



**Titre:** Convection naturelle au sein d'une couche horizontale poreuse  
Title: soumise à des flux de chaleur uniformes

**Auteur:** Lamine Kalla  
Author:

**Date:** 1999

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Kalla, L. (1999). Convection naturelle au sein d'une couche horizontale poreuse  
Citation: soumise à des flux de chaleur uniformes [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8810/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8810/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Patrick Vasseur, & Luc Robillard  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONVECTION NATURELLE AU SEIN D'UNE COUCHE HORIZONTALE  
POREUSE SOUMISE À DES FLUX DE CHALEUR UNIFORMES

LAMINE KALLA  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
SEPTEMBRE 1999



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

**0-612-49796-8**

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CONVECTION NATURELLE AU SEIN D'UNE COUCHE HORIZONTALE  
POREUSE SOUMISE À DES FLUX DE CHALEUR UNIFORMES

présenté par : KALLA Lamine

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PARASCHIVOIU Ion , Ph.D., président

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., directeur de recherche

M. ROBILLARD Luc, D.Sc., codirecteur de recherche

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., membre

## **DÉDICACE**

**À mes parents**

**À Rabira & Madjid**

**À mon adorable petite nièce Asmaa**

**À la mémoire de ma grand mère Mémé**

**À mes frères et sœurs**

**À tous mes amis.**

## **REMERCIEMENTS**

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein de l'équipe aérothermique du département de génie mécanique de l'École Polytechnique de Montréal.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mes directeurs de recherche, Monsieur Patrick Vasseur et Monsieur Luc Robillard pour leur collaboration, leur disponibilité, leur dévouement et leurs judicieux conseils tout au long de cette recherche. Merci encore pour toute l'aide précieuse ainsi que le soutien moral que vous m'avez apporté durant ma thèse dans une ambiance aussi sympathique que scientifique.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement Monsieur Mahmoud Mamou pour son aide précieuse et ses judicieux conseils.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi aux professeurs Ion Paraschivoiu et Michel Prud'homme pour avoir bien voulu participer au jury.

Je remercie très sincèrement tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail et surtout Ahmed, Achour et Marwan.

## RÉSUMÉ

Au cours de ces dernières années, un effort de recherche considérable a été consacré à l'étude du transfert de chaleur induit par convection naturelle au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide. L'intérêt pour ces phénomènes de convection naturelle est dû aux nombreuses applications potentielles en ingénierie. Parmi les applications potentielles, on peut citer l'extraction de l'énergie géothermique, la dispersion des polluants dans les aquifères, les problèmes de sécurité dans le cœur des réacteurs nucléaires, l'isolation thermique des bâtiments, etc.

Dans ce mémoire les transferts de chaleur au sein d'une cavité poreuse horizontale rectangulaire saturée par un fluide sont considérés. Les quatre faces de la cavité sont exposées à des flux de chaleur uniformes, les faces opposées étant respectivement chauffées et refroidies. En utilisant l'approximation de Boussinesq, une solution analytique, valide asymptotiquement dans une couche horizontale de grande extension ( $A \gg 1$ ), est obtenue en fonction du nombre de Rayleigh  $R$ , du nombre de Darcy  $Da$  et du rapport de forme de la cavité  $A$ . Pour des nombres de Rayleigh sous-critiques, on montre qu'il n'existe qu'une seule solution permanente pour n'importe quelle valeur du paramètre  $a$ , qui représente le rapport entre les flux de chaleur appliqués sur les parois verticales et horizontales, respectivement. Pour des nombres de Rayleigh plus élevés et pour des valeurs de  $a$  suffisamment faibles, cependant, des solutions multiples existent, certaines étant instables. Une étude numérique du même phénomène, obtenue en résolvant le système complet d'équations gouvernantes, est menée afin de vérifier la validité de la solution analytique. Une confirmation numérique des résultats analytiques stables est ainsi obtenue. Le milieu poreux est modélisé en utilisant les équations de Darcy – Brinkman. Ce modèle permet de prédire le cas d'un fluide pur ( $Da \rightarrow \infty$ ) ainsi que celui du milieu de Darcy pur ( $Da \rightarrow 0$ ).

## ABSTRACT

Over the past years considerable research efforts have been devoted to the study of heat transfer induced by buoyancy forces in a porous medium saturated with fluids. Interest in this natural convection phenomena has been motivated by such diverse engineering problems as geothermal energy extraction, pollutant dispersion in aquifer, post accident heat removal from nuclear reactor rubble beds, thermal insulation...etc.

In this thesis, natural convection within a two dimensional fluid saturated Brinkman horizontal rectangular cavity is considered. All four faces are exposed to uniform heat fluxes, opposite faces being heated and cooled respectively. On the basis of the Boussinesq approximation, the problem is solved analytically in the limit of a shallow cavity ( $A \gg 1$ ). The analytical solution for the flow and heat transfer, based on a parallel flow assumption, is described in terms of the Rayleigh number  $R$ , Darcy number  $Da$ , and aspect ratio of the cavity  $A$ . At subcritical Rayleigh numbers, only one steady state exists for any value of the parameter  $a$ , which represents the ratio between the heat fluxes applied on the vertical boundaries with respect to those applied on the horizontal boundaries. For higher Rayleigh numbers and for small enough values of  $a$ , however, multiple steady states exist, some of which are unstable. A numerical study of the same phenomena, obtained by solving the complete system of governing equations, is conducted to assess the validity of the analytical results. Numerical confirmation of the stable analytical results is presented. Results for a pure viscous fluid and a Darcy (densely packed) porous medium emerge from the present analysis as limiting cases.



## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE .....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ .....	vi
ABSTRACT.....	vi
TABLE DES MATIÈRES .....	viii
LISTE DES FIGURES .....	ix
LISTE DES TABLEAUX.....	xi
LISTE DES SIGLES ET ABBREVIATIONS .....	xii
INTRODUCTION.....	1
Généralités.....	1
Définition du problème.....	2
Revue bibliographique.....	3
Méthodes utilisées et contenu de la thèse .....	6
CHAPITRE I : FORMULATION DU PROBLÈME.....	7
1.1 Introduction .....	7
1.2 Description du modèle et hypothèses simplificatrices .....	8
1.3 Équations gouvernantes .....	10
1.3.1 Milieu poreux.....	11
1.3.2 Milieu fluide.....	15
1.4 Conditions frontières.....	16
1.5 Transfert de chaleur.....	18
CHAPITRE II : SOLUTION ANALYTIQUE GÉNÉRALE.....	19
2.1 Milieu poreux.....	20
2.2 Milieu fluide.....	29

<b>CHAPITRE III : SOLUTION NUMÉRIQUE.....</b>	<b>31</b>
3.1 Introduction.....	31
3.2 Discrétisation des équations gouvernantes .....	33
3.2.1 Équation d'énergie.....	34
3.2.2 Équation de mouvement .....	36
3.2.3 Champs de vitesse.....	37
3.2.4 Conditions frontière .....	37
3.3 Validation du code numérique.....	39
 <b>CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DISCUSSION.....</b>	 <b>42</b>
4.1 Introduction.....	42
4.2 Effet du nombre de Darcy ( $a = 0$ ) .....	42
4.3 Chauffage par le bas en conditions limites thermiques de Newman ( $a = 0, Da \rightarrow 0$ )	43
4.4 Influence du rapport de forme ( $a = 0.2$ ).....	45
4.4 Superposition d'un chauffage latéral .....	46
 <b>CONCLUSION.....</b>	 <b>62</b>
 <b>RÉFÉRENCES .....</b>	 <b>64</b>

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Représentation de la cavité. ....	9
Figure 1.2	Flux de chaleur agissant sur la cavité .....	9
Figure 2.1	Schéma de la cavité .....	20
Figure 3.1	Représentation du maillage du système physique .....	32
Figure 4.1	Profils de vitesse à différents nombres de Darcy .....	49
Figure 4.2	Profils de température à différents nombres de Darcy .....	50
Figure 4.3	Nombre de Rayleigh critique $R_c$ en fonction du nombre de Darcy .....	51
Figure 4.4	Chauffage par le bas ( $a = 0, A = 4$ ) – Effet du nombre de Rayleigh. ....	52
Figure 4.5	Évolution des lignes de courant en fonction du temps $t$ - Impulsion initiale comportant .....	53
Figure 4.6	Effet du rapport de forme $A$ sur la fonction de courant au centre et le nombre de Nusselt pour un $R = 50$ et $a = 0.2$ .....	54
Figure 4.7	Surface courbe représentant la solution analytique $\Psi_c$ en fonction du nombre de Rayleigh $R$ et de $a$ .....	55
Figure 4.8	Intensité de l'écoulement $\Psi_c$ en fonction du nombre de Rayleigh $R$ et de $a$ . $R_c$ et $R_a$ sont des nombres de Rayleigh critiques .....	56
Figure 4.9	Nombre de Nusselt $Nu$ en fonction du nombre de Rayleigh $R$ et de $a$ .....	57

- Figure 4.10** Isotherme et lignes de courant pour le cas  $R= 50$ ,  $A = 4$  et  $a = 0.2$  : a) Mouvement convectif naturel,  $\Psi_c = -2.618$  et b ) Mouvement convectif antinaturel,  $\Psi_c = 2.218$  ... .....58
- Figure 4.11** Évolution des isothermes et lignes de courant en fonction du temps ( au temps a )  $t = 0$ , b )  $t = 8$ , c )  $t = 15$  et d )  $t = 30$  ) pour le cas  $R = 20$ ,  $a = 0.1$  et  $A = 4$ . .....58
- Figure 4.12** Intensité de l'écoulement en fonction de  $a$ ,  $R$  servant de paramètre (  $a_R$  définit l'intensité critique du chauffage latéral ) .....60
- Figure 4.13** Domaine d'existence théorique des solution analytique antinaturelle représenté par la surface hachurée.....61

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum avec les résultats donnée par Kimura et al.[34] et la solution analytique.....	39
Tableau 3.2	Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt avec les résultats donnée par Kimura et al. [34] et la solution analytique. ....	40
Tableau 3.3	Effet du maillage sur $\Psi_c$ et $Nu$ , cavité chauffé par le bas ( $a = 0$ ) .....	41
Tableau 3.4	Effet du maillage sur $\Psi_c$ et $Nu$ , cavité avec présence d'un chauffage latéral ( $a = 0.2$ ). ....	41

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

$a$	paramètre, Eq (1.31)
$A$	rapport de forme de la cavité, $L' / H'$
$C$	gradient de température longitudinal
$Da$	nombre de Darcy, $K / H'^2$
$g$	accélération de la pesanteur
$H'$	hauteur de la cavité
$K$	perméabilité du milieu poreux
$k_f$	conductivité thermique du fluide
$k_p$	conductivité thermique du milieu poreux saturé
$L'$	largeur de la cavité
$Nu$	nombre de Nusselt, Eq. (1.33)
$\bar{Nu}$	nombre de Nusselt moyen, Eq. (1.34)
$q'$	flux de chaleur constant (par unité de surface)
$Pr$	nombre de Prandlt, $\nu / \alpha$
$Re$	nombre de Reynolds, $V' \sqrt{K} / \nu$
$R$	nombre Darcy- Rayleigh thermique, $g \beta_T K \Delta T' H' / \alpha \nu$
$R_c$	nombre de Darcy - Rayleigh thermique critique
$Ra$	nombre de Rayleigh pour un fluide visqueux, $R / Da$
$Ra_c$	nombre de Rayleigh critique pour un fluide visqueux.
$T$	température adimensionnelle, $(T' - T'_0) / \Delta T'$
$T'_0$	température de référence à $x' = y' = 0$
$\Delta T'$	écart de température, $q' H' / k$
$t$	temps adimensionnel, $t' \alpha / \sigma H'^2$
$u$	vitesse adimensionnelle dans la direction $x$ , $u' H' / \alpha$

$v$	vitesse adimensionnelle dans la direction $y$ , $v' H' / \alpha$
$\vec{v}'$	vecteur vitesse dimensionnel, $(u', v')$
$x, y$	coordonnées cartésiennes adimensionnelles du système, $(x', y') / H'$

## SYMBOLES GRECS

$\alpha$	diffusivité thermique, $k_p / (\rho C)_f$
$\beta_T$	coefficient d'expansion thermique
$\varepsilon$	porosité du milieu poreux
$\nu$	viscosité cinématique du fluide
$\rho$	densité du fluide
$\rho_0$	densité de référence du fluide
$(\rho C)_f$	capacité calorifique du fluide
$(\rho C)_p$	capacité calorifique du milieu poreux saturé
$(\rho C)_s$	capacité calorifique de la matrice solide
$\sigma$	rapport des capacités calorifique, $(\rho C)_p / (\rho C)_f$
$\Psi$	fonction de courant adimensionnelle, $\Psi' / \alpha$
$\Psi_c$	fonction de courant adimensionnelle au centre

## EXPOSANTS

$'$	variable dimensionnelle
-----	-------------------------

## **INTRODUCTION**

### **Généralités**

L'apparition au sein d'un milieu fluide des gradients de température entraîne l'existence de différences de masse volumique. De telles différences peuvent avoir, dans certains cas, par action de la pesanteur, une influence sur la distribution de vitesses du fluide au sein du milieu. On dit alors qu'il y a convection naturelle, ce thème ayant fait l'objet, dans le passé, de nombreuses recherches à cause des applications potentielles possibles tant dans la nature que dans l'industrie. Une revue exhaustive des publications disponibles sur ce sujet a été faite par Platten et Legros [1] et Bejan [2] pour les fluides et par Nield et Bejan [3] et Ingham et Pop [4] pour les milieux poreux.

Le travail présenté dans ce mémoire représente une contribution à l'étude des mouvements de convection naturelle se développant dans d'une cavité horizontale, remplie soit par un milieu poreux saturé par un fluide soit par un fluide pur. Dans le passé, ce type de problème a intéressé de nombreux auteurs étant donné l'importance que présente ce type de mouvement thermoconvectif dans des situations réelles diverses. Ainsi, on peut citer les applications suivantes :

- Pour les milieux fluides : croissance de cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, collecteurs d'énergie solaire, vitrage double pour les maisons et les bâtiments, refroidissement des instruments électroniques, isolations des bâtiments, stockage des gaz liquides, dispersion des polluants et des rejets thermiques dans les citernes, comportement de certaines parties d'un réacteur nucléaire....etc.



- Pour les milieux poreux : procédés de séchage, la disposition souterraine de déchets nucléaires, isolation thermique, écoulements géophysiques, échangeurs de chaleur, design des réacteurs nucléaires, formation des avalanches de neige... etc.

La plupart des travaux antérieurs, qui se sont intéressés au phénomène de la convection naturelle dans d'une cavité, concernent soit des cavités rectangulaires verticales soit des couches horizontales. Dans ces deux types de configuration les systèmes sont chauffés différemment par deux cotés opposés, les deux autres parois étant maintenues adiabatiques. Cependant en pratique, on rencontre souvent le cas de cavités chauffées et refroidies simultanément par chacune des parois. L'absence d'études sur ce type de conditions aux frontières thermiques nous a motivé à entreprendre cette investigation.

Le présent mémoire porte sur l'étude de la convection naturelle au sein d'une cavité rectangulaire mince soumise à des gradients verticaux et horizontaux de température. Plus particulièrement, elle a pour objet de déterminer l'influence relative des paramètres de base sur le transfert de chaleur induit lorsque le fluide est en mouvement.

### **Définition du problème**

La présente investigation a pour but l'étude de la convection naturelle dans une cavité horizontale poreuse soumise à des flux de chaleur imposés sur les quatre parois de la cavité. La loi de Darcy-Brinkman est utilisée pour modéliser le milieu poreux. Les effets visqueux imposés par les parois solides de la cavité sur le fluide sont donc pris en compte. La forme géométrique simple permet une analyse en profondeur du problème et la mise en évidence des mécanismes physiques qui régissent les écoulements induits. Notre étude porte essentiellement sur l'influence des paramètres de contrôle du problème, sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur dans le système.

## Revue Bibliographique

Une revue de la littérature montre qu'il existe un grand nombre de travaux numériques ou théoriques consacrés à l'étude de la convection naturelle dans une cavité poreuse rectangulaire. De nombreuses références proposent des revues très documentées ( Nield et Bejan [3] et Ingham et Pop [4]) et nous nous bornerons à présenter les grandes catégories d'investigations qui concernent ce sujet très vaste. Nous commencerons d'abord par faire une revue du cas d'un système chauffé différentiellement par le bas (gradient de température vertical). Le cas de cavités chauffées différentiellement par les cotés verticaux (gradient de température horizontal ) sera ensuite considéré.

Une des premiers types de problème étudié en convection naturelle concerne la stabilité d'une couche horizontale infinie chauffée avec une température constante sur la paroi horizontale inférieure et refroidie sur la paroi horizontale supérieure. Parmi les premières études sur ce sujet on peut citer les travaux de Horton and Rogers [6] et Lapwood [5]. En se basant sur la méthode de stabilité linéaire ces auteurs ont prédit le nombre de Rayleigh critique marquant le seuil de la convection. Ces résultats ont été complétés par Nield [37] qui a considéré une grande variété de conditions limites thermiques. Par la suite, Katto et Masusha [7], Walker et Homsy [8] et Rudraiah et al. [9] ont utilisé les équations de Brinkman pour étudier le même problème de stabilité. Il a été montré par ces auteurs que le nombre de Rayleigh critique marquant le seuil de la convection dépendait du nombre de Darcy, basé sur la hauteur de la couche. Le modèle de Brinkman a également été utilisé par Vasseur et al. [38] pour étudier la stabilité d'une couche poreuse chauffée et refroidie par le biais de flux de chaleur constants. Des expressions analytiques donnant le nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Darcy, dans le cas des frontières horizontales rigides-rigides, libres-libres et libres-rigides, ont été obtenues par ces auteurs.

