

**Titre:** Étude des échanges thermiques dans la fabrication des composites  
par les procédés d'injection sur renfort

**Auteur:** Elaine Bohr

**Date:** 2000

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Bohr, E. (2000). Étude des échanges thermiques dans la fabrication des  
composites par les procédés d'injection sur renfort [Mémoire de maîtrise, École  
Citation: Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8822/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8822/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** François Trochu  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DES ÉCHANGES THERMIQUES DANS LA FABRICATION  
DES COMPOSITES PAR LES PROCÉDÉS D'INJECTION SUR  
RENFORT

ELAINE BOHR  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
JANVIER 2000



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-53559-2

Canada

UNIVERSITE DE MONTREAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTREAL

Ce mémoire intitulé :

ETUDE DES ECHANGES THERMIQUES DANS LA FABRICATION  
DES COMPOSITES PAR LES PROCEDES D'INJECTION SUR  
RENFORT

présenté par : BOHR Elaine

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. NGUYEN T. Hung, Ph.D., président

M. TROCHU François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre



## REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche M. François Trochu sans qui je n'aurais jamais entrepris une maîtrise en recherche. J'aimerais également remercier Jean-François Remacle pour ses conseils judicieux et son aide précieuse tout au long de la réalisation de ce projet et pour m'avoir appris le langage de programmation C++. J'aimerais aussi remercier les membres du jury pour avoir accepté de lire ce mémoire.

Une partie de ce travail ayant été réalisé au laboratoire de Thermocinétique de l'ISITEM (Nantes, France) lors d'un stage de quatre mois, je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de stage, M. Didier Delaunay ainsi que Damien Lecointe et Christophe Le Bozec pour m'avoir rendu possible l'exécution d'une injection RTM non isotherme. J'aimerais aussi saluer tout particulièrement Séverine Gourden et Clotilde Chagny pour leur accueil chaleureux.

Je remercie le Conseil de recherche en sciences naturelles et génie du Canada (CRSNG) et mon directeur de recherche M. François Trochu pour leur support financier durant ma maîtrise, ainsi que la Commission permanente franco-québécoise pour m'avoir aidée financièrement durant mon stage.

De plus, j'aimerais remercier tout particulièrement mon conjoint Christophe Dupré pour son aide inestimable durant toute la durée de ma maîtrise et surtout de son support moral et technique durant les derniers mois. Finalement, j'aimerais dédicacer ce mémoire à « la petite crevette dans le ventre de Stéphanie ».

## RÉSUMÉ

Le moulage par transfert de résine est un procédé industriel pour la fabrication des matériaux composites. Une résine thermodurcissable est injectée à basse pression dans une cavité où une préforme fibreuse a été insérée. Une fois la cavité remplie et la préforme fibreuse imprégnée, la pièce est cuite, c'est-à-dire que la réaction chimique de polymérisation de résine se produit. Dans ce procédé, les températures du moule, de la résine et des fibres sont généralement tenues à différentes valeurs pour obtenir un meilleur fini de la pièce fabriquée et pour réduire le temps de fabrication.

Pour modéliser le procédé RTM, le modèle mathématique est séparé en trois étapes : le remplissage de la cavité, le calcul du champ de température et la réaction chimique. L'écoulement de la résine dans un milieu poreux est décrit par l'équation de Darcy. Dans la région imprégnée par la résine, l'équation d'équilibre énergétique est utilisée pour déterminer le champ de température à chaque instant. Cette équation est développée à partir des équations de conservation de l'énergie pour la résine et les fibres en utilisant la méthode des moyennes volumiques et l'hypothèse de l'équilibre thermique local. Dans la partie sèche et dans le moule, la température est déterminée par l'équation de diffusion pure. La dernière étape du procédé RTM est la cuisson de la pièce qui se traduit par le durcissement de la pièce fabriquée. Ce durcissement est dû à la réaction chimique de polymérisation de la résine. La plupart du temps cette étape arrive bien après

la fin du remplissage de la cavité. Le degré de polymérisation est alors déterminé par la résolution d'équations différentielles ordinaires non-linéaires, où le taux de polymérisation est fonction du degré de polymérisation et de la température locale. Dans certains cas, la polymérisation commence avant la fin du remplissage. Dans ces cas, comme les espèces chimiques sont transportées par l'écoulement, un terme de convection du degré de polymérisation doit être ajouté à l'équation de la réaction chimique.

Pour réaliser une simulation complète d'une injection, le calcul est divisé en trois parties. À chaque pas de temps, d'abord l'équation de Darcy est évaluée par une méthode d'éléments finis, puis le problème thermique est résolu et finalement les équations chimiques sont calculées. Durant la résolution du remplissage le pas de temps est déterminé. La détermination du champ de température est effectuée en deux étapes. Le bilan thermique du système complet se traduit par deux équations, une équation de diffusion et une équation de convection. L'équation de diffusion est résolue par la méthode de Galerkin standard, puis la température est transportée avec l'écoulement de la résine par la méthode de Lesaint-Raviart. La même méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre l'équation de Darcy et l'équation discrète de diffusion thermique, car les formulations variationnelles des deux problèmes possèdent la même forme mathématique. La méthode de résolution des problèmes de convection, Lesaint-Raviart, est aussi utilisée pour le transport des espèces chimiques lors de la polymérisation. Cette méthode approxime la solution qui est discontinue au front de matière par des éléments finis discontinus entre les éléments du maillage. Cette propriété rend la méthode stable

car la dispersion artificielle est minimisée. La résolution est effectuée élément par élément, tandis que dans les autres méthodes d'éléments finis conventionnels un système global est résolu. La réaction chimique est résolue par la méthode de Runge-Kutta, qui est bien adaptée pour approximer des équations différentielles non-linéaires.

Le logiciel est validé à partir de solutions analytiques de diffusion thermique en deux et trois dimensions. Ensuite les différents cas d'injection non isotherme sont discutées. Pour simuler la polymérisation de la résine, la méthode de Runge-Kutta est expliquée et validée en utilisant des exemples simples d'équations différentielles ordinaires. Une simulation de la cuisson est comparée aux résultats trouvés dans la littérature scientifique, puis une injection non-isotherme avec début de polymérisation est simulée. Pour finir, les résultats d'une simulation du procédé RTM sont comparés aux données expérimentales.

## ABSTRACT

The Resin Transfer Molding (RTM) is a manufacturing process for composite materials, in which a thermosetting resin is injected at low pressure inside a mold cavity where a dry preform was previously fitted. When the mold is completely filled, the part is cured. The temperatures of the mold, resin and fibers are generally kept at different values to shorten the overall process time and to obtain a better surface finish of the fabricated part.

A complete mathematical model of the RTM process includes three aspects: the filling of the cavity, the calculation of the temperature field and the curing process. The resin flow through the porous medium (fibrous preform) is predicted by Darcy's equation. The energy equation is used to determine the temperature field in the saturated region. It is based on the assumption of local thermal equilibrium and is derived from a set of volume-average balance energy equations for the resin and the fibers. In the dry region and for the mold, the thermal phenomena are modeled by the pure conduction equation. The last step in the RTM process is the curing of the injected part. Usually, this step occurs well after the filling of the preform. The degree of polymerization of the resin is determined by solving an ordinary non-linear differential equation, in which the rate of cure is a function of the degree of cure and the local temperature. In some cases, curing starts during injection of the resin into the preform, thus the chemical species are

transported along with the flow. So to calculate the degree of cure, a convection term needs to be added to the non-linear ordinary differential equation.

At each time step, firstly the Darcy's equation is evaluated by the finite element method, then the thermal analysis module is evaluated and at last, the curing equations are calculated. The filling process determines the size of the time step. The energy balance equation involving temperature is evaluated in two stages. First the diffusion of heat is evaluated using the standard Galerkin method, then the temperature is transported using Lesaint-Raviart method. The same finite element procedure is used to calculate the solution of Darcy's equation and the thermal balance discrete equation. In both cases, the different integrals to evaluate are of the same form. Then the Lesaint-Raviart method is used to simulate the transport of chemical species during the curing. This method is based on a discontinuous finite element approximation on the mesh, which generates a stable method without having to introduce artificial damping. The calculation is performed element by element instead of with the global rigidity matrix used in conventional finite element methods. The chemical reaction described by the non-linear differential equation is resolved using Runge-Kutta methods.

The software is validated using analytical two and three dimensional problems involving the diffusion of temperature. Different kinds of non-isothermal injection simulations are discussed. For the curing problems, first the Runge-Kutta method is explained and validated using simple ordinary differential equations, then a curing reaction simulation is compared to known literature results and a complete non-

isothermal injection with chemical reaction is studied. Finally, a RTM simulation is also compared to experimental data.



## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	iv
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT .....	ix
TABLE DES MATIÈRES .....	xii
LISTE DES TABLEAUX.....	xviii
LISTE DES FIGURES .....	xix
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	xxvi
LISTE DES ANNEXES .....	xxxvi
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.....	4
1.1 Moulage par transfert de résine.....	4
1.2 Simulation de l'injection.....	6
1.3 Conservation d'énergie dans les milieux poreux.....	10
CHAPITRE 2 : MODÈLE THERMIQUE .....	17

2.1 Modélisation des transferts thermiques .....	17
2.2 Milieu poreux .....	20
2.3 Méthode des moyennes volumiques .....	23
2.4 Hypothèses en RTM.....	25
2.5 Equations gouvernant les phénomènes en RTM .....	26
2.6 Equilibre thermique local .....	32
2.7 Cinétique de polymérisation.....	36
 CHAPITRE 3 : IMPORTANCE DES PHÉNOMÈNES THERMIQUES .....	 39
3.1 Adimensionnalisation.....	39
3.2 Dispersion hydrodynamique .....	42
3.2.1 Définition .....	42
3.2.2 Historique de la dispersion hydrodynamique.....	45
3.2.3 Dispersion adimensionnelle .....	49
3.3 Importance des phénomènes thermiques.....	51
3.3.1 Un cas typique en RTM.....	51
3.3.2 Comparaison entre un exemple de l'industrie aérospatiale et un exemple de l'industrie automobile .....	53
3.4 Phénomènes thermiques en RTM: tableau recapitulatif .....	57
 CHAPITRE 4 : IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME THERMIQUE	61
4.1 Introduction .....	61
4.2 Modes de transfert de chaleur .....	62

4.3	Résolution du problème couplé.....	65
4.4	Discrétisation du problème thermique stationnaire.....	68
4.4.1	Méthode de Galerkin standard .....	68
4.4.2	Problème thermique stationnaire.....	69
4.4.3	Validation analytique du problème thermique stationnaire .....	72
4.5	Discrétisation temporelle du problème thermique .....	75
4.5.1	Diffusion dans une poutre avec température initiale imposée .....	77
4.6	Solution du problème convectif .....	80
4.6.1	Méthode de Lesaint-Raviart .....	80
4.6.2	Discrétisation temporelle de la méthode de Lesaint-Raviart.....	83
4.6.3	Validation de Lesaint-Raviart .....	84
 CHAPITRE 5 : VALIDATION ANALYTIQUE ET DIVERS EXEMPLES		
	D'INJECTION.....	88
5.1	Problème de convection-diffusion .....	89
5.2	Géométrie des cavités d'injection en deux et trois dimensions .....	92
5.3	Convection pure en deux dimensions .....	94
5.4	Diffusion pure en deux dimensions.....	96
5.5	Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin .....	98
5.6	Convection pure en trois dimensions .....	101
5.7	Diffusion pure en trois dimensions .....	105
5.8	Dépendence de la viscosité envers la température .....	107

5.9 Influence du maillage sur une simulation en 3D.....	111
5.10 Injection dans une cavité à obstacle .....	112
5.11 Injection dans une cavité à nervure .....	118
5.12 Injection avec influence du moule .....	122
 CHAPITRE 6 : IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE DE LA CINÉTIQUE CHIMIQUE .....	 124
6.1 Lesaint-Raviart lors de la polymérisation .....	124
6.1.1 Exemple de convection chimique.....	125
6.2 Runge-Kutta .....	128
6.2.1 Différentes méthodes de Runge-Kutta .....	128
6.2.2 Comparaison entre deux méthodes de Runge-Kutta .....	131
6.3 Runge-Kutta adaptée à la polymérisation .....	133
6.3.1 Comparaison entre les deux méthodes de Runge-Kutta pour la polymérisation .....	137
6.4 Convergence de la simulation de polymérisation .....	140
6.5 Résolution itérative de problèmes non-linéaires .....	143
6.4 Exemple de simulation complète .....	148
 CHAPITRE 7 : VALIDATION EXPÉRIMENTALE .....	 151
7.1 Dispositif expérimental .....	151
7.2 Données expérimentales.....	153
7.2.1 Les fibres de verre .....	153
7.2.2 La résine .....	155

7.2.3 Le moule .....	155
7.3 Résultats expérimentaux .....	155
7.3.1 Condition d'injection .....	155
7.3.2 Déroulement de l'expérience .....	156
7.3.3 Équation de conservation d'énergie.....	158
7.3.4 Distribution de température.....	160
7.4 Simulation numérique .....	165
7.4.1 Cavité simple.....	165
7.4.2 Cavité avec moule .....	166
7.4.3 �tude tridimensionnelle.....	171
7.5 Comparaison entre l'injection expérimentale et les simulations numériques bidimensionnelle et tridimensionnelle .....	175
7.6 Influence du type de matériau utilisé pour les fibres .....	178
7.6.1 Simulation bidimensionnelle avec des fibres de carbone.....	178
7.6.2 Importance de la dispersion hydrodynamique.....	183
CONCLUSION .....	184
8.1 Récapitulation.....	184
8.2 Discussion des validations analytiques et expérimentale.....	189
8.3 Améliorations suggérées .....	192
RÉFÉRENCES .....	194
ANNEXES .....	201

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3-1: Paramètres thermiques de la résine et des fibres (valeurs typiques [18]).	49
Tableau 3-2 : Paramètres rhéologiques (valeurs typiques [18]) .....	49
Tableau 3-3 : Paramètres thermiques de la résine et des fibres de carbone et de verre.	51
Tableau 3-4 : Paramètres rhéologiques.....	52
Tableau 3-5 : Nombres adimensionnels pour les deux cas étudiés.....	52
Tableau 3-6 : L'importance de la dispersion hydrodynamique .....	54
Tableau 3-7 : Tableau récapitulatif des phénomènes thermiques en RTM .....	57
Tableau 3-8 : Tableau récapitulatif des paramètres importants en RTM.....	58
Tableau 6-1 : Les paramètres de Cash-Karp pour la méthode adaptative de Runge-Kutta au 5-ième ordre .....	130
Tableau 7-1: Paramètres thermiques de la résine RTM6.....	155
Tableau 7-2 : Nombres adimensionnels pour l'injection de la résine RTM6 sur le mat U-812 .....	159
Tableau 7-3 : Nombres adimensionnels (résine RTM6 et fibres de carbone) .....	183

## LISTE DES FIGURES

Figure 1-1 : Le procédé RTM .....	5
Figure 2-1 : Volume élémentaire représentatif .....	22
Figure 3-1 : Géométrie typique du moule.....	38
Figure 3-2 : Vitesse locale microscopique.....	42
Figure 3-3 : Modèle géométrique de Kuwahara et al. [34].....	45
Figure 4-1 : Approximation de la condition limite de radiation pour $T_{\infty} = 20K$ et pour $T_{\infty} = 200K$ .....	65
Figure 4-2 : Schéma de la séquence de calcul .....	67
Figure 4-3 : Schéma du problème étudié .....	73
Figure 4-4 : Distribution de température .....	73
Figure 4-5 : Températures analytiques et numériques pour plusieurs positions de $x$ ....	74
Figure 4-6 : Températures analytiques et numériques pour plusieurs positions de $y$ ....	75
Figure 4-7 : Schéma de la poutre avec les conditions limites.....	78
Figure 4-8 : Solution analytique à plusieurs positions de $x$ .....	78
Figure 4-9 : Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique .....	79
Figure 4-10 : Recherche du chemin de résolution .....	82
Figure 4-11 : La distribution de température après 6 et 10 pas de temps respectivement .....	85

Figure 4-12 : Maillage et distribution de température après 2, 3 et 10 pas de temps respectivement .....	86
Figure 4-13 : Maillage et distribution de température à la fin du remplissage .....	87
Figure 5-1 : Maillage non structuré utilisé avec l'emplacement des senseurs .....	92
Figure 5-2 : Géométrie des problèmes de convection-diffusion.....	93
Figure 5-3 : Champs de températures pour le problème de convection à 0.3 m de l'injection.....	95
Figure 5-4 : Champs de températures pour le problème où la diffusion est dominante	97
Figure 5-5 : Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin pour $x = 0.4$ m.....	98
Figure 5-6 : Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin pour $x = 1.0$ m.....	99
Figure 5-7 : Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin pour $x = 1.6$ m.....	100
Figure 5-8 : Courbes de température pour le plan $x = 0.05$ m (convection pure).....	102
Figure 5-9 : Courbes de température pour le plan $x = 0.1$ m (convection pure).....	103
Figure 5-10 : Courbes de température pour le plan $x = 0.15$ m (convection pure).....	103
Figure 5-11 : Champs de températures pour le problème de convection pure en 3D..	104
Figure 5-12 : Champs de températures pour le problème de diffusion ( $x = 0.05$ m) ..	106
Figure 5-13 : Champs de températures pour le problème de diffusion ( $x = 0.1$ m) ....	106
Figure 5-14 : Champs de températures pour le problème de diffusion ( $x = 0.15$ m) ..	107



Figure 5-15 : Distributions de température pour des simulations avec viscosité constante et viscosité fonction de température pour le plan $x = 0.05$ .....	108
Figure 5-16 : Distributions de température pour des simulations avec viscosité constante et viscosité fonction de température pour le plan $x = 0.15$ .....	109
Figure 5-17 : Le front de remplissage lors d'une injection avec viscosité variable .....	110
Figure 5-18 : Champs de températures à la fin de remplissage pour des injections à viscosité constante et variable .....	110
Figure 5-19 : Influence du maillage sur la distribution de température pour 3 senseurs .....	111
Figure 5-20 : Maillage pour l'exemple d'injection dans une cavité à obstacle .....	113
Figure 5-21 : Le front de résine à mi-injection et à 84 % de remplissage .....	114
Figure 5-22 : La distribution de température à mi-injection et à 84 % de remplissage .....	115
Figure 5-23 : La distribution de température à mi-injection (travaux d'Audet [5]) .....	116
Figure 5-24 : La distribution de température à 84 % de remplissage (travaux d'Audet [5]) .....	116
Figure 5-25 : La distribution de température avec un moule mince isolé pour 50 % et 84 % .....	117
Figure 5-26 : Maillage pour la simulation 2D et les 10 senseurs utilisés .....	119
Figure 5-27 : Maillage pour la simulation 3D .....	119
Figure 5-28 : Remplissage à mi-injection .....	120
Figure 5-29 : Distribution de température à 50 % .....	120

Figure 5-30 : Remplissage à 75 % .....	120
Figure 5-31 : Distribution de température à 75 % .....	120
Figure 5-32 : Distribution de température pour la simulation en 2D.....	121
Figure 5-33 : Distribution de température pour la simulation en 3D.....	122
Figure 5-34 : Maillage et distribution de température à la fin de l'injection .....	123
Figure 6-1 : Conditions d'injections.....	124
Figure 6-2 : Validation de la méthode Lesaint-Raviart pour la polymérisation .....	125
Figure 6-3 : Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 10 pas de temps.....	130
Figure 6-4 : Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 100 pas de temps.....	130
Figure 6-5 : Reajustement de la dérivé temporelle du degré de polymérisation .....	133
Figure 6-6 : Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 500 pas de temps.....	135
Figure 6-7 : Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 50 pas de temps.....	136
Figure 6-8 : Convergence vers la solution exacte pour la température.....	138
Figure 6-9 : Convergence vers la solution exacte pour le degré de polymérisation ....	139
Figure 6-10 : Comparaison des champs de température calculés par des méthodes directe et itérative.....	143
Figure 6-11 : Distributions de la résine polymérisée calculées par des méthodes directe et itérative .....	160

Figure 6-12 : Influence du nombre de pas de temps pour la méthode itérative.....	144
Figure 6-13 : Comparaison des méthodes pour le même nombre de pas de temps.....	144
Figure 6-14 : Conditions d'injections pour la simulation complète.....	145
Figure 6-15 : Température au terme de l'injection.....	146
Figure 6-16 : Degré de polymérisation au terme de l'injection.....	146
Figure 7-1 : Schéma du montage expérimental .....	152
Figure 7-2 : Schéma du moule RTM .....	153
Figure 7-3 : Conditions d'injection et positionnement du mat dans le moule RTM....	156
Figure 7-4 : Température de la résine à l'injection .....	158
Figure 7-5 : Flux de chaleur entre le moule et le mat durant l'injection.....	161
Figure 7-6 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur A .....	162
Figure 7-7 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur B.....	162
Figure 7-8 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur C.....	163
Figure 7-9 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur D .....	163
Figure 7-10 : Maillage pour la simulation isotherme de l'injection.....	166
Figure 7-11 : Maillage de la cavité et du moule pour la simulation bidimensionnelle	167
Figure 7-12 : Distribution de température lors de la simulation bidimensionnelle du préchauffage.....	168
Figure 7-13 : Distribution de température pour le capteur A lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection .....	169
Figure 7-14 : Distribution de température pour le capteur B lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection .....	169

Figure 7-15 : Distribution de température pour le capteur C lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection .....	170
Figure 7-16 : Distribution de température pour le capteur D lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection .....	170
Figure 7-17 : Maillage tridimensionnel .....	171
Figure 7-18 : Distribution de température lors du préchauffage pour la simulation tridimensionnelle .....	172
Figure 7-19 : Distribution de température pour le capteur A lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection .....	173
Figure 7-20 : Distribution de température pour le capteur B lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection .....	173
Figure 7-21 : Distribution de température pour le capteur C lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection .....	174
Figure 7-22 : Distribution de température pour le capteur D lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection .....	174
Figure 7-23 : Distribution de température pour le capteur A pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale .....	176
Figure 7-24 : Distribution de température pour le capteur B pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale .....	176
Figure 7-25 : Distribution de température pour le capteur C pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale .....	177

Figure 7-26 : Distribution de température pour le capteur D pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale .....	177
Figure 7-27 : Distribution de température lors du préchauffage avec des fibres de carbone.....	179
Figure 7-28 : Distribution de température pour le capteur A pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone .....	181
Figure 7-29 : Distribution de température pour le capteur B pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone .....	181
Figure 7-30 : Distribution de température pour le capteur C pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone .....	182
Figure 7-31 : Distribution de température pour le capteur D pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone .....	182

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Lettres romaines

$a, b, c$	les coefficients du Runge-Kutta au cinquième ordre
$a_s$	la surface spécifique entre le fluide et le solide
$A, B, C$	les paramètres de la résine pour la viscosité
$A$	l'aire étudiée
$A$	le nombre de chocs chimiques utiles
$A_{fs}, A_{sf}$	la surface totale des interfaces solide-pores
$A_n, B_n, C_n, D_n$	les coefficients
$b$	le vecteur, propriété du milieu poreux lors de l'injection
$Br$	le nombre de Brinkman
$c$	le poids relatif
$c_p$	la capacité calorifique (J/kgK)
$d$	le diamètre moyen des fibres
$d$	le champ dual
$d_p$	la taille moyenne du diamètre des particules
$Da$	le nombre de Damköhler

$D_d$	le tenseur de diffusivité thermique
$D_x^*, D_z^*$	les diffusivités thermiques adimensionnelles dans les directions $x$ et $z$
$e_l$	le vecteur unitaire dans la direction $l$
$E$	le module de Young
$E$	l'énergie d'activation
$E_{ijkl}$	le tenseur de Hooke
$\Delta E$	le taux de changement de l'énergie totale (J)
$f$	une fonction représentant le terme source
$f_n$	les fonctions de forme
$F$	la fraction du rayonnement émis par la surface qui atteint l'extérieur du système
$\mathbf{F}$	une force
$g$	la constante de gravité $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
$\mathbf{G}$	la force de gravité
$Gz$	le nombre de Graetz
$h$	la hauteur en mètre
$h$	l'enthalpie (...)
$h$	le coefficient de convection naturelle ou forcée
$h$	l'intervalle
$\Delta h$	l'enthalpie des substances chimiques
$H$	la hauteur de l'échantillon
$k$	la conductivité thermique du matériau isotrope (W/mK)

$k_e$	la conductivité thermique effective du milieu poreux saturé de liquide (W/mK)
$\mathbf{k}_e$	le tenseur de conductivité thermique effective du milieu poreux saturé de liquide (W/mK)
$\mathbf{k}_m$	le tenseur de conductivité thermique du renfort sec (W/mK)
$K$	la loi constitutive
$K$	la constante pour la loi de Kamal-Sourour
$K$	la conductivité du à la dispersion (W/mK)
$\mathbf{K}_D$	le tenseur de conductivité du à la dispersion thermique (W/mK)
$L$	la longueur de l'échantillon (m)
$L_e$	la longueur moyenne réelle des lignes de courant du fluide en mouvement
$n, p$	les constantes chimiques
$\mathbf{n}$	le vecteur normale unitaire
$\mathbf{n}_{fs}$	le vecteur normal unitaire à la surface $A_{fs}$
$\mathbf{n}_{sf}$	le vecteur normal unitaire à la surface $A_{sf}$ ; $\mathbf{n}_{sf} = -\mathbf{n}_{fs}$
$\mathbf{p}$	un point du domaine
$Pe$	le nombre de Péclet
$Pe_{eff}$	le nombre de Péclet effectif
$P_f$	la charge hydrolique (Pa)
$q$	le flux de chaleur imposé
$q''$	le flux de chaleur par unité d'aire (W/m <sup>2</sup> )



$q''$	la valeur du flux de chaleur ( $\text{W/m}^2$ )
$Q$	le taux d'ajout de chaleur au système (J)
$Q_d$	le flux imposé du champ dual
$r$	la variable radiale des systèmes de coordonnées cylindrique ou sphérique
$r$	la longueur caractéristique du VER (m)
$r$	le rapport entre la capacité calorifique de la résine et celle du système entier
$R$	la constante universelle des gaz; $R = 8314 \text{ J/molK}$
$R$	le rayon
$S$	la source de chaleur constante
$S$	le facteur de sécurité
$S$	la perméabilité du milieu poreux ( $\text{m}^2$ )
$S$	le tenseur de perméabilité du milieu poreux ( $\text{m}^2$ )
$t$	la variable temps (s)
$\Delta t$	l'écart de temps caractéristique
$T$	la température (K)
$\Delta T$	l'écart de température caractéristique
$T_\infty$	la température de l'environnement (K)
$u$	l'énergie spécifique interne ( $\text{J/m}^3$ )
$u, v$	des variables
$u$	le vecteur unitaire dans la direction de l'écoulement
$uu$	le produit tensoriel du vecteur $u$ par lui-même

$v$	le potentiel scalaire
$v$	la vitesse (m/s)
$\mathbf{v}$	le vecteur vitesse (m/s)
$V$	le volume apparent du milieu poreux ( $\text{m}^3$ )
$V_c$	un volume donné dans l'espace
$V_s$	un volume de particules donné
$w, w_m$	les fonctions tests
$W$	le taux de travail effectué par le système (J)
$x, y, z$	les variables euclidiennes
$X, Z$	les variables quelconques d'un milieu poreux
$X, Y, Z, T, S, R$	des fonctions des variables $x, y, z, t, z$ et $r$ respectivement

### Lettres grecques

$\alpha, \beta$	les phases quelconques
$\alpha, \beta, \gamma$	des constantes
$\beta$	le coefficient d'expansion thermique
$\Gamma_d$	la frontière où le champ dual existe
$\Gamma_v$	la frontière où le scalaire potentiel existe
$\delta$	delta de Kronecker
$\Delta$	l'erreur

$\varepsilon$	la porosité du milieu poreux
$\varepsilon$	l'émissivité de la surface
$\varepsilon$	la déformation
$\varepsilon$	la fraction volumique
$\theta$	une fraction de calcul pour les équations numériques
$\lambda, \mu$	les coefficients de Lamé
$\mu$	la viscosité du fluide (...)
$\nu$	le coefficient de poisson
$\rho$	la densité (kg/m <sup>3</sup> )
$\rho$	la source volumique
$\sigma$	la constante de Stefan-Boltzmann; $\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$
$\sigma$	la contrainte (Pa)
$\tau$	la tortuosité
$\tau$	la contrainte de cisaillement
$\phi$	la porosité du renfort
$\chi$	le degré de conversion de la résine
$\psi$	la fonction température adimensionnelle et la température adimensionnelle
$\Omega$	le domaine
$\partial\Omega$	la surface englobant le domaine
$\partial\Omega^-$	la frontière entrante

## Indices

<i>c</i>	fibres de carbone
<i>c, conv.</i>	convection
<i>d</i>	diffusion
<i>d</i>	désiré
<i>e</i>	d'essai
<i>e</i>	élément
<i>f</i>	fluide
<i>i</i>	indique l'espèce chimique
<i>imp.</i>	imposé
<i>i, j, k, l, m, n</i>	indices de comptages
<i>m</i>	moule
<i>rad.</i>	radiation
<i>s</i>	solide
<i>v</i>	fibres de verre
<i>x, y, z</i>	indiquent la composante de la propriété
<i>0</i>	indique la valeur constante
$\alpha$	indique la phase $\alpha$

## Exposants

*	valeur adimensionnelle
+	valeur en amont
-	valeur en aval

## Sigles et abréviations

adim.	adimensionnel
<i>analy.</i>	analytique
<i>cal.</i>	calculé
<i>CCD</i>	<i>Curing Cycle Design</i>
CONV	résolution numérique par la méthode de Lesaint-Raviart
<i>DDP</i>	degré de polymérisation
DIFF	résolution numérique par la méthode de Galerkin standard
GS	résolution numérique d'un problème de convection par les méthodes de Galerkin stanadrd et de Lesaint-Raviart
<i>fonc</i>	fonction
LCMFLOT	logiciel de résolution de simulation développé
LR	résolution numérique d'un problème de diffusion par les méthodes de Galerkin stanadrd et de Lesaint-Raviart
mf	maillage fin

mg	maillage grossier
PC	<i>personal computer</i>
RTM	<i>Resin Transfer Molding</i> : moulage par transfert de résine
RTMFLOT	logiciel de résolution de simulation version précédente
Runge-Kutta 4	méthode numérique de Runge-Kutta au quatrième ordre
Runge-Kutta 5	méthode numérique de Runge-Kutta au cinquième ordre
temp.	température
TG	méthode de Taylor-Galerkin
VER	volume élémentaire représentatif
Z.	variante de Zienkiewicz pour la méthode de Taylor-Galerkin

### Opérateurs mathématiques

$\partial_k$	dérivée partielle par rapport à la variable $x_k$
$\frac{D}{Dt}$	dérivée particulaire
$\langle \rangle$	moyenne spatiale ou de phase
$\langle \rangle^a$	moyenne intrinsèque
$L( )$	opérateur différentiel
$\nabla$	gradient
$\underline{\quad}$	variable soulignée indique un tenseur

- ~ écart local ou déviation spatiale
- dérivée par rapport au temps (variable avec un point au dessus)

## LISTE DES ANNEXES

Annexe A : Dérivation de l'équation de conservation de l'énergie (exemple du procédé RTM).....	201
Annexe B : Propriété des moyennes volumiques .....	211
Annexe C : Dérivation d'une méthode d'éléments finis.....	218
Annexe D : Dérivation des exemples des chapitres 5 et 6.....	228
Annexe E : Paramètres thermophysiques des simulations.....	250
Annexe F : Fichiers des résultats du champ de pression et du champ de degré de polymérisation pour l'exemple de convection chimique.....	254
Annexe G : Fichier de données pour l'exemple de simulation complète.....	257
Annexe H : Schéma du moule pour l'injection expérimentale .....	264
Annexe I : Code en C++ Pour calculer la solution analytique de la diffusion dans un cube à deux températures imposées .....	266



## INTRODUCTION

À cause de l'augmentation de la compétition, la simulation des procédés de fabrication des matériaux composites à renfort fibreux revêt une importance de plus en plus grande pour les industries, particulièrement les industries aérospatiale et automobile. Pour avoir de bonnes simulations, une connaissance approfondie des phénomènes physiques se produisant lors de la fabrication est nécessaire. Un de ces procédés, le moulage par transfert de résine, est étudié dans ce travail. Durant la fabrication des matériaux composites par ce procédé une résine est injectée dans un moule contenant une préforme fibreuse. Le tout est ensuite cuit pour que la résine polymérise. Dans ce travail, les phénomènes thermophysiques sont étudiés pour ensuite développer les méthodes numériques utilisées pour la simulation des injections.

L'objectif de ce mémoire est donc l'étude des échanges thermiques dans la fabrication des matériaux composites par les procédés d'injection sur renfort pour ensuite simuler les phénomènes thermiques par le logiciel LCMFLOT.

Un bref survol bibliographique est présenté dans le premier chapitre. Cette revue bibliographique met en évidence la complexité de définir l'équation du bilan énergétique pour le milieu poreux formé des fibres et de la résine durant l'injection à cause des

nombreux couplages des différents phénomènes physiques. De plus la difficulté de ce problème provient de la modélisation numérique de la convection thermique. Ainsi dans ce mémoire, la modélisation des problèmes thermiques de convection-diffusion est séparée en deux étapes pour résoudre les problèmes d'instabilité causés par le couplage convection-diffusion. La diffusion est résolue par la méthode de Galerkin standard, tandis que la méthode de Lesaint-Raviart est utilisée pour la résolution de la convection. De plus la modélisation des problèmes de polymérisation est revue pour améliorer la précision des modèles précédents. Ainsi lors de la simulation de la polymérisation une fois le moule rempli, une méthode d'itération non-linéaire est utilisée.

Pour atteindre l'objectif fixé, le mémoire est divisé en 7 chapitres. Tout d'abord, les récents travaux de ce domaine sont présentés au chapitre 1. Dans le chapitre 2, les équations du modèle thermique sont développées en utilisant les hypothèses appropriées dont l'hypothèse d'équilibre thermique local. Ensuite l'importance des phénomènes thermiques est étudiée en conduisant à un tableau récapitulatif des cas possibles pour le procédé RTM. Dans le chapitre 4, les équations numériques d'une formulation éléments finis sont développées. Ces équations sont implémentées dans le logiciel de simulation. Dans le chapitre suivant une validation analytique est faite pour des simulations en deux dimensions et en trois dimensions, ainsi que des exemples d'injection sont présentés. La simulation de la polymérisation est discutée dans le chapitre 6 où les méthodes numériques sont développées et des résultats de validation sont donnés. Puis une

validation expérimentale est présentée au chapitre 7. Enfin, les conclusions de ce travail sont résumées.

## **CHAPITRE 1**

### **REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

Après la présentation du procédé de moulage par transfert de résine, ce premier chapitre fait un bref survol bibliographique pour introduire l'étude des transferts de chaleur lors de la fabrication des matériaux composites par ce procédé. De plus, les récents travaux faits dans ce domaine sont mis à jour.

#### **1.1 Moulage par transfert de résine**

Les matériaux composites à renfort fibreux sont de plus en plus utilisés dans les industries aérospatiale et automobile. Beaucoup de ces matériaux présentent une combinaison de rigidité et résistance qui est comparable à celle des matériaux métalliques traditionnels. Les pièces fabriquées à partir des matériaux composites ne sont pas sujettes à la corrosion. De plus, leur densité est plus faible que celle des matériaux métalliques; donc ces pièces sont plus légères, ce qui représente le principal avantage de leur utilisation dans l'industrie aérospatiale.

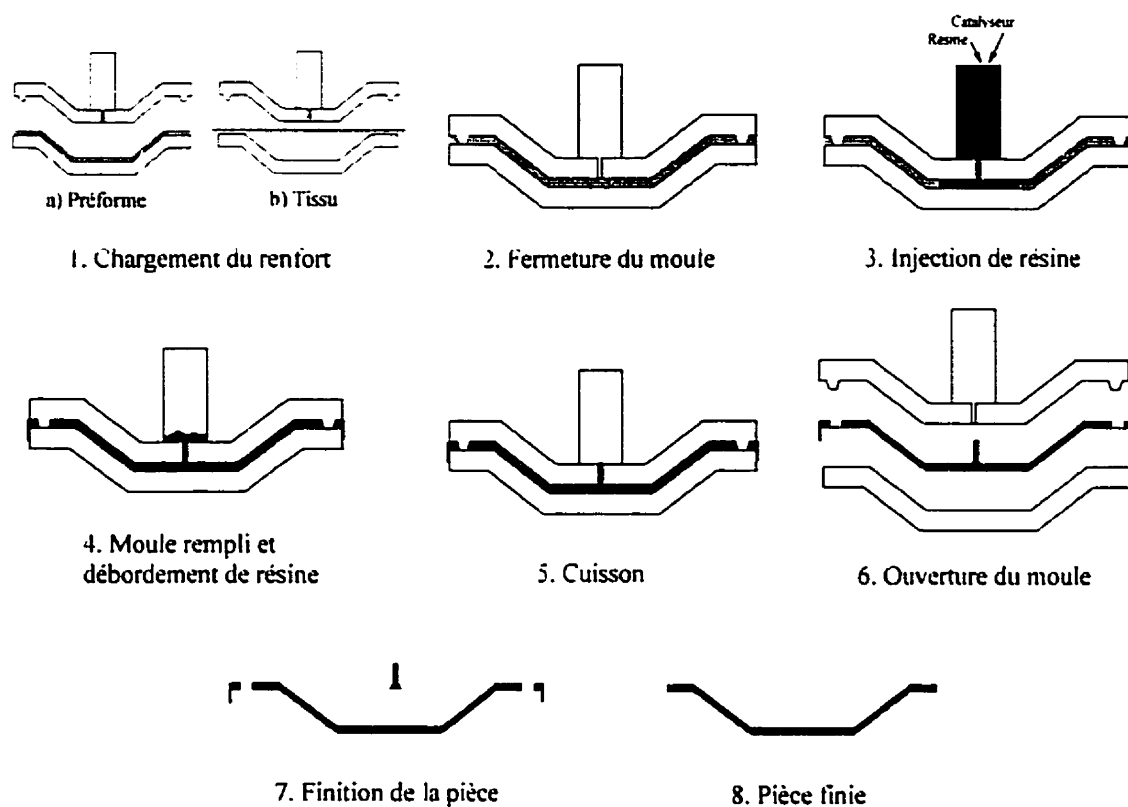


Figure 1-1: Le procédé RTM

Il existe plusieurs procédés pour la fabrication de ces pièces, entre autres le procédé qui nous intéresse ici: le moulage par transfert de résine (*Resin Transfer Molding* - RTM). Ce procédé permet de fabriquer des pièces complexes par injection de la résine sur les renforts en fibres de verre ou de carbone. Une préforme fibreuse est placée dans un moule, qui est ensuite fermé (Fig. 1-1). Une résine thermodurcissable liquide est injectée pour imprégner le renfort fibreux. La réaction chimique de polymérisation est initiée par un catalyseur mélangé à la résine avant l'injection. La polymérisation terminée, le moule est ouvert et la pièce est éjectée. Les moules et les presses requises pour ce procédé sont

généralement plus légers et moins chers que ceux utilisés dans les procédés de moulage par compression des composites et d'estampage des métaux. La résine est injectée à basse pression (inférieure à 10 bars), ce qui demande l'utilisation d'une presse modeste, donc l'investissement initial est raisonnable. Ce procédé est donc de plus en plus utilisé dans l'industrie de l'automobile pour la fabrication des pièces de carrosserie où le coût est un facteur important.

## **1.2 Simulation par injection**

Ce procédé peut être délicat à mettre en oeuvre car la position des points d'injection et des évents est cruciale pour que la pièce soit remplie correctement et que la finition soit bonne. Choisir la position optimale des points d'injection et des évents expérimentalement serait très coûteux car, pour chaque essai, il faudrait fabriquer un nouveau moule. Il est donc préférable de procéder à la simulation numérique. À l'Ecole Polytechnique, le Centre de Recherche Appliquée Sur les Polymères (CRASP) a développé un logiciel de simulation du procédé RTM nommé RTMFLOT [1]. Ce logiciel simule, entre autres, l'avancement du front de la résine, et calcule les pressions et les températures dans le moule et la pièce.

Pour optimiser le procédé RTM, plusieurs facteurs doivent être pris en compte. Un des aspects importants est celui de la thermique, car il permet de comprendre le

remplissage de la pièce et la réaction de polymérisation de la résine qui s'ensuit. La simulation numérique permet de choisir les températures du moule et de la résine pour faciliter l'injection et aussi de sélectionner le catalyseur pour amorcer la polymérisation au moment propice. La qualité de la pièce finie peut aussi être optimisée. Pour l'industrie de l'automobile avec un volume de production important, le temps du cycle pour le moulage d'une pièce doit être diminué. À cette fin, il est possible de préchauffer le moule et donc de diminuer le temps d'injection et de polymérisation [2, 3, 4]. La température devient une variable importante dans ce genre de procédé, car elle régularise le temps de fabrication et la qualité de la pièce finie. Il faut donc bien contrôler la température dans le moule. Dans ce contexte, simuler les effets thermiques devient une tâche importante.

Le module thermique du logiciel RTMFLOT développé par Audet [5] calcule les températures du moule, en présence ou absence d'écoulement, dans la région imprégnée par la résine et dans le renfort sec. Ce module prend en considération l'influence du moule et de la stratification thermique de la pièce. Le modèle avec équilibre thermique instantané est utilisé pour modéliser les transferts de chaleur dans la région saturée en résine et l'équation de conduction pure modélise les phénomènes thermiques dans le renfort sec et le moule. La discrétisation se fait par éléments finis; les éléments sont des prismes isoparamétriques bilinéaires à six nœuds. Le schéma de Taylor-Galerkin généralisé est utilisé pour avancer dans le temps et les méthodes itératives de la famille du gradient conjugué sont utilisées pour résoudre les systèmes d'équations discrètes.

Pour simuler le procédé RTM, il faut bien comprendre tous les phénomènes qui se produisent durant les différentes étapes du procédé. Il y a trois catégories de phénomènes : mécaniques, thermiques et chimiques. Les phénomènes mécaniques sont l'écoulement de la résine dans la région du renfort qui est un milieu poreux, les forces capillaires entre la fibre et la résine qui sont présentes au front d'écoulement et la variation de la viscosité dans le temps. L'écoulement de la résine en milieu poreux est modélisé par l'équation de Darcy qui stipule que la vitesse moyenne de la résine est directement proportionnelle au gradient de pression et inversement proportionnelle à la viscosité. La constante de proportionnalité est la perméabilité du milieu poreux. Les forces capillaires sont habituellement faibles et peuvent donc être négligées pour le calcul numérique [6], ou alors, on considère qu'elles sont prises en compte dans les termes de perméabilité [7]. La viscosité est fonction de la température et du degré de conversion de la résine. Cette fonction est donnée par la loi qui gouverne la cinétique de la réaction chimique de la résine.

On peut distinguer les phénomènes thermiques se produisant dans le moule de ceux qui se produisent dans la pièce qui polymérise. Dans le moule, les phénomènes sont la conduction qui est modélisée par l'équation de la chaleur et les pertes en surface par convection naturelle et rayonnement. Ces pertes sont prises en considération dans les coefficients de transfert moule-environnement et moule-cavité. Dans la pièce, les phénomènes sont plus compliqués : il y a, à la fois conduction, dispersion, convection et



génération de chaleur. Tous ces phénomènes sont modélisés par l'équation de convection-diffusion de la chaleur avec un terme source.

Les phénomènes chimiques sont le transport des espèces chimiques, la diffusion et la dispersion chimique qui sont modélisés par l'équation de convection-diffusion des espèces chimiques avec un terme source et la polymérisation modélisée par un modèle cinétique avec ou sans inhibiteurs, par exemple le modèle de Kamal-Sourour [8].

Ces trois classes de phénomènes ne peuvent pas être étudiées séparément car elles sont couplées. Les phénomènes mécaniques influencent les phénomènes thermiques par l'intermédiaire de la vitesse de la résine sur la dispersion hydrodynamique, sur la dispersion due au déséquilibre thermique résine-fibres et sur le coefficient d'échange résine-fibres. Ils influencent aussi les phénomènes chimiques. Les phénomènes thermiques sont couplés avec les phénomènes mécaniques par l'influence de la température sur la viscosité, et avec la réaction chimique car la température agit sur la réactivité chimique. Même les quantités telles que la conductivité thermique, la chaleur spécifique et la chaleur dégagée sont aussi fonction de la température, donc les phénomènes thermiques agissent entre eux [9, 10, 11]. Le degré de conversion influence la viscosité de la résine, la conductivité thermique et la chaleur spécifique. La chaleur dégagée lors de la réaction chimique entraîne un couplage chimique-thermique. Le degré de conversion dépend non linéairement de la réactivité chimique. Il y a donc un couplage dans lequel les phénomènes chimiques influencent les autres phénomènes.

### 1.3 Conservation d'énergie dans les milieux poreux

Après avoir présenté les phénomènes qui régissent la fabrication des matériaux composites par le procédé RTM, on peut maintenant faire le point sur les travaux scientifiques réalisés dans ce domaine. Pour simuler le procédé RTM, il faut d'abord définir les équations qui gouvernent les différents phénomènes présents. L'équation de Darcy gouverne l'écoulement de la résine dans la préforme, tandis que la phase de la polymérisation est généralement modélisée par une relation semi-empirique proposée par Kamal et Sourour [8]. Pour les phénomènes thermiques, on a besoin d'une équation caractérisant le bilan énergétique.

La modélisation mathématique des équations de conservation de l'énergie pour le milieu poreux a beaucoup évolué. On peut catégoriser les modèles en deux groupes : les modèles à deux températures ou les modèles à une température moyenne. Ainsi les modèles utilisés par Rudd et al. [2, 12] et Chen et Hwang [13, 14] sont à deux températures, une pour les fibres et une pour la résine, tandis que les modèles de Chen et al. [15], Lin et al. [16], Aoyagi et al. [17], Tucker [6] et Tucker et Dessenberger [18] sont à température moyenne entre les fibres et la résine. Pour caractériser le bilan énergétique, les différents modèles sont représentés par une à quatre équations de conservation de l'énergie. Ces différents modèles sont présentés en ordre chronologique.

Ainsi, les premiers à solutionner numériquement le problème combiné de

l'écoulement de la résine et du transfert de chaleur dans un moule plat à écoulement unidirectionnel dans le plan sont Rudd et al. [2, 12]. Les hypothèses qu'ils ont utilisées sont que le fluide est Newtonien, incompressible et que les températures des parois du moule restent constantes durant l'injection. Leur modèle se compose de la loi de conservation de la masse, de la loi de Darcy et des quatre équations suivantes pour représenter le bilan énergétique :

$$Q_m = k_{eff} A \Delta t (T_m - T_l) \quad (1-1)$$

$$Q_f = m_f c_{p_f} (T_f - T_f') \quad (1-2)$$

$$Q_f = m_f c_{p_f} (T_f - T_f'') \quad (1-3)$$

$$Q_r = m_r c_{p_r} (T_r - T_r') \quad (1-4)$$

La première équation représente le transfert de chaleur entre les parois du moule et le laminé, tandis que les trois autres modélisent le transfert thermique entre le renfort fibreux et la résine.  $T_m$ ,  $T_l$  et  $k_{eff}$  représentent respectivement la température du moule, la température du laminé et la conductivité thermique du milieu poreux saturé.  $T_f$  et  $T_f'$  de la deuxième équation sont respectivement la température des fibres au front de l'écoulement avant et après l'imprégnation par la résine, tandis que  $T_f$ ,  $T_r$ ,  $T_f''$  et  $T_r'$  des troisième et quatrième équations sont respectivement les températures des fibres et de la résine au pas de temps présent et au pas de temps précédent. Les auteurs constatent que la prédiction par ce modèle de la distribution de température de la résine dans le moule est

influencée fortement par la conductivité thermique  $k_{eff}$ . Dans ce modèle il y a trop de variables qui dépendent les unes aux autres, ainsi la température du laminé est fonction des températures des fibres et de la résine.

Chan et Hwang [13, 14] modélisent le transfert de chaleur pendant le remplissage d'un moule RTM rectangulaire plat et d'une pièce symétrique à l'aide de la loi de conservation de la masse, de l'équation de Darcy et de deux équations de conservation d'énergie, une pour le renfort et l'autre pour la résine. Ces deux équations sont couplées par le coefficient de transfert de chaleur  $h_f$  entre les fibres et la résine. Ce coefficient  $h_f$  est fonction de la vitesse d'écoulement de la résine et peut être obtenu expérimentalement. En utilisant l'hypothèse que la température des parois demeure constante, les deux équations de conservation d'énergie s'écrivent :

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} - \alpha_f \nabla^2 T_f = - \frac{h_f a_f}{(1-\varepsilon)\rho_f C_{pf}} (T_f - T_r) \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} + v \cdot \nabla T_r - \alpha_r \nabla^2 T_r = \frac{(-\Delta H)S_c}{C_{pr}} - \frac{h_f a_f}{\varepsilon \rho_r C_{pr}} (T_r - T_f) - \frac{h_w a_w}{\varepsilon \rho_r C_{pr}} (T_r - T_w) \quad (1-6)$$

où les indices  $f$ ,  $r$  et  $w$  représentent respectivement les fibres, la résine et les parois du moule, et  $h_w$  est le coefficient de transfert de chaleur entre les parois du moule et la résine.

Chen et al. [15] utilisent aussi un système de deux équations pour la conservation énergétique pendant le remplissage du moule par la résine : une pour la résine et l'autre pour la préforme en fibres de verre. Ces équations sont les suivantes :

$$\rho_r C_{pr} \varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_r C_{pr} u \frac{\partial T}{\partial x} = -\varepsilon Q_B + \varepsilon R_c (-\Delta H) + Q_w \quad (1-7)$$

$$\rho_f C_{pf} (1 - \varepsilon) \frac{\partial T_f}{\partial t} = \varepsilon Q_B \quad (1-8)$$

où  $Q_w = (h_w / l)(T_w - T)$  est le flux de chaleur entre les parois du moule et la préforme en fibres de verre saturée de résine,  $l$  est l'épaisseur du laminé.  $Q_B$  correspond au taux d'échange de chaleur entre le renfort et la résine.

Lin et al. [16] utilisent juste une seule équation d'énergie pour prédire les températures de la résine et des fibres qui sont supposées identiques pendant l'écoulement de la résine lors d'un remplissage RTM. Cette équation s'écrit comme suit :

$$\rho_c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_r c_{pr} \left( \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_{eff} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \varepsilon \dot{G} \quad (1-9)$$

où  $T$  est la température moyenne du mélange renfort-résine, et  $\rho, c_p$  et  $k_{eff}$  sont des valeurs moyennes pondérées de la densité, de la capacité calorifique et de la conductivité thermique pour ce mélange.  $\dot{G}$  est le taux de génération de la chaleur durant la polymérisation de la résine modélisé à l'aide de la relation de Kamal et Sourour [8]. Une telle équation est valide lorsque le coefficient de transfert de chaleur entre les fibres et la résine est élevé, la vitesse de l'écoulement de la résine est relativement lente, et la dimension des grains du milieu poreux faible.

Dans les travaux d'Aoyagi et al. [17], les auteurs tiennent compte des proportions respectives de fibres et de résine dans le moule qui sont prises en compte par les valeurs

moyennes pondérées de la densité effective,  $\rho_{eff}$ , et de la conductivité thermique effective,  $k_{eff}$ . L'équation de la conservation d'énergie qu'ils utilisent est la suivante :

$$\rho_{eff} C_{pr} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_{eff} \nabla^2 T + Q_p + R \cdot \Delta H_r \quad (1-10)$$

Dans tous ces cas, les équations du bilan énergétique sont différentes, chaque auteur choisit ses propres équations sans nécessairement respecter une rigueur mathématique et sans identifier l'origine de son modèle. Les premiers à avoir défini rigoureusement des équations du bilan énergétique pour modéliser les procédés RTM sont Tucker [6] et Tucker and Dessenberger [18]. Leur modèle est utilisé comme point de départ de ce travail. Ces équations sont fondées sur la méthode de moyenne volumique effectuée sur toutes les variables. Cette méthode est fondée sur trois types de moyennes: moyenne spatiale, moyenne de phase et moyenne intrinsèque développée dans les années 60 par Whitaker [19] et Slattery [20, 21]. Pour une quelconque variable  $Z$  du fluide, les trois types de moyenne sont définis comme suit :

$$\text{la moyenne spatiale : } \langle Z \rangle = \frac{1}{V} \int_V Z dV \quad (1-11)$$

$$\text{la moyenne de phase : } \langle Z_\alpha \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\alpha} Z_\alpha dV \quad (1-12)$$

$$\text{la moyenne intrinsèque : } \langle Z_\alpha \rangle^\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} Z_\alpha dV \quad (1-13)$$

où  $\langle \rangle$  indique qu'il s'agit d'une valeur moyenne, l'indice  $\alpha$  désigne la phase étudiée

(solide ou fluide) et  $V$  correspond au volume de matière poreuse saturée de liquide sur lequel les moyennes sont effectuées. Avec ces définitions, Tucker and Dessenberger [18] écrivent les équations sous forme tensorielle pour un fluide Newtonien et incompressible comme suit :

- Conservation de la masse

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}_f \rangle = 0 \quad (1-14)$$

- Conservation de la quantité en mouvement

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial \langle \mathbf{v}_f \rangle}{\partial t} + \rho_f \nabla \cdot \left( \frac{I}{\varepsilon_f} \langle \mathbf{v}_f \rangle \langle \mathbf{v}_f \rangle \right) + \rho_f \nabla \cdot (\mathbf{M}_D : \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle) \\ = -\varepsilon_f \nabla \langle P_f \rangle' + \mu \nabla \cdot \nabla \langle \mathbf{v}_f \rangle - \varepsilon_f (\mu \mathbf{S}^{-1} + \rho_f b \langle \mathbf{v}_f \rangle \mathbf{S}^{-1/2}) \langle \mathbf{v}_f \rangle \end{aligned} \quad (1-15)$$

- Conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} \left[ \varepsilon_f (\rho C_p)_f + \varepsilon_s (\rho C_p)_s \right] \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + (\rho C_p)_f \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle = \\ \nabla \cdot [(\mathbf{k}_e + \mathbf{K}_D) \cdot \nabla \langle T \rangle] + \varepsilon_f \rho_f H_R \langle f_c(c_f, T_f) \rangle' + \mu \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_f \rangle \end{aligned} \quad (1-16)$$

Dans ces trois équations, les indices  $f$  et  $s$  indiquent respectivement les propriétés des parties fluide et solide.  $M_D$  est le tenseur de dispersion visqueuse du quatrième ordre et sa valeur est, entre autres, fonction de la vitesse moyenne  $\langle \mathbf{v}_f \rangle$ . La lettre  $b$  représente une constante adimensionnelle du matériau.  $S$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $k_e$ ,  $K_D$ ,  $H_R$  et  $f_c$  sont respectivement la perméabilité et la porosité du milieu poreux, la viscosité du fluide, le tenseur de conductivité thermique effective du milieu poreux saturé de liquide, le tenseur de

conductivité effective causée par la dispersion thermique, la chaleur spécifique dégagée par la réaction chimique et une fonction décrivant la dépendance du taux de réaction chimique sur la polymérisation et la température. Dans l'équation (1- 15) la pression utilisée est la pression modifiée  $P_f$ , aussi appelée charge hydraulique et définie comme suit :

$$P_f \equiv p_f + \rho_f gh \quad (1-17)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $h$  la cote du point matériel considéré par rapport à un axe de référence vertical.



## CHAPITRE 2

### MODÈLE THERMIQUE

#### 2.1 Modélisation des transferts thermiques

Dans le module thermique de RTMFLOT nommé HEATFLOT [5], pour modéliser les équations du bilan énergétique, il faut tout d'abord distinguer entre les phénomènes thermiques se produisant dans le moule et dans la pièce en cours de fabrication.

La diffusion modélise l'évolution thermique à l'intérieur du moule comme suit (voir Annexe A pour une dérivation complète des équations, en particulier la section A6):

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (\text{milieu isotrope}) \quad (2-1)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) \quad (\text{milieu orthotrope}) \quad (2-2)$$

Les paramètres  $k$  dans l'équation (2-1) et  $\mathbf{k}$  dans l'équation (2-2) sont respectivement la conductivité thermique du milieu isotrope et le tenseur de conduction thermique du milieu orthotrope. Les matériaux comme le métal ou l'époxy qui servent habituellement à la fabrication des moules sont isotropes, mais les matériaux composites sont orthotropes

et les conductivités thermiques peuvent être différentes dans le sens trame et dans le sens chaîne pour un même tissu utilisé comme renfort.

Pour bien définir le problème de conduction dans le moule, il faut introduire des conditions frontières qui modélisent les échanges thermiques avec l'extérieur et/ou avec les éléments chauffants. Les échanges thermiques avec l'extérieur sont la convection naturelle décrite par l'équation (2-3) et le rayonnement décrit par (2-4).

$$q''_{conv} = -\mathbf{q}'' \cdot \mathbf{n} = h(T_{\infty} - T) \quad (2-3)$$

$$q''_{rad} = -\mathbf{q}'' \cdot \mathbf{n} = F\varepsilon\sigma(T_{\infty}^4 - T^4) \quad (2-4)$$

La constante  $h$  dans (2-3) est le coefficient de convection naturelle. Les températures  $T$  et  $T_{\infty}$  sont respectivement la température à la surface du moule et la température de l'environnement extérieur. Les symboles  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la constante de Stefan-Boltzmann et l'émissivité de la surface. Le coefficient  $F$  représente la fraction du rayonnement émis par la surface qui atteint l'extérieur du système. La convection forcée est le phénomène qui régit l'échange de chaleur entre le moule et les pièces chauffantes, elle est modélisée par l'équation suivante:

$$q'' = -\mathbf{q}'' \cdot \mathbf{n} = h(T_m - T) \quad (2-5)$$

où  $T_m$  est la température moyenne de mélange du fluide caloporteur et, cette fois-ci,  $h$  représente le coefficient de convection forcée qui peut être évalué par différentes corrélations [22].

Dans la pièce, l'équation de conduction (2-6) définit bien le transfert thermique dans le renfort fibreux sec (voir Annexe A pour la dérivation, en particulier la section A7):

$$(1 - \phi) \rho_s c_{p,s} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_m \cdot \nabla T) \quad (2-6)$$

L'indice  $s$  représente la fibre ( $s$ : le solide), les symboles  $\phi$  et  $k_m$  sont respectivement la porosité du renfort et le tenseur de conductivité du renfort sec. Cette équation n'est pas la même que l'équation (A-17) de l'Annexe A, car à l'échelle du renfort, la non-uniformité géométrique de celui-ci peut entraîner une anisotropie de la conductivité thermique;  $k_s$  est donc remplacé par  $k_m$ , et le terme transitoire est multiplié par la fraction volumique des fibres.

Pour modéliser la thermique de la résine, on part du bilan énergétique au niveau d'une particule du fluide et de l'équation de Navier-Stokes qui résulte de la conservation de la quantité de mouvement de cette particule de résine. On arrive à l'équation suivante (voir Annexe A, section A8):

$$\rho_f c_{p,f} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T) - \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla P_f \quad (2-7)$$

Dans cette équation l'indice  $f$  représente la résine ( $f$ : le fluide),  $\mathbf{v}$  est la vitesse moyenne de la résine, les symboles  $k_f$ ,  $h$ ,  $\chi$  et  $P_f$  sont respectivement la conductivité de la résine, l'enthalpie des substances chimiques, le degré de conversion et la charge hydraulique définie par l'équation (1-17). Il s'agit d'une formulation thermique où la variation de

l'énergie thermique avec le temps et l'énergie convective sont égales à l'énergie conductive, à l'énergie due à l'exothermie de la réaction chimique et à la dissipation visqueuse. Ces équations ont été utilisées dans plusieurs problèmes de transferts thermiques en milieux poreux [16, 18, 23, 24, 25].

L'équation de conservation d'énergie a été présentée pour le moule (2-1 et 2-2), les fibres (2-6) et la résine (2-7) séparément. Ces équations (2-6 et 2-7) sont valides au niveau microscopique quand le volume étudié correspond seulement à l'une des deux phases présentes : la phase liquide (résine) ou la phase solide (renfort fibreux). Mais dans le procédé de moulage par transfert de résine, la résine et le renfort fibreux représentent un système continu qui constitue le milieu poreux étudié. Il faut donc établir ici une équation de conservation d'énergie qui permette d'étudier le milieu poreux dans sa totalité. En utilisant les trois types de moyennes définies précédemment (1-11, 1-12 et 1-13) sur les équations (2-6 et 2-7), l'équation de conservation d'énergie fondée sur les moyennes volumiques locales peut être dérivée pour le milieu poreux [18].

## **2.2 Milieu poreux**

Le remplissage d'une pièce avec une résine polymère par le procédé RTM constitue un exemple d'écoulement en milieu poreux. En effet, le renfort fibreux représente la matrice dans laquelle la résine s'écoule. Après polymérisation de la résine, la

pièce fabriquée est devenue un solide, dans lequel il peut encore subsister des vides, mais il n'y a plus d'écoulement.

D'après S. Bories et M. Prat [26], la définition d'un milieu poreux est un solide de forme complexe délimitant et englobant des vides appelés pores. Ces vides peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides pouvant s'écouler et, éventuellement, échanger entre elles et avec le solide de la matière et de l'énergie. Le solide peut être déformable, mais possède néanmoins une certaine cohésion.

