UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE L'INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE DE PLAQUES GÉOMÉTRIQUEMENT IMPARFAITES

LYNE ST-GEORGES
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE MÉCANIQUE)
SEPTEMBRE 2000

© Lyne St-Georges, 2000.

National Library of Canada
Acquisitions and Bibliographic Services
395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale du Canada
Acquisitions et services bibliographiques
395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-57384-2

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE L'INSTABILITÉ PARAMÉTRIQUE DE PLAQUE GÉOMÉTRIQUEMENT IMPARFAITES

présentée par: ST-GEORGES Lyne

en vue de l'obtention de: Philosophiae Doctor

au jury d'examen constitué de:

M. ROUSSELET Jean, Ph.D., président

M. OSTIGUY Germain, Ph.D., membre et directeur de recherche

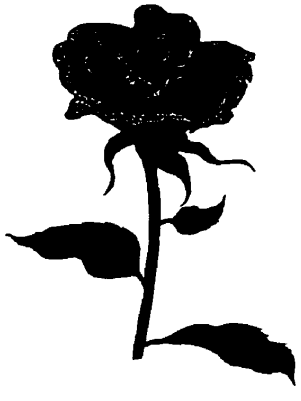
M. LAKIS Aouni A., Ph. D., membre

M. McCOMBER Pierre, Ph. D., membre externe

À ma mère,

celle qui m'a encouragée à aller toujours plus loin,
celle qui m'a montré à me dépasser et à donner sans compter,

pour qu'à jamais en moi son esprit demeure...



REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le professeur Germain Ostiguy pour m'avoir proposé ce sujet de recherche, pour l'aide financière et tout le soutien nécessaire qu'il m'a apporté au cours de mes travaux. Je remercie également le fond de bourse FCAR pour la bourse d'excellence qui m'a été accordée.

Mes remerciements vont aussi au personnel technique et aux étudiants de la section mécanique appliquée pour leur support technique et moral au cours de mes études graduées dans cette section.

Je remercie aussi tous les membres de ma famille et toutes les personnes qui m'ont apporté le soutien et le courage nécessaires pour terminer mes études. Finalement, je ne puis passer sous silence l'apport précieux de ma mère qui m'a encouragée à entreprendre ces études, sans toutefois avoir pu voir l'aboutissement de mes efforts.

RÉSUMÉ

Cet ouvrage porte sur l'influence des imperfections géométriques initiales sur le comportement dynamique de plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique. Ce sujet a été abordé à l'aide de modèle théorique par le passé, mais à ce jour aucun résultat expérimental ne semble permettre d'en faire une validation précise. Cette thèse a donc pour principal objectif de remédier à cette lacune en effectuant une étude expérimentale du comportement de plaques imparfaites dans le but de mettre en relief les effets des imperfections géométriques sur l'allure des courbes de résonance. En second lieu, elle a comme but de pouvoir procéder à une validation du modèle théorique utilisé par le passé.

La plaque étudiée est rectangulaire, mince, isotrope, élastique, homogène, avec une légère déviation de l'état plan (imperfection géométrique). Elle est excitée dans son plan par des forces uniformément distribuées le long de deux arêtes opposées. De plus, la plaque est libre de contrainte interne lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur elle. Quatre types de support sont considérés : (1) les quatre arêtes de la plaque sont simplement supportée, (2) les deux arêtes chargées sont simplement supportées et les deux autres sont encastrées, (3) les deux arêtes chargées sont encastrées et les deux autres sont simplement supportées, (4) les quatre arêtes sont encastrées.

Les travaux expérimentaux ont été effectués conjointement avec une étude théorique. Les équations utilisées pour décrire le mouvement latéral de la plaque sont une version dynamique des équations de Von Kármán pour les grandes déformations et incluent la présence d'imperfections géométriques initiales. Ces équations tiennent compte de l'étirement de la surface moyenne mais négligent le cisaillement et l'inertie de rotation. Une méthode d'intégration directe est utilisée pour solutionner ces équations. L'intégrateur utilisé est basé sur l'algorithme d'Adams-Bashforth de troisième ordre.

Le montage expérimental utilisé permet de simuler les conditions aux limites de support simple et d'encastrement. De plus, des plaques ayant différents rapports de forme et peuvent être fixées dans le montage. Les imperfections géométriques des plaques étudiées sont façonnées suivant une forme similaire au premier et deuxième mode de vibration, avec l'amplitude voulue.

Une comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux a pu être effectuée pour déterminer la validité du modèle théorique et ses limites. Pour les imperfections d'amplitude inférieure à l'épaisseur de la plaque, le modèle théorique décrit bien le comportement observé.

Les résultats temporels obtenus numériquement et expérimentalement montrent que les imperfections peuvent modifier le comportement non linéaire des résonances paramétriques. Le comportement global du type ressort dur se transforme en un comportement du type ressort mou pour les vibrations de faible amplitude, suivi d'un comportement en ressort dur pour les vibrations de grande amplitude. Le passage d'un type de comportement à l'autre est caractérisé par un phénomène de saut en début de résonance paramétrique. La présence du comportement en ressort mou est influencé par l'amplitude et la forme de l'imperfection, la grandeur du chargement statique, le mode de vibration et le rapport de forme de la plaque. Les zones d'instabilité paramétrique ne sont toutefois pas modifiées par les imperfections géométriques.

D'autre part, les imperfections modifient les fréquences naturelles des plaques. De plus, les vibrations sont asymétriques par rapport à la position d'équilibre statique. La plaque se déforme plus du côté intérieur de la courbure, côté pour lequel le mouvement diminue la courbure initiale.

ABSTRACT

This study deals with the effects of initial geometric imperfections on the dynamic behaviour of rectangular plates activated by a parametric excitation. This subject has been mainly theoretically investigated in the past, but no experimental data seems to be complete enough to validate the theory. The main objective of this thesis is to fill this void by performing experimental tests on geometrically imperfect plates, and to highlight the geometric imperfection's influence on resonance's curves.

The study is carried out for an isotropic, elastic, homogeneous, and thin rectangular plate. This plate is subjected to the action of an in-plane force uniformly distributed along two opposite edges. The plate under investigation is initially stress free. Four sets of boundary conditions are considered: (1) all edges are simply supported, (2) loaded edges are simply supported and the other two are loosely clamped, (3) loaded edges are loosely clamped and the other two are simply supported, (4) all edges are clamped.

Theoretical calculation and experimental tests have been performed. In the theoretical approach, a dynamic version of the Von Kármán non-linear theory is used to evaluate the lateral displacement of the plate. The temporal equations used included the presence of geometric imperfections and considered mid-plane stretching. However, shear stress and rotational inertia are neglected. A direct integration method is used to solve these temporal equations. This resolution is performed by a third order Adams-Bashforth integrator and converges rapidly to the solution.

The test rig used in the experimentation simulate simply supported and loosely clamped edges. Moreover, plates with different aspect ratio can be fixed in it. The test plates are pre-formed with lateral deflection or geometrical imperfections, in a shape corresponding to the first and second vibration mode.

Comparison between experimental and theoretical results reveals good agreement and allowed the determination of the theory's limitations. The theory used correctly describes the behaviour of the plate when imperfection amplitude is inferior to the plate thickness.

Numerical and experimental results show that imperfections can modify the non-linear parametric resonant behaviour. The well-known hard-spring behaviour of the principal parametric resonance curve becomes a soft-spring behaviour for small vibration amplitudes. However, for large vibration amplitudes, the curve exhibits the usual hard-spring behaviour. This kind of resonance curve is characterised by a jump phenomenon at the beginning of the parametric resonance. The soft-spring behaviour is influenced by the size and the shape of the imperfection, the amplitude of static force, the vibration mode and the aspect ratio of the plate. Parametric instability regions are not modified by geometrical imperfections.

Furthermore, the natural frequencies increase with increasing levels of imperfection. The temporal response obtained is non-symmetric relative to the static equilibrium position. A predominant inward deflection response (towards the imperfection centre of curvature) of the imperfect plate is found.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv
REMERCIEMENTS v
RÉSUMÉ vi
ABSTRACT viii
TABLE DES MATIÈRES x
LISTE DES TABLEAUX xiv
LISTE DES FIGURES xv
LISTE DES SYMBOLES xxv
LISTE DES ANNEXES xxviii

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I: HISTORIQUE DE LA RECHERCHE 4
1.1- Problème physique considéré 4
1.2 - Revue historique et littéraire 6
1.3 – Buts et plan de la recherche 17

CHAPITRE II: APPROCHE THÉORIQUE 19
2.1 - Introduction 19
2.2 - Équations de base utilisées 19
2.3 - Conditions aux limites 22
2.3.1 - Conditions naturelles 22
2.3.2 - Conditions géométriques 22
2.4 - Développement des équations de base 24
2.5 - Solution de l'équation de compatibilité et de l'équation d'équilibre 28
2.5.1 - Solution de l'équation de compatibilité 28

2.5.2 - Solution de l'équation d'équilibre.....31
2.5.3 - Cas statique.....34
2.6 - Solution des équations temporelles du mouvement..... 38

CHAPITRE III: APPROCHE EXPÉRIMENTALE.....44
3.1 - Introduction..... 44
3.2 - Montage expérimental..... 44
3.2.1 - Système de chargement.....45
3.2.2 - Système de mesure.....60
3.3 - Spécimens utilisés..... 62
3.3.1 - Matériau utilisé.....62
3.3.2 - Moule et procédure de mise en forme.....66
3.4 - Étalonnage des instruments..... 72
3.4.1 - Capteur capacitif de déplacement.....72
3.4.2 - Cellules de charge piézoélectriques.....73
3.4.3 - Anneau dynamométrique.....76
3.5 - Procédure expérimentale..... 77
3.5.1 - Système d'acquisition de données.....77
3.5.2 - Mesure des imperfections.....78
3.5.3 - Mesure de la forme des modes de vibration.....79
3.5.4 - Mesure de l'amortissement.....79
3.6 - Élaboration des courbes de résonance..... 82
3.6.1 - Étude des résonances multiples.....83
3.6.2 - Étude en régime stationnaire.....83
3.6.3 - Étude en régime non stationnaire.....84

CHAPITRE IV: RÉSONANCES DES PLAQUES IMPARFAITES.....85
4.1 - Introduction..... 85
4.2 - Descriptions des plaques étudiées..... 85

4.3 - Comportement statique 89
4.4 - Comportement dynamique 96
4.4.1 - Résonances paramétriques et forcées 97
4.4.3 - Résonance internes 101
4.4.4 - Résonance combinées 102
4.5 - Réponse temporelle: asymétrie des vibrations 103
4.5.1 - Influence du chargement statique 106
4.5.2 - Influence du mode de vibration 106
4.5.3 - Influence de l'amplitude de l'imperfection 113
4.5.4 - Explication des l'asymétrie des vibrations et du comportement global des résonances paramétriques 113
4.6 - Zone d'instabilité paramétrique 115
4.6.1 - Approche théorique 116
4.6.2 - Approche expérimentale 127
4.6.3 - Influence de la forme et de l'amplitude de l'imperfection 131
4.6.4 - Influence du taux d'amortissement 139
4.7 - Résonances paramétriques 141
4.7.1 - Validation du modèle théorique 142
4.7.2 - Influence de l'amplitude de l'imperfection 153
4.7.3 - Influence de la forme de l'imperfection 153
4.7.4 - Influence du chargement statique 161
4.7.5 - Influence du chargement dynamique 168
4.7.6 - Influence des conditions aux limites 168
4.7.7 - Réponse non stationnaire 176
4.8 - Influence des imperfections géométriques sur les fréquences naturelles 181
4.9 - Forme des modes de vibration 191
4.10 - Résonances internes 195
4.10.1 - Rapport de forme optimal 196
4.10.2 - Résonances forcées et résonances internes 204

4.11 - Conclusion 207

CHAPITRE V: MÉCANISMES D'INTERACTION 208

5.1 - Introduction 208

5.2 - Interaction entre résonances forcées et paramétriqes 208

5.3 - Interaction entre résonances de même type 213

5.4- Conclusion 219

CONCLUSION 220

RÉFÉRENCES 223

ANNEXES 238

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 – Programmes utilisés pour procéder à l'intégration numérique 42
Tableau 3.1 - Liste des instruments utilisés 47
Tableau 3.2 - Effets des supports utilisés sur les dimensions théoriques des plaques 58
Tableau 3.3 - Description du système d'acquisition de données 61
Tableau 3.4 - Description des programmes LabVIEW utilisés 77
Tableau 4.1 - Dimensions et imperfections des plaques étudiées 87

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 - Modèle de la plaque imparfaite 20
Figure 2.2 - Diagramme illustrant la procédure de calcul utilisée 43
Figure 3.1 - Montage expérimental et instruments, vue de face 48
Figure 3.2 - Montage expérimental, instruments et SAQ, vue frontale 49
Figure 3.3 - Montage expérimental, vue de côté 50
Figure 3.4 - Montage expérimental, vue de face 51
Figure 3.5 - Montage expérimental et amplificateur de puissance, vue frontale 52
Figure 3.6 - Diagramme de branchement des instruments 53
Figure 3.7 - Arête verticale simplement supportée 54
Figure 3.8 - Arête verticale encastrée 54
Figure 3.9 - Poutrelles de chargement, arêtes simplement supportées 55
Figure 3.10 - Poutrelles de chargement, arêtes encastrées 56
Figure 3.11 - Forme des plaques utilisées dans la montage 59
Figure 3.12 - Moule, vue supérieure et détail des supports de la feuille d'acier 67
Figure 3.13 - Moule utilisé pour façonner les plaques imparfaites, vue de côté 67
Figure 3.14 - Moule, vue du dessous et détail des points d'ancrage de la feuille d'acier (en traction) 68
Figure 3.15 - Diagramme de chauffage utilisé pour façonner les plaques 71
Figure 3.16 - Courbe d'étalonnage du capteur capacitif de déplacement 73
Figure 3.17 - Courbe d'étalonnage de la poutrelle utilisée pour l'étalonnage des cellules de charge piézoélectriques 74
Figure 3.18 - Réponse typique des cellules de charge à un déchargement soudain 74
Figure 3.19 - Courbe d'étalonnage des cellules de charge piézoélectriques 75
Figure 3.20 - Courbe d'étalonnage de l'anneau dynamométrique 76
Figure 3.21 - Réponse libre amortie utilisée pour le calcul du décrément d'amortissement 81

4.1 - Effet de l'ajout de la peinture conductrice sur la courbe de traction du polymère utilisé pour la conception des plaques 87
Figure 4.2 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, S^cS, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$ 91
Figure 4.3 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, S^cE, $m^* = 3$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$ 91
Figure 4.4 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, E^cS, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$ 92
Figure 4.5 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, E^cE, $m^* = 3$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$ 92
Figure 4.6 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P3, S^cS, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (0{,}451, -0{,}051, 0{,}020)$ 93
Figure 4.7 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P2, S^cS, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (0{,}178, 0{,}021, 0{,}017)$ 93
Figure 4.8 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P5, S^cS, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (-0{,}081, 0{,}209, -0{,}028)$ 94
Figure 4.9 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P6, S^cS, $m^* = 1$, $w_{0i}/h = (0{,}721, 0{,}165, 0{,}114)$ 94
Figure 4.10 - Courbes de résonances possibles pour une plaque imparfaite, partie stable et instable et régions d'instabilité paramétrique 99
Figure 4.11 - Allure des réponses fréquentielles obtenues avec l'intégration directe ... 100
Figure 4.12 - Représentation physique de la terminologie utilisée pour décrire l'asymétrie des vibrations d'une plaque géométriquement imparfaite 104
Figure 4.13 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^cS, comparaison entre résultats expérimentaux et numériques 105
Figure 4.14 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^cS, comparaison entre résultats expérimentaux et numériques 105
Figure 4.15 - Réponse temporelle du 3ème mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^cS, comparaison entre résultats expérimentaux et numériques 105

Figure 4.16 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^{c}S 107
Figure 4.17 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^{c}S 107
Figure 4.18 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^{c}S 107
Figure 4.19 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0489$, S^{c}S..... 108
Figure 4.20 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0489$, S^{c}S 108
Figure 4.21 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0489$, S^{c}S 108
Figure 4.22 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,27$, $\mu = 0,0562$, S^{c}S..... 109
Figure 4.23 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,27$, $\mu = 0,0562$, S^{c}S 109
Figure 4.24 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,27$, $\mu = 0,0562$, S^{c}S 109
Figure 4.25 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P2, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$..... 110
Figure 4.26 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$..... 110
Figure 4.27 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$..... 110
Figure 4.28 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P2, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.... 111
Figure 4.29 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.... 111
Figure 4.30 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.... 111
Figure 4.31 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P2, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.... 112
Figure 4.32 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.... 112
Figure 4.33 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.... 112
Figure 4.34 - Élaboration d'une zone d'instabilité paramétrique 117

Figure 4.35 – Influence des vibrations forcées sur le calcul numérique des limites de la zone d'instabilité 118
Figure 4.36 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2 P_{cr} = 0,11 120
Figure 4.37 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,11, sans terme de vibration forcée 120
Figure 4.38 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,15 121
Figure 4.39 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,15, sans terme de vibration forcée 121
Figure 4.40 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,11 122
Figure 4.41 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr}=0,11, sans terme de vibration forcée 122
Figure 4.42 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr}= 0,15 123
Figure 4.43 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr}=0,15, sans terme de vibration forcée 123
Figure 4.44 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,11 124
Figure 4.45 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,11, sans terme d'excitation forcée 124
Figure 4.46 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,15 125
Figure 4.47 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,15, sans terme d'excitation forcée 125
Figure 4.48 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, S^{c}S, n_{y0} = 20N 129
Figure 4.49 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, S^{c}S, n_{y0} = 30N 129
Figure 4.50 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, S^{c}S, n_{y0} = 50N 129

Figure 4.51 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque 3, S^{c}S, n_{y0} = 40N 130
Figure 4.52 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque 3, S^{c}S, n_{y0} = 60N 130
Figure 4.53 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque 3, S^{c}S, n_{y0} = 80N 130
Figure 4.54 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, P_{cr} = 0,11 132
Figure 4.55 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, P_{cr} = 0,11 132
Figure 4.56 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, P_{cr} = 0,11 132
Figure 4.57 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, P_{cr} = 0,15 133
Figure 4.58 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, P_{cr} = 0,15 133
Figure 4.59 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, P_{cr} = 0,15 133
Figure 4.60 - Zones d'instabilité paramétrique du 2ième mode, résultats numériques et expérimentaux, plaque P5, P_{cr} = 0,11 134
Figure 4.61 - Zones d'instabilité paramétrique du 2ième mode, résultats numériques et expérimentaux, plaque P5, P_{cr} = 0,15 134
Figure 4.62 - Zones d'instabilité paramétrique du 1er mode, résultats numériques et expérimentaux, plaque P5, P_{cr} = 0,11 135
Figure 4.63 - Zones d'instabilité paramétrique du 1er mode, résultats numériques et expérimentaux, plaque P5, P_{cr} = 0,15 135
Figure 4.64 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, P_{cr} = 0,11 137
Figure 4.65 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P5, P_{cr} = 0,11 137
Figure 4.66 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, P_{cr} = 0,15 137
Figure 4.67 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P5, P_{cr} = 0,15 138
Figure 4.68 - Influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, P_{cr} = 0,16, 1er mode de vibration 140
Figure 4.69 - Influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, P_{cr} = 0,11, 1er mode de vibration 140
Figure 4.70 - Influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, P_{cr} = 0,11, 2e mode de vibration 141
Figure 4.71 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P2, P_{cr} = 0,11, μ =0,0459, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 143

Figure 4.72 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, μ=0,0459, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 144
Figure 4.73 - Courbes de résonances du 2ième mode de vibration, plaque P5, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 145
Figure 4.74 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P6, $P_{cr} = 0,11$, μ=0,0459, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 146
Figure 4.75 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, μ=0,0459, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 147
Figure 4.76 - Courbes de résonances du 2ième mode de vibration, plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 148
Figure 4.77 - Courbes de résonances du 3ième mode de vibration, plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 149
Figure 4.78 - Courbes de résonances du le 1er mode de vibration, plaque P5, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux 150
4.79 - Réponse temporelle associée aux vibrations forcées de grande amplitude .....
pour une plaque avec forte imperfection géométrique 152
Figure 4.80 - Courbes de résonances, plaque P2, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.....155
Figure 4.81 - Courbes de résonances, plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.....156
Figure 4.82 - Courbes de résonances, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.....157
Figure 4.83 - Courbes de résonances, plaque P5, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.....158
Figure 4.84 - Courbes de résonances, plaque P6, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.....159
Figure 4.85 - Courbes de résonances, plaque P6, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$.....160
Figure 4.86 - Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^cS.....163
Figure 4.87 - Plaque P4, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0459$, S^cS.....164
Figure 4.88 - Plaque P4, $P_{cr} = 0,27$, $\mu = 0,0459$, S^cS.....165
Figure 4.89 - Plaque P3, $P_{cr} = 0,077$, $\mu = 0,0459$, S^cS.....166
Figure 4.90 - Plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^cS.....167
Figure 4.91 - Résonances de la plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0287$, S^cS.....169

Figure 4.92 - Résonances de la plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^cS..... 170
Figure 4.93 - Résonances de la plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0526$, S^cS..... 171
Figure 4.94 - Courbes de résonances, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^cS, m* = 2.....
..... 172
Figure 4.95 - Courbes de résonances, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^cE, m* = 3.....
..... 173
Figure 4.96 - Courbes de résonances, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, E^cS, m* = 2
..... 174
Figure 4.97 - Courbes de résonances, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, E^cE, m* = 3 .....
..... 175
Figure 4.98 - Réponse non-stationnaire au travers la zone de résonance en balayage croissant de la fréquence d'excitation, 1er mode, plaque P3, $n_{y0} = 45N$, $n_{yf} = 40N$ .....
..... 179
Figure 4.99 - Réponse non-stationnaire au travers la zone de résonance en balayage décroissant de la fréquence d'excitation, 1er mode plaque P3, $n_{y0} = 45N$, $n_{yf} = 40N$....
..... 179
Figure 4.100 - Réponse non-stationnaire dans la zone de résonance en balayage croissant de la fréquence d'excitation, 1er mode plaque P3, $n_{y0} = 45N$, $n_{yf} = 40N$..... 180
Figure 4.101 - Réponse non-stationnaire dans la zone de résonance en balayage décroissant de la fréquence d'excitation, 1er mode plaque P3, $n_{y0} = 45N$, $n_{yf} = 40N$
..... 180
Figure 4.102 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P2, S^cS, $\nabla = 0,1$ 184
Figure 4.103 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P3, S^cS, $\nabla = 0,1$ 184
Figure 4.104 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P4, S^cS, $\nabla = 0,1$ 185
Figure 4.105 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P5, S^cS, $\nabla = 0,1$ 185

Figure 4.106 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P6, S^cS, $\nabla = 0,1$ 186
Figure 4.107 - Fréquences naturelles, plaque P3 , S^cS, $\nabla = 0,1$ 187
Figure 4.108 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cS, $\nabla = 0,1$ 187
Figure 4.109 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cS, $\nabla = 0,1$ 187
Figure 4.110 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cE, $\nabla = 0,1$ 188
Figure 4.111 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cE, $\nabla = 0,1$ 188
Figure 4.112 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cE, $\nabla = 0,1$ 188
Figure 4.113 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cS, $\nabla = 0,1$ 189
Figure 4.114 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cS, $\nabla = 0,1$ 189
Figure 4.115 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cS, $\nabla = 0,1$ 189
Figure 4.116 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cE, $\nabla = 0,1$ 190
Figure 4.117 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cE, $\nabla = 0,1$ 190
Figure 4.118 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cE, $\nabla = 0,1$ 190
Figure 4.119 - Forme des 3 premiers modes de vibration selon x pour P3 193
Figure 4.120 - Forme du premier mode de vibration selon x pour divers niveaux d'imperfection 193
Figure 4.121 - Forme du 1er mode de vibration selon y pour divers niveaux d'imperfection 194
Figure 4.122 - Forme du 2ième mode de vibration selon y pour divers niveaux d'imperfection 194
Figure 4.123 - Forme du 3ième mode de vibration selon y pour divers niveaux d'imperfection 195
Figure 4.124 - Plaque P1, S^cS, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$ 198
Figure 4.125 - Plaque P1, S^cS, $P_{cr} = 0,14$, $\mu = 0,0636$ 198
Figure 4.126 - Plaque P1, S^cS, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0822$ 199
Figure 4.127 - Plaque P1, S^cE $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$ 199
Figure 4.128 Plaque P1, S^cE, $P_{cr} = 0,14$, $\mu = 0,0636$ 200

Figure 4.129 - Plaque P1, S^{c}E, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0822$ 200
Figure 4.130 - Plaque P1, E^{c}S, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$ 201
Figure 4.131 - Plaque P1, E^{c}S, $P_{cr} = 0,14$, $\mu = 0,0636$ 201
Figure 4.132 - Plaque P1, E^{c}S, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0822$ 202
Figure 4.133 - Plaque P1, E^{c}E $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$ 202
Figure 4.134 - Plaque P1, E^{c}E, $P_{cr} = 0,14$, $\mu = 0,0636$ 203
Figure 4.135 - Plaque P1, E^{c}E, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0822$ 203
Figure 4.136 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^{c}S 205
Figure 4.137 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0,136$, $\mu = 0,0631$, S^{c}S 205
Figure 4.138 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, E^{c}E 206
Figure 4.139 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0,164$, $\mu = 0,0815$, E^{c}E 206
Figure 5.1 – Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, E^{c}S 210
Figure 5.2 – Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,136$, $\mu = 0,0631$, E^{c}S 210
Figure 5.3 – Interaction résonance paramétrique 2e mode, résonance forcée 3e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,164$, $\mu = 0,0815$, E^{c}E 211
Figure 5.4 – Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, S^{c}S 211
Figure 5.5 – Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,136$, $\mu = 0,0631$, S^{c}S 212
Figure 5.6 – Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0,164$, $\mu = 0,0815$, E^{c}S 212

Figure 5.7 – Interaction entre résonance forcée du 2e mode et résonance forcée du 3e mode, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}345$, $\mu = 0{,}134$, E^{c}S 217

Figure 5.8 – Interaction entre résonance forcée du 2e mode et résonance forcée du 3e mode, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}237$, $\mu = 0{,}116$, E^{c}S 217

Figure 5.9 – Interaction entre résonance paramétrique du 2e mode et résonance paramétrique du 3e mode, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}345$, $\mu = 0{,}134$, E^{c}S 218

Figure 5.10 – Interaction entre résonance paramétrique du 2e mode et résonance paramétrique du 3e mode, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}237$, $\mu = 0{,}116$, E^{c}S 218

LISTE DES SYMBOLES

SYMBOLE	DESCRIPTION
a	Largeur de la plaque (direction x)
A_i	Constante définie par l'équation 2.11
b	Longeur de la plaque (direction y)
B_i	Constante définie par l'équation 2.11
C	Constante photoélastique relative
C_m	Coefficient d'amortissement linéaire associé au mode spacial (1, m) de vibration (amortissement modal)
C_{ij}	Coefficient d'amortissement associé au mode (i, j)
d_{kl}	Amplitude de la déflexion latérale due au chargement statique, suivant le mode (k, l)
D	Rigidité en flexion de la plaque ($D = Eh^3/12(1-\nu^2)$)
D_i	Constante définie par l'équation 2.13
E	Module d'élasticité de Young
f	Fonction de contraintes d'Airy
f_{mn}	Coefficient généralisé de contrainte
h	Épaisseur de la plaque
$H_{uv}^{pqk \lg h}$	Coefficient de non linéarité défini par l'équation 2.30
k	Nombre entier
K_{uv}^{pq}	Coefficient défini par l'équation 2.25
M_v^{lqs}	Coefficient de non linéarité cubique défini par l'équation 2.27
n_{pq}^*	Charge crique correspondant au mode (p, q) de flambage

$n_y(t)$	Chargement appliqué dans le plan de la plaque par unité de longueur
n_{yo}	Composante statique du chargement par unité de longueur
n_{yt}	Composante dynamique du chargement par unité de longueur
P_{ij}	Coefficient de chargement associé au mode (i, j)
P_{cr}	Coefficient de chargement critique défini par l'équation 4.1
R	Rapport de forme de la plaque ($R = b/a$)
t	Temps réel
$w(x,y,t)$	Déflexion latérale de la surface moyenne dans la direction z
w_0	Imperfection géométrique initiale générale
w_{0kl}	Imperfection géométrique suivant le mode (k, l)
w_{0l}	Imperfection géométrique suivant le mode (1, l)
x, y, z	Coordonnées spatiales cartésiennes
x_l	Déviation statique totale de l'état plan suivant le mode (1, l)
$X_m(x)$, $Y_n(y)$	Fonctions propres de poutre données par les équations 2.10
α	Racines de l'équation transcendante 2.12
β_i	Constante données par l'équation 2.11
δ	Delta Kreonecker
ζ_v	Amortissement critique associé au mode v
ξ_p	Coefficient défini par l'équation 2.11
φ_{mn}	Coefficient généralisé de contrainte pour le chargement statique
γ_i	Coefficient défini par l'équation 2.11a
$\lambda(t)$	Fréquence d'excitation instantannée ($\lambda = d\theta/dt$)
ν	Coefficient de Poisson
ρ	Masse volumique de la plaque par unité de volume
θ	Angle de phase de l'excitation harmonique
$\Phi_p(x)$, $\Psi_q(y)$	Fonctions propres de poutres données par les équations 2.10

Δ	Pas d'intégration
∇	Coefficient d'amortissement
ω_ν	Pulsation naturelle du mode ν de la plaque parfaite non chargée
Ω_ν	Pulsation naturelle du mode ν de la plaque parfaite chargée
$\overline{\Omega}_\nu$	Pulsation naturelle du mode ν de la plaque imparfaite chargée
$\overline{\Omega}^*$	Pulsation naturelle du mode critique de la plaque imparfaite chargée
π	Nombre irrationnel Pi
μ_{pq}	Paramètre d'excitation associé au mode de vibration (p,q) défini par l'équation 4.2
μ	Paramètre d'excitation associé au mode critique défini par l'équation 4.3

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A: MONTAGES D'ÉTALONNAGE 238

A.1 - Capteur de déplacement capacitifs 238

A.2 - Cellules de charge piézoélectriques 239

ANNEXE B: ANNEAU DYNAMOMÉTRIQUE 241

B.1 - Description 241

ANNEXE C : PROGRAMMES FORTRAN UTILISÉS POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS 244

C.1 - Programme roots.for 244

C.2 - Programme coefs.for 245

C.3 - Programme strec.for 247

C.4 - Programme sychar.for 259

C.5 - Programme cubic.for 253

C.6 - Programme imper.for 255

C.8 - Programme ip3.for 261

ANNEXE D: PROGRAMMES MATLAB UTILISÉS POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE 264

D.1 - Programme ip3s.m 264

D.2 - Programme ip1ns.m 268

D.3 - Programme ip3ns.m 270

D.4 - Programme fft3d.m 274

D.5 - Programme zone.m 278

ANNEXE E: PROGRAMME MATLAB UTILISÉ POUR CALCULER LES COEFFICIENTS DÉCRIVANT L'IMPERFECTION 283

E.1 - Programme cimp.m 283

E.2 – Exemple de résultats 287

INTRODUCTION

Avec le développement sans cesse croissant de structures plus légères et plus performantes, beaucoup d'accent est mis sur la stabilité dynamique des structures, et plus particulièrement sur le comportement de celles-ci lorsqu'elles sont soumises à des forces d'excitation périodiques. Le type particulier d'instabilité rencontré pour de tels systèmes mécaniques est connu sous le nom d'instabilité paramétrique ou résonance paramétrique.

Ce genre de problème est intéressant du point de vue stabilité car le système ne vibre latéralement que si certaines conditions sont remplies par l'excitation et par le système mécanique. Le système devient instable pour une charge inférieure à la charge critique de flambage et pour des fréquences d'excitation différentes des fréquences naturelles du système. D'autre part, le phénomène d'instabilité paramétrique est caractérisé par une excitation perpendiculaire au mouvement résultant. Pour ce cas précis, l'excitation apparaît mathématiquement dans l'équation du mouvement comme un coefficient dépendant du temps, ou paramètre, d'où le nom d'excitation paramétrique.

Le cas particulier d'instabilité paramétrique ici traité est celui d'une plaque rectangulaire soumise à l'action d'un chargement dans son plan. Le chargement appliqué est doté d'une composante statique et d'un composante dynamique, la somme des deux étant toujours inférieure à la charge critique de flambage. Pour ce type de chargement, des résonances particulières appelées résonances paramétriques apparaissent. D'autres types de résonances sont aussi observables, telles que les résonances internes, combinées et forcées ou dynamiques.

L'instabilité paramétrique de plaques rectangulaires à été maintes fois étudiée dans le passé et ainsi ce phénomène physique est connu. Cependant, certains écarts ont été remarqués entre les résultats théoriques et expérimentaux, et ceux-ci ont été reliés à la présence d'imperfections géométriques initiales. Certains travaux théoriques ont par la suite été effectués dans le but de vérifier cette hypothèse, mais aucune validation

expérimentale de ceux-ci n'a encore été effectuée. Ainsi, aucune étude concrète ne permet encore de faire un lien direct entre les imperfections et les caractéristiques des résonances rencontrées.

Cette recherche a donc pour principal but de procéder à une étude expérimentale poussée pour faire ressortir concrètement l'effet des imperfections géométriques initiales sur les divers types de résonance que peut développer une plaque soumise à une excitation paramétrique.

Pour présenter la démarche utilisée et les résultats obtenus dans l'atteinte de cet objectif, cette thèse est divisée comme suit :

- le chapitre 1 fait une description complète du sujet de recherche, présente une revue des travaux effectués dans ce domaine jusqu'à ce jour et précise les aspects abordés et les objectifs visés;

- le chapitre 2 présente le modèle théorique utilisé pour décrire le comportement des plaques géométriquement imparfaites, les hypothèses limitatives qui y sont associées et la méthode utilisée pour résoudre les équations du mouvement qui en découlent;

- le chapitre 3 présente l'approche expérimentale mise au point pour étudier le comportement des plaques imparfaites et vérifier les limites de la théorie utilisée;

- le chapitre 4 présente les résonances observées expérimentalement, l'effet des imperfections sur celles-ci et une étude comparative avec les prévisions du modèle théorique;
- le chapitre 5 traite des cas particuliers d'interaction observés lors des essais expérimentaux;

- le dernier chapitre présente finalement les conclusions de cette recherche, tout en précisant les lacunes qui s'y rattachent et suggèrent des pistes de développement futur.

CHAPITRE I
HISTORIQUE DE LA RECHERCHE

1.1 - Problème physique considéré

Le cas particulier d'instabilité paramétrique faisant l'objet de cette recherche est celui d'une plaque rectangulaire chargée dans son plan par une force statique et une force dynamique ($n_y\ (t) = n_{yo} + n_{yt}\ cos\ \lambda t$), la somme des deux composantes étant toujours inférieure à la charge critique de flambage. Pour certaines régions de l'espace paramétrique (n_{yo} , n_{yt} , λ), une instabilité se produit et la plaque devient animée de vibrations latérales. Ce type de vibration donne lieu à des résonances appelées résonances paramétriques. Celles-ci surviennent lorsque la fréquence d'excitation λ et les fréquences modales Ω_i satisfont approximativement la relation suivante:

$$\lambda = \frac{2\Omega_i}{k} \qquad \text{où} \qquad k = 1,2,3,... \tag{1.1}$$

Les résonances décrites par l'équation 1.1 sont appelées résonances paramétriques simples. Le terme simple signifie qu'un seul mode est en résonance. Le cas le plus important est celui pour lequel $k=1$ et est appelé résonance paramétrique principale.

Les résonances combinées et simultanées sont d'autres types de résonance qui peuvent survenir lorsqu'un système mécanique ayant plusieurs degrés de liberté est soumis à une excitation paramétrique périodique. Les résonances combinées sont caractérisées par une oscillation simultanée du système selon plusieurs modes naturels de vibration, lesquels sont directement excités par l'excitation paramétrique. Elles surviennent lorsque la fréquence d'excitation et les fréquences modales satisfont une relation linéaire de la forme :

$$k_o\ \lambda = \sum_{j=1}^{n} k_j \Omega_j \tag{1.2}$$

où k_o et k_j sont des nombres entiers.

Les résonances simultanées quant à elles se produisent lorsqu'une résonance paramétrique apparaît en même temps qu'une résonance interne. Ce dernier type de résonance survient lorsqu'il existe un certain rapport de proportionnalité entre les fréquences naturelles, c'est-à-dire quand

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \Omega_j = 0 \qquad \text{où} \qquad k_j\text{: nombres entiers} \tag{1.3}$$

Par conséquent, les résonances simultanées se produisent lorsque les relations suivantes sont satisfaites:

$$\lambda = 2\Omega_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} k_j \Omega_j = 0 \quad \text{où} \qquad k_j\text{: nombres entiers} \tag{1.4}$$

La caractéristique principale de ce type de résonance est la vibration du système selon plusieurs modes naturels et plusieurs fréquences distinctes, et ce même si un seul de ces modes est directement excité par l'excitation paramétrique (en l'occurrence, le mode *i*).

Les études analytiques portant sur les résonances paramétriques principales des plaques parfaites montrent que celles-ci ont un comportement non linéaire global du type ressort dur. Cependant, certains résultats expérimentaux divergent des résultats analytiques pour des vibrations de faible amplitude. Des travaux ont pu expliquer cette divergence par la présence d'imperfections géométriques.

Aucune structure réelle n'est parfaite. Par conséquent, tout modèle réaliste doit inclure la présence d'imperfections géométriques initiales. Dans les dernières années, un nombre impressionnant d'études théoriques considérant l'influence de ces imperfections sur le comportement dynamique des structures ont vu le jour. Parmi ces études, certaines ont montré que les imperfections géométriques peuvent modifier considérablement le comportement de plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique. On a observé que le comportement non linéaire global de ressort dur de ces plaques peut être transformé en un comportement de ressort mou pour les vibrations de faible amplitude. De plus, la présence d'imperfections fait apparaître des vibrations forcées même si

l'excitation est perpendiculaire au mouvement latéral de la plaque. Malgré les différentes études effectuées, une revue des principaux éléments de la littérature dans ce domaine révèle qu'il existe un manque flagrant de travaux expérimentaux considérant explicitement l'influence des imperfections géométriques sur le comportement de plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique.

1.2 - Revue historique et littéraire

Le phénomène d'instabilité paramétrique fut observé pour la première fois en 1831 par Faraday, lorsqu'il remarqua que les vagues à la surface d'un cylindre rempli de liquide et soumis à une excitation verticale avaient une fréquence égale à la moitié de celle de l'excitation. Depuis, ce type d'instabilité a été largement étudié pour divers types de systèmes mécaniques et divers types de structures. Une revue des travaux de première instance dans ce domaine se retrouve dans une publication de Evan–Iwanowski [1].

En 1924, Beliaev [2] publia ce qui est considéré comme la première analyse portant sur l'instabilité paramétrique d'une structure. Il étudia la réponse paramétrique linéaire d'une colonne droite simplement supportée soumise à une excitation périodique axiale. Il put ainsi déterminer les frontières de la région d'instabilité paramétrique principale.

L'influence des imperfections géométriques sur le comportement dynamique des colonnes fut traitée pour un cas linéaire par Taub et Koning [3] en 1939. Cette analyse fut suivie par une étude similaire effectuée par Mettler en 1941 [4], et ce ne fut qu'en 1951 que les vibrations non linéaires furent abordées par Bolotin [5]. Le comportement stationnaire et non-stationnaire d'une colonne imparfaite soumise à une excitation paramétrique fut considéré par Kehagioglov [6]. De son côté, Stevens [7] étudia les vibrations latérales d'une colonne viscoélastique ayant une courbure initiale, soumise à

une excitation axiale périodique. Par la suite Elishakoff, Birman et Singer [8] considérèrent l'influence des imperfections initiales sur les vibrations libres non-linéaires de barres viscoélastiques. Cette revue très succincte ne constitue qu'un point de départ et n'est qu'un très bref aperçu des publications qui existent sur le comportement dynamique des colonnes imparfaites.

Le phénomène d'instabilité paramétrique des plaques fut étudié pour la première fois en 1936 par Einaudi [9], dans son travail sur le comportement linéaire de plaques rectangulaires. De ce travail suivirent plusieurs autres études similaires et on a ainsi pu démontrer la présence de plusieurs régions de l'espace paramétrique pouvant donner lieu à des vibrations paramétriques. Bolotin [10] fut le premier à étudier la réponse non linéaire des plaques élastiques à une excitation paramétrique (1964). Ses travaux incluent les effets non linéaires engendrés par les forces de membrane, (causées par des oscillations de grande amplitude) et les non linéarités dues à l'inertie dans le plan d'une barre de chargement. Son livre [10] contient l'ensemble de ses travaux et est une oeuvre inestimable dans le domaine de la stabilité dynamique, plus particulièrement dans le domaine de l'instabilité paramétrique.

Un peu plus tard (1965), Somerset [11] reprit le problème non linéaire amorcé par Bolotin pour y inclure l'effet de l'inertie de la plaque dans son plan.

Somerset et Evan-Iwanowski [12, 13] conduisirent les premières études expérimentales sur les plaques. Ils portèrent leur attention sur la réponse paramétrique non linéaire, ou de grande amplitude, d'une plaque carrée simplement supportée. Silver et Somerset [14] procédèrent à d'autres travaux expérimentaux sur la réponse non linéaire de plaques rectangulaires. Ils examinèrent ainsi la réponse paramétrique d'une plaque soumise à un chargement aléatoire.

Les travaux expérimentaux de Somerset [15, 12] quant à eux vérifièrent les prédictions théoriques à l'exception de sauts se produisant dans la région des résonances

paramétriques. Dès lors, il supposa que ces phénomènes étaient reliés à la présence d'imperfections géométriques. Cette hypothèse fut vérifiée par la suite par Silver [16].

De leur côté, Duffield et Willems [17] analysèrent le phénomène d'instabilité paramétrique pour des plaques rectangulaires renforcées et pour lesquelles les renforts sont traités comme des éléments discrets. Ils effectuèrent des essais réels sur de telles plaques et purent vérifier leurs prédictions analytiques.

Les oscillations forcées et paramétriques de plaques rectangulaires imparfaites furent abordées théoriquement par Kisliakov [18]. Il observa un phénomène de battement, phénomène qui s'amplifie avec l'amplitude des imperfections.

Une étude approfondie et détaillée des plaques rectangulaires soumises à une excitation paramétrique fut effectuée par Ostiguy [19]. On peut retrouver dans son ouvrage une importante revue des travaux portant sur le comportement dynamique de plaques parfaites soumises à une excitation paramétrique. Par ailleurs, ses travaux expérimentaux ont permis une meilleure compréhension des phénomènes reliés à la présence d'imperfections géométriques. Il a fait un lien entre la présence de vibrations forcées et celle d'imperfections géométriques et étudié l'influence de ces vibrations sur le comportement dynamique des plaques. Il a fait ressortir les interactions possibles entre vibrations forcées et vibrations paramétriques. Plus précisément, il a étudié le cas pour lequel une région de résonance forcée chevauche une région de résonance paramétrique. Il a aussi constaté la présence de sauts dans la région d'instabilité paramétrique, qu'il a relié à la présence d'imperfections géométriques.

Samson [20] et Nguyen [21] poursuivirent les travaux expérimentaux de Ostiguy. Ils observèrent les mêmes phénomènes de sauts pour les résonances paramétriques et pour les résonances combinées. Ils expliquèrent ces phénomènes par une modification du comportement des plaques imparfaites pour les vibrations paramétriques de faible amplitude. Celles-ci auraient un comportement en ressort mou qui se transformerait en un comportement en ressort dur pour les vibrations de grande amplitude. Dans un autre ouvrage mené en collaboration avec Ostiguy [22], ils observèrent des résonances combinées non prévues par la théorie. Celles-ci seraient aussi dues à la présence d'imperfections.

Par ailleurs, les vibrations paramétriques d'une plaque rectangulaire stratifiée comportant des imperfections géométriques furent traitées par Birman et Zahed [23]. Contrairement au cas d'une plaque parfaite, une excitation paramétrique produit un mouvement transversal pour toutes les fréquences d'excitation.

Récemment, l'effet des imperfections géométriques initiales sur la réponse paramétrique d'une plaque a été étudié par Sassi [24] et par Ostiguy et Sassi [25, 26]. À l'aide de la méthode asymptotique en première approximation, ils ont montré l'existence de deux types de comportement (comportement en ressort mou et en ressort dur) pour les résonances paramétriques des plaques imparfaites. La transition d'un comportement à l'autre se traduit physiquement par un phénomène de saut, et dépend de la forme et de l'amplitude de l'imperfection. Des résultats similaires ont été obtenus par St–Georges [27], Ostiguy, St-Georges et Sassi [28, 29] en utilisant une intégration numérique directe des équations du mouvement.

Sassi a aussi examiné les interactions entre une résonance forcée et une résonance paramétrique de même qu'entre une résonance forcée et une résonance combinée [30]. Ses travaux ont aussi porté sur l'influence des imperfections géométriques sur la variation des fréquences naturelles de vibration, en fonction de l'amplitude et de la forme des

imperfections [30, 31]. De son côté, St-Georges [27] a repris l'étude entamée par Sassi sur l'interaction entre une résonance forcée et une résonance paramétrique et a considéré le cas d'interaction entre une résonance forcée et une résonance simultanée. Les résultats obtenus montrent que les vibrations des plaques imparfaites sont asymétriques par rapport à la position d'équilibre statique. Le cas d'interaction modale entre des résonances de même nature a été par la suite abordé par Sassi, Thomas et Laville [32].

Une analyse expérimentale a été menée sur la réponse paramétrique de plaques soumises à une charge en tension par Deolasi et Datta [33]. Dans plusieurs cas, les réponses obtenues présentent des composantes fréquentielles égales à la fréquence d'excitation ou à un multiple de celle-ci. Ces composantes sont associées à la présence d'imperfections géométriques et à un défaut d'alignement de la charge appliquée.

L'effet des imperfections géométriques initiales sur le comportement d'une coque cylindrique circulaire soumise à une excitation paramétrique a été étudié par Koval'chuk et Krasnopol'skaya [34, 35]. La présence d'imperfections augmente la taille de la région d'instabilité principale et en modifie les frontières. Cette perte de stabilité est constatée pour tous les modes de vibration. Cet élargissement des zones d'instabilité rend possible la transition d'un mode d'instabilité à un autre en variant la fréquence d'excitation.

Les conditions aux limites jouent un rôle important dans le comportement des fréquences naturelles d'une structure imparfaite. Ilanko [36] a en effet démontré que les fréquences naturelles d'une poutre ne sont pas influencées par la présence d'une courbure initiale lorsque celle-ci est libre de se déplacer selon son axe longitudinal. Si la poutre est fixée axialement, l'effet de la courbure sur les fréquences naturelles est alors maximal. Par ailleurs, Librescu et Chang [37], Ravinger [38] et Librescu et al. [39] ont montré que les fréquences naturelles d'un panneau mince sont influencées par les imperfections initiales, et ce même dans le cas où le panneau peut se déplacer selon son axe longitudinal.

Il existe d'autres ouvrages analytiques ayant pour point de mire les vibrations paramétriques de structures soumises à l'action d'un chargement périodique. Cependant, ceux-ci considèrent les structures parfaites, et s'éloignent ainsi de cas plus réalistes. Par ailleurs, dans les vingt dernières années les travaux portant sur l'influence des imperfections géométriques sur le comportement dynamique de diverses structures, pour divers types de conditions aux limites se sont multipliés.

Le comportement statique des coques cylindriques imparfaites a été assez bien documenté par le passé. Il existe cependant beaucoup moins de travaux sur le comportement dynamique de celles-ci. Les coques cylindriques imparfaites soumise à une compression axiale ont ainsi été étudiées par Rosen et Singer [40] et par Singer et Prucz [41]. Les premières fréquences naturelles de vibration de ces coques sont influencées par les imperfections géométriques initiales. Celles-ci peuvent augmenter ou diminuer les fréquences naturelles, cette influence étant gouvernée par l'intensité du chargement axial appliqué.

D'autre part, Hui et Du [42] ont analysé les coques cylindriques ovoïdales et Iu et Chia [43] abordé les coques cylindriques en matériaux composites. Pour ces deux publications, la présence d'imperfections qui tendent à diminuer le rayon de courbure entraîne une rigidification du comportement global et une augmentation des fréquences naturelles de vibration. Dans le cas contraire, le comportement global est ramolli. L'influence des imperfections sur les fréquences naturelles a aussi été remarqué par Hui et Leissa [44] dans leur travaux sur les coques cylindriques pressurisées.

Le comportement dynamique de coques cylindriques imparfaites ayant une interaction avec un fluide a été étudié par Watawala et Nash [45] et Pavlovskii et Filin [46]. Leurs travaux ont porté sur l'étude d'un cylindre vertical rempli par un fluide idéal excité à sa base par une force sismique.

Il existe aussi quelques travaux récents sur le comportement dynamique de coques et de calottes sphériques imparfaites. Xu [47] et Gonçalves [48] ont constaté que la présence d'une imperfection qui accroît la courbure de la calotte peut modifier la nature non linéaire du système. Ainsi le comportement du type ressort mou de celle-ci peut se transformer en un comportement du type ressort dur. Dans une étude sur les coques sphériques Hui [49] a lui aussi constaté que la présence d'imperfections peut modifier le comportement général de la réponse dynamique. Pour une coque ou une calotte sphérique pressurisée, Hui et Leissa [44] ont observé que les imperfections géométriques unidirectionnelles jouent un rôle significatif en diminuant les fréquences naturelles du système et ce même lorsque la pression est nulle.

Les panneaux cylindriques constituent un autre élément structural important. Hui [50] s'est intéressé aux panneaux cylindriques isotropes, tandis que ceux en matériaux composites ont été analysés par Du et Hui [51]. Lorsque l'imperfection géométrique produit un accroissement de la courbure du panneau, les fréquences naturelles de vibration de ce dernier augmentent avec l'amplitude de l'imperfection. De tels panneaux imparfaits ont aussi été étudiés par Fu et Chia [52]. La théorie alors utilisée considère le cisaillement transversal et l'inertie de rotation. La présence de ces deux paramètres n'altère pas la nature non linéaire des réponses dynamiques mais dans tous les cas entraîne une diminution des fréquences naturelles de vibration.

Librescu et Lin [53] ont fait ressortir l'influence des imperfections géométriques sur les vibrations de panneaux multi-couches faiblement courbés soumis à un chargement mécanique et thermique. Le comportement vibratoire de panneaux plats comportant des imperfections géométriques initiales a été traité par Souza et Librescu [54].

Byun et Kapania [55] ont pour leur part étudié les coques hyperboliques (e.g. tours de refroidissement). Les imperfections géométriques considérées sont radiales et locales. La position des imperfections selon l'axe longitudinal de la coque influence le

comportement dynamique de celle-ci. Au voisinage des imperfections, la réponse dynamique de la coque est considérablement modifiée. Ces effets s'atténuent en s'éloignant des imperfections. De plus, la variation temporelle des contraintes circonférentielles dépend de la forme de l'imperfection géométrique.

La majorité des études qui ont été effectuées sur le comportement de plaques et de coques comportant des imperfections géométriques initiales sont basées sur des équations spécifiques à la structure étudiée. Cependant, Wedel-Heinen [56] a développé une théorie générale qui permet d'analyser l'effet de ces imperfections sur les fréquences de vibration de poutres et de coques élastiques non amorties avec un chargement conservatif. Cette théorie est valide pour les vibrations de faible amplitude. Les résultats obtenus pour une coque conique tronquée démontrent que les fréquences des vibrations libres peuvent être significativement diminuées par la présence d'imperfections géométriques. Ce type de coque a aussi été traité par Shiau, Roth et Soong [57].

L'effet des irrégularités géométriques sur les vibrations libres d'une coque toroïdale à section elliptique a été analysé par Yamada et al. [58]. De leur côté, Leissa et Kadi [59] ont considéré l'effet de la courbure sur les vibrations de coques minces.

Les plaques rectangulaires imparfaites quant à elles ont été étudiées par plusieurs auteurs. Selon Celep [60], Bhimaraddi [61, 62] et Liu et Yeh [63], la présence d'imperfections génère un comportement en ressort mou pour des vibrations de faible amplitude et un comportement en ressort dur pour des vibrations de grande amplitude. Ces comportements sont gouvernés par l'amplitude de l'imperfection initiale et le type de conditions limites. Ces deux types de comportement non linéaires ont aussi été observés pour des plaques précontraintes par Chen et Lin [64]. Pour ces plaques, les effets des imperfections géométriques sont cependant moins prononcés pour un état initial de contrainte en tension que pour un état initial en compression.

Hui [65] a confirmé la présence d'un comportement en ressort mou pour les vibrations de faible amplitude des plaques rectangulaires. Il a aussi relevé un autre point intéressant sur les vibrations des plaques imparfaites. Les vibrations de ces plaques sont asymétriques. L'amplitude des vibrations vers le centre de la courbure de l'imperfection est prédominante lorsque le système imparfait est non amorti. Ce phénomène particulier d'asymétrie relié aux imperfections géométriques a aussi été remarqué pour le cas de colonnes simplement supportées par Sabir et Lock [66], Sabir [67], Hitchings et Ward [68], et Little [69].

Hui [70, 71], Hui et Leissa [72], Ilanko et Dickinson [73, 74, 75], Bhimaraddi [76] et Yu, Mostaghel et Fu [77] ont étudié l'influence de divers modes d'imperfection initiale sur le comportement dynamique d'une plaque mince simplement supportée. Pour tous les modes d'imperfection, les fréquences naturelles augmentent avec un accroissement de l'amplitude des imperfections. Cet effet est plus marqué lorsque le mode spatial de l'imperfection correspond au mode spatial de vibration ou à un mode similaire à celui-ci [77]. De plus, l'accroissement des fréquences naturelles pour une plaque stratifiée varie avec l'angle des plis [71, 76].

De nombreux travaux effectués sur les plaques rectangulaires imparfaites ont inclus l'effet du cisaillement transversal. Cependant, Librescu [78] a mis en évidence l'effet du cisaillement sur les fréquences naturelles d'une plaque stratifiée simplement supportée soumise à un chargement biaxial. Lorsque les charges appliquées sur la plaque sont inférieures à la charge critique, la théorie incluant le cisaillement transversal donne des fréquences naturelles plus faibles que celles où le cisaillement est négligé. Pour un chargement supérieur au chargement critique, la conclusion contraire s'applique.

Celep [60, 79] a étudié l'influence du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation sur le comportement dynamique de plaques imparfaites de forme rectangulaire et circulaire. La réponse de ces plaques imparfaites présente un comportement en ressort

mou pour des oscillations de faible amplitude et un comportement en ressort dur pour des oscillations de grande amplitude. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation sont plus prononcés lorsque le comportement du système change, i.e. au point de transition entre le comportement en ressort mou et le comportement en ressort dur.

L'étude des vibrations de grande amplitude de plaques circulaires imparfaites menées par Hui [80] et celles de plaques rectangulaires menées par Lin et Chen [81] mettent en évidence la forte influence des imperfections sur le comportement dynamique des plaques. Une imperfection de l'ordre de l'épaisseur de la plaque modifie de façon significative les fréquences de vibration et peut même modifier le caractère non linéaire de la plaque.

L'inertie de rotation et l'inertie dans le plan de la plaque ont été incluses dans l'étude des plaques rectangulaires orthotropes menée par Bhimaraddi [82]. Contrairement aux imperfections initiales, la présence de termes d'inertie non linéaires entraîne une diminution des fréquences naturelles.

De leur coté, Badalov et Éshmatov [83] ont étudié les plaques rectangulaires et circulaires viscoélastiques imparfaites reposant sur une fondation élastique. Le comportement d'une plaque rectangulaire géométriquement imparfaite en matériaux composites reposant sur une fondation élastique a été traité par Battacharya [84] et celui d'une plaque de forme circulaire par Xu et Chia [85]. L'effet des imperfections sur les vibrations de panneaux courbés en composite à été analysé par Librescu et Chang [86].

Il existe beaucoup de travaux théoriques traitant des imperfections géométriques, mais rares sont les travaux expérimentaux. Le point critique de ce type d'étude est la mise en forme ou la modélisation de l'imperfection géométrique.

Ravinger [38] a étudié l'effet de différentes imperfections sur le comportement d'un panneau plan à paroi mince. Les imperfections considérées sont les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles. Il en ressort que les fréquences des vibrations libres sont très sensibles à ces deux types d'imperfections initiales. Dans un deuxième article, Ravinger [87] a effectué une vérification expérimentale de la théorie développée. Dans cette étude expérimentale, un panneau mince est comprimé jusqu'à ce qu'il présente la déflexion désirée. Les contraintes associées à cette déflexion sont calculées et insérées dans le modèle mathématique sous la forme des contraintes résiduelles initiales.

De façon similaire, Chauhan [88] a analysé le comportement de structures légèrement archées. Des essais réels ont été effectués pour une plaque rectangulaire encastrée. Dans ces essais, la déflexion initiale ou arche est induite en appliquant une force au centre de la plaque avant de fixer son pourtour pour ainsi maintenir la déviation de l'état plan engendrée.

L'étude du comportement dynamique après flambage de plaques rectangulaires imparfaites simplement supportées a été abordée de façon théorique et par la suite de façon expérimentale par Ilanko et Dickinson [73, 74]. Lors de leurs travaux expérimentaux, ils ont mesuré les imperfections géométriques des plaques utilisées pour en comprendre l'influence sur le comportement dynamique. La même approche a été utilisée par Yamaki, Otomo et Chiba dans leur étude des vibrations non linéaires de plaques imparfaites encastrées de forme circulaire [89, 90] et rectangulaire [91, 92].

De leur côté, Phillips et Jubb [93] ont effectué une étude expérimentale pour déterminer l'influence d'une distorsion latérale sur les fréquences naturelles d'une plaque rectangulaire encastrée. Les plaques utilisées sont pliées à l'aide d'une presse hydraulique de façon à obtenir une déflexion latérale ayant une forme presque sinusoïdale, d'amplitude variable. Cette étude démontre que pour une déflexion latérale ayant une amplitude inférieure à deux fois l'épaisseur de la plaque, les contraintes résiduelles

induites par la méthode de façonnage utilisée ont un niveau insuffisant pour avoir une influence significative sur les fréquences naturelles de la plaque. Cette étude est l'une des rares dans laquelle une tentative de mise en forme de l'imperfection a été effectuée.

Le cas de plaques rectangulaires encastrées, soumises à un chauffage uniforme a été abordé par Murphy, Virgin et Rizzi [94]. Leur étude comprend une partie analytique et une partie expérimentale. Le modèle théorique utilisé permet de considérer l'effet d'imperfections géométriques. Après comparaison entre les résultats analytiques et expérimentaux, les auteurs concluent à la présence d'imperfections géométriques pour les plaques utilisées sans toutefois tenter de mesurer la forme réelle de celles-ci. La comparaison entre la partie théorique et expérimentale est par conséquent uniquement qualitative.

1.3 - Buts et plan de la recherche

Bien que les effets des imperfections géométriques sur le comportement dynamique des plaques aient été largement traités, ceux des imperfections sur les résonances paramétriques sont peu connus. À notre connaissance, il n'existe pas de résultats expérimentaux qui permettent de faire une validation précise des résultats théoriques obtenus, car les imperfections inhérentes aux structures mise à l'essai ont presque toujours été négligées.

Lors des essais expérimentaux précédents portant sur l'étude du phénomène d'instabilité paramétrique, les structures furent conditionnées dans le but de les rendre parfaites. Dans les rares cas pour lesquels des structures imparfaites furent étudiées, uniquement des imperfections de forme similaire au premier mode de vibration furent considérées. Aucun lien concret n'a été établi entre les résultats expérimentaux et la forme réelle (géométriquement imparfaite) de la structure à l'étude. Il existe donc un

manque flagrant de travaux expérimentaux considérant explicitement l'effet des imperfections géométriques initiales sur le phénomène d'instabilité paramétrique.

Ce travail a pour but de combler cette lacune en procédant à une étude expérimentale poussée du comportement dynamique de plaques rectangulaires imparfaites soumises à une excitation paramétrique, et considérant explicitement la présence d'imperfections géométriques initiales. Cette étude souhaite mettre en évidence les effets de diverses formes d'imperfections géométriques sur:

- les résonances paramétriques en régime stationnaire et non-stationnaire;
- les résonances internes, combinées et simultanées;
- la présence de résonances forcées;
- la forme et la distribution des régions d'instabilité paramétrique;
- la forme des modes de vibration et les fréquences naturelles;
- la réponse temporelle de la plaque.

CHAPITRE II
APPROCHE THÉORIQUE

2.1 - Introduction

Le modèle physique analysé consiste en une plaque rectangulaire géométriquement imparfaite, d'épaisseur uniforme, élastique, homogène et isotrope. Elle est excitée dans son plan idéal (correspondant à la plaque parfaite), par une charge périodique et une charge statique uniformément distribuées le long de deux arêtes opposées. Ce modèle est illustré à la figure 2.1. En l'absence de chargement, la plaque imparfaite a une déflexion caractérisée par son amplitude w_0 et est libre de contrainte interne.

2.2 - Équations de base utilisées

Les équations de base décrivant le comportement non-linéaire de plaques planes pour le cas des grandes déformations furent élaborées par von Kármán [95]. Pour le cas de plaques imparfaites, ces équations furent réécrites par Marguerre [96] sous la forme suivante:

- équation de compatibilité:

$$f,_{xxxx}+2f,_{xxyy}+f,_{yyyy}=E\left[(w+w_0),^2_{xy}-w_o,^2_{xy}-(w+w_0),_{xx}(w+w_0),_{yy}+w_0,_{xx}\,w_0,_{yy}\right] \quad (2.1)$$

- équation d'équilibre:

$$w,_{xxxx}+2w,_{xxyy}+w,_{yyyy}=\frac{h}{D}\left[f,_{yy}(w+w_0),_{xx}-2f,_{xy}(w+w_0),_{xy}+f,_{xx}(w+w_0),_{yy}-\rho w,_{tt}\right] \quad (2.2)$$

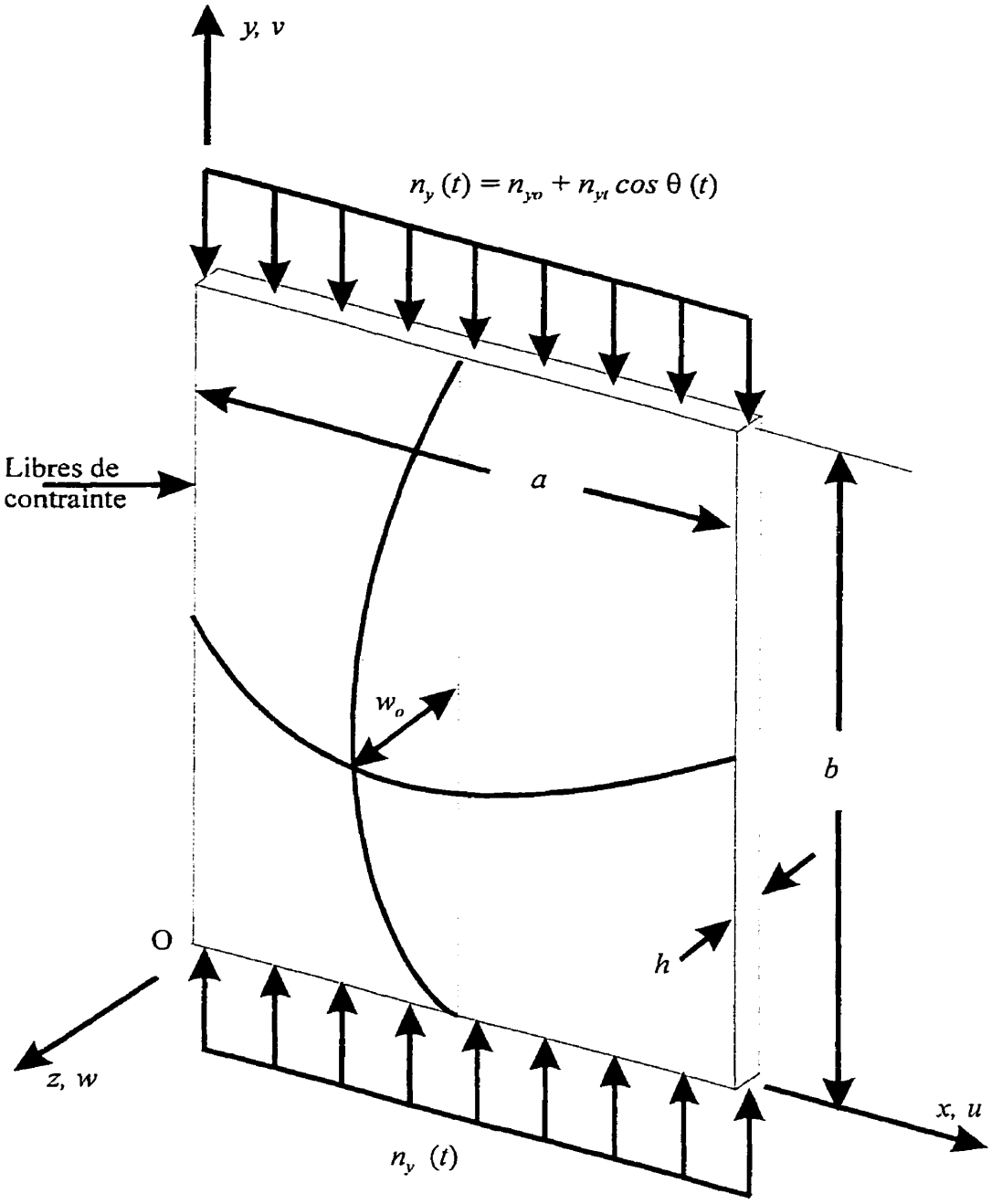


Figure 2.1 - Modèle de la plaque imparfaite

où les indices placés après la virgule représentent des dérivées partielles par rapport à ces indices, et pour lesquelles

$w(x,y,t)$: déplacement latéral de la plaque

$w_0(x,y)$: imperfection géométrique initiale

$f(x,y,t)$: fonction de contrainte d'Airy

ρ : densité

t : temps

E : module d'Young

ν : coefficient de Poisson

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: rigidité de la plaque en flexion

La limite de validité de ces équations est difficile à cerner. Le plus conservateur (Timoshenko [97]) en limite la validité pour des imperfections ayant une amplitude inférieure à l'épaisseur de la plaque. Cependant, il existe d'autres études [16, 98, 99] qui utilisent celles-ci pour des imperfections ayant une amplitude égale à l'épaisseur de la plaque.

Ces équations sont toutefois limitées aux larges déflexions, larges mais suffisamment faibles pour permettre l'utilisation de formules simplifiées pour la courbure. Elles sont ainsi limitées à des déflexions ayant une amplitude de deux à trois fois l'épaisseur de la plaque. Malgré cette limite qui en restreint l'utilisation, ces équations permettent d'analyser les effets de diverses formes d'imperfection, ce qui leurs confère un net avantage sur les théories utilisées pour les coques faiblement courbées. Celles-ci n'accommodent généralement qu'une seule forme de courbure initiale (ou imperfection).

L'analyse tient compte de l'étirement de la surface moyenne et des imperfections géométriques initiales de la plaque (w_0). Les effets du cisaillement transversal et de

l'inertie de rotation sont cependant négligés. Par conséquent, l'étude théorique est restreinte aux premiers modes de vibration en flexion, modes pour lesquels ces effets sont minimes.

2.3 - Conditions aux limites

2.3.1 - Conditions naturelles

La plaque étudiée est comprimée dans son plan médian idéal par un chargement uniformément distribué le long de deux arêtes opposées ($y=0$ et $y=b$). Les deux autres arêtes ($x=0$ et $x=a$) sont libres de contrainte. Par conséquent, les conditions aux limites reliées à la fonction d'Airy sont:

$$\begin{aligned} f_{,yy} &= 0 \quad ; \quad f_{,xy} = 0 \quad \text{pour } 0 < x < a \\ f_{,xx} &= -n_y(t) \quad ; \quad f_{,xy} = 0 \quad \text{pour } 0 < y < b \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.3.2 - Conditions géométriques

Deux types de conditions aux limites sont utilisées dans cette étude: l'encastrement et le support simple. Les déflexions latérales et les moments fléchissants sont nuls le long des arêtes simplement supportées. Le long des arêtes encastrées, les déflexions latérales et les rotations sont nulles. Ces conditions de support sont schématisées ainsi :

——— : arêtes simplement supportées:

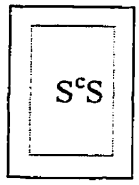
$$\begin{aligned} w = w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0 \quad &\text{pour } x = 0, a \\ w = w_{,yy} + \nu w_{,xx} = 0 \quad &\text{pour } y = 0, b \end{aligned} \tag{2.4a}$$

——— : arêtes encastrées:

$$w = w_{,x} = 0 \qquad \text{pour } x = 0,\ a$$
$$w = w_{,y} = 0 \qquad \text{pour } y = 0,\ b \tag{2.4b}$$

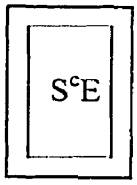
Dans ce travail, quatre cas distincts sont étudiés:

1) la plaque est simplement supportée sur son pourtour (S^cS),



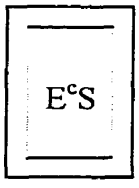
d'où
$$w = w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0 \qquad \text{pour } x = 0,\ a$$
$$w = w_{,yy} + \nu w_{,xx} = 0 \qquad \text{pour } y = 0,\ b \tag{2.4c}$$

2) les deux arêtes chargées sont simplement supportées et les deux autres sont encastrées (S^cE),



d'où
$$w = w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0 \qquad \text{pour } x = 0,\ a$$
$$w = w_{,y} = 0 \qquad \text{pour } y = 0,\ b \tag{2.4d}$$

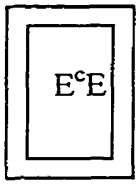
3) les deux arêtes chargées sont encastrées et les deux autres sont simplement supportées (E^cS),



d'où $w = w_{,xx} + \nu w_{,yy} = 0$ pour $x = 0,\ a$

$w = w_{,y} = 0$ pour $y = 0,\ b$ (2.4e)

4) la plaque est encastrée sur son pourtour (E^cE),



d'où $w = w_{,x} = 0$ pour $x = 0,\ a$

$w = w_{,y} = 0$ pour $y = 0,\ b$ (2.4f)

Le problème consiste donc à trouver les fonctions f et w qui satisfont l'équation d'équilibre, l'équation de compatibilité et les conditions aux limites.

2.4 - Développement des équations de base

Lorsqu'une plaque est comprimée dans son plan moyen par des forces uniformément réparties le long de deux arêtes opposées, Timoshenko [100] a démontré que les fonctions propres correspondant au flambage sont identiques à celles correspondant aux vibrations libres.

Le déplacement latéral de la plaque peut donc être représenté par une double série des fonctions propres du système linéaire associé:

$$w(x,y,t) = \sum_p \sum_q w_{pq}(t)\ \Phi_p(x)\ \Psi_q(y) + w^*(x,y) \tag{2.5}$$

où $w_{pq}(t)$ sont les coordonnées généralisées, $w^*(x,y)$ est la déformation causée par la composante statique du chargement et les indices p et q indiquent le nombre de demi-ondes selon les axes x et y.

L'expression analytique des imperfections est aussi représentée par une double série des fonctions propres:

$$w_0(x,y) = \sum_k \sum_l w_{0kl}\ \Phi_k(x)\ \Psi_l(y) \tag{2.6}$$

où l'amplitude des différents modes d'imperfection est noté par w_{0kl}.

Une étude expérimentale des relations entre les contraintes et les déformations de plaques encastrées, chargées dans le plan parallèle à l'axe de courbure a été effectuée par Jackson et Hall [101]. Ces plaques présentent une forme d'imperfection géométrique initiale; elles ont une légère courbure de forme cylindrique. Les essais effectués montrent que les déflexions statiques de faible amplitude ont la même forme que l'imperfection géométrique initiale. Cependant, pour des plaques de 1 mm d'épaisseur, les imperfections ne peuvent croître au delà d'une demi fois l'épaisseur de la plaque. Au delà de cette déformation statique, une certaine instabilité se produit et le mode de flambage, généralement de forme différente de l'imperfection, commence à se développer.

Sous l'action du chargement statique initial appliqué sur la plaque initialement imparfaite, la déformation statique engendrée est supposée de la même forme que l'imperfection :

$$w^*(x,y) = \sum_k \sum_l d_{kl}\ \Phi_k(x)\ \Psi_l(y) \tag{2.7}$$

Cette hypothèse demeure valide pour de faibles déformations, ayant une amplitude de l'ordre d'une demi-fois l'épaisseur de la plaque étudiée.

La solution pour la fonction d'Airy est supposée sous la forme d'une double série des fonctions propres, celles-ci satisfaisant les conditions de contrainte aux limites:

$$f(x,y,t) = \sum_m \sum_n f_{mn}(t)\ X_m(x)\ Y_n(y) - \frac{x^2}{2h} n_y(t) + f^*(x,y) \tag{2.8}$$

où $f_{mn}(t)$ sont les coefficients généralisés de contrainte et $f^*(x,y)$ représente la contribution due à la composante statique du chargement. Elle a pour expression :

$$f^*(x,y) = \sum_m \sum_n \varphi_{mn}\ X_m(x)\ Y_n(y) \tag{2.9}$$

Les expressions analytiques des fonctions propres utilisées, $X_m(x)$, $Y_n(y)$, $\Phi_p(x)$ et $\Psi_q(y)$ sont données par:

$$X_m(X) = \left[\cosh\left(\frac{\alpha_m x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_m x}{a}\right)\right] - \gamma_m \left[\sinh\left(\frac{\alpha_m x}{a}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_m x}{a}\right)\right] \tag{2.10}$$

$$Y_n(Y) = \left[\cosh\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right) - \cos\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right)\right] - \gamma_n \left[\sinh\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_n y}{b}\right)\right]$$

$$\Phi_p(X) = \frac{1}{\xi_p}\left\{A_p\left[\cosh\left(\frac{\beta_p x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\beta_p x}{a}\right)\right] + B_p \sinh\left(\frac{\beta_p x}{a}\right) + \sin\left(\frac{\beta_p x}{a}\right)\right\}$$

$$\Psi_q(Y) = \frac{1}{\xi_q}\left\{A_q\left[\cosh\left(\frac{\beta_q y}{b}\right) - \cos\left(\frac{\beta_q y}{b}\right)\right] + B_q \sinh\left(\frac{\beta_q y}{b}\right) + \sin\left(\frac{\beta_q y}{b}\right)\right\}$$

Dans ces fonctions, les coefficients β_i , γ_i , ξ_i , A_i et B_i dépendent des conditions aux limites:

- pour un bord simplement supporté,

$$A_i = B_i = 0 \ , \quad \beta_i = i\pi \ , \ \gamma_i = \frac{cosh(\alpha_i) - cos(\alpha_i)}{sinh(\alpha_i) - sin(\alpha_i)} \ , \ \xi_i = 1 \tag{2.11a}$$

- pour un bord encastré,

$$A_i = \frac{1}{\gamma_i} = \frac{sinh(\alpha_i) - sin(\alpha_i)}{cosh(\alpha_i) - cos(\alpha_i)}, \ B_i = -1, \ \beta_i = \alpha_i, \tag{2.11b}$$

$$\xi_i = \frac{1}{\gamma_i}\left(\cosh\frac{\alpha_i}{2} - \cos\frac{\alpha_i}{2}\right) - \sinh\frac{\alpha_i}{2} + \sin\frac{\alpha_i}{2}$$

Les coefficients α_i sont issus de l'équation transcendante suivante:

$$1 - \cos(\alpha_i)\cosh(\alpha_i) = 0 \tag{2.12}$$

De plus, les fonctions propres utilisées possèdent des propriétés d'orthogonalité:

$$\int_o^a X_i X_j \, dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ a, & i = j \end{cases} \qquad * \qquad \int_o^b Y_i Y_j \, dy = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ b, & i = j \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\int_o^a \Phi_i \Phi_j \, dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ aD_i, & i = j \end{cases} \qquad * \qquad \int_o^b \Psi_i \Psi_j \, dy = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ bD_j, & i = j \end{cases}$$

où $$D_i = \begin{cases} 1/2 & \textit{pour un bord simplement supporté} \\ A_i / \xi_i^2 & \textit{pour un bord encastré} \end{cases}$$

2.5 - Solution de l'équation de compatibilité et de l'équation d'équilibre

2.5.1 - Solution de l'équation de compatibilité

En substituant les expressions 2.5 à 2.9 dans l'équation de compatibilité 2.1, on obtient:

- terme de gauche =

$$\sum_m \sum_n (f_{mn} + \varphi_{mn}) \left[X_m{}^{IV} Y_n + 2 X_m{}^{II} Y_n{}^{II} + X_m Y_n{}^{IV} \right] \tag{2.14a}$$

- terme de droite =

$$E\left\{ \left(\sum_p \sum_q w_{pq} \Phi_p{}^I \Psi_q{}^I + \sum_k \sum_l (w_{0kl} + d_{kl}) \Phi_k{}^I \Psi_l{}^I \right)^2 - \left(\sum_k \sum_l w_{0kl} \Phi_k{}^I \Psi_l{}^I \right)^2 \right.$$

$$- \left(\sum_p \sum_q w_{pq} \Phi_p{}^{II} \Psi_q + \sum_k \sum_l (w_{0kl} + d_{kl}) \Phi_k{}^{II} \Psi_l \right)$$

$$* \left(\sum_p \sum_q w_{pq} \Phi_p \Psi_q{}^{II} + \sum_k \sum_l (w_{0kl} + d_{kl}) \Phi_k \Psi_l{}^{II} \right)$$

$$\left. + \left(\sum_k \sum_l w_{0kl} \Phi_k{}^{II} \Psi_l \right) \left(\sum_k \sum_l w_{0kl} \Phi_k \Psi_l{}^{II} \right) \right\} \tag{2.14b}$$

où les chiffres romains désignent l'ordre des dérivées par rapport à x ou y.

Égalant le terme de droite à celui de gauche et après quelques transformations, on trouve :

$$\sum_m \sum_n (f_{mn} + \varphi_{mn}) \left[X_m{}^{IV} Y_n + 2 X_m{}^{II} Y_n{}^{II} + X_m Y_n{}^{IV} \right] \tag{2.15}$$

$$= E\Bigg\{\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s w_{pq}w_{rs}\left(\Phi_p{}^I\Phi_r{}^I\Psi_q{}^I\Psi_s{}^I - \Phi_p{}^{II}\Phi_r\Psi_q{}^{II}\Psi_s\right)$$

$$+\sum_p\sum_q\sum_k\sum_l w_{pq}\left(w_{0kl}+d_{kl}\right)\Big[\Phi_p{}^I\Phi_k{}^I\Psi_q{}^I\Psi_l{}^I - \Phi_p{}^{II}\Phi_k\Psi_q\Psi_l{}^{II}$$

$$+\Phi_k{}^I\Phi_p{}^I\Psi_l{}^I\Psi_q{}^I - \Phi_k{}^{II}\Phi_p\Psi_l\Psi_q{}^{II}\Big]$$

$$+\sum_k\sum_l\sum_g\sum_h\Big[\left(w_{0kl}+d_{kl}\right)\left(w_{0gh}+d_{gh}\right) - w_{0kl}w_{0gh}\Big]$$

$$*\ \Big[\Phi_k{}^I\Phi_g{}^I\Psi_l{}^I\Psi_h{}^I - \Phi_k{}^{II}\Phi_g\Psi_l{}^{II}\Psi_h\Big]\Bigg\}$$

Les fonctions propres utilisées vérifient exactement les conditions aux limites, mais pas nécessairement les équations de base sur tout le domaine de la plaque. La méthode de Galerkin est donc appliquée aux équations pour en minimiser les erreurs, en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions choisies. Les deux côtés de l'équations sont ainsi multipliés par $X_i(x)\,Y_i(j)$. Le résultat est par la suite intégré par rapport à x et y dans le domaine de la plaque. En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions utilisées (2.13), on définit les coefficients suivants:

$$K_1^{im} = \frac{a}{\alpha_m{}^2}\int_0^a X_i\,X_m{}^{II}\,dx; \qquad L_1^{jn} = \frac{b}{\alpha_n{}^2}\int_0^b Y_j\,Y_n{}^{II}\,dy \tag{2.16}$$

$$K_2^{ipr} = \frac{a}{\beta_p\beta_r}\int_0^a X_i\,\Phi_p{}^I\,\Phi_r{}^I dx; \quad L_2^{jqs} = \frac{b}{\beta_q\beta_s}\int_0^b Y_j\,\Psi_q{}^I\,\Psi_s{}^I\,dy$$

$$K_3^{ipr} = \frac{a}{\beta_p{}^2}\int_0^a X_i\,\Phi_p{}^{II}\,\Phi_r\,dx; \qquad L_3^{jqs} = \frac{b}{\beta_q{}^2}\int_0^b Y_j\,\Psi_s{}^{II}\,\Psi_q\,dy$$

En appliquant la méthode de Galerkin à l'aide de ces nouveaux coefficients, on obtient après quelques manipulations mathématiques l'expression suivante :

$$\sum_m \sum_n A_{ij}^{mn}(f_{mn}+\varphi_{mn}) \tag{2.17}$$

$$= \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s B_{ij}^{pqrs} w_{pq} w_{rs} + \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l \left[B_{ij}^{pqkl} + B_{ij}^{klpq}\right] w_{pq}(w_{0kl}+d_{kl})$$

$$+ \sum_k \sum_l \sum_g \sum_h B_{ij}^{k\lg h}\left[(w_{0kl}+d_{kl})\,(w_{0gh}+d_{gh}) - w_{0kl} w_{0gh}\right]$$

où

$$A_{ij}^{mn} = \delta_i^m \;\delta_j^n \left[\frac{\alpha_i^{\,4}}{a^2} + \frac{\alpha_j^{\,4}}{b^2}\right] + 2\frac{\alpha_m^{\,2}\alpha_n^{\,2}}{ab} K_1^{im} L_1^{jn} \tag{2.18}$$

$$B_{ij}^{pqrs} = E\left[\frac{\beta_p \beta_q \beta_r \beta_s}{ab} K_2^{ipr} L_2^{jsq} - \frac{\beta_p^{\,2}\beta_s^{\,2}}{ab} K_3^{ipr}\; L_3^{jsq}\right]$$

et pour lesquelles δ_i^m est le delta de Kronecker, défini par $\delta_i^m = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases}$ (2.19)

On obtient la relation reliant les coefficients de contraintes généralisés f_{mn} et les coordonnées généralisées w_{pq} de l'équation 2.17, après quelques transformations:

$$f_{mn}+\varphi_{mn} = \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s D_{mn}^{pqrs}\; w_{pq} w_{rs} \tag{2.20}$$

$$+ \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l \left[D_{mn}^{pqkl} + D_{mn}^{klpq}\right] w_{pq}(w_{0kl}+d_{kl})$$

$$\sum_k \sum_l \sum_g \sum_h D_{mn}^{k\lg h}\left[(w_{0kl}+d_{kl})(w_{0gh}+d_{gh}) - w_{0kl}\; w_{0gh}\right]$$

où $\quad \left[D_{mn}^{pqrs}\right] = \left[A_{ij}^{mn}\right]^{-1}\left[B_{ij}^{pqrs}\right]$ (2.21)

2.5.2 - Solution de l'équation d'équilibre

En premier lieu, les expressions 2.5 à 2.9 sont insérées dans l'équation d'équilibre (2.2). On obtient ainsi :

$$\text{- terme de gauche} = \sum_p \sum_q w_{pq}\left[\Phi_p{}^{IV}\Psi_q + 2\,\Phi_p{}^{II}\,\Psi_q{}^{II} + \Phi_p\,\Psi_q{}^{IV}\right] + \sum_k \sum_l d_{kl}\left[\Phi_k{}^{IV}\,\Psi_l + 2\Phi_k{}^{II}\,\Psi_l{}^{II} + \Phi_k\,\Psi_l{}^{IV}\right] \tag{2.22a}$$

- terme de droite =

$$\frac{h}{D}\left\{\left[\sum_m \sum_n (f_{mn} + \varphi_{mn}) X_m Y_n{}^{II}\right]\left[\sum_p \sum_q w_{pq}\,\Phi_p{}^{II}\Psi_q + \sum_k \sum_l (w_{0kl} + d_{kl})\,\Phi_k{}^{II}\,\Psi_l\right]\right.$$

$$-2\left[\sum_m \sum_n (f_{mn} + \varphi_{mn}) X_m{}^{I}\,Y_n{}^{I}\right]\left[\sum_p \sum_q w_{pq}\,\Phi_p{}^{I}\,\Psi_q{}^{I} + \sum_k \sum_l (w_{0kl} + d_{kl})\,\Phi_k{}^{I}\,\Psi_l{}^{I}\right]$$

$$+\left[\sum_m \sum_n (f_{mn} + \varphi_{mn}) X_m{}^{II}\,Y_n - n_y(t)\right]\left[\sum_p \sum_q w_{pq}\,\Phi_p\,\Psi_q{}^{II} + \sum_k \sum_l (w_{0kl} + d_{kl})\,\Phi_k\,\Psi_l{}^{II}\right]$$

$$\left.-\rho\left[\sum_p \sum_q \ddot{w}_{pq}\,\Phi_p \Phi_q\right]\right\} \tag{2.22b}$$

La méthode de Galerkin doit aussi être appliquée sur ces équations. Après avoir multiplié les deux côtés de l'équation par $X_i(x)\,Y_i(j)$, intégré le tout par rapport à x et y dans le domaine de la plaque et tenu compte des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres, on obtient:

$$\text{- terme de gauche} = (w_{uv} + d_{uv})\left[\frac{\beta_u{}^4}{a^2} + \frac{\beta_v{}^4}{b^2}\right] D_u\,D_v + 2\sum_p \sum_q w_{pq}\frac{\beta_p{}^2\beta_q{}^2}{ab} K_7^{up}\,L_7^{vq}\,D_u\,D_v \tag{2.23a}$$

$$+2\sum_k\sum_l d_{kl}\frac{\beta_k^{\,2}\beta_l^{\,2}}{ab}K_7^{uk}\,L_7^{vl}\,D_u\,D_v$$

- terme de droite =

$$\frac{h}{D}\Bigg\{D_u\,D_v\sum_m\sum_n\sum_p\sum_q(f_{mn}+\varphi_{mn})w_{pq}\,*$$

$$\left[\frac{\alpha_n^{\,2}\,\beta_p^{\,2}}{ab}K_4^{ump}\,L_5^{vnq}+\frac{\alpha_m^{\,2}\,\beta_q^{\,2}}{ab}K_5^{ump}\,L_4^{vnq}-2\frac{\alpha_m\alpha_n\beta_p\beta_q}{ab}K_6^{ump}\,L_6^{vnq}\right]$$

$$+D_u\,D_v\sum_m\sum_n\sum_k\sum_l(f_{mn}+\varphi_{mn})(w_{0kl}+d_{kl})*$$

$$\left[\frac{\alpha_n^{\,2}\,\beta_k^{\,2}}{ab}K_4^{umk}\,L_5^{vnl}+\frac{\alpha_m^{\,2}\,\beta_l^{\,2}}{ab}K_5^{umk}\,L_4^{vnl}-2\frac{\alpha_m\alpha_n\beta_k\beta_l}{ab}K_6^{umk}\,L_6^{vnl}\right]$$

$$-n_y(t)D_u\,D_v\left[\sum_q w_{uq}\frac{\beta_q^{\,2}}{b}L_7^{vq}+\sum_l(w_{0ul}+d_{ul})\frac{\beta_l^{\,2}}{b}L_7^{vl}\right]$$

$$-\rho\,D_u\,D_v\,a\,b\,\ddot{w}_{uv}\Bigg\} \qquad (2.23b)$$

pour lesquels

$$K_4^{umr}=\frac{a}{D_u\,\beta_r^{\,2}}\int_0^a\Phi_u\,X_m\,\Phi_r^{\,II}\,dx;\qquad L_4^{vq}=\frac{b}{D_v\,\beta_q^{\,2}}\int_0^b\Psi_v\,Y_n\,\Psi_q^{\,II}\,dy$$

$$K_5^{umr}=\frac{a}{D_u\,\alpha_m^{\,2}}\int_0^a\Phi_u\,X_m^{\,II}\,\Phi_r\,dx;\qquad L_5^{vnq}=\frac{b}{D_v\,\alpha_n^{\,2}}\int_0^b\Psi_v\,Y_n^{\,II}\,\Psi_q\,dy \qquad (2.24)$$

$$K_6^{umr}=\frac{a}{D_u\,\alpha_m\,\beta_r}\int_0^a\Phi_u\,X_m^{\,I}\,\Phi_r^{\,I}\,dx;\qquad L_6^{vnq}=\frac{b}{D_v\,\alpha_n\,\beta_q}\int_0^b\Psi_v\,Y_n^{\,I}\,\Psi_q^{\,I}\,dy$$

$$K_7^{up}=\frac{a}{D_u\,\beta_p^{\,2}}\int_0^a\Phi_u\,\Phi_p^{\,II}\,dx;\qquad L_7^{vq}=\frac{b}{D_v\,\beta_q^{\,2}}\int_0^b\Psi_v\,\Psi_q^{\,II}\,dy$$

Après division par $\frac{\rho h D_u D_v ab}{D}$ et réarrangement, l'équation 2.23 prend la forme

$$\ddot{w}_{uv} + \sum_p \sum_q w_{pq} K_{uv}^{pq} + \sum_k \sum_l d_{kl} K_{uv}^{kl} - n_y(t)\left[\sum_q w_{uq} P_{uv}^q + \sum_l (w_{0ul} + d_{ul}) P_{uv}^l\right]$$

$$+ \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q (f_{mn} + \varphi_{mn}) w_{pq} G_{uv}^{mnpq} + \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l (f_{mn} + \varphi_{mn})(w_{0kl} + d_{kl}) G_{uv}^{mnkl} = 0 \tag{2.25}$$

où $$K_{uv}^{pq} = \frac{D}{ab\rho h}\left[\delta_u^p \delta_v^q \left(\frac{\beta_u^4}{a^2} + \frac{\beta_v^4}{b^2}\right) + 2\frac{\beta_p^2 \beta_q^2}{ab} K_7^{up} L_7^{vq}\right]$$

$$P_{uv}^q = -\frac{1}{ab\rho}\frac{\beta_q^2}{b} L_7^{vq}$$

$$G_{uv}^{mnpq} = \frac{1}{ab\rho}\left[2\frac{\alpha_m \alpha_n \beta_p \beta_q}{ab} K_6^{ump} L_6^{vnq} - \frac{\alpha_n^2 \beta_p^2}{ab} K_4^{ump} L_5^{vnq} - \frac{\alpha_m^2 \beta_q^2}{ab} K_5^{ump} L_4^{vnq}\right]$$

Portant l'expression des contraintes (2.20, tirée de l'équation de compatibilité) dans cette dernière équation, on trouve:

$$\ddot{w}_{uv} + \sum_p \sum_q K_{uv}^{pq} w_{pq} + \sum_k \sum_l K_{uv}^{kl} d_{kl}$$

$$- n_y(t)\left[\sum_q P_{uv}^q w_{uq} + \sum_l (w_{0ul} + d_{ul}) P_{uv}^l\right] + \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s \sum_a \sum_b M_{uv}^{pqrsab} w_{pq} w_{rs} w_{ab}$$

$$+ \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s \sum_k \sum_l \left[M_{uv}^{pqrskl} + M_{uv}^{pqklrs} + M_{uv}^{klpqrs}\right] w_{pq} w_{rs} (w_{0kl} + d_{kl}) \tag{2.26}$$

$$+ \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l \sum_g \sum_h \Big\{ \left[M_{uv}^{klpqgh} + M_{uv}^{k\lg hpq} + M_{uv}^{pqk\lg h}\right](w_{0kl} + d_{kl})(w_{0gh} + d_{gh})$$

$$- M_{uv}^{pqk\lg h} w_{0kl} w_{0gh} \Big\} w_{pq}$$

$$+\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l\sum_g\sum_h M_{uv}^{ijk\,\lg h}\left(w_{0ij}+d_{ij}\right)\left[\left(w_{0kl}+d_{kl}\right)\left(w_{0gh}+d_{gh}\right)-w_{0kl}\,w_{0gh}\right]=0$$

où $\left[M_{uv}^{klpqrs}\right]=\left[G_{uv}^{mnkl}\right]\left[D_{mn}^{pqrs}\right]$

2.5.3 - Cas statique

Pour le cas statique, cas pour lequel $w_{uv}=\ddot{w}_{uv}=0$ et $n_y(t)=n_{yo}$, l'équation générale du mouvement (2.26) se réduit à :

$$\sum_k\sum_l K_{uv}^{kl}\,d_{kl}-n_{yo}\sum_l P_{uv}^{l}\left(w_{0ul}+d_{ul}\right)$$

$$+\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l\sum_g\sum_h M_{uv}^{klijgh}\left(w_{0ij}+d_{ij}\right)\left[\left(w_{0kl}+d_{kl}\right)\left(w_{0gh}+d_{gh}\right)-w_{0kl}\,w_{0gh}\right]=0 \qquad (2.27)$$

Cette relation statique doit être satisfaite. En tenant compte de celle-ci et en ajoutant l'effet d'un amortissement visqueux linéaire, on obtient :

$$\ddot{w}_{uv}+\sum_p\sum_q K_{uv}^{q}\,w_{pq}-n_y(t)\sum_q P_{uv}^{q}\,w_{uq}-n_{yt}\cos\theta\sum_l P_{uv}^{l}\left(w_{0ul}+d_{ul}\right)+2C_{uv}\dot{w}_{uv}$$

$$\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s\sum_a\sum_b M_{uv}^{pqrsab}\,w_{pq}\,w_{rs}\,w_{ab}$$

$$+\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s\sum_k\sum_l\left[M_{uv}^{pqrskl}+M_{uv}^{pqklrs}+M_{uv}^{klpqrs}\right]w_{pq}\,w_{rs}\left(w_{0kl}+d_{kl}\right) \qquad (2.28)$$

$$\sum_p\sum_q\sum_k\sum_l\sum_g\sum_h\Bigg(\left[M_{uv}^{klpqgh}+M_{uv}^{k\lg hpq}+M_{uv}^{pqk\lg h}\right]\left(w_{0kl}+d_{kl}\right)\left(w_{0gh}+d_{gh}\right)$$

$$-M_{uv}^{pqk\lg h}\,w_{0kl}\,w_{0gh}\Bigg)w_{pq}=0$$

Définissant les coefficients

$$H_{uv}^{pqrskl} = M_{uv}^{pqrskl} + M_{uv}^{pqklrs} + M_{uv}^{klpqrs} \quad \text{et} \quad X_{0kl} = w_{0kl} + d_{kl} \tag{2.29}$$

on obtient finalement, après quelques transformations, l'équation suivante:

$$\ddot{w}_{uv} + 2C_{uv}\dot{w}_{uv} + \sum_p \sum_q K_{uv}^q w_{pq} - n_y(t) \sum_q P_{uv}^q w_{uq} \tag{2.30}$$

$$+ \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l \sum_g \sum_h \left(H_{uv}^{pqk\lg h} X_{kl} X_{gh} - M_{uv}^{pqk\lg h} w_{0kl} w_{0gh} \right) w_{pq}$$

$$+ \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s \sum_k \sum_l H_{uv}^{pqrskl} w_{pq} w_{rs} X_{kl} + \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s \sum_a \sum_b M_{uv}^{pqrsab} w_{pq} w_{rs} w_{ab}$$

$$= n_{yt} \cos\theta \sum_l P_{uv}^l \left(w_{0ul} + d_{ul} \right)$$

Le terme situé à droite de l'égalité est indépendant du mouvement mais est fonction de l'imperfection géométrique et représente une excitation dynamique ou forcée. Ainsi, les imperfections initiales génèrent une force fictive dans la direction du mouvement, et ce pour tous les modes de vibration. Cependant, on observe qu'uniquement les imperfections géométriques initiales ayant la même forme spatiale que le mode de vibration selon la direction x contribuent à ce terme d'excitation. En effet, le terme de droite ne comprend que les déflexions statiques ($w_{0ul} + d_{ul}$) ayant le même indice selon x que le mode de vibration (u).