Le problème de la convection avec amplitude finie au sein d'une cavité horizontale a également été étudié. Chan et al. [10] ont été les premiers à obtenir des résultats sur le transfert de chaleur en utilisant une méthode numérique basée sur les différences finies. Bejan et Tien [12] ont développé une méthode analytique approximative valide pour des couches poreuses minces chauffées avec des températures constantes sur les parois verticales. La méthode consistait à supposer que l'écoulement peut être décomposé en une région centrale, le cœur de l'écoulement, et de deux régions situées près des extrémités de la cavité dans lesquelles l'écoulement s'ajuste aux conditions frontières thermiques imposées. Dans le cœur de l'écoulement, les lignes de courants sont supposées être essentiellement parallèles aux frontières. Dans les extrémités, une méthode intégrale, basée sur un choix approximatif de la forme de la solution dans cette région, est utilisée pour raccorder le cœur de l'écoulement avec les extrémités. De cette façon le taux de transfert thermique à travers la cavité pouvait être prédit. Walker et Homsy [11] ont aussi suggéré une méthode analytique pour des cavités allongées, basée sur la technique des expansions asymptotiques raccordées, dans la limite où la cavité tend vers une couche horizontale d'extension infinie. Il est montré par ces auteurs que le problème du transfert de chaleur thermoconvectif dépend seulement du nombre de Rayleigh et du rapport de forme de la cavité. Les résultats numériques obtenus par ces auteurs sont en bon accord avec les résultats expérimentaux disponibles. En ce qui concerne les travaux numériques sur ce type de configuration on peut citer l'étude de Hichox et Garthing [13] qui ont utilisé une méthode d'éléments finis pour étudier une cavité horizontale chauffée latéralement. Des résultats numériques pour ce type de problème ont également été obtenus par Burns et al. [14] et Prasad et Kulacki [15]. Les résultats indiquent la présence d'écoulements multicellulaires. Les conditions d'existence de différents types d'écoulements sont établis en fonction du nombre de Rayleigh et du rapport de forme de la cavité.

La convection naturelle dans des cavités allongées a également été étudiée pour d'autres conditions particulières. Ainsi, Amari et al. [16] ont considéré le cas d'un milieu

poreux saturé par un fluide non newtonien. L'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle dans une couche poreuse chauffée par le bas par un flux de chaleur constant a été considéré par Alchaar et al. [17]. La convection doublement diffusive, c'est-à-dire engendrée par des gradients de température et de concentration combinés, a été récemment considérée par Mamou et Vasseur [18].

Le second type de problème que l'on retrouve dans la littérature porte sur le cas de cavités poreuses verticales soumises à des gradients de température horizontaux, les parois horizontales étant adiabatiques. Le premier travail analytique portant sur ce cas est dû à Weber [19]. Ce dernier a utilisé la méthode de linéarisation d'Oseen pour résoudre les équations de type couche limite s'appliquant à cette configuration dans le cas où les murs verticaux sont maintenus à température constante. Les résultats obtenus étaient légèrement différents des résultats expérimentaux disponibles (voir exemple Bankvall, [20]). Une correction à la solution de Weber a été apportée par Bejan [21]. Une solution analytique de type couche limite a été proposée par Simpkins and Blythe [22]. Des corrélations numériques, valides pour des nombres de Rayleigh élevés, ont été proposées par Shiralkar et al. [23] et Rao et Glaphpe [24]. Le problème d'une cavité verticale chauffée sur le côté par un flux de chaleur constant, a été considéré par Bejan [83], Vasseur et al. [26] et Sen et al. [27]. Les solutions analytiques obtenues par ces auteurs, dans la limite d'une cavité de grande extension, étaient en accord avec les solutions numériques des équations complètes gouvernant ce problème.

Récemment la convection doublement diffusive au sein de cavités verticales soumise à des gradients horizontaux de chaleur et de concentrations a été considérée par Mamou et al. [28, 29, 30, 31]. Là encore, un bon accord a été obtenu par ces auteurs entre les solutions analytiques et numériques.

Cette revue de la littérature sur les travaux disponibles en la convection naturelle au sein d'une cavité poreuse indique que les gradients de température imposés sur les

parois sont soit horizontaux, soit verticaux. La seule étude ayant considéré le cas d'une cavité soumise à des gradients horizontaux et verticaux de chaleur est due à Sen et al. [32]. La cavité était inclinée et les flux de chaleur ajustés de telle façon que les isothermes, en conduction pure, soient perpendiculaires au vecteur de la gravité. Le problème de stabilité résultant était résolu par la méthode des écoulements parallèles. Dans la présente étude on considère une cavité horizontale soumise à des flux de chaleur sur toutes les parois. Le problème est résolu par des méthodes analytiques et numériques.

#### **1.4 Méthodes utilisées et contenu de la thèse**

La définition physique du problème faisant l'objet de cette investigation, ainsi que la formulation mathématique, sont présentées dans le premier chapitre de ce mémoire. Le deuxième chapitre est consacré au développement d'une méthode analytique approximée, valide asymptotiquement dans le cas d'une couche horizontale mince. Le modèle analytique résultant, basé sur les équations de Darcy Brinkman permet, non seulement de prédire le cas d'un milieu poreux classique de Darcy, mais également le cas limite d'un milieu fluide pur, en l'absence de forces d'inertie. Dans le troisième chapitre de ce mémoire on présente la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de base complètes du problème. Dans le quatrième chapitre on présente des résultats analytiques et numériques illustrant l'influence des paramètres de base sur les champs de vitesse et de température ainsi que sur le transfert de chaleur. Enfin une conclusion générale sur les résultats obtenus.

## **CHAPITRE I**

### **FORMULATION DU PROBLÈME**

#### **1.1 Introduction**

La revue bibliographique du chapitre I indique que la convection naturelle, dans un milieu fluide ou poreux confiné dans une cavité rectangulaire, a été largement étudié au cours de ces dernières années. La plupart des études ont considéré deux types de chauffage de la cavité. Dans le premier cas, le système est soumis à un gradient vertical de température, les parois horizontales de la cavité étant respectivement chauffées et refroidies, soit en maintenant des températures constantes ou soit en appliquant des flux de chaleur constants. Ce type de configuration, connu sous le nom de problème de Bénard, a fait l'objet des premiers travaux de recherche en convection à cause de ces applications fondamentales en géophysique. Dans le deuxième cas, la cavité est chauffée différenciellement sur ses cotés verticaux, les parois horizontales étant maintenues adiabatiques.

Dans de nombreuses applications pratiques, les cavités sont non seulement chauffées par le bas mais également sur les cotés. Cependant, il semble qu'il existe très peu d'études disponibles sur ce problème. Ceci a motivé la présente investigation. On considère donc dans cette étude le cas d'une cavité rectangulaire, fluide ou poreuse soumise à des flux de chaleur sur chacune de ses quatre parois. Il est à noter que la plupart des études considèrent des cavités chauffées avec des températures constantes, malgré le fait qu'en pratique le chauffage se fait souvent par le biais de flux de chaleur. De plus, comme on va le démontrer dans un chapitre subséquent, le fait d'utiliser des flux de chaleurs a l'avantage de permettre dans certaines conditions l'obtention de solutions analytiques.

Dans le présent chapitre, on établira donc les équations de base régissant la convection naturelle dans un milieu fluide et un milieu poreux confinés dans une enceinte rectangulaire soumise à des flux constants de chaleur à la fois sur les parois horizontales et verticales.

## 1.2 Description du modèle et hypothèses simplificatrices

Considérons un milieu fluide ou poreux saturé par un fluide, confiné dans une enceinte rectangulaire imperméable de largeur  $L'$  et de hauteur  $H'$  (voir Figure 1.1). De façon à obtenir un modèle mathématique simple, les approximations classiques suivantes sont faites :

- 1- La profondeur de l'enceinte est suffisamment grande par rapport aux autres dimensions pour que l'on puisse supposer un 'écoulement bidimensionnel.
- 2- Le fluide est newtonien et incompressible.
- 3- L'écoulement engendré est laminaire.
- 4- Le travail induit par les forces visqueuses et de pression est négligeable.
- 5- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- 6- La densité du fluide dans le terme des forces de volume varie linéairement avec la température. Cette variation est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_T (T' - T'_0)) \quad (1.1)$$

où  $T'$  représente la température du fluide en un point donné du système,  $T'_0$  est la température de référence qui correspond généralement à la valeur moyenne de la température dans le système;  $\rho_0$  est la densité à la température de référence.

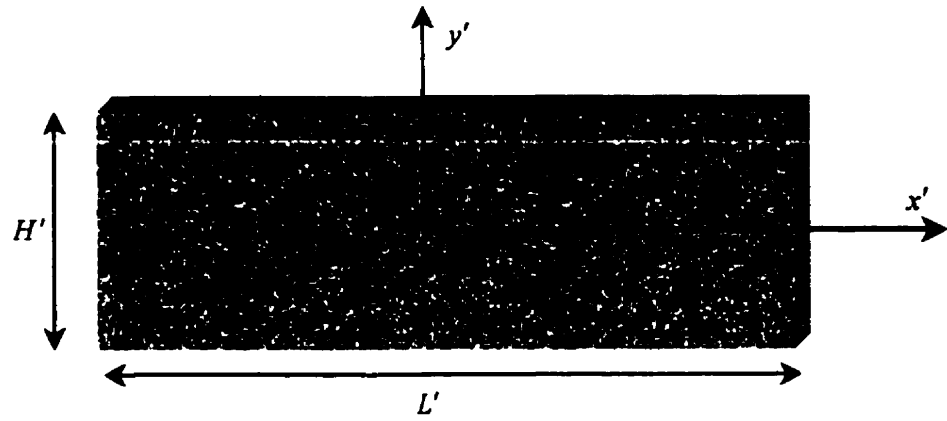


Figure 1.1 : Représentation de la cavité

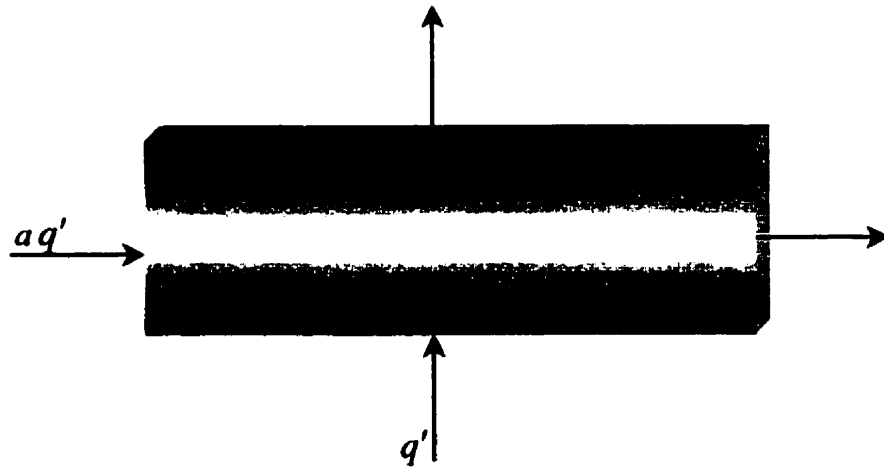


Figure 1.2 : Flux de chaleur agissant sur la cavité



Dans la relation (1.1)  $\beta_T$  représente le coefficient d'expansion volumique thermique du fluide, défini par :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_p \quad (1.2)$$

Dans cette étude on utilise donc une hypothèse simplificatrice, généralement admise par la plupart des auteurs, à savoir l'hypothèse de Boussinesq. Cette hypothèse peut être résumée comme suit :

- La masse volumique  $\rho$  du fluide est supposée constante, et peut être remplacée dans les équations hydrodynamiques par sa valeur moyenne  $\rho_0$ , sauf dans le terme générateur de la convection naturelle  $\rho g$  où ses variations induisent directement des forces de poussée d'Archimède.
- Toutes les autres caractéristiques thermophysiques ( $\mu, k, \rho C$ ) du fluide sont considérées comme constantes et définies à la température de référence  $T'_0$ . Elles représentent respectivement la viscosité dynamique, la conductivité thermique et la chaleur massique à pression constante.

### 1.3 Équations gouvernantes

La résolution d'un problème de convection naturelle consiste en la détermination des champs de vitesse et de température en chaque point du domaine occupé par le fluide dans la cavité. Dans ce but nous allons établir les équations de base régissant la convection naturelle dans la cavité rectangulaire, d'abord en milieu poreux saturé et ensuite pour le milieu fluide.

### 1.3.1 Milieu poreux

Le transfert thermique par convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide a fait l'objet au cours de ces dernières années de plusieurs investigations à cause des nombreuses applications potentielles en ingénierie, telles que les échangeurs de chaleur ou régénérateurs contenant un matériaux poreux, le transfert thermique à travers des murs isolés avec des matériaux fibreux ou granulaires, le transfert thermique dans des installations servant au stockage des grains, etc.

Le mouvement du fluide ainsi que la répartition de température dans un milieu poreux saturé par un fluide sont régis par les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie suivantes (Nield et Bejan 1999).

Le principe de conservation de la masse conduit à l'équation de continuité pour fluide incompressible:

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (1.3)$$

La grande majorité des études concernant la convection dans des milieux poreux utilisent la formulation classique de Darcy, établie il y a plus d'un siècle de ça comme équation macroscopique de mouvement pour les fluides newtoniens. Darcy a montré que l'écoulement dépendait linéairement du gradient de pression et de la force de gravité. La vitesse moyenne de filtration (vitesse de Darcy)  $\vec{u}'$  est alors proportionnelle à la somme du gradient de pression  $\nabla P'$  et de la force gravitationnelle  $\vec{g}$ , l'effet de l'inertie étant négligé. Il en résulte la forme suivante courante de l'équation de Darcy:

$$\frac{\mu}{K} \vec{u}' = -\nabla P' + \rho \vec{g}' \quad (1.4)$$

dans laquelle  $K$  est la perméabilité du milieu poreux,  $\mu$ , la viscosité dynamique du fluide et  $P'$ , la pression.

Le modèle de Darcy, qui néglige les forces d'inertie et visqueuses est valide lorsque les conditions suivantes sont satisfaites

- $\varepsilon < 0.8$
  - $Da \leq 10^{-6}$
  - $Re < 1$
- (1.5)

dans lesquelles  $\varepsilon$  est la porosité du milieu poreux ;  $Da$  et  $Re$  sont les nombres de Darcy et de Reynolds respectivement . Ces derniers sont définis par  $Da = K/L$  et  $Re = V' \sqrt{K} / \nu$ ,  $V'$  étant la vitesse moyenne des particules de fluide à travers la matrice solide,  $\nu = \mu / \rho$  la viscosité cinématique du fluide et  $L$  une longueur caractéristique.

Lorsque le nombre de Darcy est plus grand que la valeur de référence donnée par l'équation (1.5), les effets visqueux deviennent non négligeables . Pour cette situation Brinkman [18] à proposé de modifier l'équation de Darcy de la façon suivante :

$$\frac{\mu}{K} \bar{u}' = -\nabla P' + \rho \bar{g}' + \mu' \nabla^2 \bar{u}' \quad (1.6)$$

ou  $\mu' = \mu [1 + 2.5 (1 - \varepsilon)]$  représente la viscosité effective ; en général  $\mu'$  est considérée équivalente à la viscosité dynamique  $\mu$  .

Adoptant le modèle de Brinkman et introduisant l'approximation de Boussinesq (1.1), l'équation de la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\bar{u}' = -\frac{K}{\mu} [\nabla P' + \rho_0 \bar{g}' (\beta_r (T' - T'_0))] + K \nabla^2 \bar{u}' \quad (1.7)$$

Il est à noter que dans le modèle de Brinkman les termes d'inertie (Forchheimer) ne sont pas pris en considération. De toute façon ces termes sont négligeables dans de nombreuses applications pour lesquelles ( $Re < 1$ ).

Le principe de conservation de l'énergie conduit à l'équation suivante

$$(\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f (u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'}) = k_p \nabla^2 T' \quad (1.8)$$

dans laquelle  $(\rho C)_p$ ,  $(\rho C)_f$  et  $k_p$  sont respectivement la chaleur massique de la matrice poreuse saturée, la capacité thermique du fluide et la conductivité thermique du milieu poreux saturé.

Les équations gouvernantes, dans le cas du milieu poreux, se résument donc au système d'équations (1.3), (1.7) et (1.8)

De façon à rendre les équations précédentes adimensionnelles, nous prenons comme grandeurs caractéristiques  $H'$  pour la longueur,  $\alpha/H'$  pour la vitesse et  $\Delta T' = q'H'/k_p$  pour la température. Les variables sans dimension sont définies comme :

$$\begin{cases} (x', y') = H'(x, y) & (u', v') = \frac{\alpha}{H'}(u, v) \\ T' - T_0 = T \Delta T' & P' = \frac{\alpha \mu}{K} P \\ t' = \frac{\sigma H'^2}{\alpha} t \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $\sigma$  et  $\alpha$  désignent respectivement le rapport des chaleurs massiques et la diffusivité thermique du fluide. Ces paramètres sont définis par :

$$\sigma = \frac{(\rho C)_p}{(\rho C)_f}, \quad \alpha = \frac{k_p}{(\rho C)_f} \quad (1.10)$$

En introduisant les grandeurs sans dimensions dans les équations de conservation de masse (1.3), de mouvement (1.7) et d'énergie (1.8), on obtient respectivement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.11)$$

$$u = -\frac{\partial P}{\partial x} + R T + Da \nabla^2 u \quad (1.12a)$$

$$v = -\frac{\partial P}{\partial y} + Da \nabla^2 v \quad (1.12b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (1.13)$$

où  $R = KH' g \beta_r \Delta T' / \alpha \nu$  est le nombre de Rayleigh et  $Da = K / H'^2$  est le nombre de Darcy .

Dans le cas des écoulement plans (2 dimensions), il est avantageux d'éliminer la pression en utilisant la formulation fonction de courant  $\Psi$  qui est reliée aux composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  selon :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.14)$$

En introduisant la fonction de courant  $\Psi$  dans les équations de mouvement (1.12a) et (1.12b) et en éliminant la pression on aboutit à l'équation suivante :

$$\nabla^2 \Psi = -R \frac{\partial T}{\partial x} + Da \nabla^4 \Psi \quad (1.15)$$

De même pour l'équation de l'énergie on obtient :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.16)$$

Les équations (1.15) et (1.16 ) constituent alors les équations gouvernantes du problème. Il est a noter que l'équation de conservation de la masse, Eq. (1.11) est automatiquement satisfaite par la fonction de courant  $\Psi$  .

