf{X}}{\sqrt{J_2(\mathbf{S}-\mathbf{X})}} , \tag{2.65}$$

où A et N sont des constantes. Les VEI sont $\mathbf{B}_s$ et $\mathbf{B}_l$, les variables cinématiques de courtes et longues portées respectivement liées entre elles par la relation:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}_s + \mathbf{B}_l , \tag{2.66}$$

et R, K pour les variables isotropes.

Chacune des variables internes du modèle est caractérisée par sa propre loi d'évolution (Aubertin 1996). Les différentes lois d'évolution sont constituées de 3 termes: 1 terme d'écrouissage dans la direction de ϵ^i (si applicable), 1 terme de restauration dynamique ou par la déformation dans la direction de la VEI (si applicable) et 1 terme de restauration statique ou par le temps dans la direction de

la VEI (également si applicable). Pour les variables cinématiques $\mathbf{X} = \{\mathbf{B}_s, \mathbf{B}_l\}$, les lois d'évolution sont définies par:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = \frac{2}{3} A_{1s}\, \dot{\epsilon}^i - A_{1s}\, \dot{\epsilon}^i_{eq} \frac{\mathbf{B}_s}{\mathbf{B}'_{eq_s}} - A_{2s} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - x_s\, \mathbf{B}'_{eq_s}}{C} \right\rangle^q \left(\frac{\mathbf{B}_s}{\mathbf{B}_{eq_s}} \right), \quad (2.67)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_l = \frac{2}{3} A_{1l}\, \dot{\epsilon}^i - A_{1l}\, \dot{\epsilon}^i_{eq} \frac{\mathbf{B}_l}{\mathbf{B}'_{eq_l}} - A_{2l} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_l} - x_l\, \mathbf{B}'_{eq_l}}{C} \right\rangle^q \left(\frac{\mathbf{B}_l}{\mathbf{B}_{eq_l}} \right), \quad (2.68)$$

où A_{1s}, A_{1l}, A_{2s}, A_{2l}, x_s, x_l, q et C sont des constantes. On définit de plus,

$$\dot{\epsilon}^i_{eq} = \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^i : \dot{\epsilon}^i \right]^{(1/2)}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{B}_{eq_s} = \left[\frac{3}{2}\, \mathbf{B}_s : \mathbf{B}_s \right]^{(1/2)}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{B}_{eq_l} = \left[\frac{3}{2}\, \mathbf{B}_l : \mathbf{B}_l \right]^{(1/2)}, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{B}'_{eq_s} = \left[\frac{3}{2}\, \mathbf{B}'_s : \mathbf{B}'_s \right]^{(1/2)}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{B}'_{eq_l} = \left[\frac{3}{2}\, \mathbf{B}'_l : \mathbf{B}'_l \right]^{(1/2)}. \quad (2.73)$$

Pour les variables isotropes R et K, les lois évolutives s'expriment par:

$$\dot{R} = A_3\, \dot{\epsilon}^i_{eq} - A_3\, \dot{\epsilon}^i_{eq} \frac{R}{R'} - A_4 \left\langle \frac{R - x_r R'}{C} \right\rangle^p, \quad (2.74)$$

$$\dot{K} = A_5\, \dot{\epsilon}^i_{eq} - A_5\, \dot{\epsilon}^i_{eq} \frac{K}{K'} - A_6 \left\langle \frac{K - x_k K'}{C} \right\rangle^u, \quad (2.75)$$

où A_3, A_4, A_5, A_6, x_r et x_k, p et u sont des constantes.

Ces différentes lois évolutives sont exprimées en termes des valeurs à saturation des variables internes $\mathbf{X}' = \{\mathbf{B}'_s, \mathbf{B}'_l\}$, R' et K'. Ces valeurs à saturation, qui sont

toutes des scalaires, sont exprimées en termes du taux de déformation inélastique équivalent. Elles sont définies par:

$$\mathbf{B}'_{eq_s} = \mathbf{B}_{0s} \left[ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right]^m , \tag{2.76}$$

$$\mathbf{B}'_{eq_l} = \mathbf{B}_{0l} \left[ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right]^m , \tag{2.77}$$

$$R' = R_0 \left[ln \left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right]^m , \tag{2.78}$$

où R_0, $\mathbf{B}_{0s}$, $\mathbf{B}_{0l}$, $\dot{\epsilon}_0$ et m sont des constantes du matériau.

La figure 2.6 donne une représentation schématique de l'évolution des variables internes lors d'un essai CTC-RTE (d'après Aubertin et al. 1994). On peut apprécier le sens physique des VOI correspondant véritablement à des propriétés physiques du matériau.

En ce qui concerne la valeur de saturation K', elle est obtenue en exprimant la loi cinétique à saturation, c'est-à-dire la condition stationnaire pour laquelle on suppose qu'il est possible de lier de façon explicite le taux de déformation inélastique à la contrainte déviatorique. Ainsi, pour cette condition, on suppose que:

$$\mathbf{S}'_{eq} = \sigma_0 \ln \left[\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right] , \tag{2.79}$$

où σ_0 est une constante. En utilisant cette dernière équation et la loi évolutive pour laquelle le taux de déformation est exprimé en terme du taux de déformation équivalent $\dot{\epsilon}_{eq}$, on peut déduire:

$$K' = \frac{\mathbf{S}'_{eq} - \mathbf{B}'_{eq_s} - \mathbf{B}'_{eq_l} - R'}{\left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{A} \right)^{(1/N)}} . \tag{2.80}$$

2.5.3 Module d'endommagement - SUVIC-D

Cette partie vise à présenter le module d'endommagement SUVIC-D développé en parallèle avec le modèle SUVIC pour tenir compte des phénomènes de déformation

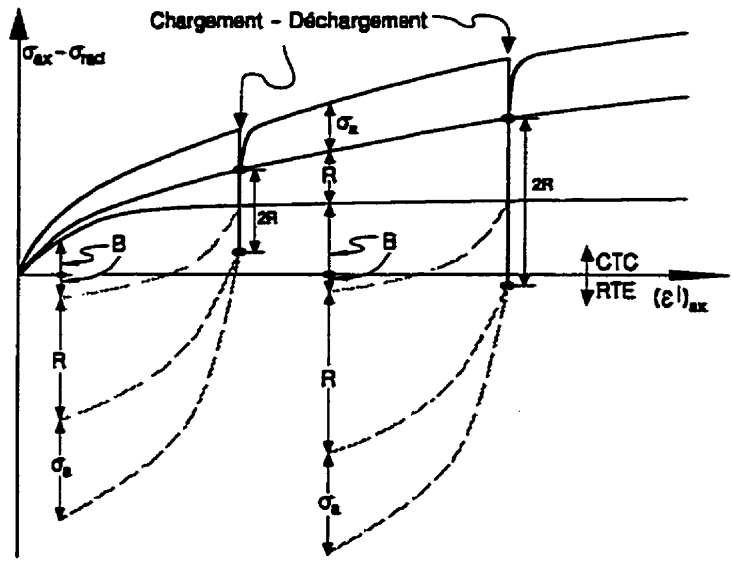


Figure 2.6: Représentation schématique de l'évolution des variables internes lors d'un essai CTC-RTE (d'après Aubertin et al. 1994).

non isovolumétrique observables (Aubertin et al. 1993; Aubertin et al. 1995; Aubertin et al. 1998; Sgaoula 1997). Il est reconnu que la déformation inélastique de matériaux endommagés peut induire une dilatance significative. Le sel gemme peut ainsi exhiber une déformation non isovolumétrique lorsque la propagation des micro-fissures est permise (Wawersik 1980; Ratigan et al. 1991; Stormont et al. 1992). La déformation par endommagement, par opposition à la déformation viscoplastique, est un mode de déformation non contrôlé par des phénomènes de mouvements des dislocations mais plutôt par l'apparition, la coalescence et la propagation de microfissures (Lemaitre 1992). Les mécanismes d'endommagement peuvent par ailleurs influencer les mécanismes de mouvement des dislocations affectant le taux de déformation.

L'endommagement se manifeste de plusieurs façons selon la nature du matériau,

du type de chargement et de la température (Lemaitre 1992). On peut observer des endommagements élastique, de fluage ou de fatigue. L'endommagement élastique est un type de décohésion que subissent certains matériaux sous une sollicitation monotone en l'absence de déformations microscopiques irréversibles importantes. Ce type d'endommagement est caractérisé par une forte localisation typiquement causée par la propagation et la nucléation des microfissures dans des plans perpendiculaires à la contrainte principale mineure (Murakami 1987; Murakami 1990; Murakami et Ohno 1982). L'endommagement de fluage accompagne les déformations de fluage. Cet endommagement est fonction du temps. Il survient particulièrement à des températures intermédiaire et élevée avec des processus de décohésion intergranulaire accompagnant les déformations viscoplastiques suffisamment grandes (Lemaitre 1992). Ces décohésions intergranulaires produisent un endommagement et une augmentation du taux de déformation (fluage tertiaire). L'endommagement par fatigue se produit lors de chargements cycliques et correspond au vieillissement du matériau lorsqu'il est soumis à des cycles de sollicitation (Lemaitre 1992).

Lors de la présentation de la notion de déformation viscoplastique, la notion de continuum était implicite. Pour traiter de l'endommagement et permettre un couplage avec la notion de déformation viscoplastique vue précédemment, deux approches extrêmes peuvent être préconisées:

1. traiter le continuum comme un discontinuum dont les composantes peuvent être assimilées à des continua dans lesquels les notions de viscoplasticité s'appliquent. Cette approche est appropriée lorsqu'une forte localisation a déjà eu lieu. Cette approche est à la base de certaines approches numériques populaires en mécanique des roches, ex.: éléments distincts (Cundall 1974) et théorie des blocs (Shi et Goodman 1989);

2. incorporer l'endommagement à la notion de continuum et ainsi créer le concept de continuum dégénéré où les notions de viscoplasticité sont surimposées à celles de l'endommagement. Dans le cas où l'on s'intéresse aux matériaux semi-

fragiles comme le sel gemme, il est plus normal d'opter pour cette approche. C'est elle qui est retenue pour la discussion qui suit.

Pour les matériaux polycristallins comme le sel gemme, les propriétés élastiques ne sont pas affectées lorsque la déformation inélastique est strictement viscoplastique (Poirier 1985; Aubertin 1996). Toutefois, la contribution de l'endommagement à la déformation inélastique se solde par la dégradation des propriétés élastiques (Krajcinovic et Lemaitre 1987; Krajcinovic et al. 1991; Lemaitre 1992). Le fait qu'on idéalise le corps endommagé comme un nouveau continuum ayant des propriétés propres évoluant progressivement au fur et à mesure que la déformation progresse permet un couplage avec les modèles viscoplastiques utilisant la continuité comme prémisse (tel SUVIC). L'étude du comportement à la déformation d'un matériau endommagé peut se faire alors par la définition de lois de comportement de matériaux vierges dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la notion de contrainte nette.

Le principe d'équivalence de la déformation (Lemaitre et Chaboche 1988), fondamental à la théorie mécanique des continua endommagés, suppose que toute équation constitutive pour un matériau endommagé découle de celle du matériau vierge sauf que les contraintes sont remplacées par les contraintes nettes (la contrainte agissant sur le matériau équivalent non endommagé). Les autres variables demeurent inchangées. La variable d'endommagement $\mathcal{D}$ assure le lien entre la contrainte usuelle et la contrainte nette. Elle peut être représentée par un scalaire, un vecteur ou un tenseur du deuxième ordre ou du quatrième ordre. Cette variable est considérée comme une variable d'état interne (elle n'est pas mesurable directement mais son effet l'est) (Lemaitre 1985).

L'approche préconisée lors du développement du modèle SUVIC-D a été de partitionner la déformation d'endommagement en composantes dites viscoplastique (V) et d'endommagement (D), issues respectivement de l'application du principe d'équivalence de la déformation sur la loi constitutive viscoplastique et l'incorporation

additionnelle d'une fonction séparée traitant du comportement dilatant. La loi cinétique du modèle SUVIC-D est donc fragmentée en une contribution viscoplastique $\dot{\epsilon}^{i\,V}$ et une contribution d'endommagement $\dot{\epsilon}^{i\,D}$:

$$\dot{\epsilon}^{i} = \dot{\epsilon}^{i\,V} + \dot{\epsilon}^{i\,D} . \tag{2.81}$$

Soit $\hat{\sigma}$ la contrainte nette et $\mathcal{D}$ la variable d'endommagement isotrope (scalaire), alors la contrainte nette peut être obtenue de la contrainte pour le cas uniaxial par:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1-\mathcal{D}} . \tag{2.82}$$

Si $\mathcal{D} = 0 \Rightarrow$ le matériau n'est pas endommagé. Si $\mathcal{D} = 1 \Rightarrow$ le matériau est complètement endommagé. Il est à noter que l'endommagement maximal sera typiquement $\mathcal{D}_{max} < 1$. En uniaxial, on peut utiliser comme mesure de l'endommagement le module d'élasticité du matériau endommagé $\hat{E}$:

$$\hat{E} = (1-\mathcal{D})\, E . \tag{2.83}$$

Lorsque l'endommagement est négligeable ($\dot{\mathcal{D}} = \mathcal{D} = 0$), SUVIC-D se réduit à SUVIC. Dans le cas contraire, le modèle viscoplastique présenté à la section précédente pourrait être réécrit en termes des contraintes nettes $\hat{\sigma}$.

Le taux de déformation inélastique non isovolumétrique $\dot{\epsilon}^{i\,D}$ est introduit dans l'équation 2.81 pour représenter une contribution à la déformation non satisfaite par le principe d'équivalence de la déformation. Cette contribution est particulièrement importante dans le cas des roches tendres où l'on peut observer des variations volumétriques significatives (Aubertin et al. 1996).

Pour représenter cette contribution, on utilise une loi d'écoulement développée par Aubertin et al. (1994). Cette loi utilise un critère d'écoulement où le taux de déformation non isovolumétrique est exprimé par:

$$\dot{\epsilon}^{i\,D} = \dot{\eta}\frac{\partial Q}{\partial \hat{\sigma}} \tag{2.84}$$

où Q est une fonction à être définie et $\dot{\eta}$ est ce que l'on peut représenter comme la vitesse de déformation inélastique non isovolumétrique. Aubertin et al. (1996) expriment cette quantité par:

$$\dot{\eta} = \gamma \left\langle \frac{F^*}{F_r} \right\rangle^{v_3} \tag{2.85}$$

où γ est une fonction de la fluidité, F_r et v_3 sont des constantes. La fonction F^* représente un seuil entre l'état de contraintes où il y a et n'y a pas d'endommagement. La fonction F^* proposée par les auteurs du modèle est de la forme:

$$F^* = \sqrt{\hat{J}_2} - F_o \, F_\pi \tag{2.86}$$

où, $\hat{J}_2$ est le $2^{ième}$ invariant du déviateur exprimé en termes des contraintes nettes. On définit aussi:

$$F_o = a_1 \left\{ 1 - e^{-a_2 I_1} \right\} + a_3 \, , \tag{2.87}$$

$$F_\pi = \left\{ \frac{b}{\sqrt{b^2 + (1 - b^2) \, sin^2(45 - 1.5\Theta)}} \right\}^{e^{-v_1 I_1}} . \tag{2.88}$$

a_1, a_2, a_3, b, v_1 sont toutes des constantes. Il est à noter que I_1 (le premier invariant) et Θ (l'angle de Lode) sont exprimés en termes des contraintes totales. On rappelle que Θ, l'angle de Lode peut être représenté par:

$$\Theta = tan^{-1} \left[\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} \right] \tag{2.89}$$

avec $-30^o \leq \Theta \leq 30^o$.

La variable d'endommagement $\mathcal{D}$, représente l'effet de la microfissuration sur la contrainte nette agissant sur les portions non endommagées du volume unitaire. $\mathcal{D}$ provoque une augmentation de la contrainte nette, ainsi que de la composante élastique, viscoplastique et non isovolumétrique de la déformation. Durant la déformation, $\mathcal{D}$ augmente généralement. En introduisant la VEI $\mathcal{D}$, une loi évolutive doit être développée rendant compte de l'évolution de cette variable en fonction de l'évolution des variables mesurables et internes.

Comme il est mentionné dans Aubertin (1996), la loi évolutive de la variable d'état $\mathcal{D}$ est fonction de l'état de contrainte (déviatorique et moyenne), de l'endommagement accumulé, de la température et des différentes variables internes. Toutefois, l'influence des variables internes viscoplastiques serait négligeable (Lemaitre et Chaboche 1988; Aubertin et al. 1994). La formulation générale de la loi évolutive de la variable d'endommagement $\mathcal{D}$ est ainsi proposée:

$$\dot{\mathcal{D}} = f_1(\mathcal{D})\ f_2(\sigma, \epsilon) - f_3(\sigma, \Delta h) \tag{2.90}$$

où

- f_1 est une fonction de l'endommagement cumulé;
- f_2 est une fonction de la contrainte - déformation;
- f_3 dépend de l'état de contrainte et d'une variable h incluant l'effet de la température et de l'humidité, etc.

Cette formulation s'inspire en partie d'expressions développées pour le fluage tertiaire des métaux (Aubertin 1996; Chan 1988; Hayhurst 1990). On remarquera les similitudes (et différences) avec le formalisme général utilisé pour produire les lois évolutives en viscoplasticité. La fonction f_3 agit ici comme un terme de restauration. En ce qui concerne les fonctions f_1 et f_2, une formulation inspirée de Kachatnov et Rabotnov est proposée par Aubertin (1996) et Aubertin et al. (1994):

$$f_1 = \left(1 - \frac{\mathcal{D}_{kk}}{D_c}\right)^{-k} \tag{2.91}$$

$$f_2 = D_0 \gamma \dot{\epsilon}_c^i \left\langle \frac{F^*}{F_d} \right\rangle^r \mathbf{d} \tag{2.92}$$

où k, D_c, F_d et r sont des constantes.

La constante de fluidité γ peut être définie par:

$$\gamma = v_4 \left\langle 1 - \frac{\epsilon_{eq}^i}{\epsilon_1} \right\rangle^{-v_5} \tag{2.93}$$

où v_4, v_5 et ϵ_1 sont des constantes du matériau.

Dans ce modèle,

$$\mathcal{D}_{kk} = trace(\mathcal{D}) \tag{2.94}$$

on peut remarquer que la fonction f_1 est un scalaire et f_2 un tenseur qui procure la directionnalité nécessaire à la définition de $\mathcal{D}$. Le tenseur $\mathbf{d}$ est défini de la façon suivante (Aubertin et al. 1994; Aubertin et al. 1996):

$$\mathbf{d} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \, . \tag{2.95}$$

Dans la formulation actuelle, la fonction f_3 est considérée négligeable ($f_3 \approx 0$) (Aubertin et al. 1994). La fonction Q^* peut être exprimée par la formulation suivante (Aubertin et al. 1994):

$$Q^* = \sqrt{\hat{J}_2} - F_{o\,q}\, F_{\pi\,q} \tag{2.96}$$

où

$$F_{o\,q} = a_4 \left\{ 1 - e^{-a_5 I_1} \right\} \tag{2.97}$$

et

$$F_{\pi\,q} = \left\{ \frac{b}{\sqrt{b^2 + (1-b^2)\, sin^2(45^o - 1.5\hat{\Theta})}} \right\}^{e^{-v_2 I_1}} \, . \tag{2.98}$$

a_4, a_5, a_6, b, v_2 sont toutes des constantes. On remarque ici l'utilisation systématique de la contrainte nette.

2.6 Évaluation des constantes

Afin de clore ce chapitre, on se doit de traiter de la question incontournable de l'évaluation des constantes de tels modèles. La question de la définition des constantes du matériau des modèles avec VEI est un aspect complexe et fondamental. Ces constantes permettent de pondérer l'influence des différentes VEI décrivant l'historique de la déformation. Il n'existe pas de relations constitutives (pour le sel gemme) dérivées seulement d'essais de laboratoire pouvant prédire adéquatement

le comportement in situ. Il est toutefois possible pour un modèle adéquat, pour des essais de laboratoire, de jouer sur le jeu de constantes afin d'en arriver à une description raisonnable des différents phénomènes de déformation (Prij et al. 1991). Comme l'a souligné Lindholm et al. (1993), on observe dans la littérature un manque d'information dans la description des méthodes de détermination des constantes à partir d'essais de laboratoire. Ceci est particulièrement vrai pour les modèles avec VEI qui peuvent avoir recours à des quantités significatives de constantes. Plus de 20 constantes peuvent être définies pour la version la plus récente du modèle SUVIC viscoplastique. Ce cas n'est pas unique. Des analyses ont été faites avec des modèles micromécaniques ayant plus de 50 constantes (Pilvin et al. 1991). Des modèles pour monocristaux ont atteint jusqu'à 99 constantes (et plus) (Lovato et al. 1995).

L'approche méthodologique conduisant à l'évaluation de ces constantes est donc cruciale. Le lien serré des formulations évolutives des modèles avec VEI peut provoquer des effets difficiles à prévoir lors de la définition des constantes. Néanmoins, l'analyse de sensibilité demeure un outil d'une grande utilité et fort recommandable, mais elle ne peut se substituer à un programme de laboratoire ciblé (Lindholm et al. 1993). Les avis sont partagés sur cette question. D'une part, il y a les tenants d'approches basées surtout sur l'expérimentation avec support numérique dirigé (Aubertin 1996; Lemaitre et Chaboche 1988) et, d'autre part, les tenants de l'utilisation d'une approche numérique rigoureuse pour ne pas dire vigoureuse. Les tenants de cette dernière approche prétendent que les problèmes rencontrés avec certains de ces modèles ne sont pas issus d'une définition des constantes inadéquate mais plutôt d'une formulation déficiente des équations (Braasch et al. 1995). L'expérimentation dans ce cas-ci sert à définir le modèle, et la définition des constantes est essentiellement un problème inverse, ex.: Krieg (1982). Cette affirmation serait d'autant plus vraie pour des modèles ayant plus de 10 constantes (Cailletaud et Pilvin 1994).

Selon Braasch et Estrin (1993) et Braasch et al. (1995), des stratégies évolutives sont nécessaires pour commenter les différences entre la description mathématique et

les données de laboratoire. L'importance de ces différences peut être une indication que le modèle répond mal au comportement physique étudié. En fait, ces auteurs considèrent que l'on ne doit pas s'orienter vers l'amélioration de la définition du jeu de constantes mais plutôt vers celle du modèle lui-même. Ils proposent ainsi:

- Les constantes du matériau sont évaluées par un algorithme minimisant l'erreur (la plupart des algorithmes ne font que cela);

- La représentation du modèle se fait par des polynômes d'interpolation dont la forme dépend de la fonction approximée. En augmentant progressivement le nombre de termes de ces polynômes, et incidemment le nombre de constantes à estimer, on peut évaluer la qualité de l'évolution de la convergence des résultats obtenus à la suite de l'augmentation du nombre de termes de la série. À chaque itération, une régression non linéaire est effectuée. L'avantage d'une telle approche est qu'elle permet de statuer sur la qualité de la formulation fonctionnelle et d'évaluer le gain réel possible en jouant sur le jeu de constantes;

- S'il y a toujours des différences non négligeables entre la théorie et l'approximation, des altérations doivent être apportées aux hypothèses physiques afin d'arriver à une formulation mathématique améliorée du modèle.

En utilisant une telle approche, un modèle unifié simple avec une variable cinématique et isotrope pour l'aluminium a pu être amélioré (Braasch et al. 1995). La définition des constantes semblait déficiente, mais il s'est avéré que la formulation fonctionnelle était inadéquate et devait inclure des termes additionnels de restauration.

Par ailleurs, l'inspection des coefficients de sensibilité ou de la matrice de corrélation est une approche directe permettant d'évaluer de façon quantitative les problèmes de définition des constantes. Le calcul de la matrice de corrélation (généralisation du concept de covariance) permet d'estimer les constantes instables et présentant

une colinéarité (Senseny et al. 1993). La colinéarité observée peut être imputable à la présence de constantes dépendant les unes des autres ou d'une base de données insuffisante. La colinéarité peut alors être réduite soit en augmentant la base de données ou en modifiant la forme des fonctions.

La position de Senseny et al. (1993) se situe à mi-chemin entre ces deux extrêmes. Elle tend à privilégier une approche où aucune hypothèse n'est faite a priori sur les valeurs des constantes. L'existence de corrélation entre certaines constantes peut alors être mise à jour plus facilement. La minimisation est ainsi faite à partir d'une base de données avec essais simples et standard facilement reproductibles.

Parmi certaines contributions récentes d'intérêt pour le sel gemme, on peut mentionner les travaux associés à la vérification du modèle constitutif Munson-Dawson modifié (MDCF) (Fossum et al. 1998; Munson et al. 1993; Munson et Dawson 1982; Pfeifle et al. 1987) dans le cadre du programme WIPP. Les constantes du modèle furent considérées comme des variables aléatoires obtenues par un lissage classique des résultats d'essais de fluage. Pour chaque constante, une fonction de probabilité a été établie. Les constantes ont été optimisées par la suite. Une technique d'optimisation a aussi été développée afin d'évaluer les 5 constantes d'un autre modèle avec VEI pour le sel gemme (Zaman et al. 1992). On présentera plus loin dans cette thèse, une procédure développée et appliquée spécifiquement pour le modèle SUVIC.

Chapitre III

MODÈLES NUMÉRIQUES POUR LE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE

3.1 Modélisation numérique pour les géomatériaux

Les techniques de modélisation numérique en géomécanique ont récemment connu un essor spectaculaire intimement lié au développement des ordinateurs personnels. Les méthodes numériques utilisées en géomécanique sont substantiellement différentes de celles employées en analyse structurale classique. L'analyse numérique en géomécanique nécessite de façon courante des frontières à l'infini (problèmes internes) avec des géométries complexes (3D) qui ne sont pas nécessairement axisymétriques. Les géomatériaux sont de plus caractérisés par une variabilité intrinsèque de leurs propriétés, souvent difficile à cerner tant dans l'espace que dans le temps. Dans le cas des roches et des massifs rocheux, ce comportement est fréquemment contrôlé par des éléments structuraux majeurs ou mineurs comme des failles ou des joints. Pour ce faire, l'analyse numérique en géomécanique a surtout été orientée vers l'analyse de géométries complexes avec des lois constitutives simples tentant de

représenter le matériau de façon globale. Il existe présentement une vaste gamme de méthodes et de codes numériques pouvant être utilisés pour résoudre divers types de problèmes. Plusieurs revues ont été faites sur les diverses méthodes et codes disponibles (Cividini 1993; Tang 1998; Simon 1999). Trois principales approches sont possibles pour l'analyse des géomatériaux:

1. le milieu est supposé continu;
2. le milieu est supposé discontinu;
3. le milieu est divisé en 2 domaines (continu et discontinu) avec leur méthode numérique propre (méthodes hybrides).

3.1.1 Méthodes pour les milieux continus

En ce qui concerne l'analyse des milieux continus, on retrouve quatre grandes classes de méthodes: les éléments finis, les différences finies, les éléments frontières et les méthodes d'analyse limite ou d'équilibre limite. Il est à noter que ces méthodes, même si elles traitent des milieux continus, peuvent inclure des discontinuités localisées et des interfaces pouvant être régies par des lois de comportement propres. Les méthodes basées sur les méthodes d'analyse limite ou d'équilibre limite reposent sur les théorèmes des limites inférieures et supérieures qui étudient le comportement en rupture en conditions statiques ou cinétiques (Chen et Baladi 1995; Lubliner 1990; Skrzypek et Hetnarski 1993; Chakrabarty 1987). Ces méthodes sont fort populaires, particulièrement pour l'analyse de la stabilité de talus en mécanique des sols. Les autres méthodes sont discutées plus en détail dans les parties suivantes.

3.1.2 Méthodes pour les milieux discontinus

Les méthodes pour les milieux discontinus ont été développées pour représenter des conditions de terrain jointées où l'espacement des joints est du même ordre de

grandeur que la dimension des ouvrages analysés. Puisque les joints sont beaucoup plus déformables que les blocs individuels, les blocs peuvent presque être considérés comme des corps rigides interagissant les uns avec les autres selon des points ou surfaces de contact. Ces points ou surfaces de contact peuvent être assujetis à des lois constitutives particulières (ex.: glissement frictionnel) (Hoek et al. 1991). Il est à noter que, typiquement, les méthodes développées pour les milieux continus permettent l'inclusion de discontinuités. Toutefois, ces discontinuités doivent être localisées.

Les principales méthodes sont les éléments distincts (Cundall 1974; Voegele et al. 1978), l'analyse par la méthode des blocs (Shi 1988; Shi et Goodman 1989; Lin et al. 1994) et la méthode des contraintes virtuelles modifiées (Hamajima 1993; Hamajima et al. 1993).

3.1.3 Méthodes hybrides

La troisième classe, les méthodes hybrides combinent typiquement 2 méthodes numériques différentes, d'où l'appellation hybrides. Chacune des méthodes agit sur un domaine distinct. L'interface entre ces domaines, et donc entre ces méthodes, se fait par des conditions de compatibilité. Parmi les méthodes disponibles, on retrouve sur le marché des combinaisons des méthodes d'éléments frontières éléments finis (Geoconsult 1997; Hoek et al. 1993) et de la méthode des différences finies éléments distincts. Il est à noter que les méthodes des éléments finis et des éléments frontières permettent d'analyser les milieux discontinus avec l'introduction de discontinuités.

L'objectif en utilisant les méthodes hybrides est de prendre avantage d'une méthode sans trop hériter de ses défauts. Ainsi, par exemple, un couplage éléments frontières éléments finis (Swoboda et al. 1987; Gioda et Cividini 1996) permet de simuler efficacement des problèmes d'excavations séquentielles et de matériaux nonlinéaires (comme le sel gemme, ex.: de Menezes 1998) avec la méthode des éléments finis et de modéliser des domaines infinis ou semi-infinis ou de permettre un remaillage

facile lors de la propagation de fissures avec la méthode des éléments frontières (Beer 1997).

3.2 Analyses pour milieux continus

Comme le matériau d'intérêt dans cette thèse se comporte habituellement comme un milieu continu, du moins dans le régime ductile (et souvent dans le régime semi-fragile), nous présentons plus en détail les méthodes utilisées pour l'analyse des matériaux continus.

3.2.1 Différences finies

La méthode des différences finies est sans doute la plus vieille méthode numérique pour résoudre des équations différentielles (Richardson 1910; Southwell 1946; Varga 1962). Dans une analyse avec différences finies, chaque dérivée du jeu d'équations différentielles fondamentales est remplacée par une expression algébrique écrite en termes des variables (contraintes ou déplacements) et évaluée à des points spécifiques dans l'espace. La méthode est en fait une technique d'intégration des équations fondamentales de façon incrémentale.

La méthode des différences finies ne requiert pas la construction d'une large matrice de rigidité comme c'est le cas pour la méthode des éléments finis. À chaque pas de temps, les équations des différences finies sont recréées à partir des valeurs calculées au pas de temps précédent.

La méthode des différences finies supporte facilement les inhomogénéités des matériaux et la non linéarité. Toutefois, cette technique exige une discrétisation complète du volume étudié. Les conditions des frontières à l'infini doivent être approximées. Le temps pour résoudre un problème augmente exponentiellement avec l'augmentation de la dimension du problème.

La méthode des différences finies est notamment utilisée dans les modèles FLAC

et FLAC3D (FLAC 1993). Ces codes sont sans doute les codes les plus populaires sur le marché depuis plus de 15 ans pour résoudre des problèmes non linéaires en géomécanique (on ne parle pas ici des codes utilisant les méthodes d'analyse limite). FLAC est un code de différences finies explicites 2D ou 3D simulant le comportement de structures de sols, de rocs ou d'autres matériaux pouvant subir un écoulement viscoplastique. FLAC est fourni avec un certain nombre de modèles constitutifs (élastique isotrope, anisotrope, Mohr-Coulomb, écrouissage par la déformation, loi de Norton, WIPP, etc). FLAC est aussi doté d'un langage propre de programmation FISH définissant de nouvelles variables et fonctions, et permettant d'introduire de nouveaux modèles constitutifs. L'approche de programmation préconisée par FISH demeure relativement simple. Le codeur demeure en périphérie du code exécutable. Lors de l'exécution, le code consulte une table externe avec laquelle il peut interagir. FLAC permet seulement un seul type d'intégration (explicite), ce qui est désavantageux pour certains types de chargement et lois de comportement. À la suite du calcul des équations d'équilibre, on procède au calcul du champ de vitesses ou de déplacements. À partir des équations constitutives internes ou externes (relation contraintes-déformations), un nouveau champ de contraintes ou de forces est calculé. Les perturbations se propagent d'un élément à l'autre à chaque cycle un peu comme elles le font physiquement (FLAC 1993).

FLAC a été fréquemment utilisé pour la modélisation du comportement du sel gemme, particulièrement dans le contexte minier. On peut mentionner certains travaux récents pour les mines de sel et potasse au Canada et en Allemagne (Frayne 1998; Salzer 1998; Ong et al. 1998). Le modèle FLAC, lorsqu'il est utilisé en parallèle avec un code d'éléments frontières pour déterminer le comportement à très grande échelle, permettrait d'estimer efficacement le comportement du sel gemme à une échelle intermédiaire, c.-à-d. au niveau de l'ouvrage (Frayne 1998) en supposant que des lois de comportement adéquates sont utilisées.

3.2.2 Éléments frontières

La méthode des éléments frontières est utilisée en géomécanique depuis plus de 25 ans. Cette méthode est idéale pour la résolution de problèmes géomécaniques linéaires statiques ou dynamiques. Une description de la méthode et la présentation d'exemples de résolution de problèmes peuvent être obtenues d'un certain nombre de références (Banerjee et Cathie 1980; Morjaria et Mukherjee 1981; Chandra et Mukherjee 1983; Crouch et Starfield 1983; Beer et Watson 1992; Watson 1993). Essentiellement, la méthode découle de l'intégration des solutions fondamentales à la suite du remplacement des intégrales de volume par des intégrales de surface par l'utilisation du théorème de la divergence. Cette méthode, qui réduit l'ordre du problème d'une unité, procure des matrices pleines de coefficients définissant les relations entre les éléments frontières. Ces matrices doivent être résolues de façon simultanée. La méthode est très efficace pour des problèmes linéaires avec frontières complexes et matériaux homogènes. Les conditions frontières à l'infini sont automatiquement résolues lors de l'application du théorème de la divergence. La discrétisation des éléments se limite aux frontières internes pour un problème interne.

Dès que des inhomogénéités sont introduites, de même que des non linéarités, les avantages de la méthode sont rapidement perdus. Pour des matériaux comme le sel gemme, cette méthode n'offre en fait qu'un attrait très limité si elle n'est pas utilisée dans le contexte de modèles hybrides.

Cette technique a été utilisée dans plusieurs applications géomécaniques (Simon 1999), comme la conception d'ouvertures souterraines (Meek 1985), le dimensionnement de piliers (Huang et al. 1985), l'évaluation de la stabilité de faces rocheuses (Tomlin et Butterfield 1974), l'évaluation du potentiel de coups de toit (Simon et al. 1993), et la modélisation de fissures et de failles (Peirce 1991; Simon 1999).

La méthode des éléments frontières peut être utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires. Une discrétisation du volume est alors requise, du moins pour la zone où un comportement non linéaire est appréhendé (Chandra et Mukherjee 1984a;

Chandra et Mukherjee 1984b; Chandra et Mukherjee 1986; Beer et Watson 1992; Watson 1993). Cette méthode est peu utilisée pour les problèmes non linéaires.

Parmi certains des codes commerciaux, on peut mentionner *Examine2D* et *Examine3D* (Examine-3D 1999), qui sont des codes d'éléments frontières utilisant l'élasticité linéaire conçus pour effectuer des analyses de contraintes et de déplacements pour des géométries complexes, et *MAP3D* (Wiles 1990), un code d'éléments frontières avec capabilité limitée pour l'analyse de problèmes non linéaires.

3.2.3 Éléments finis

En contraste, la méthode des éléments finis, qui s'apparente à la méthode des différences finies, exige que les contraintes ou déplacements varient dans chaque élément et d'un élément à l'autre de façon prédéfinie en utilisant des fonctions de forme exprimées en termes de paramètres. La formulation consiste alors à ajuster ces paramètres globalement afin de minimiser les termes d'erreur.

La méthode des éléments finis, décrite en détail à la section suivante, est avantageuse pour la résolution de problèmes non linéaires puisqu'elle peut être appliquée à des problèmes de plus en plus complexes incluant, par exemple, des composantes thermiques et dynamiques, sans que sa formulation de base soit altérée (Cividini 1993). De plus, la méthode des éléments finis est une technique permettant d'inclure la séquence d'excavation et tous les aspects liés à la mise en charge (Pariseau 1993). La méthode bénéficie de plusieurs types de solveurs et d'algorithmes de résolution. La possibilité de traiter des géométries complexes, des massifs rocheux inhomogènes, l'interaction du massif avec les structures de support font en sorte que, parmi les méthodes disponibles, la méthode des éléments finis offre une flexibilité considérée adéquate. Elle permet d'inclure naturellement les inhomogénéités, les interfaces et des lois de comportement complexes (Cividini 1993).

Plusieurs codes d'éléments finis sont commercialement disponibles, ex.: ADINA (Bathe 1982), ABAQUS (Abaqus 1998), COSMOS-M (1994), etc. Pour le cas des

géomatériaux, on peut citer, par exemple, le code PHASES (Hoek et al. 1993), un code hybride FEM-BEM, qui est relativement populaire. Ces différents codes ont évolué au fil des ans et peuvent traiter une vaste gamme de problèmes (statiques, dynamiques, thermiques, grandes déformations et grands déplacements, etc.) avec une multitude de types d'éléments et d'algorithmes de résolution, et de lois de comportement.

Par exemple, COSMOS-M, un système d'éléments finis développé pour les PC et les stations de travail, permet de résoudre des problèmes linéaires et non linéaires statiques et dynamiques. Avec son langage de programmation, il est possible, avec COSMOS-M d'introduire de nouvelles lois de comportement. Cependant, à l'instar du code FLAC avec le programme FISH, l'interaction du modèle avec le code est délicate (Tang 1998). La plupart des gros codes commerciaux comme COSMOS-M offrent la possibilité d'inclure des lois de comportement plus ou moins complexes mais sont peu adaptés aux exigences des modèles avec variables internes.

Puisque le code utilisé dans ce projet utilise la méthode des éléments finis, on présentera celle-ci plus en détail dans la prochaine partie.

3.3 Description de la méthode des éléments finis

3.3.1 Équations et principe de base

Le formalisme mathématique de la méthode des éléments finis est bien établi (Bathe 1982; Zienkiewicz 1977). La discussion dans les sections suivantes porte sur certains aspects liés à la résolution de problèmes non linéaires, en particulier ceux faisant intervenir une composante incrémentale avec des lois constitutives complexes, comme SUVIC, exhibant de l'écrouissage mixte non linéaire. Un intérêt particulier est porté aux questions d'intégration des lois de comportement et d'inversion de la matrice de rigidité de façon itérative. Par ailleurs, on ne traite que brièvement des aspects traités abondamment dans la littérature dont, entre autres, le passage à l'élément de

référence, l'assemblage, etc.

La méthode des éléments finis consiste à ramener un problème complexe avec des conditions frontières particulières (autant que possible régulières) à la résolution de problèmes simplifiés par méthodes variationnelles appliquées sur une série de volumes élémentaires. La méthode des éléments finis en mécanique des solides utilise typiquement le déplacement comme fonction test (Reddy 1993). Elle se ramène à la satisfaction du principe des puissances virtuelles sur un domaine V en considérant une géométrie quelconque pour ce domaine et des conditions frontières de diverses natures (déplacements ou tractions). On divise le corps analysé en M éléments V_m, où $m = 1, ..., M$, qui peuvent être linéaires, surfaciques ou volumétriques, selon qu'il s'agit d'un problème 1D, 2D ou 3D. Les effets de chacune de ces contributions sont ajoutés les uns aux autres en utilisant le principe de superposition tout en maintenant des conditions de compatibilité entre les éléments. Le but visé est de satisfaire aux conditions d'équilibre interne et les conditions frontières individuellement pour chacun de ces éléments.

Pour chaque volume élémentaire (3D) V_m, on considère que les déplacements sont inconnus. La solution d'un problème d'éléments finis basé sur les déplacements se fait alors en deux étapes: la solution du problème global découlant de la formulation variationnelle et l'intégration locale des équations constitutives à chaque point de Gauss (Chaboche et Cailletaud 1996).

Le passage du volume total à une série de M volumes élémentaires (isoparamétriques) se fait au moyen de fonctions utilisant des combinaisons linéaires de fonctions de coordonnées spatiales des noeuds de ces éléments. Ces fonctions de forme permettent ainsi d'exprimer le déplacement d'un élément par rapport aux déplacements nodaux à l'aide d'une série de coefficients préalablement déterminés par des polynômes d'interpolation. Les coefficients utilisés dépendent du type d'approximation souhaitée (linéaire, quadratique ou d'ordre supérieur) et du type d'éléments utilisé. On en arrive alors à une formulation où les inconnus du problème sont exprimés par rapport

aux déplacements nodaux inconnus (degrés de liberté).

Les relations intimes existant entre les différentes variables sont à l'origine de la difficulté majeure associée à la résolution de problèmes non linéaires. La résolution du système doit être vue comme un processus itératif d'autocorrection jusqu'à ce que soient satisfaites les conditions d'équilibre global et des lois de comportement.

Soit la matrice des déplacements **u** pour les différents éléments, elle peut être représentée par une combinaison linéaire des fonctions d'interpolation (linéaire) **H** et des déplacements nodaux **U** de chaque élément (après assemblage) (Bathe 1982):

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} : \mathbf{U} \, . \tag{3.1}$$

Les déformations sont exprimées par le produit contracté de la matrice d'interpolation différenciée $\mathcal{B}$ et des déplacements nodaux:

$$\epsilon = \mathcal{B} : \mathbf{U} \, . \tag{3.2}$$

On peut montrer (Chaboche et Cailletaud, 1996) que la résolution du système global peut être exprimée par la minimisation des forces intérieures F_{int} et extérieures F_{ext} (Germain 1973), laquelle à l'équilibre devient:

$$F_{ext} - F_{int} = 0 \, . \tag{3.3}$$

Or, les forces extérieures F_{ext} sont définies comme la somme des forces externes s'appliquant sur la frontière et dans le corps lui-même:

$$F_{ext} = \int_V \mathbf{H}^{T_r} \mathbf{f} \, dV + \int_S \mathbf{H}^{T_r} \, \bar{\mathbf{t}} \, dS \, , \tag{3.4}$$

où $\bar{\mathbf{t}}$ est une densité surfacique de forces appliquées à la frontière (conditions naturelles) et **f**, un champ de forces internes quelconque incluant les charges concentrées et le poids propre des matériaux. L'indice T_r réfère à la matrice transposée.

Les forces intérieures sont, pour leur part, exprimées par le produit contracté des déplacements nodaux avec la matrice symétrique **K**, dite matrice de rigidité (Reddy 1993):

$$F_{int} = \mathbf{K} : \mathbf{U} \, . \tag{3.5}$$

La matrice de rigidité $\mathbf{K}$ s'exprime en termes de la matrice d'interpolation différenciée $\mathcal{B}$ et le tenseur $\mathbf{D}$ (Bathe 1982):

$$\mathbf{K} = \int_V \mathcal{B}^{T_r} : \mathbf{D} : \mathcal{B}\, dV \,. \tag{3.6}$$

Le tenseur $\mathbf{D}$ relie la contrainte à la déformation et correspond pour une analyse élastique au tenseur élastique $\mathbf{D}_{el}$ pour chaque élément:

$$\mathbf{D} \quad = \mathbf{D}_{el} = \frac{\sigma}{\epsilon}\,, \tag{3.7}$$

où σ est la contrainte et ϵ la déformation. Pour une telle analyse, la matrice $\mathbf{D}$ est constante. Puisque la matrice d'interpolation différenciée est aussi constante, la matrice de rigidité $\mathbf{K}$ demeure constante pour le cas élastique.

Comme il est énoncé au chapitre précédent, on doit procéder pour le cas non linéaire (inélastique) à une analyse incrémentale. Le tenseur $\mathbf{D}$ est réécrit $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{in}$. Il représente une relation linéaire entre l'incrément de contrainte et l'incrément de déformation totale:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{in} = \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \Delta\epsilon}\,. \tag{3.8}$$

Puisque le tenseur $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{in}$ évolue avec la contrainte et la déformation, la matrice de rigidité $\mathbf{K}$ devient une quantité évolutive et doit être mise à jour durant le processus itératif.

Plusieurs techniques existent pour déterminer l'incrément de déplacement permettant de mettre à jour la matrice de rigidité. Le but des paragraphes suivants n'est pas de présenter toutes les techniques et approches de résolution incrémentale disponibles mais d'en énoncer une, robuste et représentative, qui a été utilisée dans le cadre de cette recherche.

Pour reproduire un comportement inélastique non linéaire (relation non linéaire entre σ et ϵ), on doit procéder de façon itérative. Pour un certain pas de temps Δt, les variables nodales sont ajustées afin que la différence entre les forces externes

et les forces internes puissent globalement satisfaire les conditions d'équilibre (= 0) (équation 3.3).

Pour un certain pas de temps Δt, les forces externes sont mises à jour au début du pas de temps et maintenues constantes durant le pas de temps. Le processus itératif visant à obtenir les conditions d'équilibre est réalisé sur les forces internes. On suppose que les forces internes ont été calculées à l'itération i ($iter = i$). À l'itération ($iter = i + 1$), le résidu $\mathcal{R}$, qui correspond à la différence entre les forces externes (au début du pas de temps) et les forces internes (à l'itération précédente), est évalué à l'itération ($iter = i + 1$) par:

$$\mathcal{R}^{(iter=i+1)} = F_{ext}^{0} - F_{int}^{(iter=i)} , \tag{3.9}$$

où F_{ext}^{0} est la somme des forces extérieures à l'itération initiale et $F_{int}^{iter=i}$ est la somme des forces intérieures à l'itération i.

Tel que l'a mentionné Foerch (1996), en utilisant une expansion de Taylor du résidu et en notant que la matrice de rigidité correspond à la matrice jacobienne des forces internes en fonction de l'incrément des variables nodales U, le résidu $\mathcal{R}$ à l'itération ($iter = i + 1$) devient pour la matrice de rigidité mise à jour à l'itération ($iter = i$) $\mathbf{K}^{(iter=i)}$:

$$\mathcal{R}^{(iter=i+1)} = \mathcal{R}^{(iter=i)} + \mathbf{K}^{(iter=i)}\, \Delta\mathbf{U} , \tag{3.10}$$

avec

$$\mathbf{U}^{(iter=i+1)} = \mathbf{U}^{(iter=i)} + \Delta\mathbf{U}. \tag{3.11}$$

En désirant que le résidu à l'itération ($iter = i + 1$) tende vers 0, on obtient après inversion de l'équation 3.10 que:

$$\Delta\mathbf{U} = -(\mathbf{K}^{(iter=i)})^{-1}\, \mathcal{R}^{(iter=i)} . \tag{3.12}$$

L'équation 3.12 permet de déterminer de façon incrémentale et itérative l'incrément de déplacement permettant de mettre à jour le champ de déplacement global. Cette

équation montre clairement la nécessité (théorique) d'inverser la matrice de rigidité à chaque itération.

3.3.2 Assemblage

L'assemblage est une étape essentielle dans la résolution du problème global. L'information y est organisée de façon optimale afin de minimiser la taille du problème à inverser. Les conditions de compatibilité entre les divers éléments sont alors définies. Les déplacements aux noeuds communs à plusieurs éléments sont unifiés, et les éléments deviennent conformes. Lors de l'assemblage, les contributions de rigidité et d'efforts extérieurs associés à chacun des éléments contenant un noeud donné sont ajoutées par superposition.

3.3.3 Inversion de la matrice de rigidité K

Puisqu'il est souvent nécessaire de décomposer une structure en un grand nombre d'éléments avec de nombreux degrés de liberté, la matrice de rigidité **K** peut être énorme. En raison de sa structure en bande, le nombre de termes à manipuler est réduit à ceux localisés dans la zone de la diagonale non nulle. La largeur de bande de la matrice de rigidité assemblée dépend de la numérotation choisie pour les noeuds de la structure.

L'inversion de la matrice de rigidité a traditionnellement été, en éléments finis, la seule étape importante de calcul pour les problèmes linéaires (inversion de **K**). Pour les problèmes non linéaires, cette étape est particulièrement exigeante en termes de temps de calcul parce que le processus d'inversion est intégré dans le processus itératif local. On rappelle que les inversions de matrices par quelque méthode que ce soit (décomposition Gaussienne, résolution frontale, ou autre) ne sont pas des exercices triviaux du point de vue numérique (et temps CPU), particulièrement si la matrice montre des tendances à la singularité (c.-à-d. frontières avec zones de concentration de contraintes). Idéalement, on aimerait que la matrice de rigidité soit assemblée

et inversée à chaque itération afin d'avoir la meilleure solution possible. Ceci est évidemment prohibitif, particulièrement si l'on désire s'attaquer à des problèmes 3D complexes. Ce problème essentiellement numérique peut être abordé de plusieurs façons (Press et al. 1988):

- Méthode Newton-Raphson

  Avec la méthode Newton-Raphson, la matrice de rigidité K est inversée à chaque itération. Même si cette approche est exigeante au niveau CPU, son efficacité n'est plus à montrer lorsque la non-linéarité est forte et les incréments de temps grands (Zienkiewicz 1977). Toutefois, de façon générale, on préférera une approche itérative à une approche basée sur l'inversion (Aazizou 1990). Lorsque possible, la méthode Newton-Raphson sera donc déconseillée. Si la non-linéarité prévue est particulièrement forte, alors cette approche sera néanmoins recommandée même si le prix à payer en temps de calcul est très élevé.

- Méthode de la rigidité initiale

  La méthode de la rigidité initiale part du principe que pour un pas de temps relativement petit, on peut intégrer en conservant la matrice de rigidité constante pour tout le pas de temps. Si une telle approche est choisie, on recommande d'utiliser la matrice de rigidité obtenue d'une analyse purement élastique (Foerch et al. 1996). Cette approche n'est valable que si les non-linéarités sont faibles ou si le pas de temps est très petit (Aazizou 1990).

- Méthode Newton modifiée

  La méthode Newton modifiée part de l'hypothèse que la réactualisation majeure de la matrice de rigidité a lieu au cours des deux à quatre premières itérations (Foerch et al. 1996). Cette méthode est simplement un compromis précision-effort de calcul où l'on procède à l'inversion de la matrice de rigidité au cours des deux ou trois premières itérations. Cette méthode, comme la

précédente, est particulièrement vulnérable lorsque le chargement, est complexe notamment lorsque des déchargements ont lieu durant un pas de temps (Aazizou 1990).

- Algorithme Davidson-Fletcher-Powell (DFP)

L'algorithme Davidson-Fletcher-Powell (DFP) vise à maintenir à jour l'inverse de la matrice de rigidité sans procéder à une inversion explicite mais plutôt à une réactualisation découlant d'une approche récursive (Press et al. 1988). À chaque itération, une correction est appliquée à la matrice de rigidité inversée ou corrigée obtenue de l'itération précédente. De façon schématique, la formulation récursive suivante est produite:

$$\left(\mathbf{K}^{(iter=i+1)}\right)^{-1} = \left(\mathbf{K}^{(iter=i)}\right)^{-1} + correction_{(DFP)} \; . \tag{3.13}$$

Il peut être montré que la correction à appliquer peut être approximée par une fonction algébrique des résidus $\mathcal{R}^{(iter=i)}$, $\mathcal{R}^{(iter=i+1)}$, des itérations $(iter = i)$ et $(iter = i+1)$, des valeurs des incréments de déplacements nodaux $\Delta\mathbf{U}^{(iter=i)}$, $\Delta\mathbf{U}^{(iter=i+1)}$ et de la matrice de rigidité inversée obtenue de l'itération $(iter = i)$ $\left(\mathbf{K}^{(iter=i)}\right)^{-1}$:

$$correction_{(DFP)} = f_1\left(\Delta\mathbf{U}^{(iter=i)}, \Delta\mathbf{U}^{(iter=i+1)}, \mathcal{R}^{(iter=i)}, \mathcal{R}^{(iter=i+1)}, \left(\mathbf{K}^{(iter=i)}\right)^{-1}\right) \; , \tag{3.14}$$

où f_1 est une fonction algébrique. Les propriétés de cette fonction algébrique sont telles qu'elle est constituée de produits contractés de tenseurs au numérateur et de scalaires au dénominateur rendant son évaluation directe.

- Algorithme Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)

L'algorithme Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) est sans doute le plus populaire (Press et al. 1988). Il combine la méthode DFP avec celle du gradient conjugué. La matrice du gradient conjugué permet d'appliquer à chaque

itération une correction additionnelle dont la direction est orthogonale à celle appliquée à l'itération précédente. Cette méthode permet d'obtenir une convergence après n itérations, où n est le nombre de degrés de liberté (Aazizou 1990). On peut exprimer la procédure récursive de la façon suivante où l'on ajoute un terme additionnel à la correction obtenue de la méthode DFP:

$$\left(\mathbf{K}^{(iter=i+1)}\right)^{-1} = \left(\mathbf{K}^{(iter=i)}\right)^{-1} + correction_{(DFP)} + correction_{(BFGS)} \,, \quad (3.15)$$

$$correction_{(BFGS)} = f_2\left(\Delta\mathbf{U}^{(iter=i)}, \Delta\mathbf{U}^{(iter=i+1)}, \mathcal{R}^{(iter=i)}, \mathcal{R}^{(iter=i+1)}, \left(\mathbf{K}^{(iter=i)}\right)^{-1}\right) \,, \quad (3.16)$$

où f_2 est aussi une fonction algébrique. Les propriétés de cette fonction algébrique sont similaires à celle de f_1. Il est à remarquer que, pour des raisons de stabilité, il peut ne pas être avantageux de réactualiser la matrice de rigidité à chaque itération; une correction trop petite peut induire l'émergence d'un comportement singulier (Press et al. 1988).

Le choix final de l'algorithme dépend fortement du type de problème et de sa dimension. Une évaluation du temps de calcul, t_{Newton} avec la méthode Newton-Raphson, et t_{BFGS} pour la méthode BFGS, montre que la méthode BFGS devient plus avantageuse à mesure que la taille du problème croît. Ainsi, pour un certain problème avec 10 000 degrés de liberté (*degree of freedom* = *dof*), t_{Newton}/t_{BFGS} est de l'ordre de 30 pour 10 incréments et augmente à environ 400 pour 100 incréments (Burlet et Cailletaud 1991).

3.3.4 Intégration de la loi de comportement

Le deuxième effort de calcul important est au niveau de l'intégration de la loi de comportement et de la mise à jour des VOI et des VOIA sur le plan local. Dans le cas des modèles à variables d'état internes comme SUVIC, la problématique associée

à l'intégration de la loi de comportement est particulièrement critique étant donné la *rigidité* des équations provenant de la relation hautement non linéaire existant entre la loi cinétique et les lois d'évolution (Aubertin 1993).

La détermination de la variable interne ou observable associée ξ au pas de temps $[t+\Delta t] \Rightarrow (\xi)^{t+\Delta t}$ est faite à partir de la valeur au pas de temps $t \Rightarrow (\xi)^t$ et de l'incrément $(\dot{\xi})^t$ obtenu de la loi cinétique ou des différentes lois évolutives selon le cas. On peut aussi utiliser un estimé de la valeur de $\dot{\xi}$ au pas de temps $[t+\Delta t] \Rightarrow (\dot{\xi})^{t+\Delta t}$. La façon de combiner ces contributions réfère à l'intégration de la loi de comportement. L'intégration des lois cinétiques et évolutives peut être faite de façon explicite (la solution à l'instant $t+\Delta t$ est complètement définie par les conditions existant à l'instant t) ou implicite (la contribution de la variable évolutive se fait avec les estimés des valeurs aux instants t et $t+\Delta t$). L'approche implicite nécessite évidemment une procédure itérative. Selon Chaboche et Cailletaud (1996), on ne retrouve que peu de publications dans la littérature où des calculs avec des modèles utilisant un écrouissage mixte non linéaire sont réalisés. Les techniques d'intégration présentées sont en général limitées à la méthode explicite de Euler. Mais l'importance de la méthode d'intégration sur la précision de l'intégration locale ne fait plus de doute (Croizet et al. 1992).

Parmi les méthodes explicites (voir le tableau 3.1), on peut mentionner (Aubertin 1993) :

- la méthode d'Euler (Zienkiewicz et Cormeau 1974). La méthode d'Euler est la plus simple et la plus utilisée pour simuler le comportement non linéaire. La dimension du pas de temps doit être contrôlée de près afin de permettre le maintien de la stabilité lors des calculs. Des règles empiriques existent à cet égard (Chan et al. 1985);

- la méthode d'Euler modifiée (Chan et al. 1985; Chaboche 1987b). Cette méthode utilise un estimé de la variable ξ au pas de temps $[t+\Delta t]$. Elle est considérée une méthode explicite puisqu'elle invoque seulement une évaluation de cette

Tableau 3.1: Tableau sommaire des méthodes d'intégration explicites pour modèles incrémentaux (inspiré de Aubertin 1993 a).

Méthodes Explicites	Équations	Références
Euler 1er ordre	$(\xi)^{t+\Delta t} = (\xi)^t + \Delta t\ (\dot{\xi})^t$	Zienkiewicz et Cormeau (1974)
Euler modifiée	$(\xi)^{t+\Delta t} = (\xi)^t + 0.5\ \Delta t\ [(\dot{\xi})^t + (\dot{\xi})^{t+\Delta t}]$ où $(\dot{\xi})^{t+\Delta t}$ du précédent $(\xi)^{t+\Delta t}$	Chan et al. (1985) Chaboche (1987 b)
Euler 2^e ordre	$(\xi)^{t+\Delta t} = (\xi)^t + \Delta t\ (\dot{\xi})^t + 0.5\ \Delta t^2 (\ddot{\xi})^t$ avec $(\ddot{\xi})^t = \frac{\partial (\dot{\xi})^t}{\partial t} + \frac{\partial (\dot{\xi})^t}{\partial \xi}\ (\dot{\xi})^t$	Chaboche (1987 b) Méric et Cailletaud (1991)
Adams -Bashforth	$(\xi)^{t+\Delta t} = (\xi)^t + \delta t \sum_{i=1}^{m} b_i\ (\dot{\xi})^{t+\Delta t - i\Delta t}$ où b_i les coefficients de l'expansion	Kumar et al. (1980) Méric et Cailletaud (1991)
Runge-Kutta (4^e ordre)	$(\xi)^{t+\Delta t} = (\xi)^t + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4)$ où, $b_1 = \Delta t\ (\dot{\xi})^t$; $b_2 = \Delta t\ (\dot{\xi})^t_1$ $b_3 = \Delta t\ (\dot{\xi})^t_2$; $b_4 = \Delta t\ (\dot{\xi})^t_3$ $(\dot{\xi})^t_1 = \dot{\xi}\ pour\ (t + 0.5\Delta t, (\xi)^t + 0.5\ b_1)$ $(\dot{\xi})^t_2 = \dot{\xi}\ pour\ (t + 0.5\Delta t, (\xi)^t + 0.5\ b_2)$ $(\dot{\xi})^t_3 = \dot{\xi}\ pour\ (t + \Delta t, (\xi)^t + b_3)$	Dhatt et Touzot (1981) Boyle et Spence (1983)

valeur au début du pas de temps. Cette méthode est considérée plus stable que la méthode d'Euler mais ne permet pas l'estimation a priori d'un pas de temps approprié;

- la méthode d'Euler du deuxième ordre (Chaboche 1987b; Méric et Cailletaud 1991). Cette méthode nécessite la détermination de la dérivée seconde impliquant la détemination de la dérivée problématique $\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi}$. Cette méthode est rarement utilisée;

- la méthode Adams-Bashforth (Kumar et al. 1980; Méric et Cailletaud 1991).

L'estimé de $(\xi)^{t+\Delta t}$ est obtenu des estimés des m incréments précédents. Une seule évaluation est nécessaire pour chaque pas de temps. Cette méthode utilise des coefficients b_i $(i = 1, ..., m)$ déterminés selon le nombre de termes de la série;

- la méthode Runge-Kutta (Dhatt et Touzot 1981; Boyle et Spence 1983). La méthode Runge-Kutta est, avec la méthode de Euler, la méthode explicite la plus courante. On l'associe habituellement à une règle de Simpson du quatrième ordre (Aubertin 1993). Cette technique nécessite l'évaluation de la variable ξ à différents intervalles du pas de temps $[t, t + \Delta t]$. Cette technique offre une bonne stabilité mais requiert une évaluation multiple des lois constitutives pour chaque pas de temps (Méric et Cailletaud 1991; Méric et al. 1994). La méthode est jugée moins performante pour les problèmes hautement non linéaires nécessitant beaucoup de pas de temps comme c'est le cas en viscoplasticité (Foerch et al. 1996).

Les méthodes implicites (voir le tableau 3.2) impliquent, pour leur part, l'évaluation de la variable $\dot{\xi}$ durant le pas de temps $[t, t+\Delta t]$. Les méthodes les plus courantes sont (Aubertin 1993):

- la méthode θ (Chang et al. 1985; Sham et Chow 1989). Cette méthode très populaire et très flexible est décrite plus en détail à la partie suivante;

- la méthode Adams-Moulton (Méric et Cailletaud 1991). La valeur de $(\xi)^{t+\Delta t}$ est estimée à partir du meilleur estimé de la valeur $(\dot{\xi})^{t+\Delta t}$. Une série avec coefficients appropriés est construite et permet par itération l'ajustement de $(\xi)^{t+\Delta t}$;

- la méthode Prédicteur-Correcteur (Kumar et al. 1980; Chan et al. 1985; Méric et Cailletaud 1991) utilise une approche similaire à la méthode Adams-Moulton, mais se base sur une prédiction de la variable $(\xi)^{t+\Delta t}$ avec la fonction dite

Tableau 3.2: Tableau sommaire des méthodes d'intégration implicites pour modèles incrémentaux (inspiré de Aubertin 1993 a).

Méthodes implicites	Équations	Références
Méthode θ	$(\xi)^{t+\Delta t} = (\xi)^t + \Delta t[(1-\theta)(\dot{\xi})^t + \theta(\dot{\xi})^{t+\Delta t}]$ avec $0 \leq \theta \leq 1$	Chang et al. (1985) Sham et Chow (1989)
Adams -Moulton	$(\xi)^{t+\Delta t} = (\xi)^t + \Delta t \sum_{i=1}^{m} b_i (\dot{\xi})^{t+\Delta t-i\Delta t} + \Delta t\, b_m (\dot{\xi})^{t+\Delta t}$ où b_i les coefficients de l'expansion	Méric et Cailletaud (1991)
Prédicteur-Correcteur	Prédicteur: $(\xi^{(iter=1)})^{t+\Delta t} = \sum_{i=1}^{m} a_i(\xi)^{t+\Delta t-i\Delta t} + b_i\Delta t(\dot{\xi})^{t+\Delta t-i\Delta t}$ Correcteur: $(\xi^{(iter=j)})^{t+\Delta t} = \sum_{i=1}^{m} c_i(\xi)^{t+\Delta t-i\Delta t} + d_i\Delta t(\dot{\xi})^{t+\Delta t-i\Delta t} + d_m\Delta t(\dot{\xi}^{(iter=j)})^{t+\Delta t}$ où a_i, b_i, c_i et d_i sont des coefficients m l'ordre de la série et $j > 1$	Kumar et al. (1980) Chan et al. (1985) Méric et Cailletaud (1991)

prédicteur. Cette prédiction est ajustée avec la fonction *correcteur* aux itérations suivantes. Ces 2 fonctions sont construites comme des séries exprimées en termes des valeurs ξ et $\dot{\xi}$ et dont les coefficients dépendent du nombre de termes.

3.4 Quelques détails sur la méthode θ

3.4.1 Équations de base

La méthode θ est la méthode implicite la plus populaire et elle a été utilisée par l'auteur dans de nombreux calculs. Elle a également servi dans certains cas pour des modèles viscoplastiques appliqués aux géomatériaux (ex.: Desai et Zhang 1987). La méthode s'exprime de façon générale par:

$$(\boldsymbol{\xi})^{t+\Delta t} = (\boldsymbol{\xi})^{t} + \Delta t \left\{ (1-\theta)(\dot{\boldsymbol{\xi}})^{t} + \theta(\dot{\boldsymbol{\xi}})^{t+\Delta t} \right\} , \tag{3.17}$$

où $0 \leq \theta \leq 1$.

- lorsque $\theta = 1$, la méthode correspond à la méthode implicite pure;
- lorsque $\theta = 0$, la méthode se rapporte à la méthode d'Euler explicite;
- lorsque $\theta = \frac{1}{2}$, on parle de méthode semi-implicite ou de Crank-Nicholson.

On peut mentionner, que lorsque $\theta \geq \frac{1}{2}$, la méthode est inconditionnellement stable. À l'inverse, elle devient conditionnellement stable $\theta < \frac{1}{2}$. La question du pas d'intégration devient alors critique. Il est habituellement reconnu que $\theta = \frac{1}{2}$ donne le meilleur rapport temps de calcul-précision. On remarque que si l'équation 3.17 est évaluée au temps $t + \theta\Delta t$, elle se simplifie à:

$$(\boldsymbol{\xi})^{t+\theta\Delta t} = (\boldsymbol{\xi})^{t} + \theta\ \Delta t\ (\dot{\boldsymbol{\xi}})^{t+\theta\Delta t} . \tag{3.18}$$

3.4.2 Résolution du système local

Les paragraphes suivants présentent l'approche au niveau de l'intégration du système local avec la méthode θ. La présentation est orientée vers le cas spécifique des modèles avec VEI. L'approche s'inspire de présentations similaires de Aazizou (1990), Foerch et al. (1996), Foerch (1996), Chaboche et Cailletaud (1996).

1. Le point de départ de la résolution du système local est l'obtention des déplacements nodaux $\mathbf{U}$ du système global à partir de l'équation 3.12 au début du pas de temps $[t, t+\Delta t]$. Avec l'équation 3.2, l'incrément de déformation totale $\Delta\epsilon$ est calculé pour le pas de temps.

2. La deuxième étape est le calcul de la contrainte de charge élastique σ^{el}. On rappelle qu'on ne connaît pas au début du pas de temps l'incrément réel de la contrainte $\Delta\sigma$. Pour ce faire, on estime l'incrément de la contrainte de charge élastique $\Delta\sigma^{el}$ en supposant qu'il existe une relation linéaire entre l'incrément de déformation totale et l'incrément de la contrainte de charge élastique:

$$\Delta\sigma^{el} = \mathbf{D}_{el} : \Delta\,\epsilon\,. \tag{3.19}$$

La contrainte de charge élastique $\left(\sigma^{el}\right)^{t+\theta\Delta t}$ est alors estimée au temps $(t+\theta\Delta t)$:

$$\left(\sigma^{el}\right)^{t+\theta\Delta t} = \sigma^{t} + \theta\Delta\sigma^{el}\,, \tag{3.20}$$

où $\theta \in [0,1]$. Le symbole $t+\theta\Delta t$ signifie que cette contrainte est prise à un point θ de l'intervalle $[t, t+\Delta t]$.

L'incrément de contrainte réelle pourrait être obtenu avec l'équation précédente si on connaissait l'incrément de déformation inélastique $\Delta\epsilon^{i}$:

$$(\Delta\sigma)^{t+\theta\Delta t} = \Delta\sigma^{el} - \mathbf{D}_{el} : \Delta\epsilon^{i}\,. \tag{3.21}$$

L'incrément $\Delta\epsilon^{i}$, on le rappelle, est une des quantités qu'on essaie d'identifier.

3. À cette étape, on vérifie s'il y a écoulement viscoplastique en appliquant le critère d'écoulement. Si on exprime l'incrément du taux de déformation à l'instar de l'équation 2.30:

$$\Delta\epsilon^{i} = \Delta t\; f_4(T_\theta)\; f_5\left[\frac{\mathbf{S}^{t+\theta\Delta t} - \sigma_{\mathrm{i}}^{t+\theta\Delta t}}{K^{t+\theta\Delta t}}\right]\,, \tag{3.22}$$

les indices θ indiquent que ces quantités sont évaluées au temps $(t+\theta\Delta t)$. Pour simplifier, on suppose le cas isotherme et on réécrit cette équation en termes du multiplicateur viscoplastique $\Delta\nu_\theta$ et de la direction normale de l'écoulement:

$$\Delta\epsilon^i = \Delta\nu_\theta \, \mathbf{n}_\theta \, . \tag{3.23}$$

L'incrément du multiplicateur viscoplastique $\Delta\nu_\theta$ est une fonction des variables observables et internes évaluées au temps $(t+\theta\Delta t)$. Les variables observables et internes dépendent alors de la valeur de $\Delta\nu_\theta$:

$$\Delta\nu_\theta = f_\theta(\Delta\nu_\theta) = f_\theta\left\{\Delta\nu_\theta, \Delta t, \mathbf{S}^{t+\theta\Delta t}, \sigma_i^{t+\theta\Delta t}, K^{t+\theta\Delta t}\right\} \, . \tag{3.24}$$

La fonction f_θ est une certaine fonction au temps $t+\theta\Delta t$ contenant le terme Δt.

Si on réécrit en termes des variables cinématiques et isotropes,

$$\Delta\nu_\theta = f_\theta(\Delta\nu_\theta) = f_\theta\left\{\Delta\nu_\theta, \Delta t, \sigma^{t+\theta\Delta t}, \mathbf{X}_{m_1}^{t+\theta\Delta t}, R_{m_2}^{t+\theta\Delta t}\right\} \, , \tag{3.25}$$
$$m_1 = 1, .., M_1; \; m_2 = 1, ..., M_2,$$

ainsi, par exemple, pour un modèle pour VEI comme SUVIC avec loi de puissance, elle pourrait s'exprimer:

$$\Delta\nu_\theta = f_\theta(\Delta\nu_\theta) = A\,\Delta t \left\langle \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{S}^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{X}^{t+\theta\Delta t})} - R^{t+\theta\Delta t}}{K^{t+\theta\Delta t}} \right\rangle^N \, . \tag{3.26}$$

Pour les variables internes cinématiques et isotropes, les valeurs actualisées pour le pas de temps sont estimées par:

$$(\mathbf{X}_{m_1})^{t+\theta\Delta t} = (\mathbf{X}_{m_1})^t + \theta \; \Delta t \Delta\mathbf{X}_{m_1} \; , \tag{3.27}$$

$$(R_{m_2})^{t+\theta\Delta t} = (R_{m_2})^t + \theta \; \Delta t \; \Delta R_{m_2} \; , \tag{3.28}$$

$$m_1 = 1, .., M_1; \; m_2 = 1, ..., M_2.$$

Les différentes lois évolutives incrémentales de ces variables sont des fonctions de $\Delta\nu_\theta$ et de la variable au temps $(t+\theta\Delta t)$:

$$\Delta \mathbf{X}_{m_1} = g_1(\Delta\nu_\theta, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{X}_{m_1}^{t+\theta\Delta t}) \,, \tag{3.29}$$

$$\Delta R_{m_2} = g_2(\Delta\nu_\theta, R_{m_2}^{t+\theta\Delta t}) \,, \tag{3.30}$$

avec g_1 et g_2 qui sont certaines fonctions des différentes lois évolutives des VEI incluant implicitement le terme Δt. Il est implicite que la variable K est traitée comme une des variables isotropes R_m dans ce qui précède. Le fait que les fonctions g_1 et g_2 dépendent de $\Delta\nu_\theta$ implique donc que la fonction f_θ dépend de $\Delta\nu_\theta$.

Pour le cas du modèle SUVIC (équation 2.65), la fonction f_θ correspond, à une constante près, à ce qui est à l'intérieur des crochets MacAuley évalué au temps $(t+\theta\Delta t)$. Deux cas sont possibles:

- il y a écoulement si $f_\theta > 0$, on passe à l'étape 4 (voir plus loin);
- il n'y a pas d'écoulement si $f_\theta < 0$, la contrainte au temps $(t+\theta\Delta t)$ correspond à la contrainte de charge élastique:

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\theta\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^{el} \,. \tag{3.31}$$

  Les variables internes sont ajustées si elles contiennent de la restauration statique, sinon elles demeurent constantes. On retourne à l'étape 1 pour le prochain pas de temps.

4. La normale de la direction d'écoulement est évaluée à cette étape. La méthode la plus directe est la méthode du *retour radial généralisé* (Aazizou 1990), pour laquelle on suppose que la direction de l'écoulement est colinéaire à la normale définie par la contrainte de charge élastique $\boldsymbol{\sigma}^{el}$ et les valeurs des VEI du début du pas de temps.

$$\mathbf{n}_\theta = \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{S}^{el})^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{X}^{t+\theta\Delta t}}{\sqrt{J_2((\mathbf{S}^{el})^{t+\theta\Delta t} - \mathbf{X}^{t+\theta\Delta t})}} \,, \tag{3.32}$$

ici, $(\mathbf{S}^{el})^{t+\theta\Delta t}$ étant la contrainte de charge élastique déviatorique. Cette normale est maintenue constante au cours du pas de temps.

5. La prochaine étape est la détermination par un processus itératif de l'incrément du multiplicateur viscoplastique $\Delta\nu_\theta$:

   (a) Initialisation des différentes variables, dont:

   $$iter = 1\,,$$
   $$\Delta\nu^{(iter=1)} = 0\,. \tag{3.33}$$

   (b) À cette étape, le Jacobien est construit. Si on utilise la méthode de Newton-Raphson supposant que l'incrément du multiplicateur viscoplastique et de la fonction f peuvent être approximés par une série de Taylor, alors on peut écrire:

   $$\Delta\nu^{(iter=i+1)} = \Delta\nu^{(iter=i)} + \delta\Delta\nu\,, \tag{3.34}$$
   $$f_\theta^{(iter=i+1)}(\Delta\nu) = f_\theta^{(iter=i)}(\Delta\nu) + \frac{\partial f_\theta^{(iter=i)}(\Delta\nu)}{\partial\Delta\nu}\,\delta\Delta\nu\,, \tag{3.35}$$

   avec $\delta\Delta\nu$, qui est la variation de l'incrément du multiplicateur plastique de l'itération $(iter = i)$ à $(iter = i+1)$. On définit les fonction résiduelles pour les itérations $(iter = i)$ et $(iter = i+1)$ tel que:

   $$\mathcal{F}_\theta^{(iter=i)} = \Delta\nu^{(iter=i)} - f_\theta^{(iter=i)}(\Delta\nu), \tag{3.36}$$
   $$\mathcal{F}_\theta^{(iter=i+1)} = \Delta\nu^{(iter=i+1)} - f_\theta^{(iter=i+1)}(\Delta\nu). \tag{3.37}$$

   Or, si on suppose que $\mathcal{F}_\theta^{(iter=i+1)} \to 0$, on peut réécrire les équations précédentes selon:

   $$0 = \left(\Delta\nu^{(iter=i)} - f_\theta^{(iter=i)}\right) + \left[1 - \frac{\partial f_\theta^{(iter=i)}(\Delta\nu)}{\partial(\Delta\nu)}\right]\,\delta\Delta\nu\,, \tag{3.38}$$

   où le terme entre crochets est le Jacobien $\nabla\mathcal{F}_\theta^{(iter=i)}$ de la fonction résiduelle $\mathcal{F}_\theta^{(iter=i)}$,

   $$\nabla\mathcal{F}_\theta^{(iter=i)} = \left[1 - \frac{\partial f_\theta^{(iter=i)}(\Delta\nu)}{\partial(\Delta\nu)}\right]\,. \tag{3.39}$$

(c) La variation de l'incrément du multiplicateur viscoplastique pour l'itération $(iter = i+1)$ est évaluée en isolant $\delta\Delta\nu$ et en inversant le Jacobien:

$$\delta\Delta\nu = -\left(\nabla\mathcal{F}_\theta^{(iter=i)}\right)^{-1}\left[\Delta\nu^{(iter=i)} - f_\theta^{(iter=i)}(\Delta\nu)\right] . \qquad (3.40)$$

(d) Les différentes variables et variables internes sont mises à jour à cette étape avec le nouvel estimé de $\delta\Delta\nu$. Ainsi, on peut écrire:

$$\Delta\nu^{(iter=i+1)} = \Delta\nu^{(iter=i)} + \delta\Delta\nu \ , \qquad (3.41)$$

$$\Delta\epsilon^{i(iter=i+1)} = \Delta\nu^{(iter=i+1)}\ \mathbf{n}_\theta \ , \qquad (3.42)$$

$$\Delta\sigma^{(iter=i+1)} = \Delta\sigma^{el} - \mathbf{D}_{el} : \Delta\epsilon^{i(iter=i+1)} \ , \qquad (3.43)$$

$$(\sigma^{(iter=i+1)})^{t+\theta\Delta t} = (\sigma^{(iter=i)})^{t+\theta\Delta t} + \Delta\sigma^{(iter=i+1)} \ , \qquad (3.44)$$

$$\Delta\mathbf{X}_{m_1}^{(iter=i+1)} = g_1(\Delta\nu^{(iter=i+1)}, \mathbf{n}_\theta(\mathbf{X}_{m_1}^{(iter=i)})^{t+\theta\Delta t}) \ , \qquad (3.45)$$

$$\Delta R_{m_2}^{(iter=i+1)} = g_2(\Delta\nu^{(iter=i+1)}, (R_{m_2}^{iter=i})^{t+\theta\Delta t}) \ , \qquad (3.46)$$

$$m_1 = 1, .., M_1;\ m_2 = 1, ..., M_2.$$

$$(\mathbf{X}_{m_1})^{t+\theta\Delta t} = (\mathbf{X}_{m_1})^t + \theta\ \Delta t\ \Delta\mathbf{X}_{m_1}^{(iter=i+1)} \ , \qquad (3.47)$$

$$(R_{m_2})^{t+\theta\Delta t} = (R_{m_2})^t + \theta\ \Delta t\ \Delta R_{m_2}^{(iter=i+1)} \ . \qquad (3.48)$$

(e) La dernière étape est la vérification du critère de convergence afin de mettre fin au processus itératif local. Plusieurs normes peuvent être utilisées. La plus intuitive est de comparer l'évolution de la contrainte entre l'itération $(iter = i)$ et $(iter = i+1)$, c.-à-d. $\| \sigma^{(iter=i+1)} - \sigma^{(iter=i)} \| < critère$. Si la convergence est atteinte, on passe au prochain pas de temps, sinon on retourne à l'étape (b).

Les équations de l'étape 5 sont évidemment liées et doivent être évaluées avec un processus itératif impliquant l'inversion du Jacobien, ce qui peut facilement devenir prohibitif en temps de calcul. Il est à noter que dans le cas précédent, on suppose que la direction de l'écoulement est maintenue constante pour tout le pas de temps. Plusieurs approches itératives sont possibles à ce niveau. Elles incluent:

- La méthode par substitution

  La résolution par substitution consiste, comme son nom l'indique, à itérer avec les valeurs calculées les plus récentes (en les substituant aux anciennes) jusqu'à ce que la convergence soit obtenue. La contrainte de charge élastique σ^{el} et la normale sont continuellement mises à jour. Cette méthode, peu utilisée, offre une convergence très lente (Aazizou 1990). Le cheminement pour atteindre la convergence est caractérisé par des oscillations importantes attribuables à la sous-estimation où à la surestimation des variables à chaque itération. Cette méthode n'est pas recommandée lorsque le système d'équations est hautement non linéaire (Benallal et Marquis 1987). En particulier, pour un θ inférieur à 0.5, elle pourra engendrer un comportement divergent.

- La méthode de Newton *simplifiée*

  L'algorithme d'actualisation Newton *simplifiée*, défini par opposition à la méthode Newton présentée ci-dessous, dont elle est un cas particulier, correspond à la méthode du retour généralisé présenté à l'équation 3.32. Le processus itératif est réalisé en maintenant la normale à la surface d'écoulement constante durant tout l'intervalle de temps.

- La méthode de Newton

  Cette méthode, généralisation de la précédente, a un vecteur normal de la direction d'écoulement qui évolue au fil des itérations, mais la contrainte de charge élastique $\left(\sigma^{el}\right)^{t+\theta\Delta t}$ demeure constante. Contrairement à l'approche précédente, on peut suivre à tout instant l'écrouissage cinématique et isotrope durant la phase d'écoulement. Cette méthode est évidemment plus intense au niveau calcul, mais le gain de précision est avantageux.

3.4.3 Généralisation de la notion de Jacobien

Dans cette partie, on présente le Jacobien dans un contexte plus général. Le Jacobien a été présenté précédemment comme une construction de l'incrément du multiplicateur plastique $\Delta\nu$. Cette écriture est limitative puisqu'elle implique que les lois évolutives des variables internes ne sont en bout de ligne que fonction de l'écrouissage par la déformation. Dans le cas où les modèles incluent de la restauration statique, par exemple, il est avantageux d'écrire plutôt le Jacobien dans une forme plus générale.

On peut montrer (Foerch 1996) qu'avec la méthode de Newton-Raphson, les nouvelles valeurs des incréments des différentes VOIA $\Delta\mathbf{g}$ peuvent être estimées en utilisant une approche similaire à ce qui a été vu précédemment. Les différentes fonctions résiduelles pour chacune des variables ξ de l'ensemble $\mathbf{g}$ au temps $t+\theta\Delta t$ sont ainsi données par:

$$\mathcal{F}_{\xi_\theta}^{(iter=i)} = \Delta\xi^{(iter=i)} - f_{\xi_\theta}^{(iter=i)}(\Delta\xi), \tag{3.49}$$

$$\mathcal{F}_{\xi_\theta}^{(iter=i+1)} = \Delta\xi^{(iter=i+1)} - f_{\xi_\theta}^{(iter=i+1)}(\Delta\xi), \tag{3.50}$$

$\xi \in \{\mathbf{g}\}$. Le Jacobien pour les variables ξ peut être écrit de la façon suivante:

$$\nabla\mathcal{F}_{\xi_\theta}^{(iter=i)} = \left[1 - \frac{\partial f_{\xi_\theta}^{(iter=i)}(\Delta\xi)}{\partial(\Delta\xi)}\right] . \tag{3.51}$$

Les équations incrémentales fondamentales résiduelles des différentes VOIA $\mathcal{F}_\xi$ permettent de former l'ensemble des équations incrémentales fondamentales résiduelles pour l'ensemble $\mathbf{g}$:

$$\mathcal{F}_\theta^{(iter=i)} = \{\mathcal{F}_{\xi_\theta}^{(iter=i)} \; avec \; \xi \in \{\mathbf{g}\}\} , \tag{3.52}$$

pour une variable ξ de l'ensemble $\mathbf{g}$ mesurant la différence entre l'incrément de la variable ξ ($\Delta\xi$) et un incrément Δt de la loi évolutive $\Delta t\,\dot{\xi}$. L'ensemble des $\mathcal{F}_\xi$ est défini comme $\mathcal{F}_\theta$.

Les nouvelles valeurs $\Delta \mathbf{g}$ peuvent être estimées du calcul du dernier résidu en utilisant la matrice jacobienne mise à jour calculée avec la méthode du point milieu (Foerch 1996) avec:

$$\delta \Delta \mathbf{g} = \left[\nabla \mathcal{F}_\theta^{(iter=i)} \right]^{-1} \mathcal{F}_\theta^{(iter=i)} \,. \tag{3.53}$$

Les équations de l'étape 5 (d) peuvent alors être utilisées pour mettre à jour les variables observables et internes. Cette approche fournit un matrice consistante pour des problèmes avec évolution arbitraire du chargement tout en maintenant une convergence globale quadratique (Foerch 1996).

3.4.4 Contrôle du pas de temps

Le contrôle du pas de temps Δt est très critique lors d'analyses non linéaires, surtout si des variations subites du chargement ou du taux de chargement ont lieu (Hornberger et al. 1987). La dimension du pas de temps dépend de la non-linéarité. De façon simplifiée, le pas de temps Δt pourra être grand si l'analyse est quasi-linéaire, et à l'inverse très petit si elle est hautement non linéaire (Aubertin 1993). Cet aspect est généralement contrôlé par des fonctions de l'erreur. Cette question est généralement prise en compte automatiquement avec les codes standard.

Les aspects plus spécifiques à ce travail au niveau du code utilisé et de la construction du Jacobien seront présentés aux chapitres 5 et 6.

Chapitre IV

ESSAIS DE LABORATOIRE

Comme on l'a vu au chapitre 2, le comportement mécanique du sel gemme est généralement étudié en laboratoire à partir d'essais de compression triaxiale réalisés à taux de déformation contrôlé (CSR - *constant strain rate*), à taux de chargement contrôlé (CRS - *constant rate of stress*), en fluage ($\dot{\sigma} = 0$) ou en relaxation ($\dot{\epsilon} = 0$). Ce chapitre présente des résultats expérimentaux d'essais de laboratoire, dont certains ont été colligés de la littérature et d'autres ont été obtenus à la suite d'essais réalisés par l'auteur. Les résultats tirés de la littérature ont été numérisés par l'auteur à partir des courbes disponibles. L'objectif de cet exercice était d'établir une banque de données expérimentales pour le sel gemme afin de permettre une vérification et une validation du modèle SUVIC dans sa nouvelle version (voir les chapitres 5 et 6).

La démarche a comporté 3 étapes:

1. La première est la réalisation d'un inventaire de données expérimentales sur le sel gemme disponibles de la littérature. Ce travail de recherche faisait abstraction du type de sel. Il a permis de montrer que les sels de diverses origines montrent un comportement fort similaire. Parmi les types de sel qui semblent les mieux documentés, on peut mentionner: le sel d'Avery Island en Louisiane (Carter et Tsenn 1987; Carter et al. 1993) et le sel artificiel (Guessous 1987; Aubertin 1989; Leite 1991; Sgaoula et al. 1995). Il est à noter que beaucoup de

travaux ont été réalisés à l'École Polytechnique sur le sel artificiel et d'Avery Island.

2. La seconde étape a été la sélection d'un sel gemme particulier qui puisse servir de référence pour les identifications subséquentes. Le sel d'Avery Island est le sel gemme retenu pour un certain nombre de raisons, y compris son homogénéité, sa pureté, la disponibilité d'une base de données relativement variée et le fait que des travaux antérieurs avaient aussi été réalisés à l'École sur ce sel.

3. La dernière étape est la réalisation d'essais additionnels sur le sel choisi (Avery Island), dont le but est de produire des essais non conventionnels permettant de mettre en évidence les composantes d'écrouissage isotrope et cinématique, avec un historique de déformation associé à des chargements et des déchargements.

4.1 Propriétés du sel d'Avery Island

Comme il a été mentionné, le sel gemme d'Avery Island en Louisiane a été le sel gemme retenu comme sel de référence pour les travaux subséquents. Le sel d'Avery Island est relativement pur et homogène. Il provient d'un dôme de sel (voir figure 4.1) composé principalement de halite non déformée (Carter et Hansen 1983). Le diamètre des grains varie de 2.5 à 15 mm avec une moyenne de 7.5 mm.

Le site d'Avery Island a été cartographié et analysé en détail lors de l'exploitation de la mine Avery Island par International Salt Company (Hansen et Mellegard 1980a). Sur le plan géologique, le site est essentiellement un diapire de forme arrondie. Il repose sous une couche de morts-terrains d'épaisseur variable (de 7 à environ 70 m) constituée de dépôts argileux superficiels reposant sur des matériaux granulaires. En section longitudinale, le site est traversé approximativement au centre par une discontinuité majeure plongeant avec un pendage abrupt. Au voisinage de cette discontinuité, la halite est plus grossière, indicatif d'une recristallisation partielle. Le côté ouest du diapire est plus déformé, et on remarque la présence d'une

série d'anticlinaux. Du côté est, la halite est moins déformée et plus uniforme. La plupart des échantillons analysés proviennent des zones moins déformées et moins grossières.

Le sel gemme présent sur ce site peut être considéré comme étant en général *propre*. Le dôme à une profondeur d'environ 150 m est considéré comme relativement homogène. Il peut contenir un peu d'anhydrite ou de matériaux argileux le long des grains et quelques cristaux d'anhydrite. La résistance en compression uniaxiale C_0 est de l'ordre de 20.0 MPa (Carter et Hansen 1983). Le module d'élasticité E est de l'ordre de 27.0 à 37.0 GPa à température de la pièce (Mellegard et Senseny 1983). Le coefficient de Poisson μ varie de 0.25 à 0.33 (Hansen et Mellegard 1980a; Hansen et Mellegard 1980b). La résistance en traction estimée d'essais brésiliens est de l'ordre de $1.17 \pm 0.21 MPa$. Stormont (1990) a procédé à une caractérisation de la perméabilité de ce sel. La perméabilité serait de l'ordre de $10^{-15}\ m^2/s$ pour une contrainte de confinement variant de 2.0 à 7.6 MPa.

4.2 Résultats d'essais disponibles

Les paragraphes suivants décrivent les sources importantes de résultats expérimentaux sur le sel d'Avery Island. On peut mentionner que, dans les années 70 et 80, le site d'Avery Island a été envisagé comme site d'enfouissement potentiel de déchets nucléaires à faibles niveaux, ce qui explique le grand nombre de données expérimentales disponibles.