La géométrie de la matrice influence les phénomènes physiques qui se déroulent dans un milieu poreux. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire ici quelques unes des propriétés géométriques qui caractérisent les milieux poreux :

- La porosité  $\phi$  est le rapport du volume des vides  $V_f$  au volume apparent  $V$  du milieu poreux, soit

$$\phi = \frac{V_f}{V} \quad (2-8)$$

- La surface spécifique  $a_{fs}$  est le rapport de l'aire de la surface totale des interfaces solide-pores,  $A_{fs}$  au volume total  $V$  de l'échantillon, soit

$$a_{fs} = \frac{A_{fs}}{V} \quad (2-9)$$

- La tortuosité  $\tau$  représente le rapport de la longueur moyenne réelle  $L_e$  des lignes de courant du fluide en mouvement sur la longueur  $L$  de l'échantillon :

$$\tau = \left( \frac{L_e}{L} \right)^2. \quad (2-10)$$

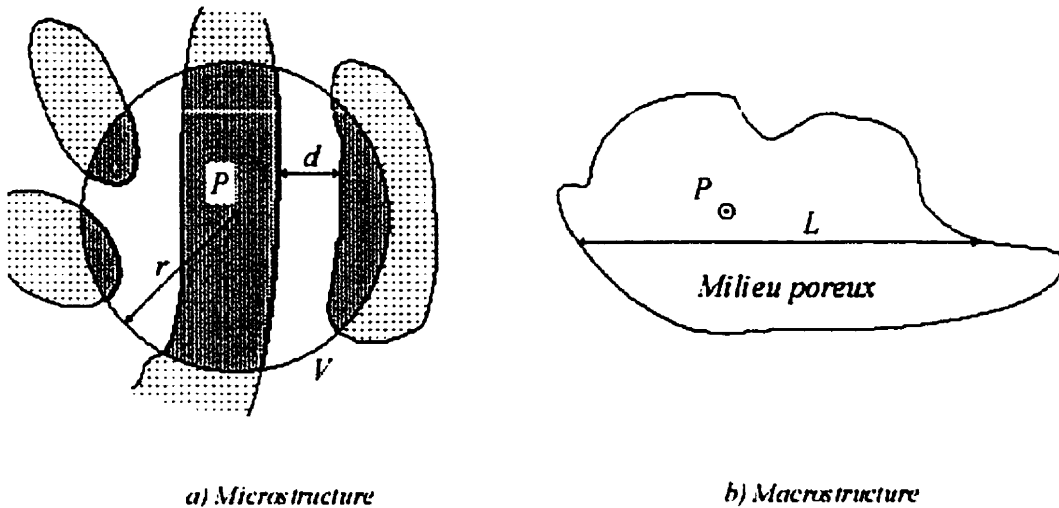


Figure 2-1 : Volume élémentaire représentatif

Pour bien introduire les équations décrivant les phénomènes énergétiques se déroulant dans un milieu poreux, il faut d'abord définir la grandeur de l'échantillon étudié. On veut utiliser les équations locales du solide et du fluide pour décrire les phénomènes qui interviennent au niveau du milieu poreux. Il faut donc définir le volume élémentaire représentatif (VER) du milieu poreux. Ce volume doit être assez grand pour englober toutes les phases présentes, mais aussi assez petit pour que les moyennes ne soient pas influencées par les variations globales du milieu poreux. Ainsi soit  $r$  la longueur caractéristique du VER,  $d$  le diamètre moyen des fibres constituant le solide et  $L$  la longueur de l'échantillon,  $r$  doit satisfaire le critère suivant:  $d \ll r \ll L$ , c'est-à-dire que le VER est petit comparé au volume total du milieu poreux, mais grand par rapport aux

volumes d'un pore et d'une fibre (Fig. 2-1). Sur la partie microstructure de la figure (2-1) la partie ombragée représente le solide tandis que le blanc représente le fluide. L'interface solide-pore,  $A_{fs}$  est indiquée par les lignes en gras.

### 2.3 Méthode des moyennes volumiques

Comme les propriétés du milieu poreux fluctuent d'un point à un autre, selon que l'on se trouve dans la phase fluide ou dans la phase solide, les équations décrivant les phénomènes se produisant dans le milieu poreux sont écrites à partir des valeurs moyennes des paramètres physiques. On utilise donc la méthode des moyennes volumiques pour établir les équations nécessaires.

Pour dériver les équations d'énergie du milieu poreux, on intègre les équations locales du solide et du fluide sur le VER en utilisant les trois moyennes définies au chapitre précédent (1-11, 1-12 et 1-13). Pour bien utiliser la méthode des moyennes, il faut tout d'abord connaître certaines de leurs propriétés spécifiques.

- Ainsi soit  $\varepsilon_\alpha$  la fraction volumique de la phase  $\alpha$ , on a une relation entre la moyenne de phase et la moyenne intrinsèque :

$$\varepsilon_\alpha \langle Z_\alpha \rangle^\alpha = \langle Z_\alpha \rangle. \quad (2-11)$$

Cette relation est dérivée à partir des définitions des différentes moyennes volumiques dans l'annexe B, section B1.

- En choisissant comme volume d'étude le VER, la moyenne des moyennes se comporte comme suit [27] (voir annexe B, section B2) :

$$\langle \langle Z_\alpha \rangle \rangle^\alpha \approx \langle Z_\alpha \rangle \quad (2-12)$$

ou encore

$$\langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \rangle^\alpha \approx \langle Z_\alpha \rangle^\alpha. \quad (2-13)$$

- La différence entre la variable  $Z_\alpha$  associée à la phase  $\alpha$  et la moyenne intrinsèque de cette grandeur est appelée la déviation spatiale :

$$\tilde{Z}_\alpha \equiv Z_\alpha - \langle Z_\alpha \rangle^\alpha. \quad (2-14)$$

- La moyenne de phase d'un produit s'exprime comme suit (voir annexe B, section B3) :

$$\langle Z_\alpha X_\alpha \rangle = \frac{l}{\varepsilon_\alpha} \langle Z_\alpha \rangle \langle X_\alpha \rangle + \langle \tilde{Z}_\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle. \quad (2-15)$$

- La moyenne intrinsèque d'une dérivée temporelle est :

$$\left\langle \frac{\partial Z_\alpha}{\partial t} \right\rangle^\alpha = \frac{\partial \langle Z_\alpha \rangle^\alpha}{\partial t} \quad (2-16)$$

- La moyenne intrinsèque d'un gradient est :

$$\langle \nabla Z_\alpha \rangle^\alpha = \nabla \langle Z_\alpha \rangle^\alpha + \frac{l}{V_\alpha} \int_{A_{\alpha\beta}} Z_\alpha n_{\alpha\beta} dA \quad (2-17)$$



où  $\beta$  représente l'autre phase présente dans le milieu poreux,  $n_{\alpha\beta}$  est le vecteur normal unitaire à la surface  $A_{\alpha\beta}$  orienté de la phase  $\alpha$  vers la phase  $\beta$ , la surface  $A_{\alpha\beta}$  étant l'interface entre les phases  $\alpha$  et  $\beta$ . L'expression de la moyenne intrinsèque du gradient est donnée à la section B4 de l'annexe B.

## 2.4 Hypothèses en RTM

Ayant précisé les propriétés les plus importantes des moyennes volumiques, on peut maintenant revenir au procédé RTM. Le milieu poreux est formé de fibres et de résine liquide injectée dans le moule. Les phases  $\alpha$  et  $\beta$  sont remplacées par  $s$ , pour le solide, et  $f$  pour le fluide.

Tucker and Dessenberger [18] ont dérivé les équations pour l'écoulement et le transfert de chaleur durant l'injection de la résine par le procédé RTM en utilisant les hypothèses suivantes :

1. La phase solide est stationnaire.
2. La densité, la chaleur spécifique et la conductivité sont constantes pour le solide et le fluide.
3. On suppose un équilibre thermique local.
4. Le fluide est Newtonien.
5. Le front de l'écoulement est bien défini.

6. L'enthalpie de la réaction de polymérisation dépend seulement de la température.
7. La dissipation est due à la réaction chimique et à la viscosité.
8. La perméabilité est constante.
9. Le volume d'étude est le volume élémentaire représentatif (VER).

## 2.5 Équations gouvernant les phénomènes en RTM

Trois équations gouvernent les phénomènes se produisant durant le procédé RTM : l'équation de continuité, l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'équation de conservation de l'énergie.

L'équation de continuité (ou de conservation de la masse) a été définie par Tucker et Dessenberger [18]. Elle a été énoncée dans le chapitre 1 ; c'est l'équation (1-14).

Pour le procédé RTM, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1-15) définie par Tucker et Dessenberger [18] se réduit à la loi de Darcy. Étant donné que la longueur caractéristique où la vitesse intrinsèque change est beaucoup plus grande que la grandeur locale (hypothèse 9), l'analyse de l'ordre de grandeur des différentes variables montre que la divergence de la moyenne volumique des contraintes visqueuses est plus petite que le terme de pression. On peut donc négliger le deuxième terme de la ligne du

bas (Eq. 1-15). En négligeant les termes d'inertie, la partie gauche de l'équation et le dernier terme sont réduits à zéro. L'équation de Darcy s'écrit donc comme suit :

$$\langle v_f \rangle = -\frac{l}{\mu} S \cdot \nabla \langle P_f \rangle' \quad (2-18)$$

Pour dériver l'équation d'énergie du milieu poreux étudié dans le cas du procédé RTM, il faut partir de l'équation donnant le bilan d'énergie pour les fibres, ainsi que de l'équation correspondante pour la résine :

- pour les fibres,

$$\rho_s c_{p_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \cdot (k_m \cdot \nabla T_s) \quad (2-19)$$

- pour la résine,

$$\rho_f c_{p_f} \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + v_f \cdot \nabla T_f \right) = \nabla \cdot (k_f \cdot \nabla T_f) - \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} - v_f \cdot \nabla P_f \quad (2-20)$$

Dans ces équations,  $k_m$ ,  $k_f$ ,  $\Delta h$  et  $\chi$  sont respectivement le tenseur de conductivité du renfort sec, la conductivité de la résine, l'enthalpie des substances chimiques et le degré de conversion de la résine ( $0 \leq \chi \leq 1$ ).

En étudiant d'abord les fibres, l'équation (2-19) est modifiée en prenant la moyenne de phase sur toute l'équation comme suit :

$$\left\langle \rho_s c_{p_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \nabla \cdot (k_m \cdot \nabla T_s) \right\rangle \quad (2-21)$$

La densité et la chaleur spécifique étant constantes (hypothèse 2), en utilisant la propriété des moyennes introduite à l'équation (2-16), on peut écrire la partie gauche de l'équation (2-21) sous la forme :

$$\left\langle \rho_s c_{p_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} \right\rangle = \varepsilon_s \rho_s c_{p_s} \frac{\partial \langle T_s \rangle}{\partial t} \quad (2-22)$$

En utilisant deux fois la propriété décrite par l'équation (2-17) sur la moyenne intrinsèque d'un gradient, l'expression de droite dans l'équation (2-21) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot (\mathbf{k}_m \cdot \nabla T_s) \rangle &= \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_s \mathbf{k}_m \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \frac{l}{V} \mathbf{k}_m \cdot \int_{A_p} \mathbf{n}_{fs} \tilde{T}_s dA \right\} \\ &\quad + \frac{l}{V} \mathbf{k}_m \cdot \int_{A_p} \mathbf{n}_{fs} \cdot \nabla \langle T_s \rangle dA \end{aligned} \quad (2-23)$$

En combinant les équations (2-22) et (2-23), on obtient l'équation générale du bilan thermique pour les fibres durant l'injection de la résine par le procédé RTM qui s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s c_{p_s} \frac{\partial \langle T_s \rangle}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_s \mathbf{k}_m \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \frac{l}{V} \mathbf{k}_m \cdot \int_{A_p} \mathbf{n}_{fs} \tilde{T}_s dA \right\} \\ &\quad + \frac{l}{V} \int_{A_p} \mathbf{n}_{fs} \cdot (\mathbf{k}_m \cdot \nabla \langle T_s \rangle) dA \end{aligned} \quad (2-24)$$

En faisant la même démarche pour l'équation de la résine (2-20), on obtient l'équation suivante en utilisant l'hypothèse que la densité et la chaleur spécifique de la résine sont constantes (hypothèse 2) :

$$\rho_f c_{p_f} \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T_f \right\rangle = \left\langle \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) \right\rangle - \left\langle \rho_f \Delta h \frac{DX}{Dt} \right\rangle - \left\langle \mathbf{v}_f \cdot \nabla P_f \right\rangle \quad (2-25)$$

Étudions d'abord la partie gauche de l'équation. En utilisant l'équation de conservation de la masse pour le fluide (équation locale ; Eq. 1-15) et le résultat obtenu sur l'équation des fibres (2-22), on écrit :

$$\rho_f c_{p_f} \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T_f \right\rangle = \rho_f c_{p_f} \left( \varepsilon_f \frac{\partial \langle T_f \rangle^f}{\partial t} + \left\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_f T_f) \right\rangle \right) \quad (2-26)$$

En utilisant la propriété des gradients des moyennes (2-17) le deuxième terme, c'est-à-dire le gradient de la vitesse et de la température, s'écrit comme suit :

$$\left\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_f T_f) \right\rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_f T_f \rangle + \frac{1}{V} \int_{A_f} \mathbf{n}_{sf} \cdot (\mathbf{v}_f T_f) dA \quad (2-27)$$

Comme à l'interface entre le solide (les fibres) et le fluide (la résine) la vitesse  $\mathbf{v}_f$  est nulle, l'intégrale est nulle. Le premier terme peut être développé en utilisant l'équation (2-15), sur la moyenne d'un produit :

$$\left\langle \nabla \cdot (\mathbf{v}_f T_f) \right\rangle = \nabla \cdot \langle \mathbf{v}_f T_f \rangle = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f} \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle T_f \rangle^f + \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \tilde{T}_f \rangle \quad (2-28)$$

Le terme de diffusion de chaleur dans l'équation (2-25) est similaire à celui des fibres (2-23) où on remplace le tenseur de conductivité du renfort par la conductivité de la résine. Le terme de cinétique chimique de l'équation (2-25) peut s'écrire comme suit en supposant que l'enthalpie des substances chimiques est constante et en utilisant la propriété des dérivées de la moyenne (2-16) :

$$\left\langle \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle = \rho_f \Delta h \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle \quad (2-29)$$

Le terme de charge hydraulique peut s'écrire en utilisant la loi de Darcy (2-18) :

$$\langle \mathbf{v}_f \cdot \nabla P_f \rangle = \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle P_f \rangle' = -\mu \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \langle \mathbf{v}_f \rangle \quad (2-29)$$

La conservation d'énergie pour le milieu poreux est représentée par deux équations énergétiques pour les phases solide et fluide, soit :

- pour la résine,

$$\begin{aligned} \rho_f c_{p_f} \left( \varepsilon_f \frac{\partial \langle T_f \rangle'}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle T_f \rangle' \right) &= \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_f k_f \nabla \langle T_f \rangle' + \frac{k_f}{V} \int_{A_p} \mathbf{n}_p \tilde{T}_f dA \right\} \\ &+ \frac{k_f}{V} \int_{A_p} \mathbf{n}_p \cdot \nabla \langle T_f \rangle dA - \rho_f \Delta h \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle - \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle P_f \rangle' - \rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \tilde{T}_f \rangle \end{aligned} \quad (2-30)$$

- pour les fibres,

$$\begin{aligned} \varepsilon_s \rho_s c_{p_s} \frac{\partial \langle T_s \rangle^s}{\partial t} &= \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_s \mathbf{k}_m \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \frac{I}{V} \mathbf{k}_m \cdot \int_{A_p} \mathbf{n}_f \tilde{T}_s dA \right\} \\ &+ \frac{I}{V} \int_{A_p} \mathbf{n}_f \cdot (\mathbf{k}_m \cdot \nabla \langle T_s \rangle) dA \end{aligned} \quad (2-31)$$

L'équation (2-31) est la même que l'équation (2-24). L'énergie représentée dans ses deux équations (2-30) et (2-31) est divisée par le volume total englobant les deux phases, soit la résine et les fibres. A gauche des équations, on retrouve les termes fonction du temps, ainsi que la convection, tandis qu'à droite les termes de diffusion thermique et de dissipation visqueuse et chimique sont présents. Il y a aussi des termes de transfert de chaleur entre la résine et les fibres dans le volume  $V$  représentés par les intégrales. Dans ces équations,  $A_{fs}$  représente l'aire de l'interface entre la résine et les fibres dans le volume  $V$  représenté par le VER,  $n_{fs}$  représente le vecteur unitaire normale à cette interface pointant du fluide vers le solide. Le vecteur  $n_{sf}$  est le vecteur unitaire opposé à  $n_{fs}$  :

$$n_{sf} = -n_{fs} \quad (2-32)$$

Le dernier terme de l'équation (2-30) représente la dispersion hydrodynamique, c'est-à-dire la contribution des variations conjointes de la vitesse et de la température au flux de chaleur. C'est un terme de convection dû aux déviations microscopiques de la vitesse qui résultent de la structure du milieu poreux. On peut supposer que ce terme est petit comparé à la convection des vitesses moyennes, et donc on pourrait le négliger dans notre équation. Cependant, l'effet de la dispersion hydrodynamique doit quand même être pris en compte car il peut être important comparé au terme de diffusion. Ce terme peut

donc influencer la précision de la solution finale du champ de température. L'importance de ce terme sera examinée dans le chapitre suivant.

## 2.6 Équilibre thermique local

Comme les équations (2-30) et (2-31) représentent la conservation de l'énergie par unité de volume pour leurs phases respectives, la somme de ces deux équations décrit le bilan complet d'énergie pour le milieu poreux. La somme des équations d'énergies pour les deux phases donne :

$$\begin{aligned}
 & \rho_f c_{p_f} \varepsilon_f \frac{\partial \langle T_f \rangle^f}{\partial t} + \rho_s c_{p_s} \varepsilon_s \frac{\partial \langle T_s \rangle^s}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} \langle v_f \rangle \cdot \nabla \langle T_f \rangle^f \\
 & = \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_f k_f \nabla \langle T_f \rangle^f + \varepsilon_s k_m \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \frac{l}{V} \int_{A_s} (n_s k_f \tilde{T}_f - k_m \cdot n_s \tilde{T}_s) dA \right\} \\
 & \quad + \frac{l}{V} \int_{A_s} n_s \cdot (k_f \nabla \langle T_f \rangle - k_m \cdot \nabla \langle T_s \rangle) dA - \\
 & \quad - \rho_f \Delta h \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle - \langle v_f \rangle \cdot \nabla \langle P_f \rangle^f - \rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \langle \tilde{v}_f \tilde{T}_f \rangle
 \end{aligned} \tag{2-33}$$

Pour simplifier la suite des calculs, on va supposer que la conductivité thermique du renfort fibreux est isotrope, c'est-à-dire le tenseur  $k_m$  est remplacé par le scalaire  $k_s$ . L'équation (2-33) s'écrit donc comme suit :



$$\begin{aligned}
& \rho_f c_{p_f} \varepsilon_f \frac{\partial \langle T_f \rangle^f}{\partial t} + \rho_s c_{p_s} \varepsilon_s \frac{\partial \langle T_s \rangle^s}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} \langle v_f \rangle \cdot \nabla \langle T_f \rangle^f \\
& = \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_f k_f \nabla \langle T_f \rangle^f + \varepsilon_s k_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle^s + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} (n_{fs} k_f \tilde{T}_f - k_s \cdot n_{fs} \tilde{T}_s) dA \right\} \\
& \quad + \frac{1}{V} \int_{A_{fs}} n_{fs} \cdot (k_f \nabla \langle T_f \rangle - k_s \cdot \nabla \langle T_s \rangle) dA \\
& \quad - \rho_f \Delta h \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle - \langle v_f \rangle \cdot \nabla \langle P_f \rangle^f - \rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \langle \tilde{v}_f \tilde{T}_f \rangle
\end{aligned} \tag{2-34}$$

En utilisant l'hypothèse de l'équilibre thermique local (hypothèse 3), le transfert de chaleur à l'interface élimine rapidement la différence de température entre les fibres et la résine, on peut donc supposer que :

$$\langle T_f \rangle^f = \langle T_s \rangle^s = \langle T \rangle \tag{2-35}$$

Dans cette équation  $\langle T \rangle$ , représente la moyenne volumique de la température des deux phases. Avec cette hypothèse et la continuité de la température à travers l'interface solide-fluide  $A_{fs}$ , on doit avoir :

$$\tilde{T}_f = \tilde{T}_s \text{ sur } A_{fs} \tag{2-36}$$

On doit aussi assurer la continuité du flux de chaleur à travers l'interface  $A_{fs}$ , qui donne :

$$\frac{1}{V} \int_{A_{fs}} n_{fs} \cdot (k_f \nabla \langle T_f \rangle - k_s \nabla \langle T_s \rangle) dA = 0 \tag{2-37}$$

Avec ces simplifications, l'équation (2-34) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left( \rho_f c_{p_f} \varepsilon_f + \rho_s c_{p_s} \varepsilon_s \right) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle \\
& = \nabla \cdot \left\{ \left( \varepsilon_f k_f + \varepsilon_s k_s \right) \nabla \langle T \rangle + \frac{k_f - k_s}{V} \int_{A_s} \mathbf{n}_s \tilde{T}_f dA \right\} \\
& - \rho_f \Delta h \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle - \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle P_f \rangle' - \rho_f c_{p_f} \nabla \cdot \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \tilde{T}_f \rangle
\end{aligned} \tag{2-38}$$

En supposant que la fluctuation de la température,  $\tilde{T}_f$ , est une fonction du gradient de la température moyenne,  $\nabla \langle T \rangle$ , on peut développer  $\tilde{T}_f$  en fonction de  $\nabla \langle T \rangle$  en utilisant la série de Taylor autour de zéro. On définit le vecteur  $\mathbf{b}$  comme étant le premier terme de cette série, et on a donc :

$$\tilde{T}_f = \mathbf{b} \cdot \nabla \langle T \rangle \tag{2-39}$$

Ainsi l'équation (2-38) est réduite à :

$$\begin{aligned}
& \left( \rho_f c_{p_f} \varepsilon_f + \rho_s c_{p_s} \varepsilon_s \right) \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle \\
& = \nabla \cdot \left\{ \left( \mathbf{k}_e + \mathbf{K}_D \right) \nabla \langle T \rangle \right\} - \rho_f \Delta h \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle - \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle P_f \rangle'
\end{aligned} \tag{2-40}$$

Dans cette équation, on suppose que le terme de dispersion cinétique est négligeable.

Le tenseur  $\mathbf{k}_e$  est le tenseur de la conductivité effective du milieu poreux comprenant la résine et le renfort fibreux, tandis que le tenseur  $\mathbf{K}_D$  est le tenseur de conductivité résultant de la dispersion hydrodynamique. Ces deux tenseurs sont définis comme suit :

$$k_e = (\varepsilon_f k_f + \varepsilon_s k_s) \delta + \frac{k_f - k_s}{V} \int_{A_{fs}} n_{fs} b dA \quad (2-41)$$

$$K_D = -\varepsilon_f \rho_f c_{p_f} \langle \tilde{v}_f b \rangle^f \quad (2-42)$$

où  $b$  est défini par l'équation (2-39).

Pour résoudre l'équation de l'énergie, il faut pouvoir évaluer la déviation locale de la vitesse  $\tilde{v}_f$  par rapport sa moyenne intrinsèque ainsi que le vecteur  $b$ . Ces deux valeurs peuvent être calculées pour d'une configuration géométrique régulière comme une cellule cristalline de base. Cependant ceci n'est pas possible pour tous les renforts fibreux qui ne possèdent pas toujours une géométrie périodique. En outre, le vecteur  $b$  dépend de la géométrie de l'interface solide-fluide et de la fluctuation de la vitesse par rapport à sa valeur moyenne intrinsèque, ainsi que des propriétés thermiques des deux phases présentes :

$$b = f(A_{fs}, \tilde{v}_f, \rho_{f,s}, c_{p_{f,s}}, k_{f,s}) \quad (2-43)$$

Comme la conductivité effective  $k_e$  dépend de ce vecteur, elle est aussi fonction de la vitesse du fluide. Ainsi la conductivité effective mesurée du mélange résine-fibres à l'état stationnaire n'est pas la même que si le fluide est en mouvement. En présence d'une vitesse d'écoulement, la quantité mesurée est la somme de la conductivité effective et de la conductivité dispersive,  $(k_e + K_D)$ .

## 2.7 Cinétique de polymérisation

Dans l'équation thermique de la résine (2-7), une des sources de chaleur est liée à la cinétique chimique de la résine elle-même. Il faut évaluer l'apport d'énergie en fonction du degré de conversion de la résine et de la température pour le système étudié du milieu poreux (2-30, 2-31 ou l'équation de l'équilibre thermique local 2-40). La moyenne de la dérivée totale des substances chimiques s'écrit avec un terme temporel, un terme convectif et un terme dispersif. En utilisant la même méthode que celle pour la température, le terme de cinétique chimique s'écrit comme suit :

$$\left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla \chi \right\rangle = \varepsilon_f \frac{\partial \langle \chi \rangle'}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_f \rangle \cdot \nabla \langle \chi \rangle' + \nabla \langle \tilde{\mathbf{v}}_f \tilde{\chi} \rangle$$

Le dernier terme de cette équation est assumé négligeable dans le cas du procédé RTM car les vitesses présentes ne sont pas très grandes et elles diminuent avec une augmentation du degré de conversion. En effet, la viscosité, dont dépend la vitesse, augmente avec l'augmentation du degré de polymérisation de la résine. Donc, dans un problème complet d'injection sur renfort fibreux, la source de chaleur ajoutée par l'exothermie chimique dans l'étude du champ de température comporte deux termes : un terme temporel et un terme de convection du degré de polymérisation de la résine.

Cette source de chaleur doit être évaluée à part pour ensuite être incorporée dans l'équation de la chaleur. Expérimentalement, on sait que l'exothermie chimique dépend,

par l'intermédiaire de la dérivée totale du degré de conversion, du degré lui-même et de la température :

$$\left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle = \text{fonc}(\langle \chi \rangle^f, \langle T \rangle)$$

Il y a plusieurs façons d'évaluer la cinétique de polymérisation. Dans ce travail, l'équation de Kamal-Sourour est utilisée le plus souvent [8]. Dans la résine, il peut y avoir plusieurs espèces chimiques, durcisseurs, qui réagissent ensemble. Pour chaque durcisseur, l'équation de Kamal-Sourour doit être évaluée et le degré de polymérisation global de la résine est évalué comme suit :

$$\chi = \sum c_i \chi_i \quad (2-44)$$

où l'indice  $i$  représente la  $i$ -ème espèce chimique. L'équation différentielle de Kamal-Sourour pour calculer, le degré de cuisson pour une espèce chimique est :

$$\dot{\chi}_i = K_i \chi_i^n (1 - \chi_i)^{p_i} \quad (2-45)$$

Dans cette équation, la constante  $K_i$  pour la  $i$ -ème espèce chimique est évaluée avec la loi d'Arrhénius :

$$K_i = A_i e^{\frac{-E_i}{RT}} \quad (2-46)$$

Les différents paramètres à savoir pour chaque durcisseur (Eq. 2-45 à 2-47) sont :

- $A_i$  : nombre de chocs utiles aux réactions
- $E_i$  : énergie d'activation du  $i$ -ème durcisseur

- $n_i, p_i$  : des constantes
- $c_i$  : poids relatif de chaque durcisseur

Pour terminer l'étude de la cinétique de polymérisation de la résine dans le procédé RTM, il faut parler de la dépendance de la viscosité par rapport à la température et au degré de conversion. On sait qu'avec la température la viscosité diminue ce qui facilite la circulation de la résine dans la préforme. L'augmentation de la conversion de la résine indique son durcissement. A partir des équations précédentes (2-46 et 2-47), on voit que le degré de polymérisation augmente avec la température. Donc, même si la viscosité diminue avec une hausse de température, à partir d'un certain seuil de chaleur, l'augmentation de la polymérisation augmente la viscosité et la résine en durcissant reste en place. Pour simuler tout ça, la viscosité est calculée suivant l'équation :

$$\mu = Ae^{\frac{B}{T} - Cx} \quad (2-47)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des paramètres de la résine.

## CHAPITRE 3

### IMPORTANCE DES PHÉNOMÈNES THERMIQUES

#### 3.1 Adimensionnalisation

Pour connaître l'importance relative de la dispersion hydrodynamique par rapport aux autres phénomènes présents, il faut adimensionnaliser l'équation de conservation de l'énergie dérivée au chapitre 2 (2-41).

L'adimensionnalisation d'une équation différentielle consiste à rendre tous les termes de l'équation d'un ordre de grandeur unitaire par la technique de changement de variables. Les paramètres multipliant les dérivées sont ensuite regroupés en groupes adimensionnels. Les dérivées ayant le même ordre de grandeur, les groupes adimensionnels indiquent ainsi l'importance relative des phénomènes physiques se produisant dans le problème étudié.

Pour réduire l'équation du modèle thermique à une échelle commune, il faut la simplifier en introduisant les hypothèses suivantes :

- la pièce est rectangulaire dans le plan  $z$ - $x$ , de hauteur  $H$  et de longueur  $L$  ;
- la hauteur est plus petite que la longueur ( $H \ll L$ ) ;
- la vitesse moyenne est uniforme et dirigée selon l'axe des  $x$  ( $\langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$ ) ;

- la conductivité thermique effective  $k_e$  est constante et isotrope ( $k_e = k_e \delta$ ) ;
- la perméabilité du renfort est isotrope ( $S = S \delta$ ).

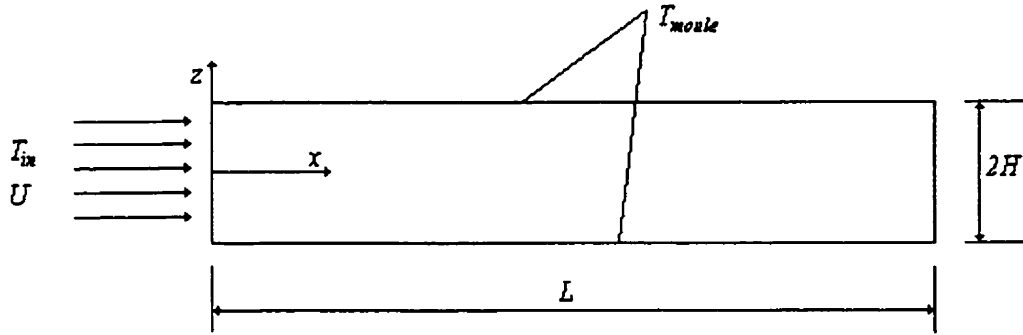


Figure 3-1 : Géométrie typique du moule

Ainsi simplifiée, l'équation du modèle thermique à équilibre instantané (2-41)

devient :

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} \langle v_x \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} &= (k_e + K_x) \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x^2} \\ &+ (k_e + K_z) \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z^2} - \rho_f \Delta h \left( \varepsilon_f \frac{\partial \langle \chi \rangle^f}{\partial t} + \langle v_x \rangle \frac{\partial \langle \chi \rangle^f}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{S} \langle v_x \rangle^2 \end{aligned} \quad (3-1)$$

La charge hydraulique a été remplacée en utilisant l'équation de Darcy (2-18).

Ainsi, la perméabilité apparaît dans l'équation du modèle thermique. Dans cette équation,  $K_x$  et  $K_z$  représentent respectivement les composantes du tenseur de dispersion hydrodynamique parallèle et perpendiculaire à l'écoulement. La capacité calorifique,  $\rho c_p$ , est définie comme suit afin de simplifier les équations :



$$\rho c_p = \varepsilon_f \rho_f c_{p_f} + \varepsilon_s \rho_s c_{p_s} \quad (3-2)$$

Pour obtenir le modèle adimensionnel, il faut effectuer les changements de variables suivant :

$$\langle T \rangle = (\Delta T) T^* \quad x = Lx^* \quad z = Hz^* \quad t = (\Delta t)t^* \quad \Delta t = \frac{H^2 \rho c_p}{k_e} \quad (3-3)$$

L'écart thermique  $\Delta T$  est une différence de température caractéristique pouvant représenter l'écart entre la température initiale du moule et la température d'injection de la résine ou bien l'écart entre la température du poinçon et de la matrice du moule chauffé. La température adimensionnelle  $T^*$  est moyenne spatiale adimensionnelle où les parenthèses obliques ont été omises pour simplifier l'écriture des équations. L'intervalle de temps  $\Delta t$  est un temps caractéristique de diffusion thermique à travers l'épaisseur de la pièce. Avec ces changements de variables, les dérivées de l'équation (3-1) deviennent :

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} = \frac{(\Delta T) k_e}{H^2 \rho c_p} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} = \frac{\Delta T}{L} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad \frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial x^2} = \frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial^2 \langle T \rangle}{\partial z^2} = \frac{\Delta T}{H^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \quad \frac{\partial \langle \chi \rangle^f}{\partial t} = \frac{k_e}{H^2 \rho c_p} \frac{\partial \chi}{\partial t^*} \quad \frac{\partial \langle \chi \rangle^f}{\partial x} = \frac{l}{L} \frac{\partial \chi}{\partial x^*}$$

En utilisant ces dérivées, on obtient le modèle adimensionnel suivant :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + Gz \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{H^2}{L^2} \left( 1 + \frac{K_x}{k_e} \right) \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \left( 1 + \frac{K_z}{k_e} \right) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + Da \left( \frac{\partial \chi}{\partial t^*} + \frac{Gz}{r} \frac{\partial \chi}{\partial x^*} \right) + Br \quad (3-5)$$

Dans cette équation les coefficients adimensionnels sont définis comme suit :

$$Gz = \frac{\rho_f c_{p_f} H^2 \langle v_x \rangle}{k_e L} \quad Da = \frac{-\varepsilon_f \rho_f \Delta h}{\rho_c \Delta T} \quad Br = \frac{\mu \langle v_x \rangle^2 H^2}{S \Delta T k_e} \quad r = \frac{\varepsilon_f \rho_f c_{p_f}}{\rho_c} \quad (3-6)$$

Ces nombres ont la signification suivante :

- $Gz$  : nombre de Graetz indiquant le rapport entre l'apport convectif thermique longitudinal et l'apport conductif dans l'épaisseur [18] ;
- $Da$  : nombre de Damköhler indiquant le rapport entre l'apport dû à l'exothermie de la réaction et l'apport conductif à travers l'épaisseur [18] ;
- $r$  : rapport entre la capacité calorifique de la résine et celle du système entier ;
- $Br$  : nombre de Brinkman indiquant l'importance relative de la dissipation visqueuse face à la conduction dans le sens de l'épaisseur [18].

## 3.2 Dispersion hydrodynamique

### 3.2.1 Définition

Pour bien cerner l'importance des différents phénomènes thermiques présents dans l'équation (3-5), il faut tout d'abord pouvoir définir, caractériser et évaluer la dispersion hydrodynamique. La dispersion hydrodynamique est le flux de chaleur causé

par la corrélation des fluctuations locales de la température et de la vitesse par rapport à leurs valeurs moyennes. Pour comprendre l'effet de dispersion, on considère un fluide s'écoulant dans un milieu poreux confiné dans un rectangle. La face supérieure et la face inférieure sont tenues à des températures différentes de façon à créer un flux de chaleur dans la direction ( $z$ ) normale à l'écoulement. On suppose que l'écoulement est en régime permanent, et que la vitesse d'écoulement est la vitesse moyenne de phase donnée par la loi de Darcy, soit  $\langle v_f \rangle$ . Comme on est en régime permanent, la dérivée partielle dans la direction de l'écoulement ( $x$ ) des quantités moyennes est nulle, ainsi le terme de convection dans le sens de l'écoulement est égal à zéro. En pratique, on observe un flux de chaleur plus important quand le fluide est en mouvement que quand il est stationnaire. Ceci est dû à la dispersion hydrodynamique.

La dispersion se produit parce que la vitesse et la température microscopiques sont différentes de leur valeur moyenne. Même si la vitesse moyenne du fluide dans la direction  $z$  est nulle dans cet exemple, à l'échelle microscopique le fluide contourne les particules solides et donc s'écoule aussi dans la direction  $z$  (Fig. 3-2). Si ce fluide en mouvement est soumis à un gradient de température, il va donc se produire une convection locale de la chaleur. Et si, de plus, ces gradients de température sont différents du gradient de la température moyenne, un flux de chaleur additionnel est généré dans une direction déterminée, non aléatoire [5, 6, 18, 28, 29, 49].

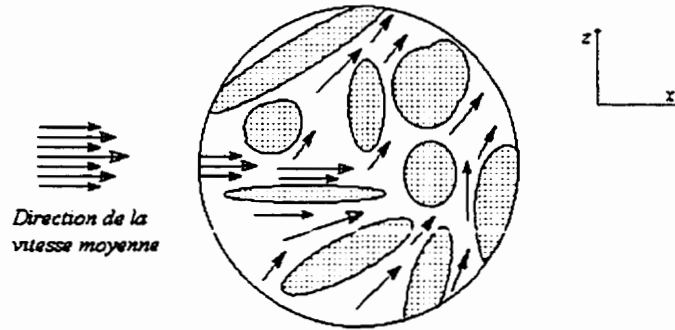


Figure 3-2 : Vitesse locale microscopique

Dans l'article de Koch et Brady [29], on identifie deux autres causes au phénomène de dispersion hydrodynamique : l'adhérence de la résine aux fibres et la présence de tourbillons. Notons que ce phénomène n'est pas purement thermique, car il contribue également à la dispersion des espèces chimiques.

Comme on l'a utilisé précédemment, le tenseur de conductivité effective dû à la dispersion hydrodynamique peut être décomposé en ses composantes longitudinale  $K_x$  et latérale  $K_z$  à travers l'épaisseur de la pièce :

$$K_D = K_x uu + K_z (\delta - uu) \quad (3-7)$$

où le vecteur  $u$  est le vecteur unitaire dans la direction de l'écoulement, tandis que le produit  $uu$  représente le produit tensoriel du vecteur  $u$  par lui-même. Le symbole  $\delta$  représente le tenseur unitaire ou delta de Kronecker [30, 31]. Pour caractériser ce phénomène, on fait généralement appel à un tenseur de diffusivité thermique pour caractériser la dispersion. Ce tenseur est défini comme suit :

$$D_d \equiv \frac{K_D}{\rho_f c_{p_f}} \quad (3-8)$$

Ce tenseur est une fonction complexe de la porosité, de la structure de la matrice, des propriétés thermiques des phases et des caractéristiques hydrodynamiques de l'écoulement intervenant par l'intermédiaire d'un nombre de Péclet,  $Pe$ . Le nombre de Péclet est le paramètre déterminant qui gouverne l'évolution de la dispersion. Ce nombre est fondé sur la taille moyenne du diamètre des particules,  $d_p$ . Il indique le rapport des transferts convectifs face aux transferts diffusifs à l'échelle des pores. On l'utilise aussi bien pour caractériser des phénomènes de diffusion d'espèces chimiques, que pour caractériser des phénomènes de diffusion thermique. Ces derniers sont caractérisés par la diffusivité thermique,  $k/\rho c_p$ . Dans le cas du procédé RTM, le diamètre utilisé dans la définition du nombre de Péclet est le diamètre des fibres,  $d$ . Ainsi le nombre de Péclet dans le cas de diffusion thermique est défini de la manière suivante :

$$Pe = \frac{\rho_f c_{p_f} \langle v_f \rangle d}{k_f} \quad (3-9)$$

### 3.2.2 Historique de la dispersion hydrodynamique

Pour compléter l'étude de la dispersion hydrodynamique, il faut citer les travaux antérieurs les plus importants sur le sujet.

L'utilisation des réacteurs poreux, ainsi que des bassins de stockage thermique (*Packed Beds*) a nécessité l'étude de la dispersion hydrodynamique thermique et chimique. Une des premières études faites sur ce sujet est décrite dans l'article de Han, Bhakta et Carbonell [32]. La dispersion chimique est étudiée dans une colonne verticale remplie d'eau et de particules sphériques. Ce problème est voisin de la dispersion thermique. Ces expériences ont été effectuées avec trois distributions de particules et sur une grande plage de vitesses qui sont caractérisées par des nombres de Péclet variant de  $10^2$  à  $10^4$ . Les résultats expérimentaux montrent une forte dépendance des composantes longitudinale et latérale de la dispersion face au nombre de Péclet. Ainsi, pour un nombre de Péclet autour de  $10^4$ , les dispersions hydrodynamiques longitudinale et latérale sont respectivement entre 50000 et 500 fois plus importantes que la diffusion initiale. On montre aussi que la taille des particules a une influence sur la composante longitudinale, mais pas sur la composante latérale.

Pour la dispersion hydrodynamique thermique, Levec et Carbonell [33] ont fait des expériences similaires dans un milieu poreux constitué de sphères de quelques millimètres de diamètre. Les mesures ont été effectuées pour des nombres de Péclet allant de 10 à  $10^3$ . Les résultats obtenus sont comparés avec le modèle théorique développé en [28]. Un des résultats importants de cette étude est que la composante

longitudinale de la dispersion hydrodynamique croît plus rapidement avec le nombre de Péclet que la composante latérale.

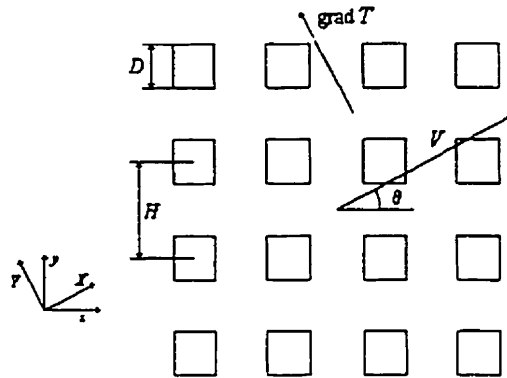


Figure 3-3: Modèle géométrique de Kuwahara et al. [34]

La dispersion hydrodynamique est aussi étudiée numériquement. Ainsi dans l'article de Kuwahara et al. [34], les équations de conservation qui régissent l'écoulement et les transferts de chaleur sont résolues par calcul numérique sur un réseau bidimensionnel de carrés (Fig. 3-3). La dispersion thermique et la tortuosité sont évaluées en intégrant les résultats obtenus sur l'ensemble de la cellule élémentaire. Il est constaté que la tortuosité est asymptotique pour les petites valeurs de nombre de Péclet, quelque soit l'angle entre la direction de l'écoulement et la cellule unitaire. Pour des nombres de Péclet supérieurs à 10, les effets de la tortuosité sont négligeables par rapport aux effets de dispersion. L'étude de la dispersion hydrodynamique transversale a été effectuée pour les nombres de Péclet allant de  $10^{-2}$  à  $10^5$ . On constate que la dispersion suit une loi en

$Pe^{1.7}$  pour les faibles nombres de Péclet et une loi en  $Pe$  pour les nombres de Péclet importants. Quintard et Whitaker [35] ont calculé la dispersion thermique sur le même genre de cellule élémentaire et ont trouvé aussi une dépendance en  $Pe^{1.7}$ . Cependant ces résultats correspondent à des structures géométriques ordonnées. Pour des milieux poreux réels où les distributions spatiales sont aléatoires, la dispersion thermique suit plutôt une loi en  $Pe$ .

Pour des pièces à renfort fibreux, il n'y a pas beaucoup de travaux disponibles sur la dispersion hydrodynamique thermique, toutefois Tucker [6] propose une relation provenant des travaux de Kaviany [36] pour un milieu isotrope ne possédant pas une structure géométrique régulière :

$$\begin{aligned} K_x &= 0.8k_f Pe \\ K_z &= 0.1k_f Pe \end{aligned} \quad (3-10)$$

Cette relation n'indique que l'ordre de grandeur de la dispersion. Koch propose, cependant, un modèle théorique permettant d'évaluer la dispersion dans un mat fibreux isotrope [29, 37] :

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{171}{12800} \pi^3 \frac{d^2}{S\varepsilon_f(1-\varepsilon_f)} k_f Pe \\ K_z &= \frac{9}{25600} \pi^3 \frac{d^2}{S\varepsilon_f(1-\varepsilon_f)} k_f Pe \end{aligned} \quad (3-11)$$



Plus récemment, Dessenberger [38] a effectué des mesures de dispersion thermique pour un mat donné (mat de type OCF-M8610) et pour une porosité donnée ( $\varepsilon_f = 0.87$ ). Les coefficients sont identifiés en minimisant l'écart entre la réponse mesurée par les thermocouples et les résultats de la simulation numérique. Les expériences sont réalisées avec des nombres de Péclet allant de 0.2 à 30. Seulement la dispersion à travers l'épaisseur a été mesurée car il est démontré que la dispersion longitudinale n'a aucun effet sur la température.

Audet [5] a comparé les corrélations de Kaviany, le modèle de Koch et les mesures de Dessenberger pour une injection RTM à une vitesse de  $0.02 \text{ ms}^{-1}$  :

$K_x = 15k_f$	$K_z = 1.9k_f$	corrélation de Kaviany
$K_x = 21k_f$	$K_z = 0.56k_f$	modèle de Koch
	$K_z = 0.31k_f$	mesures de Dessenberger

### 3.2.3 Dispersion adimensionnelle

Pour pouvoir évaluer l'importance des différents phénomènes, il faut adimensionnaliser la dispersion hydrodynamique dans l'équation (3-5). Les composantes longitudinale et latérale de la dispersion thermique doivent donc être écrites de la façon suivante :

$$K_x = D_x^* k_e Pe_{eff} \quad (3-12)$$

$$K_z = D_z^* k_e Pe_{eff}$$

- $Pe_{eff}$ : nombre de Péclet effectif indiquant le rapport entre l'apport convectif thermique dans le sens axial et l'apport conductif dans l'épaisseur au niveau microscopique [18] qui est défini de la manière suivante :

$$Pe_{eff} = \frac{\rho_f c_{p_f} \langle v_x \rangle d}{k_e} \quad (3-13)$$

Souvent le diamètre des fibres  $d$  est approximé en utilisant la perméabilité  $S$  et la porosité  $\varepsilon$  du milieu poreux. Ainsi le diamètre est évalué par l'équation suivante ;

$$d = \sqrt{\varepsilon_f S} \quad (3-14)$$

L'équation adimensionnelle (3-5) est donc réécrite comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial \alpha^*} + Gz \frac{\partial T^*}{\partial x^*} &= \frac{H^2}{L^2} (1 + D_x^* Pe_{eff}) \frac{\partial^2 T^*}{\partial \alpha^{*2}} + (1 + D_z^* Pe_{eff}) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \\ &+ Da \left( \frac{\partial \chi}{\partial t^*} + \frac{Gz}{r} \frac{\partial \chi}{\partial x^*} \right) + Br \end{aligned}} \quad (3-15)$$

L'importance de la dispersion hydrodynamique thermique est donc indiquée par le nombre de Péclet effectif ou par le rapport du nombre de Péclet effectif sur le nombre de Graetz.

### 3.3 Importance des phénomènes thermiques

#### 3.3.1 Un cas typique en RTM

Dans le mémoire de Audet [5], l'équation adimensionnelle (Eq. 3-15) est évaluée en calculant les coefficients énumérés plus haut pour des valeurs typiques dans le cadre du procédé RTM [18]. On suppose un moule dont les longueurs caractéristiques sont les suivantes :

$$L = 1 \text{ m et } H = 0.003 \text{ m}$$

Les paramètres thermiques utilisés par Audet [5] sont affichés dans le tableau (3-1), tandis que les paramètres rhéologiques sont présentées dans le tableau (3-2).

Tableau 3-1: Paramètres thermiques de la résine et des fibres (valeurs typiques [18])

<i>Résine</i>	$\rho_f = 1000 \text{ kg / m}^3$ $c_{p_f} = 1800 \text{ J / kg.K}$ $k_f = 0.2 \text{ W / m.K}$	<i>Fibres</i>	$\rho_s = 1700 \text{ kg / m}^3$ $c_{p_s} = 1000 \text{ J / kg.K}$
<i>Écart caractéristique de température</i>	$\Delta T = 20 \text{ K}$	<i>Conductivité effective</i>	$k_e = 0.4 \text{ W / m.K}$

Tableau 3-2 : Paramètres rhéologiques (valeurs typiques [18])

$\mu = 0.1 \text{ Pa.s}$	$\varepsilon_f = 0.85$
$\langle v_x \rangle = 0.01 \text{ m / s}$	$S = 10^{-9} \text{ m}^2$

La cinétique chimique est donnée par les deux valeurs suivantes :

$$\Delta h = -2.2 \cdot 10^5 \text{ J / kg et } \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle^* = \frac{\partial \chi}{\partial t^*} + \frac{Gz}{r} \frac{\partial \chi}{\partial x^*} = 0.2$$

En utilisant ces valeurs, on obtient les nombres adimensionnels suivant :

$$Gz = 0.34, Pe_{eff} = 2.6, Da = 5.2, r = 0.857 \text{ et } Br = 0.0095$$

Les coefficients de dispersion hydrodynamique sont évalués par la corrélation de Kaviany [36]. En insérant ces coefficients dans l'équation (Eq. 3-15), on peut déterminer l'importance relative des phénomènes thermiques :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + 0.34 \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = (9 \cdot 10^{-6} + 9.4 \cdot 10^{-6}) \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + (1 + 0.13) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + 1 + 0.0095 \quad (3-16)$$

On peut remarquer que la dissipation visqueuse, la conduction et la dispersion hydrodynamique selon  $x$  sont petits comparés aux autres termes de l'équation. De forts gradients thermiques longitudinaux peuvent exister dans la pièce produisant un flux thermique relativement élevé à certains endroits, par exemple au front durant le début l'injection de la résine froide dans un moule chaud. On ne peut donc pas négliger les termes de diffusion et de dispersion hydrodynamique longitudinaux. La dissipation visqueuse est relativement faible dans cet exemple, mais généralement il ne faut pas la négliger car elle dépend quadratiquement de la vitesse. Les termes de convection longitudinale, de diffusion transverse sont quant à eux toujours significatifs. Durant

l'injection l'importance du terme d'exothermie dépend de la résine ainsi que de la présence des inhibiteurs car certaines résines ne commencent la polymérisation qu'après la phase de l'injection. Dans cet exemple le terme d'exothermie est significatif : la polymérisation commence avant la fin de l'injection.

### 3.3.2 Comparaison entre un exemple de l'industrie aérospatiale et un exemple de l'industrie automobile

Dans la section précédente, l'équation d'énergie réduite à l'échelle commune a été étudiée en utilisant des valeurs typiques pour le procédé RTM trouvées dans la littérature. Dans cette section, l'importance des phénomènes thermiques va être étudiée pour deux exemples bien spécifiques : l'injection d'une résine dans une préforme en fibres de carbone utilisée dans l'industrie aérospatiale et l'injection de la même résine dans un mat de fibres de verre utilisé dans l'industrie automobile.

Tableau 3-3 : Paramètres thermiques de la résine et des fibres de carbone et de verre

<i>Résine</i>	<i>Fibres de carbone</i>	<i>Fibres de verre</i>
$\rho_f = 1117 \text{ kg / m}^3$	$\rho_{sc} = 1770 \text{ kg / m}^3$	$\rho_{sv} = 2550 \text{ kg / m}^3$
$c_{p_f} = 2360 \text{ J / kg.K}$	$c_{p_{sc}} = 1160 \text{ J / kg.K}$	$c_{p_{sv}} = 812 \text{ J / kg.K}$
$k_f = 0.1 \text{ W / m.K}$	$k_{sc} = 8.4 \text{ W / m.K}$	$k_{sv} = 1 \text{ W / m.K}$
$\Delta T = 75 \text{ K}$	$k_{ec} = 3.752 \text{ W / m.K}$	$k_{ev} = 0.208 \text{ W / m.K}$

Les deux expériences ont été faites dans un moule carré de longueur  $L = 4$  m et de hauteur  $H = 6$  mm. La même procédure est utilisée dans les deux cas. Le tableau (3-3) donne les propriétés thermiques de la résine utilisée, ainsi que des fibres de carbone et de verre, tandis que le tableau (3-4) donne les propriétés rhéologiques de ces mêmes matériaux; la vitesse est calculée par l'équation de Darcy (Eq. 2-18).

Tableau 3-4 : Paramètres rhéologiques

	<i>Fibres de carbone</i>	<i>Fibres de verres</i>
$\mu = 0.02$ Pa.s	$\varepsilon_{fc} = 0.56$	$\varepsilon_{fv} = 0.88$
$P_{ny} = 10^5$ Pa	$S_c = 4 \cdot 10^{-10}$ m <sup>2</sup>	$S_v = 4 \cdot 10^{-9}$ m <sup>2</sup>
	$\langle v_x \rangle_c = 0.002$ m/s	$\langle v_x \rangle_v = 0.0176$ m/s

Dans ces tableaux les indices  $c$  et  $v$  représentent respectivement les fibres de carbone et les fibres de verre.

En utilisant ces données les nombres adimensionnels définis préalablement pour les deux cas sont :

Tableau 3-5 : Nombres adimensionnels pour les deux cas étudiés

<i>Nombre adimensionnel</i>	<i>Fibres de carbone</i>	<i>Fibres de verre</i>
$\Delta t$	22.832	444.506
$Gz$	0.00708	2
$Pe_{eff}$	0.021	13.23
$Br$	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$3.57 \cdot 10^{-3}$

Avec tous ces paramètres et les nombres adimensionnels, on obtient les équations réduites à l'échelle commune pour la thermique suivantes :

Dans le cas de la fibre de carbone :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} + 0.007 \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = (2.25 \cdot 10^{-6} + 3.83 \cdot 10^{-8}) \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + (1 + 2.13 \cdot 10^{-3}) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + 1.43 \cdot 10^{-5} \quad (3-17)$$

Dans le cas de la fibre de verre :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} + 2 \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = (2.25 \cdot 10^{-6} + 1.145 \cdot 10^{-5}) \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + (1 + 0.636) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + 3.57 \cdot 10^{-3} \quad (3-18)$$

Pour la dispersion hydrodynamique, les coefficients sont évalués par la corrélation de Kaviany [36] (Eq. 3-10).

On remarque tout d'abord que l'injection dans le mat de fibres de verre est 9 fois plus rapide que dans le cas du préimprégné de fibres de carbone dû à la forte perméabilité du mat comparée au tissu. Ceci est traduit dans les équations (3-17) et (3-18) par la différence de l'importance de la dissipation visqueuse qui est négligeable dans le cas de la fibre de carbone, et par la convection qui est beaucoup plus importante dans l'injection du mat.

Dans la dernière équation (Eq. 3-18) on remarque que la dispersion hydrodynamique longitudinale est plus importante que la conduction longitudinale, tandis

que la dispersion hydrodynamique transverse augmente la conduction de 60 %. À l'inverse, elle est négligeable dans la première équation (Eq. 3-17). Pendant l'injection de la résine dans le préimprégné de carbone, la conduction est plus de 50 fois supérieure à la dispersion. La dispersion hydrodynamique est donc avec la convection un phénomène prédominant dans le cas du mat de verre, tandis que ces deux phénomènes sont négligeables pour un tissu de carbone.

Deux nombres adimensionnels relatent l'importance de la dispersion hydrodynamique ; ce sont le nombre de Péclet effectif et le nombre de dispersion (le rapport entre le nombre de Péclet effectif et le nombre de Graetz). Le tableau 3-6 donne une comparaison entre les nombres de Péclet et de dispersion dans ces deux cas. On remarque tout d'abord que pour les fibres de verre le nombre de Péclet est 630 fois plus grand, tandis que le nombre de dispersion est 3.5 fois plus grand.

Tableau 3-6 : L'importance de la dispersion hydrodynamique

<i>Nombre adimensionnel</i>	<i>Fibres de carbone</i>	<i>Fibres de verre</i>
$Pe_{eff}$	0.021	13.23
$Pe_{eff}/Gz$	2.966	6.615

On peut donc en conclure que la dispersion hydrodynamique est un phénomène important pour une injection où la perméabilité et la vitesse sont grandes. Dans le cas, où



le nombre de dispersion est important, l'influence de la dispersion hydrodynamique doit être prise en compte.

### 3.4 Phénomènes thermiques en RTM : tableau récapitulatif

Dans cette section, on veut présenter tous les cas possibles de phénomènes thermiques pour le procédé RTM. A partir de l'équation adimensionnelle (3-15), on peut étudier les principaux phénomènes pouvant se produire durant l'injection. La diffusion dans le sens de l'injection est négligeable comparée à la diffusion transverse car on a supposé que la hauteur de la cavité d'injection est beaucoup plus petite que sa longueur. Dans cette étude, on ne prend pas en considération la dissipation visqueuse supposée négligeable comparée aux autres phénomènes thermiques. Avec ces simplifications, l'équation (3-15) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + Gz \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \sim \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + D_z^* Pe_{eff} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + Da \frac{\partial \chi}{\partial t^*} + \frac{DaGz}{r} \frac{\partial \chi}{\partial x^*} \quad (3-19)$$

Le tableau (3-7) nous montre qu'il y a neuf types de simulations différentes qui existent en RTM non-isotherme. Les plus indiquent les phénomènes prédominants, tandis que le moins indique que le phénomène est négligeable, mais présent quand même. Ainsi on remarque qu'il ne peut pas y avoir d'injection sans diffusion puisque la préforme

fibreuse et la résine ont toujours une conductivité donnée. Pour examiner les différents cas de figure, voici les paramètres importants et leurs valeurs :

- cas 1 : la convection pure où  $Gz > 1$ ;

- cas 2 : la diffusion pure où le temps caractéristique est  $\Delta t_{diff} = \frac{\rho c_p H^2}{k_e}$  ;

- cas 3 : les convection et diffusion ont le même ordre de magnitude. ainsi le temps caractéristique de diffusion décrit pour le cas 2 doit être de même ordre que le

$$\text{temps caractéristique de convection qui est } \Delta t_{conv} = \frac{\rho c_p L}{\rho_f c_{p_f} \langle v_x \rangle} ;$$

- cas 4 : la convection est comparable à la dispersion; les temps caractéristiques

$$\text{doivent être les mêmes : } \Delta t_{conv} \sim \Delta t_{disp} = \frac{\Delta t_{diff}}{D_z^* Pe_{eff}} ;$$

- cas 5 : pour avoir les convection, diffusion et dispersion comparables il faut avoir

$$Gz \sim D_z^* Pe_{eff} ;$$

- cas 6 : la polymérisation arrive lors de la diffusion;

- cas 7 : lors de l'injection les convections thermique et chimique ont le même ordre de magnitude que la réaction de polymérisation;

- cas 8 : les convections thermique et chimique, ainsi que la réaction de polymérisation et la diffusion ont la même importance, dans ce cas-là on doit

$$\text{avoir } Da \sim \frac{rGz}{r + Gz} ;$$

- cas 9 : tous les phénomènes sont importants.

Tableau 3-7 : Tableau récapitulatif des phénomènes thermiques en RTM

	convection	diffusion	dispersion	polymérisation	
				temporel	convection
cas 1	+	-			
cas 2		+			
cas 3	+	+			
cas 4	+	-	+		
cas 5	+	+	+		
cas 6		+		+	
cas 7	+	-		+	+
cas 8	+	+		+	+
cas 9	+	+	+	+	+

Pour finir ce chapitre, dans le tableau (3-8) les valeurs des principaux paramètres d'une injection RTM sont représentées. Les données du tableau (3-8) sont les propriétés thermiques des fibres et de la résine rencontrées le plus souvent dans l'industrie. Les autres valeurs listées sont les valeurs caractéristiques rhéologiques d'une injection RTM et la vitesse moyenne d'injection. Ces données ont été compilées à partir de plusieurs sources [18, 39, 40, 41, 42, 43].

Tableau 3-8 : Tableau récapitulatif des paramètres importants en RTM

$\rho_f$	kg/m <sup>3</sup>	1000	-	1200
$\rho_s$	kg/m <sup>3</sup>	1700	-	2600
$c_{pf}$	J/kgK	1800	-	2400
$c_{ps}$	J/kgK	800	-	1200
$k_f$	W/mK	0.1	-	0.2
$k_s$	W/mK	1	-	9
$\varepsilon_f$	-	0.5	-	0.95
$S$	m <sup>2</sup>	10 <sup>-10</sup>	-	10 <sup>-8</sup>
$v_x$	m/s	0.002	-	0.05

## CHAPITRE 4

### IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME THERMIQUE

#### 4.1 Introduction

Après avoir présenté l'équation du bilan énergétique pour une injection RTM dans les chapitres précédents, l'implémentation numérique va être discutée. On va donc résoudre l'équation de conservation d'énergie décrivant les phénomènes thermophysiques se produisant durant une injection RTM qui a été développée dans le chapitre 2 :

$$\begin{aligned} & \rho c_p \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} \langle v_f \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle \\ & = \nabla \cdot \{ (k_e + K_D) \nabla \langle T \rangle \} - \rho_f \Delta h \left\langle \frac{D\chi}{Dt} \right\rangle - \langle v_f \rangle \cdot \nabla \langle P_f \rangle' \end{aligned} \quad (4-1)$$

La méthode numérique habituelle de résolution de cette équation est la méthode de Taylor-Galerkin où la convection et la diffusion thermiques sont résolues en même temps. Mais des résultats obtenus en utilisant cette méthode présentent des oscillations dans certains cas, en particulier quand la convection thermique est grande. Pour remédier à ce problème, la résolution numérique de l'équation (4-1) est découplée où d'abord la diffusion thermique est résolue, puis la convection thermique. Ainsi la méthode de Galerkin standard est utilisée pour la résolution de la diffusion thermique et la méthode de Lesaint-Raviart pour la convection. Pour un pas de temps donné, déterminé lors du

calcul du champ de vitesse par l'équation de Darcy, d'abord la méthode de Galerkin standard prédit le champ de température en calculant l'équation de diffusion, puis le résultat est corrigé en effectuant le transport de la température à la vitesse d'injection grâce à la méthode de Lesaint-Raviart. De cette façon un découplage entre la diffusion et la convection est obtenu et les oscillations dues au couplage sont éliminées.

Tout d'abord, on va donc présenter tous les modes de transfert de chaleur pour résoudre de façon générale les différents types de problèmes thermiques. Par la suite, l'implémentation des problèmes statiques en diffusion va être étudiée, pour ensuite incorporer la variation temporelle. Finalement la résolution de la convection thermique par la méthode de Lesaint-Raviart va être présentée.

## 4.2 Modes de transfert de chaleur

La chaleur peut seulement être transmise des trois manières suivantes : diffusion, convection ou rayonnement. Ces phénomènes peuvent agir seul ou interagir ensemble.

La diffusion est le mode de transfert de chaleur dans un milieu où un gradient de température est présent. Le flux de chaleur est évalué par la loi de Fourier de diffusion de la chaleur, qui exprime que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température  $q = -kA\nabla T$ , où  $A$  représente l'aire étudiée et  $k$  est la conductivité thermique, une propriété du milieu qui peut dépendre de la température. La conductivité thermique

est définie seulement pour un milieu isotrope. Dans un milieu orthotrope, la conductivité  $k$  est remplacée par le tenseur de conduction thermique  $\mathbf{k}$ . Dans l'équation (4-1) le terme de diffusion est le premier terme de droite où le tenseur de conductivité thermique est composé du tenseur de conductivité effective  $\mathbf{k}_e$  et du tenseur de dispersion hydrodynamique  $\mathbf{K}_D$ .

La convection est le phénomène dû au transport de la température dans un milieu en mouvement, par exemple un écoulement de fluides. Deux types de convection existent : la convection naturelle et la convection forcée. La convection naturelle est présente quand la circulation du fluide est induite par la présence de l'accélération gravitationnelle et par des variations de la densité du fluide. La convection forcée est le mode de transfert de chaleur qui résulte d'une vitesse imposée du fluide. Ainsi dans l'équation (4-1) la vitesse d'injection de la résine induit le deuxième terme de gauche qui est la convection forcée.

Dans le cas de la condition limite en convection pour un système étudié, le flux de chaleur est évalué par l'équation suivante (*Newton's law of cooling*) :

$$q = hA(T_\infty - T) \quad (4-2)$$

où  $q$  représente le flux de la chaleur à travers une aire  $A$ , les températures  $T$  et  $T_\infty$  sont respectivement la température de l'objet et du fluide en écoulement et  $h$  est le coefficient de convection naturelle ou forcée qui peut dépendre de la température. Il existe plusieurs corrélations pour le calculer en fonction du problème étudié.

Le transfert thermique par rayonnement est dû aux émissions électromagnétiques spontanées des corps. L'intensité de ces émissions en un point donné ne dépend que de la température de la surface et de ses propriétés superficielles, par exemple si la surface est polie ou non. L'intensité est aussi fonction de la fraction du rayonnement qui atteint l'environnement extérieur. Une partie des émissions peut être interceptée et réabsorbée par la surface elle-même, donc la géométrie de la surface ainsi que l'environnement influencent le transfert de chaleur par rayonnement. En considérant la température extérieure  $T_\infty$  uniforme, le rayonnement peut être modélisé comme suit :

$$q_{rad}'' = F\epsilon\sigma(T_s^4 - T^4) \quad (4-3)$$

Les températures  $T$  et  $T_\infty$  sont respectivement la température de l'objet qui émet le rayonnement et la température de l'environnement. Les coefficients  $\epsilon$  et  $\sigma$  représentent respectivement l'émissivité de la surface et la constante de Stefan-Boltzmann. La valeur de cette constante est  $\sigma = 5.669 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ . L'émissivité est une propriété de la surface. Elle est fonction de la température et de la longueur d'onde. Le coefficient  $F$  représente le facteur de vision, c'est-à-dire la fraction du rayonnement émis par la surface qui atteint l'environnement. Pour une surface polie,  $F$  est faible.