### 1.3.2 Milieu fluide

On considère maintenant le cas d'une cavité contenant un milieu fluide incompressible et newtonien. Avec les hypothèses simplificatrices discutées dans la section 1.2, les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie ( voir par exemple Bejan [2]) sont données par :

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (1.17)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t'} + (\vec{u}' \cdot \nabla) \vec{u}' \right) = -\nabla P' - \rho_0 \beta_T g (T' - T'_0) + \mu \nabla^2 \vec{u}' \quad (1.18)$$

$$(\rho C)_f \left( \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} \right) = k_f \nabla^2 T' \quad (1.19)$$

Pour adimensionaliser les équations précédentes, nous introduisons les quantités sans dimensions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x', y') = H'(x, y) & (u', v') = \frac{\alpha}{H'}(u, v) \\ T' - T'_0 = T \Delta T' & P' = \frac{\rho_0 \alpha^2}{H^2} P \\ t' = \frac{H'^2}{\alpha} t \end{array} \right. \quad (1.20)$$

En substituant les équations (1.20) dans les équations (1.17), (1.18) et (1.19) on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr \nabla^2 \vec{u} - Pr Ra T \quad (1.22 a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) v = -\frac{\partial P}{\partial y} + Pr \nabla^2 v - Pr Ra T \quad (1.22 \text{ b})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (1.23)$$

où  $Ra$  et  $Pr$  sont le nombre de Rayleigh thermique et le nombre de Prandtl définis respectivement comme suit :

$$Ra = \frac{g \beta_T \Delta T' H'^3}{\alpha \nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.25)$$

Afin de simplifier les équations gouvernantes adimensionnelles , on introduit la fonction de courant  $\Psi$  définie en (1.14), qui satisfait automatiquement l'équation de continuité (1.21). Comme pour le milieu poreux, on peut éliminer la pression des équations de mouvement (1.22 a) et (1.22 b) en prenant son rotationnel. Il en résulte les équations suivantes :

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial y} = Pr \nabla^4 \Psi - Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.26)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.27)$$

Ces deux dernières équations sont les équations adimensionnelles à résoudre avec les conditions aux limites appropriées définies à la section suivante .

#### 1.4 Conditions aux frontières

Les équations de base décrites précédemment sont résolues en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux frontières spécifiques à notre problème. Ces dernières sont les suivantes :

- Des conditions hydrodynamiques qui expriment l'imperméabilité et, sauf pour le milieu de Darcy pur ( $Da = 0$ ), le non-glissement des particules fluides sur les parois rigides de la cavité. Ces conditions aux frontières sont données par:

$$u = v = 0 \quad (1.28)$$

Quand au milieu poreux de Darcy, la condition de glissement existe pour la vitesse moyenne de filtration et on ne conserve que la condition d'imperméabilité exprimée comme suit :

$$x = \pm A/2 \quad u = 0 \quad (1.29)$$

$$y = \pm 1/2 \quad v = 0 \quad (1.30)$$

où  $A = L'/H'$  est le rapport de forme de la cavité.

- Des conditions aux frontières thermiques provenant de l'application de flux de chaleur constants sur les parois telles que :

suivant les parois horizontales

$$x = \pm \frac{A}{2} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -a \quad (1.31)$$

suivant les parois verticales

$$y = \pm \frac{1}{2} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -1 \quad (1.32)$$

La constante  $a$  est un paramètre qui permet de régler l'intensité relative du flux horizontal (Figure 1.2).



## 1.5 Transfert de chaleur

L'étude du transfert de chaleur dans la cavité soumise à des flux constants nécessite la détermination de l'intensité du transfert convectif. Cette intensité est donnée par le nombre de Nusselt, défini comme suit :

$$Nu = \frac{\Delta T'}{\Delta T} = \frac{1}{\Delta T} \quad (1.33)$$

Dans cette définition,  $\Delta T$  représente la différence de température adimensionnelle entre les deux parois horizontales à une position donnée  $x$ .

On peut calculer aussi la valeur moyenne du nombres de Nusselt le long de la paroi

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} Nu \, dx \quad (1.34)$$

Ayant déterminé les équations gouvernantes du problème, ainsi que les conditions aux frontières, la prochaine étape consiste à les résoudre. Deux types d'approches seront utilisées à cette fin, à savoir :

- Une méthode analytique qui sera traitée dans le prochain chapitre .
- Une méthode numérique basée sur un schéma aux différences finies, complètement implicite, décrite dans le troisième chapitre .

## CHAPITRE II

### SOLUTION ANALYTIQUE GÉNÉRALE

Dans le chapitre précédent nous avons développé les équations de base régissant la convection naturelle, en milieu poreux ou fluide. Les équations résultantes forment un système d'équations différentielles partielles non-linéaires couplées. Ce sont par conséquent des équations difficiles à résoudre analytiquement et en général, on ne peut obtenir une solution de ces dernières que par le biais de méthodes numériques. Cependant, dans certaines conditions spécifiques, des solutions analytiques approximatives restent possibles. Ainsi, dans le cas de couches fluides ou poreuses de grande extension ( $A \gg 1$ ), la stabilité du système chauffé par le bas (problème de Bénard), a été étudiée par le biais de méthodes de stabilité linéaires et non linéaires. Dans le cas de la cavité verticale, des méthodes de perturbations ont été utilisées pour prédire les champs de température et de vitesse dans le cas limite où le nombre de Rayleigh, responsable de l'intensité de la convection, est faible. Pour les écoulements induits par des nombres de Rayleigh élevés, la technique de linéarisation d'Oseen permet également d'obtenir des solutions analytiques.

Le problème d'une couche fluide ou poreuse, de grande extension ( $A \gg 1$ ), chauffée différentiellement par les côtés, a également été étudié analytiquement dans le passé. Cormack et al. [41] ont utilisé une méthode d'expansion asymptotique pour déterminer analytiquement le transfert de chaleur au sein d'une couche fluide chauffée à température constante sur les côtés verticaux, les parois horizontales étant maintenues adiabatiques. Les résultats obtenus, valides pour des faibles nombres de Rayleigh, ont été complétés par Bejan et Tien [12], lesquels ont utilisé une analyse de type intégral. Dans le cas d'une cavité verticale, chauffée sur les côtés par des flux de chaleur constants, Bejan [25] a effectué une analyse de type couche limite, en conjonction avec une condition de flux énergétique nul appliquée aux extrémités de la cavité, et a pu aussi prédire le

transfert de chaleur convectif au sein de la cavité. Cette technique a été utilisée par la suite par Vasseur et Robillard ([27]), Vasseur et Wang [38], Vasseur et al ([26], [32], [38]) , Mamou et al. ([28]) pour l'étude la convection dans des couches fluides et poreuses soumises a différentes conditions aux frontières.

Dans ce chapitre, l'approximation de l'écoulement parallèle va être appliquée au cas d'une cavité horizontale soumise à des flux de chaleur sur tous les cotés. Grâce à cette méthode, il sera possible de prédire, dans la limite asymptotique d'une couche d'extension infinie, les champs de température et vitesse au sein de la cavité.

## 2.1 Milieu poreux

On considère le cas d'une cavité poreuse horizontale de forte extension ( $A \gg 1$ ) telle que montrée ci dessous (figure 2.1):

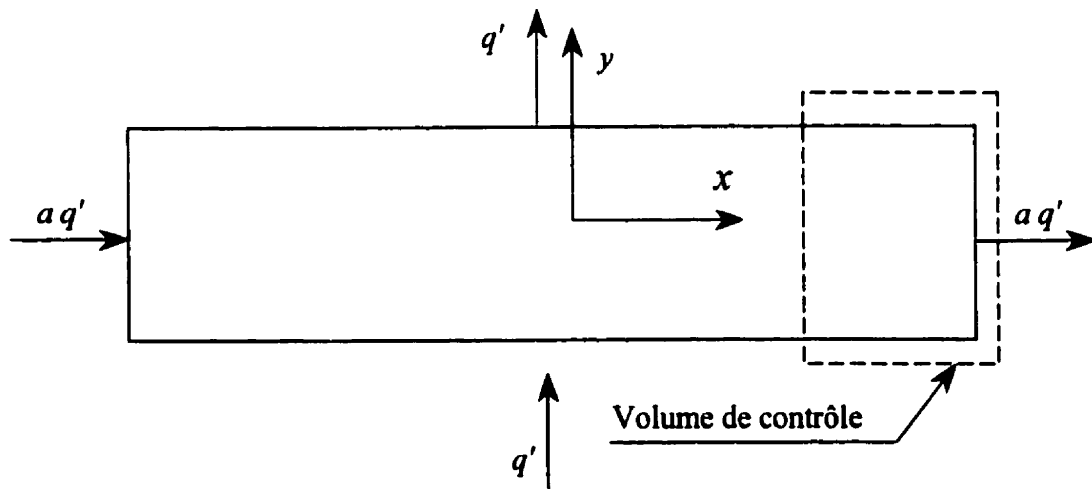


Figure 2.1 : Schéma de la cavité .

Les équations de base décrivant le transfert de chaleur thermoconvectif au sein de la cavité sont:

$$\nabla^2 \Psi = -R \frac{\partial T}{\partial x} + Da \nabla^4 \Psi \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.2)$$

soumise aux conditions frontières :

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 & \text{sur toutes les faces} \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= -a & x = \pm \frac{A}{2} \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= -1 & y = \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ces équations et les conditions aux frontières ont été établies au chapitre précédent. Le problème peut être simplifié en utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle. Ce concept a été introduit auparavant par plusieurs auteurs, dont Kimura [34], Bejan [3] et Sen et al [27]. Ces auteurs ont montré que pour une couche poreuse de grande extension ( $A \gg 1$ ), les équations gouvernantes peuvent être grandement simplifiées et ce, en considérant que l'écoulement engendré dans le centre de la cavité devient parallèle aux longs cotés, de sorte que :

$$u(x, y) \approx u(y) \quad \text{et} \quad v(x, y) \approx 0 \quad (2.4)$$

Nous obtenons ainsi des lignes de courant parallèles à l'axe des  $x$ , et la fonction de courant  $\Psi$  ne dépend que de l'ordonnée  $y$  :

$$\Psi(x, y) = \Psi(y) \quad (2.5)$$

quant au profil de la température, il devient la somme d'un terme définissant une variation longitudinale linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale :

$$T(x, y) = Cx + \theta(y) \quad (2.6)$$

le coefficient  $C$  exprimant le gradient de température selon la direction  $x$

En introduisant les expressions (2.5) et (2.6) dans les équations générales (2.1) et (2.2), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$Da \frac{d^4 \Psi}{dy^4} - \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - R C = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - C \frac{d \Psi}{dy} = 0 \quad (2.8)$$

L'équation (2.7) peut s'écrire sous une forme qui se prête mieux à l'analyse mathématique en posant  $\alpha^2 = 1/Da$ . On obtient alors l'équation différentielle ordinaire du quatrième ordre suivante :

$$\frac{d^4 \Psi}{dy^4} - \alpha^2 \frac{d^2 \Psi}{dy^2} - R C \alpha^2 = 0 \quad (2.9)$$

La solution de cette équation, satisfaisant les conditions aux frontières, est donnée par:

$$\Psi(y) = \frac{RC}{2\alpha} \left[ \alpha \left( \frac{1}{4} - y^2 \right) + \frac{\cosh(\alpha y)}{\sinh(\alpha/2)} - \coth(\alpha/2) \right] \quad (2.10)$$

De cette solution générale, on peut déduire  $\Psi_c$ , la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité, laquelle caractérise en quelque sorte l'intensité de l'écoulement. Cette valeur a pour expression :

$$\Psi_c = RC \left[ \frac{1}{8} + \frac{1}{2\alpha \sinh(\alpha/2)} - \frac{\coth(\alpha/2)}{2\alpha} \right] \quad (2.11)$$

On peut aussi, à partir de la relation (2.14), obtenir la distribution de vitesse suivant  $y$  :

$$u = \frac{RC}{2} \left[ -2y + \frac{\sinh(\alpha y)}{\sinh(\alpha/2)} \right] \quad (2.12)$$

Pour obtenir la distribution de température, il suffit de remplacer l'équation (2.10) dans (2.8), on a alors :

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = \frac{RC^2}{2} \left[ -2y + \frac{\sinh(\alpha y)}{\cosh(\alpha/2)} \right] \quad (2.13)$$

La résolution de cette équation différentielle satisfaisant la condition frontière (2.32), est simple. Reportant ce résultat dans l'expression de la température (2.6), on aboutit à la solution générale suivante :

$$T = Cx + y \left[ \frac{RC^2}{24} (3 - 4y^2) - 1 \right] + \frac{RC^2}{2\alpha} \left[ \frac{\sinh(\alpha y)}{\alpha \sinh(\alpha/2)} - y \coth(\alpha/2) \right] \quad (2.14)$$

La constante  $C$  définie comme étant le gradient de température horizontale, peut être déterminée en intégrant de l'équation d'énergie sur le volume de contrôle montré sur la figure 2.1, tout en tenant compte des conditions aux frontières.

L'intégration de l'équation (2.13) et (2.11) sur le volume de contrôle (figure 2.1) conduit à l'expression suivante :

$$\int \nabla \cdot \nabla T \, dv = \int \nabla \cdot \vec{V} \, T \, dv \quad (2.15)$$

En utilisant le théorème de Gauss, l'intégrale de volume (2.15) est convertie en une intégrale équivalente de surface sur la surface ( S ) de la cavité, selon

$$\int_S \nabla T \, d\vec{s} = \int_S T \vec{V} \, d\vec{s} \quad (2.16)$$

L'équation (2.16), appliquée sur chacune des faces du volume de contrôle donne alors :

$$\begin{aligned} & - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x dy + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L/2} dy + \int_x^{L/2} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-1/2} dx - \int_x^{L/2} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1/2} dx = \\ & - \int_{-1/2}^{1/2} Tu \Big|_x dy + \int_{-1/2}^{1/2} Tu \Big|_{x=L/2} dy + \int_{-1/2}^{1/2} Tu \Big|_x dy + - \int_x^{L/2} Tv \Big|_{y=1/2} dx - \int_x^{L/2} Tv \Big|_{y=-1/2} dy \end{aligned}$$

En appliquant les conditions aux frontières sur les intégrales précédentes, on obtient l'expression suivante :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial T}{\partial x} dy + a = \int_{-1/2}^{1/2} T u \, dy \quad (2.17)$$

En substituant les équations (2.14) et (2.12) dans (2.17), on obtient, après intégration :

$$\begin{aligned} & C^3 \left[ -\frac{R^2}{120} + \frac{R^2}{12\alpha} \coth(\alpha/2) - \frac{R^2}{4\alpha^2} \left( (\coth(\alpha/2))^2 + \frac{1}{2\sinh(\alpha/2)^2} \right) - \frac{R^2}{4\alpha^3} \coth(\alpha/2) + \frac{2R^2}{\alpha^4} \right] \\ & + C \left[ R \left( \frac{1}{12} - \frac{\coth(\alpha/2)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) - 1 \right] - a = 0 \end{aligned}$$

La valeur de la constante  $C$  est obtenue en résolvant numériquement l'équation ci dessus, pour des valeurs donnés de  $R$ ,  $Da$  et  $a$ . Il est à noter que cette dernière peut être réécrite en fonction de  $\Psi_C$  en y portant la valeur de  $C$  donnée en (2.11) :

$$a_1 \Psi_C^3 + a_2^2 (R a_3 - 1) \Psi_C - R a_2^3 a = 0 \quad (2.18)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont des constantes fonction du nombre de Darcy, définies par

$$a_1 = -\frac{1}{120} + \frac{1}{12\alpha} \coth(\alpha/2) - \frac{1}{4\alpha^2} \left( \frac{1}{\coth(\alpha/2)^2} + \frac{1}{2 \sinh(\alpha/2)^2} \right) - \frac{\coth(\alpha/2)}{4\alpha^3} + \frac{2}{\alpha^4}$$

$$a_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2\alpha \sinh(\alpha/2)} - \frac{\coth(\alpha/2)}{2\alpha}$$

$$a_3 = \frac{1}{12} - \frac{\coth(\alpha/2)}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$$

La solution  $\Psi_C$  de l'équation (2.18) est obtenue numériquement et dépend des paramètres  $Da$ ,  $R$  et  $a$ , qui sont respectivement, le nombre de Darcy, le nombre de Rayleigh et la constante donnant la proportion entre les flux de chaleur horizontaux et verticaux.