4.2.1 Essais de Senseny et al. 1993

Les essais réalisés par Senseny et al. (1993) (voir aussi Senseny (1993), Senseny et Fossum (1993), Senseny et Fossum (1998)) sont très intéressants. Cette famille d'essais contient 3 lots d'essais très distincts au niveau mécanique (essais de fluage, essais CSR et essais de relaxation). Ces essais ont tous été réalisés à une température

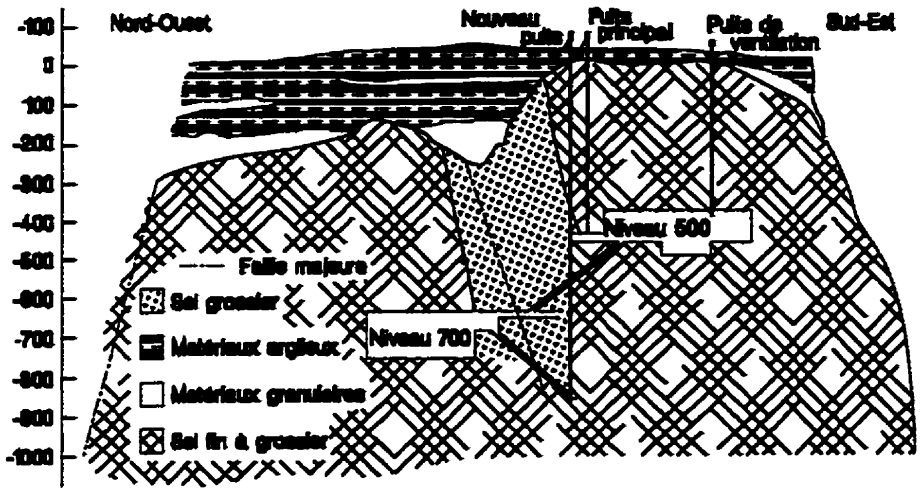


Figure 4.1: Représentation schématique du dôme de sel de la mine de Avery Island en Louisiane (élévation en pieds). Le dôme est composé de deux zones: un sel fin à grossier et un sel grossier dans la partie supérieure et centrale du dôme (source Carter et Hansen 1983).

de 25° C et à une contrainte de confinement constante de 15.0 MPa. Les dimensions des éprouvettes sont de 250 mm de longueur et 100 mm de diamètre. La dimension moyenne des grains est de 7.5 mm. Le tableau I.1 donne une description des essais. Les résultats des essais numérisés par l'auteur incluent 4 essais de fluage, 4 essais CSR et 4 essais de relaxation. Ces résultats sont présentés à l'annexe I aux figures I.1 à I.3.

Les essais de fluage F-1 et F-2 correspondent à une contrainte déviatorique de 5.0 et 6.0 MPa, F-3 à 10.0 MPa, et F-4 à 15.0 MPa. L'essai le plus long a duré $29.9e+6$ s, c.-à-d. environ 346 jours.

Les essais CSR C-1 et C-4 ont été réalisés à un taux de déformation constant de $\dot{\epsilon} = 8.7e-6$ s^{-1} et $\dot{\epsilon} = 8.3e-8$ s^{-1}, respectivement, et C-3 et C-4 à taux de

déformation variables $\dot{\epsilon} = \{8.3e-8, 8.7e-6\}\ s^{-1}$.

Les essais de relaxation R-1 à R-4 ont été réalisés à la suite d'un préchargement à un taux de 0.1 $MPa\ s^{-1}$ jusqu'à la contrainte déviatorique choisie. La contrainte a ensuite été laissée libre de décroître pour 350 000 secondes. Les essais de relaxation R-1 et R-2 ont été réalisés à une contrainte déviatorique initiale de 5.0 MPa, R-3 à 10.0 MPa et R-4 à 15.0 MPa. Il est à noter qu'une série d'essais de relaxation similaires ont été réalisés à des températures de 50° C et 100° C (Brodsky et al. 1987).

4.2.2 Essais de Hansen et Mellegard

Les essais de Hansen et Mellegard (1980a) ont été réalisés sur des éprouvettes de 50 mm de diamètre. Ces essais ont des chargements simples à différentes températures. Ils sont très bien documentés, particulièrement au niveau du chargement des éprouvettes. Ces essais de fluage ont été reconstitués en assemblant les résultats des différents paliers. Les résultats de ces assemblages sont présentés à l'annexe I pour les 6 essais suivants: RT-1-RT-2, RT-4, RT-5, RT-6-RT-7-RT-8, RT-9-RT-10, et RT-11-RT-12. Les éprouvettes ont été chargées de façon hydrostatique jusqu'à ce que la contrainte de confinement soit atteinte (3.5 MPa pour RT-1-RT-2, RT-4, RT-5 et RT-6-RT-7-RT-8; 6.9 MPa pour RT-9-RT-10; et 20.7 MPa pour RT-11-RT-12). Tous les chargements ont été faits à un taux de 0.011 MPa/s. Les déviateurs appliqués durant les paliers de fluage sont de 6.9, 10.3 MPa pour RT-1-RT-2; 20.7 MPa pour RT-4; 31.0 MPa pour RT-5; 10,3, 20.7, 31.0 MPa pour RT-6-RT-7-RT-8; 10.3, 20.7 MPa pour RT-9-RT-10; 10.3, 20.7 MPa pour RT-11-RT-12. Les tableaux I à I à l'annexe I présentent le sommaire des essais réalisés par Hansen et Mellegard (1980a), notamment en fonction de la température ($T < 70°$ C, $70° \leq T \leq 120°$ C et $T > 120°$ C). Ces intervalles de température sont relativement larges. Ils ont été choisis ainsi compte tenu du nombre relativement faible d'échantillons disponibles pour chaque intervalle. Plus spécifiquement à température de la pièce, on présente en

détail les essais RT-1-RT-2; RT-4; RT-5; RT-6-RT-7-RT-8; RT-9-RT-10; RT-11-RT-12. En annexe, les figures I.4 à I.8 présentent les chargements complets, construits à partir des données disponibles. Ainsi, pour chaque essai, les courbes contraintes axiales appliquées en fonction du temps, contraintes axiales appliquées en fonction de la déformation et déformation axiale en fonction du temps sont présentées. Le taux de chargement lors des variations de contrainte est de 0.011 MPa/s.

4.2.3 Essais de Mellegard et Senseny

Les essais de Mellegard et Senseny (1983) ont été réalisés sur des éprouvettes de 100 mm de diamètre. Ces essais ont aussi des chargements simples à différentes températures. Ils sont bien documentés au niveau du chargement des éprouvettes. L'auteur a reconstitué ces essais en assemblant les résultats des différents paliers de chargement. Les résultats de cet assemblage sont présentés à l'annexe I pour les essais: 24-1, 24-2, 24-3, 24-4 et 24-5. Les éprouvettes ont été chargées de façon hydrostatique jusqu'à ce que la contrainte de confinement soit atteinte (13.8 MPa pour 24-1; 3.4 MPa pour 24-2; 13.8 MPa pour 24-3; 3.4 MPa pour 24-4; 20.7 MPa pour 24-5). Tous les chargements ont été faits au taux de 0.011 MPa/s. Les déviateurs appliqués résultants sont de 10.3 MPa pour 24-1, 24-2 et 24-5; 20.7 MPa pour 24-3 et 24-4. Ces essais montrent, par opposition aux précédents, une certaine influence de la contrainte moyenne. Les tableaux I à I présentent le sommaire des essais réalisés par Mellegard et Senseny (1983) notamment en fonction de la température ($T < 70^o$ C, $70^o \leq T \leq 120^o$ C et $T > 120^o$ C). Plus spécifiquement, à température de la pièce, on présente en détail les essais 24-1; 24-2; 24-3; 24-4; 24-5. Les figures I.10 à I.14 montrent le chargement complet. Pour chaque essai, les courbes contraintes axiales appliquées en fonction du temps, contraintes axiales appliquées en fonction de la déformation et déformation axiale en fonction du temps sont données. Le taux de chargement lors des variations de contraintes est de 0.011 MPa/s.

4.3 Autres résulats d'essais

D'autres résultats d'essais sur le sel d'Avery Island sont aussi présentés. On présente ainsi des essais CSR tirés de Russell et al. (1990). Dans le cas des essais montrés à la figure I.15, la contrainte de confinement est de 15.0 MPa et le taux de déformation est fixé à 10-8 s-1 . Dans le cas des essais montrés à la figure I.18, le taux de déformation varie de $\dot{\epsilon} = 10^{-4}$ à 10^{-6}. La température est de $100°C$. La contrainte de confinement est 3.4 MPa. Des essais CSR tirés de Horseman et al. (1992) sont aussi décrits. Pour ces essais, la température varie de 50 à $100°C$. Le taux de déformation varie au cours de l'essai de $10^{-8}s^{-1}$ à $10^{-9}s^{-1}$ (voir figure I.19). La figure I.16 montre des résultats d'essais CRS provenant de Russell et al. (1984). La température varie de 24 à $200°C$. Le taux d'application de la contrainte est $\dot{\sigma} = 0.02\ MPa/s$. La contrainte de confinement est 3.45 MPa (voir figure I.16).

Plusieurs de ces résultats d'essais seront utilisés au chapitre 6 afin d'évaluer les constantes du modèle SUVIC et aussi pour valider son application. Les essais à températures variables permettront, quant à eux, de déterminer des tendances dans l'évolution de ces constantes. Toutefois, certaines remarques au sujet du niveau de l'endommagement potentiel subi par ces échantillons seront introduites à la section 4.5.

4.4 Essais réalisés à l'École Polytechnique

4.4.1 Méthodologie

Afin d'aider à la détermination des nombreuses constantes du modèle SUVIC, des essais CSR additionnels ont été réalisés. Ces essais réalisés à la température de la pièce, visaient notamment l'obtention de courbes contrainte-déformation lors du passage de la compression triaxiale à l'extension triaxiale. Pour obtenir ce passage sur un échantillon cylindrique de sel gemme lors d'un essai triaxial, une contrainte de

confinement suffisamment élevée doit être appliquée afin que, avec la contrainte axiale, on puisse simuler un état de compression triaxiale suivie d'un état d'extension triaxiale. Ces essais ont été réalisés en 1995 à l'École Polytechnique de Montréal au Laboratoire de Mécanique des roches par l'auteur sur des échantillons du sel d'Avery Island. La description de la presse, des équipements de contrôle et des équipements de mesure peuvent être obtenus de Aubertin (1989) et de Sgaoula (1997). La figure 4.2 montre une représentation schématique du cheminement des contraintes pour ces essais: compression hydrostatique suivie d'une compression triaxiale et/ou extension triaxiale. De tels essais mettent en évidence la composante cinématique de l'écrouissage et sont équivalents à produire un effet Bauschinger.

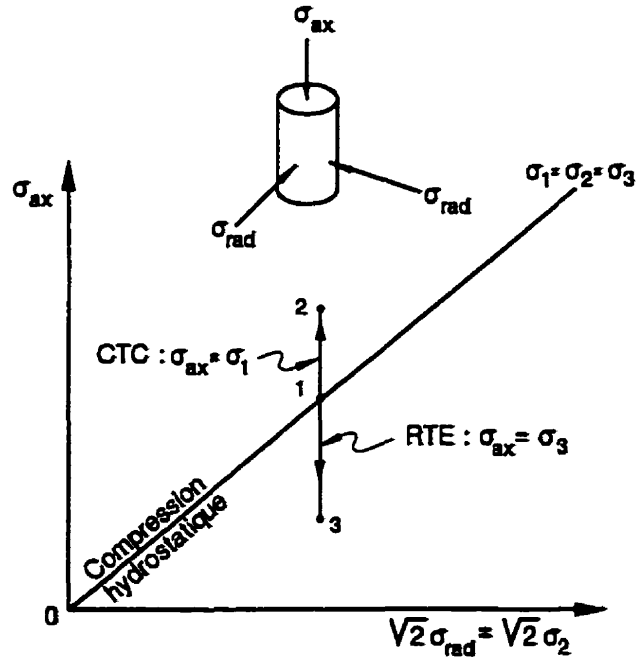


Figure 4.2: Cheminement des contraintes lors d'un essai CTC-RTE (d'après Aubertin et al. 1994).

4.4.2 Présentation des résultats

Un sommaire des principales caractéristiques des essais retenus est fourni aux tableaux 4.1 et 4.2. Les éprouvettes ont été fabriquées par forage dans un bloc de sel du site d'Avery Island fourni par le Dr. Leo van Sambeek de RE/SPEC inc. et entreposé dans un environnement hermétique à l'École Polytechnique durant quelques années. Les éprouvettes ont subi un traitement thermique tel que recommandé par Guessous (1987) de façon à réduire l'effet de l'histoire mécanique. Tous les essais ont été faits à température de la pièce dans une cellule triaxiale de type Hoek-Franklin. Les éprouvettes ont été insérées dans une jaquette imperméable flexible permettant d'éviter que l'huile ne soit directement en contact avec l'échantillon. Durant cet essai, le taux de déformation était constant à $4*10^{-05}$ ($\pm 0.5*10^{-05}$) s^{-1}. Les contraintes de confinement, pour leur part, étaient de l'ordre de 51.9 à 53.8 MPa (voir tableaux 4.1 et 4.2) de façon à être sous le seuil d'endommagement, c.-à-d. en conditions ductiles (voir section 4.5).

Les éprouvettes ont d'abord été chargées sous des conditions hydrostatiques jusqu'à ce que la contrainte de confinement soit atteinte. Après la mise en charge hydrostatique, une période de stabilisation de 20 à 30 minutes environ a été accordée à chaque éprouvette avant que l'essai à proprement parler ne débute.

Les éprouvettes avaient des dimensions variant typiquement de 9.96 à 11.95 cm pour la longueur et 5.33 à 5.42 cm pour le diamètre (rapport $L/D = 2-2.2$ environ). Les dimensions des éprouvettes ont aussi été mesurées à la fin des essais.

Selon l'essai, la variation de longueur pouvait être significative et atteindre 3% à plus de 5% (essai jul1102). Pour des fins de simplicité, on considère néanmoins que les essais sont demeurés dans une plage de déformation assimilable à des conditions de petites perturbations ($\epsilon < 5\%$ à 10% selon Poirier 1985). Les déplacements verticaux ont été mesurés avec 3 LVDT. Les comportements de ces LVDT étaient relativement stables, mais occasionnellement, une ou des valeurs irréalistes étaient fournies. Pour chaque essai, le LVDT le plus stable a été retenu. Les résultats de ce LVDT ont par

la suite été traités afin d'éliminer les valeurs erratiques. Les courbes pour chacun des essais sont fournies aux figures 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10. Quelques résultats d'essais n'ont pas été retenus en raison de problèmes de servo-contrôle ou de bris mécaniques. Huit (8) essais ont été conservés. On remarque que ces essais ont des chargements non triviaux. Dans certains cas, plusieurs cycles de chargement-déchargement ont été produits. De façon plus spécifique:

- l'essai jul0403 (voir figure 4.3) est un essai ayant 3 cycles de chargement et déchargement. Le troisième cycle a été suffisamment prolongé pour que de l'écrouissage ait eu lieu en extension triaxiale.

- l'essai jul0502 (voir figure 4.4) est relativement inusité pour le sel gemme; on débute en extension triaxiale suivie d'une phase de compression triaxiale terminée par une extension triaxiale. L'écrouissage en compression semble anomalique pour la partie de la déformation au-delà de 1%.

- l'essai jul0602 (voir figure 4.5) est un essai avec 6 cycles de chargement et déchargement. On peut remarquer l'effet de l'écrouissage subi par l'échantillon lors de l'extension triaxiale à de la reprise de l'écrouissage.

- l'essai jul0702 (voir figure 4.6) est aussi un essai à chargement non trivial avec plusieurs cycles de chargement et déchargement. Cet essai permet d'observer l'écrouissage cinématique subi par l'éprouvette lors des déchargements et des rechargements.

- l'essai jul0802 (voir figure 4.7) se rapproche de l'essai jul0602 avec ses nombreux cycles de chargement et déchargement. L'essai s'est poursuivi au-delà de 2% de déformation.

- l'essai jul0903 (voir figure 4.8) est un essai dont le résultat est original pour le sel gemme. Il consiste dans des chargements et déchargements cycliques

concentriques procurant un effet de type Bauschinger très clair, similairement à ce qui est observé pour les métaux (ex.: Lemaitre et Chaboche 1988).

- l'essai jul1003 (voir figure 4.9) est un essai simple avec 8 brefs déchargements visant à vérifier les composantes élastiques et leur maintien au cours de l'essai. On peut remarquer une certaine variation du module d'élasticité mais qui se situe tout de même à l'intérieur de la plage de précision de ces mesures.

- l'essai jul1102 (voir figure 4.10) s'apparente à l'essai jul0702. Il est caractérisé par 7 cycles de déchargement suffisamment marqués pour que de l'écrouissage ait lieu en compression et en extension triaxiale.

4.4.3 Particularités

Les essais CSR réalisés par l'auteur sur le sel gemme d'Avery Island s'inscrivent dans une démarche développée à l'École Polytechnique visant à étudier le comportement ductile du sel gemme en laboratoire à taux de chargement contrôlé et à hautes contraintes de confinement. De telles conditions sont propices à la réalisation d'essais procurant un historique de chargement complexe dans le domaine ductile. Il n'y a pas dans la littérature, selon l'auteur, d'essais similaires sur des roches. Les travaux précurseurs réalisés à l'École Polytechnique ont permis le développement de ce type de chargement. Il est à noter que le pour le sel d'Avery Island, la majorité des données disponibles à ce jour provenaient surtout d'essais de fluage à contraintes de confinement faibles ou moyennes tel que montré à l'Annexe I. Les résultats de ces essais montrent de façon non équivoque que des phénomènes d'écrouissage isotrope et cinématique ont lieu et doivent être considérés lors de l'analyse du comportement du sel gemme.

Tableau 4.1: Caractéristiques des essais CSR réalisés sur le sel d'Avery Island

Essais Additionnels - sel d'Avery Island					
Identification	Date	Longueur L (cm)	Diamètre D (cm)	L/D avant l'essai	Température (degré C)
jul0403	26-mai-95	11.13	5.42	2.05	24
jul0502	26-mai-95	11.25	5.39	2.09	24
jul0602	29-mai-95	9.96	5.33	1.87	24
jul0702	29-mai-95	11.76	5.34	2.20	24
jul0802	05-juin-95	11.37	5.37	2.12	24
jul0903	05-juin-95	11.72	5.37	2.18	24
jul1003	06-juin-95	11.95	5.36	2.23	24
jul1102	06-juin-95	11.25	5.38	2.09	24

Tableau 4.2: Autres détails des essais CSR réalisés sur le sel d'Avery Island.

Essais additionnels - sel d'Avery Island			
Identification	Contrainte de Confinement (MPa)	Taux de déformation (s^{-1})	Durée de l'essai (s)
jul0403	53.4	3.80e-05	1 840
jul0502	53.6	3.76e-05	3 130
jul0602	53.6	4.25e-05	16 080
jul0702	53.2	3.60e-05	12 810
jul0802	53.8	3.72e-05	8 530
jul0903	52.9	3.61e-05	7 590
jul1003	51.9	3.54e-05	7 290
jul1102	53.2	3.76e-05	15 710

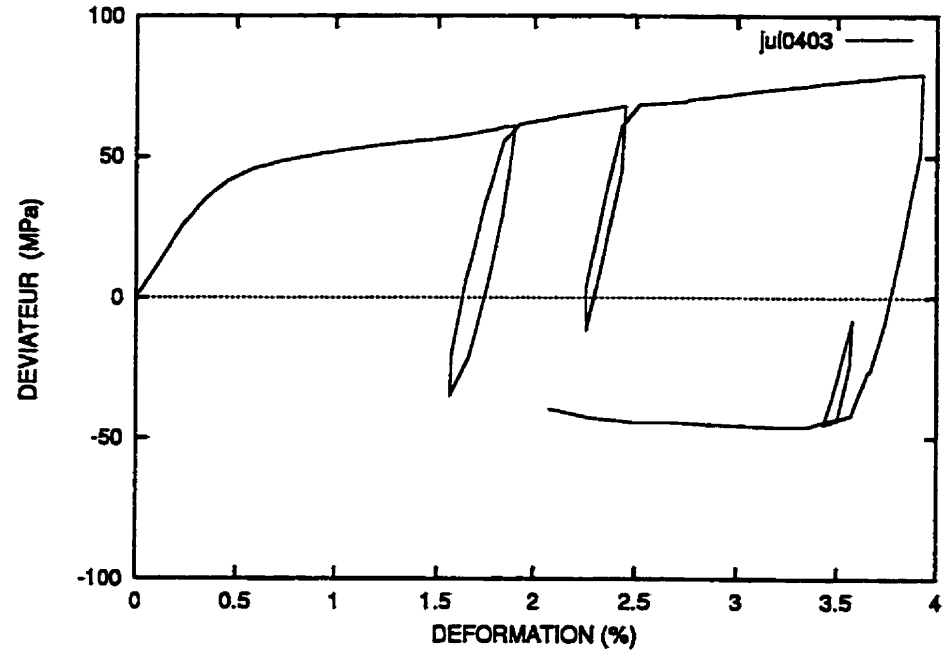


Figure 4.3: Essai jul0403 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. $E_{estimés} = \{20.2, 35.1, 33.2\}\ GPa$

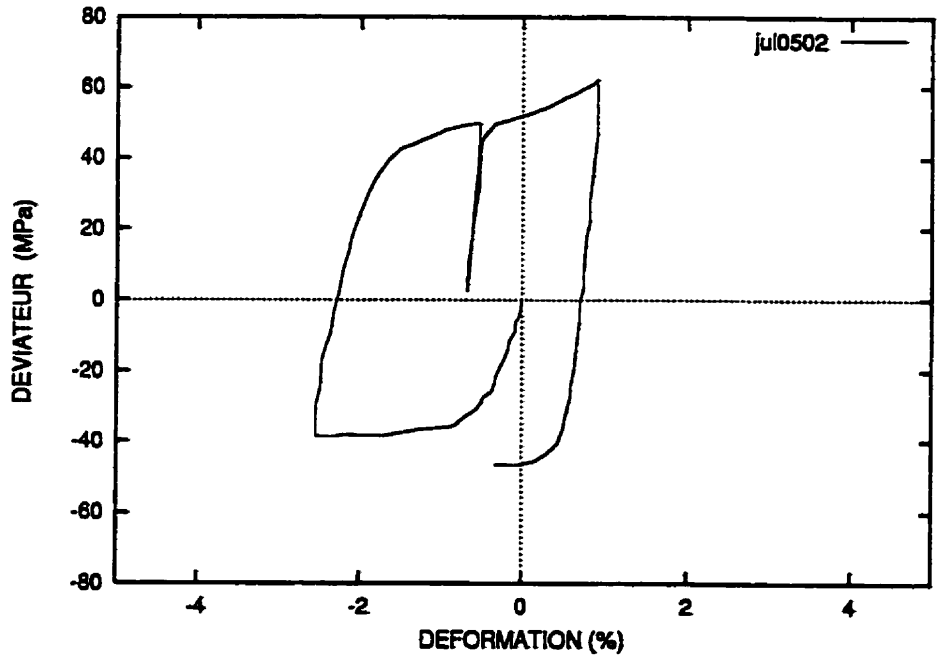


Figure 4.4: Essai jul0502 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. $E_{estimés} = \{35.1, 34.0\}\ GPa$

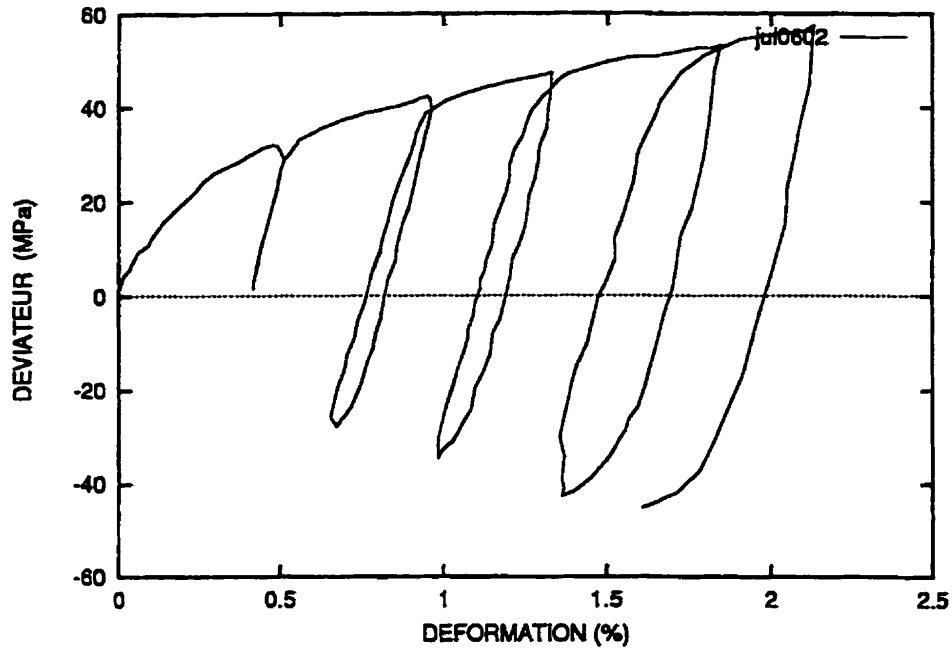


Figure 4.5: Essai jul0602 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. $E_{estimés} = \{30.0, 23.7, 27.7, 28.6, 27.7\}\ GPa$

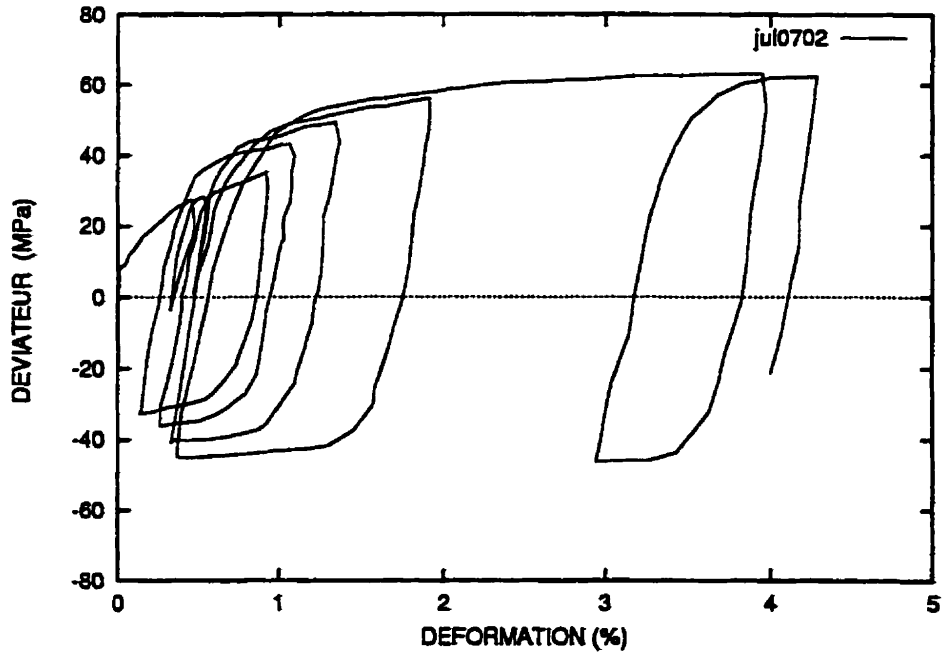


Figure 4.6: Essai jul0702 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2.

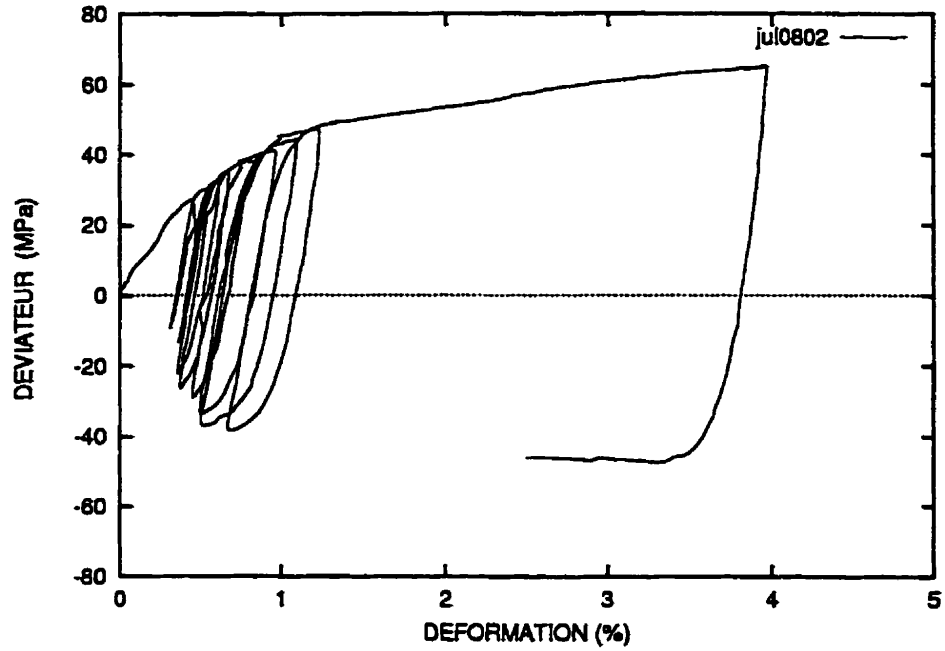


Figure 4.7: Essai jul0802 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2.

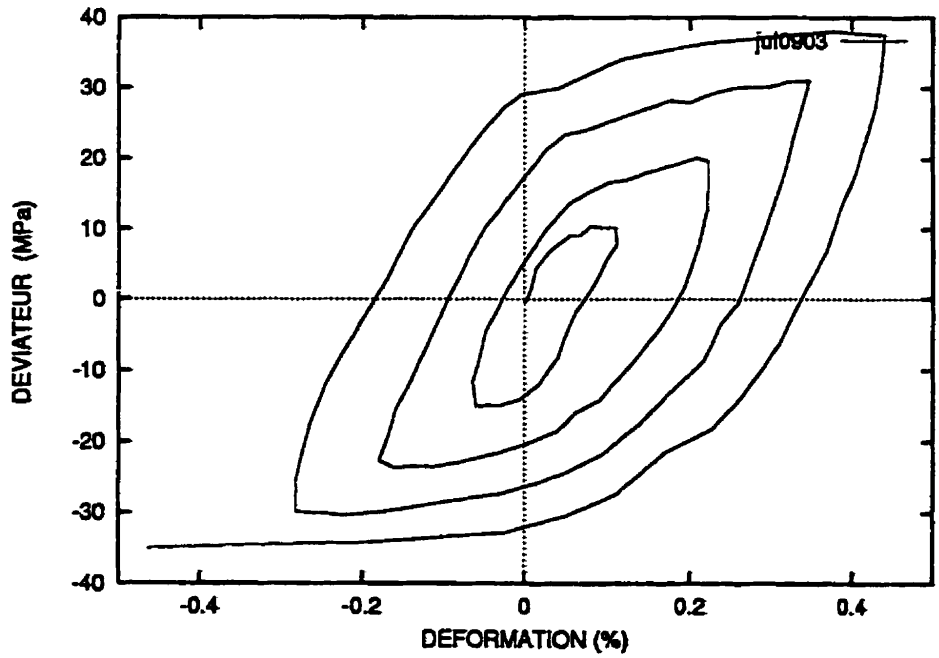


Figure 4.8: Essai jul0903 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2.

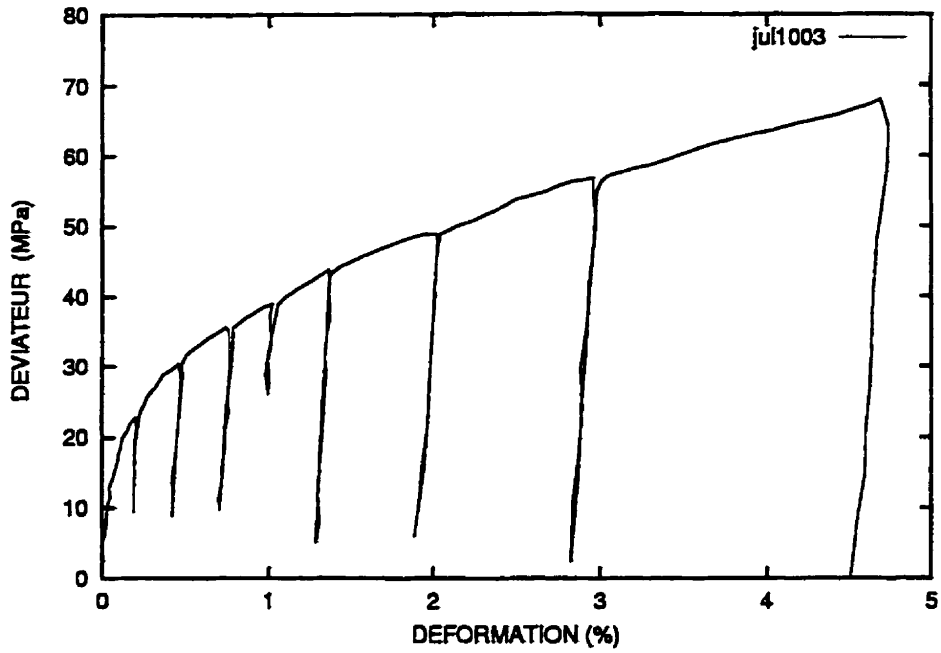


Figure 4.9: Essai jul1003 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2. $E_{estimés} = \{38.0, 34.8, 44.4, 34.5, 34.5, 34.5\}\ GPa$

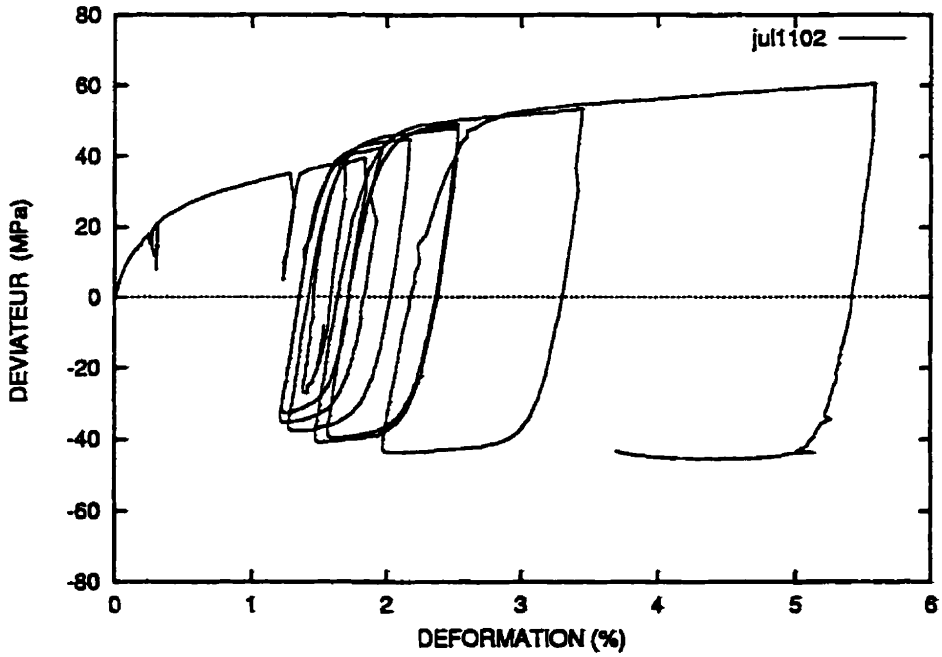


Figure 4.10: Essai jul1102 sur le sel d'Avery Island. Pour les détails, consulter les tableaux 4.1 et 4.2.

4.5 Évaluation du seuil d'endommagement

Il est important de vérifier si les résultats d'essais qui serviront lors de l'identification peuvent exhiber de l'endommagement. On rappelle que les effets d'échelle peuvent exister dans le domaine semi-fragile. Il est donc important de revoir ces différents essais en utilisant la notion du seuil d'endommagement. En utilisant le critère développé pour ce matériau par Sgaoula (1997) et exprimé en termes du premier invariant I_1 et du second invariant du déviateur J_2, une représentation de la surface du seuil d'endommagement peut être obtenue. Une telle représentation est fournie à la figure 4.11. Les données de laboratoire montrées sur cette figure sont fournies au tableau 4.3. La relation utilisée pour définir le seuil d'endommagement est donnée par les équations 2.86 et 2.87 de telle sorte que:

$$\sqrt{(J_2)} = (1 + 40\ (1 - exp\ (-0.0075\ I_1)))\ F_{pi}\ , \tag{4.1}$$

avec

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\ , \tag{4.2}$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2\right]\ , \tag{4.3}$$

en ce qui concerne le paramètre $F_{pi} = b = \{1, 0.75\}$ selon que l'on soit en compression ou en extension. Cette relation ne s'applique qu'à température de la pièce. Les données pour des essais à températures supérieures à $T = 25^o$ C n'ont donc pas été analysées pour l'endommagement.

Les données fournies au tableau 4.3 montrent clairement qu'une bonne partie des essais de fluage de Hansen et de Mellegard excèdent le seuil d'endommagement. Ces essais (RT-2, RT-3, RT-4, RT-5, RT-6, RT-7, RT-8, RT-10, RT-13, 24-2 et 24-4) devraient être considérés en second lieu lors de l'identification.

Les essais CSR doivent être traités différemment des essais de fluage puisque I_1 et J_2 évoluent durant l'essai. Les paragraphes suivants visent à vérifier si de l'endommagement pourrait être présent pour les essais CSR utilisés au chapitre 6:

les essais jul04 à jul11 de l'auteur et les essais C-1 à C-4 de Senseny. Les deux cas doivent être traités séparément puisque la détermination du seuil d'endommagement est fonction du déviateur et de la contrainte moyenne.

La figure 4.12 montre le seuil d'endommagement dans le plan $\sqrt{J_2} - I_1$ pour les essais CSR de l'auteur. On pose ici que ces essais ont été réalisés à une contrainte de confinement de l'ordre de 53.0 MPa. En condition CTC, lorsque le déviateur S dépasse le seuil, c.-à-d. environ 58.0 MPa ou $S = I_1 - (53 * 3) = 217 - 159 = 58$ MPa, de l'endommagement peut être appréhendé. On peut donc s'attendre à un peu d'endommagement en fin d'essai pour la majorité des essais de l'auteur montrés aux figures 4.3 à 4.10 puisque les déviateurs peuvent atteindre des valeurs au-delà d'un déviateur 58.0 MPa. En conditions RTE, lorsque le déviateur S dépasse le seuil, c.-à-d. environ 41.0 MPa ou $S = I_1 - (53*3) = 200 - 159 = 41$ MPa, de l'endommagement peut être appréhendé.

La figure 4.13 montre pour sa part le seuil d'endommagement dans le plan $\sqrt{J_2} - I_1$ pour les essais CSR C-1 à C-4 de Senseny et al. (1993). Ces essais ont été réalisés à une contrainte de confinement de 15.0 MPa. Tel que montré à la figure I.3, le déviateur maximal obtenu est de l'ordre de 25.0 MPa et est donc inférieur au seuil d'endommagement estimé à environ 32.0 MPa ou $S = I_1 - (15 * 3) = 77 - 45 = 32$ MPa. On peut donc considérer que les essais CSR de Senseny ne devraient pas présenter d'endommagement.

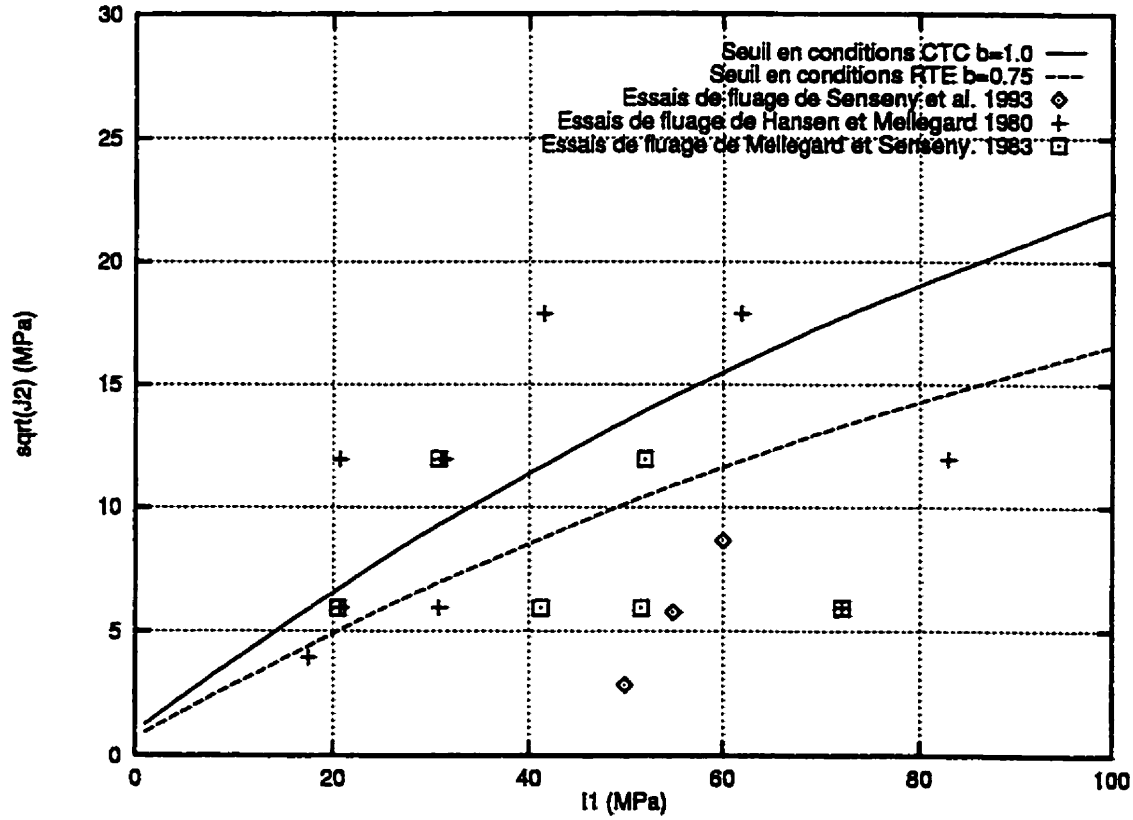


Figure 4.11: Seuil d'endommagement pour le sel d'Avery Island en conditions CTC et RTE. La surface est définie par l'équation 4.1. Certains des essais de fluage utilisés dans le cadre de cette recherche sont aussi positionnés.

Tableau 4.3: Évaluation de la présence d'endommagement pour certains des essais à température de la pièce sur le sel d'Avery Island.

Essai	I_1 (MPa)	$\sqrt{J_2}$ essai (MPa)	$\sqrt{J_2}$ seuil (MPa)	Au-dessus du seuil d'endommagement
Senseny F-1	50	2.9	13.508	non
Senseny F-2	50	2.9	13.508	non
Senseny F-3	55	5.8	14.520	non
Senseny F-4	60	8.7	15.495	non
Hansen RT-1	17.4	4.0	5.894	non
Hansen RT-2	20.8	5.9	6.778	presque
Hansen RT-3	20.7	11.9	6.752	oui
Hansen RT-4	31.2	11.9	9.346	oui
Hansen RT-5	41.5	17.9	11.699	oui
Hansen RT-6	20.8	5.9	6.778	presque
Hansen RT-7	31.2	11.9	9.346	oui
Hansen RT-8	41.5	17.9	11.699	oui
Hansen RT-9	31.0	5.9	9.298	non
Hansen RT-10	41.4	11.9	11.677	oui
Hansen RT-11	72.4	5.9	17.760	non
Hansen RT-12	82.8	11.9	19.504	non
Hansen RT-13	61.9	17.9	15.856	oui
Mellegard 24-1	51.7	5.9	13.857	non
Mellegard 24-2	20.5	5.9	6.700	presque
Mellegard 24-3	52.1	11.9	13.938	non
Mellegard 24-4	30.9	11.9	9.274	oui
Mellegard 24-5	72.4	5.9	17.760	non
Mellegard 24-7	41.2	5.9	11.633	non

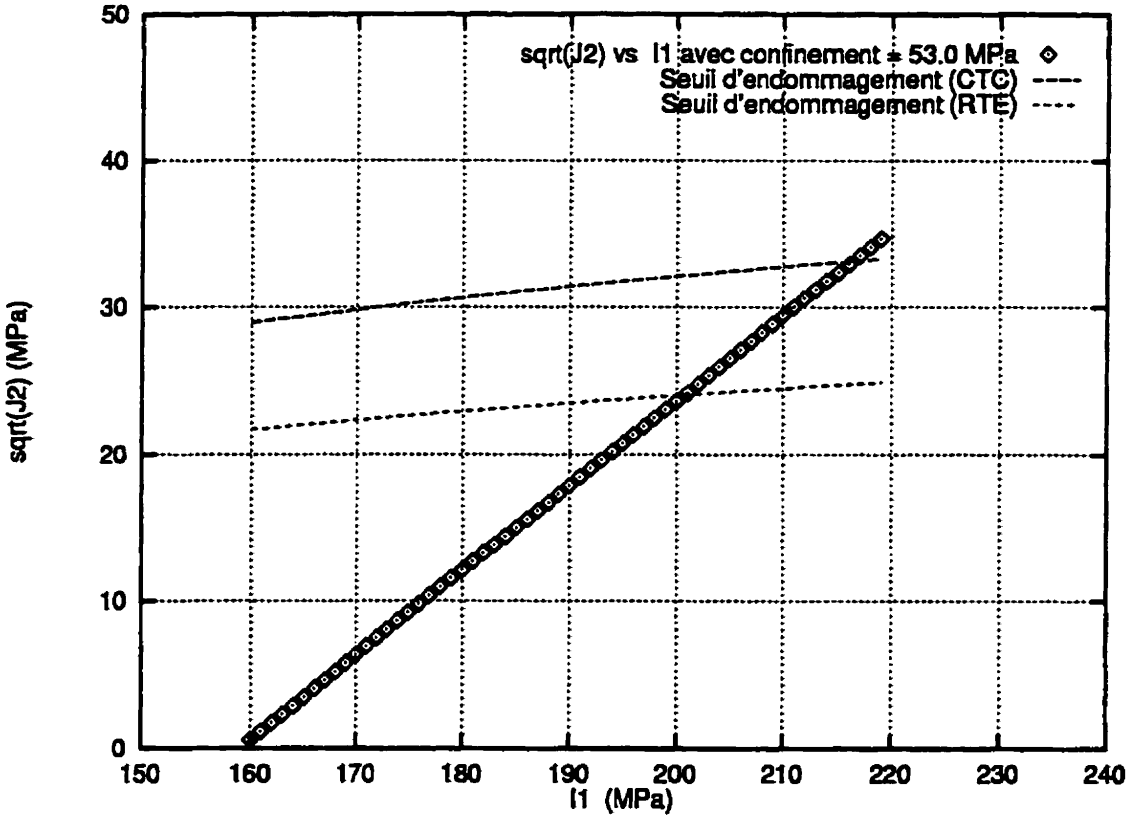


Figure 4.12: Évolution du seuil d'endommagement (en conditions CTC et RTE) dans le plan $\sqrt{J_2} - I_1$ en supposant une contrainte de confinement de 53.0 MPa (Essais de Julien). Si le déviateur S dépasse environ 58.0 MPa ($S = I_1 - (53*3) = 217 - 159 = 58$ MPa) de l'endommagement est à prévoir en conditions CTC. Si le déviateur S dépasse environ 41.0 MPa ($S = I_1 - (53 * 3) = 200 - 159 = 41$ MPa) de l'endommagement est à prévoir en conditions RTE.

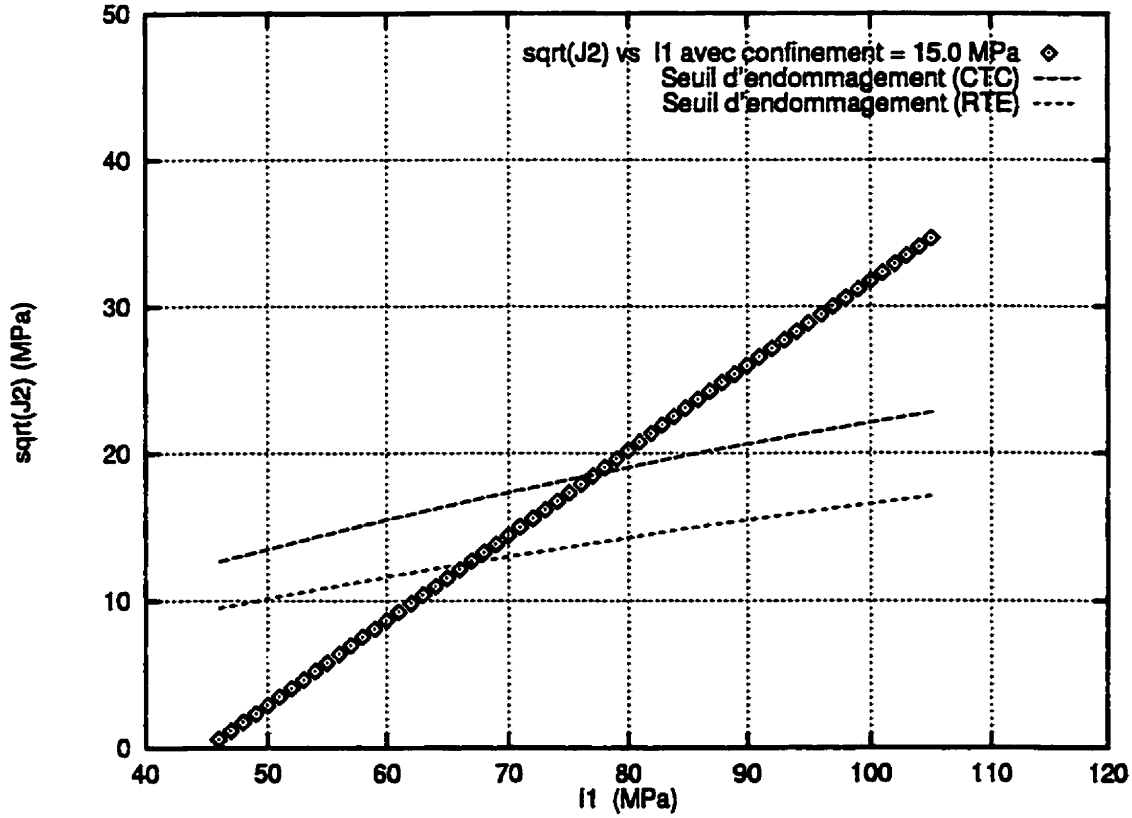


Figure 4.13: Évolution du seuil d'endommagement (en conditions CTC) dans le plan $\sqrt{J_2}-I_1$ en supposant une contrainte de confinement de 15.0 MPa (Essais de Senseny et al. 1993). Si le déviateur S dépasse environ 32.0 MPa ($S = I_1-(15*3) = 77-45 = 32$ MPa) de l'endommagement est à prévoir en conditions CTC.

Chapitre V

MODIFICATIONS DU MODÈLE SUVIC ET IMPLANTATION NUMÉRIQUE

Ce chapitre vise à présenter certaines des contributions de l'auteur au développement et à l'utilisation des équations du modèle SUVIC. Ces contributions touchent quatre aspects, soient:

- des améliorations au niveau de la description du comportement stationnaire par l'introduction d'une formulation non singulière et l'utilisation de relations simplifiées permettant d'évaluer la relation entre la contrainte et la contrainte interne.
- la réécriture des équations du modèle SUVIC dans un contexte plus général permettant d'intégrer les aspects thermiques et de vérifier qu'il satisfait bien certaines conditions thermodynamiques.
- une contribution au niveau du développement du module d'endommagement de la version SUVIC-D. Ce module d'endommagement est toujours en phase de développement et ne sera traité que de façon sommaire.

- une implantation numérique du modèle a été faite dans un code d'éléments finis. Une description est faite du code et de la méthode de construction du Jacobien.

5.1 Modifications apportées au modèle

Les équations du modèle SUVIC telles que proposées par Aubertin et al. (1991b) et Aubertin et al. (1998) ont été présentées à la section 2.4, aux équations (2.60) à (2.74). La section suivante décrit certaines améliorations récentes apportées au modèle.

5.1.1 Description de l'état stationnaire

La caractérisation de l'état stationnaire est une étape déterminante dans le processus d'identification des constantes du modèle. Une procédure d'identification détaillée sera présentée au chapitre suivant. L'approche est basée sur l'hypothèse (applicable à la plupart des modèles avec VEI) que, pour chaque condition de chargement, il existe un état stationnaire ne dépendant pas de l'histoire mécanique, c.-à-d. la relation entre σ, $\dot{\epsilon}^i$ et T est univoque.

Le problème soulevé est que le modèle est constitué de variables internes assujetties à des lois d'évolution propres, complexes et indépendantes, et que leur évaluation à l'état stationnaire ne peut se faire directement. On rappelle que, pour l'état stationnaire, divers types de lois cinétiques peuvent être utilisées: loi de puissance, loi exponentielle, etc. Or, en conditions stationnaires, il est possible de développer des relations relativement simples reliant la contrainte à la déformation (pour T =constante).

Il est à noter qu'on peut reformuler le modèle en termes des valeurs à saturation, c.-à-d. en termes des valeurs de la contrainte déviatorique $\mathbf{S}'$ et des différentes variables internes, $\mathbf{X}' = \mathbf{B}'_g + \mathbf{B}'_l$, R' et K'. On doit souligner que les valeurs à saturation des quantités tensorielles de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{S}$ sont exprimées en termes des valeurs équivalentes

von Mises. À partir de l'équation 2.80, le taux de déformation inélastique stationnaire est donné pour des conditions de température constante par:

$$\dot{\epsilon}^i_{eq} = A \left\langle \frac{\mathbf{S}'_{eq} - \mathbf{X}'_{eq} - R'}{K'} \right\rangle^N \quad . \tag{5.1}$$

Il est implicite ici que chaque loi évolutive se réduit à zéro pour l'état stationnaire:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = \dot{\mathbf{B}}_l = \dot{R} = \dot{K} = 0 \, . \tag{5.2}$$

L'état stationnaire est associé à un état où les mécanismes d'écrouissage sont en équilibre avec les mécanismes de restauration, de sorte que les valeurs des VOI demeurent constantes pour un chargement donné. C'est ce qui permet d'exprimer l'état stationnaire à partir des variables observables, c.-à-d. σ, $\dot{\epsilon}^i$ et T.

L'équation 5.1, aussi intéressante qu'elle puisse être, contient un certain nombre d'inconnus: les VEI à saturation $\mathbf{X}'_{eq} = \{\mathbf{B}'_{eq_s}, \mathbf{B}'_{eq_l}\}$, R' et K' et les constantes A et N. Mais, il est plutôt préférable de considérer que lorsque les différentes VEI sont saturées, la relation $\mathbf{S} - \dot{\epsilon}^i$ devient littéralement indépendante de l'historique de déformation. L'écoulement peut alors être écrit seulement en termes des variables observables $\mathbf{S}$ et $\dot{\epsilon}^i$.

Des considérations micromécanistiques suggèrent que l'écoulement en phase stationnaire est souvent bien décrit par une loi exponentielle (*power law breakdown expression*) lorsque le mécanisme dominant est le glissement et le glissement dévié des dislocations (Freed et Walker 1995; Aubertin et al. 1998):

$$\dot{\epsilon}^i_{eq} = \dot{\epsilon}_0 \, exp\left(\frac{\mathbf{S}'_{eq}}{\sigma_0}\right) \, , \tag{5.3}$$

avec pour inverse

$$\mathbf{S}'_{eq} = \sigma_0 \, ln\left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0}\right) \, . \tag{5.4}$$

On peut remarquer que cette formulation utilisée dans le modèle SUVIC devient singulière pour des taux de déformation $\dot{\epsilon}^i_{eq} < \dot{\epsilon}_0$ lors du calcul des valeurs de saturation. Elle procure des valeurs s'opposant à la contrainte et croissant rapidement à

mesure que le taux de déformation inélastique diminue sous le seuil $\dot{\epsilon}_0$. Cette relation peut donc induire des instabilités numériques à de faibles taux de déformation. Afin d'éliminer ce problème, une formulation alternative est proposée, exprimée en terme de la fonction sinus hyperbolique telle que proposée par Garafalo (1963). La figure 5.1 montre que la fonction sinus hyperbolique et son inverse ne sont pas singulières autour de l'origine.

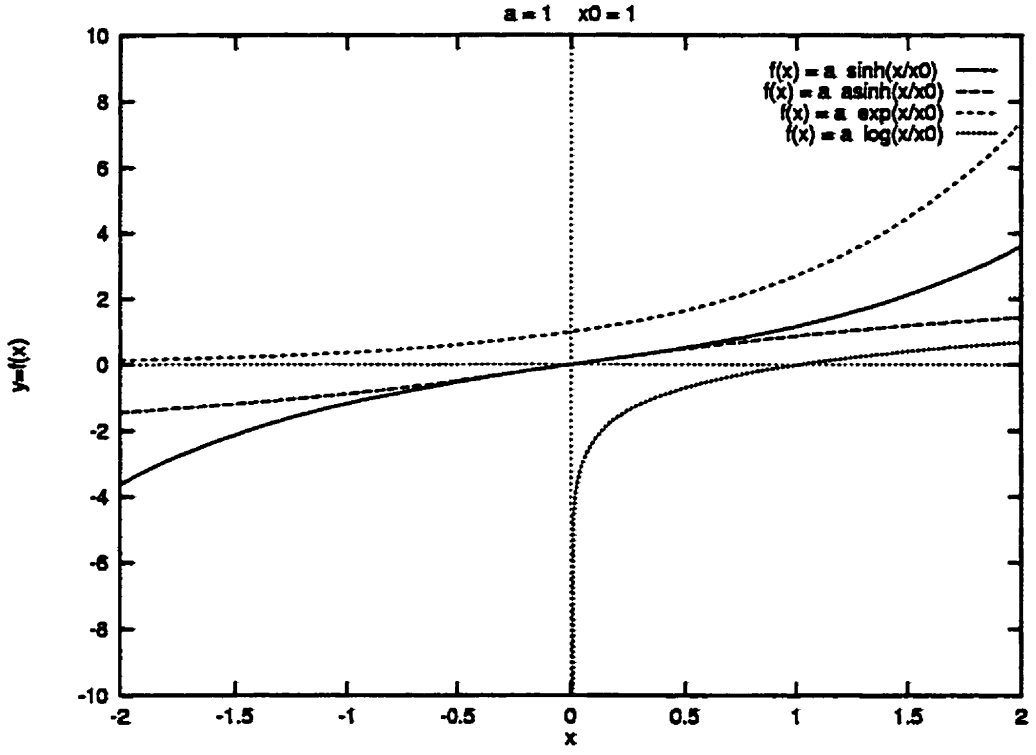


Figure 5.1: Représentation des fonctions sinus hyperboliques *sinh*, inverses sinus hyperboliques *asinh*, exponentielles *exp* et logarithmiques *log*. On considère les constantes $x_0 = 1$ et $a = 1$.

La fonction sinus hyperbolique permet d'avoir un comportement non singulier à de très faibles taux de déformation ($\Rightarrow 0$). Il est à remarquer que cette fonction est pratiquement linéaire lorsque l'argument (x/x_0) est petit, c.-à-d. $y = a\ (x/x_0)$ si $(x/x_0) < 0.5$ (voir aussi la figure 5.2). Afin d'avoir un ajustement de qualité supérieure, on introduit (à l'instar de Garafalo (1963)) l'exposant n (à distinguer de

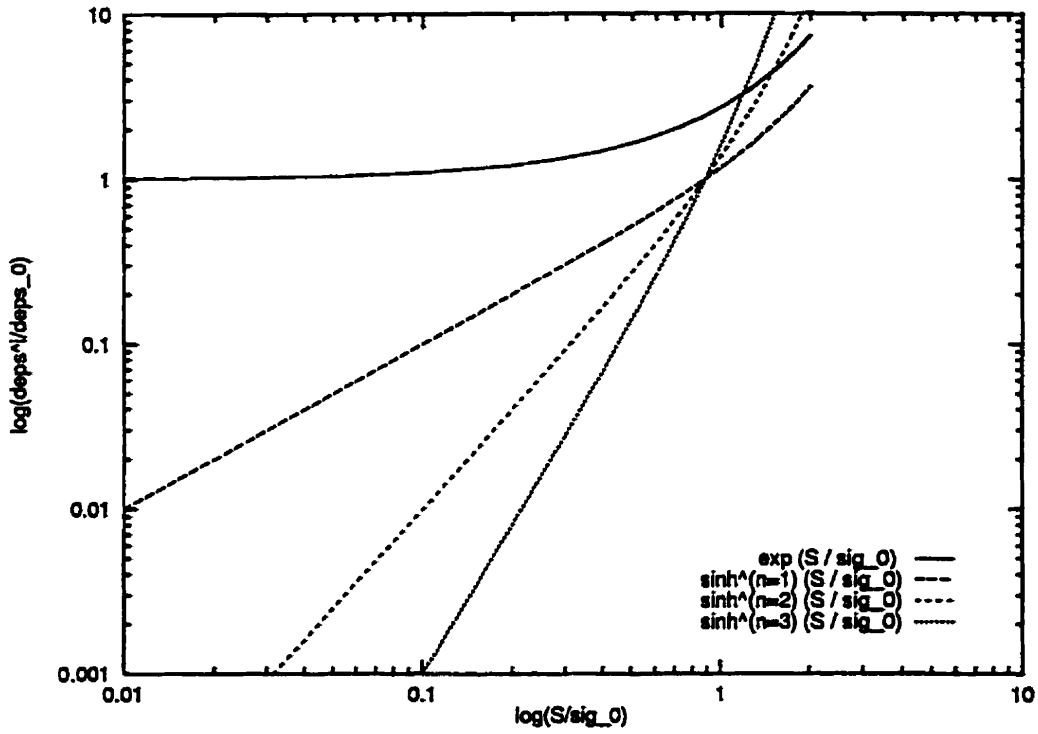


Figure 5.2: Comparaison du comportement des fonctions $exp(S_{eq}/\sigma_0)$ et sinus hyperbolique $sinh^n(S_{eq}/\sigma_0)$ avec $n = 1, 2, 3$, en termes du log de $\dot{\epsilon}^i/\dot{\epsilon}_0$ et du log de S_{eq}/σ_0.

N dans la loi cinétique de SUVIC):

$$\dot{\epsilon}^i_{eq} = \dot{\epsilon}_0 \, sinh^n \left(\frac{S'_{eq}}{\sigma_0} \right) , \tag{5.5}$$

ayant pour inverse

$$S'_{eq} = \sigma_0 \, asinh \left[\left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/n} \right] . \tag{5.6}$$

La figure 5.2 montre une comparaison entre le comportement de la fonction exponentielle $exp(S_{eq}/\sigma_0)$ et la fonction sinus hyperbolique $sinh^n(S_{eq}/\sigma_0)$ avec $n = 1, 2, 3$, en termes de $\dot{\epsilon}^i/\dot{\epsilon}_0$ dans un plan $log - log$. On peut observer l'effet de l'exposant n qui amplifie la pente de cette relation. Avec une telle formulation, on peut estimer par régression non linéaire les valeurs des constantes σ_0, $\dot{\epsilon}_0$ et n à partir des résultats tirés de la banque d'essais de laboratoire (voir chapitre 6 et annexe I) en reliant les

valeurs de $\mathbf{S}'_{eq}$ et $\dot{\epsilon}^{i}_{eq}$, et ce, même pour des taux de déformation inélastique très faibles.

5.1.2 Autres ajustements

Après avoir déterminé les paramètres σ_0, $\dot{\epsilon}_0$ et n décrivant l'état stationnaire, on définit les paramètres représentant le lien entre la contrainte interne saturée $\sigma'_i = \mathbf{X}'_{eq} + R' = \mathbf{B}'_{eq_s} + \mathbf{B}'_{eq_l} + R'$, la contrainte saturée $\mathbf{S}'_{eq}$ et la température:

$$\sigma'_i = f(\mathbf{S}', T) \; . \tag{5.7}$$

Selon (Aubertin et al. 1991b), et suivant les travaux de Argon et Takeuchi (1981) et Smith et Northwood (1986), on peut établir à saturation une relation entre σ'_i et $\mathbf{S}'_{eq}$ du type:

$$\sigma'_i = a(T) \left(\frac{\mathbf{S}'_{eq}}{C} \right)^{m(T)} \; , \tag{5.8}$$

où les valeurs de $a(T)$ et $m(T)$ dépendent en principe de la température et où $\mathbf{S}'_{eq}$ est défini par l'équation 5.6; C est une constante pour assurer la consistance des unités (ici $C = 1\ MPa$). La contrainte interne saturée est la somme des variables internes saturées $\mathbf{B}'_{eq_s}$, $\mathbf{B}'_{eq_l}$ et R':

$$\sigma'_i = \mathbf{B}'_{eq_s} + \mathbf{B}'_{eq_l} + R' \; . \tag{5.9}$$

Si on suppose que chacune des variables internes saturées obéit à une loi du même type, à certaines constantes près, on peut donc réécrire les équations des valeurs à saturation en utilisant la fonction sinus hyperbolique de la façon suivante:

$$\mathbf{B}'_{eq_s} = \mathbf{B}_{0s}(T) \;\; asinh \left[\left(\frac{\dot{\epsilon}^{i}_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/n} \right]^{m(T)} \; , \tag{5.10}$$

$$\mathbf{B}'_{eq_l} = \mathbf{B}_{0l}(T) \;\; asinh \left[\left(\frac{\dot{\epsilon}^{i}_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/n} \right]^{m(T)} \; , \tag{5.11}$$

$$R' = R_0(T)\ asinh\left[\left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n}\right]^{m(T)} , \tag{5.12}$$

avec $R_0(T)$, $\mathbf{B}_{0s}(T)$, $\mathbf{B}_{0l}(T)$ étant des constantes du matériau qui peuvent dépendre de la température; $asinh = sinh^{-1}$ est la fonction sinus hyperbolique inverse.

En égalant l'équation 5.8 à la somme des équations 5.10, 5.11 et 5.12 introduite dans l'équation 5.9, on peut isoler la formulation suivante:

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_{0s}(T) + \mathbf{B}_{0l}(T) + R_0(T))\ asinh&\left[\left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n}\right]^{m(T)} \\ = \quad a(T)\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{m(T)}\ asinh&\left[\left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n}\right]^{m(T)} ,\end{aligned} \tag{5.13}$$

d'où on tire:

$$\mathbf{B}_{0s}(T) + \mathbf{B}_{0l}(T) + R_0(T) = a(T)\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^{m(T)} . \tag{5.14}$$

Des analyses théoriques et des résultats expérimentaux pour divers matériaux tendent à montrer qu'à $T = 25^o$ C, $a(T) \rightarrow a \approx 1$ et que la valeur de l'exposant $m(T) \rightarrow m$ varie entre $0.6 \leq m \leq 1.0$. En utilisant des résultats de *dip tests* sur le sel de Asse (Hunsche 1988) et l'analyse présentée dans Aubertin et al. (1991b), on obtiendrait:

$$\begin{aligned} a &= 1 , \\ C &= 1 , \\ m &= 0.81 . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ces valeurs fournissent un rapport $\sigma'_i/\mathbf{S}'_{eq}$ dans l'intervalle: $0.2 \leq \sigma'_i/\mathbf{S}'_{eq} < 1.0$, avec des valeurs typiques variant entre 0.5 et 0.9 pour des conditions d'essais de fluage (Orlova et Cadek 1986; Derby et Ashby 1987; Aubertin et al. 1991b; Orlova 1991). Avec une telle relation, l'importance de la contrainte interne diminue avec l'augmentation de $\mathbf{S}$; la contrainte interne excédera la contrainte si $\mathbf{S}'_{eq} < 1$. Cette relation est problématique, car elle est limitée à $\mathbf{S}'_{eq} \geq 1.0$ MPa.

Afin d'éviter des problèmes à faibles contraintes et considérant la faible non-linéarité appréhendée de la relation 5.8 (à température constante), on posera que $m = 1$ et $a \leq 1$:

$$\sigma_i' = a(T)\, \mathbf{S}_{eq}' \,. \tag{5.16}$$

Pour une température de $T \approx 25^o$ C, les résultats expérimentaux indiquent que $a(T) = a \approx 0.85$ à 0.95 (c.-à-d. la contrainte interne à saturation correspond à 85% jusqu'à 90% de la contrainte $\mathbf{S}_{eq}'$ Gupta et Li (1970) et Sprackling (1973)). Ceci est considéré comme un estimé de départ. Cette relation, fondamentalement différente de la précédente, suppose que le ratio $\sigma_i'/\mathbf{S}_{eq}'$ demeure constant, et ce, peu importe le niveau de contrainte. Comme on le verra plus loin, cette hypothèse simplificatrice facilite l'identification des constantes et donne de très bons résultats. On peut facilement montrer que cette relation oblige que, pour des conditions isothermes, on obtienne:

$$a = \frac{\mathbf{B}_{0s} + \mathbf{B}_{0l} + R_0}{\sigma_0} \,, \tag{5.17}$$

d'où

$$\sigma_i' = \frac{\mathbf{B}_{0s} + \mathbf{B}_{0l} + R_0}{\sigma_0}\, \mathbf{S}_{eq}' \,. \tag{5.18}$$

Cette simplification réduit le nombre de degrés de liberté. La détermination des paramètres des lois stationnaires se réduit à déterminer les paramètres $\mathbf{B}_{0s}$, $\mathbf{B}_{0l}$ et R_0. Cette dernière approche est celle qui sera utilisée ultérieurement dans la thèse.

En ce qui concerne la valeur de saturation K', elle est obtenue selon la loi cinétique à saturation, c'est-à-dire la condition stationnaire pour laquelle on suppose qu'il est possible de lier de façon explicite le taux de déformation inélastique à la contrainte déviatorique. On peut déduire de la loi évolutive pour laquelle le taux de déformation est exprimé en termes du taux de déformation équivalent $\dot{\epsilon}_{eq}^i$:

$$K' = \frac{\mathbf{S}_{eq}' - \mathbf{B}_{eq_s}' - \mathbf{B}_{eq_l}' - R'}{\left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}^i}{A(T)}\right)^{(1/N)}} \,. \tag{5.19}$$

Cette représentation est la même que celle du modèle original.

5.1.3 Module d'endommagement

Même si les travaux associés à cette recherche portent surtout sur le modèle viscoplastique SUVIC appliqué au régime d'écoulement ductile, l'auteur a aussi contribué à l'amélioration du module d'endommagement SUVIC-D applicable au régime semi-fragile (Aubertin et al. 1998). Ce module développé par Aubertin et al. (1995) et Sgaoula (1997) demeure toutefois en phase de développement. La contribution de l'auteur a surtout été associée à la construction d'un formalisme permettant la généralisation du modèle initialement formulé pour les conditions axisymétriques des essais de laboratoire, au cas 3D général.

Dans cette nouvelle représentation, le taux de déformation élastique $\dot{\epsilon}^e$ est obtenu par le produit contracté de la matrice d'élasticité inversée $(\mathbf{D}_{el})^{-1}$ (tenseur du 4^e ordre) et l'incrément du tenseur de contrainte $\dot{\sigma}$:

$$\dot{\epsilon}^e = (\mathbf{D}_{el})^{-1} : \dot{\sigma} \, . \tag{5.20}$$

En utilisant le concept de la contrainte nette présenté au chapitre 2, le taux de déformation élastique $\dot{\epsilon}^e$ peut être représenté par le produit contracté de la matrice d'élasticité non endommagée inversée $(\mathbf{D}_{el_0})^{-1}$ (tenseur du 4^e ordre) et l'incrément du tenseur de contrainte nette $\dot{\hat{\sigma}}$:

$$\dot{\epsilon}^e = (\mathbf{D}_{el_0})^{-1} : \dot{\hat{\sigma}} \, . \tag{5.21}$$

Les matrices d'élasticité endommagée $\mathbf{D}_{el}$ et non endommagée $\mathbf{D}_{el_0}$ sont liées par le tenseur de l'effet d'endommagement $\mathbf{M}$ qui est en fait un opérateur de transformation linéaire. L'expression liant ces tenseurs découle des relations décrites dans les paragraphes suivants. En utilisant les équations 5.20 et 5.21, on obtient:

$$(\mathbf{D}_{el})^{-1} : \dot{\sigma} \;=\; (\mathbf{D}_{el_0})^{-1} : \dot{\hat{\sigma}} \, , \tag{5.22}$$

impliquant que:

$$(\mathbf{D}_{el})^{-1} : \sigma \;=\; (\mathbf{D}_{el_0})^{-1} : \hat{\sigma} \, . \tag{5.23}$$

On peut alors exprimer la contrainte nette de la façon suivante:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad = \quad \mathbf{D}_{el_0} : (\mathbf{D}_{el})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \, . \tag{5.24}$$

On remarque que si $\mathbf{D}_{el_0} = \mathbf{D}_{el}$, alors il n'y a pas d'endommagement, et $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}$. On définit le tenseur du 4^e ordre de l'effet d'endommagement $\mathbf{M}$, de telle sorte que:

$$\mathbf{M} \quad = \quad (\mathbf{D}_{el_0}) : (\mathbf{D}_{el})^{-1} \, , \tag{5.25}$$

impliquant que

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad = \quad \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \, . \tag{5.26}$$

On introduit le paramètre Γ que l'on appellera le paramètre ou tenseur de continuité (suivant les travaux de Kachanov-Rabotnov) permet de lier le tenseur d'endommagement $\mathcal{D}$ (ordre 2) au tenseur de l'effet d'endommagement $\mathbf{M}$:

$$\Gamma \quad = (\mathbf{I} - \mathcal{D}) \, , \tag{5.27}$$

avec $\mathbf{I}$, le tenseur identité d'ordre 2 . Si on exprime Γ en terme du tenseur d'endommagement principal, on peut alors écrire:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1-\mathcal{D}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathcal{D}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathcal{D}_3 \end{pmatrix} . \tag{5.28}$$

et, avec pour inverse:

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mathcal{D}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\mathcal{D}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\mathcal{D}_3} \end{pmatrix} . \tag{5.29}$$

Si l'on pose que les orientations principales des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathcal{D}$ sont coaxiales, on peut alors exprimer la contrainte nette en utilisant les relations précédentes de façon à obtenir:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{1-\mathcal{D}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{1-\mathcal{D}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{1-\mathcal{D}_3} \end{pmatrix} . \tag{5.30}$$

Le tenseur de l'effet d'endommagement $\mathbf{M}$ est un tenseur de 4^e ordre. Il peut être exprimé en termes de la variable d'endommagement $\mathcal{D}$ définie au chapitre 2. Le tenseur de l'effet d'endommagement $\mathbf{M}$ procure le lien entre la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et la contrainte nette $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. On rappelle que la variable d'endommagement $\mathcal{D}$ pourrait prendre plusieurs formes: un tenseur d'ordre 0 (scalaire), 1 (vecteur), un tenseur d'ordre 2 ou 4 ou une combinaison des précédents (Lemaitre 1992). Dans ce cas-ci, il est supposé que le tenseur d'endommagement $\mathcal{D}$ est du 2^e ordre. Pour des raisons pratiques aussi bien que physiques, il est maintenant commun d'utiliser un tenseur de 2^e ordre pour exprimer la variable d'endommagement $\mathcal{D}$ (Chow et Wang 1987; Murakami 1988; Murakami 1990; Stumvoll et Swoboda 1993; Xie 1993; Hansen et Schreyer 1995; Shao et al. 1996; Shao et al. 1997; Dragon et Halm 1998). Un tel tenseur permet de décrire certains effets anisotropes (c.-à-d. l'orthotropie).

Le passage de $\mathcal{D}$ à $\mathbf{M}$ doit permettre l'obtention d'un tenseur de contrainte nette $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ qui soit symétrique. De nombreuses expressions ont été proposées pour décrire ce passage (Murakami et Ohno 1982; Cordebois et Sidoroff 1982; Betten 1983; Voyiadjis et Park 1997). Compte tenu de la représentation retenue pour Γ et $\mathcal{D}$, on peut écrire:

$$\mathbf{M} = \Gamma^{-1/2} \otimes \Gamma^{-1/2} . \tag{5.31}$$

Cette représentation du tenseur $\mathbf{M}$ est issue des travaux de Cordebois et Sidoroff (1982); elle assure la symétrie du tenseur des contraintes nettes $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ exprimé par l'équation 5.26.

Le reste du traitement de l'endommagement demeure similaire à ce qui a été présenté au chapitre 2, aux équations 2.79 à 2.93. Ce module a été introduit sous forme explicite dans un code d'éléments finis et a été utilisé pour des calculs simples. Cet aspect sera repris plus loin dans la thèse.

5.2 Formulation généralisée du modèle SUVIC

5.2.1 Pertinence d'une telle présentation

Dans cette section, on présente un traitement plus général du modèle SUVIC qui s'inspire de traitements similaires pour d'autres modèles avec variables internes. Il vise à montrer certaines particularités du modèle et son extension possible sous des conditions non isothermales.

Pour l'analyse classique des modèles avec VEI, on fait intervenir typiquement 2 potentiels: l'énergie libre spécifique Ψ qui procure un lien entre les VOI et VOIA et un potentiel de dissipation Φ qui agit comme règle d'écoulement généralisée. Cette représentation basée sur la notion de potentiel comporte des limitations dès que le matériau est sollicité dans un domaine de chargement pouvant causer l'endommagement et une dilatance du matériau (Freed et al. 1994). C'est pourquoi on se limite ici au domaine ductile.

L'énergie libre spécifique $\Psi = \Psi\{\epsilon^e, \alpha_{m1}, p_{m2}\}$ établit un lien entre les VOI et les VOIA:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e}, \tag{5.32}$$

$$\mathbf{X}_{m1} = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{m1}} \qquad m_1 = 1, \ldots, M_1, \tag{5.33}$$

$$R_{m2} = \frac{\partial \Psi}{\partial p_{m2}} \qquad m_2 = 1, \ldots, M_2. \tag{5.34}$$

En utilisant le potentiel dissipatif $\Phi = \Phi\{\sigma, \mathbf{X}, R, T\}$ et une hypothèse de normalité (Chaboche 1993a), on construit les différentes lois évolutives:

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \tag{5.35}$$

$$\dot{\alpha}_{m1} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}_{m1}} \qquad m_1 = 1, \ldots, M_1, \tag{5.36}$$

$$\dot{p}_{m2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial R_{m2}} \qquad m_2 = 1, \ldots, M_2 \,. \tag{5.37}$$

Le potentiel dissipatif Φ doit être convexe et positif (Chaboche 1993a). Il s'agit donc de déterminer les potentiels Ψ et Φ et de s'assurer du caractère dissipatif du modèle pour vérifier sa consistance au niveau thermodynamique. En utilisant une telle approche, il est possible de ramener les représentations des lois évolutives des variables internes à des grandeurs qui s'apparentent à la déformation. La question de la la signification physique des grandeurs duales est toutefois un aspect problématique. Les variables internes associées doivent être vues comme s'apparentant à la déformation au même titre que les variables internes s'apparentent à la contrainte.

Cette approche visant à déterminer les potentiels Ψ et Φ n'est pas la seule possible, et, en fait, elle est quelquefois jugée trop restrictive (Freed et al. 1991; Freed et Walker 1995; Freed et al. 1994). Elle ne permet pas, ou à tout le moins pas facilement, d'inclure des phénomènes problématiques au niveau thermodynamique (comme la dilatance lors de déformation avec endommagement) et surtout d'intégrer les effets de restauration dynamique et statique (thermique).

On peut développer une formulation avec variables internes sans faire intervenir la notion de potentiel (Freed et al. 1991; Freed et al. 1994; Freed et Walker 1995). Mais il est reconnu que la satisfaction du 2^e principe de thermodynamique demeure un objectif minimal pour qu'un encadrement théorique suffisant et adéquat soit offert pour le développement de modèles constitutifs.

L'approche exposée par la suite vise à vérifier que le modèle SUVIC satisfait bien le 2^e principe en choisissant de façon appropriée, à l'instar de Chaboche (1993a):

- les lois évolutives des variables d'état;
- les bornes de certaines constantes.

Les sections suivantes présentent certaines notions préalables à cette vérification.

5.2.2 Fonction d'écoulement

La surface d'écoulement $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\sigma, \mathbf{X}, R, K, T)$ est une fonction scalaire basée sur le critère de von Mises. Elle permet de savoir si le matériau subit une déformation viscoplastique ou non. Cette surface doit être une fonction convexe dans l'espace des contraintes augmentées utilisée pour illustrer le caractère dissipatif de l'énergie (Lemaitre et Chaboche 1988). Plusieurs formulations générales de la fonction d'écoulement sont possibles. Par exemple, si K est une constante, on obtient avec les variables internes de SUVIC:

$$\mathbf{F} = \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{S} - \mathbf{X})} - R}{K} . \tag{5.38}$$

Cette formulation est comparable à celle proposée par Arnold et al. (1995), Ohno et Wang (1991), Ohno et Wang (1992), qui s'exprime par:

$$\mathbf{F} = \frac{J_2(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{K^2} + \varpi - \psi^2 , \tag{5.39}$$

où $\psi = \frac{R}{K}$ et $\varpi = f(K, I_2)$.

Comme K n'affecte que l'ampleur de $\dot{\epsilon}^i$, mais n'influence pas directement la surface d'écoulement, on peut simplifier l'équation 5.38 et obtenir:

$$\mathbf{F} = \sqrt{J_2(\mathbf{S} - \mathbf{X})} - R , \tag{5.40}$$

où $\dot{\epsilon}^i$ est une fonction de $\langle \mathbf{F}/K \rangle$. Il est à remarquer que $\mathbf{S} - \mathbf{X}$ est le tenseur déviatorique effectif (Arnold et al. 1995), le tenseur $\mathbf{X}$ étant une contribution déviatorique au même titre que $\mathbf{S}$. Ainsi, selon l'état de contrainte σ et des variables internes:

- le matériau est élastique si $\mathbf{F} = 0$ (c.-à-d. $\dot{\epsilon}^i = 0$);
- le matériau est en phase d'écoulement viscoplastique si $\mathbf{F} > 0$ (c.-à-d. $\dot{\epsilon}^i \neq 0$ *ou* $\| \dot{\epsilon}^i \| = 0$).

Cette présentation considère implicitement une surface d'écoulement de type von Mises centré à $\mathbf{X}$ et de rayon R. Ce critère semble bien adapté aux matériaux

isotropes. Pour ce critère, la surface d'écoulement est symétrique dans l'espace des contraintes par rapport à l'axe des contraintes hydrostatiques. Mais il faut garder à l'esprit que d'autres critères sont utilisés. L'utilisation de critères autres que celui de von Mises, peut dans certains cas, être avantageuse et peut permettre à certains modèles une meilleure prédiction des déformations. Ceci est notamment le cas du sel gemme pour le modèle de Munson-Dawson Modifié (Munson et al. 1996) qui utilise avec un certain succès le critère de Tresca. Cet aspect ne sera toutefois pas rediscuté ici.

5.2.3 Règle d'écoulement

Telle qu'elle est définie aux équations 5.35 à 5.37 , la construction des lois évolutives des VOIA peut se faire en utilisant une règle d'écoulement invoquant un potentiel dissipatif Φ. On définit Φ pour qu'il existe un découplage entre une fonction $\Im_T(T)$ strictement fonction de la température et un potentiel $\mathbf{Q}$ des différentes VOI:

$$\Phi = \Im_T(T)\ \mathbf{Q}\left(\sigma, \mathbf{X}_m, R_m\right) . \tag{5.41}$$

$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\left(\sigma, \mathbf{X}_m, R_m\right)$ étant une fonction scalaire quelconque des différentes VOI assimilable à un potentiel viscoplastique, on peut alors obtenir:

$$\dot{\epsilon}^i = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \Im_T(T)\ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} , \tag{5.42}$$

$$= \Im_T(T)\ f\{\mathbf{F}\}\ \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} . \tag{5.43}$$

Ici, on considère que la fonction scalaire $\mathbf{Q}$ est assimilable à un potentiel viscoplastique, exprimée en fonction de la surface d'écoulement $f\{\mathbf{F}\}$. Cette deuxième fonction peut prendre plusieurs formes (ex.: loi de puissance, exponentielle, sinus hyperbolique, etc.). Dans le cas de SUVIC, il s'agit d'une loi de puissance de la surface d'écoulement normalisée par la variable K:

$$f\{\mathbf{F}\} = \left\langle \frac{\mathbf{F}}{K} \right\rangle^N , \tag{5.44}$$

$$= \left\langle \frac{\sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})} - R}{K} \right\rangle^{N} . \tag{5.45}$$

On remarque que:

$$J(\mathbf{S}-\mathbf{X}) = \frac{3}{2}(\mathbf{S}-\mathbf{X}) : (\mathbf{S}-\mathbf{X}) . \tag{5.46}$$

Selon Chaboche (1993a), une fonction de type loi de puissance est plus robuste numériquement. Physiquement, on considère qu'elle est représentative du comportement du matériau à structure constante (Aubertin et al. 1991b; Aubertin et al. 1999).

On remarque, d'autre part, que la contrainte équivalente de von Mises σ_{eq} peut s'exprimer:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S}-\mathbf{X}) : (\mathbf{S}-\mathbf{X})} = \sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})} , \tag{5.47}$$

d'où

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}-\mathbf{X}}{\sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})}} = \mathbf{n} , \tag{5.48}$$

avec $\mathbf{n}$ étant un tenseur unitaire donnant la direction de l'écoulement dans l'équation 5.43.

La fonction $\Im_T(T)$ est, pour sa part, remplacée par un paramètre $A = A(T)$ dépendant de la température. Celui-ci peut être représenté par une fonction d'Arrhenius à température modérée. La fonction $\Im_T(T)$ devient alors (Freed et Walker 1995):

$$\Im_T(T) = A(T) = \exp\left(\frac{-Q}{\mathcal{R}\,T}\right) , \tag{5.49}$$

avec Q étant l'énergie d'activation, $\mathcal{R}$ la constante universelle des gaz et la température T en degrés Kelvin. On notera que:

$$\frac{\partial A(T)}{\partial T} = \frac{Q}{\mathcal{R}T^2} \exp\left(\frac{-Q}{\mathcal{R}\,T}\right) . \tag{5.50}$$

La formulation de la loi cinétique peut maintenant s'exprimer:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i} = \dot{\nu}\,\mathbf{n} , \tag{5.51}$$

et le taux de déformation équivalent $\dot{\nu}$:

$$\dot{\nu} \quad = A(T) \left\langle \frac{\sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})} - R}{K} \right\rangle^{N} . \tag{5.52}$$

5.2.4 Lois évolutives des variables internes

On considère ici une fonction scalaire Ω égale à l'énergie libre spécifique inélastique Ψ^i. Cette dernière est obtenue à partir de la décomposition de l'énergie libre spécifique Ψ en contribution élastique Ψ^e et inélastique Ψ^i:

$$\Psi \quad = \Psi^e + \Psi^i = \Psi^e + \Omega . \tag{5.53}$$

La fonction scalaire Ω est une fonction des différentes VOIA: $\Omega = \Omega\{\alpha_s, \alpha_l, r, k, T, \nabla T\}$ et elle peut être définie de façon appropriée par:

$$\Omega \quad = \frac{1}{3} A_{1s} \alpha_s : \alpha_s + \frac{1}{3} A_{1l} \alpha_l : \alpha_l + \frac{1}{2} A_3 r^2 + \frac{1}{2} A_5 k^2 . \tag{5.54}$$

Si on dérive le potentiel Ψ par rapport aux différentes VOIA, on a:

$$\sigma \quad = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^e} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \epsilon^e} \quad = \mathbf{D}_{el} : \epsilon^e , \tag{5.55}$$

$$\mathbf{B}_s \quad = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} \quad = \frac{2}{3} A_{1s}\, \alpha_s , \tag{5.56}$$

$$\mathbf{B}_l \quad = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_l} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_l} \quad = \frac{2}{3} A_{1l}\, \alpha_l , \tag{5.57}$$

$$R \quad = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad = A_3\, r , \tag{5.58}$$

$$K \quad = \frac{\partial \Psi}{\partial k} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} \quad = A_5\, k , \tag{5.59}$$

avec $A_{1s} = A_{1s}(T)$, $A_{1l} = A_{1l}(T)$, $A_3 = A_3(T)$ et $A_5 = A_5(T)$ qui sont tous des paramètres fonctions de la température (positifs) de sorte que:

$$A_{1s}(T) \geq 0; \qquad A_{1l}(T) \geq 0 ; \qquad A_3(T) \geq 0; \qquad A_5(T) \geq 0 . \tag{5.60}$$

Ces différents paramètres sont imposés comme positifs puisque l'on désire conserver une coaxialité entre les différentes VOI et VOIA. Une telle représentation donne un sens physique aux différents paramètres A_{1s}, A_{1l}, A_3 et A_5 qui deviennent des constantes permettant de transformer des grandeurs *déformation* en grandeurs *contrainte*.

De ces relations, on peut par la suite construire les lois évolutives des différentes variables internes associées. Elles sont basées sur le principe de Bailey-Orowan (Swearengen et Holbrook 1985; Swearengen et al. 1985). On peut exprimer cette idée pour une variable interne associée $\boldsymbol{\xi}$ par la loi évolutive:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad = h_1\left\{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i\right\} - h_2\left\{\dot{\epsilon}^i_{eq}, \boldsymbol{\xi}\right\} - h_3\left\{\boldsymbol{\xi}\right\} \ . \tag{5.61}$$

La fonction h_1 est une fonction représentant l'écrouissage subi par le matériau. Pour une variable cinématique, cet écrouissage sera dans la direction de l'incrément de déformation. La fonction h_2 représente un terme de restauration produite par la déformation subie par la variable interne $\boldsymbol{\xi}$. Cette variable évolue en fonction du taux de déformation et de l'état de $\boldsymbol{\xi}$. Pour une variable cinématique, elle agira dans la direction de $\boldsymbol{\xi}$. On parle souvent pour h_2 de restauration *dynamique*. Enfin, la fonction h_3 identifiée comme la restauration *statique* ou *thermique* (Freed et al. 1991) évolue en fonction du temps. Pour une variable cinématique, elle agira dans la direction de $\boldsymbol{\xi}$. La température n'apparaît pas explicitement dans l'équation 5.61, mais ces différentes fonctions et leurs coefficients associés peuvent dépendre de la température, plus particulièrement des termes de restauration thermique.