Les imperfections géométriques considérées peuvent avoir une forme différente des modes de vibration. Cependant, pour simplifier les développements, les fonctions propres utilisées pour décrire les imperfections sont identiques à celles utilisées pour décrire les modes de vibration. Les fonctions propres décrivant les imperfections d'une plaque encastrée sont celles associées aux vibrations d'une plaque encastrée. Cette restriction simplifie considérablement l'application de la méthode de Galerkin.

Lorsqu'une plaque est comprimée dans son plan moyen par des forces uniformément réparties le long de deux arêtes opposées, il a été démontré [100] que le flambage est tel qu'il peut y avoir plusieurs demi-ondes dans la direction de compression mais une seule dans la direction perpendiculaire. On suppose que la plaque a un comportement dynamique similaire et par conséquent que les modes de vibration de celle-ci possèdent une seule demi-onde dans la direction x. Tous les indices associés aux modes de vibration dans la direction x sont donc égaux à 1 et seront omis dans les équations suivantes. Contrairement aux modes de vibration, l'imperfection géométrique peut prendre une configuration tout à fait distincte et ainsi comporter plusieurs demi-ondes selon la direction x. En considérant ces nouvelles hypothèses, l'équation temporelle du mouvement prend la forme

$$\begin{aligned}
&\ddot{w}_v + 2C_v\dot{w}_v + \sum_q \left(K_v^q - n_y(t)P_v^q\right)w_q \\
&\sum_q \left(\sum_k \sum_l \sum_g \sum_h \left[H_{uv}^{qk\lg h} X_{kl} X_{gh} - M_v^{qk\lg h} w_{0kl}\, w_{0gh}\right] w_q \right) \\
&\quad + \sum_q \sum_s \sum_k \sum_l H_v^{qskl} w_q w_s X_{kl} + \sum_q \sum_s \sum_b M_v^{qsb} w_q w_s w_b \\
&\quad = n_{yt} \cos\theta \sum_l P_v^l X_{1l}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Ces équations sont reliées entre elles par des termes de couplage linéaires. Ce couplage est causé par la présence d'imperfections géométriques initiales et existe quel que soit le type de conditions aux limites. Pour des plaques ayant des imperfections géométriques initiales, les résonances internes et combinées peuvent donc se produire pour tous les types de conditions aux limites. De plus, on observe que seules les imperfections ayant une demi-onde selon la direction x (de la même forme que le mode de vibration) contribuent au terme d'excitation forcée. Par conséquent, pour minimiser le nombre de termes contenus par les équations du mouvement, uniquement les imperfections ayant une seule demi-onde dans la direction perpendiculaire au chargement seront considérées. Cette simplification réduit sensiblement la taille des

équations tout en permettant d'observer la contribution des termes dus aux imperfections qui apparaissent les plus significatifs, soit ceux qui contribuent au terme d'excitation forcée.

Tous les indices décrivant la forme des imperfections selon la direction x sont donc égaux à un et seront omis dans la notation des équations suivantes. D'autre part, uniquement les trois premiers modes de vibration seront considérés. Cette restriction est imposée par le modèle théorique utilisé (limité aux premiers modes de vibration). L'équation temporelle du mouvement prend donc la forme finale

$$\begin{aligned} &\ddot{w}_v + 2C_v\dot{w}_v + \sum_q \left(K_v^q - n_y(t)P_v^q\right)w_q \\ &+ \sum_q \left(\sum_l \sum_h \left[H_v^{qlh} X_l X_h - M_v^{qlh} w_{0l} w_{0h}\right] w_q \right) \\ &+ \sum_q \sum_s \sum_l H_v^{qsl} w_q w_s X_l + \sum_q \sum_s \sum_b M_v^{qsb} w_q w_s w_b \\ &= n_{yt} \cos\theta \sum_l P_v^l X_l \end{aligned} \tag{2.32}$$

Cette équation temporelle du mouvement décrit le comportement dynamique d'une plaque géométriquement imparfaite et soumise à une excitation paramétrique. On y retrouve un terme d'excitation forcée dont l'importance est directement relié à l'amplitude des imperfections géométriques présentes. Ainsi, contrairement au cas des plaques parfaites, des résonances forcées peuvent être rencontrées. De plus, la présence d'imperfection ajoute un terme de non-linéarité quadratique qui peut modifier le comportement dynamique de la plaque.

2.6 - Solution des équations temporelles du mouvement

Il existe plusieurs méthodes de solution pour résoudre les équations du mouvement. Une étude comparative des principales méthodes, effectuée par Lavigne [102], a permis de mettre en valeur la simplicité et l'efficacité de l'intégration numérique directe. Les cas traités ici diffèrent légèrement de celui pour lequel la comparaison des diverses méthodes de solution a été effectuée. Il est cependant justifié de croire que la méthode d'intégration directe est encore la plus efficace, car la forme générale de l'équation temporelle du mouvement ici étudiée est similaire à celle solutionnée par Lavigne.

Les équations du mouvement sont solutionnées en utilisant une méthode d'intégration directe, à l'aide d'un programme conçu à cet effet avec MATLAB. Ce programme effectue une intégration numérique avec l'algorithme d'Adams-Bashforth de troisième ordre.

Soit $f(t)$, la fonction recherchée décrite par

$$f(t) = \int_{t_i}^{t_f} y(t)dt \tag{2.33}$$

où les valeurs de $f(t)$ sont calculées à divers temps t espacés par un intervalle temporel Δ. Les étapes décrites par l'algorithme d'Adams-Bashforth sont les suivantes:

$$f(t=0) = f_o \qquad \text{(première itération)}$$

$$f(t=\Delta) = f_o + \Delta * y(t=\Delta) \qquad \text{(deuxième itération)}$$

$$f(t=2\Delta) = f(t=\Delta) + \frac{\Delta}{2}\left[3 * y(t-\Delta) - y(t-2\Delta)\right] \qquad \text{(troisième itération)}$$

$$f(t) = f(t-\Delta) + \frac{\Delta}{12}\left[23 * y(t-\Delta) - 16 * y(t-2\Delta) + 5 * y(t-3\Delta)\right] + O(\Delta^4)$$

(itérations successives)

où f_o : condition initiale sur f à $t = 0$

$O(\Delta^4)$: erreur numérique locale d'ordre 4 (2.34)

Le pas d'intégration (Δ) est la variable qui détermine la précision des résultats obtenus. Il doit être assez faible pour minimiser l'erreur locale et éviter le recouvrement spectral. Cependant, lorsque le pas est trop faible, le nombre de calculs devient rapidement excessif et le cumul des erreurs peut devenir considérable.

Pour vérifier et ajuster le pas temporel utilisé, une procédure éprouvée est employée. Ainsi, deux simulations sont effectuées en utilisant un pas égal à $\Delta/2$ et un autre égal à 2Δ. Si les résultats de ces deux simulations sont consistants et essentiellement les mêmes, le plus grand des pas utilisés (2Δ) est adéquat. Si les résultats diffèrent, le pas le plus faible doit être utilisé.

L'intégration numérique permet d'obtenir la réponse temporelle de la plaque pour la cas stationnaire (fréquence d'excitation fixe) et pour le cas non-stationnaire (fréquence d'excitation variant avec le temps). Dans le premier cas, l'intégration effectuée permet d'obtenir la réponse temporelle de la plaque pour une fréquence d'excitation. Pour élaborer une courbe de réponse en fréquence, plusieurs simulations doivent être effectuées à différentes fréquences d'excitation.

Les résultats obtenus de chaque intégration dépendent des conditions initiales imposées. Celles-ci doivent être le plus près possible de la solution que l'on désire obtenir. Au début de chaque simulation (instant $t = 0$), la valeur de $cos\ \theta$ est unitaire et la force d'excitation est maximale. Les conditions initiales imposées doivent donc décrire le plus fidèlement possible le comportement du système lorsque la force

d'excitation atteint un maximum. Les conditions initiales sont extraites d'une simulation précédente effectuée à une fréquence d'excitation très rapprochée. Le programme permet de conserver l'amplitude et la vitesse du signal obtenu, pour l'instant où la force d'excitation passe par un maximum, et de les introduire comme conditions initiales pour une simulation suivante ayant une fréquence d'excitation légèrement différente. Les fréquences d'excitation de deux simulations successives doivent être suffisamment rapprochées pour que les conditions initiales tirées d'une simulation correspondent bien au régime permanent de la simulation suivante. Cette procédure permet d'atteindre rapidement le régime permanent, diminuant ainsi le nombre de calculs nécessaire et l'erreur totale accumulée. De plus, elle facilite le choix des conditions initiales. En réalité, celles-ci doivent être choisies avec beaucoup de soin pour pouvoir tracer la quasi totalité des résonances étudiées. Pour le cas stationnaire, des programmes MATLAB ont été conçu suivant cette procédure pour un modèle à un degré de liberté (ip1s.m) et pour une modèle à trois degrés de liberté (ip3s.m).

Dans certains cas, la réponse temporelle obtenue contient plus d'un signal harmonique. On doit alors avoir recours à un autre programme (fft3d.m) afin d'extraire les différentes composantes fréquentielles. Ce programme, conçu avec MATLAB, permet d'appliquer une FFT (transformée rapide de Fourier) sur le signal temporel obtenu. On peut de cette façon dégager l'amplitude et la fréquence de ses composantes harmoniques. Pour obtenir l'amplitude et la fréquence réelle de chaque harmonique, il est cependant nécessaire d'appliquer des formules de correction pour atténuer les effets de palissade (aussi appelé « picket fence effects »). Ces effets sont reliés à un échantillonnage dans le domaine fréquentiel (phénomène inhérent à l'application d'une FFT).

Pour le cas non-stationnaire, on obtient une réponse temporelle continue pour la gamme de fréquence d'excitation voulue, selon la fréquence d'excitation initiale choisie, la vitesse de variation de celle-ci et le temps que doit durer la simulation. Pour

minimiser l'influence des conditions initiales choisies, on s'assure que le système a bien atteint son régime permanent à la fréquence d'excitation initiale avant de commencer à faire varier la fréquence d'excitation. Des programmes MATLAB ont ainsi été conçus pour étudier le comportement d'un modèle à un degré de liberté (ip1ns.m) et à trois degrés de liberté (ip3ns.m).

Les paramètres contenus dans les équations du mouvement à résoudre sont calculés à l'aide de programmes FORTRAN élaboré par Sassi [30] auxquels certaines modifications ont été apportées. La description de ces programmes ainsi que ceux conçus dans le cadre de la présente étude sont présentés au tableau 2.1. La procédure de calcul est quant à elle schématisée à la figure 2.2. Les principaux programmes sont quant à eux présentés aux annexes C et D.

Tableau 2.1 - Programmes utilisés pour procéder à l'intégration numérique

Nom du programme	Buts
***Programmes conçus par Sassi* [30]**	
roots.for	trouver les racines de l'équation transcendante
coefs.for	évaluer les paramètres nécessaires au calcul des coefficients $M_{\bullet}^{***}$
strec.for	évaluer les coefficients de contrainte
sychar.for	évaluer les caractéristiques de la plaque parfaite : ➢ mode critique de flambage ➢ fréquences naturelles ➢ charges critiques
cubic.for	évaluer les coefficients cubiques $M_{\bullet}^{***}$
imper.for	évaluer les caractéristiques de la plaque imparfaite : ➢ déflexion statique ➢ fréquences naturelles ➢ coefficients d'amortissement
Programmes conçus dans le cadre de la présente étude	
ip1.for, ip2.for, ip3.for	extraire les coefficients nécessaires à l'intégration directe du système à un, deux et trois d.d.l.
ip1s.m, ip2s.m, ip3s.m	intégrer numériquement les équations du mouvement en régime stationnaire pour le système à un, deux et trois d.d.l.
ip1ns, ip2ns, ip3ns.m	intégrer numériquement les équations du mouvement en régime non stationnaire pour le système à un, deux et trois d.d.l.
fft3d.m	appliquer une transformée rapide de Fourier sur la réponse temporelle stationnaire d'un système à trois d.d.l.
zone.m	calculer les zones d'instabilité paramétrique des trois premiers modes de vibration

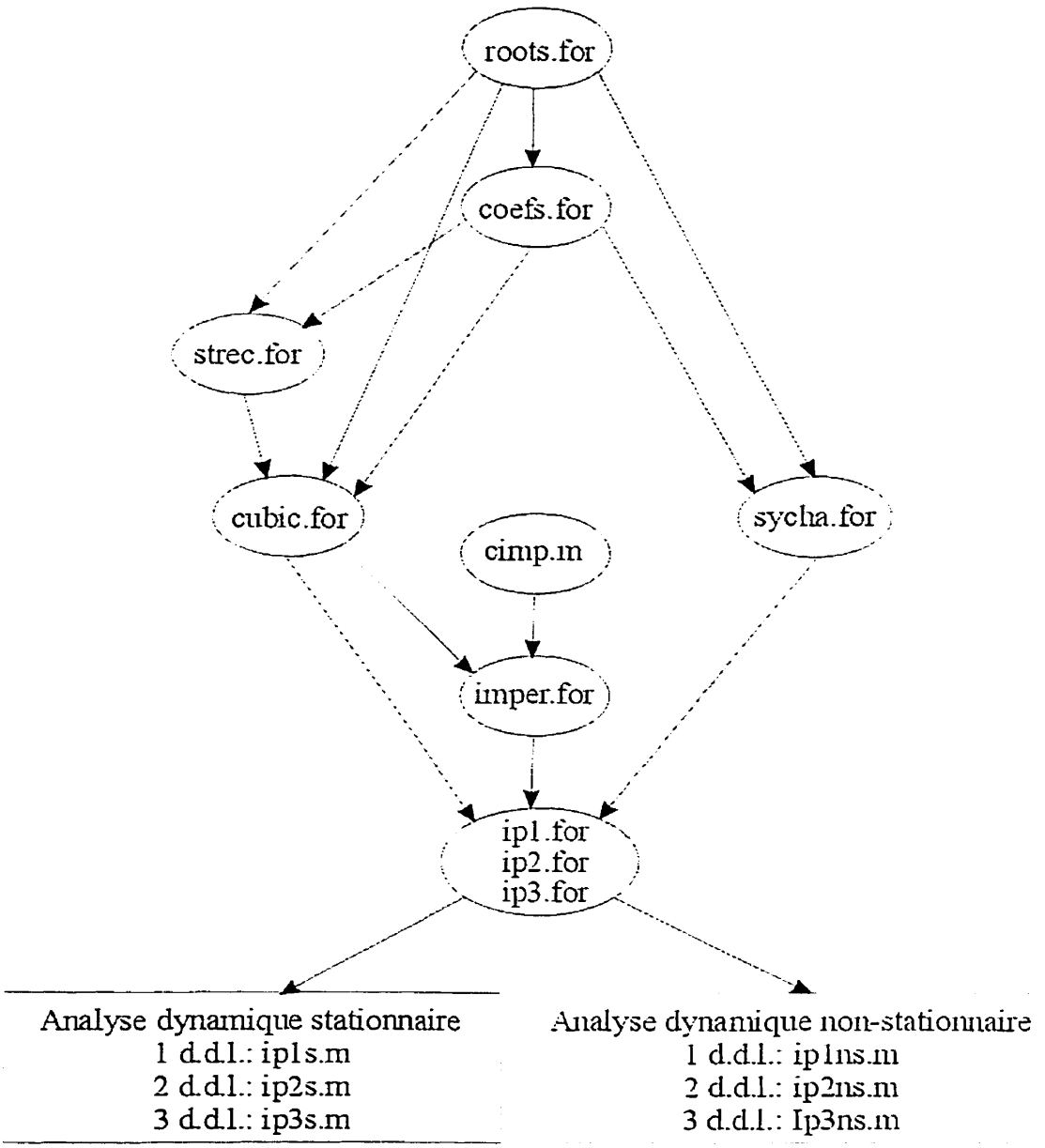


Figure 2.2 - Diagramme illustrant la procédure de calcul utilisée

CHAPITRE III
APPROCHE EXPÉRIMENTALE

3.1 - Introduction

Avant de procéder à la prise de mesure en laboratoire, il est essentiel de concevoir un montage expérimental adéquat qui permette de recréer de façon précise le phénomène que l'on désire étudier. Une attention particulière a donc été apportée aux diverses composantes du montage expérimental de manière à satisfaire les hypothèses et limitations du modèle mathématique que l'on désire valider. Le montage expérimental mis en place et exploité permet ainsi de reproduire le système physique décrit par le modèle sans toutefois être trop limitatif pour permettre l'étude de phénomènes physiques encore mal compris.

Pour pouvoir déterminer aisément l'effet des imperfections géométriques sur le comportement dynamique des plaques, les plaques étudiées sont façonnées avec une imperfection déterminée. Une grande attention est par conséquent apportée à la fabrication des plaques imparfaites. La méthode de mise en forme utilisée permet de contrôler les diverses caractéristiques de la plaque, telles que sa forme, son imperfection et son niveau de contrainte interne.

3.2 - Montage expérimental

Le montage expérimental est constitué de divers appareils et composantes. Certains servent à contrôler et à appliquer la charge sur la plaque; ils constituent le système de chargement de la plaque. Les autres sont utilisés pour mesurer les paramètres décrivant le comportement des plaques imparfaites lors des essais expérimentaux. Ils forment pour leur part le système de mesure.

3.2.1 - Système de chargement

Le montage expérimental utilisé a été inspiré par celui de Samson [20] et Nguyen [21] (lui-même basé sur celui de Ostiguy [19]), auquel certaines modifications ont été apportées. Dans le passé, ce dispositif d'essai a permis d'obtenir des résultats expérimentaux très près des résultats théoriques. Il est certes possible d'apporter des modifications à ce dispositif pour tenter de l'améliorer, mais il n'existe aucune preuve que de telles modifications pourront réduire les écarts qui subsistent entre le modèle réel et le modèle théorique. Par conséquent, les principales modifications qui ont été effectuées ne portent pas sur la nature même du montage, mais plutôt sur la manière dont les résultats sont enregistrés et sur les caractéristiques des plaques utilisées.

La liste détaillée des instruments utilisés pour effectuer les mesures et charger la plaque est présentée au tableau 3.1. Les figures 3.1 à 3.5 illustrent les instruments et le montage utilisés tandis que le diagramme de branchement des appareils se retrouve à la figure 3.6. Les composantes du système d'acquisition de données (composantes identifiées par la lettre A sur les photos) sont décrites à la section suivante.

Le dispositif d'essai employé permet d'observer le comportement dynamique de plaques rectangulaires sollicitées dans leur plan par une force uniformément distribuée de la forme $n_y(t) = n_{yo} + n_{yt} \cos \lambda t$ appliquée le long de deux arêtes opposées. Le chargement statique (n_{yo}), le chargement dynamique (n_{yt}) et la fréquence d'excitation (λ) peuvent être variés de façon indépendante. De plus, chaque arête de la plaque peut avoir son propre type de support, c'est-à-dire être simplement supportée ou encastrée.

Les supports de la plaque constituent un élément déterminant de la méthode expérimentale. Pour tous les cas, ceux-ci doivent reproduire le plus fidèlement possible les conditions aux limites imposées dans le modèle théorique. Des supports spécifiques au problème étudié ont été développés par les concepteurs du montage utilisé et sont repris pour cette recherche [19, 20, 21].

Le long des arêtes non chargées (arêtes verticales), des couteaux ajustables sont utilisés pour assurer à la plaque un support adéquat, permettre une liberté de mouvement dans le plan de la plaque et rencontrer les particularités spécifiques aux divers types de conditions aux limites. Par conséquent, un type distinct de couteau est utilisé pour chaque type de support. Ceux-ci sont présentés aux figures 3.7 et 3.8. Des couteaux à une seule lame sont utilisés pour reproduire la condition de support simple. Ceux-ci permettent de limiter le déplacement latéral de la plaque sans toutefois empêcher le mouvement de rotation au support. Pour le cas d'encastrement, des couteaux à trois lames empêchent le déplacement latéral et limite la rotation de la plaque.

Le long des arêtes chargées (arêtes horizontales) d'autres types de support sont utilisés en combinaison avec une poutrelle de chargement. Afin d'assurer une distribution uniforme de la charge sur les arêtes horizontales, des poutrelles de chargement remplies de silicone[1] sont utilisées (voir figures 3.9 et 3.10). La surface d'appui du silicone est moulée en forme de rainure en *V*, dans laquelle vient s'appuyer la plaque. Le but de cette rainure est de maintenir la plaque bien au centre de la poutrelle et d'en limiter le déplacement latéral au support.

---

[1] silicone RTV 630A mélangé avec 10% en masse du catalyseur RTV 630B, produit par General Electric

Tableau 3.1 - Liste des instruments utilisés

Utilisation	Type d'appareil	Marque, No. de modèle	No. De série	Réf.
Excitation dynamique	Excitateur électrodynamique	UNHOLTZ DICKIE CORP., Model 160 Shaker	104	E1
	Amplificateur de puissance	UNHOLTZ DICKIE CORP., Model A102 Power Amplifier	101	E2
	Générateur de signal	SPECTRAL DYNAMICS CORP., Model SD104A-5 Sweep Oscillator	1620	E3
	Contrôleur de signal	SPECTRAL DYNAMICS CORP., Model SD105C Amplitude servo/monitor	869	E4
Mesure de force	Capteurs piézoélectriques	PCB, Model 211A Quartz Force Ring	----------	F1
	Bloc d'addition	PCB, 070A15 Summing Block	----------	F2
	Amplificateur de charge	BRUËL & KJAER Charge Amplifier Type 2535	1742647	F3
	Anneau dynamométrique	Voir annexe	----------	F4
	Conditionneur de jauges	ECTRON CORP., Model E513-2A	48647	F5
Mesure de déplacement	Capteur capacitif de déplacement	MTI Instruments, CP-300	----------	D1
	Conditionneur de signal	WAYNE KERR, TE200 Transducer Equipment	243	D2
	Potentiomètre	SPECTRAL, Model 530	6849	D3
	Potentiomètre	SPECTRAL Model 534	9440	D4
	Source de voltage	HEWLETT PACKARD, Model 721A	G024-00653	D5
Analyseur de vibrations	Analyseur en temps réel	SPECTRAL DYNAMICS, SD375 Dynamic 3D01	227	V1
	Moniteur vidéo	ELECTROHOME, 38-V26113-60	6-201332	V2
	Filtre suiveur/multipl. de fréquence	BRUËL & KJAER, 1623 Tracking Filter	1172883	V3
Divers	Oscilloscope	HEWLETT PACKARD, 54600B	3227A11708	X1
	Multimètre	FLUKE, 45	SN4774113	X2

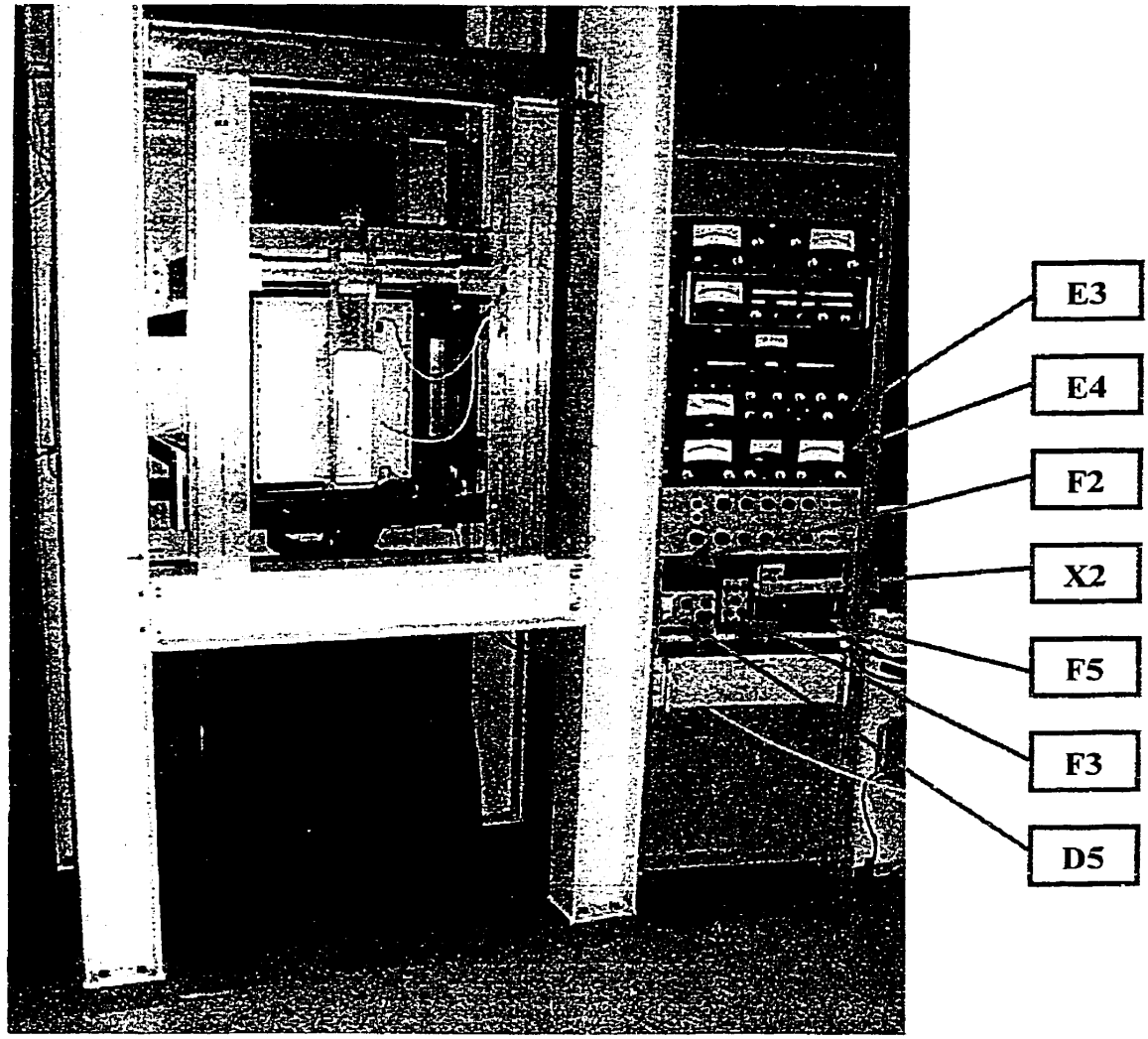


Figure 3.1 - Montage expérimental et instruments, vue frontale

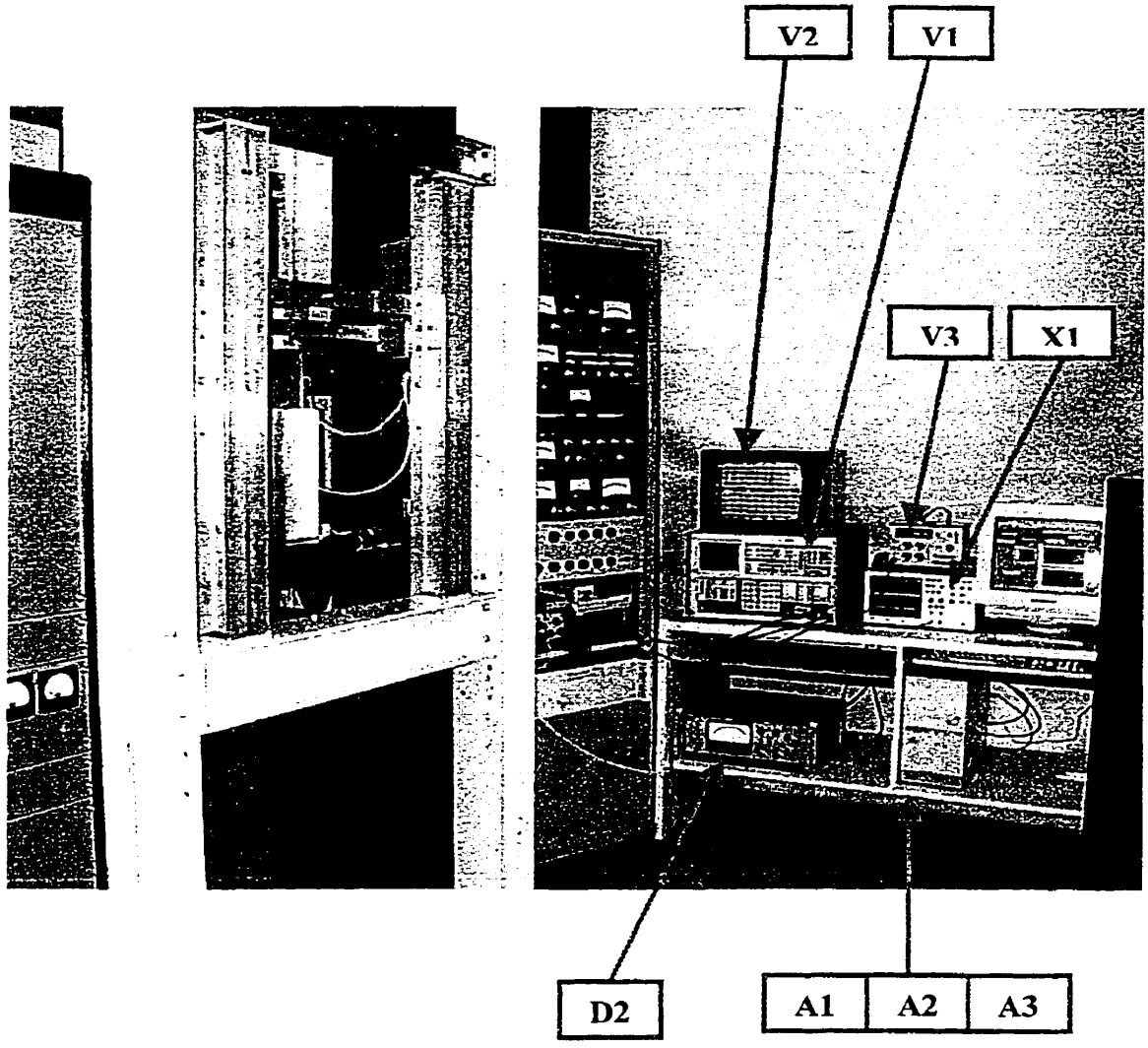


Figure 3.2 - Montage expérimental, instruments et SAQ, vue frontale

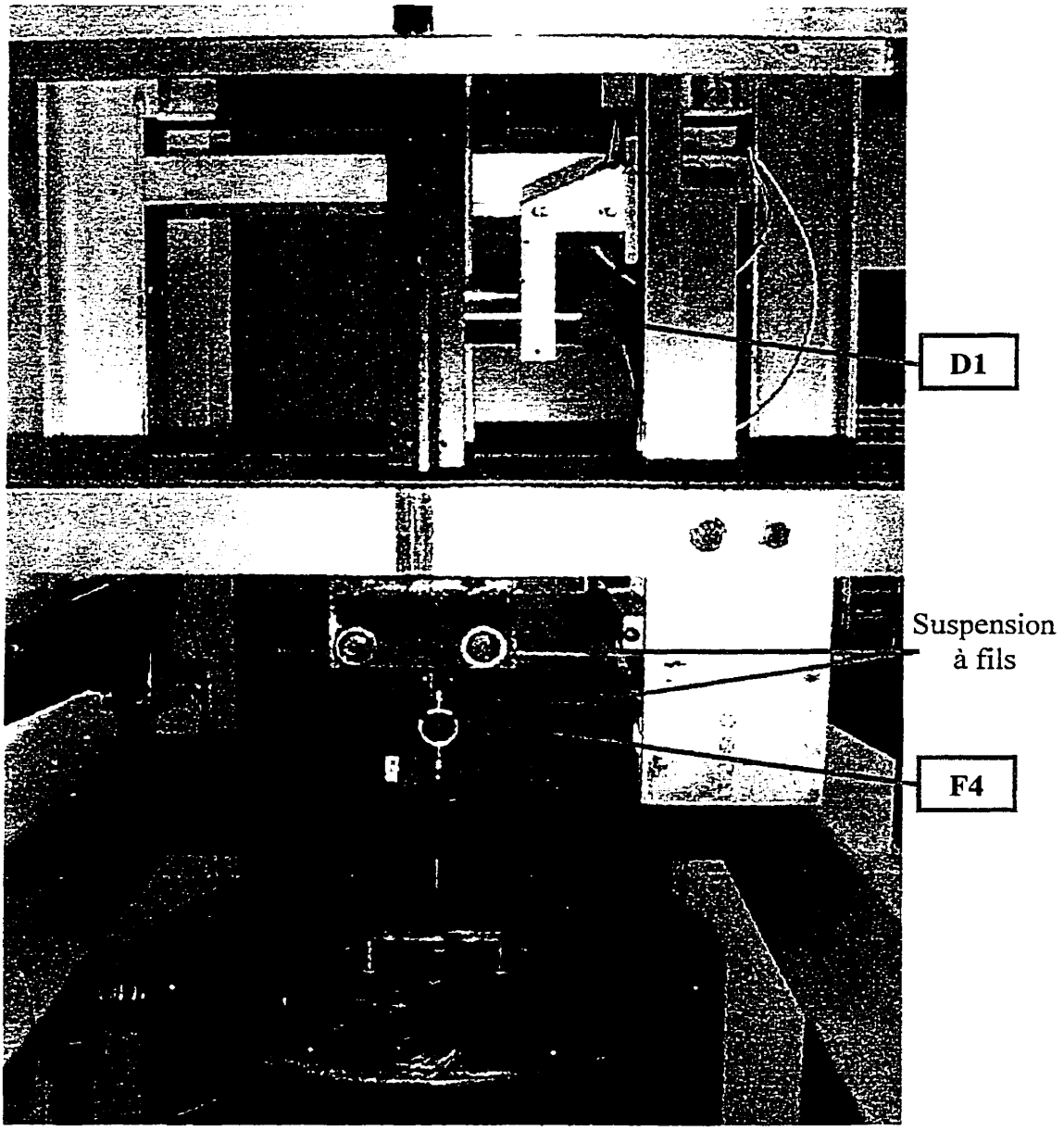


Figure 3.3 - Montage expérimental, vue de côté

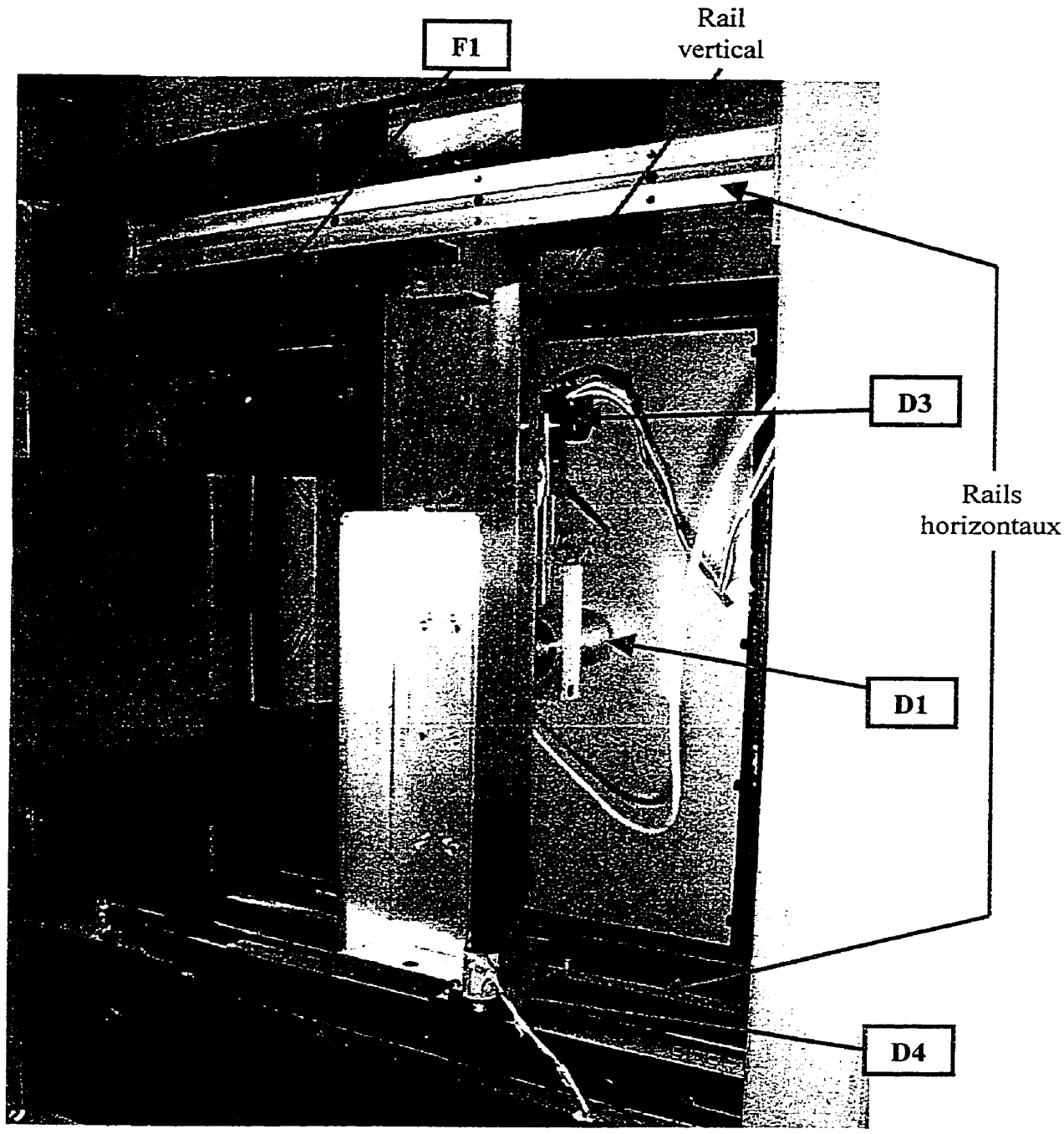


Figure 3.4 - Montage expérimental, vue de face

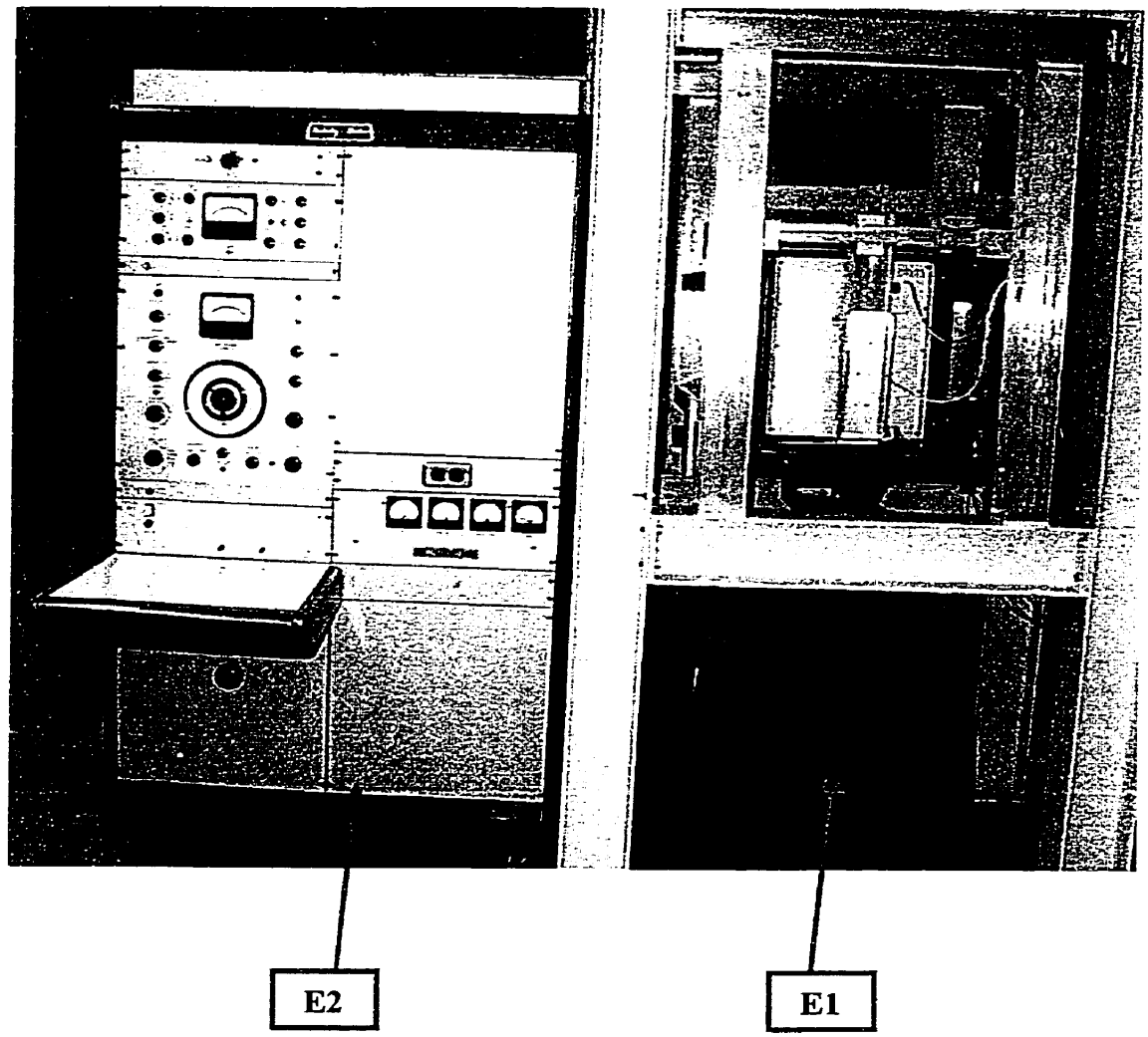


Figure 3.5 - Montage expérimental et amplificateur de puissance, vue frontale

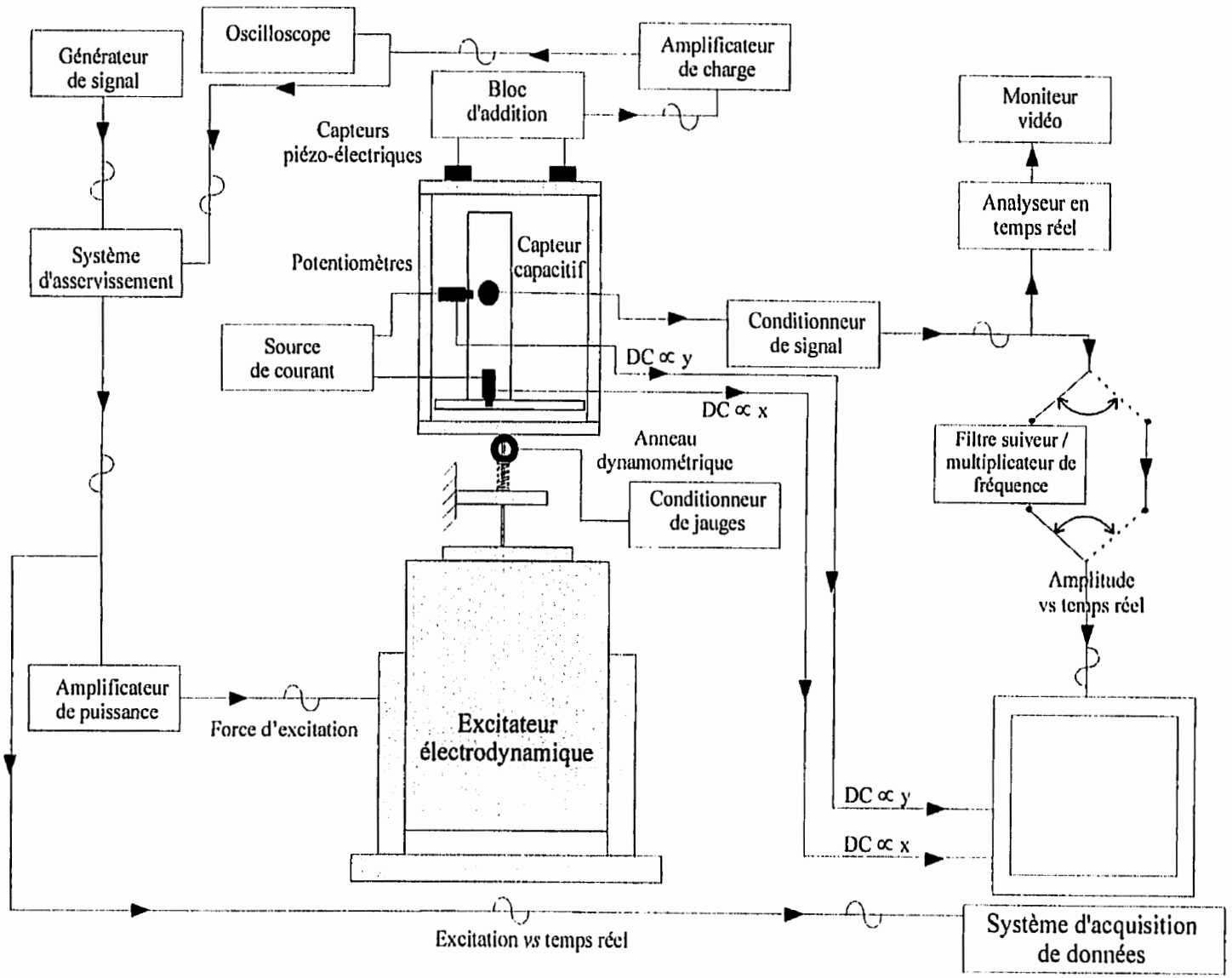


Figure 3.6 - Diagramme de branchement des instruments

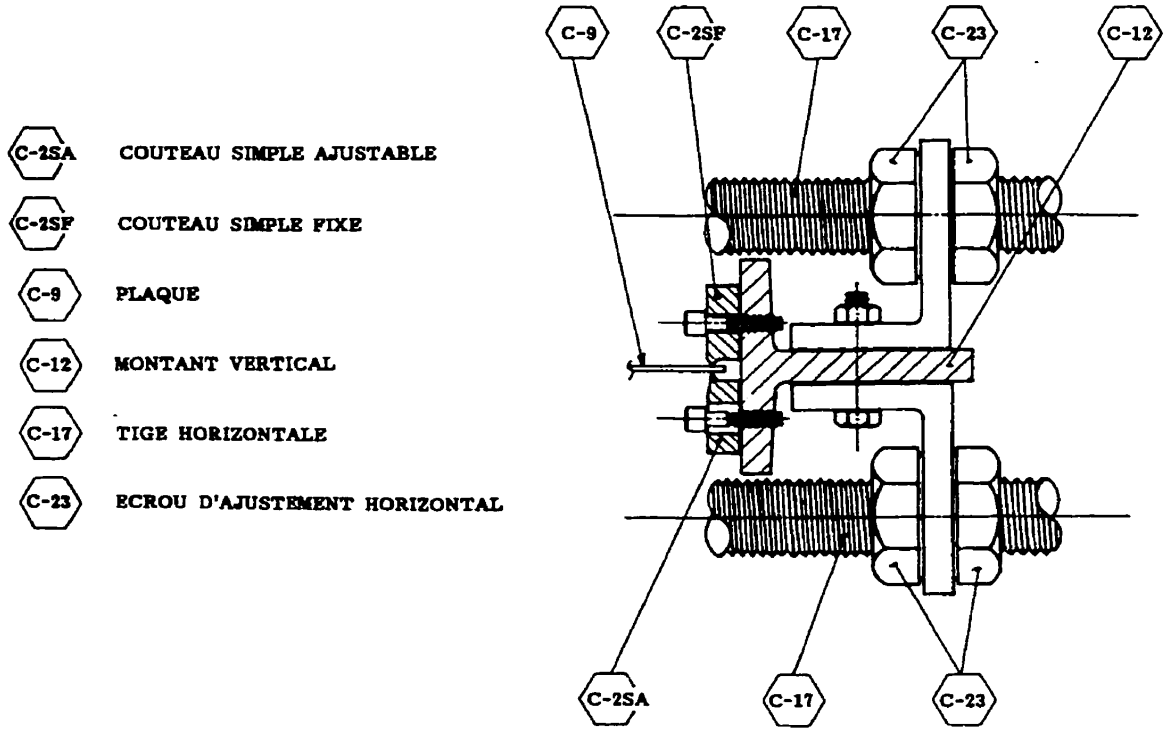


Figure 3.7 - Arête verticale simplement supportée

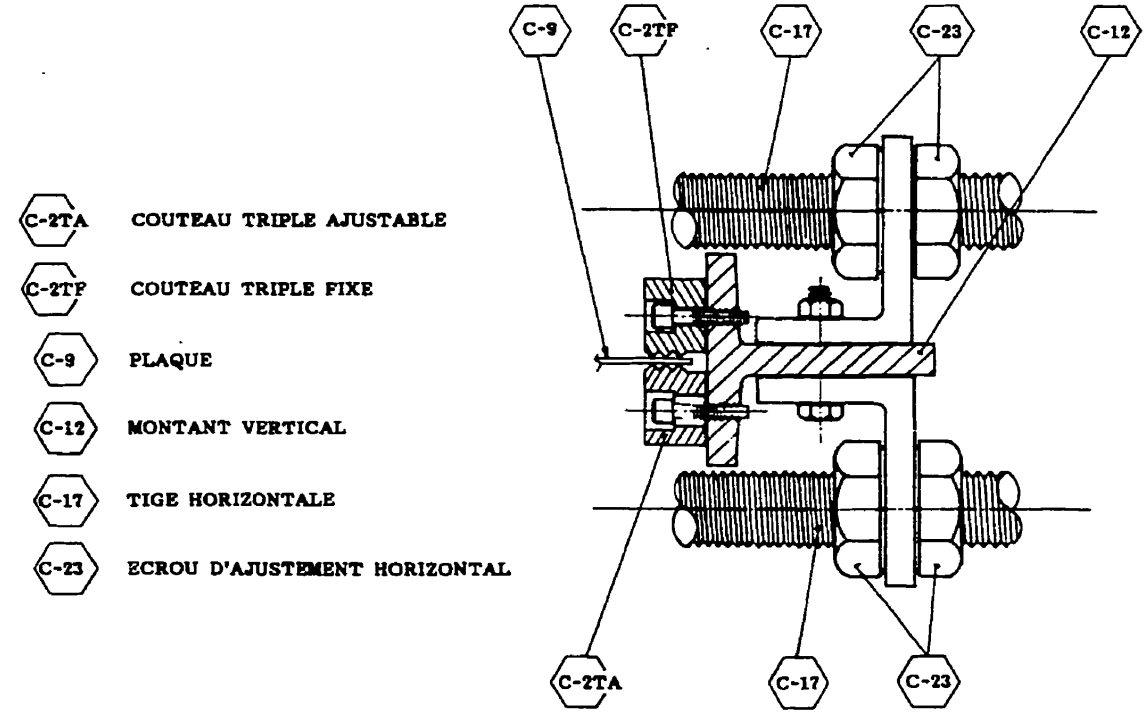
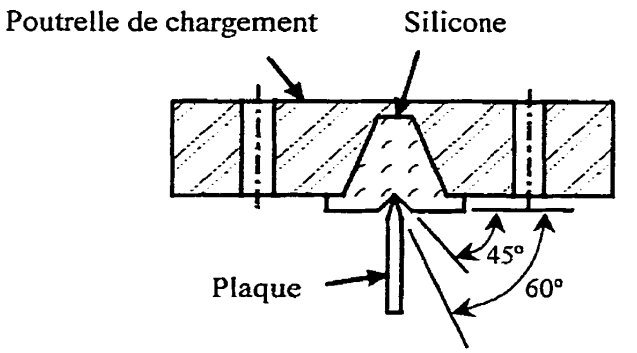
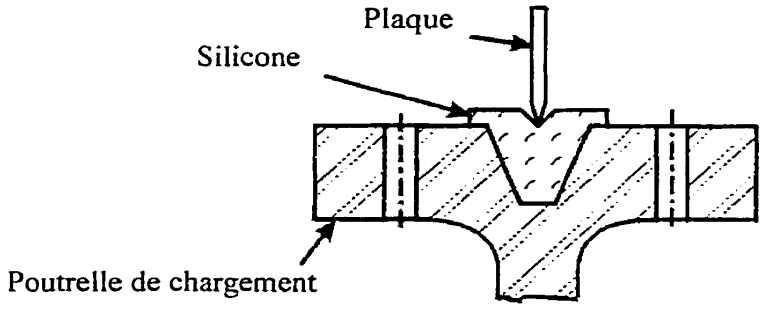


Figure 3.8 - Arête verticale encastrée

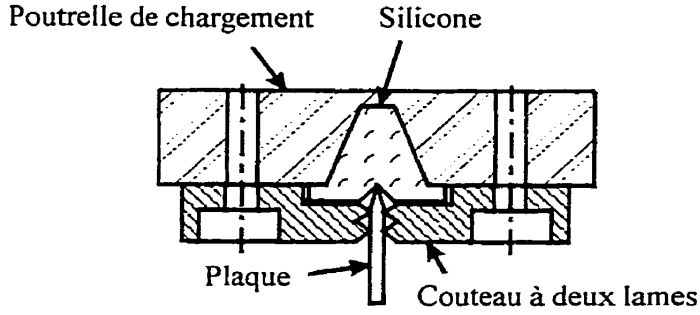


a) Poutrelle inférieure

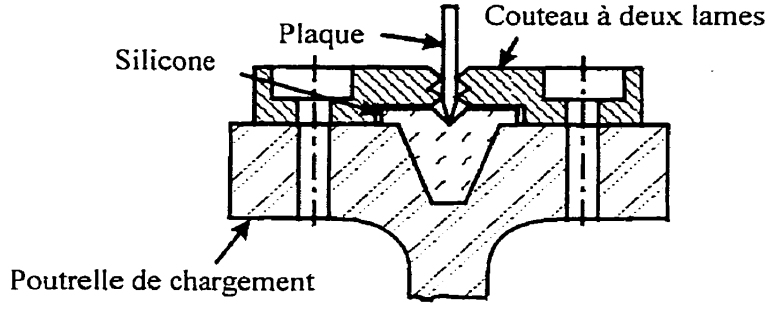


b) Poutrelle supérieure

Figure 3.9 - Poutrelles de chargement, arêtes simplement supportées



a) Poutrelle supérieure



b) Poutrelle inférieure

Figure 3.10 - Poutrelles de chargement, arêtes encastrées

Les arêtes de la plaque sont aussi usinées en forme de V pour assurer la rectitude de l'arête mais aussi pour pouvoir appliquer le chargement dans le plan médian de la plaque. L'angle avec lequel la plaque est usinée (60°) diffère de celui formé dans le silicone (45°) (figure 3.9). Cet écart permet une certaine liberté de rotation à la plaque.

Le rôle du silicone consiste à rendre la surface d'appui de la plaque moins rigide que la plaque elle-même, ce qui permet une distribution uniforme du chargement appliqué. Avec une tel dispositif, on peut espérer obtenir un chargement presque uniforme même lorsque les arêtes de la plaque deviennent courbes lors des grandes déformations. Cependant, ce silicone procure au système en vibration une source d'amortissement non négligeable. Par conséquent, un choix judicieux de ce matériau est essentiel pour assurer une distribution uniforme de la charge tout en minimisant les pertes par amortissement.

En plus du silicone contenu dans les poutrelles de chargement, un joint universel à la base d'une des deux poutrelles assure un chargement axial uniforme. Par ailleurs, le chargement doit s'effectuer uniquement dans le plan idéal de la plaque (plan associé à la plaque parfaite). L'ajout d'une suspension à fil reliée à la poutrelle de chargement inférieure assure un déplacement vertical de celle-ci, et par conséquent un chargement de la plaque dans son plan idéal (plan vertical). Cette suspension à fil joue un rôle marquant et son ajustement doit être effectué avec soin. Les fils métalliques doivent être ajustés adéquatement de manière à ne pas modifier la charge statique appliquée et à conserver l'alignement de la poutrelle de chargement. Un mauvais alignement peut engendrer des contraintes de torsion et de flexion dans la plaque et ainsi modifier considérablement le comportement dynamique de celle-ci.

Le long des arêtes chargées, aucun couteau n'est nécessaire pour reproduire les conditions de support simple. La forme du support en silicone permet de limiter le

déplacement latéral de la plaque. L'ajout de couteaux à deux lames est toutefois nécessaire pour créer une condition d'encastrement.

Lorsque des couteaux doivent être utilisés pour reproduire un type de conditions aux limites, un ajustement adéquat de ceux-ci doit être effectuée. Les couteaux doivent être bien appuyés sur la plaque tout en minimisant la force de contact. La force appliquée par les couteaux sur la plaque entraîne une force de frottement entre les supports et la plaque ce qui peut restreindre le mouvement de la plaque dans son plan (à l'encontre des hypothèses du modèle théorique). Pour minimiser ce frottement, un mince film de téflon est disposé sur la plaque à l'endroit où prennent appui les supports.

Les supports utilisés permettent de reproduire les principales caractéristiques et limitations du modèle théorique utilisé. Néanmoins, une différence marquante avec ce dernier subsiste. En effet, les dimensions réelles des plaques diffèrent des dimensions théoriques. Lorsque les plaques sont maintenues en place et fixées en utilisant des couteaux, les dimensions réelles des plaques doivent être supérieures à celles entre les supports. Le tableau 3.2 présente la valeur des écarts entre les dimensions réelles et théoriques selon le type de support utilisé.

Tableau 3.2 - Effets des supports utilisés sur les dimensions théoriques des plaques

	Arête verticale	**Arête horizontale**
SUPPORT SIMPLE	Couteau à 1 lame $a_{th} = a_{réel} - 7$ [mm]	Pas de couteau $a_{th} = a_{réel}$ [mm]
Encastrement	Couteau à 3 lames $a_{th} = a_{réel} - 13$ [mm]	Couteau à 2 lames $a_{th} = a_{réel} - 13$ [mm]

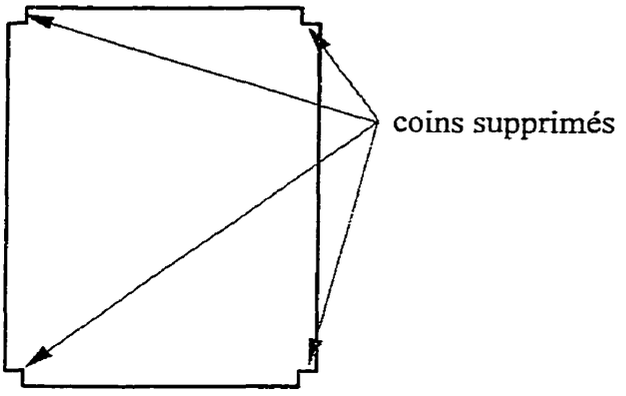


Figure 3.11 - Forme des plaques utilisées dans la montage

Les arêtes de la plaque soumises au chargement s'avèrent ainsi de plus grandes dimensions que la largeur de la plaque libre de vibrer. Par conséquent, les coins de la plaque sont soumis à une force d'excitation sans toutefois pouvoir vibrer (car maintenus dans les supports). Pour minimiser l'influence de cette discordance avec le modèle théorique, les coins des plaques sont enlevés (voir figure 3.11). On obtient alors une ligne de chargement qui coïncide avec la partie vibrante de la plaque.

Dans le montage utilisé, la composante statique de la charge est fournie par un ressort linéaire se trouvant entre la barre de chargement et une vis d'ajustement fixée à la structure. Cette vis permet d'ajuster l'intensité de la force statique. Un anneau dynamométrique est utilisé pour mesurer la force appliquée. Il est ainsi possible d'effectuer un ajustement précis de cette dernière.

La composante dynamique est produite par un excitateur électrodynamique relié à la poutrelle de chargement. Le générateur de signal produit un signal sinusoïdal d'amplitude et de fréquence variable qui est par la suite amplifié par un amplificateur de puissance pour servir d'alimentation à l'excitateur. Avec ce système, l'amplitude et la fréquence de la composante dynamique peuvent être facilement modifiées. Des capteurs de force piézo-électriques situés sous la barre de chargement supérieure permettent de

mesurer l'intensité et la fréquence du chargement. L'ajout d'un contrôleur, combiné au générateur de signal et aux capteurs de force, permet un contrôle en boucle fermée du système d'excitation dynamique pour maintenir l'amplitude de la force d'excitation constante.

3.2.2 - Système de mesure

Les composantes statique et dynamique de la charge appliquée dans le plan médian de la plaque sont mesurées à l'aide des capteurs de force décrits précédemment et de l'instrumentation adéquate. L'amplitude des imperfections géométriques et celle des vibrations latérales de la plaque étudiée sont mesurées à l'aide d'un capteur de déplacement capacitif placé à proximité de la plaque. Celui-ci fournit un signal proportionnel à la distance qui le sépare de la surface de la plaque étudiée. Pour utiliser ce capteur, la surface des spécimens doit cependant être conductrice. L'utilisation de plaques en matériau non conducteur requiert donc l'ajout d'un mince film de peinture conductrice pour rendre la surface des spécimens conductrice.

Les signaux temporels obtenus du capteur de déplacement peuvent être directement mesurés et enregistrés par un système d'acquisition de données. Ce dernier est composé d'une carte d'acquisition de données insérée dans un ordinateur et permet d'échantillonner le signal analogique provenant des capteurs. La description détaillée de ce système d'acquisition de données est présenté au tableau 3.3. Le logiciel d'acquisition de donné utilisé (LabVIEW) permet de contrôler les divers paramètres de cet échantillonnage. Le signal obtenu peut par la suite être visualisé et traité directement à l'aide de ce logiciel. Cependant, la rapidité et la mémoire de l'ordinateur étant limitées, il n'est pas toujours possible de visualiser simultanément plusieurs signaux en temps réel. Ainsi, pour surveiller et enregistrer l'évolution des essais de laboratoire, il est préférable d'utiliser des instruments analogiques qui traitent le signal pour en extraire

les données importantes. Par la suite, les signaux ainsi traités sont enregistrés par le système d'acquisition de données de façon à obtenir un signal numérisé qui peut être traité à nouveau si cela est nécessaire.

Tableau 3.3 - Description du système d'acquisition de données

Utilisation	Type d'appareil	Marque, No. de modèle	No. De série	Réf.
Acquisition de données	Ordinateur personnel	PROSYS, 486 DX-100	B00368403	A1
	Carte d'acquisition de données	NATIONAL INSTRUMENTS CORP., AT-A2150	1403	A2
	Logiciel d'acquisition de données et de traitement des données	LabVIEW 5.0	320562B-01	A3

L'analyse des signaux vibratoires dans le domaine des fréquences est réalisée à l'aide d'un analyseur en temps réel à bande fine et le spectre obtenu peut être visualisé sur un écran cathodique. Pour les cas où la réponse temporelle de la plaque n'est pas purement harmonique, l'utilisation d'un filtre suiveur / multiplicateur de fréquence permet de séparer les diverses composantes fréquentielles du spectre. Chacune de ces composantes est par la suite envoyée au système d'acquisition de données, lequel en détermine l'amplitude. La fréquence de l'excitation est elle aussi mesurée par le système d'acquisition de données. Connaissant l'amplitude du signal et la fréquence d'excitation, on peut par la suite tracer les courbes de réponse en fréquence.

La forme des imperfections géométriques et des modes de vibration peut être obtenue et enregistrée par le système d'acquisition de données. Des potentiomètres linéaires fixés sur les supports du capteur capacitif de déplacement fournissent un signal DC proportionnel à la position du capteur selon les axes x et y. Les signaux provenant des potentiomètres et du capteur capacitif sont échantillonnés par le système d'acquisition de données et par la suite traités à l'aide du logiciel LabVIEW. Ce dernier permet de visualiser la forme réelle de la plaque.

3.3 - Spécimens utilisés

L'approche expérimentale utilisée pour valider le modèle théorique et comprendre l'effet des imperfections géométriques sur le comportement dynamique des plaques, consiste à fabriquer des plaques ayant une imperfection géométrique de forme similaire à un mode de vibration ou à une combinaison de ceux-ci (par analogie à l'approche théorique). Ces plaques doivent être libres ou presque exemptes de contraintes internes car des études [38, 103, 104] ont montré que les contraintes résiduelles modifient les fréquences naturelles des structures et par conséquent le comportement dynamique de celles-ci. Le choix du matériau et de la méthode de mise en forme de ces plaques imparfaites est donc une étape déterminante de l'approche expérimentale utilisée.

3.3.1 - Matériau utilisé

Le principe de base du procédé suggéré pour obtenir des plaques géométriquement imparfaites repose sur le type de matériau utilisé, en l'occurrence les polymères. Les matériaux plastiques, plus précisément les thermoplastiques, sont facilement mis en forme. Lorsqu'ils sont chauffés à une température supérieure à leur température de transition vitreuse, leur structure moléculaire devient mobile. Il est alors possible de leur donner une forme précise sans les faire fondre; ce procédé est appelé thermoformage. Cette mise en forme a la particularité de ne pas engendrer de contraintes résiduelles car la structure moléculaire du matériau est alors mobile [105, 106, 107, 108].

D'autre part, la plupart des polymères transparents et normalement non biréfringents le deviennent lorsqu'ils sont soumis à un état de contrainte. Il s'agit d'un phénomène instantané appelé biréfringence accidentelle. Ce phénomène est plus ou

moins important selon la nature du matériau, et peut être quantifié à l'aide de la constante photoélastique relative appelé aussi constante de Brewster (*C*). Plus cette constante est élevée, plus l'effet optique sera prononcé pour une contrainte donnée. Cet effet optique permet de déterminer quantitativement le niveau de contrainte dans le matériau étudié à l'aide de la photoélasticimétrie. Il est ainsi possible de connaître le niveau de contrainte résiduelle dans ces matériaux après leur mise en forme, et par conséquent d'estimer l'influence de ces contraintes sur le comportement dynamique de la plaque.

On retrouve deux grandes classes de thermoplastiques: les thermoplastiques amorphes et les thermoplastiques semi-cristallins. Les thermoplastiques amorphes sont plus faciles à former par thermoformage que les semi-cristallins car ils ont un comportement très élastique sur une vaste gamme de température. Habituellement, les thermoplastiques amorphes sont utilisés pour la fabrication de pièces par thermoformage, mais il est aussi possible d'utiliser des semi-cristallins. Cependant, pour pouvoir déterminer les contraintes induites lors du formage à l'aide de la photoélasticimétrie, les plaques utilisées doivent être transparentes. Cette propriété optique est surtout rencontrée chez les polymères amorphes. Les polymères semi-cristallins sont généralement opaques, car composés de cristaux. Les interfaces entre ceux-ci réfléchissent ou dévient la lumière, ce qui rend le matériau plus opaque. Par conséquent, l'usage de polymères amorphes ou faiblement cristallin est conseillé.

Les caractéristiques propres aux thermoplastiques permettent de modeler une plaque avec la forme voulue, forme qui peut représenter une imperfection donnée. Pour cela, il faut concevoir un moule ayant la forme de l'imperfection désirée. La procédure de mise en forme consiste à placer la plaque sur ce moule à l'intérieur d'un four préchauffé à la température requise pour effectuer le thermoformage. Le tout est conservé à cette température assez longtemps pour permettre à la plaque de prendre la

forme du moule avant de laisser l'ensemble refroidir tranquillement au four. Ainsi, les contraintes résiduelles présentes à la fin du processus seront presque inexistantes.

La réussite de la méthode suggérée repose principalement sur le polymère utilisé pour confectionner la plaque. Le thermoplastique utilisé pour la fabrication de la plaque doit être facile à mouler et avoir une température de transition vitreuse supérieure à la température à laquelle les essais seront effectués (température ambiante), car la plaque doit être dure et rigide lors de ceux-ci. De plus, il doit être préférablement transparent pour permettre l'utilisation des techniques de photoélasticité. Parmi les thermoplastiques répondant à ces critères, les plus utilisés sont le polycarbonate, le polyméthylméthacrylate (PMMA ou plexiglas) et le polyester (PET-G).

Le polycarbonate est un matériau faiblement semi-cristallin ayant une température de transition vitreuse (Tg) de 150°C. Il peut être façonné par thermoformage en élevant sa température à environ 160°C. Cependant, ce matériau absorbe facilement l'humidité et doit être séché par un chauffage à 125°C avant d'être moulé. Cette étape est essentielle pour éviter la formation de bulles internes (dues aux effets de l'humidité absorbée) lors de la mise en forme de la plaque. Par ailleurs, ce matériau possède une constante photoélastique relative suffisamment élevée pour voir facilement la présence de contraintes internes de bas niveau (C = 78 Brewsters à la température ambiante), ce qui en fait un excellent matériau pour la fabrication de modèles photoélastiques. Une procédure détaillée de mise en forme de feuilles de polycarbonate pour en faire des modèles photoélastiques (modèles exempts de contrainte interne) à été élaboré par Blakemore et Marsden [109].

Le polyméthylméthacrylate est quant à lui un polymère complètement amorphe (Tg = 120 °C), qui se moule très bien pour une température approchant les 140°C. Cependant, il possède une constante photoélastique relative très faible (C = 4 Brewsters à la température ambiante). Pour un cas de chargement produisant des contraintes

similaires à celles qui seront imposées dans le montage expérimental, aucun effet optique notable n'est observé. Par conséquent, il faut rejeter la possibilité d'évaluer le niveau de contrainte interne dans ce matériau à l'aide des techniques photoélastiques.

De son côté, le polyester est un polymère amorphe qui peut être moulé à une température de 80°C. Lorsque sa structure est composée de courtes chaînes moléculaires, on peut lui donner toutes sortes de formes relativement complexes (ce matériau est utilisé pour la fabrication de moule pour le chocolat). Il possède des propriétés photoélastiques supérieures à celles du polyméthylméthacrylate ($C = 10$ Brewsters), mais néanmoins tous juste suffisante pour pouvoir utiliser la photoélasticimétrie pour mesurer les niveaux de contraintes ici considérés.

En plus d'être facilement mis en forme, le polymère utilisé doit avoir un taux d'amortissement le plus faible possible. En effet, la présence d'amortissement dans le système mécanique peut empêcher certains phénomènes de se produire. Les propriétés amortissantes du polycarbonate et du polyméthylméthacrylate (PMMA) sont connues d'une étude expérimentale précédente [19], mais celles du polyester ne sont pas disponibles. Le polycarbonate possède un coefficient de perte nettement inférieur à celui du PMMA (0.0045 comparativement à 0.065, tous deux mesurés à 40 hz), ce qui en favorise l'utilisation. Cependant, l'étape de mise en forme des plaques étant le point déterminant de l'approche expérimentale envisagée, il est essentiel d'accorder une prépondérance à celle-ci.

Des essais simples de mise en forme de feuilles de polycarbonate ont ainsi été poursuivis pour vérifier la procédure suggérée par Blakemore et Marsden [109]. Celle-ci s'est avérée simple et a donné de bons résultats. Les échantillons moulés comportent de très faibles contraintes internes et le profil obtenu est presque identique à celui du moule utilisé. Ainsi, l'existence d'une procédure simple et éprouvée pour la mise en forme de feuille de polycarbonate et le faible taux d'amortissement de ce matériau

encourage largement son utilisation. Le polycarbonate est donc utilisé pour la fabrication des plaques géométriquement imparfaites.

Pour être utilisées dans le montage décrit précédemment, les plaques doivent avoir une surface conductrice (utilisation de capteur capacitif de déplacement). Les plaques en polycarbonate doivent donc être recouvertes par un enduit conducteur. À cette fin, une peinture conductrice à base d'argent[2] est vaporisée sur les plaques qui seront utilisées.

3.3.2 - Moule et procédure de mise en forme

Le moule conçu pour effectuer le thermoformage des plaques en polycarbonate consiste en une feuille d'acier reposant sur un cadre très rigide. Il est présenté aux figures 3.12 à 3.14. Les arêtes du cadre ont été usinées pour obtenir une ligne d'appui la plus droite possible entre le cadre et la feuille d'acier, en plus d'assurer un plan de support le plus droit possible. La feuille est fixée sur son pourtour au cadre à l'aide des supports simples utilisés dans le montage expérimental.

L'imperfection proprement dite (ou déviation de l'état plan) est produite en forçant le déplacement d'un ou de plusieurs points de la feuille d'acier à l'aide d'ancrages et de poutrelles d'acier fixées en dessous du cadre. Pour produire une déflexion concave (vers le bas), la feuille d'acier est reliée à un boulon vissé dans une poutrelle située sous le moule, à l'aide d'un fil d'acier et d'ancrages appropriés (figure 3.14).

---

[2] E-Kote 40 Silver conductive paint, produit par Insulating Materials Incorporated

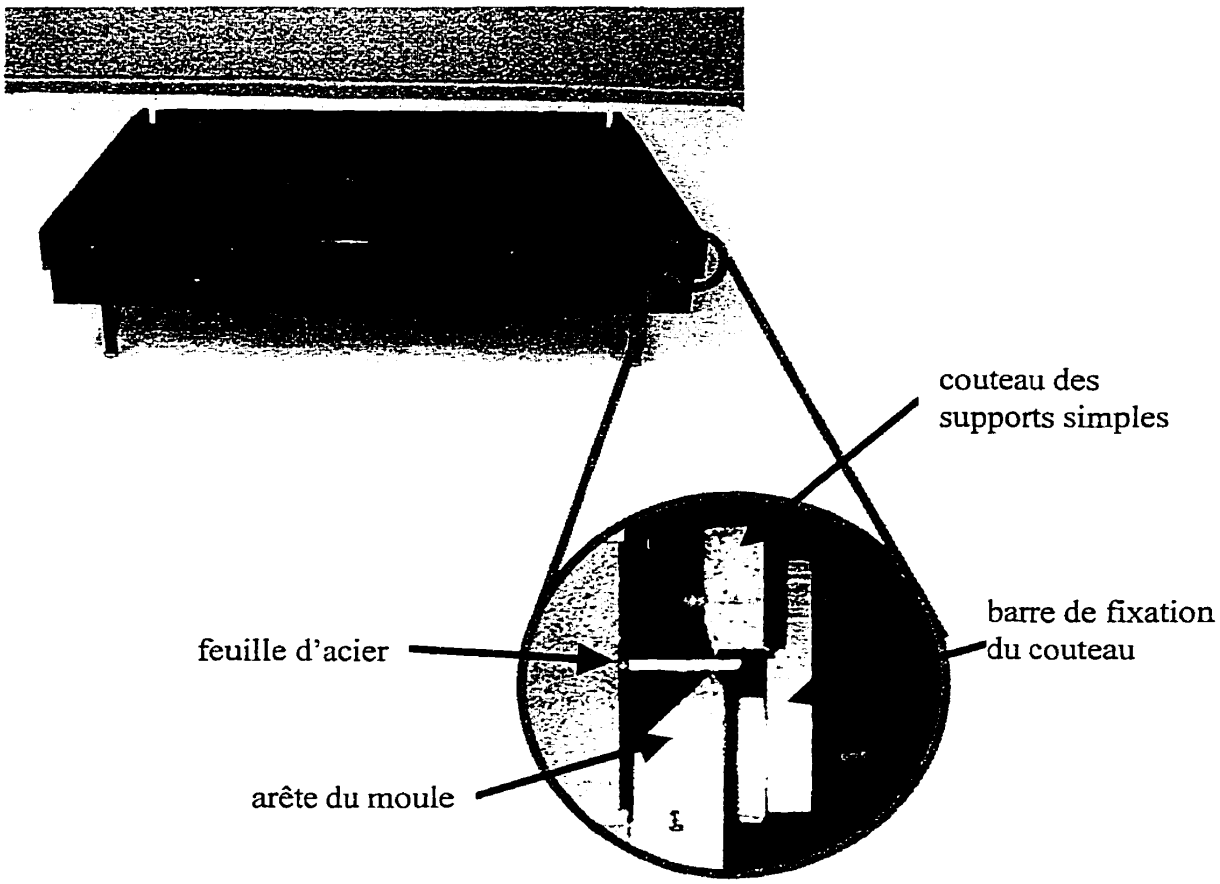


Figure 3.12 - Moule, vue supérieure et détail des supports de la feuille d'acier



Figure 3.13 - Moule utilisé pour façonner les plaques imparfaites, vue de côté

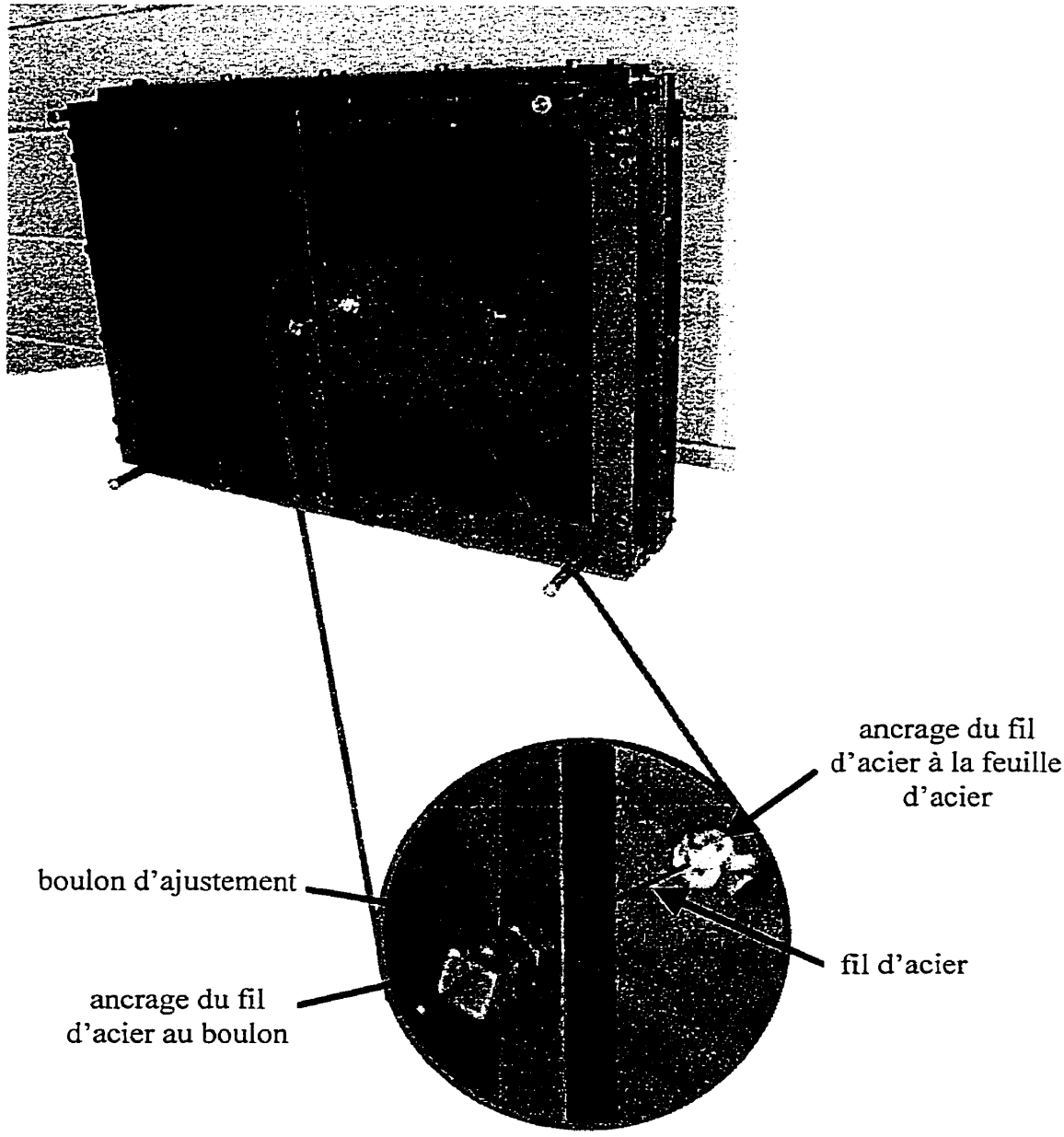


Figure 3.14 - Moule, vue du dessous et détail des points d'ancrage de la feuille d'acier (en traction)

En dévissant le boulon, une déflexion concave d'amplitude variable est produite. Une déflexion convexe (vers la haut) peut être engendrée en remplaçant le fil d'acier et ses ancrages par un long boulon vissé dans la poutrelle d'acier. Ce dernier vient s'appuyer sur la feuille d'acier et la déforme vers le haut. L'amplitude de cette déformation est ajustée à l'aide du boulon. L'utilisation d'un fil d'acier et d'un boulon pour déformer la plaque permet de produire la déflexion souhaitée sans modifier de façon notable la pente de la feuille d'acier à l'endroit de cette déformation.

L'amplitude de la déviation induite au point choisi doit être égale à l'amplitude de l'imperfection désirée en ce point. En choisissant une feuille d'acier suffisamment épaisse et des conditions aux limites appropriées, on obtient une imperfection de forme similaire à un ou une combinaison de modes de vibration.

Les modes de vibration ont une forme différente selon le type de support utilisé. Par conséquent, la forme de l'imperfection façonnée pour une plaque encastrée devrait être différente de celle façonnée pour une plaque simplement supportée. La différence de configuration géométrique des modes de vibration entre les deux types de support considérés est relativement faible et se retrouve principalement près des supports (pente non nulle pour un support simple et pente nulle pour un encastrement).

En encastrant une plaque imparfaite ayant une pente non nulle à ses extrémités (plaque conçue pour être utilisée avec des supports simples), des contraintes internes sont induites dans le matériau par l'imposition d'une pente nulle aux encastrements. Ces contraintes apparaissent négligeables devant celles qui sont causées par le chargement appliqué. Par conséquent, pour une imperfection de forme et d'amplitude donnée, une seule plaque est façonnée et utilisée pour tous les types de support.