Pour  $a = 0$  on obtient le cas d'une cavité chauffée par le bas. Le nombre adimensionnel  $1/a_3$  est appelé nombre de Rayleigh critique, (nombre de Rayleigh pour lequel l'état de repos du fluide dans le milieu poreux devient instable). Il s'écrit :

$$R_C = -12\alpha^2 / (-\alpha^2 + 6\alpha \coth(\alpha/2) - 12) \quad (2.19)$$

Le nombre de Nusselt caractérisant le transfert de chaleur dans la cavité est obtenu en substituant l'expression (2.14) dans (1.33) :



$$Nu = \frac{1}{1 - \frac{R C^2}{12} \left[ 1 + \frac{12}{\alpha^2} - \frac{6 \coth(\alpha/2)}{\alpha} \right]} \quad (2.20)$$

Le modèle analytique de Brinkman basé sur l'hypothèse de l'écoulement parallèle ainsi développé, pour le cas général d'une cavité allongée soumise à des flux uniformes de chaleur, nous permet d'obtenir deux cas limite, à savoir

- Cas  $Da \rightarrow 0$  (milieu poreux de Darcy)

Ce premier cas limite concerne les milieux poreux à très faible perméabilité, où le modèle de Brinkman se réduit à celui de Darcy. Les profils de la fonction de courant, de la vitesse et de la température sont obtenus en prenant la limite des équations (2.12), (2.14) et (2.10) quand Darcy tend vers une valeur nulle :

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{R C}{2} \left[ -2 y + \left( e^{\alpha(y - \frac{1}{2})} + e^{-\alpha(y + \frac{1}{2})} \right) \right] \\ T(x, y) &= Cx + y \left[ \frac{R C^2}{24} (3 - 4y^2) - 1 \right] \\ \Psi(y) &= \frac{R C}{2} \left[ \left( \frac{1}{4} - y^2 \right) + \frac{1}{\alpha} \left( e^{\alpha(y - \frac{1}{2})} + e^{-\alpha(y + \frac{1}{2})} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

L'écoulement est alors régi par l'équation suivante

$$64\Psi_c^3 + (120 - 10R)\Psi_c + 15R a = 0 \quad (2.22)$$

Le nombre de Nusselt pour cette situation devient :

$$Nu = \frac{12}{12 - R C^2} \quad (2.23)$$

Le cas particulier de la cavité chauffée par le bas est retrouvé en posant  $a = 0$  dans les équations (2.22); on obtient alors :

$$\Psi_c = 0 \quad \Psi_c = \pm \frac{1}{8} \sqrt{10R - 120} \quad (2.24)$$

A partir des expressions de la fonction de courant au centre (2.24), on retrouve facilement les valeurs du paramètre  $C$  :

$$C = 0 \quad C = \pm \frac{1}{R} \sqrt{10R - 120} \quad (2.25)$$

Le nombre de Nusselt devient alors

$$Nu = 1 \quad Nu = \frac{6R}{60 + R} \quad (2.26)$$

Le nombre de Rayleigh critique selon l'équation (2.25) est :

$$Rc = 12$$

● Cas  $Da \rightarrow \infty$  (milieu fluide)

Cette limite permet de retrouver le cas du milieu fluide pur dont la solution est décrite par les profils ci-dessous :

$$\begin{aligned} T &= Cx + y \left[ \frac{Ra}{120} C^2 \left( y^4 - \frac{5}{6} y^2 + \frac{5}{16} \right) - 1 \right] \\ \Psi(y) &= \frac{Ra}{24} C \left[ y^4 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{16} \right] \\ u(y) &= \frac{Ra}{6} C [y^3 - y] \end{aligned} \quad (2.27)$$

ou la valeur de  $\Psi_c$  peut être déterminée à partir de l'équation suivante:

$$384^2 \Psi_c^3 - 504 (Ra - 720) \Psi_c - 945 Ra a = 0 \quad (2.28)$$

dans laquelle  $Ra = R/Da$  représente le nombre de Rayleigh pour un fluide visqueux.

Le nombre de Nusselt peut être évalué à partir de :

$$Nu = \frac{720}{720 - Ra C^2} \quad (2.29)$$

Le cas particulier de la cavité chauffée par le bas ( $a = 0$ ) est alors régi par les équations suivantes :

$$\Psi_c = 0 \quad \Psi_c = \pm \frac{\sqrt{504 (R - 720)}}{384} \quad (2.30)$$

A partir des expressions de la fonction de courant au centre (2.30), on retrouve facilement les valeurs du paramètre  $C$  :

$$C = 0 \quad C = \pm \frac{\sqrt{504 (Ra - 720)}}{Ra} \quad (2.31)$$

Le nombre de Nusselt devient alors

$$Nu = 1 \quad Nu = \frac{10 Ra}{3 Ra + 5040} \quad (2.32)$$

Le nombre de Rayleigh critique est alors :

$$Ra_c = 720$$

## 2.2 Milieu fluide

L'écoulement bidimensionnel permanent d'un fluide visqueux incompressible est déterminé par le système d'équations différentielles aux dérivées partielles non-linéaire suivant:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial (\nabla^2 \Psi)}{\partial x} = Pr \nabla^4 \Psi - Pr Ra \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.34)$$

En utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle (2.5) et (2.6) les équations gouvernantes précédentes peuvent être réduites aux équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{d^4 \Psi}{dy^4} = Ra C \quad (2.35)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - C \frac{d\Psi}{dy} = 0 \quad (2.36)$$

La solution des équations (2.35) et (2.36) satisfaisant les conditions aux frontières (1.28), (1.31) et (1.32) est donnée par :

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= \frac{Ra C}{24} \left[ y^4 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{16} \right] \\ u(y) &= \frac{Ra C}{6} [y^3 - y] \\ T &= Cx + y \left[ \frac{Ra C^2}{120} \left( y^4 - \frac{5}{6} y^2 + \frac{5}{16} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Il est à noter qu'on obtient pour le milieu fluide les profils prédits par le modèle de Brinkman lorsque le nombre de Darcy de ce dernier. Il est à noter que le modèle de Brinkman, dans la limite où  $Da \rightarrow \infty$ , tend vers la présente solution pour un fluide pur.

Pour trouver la solution générale du problème, à savoir l'obtention des champs de vitesse et température, il suffit de remplacer les valeurs du gradient de température  $C$  dans les équations (2.37).

La constante  $C$  est évaluée similairement à la procédure utilisée pour le milieu poreux. Après l'intégration de l'équation de l'énergie et l'évaluation de chaque terme résultant, on trouve l'équation suivante:

$$384^2 \Psi_c^3 - 504 (R - 720) \Psi_c - 945 Ra \quad a = 0 \quad (2.38)$$

avec  $\Psi_c = 384 C / Ra$ .

Cette équation correspond à l'équation (2.28) dans la limite  $Da \rightarrow \infty$ .

## **CHAPITRE III**

### **SOLUTION NUMÉRIQUE**

#### **3.1 Introduction**

Au cours de ces dernières années, on assiste à une augmentation fulgurante de la performance des ordinateurs, qui a permis l'utilisation de méthodes numériques de plus en plus performantes et efficaces pour la résolution de systèmes d'équations différentielles non-linéaires.

La méthode des différences finies est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18<sup>e</sup> siècle par Euler; elle s'avère la plus adaptée et la plus facile d'utilisation pour les problèmes à géométrie simple.

La modélisation par différences finies procède avant tout de la décomposition et de l'idéalisation des systèmes en éléments de ligne reliés entre eux et mis en continuité en un nombre fini de points. Ces points de continuité, appelés nœuds, sont disposés à l'intérieur et sur le pourtour du système physique (voir figure 3.1). La température et la fonction de courant aux nœuds sont les inconnues du problème; quant à la vitesse, elle est déduite de la valeur de la fonction de courant.

Dans un repère cartésien, chaque nœud est identifié par le couple d'indices  $(i,j)$  désignant les lignes d'intersection du maillage. Les nœuds voisins sont implicitement définis en augmentant ou en abaissant l'un des indices par un incrément unitaire. Les équations différentielles gouvernantes du problème servent de point de départ à la méthode aux différences finies. Elles seront approximées par un système d'équations algébriques dans lesquelles les valeurs des variables aux nœuds sont les inconnues.

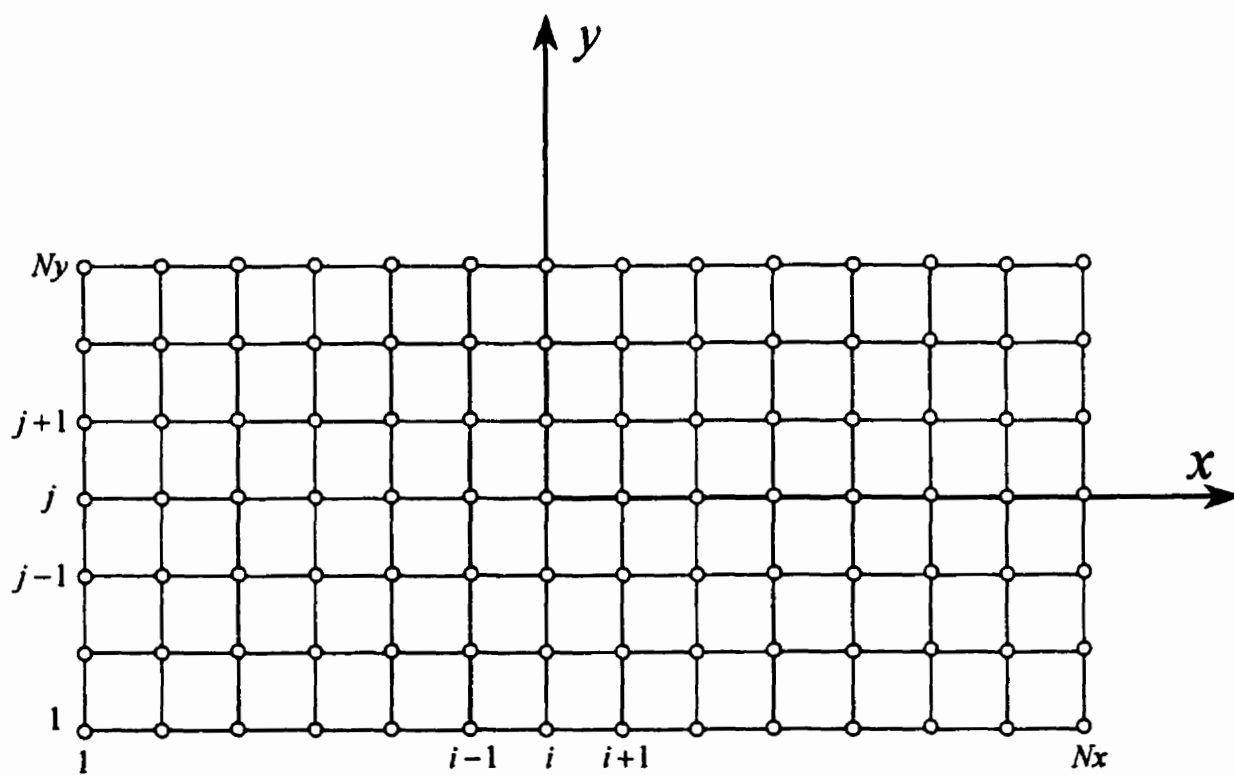


Figure 3.1 : Représentation du maillage du système physique

### 3.2 Discrétisation des équations gouvernantes

Les équations gouvernantes du milieu poreux basées sur le modèle de Darcy pur s'écrivent :

$$\nabla^2 \Psi = -R \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.2)$$

L'équation d'énergie représentée par l'équation de type parabolique (3.2) peut être réécrite sous la forme suivante, mieux adaptée à la résolution numérique :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \quad (3.3)$$

Les dérivées du premier et second ordre apparaissant dans les équations de base sont discrétisées selon un schéma centré au différences finies comme suit :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + o(\Delta x)^2 \quad (3.4)$$

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{(\Delta x)^2} + o(\Delta x)^2 \quad (3.5)$$

où  $f$  représente la température  $T$  ou la fonction de courant  $\Psi$  et  $(\Delta x)$ , l'espacement entre deux nœuds voisins.

Une fois discrétisées, avec le schéma centré classique, les équations de base sont résolues numériquement. La méthode A.D.I. (Alternating Direction Implicit) est utilisée pour résoudre l'équation de l'énergie; quand à l'équation de mouvement, elle est résolue par le biais de la méthode S.O.R. (Successive Over Relaxation).



### 3.2.1 Équation d'énergie

L'équation d'énergie étant parabolique par rapport au temps et elliptique par rapport aux coordonnées spatiales, la méthode implicite aux directions alternées A.D.I. est choisie comme outil de résolution. Cette méthode est largement utilisée pour intégrer les problèmes transitoires bidimensionnels. Elle donne lieu à des systèmes matriciels tridiagonaux dans les deux directions. L'un est obtenu par la discrétisation implicite selon la direction  $x$  et explicite selon  $y$ , l'autre par la discrétisation implicite selon la direction  $y$  et explicite selon  $x$ .

La solution à chaque étape de temps est obtenue en faisant un balayage du domaine d'abord dans la direction  $x$ , ensuite dans la direction  $y$ , en utilisant à chacune de ces étapes les derniers résultats obtenus. La méthode de calcul résultante est très efficace du fait de sa simplicité et de sa stabilité.

On utilise une discrétisation implicite dans la direction  $x$ , en optant pour des différences centrées au temps  $n + \frac{1}{2}$  pour les dérivées en  $x$  et au temps  $n$  pour les dérivées en  $y$ , chaque terme de l'équation (4,3) étant discrétisée comme suit

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{i,j} &= \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)} \\
 \left( \frac{\partial(uT)}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j}^n T_{i+1,j}^{n+1/2} - u_{i-1,j}^n T_{i-1,j}^{n+1/2}}{2(\Delta x)} \\
 \left( \frac{\partial(vT)}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{v_{i,j+1}^n T_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n T_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} \\
 (\nabla^2 T)_{i,j} &= \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions (3,6) dans l'équation de l'énergie (3.3) on obtient la forme discrète implicite en  $x$  sous la forme matricielle suivante

$$A_i T_{i-1,j}^{n+1/2} + B_i T_{i,j}^{n+1/2} + C_i T_{i+1,j}^{n+1/2} = D_i \quad (3.7)$$

avec

$$A_i = \frac{u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \quad B_i = \frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{-2}{(\Delta x)^2} \quad C_i = \frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{i+1,j}^n}{2(\Delta x)}$$

$$D_i = \left[ \frac{1}{(\Delta y)^2} - \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} + \right] T_{i,j-1}^n + \left[ \frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{2}{(\Delta y)^2} \right] T_{i,j}^n + \left[ \frac{-1}{(\Delta y)^2} + \frac{v_{i,j+1}^n}{2(\Delta y)} + \right] T_{i,j+1}^n$$

Selon la direction  $y$ , les dérivées partielles par rapport à  $y$  seront discrétisées au temps  $(n+1)$ . On obtient alors la forme implicite en  $y$  suivante :

$$A'_i T_{i,j-1}^{n+1} + B'_i T_{i,j}^{n+1/2} + C'_i T_{i,j+1}^{n+1/2} = D'_i \quad (3.8)$$

avec

$$A'_i = \frac{v_{i,j-1}^n}{2(\Delta y)} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \quad B'_i = \frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{-2}{(\Delta y)^2} \quad C'_i = \frac{1}{(\Delta y)^2} - \frac{v_{i,j+1}^n}{2(\Delta y)}$$

$$D'_i = - \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i-1,j}^n}{2(\Delta x)} + \right] T_{i-1,j}^n + \left[ \frac{-2}{(\Delta t)} + \frac{2}{(\Delta x)^2} + \right] T_{i,j}^n + \left[ \frac{-1}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1,j}^n}{2(\Delta x)} + \right] T_{i+1,j}^n$$

En tenant compte de l'ensemble des nœuds on obtient un système d'équation dont la solution se ramène à l'inversion d'une matrice tridiagonale. Le champ de température obtenu pour l'ensemble des nœuds du domaine sera utilisé pour déterminer le champ de fonction de courant.

### 3.2.2 Équation de mouvement

Pour résoudre l'équation de mouvement (3.1), on applique une discrétisation centrée de chaque terme de l'équation :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}$$

$$(\nabla^2 \Psi)_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \quad (3.9)$$

en remplaçant ces termes dans l'équation de mouvement on trouve l'expression générale suivante de la fonction de courant :

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = a [T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}] + b [\Psi_{i+1,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^{n+1}] + c [\Psi_{i,j+1}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^{n+1}] \quad (3.10)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes définies par :

$$a = R_r \frac{\Delta x \Delta y^2}{4(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad b = \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)},$$

$$c = \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (3.11)$$

Pour résoudre l'équation (3.10), on utilise la méthode de surrelaxation successive *S.O.R.* par point. Cette méthode donne directement la valeur de  $\Psi$  à l'instant  $(n+1)\Delta t$  au nœud considéré par la relation suivante :

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = (1 - \omega) \Psi_{i,j}^k + \omega \Psi_{i,j}^{k+1} \quad (3.12)$$

$\omega$  étant le coefficient de surrelaxation défini comme suit

$$\omega = \frac{2}{\zeta^2} (1 - \sqrt{1 - \zeta^2}) \quad , \zeta = \frac{2 \cos(\pi/n_x) + (\Delta x^2 / \Delta y^2) \cos(\pi/n_y)}{1 + (\Delta x^2 / \Delta y^2)}$$

$n_x, n_y$  correspondent au nombres d'éléments selon les direction  $x$  et  $y$ , respectivement.

Cette méthode offre une précision et un taux de convergence satisfaisants.

### 3.2.3 Champs de vitesse

Les composantes du champ de vitesse est obtenu à partir de la fonction de courant selon les relations:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.13)$$

La discrétisation de ces équations par un schéma de différences finies centré du premier ordre donne :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \quad v_{i,j}^{n+1} = -\frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (3.14)$$

### 3.2.4 Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières (2.27) et (2.28) sont discrétisées selon un schéma aux différences finies décentré avant ou arrière selon la paroi considérée .

Dans le cas des deux parois verticales on a :

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= \frac{4T_{i+1,j} - T_{i+2,j} + 2a \Delta x}{3} & \text{si} & \quad x = -\frac{A}{2} \\ T_{i,j} &= \frac{4T_{i-1,j} - T_{i-2,j} - 2a \Delta x}{3} & \text{si} & \quad x = \frac{A}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Pour les parois horizontales on a :

$$T_{i,j} = \frac{4T_{i,j+1} - T_{i,j+2} + 2\Delta y}{3} \quad \text{si} \quad y = -\frac{l}{2}$$

$$T_{i,j} = \frac{4T_{i,j-1} - T_{i,j-2} - 2\Delta y}{3} \quad \text{si} \quad y = \frac{l}{2} \quad (3.16)$$

Nous examinons ici quelques-unes des étapes du développement du programme de calcul par différences finies mettant en œuvre la théorie de la convection naturelle dans les cavités allongées (modèle de Darcy). Le code numérique ainsi développé est conçu selon l'algorithme de calcul suivant :

- Initialisation et lecture des données .
- Génération du maillage.
- Introduction des conditions aux frontières.
- Début de la boucle sur le temps.
  - Calcul du champ de température par la méthode A.D.I. ( résolution des équations 3.7 et 3.8 ).
  - Calcul du champ de la fonction de courant à partir de l'équation (3.10) par la méthode S.O.R.
  - Détermination du champ de vitesse (  $u$  ,  $v$  ) à partir de la relation (3.14).
- Fin de la boucle sur le temps, dès que le critère de convergence suivant est satisfait :

$$\frac{\left| \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^{t+\Delta t} - \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^t \right|}{\left| \sum_{i,j} \Psi_{i,j}^{t+\Delta t} \right|} \leq 10^{-8} .$$

- Impression des résultats.