À l'instar de Freed et al. (1991), on suppose que les VOIA ne varient pas instantanément (de façon importante) lors d'une variation de la température, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial T} = 0 \ , \tag{5.62}$$

$$\frac{\partial \alpha_l}{\partial T} = 0 \ , \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial r}{\partial T} = 0 \ , \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial k}{\partial T} = 0 \,. \tag{5.65}$$

À cet égard, on peut ajouter, tel qu'il est mentionné par Chaboche (1993a), que les variables internes de type déformation, identifiées ici comme les VOIA, ne dépendent pas explicitement de la température. Plus précisément, on peut considérer qu'une évolution rapide de la température ne produira pas de déformation viscoplastique (si la restauration thermique n'a pas suffisamment de temps pour avoir lieu), de sorte que les variables d'état de grandeur de déformation $(\boldsymbol{\alpha}, r)$ ne varieront pas de façon significative. Toutefois, les forces thermodynamiques qui leur sont associées $(\mathbf{X}, R)$, elles, peuvent varier de façon instantanée.

On peut obtenir les différentes lois évolutives en dérivant par rapport au temps les équations 5.56 à 5.59 en notant que $\boldsymbol{\Omega}$ dépend de la température. On peut ainsi écrire:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_s^2} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_s \partial T} \dot{T} \,, \tag{5.66}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_l = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l^2} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_l + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l \partial T} \dot{T} \,, \tag{5.67}$$

$$\dot{R} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial r^2} \dot{r} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial r \partial T} \dot{T} \,, \tag{5.68}$$

$$\dot{K} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial k^2} \dot{k} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial k \partial T} \dot{T} \,. \tag{5.69}$$

Plus précisément pour $\mathbf{B}_s$, l'équation 5.66 correspondant aux lois d'évolution du modèle SUVIC devient:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = \frac{2}{3} A_{1s} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s + \frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial A_{1s}}{\partial T} \boldsymbol{\alpha}_s + A_{1s} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_s}{\partial T} \right\} \dot{T} \,. \tag{5.70}$$

L'équation 5.70 se réduit en utilisant l'équation 5.62 à:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = \frac{2}{3} A_{1s} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s + \frac{2}{3} \left\{ \frac{\partial A_{1s}}{\partial T} \boldsymbol{\alpha}_s \right\} \dot{T} \,, \tag{5.71}$$

que l'on peut réécrire en utilisant l'équation 5.56:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = \frac{2}{3} A_{1s} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s + \frac{1}{A_{1s}} \frac{\partial A_{1s}}{\partial T} \mathbf{B}_s \dot{T} \,. \tag{5.72}$$

On suppose que $A_{1s}(T)$ est un paramètre variant avec la température selon une loi exponentielle (type loi Arrhenius) telle que:

$$A_{1s}(T) = b_{2s}\ exp^{-b_{1s}T} \,, \tag{5.73}$$

avec b_{1s} et b_{2s} étant deux constantes et T en degrés Kelvin. Si on dérive par rapport à la température l'expression suivante, on obtient:

$$\frac{\partial A_{1s}(T)}{\partial T} = -b_{1s}\ A_{1s}(T) \,. \tag{5.74}$$

Si on remplace l'équation 5.74 dans l'équation 5.72, on obtient:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = \frac{2}{3} A_{1s} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s - b_{1s} \mathbf{B}_s \dot{T} \,. \tag{5.75}$$

Ceci montre que l'effet de la variation de la température agit dans la direction de $\mathbf{B}_s$.

La loi évolutive de la VOIA $\boldsymbol{\alpha}_s$ n'a pas encore été définie explicitement. On suppose que la loi évolutive de la variable $\boldsymbol{\alpha}_s$ respecte le principe de Bailey-Orowan et est du type suivant:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_s = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \frac{2}{3} \dot{\nu} \frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\boldsymbol{\alpha}'_{eq_s}} - c_1 \left\langle \frac{\boldsymbol{\alpha}_{eq_s} - \boldsymbol{\alpha}''_{eq_s}}{C} \right\rangle^q \frac{\boldsymbol{\alpha}_s}{\boldsymbol{\alpha}_{eq_s}} \,, \tag{5.76}$$

avec c_1, q et $C = 1$ MPa étant des constantes qui ne dépendent pas de la température (on suppose ceci à cause des propriétés de $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_s$). Cette formulation découle des lois d'évolution des VOI utilisées dans SUVIC. On utilisera les équivalences suivantes:

$$\mathbf{B}_s = \frac{2}{3} A_{1s}\ \boldsymbol{\alpha}_s \,, \tag{5.77}$$

$$\mathbf{B}'_s = \frac{2}{3} A_{1s}\, \boldsymbol{\alpha}'_s \,, \tag{5.78}$$

$$\mathbf{B}''_s = \frac{2}{3} A_{1s}\, \boldsymbol{\alpha}''_s \,, \tag{5.79}$$

$$\alpha_{eq_s} = \sqrt{\frac{2}{3}\, \boldsymbol{\alpha}_s : \boldsymbol{\alpha}_s} \,, \tag{5.80}$$

$$= \frac{1}{A_{1s}} \sqrt{\frac{3}{2}\, \mathbf{B}_s : \mathbf{B}_s} \,, \tag{5.81}$$

$$= \frac{1}{A_{1s}}\, \mathbf{B}_{eq_s} \,, \tag{5.82}$$

et

$$\alpha'_{eq_s} = \frac{1}{A_{1s}}\, \mathbf{B}'_{eq_s} \,. \tag{5.83}$$

Si on insère ces équations dans l'équation 5.76, qui est par la suite introduite dans l'équation 5.72, on obtient une équation générale qui s'écrit:

$$\dot{\mathbf{B}}_s = A_{1s} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \dot{\nu} \frac{\mathbf{B}_s}{\mathbf{B}'_{eq_s}} \right\} - A_{2s} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - \mathbf{B}''_{eq_s}}{C} \right\rangle^q \frac{\mathbf{B}_s}{\mathbf{B}_{eq_s}} - b_{1s} \mathbf{B}_s \dot{T} \,. \tag{5.84}$$

Il est à noter que A_{2s} est le produit des constantes c_1 et q qui ne dépendent pas de la température et de A_{1s} qui, comme on l'a vu, dépend de la température (voir équation 5.65). Donc, A_{2s} est une fonction de la température et peut être exprimée de la façon suivante:

$$A_{2_s} = \frac{c_1}{(A_{1_s})^{(q-1)}} \,. \tag{5.85}$$

De façon analogue, on peut construire les lois évolutives des autres VOI et VOIA. Pour les variables $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_l$ et $\dot{\mathbf{B}}_l$, on obtient ainsi:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_l = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \frac{2}{3} \dot{\nu} \frac{\boldsymbol{\alpha}_l}{\boldsymbol{\alpha}'_{eq_l}} - c_2 \left\langle \frac{\boldsymbol{\alpha}_{eq_l} - \boldsymbol{\alpha}''_{eq_l}}{C} \right\rangle^q \frac{\boldsymbol{\alpha}_l}{\boldsymbol{\alpha}_{eq_l}} \,, \tag{5.86}$$

avec c_2 et q qui ne dépendent pas de la température. On obtient aussi:

$$\dot{\mathbf{B}}_l = A_{1l} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \dot{\nu} \frac{\mathbf{B}_l}{\mathbf{B}'_{eq_l}} \right\} - A_{2l} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_l} - \mathbf{B}''_{eq_l}}{C} \right\rangle^q \frac{\mathbf{B}_l}{\mathbf{B}_{eq_l}} - b_{1l} \mathbf{B}_l \dot{T} \,. \tag{5.87}$$

La constante b_{1l} ne dépend pas de la température et s'intègre dans une formulation du type:

$$A_{1l}(T) = b_{2l}\, exp^{-b_{1l}T}\,, \tag{5.88}$$

avec b_{1l} et b_{2l} étant deux constantes et T en degrés Kelvin. Il est à noter que (comme A_{2s}) A_{2l} est une fonction de c_2 et q qui ne dépendent pas de la température et de A_{1l} qui dépend de la température. Donc, A_{2l} dépend de la température et peut être exprimé de la façon suivante:

$$A_{2_l} = \frac{c_2}{(A_{1_l})^{(q-1)}}\,. \tag{5.89}$$

Pour les variables $\dot{r}$ et $\dot{R}$, on peut obtenir de façon similaire:

$$\dot{R} = A_3\,\dot{r}\,, \tag{5.90}$$

et

$$\dot{r} = \dot{\nu} - \dot{\nu}\frac{r}{r'} - c_3\left\langle\frac{r - r''}{C}\right\rangle^p\,, \tag{5.91}$$

avec c_3, p et C étant des constantes qui ne dépendent pas de la température. Ainsi:

$$\dot{R} = A_3\left\{\dot{\nu} - \dot{\nu}\frac{R}{R'}\right\} - A_4\left\langle\frac{R - R''}{C}\right\rangle^p - b_{1r}R\dot{T}\,. \tag{5.92}$$

La constante b_{1r} ne dépend pas de la température et provient d'une formulation du type:

$$A_3(T) = b_{2r}\, exp^{-b_{1r}T}\,, \tag{5.93}$$

avec b_{1r} et b_{2r} étant deux constantes et T en degrés Kelvin. À nouveau, A_4 est une fonction de c_3 et p qui ne dépendent pas de la température et de A_3 qui dépend de la température. Donc A_4 dépend de la température, et la constante A_4 peut ainsi être exprimée de la façon suivante:

$$A_4 = \frac{c_3}{(A_3)^{(p-1)}}\,. \tag{5.94}$$

Pour les variables $\dot{k}$ et $\dot{K}$, on obtient également:

$$\dot{k} \quad = \dot{\nu} - \dot{\nu}\frac{k}{k'} - c_4 \left\langle \frac{k - k''}{C} \right\rangle^u , \tag{5.95}$$

avec c_4, u et C étant des constantes qui ne dépendent pas de la température. Ainsi:

$$\dot{K} \quad = A_5 \left\{ \dot{\nu} - \dot{\nu}\frac{K}{K'} \right\} - A_6 \left\langle \frac{K - K''}{C} \right\rangle^u - b_{1k} K \dot{T} . \tag{5.96}$$

La constante b_{1k} ne dépend pas de la température et provient d'une formulation du type:

$$A_5(T) \; = b_{2k} \; exp^{-b_{1k}T} , \tag{5.97}$$

avec b_{1k} et b_{2k} étant deux constantes et T en degrés Kelvin. Encore une fois, A_6 est une fonction de c_4 et u qui ne dépendent pas de la température et de A_5 qui dépend de la température. Donc A_6 dépend de la température, et la constante A_6 peut ainsi être exprimée de la façon suivante:

$$A_6 \; = \frac{c_4}{(A_5)^{(u-1)}} . \tag{5.98}$$

Ces différentes équations montrent que les lois évolutives des différentes VOI sont une fonction de l'incrément des VOIA et de l'incrément de température. Il est à souligner qu'en raison de la dépendance de la température des paramètres A_{1s}, A_{1l}, A_3, A_5, les paramètres A_{2s}, A_{2l}, A_4, A_6 sont également dépendants de la température. Les lois évolutives des VOI sont donc dépendantes de la température T via la contribution des constantes A_{1s}, A_{1l}, A_3, A_5 et de leur effet sur A_{2s}, A_{2l}, A_4, A_6.

5.2.5 Consistance thermodynamique

Le traitement le plus répandu de la théorie élasto-viscoplastique avec variables internes repose sur l'utilisation de la notion de potentiel thermodynamique généralisé (Chaboche 1987a; Chaboche 1987b; Chaboche 1988a; Chaboche 1988b; Aplin et

D'Angelo 1989; Chaboche 1993b; Polizzotto 1993; Pycko et Maier 1995). L'objectif de ce traitement est de s'assurer que les modèles constitutifs sont consistants au niveau thermodynamique, c.-à-d. qu'ils satisfont bien le 2^e Principe (à l'effet que le travail est positif et qu'il n'y a pas création d'énergie) (Arnold et al. 1995). Dans le cas de SUVIC, il devrait satisfaire l'inégalité suivante exprimant le caractère dissipatif du modèle:

$$\mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \mathbf{B}_s : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s - \mathbf{B}_l : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_l - R\,\dot{r} - K\,\dot{k} - \frac{1}{T}\,\mathbf{q}\,\nabla T \geq 0\,, \tag{5.99}$$

qu'on sépare classiquement en deux inégalités (Truesdell 1966)

$$\phi = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \mathbf{B}_s : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s - \mathbf{B}_l : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_l - R\,\dot{r} - K\,\dot{k} \geq 0\,, \tag{5.100}$$

$$\psi = -\frac{1}{T}\,\mathbf{q}\,\nabla T \geq 0\,, \tag{5.101}$$

ϕ étant appelée la *dissipation intrinsèque* et ψ la *dissipation thermique*. On peut rappeler que l'évolution du flux thermique $\mathbf{q}$ est généralement représentée par l'équation de Fourier (Chaboche 1993a):

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\nabla T\,, \tag{5.102}$$

où le tenseur symétrique $\mathbf{k}$ des conductivités thermiques doit être une forme définie positive pour satisfaire l'équation 5.101. Dans les paragraphes suivants, nous évaluerons la consistance thermodynamique du modèle SUVIC et établirons les conditions pour lesquelles elle s'applique.

Vérifions maintenant sous quelles conditions SUVIC satisfait le 2^e principe de la thermodynamique. Plus précisément, nous essaierons de démontrer l'inégalité 5.100 en s'inspirant de travaux similaires de Arnold et al. (1995). Il s'agit de morceler ϕ en divers cas particuliers permettant de simplifier l'écriture sans perte de généralité. Ces cas particuliers reposent sur l'idée générale que $(\mathbf{S} - (\mathbf{B}_s + \mathbf{B}_l)) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i$ est positivement défini puisque ces deux tenseurs sont coaxiaux.

i) On suppose tout d'abord un écrouissage cinématique pur de courte portée:

$$\mathbf{B}_s \neq 0, \quad et \quad \mathbf{B}_i = R = \dot{K} = 0 \,. \tag{5.103}$$

On utilise ici la condition $\dot{K} = 0$ pour signifier que K est une constante positive ($K > 0$). Il faut donc montrer que la dissipation intrinsèque ϕ vérifie bien la condition de consistance thermodynamique:

$$\phi = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \mathbf{B}_s : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_s \geq 0 \,. \tag{5.104}$$

En utilisant l'équation 5.76 ainsi que l'équation 5.100, ϕ devient:

$$\phi \quad = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - \mathbf{B}_s : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i + \frac{\dot{\nu}}{\alpha'_{eq_s}} (\mathbf{B}_s : \boldsymbol{\alpha}_s) + c_1 \left\langle \frac{\alpha_{eq_s} - \alpha''_{eq_s}}{C} \right\rangle^q (\mathbf{B}_s : \boldsymbol{\alpha}_s) \,, \tag{5.105}$$

qu'on réécrit en utilisant l'équation 5.77

$$\phi \quad = (\mathbf{S} - \mathbf{B}_s) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i + \frac{3\dot{\nu}}{2A_{1s}\alpha'_{eq_s}} (\mathbf{B}_s : \mathbf{B}_s) + \frac{3c_1}{2A_{1s}} \left\langle \frac{\alpha_{eq_s} - \alpha''_{eq_s}}{C} \right\rangle^q \frac{\mathbf{B}_s : \mathbf{B}_s}{\alpha_{eq_s}} \,. \tag{5.106}$$

On peut observer que:

1. $\dot{\nu} \geq 0$, puisque:

$$\left\langle \frac{\sqrt{J(\mathbf{S} - \mathbf{B})} - R}{K} \right\rangle \geq 0 \,. \tag{5.107}$$

2. et que:

$$(\mathbf{S} - \mathbf{B}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i \geq 0 \,, \tag{5.108}$$

car $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i$ et $\mathbf{S} - \mathbf{B}$ sont colinéaires selon l'expression même de la loi cinétique.

3. Le deuxième terme à droite dans l'équation 5.106 est ≥ 0 puisque l'on sait que $\mathbf{B}_s : \mathbf{B}_s \geq 0$. De plus, on sait que $\alpha'_{eq_s} > 0$, car $\alpha_{0s} > 0$, et:

$$asinh \left[\left\{ \frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0} \right\}^{\frac{1}{n}} \right]^m > 0 \,, \tag{5.109}$$

Il est à noter que l'utilisation de la fonction inverse sinus hyperbolique *asinh*, introduite ici, permet, contrairement à l'inverse de la fonction exponentielle (*ln*), de satisfaire cette condition lorsque $\dot{\epsilon}^i_{eq} < \dot{\epsilon}_0$ (ce qui est un avantage additionnel de l'utilisation de la fonction sinus hyperbolique par rapport à la fonction exponentielle).

4. Le troisième terme à droite dans l'équation 5.106 est évidemment ≥ 0 à cause des propriétés des crochets de Mac-Auley et puisque $\mathbf{B}_s : \mathbf{B}_s \geq 0$. On considère que les différents paramètres sont tous > 0.

En invoquant ces divers arguments, on montre ainsi, pour ce cas particulier, que $\phi \geq 0$.

ii) Le même raisonnement peut être appliqué pour la variable cinématique $\mathbf{B}_l$ lorsque $\mathbf{B}_s = R = \dot{K} = 0$.

iii) En ce qui concerne les variables isotropes, on s'intéresse tout d'abord au cas de la variable isotrope R. On suppose pour des fins de simplification que $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_l = \dot{k} = 0$. On veut donc montrer que:

$$\phi = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - R\,\dot{r} \geq 0\,, \tag{5.110}$$

$$\phi \quad = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - R\dot{\nu} + \frac{\dot{\nu} R\, r}{r'} + c_3\, R \left\langle \frac{r - r''}{C} \right\rangle^p \geq 0\,, \tag{5.111}$$

ou encore:

$$\phi \quad = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - R\dot{\nu} + \frac{\dot{\nu} R^2}{R'} + \frac{R\, A_4}{(A_3)^p} \left\langle \frac{R - R''}{C} \right\rangle^p \geq 0\,. \tag{5.112}$$

On peut obsever que:

1. Le quatrième terme à droite dans l'équation 5.112 est ≥ 0 puisque $\left\langle \frac{R-R''}{C} \right\rangle \geq 0$.

2. Le troisième terme est ≥ 0 si $R' > 0$; ce qui est vrai puisque $R_0 > 0$ et:

$$asinh\left[\left\{\frac{\dot{\epsilon}^i_{eq}}{\dot{\epsilon}_0}\right\}^{\frac{1}{n}}\right]^m > 0\,. \tag{5.113}$$

3. En ce qui concerne les deux premiers termes à droite dans l'équation 5.112, on peut noter que:

$$\mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - R\dot{\nu} = \dot{\nu}\left\{\sqrt{J(\mathbf{S})} - R\right\}\,, \tag{5.114}$$

qui est ≥ 0 en invoquant la coaxialité de $\mathbf{S}$ et $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i$ ($\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_l = 0$) et la fonction d'écoulement définie à l'équation 5.45. Or, si $\sqrt{J(\mathbf{S})} - R < 0$, alors $\dot{\nu} = 0$.

On a donc montré que la contribution associée à la variable isotrope satisfait le 2^e principe de la thermodynamique.

iv) Il reste à vérifier l'inégalité de l'équation 5.100 pour l'autre variable isotrope K. En utilisant l'approche précédente, c.-à-d. $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_l = R = 0$, il s'agit de montrer que:

$$\phi = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - K\dot{k} \geq 0\,, \tag{5.115}$$

se réduisant à:

$$\phi = \dot{\nu}\sqrt{J(\mathbf{S})} - \dot{\nu}k + \frac{\dot{\nu}K\,k}{k'} + c_4 K\left\langle\frac{k - k''}{C}\right\rangle^u \geq 0\,, \tag{5.116}$$

ou bien:

$$\phi = \dot{\nu}\sqrt{J(\mathbf{S})} - \dot{\nu}k + \frac{\dot{\nu}K^2}{K'} + \frac{A_6\,K}{(A_5)^u}\left\langle\frac{K - K''}{C}\right\rangle^u \geq 0\,. \tag{5.117}$$

On peut remarquer que, tout comme la variable R, les troisième (restauration dynamique) et quatrième (restauration statique) termes à droite dans l'équation 5.117 sont positifs puisque $K > 0$. Il est à noter que K' est évidemment positif.

Toutefois, l'influence du second terme à droite dans l'équation 5.117 est plus problématique et ne peut pas facilement être circonscrit. Il est à noter qu'on s'attend intuitivement à ce que cette contribution soit mineure puisque $k = K/A_5$ tend à croître plus lentement que les autres variables internes. Cette démonstration ne permet donc pas d'avoir une condition nécessaire et suffisante pour $\phi \geq 0$, surtout lorsque $R > 0$. Il faut donc traiter simultanément le cas usuel où $R > 0$ avec le cas général où $K > 0$.

Pour ce faire, une approche alternative est introduite ici. Contrairement à ce que l'on retrouve souvent dans la littérature, on considère simultanément les contributions associées à la variable R et la variable K. De plus, on ne néglige pas la restauration dynamique, ce qui permet d'obtenir des conditions plus *relâchées* sur la variable K. On suppose sans perte de généralité que $\mathbf{B}_s = \mathbf{B}_l = 0$. On veut ainsi montrer que:

$$\phi = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^i - R\,\dot{r} - K\,\dot{k} \geq 0\,, \tag{5.118}$$

qu'on simplifie en utilisant les équations 5.91 et 5.95. En omettant la restauration statique (qui ne fait qu'augmenter le caractère positif de cette inégalité), on obtient:

$$\phi = \dot{\nu}\left\{\sqrt{J(\mathbf{S})} - R - K + \frac{Rr}{r'} + \frac{Kk}{k'}\right\} \geq 0\,. \tag{5.119}$$

Selon la formulation même de la loi cinétique, $\dot{\nu} \geq 0$ lorsque $\sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{B})} - R \geq 0$ (avec $\mathbf{B} = 0$). Pour satisfaire l'équation 5.119, il faut avoir:

$$\left\{R + K - \frac{Rr}{r'} - \frac{Kk}{k'}\right\} \leq R\,. \tag{5.120}$$

On peut ainsi définir une condition suffisante ramenant l'équation 5.119 à la forme de la loi cinétique. L'équation 5.120 est réécrite plus simplement:

$$\left\{K - \frac{Rr}{r'} - \frac{Kk}{k'}\right\} \leq 0\,. \tag{5.121}$$

Si on transforme cette dernière équation en termes des VOI en utilisant les équations liant les VOIA aux VOI, on obtient:

$$K - \frac{R^2}{R'} - \frac{K^2}{K'} \leq 0 \,. \tag{5.122}$$

Sachant que $K' > 0$ et $R' > 0$ si $\| \dot{\epsilon}^i \| > 0$, l'équation 5.122 devient après simplification et changement de signes:

$$R^2 K' + R' K^2 - R' K' K \geq 0 \,, \tag{5.123}$$

qui devient la condition à rencontrer pour satisfaire pour le 2^e principe et garantir la consistance thermodynamique. Donc, le modèle SUVIC ne serait pas automatiquement thermodynamiquement consistant, et ce, à cause de l'effet de la variable K. Toutefois, le test défini par l'équation 5.123 permet facilement de vérifier numériquement s'il rencontre cette condition.

On peut aussi faciliter cette validation en imposant quelques conditions additionnelles. Si on pose que K est borné inférieurement par $K_0 = 1.0$ MPa, alors:

$$K = K_0 + a_1 = 1 + a_1 \,, \tag{5.124}$$

$$K' = K_0 + a_1 + a_2 = 1 + a_1 + a_2 \; car \; K' \geq K_0. \tag{5.125}$$

Les paramètres a_1 et a_2 doivent satisfaire les conditions:

$$a_1 \geq 0 \,, \tag{5.126}$$

$$a_2 \geq -a_1 \,, \tag{5.127}$$

où a_2 est ainsi borné pour tenir compte des déchargements qui pourraient survenir en cours de déformation et qui tenderaient à ramener K vers K_0 en raison de la restauration.

L'équation 5.123 peut être reformulée en utilisant les équations 5.124 et 5.125. On obtient après simplification:

$$R^2 (1 + a_1 + a_2) - R' (a_2 + a_1 a_2) \geq 0 \,. \tag{5.128}$$

Il est intéressant de remarquer que, lorsque la variable K est saturée ($K = K'$), cette équation implique que $a_2 = 0$. Après simplification, l'équation 5.128 devient:

$$R^2 (1 + a_1) \geq 0 , \tag{5.129}$$

qui est toujours vraie puisque $a_1 \geq 0$.

Toutefois, en début de déformation, l'inégalité représentée par l'équation 5.128 n'est pas automatiquement satisfaite. Elle le sera ou non, selon la façon dont évolueront les variables R et R' et les paramètres a_1 et a_2. Cette vérification est simple à réaliser. A priori, on voit que, lorsque que $R > K_0$, l'inégalité 5.128 deviendra rapidement satisfaite lorsque la variable R croîtra.

Pour le cas général, on doit avoir $a_1 > 0$ et $a_2 > -a_1$. On introduit ici une simplification additionnelle. On peut ainsi poser que:

$$R \quad = a_3 R' , \tag{5.130}$$

avec a_3 étant un paramètre tel que $a_3 \leq 1.0$ puisque R est implicitement borné par R' au début du chargement (il n'est pas exclu par ailleurs lors de chargements particuliers que $R > R'$). L'équation 5.128 devient:

$$R^2 (1 + a_1 + a_2) - \frac{R}{a_3} (a_2 + a_1 a_2) \geq 0 , \tag{5.131}$$

ou

$$R (1 + a_1 + a_2) - \frac{a_2}{a_3} (1 + a_1) \geq 0 , \tag{5.132}$$

qu'on réécrit:

$$R \geq \frac{a_2}{a_3} \frac{(1 + a_1)}{(1 + a_1 + a_2)} , \tag{5.133}$$

ou

$$a_3 R \geq a_2 \frac{(1 + a_1)}{(1 + a_1 + a_2)} . \tag{5.134}$$

Comme en général $a_3 \leq 1.0$, il implique que:

$$R \geq a_2 \frac{(1+ a_1)}{(1+ a_1 + a_2)} , \tag{5.135}$$

qu'on peut réécrire en utilisant les équations 5.124 et 5.125:

$$R \geq (K' - K)\frac{K}{K'} . \tag{5.136}$$

Cette dernière équation devient la condition nécessaire et suffisante à satisfaire permettant de garantir la consistance thermodynamique telle que définie à l'équation 5.100 (cette condition est vraie si $a_3 \leq 1.0$). Elle implique que les variables isotropes K et R ne doivent pas être totalement indépendantes. La modification qui peut être apportée au modèle pour rencontrer cet objectif est mineure. On peut laisser varier la variable K selon sa loi évolutive et vérifier a fortiori la consistance. Si la consistance n'est pas vérifiée, on peut ajouter une condition sur la mise à jour de la variable K afin que cette dernière ne soit pas mise à jour durant l'incrément et ainsi forcer la vérification de la condition précitée. Théoriquement, il faut donc avoir $R = R_0 + \Delta t\ \dot{R}$ avec:

$$R_0 \geq (K' - K)\frac{K}{K'} , \tag{5.137}$$

mais R_0 est habituellement petit (≤ 1 à 1.5); en pratique, il peut être négligeable. Au niveau physique, cette condition montre l'importance de la variable K et son lien avec la variable R.

Le modèle SUVIC peut donc satisfaire le 2^e principe de la thermodynamique garantissant le caractère dissipatif du modèle, en relaxant l'hypothèse sur la loi évolutive de K. Le modèle tend de plus à satisfaire cette condition de façon automatique à mesure qu'on tend vers l'état stationnaire. Au début de la déformation, cette condition peut ne pas être satisfaite de façon automatique, mais une vérification est possible. Il est à noter que cette condition sera d'autant plus rapidement satisfaite si les contributions de l'écrouissage cinématique et de la restauration statique sont incluses. Elles n'ont pas été incluses ici dans cette démonstration et font en sorte que la condition réelle est encore plus forte et robuste.

5.3 Implantation numérique proposée

5.3.1 Modèle numérique proposé

Les modèles à variables internes comme SUVIC requièrent, pour une implantation adéquate, une plate-forme numérique robuste et flexible pour tenir compte de l'interaction complexe entre les différentes composantes du modèle. De plus, puisque l'application du modèle repose d'une manière importante sur des résultats d'essais de laboratoire, il doit fournir aussi un environnement pouvant offrir un potentiel au niveau de la simulation et de l'inversion de données expérimentales.

Le code d'éléments finis ZéBuLoN (Burlet et Cailletaud 1991) a été retenu pour l'implantation numérique du modèle SUVIC en raison des similitudes existant entre ce modèle et le modèle ONERA (Lemaitre et Chaboche 1988) ayant servi de motivation au développement de ZéBuLoN. ZéBuLoN a été développé à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris (E.N.S.M.P.), Paris, France. Il a surtout été utilisé pour des fins de recherche sur des problèmes thermomécaniques sur les métaux. Les applications ont généralement été limitées aux domaines de l'aérospatiale et de l'automobile. Les applications en géomécanique ont été très limitées jusqu'à présent.

Le code a notamment été conçu pour la modélisation de problèmes non linéaires dans le cadre des modèles à variables internes pour des cas de viscoplasticité cyclique. Le code dans sa version actuelle peut être utilisé pour une vaste gamme de matériaux et de lois constitutives.

La version récente qui est utilisée de ZéBuLoN (Z7) (Z8 est maintenant disponible), écrite en C++, a été développée en orienté objet afin de permettre l'obtention d'un haut niveau de modularité et d'encapsulation favorisant théoriquement un meilleur contrôle sur les données. Cela a pour but de permettre une implantation plus rapide de nouvelles lois constitutives en utilisant des classes prédéfinies. Tel qu'il est mentionné par Foerch (1996), Besson et Foerch (1997), l'orienté objet n'a pas encore été utilisé de façon importante dans l'implantation d'outils numériques (comme les

FEM). Il va sans dire que l'effort de programmation en C++ est important et contrairement à la croyance populaire, cet effort est souvent beaucoup plus important qu'avec les autres compilateurs. Toutefois, lorsque la définition des classes est réalisée et prête à être généralisée, on obtient un modèle transparent pour l'utilisateur, indifférent à la dimensionnalité du problème, au nombre de variables internes et à la dimension physique du problème lui-même. Un tel code apparaît comme étant idéal pour des applications en géomécanique (Miller et al. 1995) puisqu'il s'inscrit dans un contexte permettant l'inclusion des non-linéarités provenant du comportement des matériaux, de la séquence de chargement, de la séquence de construction et du raffinement du maillage lors de la localisation.

5.3.2 Description du code ZéBuLoN

La décision d'aller de l'avant avec ce code repose sur le fait qu'il a été spécifiquement conçu pour des modèles à variables internes. Il reconnaît dans son écriture la plus fondamentale l'existence même de ces variables. Ces variables, au même titre que tout autre variable évolutive, peuvent être suivies au cours de la déformation ou du temps. On doit de plus mentionner qu'une collaboration existe depuis plusieurs années entre l'École Polytechnique de Montréal et l'E.N.S.M.P.

Le code reconnaît en outre l'importance du mode d'intégration de la loi de comportement. L'utilisation de deux modules séparés, Runge-Kutta ou θ, permet un déverminage naturel sans nécessiter l'utilisation d'autres modèles. Même si le code existe depuis plusieurs années, la version Z7 a été un véritable tournant dans son développement. Z7 permet d'inclure une série d'utilitaires dont les plus importants sont les modules de détermination des paramètres et d'intégration par différences finies de la loi de comportement afin de produire l'évolution des surfaces d'écoulement dans l'espace des contraintes. L'auteur a contribué au développement et à l'amélioration du code notamment en permettant l'introduction de nouvelles classes de variables non prévues originalement par les développeurs (lois évolutives des valeurs de

saturation), au déverminage de certaines fonctionnalités et à l'amélioration de la portabilité du code dans d'autres environnements (c.-à-d. Linux).

Dans sa version actuelle, Z7 permet une indépendance dans la dimension du problème. Il permet des formulations en petites déformations et en déformations finies (grands déplacements et grandes déformations). Les types de calcul qui sont possibles incluent ceux de mécanique quasi-statique avec ou sans effets d'inertie dans un cadre thermique stationnaire ou transitoire. Pour les problèmes mécaniques, la description du maillage peut se faire en petites déformations classiques, Lagrangien-total ou Lagrangien actualisé (Foerch et al. 1996; Besson et Foerch 1997).

Au niveau des méthodes de résolution disponibles de la matrice globale, on a comme possibilités les méthodes Newton-Raphson ou Newton Modifiées avec sub-options où la matrice globale est soit maintenue constante, soit inversée à la première, aux deux premières ou trois premières itérations, ou à toutes les itérations. L'algorithme BFGS est aussi disponible. Il peut être initialisé soit par une matrice élastique ou plastique et peut être invoqué après n itérations. L'intégration des lois constitutives est typiquement réalisée avec un algorithme explicite (Runge-Kutta) ou implicite (méthode θ) avec réactualisation de la matrice tangentielle à chaque itération.

Un nouvel élément du code, soit ZebFront (Foerch 1996), permet une interface plus facile avec le code. Ce code qui est, en fait, un compilateur d'un langage de haut niveau permet une précompilation de lois constitutives écrites dans une syntaxe simple et produit les énoncés C++ appropriés en générant les appels aux diverses classes et librairies. ZebFront a l'avantage de libérer quelque peu le développeur de la connaissance de la structure des classes et des librairies. SUVIC a été implanté avec et sans ZebFront. Le temps d'implantation avec ZebFront a été particulièrement rapide. Si un modèle requiert un nouveau type de variables non accepté par ZebFront, alors ZebFront accepte aussi les énoncés C++.

Comparativement à Z7, la majorité des codes d'éléments finis disponibles sur le marché ne sont pas orientés objet. L'interface entre l'utilisateur et le code Z7 se

fait avec une série de cartes d'entrée. À part les aspects d'interfaces directes, l'idée d'utiliser l'orienté objet permet l'assemblage d'entités définies comme des objets. L'utilisateur peut choisir une combinaison d'objets qui interagissent pour créer les calculs voulus. Ces objets doivent être généraux le plus possible et supporter un haut niveau d'interaction de façon à ce qu'ils puissent être assemblés. L'utilisateur peut alors créer son propre assemblage d'objets, même ceux qui n'ont pas été prévus par le développeur.

L'auteur se doit aussi de parler des choix technologiques effectués dans le cadre de ce projet. Cet aspect s'est avéré déterminant. Le choix de ZéBuLoN a été basé sur les avantages techniques offerts par le code et sur certaines affinités de recherche avec les développeurs. Néanmoins, ce code a été développé pour un environnement informatique exceptionnel: grand laboratoire informatique avec stations de travail UNIX, le tout administré par des professionnels. La décision d'opter pour ZéBuLoN impliquait que l'auteur devait s'orienter vers un tel environnement. Cette décision va, en fait, à l'encontre des tendances dans la communauté géomécanique nord-américaine très orientée vers les *PCs*. En guise de compromis, l'auteur a décidé d'opter pour un environnement PC monté Linux. Le système d'exploitation Linux est un système public disponible sur le Net. Le choix de travailler sur Linux a donné une dimension toute particulière à ce travail. Même si Linux est un système très stable, il demeure difficile d'accès pour l'usager moyen (c'est en voie de changer heureusement). L'auteur a opté pour une plate-forme Linux à cause du potentiel qu'elle offre, et pour l'utilisation, en combinaison avec les codes de l'E.N.S.M.P., de codes entièrement publics. Cette approche relativement novatrice au niveau de l'utilisation des ordinateurs personnels devient de plus en plus populaire à en juger par l'engouement récent vis-à-vis Linux.

5.3.3 Obtention du Jacobien

Cette section présente les détails permettant d'obtenir la matrice jacobienne de la loi de comportement SUVIC telle qu'elle est introduite dans le cadre du programme d'éléments finis ZéBuLoN pour la méthode d'intégration implicite θ.

À l'instar de Aazizou (1990) et de Sokolnikoff (1987), on utilise la notation de Voigt pour transformer les tenseurs en vecteurs. La convention pour la correspondance des indices est la suivante: En $3D$: $(11 \rightarrow 1;\ 22 \rightarrow 2;\ 33 \rightarrow 3;\ 12 \rightarrow 4;\ 23 \rightarrow 5;\ 31 \rightarrow 6)$ et en $2D$: $(11 \rightarrow 1;\ 22 \rightarrow 2;\ 12 \rightarrow 3;\ 33 \rightarrow 4)$.

On rappelle tout d'abord les opérateurs suivants qui s'apparentent à la contrainte équivalente de von Mises:

$$\mathbf{S}_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S} : \mathbf{S}}\ , \tag{5.138}$$

$$\mathbf{B}_{eq_s} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{B}_s : \mathbf{B}_s}\ , \tag{5.139}$$

$$\mathbf{B}_{eq_l} = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{B}_l : \mathbf{B}_l}\ . \tag{5.140}$$

On introduit la fonction f_θ:

$$f_\theta = \sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{S}-\mathbf{X}) : (\mathbf{S}-\mathbf{X})}\ . \tag{5.141}$$

Soit la variable cinématique quelconque $\mathbf{X}$ qu'on dérive dans la direction (i):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}_{eq}}{\partial \mathbf{X}_{(i)}} &= \frac{3}{2}\frac{\mathbf{X}_{(i)}}{\mathbf{X}_{eq}}\ , \\ &= \mathbf{n}_{\mathbf{X}_{(i)}}\ , \end{aligned} \tag{5.142}$$

où $\mathbf{n}_{\mathbf{X}_{(i)}}$ est un vecteur normal de $\mathbf{X}$ dans la direction (i). De façon analogue à ce qui a été montré précédemment, on peut obtenir les dérivées utilitaires suivantes:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{eq}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S}_{eq}} = \mathbf{n}_S\ , \tag{5.143}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{eq_s}}{\partial \mathbf{B}_s} = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{B}_s}{\mathbf{B}_{eq_s}} = \mathbf{n}_{B_s}\ , \tag{5.144}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{eq_l}}{\partial \mathbf{B}_l} = \frac{3}{2}\frac{\mathbf{B}_l}{\mathbf{B}_{eq_l}} = \mathbf{n}_{B_l} , \tag{5.145}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial \sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{S}-\mathbf{X})}{\sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})}} = \mathbf{n}_\theta , \tag{5.146}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial f_\theta}{\partial \mathbf{S}}\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} = \mathbf{n}_\theta \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} , \tag{5.147}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})}}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\partial \sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})}}{\partial \mathbf{S}} = -\frac{3}{2}\frac{(\mathbf{S}-\mathbf{X})}{\sqrt{J(\mathbf{S}-\mathbf{X})}} = -\mathbf{n}_\theta . \tag{5.148}$$

On introduit l'opérateur $\mathbf{C}$ qui lie la contrainte déviatorique $\mathbf{S}$ à la contrainte σ de telle sorte que:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} = \left| \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \end{array} \right| \tag{5.149}$$

On remarquera aussi que:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_e} = \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_l} = \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}} = -\frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} . \tag{5.150}$$

De plus, si on dérive une normale quelconque $\mathbf{n}_\mathbf{X}$ par rapport à $\mathbf{X}$, on obtient:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_\mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{\mathbf{X}_{eq}}\left[\frac{3}{2}\,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} - \mathbf{n}_\mathbf{X}\otimes\mathbf{n}_\mathbf{X}\right] , \tag{5.151}$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel. En utilisant la notation indicielle de Voigt, on aurait pour le terme (ik) (un tenseur du 4^e ordre):

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{(i)}}{\partial \mathbf{X}_{(k)}} = \frac{1}{\mathbf{X}_{eq}}\left[\frac{3}{2}\,\delta^{(i)}_{(k)} - \mathbf{n}_{\mathbf{X}_{(i)}}\,\mathbf{n}_{\mathbf{X}_{(k)}}\right] . \tag{5.152}$$

De façon analogue au Kronecker delta: $\delta^{(i)}_{(k)} = 0$ si $(i) \neq (k)$; $\delta^{(i)}_{(k)} = 1$ si $(i) = (k)$. Il est à noter qu'en utilisant la notation indicielle détaillée, on obtiendrait:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{(ik)}}{\partial \mathbf{X}_{(lm)}} = \frac{1}{\mathbf{X}_{eq}} \left[\frac{3}{2} \delta_{(il)} \delta_{(km)} - \mathbf{n}_{\mathbf{X}_{(ik)}} \mathbf{n}_{\mathbf{X}_{(lm)}} \right] . \tag{5.153}$$

De façon générale, on écrit:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_S}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{\mathbf{S}_{eq}} \left(\frac{3}{2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{n}_S \otimes \mathbf{n}_S \right) \tag{5.154}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s}}{\partial \mathbf{B}_s} = \frac{1}{\mathbf{B}_{eq_s}} \left(\frac{3}{2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s} \right) \tag{5.155}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{B}_l}}{\partial \mathbf{B}_l} = \frac{1}{\mathbf{B}_{eq_l}} \left(\frac{3}{2} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{n}_{\mathbf{B}_l} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{B}_l} \right) \tag{5.156}$$

On rappelle de plus la relation linéaire définie par le produit contracté:

$$\sigma = \mathbf{D}_{el} : \epsilon^e . \tag{5.157}$$

$\mathbf{D}_{el}$ est le tenseur élastique (implicitement du 4^e ordre et impliquant un produit contracté sur deux indices), duquel on tire:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon^e} = \mathbf{D}_{el} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{(i)}}{\partial \epsilon^e_{(j)}} = (\mathbf{D}_{el})_{(ik)} \delta_{(kj)} = (\mathbf{D}_{el})_{(ij)} . \tag{5.158}$$

Par ailleurs, il peut être avantageux d'écrire les variables précédentes sous forme itérative. Pour ce faire, on utilise une présentation analogue à la section 3.2.6. Pour la méthode θ à l'itération $(iter = j + 1)$, la déformation élastique lorsqu'elle est exprimée en termes de la déformation élastique à l'itération j et de l'incrément $\Delta\epsilon^e$ s'écrit:

$$(\epsilon^e)^{(iter=j+1)} = (\epsilon^e)^{(iter=j)} + \theta \, \Delta\epsilon^e . \tag{5.159}$$

Si on dérive cette dernière expression par rapport à l'incrément de déformation dans la direction l, on fait apparaître le facteur θ:

$$\frac{\partial \epsilon^e_{(i)}}{\partial \Delta\epsilon^e_{(l)}} = \theta \, \delta^{(i)}_{(l)} . \tag{5.160}$$

Cette dérivée est en fait un tenseur de 4^e ordre. Cette dernière équation peut être écrite:

$$\frac{\partial(\epsilon^e)}{\partial\Delta\epsilon^e} = \theta\,(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\,. \tag{5.161}$$

Par ailleurs, on utilisera fréquemment la règle de la chaine (produit contracté sur typiquement deux indices pour chaque produit) sur des expressions du type:

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial\Delta\epsilon^e} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial\sigma} : \frac{\partial\sigma}{\partial\epsilon^e} : \frac{\partial\epsilon^e}{\partial\Delta\epsilon^e}\,, \tag{5.162}$$

qu'on peut réécrire pour les coordonnées (i) et (m):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}_{(i)}}{\partial\Delta\epsilon^e_{(m)}} &= \frac{\partial \mathbf{n}_{(i)}}{\partial \mathbf{S}_{(j)}}\frac{\partial \mathbf{S}_{(j)}}{\partial\sigma_{(k)}}\frac{\partial\sigma_{(k)}}{\partial\epsilon^e_{(l)}}\frac{\partial\epsilon^e_{(l)}}{\partial\Delta\epsilon^e_{(m)}}\,, \\
&= \frac{\theta}{\mathbf{S}_{eq}}\left[\frac{3}{2}\delta^{(i)}_{(k)} - \mathbf{n}_{(i)}\mathbf{n}_{(k)}\right]\mathbf{C}_{(jk)}\,\mathbf{D}_{el(kl)}\,\delta^{(l)}_{(m)}\,, && (5.163)\\
&= \frac{\theta}{\mathbf{S}_{eq}}\left[\frac{3}{2}\delta^{(i)}_{(k)} - \mathbf{n}_{(i)}\mathbf{n}_{(k)}\right]\mathbf{C}_{(jk)}\,\mathbf{D}_{el(km)}\,, && (5.164)
\end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial\Delta\epsilon^e} = \frac{\theta}{J(\mathbf{S})}\left[\frac{3}{2}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right] : \mathbf{C} : \mathbf{D}_{el}\,. \tag{5.165}$$

Cette dernière expression suppose implicitement qu'un produit contracté est réalisé entre le tenseur d'élasticité et le tenseur unité convoluté:

$$\mathbf{D}_{el} \quad \leftrightarrow \mathbf{D}_{el} : (\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\,. \tag{5.166}$$

Dans les discussions suivantes, on supposera implicitement la contraction avec le tenseur unité du 4^e ordre.

On utilise maintenant ces différentes notions afin de déterminer le Jacobien du modèle SUVIC. On définit tout d'abord les paramètres M_{α_s},M_{α_l}, M_r et M_k tels que:

$$M_{\alpha_s} = C\left(\frac{A_{1s}}{A_{2s}}\right)^{1/q}\,, \tag{5.167}$$

$$M_{\alpha_l} = C\left(\frac{A_{1l}}{A_{2l}}\right)^{1/q} , \tag{5.168}$$

$$M_r = C\left(\frac{A_3}{A_4}\right)^{1/p} , \tag{5.169}$$

$$M_k = C\left(\frac{A_5}{A_6}\right)^{1/u} . \tag{5.170}$$

On définit par la suite les dérivées utilitaires suivantes:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \boldsymbol{\alpha}_s} = \frac{2}{3} A_{1s}\, \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} , \tag{5.171}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l} = \frac{2}{3} A_{1l}\, \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} , \tag{5.172}$$

qu'on réécrira de façon implicite

$$\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \boldsymbol{\alpha}_s} = \frac{2}{3} A_{1s} , \tag{5.173}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial \boldsymbol{\alpha}_l} = \frac{2}{3} A_{1l} , \tag{5.174}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = A_3 , \tag{5.175}$$

$$\frac{\partial K}{\partial k} = A_5 . \tag{5.176}$$

Au niveau de la mesure de l'évolution des variables internes associées, à l'instar de ce qui a été montré précédemment, à l'itération $(iter = j)$, la valeur est estimée à partir de la valeur à l'itération j quelle qu'elle soit:

$$(\boldsymbol{\alpha}_s)^{(iter=j+1)} = (\boldsymbol{\alpha}_s)^{(iter=j)} + \theta\Delta\boldsymbol{\alpha}_s , \tag{5.177}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_l)^{(iter=j+1)} = (\boldsymbol{\alpha}_l)^{(iter=j)} + \theta\Delta\boldsymbol{\alpha}_l , \tag{5.178}$$

$$(r)^{(iter=j+1)} = (r)^{(iter=j)} + \theta\Delta r , \tag{5.179}$$

$$(k)^{(iter=j+1)} = (k)^{(iter=j)} + \theta\Delta k , \tag{5.180}$$

si on dérive ces équations par leur valeur incrémentale, on obtient:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_s}{\partial \Delta\boldsymbol{\alpha}_s} = \theta\, \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \Rightarrow \theta , \tag{5.181}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_l}{\partial \Delta\boldsymbol{\alpha}_l} = \theta\, \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \Rightarrow \theta , \tag{5.182}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \Delta r} = \theta \,, \tag{5.183}$$

$$\frac{\partial k}{\partial \Delta k} = \theta \,. \tag{5.184}$$

Afin de simplifier la notation, on introduit l'opérateur Φ :

$$\Phi = \left\langle \frac{f_\theta - R}{K} \right\rangle \,, \tag{5.185}$$

et on note que:

$$\Phi^N = \left\langle \frac{f_\theta - R}{K} \right\rangle^N \,. \tag{5.186}$$

On peut de plus rappeler que les expressions pour les valeurs de saturation exprimées en termes de $\dot{\epsilon}^i_{eq} = \dot{\nu}$ sont respectivement:

$$\mathbf{B}'_s = \mathbf{B}_{0s}\ asinh\left[\left(\frac{\dot{\nu}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n}\right]^m \,, \tag{5.187}$$

$$\mathbf{B}'_l = \mathbf{B}_{0l}\ asinh\left[\left(\frac{\dot{\nu}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n}\right]^m \,, \tag{5.188}$$

$$R' = R_0\ asinh\left[\left(\frac{\dot{\nu}}{\dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n}\right]^m \,, \tag{5.189}$$

en forme incrémentale, ces expressions deviennent en définissant:

$$\mathbf{B}'_s = \mathbf{B}_{0s}\,\omega^m \,, \qquad \mathbf{B}'_l = \mathbf{B}_{0l}\,\omega^m \,, \qquad R' = R_0\,\omega^m \,, \tag{5.190}$$

avec

$$\omega = asinh(\varsigma) \,, \tag{5.191}$$

$$\varsigma = \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta t\ \dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n} \,. \tag{5.192}$$

$$\tag{5.193}$$

Pour K', selon l'équation 5.19, on peut écrire:

$$K' = \frac{(\sigma_0\ \omega - (B_{0s} + B_{0l} + R_0)\ \omega^m)}{\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta t\ A}\right)^{\frac{1}{N}}} \,. \tag{5.194}$$

Les différentes dérivées sont exprimées de façon récursive:

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial \Delta\nu} = \frac{\partial}{\partial \Delta\nu}\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta t\ \dot{\epsilon}_0}\right)^{1/n} = \frac{1}{\Delta t\ \dot{\epsilon}_0\ n}\left\{\frac{\Delta\nu}{\Delta t\ \dot{\epsilon}_0}\right\}^{\frac{1-n}{n}}, \tag{5.195}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \Delta\nu} = \frac{1}{\sqrt{\varsigma^2+1}}\ \frac{\partial \varsigma}{\partial \Delta\nu}, \tag{5.196}$$

$$\frac{\partial \omega^m}{\partial \Delta\nu} = m\ \omega^{m-1}\ \frac{\partial \omega}{\partial \Delta\nu}. \tag{5.197}$$

$$\frac{\partial B'_s}{\partial \Delta\nu} = B_{0s}\frac{\partial \omega^m}{\partial \Delta\nu}, \tag{5.198}$$

$$\frac{\partial B'_l}{\partial \Delta\nu} = B_{0l}\frac{\partial \omega^m}{\partial \Delta\nu}, \tag{5.199}$$

$$\frac{\partial R'}{\partial \Delta\nu} = R_0\frac{\partial \omega^m}{\partial \Delta\nu}, \tag{5.200}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial K'}{\partial \Delta\nu} &= \left[\sigma_0\frac{\partial \omega}{\partial \Delta\nu} - (B_{0s}+B_{0l}+R_0)\frac{\partial \omega^m}{\partial \Delta\nu}\right]\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta t\ A}\right)^{-(\frac{1}{N})} \\ &\quad - \frac{1}{\Delta t\ A\ N}\left[\sigma_0\ \omega - (B_{0\ s}+B_{0\ l}+R_0)\,\omega^m\right]\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta t\ A}\right)^{-(\frac{N+1}{N})}.\end{aligned} \tag{5.201}$$

Aussi,

$$B''_s = x_s\ B'_s, \tag{5.202}$$

$$B''_l = x_l\ B'_l, \tag{5.203}$$

$$R'' = x_r\ R', \tag{5.204}$$

$$K'' = x_k\ K', \tag{5.205}$$

d'où,

$$\frac{\partial B''_s}{\partial \Delta\nu} = x_s\ \frac{\partial B'_s}{\partial \Delta\nu}, \tag{5.206}$$

$$\frac{\partial B''_l}{\partial \Delta\nu} = x_l\ \frac{\partial B'_l}{\partial \Delta\nu}, \tag{5.207}$$

$$\frac{\partial R''}{\partial \Delta\nu} = x_r\ \frac{\partial R'}{\partial \Delta\nu}, \tag{5.208}$$

$$\frac{\partial K''}{\partial \Delta\nu} = x_k\ \frac{\partial K'}{\partial \Delta\nu}. \tag{5.209}$$

On peut de plus introduire les dérivées utilitaires suivantes:

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \Delta \nu} = 0 \,, \tag{5.210}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \Delta \epsilon^e} = \frac{\partial f_\theta}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} : \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon^e} : \frac{\partial \epsilon^e}{\partial \Delta \epsilon^e} = \theta \, \mathbf{n}_\theta \, : \, \mathbf{C} \, : \, \mathbf{D}_{el} \,, \tag{5.211}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \Delta \alpha_s} = \frac{\partial f_\theta}{\partial \mathbf{B}_s} : \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \alpha_s} : \frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \alpha_s} = -\frac{2}{3} \, A_{1s} \, \theta \, \mathbf{n}_\theta \,, \tag{5.212}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \Delta \alpha_l} = \frac{\partial f_\theta}{\partial \mathbf{B}_l} : \frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial \alpha_l} : \frac{\partial \alpha_l}{\partial \Delta \alpha_l} = -\frac{2}{3} \, A_{1l} \, \theta \, \mathbf{n}_\theta \,, \tag{5.213}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \Delta r} = 0 \,, \tag{5.214}$$

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \Delta k} = 0 \,. \tag{5.215}$$

En utilisant les constructions de résidus similaires à ce qui a été montré à la section 4.2.6, les différents résidus pour les différentes VOIA sont donnés par:

$$\mathcal{F}_{\epsilon^e} \quad = \Delta \epsilon^e + \Delta \nu \, n_\theta - \Delta \epsilon \,, \tag{5.216}$$

$$\mathcal{F}_\nu \quad = \Delta \nu - \Delta t \, A \left\langle \frac{f_\theta - R}{K} \right\rangle^N \,, \tag{5.217}$$

$$\mathcal{F}_r \quad = \Delta r - \Delta \nu \, (1 - \frac{R}{R'}) + \Delta t \left\langle \frac{R - R''}{M_r} \right\rangle^p \,, \tag{5.218}$$

$$\mathcal{F}_k \quad = \Delta k - \Delta \nu \, (1 - \frac{K}{K'}) + \Delta t \left\langle \frac{K - K''}{M_k} \right\rangle^u \,, \tag{5.219}$$

$$\mathcal{F}_{\alpha_s} \quad = \Delta \alpha_s - \Delta \nu \, (\mathbf{n}_\theta - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_s}{\mathbf{B}'_{eq_s}}) + \Delta t \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - \mathbf{B}''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^q \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_s}{\mathbf{B}_{eq_s}} \,, \tag{5.220}$$

$$\mathcal{F}_{\alpha_l} \quad = \Delta \alpha_l - \Delta \nu \, (\mathbf{n}_\theta - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_l}{\mathbf{B}'_{eq_l}}) + \Delta t \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_l} - \mathbf{B}''_{eq_l}}{M_{\alpha_l}} \right\rangle^q \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_l}{\mathbf{B}_{eq_l}} \,. \tag{5.221}$$

Selon les équations 3.38 et 3.39, le Jacobien $\nabla \mathcal{F}_\theta$ est obtenu par le dérivation de la série de fonctions résiduelles $\mathcal{F}_\theta$ par rapport aux différentes variables.

Les dérivées de ces résidus sont fournies aux équations suivantes:

Pour $\mathcal{F}_{\epsilon^e}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}_{\epsilon^e}}{\partial \Delta \epsilon^e} &= \mathbf{1} + \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \sigma} : \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon^e} : \frac{\partial \epsilon^e}{\partial \Delta \epsilon^e} = \mathbf{1} + \theta \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}_{el} , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_{\epsilon^e}}{\partial \Delta \nu} &= \mathbf{n}_\theta , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_{\epsilon^e}}{\partial \Delta \alpha_s} &= \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_s} : \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \alpha_s} : \frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \alpha_s} = -\theta \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} \frac{2}{3} A_{1s} , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_{\epsilon^e}}{\partial \Delta \alpha_l} &= \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_l} : \frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial \alpha_l} : \frac{\partial \alpha_l}{\partial \Delta \alpha_l} = -\theta \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} \frac{2}{3} A_{1l} , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_{\epsilon^e}}{\partial \Delta r} &= 0 , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_{\epsilon^e}}{\partial \Delta k} &= 0 .
\end{aligned} \tag{5.222}
$$

De façon similaire, on peut obtenir pour les autres fonctions résiduelles:

Pour $\mathcal{F}_\nu$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial \Delta \epsilon^e} &= -\frac{\theta \, \Delta t \, A \, N}{K} \Phi^{N-1} \, \mathbf{n}_\theta : \mathbf{C} : \mathbf{D}_{el} , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial \Delta \nu} &= 1 , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial \Delta \alpha_s} &= \frac{\theta \, \Delta t \, A \, N}{K} \Phi^{N-1} \, \mathbf{n}_\theta \frac{2}{3} A_{1s} , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial \Delta \alpha_l} &= \frac{\theta \, \Delta t \, A \, N}{K} \Phi^{N-1} \, \mathbf{n}_\theta \frac{2}{3} A_{1l} , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial \Delta r} &= \frac{\theta \, \Delta t \, A \, N}{K} \Phi^{N-1} A_3 , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial \Delta k} &= \frac{\theta \, \Delta t \, A \, N}{K} \Phi^{N} A_5 .
\end{aligned} \tag{5.223}
$$

Pour $\mathcal{F}_r$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \Delta \epsilon^e} &= 0 , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \Delta \nu} &= -(1 - \frac{R}{R'}) - \Delta\nu \frac{R}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial \Delta \nu} - \frac{p \, \Delta t}{M_r} \left\langle \frac{R - R''}{M_r} \right\rangle^{p-1} \frac{\partial R''}{\partial \Delta \nu} , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \Delta \alpha_s} &= 0 , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \Delta \alpha_l} &= 0 , \\
\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \Delta r} &= 1 + \frac{\theta \, \Delta \nu}{R'} A_3 + \frac{\theta \, \Delta t \, p}{M_r} A_3 \left\langle \frac{R - R''}{M_r} \right\rangle^{p-1} ,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial \Delta k} = 0 \,. \tag{5.224}$$

Pour $\mathcal{F}_k$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \Delta \epsilon^e} &= 0 \,, \\
\frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \Delta \nu} &= -(1 - \frac{K}{K'}) - \Delta\nu \, \frac{K}{K'^2} \frac{\partial K'}{\partial \Delta \nu} - \frac{\Delta t \, u}{M_k} \left\langle \frac{K - K''}{M_k} \right\rangle^{u-1} \frac{\partial K''}{\partial \Delta \nu} \,, \\
\frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \Delta \alpha_s} &= 0 \,, \\
\frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \Delta \alpha_l} &= 0 \,, \\
\frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \Delta r} &= 0 \,, \\
\frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \Delta k} &= 1 + \frac{\theta \, \Delta \nu}{K'} \, A_5 + \frac{\theta \, \Delta t \, u}{M_k} \, A_5 \left\langle \frac{K - K''}{M_k} \right\rangle^{u-1} \,.
\end{aligned} \tag{5.225}$$

Pour $\mathcal{F}_{\alpha_s}$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_s}}{\partial \Delta \epsilon^e} = -\Delta\nu \, \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} \, : \, \mathbf{C} \, : \, \mathbf{D}_{el} \, \theta \,, \tag{5.226}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_s}}{\partial \Delta \nu} &= -(\mathbf{n}_\theta - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_s}{B'_{eq_s}}) - \Delta\nu \, \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_s}{(B'_{eq_s})^2} \, \frac{\partial B'_{eq_s}}{\partial \Delta \nu} \\
&\quad - \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s} \, \frac{q \, \Delta t}{M_{\alpha_s}} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - B''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^{q-1} \frac{\partial B''_{eq_s}}{\partial \Delta \nu} \,,
\end{aligned} \tag{5.227}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_s}}{\partial \Delta r} = 0 \,, \tag{5.228}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_s}}{\partial \Delta k} = 0 \,. \tag{5.229}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_s}}{\partial \Delta \alpha_s} &= \mathbf{1} - \Delta\nu \, \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_s} \, : \, \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \alpha_s} \, : \, \frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \alpha_s} + \frac{3}{2} \, \frac{\Delta\nu}{B'_{eq_s}} \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \alpha_s} \, : \, \frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \alpha_s} \\
&\quad + \frac{\Delta t \, q}{M_{\alpha_s}} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - B''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^{q-1} \frac{\partial \mathbf{B}_{eq_s}}{\partial \mathbf{B}_s} \, : \, \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \alpha_s} \, : \, \frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \alpha_s} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s} \\
&\quad + \Delta t \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - B''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^{q} \frac{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s}}{\partial \mathbf{B}_s} \, : \, \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \alpha_s} \, : \, \frac{\partial \alpha_s}{\partial \Delta \alpha_s}
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{1} + \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} \frac{2}{3} A_{1s}\,\theta + \frac{\Delta\nu}{B'_{eq_s}} A_{1s}\,\theta\,\mathbf{1} + \frac{\Delta t\, q}{M_{\alpha_s}} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - B''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^{q-1} \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s} \frac{2}{3} A_{1s}\,\theta$$
$$+ \Delta t \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - B''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^{q} \frac{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s}}{\partial \mathbf{B}_s} \frac{2}{3} A_{1s}\,\theta\,, \tag{5.230}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_s}}{\partial \Delta\alpha_l} = -\Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_l} : \frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial \alpha_l} : \frac{\partial \alpha_l}{\partial \Delta\alpha_l} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\nu}{B'_{eq_s}} \frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial \alpha_l} : \frac{\partial \alpha_l}{\partial \Delta\alpha_l}$$
$$+ \frac{\Delta t\, q}{M_{\alpha_s}} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - B''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^{q-1} \frac{\partial \mathbf{B}_{eq_s}}{\partial \mathbf{B}_l} : \frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial \alpha_l} : \frac{\partial \alpha_l}{\partial \Delta\alpha_l} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s}$$
$$+ \Delta t \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_s} - B''_{eq_s}}{M_{\alpha_s}} \right\rangle^{q} \frac{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{B}_s}}{\partial \mathbf{B}_l} : \frac{\partial \mathbf{B}_l}{\partial \alpha_l} : \frac{\partial \alpha_l}{\partial \Delta\alpha_l}$$

$$= -\Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_l} \frac{2}{3} A_{1l}\,\theta \;=\; \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} \frac{2}{3} A_{1l}\,\theta\,. \tag{5.231}$$

Pour $\mathcal{F}_{\alpha_l}$:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_l}}{\partial \Delta\epsilon^e} = -\Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}_{el}\,\theta \tag{5.232}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_l}}{\partial \Delta\nu} = -(\mathbf{n}_\theta - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_l}{B'_{eq_l}}) - \Delta\nu \frac{3}{2} \frac{\mathbf{B}_l}{(B'_{eq_l})^2} \frac{\partial B'_{eq_l}}{\partial \Delta\nu}$$
$$- \mathbf{n}_{\mathbf{B}_l} \frac{q\,\Delta t}{M_{\alpha_l}} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_l} - B''_{eq_l}}{M_{\alpha_l}} \right\rangle^{q-1} \frac{\partial B''_{eq_l}}{\partial \Delta\nu}\,, \tag{5.233}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_l}}{\partial \Delta r} = 0\,, \tag{5.234}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_l}}{\partial \Delta k} = 0\,. \tag{5.235}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_l}}{\partial \Delta\alpha_s} = -\Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{B}_s} \frac{2}{3} A_{1s}\,\theta \;= \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} \frac{2}{3} A_{1s}\,\theta\,, \tag{5.236}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha_l}}{\partial \Delta\alpha_l} = \mathbf{1} + \Delta\nu \frac{\partial \mathbf{n}_\theta}{\partial \mathbf{S}} \frac{2}{3} A_{1l}\,\theta + \frac{\Delta\nu}{B'_{eq_l}} A_{1l}\,\theta\,\mathbf{1}$$
$$+ \frac{\Delta t\, q}{M_{\alpha_l}} \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_l} - B''_{eq_l}}{M_{\alpha_l}} \right\rangle^{q-1} \mathbf{n}_{\mathbf{B}_l} \otimes \mathbf{n}_{\mathbf{B}_l} \frac{2}{3} A_{1l}\,\theta$$
$$+ \Delta t \left\langle \frac{\mathbf{B}_{eq_l} - B''_{eq_l}}{M_{\alpha_l}} \right\rangle^{q} \frac{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{B}_l}}{\partial \mathbf{B}_l} \frac{2}{3} A_{1l}\,\theta\,. \tag{5.237}$$

Ces équations permettent de construire le Jacobien du modèle SUVIC pour la méthode θ. Elles seront utilisées dans le chapitre suivant. D'autres aspects présentés dans ce chapitre seront aussi repris au prochain chapitre. On y présentera divers résultats numériques utilisant certaines des considérations théoriques vues dans le chapitre qui précède.

Chapitre VI

APPLICATIONS DU MODÈLE SUVIC

Ce chapitre présente certaines applications du modèle SUVIC en considérant les trois aspects suivants:

- identification des constantes de matériaux;
- simulations et prédiction d'essais de laboratoire;
- simulations en utilisant spécifiquement la méthode des éléments finis.

Il est à noter que seront utilisées dans ce chapitre la version de SUVIC (1989-1996) basée sur la formulation exponentielle (voir chapitre 2) et la version plus récente basée sur une la formulation sinus hyperbolique développée et présentée au chapitre 5.

Dans un premier temps, on procède à la détermination des constantes du modèle SUVIC pour le sel d'Avery Island retenu ici pour les identifications à partir d'une procédure basée sur des observations expérimentales et sur certaines considérations micromécanistiques. On identifie respectivement les constantes pour les conditions élastiques, l'écoulement inélastique stationnaire et l'écoulement transitoire.

Afin de procéder au raffinement des valeurs de ce jeu de constantes, on introduit par la suite certains outils numériques additionnels, dont le code SiDoLo qui a été abondamment utilisé dans le cadre de cette recherche. Il est à noter que SiDoLo a aussi été utilisé pour tester le module d'éléments finis ZéBuLoN. SiDoLo étant un outil d'optimisation fort performant pour des géométries simples, s'est avéré un outil de première importance lors des calculs effectués pour la détermination des constantes. Il est à remarquer que les deux codes (SiDoLo et ZéBuLoN) peuvent être utilisés de façon analogue pour ce type de calculs, mais SiDoLo a été préféré dans la plupart des cas à cette étape compte tenu de ses caractéristiques avantageuses à cet égard.

Suite à l'obtention d'un jeu de constantes pour des conditions isothermales, des simulations sont faites sur des essais CSR (CTC-RTE), de fluage et sur des essais de relaxation. Une identification et quelques simulations sont aussi faites pour des essais à différentes températures.

On présente par la suite des simulations avec le code d'éléments finis ZéBuLoN pour le cas du sel d'Avery Island et du sel artificiel en utilisant des constantes récemment identifiées. Ces simulations visent à montrer des caractéristiques particulières offertes par ce code d'éléments finis ZéBuLoN et notamment à reproduire des essais CTC-RTE à chargements complexes et cycliques. Quelques simulations sont aussi présentées en incluant le module d'endommagement.

6.1 Identification des constantes

6.1.1 Généralités

Cette section vise à présenter le processus d'identification développé afin d'obtenir la valeur des constantes du modèle SUVIC. L'identification est faite sur le sel d'Avery Island dont les propriétés sont bien documentées dans la littérature. L'approche privilégiée dans le cadre de cette recherche s'inspire des travaux antérieurs de Aubertin

et al. (1991a) et Aubertin et al. (1996) qui ont été revus et mis à jour pour les besoins de ce projet. La méthode d'identification est basée sur l'hypothèse que, pour chaque condition de chargement, il existe un état inélastique stationnaire avec une relation $\sigma - \dot{\epsilon}^i - T$ qui ne dépend pas de l'histoire mécanique. L'approche d'identification repose en partie sur la caractérisation de cet état stationnaire, ainsi que sur la détermination préalable des constantes élastiques. Par la suite, des essais intégrant l'histoire du chargement et permettant de mettre en évidence l'évolution d'une ou de plusieurs variables internes sont utilisés afin de caractériser la phase transitoire de l'écoulement inélastique. L'approche suivie lors de l'identification peut se résumer comme suit:

- utilisation de résultats d'essais de laboratoire, standard et non standard, permettant d'isoler une (ou plusieurs) composante(s) particulière(s) du comportement mécanique du matériau;
- traitement de ces résultats afin d'obtenir un jeu de constantes préliminaires avec une méthode basée sur l'analyse des courbes expérimentales;
- définition d'intervalles pour les valeurs des différents paramètres ou variables identifiés préalablement;
- traitement numérique (méthodes d'inversion non linéaires) pour optimiser les résultats, axé surtout sur les termes plus difficiles à identifier.

Ces aspects sont traités dans le cadre d'une procédure adaptative à caractère itératif.

6.1.2 Outils numériques

Pour la détermination de la valeur des constantes, deux approches de minimisation ont été utilisées selon le type d'équations traitées. Pour les conditions différentielles requérant la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre,

le code *SiDoLo* (Pilvin 1988) a été utilisé (en support au code d'éléments finis ZéBuLoN). Le code *Levenberg* développé par l'auteur (et présenté dans ce qui suit) a, quant à lui, été utilisé pour des systèmes non différentiels. Ces codes sont décrits ci-dessous. Tous deux se sont avérés particulièrement utiles pour les exercices de minimisation relativement complexes.

Description du code *SiDoLo*

Le code *SiDoLo* est un outil numérique permettant de faire des simulations d'essais à géométrie simple et de déterminer des constantes de modèles constitutifs. *SiDoLo* est un outil de calcul élaboré à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris (ENSMP) pour des fins de développement de modèles. Pour les systèmes différentiels requérant la résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre, le code *SiDoLo* (Pilvin 1988) est particulièrement attrayant. *SiDoLo* est à la fois un outil de simulation pour tout problème explicite ou différentiel, et un algorithme de régression non linéaire permettant l'identification de constantes (Cailletaud et Pilvin 1993). Il a notamment servi ici pour faire des vérifications lors de l'implantation de SUVIC dans ZéBuLoN. *SiDoLo* permet de résoudre des modèles différentiels du type:

$$\dot{\mathbf{Y}} = f(\mathcal{Z}, \mathbf{Y}, \xi_k, t) \,, \tag{6.1}$$

où ξ_k sont les k constantes, $\mathcal{Z}$ et $\mathbf{Y}$ des variables observables et internes respectivement, et t, le temps.

Le module simulation de *SiDoLo* est très performant et il fonctionne sur une plateforme UNIX (Linux ici). Le module minimisation (identification), quant à lui, est robuste même si la convergence peut être lente et plus difficile lorsque le jeu de constantes est complexe (nombre élevé de constantes à identifier). *SiDoLo* consiste en une série de fichiers objets précompilés auxquels on ajoute le modèle étudié sous la forme d'un fichier FORTRAN séparé. Lors de la compilation finale, le modèle

est assemblé avec les fichiers objets généraux pour former un exécutable propre au modèle. Cette approche requiert la construction d'autant d'exécutables que de variantes désirées du modèle. *SiDoLo* n'accepte qu'une norme (la somme du carré des erreurs) et permet de minimiser l'erreur sur une base de données expérimentales contenant $n \geq 1$ essais. Le logiciel *SiDoLo* utilise pour la résolution un algorithme hybride combinant 3 techniques classiques de minimisation: méthodes du gradient, de Newton-Raphson et de Levenberg-Marquardt. L'intégration numérique fait appel à une méthode Runge-Kutta à pas adaptif d'ordre 4.

Il est à noter que *SiDoLo* utilise une matrice de pondération permettant de pondérer les essais les uns par rapport aux autres. Cette caractéristique permet de comparer plus facilement des essais de fluage et des essais CSR puisque les taux de variation des variables observables de ces essais ont plusieurs ordres de grandeur de différence. Afin de procéder à une identification impliquant ces 2 types d'essais et éviter que le poids des essais CSR soit surestimé par rapport à celui des essais de fluage (ou essais de relaxation), on réduit le poids des essais CSR par un facteur déterminé de façon itérative. En ramenant les écarts à peu près aux mêmes ordres de grandeur, le poids relatif de la correction de l'erreur peut être distribué équitablement entre les deux types d'essai.

Description du code *Levenberg*

Levenberg permet de procéder à des identifications pour des systèmes d'équations explicites:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{Z}, \xi_k, t) \,, \tag{6.2}$$

où $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Y}$ sont des variables observables et internes respectivement, ξ_k sont les k paramètres et t, le temps.

Le code *Levenberg*, développé pour ce projet, est en fait une série de scripts C++ opérés à l'intérieur d'Octave, environnement analogue à celui offert par MAT-

LAB. Octave (Eaton 1995) est un code public, faisant appel à diverses librairies publiques, développé spécifiquement pour les calculs numériques. L'environnement Octave est attrayant comme plate-forme de développement puisqu'il utilise les librairies graphiques GNUPLOT classiques (Husain et Parker 1996). On peut avec un tel outil réduire le temps de développement de codes de façon importante en simplifiant toute la *cuisine* associée aux questions d'entrée et de sortie, et de gestion de fichiers, et ainsi se concentrer sur l'aspect calcul. On peut aussi utiliser un répertoire de fonctions disponibles simplifiant ainsi le temps de développement. Il est à noter que plusieurs modèles similaires existent sur l'Internet. Nous pouvons mentionner, entre autres, Scilab (INRIA) (http: //www-rocq.inria.fr/scilab/) qui se compare beaucoup à Octave.

Le code *Levenberg* développé par l'auteur utilise un algorithme Levenberg-Marquardt calqué sur celui de Press et al. (1988) auquel une flexibilité sur le choix de la norme et des fonctions à minimiser a été ajoutée. Cet algorithme fait appel à 2 méthodes de minimisation: la méthode du Hessien inversé et la méthode de la plus grande pente. L'algorithme procure un passage uniforme entre les deux méthodes. La seconde est utilisée lorsque l'erreur est importante, et la première lorsque l'erreur devient plus faible. Le Hessien est construit, contrairement à *SiDoLo*, de façon analytique en dérivant le système d'équations par rapports aux différentes constantes. Pour un modèle particulier, on construit une fonction indépendante qu'on invoquera à partir de *Levenberg* en spécifiant la classe *method*. Pour évaluer l'erreur, deux normes sont possibles: la somme du carré des erreurs (méthode des moindres carrés standard) ou la somme des valeurs absolues des erreurs. Cette dernière approche est intéressante si l'erreur est importante, et si l'on désire réduire le poids des erreurs élevées. La méthode de régression sera invoquée avec la classe *regress_method*. La tolérance sur l'erreur sera spécifiée avec *TOLER*. *Levenberg* accepte de plus des fenêtres de variabilité pour les paramètres, ce qui est fort utile pour réduire l'effort de recherche et se prémunir contre les comportements singuliers (*LOW* et *UPP*).

Le code *Levenberg* s'est avéré fort utile et relativement robuste pour déterminer les valeurs de certaines constantes comme par exemple $\dot{\epsilon}_0$, n, σ_0 et E.

6.1.3 Méthodologie

L'approche utilisée pour la détermination des constantes du modèle SUVIC pour le sel d'Avery Island est décrite de façon détaillée dans cette section.

Constantes élastiques

La première étape du processus d'identification des constantes du sel d'Avery Island est la détermination des constantes élastiques. Une revue des constantes élastiques identifiées dans la littérature pour le sel d'Avery Island a été faite afin de comparer ces valeurs avec les résultats d'essais additionnels réalisés par l'auteur. Un sommaire des résultats est fourni au tableau 6.1. En faisant la moyenne des données fournies au tableau 6.1, on peut considérer des modules d'élasticité E moyen et médian de 33.4 GPa et de 33.8 GPa. La plage des valeurs moyennes varie de 21.9 à 35.4 GPa respectivement, en excluant les données de Sgaoula (1997) qui sont plus faibles car certaines provenaient de spécimens avec de l'endommagement. Si on incluait les données de Sgaoula, on aurait une moyenne inférieure à 29.0 GPa. Des données antérieures de Aubertin (1989) sur le sel d'Avery Island indiquaient une valeur de $E = 35.4$ GPa avec un écart type de 4.2 GPa, ce qui semble bien correspondre à ce qui est contenu au tableau 6.1. Pour les fins de la présente analyse, une valeur de l'ordre de 30.5 GPa a été retenue (suite à nos propres essais).

Il est à noter que très peu de données sont disponibles pour le sel d'Avery Island au niveau de la variation de E en fonction de la température. On peut anticiper une certaine variation en fonction de la température, et celle-ci pourrait s'exprimer par la relation suivante:

$$E = f(T) \,. \tag{6.3}$$

Hansen et Mellegard (1980b) considèrent qu'il est difficile d'évaluer les propriétés élastiques à plus hautes températures à cause de la grande quantité d'écoulement inélastique observable (des déchargements permettraient néanmoins, et ce, peu importe la température, de déterminer cette constante). Ces auteurs prétendent que pour la plage de température $20 - 200^o\ C$, le module d'élasticité serait relativement peu affecté par la température. Puisque l'effet de la température sur E est faible par rapport aux autres effets, il sera négligé ici.

En ce qui concerne le coefficient de poisson μ, relativement peu de données sont disponibles, mais il semble qu'une valeur se situant entre 0.25 à 0.33 soit raisonnable pour une plage de température de $20 - 200^o\ C$ (Hansen et Mellegard 1980b).

Tableau 6.1: Valeurs du module d'élasticité E en (GPa) pour le sel d'Avery Island à la température de la pièce ($T = 24^o\ C$).

Valeurs du module de Young - sel d'Avery Island					
Référence	Nombre de données	E_{moyen} (GPa)	$E_{médian}$ (GPa)	écart type (GPa)	Temp. $T^o\ C$
cette thèse	15	32.8	32.7	5.1	24
Mellegard et al. 1983	8	32.6	32.7	6.4	24
Hansen et Mellegard 1980	9	35.4	37.0	4.2	24
van Sambeek 1993	-	31.0	31.0	–	24
Sgaoula 1997	21	21.89	23.16	–	24

Constantes pour l'état stationnaire

La caractérisation de l'état stationnaire est une étape déterminante dans le processus d'identification des constantes. Il s'agit d'abord d'identifier les constantes $\dot{\epsilon}_0$, n, σ_0 des équations 5.5 et 5.6 reliant la contrainte déviatorique équivalente stationnaire S'_{eq} au taux de déformation inélastique équivalent $\dot{\epsilon}^i_{eq}$ avec la fonction sinus

hyperbolique:

$$\dot{\epsilon}^{i}_{eq} = \dot{\epsilon}_0 \, sinh^n \left(\frac{S'_{eq}}{\sigma_0} \right) . \tag{6.4}$$

On suppose que, a priori, ces constantes pourraient dépendre de la température. L'identification des constantes $\dot{\epsilon}_0$, n et σ_0 a été faite selon la démarche suivante:

- Détermination des couples $[\dot{\epsilon}^{i}_{eq}, S'_{eq}]$ à partir d'essais de fluage et CSR (sel d'Avery Island) à contraintes faibles à moyennes montrant une phase stationnaire. Ces essais pour la plage de températures $T = 20$ à 200^o C ont été classés en 4 intervalles de température:

  1. Température de la pièce $\Rightarrow 20^o \leq T < 40^o\ C$;
  2. Température autour de $50^o\ C \Rightarrow 40^o \leq T < 85^o\ C$;
  3. Température autour de $100^o\ C \Rightarrow 85^o \leq T < 140^o\ C$; et,
  4. Température autour de $200^o\ C \Rightarrow 140^o \leq T \leq 200^o\ C$.

  Les données utilisées ont été tirées des références suivantes: Russell et al. (1990), Horseman et al. (1992), Senseny (1983), Russell et al. (1984), Hansen et Mellegard (1980a), Hansen et Mellegard (1980b), et Senseny et al. (1993). La majorité de ces essais sont des essais de fluage simples (à palier de contrainte unique). Pour certains de ces essais, des taux de déformation inélastiques stationnaires en fonction du déviateur étaient fournis par les auteurs. Sinon, pour les essais de fluage et CSR où il semblait y avoir obtention d'un état stationnaire, un estimé du taux de déformation inélastique a été réalisé à partir de la tangente à la courbe déformation-temps:

$$\dot{\epsilon}^{i} \approx \frac{\Delta \epsilon^{i}}{\Delta t} \approx \frac{\Delta \epsilon}{\Delta t} . \tag{6.5}$$

  Les données de laboratoire détaillées sont présentées à l'annexe I.

- Suite au classement des données selon la température, des exercices de minimisation ont été réalisés avec le code *Levenberg* pour chaque intervalle de température. Quatre séries de valeurs pour $\dot{\epsilon}_0$, n et σ_0 ont ainsi été déterminés.

- Une analyse de l'évolution de ces constantes en fonction de la température a, par la suite, été effectuée.

Les identifications réalisées montrent que l'utilisation d'un exposant n trop petit ne permet pas d'obtenir, avec la fonction *sinh*, une représentation adéquate du comportement pour des taux de déformation élevés et faibles. Un exposant n entre 3 et 4 a été jugé adéquat pour le sel d'Avery Island (ceci correspond aussi à une valeur de l'exposant de la loi de puissance à faible contrainte, ex.: Carter et al. 1993). Cette valeur correspond aussi à celle obtenue pour l'exposant n sur des matériaux métalliques (Freed et Kevin 1993; Freed et Walker 1995).

Afin d'estimer la valeur des différentes constantes, elles ont été laissées libres de varier. Les constantes obtenues avec *Levenberg* semblent montrer que les constantes σ_0 et n ne sont pas influencées de façon significative par la température pour la plage étudiée $20 \leq T \leq 200^o\ C$, et qu'elles peuvent ainsi être fixées à toute fin utile. La valeur de n a été fixée à 3.0, une valeur correspondant à l'exposant théorique de la loi de puissance à contraintes déviatoriques faibles à moyennes. La valeur de σ_0 a, pour sa part, été estimée à 15.1 MPa (tableau 6.2). Une relation a aussi pu être établie pour la constante $\dot{\epsilon}_0$ en fonction de la température.

Les différentes valeurs de $\dot{\epsilon}_0$ en fonction de la température sont fournies au tableau 6.2 pour la plage $20 \leq T \leq 200^o$ C. La figure 6.1 montre les courbes des résultats de laboratoire pour ces différents intervalles de température et les courbes de régression obtenues. Celles-ci ont aussi été ajustées afin d'obtenir des déviateurs appropriés à taux de déformation plus élevés ($1.0 * 10^{-5}\ s^{-1}$). La figure 6.2 est essentiellement la même représentation, pour laquelle nous avons normalisé le taux de déformation stationnaire par les constantes $\dot{\epsilon}_0$ données au tableau 6.2. On peut notamment apprécier le comportement asymptotique de la fonction sinus hyperbolique

Tableau 6.2: Sommaire des valeurs de σ_0, $\dot{\epsilon}_0$ et de n à l'état stationnaire (équation 6.4). Les identifications ont été faites avec les données de laboratoire sur le sel d'Avery Island tirées Russell et al. (1990); Horseman et al. (1992); Senseny (1983); Russell et al. (1984); Hansen et Mellegard (1980 a, 1980 b); Senseny et al. (1993).

Détermination des constantes - sel d'Avery Island			
Température $T^o\ C$	$\dot{\epsilon}_0$ s^{-1}	σ_0 MPa	n
$20^o \leq T < 40^o$	$9.4e-10$	15.1	3.0
$40^o \leq T < 85^o$	$7.3e-09$	15.1	3.0
$85^o \leq T < 140^o$	$5.2e-08$	15.1	3.0
$140^o \leq T \leq 200^o$	$9.2e-07$	15.1	3.0

à mesure que la contrainte déviatorique tend vers une valeur très faible (ce qui la distingue de la loi exponentielle utilisée par Aubertin (1996).

Dans les paragraphes suivants, on tente d'établir une comparaison entre le modèle à l'état stationnaire, représenté par une loi sinus hyperbolique, et la loi de Norton classique, représentée par:

$$\dot{\epsilon}^i_{eq} = A\ exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)\ (S'_{eq})^n\ . \tag{6.6}$$

La figure 6.3 montre, pour différents types de sel gemme (voir tableau 6.3), les estimés du taux de déformation inélastique stationnaire à différents déviateurs (ces estimés sont tirés de Carter et Hansen (1983), Hardy (1982), van Sambeek (1986), Morgan et Wawersik (1991) et Nelson et Kelsall (1984)). On remarque la variabilité importante (3 ordres de grandeur) des taux de déformation inélastique stationnaire obtenus. La figure 6.4 permet de comparer les résultats obtenus avec la fonction sinus hyperbolique et ceux obtenus plus spécifiquement pour le sel d'Avery Island avec la loi de Norton en utilisant les coefficients de Carter et al. (1993). Les constantes de la loi de Norton ont été établies à partir d'essais de fluage et CSR pour des températures variant de 50 à 200^o C, des taux de déformation variant de 10^{-5} à $10^{-9}\ s^{-1}$, et des déviateurs variant de 2.5 à 20.7 MPa. Afin d'avoir une meilleure corrélation, Carter et al. (1993) ont divisé l'écoulement en deux régimes avec des énergies d'activation

et des constantes propres. Les équations sont respectivement, pour des contraintes élevées ou des taux de déformation élevés:

$$\dot{\epsilon}^{i}_{eq} = 1.6 * 10^{-4}\, exp\left(-\frac{68.1}{\mathcal{R}T}\right)\, (\mathbf{S}'_{eq})^{5.3}\,, \tag{6.7}$$

et à contraintes moins élevées ou à taux de déformation plus faibles:

$$\dot{\epsilon}^{i}_{eq} = 8.1 * 10^{-5} exp\left(-\frac{51.6}{\mathcal{R}T}\right)\, (\mathbf{S}'_{eq})^{3.4}\,. \tag{6.8}$$

La température T est ici en degrés Kelvin K, $\mathcal{R}$ est la constante de Boltzmann $\mathcal{R} = 8.3141\ J/mole/K^o$ ou $1.987\ cal/mole/K$, avec $4.184 * 10^{-3} Joule(J) = 1cal$. Ces valeurs correspondent assez bien à des mesures obtenues antérieurement par Hansen et Mellegard (1980b). Il est à noter que le tableau 6.3 montre à partir des résultats de Carter et Hansen (1983) pour le sel d'Avery Island des valeurs moyennes $\mathcal{A} = 7.60 * 10^{-4}$, $n = 4.5$ et $\mathcal{Q} = 66.5\ kJ/mole$.

Si on procède à une estimation de l'énergie d'activation $\mathcal{Q}$ pour la formulation *sinh* en s'inspirant de l'approche suivie pour la loi de Norton et en considérant que:

$$\dot{\epsilon}^{i}_{eq} = \dot{\epsilon}_0\ sinh^n\left\{\frac{\mathbf{S}'_{eq}}{\sigma_0}\right\} \approx \mathcal{A}\, exp(\frac{-\mathcal{Q}}{\mathcal{R}T})\left(\mathbf{S}'_{eq}\right)^n\,, \tag{6.9}$$

et en supposant que:

$$\dot{\epsilon}_0 \approx \mathcal{A}\, exp(\frac{-\mathcal{Q}}{\mathcal{R}T})\,. \tag{6.10}$$

Ceci permet de déduire une valeur de $\mathcal{Q}$ par analogie pour la fonction sinus hyperbolique. Cette équivalence n'est applicable qu'à faibles contraintes (là où les exposants de la loi *sinh* et de la loi de puissance sont proches). La figure 6.5 montre l'approximation de la valeur de $\dot{\epsilon}_0$ en fonction de la température en utilisant ce type de représentation.

En ce qui concerne le paramètre $\mathcal{A}$, il ne peut être directement comparé au paramètre $\mathcal{A}$ de la loi de Norton, puisqu'il inclut la contribution de la constante σ_0.

Des régressions réalisées, on obtient une valeur de $\mathcal{A} = 8120 * 10^{-5}\ s^{-1}$ et une énergie d'activation $\mathcal{Q} = 44.5\ kJ/mole$. La valeur de $\mathcal{Q}$ obtenue est légèrement

Tableau 6.3: Constantes pour la loi de Norton (équation 6.6) pour différents sels telles que publiées dans la littérature. La constante universelle des gaz est $\mathcal{R} = 8.3141 J/mole/K^o$. Ces données sont tirées de Carter et Hansen (1983), Hardy (1982), van Sambeek (1986), Morgan et Wawersik (1991) et Nelson et Kelsall (1984).

Sel	$\mathcal{A}$ $1/MPa^n - sec$	Q kJ/mole	n
Avery Island	$7.600e-04$	66.500	4.50
Dôme Tatum	$1.568e-05$	48.325	4.30
Mine Asse	$1.800e-06$	54.200	5.00
Site WIPP	$1.451e-06$	50.208	4.90
Permian Unité 4	$4.664e-03$	71.994	4.60
Permian Unité 4	$1.932e-04$	59.476	4.15
Paradox Cycle 6	$6.331e-04$	56.823	1.86
Paradox Cycle 7	$1.519e-07$	28.832	1.39
Dôme Richton	$2.599e-02$	82.262	5.01
Dôme Vacherie	$8.715e-03$	62.923	2.22
Cleveland	$9.027e-05$	47.329	2.78
Jefferson Island	$1.817e-03$	50.208	3.00
Lyons	$2.673e-05$	45.605	3.58

inférieure aux valeurs de Q usuelles qui sont de l'ordre de $Q = 50 - 55\ kJ/mole$ pour les niveaux de contraintes plus faibles (Munson et Dawson 1982; Hunsche et al. 1994), mais peut être considérée comme comparable au niveau de l'ordre de grandeur puisque la valeur de Q se situe à l'intérieur de la plage définie au tableau 6.3.