Dans le cas où la différence de température entre la surface et l'environnement est faible, une approximation au premier ordre peut être faite en utilisant un développement de Taylor autour de  $T_\infty$  :



$$q''_{rad} \approx q''(T_{\infty}) + (T - T_{\infty}) \partial_T q''(T_{\infty})$$

$$q''_{rad} \approx 0 + (T - T_{\infty}) (-4F\varepsilon\sigma T_{\infty}^3)$$

$$q''_{rad} \approx 4F\varepsilon\sigma T_{\infty}^3 (T_{\infty} - T) \quad (4-4)$$

Cette approximation est valide dans le cas où la différence de température est beaucoup plus petite que  $T_{\infty}$  comme on le voit sur les deux graphiques de la figure (4-1). Dans le premier cas la température de référence est 20K et dans le deuxième 200K. La solution exacte, dans les deux cas, est donnée par l'équation (4-3) et l'approximation par l'équation (4-4).

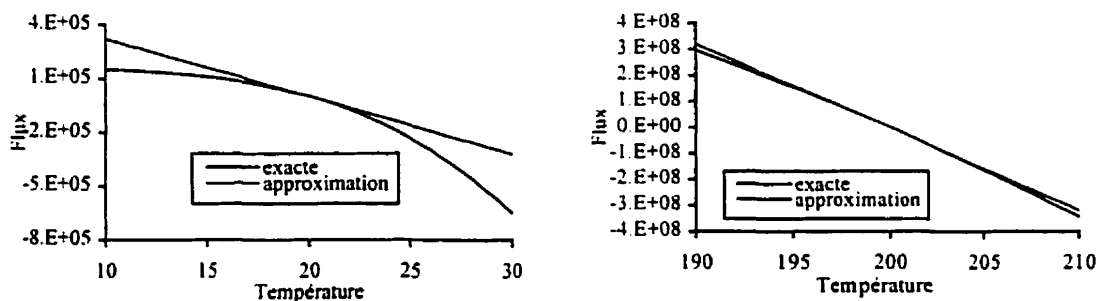


Figure 4-1 : Approximation de la condition limite de radiation pour  $T_{\infty} = 20K$  et pour  $T_{\infty} = 200K$

### 4.3 Résolution du problème couplé

La simulation du procédé RTM s'effectue en trois étapes. Le schéma de la figure (4-2) explique ces trois étapes lors de la résolution d'un pas de temps. D'abord le

problème d'écoulement est résolu en utilisant l'équation de Darcy. Ceci permet de déterminer le pas de temps nécessaire pour remplir au moins un nouvel élément du maillage ainsi que le champ de vitesse  $v$ . Ensuite, la partie thermique du problème est résolue en deux étapes. Premièrement l'équation de diffusion est résolue en utilisant la méthode de Galerkin standard (l'équation utilisée va être présentée dans la section suivante), ensuite le champ de température calculé dans la première étape (conduction) est transporté par l'écoulement de la résine. La résolution de cette deuxième étape s'effectue par la méthode de Lesaint-Raviart. Finalement, la cinétique chimique est résolue aussi en deux étapes : le degré de conversion est d'abord transporté avec l'écoulement, puis l'exothermie est calculée. La résolution de l'équation qui gouverne la polymérisation de la résine va être présentée en détail dans le sixième chapitre.

La simulation du procédé RTM est un problème fortement couplé qui fait intervenir les équations de l'écoulement, de la thermique et de la cinétique chimique. La résolution des équations du problème couplé s'effectue selon la procédure décrite à la figure (4-2), c'est-à-dire qu'à chaque itération on résout dans l'ordre l'équation de Darcy qui gouverne l'écoulement, l'équation de la thermique et finalement, le transport des espèces chimiques et la cinétique de polymérisation.

Ainsi la viscosité fait partie de la loi constitutive qui gouverne l'injection (loi de Darcy). Elle est fonction de la température et du degré de polymérisation. Les données utilisées sont prises au pas de temps précédent pour le calcul de la viscosité. Lors de la

résolution de la diffusion thermique, le terme source est déterminé par l'exothermie du pas de temps précédent car la polymérisation n'est pas encore résolue. Les champs de température et de vitesse utilisés dans le calcul de la réaction chimique sont évalués au pas de temps courant, car ils ont déjà été calculés.

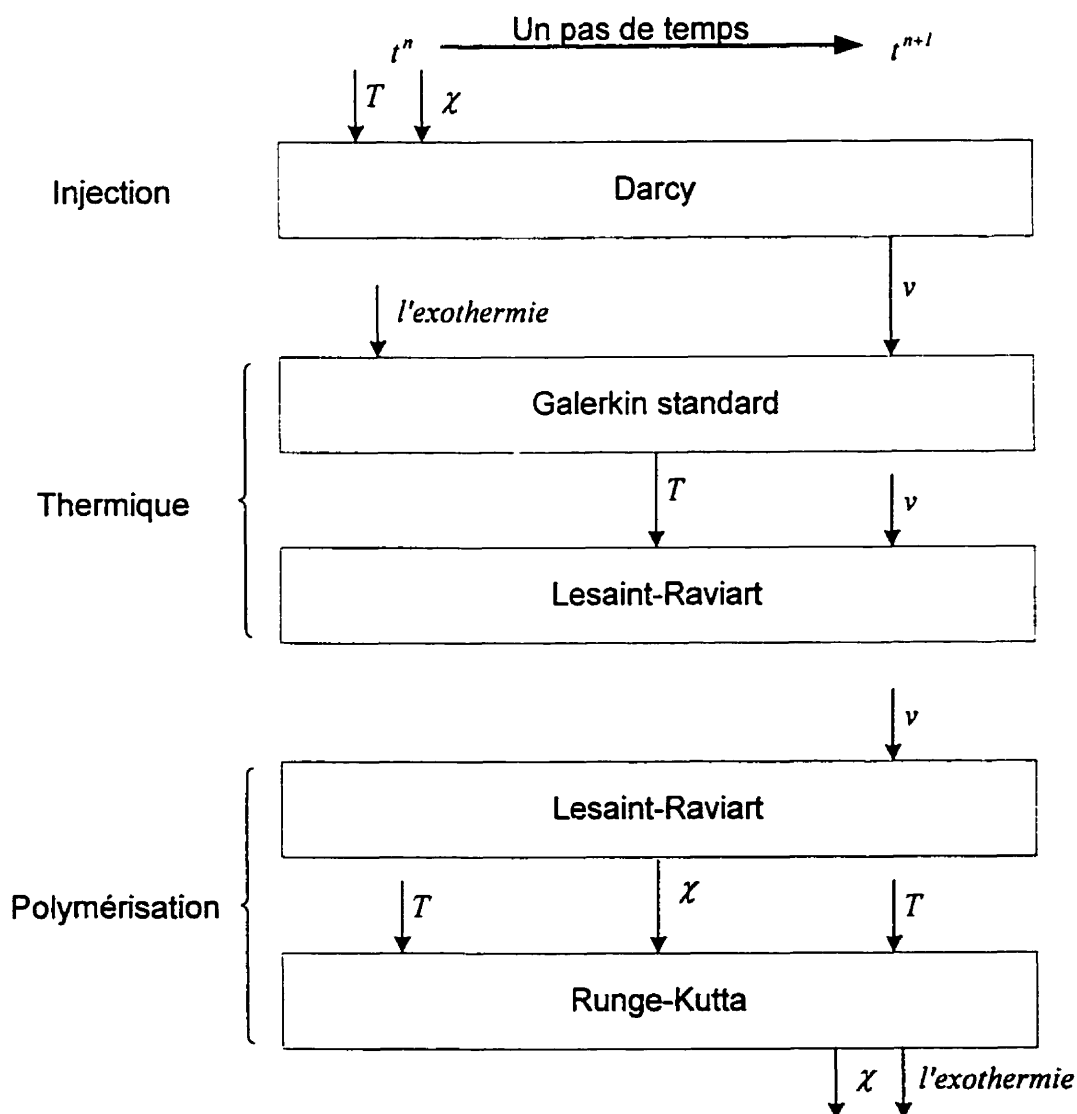


Figure 4-2 : Shéma de la séquence de calcul

## 4.4 Discrétisation du problème thermique stationnaire

### 4.4.1 Méthode de Galerkin standard

La méthode de Galerkin standard est utilisée pour la résolution de l'équation de diffusion thermique suivante :

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = S \text{ sur } \Omega \quad (4-5)$$

où  $S$  est la source de chaleur et  $\Omega$  est la région étudiée. Pour définir complètement le problème de diffusion thermique il faut imposer des conditions limites sur la surface  $\delta\Omega$  englobant la région  $\Omega$ . Deux types de conditions limites peuvent être imposés : la température sur la surface ou le flux de chaleur perpendiculaire à la surface peuvent être connus. Ce sont les conditions limites suivantes :

$$T|_{\Gamma_T} = T_{imp} \quad (4-6)$$

$$n \cdot q|_{\Gamma_q} = Q \quad (4-7)$$

Les frontières  $\Gamma_T$  et  $\Gamma_q$  forment la surface  $\delta\Omega$  et doivent satisfaire les deux conditions suivantes :

$$\Gamma_T \cup \Gamma_q = \delta\Omega \quad (4-8)$$

$$\Gamma_T \cap \Gamma_q = \emptyset \quad (4-9)$$

L'équation (4-5) doit être valide en chaque point du domaine  $\Omega$ . Il s'agit donc d'une équation locale définissant le problème étudié. Les équations locales ne peuvent pas être directement implémentées dans un logiciel de simulation, car tous les points du domaine ne peuvent être définis. Ainsi il faut d'abord obtenir la forme faible de l'équation (4-5) et discrétiser le domaine  $\Omega$  en un nombre fini d'éléments géométriques (Annexe C). En utilisant l'interpolation par éléments finis suivante pour la discrétisation spatiale de la température:

$$T(p) = \sum T_n f_n(p) \quad (4-10)$$

où  $n$  représente le nombre de degrés de liberté,  $f_n(p)$  est la fonction de forme pour chaque degré de liberté  $n$  évalué au point  $p$  et  $T_n$  est la valeur de la température au degré de liberté  $n$ , on obtient le système d'équations discrétisées suivant :

$$\sum_{n \in N} T_n \int_{\Omega} (k \nabla f_n) \cdot \nabla w_m dV + \int_{\Omega} S w_m dV - \int_{\Gamma_q} Q w_m ds = 0, \quad m \in M \quad (4-11)$$

Dans cette équation  $w_m$  représente les fonctions tests. En utilisant le même espace fonctionnel pour les fonctions tests  $w_m$  et les fonctions de forme  $f_n$  on obtient un système de  $N$  équations avec  $N$  inconnues,  $T_n$ .

#### 4.4.2 Problème thermique stationnaire

Après avoir introduit les trois modes de transfert de chaleur dans la section 4.2, on peut maintenant réécrire les équations (4-5) à (4-7) où la source volumique  $S$  englobe les

équations (4-2) et (4-4) pour la convection et le rayonnement ainsi que l'exothermie donnée par la réaction chimique de polymérisation. Pour plus de généralité, la source  $S$ , ainsi que le flux de chaleur imposé  $Q$  peuvent être fonctions de la température à travers les équations suivantes :

$$S = \rho \Delta h \frac{D\chi}{Dt} - \beta \frac{Dp}{Dt} T + \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T + \mathbf{v} \cdot \nabla P \quad (4-12)$$

$$Q = q_{tot} - h' T \quad (4-13)$$

où  $h'$  est le coefficient de transfert qui englobe la convection naturelle, la convection forcée et le rayonnement thermique. Il est défini de la manière suivante :

$$h' = h_{nat} + h_{for} + 4F\varepsilon\sigma T_\infty^3 \quad (4-14)$$

Le terme  $q_{tot}$  englobe la convection et le rayonnement :

$$q_{tot} = q_0 + (h_{nat} + 4F\varepsilon\sigma T_\infty^3) T_\infty + h_{for} T_m \quad (4-15)$$

Dans l'équation (4-15),  $q_0$  représente le flux de chaleur imposé à la frontière  $\Gamma_q$ . Dans ces deux équations (4-14) et (4-15),  $h_{nat}$  et  $h_{for}$  représentent, respectivement, le coefficient de convection naturelle et le coefficient de convection forcée. Dans l'équation (4-12) la relation entre la pression modifiée  $P$  et la pression statique  $p$  est la suivante :

$$P = p + \rho gh$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $h$  la cote vertical du point matériel considéré par rapport à un axe de référence, tandis que  $\beta$  est le coefficient d'expansion thermique défini de la manière suivante :

$$\beta = \frac{-1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

Dans notre simulation du procédé RTM, le coefficient d'expansion thermique  $\beta$  est considéré nul.

On peut maintenant écrire les équations (4-5) à (4-7) pour le problème général de la thermique stationnaire sur le domaine  $\Omega$  :

$$\nabla \cdot \{(k_e + K_D) \nabla T\} = \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} + \rho_f c_p \nu_f \cdot \nabla T + \nu_f \cdot \nabla P_f \text{ sur } \Omega \quad (4-16)$$

avec les conditions limites suivantes :

$$T|_{\Gamma_f} = T_{imp} \quad (4-17)$$

$$n \cdot q|_{\Gamma_q} = q_{tot} - h' T \quad (4-18)$$

Pour les éléments finis, ces trois équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M^1(\Omega, k_e + K_D) + M^2(\Gamma_d, h')]\{T\} = \left\{ S(\Gamma_d, q_{tot}) + S\left(\Omega, \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} + \nu_f \cdot \nabla P_f\right) \right\} \quad (4-19)$$

Pour passer de l'équation (4-16) à (4-19) trois intégrales sont définies sous forme générale matricielle de la manière suivante :

$$M_{m,n}^1(E, q) = \int_E (q \nabla f_n) \cdot \nabla w_m dE \quad (4-20)$$

$$M_{m,n}^2(E, q) = \int_E q f_n w_m dE$$

$$S_m(E, q) = \int_E q w_m dE$$

Dans ces définitions,  $E$  est le domaine géométrique,  $q$  est une propriété du système (i.e. un paramètre physique),  $f_n$  est la fonction de forme au degré de liberté  $n$  et  $w_m$  est la  $m$ -ème fonction test. L'espace fonctionnel des fonctions tests n'est pas nécessairement le même que celui des fonctions de forme, même si dans notre cas ils sont identiques.

Le premier terme de la matrice de l'équation (4-19) est le terme de diffusion de la chaleur. Le deuxième terme est la condition limite de convection et de rayonnement. Dans le second membre, le terme  $q_{tot}$  est le flux imposé sur la frontière du domaine étudié ainsi que la condition limite de convection et de rayonnement. Le dernier terme est la source de chaleur dans le domaine : la polymérisation de la résine et la charge hydraulique.

En passant de l'équation (4-16) à l'équation (4-19), le terme de convection a été omis car la résolution du problème convectif se fait séparément du reste de l'équation en utilisant la méthode Lesaint-Raviart qui est mieux adaptée pour ce genre de problème.

#### 4.4.3 Validation analytique du problème thermique stationnaire

Pour valider la résolution numérique de l'équation de diffusion thermique, trois cas ont été étudiés en deux dimensions et deux cas en trois dimensions. Ainsi la



simulation de la diffusion de la chaleur à travers un mur a donné de très bons résultats puisque la solution analytique a été retrouvée. Le deuxième exemple étudié était la diffusion de chaleur dans un cercle avec une source de chaleur constante en présence de la convection naturelle imposée sur le périmètre du cercle. Cet exemple constitue en fait un calcul unidimensionnel où la seule variable est le rayon  $r$ . La différence de température calculée par le logiciel et donnée par la solution analytique est inférieure à 0.5 % sur tout le domaine. L'annexe D contient tous ces exemples en entier.

Une simulation de la diffusion dans un carré avec deux températures imposées a aussi été effectuée. Dans cet exemple bidimensionnel, la diffusion était le seul phénomène thermique présent. La figure (4-3) représente le carré de longueur caractéristique  $L$  étudié avec les températures adimensionnelles indiquées.

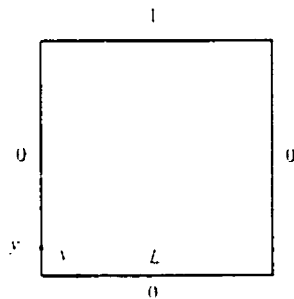


Figure 4-3 : Schéma du problème étudié



Figure 4-4 : Distribution de température

L'équation différentielle de la diffusion thermique pour ce problème est :

$$\nabla^2 \psi(x, y) = 0 \quad (4-21)$$

avec les conditions limites suivantes :

$$\psi(0, y) = \psi(L, y) = \psi(x, 0) = 0 \text{ et } \psi(x, L) = 1 \quad (4-22)$$

La solution analytique de ce problème est dérivée à l'annexe D3 :

$$\psi(x, y) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\pi \sinh(2n+1)\pi]^{-1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \sinh \frac{(2n+1)\pi y}{L} \quad (4-23)$$

Sur la figure (4-4), on voit la distribution de température dans le carré calculée par le logiciel. Sur les deux figures suivantes (Fig. 4-5 et 4-6), on fait la comparaison entre la température adimensionnelle calculée analytiquement et la solution numérique. Pour la solution analytique (Eq. 4-23), le paramètre  $n$  choisi est 300 ce qui est assez grand pour obtenir la solution exacte. On voit que la solution analytique et la solution numérique coïncident sur les deux graphiques. De plus en comparant les valeurs des deux solutions on remarque que la différence des deux valeurs est inférieure à 5 %.

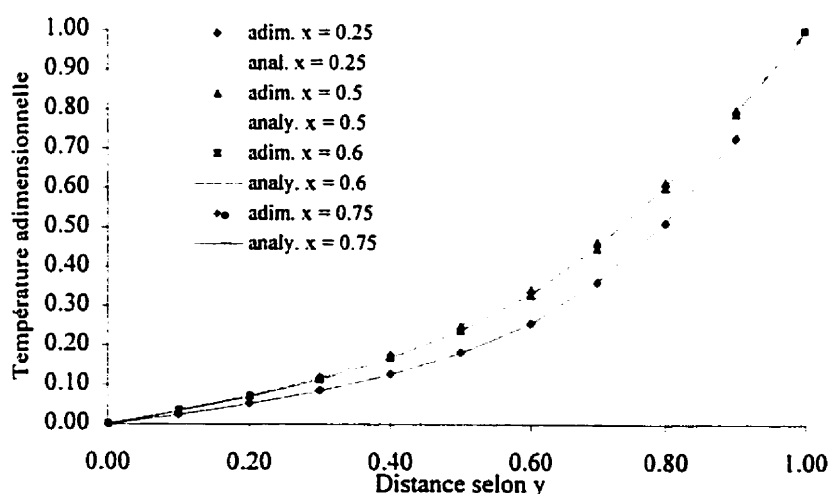


Figure 4-5 : Températures analytiques et numériques pour plusieurs positions de  $x$

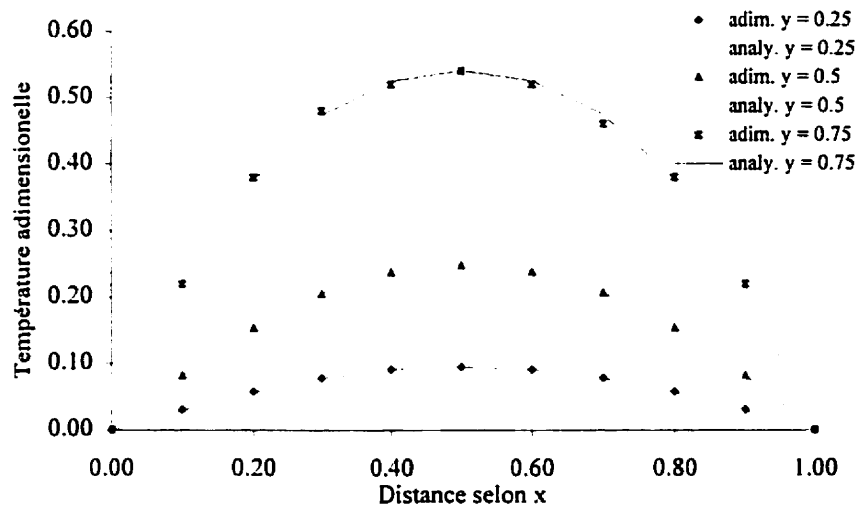


Figure 4-6 : Températures analytiques et numériques pour plusieurs positions de  $y$

Le même exemple a été repris en trois dimensions où la diffusion thermique dans un cube avec deux températures imposées est étudiée (Annexe D4). De nouveau de très bons résultats ont été obtenus puisque la différence entre la solution calculée par le logiciel et la solution analytique est inférieure à 10 %. Mêmes résultats sont obtenus pour la diffusion dans un cylindre avec deux températures imposées (Annexe D5). Ainsi, on peut conclure que la méthode numérique de Galerkin standard donne de très bons résultats pour la diffusion thermique en stationnaire.

#### 4.5 Discrétisation temporelle du problème thermique

Quand la température change avec le temps, le problème général décrit par l'équation (4-16) contient un terme en plus : la dérivée temporelle. De plus, une condition

initiale doit être imposée sur tout le domaine  $\Omega$ . Le problème est maintenant posé de la façon suivante :

$$\nabla \cdot \{(k_e + K_D) \nabla T\} = \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_f c_{p_f} \mathbf{v}_f \cdot \nabla T + \mathbf{v}_f \cdot \nabla P_f \text{ sur } \Omega \quad (4-24)$$

avec les conditions limites suivantes :

$$T|_{\Gamma_r} = T_{imp} \quad (4-25)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}|_{\Gamma_q} = q_0 + q_l - h' T \quad (4-26)$$

et la condition initiale sur tout le domaine  $\Omega$  :

$$T|_{t=0} = T_{ini} \quad (4-27)$$

La température de la condition initiale  $T_{ini}$  n'est pas nécessairement une constante, elle peut varier selon l'espace. L'équation (4-24) représente l'équation de conservation de l'énergie (4-1).

Les équations (4-24) à (4-27) peuvent aussi être écrites sous forme matricielle en utilisant une formulation variationnelle et une discrétisation par éléments finis de la façon suivante:

$$\begin{aligned} & \left[ M^1(\Omega, k_e + K_D) + M^2(\Gamma_d, h') - M^2(\Omega, \rho c_p \partial_t) \right] \{T\} \\ & = \left\{ S(\Gamma_d, q_{tot}) + S\left(\Omega, \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla P_f\right) \right\} \end{aligned} \quad (4-28)$$

où la notation  $\partial_t$  représente la dérivée partielle par rapport au temps.

Pour discrétiser le temps, la formule d'Euler est utilisée de la façon suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^n - T^{n-1}}{\Delta t} = \theta L(T^n) + (1 - \theta)L(T^{n-1}) \quad (4-29)$$

En utilisant l'équation (4-29) et en divisant par  $\rho c_p$ , l'équation (4-28) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & \left[ M' \left( \Omega, \frac{\theta(k_e + K_D)}{\rho c_p} \right) + M^2(\Gamma_d, \theta h') - M^2 \left( \Omega, \frac{1}{\Delta t} \right) \right] \{T^n\} = \\ & \left\{ S(\Gamma_d, q_{tot}) + S \left( \Omega, \frac{\rho_f \Delta h}{\rho c_p} \frac{D\chi}{Dt} + \frac{1}{\rho c_p} v_f \cdot \nabla P_f \right) \right\} + \\ & \left[ M' \left( \Omega, \frac{(1-\theta)(k_e + K_D)}{\rho c_p} \right) + M^2(\Gamma_d, (1-\theta)h') - M^2 \left( \Omega, \frac{1}{\Delta t} \right) \right] \{T^{n-1}\} \end{aligned} \quad (4-30)$$

Cette méthode de Galerkin standard permet de résoudre l'équation d'énergie sans le terme de convection.

#### 4.5.1 Diffusion dans une poutre avec une température initiale imposée

Dans cet exemple, on veut vérifier la validité du code dans le cas où la température varie avec le temps. On étudie une poutre de longueur 20 avec une température de 1 aux bords et la température initiale à l'intérieur de 0. La figure (4-7) représente la géométrie du problème et les conditions limites. Il s'agit d'un problème unidimensionnel avec toutes les constantes thermiques prises égales à l'unité. Seulement la moitié de la poutre est modélisée car il s'agit d'un problème symétrique.

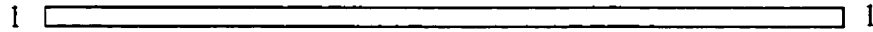


Figure 4-7 : Schéma de la poutre avec les conditions limites

L'équation différentielle de ce problème est :

$$\partial_t \psi = \partial_{xx} \psi \quad (4-31)$$

avec les conditions limites suivantes :

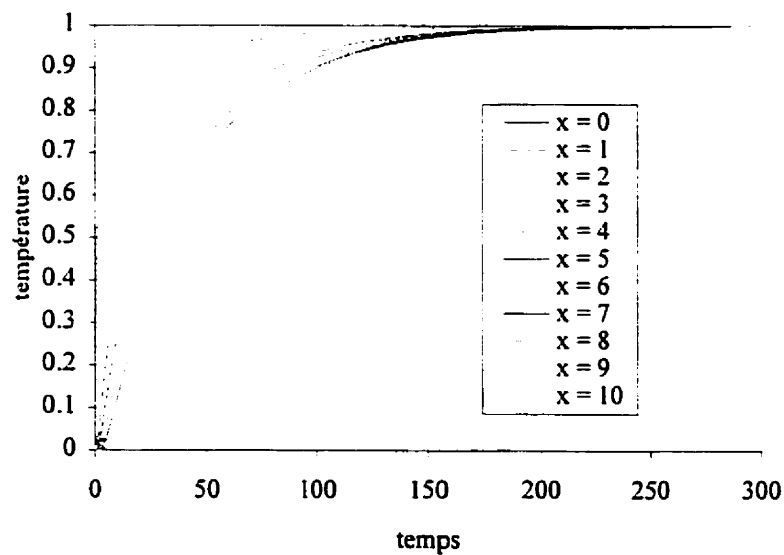
$$\psi(0, t) = 1 \text{ et } \psi(L, t) = 1 \quad (4-32)$$

et la conditions initiale suivante :

$$\psi(x, 0) = 0 \quad (4-33)$$

La solution analytique dérivée à l'annexe D6 s'écrit sous la forme suivante :

$$\psi(x, t) = 1 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right] e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2 t} \quad (4-34)$$

Figure 4-8 : Solution analytique à plusieurs positions de  $x$

La figure (4-8) représente la solution analytique à différentes positions le long de la poutre quand la température est fonction du temps. Seulement la moitié de la poutre est étudiée car ce problème est symétrique autour de  $x = 10$ . La figure (4-9) montre la comparaison entre la solution analytique et la solution numérique calculée par la méthode de Galerkin standard.

On voit sur la figure (4-9) que la solution numérique est comparable à la solution analytique, puisque les trois paires de courbes sont superposées. Les pas de temps choisis sont de 0.01 jusqu'à 3 secondes, de 0.1 jusqu'à 20 secondes et de 5 jusqu'à 200 secondes pour capter la variation rapide de la température avec le temps.

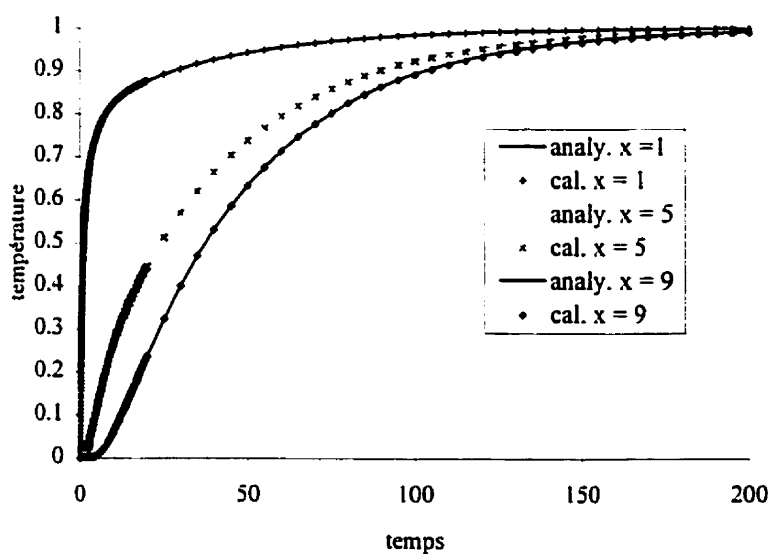


Figure 4-9 : Comparaison entre la solution analytique et la solution numérique

## 4.6 Solution du problème convectif

### 4.6.1 Méthode de Lesaint-Raviart

Dans un phénomène convectif la température est transportée par un champ de vitesse donné. La solution cherchée représente l'évolution du champ de température en fonction du temps. Pour ce genre de problèmes, une seule condition limite est nécessaire sur la portion de frontière où l'injection est effectuée. La convection dans un écoulement est un problème dans lequel l'état du système en un point n'influence pas ce qui se passe en amont. La variation du champ en un nœud n'aura donc un impact qu'en aval de ce nœud, parce que la grandeur physique analysée est transportée uniquement le long des lignes de courant. On observe donc, à chaque pas de temps, un accroissement du domaine de résolution avec l'avancement du front d'écoulement jusqu'à ce que la région étudiée embrasse tout le domaine de résolution.

En utilisant une méthode d'approximation par éléments finis classique, l'information est instantanément transmise au domaine d'étude complet (dans notre cas, il s'agit de la préforme entière y compris les parties sèche et imprégnée). Dans le cas de problèmes de convection, ceci induit des oscillations car la solution pour chaque élément est influencée par tous ses voisins par le biais des nœuds communs qui sont fixés à la même valeur lors de l'assemblage de la matrice de raideur. En revanche, la méthode de



Lesaint-Raviart est mieux adaptée à la résolution des problèmes de convection car elle n'introduit pas d'oscillations artificielles dans la solution.

L'équation à résoudre dans le cas général de la convection thermique est la suivante :

$$\begin{cases} \partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = f, \text{ sur } \Omega \\ T = T_{imp}, \text{ sur } \partial\Omega^- \end{cases} \quad (4-35)$$

où  $T$  est la température transportée à la vitesse  $\mathbf{v}$ ,  $\Omega$  est le domaine d'étude et  $\partial\Omega^-$  est la frontière entrante de  $\Omega$ . La condition limite est imposée sur  $\partial\Omega^-$  où la valeur imposée  $T_{imp}$  peut être fonction de la position et du temps. La fonction  $f$  représente un terme source qui peut être fonction du temps et de la position. Cette équation est locale car elle doit être vérifiée en chaque point du domaine. Elle ne peut pas être implémentée dans le code telle quelle. Il faut donc prendre la forme faible de cette équation en introduisant une fonctionnelle spécifique pour les termes frontières dans la formulation variationnelle. En utilisant les fonctions tests  $w$  appartenant à un espace fonctionnel restreint, la forme faible de l'équation de transport s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T) w dV = \int_{\Omega} f w dV + \int_{\partial\Omega_e} [T^+ - T^-] \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \\ T^+ = T_{imp}, \text{ sur } \partial\Omega_e^- \end{cases} \quad (4-36)$$

où  $T^+$  et  $T^-$  sont les valeurs de la température immédiatement en amont et en aval de la frontière  $\partial\Omega_e^-$ , respectivement. Ce terme quantifie le débit de la différence entre la valeur en amont de la frontière et en aval de cette frontière. Dans le cas d'un champ continu, les

deux valeurs sont égales et ce terme devient nul. En introduisant la condition limite dans la forme variationnelle de cette façon, on confère à l'approximation une certaine souplesse pour épouser au mieux les discontinuités naturelles de la solution.

Comme la résolution de la méthode Lesaint-Raviart s'effectue élément par élément en utilisant l'équation (4-36), il faut déterminer, à chaque pas de temps, l'ordre dans lequel les éléments seront traités. La recherche du chemin de résolution est un processus itératif qui consiste à construire une séquence d'éléments (fig. 4-10). En parcourant tous les éléments du maillage, les éléments possédant une face d'injection seront les premiers éléments sur lesquels le problème (4-36) sera résolu car leur valeur en amont est connue par hypothèse (la valeur du potentiel scalaire à l'injection). Ensuite les éléments dont on connaît la solution sur toutes les faces entrantes ou tangentes à l'écoulement (débit nul obtenu par produit scalaire de la vitesse avec le vecteur normal sortant) sont ajoutés à la séquence. Puis de façon itérative, le module de recherche intègre tous les éléments du domaine saturé, donc en amont du front d'écoulement.

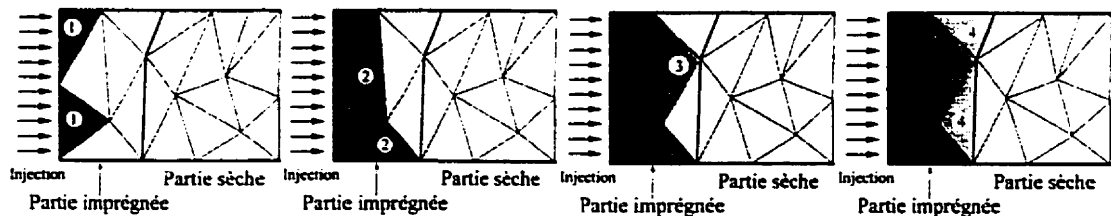


Figure 4-10 : Recherche du chemin de résolution

#### 4.6.2 Discrétisation temporelle de la méthode de Lesaint-Raviart

Avec la méthode de Galerkin standard, la dérivée temporelle est approximée par la formule d'Euler, tandis que pour la méthode de Lesaint-Raviart, les meilleurs résultats sont obtenus avec la formule de Gear et le schéma implicite. Pour le schéma de Gear la dérivée par rapport au temps est approximée avec trois pas de temps :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1.5T^n - 2T^{n-1} + 0.5T^{n-2}}{\Delta t} \quad (4-37)$$

La formule de Gear a une erreur au second degré car l'erreur est donc donnée par le terme  $\Delta t^2$  de la série de Taylor :

$$\frac{1.5T^n + 0.5T^{n-2} - 2T^{n-1}}{\Delta t} = \partial_t T + O(\Delta t^2)$$

obtenu par l'opération suivante :

$$\begin{array}{rcl} 0.5|T^{n-2} & = T^n & - 2\Delta t \partial_t T + \frac{1}{2}\Delta t^2 \partial_{tt} T - \frac{1}{6}\Delta t^3 \partial_{ttt} T \\ - 2|T^{n-1} & = T^n & - \Delta t \partial_t T + \frac{1}{2}\Delta t^2 \partial_{tt} T - \frac{1}{6}\Delta t^3 \partial_{ttt} T \\ \hline 0.5T^{n-2} - 2T^{n-1} & = & -1.5T^n + \Delta t \partial_t T + 0 \quad - \frac{1}{3}\Delta t^3 \partial_{ttt} T \end{array}$$

En utilisant l'approximation de la dérivée temporelle par la formule de Gear avec un schéma implicite l'équation (4-36) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^*} \left( \frac{1.5T^n - 2T^{n-1} + 0.5T^{n-2}}{\Delta t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T^n \right) w dV = \int_{\Omega^*} |T^{n+} - T^{n-}| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \\ T^+ = T_{imp}, \text{ sur } \partial\Omega^* \end{array} \right. \quad (4-38)$$

Les équations (4-30) et (4-38) sont implémentées dans le code pour la résolution du champ de température à un pas de temps donné.

### 4.6.3 Validation de Lesaint-Raviart

Trois exemples d'injection à vitesse constante vont être présentés pour valider la méthode de Lesaint-Raviart lors de la résolution de la convection. Ainsi pour le premier exemple, l'étude de la propagation de la température est effectuée sur un rectangle. Ensuite, pour les deux autres exemples, la même étude est réalisée dans un rectangle contenant un trou. Dans le premier cas, la température chaude est injectée par le côté gauche du rectangle et du trou, tandis que dans le dernier exemple, elle est injectée seulement par le côté gauche du rectangle, le trou constituant alors un obstacle.

#### 4.6.3.1 Injection dans un rectangle simple

L'état initial du rectangle de longueur 1 m est à une la température nulle. L'injection s'effectue du côté gauche avec une température unitaire. La vitesse de l'injection est de 0.1 m/s, ainsi le rectangle est rempli en 10 s. Comme on a retenu 10 pas de temps pour effectuer le calcul, à chaque pas de temps 0.1 m doit être rempli. La figure (4-11) représente l'avancement du front après 6 pas de temps et après 10 pas de temps respectivement. La méthode de Lesaint-Raviart donne la bonne solution puisque après 6 pas de temps 0.6 m ont été remplis et après 10 pas de temps tout le rectangle est plein. La solution devrait être un échelon de température 0 avant le front et 1 en amont du front, en réalité la méthode introduit de la diffusion artificielle, puisque la solution décroît en

température de 1 à 0 sur une distance non négligeable. On suppose que la position du front correspond à la valeur 0.5, c'est-à-dire à la moyenne entre les deux températures.

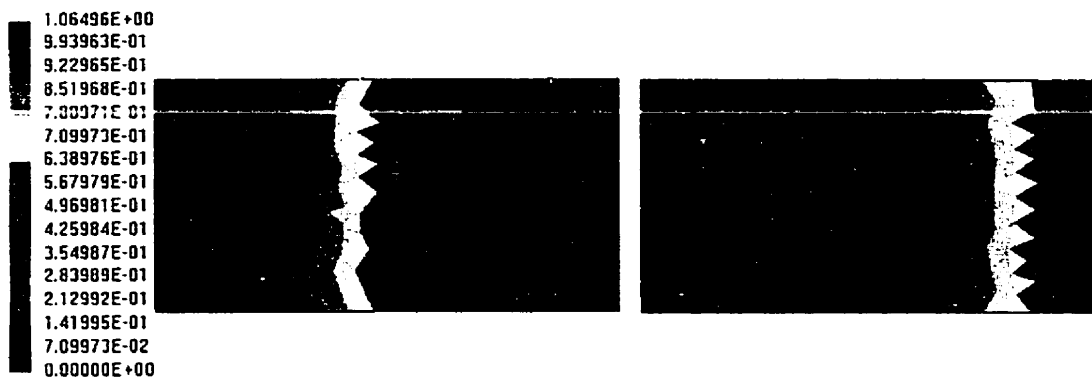


Figure 4-11 : La distribution de température après 6 et 10 pas de temps respectivement

#### 4.6.3.2 Injection dans un rectangle par le côté gauche et par un trou d'un même état de température

La condition initiale est la même que pour l'exemple précédent. L'injection est effectuée par le côté droit du trou en plus d'être du côté gauche du rectangle comme dans l'exemple précédent. L'image en haut à gauche de la figure (4-12) représente le maillage utilisé pour cet exemple. La longueur de ce rectangle est aussi de 1 m et il est rempli en 10 pas de temps. La première image montre la distribution de température après 2 pas de temps, tandis que les deux images du bas correspondent respectivement à 3 et 10 pas de temps. Comme l'injection est effectuée par les côtés gauches du rectangle et du trou en même temps, le front n'est plus droit, mais plutôt arrondi car le centre est en avance par rapport aux deux bords. Les mêmes conclusions peuvent être prises comme dans

l'exemple précédent, c'est-à-dire que la méthode de Lesaint-Raviart donne de bons résultats, mais induit de la diffusion artificielle au front de l'écoulement.



Figure 4-12 : Maillage et la distribution de température après 2, 3 et 10 pas de temps respectivement

#### 4.6.3.3 Injection dans un rectangle par le côté gauche d'un état de température et par le trou d'un autre état de température

Cet exemple est le même que le précédent, mais la température de l'état injecté par le trou est nulle tandis qu'une température unitaire est la valeur de la température de l'état injecté par le côté gauche du rectangle. On a injecté donc ici deux grandeurs différentes dans un même milieu. La figure (4-13) représente le maillage ainsi que la distribution de température à la fin de l'injection. Comme les deux injections différentes sont effectuées en même temps, la frontière entre les deux états est visible. Dans ce cas aussi, on remarque la diffusion artificielle introduite par la méthode de Lesaint-Raviart. Cette fois-ci, cette diffusion est horizontale puisqu'elle se produit à la frontière entre les deux états

injectés. Un parfait échelon de température est en effet toujours difficile à modéliser avec une approximation par éléments finis.



Figure 4-13 : Maillage et la distribution de température à la fin du remplissage

## **CHAPITRE 5**

### **VALIDATION ANALYTIQUE ET DIVERS EXEMPLES D'INJECTION**

Dans le chapitre précédant, l'implémentation des équations de l'analyse thermique du procédé RTM est présentée et discutée. Ainsi les méthodes de résolution adaptées aux différents phénomènes thermiques sont dérivées et analysées. La complexité de la simulation du moulage par transfert de résine dépend des conditions initiales et limites du problème étudié. Le logiciel servant à résoudre ce problème contient un nombre élevé de boucles, d'instructions conditionnelles, ainsi que d'instructions séquentielles qui rendent le programme propice aux erreurs. Il est donc essentiel de tester adéquatement toutes ses parties afin d'assurer la validité des résultats.

Dans ce mémoire, les échanges thermiques durant une injection sur renfort fibreux constituent le thème étudié, donc la partie du code traitant de l'écoulement de la résine et du remplissage de la cavité est considérée comme étant déjà validée. Dans le chapitre précédent quelques résultats de validation ont été présentés. Ainsi la bonne implémentation des méthodes numériques a été vérifiée. Des exemples de diffusion thermique en deux et trois dimensions ont été présentés pour la validation de la méthode de Galerkin standard. De plus, la méthode de Lesaint-Raviart a été validée.



Ce chapitre présente la validation plus poussée du code thermique. Tout d'abord le couplage de convection-diffusion est étudié en profondeur par des exemples de simulation en deux et trois dimensions. Les résultats obtenus par la méthode courante sont comparés aux résultats obtenus par la méthode de Taylor-Galerkin utilisée dans le logiciel RTMFLOT. Finalement trois exemples d'injection sont présentés en utilisant la méthode de Galerkin standard pour la diffusion thermique et la méthode de Lesaint-Raviart pour la convection.

## 5.1 Problème de convection-diffusion

Les phénomènes thermiques les plus importants se produisant durant un moulage par transfert de résine sont la convection et la diffusion. L'étude de l'équation de convection-diffusion est donc nécessaire. Dans cette section, on veut donc étudier plus en profondeur si les problèmes de convection et de convection-diffusion sont bien résolus par le logiciel LCMFLOT.

L'équation différentielle unidimensionnelle de convection-diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5-1)$$

où  $v$  est la vitesse de convection selon l'axe  $x$ .

La résolution de cette équation (Eq. 5-1) se fait en deux étapes, d'abord la diffusion est résolue en utilisant la méthode de Galerkin standard, puis la température est transportée en utilisant la méthode de Lesaint-Raviart. Ainsi, l'équation (5-1) devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi^{t+1/2}}{\partial t} &= \alpha \left( \theta_d \frac{\partial^2 \psi^{t+1/2}}{\partial x^2} + (1 - \theta_d) \frac{\partial^2 \psi^t}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial \psi^{t+1}}{\partial t} + v \left( \theta_c \frac{\partial \psi^{t+1}}{\partial x} + (1 - \theta_c) \frac{\partial \psi^{t+1/2}}{\partial x} \right) &= 0\end{aligned}\quad (5-2)$$

C'est une méthode de type prédiction-correction où la température est prédite par l'équation de diffusion, puis corrigée par celle de convection. Les dérivées temporelles sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi^{t+1/2}}{\partial t} &= \frac{\psi^{t+1/2} - \psi^t}{\Delta t} \\ \frac{\partial \psi^{t+1}}{\partial t} &= \frac{\psi^{t+1} - \psi^{t+1/2}}{\Delta t}\end{aligned}\quad (5-3)$$

En remplaçant les dérivées temporelles dans les équations (5-2) par l'approximation (5-10) et en ajoutant les deux équations membre à membre, on obtient une bonne approximation de l'équation (5-1) :

$$\frac{\psi^{t+1} - \psi^t}{\Delta t} + v \left( \theta_c \frac{\partial \psi^{t+1}}{\partial x} - (1 - \theta_c) \frac{\partial \psi^{t+1/2}}{\partial x} \right) = \alpha \left( \theta_d \frac{\partial^2 \psi^{t+1/2}}{\partial x^2} - (1 - \theta_d) \frac{\partial^2 \psi^t}{\partial x^2} \right) \quad (5-4)$$

où l'indice  $t$  indique que la valeur est connue car calculée au pas de temps précédent, la valeur ayant l'indice  $t + 1/2$  est la valeur intermédiaire, c'est-à-dire la valeur calculée par la méthode de Galerkin standard, tandis que la valeur à l'indice  $t + 1$  est la nouvelle

valeur calculée pour le pas de temps courant, donc après la résolution par la méthode de Lesaint-Raviart.

Pour valider la résolution de problèmes de convection-diffusion avec cette approche, plusieurs simulations en deux et trois dimensions vont être effectuées. Ainsi dans les deux cas la convection pure, la diffusion pure et le couplage de diffusion-convection vont être examinés. Dans le cas de la convection pure en deux dimensions, on veut savoir si la méthode de Galerkin standard modifie la solution obtenue par la méthode de Lesaint-Raviart. Ainsi le même problème va être résolu par la méthode de Lesaint-Raviart pris indépendamment et par la méthode de prédiction-correction, c'est-à-dire la résolution d'abord par la méthode de Galerkin standard, puis par celle de Lesaint-Raviart. De plus l'influence du maillage va être regardée.

En trois dimensions, la résolution de la convection pure et la résolution de la diffusion pure par le couplage des méthodes de Galerkin standard et de Lesaint-Raviart sont examinées. Pour la diffusion bidimensionnelle l'influence de la méthode de Lesaint-Raviart sur la solution de la simulation est étudiée en comparant les solutions obtenues par la méthode de Galerkin standard et par le couplage des méthodes de Galerkin standard et de Lesaint-Raviart.

On obtiendra ensuite la solution d'un problème de convection-diffusion en deux dimensions. La méthode courante (la méthode de Galerkin standard avec la méthode de

Lesaint-Raviart) va être comparée avec la méthode de Taylor-Galerkin pour la variante de Zienkiewicz. Finalement, en trois dimensions, la dépendance de la viscosité envers la température et l'influence du maillage vont être examinées tour à tour.

## 5.2 Géométrie des cavités d'injection en deux et trois dimensions

Dans les exemples bidimensionnels, la géométrie de la cavité d'injection est représentée à la figure (5-1). L'injection est réalisée par le trou où la température est maintenue à 300 K. Les côtés sont maintenus à 400 K et la température initiale de la préforme est de 350 K. Le maillage non structuré représenté à la figure (5-1) est formé de 338 éléments triangulaires. Les quatre emplacements représentés sur la figure (5-1) sont ceux utilisés pour montrer la distribution de température durant les injections. Lors de l'étude de l'influence du maillage à la section 5.3 où des simulations de convection pure sont présentées le maillage plus fin contient 796 éléments triangulaires.

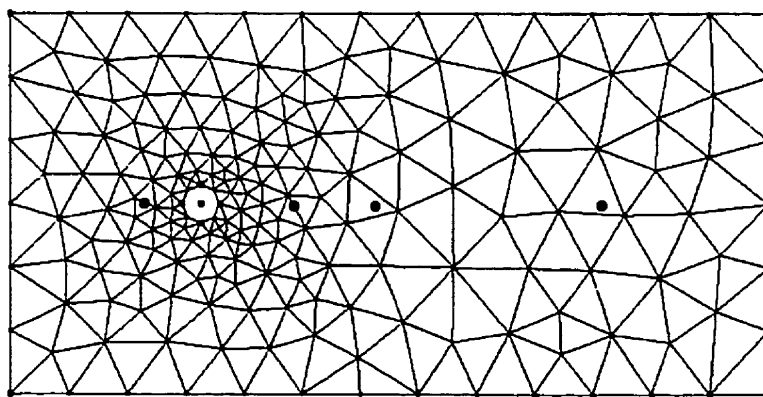


Figure 5-1 : Maillage anisotrope utilisé avec l'emplacement des senseurs

La figure (5-2) montre la géométrie du système. C'est un rectangle de 0.2 m x 0.1 m x 0.03 m. La température d'injection est de 300 K, tandis que la température initiale de la cavité est de 350 K. La face supérieure est maintenue à 400 K, et la face inférieure à 250 K. Il y a 20 senseurs dans la cavité pour connaître la température en ces points. Ces senseurs sont montrés sur la figure (5-2). Pour les différentes simulations tridimensionnelles tous les senseurs ne sont pas utilisés. Dans les graphiques montrant les distributions de température les numéros représentent l'emplacement des senseurs sur la figure (5-2). Le maillage tridimensionnel utilisé contient 5038 éléments tétraédriques non structurés. Dans la section 5.9 où l'influence du maillage est étudiée le deuxième maillage contient 10246 éléments.

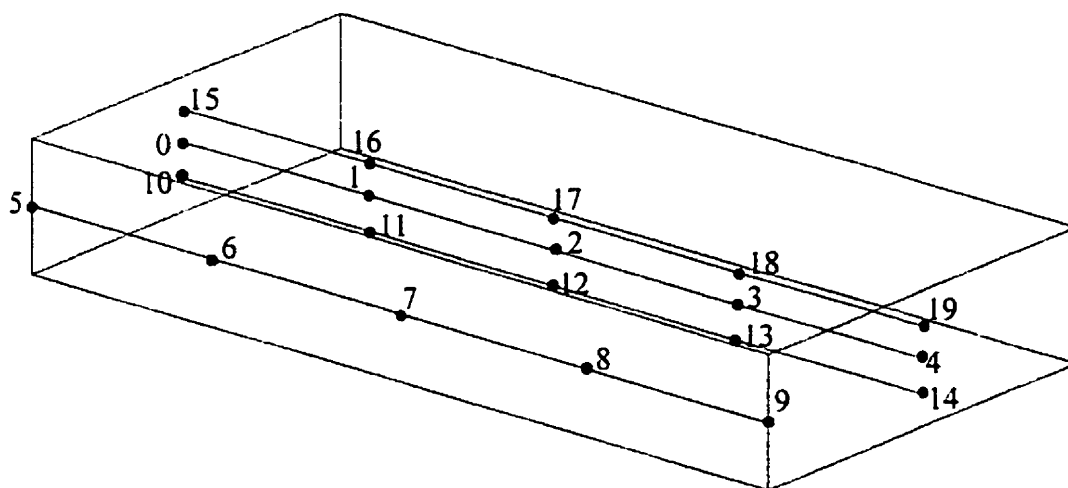


Figure 5-2 : Géométrie des problèmes de convection-diffusion

### 5.3 Convection pure en deux dimensions

Pour simuler un problème de convection pure, on suppose que les conductivités thermiques des fibres et de la résine sont très petites, soit de l'ordre de  $10^{-19}$ . La figure (5-3) représente des courbes de température calculées par quatre simulations. La première simulation est obtenue par la méthode adoptée ici en utilisant d'abord la résolution de l'équation de diffusion puis en appliquant la méthode de Lesaint-Raviart. La solution de la deuxième simulation est la solution de l'équation de convection par la méthode de Lesaint-Raviart sans tenir compte de la diffusion, c'est-à-dire la méthode de Galerkin standard n'est pas utilisée. Les autres simulations sont les mêmes réalisées sur un maillage plus fin. Ce maillage contient 796 éléments triangulaires.

L'injection est centrale avec un débit constant de  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$ . On a donc une vitesse moyenne de  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$ . Pour les quatre courbes, la température est prise à 0.3 m de l'injection représentée par le deuxième point sur la figure (5-1). En utilisant les données géométriques et physiques du problème, le front thermique doit passer par le point étudié après environ 420 000 secondes tel que montré par les courbes de convection pure de la figure (5-3). Sur les courbes nommées CONV, on remarque que la résolution par la méthode de Lesaint-Raviart induit une petite diffusion numérique, mais le problème résolu donne des résultats satisfaisants. On remarque aussi sur la figure (5-3) que l'ajout de la méthode de Galerkin standard à la méthode de Lesaint-Raviart (courbes dénotées

par GS) introduit de la diffusion artificielle et ralentit la vitesse du front, puisque le front est en retard par rapport au front calculé par la méthode de Lesaint-Raviart. En augmentant le nombre d'éléments au maillage, la solution obtenue améliore le résultat, que ce soit avec la méthode de Lesaint-Raviart seulement ou avec la méthode de Galerkin standard en plus. Les notations mf et mg signifient ici maillage fin et maillage grossier respectivement.

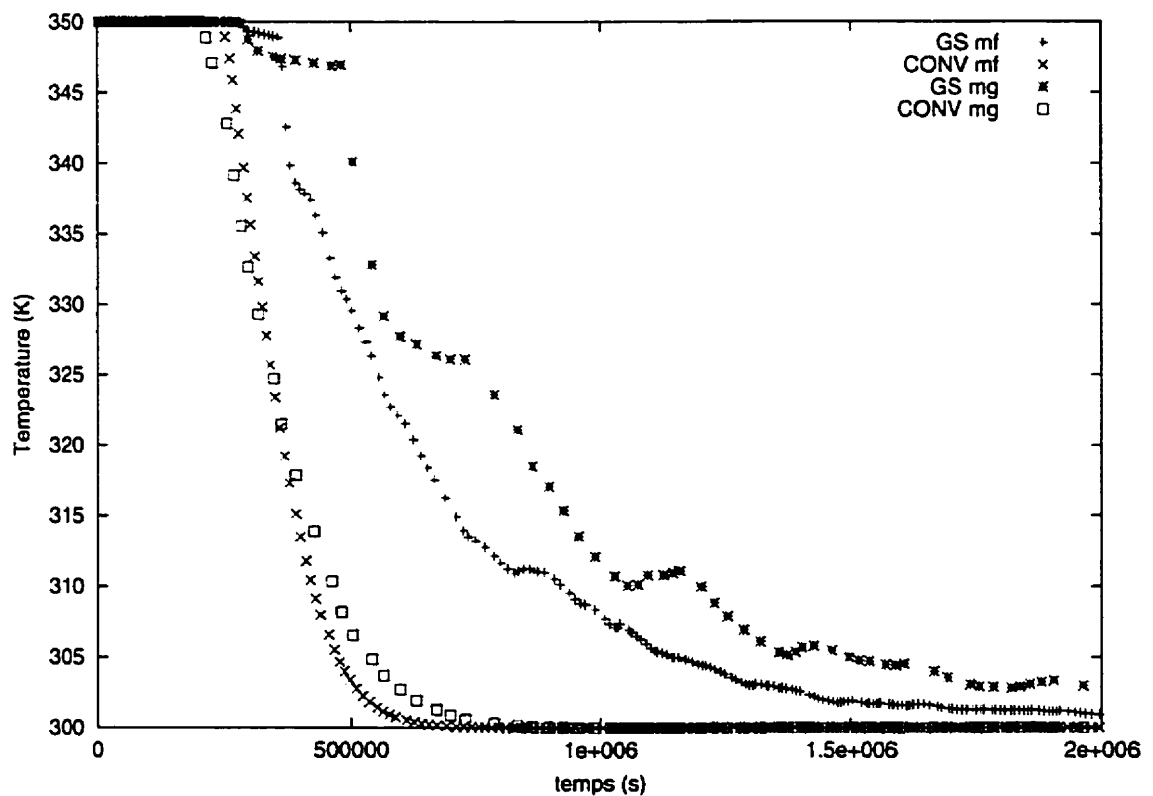


Figure 5-3 : Champs de température pour le problème de convection à 0.3 m de l'injection

Quand on utilise la méthode de Galerkin standard en plus de la méthode de Lesaint-Raviart pour la résolution des problèmes de convection on remarque la diffusion artificielle engendrée par la méthode de Galerkin standard. De plus il y a des oscillations qui sont causées par le passage d'une méthode numérique à l'autre. On peut aussi conclure que le maillage plus fin donne de meilleurs résultats avec les deux types de simulations.

#### **5.4 Diffusion pure en deux dimensions**

Le même genre d'étude a été réalisée aussi pour la diffusion pure en supposant que les conductivités thermiques de la résine et des fibres sont maintenant très grandes, de l'ordre de  $10^{10}$ . Cette fois-ci l'influence du maillage n'est pas examinée. On se contente d'étudier l'influence de la méthode de Lesaint-Raviart sur le calcul de la diffusion par la méthode de Galerkin standard. Comme dans cet exemple seulement les conductivités thermiques ont été modifiées par rapport à l'exemple de la convection pure, le débit de l'injection est toujours  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$  et donc la vitesse est encore  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$ . Cet exemple n'est pas un exemple de diffusion pure, mais où la diffusion est dominante car il y a injection de résine et donc présence d'une vitesse.

Les courbes de la figure (5-4) représentent les températures aux trois emplacements désignés sur la figure (5-1) : soit 0.4 m, 1.0 m et 1.6 m à partir du côté gauche de la cavité. Chaque figure contient deux courbes, une représentant la simulation



faite par les deux méthodes, une à la suite de l'autre et l'autre courbe représentant la distribution de température calculée par seulement la méthode de Galerkin standard. Dans la figure (5-4), la notation DIFF se réfère au calcul réalisé sans le module de Lesaint-Raviart, tandis que les courbes dénotées par LR ont été calculées en utilisant d'abord la méthode de Galerkin standard pour la diffusion, puis la méthode de Lesaint-Raviart.

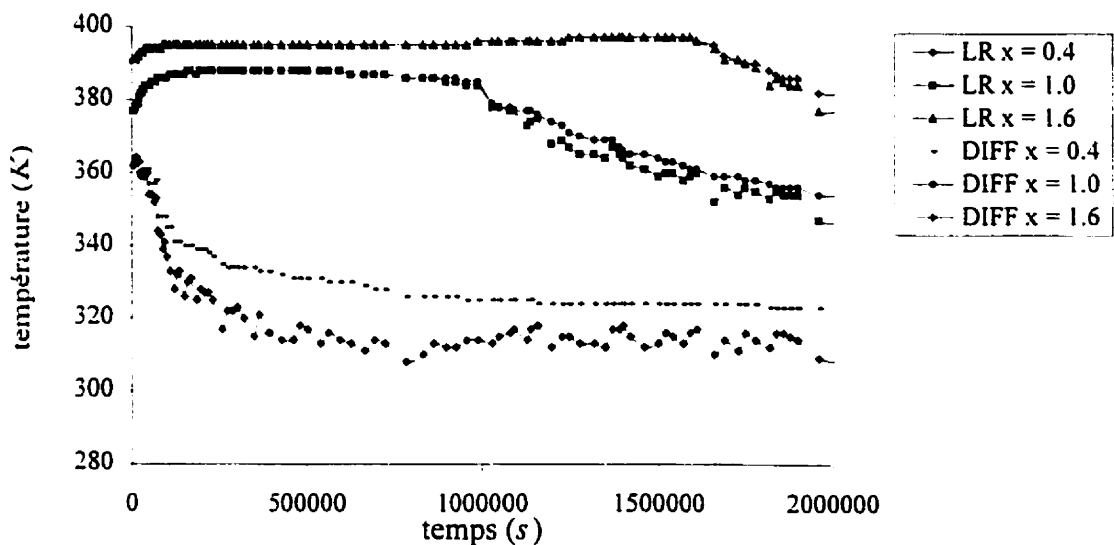


Figure 5-4 : Champs de température pour le problème où la diffusion est dominante

Sur les trois paires de courbes, le passage du front thermique est visible car les courbes en aval du front sont presque identiques, tandis qu'en amont du front le module de Lesaint-Raviart ajoute un peu de convection. Près de l'injection il y a plus de convection et les deux courbes présentent une différence de 10 °C. Ceci s'explique car le problème n'est pas vraiment de diffusion pure, puisqu'on injecte de la résine dans la

cavité. La résine a donc une vitesse. Ainsi près de l'injection, la courbe LR à  $x = 0.4$  donne de meilleurs résultats.

### 5.5 Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin

Pour finir l'étude sur la convection-diffusion, les propriétés physiques ont été modifiées pour avoir les deux phénomènes, convection et diffusion, présents en même temps. Ainsi la conductivité thermique de la résine utilisée est 0.15, tandis que celle des fibres est 5. Le débit est toujours constant et sa valeur est toujours  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$  comme pour les deux exemples précédents, ainsi la vitesse est encore  $2 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$ . La simulation était d'abord effectuée par la méthode courante, c'est-à-dire par la méthode de Galerkin standard pour la diffusion, puis la méthode de Lesaint-Raviart pour la convection, et enfin par la méthode de Taylor-Galerkin qui résoud la convection et la diffusion en même temps. Les champs de température présentés sur les figures (5-5) à (5-7) ont été calculés aux mêmes emplacements qu'à la section précédente.

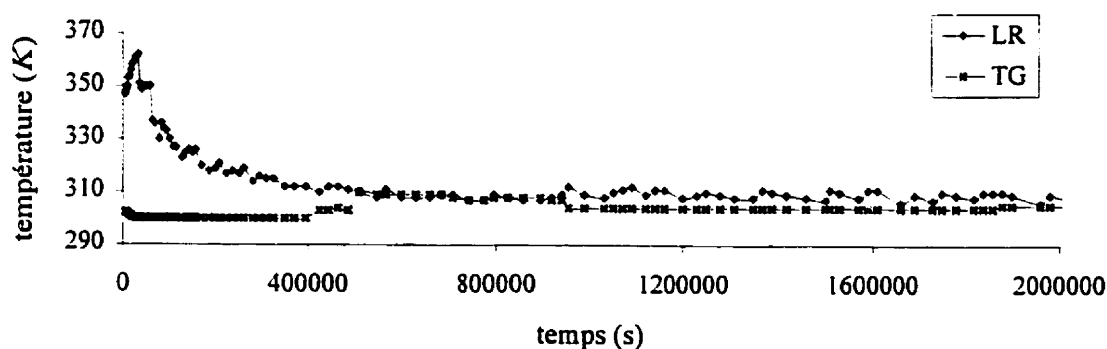


Figure 5-5 : Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin pour  $x = 0.4 \text{ m}$

On remarque sur les deux figures (5-5) et (5-6) que la température à la fin de l'injection est sensiblement la même pour les deux méthodes, tandis que sur la figure (5-7) la différence est de l'ordre de 10 degrés. Sur les trois figures, l'allure des courbes données par les deux méthodes sont très différentes. Ainsi pour les courbes près de l'injection (Fig. 5-5) la méthode courante donne au début de la simulation une température qui est égale à la température initiale de la préforme, tandis que la méthode de Taylor-Galerkin commence vers 300 K, ce qui correspond à la température de la résine à l'injection. Comme la vitesse de l'injection est très basse, la convection n'a pas le temps de baisser la température de la préforme à la valeur initiale de la résine au moment du début de l'injection.