### 3.3 Validations du code numérique

La validation du code numérique a été réalisée dans un grand nombre de configurations. Nous présentons quelques comparaisons en convection naturelle dans le cas de la cavité rectangulaire poreuse chauffée par le bas ( $a = 0$ ) en régime de Darcy.

De manière à vérifier la précision du programme numérique développé dans le présent mémoire, le nombre de Nusselt  $Nu$  caractérisant le transfert thermique au sein de la cavité et la fonction de courant  $\psi_c$ , donnant l'intensité de l'écoulement au centre de la cavité, ont été évalués pour un certain nombre de cas données dans le passé par Kimura et al. [34]

Ces résultats sont présentés dans les tableaux 3.1 et 3.2, pour le cas d'une cavité poreuse chauffée par le bas ( $a = 0$ ), ayant un rapport de forme  $A = 4$  et pour différents nombres de Rayleigh ( $R = 100, 200$  et  $400$ ). A noter que cette simulation a été réalisée avec un maillage uniforme de  $60 \times 120$ . Nous avons aussi utilisé la solution analytique basée sur la théorie de l'écoulement parallèle, décrite dans le Chapitre 3, pour la validation du code de calcul numérique.

Tableau 3.1 Comparaison des valeurs de la fonction de courant maximum avec les résultats donnée par Kimura et al.[34] et la solution analytique.

Nombre de Rayleigh $R$	Présente étude $60 \times 120$	Kimura . $21 \times 101$	Solution Analytique
100	3.714	3.756	3.708
200	5.425	5.467	5.420
400	7.769	7.828	7.786

**Tableau 3.2 Comparaison des valeurs du nombre de Nusselt avec les résultats donnés par Kimura et al. [34] et la solution analytique.**

Nombre de Rayleigh $R$	Présente étude $60 \times 120$	Kimura $21 \times 101$	Solution Analytique
100	3.744	4.544	3.750
200	4.594	4.366	4.615
400	4.971	4.957	5.217

On constate un très bon accord entre nos résultats et ceux de Kimura et al.[34] ainsi que la solution analytique et ceci avec une précision de l'ordre de 0.15 % à 4 % pour le nombre de Nusselt et de 0.7 % à 1.1 % pour la fonction de courant. Pour  $R = 400$  on observe une différence de l'ordre de 4% entre la solution analytique et la solution numérique pour le nombre de Nusselt, cependant cette erreur n'est plus que de l'ordre de 0.2 % dans le cas ou on augmente le rapport de forme à  $A = 6$ .

La précision des résultats numériques dépend des valeurs des paramètres de contrôle. Afin de montrer l'influence du maillage sur le résultat numérique, on a réalisé plusieurs tests sur une cavité poreuse ayant un rapport de forme  $A = 4$  et un nombre de Rayleigh ( $R = 50$ ) en premier lieu chauffé uniquement par le bas ( $a = 0$ ) et un autre cas ou on applique un chauffage latéral ( $a = 0.2$ ), et cela pour différents maillages. Les résultats obtenus sont présentés dans les tableaux 3.3 et 3.4 .

Donc si on admet une erreur de l'ordre de 0.5 %, on peut considérer pour la suite des calculs un maillage de  $60 \times 120$ .

Tableau 3.3 Effet du maillage sur  $\Psi_c$  et  $Nu$ , cavité chauffé par le bas ( $a = 0$ )

<i>Maillage</i>	<i>Programme Numérique</i>					
	10×40	20×80	40×100	60×120	80×180	80×240
$\Psi_c$	-2.474522	-2.452948	-2.444064	-2.44248743	-2.442220	-2.442341
$Nu$	2.665006	2.727034	2.728533	2.72909732	2.730481	2.730991

Tableau 3.4 Effet du maillage sur  $\Psi_c$  et  $Nu$ , cavité avec présence d'un chauffage latéral ( $a = 0.2$ ).

<i>Maillage</i>	<i>Programme Numérique</i>					
	10×40	20×80	40×100	60×120	80×180	80×240
$\Psi_c$	-2.644099	-2.626955	-2.619030	-2.617866	-2.618126	-2.618443
$Nu$	3.494873	3.660371	3.675167	3.680251	3.687245	3.689722



## CHAPITRE IV

### RÉSULTATS ET DISCUSSION

#### 4.1 Introduction

La solution analytique développée au Chapitre 2 est fonction du nombre de Rayleigh  $R$  ainsi que de deux paramètres additionnels, soit  $a$ , un paramètre donnant l'importance relative d'un chauffage latéral et  $Da$ , le nombre de Darcy, indiquant l'importance des effets visqueux sur les parois solides. Pour un nombre de Darcy fixé, le paramètre  $a$  agit en quelque sorte comme une imperfection apportée à un problème d'instabilité pure, celui d'une cavité allongée chauffée par le bas.

Dans ce chapitre, nous verrons en premier lieu comment le nombre de Darcy influence les profils de vitesse et de température. Le reste du chapitre traitera du cas limite d'un milieu poreux de Darcy ( $Da \rightarrow 0$ ). La discussion portera d'abord sur les résultats concernant l'instabilité pure ( $a = 0$ ) dans le cas où les conditions aux limites thermiques sont du type de Neuman; seront abordés ensuite les résultats analytiques et numériques où l'influence de " $a$ " est prise en considération. Les résultats seront présentés sous forme de graphiques et de champs d'écoulements et de température.

#### 4.2 Effet du nombre de Darcy ( $a = 0$ )

L'instabilité pure avec conditions thermiques de flux constant sur les deux parois horizontales en cavité allongée est qualitativement la même dans ses résultats globaux, peu importe la valeur que l'on donne au nombre de Darcy. Nous nous bornerons dans la présente partie à montrer les différences que le nombre de Darcy apporte, d'abord sur l'écoulement, lesquelles se traduisent essentiellement par des profils de vitesse et de température particuliers, ensuite sur le seuil de convection en terme d'un Rayleigh critique évoluant du milieu poreux de Darcy à celui d'un fluide. Les figures 4.1 et 4.2

donnent pour  $a = 0$ , les profils de vitesse et de température à différents nombres de Darcy. Ces profils sont universels, c'est-à-dire indépendants du nombre de Rayleigh, à cause de la norme utilisée ( $u/RC$  et  $\theta/RC^2$ , respectivement). On constate l'évolution des profils en fonction de  $Da$ , à partir du milieu fluide ( $Da \gg 1$ ) jusqu'au milieu de Darcy  $Da \approx 10^{-6}$ . En particulier, pour les profils de vitesse de la figure 4.1, on constate que ces derniers tendent de plus en plus vers une relation linéaire  $u$  vs  $y$  au fur et à mesure que  $Da$  tend vers zéro. Cependant le profil véritable de Darcy, qui implique le glissement à la frontière avec vitesse maximum sur la frontière n'est jamais atteint tant et aussi longtemps qu'on résoud les équations de Brinkman qui, elles, impliquent un non-glissement à la frontière. On aura donc toujours ce retour à la valeur zéro pour  $u$  à la frontière, ce retour s'effectuant de plus en plus près de la frontière avec  $Da \rightarrow 0$ .

La figure 4.3 donne le nombre de Rayleigh critique  $R_c$  en fonction du nombre de Darcy. La valeur critique  $R_c = 12$  caractérisant le milieu poreux de Darcy est atteinte asymptotiquement avec  $Da \rightarrow 0$ . Celle du milieu fluide,  $Ra = R_c/Da$ , est atteinte asymptotiquement lorsque  $Da \rightarrow \infty$ . En pratique, ces valeurs sont pratiquement obtenues pour  $Da \leq 10^{-6}$  et  $Da \approx 1$ , respectivement.

#### **4.3 Chauffage par le bas en conditions limites thermiques de Neuman ( $a = 0$ , $Da \rightarrow 0$ )**

Par contraste avec les conditions thermiques de Dirichlet (température uniforme imposée) les conditions de Neuman (flux de chaleur uniforme imposé) donnent lieu à une seule cellule de convection, peu importe l'élongation de la cavité. En principe cette cellule unique de convection existe jusqu'à la situation asymptotique d'une couche horizontale s'étendant à l'infini. C'est d'ailleurs cette particularité qui rend réaliste l'hypothèse de l'écoulement parallèle.

La figure 4.4 a,b représente effectivement deux cas d'écoulement unicellulaire en cavité allongée correspondant à des nombres de Rayleigh  $R=15$  et  $R=50$ . Les champs de vitesse et de température y sont représentés par des lignes de courant et des isothermes respectivement. Rappelons que le nombre de Rayleigh critique en situation de chauffage par le bas est  $R_c = 12$ , et que par conséquent les cas représentés sont nettement dans le domaine de la convection d'amplitude finie avec  $|\Psi_c| = 0.6616$  et  $2.442$ , respectivement,  $\Psi_c$  étant la valeur de la fonction de courant au centre de la cavité. Cette valeur, qui correspond à un extrémum de la fonction de courant, peut être considérée comme une mesure de l'intensité de la convection. Pour des nombres de Rayleigh inférieurs à 12, tout mouvement initial est résorbé et la conduction pure avec isothermes horizontales constitue une solution triviale. L'effet de la convection, tel qu'illustré à la figure 4.1 a,b consiste de fait à changer la stratification verticale en une stratification horizontale, cette dernière étant de plus en plus marquée au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente.

Les résultats de la figure 4.4 ont été obtenus à partir du programme numérique décrit au Chapitre 2. Ce programme numérique est évolutif dans le temps et les calculs sont effectués à partir de conditions initiales spécifiques. Dans les deux cas de la figure 4.1, une très légère impulsion de mouvement comprenant une cellule de convection unique a été fournie comme condition initiale pour  $\psi$ . Une amplitude initiale de mouvement même infinitésimale, comprenant une petite cellule conduira inévitablement aux résultats de la figure 4.4.

Qu'arrive-t-il si, au lieu d'une seule cellule, on en injecte un certain nombre comme conditions initiales? Kimura et al. [34] affirment que l'écoulement, partant de conditions initiales en conduction pure, comporte d'abord des cellules de convection multiples, qui sont vraisemblablement le résultat du bruit numérique. Avec le temps, l'écoulement se transforme graduellement en un nombre de plus en plus réduit de cellules de convection pour devenir éventuellement unicellulaire.

Nous avons effectué à ce propos différents tests à l'aide de notre programme numérique. L'un de ces tests est illustré à la figure 4.5 a-b-c-d-e-f. Cette figure nous montre différentes étapes dans le processus conduisant à l'écoulement unicellulaire. On constate dans cette séquence d'écoulement, premièrement que les cellules de convection sont résorbées deux à la fois, de sorte qu'à chaque étape, l'écoulement comporte toujours un nombre impair de cellules et deuxièmement que l'écoulement demeure toujours ascendant (descendant) près de la paroi verticale de droite (de gauche). Cette dernière constatation fait contraste avec l'évolution de l'écoulement présentée à la figure 6 de l'article de Kimura et al. [34], ce dernier changeant de direction près des parois latérales selon un processus en apparence aléatoire.

#### 4.3 Influence du rapport de forme ( $a = 0.2$ )

Le fait d'augmenter le rapport de forme  $A$  conduit inévitablement, pour un Rayleigh donné, à une situation asymptotique pour laquelle la valeur de la fonction de courant  $\psi_c$ , au centre de la cavité, devient constante et indépendante de  $A$ . Il en va de même pour le nombre de Nusselt  $Nu$ , tel que défini à l'équation (1.33). Ce comportement est illustré à la figure 4.6. Dans cette figure,  $\psi_c$  et  $Nu$  obtenus à partir de notre programme numérique sont donnés en fonction de  $A$  pour  $R = 50$ . On constate que la situation asymptotique est pratiquement obtenue à  $A = 3$ . Les valeurs asymptotiques  $\psi_c$  et  $Nu$  correspondent alors aux valeurs du modèle analytique décrit au Chapitre 2. En conséquence, on considère que l'écoulement parallèle est déjà atteint à  $A = 3$ . D'autres tests non rapportés dans ce travail nous indiquent que l'écoulement parallèle est atteint à des valeurs de plus en plus basses du rapport de forme au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh s'accroît. En conclusion, pour les besoins de la présente étude, un rapport de forme  $A = 4$  est considéré suffisant pour que les exigences d'un écoulement parallèle soient satisfaites et de fait donnera une excellente correspondance entre les valeurs numériques et analytiques, peu importe le nombre de Rayleigh.

#### 4.4 Superposition d'un chauffage latéral

La solution analytique obtenue de l'approximation de l'écoulement parallèle, pour  $a \neq 0$ , a été vérifiée numériquement à l'aide d'un code aux différences finies basé sur l'approche numérique décrite précédemment. La comparaison des résultats analytiques et numériques est maintenant présentée pour la fonction de courant au centre  $\psi_c$  et le nombre de Nusselt  $Nu$ .

La solution analytique du problème,  $\psi_c$ , fonction de  $R$  et  $a$ , prend la forme d'une surface courbe dans un espace tridimensionnel. Cette surface est représentée à la figure 4.7. Une surface du même type a été obtenue et discutée par Nguyen [33] pour le cas d'une couche fluide. Par contraste avec l'article de Sen et al. [32], dans lequel l'angle d'inclinaison de la cavité agissait comme imperfection sur la bifurcation, ici, c'est l'intensité  $a$  du chauffage latéral qui devient l'imperfection, la cavité demeurant horizontale. Ainsi, pour  $a = 0$ , la solution correspond à l'intersection entre la surface courbe et le plan  $a = 0$  et prend la forme de la bifurcation classique de Benard.

Alternativement on peut représenter la surface de la figure 4.7 par des lignes de contour correspondant à différentes valeurs de  $a$  sur un graphique  $\psi_c - R$ . C'est le cas de la figure 4.8. où les lignes de contour correspondent à  $a = 0, 0.1, 0.2$  et  $0.3$ . Des valeurs négatives de  $a$  produiraient l'image miroir par rapport à l'axe  $R$  des lignes de contour actuelles. Telles que définies par les courbes de la figure 4.8, trois racines de  $\psi$  sont théoriquement possibles pour une valeur donnée  $a$  lorsque le nombre de Rayleigh  $R$  est suffisamment grand. Le cas  $a = 0$  est particulier en ce sens qu'aucun mouvement entretenu n'est possible pour  $R$  plus petit que le seuil de convection,  $R_c = 12$ . Cependant, pour  $R > R_c$ , deux mouvements convectifs en sens opposés sont possibles, en plus de la solution triviale de conduction pure ( $\psi = 0$ ) qui de fait est instable. Pour  $a > 0$ , les courbes inférieures représentent le mouvement convectif "naturel" tandis que les courbes supérieures sont "antinaturelles". Le terme "naturel" vient du fait qu'un calcul numérique donnant l'évolution temporelle, (comme celui

accompli par le code numérique aux différences finies) à partir de la conduction pure comme condition initiale, va toujours converger vers la courbe correspondante. Par contraste, un écoulement impulsif dans la direction appropriée est requis comme condition initiale pour atteindre la courbe "antinaturelle". Pour une valeur  $a$  donnée, l'état antinaturel peut être atteint seulement si  $R > R_a$ . Ainsi,  $R_c$  et  $R_a$  représentent tous deux des nombres de Rayleigh critiques, c'est à dire des seuils au-delà desquels des solutions multiples existent, le premier en l'absence de chauffage latéral et le second avec chauffage latéral.

Le nombre de Nusselt est donné à la figure 4.9. Tel qu'indiqué sur cette figure, les valeurs de  $a$  positives ou négatives produisent les même courbes. Les résultats numériques sont aussi portés sur les figures 4.8 et 4.9. L'excellente correspondance avec les courbes analytiques démontre la validité de l'hypothèse d'un écoulement parallèle.

Des exemples de champs d'écoulement et de température, définis respectivement par des lignes de courant et des isothermes sont représentés à la figure 4.10a, b, pour le cas naturel et le cas antinaturel. Le mouvement convectif de la figure 4.10b est antinaturel, puisque le mouvement du fluide est dirigé vers le bas près de la paroi verticale de gauche, bien que celle-ci transmette de la chaleur au fluide.

On constate aux figures 4.8 et 4.9 l'absence de résultats numériques à proximité de l'endroit où la courbe antinaturelle devient verticale  $R \rightarrow R_a$ . De fait, le domaine d'attraction de chaque courbe antinaturelle se rétrécit à mesure que l'on s'approche de  $R_a$ . A titre d'exemple, le résultat numérique correspondant à  $R \approx 23$  sur la courbe antinaturelle  $a = 0.1$  de figure 4.8 a été obtenu à partir de conditions initiales correspondant au résultat numérique  $R = 30$  sur la même courbe, en faisant décroître lentement  $R$  et en obtenant la convergence à chaque étape. Pour  $R < 23$ , le bruit numérique ne permet pas de solution antinaturelle stable et la solution évolue vers la branche naturelle. Une telle évolution est donnée à la figure 4.11. Les conditions initiales

à  $t = 0$  correspondent au résultat obtenu à  $R = 23$ . Le nombre de Rayleigh est fixé à 20 et le calcul numérique est amorcé. A  $t = 8$ , des cellules de convection dans le sens naturel sont déjà formées près des parois latérales. A mesure que les calculs progressent, ces cellules s'amplifient et finissent par fusionner, donnant lieu à un écoulement unicellulaire naturel.

La surface de solution tridimensionnelle,  $\Psi_C$  vs  $a$ ,  $R$ , peut aussi être intersectée par des plans  $\Psi_C - a$  correspondant à différentes valeurs de  $R$ . On obtient ainsi les lignes de contour illustrées à la figure 4.12. Pour  $a > 0$ , les courbes situées en bas de l'abscisse et au-dessus de l'abscisse représentent respectivement des états naturels et antinaturels. Le contraire prévaut pour  $a < 0$ . En particulier, on peut noter que pour une valeur donnée de  $R$ , il existe une valeur critique  $a_R$  définissant l'état antinaturel. On peut également observer sur ce graphique la correspondance quasi parfaite entre les résultats analytiques et numériques.