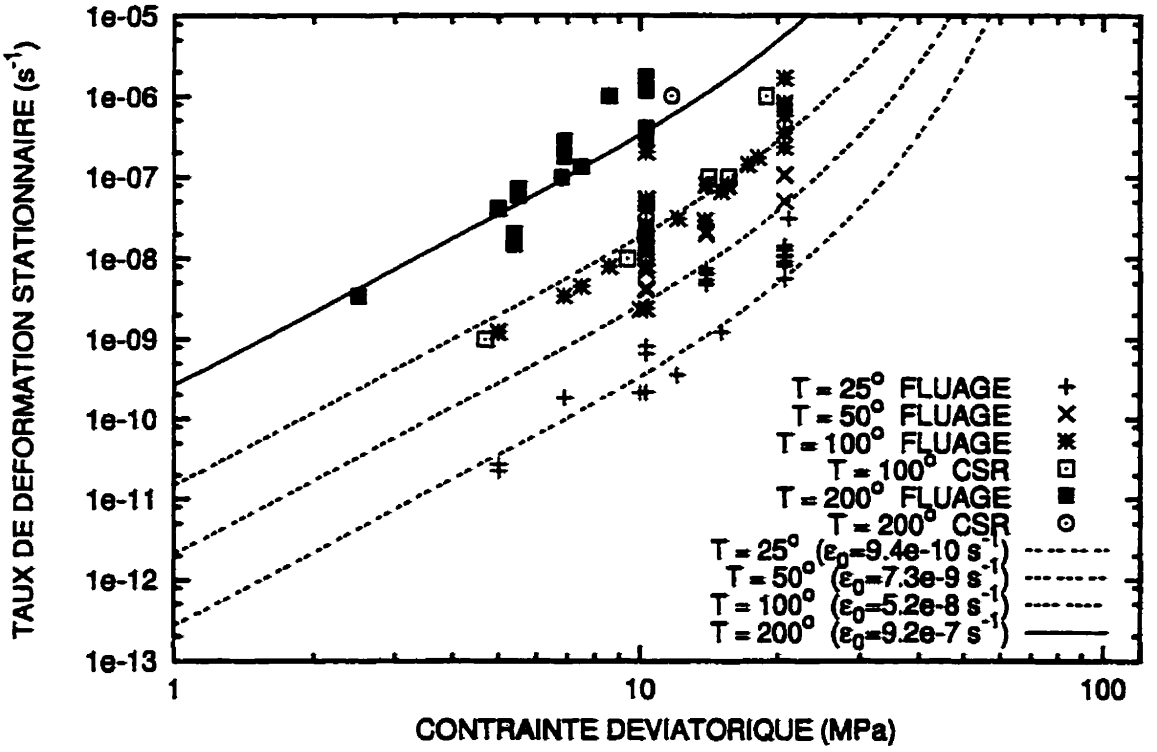


Figure 6.1: Influence de la variation de température et de la contrainte déviatorique sur le taux de déformation stationnaire. Une approximation du taux de déformation stationnaire est faite avec l'équation 6.4 en utilisant les constantes $\dot{\epsilon}_0$, σ_0 et n données au tableau 6.2 pour les différents intervalles de température. Les données de laboratoire sont tirées de Lindner (1983); Russell et al. (1990); Horseman et al. (1992); Senseny (1983); Russell et al. (1984); Hansen et Mellegard (1980 a, 1980 b); Senseny et al. (1993).

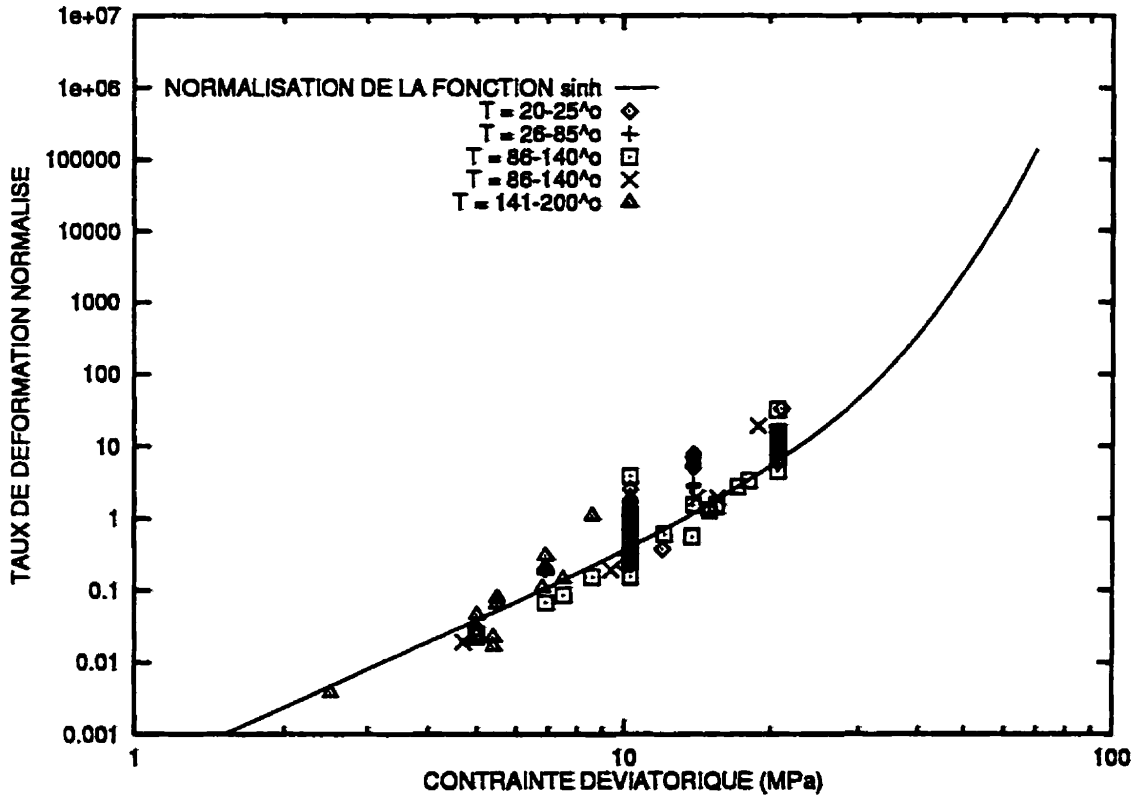


Figure 6.2: Relation entre le taux de déformation stationnaire normalisé $\dot{\epsilon}^i_{eq}/\dot{\epsilon}_0$ et la contrainte déviatorique pour différentes températures pour le sel d'Avery Island. Les constantes $\sigma_0 = 15.1$ et $n = 3$ sont utilisées.

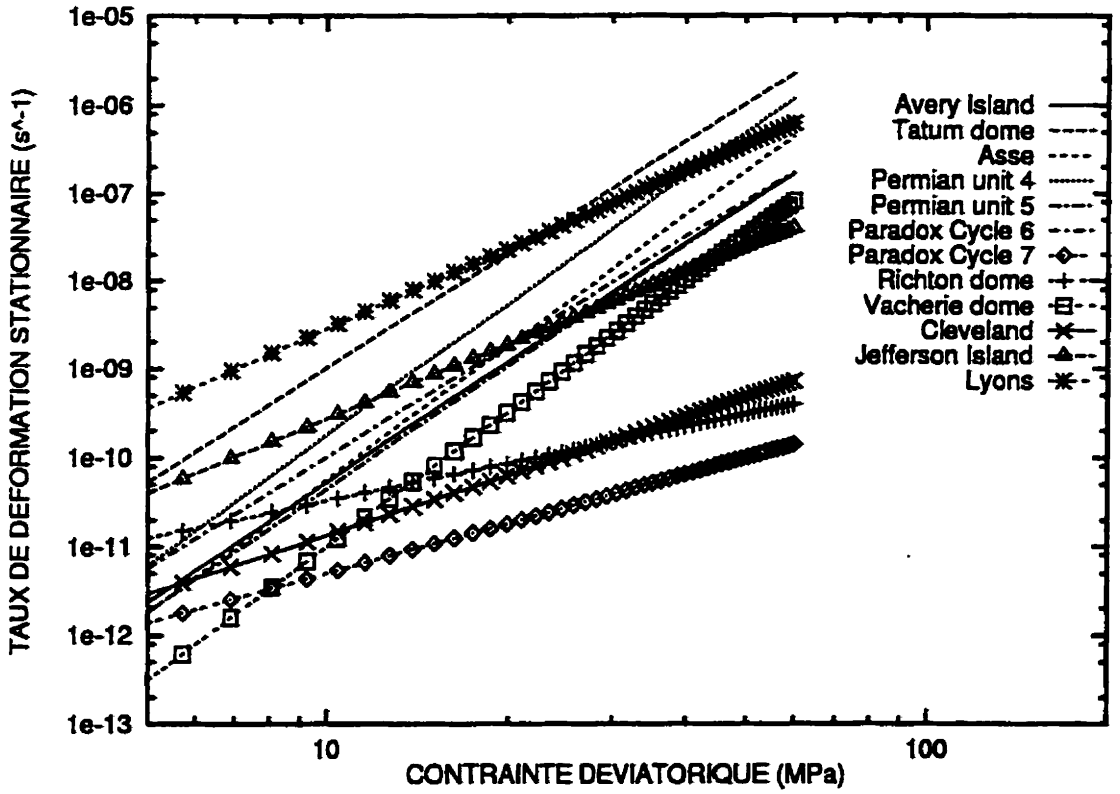


Figure 6.3: Taux de déformation stationnaire en fonction de la contrainte déviatorique S pour différents types de sel à une température $T = 25^o\ C$ estimés avec la loi de Norton (équation 6.6) et les constantes du tableau 6.3. Les références pour les différents sels peuvent être obtenues du tableau 6.3.

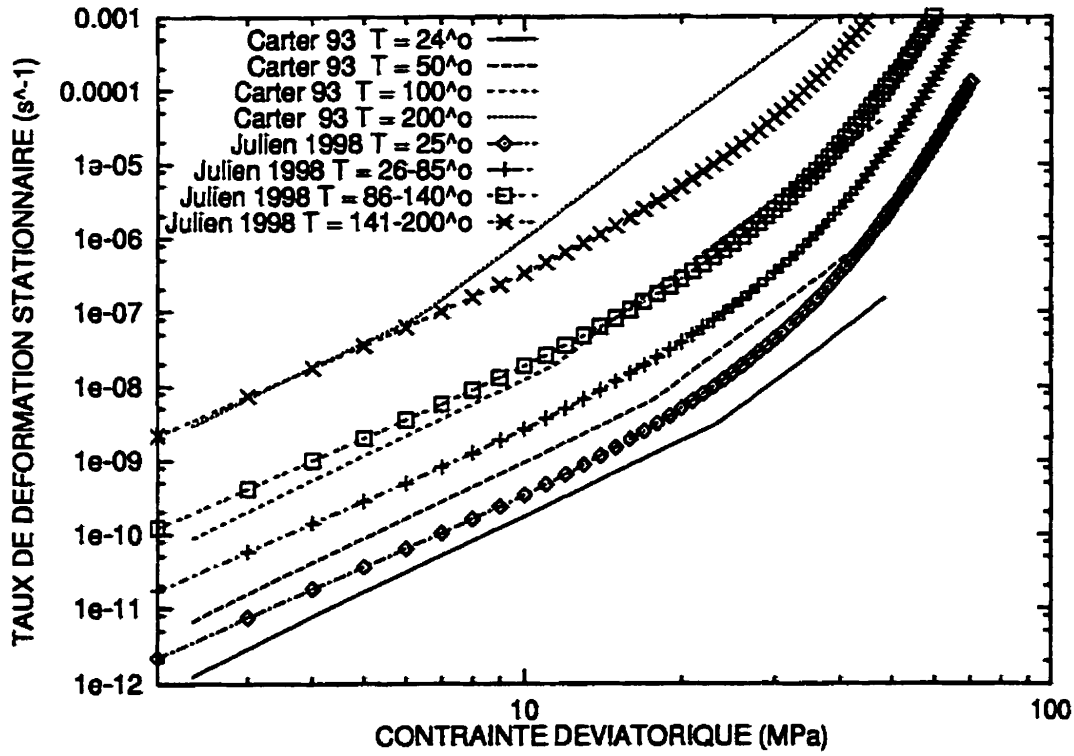


Figure 6.4: Comparaison entre la représentation de l'état stationnaire en utilisant la loi de Norton avec les constantes données par Carter et al. 1993 (équations 6.7 et 6.8) et des simulations avec la loi sinus hyperbolique avec les constantes $\dot{\epsilon}_0$, σ_0 et n données au tableau 6.2.

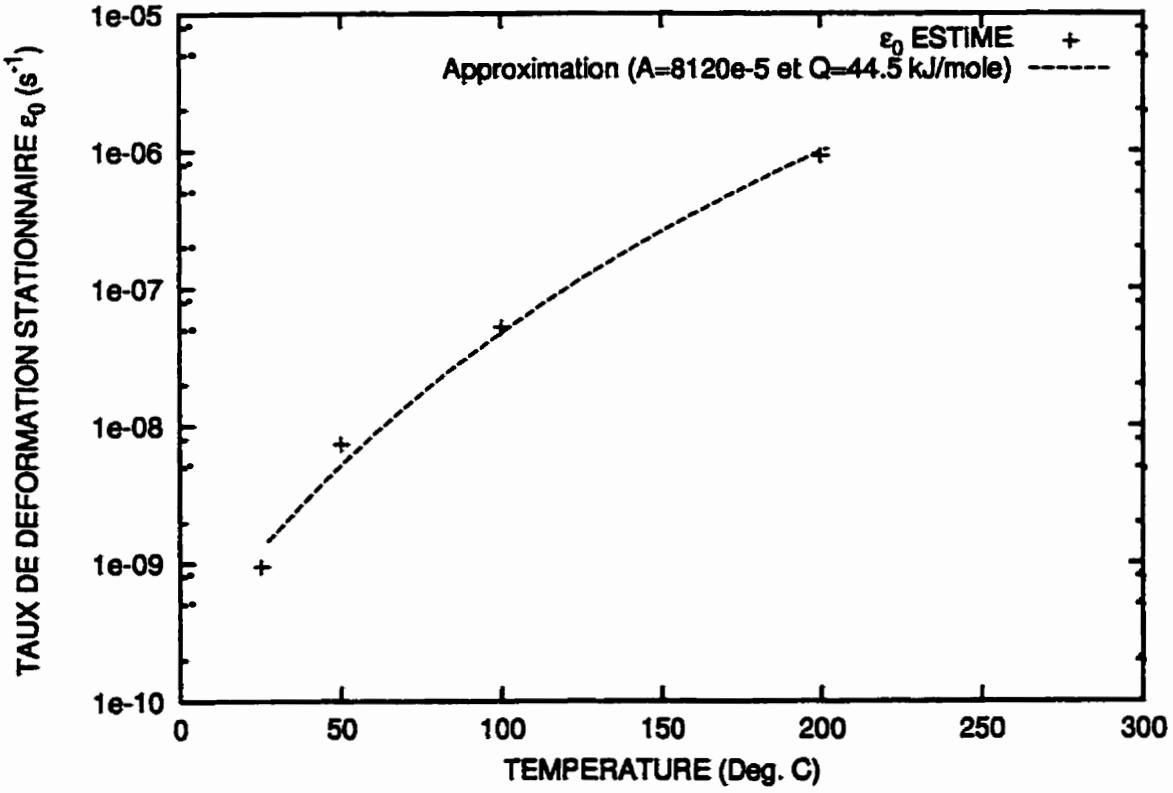


Figure 6.5: Variation du paramètre $\dot{\epsilon}_0$ en fonction de la température en utilisant $\dot{\epsilon}_0 = \mathcal{A}\, exp\,(-\mathcal{Q}/\mathcal{RT})$. Pour cette estimation, on utilise une énergie d'activation $\mathcal{Q}$ de 44.5 kJ/mole.

Exposant de la loi de puissance N

La constante N, l'exposant apparent de la loi de puissance, a été déterminé à partir de considérations micro-mécaniques comme devant se situer entre 3 et 4 à la température de la pièce (Aubertin et al. 1999; Evans et Knowles 1978; Francois et al. 1995). Une valeur de $N = 4$ est reconnue comme représentative du comportement du sel gemme (Aubertin et al. 1991a) et a été utilisée de façon systématique au cours de cette recherche.

Estimation de la valeur des contraintes internes

Lors du processus d'identification, il est apparu important de poser des valeurs de départ pour les constantes à identifier. Les paragraphes suivants décrivent une approche physique simple permettant de déterminer une valeur approximative initiale pour certaines des constantes du modèle SUVIC. La valeur de ces constantes sera par la suite optimisée en utilisant des méthodes de régression non linéaire.

On définit tout d'abord le module d'écrouissage h tel que:

$$h = \frac{\partial \mathrm{S}_{eq}}{\partial \epsilon^{i}_{eq}} = \frac{\partial(\mathrm{B}_{eq_s} + \mathrm{B}_{eq_l} + R + \sigma_{active})}{\partial \epsilon^{i}} . \tag{6.11}$$

Ce module s'obtient de la courbe $\mathrm{S}_{eq} - \epsilon^{i}_{eq}$ en évaluant la dérivée en chaque point. Si on trace la courbe $h - \mathrm{S}_{eq}$, il a été remarqué qu'elle pouvait être estimée à l'aide d'une forme bilinéaire (Aubertin 1989; Aubertin et Gill 1993). La décomposition de la courbe $h - \mathrm{S}_{eq}$ en une forme bilinéaire permet d'identifier 5 paramètres h_0, h_1, m_1, m_2 et σ' (voir figure 6.6). Le paramètre h_0 est la valeur de h à une déformation de référence très faible (ici on opte pour $\epsilon^{i}_{eq} = 0.001$). Le paramètre h_1 est la valeur de h avant ou à la rencontre des 2 droites formant la forme bilinéaire, habituellement on prend h_1 à $\epsilon^{i}_{eq} \leq 0.5\%$ de façon à ce que l'ampleur des VEI à évolution lente (B_l et K) puisse être négligée. Les paramètres m_1 et m_2 sont les pentes des 2 droites. La contrainte σ' correspond à la valeur à saturation pour un taux de déformation

imposé. Les représentations graphiques des paramètres h_0, h_1, m_1 et m_2 peuvent être visualisées de la figure 6.6.

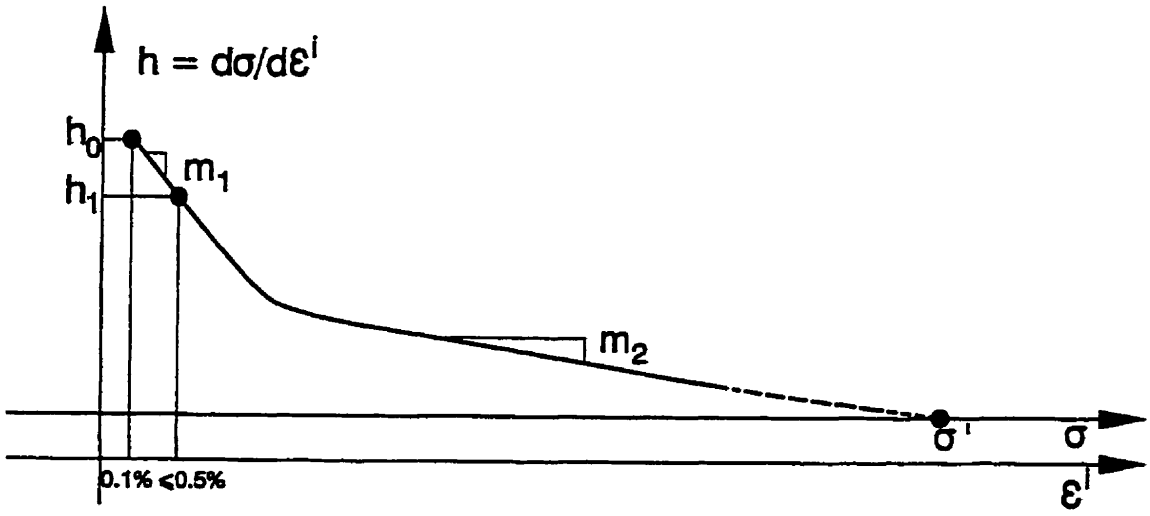


Figure 6.6: Représentation de la signification géométrique des paramètres h_0, h_1, m_1, m_2 et σ'.

La détermination de la pente de la première droite et h_0 est utile pour déterminer en première approximation les grandeurs relatives de certaines constantes en utilisant des solutions fondamentales pour $\mathbf{B}_{eq_\epsilon}$, $\mathbf{B}_{eq_l}$ et R développées par Aubertin et Gill (1993) pour un taux de déformation inélastique constant et ne tenant pas compte de la restauration statique (dans les essais CSR, les contributions associées à la restauration statique des différentes variables sont faibles et peuvent en général être

négligées). Ces solutions peuvent être données par:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{eq_s}}{\partial \epsilon^i_{eq}} = \frac{A_{1s}}{\mathbf{B}'_{eq_s}}(\mathbf{B}'_{eq_s} - \mathbf{B}_{eq_s}) \,, \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{eq_l}}{\partial \epsilon^i_{eq}} = \frac{A_{1l}}{\mathbf{B}'_{eq_l}}(\mathbf{B}'_{eq_l} - \mathbf{B}_{eq_l}) \,, \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \epsilon^i} = \frac{A_3}{R'}(R' - R) \,, \tag{6.14}$$

et

$$\frac{\partial \sigma_{active}}{\partial \epsilon^i} = \frac{\partial K}{\partial \epsilon^i}\left\{\frac{\dot{\epsilon}^i}{A}\right\}^{\frac{1}{N}} + K\frac{\partial}{\partial \epsilon^i}\left\{\frac{\dot{\epsilon}^i}{A}\right\}^{\frac{1}{N}} \,, \tag{6.15}$$

$$= \frac{\partial K}{\partial \epsilon^i}\left\{\frac{\dot{\epsilon}^i}{A}\right\}^{\frac{1}{N}} \,. \tag{6.16}$$

Ici $\dot{\epsilon}^i$ est supposé constant pour un essai CSR puisque la contribution élastique devient rapidement négligeable par rapport à la contribution inélastique; alors,

$$\frac{\partial \sigma_{active}}{\partial \epsilon^i} = \frac{A_5}{K'}(K' - K)\left\{\frac{\dot{\epsilon}^i}{A}\right\}^{\frac{1}{N}} \,. \tag{6.17}$$

Ceci permet d'écrire,

$$h = \frac{A_{1s}}{\mathbf{B}'_{eq_s}}(\mathbf{B}'_{eq_s} - \mathbf{B}_{eq_s}) + \frac{A_{1l}}{\mathbf{B}'_{eq_l}}(\mathbf{B}'_{eq_l} - \mathbf{B}_{eq_l}) + \frac{A_3}{R'}(R' - R) + \frac{A_5}{K'}(K' - K)\left\{\frac{\dot{\epsilon}^i}{A}\right\}^{\frac{1}{N}} \tag{6.18}$$

De plus, on présume que les variables cinématique $\mathbf{B}_l$ et isotrope K, agissent plus lentement que les variables $\mathbf{B}_s$ et R. On peut alors négliger leur contribution et ne s'intéresser qu'aux contributions des variables $\mathbf{B}_s$ et R au début d'un essai CSR. Ceci fait en sorte que les constantes de la phase transitoire que l'on cherche dans un premier temps à identifier sont limitées à A_{1s}, A_3, $\mathbf{B}_{0s}$, R_0, avec:

$$h \approx \frac{A_{1s}}{\mathbf{B}'_{eq_s}}(\mathbf{B}'_{eq_s} - \mathbf{B}_{eq_s}) + \frac{A_3}{R'}(R' - R) \,, \tag{6.19}$$

où $\mathbf{B}'_{eq_s}$ et R' sont données par les équations 2.76 et 2.78 pour la version avec une fonction exponentielle ou pour les équations 5.10 et 5.12 pour la nouvelle version avec

la fonction *sinh*. On pose de plus que, au tout début de la déformation inélastique, la contrainte active est égale à 0 et $h = h_0$, d'où pour un matériau vierge (à très faible déformation):

$$\mathbf{S}_{eq} = \mathbf{B}_{eq_s} = R = 0 \text{ à } t \approx 0 \text{ s}, \tag{6.20}$$

d'où

$$h_0 \approx A_{1s} + A_3 . \tag{6.21}$$

On peut aussi écrire:

$$m_1 = \frac{h_1 - h_0}{\mathbf{B}_{eq_s} + R} . \tag{6.22}$$

Il est à remarquer que la détermination de h_0 peut s'avérer difficile à estimer puisque le module d'écrouissage varie très rapidement sur une petite plage de contraintes au début de l'essai. Selon des essais réalisés pour le sel d'Avery Island, la valeur extrapolée de h_0 peut varier de moins de 10000 à plus de 40000 GPa à $\mathbf{S}_{eq} = 0$. C'est pour cette raison que la valeur de h_0 est plutôt prédéterminée à $\epsilon^i (= 0.1\%) > 0$. On néglige alors les déformations inélastiques très faibles.

Les figures 6.7 et 6.8 fournissent un exemple typique permettant d'obtenir des valeurs typiques pour h_0, h_1 et m_1 pour l'essai jul0602. Dans un premier temps, tel que montré à la figure 6.7, on enlève la déformation élastique de la déformation totale pour ne conserver que la déformation inélastique. On considère $E = 30.5$ GPa et $\mu = 0.25$.

À partir des courbes $\mathbf{S}_{eq}$ *versus* ϵ^i_{eq}, on évalue la dérivée $h = d\mathbf{S}_{eq}/d\epsilon^i_{eq}$. La figure 6.8 montrent des valeurs de h en fonction du déviateur et de la déformation inélastique pour l'essai jul0602 dont le résultat est typique des essais CSR. On remarque de ces différentes figures que, en raison de la qualité des résultats expérimentaux, les valeurs de h sont instables en début d'essai. Pour estimer les valeurs h_0, h_1 et m_1, on procède par ajustement: sur la figure $h - \epsilon^i$, on cherche une forme bilinéaire représentative pour la courbe $h - \mathbf{S}_{eq}$. On choisit une déformation inélastique faible

$\epsilon^i = 0.001$ comme point de référence à h_0 afin d'éliminer le comportement théoriquement asymptotique de la courbe. Pour l'essai jul0602, les paramètres h_0, h_1 et m_1 ont été estimés à environ $h_0 = 16300$ MPa, $h_1 = 2700$ MPa et $m_1 = -600$. Il a été considéré que l'intersection des deux formes bilinéaires correspondait à une contrainte déviatorique et une déformation inélastique d'environ 31.5 MPa et 0.0034 respectivement. La valeur de m_2 serait ici de $-1.1e+05$. Il est noter que l'on pose ici que la valeur de h_0 serait indépendante du taux de déformation $\dot{\epsilon}$ imposé (Aubertin et al. 1991b), contrairement aux valeurs de m_1, m_2, h_1 et σ'.

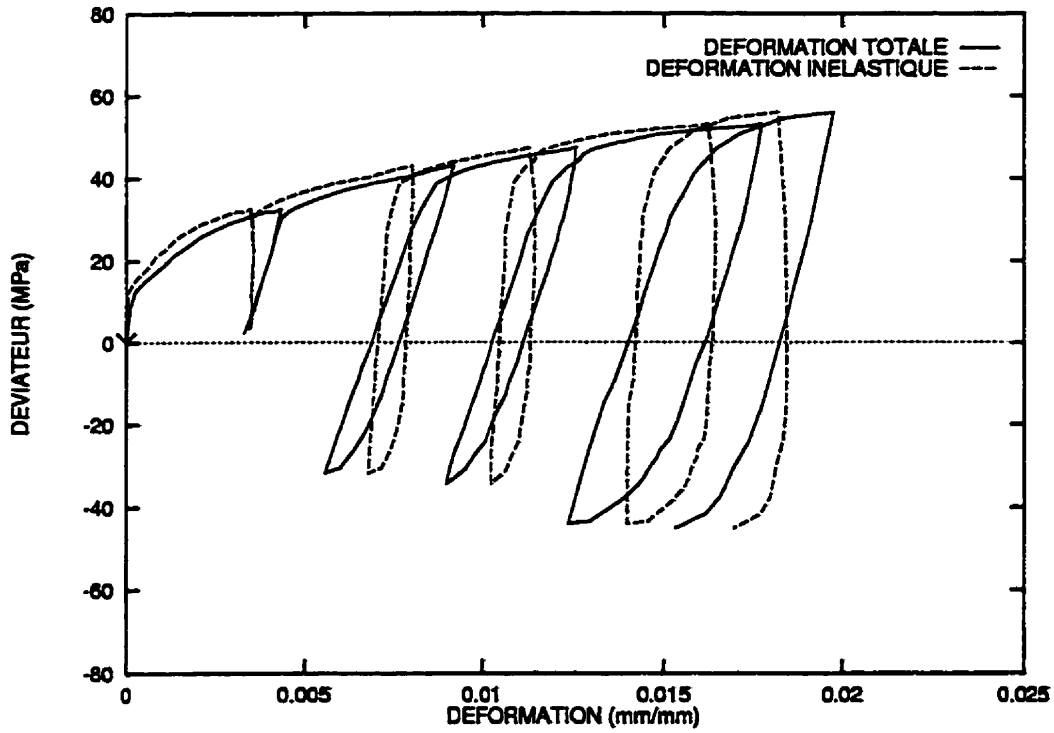


Figure 6.7: Pour l'essai jul0602, on retranche la déformation élastique à la déformation totale pour ne conserver que la déformation inélastique ($E = 30.5GPa$).

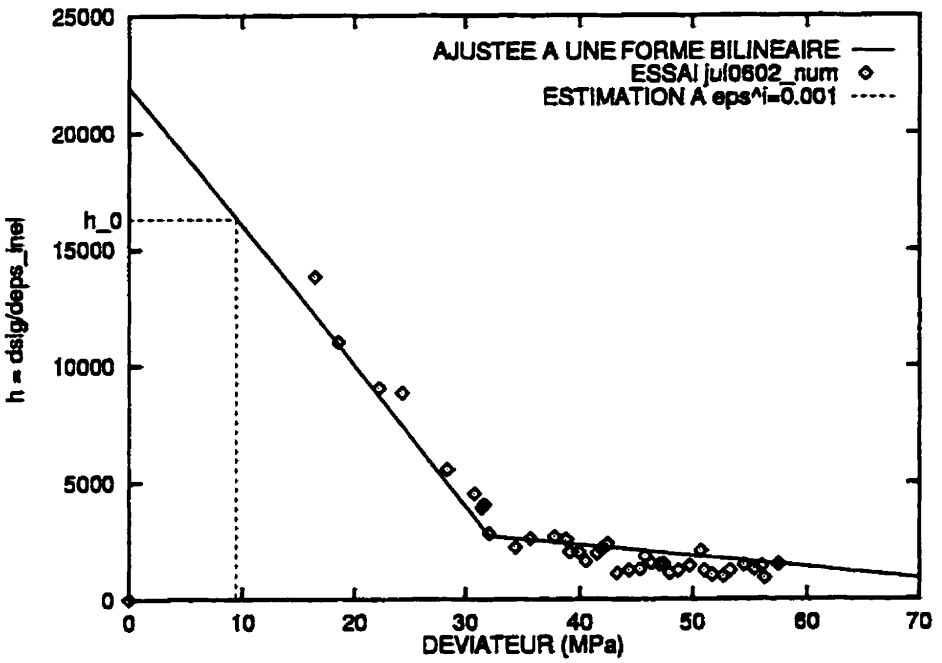


Figure 6.8: Pour l'essai jul0602, on estime les résultats de l'essai à l'aide d'une forme bilinéaire pour les relations $h - S_{eq}$ de laquelle on tire $h_0 = 16300$, $h_1 = 2700$, $m_1 = -600$.

Constantes de l'écrouissage et restauration dynamique

On montre maintenant comment estimer les grandeurs de certaines des autres constantes des lois cinétiques pour les variables cinématique $\mathbf{B}$ et isotrope R. On utilise le résultat de l'essai cyclique CTC-RTE (jul0602) et détermine la grandeur de l'enveloppe des contraintes internes $\sigma_{int}(= \mathbf{B}_{eq} + R)$ à partir d'une procédure proposée par Aubertin et al. (1994) pour la version antérieure du modèle SUVIC. Il est entendu que $\mathbf{B}_{eq} = \mathbf{B}_{eq_s} + \mathbf{B}_{eq_l}$. On détermine dans un premier temps l'enveloppe des contraintes totales (voir figure 6.9). Pour cet essai, cette enveloppe est évidente en compression (CTC) mais doit être évaluée en conditions RTE puisque les déformations inélastiques sont minimes en extension triaxiale à chaque cycle de déchargement.

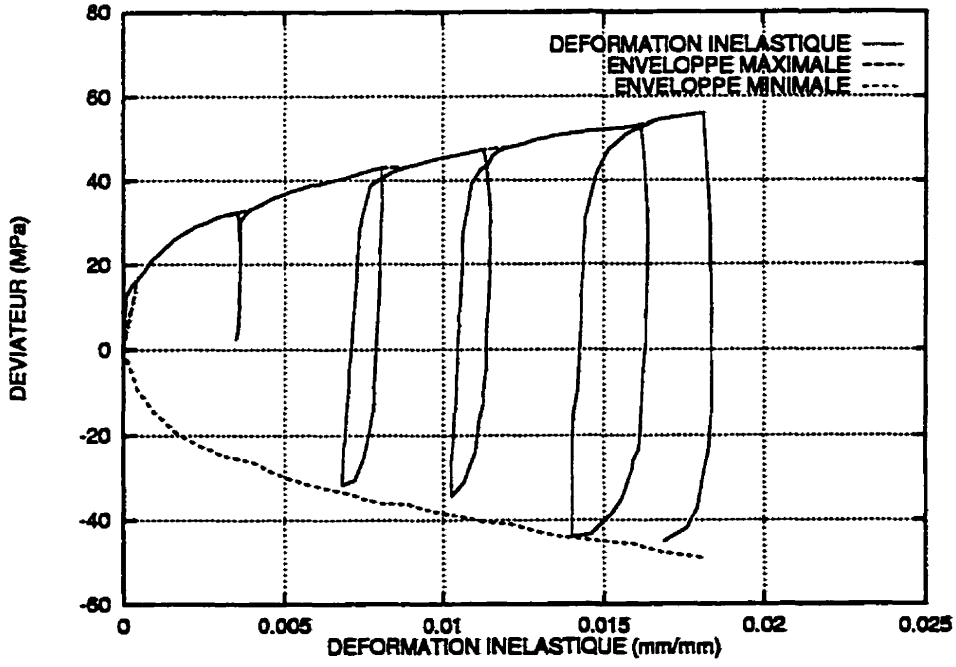


Figure 6.9: Enveloppe des contraintes totales estimées pour l'essai jul0602.

Le domaine élastique est défini comme le domaine, lors d'un chargement-déchargement, où pas ou peu d'écrouissage-restauration survient. La détermination de cette enveloppe permet de définir le diamètre de la surface d'écoulement (circulaire dans le

plan Π à cause de l'utilisation du critère de von Mises). Pour l'essai jul0602, on tente d'identifier le point où l'on quitte le domaine élastique suite à un déchargement. À la figure 6.10, on voit que l'enveloppe des contraintes internes n'est pas symétrique. Ce point peut être observé de façon systématique avec les différents essais présentés plus tôt (voir figures 4.3 à 4.10).

Il est assez difficile d'évaluer la zone de contraintes internes de façon précise. L'objectif visé ici est de déterminer une valeur de $2R$ permettant de définir des valeurs de départ pour l'identification subséquente.

Pour la valeur $\boldsymbol{\sigma}_i$ à saturation, $\boldsymbol{\sigma}'_i = a\boldsymbol{\sigma}'$. On utilise un $0.85 < a \approx 0.9 < 0.95$, qui est une valeur représentative pour le sel gemme à température ambiante.

Cette approximation de la valeur de la contrainte interne permet d'obtenir un estimé du diamètre $2R$ de la surface d'écoulement. On montre aussi à la figure 6.10 le centre de cette surface d'écoulement. Cette construction permet de déterminer directement l'évolution de la grandeur de R pendant l'essai. Connaissant R, on peut estimer la grandeur de $\mathbf{B}_{eq}$ (et sa direction) par la différence entre l'enveloppe de la contrainte interne et l'enveloppe définie par la grandeur de R, tel qu'il est montré à la figure 6.10.

Il est important de remarquer ici que l'interprétation visuelle qui est faite implique habituellement que la composante d'écrouissage isotrope est plus forte que la composante cinématique durant l'essai. Cette hypothèse de départ est jugée acceptable dans la mesure où la plupart des modèles utilisés pour le sel considèrent qu'un écrouissage isotrope est suffisant pour décrire le comportement du sel gemme. Il est toutefois à prévoir que l'écrouissage cinématique est plus important en début de déformation que ce qui est montré sur la figure 6.10, cela sera confirmé par les résultats subséquents.

Pour un cycle de chargement-déchargement, le tenseur $\mathbf{B}$ est positif. Il demeure positif lors d'un tel cycle et agit contre $\boldsymbol{\sigma}$ jusqu'au passage en extension triaxiale. On choisit pour illustrer cette observation à la figure 6.10, de suivre l'évolution des

variables S, B, R, σ_a et σ_{int} pour une déformation $\epsilon^i = 0.0183$ à laquelle il a été estimé que $2R = 69.8\ MPa \Rightarrow R = 34.9\ MPa$.

- En conditions CTC (compression).

  On obtient:

  $$\mathbf{S} = 55.6\ MPa$$

  $$\sigma_{int} = \mathbf{B} + R = 50.2\ MPa$$

  $$\sigma_a = \mathbf{S} - \sigma_{int} = 55.6 - 50.2 = 5.4\ MPa$$

  $$R = 34.9\ MPa$$

  $$\mathbf{S} = 15.3\ MPa$$

- En conditions RTE.

  Puisqu'on utilise le critère de von Mises, la surface d'écoulement est symétrique et isotrope faisant en sorte que le passage en conditions RTE implique que S et R sont négatifs dans cette direction. On obtient alors:

  $$R = -34.9\ MPa$$

  $$\mathbf{S} = -49.1\ MPa$$

  $\sigma_a = -29.5\ MPa$ (d'où une déformation inélastique renversée)

  $$\sigma_{int} = \mathbf{S} - \sigma_a = \mathbf{B} + R$$

  $$\Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{S} - \sigma_a - R$$

  $$\Rightarrow \mathbf{B} = -49.1 - (-29.5) - (-34.9)$$

  $$\Rightarrow \mathbf{B} = +15.3\ MPa$$

Ce résultat montre que la variable cinématique B n'a pas changé lors d'un cycle déchargement-chargement. Ce résultat se justifie intuitivement par le fait qu'entre l'instant où le déchargement débute en conditions CTC et l'instant où l'on quitte le domaine élastique, le matériau ne devrait pas avoir subi d'écrouissage (isotrope ou

cinématique) dans la nouvelle direction. Cet exercice permet d'apprécier la nécessité d'inclure une composante cinématique dans le modèle pour représenter le caractère asymétrique du domaine des contraintes internes.

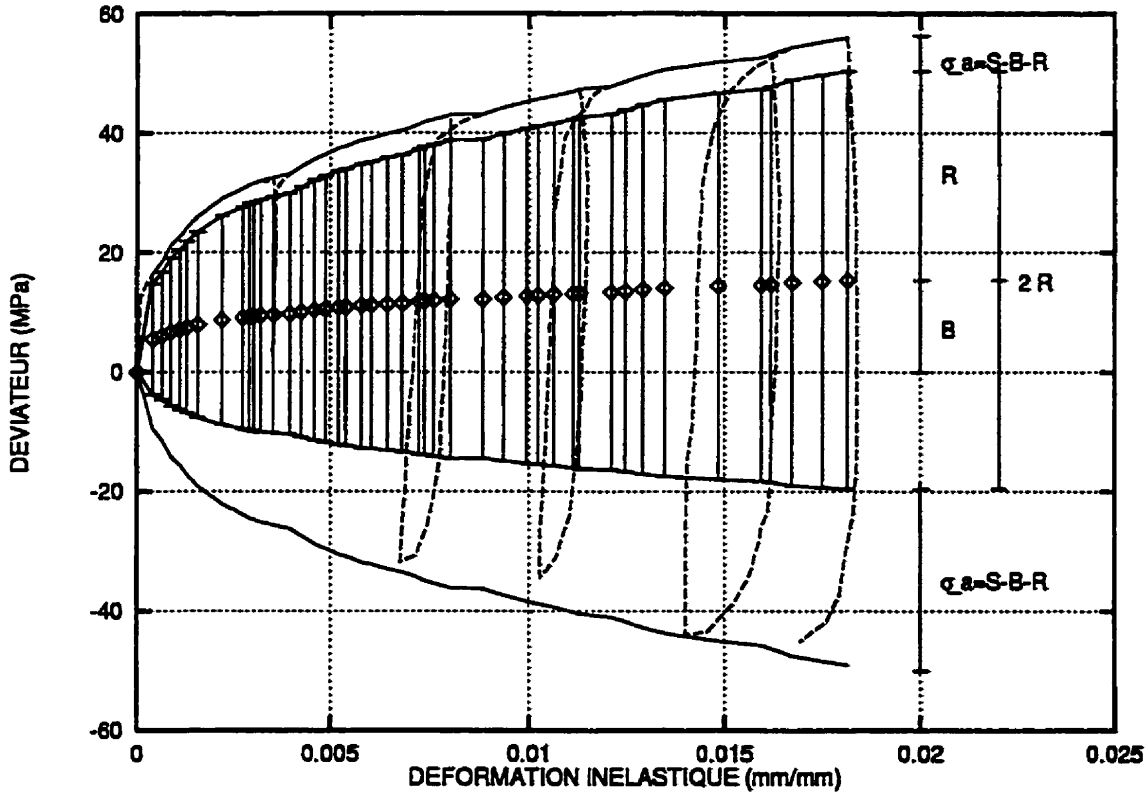


Figure 6.10: Évaluation par inspection visuelle de la limite des contraintes internes. Ceci permet de déterminer la grandeur de la surface d'écoulement $2R$ pour l'essai jul0602. Le centre de la surface d'écoulement est aussi positionné et il correspond à la valeur de $\mathbf{B}_{eq}$.

Choisissons maintenant deux déformations inélastiques: $\epsilon^i_{eq(1)} = 0.005$ et $\epsilon^i_{eq(2)} = 0.015$ (retenues arbitrairement). Les valeurs de R et $\mathbf{B}_{eq}$ à ces déformations inélastiques estimées de la figure 6.10 pour l'essai jul0602, sont fournies au tableau 6.4. Les estimés de R et $\mathbf{B}_{eq}$ découlent de la surface d'écoulement choisie montrée à la figure 6.10.

Tableau 6.4: Estimation des valeurs de R et B pour l'essai jul0602 aux déformations $\epsilon^i = 0.005$ et 0.015.

Sel d'Avery Island					
point	ϵ^i	$\dot{\epsilon}^i$	S MPa	R MPa	B MPa
1	0.005	3.66e-5	35.0	21.0	10.5
2	0.015	4.00e-5	52.0	32.4	14.4

Le processus d'identification des constantes R_0, B_0, A_3 et A_1 utilise les formes intégrées des solutions différentielles données aux équations 6.12 à 6.14. On résout pour les points (1) et (2) pour A_3 et R_0 avec les estimés du tableau 6.4, en supposant $a = 0.90$ (avec la formulation *sinh*: $\sigma_0 = 15.08$, $n = 3$, $m = 1$) et en utilisant les équations suivantes:

$$R_{(1)} = R'_{(1)} \left(1 - exp \left\{ \frac{-A_3 \epsilon^i_{(1)}}{R'_{(1)}} \right\} \right) , \tag{6.23}$$

$$R_{(2)} = R'_{(2)} \left(1 - exp \left\{ \frac{-A_3 \epsilon^i_{(2)}}{R'_{(2)}} \right\} \right) . \tag{6.24}$$

Les équations découlent de l'intégration de la loi cinétique de R, en négligeant la composante de restauration statique (négligeable à court terme). Dans ces équations, on considère que

$$R'_{(1)} = R_0 \, c_{(1)} , \tag{6.25}$$

$$R'_{(2)} = R_0 \, c_{(2)} , \tag{6.26}$$

$$c_{(1)} = \left[asinh \left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{(1)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{(1/n)} \right]^{m=1} , \tag{6.27}$$

$$c_{(2)} = \left[asinh \left(\frac{\dot{\epsilon}^i_{(2)}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{(1/n)} \right]^{m=1} . \tag{6.28}$$

On fait de même pour la variable cinématique totale **B**. On omet à ce stade-ci la question des variables à courte et à longue portée. On résout pour A_1 et $\mathbf{B}_0$:

$$\mathbf{B}_{(1)} = \mathbf{B}'_{(1)} \left(1 - exp \left\{ \frac{-A_1 \epsilon^i_{(1)}}{\mathbf{B}'_{(1)}} \right\} \right) , \tag{6.29}$$

$$\mathbf{B}_{(2)} = \mathbf{B}'_{(2)} \left(1 - exp \left\{ \frac{-A_1 \epsilon^i_{(2)}}{\mathbf{B}'_{(2)}} \right\} \right) , \tag{6.30}$$

en considérant que:

$$\mathbf{B}'_{(1)} = \mathbf{B}_0 \, c_{(1)} , \tag{6.31}$$

$$\mathbf{B}'_{(2)} = \mathbf{B}_0 \, c_{(2)} . \tag{6.32}$$

On peut maintenant estimer les valeurs de A_1, A_3, $\mathbf{B}_0$ et R_0. On obtient $A_1 = 3698.\ MPa$, $A_3 = 7372.\ MPa$, $\mathbf{B}_0 = 4.1\ MPa$ et $R_0 = 8.8\ MPa$.

Connaissant A_3, la variable A_{1s} peut être estimée de la valeur de $h_0 = 16290$ obtenue à la section précédente.

$$A_{1s} = h_0 - A_3 = 16290. - 7372. = 8918.\ MPa . \tag{6.33}$$

Connaissant A_{1s}, on estime $\mathbf{B}_{0s}$ en utilisant l'équation 6.29 exprimée en termes de $\mathbf{B}_{0s}$ et A_{1s}. On obtient ainsi $\mathbf{B}_{0s} = 2.9$. On sait aussi que $\mathbf{B}_{0s} + \mathbf{B}_{0l} = \mathbf{B}_0 = 4.1$, alors $\mathbf{B}_{0l} = 1.1$. On utilise les valeurs de A_{1s} et $\mathbf{B}_{0s}$ précédemment identifiées pour lesquelles on estime $\mathbf{B}_s$ à la déformation $\epsilon^i = 0.015$. Connaissant **B** et $\mathbf{B}_s$, on peut alors calculer $\mathbf{B}_l$. De cet estimé, on peut déduire A_{1l} en utilisant l'équation 6.29 exprimée en termes de $\mathbf{B}_{0l}$ et A_{1l}. Sachant que $\mathbf{B}_{0l} = 1.1\ MPa$, on obtient $A_{1l} = 669\ MPa$. Ces différentes valeurs préliminaires sont regroupées au tableau 6.5.

On remarquera que la proportion des constantes dépend de l'importance relative de l'écrouissage isotrope et cinématique en début de déformation. Or, tel que nous avons mentionné, la composante isotrope tend ici à être surestimée. Cet aspect pourra être corrigé par la suite.

Tableau 6.5: Sommaire de l'estimation des constantes A_3, R_0, A_{1_s}, $\mathbf{B}_{0_s}$, A_{1_t} et $\mathbf{B}_{0_t}$ pour l'essai jul0602.

Sel d'Avery Island					
A_3 MPa	R_0 MPa	A_{1_s} MPa	$\mathbf{B}_{0_s}$ MPa	A_{1_t} MPa	$\mathbf{B}_{0_t}$ MPa
7 372.	8.8	8 919.	2.9	669	1.2

La prochaine étape est la détermination de la constante A_5. Rappelons que la valeur initiale de K, K_0 serait de 1 MPa. Cette valeur a une certaine signification physique et correspond approximativement à la résistance au cisaillement critique du sel vierge (Aubertin 1989). Pour sa part, la constante A est intimement liée au calcul de K. La variable A ne fait qu'assurer le passage d'une contrainte à une déformation. Une valeur de $A = 6e-7\ s^{-1}$ obtenue de paramétrisations antérieures (Aubertin et al. 1998b) a été utilisée comme valeur initiale.

Il reste donc à déterminer la valeur de A_5. Pour ce faire, on utilise encore une fois le résultat de l'essai à $\epsilon^i = 0.015$. On détermine la valeur de K en utilisant la loi évolutive (on utilise les valeurs du tableau 6.4 pour le point (2)):

$$\dot{\epsilon}^i = A \left\langle \frac{\mathbf{S} - \mathbf{B} - R}{K} \right\rangle^N \Rightarrow K_{(2)} = 1.81\ MPa\ . \tag{6.34}$$

On obtient ainsi $K = 1.81$ MPa. En ce qui concerne la détermination de K', on utilise l'équation suivante qui découle de l'équation 6.18 avec les différentes valeurs données au tableau 6.4:

$$K'_{(2)} = \frac{\sigma'_{(2)} - (\mathbf{B}'_{(2)} + R'_{(2)})}{\left\{\frac{\dot{\epsilon}^i_{(2)}}{A}\right\}^{\frac{1}{N}}} = 5.15\ , \tag{6.35}$$

avec

$$\sigma'_{(2)} = \sigma_0\ asinh^n \left\{\frac{\dot{\epsilon}^i_{(2)}}{\dot{\epsilon}_0}\right\}\ . \tag{6.36}$$

Pour trouver A_5, on utilise le résultat à $\epsilon^i = 0.015$ et on résout pour A_5 la forme

intégrée de l'équation 6.16:

$$K_{(2)} = 1 - (1 - K'_{(2)}) \left(1 - exp\left\{\frac{-A_5 \epsilon^i_{(2)}}{K'_{(2)}}\right\}\right) . \tag{6.37}$$

On obtient de ces estimations une valeur de $A_5 = 74.6\ MPa$.

Il est intéressant de remarquer ici la consistance thermodynamique est satisfaite avec $R = 32.4 >> 1.17\ MPa$ puisque, pour obtenir la consistance thermodynamique, il faut selon l'équation 5.143 que :

$$R = 32.4\,MPA \geq (K'-K)\frac{K}{K'} = (5.15-1.81)\frac{1.81}{5.15} = 1.17\,MPa \tag{6.38}$$

Restauration statique

La prochaine étape est la détermination des constantes de restauration statique. Pour cette partie, on utilise habituellement les essais de fluage de longue durée. Des essais CSR très lents ($\dot{\epsilon} \leq 10^{-7}$) pourraient être aussi utilisés.

Les constantes qu'il s'agit de déterminer sont: A_{2s}, A_{2l}, A_4, A_6, q, p, u, x_s, x_l, x_r et x_k. On devrait donc identifier 11 constantes pour 4 lois évolutives. On a déjà montré que les variables $\mathbf{B}_s$, $\mathbf{B}_l$, R et K et les valeurs de saturation associées $\mathbf{B}'_s$, $\mathbf{B}'_l$, $\mathbf{R}'$ et K' peuvent toutes être identifiées. On peut envisager de réduire le nombre des inconnus en supposant des équivalences. On suppose tout d'abord, à l'instar de Aubertin et al. (1999), que, selon des considérations physiques liées à la formulation des effets de restauration statique (Martin et Argon 1986; Nabarro et Villiers, 1995; Raj et al. 1996) et d'autres informations disponibles pour d'autres matériaux et modèles avec ISV (Chan 1988; Rawley et Thornton 1966), les valeurs suivantes peuvent être choisies. Pour les exposants p, q et u:

$$1 \leq p,\ q,\ u \leq 3 \tag{6.39}$$

Une valeur de 2 pour p, q, u est typique et sera retenue ici (Aubertin et al. 1998) compte tenu de la nature des mécanismes qui contrôlent l'écrouissage cinématique et isotrope.

De plus, on peut dans un premier temps poser que $A_{2s} = A_{2l}$ et $A_4 = A_6$. Il s'agit alors de déterminer 2 constantes A_{2s} et A_4. Pour des essais réalisés à la température de la pièce, ces coefficients seront relativement faibles puisqu'il est prévu que la restauration statique agira lentement.

Pour ce qui est des constantes x_s, x_l, x_r et x_k, elles prennent une valeur unitaire de façon à ce que les lois d'évolution tendent naturellement vers les valeurs de saturation déjà définies (c.-à-d. $\mathbf{B}_s \rightarrow \mathbf{B}'_s$, $\mathbf{B}_l \rightarrow \mathbf{B}'_l$, $R \rightarrow R'$, $K \rightarrow K'$).

Ces hypothèses ramènent donc l'exercice de détermination de constantes pour les termes de restauration statique à l'obtention expérimentale de 2 constantes A_{2s} et A_4 (ou de 4, soit A_{2s}, A_{2l}, A_4 et A_6 si elles sont jugées différentes). Ces valeurs peuvent être prises en première estimation à environ $1 * 10^{-6} - 1 * 10^{-8}$. Les valeurs de ces constantes peuvent être estimées d'essais de fluage à palier unique.

Des essais de fluage avec chargement CTC et déchargement RTE peuvent aussi être réalisés pour mettre en évidence les différentes contributions des variables d'écrouissage, tel que les résultats expérimentaux de Allemandou et Dusseault (1993) le démontrent. Ceci aiderait à mieux définir les lois évolutives de chaque VEI. Une autre façon d'isoler les différentes VEI et particulièrement les contributions associées à la restauration statique est de réaliser des dip tests avec des décréments de contraintes tel qu'il est proposé par Hunsche (1988).

Compte tenu du nombre de variables estimées jusqu'à ce point et du nombre important d'approximations et simplifications, il est souhaitable de débuter les identifications numériques. La restauration statique demeure essentiellement pour des essais CSR, une contribution de deuxième ordre dont l'ampleur est moindre que les erreurs induites par les approximations et simplifications faites jusqu'à présent sur les constantes précédemment identifiées (cette contribution est par ailleurs significative

pour les essais de fluage).

Ce processus d'identification préliminaire, basé sur une approche physique, permet néanmoins de définir des valeurs cibles pour la plupart des constantes du modèle. Ces valeurs préliminaires sont optimisées lors de l'exercice numérique qui suit. Il est important de souligner, afin de conclure cette section, que les résultats de nos simulations montrent qu'il est excessivement difficile de déterminer numériquement un jeu de constantes satisfaisant si des estimés raisonnables ne sont pas fournis initialement. Cela est relié au nombre élevé de constantes et à la présence de divers minimum locaux de la fonction de l'erreur qui peuvent exister pour les différentes constantes.

6.2 Optimisation de la valeur des constantes

Cette section présente des résultats de calculs d'optimisation réalisés à partir d'essais de laboratoire avec le code SiDoLo pour le sel d'Avery Island et le sel artificiel. Les calculs pour le sel artificiel sont présentés à la fin de cette section. Tous les calculs présentés dans cette section ont été effectués avec la loi *sinh* (équation 5.5).

Il est à noter que ces simulations auraient pu être effectuées de façon équivalente avec le code d'éléments finis ZéBuLoN (utilisé plus loin), mais le module SiDoLo avec son intégration explicite et son approche simple au niveau du module optimisation a été trouvé plus efficace pour ce genre d'exercice.

Pour le sel d'Avery Island, les identifications ont été réalisées à partir des résultats expérimentaux de divers auteurs. Les identifications ont surtout été faites sur des essais à température ambiante. Pour le sel artificiel, les essais réalisés à l'École Polytechnique ont été utilisés.

Les identifications sur le sel d'Avery Island ont montré que même si ce sel est réputé comme étant relativement homogène, on n'observe pas nécessairement cette homogénéité dans les résultats de laboratoire. Au moins, six aspects peuvent être

invoqués pour expliquer une certaine hétérogénéité des résultats: la variabilité intrinsèque du matériau (présence d'inclusions et d'impuretés), la granulométrie, l'historique du chargement des échantillons, la composition, la provenance et la présence d'endommagement préalable.

À la revue de la géologie du site, le diapire d'Avery Island est décrit comme étant composé de deux sels (un sel grossier et un sel fin à grossier). Même si, au niveau de leur composition, ces sels sont très similaires, on devrait s'attendre à des différences dans le comportement mécanique imputable à la différence de grosseur des grains ou cristaux (granulométrie). Tel que Russell et al. (1990) l'ont montré, la granulométrie a un effet prépondérant sur le comportement, surtout dans la phase transitoire.

Plutôt que de tenter une identification globale sur tous les essais à température ambiante sur le sel d'Avery Island dans le but de trouver des constantes moyennes, des identifications ont plutôt été faites sur les essais provenant d'un même auteur. On souhaite ainsi se soustraire autant que possible des problèmes de variabilité du matériau et de traitements différents subis par les éprouvettes. Quatre groupes d'essais bien documentés ont ainsi été étudiés. Il s'agit des essais de Hansen et Mellegard (1980a), de Mellegard et Senseny (1983), de Senseny et al. (1993) et les essais réalisés par l'auteur.

6.2.1 Essais à court terme

À la section 6.1, nous avons présenté pour un essai particulier (essai jul0602) l'approche pour la détermination préliminaire des différentes constantes, basée sur une méthode observationnelle. Cette section présente des résultats obtenus du code SiDoLo pour optimiser les constantes pour la banque d'essais de l'auteur.

Le tableau 6.6 donne un sommaire des constantes obtenues de l'identification préliminaire (voir section 6.1) et optimisée pour les essais de l'auteur. Il est important de souligner de nouveau qu'il est apparu, lors des exercices de simulations, que les propriétés mécaniques du sel utilisé pour les essais de l'auteur et celles des sels

d'autres auteurs pouvaient différer de façon significative.

Comme on le verra dans cette section, même pour les essais de l'auteur, il y a une certaine dispersion des résultats qui se reflète dans la valeur des constantes. Cette dispersion est toutefois beaucoup moindre que celle découlant de l'utilisation simultanée d'essais de divers auteurs. Plutôt que de rechercher des valeurs moyennes des constantes, qui pourraient satisfaire les différents lots d'essais, des identifications séparées ont donc été privilégiées. Il est à noter que le lot d'essais de l'auteur, malgré son intérêt, ne contient que des essais CSR. Il n'a pas la même richesse d'information que les essais de Senseny et al. (1993) présentés dans la section suivante.

Les constantes obtenues de l'exercice de minimisation sont fournies au tableau 6.6.

Tableau 6.6: Valeurs des constantes pour le sel d'Avery Island telles qu'obtenues de l'évaluation préliminaire présentée à la section 6.1 et après optimisation sur la banque d'essais de l'auteur en utilisant le code SiDoLo. Les constantes de restauration statique n'ont pas été identifiées (N.I.) avec ces essais de courtes durées.

Jeu de constantes - Sel Avery Island					
Constantes	Valeurs prélim.	Valeurs optim.	Constantes	Valeurs prélim.	Valeurs optim.
$E\ (GPa)$	30.5	30.5	μ	0.25	0.25
$A\ (s^{-1})$	$0.6 * 10^{-6}$	$0.036 * 10^{-6}$			
$A_{1s}\ (MPa)$	8919.0	569.4	$A_{1l}\ (MPa)$	669.0	11.4
$A_3\ (MPa)$	7372.0	1608.8	$A_5\ (MPa)$	74.9	142.2
$B_{0s}\ (MPa)$	2.9	0.12	$B_{0l}\ (MPa)$	1.2	8.51
$K_0\ (MPa)$	1.0	1.0	m	1.0	1.0
N	4	4	$R_0\ (MPa)$	8.8	4.7
$\sigma_0\ (MPa)$	15.08	15.08	$\dot{\epsilon}_0\ (s^{-1})$	$0.94 * 10^{-9}$	$0.0079 * 10^{-9}$
$A_{2s}\ (MPa\ s^{-1})$	N.I.	N.I.			
$A_{2l}\ (MPa\ s^{-1})$	N.I.	N.I.			
$A_4\ (MPa\ s^{-1})$	N.I.	N.I.	$C\ (MPa)$	1	1
$A_6\ (MPa\ s^{-1})$	N.I.	N.I.	$p = q = u$	2	2
x_r	1	1	x_b	1	1
x_k	1	1	n	3.0	3.0

Les comparaisons entre les résultats d'essais de l'auteur et les simulations avec les constantes optimisées sont fournies aux figures 6.11 à 6.14. On remarque que les simulations sont, dans la plupart des cas, très bonnes si l'on considère la complexité des cheminements de contraintes imposées et la variabilité naturelle des matériaux.

La figure 6.11 offre une comparaison entre les simulations et les résultats expérimentaux des essais jul06 (figure 6.11 (a)) et jul07 (figure 6.11 (b)). Les constantes utilisées permettent de bien représenter le comportement global de l'échantillon au cours des différents cycles de chargement et déchargement (6 cycles). On remarque par ailleurs que les constantes utilisées tendent à sous-estimer un peu l'écrouissage de ces éprouvettes puisque pour un certain niveau de déformation, la contrainte déviatorique obtenue de la simulation est légèrement inférieure à la contrainte mesurée.

La figure 6.12 permet de comparer les résultats expérimentaux et numériques pour les essais jul08 (figure 6.12 (a)) et jul10 (figure 6.12 (b)). Il s'agit d'essais cycliques avec 8 cycles de chargement et déchargement. Les constantes utilisées permettent de reproduire numériquement assez fidèlement le comportement observé. L'essai jul10 est caractérisé par des déchargements mineurs pour lequel aucun état d'extension triaxiale n'est imposé. Dans les deux cas, la déformation triaxiale dépasse 3.5% et un peu d'endommagement est à prévoir en fin d'essai. Les constantes utilisées semblent capturer assez adéquatement la portion transitoire de la déformation. Mais de façon similaire à précédemment, les simulations tendent à légèrement sous-estimer l'écrouissage subi par l'éprouvette au début de l'essai, et le surestime à la fin (en raison de l'endommagement?).

La figure 6.13 montre une comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour les essais jul09 (figure 6.13 (a)) et jul11 (figure 6.13 (b)). L'essai jul09 fut assez difficile à réaliser en laboratoire compte tenu de la nécessité d'ajuster la presse hydraulique rapidement et à plusieurs reprises (tout l'essai se déroule à moins de 0.5% de déformation). Le comportement de l'éprouvette est étonnamment bien représenté par la simulation numérique. Cet essai est très différent des précédents puisqu'il

implique le développement de conditions d'extension triaxiale aussi importantes que des conditions de compression triaxiale. Cette simulation peut être ainsi considérée comme une prédiction compte tenu du fait que cet essai n'a pas été utilisé pour l'identification et compte tenu de la différence notable des niveaux de déformation (plus faibles que la plupart des autres essais) et la forte composante d'extension triaxiale. L'essai jul11 est pour sa part assez similaire aux essais cycliques précédents. On remarque toutefois, par opposition aux essais précédents que la simulation numérique tend à surestimer légèrement l'écrouissage de cette éprouvette.

La figure 6.14 montre quant à elle, une comparaison entre la simulation et les résultats des essais jul04 (figure 6.14 (a)) et jul05 (figure 6.14 (b)). Il s'agit pour jul04 d'un essai cyclique avec 3 cycles de chargement et déchargement et pour jul05, d'un essai cyclique avec démarrage en extension triaxiale. En ce qui concerne l'essai jul04, on a plus de difficultés à capturer la portion transitoire caractérisée par un niveau plus élevé d'écrouissage de l'éprouvette.

Ces simulations illustrent les grandes capacités du modèle, mais elles démontrent aussi à quel point, il est difficile de capturer de façon équivalente tous les résultats d'essais faits sur diverses éprouvettes. La variabilité intrinsèque des matériaux géologiques et la variabilité de la préparation des éprouvettes peuvent être invoquées pour expliquer les différences observées. Il est à noter que toutes ces éprouvettes originent d'un même bloc de sel gemme foré dans plusieurs directions. Lors du prélèvement de ces éprouvettes et du traitement des données des conditions d'isotropie et d'homogénéité ont été supposées pour ce bloc. Mais il est possible qu'il existe une certaine anisotropie. Si on admet que cet effet est secondaire, les différences observées sont sans doute liées à la préparation des éprouvettes et à leur mode de mise en charge. Cet aspect n'a cependant pas été étudié dans cette recherche.

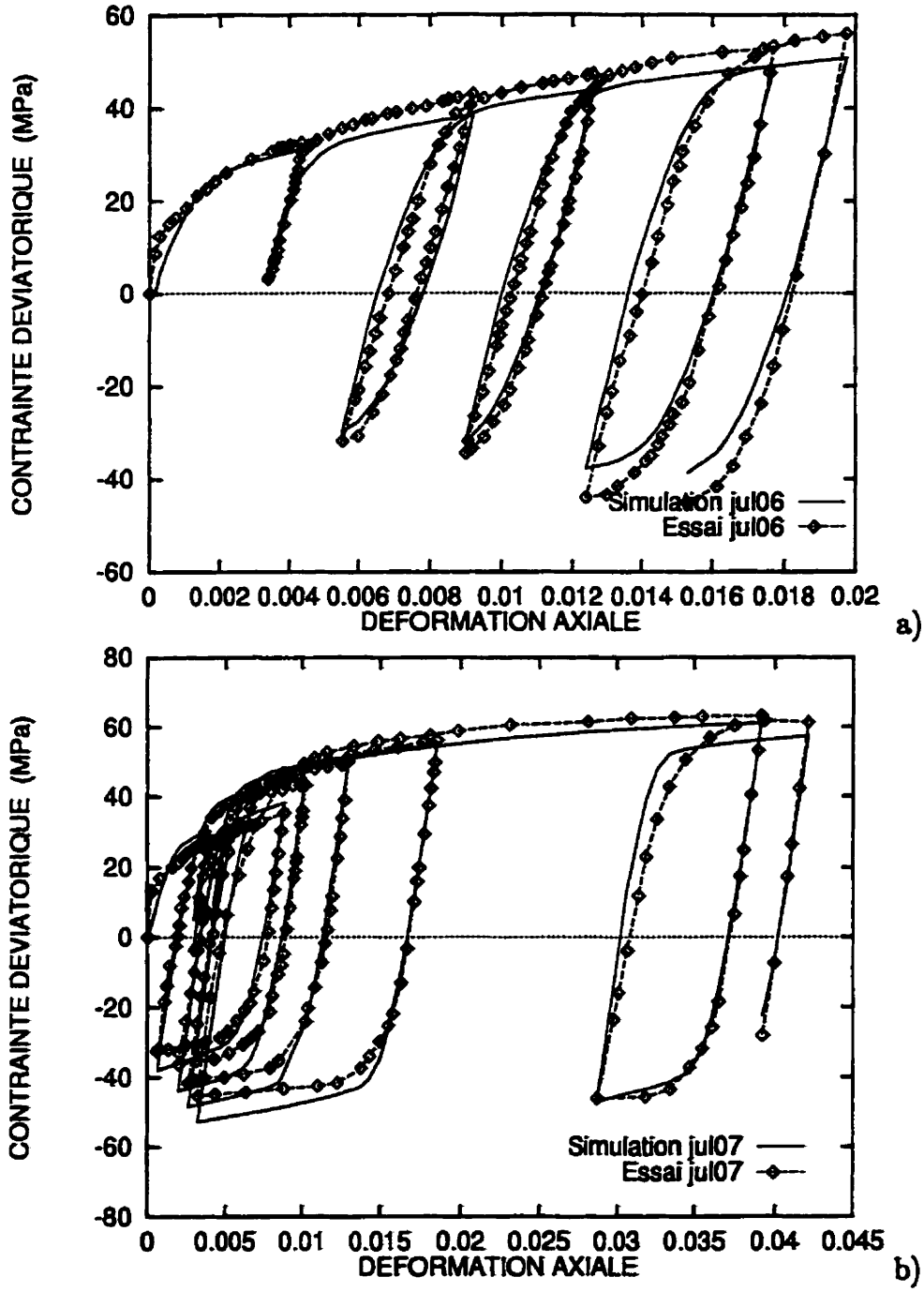


Figure 6.11: Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul06 (a) et jul07 (b).

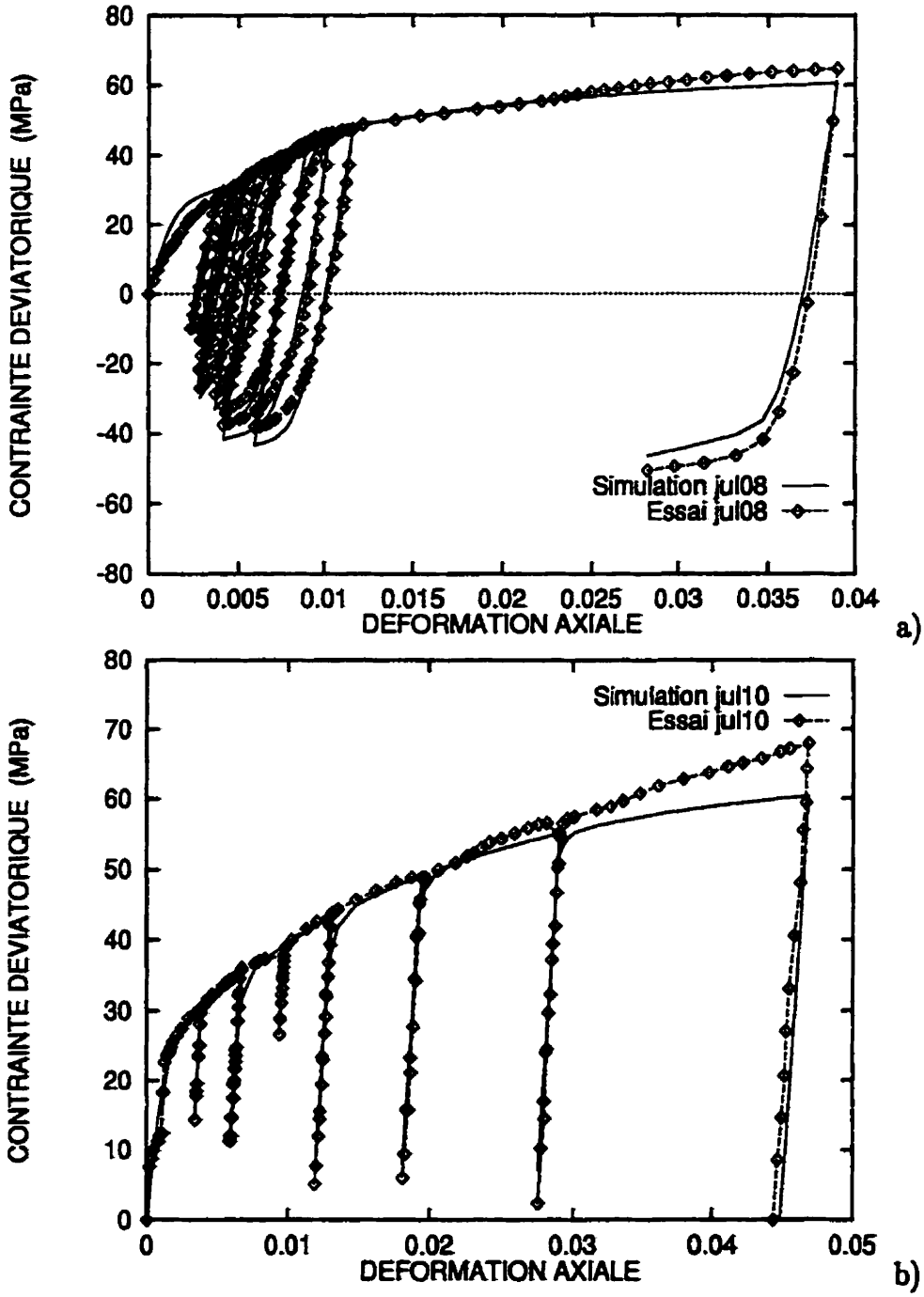


Figure 6.12: Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul08 (a) et jul10 (b).

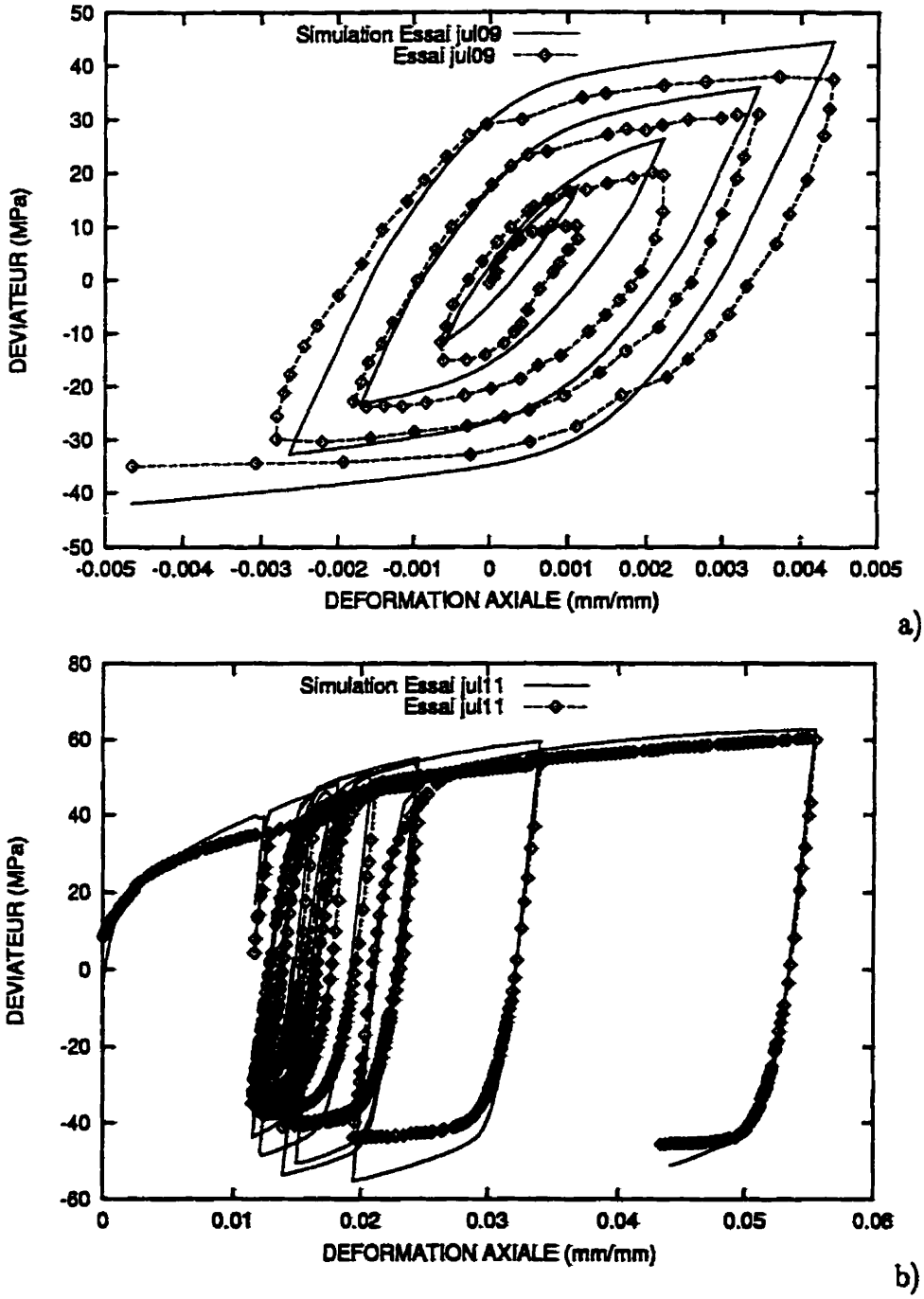


Figure 6.13: Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul09 (a) et jul11 (b).

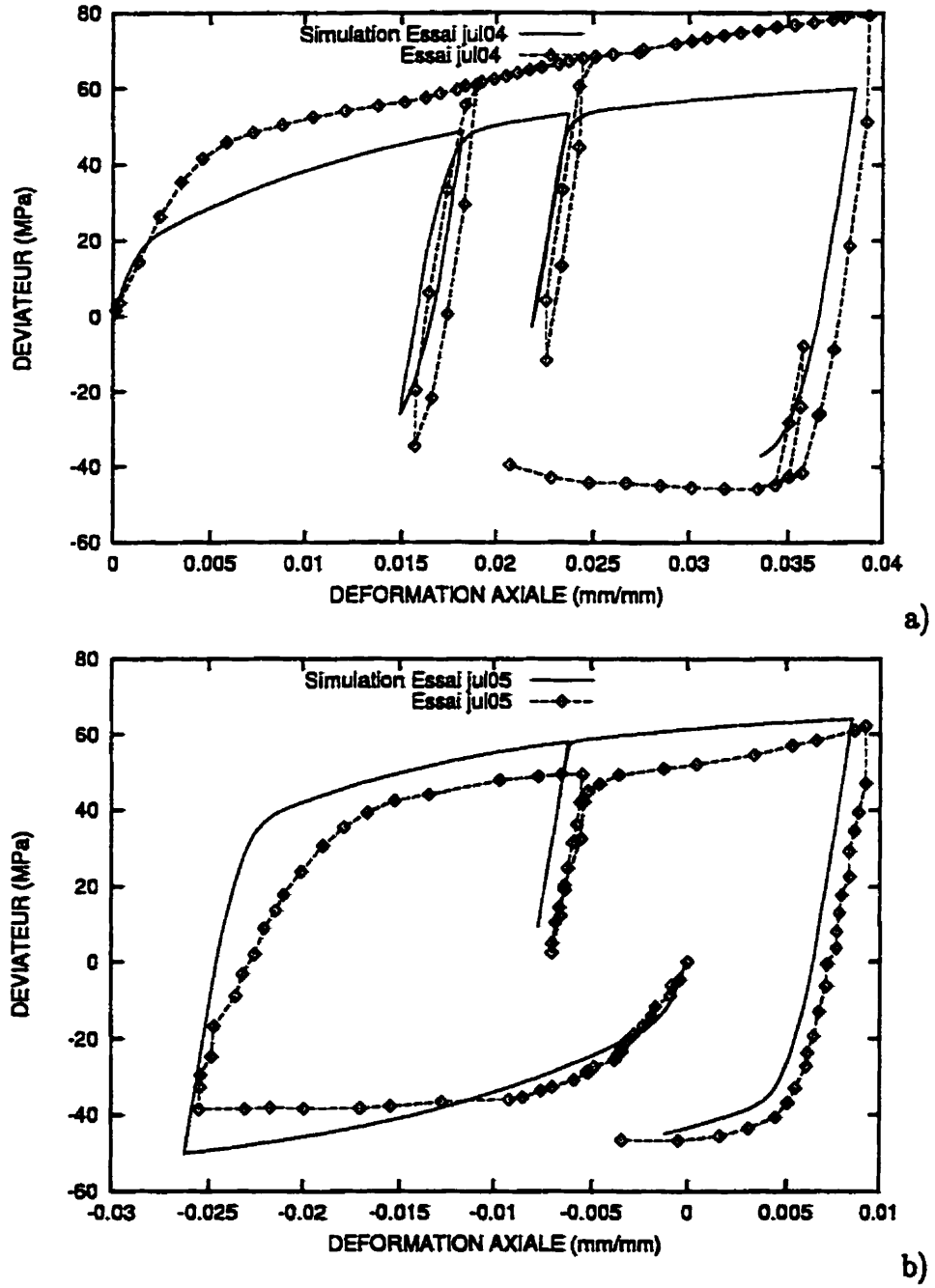


Figure 6.14: Comparaison entre la simulation numérique et les résultats de laboratoire pour les essais CSR jul04 (a) et jul05 (b).

6.2.2 Essais de Senseny et al. (93)

Il s'est avéré, suite à la revue des résultats disponibles dans la littérature, que la série d'essais de Senseny et al. (1993) est possiblement celle offrant le plus d'attrait. Cette famille d'essais est suffisamment riche pour permettre une identification des constantes liées au comportement à court terme et long terme du modèle. Elle contient trois types d'essais distincts (essais de fluage, CSR et de relaxation) avec peu ou pas d'endommagement.

Les identifications ont été faites pour les constantes A, A_{1s}, A_{1l}, A_{2s}, A_{2l}, A_3, A_4, A_5, A_6, B_{0s}, B_{0l}, R_0, σ_0 et $\dot{\epsilon}_0$. Les constantes obtenues de l'identification sur 4 essais CSR (CSR-1 à CSR-4), 3 essais de fluage (F-1, F-3 et F-4) et 3 essais de relaxation (R-1, R-3 et R-4) sont fournies au tableau 6.7. Ces essais ont été décrits en détails à la section 4.2.1 et au tableau A-1. À noter que comme ces essais ne contiennent pas de résultats permettant une distinction explicite entre les composantes isotropes et cinématique d'écrouissage, les valeurs relatives de $\mathbf{B}_{0s}$, B_{0l}, et R_0 ont été évaluées en considérant les bornes estimées à partir des essais cycliques effectués par l'auteur (voir sections 6.2.1 et 6.2.4).

Les résultats des comparaisons entre les simulations et les essais de laboratoire sont montrés aux figures 6.15 à 6.24. Chacune de ces figures est composée de deux parties. La partie supérieure présente la comparaison entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique avec les constantes optimisées. La partie inférieure présente en plus du résultat global simulé, les différentes courbes d'évolution des variables internes. $\mathbf{B}_s$, $\mathbf{B}_l$, R et K au cours de l'essai.

On remarque que l'essai CSR-1 (figure 6.15) est bien reproduit sur toute la plage de déformation. Les constante utilisées indiquent une prédominance de l'écrouissage cinématique: les contributions de $\mathbf{B}_s$ et $\mathbf{B}_l >> R$. On remarque très clairement pour cet essai l'avantage d'utiliser deux variables cinématiques. La variable $\mathbf{B}_s$ peut saturer rapidement. La variable $\mathbf{B}_l$ qui croît plus lentement devient éventuellement la plus importante. En ce qui concerne l'évolution de la variable R, son importance

est faible et son évolution uniforme et quasi-linéaire dans la plage des conditions de cet essai.

L'essai CSR-2 montré à la figure 6.16 est un essai intéressant, caractérisé par une variation subite du taux de déformation de $8.7 * 10^{-6}\ s^{-1}$ à $8.3 * 10^{-8}\ s^{-1}$, soit un ralentissement subit du taux de déformation (transition imposée en fonction du niveau de contrainte). Les résultats numériques semblent capturer assez bien le passage entre les deux taux de déformation. On remarque encore une fois l'importance de la composante cinématique à courte portée qui est celle qui réagit en restauration et permet d'obtenir la baisse du niveau de contrainte déviatorique. Les autres variables sont quant à elles peu affectées lors du décrément de $\dot{\epsilon}$.

De façon analogue, l'essai CSR-3 montré à la figure 6.17 est caractérisé par une hausse subite du taux de déformation de $8.3 * 10^{-8}\ s^{-1}$ à $8.7 * 10^{-6}\ s^{-1}$. Le résultat numérique capture un peu plus difficilement le passage entre les deux taux de déformation, mais l'approximation peut tout de même être considérée comme bonne. La composante cinématique à courte portée $\mathbf{B}_s$ est encore celle qui réagit le plus à cette excitation. Les autres variables sont aussi peu affectées. On remarque par ailleurs une sensibilité accrue de la variable $\mathbf{B}_l$.

Dans ces 2 essais CSR avec $\Delta\dot{\epsilon}$, on constate aussi l'effet de mémoire court-terme, qui s'exprime via la valeur de saturation dans la composante dynamique de l'écrouissage des VEI. Elle se superpose aux effets à plus long terme via la restauration statique lorsque l'on s'approche d'un état stationnaire.

L'essai CSR-4 (voir figure 6.18) qui est environ 100 fois plus lent que l'essai CSR-1 est bien représenté par la simulation numérique avec les constantes utilisées. Comme on peut le voir à la figure 6.18, le mêmes commentaires peuvent s'appliquer à cet essai que ceux énoncés pour CSR-1: bonne reproduction des résultats expérimentaux, forte composante cinématique, saturation rapide de $\mathbf{B}_s$ et faible évolution de la variable K. La croissance de K est mineure au cours de cet essai et des précédents, suggérant que cette variable aurait pu être maintenue constante sans que ne soient trop affectés les

résultats observés. Cela rendrait toutefois impossible l'expression univoque de l'état stationnaire, centrale au modèle SUVIC.

Les résultats en fluage montrés aux figures 6.19 à 6.21 contrastent fortement avec les résultats des essais CSR précédents. L'essai fluage 4 (F-4) (voir figure 6.19) montre néanmoins la bonne concordance entre la simulation et les résultats expérimentaux incluant des phases de chargement incrémental et de déchargement décrémental. Comme on le sait, très peu de modèles sont en mesure de bien décrire le fluage suite au déchargement partiel des éprouvettes. On remarque au suivi des variables internes que l'influence de l'écrouissage cinématique diminue progressivement au cours de l'essai. On peut aussi observer des quantités non négligeables de restauration à la fois pour les variables $\mathbf{B}_s$ et $\mathbf{B}_l$. L'écrouissage isotrope associé aux variables R et K augmente progressivement au cours de l'essai. Contrairement aux essais CSR, il ne serait pas possible pour ce type d'essai de maintenir la variable K constante.

Les mêmes commentaires peuvent être émis au sujet de l'essai fluage 3 (F-3) (voir figure 6.20). L'influence des variables internes isotropes R et K est ici moindre que pour l'essai F-4. De façon similaire, la réponse lors de la variation subite de la contrainte appliquée se fait surtout sentir dans le comportement des variables cinématiques.

L'essai fluage 1 (F-1) (voir figure 6.21) montre pour les essais de fluage la plus grande erreur relative et le plus grand écart entre la courbe simulée et la courbe expérimentale. Les constantes utilisées tendent à sous estimer l'écrouissage pour cet essai ayant le déviateur le plus faible des trois (5.0 MPa). Cette différence peut s'expliquer, tel que vu précédemment, par le fait que la technique pour estimer les constantes tend à être plus approximatives pour les faibles contraintes et déformations (car la valeur de $h_0 \approx A_{L_s} + A_3$ est déterminée à une valeur faible mais non nulle de $\boldsymbol{\epsilon}^i$).

Les essais de relaxation sont montrés aux figures 6.22 à 6.24.

Une bonne représentation est observée à la figure 6.22 pour l'essai de rela-

xation 4 (R-4). La tendance est surtout contrôlée par la restauration de la variable cinématique $\mathbf{B}_s$. On remarque toutefois un léger écrouissage de la variable $\mathbf{B}_l$ et très peu de variation des variables isotropes R et K.

La simulation de l'essai de relaxation 3 (R-3) (voir figure 6.23) est supérieure à la précédente. On remarque que la tendance est bien capturée essentiellement par la restauration de la variable cinématique $\mathbf{B}_s$. On remarque aussi un léger écrouissage de la variable $\mathbf{B}_l$ et très peu de variation des variables isotropes R et K.

La figure supérieure 6.24 présente les résultats de la simulation pour l'essai de relaxation 1 (R-1). On remarque que suite au préchargement hydrostatique, l'ajustement se fait essentiellement avec la variable interne cinématique $\mathbf{B}_s$ qui accommode l'essentiel de la relaxation. La simulation de cet essai de relaxation est la moins bonne des trois et de façon similaire au fluage, il s'agit de l'essai au niveau de contrainte le plus faible.

On peut donc remarquer pour les essais de relaxation, la bonne concordance des essais de laboratoire et des essais numériques pour la série de constantes utilisées, malgré le fait que ces essais soient reconnus comme difficiles à reproduire numériquement.

Les valeurs des constantes obtenues pour ces identifications permettent de faire les observations suivantes:

- la variable σ_0 a été laissée libre de varier. La valeur de 9.15 obtenue, est inférieure à la valeur moyenne précédemment obtenue sur divers sels ($\sigma_0 =$ 15.08 voir tableau 6.6);

- la constante R_0 est moins grande qu'estimée originalement, impliquant que la composante cinématique est plus importante, ce qui avait été prévu précédemment. En fait, on obtient $B_{0s} = 1.47 < R_0 = 3.04 < B_{0l} = 3.37$ indiquant que l'écrouissage cinématique à longue portée $\mathbf{B}_l$ devrait saturer à une valeur plus importante que $\mathbf{B}_s$ et R (aussi $R_0 < B_{0s} + B_{0l}$);

Tableau 6.7: Constantes pour le sel d'Avery Island telles qu'obtenues des identifications sur les résultats d'essais de Senseny et al. 1993.

Jeu de constantes - Sel Avery Island					
Constante	Valeurs		Constante	Valeurs	
E	31.0	GPa	μ	0.38	
A	$1.8 * 10^{-6}$	s^{-1}			
A_{1s}	20395.1	MPa	A_{1l}	1218.2	MPa
A_3	95.4	MPa	A_5	26.7	MPa
B_{0s}	1.47	MPa	B_{0l}	3.37	MPa
K_0	1.0	MPa	m	1.0	
N	4		R_0	3.04	MPa
σ_0	9.15	MPa	$\dot{\epsilon}_0$	$0.014 * 10^{-9}$	s^{-1}
A_{2s}	$1.0 * 10^{-3}$	$MPa\ s^{-1}$	A_{2l}	$0.46 * 10^{-15}$	s^{-1}
A_4	$4.7 * 10^{-9}$	$MPa\ s^{-1}$	C	1	MPa
A_6	$0.054 * 10^{-12}$	$MPa\ s^{-1}$	$p = q = u$	2	
x_r	1		x_b	1	
x_k	1		n	3.0	

- la grandeur de a estimée au départ était de 0.9, on remarque que $B_{0s} + R_0 + B_{0l} = 7.88 \Rightarrow a = \frac{B_{0s}+R_0+B_{0l}}{\sigma_0} = 0.86$, ce qui est représentatif de ce qui était attendu;

- la variable A_{1s} est plus importante que A_{1l} et A_3, ce qui est conséquent avec le fait que la variable $\mathbf{B}_s$ varie rapidement au début de l'essai. La variable cinématique $\mathbf{B}_l$ croit plus lentement et elle sature à un niveau plus élevé.

- la variable $\dot{\epsilon}_0 = 0.135 * 10^{-10}$ est plus faible que l'estimé original $9.4 * 10^{-10}$ obtenu en combinant toutes les données disponibles pour le sel d'Avery Island.

De façon plus spécifique, pour les essais CSR, les résultats montrés aux figures 6.15 à 6.18 indiquent que:

- la variable $\mathbf{B}_s$ sature relativement rapidement;

- les contributions des variables isotropes sont relativement mineures par rapport

aux variables cinématiques;

- la variable cinématique $\mathbf{B}_l$ est la plus influente à long terme;
- la restauration statique agit plus fortement sur la variable $\mathbf{B}_s$;
- une variation subite du taux de déformation a un effet plus prépondérant sur la variable $\mathbf{B}_s$.

Pour les essais de fluage, les figures 6.19 à 6.21 impliquent que:

- la variable $\mathbf{B}_s$ sature pendant ou peu après la phase de chargement et elle commence à subir de la restauration statique dans la phase de fluage;
- la variable R croît lentement mais dépasse éventuellement la variable $\mathbf{B}_s$ pour les essais à déviateurs $\mathbf{S} = 10, 15\ MPa$ (compte tenu de la restauration statique observée);
- les variables cinématiques tendent à réagir plus fortement à une variation subite du déviateur.