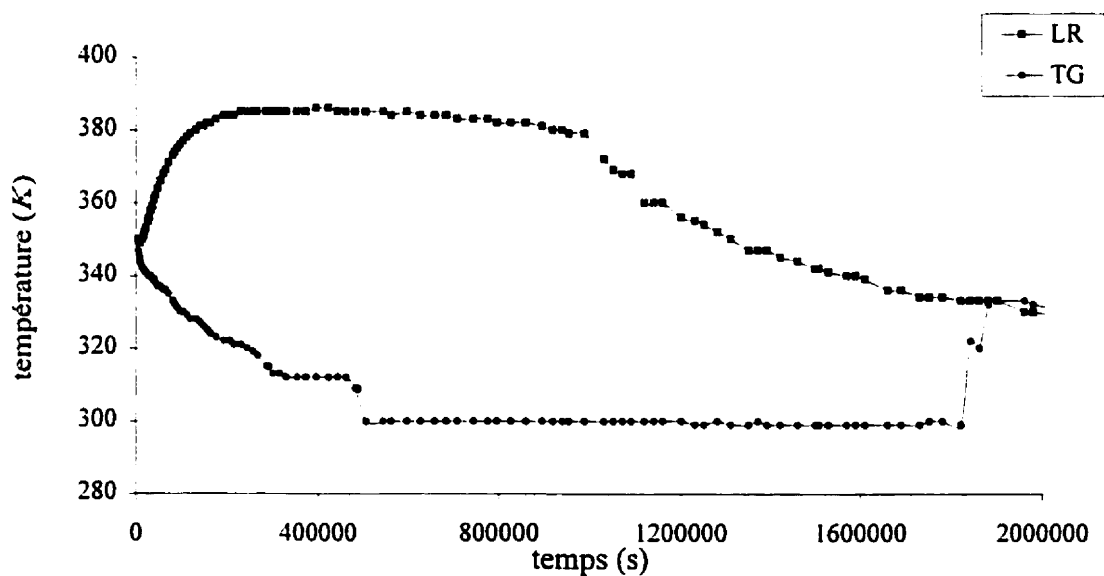


Figure 5-6 : Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin pour  $x = 1.0 \text{ m}$

Sur les courbes obtenues par la méthode de Taylor-Galerkin, le passage du front n'est pas facilement visible, ainsi sur la figure (5-6) la température baisse dès le début de l'injection, même avant le passage du front thermique. Sur les figures (5-6) et (5-7) la méthode adoptée ici montre bien la diffusion qui se produit au début de l'injection, puis en aval du front thermique la stabilisation de la température pour ensuite, après le passage du front thermique, baissé par l'action de la convection. Sur la figure (5-5), comme la convection est présente dès le début de l'injection, la température de la courbe dénotée par LR baisse de la valeur de la préforme avant l'injection à la température de la résine à l'injection. Ainsi on peut conclure que cette approche donne des résultats qui sont physiquement plus acceptables.

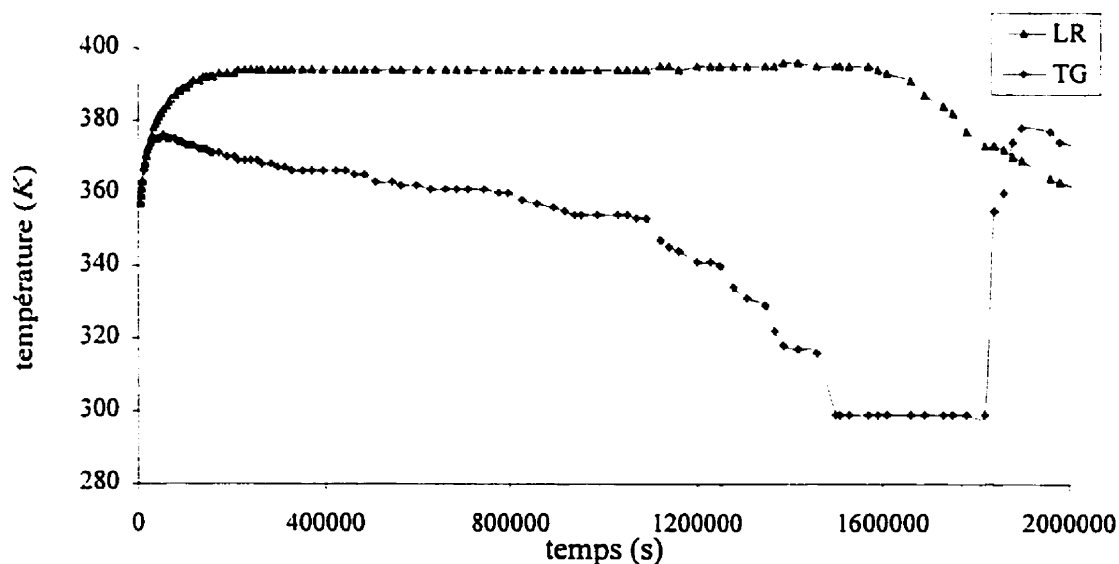


Figure 5-7 : Comparaison entre les méthodes courante et Taylor-Galerkin pour  $x = 1.6 \text{ m}$

De plus lors d'autres exemples similaires, la méthode définie ici donne des résultats dont l'allure générale des courbes est la même que pour cet exemple, tandis que la méthode de Taylor-Galerkin, qui s'avère excellente pour la diffusion pure, donne alors des résultats qui varient beaucoup. Entre autres, les températures dépassent les limites imposées aux grandeurs physiques dans les problèmes étudiés.

## 5.6 Convection pure en trois dimensions

Les propriétés thermiques des fibres et de la résine sont celles utilisées pour la simulation de convection pure en deux dimensions. Les conductivités sont donc de l'ordre de  $10^{-19}$ . L'injection se fait par la surface latérale gauche avec un débit constant de  $2 \cdot 10^{-9}$  m<sup>3</sup>/s, tandis que pour l'exemple bidimensionnel on avait une injection radiale. La vitesse est donc  $6.66 \cdot 10^{-7}$  m/s.

Sur les trois figures (5-8) à (5-10) les numéros des courbes se réfèrent aux numéros des senseurs de la figure (5-2). Comme l'injection est effectuée par le plan  $x=0$  m, sur les courbes d'une même figure le front thermique passe au même moment. Les courbes 1, 2 et 3 sont situées sur la ligne du milieu de la cavité dans la direction  $x$ . Les courbes 6 et 7 sont aussi sur une ligne de direction  $x$ , mais cette fois-ci cette ligne est située sur la face antérieure. On remarque que pour ces cinq courbes, la température tombe de 350 K à 325 K après le passage du front thermique. Ces deux ensembles de

courbes sont superposées car la température varie seulement à travers l'épaisseur de la pièce et les deux lignes se trouvent sur le plan médian  $z = 0.015$ . Les courbes 11, 12 et 13 sont sur la ligne  $y = 0.05$ ,  $z = 0.01$ . Sur ces courbes, la température après le passage du front tombe à 300 K. Les courbes restantes (16, 17 et 18) représentent l'évolution de la température des senseurs situés sur la ligne  $y = 0.05$ ,  $z = 0.02$ . Cette fois-ci la température reste à 350 K après le passage du front. La distribution transversale de la température est linéaire entre les basses et hautes températures après le passage du front thermique tel qu'illustré sur la figure (5-11), qui montre la distribution de température à la fin de l'injection.

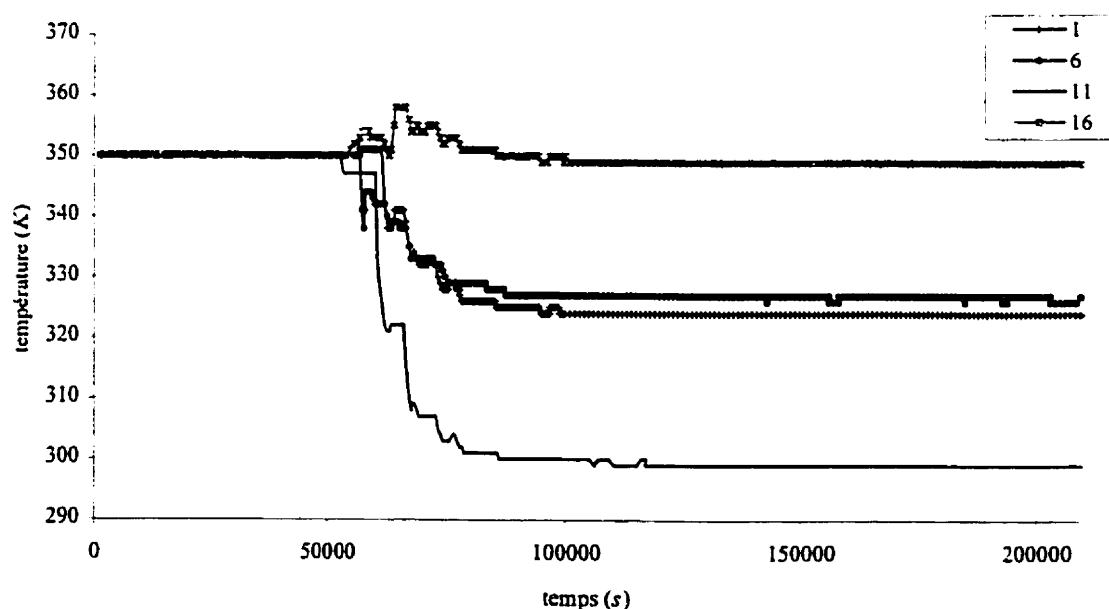


Figure 5-8 : Courbes de température pour le plan  $x = 0.05 \text{ m}$  (convection pure)

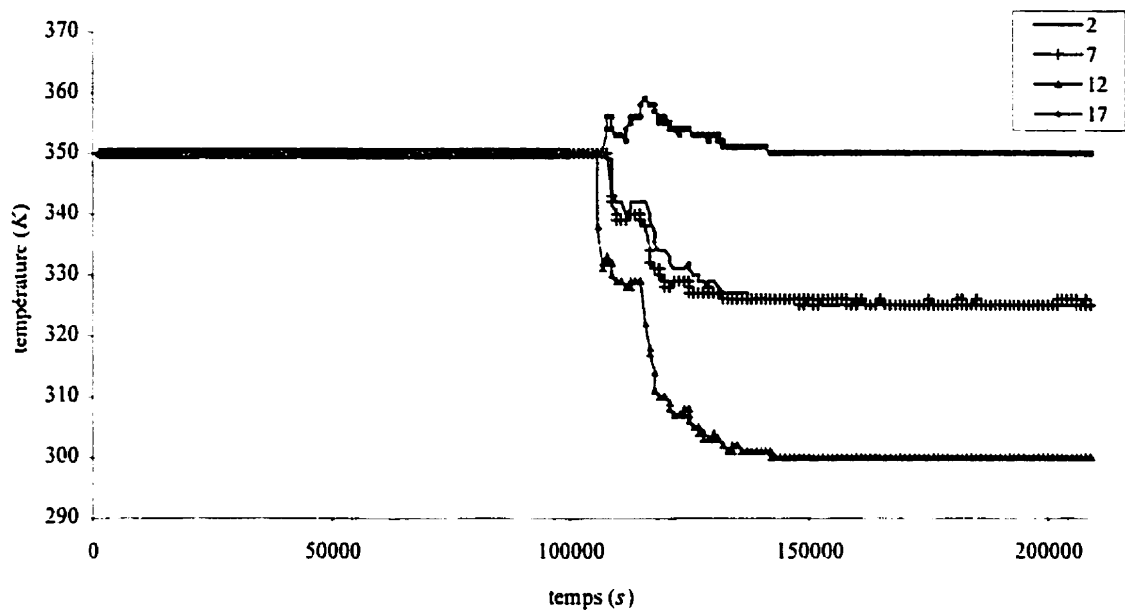


Figure 5-9 : Courbes de température pour le plan  $x = 0.1 \text{ m}$  (convection pure)

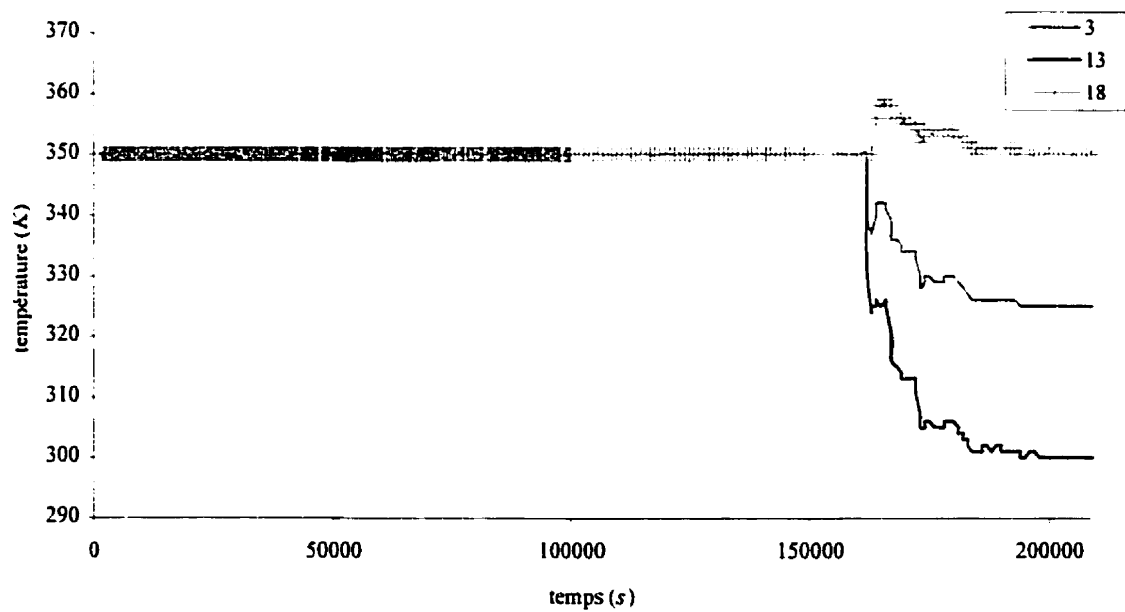


Figure 5-10 : Courbes de température pour le plan  $x = 0.15 \text{ m}$  (convection pure)

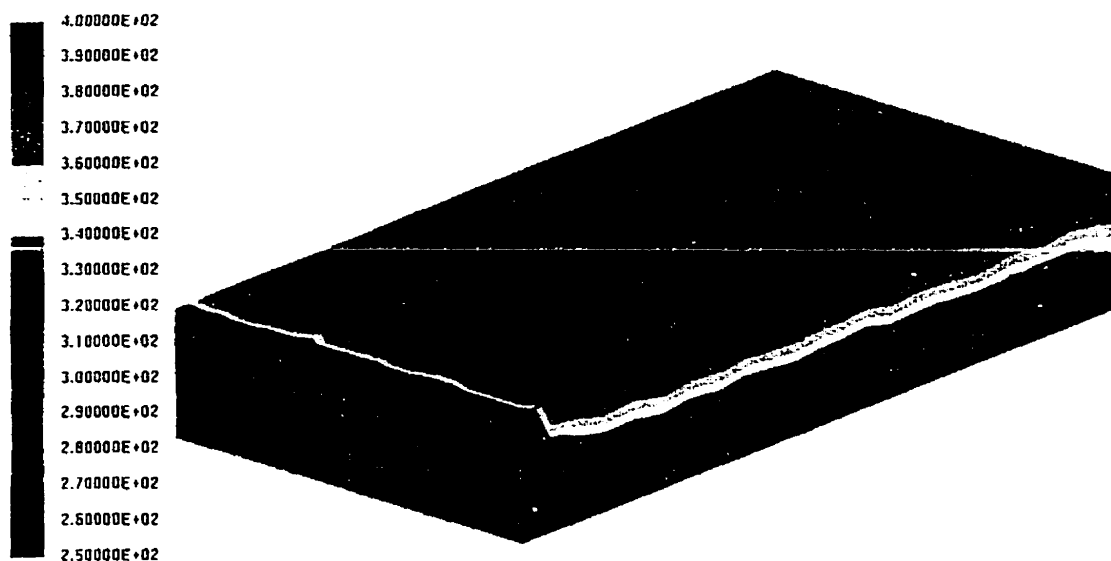


Figure 5-11 : Champs de températures pour le problème de convection pure en 3D

Le passage du front thermique est marqué par une hausse de température. Cette hausse de température pour le segment  $y=0.05$ ,  $z=0.02$ , ainsi que l'irrégularité lors du passage du front pour les autres segments sont dues aux calculs numériques. En effet, le passage entre la méthode de Galerkin standard et la méthode de Lesaint-Raviart induit une petite oscillation dans le champ de température. En effet, pour obtenir une température moyenne dans chaque élément pour appliquer la méthode de Lesaint-Raviart, la moyenne des températures est prise aux nœuds. Ensuite le passage dans l'autre sens après le calcul de la convection consiste à attribuer à chaque nœud la valeur moyenne de température des éléments autour d'un nœud à celui-ci. Ces deux calculs sont nécessaires car les deux méthodes ne traitent pas les éléments de la même façon. Les températures restent comprises entre les bornes données par les températures basses et hautes du cas



étudié, mais une certaine oscillation numérique est créée surtout autour du passage du front thermique où la convection est très importante.

## 5.7 Diffusion pure en trois dimensions

Dans le fichier de données les seules valeurs qui changent par rapport au problème de convection pure sont les conductivités des fibres et de la résine. Pour obtenir un problème de diffusion pure, ces conductivités sont d'environ  $10^{10}$  comme dans le cas bidimensionnel. Ainsi on a toujours une vitesse d'injection de  $6.66 \cdot 10^{-7}$  m/s

Les figures (5-12) à (5-14) montrent la distribution de température pour 12 senseurs durant le remplissage de la cavité. La différence visible entre ces figures et les figures (5-8) à (5-10) pour la convection pure est le front thermique. On voit ici que la diffusion arrive tout de suite et donc les courbes 1, 2, 3, 6, 7 et 8 ont une valeur de 325 K, les courbes 11, 12 et 13 sont à 300 K et les courbes 16, 17 et 18 à 350 K dès le départ de l'injection. Le passage du front est visible par un écart thermique de 3 à 15 K. Cette hausse est due au calcul numérique comme expliqué à la section précédente. On a la même distribution transversale de température qu'à l'exemple précédent après le passage du front thermique, ainsi la figure (5-11) de convection pure représente aussi la distribution de la température pour cet exemple. Cette fois-ci cette distribution est la même pendant toute la durée de l'injection.

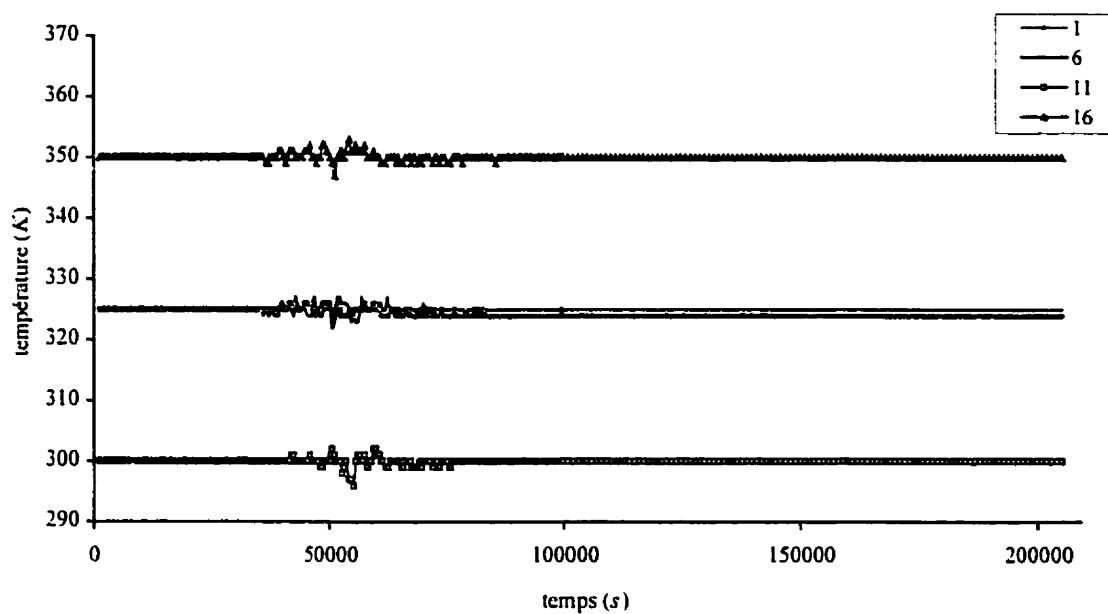


Figure 5-12 : Champs de températures pour le problème de diffusion ( $x = 0.05 \text{ m}$ )

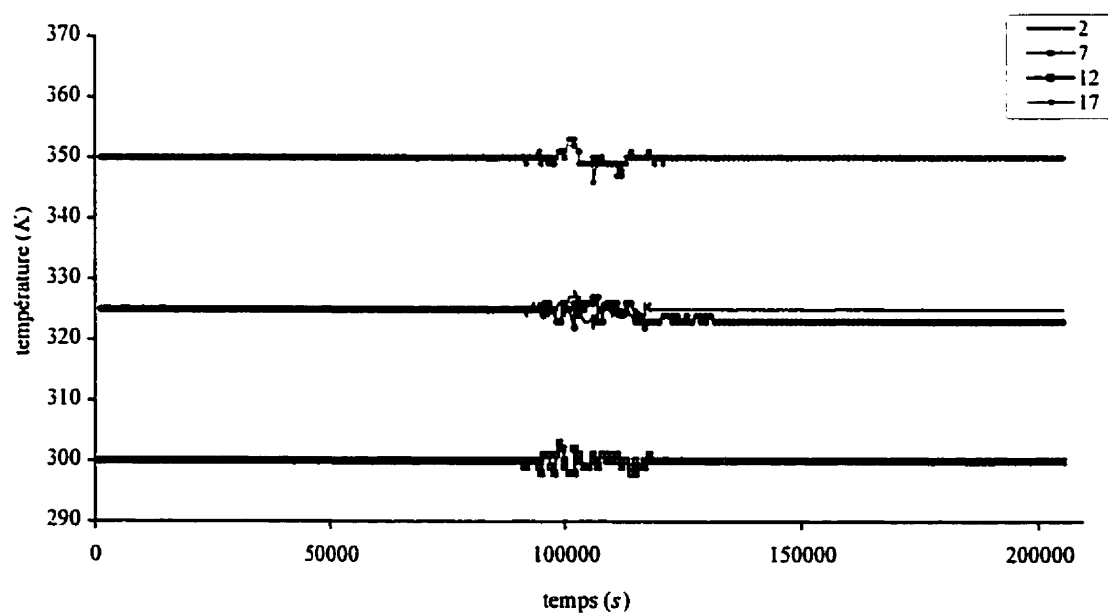


Figure 5-13 : Champs de températures pour le problème de diffusion ( $x = 0.1 \text{ m}$ )

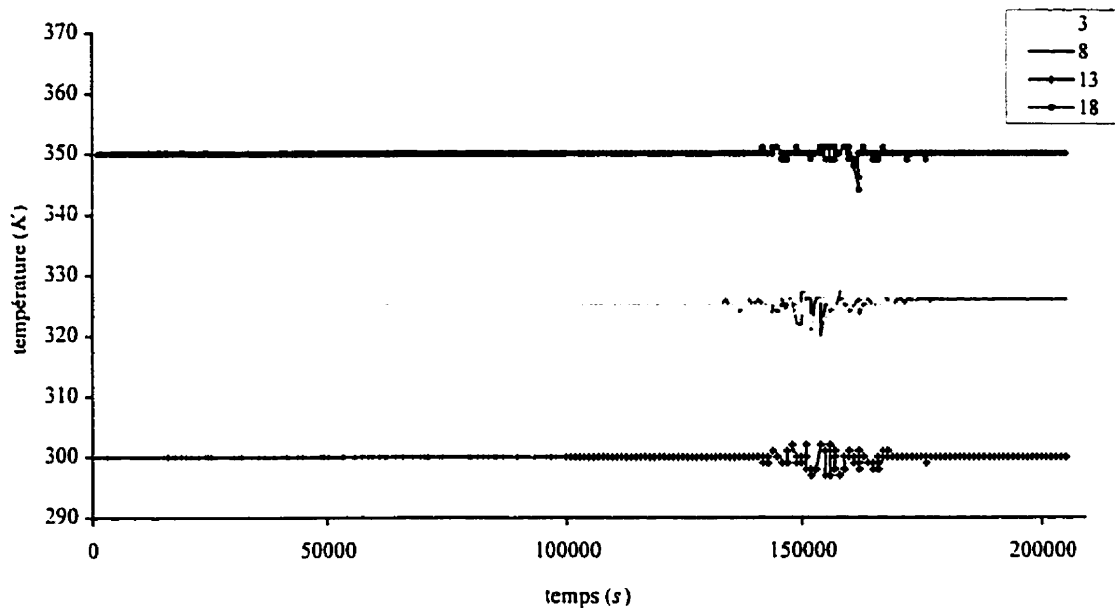


Figure 5-14 : Champs de températures pour le problème de diffusion ( $x = 0.15 \text{ m}$ )

### 5.8 Dépendance de la viscosité envers la température

Dans cet exemple la dépendance de la viscosité envers la température est étudiée. La géométrie utilisée est identique aux exemples précédents; elle est donnée par la figure (5-2). Dans cette section, la convection et la diffusion ont le même ordre de grandeur. Ainsi les deux phénomènes sont présents lors de l'injection. Tout d'abord la viscosité est maintenue constante à  $0.04 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , puis une deuxième simulation est faite où la viscosité varie avec la température de la façon suivante :

$$\mu = 1.06 \cdot 10^{-7} e^{\frac{4522}{T}} \quad (5-5)$$

La viscosité constante est calculée par l'équation (5-5) en utilisant la température de 350 K.

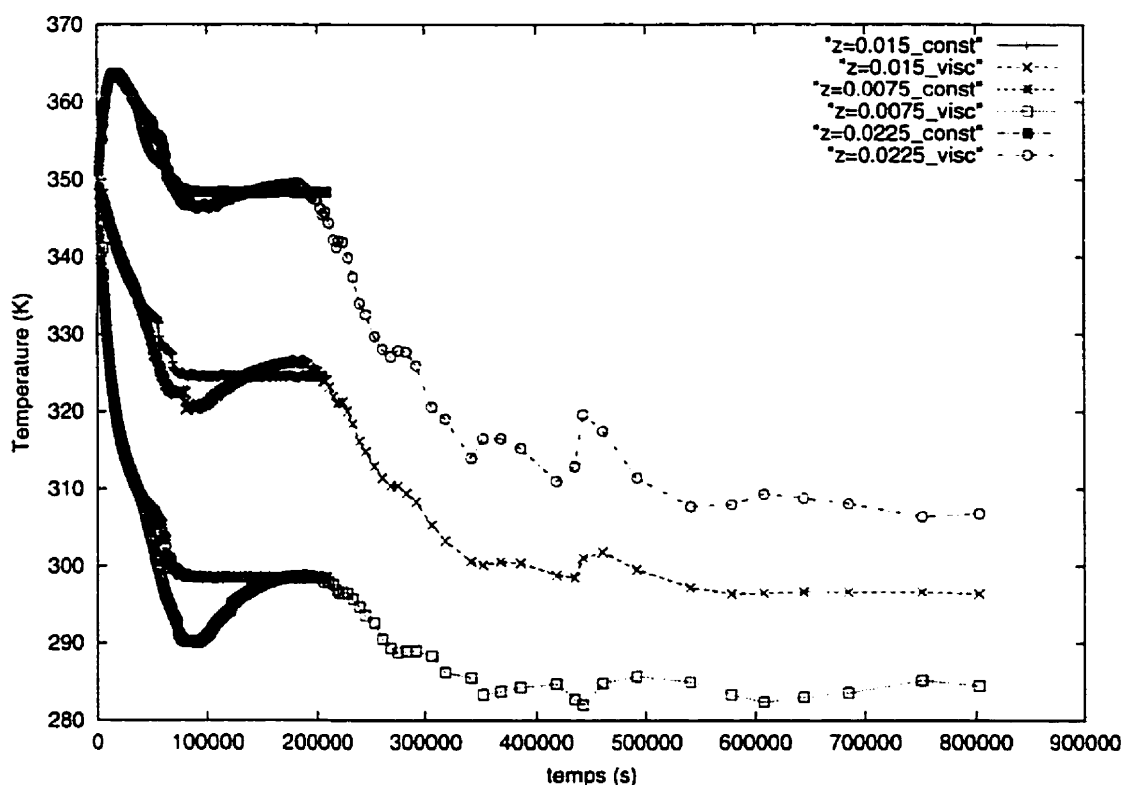


Figure 5-15 : Distributions de température pour des simulations avec viscosité constante et viscosité fonction de température pour le plan  $x = 0.05$

Les figures (5-15) et (5-16) représentent les courbes de distribution de la température pour les plans  $x=0.05$  et  $x=0.15$  respectivement. Chaque figure montre six courbes, où on compare la distribution de température pour une viscosité constante et une viscosité fonction de la température. Les trois paires de courbes sont situées respectivement à  $z=0.015$ ,  $z=0.0075$  et  $z=0.0225$ . Tout d'abord on constate que pour une viscosité variable le remplissage dure plus longtemps et les pas de temps deviennent de

plus en plus long. Sur les deux figures, avant le passage du front thermique la distribution de température est la même pour les six paires de courbes. Pour la simulation où la viscosité est dépendante de la température, on remarque qu'après le passage du front thermique, la température baisse, puis remonte pour se stabiliser à la fin du remplissage à une température plus basse que lors de la simulation à viscosité constante. Lors de la simulation à viscosité variable, le front thermique se trouve d'abord en haut de la cavité comme pour le front d'écoulement de la résine montré sur la figure (5-17) car l'écoulement est dépendant de la viscosité. Une viscosité faible signifie une plus grande fluidité de la résine donc une vitesse plus grande.

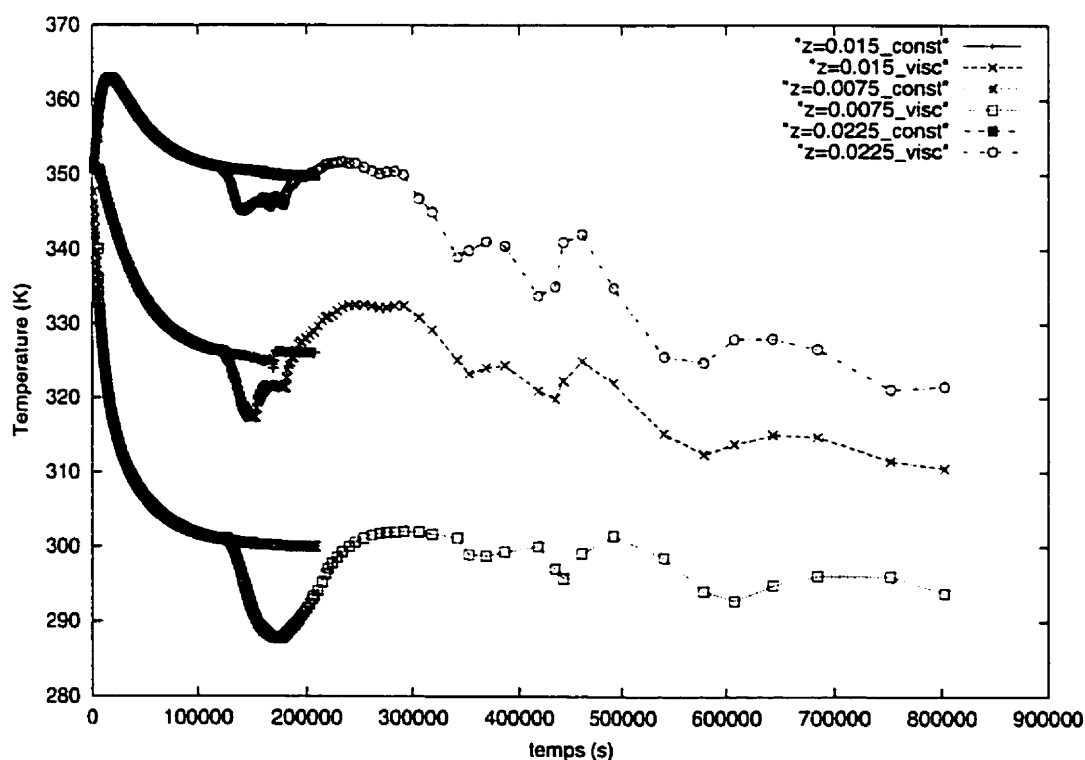


Figure 5-16 : Distributions de température pour des simulations avec viscosité constante et viscosité fonction de température pour le plan  $x = 0.15$

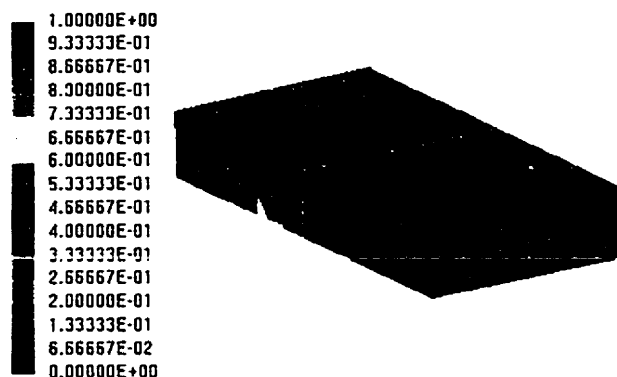


Figure 5-17 : Le front de remplissage lors d'une injection avec viscosité variable

La figure (5-18) représente la distribution de température pour les deux simulations à la fin du remplissage. Dans le premier cas (viscosité constante), la température est distribuée linéairement en épaisseur entre la température basse sur la face inférieure et la température haute sur la face supérieure. Pour la simulation où la viscosité est variable, la distribution de température n'est pas uniforme, ainsi près de la face d'injection la température basse occupe une plus grosse région. De plus, il y a des oscillations de température durant l'injection.

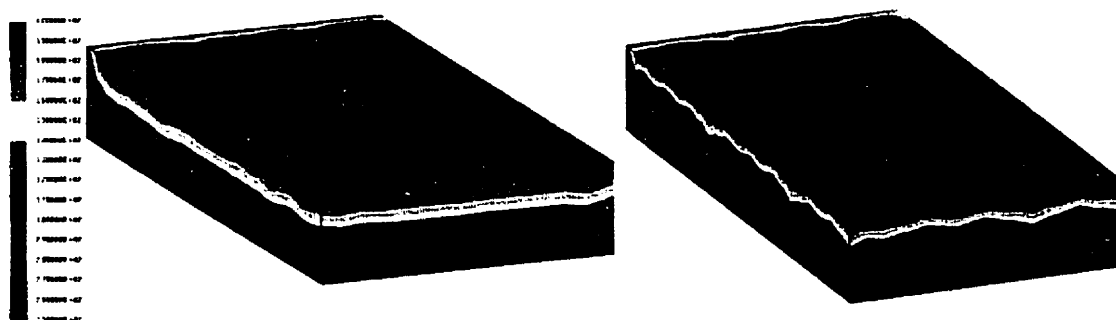


Figure 5-18 : Champs de températures à la fin du remplissage pour des injections à viscosité constante et variable

### 5.9 Influence du maillage sur une simulation en 3D

Dans cet exemple l'influence du maillage sur le champ de distribution de la température est étudiée. La géométrie utilisée est identique aux exemples précédents; elle est donnée par la figure (5-2). Le premier maillage contient 5038 éléments tétraédriques. C'est l'exemple à viscosité constante de la section précédente. Le deuxième maillage contient 10246 éléments tétraédriques. Pour les deux simulations, la convection et la diffusion ont le même ordre de grandeur.

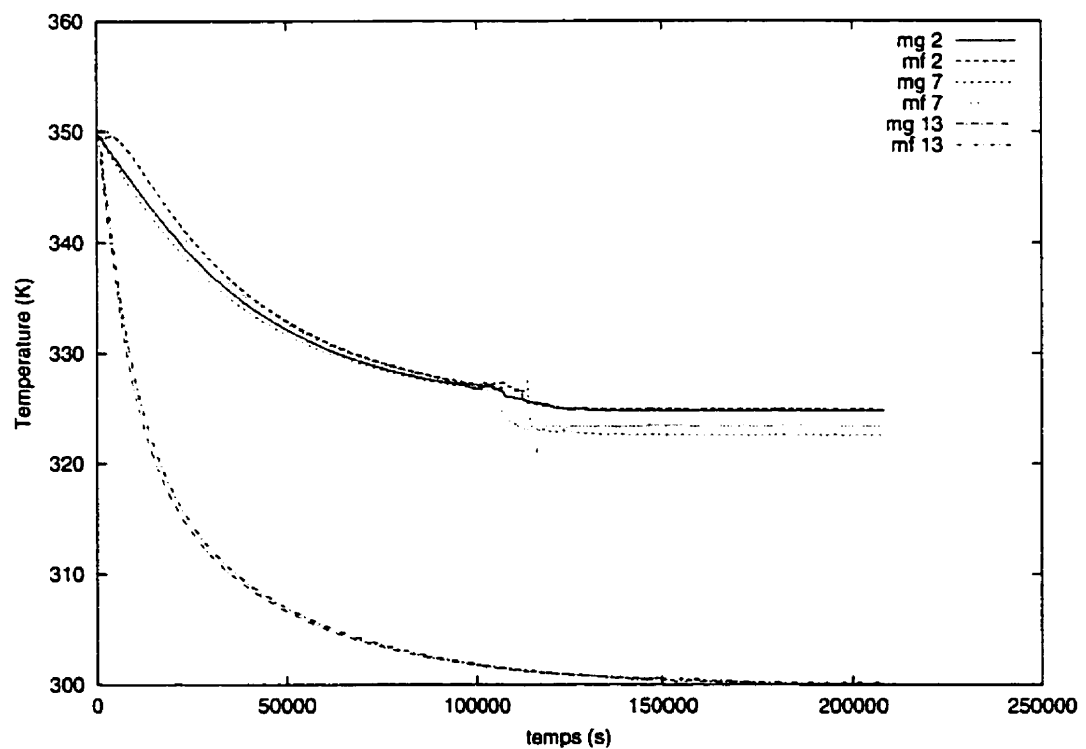


Figure 5-19 : Influence du maillage sur la distribution de température pour 3 senseurs

Sur la figure (5-19), la distribution de température est représentée pour les senseurs 2, 7 et 13 de la figure (5-2). Les senseurs 2 et 7 se trouvent au milieu de la cavité par rapport à son épaisseur. Comme l'injection est effectuée par une face le problème thermique est bidimensionnel et les deux senseurs doivent donc donner la même distribution de température. Or la distribution de température des deux senseurs après le passage du front est décalée de 4 K pour le maillage grossier et de 2.5 K pour le maillage fin. Avant le passage du front, les quatre courbes sont quasi superposées. Les courbes du deuxième senseur des maillages fin et grossier sont superposées même après le passage du front thermique. Le senseur 13 qui se trouve à  $\frac{1}{4}$  de la hauteur donne la même distribution de température pour les deux maillages. Ainsi on peut conclure que le maillage grossier utilisé donne des résultats suffisamment précis.

### **5.10 Injection dans une cavité à obstacle**

L'étude d'une injection dans une cavité à obstacle sert à montrer la réponse thermique pour des cas d'injection plus compliqués. Cet exemple étudié par Audet dans son mémoire de maîtrise [5] est utilisé pour valider le fonctionnement du module thermique du logiciel LCMFLOT. La géométrie ainsi que les conditions thermiques et rhéologiques de l'injection sont les mêmes que pour l'exemple d'Audet. L'injection est effectuée par le point d'injection de diamètre 0.01 m. La cavité d'injection de longueur 1



m est isolée. La température adimensionnelle initiale du renfort est nulle, tandis que la résine est injectée avec une valeur unitaire. Cette cavité contient plusieurs obstacles qui divisent le moule en trois régions principales. Ces régions sont appelées par Audet : une chambre d'injection, un canal en zigzag et une chambre avec obstacles. L'exemple d'Audet était composé de 1600 paires de prismes, tandis que la figure (5-20) représente le maillage de 1551 éléments triangulaires utilisés pour cette simulation.

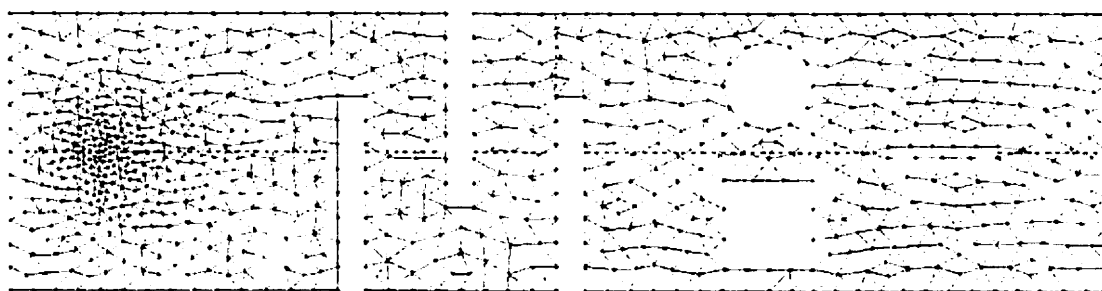


Figure 5-20 : Maillage pour l'exemple d'injection dans une cavité à obstacle

Les figures (5-21) et (5-22) montrent le front de la résine et la distribution thermique lorsque le moule est rempli à 50 % et à 84 %. Dans les deux cas, le front thermique est en retard par rapport au front d'écoulement, puisque le rapport des capacités thermiques atteint  $r=0.86$ . Le front thermique avance donc à 86 % de la vitesse de remplissage. À la mi-injection, la chambre d'injection a déjà atteint la température maximale, tandis que dans le canal en zigzag on voit le front thermique progresser. La température dans la majeure partie du canal est de 0.9 (première partie de la Fig. 5-22). Dans le cas où le moule est rempli à 84 %, la partie de la résine ayant atteint la

température du renfort a un peu avancée dans le canal en zigzag par rapport à la mi-injection. La distribution de température prend le contour de l'écoulement de la résine dans la chambre avec obstacles, ainsi la température est de 0.9 sur la plupart de la région imprégnée de cette chambre.

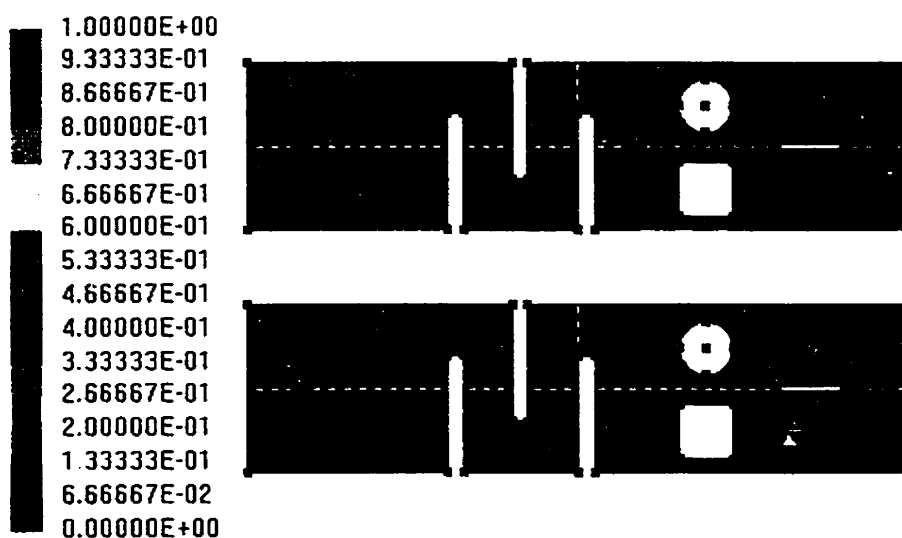


Figure 5-21 : Le front de résine à mi-injection et à 84 % de remplissage

Sur la figure (5-22) on remarque que le front thermique pour les deux temps de remplissage n'atteint pas les coins dans le canal en zigzag comme les éléments se trouvant dans ces coins ne sont pas remplis (Fig. 5-21). On est en présence de bulles d'air car il n'y a pas d'évent à ces endroits-là. La légende de température de la figure (5-22) varie entre -0.056 jusqu'à 1.348. Les dépassements négatifs et positifs en température atteignent donc respectivement 6 % et 35 % de l'amplitude de l'échelon thermique. Dans les négatifs le dépassement est dans la limite des 10 % d'erreur acceptée. Le dépassement

positif n'est pas visible sur la figure (5-22) car il arrive seulement à la fin du remplissage dans les trois coins du canal en zigzag où durant le remplissage les bulles d'air sont présentes. Les pas de temps à la fin du remplissage sont très grands pour pouvoir remplir ces bulles d'air. Or, de grands pas de temps peuvent induire des erreurs d'approximation temporelle dans la résolution thermique. Placer judicieusement des événements peut diminuer considérablement l'oscillation en température à ces endroits.

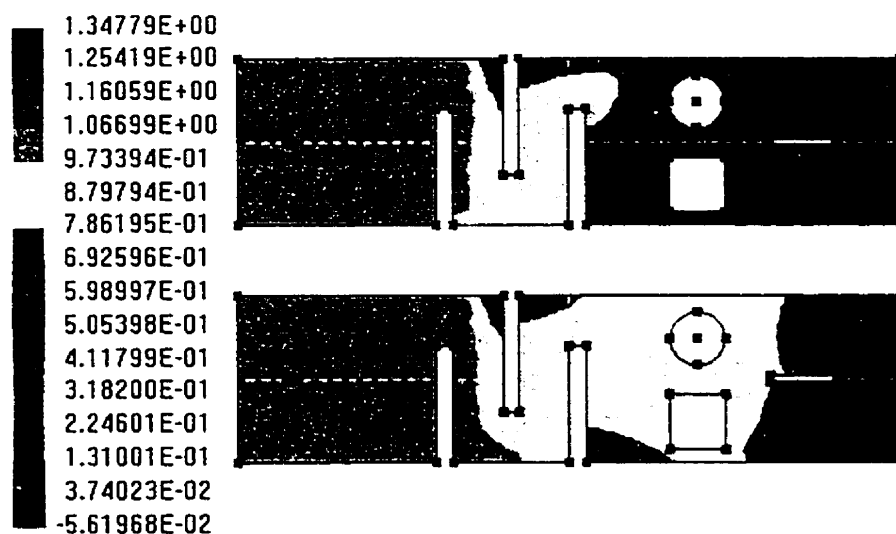


Figure 5-22 : La distribution de température à mi-injection et à 84 % de remplissage

Le même exemple est présenté dans le mémoire d'Audet [5]. On retrouve la distribution de température et le front d'écoulement pour le remplissage du moule à 50 % et 84 % . Les distributions thermiques se trouvant dans le mémoire d'Audet [5] sont présentées sur les figures (5-23) et (5-24). Les distributions de température des figures (5-23) et (5-24) ne sont pas exactement pareilles aux distributions représentées à la figure (5-

22). Dans le cas d'Audet à mi-injection (Fig. 3-23) le front thermique n'atteint pas les parois de la chambre d'injection et reste loin des coins comme si les parois étaient maintenues à 0. Pour la simulation présentée ici (Fig. 5-22) dans la chambre d'injection la température a déjà atteint l'unité à 50 % de remplissage. Pour le remplissage de 84 % mêmes différences peuvent être remarquées entre les deux simulations.



Figure 5-22 : La distribution de température à mi-injection (travaux d'Audet [5])



Figure 5-24 : La distribution de température à 84 % de remplissage (travaux d'Audet [5])

Ces différences peuvent être causées par la différence des conditions limites. Toutes les conditions indiquées dans le mémoire d'Audet ont été utilisées pour cette

simulation. Entre autre il est indiqué que les parois du moule sont isolées ce qui implique que la température est laissée libre et donc la température de la résine peut facilement atteindre les parois. Donc le fait que la température de la résine n'atteint pas la paroi doit être causé par une autre condition. Peut-être qu'il y avait un moule mince autour de la cavité avec une conductivité différente ayant la température des fibres comme température initiale. Pour tester cette hypothèse un moule mince de 0.005 m est ajouté au maillage de la cavité. Ainsi le nouveau maillage a 1919 éléments dont 1551 éléments de la cavité d'injection. Pour le moule la conductivité thermique est 0.01 W/mK et la condition limite externe imposée est l'isolation du moule. La figure (5-25) montre la distribution de température pour 50 % et 84 % de remplissage respectivement.

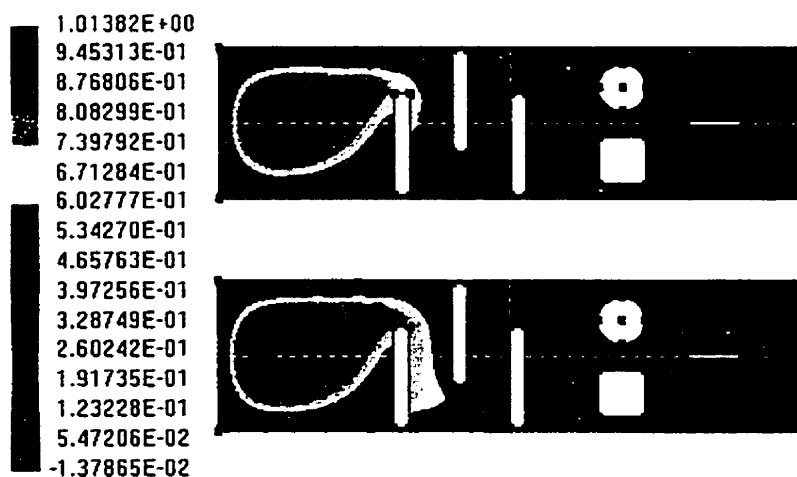


Figure 5-25 : La distribution de température avec un moule mince isolé pour 50 % et 84 %

Les distributions de température montrées sur la figure (5-25) ressemblent au résultat obtenu par Audet [5]. Cette fois-ci il y a un gradient de température près des

parois du moule comme pour la simulation d'Audet, mais ce gradient est plus prononcé dans ce cas-ci et la température n'atteint pas l'unité dans le canal en zigzag et dans la cavité avec obstacles. Ces petites différences peuvent être induites par des différences dans les fichiers de données car on avait pas accès à ce fichier pour la simulation d'Audet.

La majeure différence entre la simulation d'Audet et celles présentées ici réside dans la méthode de résolution des équations thermiques. La simulation d'Audet utilise la méthode de Taylor-Galerkin pour la résolution de ce problème de convection-diffusion. Tel que discuté plus tôt cette méthode peut engendrer de grandes oscillations en température, or c'est ce qui arrive dans la simulation d'Audet puisque la température visible dépasse de 40 % l'amplitude de l'échelon thermique près du front thermique.

### **5.11 Injection dans une cavité à nervure**

Dans cet exemple, des injections dans des cavités à nervure en deux et trois dimensions sont présentées pour illustrer les possibilités du logiciel. Les figures (5-26) et (5-27) montrent les maillages utilisés pour les deux simulations. De plus, les senseurs utilisés sont visibles sur la figure (5-26). Le maillage bidimensionnel contient 477 éléments triangulaires anisotropes, tandis que le maillage pour l'injection en trois dimensions est constitué de 5396 éléments tétraédriques anisotropes. Les deux maillages sont constitués deux trois régions distinctes ce qui est visible sur la figure (5-27).

Initialement la préforme est maintenue à 0 comme température adimensionnelle et la résine est injectée à 1 pour les deux simulations.

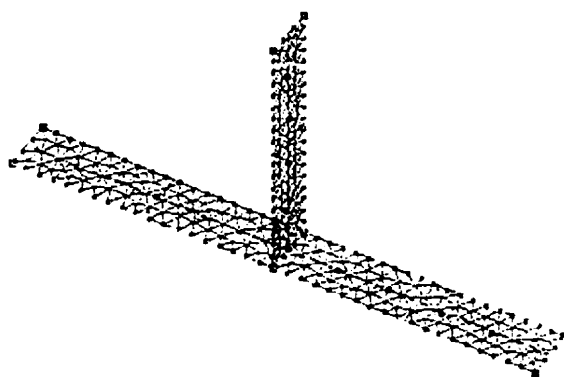


Figure 5-26 : Maillage pour la simulation 2D et les 10 senseurs utilisés

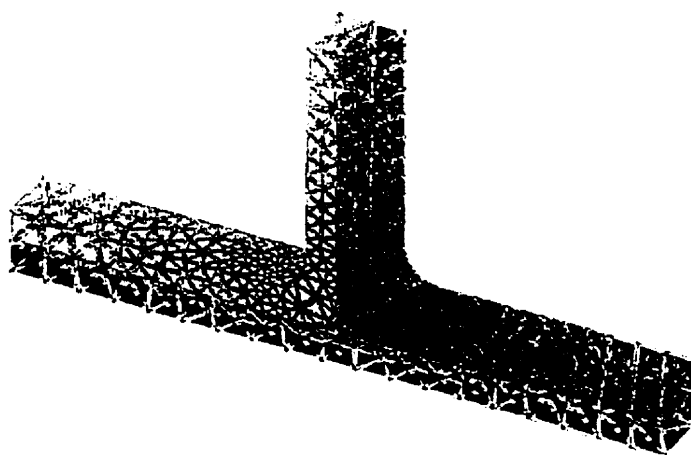


Figure 5-27 : Maillage pour la simulation 3D

Les figures (5-28) et (5-29) représentent respectivement le remplissage et la distribution de température à mi-injection pour la simulation deux-dimensionnelle. On remarque que le front thermique est en retard sur le front d'écoulement de la résine car le rapport des capacités thermiques est  $r=0.62$ . Les mêmes données ont été utilisées pour la

simulation tridimensionnelle, ainsi la vitesse du front thermique est 62 % de la vitesse de l'écoulement de la résine. Le retard du front thermique est donc visible sur les figures (5-30) et (5-31) pour la simulation en trois dimensions. Ces figures représentent respectivement le front d'écoulement et la distribution de température à 75 % de remplissage de la cavité.

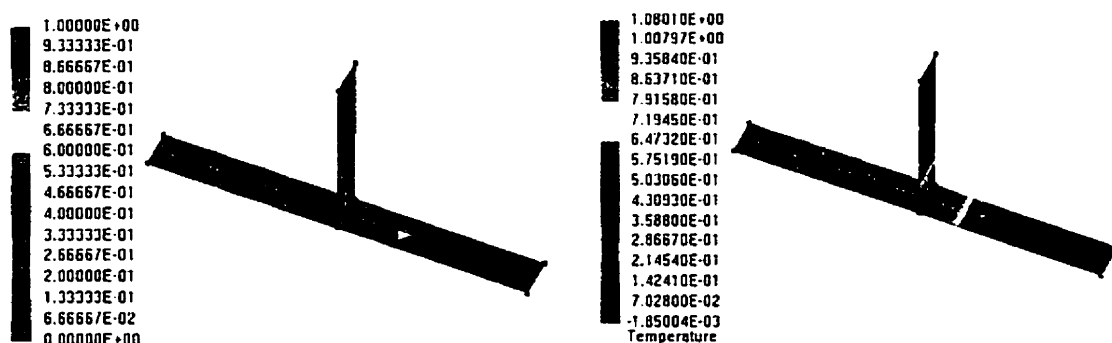


Figure 5-28 : Remplissage à mi-injection Figure 5-29 : Distribution de température à 50%

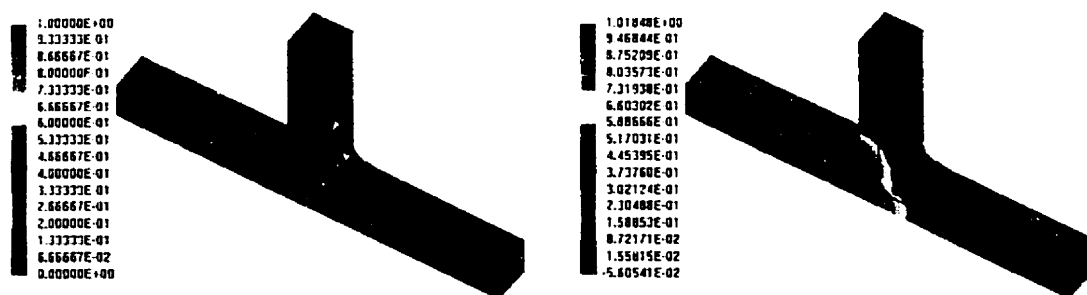


Figure 5-30 : Remplissage à 75 % Figure 5-31 : Distribution de température à 75%

La figure (5-32) montre la distribution de température pour les dix senseurs de la figure (5-26) durant toute l'injection. On remarque qu'une fois passée la nervure le front thermique avance au même rythme dans la nervure et dans la partie horizontale de la



cavité. Comme c'est une injection à débit constant le front thermique avance à vitesse constante ce qui est visible sur la figure (5-32).

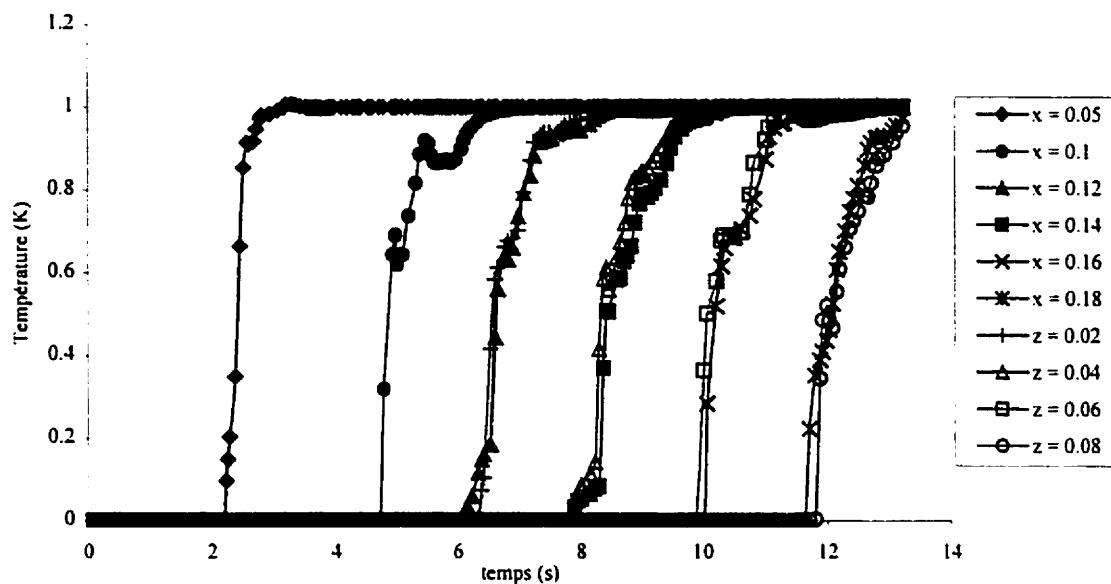


Figure 5-32 : Distribution de température pour la simulation en 2D

La figure (5-33) montre la distribution de température pour six des dix senseurs précédents lors de la simulation en trois dimensions. On remarque que le front thermique diffuse plus que dans le cas en deux dimensions. La nervure est cette fois-ci plus petite que la partie horizontale après la nervure à cause de l'épaisseur de la pièce et donc le front thermique atteint le haut de la nervure avant la fin du remplissage de la cavité. Ainsi le front thermique se trouve vers les 20 secondes à 0.06 m après la nervure dans la partie horizontale et déjà à  $z=0.08$  de hauteur, mais en réalité c'est aussi à 0.06 m du début de la nervure. On peut donc conclure que la différence majeure entre les simulations en deux et

trois dimensions est la diffusion plus grande du front thermique pour la simulation tridimensionnelle. L'injection en deux dimensions est plus rapide (13 s) car son volume est  $6 \cdot 10^{-5}$ , tandis que le volume de la géométrie pour la simulation en trois dimensions est  $1.12 \cdot 10^{-4}$ . La deuxième injection dure 26 secondes.

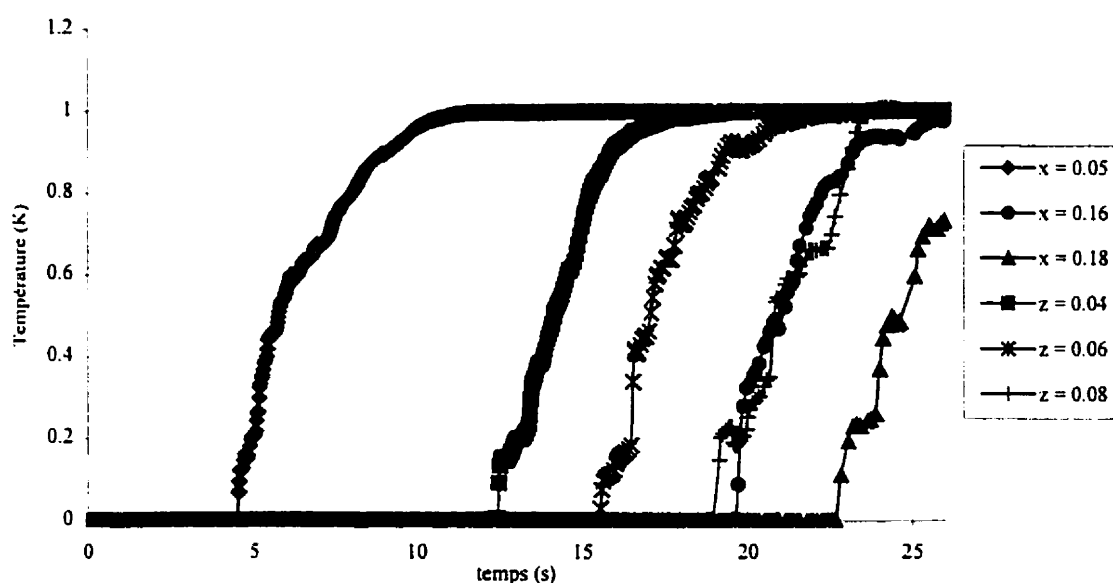


Figure 5-33 : Distribution de température pour la simulation en 3D

## 5.12 Injection avec influence du moule

Cet exemple, comme le précédent, n'est pas utilisé pour la validation du logiciel, mais sert plutôt pour montrer les capacités de simulation. Seulement la moitié du moule est étudiée car le problème est symétrique. Ainsi sur la figure (5-34) on voit le maillage anisotrope utilisé de 855 éléments triangulaires pour la moitié de la cavité d'injection et

la partie supérieure du moule. L'exemple présenté ici est bidimensionnel. La température adimensionnelle initiale du moule et de la préforme est nulle, tandis que la résine est injectée à 1. Le moule est isolé, ainsi que le milieu de la cavité pour simuler l'axe de symétrie. Sur la figure (5-34) on voit aussi la distribution de température à la fin du remplissage. La température dans la cavité d'injection est plus haute que dans le moule. De plus, comme la conductivité du moule est inférieure à celles des fibres et de la résine, il y a moins de conduction dans le moule que dans la cavité d'injection où la convection est aussi très importante.