Lorsque  $a$  devient important, le chauffage latéral exerce une influence prépondérante sur l'écoulement. Il y a donc, comme on peut le constater sur la surface courbe tridimensionnelle, figure 4.7, ou ses projections, figure 4.8 et 4.12, une limite extrême pour  $a$ , à un nombre de Rayleigh donné, au-delà de laquelle une solution antinaturelle devient impossible théoriquement, c'est-à-dire selon les résultats analytiques basé sur l'écoulement parallèle. La figure 4.13. représente cette limite théorique pour  $a$  en fonction de  $R$ .

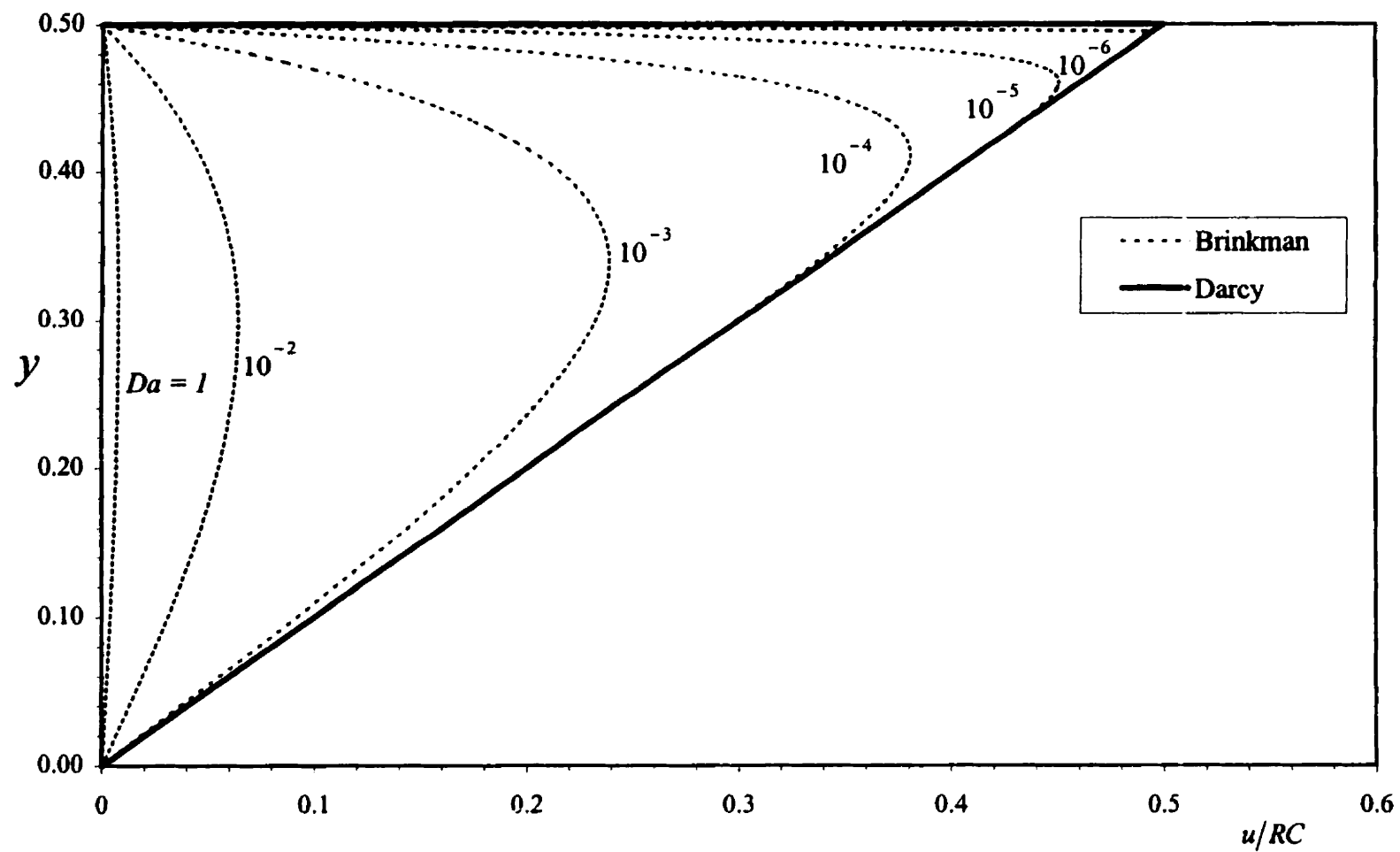


Figure 4.1 Profils de vitesse à différents nombres de Darcy



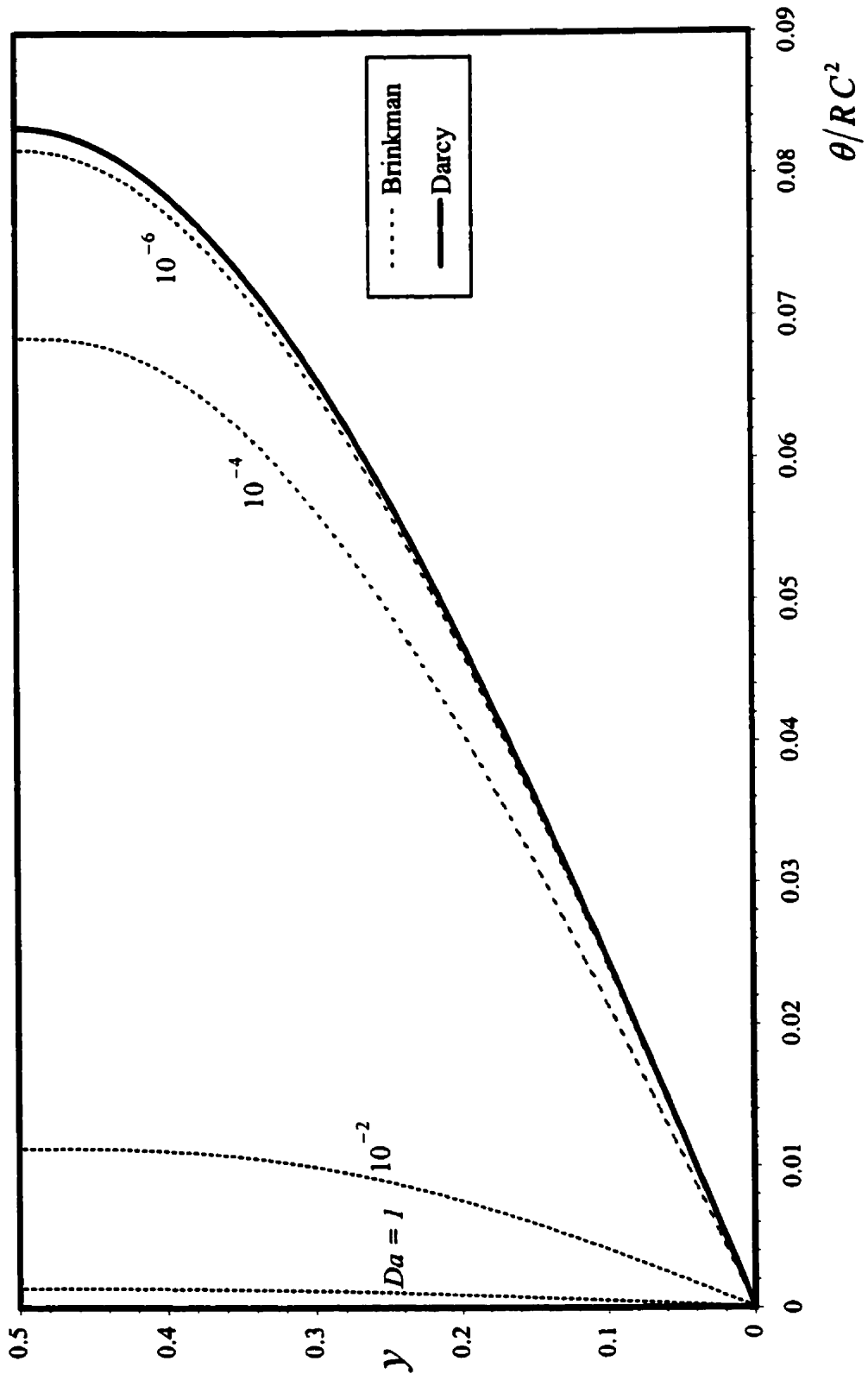


Figure 4.2 Profils de température à différents nombres de Darcy

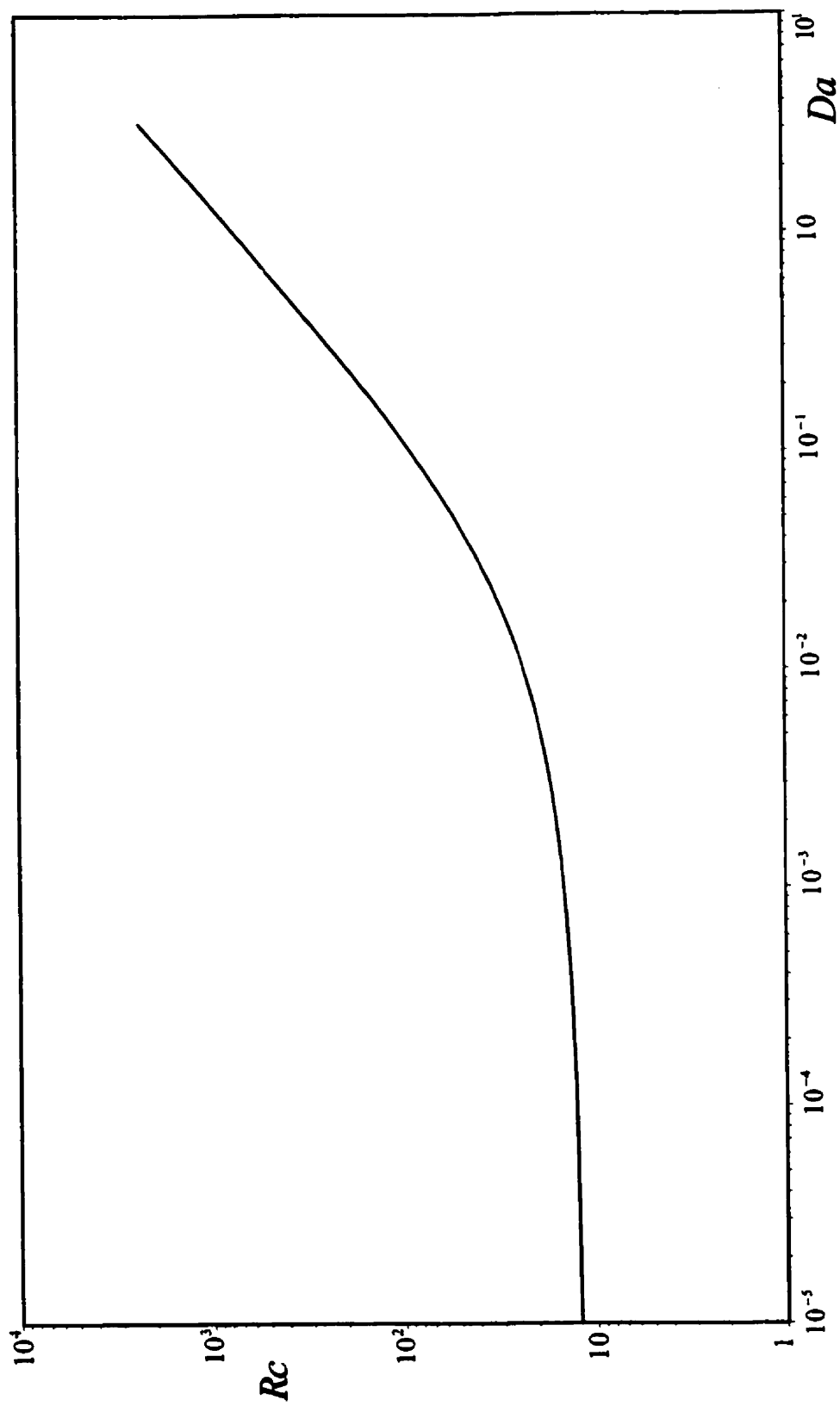
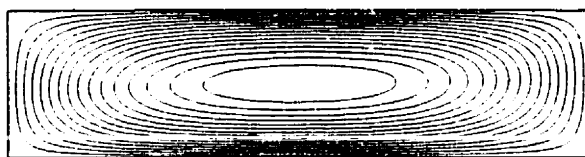
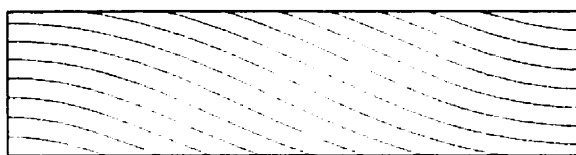


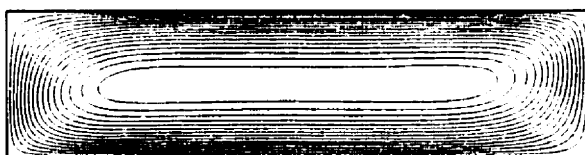
Figure 4.3 Nombre de Rayleigh critique  $R_c$  en fonction du nombre de Darcy



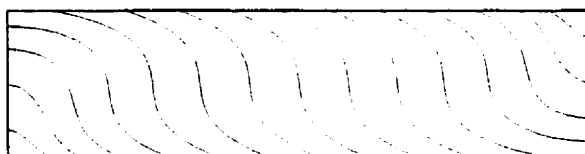
$$\Psi_c = -0.661$$



( a )  $R = 15$



$$\Psi_c = -2.442$$



( b )  $R = 50$

Figure 4.4 Chauffage par le bas ( $a = 0$ ,  $A = 4$ ) – Effet du nombre de Rayleigh.



$t = 2.5$



(a)



$t = 7.5$



(b)



$t = 50$



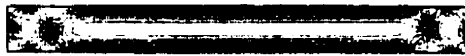
(c)



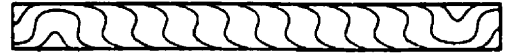
$t = 150$



(d)



$t = 300$



(e)



$t = 400$



(f)

Figure 4.5 : Évolution des lignes de courant en fonction du temps  $t$  - Impulsion initiale comportant.

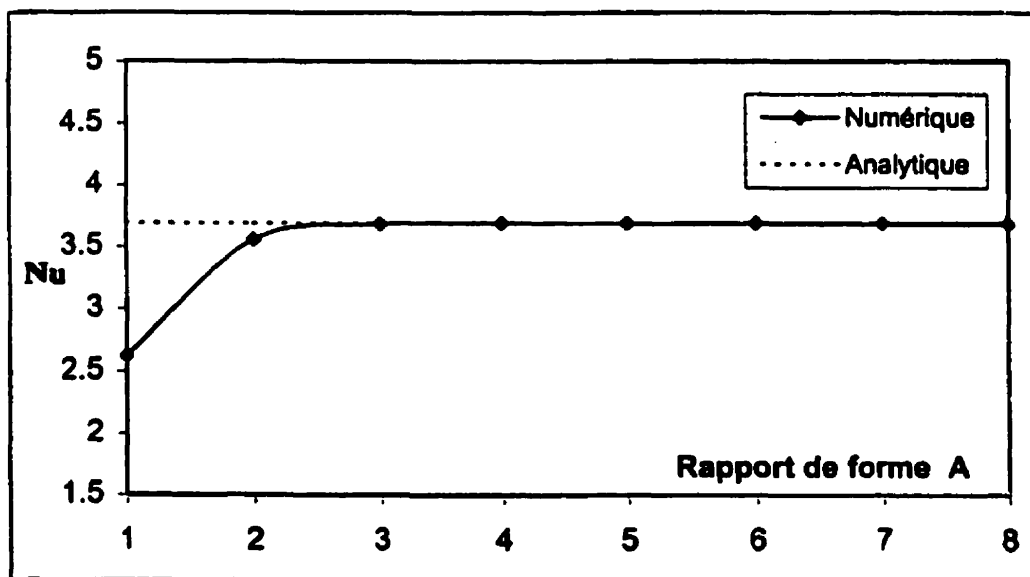
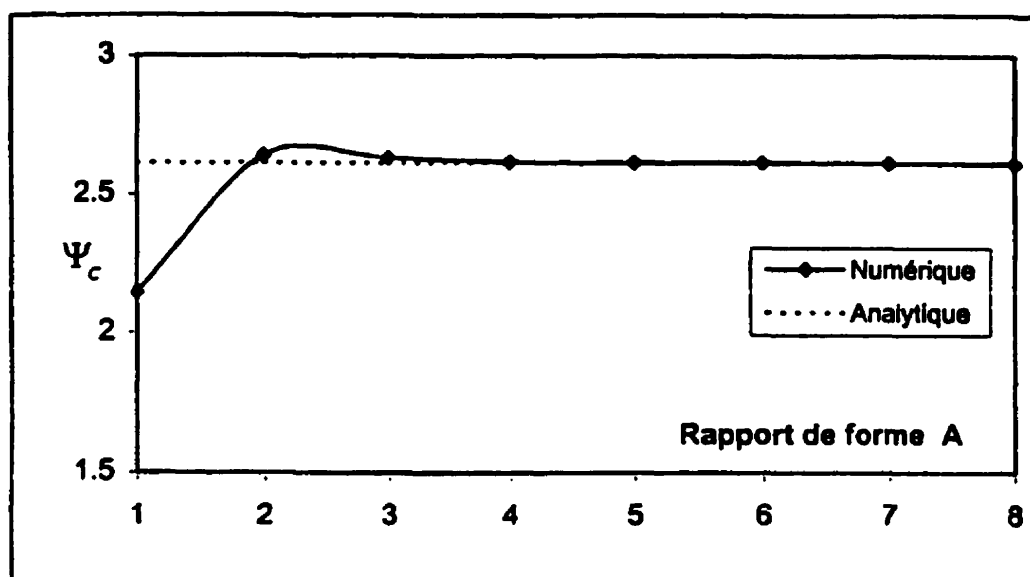


Figure 4.6 Effet du rapport de forme  $A$  sur la fonction de courant au centre et le nombre de Nusselt pour un  $R = 50$  et  $a = 0.2$ .