Pour les essais de relaxation, on remarque aux figures 6.22 à 6.24 que:

- la variation de la variable interne $\mathbf{B}_s$ suite au déchargement est responsable en majeure partie de la variation du déviateur $\mathbf{S}$ observé.
- on observe de très légères variations des paramètres isotropes durant la phase de relaxation;
- la variable interne $\mathbf{B}_l$ subit une quantité limitée de restauration, en fait, elle continue à montrer un certain écrouissage durant les 3 essais.

Tous ces essais montrent que le modèle SUVIC, dans sa nouvelle version, est en mesure de bien représenter ces trois types d'essais aux cheminements fort différents.

C'est un objectif que peu de modèles sont en mesure d'atteindre, de l'aveu même de Senseny et al. (1993).

On peut ajouter de plus que ces résultats sont au moins, aussi bons que ceux présentés par Munson (1999). Ces résultats ont été obtenus avec un modèle jugé comme étant très bon et ayant été développé avec des moyens importants pour les programmes d'enfouissement de déchets de nucléaires aux USA. Ce modèle ne peut dans sa forme actuelle décrire simultanément des essais CSR, CRS, et de relaxation.

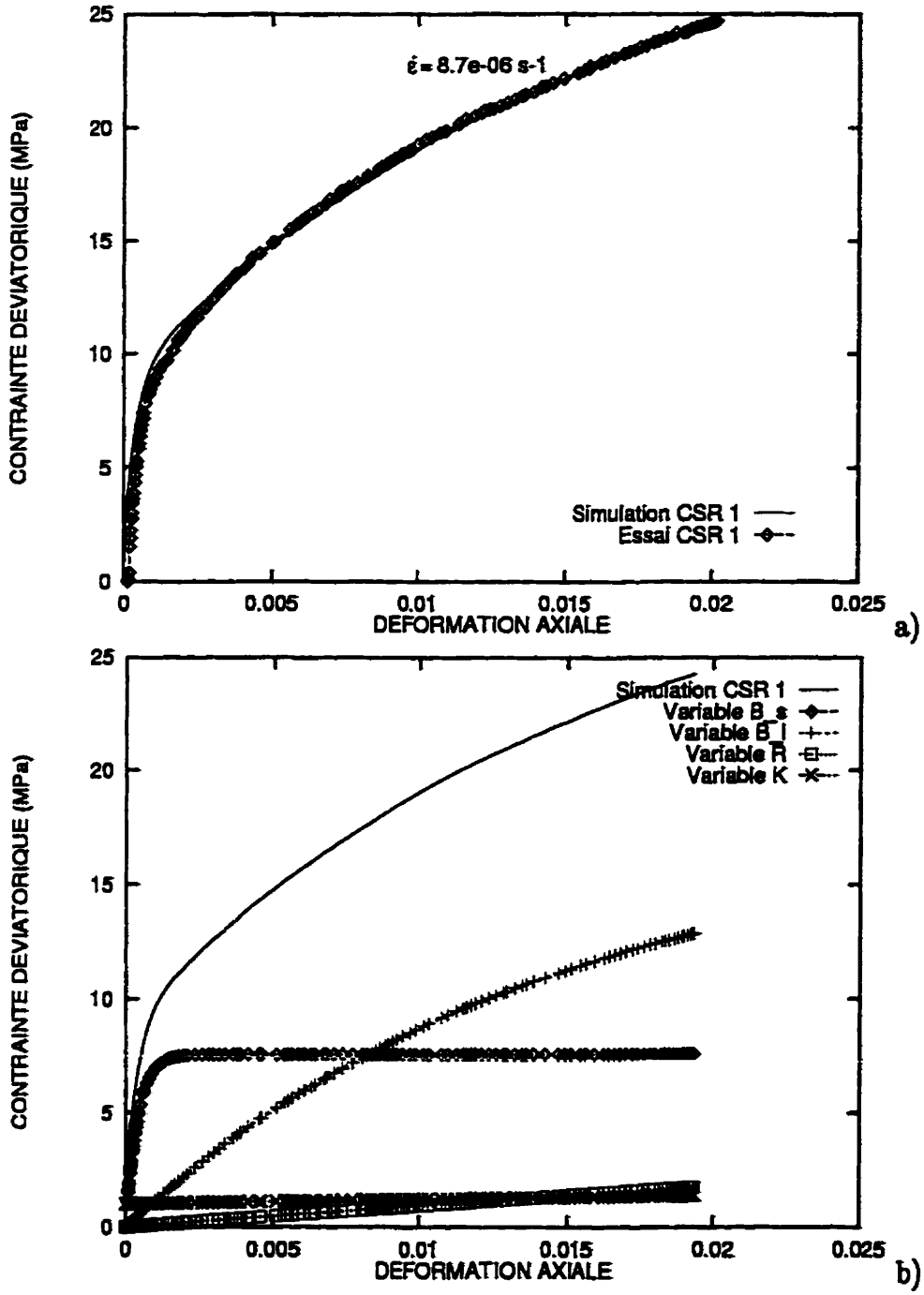


Figure 6.15: Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-1 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

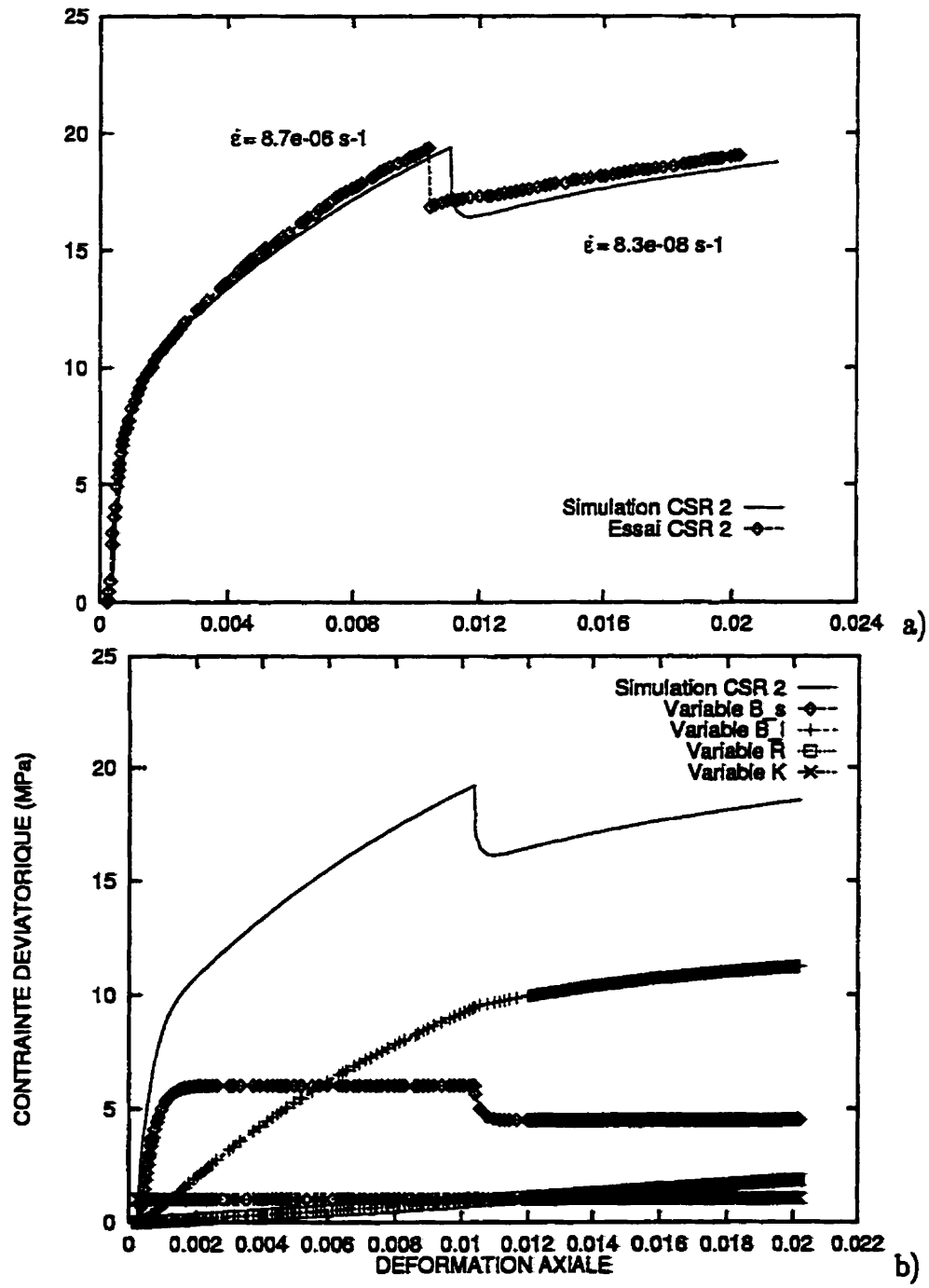


Figure 6.16: Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-2 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

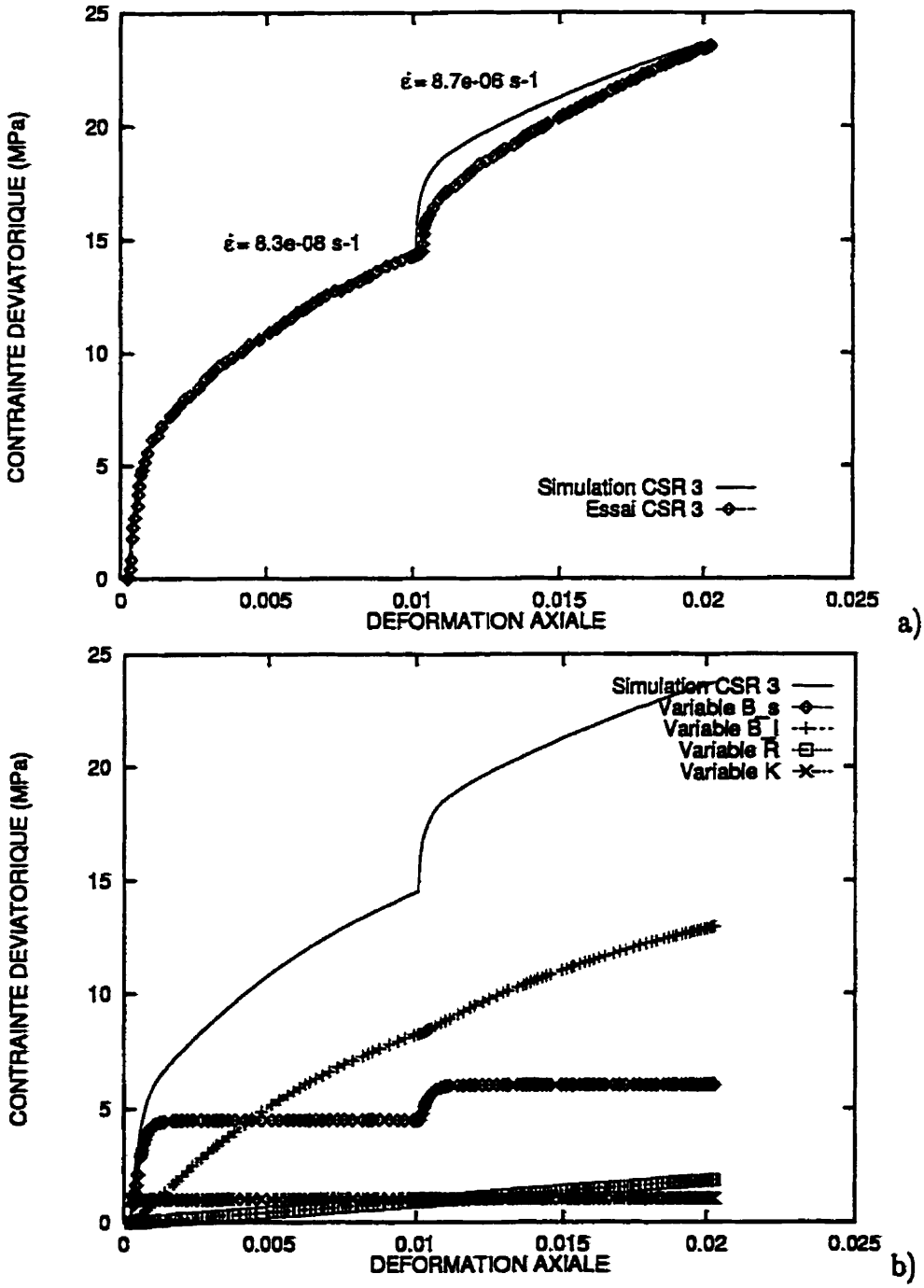


Figure 6.17: Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-3 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

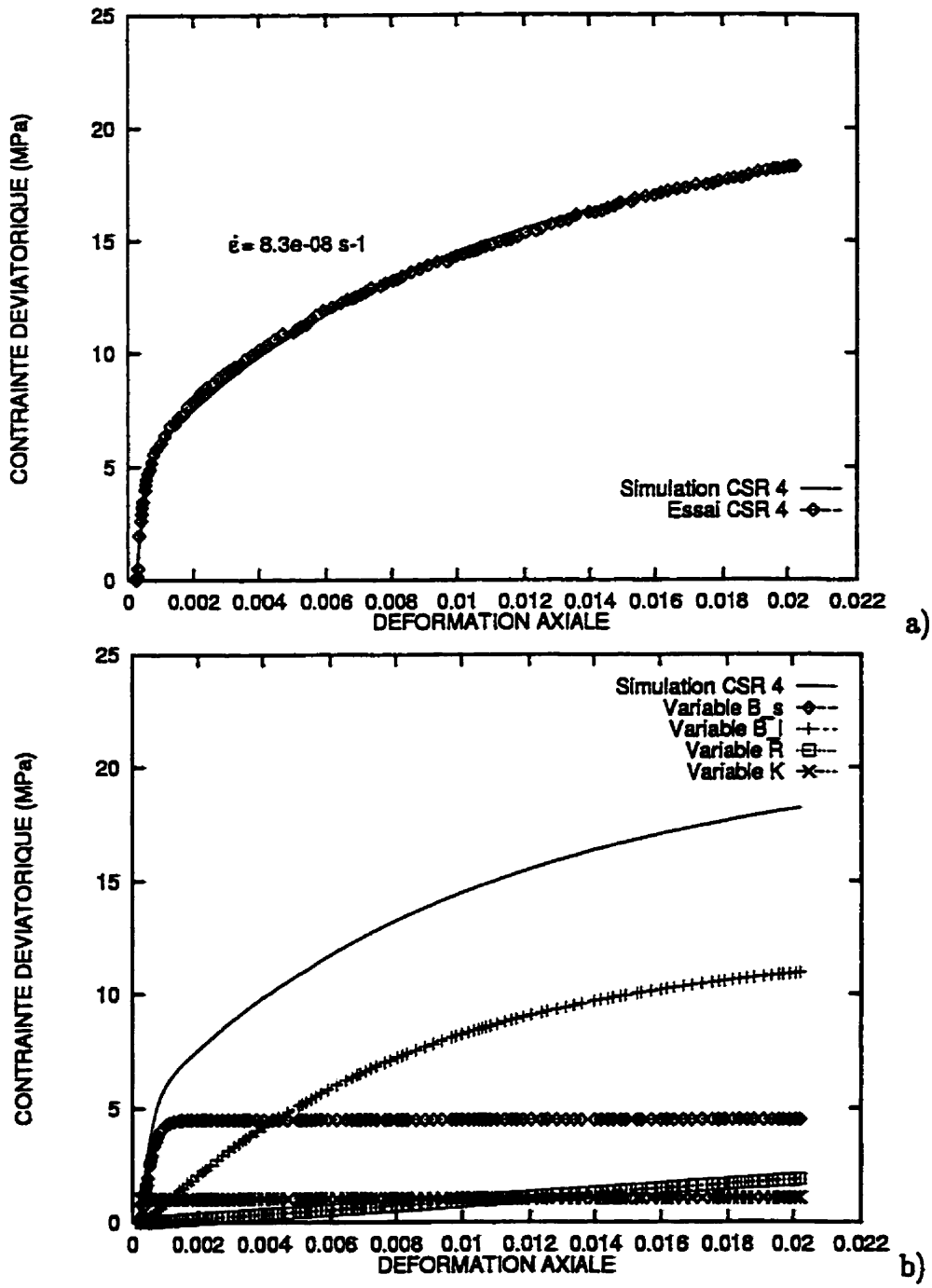


Figure 6.18: Comparaison entre la simulation de l'essai CSR-4 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

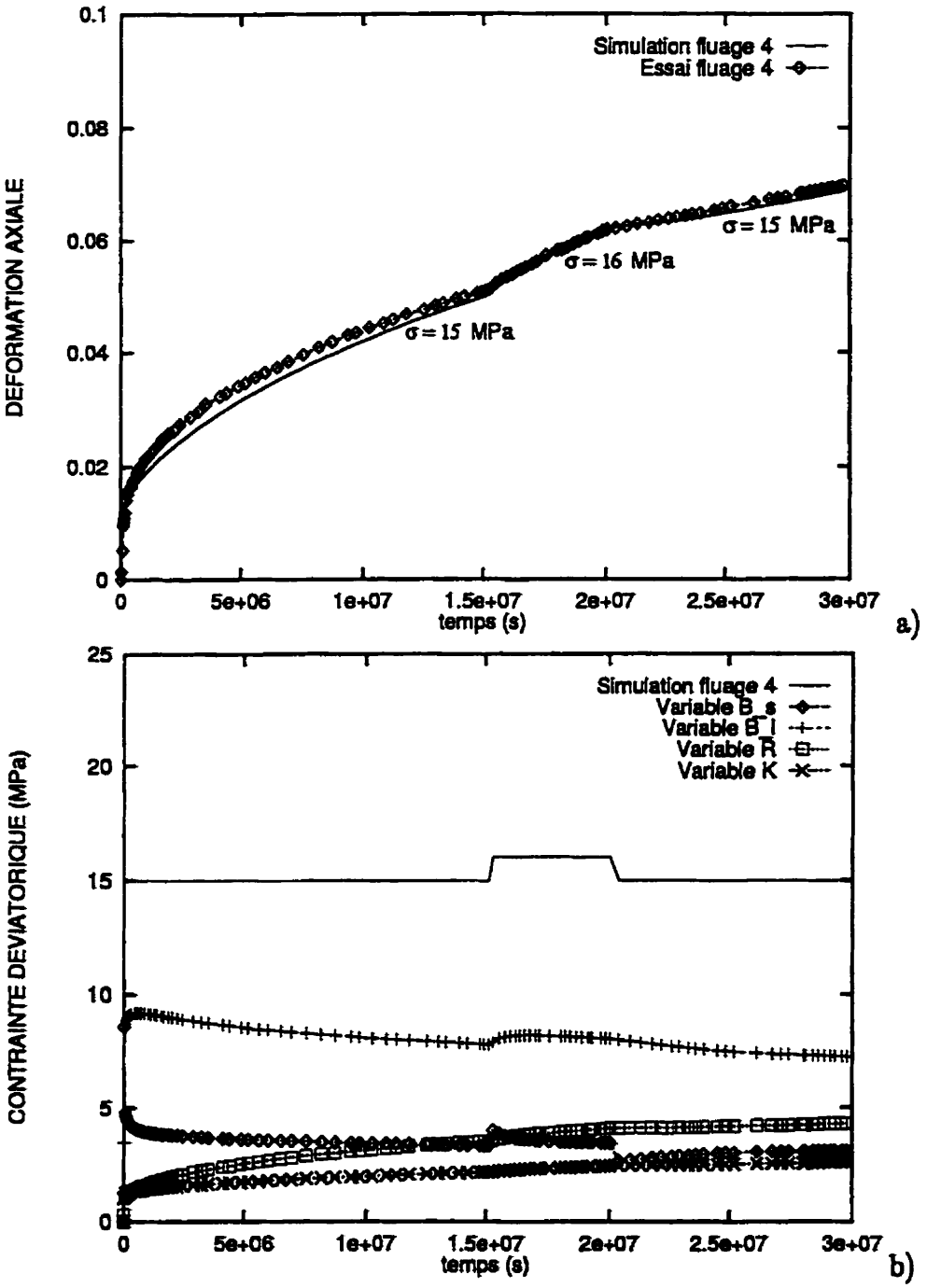


Figure 6.19: Comparaison entre la simulation de l'essai de fluage 4 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

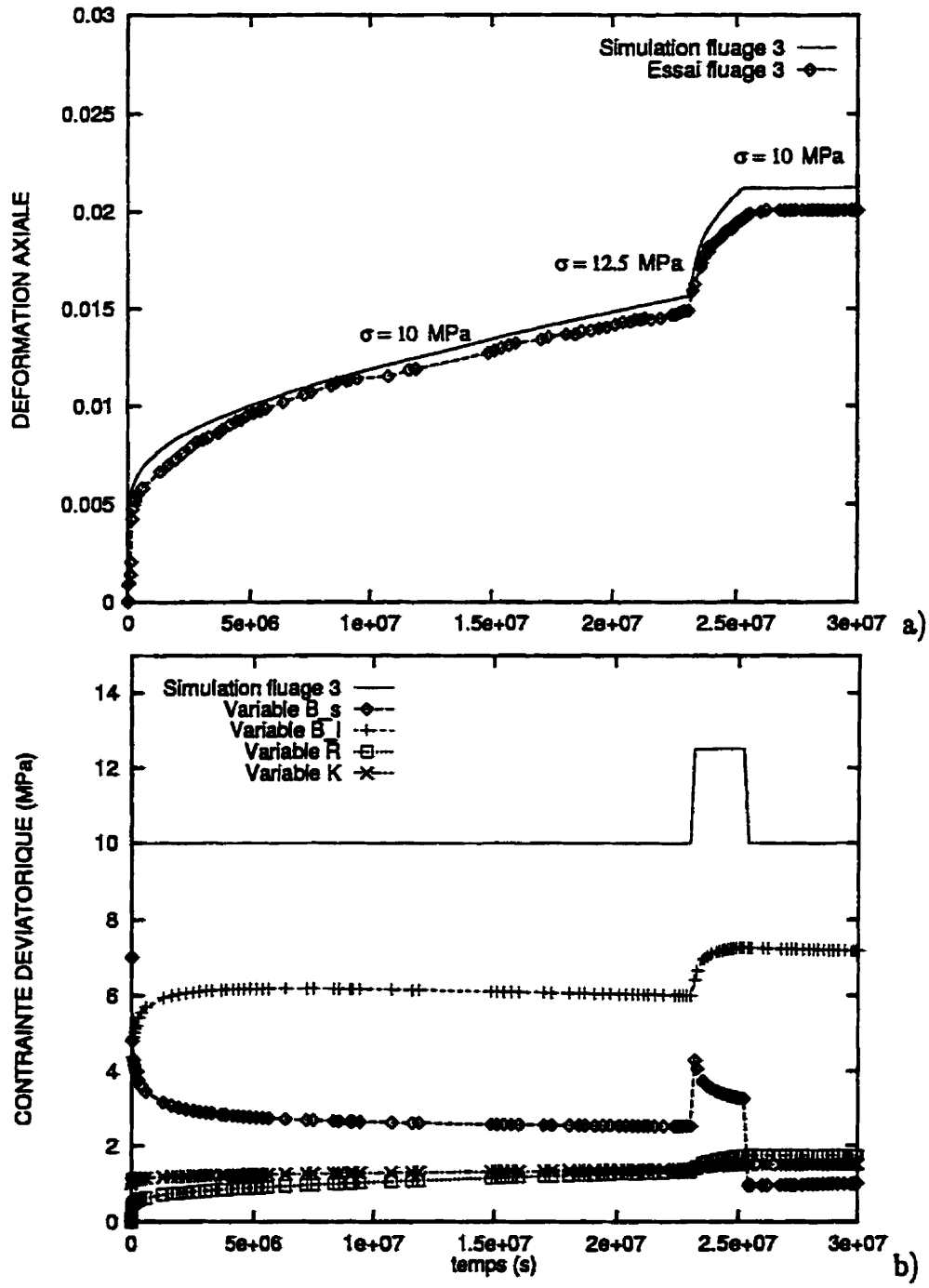


Figure 6.20: Comparaison entre la simulation de l'essai de fluage 3 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

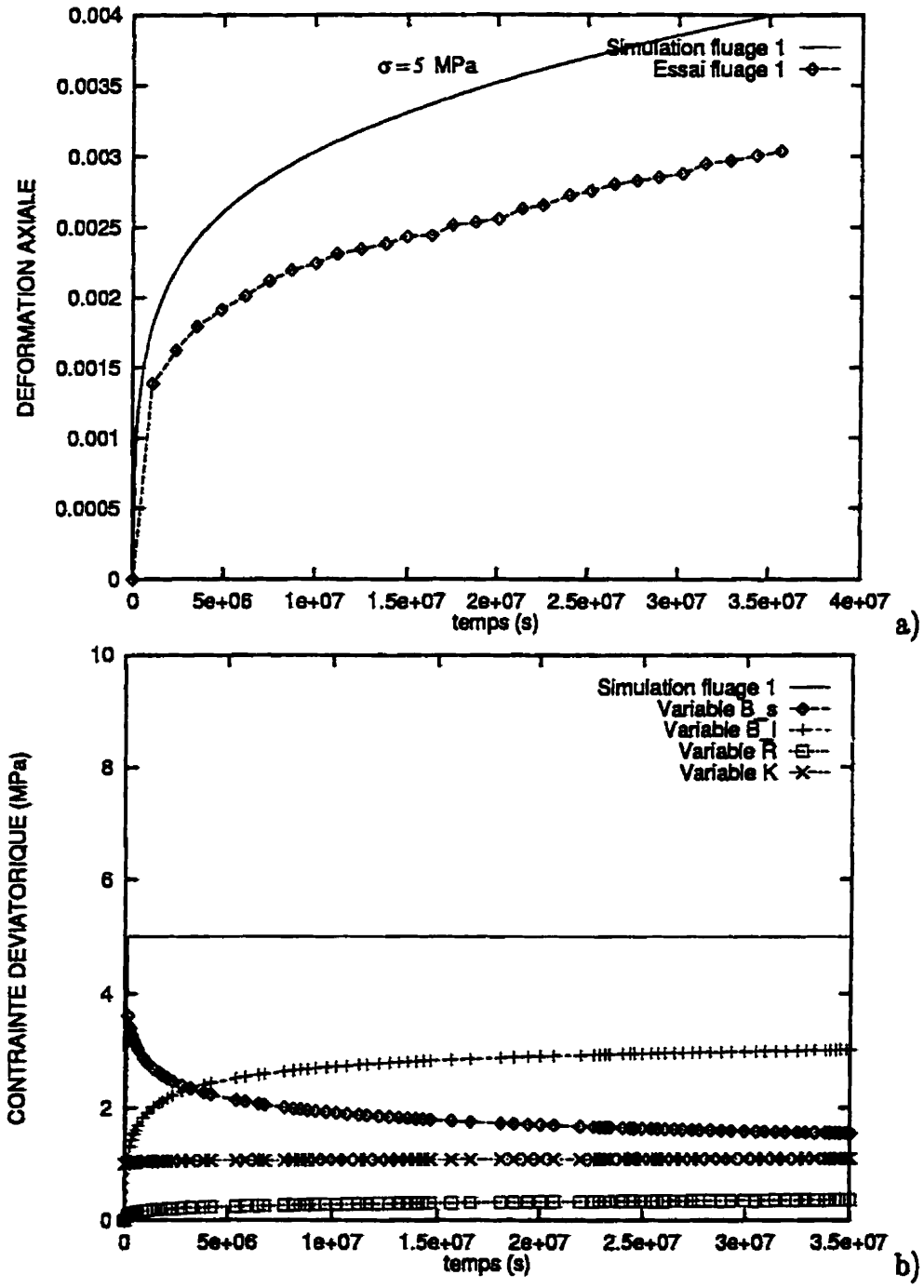


Figure 6.21: Comparaison entre la simulation de l'essai de fluage 1 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

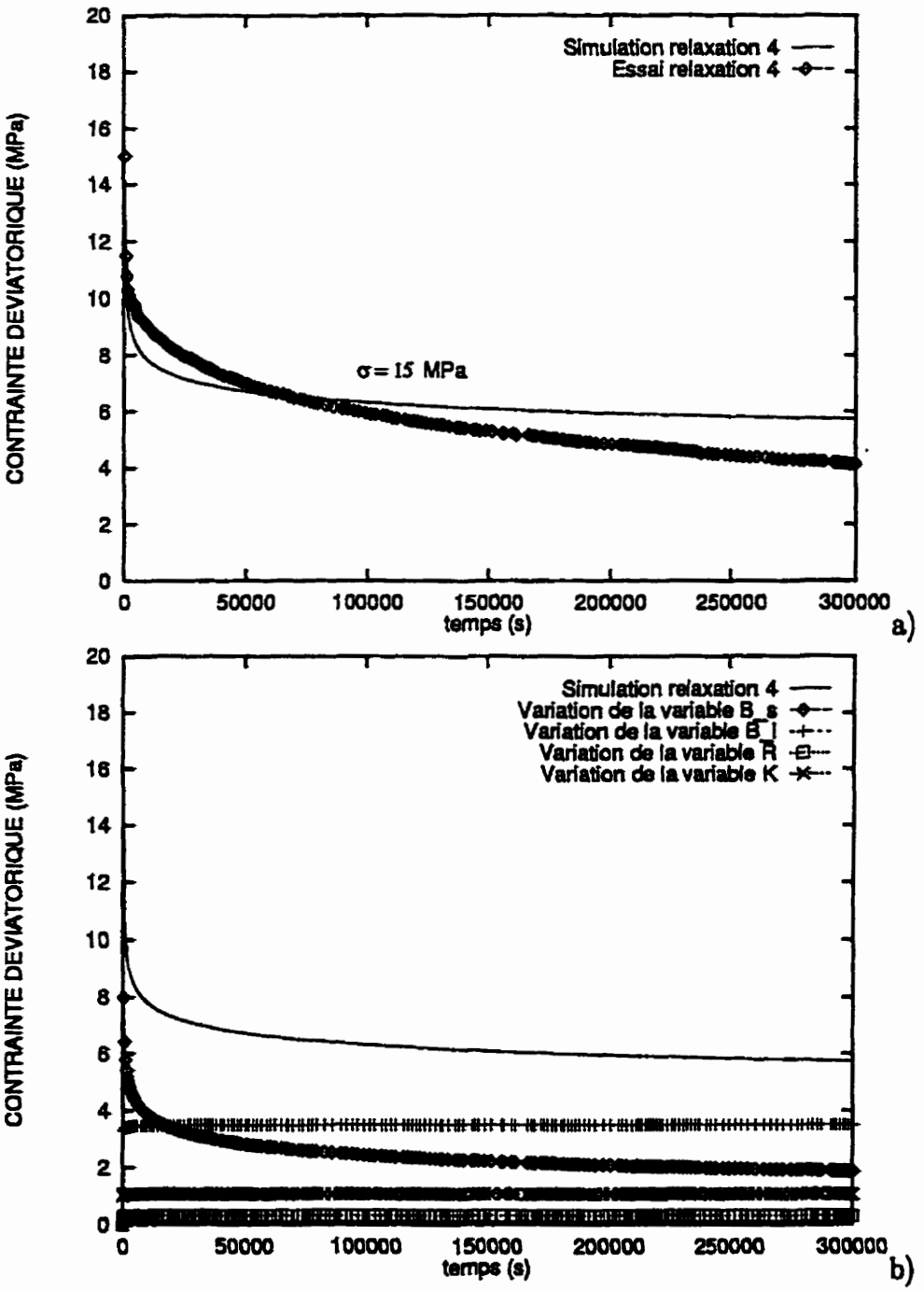


Figure 6.22: Comparaison entre la simulation de l'essai de relaxation 4 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

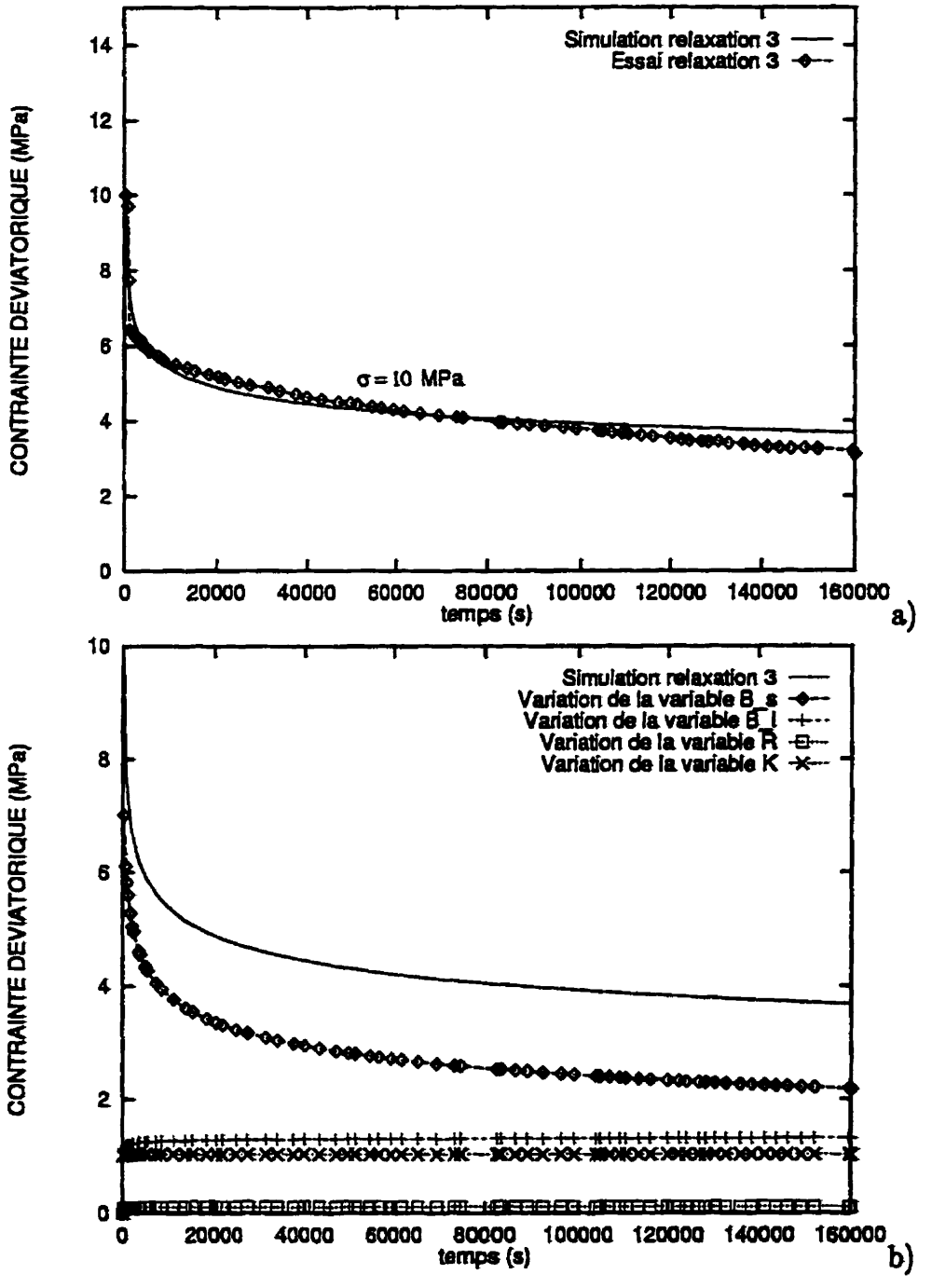


Figure 6.23: Comparaison entre la simulation de l'essai de relaxation 3 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

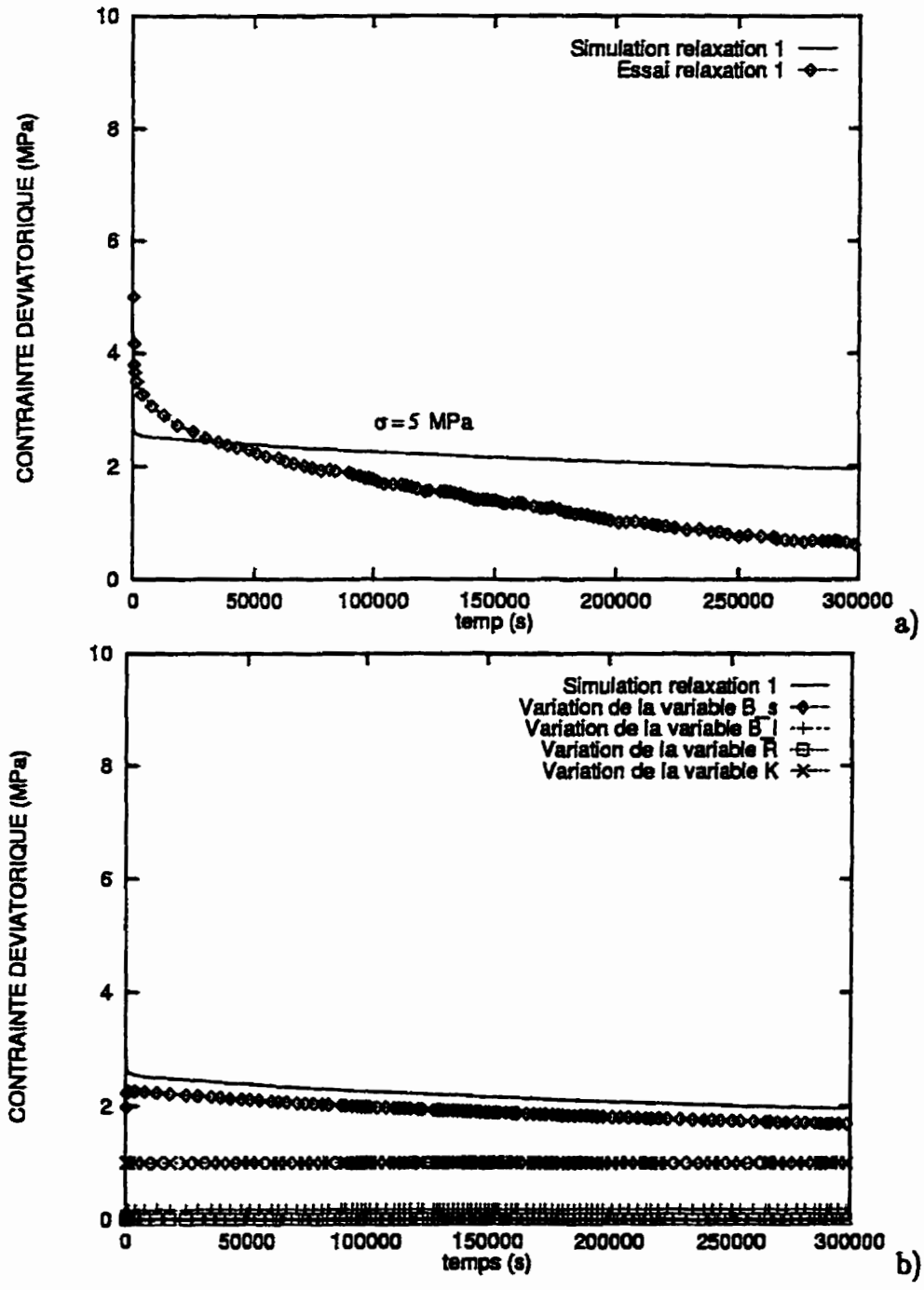


Figure 6.24: Comparaison entre la simulation de l'essai de relaxation 1 et les résultats de laboratoire de Senseny et al. (1993) en utilisant des constantes optimisées (voir le tableau A.1). La figure du bas (b) montre l'évolution des variables internes.

6.2.3 Autres essais à court et à long terme

Essais à température ambiante

Des identifications ont été réalisées pour les essais de Hansen et Mellegard (1980a) et de Mellegard et Senseny (1983). Ces essais sont traités de façon distincte compte tenu des nuances apportées au chapitre 4, notamment à cause du fait que certains d'entre eux peuvent montrer des quantités non négligeables d'endommagement. Toutefois, ces minimisations ont tout de même été réalisées afin de comparer les jeux de constantes obtenues de ces familles d'essais avec le jeu précédent donné au tableau 6.7, et surtout dans le but de déterminer certaines tendances relatives à l'effet de la température. En ce sens, ces essais réalisés chez RE/SPEC sont particulièrement intéressants puisqu'ils comprennent des résultats à diverses températures ($20-200^0\ C$). Les constantes obtenues de cet exercice de minimisation sont présentées au tableau 6.8 pour les essais à 25^o C.

Les résultats des simulations des essais à cette température sont présentés aux figures 6.27 à 6.31 pour les essais de Hansen et aux figures 6.25 et 6.26 pour les essais de Mellegard. Les constantes obtenues diffèrent quelque peu de celles obtenues précédemment (Senseny et al. (1993); essais de l'auteur).

Les constantes obtenues sont caractérisées par le fait que l'écrouissage cinématique croît encore plus rapidement qu'observé pour les essais de Senseny et al. (1993). On remarque ainsi des taux de croissance plus rapides pour les variables internes cinématiques $\mathbf{B}_s$ et $\mathbf{B}_t$. Toutefois, les proportions des variables isotropes et cinématiques à saturation sont comparables à ce qui a été observé précédemment.

La figure 6.25 montre une comparaison entre la simulation et les résultats expérimentaux pour les essais 24-1, 24-2 et 24-5. Tous ces essais sont réalisés à un déviateur $S = 10.3$ MPa et des contraintes de confinement différentes. Étant donné que le modèle viscoplastique n'est pas affecté par la contrainte moyenne, les résultats des simulations numériques se surimposent. Les constantes utilisées satisfont de façon

Tableau 6.8: Constantes optimisées obtenus pour le modèle SUVIC à une température de 25° C pour les essais de Hansen et Mellegard (1980a) et Mellegard et al. (1983).

constante	Hansen 80	Mellegard 83	unités
E	30500.	30500.	GPa
μ	0.25	0.25	
N	4.0	4.0	
σ_0	15.08	15.08	MPa
n	3.0	3.0	
$\dot{\epsilon}_0$	$0.021 * 10^{-9}$	$0.31 * 10^{-9}$	s^{-1}
m	1.00	1.00	
A	$0.081 * 10^{-6}$	$0.081 * 10^{-6}$	s^{-1}
A_{1s}	15828.12	9403.92	MPa
A_{1l}	1251.44	1461.95	MPa
B_{0s}	2.22	1.11	MPa
B_{0l}	3.36	4.24	MPa
A_3	102.70	244.82	MPa
R_0	6.36	8.50	MPa
A_5	56.63	50.28	MPa
K_0	1.00	1.00	MPa
A_{2s}	$2.0 * 10^{-9}$	$74. * 10^{-9}$	$MPa\ s^{-1}$
A_{2l}	$3.7 * 10^{-6}$	$0.30 * 10^{-6}$	$MPa\ s^{-1}$
A_4	$0.86 * 10^{-6}$	$0.77 * 10^{-6}$	$MPa\ s^{-1}$
A_6	$2.3 * 10^{-9}$	$21. * 10^{-9}$	$MPa\ s^{-1}$
C	1.00	1.00	MPa
$x_{bs} = x_{bl}$	1.	1.	
$x_r = x_k$	1.	1.	
$p = q = u$	2.	2.	

globale ces différents essais. On remarque néanmoins que les différences se situent surtout au moment de la mise en charge et que les taux de déformation se comparent bien par la suite. En ce sens, on peut considérer que le modèle décrit assez bien la phase de fluage pour ces 3 essais.

De façon équivalente, la figure 6.26 offre un comparaison entre la simulation et les résultats expérimentaux pour les essais 24-3 et 24-4 à un déviateur plus élevé S = 20.7 MPa. À nouveau, le modèle n'est pas affecté par la contrainte moyenne et une superposition des résultats est générée. Comme dans le cas précédent, on

peut apprécier, en supposant l'absence d'effets causés par la contrainte moyenne (supportée par le fait que la déformation plus faible est observée à plus faible confinement), la dispersion naturelle des résultats expérimentaux.

La figure 6.27 montre un essai de fluage (RT-1-RT-2) avec variation rapide du déviateur. Cet essai a été réalisé à faible contrainte de confinement $\sigma_{conf} = 3.5$ MPa et ne s'est pas soldé par une très bonne reproduction de l'essai expérimental.

La figure 6.28 permet de comparer les simulations pour deux essais RT-4 et RT-5 à faible contrainte de confinement S = 3.5 MPa. Malgré, la présence d'un certain endommagement pour ces essais, le modèle semble représenter assez fidèlement le comportement jusqu'à des niveaux significatifs de déformation. Les résultats de Sgaoula (1997) montrent toutefois que l'endommagement du sel en fluage augmente lentement à faible déviateur, ce qui expliquerait cette bonne corrélation.

Les figures 6.29 (essai RT-6,RT-7 et RT-8), 6.30 (essai RT-9 et RT-10), et 6.31 (essai RT-12 et RT-13) montrent également des comparaisons entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux d'essais de fluage par paliers (avec les phases de chargement). On remarque qu'en général, le modèle semble bien décrire les phases transitoires lors des variations de contrainte. On peut aussi apprécier l'effet de la variabilité du matériau (en considérant que l'effet de l'endommagement est pratiquement négligeable).

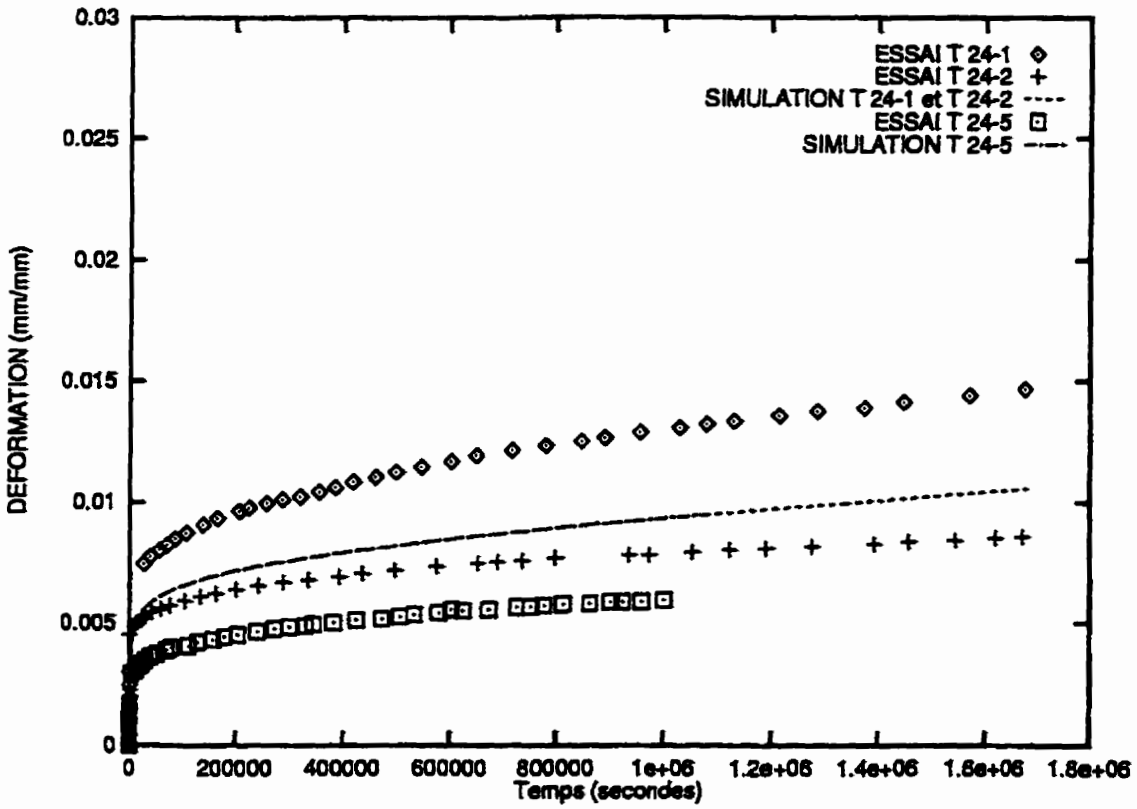


Figure 6.25: Simulations des essais 24-1, 24-2 et 24-5 réalisés à $T = 25°$ C, $\mathbf{S} = 10.3\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Mellegard et al. (1983)). Les contraintes de confinement sont $\sigma_{conf} = \{13.8, 3.4, 20.7\}\ MPa$ pour 24-1,24-2 et 24-5. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{24.0, 11.6, 30.8\}\ MPa$ pour 24-1,24-2 et 24-5 impliquant que les 3 essais sont sous le seuil d'endommagement.

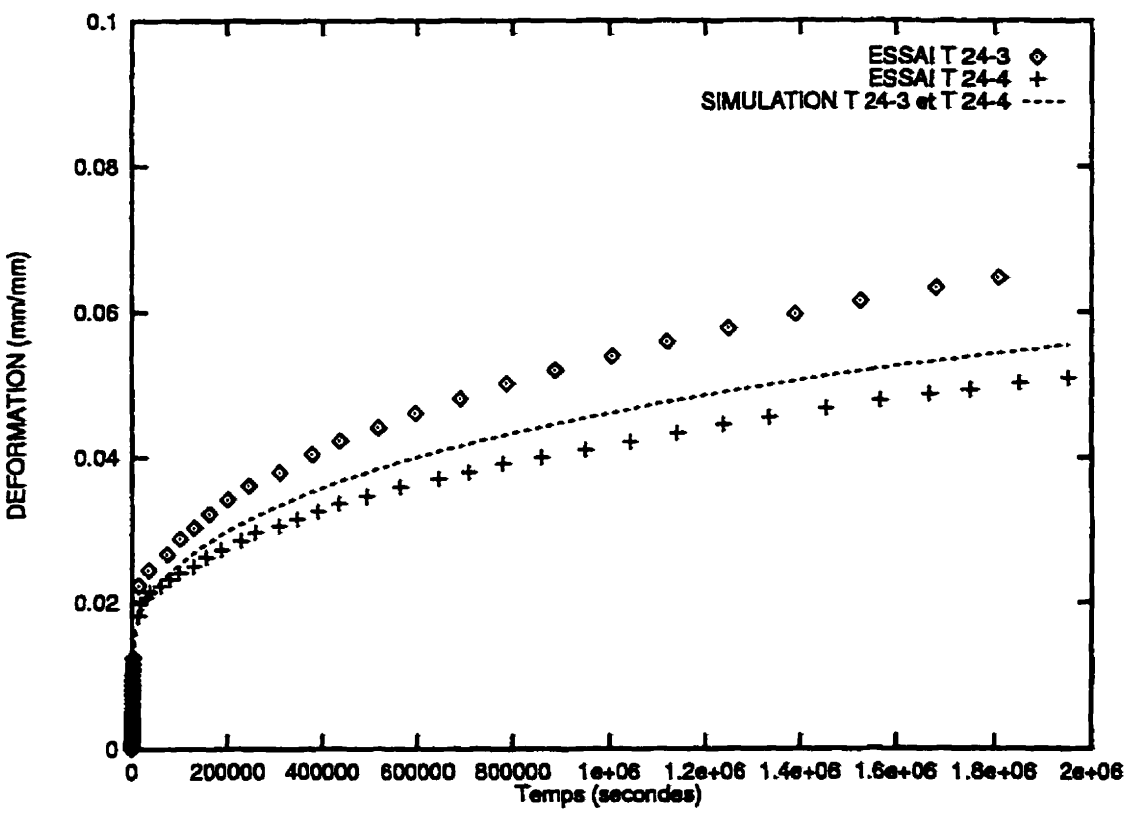


Figure 6.26: Simulations des essais 24-3 et 24-4 réalisés à $T = 25^o$ C, $\mathbf{S} = 20.7\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Mellegard et al. (1983)). Les contraintes de confinement sont $\sigma_{conf} = \{13.8, 3.4\}\ MPa$ pour 24-3 et 24-4. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{24.1, 16.1\}\ MPa$ pour 24-3 et 24-4 impliquant que ce dernier essai serait un peu au-dessus du seuil.

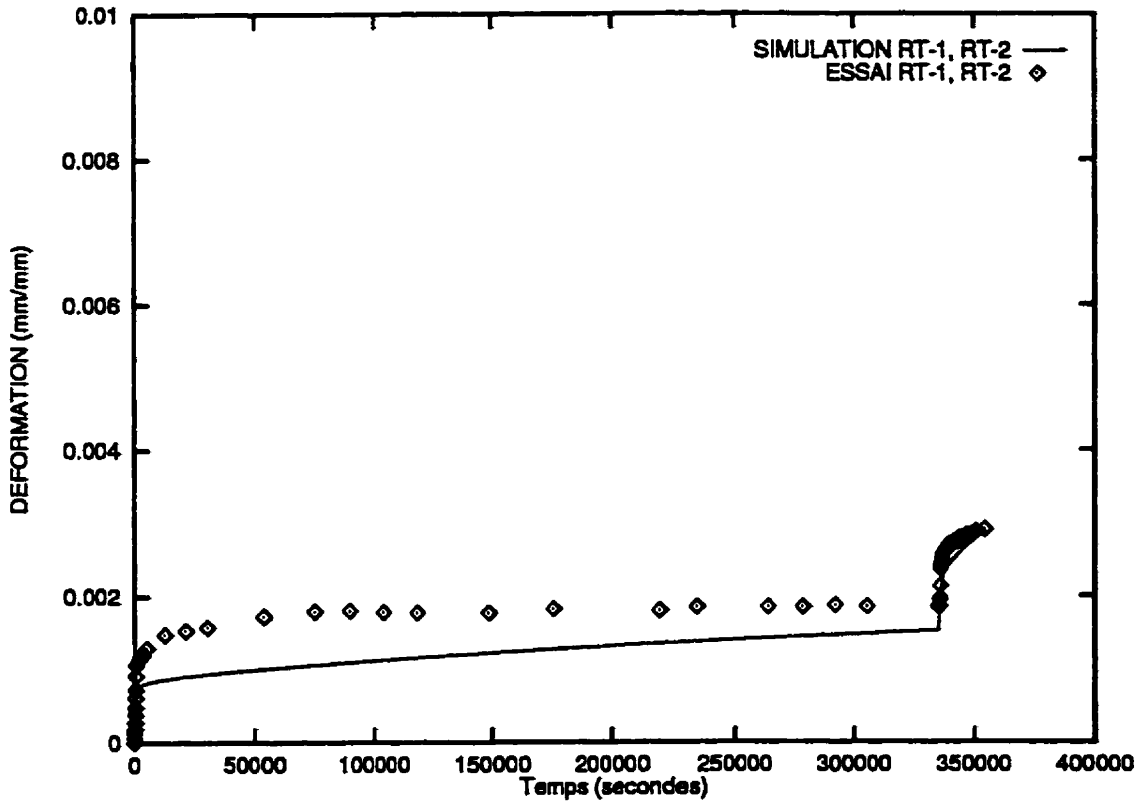


Figure 6.27: Simulation pour l'essai par palier RT-1-RT-2 réalisé à $T = 25^o$ C, $\mathbf{S} = \{6.9, 10.3\}\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{3.5\}\ MPa$. Le seuil d'endommagement est $\mathbf{S}_{seuil} = \{11.7\}\ MPa$ impliquant que l'essai est totalement sous le seuil d'endommagement.

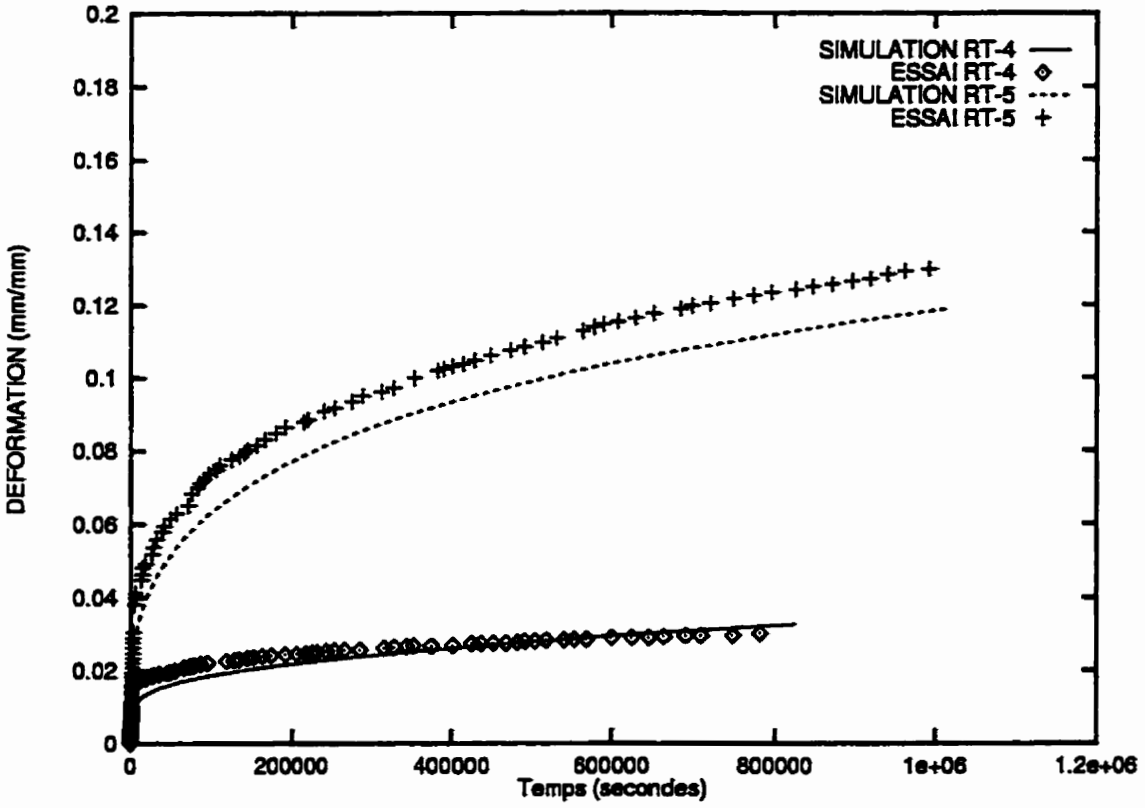


Figure 6.28: Simulation des essais RT-4 et RT-5 réalisés à $T = 25^o$ C, $\mathbf{S} = \{20.7, 31.0\}\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ pour RT4 et RT5 respectivement (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{3.5\}\ MPa$. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{16.2, 20.2\}\ MPa$ impliquant que les 2 essais sont au-dessus du seuil d'endommagement.

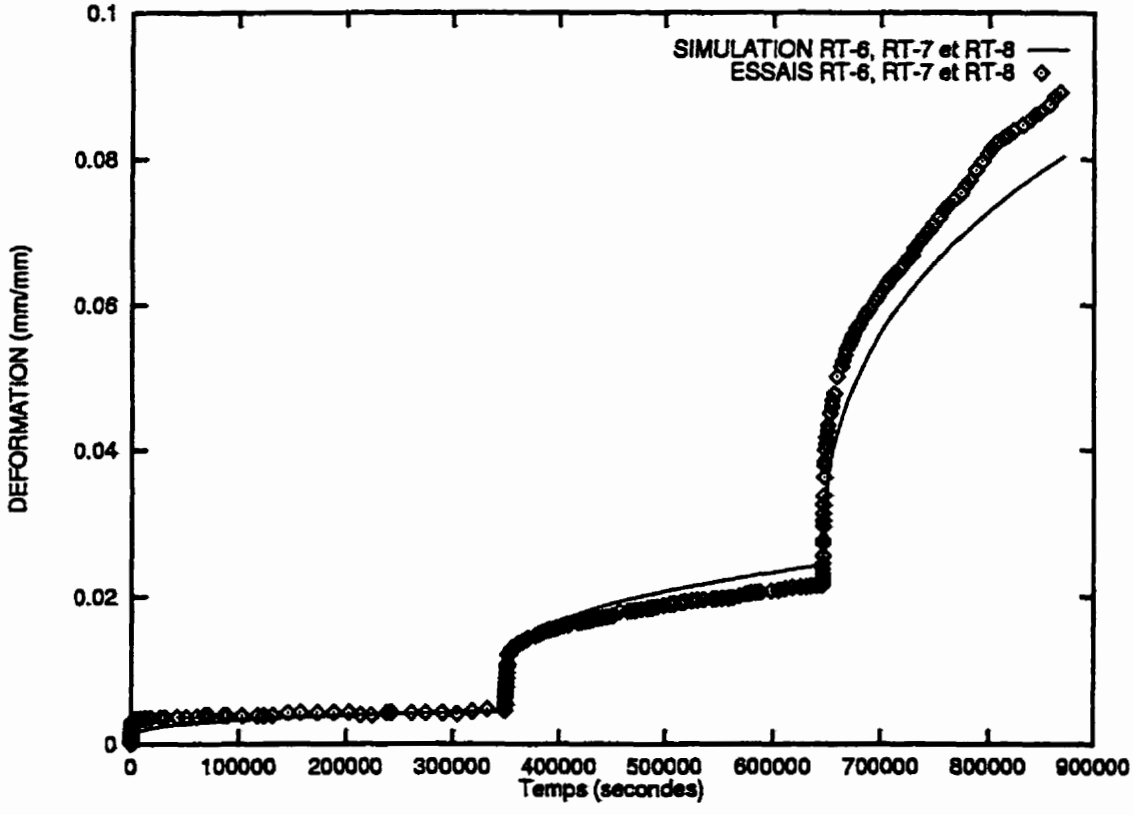


Figure 6.29: Simulation pour l'essai par palier RT-6-RT-7-RT-8 réalisé à $T = 25°$ C, $\mathbf{S} = \{10.3, 20.7, 31.0\}\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{3.5\}\ MPa$. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{11.7, 16.2, 20.3\}\ MPa$ impliquant que seul le premier palier est sous le seuil d'endommagement.

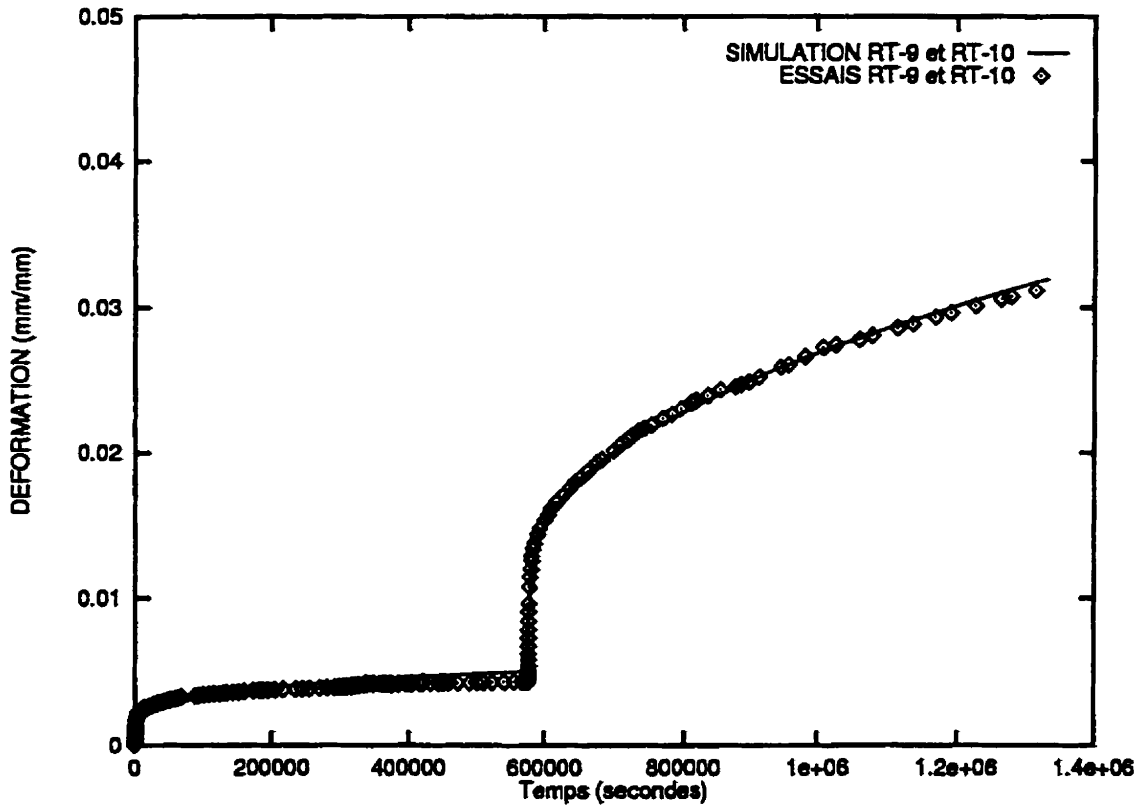


Figure 6.30: Simulation pour l'essai par palier RT-9-RT-10 réalisé à $T = 25°$ C, $\mathbf{S} = \{10.3, 20.7\}\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{6.9\}\ MPa$. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{16.1, 20.3\}\ MPa$ impliquant que seul le premier palier est sous le seuil d'endommagement.

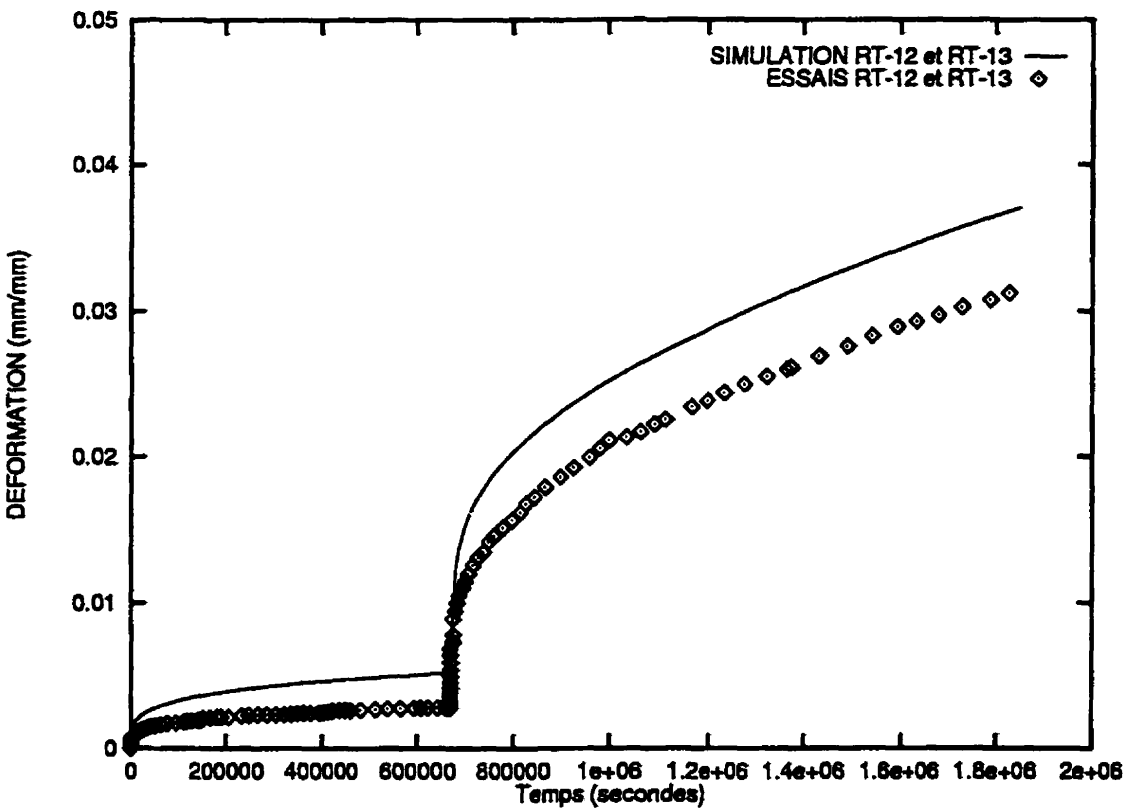


Figure 6.31: Simulation pour l'essai par palier RT-11-RT-12 réalisé à $T = 25°$ C, $\mathbf{S} = \{10.3, 20.7\}\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 0.011\ MPa/s$ (source Hansen et Mellegard et al. (1980)). La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = \{20.7\}\ MPa$. Les seuils d'endommagement sont $\mathbf{S}_{seuil} = \{20.2, 30.8\}\ MPa$ impliquant que les 2 paliers sont sous le seuil d'endommagement.

Étude de sensibilité sur la valeur des constantes

Avant d'aller plus loin dans les identifications à différentes températures, il s'est révélé intéressant d'évaluer l'effet de la valeur des constantes utilisées pour les simulations numériques. On a ici considéré deux cas extrêmes: une série de constantes obtenue seulement d'essais de courtes durées (ex.: essais CSR de l'auteur) et une série obtenue seulement d'essais de longues durées (ex.: essais de fluage de Hansen et Mellegard (1980a)).

On peut ainsi comparer l'effet du jeu de constantes obtenu des essais de Hansen et Mellegard (1980a) (tableau 6.8) à celui présenté au tableau 6.6 obtenu des essais de l'auteur. Les figures 6.32 et 6.33 permettent de comparer ceci pour un essai CSR et un essai de fluage.

À la figure 6.32, les résultats de l'essai CSR jul07 sont comparés avec les résultats obtenus avec deux séries de constantes. On remarque que les deux séries de constantes permettent d'obtenir des résultats globalement comparables pour ce type de chargement. Les constantes des essais de Hansen et Mellegard (1980a) procurent une assez bonne prédiction de l'essai jul07, mais sous-estiment globalement le niveau d'écrouissage.

Par ailleurs, à la figure 6.33, une prédiction est tentée pour un essai de fluage par paliers (RT-6,RT-7 et RT-8) avec les constantes issues des essais de l'auteur. On remarque que ces constantes sous-estiment largement la déformation à long terme. Ces constantes qui généraient suffisamment d'écrouissage à l'essai précédent, ici, en génèrent trop. On peut penser que, la restauration des variables internes n'est pas suffisamment marquée, n'ayant pas été mise en évidence par les essais court terme.

Si on néglige la question de l'endommagement, cet exercice très simple permet d'illustrer un certain nombre de points:

- les simulations des essais de courtes durées (ex.: essais CSR) sont moins sensibles aux valeurs des constantes que les essais de longues durées (ex.: essais

de fluage);

- les essais de courtes durées permettent de bien définir les composantes de l'écrouissage du matériau;

- les essais de longues durées permettent de bien tenir compte des phénomènes de restauration;

- un programme d'identification basé sur des essais de laboratoire devrait contenir des essais de courtes et longues durées pour permettre un bon ajustement des constantes reliées aux effets de l'écrouissage et de la restauration;

- les essais de fluage par paliers (incrémentaux et décrémentaux) sont de bons essais pour réaliser des prédictions. De tels essais devraient idéalement être dépourvus d'endommagement (ce qui n'était pas totalement le cas ici);

- ces résultats montrent aussi, à nouveau, qu'en dépit des valeurs des constantes, le modèle décrit bien l'essentiel du comportement du matériau.

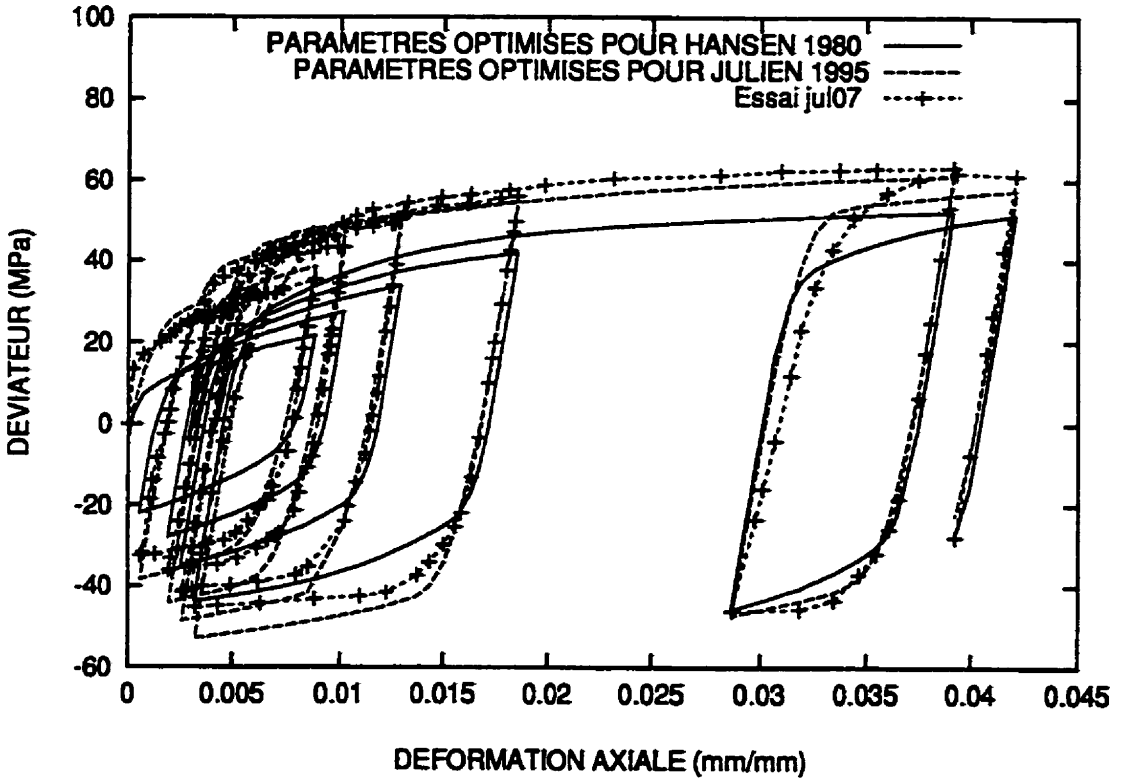


Figure 6.32: Effet du jeu de constantes lors de la simulation d'un essai CSR (jul07). Les constantes utilisées sont celles issues des essais de l'auteur (tableau 6.6) et des essais de Hansen et Mellegard 1980 (tableau 6.8).

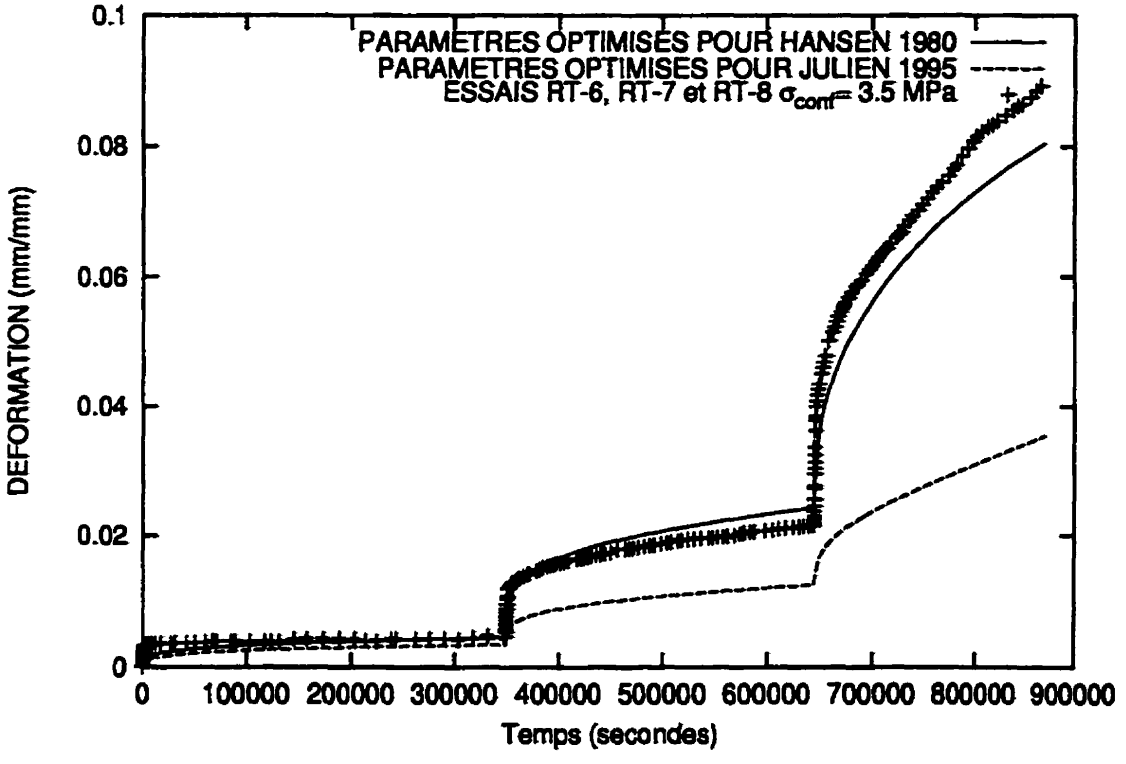


Figure 6.33: Effet du jeu de constantes lors de la simulation d'un essai de fluage RT-6, RT-7 et RT-8. Les constantes utilisées sont celles issues des essais de l'auteur (tableau 6.6) et des essais de Hansen et Mellegard 1980 (tableau 6.8).

Effet de la température

Cette section permet de montrer les résultats de certaines identifications réalisées à des températures supérieures à la température ambiante. Cet exercice se veut avant tout de nature exploratoire compte tenu du faible échantillonnage et des niveaux de déformation importants atteints au cours de ces essais.

Une série d'identifications a été réalisée à la section précédente pour la famille des essais de Hansen et Mellegard (1980a) pour laquelle un jeu de constantes à température de la pièce a été présenté. Les données à plus hautes températures contenues dans Hansen et Mellegard (1980a) ont été reconstituées de la même manière que précédemment, en combinant les données de mise en charge (en CRS) et les divers paliers de chargement en fluage. Tous les essais considérés sont des essais de fluage à contraintes de confinement variant de 3.5 à 20.7 MPa. Les divers essais reconstitués sont décrits en détails à l'annexe I. Compte tenu des niveaux de déformation observés au cours de la plupart de ces essais et tel que mentionné au chapitre 4, un léger endommagement est à prévoir mais celui-ci a été négligé pour les fins des présentes comparaisons. Les identifications ont été réalisées pour des températures de 24° C (déjà faite), 80, 115 , 170 et 200 C.

Les paramètres $n = 3$, $p = q = u = 2$, $x_{bs} = x_{bl} = x_r = x_k = 1$, $m = 1$, $N = 4$ et $K_0 = 1$ ont été supposés constants. Les autres constantes ont été laissées libres de varier.

Comme on pouvait s'y attendre avec un modèle de type VEI, la constante A n'a pas montré une grande sensibilité à la température et a donc été gardée constante à $0.81e-07$. Les valeurs de $\dot{\epsilon}_0$ estimées précédemment (voir figure 6.1)ont été utilisées comme point de départ, mais cette valeur a été laissée libre de varier.

L'objectif de cet exercice était de déceler la sensibilité à la température de façon à ce que certaines tendances puissent être établies. Les figures 6.34, 6.36, 6.37, 6.38 présentent les simulations de certains des essais avec les constantes obtenues pour

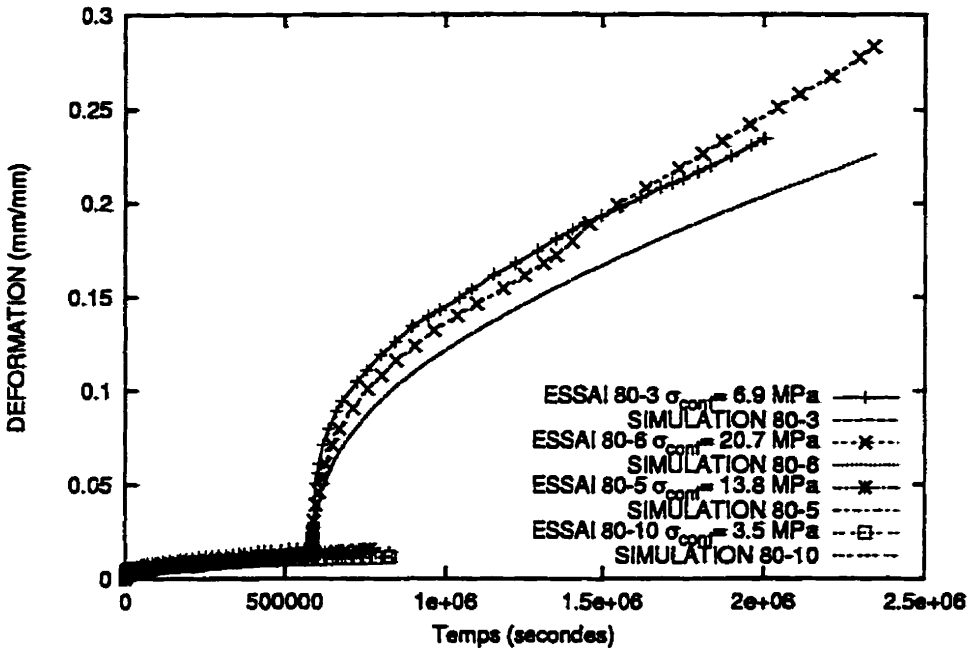


Figure 6.34: Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 80° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a).

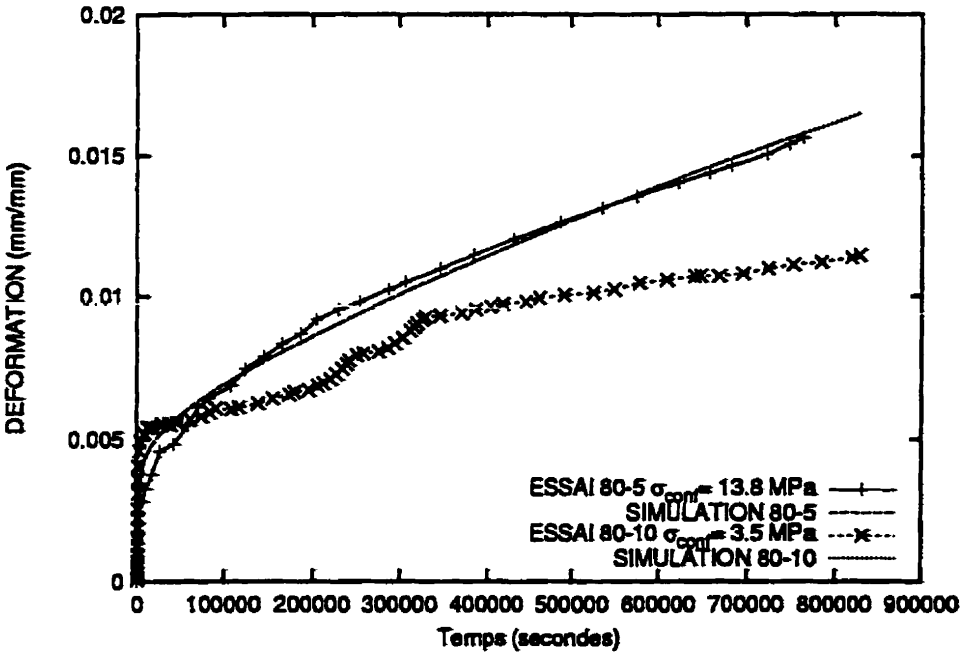


Figure 6.35: Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 80° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a).

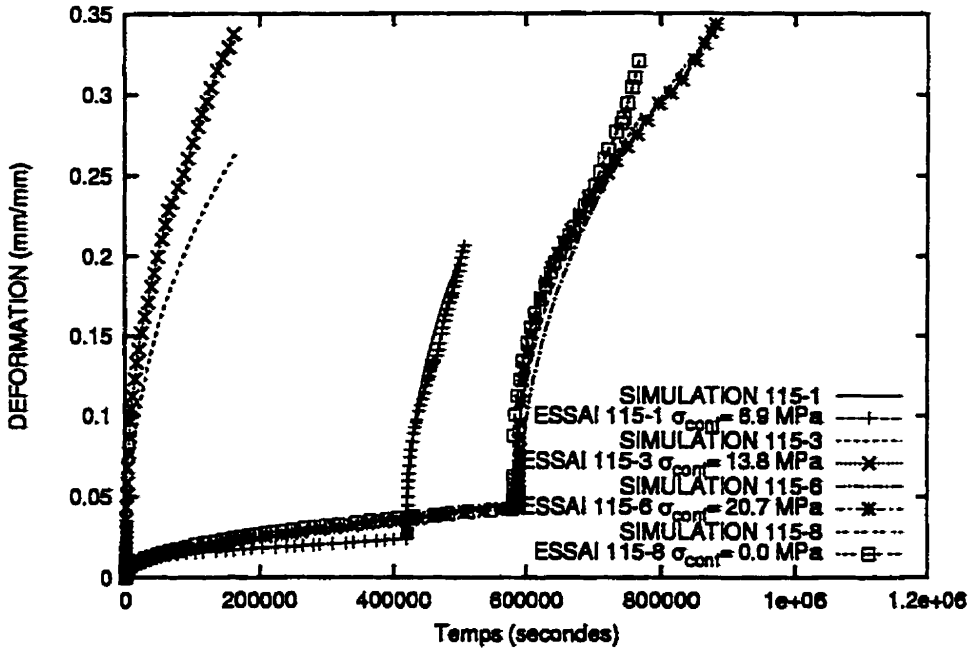


Figure 6.36: Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 115° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a).

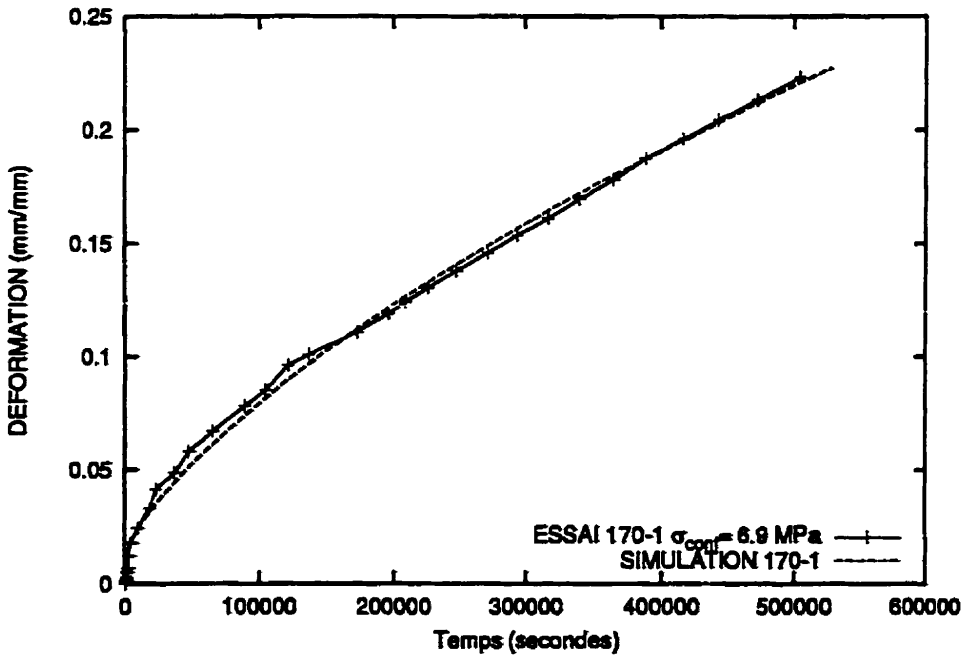


Figure 6.37: Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 170° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a).

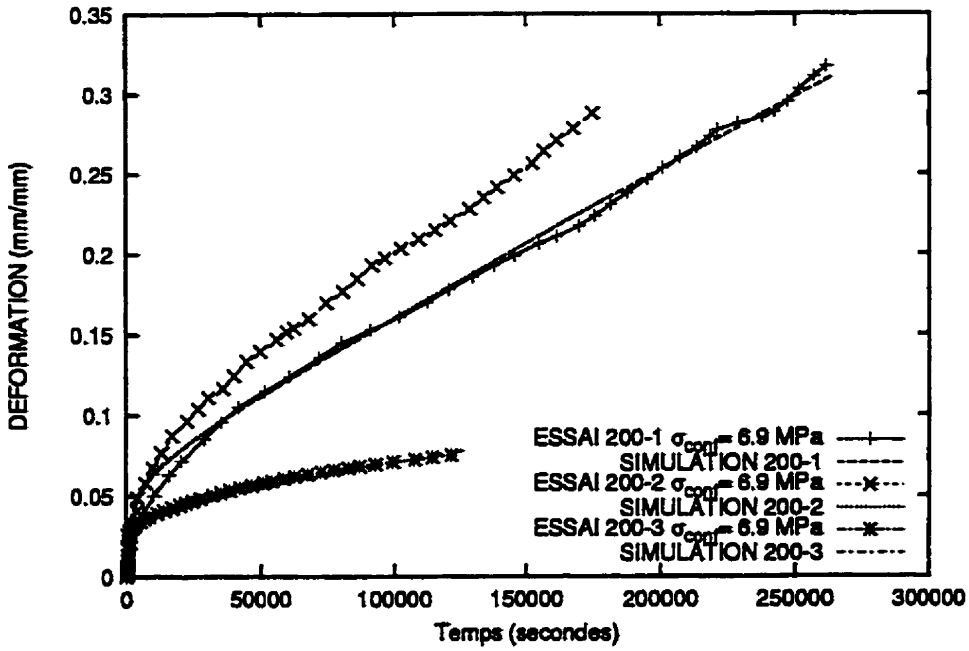


Figure 6.38: Comparaison des essais avec des calculs réalisés avec un jeu de constantes optimisées à une température de 200° C et résultats de la simulation (source Hansen 1980a).

Tableau 6.9: Jeux de constantes optimaux obtenus pour le modèle SUVIC en fonction de la température pour les essais de Hansen et Mellegard (1980a). Les effets de la température sur les paramètres élastiques sont négligés.