Le moule utilisé, entièrement fabriqué en acier, résiste à la température à laquelle la plaque est moulée, sans se détériorer ou se déformer de façon excessive. De plus, il a

une bonne conductivité thermique, ce qui permet d'obtenir une paroi ayant une température uniforme. Ceci assure un chauffage et un refroidissement uniforme de la plaque. Ce dernier critère est très important, car la forme et l'épaisseur finale de la plaque dépendent de la température du matériau et de la distribution de cette dernière lors du chauffage.

Lors du thermoformage, les dimensions de la plaque changent à cause d'une réorganisation des chaînes moléculaires du matériau. Cette variation dimensionnelle est inférieure à 10% des dimensions totales et peut se présenter sous forme d'une élongation ou d'une contraction. Les deux types de variations sont observés dans des directions perpendiculaires. La mise en forme de la plaque est par conséquent effectuée en deux étapes.

En premier lieu, une plaque de dimensions supérieures à celles souhaitées pour les essais subit une séquence de chauffage bien précise, illustrée à la figure 3.15. Ce traitement thermique permet un relâchement complet des contraintes résiduelles internes et la plaque atteint ainsi ses dimensions finales. Cette première étape est effectuée en plaçant la plaque sur une feuille d'acier très plane. Bien que l'utilisation d'une feuille de verre semble a priori souhaitable pour avoir une surface plane, celle-ci est déconseillée. En effet, pour de grands spécimens, des bulles d'air demeurent emprisonnées entre le verre et le plastique. Celles-ci laissent leurs empreintes sur la surface de la feuille de polymère et induisent une déformation non négligeable de celle-ci. Ce problème demeure présent même en introduisant un film d'huile au silicone entre les deux surfaces (tel que suggéré par Blakemore et Marsden [109]).

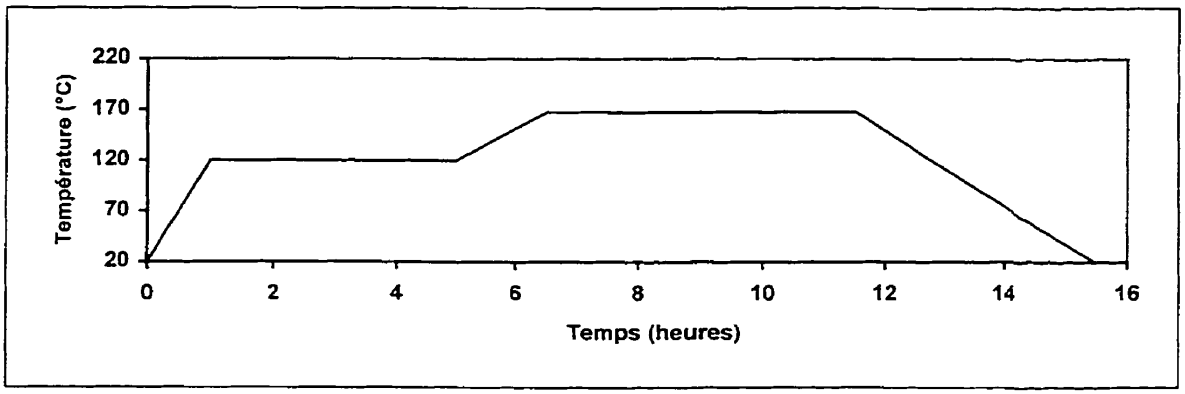


Figure 3.15 - Diagramme de chauffage utilisé pour façonner les plaques

On peut par la suite couper la plaque aux dimensions souhaitées pour les essais, et procéder à sa mise en forme finale, ce qui constitue la deuxième étape du processus de mise en forme. La plaque est alors placée sur le moule et subit encore une fois la traitement thermique illustré à la figure 3.15. Lors de tous les traitements thermiques, il faut éviter de surchauffer le matériau ou de le conserver trop longtemps à haute température. La plaque pourrait s'amincir aux endroits élevés du moule et épaissir dans les creux (écoulement du matériau plastique). Une dégradation du polymère peut aussi survenir s'il y a surchauffe. La température maximale de chauffe doit donc être minutieusement respectée.

La méthode suggérée pour modeler la plaque permet d'étudier l'effet d'une imperfection géométrique choisie. Cependant, aucune méthode ne permet d'obtenir une imperfection parfaite, c'est-à-dire une imperfection ayant exactement la forme désirée. Par conséquent, la meilleure approche est celle qui consiste à donner une forme générale à la plaque, se rapprochant d'un mode de vibration, et à mesurer l'imperfection façonnée pour déterminer la forme réelle de la plaque utilisée. Ainsi, les termes prépondérants dans l'expression analytique de l'imperfection sont ceux correspondant à l'imperfection modelée, et les autres termes sont des termes de correction.

Un programme MATLAB a été conçu pour déterminer les termes de l'expression analytique décrivant la forme de l'imperfection géométrique (cimp4.m). Ce programme détermine les termes du développement en série en utilisant la méthode des moindres carrés. Ainsi, pour déterminer la forme de l'imperfection d'une plaque il suffit de mesurer la déflexion latérale de celle-ci en une série de points situés sur une grille, et d'insérer ceux-ci dans le fichier de données.

3.4 - Étalonnage des instruments

Avant de procéder aux essais expérimentaux, un premier étalonnage des instruments est effectué pour vérifier la gamme dynamique et fréquentielle de ceux-ci. Lors des essais, certains instruments sont étalonnés périodiquement pour assurer la validité des résultats obtenus. Pour chaque instrument, un étalonnage adapté aux mesures à prendre et aux instruments eux-mêmes est effectué.

3.4.1 - Capteur capacitif de déplacement

Un capteur capacitif est utilisé pour mesurer la forme et le déplacement latéral des plaques imparfaites. Ce capteur doit donc être étalonné en régime dynamique, ce qui est fait à l'aide d'un montage spécial présenté à l'annexe A. Ce montage permet de faire varier la distance entre le capteur et une petite plaque conductrice (en tout point semblable aux plaques étudiée, à échelle réduite). Le déplacement qui y est induit est sinusoïdal, d'amplitude et de fréquence variable. Il est ainsi possible de déterminer la gamme dynamique du capteur et sa zone de linéarité. Les résultats obtenus à l'aide de ce dispositif montrent que la réponse du capteur capacitif est indépendante de la vitesse du déplacement. Par conséquent, la réponse du capteur est donnée par une courbe d'étalonnage unique, courbe qui est présentée à la figure 3.16.

La réponse du capteur capacitif est linéaire sur toute la zone de déplacement considérée. Il peut donc être utilisé pour mesurer des déplacements allant jusqu'à 5 mm. D'autre part, la réponse de ce capteur est très stable dans le temps. Par conséquent, ce dernier n'est pas étalonné périodiquement.

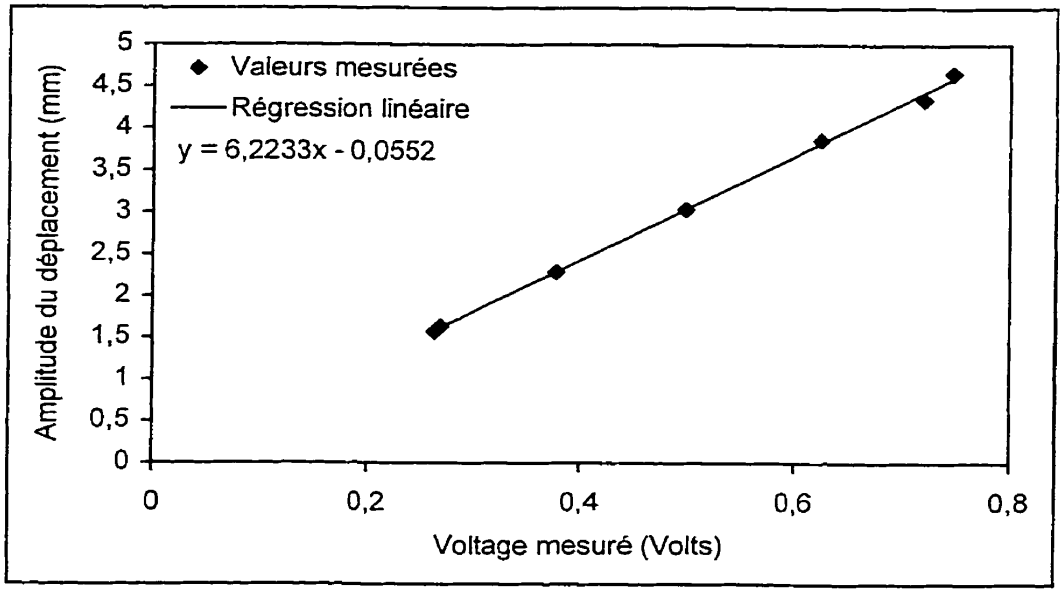


Figure 3.16 - Courbe d'étalonnage du capteur capacitif de déplacement

3.4.2 - Cellules de charge piézoélectriques

La force dynamique appliquée sur une plaque par le pot vibrant est mesurée par deux cellules de charge piézoélectriques. Ces cellules mesurent uniquement les variations de la force appliquée sur ceux-ci (aucune composante statique de cette dernière). Par conséquent, pour procéder à leur étalonnage, il faut faire varier soudainement la force qui leur est appliquée (augmentation ou réduction de la charge). Une poutrelle de chargement spécialement conçue à cet effet est utilisée pour appliquer une force en compression sur les capteurs de force. Celle-ci est présentée à l'annexe A. La poutrelle utilisée à été préalablement étalonnée pour connaître le chargement appliqué en fonction des poids appliqués à l'extrémité de celle-ci. La courbe illustrant cette relation est présentée à la figure 3.17.

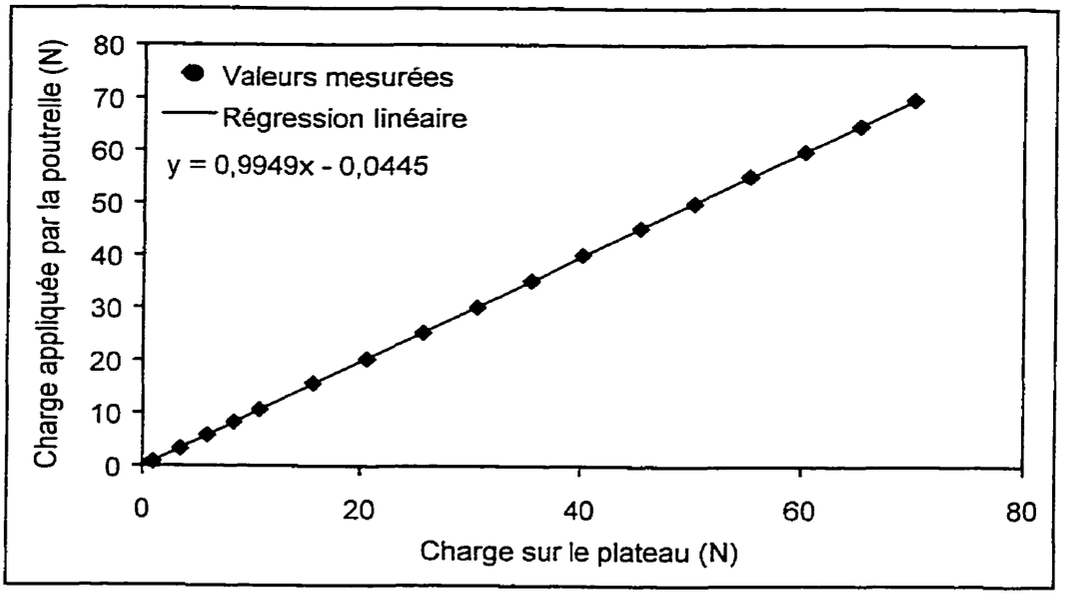


Figure 3.17 - Courbe d'étalonnage de la poutrelle utilisée pour l'étalonnage des cellules de charge piézoélectriques

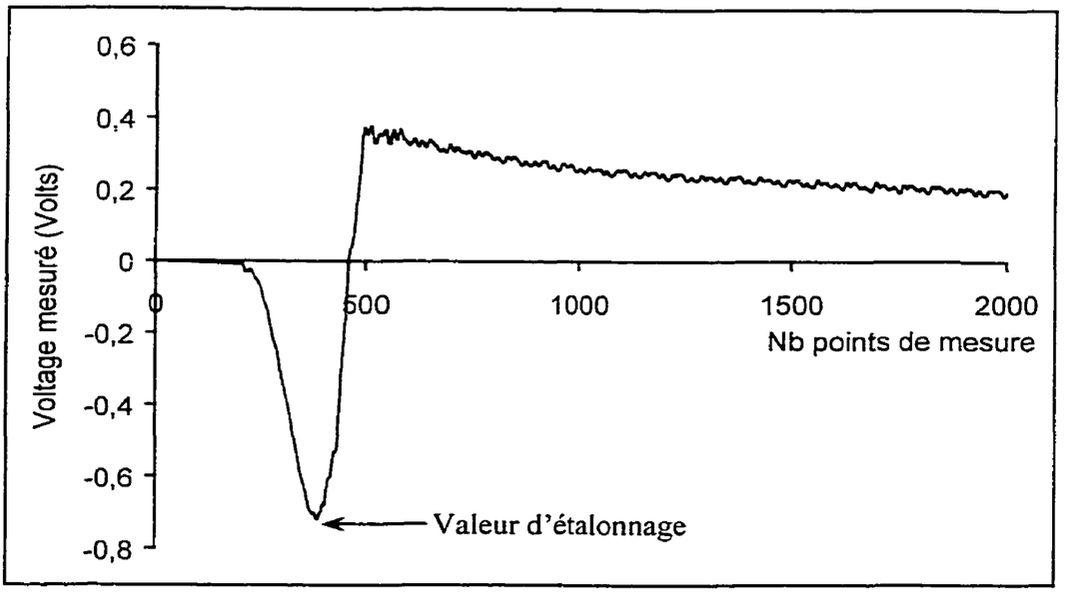


Figure 3.18 - Réponse typique des cellules de charge à un déchargement soudain

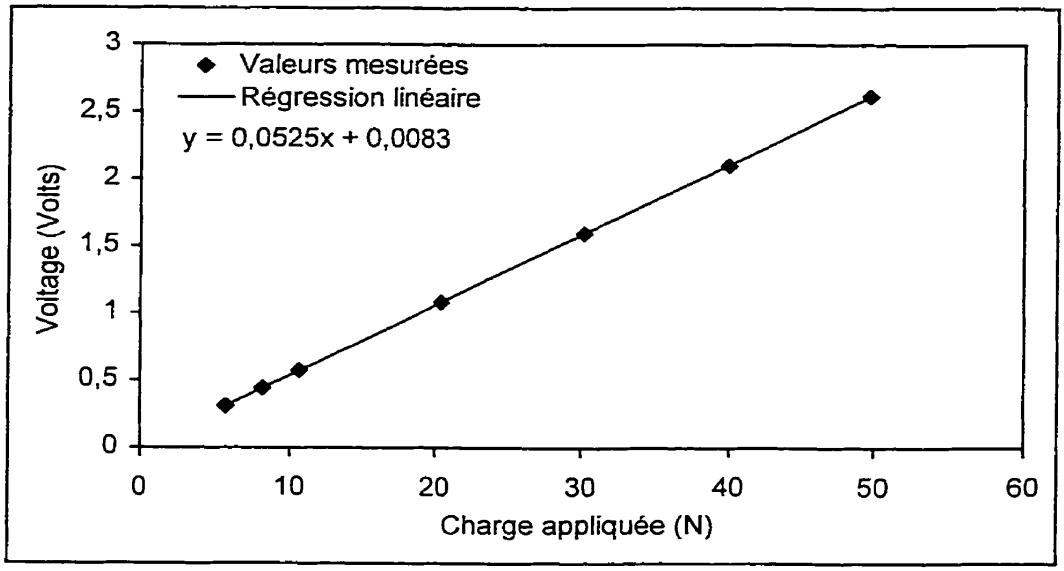


Figure 3.19 - Courbe d'étalonnage des cellules de charge piézoélectriques

Pour étalonner les capteurs, ceux-ci sont préalablement chargés à l'aide de la poutrelle. Lorsque la réponse de ces derniers est stabilisée à une valeur nulle (absence de chargement dynamique, mais présence d'un chargement statique), la charge est soudainement supprimée et la réponse des capteurs est directement mesurée à l'aide du système d'acquisition de données. Un programme LabVIEW a été spécialement conçu pour mesurer et visualiser la réponse des capteurs (*Cappiez.vi*). Une courbe de réponse typique est illustrée à la figure 3.18. La valeur maximale de la réponse des capteurs (valeur d'étalonnage) est directement mesurée et enregistrée par le programme utilisé. La courbe d'étalonnage complète est élaborée en effectuant plusieurs déchargements subits avec des charges différentes. Celle-ci est présentée à la figure 3.19. Le comportement des capteurs est linéaire pour la gamme de force dynamique à laquelle les essais expérimentaux sont effectués. Contrairement aux capteurs capacitifs de déplacement, la réponse des cellules de charge piézoélectriques varie un peu avec le temps. Par conséquent, un étalonnage de ces dernières est effectué périodiquement.

3.4.3 - Anneau dynamométrique

Un anneau dynamométrique est utilisé pour mesurer la force statique. Une description complète du fonctionnement de ce dernier se retrouve à l'annexe B. Son étalonnage est simple et ne requiert aucun montage spécial. L'anneau est chargé en compression à l'aide de charges de diverses intensités. L'anneau dynamométrique, lorsqu'utilisé avec l'instrumentation adéquate, génère un voltage de sortie proportionnel au chargement appliqué. Le chargement appliqué et le voltage de sortie produit sont utilisés pour concevoir la courbe d'étalonnage de l'anneau dynamométrique, courbe présentée à la figure 3.20. La réponse du capteur est linéaire sur toute la zone d'opération.

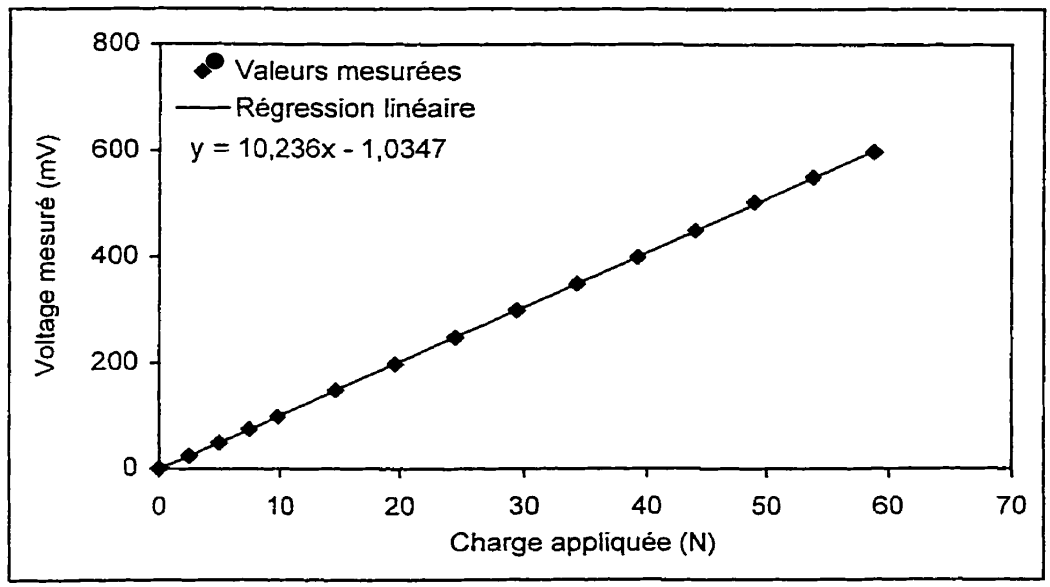


Figure 3.20 - Courbe d'étalonnage de l'anneau dynamométrique

3.5 - Procédure expérimentale

3.5.1 - Système d'acquisition de données

Dans le montage expérimental utilisé et décrit précédemment, toutes les mesures sont effectuées avec un système d'acquisition de données. Ce système est principalement constitué d'un ordinateur personnel dans lequel est placé une carte d'acquisition de données. La carte utilisée permet d'effectuer l'acquisition de 4 signaux différents avec une fréquence d'échantillonage allant jusqu'à 50kHz. Ce système d'acquisition est entièrement géré par le logiciel LabVIEW. Pour chaque type de mesure un programme spécial a été conçu et est utilisé. Le tableau 3.4 présente brièvement ces programmes. Leur fonctionnement et leur mode d'utilisation est décrit dans les sections qui suivent.

Tableau 3.4 - Description des programmes LabVIEW utilisés

Nom du programme	Utilisation	Quantité mesurée	Canal de branchement
Cappiez.vi	étalonnage des cellules de charge piézoélectriques	signal de force	1
Declog.vi	mesure du décrément d'amortissement	amplitude z	3
Imper.vi	mesure des imperfections géométriques	position x	1
		position y	2
		amplitude z	3
Mode.vi	mesure de la forme des modes de vibration	position x	1
		position y	2
		amplitude z	3
Repfreq.vi	mesure la réponse temporelle et fréquentielle	position x	1
		position y	2
		amplitude z	3
		signal d'excitation	4

3.5.2 - Mesure des imperfections

Le but de cette recherche expérimentale est de mettre en relief l'influence des imperfections géométriques sur le comportement dynamique des plaques étudiées. Par conséquent, la forme des plaques étudiées (déviation latérale ou imperfections géométriques) doit être mesurée avec précision.

La mesure de la déviation latérale de la plaque est effectuée à l'aide d'un capteur capacitif de déplacement. Ce dernier est fixé sur des rails rigides qui en permettent le déplacement dans le plan *xy*, tout en limitant le déplacement dans le plan *yz* (voir figure 3.4). Il est donc possible de balayer facilement toute la surface de la plaque et d'ainsi mesurer la variation d'espacement entre le capteur et la surface de la plaque.

Avant de mesurer la forme de la surface d'une plaque, l'alignement des rails rigides supportant le capteur doit tout d'abord être vérifié. Ces derniers doivent être parallèles aux arêtes servant de support à la plaque. Cet alignement est effectué en déplaçant le capteur sur le pourtour de la plaque (le plus près possible des supports) et en ajustant le montage pour que la distance entre le capteur et la plaque ait une valeur la plus constante possible.

La forme réelle de la plaque est par la suite mesurée en déplaçant le capteur sur toute la surface de la plaque. Les coordonnées (x,y) du capteur ainsi que la distance entre la plaque et le capteur sont mesurés et enregistrés par un programme LabVIEW spécialement conçu pour cette tâche (*Imper.vi*). Les points enregistrés sont situés sur un grillage fictif préalablement déterminé pour limiter le nombre de données, faciliter la prise de mesure et le traitement ultérieur des données. Ainsi, la prise de mesure se résume à déplacer le capteur manuellement sur une série d'axes horizontaux bien précis. Lorsque la position du capteur correspond à un point de mesure, l'acquisition de données se fait automatiquement et un timbre sonore se fait entendre.

3.5.3 - Mesure de la forme des modes de vibration

Pour comprendre le comportement dynamique d'une plaque, il est essentiel de pouvoir déterminer quels sont les modes de vibration présents. Il faut donc pouvoir déterminer l'amplitude du mouvement à une fréquence donnée, et ce sur toute la surface de la plaque (ou du moins sur un axe horizontal et un axe vertical tous deux situés respectivement au centre de la plaque selon l'axe y et selon l'axe x).

Avant de tenter de visualiser la forme d'un mode de vibration, le signal temporel associé au mode recherché doit être isolé (particulièrement, dans les cas de résonances multiples). La séparation des différentes composantes fréquentielles du mouvement est effectuée à l'aide du filtre suiveur/multiplicateur de fréquence. Le signal ainsi filtré est transféré à un programme LabVIEW spécial (*Mode.vi*) pour déterminer l'amplitude des vibrations ainsi mesurées par le capteur capacitif de déplacement, tout en déterminant la position de ce dernier sur la plaque. En effectuant un balayage lent de la plaque avec le capteur, on peut déterminer et visualiser directement l'amplitude du mouvement en divers points connus. Cette analyse peut être effectuée pour un déplacement selon un axe x ou selon un axe y quelconque, et les résultats peuvent être enregistrés. On obtient ainsi la forme des modes de vibration selon l'axe choisi.

3.5.4 - Mesure de l'amortissement

Pour toute structure, il existe un phénomène de dissipation d'énergie appelé amortissement. L'amortissement est un paramètre important des systèmes mécaniques vibrants car il peut contrôler l'amplitude des vibrations. Ce phénomène est très complexe de par ses natures diverses. Par conséquent son expression mathématique n'est jamais simple. Pour simplifier la modélisation mathématique du système réel, un amortissement proportionnel linéaire est supposé. Cette hypothèse signifie qu'il n'existe

aucun couplage entre les modes de vibration par amortissement. Des résultats expérimentaux obtenus d'études précédentes démontrent qu'une telle hypothèse peut s'avérer justifiée et permet d'obtenir des résultats concluants.

Le coefficient d'amortissement peut varier considérablement d'un mode de vibration à l'autre. Par conséquent, une mesure d'amortissement doit être effectuée pour chaque mode considéré. Le décrément d'amortissement ∇ est une variable qui peut être aisément déterminé expérimentalement pour un mode de vibration donné. C'est ainsi que sera déterminé l'amortissement associé à chaque mode de vibration (amortissement modal).

Dans le cas ici étudié, il existe principalement deux sources d'amortissement susceptibles d'influencer le comportement dynamique de la plaque. Il y a l'amortissement de la plaque elle-même, dépendante du matériau et aussi l'amortissement causé par les supports, plus particulièrement par le silicone qui sert d'appui à la plaque dans les barres de chargement. L'évaluation de la contribution de chaque type d'amortissement est complexe. Par conséquent, un coefficient d'amortissement global pour le système est déterminé.

La procédure utilisée pour déterminer les coefficients d'amortissement modaux est simple. Pour débuter, la plaque est tout d'abord excitée pour obtenir une résonance selon le mode pour lequel on désire mesurer l'amortissement. Lorsque les vibrations ont atteint un régime stationnaire, l'excitation est subitement coupée (mise à l'arrêt du pot vibrant). La plaque vibre alors librement suivant le mode excité. La réponse obtenue lors de ces vibrations libres est enregistrée et le décrément d'amortissement ∇, associé à la région d'amplitude décroissante, est calculé. Un programme LabVIEW a été élaboré pour visualiser la réponse libre amortie et pour procéder au calcul du décrément d'amortissement (Declog.vi). Une réponse typique de ces vibrations libres amorties est

présentée à la figure 3.21. On y retrouve aussi un exemple de calcul du décrément d'amortissement. Cette procédure est reprise pour chaque mode de vibration considéré.

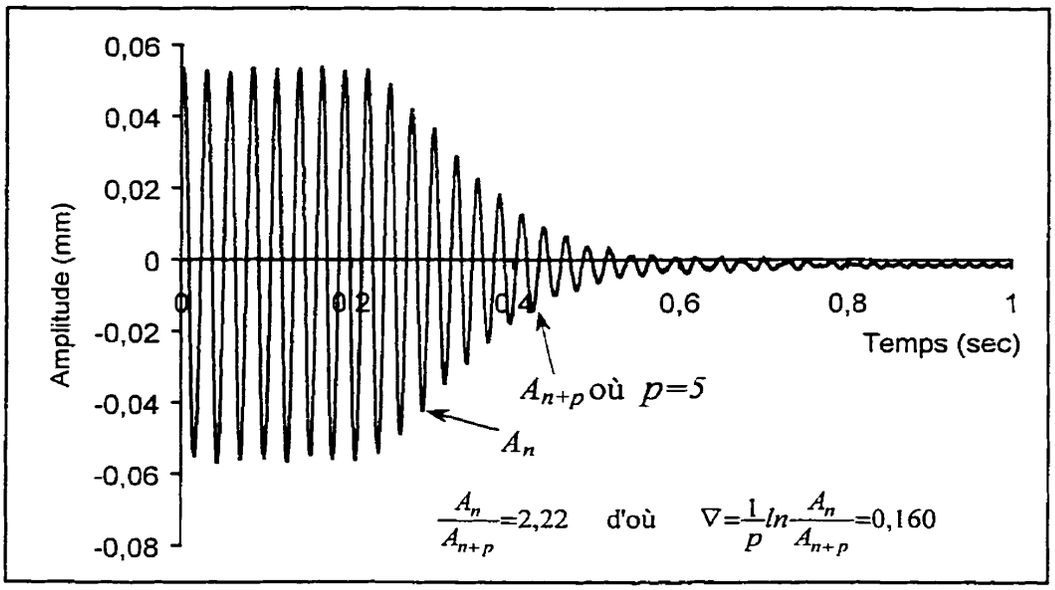


Figure 3.21 - Réponse libre amortie utilisée pour le calcul du décrément d'amortissement

Le coefficient d'amortissement est calculé à partir du décrément ainsi déterminé. Considérant un amortissement linéaire sans couplage entre les modes, on peut écrire

$$C_r = 2\varsigma_r \overline{\Omega}_r \tag{3.1}$$

où

C_r : coefficient d'amortissement modal, mode r

ς_r : taux d'amortissement, mode r

$\overline{\Omega}_r$: fréquence naturelle de la plaque imparfaite chargée, mode r

De plus, sachant qu'il existe une relation entre le taux d'amortissement et le décrément d'amortissement, soit

$$\varsigma_r \approx \nabla_r / 2\pi \quad \text{lorsque } \varsigma r << 1 \text{ (dans le cas présent, } 0 < \varsigma r < 0.05) \tag{3.2}$$

on obtient finalement l'expression du coefficient d'amortissement modal :

$$C_r = \frac{2\nabla_r \overline{\Omega}_r}{\pi} \tag{3.3}$$

3.6 - Élaboration des courbes de résonance

Après avoir installé la plaque dans le montage et effectué les ajustements nécessaires, on procède premièrement à la mesure des imperfections géométriques de la plaque. On mesure ainsi la forme de la plaque en l'absence de chargement externe. Par la suite, le chargement statique est premièrement appliqué et la déformation statique induite par ce dernier peut être enregistrée (procédure identique à celle utilisée pour mesurer les imperfections). Cette étape est importante, surtout si l'on souhaite éventuellement étudier la possibilité de vibrations asymétriques ou de phénomènes de flambage semblables au 'snap through'.

La charge dynamique est par la suite appliquée et les essais dynamiques peuvent alors débuter. En premier lieu, le capteur capacitif de déplacement est positionné au centre de la plaque. Ce positionnement permet d'obtenir l'amplitude maximale des modes de vibration impairs, ce qui ne permet toutefois pas d'obtenir la réponse des modes pairs (le capteur est alors situé à l'un des noeuds de ces modes). On effectue un premier essai en procédant à un balayage croissant lent de la fréquence d'excitation sur la zone de fréquence d'intérêt, suivi d'un balayage décroissant. Durant cet essai, la réponse globale de la plaque peut être visualisée à l'écran de l'analyseur de vibration et les fréquences pour lesquelles des résonances sont observées sont prises en note manuellement. Il est à noter que même si le capteur de déplacement est situé au centre de la plaque, il est possible de déterminer les fréquences de résonance des modes pairs de vibration. En effet, lors d'une résonance un bruit audible est produit par les vibrations d'amplitude importante.

Suite à cet essai préliminaire, une série de mesures est effectuée pour les résonances rencontrées. Les modes de vibration sont déterminés en effectuant un balayage de la plaque (approche expliquée précédemment) et par la suite la réponse fréquentielle qui leur est attribuable peut être enregistrée (le capteur de déplacement pouvant alors être positionné à l'endroit où l'amplitude est maximale). Le programme LabVIEW *Repfreq.vi* permet de visualiser la réponse temporelle et fréquentielle de la plaque et d'enregistrer ces réponses.

3.6.1 - Étude des résonances multiples

Dans le cas où plusieurs modes de vibration entrent simultanément en résonance, les composantes fréquentielles du signal décrivant le mouvement de la plaque doivent être séparées. Le filtre suiveur/multiplicateur de fréquence est alors utilisé pour accomplir à cette tâche. Les différentes composantes fréquentielles sont par la suite traitées individuellement de la même manière que pour le cas d'une résonance simple. Les résultats obtenus des différents filtrages sont finalement remis sur un même graphique pour pouvoir visualiser les phénomènes d'interaction entre les modes de vibration.

3.6.2 - Étude en régime stationnaire

Les courbes de résonance stationnaires sont élaborées en effectuant un balayage croissant et décroissant très lent de la fréquence d'excitation. Pour les régions présentant des variations d'amplitude très abruptes, la vitesse de variation de la fréquence est réduite au minimum, et même annulé dans certain cas pour s'assurer que le régime permanent est bien atteint avant de modifier à nouveau la fréquence d'excitation.

3.6.3 - Étude en régime non-stationnaire

L'étude du cas non-stationnaire est un peu plus complexe à traiter que le cas non-stationnaire, sans toutefois présenter de problème majeur. Pour élaborer les courbes de réponse en fréquence non-stationnaires, la fréquence d'excitation est variée à une vitesse précise et constante. Le temps de réponse devient alors un paramètre important, car il faut s'assurer que les diverses mesures effectuées représentent bien le comportement dynamique du système pour le même instant. Si un appareil présente un temps de réponse plus élevé qu'un autre par un intervalle temporel ε, la mesure effectuée avec cet appareil représentera le comportement de la plaque au temps $t = t\text{-}\varepsilon$ alors que l'autre instrument donnera une valeur associée au temps t.

Dans la chaîne de mesure utilisée, la fréquence d'excitation est directement transmise du générateur de signal au système d'acquisition de données qui le mesure et l'enregistre. Le signal temporel produit par la plaque est quant à lui capté et conditionné par la chaîne de mesure du capteur de capacitif de déplacement, avant d'être transmis au système d'acquisition de données. Le conditionneur de signal du capteur de déplacement a un temps de réponse très court, de l'ordre du millième de seconde. Par conséquent, la fréquence d'excitation et la réponse de la plaque sont toutes deux transmises au système d'acquisition de données sans qu'il y ait eu un délai de transmission notable et/ou de délai de traitement notable. Le signal d'excitation et celui de réponse de la plaque sont donc associés au même instant réel. Ainsi, même si le traitement de ces signaux nécessite un certain temps, les mesures effectuées sont associées au même instant temporel et représentent bien le comportement dynamique du système étudié. Il est toutefois nécessaire de mentionner que les mesures affichées diffèrent légèrement de la situation actuelle, en raison du délai introduit par le traitement de signal.

CHAPITRE IV
RÉSONANCES DES PLAQUES IMPARFAITES

4.1 - Introduction

Dans le passé, l'influence des imperfections géométriques sur la réponse dynamique d'une plaque soumise à une excitation paramétrique a été étudiée à l'aide d'un modèle théorique. Le but de ce chapitre est de vérifier à l'aide d'un montage expérimental les prévisions de ce modèle, d'en déterminer la validité et les limites. Dans cette optique, des essais expérimentaux ont été effectués sur des plaques d'aspects différents. Celles-ci ont été soumises à plusieurs cas de chargements et ce pour les quatre types de conditions aux limites explicitées au chapitre 2 dans le développement du modèle théorique.

4.2 - Descriptions des plaques étudiées

Les plaques utilisés dans le montage expérimental ont été fabriquées à partir d'une feuille de polycarbonate (*LEXAN*, marque déposée de *General Electric*). Les caractéristiques physiques de ce matériau ont été déterminées expérimentalement par Ostiguy [19]. Ces caractéristiques décrivent le comportement du matériau, soit celui des plaques seules. Pour être utilisé dans le montage, les plaques sont cependant recouvertes d'une peinture conductrice. Celle-ci peut modifier les propriétés physiques des spécimens étudiées et son influence doit être étudiée.

Dans un premier temps, un essai de traction a été effectué sur un échantillon sans peinture et avec peinture pour déterminer l'influence de celle-ci sur le module d'élasticité. Les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.1. Considérant la précision des mesures lors de l'essai de traction effectué, les courbes obtenues ne présentent pas de

différences significatives et par conséquent l'effet de la peinture sur le module d'élasticité et le coefficient de Poisson est négligeable.

Dans un deuxième temps, la variation de la masse d'une plaque due à l'application de la peinture conductrice a été mesurée. Pour une plaque type, l'augmentation de masse de la plaque s'avère significative. Pour tenir compte de cet ajout dans le modèle théorique, une masse volumique corrigée tenant compte de la masse ajoutée par la peinture est calculée:

Soit m_1 : masse de la plaque sans peinture

m_2 : masse de la plaque avec peinture

pour lesquelles

$$m_1 = \rho_{poly} * volume\ de\ la\ plaque$$

$$m_2 = \rho_{corr} * volume\ de\ la\ plaque$$

où ρ_{poly} : masse volumique du polymère seul (1205,0 kg/m^3)

ρ_{corr} : masse volumique corrigée pour tenir compte de l'ensemble polymère peinture

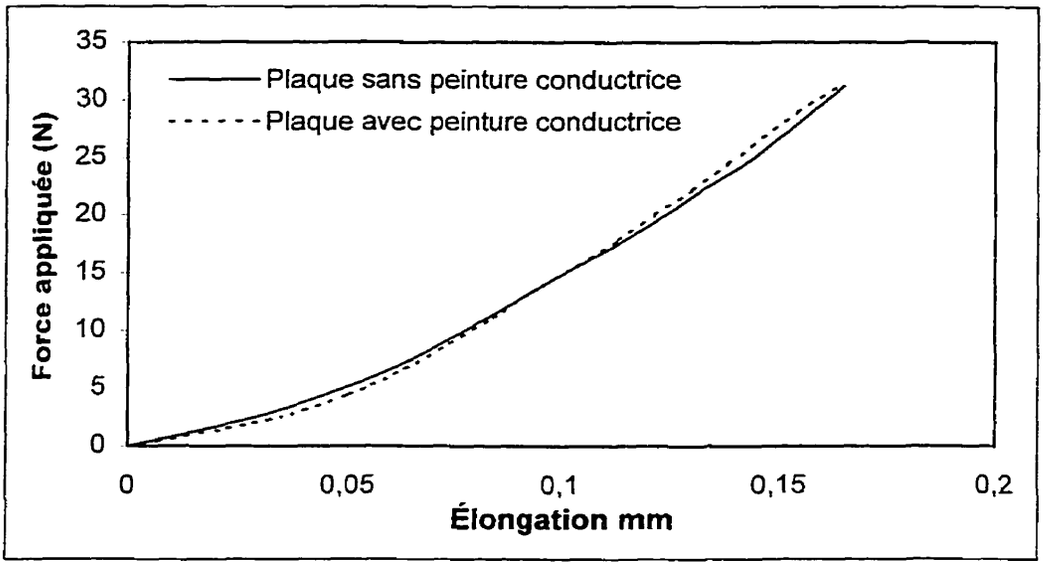
On peut écrire

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_{poly} * volume\ de\ la\ plaque}{\rho_{corr} * volume\ de\ la\ plaque} = \frac{\rho_{poly}}{\rho_{corr}}$$

d'où $$\rho_{corr} = \frac{\rho_{poly} * m_2}{m_1} = 1244{,}36\ \text{kg/m}^3$$

Par conséquent, les propriétés physiques utilisées dans le modèle mathématique seront celles établies par Ostiguy à l'exception de la masse volumique, soient :

- coefficient de Poisson, ν : 0,45 ;
- module d'élascticité, E : 2,3856 Gpa ;
- masse volumique, ρ : 1244,36 kg / m^3 .



4.1 - Effet de l'ajout de la peinture conductrice sur la courbe de traction du polymère utilisé pour la conception des plaques

Tableau 4.1 - Dimensions et imperfections des plaques étudiées

Plaque	**Dimensions réelles (mm)**				w_{0i}/h
	a	***b***	***R (b/a)***	***h***	**(w_{01}/h, w_{02}/h, w_{03}/h)**
P1	370	510	1,378	1,588	(0,096, -0,009, 0,029)
P2	273	523,5	1,918	1,588	(0,178, 0,021, 0,017)
P3	273	523,5	1,918	1,588	(0,451, -0,051, 0,020)
P4	273	523,5	1,918	1,588	(1,127, 0,032, 0,151)
P5	273	523,5	1,918	1,588	(-0,081, 0,209, -0,028)
P6	345	405	1,2	1,588	(0,721, 0,165, 0,114)
P7	345	405	1,2	1,588	(0,035, 0,634, -0,130)

Les dimensions et les imperfections des plaques utilisées dans le montage expérimental ont été choisies de manière à vérifier divers phénomènes observés par le passé avec le modèle théorique et à couvrir le plus grand éventail de cas possibles. La première plaque (P1) est une plaque presque parfaite. Les plaques P2, P3, P4 et P5 ont toutes les mêmes dimensions et le même rapport de forme (R). Les plaques P2, P3 et P4 ont une imperfection prédominante suivant le premier mode. Ces plaques ont des imperfection de forme similaire mais de différente amplitude. Elles ont été façonnées dans le but d'étudier l'influence de l'amplitude de l'imperfection. La plaque P5 quant à elle possède une imperfection prédominante suivant le deuxième mode, mais d'amplitude similaire à l'imperfection de la plaque P2. Elle est étudiée en parallèle avec la plaque P2 pour comprendre l'influence de la forme de l'imperfection géométrique. Finalement, les plaques P6 et P7 possède un autre rapport de forme (R) que les plaques précédentes. Leur mode critique de flambage est le premier mode, contrairement aux plaques P1 à P4 (pour ces plaques, le mode critique de flambage est le deuxième mode). Les plaques P6 et P7 sont étudiées pour déterminer l'effet du rapport de forme sur les résultats.

Les caractéristiques physiques des plaques utilisées sont présentées au tableau 4.1. On y retrouve le nom de chacune des plaques utilisées, ces dimensions réelles et la forme de son imperfection. Les dimensions théoriques des plaques peuvent différer des dimensions réelles selon les conditions aux limites utilisées (voir tableau 3.1). D'autre part, l'expression de l'imperfection géométrique ici présentée (w_{0i}) est celle obtenue à partir des mesures effectuées sur une plaque simplement supportée. Le chiffre en indice y représente la forme de l'imperfection, soit de forme similaire au premier mode (w_{01}), deuxième mode (w_{02}) ou troisième mode (w_{03}) de vibration. L'expression de l'imperfection peut être différente si elle est calculée à partir de mesures effectuées pour d'autres conditions aux limites, car celles-ci peuvent modifier la pente de la plaque et par conséquent la déflexion latérale de celle-ci.

4.3 - Comportement statique

Lorsqu'une plaque parfaite est soumise à un chargement statique inférieur à la charge critique de flambage, celle-ci demeure droite. Cependant, dans le cas d'une plaque géométriquement imparfaite, l'application d'un chargement statique quel qu'il soit se traduit par une déflexion statique. Dans l'approche théorique élaborée précédemment, cette déflexion statique est supposée de même forme que l'imperfection géométrique qui la cause, soit de même forme qu'un mode de vibration ou une combinaison de ceux-ci.

Dans un premier lieu, des essais statiques ont été entrepris pour vérifier la validité du modèle théorique. Ainsi, la déflexion statique d'une plaque géométriquement imparfaite a été mesurée pour différents chargements statiques et diverses conditions aux limites. Les résultats de ces essais et ceux obtenus avec le modèle théorique sont présentés aux figures 4.2 à 4.5. Le chargement statique appliqué y est normalisé par rapport au chargement critique de la plaque (n^*), lequel est associé au mode critique de flambage (m^*).

Lorsque la plaque est simplement supportée ou qu'uniquement les côtés non chargés sont encastrés (S^cS, S^cE, figures 4.2 et 4.3), l'augmentation de la déflexion statique se fait principalement selon le mode d'imperfection prédominant, et ce même si ce mode diffère du mode critique de flambage. Les coefficients décrivant la configuration déformée de la plaque contiennent des termes selon d'autres modes (deuxième et troisième mode), mais ces derniers demeurent minimes comparativement au terme prédominant (moins de 10 %).

Ces résultats viennent confirmer l'hypothèse que la déformation statique est de forme similaire à celle de l'imperfection. Cependant, ce modèle demeure valide uniquement pour les chargements nettement inférieurs au chargement critique de flambage (allant jusqu'à une demi-fois la charge critique). Dans tous les cas, l'écart entre

les résultats numériques et expérimentaux augmentent avec la charge appliquée. Pour des chargements supérieurs à une demi fois la charge critique de flambage, cet écart devient significatif. De plus, lorsque l'imperfection est d'une forme différente du mode critique de flambage, la forme de la déformation statique mesurée expérimentalement devient plus complexe. On note alors une forte augmentation des déformations suivant les modes différents du mode d'imperfection, principalement selon le mode critique de flambage.

Pour les deux autre types de conditions aux limites étudiées, soit les cas pour lesquels les arêtes chargées sont encastrées (E^cS et E^cE), les résultats obtenus diffèrent considérablement (figures 4.4 et 4.5). Pour ces cas, les déflexions statiques ne suivent plus la même forme que l'imperfection initiale. On observe alors des déformations plus marquées suivant le mode critique de flambage.

Cette déviation peut s'expliquer par la présence des encastrements dans l'axe de chargement de la plaque. Ces derniers annulent la pente de la plaque imparfaite à ses extrémités et introduisent ainsi des contraintes internes avant chargement. La plaque devient plus droite et la déflexion suivant le mode critique de flambage devient prédominante. Les hypothèses à la base même du modèle théorique n'étant pas rencontrées, les résultats expérimentaux peuvent donc diverger des résultats théoriques et ne doivent pas être utilisés pour vérifier le modèle utilisé. Par conséquent, une plus grande attention sera portée dans les travaux subséquents sur les résultats obtenus pour des plaques simplement supportées, ou du moins comportant uniquement des arêtes simplement supportées dans l'axe de chargement. D'autres essais statiques ont ainsi été effectués sur des plaques imparfaites ayant des imperfections de forme et d'amplitude différentes (figures 4.6 à 4.9).

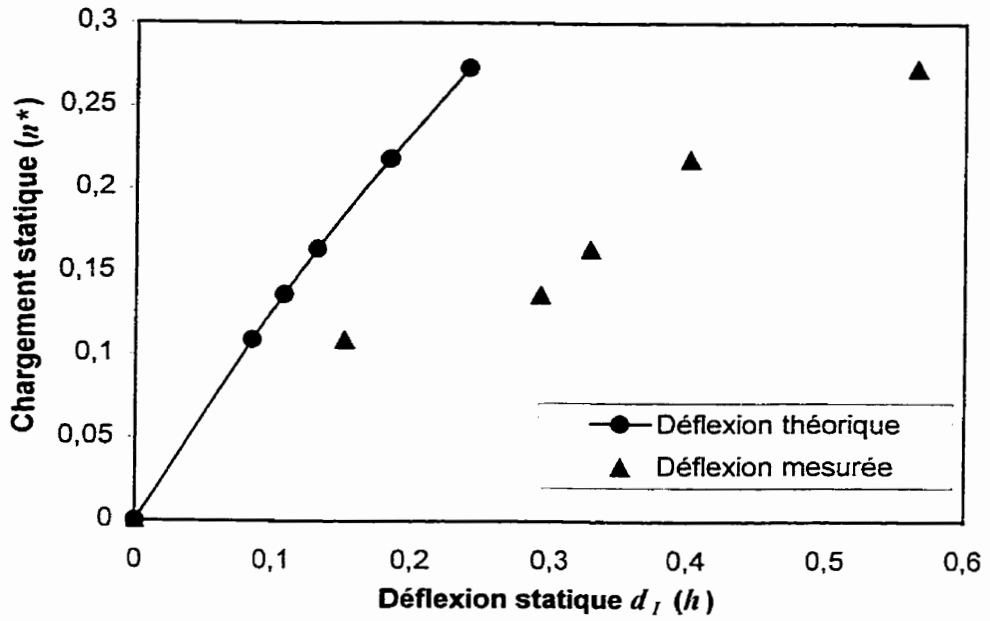


Figure 4.2 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, S^{c}S, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$

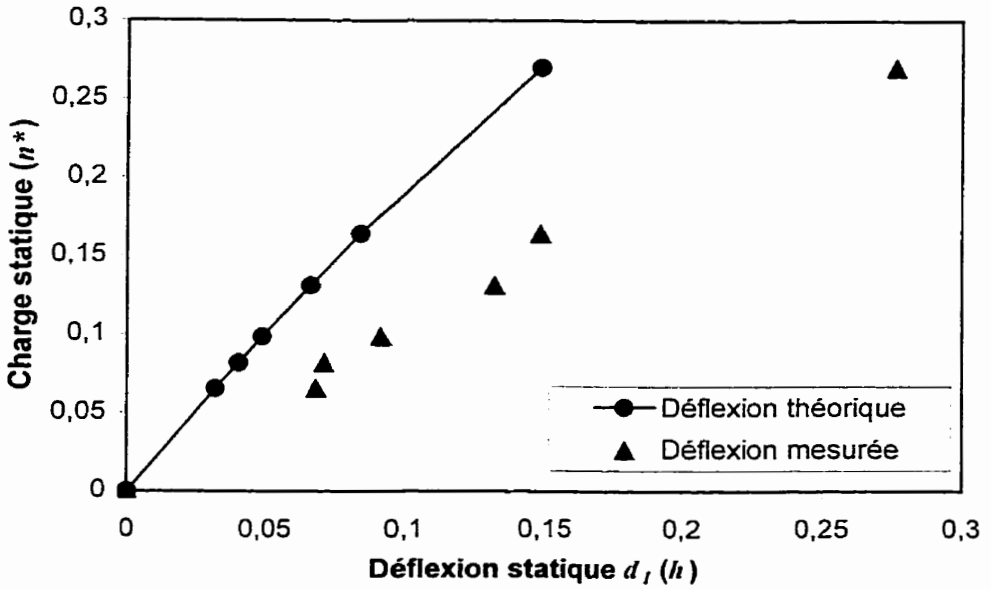


Figure 4.3 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, S^{c}E, $m^* = 3$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$

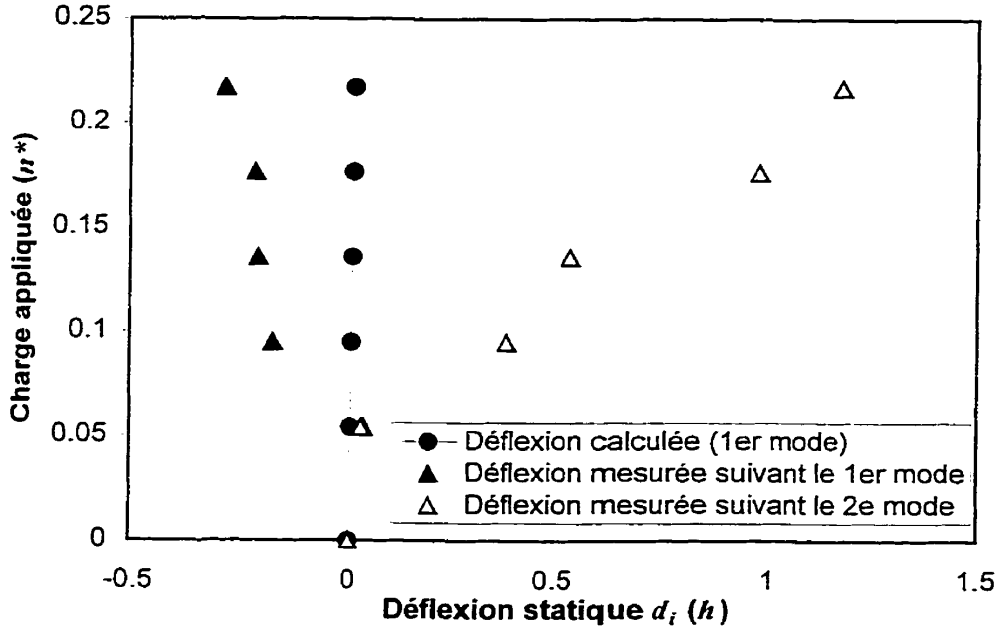


Figure 4.4 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, E^{c}S, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$

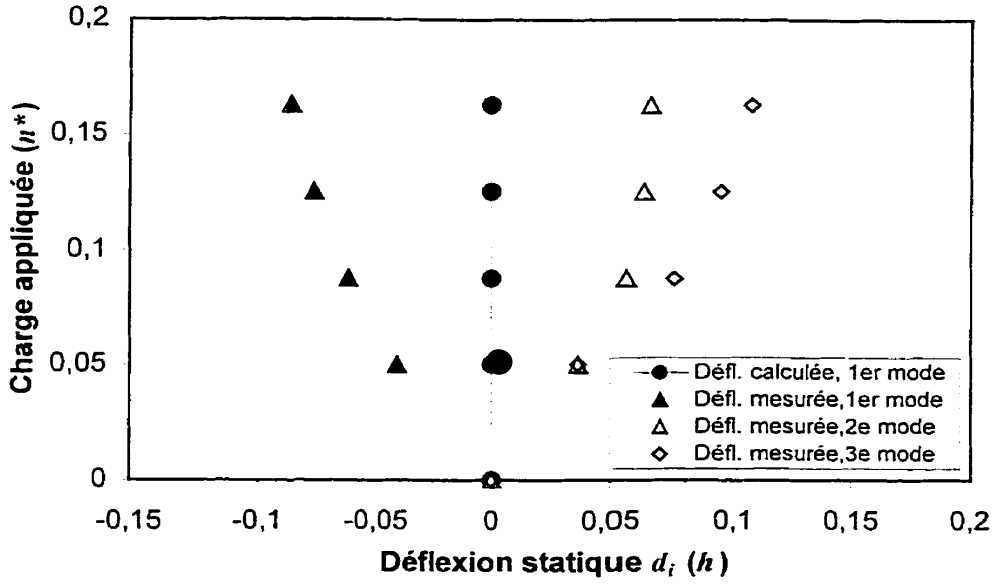


Figure 4.5 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P4, E^{c}E, $m^* = 3$, $w_{0i}/h = (1{,}127, 0{,}032, 0{,}151)$

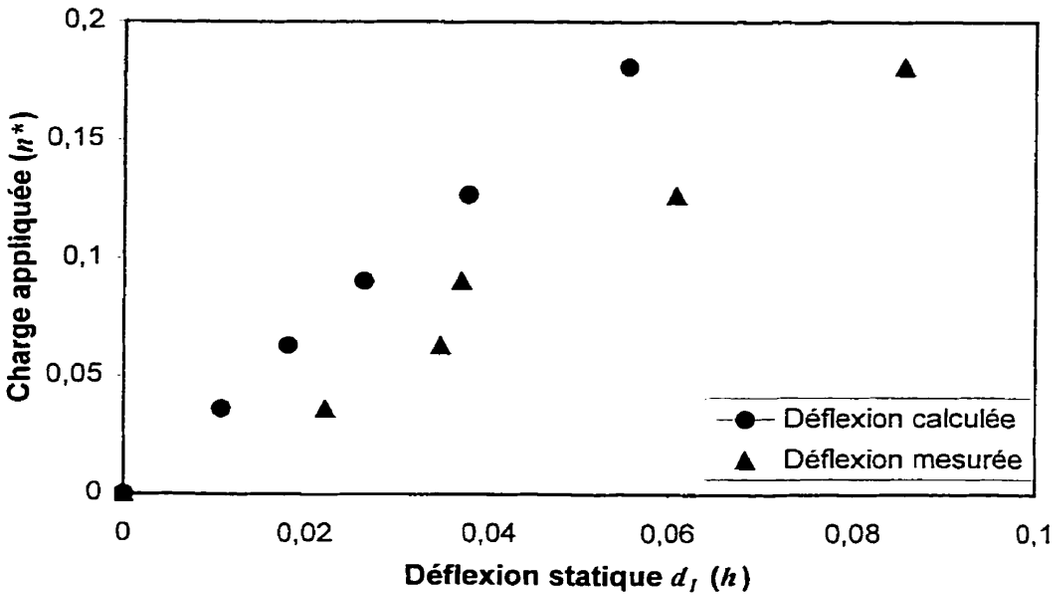


Figure 4.6 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P3, S^{c}S, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (0{,}451, -0{,}051, 0{,}020)$

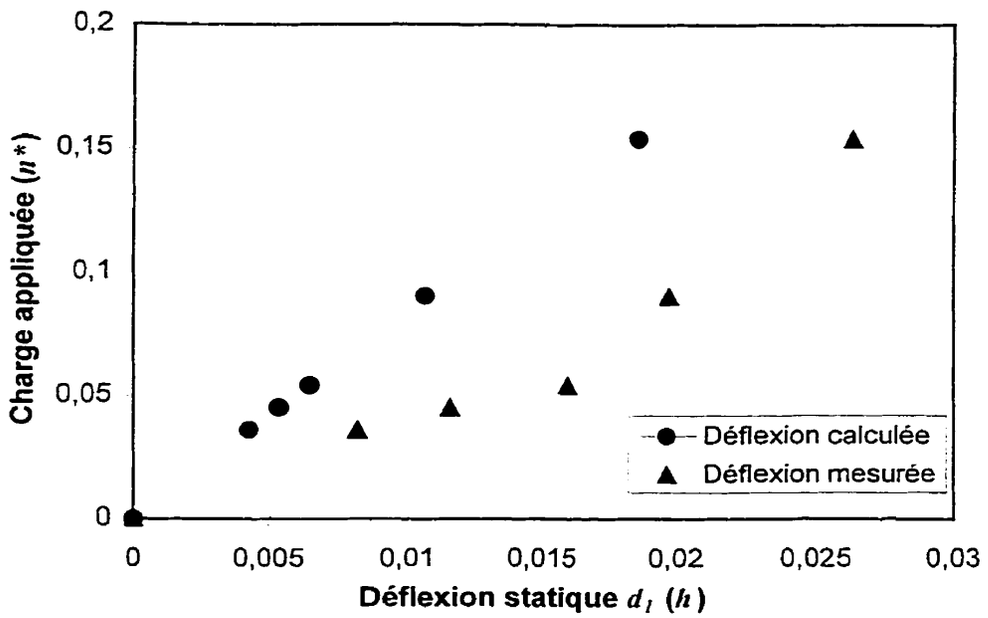


Figure 4.7 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P2, S^{c}S, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (0{,}178, 0{,}021, 0{,}017)$

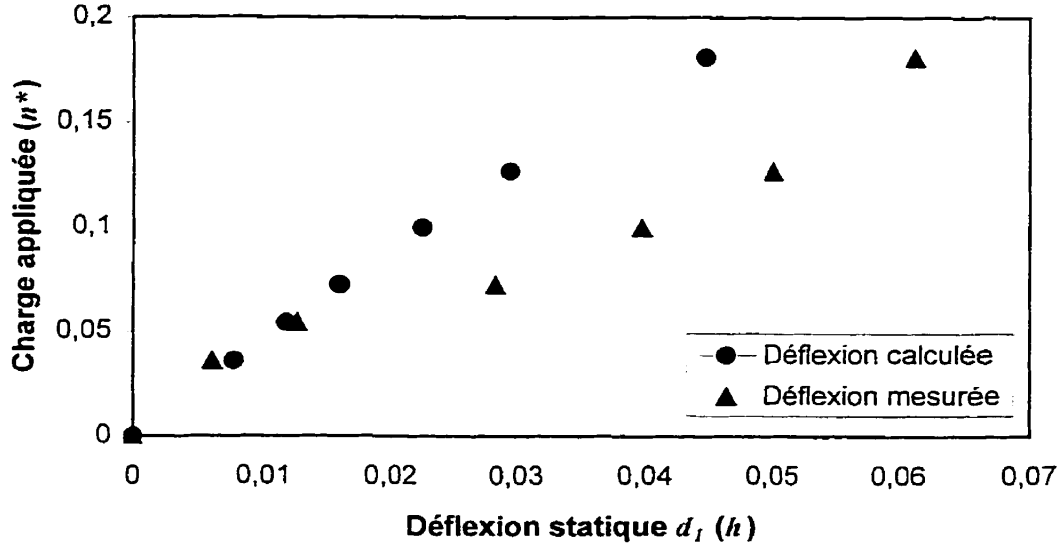


Figure 4.8 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P5, S^cS, $m^* = 2$, $w_{0i}/h = (-0{,}081, 0{,}209, -0{,}028)$

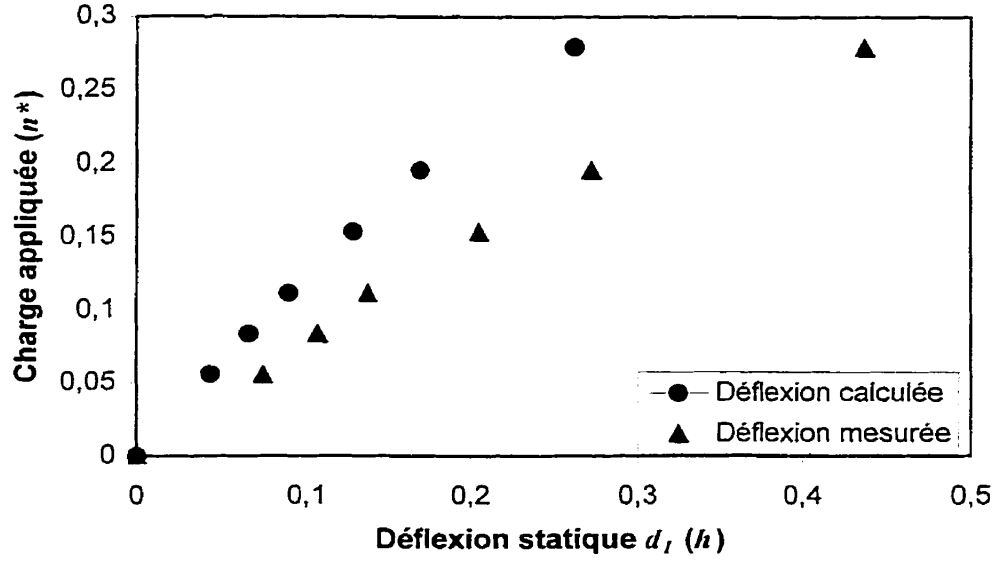


Figure 4.9 - Charge statique *vs* déflexion statique, plaque P6, S^cS, $m^* = 1$, $w_{0i}/h = (0{,}721, 0{,}165, 0{,}114)$

Pour ces cas, la déflexion statique mesurée suit une courbe d'allure similaire à celle de la déflexion calculée. Cependant, la déflexion statique mesurée est toujours supérieure à celle du modèle théorique. Cet écart est faible lorsque la charge statique est peu élevée, mais augmente avec le chargement.

En l'absence de chargement, la plaque est supposée libre de contrainte interne. En réalité, le pourtour de la plaque n'a pas exactement la même forme que les supports et l'imposition de ceux-ci vient introduire des contraintes internes qui peuvent modifier le comportement statique de la plaque imparfaite.

D'autre part, le capteur capacitif utilisé pour mesurer la déflexion latérale de la plaque a un diamètre assez important ($\approx$ 4,8 cm) et par conséquent la mesure effectuée n'est pas ponctuelle. Le capteur donne une valeur moyenne de la position latérale de la plaque sur la surface de mesure du capteur. Ainsi, la position latérale du pourtour de la plaque ne peut être mesurée directement. On suppose que la position latérale mesurée lorsque le capteur est le plus près possible des supports est égale à celle du pourtour de la plaque. Ceci constitue une approximation de sa position exacte, approximation qui se justifie par la faible pente de la plaque au support. La pente de la plaque étant en réalité non nulle au support, la position réelle du pourtour est plus éloignée que le dernier point mesuré. Par conséquent, l'imperfection telle qu'estimée à partir des mesures expérimentales est inférieure à l'imperfection réelle, ce qui explique l'écart entre les résultats théoriques et les mesures expérimentales. Le modèle théorique semble ainsi minimiser l'effet des imperfections géométriques. Il est possible de faire une extrapolation des mesures effectuées pour tenter de déterminer de façon plus précise la position du pourtour de la plaque. Cependant, la distance entre le dernier point de mesure et le contour de la plaque ne peut, lui aussi, qu'être estimé. Par conséquent, rien ne permet de croire qu'une extrapolation donnerait des résultats plus représentatifs de la réalité.

Les figures 4.2, 4.6 et 4.7 ont été obtenues pour des plaques simplement supportées de mêmes dimensions et avec des imperfections de différentes amplitudes suivant le premier mode. Les résultats obtenus pour les trois cas sont similaires. On note cependant un accroissement de l'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux pour la plus forte imperfection. Cette dernière imperfection est légèrement supérieure à la limite du modèle théorique ($w_{01}/h = 1{,}127 > 1 > w_{0i}/h_{\text{ max théorique}}$). Par conséquent, le modèle théorique donne des résultats plus représentatifs pour des imperfections ayant une amplitude inférieure à l'épaisseur de la plaque ($w_{0i}/h_{\text{ max}} < 1$) et ainsi la limite de validité du modèle théorique s'avère justifiée.

4.4 - Comportement dynamique

Lorsqu'une plaque imparfaite est soumise à une excitation paramétrique, plusieurs résonances de différentes natures peuvent être observées. On retrouve ainsi des résonances paramétriques, forcées, internes et combinées. Chaque type de résonance a un caractère distinct qui permet de le différencier.

Pour pouvoir comparer entre elles les résonances de différentes plaques, il est nécessaire de définir au préalable de nouveaux paramètres de chargement équivalent pour les plaques étudiées. Dans le cas du chargement statique, la charge la plus représentative du comportement d'une plaque est sans contredit sa charge critique de flambage. Il existe une charge critique associée à chaque mode de vibration. Pour être capable de comparer les résonances suivant divers modes pour plusieurs plaques, il est nécessaire d'utiliser un terme de chargement plus général, qui sera le même pour tous les modes de vibration. La plus basse charge critique, associée au mode critique de flambage (m^*) s'avère la charge la plus appropriée et est utilisée pour normaliser la charge appliquée. On définit ainsi un nouveau paramètre représentatif du chargement statique, appelé coefficient de chargement critique :

$$P_{cr} = \frac{n_{yo}}{n^*} \tag{4.1}$$

De la même façon, le chargement dynamique est normalisé en considérant la charge critique de la plaque et aussi le chargement statique appliqué. On obtient alors un paramètre représentatif de la charge dynamique appliquée, appelé paramètre d'excitation:

$$\mu_{pq} = \frac{n_{yt}}{2\,(n_{pq} - n_{yo})} \tag{4.2}$$

Ce paramètre est défini pour un mode pq donné, par rapport à la charge critique de ce mode (n_{pq}). Comme pour le cas du chargement statique, la plus basse charge critique de flambage (n^*) est utilisée comme paramètre de normalisation plus général, d'où

$$\mu = \frac{n_{yt}}{2\,(n^* - n_{yo})} \tag{4.3}$$

Ce nouveau paramètre sera utilisé pour pouvoir comparer les résonances de différentes plaques.

D'autre part, les fréquences de résonance varient d'une plaque à l'autre, et ce plus particulièrement pour des plaques de forme différente. Pour comparer les courbes de résonance de ces plaques entre elles il est alors préférable de définir ici aussi un nouveau paramètre. Pour le cas du chargement, les forces ont été normalisées par rapport à la charge critique de flambage. Par analogie, la fréquence naturelle du mode critique de flambage (Ω^*) sera utilisée pour normaliser la fréquence d'excitation lorsque nécessaire.

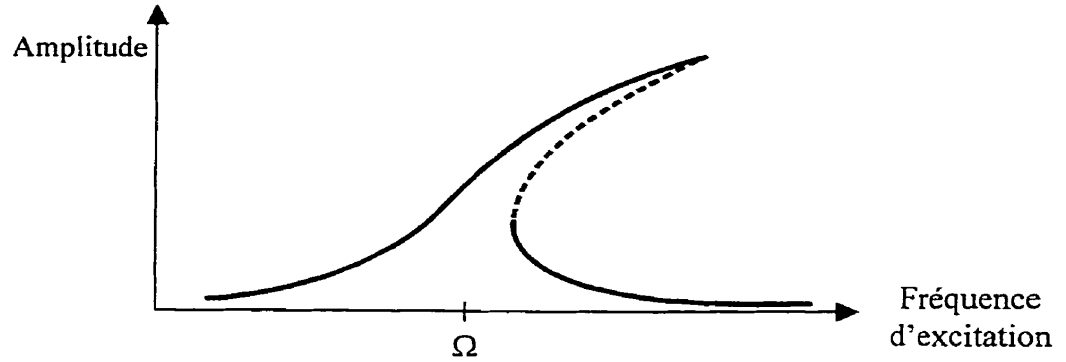
4.4.1 - Résonances paramétriques et forcées

En présence d'imperfections géométriques, on observe principalement deux types distincts de vibration; les vibrations paramétriques et les vibrations forcées. Les vibrations paramétriques se produisent lorsque la fréquence d'excitation est environ égale à deux fois l'une des fréquences naturelles de la plaque ($\lambda = 2\overline{\Omega}_i$) et donnent lieu à des

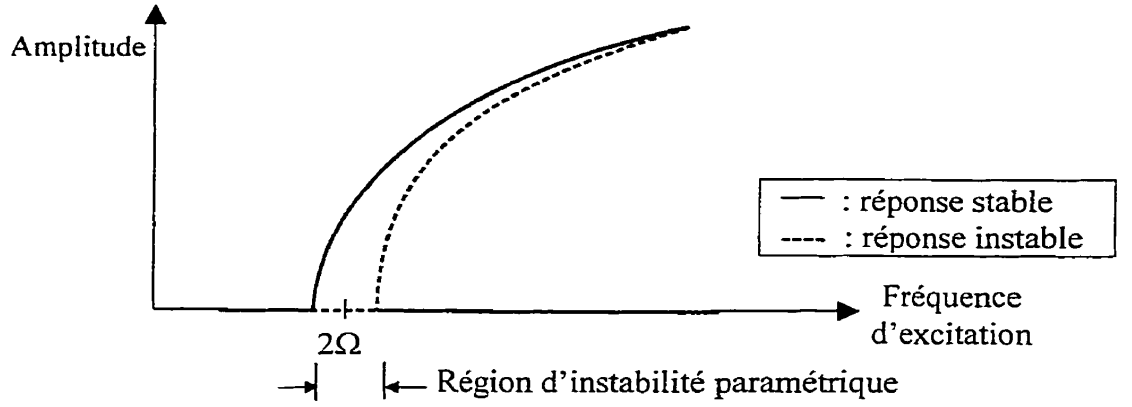
résonances paramétriques. Le second type de vibration, les vibrations forcées, surviennent pour toutes les fréquences d'excitation. Ces vibrations font apparaître une résonance (résonance forcée) lorsque la fréquence d'excitation se rapproche d'une des fréquences naturelles ($\lambda \cong \overline{\Omega}_i$). Ce type de vibration est essentiellement dû à la présence des imperfections géométriques. Pour une plaque parfaite, ces vibrations sont inexistantes. Dans le modèle théorique, la présence d'imperfections géométriques produit un terme d'excitation forcée, terme qui cause les vibrations forcées.

Ainsi, les imperfections modifient le comportement dynamique de plaques soumises à une excitation paramétrique en faisant apparaître des résonances forcées. De plus, le comportement global des résonances paramétriques peut quant à lui être modifié par la présence d'imperfections géométriques. Cette modification du comportement survient principalement au niveau de la non linéarité des résonances pour les vibrations de faible amplitude. Au lieu du comportement de type ressort dur (comportement global d'une plaque parfaite), on retrouve alors un comportement de type ressort mou, suivi du comportement en ressort dur pour les vibrations de grande amplitude. La figure 4.10 illustre les types de résonance ainsi obtenus.

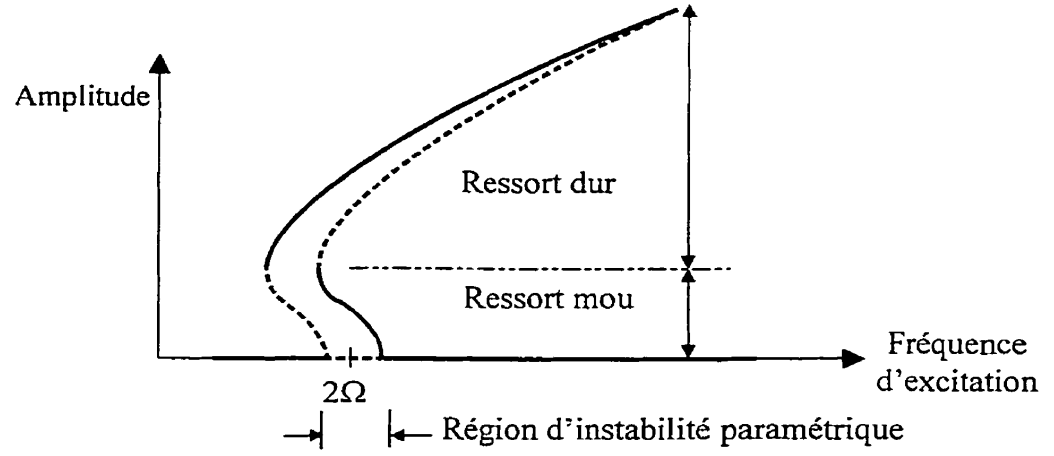
Aux figures présentées, le trait continu illustre la partie stable de la résonance, partie qui peut être obtenue numériquement et expérimentalement. Le trait discontinu représente la partie instable, partie qui ne peut être obtenue qu'à l'aide de méthodes de résolution analytique. Ces courbes de réponse sont non-linéaires. Par conséquent, la solution ou la réponse obtenue dépend du sens de balayage de la fréquence d'excitation. Pour bien saisir la signification réelle des résultats qui seront obtenus, il est donc essentiel de faire un lien entre les résultats réels et la forme globale de la réponse théorique. La figure 4.11 montrent la forme des résultats qui seront obtenus, en fonction de la forme de la réponse analytique globale.



a) Résonance forcée

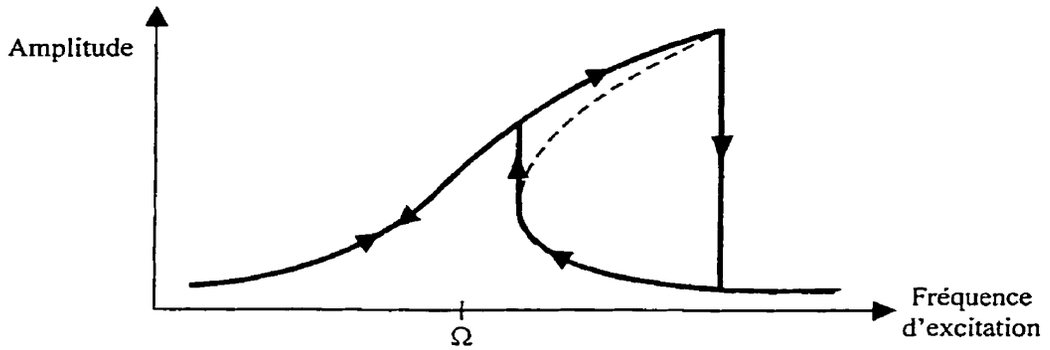


b) Résonance paramétrique, comportement global en ressort dur

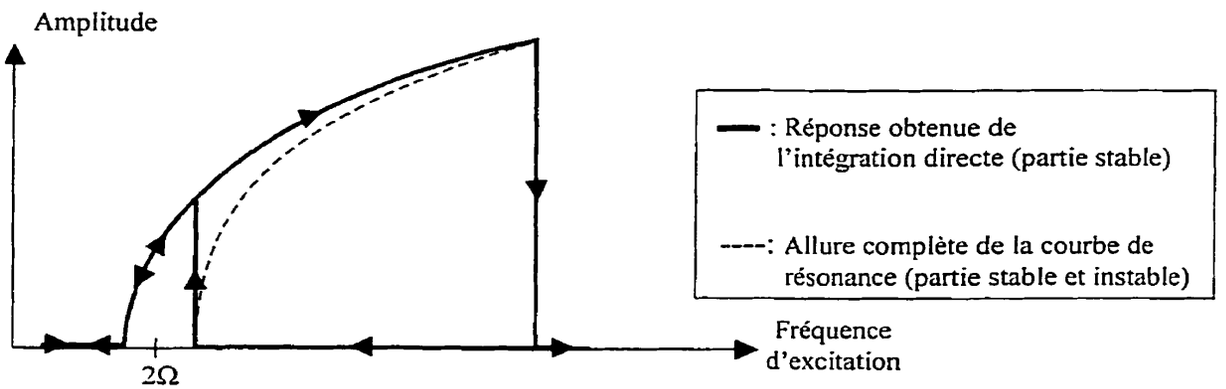


c) Résonance paramétrique, comportement en ressort mou présent

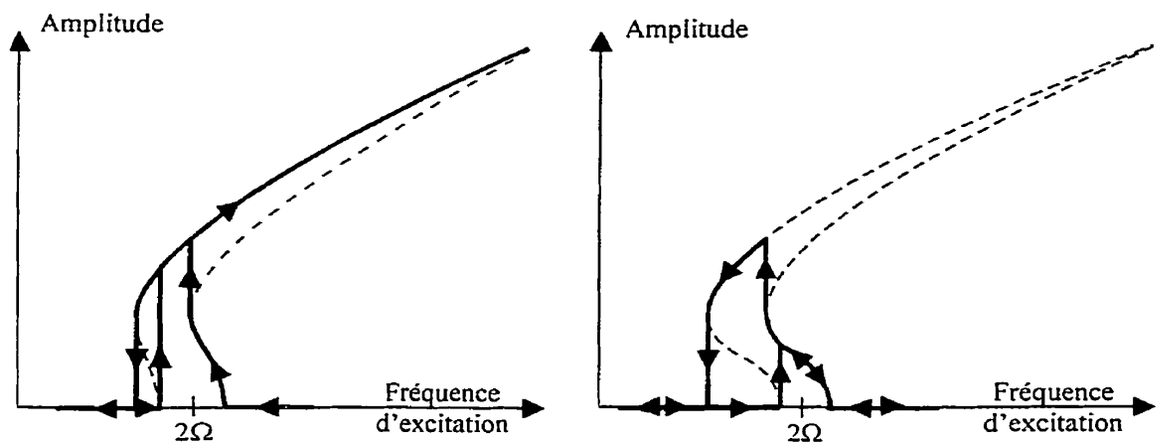
Figure 4.10 - Courbes de résonance possibles pour une plaque imparfaite, partie stable et instable et région d'instabilité paramétrique



a) Résonance forcée



b) Résonance paramétrique, comportement global en ressort dur



Comportement en ressort mou faible Comportement en ressort mou important

c) Résonance paramétrique, comportement en ressort mou présent

Figure 4.11 - Allure des réponses fréquentielles obtenues avec l'intégration directe et expérimentalement

4.4.3 - Résonance internes

Parmi les différents types de résonance que peut développer une plaque, on retrouve les résonances internes. Ces résonances sont caractérisées par une oscillation simultanée du système selon plusieurs modes naturels. Elles se produisent quand les fréquences modales Ω_i satisfont une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \Omega_i = 0 \tag{4.4}$$

où les K_i sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls.

Aucune résonance interne stationnaire n'est possible en l'absence d'une résonance externe. L'étude des résonances internes des plaques imparfaites est donc effectuée par l'intermédiaire de l'étude des résonances simultanées. Ces résonances sont caractérisées par l'excitation directe d'un seul mode (résonance externe, paramétrique ou forcée) qui, par transfert d'énergie, permet l'excitation d'un ou de plusieurs autres modes correspondant à des résonances internes. L'ensemble de ces résonances satisfait les équations régissant ce phénomène:

$$\lambda = 2\Omega_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} K_j \Omega_j = 0 \text{ (résonance paramétrique et interne)}$$

ou (4.5)

$$\lambda = \Omega_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} K_j \Omega_j = 0 \text{ (résonance forcée et interne)}$$

La caractéristique principale de ce type de résonance est la vibration du système suivant deux ou plusieurs modes naturels et ce, même si un seul de ces modes est excité directement par l'excitation paramétrique.

La présence des résonances internes dépend des fréquences modales de la plaque. Celles-ci sont influencées par les caractéristiques physiques de la plaque, par ses conditions aux limites, par l'ampleur de la charge statique appliquée dans son plan et par

la présence d'imperfections géométriques. Par conséquent, elles sont difficilement prévisibles. Il existe donc peu de travaux expérimentaux sur les résonances internes et simultanées.

4.4.4 - Résonance combinées

Il existe un autre type de résonance qui fait intervenir plus d'un mode de vibration et qui peut survenir pour le cas étudié. Il s'agit des résonances combinées. Lors d'une résonance combinée, le système oscille simultanément suivant plusieurs modes naturels de vibration, lesquels sont directement excités par l'excitation paramétrique. Ce type particulier de résonance survient lorsque

$$K_0 \lambda = \sum_{j=1}^{n} K_j \Omega_j \tag{4.6}$$

où les K_j sont des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls.

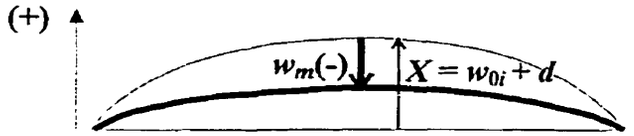
Le cas pour lequel $K_0 = 1$ est appelé résonance combinée du premier ordre. Lorsque que tous les K_j sont positifs, la résonance prend le nom de résonance combinée additive. Dans le cas pour lequel un seul coefficient K_j est négatif, la résonance est appelée résonance combinée soustractive. Ces résonances sont directement excitées par la force extérieure, elles peuvent donc survenir à n'importe quel moment, contrairement aux résonances internes qui surviennent uniquement lors d'une résonance externe.

4.5 - Réponse temporelle : asymétrie des vibrations

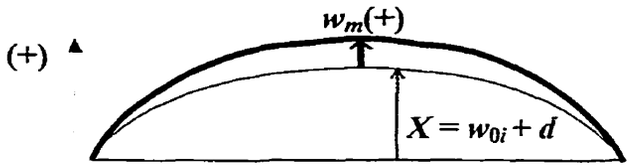
Les vibrations latérales des plaques imparfaites ont été étudiées dans des travaux de maîtrise précédents [27], et par Hui [65]. Une conclusion qui ressort de ces études est l'asymétrie possible des vibrations latérales de la plaque par rapport à sa position d'équilibre statique initiale. Des oscillations asymétriques ont aussi été observées dans une étude effectuée par Leissa et Kadi [59] considérant l'effet de la courbure sur les vibrations des coques minces. Ce même comportement à été observé par Little [69] dans une étude effectuée sur le comportement dynamique d'une colonne géométriquement imparfaite, simplement supportée, et soumise à l'action d'une force statique de compression.

Dans le but de vérifier les résultats théoriques et de s'assurer de la réelle asymétrie des vibrations, la réponse temporelle des trois premiers modes de vibration de plaques imparfaites simplement supportées a été mesurée. Avant de présenter ces résultats, il est essentiel de revoir la représentation physique de la réponse mesurée et de définir une terminologie appropriée.

Pour demeurer cohérent avec le modèle théorique présenté au chapitre 2, la partie positive de la réponse temporelle est définie comme le mouvement de la plaque lorsque cette dernière se déforme de façon à accroître sa courbure initiale (ou imperfection). La partie négative représente le mouvement pour lequel la plaque se déforme de façon à réduire sa courbure initiale. Pour différencier le sens du mouvement, l'amplitude du correspondant à la partie positive de la réponse temporelle est ici appelée amplitude positive, et celle correspondant à la partie négative de la réponse temporelle est appelée amplitude négative. La figure 4.12 schématise cette terminologie, utilisée pour décrire l'asymétrie des vibrations d'une plaque initialement imparfaite.



a) Amplitude w_m négative



b) Amplitude w_m positive

Figure 4.12 - Représentation physique de la terminologie utilisée pour décrire l'asymétrie des vibrations d'une plaque géométriquement imparfaite

Des essais préliminaires ont été effectués pour visualiser la forme de la réponse temporelle des plaques imparfaites. Lors de ces essais, l'asymétrie des vibrations a été observée. Pour pouvoir comparer facilement les signaux temporels obtenus pour divers modes de vibration et diverses plaques (de fréquences différentes), l'échelle de temps de tous les signaux a été normalisée pour obtenir une fréquence fictive de 1 Hz.

En premier lieu, quelques résultats expérimentaux ont été comparés avec les résultats obtenus du modèle théorique (figures 4.13 à 4.15). De ces résultats, on note que l'asymétrie des vibrations obtenue avec le modèle théorique reflète bien le comportement réel du système mécanique. Tout comme pour le modèle théorique, cette asymétrie est influencée par les diverses caractéristiques physiques du système étudié. Dans certains cas, la concordance est presque parfaite, et pour d'autres cas il existe un écart, écart qui demeure cependant faible.

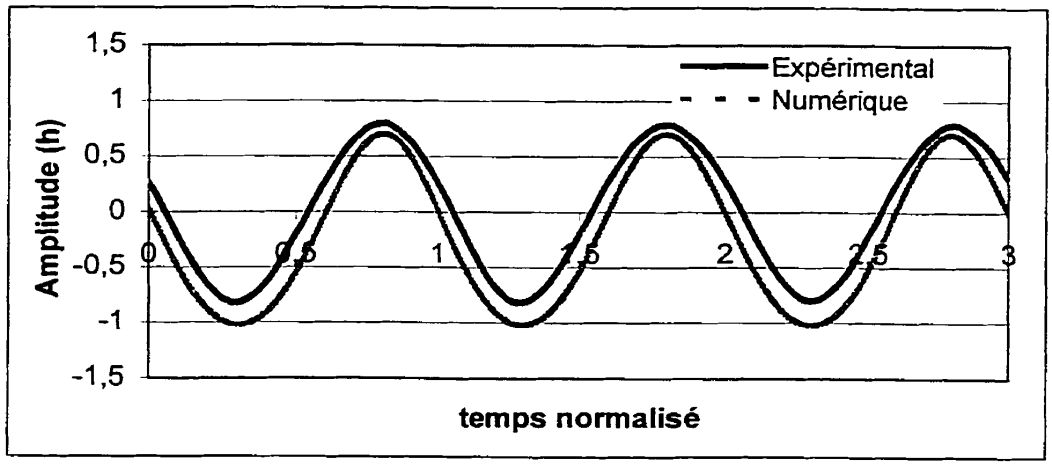


Figure 4.13 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S, comparaison entre résultats expérimentaux et numériques

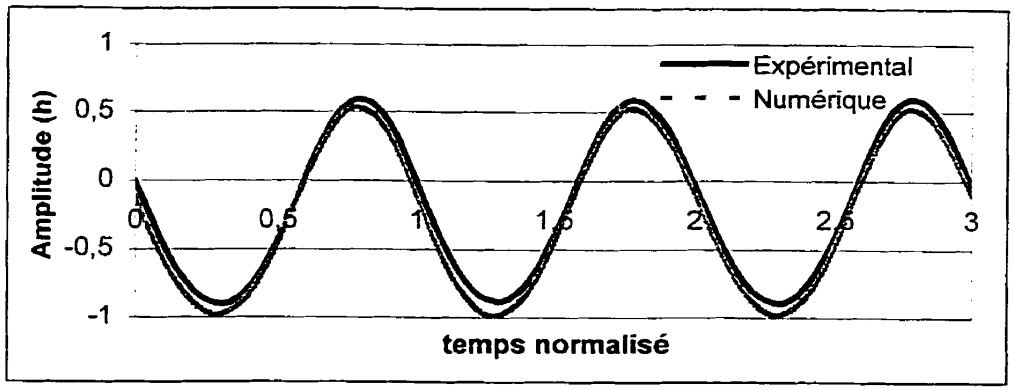


Figure 4.14 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S, comparaison entre résultats expérimentaux et numériques

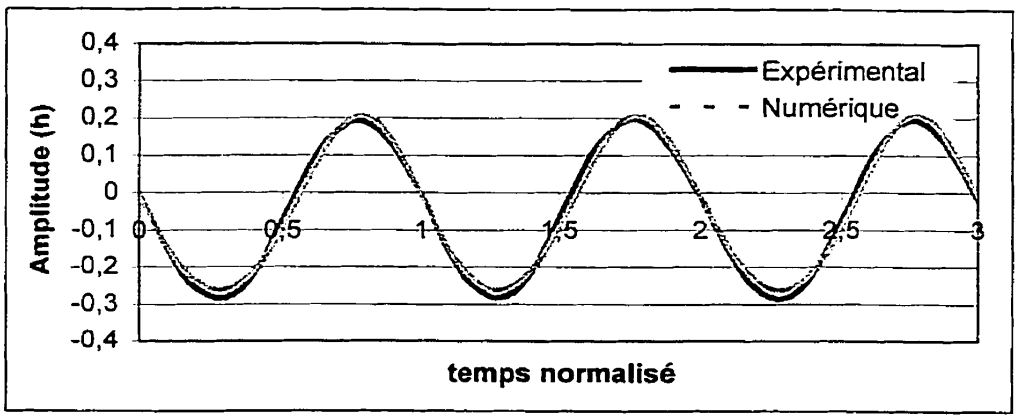


Figure 4.15 - Réponse temporelle du 3ème mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S, comparaison entre résultats expérimentaux et numériques

4.5.1 - Influence du chargement statique

Dans un premier temps, l'influence du chargement statique sur la réponse temporelle des plaques imparfaites a été étudiée. Ainsi, la réponse temporelle des trois premiers modes de vibration d'une plaque imparfaite simplement supportée, soumise à divers niveaux de chargement statique a été mesurée. Les résultats obtenus pour des vibrations de différente amplitude faisant partie d'une même courbe de résonance (légère variation de la fréquence d'excitation) sont présentés aux figures 4.16 à 4.24. Pour tous les cas présentés, le mouvement positif de la plaque (partie positive de la réponse temporelle) a une amplitude moindre que le mouvement négatif de cette dernière (partie négative de la réponse temporelle). Lorsque l'amplitude des vibrations s'accroît, l'asymétrie des vibrations devient de plus en plus importante.