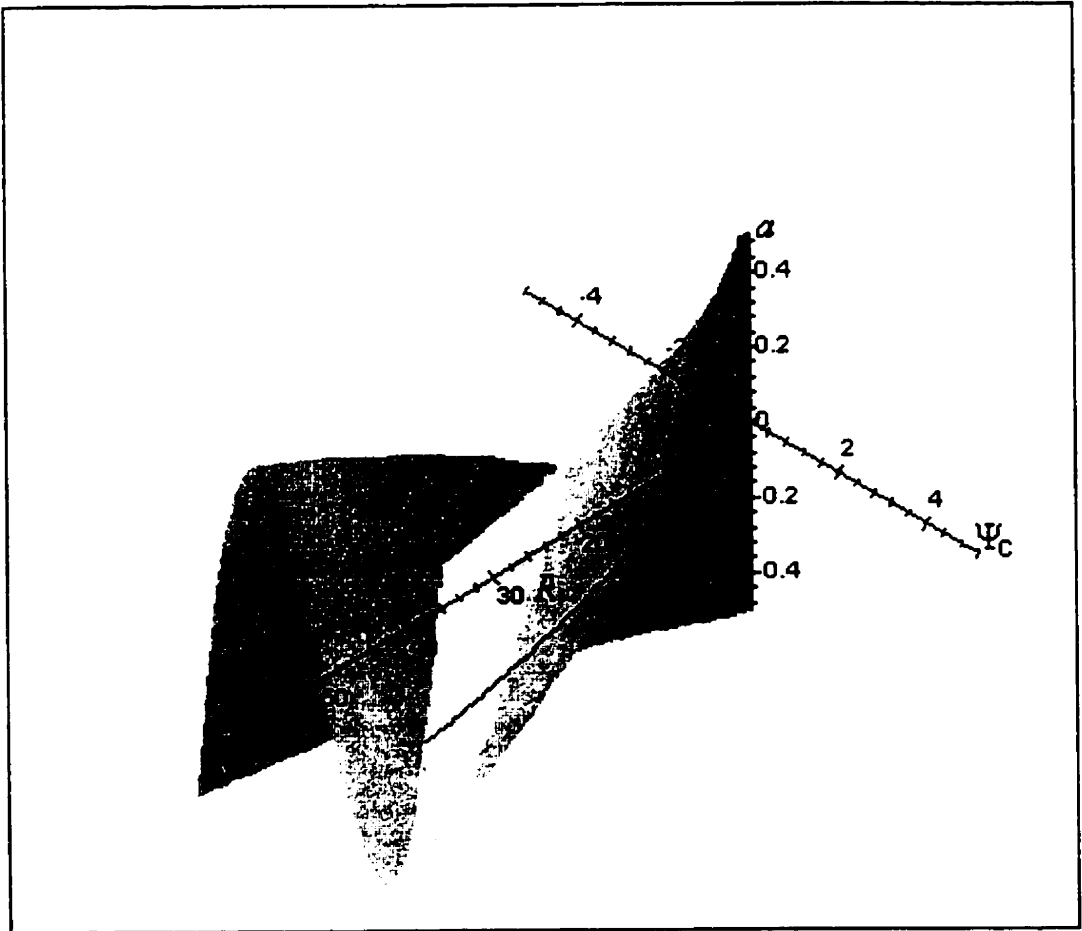


Figure 4 .7 Surface courbe représentant la solution analytique  $\psi_c$  en fonction du nombre de Rayleigh  $R$  et de  $a$ .

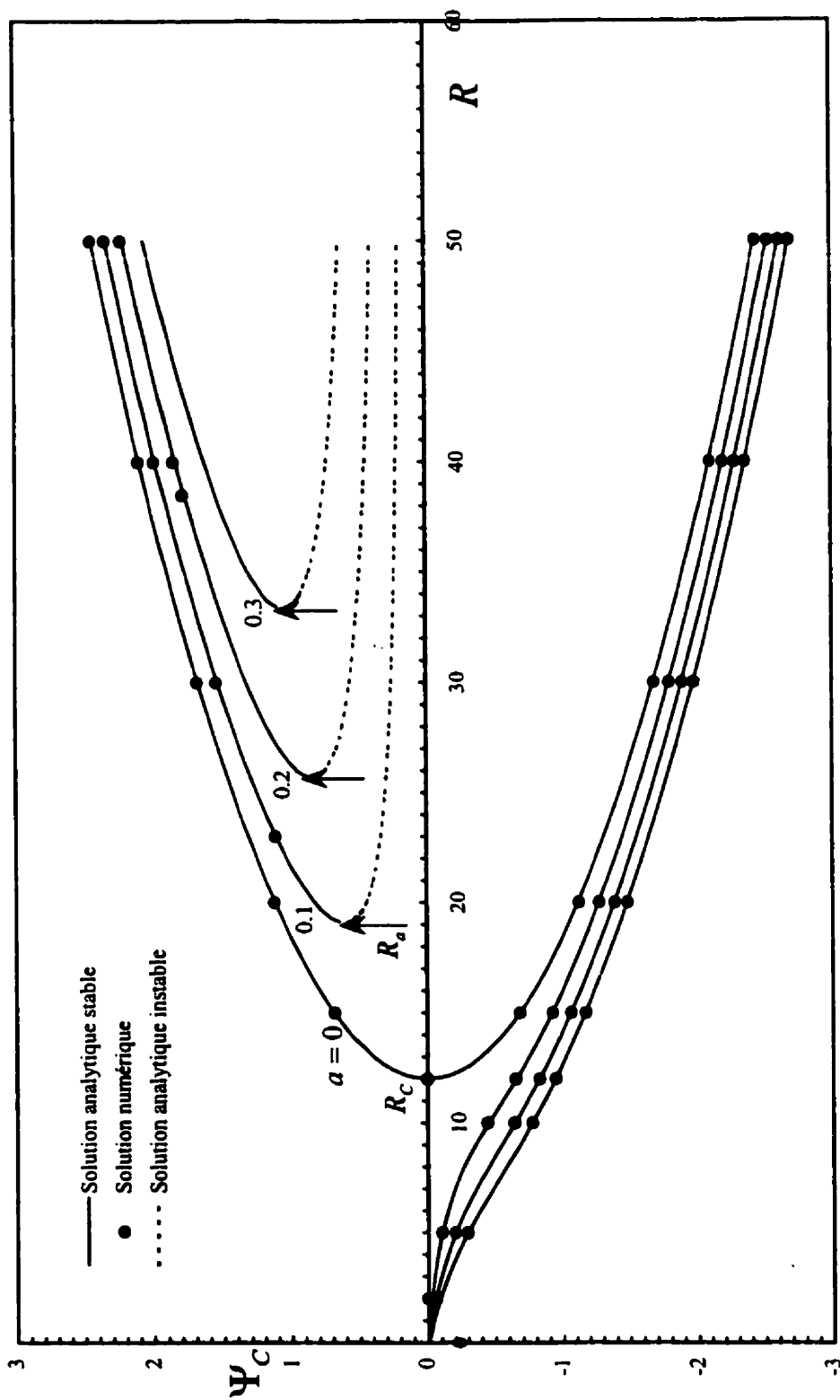


Figure 4.8 Intensité de l'écoulement  $\Psi_C$  en fonction du nombre de Rayleigh  $R$  et de

$a$ .  $R_C$  et  $R_a$  sont des nombres de Rayleigh critiques.

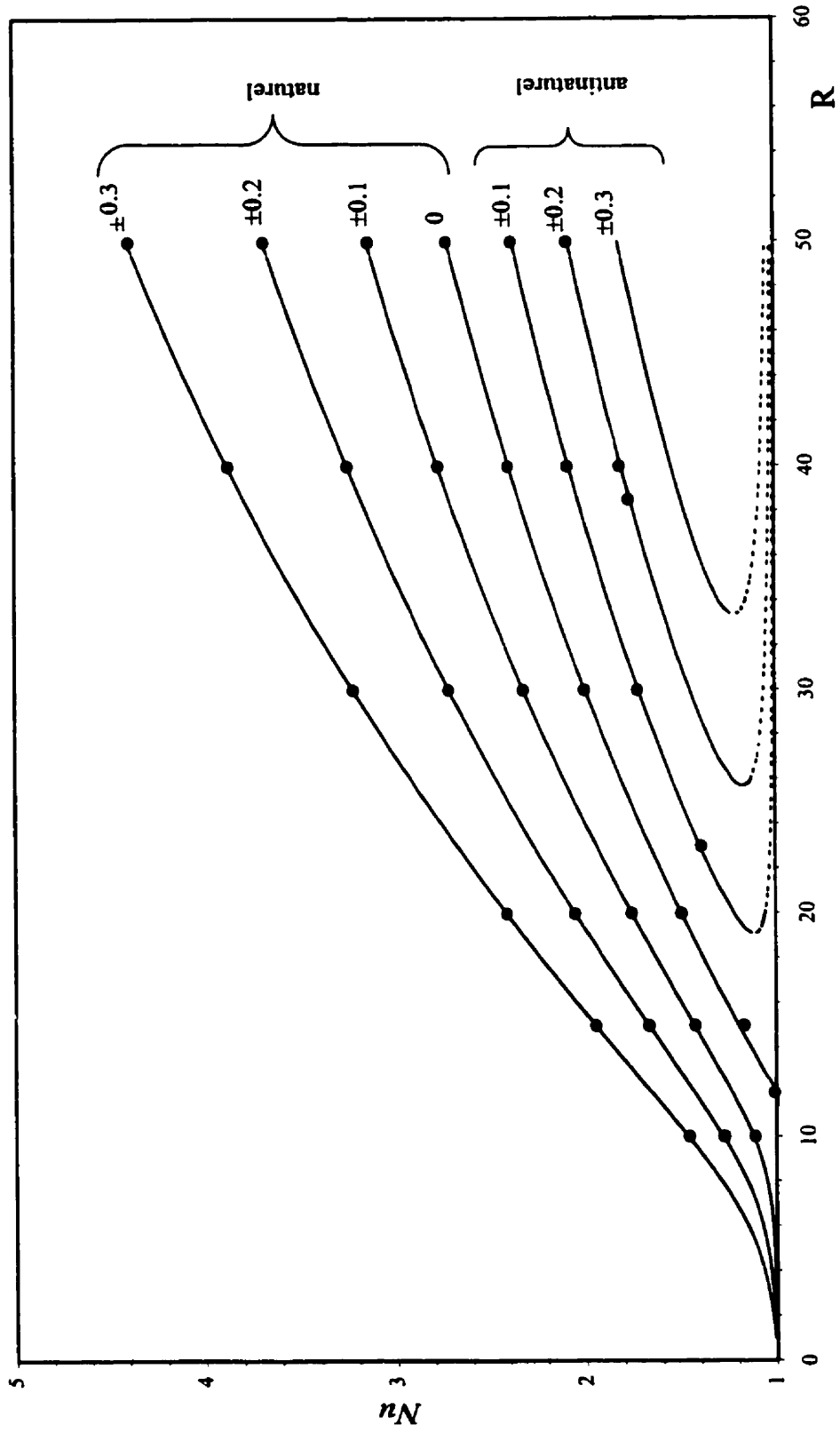


Figure 4.9 Nombre de Nusselt  $Nu$  en fonction du nombre de Rayleigh  $R$  et de  $\alpha$ .



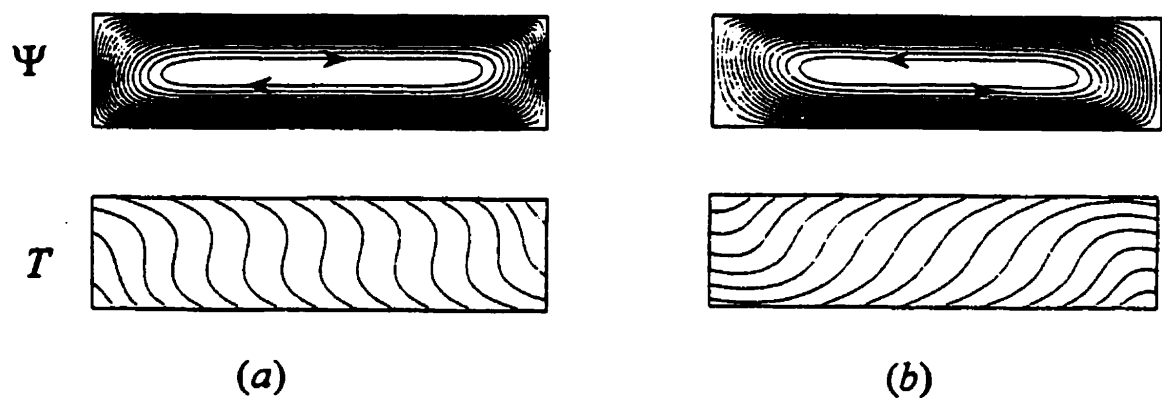


Figure 4.10 Isotherme et lignes de courant pour le cas  $R=50$ ,  $A=4$  et  $a=0.2$  : a) Mouvement convectif naturel,  $\Psi_c = -2.618$  et b ) Mouvement convectif antinaturel,  $\Psi_c = 2.218$ .

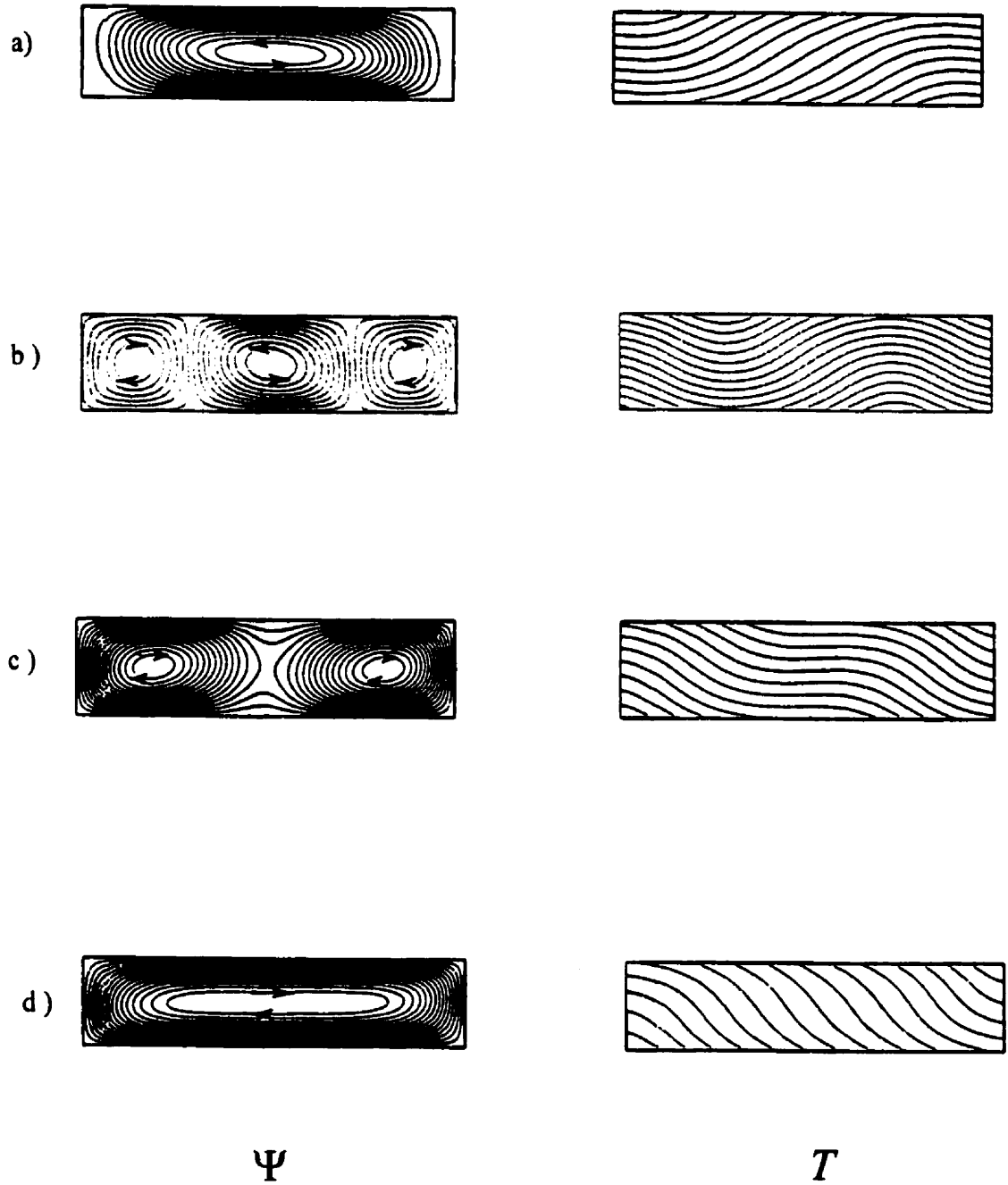


Figure 4.11 Évolution des isothermes et lignes de courant en fonction du temps au temps  
a )  $t = 0$ , b )  $t = 8$ , c )  $t = 15$  et d )  $t = 30$  ) pour le cas  $R = 20$ ,  $a = 0.1$  et  $A = 4$ .