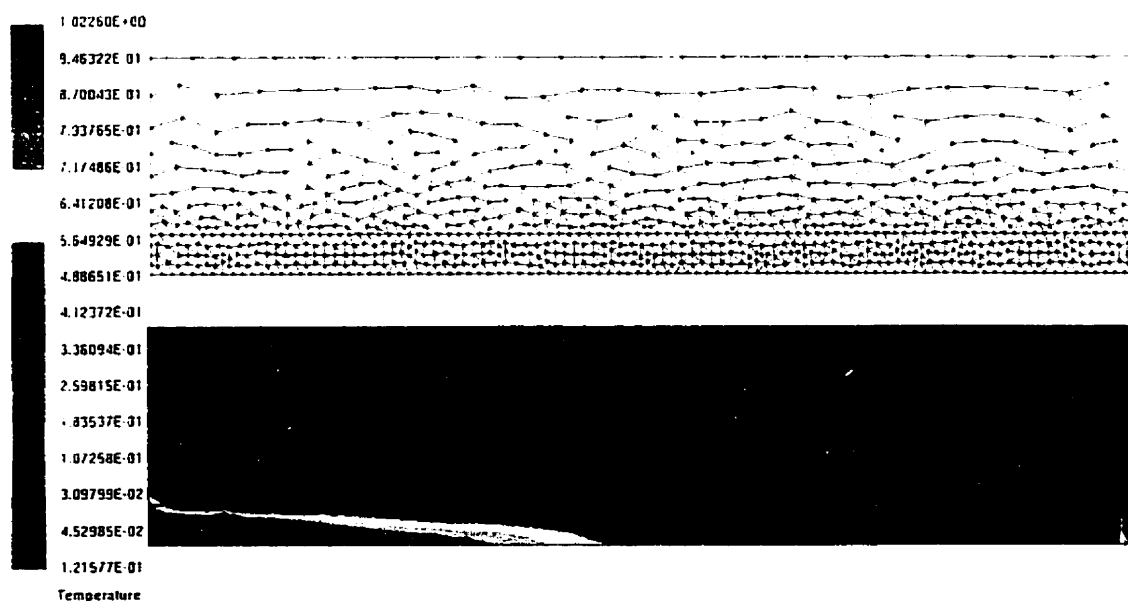


Figure 5-34 : Maillage et distribution de température à la fin de l'injection

Les propriétés thermiques et les conditions limites pour les différents exemples présentés dans ce chapitre et les chapitres qui suivent sont répertoriées dans l'annexe E.

## CHAPITRE 6

### IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE DE LA CINÉTIQUE CHIMIQUE

#### 6.1 Lesaint-Raviart lors de la polymérisation

Jusqu'à maintenant on a concentré notre étude sur la simulation de l'analyse thermique dans le procédé RTM. Pour compléter cette étude, il faut aussi discuter de la simulation de la polymérisation de la résine durant l'injection ou lors de la cuisson. La réaction chimique de polymérisation introduit de la chaleur dans le système résine-fibres et modifie le champ de température. La modélisation de ce phénomène se fait par le biais du terme d'exothermie chimique déjà présent dans les équations thermiques des chapitres précédents. Pour évaluer cette exothermie, il faut résoudre l'équation déjà présentée à la section 2.7 du chapitre 2, où le modèle utilisé pour la réaction chimique est celui de Kamal-Sourour [8] :

$$\frac{D\chi}{Dt} = \varepsilon_f \frac{\partial \chi}{\partial t} + v_f \cdot \nabla \chi = A e^{\frac{-E}{RT}} \chi^n (1 - \chi)^p \quad (6-1)$$

Cette équation contient le terme de convection du degré de polymérisation et la réaction chimique proprement dite. Pour implémenter cette équation dans le code de calcul du logiciel LCMFLOT, il faut procéder à son approximation. Comme dans

l'analyse thermique, la résolution de ce modèle s'effectue en deux étapes : la convection est séparée du reste de l'analyse. Ainsi d'abord le degré de polymérisation est transporté avec l'écoulement de la résine, puis l'équation différentielle ordinaire non-linéaire est résolue pour calculer l'exothermie. La convection, comme dans le cas de l'analyse thermique, est résolue en utilisant la méthode de Lesaint-Raviart. Le domaine d'étude est divisé en éléments géométriques où le degré de polymérisation est supposé constant par élément, de telle sorte que l'équation de transport de la cinétique chimique (4-22) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \chi^n \right) w dV = \int_{\partial\Omega} |\chi^+ - \chi^-| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \\ \chi^+ = \chi_{imp}, \text{ sur } \partial\Omega^- \end{array} \right. \quad (6-2)$$

### 6.1.1 Exemple de convection chimique

Pour valider l'utilisation de la méthode de Lesaint-Raviart pour transporter le degré de polymérisation avec l'écoulement de la résine, une injection non-isotherme en présence de polymérisation a été simulée. Pour des fins de validation, les données de la réaction chimique ont été choisies ici telles que la réaction soit inexistante, c'est-à-dire que certains paramètres de Kamal-Sourour sont nuls. Pour que l'équation (6-2) soit résolue, il faut imposer une condition limite de polymérisation sur la frontière entrante de la cavité d'injection (fig. 6-1).

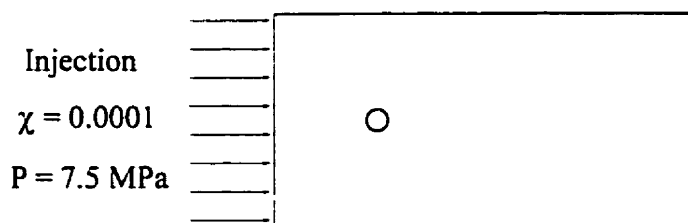


Figure 6-1: Conditions d'injections

Comme le degré de polymérisation est transporté avec l'écoulement, le front de celui-ci doit être le même que pour l'injection. Sur la figure (6-2), on compare pour deux emplacements dans la cavité le degré de polymérisation et la pression. Pour pouvoir comparer ces données, le degré de polymérisation est multiplié par  $10^4$  et la pression est divisée par  $10^7$  pour pouvoir représenter les deux grandeurs sur un même graphique (les deux fichiers de données sont présentés à l'annexe F). Les courbes de pression indiquent le passage du front aux deux endroits de la cavité quand la pression, qui est nulle avant l'arrivée de la résine, commence à augmenter. Dans l'équation (6-1), la vitesse de convection du degré de polymérisation est la vitesse d'écoulement de la résine, ainsi la progression du front de polymérisation est le même que le front de l'écoulement. Le passage du front de polymérisation sur la figure (6-2) est indiqué par son augmentation. Cette hausse de conversion arrivant au même moment que celle de la pression, vérifie que la méthode de Lesaint-Raviart donne des résultats consistants.

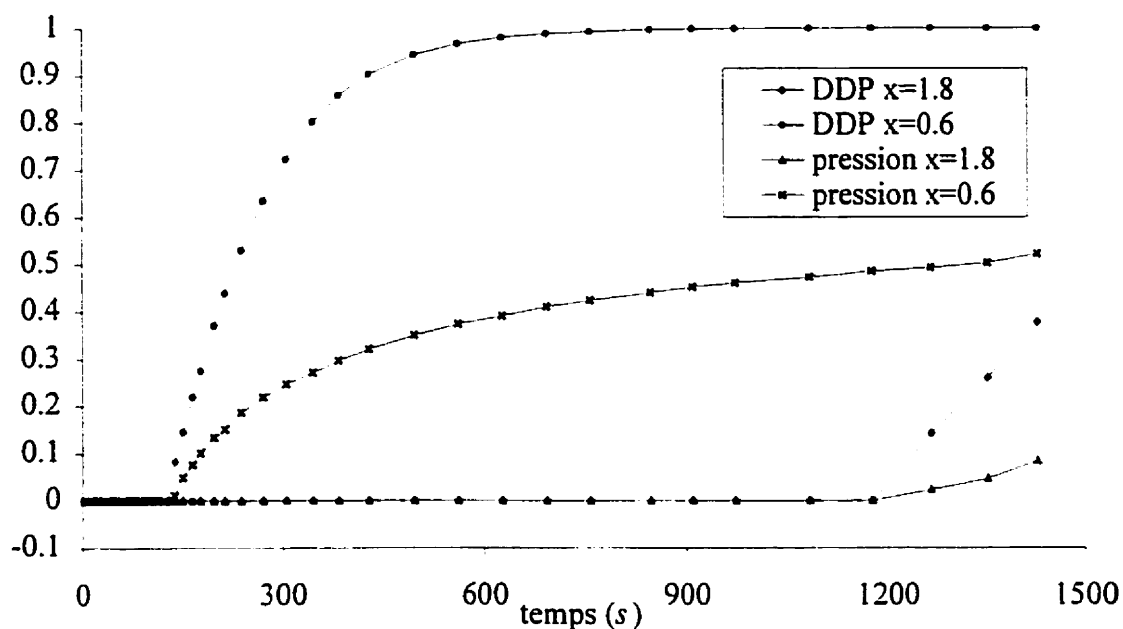


Figure 6-2: Validation de la méthode Lesaint-Raviart pour la polymérisation

La réaction chimique du procédé RTM peut se produire dans certains cas durant la période d'injection, mais la plupart du temps elle arrive après le remplissage du moule. On doit pouvoir simuler ces deux cas, ainsi séparer la résolution entre la convection et la réaction chimique se prête bien à une simulation complète du procédé RTM. Seulement si la réaction chimique débute durant l'injection, la résolution simultanée de la réaction chimique devient une partie importante des calculs. A cette fin, une méthode adaptée aux équations différentielles non-linéaires, la méthode de Runge-Kutta, a été retenue.

## 6.2 Runge-Kutta

### 6.2.1 Différentes méthodes de Runge-Kutta

L'intégration d'équations différentielles ordinaires est régulièrement rencontrée dans la simulation des phénomènes physiques. Les équations différentielles ordinaires peuvent toujours être écrites comme un système d'équations différentielles du premier ordre. On veut donc résoudre le système de  $N$  équations couplées ayant la forme générale suivante :

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N), \quad i = 1, \dots, N \quad (6-3)$$

Pour plus de simplicité, dans le reste du travail l'indice  $i$  de l'équation (6-3) est pris égale à un, ainsi on veut trouver  $y$  fonction de  $x$  satisfaisant une seule équation différentielle du premier ordre. Il existe beaucoup de méthodes numériques pour trouver la solution, mais une des méthodes les plus utilisées est la méthode de Runge-Kutta au quatrième ordre suivante :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ k_1 &= f(x_n, y_n) & k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) & k_4 &= f(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \end{aligned} \quad (6-4)$$



Dans ces équations,  $h$  représente l'intervalle entre deux valeurs de  $x$ . Pour un intervalle donné, cette méthode requiert quatre évaluations de la fonction  $f$ . L'intervalle  $h$  doit être déterminé à l'avance, mais il arrive que cet intervalle soit trop grand pour obtenir une précision suffisante de la solution, ainsi il faut pouvoir adapter sa longueur. Pour ce faire, la méthode adaptative de Runge-Kutta au cinquième ordre peut être utilisée. Cette méthode se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
 k_0 &= f(x_n, y_n) \\
 k_i &= f\left(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \\
 y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=0}^s c_i k_i + O(h^6) \\
 x_{n+1} &= x_n + h
 \end{aligned} \tag{6-5}$$

où les différents coefficients  $a_i$ ,  $b_{ij}$  et  $c_i$  sont les paramètres donnés par Cash et Karp [46]. Ces paramètres sont présentés dans le tableau 6-1. Elle est adaptative, car un intervalle donné est diminué jusqu'à l'obtention d'une erreur acceptable sur le calcul de la fonction  $y$ . L'erreur  $\Delta$  est la différence entre la valeur de  $y$  calculée par un Runge-Kutta au cinquième ordre et par un Runge-Kutta au quatrième ordre :

$$\begin{aligned}
 \Delta &\equiv y_{n+1} - y_{n+1}^* = h \sum_{i=0}^s (c_i - c_i^*) k_i \\
 y_{n+1}^* &= y_n + h \sum_{i=0}^s c_i^* k_i + O(h^5)
 \end{aligned} \tag{6-6}$$

Les coefficients  $c_i^*$  sont utilisés pour le calcul de  $y^*$  par un Runge-Kutta au quatrième ordre.

Tableau 6-1 : Les paramètres de Cash-Karp pour la méthode adaptative de Runge-Kutta au 5-ième ordre

$i$	$a_i$	$b_{ij}$					$c_i$	$c_i^*$
0	0						$\frac{3}{3^8}$	$\frac{2825}{2^{26}648}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{185^5}{48384}$
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
4	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{2^{22}}{14336}$
5	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{442^5}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1^{22}1}$	$\frac{1}{4}$
$j$		0	1	2	3	4		

Dans notre cas, l'erreur désirée  $\Delta_d$  est supposée proportionnelle à la dérivée et à la taille  $h$  de l'intervalle :

$$\Delta_d = h \frac{dy}{dx} \quad (6-7)$$

La dérivée pour chaque intervalle  $h$  donné est approximée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \sum_{i=0}^5 c_i k_i \quad (6-8)$$

Le nouvel intervalle de calcul est obtenu à partir de l'intervalle déjà essayé :

$$h_d = \begin{cases} Sh_e \left| \frac{\Delta_d}{\Delta_e} \right|^{0.20} & \text{si } \Delta_d \geq \Delta_e \\ Sh_e \left| \frac{\Delta_d}{\Delta_e} \right|^{0.25} & \text{si } \Delta_d \leq \Delta_e \end{cases} \quad (6-9)$$

L'indice  $d$  représente la valeur désirée et l'indice  $e$  la valeur de l'essai précédent.  $S$  est un facteur de sécurité dont la valeur est inférieure de quelques pourcentages à l'unité. Ce facteur est nécessaire car comme notre estimation de l'erreur n'est pas exacte, mais fonction de l'intervalle  $h$ , sa précision est de l'ordre de  $h$ . L'importance des valeurs des exposants dans l'équation (6-9) est discutée dans le livre Numerical Recipes in C dans le chapitre sur l'intégration des équations différentielles ordinaires [47].

## 6.2.2 Comparaison entre deux méthodes de Runge-Kutta

Pour comparer les deux méthodes de Runge-Kutta mentionnées ci-dessus, l'équation différentielle suivante a été résolue :

$$\frac{dy}{dx} = Ky(1 - y) \quad (6-10)$$

Sa solution analytique calculée par la méthode de séparation des variables est la suivante (voir l'annexe D7) :

$$y = \frac{I}{I + Ce^{-Kx}} \quad (6-11)$$

Dans cette équation, le coefficient  $C$  est calculé à partir de la condition limite. Pour comparer la méthode de Runge-Kutta adaptative à celle de Runge-Kutta au quatrième ordre, les calculs ont été réalisés avec 10 pas de temps (Fig. 6-3) et 100 pas de temps (Fig. 6-4). Pour un grand intervalle  $h$ , la méthode adaptative donne visiblement de meilleurs résultats (Fig. 6-3), mais dès que l'intervalle diminue, c'est-à-dire que le nombre de pas de temps augmente, la différence n'est plus perceptible (Fig. 6-4) et les deux méthodes donnent une précision similaire. Ainsi avec un Runge-Kutta au cinquième ordre la précision désirée est obtenue avec moins de pas de temps que la méthode au quatrième ordre.

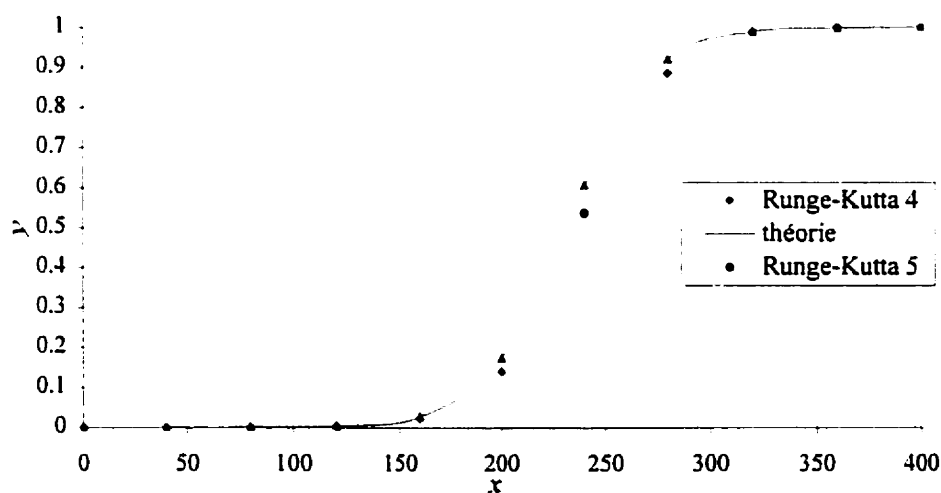


Figure 6-3: Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 10 pas de temps

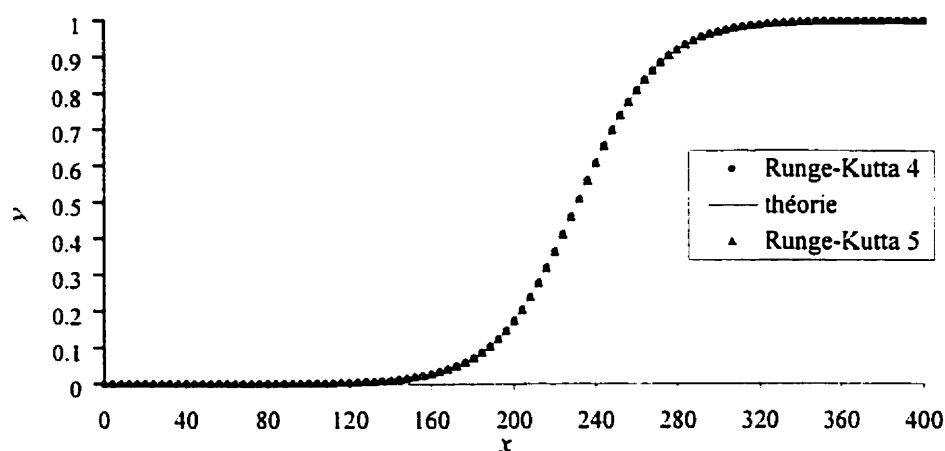


Figure 6-4: Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 100 pas de temps

### 6.3 Méthode de Runge-Kutta adaptée à la polymérisation

Deux méthodes de résolution d'équations différentielles ordinaires ont été présentées dans la section précédente. Il faut maintenant adapter les deux méthodes pour la résolution des réactions chimiques se produisant lors de la simulation du procédé RTM. L'équation de la polymérisation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y) \quad (6-12)$$

Tout d'abord l'équation (6-1) doit être réécrite sans le terme de convection, ainsi peut-on modéliser la réaction chimique par le modèle de Kamal-Sourour [8] :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = A e^{\frac{-E}{RT}} \chi^n (1 - \chi)^p \quad (6-13)$$

L'équation (6-13) s'exprime sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial \chi(T, t)}{\partial t} = \text{func}(T, \chi) \quad (6-14)$$

C'est une équation non-linéaire où le degré de polymérisation est fonction de la température et du temps, et sa dérivée temporelle est fonction de la température et du degré de polymérisation. L'équation (6-14) ne se présente pas exactement sous la même forme que l'équation (6-12). Il faut donc modifier les équations des deux méthodes de Runge-Kutta en conséquence, ainsi l'équation (6-4) pour la méthode de Runge-Kutta au quatrième ordre devient :

$$\begin{aligned} k_1 &= \text{func}(T_n, \chi_n) & k_2 &= \text{func}\left(T_n + \frac{1}{2}(T_{n+1} - T_n), \chi_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \text{func}\left(T_n + \frac{1}{2}(T_{n+1} - T_n), \chi_n + \frac{k_2}{2}\right) & k_4 &= \text{func}(T_{n+1}, \chi_n + k_3) \\ \chi_{n+1} &= \chi_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5) \end{aligned} \quad (6-15)$$

où la variable  $x$  au lieu d'être remplacée par le temps  $t$  est remplacée par la température  $T$ .

L'intervalle  $h$  est le pas de temps défini comme la différence entre le temps  $t_{n+1}$  et le temps  $t_n$ . Les équations (6-5) et (6-6) pour la méthode adaptative deviennent :

$$\begin{aligned} k_0 &= \text{func}(T_n, \chi_n) & k_i &= \text{func}\left(T_n + a_i(T_{n+1} - T_n), \chi_n + h \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j\right) \\ \chi_{n+1} &= \chi_n + h \sum_{i=0}^5 c_i k_i + O(h^6) & \chi_{n+1}^* &= \chi_n + h \sum_{i=0}^5 c_i^* k_i + O(h^5) \\ \Delta &\equiv \chi_{n+1} - \chi_{n+1}^* = h \sum_{i=0}^5 (c_i - c_i^*) k_i \end{aligned} \quad (6-16)$$

Dans ces équations,  $T_n$  et  $T_{n+1}$  sont les températures aux pas de temps précédent et actuel. Puisque l'analyse thermique se fait avant l'analyse de la polymérisation, ces deux valeurs sont connues.

Pour une simulation où le couplage écoulement-température-cinétique existe, l'intervalle  $h$  est imposé dans le calcul de la phase d'injection, par contre lors d'une simulation de cuisson, il est imposé par l'utilisateur et tenu constant durant la simulation. Durant la résolution de la réaction chimique par la méthode de Runge-Kutta adaptative, l'intervalle de départ  $h$  doit être subdivisé pour améliorer la précision en utilisant l'équation (6-9). La première égalité dans cette équation sert à déterminer à partir d'un sous-intervalle initial la taille du sous-intervalle suivant. Avec la deuxième égalité, cet essai est réactualisé jusqu'à l'obtention d'une erreur acceptable et devient le sous-intervalle suivant. Tous les sous-intervalles sont ajoutés et le dernier sous-intervalle est déterminé de telle sorte que l'intervalle de départ  $h$  soit conservé. La dérivée temporelle du degré de polymérisation pour cet intervalle  $h$  est la somme de la dérivée pour chaque sous-intervalle multiplié par la valeur de ce sous-pas de temps.

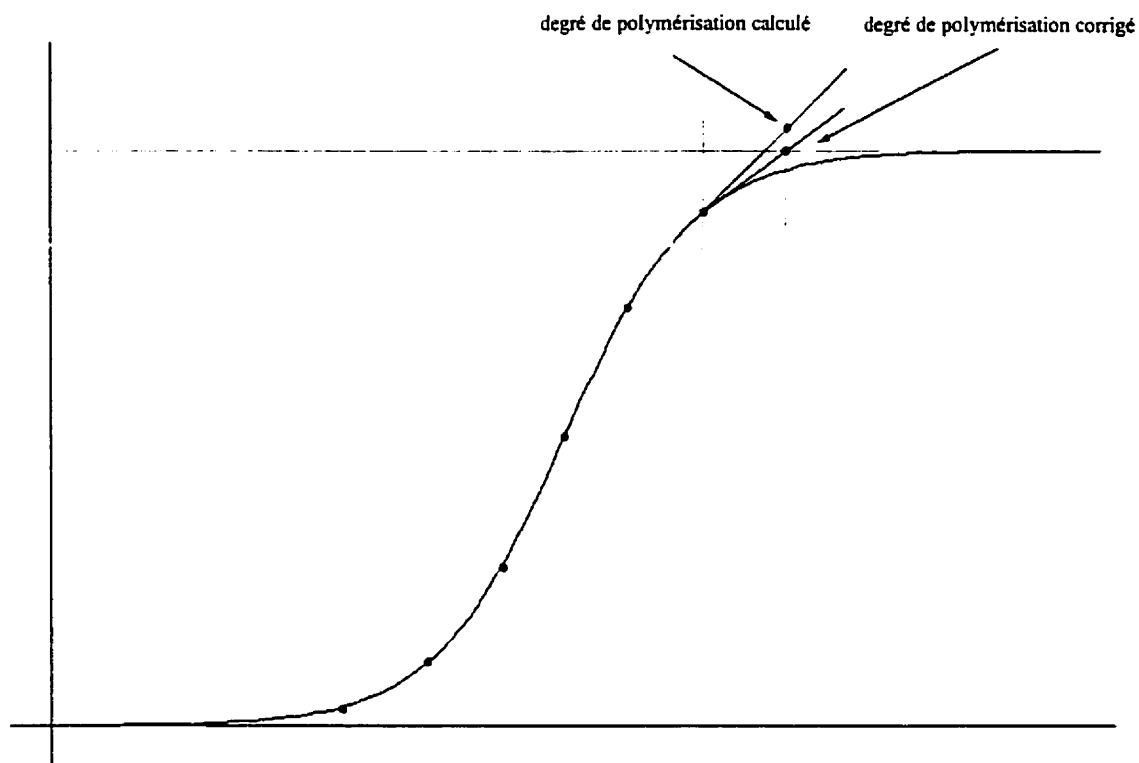


Figure 6-5: Réajustement de la dérivée temporelle du degré de polymérisation

Le degré de polymérisation est un pourcentage indiquant l'état de conversion de la résine durant sa cuisson, ainsi il peut varier seulement entre 0 et 1, mais la résolution numérique peut donner des résultats sortant de ces limites, il faut donc l'imposer dans le code. Ainsi, le degré de polymérisation calculé est fixé à 1 si sa valeur est supérieure à l'unité. De plus, dans la méthode adaptative, la dérivée calculée est réajustée en conséquence (fig. 6-5). Ainsi, si pour l'intervalle d'essai intermédiaire la valeur du degré de polymérisation dépasse l'unité, la dérivée est calculée à partir de l'unité et non du degré de cuisson supérieur à 1 :



$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{n+1} \equiv \begin{cases} \sum_{i=0}^s c_i k_i, & \chi_{n+1} \leq l \\ \frac{l - \chi_n}{h}, & \chi_{n+1} > l \end{cases} \quad (6-17)$$

### 6.3.1 Comparaison entre les deux méthodes de Rung-Kutta pour la polymérisation

Dans cette section les deux méthodes de Runge-Kutta sont comparées comme à la section 6.2.2, mais cette fois-ci de vrais paramètres pour la cinétique chimique sont utilisés. Dans les exemples suivants, on a utilisé la loi de Kamal-Sourour pour décrire la réaction chimique. on suppose qu'une seule réaction est présente durant la simulation. On a donc résolu l'équation suivante pour la polymérisation :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = 9.17 \cdot 10^6 e^{\frac{-7289}{T}} \chi^{0.85} (1 - \chi)^{1.15} \quad (6-18)$$

Comme ce problème est étroitement lié à l'analyse thermique, l'équation de diffusion suivante a été résolue :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_{\infty}}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_f \rho_f \Delta h}{\rho c_p} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (6-19)$$

Les valeurs utilisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} k_{\infty} &= 0.25 \text{ W/mK} & c_{p_s} &= c_{p_f} = c_p = 1205 \text{ J/kgK} \\ \rho &= 1720 \text{ kg/m}^3 & \rho_f &= 1083 \text{ kg/m}^3 \\ \Delta h &= 266342 \text{ J/kg} & \varepsilon_f &= 0.57 \end{aligned} \quad (6-20)$$

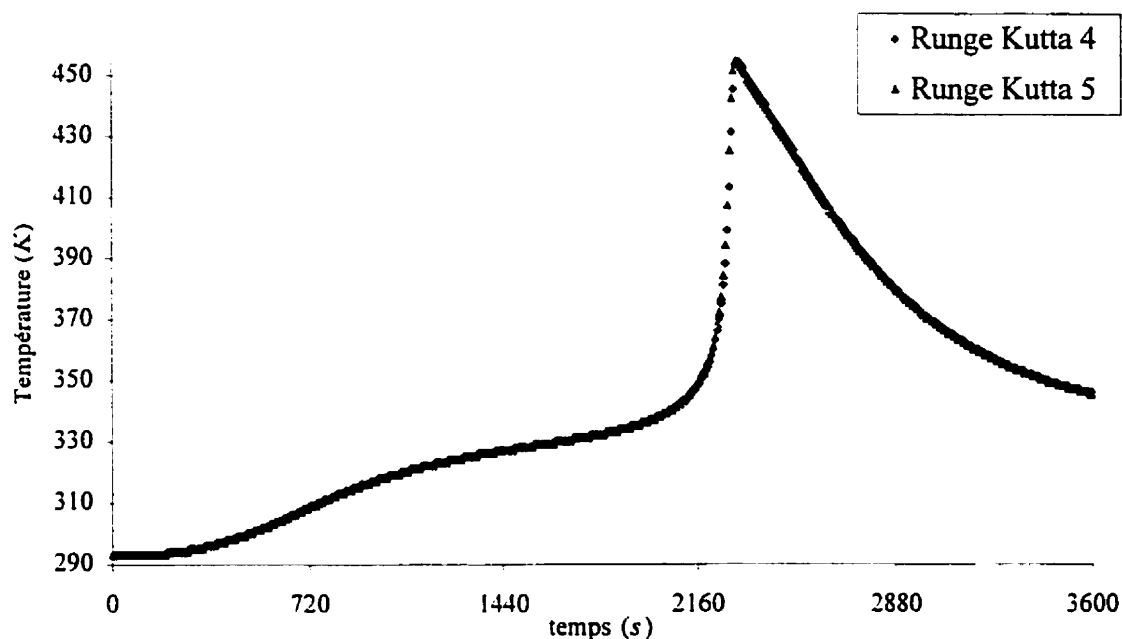


Figure 6-6: Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 500 pas de temps

Ce problème est unidimensionnel car la variation de la température et par conséquent la variation du degré de polymérisation se font dans la direction de l'épaisseur du composite qui est prise égale à 2.54 cm. La température initiale du composite est 293 K. La condition limite aux faces supérieure et inférieure pour la température est 293 K pendant 10 minutes, puis la température est augmentée à 333 K pour le reste de la simulation. Le maillage utilisé est composé de 100 éléments triangulaires uniformes dans l'épaisseur. Pour la comparaison des deux méthodes de Runge-Kutta, on a choisi 500 (Fig. 6-6) et 50 (Fig. 6-7) pas de temps. Les figures (6-6) et (6-7) représentent la température prise au milieu de l'épaisseur du composite. Sur la

première figure, on remarque que les deux méthodes donnent la même solution, tandis que sur la deuxième il existe une différence notable entre les deux méthodes. Quand le pas de temps est suffisamment grand, les deux méthodes sont identiques tel qu'indiqué à la section 6.2.2.

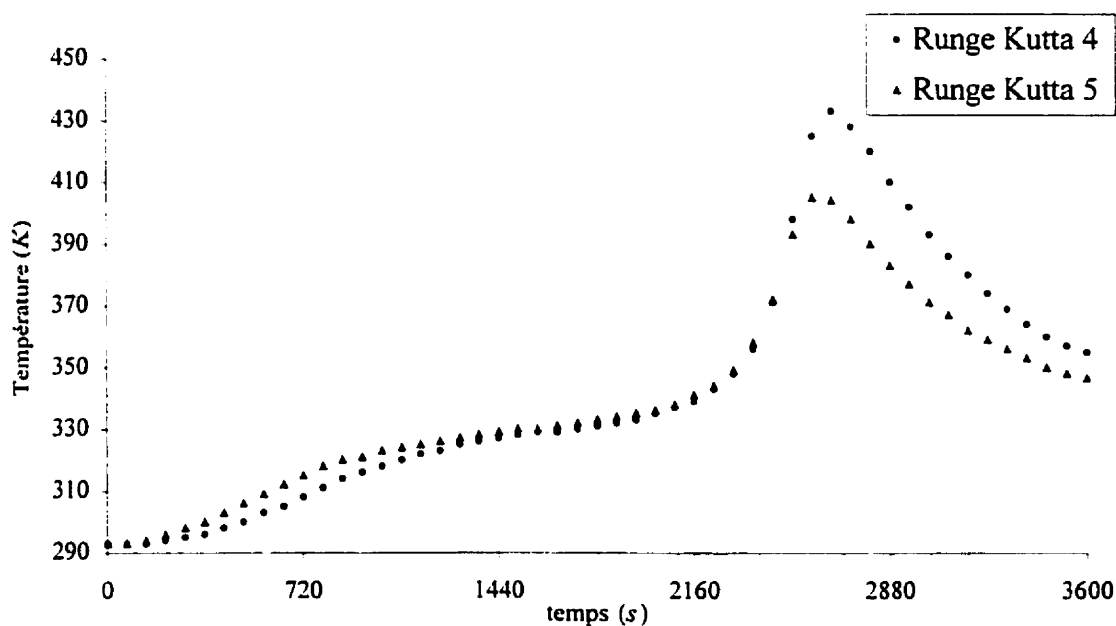


Figure 6-7: Comparaison entre Runge-Kutta de 4ième et 5ième ordre pour 50 pas de temps

Sur les deux figures précédentes le pic de température se produit presque au même moment pour les quatre courbes. Ce pic indique une augmentation brutale de la température dans la cavité. Cette hausse est due à l'exothermie chimique, c'est-à-dire la réaction de polymérisation dégage de l'énergie qui est transmise à la cavité par un ajout de chaleur. On remarque que l'amplitude de ce pic varie beaucoup avec la méthode et le nombre d'intervalles de calcul, ainsi pour 50 pas de temps (Fig. 6-7) la température

maximale est de 405 K pour la méthode adaptative et de 433 K pour la méthode de Runge-Kutta standard, tandis que pour 500 intervalles (Fig. 6-6) dans les deux cas, celle-ci est de 454 K. Il y a donc une augmentation de l'amplitude avec l'accroissement du nombre de pas de temps. Comme dans les quatre cas étudiés les paramètres physiques sont les mêmes, cette variation de la température maximale indique que la simulation numérique du problème de polymérisation est fortement dépendante du nombre de pas de temps choisi. La non-linéarité et l'influence de la température sur le degré de polymérisation, et vice-versa, compliquent donc la résolution numérique du problème.

#### 6.4 Convergence de la simulation de polymérisation

Pour vérifier si les solutions présentées sur les deux figures précédentes (Fig. 6-6 et 6-7) convergent, quatre simulations avec différents pas de temps ont été calculées (200, 500, 1000 et 5000 pas). Les résultats pour la température sont présentés dans la figure (6-8). La température représentée est toujours prise au milieu de l'épaisseur du composite. De plus, ces solutions ont été comparées avec la solution obtenue avec un logiciel trouvé sur INTERNET [48]. Cette solution est notée CCD (*Curing Cycle Design*) dans le reste du chapitre. Les paramètres utilisés sont les mêmes que ceux donnés par les équations (6-18) et (6-20).

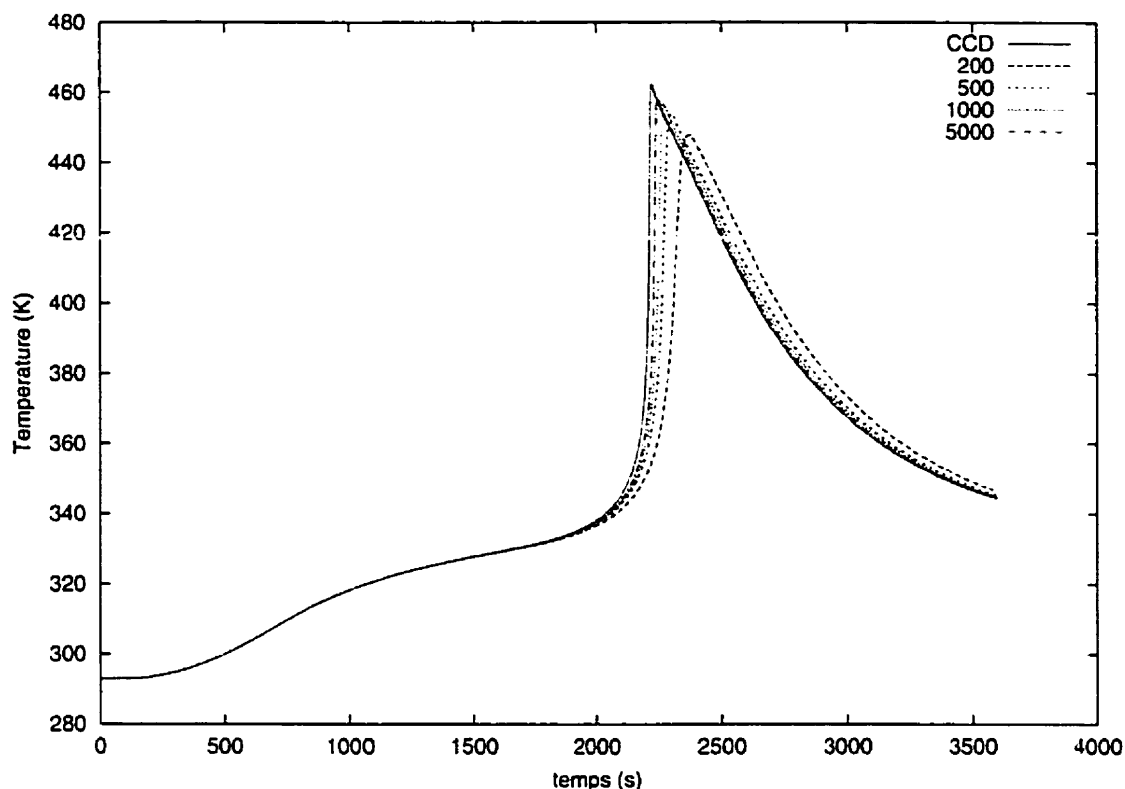


Figure 6-8: Convergence vers la solution exacte pour la température

Sur cette figure (6-8), on voit bien qu'en augmentant le nombre de pas de temps la solution converge vers la solution donnée par le CCD. D'ailleurs avant le pic exothermique, toutes les courbes sont superposées car la réaction chimique n'a pas encore eu lieu et donc le seul phénomène physique est la diffusion thermique. Avec moins de pas de temps, la pente est difficilement obtenue, car il existe une variation rapide et grande de la température entre deux intervalles. Pour traiter ce genre de problèmes, un pas de temps adaptatif augmenterait la précision en réduisant les intervalles et permettrait ainsi d'avoir des variations de température pouvant être approximées par des lignes droites.

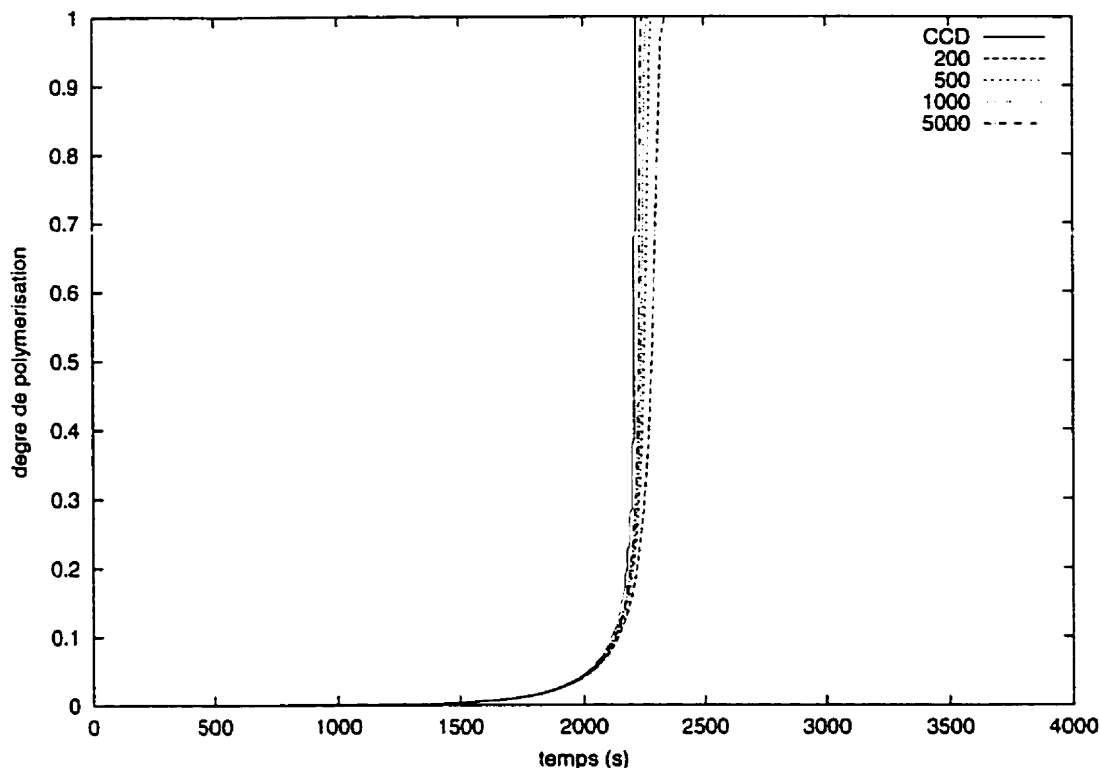


Figure 6-9: Convergence vers la solution exacte pour le degré de polymérisation

La figure (6-9) représente pour les mêmes simulations le degré de polymérisation. Sur les cinq courbes, on voit que la réaction chimique démarre au même moment. On remarque que les résultats des différentes simulations de la figure (6-9) sont plus proches que les résultats de température. Avoir peu de pas de temps signifie que les intervalles sont plus grands; ainsi modéliser la conversion brutale de la résine demande un intervalle plus grand sur l'axe des abscisses. Dans une moindre mesure qu'avec la température, on peut observer qu'en augmentant le nombre de pas de temps, la précision de la solution du degré de conversion de la résine augmente aussi.

## 6.5 Résolution itérative de problèmes non-linéaires

Dans la section précédente, on a vu que le module de cinétique chimique résout le bon problème et donne des résultats acceptables surtout pour le degré de polymérisation. Pour améliorer la précision des solutions de température, une méthode avec un pas de temps adaptatif et une résolution itérative du problème non linéaire formé par l'analyse thermique et la polymérisation a été implémentée. La méthode itérative utilisée recherche le point fixe du problème en calculant plusieurs fois à la suite la solution pour le même pas de temps. Pour un intervalle donné, comme précédemment tout d'abord l'analyse thermique est effectuée, puis le champ de température calculé est utilisé pour résoudre le problème de polymérisation. Ensuite avec la solution du degré de polymérisation, le problème thermique est résolu une nouvelle fois. Cette procédure est répétée jusqu'à obtention d'un champ de température qui ne varie pas d'une itération à la suivante. Le résidu est calculé sur la température à partir de l'équation suivante :

$$\text{résidu} = \frac{\|T_{n+1} - T_n\|}{\|T_{n+1} + T_n\|} \quad (6-21)$$

où  $T_{n+1}$  est la solution à la  $n+1$ -ième itération du système global thermique, tandis que la solution à l'itération précédente est notée  $T_n$ . La solution est jugée bonne si le résidu est inférieur à  $5 \cdot 10^{-6}$ .

Dans cette méthode on utilise aussi un pas de temps adaptatif pour la solution de l'équation de polymérisation. Ce pas de temps est calculé par l'équation suivante :

$$h_{\text{adaptative}} = \begin{cases} h_{\text{const}}, & h_{\text{const}} < h_{\text{adaptative}} \\ \frac{K}{d_1 \chi|_{\text{max}}}, & h_{\text{const}} > h_{\text{adaptative}} \end{cases} \quad (6-22)$$

$K$  est le coefficient qui indique la densité des points de calcul. Dans nos exemples, ce coefficient est égal à 0.02 ;  $d_1 \chi|_{\text{max}}$  est la dérivée maximum du degré de polymérisation dans tout le domaine pour le pas de temps choisi.

Les figures (6-10) et (6-11) montrent les variations de température et du degré de polymérisation, respectivement, pour une épaisseur donnée. Ici on compare la méthode non linéaire itérative et la méthode directe. Dans la méthode directe, 5000 pas de temps ont été utilisés, tandis que dans la méthode itérative le nombre de pas de temps indiqué est 50. En réalité 153 pas de temps ont été exécutés grâce au module adaptatif. Le nombre de pas de temps indiqué est la valeur que l'utilisateur entre dans le fichier de données. À partir de cette valeur, le pas de temps adaptatif est calculé. Le nombre de pas de temps réel est supérieur au nombre de pas de temps indicatif car l'intervalle est subdivisé pour améliorer la précision des résultats. Les trois courbes de température donnent des solutions comparables. Ainsi avec 153 pas de temps on obtient une précision égale à la méthode précédente avec 5000 pas de temps. Pour le degré de polymérisation (Fig. 6-11), de meilleurs résultats sont obtenus car les courbes sont quasiment identiques.



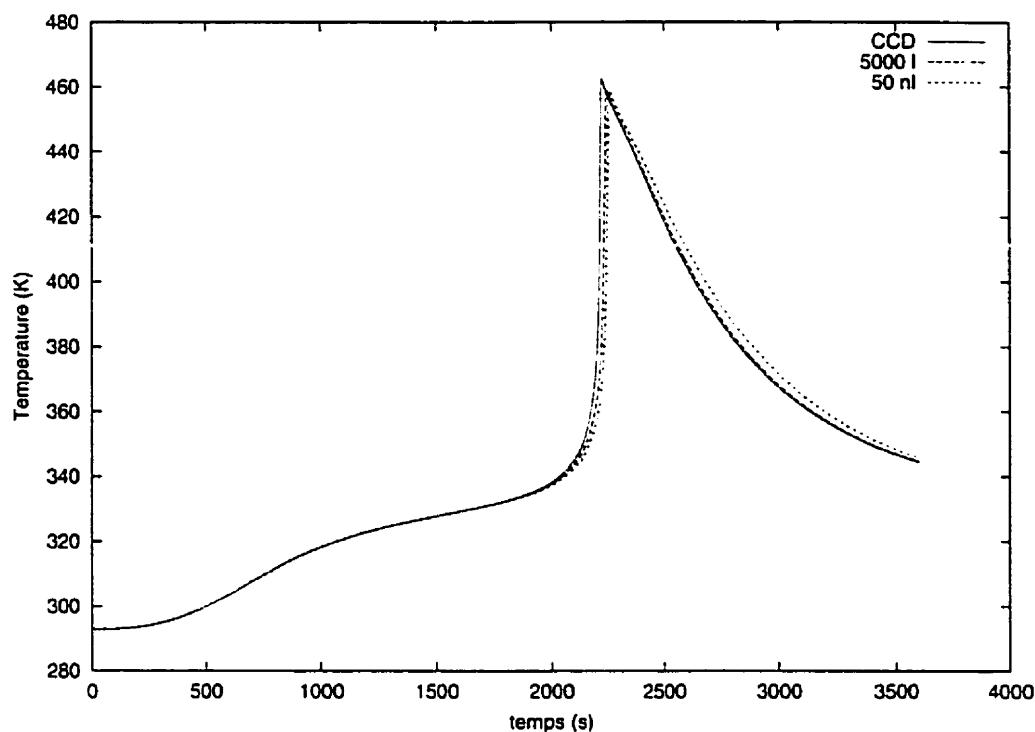


Figure 6-10: Comparaison des champs de température calculés par des méthodes directe et itérative

Sur la figure suivante (6-12), l'influence du pas de temps sur la précision de la méthode itérative non linéaire a été étudiée. 50, 100 et 500 pas de temps indiqués ont été utilisés, lorsqu'en réalité, 153, 188 et 560 pas de temps ont été exécutés, respectivement. Seulement les courbes de température sont montrées. On note une très bonne concordance entre celles-ci. La différence entre les pas de temps réel et indicatif diminue en augmentant le nombre de pas de temps. La dernière figure (6-13) représente les courbes de température pour 100 pas de temps calculés par la méthode itérative non linéaire (188 pas de temps en réalité), 100, 200 et 500 pas de temps calculés par la méthode directe. On voit que la solution itérative donne de meilleurs résultats comparée aux autres. Les

simulations ont été réalisées sur un Pentium II, 233 MHz avec 128 Mo de mémoire vive sous Windows NT 4.0. La première simulation a été calculée en 131 sec, tandis que les autres sont obtenues en 26, 53 et 148 secondes respectivement. La simulation non-linéaire prend donc moins de temps qu'une simulation directe avec 500 pas de temps et donne de meilleurs résultats.

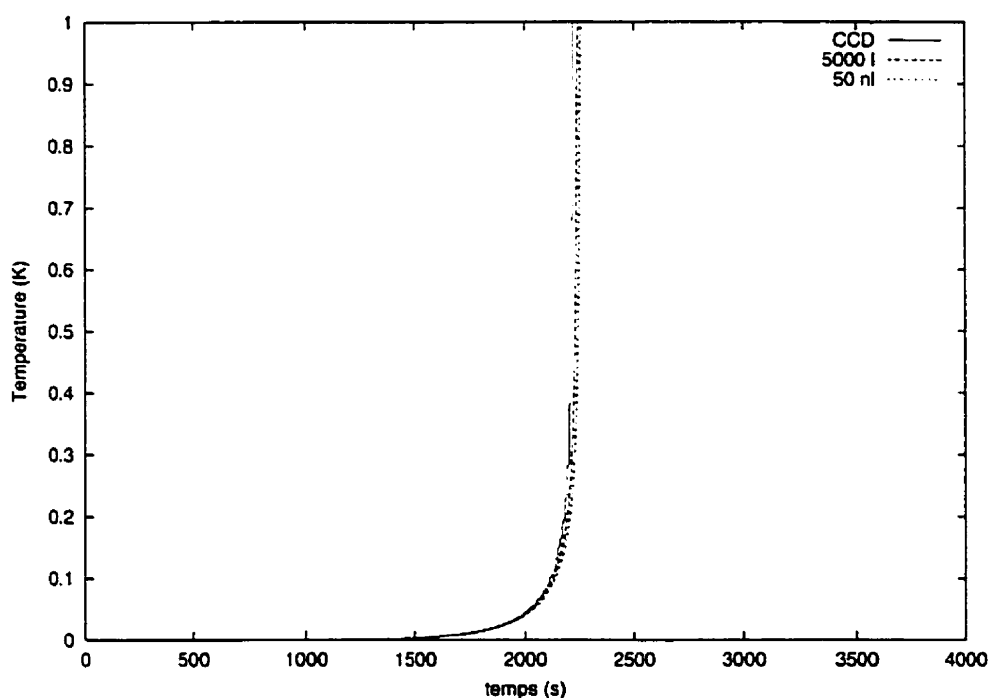


Figure 6-11: Distributions de la résine polymérisée calculées par des méthodes directe et itérative

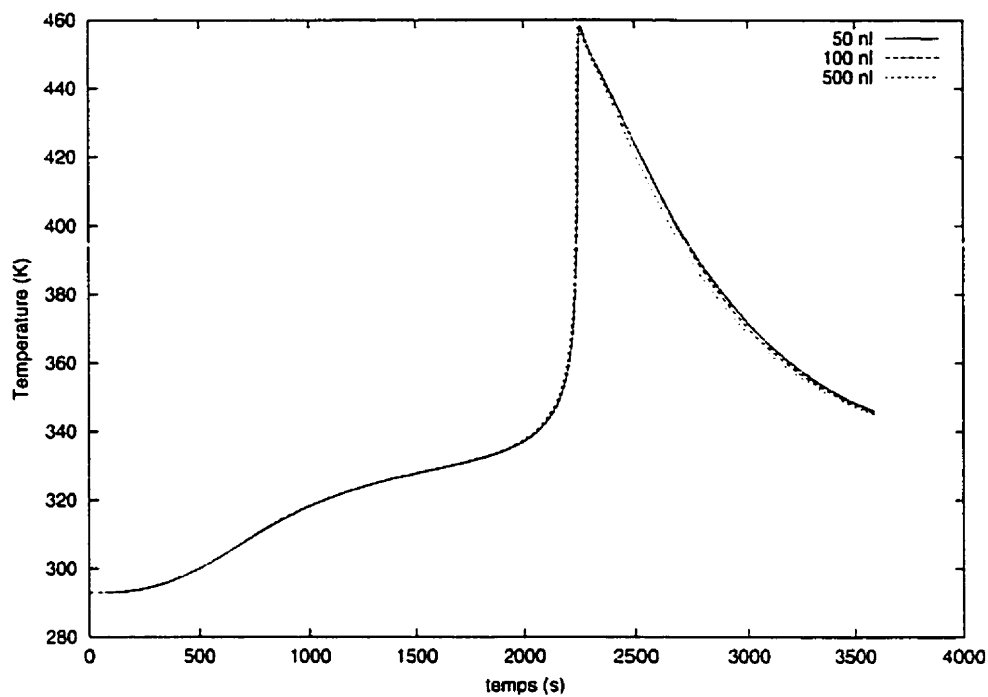


Figure 6-12: Influence du nombre de pas de temps pour la méthode itérative

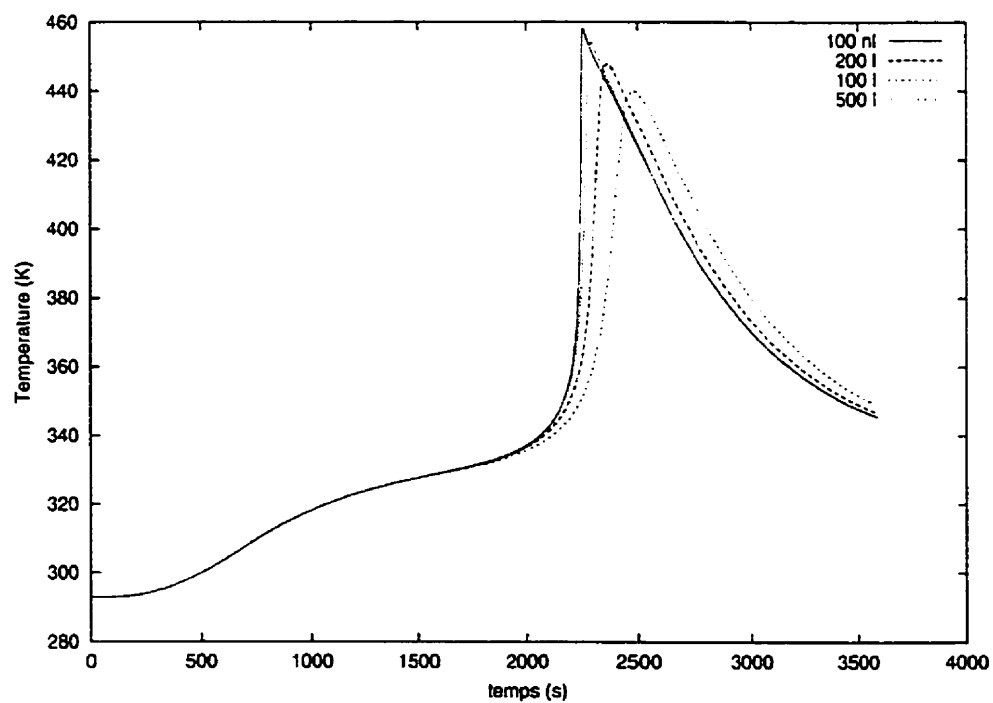


Figure 6-13: Comparaison des méthodes linéaire et non-linéaire

## 6.6 Exemple de simulation complète

Les figures (6-15) à (6-17) montrent les résultats d'une simulation où le couplage écoulement-température-cinétique a été utilisé. La cavité d'injection est la même que dans l'exemple du début du chapitre (section 6.1.1). La figure (6-14) montre les conditions d'injection. Les trois parois et l'insert circulaire sont tenus à 340 K comme la température initiale de la préforme (Fig. 6-14). Le maillage utilisé est non-structuré et contient 724 éléments triangulaires. La cinétique de polymérisation est modélisée par une seule réaction chimique dont l'équation différentielle est la même que l'équation (6-18) :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = 9.17 \cdot 10^6 e^{\frac{-7289}{T}} \chi^{0.85} (1 - \chi)^{1.15}$$

La plupart des autres paramètres ont été choisis arbitrairement dans le but d'obtenir une simulation où tous les couplages effectués sont visibles. Le fichier de données se trouve dans l'annexe G.

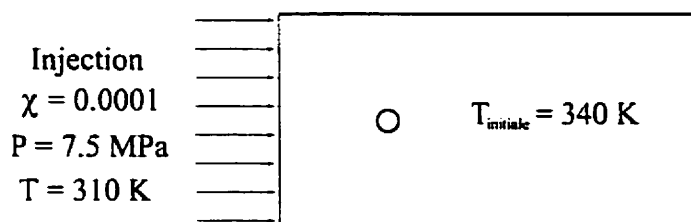


Figure 6-14: Conditions d'injections pour une simulation complète

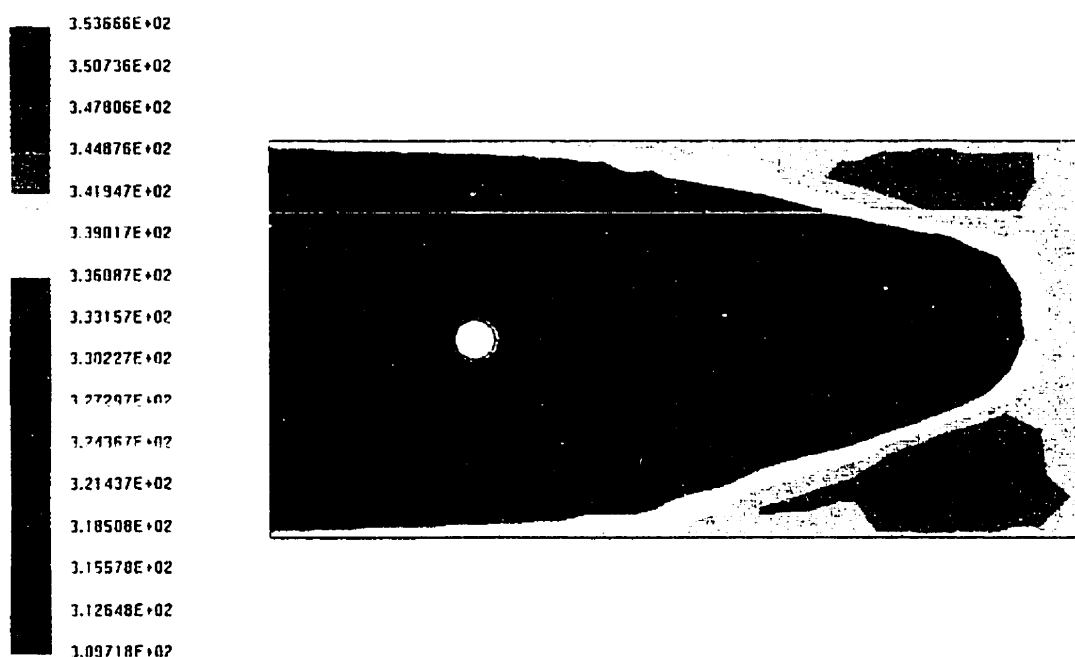


Figure 6-15: Température en fin d'injection



Figure 6-16: Degré de polymérisation en fin d'injection

Les figures (6-15) et (6-16) représentent respectivement les distributions de température et du degré de polymérisation à la fin de l'injection. On observe que la polymérisation débute dans les régions les plus chaudes, c'est-à-dire dans les points les plus éloignés de l'injection (Fig. 6-16). L'exothermicité de la réaction provoque une élévation de température de 13.7 degrés (Fig. 6-15). La durée d'injection est de 25 minutes et 12 secondes.

## CHAPITRE 7

### VALIDATION EXPÉRIMENTALE

#### 7.1 Dispositif expérimental

Dans ce chapitre, le module thermique du logiciel LCMFLOT va être validé grâce à une injection expérimentale réalisée au laboratoire de l'ISITEM à Nantes. Avant de présenter les différents paramètres de l'injection et ses données, le montage expérimental et son fonctionnement vont être expliqués en profondeur.

La figure (7-1) représente le montage expérimental utilisé pour l'injection sur un mat en fibres de verre. Le montage comprend une presse ALIS avec les plateaux chauffants, un bain thermostaté Lauda contenant le pot d'injection et le système d'acquisition. Le moule contenant le mat en fibres de verre est placé entre les plateaux chauffants entouré de plusieurs centimètres de Kerlane pour atténuer les pertes thermiques latérales en l'isolant. Les plateaux chauffants de la presse assurent la régulation en température et fournissent la pression nécessaire à la fermeture du moule. Une pompe à vide sert à dégazer la résine et la préforme avant l'injection et ensuite aspire la résine dans le moule pendant l'injection. La résine est préchauffée à la température voulue et ensuite maintenue à cette température en utilisant le bain thermostaté. Un régulateur de pression relié au circuit d'air comprimé assure une pression de maintien pendant la phase de cuisson de la pièce. Le système d'acquisition complet est composé

d'un ordinateur portable, d'un système d'acquisition de pression, d'un système d'acquisition de flux de chaleur et de température et d'une machine contrôlant la température de référence pour les capteurs de flux.

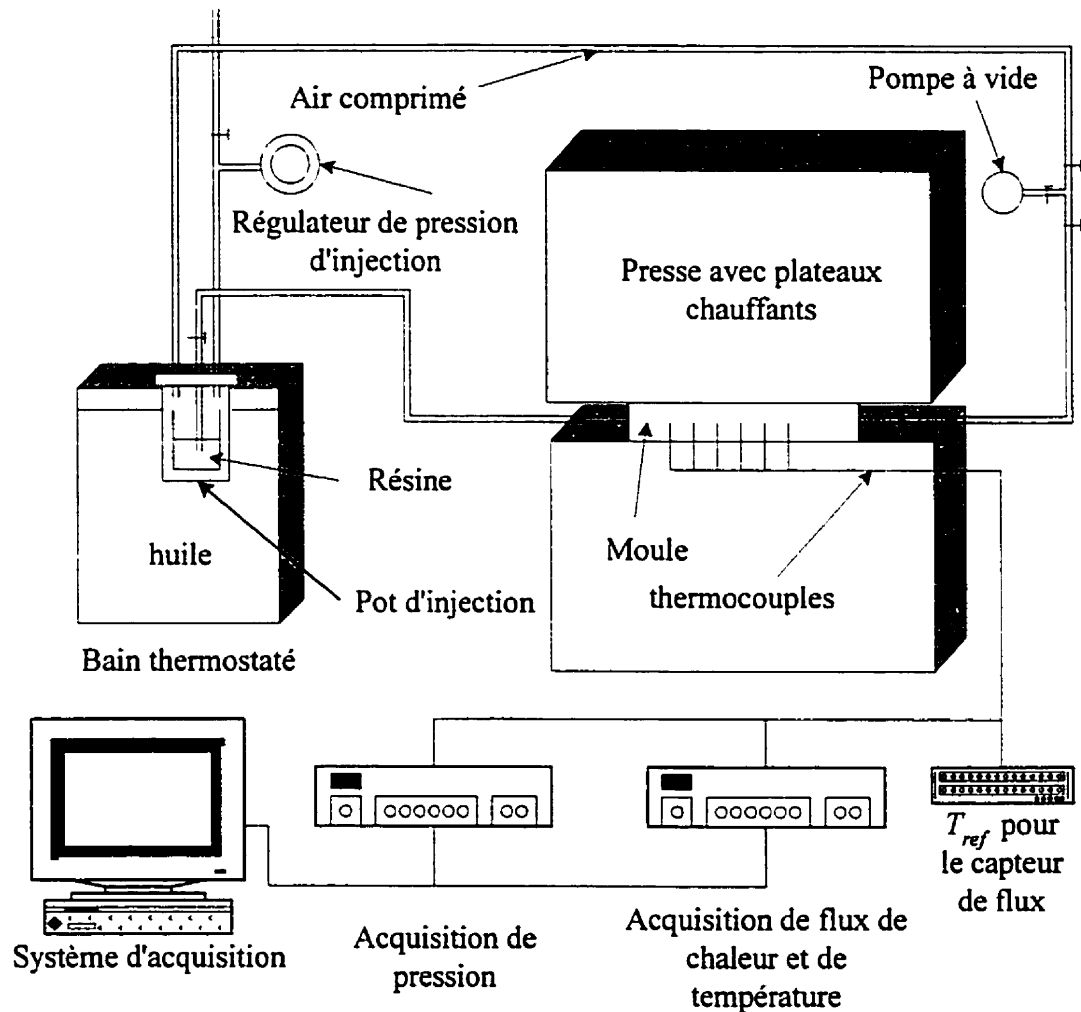


Figure 7-1 : Schéma du montage expérimental

Le moule RTM utilisé pour l'expérience est constitué de deux parties symétriques (voir annexe H pour un plan détaillé du moule). Une de ces parties est représentée sur la figure (7-2). Le moule est en acier. De plus, les canaux d'entrée et de sortie ainsi que le



joint d'étanchéité ont été intégrés au moule car ces éléments sont nécessaires pour réaliser une injection RTM. Le moule est de forme carrée de longueur 0.46 m et de hauteur 0.126 m. La cavité d'injection a une épaisseur de 6 mm et le mat doit avoir une aire de 0.4 m x 0.4 m. Chaque partie symétrique a une hauteur de 0.06 m et entre les deux, une cale de 6 mm doit être placée durant l'injection. L'espace libre ainsi créé est la cavité d'injection, qui contient le tissu, la préforme ou le mat.