Température	$24^o\ C$	$80^o\ C$	$115^o\ C$	$170^o\ C$	$200^o\ C$
E	30500	30500	30500	30500	30500
μ	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
N	4	4	4	4	4
m	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
σ_0	15.08	15.08	15.08	15.08	15.08
$\dot{\epsilon}_0$	0.22e-10	0.94e-09	0.21e-08	0.46e-06	0.23e-05
K_0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
n	3	3	3	3	3
A	0.81e-07	0.81e-07	0.81e-07	0.81e-07	0.81e-07
A_{1s}	15828.12	2093.67	1494.28	283.16	149.81
A_{1l}	1251.44	2146.02	1256.36	302.06	135.64
A_3	102.70	112.33	36.83	322.25	395.62
A_5	56.63	3.25	11.31	22.70	51.56
$\mathbf{B}_{0s}$	2.22	3.85	3.24	4.00	0.017
$\mathbf{B}_{0l}$	3.36	1.29	1.16	0.95	7.31
R_0	6.36	3.95	1.22	2.65	0.034
C	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$p = q = u$	2	2	2	2	2
$x_{bs} = x_{bl} = x_r = x_k$	1	1	1	1	1

des températures de 80, 115, 170 et 200° C respectivement. Les constantes obtenues pour les différentes températures sont fournies au tableau 6.9.

Lorsqu'on tente de préciser des tendances au niveau de l'évolution des constantes en fonction de la température, on remarque que certaines dépendent clairement de la température. Pour d'autres, il est difficile de déceler une tendance véritable avec l'échantillonage disponible. Au niveau des lois d'évolution, les constantes pour lesquelles il est possible de faire ressortir des tendances assez claires sont A_{1s}, A_{1l} et R_0. Tel que montré aux figures 6.39 et 6.40, on peut développer certaines relations décrivant la variation de ces constantes en fonction de la température pour cette famille d'essais. Ces relations sont exprimées en termes de T en degrés *Kelvin*. Ces

relations peuvent suivre la forme d'une loi d'Arrhenius, tel que:

$$A_{1s}(T) = 8.33 * 10^{-2}\ exp\ \left(\frac{29.5kJ/mole}{\mathcal{R}T}\right)\ , \tag{6.40}$$

$$A_{1l}(T) = 5.98 * 10^{-1}\ exp\ \left(\frac{22.0kJ/mole}{\mathcal{R}T}\right)\ , \tag{6.41}$$

$$R_0(T) = 3.12 * 10^{-2}\ exp\ \left(\frac{13.6kJ/mole}{\mathcal{R}T}\right)\ , \tag{6.42}$$

avec $\mathcal{R} = 8.3141 J/mole/K^o$.

Les tendances observées indiquent aussi qu'avec l'augmentation de la température l'importance des variables internes cinématiques semble diminuer progressivement. En ce qui concerne la variable R_0, sa valeur diminue progressivement avec la température. Pour ce qui est des constantes A_5, A_3, $\mathbf{B}_{0s}$, $\mathbf{B}_{0l}$, et les constantes de restauration statique A_{2s}, A_{2l}, A_4 et A_6, il n'est pas clair que l'on puisse avec l'échantillonage disponible établir de tendances claires. On peut toutefois définir des intervalles de variation pour chacune de ces constantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{0s} &= [0.017, 3.85]\ , \\
\mathbf{B}_{0l} &= [0.95, 7.31]\ , \\
A_3 &= [36.83, 395.62]\ , \\
A_5 &= [3.25, 56.63]\ , \\
A_{2s} &= [2.0e-09, 1.0e-07]\ , \\
A_{2l} &= [8.9e-07, 8.1e-06]\ , \\
A_4 &= [7.6e-07, 1.0e-06]\ , \\
A_6 &= [1.6e-09, 1.1e-08]\ ,
\end{aligned}$$

On peut observer de ces intervalles que les constantes $\mathbf{B}_{0s}$ et $\mathbf{B}_{0l}$ ne varient pas de façon aussi marquée que R_0. Ce comportement n'est pas surprenant puisque les essais

de fluage seuls ne permettent pas de bien distinguer l'importance des composantes cinématiques à courte et à longue portée de la variable interne **B**.

On peut aussi mentionner qu'avec l'augmentation de la température, l'importance de la variable isotrope R semble diminuer progressivement par rapport à celle des variables cinématiques $\mathbf{B}_s$ et $\mathbf{B}_l$.

On peut aussi évaluer la valeur de a $(= \sigma'_i/\sigma')$ en faisant la somme des valeurs de R_0, $\mathbf{B}_{0s}$ et $\mathbf{B}_{0l}$ divisée par σ_0 (équation 5.17). On peut, tel que montré à la figure 6.41, observer que l'importance des contraintes internes à saturation diminue avec l'augmentation de la température (autour de 80 % à 90 % à température de la pièce à moins de 50 % à 200° C). Ce résultat est conforme à ce qui fut observé dans la littérature par d'autres auteurs sur d'autres matériaux (e.g. Orlova 1991). Si on développe une relation de type Arrhenius pour a en fonction de la température (en Kelvin), on peut représenter l'évolution par une fonction du type:

$$a(T) = 0.2076 \; exp\left(\frac{3.31 kJ/mole}{\mathcal{R}T}\right) , \tag{6.43}$$

Il est à noter qu'afin d'effectuer ces identifications, la constante $\dot{\epsilon}_0$ a été laissée libre de varier. Globalement, on remarque que la variation de $\dot{\epsilon}_0$, correspond assez bien à ce qui avait été vu précédemment.

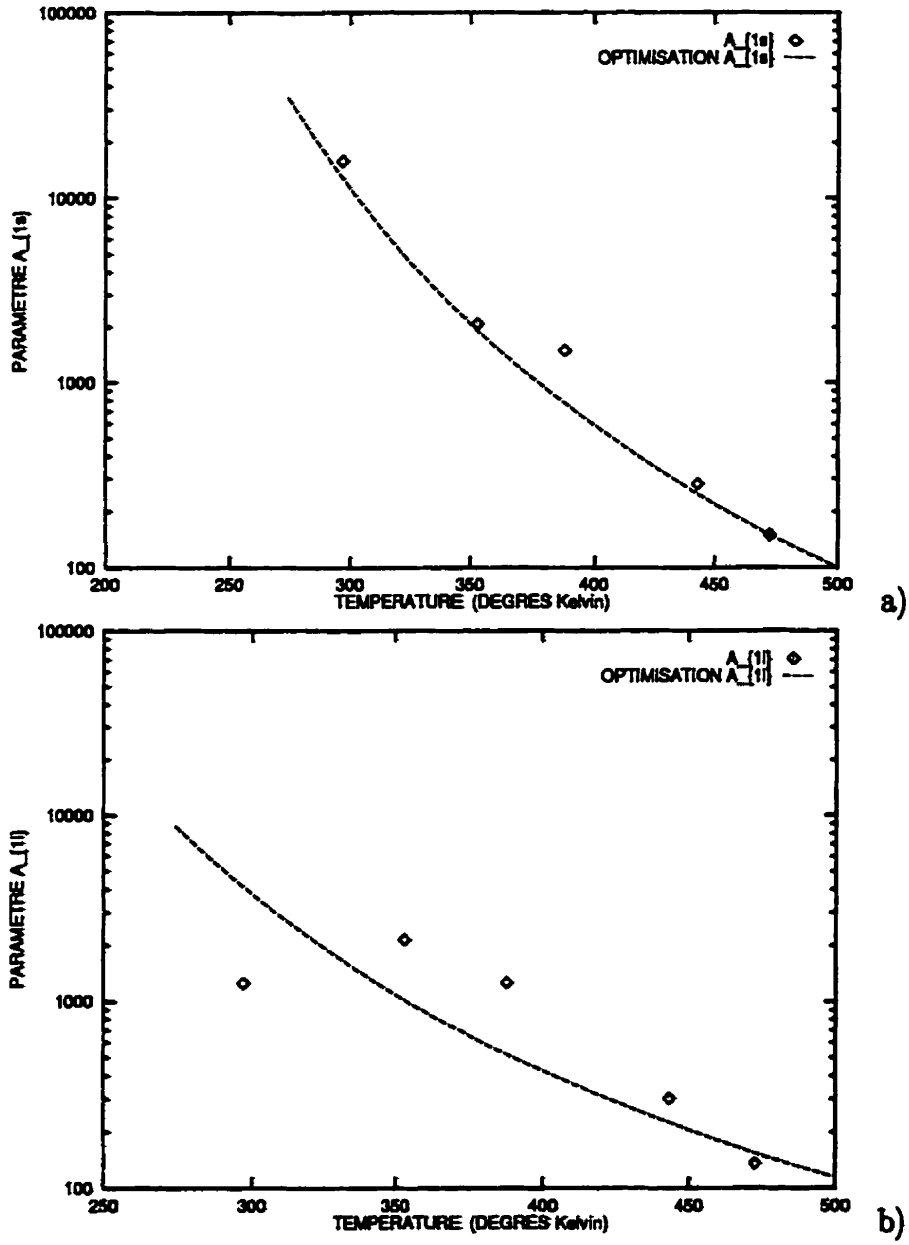


Figure 6.39: Influence de la température sur l'évolution des constantes A_{1s} et A_{1l} du modèle SUVIC.

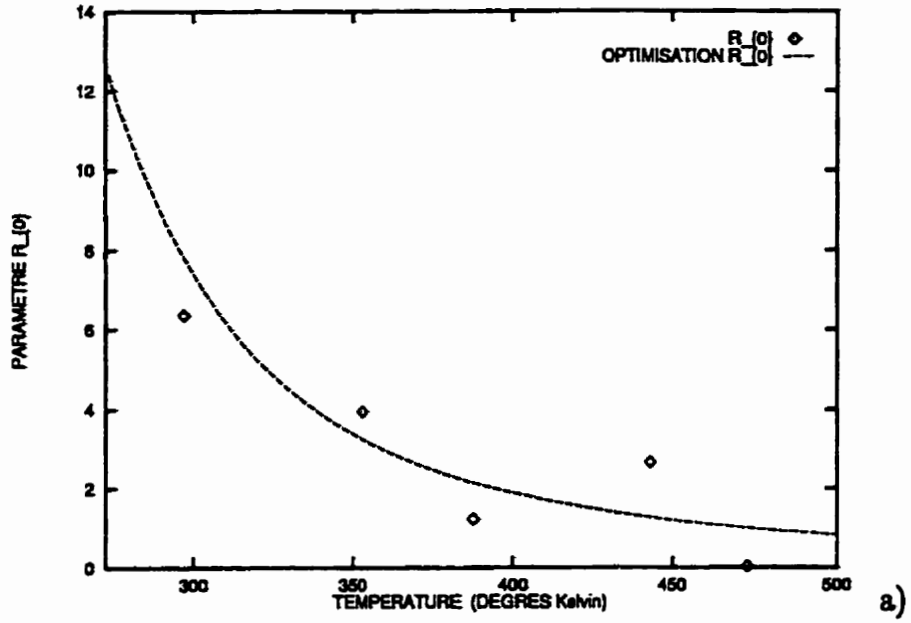


Figure 6.40: Influence de la température sur l'évolution de la constante R_0 du modèle SUVIC.

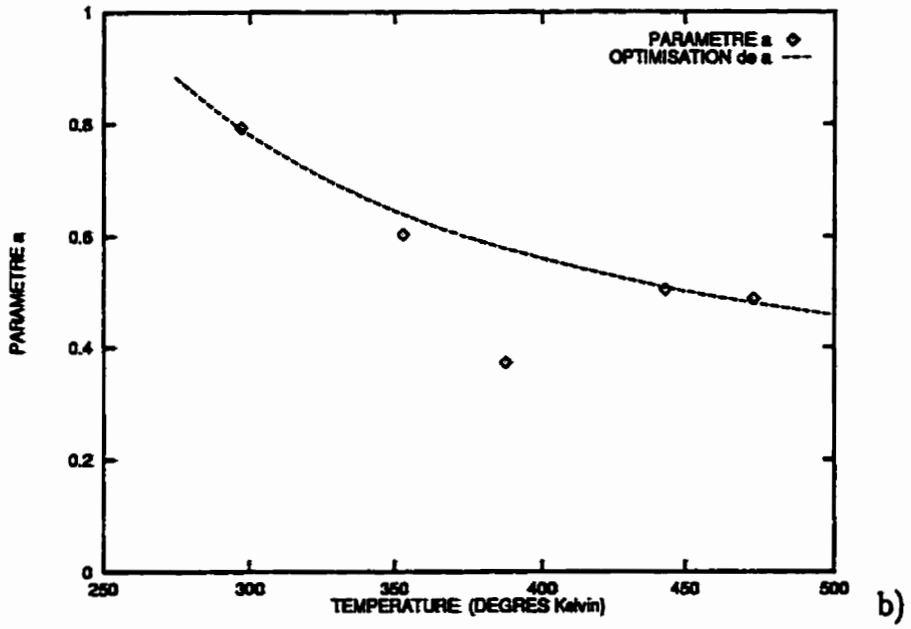


Figure 6.41: Influence de la température sur l'évolution du constante $a = (R_0 + \mathbf{B}_{0s} + \mathbf{B}_{0l})/\sigma_0$. On remarque que a diminue avec l'augmentation de la température ($\sigma_0 = 15.08$ MPa) impliquant que l'importance des contraintes internes diminue avec l'augmentation de la température.

6.2.4 Applications au sel artificiel

Afin de clore cette section sur l'application aux essais de laboratoire, on présente certains travaux réalisés sur le sel artificiel. Même si l'essentiel des travaux présentés dans ce document ont été faits avec le sel d'Avery Island, le sel artificiel a été un matériau fort utilisé pour le développement du modèle SUVIC, et c'est ainsi que plusieurs résultats d'essais CSR et CRS fort intéressants sont disponibles. On présente succinctement dans ce qui suit certains de ces essais et quelques simulations faites avec des constantes optimisées; les caractéristiques de ce sel ont été décrites par Guessous (1987), Aubertin (1989) et Sgaoula (1997).

La figure 6.42 montre un essai CSR à faible contrainte de confinement $\sigma_{conf} =$ 6.9 MPa et à taux de déformation $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. Cet essai est caractérisé par un chargement monotone jusqu'à une déformation axiale de l'ordre de 6.0% et une contrainte déviatorique de 60 MPa. La figure 6.43 montre quant à elle un essai CSR similaire avec un cycle de chargement et déchargement. Cet essai a été réalisé à une contrainte de confinement plus élevée $\sigma_{conf} = 51.7$ MPa, à un taux de déformation de $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. À une déformation axiale de l'ordre de 3.0%, l'éprouvette a été déchargée afin que des conditions d'extension triaxiale soient créées. Un essai CSR similaire est présenté à la figure 6.44 avec 5 cycles de déchargement. La contrainte de confinement est $\sigma_{conf} = 52.0$ MPa et le taux de déformation est de $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. Un essai CRS est présenté à la figure 6.45 pour une contrainte de confinement moyenne σ_{conf} de 11.3 MPa et un taux d'application $\dot{\sigma} = 6.9 * 10^{-3}\ MPa/s^{-1}$.

L'identification des constantes a été réalisée sur un essai CSR pour du sel artificiel (voir figures 6.42 et 6.43). Des prédictions ont par la suite été faites pour les autres essais CSR et CRS (voir figures 6.44 et 6.45). Les valeurs des constantes pour cet exercice sont fournies au tableau 6.10.

La figure 6.42 montre l'essai CTC avec chargement monotone utilisé dans l'identification: la courbe obtenue est typique d'un comportement en écrouissage. La figure

6.42 présente la façon dont les VEI évoluent durant l'essai. Tel que prévu, les variables $\mathbf{B}_s$ et R croissent rapidement et saturent rapidement tandis que les variables $\mathbf{B}_l$ et K évoluent plus lentement.

La figure 6.43 montre un essai (aussi utilisé pour l'identification) avec un cycle de chargement-déchargement réalisé à un niveau de déformation d'environ 1% et un cycle CTC-RTE complet réalisé à environ une déformation de 3%. Ce résultat démontre à quel point l'écrouissage du sel gemme est de nature mixte, comme le montre bien ce type d'effet analogue à l'effet de Bauschinger observé chez les métaux.

La figure 6.44 est une prédiction permettant de montrer que le modèle se compare favorablement aux résultats obtenu d'un essai cyclique CTC-RTE. Tel que montré, le modèle semble bien représenter le comportement observé des résultats expérimentaux en particuliers lors des cycles chargement-déchargement.

La figure 6.45 est une prédiction d'un essai CRS. Pour ce type d'essai, le taux de déformation change continuellement durant l'essai. Le modèle semble également bien capturer ce type de comportement.

À nouveau les résultats confirment la représentativité du modèle lorsque les valeurs des paramètres sont identifiées à partir de la procédure définie précédemment.

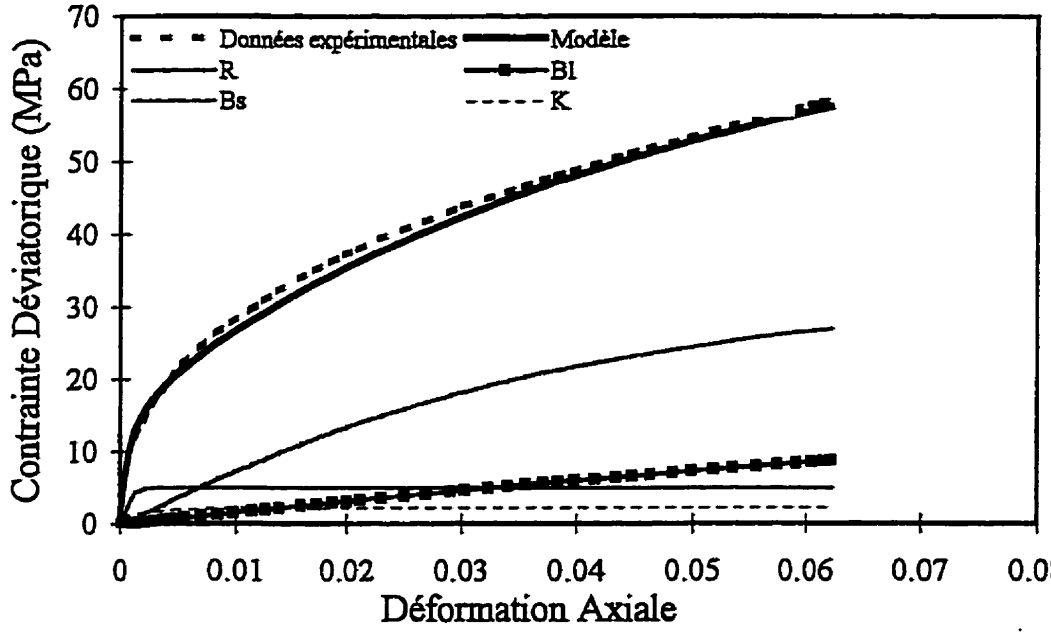


Figure 6.42: Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai CSR. L'évolution des variables internes est aussi montrée. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 6.9\ MPa$ et $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$.

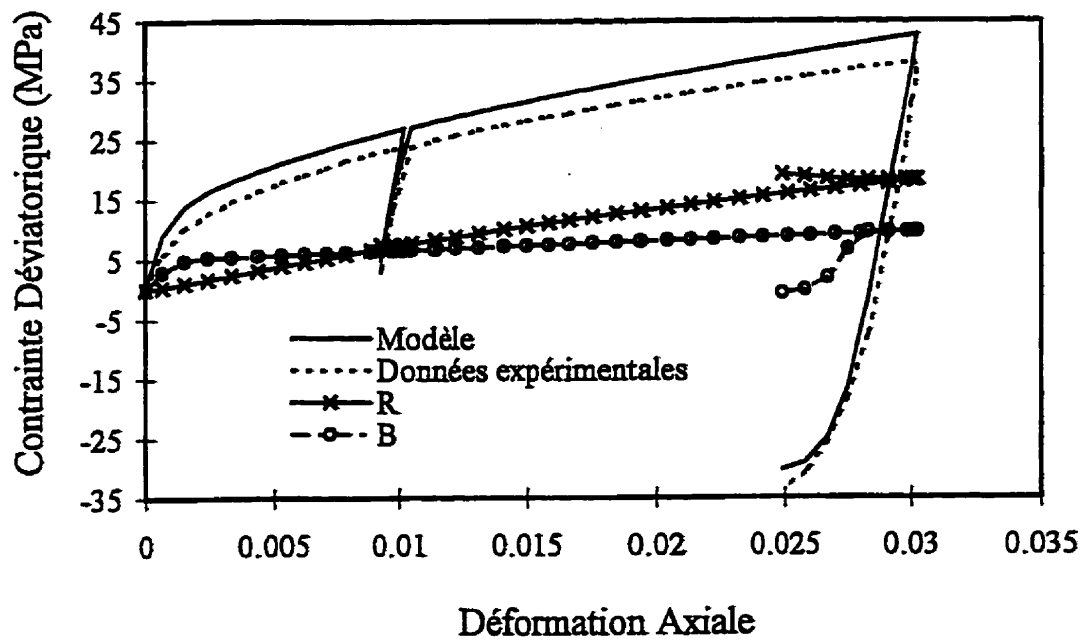


Figure 6.43: Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai CSR avec un cycle CTC-RTE. L'évolution des variables internes **B** et R est aussi montrée. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 51.7\ MPa$ et $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$.

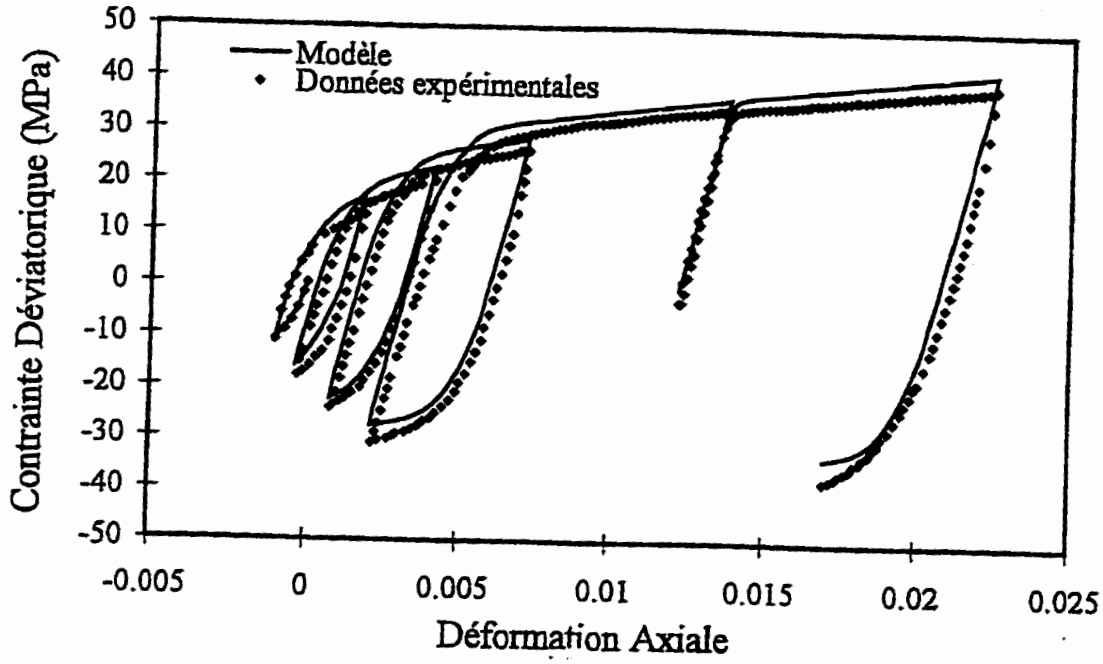


Figure 6.44: Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai cyclique. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 52.0\ MPa$ et $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$.

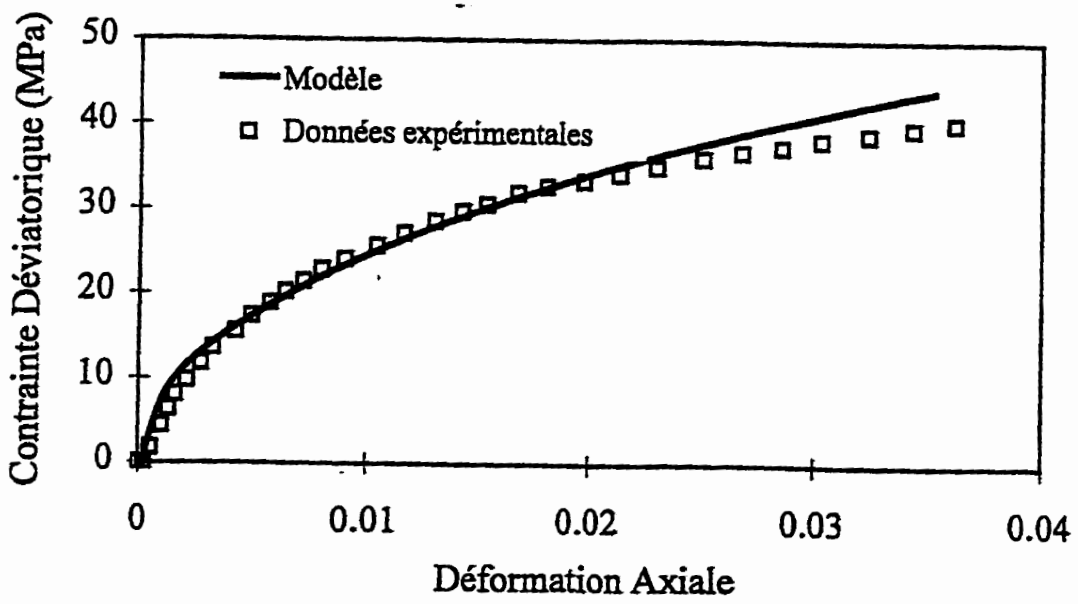


Figure 6.45: Comportement prédit et mesuré pour un échantillon de sel artificiel lors d'un essai CRS. Les conditions de l'essai sont $\sigma_{conf} = \sigma_2 = \sigma_3 = 11.3\ MPa$ et $\dot{\sigma} = 6.9 * 10^{-3}\ MPa/s^{-1}$.

Tableau 6.10: Jeu de constantes préliminaires pour le sel artificiel tel qu'obtenu d'une identification en utilisant la fonction sinus hyperbolique.

Jeu de constantes - Sel Artificiel					
Constante	Valeurs		Constante	Valeurs	
E	22.5	GPa	μ	0.25	
A	$0.1 * 10^{-6}$	s^{-1}			
A_{1s}	19500.	MPa	A_{1l}	272.	MPa
A_3	936.	MPa	A_5	728.	MPa
B_{0s}	1.01	MPa	B_{0l}	5.00	MPa
K_0	1.0	MPa	m	1.0	
N	4		R_0	4.51	MPa
σ_0	11.85	MPa	$\dot{\epsilon}_0$	$0.081 * 10^{-12}$	s^{-1}
A_{2s}	$5.5 * 10^{-12}$	$MPa\ s^{-1}$	A_{2l}	$0.051 * 10^{-6}$	$MPa\ s^{-1}$
A_4	$0.32 * 10^{-9}$	$MPa\ s^{-1}$	C	1	MPa
A_6	$0.015 * 10^{-6}$	$mPa\ s^{-1}$	$p = q = u$	2	
x_r	1		x_b	1	
x_k	1		n	3.0	

6.3 Applications réalisées avec le code ZéBuLoN

6.3.1 Tests numériques sur le sel artificiel

Avant de montrer les simulations réalisées avec le code d'éléments finis ZéBuLoN version 7 (*Z7*) pour des structures multiaxiales, on valide d'abord le code en effectuant quelques comparaisons entre des résultats calculés avec le modèle SUVIC et des résultats expérimentaux d'essais CSR sur du sel artificiel. Ces résultats de calcul ont déjà été publiés (Julien et al. 1998). Les simulations préliminaires ont été réalisées avec la forme exponentielle du modèle (équation 2.76) en utilisant un jeu de constantes fourni au tableau 6.11. Comme il s'agit d'essais à taux de déformation relativement élevés, des résultats similaires seraient obtenus avec la fonction sinus hyperbolique (les deux fonctions n'étant distinctes qu'à des valeurs relativement faibles de taux de déformation et de contrainte).

Tableau 6.11: Constantes pour le sel artificiel. La forme exponentielle est utilisée pour représenter l'état stationnaire.

Jeu de constantes - Sel Artificiel					
Constante	Valeurs		Constante	Valeurs	
E	18.9	GPa	μ	0.25	
A	$0.6 * 10^{-6}$	s^{-1}			
A_{1s}	6400	MPa	A_{1l}	40	MPa
A_3	1800	MPa	A_5	260	MPa
B_{0s}	0.83	MPa	B_{0l}	1.25	MPa
K_0	1	MPa	m	0.81	
N	4		R_0	1.38	MPa
σ_0	4.63	MPa	$\dot{\epsilon}_0$	$0.1 * 10^{-12}$	MPa
A_{2s}	$10. * 10^{-6}$	$MPa\ s^{-1}$	A_{2l}	$0.1 * 10^{-9}$	$MPa\ s^{-1}$
A_4	$10. * 10^{-6}$	$MPa\ s^{-1}$	C	1	MPa
A_6	$0.1 * 10^{-6}$	$MPa\ s^{-1}$	$p = q = u$	2	
x_r	1		x_b	1	
x_k	1		n	3.0	

La figure 6.46 présente la comparaison entre les résultats expérimentaux pour

l'essai A2-17cx et les simulations numériques avec la méthode d'intégration de Runge-Kutta et la méthode θ implicite ($\theta = 1$). L'essai A2-17cx est un essai CTC-RTE réalisé à température de la pièce. Il débute avec un préchargement hydrostatique de 53.0 MPa. Après le chargement hydrostatique, l'essai CSR débute à un taux de déformation de $\dot{\epsilon} = \pm 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. Les deux méthodes d'intégration donnent des résultats équivalents pour ces conditions d'essais. On constate aussi que le modèle implanté dans *Z7* reproduit bien les résultats expérimentaux.

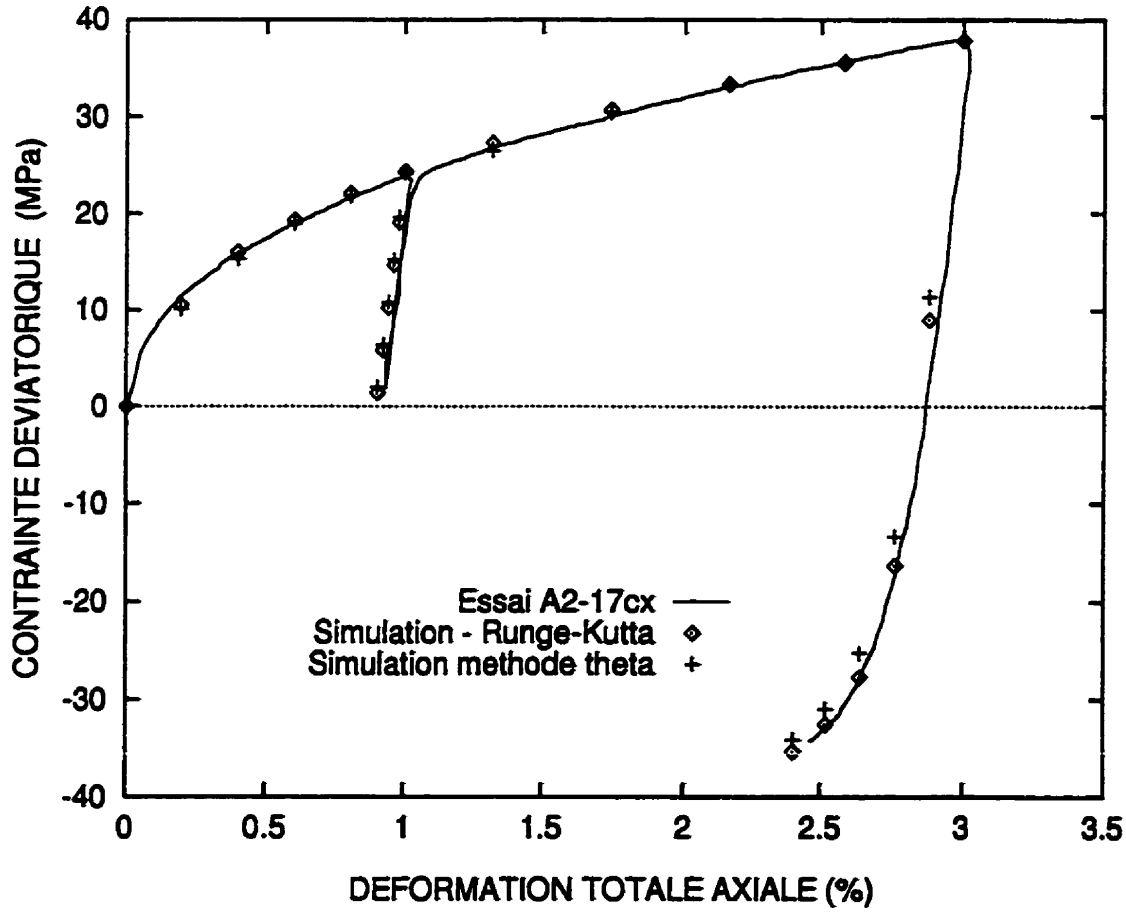


Figure 6.46: Comparaison entre les résultats expérimentaux pour l'essai A2 17cx et les simulations avec les méthodes d'intégration Runge Kutta et implicite θ.

Afin d'illustrer plus les capacités du code pour des cheminements complexes, on montre à la figure 6.47 un essai qui met en évidence un type d'effet Bauschinger observé au cours d'un essai cyclique sur une éprouvette de sel artificiel. Ces résultats

ont aussi déjà été publiés (Julien et al. 1998). L'essai en question est un essai CTC-RTE à contrainte de confinement de 53.0 MPa et taux de déformation de $\dot{\epsilon} = \pm 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$. Une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et numériques (intégration implicite) est observable avec les constantes du tableau 6.11.

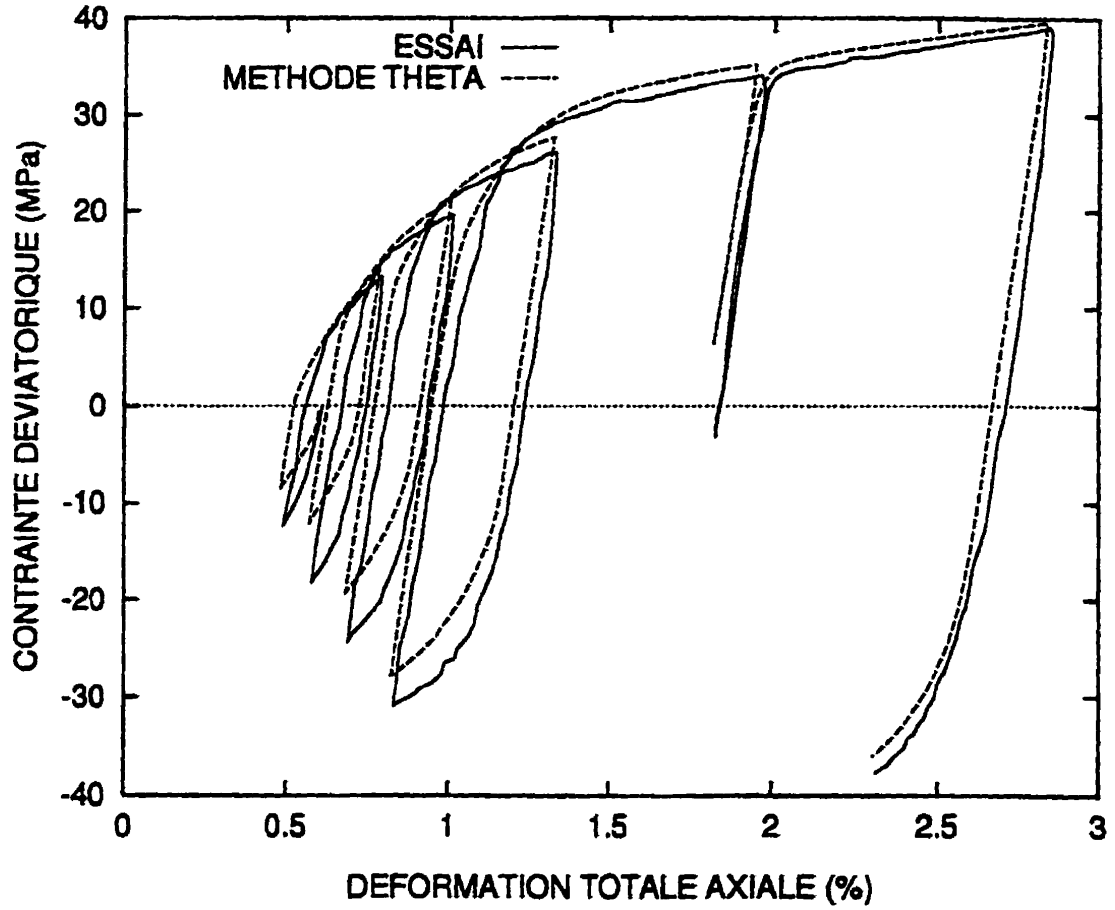


Figure 6.47: Simulation numérique d'un essai cyclique sur le sel artificiel avec la méthode d'intégration implicite $\theta = 1$.

Au chapitre 3, on a vu que le modèle SUVIC pouvait être extensionné afin de tenir compte de l'endommagement. Aubertin et al. (1995) et Sgaoula (1997) ont publié des résultats où un certain endommagement était observé. En utilisant les paramètres d'endommagement de Aubertin et al. (1995), on peut tenter de reproduire ce comportement avec *Z7*.

Un essai de compression triaxiale avec endommagement sur du sel artificiel à

température de la pièce est ainsi présenté à la figure 6.48. Il s'agit d'un essai de compression triaxiale avec une contrainte de confinement de 10 MPa et un taux de déformation de $\dot{\epsilon} = 3 * 10^{-5}$. L'intégration est faite avec la méthode explicite. Les résultats numériques se comparent bien aux résultats présentés par Sgaoula (1997).

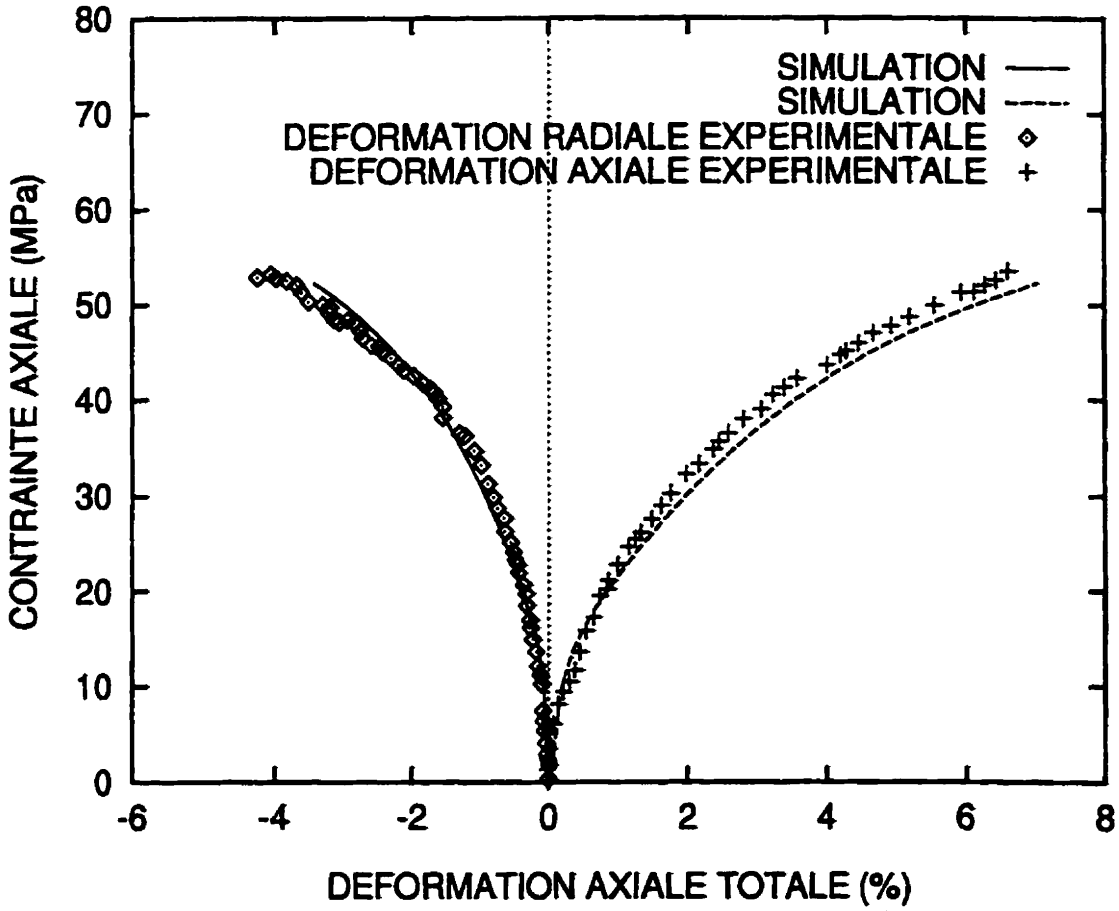


Figure 6.48: Simulation d'un essai avec endommagement en utilisant le module SUIVIC-D permettant une composante d'endommagement. Il s'agit d'un essai de compression triaxiale avec une contrainte de confinement de 10 MPa et un taux de déformation de $\dot{\epsilon} = 3 * 10^{-5}$. Les données expérimentales sont tirées de Aubertin et al. (1995b). L'intégration est faite avec la méthode explicite.

Même si le module utilisant SUVIC-D a été développé pour Z7, il n'est cependant pas totalement satisfaisant, il ne sera plus utilisé dans la suite de cette thèse. On peut néanmoins constater que le code numérique peut reproduire adéquatement cet aspect du comportement du sel via la composante d'endommagement.

6.3.2 Tests numériques sur le cylindre à paroi épaisse

Les essais sur un cylindre à paroi épaisse sur du sel gemme sont reconnus comme étant une bonne façon d'évaluer les modèles géomécaniques lors du calcul de la réponse structurale de ce matériau puisqu'ils représentent à petites échelles des conditions comparables à celles d'excavations souterraines et de cavernes dans les formations de sel (Morgan et Wawersik 1991; Lux et Heusermann 1985; Van Sambeek 1986; Wawersik et Morgan 1987). De tels essais permettent d'apprécier en laboratoire la redistribution de contraintes qui pourrait exister autour d'excavations souterraines.

La figure 6.49 représente schématiquement une géométrie typique d'un cylindre à paroi épaisse. Il s'agit d'une éprouvette dans laquelle une cavité cylindrique est forée. On peut avec une cellule spéciale imposer des pressions interne, externe et une charge axiale différentes. On peut ainsi créer, en contrôlant les pressions, des essais de fluage avec un champ de contraintes où les trois contraintes principales sont indépendantes. On mesure typiquement les déplacements axiaux et diamétraux.

Selon Morgan et Wawersik (1989), l'essai sur le cylindre à paroi épaisse, en permettant de combiner des essais triaxiaux classiques à de véritables chargements tridimensionnels dans le même essai, minimiserait les incertitudes au niveau des propriétés des matériaux induites par différentes historiques mécaniques.

Malheureusement, peu de résultats concrets existent dans la littérature pour le sel gemme. Il y a quelques données disponibles pour le sel d'Avery Island, mais elles ont été obtenues via des essais avec cylindre à paroi relativement mince (Senseny et al. 1989). Le cylindre à paroi mince n'est pas idéal puisqu'il tend à être affecté davantage par les effets d'endommagement et de l'échantillonage (Bell 1995; Santarelli et Brown

1989). Certains résultats seront néanmoins utilisés à la section 6.3.3 afin de démontrer certaines caractéristiques du modèle.

Le cylindre à paroi épaisse analysé ici est plutôt trapu (court et large). Des essais à températures variables ont été réalisées sur de tels cylindres pour le sel gemme du WIPP (Carlsbad, Nouveau-Mexique) et ont permis de montrer le potentiel de la technique. Les dimensions des éprouvettes étaient de 3.80 cm pour le diamètre intérieur, 12.50 cm pour le diamètre extérieur et 8.25 cm de longueur (Morgan et Wawersik 1989; Morgan et Wawersik 1991; Mellegard et Munson 1997).

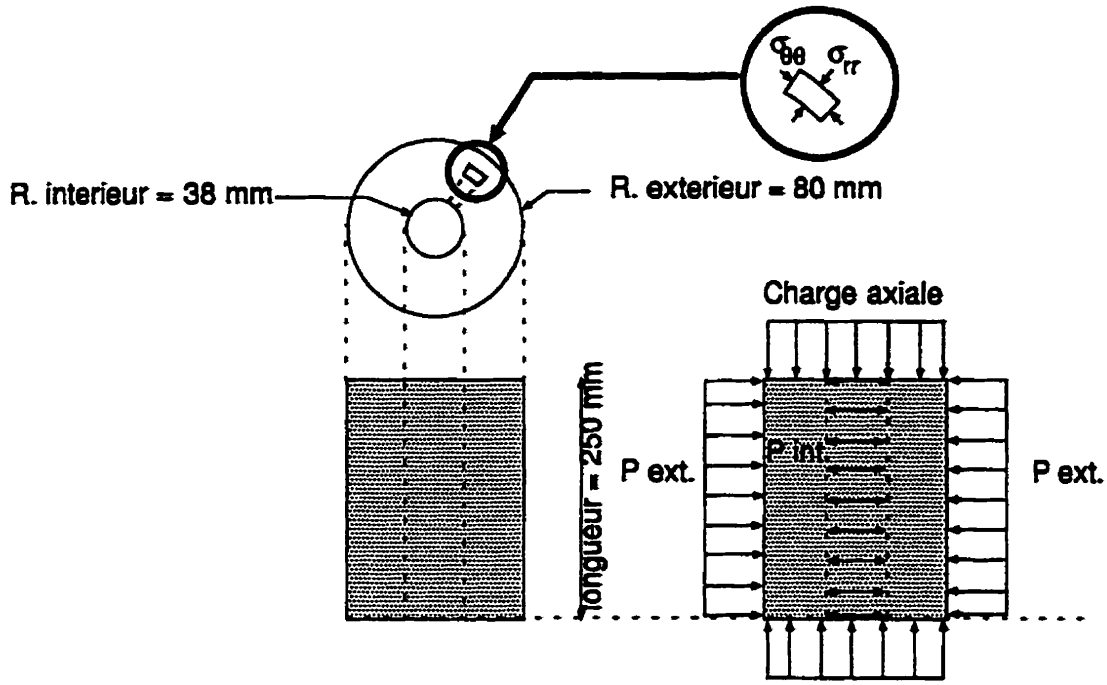
Un certain nombre de calculs sont présentés afin de montrer le potentiel du code et les possibilités de tels essais. Comme les propriétés disponibles pour le sel du WIPP ne permettent pas d'évaluer les paramètres du modèle, les essais ont été réalisés en considérant les constantes du tableau 6.11 pour le sel artificiel. Il s'agit donc ici non pas d'une validation du résultat mais plutôt d'une évaluation des capacités du code de suivre un tel cheminement de contrainte, qui se rapproche de ce qui pourrait être anticipé autour d'excavations in situ.

La figure 6.50 donne un représentation du cheminement lors d'un essai (numérique) de fluage de 633 heures s'apparentant à un essai similaire réalisé par Morgan et Wawersik (1991) sur le sel du WIPP. La figure 6.50 montre ainsi les différentes courbes d'évolution de la contrainte axiale, de confinement externe et interne.

Rappelons que la redistribution de contrainte induit à la fois un comportement transitoire du matériau (dû à la variation de l'état de contraintes déviatoriques) et de la structure (qui se manifeste par un taux de déplacement décroissant à la paroi). Ces deux aspects sont couplés de sorte qu'ils ne peuvent être séparés aisément. Il a été démontré que seul un modèle à VEI, tel SUVIC, peut véritablement reproduire correctement ce genre de comportement (Aubertin et al. 1993a). Suite à ce calcul, on observe aussi que les tendances sur la déformation sont compatibles avec les résultats observés, du moins en terme de caractéristiques générales.

La figure 6.51 présente la déformation inélastique équivalente ϵ^i_{eq} au temps 0,

139, 300, 380, 514 et 633 heures. Elle atteint une valeur maximale à la fin de l'essai numérique à l'intérieur de l'échantillon. Cet essai montre qu'il peut y avoir une redistribution de contraintes suffisante pour permettre à la déformation inélatisque de devenir maximale non pas en périphérie de l'éprouvette mais en plein coeur de l'échantillon. Ce résultat indique donc que pour une application in-situ, il peut exister des conditions pour lesquelles la déformation inélastique devient maximale à une certaine distance des parois de l'excavation (comme décrit par Wallner (1984)).



Maillage typique

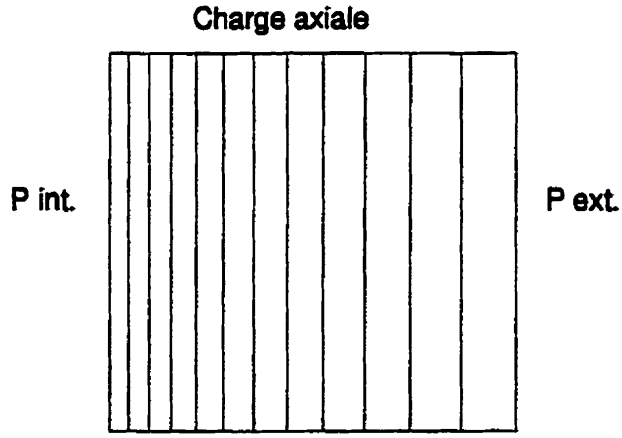


Figure 6.49: Représentation de la géométrie d'un cylindre à paroi épaisse analysé avec Z7. Le cylindre peut être soumis à une charge axiale, pression interne et externe indépendantes. La figure du bas montre une représentation schématique du maillage utilisé où l'épaisseur des éléments augmente progressivement de l'intérieur vers l'extérieur.

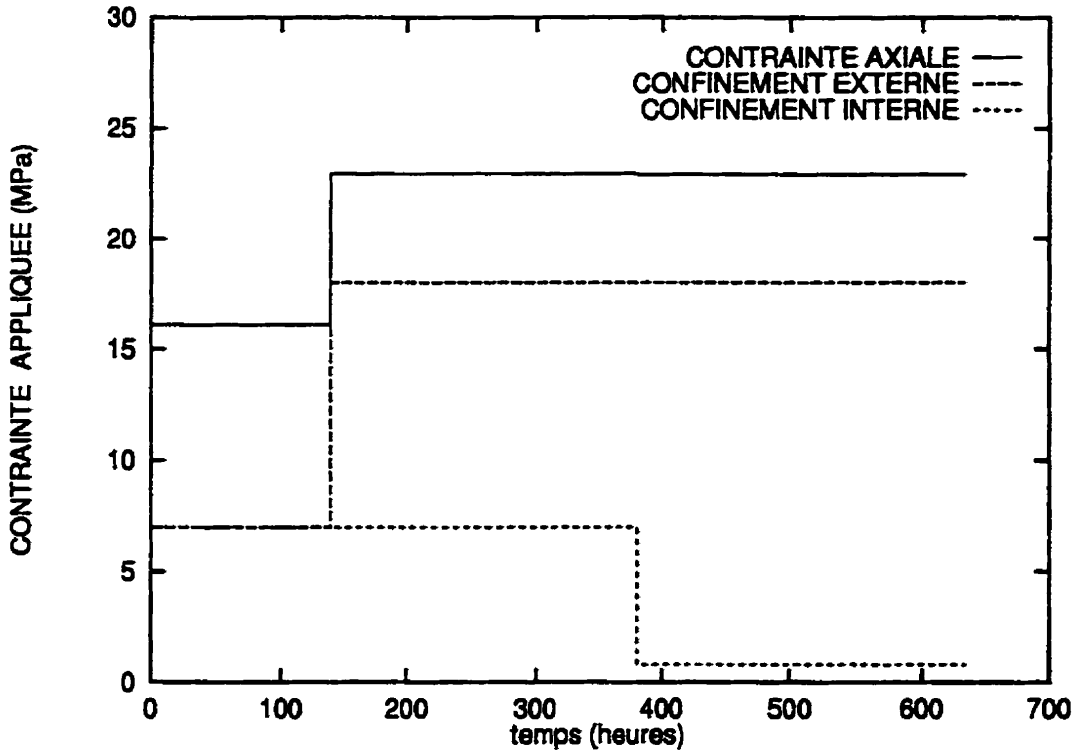


Figure 6.50: Simulation d'un essai numérique de fluage avec le cylindre à paroi épaisse lors d'un chargement complexe. Les différentes courbes montrent l'évolution de la contrainte appliquée en fonction du temps pour la contrainte axiale, de confinement externe et interne.

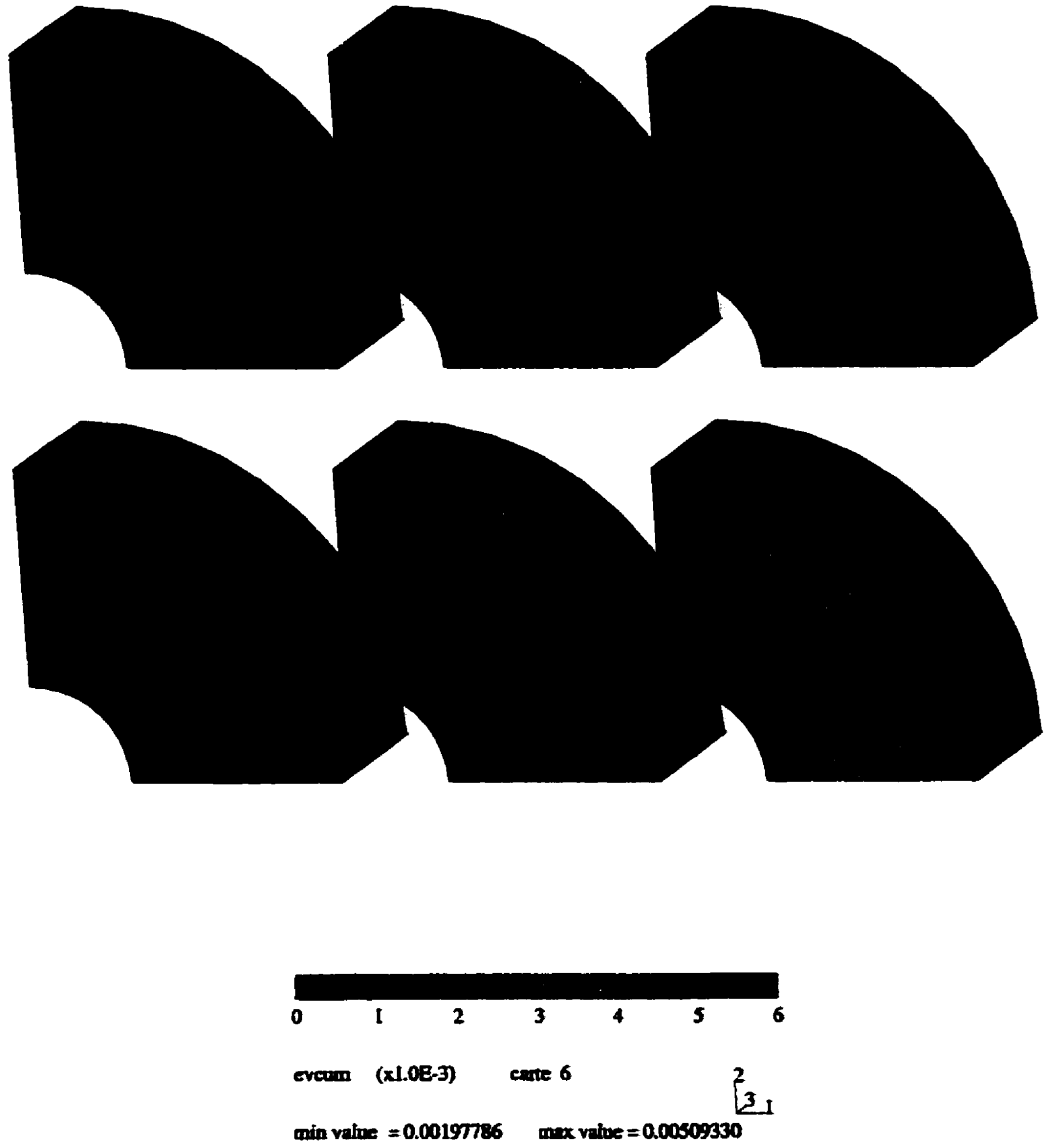


Figure 6.51: Simulation d'un essai numérique de fluage avec le cylindre à paroi épaisse lors d'un chargement complexe. La déformation équivalente est montrée au temps 0, 139, 300, 380, 514 et 633 heures. Elle atteint une valeur maximale à la fin de l'essai à l'intérieur de l'échantillon.

6.3.3 Prédictions numériques pour le cylindre à paroi mince

Comme nous n'avions pas de résultats sur le sel d'Avery Island, les calculs numériques précédents réalisés avec ZéBuLoN sur le cylindre à paroi épaisse ne demeurent que des essais numériques. Il aurait été intéressant de procéder à des prédictions de résultats de laboratoire sur de tels essais, mais les essais disponibles portant sur un autre sel (celui du WIPP) pour lequel les données de base sont plus limitées. Ils ont de plus été réalisés à des températures relativement élevées (Morgan et Wawersik 1989; Morgan et Wawersik 1991). Plutôt que de procéder à des ajustements des résultats numériques, l'auteur a opté pour des calculs sur des résultats d'essais avec le cylindre à paroi mince pour lequel il existe des essais pour le sel d'Avery Island à température ambiante. Ces essais au chargement multiaxial permettent néanmoins une validation des capacités de prédiction du modèle.

L'essai sur le cylindre à paroi mince est réalisé sur une éprouvette ayant une paroi relativement mince. Une série d'essais ont été réalisés par RE/SPEC Inc. sur du sel d'Avery Island à la fin des années 80. Ces essais ont été décrits en détails dans: Senseny et al. (1989), Mellegard et al. (1992) et Mellegard et Munson (1997).

Ces essais sont bien documentés. Les échantillons utilisés pour ces essais proviennent du niveau 150 de la mine d'Avery Island et ont des grains de 7.5 mm en moyenne.

Les cylindres sont produits par forage et avec un alésage de finition. La longueur des cylindres est de 610 mm, le diamètre extérieur est de 305 mm et le diamètre intérieur de 254 mm. La paroi a donc une épaisseur de 51 mm. On obtient un rapport longueur sur diamètre de 2.0, un rapport diamètre sur épaisseur de la paroi de 5.5, et un rapport épaisseur de la paroi sur la dimension moyenne des grains d'environ 6.8.

Les figures 6.52 et 6.53 tirées de Mellegard et al. (1992), permettent de visualiser le montage et de constater la minceur de la paroi de l'éprouvette par rapport à sa longueur et son diamètre. Mellegard et al. (1992) notent que même si des gradients

de contraintes et de déformation existent probablement dans la paroi, ils peuvent être négligés compte tenu de la faible épaisseur de la paroi. Toutefois, un tel essai n'est pas approprié pour étudier les redistributions de contraintes et de déformations dans le temps.

En considérant un champ uniforme, les contraintes et les déformations peuvent être approximées en utilisant des relations simples impliquant la variation de la pression et la dimension de l'éprouvette. Les valeurs moyennes des contraintes dans l'éprouvette peuvent être évaluées par les relations suivantes (réf. Mellegard et al. 1992):

$$\sigma_{zz} = \frac{4F}{\pi(D_o^2 - D_i^2)}, \tag{6.44}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{P_i D_i + P_o D_o}{D_i + D_o}, \tag{6.45}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P_o D_o - P_i D_i}{D_o - D_i}, \tag{6.46}$$

où σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ sont respectivement les contraintes axiales, radiales et tangentielles, D_o le diamètre extérieur, D_i le diamètre intérieur, F la force axiale appliquée (MN), P_o la pression extérieure (MPa), et, P_i la pression intérieure (MPa).

Les déformations radiales ϵ_{rr} et tangentielles $\epsilon_{\theta\theta}$ sont évaluées en mesurant le changement de diamètre du cylindre à sa mi-hauteur. Les déformations radiales ϵ_{rr} sont évaluées à partir du changement d'épaisseur de la paroi, divisée par l'épaisseur initiale de la paroi. La déformation tangentielle $\epsilon_{\theta\theta}$ est évaluée par le changement moyen de circonférence sur la circonférence initiale.

Le façonnage des éprouvettes pourrait induire une certaine micro-fissuration, et le résultat de l'essai serait alors influencé par les phénomènes d'endommagement. Afin de demeurer dans le domaine ductile, on a choisi d'utiliser l'essai où le déviateur est le plus faible possible et où les déformations demeurent faibles. Parmi les essais disponibles, l'essai C'1 provenant du site C' a été retenu. Cet essai à température ambiante a été réalisé selon le chargement suivant:

- chargement hydrostatique en 10 minutes avec une rampe linéaire de 0 à 18.33 MPa;
- maintien de la contrainte hydrostatique pendant un certain temps (3 jours);
- application du déviateur en 7 secondes et début de la prise de lecture des déformations. Pour l'essai en question les conditions de l'essai sont:
  - $\sigma_{zz} = 24.11$ MPa;
  - $P_o = 17.85$ MPa;
  - $P_i = 18.91$ MPa.
- maintien du déviateur pendant 15 à 30 jours.

Si on remplace ces conditions dans les équations 6.45 et 6.46, on obtient que la contrainte radiale $\sigma_{rr} = 18.33$ MPa correspond au préchargement hydrostatique. La contrainte tangentielle est quant à elle $\sigma_{\theta\theta} = 12.56$ MPa. Les déviateurs sont $\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = 5.78$ MPa et $\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = -5.78$ MPa. Cet essai correspond à la définition d'un essai de cisaillement pur dans le plan Π. La déformation maximale devrait se concentrer dans le plan $\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta}$. L'éprouvette devrait aussi subir un rétrécissement ou une compression axiale (positive) et une extension tangentielle (négative). La déformation radiale devrait être minime.

La figure 6.54 présente la comparaison entre les résultats expérimentaux de l'essai C'1 et les résultats de la prédiction faite avec ZéBuLoN en utilisant le modèle SUVIC avec la fonction sinus hyperbolique et les constantes obtenues des essais de Senseny at al. 1993. Cette figure montre l'évolution en fonction du temps des déformations estimées à partir de la variation des dimensions de l'éprouvette. Les comparaisons entre les valeurs mesurées et calculées pour les déformations axiales, radiales et tangentielles montrent une très bonne concordance pour cet essai multiaxial.

En ce qui concerne la déformation radiale, elle est légèrement positive indiquant que globalement la paroi s'amincit quelque peu.

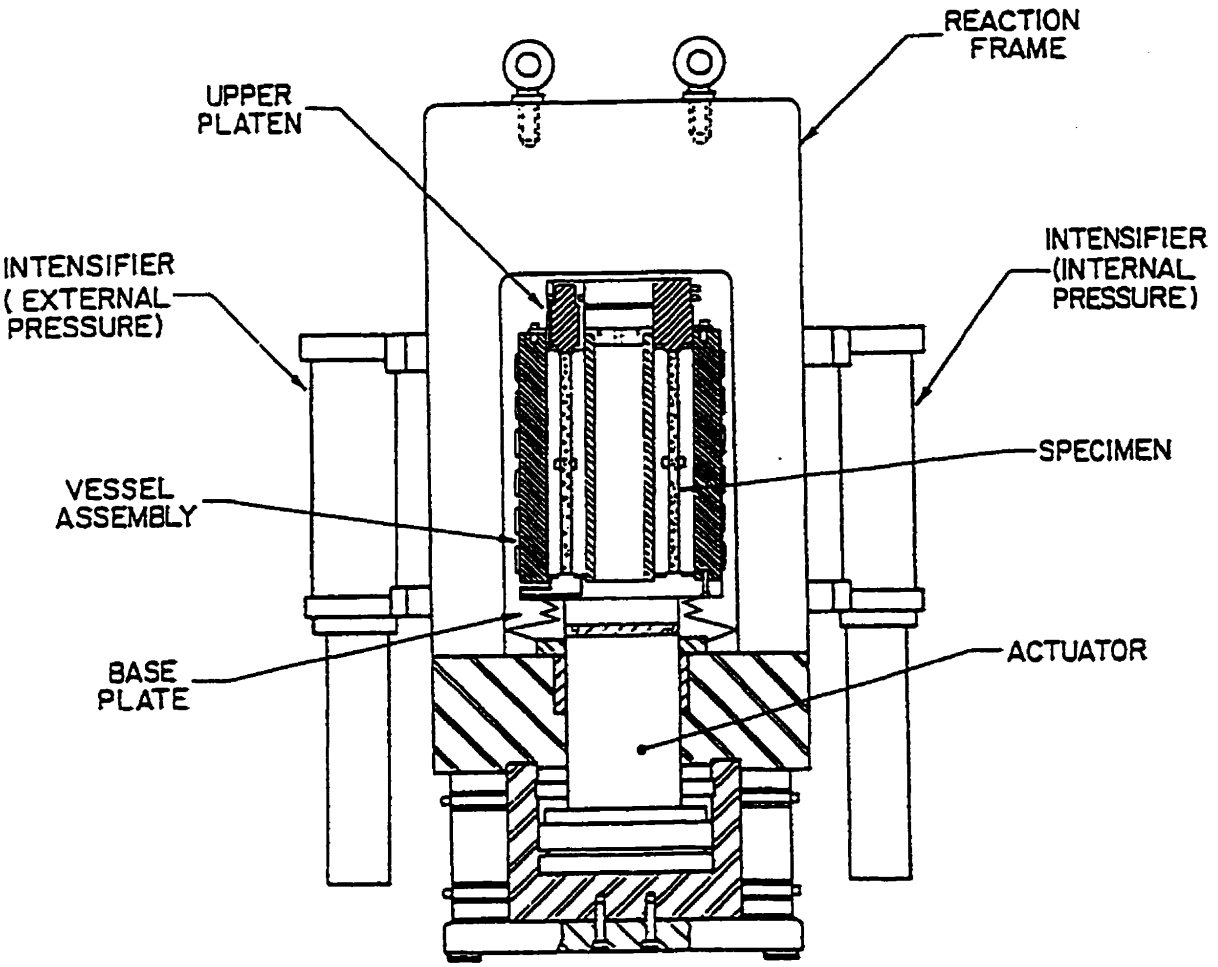


Figure 6.52: Représentation du montage pour l'essai du cylindre à paroi mince (tirée de Mellegard et al. 1992).

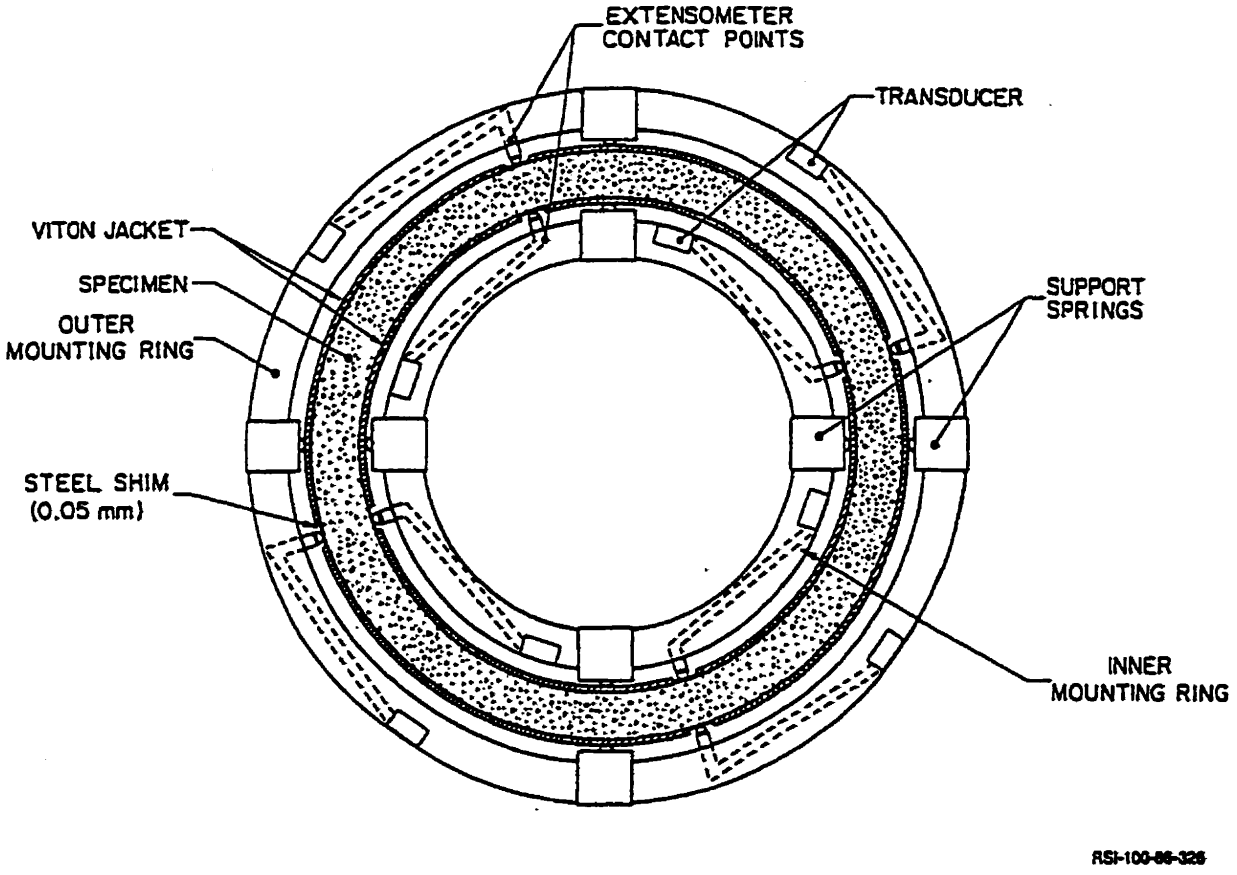


Figure 6.53: Représentation du montage et de la position des jauges de déformation pour l'essai du cylindre à paroi mince (tirée de Mellegard et al. 1992).

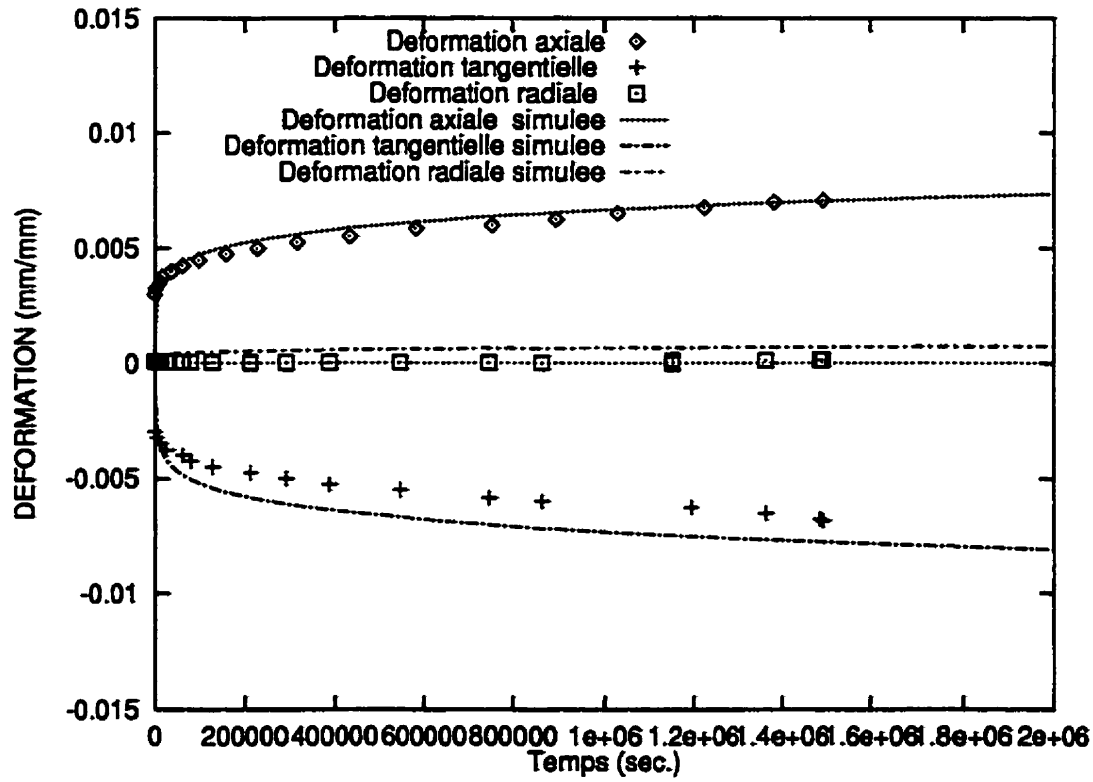


Figure 6.54: Comparaison entre les résulats expérimentaux de l'essai C'1 (Mellegard et al. 1992) et les résultats de la prédiction faite avec ZéBuLoN en utilisant la fonction sinus hyperbolique. Les constantes utilisées sont celles obtenues des identifications sur les essais de Senseny at al. 1993. Les comparaisons sont faites pour les déformations axiales, radiales et tangentielles.

Les calculs indiquent aussi une légère surestimation des déformations tangentielles et axiales. En supposant que l'essai du cylindre à paroi mince est plus sensible aux phénomènes d'endommagement, cet effet ne semble pas trop surprenant.

La simulation numérique reproduit donc fidèlement le comportement général de l'éprouvette. Il faut souligner ici qu'il s'agit d'une véritable prédiction puisque cet essai n'est pas intervenu dans la détermination des constantes.

Ces résultats permettent donc de conclure que le modèle SUVIC modifié ici, et le code ZéBuLoN, permettent de reproduire correctement le sel de Avery Island, et ce même en condition multiaxiale.

6.3.4 Influence de la méthode d'intégration

Dans cette dernière section du chapitre, on compare le comportement des différentes méthodes d'intégration pour différents types de chargement. La robustesse des méthodes choisies constituent un élément clé face à la qualité des résultats obtenus.

On étudie l'influence de la méthode d'intégration utilisée avec Z7 pour un essai à taux de déformation contrôlé (essai CSR $\dot{\epsilon} = constante$) suivi d'une période de relaxation ($\dot{\epsilon} = 0$). Suite au chargement (CTC) d'une éprouvette cylindrique à un taux de déformation de $\dot{\epsilon} = 3.8 * 10^{-5}\ s^{-1}$ (pression de confinement de 53.0 MPa) durant 100 secondes, on laisse l'échantillon subir une phase de restauration ($\dot{\epsilon} = 0$) durant 50 secondes. La contrainte déviatorique est calculée pour la période de 150 secondes (les calculs ont été réalisés avec la formulation exponentielle avec les coefficients fournis au tableau 6.11). Les essais numériques ont été réalisés avec la méthode Runge-Kutta et la méthode θ (avec $\theta = 0, 0.5, 1.0$). Une courbe de référence a été produite en simulant l'essai avec la méthode explicite pour un très grand nombre d'incréments. La figure 6.55 donne l'effet de l'augmentation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = 1$ et Runge-Kutta. Le nombre d'incréments utilisé est respectivement de 1-1 et de 10-10 incréments pour les stages de chargement et de relaxation. On remarque une amélioration rapide de la qualité du résultat lorsque le nombre d'incréments est augmenté. Il est intéressant de remarquer que les deux méthodes permettent l'obtention de résultats relativement comparables avec un seul incrément. L'augmentation du nombre d'incréments permet la meilleure définition de la zone transitoire en chargement et en relaxation.

Les figures 6.56, 6.57 et 6.58 montrent pour cet essai l'effet de l'augmentation du nombre d'incréments sur la valeur de l'erreur absolue, le temps de CPU total et la grandeur du résidu maximal à la fin de l'essai. Les méthodes $\theta = 0, 0.5, 1$ et Runge-Kutta convergent vers la même valeur. La méthode explicite d'Euler ($\theta = 0$) semble plus sensible au pas de temps. La qualité de l'intégration devient néanmoins adéquate dès que le nombre d'incréments est suffisant. Pour un nombre d'incréments

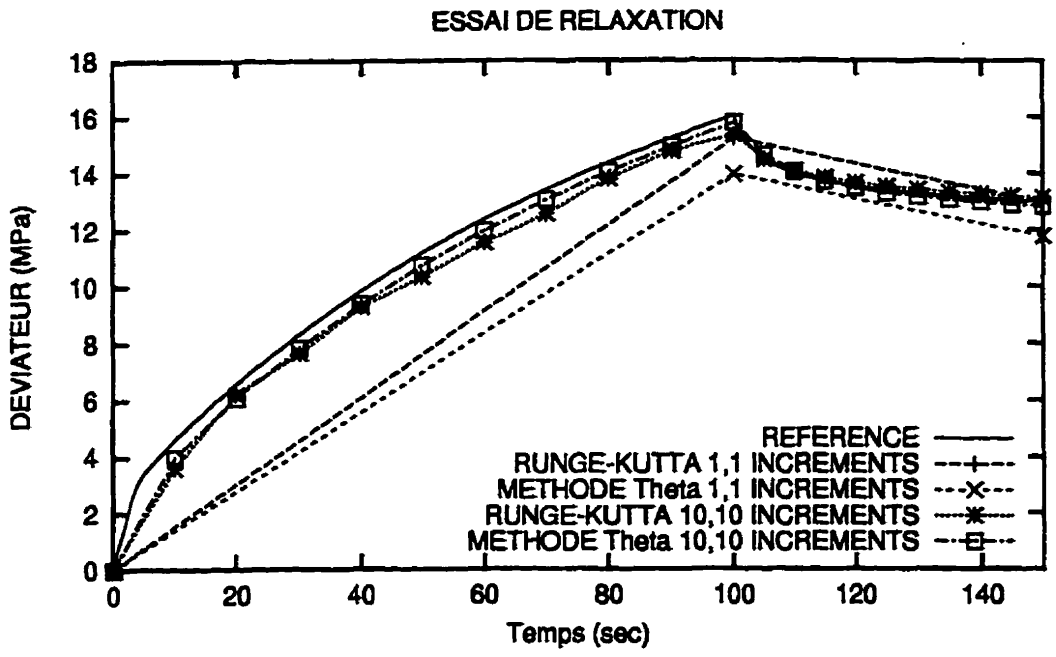


Figure 6.55: Effet de l'augmentation du nombre d'incréments 1-1 à 10-10 pour les méthodes d'intégration Runge-Kutta et θ pour un essai CSR-Relaxation.

insuffisant la méthode est toutefois particulièrement instable. La méthode Runge-Kutta (méthode d'intégration avec ajustement de pas de temps automatique) peut être considérée comme relativement robuste pour ce type de chargement. La méthode θ avec $\theta = 0.5$ permet l'obtention du résidu le plus faible pour les différentes méthodes testées et ce peu importe le nombre d'incréments. En ce qui concerne le temps de CPU, les différentes méthodes sont comparables.

On a également évalué la qualité des résultats pour un essai à taux de chargement nul (essai de fluage). La figure 6.59 montre le chargement imposé à une éprouvette cylindrique. On charge l'éprouvette de façon linéaire et hydrostatique durant 100 secondes jusqu'à 53.0 MPa. On applique ensuite rapidement une surcharge axiale de 17.0 MPa (70 MPa), en 1 seconde. On maintient la charge axiale et la pression de confinement constantes durant 800 secondes. Durant cet essai, on suit l'évolution de la déformation totale axiale $\epsilon_{axial}(= \epsilon_{22})$.

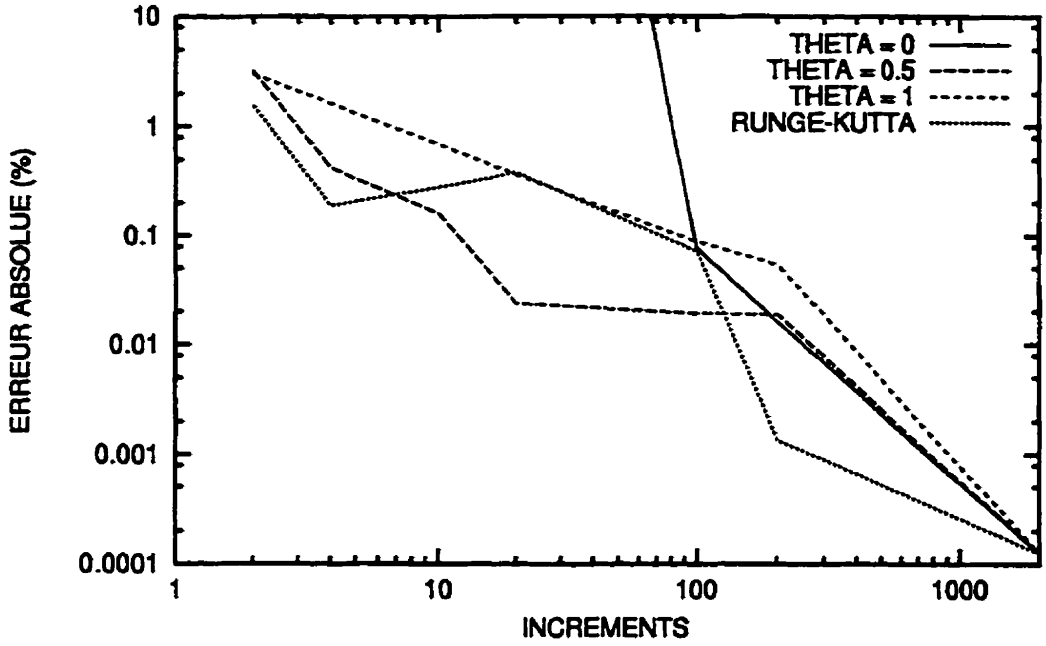


Figure 6.56: Variation de l'erreur absolue en fin de calcul pour l'essai CSR-Relaxation en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = (0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta.

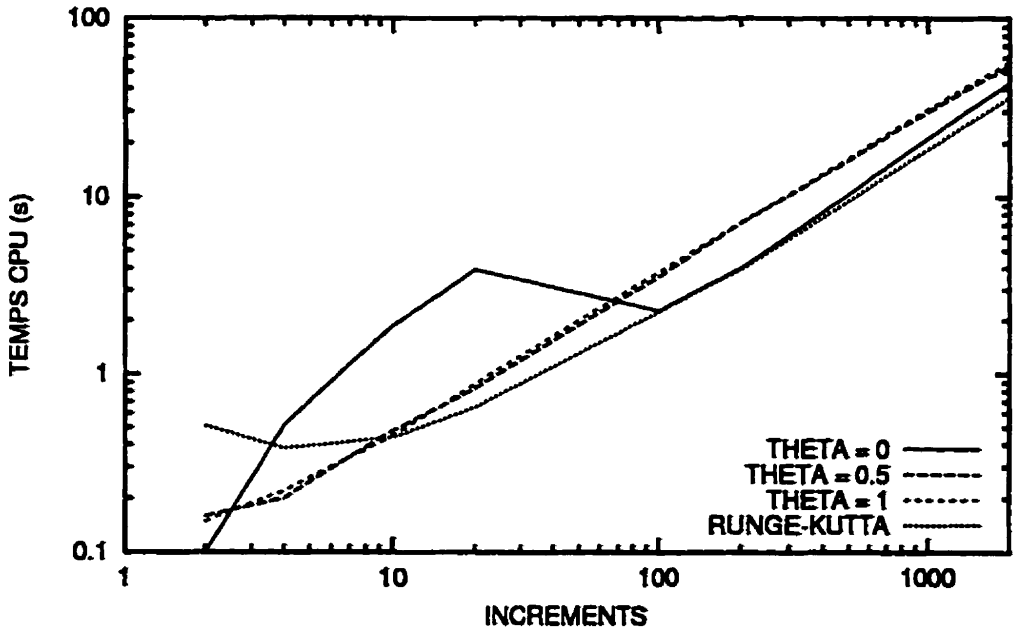


Figure 6.57: Variation du temps de calcul pour l'essai CSR-Relaxation en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = 0, 0.5, 1$ et Runge-Kutta.

De façon similaire au cas précédent, les essais numériques ont été réalisés avec les méthodes Runge-Kutta et θ ($\theta = 0, 0.5, 1.0$). Une courbe de référence a été produite en simulant l'essai avec la méthode explicite pour un très grand nombre d'incréments. La figure 6.60 donne l'effet de l'augmentation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = 1$ et Runge-Kutta sur la qualité du résultat. Le nombre d'incréments sont respectivement de 1-1-1 et de 1-100-100 incréments pour les stages de chargement 0 à 53, 53 à 70 et de maintien à 70 MPa. On remarque encore une fois la sensibilité au nombre d'incréments. De même que précédemment, un nombre minimal d'incréments permet d'obtenir un estimé raisonnable de la réponse pour les méthodes Runge-Kutta et θ compte tenu de la nature automatique de l'ajustement du pas de temps de ces méthodes. Pour les deux cas, on note toutefois que la méthode implicite est supérieure à la méthode explicite.

Les figures 6.61, 6.62 et 6.63 montrent pour cet essai l'effet de l'augmentation du nombre d'incréments sur la valeur de l'erreur absolue, le temps de CPU et la grandeur du résidu (calculés par les méthodes identifiées plus haut). On peut observer que l'erreur absolue sur la déformation axiale décroît avec l'augmentation du nombre d'incréments. La méthode semi-implicite $\theta = 0.5$ est la plus performante des quatre. Elle offre un comportement plus stable, ce qui avait déjà été noté dans la littérature (ex.: Desai et Zhang 1987). À l'analyse des résidus, on remarque que la méthode semi-implicite permet l'obtention d'un résidu et d'une erreur généralement plus faibles pour un nombre d'incréments donné. La méthode d'Euler est particulièrement instable à faibles incréments. La méthode Runge-Kutta se comporte relativement bien même à un nombre faible d'incréments. Ceci est imputable sans doute à l'algorithme d'ajustement automatique du pas de temps. En termes de temps de calcul, pour un même nombre d'incréments, les méthodes explicites sont plus performantes compte tenu du nombre plus limité de calculs à réaliser (car le nombre d'itérations est moindre).

Ces exercices relativement simples permettent d'apprécier les avantages de l'utili-

sation des méthodes d'intégration implicite et semi-implicite. Même si ces méthodes causent une augmentation inévitable du temps de calcul, elles permettent néanmoins de réduire le nombre d'incréments autant pour des conditions de taux de déformation contrôlés que pour des taux de chargement contrôlés. On doit aussi remarquer la bonne performance de la méthode Runge-Kutta pour les différents calculs, probablement en raison de la procédure permettant l'ajustement du pas de temps d'une façon automatique.

L'ensemble de ces résultats montre que même si le modèle constitutif (SUVIC) et le modèle numérique (ZéBuLoN) sont en mesure de bien représenter le comportement mécanique du sel gemme, leur application à des cas réels implique aussi une utilisation judicieuse des options disponibles pour intégrer correctement les équations différentielles. À cet égard, la méthode de Runge-Kutta de 4^e ordre et la méthode θ semi-implicite ($\theta = 0.5$) apparaissent toutes deux comme des choix valables, qui peuvent être utilisées dans la pratique.

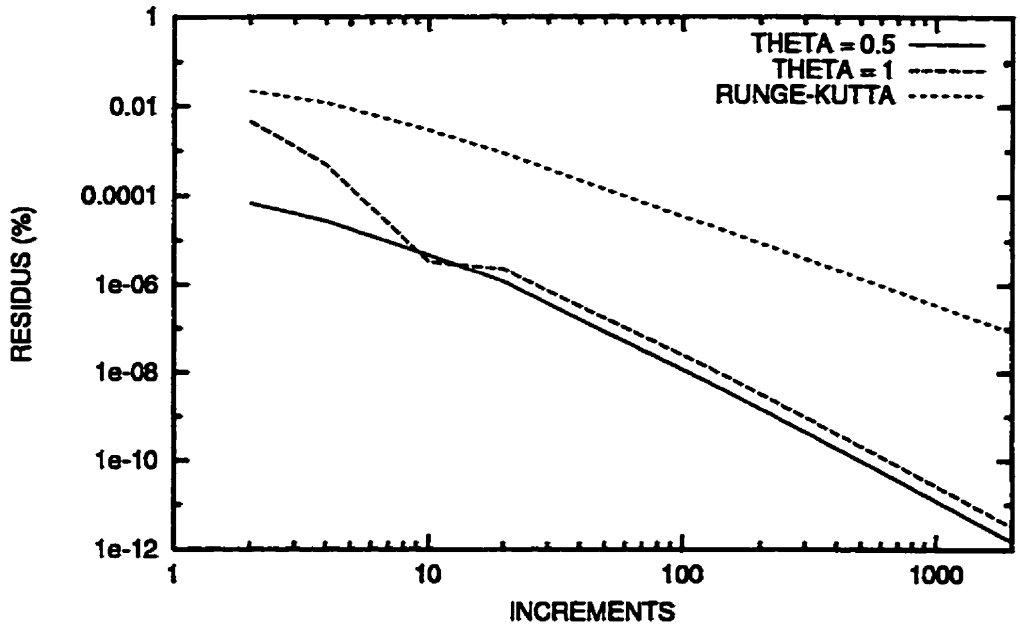


Figure 6.58: Variation de la grandeur du résidu maximal en fin de calcul pour l'essai CSR-Relaxation en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta(= 0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta.

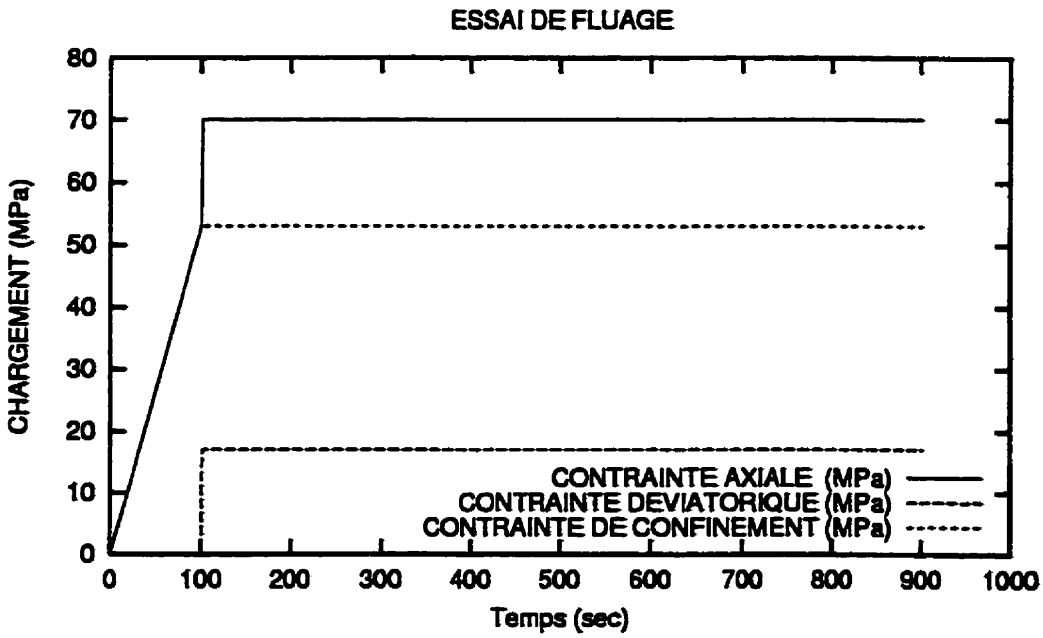


Figure 6.59: Chargement imposé pour un essai de fluage visant à tester la robustesse des méthodes d'intégration.