L'augmentation du chargement statique provoque un accroissement de cette asymétrie. L'accroissement de la charge statique appliquée produit de plus une augmentation de la déflexion statique initiale d'une plaque imparfaite. On peut donc croire que cette déflexion a une influence directe sur la réponse temporelle de la plaque. Ainsi, l'augmentation de la charge statique se traduit par une augmentation de la déflexion statique initiale de la plaque, qui a son tour provoque une plus grande asymétrie des vibrations.

4.5.2 - Influence du mode de vibration

Les figures 4.16 à 4.24 permettent aussi de dégager l'influence du mode de vibration sur l'asymétrie des vibrations. Pour les trois cas de chargement présentés, l'asymétrie est toujours plus grande pour le troisième mode de vibration, suivi du deuxième mode. Ce phénomène est le plus faible pour le premier mode de vibration. L'asymétrie des vibrations s'accroît donc pour les modes plus élevés.

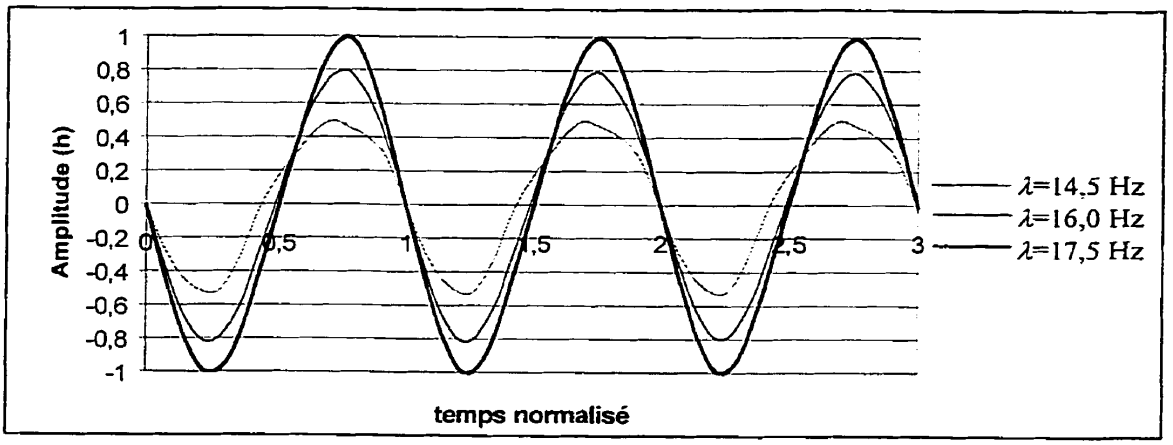


Figure 4.16 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S

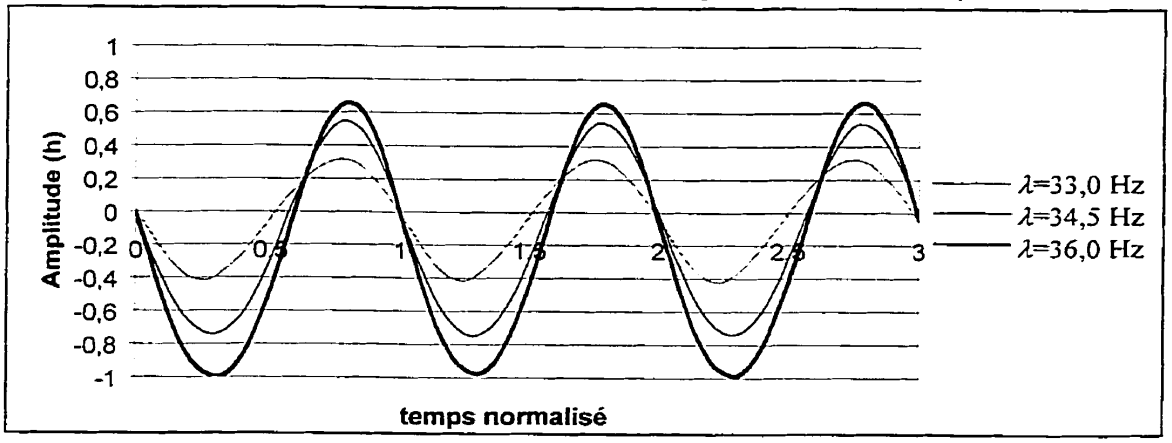


Figure 4.17 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S

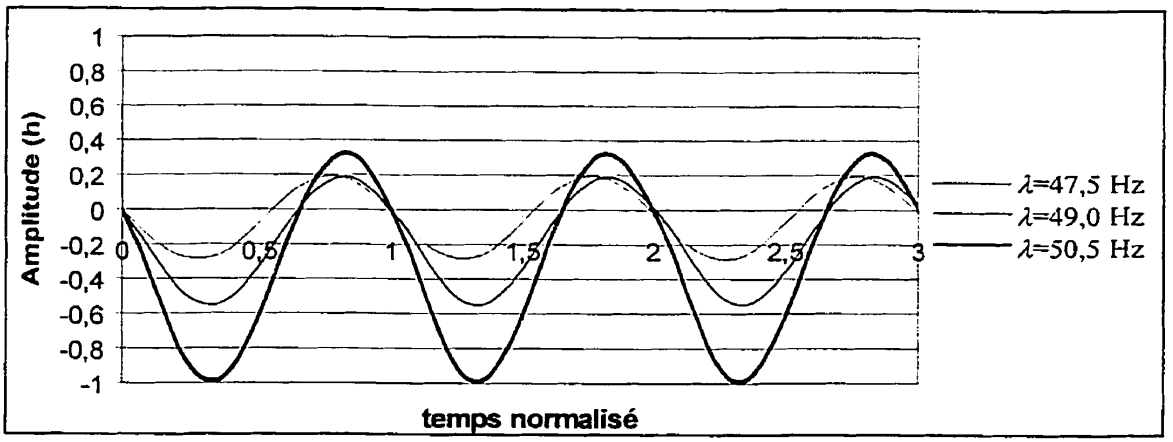


Figure 4.18 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S

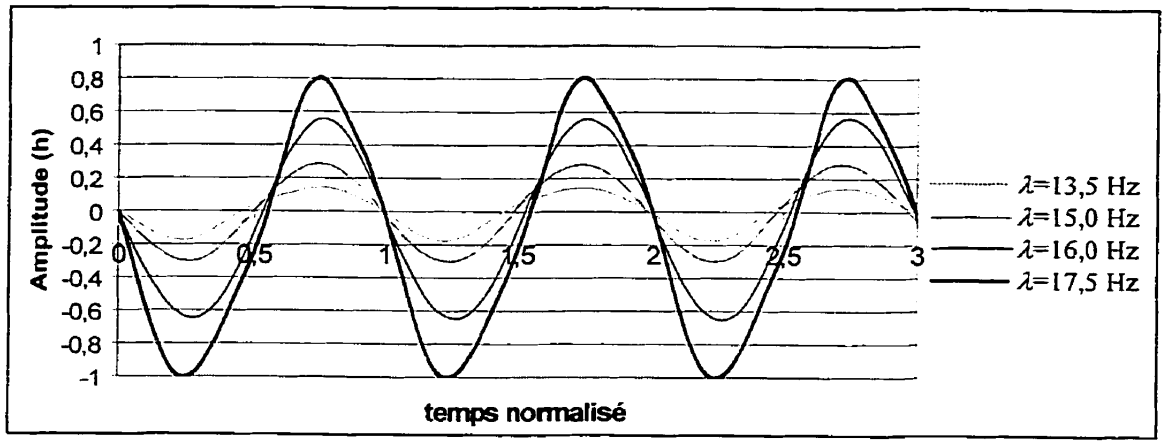


Figure 4.19 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}16$, $\mu = 0{,}0489$, S^{c}S

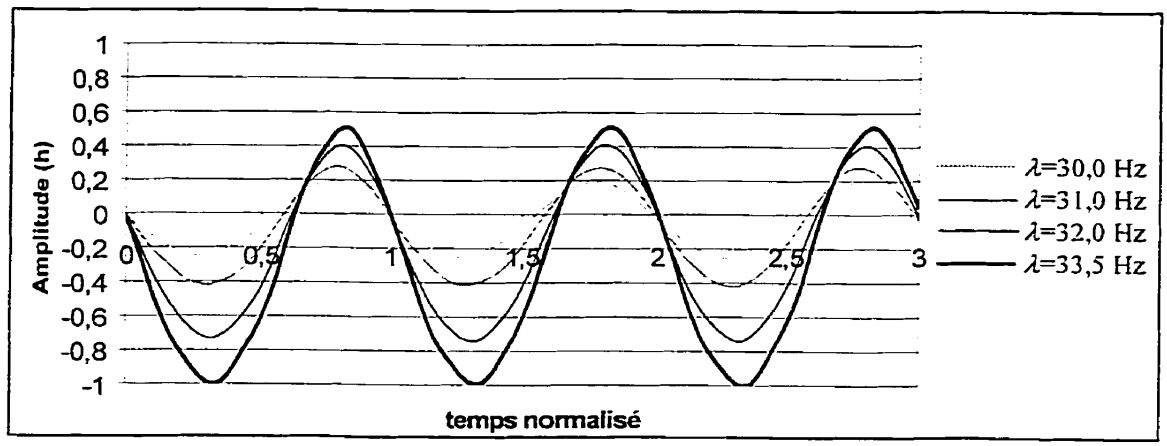


Figure 4.20 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}16$, $\mu = 0{,}0489$, S^{c}S

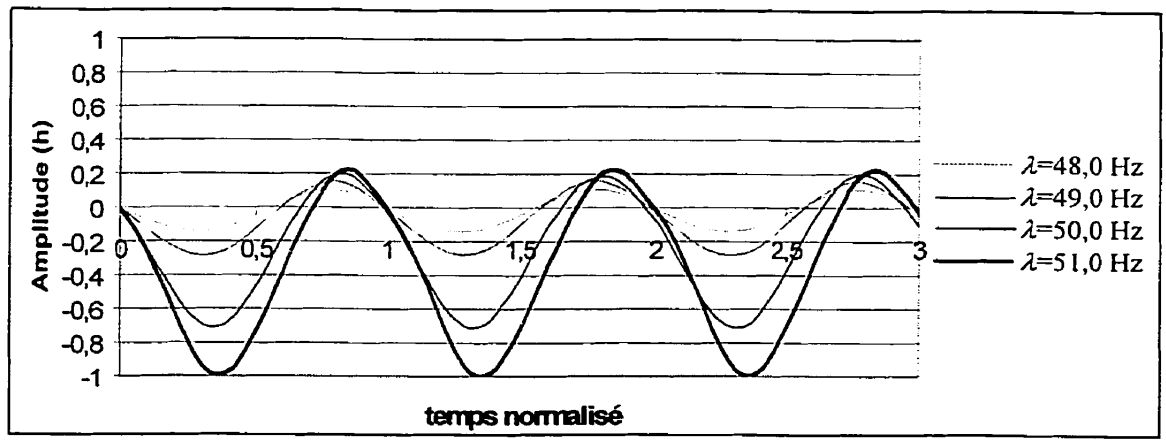


Figure 4.21 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}16$, $\mu = 0{,}0489$, S^{c}S

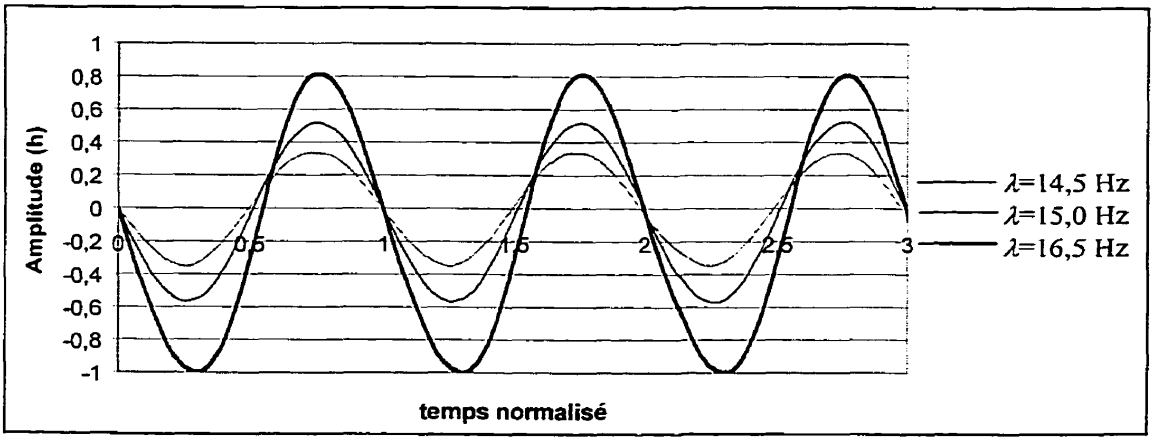


Figure 4.22 - Réponse temporelle du 1er mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}27$, $\mu = 0{,}0562$, S^{c}S

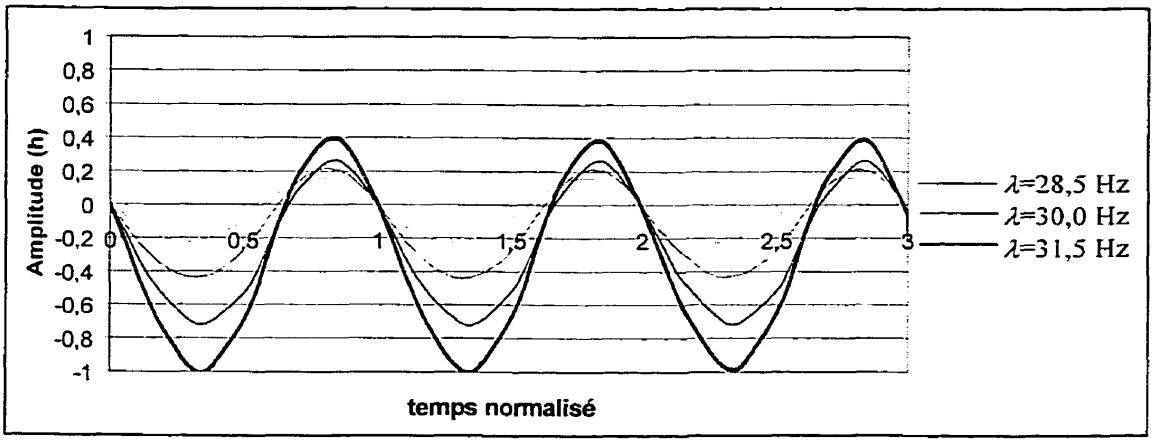


Figure 4.23 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}27$, $\mu = 0{,}0562$, S^{c}S

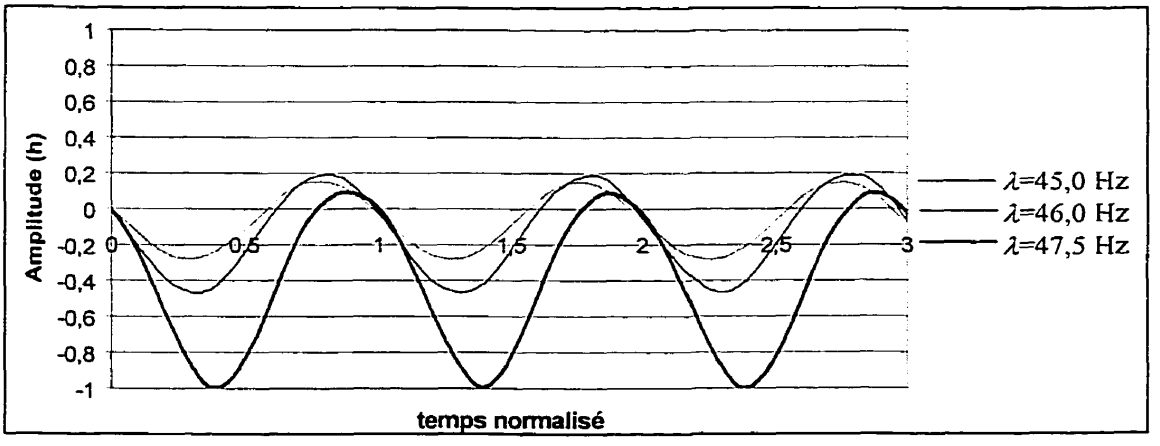


Figure 4.24 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}27$, $\mu = 0{,}0562$, S^{c}S

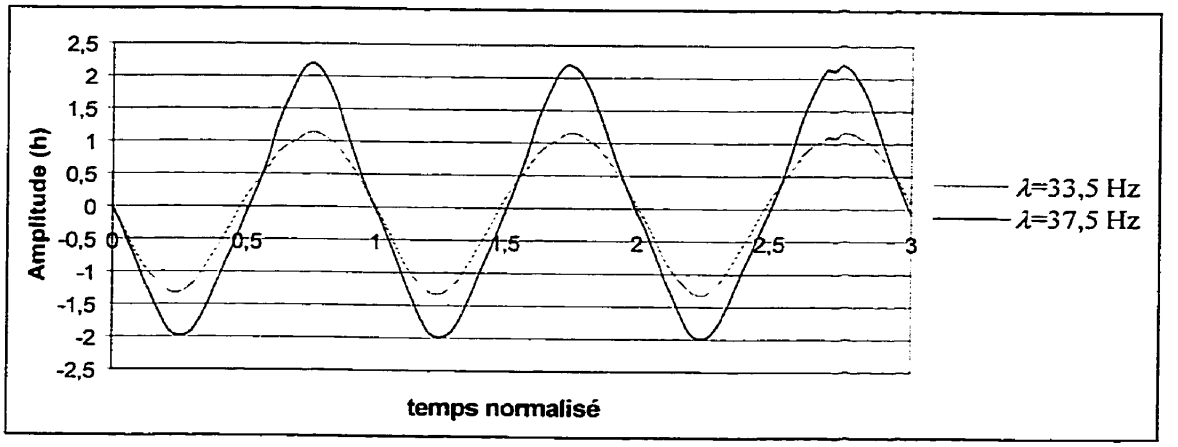


Figure 4.25 - Réponse temporelle du 1[er] mode, Plaque P2, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

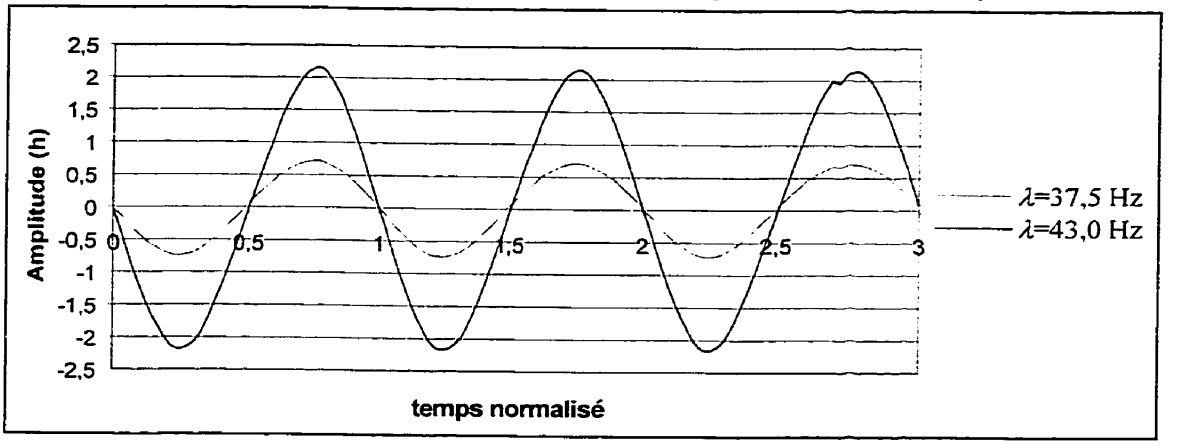


Figure 4.26 - Réponse temporelle du 1[er] mode, Plaque P3, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

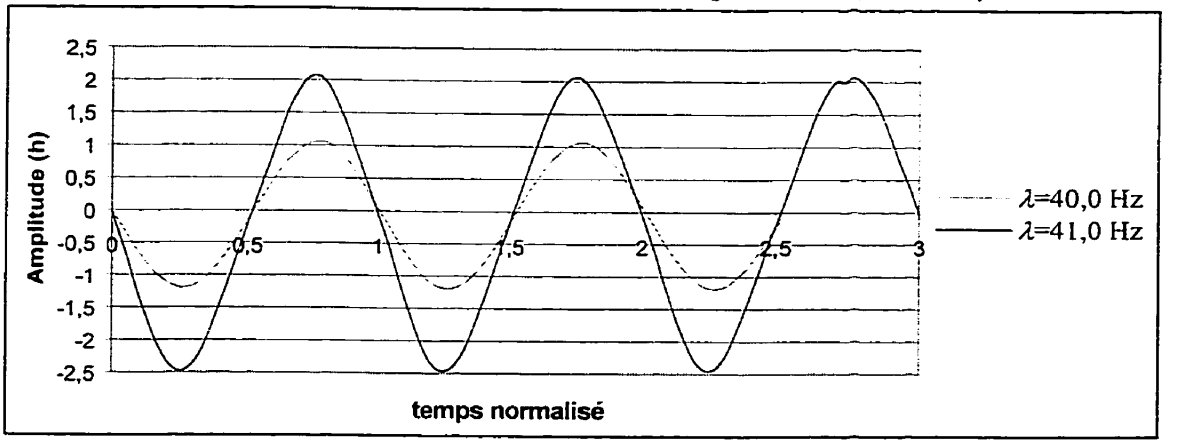


Figure 4.27 - Réponse temporelle du 1[er] mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

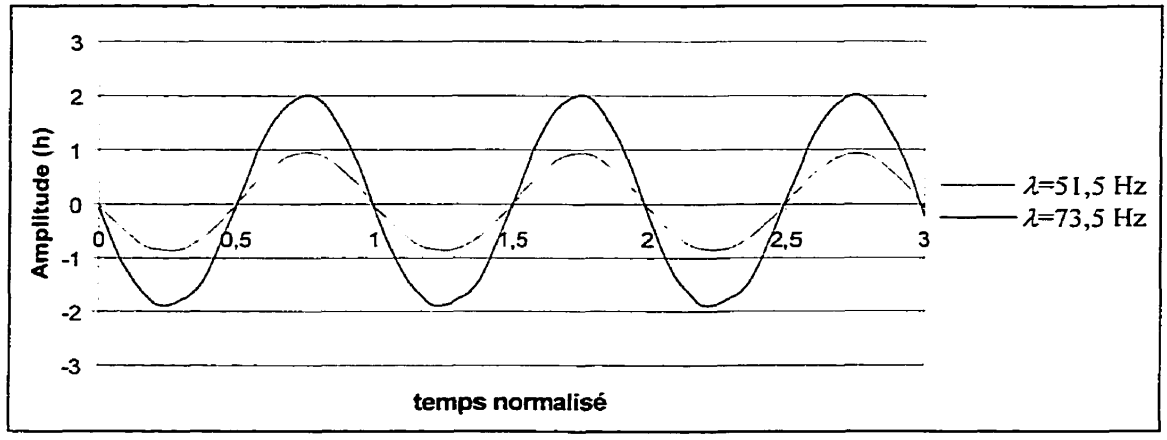


Figure 4.28 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P2, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

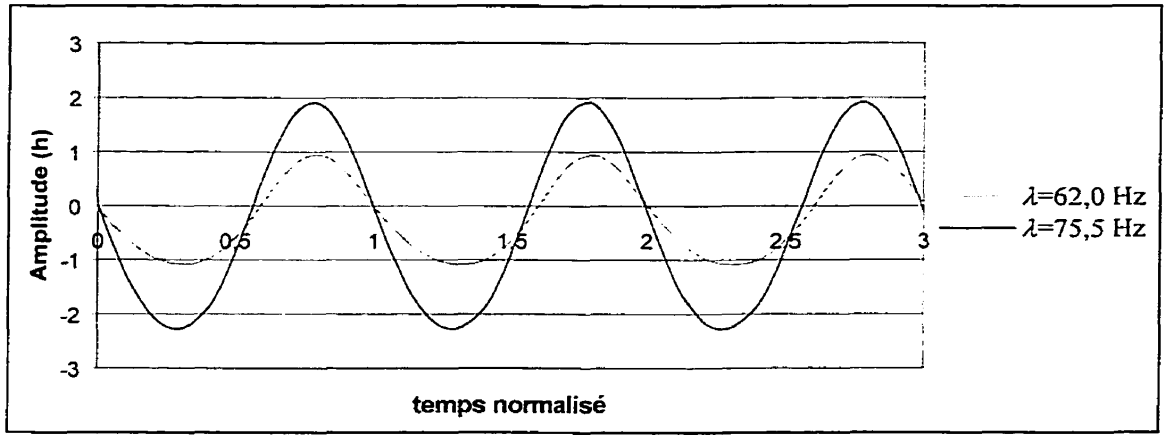


Figure 4.29 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P3, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

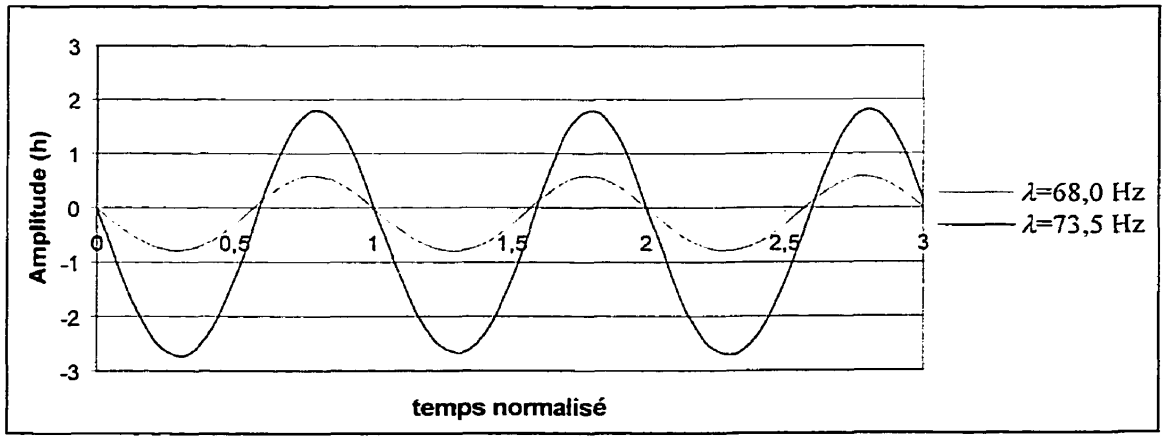


Figure 4.30 - Réponse temporelle du 2ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

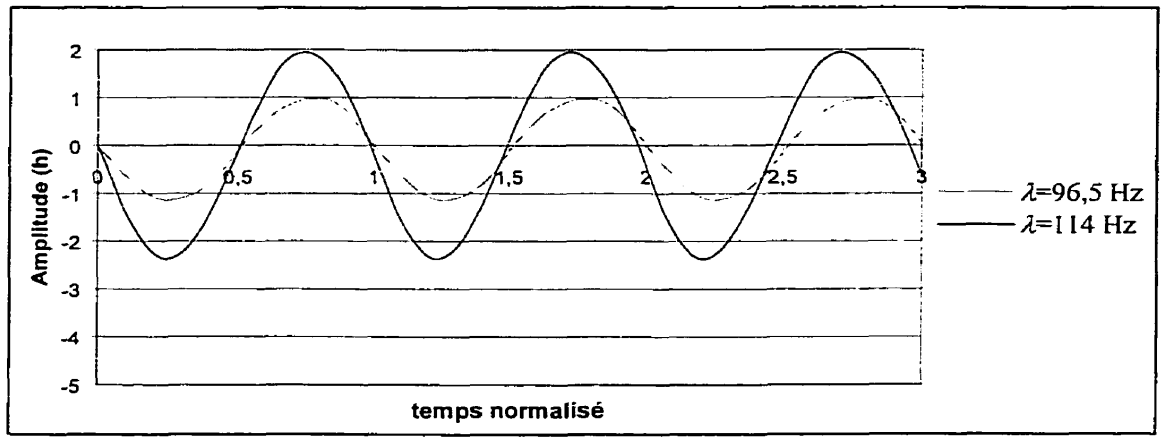


Figure 4.31 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P2, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

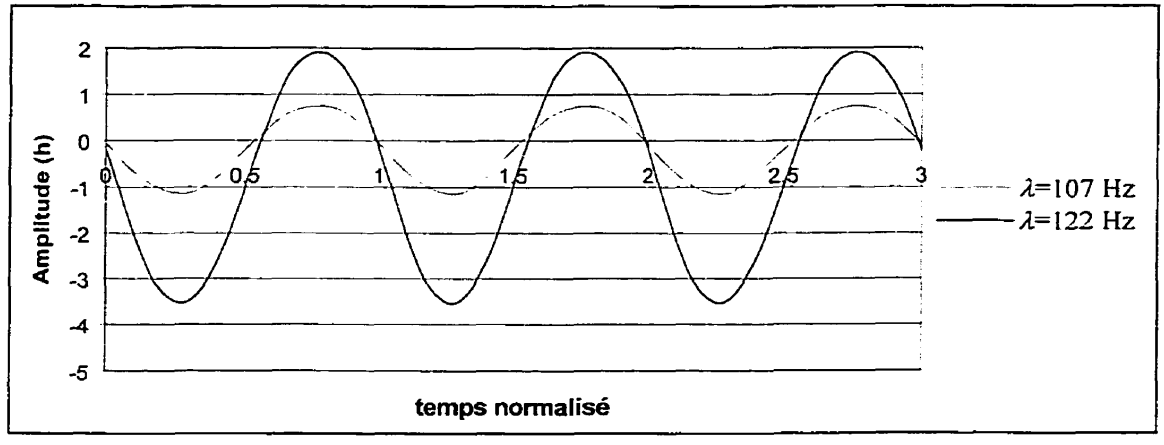


Figure 4.32 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P3, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

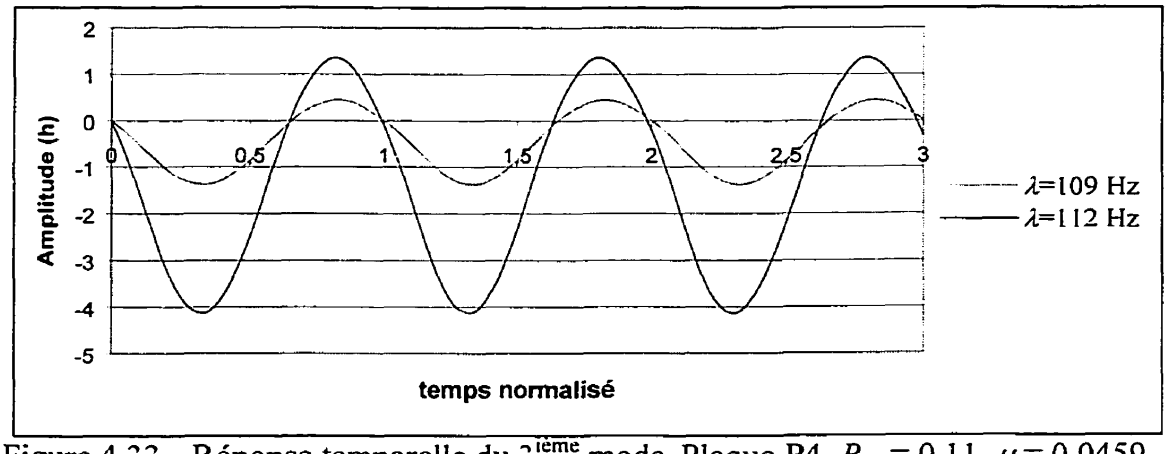


Figure 4.33 - Réponse temporelle du 3ième mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$

4.5.3 - Influence de l'amplitude de l'imperfection

Des essais ont été effectués sur trois plaques ayant le même rapport de forme, soumises à des charges équivalentes et ayant trois niveaux distincts d'imperfection suivant le premier mode de vibration. Les résultats obtenus pour les trois premiers modes de vibration se retrouvent aux figures 4.25 à 4.33. Les figures 4.25 à 4.27 montrent la réponse temporelle du premier mode de vibration pour trois plaques ayant un niveau d'imperfection différent. On remarque que l'augmentation de l'amplitude de l'imperfection engendre une augmentation de l'asymétrie de vibration. Cette observation est aussi valide pour les deux autres modes de vibration étudiés (figures 4.28 à 4.30 pour le deuxième mode et figures 4.31 à 4.33 pour le troisième mode). Cette asymétrie demeure cependant plus prononcée pour le troisième mode de vibration, ce qui confirme la plus grande sensibilité des modes les plus élevés aux imperfections géométriques.

4.5.4 - Explication de l'asymétrie des vibrations et du comportement global des résonances paramétriques

L'asymétrie des vibrations observées précédemment peut être expliquée en considérant le cas des vibrations libres d'une plaque imparfaite (imperfection simple suivant le premier mode), non chargée dans son plan, par analogie au cas d'une colonne soumise aux mêmes conditions aux limites et avec une imperfection similaire. Ce cas a été étudié par Little [69]. Dans son travail, Little donne une explication physique de la nature des asymétries observées. Cette explication s'avère applicable à d'autres structures semblables et peut être transposée aux plaques étudiées.

Lors d'une déflexion positive (déflexion dans le même sens que l'imperfection géométrique), les contraintes axiales dans la plaque sont en tension. Cette tension s'accroît de plus en plus rapidement avec l'amplitude de la déflexion. Par contre, dans le cas d'une déflexion négative, les contraintes axiales sont initialement en compression.

Ces contraintes de compression croissent de moins en moins rapidement avec l'augmentation de la déflexion, jusqu'à la position de compression maximale (position pour laquelle la plaque est approximativement droite). Au-delà de cette déflexion négative, les contraintes axiales de compression décroissent pour atteindre une position ou elles deviennent nulles, soit lorsque la configuration d'équilibre inversée est atteinte ($w = -w_0$, forme flambée de la plaque symétrique à la forme initiale ou 'snap through position'). En augmentant encore la déflexion négative, des contraintes de tension apparaissent et croissent avec l'amplitude de la déflexion.

Considérant ces variations de contrainte dans la plaque à l'intérieur d'un cycle, les déflexions négatives doivent par conséquent être supérieures aux déflexions positives pour emmagasiner la même quantité d'énergie.

Par ailleurs, en plus d'une asymétrie des vibrations, on peut remarquer une variation de la période des vibrations avec l'amplitude de celles-ci. Ces variations de période sont aussi reliées aux variations de contraintes axiales décrites précédemment. L'accroissement de plus en plus rapide des contraintes en tension pour les déflexions positives a pour effet de rigidifier le comportement, tandis que la diminution de plus en plus lente des contraintes de compression pour les déflexions négatives a pour effet d'en amollir le comportement. Lorsque l'amplitude des vibrations s'accroît, les déflexions négatives prennent de plus en plus d'importance ce qui contribue ainsi à amollir le comportement global de la plaque.

Cependant, à cet effet d'amollissement vient s'opposer l'effet rigidifiant relié aux grandes amplitudes de vibrations (effet observé pour le cas des plaques parfaites). Cet effet prend de plus en plus d'importance avec l'amplitude des vibrations, pour devenir égal et même supérieur à l'effet amollissant. On peut ainsi observer un comportement de type ressort mou pour les vibrations de faible amplitude, comportement qui se voit

transformé en comportement du type ressort dur lorsque les amplitudes de vibration deviennent suffisamment grandes pour présenter un effet rigidifiant dominant.

4.6 - Zone d'instabilité paramétrique

Une résonance paramétrique est un phénomène d'instabilité dynamique qui se produit uniquement lorsque les paramètres du système satisfont des critères bien précis. Outre la fréquence d'excitation, l'amplitude de la force statique et dynamique ont une influence directe sur l'apparition des résonances paramétriques.

Pour chaque résonance paramétrique il existe une zone d'instabilité pour laquelle une condition initiale quelconque fait apparaître des vibrations paramétriques. À l'extérieur de cette zone, la présence de vibrations paramétriques dépend strictement des conditions initiales imposées. Selon le cas, des vibrations paramétriques peuvent se produire ou non.

Les zones d'instabilité paramétrique sont influencées par la charge statique et la charge dynamique appliquées sur la plaque, par le taux d'amortissement du système, par le mode de vibration et aussi par le rapport de forme de la plaque. La présence d'imperfections géométriques est un paramètre nouveau dans l'étude des zones d'instabilité paramétrique. À ce jour, l'effet de ce dernier paramètre sur les zones d'instabilité est encore mal connu et il n'existe pas de travaux traitant spécifiquement de l'influence des imperfections géométriques.

4.6.1 - Approche théorique

En théorie, la zone d'instabilité paramétrique est une zone de fréquence pour laquelle l'absence de vibration paramétrique est une solution possible mais instable. Pour le cas d'une plaque parfaite il est nécessaire d'imposer une condition initiale faible pour pouvoir déterminer numériquement la zone d'instabilité paramétrique. Le cas des plaques imparfaites peut cependant être traité différemment car les imperfections géométriques constituent en elles-mêmes un déplacement initial suffisant pour faire apparaître des vibrations paramétriques. En plus de ce déplacement initial, on remarque aussi la présence de vibrations forcées pour toutes les fréquences d'excitation. Ces vibrations créent elles aussi une condition initiale suffisante. Par conséquent, les zones d'instabilité paramétrique d'une plaque imparfaite peuvent être déterminées numériquement sans imposer aucune condition initiale particulière.

Les zones d'instabilité sont obtenues en soumettant la plaque à divers chargements, et en effectuant un balayage croissant et décroissant de la fréquence d'excitation au voisinage d'une résonance paramétrique. La limite inférieure de la zone d'instabilité est obtenue lors d'un balayage croissant de la fréquence d'excitation. Elle correspond à la plus basse fréquence pour laquelle on obtient des vibrations paramétriques. La limite supérieure est obtenue en effectuant un balayage décroissant de la fréquence d'excitation. Elle est associée à la plus haute fréquence pour laquelle on retrouve des vibrations paramétriques (voir figure 4.34).

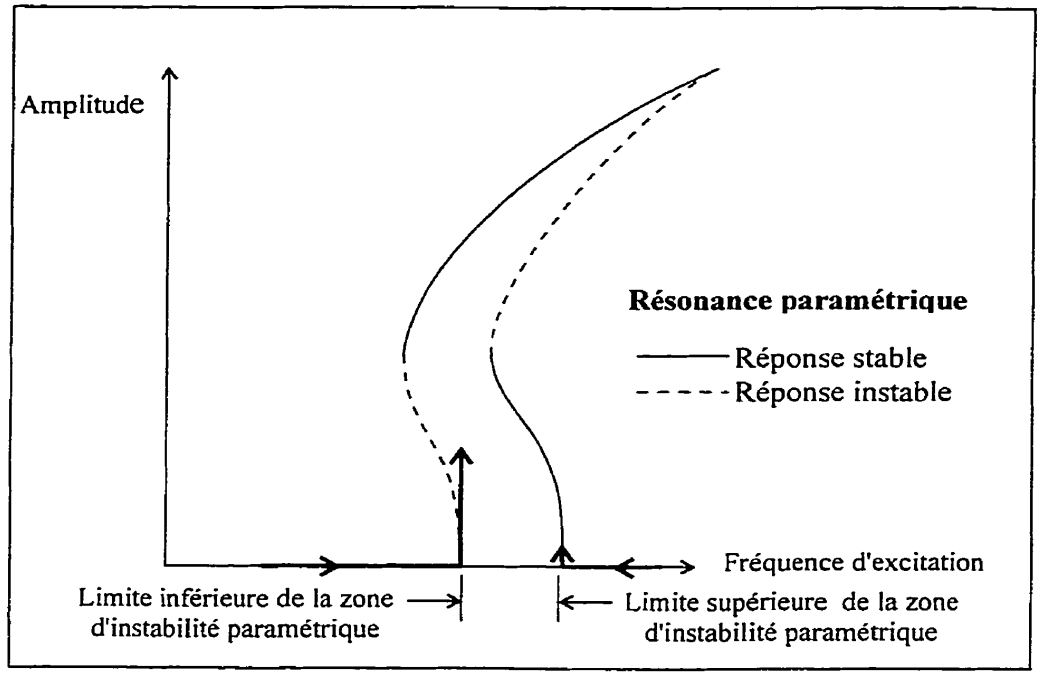
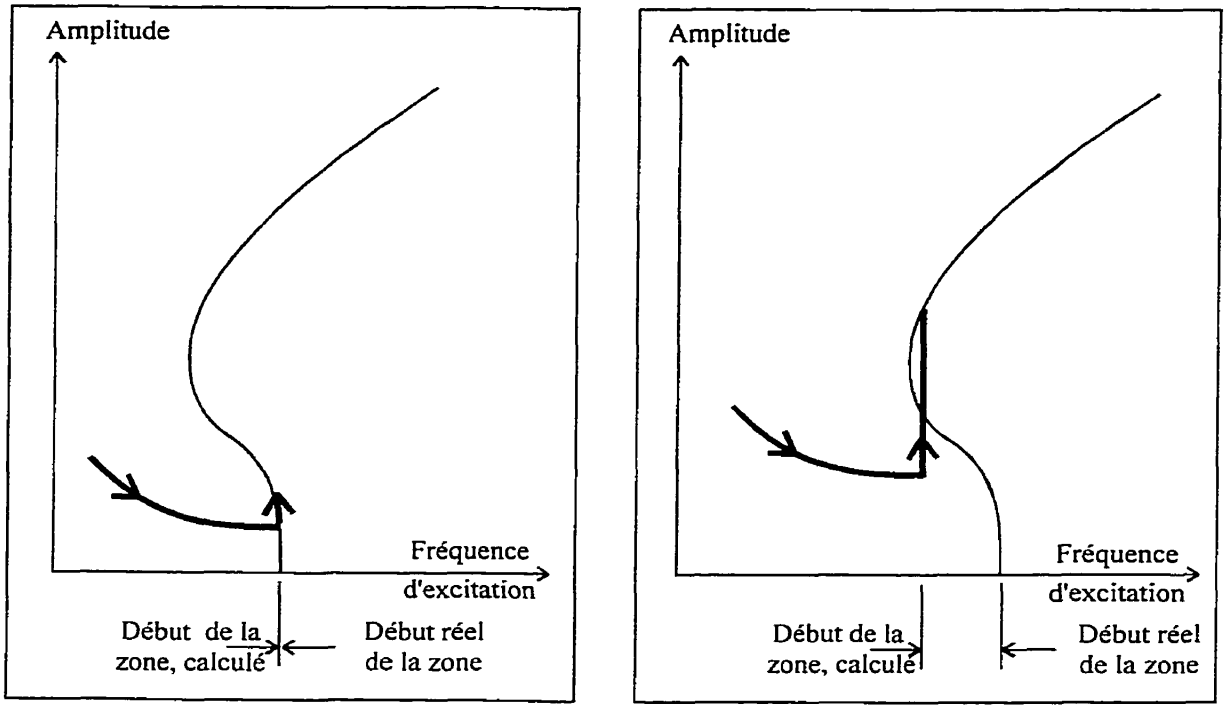


Figure 4.34 - Élaboration d'une zone d'instabilité paramétrique

Les zones ainsi déterminées peuvent cependant s'avérer plus larges que les zones réelles d'instabilité paramétrique. Les vibrations forcées présentes constituent un déplacement initial nécessaire pour l'apparition des vibrations paramétriques, mais lorsque leur amplitude est trop grande, celles-ci peuvent aussi permettre l'apparition de vibrations paramétriques pour des fréquences d'excitation situées en dehors de la zone d'instabilité paramétrique. La figure 4.35 illustre les deux cas possibles.

Dans le premier cas (figure 4.35a), l'amplitude des vibrations forcées est assez faible et ne permet pas un saut vers des vibrations paramétriques de grandes amplitudes. Dans le second cas (figure 4.35b), les vibrations forcées ont une amplitude telle qu'elles permettent l'apparition de vibrations paramétriques de grande amplitude, et ce en dehors de la zone d'instabilité proprement dite.



a) Zone d'instabilité, faible amplitude de vibrations forcées

b) Zone d'instabilité, grande amplitude de vibrations forcées

Figure 4.35 – Influence des vibrations forcées sur le calcul numérique des limites de la zone d'instabilité

Les vibrations forcées peuvent ainsi provoquer un élargissement des zones d'instabilité paramétrique. Dans le modèle théorique, ces vibrations forcées sont induites par le terme d'excitation forcé, terme qui dépend de la forme de la plaque après application du chargement statique.

Pour vérifier et quantifier l'effet des vibrations forcées sur l'élargissement des zones d'instabilité, des simulations numériques ont été effectuées pour des plaques ayant divers niveaux d'imperfection. Pour simplifier l'approche numérique, le modèle particulier utilisé est celui pour lequel on retrouve une résonance paramétrique simple suivant le mode de vibration de même forme que l'imperfection de la plaque. Pour ce modèle, l'équation du mouvement (2.33) est simplifiée et prend la forme suivante:

$$\ddot{w}_v + 2C_v \dot{w}_v + \overline{\Omega}^2 \; w_v - 2\mu \overline{\Omega}^2 \cos\theta \; w_v + M_v^{vvv} \left(3{w_v}^2 \; X_{1v} + {w_v}^3\right) = n_{yt} \cos\theta \; P_v^v \; X_{1v}$$

$$\text{où} \qquad \overline{\Omega}^2 = K_v^v - n_{yo} \; P_v^v + M_v^{vvv} \left(3{X_{1v}}^2 - {w_{0\,1v}}^2\right) \qquad (4.7)$$

$$2\mu \overline{\Omega}^2 = n_{yt} \; P_v^v$$

et pour laquelle le terme d'excitation forcée se retrouve à droite de l'égalité.

En premier lieu, les zones d'instabilité ont été calculées en intégrant directement cette équation, équation pour laquelle on retrouve un terme d'excitation forcée et par conséquent des vibrations forcées. En second lieu, le terme d'excitation a été enlevé pour empêcher les vibrations forcées de se produire et ainsi déterminer les zones d'instabilité en l'absence de vibrations forcées, sans toutefois modifier le comportement non linéaire de la plaque imparfaite. Pour ce cas particulier, l'imposition d'une faible condition initiale est alors essentielle pour déstabiliser la plaque et obtenir les limites des zones d'instabilité. Les résultats obtenus avec les deux approches pour trois formes et divers niveaux d'imperfection sont présentés aux figures 4.36 à 4.47.

Le terme d'excitation forcée est fonction de l'amplitude de la déflexion statique de la plaque, et par conséquent de l'amplitude de l'imperfection. Ainsi, sur les graphiques présentés, les zones d'instabilité paramétrique associées aux plus fortes imperfections (w_{0i}/h = 1,0) sont celles qui sont les plus influencées par la présence des vibrations forcées.

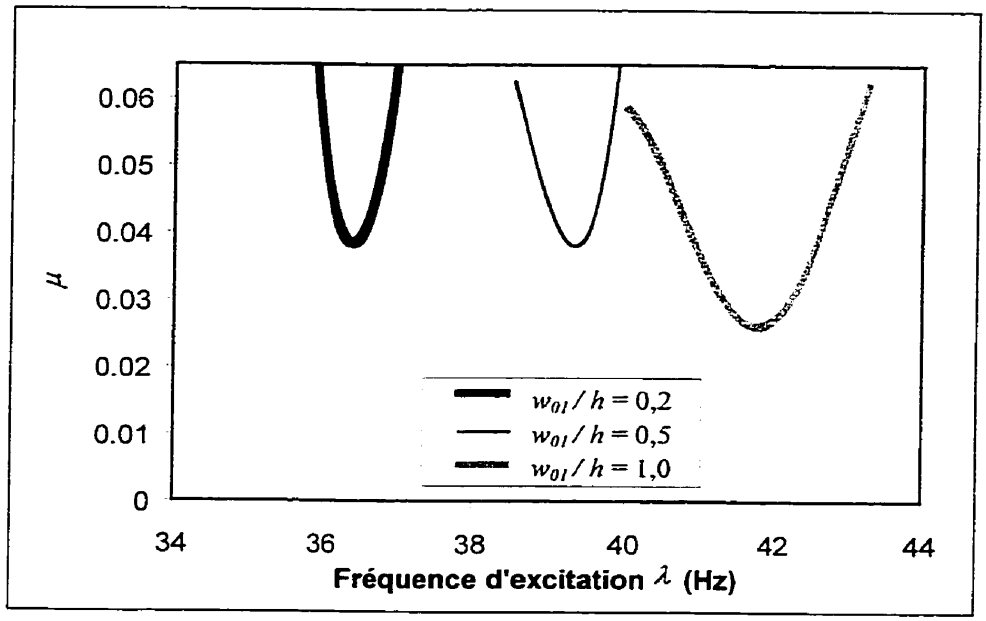


Figure 4.36 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2 $P_{cr} = 0,11$

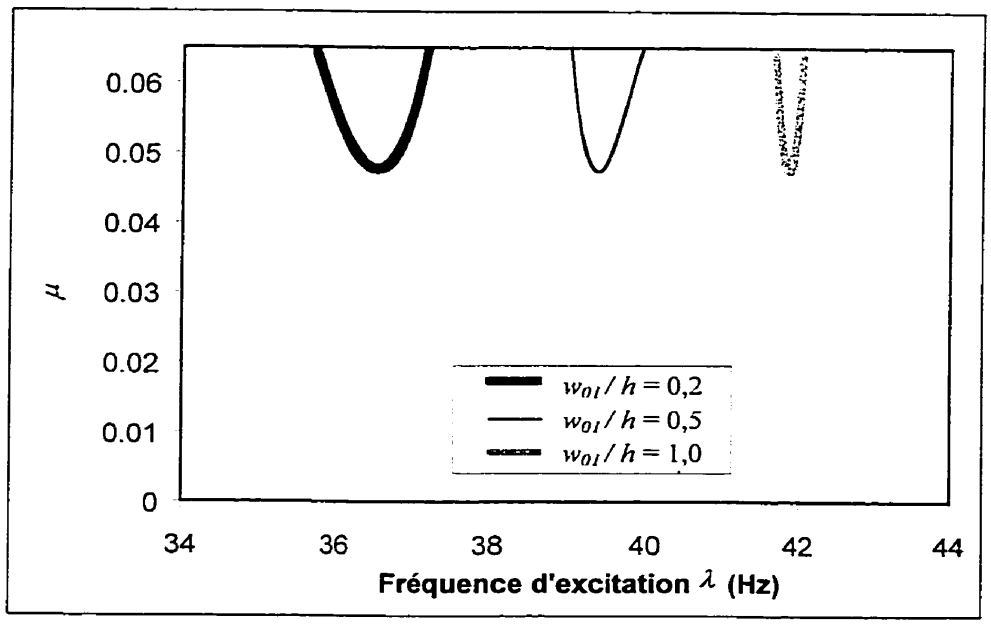


Figure 4.37 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2, $P_{cr} = 0,11$, sans terme d'excitation forcée

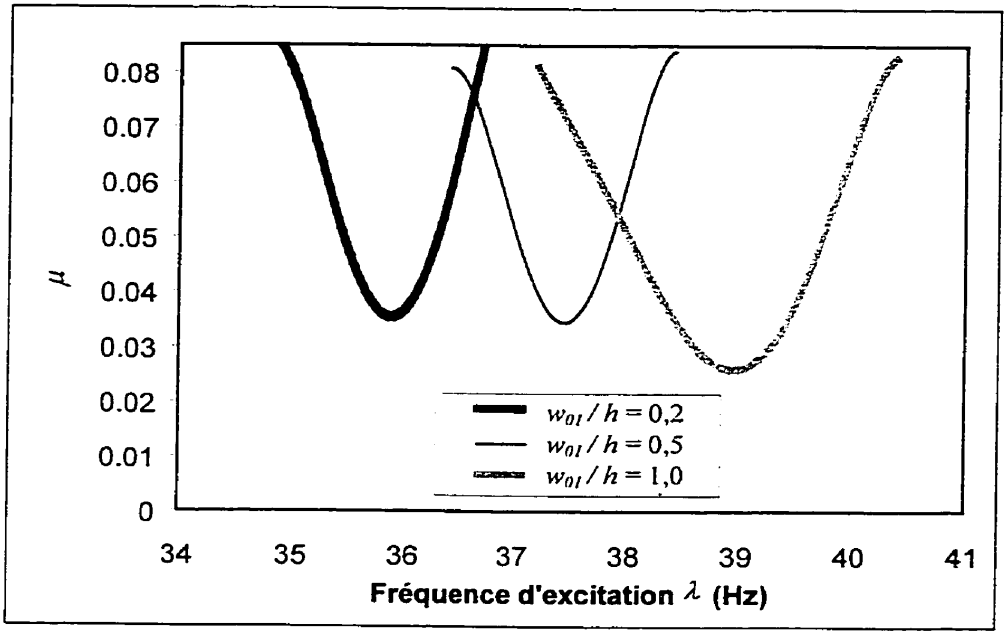


Figure 4.38 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2, $P_{cr} = 0,15$

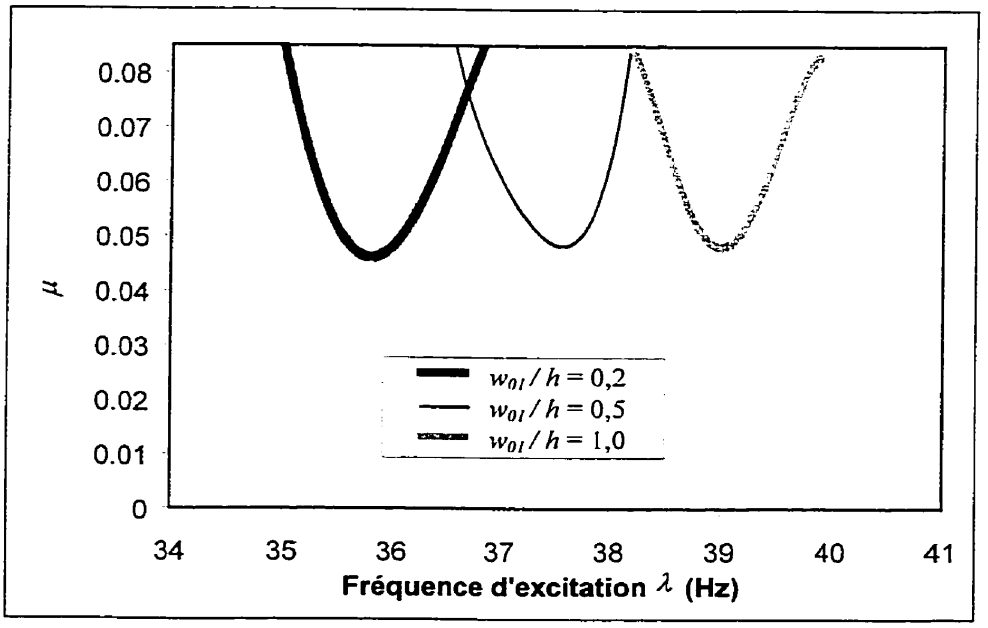


Figure 4.39 - Zones d'instabilité paramétrique, 1er mode de vibration, R=1,2, $P_{cr} = 0,15$, sans terme d'excitation forcée

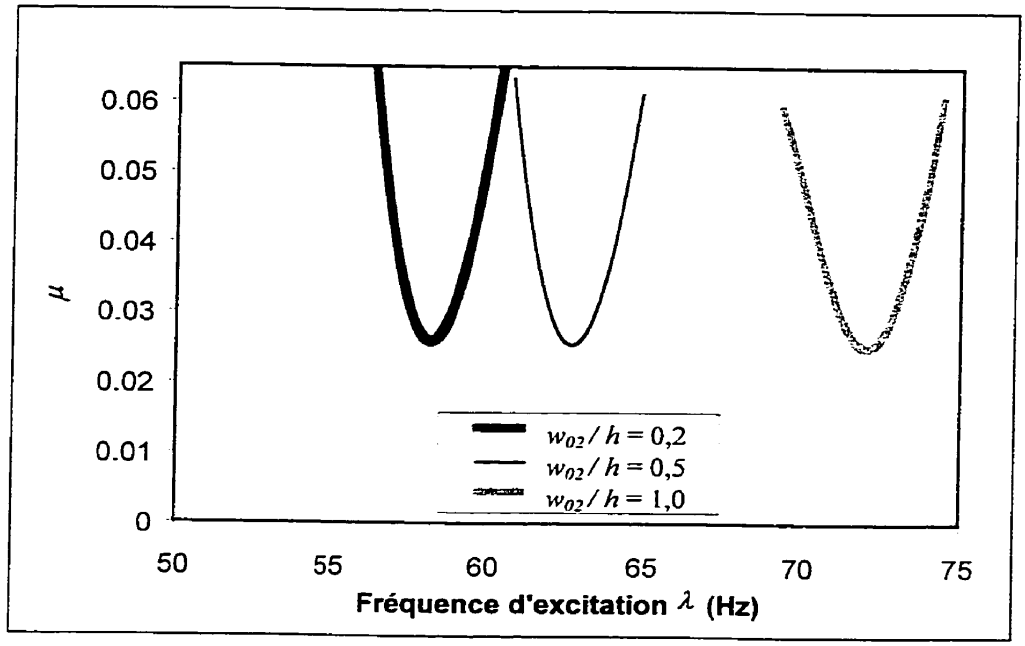


Figure 4.40 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2,P_{cr} = 0,11

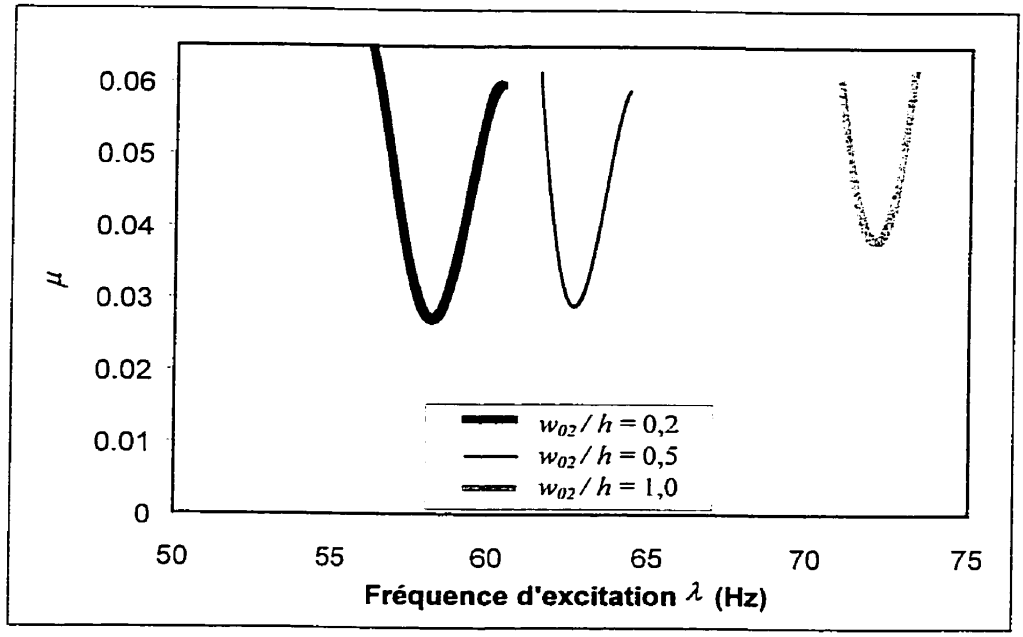


Figure 4.41 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2,P_{cr}=0,11, sans terme d'excitation forcé

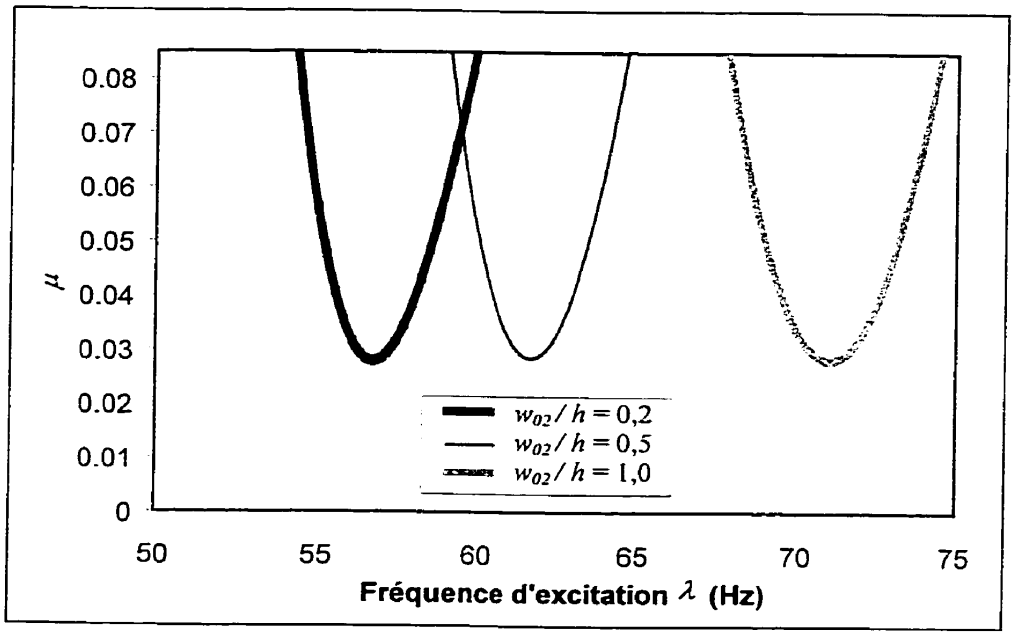


Figure 4.42 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2, $P_{cr} = 0,15$

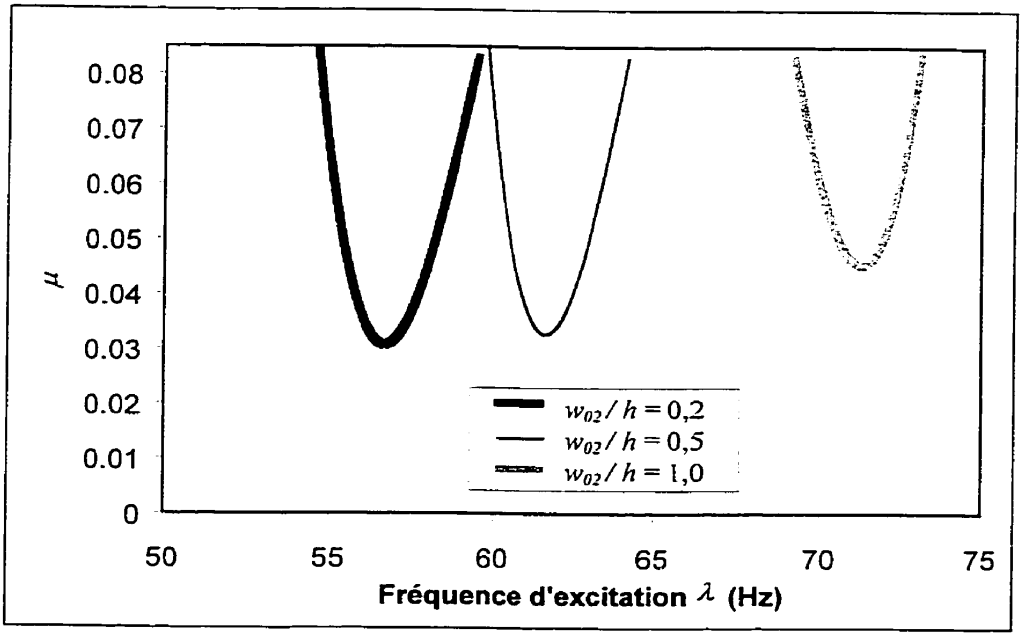


Figure 4.43 - Zones d'instabilité paramétrique, 2ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr}=0,15, sans terme d'excitation forcée

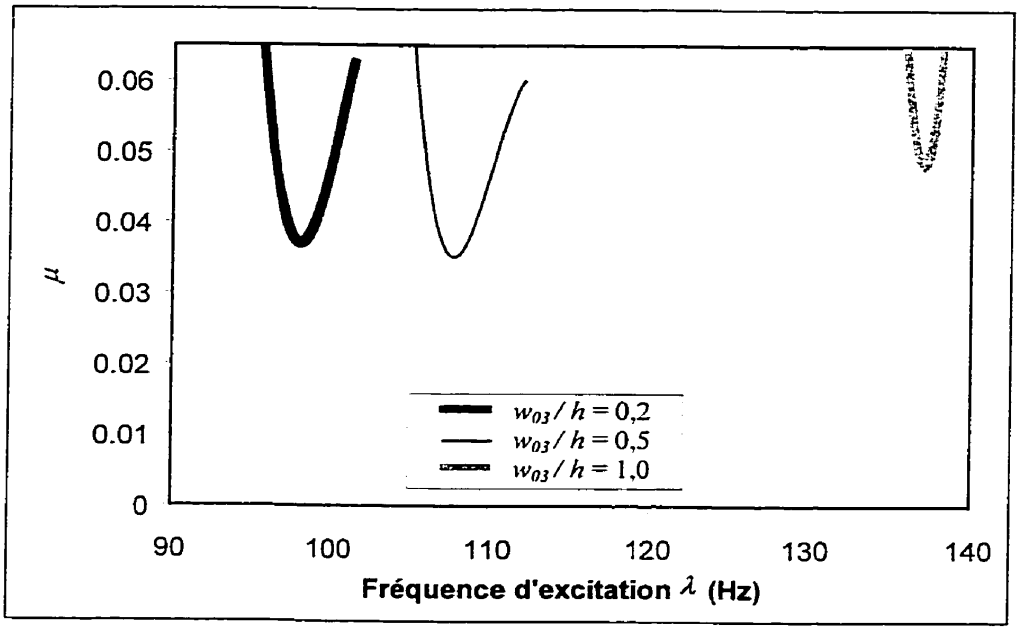


Figure 4.44 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2, $P_{cr} = 0,11$

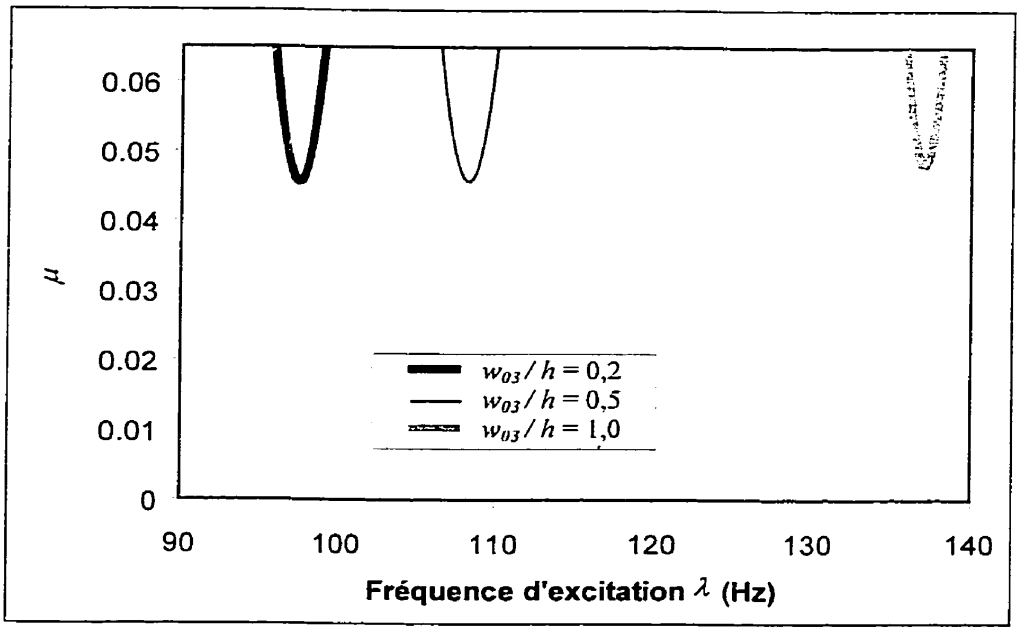


Figure 4.45 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2,$P_{cr} = 0,11$, sans terme d'excitation forcée

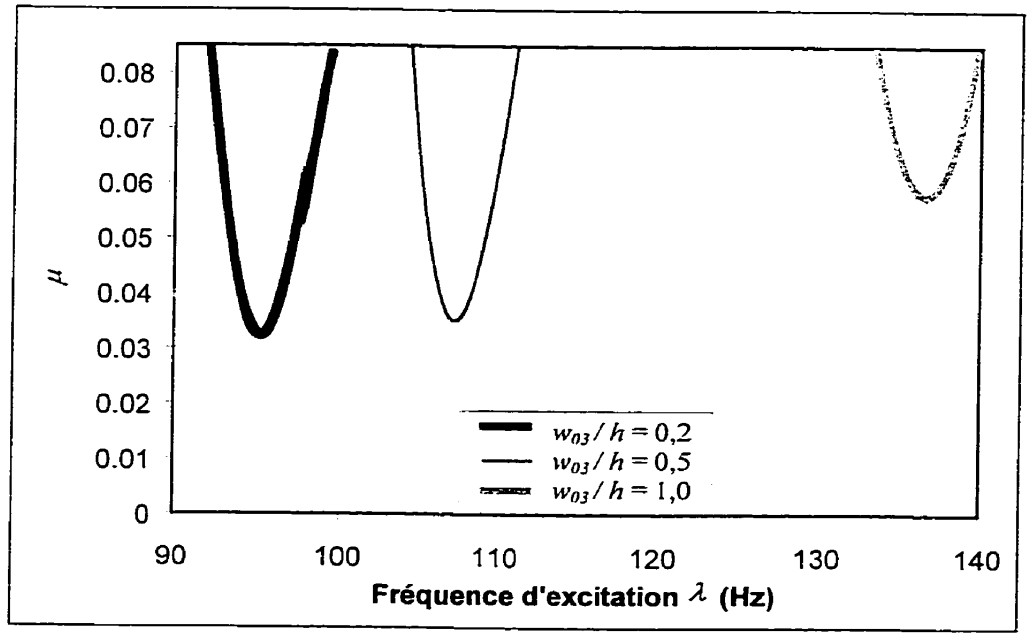


Figure 4.46 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2, P_{cr} = 0,15

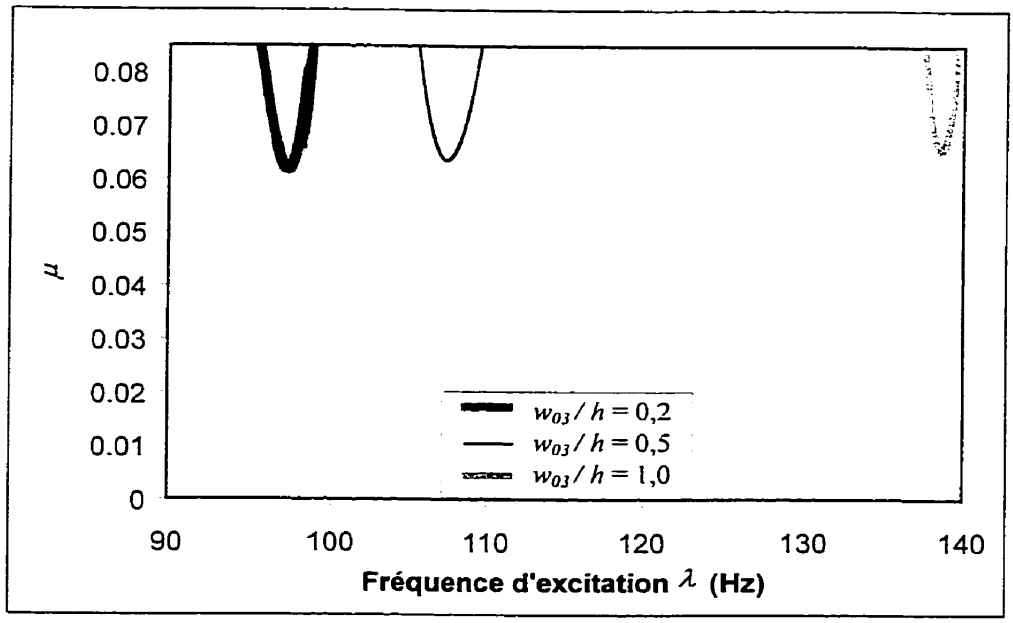


Figure 4.47 - Zones d'instabilité paramétrique, 3ième mode de vibration, R=1,2,P_{cr} = 0,15, sans terme d'excitation forcée

Lorsque l'amplitude de l'imperfection est faible (w_0/h = 0,2), les zones d'instabilité calculées avec et sans terme d'excitation forcée sont presque identiques. Pour les cas où l'amplitude de l'imperfection est plus grande, on note une augmentation de la taille des zones d'instabilité calculées lorsque des vibrations forcées sont présentes. Pour ces cas, les vibrations forcées atteignent de plus grandes amplitudes et font apparaître des vibrations paramétriques pour des fréquences d'excitation à l'extérieur de la zone d'instabilité proprement dite.

Pour tous les cas, l'augmentation de l'amplitude de l'imperfection provoque une augmentation des fréquences naturelles et par conséquent un déplacement des courbes d'instabilité vers des fréquences plus élevées.

Les résultats obtenus en supprimant le terme d'excitation forcée montrent qu'un accroissement de l'amplitude de l'imperfection tend à diminuer la taille des zones d'instabilité. Cette diminution de la taille des zones est imputable à l'accroissement des fréquences naturelles, ce qui provoque une augmentation du coefficient d'amortissement linéaire (C_v). Ce coefficient est calculé à partir du décrément d'amortissement mesuré expérimentalement, tel que décrit au chapitre 3 (éq. 3.1), à partir de l'équation suivante :

$$C_v = \frac{2\nabla_v \overline{\Omega}_v}{\pi} \qquad \text{où} \qquad \nabla_v : \text{décrément d'amortissement associé au mode } v$$

Pour les diverses plaques utilisées, le décrément d'amortissement varie peu selon la plaque utilisée et le mode considéré. Par conséquent, le coefficient d'amortissement est principalement influencé par la fréquence naturelle de la plaque imparfaite chargée ($\overline{\Omega}_v$). Il augmente ainsi avec l'amplitude de l'imperfection. L'emplacement des zones d'instabilité demeurent cependant les mêmes, avec ou sans vibrations forcées.

Le comportement réel du système mécanique comporte des vibrations forcées, et par conséquent le modèle complet développé (avec terme d'excitation forcée) doit être utilisé pour valider les résultats expérimentaux. Les zones d'instabilité ainsi déterminées peuvent s'éloigner des zones réelles d'instabilité paramétrique. Cependant, le comportement réel du système mécanique est similaire à celui du modèle numérique utilisé. Dans la pratique, les vibrations forcées de grande amplitude peuvent réellement engendrer l'apparition de vibrations paramétriques en dehors de la zone d'instabilité et provoquer ainsi un élargissement de cette zone. Par conséquent, les zones d'instabilité obtenues numériquement peuvent dans certains cas diverger des zones d'instabilité théoriques, mais elles constituent tout de même une représentation juste du comportement réel du système mécanique.

4.6.2 - Approche expérimentale

La procédure décrite précédemment pour déterminer numériquement les zones d'instabilité a été utilisée pour vérifier expérimentalement les résultats théoriques. Pour un cas de chargement donné, on obtient ainsi deux points correspondant aux limites fréquentielles d'une zone d'instabilité. Pour pouvoir visualiser plus facilement la forme des zones d'instabilité, les résultats obtenus sont présentés graphiquement avec des courbes de tendances.

En premier lieu, les zones d'instabilité des trois premiers modes de vibrations de deux plaques imparfaites, pour des supports simples ont été déterminées et sont présentées aux figures 4.48 à 4.53. Les résultats obtenus montrent que les zones d'instabilité de plaques géométriquement imparfaites sont similaires à celles de plaques parfaites, ces zones se rapprochent d'une forme triangulaire. La gamme de fréquence associée à une zone d'instabilité paramétrique s'accroît avec le chargement dynamique. Une augmentation de la charge statique contribue à accentuer cet effet (on note alors un évasement des régions d'instabilité avec l'accroissement du chargement statique). On

obtient ainsi une zone fréquentielle d'instabilité plus large pour un même chargement dynamique.

Pour toutes les zones d'instabilité tracées, l'augmentation du chargement dynamique provoque un rapprochement des zones d'instabilité. On entrevoit ainsi la possibilité de voir deux zones se superposer. Des essais expérimentaux ont été poursuivis pour tenter de comprendre ce qui se produit lorsque deux zones se superposent. Lorsque deux zones deviennent très proches l'une de l'autre, les deux modes impliqués deviennent de plus en plus instables et la plaque se met à vibrer de façon quasi aléatoire. Les vibrations ont alors un mouvement erratique, leur amplitude variant sans cesse.

Ce phénomène peut être relié à la présence d'interactions entre les deux modes qui cherchent alors à entrer en résonance en même temps. L'augmentation de l'amplitude des vibrations selon un mode engendre par une diminution de l'amplitude de l'autre mode, et un certain équilibre cherche à s'établir. Cet équilibre est cependant très sensible aux moindres variations de l'environnement immédiat et la réponse fluctue sans cesse. Il devient alors impossible de déterminer les limites des zones d'instabilité.

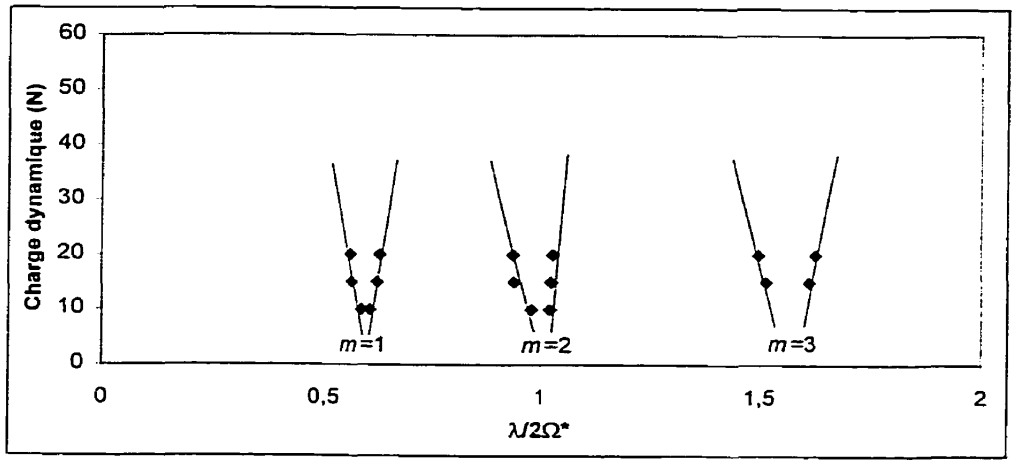


Figure 4.48 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, S^{c}S, n_{yo} = 20N

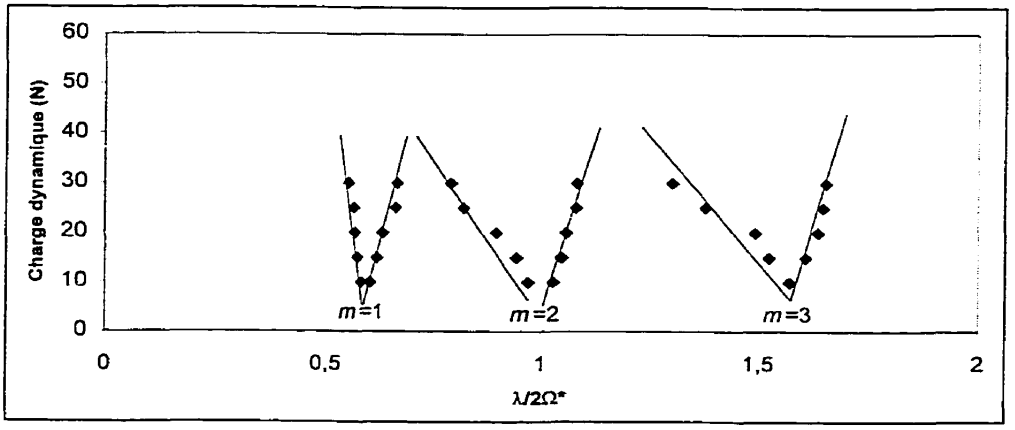


Figure 4.49 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, S^{c}S, n_{yo} = 30N

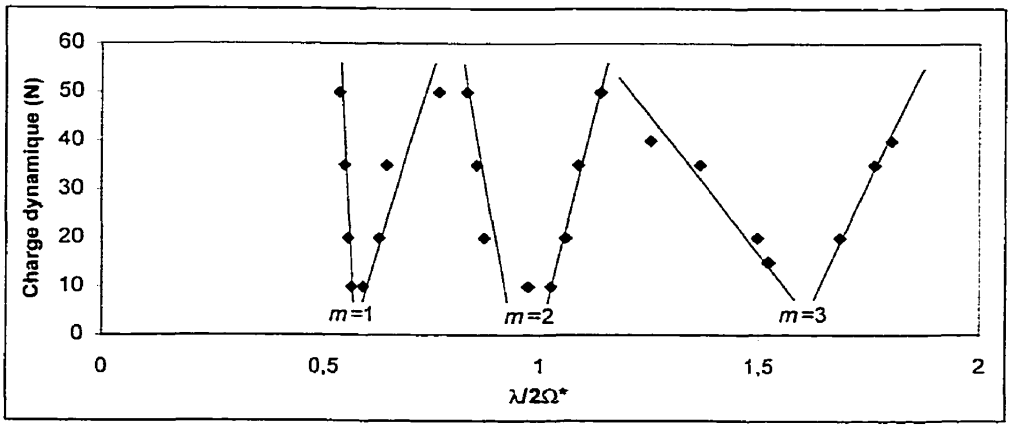


Figure 4.50 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, S^{c}S, n_{yo} = 50N

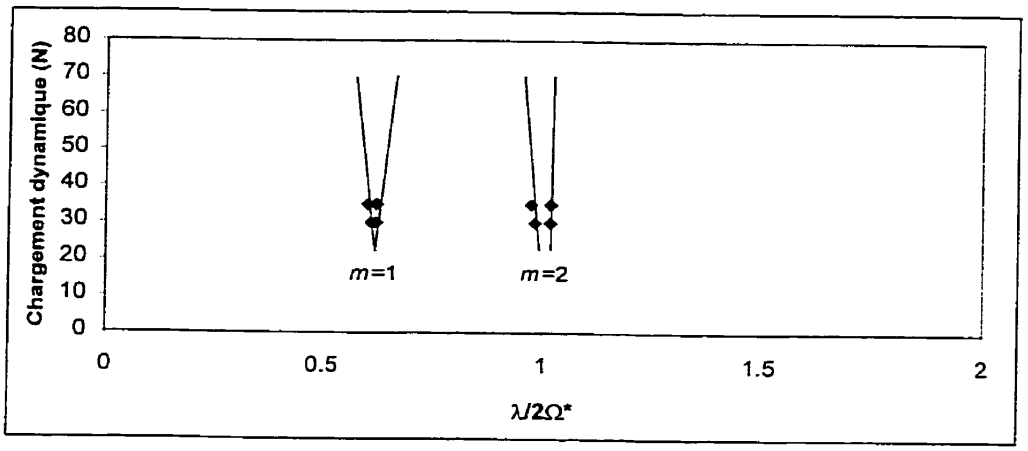


Figure 4.51 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, S^{c}S, $n_{yo} = 40$N

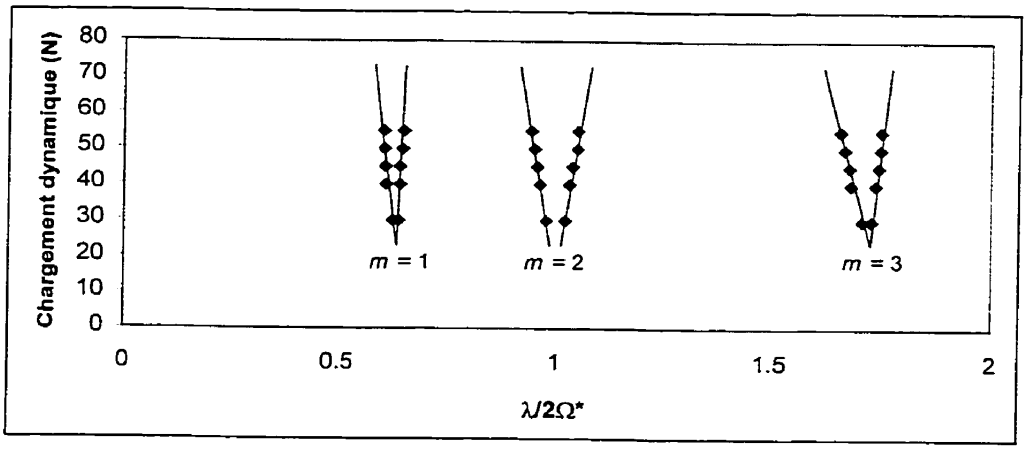


Figure 4.52 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, S^{c}S, $n_{yo} = 60$N

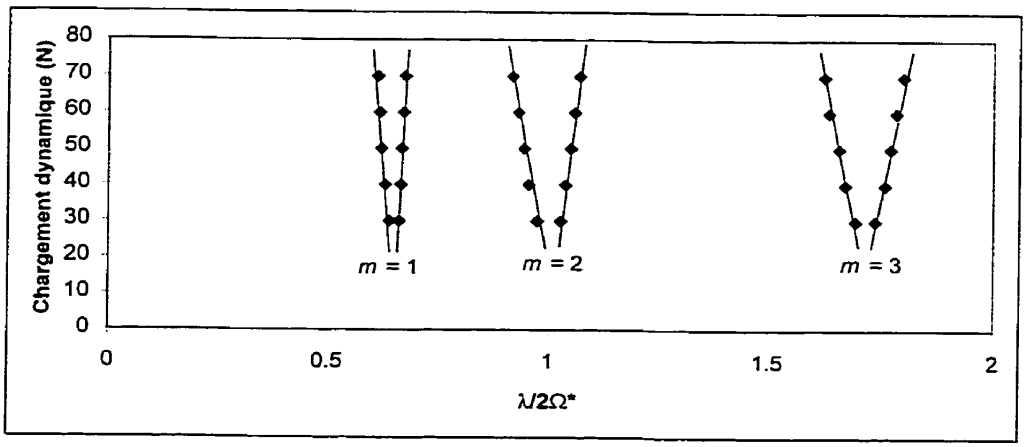


Figure 4.53 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, S^{c}S, $n_{yo} = 80$N

4.6.3 - Influence de la forme et de l'amplitude de l'imperfection

Des essais expérimentaux et des simulations numériques ont été entrepris pour dégager l'influence de l'amplitude de l'imperfection sur les zones d'instabilité. Dans un premier lieu, des essais expérimentaux ont été effectués sur trois plaques similaires, ayant des imperfections géométriques suivant le premier mode de différentes amplitudes, pour déterminer l'influence de ce paramètre. Les résultats obtenus pour les trois premiers modes de vibration et pour deux niveaux de chargement statique distincts sont présentés aux figures 4.54 à 4.59 pour des plaques simplement supportées.

Les résultats obtenus pour les plaques ayant divers niveaux d'imperfection ne comportent pas de différences importantes. Les zones d'instabilité des trois premiers modes de vibration ont la même forme, et occupent globalement le même espace dans le diagramme de chargement *vs* fréquence. On note quelques minces variations entre les zones d'instabilité d'un mode donné pour les différentes plaques. Ces variations peuvent être attribuées à la variation des fréquences naturelles des plaques en présence d'imperfection et aux différences physiques entre les plaques (légères variations de forme, d'épaisseur et de propriétés mécaniques). Par conséquent, on peut conclure que la présence d'imperfection géométrique ne modifie pas de façon notable la forme des zones pour lesquelles apparaissent les résonances paramétriques.

Des simulations numériques ont été par la suite effectuées à l'aide du modèle à un degré de liberté décrit précédemment conjointement avec des essais expérimentaux. Les résultats obtenus sont présentés aux figures 4.60 à 4.63.