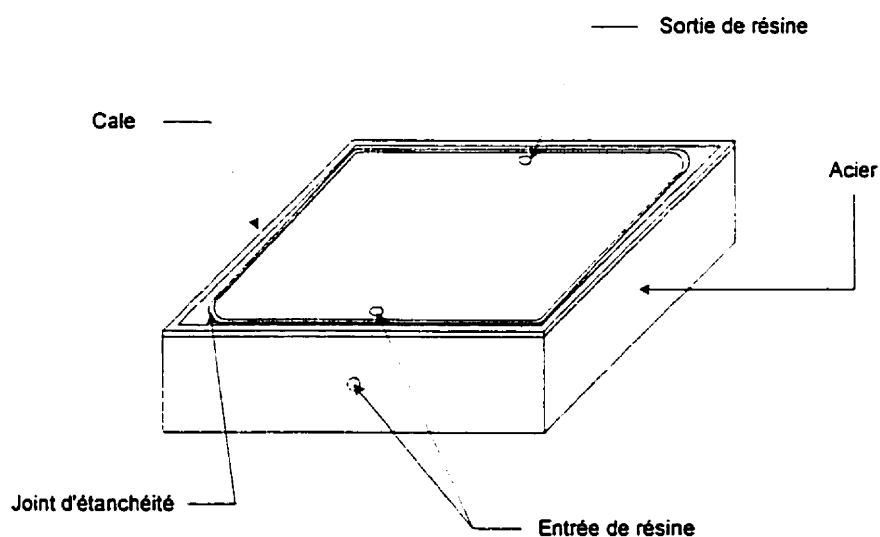


Figure 7-2 : Schéma du moule RTM

## 7.2 Données expérimentales

### 7.2.1 Les fibres de verre

Au total, 5 plis du mat de fibres de verre U812 ont été placés dans le moule d'acier pour obtenir l'épaisseur nécessaire de 6 mm. Ce matériau a une surface massique de

$s=375 \text{ g/m}^2$  et une densité de  $\rho_s=2550 \text{ kg/m}^3$ . Avec ces données le taux volumique de fibres a pu être calculé par l'équation suivante :

$$TVF = \frac{sn}{\rho h} \quad (7-1)$$

où  $n$  est le nombre de plis et  $h$  l'épaisseur de la cavité. L'équation (7-1) donne un taux volumique de fibres de 12.25 %. La porosité du mat est donc 87.75 %. À partir du taux volumique de fibres, la perméabilité du mat a pu être déterminée expérimentalement. Ainsi la perméabilité plane est  $S=4 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ . La perméabilité transverse est supposée être la même. Les propriétés thermiques des fibres de verre sont : pour la conductivité thermique,  $k_s=1 \text{ W/m.K}$ , et pour la chaleur spécifique,  $c_{ps}=812 \text{ J/kg.K}$ . Le mat est composé de fibres de 0.2 mm de diamètre. Chacune de ces fibres contient de 10 à 20 filaments de verre de 0.02 mm de diamètre environ.

Les thermocouples et les capteurs de flux ont été placés entre les plis du mat pour enregistrer l'évolution de la température dans la cavité durant l'injection et ensuite durant la cuisson. Deux capteurs de flux ont été placés dans la partie supérieure du moule, et deux dans la partie inférieure. Ils sont à 0.05 m et 0.14 m de l'extrémité gauche du moule. Un capteur de flux est constitué de quatre thermocouples de 80  $\mu\text{m}$  de type K (Chromel-Alumel). Le premier est disposé à la surface entre le moule et le mat, tandis que les trois autres sont situés dans le moule. À partir des différences en température, le flux de chaleur peut être calculé. Ainsi, durant l'injection seulement l'évolution de la température à la surface du mat est enregistrée.

### 7.2.2 La résine

La résine utilisée pour l'injection est la résine RTM6 avec les propriétés thermiques et la viscosité présentées dans le tableau (7-1).

Tableau 7-1 : Paramètres thermiques de la résine RTM6

<i>Résine RTM6</i>	
$\rho_f = 1117 \text{ kg/m}^3$	$k_f = 0.1 \text{ W/m K}$
$c_{pf} = 2360 \text{ J/kg K}$	$\mu = 0.02 \text{ Pas}$

### 7.2.3 Le moule

Les propriétés du moule nécessaires pour simuler une injection RTM sont les propriétés thermiques de l'acier : la densité  $\rho_m = 7800 \text{ kg/m}^3$ , la conductivité thermique  $k_m = 40 \text{ W/m K}$  et la chaleur spécifique  $c_{pm} = 490 \text{ J/kg K}$ .

## 7.3 Résultats expérimentaux

### 7.3.1 Conditions d'injection

La résine est injectée dans la cavité du moule avec la pompe à vide. C'est une injection à pression constante. La pression maintenue durant l'injection est donc la

pression atmosphérique, c'est-à-dire que la pression d'injection est de  $10^5$  Pa. Il s'agit d'une injection en ligne tel qu'indiqué sur la figure (7-3). La température de la résine est maintenue à  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  (Fig. 7-4), tandis que les plateaux chauffants de la presse maintiennent une température autour de  $155^{\circ}\text{C}$  pour les faces supérieure et inférieure du moule. Le moule est entouré horizontalement d'un isolant en mousse (conductivité  $k_i=0.046\text{ W/m}\cdot\text{K}$ , masse volumique  $\rho_i=90\text{ kg/m}^3$ , chaleur spécifique  $c_{pi}=2000\text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ).

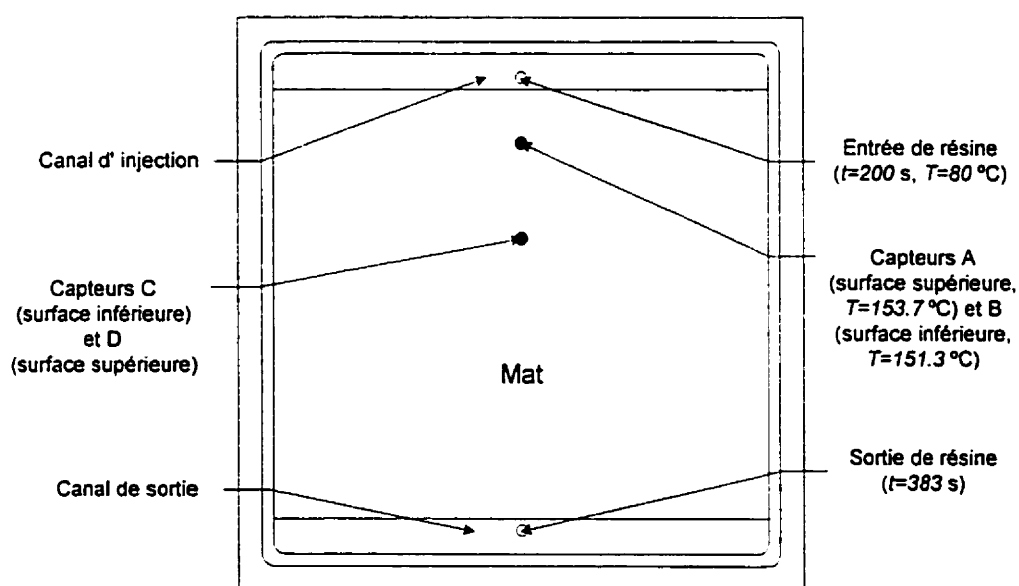


Figure 7-3 : Conditions d'injection et positionnement du mat dans le moule RTM

### 7.3.2 Déroulement de l'expérience

Tout d'abord cinq plis du mat U-812 ont été coupés aux dimensions voulues de  $0.4\text{ m}$  par  $0.4\text{ m}$  et placés dans la cale. Les capteurs de flux, ainsi que les thermocouples ont été disposés aux bons endroits entre les différents plis. Le renfort avec ses cinq plis a

ensuite été placé dans le moule. Le moule est fermé à l'aide d'une petite grue (à cause de son poids), puis placé dans la presse. L'isolant est ensuite disposé autour du moule pour minimiser les pertes de chaleur latérales. Puis la presse est programmée avec le cycle thermique suivant : pendant 30 minutes les plateaux chauffants sont maintenus à 30 °C, ensuite pendant 150 minutes la température est de 155 °C et pour finir, pendant un autre 150 minutes, la température monte à 500 °C. L'injection est effectuée vers la fin de la deuxième période quand le moule et le mat ont atteint une température constante de 152 °C. La première période de chauffe sert à augmenter doucement la température des plateaux chauffants pour atteindre la valeur voulue, puis il faut attendre la stabilisation de la température pour le moule et le mat. De la même façon, la résine doit atteindre la température d'injection voulue. Il faut aussi s'assurer que la température est stabilisée et reste constante durant l'injection. La figure (7-4) représente la distribution de température de la résine à la sortie du canal d'injection durant le remplissage de la cavité. L'injection a duré 3 minutes et 10 secondes, dont 7 secondes pour le remplissage du canal d'entrée de la résine. La température extérieure de l'isolant a été mesurée; elle se maintenait à 80 °C durant l'injection. Ensuite la dernière période du cycle thermique sert à la cuisson du composite au cours duquel la résine polymérise.

La température d'injection est enregistrée sur la figure (7-4). Cette température est prise dans le moule juste avant le mat (Fig. 7-3). On remarque sur la figure (7-4) que la température est tout d'abord de 152 °C. Cette valeur est la température d'équilibre atteinte dans le moule et la cavité avant l'injection. À 200 secondes on voit l'arrivée de la résine

dans la cavité avec une chute abrupte de la température. Ensuite durant l'injection, entre 200 et 450 secondes, la température est très bruitée, mais constante. C'est la température de la résine pendant l'injection. Sa valeur moyenne est de 80 °C. Une fois l'injection terminée, la température augmente doucement pour atteindre la température d'équilibre qui est autour de 150 °C avant le début de la cuisson. Noter que l'injection est réalisée durant la deuxième partie du cycle thermique décrit précédemment.

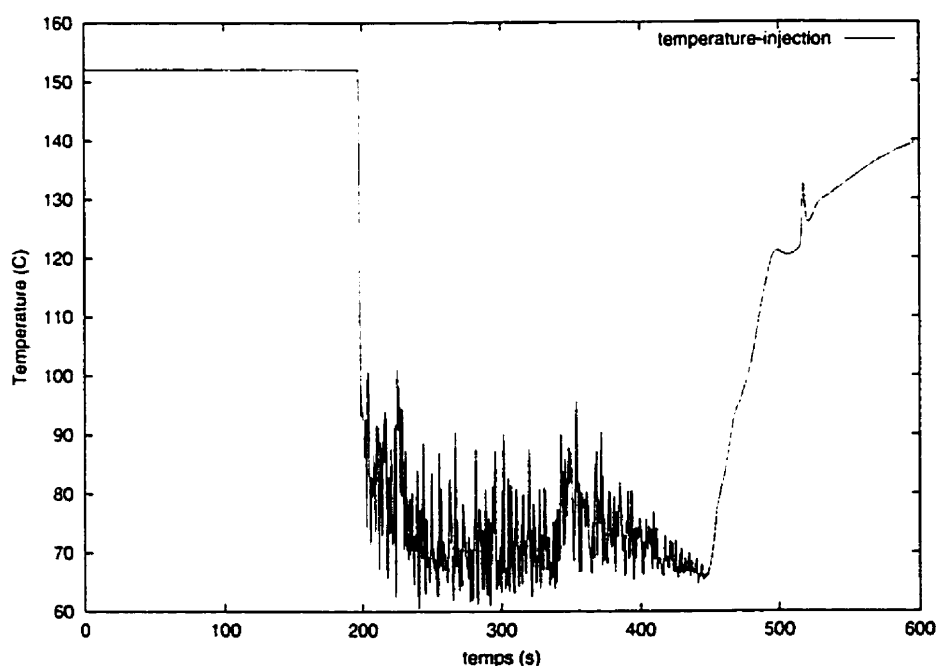


Figure 7-4 : Température de la résine à l'injection

### 7.3.3 Équation de conservation d'énergie

En utilisant l'équation adimensionnelle de conservation de l'énergie du chapitre 3, les nombres adimensionnels de Graetz, Péclet et Brinkmann peuvent être calculés. Tout

d'abord la conductivité effective du système résine-fibres doit être déterminée par l'équation :

$$k_e = \phi k_f + (1 - \phi) k_s = 0.21025 \text{ W/m}\cdot\text{K} \quad (7-2)$$

Comme l'injection complète dure 3 minutes et 10 secondes dont 7 secondes pour le remplissage du canal d'injection, la vitesse moyenne de la résine est de 0.0022 m/s. Cette vitesse est utilisée pour calculer les nombres adimensionnels présentés dans le tableau (7-2). Les coefficients de dispersion hydrodynamique sont évalués par la corrélation de Kaviany [36], (cf. équation (3-10)).

Tableau 7-2 : Nombres adimensionnels pour l'injection de la résine RTM6 sur le mat U-812

$Gz=2.483$
$Pe_{eff}=0.5517$
$Pe_{eff}/Gz=0.222$
$K_x=0.44$
$K_z=0.055$
$r=0.9$
$Br=5.525 \cdot 10^{-5}$

En remplaçant les nombres adimensionnels par leur valeur du tableau (7-2) dans l'équation (3-5), l'équation adimensionnelle de conservation d'énergie pour cette injection s'écrit donc :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} + 2.483 \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 2.25 \cdot 10^{-4} (1 + 2.093) \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + (1 + 0.262) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + 5.525 \cdot 10^{-5} \quad (7-3)$$

L'équation (7-3) révèle l'importance de la dispersion hydrodynamique dans cet exemple. En effet la dispersion hydrodynamique est plus importante que la conduction dans la direction de l'écoulement de la résine, tandis qu'elle augmente considérablement la diffusion transversale. Ainsi elle est 2 fois plus grande dans la direction longitudinale et représente 25 % dans le sens de l'épaisseur. De plus dans le tableau (7-2), le fait que le nombre de Graetz soit le plus grand indique que la convection est plus importante que la diffusion dans l'épaisseur. Enfin, le nombre de dispersion qui est le rapport entre les nombres de Péclet effectif et de Graetz indique que la convection est même plus importante que la dispersion hydrodynamique. Ainsi la convection est le phénomène prédominant dans cet exemple. La faible valeur du nombre de Brinkman dans le tableau (7-2) et l'équation (7-3) indique que la dissipation visqueuse est négligeable.

#### **7.3.4 Distribution de température**

Le flux de chaleur pour les quatre capteurs est montré sur la figure (7-5). Les capteurs A et D sont disposés sur la partie supérieure du moule, tandis que les capteurs B et C sont situés sur la partie inférieure. Les capteurs A et B se trouvent à 0.05 m de la ligne d'injection, tandis que les capteurs C et D sont situés à 0.14 m du début du moule.

Sur la figure (7-5) on remarque que les flux de chaleur pour les capteurs A et B sont sensiblement les mêmes, de même que ceux des capteurs C et D. Entre eux la petite différence est due à la différence de température entre la partie supérieure du moule et la



partie inférieure. La valeur absolue du flux de chaleur est plus grande pour les capteurs A et B que pour les deux autres car la différence de température entre la résine et le moule et entre la résine et le mat est plus importante proche du port d'injection que plus loin dans la cavité. La résine est réchauffée progressivement en avançant dans le moule. De plus, avant l'arrivée du front thermique, le flux de chaleur est nul pour les quatre capteurs. Puis pour les deux premiers capteurs, une augmentation abrupte de la valeur absolue du flux est enregistrée. Après le passage du front thermique la valeur absolue du flux des quatre capteurs augmente car à ces endroits la résine nouvelle arrive et la diffusion thermique entre la résine, le mat et le moule n'a pas encore atteint son point d'équilibre. À la fin du remplissage, le flux revient lentement à zéro pour les quatre capteurs.

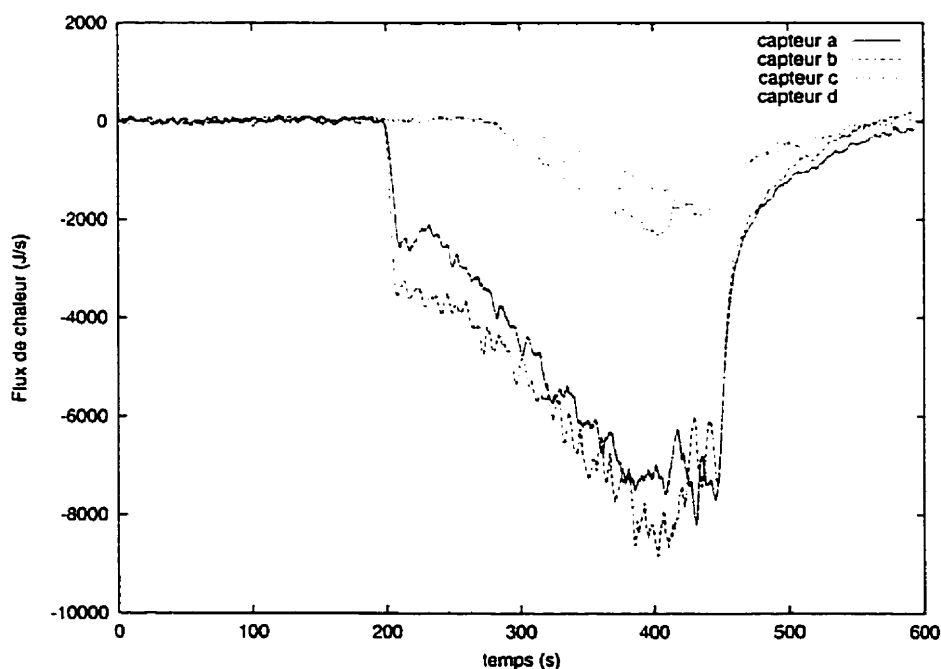


Figure 7-5 : Flux de chaleur entre le moule et le mat durant l'injection

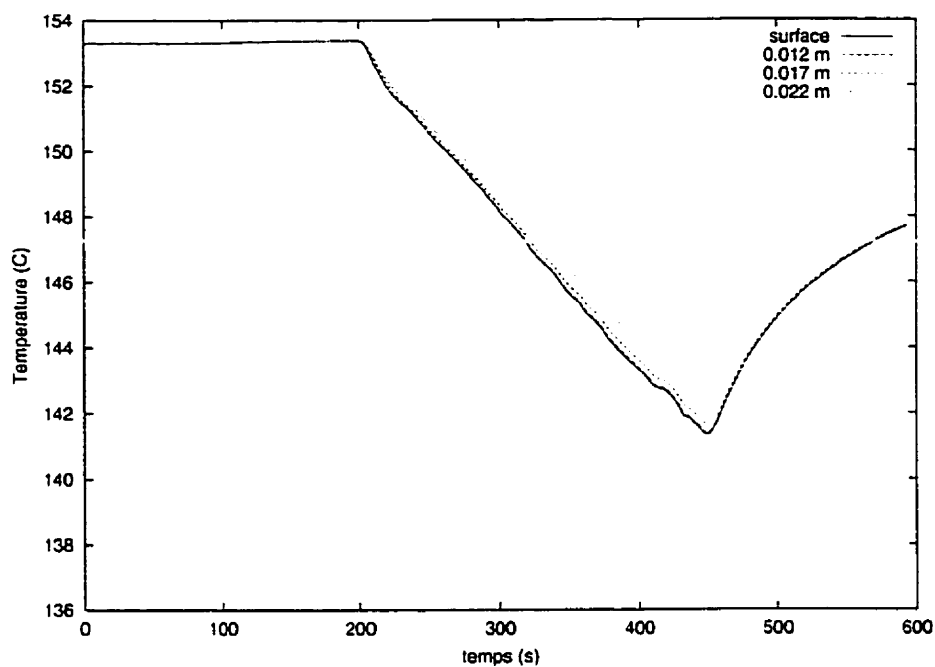


Figure 7-6 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur A

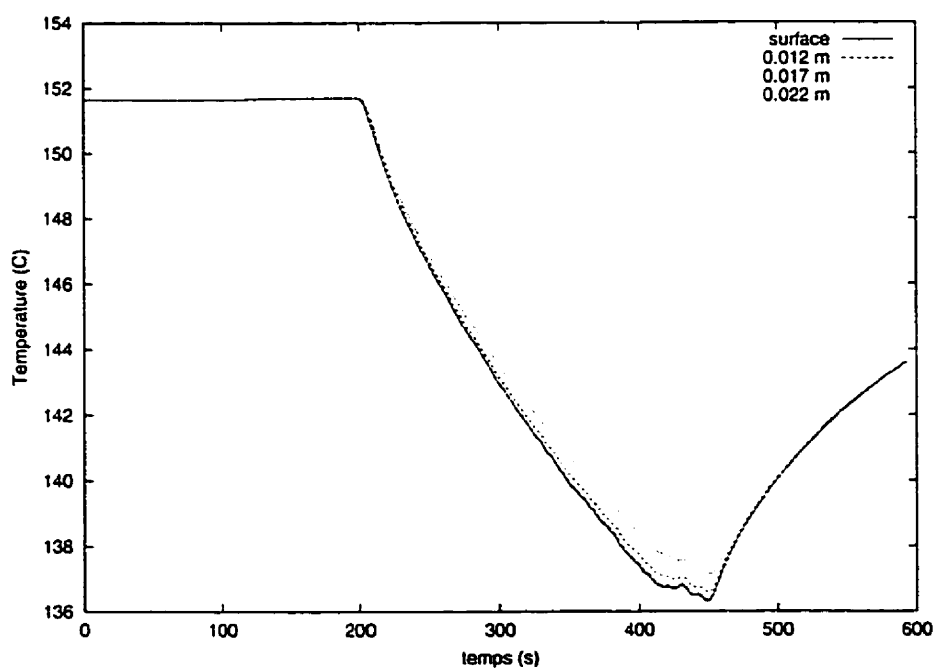


Figure 7-7 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur B

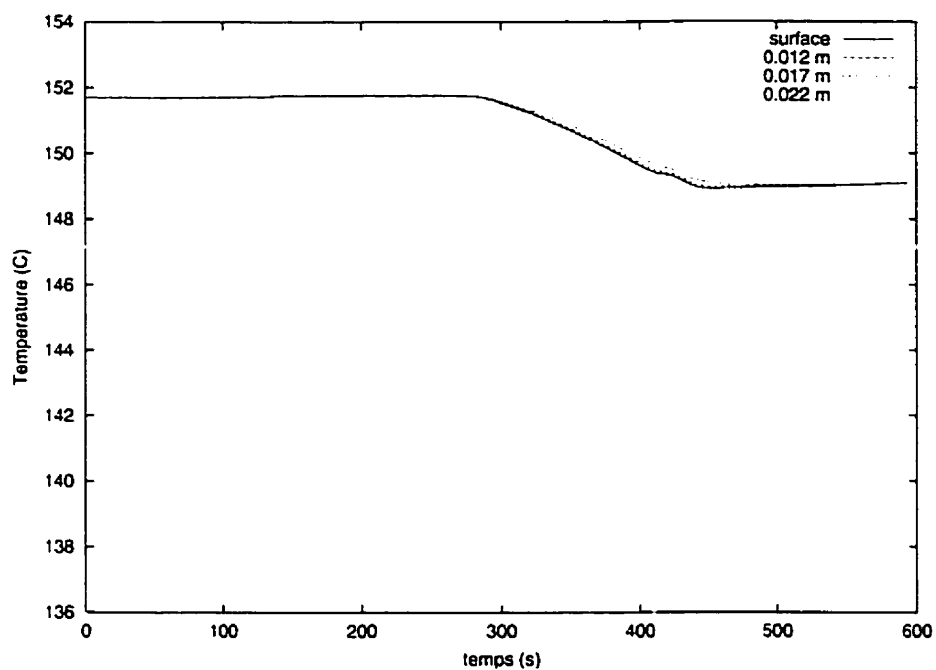


Figure 7-8 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur C

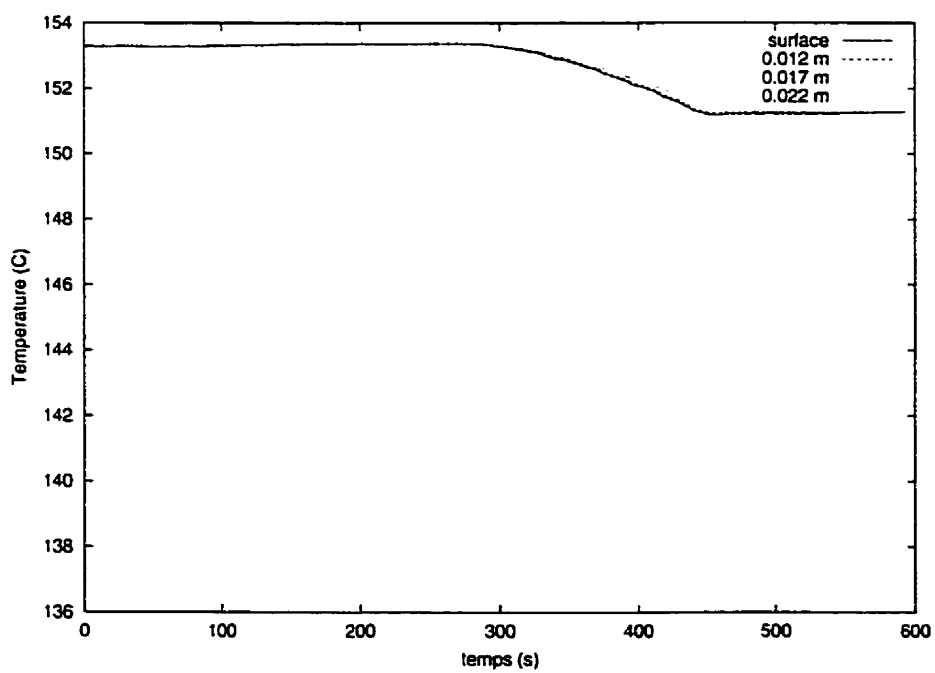


Figure 7-9 : Distribution de température pour les thermocouples du capteur D

Sur les figures (7-6) à (7-9) les distributions de température pour les quatre thermocouples des quatre capteurs de flux sont représentées. À l'aide des figures (7-6) et (7-9), on peut déterminer la température que le plateau chauffant supérieur permet de maintenir. On a donc une température de 153.3 °C dans la partie supérieure du moule proche de la cavité. De même à l'aide des figures (7-7) et (7-8), on voit que la température de la partie inférieure du moule proche de la cavité est de 151.7 °C. La température sur la surface supérieure du mat diminue jusqu'à 141 °C pour le premier emplacement des capteurs, tandis que sur la surface inférieure, elle descend même jusqu'à 136.5 °C. Il s'agit ici des températures de surface à la fin du remplissage. Après la fin de l'injection, la diffusion fait augmenter la température jusqu'à une valeur d'équilibre. De même pour le deuxième emplacement des capteurs, les températures des surfaces inférieure et supérieure diminuent jusqu'à 148.9 °C et 151.2 °C respectivement, pour ensuite retourner doucement à la valeur initiale après le remplissage. Ainsi on remarque que la résine a pour effet de diminuer la température à la surface de la cavité plus près de l'injection. Ensuite elle se réchauffe avec le mat et le moule et ainsi diminue l'échange de chaleur en aval de l'injection. Dans le moule lui-même, la température ne diminue pas autant. Sur les quatre courbes l'injection commence à 200 s et la cavité d'injection est complètement remplie à 383 s, mais la résine continue à être injectée jusqu'au temps 450 s et donc les températures continuent à diminuer après la fin du remplissage.

En connaissant les températures à la surface de la cavité, les températures à la surface du moule peuvent être déduites en utilisant les valeurs des conductivités du moule

et des fibres. Une fois l'équilibre thermique obtenu, la température varie linéairement entre les températures haute et basse. La température dans la cavité varie plus abruptement que dans le moule car sa conductivité est plus petite. Comme le flux de chaleur sortant de la cavité doit être égal au flux de chaleur entrant dans le moule, la relation entre les pentes de changement de température est la suivante :

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_m = \frac{k_s}{k_m} \left. \frac{dT}{dx} \right|_s \quad (7-4)$$

ainsi la température de la surface supérieure du moule est 153.7 °C et celle de la surface inférieure est 151.3 °C durant l'injection.

## 7.4 Simulation numérique

### 7.4.1 Cavité simple

Avec cette simulation où juste la cavité est maillée, le temps de remplissage pour la simulation va être comparé au temps de remplissage réel. Aucune condition thermique n'est prise en compte dans cet exemple. C'est une injection isotherme qui est simulée. 71 pas de temps ont été nécessaires pour remplir la cavité. L'injection calculée par la simulation numérique se fait en 185 secondes. Ceci est très proche à la durée réelle de l'injection qui est de 183 secondes. La figure (7-10) montre le maillage utilisé pour cette simulation. Il contient 224 éléments triangulaires non-structurés. Les données initiales et propriétés thermophysiques des matériaux sont présentées à l'annexe E.

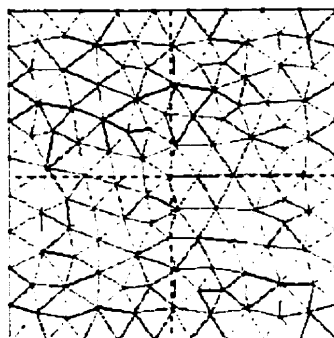


Figure 7-10 : Maillage pour la simulation isotherme de l'injection

#### 7.4.2 Cavité avec moule

Dans cette section l'analyse thermique va être effectuée pour comparer la simulation numérique à l'expérience décrite plus haut. Cette fois-ci, c'est donc une injection non-isotherme qui va être simulée. La cavité et le moule sont maillés en épaisseur pour cette simulation. L'axe central est utilisé puisque le moule est isolé de tous les côtés et l'écoulement est uniaxial. Le maillage du moule et de la cavité pour cette simulation bidimensionnelle est représenté sur la figure (7-11); 1381 éléments constituent la cavité et 1238 éléments sont utilisés pour chacune des deux parties du moule. Pour avoir des résultats qui ont du sens, la température a dû être normalisée :

$$T^* = \frac{T - T_{f0}}{T_{m0} - T_{f0}} \quad (7-5)$$

où  $T_{f0}$  est la température d'injection de la résine, c'est-à-dire 80 °C et  $T_{m0}$  est la température moyenne entre la température initiale des surfaces supérieure et inférieure de

la cavité, soit 152.5 °C. Cette procédure de normalisation de la température assure de minimiser des instabilités pouvant être causées par des écarts trop importants entre les différentes températures. De même l'utilisation d'un maillage anisotrope et fin améliore le résultat final. Les valeurs des différentes températures utilisées pour cette simulation et les propriétés thermophysiques des matériaux utilisés sont présentées à l'annexe E.

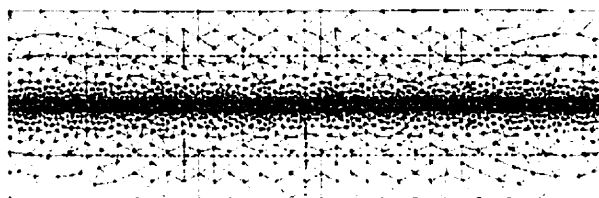


Figure 7-11 : Maillage de la cavité et du moule pour la simulation bidimensionnelle

Pour déterminer les mêmes conditions initiales en température que lors de l'injection expérimentale, tout d'abord une simulation avant l'injection dans laquelle seulement la diffusion est calculée est effectuée pour atteindre l'équilibre thermique dans la cavité d'injection et le moule. La figure (7-12) représente les températures de surface pour les quatre emplacements des capteurs lors du préchauffage du moule. Le préchauffage dure 1500 secondes et 20 pas de temps ont été utilisés pour la simulation. Les températures d'équilibre pour les quatre emplacements calculées lors de la simulation du préchauffage sont 152.6 °C pour les capteurs A et D, et 152.4 °C pour les capteurs B et C. L'erreur est de 0.5 % par rapport aux valeurs réelles (153.3 °C pour les capteurs A et D, et 151.7 °C pour les capteurs B et C). Ces valeurs calculées sont utilisées comme valeurs initiales pour la simulation de l'injection.

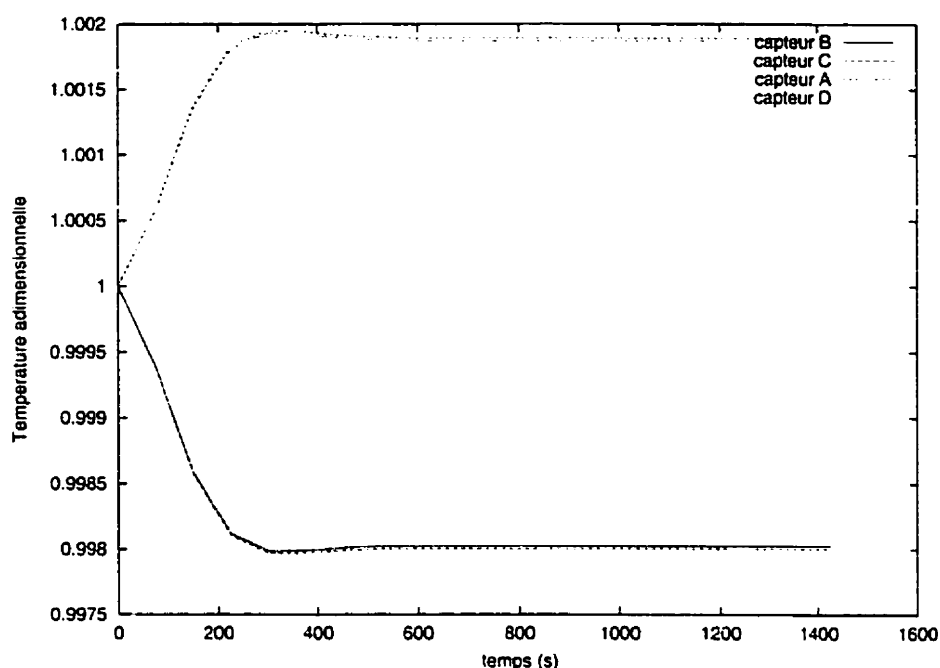


Figure 7-12 : Distribution de température lors de la simulation bidimensionnelle du préchauffage

Les figures (7-13) à (7-16) présentent les distributions de température lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection aux quatre emplacements considérés. Aux capteurs A, B et C, la température diminue avec la progression du remplissage, tandis qu'au capteur D la température reste constante. À la fin du remplissage, les températures de surface de la cavité ont atteint au capteur A la valeur de 145.25 °C, au capteur B, 143.44 °C, au capteur C, 151.16 °C et au capteur D, 152.86 °C. Pour le capteur D, la variation de la température autour de la température d'équilibre atteinte durant le préchauffage est inférieure à 0.2 %. Les températures des capteurs A et B descendent plus bas que celles des capteurs C et D car ceux-ci sont plus proches de la source d'injection de la résine et seront ainsi plus influencés par la température de la résine à l'injection.



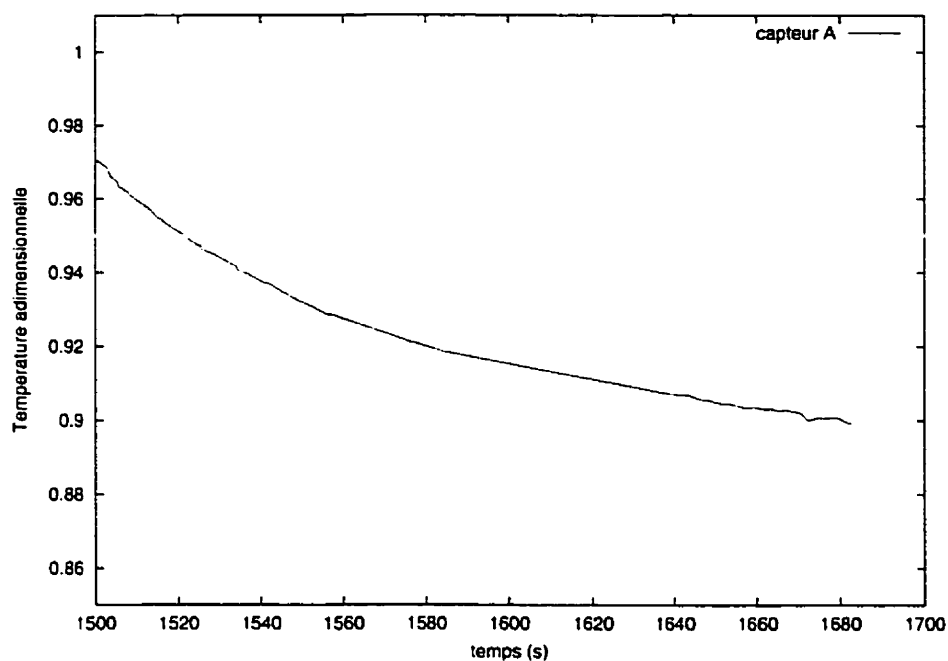


Figure 7-13 : Distribution de température au capteur A lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection

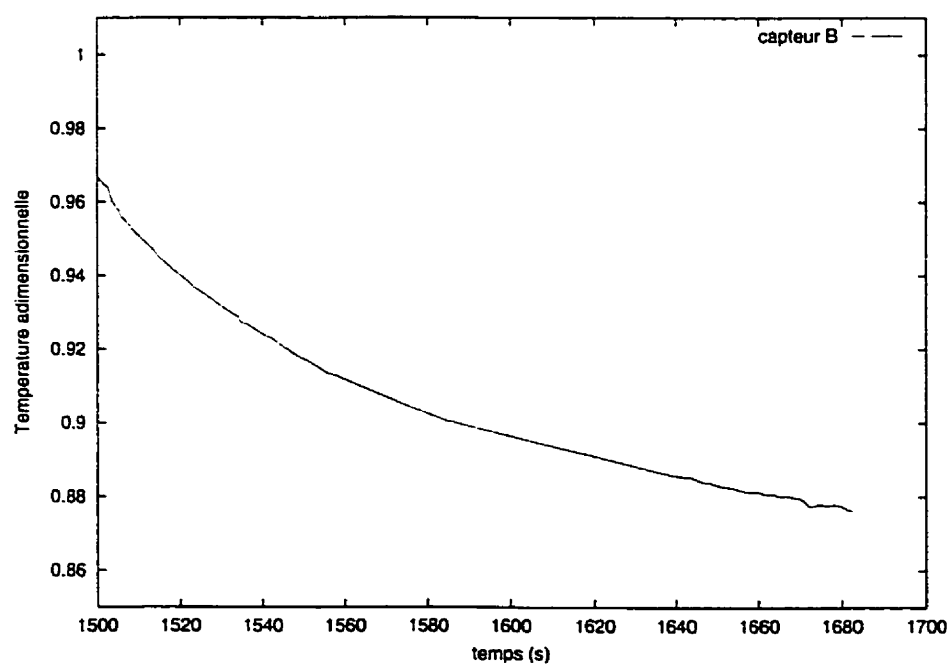


Figure 7-14 : Distribution de température au capteur B lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection

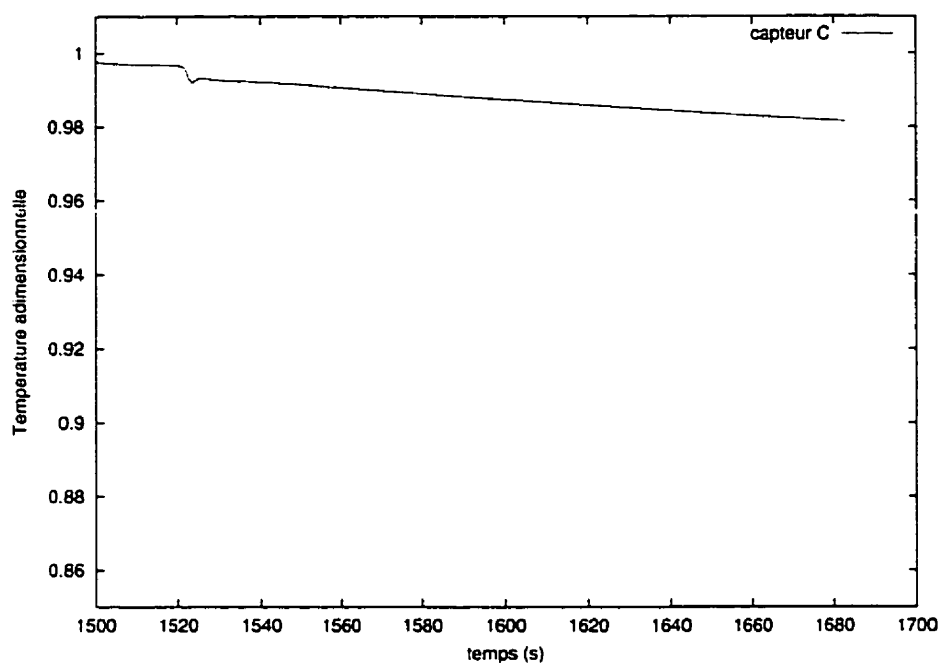


Figure 7-15 : Distribution de température au capteur C lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection

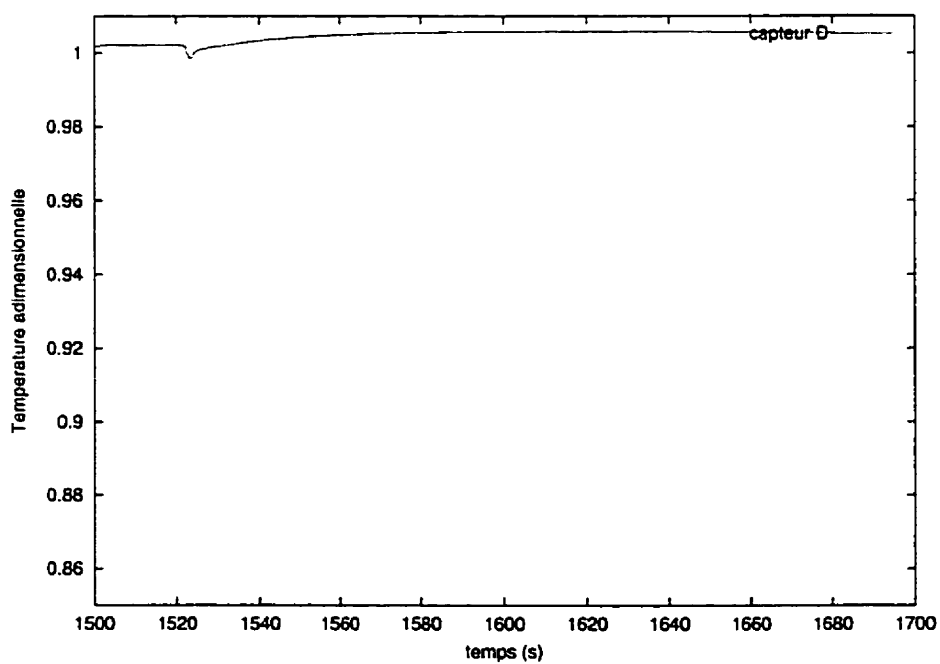


Figure 7-16 : Distribution de température au capteur D lors de la simulation bidimensionnelle de l'injection

### 7.4.3 Étude tridimensionnelle

Dans cette section la simulation tridimensionnelle de l'injection est effectuée. La figure (7-17) représente le maillage tridimensionnel utilisé. Au total, 6215 éléments tétraédriques sont nécessaires, dont 2660 pour la cavité d'injection. Les données thermophysiques pour cette simulation sont les mêmes que pour la simulation précédente (voir annexe E).

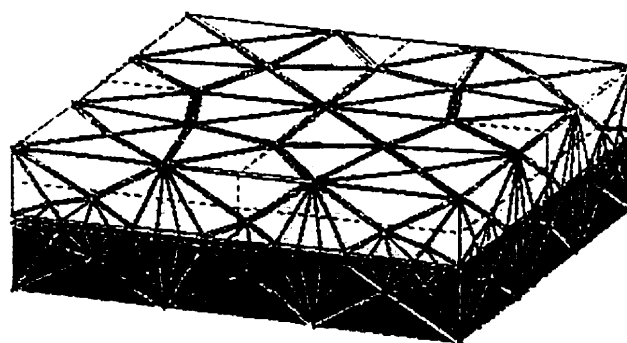


Figure 7-17 : Maillage tridimensionnel

La figure (7-18) représente la distribution des températures de préchauffage aux quatre emplacements considérés. Ces températures sont ensuite utilisées comme températures initiales pour la simulation tridimensionnelle de l'injection non-isotherme. On remarque que les températures d'équilibre des capteurs A et D et des capteurs B et C ne sont pas les mêmes, mais ces différences sont de l'ordre de 0.01 °C. Ainsi on peut supposer qu'il s'agit des mêmes températures d'équilibre que pour la simulation bidimensionnelle (152.6 °C aux capteurs A et D et 152.4 °C aux capteurs B et C).

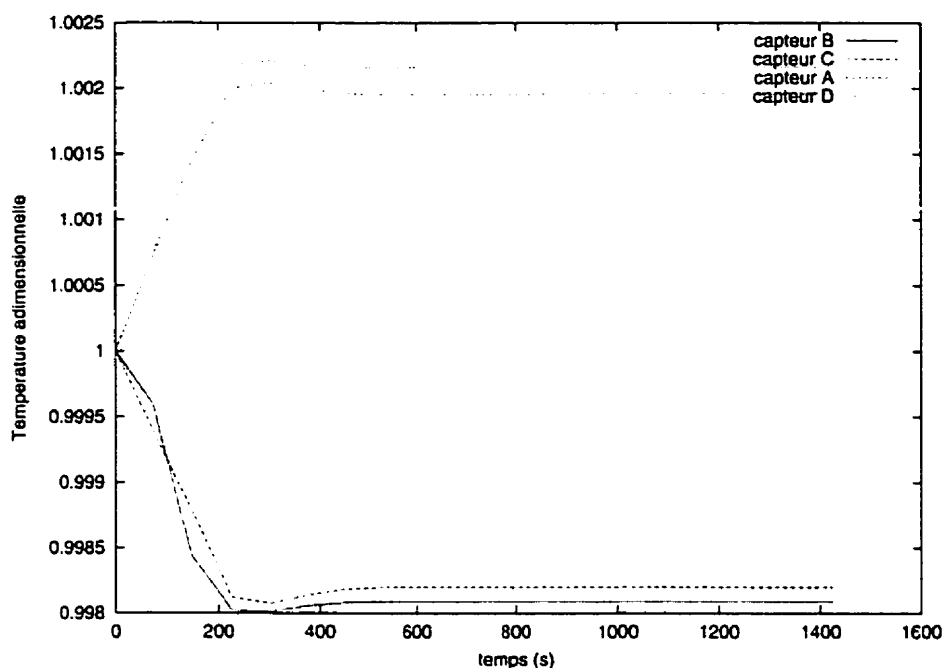


Figure 7-18 : Distribution de température lors du préchauffage pour la simulation tridimensionnelle

Les figures (7-19) à (7-22) représentent la distribution de température pour les quatre capteurs lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection. L'allure des courbes est similaire à celles des figures (7-13) à (7-16) pour l'exemple précédent. Les températures de fin de remplissage pour les quatre capteurs sont de : 135.03 °C au capteur A, 133.65 °C au capteur B, 150.035 °C au capteur C et 152.14 °C au capteur D. Pour les capteurs A et B, cette température est plus basse de 10 °C par rapport à la simulation bidimensionnelle, tandis que pour les capteurs C et D la température est sensiblement la même. La courbe du capteur D n'a pas exactement la même allure que celle de la figure (7-16), mais là encore, il y a très peu de variations de température par rapport à la température d'équilibre du préchauffage.

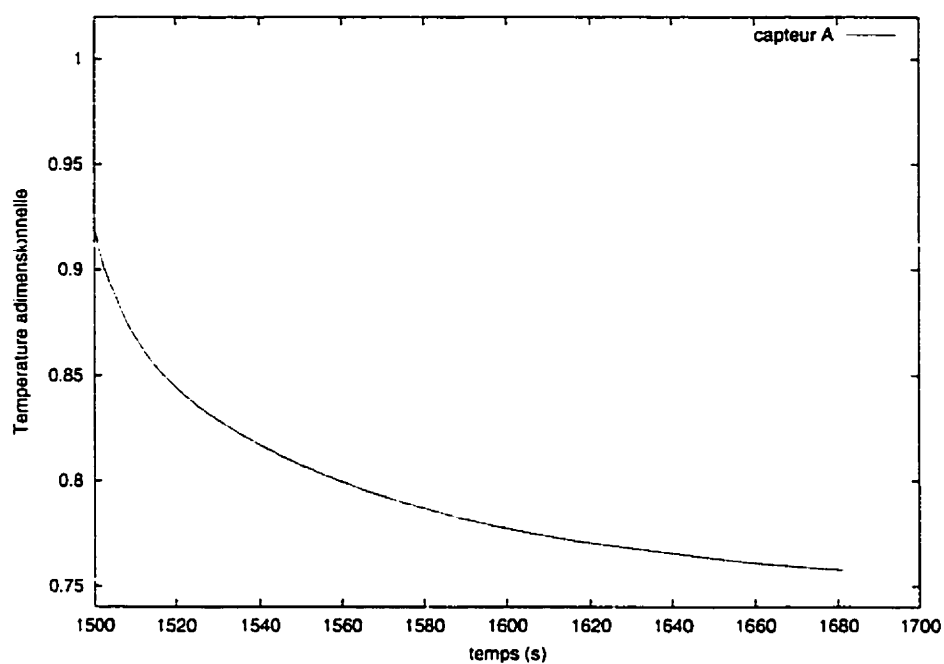


Figure 7-19 : Distribution de température au capteur A lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection

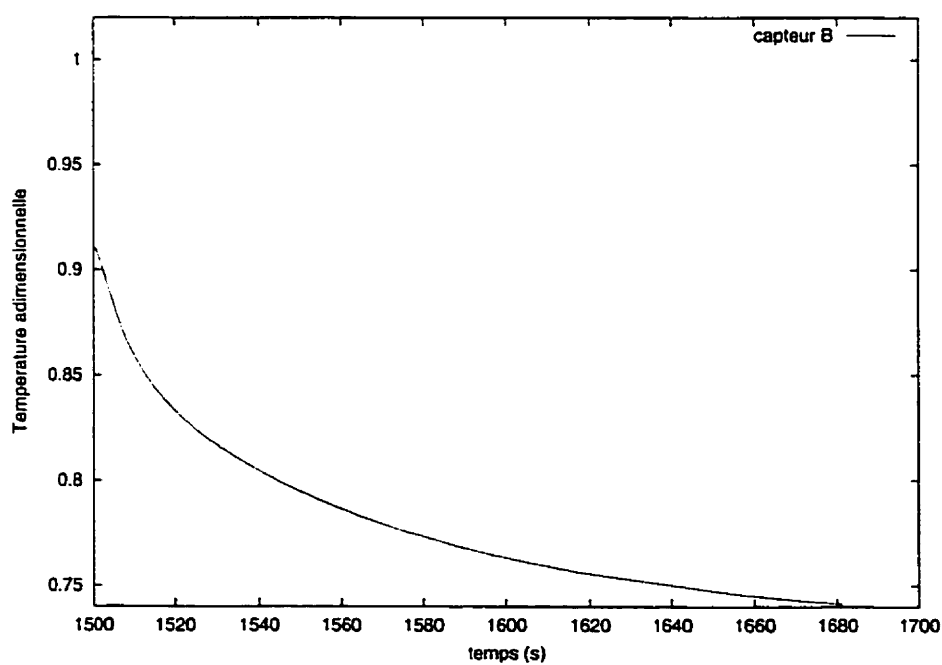


Figure 7-20 : Distribution de température au capteur B lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection

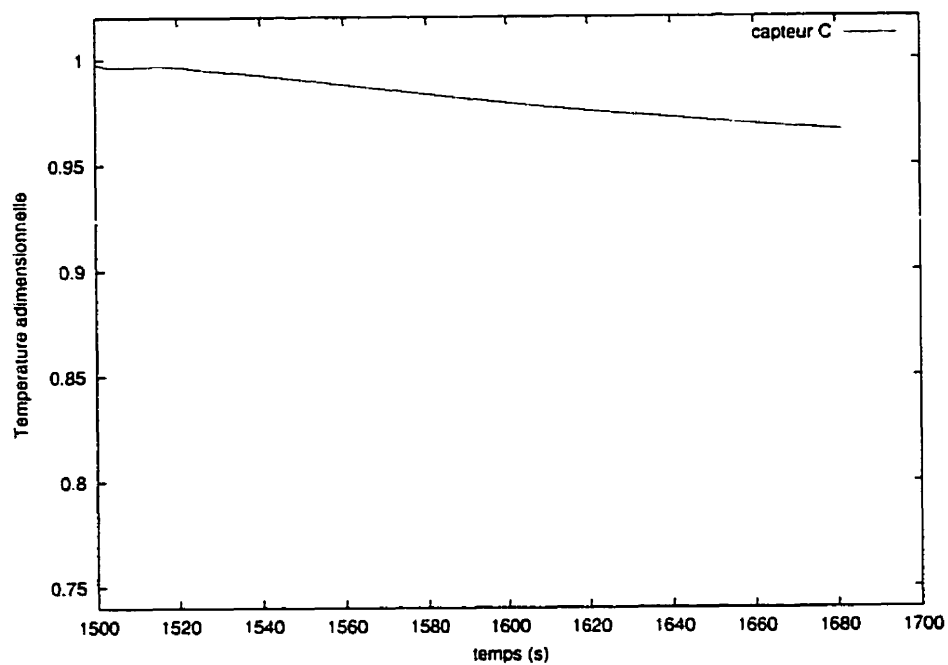


Figure 7-21 : Distribution de température au capteur C lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection

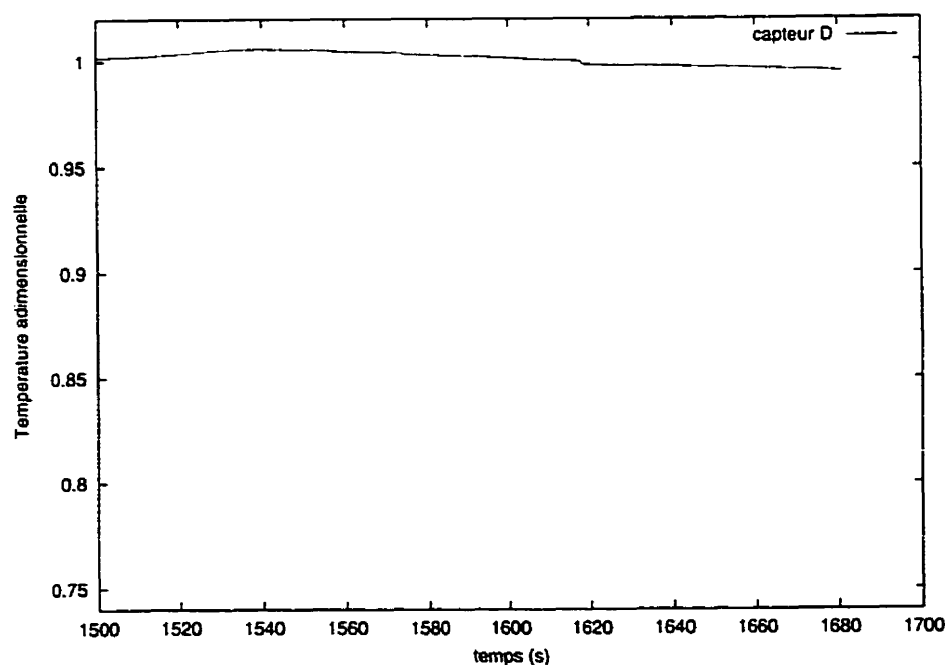


Figure 7-22 : Distribution de température au capteur D lors de la simulation tridimensionnelle de l'injection

## **7.5 Comparaison entre l'injection expérimentale et les simulations numériques bidimensionnelle et tridimensionnelle**

Dans cette section, les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle vont être comparées avec l'injection expérimentale décrite dans les sections précédentes. Ainsi sur les figures (7-23) à (7-26), les distributions de température des deux simulations et de l'injection expérimentale sont représentées pour les quatre capteurs considérés. Tout d'abord, les 200 dernières secondes du préchauffage ont été gardées pour la comparaison. Les simulations s'arrêtent dès la fin du remplissage, donc à 385 secondes, tandis que pour l'injection expérimentale la température a été enregistrée plus longtemps. Sur les figures (7-23) et (7-24), on remarque que la simulation en trois dimension sous-évalue la température, tandis qu'elle donne de meilleurs résultats plus loin, en aval de l'écoulement. Dans le cas de la simulation bidimensionnelle les résultats du capteur A sont les plus proches des résultats obtenus lors de l'injection RTM. À la fin du remplissage, les erreurs entre les simulations et l'expérimental pour les quatre capteurs se situent en dessous de 10 %. Ainsi la plus grosse erreur est de 6.25 % pour la simulation bidimensionnelle située à l'emplacement du capteur A, tandis que la plus petite se situe au capteur C pour la simulation tridimensionnelle. De plus la plupart des erreurs sont en dessous de 1 %, à part l'erreur de 6.25 % au capteur A et pour les deux simulations au capteur B. L'allure des courbes simulées en deux dimensions est similaire à celles simulées en trois dimensions sauf pour le capteur D, de plus l'allure reste très semblable à celle des courbes expérimentales.

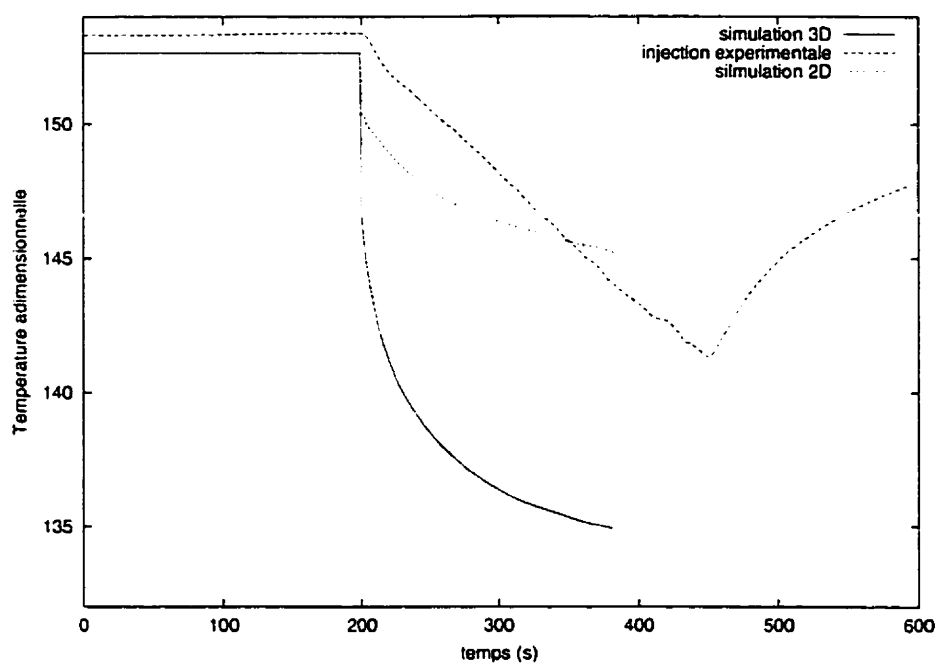


Figure 7-23 : Distributions de température au capteur A pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale

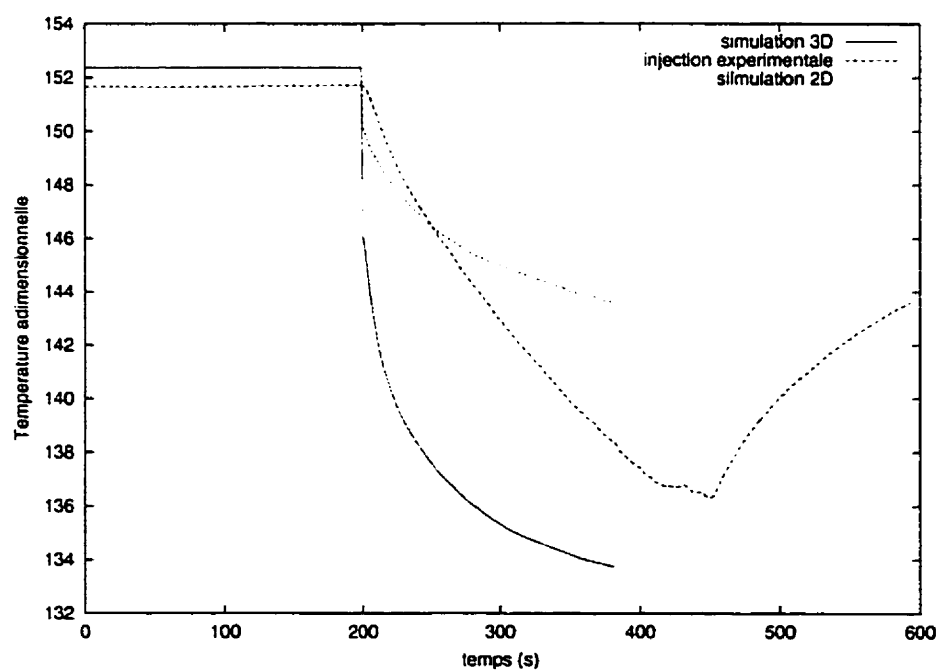


Figure 7-24 : Distributions de température au capteur B pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale



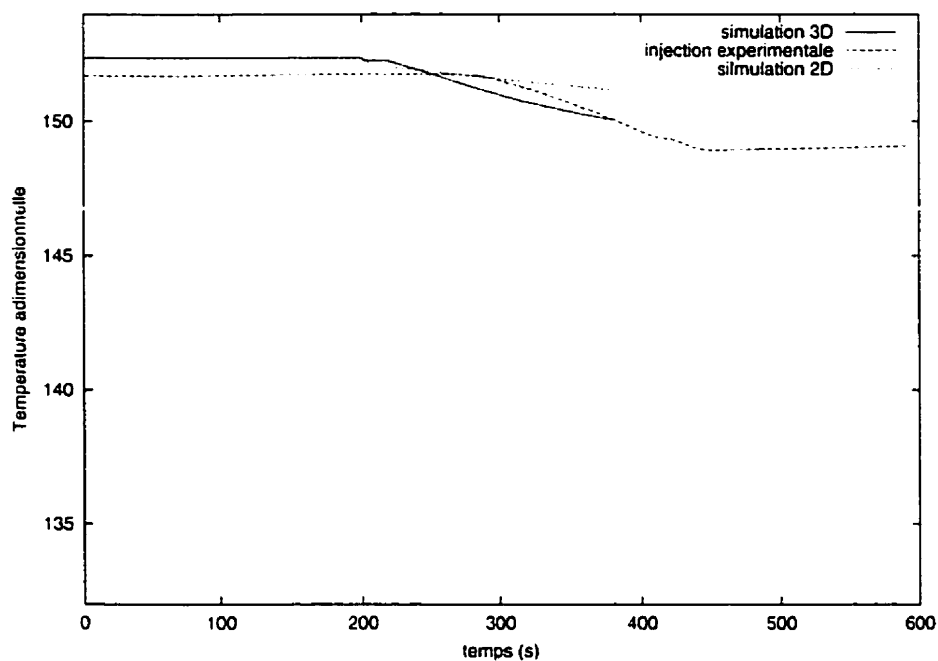


Figure 7-25 : Distributions de température au capteur C pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale

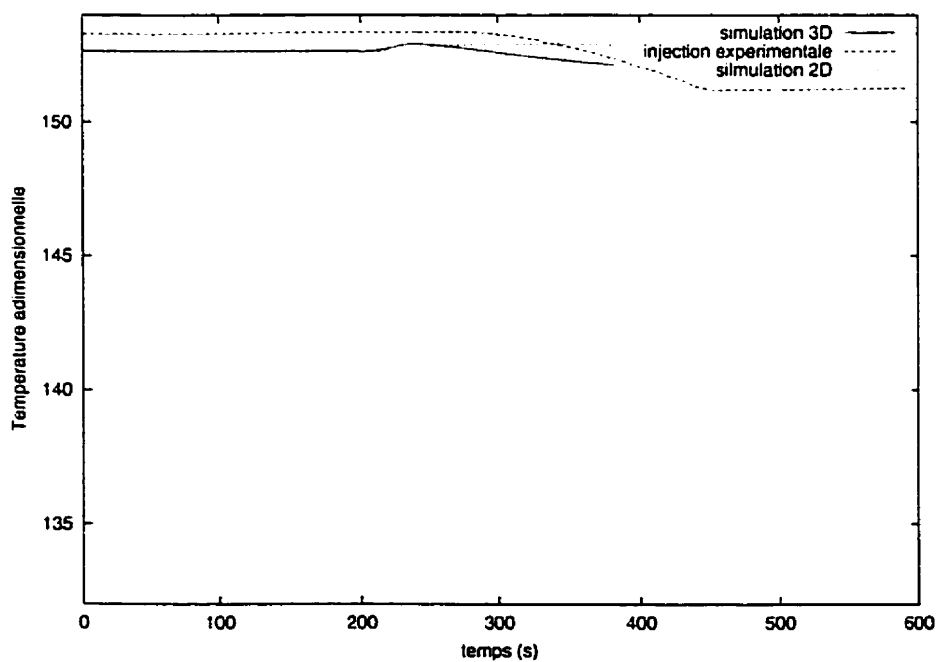


Figure 7-26 : Distributions de température au capteur D pour les simulations bidimensionnelle et tridimensionnelle et pour l'injection expérimentale

## 7.6 Influence du type de matériau utilisé pour les fibres

Pour finir le chapitre, la dispersion hydrodynamique introduite au chapitre 3 va être étudiée pour deux simulations 2D. Ainsi on revient aux exemples présentés à la section 3.3.2 du chapitre 3 où le premier exemple est la simulation bidimensionnelle de la section 7.4.2 avec des fibres de verre, tandis que le deuxième exemple contient des fibres de carbone. Pour ce deuxième exemple, les données expérimentales ne sont pas fournies. Dans le chapitre 3 l'importance de la dispersion hydrodynamique a été établie dans le cas des fibres de verre, tandis que pour les fibres de carbone, elle était négligeable. Dans cette section on veut savoir si la simulation de ces deux injections donnent les mêmes conclusions.