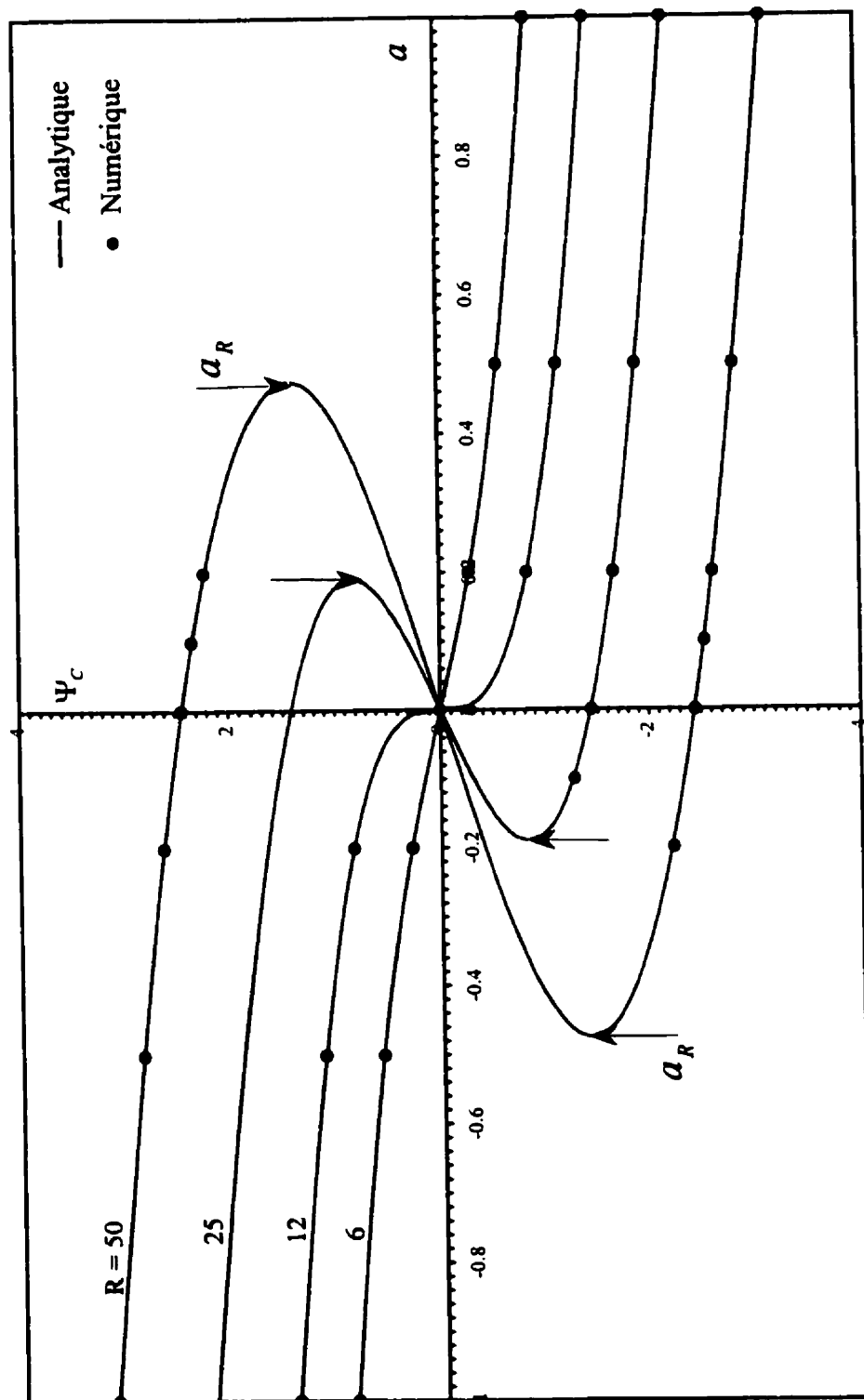


Figure 4.12 Intensité de l'écoulement en fonction de  $a$ ,  $R$  servant de paramètre ( $a_R$  définit l'intensité critique du chauffage latéral).

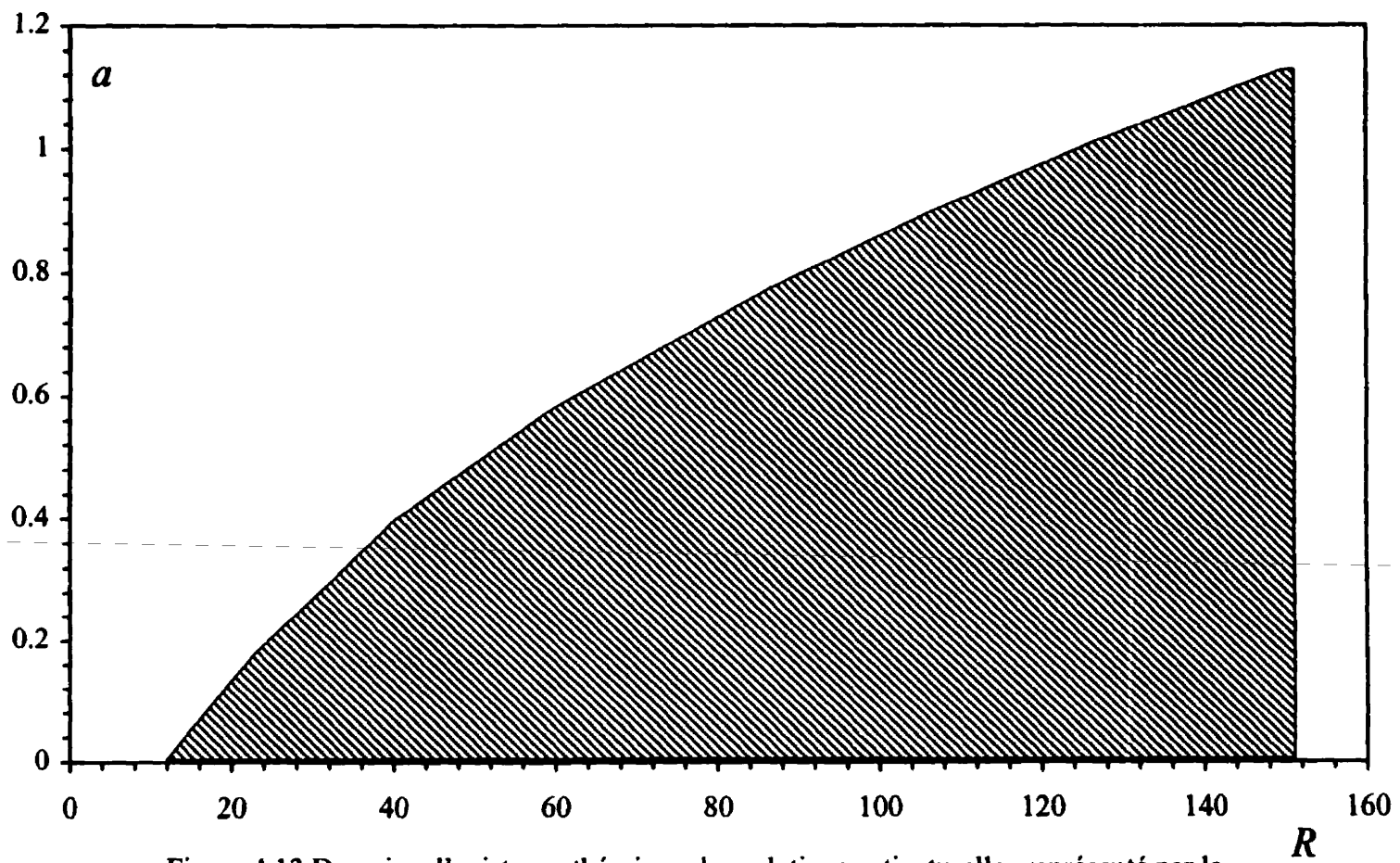


Figure 4.13 Domaine d'existence théorique des solutions antinaturelles représenté par la surface hachurée

## CONCLUSION

L'étude présentée dans ce mémoire portait sur un milieu de Brinkman confiné dans une cavité horizontale allongée avec conditions thermiques de flux de chaleur imposés aux parois. On cherchait plus particulièrement à déterminer l'influence d'un flux latéral superposé au flux vertical, le flux vertical seul donnant lieu à une instabilité de Bénard.

Le problème a été abordé selon deux approches différentes : l'une analytique, basée sur la théorie des écoulements parallèles en cavité allongée ; l'autre purement numérique, basée sur un schéma aux différences finies. L'influence de chacun des paramètres du problème a été discutée dans ce mémoire. Ces paramètres sont le rapport de forme ( $A$ ) le nombre de Darcy ( $Da$ ), le nombre de Rayleigh ( $R$ ) et le rapport flux de chaleur latéral divisé par le flux de chaleur vertical ( $a$ ).

Un rapport de forme  $A \gg 1$  correspond à ce qu'on a convenu d'appeler une cavité allongée. Il a été démontré numériquement qu'une situation asymptotique est atteinte en augmentant le rapport de forme, les autres paramètres étant maintenus constants. Cette situation asymptotique correspond à l'écoulement parallèle à la base de la méthode analytique.

L'effet du nombre de Darcy sur les profils de vitesse et de température a été illustré. On a également calculé théoriquement, à partir de l'approche analytique, le nombre de Rayleigh critique en fonction du nombre de Darcy. On a également montré comment les limites asymptotiques d'un milieu de Darcy et d'un milieu fluide étaient atteintes lorsqu'on fait tendre  $Da$  vers zéro et vers l'infini respectivement.

Dans le cas d'un chauffage uniquement par le bas ( $a = 0$ ) on a illustré, par des calculs numériques transitoires, le fait qu'un écoulement comportant initialement une multiplicité de cellules de convection évolue lentement vers une seule et unique cellule de convection, ce qui donne lieu, en cavité allongée, à un écoulement parallèle.

Ces quelques aspects déjà mentionnés sont intéressants en eux-mêmes, entre autres, en ce qu'ils confirment certaines particularités déjà établies concernant les écoulements parallèles. Cependant l'aspect essentiel et inédit de ce travail portait sur l'étude du paramètre  $a$  et de ses effets. Comme il a été dit au Chapitre 4, le paramètre  $a$  constitue une imperfection apportée à la bifurcation située à  $R = R_c = 12$ , dans le cas d'un chauffage par le bas au moyen d'un flux de chaleur constant. Le grand avantage de l'écoulement parallèle réside dans le fait qu'une solution analytique complète de la bifurcation avec  $a \neq 0$  a pu être établie. Cette solution tient compte, non seulement de  $a$ , mais aussi de  $Da$ . Le comportement de la solution a été illustré de façon relativement détaillée dans le cas d'un milieu poreux de Darcy ( $Da \rightarrow 0$ ). Plus particulièrement, on a montré l'existence de solutions multiples comportant des branches continues ou " naturelles " et des branches isolées ou " antinaturelles ", de même que les limites théoriques d'existence de ces dernières.

Dans la présente étude on a considéré le cas simple d'une imperfection apportée à une bifurcation de type supercritique dans le cas d'un problème classique de Bénard. Il serait intéressant de reconsidérer le même problème pour le cas d'un fluide binaire soumis à des gradients de température et de concentrations combinées. Pour une telle situation le problème de Bénard ( $a = 0$ ) donne lieu à des courbes de bifurcation plus complexes. En particulier il est maintenant bien connu que des régimes de convection sous critique sont possibles. Pour ce type d'écoulement, des solutions analytiques peuvent prédire le comportement d'une imperfection en utilisant une approche analytique similaire à celle décrite dans cette thèse.

## RÉFÉRENCES

1. J.K Platten et J. C. Legros, Convection in Liquids, Springer-Verlag, 1984.
2. A. Bejan, Convection Heat Transfert, John Wiley & Sons, 1984.
3. A. Nield et A. Bejan,. Convection in Porous Media. Springer-Verlag. (1999)
4. B. Ingham et I..Pop, Transport Phenomene in Porous Medium, Pergamon,1998.
5. E. R. Lapwood, Convection of a Fluid in a Porous Medium, Proc. Combridge Philos. Soc., vol. 44, pp.508-521, 1940.
6. C. W. Horton and P.Rogers, Convection Currents in a Porous Medium, J. Appl. Phys, vol.16,pp. 367-370,1945.
7. Y. Katto and T. Masuoka, Criterion for the Onset of Convective Flow in a Fluid in Porous Medium, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.10, pp. 297-309, 1967.
8. K. L. Walker and G. M. Homsy, A Note on Convective Instability in Boussinesq Fluid and Porous Media, J. Heat Transfer. vol. 99, pp. 338-339, 1977.
9. N.Rudraiah, B. Veerappa, and S. Balachandra Rao, Effects of Nonuniform Thermal Gradient and Adiabatic Boundaries on Convection in Porous Media, J. Heat Transfer, vol. 102, pp. 254-260, 1980.
10. B. Chan, C.M Ivery et J. M. Barry, Natural Convection in Enclosed Porous Media with Rectangulaire Boundaries, J. Heat Transfer, vol. 92, pp. 21-27, 1970.

11. K. L. Walker et G. M. Homsy, Convection in a Porous cavity, J. Fluid Mech., vol. 97, pp. 449-474, 1978.
12. A. Bejan et C. L. Tien, Natural Convection in a Horizontal Porous Medium Subjected to an End-to-End Temperature Difference, J. Heat Transfer, vol. 100, pp. 191-198, 1978.
13. C.E. Hickox et D.F. Garthing, A Numerical Study of Natural Convection in a Horizontal Porous Layer Subjected to an End-to-End Temperature Difference, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.103, pp. 797-802, 1981.
14. P.J. Burns, L.C. Chow et C. L. Tien, Convection in a vertical slot Filled with Porous Insulation, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.22, pp. 919-926, 1979
15. .V. Prasad et F. A. Kulacki, Natural Convection in a Vertical Porous Cavity with Constant Flux on one Vertical Wall, A.S.M.E. J. Heat Transfer, vol. 106, pp. 152-152, 1984.
16. B. Amari, P. Vasseur et E. Bilgen, Natural Convection of Non-Newtonian Fluids in a Horizontal Porous Layer, Wärme-und Stoffübertragung, vol. 29, pp. 185-193, 1994.
17. S. Alchaar, P Vasseur, et E. Bilgen, The Effect of A Magnetic Field on Natural Convection in a Shallow Cavity Heated from Below, Chem. Eng. Comm., vol. 134, pp. 195-209, 1995.
18. H. C. Brinkman. On the Permeability of Media Consisting of Closely Packed Porous Particles. Appl. Sci. Res. A1, 81-86. [1.5.3], 1947.
19. J. E. Weber, The Boundary Layer Regime For Convection in a Vertical Porous Layer, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.18, pp. 569-573, 1975.



20. C. G. Bankvall, Natural Convection in a Vertical Permeable Space, *Wärme-und Stoffübertragung*, vol. 7, pp. 22-30, 1974.
21. A. Bejan, On the Boundary Layer Regime in a Vertical Enclosure Filled with a porous Medium, *Lett. Heat Mass Transfer*, vol.6, pp. 93-102, 1979.
22. P. G. Simpkins et P. A. Blythe, Convection in a Porous Layer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.23, pp. 881-887, 1987.
23. G. S. Shiralkar, M. Haadjizadeh et C. L. Tien, Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure, *Num. Heat Transfer*, vol.6, pp. 223-234, 1983.
24. Y. F. Rao et E. K. Glaphe, Natural Convection in a Vertical Slot Filled with Porous Medium, *Int. J. Heat. Fluid. Flow*, vol.31, pp. 97-99, 1992.
25. A. Bejan, The Boundary Layer Regime in a Porous layer with Uniform Heat Flux from the Side, *J. Heat Mass Transfer*, vol.26, pp. 1339-1346, 1983.
26. P. Vasseur , M. G. Satish et L. Robillard, Natural Convection in a Thin Inclined Porous Layer Exposed to a Constant Heat Flux, *Int J. Heat Mass Transfer*, vol.30, pp. 537-549, 1987.
27. M. Sen, P. Vasseur et L. Robillard, Multiple Steady States for Unicellular Natural Convection in an Inclined Porous Layer, *Int J. Heat Mass Transfer*, vol.30, pp. 2097-2113, 1987.
28. M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen and D. Gobin. Double-Diffusive Convection in an Inclined Slot Filled with Porous Medium. *Eur. J. Mechanics, B/Fluids*, 14, 629-652, 1995.

29. M. Mamou, P. Vasseur and E. Bilgen. Double-Diffusive Convection Instability in an Vertical Porous Enclosure. *J. Fluid Mech.*, 368, 263-289.1998.
30. M. Mamou, P. Vasseur and E. Bilgen. A Galerkin Finite Element Study of the Onset of Double-Diffusive Convection in an Inclined Porous Enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41, 1513-1529.1998.
31. M. Mamou and P. Vasseur. Thermosolutale Bifurcation Phenomena in Porous Enclosures Subject to Vertical Temperature and concentration Gradients. *J. Fluid. Mech*, Under Press. (1999).
32. M. Sen, P. Vasseur et L. Robillard, Parallel Flow Convection in a Tilted Two-Dimenssional Porous Layer Heated From All Sides, *Phys. Fluids*, vol.31, pp. 3480-3487, 1988.
33. T.H. Nguyen, "Bifurcation des écoulements convectifs dans une cavité soumise aux flux de chaleur uniformes " 2<sup>ème</sup> Colloque France-Acadie, Moncton , Canada 121 (1998).
34. S. Kimura, M. Vynnycky. et F. Alavyoon, "Unicellular Natural Circulation in a Shallow Horizontal Porous Layer Heated from Below by a Constant Flux " *J. Fluid Mech.* 294, 231 (1995).
35. M. Mamou. Convection Thermosolutale dans les Milieux Poreux et Fluides Confinés. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada. (1998)
36. M. Mahidjiba. Convection Naturelle Thermosolutale au sein d'une Couche Poreuse Horizontale. Thèse de Maîtrise Ès Sciences Appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada. (1998).

37. D. A. Nield. Onset of Thermohaline Convection in a Porous Medium. *Water Resources Res.* 11, 553-560. 1968.
38. P. Vasseur , C. H. Wang et M. Sen, The Brinkman Model for Natural Convection in a Shallow Porous Cavity with Uniform Heat Flux, Numerical. *Heat Transfer, part A*, vol 15, pp. 221-242, 1989.
39. H. C. Brinkman. On the Permeability of Media Consisting of Closely Packed Porous Particles. *Appl. Sci. Res.* A1, 81-86. [1.5.3], 1947.
40. I. Anochiravani. Convection Naturelle au sein d'un Milieu Poreux Confiné dans une Enceinte Rectangulaire Soumise à un Flux de Chaleur Constant. Thèse de Maîtrise Ès Sciences Appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada. (1985).
41. D. E. Cormack, L. G. Leal, and J. H. Seinfeld, Natural Convection in a Shallow Cavity with Differentially Heated end Walls. Part 2 : Numerical Solutions, *J. Fluid mech.*, Vol. 65, 1974, pp. 231-246.