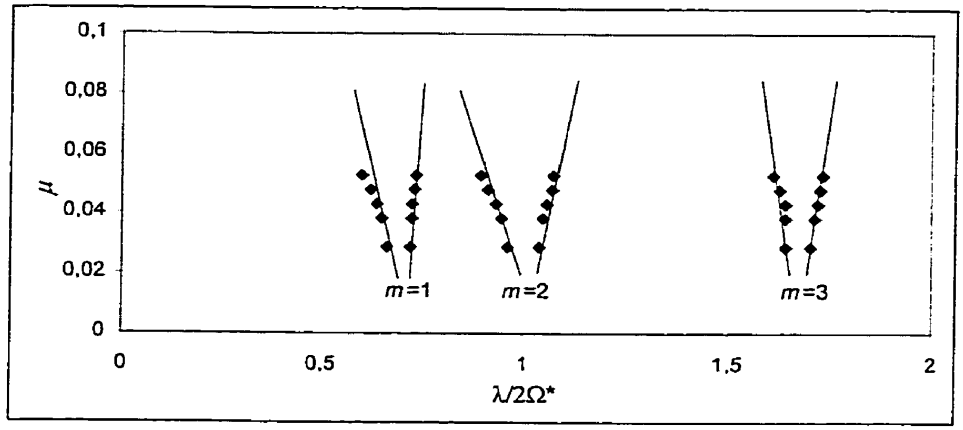


Figure 4.54 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, $P_{cr} = 0{,}11$

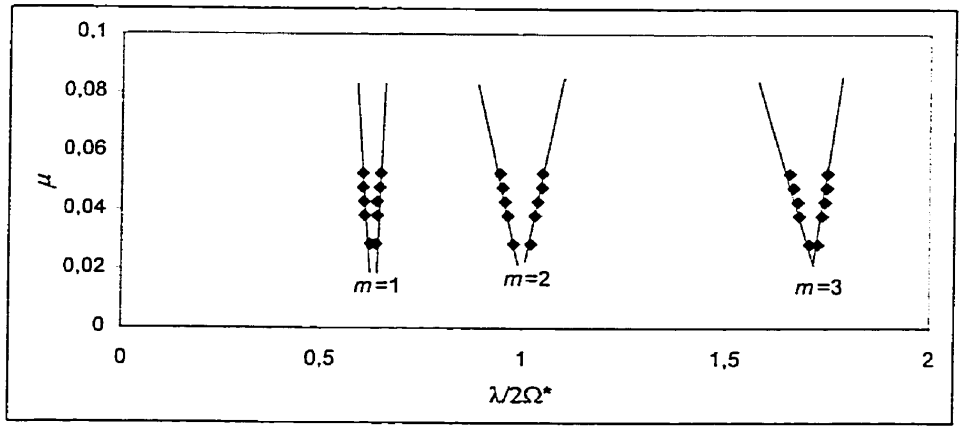


Figure 4.55 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$

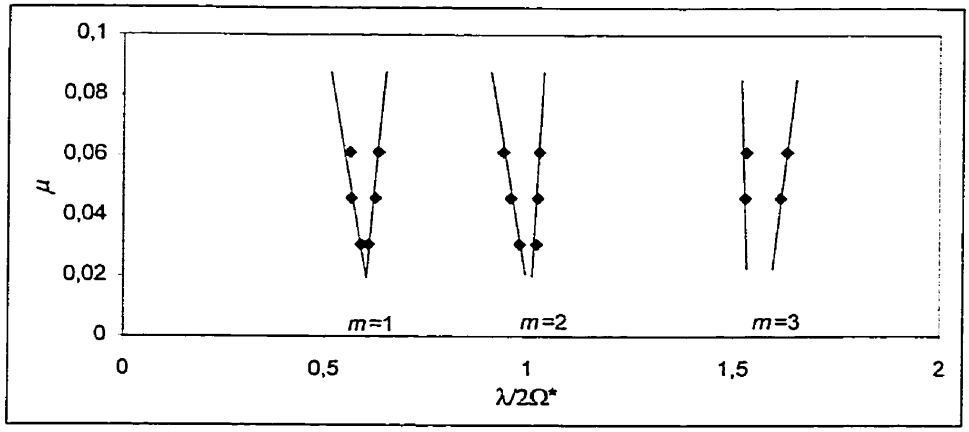


Figure 4.56 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$

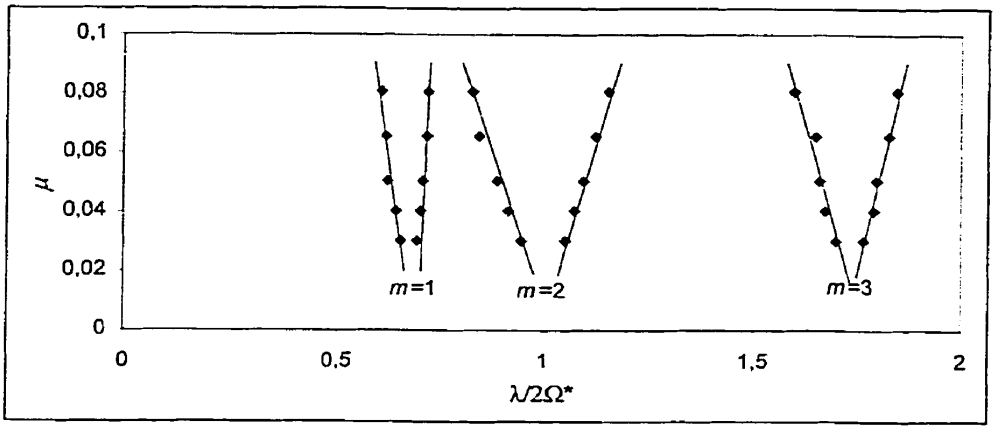


Figure 4.57 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, $P_{cr} = 0{,}15$

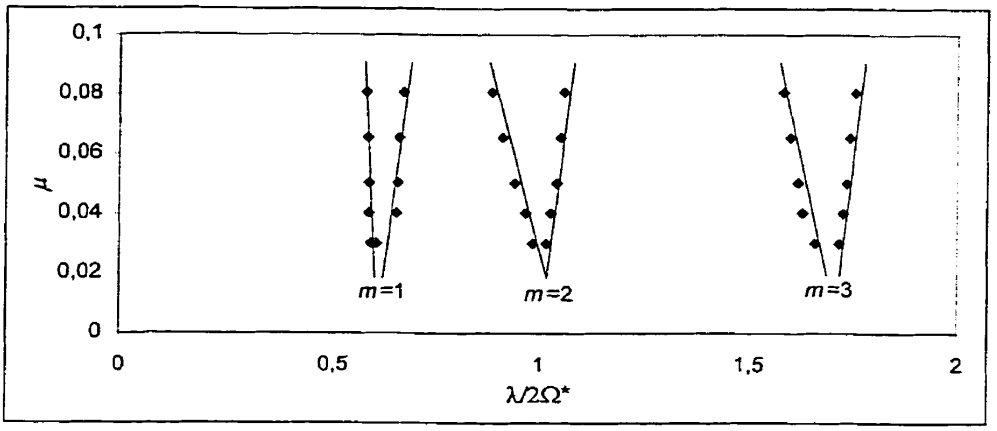


Figure 4.58 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}15$

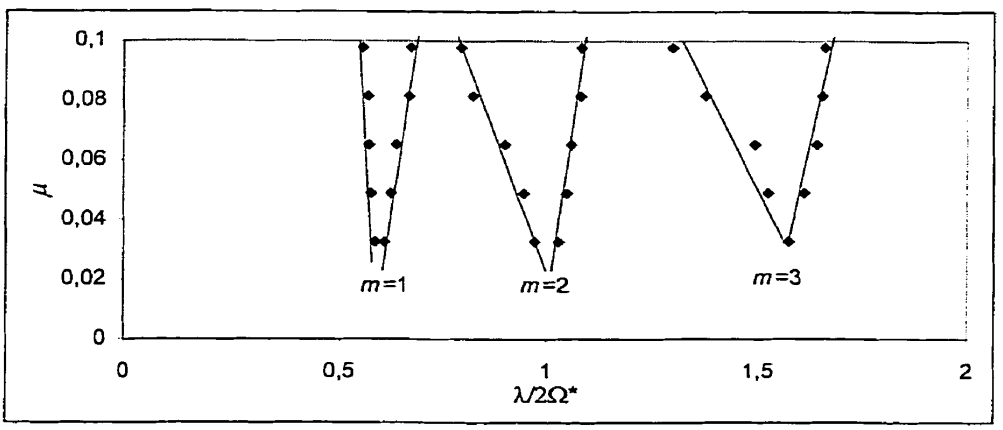
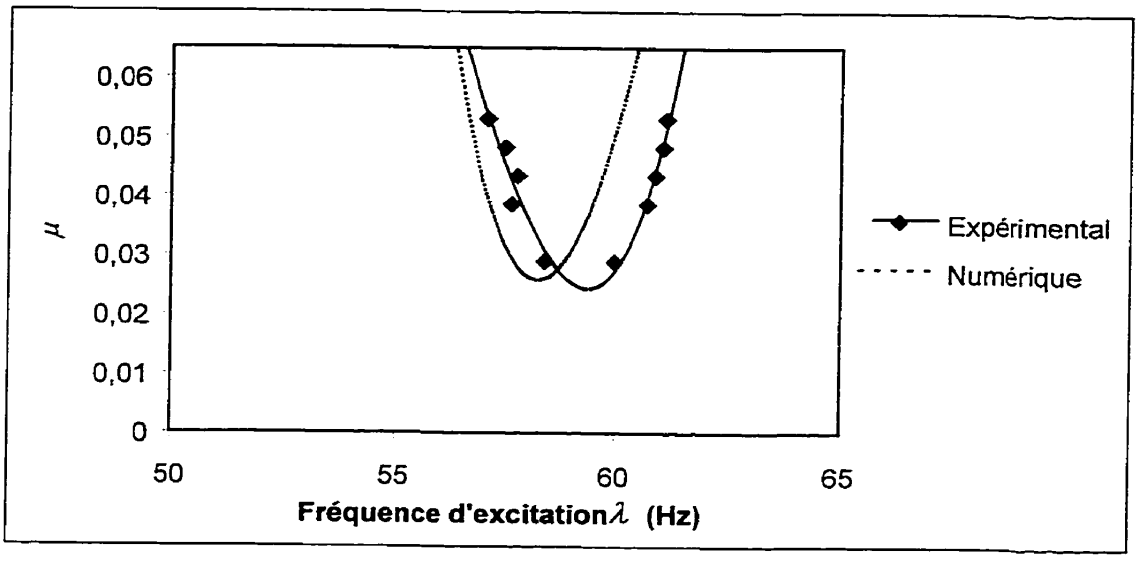
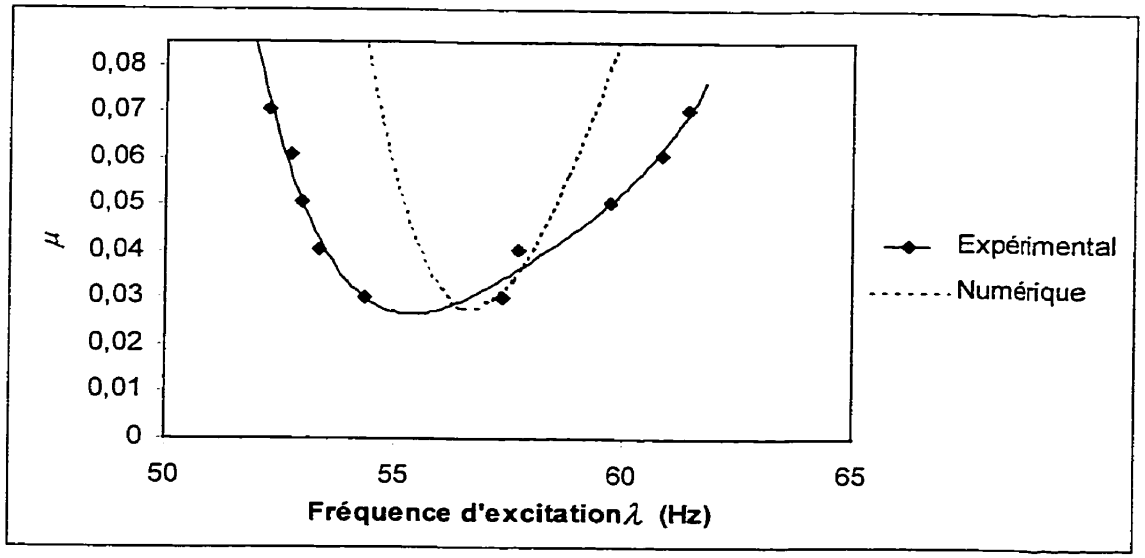


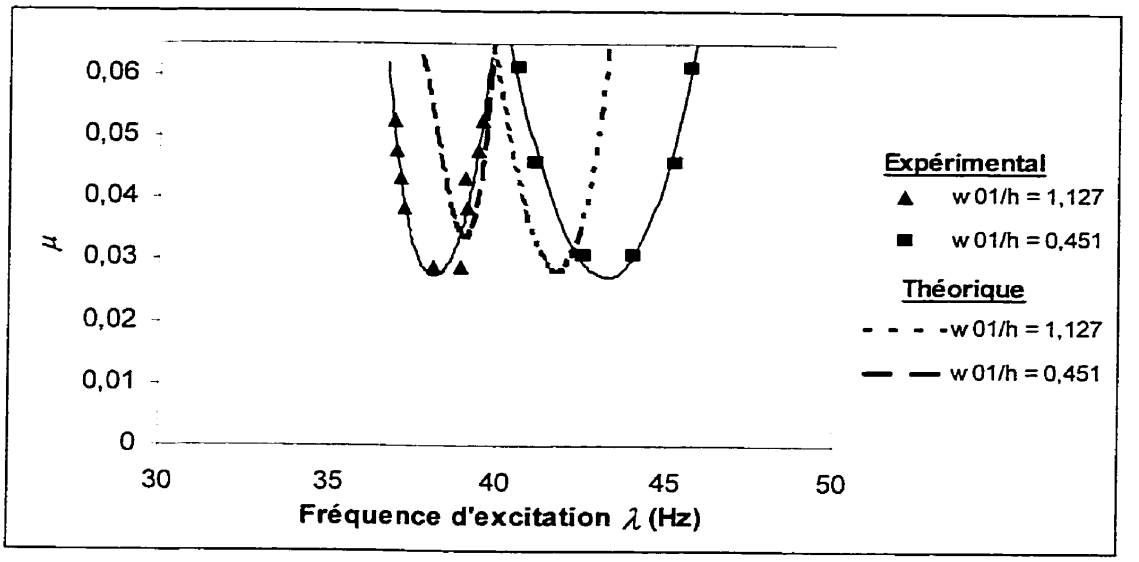
Figure 4.59 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}15$



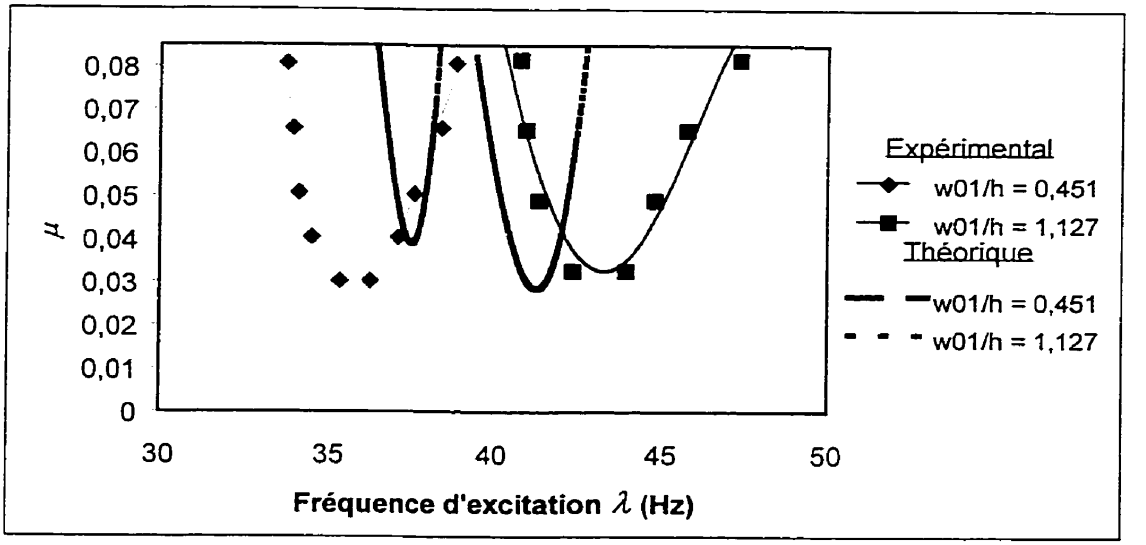
4.60 - Zone d'instabilité du 2ième mode, résultats numériques est expérimentaux, plaque P5, $P_{cr} = 0,11$



4.61 - Zone d'instabilité du 2ième mode, résultats numériques est expérimentaux, plaque P5, $P_{cr} = 0,15$



4.62 - Zones d'instabilité du 1er mode, résultats numériques est expérimentaux, P_{cr}=0,11



4.63 - Zones d'instabilité du 1er mode, résultats numériques est expérimentaux, P_{cr}=0,15

Pour tous les cas, les zones d'instabilité obtenues expérimentalement sont plus larges que celles calculées. L'écart entre les deux courbes est assez faible lorsque le chargement statique appliqué sur la plaque a un niveau peu élevé, mais s'accroît avec le chargement. Cet écart peut être imputable à un certain relâchement des conditions aux limites, ce qui permet aux vibrations forcées d'atteindre une amplitude supérieure à celle calculée avec le modèle théorique. En effet, les vibrations forcées mesurées ont souvent une amplitude supérieure à celle de la réponse temporelle calculée et par conséquent peuvent permettre l'apparition de vibrations paramétriques en dehors des zones d'instabilité paramétrique proprement dites. Une divergence similaire entre les résultats théoriques et expérimentaux a été observée par la passé par Koval'chuk et Krasnopol'skaya [34, 35] pour les résonances paramétriques de coques cylindriques imparfaites. Cette divergence a aussi été reliée à la présence de vibrations forcées.

Les figures 4.65 à 4.67 illustrent les zones d'instabilité obtenues pour deux plaques ayant un niveau d'imperfection similaire suivant le premier (plaque P2) et le deuxième mode de vibration (plaque P5), et pour deux niveaux de chargement statique distincts.

Pour la plaque P5, certaines zones d'instabilité sont manquantes. Ces zones n'ont pu être obtenues expérimentalement en raison de l'absence de vibrations paramétriques suivant ces modes. Ainsi, à la figure 4.65 la zone d'instabilité du troisième mode est manquante tandis que celle du premier mode n'est que partiellement couverte à la figure 4.67. Les vibrations paramétriques suivant ces modes ne se produisent pas en raison d'une interaction avec d'autres modes de vibration, et non à cause de la distribution ou de la forme de la zone d'instabilité. Lors des essais expérimentaux, certaines vibrations se retrouvent lorsque $\lambda = 2\overline{\Omega}_i$ (vibrations paramétriques), mais celles-ci ont un niveau insuffisant pour pouvoir déterminer s'il s'agit bien des limites de la région d'instabilité paramétrique et ne permettent pas de déterminer avec certitude ses limites.

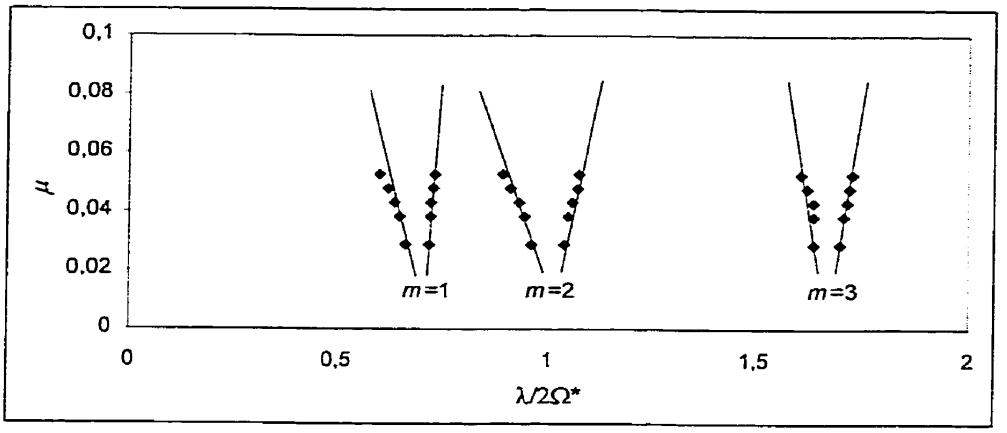


Figure 4.64 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, $P_{cr} = 0,11$

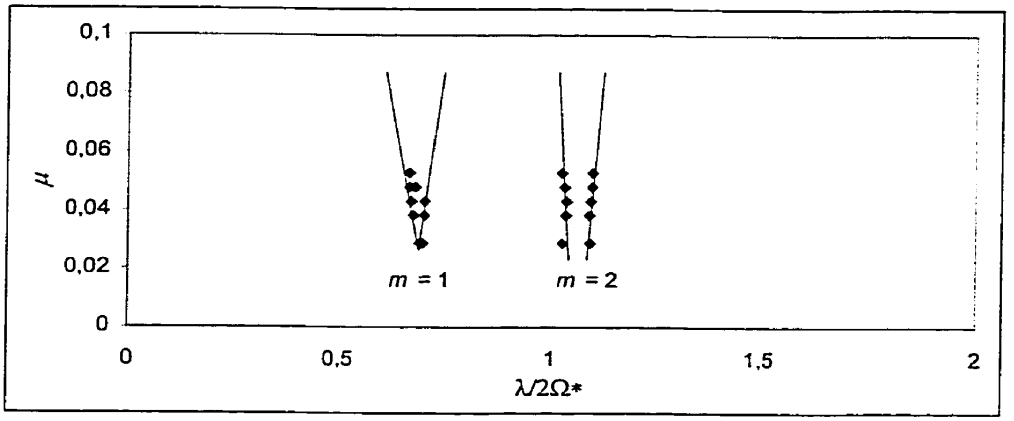


Figure 4.65 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P5, $P_{cr} = 0,11$

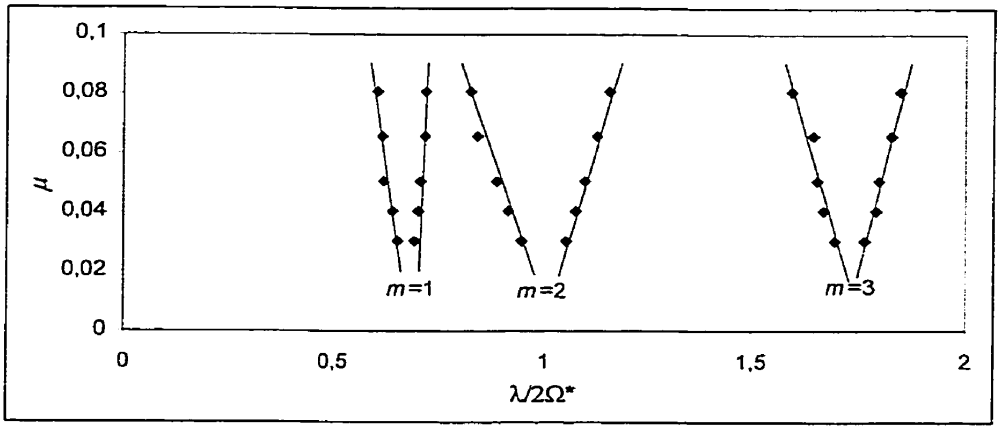


Figure 4.66 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P2, $P_{cr} = 0,15$

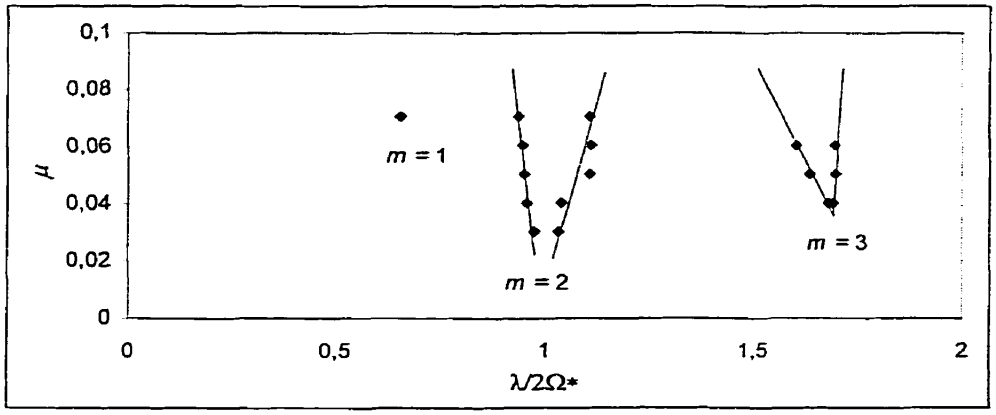


Figure 4.67 - Zones d'instabilité paramétrique, plaque P5, $P_{cr} = 0{,}15$

Pour les deux plaques, les zones d'instabilité relevées ont une forme et une distribution similaire. La forme de l'imperfection géométrique n'a donc que peu ou pas d'effet sur les zones d'instabilité paramétrique.

Finalement, les figures 4.36 à 4.47 présentées précédemment illustrent les zones d'instabilité calculées pour des imperfections de différentes formes et amplitude. Pour tous les cas, l'influence de la forme et de l'amplitude de l'imperfection demeure faible sur les zones d'instabilité.

4.6.4 - Influence du taux d'amortissement

Le taux d'amortissement a lui aussi une influence sur les zones d'instabilité. L'influence de ce paramètre a déjà été étudié par Ostiguy [19] pour des plaques parfaites. Les résultats théoriques et expérimentaux alors obtenus montrent qu'un accroissement du taux d'amortissement du système diminue la taille des régions d'instabilité. En plus de diminuer la zone de fréquence, la charge dynamique minimale requise pour obtenir des vibrations paramétriques est accrue. Le montage expérimental alors utilisé par Ostiguy [19] dans ses travaux ne permettait pas de modifier le taux d'amortissement global du système. Par conséquent, pour étudier l'influence de ce paramètre, des plaques de nature différentes, ayant un taux d'amortissement différent ont été utilisées.

Le montage employé dans le cadre de la présente étude est très similaire à celui de Ostiguy. Il serait donc nécessaire d'utiliser des plaques de natures différentes pour déterminer l'influence du taux d'amortissement. L'étape de mise en forme de plaques imparfaites est cruciale et est spécifique au matériau utilisé. Pour des matériaux différents, le niveau de contrainte résiduel présent à la fin du processus de mise en forme peut différer considérablement. L'influence de ce paramètre est inconnu et peut faire varier les résultats. Par conséquent, une telle étude n'a pas été entreprise. Des simulations numériques ont cependant été effectuées pour vérifier l'influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité paramétrique de plaques géométriquement imparfaites. Ces résultats sont présentés aux figures 4.68 à 4.70. On note que l'influence du taux d'amortissement est le même que pour le cas des plaques parfaites. On observe ainsi une diminution des zones d'instabilité et une augmentation de la charge dynamique minimale requise pour l'obtention de vibrations paramétriques.

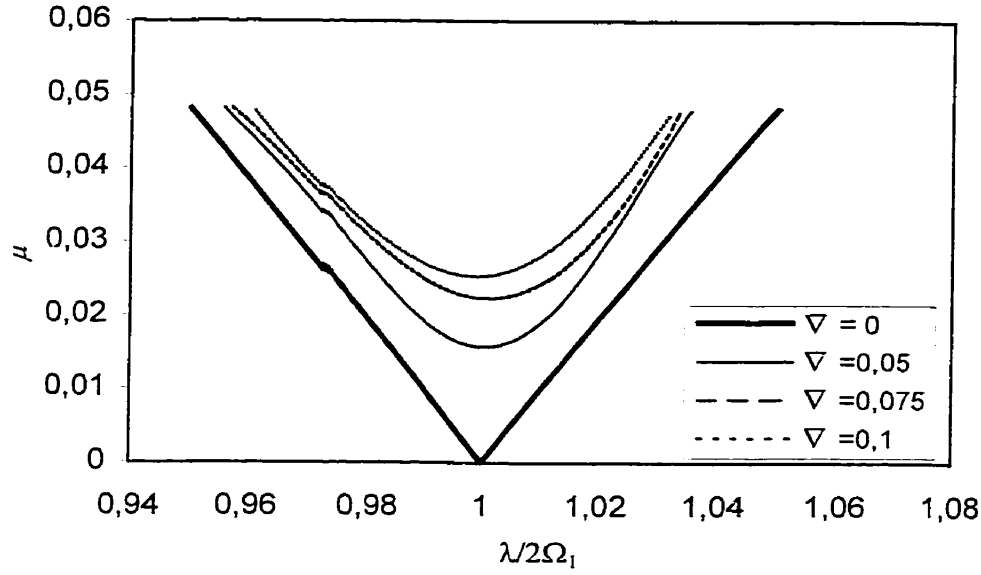


Figure 4.68 - Influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité paramétrique, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}16$, 1er mode de vibration

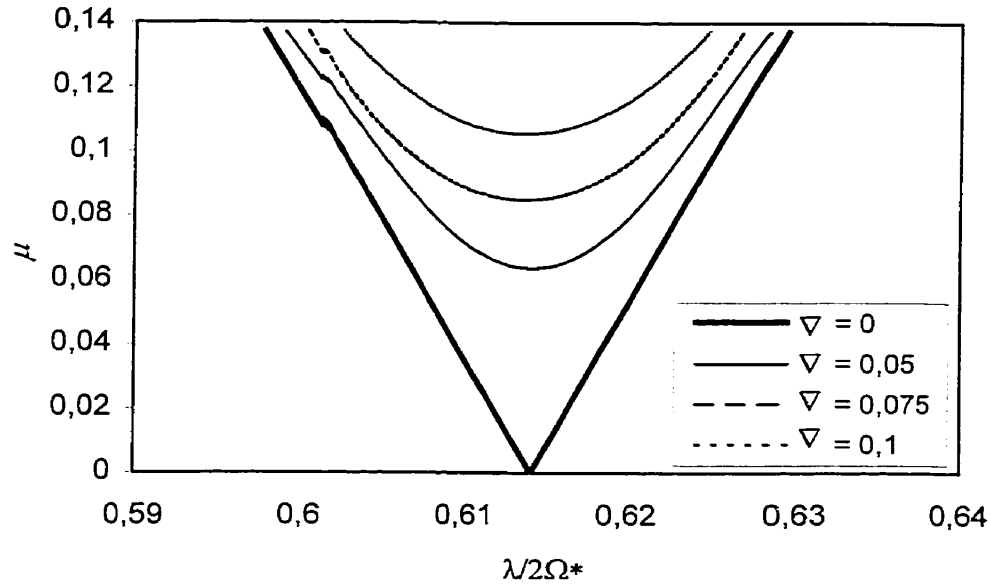


Figure 4.69 - Influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$, 1er mode de vibration

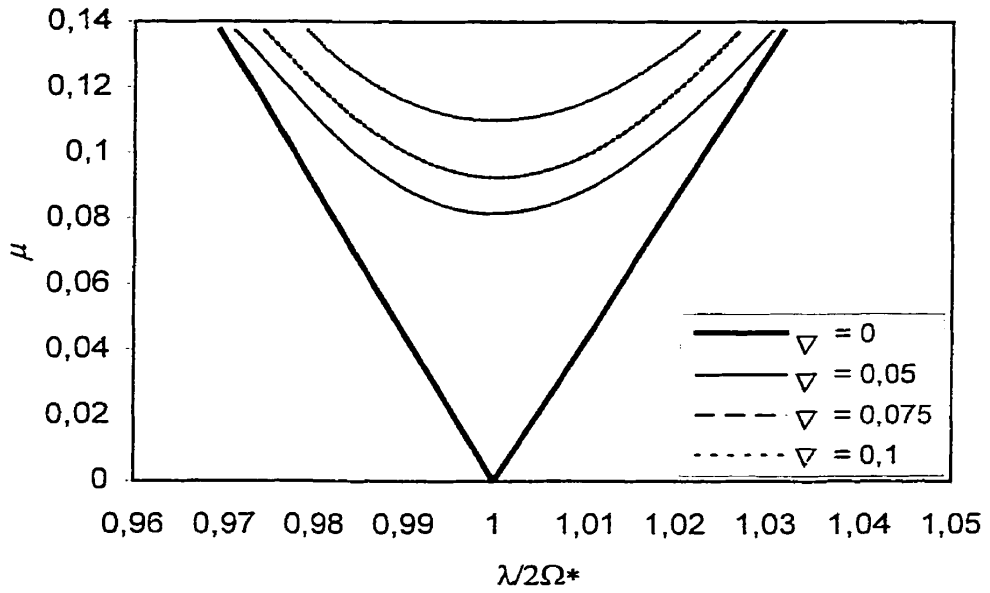


Figure 4.70 - Influence de l'amortissement sur les zones d'instabilité paramétrique, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$, 2e mode de vibration

4.7 - Résonances paramétriques

Les résonances paramétriques d'une plaque sont influencées par la présence d'imperfections géométriques. En effet, le comportement global de type ressort dur peut être modifié en comportement de type ressort mou pour les vibrations paramétriques de faible amplitude. L'apparition de ce nouveau comportement et son amplitude sont régis par l'amplitude et la forme de l'imperfection. Néanmoins, il est aussi influencé par les autres caractéristiques physiques de la plaque et par le chargement appliqué sur celle-ci.

4.7.1 - Validation du modèle théorique

Dans l'étude du comportement dynamique de plaques géométriquement imparfaites, des résonances forcées et paramétriques peuvent être observées. Dans le cas des résonances paramétriques, le comportement non linéaire global du type ressort dur peut être modifié en un comportement du type ressort mou pour les vibrations de faible amplitude. Ces deux nouveaux comportements, reliés à la présence d'imperfections géométriques, ont été observés par le passé mais aucun lien concret entre les résultats théoriques et expérimentaux n'a été établi.

Un des buts premiers de cette recherche consiste à vérifier l'ampleur des effets des imperfections géométriques en procédant à une validation du modèle théorique. Ainsi, les courbes de résonances de plaques ayant divers niveaux et formes d'imperfection ont été tracées à partir des résultats expérimentaux. Les caractéristiques physiques des plaques utilisées ont par la suite été implantées dans le modèle théorique et les courbes des résonances ont été calculées. Pour simplifier l'approche numérique, le système a été discrétisé par un modèle à deux degrés de liberté, modèle pour lequel l'imperfection géométrique et le mode de résonance peuvent avoir une forme différente. Les résultats expérimentaux et théoriques obtenus sont présentés aux figures 4.71 à 4.78.

Pour chaque mode de vibration, on retrouve sur ces graphiques deux courbes. L'une est obtenue en effectuant un balayage croissant de la fréquence d'excitation (résultat présenté par la courbe associé au i^e mode) et l'autre est obtenue en effectuant un balayage décroissant (résultat présenté par la courbe associé i^e mode déc).

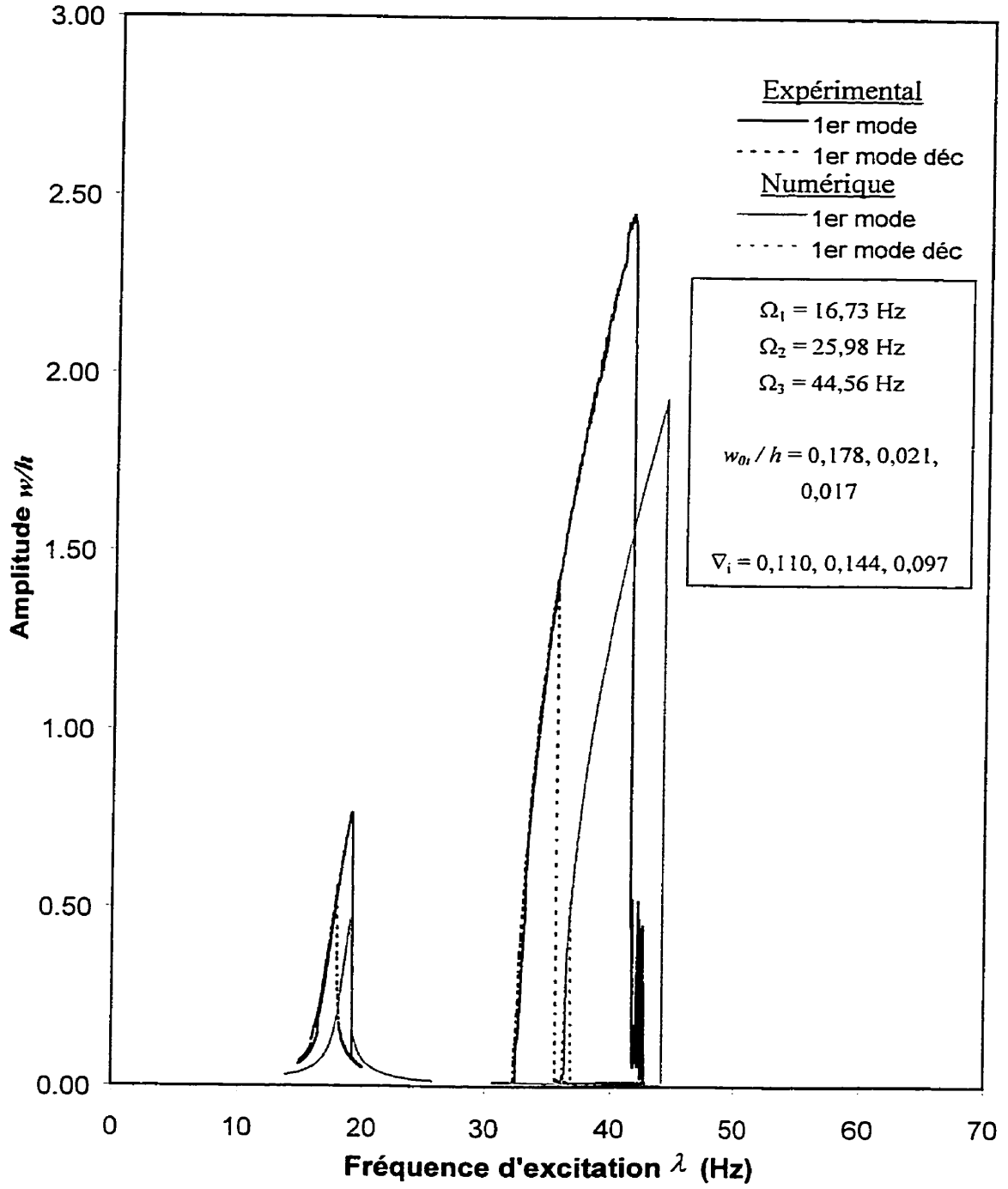


Figure 4.71 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P2, $P_{cr} = 0,11$, μ=0,0459, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

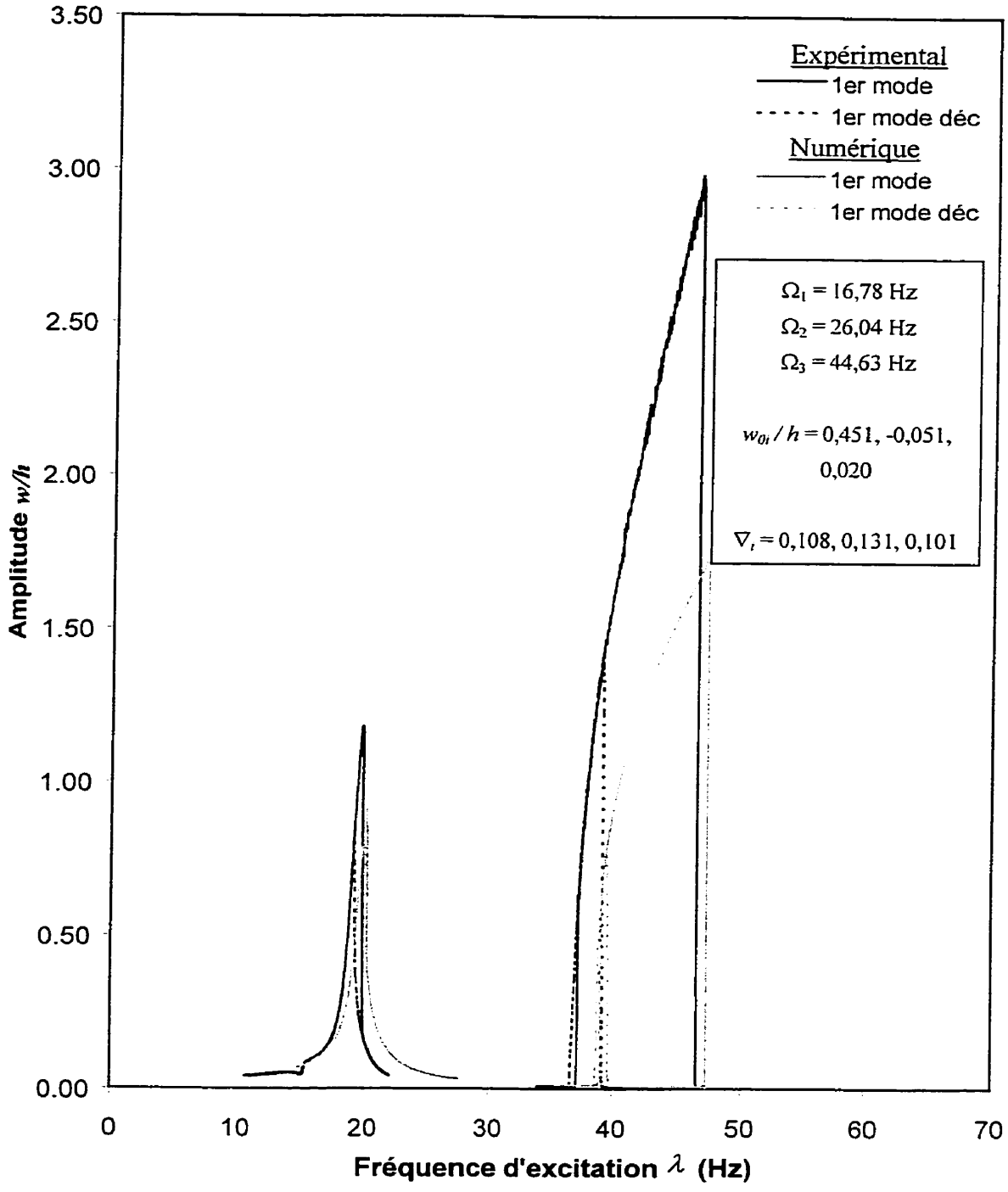


Figure 4.72 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

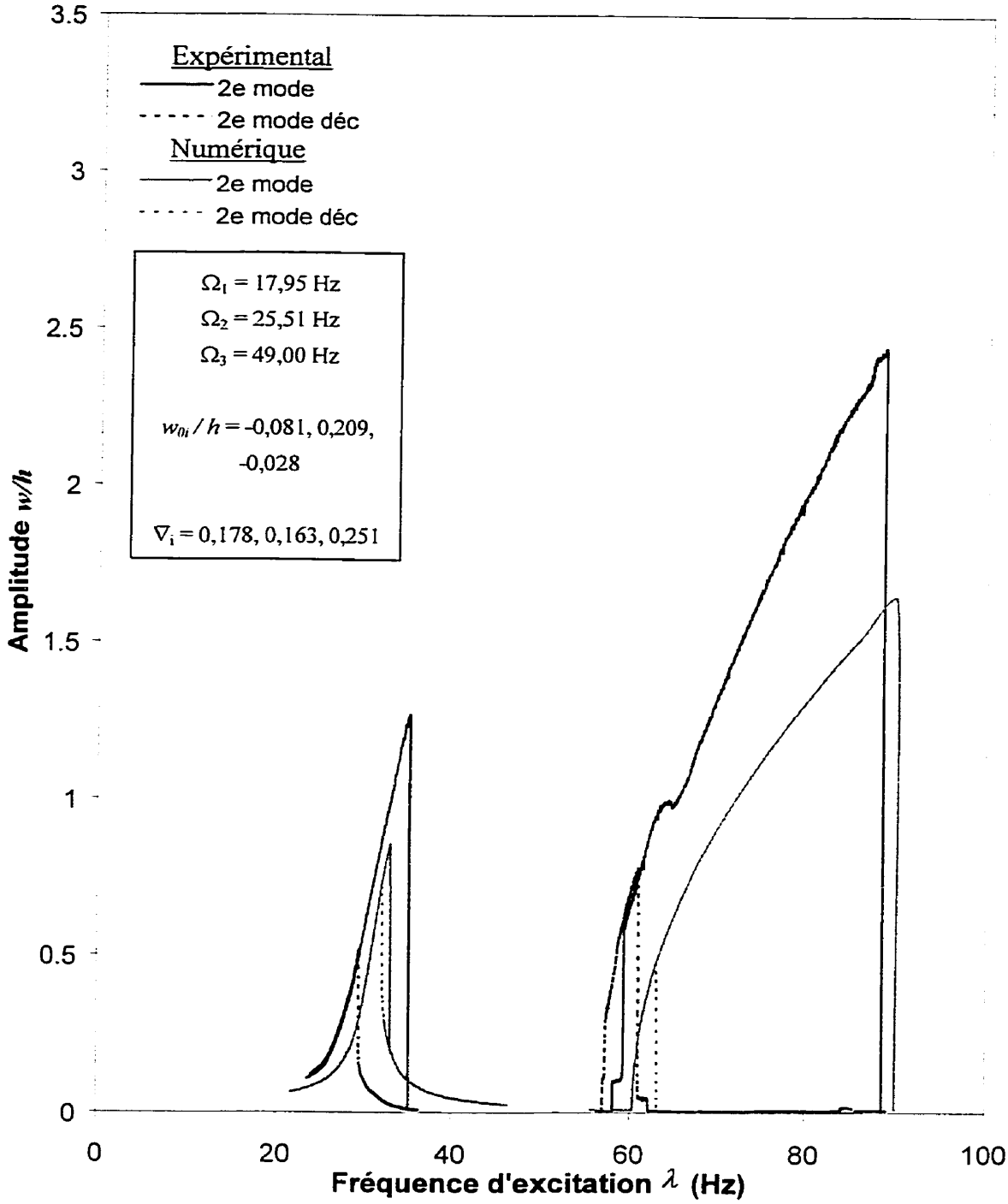


Figure 4.73 - Courbes de résonances du 2ième mode de vibration, plaque P5, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

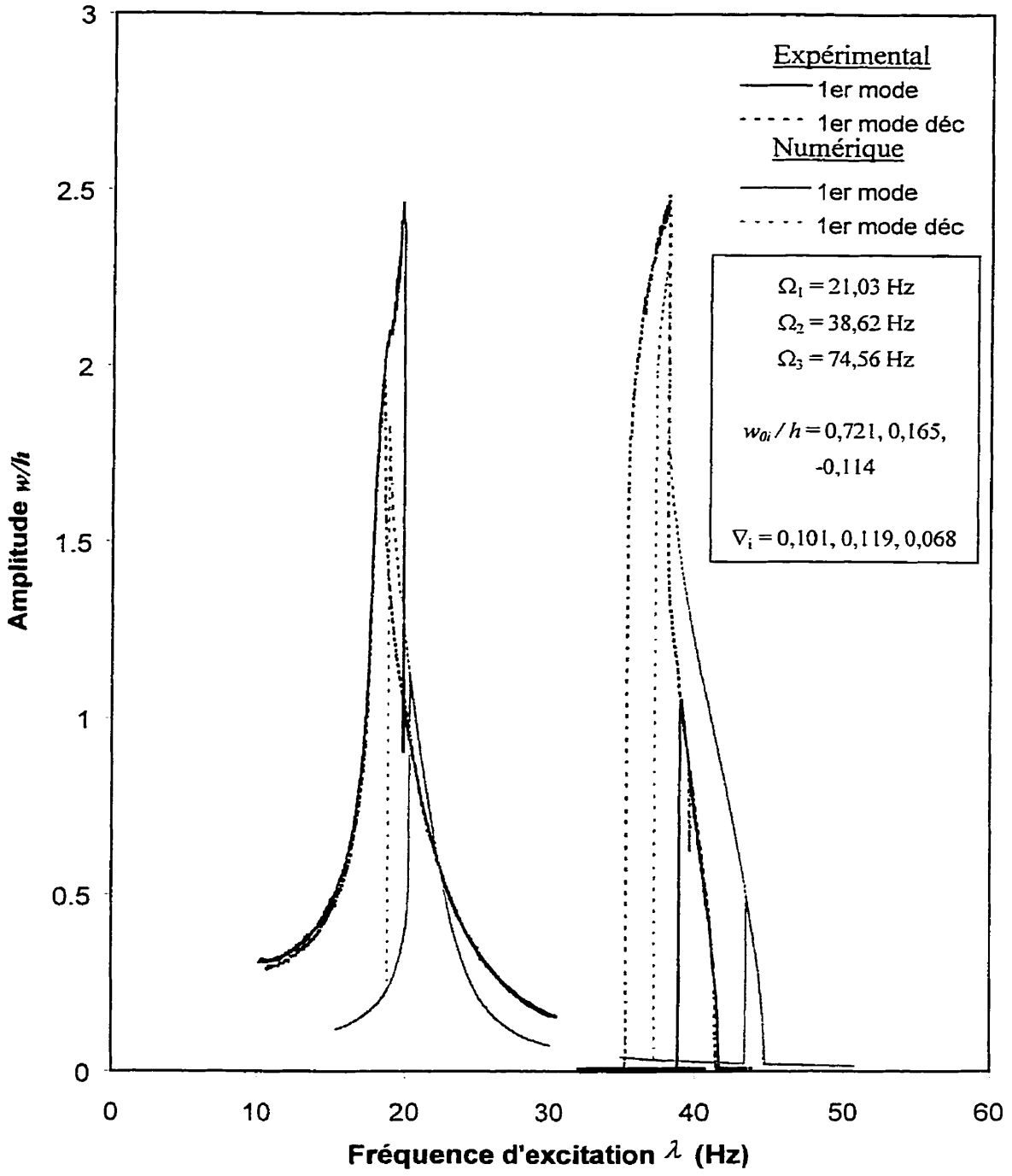


Figure 4.74 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P6, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

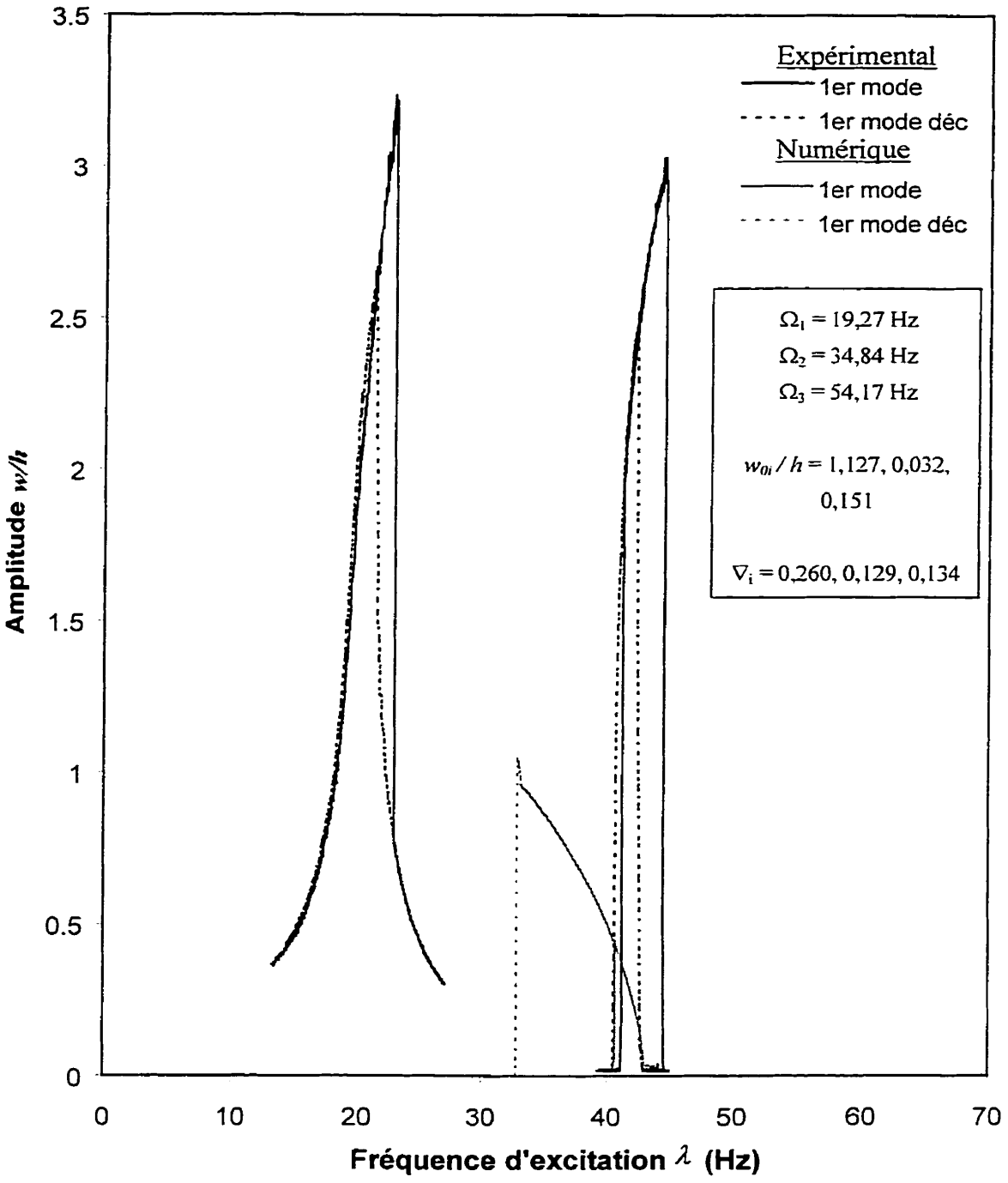


Figure 4.75 - Courbes de résonances du 1er mode de vibration, plaque P4, P_{cr} = 0,11, μ =0,0459, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

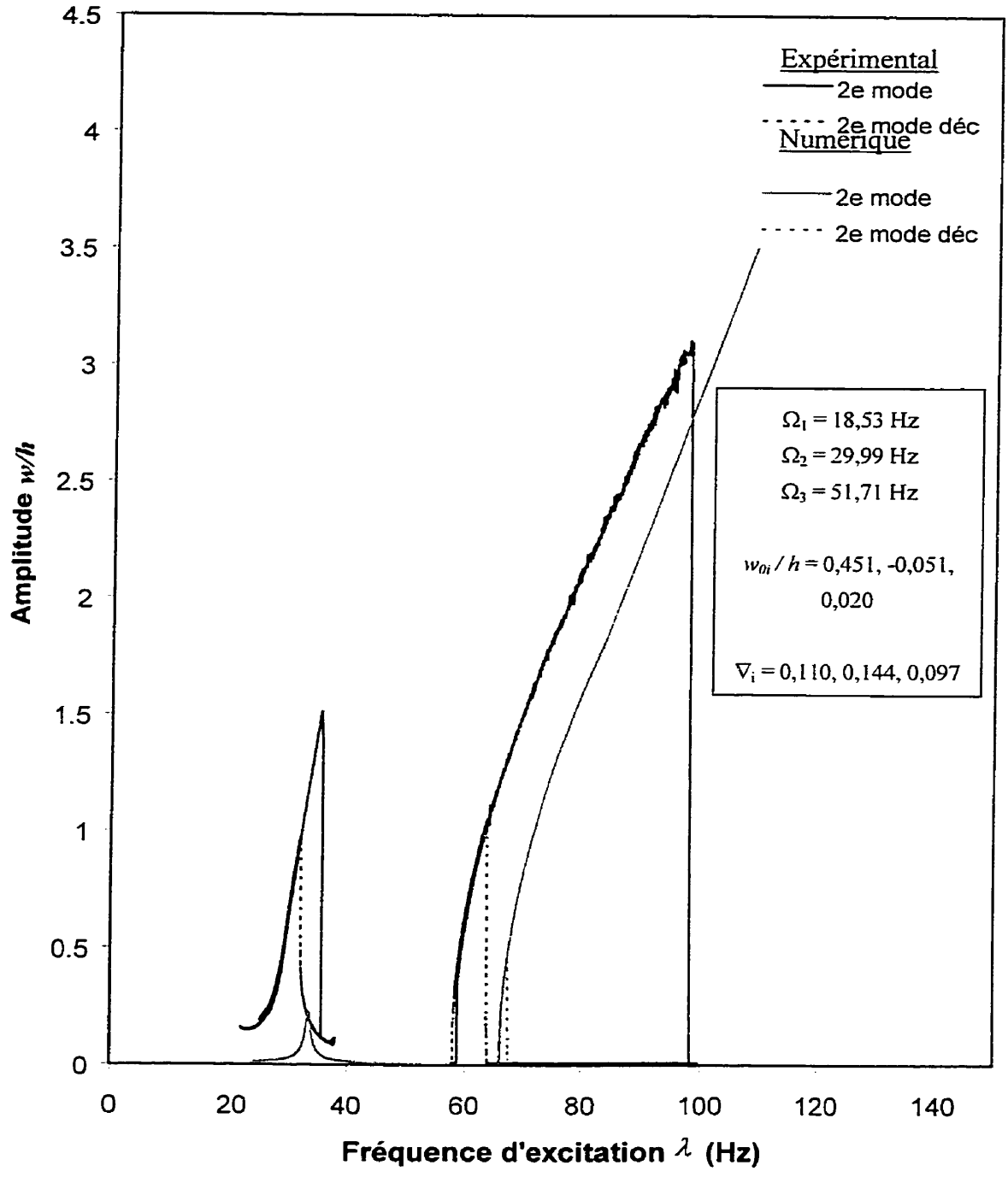


Figure 4.76 - Courbes de résonances du 2ième mode de vibration, plaque P3, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

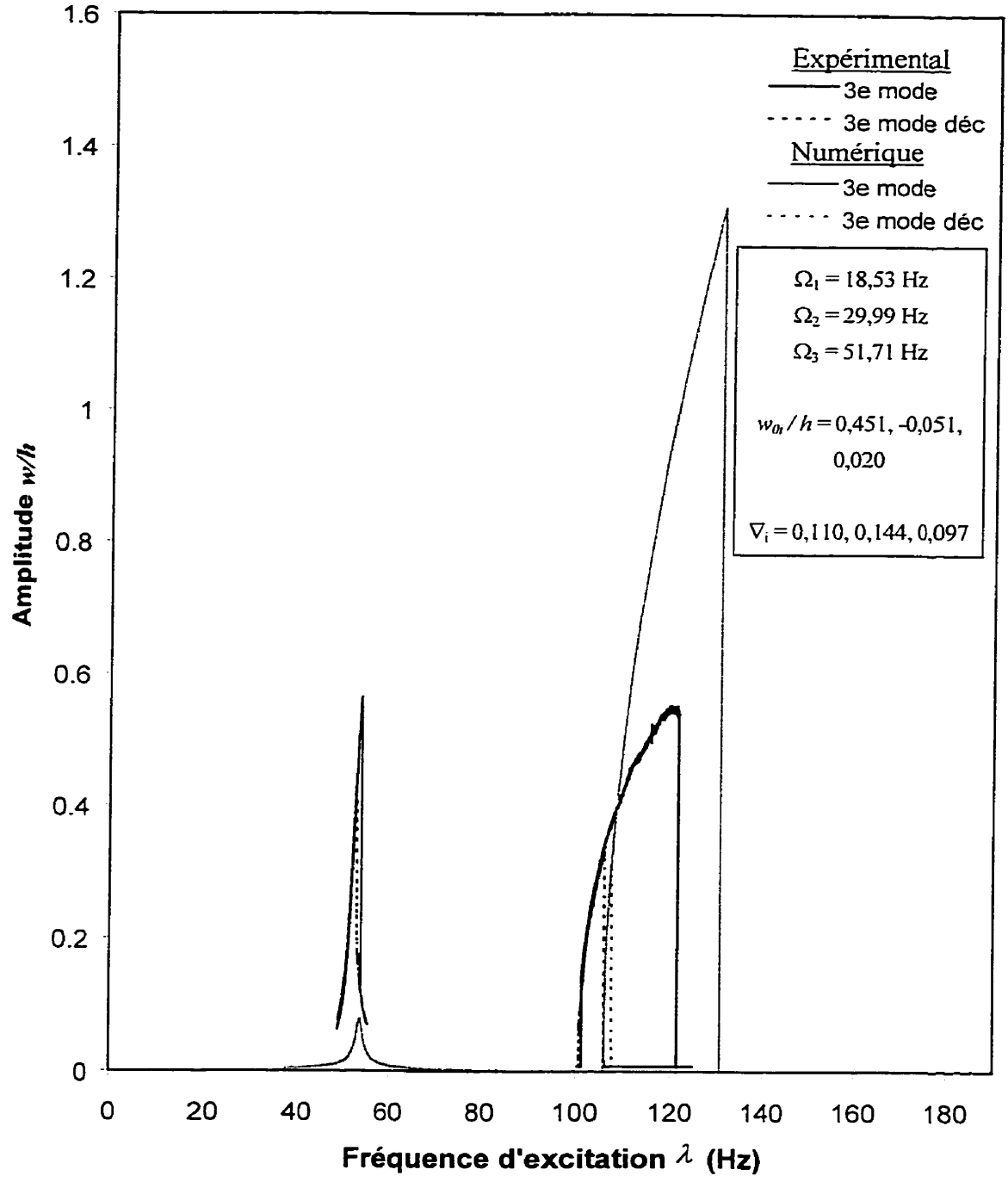


Figure 4.77 - Courbes de résonances du 3ième mode de vibration, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

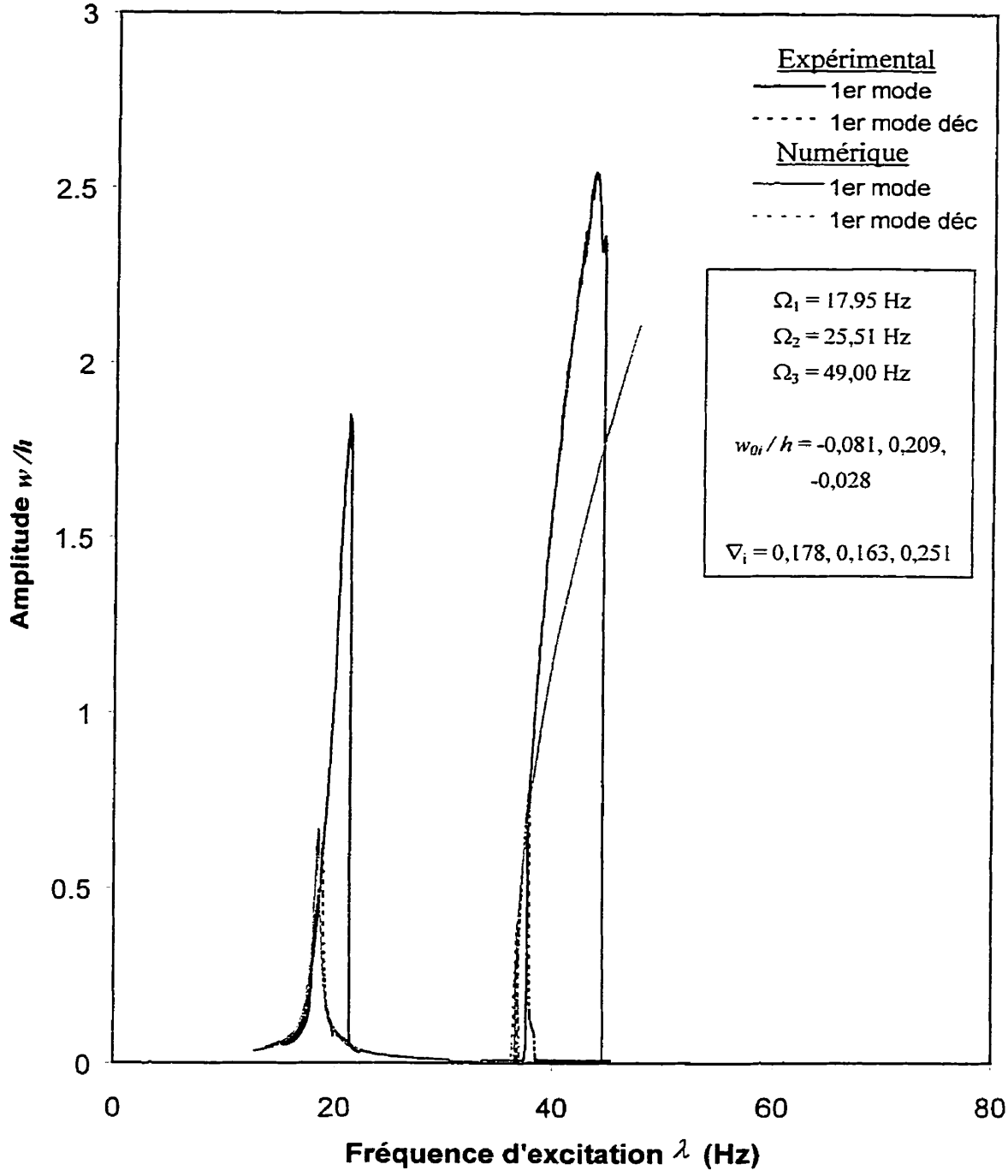


Figure 4.78 - Courbes de résonances du le 1er mode de vibration, plaque P5, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux

Pour les quatre premiers cas présentés (figures 4.71 à 4.74), on observe une bonne concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux. Les résonances forcées et paramétriques se produisent pour les mêmes fréquences d'excitation. L'amplitude des résonances forcées et des sauts en début de résonance paramétrique est similaire. On note cependant que l'amplitude du mouvement mesuré expérimentalement est supérieure à celle obtenue numériquement, et ce pour tous les cas.

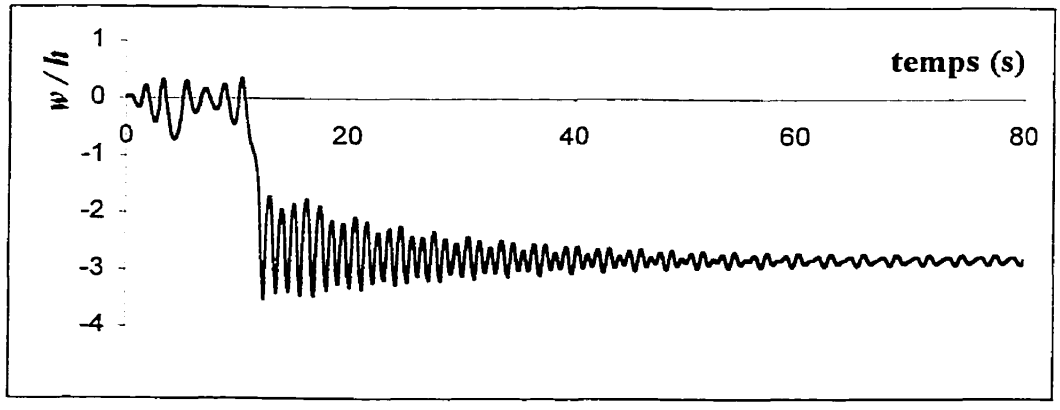
Cet écart entre les résultats numériques et expérimentaux peut être relié à un certain relâchement des conditions aux limites. Ce relâchement accroît la liberté de mouvement de la plaque et provoque ainsi une augmentation des amplitudes de vibration. De plus, la non linéarité globale du type ressort dur est plus accentuée pour les résultats numériques (plus grande inclinaison vers la droite des courbes de résonances paramétriques). Le modèle théorique semble ainsi surévaluer la non linéarité du système.

Pour le cas où l'amplitude de l'imperfection est supérieure à la limite du modèle théorique utilisé (figure 4.75, $w_{oi} > h$), on note une divergence entre les résultats expérimentaux et théoriques. Les résonances paramétriques calculées présentent alors un fort comportement de ressort mou, comportement qui est tel qu'il empêche les vibrations paramétriques de grande amplitude de se produire. Les résultats expérimentaux comportent eux aussi un comportement en ressort mou, mais celui-ci est nettement moins important.

De plus, lors de l'élaboration des courbes de résonances forcées, on observe un flambage latéral de la plaque. Lorsque les vibrations forcées atteignent une amplitude suffisante, la plaque se met à vibrer autour d'une position autre que celle correspondant à la position d'équilibre statique. La figure 4.79 illustre la forme de la réponse temporelle alors calculée. Il devient ainsi impossible d'élaborer une courbe de résonance forcée complète pour ces plaques. Cette oscillation autour d'une nouvelle position d'équilibre (position flambée de la plaque) est cependant uniquement observée pour une zone de

fréquences d'excitation. Cette zone correspond aux fréquences d'excitation pour lesquelles la plaque présenterait normalement des vibrations forcées de grande amplitude.

Le modèle théorique ici utilisé donne de bons résultats lors que l'amplitude de l'imperfection est faible et permet ainsi de prévoir l'amplitude des vibrations forcées et paramétriques ainsi que la présence de sauts en début de résonances paramétriques. Cependant, les résultats expérimentaux s'éloignent des résultats théoriques lorsque l'amplitude de l'imperfection s'accroît. À la lumière des résultats obtenus, le modèle utilisé ne décrit plus correctement le comportement réel lorsque l'amplitude de l'imperfection devient supérieure à l'épaisseur de la plaque ($w_{oi} > h$). Pour ces cas, le comportement dynamique de la plaque imparfaite présente une forte non linéarité du type ressort mou. Cette non linéarité est surévaluée par le modèle théorique.



4.79 - Réponse temporelle associée aux vibrations forcées de grande amplitude pour une plaque avec forte imperfection géométrique

Les figures 4.72, 4.76 et 4.77 illustrent les résultats expérimentaux et numériques obtenus pour les trois premiers modes de vibration d'une plaque imparfaite. Le plus faible écart entre les résultats est obtenu pour le premier mode de vibration. Pour le deuxième mode de vibration, l'écart est plus grand et devient maximum pour le troisième mode de vibration. Le modèle théorique est valide uniquement pour les premiers modes

de vibration et, à la lumière des résultats obtenus, semble mieux décrire le comportement des modes de vibration les plus faibles.

4.7.2 - Influence de l'amplitude de l'imperfection

Pour détacher l'influence de l'amplitude des imperfections, trois plaques ayant un niveau d'imperfection distinct selon le premier mode ont été étudiées. Les réponses fréquentielles obtenues se retrouvent aux figures 4.80 à 4.82. Les résultats obtenus pour ces différentes plaques montrent que l'amplitude des résonances forcées s'accroît avec l'amplitude de l'imperfection. Pour les résonances paramétriques, l'amplitude du comportement en ressort mou devient plus grand et peut devenir proéminent (cas de la résonance paramétrique du troisième mode à la figure 4.82).

4.7.3 - Influence de la forme de l'imperfection

Une autre plaque de mêmes dimensions a par la suite été façonnée avec une imperfection similaire au deuxième mode de vibration (plaque P5). Cette plaque a été soumise au même chargement et aux mêmes conditions de support que les plaques ayant une imperfection selon le premier mode étudiées précédemment. Les courbes de résonance obtenues sont illustrées à la figure 4.83. Ces résultats peuvent être comparés à ceux des figures 4.80 et 4.81, car ceux-ci ont été obtenues pour des plaques ayant des imperfections d'amplitude similaire mais de formes différentes (plaque P2 et P3, imperfection selon le premier mode).

Les résonances forcées du premier et du deuxième mode de la plaque P5 sont plus importantes que celles obtenues pour les plaques P2 et P3. De plus, les résonances paramétriques de ces mêmes modes présentent des sauts plus importants en début de résonance paramétrique pour la plaque ayant une imperfection selon le deuxième mode.

Pour les plaques ici considérées (plaques P2, P3, P5, simplement supportées), le mode critique de flambage est le deuxième mode. L'influence des imperfections apparaît donc plus prononcée lorsque l'imperfection est de la même forme que le mode critique de flambage.

Les figures 4.84 et 4.85 présentent les résultats obtenus pour deux plaques ayant un rapport de forme différent des plaques étudiées précédemment (R = 1,2 pour ces deux plaques) et une imperfection géométrique suivant respectivement le premier et le second mode de vibration. Pour ces plaques de même forme, le mode critique de flambage est le premier mode. À la figure 4.84, le mode critique de flambage coïncide avec le mode d'imperfection. On observe alors un fort comportement du type ressort mou lors de la résonance paramétrique du premier et du second mode. Ce nouveau comportement est tel qu'il empêche l'apparition de vibrations paramétriques de grande amplitude.

Pour l'autre plaque, la forme de l'imperfection ne coïncide plus avec le mode de flambage; l'imperfection est alors semblable au deuxième mode de vibration (figure 4.85). Pour ce cas, l'amplitude des résonances forcées est moindre et le comportement du type ressort mou est presqu'inexistant lors des résonances paramétriques.

Une étude théorique a été effectuée précédemment [27] sur l'influence de la forme des imperfections géométriques sur le comportement dynamique des plaques. Les résultats de cette étude montrent que l'influence des imperfections géométriques est accrue lorsque la forme de l'imperfection coïncide avec le mode critique de flambage. Les résultats expérimentaux viennent ainsi confirmer les résultats théoriques précédents. En effet, lorsque l'imperfection est similaire au mode critique de flambage, les résonances forcées atteignent une plus forte amplitude et les sauts en début de résonances paramétriques deviennent plus grands.

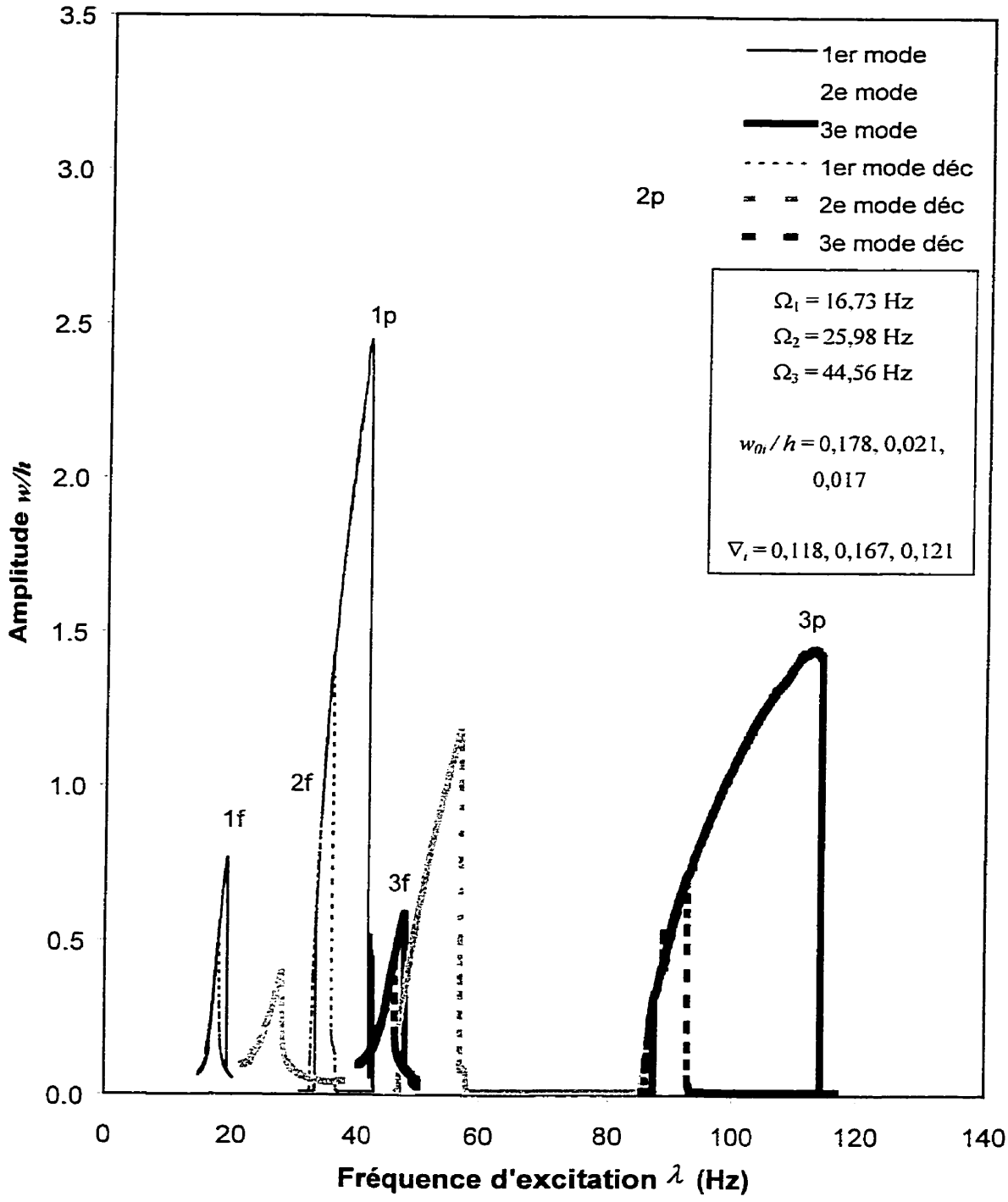


Figure 4.80 - Courbes de résonances, plaque P2, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

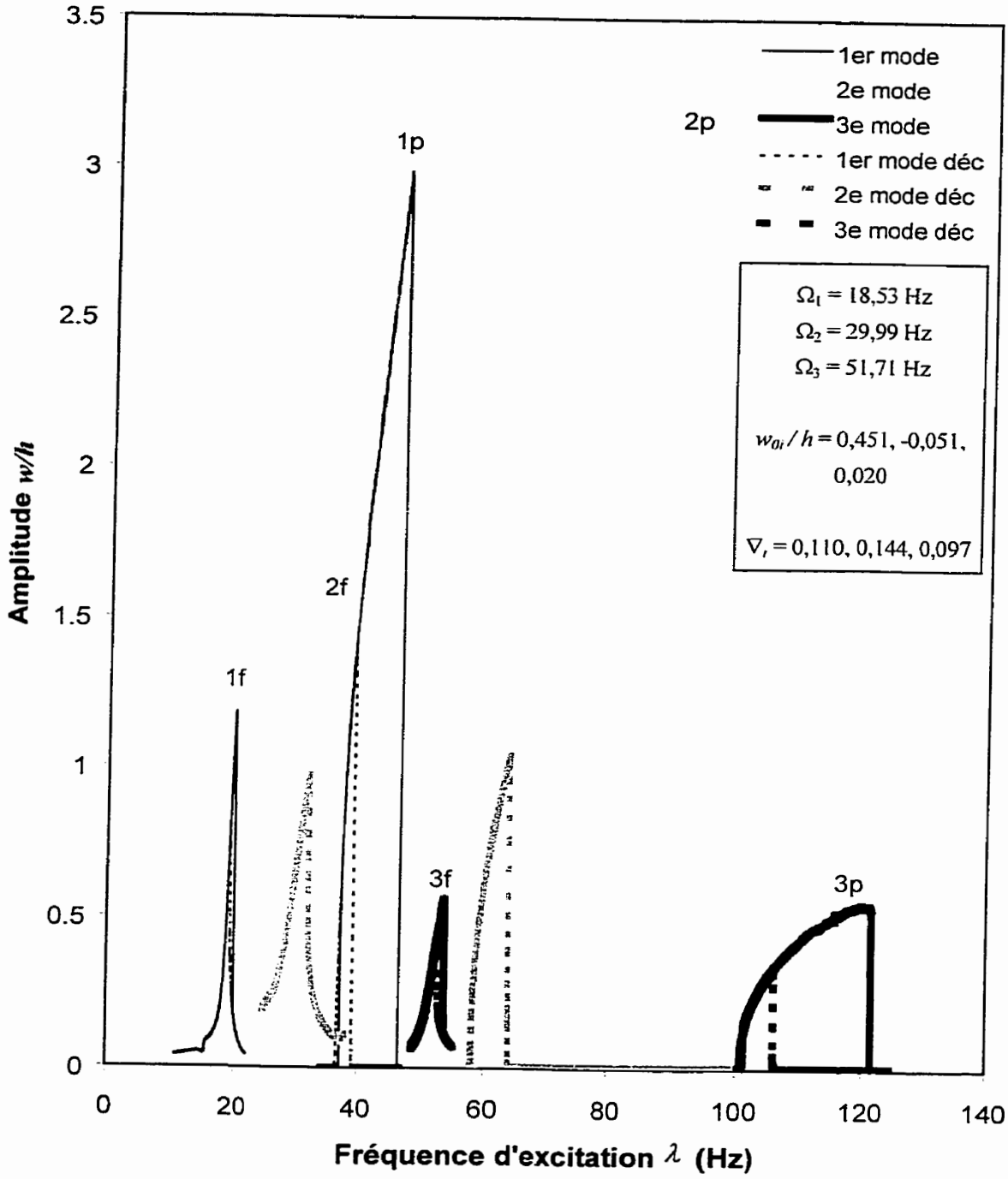


Figure 4.81 - Courbes de résonances, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

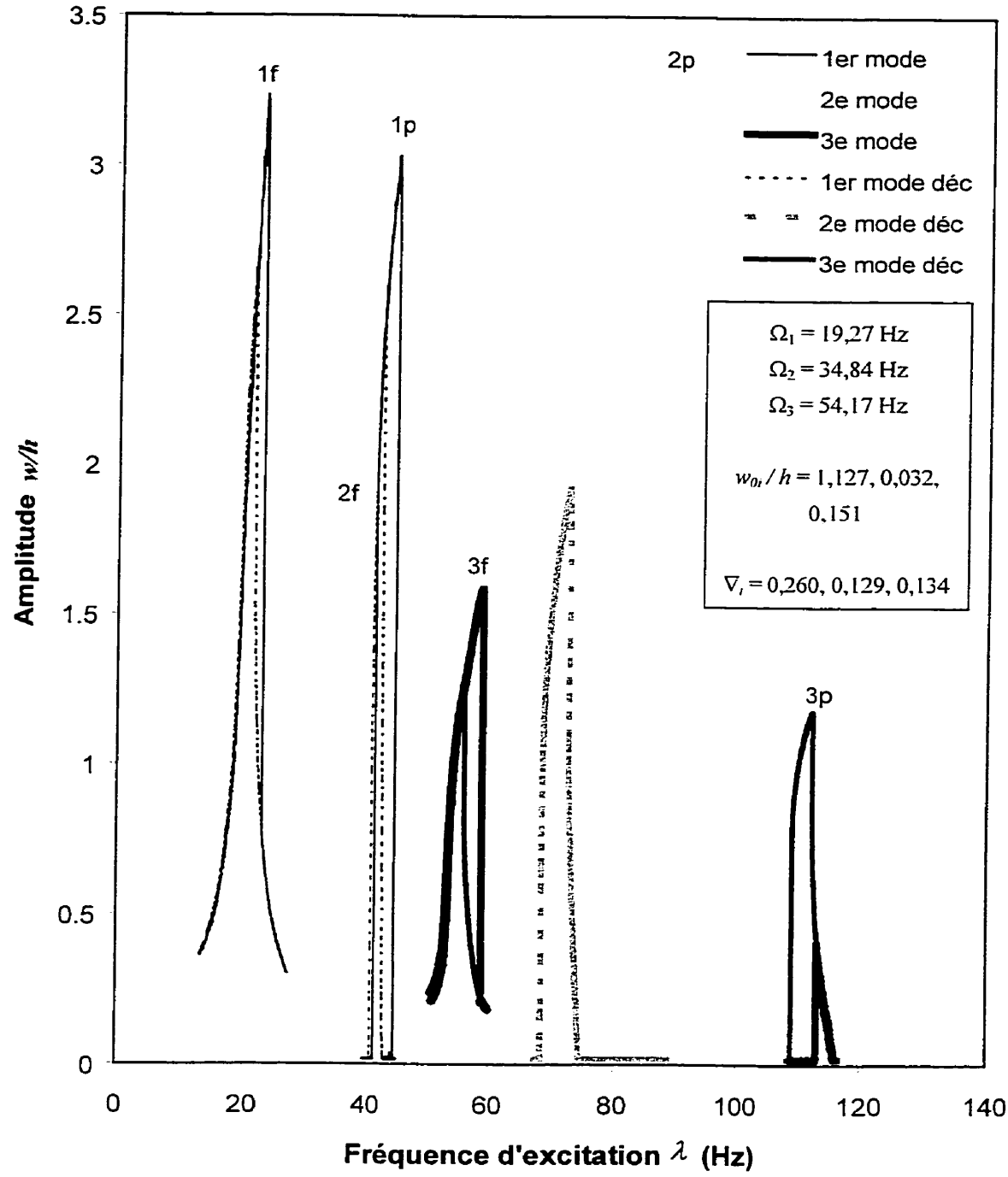


Figure 4.82 - Courbes de résonances, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

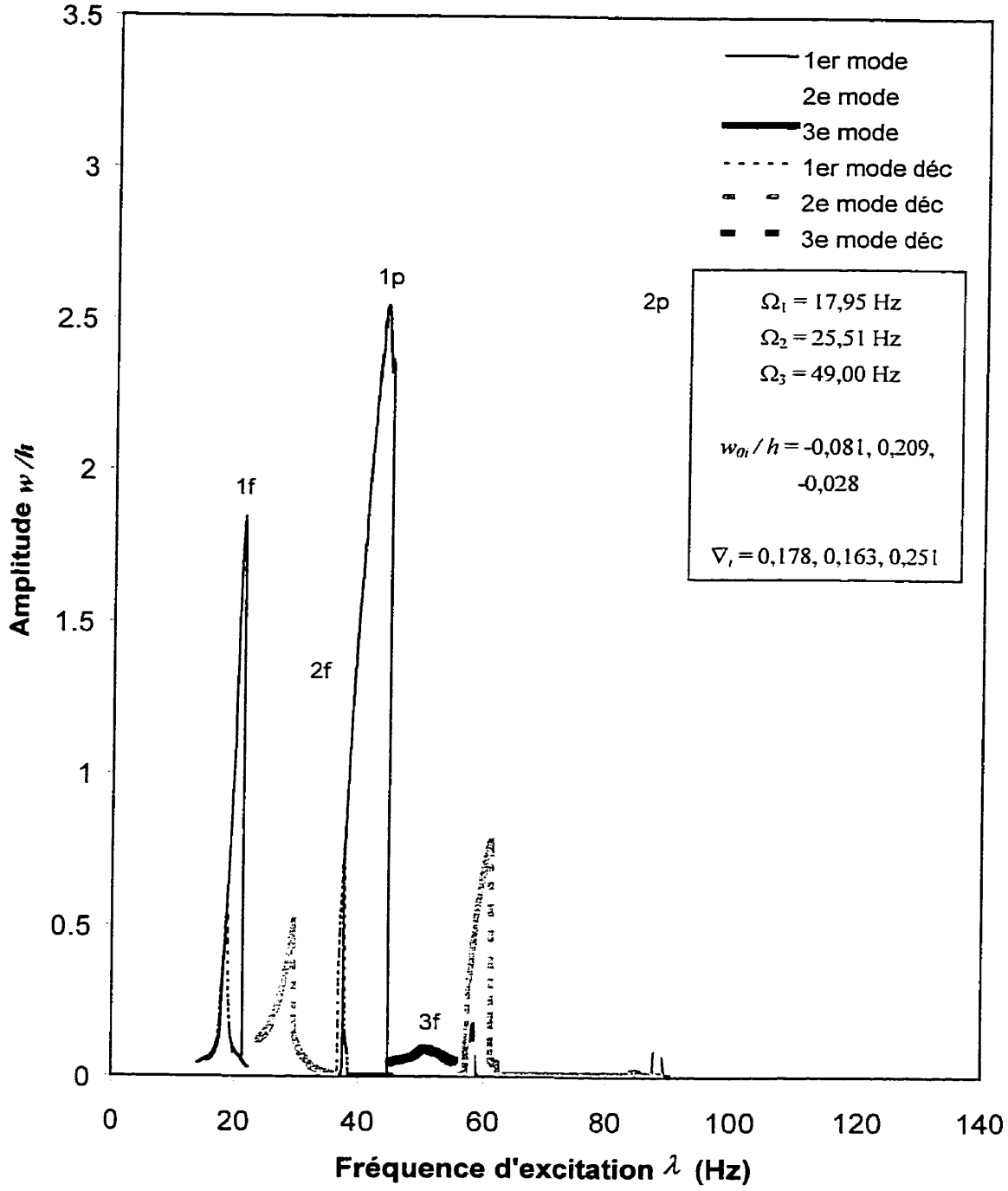


Figure 4.83 - Courbes de résonances, plaque P5, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

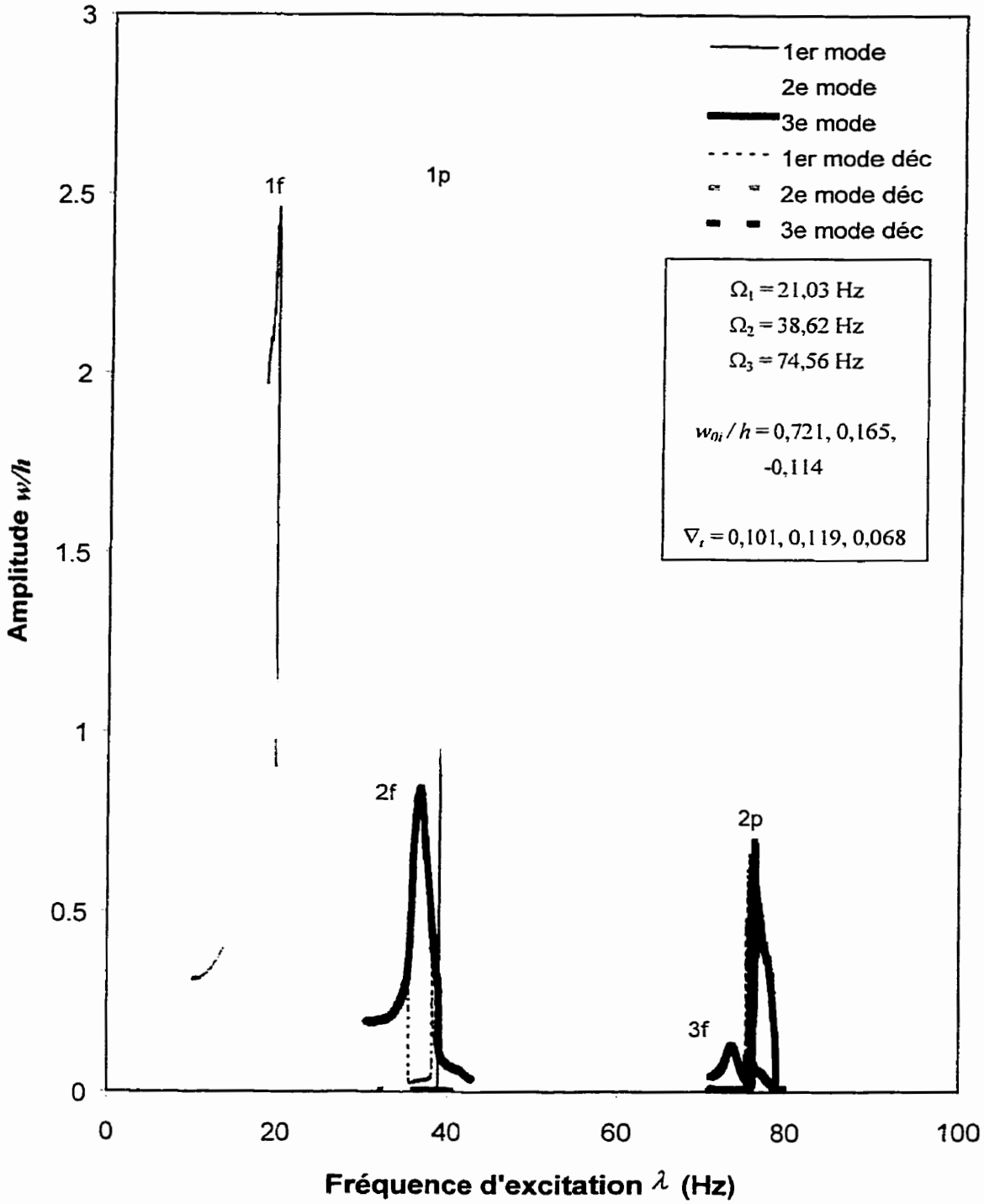


Figure 4.84 - Courbes de résonances, plaque P6, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

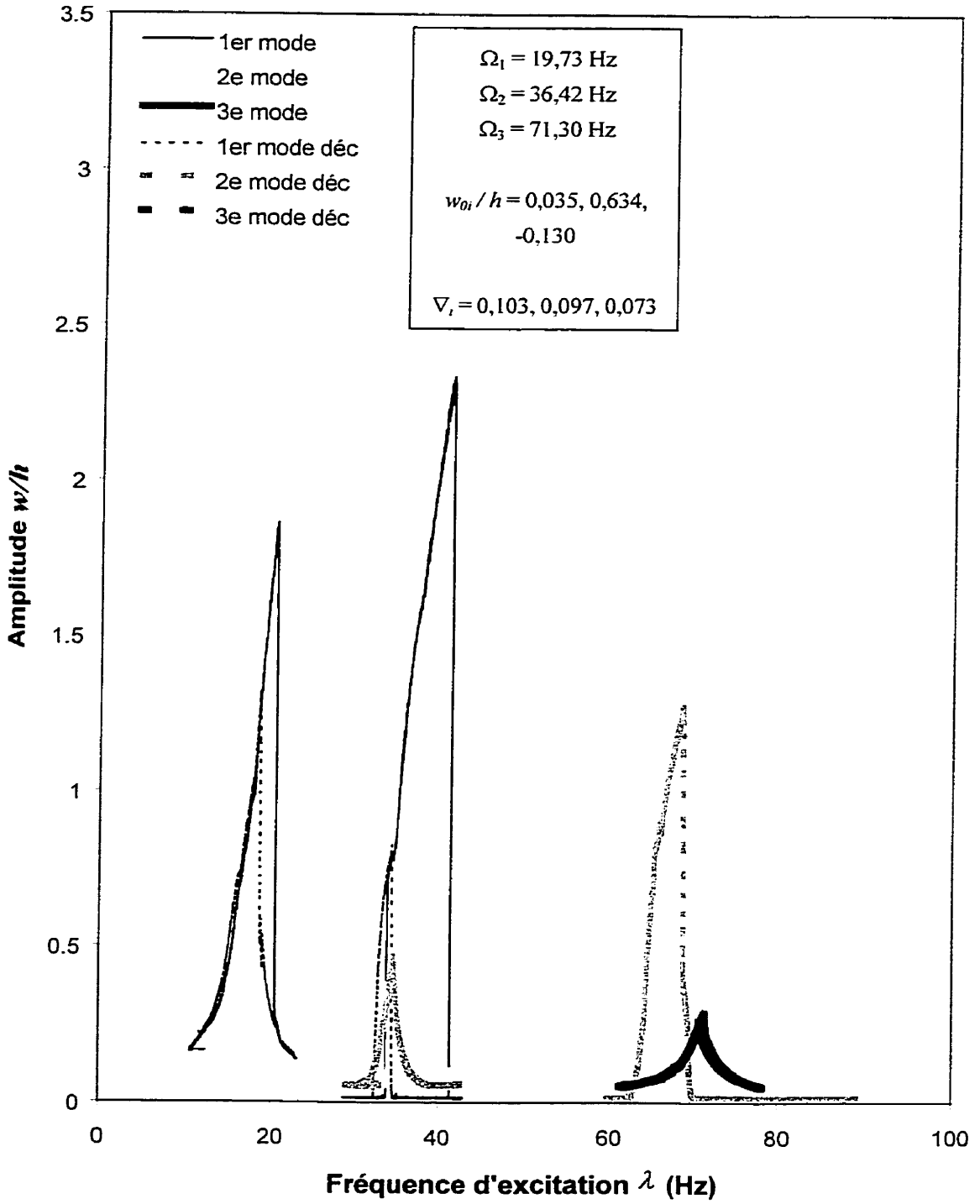


Figure 4.85 - Courbes de résonances, plaque P7, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

4.7.4 - Influence du chargement statique

Le chargement statique a une influence directe sur les courbes de résonance de plaques géométriquement imparfaites. Les figures 4.86 à 4.90 illustrent cet effet sur le comportement dynamique de plaques imparfaites simplement supportées. Les figures 4.86, 4.87 et 4.88 ont été obtenues pour une plaque ayant une forte imperfection selon le premier mode ($w_{01} / h \cong 1$) et trois niveaux de chargement statique, tandis que les figures 4.89 et 4.90 ont été obtenues pour une autre plaque ayant un imperfection moindre ($w_{01} / h \cong 0{,}5$).