### 7.6.1 Simulation bidimensionnelle avec des fibres de carbone

Ainsi dans la nouvelle simulation, les valeurs thermophysiques des fibres ont été changées : la conductivité thermique, la densité, la chaleur spécifique, la perméabilité et la porosité sont respectivement remplacées par  $k_s=8.4 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $\rho=1770 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_{ps}=1160 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ,  $S=4\cdot 10^{-10} \text{ m}^2$  et  $\phi=0.56$ . Toutes les propriétés physiques des matériaux utilisés dans cette simulation peuvent être trouvées à l'annexe E. Le maillage utilisé est le même que précédemment (Fig. 7-11). La figure (7-27) représente la distribution de température

lors de la simulation du préchauffage pour les quatre emplacements. On remarque une petite différence entre les deux capteurs de la surface supérieure et la même chose entre les deux capteurs inférieurs, mais en voyant les valeurs minimale et maximale de l'axe des ordonnées, la différence se situe à la quatrième ou cinquième décimale, ainsi la température d'équilibre de la surface supérieure s'établit à 152.56 °C, tandis que la température d'équilibre de la surface inférieure est de 152.43 °C.

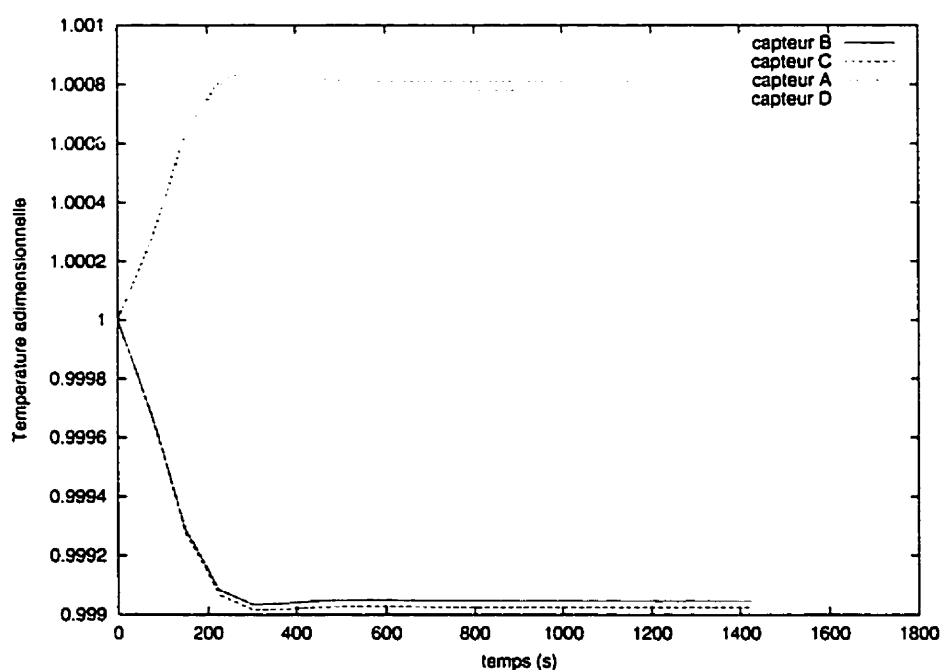


Figure 7-27 : Distribution de température lors du préchauffage avec des fibres de carbone

Les figures (7-28) à (7-31) représentent les distributions de température pour les deux simulations aux capteurs A, B, C et D respectivement. Sur ces figures, on remarque tout d'abord que l'injection sur des fibres de carbone dure plus longtemps. En effet, le remplissage dure 19 minutes et 27 secondes contre 3 minutes et 3 secondes pour les fibres de verre. De plus l'allure des courbes pour les quatre capteurs est similaire pour les deux simulations. Pour la simulation avec les fibres de carbone, on constate que la température aux quatre capteurs a atteint l'équilibre. Cet équilibre implique que la convection est faible et que le phénomène thermique prédominant est la diffusion. La température d'équilibre du capteur A est 143.8 °C, du capteur B, 142.7 °C, du capteur C, 151.05 °C et du capteur D, 151.96 °C. Ces températures sont plus basses que pour la simulation avec des fibres de verre.

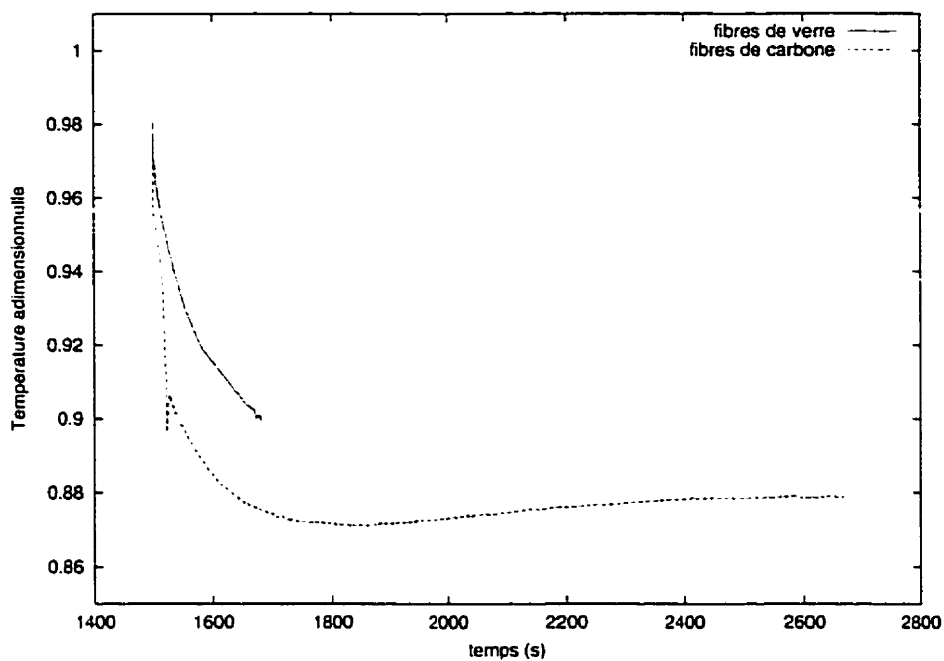


Figure 7-28 : Distributions de température au capteur A pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone

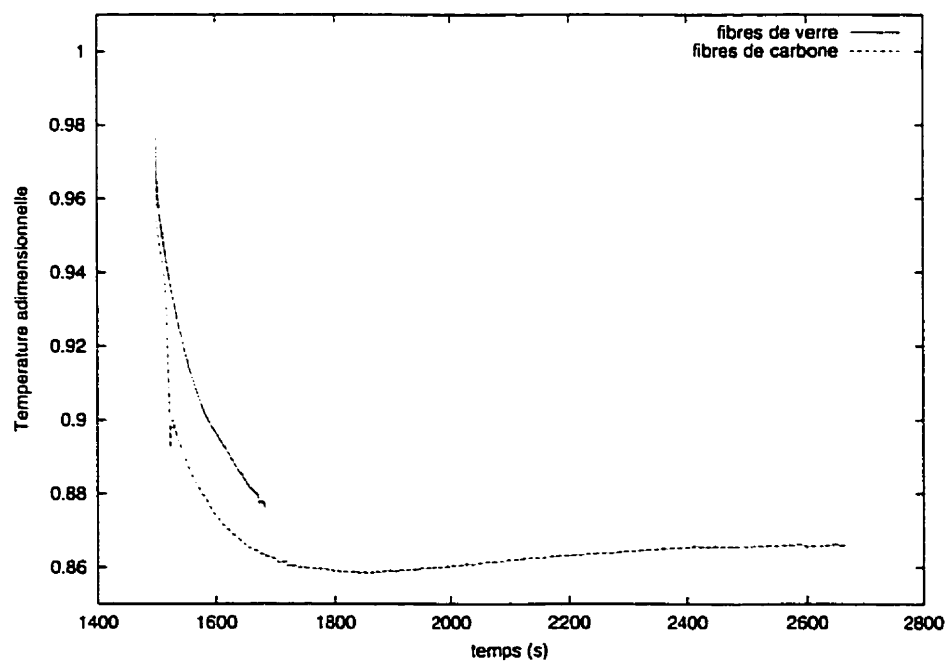


Figure 7-29 : Distributions de température au capteur B pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone

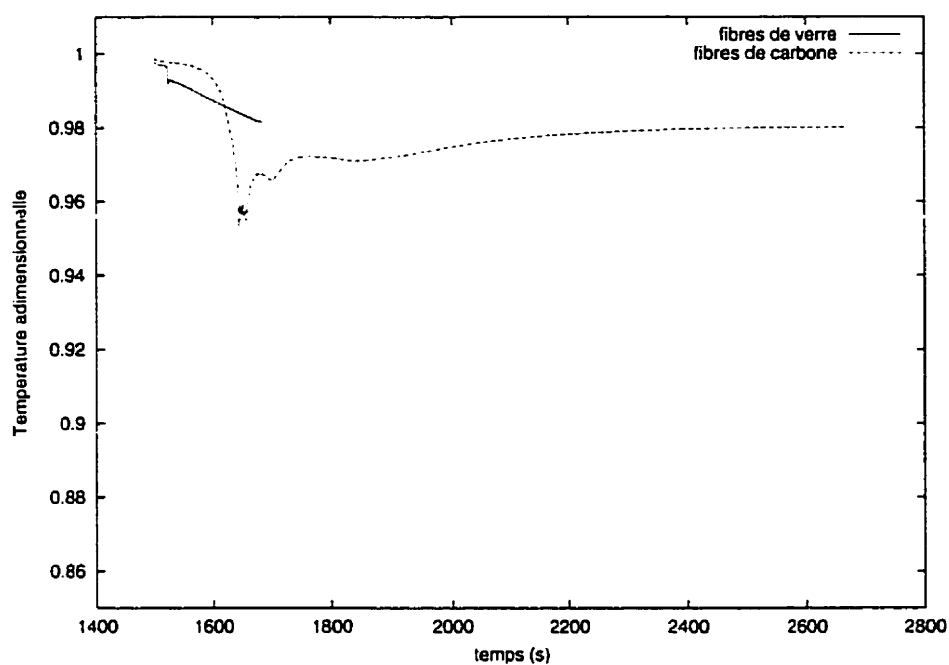


Figure 7-30 : Distributions de température au capteur C pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone

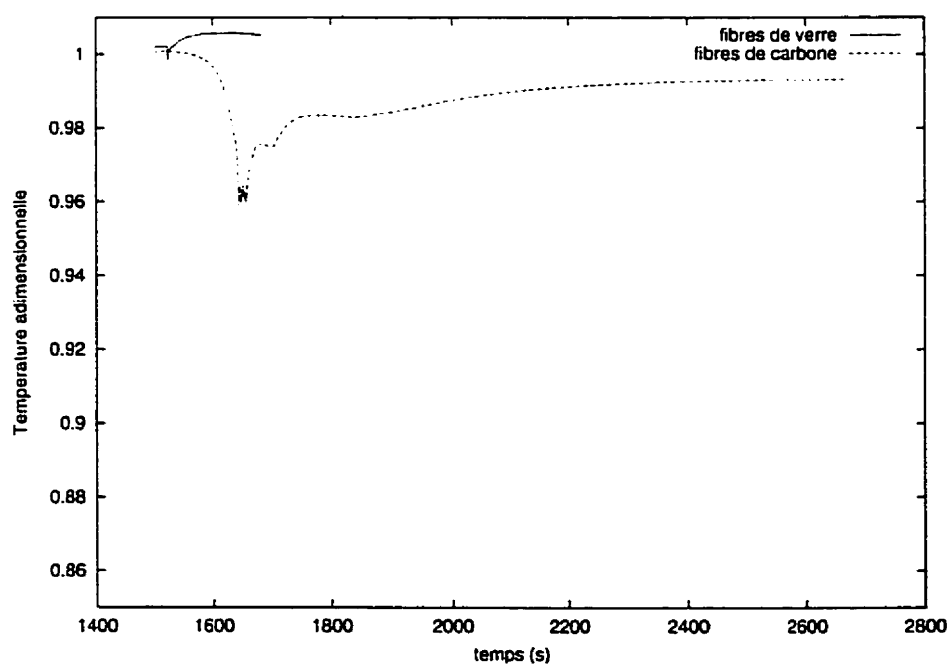


Figure 7-31 : Distributions de température au capteur D pour les simulations bidimensionnelles avec les fibres de verre et de carbone

### 7.6.2 Importance de la dispersion hydrodynamique

Les nombres adimensionnels pour cet exemple se trouvent dans le tableau (7-3). La vitesse moyenne utilisée pour le calcul des nombres de Graetz, Péclet effectif et Brinkman est  $3.43 \cdot 10^{-4}$  m/s. Le diamètre des fibres est calculé à partir de la porosité et de la perméabilité par l'équation (3-14). Sa valeur est  $1.5 \cdot 10^{-5}$  m.

Tableau 7-3 : Nombres adimensionnels (résine RTM6 et fibres de carbone)

$Gz=0.0217$
$Pe_{eff}=3.615 \cdot 10^{-3}$
$Pe_{eff}/Gz=0.167$
$K_x=2.892 \cdot 10^{-4}$
$K_z=3.615 \cdot 10^{-4}$
$r=0.62$
$Br=7.526 \cdot 10^{-7}$

En utilisant les valeurs des nombres adimensionnels du tableau (7-3), l'équation adimensionnelle de conservation d'énergie pour cette injection est :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + 0.0217 \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 2.25 \cdot 10^{-4} \left( 1 + 7.71 \cdot 10^{-5} \right) \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \left( 1 + 9.63 \cdot 10^{-5} \right) \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} + 7.526 \cdot 10^{-7} \quad (7-6)$$

On a constaté en comparant les deux simulations bidimensionnelles, que la diffusion est prédominante dans cet exemple, ce qui est confirmé par le nombre de Graetz du tableau (7-3). De plus, le tableau (7-3) et l'équation (7-6) indiquent que la dispersion hydrodynamique est négligeable dans cet exemple.

## CONCLUSION

### 8.1 Récapitulation

Après avoir brièvement présenté la fabrication des matériaux composites par le procédé de moulage par transfert de résine, les différents phénomènes se produisant durant une injection de résine ont été expliqués. L'interaction entre les phénomènes thermiques, rhéologiques et chimiques fut présentée pour comprendre l'étendue et la complexité de la simulation thermique du procédé RTM. Les travaux importants dans le domaine du transfert de chaleur en milieu poreux furent ensuite introduits. Ainsi, différents modèles mathématiques ont été présentés pour décrire l'analyse thermique. Parmi ces modèles, on retrouve le modèle à équilibre thermique instantané et le modèle à deux températures.

La méthode de Tucker et Dessenberger [18] fut ensuite utilisée dans le chapitre 2 pour dériver les équations de conservation de l'énergie utilisées pour modéliser les phénomènes thermiques lors du moulage par transfert de résine. Tout d'abord, la méthode des moyennes volumiques fut présentée pour développer les équations globales macroscopiques de la résine et des fibres. Les principales hypothèses qui ont dues être prises en compte sont les suivantes : la résine est un fluide newtonien, le volume



caractéristique du milieu poreux sur lequel les moyennes sont prises est le volume élémentaire représentatif, les propriétés thermiques, rhéologiques, la densité et la perméabilité sont constantes, et le front de l'écoulement est bien défini.

Ainsi deux équations globales ont été dérivées pour caractériser la conservation d'énergie du milieu poreux dans le procédé de moulage par transfert de résine (RTM). La première équation avait comme inconnue la moyenne de phase calculée à partir de la température de la résine, tandis que la deuxième exprime les phénomènes thermiques reliés aux fibres. Pour fusionner ces deux équations, l'hypothèse de *l'équilibre thermique local* a dû être utilisée. Cette hypothèse impose un flux de chaleur instantané entre les fibres et la résine, ainsi que l'égalité des deux moyennes de phase des températures. L'inconnue du modèle devient la moyenne spatiale de température des fibres et de la résine.

Cette équation fut ensuite adimensionnalisée pour faire une étude approfondie de l'importance des différents phénomènes thermiques qui interviennent durant une injection RTM. Entre autres, l'importance de la dispersion hydrodynamique fut discutée. Celle-ci est fortement dépendante de la vitesse de l'écoulement et donc difficilement mesurable. L'étude adimensionnelle à partir de trois cas a montré que la convection longitudinale et la conduction à travers de l'épaisseur de la pièce sont les phénomènes dominants. La conduction longitudinale est par contre négligeable. Le premier cas étudié est un cas typique d'injection RTM en présence de réaction chimique. Lors de la cuisson de la

résine, l'exothermie chimique devient un des phénomènes dominants. Une comparaison entre un exemple tiré de l'industrie aérospatiale et un exemple de l'industrie automobile fut ensuite effectuée. On a pu conclure que *la dispersion hydrodynamique est dominante quand la vitesse d'injection de la résine est importante*. Pour finir, dans ce chapitre, un tableau récapitulatif des cas possibles se produisant en RTM fut présenté. Neuf cas ont été répertoriés où différents phénomènes thermiques tour à tour sont dominants. Un deuxième tableau montre les valeurs typiques des propriétés thermiques et rhéologiques pour une injection par le procédé RTM.

Après avoir présenté la théorie des échanges thermiques se produisant durant une injection, l'intégration numérique des équations mathématiques fut discutée. Tout d'abord il fut remarqué que plusieurs problèmes physiques avaient la même nature mathématique, puisque les différentes intégrales de leur formule variationnelle avaient la même forme. Ainsi l'équation de Darcy qui modélise l'écoulement de la résine dans le milieu poreux et l'équation discrète de diffusion thermique peuvent être résolues par la même méthode des éléments finis. C'est la méthode de Galerkin standard. Elle est aussi utilisée pour le calcul de la distribution de température dans la partie sèche, dans le moule et dans toute la cavité durant la période de cuisson de la résine après un remplissage. Cette méthode résout une seule fois à chaque pas de temps la matrice globale qui est préalablement assemblée pour tous les éléments présents dans la cavité et dans le moule. Le potentiel scalaire pour cette méthode est la température, qui varie linéairement entre

les nœuds de l'élément.

La méthode de Galerkin standard sert à résoudre la diffusion thermique. Or, l'équation complète de conservation d'énergie pour le milieu poreux contient aussi un terme de convection. La méthode de Galerkin standard utilisée pour la discrétisation spatiale et une approximation temporelle avec le schéma en  $\theta$  et la formule d'Euler ne sont pas des méthodes bien adaptées pour la résolution d'une équation avec des termes de transport comme la convection thermique. La méthode de Lesaint-Raviart fut donc introduite, puisque cette méthode est adaptée à la résolution de la convection. Cette méthode résout l'équation de convection élément par élément. Ainsi la région où la méthode de Lesaint-Raviart est utilisée grandit avec l'avancement du front d'écoulement. C'est la région de la cavité imprégnée de la résine. Comme le front thermique est toujours en retard par rapport au front de résine, il est toujours contenu dans la région de résolution. La différence majeure entre la méthode de Lesaint-Raviart et de Galerkin standard est le raccordement entre les éléments. Ainsi dans la méthode de Galerkin standard, les nœuds communs entre deux éléments voisins ont la même valeur du potentiel scalaire, c'est-à-dire de température. Ceci permet de bien modéliser la diffusion thermique, tandis que dans la méthode de Lesaint-Raviart la température est représentée par une approximation constante dans chaque élément. Ainsi un nœud qui a une certaine valeur pour un élément peut avoir une autre valeur chez l'élément voisin. Cette propriété permet à la méthode de Lesaint-Raviart d'épouser les discontinuités naturelles du

problème se trouvant aux interfaces entre les éléments et rend la méthode stable. De plus, le potentiel scalaire est constant par élément.

La simulation numérique du procédé RTM au complet est divisée en trois étapes. Pour chaque pas de temps, tout d'abord l'avancement du front d'écoulement de la résine est déterminé en résolvant l'équation de Darcy. Durant cette étape, la largeur du pas de temps est déterminée. Ensuite l'analyse thermique est effectuée en deux étapes. D'abord *la température est prédite par la méthode de Galerkin standard lors de l'évaluation de la diffusion thermique, puis celle-ci est corrigée par la méthode de Lesaint-Raviart en faisant avancer le front thermique*. Comme les deux méthodes ne traitent pas les éléments de la même façon, pour passer d'une variation linéaire par élément avec les nœuds connectés lors de la méthode de Galerkin standard à une valeur constante par élément avec des nœuds disconnectés dans la méthode de Lesaint-Raviart, la moyenne des valeurs aux nœuds est imposée comme valeur dans l'élément. Pour le passage inverse, à chaque nœud on impose la moyenne des valeurs aux éléments entourant le nœud en question. La dernière étape consiste à résoudre l'équation de polymérisation de la résine.

Après avoir présenté les équations thermiques et les méthodes numériques, la validation analytique en deux dimensions et en trois dimensions a été effectuée au chapitre 5. Dans le chapitre 6, l'intégration numérique de la polymérisation fut discutée. La méthode de Runge-Kutta a été utilisée pour la résolution de l'équation différentielle ordinaire non-linéaire décrivant les réactions chimiques se produisant pendant la cuisson

de la résine. Le modèle utilisé pour valider la résolution de la polymérisation dans ce travail fut l'équation de Kamal et Sourour [8]. Une méthode itérative est utilisée lors de la cuisson de la résine. Pour résoudre la polymérisation lors d'une injection, la méthode de Runge-Kutta a été combinée avec la méthode de Lesaint-Raviart pour le transport des espèces chimiques. Comme pour l'analyse thermique, la résolution d'un pas de temps en polymérisation est effectuée en deux étapes : d'abord *les espèces chimiques sont transportées pour être ensuite résolues lors de la réaction de polymérisation*. À la fin du chapitre 6, une injection où le remplissage, l'analyse thermique et la polymérisation sont couplés a été résolue. Pour terminer, une validation expérimentale est présentée dans le chapitre 7.

## 8.2 Discussion sur les validations analytiques et expérimentale

Dans le chapitre 5, tout d'abord la méthode de Galerkin standard est validée par la résolution de plusieurs exemples de diffusion où la réponse analytique est connue. Cette approche donne de bons résultats en deux et trois dimensions. Ensuite la méthode de Lesaint-Raviart est validée pour des exemples de convection simple. Utiliser une température constante par élément induit un peu de diffusion artificielle car l'approximation numérique d'un échelon est difficilement réalisable. À un instant donné, une inconnue ne peut pas avoir deux valeurs, donc une discontinuité est toujours difficilement modélisable.

Ensuite la résolution par les deux méthodes en cascade fut étudiée pour des exemples de convection pure, de diffusion pure et de convection-diffusion. L'ajout de la méthode de Galerkin standard lors de la résolution de la convection induit des petites oscillations et de la diffusion artificielle dans la solution, mais ces imprécisions restent acceptables. L'ajout de la méthode de Lesaint-Raviart ne change pas vraiment la solution obtenue par la méthode de Galerkin standard pour une injection où la diffusion est dominante. Près de l'injection, elle permet de faire ressortir le caractère convectif de la solution. Elle modifie un peu la solution après le passage du front thermique, car celle-ci est calculée seulement dans la région imprégnée.

La méthode combinée par Galerkin standard et Lesaint-Raviart a été comparée à la méthode de Taylor-Galerkin, variante de Zienkiewicz, pour un exemple de convection-diffusion. La difficulté de la méthode de Taylor-Galerkin à bien modéliser des injections à convection dominante est résolue par la formulation couplée utilisée dans le logiciel LCMFLOT. L'influence du maillage fut aussi étudiée. On remarque qu'un maillage plus fin améliore un peu la solution et que le logiciel est consistant, puisqu'il donne les mêmes résultats. Pour finir, le chapitre 5 présente des simulations d'injection pour une cavité à obstacle, pour une nervure et pour une cavité avec un moule. L'exemple d'injection dans une cavité à obstacle est repris du mémoire d'Audet [5] pour comparer le fonctionnement du module thermique de RTMFLOT avec celui de LCMFLOT, une version plus récente du même logiciel. La distribution de température durant l'injection n'est pas identique car

dans ce travail l'isolation de la cavité est prise en compte et donc il ne devrait pas y avoir de front thermique entre la paroi de la cavité et la résine. De plus, les oscillations numériques sont moins importantes avec la version actuelle de LCMFLOT comparé aux résultats d'Audet calculés avec RTMFLOT.

Dans le chapitre 6, tout d'abord deux versions de la méthode de Runge-Kutta ont été présentées : un Runge-Kutta au quatrième ordre, version la plus simple et répandue, et un Runge-Kutta au cinquième ordre avec un intervalle adaptatif. Les deux méthodes donnent la bonne solution en résolvant une équation différentielle simple, mais avec la méthode adaptative le nombre de pas de temps pour atteindre la précision voulue est plus petit. Ensuite les deux méthodes ont été comparées lors de la résolution d'une cuisson de résine après injection. Les deux méthodes ont résolu l'exemple avec sensiblement le même nombre de pas de temps.

Pour avoir la précision voulue pour cet exemple, il fallait utiliser approximativement environ 5000 pas de temps, ce qui augmente considérablement le temps total de résolution. Pour le diminuer, une méthode itérative a été introduite. Ainsi pour chaque pas de temps, la résolution du champ de température et du champ de polymérisation est répétée jusqu'à convergence de la solution. La convergence est calculée par rapport au résidu de température entre deux itérations. La variation du nombre de pas de temps pour cette méthode itérative donne très peu de différence dans les résultats. De plus, cette méthode donne de meilleurs résultats que la méthode non-

itérative en moins de pas de temps sans augmentation considérable du temps de résolution. La méthode itérative est seulement applicable dans le cas d'une polymérisation sans injection, car l'utiliser pour une injection non-isotherme avec polymérisation augmenterait le temps de résolution considérablement puisqu'il faudrait boucler la résolution sur toutes les étapes de calcul : le remplissage, l'analyse thermique et la polymérisation.

### **8.3 Améliorations suggérées**

Dans ce travail, une validation analytique du module thermique a été effectuée. Un exemple expérimental est utilisé dans le chapitre 7 pour comparer avec les résultats de la simulation. Des simulations en deux et trois dimensions ont été comparées aux données expérimentales. Les différences entre les simulations et les données expérimentales sont inférieures à 10 %, et même, dans la plupart des cas inférieures à 1 %. D'autres exemples expérimentaux sont nécessaires pour une validation complète, de même qu'une validation plus poussée du module cinétique. Seulement le modèle de Kamal et Sourour [8] a été étudié, mais d'autres modèles cinétiques devraient être utilisés pour valider les méthodes numériques développées ici. Enfin, la polymérisation durant une injection n'a pas pu être validée, mais seulement présentée car il manque des données expérimentales pour étudier ce cas en profondeur.



La méthode de Lesaint-Raviart est utilisée dans le module thermique et dans le module cinétique du logiciel LCMFLOT. Durant sa validation on a remarqué qu'une certaine diffusion artificielle était créée dans la représentation du front. En utilisant une autre approximation de la température dans chaque élément du maillage, cette diffusion pourrait être réduite. Ainsi dans le prolongement de ce travail, on pourrait remplacer la valeur constante de la température dans chaque élément par une variation linéaire entre les nœuds de l'élément. D'autres approximations pourraient aussi être testées.

Une longue simulation a été exécutée pour étudier l'influence du maillage. Cette simulation a duré cinq jours. Une amélioration de l'algorithme utilisé pour parcourir l'arbre contenant tous les éléments du maillage ainsi que leurs propriétés calculées pourrait probablement augmenter la performance des calculs. Il faudrait aussi vérifier que l'algorithme minimise la fragmentation de la mémoire vive.

Pour terminer, ce travail ne constitue qu'un début de validation du module thermique et cinétique du logiciel LCMFLOT. Il faut donc continuer dans cette voie et valider plus en profondeur les calculs thermiques pour plusieurs types d'injection. De plus, de nouvelles méthodes numériques sont développées chaque année avec l'arrivée d'ordinateurs de plus en plus puissants. La conjugaison de ces deux facteurs devrait permettre d'éliminer les oscillations ainsi que la diffusion artificielle observée dans les calculs thermiques convectifs effectués dans ce travail de recherche.

## RÉFÉRENCES

- [1] (1997). RTMFLOT User's Guide Version 2.0. École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [2] RUDD C.D., OWEN M.J. AND MIDDLETON V. (1990). Effects of process Variables on Cycle Time during Resin Transfer Moulding for High Volume Manufacture. Mat. Sci. and Tech. J., 6, 656-665.
- [3] LEBRUN G., GAUVIN R. AND KENDALL K.N. (1996). Experimental Investigation of Resin Temperature during Filling and Curing in Epoxy and Nickel Shell RTM Molds. J. of Materials Processing & Manufacturing Science, 5, 27-44.
- [4] LEBRUN G., GAUVIN R. AND KENDALL K.N. (1996). Experimental Investigation of Resin Temperature during Filling and Curing in a Flat Steel RTM Mould. Composites Part A, 27A, 347-355.
- [5] AUDET M. (1996). Simulation numérique tridimensionnelle du transfert de chaleur dans les moules d'injection pour matériaux composites. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [6] TUCKER C.L. (1993). Heat Transfer and Reaction Issues in Liquid Composite Molding. Workshop on Manufacturing Polymer Composites by Liquid Molding, National Institute of Standard and Technology, Gaithersburg Maryland, 20-22 Sept.

- [7] FERLAND P., GUITTARD D. AND TROCHU F. (1996). Concurrent Methods for Permeability Measurement in Resin Transfer Molding. Polymer Composites, 17, 1, 149-158.
- [8] KAMAL M.R. AND SOUROUR S. (1973). Polym. Eng. Sci., 13, 1, 59-64.
- [9] BAILLEUL J.-L., GUYONVARCH G., GARNIER B., JARNY Y. ET DELAUNAY D. (1995). Maîtrise des phénomènes thermiques dans les procédés d'élaboration de composites fibres de verre / résine thermodurcissable. Société Française des Thermiciens, Journée d'étude, Paris.
- [10] GUYONVARCH G., GARNIER B. AND DELAUNAY D. (1995). Thermal Characteristics and Kinetic Parameters Estimation of a Low-profile Polyester Resin Based Composite. Second International Thermal Energy Congress, Agadir, Morocco.
- [11] GUYONVARCH G. (1995). Analyse et optimisation des transferts thermiques couplés lors du moulage de matériaux composites par transfert de résine (procédé RTM), application à la pièce automobile d'aspect en polyester / fibres de verre. Thèse de doctorat, École doctorale de sciences pour l'ingénieur de Nantes, France.
- [12] RUDD C.D., OWEN M.J., MIDDLETON V., PICKERING S.J. AND SCOTT F.N. (1990). Predicting the Resin Transfer Moulding (RTM) cycle. I. Mech. E., 113-123.
- [13] CHAN A.W. AND HWANG S.-T. (1992). Modeling Nonisothermal Impregnation of Fibrous Media With Reactive Polymer Resin. Polym. Eng. Sci., 32, 310-318.

- [14] CHAN A.W. AND HWANG S.-T. (1992). Modeling Resin Transfer Modeling of Axisymmetric Composite Parts. J. Mat. Proc. Manuf. Sci., 1, 105-118.
- [15] CHEN J., BACKES D. AND JARAYAMAN K. (1993). Dynamic of Binder Displacement in Liquid Molding. Workshop on Manufacturing Polymer Composites by Liquid Molding, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland, September 20-22.
- [16] LIN R., LEE L.J. AND LIOU M. (1991). Non-isothermal Mold Filling and Curing Simulation in Thin Cavities with Preplaced Fiber Mats. Intern. Polym. Process. J., 4, 356-369.
- [17] AOYAGI H., UENOYAMA M. AND GUCERI S.I. (1992). Analysis and Simulation of Structural Reaction Injection Molding (SRIM). Intern. Polym. Proc., 1, 71-83.
- [18] TUCKER C.L. AND DESSENBERGER R.B. (1992). Governing Equations for Flow and Heat Transfer in Stationary Fiber Beds. Flow of Rheology in polymer Composites Manufacturing, Suresh G. Advani, ed. Elsevier Science.
- [19] WHITAKER S. (1966). The Equations of Motion in Porous Media. Chem. Eng. Sci., 21, 291-300.
- [20] SLATTERY J.C. (1967). Flow of Viscoelastic Fluids Through Porous Media. AIChE J., 13, 1066-1071.

- [21] SLATTERY J.C. (1969). Single-Phase Flow Through Porous Media. AIChE J., 15, 866-872.
- [22] HOLMAN J.P. (1990). Heat Transfer. seventh edition, McGraw-Hill.
- [23] FERLAND P. (1994). Analyse par éléments finis du remplissage non-isotherme des moules RTM. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [24] TROCHU F., GAUVIN R. AND ZHANG Z. (1992). Simulation of mold filling in resin transfer molding by non-conforming finite elements. Computer Aided Design in Composite Material Technology, ed. Elsevier Applied Science, New York.
- [25] TROCHU F., GAUVIN R. AND GAO D.M. (1993). Numerical Analysis of the Resin Transfer Molding Process by the Finite Element Method. Advances in Polymer Technology, 12, 4, 329-342.
- [26] BORIES S. ET PRAT M. (1995). Transferts de chaleur dans les milieux poreux. Techniques de l'ingénieur, Traité Génie Énergétique, B8 250, 1-19.
- [27] SLATTERY J.C. (1981). Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua. 2<sup>nd</sup> edition, Krieger.
- [28] LEVEC J. AND CARBONELL R.G. (1985). Longitudinal and Lateral Thermal Dispersion in Packed Beds, Part I : Theory AIChE Journal, 31, 4, 581-590.
- [29] KOCH D.L. AND BRADY J.F. (1986). The Effective Diffusivity of Fibrous Media. AIChE Journal, 32, 575-591.

- [30] PANTON R.L. (1984). Incompressible Flow. John Wiley & Sons, New York.
- [31] GERMAIN P. (1973). Mécanique des milieux continus. Masson, Paris.
- [32] HAN N.-W., BHAKTA J. AND CARBONELL R.G. (1985). Longitudinal and Lateral Dispersion in Packed Beds : Effect of Column Length and Particle Size Distribution. AIChE Journal, 31, 2, 227-288.
- [33] LEVEC J. AND CARBONELL R.G. (1985). Longitudinal and Lateral Thermal Dispersion in Packed Beds, Part II : Comparison between Theory and Experiment. AIChE Journal, 31, 4, 591-602.
- [34] KUWAHARA F., NAKAYAMA A. AND KOYAMA H. (1996). A Numerical Study of Thermal Dispersion in Porous Media. Journal of Heat Transfer, 118, 756-761.
- [35] QUINTARD M. AND WHITAKER S. Convective and Diffusive Heat Transfer in Porous Media : 3D Calculations of Macroscopic Transport Properties.
- [36] KAVIANY M. (1991). Principles of Heat Transfer in Porous Media. AIChE Journal, 31, 4, 581-590.
- [37] KOCH D.L. AND BRADY J.F. (1985). Dispersion in Fixed Beds. J. Fluid Mech., 154, 399-427.
- [38] DESSENBERGER R.B. AND TUCKER C.L. (1994). Thermal Dispersion in Resin Transfer Molding. Advances in Computer-Aided Engineering (CAE) of Polymer Processing, MD-vol.49/HTD-vol.283, ASME.

- [39] FRIEDRICHS B., GUCERI S.I., SUBBIAH S. ET ATLAN M.C. (1990). Simulation and Analysis of Mold Filling Processes with Ploymer-Fiber Composites: TGMOLD. Proceesing of Polymers and Polymeric Composites, Tseng A.A. and Soh S.K., eds., ASME. New York. 73-90.
- [40] CHAN A.W. AND HWANG S.T. (1988). Mold-Filling Simulations for the Injection Molding of Continuous Fiber-Reinforced Polymer. Ploymer Engineering and Science, 28, 333-339.
- [41] YOUNG, W.B., RUPEL K., HAN K., LEE L.J. AND LIOU M.J. (1991). Analysis of Resin Injection Molding in Molds With Preplaced Fiber Mats. II: Numerical Simulation and Experiments of Mold Filling. Ploymer Composites, 12, 30-38.
- [42] MOLNAR J.A., TREVINO L. AND LEE L.J. (1989). Liquid Flow in Molds with Prelocated Fiber Mats. Ploymer Composites, 10, 414-423.
- [43] PARNAS R.S. AND PHELAN JR. F.R. (1991). The Effect of Heterogeneous Porous Media on Mold Filling in Resin Transfer Molding. SAMPE Quarterly, 53-60.
- [44] PHAM X.T. (1999). Simulation numérique de la fabrication des composites par injection-compression. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.
- [45] PENET L. (1999). Développement d'un logiciel de calcul par éléments finis fondé sur les formes différentielles. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

- [46] CASH J.R. AND KARP A.H. (1990). ACM Transactions on Mathematical Software. 16, 201-222.
- [47] PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. AND FLANNERY B.P. (1992). Numeical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. second edition, Cambridge University Press.
- [48] [http://www.ccm.udel.edu/techsite/Pages/CCD/CCD\\_Synopsis.html](http://www.ccm.udel.edu/techsite/Pages/CCD/CCD_Synopsis.html)
- [49] BEAR J. (1972). Dynamics of Fluids in Porous Media. Dover.



## ANNEXE A

### DÉRIVATION DE L'ÉQUATION DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE (EXEMPLE DU PROCÉDÉ RTM)

#### A1 Hypothèses

Pour dériver l'équation de conservation de l'énergie, il faut tout d'abord poser deux hypothèses :

- le matériau étudié doit pouvoir être considéré comme un milieu continu ;
- l'équilibre thermique est local.

#### A2 Équation de continuité

La dérivation de l'équation de continuité commence par la loi de conservation de la masse qui exprime que la masse d'un ensemble de particules ne change pas dans le mouvement. À un certain temps  $t$  donné, soit  $V_S(t)$  le volume de cet ensemble de particules et soit  $V_C$  un volume donné dans l'espace qui ne change pas avec le temps.  $V_S(t)$  est le volume rattaché à l'ensemble des particules fluides; donc  $V_S(t)$  change avec

l'écoulement. On pose  $V_c = V_s(t)$  au temps  $t$ . La figure A-1 est le schéma représentant ces deux volumes. La loi de conservation de masse s'écrit donc comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV = 0 \quad (A-1)$$

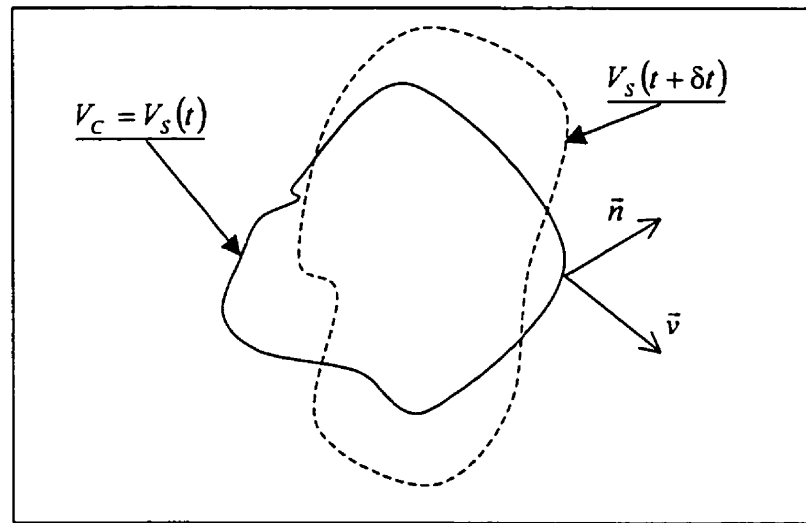


Figure A-1 : Système étudié

L'équation ci-dessous représente le théorème de Reynolds pour une variable quelconque  $\alpha$  dépendant du temps qui est transportée dans un écoulement :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_s(t)} \alpha(t) dV = \int_{V_c} \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \mathbf{v}) \right] dV \quad (A-2)$$

En utilisant le théorème de transport de Reynolds (Eq. A-2) pour la densité, l'équation de conservation de la masse peut être réécrite comme suit :

$$\int_{V_c} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0$$

Puisque cette équation est valide pour n'importe quel volume du fluide étudié, l'expression dans l'intégrale doit aussi être nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

En utilisant un peu d'algèbre, l'équation de continuité ci-dessus s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

ou

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (A-3)$$

### A3 Conservation de la quantité de mouvement (Équation de Cauchy)

Pour dériver l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on utilise la deuxième loi de Newton, qui exprime que le changement dans le temps du produit de la masse par la vitesse résulte des forces extérieures appliquées au système étudié. Pour un ensemble de particules de fluide, on peut écrire cette loi comme suit :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_s(t)} \rho \mathbf{v}_i dV = F_i \quad (A-4)$$

Utilisant le théorème de transport de Reynolds (Eq. A-2), on peut réécrire le premier terme de l'équation (A-4) comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{V_c} \left[ \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) \right] dV = \\ & = \int_{V_c} \left[ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla v_i + v_i \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right] dV = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_c} \left[ \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \right) + v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \\
&= \int_{V_c} \left[ \rho \frac{Dv_i}{Dt} + v_i \frac{D\rho}{Dt} + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'équation de continuité (Eq. A-3), on peut continuer la dérivation :

$$\int_{V_c} \left[ \rho \frac{Dv_i}{Dt} + v_i \frac{D\rho}{Dt} + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{V_c} \left[ \rho \frac{Dv_i}{Dt} + v_i (-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho v_i \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_{V_c} \rho \frac{Dv_i}{Dt} dV$$

L'équation A-4 peut donc être réécrite sous la forme vectorielle comme suit :

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \mathbf{F} \quad (A-5)$$

Les forces extérieures appliquées au système peuvent être de deux types : des forces de volume et des forces de surface. Soit  $G$  la force de gravité et  $\sigma$  le tenseur de contrainte. L'équation A-5 s'écrit donc comme suit :

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho G dV + \int_{V_c} (\nabla \cdot \underline{\sigma}) dV \quad (A-6)$$

En mettant tout sous la même intégrale et puisque cette équation est valide pour n'importe quel volume de fluide étudié, l'expression dans l'intégrale doit aussi être nulle.

On obtient donc l'équation de Cauchy :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{G} + \nabla \cdot \underline{\sigma} \quad (A-7)$$

#### A.4 Première loi de la thermodynamique

La première loi de thermodynamique dit que le changement d'énergie totale d'un système est égal à la différence entre la chaleur ajoutée au système et le travail effectué par le système :

$$\Delta E = Q - W$$

taux de changement de l'énergie totale = taux d'ajout de chaleur dans le système - taux de travail effectué par le système

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{s(t)}} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_{\mathcal{A}_c} \mathbf{n} \cdot (-\mathbf{q}) dA + \int_{V_c} \rho \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\mathcal{A}_c} (\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \mathbf{v} dA \quad (A-8)$$

Utilisant le théorème de transport de Reynolds pour le premier terme de l'équation (A-8), le théorème de Gauss pour les deuxième et quatrième termes, cette équation peut donc être réécrite comme suit :

$$\int_{V_c} \rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) dV = \int_{V_c} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) dV$$

En mettant tout sous la même intégrale et puisque cette équation est valide pour n'importe quel volume du fluide étudié, l'expression dans l'intégrale doit aussi être zéro.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v}$$

Le dernier terme peut être réécrit comme suit :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \mathbf{v} = \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

On obtient donc l'expression suivante :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( u + \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla q + \rho \mathbf{G} \cdot \mathbf{v} + \underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma} \quad (A-9)$$

En multipliant l'équation de Cauchy (A-7) par le vecteur vitesse, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{G} + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma} \\ \rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) &= \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\sigma} \end{aligned} \quad (A-10)$$

### A.5 Équation de conservation de l'énergie

En retranchant l'équation (A-10) de l'équation (A-9), on obtient l'équation de conservation de l'énergie en fonction de l'énergie interne:

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla q + \underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v}} \quad (A-11)$$

L'équation de conservation de l'énergie peut aussi être écrite en fonction de l'enthalpie.

L'enthalpie est reliée à l'énergie interne par l'équation suivante:

$$h = u + \frac{p}{\rho}$$

En écrivant cette équation pour les petites variations de l'enthalpie, de l'énergie interne, de la pression et de la densité, on obtient l'équation dérivée suivante :

$$dh = du + \frac{1}{\rho} dp - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

et en remplaçant les dérivées par les dérivées totales, il vient :

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

En utilisant l'équation de la continuité (A-3), la dérivée totale de l'enthalpie peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{Dh}{Dt} &= \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \mathbf{v} \right) \\ \rho \frac{Dh}{Dt} &= \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \mathbf{v}\end{aligned}\quad (A-12)$$

Introduisant l'équation (A-11) dans l'équation (A-12), on a :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \mathbf{q} + \underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v} + \frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \mathbf{v} \quad (A-13)$$

La contrainte dans un fluide visqueux peut être définie comme suit:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= -p \underline{I} + \underline{\tau} \\ \underline{\sigma} : \nabla \mathbf{v} &= -p \nabla \mathbf{v} + \underline{\tau} : \nabla \mathbf{v}\end{aligned}\quad (A-14)$$

Introduisant l'équation A-14 dans l'équation A-13, on obtient l'équation de conservation d'énergie en fonction de l'enthalpie.

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \mathbf{q} + \frac{Dp}{Dt} + \underline{\tau} : \nabla \mathbf{v}} \quad (A-15)$$

ajout de  
chaleur

taux de changement  
de pression

dissipation  
visqueuse

Pour obtenir l'équation de conservation d'énergie en fonction de la température, il faut savoir comment l'enthalpie, la densité, le flux de chaleur, la pression et la dissipation visqueuse varient avec la température et quelles sont les autres propriétés dont ces

quantités dépendent! Ainsi pour le procédé RTM, trois équations différentes peuvent être obtenues : une pour le moule, une pour les fibres et une pour la résine.

## A.6 Équation thermique dans le moule

Comme le moule est un objet solide, il n'y a pas de vitesse ni de variation de pression à l'intérieur de celui-ci. L'équation (A-15) peut donc être réduite comme suit :

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \mathbf{q}$$

L'enthalpie est donc seulement fonction de la température. La dérivée temporelle de l'enthalpie est définie par l'équation suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dT} \frac{\partial T}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le transfert thermique dans le moule se fait par la diffusion de chaleur due au gradient de la température. Le flux thermique est donc modélisé par l'équation de Fourier pour la conduction :

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

où le paramètre  $k$  représente la conductivité thermique du moule qui peut être un scalaire dans le cas d'un matériau isotrope ou un tenseur pour un matériau orthotrope. L'équation modélisant le transfert thermique dans le moule est :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (A-16)$$



### A.7 Équation thermique pour les fibres

Les fibres sont aussi considérées comme des objets solides. La conduction est le phénomène majeur d'ordre thermique rencontré dans les fibres. La même équation que pour le moule (Eq. A-16) peut être utilisée :

$$\rho_s c_{p,s} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_s \nabla T) \quad (A-17)$$

### A.8 Équation thermique pour la résine

Dans le cas de la résine, le problème thermique est plus complexe, car l'enthalpie est fonction de la température, de la pression et du taux de polymérisation,  $h = h(T, p, \chi)$ . Le flux de chaleur est régi par la diffusion de la chaleur dans la résine, on peut donc l'évaluer par l'équation de Fourier. La dérivée totale de l'enthalpie est:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{DT}{Dt} + \frac{\partial h}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial h}{\partial \chi} \frac{D\chi}{Dt} = c_{p,r} \frac{DT}{Dt} + \frac{1 - \beta T}{\rho_f} \frac{Dp}{Dt} + \Delta h \frac{D\chi}{Dt}$$

où  $\beta$  représente le coefficient de l'expansion thermique de la résine durant la cuisson. Ce coefficient est défini comme suit :

$$\beta = \frac{-1}{\rho_f} \left( \frac{\partial \rho_f}{\partial T} \right)_p$$

L'équation A-15, dans le cas de la résine, s'écrit donc :

$$\rho_f \left[ c_{p,f} \frac{DT}{Dt} + \frac{1 - \beta T}{\rho_f} \frac{Dp}{Dt} + \Delta h \frac{D\chi}{Dt} \right] = \nabla \cdot (k_f \nabla T) + \frac{Dp}{Dt} + \underline{\tau} : \nabla \mathbf{v}_f$$

ou

$$\rho_f c_{p_f} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} - \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} + \underline{\tau} : \nabla \mathbf{v}_f$$

Puisque l'énergie cinétique de la résine est faible, i.e. la vitesse d'écoulement de la résine est très faible pour le procédé RTM, le travail fourni par la gravité et la pression se transforme presque entièrement en dissipation visqueuse, qui est évaluée par la perte de charge hydraulique :

$$\underline{\tau} : \nabla \mathbf{v}_f = -\mathbf{v}_f \cdot \nabla P_f$$

L'équation de conservation de l'énergie en fonction de la température pour la résine est donc la suivante :

$$\rho_f c_{p_f} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_f \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} - \rho_f \Delta h \frac{D\chi}{Dt} - \mathbf{v}_f \cdot \nabla P_f \quad (A-18)$$

## ANNEXE B

### PROPRIÉTÉS DES MOYENNES VOLUMIQUES

#### B1 Relation entre la moyenne de phase et la moyenne intrinsèque

La moyenne de phase d'une grandeur dans un milieu poreux est définie par la valeur moyenne sur le volume  $V_\alpha$  occupé par cette phase dans un échantillon représentatif de volume  $V$ , c'est-à-dire comme suit :

$$\langle Z_\alpha \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\alpha} Z_\alpha dV$$

Pour trouver la relation entre la moyenne de phase et la moyenne intrinsèque, il faut se baser sur la définition de la moyenne volumique de phase.

$$\langle Z_\alpha \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\alpha} Z_\alpha dV = \frac{V_\alpha}{V} \cdot \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} Z_\alpha dV = \varepsilon_\alpha \langle Z_\alpha \rangle^\alpha$$

où  $\langle Z_\alpha \rangle^\alpha$  est la moyenne intrinsèque de la variable  $Z$  définie comme suit :

$$\langle Z_\alpha \rangle^\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} Z_\alpha dV$$

et  $\varepsilon_\alpha$  est la fraction volumique de la phase  $\alpha$ , soit  $\varepsilon_\alpha = V_\alpha/V$ .

On a donc la relation suivante :

$$\boxed{\langle Z_\alpha \rangle = \varepsilon_\alpha \langle Z_\alpha \rangle^\alpha}$$

## B2 Simplification lors de l'utilisation du VER

Soit le volume total,  $V$ , choisi tel que sa longueur caractéristique soit petite comparée à la longueur caractéristique du milieu poreux, mais grande comparée aux diamètres des fibres. On veut trouver une expression approchée pour les termes suivants :

$$\langle\langle Z_\alpha \rangle\rangle^\alpha, \langle\langle Z_\alpha \rangle^\alpha\rangle^\alpha \text{ et } \langle\langle Z_\alpha \rangle^\alpha\rangle$$

Partant de la définition de la moyenne de phase et de la moyenne intrinsèque, la première expression s'écrit comme suit :

$$\langle\langle Z_\alpha \rangle\rangle^\alpha = \frac{l}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \langle Z_\alpha \rangle dV$$

En choisissant le VER comme volume de référence, on peut supposer que la moyenne de phase reste à peu près constante pour le volume de la phase  $\alpha$ .

$$\langle\langle Z_\alpha \rangle\rangle^\alpha \approx \frac{l}{V_\alpha} \langle Z_\alpha \rangle \int_{V_\alpha} dV = \frac{l}{V_\alpha} \langle Z_\alpha \rangle V_\alpha = \langle Z_\alpha \rangle$$

$$\boxed{\langle\langle Z_\alpha \rangle\rangle^\alpha \approx \langle Z_\alpha \rangle}$$

De la même façon on a :

$$\boxed{\langle\langle Z_\alpha \rangle^\alpha\rangle^\alpha \approx \langle Z_\alpha \rangle^\alpha}$$

La troisième expression est facilement dérivable en utilisant la même méthode :

$$\langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_\alpha} \langle Z_\alpha \rangle^\alpha dV$$

$$\langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \rangle \approx \frac{1}{V} \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \int_{V_\alpha} dV = \frac{1}{V} \langle Z_\alpha \rangle^\alpha V_\alpha = \varepsilon_\alpha \langle Z_\alpha \rangle^\alpha$$

$$\boxed{\langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \rangle \approx \varepsilon_\alpha \langle Z_\alpha \rangle^\alpha}$$

### B3 Moyenne de phase d'un produit

La déviation spatiale est la différence entre la variable  $Z_\alpha$  associée à la phase  $\alpha$  et la moyenne intrinsèque de celle-ci, soit :

$$\tilde{Z}_\alpha = Z_\alpha - \langle Z_\alpha \rangle^\alpha$$

$$Z_\alpha = \tilde{Z}_\alpha + \langle Z_\alpha \rangle^\alpha$$

La moyenne d'un produit de deux variables associées à la phase  $\alpha$ ,  $Z_\alpha$  et  $X_\alpha$  est développée comme suit en utilisant la déviation spatiale :

$$\begin{aligned} \langle Z_\alpha X_\alpha \rangle &= \langle (\tilde{Z}_\alpha + \langle Z_\alpha \rangle^\alpha) (\tilde{X}_\alpha + \langle X_\alpha \rangle^\alpha) \rangle \\ &= \langle \tilde{Z}_\alpha \tilde{X}_\alpha + \tilde{Z}_\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha + \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \tilde{X}_\alpha + \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha \rangle \\ &= \langle \tilde{Z}_\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle + \langle \tilde{Z}_\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha \rangle + \langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle + \langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha \rangle \end{aligned}$$

Le premier terme ne peut pas être développé. On va vérifier que les deuxième et troisième termes sont identiques. Quant au dernier terme, il peut être développé en

utilisant la dernière expression de la section précédente. Examinons en particulier les termes du milieu.

$$\langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle = \frac{l}{V} \int_{V_\alpha} \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \tilde{X}_\alpha dV = \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \frac{l}{V} \int_{V_\alpha} \tilde{X}_\alpha dV = \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \langle \tilde{X}_\alpha \rangle$$

On veut savoir quelle est la moyenne de phase d'une déviation spatiale :

$$\langle \tilde{X}_\alpha \rangle = \langle X_\alpha - \langle X_\alpha \rangle^\alpha \rangle = \langle X_\alpha \rangle - \langle \langle X_\alpha \rangle^\alpha \rangle = \langle X_\alpha \rangle - \varepsilon_\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha = \langle X_\alpha \rangle - \langle X_\alpha \rangle = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \langle Z_\alpha X_\alpha \rangle &= \langle \tilde{Z}_\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle + \langle \tilde{Z}_\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha \rangle + \langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle + \langle \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha \rangle \\ &= \langle \tilde{Z}_\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle + \varepsilon_\alpha \langle Z_\alpha \rangle^\alpha \langle X_\alpha \rangle^\alpha \\ &= \langle \tilde{Z}_\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle + \varepsilon_\alpha \frac{\langle Z_\alpha \rangle \langle X_\alpha \rangle}{\varepsilon_\alpha} \end{aligned}$$

La moyenne de phase d'un produit est donc égal au produit des moyennes de phase divisé par la fraction volumique additionné par la moyenne de phase du produit des déviations.

$$\boxed{\langle Z_\alpha X_\alpha \rangle = \frac{l}{\varepsilon_\alpha} \langle Z_\alpha \rangle \langle X_\alpha \rangle + \langle \tilde{Z}_\alpha \tilde{X}_\alpha \rangle}$$

#### B4 Moyenne de phase d'un gradient

Pour trouver la moyenne intrinsèque d'un gradient, il faut considérer un trajet arbitraire passant dans le milieu poreux étudié (fig. B-1). Soit  $s$  une position sur ce trajet

et  $\mathbf{r}_0$  le vecteur position correspondant, on associe à chaque point du trajet un volume  $V$  fermé par la surface  $S$ .  $Z$  étant une fonction scalaire de la position et du temps, la moyenne de phase est :

$$\langle Z_a \rangle = \frac{1}{V} \int_{V_a} Z_a dV$$

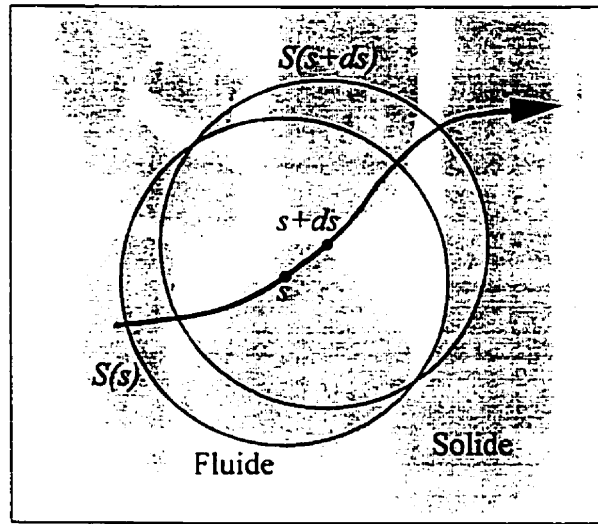


Figure B-1 : Milieu poreux étudié

À un instant donné, on peut associer une valeur de  $\langle Z_a \rangle$  à chaque point  $s$  de la courbe. Le gradient de  $\langle Z_a \rangle$  peut être évalué en utilisant le taux de changement de  $\langle Z_a \rangle$  sur la courbe par rapport à la position courante  $\mathbf{r}_0$  :

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \cdot \nabla \langle Z_a \rangle = \frac{d\langle Z_a \rangle}{ds}$$

En utilisant le théorème de transport pour le système étudié (fig. B-1) et en divisant par le volume  $V$  encastré par la surface  $S$ , on obtient :

$$\frac{l}{V} \frac{d}{ds} \int_{v(s)} Z_\alpha dV = \frac{l}{V} \int_{v(s)} \frac{dZ_\alpha}{ds} dV + \frac{l}{V} \int_{s(s)} Z_\alpha \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{n} dS$$

La première intégrale droite est nulle car  $Z_\alpha$  ne change pas avec la position  $s$  pour un endroit fixé. La surface  $S(s)$  peut être décomposée en un élément de surface extérieure  $S_e$  et en l'interface  $S_{\alpha\beta}$  entre le fluide et le solide. On peut donc réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\frac{d\langle Z_\alpha \rangle}{ds} = \frac{l}{V} \int_{S_e} Z_\alpha \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{l}{V} \int_{S_{\alpha\beta}} Z_\alpha \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{n} dS$$

Pour la surface externe, représentée par le cercle dans la figure B-1,  $x$  est égal à  $\mathbf{r}_0$  puisque la surface  $S$  se déplace sans rotation. La deuxième intégrale, quant à elle, est nulle car le solide et le fluide ne changent pas de position en fonction de  $s$ . En combinant ces informations avec le taux de changement de  $\langle Z_\alpha \rangle$  par rapport à la position, on obtient:

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \cdot \nabla \langle Z_\alpha \rangle = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \cdot \frac{l}{V} \int_{S_e} Z_\alpha \mathbf{n} dS$$

Comme cette équation doit être vraie pour n'importe quel trajet, on a donc :

$$\nabla \langle Z_\alpha \rangle = \frac{l}{V} \int_{S_e} Z_\alpha \mathbf{n} dS$$

Partant de la définition de la moyenne de phase pour le gradient, on a :



$$\langle \nabla Z_\alpha \rangle = \frac{l}{V} \int_{V_\alpha} \nabla Z_\alpha dV$$

En utilisant le théorème de Green sur cette intégrale et les surfaces  $S_e$  et  $S_{\alpha\beta}$ , on peut écrire :

$$\langle \nabla Z_\alpha \rangle = \frac{l}{V} \int_{S_e} Z_\alpha \mathbf{n} dS + \frac{l}{V} \int_{S_{\alpha\beta}} Z_\alpha \mathbf{n} dS$$

On arrive donc à la relation voulue, en notant que le vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  sur la surface  $S_{\alpha\beta}$  est identique à  $\mathbf{n}_{\alpha\beta}$ .

$$\boxed{\langle \nabla Z_\alpha \rangle = \nabla \langle Z_\alpha \rangle + \frac{l}{V} \int_{S_{\alpha\beta}} Z_\alpha \mathbf{n}_{\alpha\beta} dS}$$

## ANNEXE C

### DÉRIVATION D'UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS

#### C1 Aspects mathématiques

Pour comprendre que tous ces problèmes différents peuvent être posés dans le cadre d'un même formalisme mathématique, on peut constater qu'ils possèdent tous, du point de vue mathématique, la même structure. Pour commencer, on va se pencher sur quatre exemples physiques : un problème en thermique, un en mécanique, un en électrique et un en dynamique des fluides, pour constater que mathématiquement, ils possèdent un formalisme commun.