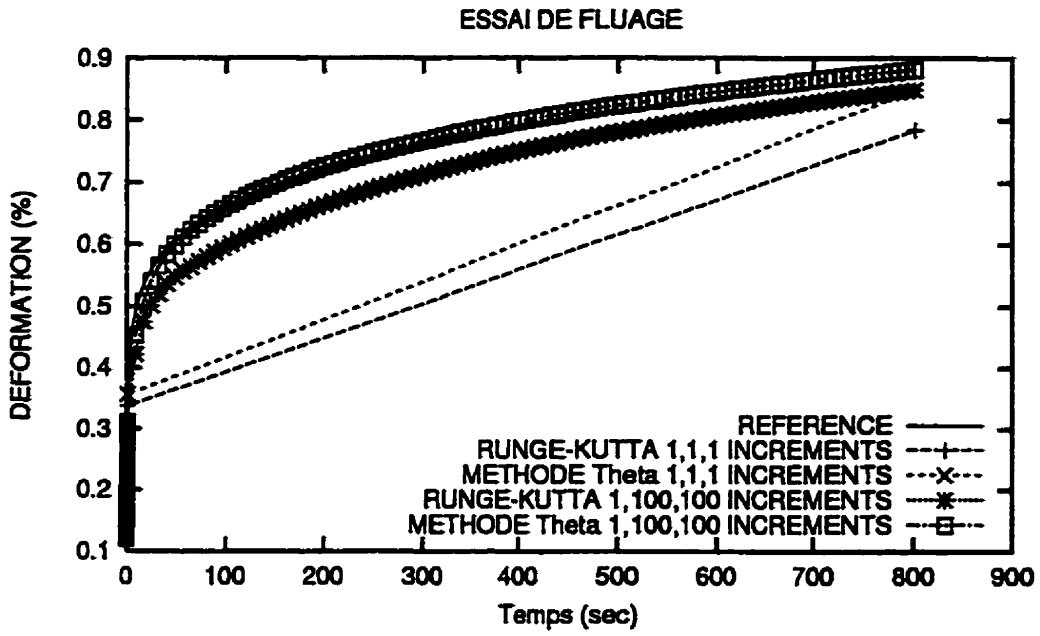


Figure 6.60: Effet de l'augmentation du nombre d'incréments 1-1-1 à 1-100-100 pour les méthodes d'intégration Runge-Kutta et θ pour l'essai de fluage.

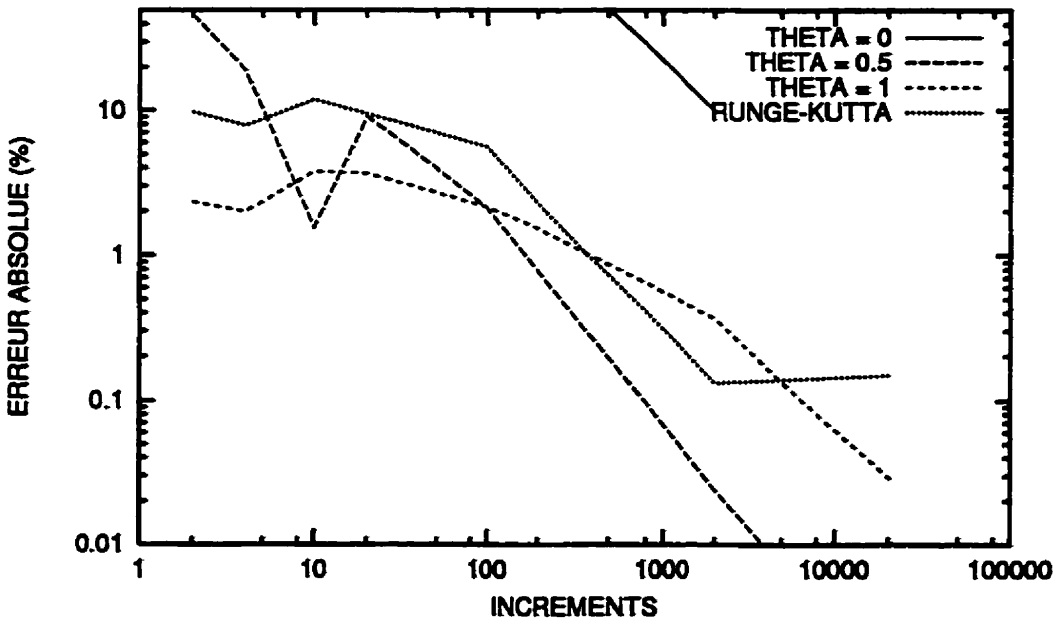


Figure 6.61: Variation de l'erreur absolue en fin de calcul pour l'essai de fluage en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta(= 0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta.

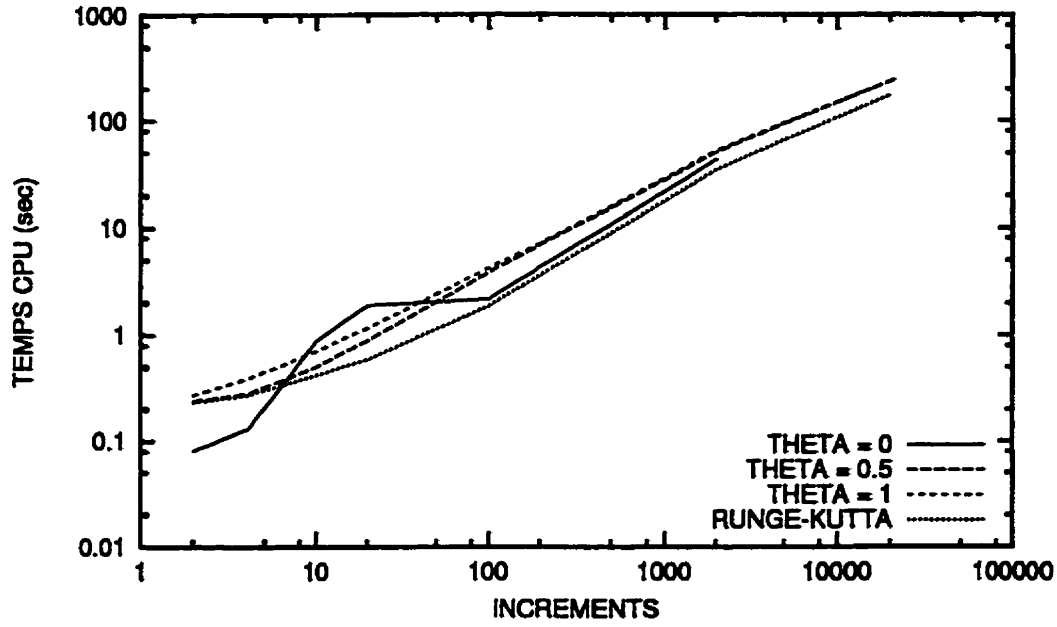


Figure 6.62: Variation du temps de calcul pour l'essai de fluage en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = (0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta.

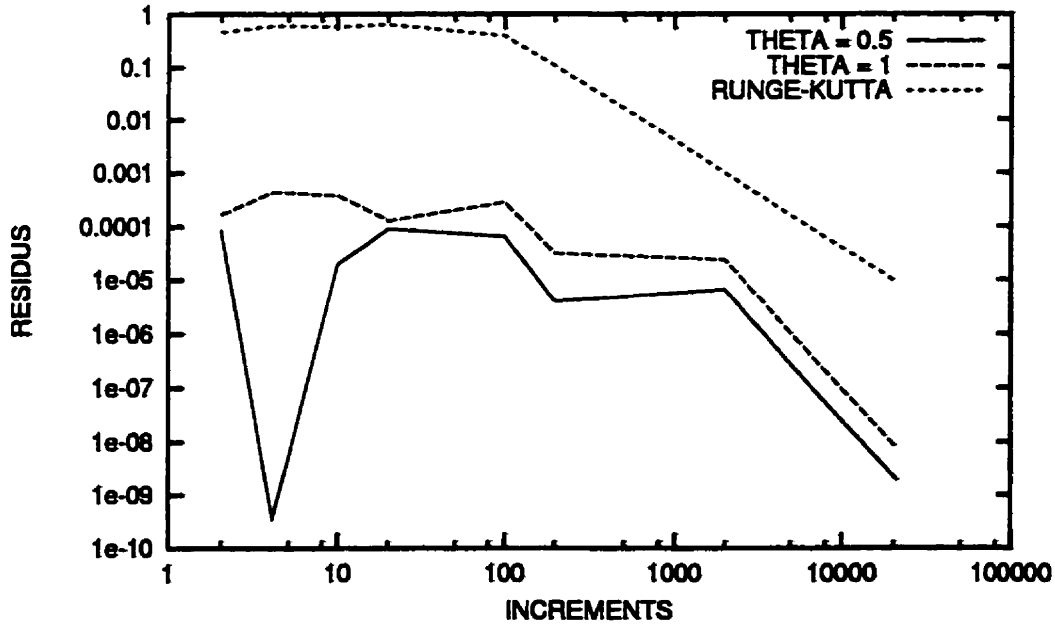


Figure 6.63: Variation de la grandeur du résidu maximal en fin de calcul pour l'essai de fluage en fonction de la variation du nombre d'incréments pour les méthodes $\theta = (0, 0.5, 1)$ et Runge-Kutta.

Chapitre VII

DISCUSSION

Ce chapitre vise à reprendre certains points importants soulevés dans cette thèse et à les commenter de façon plus spécifique. Parmi les points particuliers qui sont abordés, on peut mentionner la nécessité d'inclure la notion d'écrouissage mixte pour décrire le comportement du sel gemme, l'utilisation de la fonction sinus hyperbolique et les autres modifications apportées au modèle SUVIC, la procédure de détermination des constantes et l'utilisation des outils développés ici pour des applications pratiques.

7.1 Écrouissage mixte ou isotrope

Il est utile de revenir ici sur les notions d'écrouissage mixte et isotrope. Pour cela on présente une série de simulations permettant de comparer le comportement de SUVIC avec celui d'un modèle de fluage classique adoptant l'hypothèse d'écrouissage isotrope.

La figure 7.1 montre d'abord une comparaison entre les réponses obtenues avec des modèles d'écrouissage par la déformation (strain hardening SH), par le temps (time hardening TH) et le modèle SUVIC pour un essai numérique de fluage uniaxial d'une durée de 50 heures. On rappelle que les modèles SH et TH ont été présentés aux équations 2.10 et 2.11 et à la figure 2.5.

Trois simulations ont été réalisées: un essai de fluage à une contrainte déviatorique de 15.0 MPa, un essai de fluage à une contrainte déviatorique de 25.0 MPa, et un essai avec une augmentation subite de la contrainte après 10 heures, de 15.0 à 25.0 MPa. Les constantes utilisées pour les simulations sont celles fournies au tableau 6.11 et proviennent d'identifications faites sur le sel artificiel avec la loi exponentielle. Des résultats similaires auraient été obtenus avec la loi sinh pour les conditions imposées ici.

La réponse du modèle SUVIC peut être comparée aux courbes qui seraient obtenues de façon théorique avec les modèles SH et TH. Toutes les valeurs ont été ajustées sur l'essai de fluage de 15 MPa pour les 10 premières heures. Suite à l'incrément de chargement (de 15 à 25 heures), on remarque que le comportement de SUVIC s'approche de celui du modèle avec écrouissage par la déformation (SH), modèle qu'on sait représentatif du comportement réel pour ce type d'essai lorsqu'il y a un incrément instantané durant l'essai (ex.: Durup et Xu 1996). Le modèle TH est pour sa part très différent des deux autres et il est peu représentatif de la réponse réelle des matériaux.

Même si la réponse de SUVIC s'apparente à celle d'un modèle avec écrouissage par la déformation (SH) pour un tel essai de fluage par paliers incrémentaux, des différences majeures dans la description du comportement du sel gemme existent un modèle avec écrouissage par la déformation (SH) pour des essais de fluage par paliers incrémentaux, toutefois pour d'autres types d'essais où les chargements sont plus complexes. On rappelle ici que l'écrouissage dans le modèle SH est contrôlé par un scalaire $\dot{\epsilon}^i_{eq}$, et que la direction de $\dot{\epsilon}^i$ est identique à celle de **S**. Cette approche ne permet donc de décrire qu'un écrouissage isotrope. Le modèle SH ne peut pas tenir compte des effets de l'historique de déformation impliquant une composante directionnelle. Il est, par exemple, inadéquat pour décrire l'effet des rotations de contraintes principales, le renversement des contraintes, ou les déchargements importants. De tels phénomènes peuvent survenir autour des excavations souterraines

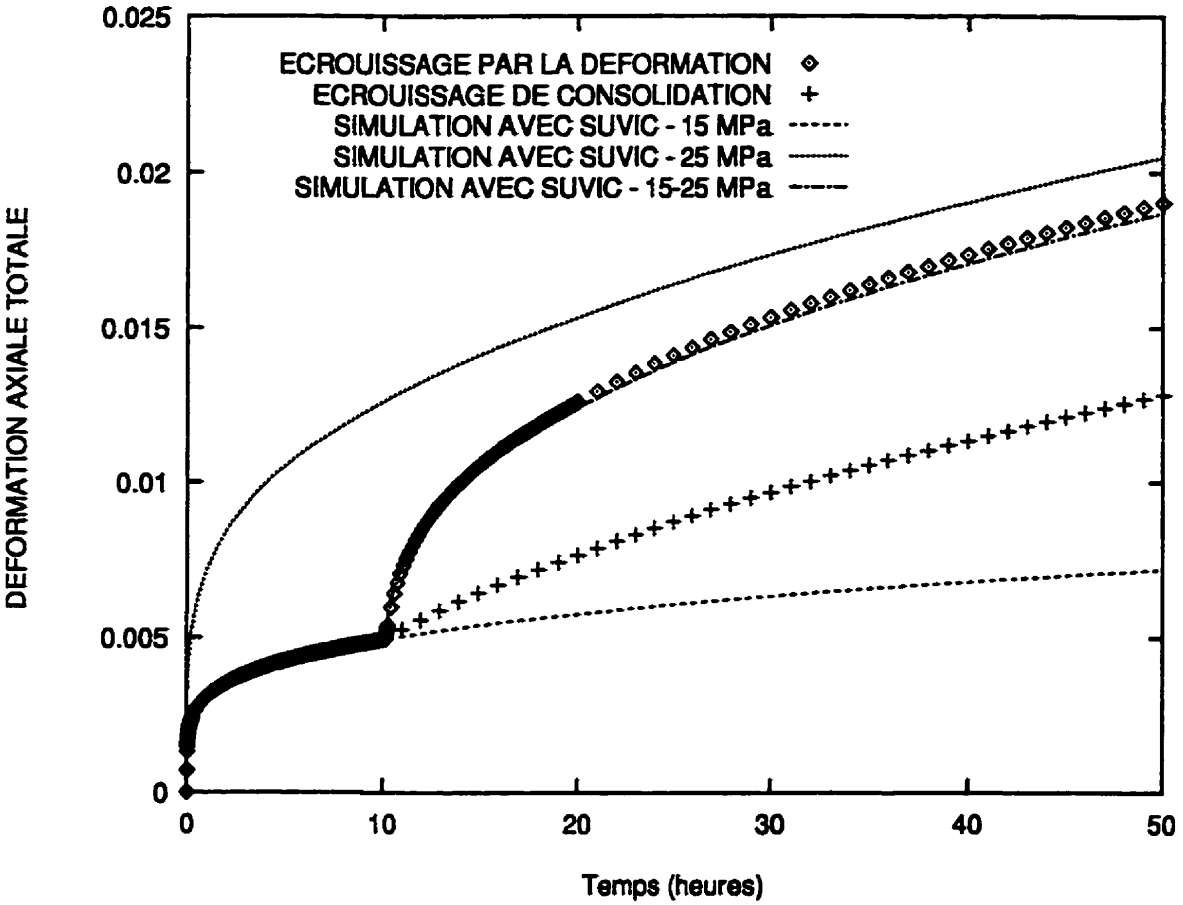


Figure 7.1: Comparaison entre les réponses des modèles SUVIC et les modèles d'écrouissage par la déformation (SH) et de consolidation ou par le temps (TH). On remarque que le comportement de SUVIC s'apparente aux résultats de l'essai SH après l'incrément de chargement.

suite à la redistribution des contraintes, comme on l'a vu à partir des simulations numériques simplifiées au chapitre 6.

Afin d'illustrer ces différents points, la figure 7.2 montre la réponse typique en fluage de l'évolution de la déformation en fonction du temps pour le modèle SH et pour le modèle SUVIC suite à une baisse subite de la contrainte pour trois niveaux de contrainte. Les figures 7.3 et 7.4 présentent les réponses anticipées lors d'essais avec déchargements et rechargements lors d'essais cycliques. La réponse du modèle SH (écrouissage isotrope) peut différer de façon importante par rapport à la réponse obtenue d'un modèle avec écrouissage mixte comme SUVIC. La réponse fournie par

le modèle avec écrouissage mixte est en accord avec les observations faites sur le comportement du sel gemme (e.g. Hunsche 1988, voir aussi la section 6.2) et sur d'autres matériaux cristallins (e.g. voir figures 6.16, 6.18 et Ohashi et al. 1986, voir aussi Murakami et Ohno 1982, Murakami 1987, Ohno et al. 1985). L'écart entre la réponse prévue par un modèle à écrouissage mixte et un modèle SH tend à augmenter au fur et à mesure qu'augmente le nombre de stages de chargement-déchargement tel que montré aux figures 7.3 et 7.4.

La capacité de bien représenter les chargements cycliques ou des déchargements n'est pas une caractéristique inutile pour un modèle constitutif. Ce type de comportement peut survenir in situ autour des excavations souterraines à cause de la séquence de minage, ou encore lors des cycles de remplissage et vidange des cavernes souterraines pour l'entreposage de produits gaziers (Horseman 1988; Nguyen-Minh 1993; Sousa et Menezes 1993; Hoffman et Ehgartner 1993; Lux et Schmidt 1996). Or, ces résultats montraient que la déformation en fluage après un déchargement partiel ou total est inadéquatement décrite avec l'hypothèse d'écrouissage isotrope (voir aussi Skrzypek et Hetnarski 1993; Munson et al. 1996).

Les simulations des résultats expérimentaux de l'auteur présentées au chapitre 6 (voir figures 6.11 à 6.14) et ceux de Senseny et al. (1993) (voir figures 6.15 à 6.22) ont aussi démontré la nécessité d'inclure une composante cinématique pour décrire le comportement du sel gemme. Ceci est éloquemment mis en évidence pour les essais de Senseny et al. où le comportement du matériau est très affecté par la réponse des variables cinématiques. Ces différentes simulations, en plus de montrer la nécessité d'inclure la notion d'écrouissage mixte dans un modèle comme SUVIC, démontrent aussi l'avantage d'utiliser deux variables cinématiques dont une sature plus rapidement et sur laquelle les composantes de restauration dynamique et statique peuvent agir de façon significative.

Les résultats confirment qu'un modèle constitutif pour le sel gemme devrait inclure des contributions mixtes (isotrope et cinématique) permettant de bien re-

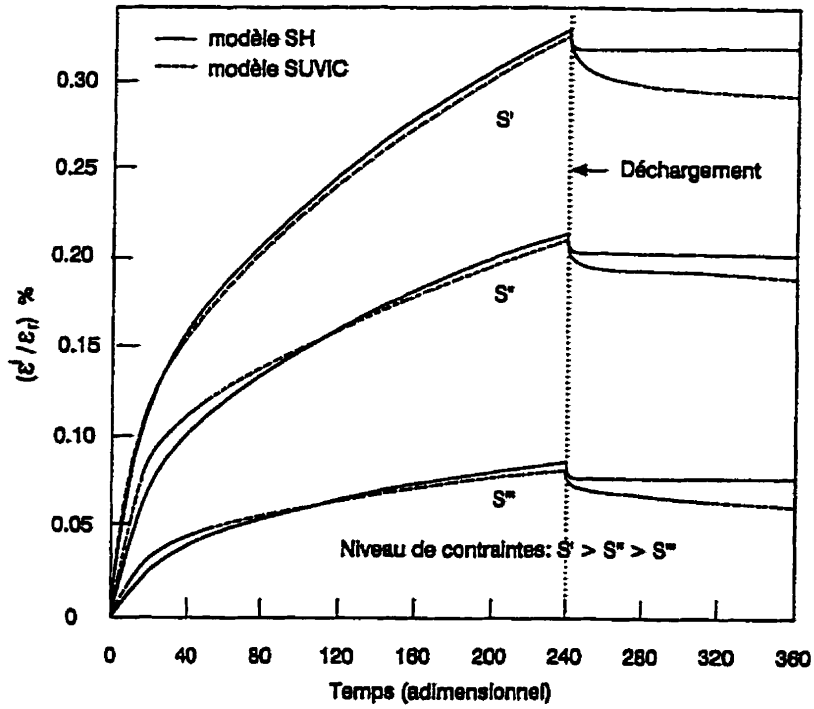


Figure 7.2: Comparaison entre la réponse du modèle SH et du modèle SUVIC suite à un déchargement au cours d'un essai de fluage pour 3 niveaux de contraintes lors d'un essai de fluage numérique décrémental à deux paliers. On montre ici la déformation normalisée ϵ^i/ϵ_r, où ϵ_r est une déformation de référence, en fonction d'une unité de temps adimensionnel.

produire l'écrouissage et la restauration subie par ce matériau. SUVIC inclue ces contributions via l'utilisation des variables internes $\mathbf{B}_\ell$, $\mathbf{B}_l$, R et K et de leur loi évolutive respective. Les modèles avec écrouissage mixte, comme SUVIC, ont des comportements comparables aux modèles SH et TH pour des chargements simples et monotones, mais beaucoup plus réalistes pour des conditions de chargement complexes.

On a souvent considéré, pour les problèmes géomécaniques, que l'utilisation de l'écrouissage mixte n'est pas requise puisque les problèmes sont caractérisés par des chargements monotones. Or, il faut insister à nouveau sur le fait que les chargements réels sont en fait très complexes pour une bonne partie des problèmes typiques. C'est le cas des excavations souterraines où certains secteurs peuvent être chargés de

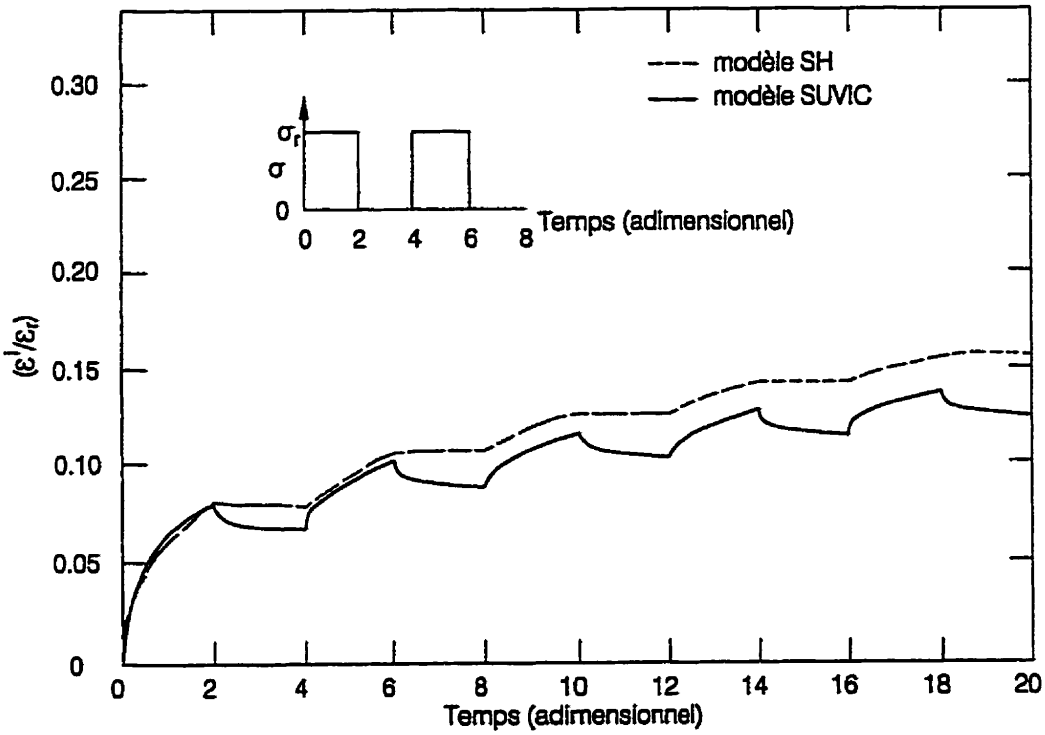


Figure 7.3: Comparaison entre la réponse obtenue des modèles SH et SUVIC pour un essai cyclique avec déchargements et rechargements. On montre ici la déformation normalisée ϵ^i/ϵ_r, où ϵ_r est une déformation de référence, en fonction d'une unité de temps adimensionnel.

façon non monotones selon la séquence de minage et la redistribution de contraintes. De même, pour le cas des réservoirs gaziers souterrains, les cycles de vidange et de remplissage des réservoirs constituent des chargements non monotones assimilables à des chargements cycliques.

L'utilisation des modèles avec VEI demeure toutefois toujours controversée en géomécanique. Ils sont en outre encore perçus comme étant trop complexes. L'utilisation d'un grand de nombres de constantes ayant entre elles des liens particulièrement convolutés est aussi perçue comme étant un handicap majeur. On considère aussi le fait, qu'étant en partie basés sur des variables internes non mesurables (ou difficilement mesurables), on peut prêter à ces variables des propriétés ou vertus particulières, souvent difficiles à vérifier. Pour certains qui en comprennent mal les fondements l'utilisation de ces modèles se ramène à des exercices sophistiqués d'ajustement

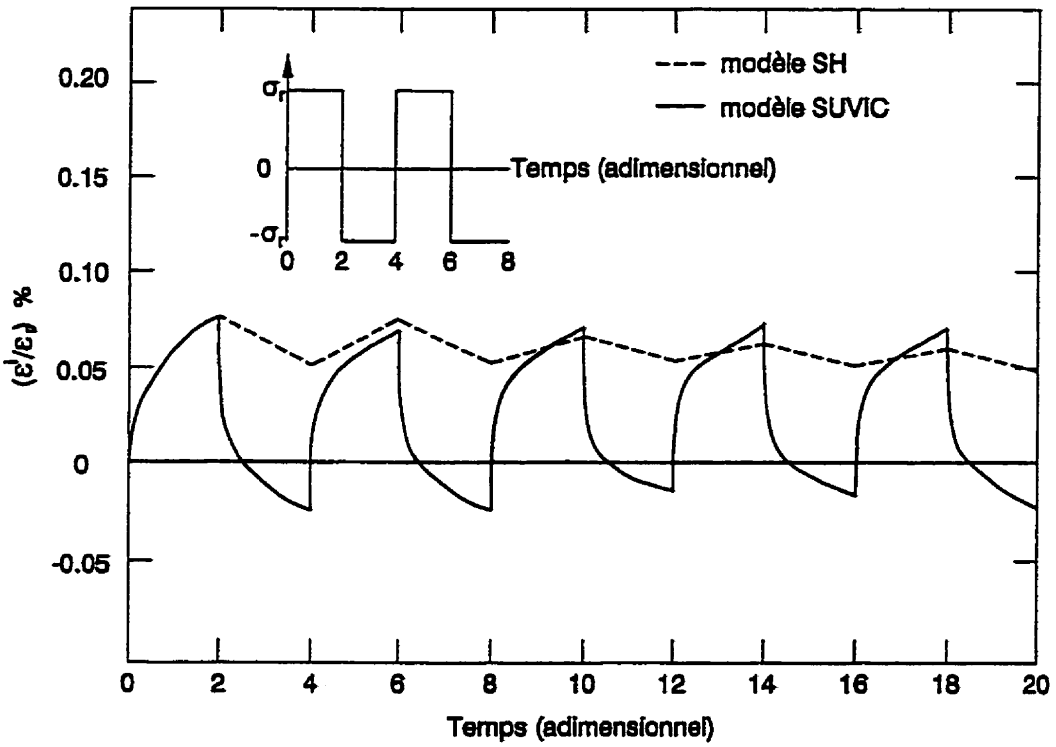


Figure 7.4: Comparaison entre la réponse obtenue du modèle SH et du modèle SUVIC pour un essai cyclique avec déchargements et rechargements inversés. On montre ici la déformation normalisée ϵ^i/ϵ_r, où ϵ_r est une déformation de référence, en fonction d'une unité de temps adimensionnel.

des résultats et de courbes expérimentales. Ces points méritent d'être revus succinctement puisqu'ils sont fréquemment rencontrés.

Notons d'abord que les modèles avec VEI sont généralement beaucoup plus simples qu'ils ne paraissent a priori. Si on prend le cas particulier de SUVIC, ce modèle repose sur quatre idées principales:

- Le taux de déformation inélastique $\dot{\epsilon}^i$ est fonction (loi de puissance à exposant constant) du rapport de la contrainte active σ_a ($\sigma_a = \sigma - \sigma_i = \sigma - (\mathbf{B} - R)$) sur la variable de normalisation K;

- Il existe pour les différentes variables externes ($\dot{\epsilon}^i - \sigma$ et internes ($\mathbf{B}_s, \mathbf{B}_i, R$ et K) des états stationnaires vers lesquels les variables tendent. Ces états stationnaires ne dépendent pas de l'historique du chargement;

- Les variables internes évoluent selon des lois incluant des effets d'écrouissage et de restauration. Pour les variables cinématiques, l'écrouissage est dans la direction de la déformation et la restauration est dans la direction de la variable.

- La restauration contient deux composantes (dynamique et statique) dont une est surtout fonction du taux de déformation et l'autre du temps.

Ces principes de base peuvent être considérés comme étant raisonnables, et font en sorte que les modèles avec VEI sont beaucoup plus près du comportement physique réel des matériaux que les modèles viscoplastiques classiques. L'abondante littérature dans le domaine le démontre très clairement (ex.: Miller 1987; Aubertin et al. 1991b; Krausz et Krausz 1996).

En ce qui concerne le nombre élevé de constantes (paramètres libres), c'est un argument fréquemment invoqué pour écarter ces modèles. Toutefois, tel que montré au chapitre 6, il est possible de réduire substantiellement le nombre de constantes en utilisant des simplifications représentatives des conditions anticipées et en invoquant des arguments micro-mécanistiques. En fait, l'exercice de détermination des constantes pour un tel modèle n'est pas beaucoup plus ardu que pour un modèle avec un nombre moindre de paramètres puisqu'ici ces derniers sont de véritables constantes qui ne varient pas avec les conditions de chargement. Il est toutefois essentiel que la base d'essais servant à l'identification soit suffisamment variée pour espérer une identification efficace. Néanmoins, la variabilité naturelle des matériaux et le traitement des résultats d'essais complique un peu le travail.

7.2 Modifications apportées au modèle SUVIC

Afin d'améliorer la réponse du modèle SUVIC, certaines modifications lui ont été apportées au cours de ces travaux (voir chapitre 5). Les changements apportés au modèle ne modifient pas ses fondements. En fait, ces modifications découlent généralement avant toute chose de considérations numériques et pratiques, qui ont

débouché par la suite sur des améliorations théoriques.

La fonction sinus hyperbolique

Une des améliorations notables apportées au modèle est l'utilisation de la fonction sinus hyperbolique pour décrire le comportement à l'état stationnaire. L'utilisation de la fonction sinus hyperbolique permet de contrecarrer le comportement singulier que le modèle exhibait lorsque les taux de déformation devenaient très faibles. À cet égard, il est intéressant de souligner à nouveau que le modèle invoque pour sa loi cinétique implicitement deux lois: une loi de puissance exprimée en termes des VOI et une loi sinus hyperbolique exprimée seulement en termes des variables observables pour l'état stationnaire. Cette particularité qui ne cause pas de problèmes illustre le fait la loi *sinh* est une simplification appropriée ou une approximation permettant de caractériser simplement et efficacement l'état stationnaire en fonction des variables observables. Ce qui est bien connu depuis les travaux de Garafalo (1963) et de Freed et Walker (1995). La loi de puissance demeure véritablement la représentation de la loi cinétique du modèle dans les l'espace des VOI.

La grandeur de la contrainte interne

La représentation à saturation de la grandeur de la contrainte interne par rapport à la contrainte appliquée selon une relation linéaire proportionnelle peut sembler un peu douteuse à prime abord. Encore une fois, cette nouvelle représentation s'est imposée pour des raisons pratiques. Une telle représentation a des avantages au niveau numérique par rapport à l'ancienne qui était une loi de puissance du déviateur (la valeur de m dans les équations 2.76 à 2.78 était inférieure à 1). Une telle représentation était notamment problématique pour des déviateurs $\mathbf{S} < 1.0\ MPa$ comme mentionné au chapitre 5. La représentation proposée a l'avantage d'être

mathématiquement plus simple et plus aisée à traiter, tout en étant raisonnable d'un point de vue physique. Compte tenu de la difficulté inhérente associée à l'évaluation de la valeur de σ_i, l'hypothèse de la linéarité est sûrement adéquate compte tenu des résultats expérimentaux déjà cités. Sans doute, une formulation plus évoluée pourrait éventuellement être adoptée à ce niveau si le besoin s'en fait sentir.

Espaces des VOI et VOIA

L'introduction de la notion des Variables Observables et Internes (VOI) et des Variables Observables et Internes Associées (VOIA) dans la présentation de SUVIC peut paraître une nuance à caractère purement théorique. Cet amendement est encore une fois issu avant tout de considérations numériques. Le modèle dans sa formulation originale considérait une loi cinétique en grandeur "déformation" et des lois évolutives des variables d'état internes (VEI) en grandeur "contraintes". Lors du processus d'intégration locale, l'inversion devait être faite sur des matrices avec des rangées de coefficients qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeurs, pouvant ainsi induire des comportements numériques problématiques. L'utilisation des VOIA, en plus de rendre l'écriture du modèle "plus propre", réduit le risque de problèmes numériques potentiels lors de la résolution du système local.

Même si cette amélioration origine de considérations numériques, elle déborde néanmoins vers d'autres considérations théoriques intéressantes. Cette représentation permet entre autre de faire le lien avec les modèles viscoplastiques les plus connus. On a ainsi montré que SUVIC repose sur une formulation viscoplastique classique pour laquelle les fonctions et règles d'écoulement sont généralisées par l'introduction des VEI.

Cette représentation a de plus permis de réécrire le modèle en terme d'une fonction scalaire Ω qui est en fait un potentiel ayant une certaine parenté à l'énergie libre spécifique inélastique Ψ^i. Cette fonction scalaire Ω des différentes VOIA per-

met, lorsque dérivée par rapport aux VOIA, d'obtenir une représentation des VOI. En utilisant cette méthode, il a été démontré que les paramètres liants les VOIA aux VOI étaient positifs et étaient dépendants de la température.

En utilisant l'hypothèse, invoquée par d'autres auteurs, qu'une variation subite de la température ne tend pas à produire une déformation inélastique significative à très court terme, les lois évolutives des VOI ont été reconstruites en termes du gradient des VOIA et du gradient de la température multiplié par la dérivée des paramètres liant les VOI aux VOIA par la température (voir équation 5.75). Ce résultat permet de montrer que ces paramètres peuvent implicitement obéir une loi de type Arrhenius, qui on le sait est une représentation courante pour décrire les effets de la température.

Lorsque les lois évolutives des VOIA et VOI sont ainsi construites (voir équations 5.79 et 5.87), on remarque la similitude évidente entre les deux groupes d'équations. Toutefois, les lois évolutives des VOI sont caractérisées par la présence d'un terme additionnel fonction du gradient de la température ($\dot{T}$). Cette contribution originale apparaît naturellement de ce traitement plus général de SUVIC. Celle-ci agit, comme le terme de restauration par le temps, dans la direction de la variable cinématique. Il est entendu que l'introduction de ce terme est pour le moment une considération essentiellement théorique qui mériterait d'être éventuellement approfondie à partir de cas réels en simulant des essais avec des variations de température.

Une telle écriture a par ailleurs permis de valider le modèle de façon thermodynamique.

Dépendance de la variable K et de la constante A

La variable interne isotrope K dans le modèle SUVIC est une variable dont l'effet est assez difficile à cerner. Cette variable procure un degré de liberté additionnel, mais en première analyse, il pourrait sembler avantageux de la considérer comme

une constante (comme c'est la cas dans plusieurs versions du modèle de l'ONERA Lemaitre et Chaboche 1988 et d'autres modèles avec VEI classiques). Les essais montrent qu'en général, K évolue lentement. Néanmoins, il ne faut pas oublier que la particularité principale de SUVIC n'est pas d'utiliser une variable interne K, mais d'avoir des lois évolutives exprimées en termes des valeurs stationnaires dépendant du niveau de déformation inélastique. Dans ce cas, la variable de saturation K' permet de relier la loi cinétique (loi de puissance) des VEI à la loi cinétique (*sinh*) des variables observables. Cet élément est tellement propre à SUVIC que lors de l'implantation de SUVIC dans ZéBuLoN, un code spécifiquement développé pour les modèles à VEI, une classe de variables inconnue et non prévue a dû être ajoutée au code pour accommoder cette composante du modèle.

Un élément qui mérite d'être revu est le lien entre la constante A et la variable K, et plus particulièrement entre la constante A avec les constantes K_0 et A_5 qui se retrouvent dans la loi cinétique de K. On s'est aperçu que la constante A pourrait être éliminée en traitant différemment les valeurs de K_0 et A_5. Si on exprimait A comme une loi d'Arrhenius contenant un effet découplé de la température, il y aurait lieu de conserver ce paramètre, mais les résultats montrés à la section 6.2 tendent à nier un tel effet. Cet aspect devrait être regardé plus en détails.

7.3 Détermination des constantes

L'élaboration d'une procédure de détermination des constantes a possiblement été, lors de la réalisation de ces travaux, l'étape la plus ardue. L'identification de constantes pour les modèles à VEI est une étape complexe et quelque fois frustrante, mais capitale et incontournable. Les possibilités offertes par un modèle comme SUVIC justifie ces efforts. Réussir à représenter des essais totalement différents (ex.: fluage, CSR et relaxation) avec une seule série de constantes et une seule série d'équations n'est pas banal, et très peu de modèles sont en mesure de réaliser cela.

On a choisi dans le cadre de ces travaux, de fragmenter la banque d'essais disponibles sur le sel d'Avery Island en fonction des auteurs. Ceci est conséquent aux difficultés de saisir adéquatement le comportement d'un matériau donné avec une seule série de constantes. Ceci peut être considéré par certains comme un aveu que la prémisse de départ, à l'effet que le sel d'Avery Island était sans doute un des plus homogènes, est erronée. Toutefois, les résultats récents de Mellegard et al. (1992) et de Munson (1999) ont indiqué que le matériau en provenance de ce site montrait certaines hétérogénéités de comportement, selon sa provenance et sa composition.

La question qui peut alors en découler est: si on ne peut identifier un jeu de constantes unique pour un sel comme celui de Avery Island, alors qu'en sera-t'il pour les autres sels ou matériaux encore moins homogènes? Ces points sont valides et méritent d'être commentés davantage.

Revenons à la question de la fragmentation de la banque d'essais par auteurs et sa justification. Cette approche était justifiée dans le cadre de ces travaux, puisque le but principal était de vérifier l'applicabilité d'un modèle avec VEI (SUVIC) et non de trouver une série de constantes unique pour l'ensemble du sel d'Avery Island. L'objectif des simulations était de bien représenter les essais les plus divers possibles et de mettre en évidence certaines caractéristiques du modèle.

On sait maintenant que le site de prélèvement des échantillons (le dôme d'Avery Island) est globalement inhomogène. Des zones à grains plus grossiers existent et ont été identifiées par le passé. Les échantillons testés au fil des ans proviennent de différents secteurs de la mine. Certains sont plus près de la zone recristallisée, d'autres en sont plus éloignés. Avec l'information disponible, on ne peut statuer sur l'homogénéité des échantillons utilisés par les différents auteurs ayant servi à constituer cette banque d'essais. La seule chose que l'on puisse dire est que les essais montrent clairement une dispersion des résultats, naturellement anticipée pour les géomatériaux. L'argument voulant que le modèle ait été ajusté pour des plages limitées de comportement ne tient pas, en regard des résultats obtenus pour les essais

de Senseny et al. (1993) qui comprennent à la fois des essais CSR (avec $\Delta\dot{\epsilon}$), des essais de fluage (avec $\Delta\sigma$) et des essais de relaxation.

Aussi important que l'hétérogénéité intrinsèque du sel est le parcours subi par les échantillons entre leur lieu d'extraction et leur mise en place sur la presse. Ces effets de l'histoire mécanique sont difficiles à évaluer et quantifier. Ils sont aussi mal documentés particulièrement pour les essais au début des années 80, époque où la notion d'historique de chargement était encore à ses débuts. L'approche de fragmenter les essais selon leur origine et l'auteur, est une approche raisonnable dans le cadre de ce projet.

Même si les travaux dans le cadre de cette recherche ont clairement montré la variabilité du matériau, dans le contexte d'une application d'ingénierie, un zonage et une caractérisation par zones pourraient être envisagés.

Les résultats de Senseny et al. (1993) ont montré que le modèle peut convenablement représenter à la fois des essais de courtes et longues durées avec des mises en charge totalement différentes. Cette vérification montre la robustesse et la puissance du modèle et ce en dépit des difficultés associées à l'identification des constantes (avec un nombre limité d'essais disponibles).

7.4 Observations sur l'évolution des VEI

Parmi les résultats les plus significatifs issus de ces travaux, on peut mentionner certaines observations sur l'évolution des variables internes. Ainsi, on a remarqué les points suivants:

- l'écrouissage cinématique est crucial pour décrire le comportement de matériaux comme le sel gemme lors d'essais de courte et de longue durées. Ceci est visible dans les grandeurs relatives des constantes associées au comportement cinématique pour tous les essais réalisés. Sans cette composante, il aurait été impossible de représenter plusieurs des essais reproduits au chapitre 6;

- les restaurations statique et dynamique ont des effets qui apparaissent clairement pour les essais de relaxation et de fluage suite à un décrément de chargement. Ces effets sont secondaires pour des essais de courtes durées simples, mais apparaissent lors de déchargements subits et lors d'essais de longues durées. La restauration des variables internes, on le rappelle, est un phénomène microscopique observé expérimentalement par plusieurs, et le modèle SUVIC introduit cet aspect implicitement dans les lois d'évolution des VEI;

- il y a un avantage certain à utiliser deux variables cinématiques. Cela est clairement apparu au cours de ces travaux. La variable cinématique à courte portée $\mathbf{B}_s$ sature et réagit rapidement, et, elle offre la flexibilité requise lors de déchargements subits. La variable cinématique à longue portée $\mathbf{B}_l$ devient dans la plupart des cas dominantes après un certain temps;

- la variable de normalisation isotrope K évolue en général, de façon lente mais soutenue. Pour les essais de courtes durées, elle pourrait être maintenue constante puisqu'elle semble peu varier. Il est à noter que la valeur initiale de K, soit K_0, est déterminante dans le comportement du modèle. La valeur $K_0 = 1.0$ MPa a été considérée comme adéquate pour le sel gemme. À nouveau, il faut toutefois rappeler que la variable K à saturation (K') permet de lier les lois cinétiques (exprimées en termes des VEI et VOI).

En terminant, il est également intéressant de remarquer que plus l'essai est de longue durée (sans changement des conditions de chargement), plus l'écrouissage isotrope tend à prendre de l'importance. Cette observation pourrait expliquer pourquoi les modèles traditionnels incluant seulement de l'écrouissage isotrope ont eu du succès pour décrire les essais de fluage à chargement monotone en laboratoire. Les expérimentalistes ont traditionnellement tenté de viser le très long terme (ex.: extrapoler le comportement sur 500 ans à partir d'essais de laboratoire de quelques mois à années). Dans ce cas, une représentation basée sur des variables exclusivement

isotropes pourrait être acceptable. Les résultats présentés ici montrent que cela n'est plus valable si le cheminement du chargement devient plus complexe, comme cela peut être anticipé pour la période qui suit le percement des ouvertures.

7.5 Applications des outils de modélisation

Il y a parmi la communauté géotechnique, un certain scepticisme à l'idée d'investir autant d'effort et d'énergie à étudier le comportement du sel et en particuliers le sel gemme. Pourquoi approfondir le comportement d'un matériau vieux comme le monde, reconnu comme l'un des plus stables et l'un des plus simples de la planète. L'existence même des dômes de sel gemme est la preuve d'une stabilité géologique à très long terme (si le sel gemme est là, les risques de dissolution sont quasi-nuls, autrement le sel gemme n'y serait pas). Or, comme on l'a déjà mentionné, c'est justement pour ces raisons que le sel suscite autant d'intérêt. Les dômes de sel sont des sites privilégiés pour l'entreposage de substances pour lesquels l'hydrogéologie est un enjeu critique. Et, malgré son apparence de comportement simple et prévisible (surtout observable sous des conditions naturelles non perturbées par l'homme), le sel gemme demeure un matériau soumis à la notion de variabilité que l'on sait intrinsèque à tout matériau géologique. La variabilité granulométrique et minéralogique observée d'un site à l'autre rend l'obtention de caractéristiques uniques difficile, voire irréaliste. Cette variabilité physico-chimique, de même que l'historique du chargement et la coexistence ou la proximité de matériaux aux propriétés mécaniques différentes rendent difficile la prédiction du comportement du sel gemme in situ. Les inquiétudes soulevées par les intervenants dans le domaine de l'environnement au niveau de la performance à long terme d'ouvrages établis dans le sel gemme sont donc tout à fait légitimes.

Les travaux de modélisation les plus importants effectués ces dernières années sont sans doute ceux liés aux projets d'aménagement de sites d'entreposage de déchets

nucléaires dans le sel aux USA (WIPP) et Pays-Bas-Allemagne (Asse). Dans le cadre des recherches du WIPP (Hansen et al. 1996; Munson 1999) et du programme du site Asse (Prij et al. 1996), des efforts et moyens importants ont été investis (plusieurs M$ en recherche et développement) dans la prédiction, entre autres, du comportement des parois d'excavations souterraines et des bouchons de scellement (seal) (DeVries et al. 1998; Dale et Hurtado 1998) sous l'effet d'un chargement thermo-mécanique. La réduction du risque devient un enjeu fondamental en raison des enjeux liés à l'environnement (déchets nucléaires enfouis dans un lieu confiné pour une très longue période), à la sécurité publique et nationale de ces pays, à la dimension des problèmes et le temps prévu pour la reconsolidation des bouchons de scellement (sel broyé recompacté comme au WIPP ou briques de sel broyé recompacté avec un collet de béton à Asse (Olivella et al. 1998)).

Les modélisations de longues durées (sur plus de 100 années) effectuées pour évaluer la convergence de ces excavations (Hansen et al. 1996; Stone et al. 1985; Callahan et al. 1990; Prij et al. 1996) utilisent des lois constitutives (typiquement avec écrouissage isotrope) calibrées sur des essais de fluage (généralement monotones) de longues durées. Or, il est de l'avis de l'auteur que ces simulations souffrent dans plusieurs cas de certaines lacunes au niveau constitutif. Les modèles utilisés n'incluent typiquement pas les notions d'écrouissage mixte (isotrope et cinématique) et de restauration, composantes incluses dans le modèle SUVIC. Il a été démontré que ces composantes sont essentielles pour décrire adéquatement le comportement du sel gemme. L'utilisation de SUVIC, au moins à titre comparatif, dans un tel cadre pourrait permettre d'obtenir des résultats représentatifs. Ceci serait particulièrement vrai pour les cas où l'historique de chargement peut s'avérer complexe, comme il le sera, si la mise en place de déchets et le minage sont séquentiels.

Si l'utilisation d'un modèle comme SUVIC était préconisée, la question de la détermination des constantes deviendrait alors la question la plus importante. SUVIC (et les modèles du même type) nécessite pour une identification adéquate,

l'établissement d'un programme expérimental détaillé et riche permettant de mettre en lumière les différentes composantes du modèle. Pour de telles conditions, des programmes de caractérisation ciblés devraient être envisagés pour chacune des zones et des matériaux dominants.

Par ailleurs, pour ce qui est du problème de la prédiction de la subsidence et de la fermeture de cavernes servant de réservoir gazier, il est intéressant de remarquer que les travaux de Durup et Xu (1996) ont montré l'avantage d'utiliser une loi de comportement plus complexe comme celle de Lemaitre et Munson-Dawson par rapport à des lois classiques plus simples comme celle de Norton. L'utilisation des VEI avec écrouissage isotrope semble ainsi se justifier. Toutefois, l'auteur ne commente pas la nécessité d'inclure la notion d'écrouissage cinématique. Des comparaisons ont aussi été faites par Chalal (1996) entre les réponses de divers modèles constitutifs. Ces travaux ont montré que les réponses des modèles isotropes Munson-Dawson (15 paramètres) et Lemaitre (5 paramètres) n'étaient pas très différentes pour la simulation de la convergence d'une caverne sphérique. On rappelle que ces modèles n'incluent pas de composantes d'écrouissage cinématique jugée ici essentielle pour un tel problème.

Un autre champ d'application important de la modélisation du comportement mécanique de matériaux comme le sel est l'industrie minière. Le minage de dépôts de sel ou potasse est un problème tridimensionnel très complexe. On désire pour des raisons économiques évidentes avoir une séquence de minage et une géométrie de chantiers optimales. À titre d'exemple, on peut mentionner les travaux récents de Salzer (1998) et Frayne (1998). Dans ces différents cas, on remarque l'utilisation de méthodes numériques diverses, un fort calibrage des paramètres avec les observations de terrain, des lois constitutives simples et l'utilisation importante de techniques empiriques pour évaluer la pertinence des modèles.

Il serait sans doute intéressant dans ce secteur d'envisager l'utilisation de lois de comportement plus élaborées comme SUVIC, même si les avantages économiques

peuvent être plus difficiles à justifier à court terme compte tenu de l'effort de caractérisation requis pour la détermination des constantes. Ce type de problèmes offre des attraits que les problèmes précédents n'offraient pas: une échelle de temps courte et la possibilité de vérifier sur le terrain la qualité des prédictions. On peut ainsi sur une période de temps relativement courte étudier le comportement du massif et le comparer avec les prédictions au fur et à mesure de l'évolution des excavations souterraines. On peut de plus envisager la possibilité d'étudier véritablement sur le terrain la variabilité de la réponse du modèle en fonction du zonage du matériau.

L'emploi des modèles avec VEI, comme SUVIC pour la prédiction du comportement à long terme du sel gemme demeure incertaine. Elle dépendra de la reconnaissance, dans la communauté géomécanique, des limites des modèles maintenant utilisés, et surtout du bénéfice associé à l'utilisation de formulations plus puissantes comme SUVIC. L'utilisation de tels modèles doit prendre en compte la nécessité d'inclure des efforts et coûts importants dans la réalisation d'essais de laboratoire de plus en plus complexes permettant de mettre en lumière certains éléments clés du comportement. Des essais de fluage simples de longue durée, outil de travail utilisé de façon systématique par le passé, ne peuvent être considérés comme suffisants pour caractériser la richesse et la complexité du comportement du sel gemme. Le travail présenté ici a permis de montrer de nombreuses autres facettes du comportement du sel, et les capacités des modèles avec VEI, tel que le modèle SUVIC.

Chapitre VIII

CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

En guise de conclusion, on peut tout d'abord faire un sommaire des différentes particularités de cette recherche et des contributions qui en découlent. Cette recherche a été caractérisée par des travaux couvrant trois volets importants, soient:

- les aspects constitutifs;
- les aspects expérimentaux;
- les aspects numériques.

Au niveau constitutif, le travail et les contributions ont essentiellement porté sur le raffinement du modèle SUVIC et sur sa généralisation dans un cadre anisotherme. En particulier, on a présenté au chapitre 5, les points suivants:

- l'utilisation d'une formulation non singulière plus générale, pour décrire le comportement du sel gemme à l'état stationnaire. Cette formulation basée sur la fonction sinus hyperbolique, permet entre autre de simuler de très faibles taux de déformation inélastiques. Elle est aussi utilisée pour définir les valeurs de saturation des variables d'état interne.

- la détermination d'une formulation simplifiée pour le calcul de la contribution des variables d'état internes. Cette formulation linéaire par rapport à la valeur de saturation de la contrainte appliquée est un peu plus restrictive que la formulation antérieure, mais elle s'avère plus stable au niveau numérique pour les faibles niveaux de contraintes et semble bien représenter le comportement du matériau;

- une réécriture des équations du modèle de façon à permettre une inclusion naturelle des effets de la température. On rappelle que le modèle SUVIC n'avait antérieurement été défini que pour des conditions isothermales et peu de travaux avaient été effectués à cet égard;

- la vérification de la consistance thermodynamique du modèle dans le but d'évaluer son caractère dissipatif. Cette vérification a permis de montrer que le modèle peut satisfaire cette condition surtout lorsqu'il tend vers l'état stationnaire;

- certaines améliorations de la formulation du modèle au niveau de l'écriture du module d'endommagement, et ce particulièrement au niveau de la formulation du tenseur d'endommagement.

Au niveau expérimental, présenté au chapitre 4, les contributions de la thèse se situent à plusieurs niveaux, mentionnons:

- le développement d'une banque de données d'essais de laboratoire sur le sel relativement homogène d'Avery Island, incluant divers types d'essais avec cheminements de chargement propres. Ces essais ont dans certains cas été cas été reconstruits afin de recréer l'historique du chargement complet pour chaque essai utilisé. Cet aspect avait souvent été négligé lors des travaux antérieurs;

- la réalisation d'essais sur du sel d'Avery Island au laboratoire de mécanique des roches de l'École Polytechnique. Ces essais ont permis de confirmer la forte

composante cinématique de l'écrouissage. Des essais cycliques à contraintes de confinement relativement élevées réalisés en conditions CTC-RTE, sont fondamentalement distincts du type de résultats que l'on retrouve habituellement dans la littérature. Ils ont permis de montrer que le sel gemme, dans le régime ductile, peut exhiber un effet de type Bauschinger;

- le recours à une procédure simple afin d'estimer si de l'endommagement a pu survenir au cours des différents essais;

- l'utilisation des résultats d'essais pour identifier la valeur des constantes à partir d'une procédure analytique préliminaire suivie d'une procédure numérique (définie dans ce qui suit).

Aux niveaux numériques, le travail et les contributions ont été essentiellement associés à l'identification des constantes du modèle et à la simulation du comportement du sel gemme. On peut ainsi mentionner:

- la détermination de la valeur des constantes élastiques pour le sel de Avery Island;

- l'identification de la valeur des constantes décrivant l'état stationnaire pour différentes températures en utilisant une formulation avec sinus hyperbolique;

- l'identification d'un jeu de constantes initial à température de la pièce par une méthode analytique basée sur les essais cycliques CTC-RTE. Cette méthode invoque des arguments simples au niveau de l'évolution des variables internes et permet de trouver des intervalles initiaux pour la valeur de certaines des constantes. Il est à noter qu'étant donné la complexité des fonctions à minimiser, il est essentiel de débuter le processus de minimisation avec un jeu de constantes ayant un certain sens physique, d'où l'importance de cette étape;

- l'identification d'un jeu de constantes optimal avec des méthodes numériques de minimisation pour le sel d'Avery Island à température de la pièce en utilisant

les essais CSR, de fluage et de relaxation de Senseny (1993), et ceux d'autres auteurs.

- la simulation des essais avec un jeu de constantes optimisé et obtenu d'une identification sur quelques uns des essais réalisés par l'auteur et pour des données tirées de la littérature;

- la réalisation d'identifications à diverses températures à partir des essais de Hansen et Mellegard. Cet exercice a permis d'obtenir des constantes pour différentes plages de températures et ainsi définir des relations de type Arrhenius pour certaines d'entre elles;

- l'utilisation du code d'éléments finis ZéBuLoN comme plateforme pour l'implantation du modèle. Ce code développé à l'origine pour les modèles à variables internes intègre naturellement cette idée dans sa structure. Il est à noter que ce code n'avait pas été conçu à l'origine pour des applications géomécaniques. Le code a été installé sur un pc avec une plateforme Linux;

- la réalisation de simulations sur des cylindres à paroi épaisse et mince, et, la démonstration numérique que la déformation inélastique équivalente maximale peut survenir à une distance plus ou moins éloignée de la paroi;

- la description de la construction du Jacobien pour le modèle SUVIC et des simulations numériques permettant d'apprécier les avantages associés à l'utilisation de la méthode θ;

- la comparaison générique de SUVIC avec les modèles SH et TH. Le modèle SUVIC pour un chargement simple s'apparente au modèle SH mais il se comporte de façon supérieure lors d'un chargement cyclique.

Cette recherche est la somme d'une série de contributions diverses permettant de mieux comprendre et mieux définir le comportement du sel gemme. En ce sens,

ces travaux se veulent des travaux précurseurs dans l'application du modèle SUVIC pour la simulation du comportement de structures.

En ce qui concerne les travaux futurs, plusieurs éléments abordés ici devraient faire l'objet d'études plus poussées. Les travaux précurseurs réalisés depuis une quinzaine d'années à l'École Polytechnique de Montréal au niveau de la modélisation du sel gemme sont assez uniques en leur genre. On peut en particulier recommander que ces travaux soient extensionnés pour des conditions anisothermales.

De même, on pourrait recommander des validations de laboratoire sur d'autres sels afin de déterminer des plages de constantes pour divers sels, d'autres calculs 2D et 3D sur des éprouvettes cylindriques, des structures simples in-situ comme des trous de forage et des piliers, etc.

La réalisation d'essais de laboratoire additionnels est aussi une condition essentielle. Il serait particulièrement important que des essais CSR, de fluage et relaxation à diverses températures soient réalisés. Ils sont une composante incontournable de la calibration du modèle et la poursuite de son développement. Ces essais devraient être réalisés dans des conditions telles que la composante d'endommagement peut être relativement bien isolée. Par ailleurs, le module d'endommagement devrait être raffiné. Ce module n'a pas présentement atteint le stade de maturité du modèle SUVIC et mérite d'être développé davantage compte tenu de l'importance du contrôle de la fissuration dans certaines plages de comportement.

En conclusion, le modèle SUVIC version asinh est bon. Il fonctionne bien dans le code ZéBuLoN. Le modèle peut reproduire des essais de laboratoire complexes et peut maintenant être utilisé pour des applications plus complexes.

Références

AAZIZOU, K. (1990). *Calcul par éléments finis en plasticité et viscoplasticité.* Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

ABAQUS (1998). *Abaqus Manual.* Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc., Pawtucket, R.I.

ADLER, P. M., A. ZAZOVSKY, P. BARANGER, G. BONTE, J. F. LAURENS, et J. F. SUREAU (1996). *Hydrodynamic aspects of the imbibition of a salt wall by brine initially contained in a cavity.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 249–261. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

AJAJA, O. (1991). *Concept of internal stress in the creep of metals and single-phase alloys*, Scripta Metallurgica and Materialia, **25**, pp. 511–516.

ALLEMANDOU, X. et M. B. DUSSEAULT (1993). *Healing processes and transient creep of salt rock.* In Anagnostopoulos et al. (Eds.), *Geotechnical Engineering of Hard Soils - Soft Rocks*, pp. 1581–1590. A.A. Balkema, Rotterdam.

ALLEN, D. H. et J. M. MEEK (1985). *On the use of internal state variables in thermoviscoplastic constitutive equations.* In *Non-Linear Constitutive relations for high temperature applications*, pp. 83–101. NASA.

ANAND, L. (1982). *Constitutive equations for the rate dependent deformation of metals at elevated temperatures*, Journal of Engineering Materials and Techno-

logy, **104**, pp. 12–17.

APLIN, P. F. et D. D'ANGELO (1989). *Internal stress measurements during creep and their use in predicting the long-term creep behavior of engineering materials.* In *Proceedings of the* 10^{th} *Riso International Symposium on Metallurgy and Materials Sciences: Constitutive equations in Plasticity, Roshilde, Denmark*, pp. 263–268. Riso National Laboratories.

ARGON, A. S. et S. TAKEUCHI (1981). *Internal stresses in power-law creep*, Acta Metallurgica and Materiala, **29**, pp. 1877–1884.

ARNOLD, S. M., A. F. SALEEB, et T. E. WILT (1995). *A modeling investigation of thermal and strain induced recovery and nonlinear hardening in potential based viscoplasticity*, Journal of Engineering Materials and Technology, **117**, pp. 157–167.

ASHBY, M. F. (1983). *Mechanisms of deformation and fracture.* In *Advances in Applied Mechanics*, Volume 23, pp. 117–177. Academic Press.

AUBERTIN, M. (1989). *Développement d'un modèle viscoplastique unifié avec variables internes pour le comportement rhéologique du sel gemme.* Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

AUBERTIN, M. (1993). *Numerical integration schemes for models describing the viscoplastic behavior of soft rocks with state variables.* In *Proceedings of First Canadian Symposium on Numerical Modelling Applications in Mining and Geomechanics, March 27-30 1993, Montreal.*

AUBERTIN, M. (1996). *On the physical origin and modelling of kinematic and isotropic hardening of salt.* In *Proceedings of the* 3^{rd} *Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

AUBERTIN, M. et D. E. GILL (1993). *Elastoplastic modeling for the ductile behavior of polycristalline sodium chloride with SUVIC*, International Journal of

Plasticity, **9**, pp. 479–505.

AUBERTIN, M., D. E. GILL, et B. LADANYI (1991a). *An internal variable model for the creep of rocksalt.*, Rock Mechanics and Rock Engineering, **24**, pp. 81–97.

AUBERTIN, M., D. E. GILL, et B. LADANYI (1991b). *A unified viscoplastic model for the inelastic flow of alkali halides*, Mechanic of Materials, **11**, pp. 63–82.

AUBERTIN, M., D. E. GILL, et B. LADANYI (1993). *Modeling the transient inelastic flow of rocksalt.* In *Proceedings of 7th Symposium on Salt, April 1992, Kyoto, Japan*, pp. 93–104. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

AUBERTIN, M., D. E. GILL, et B. LADANYI (1994). *Constitutive equations with internal state variables for the inelastic behavior of soft rocks.* In T. Fujii (Ed.), *Proceedings of 8th International Congress on Rock Mechanics, Tokyo, Japan.*

AUBERTIN, M., D. E. GILL, et S. SERVANT (1992). *Modélisation du comportement inélastique des roches tendres en régime ductile à l'aide de variables d'état.* In *Compte-rendus du Colloque à la mémoire de René Houpert, Nancy 1992.*

AUBERTIN, M., D. E. GILL, et S. SERVANT (1996). *Preliminary determination of constants for an updated version of SUVIC model.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

AUBERTIN, M., D. E. GILL, et J. SGAOULA (1992). *Un modèle viscoplastique avec endommagement pour le fluage tertiaire des roches tendres.* In *Proceedings of the 16th Canadian Rock Mechanics Symposium*, pp. 109–119. CGS.

AUBERTIN, M., M. JULIEN, et L. LI (1998). *Keynote presentation: The semi-brittle behavior of low porosity rocks.* In *Proceedings of 3rd North American Rock Mechanics Symposium (NARMS).* A.A. Balkema.

AUBERTIN, M., M. JULIEN, S. SERVANT, et D. GILL (1999). *Viscoplastic modeling of salt rock samples loaded in trixial compression at high confining pressure*, soumis: Journal of Canadian Geotechnical Society, **accepté**, pp. –.

AUBERTIN, M., J. SGAOULA, et D. E. GILL (1993). *A damage model for rock-salt: Application to tertiary creep.* In *Proceedings of 7th Symposium on Salt, April 1992, Kyoto, Japan*, pp. 117–125. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

AUBERTIN, M., J. SGAOULA, et D. E. GILL (1995). *A viscoplastic-damage model for soft rocks with low porosity.* In *Proceedings of 8th International Congress on Rock Mechanics, Tokyo, Japan.*

AUBERTIN, M., J. SGAOULA, S. SERVANT, M. JULIEN, D. E. GILL, et B. LADANYI (1998). *An up-to-date version of SUVIC-D for modeling the behavior of salt.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

AUBERTIN, M. et R. SIMON (1997). *A damage initiation criterion for low porosity rocks*, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **34**, pp. 3–4.

BANERJEE, P. K. et D. N. CATHIE (1980). *A direct formulation and numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional problems of elasto-plasticity*, International Journal of Mechanical Sciences, **22**, pp. 233–245.

BARBER, D. (1985). *Dislocations and Microstructures, Preferred Orientation in Deformed Metals and Rock.* Academic Press.

BARBER, D. J. (1990). *Regimes of plastic deformation processes and microstructure; An overview.* In D. Barber et P. Meredith (Eds.), *Deformation Processess in Mineral, Ceramics and Rocks*, pp. 138–178. Unwin Hyman.

BATHE, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.* Prentice-Hall.

BEER, G. (1997). *Boundary Element and Coupled Methods*, International Society of Rock Mechanics - News Journal, 4, pp. 8–9.

BEER, G. et J. WATSON (1992). *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers.* John Wiley and Sons Ltd., Chichester.

BELL, J. F. (1995). *Laboratory experiments on thin-walled tubes at large finite strain: symmetry, coaxiality, rigid body rotations, and the role of invariants for the applied stress* $\sigma = \mathbf{R}\mathbf{T}_R^T$, *the cauchy stress* $\sigma^* = [III_v]^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}_R^T$, *and the left Cauchy-Green stretch tensor* $\mathbf{V} = \mathbf{F}\mathbf{R}^T$, International Journal of Plasticity, **11**, pp. 119–144.

BENALLAL, A. et D. MARQUIS (1987). *Constitutive equations for non-proportional cyclic elasto-viscoplasticity*, Journal of Engineering Materials and Technology, **109**, pp. 326–336.

BESSON, J. et R. FOERCH (1997). *Large scale object oriented finite element code*, Computational Applied Mechanics in Engineering, **142**, pp. 165–167.

BETTEN, J. (1983). *Damage tensors in continuum mechanics*, Journal de Mécanique Théorique et Appliquée, **2**, pp. 13–32.

BODNER, S. R. et Y. PARTOM (1975). *Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials*, Journal of Applied Mechanics, **42**, pp. 385–389.

BOYLE, J. T. et J. SPENCE (1983). *Stress analysis for creep.* Butterworths and Co. Ltd.

BRAASCH, H., H. DUDDECK, et H. AHRENS (1995). *A new approach to improve material models*, Journal of Engineering Materials and Technology, **117**, pp. 14–19.

BRAASCH, J. et Y. ESTRIN (1993). *Parameter identification for a two-internal-variable constitutive model using the evolution strategy.* In *Material Parameter Estimation for Modern Constitutive Equations*, N.Y. USA, pp. 47–56. ASME.

BRODSKY, N. (1990). *Crack Closure and Healing Studies in WIPP Salt Using Compressional Wave Velocity and Attenuation Measurements: Test Methods and Results, Contract Report SAND90-7076.* Sandia Ntl. Lab., USA.

BRODSKY, N., P. E. SENSENY, et F. D. HANSEN (1987). *Stress Relaxation Tests in Avery Island Salt as a Function of Initial Stress and Temperature.* RE/SPEC Inc. P.O. Box 725 Rapid City SD 57709.

BURLET, H. et G. CAILLETAUD (1991). *ZéBuLoN, a finite element code for nonlinear material behavior.* In *Conference on New Advances in Computational Structural Mechanics, April 2-5 1991, Giens France.*

CADEK, J. (1987). *The back stress concept in power-law creep of metals: a review,* Materials Sciences and Engineering, **94**, pp. 79–92.

CAILLETAUD, G. et P. PILVIN (1993). *Identification and inverse problems: a modular approach.* In L. A. Bertram, S. B. Brown, et al. (Eds.), *Material Parameter Estimation for Modern Constitutive Equations*, pp. 33–45. ASME.

CAILLETAUD, G. et P. PILVIN (1994). *Identification and inverse problems related to material behaviour.* In T. Bui et al. (Eds.), *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, pp. 79–86. A.A. Balkema, Rotterdam.

CALLAHAN, G. D., A. F. FOSSUM, et D. K. SVALSTAD (1990). *Documentation of SPECTROM-32: A finite element thermomechanical stress analysis program.* RE/SPEC, Rapid City, SD DOE/CH10378-2.

CARTER, N. et M. TSENN (1987). *Flow roperties of continental lithosphere,* Tectonophysics, **136**, pp. 27–63.

CARTER, N. L. et F. D. HANSEN (1983). *Review; creep of rocksalt,* Tectonophysics, **92**, pp. 275–333.

CARTER, N. L., S. T. HORSEMAN, J. E. RUSSELL, et J. HANDIN (1993). *Rheology of rocksalt*, Structural Geology, **15**, pp. 1257–1271.

CHABOCHE, J. L. (1987a). *Modelling of cyclic viscoplasticity in finite element codes.* In *Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and applications*, pp. 1165–1172. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

CHABOCHE, J. L. (1987b). *A review of computational methods for cyclic plasticity and viscoplasticity.* In D. R. Owen, E. Hinton, et E. Onata (Eds.), *Proceedings of International Conference on Computational Plasticity Models, Software and Applications*, pp. 379–409. Pineridge Press.

CHABOCHE, J. L. (1988a). *Continuum damage mechanics: Part I- General concepts*, Journal of Applied Mechanics, **55**, pp. 59–64.

CHABOCHE, J. L. (1988b). *Continuum damage mechanics: Part II-Damage growth, Crack initiation and crack growth*, Journal of Applied Mechanics, **55**, pp. 65–72.

CHABOCHE, J. L. (1993a). *Cyclic viscoplasticity constitutive equations, Part I: A thermodynamically consistent formulation*, Journal of Applied Mechanics, **60**, pp. 813–821.

CHABOCHE, J. L. (1993b). *Cyclic viscoplasticity constitutive equations, part II: stored energy-comparison between models and experiments*, Journal of Applied Mechanics, **60**, pp. 822–828.

CHABOCHE, J. L. et G. CAILLETAUD (1996). *Integration methods for complex plastic constitutive equations*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, **133**, pp. 125–155.

CHABOCHE, J. L. et G. ROUSSELIER (1983). *On the plastic and viscoplastic constitutive equations-Part I: rules developped with internal variable concept*, Journal of Pressure Vessel Technologies, **105**, pp. 153–158.

CHAKRABARTY, J. (1987). *Theory of Plasticity.* McGraw Hill Book Company.

CHALAL, A. A. (1996). *A comparison of the responses of the Munson-Dawson model and the Lemaitre model.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 67–74. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

CHAN, D. S., U. S. LINDHOLM, S. R. BODNER, et K. P. WALKER (1985). *A survey of unified constitutive theories.* In *Proceedings of 2nd Symposium of NASA-Lewis Non linear Constitutive relations for High Temperatures Applications.* NASA.

CHAN, K. S. (1988). *The constitutive representation of high-temperature creep damage*, International Journal of Plasticity, **4**, pp. 355–370.

CHANDRA, A. et S. MUKHERJEE (1983). *Applications of the boundary element method to large strain large deformation problems of viscoplasticity*, Journal of Strain Analysis, **18**, pp. 261–271.

CHANDRA, A. et S. MUKHERJEE (1984a). *Boundary element formulations for large strain- large deformation problems of viscoplasticity*, International Journal of Solids and Structures, **20**, pp. 41–53.

CHANDRA, A. et S. MUKHERJEE (1984b). *A finite element analysis of metal-forming problems with an elastic-viscoplastic material model*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **20**, pp. 1616–1628.

CHANDRA, A. et S. MUKHERJEE (1986). *An analysis of large strain viscoplasticity problems including the effects of induced material anisotropy*, Journal of Applied Mechanics, **53**, pp. 77–82.

CHANG, T. Y., J. P. CHANG, et R. L. THOMPSON (1985). *On numerical applications and computer implementation of viscoplastic models.* In *Nonlinear Constitutive Relations for High Temperature Application*, pp. 187–200. NASA.

CHARLEZ, P. (1991). *Rock Mechanics, Volume 1 - Theoritical Fundamentals.* Editions Technip, Paris.

CHEN, R. et B. BALADI (1995). *Triaxial stress relaxation tests on Saskatchewan potash*, Canadian Geotechnical Journal, **32**, pp. 11–21.

CHOW, C. L. et J. WANG (1987). *An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture*, Engineering Fracture Mechanics, **27**, pp. 547–558.

CIVIDINI, A. (1993). *Constitutive behavior and numerical modeling.* In J. Hudson, E. Brown, C. Fairhurst, et E. Hoek (Eds.), *Comprehensive Rock Engineering, Principles, Practice and Projects*, Volume 1, Oxford, England, pp. 395–426. Pergamon Press.

COCKS, A. et F. LECKIE (1987). *Creep constitutive equations for damage materials.* In *Advances in Applied Mechanics*, pp. 239–294. Academic Press.

CORDEBOIS, J. P. et F. SIDOROFF (1982). *Damage induced elastic anisotropy.* In J. P. Boehler (Ed.), *Proceedings of EUROMECH*, pp. 761–774. Martinus Nijhoff.

COSENZA, P. et M. GHOREYCHI (1996). *Coupling between mechanical behavior and transfer phenomena in salt.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 285–306. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

COSMOS-M (1994). *User Guide. Volume 1. Preprocessing, Analysis, and Postprocessing Interface. Version 1.71.* Structural Research and Analysis Corporation.

CRISTESCU, N. (1987). *Elastic-viscoplastic constitutive equation for rock*, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **24**, pp. 271–282.

CRISTESCU, N. (1989). *Rock Rheology.* John Wiley and Sons Ltd., Chichester.

CRISTESCU, N. (1992). *Rock viscoplasticity.* Technical report, University of Bucharest, Bucharest, Romania.

CRISTESCU, N. et G. GIODA (1994). *Viscoplastic Behavior of Geomaterials CISM Courses and Lectures No. 350.* Springer-Verlag.

CRISTESCU, N. et I. SILICIU (1982). *Viscoplasticity.* Martinus Nijhoff, The Hague.

CRISTESCU, N. D. et U. HUNSCHE (1996). *A comprehensive constitutive equations for rock salt: determination and application.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 177–191. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

CROIZET, D., L. MÉRIC, M. BOUSSUGE, et G. CAILLETAUD (1992). *General formulation of a plasticity/viscoplasticity in finite element.* In C. Hirsch, O. Zienkiewicz, et E. Onate (Eds.), *Proceedings of Conference on Numerical Methods in Engineering, Bruxelles, Belgique*, pp. 741–747. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

CROUCH, S. et A. STARFIELD (1983). *Boundary Element Method in Solid Mechanics.* Allen and Unwin, London.

CUNDALL, P. A. (1974). *A computer model for rock-mass behavior using interactive graphics for the input and output of geometric data.* In *Report AD-A-001 602.* U.S. National Technical Information Service.

DALE, T. et L. D. HURTADO (1998). *WIPP air-intake shaft disturded-rock zone study.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada*, pp. 276–282. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

DAWSON, P. R. et D. E. MUNSON (1983). *Numerical simulation of creep deformations around a room in a deep potash mine*, International Journal of Rock

Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **20**, pp. 33–42.

de Menezes, J. E. Q. (1998). *Numerical modelling of leached cavern fields by a mixed BEM-FEM method.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada*, pp. 193–198. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

DELOBELLE, P. (1988). *Sur les lois de comportement viscoplastiques à variables internes*, Revue de Physique Appliquée, **23**, pp. 1–61.

DELOBELLE, P., C. OYTANA, et A. MERMET (1984). *Constitutive laws of 316 stainless steel in high temperature creep by biaxial experiments.* In *Proceedings of the 4th International Conference on Mechanical Behaviour of Materials*, Volume 1, pp. 141–147. Prentice-Hall Inc.

DERBY, B. et M. ASHBY (1987). *A microstructural model for primary creep*, Acta Metallurgica, **35**, pp. 1343–1353.

DESAI, C. S. et D. ZHANG (1987). *Viscoplastic model for geologic materials with generalized flow rule*, International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, **11**, pp. 603–620.

DEVRIES, K. L., G. D. CALLAHAN, et D. E. MUNSON (1998). *WIPP panel simulations with gas generation.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada*, pp. 263–269. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

DHATT, G. et G. TOUZOT (1981). *Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis.* Maloine S.A. Editeur.

DRAGON, A. et D. HALM (1998). *A mesocrack damage and friction coupled model for brittle materials.* In Voyiadjis et al. (Eds.), *Damage Mechanics in Engineering Materials.*

DURUP, G. et J. XU (1996). *Comparative study of certain constitutive laws used to describe the rheological deformation of salt.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 75–83. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

EATON, J. W. (1995). *A high-level interactive language for numerical computations. Edition 1.1 for Octave version 1.1.1. January 1995.* GNU Software Foundation.

EBERHARDT, E., D. STEAD, B. STIMPSON, et R. READ (1996). *Changes in acoustic event properties with progressive fracture damage.* In *Proceedings of the US Rock Mechanics Symposium, NYROCK 97.* Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

ESTRIN, Y. et H. MECKING (1984). *A unified phenomenological description of work hardening and creep based on one parameter models*, Acta Metallurgica and Materiala, **32**, pp. 57.

EVANS, B., J. T. FREDRICH, et T. F. WONG (1990). *The brittle-ductile transition in rocks: recent experimental and theoretical progress*, American Geophysics Research, **85**, pp. 891–900.

EVANS, H. E. et G. KNOWLES (1978). *Dislocation creep in non-metallic materials*, Acta Metallurgica, **26**, pp. 141–145.

EXAMINE-3D, M. (1999). *3D stress analysis and data visualization for underground excavations in rock.* Rocscience Inc., 31 Balsam Ave., Toronto, Ontario, Canada, M4E 3B5.

FLAC (1993). *Fast Lagrangian Analysis of Continua, Version 3.2.* ITASCA Consulting Group Inc.

FOERCH, R. (1996). *Approche Polymorphique du Comportement des Matériaux en Éléments finis.* Thèse de doctorat, E.N.S.M.P.

FOERCH, R., J. BESSON, G. CAILLETAUD, et P. PILVIN (1996). *Polymorphic constitutive equations in finite element codes.* Technical report, Ecole Supérieure des Mines de Paris. Preprint soumis pour consultation.

FOSSUM, A. F. (1998). *Rate data and material parameter estimation*, Journal of Engineering Materials and Technology, **120**, pp. 7–12.

FOSSUM, A. F., D. E. MUNSON, K. S. CHAN, et S. R. BODNER (1998). *Constitutive basis of the MDCF model for Rocksalt.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

FRANCOIS, D., A. PINEAU, et A. ZAOUI (1995). *Comportement mécanique des matériaux - viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, - mécanique du contact.* Hermes.

FRAYNE, M. (1998). *The Goderich salt mine: past, present and future.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada*, pp. 239–244. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

FREED, A. D., J. L. CHABOCHE, et K. P. WALKER (1991). *A viscoplastic theory with thermodynamic considerations*, Acta Mechanica, **90**, pp. 155–174.

FREED, A. D. et P. KEVIN (1993). *Extending the theory of creep to viscoplasticity.* In *High-temperature service and time-dependent failure*, pp. 187–199. ASME - Pressure Vessels and Piping Division.

FREED, A. D., S. V. RAJ, et K. P. WALKER (1992). *Stress versus temperature dependence of activation energies for creep*, Journal of Engineering Materials and Technology, **114**, pp. 46–50.

FREED, A. D. et K. P. WALKER (1995). *Viscoplastic model development with an eye toward characterization*, Transactions of the ASME, **117**, pp. 8–13.

FREED, A. D., K. P. WALKER, et M. J. VERRILLI (1994). *Extending the theory of creep viscoplasticity*, Transactions of the ASME, **116**, pp. 67–75.

GARAFALO, F. (1963). *An empirical relation defining the stress dependence of minimum creep rate in metals*, Transactions of AIME, **227**, pp. 351–359.

GEOCONSULT (1997). *BE/FE*. Geoconsult Salsbourg.

GERMAIN, P. (1973). *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Éditions Masson.

GIODA, G. et A. CIVIDINI (1996). *Numerical methods for the analysis of tunnel performance in squeezing rocks*, Rock Mechanics and Rock Engineering, **29**, pp. 171–193.

GRAMBERG, J. (1989). *A Non-Conventional View on Rock Mechanics and Fracture Mechanics*. A.A. Balkema, Rotterdam.

GUESSOUS, Z. (1987). *Effets du carottage sur les propriétés mécaniques du sel gemme*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

GUESSOUS, Z., D. GILL, et B. LADANYI (1987). *Effect of sampling disturbance on creep behaviour of rock salt*, Rock Mechanics and Rock Engineering, **20**, pp. 261–275.

GUPTA, I. et C. LI (1970). *Stress relaxation, internal stress and work hardening in LiF and NaCl crystals*, Materials Science and Engineering, **6**, pp. 20–26.

HALLAM, S. D. et M. F. ASHBY (1990). *Compressive brittle fracture and the construction of multi-axial failure maps*. In D. Barber et P. Meredith (Eds.), *Deformation Processus in Minerals, Ceramics and Rocks*, Volume 1, pp. 84–108.

HAMAJIMA, R. (1993). *Discontinuous analysis considering the deformation of elements by modified virtual stress method and modified virtual displacement method*, NATCAM Japan, **1**, pp. 263–264.

HAMAJIMA, R., T. SUZUKI, Y. NAKAI, et S. HAN (1993). *Analysis for discontinuous medium considering elemental deformation.* In Siriwardane et Zaman (Eds.), *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Volume 1, pp. 821–826.

HANDIN, J., J. E. RUSSELL, et N. L. CARTER (1986). *Experimental deformation of rocksalt*, American Geophysics Union Monographies, **36**, pp. 117–160.

HANSEN, F. D., G. D. CALLAHAN, et L. L. van Sambeek (1996). *Reconsolidation of salt as applied to permanent seals for the waste isolation pilot plant.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 323–335. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

HANSEN, F. D. et K. D. MELLEGARD (1980a). *Creep of 50 mm Specimens of Dome Salt, Avery Island, Louisiana.* In *Technical Report. ONWI-104, -E512-023.* RE/SPEC, Rapid City, S.D.

HANSEN, F. D. et K. D. MELLEGARD (1980b). *Quasi-static strength and deformational characteristics of domal salt from Avery Island Louisiana.* In *Topical Report RSI-0098-ONWI-116.* Battelle Memorial Institute. Office of Nuclear Waste Isolation.

HANSEN, N. R. et H. L. SCHREYER (1995). *Damage desactivation*, Transaction of the ASME, **62**, pp. 450–458.

HART, E. W. (1976). *Constitutive relations for the non elastic deformations of metals*, Journal of Engineering Materials and Technology, **7**, pp. 193–202.

HAYHURST, P. (1990). *High temperature creep continuum damage in metals.* In *Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Materials*, Volume 1, pp. 445–464. Mechanical Engineering Pub.

HIRTH, J. P. ANND LOTHE, J. (1982). *Theory of dislocations - 2nd edition.* John Wiley and Sons Ltd., Chichester.

HOBBS, B., H. MULHAUS, et A. ORD (1990). *Instability, softening and localization of deformation*, Deformation Mechanims, Rheology and Tectonics, 1990, Knippe R.J. and Rutter (eds), Geological Society Special Publications, **54**, pp. 143–165.

HOEK, E., J. CARVALHO, et B. CORKUM (1993). *A 2D Hybrid FE/BE Program for Calculating Stresses and Estimating Support Around Underground Excavations*. Rock Engineering Group, University of Toronto.

HOEK, E., M. W. GRABINSKI, et M. S. FIEDERICHS (1991). *Numerical modelling for underground excavation design*, Transactions of Institute of Mining and Metallurgy, **100**, pp. A22–A30.

HOFFMAN, E. L. et B. L. EHGARTNER (1993). *Evaluating the effects of the number of caverns on the performance of underground oil storage facilities*, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **30**, pp. 1523–1526.

HORI, H. et S. NEMAT-NASSER (1986). *Brittle failure in compression: splitting, faulting and brittle-ductile transition*, Philosophical Transactions of the Royal Society, **A319**, pp. 337–374.

HORNBERGER, K., H. STAMM, V. K. ARYA, et W. HUBER (1987). *Numerical integration and implementation of viscoplastic models into finite element codes.* In *Proceedings of the Conference on Computational Plasticity Models, Software and Applications*, pp. 477–490. Pineridge Press.

HORSEMAN, S. T. (1988). *Moisture content: a major uncertainty in storage cavity closure prediction.* In *Proceedings of the 2nd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, September 1984, Hannover, Germany.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

HORSEMAN, S. T., J. E. RUSSELL, J. HANDIN, et N. L. CARTER (1992). *Steady state flow of Avery Island salt.* In *Proceedings of 7th International Sym-*

posium on Salt, April 1992, Kyoto, Japan, pp. 67–74. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

HUANG, J., G. MA, et Z. YANG (1985). *The application of boundary element method (BEM) to mining engineering of Golden River underground phosphorus mine.* In *Proceeding of Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, pp. 1557–1563.

HULT, J. (1966). *Creep in Engineering Structures.* Blaisdell Publications.

HUNSCHE, U. (1988). *Measurements of creep in rock salt at small strain rates.* In *Proceedings of the 2nd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, September 1984, Hannover, Germany*, pp. 187–196. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

HUNSCHE, U. et H. ALBRECHT (1990). *Results of true triaxial strength tests on rock salt*, Engineering Fracture Mechanics, **35**, pp. 867–877.

HUNSCHE, U., O. SCHULZE, et M. LANGER (1994). *Creep and failure behavior of rock salt around underground cavities.* In *Proceedings of 16th World Mining Congress, Sofia Bulgaria September 1994*, Volume 5, pp. 217–230.

HUSAIN, K. et T. PARKER (1996). *Linux Unleashed Second Edition.* SAMS Publishing.

JULIEN, M., R. FOERCH, M. AUBERTIN, et G. CAILLETAUD (1998). *Aspects of numerical implantation of internal state variable.* In *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

KOCKS, U. F. (1976). *Laws for work-hardening and low-temperature creep.*, Journal of Engineering of Materials and Technologies, **98**, pp. 76–85.

KRAJCINOVIC, D., M. BASISTA, et D. SUMARAC (1991). *Micromechanically inspired phenomenological damage model*, Journal of Applied Mechanics, **58**, pp. 305–310.

KRAJCINOVIC, D. et J. LEMAITRE (1987). *Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications - CISM Course and Lectures no. 295.* Springer-Verlag, Berlin.

KRAUSZ, A. S. et K. KRAUSZ (1996). *Unified constitutive laws of plastic deformation.* Academic Press.

KREMPL, E. (1984). *Viscoplasticity based on overstress. Experiment and Theory, Mechanics of Materials.* John Wiley and Sons Ltd., Chichester.

KRIEG, R. D. (1982). *A unified creep-plasticity model for halite.* In *Mechanical Testing for Deformation Model Development*, pp. 139–147. Rhode, R. W. and Swaerengen, J.C., ASTM.

KRIEG, R. D. (1983). *Implementation of creep equations for a metal into a finite element computer program*, Computer Methods for Nonlinear Solids and Structural Mechanics, ASME Applied Mechanics Division, **54**, pp. 133–144.

KRIEG, R. D., J. C. SWEARENGEN, et W. B. JONES (1987). *A physically based internal variable model for rate dependent plasticity.* In *Unified constitutive equations for creep and plasticity*, pp. 245–271. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

KUMAR, V., M. MORJARA, et S. MUKHERJEE (1980). *Numerical integration of some stiff constitutive models of inelastic deformation*, Journal of Engineering Materials and Technology ASME, **102**, pp. 92–96.

LEGAC, H. et P. DUVAL (1980). *Constitutive relations for the non elastic deformation of polycristalline ice.* In *IUTAM Symposium on the Physics and Mechanics of Ice*, Volume 1, pp. 51–59. Springer-Verlag, Berlin.

LEITE, M. H. (1991). *Détermination des paramètres d'une loi de fluage du sel gemme par l'enfoncement d'un poinçon tronconique effilé.* Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

LEMAITRE, J. (1985). *A continuum damage mechanics model for ductile fracture*, Journal of Engineering Materials and Technology, **107**, pp. 83–89.

LEMAITRE, J. (1992). *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag.

LEMAITRE, J. et J. L. CHABOCHE (1988). *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod-Bordas.

LIN, C. T., B. AMADEI, et S. STURE (1994). *Using an augmented Lagrangian method and block fracturing in the DDA method*. In Siriwardane et Zaman (Eds.), *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Volume 1, pp. 837–842.

LINDHOLM, U. S., K. S. CHAN, et B. H. THACKER (1993). *On determining material constants for unified thermo-visco-plastic constitutive equations*. In *Material Parameter Estimation for Modern Constitutive Equations*, pp. 183–193. ASME.

LOVATO, G., F. MORET, G. CAILLETAUD, et P. PILVIN (1995). *Identification of viscoplastic constitutive equations by inverse method*. In *Proceedings of International Symposium on Inelastic Deformation, Damage and Life Analysis, Hawaii, USA*. ICES.

LOWE, T. C. (1986). *Modeling internal stresses of the inelastic deformation of metals*, Journal of Engineering Materials and Technologies, **108**, pp. 365–373.

LOWE, T. C. et A. K. MILLER (1984a). *Improved constitutive equations for modelling strain softening - Part I conceptual development*, Journal of Engineering Materials and Technology, **106**, pp. 337–342.

LOWE, T. C. et A. K. MILLER (1984b). *Improved constitutive equations for modelling strain softening - Part II predictions for aluminum*, Journal of Engineering Materials and Technology, **106**, pp. 343–348.