L'augmentation du chargement statique se traduit par une augmentation de la déflexion statique de la plaque. Cette déflexion est le résultat de l'application du chargement statique sur une plaque initialement imparfaite. Pour les cas étudiés, on remarque que cette déformation statique est de même forme que les imperfections initiales.

Les fréquences naturelles de la plaque sont aussi affectées par une modification du chargement statique. Dans les cas ici présentés on observe une faible diminution des fréquences naturelles de la plaque avec l'augmentation du chargement statique. En effet, les fréquences naturelles à la figure 4.88 ($P_{cr} = 0{,}11$) sont légèrement supérieures à celles de la figure 4.87 ($P_{cr} = 0{,}16$), qui sont elles-mêmes supérieures à celles de la figure 4.86 ($P_{cr} = 0{,}27$). Cette variation des fréquences naturelles est aussi observable aux figures 4.89 et 4.90.

L'amplitude des résonances paramétriques et forcées est peu affectée par la variation du chargement statique. Cependant, le comportement en ressort mou peut être légèrement accentué par l'accroissement de la force statique pour les plaques ayant de grandes imperfections géométriques; à la figure 4.87, les sauts en début de résonances

paramétriques sont plus grands qu'à la figure 4.86 et dans certain cas le comportement de ressort mou devient suffisant pour empêcher les vibrations paramétriques de grandes amplitudes de se produire. Par exemple, pour le plus faible chargement statique présenté (figure 4.86), la résonance paramétrique du premier mode a un faible comportement en ressort mou. Ce comportement s'accentue pour un plus grand chargement statique (figure 4.87), on note alors une modification de la forme de la courbe de résonance. À la figure 4.88, le comportement en ressort mou devient prépondérant et est tel que les vibrations paramétriques de grandes amplitudes ne se produisent plus lors d'un balayage croissant de la fréquence d'excitation.

Pour le deuxième mode de vibration (figures 4.86 à 4.88), on observe une augmentation notable de l'amplitude du saut en début de résonance. Dans le cas du troisième mode de vibration, la plage de fréquences pour laquelle on retrouve des vibrations paramétriques durant un balayage décroissant de la fréquence d'excitation est nettement plus grande pour le plus grand chargement (de 67 à 78Hz comparativement à de 72.5 à 78.5 Hz pour le plus faible chargement), effet direct du plus grand comportement en ressort mou.

Pour une plaque ayant une imperfection moindre (figures 4.89 et 4.90), aucune modification notable de la forme des courbes de résonance (des non linéarités) lors d'une variation du chargement statique n'est observée.

Le chargement statique a donc une influence sur le comportement dynamique des plaques géométriquement imparfaites. Il diminue les fréquences naturelles de la plaque, et peut aussi modifier la non linéarité des courbes de résonance. Ce dernier effet apparaît significatif pour des plaques ayant de grandes imperfections géométriques.

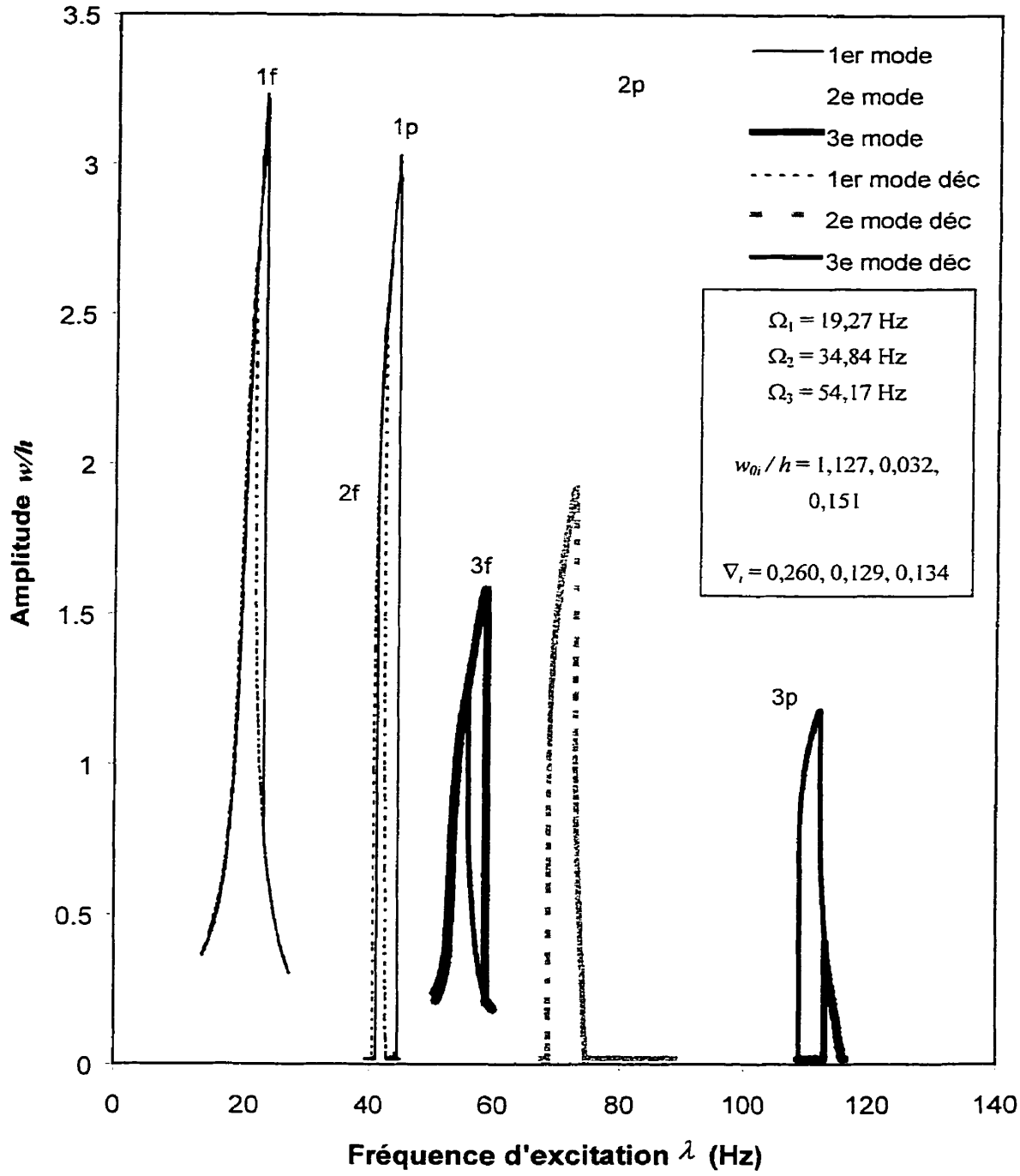


Figure 4.86 – Courbes de résonance, plaque P4, $n_{yo} = 60$N, $n_{yt} = 40$N (Pcr = 0,11, μ=0,0383), S^{c}S

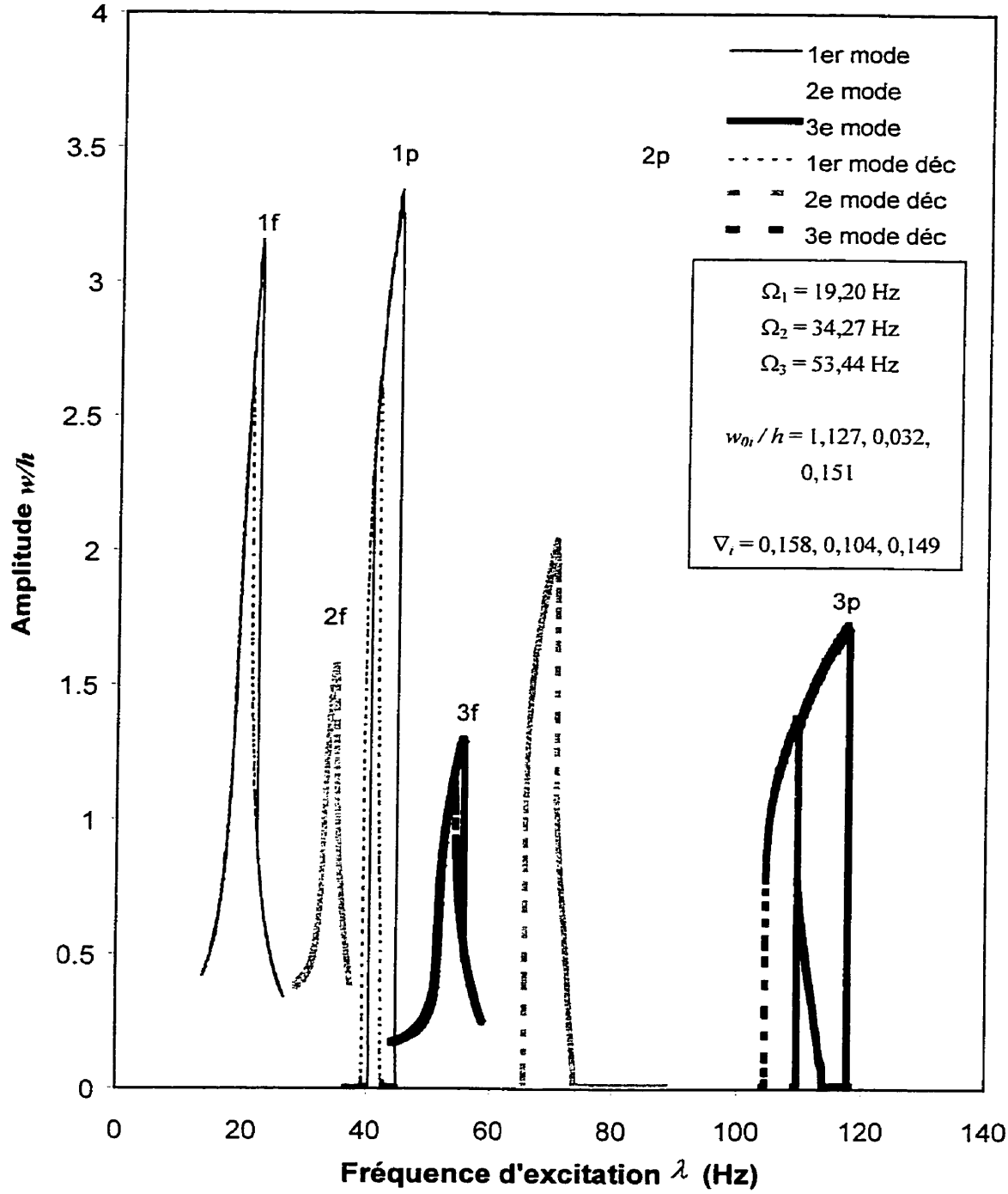


Figure 4.87 – Courbes de résonance, plaque P4, $n_{yo} = 90$N, $n_{yt} = 40$N ($P_{cr} = 0{,}16$, $\mu = 0{,}0406$), S^{c}S

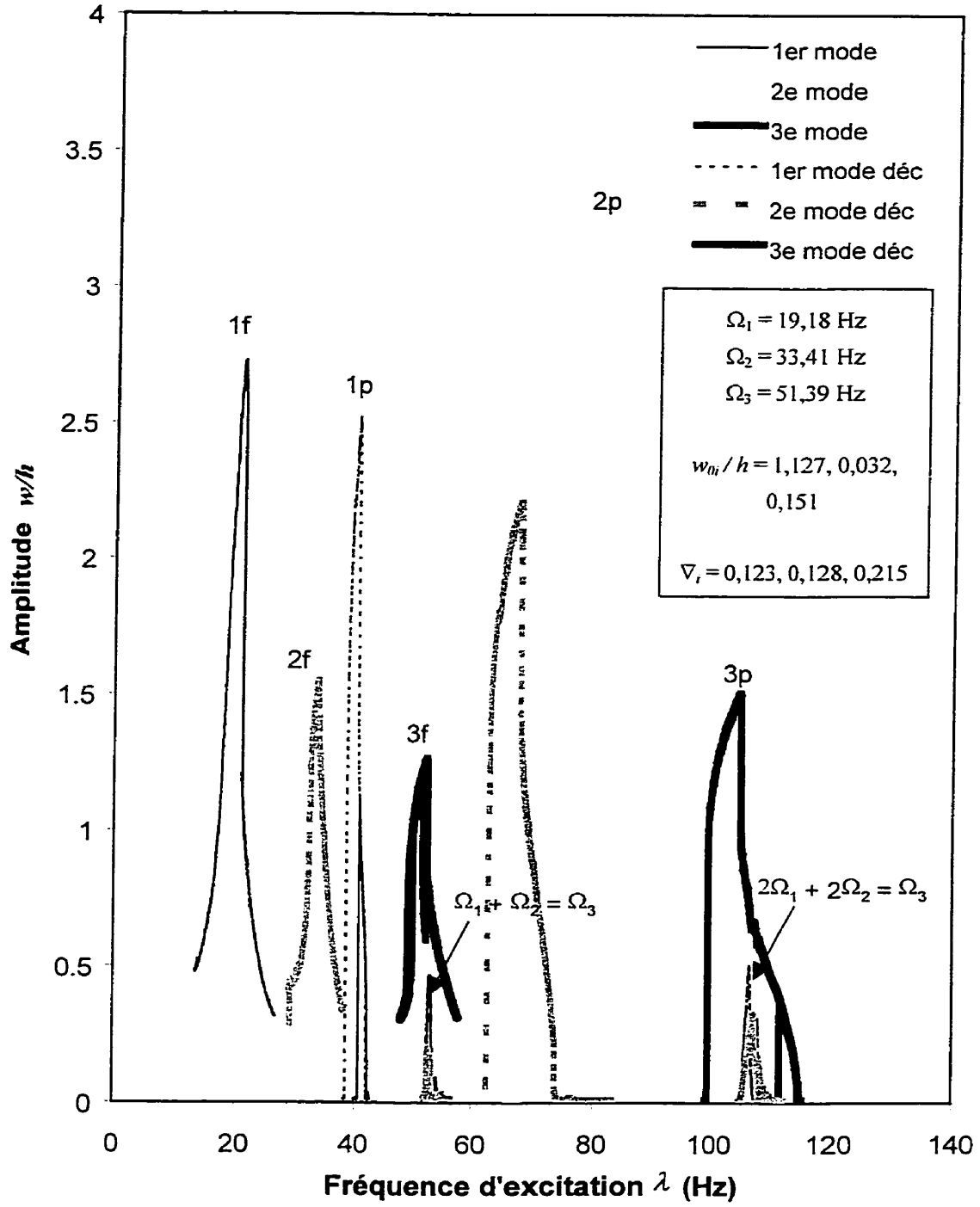


Figure 4.88 – Courbes de résonance, plaque P4, $n_{yo} = 130$N, $n_{yt} = 40$N ($P_{cr} = 0{,}27$, $\mu = 0{,}0442$), S^{c}S

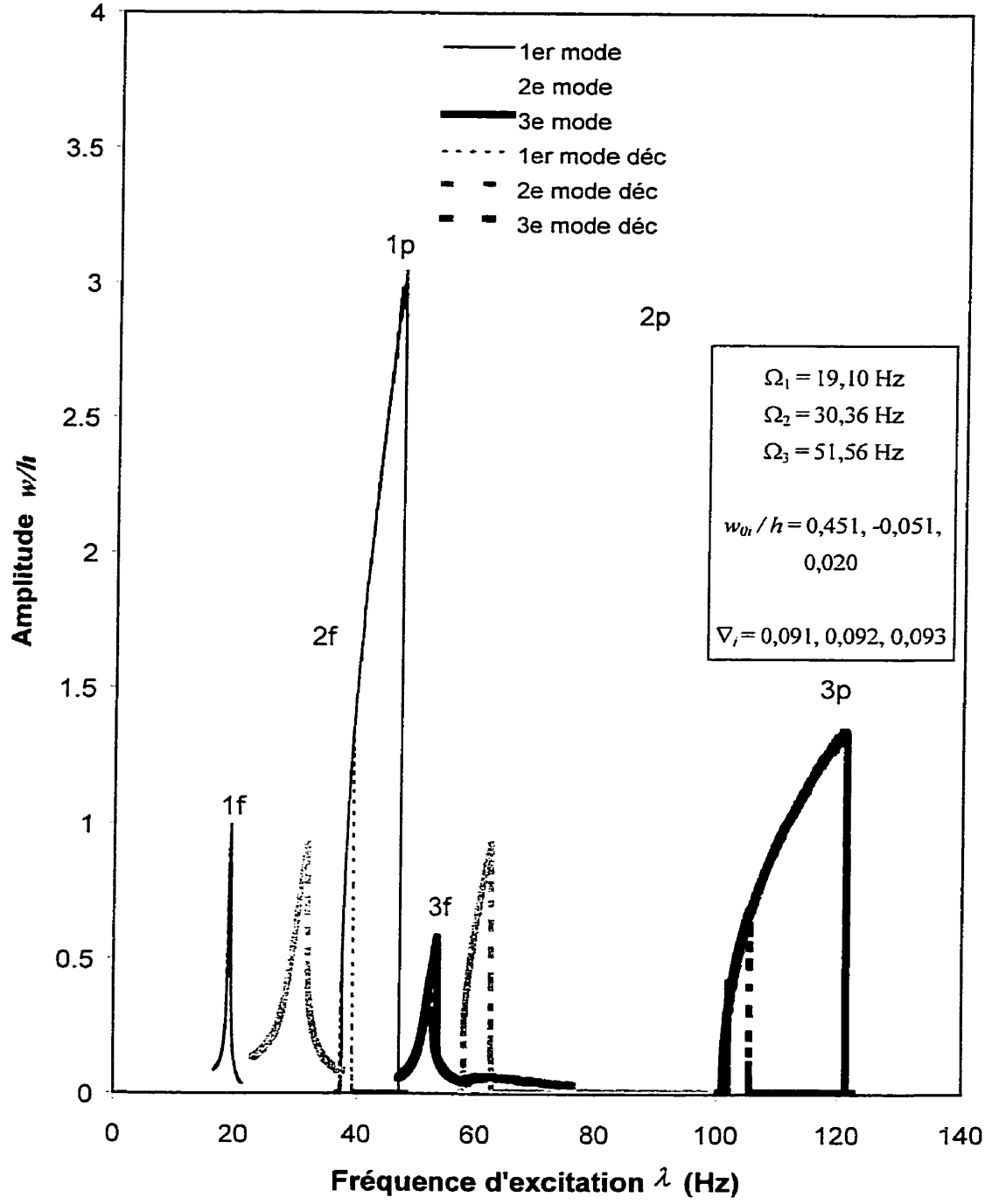


Figure 4.89 – Courbes de résonance, plaque P3, $n_{yo} = 45\text{N}$, $n_{yt} = 40\text{N}$ ($P_{cr} = 0{,}077$, $\mu = 0{,}0372$), S^{c}S

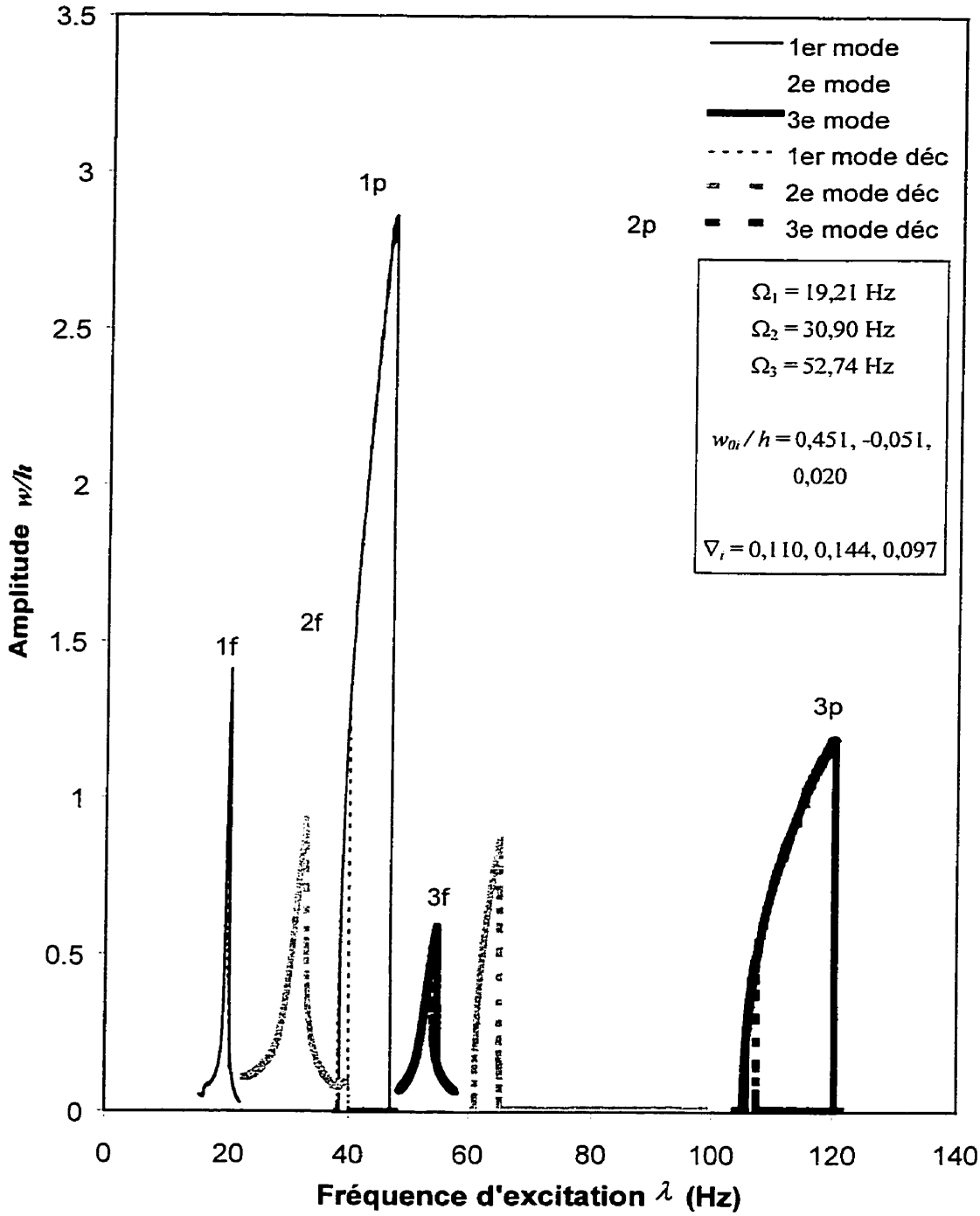


Figure 4.90 – Courbes de résonance, plaque P3, $n_{yo} = 60$N, $n_{yf} = 40$N ($P_{cr} = 0{,}10$, $\mu = 0{,}0383$), S^{c}S

4.7.5 - Influence du chargement dynamique

Le chargement dynamique influence les résonances d'une plaque. Pour une plaque parfaite, l'accroissement du chargement dynamique provoque une augmentation de la taille des courbes de résonance. Pour une plaque imparfaite, les résonances paramétriques et forcées sont accrues par une augmentation du chargement dynamique. Cette augmentation de la taille des résonances est cependant plus prononcée pour les résonances forcées. Contrairement au chargement statique, le chargement dynamique a néanmoins peu d'influence sur la forme des résonances paramétriques. Le comportement de type ressort mou pour les vibrations paramétriques de faible amplitude est encore présent mais n'est pas modifié de façon significative. Les figures 4.91 à 4.93 illustrent ce phénomène, à l'aide des résultats expérimentaux obtenus pour une plaque imparfaite simplement supportée et soumise à différents niveaux de chargement dynamique.

4.7.6 - Influence des conditions aux frontières

Le montage utilisé permet de reproduire deux types de conditions aux frontières. Chaque arête de la plaque peut ainsi être simplement supportée ou encastrée. Les diverses combinaisons de conditions aux frontières qui ont été définies dans l'approche théorique sont reprises pour la partie expérimentale.

Les travaux effectués dans le passé montrent que les conditions de support de la plaque ont une influence sur le comportement dynamique de celle-ci. Pour déterminer l'influence de ce paramètre sur les résonances de plaques géométriquement imparfaites, des essais expérimentaux ont été effectués sur une plaque imparfaite soumise à un niveau de chargement équivalent (même P_{cr} et μ) pour diverses conditions aux frontières. Les figures 4.94 à 4.97 présentent les résultats obtenus.

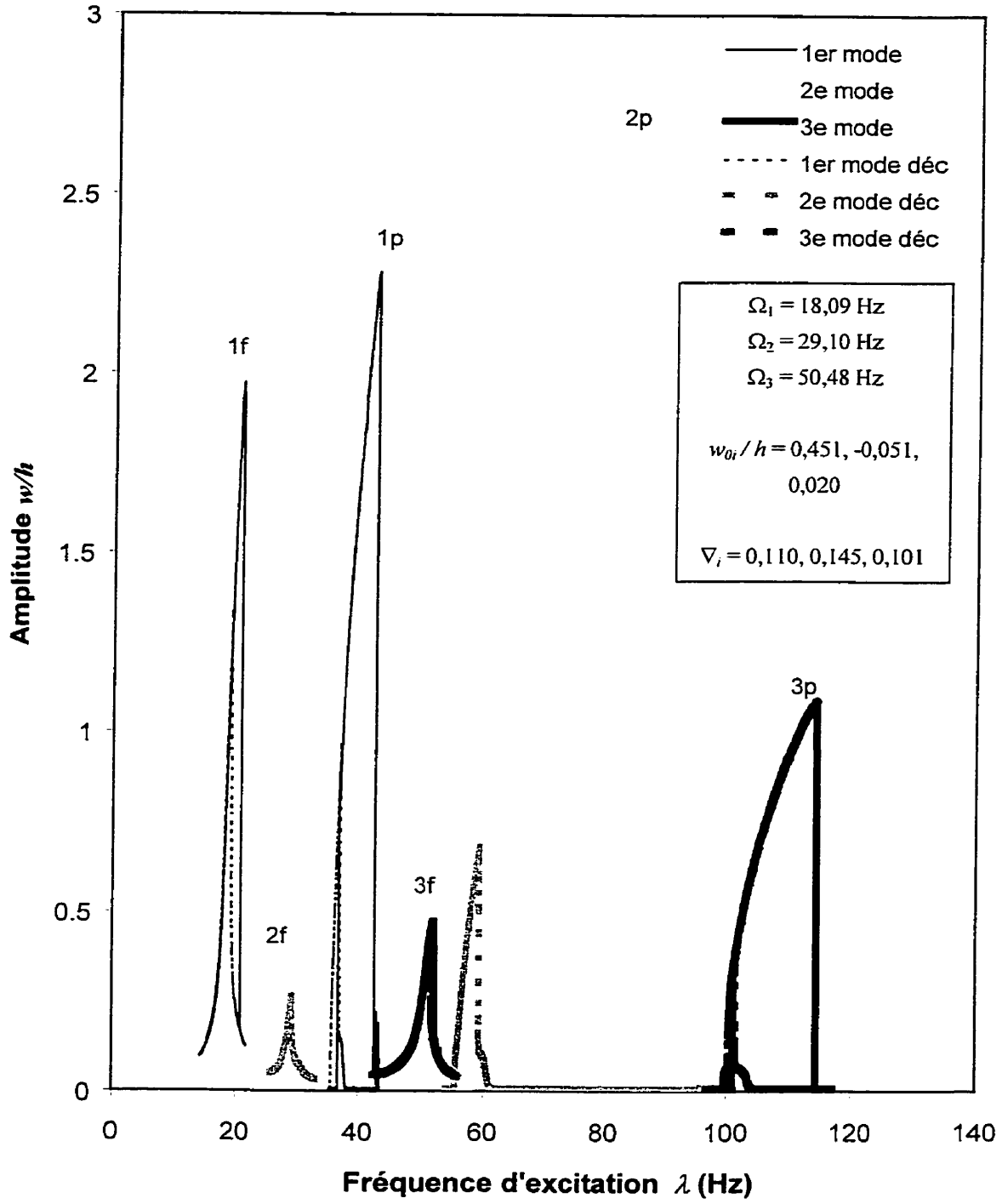


Figure 4.91 – Courbes de résonances, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0287$, S^{c}S

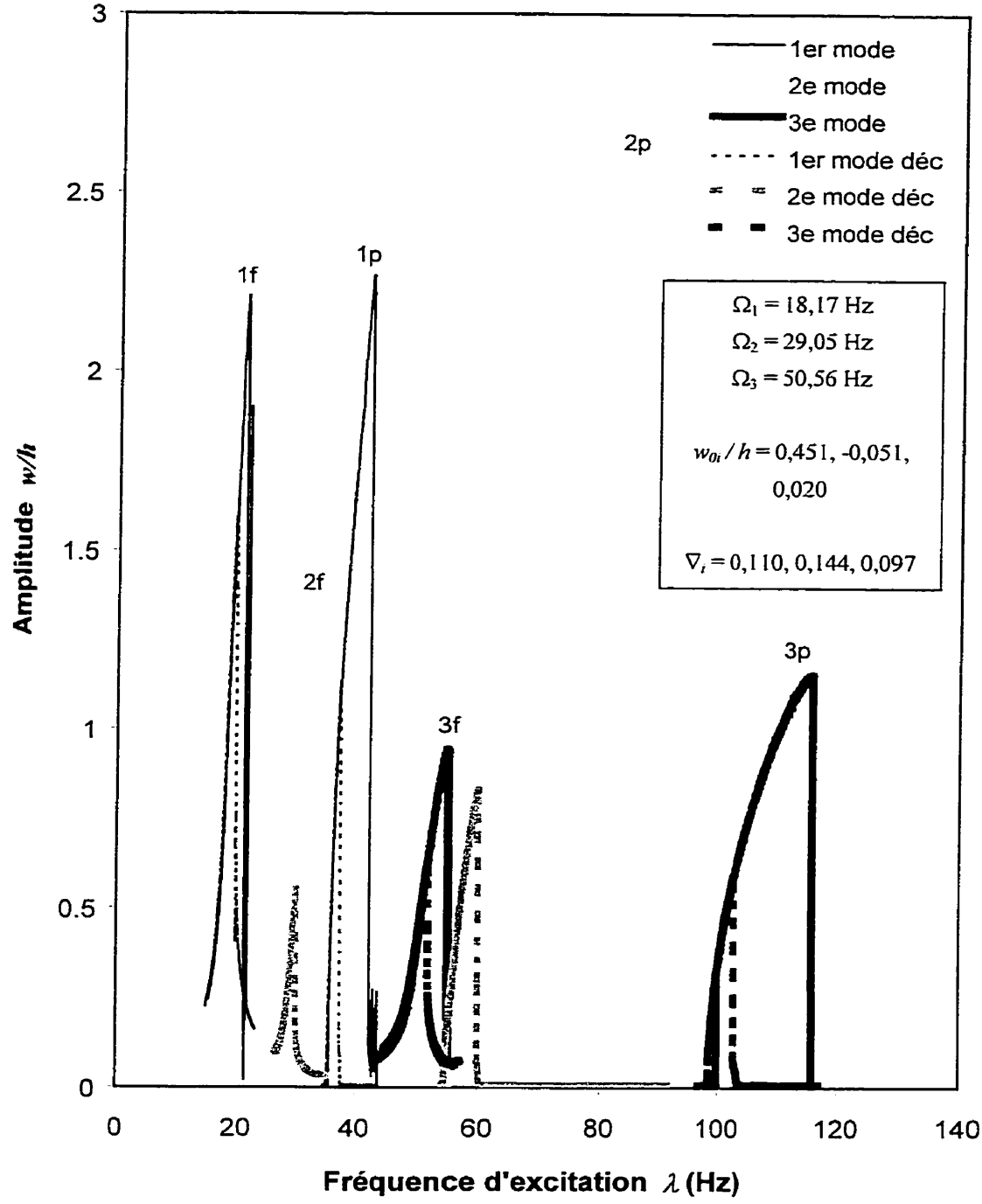


Figure 4.92 – Courbe de résonance, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S

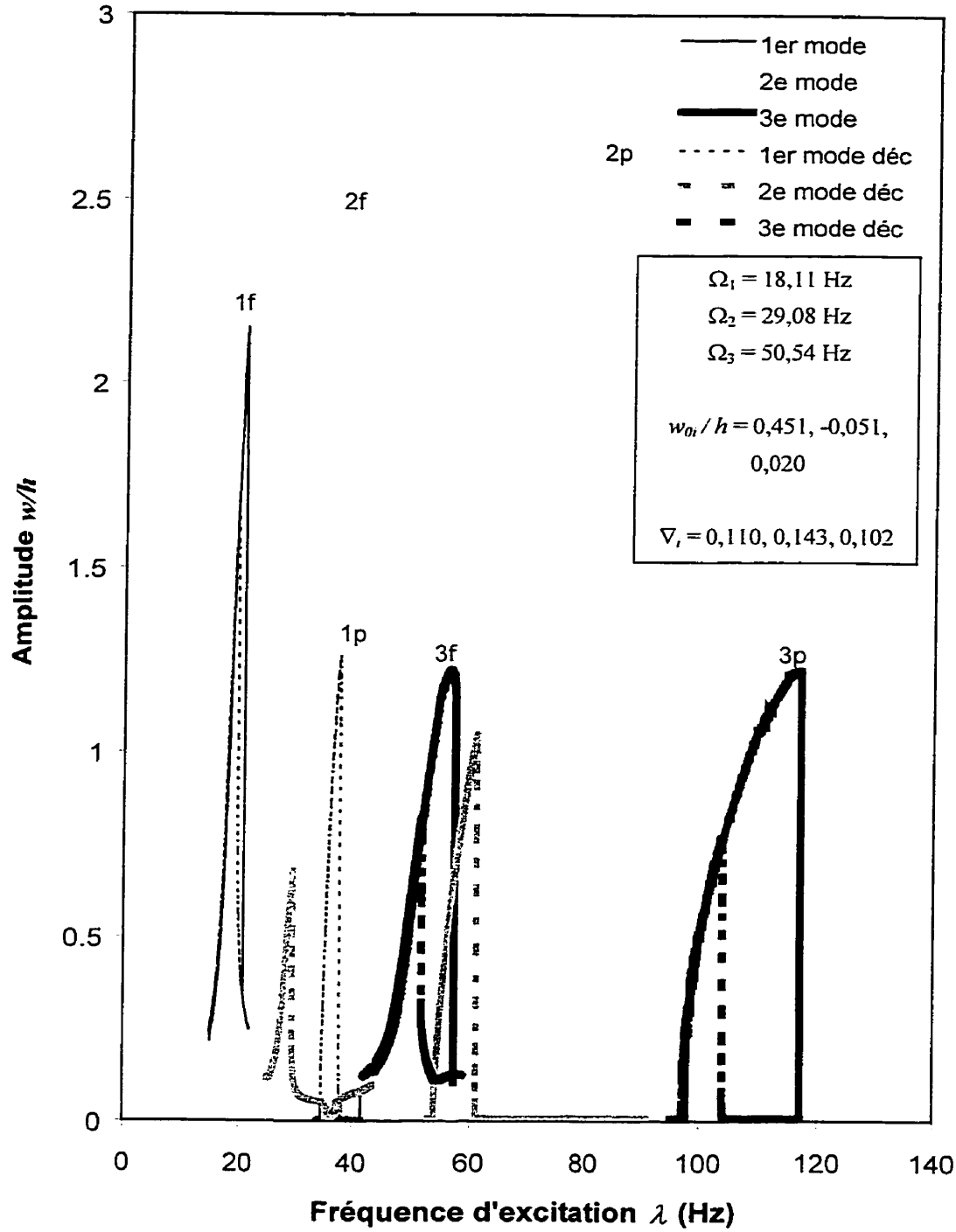


Figure 4.93 - Courbe de résonance, plaque P3, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0526$, S^{c}S

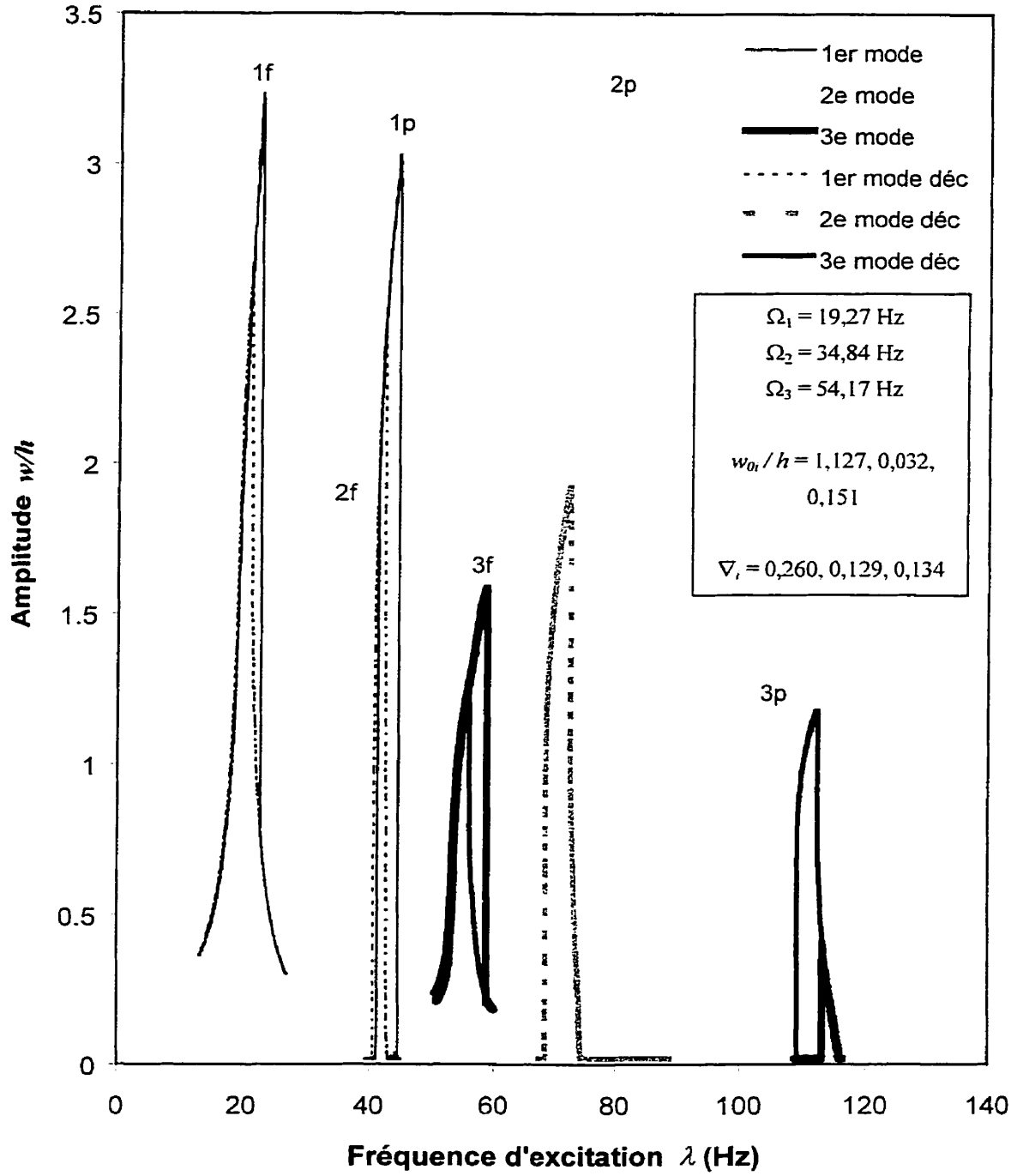


Figure 4.94 - Courbes de résonance, plaque P4, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$, S^cS, $m^* = 2$

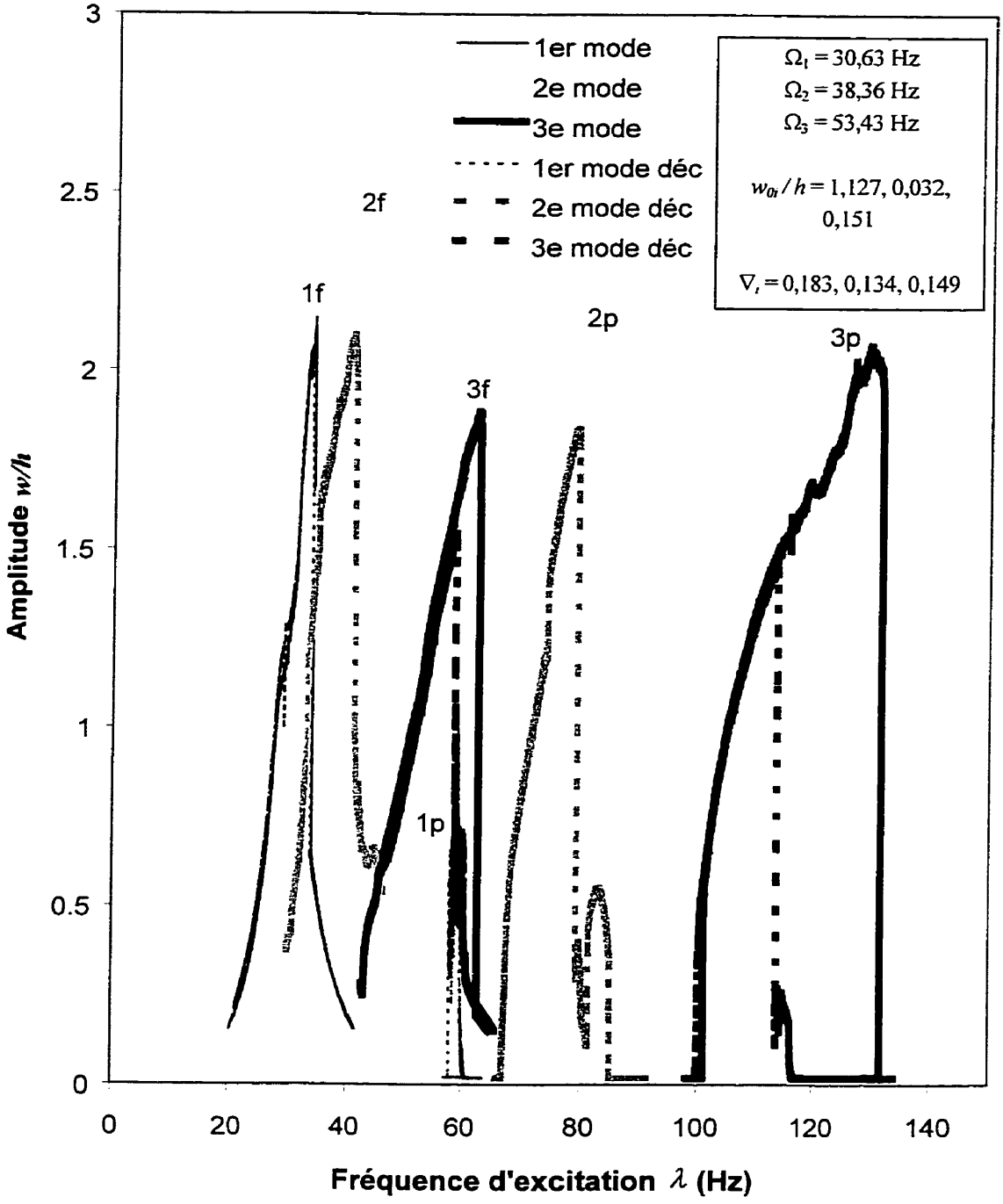


Figure 4.95 - Courbes de résonance, plaque P4, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$, S^{c}E, m* $= 3$

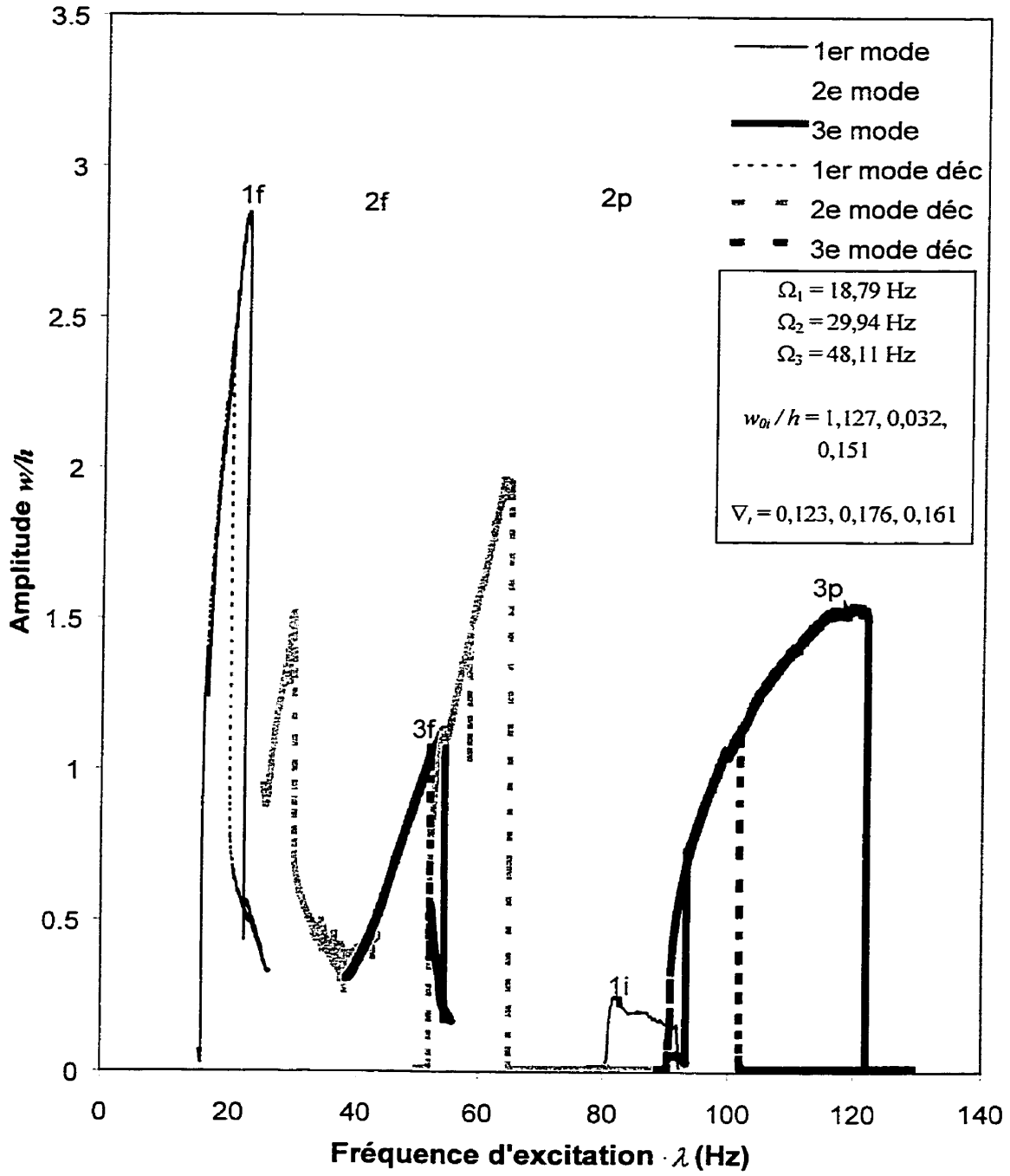


Figure 4.96 - Courbes de résonance, plaque P4, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$, E^{c}S, m* = 2

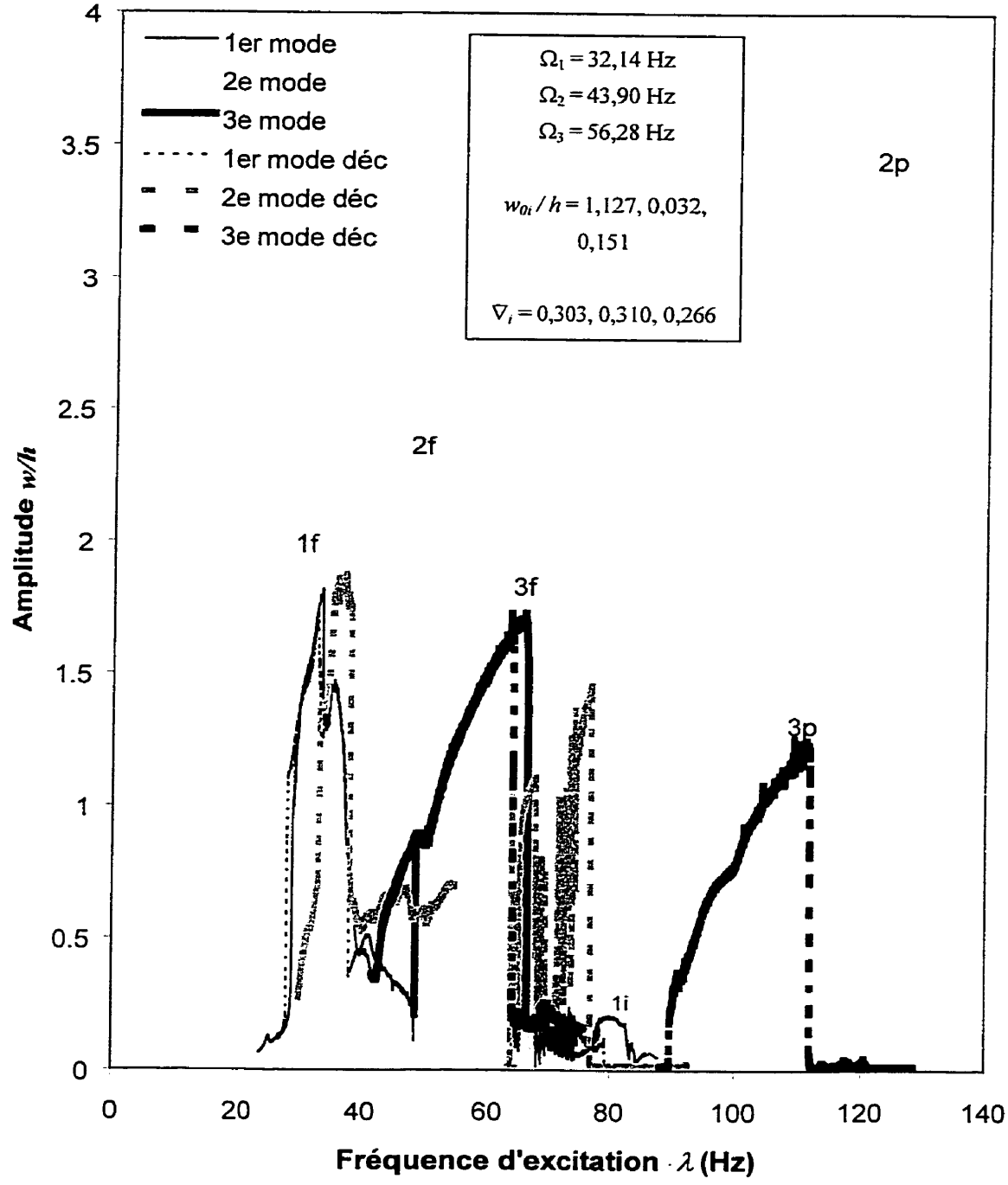


Figure 4.97 - Courbes de résonance, plaque P4, $P_{cr} = 0.11$, $\mu = 0.0459$, E^{c}E, m* = 3

Les amplitudes de vibration d'une plaque simplement supportée sont globalement supérieures à celles d'une plaque encastrée. Cette diminution d'amplitude est en partie imputable à l'amortissement contenu dans le système mécanique. En effet, pour le cas de la plaque complètement encastrée, le décrément d'amortissement mesuré est supérieur à celui de la plaque simplement supportée sur son pourtour.

Par ailleurs, la changement des conditions aux frontières ne modifient pas de façon appréciable le comportement global des courbes de résonances. Les conditions aux frontières influencent les fréquences naturelles et par conséquent la position de chacune des courbes de résonance, mais pas la forme de celles-ci. Les résonances forcées ont approximativement la même importance et les résonances paramétriques ne présentent pas de différence marquée.

4.7.7 - Réponse non-stationnaire

Pour comprendre globalement le comportement dynamique de la plaque, sous diverses conditions de chargement se rapprochant le plus possible de cas pouvant se retrouver en pratique, des essais en régime non-stationnaire ont été effectués. Ainsi, le mouvement non-stationnaire de la plaque a été mesuré pour une plaque imparfaite pour des fréquences d'excitation variant dans le temps.

Premièrement, le mouvement non-stationnaire durant un passage complet au travers de la zone de résonance a été étudié. Pour ce cas, la fréquence d'excitation initiale est choisie à l'extérieur de la zone d'instabilité paramétrique (absence de vibration paramétrique), et un balayage de la fréquence d'excitation est effectué à travers la zone de résonance paramétrique. La figure 4.98 représente un exemple de résultats obtenus lors d'un balayage croissant à différentes vitesses. Lorsque la vitesse de balayage augmente, les vibrations paramétriques apparaissent de plus en plus tard, soit lorsque la fréquence d'excitation est entrée dans la zone d'instabilité paramétrique depuis un certain

temps. Le début de la résonance paramétrique est alors plus brutale, un saut de plus en plus élevé survient et l'amplitude des vibrations atteint la branche stable de la résonance. Pour des vitesses de balayage suffisamment élevées, la résonance paramétrique est fortement atténuée, la réponse de la plaque ne peut alors plus atteindre la partie stable de la résonance. À partir d'une certaine vitesse de balayage, la résonance ne se produit même plus (pour 0.926 Hz/s à la figure 4.98).

La figure 4.99 illustre le comportement non-stationnaire d'une plaque imparfaite pour un balayage décroissant de la fréquence d'excitation. Comme dans le cas d'un balayage croissant, les vibrations paramétriques apparaissent plus tard avec l'accroissement de la vitesse de balayage. Le saut de fin de résonance paramétrique, causé par la présence du comportement en ressort mou, s'efface avec l'augmentation de la vitesse de balayage. Lorsque la vitesse de balayage devient suffisamment élevée, le résonance paramétrique ne se produit plus (même vitesse que dans le cas de balayage croissant de la fréquence, soit 0.926 Hz/s). La vitesse de balayage a donc une influence considérable sur la stabilité du système, car elle peut empêcher les résonances paramétriques de se produire, et ce quelque soit le sens de balayage de la fréquence d'excitation.

Deuxièmement, l'étude du mouvement non-stationnaire à l'intérieur de la résonance paramétrique a été abordé. Pour procéder à cette étude, la fréquence d'excitation initiale est choisie à l'intérieur de la zone de résonance (fréquence pour laquelle on retrouve des vibrations paramétriques de grande amplitude), et on effectue un balayage de la fréquence d'excitation dans la zone de résonance. Le cas d'un balayage croissant effectué à plusieurs vitesses de balayage ainsi que pour le cas stationnaire est présenté à la figure 4.100. Lorsque la vitesse de balayage est relativement faible, le mouvement non-stationnaire de la plaque est sensiblement identique au mouvement stationnaire. La principale différence est perceptible à la fin de la résonance paramétrique. Un accroissement de la vitesse de balayage engendre alors une

augmentation de la limite fréquentielle supérieure de la zone de résonance. Pour une vitesse de balayage élevée, un plateau apparaît au début du balayage de la fréquence d'excitation. Le mouvement non-stationnaire de la plaque diverge alors du mouvement stationnaire.

La figure 4.101 présente un cas de mouvement non-stationnaire à l'intérieur d'une résonance paramétrique du premier mode pour diverses vitesses de balayage décroissantes de la fréquence d'excitation. Lorsque la vitesse de balayage augmente, la fin de la résonance se produit plus tard, pour une fréquence d'excitation plus faible. De plus, le saut en fin de résonance associé à la présence d'imperfection disparaît.

Une étude similaire du mouvement non-stationnaire de plaques parfaites soumises à une excitation paramétrique a été effectuée par Ostiguy [19] . Les résultats obtenus ici présentent les mêmes principales caractéristiques, à l'exception des sauts dus aux imperfections géométriques. Par conséquent, on peut conclure que la présence d'imperfections géométriques modifie peu le comportement non-stationnaire global de plaques soumises à une excitation paramétrique.

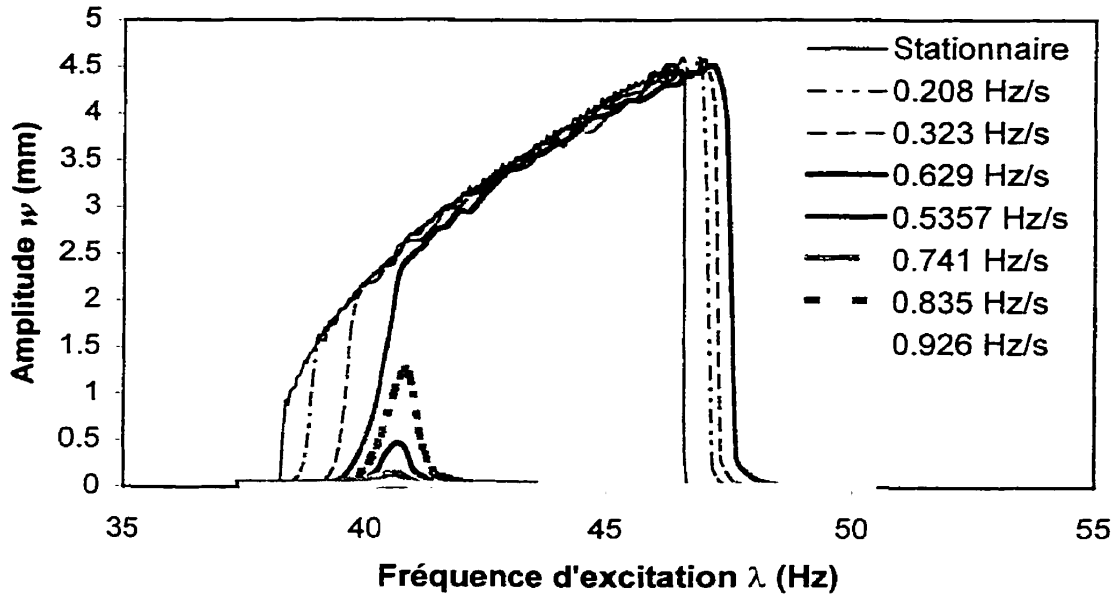


Figure 4.98 - Réponse non-stationnaire au travers la zone de résonance en balayage croissant de la fréquence d'excitation, 1er mode, plaque P3, $n_{yo} = 45$N, $n_{yl} = 40$N

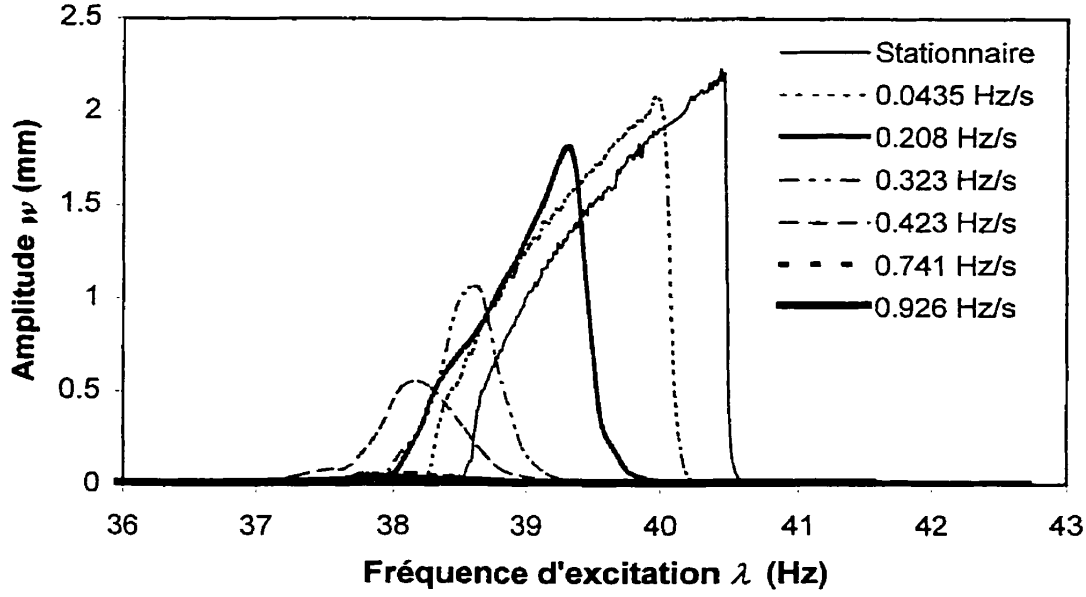


Figure 4.99 - Réponse non-stationnaire au travers la zone de résonance en balayage décroissant de la fréquence d'excitation, 1er mode plaque P3, $n_{yo} = 45$N, $n_{yl} = 40$N

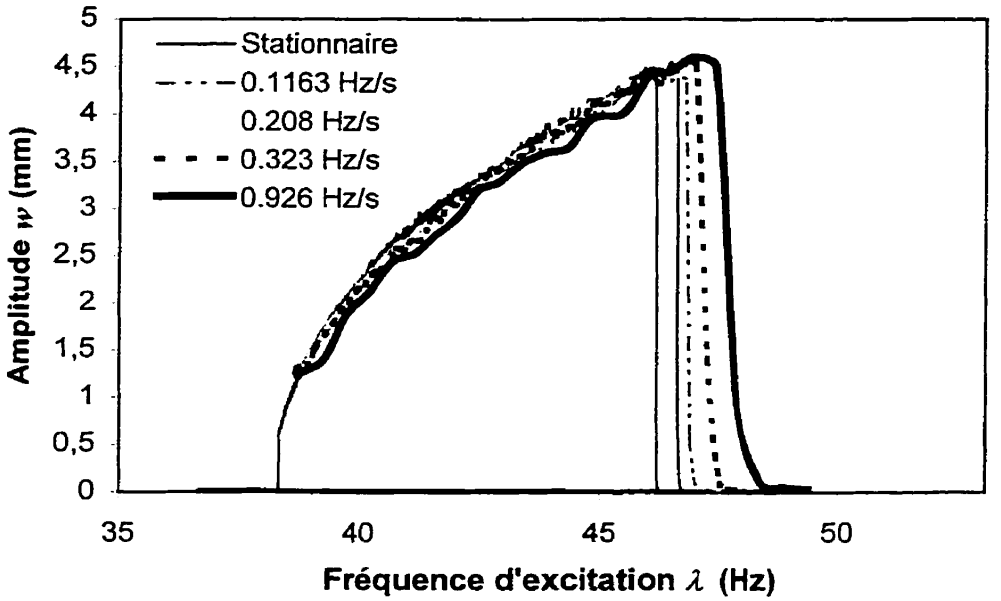


Figure 4.100 - Réponse non-stationnaire dans la zone de résonance en balayage croissant de la fréquence d'excitation, 1er mode plaque P3, $n_{yo} = 45$N, $n_{yf} = 40$N

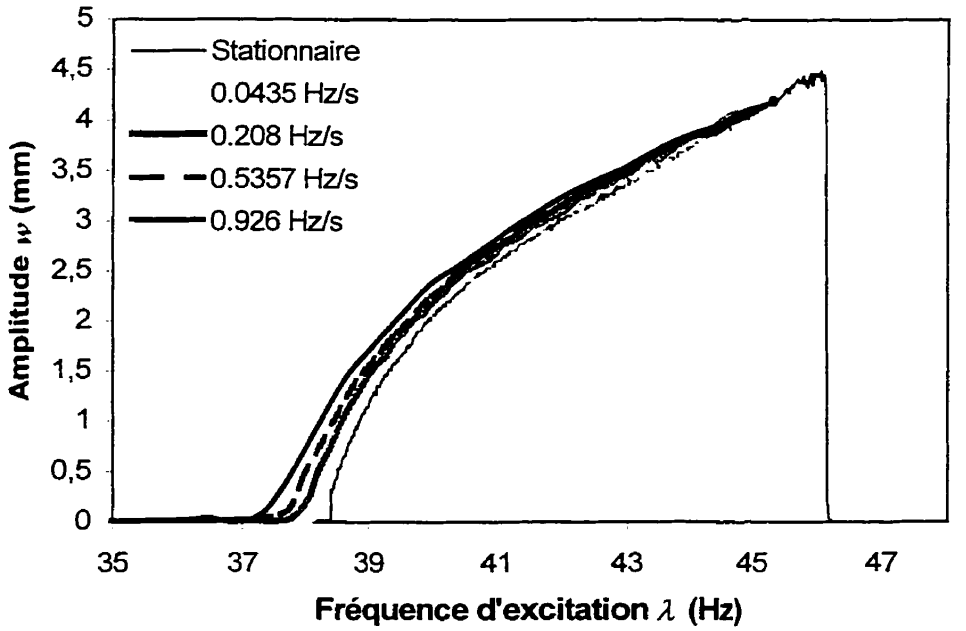


Figure 4.101 - Réponse non-stationnaire dans la zone de résonance en balayage décroissant de la fréquence d'excitation, 1er mode plaque P3, $n_{yo} = 45$N, $n_{yf} = 40$N

4.8 - Influence des imperfections géométriques sur les fréquences naturelles

Les imperfections géométriques ont aussi un effet sur les fréquence naturelles des plaques. Les fréquences naturelles des plaques imparfaites sont calculées en intégrant numériquement les équations temporelles du mouvement pour diverses fréquences d'excitation. Par la suite, les fréquences naturelles sont déterminées à partir des courbes de réponse en fréquence ainsi obtenues. En laboratoire les fréquences naturelles des plaques sont mesurées en frappant la plaque en son centre selon son axe horizontal et au tiers de celle-ci selon son axe vertical. Les trois premiers modes de la plaque sont ainsi excités et leur fréquence est déterminée en effectuant une FFT sur le signal temporel obtenu et mesuré par les capteurs capacitifs.

Pour visualiser aisément l'effet des imperfections géométriques sur les fréquences naturelles, ces dernières ont été calculées et mesurées pour les plaques étudiées sous divers chargements. Les résultats théoriques et expérimentaux obtenus (présentés aux figures 4.102 à 4.106) montrent que toutes les fréquences naturelles des plaques imparfaites augmentent avec l'amplitude de l'imperfection. Les imperfections initiales introduisent une courbure dans les plaques et en augmentent la rigidité, d'où l'accroissement des fréquences naturelles.

Pour les plaques parfaites, l'augmentation du chargement statique contribue à diminuer les fréquences naturelles, et celles-ci décroissent pour atteindre une valeur nulle lorsque la charge statique atteint la charge critique de flambage. Pour cette charge, la plaque devient instable et flambe latéralement. Au-delà de cette charge, la plaque est flambée et l'accroissement du chargement provoque une augmentation des fréquences naturelles. Pour les plaques comportant une déviation de l'état plan, des études montrent que les fréquences naturelles ne décroissent pas jusqu'à zéro lorsque la charge statique augmente (Sassi [30], Leissa [110] et Lurie[111]). Lorsque l'amplitude de l'imperfection est faible, on observe que les fréquences naturelles décroissent jusqu'à une valeur non

nulle après laquelle elles commencent à croître. Contrairement au cas des plaques parfaites, les fréquences naturelles n'atteignent pas nécessairement leur valeur minimale lorsque la charge statique est égale à la charge critique de flambage.

Pour les essais expérimentaux effectués, la charge statique appliquée sur les plaques est toujours inférieure à la charge critique de flambage ($n_{yo} \leq 0{,}35\ n^*$). Pour ces cas, on note que lorsque l'amplitude de l'imperfection est faible, le comportement de la plaque se rapproche de celui d'une plaque parfaite. En effet, l'augmentation du chargement statique en deçà de la charge critique de flambage contribue à diminuer les fréquences naturelles. Pour les cas où l'imperfection est plus importante (figures 4.104 et 4.106, $w_{0i} > 0{,}7$), l'accroissement du chargement statique produit premièrement une décroissance des fréquences naturelles. Celles-ci passent par un minimum pour une faible valeur de la charge statique. Pour les charges supérieures, on note un accroissement des fréquences naturelles.

Pour toutes les plaques étudiées, on note une bonne correspondance entre les résultats numériques et expérimentaux. Le seul cas pour lequel l'écart est important est celui de la plaque comportant la plus forte imperfection (plaque P4, figure 4.104). Pour cette plaque, l'imperfection dépasse les limites du modèles théoriques ($w_{0i} > h$). Il est ainsi possible que le modèle théorique ne décrive plus correctement le comportement de la plaque. Néanmoins, pour tous les cas, l'écart entre les résultats est faible lorsque la charge statique est minime mais s'accroît avec le chargement statique. Plus la charge statique est augmentée, plus le système se rapproche des limites du modèle théorique et par conséquent plus l'écart entre les résultats expérimentaux et numériques s'accroît. D'autre part, aucun phénomène de type revirement ou coalescence pour les fréquences naturelles n'est observé dans les limites imposées par le modèle théorique.

Les figures 4.107 à 4.109 présentent les fréquences naturelles d'une plaque simplement supportée pour divers niveaux d'imperfection suivant respectivement le

premier, le deuxième et le troisième mode de vibration. Par la suite, des calculs similaires ont été effectués pour les 3 autres types de conditions aux limites considérés, soit lorsque les arêtes chargées sont simplement supportées et les autres encastrées (S^cE, figures 4.110 à 4.112), lorsque les arêtes chargées sont encastrées et les autres simplement supportées (E^cS, figures 4.113 à 4.115), et finalement lorsque toutes les arêtes sont encastrées (E^cE, figures 4.116 à 4.118).

Pour tous les cas considérés, l'augmentation de l'amplitude d'une imperfection se traduit par une augmentation de courbure de la plaque qui engendre à son tour une augmentation de la rigidité latérale de cette dernière. On note ainsi une augmentation des fréquences naturelles avec l'amplitude de l'imperfection. Cet effet est plus marqué pour les cas pour lesquels l'imperfection géométrique est similaire au troisième mode de vibration. Aucune différence appréciable n'est observable entre la tendance des courbes obtenues pour les diverses conditions aux limites. Les plus faibles fréquences naturelles sont toujours observées lorsque la plaque est simplement supportée (S^cS), suivi par la plaque simplement supportée encastrée (S^cE), suivi par la plaque encastrée simplement supportée (E^cS) et finalement les fréquences les plus élevées se retrouvent lorsque la plaque est complètement encastrée (E^cE).