Ainsi, les champs de température, de déplacement, du potentiel électrique et de pression ont tous la même nature mathématique. Il s'agit de potentiels scalaires qui sont évalués en un point et l'opérateur différentiel associé à cette entité mathématique est le gradient. Tous ces champs ont un champ dual avec lequel ils sont reliés par l'intermédiaire d'une loi constitutive. Les champs duaux possèdent aussi une même nature mathématique, en ce sens qu'ils sont évalués sur une surface, et l'opérateur différentiel associé est ici la divergence. Ces problèmes physiques peuvent être écrits à l'aide des deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \quad (C-1)$$

$$\mathbf{d} = K \nabla v \quad (C-2)$$

où  $v$  représente le potentiel scalaire,  $\mathbf{d}$  est son champ dual,  $\rho$  est la source volumique et  $K$  définit la loi constitutive. La source volumique est une autre entité mathématique, qui doit être évaluée comme une intégrale volumique. Ces deux équations et leurs interprétations physiques pour les quatre exemples étudiés ici seront maintenant décrites.

- Ainsi, en thermique, le champ dual est le flux de chaleur, tandis que la loi constitutive est donnée par la loi de Fourier de diffusion de la chaleur, qui exprime que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température :

$$\mathbf{q}'' = -k \nabla T$$

où  $k$  est soit la conductivité thermique pour un matériau isotrope, soit le tenseur de conduction thermique pour un matériau orthotrope et  $\mathbf{q}''$  représente le flux de chaleur par unité d'aire. Ici  $k$  définit la loi constitutive pour le problème de transfert de chaleur étudié. Cette équation est identique à l'équation (C-2). La source volumique en thermique est une source de chaleur. Le cas de la thermique sera examiné en profondeur plus loin.

- Dans le cas du déplacement, le champ dual est la contrainte qui est reliée aux déformations par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Dans cette équation,  $\sigma$  est la contrainte et  $\varepsilon$  est la déformation. Il s'agit de matrices 3x3. Le tenseur de déformation est fonction des gradients des déplacements, donc cette équation représente bien l'équation (C-2). Dans le cas linéaire, la déformation est

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\partial_k e_l + \partial_l e_k)$$

où  $\partial_k$  représente la dérivée partielle par rapport à  $x_k$ . Le tenseur  $E_{ijkl}$ , appelé tenseur de Hooke, est construit à partir des constantes élastiques (module de Young  $E$  et coefficient de poisson  $\nu$ ) qui constituent les propriétés du matériau étudié. Ce tenseur définit la loi constitutive qui modélise la déformation linéaire élastique du matériau considéré. Ce tenseur est calculé à partir des coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  par la relation suivante :

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

où

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

La source volumique est, dans cet exemple, une force volumique.

- L'intensité du courant électrique est le champ dual du potentiel électrique et la perméabilité diélectrique est le paramètre qui définit la loi constitutive. La densité de charge représente la source volumique.

- Dans le cas d'un écoulement en milieux poreux, le champ dual de la pression est la vitesse. La loi de Darcy modélise cet écoulement à l'aide des deux équations suivantes :

$$\mathbf{v}_f = -\frac{l}{\mu} \mathbf{S} \nabla p$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0$$

Dans ces équations,  $p$  est la pression, le champ dual  $\mathbf{v}_f$  est la vitesse de filtration, soit le débit par unité d'aire,  $\mu$  est la viscosité du fluide et  $\mathbf{S}$  est le tenseur de perméabilité. On constate que la source volumique est nulle dans ce cas-ci, ce qui n'est pas le cas pour le procédé CRTM (*Compression Resin Transfer Molding*), dans lequel la paroi du moule est mobile et comprime le renfort pendant l'injection [44].

## C2 Méthodes numériques

Revenons aux équations (C-1) et (C-2). Ces deux équations s'appliquent sur tout le domaine  $\Omega$  sur lequel le problème est défini. Pour ce genre de problème, appelé problème elliptique, une condition limite doit être imposée sur toute la frontière. La condition limite peut être spécifiée de deux façons différentes : on peut soit imposer le potentiel scalaire ou alors le flux du champ dual à travers une portion de la frontière. Combinant les équations (C-1) et (C-2), on obtient le problème suivant :

$$\nabla \cdot (K \nabla v) = \rho \text{ sur } \Omega \tag{C-3}$$

avec les conditions limites suivantes, où  $\partial\Omega$  est la surface englobant de  $\Omega$  :

$$v|_{\Gamma_v} = v_v \quad (C-4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|_{\Gamma_d} = Q_d \quad (C-5)$$

Dans ces équations,  $v_v$  représente le potentiel scalaire imposé sur la frontière  $\Gamma_v$  et  $Q_d$  représente le flux du champ dual imposé sur la frontière  $\Gamma_d$ . Les frontières  $\Gamma_v$  et  $\Gamma_d$  forment la surface  $\partial\Omega$  et doivent satisfaire les deux conditions suivantes :

$$\Gamma_v \cup \Gamma_d = \partial\Omega$$

$$\Gamma_v \cap \Gamma_d = \emptyset$$

L'équation (C-3) doit être valide en chaque point du domaine  $\Omega$ . Il s'agit donc d'une équation locale définissant le problème étudié.

Les équations (C-3) à (C-5) représentent le problème mathématique. Pour passer à la problématique physique, il faut faire correspondre aux variables mathématiques les propriétés physiques et la loi constitutive. Il est donc important de noter ici que la seule chose qui diffère d'un problème physique à un autre, c'est la loi constitutive. Cette propriété doit être incluse dans le programme informatique en distinguant bien entre les fonctionnalités qui résultent de la structure mathématique du problème et celles qui se rapportent à la physique.

### C3 Forme faible du problème général

Les équations (C-3) à (C-5) sont des équations locales, qui ne peuvent pas être intégrées telles quelles dans un programme informatique. La méthode des résidus pondérés est souvent employée dans les méthodes numériques utilisées en physique appliquée. En choisissant  $v$  dans un espace fonctionnel restreint  $V$  (c'est-à-dire tel que les conditions limites sur  $\Gamma$ , soient contenues explicitement dans cet espace), les équations (C-3) à (C-5) reviennent à chercher une fonction  $v$  dans  $V$  telle que :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla v) w dV - \int_{\Omega} \rho w dV = 0 \quad (C-6)$$

quelle que soit la fonction test  $w$  appartenant à l'espace fonctionnel  $V$ . Cet espace est choisi de telle façon que les quantités intégrées ont la dimension d'une énergie. En utilisant le théorème de Green pour intégrer par parties le premier terme de l'équation (C-6), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla v) w dV + \int_{\Omega} (K \nabla v) \cdot \nabla w dV &= \int_{\partial \Omega} [\mathbf{n} \cdot (K \nabla v)] w ds \\ \int_{\partial \Omega} [\mathbf{n} \cdot (K \nabla v)] w ds &= \int_{\partial \Omega} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) w ds = \int_{\Gamma_d} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) w ds = \int_{\Gamma_d} Q_d w ds \end{aligned} \quad (C-7)$$

Passant de la première intégrale de la seconde ligne à la deuxième, on a utilisé l'équation (C-2). L'avant-dernière égalité résulte du fait que les fonctions tests sont toujours nulles sur la portion de la frontière où l'inconnue est spécifiée. Le flux du champ dual est imposé sur le reste de la frontière. L'équation des résidus pondérés (C-6) peut donc s'écrire finalement sous la forme :

$$\int_{\Omega} (K \nabla v) \cdot \nabla w dV + \int_{\Omega} \rho w dV - \int_{\Gamma_d} Q_d w ds = 0 \quad (C-8)$$

Cette équation représente la forme faible du problème général. Ce n'est plus une équation locale, mais elle doit être valide sur tout le domaine  $\Omega$ . Il est facile de la discrétiser pour ensuite l'utiliser dans un programme informatique. Elle contient les deux équations du problème, soit l'équation (C-3) posée sur le domaine  $\Omega$  et l'équation de la condition aux limites (C-5) sur la frontière  $\delta\Omega$ . L'équation (C-4) est prise en compte dans le choix de l'espace fonctionnel employé pour discrétiser le potentiel scalaire. La méthode numérique choisie dépend seulement des fonctions tests qui permettent d'approximer le potentiel scalaire. La méthode numérique employée dans LCMFLOT est la méthode des éléments finis. Dans cette méthode, les fonctions tests sont identiques aux fonctions de forme de l'approximation par éléments finis.

#### C4 Éléments finis

Dans la méthode des éléments finis, le domaine étudié  $\Omega$  est discrétisé en un nombre fini d'éléments géométriques. Pour calculer la valeur de la fonction  $v$  au point  $\mathbf{p}$ , on utilise l'interpolation par éléments finis suivante :

$$v(\mathbf{p}) = \sum v_n f_n(\mathbf{p}) \quad (C-9)$$

où  $n$  représente le nombre de degrés de liberté,  $f_n(\mathbf{p})$  est la fonction de forme pour chaque degré de liberté  $n$  évalué au point  $\mathbf{p}$  et  $v_n$  est la valeur au degré de liberté  $n$ . Voici



quelques exemples de fonctions de forme polynômiales en deux dimensions (voir figure C-1 pour la légende) exprimées en variables normalisées  $0 \leq u, v \leq 1$  :

a) pour un segment

$$v(\mathbf{p}) = 0.5[p_1(1-u) + p_2(1+u)]$$

b) pour un triangle

$$v(\mathbf{p}) = p_1(1-u-v) + p_2v + p_3u$$

c) pour un rectangle

$$v(\mathbf{p}) = \frac{1}{4} \left[ p_1(1+u)(1+v) + p_2(1-u)(1+v) + p_3(1-u)(1-v) + p_4(1+u)(1-v) \right]$$

Ces notions se généralisent facilement en trois dimensions sur des tétraèdres ou des prismes. Le segment possède seulement deux degrés de liberté situés à ses deux extrémités. Le triangle, lui, en a trois, car il est défini par trois points non-alignés. Sur un carré, quatre fonctions de forme peuvent être construites, une à chaque coin du carré.

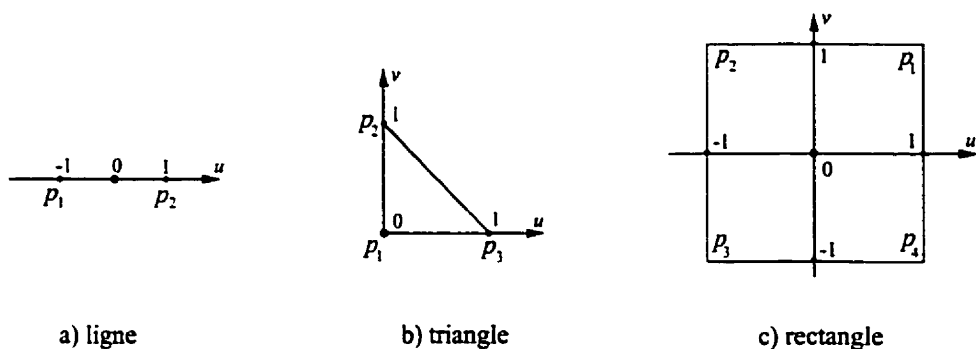


Figure C-1 : Les éléments simples

Ces fonctions d'interpolation sont appelées des fonctions de forme de Lagrange du premier ordre. Elles sont rattachées aux nœuds. Il en existe d'autres types de fonctions de formes : des fonctions de forme de Lagrange du second ordre rattaché aux arêtes et parfois à l'élément, des fonctions de forme hiérarchiques ou encore des fonctions de forme non-conformes [45] c'est-à-dire discontinues entre deux éléments adjacents du maillage.

Le domaine étudié se compose d'un assez grand nombre d'éléments qui peuvent être des triangles ou des rectangles (en deux dimensions) ou d'autres éléments plus complexes. Le domaine possède donc un grand nombre de degrés de liberté.

Nous sommes intéressés à résoudre le problème faible décrit par l'équation (C-8) en utilisant l'interpolation par éléments finis de l'équation (C-9). En choisissant le même espace fonctionnel pour les fonctions tests  $w_m$  et les fonctions de forme  $f_n$ , on obtient le système d'équations discrétisées suivant :

$$\sum_{n \in N} v_n \int_{\Omega} (K \nabla f_n) \cdot \nabla w_m dV + \int_{\Omega} \rho w_m dV - \int_{\Gamma_d} Q_d w_m ds = 0, \quad m \in N \quad (C-10)$$

On obtient donc un système de  $N$  équations avec  $N$  inconnues,  $v_n$ . C'est la méthode de Galerkin. La source volumique et le flux du champ dual peuvent être fonction du potentiel scalaire de la façon suivante :

$$\rho = \rho_0 + \alpha v + \beta \mathbf{v} \cdot \nabla v$$

$$Q_d = Q_0 + \gamma v$$

L'équation (C-10) peut donc s'écrire plus généralement de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in N} v_n \left[ \int_{\Omega} (K \nabla f_n) \cdot \nabla w_m dV + \int_{\Omega} \alpha f_n w_m dV + \int_{\Omega} \beta \mathbf{v} \cdot \nabla f_n w_m dV - \int_{\Gamma_d} \mathcal{H}_n w_m ds \right] + \\
+ \int_{\Omega} \rho_\theta w_m dV - \int_{\Gamma_d} Q_\theta w_m ds = 0
\end{aligned}
\tag{C-11}$$

## ANNEXE D

### DÉRIVATION DES EXEMPLES DES CHAPITRES 5 ET 6

#### D1 Exemple 1 : diffusion de chaleur à travers un mur

On veut étudier un mur dont les côtés ont des températures différentes ( $T_1 > T_2$ ). La conduction est le seul phénomène thermique présent dans cet exemple. On suppose que la conductivité thermique est constante et que le matériau de construction utilisé est isotrope. L'épaisseur du mur est désignée par  $L$ . Cette longueur est beaucoup plus petite que l'aire du mur (i.e., l'épaisseur est beaucoup plus petite que la hauteur et que la largeur). Il n'y a aucune source de chaleur et le problème est donc unidimensionnel. L'équation différentielle de ce problème est donc :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

avec les conditions limites suivantes :

$$T|_{x=0} = T_1 \text{ et } T|_{x=L} = T_2$$

La solution de cette équation est donc :

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{x}{L} \quad (D-1)$$

Cet exemple est équivalent à la diffusion de la chaleur à travers une surface rectangulaire plane où deux côtés opposés sont thermiquement isolés, c'est-à-dire que le flux de chaleur normal à l'arête est nul (voir figure C-1). Cet exemple en deux dimensions est identique à l'exemple unidirectionnel précédent.

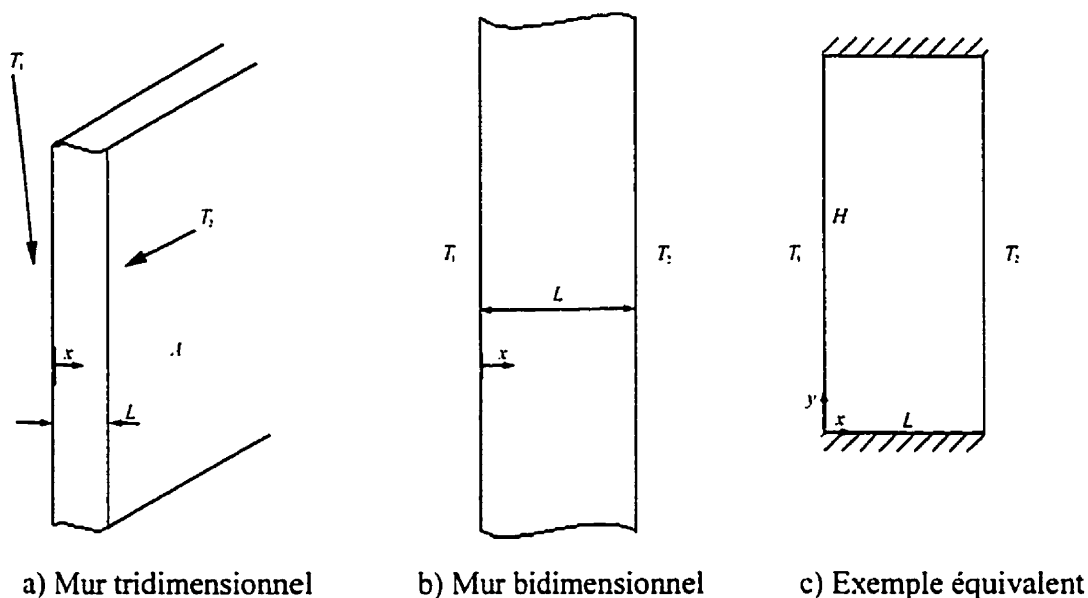


Figure D-1 : Schéma d'un mur

La diffusion de chaleur dans un mur où les côtés opposés sont à température différente est équivalent au problème de la diffusion dans une surface rectangulaire plane où deux côtés opposés sont thermiquement isolés, c'est-à-dire que le flux de chaleur s'établit dans une seule direction.

L'équation différentielle du problème équivalent est  $\nabla^2 T = 0$  avec les conditions limites suivantes :

$$T|_{x=0} = T_1 \text{ et } T|_{x=L} = T_2$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=H} = 0$$

Pour montrer l'équivalence entre ces deux problèmes, on suppose que la température est séparable en  $x$  et en  $y$ . On peut donc écrire la température sous la forme :

$T(x, y) = X(x)Y(y)$ . L'équation différentielle devient :

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

d'où

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{-1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = m = \text{constante}$$

Les conditions limites sur  $y$  peuvent être réécrites comme suit :

$$\left. \frac{dY}{dy} \right|_{y=0} = 0 \text{ et } \left. \frac{dY}{dy} \right|_{y=H} = 0$$

Deux cas sont possibles : la constante  $m$  peut être nulle ou différente de zéro. Examinons d'abord le cas où la constante n'est pas nulle. L'équation différentielle ordinaire sur  $y$  est  $Y'' = -mY$ . La solution est donc :  $Y(y) = A \sin \sqrt{m}y + B \cos \sqrt{m}y$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes. En utilisant les conditions limites, on trouve que  $A$  et  $B$  sont nulles, c'est-à-dire on trouve la solution triviale, i.e.  $Y(y) = 0 = T$ . On peut donc conclure que la constante  $m$  doit être nulle pour obtenir une solution qui a un sens physique. L'équation différentielle ordinaire sur  $y$  est  $Y'' = 0 \Rightarrow Y' = \text{constante}$ . En utilisant les

conditions limites,  $Y' = 0 \Rightarrow Y = \text{constante} \Rightarrow T = T(x)$ , l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

avec les conditions limites suivantes :

$$T|_{x=0} = T_1 \text{ et } T|_{x=L} = T_2$$

La solution de cette équation est donc :

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{x}{L}$$

On a donc démontré que la diffusion dans une surface rectangulaire plane où deux côtés opposés sont thermiquement isolés est équivalente à la diffusion dans un mur infini.

Le rectangle schématisé à la figure (D-2) a été calculé par le logiciel LCMFLOT pour la validation de la diffusion car un mur qui s'étend à l'infini n'est pas facilement maillé. Les paramètres géométriques et les conditions limites de température pour ce problème sont donnés par le tableau (D-1). On retrouve la solution analytique (Eq. D-1) comme le montre le tableau (D-2) : la première ligne indique le ratio de la longueur voulue sur la longueur totale, tandis que la deuxième ligne montre la température adimensionnelle  $T^*$  qui est calculée de la manière suivante :

$$T^* = \frac{T - T_l}{T_2 - T_l} \quad (D-2)$$

Ces deux lignes sont égales comme le prévoit l'équation (D-1). La figure (D-2) montre la distribution de température. La température varie uniformément de 300 à gauche du rectangle à 250 degrés sur la face de droite. Les lignes verticales sur la figure (D-2) représentent les isothermes d'intervalle 10. Pour générer ce tableau, onze senseurs ont été placés à un intervalle de 0.1 selon  $x$ .



Tableau 5-1 : Paramètres géométriques et conditions limites

largeur $L = 1$ unité de longueur
hauteur $H = 4$ unités de longueur
$T_1 = 300$ unités de température
$T_2 = 250$ unités de température

Figure D-2 : La distribution de température

Tableau 5-2 : Validation de la solution de l'équation de la chaleur pour l'exemple du mur

$x/L$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
temp. adim.	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1



### D2 Exemple 3 : Cercle avec une source de chaleur constante en présence de convection

Dans cet exemple, on veut étudier la diffusion de chaleur dans un cercle de rayon  $R$  avec une source de chaleur  $S$  constante. La condition limite imposée sur le périmètre du cercle est la convection naturelle. Comme rien ne varie avec l'angle dans le cercle, cet exemple constitue en fait un calcul unidimensionnel, la seule variable étant  $r$ , le rayon. L'équation différentielle décrivant ce problème est :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rK \frac{dT}{dr} \right) + S = 0$$

Le coefficient de conductivité thermique,  $K$ , est constant. On a besoin de deux conditions limites : la première condition est la convection naturelle sur le périmètre du cercle, tandis que la deuxième impose une température finie (réelle) au centre du cercle. La solution exacte de cette équation est :

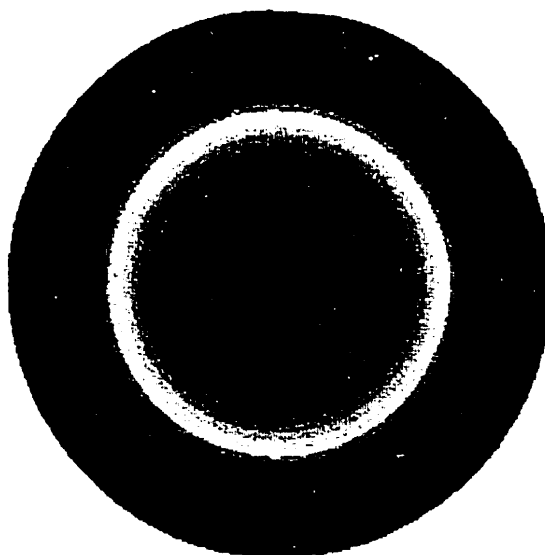
$$T(r) = \frac{S}{4K} (R^2 - r^2) + \frac{SR}{2h} + T_{\infty} \quad (D-3)$$

Dans cette équation,  $h$  est le coefficient de convection naturelle et la température  $T_{\infty}$  est la température de l'environnement. L'exemple a été calculé avec les paramètres suivant :  $T_{\infty} = 1$ ,  $S = 1$ ,  $R = 1$ ,  $h = 1$  et  $K = 0.1$ . La discrétisation du cercle est effectuée avec un maillage non régulier de 682 éléments.

Tableau D-3 : Comparaison entre le code et la théorie de la diffusion dans un cercle en présence de la convection naturelle et d'une source de chaleur constante à l'origine

rayon	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
temp. numérique	3.99	3.97	3.89	3.77	3.59	3.37	3.09	2.77	2.39	1.97	1.50
temp. analytique	4.00	3.98	3.90	3.78	3.60	3.38	3.10	2.78	2.40	1.98	1.50
erreur (%)	0.14	0.14	0.13	0.19	0.25	0.22	0.18	0.27	0.45	0.36	0.05

Le tableau précédant (D-3) indique l'erreur entre la distribution de température analytique calculée par l'équation (D-3) et la distribution calculée par le logiciel. L'erreur est très faible et ne dépasse pas 0.5 %. La figure (D-3) représente la distribution de température pour cet exemple. La température au centre du cercle est de 4, tandis que le contour est de 1.5.



### D3 Exemple 3 : diffusion dans un carré avec deux températures imposées

L'équation différentielle qui décrit la diffusion dans un carré à deux températures (voir figure 4-3 pour le schéma du problème étudié) est :

$$\nabla^2 \psi(x, y) = 0$$

avec les conditions limites suivantes :

$$\psi(0, y) = \psi(L, y) = \psi(x, 0) = 0 \text{ et } \psi(x, L) = 1$$

Pour résoudre cette équation différentielle, on suppose que la fonction  $\psi$  est séparable en  $x$  et en  $y$  :

$$\psi(x, y) = X(x)Y(y)$$

Elle peut donc être écrite de la façon suivante :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{-1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda = \text{constante}$$

On a maintenant deux équations différentielles, une en  $x$  et une en  $y$ . Penchons-nous d'abord sur l'équation différentielle en  $x$  avec les conditions limites suivantes :

$$X(0) = X(L) = 0$$

On trouve comme solution pour cette équation les fonctions suivantes :

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ avec } \lambda = \frac{-n^2 \pi^2}{L^2}$$

L'équation différentielle en  $y$  s'écrit maintenant :

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 Y \text{ avec } Y(0) = 0$$

La solution de cette équation en  $y$  est :

$$Y_n(y) = B_n \sinh \frac{n\pi y}{L}$$

La solution complète en  $x$  et en  $y$  s'écrit alors :

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sinh \frac{n\pi y}{L}$$

Pour trouver les constantes  $D_n$  on doit utiliser la dernière condition limite, c'est-à-dire  $\psi(x, L) = 1$ . Comme les solutions sont des séries de Fourier, les constantes s'écrivent alors :

$$D_n \sinh n\pi = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi \xi}{L} d\xi = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

ou

$$D_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi \sinh n\pi}, D_{2n} = 0$$

La solution complète de ce problème est donc :

$$\psi(x, y) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\pi \sinh(2n+1)\pi]^{-1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \sinh \frac{(2n+1)\pi y}{L}$$

#### D4 Exemple 4 : diffusion dans un cube avec deux températures imposées

Cet exemple ressemble beaucoup à la diffusion dans un carré avec deux températures imposées, puisque c'est le même problème mais en trois dimensions. Cette fois-ci un quart de cube est étudié car le problème est symétrique par rapport aux plans  $x=0$  et  $y=0$ . Ainsi la face supérieure du cube est maintenue à la température unité, tandis que la face inférieure et les deux faces latérales sont gardées à 0. Deux faces adjacentes, les faces restantes, sont laissées libres, c'est-à-dire que la dérivée normale de la température est nulle. Il n'y a donc pas de flux thermique, ce qui signifie que ces faces sont isolées. La figure (D-4) représente le cube au complet avec les conditions limites de température. Les conditions limites des faces visibles sont indiquées. Les autres faces ont la température maintenue à 0.

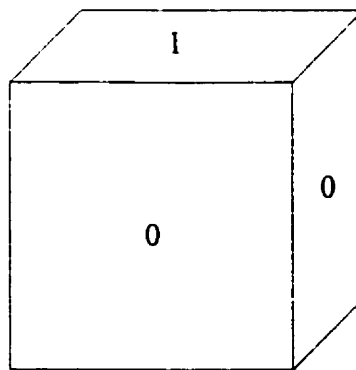


Figure D-4 : Le schéma du cube étudié

En définissant la température adimensionnelle  $\psi$  par l'équation (D-2), l'équation différentielle pour ce problème est :

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (D-4)$$

En séparant les variables la fonction devient :

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Les conditions limites sont :

1.  $\psi(0, y, z) = 0 \Rightarrow X(0)Y(y)Z(z) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$
2.  $\psi(L, y, z) = 0 \Rightarrow X(L)Y(y)Z(z) = 0 \Rightarrow X(L) = 0$
3.  $\psi(x, 0, z) = 0 \Rightarrow X(x)Y(0)Z(z) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$
4.  $\psi(x, W, z) = 0 \Rightarrow X(x)Y(W)Z(z) = 0 \Rightarrow Y(W) = 0$
5.  $\psi(x, y, 0) = 0 \Rightarrow X(x)Y(y)Z(0) = 0 \Rightarrow Z(0) = 0$
6.  $\psi(x, y, H) = l \Rightarrow X(x)Y(y)Z(H) = l$

En substituant les fonctions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  dans l'équation différentielle et en divisant par leur produit on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda$$

On utilisant les conditions limites 1 et 2 pour la variable  $x$  on obtient :

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

où

$$\lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

Les fonctions  $Y$  et  $Z$  peuvent aussi être séparées, on a donc :

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \mu$$

On utilisant les conditions limites 3 et 4 pour la variable  $y$  on obtient :

$$Y_k(y) = B_k \sin \frac{k\pi y}{W}$$

où

$$\mu = -\frac{k^2 \pi^2}{W^2}$$

Il reste l'équation différentielle en  $z$  avec la condition limite numéro 5 :

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \frac{k^2 \pi^2}{W^2} = \gamma_{nk}^2$$

En utilisant la condition limite et résolvant l'équation différentielle on obtient :

$$Z_{nk}(z) = C_{nk} \sinh \pi \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{k^2}{W^2}} z$$

On a donc comme solution générale du problème :

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{nk}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_{nk} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{k\pi y}{W} \sinh \pi \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{k^2}{W^2}} z$$

En utilisant la dernière condition limite on peut trouver les coefficients  $D_{nk}$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} D_{nk} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{k\pi y}{W} \sinh \pi \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{k^2}{W^2}} H = l$$

Il faut résoudre l'intégrale double suivante :

$$D_{nk} \sinh \pi \sqrt{\frac{n^2}{L^2} + \frac{k^2}{W^2}} H = \frac{l}{LW} \int_0^L \int_0^W \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{k\pi y}{W} dx dy$$

En calculant l'intégrale on obtient la solution suivante :

$$D_{nk} = \frac{l6}{(2n+1)(2k+1)\pi^2 \sinh \pi \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{L^2} + \frac{(2k+1)^2}{W^2}} H}$$

La solution analytique de ce problème est donc :

$$\psi(x, y, z) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{W} \sinh \pi \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{L^2} + \frac{(2k+1)^2}{W^2}} z}{(2n+1)(2k+1) \sinh \pi \sqrt{\frac{(2n+1)^2}{L^2} + \frac{(2k+1)^2}{W^2}} H} \quad (D-5)$$

Comme seulement un quart du cube est modélisé, on voit bien sur la figure (D-5) la distribution de température à l'intérieur du cube où les faces sont isolées. La température varie de 0 en bas de la figure jusqu'à 1 sur la face supérieure du cube. Le maillage utilisé pour la simulation contient 2376 tétraèdres. La solution analytique a été calculée par un programme écrit en Visual C++ (voir annexe I) où l'équation (D-5) a été résolue en utilisant 75 termes de la série. Sur la figure (D-6) où l'on compare les solutions analytique et numérique, une bonne concordance est observée entre les deux calculs. Sur le deuxième graphique certaines valeurs numériques sont décalées par rapport à la courbe analytique, mais le pourcentage d'erreur de ces quatre courbes reste inférieur à 10 % dans tous les cas. Ainsi la simulation numérique tridimensionnelle en diffusion donne de bons résultats.



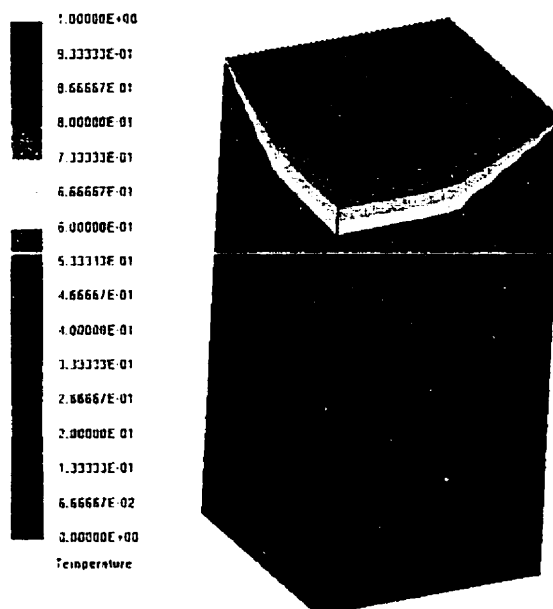


Figure D-4 : Distribution de la température au centre du cube

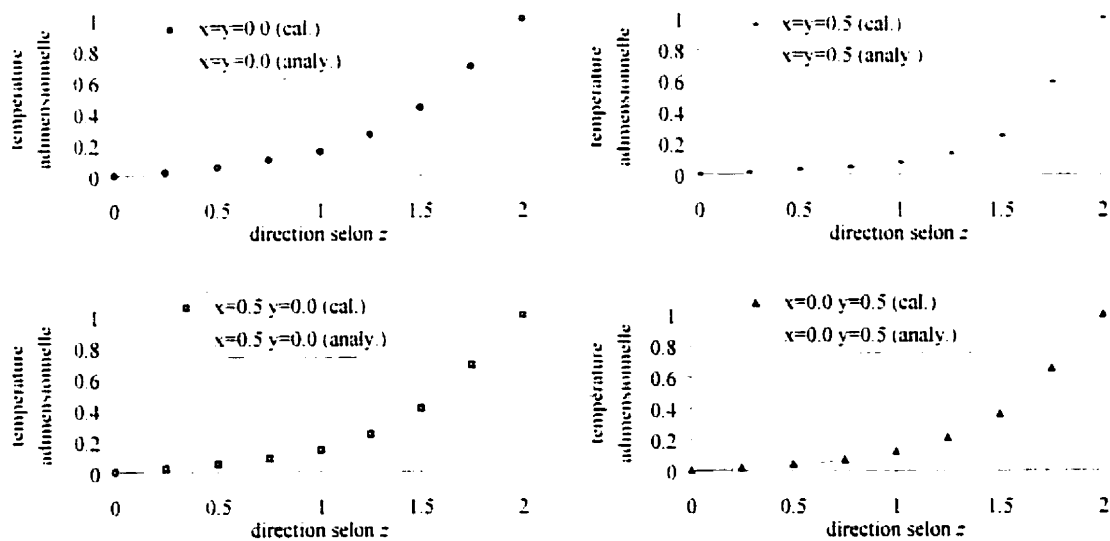


Figure D-5 : Comparaison entre la solution analytique et la simulation pour le cube

### D5 Exemple 5 : diffusion dans un cylindre avec deux températures imposées

Dans cette section, la diffusion dans un cylindre est étudiée. Cet exemple ressemble beaucoup à l'exemple précédent où le cube est remplacé par le cylindre. Un huitième de cylindre est représenté car ce problème est symétrique en hauteur et le champ de température est seulement fonction du rayon et de la hauteur. La face inférieure est maintenue à une température adimensionnelle de 0, tandis que la surface en arc de cercle est tenue à 1. Les autres faces sont isolées. En définissant la température adimensionnelle  $\psi$  par l'équation (D-2), l'équation différentielle pour ce problème ressemble à celle de l'exemple précédent, où les variables  $x$  et  $y$  sont remplacées par le rayon  $r$  :

$$\nabla^2 \psi(r, z) = 0 \quad (D-6)$$

avec les conditions limites suivantes :

1.  $\psi(r, 0) = 0$
2.  $\psi(b, z) = 1$
3.  $\psi(r, H) = 0$

L'équation différentielle est plus précisément la suivante en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

En utilisant la séparation de variables la température adimensionnelle peut s'écrire comme suit :

$$\psi(r, z) = R(r)S(z)$$

Ainsi l'équation différentielle en coordonnées cylindriques devient :

$$\frac{S}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dR}{dr} \right] + R \frac{d^2 S}{dz^2} = 0$$

En divisant cette équation par les fonctions  $S$  et  $R$  on obtient deux équations différentielles à une variable qui sont égales :

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dR}{dr} \right] = - \frac{1}{S} \frac{d^2 S}{dz^2} = \text{const.} = \lambda^2$$

En étudiant l'équation en  $z$  :

$$\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{dz^2} = -\lambda^2$$

avec ces conditions limites, les conditions 1 et 3 deviennent :

$$1. S(0) = 0$$

$$3. S(H) = 0$$

et la solution à cette équation est :

$$S_k(z) = A_k \sin \frac{k\pi z}{H}$$

où

$$\lambda = \frac{k\pi}{H}$$

Avec cette solution pour la partie en  $z$  l'équation différentielle en  $r$  devient :

$$r \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dR}{dr} \right] - \frac{k^2 \pi^2 r^2}{H^2} R = 0$$

La solution à cette équation est :

$$R_k(r) = B_k I_0 \left( \frac{k\pi r}{H} \right)$$

où la fonction  $I_0(x)$  est la fonction de Bessel modifiée et elle est définie comme suit :

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}$$

On a donc comme solution générale de notre équation différentielle du début de section :

$$\psi(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k I_0\left(\frac{k\pi r}{H}\right) \sin \frac{k\pi z}{H}$$

En utilisant la dernière condition limite qui nous reste on obtient :

$$\psi(b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k I_0\left(\frac{k\pi b}{H}\right) \sin \frac{k\pi z}{H} = l$$

Pour trouver les constantes  $C_k$  on doit résoudre l'intégrale suivante :

$$C_k I_0\left(\frac{k\pi b}{H}\right) = \frac{2}{H} \int_0^H \sin \frac{k\pi z}{H} dz$$

En calculant l'intégrale on obtient la solution suivante :

$$C_k = \frac{2H}{(2k+1)\pi I_0\left(\frac{(2k+1)\pi b}{H}\right)}$$

On a donc la solution analytique de ce problème :

$$\psi(r, z) = \frac{l}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi r}{H}\right) \sin \frac{\pi(2k+1)z}{H}}{(2k+1)I_0\left(\frac{(2k+1)\pi b}{H}\right)} \quad (D-7)$$

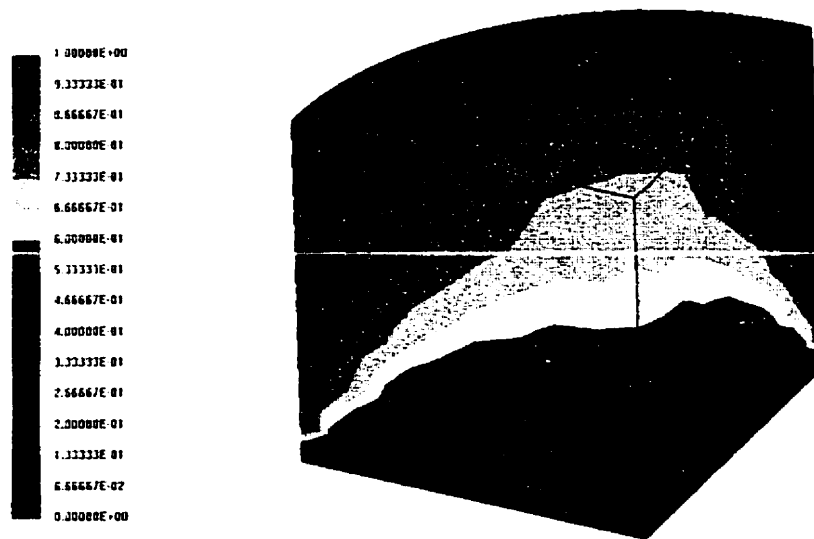


Figure D-7 : Distribution de la température pour un huitième du cylindre

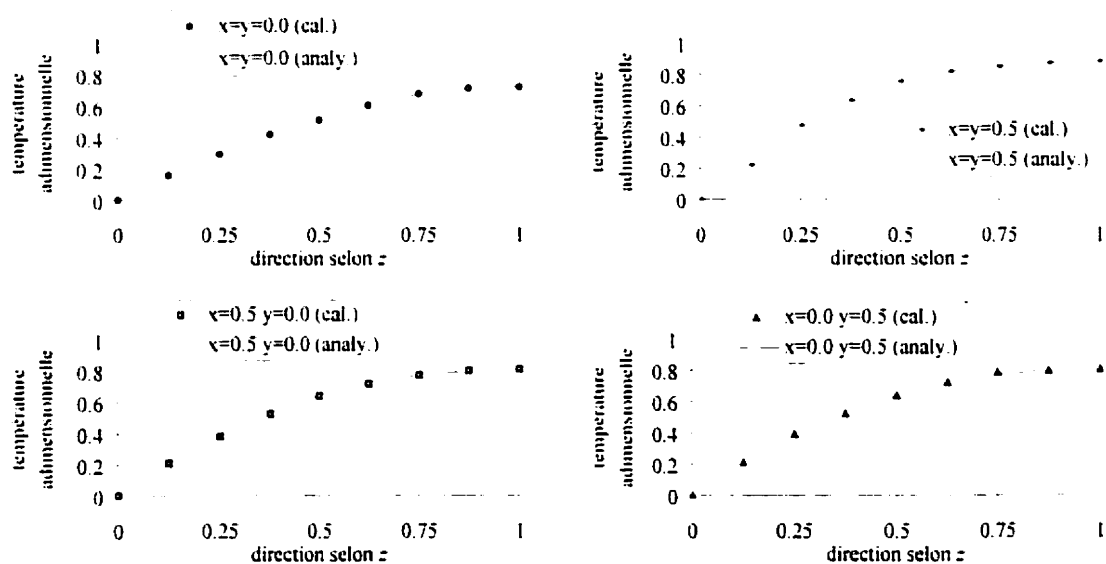


Figure D-8 : Comparaison entre la solution analytique et la simulation pour le cylindre

La figure (D-7) montre la distribution de température pour un huitième du cylindre maillé par 1071 tétraèdres. Ainsi la température varie de 0 en bas de la figure jusqu'à 1 sur la surface courbe. Les surfaces planes du cylindre montrent la variation de la

température à l'intérieur du cylindre car sur ces faces la condition limite de température est laissée libre. La solution analytique (Eq. D-7) est résolue en utilisant un programme en Visual C++. Ce programme ressemble au programme présenté à l'annexe D où la solution du problème précédent est remplacée par l'équation (D-7). Sur la figure (D-8) on compare les solutions analytique et numérique. La figure (D-8) est divisée en quatre graphes où les températures analytiques et numériques des différents segments du cylindre sont représentées. Les courbes analytiques et numériques sont superposées pour la plupart des segments. Il y a une petite différence pour les premiers points du segment  $x=y=0.5$ . Ainsi la simulation numérique tridimensionnelle en diffusion pour un problème cylindrique donne des résultats corrects.

#### **D6 Exemple 6 : diffusion dans une poutre avec une température initiale imposée**

L'équation différentielle qui décrit ce problème,  $\partial_t \psi = \partial_{xx} \psi$ , est intégrée avec les conditions limites  $\psi(0,t) = 1$  et  $\psi(L,t) = 1$  et la conditions initiale  $\psi(x,0) = 0$ . La solution est séparable en  $x$  et en  $t$ ,  $\psi(x,t) = X(x)T(t)$ , on peut donc écrire l'équation différentielle de la manière suivante :

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda = \text{constante}$$

En utilisant comme conditions limites  $X(0) = 0$  et  $X(L) = 0$ , la solution en  $x$  est la même que dans l'exemple précédent :

$$X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ avec } \lambda = \frac{-n^2 \pi^2}{L^2}$$

tandis que la solution en  $t$  devient :

$$T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

La solution complète en  $x$  et  $t$  devient donc :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

avec comme condition initiale  $\psi(x, 0) = 1$  pour trouver les constantes  $D_n$ . En utilisant encore une fois le fait qu'il s'agit des séries de Fourier on trouve les constantes suivantes :

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi \xi}{L} d\xi = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

ou

$$D_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}, D_{2n} = 0$$

La solution générale s'écrit donc :

$$\psi(x, t) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin \left[ \frac{(2n+1)\pi x}{L} \right] e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2 t}$$

Mais ici on n'a pas utilisé les conditions limites et initiale indiquées au début de la section, soit :

$$\psi(0, t) = 0, \psi(L, t) = 0 \text{ et } \psi(x, 0) = 1$$

Le problème étudié a des conditions inversées. La solution générale du problème de la poutre avec une température initiale imposée est donc :

$$\psi(x, t) = 1 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right] e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2 t}$$

### D7 Exemple 8 : comparaison entre deux méthodes de Runge-Kutta

L'équation différentielle ordinaire à résoudre est :

$$\frac{dy}{dx} = Ky(l-y)$$

avec la condition limite suivante :

$$y(0) = a$$

Pour résoudre cette équation il faut utiliser la méthode de séparation de variables, ainsi :

$$\frac{dy}{y(l-y)} = Kdx$$

Cette équation peut s'écrire comme suit :

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{l-y}\right) dy = Kdx$$

En intégrant les deux côtés, on obtient :

$$\ln y - \ln l - y = Kx + B$$

c'est-à-dire

$$\ln \frac{y}{l-y} = Kx + B$$



En prenant l'exposant des deux côtés, la solution devient :

$$\frac{y}{l-y} = Ce^{kx}$$

ou

$$y = \frac{l}{1 + Ce^{-kx}}$$

avec la constante  $C$  fonction de la condition limite  $a$  :

$$C = \frac{l}{a} - l$$

## ANNEXE E

### PARAMÈTRES THERMOPHYSIQUES DES SIMULATIONS

Tableau E-1 : Tableau de repérage des simulations

nom de l'expérience	numéro	page	section
Diffusion dans un carré avec deux températures imposées	1	72	4.4.3
Diffusion dans une poutre avec une température initiale imposée	2	77	4.5.1
Injection dans un rectangle simple	3	84	4.6.3
Injection dans un rectangle par le côté gauche et par le trou d'un même état	4		
Injection dans un rectangle par le côté gauche d'un état et par le trou d'un autre	5		
Convection pure en 2D	6	94	5.3
Diffusion pure en 2D	7	96	5.4
Convection-diffusion en 2D	8	98	5.5
Convection pure en 3D	9	101	5.6
Diffusion pure en 3D	10	105	5.7
Convection-diffusion en 3D avec viscosité variable	11	107	5.8
Convection-diffusion en 3D	12	111	5.9
Injection dans une cavité à obstacle	13	112	5.10
Injection dans une cavité à obstacle et moule mince	14		
Injection dans une cavité à nervure en 2D	15	118	5.11
Injection dans une cavité à nervure en 3D	16		
Injection avec influence du moule	17	122	5.12
Convection chimique	18	125	6.1.1
Polymérisation simple	19	137	6.3.1 +
Simulation complète	20	148	6.4
Simulation isotherme de l'injection RTM	21	165	7.4.1
Simulation bidimensionnelle de l'injection RTM	22	166	7.4.2
Simulation tridimensionnelle de l'injection RTM	23	171	7.4.3
Simulation bidimensionnelle de l'injection RTM sur fibres de carbone	24	178	7.6.1
Diffusion de la chaleur à travers un mur	25	228	D1
Cercle avec une source de chaleur constante en présence de convection	26	233	D2
Diffusion dans un cube avec deux températures imposées	27	237	D4
Diffusion dans un cylindre avec deux températures imposées	28	242	D5



Tableau E-3 : Paramètres thermophysiques (suite)

numéro	$\rho_m$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c_{pm}$ (J/m <sup>3</sup> K)	$k_m$ (W/mK)	$S$ (10 <sup>-9</sup> m <sup>2</sup> )	$\varepsilon_f$	$q_{inj}$ (10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup> /s)	$P_{inj}$ (Pa)	$T_{inj}$ (K)	$T_{j0}$ (K)	$T_{m0}$ (K)	$r$
1	1	700	0.1	-	-	-	-	-	-	300	-
2	1	1	1	-	-	-	-	-	-	0	-
3	-	-	-	1	1	500000	variable	300	300	-	1
4	-	-	-	1	1	200000	variable	300	300	-	1
5	-	-	-	1	1	200000	variable	300	300	-	1
6	-	-	-	10	0.7	0.002	variable	300	350	-	0.78
7	-	-	-	10	0.7	0.002	variable	300	350	-	0.78
8	-	-	-	10	0.7	0.002	variable	300	350	-	0.78
9	-	-	-	10	0.7	0.002	variable	300	350	-	0.61
10	-	-	-	10	0.7	0.002	variable	300	350	-	0.61
11	-	-	-	10	0.7	0.002	variable	300	350	-	0.61
12	-	-	-	10	0.7	0.002	variable	300	350	-	0.61
13	-	-	-	3.39	0.85	2.77	variable	1	0	-	0.86
14	1	700	0.01	3.39	0.85	2.77	variable	1	0	0	0.86
15	-	-	-	3.39	0.6	2.77	variable	1	0	-	0.62
16	-	-	-	3.39	0.6	2.77	variable	1	0	0	0.62
17	1	700	0.01	1	0.85	2.77	variable	1	0	0	0.96
18	-	-	-	0.001	0.5	variable	7.5 10 <sup>6</sup>	-	-	-	0.3
19	-	-	-	1	0.57	-	-	293	293	-	0.36
20	-	-	-	0.001	0.5	variable	7.5 10 <sup>6</sup>	310	340	-	0.3
21	-	-	-	4	0.8775	variable	10 <sup>5</sup>	-	-	-	-
22	7800	490	40	4	0.8775	variable	10 <sup>5</sup>	0	1	1	0.9
23	7800	490	40	4	0.8775	variable	10 <sup>5</sup>	0	1	1	0.9
24	7800	490	40	0.4	0.56	variable	10 <sup>5</sup>	0	1	1	0.62
25	1	700	0.1	-	-	-	-	-	-	300	-
26	1	700	0.1	-	-	-	-	-	-	0	-
27	1	700	0.1	-	-	-	-	-	-	0	-
28	1	700	0.1	-	-	-	-	-	-	0	-

Tableau E-4 : Paramètres de cinétique chimique

numéro	viscosité			Taux de degré de polymérisation				$\chi_{inj}$	$\Delta h$
	$A$	$B$	$C$	$A$	$E$	$n$	$p$		
11	$1.06 \cdot 10^{-7}$	4522	0	-	-	-	-	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	0.0001	-
19	-	-	-	$9.17 \cdot 10^6$	7289	0.85	1.15	0.0001	266342
20	-	-	-	$9.17 \cdot 10^6$	7289	0.85	1.15	0.0001	266342

**ANNEXE F**

**FICHIERS DES RÉSULTATS DU CHAMP DE**

**PRESSION ET DU CHAMP DE DEGRÉ DE**

**POLYMÉRISATION POUR L'EXEMPLE DE**

**CONVECTION CHIMIQUE**

**F1 Fichier de pression : ferland2Darcy\_Sensors.dat**

2.50673E+000	0.00000E+000	0.00000E+000
9.75610E+000	0.00000E+000	0.00000E+000
1.70891E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
2.74057E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
3.77955E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
4.57448E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
5.55507E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
6.48564E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
7.13935E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
7.77183E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
8.52926E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
9.21991E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
9.88253E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
1.05924E+002	0.00000E+000	0.00000E+000
1.15833E+002	0.00000E+000	0.00000E+000
1.29713E+002	0.00000E+000	0.00000E+000
1.39580E+002	0.00000E+000	1.06759E+007
1.52044E+002	0.00000E+000	4.93897E+007
1.65625E+002	0.00000E+000	7.64625E+007
1.77554E+002	0.00000E+000	1.01322E+008
1.98081E+002	0.00000E+000	1.33972E+008
2.13812E+002	0.00000E+000	1.51744E+008
2.38118E+002	0.00000E+000	1.87747E+008
2.70833E+002	0.00000E+000	2.19516E+008
3.04851E+002	0.00000E+000	2.46865E+008
3.44130E+002	0.00000E+000	2.72011E+008
3.83010E+002	0.00000E+000	2.97356E+008
4.27196E+002	0.00000E+000	3.21121E+008
4.95582E+002	0.00000E+000	3.50338E+008
5.60173E+002	0.00000E+000	3.73924E+008
6.26485E+002	0.00000E+000	3.90289E+008
6.92502E+002	0.00000E+000	4.10272E+008

7.57013E+002	0.00000E+000	4.23453E+008
8.46022E+002	0.00000E+000	4.39646E+008
9.09284E+002	0.00000E+000	4.51115E+008
9.72971E+002	0.00000E+000	4.59889E+008
1.08298E+003	0.00000E+000	4.72426E+008
1.17628E+003	0.00000E+000	4.85149E+008
1.26589E+003	2.25617E+007	4.92686E+008
1.35320E+003	4.63352E+007	5.02363E+008
1.42949E+003	8.40590E+007	5.21798E+008
1.51622E+003	7.48904E+008	7.49281E+008
7.24675E+005	7.48945E+008	7.49319E+008

## F2 Fichier de degré de polymérisation : ferland2Kinetic\_Sensors.dat

2.50673E+000	0.00000E+000	0.00000E+000
9.75610E+000	0.00000E+000	0.00000E+000
1.70891E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
2.74057E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
3.77955E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
4.57448E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
5.55507E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
6.48564E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
7.13935E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
7.77183E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
8.52926E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
9.21991E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
9.88253E+001	0.00000E+000	0.00000E+000
1.05924E+002	0.00000E+000	0.00000E+000
1.15833E+002	0.00000E+000	0.00000E+000
1.29713E+002	0.00000E+000	0.00000E+000
1.39580E+002	0.00000E+000	8.30577E-006
1.52044E+002	0.00000E+000	1.45665E-005
1.65625E+002	0.00000E+000	2.19514E-005
1.77554E+002	0.00000E+000	2.75222E-005
1.98081E+002	0.00000E+000	3.70803E-005
2.13812E+002	0.00000E+000	4.38934E-005
2.38118E+002	0.00000E+000	5.30456E-005
2.70833E+002	0.00000E+000	6.34006E-005
3.04851E+002	0.00000E+000	7.22647E-005
3.44130E+002	0.00000E+000	8.01509E-005
3.83010E+002	0.00000E+000	8.58175E-005
4.27196E+002	0.00000E+000	9.02617E-005
4.95582E+002	0.00000E+000	9.43838E-005
5.60173E+002	0.00000E+000	9.66694E-005
6.26485E+002	0.00000E+000	9.80665E-005
6.92502E+002	0.00000E+000	9.88715E-005
7.57013E+002	0.00000E+000	9.93386E-005
8.46022E+002	0.00000E+000	9.96643E-005

9.09284E+002	0.00000E+000	9.98010E-005
9.72971E+002	0.00000E+000	9.98825E-005
1.08298E+003	0.00000E+000	9.99465E-005
1.17628E+003	0.00000E+000	9.99732E-005
1.26589E+003	1.42181E-005	9.99863E-005
1.35320E+003	2.60556E-005	9.99929E-005
1.42949E+003	3.78108E-005	9.99959E-005
1.51622E+003	3.78132E-005	9.99959E-005
7.24675E+005	5.96019E-005	9.99998E-005



## ANNEXE G

### FICHIER DE DONNÉES POUR L'EXEMPLE DE SIMULATION COMPLÈTE

#### G1 Fichier de données : ferland3.dtf

```
General_Parameters {
  geometry_file : "ferland.unv";
  one_step : 0;
  use_air_entrapment : 0;
  use_kinetic : 1;
  verbose : 1;
  log_messages : 1;
  initial_cavity_pressure : 0.0;
  min_elts_air_entrapment : 3;
  sampling_period : 1;
  recover_sampling_period : 50;
  darcy_period : 5;
  output_format : I-DEAS;
  simulation_type : Non_isothermal_filling;
  finite_elements : Non_conforming;
  overfill_factor : 3.0;
  max_nb_steps : 10000000;
  max_experiment_time : 2000000000000.0;
  max_cpu_time : 172800.0;
  initial_resin_temperature : 310.0;
  initial_mold_temperature : 340.0;
  initial_fibers_temperature : 340.0;
  initial_resin_cure : 1.0E-4;
  use_preheating_results : 0;
  use_filling_results : 0;
  air_viscosity : 1.0;
  gravity_x : 0.0;
  gravity_y : 0.0;
  gravity_z : -1.0;
  use_gravity : 0;
  save_temperature : 1;
  save_filling : 1;
  save_pressure : 1;
  save_velocity : 0;
  save_curing : 1;
  save_exothermy : 0;
```

```

        save_closing_force : 0;
    }
    Injected_Resin {
        Family : Material;
        name : "Default Resin";
        type : Resin;
        density : 1083;
        Specific_Heat {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 1205.0;
        }
        Thermal_Conductivity {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 0.25;
        }
        Viscosity {
            Family : Viscosity;
            Type : "constant";
            mu : 1.0;
        }
        Kinetic {
            Family : Kinetic;
            Enthalpy : 266342.0;
            SubReaction {
                Family : SubReaction;
                Weight {
                    Family : Curve;
                    Type : Constant;
                    C : 1.0;
                }
                Reaction {
                    Family : Surface;
                    Type : Kamal_Sourour;
                    A : 9.17e6;
                    E : 7289.0;
                    m : 0.85;
                    p : 1.15;
                }
            }
        }
    }
}
Fabric {
    Family : Material;
    name : "Default Fabric";
    type : Fabric;
    density : 2565;
    Specific_Heat {
        Family : Curve;
        Type : Constant;
        C : 1205.0;
    }
}

```

```

}
Thermal_Conductivity {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 0.25;
}
effective_conductivity_K1 : 0.25;
effective_conductivity_K2 : 0.25;
effective_conductivity_K3 : 0.25;
thermal_dispersion_K1 : 0.0;
thermal_dispersion_K2 : 0.0;
Permeability_Curve_K1 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0E-12;
}
Permeability_Curve_K2 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0E-12;
}
Permeability_Curve_K3 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0E-10;
}
Sigma_Epsilon {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 0.0;
}
Compressibility_Model : linear_isotropic;
Compressibility_Coef_1 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
Compressibility_Coef_2 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
Compressibility_Coef_3 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
Compressibility_Coef_4 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
}

```

```

Compressibility_Coef_5 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
Compressibility_Coef_6 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
Compressibility_Coef_7 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
Compressibility_Coef_8 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
Compressibility_Coef_9 {
    Family : Curve;
    Type : Constant;
    C : 1.0;
}
}
Zone_0 {
    Family : Zone;
    zone_name : "noname";
    material_name : "Default Fabric";
    zone_id : 11;
    zone_porosity : 0.5;
    shell_thickness : 0.0050;
}
Group_0 {
    Family : Group;
    group_name : "unspecified";
    group_id : 12;
    group_type : Temperature;
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 340.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : Temperature;
    }
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;

```

```

        C : 1.0;
    }
    Family : "Group_Coefficient";
    name : State;
}
}
Group_1 {
    Family : Group;
    group_name : "unspecified";
    group_id : 13;
    group_type : Pressure;
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 750000000.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : Pressure;
    }
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 310.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : Resin_Temperature;
    }
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 1.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : State;
    }
}
}
Group_2 {
    Family : Group;
    group_name : "unspecified";
    group_id : 14;
    group_type : Temperature;
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 340.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : Temperature;
    }
}

```

```

    }
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 1.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : State;
    }
}
Group_3 {
    Family : Group;
    group_name : "unspecified";
    group_id : 14;
    group_type : Vent;
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 0.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : Pressure;
    }
    Group_Coefficient {
        curve {
            Family : Curve;
            Type : Constant;
            C : 1.0;
        }
        Family : "Group_Coefficient";
        name : State;
    }
}
}
Process_Control {
    Mold_Closing_Velocity {
        Family : Curve;
        Type : Constant;
        C : 0.0;
    }
}
}
Sensor_0 {
    family : Sensor;
    file_base_name : "sensor";
    type : Point;
    PlX : 1.8;
    PlY : 0.5;
    PlZ : 0.0;
}
Sensor_1 {
    family : Sensor;

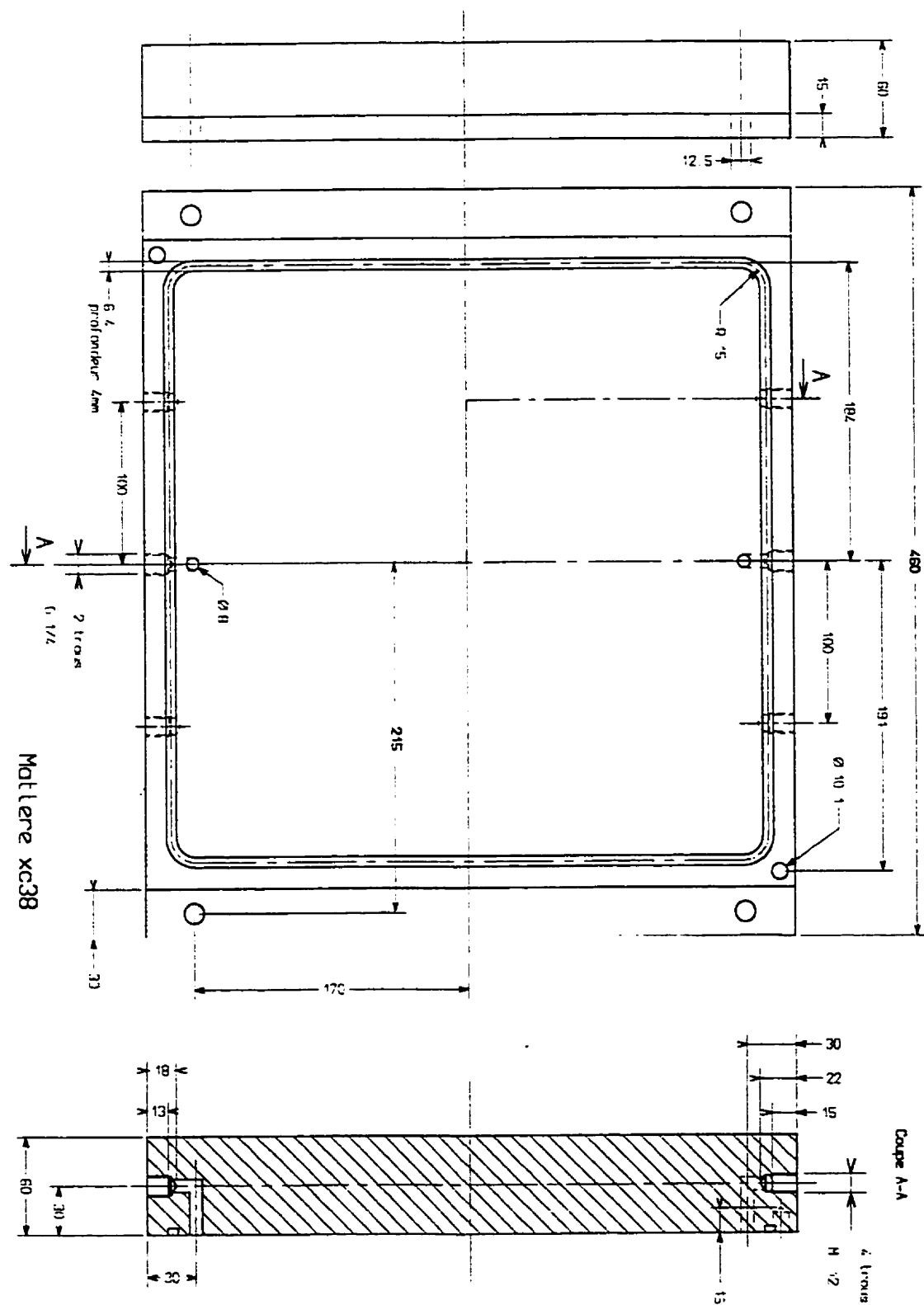
```

```
    file_base_name : "sensor";  
    type : Point;  
    PlX : 0.6;  
    PlY : 0.5;  
    PlZ : 0.0;  
}
```

**ANNEXE H**  
**SCHÉMA DU MOULE UTILISÉ POUR L'INJECTION**  
**EXPÉRIMENTALE**

**(voir page suivante)**







```
        }  
    }  
}  
  
for (k = 0; k<= 8; k++){  
    z = 0.25*k;  
    fprintf(out,"%12.5E %12.5E %12.5E %12.5E %12.5E\n",  
        z,sol[0][0][k],sol[1][0][k],sol[0][1][k],  
        sol[1][1][k]);  
}  
fclose(out);  
}
```