LUBLINER, J. (1990). *Plasticity Theory*. Mac-Millan Publ. Co.

LUX, K. et S. HEUSERMANN (1985). *Creep tests on rock salt with changing load as a basis for verification of theoritical material laws.* In *Proceedings of the 6th International Symposium on Salt, Alexandria Virginia*, pp. 417–435. The Salt Institute.

LUX, K. H. et T. SCHMIDT (1996). *Optimising underground gas storage operations in salt caverns, with special reference to the rock mechanics and thermodynamics involved.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 445–458. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

MCDOWELL, D. L. (1995). *Stress state dependence of cyclic ratchetting behavior of two rail steels*, International Journal of Plasticity, **11**, pp. 397–422.

MEEK, J. L. (1985). *Recent experience with numerical analysis of mining enineering related problems.* In *Proceeding of Fifth International Conference on Numerical methods in Geomechanics*, pp. 93–103.

MELLEGARD, K. D., G. D. CALLAHAN, et P. E. SENSENY (1992). *Multiaxial Creep of Natural Rock Salt, SAND91-7083.* Sandia National Laboratories.

MELLEGARD, K. D. et D. E. MUNSON (1997). *Laboratory creep and mechanical tests on salt report (1975-1996) - Waste isolation pilot plant (WIPP) thermal/structural interactions program.* Sandia National Laboratories.

MELLEGARD, K. D. et F. D. SENSENY, P. E. HANSEN (1983). *Quasi-static Strength and Creep Characteristics of 100-mm-Diameter Specimens of Salt From Avery Island, Louisiana.* In *Technical Report. ONWI-250, Contract-E512-02900.* RE/SPEC, Rapid City, S.D.

MENDELSON, A. (1968). *Plasticity: Theory and application.* MacMillan Pub. Co., New York.

MÉRIC, L. et G. CAILLETAUD (1991). *Intégration de lois de comportement en viscoplasticité.* In *Proceedings of Conference on New Advances in Computa-*

tional Structural Mechanics, pp. 1–12.

MÉRIC, L., G. CAILLETAUD, et M. GASPERINI (1994). *F.E. calculations of copper bicrystal specimens submitted to tension-compression tests*, Acta Metallurgica et Materialia, **42**, pp. 921–935.

MILLER, A. K. (1976). *An inelastic constitutive model for monotonic cyclic and creep deformation: Part I - Equations development and analytical procedures*, Journal of Engineering Materials and Technology, **98**, pp. 97–105.

MILLER, A. K. (1987). *Unified constitutives equations for plastic deformation and creep of engineerings alloys*. Elsevier Applied Science Publishers, Amsterdam.

MILLER, G. R., S. BANERJEE, et K. SRIBALASKANDARAJAH (1995). *A framework for interactive computational analysis in geomechanics*, Computers and Geotechnics, **17**, pp. 17–37.

MORGAN, H. S. et W. R. WAWERSIK (1989). *Computed and measured reponses of a thick walled hollow cylinder of salt subjected to both homogeneous and inhomogneous loading*. In *Proceedings of the* 30^{th} *US Rock Mechanics Symposium*, pp. 361–368.

MORGAN, H. S. et W. R. WAWERSIK (1991). *The use of thick-walled hollow cylinder creep tests for evaluating flow criteria for rock salt*. In *Proceedings of the* 7^{th} *International Congress on Rock Mechanics, Aachen, Germany*, pp. 303–307.

MORJARIA, M. et S. MUKHERJEE (1981). *Numerical analysis of planar, time-dependent inelastic deformation of plates with cracks by the boundary element method*, International Journal of Solids and Structures, **17**, pp. 127–143.

MROZ, Z. (1986). *Phenomenological constitutive models for metals*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, **115**, pp. 293–344.

MROZ, Z. et W. A. TRAMPCZYNSKI (1984). *On the creep-hardening rule for metals with a memory of maximal prestress*, International Journal of Solids

and Structures, **20, 5**, pp. 467–486.

MUGHRABI, H. (1983). *Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals*, Acta Metallurgica, **31**, pp. 1367–1371.

MUNSON, D. E. (1991). *In-situ tests of salt deformation for validation of a radioactive waste repository predictive technology.* In *Pre-Print - Society of Mining Engineers of AIME*, pp. 8. AIME.

MUNSON, D. E. (1997). *Constitutive model of creep in rock salt applied to underground room closure*, Internation Journal of Rock Mechanics and Mineral Sciences, **34**, pp. 233–247.

MUNSON, D. E. (1999). *Multimechanism-Deformation Parameters of Domal Salts Using Transient Creep Analysis - SAND99-2104.* Albuquerque, NM: Sandia National Laboratories.

MUNSON, D. E. et P. R. DAWSON (1982). *A work-hardening/recovery model of transient creep of salt during stress loading and unloading.* In *Proceedings of the 23rd US Rock Mechanics Symposium*, pp. 2229–2306.

MUNSON, D. E. et K. DEVRIES (1991). *Development and validation of a predictive technology for creep closure of underground rooms in salt.* In *Proceedings of the 7th International Congress on Rock Mechanics, Aachen Germany*, Volume 1, pp. 127–134.

MUNSON, D. E., K. L. DEVRIES, W. F. SCHIERMEISTER, W. F. DEYONGE, et R. L. JONES (1996). *Extension fo the M-D model for treating stress drops in salt.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 31–44. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

MUNSON, D. E. et W. WAWERSIK (1993). *Constitutive modelling of salt behavior - State of technology.* In *Proceedings of the 7th Congress of the International*

Society of Rock Mechanics, Aachen, Germany, pp. 1797–1810. Balkema, Rotterdam.

MUNSON, D. E., J. R. WEATHERBY, et K. L. DEVRIES (1993). *Two- and three-dimensional calculations of scaled in situ tests using the M-D model of salt creep*, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **30**, pp. 1345–1350.

MURAKAMI, S. (1987). *Anisotropic damage theory and its application to creep crack growth analysis.* In *Consitutive laws for engineering materials: Theory and applications.*, pp. 187–194. Elsevier Applied Science Publishers, Amsterdam.

MURAKAMI, S. (1988). *Mechanical modelling of material damage*, Journal of Applied Mechanics, **55**, pp. 280–286.

MURAKAMI, S. (1990). *A continuum mechanics theory of anisotropic damage.* In J. Boehler (Ed.), *Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids*, pp. 465–482. Mechanical Engineering Publications.

MURAKAMI, S. et L. OHNO (1982). *A constitutive equation of creep based on the concept of a creep hardening surface*, International Journal of Solids and Structures, **18**, pp. 597–609.

MURRELL, S. A. F. (1990). *Brittle-to-ductile transitions in polycristalline non metallic materials.* In D. Barber et P. Meredith (Eds.), *Deformation Processes in Minerals, Ceramics and Rocks*, Volume 1, pp. 109–137.

NADGORNYI, E. M. et H. P. STRUNK (1987). *Dislocation structure of plastically deformed NaCl polycrystals*, Physic. Stat. Sol. A, **104**, pp. 193–202.

NEILSEN, M., S. N. BURCHETT, C. M. STONE, et J. J. STEPHENS (1996). *A viscoplastic theory for barze alloys.* In *Sandia Report, SAND96-0984.*

Nguyen-Minh, D. (1993). *Numerical modelling in underground cavities in salt.* In *Short Course on Underground Storage of Gases: Eurock93*, pp. 72–87. ISRM.

NICOLAS, A. et J. POIRIER (1976). *Crystalline Plasticity and Solid State Flow in Metamorphic Rocks*. John Willey and Sons.

NIX, W. D., J. C. GIBELING, et D. A. HUGHES (1985). *Time-dependent deformation of metals*, Metallurgical Transcripts Sect. A, **16**, pp. 2215–2226.

ODQVIST, F. K. G. (1974). *Mathematical Theory of Creep and Rupture*. Clarendon Press.

OHASHI, Y., M. KAWAI, et T. MOMOSE (1986). *Effects of prior plasticity on subsequent creep of type 316 stainless steel at elevated temperature*, Journal of Engineering Materials and Technology, **108**, pp. 69.

OHNO, N., S. MURAKAMI, et T. UENO (1985). *A constitutive model of creep describing creep recovery and material softening caused by stress reversals*, Journal of Engineering Materials and Technology, **107**, pp. 1–6.

OHNO, N. et J. D. WANG (1991). *Transformation of a nonlinear kinematic rule to a multi-surface form under isothermal and nonisothermal conditions*, International Journal of Plasticity, **7**, pp. 879–891.

OHNO, N. et J. D. WANG (1992). *Nonisothermal constitutive modeling of inelasticity based on bounding surface*, Nuclear Engineering and Design, **133**, pp. 369–381.

OLIVELLA, S., A. GENS, E. E. ALONSO, et J. CARRERA (1998). *Analysis of creep deformation of galleries backfilled with porous salt aggregates*. In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada*, pp. 185–190. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

ONG, V., J. UNRAU, J. JONES, A. COODE, et D. MACKINTOSH (1998). *Triaxial creep testing of Sakastchewan potash samples*. In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt,*

June 17-18 1996, Montréal, Canada, pp. 469–480. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

ORLOVA, A. (1991). *On the relation between dislocation structure and internal stress measured in pure metals and single phase alloys in high temperature creep*, Acta Metallurgica and Materialia, **39**, pp. 2805–2813.

ORLOVA, A. et J. CADEK (1986). *Dislocation structure in the high temperature creep of metals and solid solution alloys: a review*, Materials Science in Engineering, **77**, pp. 1–18.

OROWAN, E. (1947). *The creep of metals*, Journal of West. Scotland Iron St. Institute, **54**, pp. 45–68.

PARISEAU, W. (1993). *Applications of finite element analysis to mining engineering*. In J. Hudson, E. Brown, C. Fairhurst, et E. Hoek (Eds.), *Comprehensive Rock Engineering, Principles, Practice and Projects*, Volume 1, Oxford, England, pp. 491–522. Pergamon Press.

PEACH, C. J. (1996). *Deformation, dilatancy and permeability development in halite-anhydrite composites*. In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 139–152. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

PEIRCE, A. P. (1991). *Efficient multigrid solution of boundary element models of cracks and faults*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, **15**, pp. 549–572.

PFEIFLE, T. W., P. SENSENY, K. D. MELLEGARD, et D. E. MUNSON (1987). *Influence of variables on the consolidation and unconfied compressive strength of crushed salt*. In *BMI/ONWI-627, prepared by RE/SPEC Inc., Rapid City, S.D.* Office of Nuclear Waste Isolation, Battelle Memorial Institute, Columbus.

PILVIN, P. (1988). *Identification des paramètres de modèles de comportement.* In *International Seminar Mecamat. The Inelastic Behavior of Solids*, Volume 1, pp. 155. Mecamat.

PILVIN, P., K. SAI, et G. CAILLETAUD (1991). *Optimal design against creep and fatigue.* In N. Bicanic, P. Marovic, et al. (Eds.), *Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Engineering Computations*, pp. 731–740.

POIRIER, J. P. (1985). *Creep of crystals, high-temperature deformation processes in metals, ceramics and minerals.* Cambridge University Press.

POLIZZOTTO, C. (1993). *On the conditions to prevent plastic shakedown: Part I-Theory; Part II- the plastic shakedown limit load*, Journal of Applied Mechanics, **60**, pp. 15.

PRESS, W. H., R. O. FOSCHI, S. A. TEUKOLSKY, et W. T. VETTERLING (1988). *Numerical Recipes in C.* Cambridge University Press.

PRIJ, J., R. Andre-Jehan, C. BAJOS, N. KNOWLES, P. MANSAL, et C. SPIERS (1991). *Experimental and modelling studies on the deformation behaviour of rocksalt.* In *Proceedings of European Community Conference on Radioactive Waste Management Disposal*, pp. 518–535. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

PRIJ, J., J. J. HEIJDRA, et B. A. van den Horn (1996). *Convergence and compaction of backfilled openings in rocksalt.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 337–350. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

PUDEWILLS, A. (1998). *Influence of anhydrite strata on the stability of waste disposal drift.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada*, pp.

253–262. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

PUGH, C. E. et D. N. ROBINSON (1987). *Some trends in constitutive equation models development for high-temperature behavior of fast-reactor structural alloys*, Nuclear Engineering and Design, **48**, pp. 269–276.

PYCKO, S. et G. MAIER (1995). *Shakedown theorems for some classes of nonassociative hardening elastoplastic material models*, International Journal of Plasticity, **11**, pp. 367–395.

RATIGAN, A., L. VAN SAMBEEK, K. DEVRIES, et J. NIELAND (1991). *The influence of seal design on the development of the disturbed rock zone in the WIPP alcove seal tests.* Technical report, RE/SPEC, Rapid City S.D.

RAWLEY, M. et E. THORNTON (1966). *Constitutive modeling of the viscoplastic response of hastelloy-X and aluminium*, Journal of Engineering Materials and Technology, ASME, **118**, pp. 19–27.

REDDY, J. N. (1993). *An introduction to the finite element method, 2nd Edition.* McGraw-Hill.

RICHARDSON, L. F. (1910). *The approximate arithmetical solution by finite difference of physical problems*, Transcripts of Royal Society, **A210**, pp. 307–357.

RUSSELL, J. E. (1988). *Constitutive model development for Avery Island rocksalt.* In *Applied Mechanics and Engineering Sciences Conference Abstracts, ASME*, pp. 96.

RUSSELL, J. E., N. L. CARTER, et J. HANDIN (1984). *Laboratory testing for repository characterization.* In *Proceedings of the 25th US Rock Mechanics Symposium*, pp. 1188–1213.

RUSSELL, J. E., N. L. CARTER, et S. C. WALKER (1990). *A material model for Avery Island rocksalt.* In *The brittle, ductile transition in Rocks*, pp. 111–118. Am. Geophys. Union Monogr.

SALZER, K. (1998). *Long-term safety of salt mines in flat beddings.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada*, pp. 245–250. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

SAMMONDS, P., M. AYLING, P. MEREDITH, S. MURREL, et C. JONES (1989). *Laboratory investigation of acoustic emission and elastic wave velocity changes during rock failure under triaxial stresses.* In Maury et Fourmaintraux (Eds.), *Rock at Great Depth*, pp. 233–240. A.A. Balkema, Rotterdam.

SANTARELLI, F. et E. BROWN (1989). *Failure of three sedimentary rocks in triaxial and hollow cylinder compression tests*, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **26**, pp. 361–372.

SCHMIDTKE, R. et E. LAJTAI (1985). *The long term strength of Lac du Bonnet granite*, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **22**, pp. 461–465.

SENSENY, P., F. HANSEN, J. RUSSELL, N. CARTER, et J. HANDIN (1993). *Mechanical behavior of rock salt: phenomenology and micromechanims*, International Journal of Rock Mechanics Mining Sciences and Geomech. Abstracts, **29**, pp. 363–378.

SENSENY, P. E. (1983). *Non-associative constitutive laws for low porosity rocks*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, **7**, pp. 101–115.

SENSENY, P. E. (1993). *Lettre personnelle à Michel Aubertin 9 juin 1993.* Technical report, Defense Nuclear Agency, 6801 Telegraph Road, Alexandria, Va. 22310-3398.

SENSENY, P. E., N. S. BRODSKY, et K. L. DE VRIES (1993). *Parameter evaluation for a unified constitutive model*, Journal of Engineering Materials and Technology, **115**, pp. 157–162.

SENSENY, P. E. et A. F. FOSSUM (1993). *Parameter evaluation for a viscoplastic constitutive model.* In *Proceedings of ASME Winter Annual Meeting.* ASME.

SENSENY, P. E. et A. F. FOSSUM (1995). *On testing requirements for viscoplastic constitutive parameter estimation*, Journal of Engineering Materials and Technologies, **117**, pp. 151–156.

SENSENY, P. E. et A. F. FOSSUM (1998). *Testing to estimate the Munson-Dawson parameters.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of* 4^{th} *Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

SENSENY, P. E. et F. D. HANSEN (1987). *Potential constitutive models for salt: survey of phenomenology, micro-mechanisms and equations - Topical Report RSI-0284.* Technical report, RE/SPEC, Rapid City S.D.

SENSENY, P. E., K. D. MELLEGARD, et L. A. WAGNER (1989). *Hollow cylinder tests on natural rock salt*, Geotechnical Testing Journal, **12**, pp. 157–162.

SGAOULA, J. (1997). *Extension d'un modèle viscoplastique unifié au comportement semi-fragile du sel gemme.* Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.

SGAOULA, J., M. AUBERTIN, et D. E. GILL (1992). *Modélisation du comportement mécanique du sel gemme: viscoplasticité et endommagement. Rapport EMP/RT-92-112.* École Polytechnique de Montréal.

SGAOULA, J., M. AUBERTIN, et D. E. GILL (1995). *Using internal state variables for modeling the viscoplastic behavior in the semi-brittle regime.* In *Proceedings of* 36^{th} *US Rock Mechanics Symposium, Lake Tahoe.* A.A. Balkema, Rotterdam.

SHAM, T.-L. et H. W. CHOW (1989). *A finite element for an incremental viscoplasticity theory based on overstress*, European Journal of Mechanics A/Solids, **8**, pp. 415–436.

SHAO, J., G. DUVEAU, N. HOTEIT, M. SIBAI, et M. BART (1997). *Time dependent continuous damage model for deformation and failure of brittle rock.* In *Proceedings of US Symposium on Rock Mechanics - NYROCK 97.* Elsevier.

SHAO, J., R. KHAZRAEI, et J. P. HENRY (1996). *Applications of continuum damage theory to borehole failure modelling in brittle rock.* In M. Aubertin, F. Hassani, et H. Mitri (Eds.), *Proceedings of 2nd NARMS 1996, Montréal, Canada.* Balkema.

SHI, G. H. (1988). *Discontinuous deformation analysis: a new numerical model for the statics and dynamics of block systems.* Thèse de doctorat, University of California Berkeley.

SHI, G. H. et R. E. GOODMAN (1989). *Generalization of two-dimensional continuous deformation analysis for forward modeling,* International Journal Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, **359-380**, pp. 359–380.

SHIMAMOTO, G. H. (1989). *The origin of S-C mylonites and new fault-zone model,* Journal of Structural Geology, **11**, pp. 51–69.

SIMON, R. (1999). *Analysis of fault-slip mechanisms in hard rock mining.* Thèse de doctorat, Université McGill.

SIMON, R., M. AUBERTIN, et D. E. GILL (1993). *Numerical modelling for the evaluation of rockburst potential of an underground excavation.* In H. Mitri (Ed.), *Proceedings of First Canadian Symposium on Numerical Modelling Applications in Mining and Geomechanics,* pp. 217–227.

SKROTZKI, W. et P. HAASEN (1984). *Plastic deformation and hardening of polycristalline halides.* In *Proceedings of the International Symposium Plastic Deformation of Ceramics Materials,* Volume 1, pp. 429–444.

SKRZYPEK, J. J. et R. B. HETNARSKI (1993). *Plasticity and creep. Theory, examples and problems.* CRC Press.

SMITH, I. et D. NORTHWOOD (1986). *Back stresses in high temperature creep of Al-Mg alloys.* In *Proceedings of ICSMA7, Strength of Metals and Alloys.* Pergamon Press, Oxford.

SOKOLNIKOFF, I. S. (1987). *Mathematical Theory of Elasticity.* Robert E. Krieger Publishing Co.

SOUSA, L. R. et J. Q. MENEZES (1993). *The use of underground storage of gases.* In *Short Course on Underground Storage of Gases: Eurock93*, pp. 1–33. ISRM.

SOUTHWELL, R. V. (1946). *Relaxation Methods in Theoretical Physics.* Clarendon Press.

SPIERS, C. J. et R. H. BRZESOWSKY (1993). *Densification behaviour of wet granular salt: Theory versus experiment.* In *Proceedings of 7th Symposium on Salt, April 1992, Kyoto, Japan*, pp. 83–92. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

SPIERS, C. J. et N. L. CARTER (1998). *Microphysics of rocksalt flow in nature.* In *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

SPRACKLING, M. (1973). *Dislocation mobility and work hardening in sodium chloride*, Phil. Mag., **27**, pp. 265–271.

STONE, C. M., R. D. KRIEG, et Z. E. BEISINGER (1985). *SANCHO: A finite element computer program for the quasistatic, large deformation, inelastic response of two-dimensional solids.* SAND84-2618. Sandia National Laboratories, Alburquerque, NM.

STORMONT, J. C. (1990). *Gas permeability changes in rock salt during deformation.* Thèse de doctorat, University of Arizona.

STORMONT, J. C., J. J. K. DAEMEN, et C. S. DESAI (1992). *Prediction of dilation and permeability changes in rock salt*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomech., **16**, pp. 545–569.

STUMVOLL, M. et G. SWOBODA (1993). *Deformation behavior of ductile solids containing anisotropic damage*, Journal of Engineering Mechanics, **119**, pp. 1331–1353.

SWEARENGEN, J. C. et J. H. HOLBROOK (1985). *Internal variable models for rate-dependent plasticity: analysis of theory and experiment*, Res. Mechanica, **13**, pp. 93–128.

SWEARENGEN, J. C., T. C. LOWE, et J. LIPKIN (1985). *Constitutive equations for rate- dependent plasticity*, Ann. Rev. Mater. Sciences, **15c**, pp. 249–270.

SWOBODA, G., W. MERTZ, et G. BEER (1987). *Rheological analysis of tunnel excavations by means of coupled finite element (FEM)- boundary element (BEM) analysis*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, **11**, pp. 115–129.

TANG, B. (1998). *Rockburst Control Using Destress Blasting.* Department of Mining and Metallurgical Engineering, University McGill.

TOMLIN, G. R. et R. BUTTERFIELD (1974). *Elastic analysis of zoned orthotropic continua.* In *Proceedings ASCE Mechanical Divisions EM3*, pp. 511–529.

TRUESDELL, C. (1966). *Continuum mechanics.* Gordon and Breach.

VAN SAMBEEK, L. (1986). *Creep of rock salt under inhomogeneous conditions.* Thèse de doctorat, Colorado School of Mines.

VARGA, R. S. (1962). *Matrix Iterative Analysis.* Prentice-Hall.

VOEGELE, M., C. FAIRHURST, et P. A. CUNDALL (1978). *Analysis of tunnel support load using a large displacement distinct model.* In Bergman (Ed.),

Storage in Excavated Caverns. Proceedings of First International Symposium, Rockstore 77, pp. 247–252. Pergamon Press.

VOUILLE, G., J. BERGUES, J. G. DURUP, et T. YOU (1996). *Study of the stability of caverns in rock salt created by solution mining - proposal of a new desing criterion.* In *Proceedings of the 3rd Conference on the Mechanical Behavior of Salt, september 14-16 1993,École Polytechnique, Palaiseau, France*, pp. 427–443. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

VOYIADJIS, G. Z. et T. PARK (1997). *Anisotropic damage effect tensors for the symmetrization of the effective stress tensor*, Journal of Applied Mechanics, ASME, **64**, pp. 106–110.

WALLNER, M. (1984). *Analysis of the thermomechanical problems related to the storage of heat producing radioactive waste in rock salt.* In *Proceedings of the First Conference on Mechanical Behavior of Salt. Penn State University, Pa.*, pp. 639–763. Trans Tech Publisher.

WATSON, J. (1993). *An overview of the boundary elements methods.* In J. Hudson, E. Brown, C. Fairhurst, et E. Hoek (Eds.), *Comprehensive Rock Engineering, Principles, Practice and Projects*, Volume 1, Oxford, England, pp. 469–490. Pergamon Press.

WAWERSIK, W. et H. MORGAN (1987). *Evaluating design procedures for structures in rock salt.* In *Proceedings of the 28th U.S. Symposium on Rock Mechanics*, pp. 853–862. Balkema, Rotterdam.

WAWERSIK, W. R. (1980). *Mechanical behavior of New Mexico rock salt in triaxial compression up to 200 deg. C*, Journal of Geophysical Research, **85**, pp. 891–900.

WAWERSIK, W. R. (1988). *Alternatives to a power-law creep model for rock salt at temperatures below* 160° *C.* In *Proceedings of the 2nd Conference on the*

Mechanical Behavior of Salt, September 1984, Hannover, Germany, pp. 103–128. Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

WEIDINGER, P., W. BLUM, A. HAMPEL, et H. U. (1998). *Description of the creep of rock salt with the composite model - I transient creep II steady-state creep.* In M. Aubertin et H. Hardy (Eds.), *Proceedings of 4th Conference on the Mechanical Behavior of Salt, June 17-18 1996, Montréal, Canada.* Trans Tech Publications, Clausthal-Zellerfeld, Germany.

WILES, J. (1990). *A two surface plasticity model with bounding surface softening,* Wrong Journal of Engineering Materials and Technology, **118**, pp. 37–42.

XIE, H. (1993). *Fractals in Rock Mechanics.* Balkema.

ZAMAN, M., M. O. FARUQUE, et M. I. HOSSAIN (1992). *Modeling creep behavior of rock salt.* In *Composite Material Technology*, pp. 51–56. ASME.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1977). *The Finite Element Method.* McGraw-Hill.

ZIENKIEWICZ, O. C. et I. C. CORMEAU (1974). *Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, **8**, pp. 821–845.

Annexe I

Autres résultats d'essais de laboratoire sur le sel gemme de Avery Island

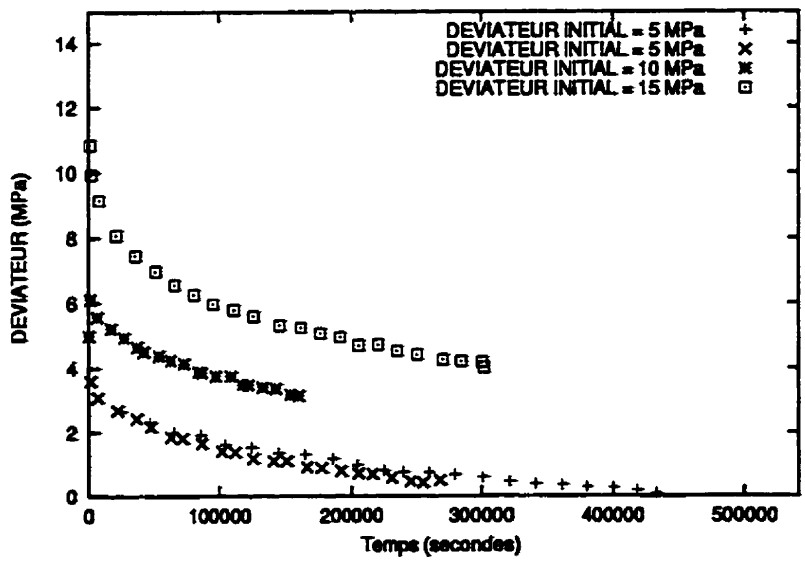


Figure I.1: Essais de relaxation sur le sel de Avery Island (référence Senseny et al. 1993) à température ambiante. La contrainte de confinement est de 15. MPa. Les déviateurs initiaux sont respectivement de 5.0, 10.0 et 15.0 MPa.

Tableau I.1: Description du chargement pour les essais de compression triaxiale réalisés par Senseny et al. 1993 sur le sel d'Avery Island. Tous les essais ont été réalisés à une température de 25° C et à une contrainte de confinement constante de 15.0 MPa.

Description des essais de Senseny et al. 1993 sur le sel d'Avery Island							
Essai	Type	S (MPa)	Stage 1 (sec.)	S (MPa)	Stage 2 (sec.)	S (MPa)	Stage 3 (sec.)
F-1	Fluage	5.0	$36.0e+6$				
F-2	Fluage	5.0	$19.0e+6$	6.0	$1.2e+6$		
F-3	Fluage	10.0	$23.4e+6$	12.5	$1.6e+6$	10.0	$4.9e+6$
F-4	Fluage	15.0	$15.1e+6$	16.0	$4.9e+6$	15.0	$10.0e+6$
Essai	Type	$\dot{\epsilon}$ (sec^{-1})	Stage 1 (sec.)	$\dot{\epsilon}$ (sec^{-1})	Stage 2 (sec.)	$\dot{\epsilon}$ (sec^{-1})	Stage 3 (sec.)
C-1	CSR	$8.7*10^{-6}$	2298.9				
C-2	CSR	$8.7*10^{-6}$	1149.4	$8.3e-8$	$1.2e+5$		
C-3	CSR	$8.3*10^{-8}$	$1.2e+5$	$8.7e-6$	1150.0		
C-4	CSR	$8.3*10^{-8}$	$2.4e+5$				
Essai	Type	S (MPa)	Stage 1 (sec.)	S (MPa)	Stage 2 (sec.)	S (MPa)	Stage 3 (sec.)
R-1	Relax.	5.0	440000.				
R-2	Relax.	5.0	300000.				
R-3	Relax.	10.0	300000.				
R-4	Relax.	15.0	300000.				

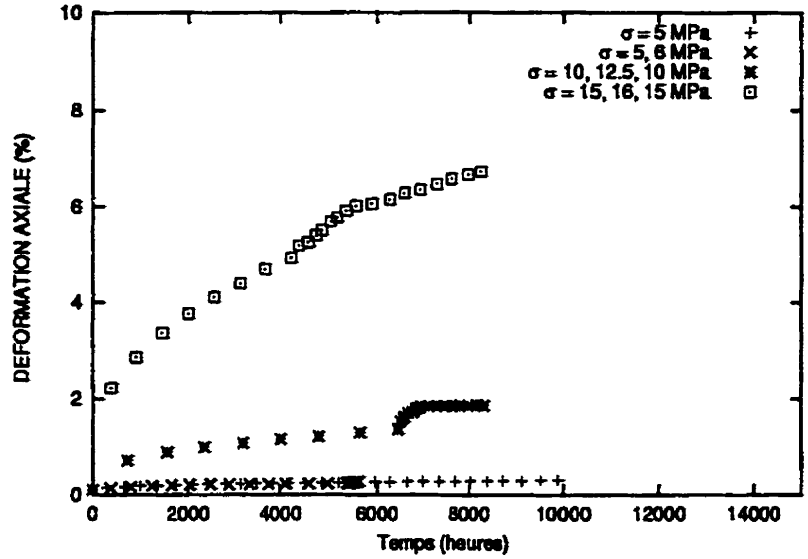


Figure I.2: Essais de fluage sur le sel de Avery Island (référence Senseny et al. 1993) à température ambiante. La contrainte de confinement est de 15. MPa. Les déviateurs sont respectivement de 5.0, 10.0 et 15.0 MPa.

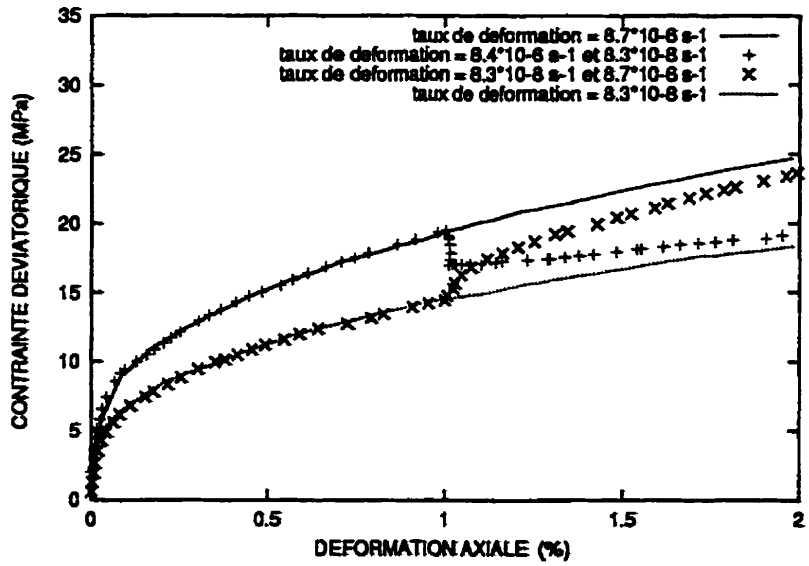


Figure I.3: Essai CSR sur le sel d'Avery Island (Reférence Senseny et al. 93). La contrainte de confinement est de 15 MPa et la température est de $25°C$.

Tableau I.2: Description des essais de fluage à une température inférieure à 70^oC (source Hansen et Mellegard 1980).

Échantillons	Essais	Paliers	σ_{conf} MPa	σ_{axiale} MPa	S MPa	Temp. degC	$\dot{\sigma}$ MPa/s	Durée heures
AI-JER/OWI	RT-1	1/3	3.5	10.4	6.9	24	0.012	93
- 50mm	RT-2	2/3	3.5	13.8	10.3	24		5
	RT-3	3/3	0.0	20.7	20.7	24		115
AI-JER/OWI	RT-4	1/1	3.5	24.2	20.7	24		232
- 50mm								
AI-JER/OWI	RT-5	1/1	3.5	34.5	31.0	24	0.012	286
- 50mm								
AIGS-2	RT-6	1/3	3.5	13.8	10.3	24		97
- 50mm	RT-7	2/3	3.5	24.2	20.7	24		83
	RT-8	3/3	3.5	34.5	31.0	24		64
AI4B-2R	RT-9	1/2	6.9	17.2	10.3	24	0.012	163
- 50mm	RT-10	2/2	6.9	27.6	20.7	24		216
AI4B-3F	RT-11	1/3	20.7	31.0	10.3	24	0.011	188
-50 mm	RT-12	2/3	20.7	41.4	20.7	24		333
	RT-13	3/3	10.3	41.3	31.0	24		145

Tableau I.3: Description des essais de fluage à une température entre $70°C$ et $120°C$ (source Hansen et Mellegard 1980).

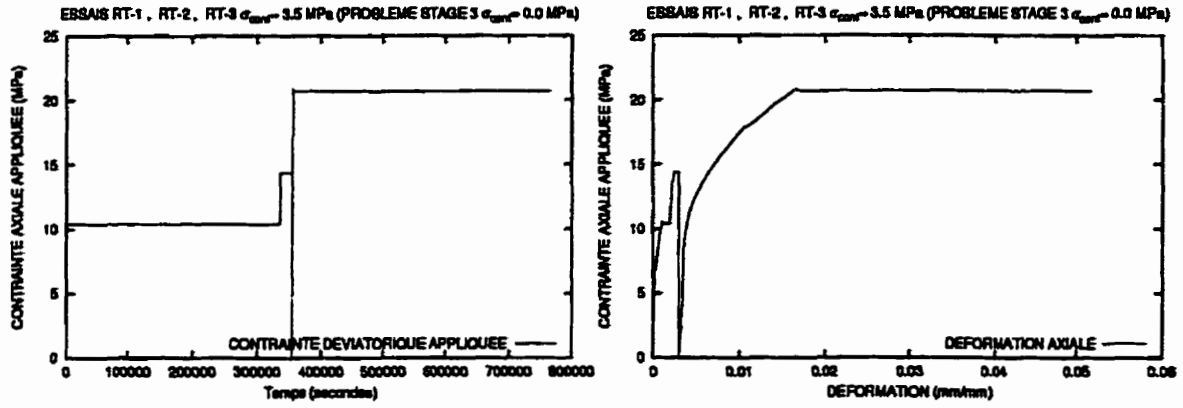
Échantillons	Essais	Paliers	σ_{conf} MPa	σ_{axiale} MPa	S MPa	Temp. degC	$\dot{\sigma}$ MPa/s	Durée heures
AIGS-1	80-1	1/2	3.5	24.2	20.7	85	0.011	21
- 50mm	80-2	2/2	3.5	13.8	10.3	85		
AI4B-2S	80-3	1/2	6.9	17.2	10.3	85	0.017	163
- 50mm	80-4	2/2	6.9	27.6	20.7	85		400
AI4B-2A	80-5	1/1	13.8	24.1	10.3	85	0.011	213
- 50mm								
AI4B-1A	80-6	1/2	20.7	31.0	10.3	85	0.12	165
- 50mm	80-7	2/2	20.7	41.4	20.7	85		500
AI5-1-3	80-8	1/1	0.0	10.3	10.3	85	0.11	670
- 50mm								
AI5-4-4	80-9	1/1	0.0	10.3	10.3	75	0.11	1379
- 50mm								
AI-JER/OWI	80-10	1/2	3.5	13.8	10.3	85		232
- 50mm	80-11	2/2	3.5	13.8	10.3	118		91
AI-JER/OWI	115-1	1/2	3.5	13.8	10.3	118	0.012	118
- 50mm	115-2	2/2	3.5	24.2	20.7	118		24
AIGS-5	115-3	1/1	3.5	24.2	20.7	118	0.011	46
- 50mm								
AI4B-2B	115-4	1/2	6.9	17.2	10.3	118		163
- 50mm	115-5	1/2	6.9	27.6	20.7	118		3
AI4B-3H	115-6	1/2	13.8	24.1	10.3	118	0.012	166
- 50mm	115-7	2/2	13.8	34.5	20.7	118		82
AI4B-2L	115-8	1/2	20.7	31.0	10.3	118	0.012	165
- 50mm	115-9	2/2	20.7	41.4	20.7	118		53
AI5-1/4	115-10	1/1	0.0	10.3	10.3	118	0.011	627
- 50mm								

Tableau I.4: Description des essais de fluage à des températures plus élevées que $120°C$ (source Hansen et Mellegard 1980).

Échantillons	Essais	Paliers	σ_{conf} MPa	σ_{axiale} MPa	S MPa	Temp. degC	$\dot{\sigma}$ MPa/s	Durée heures
AI4B-4J - 50mm	170-1	1/1	20.7	31.0	10.3	183		150
AI5-7-3 - 50mm	200-1	1/1	13.8	21.1	10.3	212		74
AI5-7-2 - 50mm	200-2	1/1	3.5	13.8	10.3	212		52
AI5-7-1 - 50mm	200-3	1/1	3.5	10.4	6.9	212		35
AI5-6-1 - 50mm	200-4	1/1	3.5	10.4	6.9	212		525

Tableau I.5: Description des essais de fluage à une température inférieure à $70°C$ (source Mellegard et al. 1983).

Échantillons	Essais	Paliers	σ_{conf} MPa	σ_{axiale} MPa	S MPa	Temp. degC	$\dot{\sigma}$ MPa/s	Durée heures
AI/79/C9-2A - 100mm	24-1	1/1	13.8	24.1	10.3	24		478
AI/79/C7-2A - 100mm	24-2	1/1	3.4	13.7	10.3	24		476
AI/79/A9-1B - 100mm	24-3	1/1	13.8	24.5	20.7	24		520
AI/79/A9-2A - 100mm	24-4	1/1	3.4	24.1	20.7	24		552
AI/79/B9-2B - 100mm	24-5	1/1	20.7	31.0	10.3	24		310
AI/79/A3-1A - 100mm	24-7	1/1	10.3	20.6	10.3	24		310



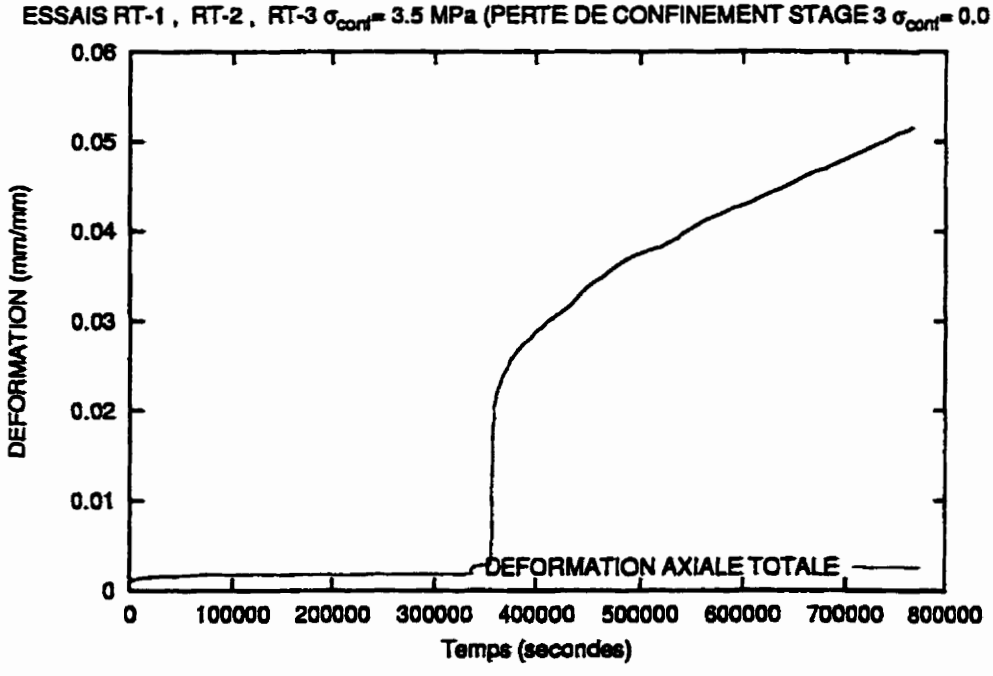


Figure I.4: Essais de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 RT-1, RT-2, RT-3.

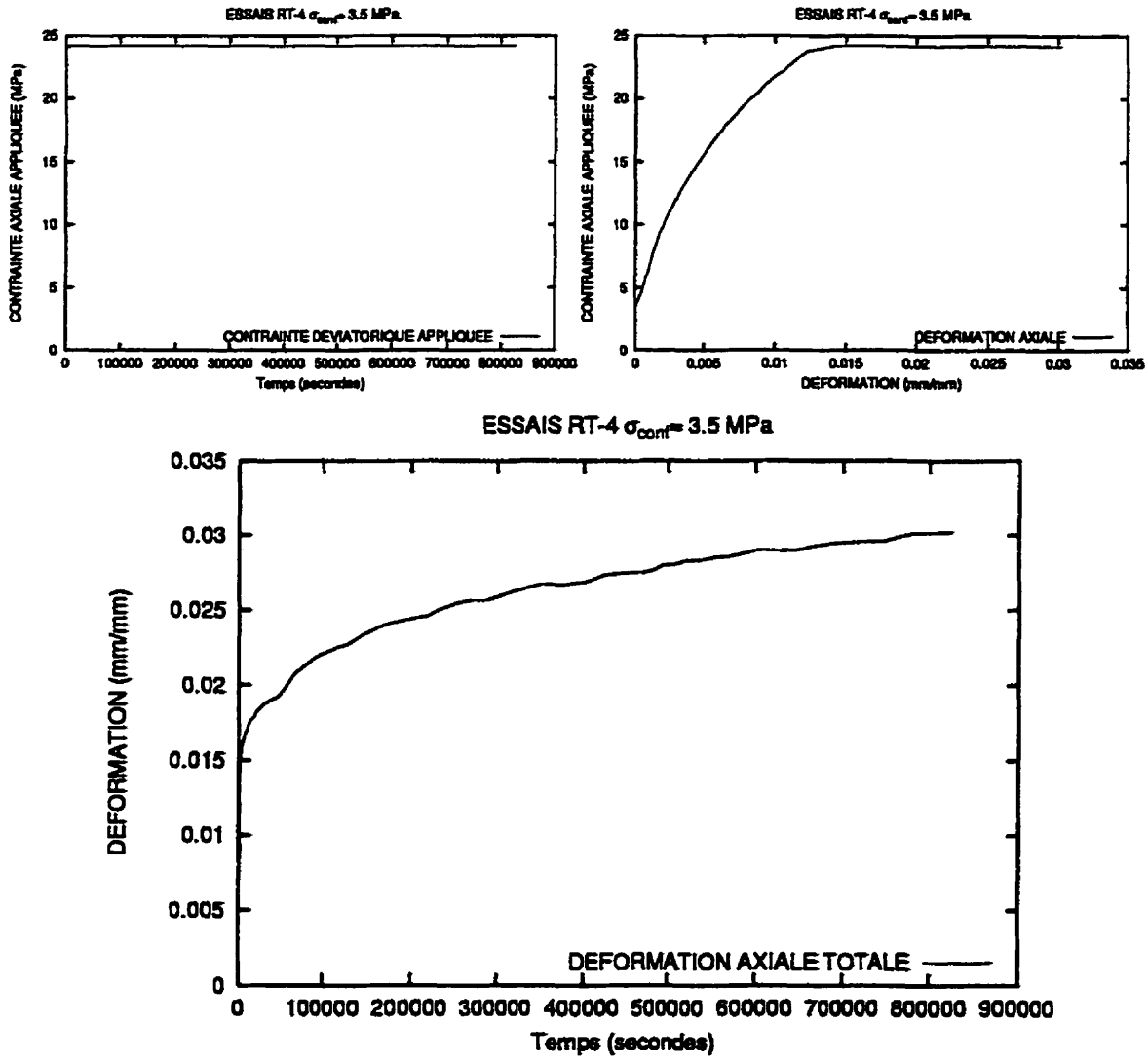


Figure I.5: Essai de laboratoire Hansen et Mellegard 1980 (Essai RT-4)

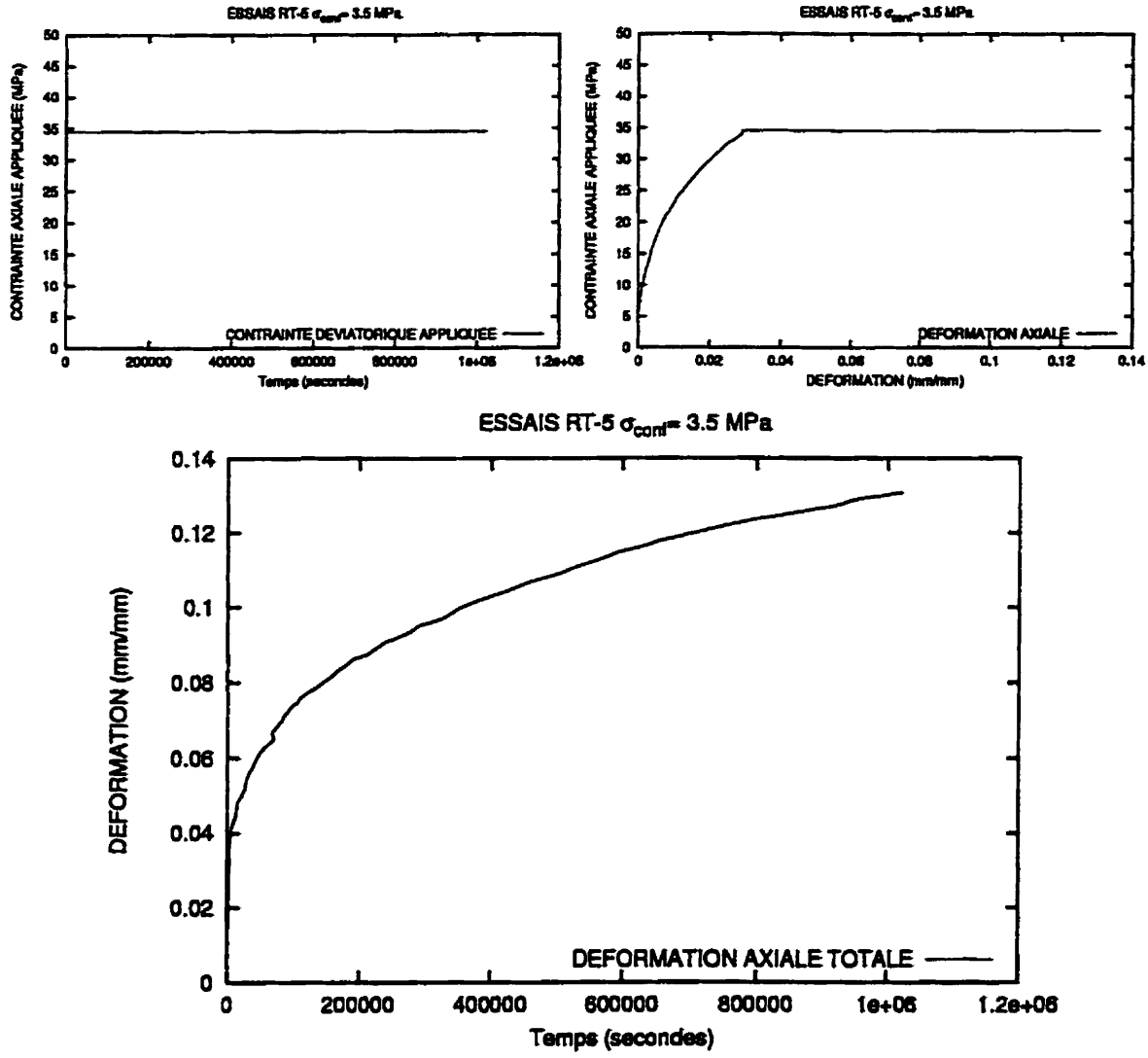


Figure I.6: Essai de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 (Essai RT-5)

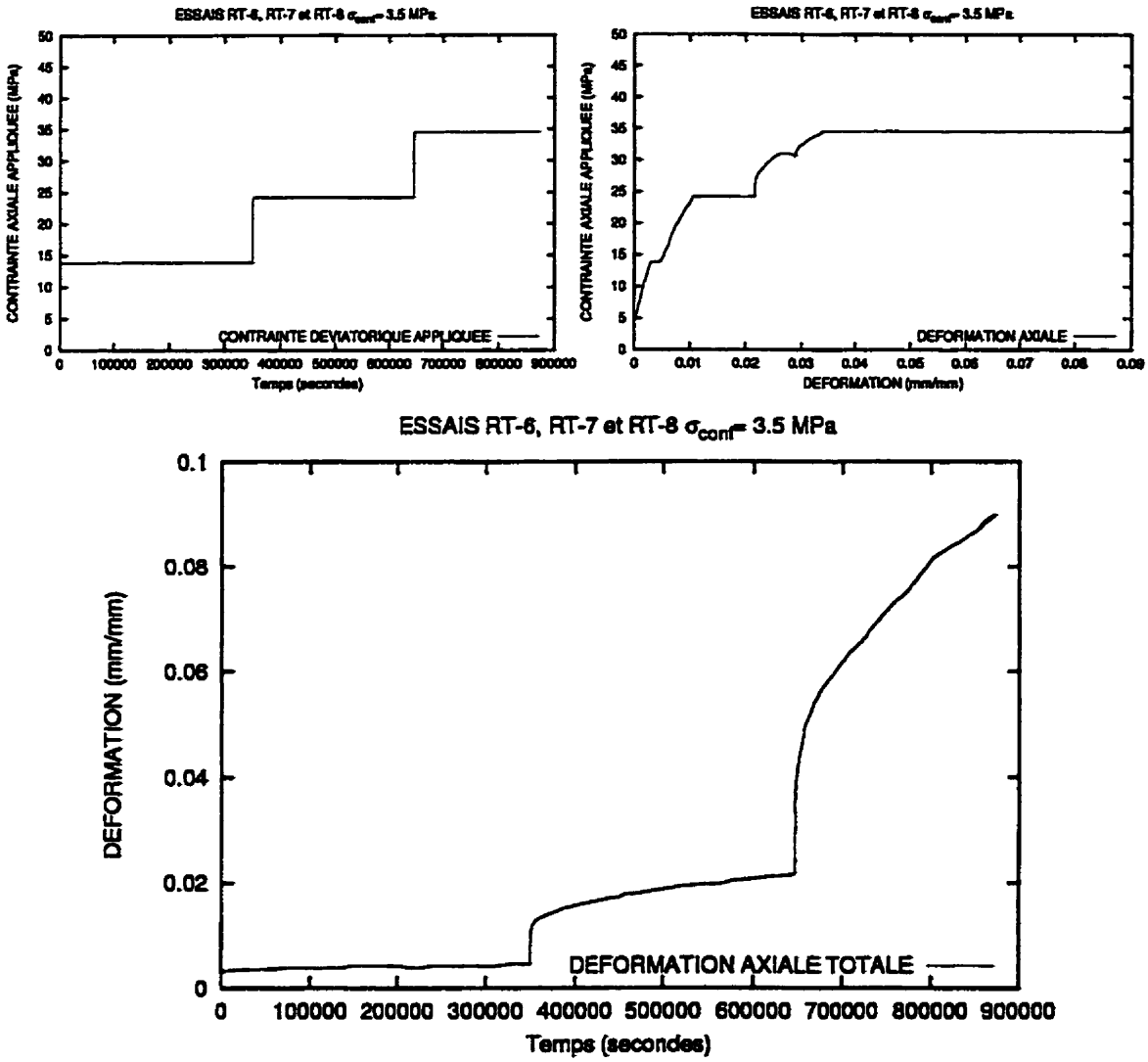


Figure I.7: Essais de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 RT-6, RT-7, RT-8.

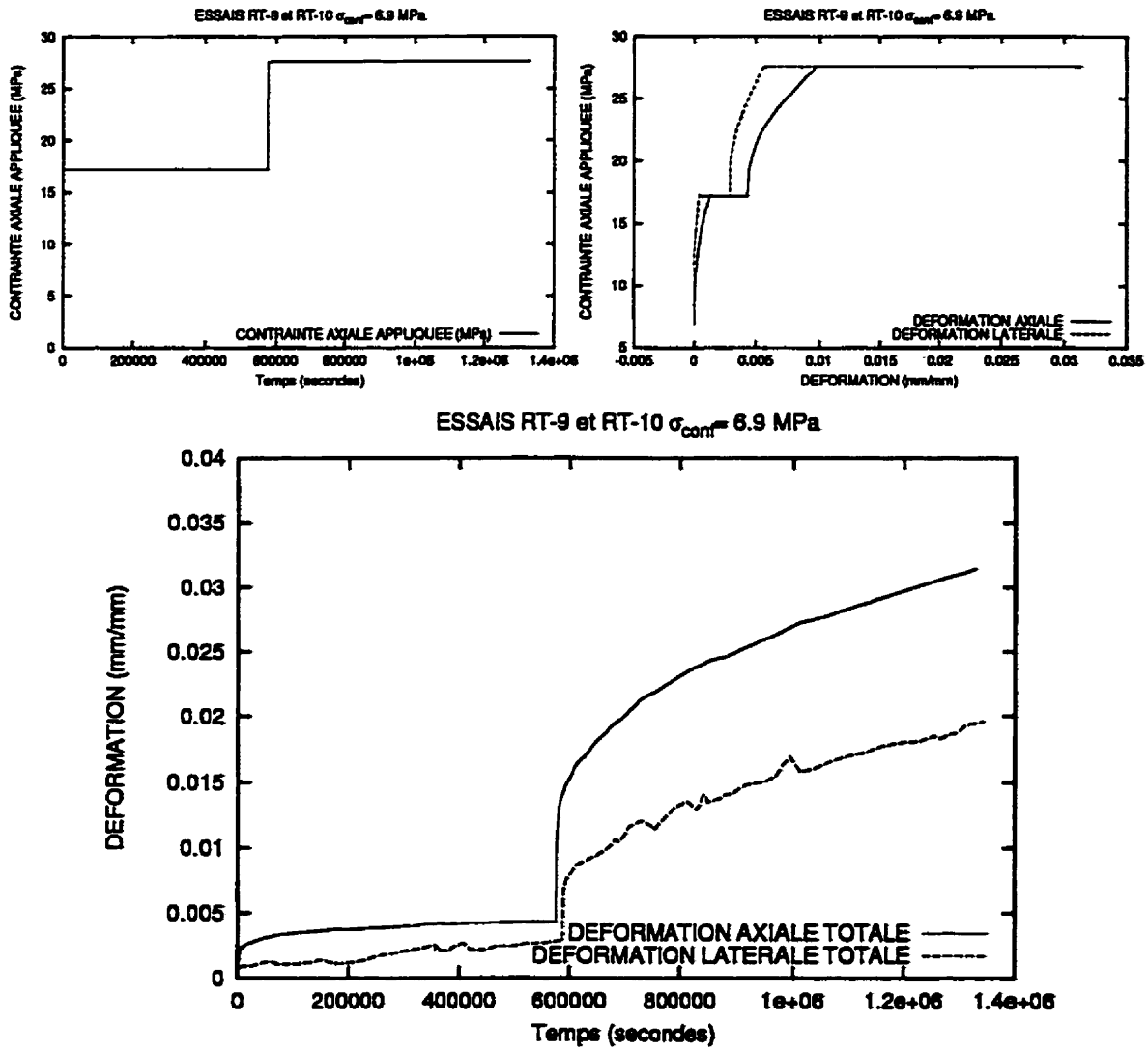
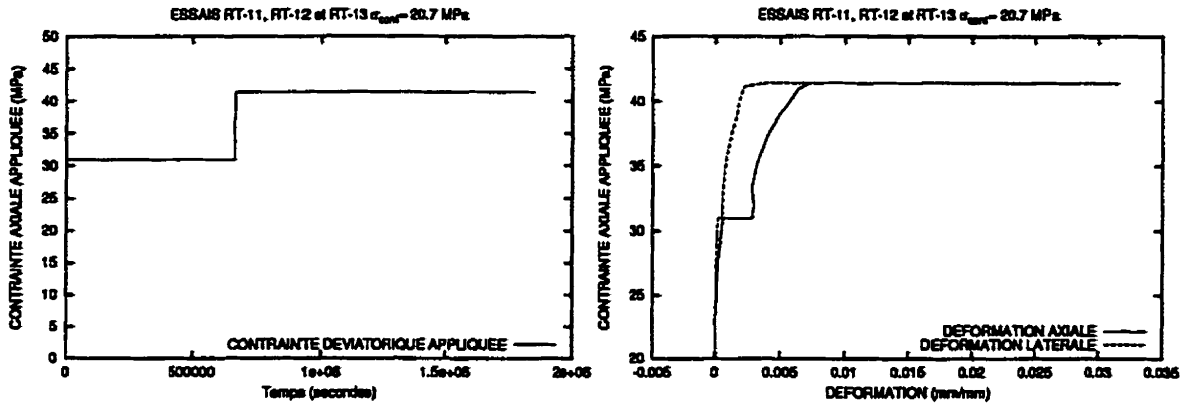


Figure I.8: Essais de laboratoire de Hansen et Mellegard 1980 RT-9 et RT-10.



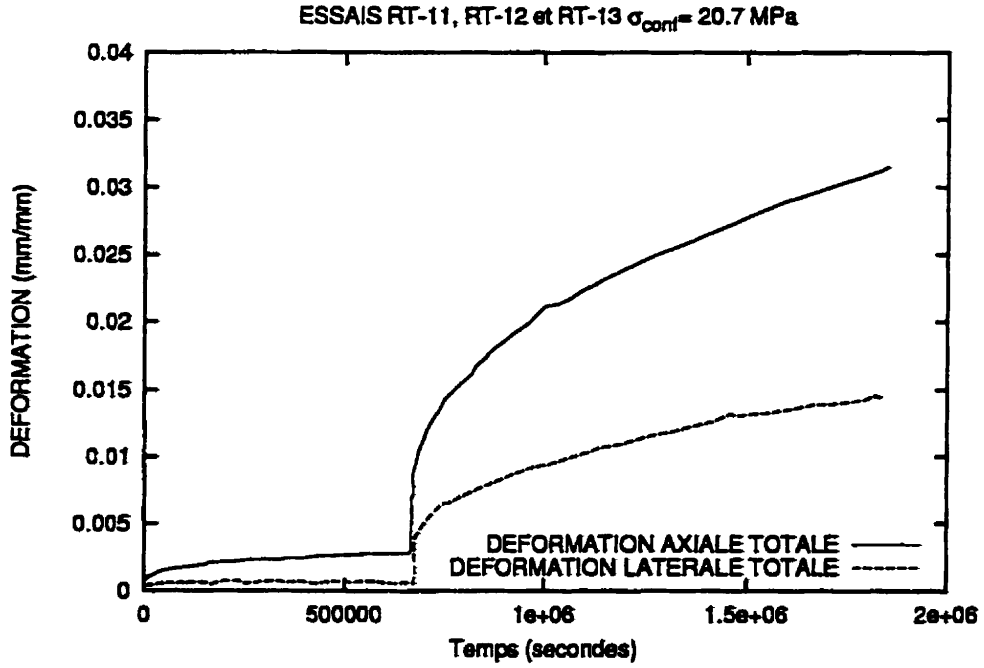


Figure I.9: Essais de laboratoire Hansen et Mellegard 1980 RT-11, RT-12 et RT-13.

Tableau I.6: Description des essais de fluage à une température entre 70^oC et 120^oC (source Mellegard et al. 1983).

Échantillons	Essais	Paliers	σ_{conf} MPa	σ_{axiale} MPa	S MPa	Temp. degC	$\dot{\sigma}$ MPa/s	Durée heures
AI/79/C7-1D - 100mm	70-1	1/1	13.8	24.1	10.3	70		430
AI/79/A3-2D - 100mm	70-2	1/1	3.4	13.7	10.3	70		153
AI/79/A3-2B - 100mm	70-3	1/1	0.7	11.0	10.3	70		472
AI/79/C9-1E - 100mm	70-5	1/1	20.7	31.0	10.3	70		472
AI/79/C7-1B - 100mm	70-7	1/1	6.9	17.2	10.3	70		2233
AI/79/A9-2C - 100mm	100-1	1/1	20.7	31.0	10.3	100		454
AI/79/A3-1C - 100mm	100-3	1/1	3.4	13.7	10.3	100		422
AI/79/B7-1B - 100mm	100-4	1/1	13.8	24.1	10.3	100		1361
AI/79/A8-1A - 100mm	100-5	1/1	13.8	34.5	20.7	100		166
AI/79/A8-1B - 100mm	100-7	1/1	13.8	27.6	13.8	100		384
AI/79/C9-1D - 100mm	100-8	1/1	13.8	25.9	12.1	100		248
AI/79/A9-2C - 100mm	200-1	1/1	3.4	14.7	10.3	100		21
AI/79/A3-2E - 100mm	200-2	1/1	3.4	8.8	5.4	100		1373
AI/79/C3-1E - 100mm	200-3	1/1	20.7	26.1	5.4	100		1373

Tableau I.7: Description des essais de fluage à des températures plus élevées que $120°C$ (source Mellegard et al. 1983).

Échantillons	Essais	Paliers	σ_{conf} MPa	σ_{axiale} MPa	S MPa	Temp. degC	$\dot{\sigma}$ MPa/s	Durée heures
AI/79/A9-2C - 100mm	200-1	1/1	3.4	14.7	10.3	100		21
AI/79/A3-2E - 100mm	200-2	1/1	3.4	8.8	5.4	100		1373
AI/79/C3-1E - 100mm	200-3	1/1	20.7	26.1	5.4	100		1373

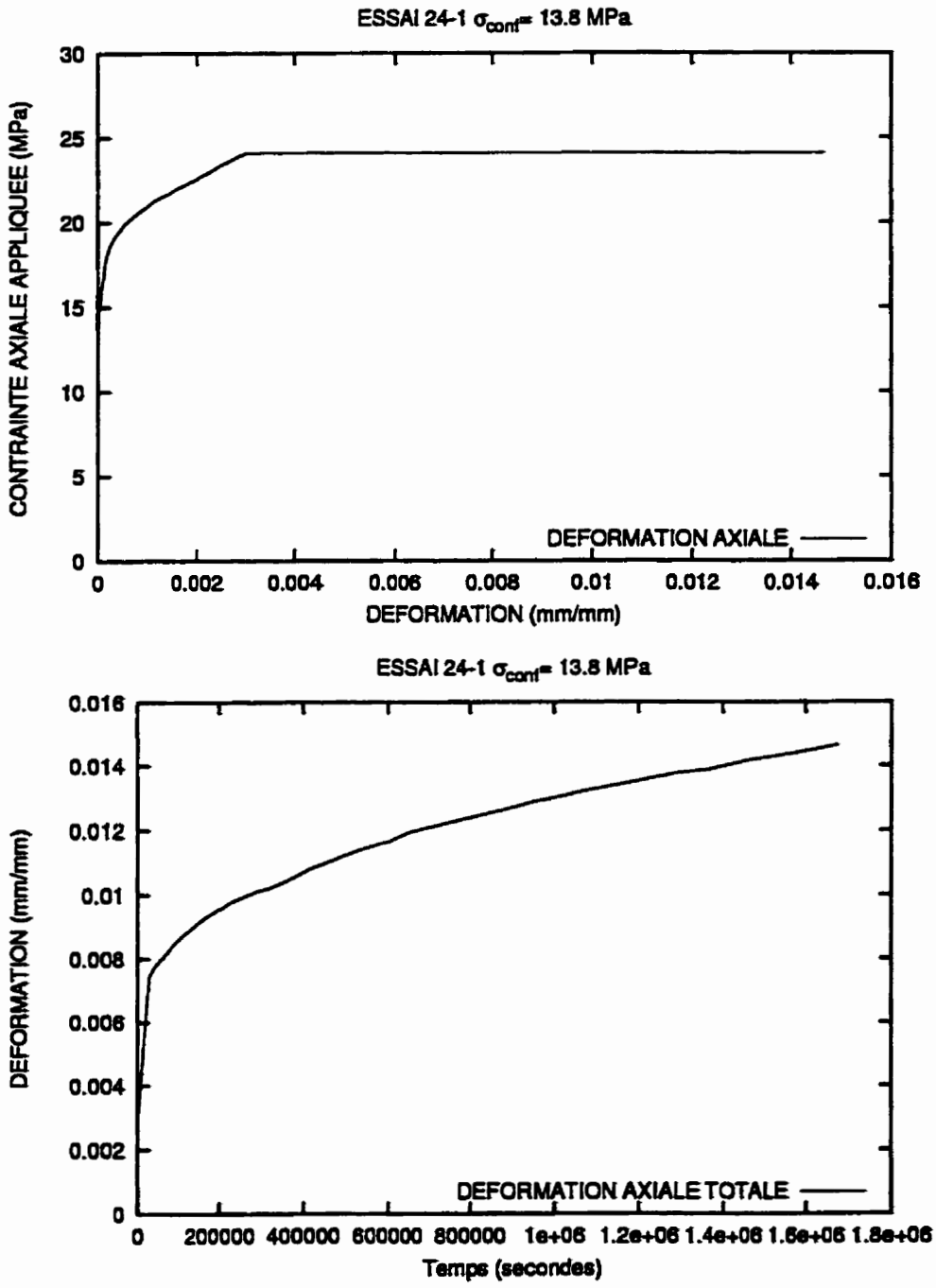


Figure I.10: Essais de laboratoire 24-1 de Mellegard et al. 1983.

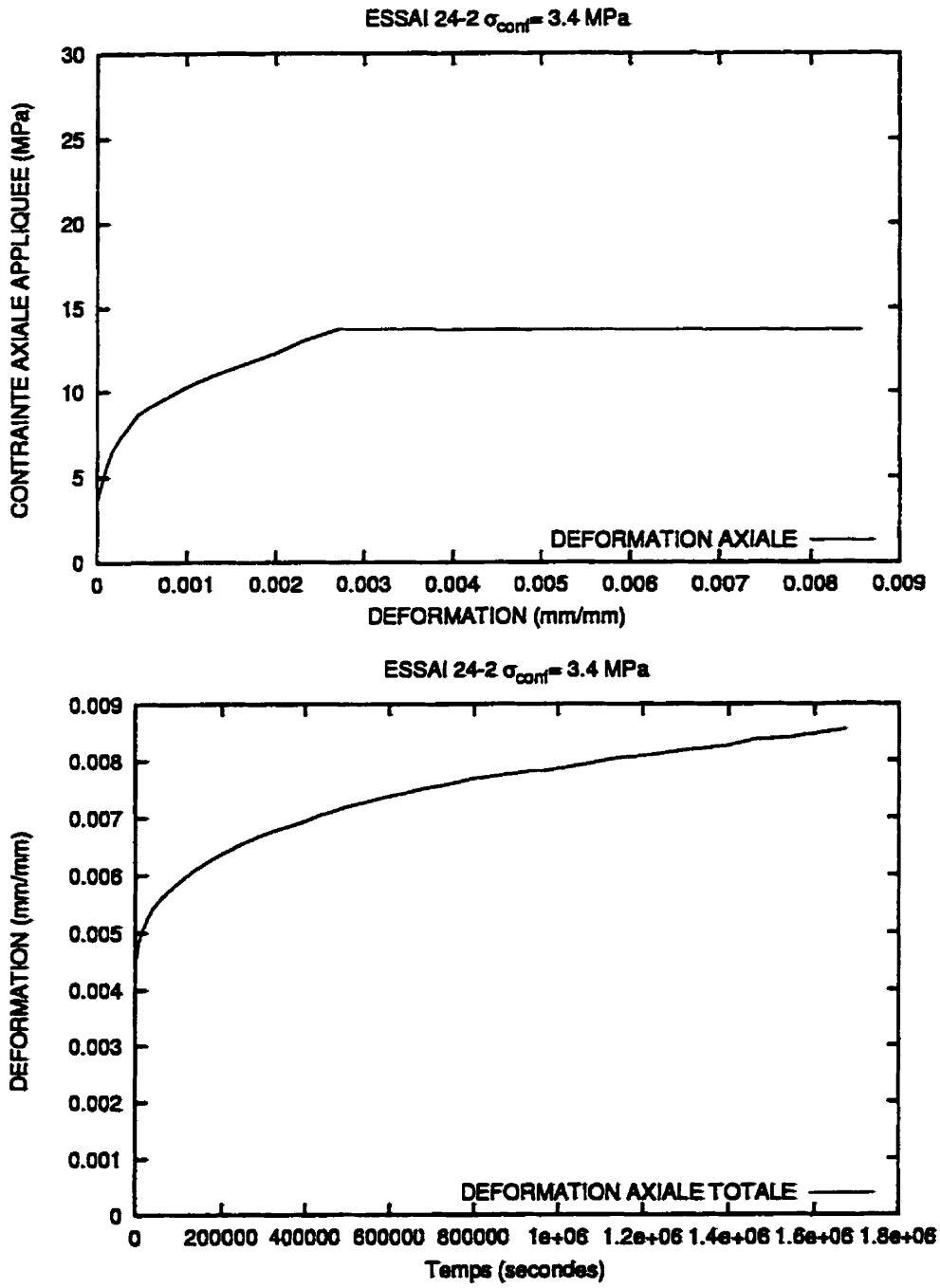


Figure I.11: Essais de laboratoire 24-2 de Mellegard et al. 1983.

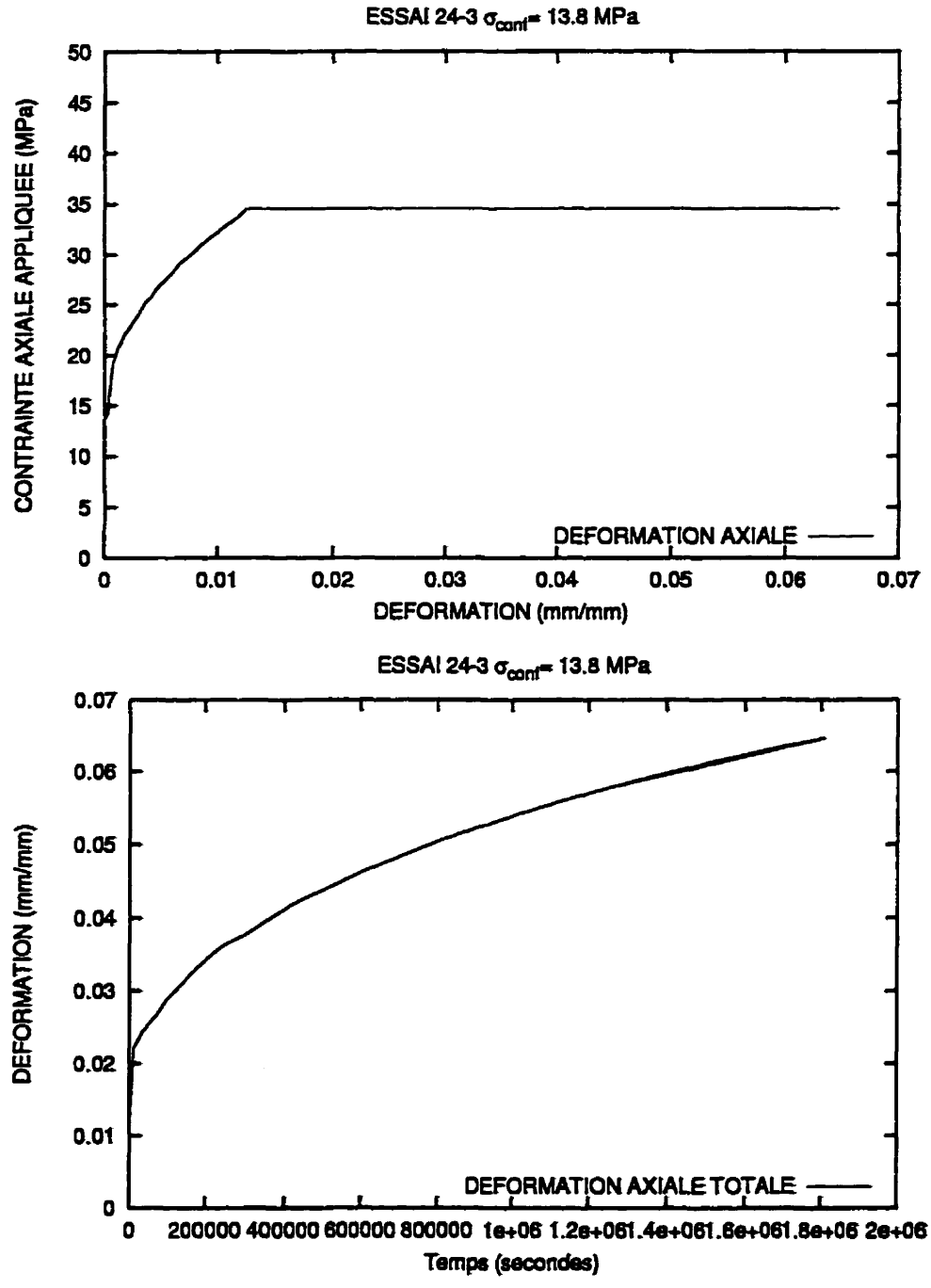


Figure I.12: Essais de laboratoire 24-3 de Mellegard et al. 1983.

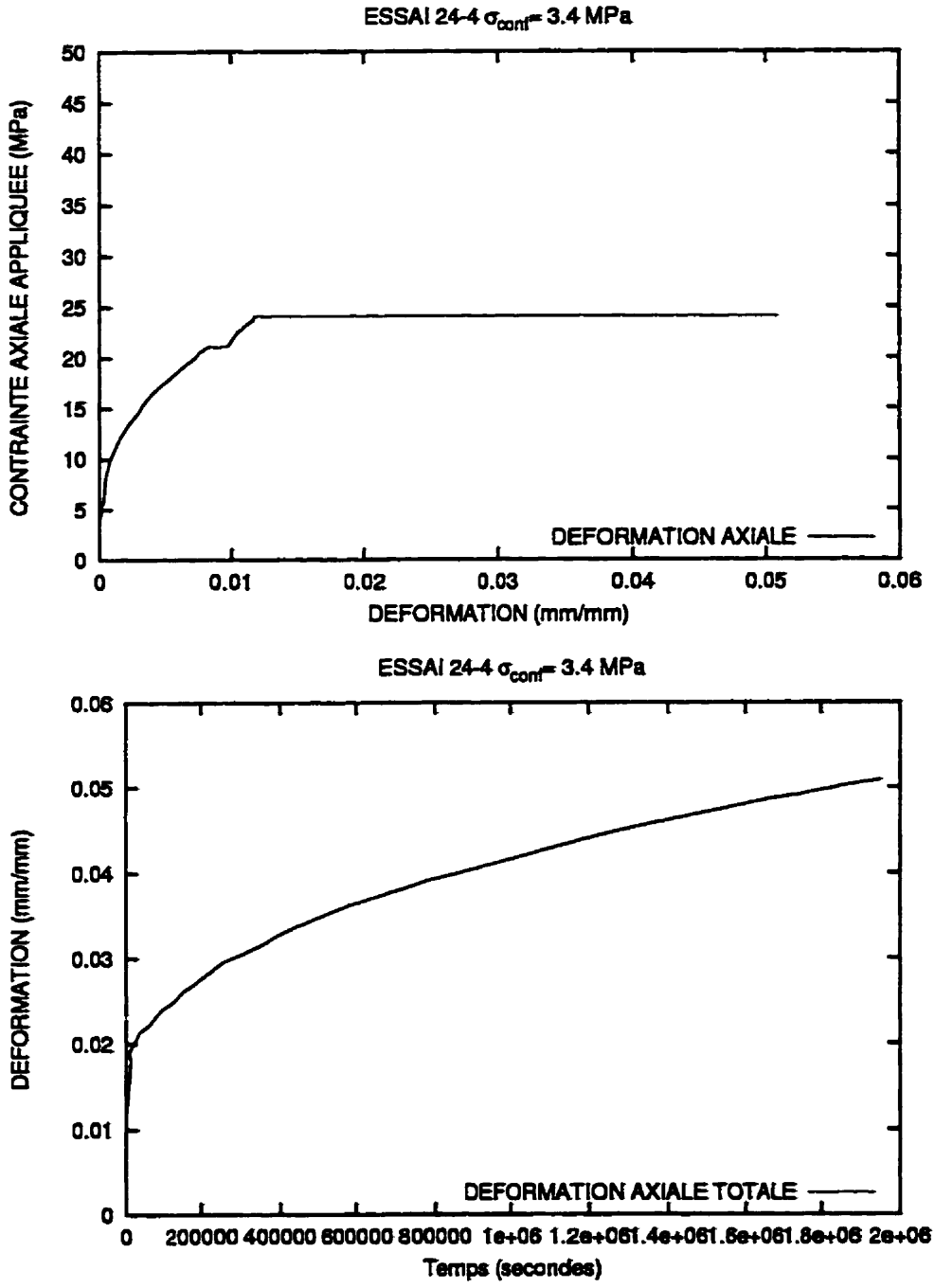


Figure I.13: Essais de laboratoire 24-4 de Mellegard et al. 1983.

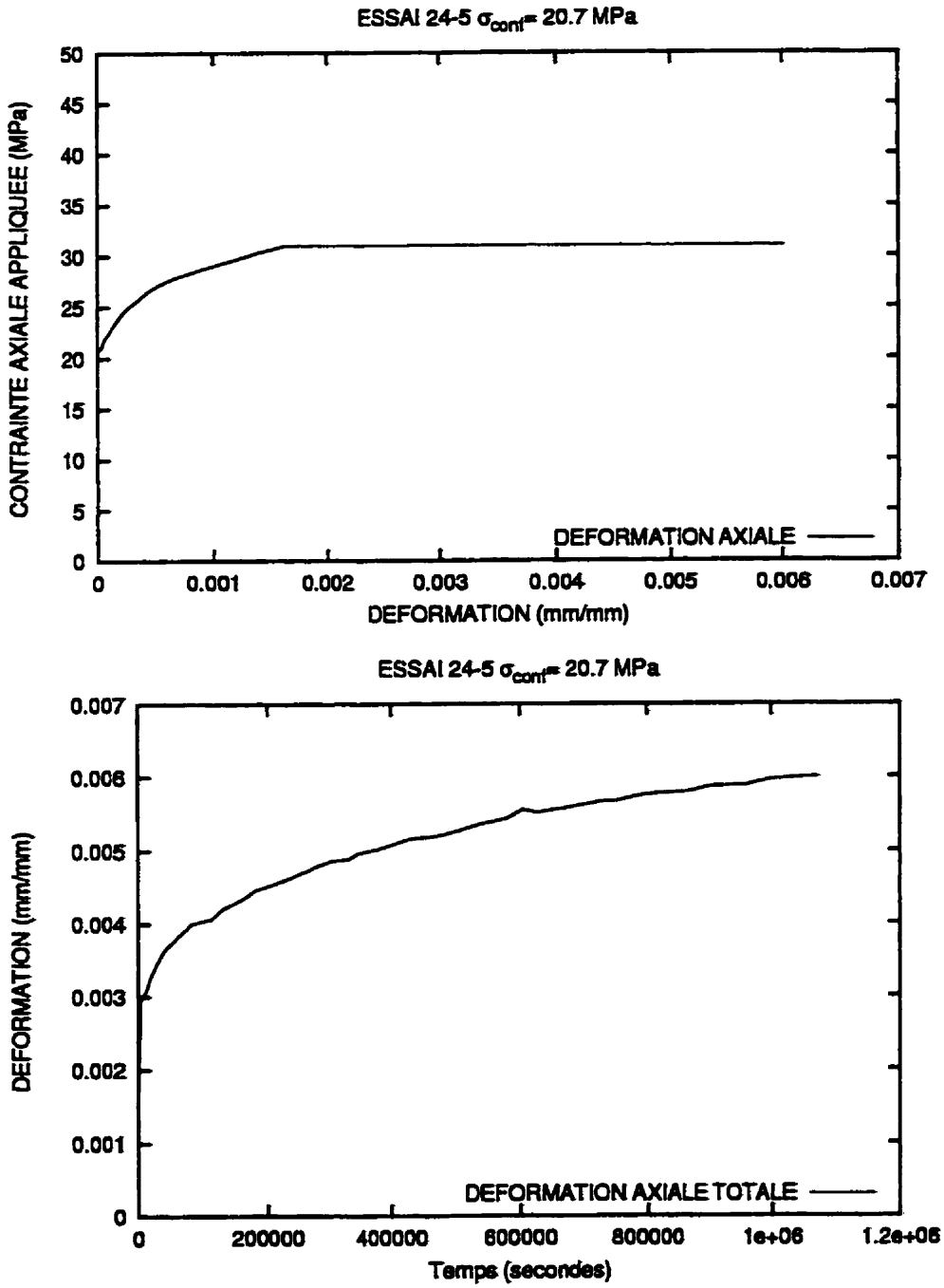


Figure I.14: Essais de laboratoire 24-5 de Mellegard et al. 1983.

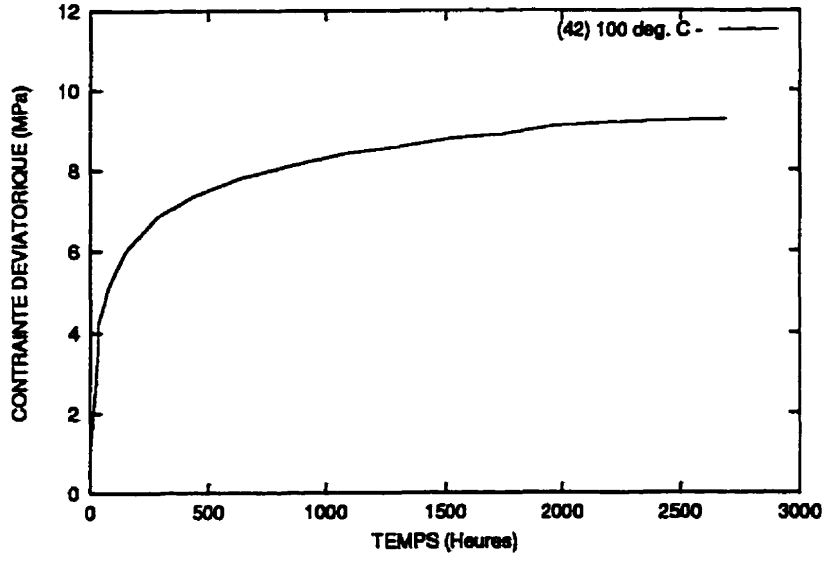


Figure I.15: Essais CSR sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 90). La contrainte de confinement est de 15.0 MPa et le taux de déformation contrôlé fut fixé à 10-8 s-1 .

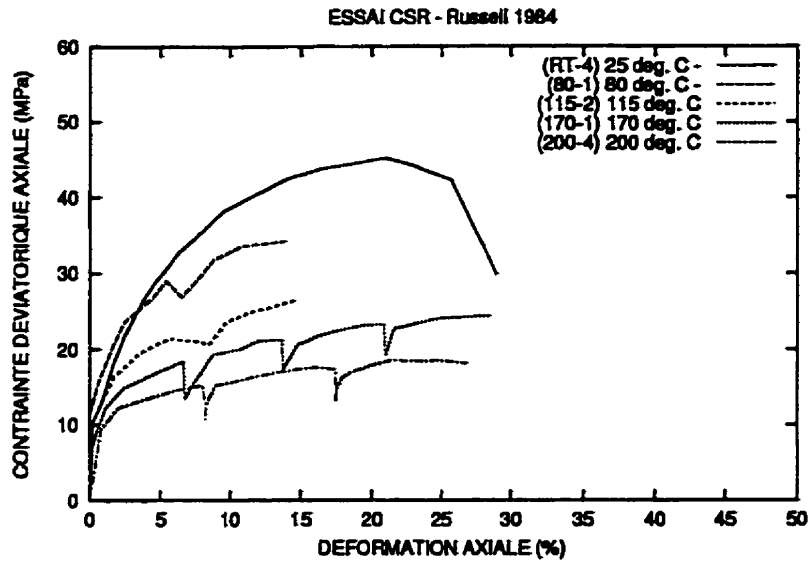


Figure I.16: Essais CRS sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 1984). La température varie de 24 à 200°C. Le taux d'application de la contrainte est $\Delta\dot{\sigma} = 0.02\ MPa/seconde$. La contrainte de confinement est 3.45 MPa.

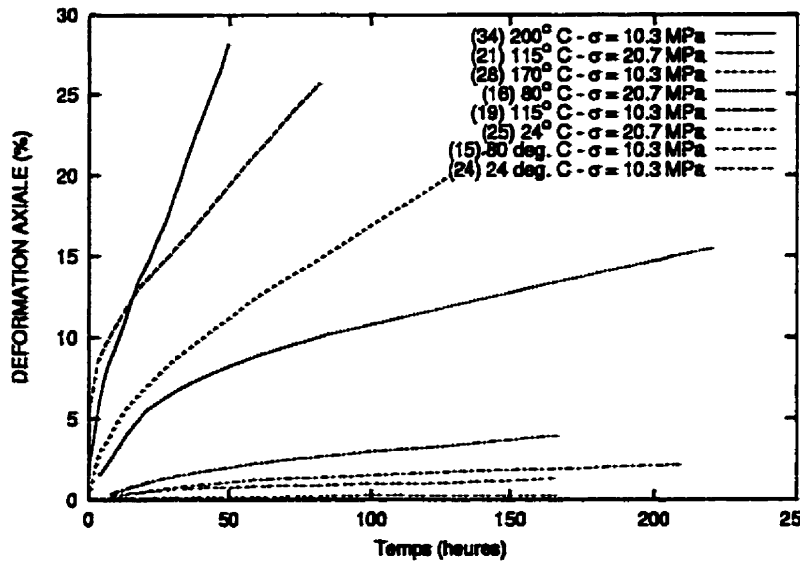


Figure I.17: Essais de fluage sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 1984). La température varie de 24 à 200°C. Le taux d'application de la contrainte est $\Delta\dot{\sigma} = 0.02\ MPa/seconde$. La contrainte de confinement est 3.5 MPa.

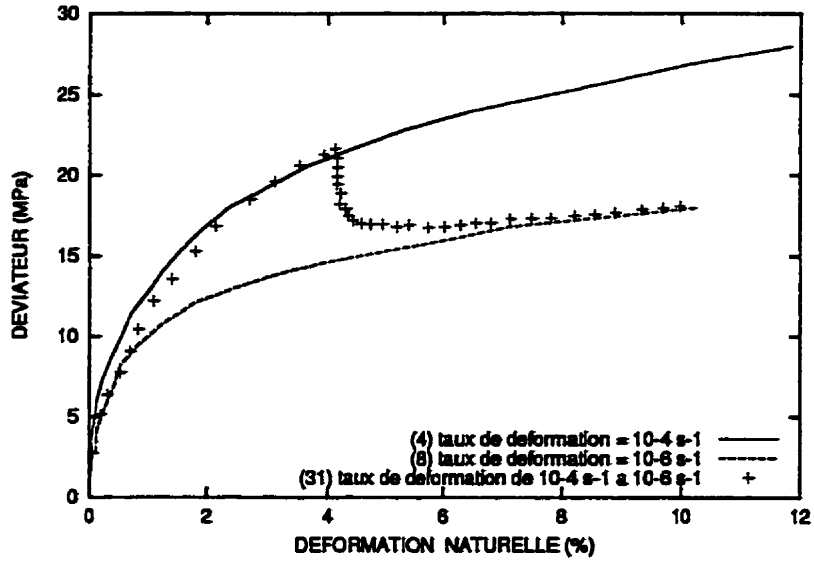


Figure I.18: Essais CSR sur le sel d'Avery Island (référence Russell et al. 1990) à taux de déformation variables $\dot{\epsilon} = 10^{-4}, 10^{-6}$. La température est de $100°C$. La contrainte de confinement est 3.4 MPa.

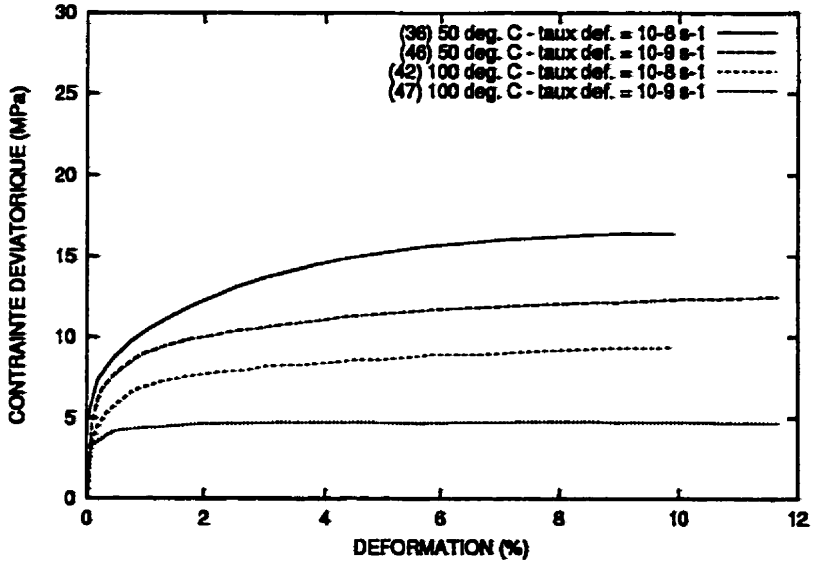


Figure I.19: Essais CSR sur le sel d'Avery Island (référence Horseman et al. 92). La température varie de 50 à $100°C$. Le taux de déformation varient au cours de l'essai de $10^{-8}\ s^{-1}$ à $10^{-9}\ s^{-1}$.