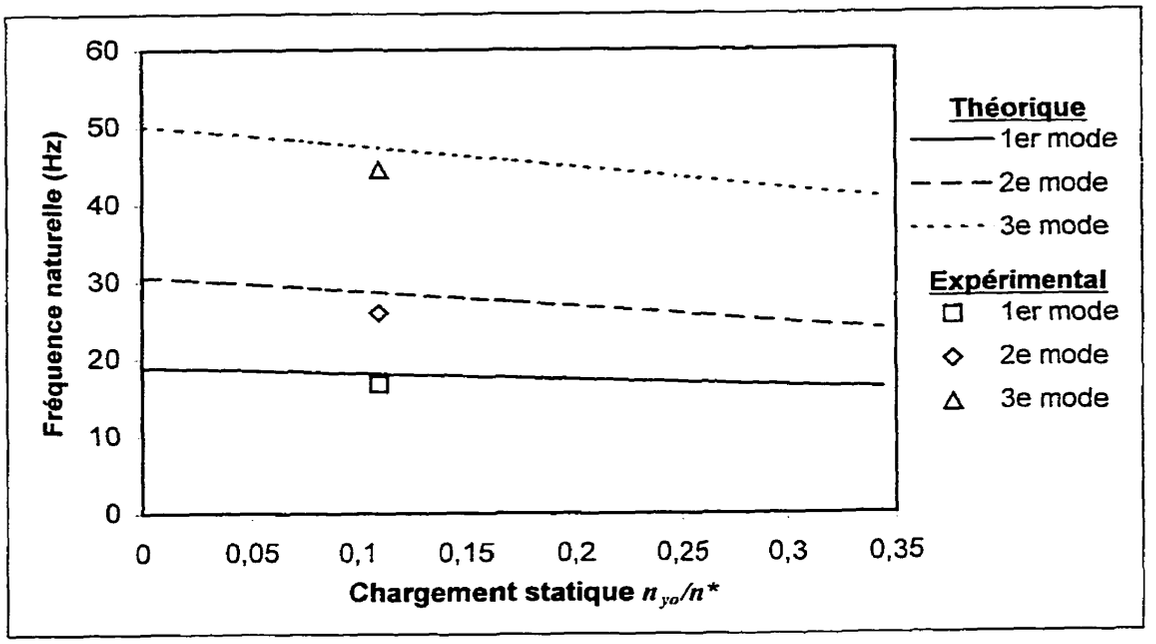


Figure 4.102 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P2, S^cS, $\nabla = 0,1$

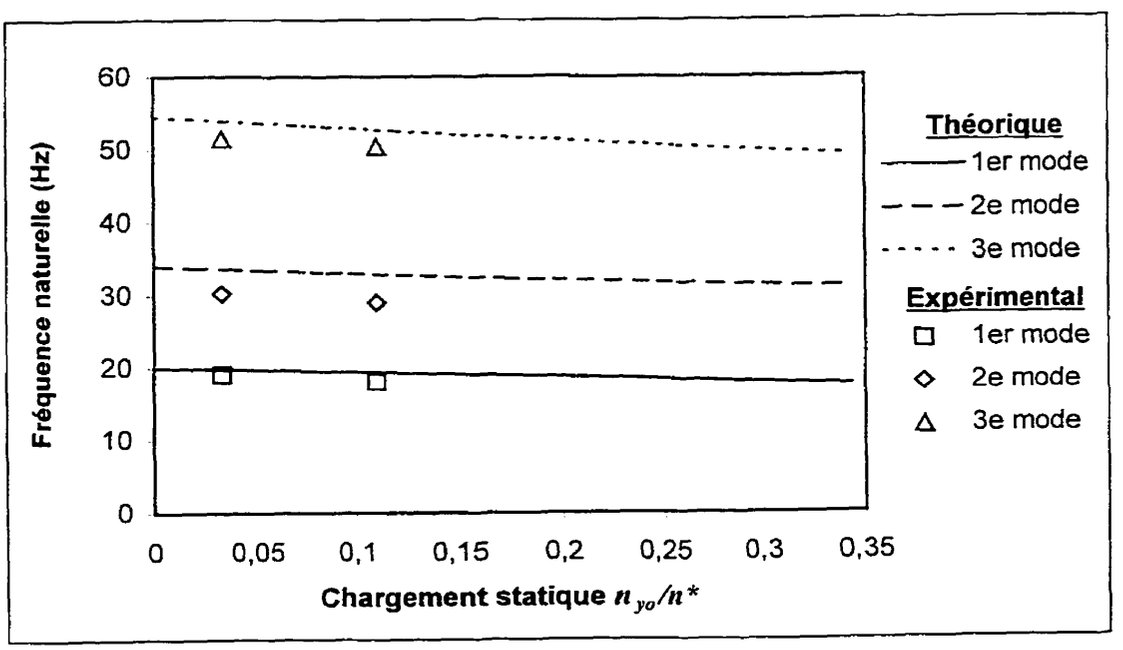


Figure 4.103 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P3, S^cS, $\nabla = 0,1$

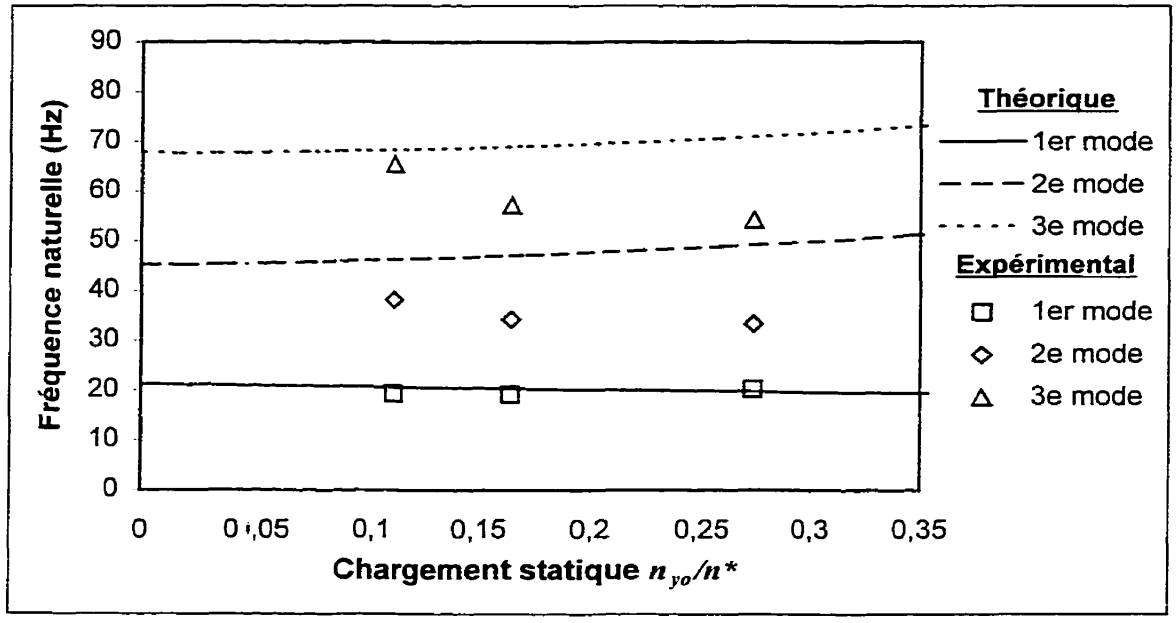


Figure 4.104 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P4, S^cS, $\nabla = 0,1$

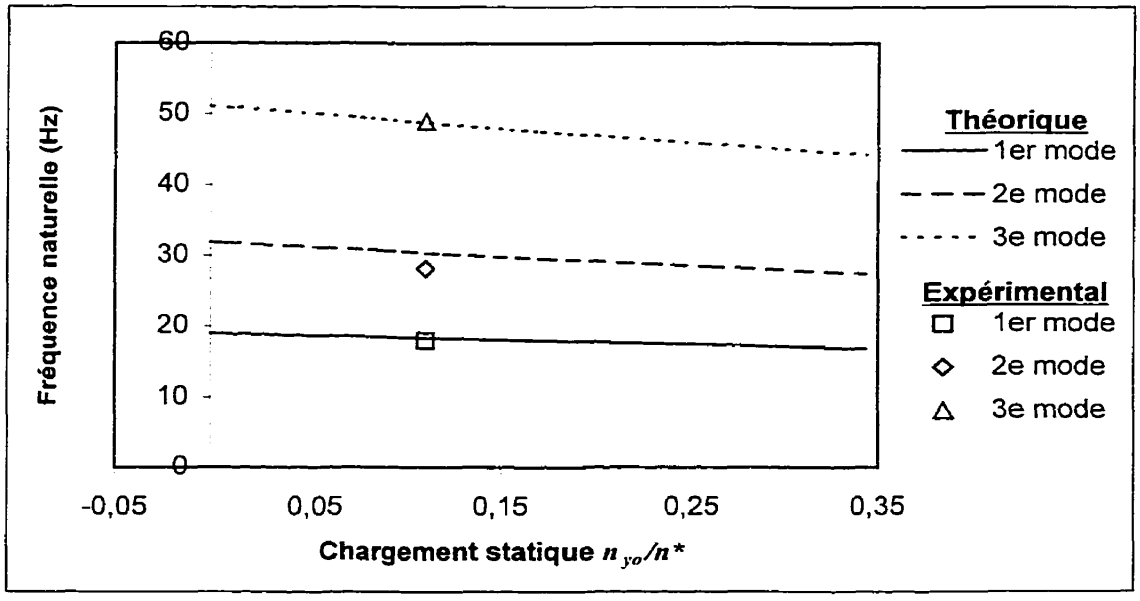


Figure 4.105 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P5, S^cS, $\nabla = 0,1$

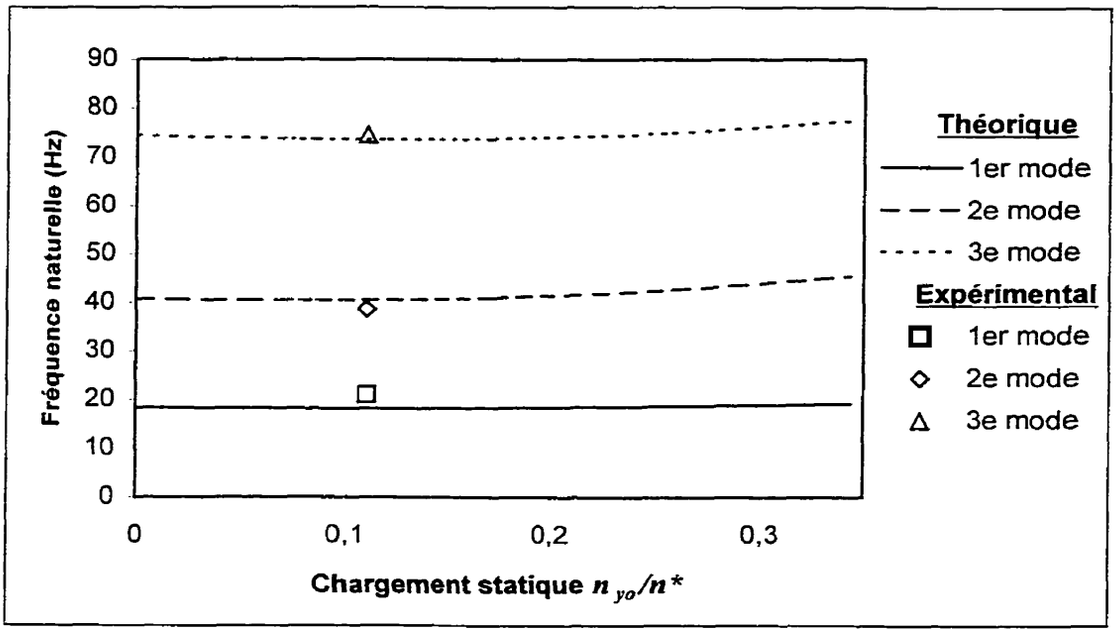


Figure 4.106 - Influence du chargement statique sur les fréquences naturelles, plaque P6, S^cS, $\nabla = 0,1$

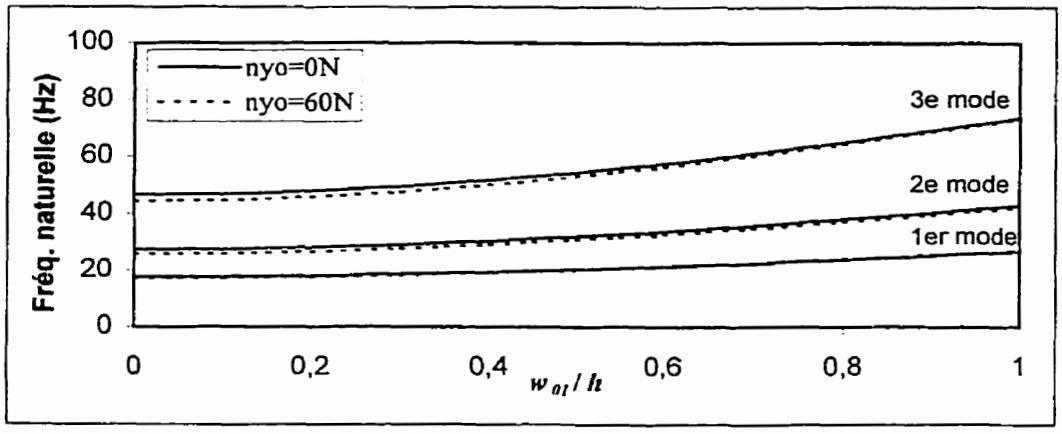


Figure 4.107 - Fréquences naturelles, plaque P3 , S^cS, $\nabla = 0,1$

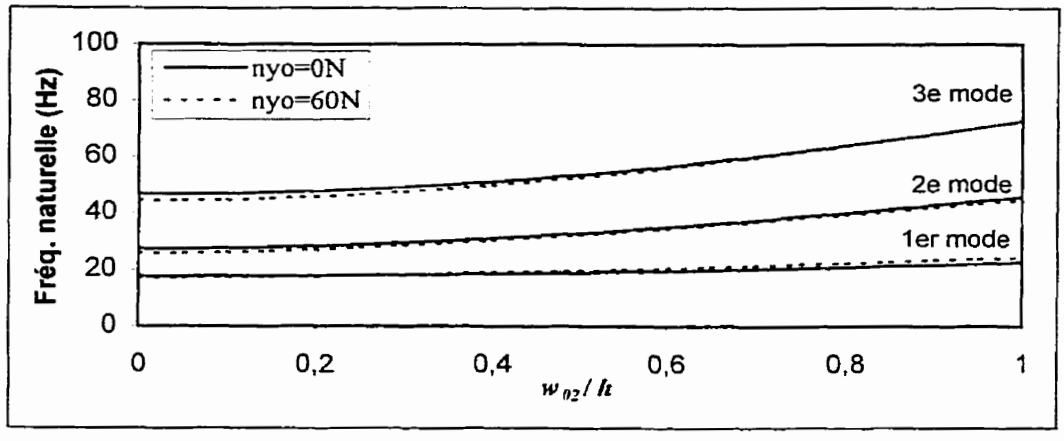


Figure 4.108 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cS, $\nabla = 0,1$

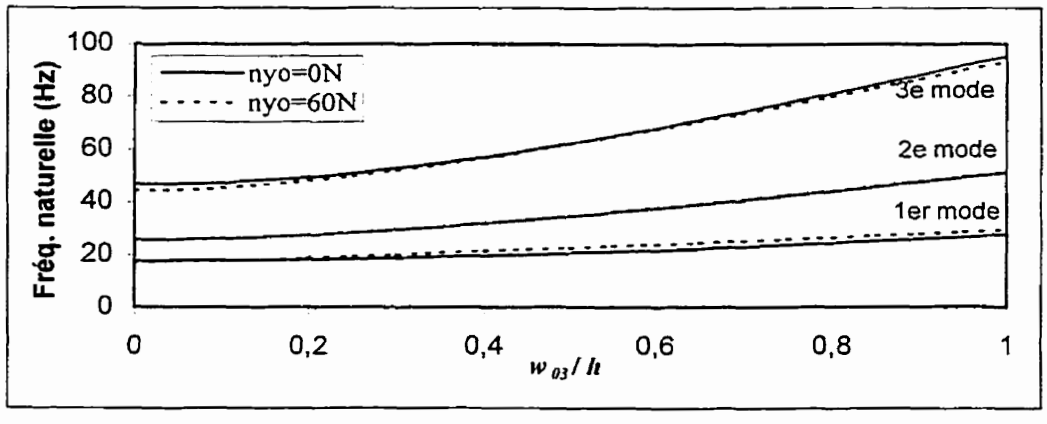


Figure 4.109 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cS, $\nabla = 0,1$

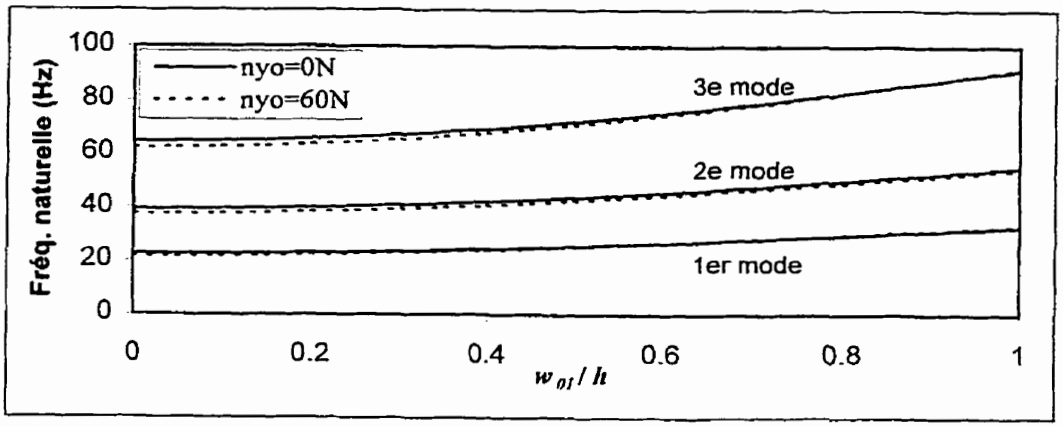


Figure 4.110 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cE, $\nabla = 0,1$

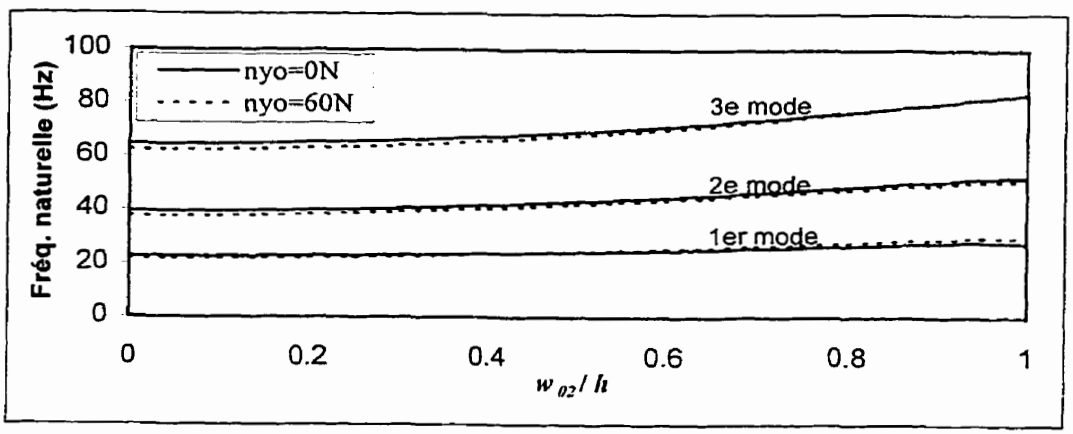


Figure 4.111 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cE, $\nabla = 0,1$

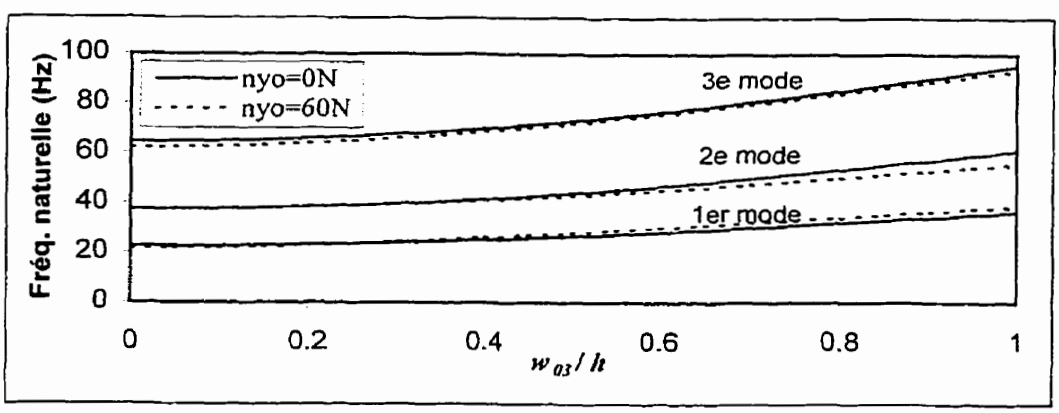


Figure 4.112 - Fréquences naturelles, plaque P3, S^cE, $\nabla = 0,1$

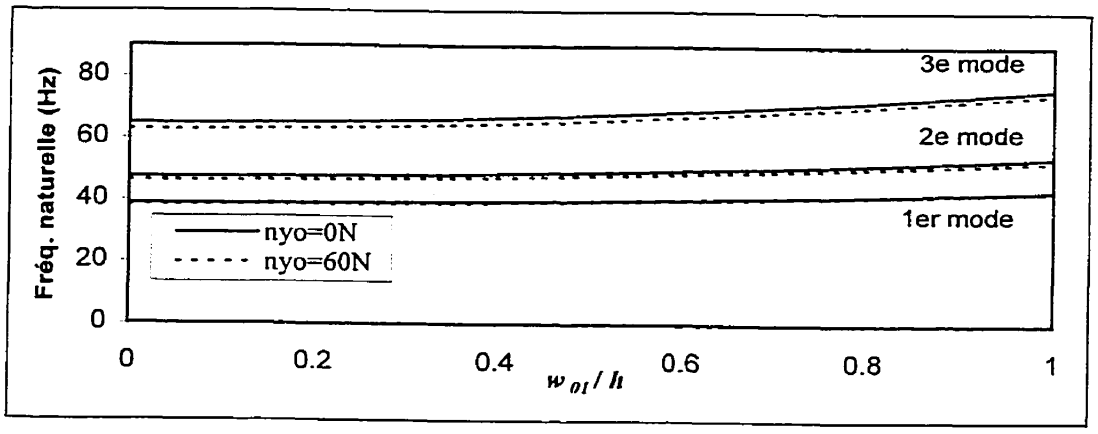


Figure 4.113 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cS, $\nabla = 0,1$

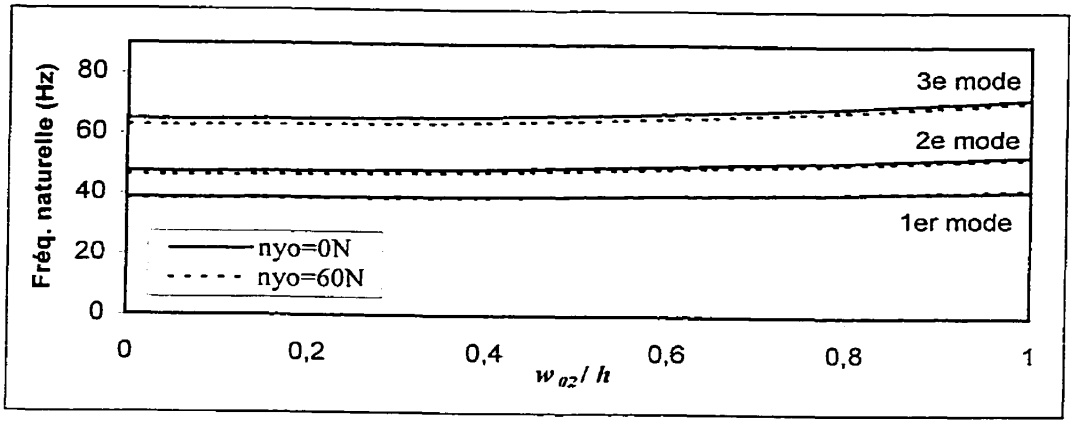


Figure 4.114 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cS, $\nabla = 0,1$

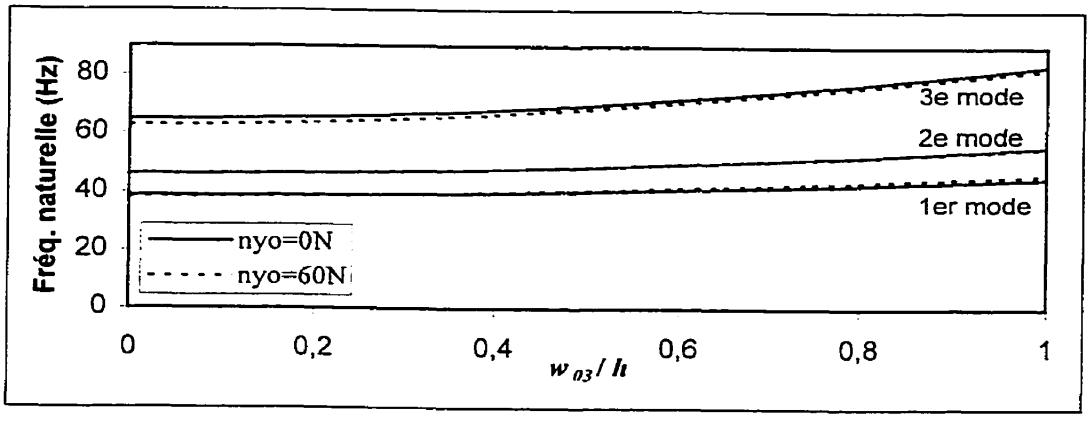


Figure 4.115 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^cS, $\nabla = 0,1$

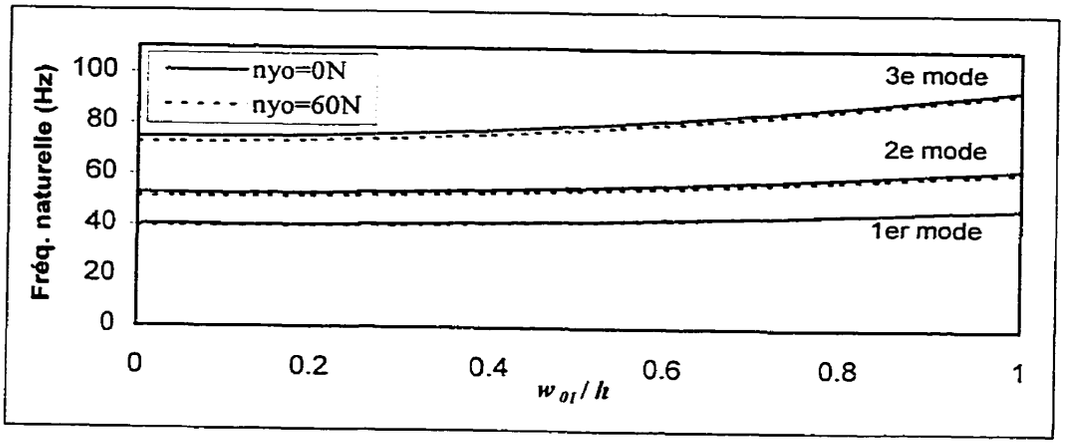


Figure 4.116 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^{c}E, $\nabla = 0,1$

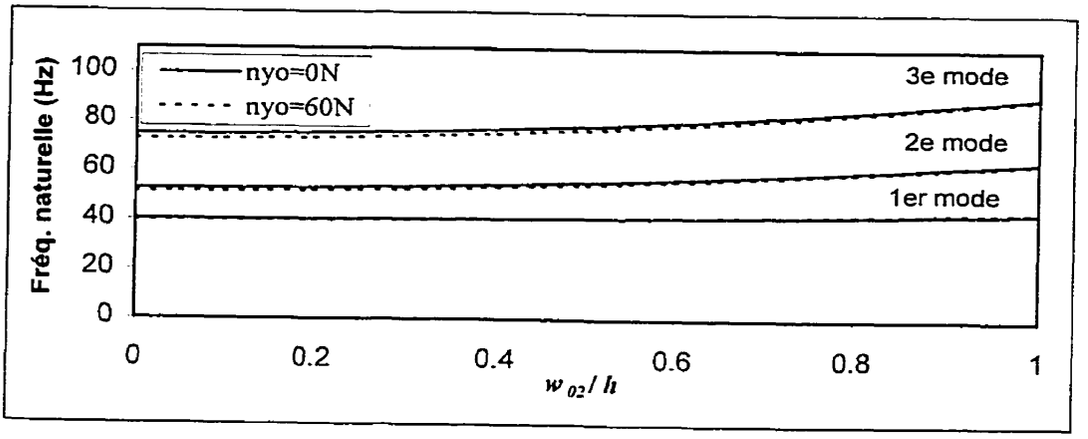


Figure 4.117 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^{c}E, $\nabla = 0,1$

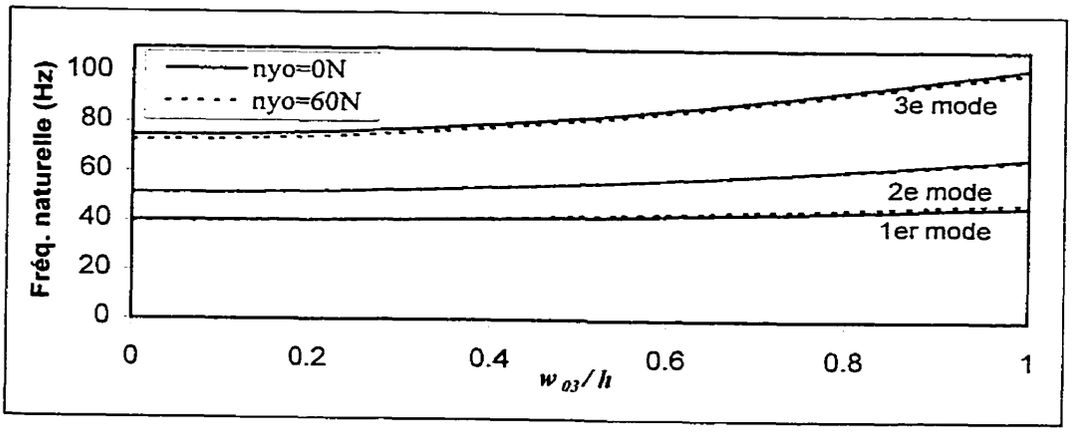


Figure 4.118 - Fréquences naturelles, plaque P3, E^{c}E, $\nabla = 0,1$

4.9 - Forme des modes de vibration

La forme des modes de vibration est une caractéristique importante du comportement dynamique. Dans le modèle théorique utilisé pour décrire le comportement des plaques géométriquement imparfaites, les modes de vibration comportent qu'une seule demi-onde dans la direction perpendiculaire au chargement. De plus, la forme des modes de vibration des plaques imparfaites est supposée identique à celle des plaques parfaites. Ces hypothèses suggèrent que la forme des modes de vibration n'est pas affectée par la variation de géométrie qu'impose les imperfections. Lors des essais expérimentaux effectués, la forme des modes de vibration a été enregistrée dans le but de vérifier ces hypothèses.

Tous les résultats présentés dans cette section ont été normalisés pour obtenir une amplitude maximale unitaire, dans le but de comparer l'allure des modes entre eux. La partie pointillée y représente l'extrapolation des mesures effectuées dans le but d'obtenir la forme complète des modes de vibration car le montage ne permet pas d'effectuer un relevé de la forme de la plaque pour cette partie. Lors des essais expérimentaux, l'amplitude du mouvement a été mesuré pour une position (x,y) donnée. L'amplitude étant toujours positive, les résultats ainsi obtenus ne sont pas très représentatifs de la forme réelle des modes de vibration. Les résultats ont par conséquent été traités pour mettre le signe approprié devant l'amplitude mesurée.

En premier lieu, la forme des modes de vibration selon la direction x a été étudiée. Ainsi, la forme des trois premiers modes de vibration selon la direction x a été mesurée pour une plaque imparfaite simplement supportée. Les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.119. Pour une plaque imparfaite, les modes de vibration comportent une seule demi-onde dans la direction perpendiculaire au chargement et cette forme est constante pour tous les modes de vibration. La figure 4.120 quant à elle illustre l'influence de

l'amplitude de l'imperfection sur la forme des modes de vibrations selon x. Le cas présenté correspond aux résultats obtenus pour le premier mode de vibration; les résultats obtenus avec le deuxième et le troisième mode de vibration sont similaires. Dans ce cas, l'influence des imperfections est quasi inexistante. Par conséquent, on peut dire que les hypothèses concernant la forme des modes de vibration suivant x sont réelles et vérifiables.

En second lieu, la forme des trois premiers modes de vibration d'une plaque simplement supportée a été mesurée suivant y pour trois plaques ayant une imperfection suivant le premier mode d'amplitude distincte. Les résultats obtenus sont illustrés aux figures 4.121 à 4.123. Pour les cas présentés, la présence des imperfections géométriques ne modifie pas de façon significative la forme des modes de vibration. On note cependant la plus grande modification de la forme des modes de vibration pour la plaque ayant la plus forte imperfection (P4). Les imperfections des différentes plaques imparfaites n'ont pas exactement la même forme, ce qui peut aussi influencer les résultats obtenus.

Les imperfections géométriques ont donc une certaine influence sur la forme des modes de vibration. Néanmoins, cette influence demeure minime dans les cas où l'amplitude de l'imperfection est inférieure où égale à l'épaisseur de la plaque. D'autre part, les imperfections des différentes plaques imparfaites n'ont pas exactement la même forme, ce qui peut aussi influencer les résultats. Par conséquent, l'hypothèse du modèle théorique concernant la forme des modes de vibration est valide dans le domaine d'utilisation du modèle lui-même.

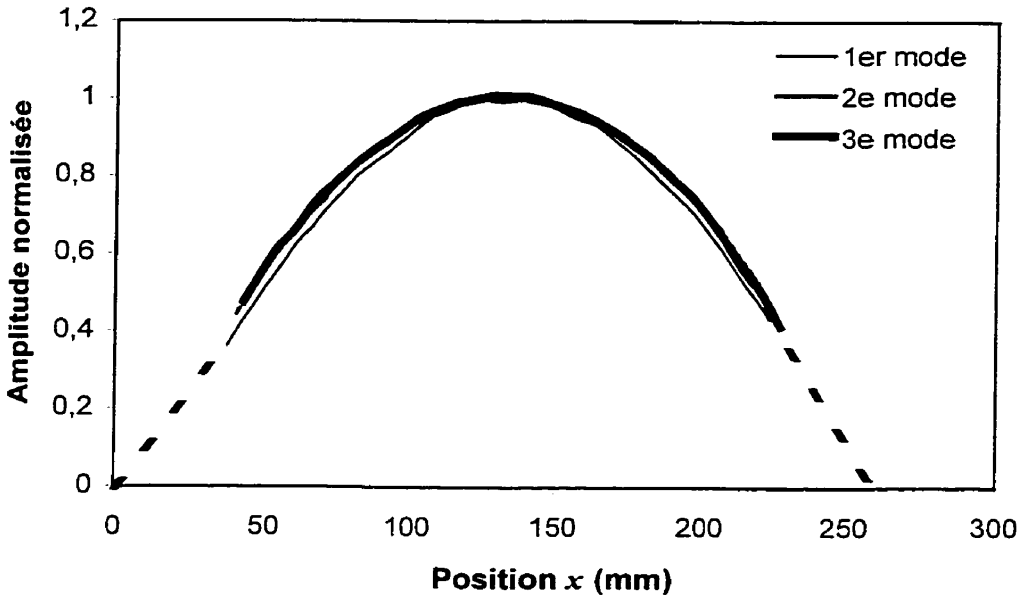


Figure 4.119 - Forme des 3 premiers modes de vibration selon x pour P3

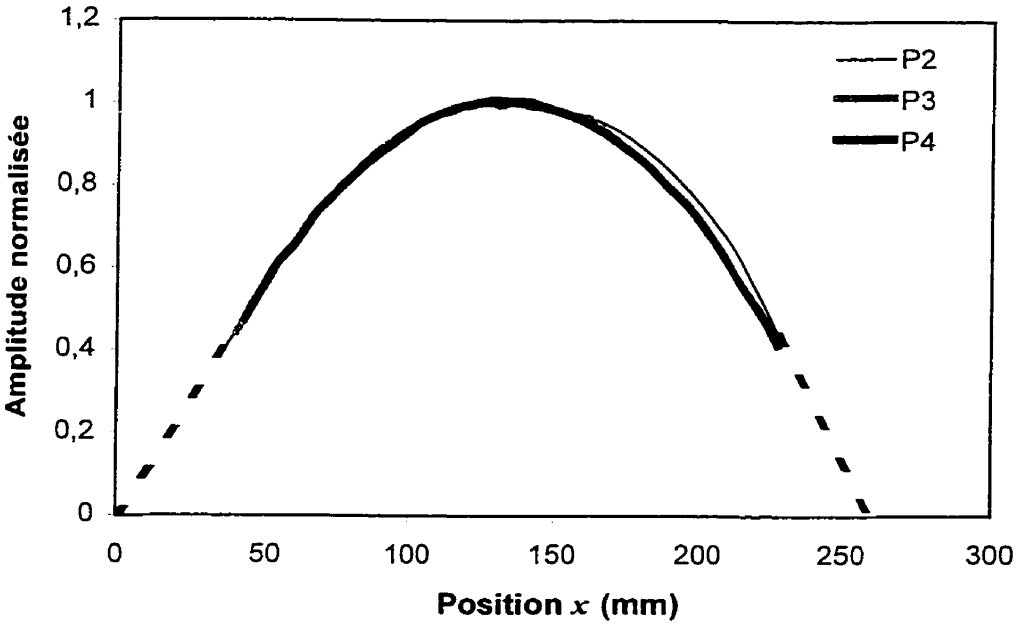


Figure 4.120 - Forme du premier mode de vibration selon x pour divers niveaux d'imperfection

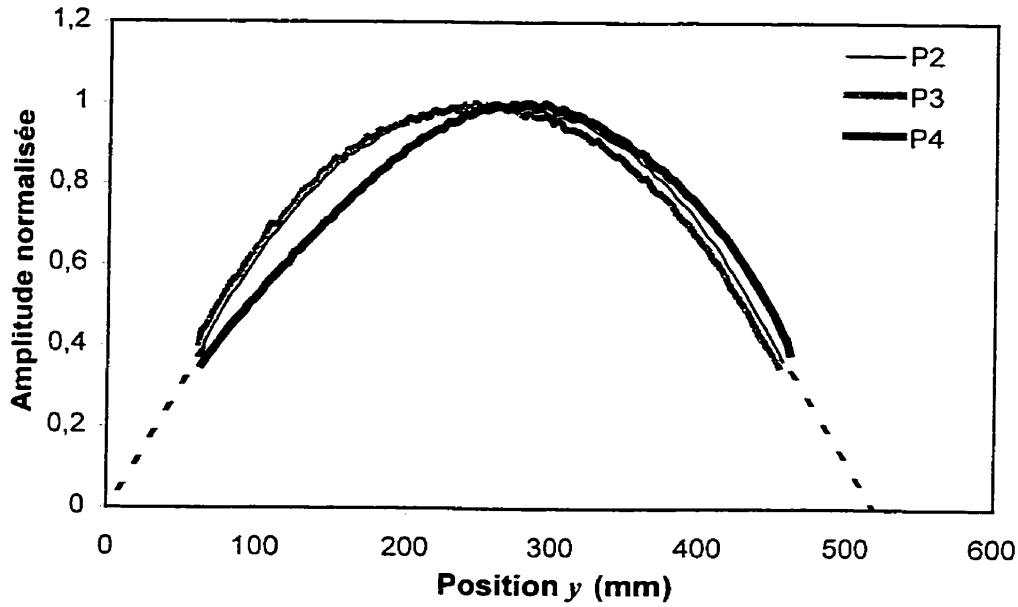


Figure 4.121 - Forme du 1er mode de vibration selon y pour divers niveaux d'imperfection

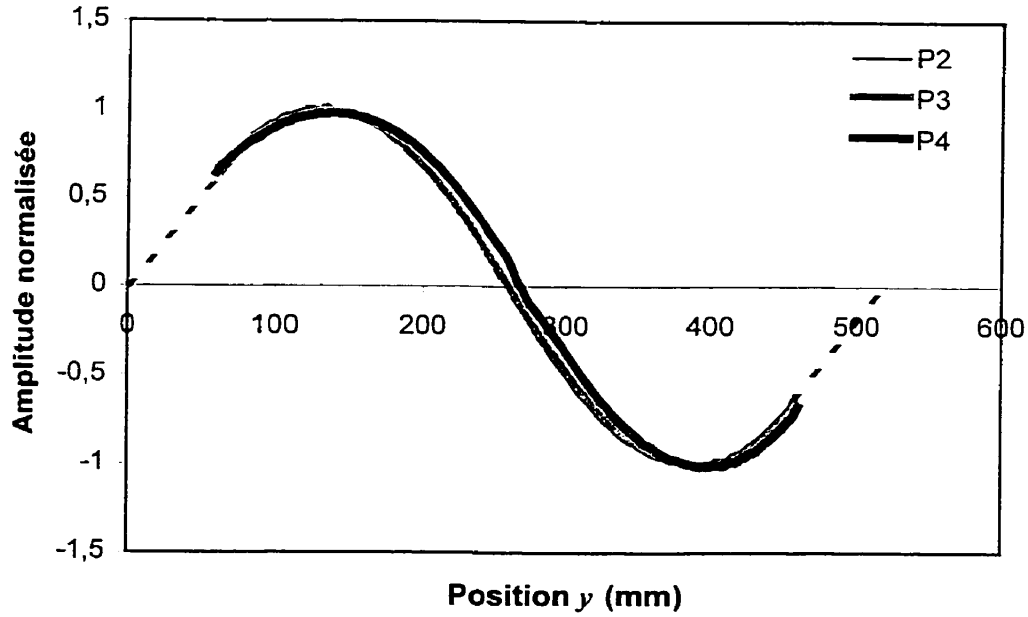


Figure 4.122 - Forme du 2ième mode de vibration selon y pour divers niveaux d'imperfection

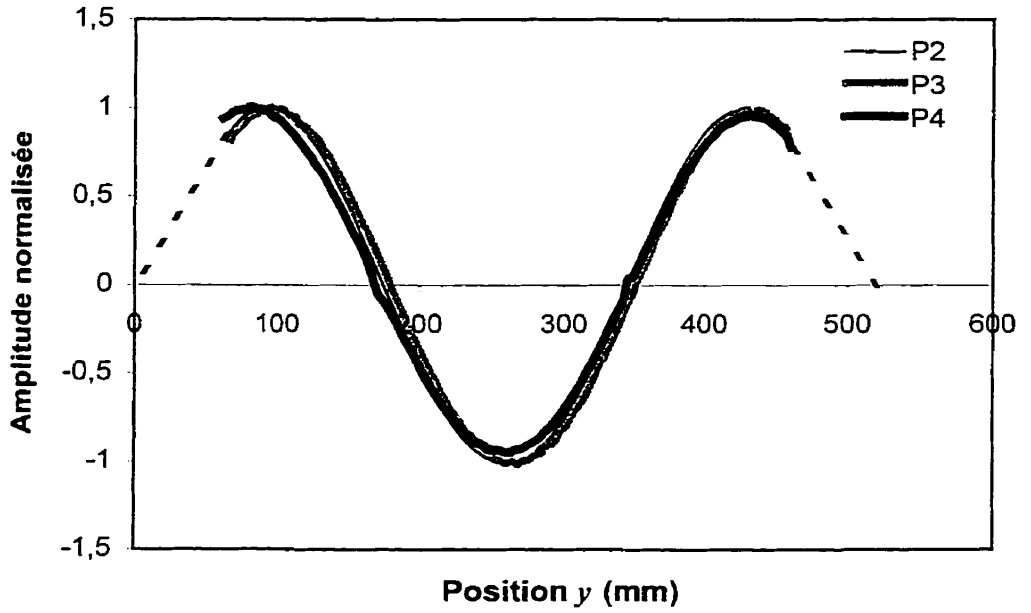


Figure 4.123 - Forme du 3ième mode de vibration selon y pour divers niveaux d'imperfection

4.10 - Résonances internes

En plus des résonances forcées et paramétriques, des résonances internes sont aussi fréquemment observées lorsqu'une plaque géométriquement imparfaite est soumise à une excitation paramétrique. La présence de ces résonances internes est reliée aux fréquences modales de la plaque. Celles-ci sont influencées par les caractéristiques physiques de la plaque, par ces conditions aux limites, par l'ampleur de la charge statique appliquée dans son plan et par la présence d'imperfections géométriques. Par conséquent, ce type de résonance est difficilement prévisible, ce qui explique le faible nombre d'études qui leur a été consacrées.

4.10.1 - Rapport de forme optimal

Des travaux théoriques ont été effectués antérieurement [27] pour tenter de simplifier l'étude expérimentale des résonances internes. Le but de ceux-ci était de déterminer un rapport de forme permettant l'obtention de résonances internes multiples pour une plaque parfaite, simplement supportée. La principale conclusion obtenue de ces travaux est qu'il existe un rapport de forme pour lequel deux fréquences naturelles (i, j) ont toujours le même rapport de proportionnalité, quelle que soit la charge statique appliquée et la largeur de la plaque. Ce rapport de forme est celui pour lequel les modes (i, j) ont la même charge critique, soit $R = \sqrt{ij}$. Par conséquent, pour une telle plaque, il devrait exister la même relation entre les fréquences du premier mode et du second mode de vibration pour toute charge statique appliquée, et ainsi le rapport entre ces fréquences devrait demeurer constant.

Des essais expérimentaux ont été entrepris dans le but de vérifier ces résultats théoriques et de comprendre l'existence des résonances internes. Les résultats de ceux-ci sont présentés aux figures 4.124 à 4.126. Pour ces trois essais, le comportement du premier et du second mode de vibration est toujours le même, et ce pour différents chargements statiques. Pour ces trois cas, on observe d'abord une résonance forcée du premier mode de vibration, résonance durant laquelle il se développe une résonance interne du second mode ($\Omega_2 = 2\Omega_1$). Par la suite, le deuxième mode entre en résonance forcée, ce qui empêche la résonance paramétrique du premier mode de se produire (on remarque cependant des vibrations paramétriques de très faible amplitude). Finalement apparaît la résonance paramétrique du deuxième mode, accompagnée d'une résonance interne du premier mode ($\Omega_2 = 2\Omega_1$).

Un tel comportement constant pour le premier et le second mode de vibration, et rencontré quel que soit le chargement statique pour une plaque S^cS, vient vérifier les

conclusions de l'étude théorique effectuée précédemment. Cette constance dans le comportement ne se retrouve cependant pas pour le cas d'une plaque S^cE (figures 4.127 à 4.129), E^cS (figures 4.130 à 4.132), et E^cE (figures 4.133 à 4.135), ce qui ne vient en rien contredire les résultats théoriques précédents, axés sur le cas d'une plaque S^cS.

Pour les conditions aux limites comportant un encastrement, il serait nécessaire de faire une autre étude pour rechercher un rapport de forme idéal pour l'étude des résonances internes multiples. Cependant, à la lumière des résultats obtenus, le rapport de forme optimal, tel que calculé pour une plaque simplement supportée, permet d'obtenir un bon nombre de résonances internes pour les autres conditions de support et peut ainsi être utilisé. Il ne s'avère donc pas nécessaire de faire une étude approfondie pour les autres conditions aux limites.

Aux figures 4.127 et 4.129, une résonance combinée est présente. Cette résonance implique le premier et le second mode de vibration, et se produit lorsque $\Omega_1 + \Omega_2 = \lambda$. Pour ce type de résonance, la force d'excitation excite directement le premier et le second modes qui entrent alors en résonance.

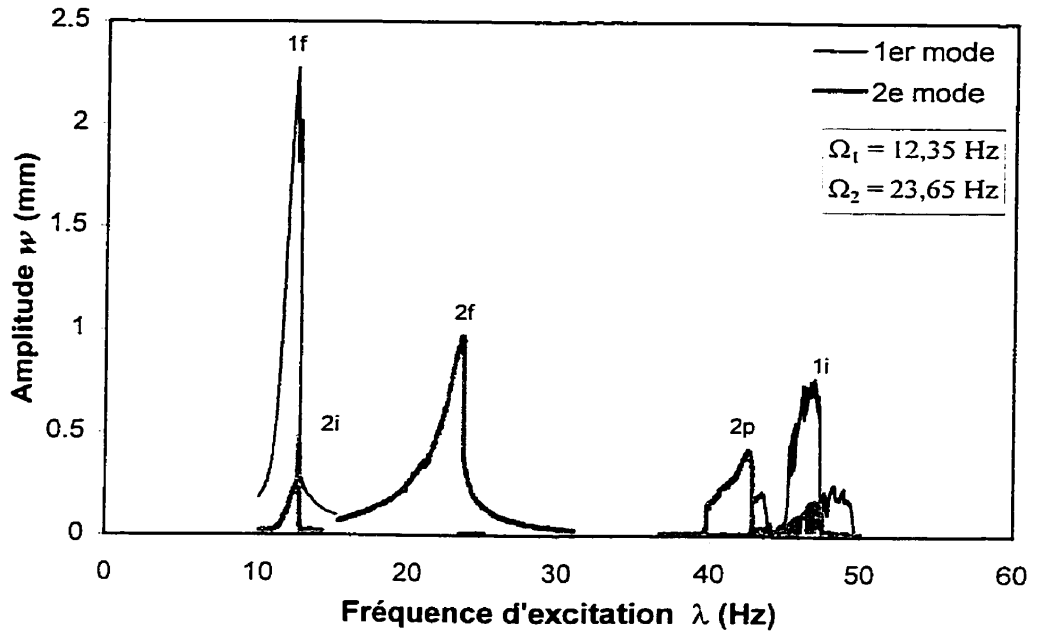


Figure 4.124 – Résonances internes, plaque P1, S^{c}S, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

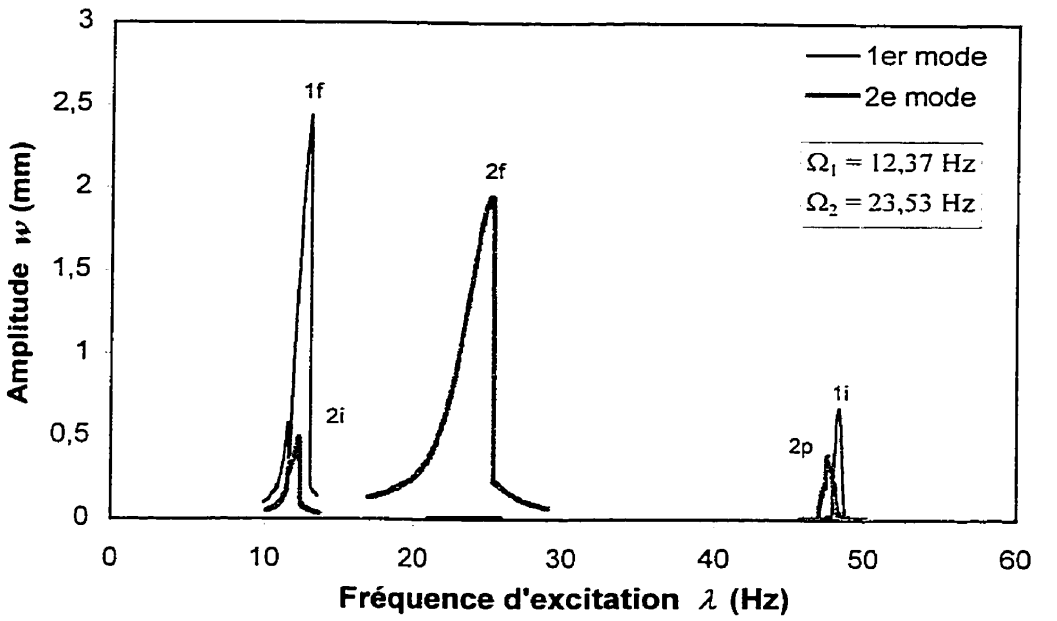


Figure 4.125 – Résonances internes, plaque P1, S^{c}S, $P_{cr} = 0{,}14$, $\mu = 0{,}0636$

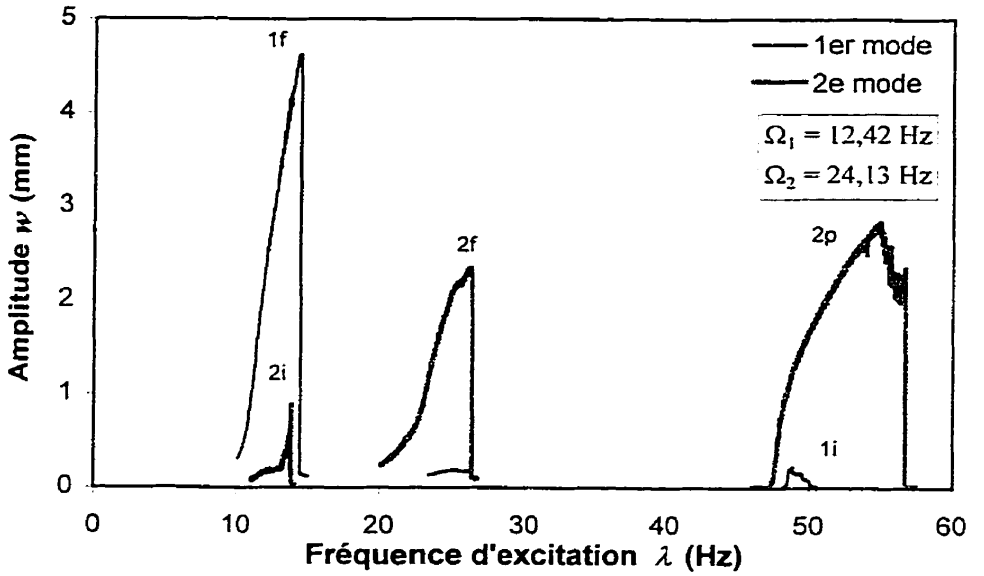


Figure 4.126 – Résonances internes, plaque P1, S^{c}S, $P_{cr} = 0{,}16$, $\mu = 0{,}0822$

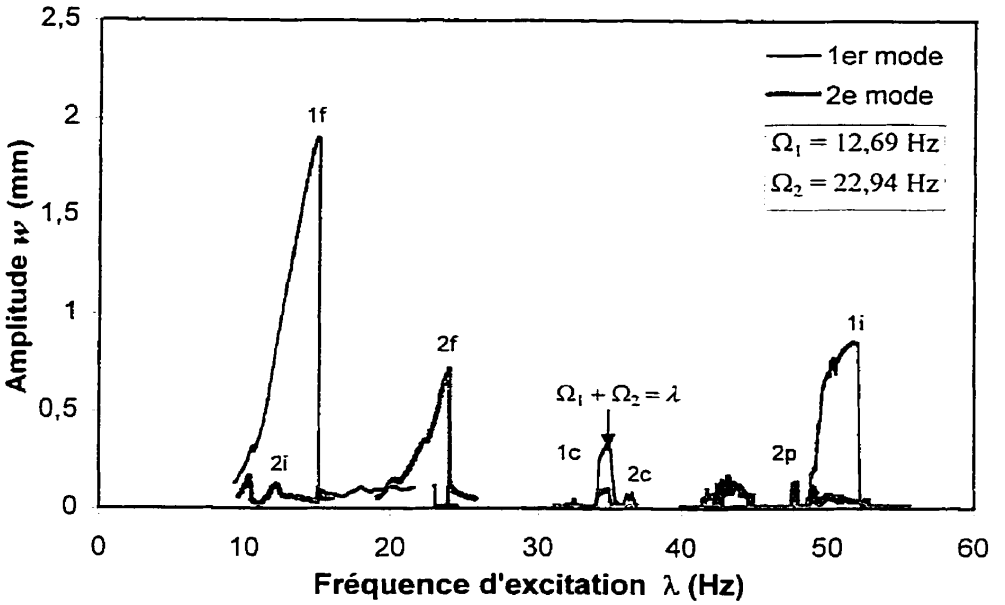


Figure 4.127 – Résonances internes, plaque P1, S^{c}E, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

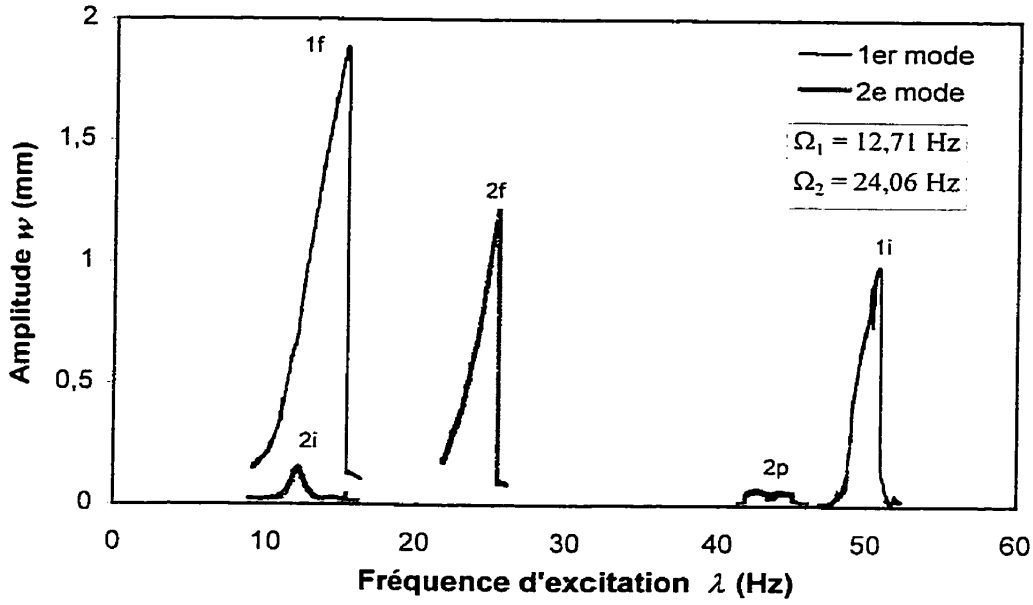


Figure 4.128 – Résonances internes, plaque P1, S^{c}E, $P_{cr} = 0{,}14$, $\mu = 0{,}0636$

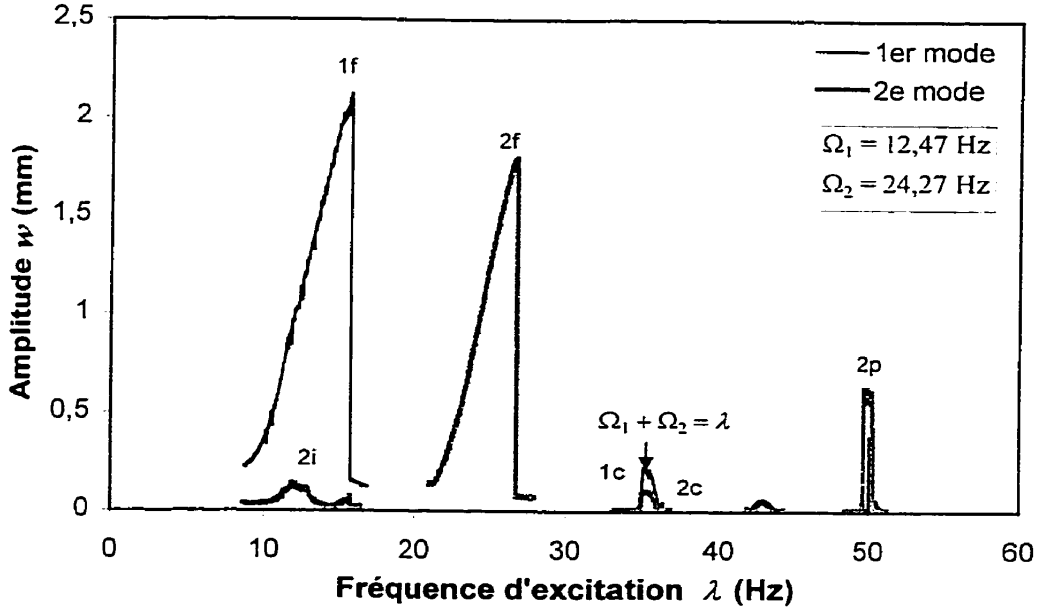


Figure 4.129 – Résonances internes, plaque P1, S^{c}E, $P_{cr} = 0{,}16$, $\mu = 0{,}0822$

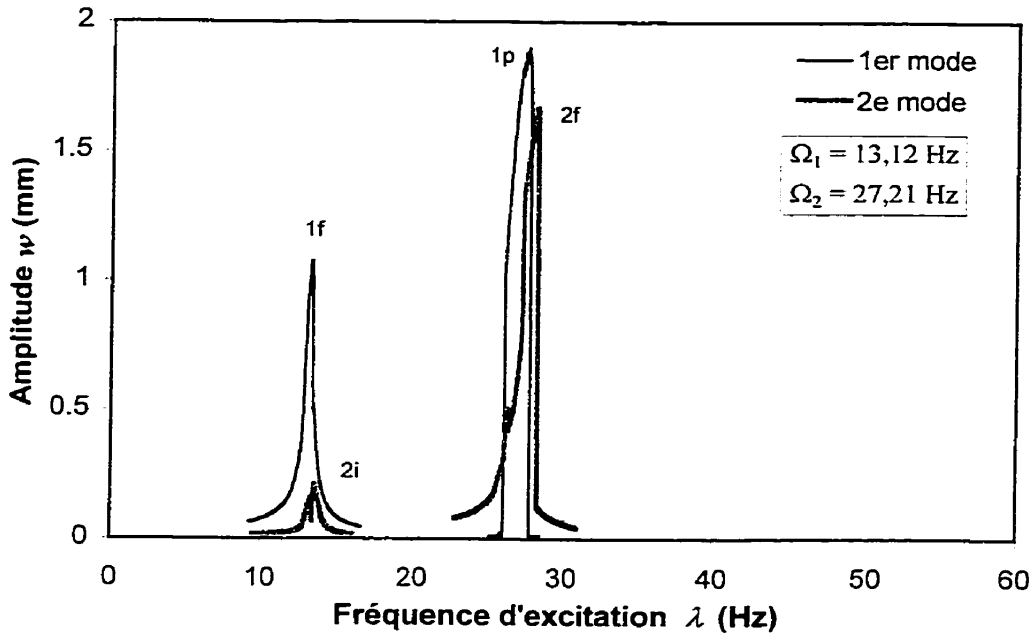


Figure 4.130 – Résonances internes, plaque P1, E^{c}S, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$

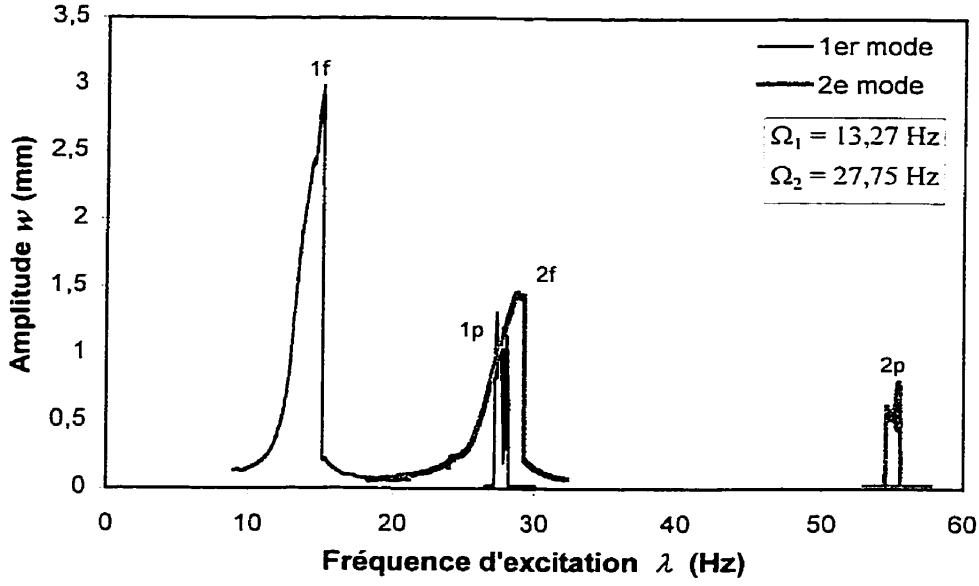


Figure 4.131 – Résonances internes, plaque P1, E^{c}S, $P_{cr} = 0{,}14$, $\mu = 0{,}0636$

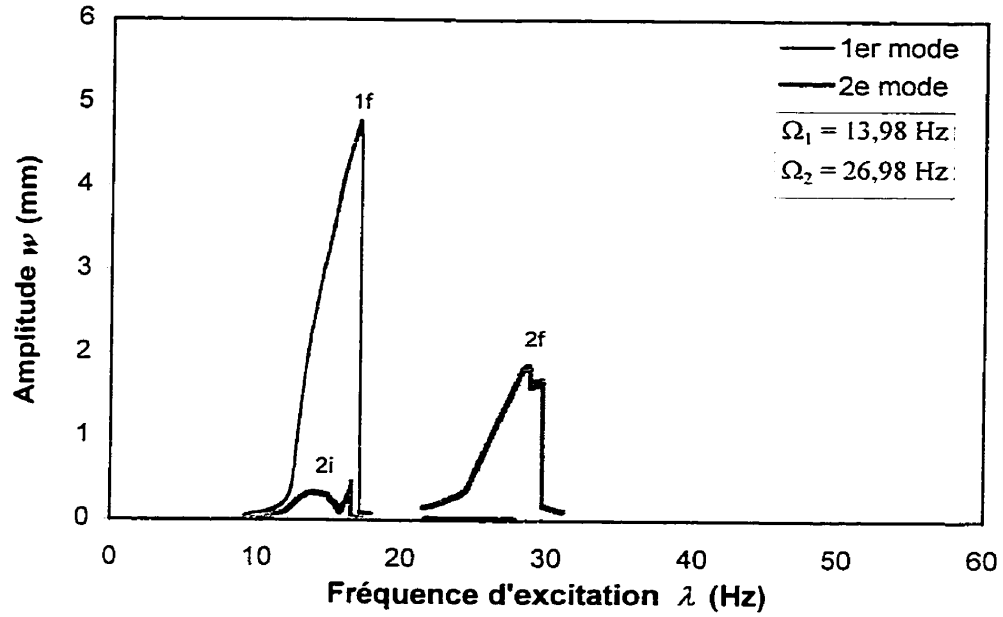


Figure 4.132 – Résonances internes, plaque P1, E^{c}S, $P_{cr} = 0,16$, $\mu = 0,0822$

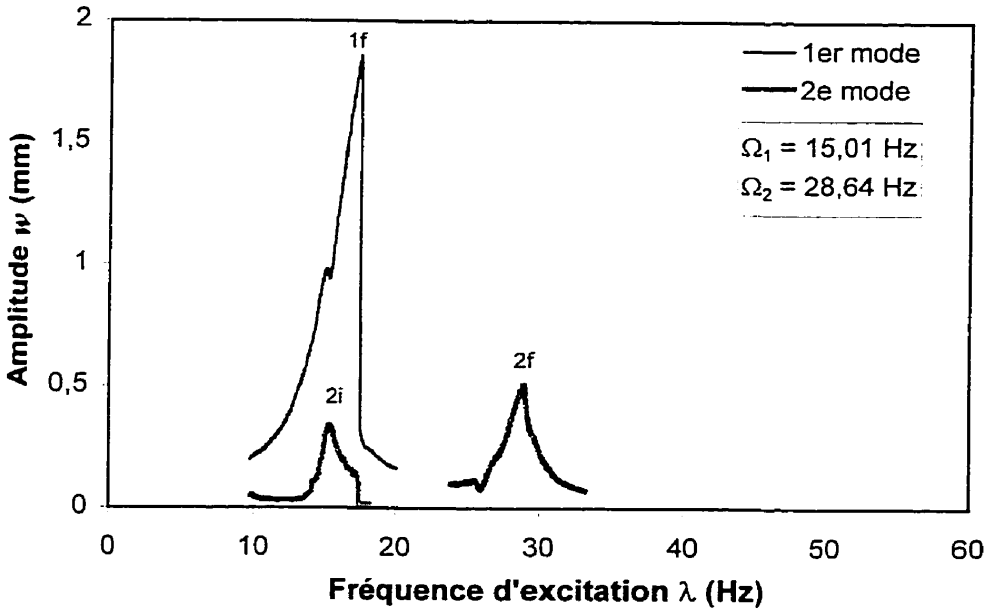


Figure 4.133 – Résonances internes, plaque P1, E^{c}E, $P_{cr} = 0,11$, $\mu = 0,0459$

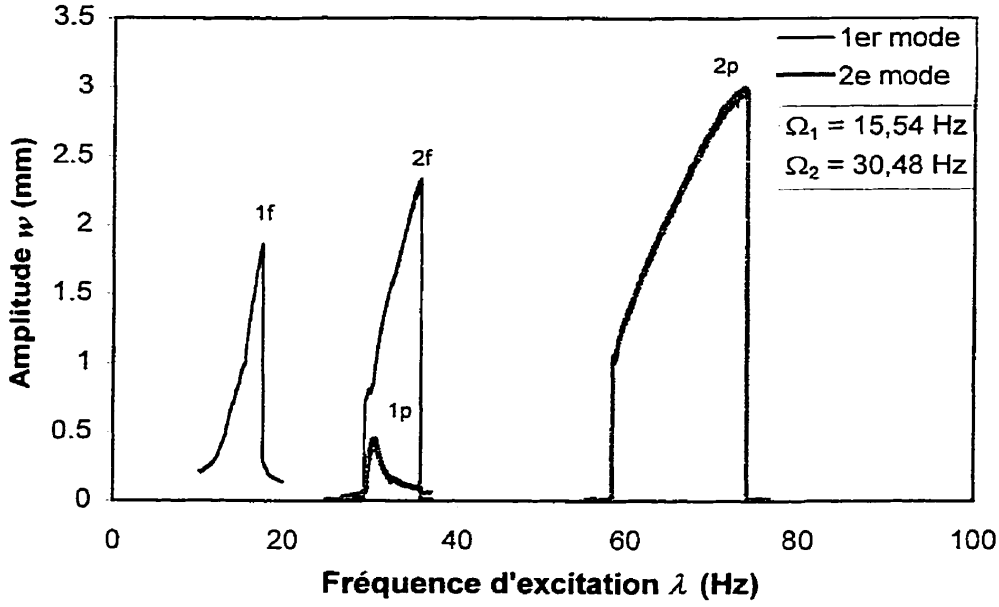


Figure 4.134 – Résonances internes, plaque P1, E^{c}E, $P_{cr} = 0{,}14$, $\mu = 0{,}0636$

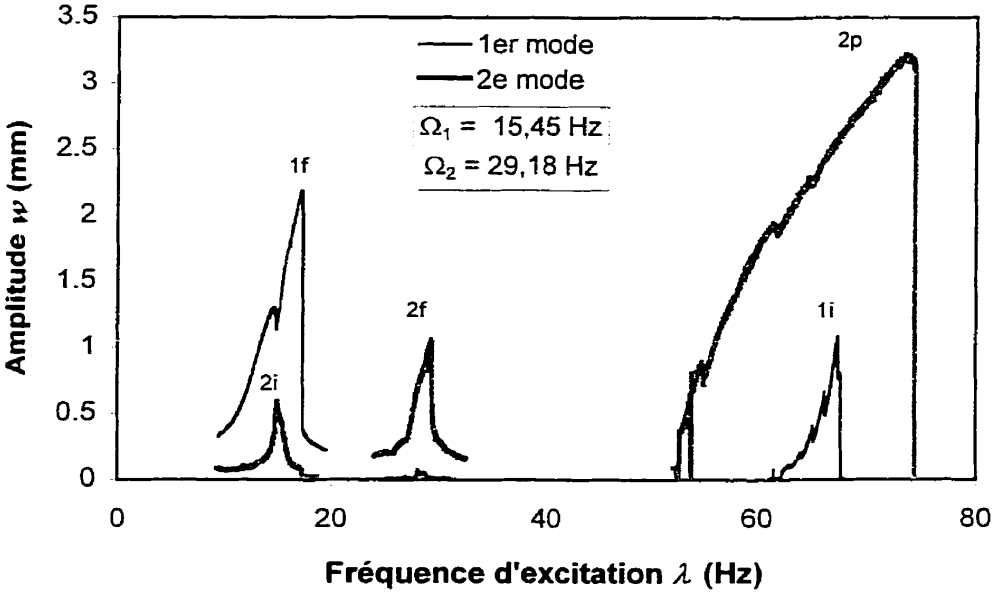


Figure 4.135 – Résonances internes, plaque P1, E^{c}E, $P_{cr} = 0{,}16$, $\mu = 0{,}0822$

4.10.2 - Résonances forcées et résonances internes

Pour une plaque imparfaite, on observe des résonances forcées pour tous les modes de vibrations. Lors de l'une de ces résonances forcées, une résonance interne peut survenir. Les figures 4.136 à 4.139 présentent de telles résonances. Pour ces résonances, un mode de vibration est directement excité par l'excitation paramétrique (par l'intermédiaire d'une imperfection géométrique), ce qui donne lieu à une résonance forcée. Lors de cette résonance forcée, une résonance interne peut survenir, il y a alors un transfert d'énergie entre le mode directement excité (mode en résonance forcée) au mode en résonance interne.

Dans tous les cas présentés, une résonance forcée du premier mode de vibration est observée. La résonance interne se produit suivant le deuxième mode de vibration, lorsque la fréquence de résonance de ce mode est égale à deux fois la fréquence de résonance du premier mode. On note alors un transfert d'énergie du premier au deuxième mode de vibration. Ce transfert d'énergie est caractérisé par une décroissance de l'amplitude des vibrations forcées du premier mode lors de l'apparition de la résonance interne du second mode.

Les résonances internes peuvent aussi survenir avec des résonances paramétriques. On peut alors observer des résonances internes qui ont une amplitude supérieure à celle des résonances paramétriques. Bien que le cas des résonances internes lors d'une résonance paramétrique soit similaire à celui des résonances internes avec résonance forcée, dans aucun cas une résonance interne n'atteint une amplitude supérieure à celle d'une résonance forcée.

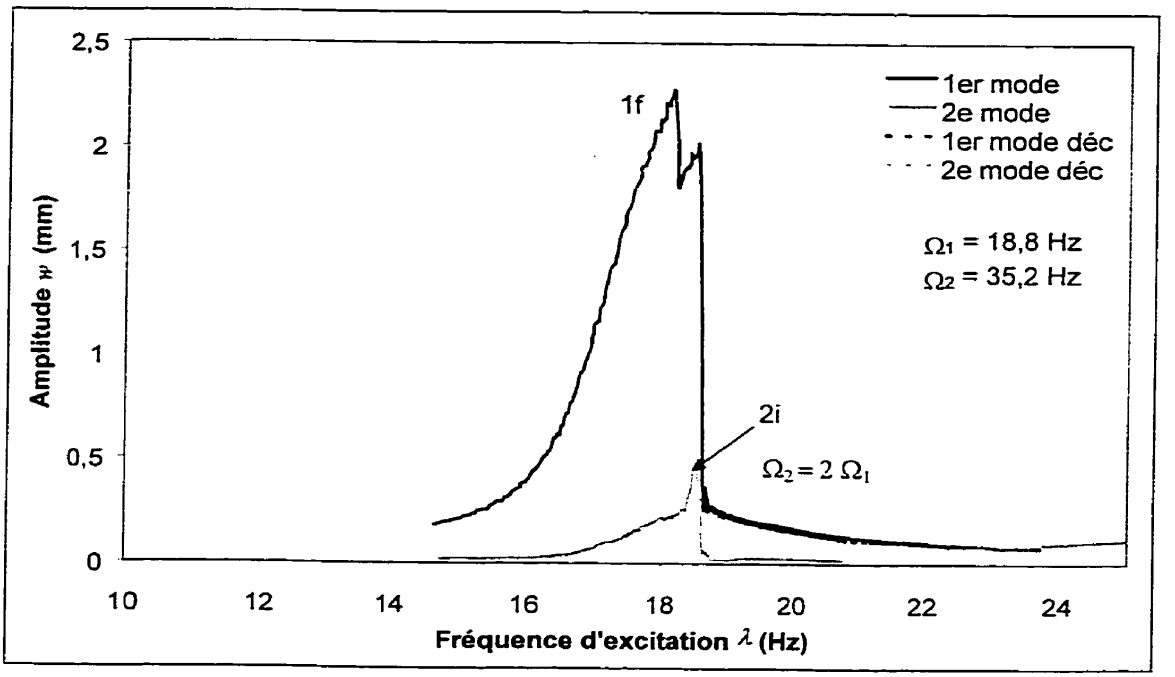


Figure 4.136 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, S^{c}S

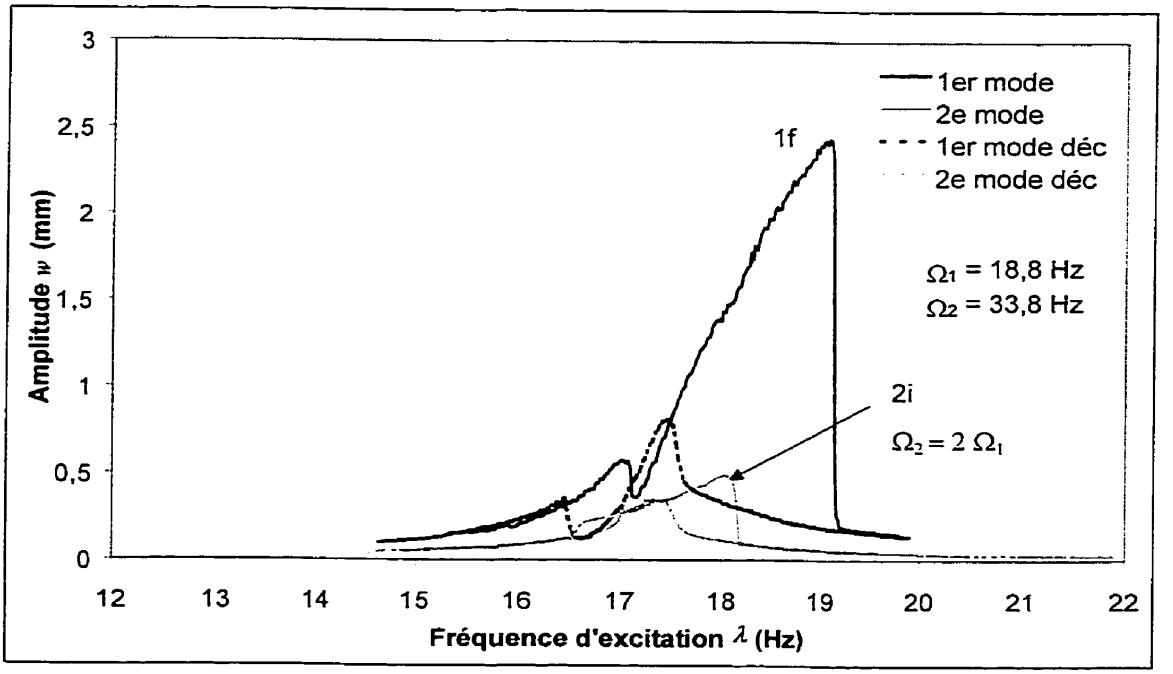


Figure 4.137 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}136$, $\mu = 0{,}0631$, S^{c}S

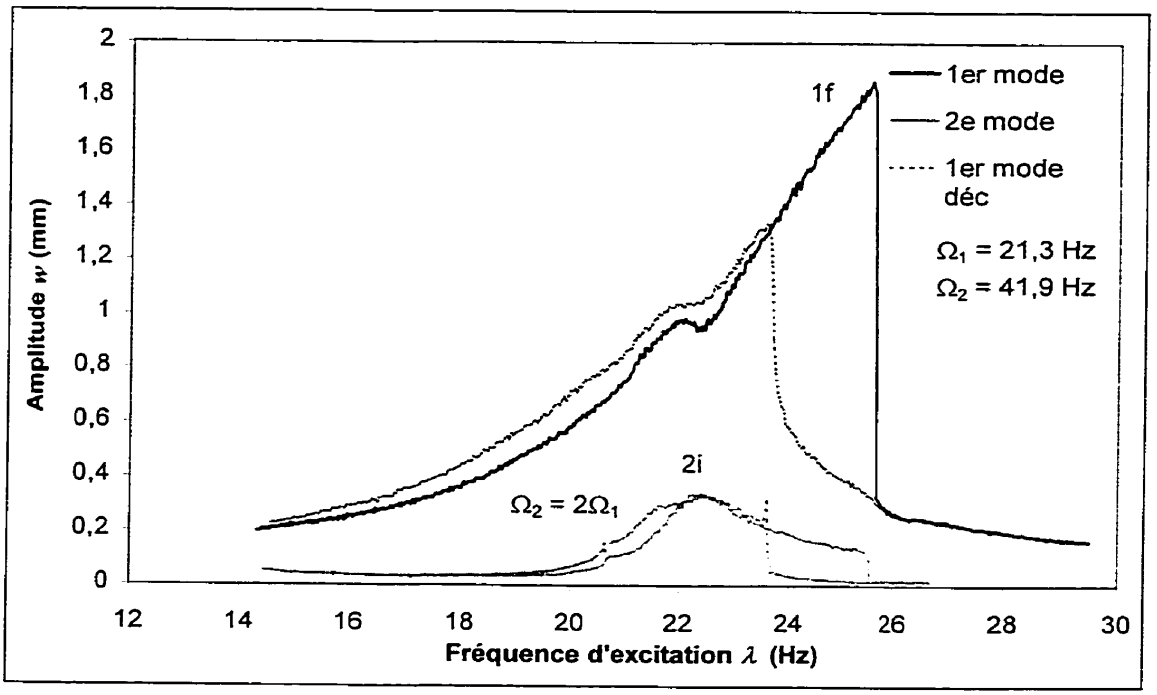


Figure 4.138 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, E°E

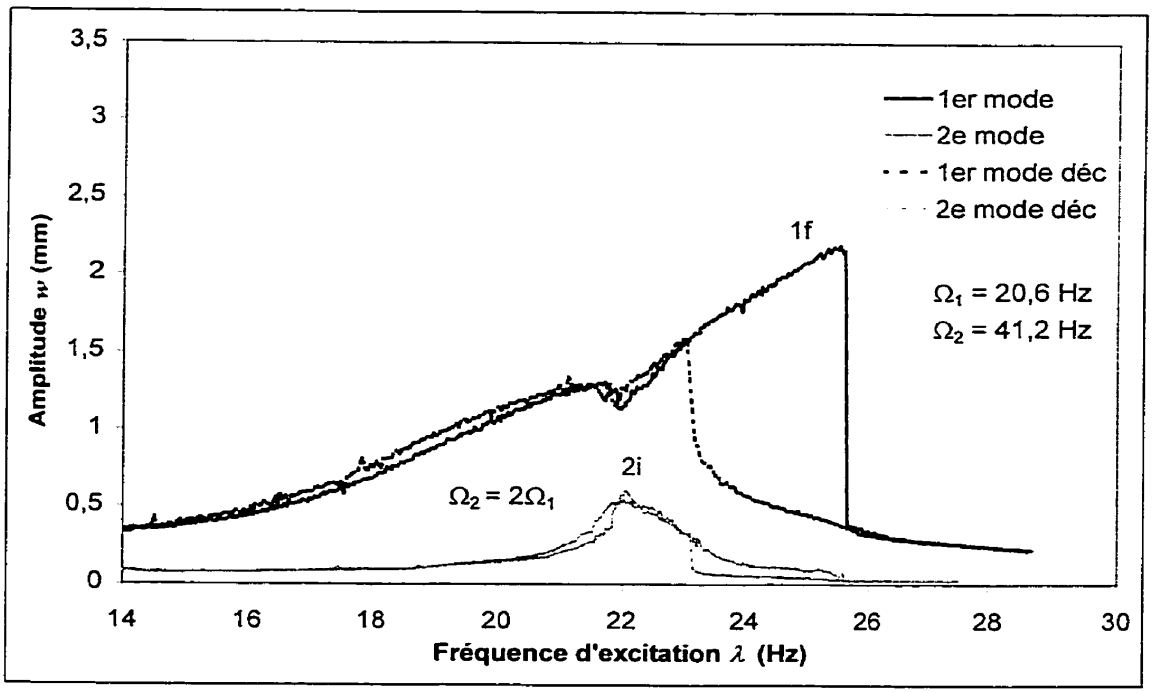


Figure 4.139 - Résonance interne suivant le 2e mode de vibration, plaque P4, $P_{cr} = 0{,}164$, $\mu = 0{,}0815$, E°E

4.11 - Conclusion

Les résultats obtenus montrent que les imperfections géométriques modifient réellement le comportement dynamique des plaques soumises à une excitation paramétrique. Tout d'abord, le comportement global non linéaire du type ressort dur des vibrations paramétriques peut devenir un comportement non linéaire du type ressort mou pour les vibrations de faible amplitude. Les zones d'instabilité s'avèrent toutefois très peu influencées par la présence d'imperfections géométriques.

En second lieu, des résonances forcées apparaissent. L'amplitude de celles-ci est reliée à l'amplitude du comportement de ressort mou pour les vibrations paramétriques. D'autre part, on remarque que les vibrations deviennent asymétriques. Les résultats expérimentaux obtenus permettent de faire un lien entre l'asymétrie des vibrations et l'apparition du comportement en ressort mou pour les résonances paramétriques. Ces nouveaux comportements sont influencés de la même manière par les caractéristiques physiques de la plaque et de l'excitation. Ils sont influencés par le chargement statique et dynamique, le rapport de forme de la plaque, la forme et l'amplitude de l'imperfection. Lorsqu'une augmentation de l'asymétrie des vibrations est observée, on note une augmentation du comportement en ressort mou et de l'amplitude des vibrations forcées.

Les résultats expérimentaux obtenus permettent de vérifier les résultats théoriques obtenus à partir des équations du mouvement élaborées au chapitre 2, basées sur la théorie des plaques de von Kármán pour le cas des grandes déformations. La théorie utilisée décrit bien le comportement des plaques imparfaites pour de faibles imperfections. Lorsque l'amplitude de l'imperfection géométrique se rapproche de l'épaisseur de la plaque, les résultats numériques commencent à diverger des résultats expérimentaux.

CHAPITRE V
MÉCANISMES D'INTERACTION

5.1 - Introduction

Lorsqu'une plaque imparfaite est soumise à excitation paramétrique, celle-ci peut développer plusieurs types de résonance. On retrouve ainsi des résonances forcées, paramétriques, internes et combinées. Ces divers types de résonance peuvent survenir dans certains cas pour le même domaine fréquentiel. Des interactions entre les résonances présentes sont alors possibles.

Les mécanismes d'interaction entre les résonances ont été étudiés à l'aide d'un modèle théorique pour les plaques parfaites et pour les plaques avec imperfections géométriques. Cependant, l'approche expérimentale a uniquement été utilisée pour l'étude du comportement dynamique des plaques parfaites. La présence d'imperfections géométriques modifie les fréquences naturelles des plaques, la forme des courbes de résonance paramétrique et fait apparaître des résonances forcées. Par conséquent, de nouveaux types et mécanismes d'interaction peuvent être observés expérimentalement.

5.2 - Interaction entre résonances forcées et paramétriqes

Lorsqu'une résonance forcée et une résonance paramétrique surviennent pour une même gamme de fréquence d'excitation, des interactions entre les deux types de résonances sont prévisibles. Les mécanismes d'interaction dépendent de la position relative des résonances et de l'amplitude des vibrations présentes. Ce phénomène a été traité expérimentalement pour la première fois par Ostiguy [19] pour des plaques quasi parfaites. Les plaques étudiées comportaient de faibles imperfections et par conséquent l'amplitude des résonances forcées étaient minimes.

Une étude théorique du même phénomène a été entreprise par la suite par Sassi [32], pour des plaques imparfaites. Les conclusions alors obtenues sont similaires à celles d'Ostiguy pour les plaques parfaites, mais aucune validation expérimentale n'a encore été effectuée.

Divers essais expérimentaux ont donc été effectués sur une plaque imparfaite, plaque pour laquelle le chevauchement de plusieurs résonances est rencontré. Ces essais ont été effectués pour différentes conditions aux limites et divers chargements pour modifier la position relative des résonances de chaque mode. Les résultats obtenus sont présentés aux figures 5.1 à 5.6. Ceux-ci montrent que certaines interactions sont possibles entre une résonance paramétrique et une résonance forcée. Ces interactions sont toujours gouvernées par la position relative des résonances en jeux.

Lorsqu'une résonance paramétrique s'amorce avant une résonance forcée, la résonance forcée est inhibée par les vibrations paramétriques et apparaît uniquement à la fin de la résonance paramétrique. À la figure 5.1, les vibrations forcées du second mode de vibration atteignent une amplitude non négligeable uniquement lorsque la résonance paramétrique suivant le premier mode est terminée.

Deux résonances peuvent aussi s'initier pour les mêmes fréquences d'excitation. À la figure 5.1 et 5.2, on observe une coexistence d'une résonance paramétrique du premier mode avec une résonance forcée du deuxième mode pour toute une gamme de fréquence d'excitation. L'amplitude de chacune des résonances est modifiée par la présence de l'autre résonance, on observe ainsi une interaction entre les deux types de résonance.

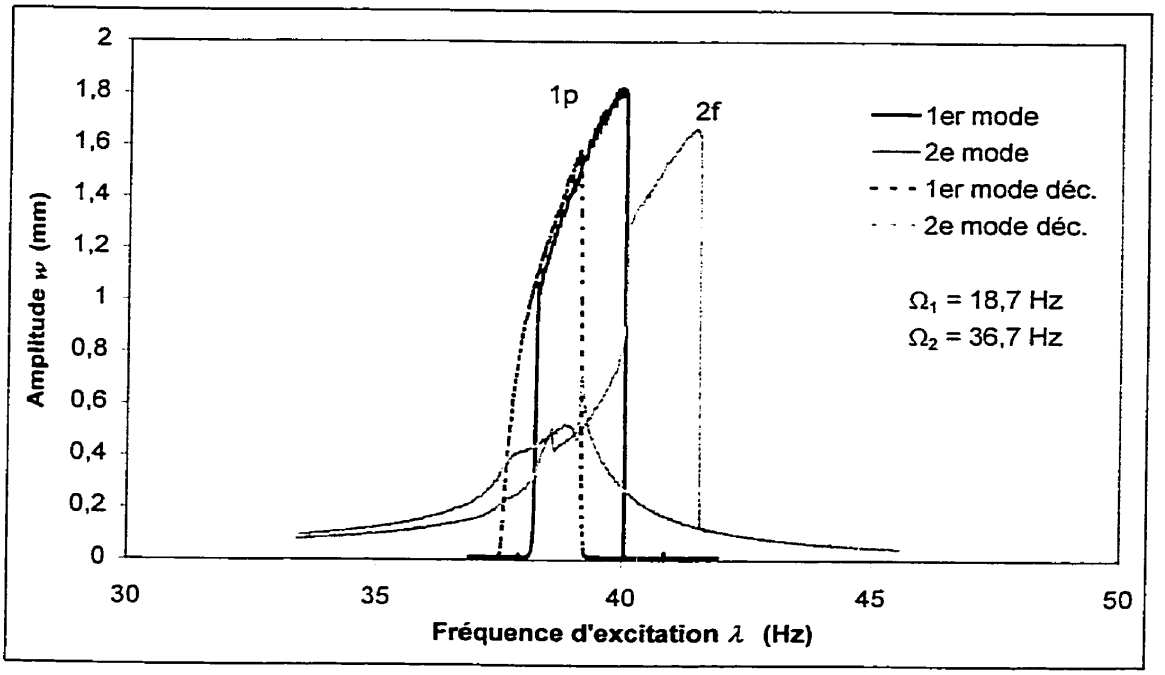


Figure 5.1 - Interaction résonance paramétrique 1[er] mode, résonance forcée 2[e] mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}11$, $\mu = 0{,}0459$, E[c]S

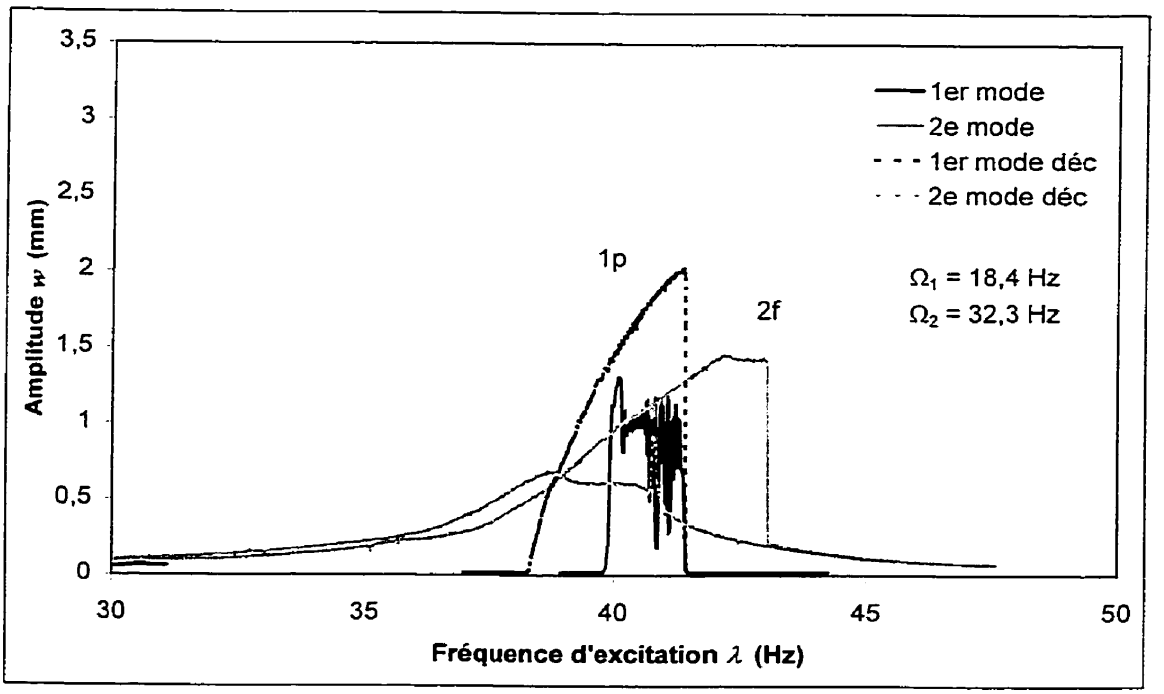


Figure 5.2 - Interaction résonance paramétrique 1[er] mode, résonance forcée 2[e] mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}136$, $\mu = 0{,}0631$, E[c]S

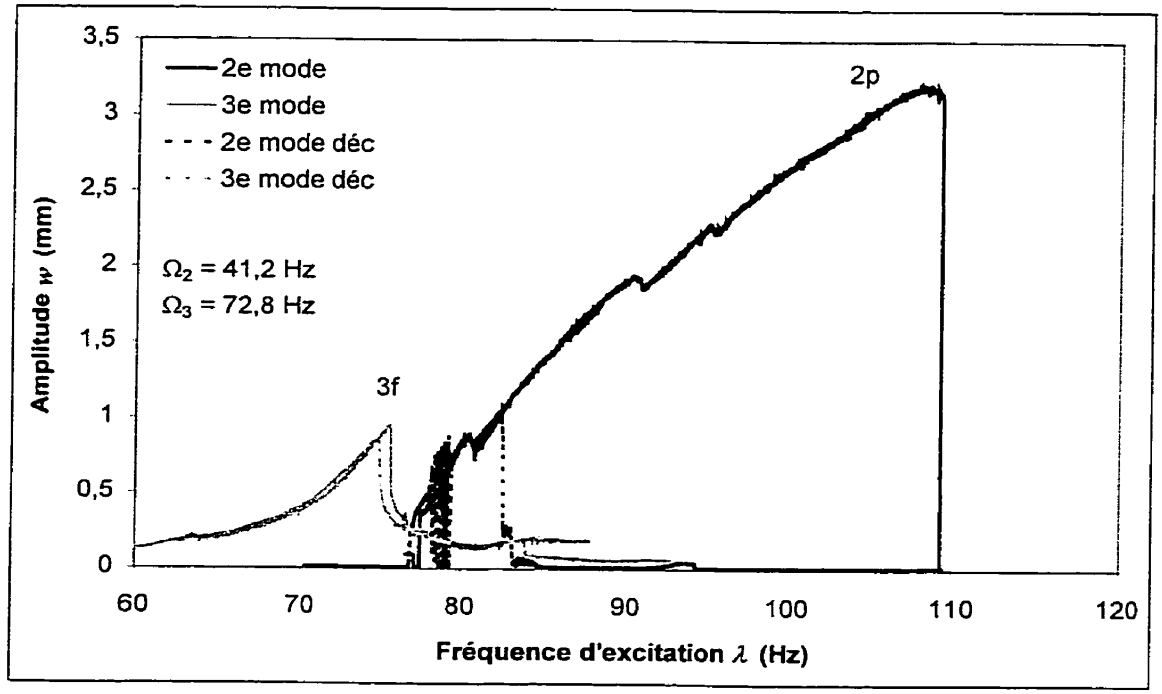


Figure 5.3 - Interaction résonance paramétrique 2e mode, résonance forcée 3e mode, Plaque P4, P_{cr} = 0,164, μ = 0,0815, E^{c}E

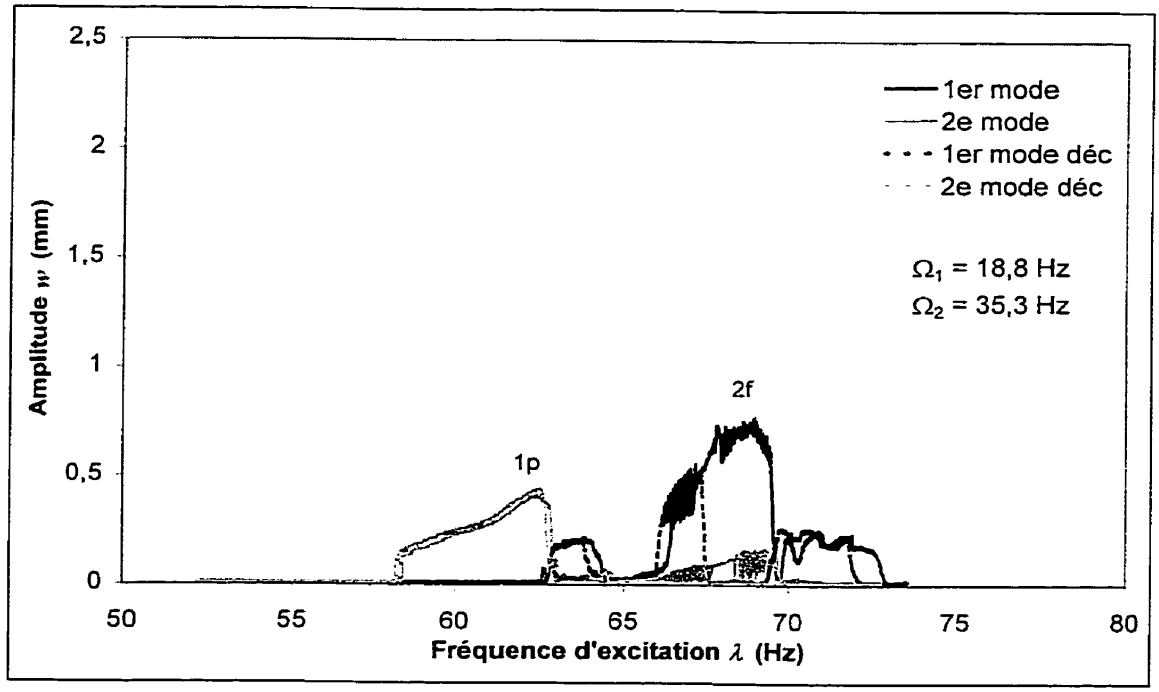


Figure 5.4 - Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, P_{cr} = 0,11, μ = 0,0459, S^{c}S

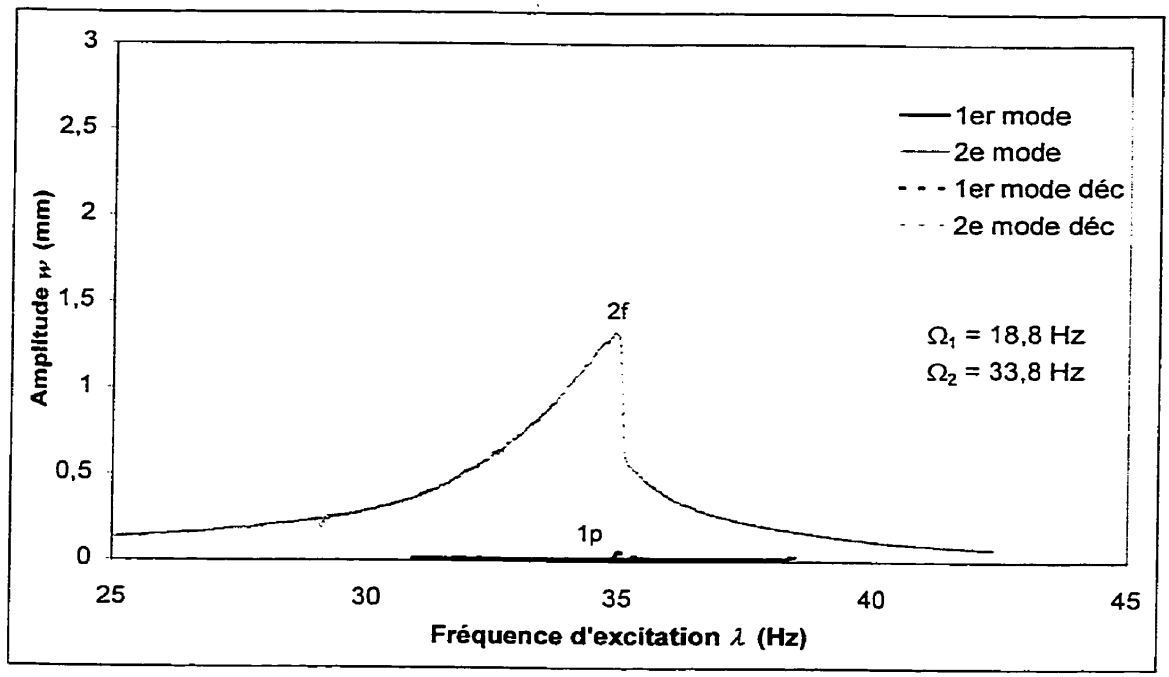


Figure 5.5 - Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}136$, $\mu = 0{,}0631$, S^{c}S

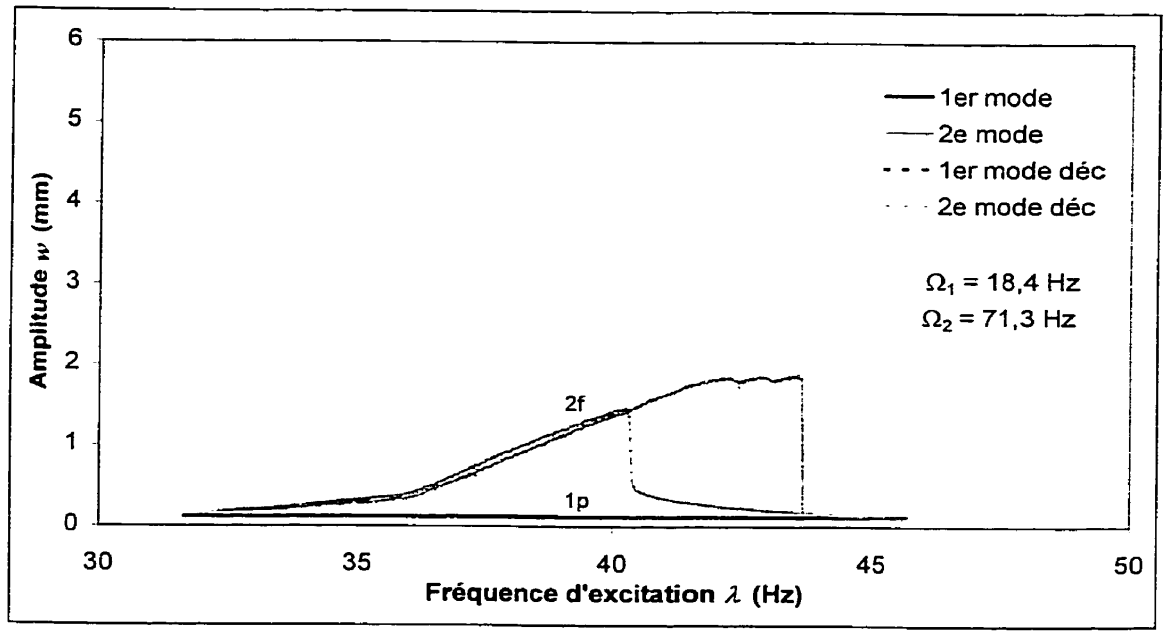


Figure 5.6 - Interaction résonance paramétrique 1er mode, résonance forcée 2e mode, Plaque P4, $P_{cr} = 0{,}164$, $\mu = 0{,}0815$, E^{c}S

Le dernier cas est celui pour lequel une résonance forcée débute juste avant le début d'une résonance paramétrique. L'apparition des vibrations paramétriques est alors retardée et survient uniquement à la fin de la résonance forcée (figures 5.3 et 5.4). Dans certains cas, la résonance forcée s'étend sur une large gamme de fréquence et atténue fortement ou anéantit la résonance paramétrique qui devait normalement survenir pour ces fréquences d'excitation. Aux figures 5.5 et 5.6, la résonance forcée du deuxième mode est telle qu'aucune résonance paramétrique du premier mode n'est observée. Les vibrations paramétriques sont présentes mais avec une amplitude minime.

Par conséquent, on peut conclure que les interactions entre résonance paramétrique et forcée dépendent de l'amplitude relative des vibrations en jeu. Si la première résonance a de grandes amplitudes de vibration à la fréquence à laquelle la seconde résonance devrait normalement débuter, la seconde résonance apparaît uniquement lorsque la première résonances est terminée.

Le mécanisme d'interaction est ainsi intimement lié aux fréquences naturelles des plaques et à l'amplitude des vibrations en jeu. Le modèle théorique développé au chapitre 2 permet de prédire assez précisément les fréquences naturelles et les amplitudes de vibration. Cependant, le degré de précision des fréquences naturelles calculées n'est pas suffisant pour obtenir les mêmes interactions entre deux types de résonance. La validation du modèle théorique quant aux phénomènes d'interaction n'est par conséquent que qualitative. Dans ce cas, les conclusions obtenues par Sassi [32] s'avèrent observées en pratique.

5.3 - Interaction entre résonances de même type

Les fréquences naturelles d'une plaque dépendent de ses caractéristiques physiques. La présence d'imperfection géométrique peut modifier considérablement celles-ci. On observe généralement un accroissement des fréquences naturelles avec

l'augmentation de l'amplitude des imperfections. Dans certains cas, la présence d'imperfection rapproche les fréquences naturelles les unes des autres. Deux modes de vibration peuvent alors avoir des fréquences naturelles très rapprochées et ces modes peuvent interagir entre eux.

Pour le cas étudié, il existe ainsi deux types d'interaction entre des résonances de même type: les interactions de type forcé forcé, impliquant les résonances forcées deux modes différents, et les interactions de type paramétrique paramétrique, impliquant deux résonances paramétriques distinctes. Ces deux types particuliers d'interaction ont été traités mathématiquement par Sassi [32] en utilisant le même modèle analytique et une approche numérique très similaire à celle de la présente étude. Les résultats obtenus dans cette étude montrent que lorsque deux zones de résonance se superposent, une certaine interaction entre les modes en présence est possible. Pour le cas d'interaction paramétrique paramétrique, le passage d'une résonance paramétrique à un autre est caractérisée par une région d'hésitation, région pour laquelle l'amplitude des vibrations ne suit pas une courbe continue. Peu de travaux expérimentaux ont fait ressortir de façon précise ces types d'interaction. Par conséquent, quelques cas rencontrés lors des travaux expérimentaux sont ici présentés.

Le premier cas d'interaction traité est celui ou les résonances forcées selon deux modes distincts se chevauchent. Le type d'interaction entre les deux résonances forcées dépend alors de la position relative des résonances. Lorsque la première résonance atteint de grandes amplitudes de vibrations avant l'apparition de la deuxième résonance, l'apparition de la seconde résonance est retardée. Cette dernière se produit seulement lorsque la première résonance se termine. On note cependant des vibrations de faibles amplitudes. La figure 5.7 illustre ce phénomène (interaction du type forcé forcé entre le deuxième et le troisième mode de vibration). Dans les cas où la fin de la première résonance chevauche uniquement le début de la résonance forcée suivante, celle-ci s'initie normalement (figure 5.8).

Le second type d'interaction est celui entre deux résonances paramétriques de modes différents. Tout comme pour le cas d'interaction entre deux résonances forcées, une résonance paramétrique peut retarder l'apparition d'une seconde résonance paramétrique. On note alors une certaine interaction entre les deux modes.

La figure 5.9 illustre le cas pour lequel on obtient premièrement une résonance paramétrique suivant le deuxième mode de vibration. Lors du balayage croissant de la fréquence d'excitation, des vibrations paramétriques de faible amplitude apparaissent suivant le troisième mode durant la résonance paramétrique du deuxième mode. L'amplitude des vibrations suivant le deuxième mode est alors amoindrie et influencée par la présence des vibrations paramétriques de l'autre mode. Une partie de l'énergie du système est transférée du deuxième mode vers le troisième. Cette coexistence des deux modes de vibration prend fin pour une fréquence d'excitation en dehors de la zone d'instabilité du deuxième mode. On observe alors l'entrée en résonance du troisième mode et le disparition des vibrations paramétriques du deuxième mode.

Lors du balayage décroissant de la fréquence d'excitation, la situation est tout autre. La résonance paramétrique du troisième mode demeure en place jusqu'à la fin de la résonance. Lorsque les vibrations paramétriques du troisième mode prennent fin, la résonance paramétrique du deuxième mode débute, et ce pour une fréquence d'excitation en dehors de la zone d'instabilité associée à ce mode. Le mouvement de la plaque suivant le troisième mode permet l'apparition de vibrations paramétriques de grandes amplitudes du deuxième mode et permet ainsi le début de la résonance paramétrique en dehors de sa zone d'instabilité.

La figure 5.10 illustre un autre cas d'interaction entre deux résonances paramétriques. Dans ce cas, une résonance paramétrique du second mode se poursuit normalement jusqu'à ce que la fréquence d'excitation devienne égale à la plus basse fréquence de la zone d'instabilité paramétrique du troisième mode. À cette fréquence, le

troisième mode entre en résonance paramétrique et les vibrations du second mode cessent. Lors du balayage décroissant de la fréquence d'excitation, aucune interaction entre les deux modes n'est observée.

Ces résultats expérimentaux confirment la présence d'interaction entre deux résonances de même type, lorsque leur résonances ont lieu pour les mêmes fréquences d'excitation. Cependant, dans les cas d'interaction paramétrique paramétrique, aucun phénomène d'hésitation n'a été rencontré, contrairement au prédiction analytique de Sassi [32]. On peut donc croire que les phénomènes d'hésitation ne sont pas reliés a tous les cas d'interactions, mais bien à des cas très particuliers, cas qui n'ont pas été rencontrés lors des essais pratiques réalisés dans le cadre de la présente étude.

Tout comme pour le cas d'interaction entre résonance forcée et paramétriques, uniquement une validation qualitative des résultats théorique est effectuée en raison du degré élevé de correspondance requis entre les résultats pour vérifier ces mécanismes complexes d'interaction.

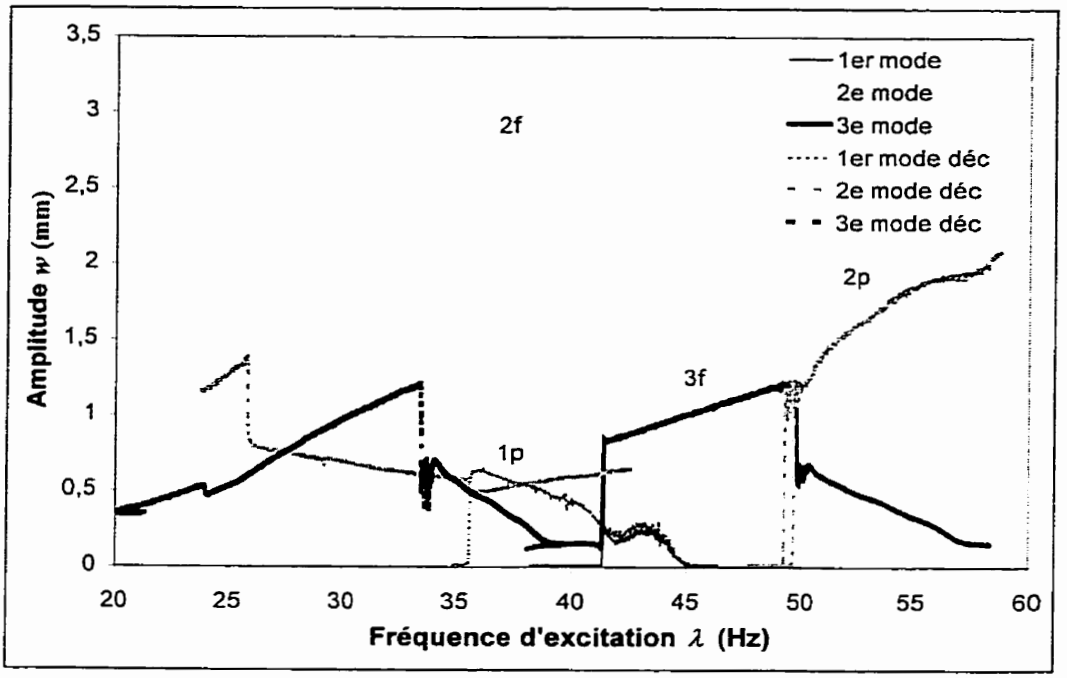


Figure 5.7 - Interaction entre résonance forcée du 2e mode et résonance forcée du 3e mode, plaque P4, P_{cr} = 0,345, μ = 0,134, E^{c}S

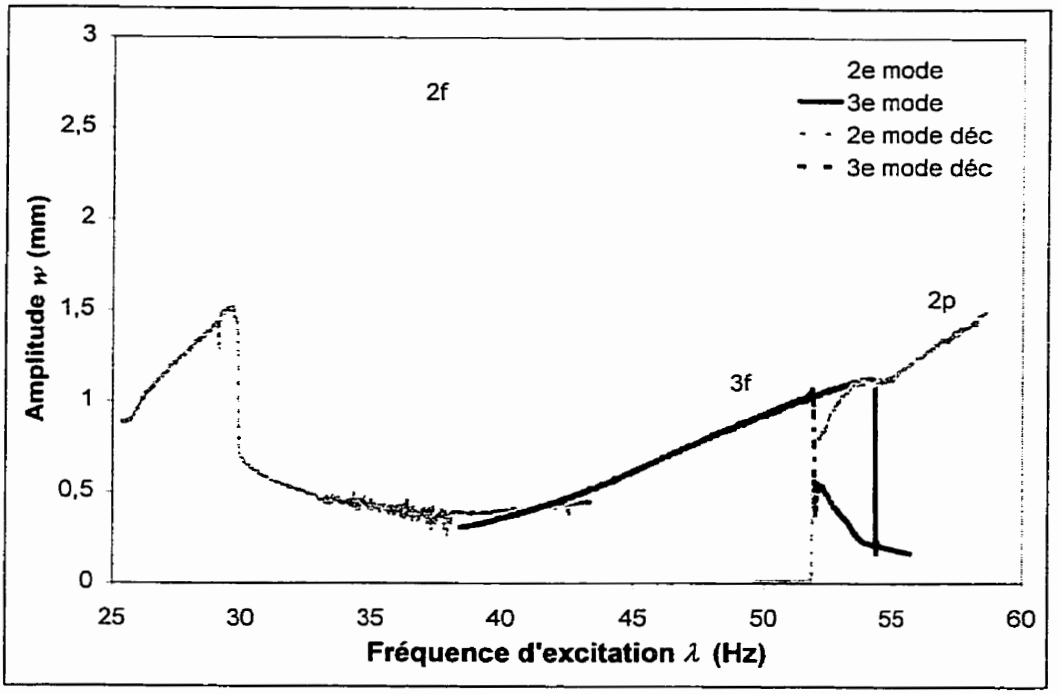


Figure 5.8 - Interaction entre résonance forcée du 2e mode et résonance forcée du 3e mode, plaque P4, P_{cr} = 0,237, μ = 0,116, E^{c}S

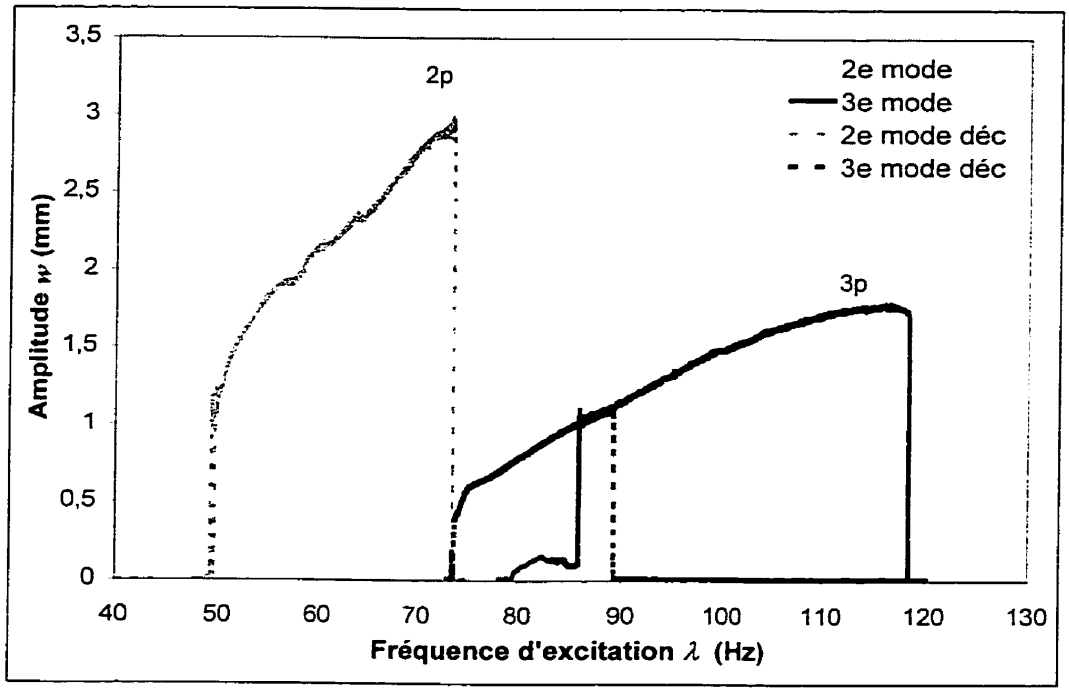


Figure 5.9 - Interaction entre résonance paramétrique du 2e mode et résonance paramétrique du 3e mode, plaque P4, P_{cr} = 0,345, μ = 0,134, E^{c}S

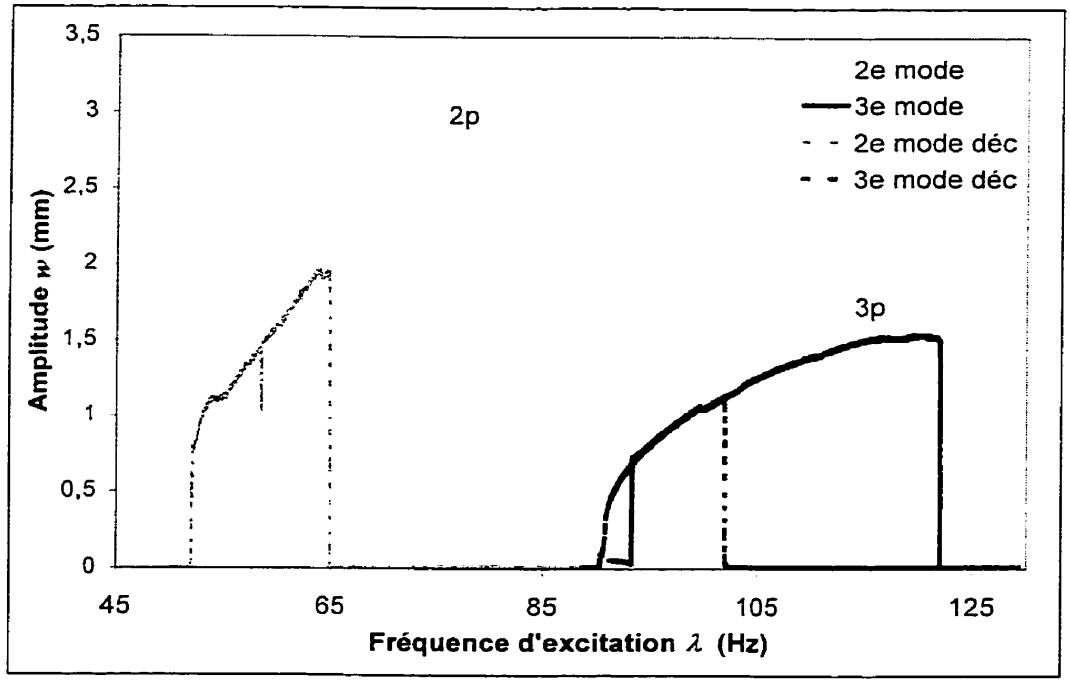


Figure 5.10 – Interaction entre résonance paramétrique du 2e mode et résonance paramétrique du 3e mode, plaque P4, P_{cr} = 0,237, μ = 0,116, E^{c}S

5.4 – Conclusion

Lorsque deux résonances distinctes surviennent pour les même fréquences d'excitation, des interactions surviennent entre celles-ci. Ces interactions sont gouvernées par la position relative des courbes de résonance et par l'amplitude des vibrations présentes, et ce quelque soit la nature des résonances (forcées ou paramétriques).

Les mécanismes d'interaction sont ainsi hautement relié aux fréquences naturelles des plaques et aux amplitudes de vibration. Par conséquent, le degré de corrélation entre les résultats théoriques et expérimentaux doit être élevé pour permettre une validation quantitative du modèle théorique. Le degré de ressemblance du modèle théorique ici utilisé n'est pas assez élevé pour faire une telle vérification, le problème à l'étude étant complexe. Une validation qualitative a tout de même pu être effectuée et les résultats théoriques obtenus par le passé décrivent bien le comportement du système.

Dans certains cas, une résonance peut empêcher une autre résonance de se produire ou simplement en réduire l'amplitude. Lorsque deux types de résonances se développent en même temps, l'amplitude de vibration de chacune d'entre elle est influencée par l'amplitude de vibration de l'autre. On note alors un certain transfert d'énergie d'une résonance à l'autre.

CONCLUSION

Les résultats théoriques et expérimentaux montrent que les imperfections géométriques initiales modifient le comportement dynamique des plaques rectangulaires. Le comportement global en ressort dur des résonances paramétriques peut ainsi être transformé en un comportement du type ressort mou pour les vibrations de faible amplitude, suivit du comportement habituel du type ressort dur pour les vibrations de grande amplitude. Le passage entre les deux types de comportement provoque des sauts en début de résonance. L'amplitude du comportement en ressort mou est influencée par l'amplitude et la forme de l'imperfection, le chargement statique appliqué et le rapport de forme de la plaque. Lorsque la forme de l'imperfection coïncide avec la forme du mode critique de flambage, l'influence de l'imperfection est maximale.

Le modèle théorique utilisé, basé sur la théorie de Von Kármán pour le cas des grandes déformations et incluant la présence d'imperfections géométriques, décrit bien le comportement réel de la plaque lorsque l'amplitude de l'imperfection géométrique est faible. Lorsque l'amplitude de l'imperfection est de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, l'écart entre les résultats théoriques et expérimentaux devient important et dans certains cas le modèle théorique ne décrit plus correctement le comportement de la plaque. De plus, l'hypothèse de base qui consiste à supposer la déflexion statique de la même forme que l'imperfection géométrique s'avère fausse lorsque l'amplitude de la déflexion statique atteint une demie fois l'épaisseur de la plaque. En effet, la déflexion statique tend alors à se développer selon le mode critique de flambage de la plaque.

Les imperfections induisent aussi des vibrations et des résonances forcées ou dynamiques. L'ampleur de ces résonances est gouvernée par la forme et l'amplitude des imperfections. Comme pour les résonances paramétriques, l'influence des imperfections est plus forte lorsque le mode d'imperfection est similaire au mode critique de flambage. Les résonances forcées sont alors plus importantes

Par ailleurs, les imperfections géométriques créent une augmentation des fréquences naturelles. Plus l'imperfection est importante, plus l'augmentation des fréquences naturelles est significative. La forme des modes de vibration n'est cependant pas affectée de façon notable par les imperfections géométriques.

La forme des zones d'instabilité paramétrique n'est toutefois pas influencée par les imperfections géométriques. Celles-ci modifient principalement la fréquence centrale de ces zones (augmentation de fréquences naturelles). Lorsque l'amplitude des vibrations forcées est forte, celles-ci peuvent provoquer l'apparition de vibrations paramétriques à l'extérieure de la zone d'instabilité. On note alors un élargissement des zones mesurées expérimentalement.

D'autre part, en présence d'imperfections géométriques, les vibrations deviennent asymétriques. Les déformations sont plus fortes lorsque le mouvement est tel que la courbure initiale de la plaque diminue ('inward deflection'). Cette asymétrie est influencée par les caractéristiques physiques du système de la même manière que le comportement en ressort mou. Ce comportement peut s'expliquer par une variation des contraintes internes de la plaque selon le sens du mouvement.

Les résonances internes et les interactions entre diverses résonances, telles qu'observées expérimentalement, sont difficilement prévisibles à l'aide de modèle théorique. Les mécanismes régissant ces phénomènes physiques sont complexes et une légère variation d'une fréquence naturelle ou de l'amplitude des vibrations peut complètement modifier le comportement de la plaque. Par conséquent, on peu comprendre les lois qui régissent leur présence à l'aide de simulation numérique sans toutefois pouvoir prévoir leur présence lors des essais réels.

L'approche expérimentale utilisée pour mettre en forme des plaques imparfaites s'est avérée relativement simple et facile à utiliser. L'utilisation de feuille en

polycarbonate permet d'obtenir facilement une imperfection suivant le premier mode et le deuxième de vibration avec l'amplitude désirée. Il est aussi possible de façonner des plaques avec une imperfection suivant d'autre mode de vibration. La phase la plus complexe consiste à ajuster les paramètres du moule pour obtenir préalablement la forme désirée.

L'étape de mise en forme des plaques imparfaites est un point déterminant de l'étude expérimentale portant sur l'effet des imperfections. Le moule utilisé dans le cadre de la présente recherche est simple d'utilisation mais ne permet pas de former des imperfections complexes. Il serait intéressant, dans des travaux ultérieurs, de façonner des plaques avec une forme plus complexe, avec des formes similaires au troisième et quatrième mode ou combinant deux modes de vibration.

Par ailleurs, les résultats expérimentaux obtenus dans cette étude pourrait être utilisés pour valider d'autres modèles théoriques et en déterminer les limites. Les équations ici développées à partir du modèle de Von Kármán donnent de bons résultats, mais leur domaine d'application est limité aux imperfections ayant une amplitude inférieure à l'épaisseur de la plaque. Elles ont cependant l'avantage de pouvoir être utilisées pour différentes formes d'imperfection, contrairement aux équations basées sur les théories de coque qui n'accommodent généralement qu'un type précis de géométrie.

RÉFÉRENCES

[1] EVAN-IWANOWSKI, R. M. (Sept. 1965). On the parametric Response of Structures, *Applied Mechanics Reviews, Vol. 18 (9),* pp. 699-702.

[2] BELIAEV, N. M. (1924). Stability of Prismatic Rods Subjected to Variable Longitudinal Forces, (in Russian), *Collection of Papers: Engineering Constructions and Structural Mechanics* (Inzhenernye sooruzheniia i stroitel'naia mekhanika), Leningrad, pp. 149-167.

[3] TAUB, J. et KONING, C. (1939). *Impact Buckling of Thin Bars in the Elastic Range Hinged at Both Ends*, NACA TM 748.

[4] METTLER, E. (1941). Biegeschwingungen eiges Stabes mit kleiner Vorkrümmung, excentrisch angreifender pulsierender Axiallast und statischer Querbelastung, *Forshungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaues, Vol. 4,* pp. 1-23.

[5] BOLOTIN, V. V. (1951). On the Transverse Vibrations of Rods Excited by Periodic Longitudinal Forces, *Collection of Papers: Transverse Vibrations and Critical Velocities, Vol. 1*, pp. 46-47.

[6] KEHAGIOGLOV, T. (1969). *Analytical Investigation of Parametrically Excited Column with Initial Geometric Imperfections and Nonlinearities in Non Stationary Mode*, M. Sc. A. Dissertation, Graduate School of Syracuse University, Syracuse New York.

[7] STEVENS, K. K. (1969). Transverse Vibration of a Viscoelastic Column with Initial Curvature Under Periodic Axial Load, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 36 (4)*, pp. 814-818.

[8] ELISHAKOFF, I., BIRMAN, V. et SINGER, J. (1985). Influence of Initial Imperfections on Nonlinear Free Vibration of Elastic Bars, *Acta Mechanica, Vol. 55 (3-4)*, pp.191-201.

[9] EINAUDI, R. (1935-1936). Sulle Configurazioni di Equilibrio Instabile di una Piastra Sollecitata da Sforzi Tangenziali Pulsanti, *Acta Societatis Gioeniae Catinensis Naturalium Scientiarum, Serie 6, Vol. I et II; Nota Prima:* pp. 1-5, *Nota Seconda:* pp. 1-20.

[10] BOLOTIN, V. V. (1964). *The dynamic stability of elastic systems*, Holden-Day Series in Mathematical Physics, San Francisco.

[11] SOMERSET, J. H. (1965). *Large Amplitude Stabilization of Parametrically Excited Plate Vibrations*, Ph.D. Dissertation, Syracuse University Research Institute, Technical Report 1620-1053, No.30, Applied Mechanics Laboratory, Syracuse University, Syracuse.

[12] SOMERSET, J. H. et EVAN-IWANOWSKI, R. M. (1967). Experiment on Large Amplitude Parametric Vibration of Rectangular Plates, *Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 3*, Proceedings of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics held in Columbia, Edited by W.A. Shaw, Pergamon Press, pp. 331-335.

[13] SOMERSET, J. H. et EVAN-IWANOWSKI, R. M. (1967). Influence of Non-Linear Inertia on the Parametric Response of Rectangular Plates, *International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 2 (3)*, pp. 217-232.

[14] SILVER, R. L. et SOMERSET, J. H. (Jan. 1969). Experiments on the Large Amplitude Parametric Response of Rectangular Plates under In-Plane Random Loads, *The Shock and Vibration Bulletin, Bulletin 39, Part 3,* pp. 205-231.

[15] SOMERSET, J. H. (1967). Transition Mechanisms Attendant to Large Amplitude Parametric Vibrations of Rectangular Plates, *Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol. 89, Series B, no.4*, pp. 619-625.

[16] SILVER, R. L. (1972). *The Effect of Initial Curvature on the Parametric Vibration of Rectangular Plates Subjected to an In-Plane Sinusoidal Load*, Ph.D. Dissertation, Syracuse University, Syracuse New York.

[17] DUFFIELD, R. C. et WILLEMS, N. (1972). Parametric Resonance of Stiffened Rectangular Plates, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 39 (1), Trans. ASME, Series E,* pp. 217-226.

[18] KISLIAKOV, S. D. (1976). Forced and Parametrically Excited Nonlinear Vibrations of Thin Elastic Plates with Initial Imperfections, *Bulgarian Academy, Theoretical and Applied Mechanics, Year VII, No. 4,* Sofia.

[19] OSTIGUY, G. L. (1976). *Effects of Aspect Ratio on Parametric Response of Nonlinear Rectangular Plates*, Ph. D. Dissertation, Syracuse University, Syracuse New York.

[20] SAMSON, L. P. (1987). *Étude expérimentale de la stabilité dynamique des plaques rectangulaires excitées paramétriquement*, Mémoire de Maîtrise en Sciences Appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[21] NGUYEN, H. (1987). *Effect of Boundary Conditions on the Dynamic Instability and Response of Rectangular Plates,* Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[22] OSTIGUY, G. L., SAMSON, L.P. et NGUYEN, H. (1993). On the Occurrence of Simultaneous Resonances in Parametrically-Excited Rectangular Plates, *Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115*, pp. 344-352.

[23] BIRMAN, V. et ZAHED, H. (1989). Nonlinear Problems of Parametric Vibrations of Imperfect Laminated Plates, *Composite Structures, Vol. 12 (3)*, pp. 181-191.

[24] SASSI, S. (1989), *Effet des imperfections initiales sur la stabilité dynamique et la réponse des plaques rectangulaire*, Mémoire de maîtrise en sciences appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[25] OSTIGUY, G. L. et SASSI S. (1992). Effects of Initial Geometric Imperfections on Dynamic Behavior of Rectangular Plates, *Journal of Nonlinear Dynamics, Vol.3*, pp.165-181.

[26] SASSI, S. et OSTIGUY, G. L. (1994). Effects of Initial Geometric Imperfections on the Interaction Between Forces and Parametric Vibrations, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 178 (1)*, pp. 41-54.

[27] ST-GEORGES, L. (1996). *Instabilité dynamique et résonances paramétriques de plaques géométriquement imparfaites*, Mémoire de maîtrise en sciences appliquées, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[28] OSTIGUY, G. L., ST-GEORGES, L. et SASSI, S. (1997). Dynamic Instability and Resonances of Geometrically Imperfect Plates, *Proceedings of DECT'97, ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, California.*

[29] OSTIGUY, G. L., ST-GEORGES, L. et SASSI, S. (1998). Latest Developments on the Dynamic Stability and Nonlinear Parametric Response of Geometrically Imperfect Rectangular Plates, *Transaction of the Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 22 (4).*

[30] SASSI, S. (1993). *Stabilité dynamique et résonances des plaques rectangulaires imparfaites*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[31] SASSI, S. (1994). Analysis of the Variation of Frequencies for Imperfect Rectangular Plates, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 177 (5)*, pp. 675-687.

[32] SASSI, S., THOMAS, M. et LAVILLE, F. (1996). Dynamic Response Obtained by Direct Numerical Integration for Pre-Deformed Rectangular Plates Subjected to In-Plane Loading, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 197 (1)*, pp. 67-83.

[33] DEOLASI, P. J. et DATTA, P. K. (1997). Experiments on the Parametric Vibration Response of Plates under Tensile Loading, *Experimental Mechanics, Vol. 37 (1)*, pp. 56-61.

[34] KOVAL'CHUK, P. S. et KRASNOPOL'SKAYA, T. S. (1979). Resonance Phenomena in Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells with Initial Imperfections, *Soviet Applied Mechanics, Vol. 15 (9)*, pp. 867-872.

[35] KOVAL'CHUK, P. S. et KRASNOPOL'SKAYA, T. S. et PODCHASOV, N. P. (1982). Dynamic Instability of Circular Cylindrical Shells with Initial Camber, *Soviet Applied Mechanics, Vol. 18 (3),* pp. 208-212.

[36] ILANKO, S. (1990). The Vibration Behavior of Initially Imperfect Simply Supported Beams Subject to Axial Loading, *Journal of Sound and Vibration, 142 (2),* pp.355-359.

[37] LIBRESCU, L. et CHANG, M. Y. (1992). Vibration of Compressively Loaded Shear Deformable Flat Panels Exhibiting Initial Geometric Imperfections, *AIAA Journal, Vol. 30 (11),* pp. 2793-2795.

[38] RAVINGER, J. (1994). Vibration of an Imperfect Thin-Walled Panel. Part I: Theory and Illustrative Examples, *Thin-Walled Structures, Vol. 19*, pp. 1-22.

[39] LIBRESCU, L., LIN, W., NEMETH, M. P. et STARNES, J.H. Jr. (1996). Frequency-Load Interaction of Geometrically Imperfect Curved Panels Subjected to Heating, *AIAA Journal, Vol. 34 (1),* pp. 166-177.

[40] ROSEN, A. et SINGER, J. (1974). Effect of Axisymmetric Imperfections on the Vibrations of Cylindrical Shells Under Axial Compression, *AIAA Journal, Vol. 12 (7),* pp. 995-997.

[41] SINGER, J. et PRUCZ, J. (1982). Influence of Initial Geometrical Imperfections on Vibrations of Axially Compressed Stiffened Cylindrical Shells, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 80 (1),* pp. 117-143.

[42] HUI, D. et DU, I. H. Y. (1986). Effects of Axial Imperfections on Vibrations of Anti-Symmetric Cross-Ply, Oval Cylindrical Shells, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 53 (3),* pp. 675-680.

[43] IU, V. P. et CHIA, C. Y. (1988). Non-Linear Vibration and Postbuckling of Unsymmetric Cross-Ply Circular Cylindrical Shells, *International Journal of Solids and Structures, Vol. 24 (2),* pp. 195-210.

[44] HUI, D. et LEISSA, A. W. (1983). Effects of Uni-Directional Geometric Imperfections on Vibrations of Pressurized Shallow Spherical Shells, *International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol. 18 (4),* pp. 279-285.

[45] WATAWALA, L. et NASH, W. A. (1983). Influence of Initial Geometrical Imperfections on Vibrations of Thin Circular Cylindrical Shells, *Computers and Structures, Vol. 16 (1-4),* pp. 125-130.

[46] PAVLOVSKII, V. S. et FILIN, V. G. (1985). Nonlinear Parametric Vibrations of Liquid-Filled Cylindrical Shells with an Initial Deflection, *Mechanics Institute, Academy of Sciences of the Ukranian SSR, Translation from Prikladnaya Mekhanika, Vol. 21 (3),* pp. 46-56.

[47] XU, C. (1992). Multi-Mode Nonlinear Vibration and Large Deflection of Symmetrically Laminated Imperfect Spherical Caps on Elastic Foundations, *International Journal of Mechanical Science, Vol. 34 (6),* pp.459-474.

[48] GONÇALVÈS, P. B. (1992). Axisymmetric Vibrations of Imperfect Shallow Spherical Caps Under Pressure Loading, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 172 (2),* pp. 249-260.

[49] HUI, D. (1983). Large-Amplitude Vibrations of Geometrically Imperfect Shallow Spherical Shells with Structural Damping, *AIAA Journal, Vol. 21 (12),* pp. 1736-1741.

[50] HUI, D. (1984). Influence of Geometric Imperfections and In-Plane Constraints on Nonlinear Vibrations of Simply Supporter Cylindrical Panels, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 51,* pp. 383-390.

[51] DU, I. et HUI, D. (1987). Frequency-Load Interaction of Imperfect Angle-Ply Cylindrical Panels Under Compression and Pressure, *AIAA Journal, Vol. 25 (3),* pp. 484-491.

[52] FU, Y. M. et CHIA, C. Y. (1989). Multi-Mode Non-Linear Vibration and Postbuckling of Anti-Symmetric Imperfect Angle-Ply Cylindrical Thick Panels, *International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 24 (5),* pp. 365-381.

[53] LIBRESCU, L. et LIN, W. (1995). Vibration of Thermally and Mechanically Loaded Shallow Curved Panels Exhibiting Initial Geometric Imperfections, *Collection of Technical Papers Proceedings of the 36th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and AIAA/ASME Adaptive Structures Forum, Vol. 3, New Orleans, LA.*

[54] SOUZA, M. A. et LIBRESCU, L. (1997). Statical and Vibrational Behavior of Orthogonally Flat Panels Exposed to Thermomechanical Loading, *Proceedings of the 1997 ASME International Mechanical Engineering Congress end Exposition, Vol. 55, Dallas, TX.*

[55] BYUN, C. et KAPANIA, R. K. (1992). Nonlinear Transient Response of Imperfect Hyperbolic Shells Using a Reduction Method, *Computers and Structures, Vol. 44 (1-2),* pp. 255-262.

[56] WEDEL-HEINEN, J. (1991). Vibration of Geometrically Imperfect Beam and Shell Structures, *International Journal of Solids and Structures, Vol. 27 (1),* pp. 29-47.

[57] SHIAU, A. C. et ROTH, R. S. et SOONG, T. T. (Juin 1974). Dynamic Buckling of Conical Shells with Imperfections, *AIAA Journal, Vol. 12 (6),* pp. 755-760.

[58] YAMADAG, G., KOBAYASHI, Y., OHTA, Y. et YOKOTA, S. (1989). Free Vibration of a Toroidal Shell with Elliptical Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 135 (3),* pp. 411-425.

[59] LEISSA, A. W. et KADI, A. S. (1971). Curvature Effects on Shallow Shell Vibrations, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 16 (2)*, pp. 173-187.

[60] CELEP, Z. (1980). Shear and Rotatory Inertia Effects on the Large Amplitude Vibration of the Initially Imperfect Plates, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 47 (3)*, pp. 662-666.

[61] BHIMARADDI, A. (1992). Nonlinear Dynamics of In-plane Loaded Imperfect Rectangular Plates, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 59 (4)*, pp. 893-901.

[62] BHIMARADDI, A. (1993). Large Amplitude Vibrations of Imperfect Antisymmetric Angle-Ply Laminated Plates, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 162 (3),* pp. 457-470.

[63] LIU, W. H. et YEH, F. H. (1993). Non-Linear Vibrations of Initially Imperfect Orthotropic, Moderately Thick Plates with Edge Restraints, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 165 (1),* pp. 101-122.

[64] CHEN, L.-W. et LIN, C.-C. (1992). Effects of Geometric Imperfections and Large Amplitudes on Vibrations of an Initially Stressed Midlin Plate, *Applied Acoustics, Vol. 35*, pp.265-282.

[65] HUI, D. (1990). Accurate Backbone Curves for a Modified-Duffing Equation for Vibrations of Imperfect Structures With Viscous Damping, *Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 112 (3)*, pp. 304-311.

[66] SABIR, A. B. et LOCK, A. C. (1972). *Large Amplitude Free Vibration of Geometrically Nonlinear Circular Arches*, Symposium on Non-Linear Dynamics, Loughborough University.

[67] SABIR, A. B. (1994). Free Vibration Steady State Response of Geometrically Nonlinear Shallow Arches, *Thin-Walled Structures, Vol. 18*, pp. 145-159.

[68] HITCHINGS, D. et WARD, P. (1997). The Steady State Response of Geometrically Non-Linear Shallow Arches, *International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 11*, pp. 1261-1269.

[69] LITTLE, G. H. (1998). The Dynamic Behavior of Elastic Steel Columns, *Computers and Structures, Vol. 68*, pp. 113-123.

[70] HUI, D. (1984). Effect of Geometric Imperfections on Large-Amplitude Vibrations of Rectangular Plates with Hysteresis Damping, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 51*, pp. 217-220.

[71] HUI, D. (1985). Effects of Geometric Imperfections on Frequency-Load Interaction of Biaxially Compressed Antisymmetric Angle Ply Rectangular Plates, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 52*, pp. 155-162.

[72] HUI, D. et LEISSA, A. W. (1983). Effects of Geometric Imperfections on Vibrations of Biaxially Compressed Rectangular Flat Plates, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 50*, pp. 750-756.

[73] ILANKO, S. et DICKINSON, S. M. (1987). The Vibration and Post-Buckling of Geometrically Imperfect, Simply Supported, Rectangular Plates Under Uni-Axial Loading, Part I: Theoretical Approach, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 118 (2)*, pp. 313-336.

[74] ILANKO, S. et DICKINSON, S. M. (1987). The Vibration and Post-Buckling of Geometrically Imperfect, Simply Supported, Rectangular Plates Under Uni-Axial Loading, Part II: Experimental Investigation, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 118 (2)*, pp. 337-351.

[75] ILANKO, S. et DICKINSON, S. M. (1991). On Natural Frequencies of Geometrically Imperfect Simply-Supported Rectangular Plates Under Uniaxial Compressive Loading, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 58*, pp. 1082-1084.

[76] BHIMARADDI, A. (1989). Non-Linear Free Vibration Analysis of Composite Plates with Initial Imperfections and In-Plane Loading, *International Journal of Solids and Structures, Vol. 27 (1)*, pp. 51-62.

[77] YU, Q. , MOSTAGHEL, N. et FU, K. C. (1994). Effect of Initial Curvature on Natural Frequency of Thin Plate on Hinge Supports, *Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120 (4)*, pp. 796-813.

[78] LIBRESCU, L. (1992). Vibration of Compressively Loaded Shear Deformable Flat Panels Exhibiting Initial Geometric Imperfections, *AIAA Journal, Vol. 30 (11)*, pp. 2793-2795.

[79] CELEP, Z. (1982). Vibrations of Initially Imperfect Circular Plates Including the Shear and Rotary Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 85 (4),* pp. 513-523.

[80] HUI, D. (1983). Large Amplitude Axisymmetric Vibrations of Geometrically Imperfect Circular Plates, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 91 (2),* pp. 239-246.

[81] LIN, C. C. et CHEN, L. W. (1989). Large-Amplitude Vibration of an Initially Imperfect Moderately Thick Plate, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 135 (2),* pp. 213-224.

[82] BHIMARADDI, A. (1989). Nonlinear Vibrations of In-Plane Loaded, Imperfect, Orthotropic Plates Using the Perturbation Technique, *International Journal of Solids and Structures, Vol. 25 (5),* pp. 563-575.

[83] BADALOV, F. B. et ÉSHMATOV, K. (1991). Investigation of Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Plates with Initial Imperfections, *Soviet Applied Mechanics, Vol. 26 (8)*, pp. 799-804.

[84] BATTACHARYA, A. P. (1986). Effects of Edge Restraints on the Non-Linear Flexural Vibrations of an Imperfect Cross-Ply Laminated Plate Resting on an Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 105 (2)*, pp. 265-274.

[85] XU, C. S. et CHIA, C. Y. (1993). Large-Amplitude Vibrations of Unsymmetrically Laminated Imperfect Thick Circular Plates on an Elastic Foundation, *Composites Science and Technology, Vol. 49,* pp. 131-137.

[86] LIBRESCU, L. et CHANG, M. Y. (1993). Effects of Geometric Imperfections on Vibration of Compressed Shear Deformable Laminated Composite Curved Panels, *Acta Mechanica, Vol. 96*, pp. 203-224.

[87] RAVINGER, J. (1994). Vibration of an Imperfect Thin-Walled Panel. Part II: Numerical Results and Experiment, *Thin-Walled Structures, Vol. 19*, pp. 23-36.

[88] CHAUHAN, A. P. (1971). On the Low-Frequency Drumming of Slightly Bowed Structures, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 14 (4)*, pp. 475-489.

[89] YAMAKI, N., OTOMO, K. et CHIBA, M. (1981). Non-Linear Vibrations of a Clamped Circular Plate with Initial Deflection and Initial Edge Displacement, Part I: Theory, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 79 (1)*, pp. 23-42.

[90] YAMAKI, N., OTOMO, K. et CHIBA, M. (1981). Non-Linear Vibrations of a Clamped Circular Plate with Initial Deflection and Initial Edge Displacement, Part II: Experiment, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 79 (1)*, pp. 43-59.

[91] YAMAKI, N. et CHIBA, M. (1983). Nonlinear Vibrations of a Clamped Rectangular Plate with Initial Deflection and Initial Edge Displacement, Part I : Theory, *Thin-Walled Structures, Vol. 1 (1)*, pp. 3-29.

[92] YAMAKI, N. et CHIBA. M. (1983). Nonlinear Vibrations of a Clamped Rectangular Plate with Initial Deflection and Initial Edge Displacement, Part II : Experiment, *Thin-Walled Structures, Vol. 1 (2)*, pp. 101-119.

[93] PHILLIPS, I. G. et JUBB, J. E. M. (1974). The effect of Distortion on the Lowest Natural Frequency of a Rectangular Steel Plate, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 33 (1)*, pp. 31-48.

[94] MURPHY, K. D., VIRGIN, L. N. et RIZZI, S. A. (1997). The effect of Thermal Prestress on the Free Vibration Characteristics of Clamped Rectangular Plates: Theory and Experiment, *Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 119*, pp. 243-249.

[95] VON KÁRMÁN, T. (1910). *Encyklopädie d. Math Wissenshaften, Vol. 4*, p. 349.

[96] MARGUERRE, K. (1938). Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung, *Proc. 5th Int. Congress for Applied Mechanics*, pp. 93-101.

[97] TIMOSHENKO, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*, p. 393.

[98] KISLIAKOV, S. D. (1976). Forced and Parametrically Excited Nonlinear Vibrations of Thin Elastic Plates with Initial Imperfections, *Bulgarian Academy, Theorical and Applied Mechanics, Year VII, no. 4*, pp. 40-50.

[99] WOL'MIR, A. S (1962). *Biegsame Platten und Schalen*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, p. 44.

[100] TIMOSHENKO, Sp. P. et GERE, J. M. (1961). *Theory of Elastic Stability*, Second Edition, Engineering Societies Monographs, McGraw Hill Book Co., New York.

[101] JACKSON, K. B. et HALL, A. H. (1951). Experimental Diagrams of Deformation and Strain Distribution in Curved Plates Under Compression, *National Research Council of Canada, Aeronautical Report AR-9*, Canada.

[102] LAVIGNE, P. (1993). *Étude de diverses méthodes de solution d'équations différentielles non-linéaires associées aux résonances paramétriques principales,* Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.

[103] WRIGHT, T. W. (1966). Plate and Rod Vibrations with Initial Stress, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, Series E, no.1*, pp. 134-140.

[104] WANG, C. M., WANG, M. et ANG, K. K. (1997). Vibration of Initially Stressed Reddy Plates on a Winkler-Pasternak Foundation, *Journal of Sound and Vibration, Vol. 204 (2)*, pp.203-212.

[105] HEARLE, J. W. S. (1982). *Polymers and their Properties, Volume 1: Fundamentals of Structure and Mechanics*, Ellis Horwood Series in Chemical Science, Halsted Press, New York.

[106] CHARRIER, J. M. (1991). *Polymeric Materials and Processing: Plastics, Elastomers and Composites*, Hanser Publishers, New York.

[107] KINNEY, G. F. (1957). *Engineering Properties and Applications of Platics*, John Wiley & Sons, New York.

[108] Imperial Chemical Industries Limited, Platic Division (1970). *Engineering Properties of Thermoplastics*, édité par R. M. Ogorkiewiez, Wiley Interscience, England.

[109] BLAKWMORE, R. H. et MARSDEN, B. (1980). Polycarbonate as a Photoelastic Material, *Strain, Vol. 6 (3)*, pp. 124-125.

[110] LEISSA, A. W. (1969). *Vibration of Plates*, Scientific and Technical Information Division, Office of Technology Utilization, NASA SP-160, Washington D. C.

[111] LURIE, H. (1952). Lateral Vibrations as Related to Structural Stability, *Journal of Applied Mechanics, Vol. 19 (2)*, pp. 195-204.

ANNEXE A
MONTAGES D'ÉTALONNAGE

A.1 - Capteur de déplacement capacitif

Le montage conçu pour étalonner le capteur de déplacement est présenté à la figure A.1. Il est principalement constitué d'un double excentrique ajustable. Ce double excentrique est relié à un bloc d'aluminium évidé par une tige et un roulement de haute précision. Ce bloc ainsi relié, peut être mis en mouvement lors de la rotation de l'excentrique qui agit alors comme une came. Pour assurer un déplacement horizontal du bloc, ce dernier est disposé sur des lames de ressort verticales. Le montage est mis en marche par l'action d'un moteur à vitesse variable par l'entremise de poulies et d'une courroie qui démultiplient le mouvement en plus de le transmettre. Ce dispositif permet de générer un mouvement quasi sinusoïdal d'amplitude variable (de 0 à 6.4mm) pour différentes vitesse angulaires. Les plans de conception de ce montage se retrouve à la référence [20].

Pour étalonner un capteur de déplacement, un échantillon du spécimen dont on veut déceler le mouvement est fixé à l'avant du bloc d'aluminium, sur une plaque isolante de plexiglas. Le double excentrique est ensuite ajusté pour obtenir le déplacement désiré, en utilisant un micromètre pour mesurer le déplacement généré. Après avoir effectué ces ajustements, le capteur de déplacement capacitif est placé à l'avant de l'échantillon pour en mesurer le déplacement. Le capteur est positionné le plus près possible de l'échantillon lorsque ce dernier a atteint sa fin de course, sans toutefois entrer en contact avec ce dernier. La réponse du capteur est analysée à l'aide d'un oscilloscope, et l'amplitude du signal est déterminée.

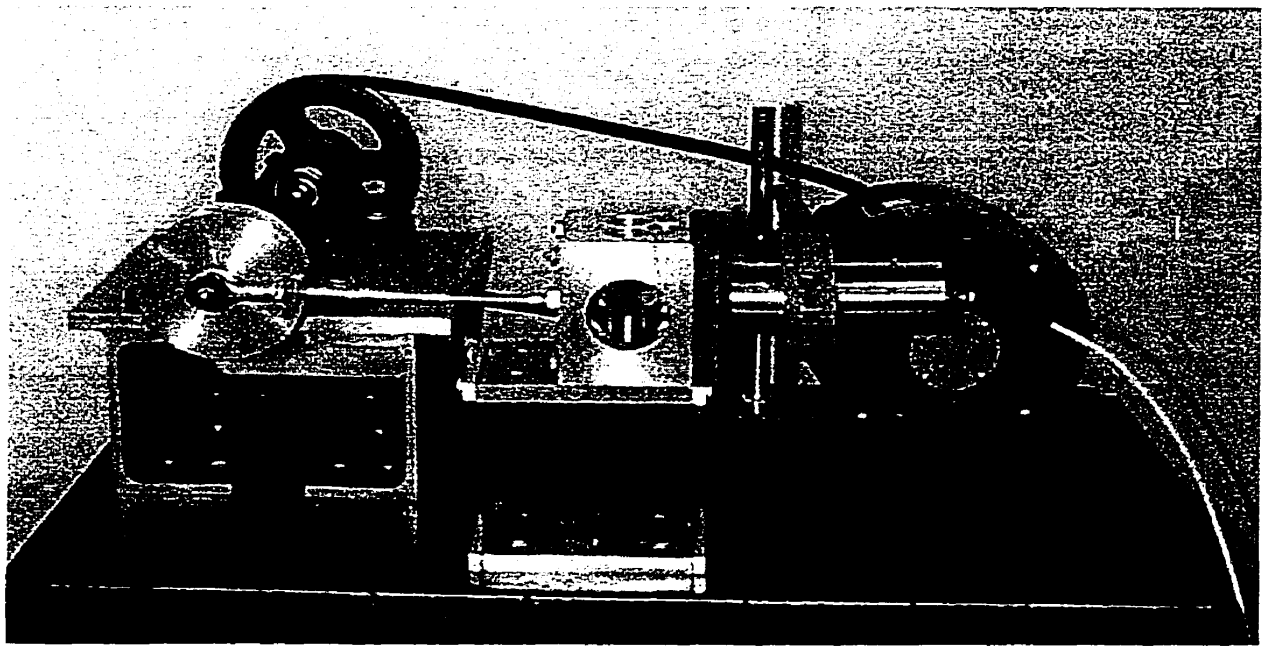


Figure A.1 – Montage utilisé pour étalonner le capteur de déplacement capacitif

A.2 - Cellules de charge piézoélectriques

Le montage utilisé pour étalonner les cellules de charge est présenté à la figure A.2. Ce dispositif est principalement constitué d'une poutrelle qui est utilisée pour charger les cellules de charges. Celle-ci est fixée en son centre à la structure même du montage, par l'intermédiaire d'un pivot qui lui donne une liberté de rotation. On retrouve à une de ses extrémités un petit couteau en plexiglas, couteau qui est usiné avec le même angle que le silicone dans la poutrelle de chargement pour s'y insérer. À l'autre extrémité, un plateau permet de disposer des poids de masse connue et ainsi d'appliquer une force sur les cellules de charge par l'intermédiaire de la poutrelle d'étalonnage. La poutrelle de chargement repose directement sur les cellules de charge. Par conséquent, toute charge appliquée sur cette dernière est entièrement retransmise aux cellules de charge.

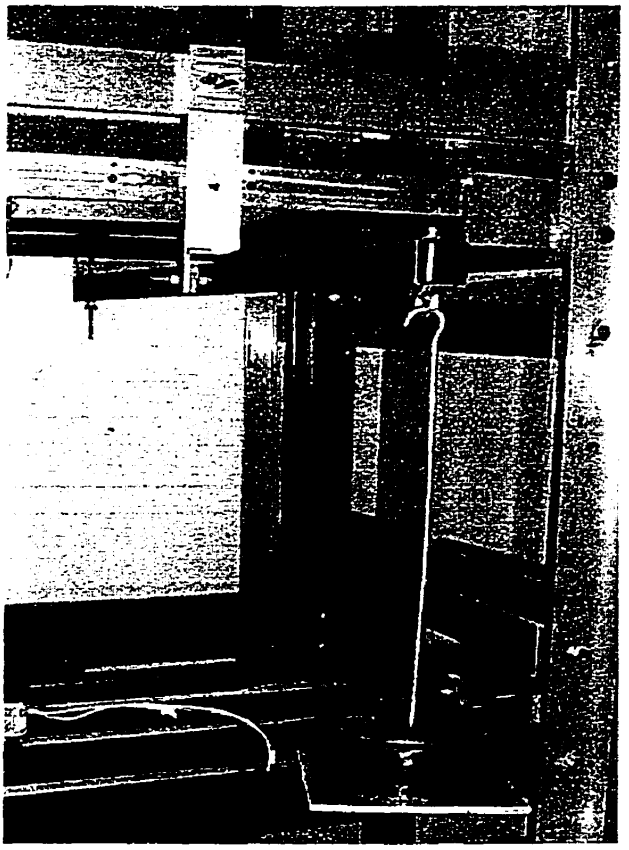


Figure A.2 – Poutrelle utilisée pour étalonner les cellules de charge piézoélectriques

ANNEXE B
ANNEAU DYNAMOMÉTRIQUE

B.1 – Description

L'anneau dynamométrique est utilisé pour mesurer la force statique appliquée sur la plaque dans le montage. Il est illustré à la figure B.1. Il est constitué d'un anneau en aluminium sur lequel sont collées des jauges de déformation. Lorsque l'anneau est chargé, des contraintes en tension et en compression se développent à l'endroit des jauges. Les déformations ainsi induites sont transmises aux jauges à travers la colle et le support des jauges. Il en résulte un chargement de la résistance des jauges proportionnel à la force appliquée. Ces petites variations de résistance sont mesurées en disposant les jauges dans un plein pont de Wheatstone (voir figure B.2). Ce circuit de base permet d'éliminer l'influence de la température sur la réponse des jauges et ainsi d'obtenir une mesure de force indépendante des fluctuations de température. Les plans de conception et le calcul de dimensionnement de l'anneau dynamométrique se retrouve à la référence [20].

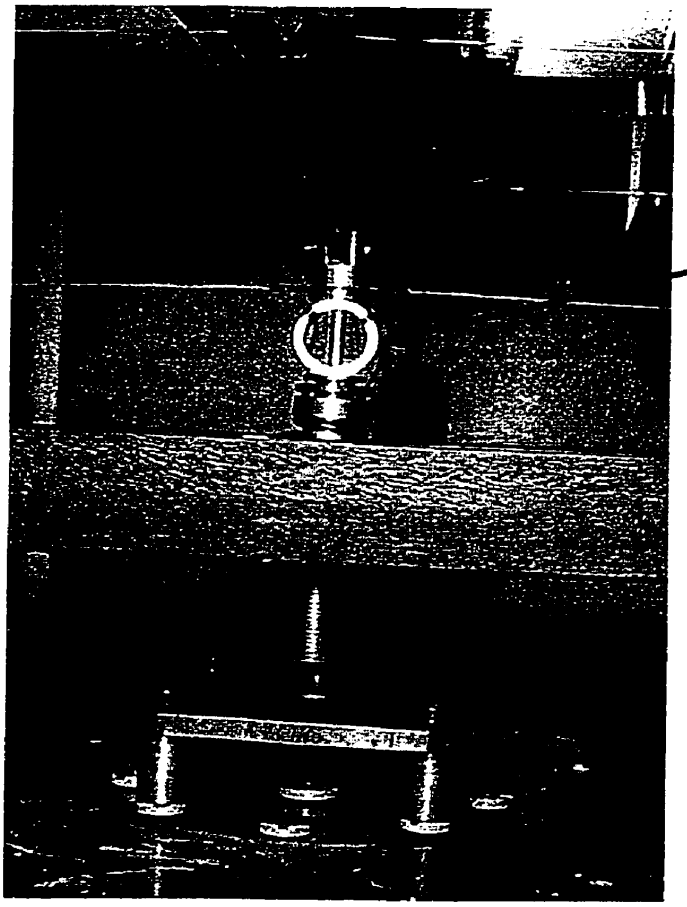
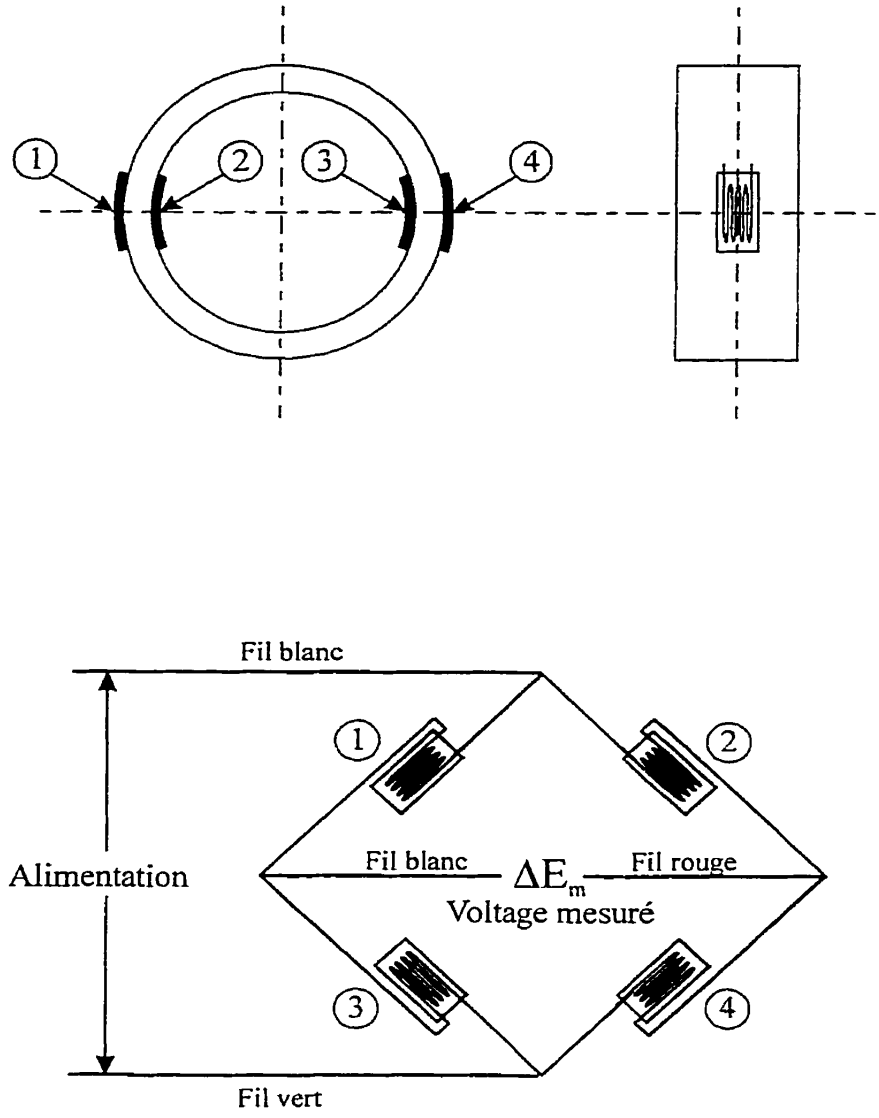


Figure B.1 – Anneau dynamométrique



Jauges utilisées: 120Ω

Figure B.2 – Positionnement des jauges et pont de Wheatstone de l'anneau dynamométrique

ANNEXE C

PROGRAMMES FORTRAN UTILISÉS POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS

C.1 - Programme roots.for

```
C ***********************************************************************
C *          RACINE DE L'EQUATION TRANSCENDANTE                         *
C ***********************************************************************
C
C         PROGRAMME PRINCIPAL  :  ROOTS.FORT
C         FICHIERS DE SORTIE   :  ROOTS.OUT
C         FUNCTION :              FTE
C
C OBJET
C ------
C  EVALUER LES RACINES DE L'EQUATION TRANSCENDANTE
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C ---------------------------
C  RT  - RACINE DE L'EQUATION NON LINEAIRE;
C  NR  - NOMBRE TOTAL DE RACINES A EVALUER;
C   ..................................
C
    INTEGER OUT
    REAL*8 RR(1), PAR(1), FNORM, RT(8), WK(35)
    REAL*8 PI/3.1416926/
    EXTERNAL FTE
    DATA OUT/1/, NR/8/
    DATA NE/1/, NSIG/14/, ITMAX/200/
C
C
    RR(1)=4.73D0
    DO 1 I=1, NR
    CALL ZSPOW(FTE, NSIG, NE, ITMAX, PAR, RR, FNORM, WK, IER)
    RT(I)=RR(1)
    RR(1)=RR(1)+PI
 1  CONTINUE
      .
C
    WRITE (OUT, 600)  (I, RT(I), I=1,NR
 600  FORMAT (4X, I2, 1X, D23.16)
C
    STOP
    END
C   .....................EQUATION TRANSCENDANTE.....................
C
    SUBROUTINE FTE(R, F, NE, PAR)
    REAL*8 R(1), F(1), PAR(1)
    F(1)=1.-DCOS(R(1))*DCOSH(R(1))
    RETURN
    END
```

C.2 - Programme coefs.for

```
C ***************************************************************************
C *                COEFFICIENTS K ET L                                      *
C ***************************************************************************
C
C         PROGRAMME PRINCIPAL : COEFS.FORT
C         FICHIERS D'ENTREE   :       BC.INPUT
C                                     ROOTS.OUT
C         FICHIERS DE SORTIE  :       COEFS.OUT
C         FICHIERS ROUTINES   :       ROUT.COEFS.FORT
C
C OBJET
C -----
C  EVALUER LES COEFFICIENTS K1 A K7 ET L1 A L7
C  EN FONCTION DES CONDITIONS AUX FRONTIERES.
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C --------------------------
C  CALCUL LES ARGUMENTS TELS RT, K1 TO K7 ET L1 A L7 DEFINIS
C  LES AUTRES TELS BEAM, SI, CO, SH AND CH SONT DES PARAMETRES LOCAUX
C  POUR L'EVALUATION DES CONSTANTES ET NE SONT PAS DEFINIS ICI.
C
C  P, R, U            - NOMBRE DE DEMI-ONDES DANS LA DIRECTION X;
C  Q, S, V            - NOMBRE DE DEMI-ONDES DANS LA DIRECTION Y;
C  MX, MY             - MODE DE VIBRATION MAX SELON LA DIRECTION X ET Y;
C  BC                 - CONDITIONS FRONTIERES (INPUT);
C          1: TOUTES LES ARETES SONT SIMPLEMENT SUPPORTEES,
C          2: ARETES CHARGEES SS, LES AUTRES ENCASTREES,
C          3: ARETES CHARGEES E, LES AUTRES SS,
C          4: TOUTES LES ARETES SONT "LOOSELY CLAMPED" (E).
C
C  ..............................
C
      BLOCK DATA
      COMMON /CPI/PI
      REAL*8 PI/3.1415926535897930/
      END
C
      INTEGER P,Q,R,S,U,V,BC,OUT,IN1,IN2,NR
      REAL*8 RT(8),SI(8),CO(8),SH(8),CH(8),BEAM(8),PI, K7(1,1),L7(3,3)
      REAL*8 K1(1,1),K2(1,1,1),K3(1,1,1),K4(1,1,1),K5(1,1,1),K6(1,1,1)
      REAL*8 L1(3,3),L2(3,3,3),L3(3,3,3),L4(3,3,3),L5(3,3,3),L6(3,3,3)
      COMMON /COEF/RT,SI,CO,SH,CH,BEAM
      COMMON /CPI/PI
      EXTERNAL COEF1,COEF2S,COEF3S,COEF4S,COEF5S,COEF6S,COEF7S
      EXTERNAL COEF2C,COEF3C,COEF4C,COEF5C,COEF6C,COEF7C
      DATA IN1/5/,IN2/7/,OUT/2/,P/1/,R/1/,U/1/,NR/8/
      DATA MX/1/,MY/3/
C
C ..... ENTREE: BC.INPUT
      OPEN(IN1,FILE='bc.in')
      READ(IN1,500) BC
      CLOSE(IN1)
C ..... ENTREE: ROOTS.OUT
      OPEN(IN2,FILE='roots.out')
      READ(IN2,501) (RT(I),I=1,NR)
      CLOSE(IN2)
C
C.....EVALUATION DE K ET L
      DO 1 N=1,NR
      SI(N)=DSIN(RT(N))
      CO(N)=DCOS(RT(N))
      SH(N)=DSINH(RT(N))
```

```
      CH(N)=DCOSH(RT(N))
      BEAM(N)=(CH(N)-CO(N))/(SH(N)-SI(N))
    1 CONTINUE
      IF (BC.EQ.2) GO TO 102
      IF (BC.EQ.3) GO TO 103
      IF (BC.EQ.4) GO TO 104
C ..... SS-SS-SS-SS PLAQUE.
      CALL COEF1(K1,MX)
      CALL COEF1(L1,MY)
      CALL COEF2S(K2,MX,MX)
      CALL COEF2S(L2,MY,MY)
      CALL COEF3S(K3,MX,MX)
      CALL COEF3S(L3,MY,MY)
      CALL COEF4S(K4,MX,MX)
      CALL COEF4S(L4,MY,MY)
      CALL COEF5S(K5,MX,MX)
      CALL COEF5S(L5,MY,MY)
      CALL COEF6S(K6,MX,MX)
      CALL COEF6S(L6,MY,MY)
      CALL COEF7S(K7,MX)
      CALL COEF7S(L7,MY)
      GO TO 105
C ..... SS-C-SS-C PLAQUE .
  102 CALL COEF1(K1,MX)
      CALL COEF1(L1,MY)
      CALL COEF2S(K2,MX,MX)
      CALL COEF2C(L2,MY,MY)
      CALL COEF3S(K3,MX,MX)
      CALL COEF3C(L3,MY,MY)
      CALL COEF4S(K4,MX,MX)
      CALL COEF4C(L4,MY,MY)
      CALL COEF5S(K5,MX,MX)
      CALL COEF5C(L5,MY,MY)
      CALL COEF6S(K6,MX,MX)
      CALL COEF6C(L6,MY,MY)
      CALL COEF7S(K7,MX)
      CALL COEF7C(L7,MY)
      GO TO 105
C ..... C-SS-C-SS PLAQUE .
  103 CALL COEF1(K1,MX)
      CALL COEF1(L1,MY)
      CALL COEF2C(K2,MX,MX)
      CALL COEF2S(L2,MY,MY)
      CALL COEF3C(K3,MX,MX)
      CALL COEF3S(L3,MY,MY)
      CALL COEF4C(K4,MX,MX)
      CALL COEF4S(L4,MY,MY)
      CALL COEF5C(K5,MX,MX)
      CALL COEF5S(L5,MY,MY)
      CALL COEF6C(K6,MX,MX)
      CALL COEF6S(L6,MY,MY)
      CALL COEF7C(K7,MX)
      CALL COEF7S(L7,MY)
      GO TO 105
C ..... C-C-C-C PLAQUE .
  104 CALL COEF1(K1,MX)
      CALL COEF1(L1,MY)
      CALL COEF2C(K2,MX,MX)
      CALL COEF2C(L2,MY,MY)
      CALL COEF3C(K3,MX,MX)
      CALL COEF3C(L3,MY,MY)
      CALL COEF4C(K4,MX,MX)
      CALL COEF4C(L4,MY,MY)
      CALL COEF5C(K5,MX,MX)
      CALL COEF5C(L5,MY,MY)
      CALL COEF6C(K6,MX,MX)
```

```
      CALL COEF6C(L6,MY,MY)
      CALL COEF7C(K7,MX)
      CALL COEF7C(L7,MY)
C
C ..................................................SORTIE: COEFS.OUT
  105 OPEN(OUT,FILE='coefs.out')
      WRITE(OUT,600) U,P,K7(U,P)
      WRITE(OUT,600) ((V,Q,L7(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
      WRITE(OUT,600) ((I,M,K1(I,M),M=1,MX),I=1,MX)
      WRITE(OUT,600) ((J,N,L1(J,N),N=1,MY),J=1,MY)
      WRITE(OUT,601) (I,P,R,K2(I,P,R),K3(I,P,R),I=1,MX)
      WRITE(OUT,601) (((J,Q,S,L2(J,Q,S),L3(J,Q,S),S=1,MY),Q=1,MY),
     #            J=1,MY)
      WRITE(OUT,602) (U,M,R,K4(U,M,R),K5(U,M,R),K6(U,M,R),M=1,MX)
      WRITE(OUT,602) (((V,N,S,L4(V,N,S),L5(V,N,S),L6(V,N,S),S=1,MY),
     #            N=1,MY),V=1,MY)
      CLOSE(OUT)
C
C ..................................................FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
  500 FORMAT(I5)
  501 FORMAT(7X,D23.16)
C
  600 FORMAT(2(1X,I2),1X,D23.16)
  601 FORMAT(3(1X,I1),1X,D23.16,1X,D23.16)
  602 FORMAT(3(1X,I1),1X,D23.16,1X,D23.16,1X,D23.16)
C     .
C
      STOP
      END
```

C.3 - Programme strec.for

```
C ***************************************************************************
C *              COEFFICIENTS DE CONTRAINTE                                 *
C ***************************************************************************
C
C          NOM DU PROGRAMME :     STREC.FORT
C          FICHIERS D'ENTREE :    STREC.IN
C                                 ROOTS.OUT
C                                 COEF.OUT
C          FICHIERS DE SORTIE :   STREC.OUT
C          ROUTINES IMSL :        DLSLRG
C
C OBJETS
C --------
C  L'EQUATIONDE COMPATIBILITE EST RESOLUE POUR LES COEFFICIENTS DE
C  CONTRAINTES D'AIRY
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C --------------------------------
C  AB, AA          - MATRICE DES COEFFICIENTS COTE GAUCHE
C  BA (BB)         - MATRICE DES COEFFICIENTS COTE DROIT
C  BB              - MATRICE DES COEFFICIENTS DE CONTRAINTE
C
C  ..................................................................
C
      INTEGER P,Q,R,S,U,V,BC,IN1,IN2,IN3,OUT
      REAL*8 AR,AR2,PI2,PI4,RT(8),K7(1,1),L7(3,3)
      REAL*8 K1(1,1),K2(1,1,1),K3(1,1,1),K4(1,1,1),K5(1,1,1),K6(1,1,1)
      REAL*8 L1(3,3),L2(3,3,3),L3(3,3,3),L4(3,3,3),L5(3,3,3),L6(3,3,3)
      REAL*8 AB(1,3,1,3),AA(3,3),BA(1,3,3,3),BB(3,9),XX(3,9),AINV(3,3)
      REAL*8 PI/3.141592653589793D0/
      EQUIVALENCE (AB(1,1,1,1),AA(1,1)),(BA(1,1,1,1),BB(1,1))
      DATA IN1/2/,IN2/3/,IN3/4/,OUT/6/
```

```
      DATA P/1/,R/1/,U/1/,NR/8/
      DATA MX/1/,MY/3/
C
C.....ENTREE: STREC.IN
      OPEN(IN1,FILE='strec.in')
      READ(IN1,500) BC
      READ(IN1,501) AR
      CLOSE(IN1)
C.....ENTREE: ROOTS.OUT
      OPEN(IN2,FILE='roots.out')
      READ(IN2,501) (RT(I),I=1,NR)
      CLOSE(IN2)
C .....ENTREE: COEFS.OUT
      OPEN(IN3,FILE='coefs.out')
      READ(IN3,501) K7(U,P)
      READ(IN3,501) ((L7(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
      READ(IN3,501) ((K1(I,M),M=1,MX),I=1,MX)
      READ(IN3,501) ((L1(J,N),N=1,MY),J=1,MY)
      READ(IN3,502) (K2(I,P,R),K3(I,P,R),I=1,MX)
      READ(IN3,502) (((L2(J,Q,S),L3(J,Q,S),S=1,MY),Q=1,MY),J=1,MY)
      READ(IN3,503) (K4(U,M,R),K5(U,M,R),K6(U,M,R),M=1,MX)
      READ(IN3,503) (((L4(V,N,S),L5(V,N,S),L6(V,N,S),S=1,MY),N=1,MY),
     #            V=1,MY)
      CLOSE(IN3)
C
C .....CALCUL GENERAL
      N1=MX*MY
      N2=MY*MY
      AR2=AR**2
      PI2=PI**2
      PI4=PI**4
C
C .....MATRICE DES COEFFICIENTS COTE GAUCHE
      DO 1 N=1,MY
      DO 1 M=1,MX
      DO 1 J=1,MY
      DO 1 I=1,MX
      IF ((I.NE.M).AND.(J.NE.N)) GO TO 103
      AB(I,J,M,N)=2.*K1(I,M)*L1(J,N)*((AR*RT(M)*RT(N))**2)+RT(N)**4+
     #          (AR*RT(M))**4
      GO TO 1
  103 AB(I,J,M,N)=2.*K1(I,M)*L1(J,N)*((AR*RT(M)*RT(N))**2)
    1 CONTINUE
C
C .....MATRICE DES COEFFICIENTS COTE DROIT
      DO 2 S=1,MY
      DO 2 Q=1,MY
      DO 2 J=1,MY
      DO 2 I=1,MX
      IF (BC.EQ.1) GO TO 111
      IF (BC.EQ.2) GO TO 112
      IF (BC.EQ.3) GO TO 113
      IF (BC.EQ.4) GO TO 114
C
C ..... SS-SS-SS-SS PLAQUE .
  111 BA(I,J,Q,S)=PI4*AR2*(Q*S*K2(I,P,R)*L2(J,Q,S)-
     #                S*S*K3(I,P,R)*L3(J,S,Q))
      GO TO 2
C
C .....SS-C-SS-C PLAQUE .
  112 BA(I,J,Q,S)=PI2*AR2*(RT(P)*RT(R)*Q*S*K2(I,P,R)*L2(J,Q,S)-
     #                RT(P)*RT(P)*S*S*K3(I,P,R)*L3(J,S,Q))
      GO TO 2
C
C .....C-SS-C-SS PLAQUE .
  113 BA(I,J,Q,S)=PI2*AR2*(RT(Q)*RT(S)*K2(I,P,R)*L2(J,Q,S)-
```

```
     #              RT(S)*RT(S)*K3(I,P,R)*L3(J,S,Q))
      GO TO 2
C
C ..................................................C-C-C-C PLAQUE .
  114 BA(I,J,Q,S)=AR2*(RT(P)*RT(Q)*RT(R)*RT(S)*K2(I,P,R)*L2(J,Q,S)-
     #          RT(P)*RT(P)*RT(S)*RT(S)*K3(I,P,R)*L3(J,S,Q))
    2 CONTINUE
C
C ..................................................SOLUTION DE L'EQUATION ALGEBRIQUE LINEAIRE
      CALL DLINRG(N1,AA,N1,AINV,N1)
      CALL DMRRRR(N1,N1,AINV,N1,N1,N2,BB,N1,N1,N2,XX,N1)
C
C ..................................................SORTIE: STREC.OUT
      OPEN(OUT,FILE='strec.out')
      WRITE(*,600) ((I,J,XX(I,J),J=1,N2),I=1,N1)
      CLOSE(OUT)
C
C ..................................................FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
  500 FORMAT(I5)
  501 FORMAT(7X,D23.16)
  502 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16)
  503 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16,1X,D23.16)
C
  600 FORMAT(2(1X,I2),1X,D23.16)
C     .
C
      STOP
      END
```

C.4 - Programme sychar.for

```
C ************************************************************************
C *        CARACTERISTIQUES DE LA PLAQUE PARFAITE                        *
C ************************************************************************
C
C          PROGRAMME:              SYCHA.FORT
C          FICHIERS D'ENTREE:      SYCHA.IN
C                                  ROOTS.OUT
C                                  COEF.OUT
C          FICHIERS DE SORTIE :    SYCHA.OUT
C          ROUTINE IMSL :          DEVCRG
C                                  DLINRG
C                                  DMRRRR
C
C OBJET
C ------
C  DETERMINE LES FREQUENCES NATURELLES DE LA PLAQUE PARFAITE CHARGEE ET
C  NON CHARGEE, LES CHARGES CRITIQUES, LES PARAMETRES DE CHARGEMENT,
C  LES COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT VISQUEUX, ET LES AUTRES
C  CARACTERISTIQUES NECESSAIRES POUR L'ETUDE DU SYSTEME.
C
C NOTE
C ------
C
C  LES CHARGES APPLIQUEES SUR LA PLAQUE DOIVENT ETRE EN NEWTON DANS LE
C  FICHIER DE DONNEES SYCHA.IN
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C ---------------------------
C  PLATE          - NOMBRE POUR IDENTIFIER LA PLAQUE.
C  A, B, H        - LARGEUR, LONGUER ET EPAISSEUR DE LA PLAQUE.
C  E,NU,RHO       - MODULE DE YOUNG, COEFFICIENT DE POISSON ET DENSITE DE LA PLAQUE
C  ZETA           - CONSTANTE DIFINIE POUR CALCUL.
C  TIME           - FACTEUR POUT CONVERSION DU TEMPS DE VALEUR NON-DIMENSIONNELLE
```

```
C                   A UNE VALEUR DIMENSIONNELLE.
C  FORCE           - FACTEUR DE CONVERSION POUR LA CHARGE.
C  AR              - RAPPORT DE FORME DE LA PLAQUE.
C  MMF             - MODE MAXIMUM DE FLAMBAGE
C  MCR             - MODE CRITIQUE DE FLAMBAGE.
C  NY0, DN0        - COMPOSANTE STATIQUE DU CHARGEMENT, NON DIM. ET DIMENSIONNELLE
C  NYT, DNT        - COMPOSANTE DYNAMIQUE DU CHARGEMENT, NON DIM. ET DIMENSIONNELLE
C  PCR             - RATIO DE CHARGEMENT STATIQUE.
C  DCR             - RATIO DE CHARGEMENT DYNAMIQUE.
C  KC              - COEFFICIENT DE FLAMBAGE ELASTIQUE.
C  NKC, DKC        - CHARGE CRITIQUE MININAE, NON DIM. ET DIMENSIONNELLE
C  NCR, DNC        - MATRICE DES CHARGES CRITIQUES.
C  SFF, SLF        - CARRE DES FREQUENCES NAT., PLAQUE LIBRE ET CHARGEE.
C  FNF, LNF        - FREQUENCES NAT. PLAQUE LIBRE ET CHARGEE (HZ).
C  EV, INEV        - MATRICE DES VALEURS PROPRES ET MATRICES DES VALEURS PROPRES INVERSEES.
C  DECR            - DECREMENT LOGARITHMIQUE D'AMORTISSEMENT.
C  DAMP            - MATRICE DES COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT VISQUEUX.
C
C   ..................................
C
      INTEGER P,Q,R,S,U,V,BC,MCR,MMF,IN5,IN7,IN8,OUT,PLATE,IR(3)
      REAL DECR
      REAL*8 A,B,H,E,NU,RHO,AR,PI,PI2,PI4,LAR,RAR,NY0,NYT,DN0,DNT,PCR
      REAL*8 DCR,NKC,DKC,ZETA,TIME,FORCE,RT(8),K7(1,1),L7(3,3)
      REAL*8 SFF(3),FNF(3),SLF(3),LNF(3),NCR(3,3),DNC(3,3),DAMP(3,3)
      REAL*8 MU(3,3),FEP(3,3),LEP(3,3),EV(3,3),ZA(3),INEV(3,3),PN(3,3)
      REAL*8 LP(3,3),LQ(3,3),KC,BETAX(1),BETAY(3)
      COMPLEX*16 RF(3),REV(3,3)
      DATA PI/3.141592653589793D0/
      DATA IN5/5/,IN7/5/,IN8/5/,OUT/2/,P/1/,R/1/,U/1/
      DATA NR/8/
      DATA MX/1/,MY/3/,MMF/5/
C
C .....ENTREE: SYCHA.IN
      OPEN(IN5,FILE='sycha.in')
      READ(IN5,500) PLATE,BC
      READ(IN5,501) A,B,H
      READ(IN5,502) E,NU,RHO
      READ(IN5,503) DN0,DNT,DECR
      CLOSE(IN5)
C .....ENTREE: ROOTS.OUT
      OPEN(IN7,FILE='roots.out')
      READ(IN7,504) (RT(I),I=1,NR)
      CLOSE(IN7)
C .....ENTREE: COEFS.OUT
      OPEN(IN8,FILE='coefs.out')
      READ(IN8,504) K7(U,P)
      READ(IN8,504) ((L7(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
      CLOSE(IN8)
C
C .....CALCULS GENERAUX
  101 AR=B/A
      PI2=PI**2
      PI4=PI**4
      ZETA=12.*(1.-NU**2)
      TIME=2.*PI*DSQRT(RHO*(A**4)/(E*(H**2)))
      FORCE=E*(H**3)/(A**2)
      DO 1 Q=1,MY
      DO 1 V=1,MY
      MU(V,Q)=0.
      NCR(V,Q)=0.
      DNC(V,Q)=0.
      DAMP(V,Q)=0.
    1 CONTINUE
C     .
C           ========= * =========
```

```
C
C .....EVALUATION DES CARACTERISTIQUES DU SYSTEME :
C
      IF (BC.EQ.1) GO TO 201
      IF (BC.EQ.2) GO TO 202
      IF (BC.EQ.3) GO TO 203
      IF (BC.EQ.4) GO TO 204
C
C .....SS-SS-SS PLAQUE .
C .....MODE CRITIQUE DE FLAMBAGE
  201 LAR=0.D0
      DO 2 M=1,MMF
      RAR=LAR+2.*M
      IF ((AR.GT.DSQRT(LAR)).AND.(AR.LE.DSQRT(RAR))) MCR=M
    2 LAR=RAR
C
      BETAX(1) = PI
      DO 50 Q = 1,MY
      BETAY(Q) = Q*PI
   50 CONTINUE
      GO TO 60
C
C ..... SS-C-SS-C PLAQUE .
C .....MODE CRITIQUE DE FLAMBAGE
  202 LAR=0.D0
      DO 8 M=1,MMF
      RAR=LAR+0.882D0*M
      IF ((AR.GT.DSQRT(LAR)).AND.(AR.LE.DSQRT(RAR))) MCR=M
    8 LAR=RAR
C
      BETAX(1) = PI
      DO 51 Q = 1,MY
      BETAY(Q) = RT(Q)
   51 CONTINUE
      GO TO 60
C
C ..... C-SS-C-SS PLAQUE .
C .....MODE CRITIQUE DE FLAMBAGE
  203 LAR=0.D0
      DO 14 M=1,MMF
      RAR=LAR+2.4D0*M
      IF ((AR.GT.DSQRT(LAR)).AND.(AR.LE.DSQRT(RAR))) MCR=M
   14 LAR=RAR
C
      BETAX(1) = RT(1)
      DO 52 Q = 1,MY
      BETAY(Q) = Q*PI
   52 CONTINUE
      GO TO 60
C
C ..... C-C-C-C PLAQUE .
C .....MODE CRITIQUE DE FLAMBAGE
  204 LAR=0.D0
      DO 26 M=1,MMF
      RAR=LAR+1.05D0*M
      IF ((AR.GT.DSQRT(LAR)).AND.(AR.LE.DSQRT(RAR))) MCR=M
   26 LAR=RAR
C
      BETAX(1) = RT(1)
      DO 53 Q = 1,MY
      BETAY(Q) = RT(Q)
   53 CONTINUE
C
C            ========== * ==========
C
C .....FREQUENCES NATURELLES LIBRE
```

```
   60 DO 27 V=1,MY
      DO 27 Q=1,MY
      IF (V.NE.Q) GO TO 108
      FEP(V,Q)=( BETAX(U)**4 + (BETAY(V)/AR)**4 +
     #       2.*K7(U,P)*L7(V,Q)*((BETAX(P)*BETAY(Q)/AR)**2) )/ZETA
      GO TO 27
  108 FEP(V,Q)=(2.*K7(U,P)*L7(V,Q)*((BETAX(P)*BETAY(Q)/AR)**2))/ZETA
   27 CONTINUE
C
      CALL DEVCRG(MY,FEP,MY,RF,REV,MY)
      DO 75 I = 1,MY
      SFF(I) = DREAL(RF((MY+1)-I))
      DO 75 J = 1,MY
      EV(I,J) = DREAL(REV((MY+1)-I,J))
   75 CONTINUE
      DO 28 Q=1,MY
      FNF(Q)=DSQRT(SFF(Q))/TIME
   28 CONTINUE
      DO 29 V=1,MY
      DO 29 Q=1,MY
      LP(V,Q)=EV(V,Q)
   29 CONTINUE
      CALL DLINRG(MY,LP,MY,INEV,MY)
C ..........................................................CHARGES CRITIQUES
      DO 30 V=1,MY
      DO 30 Q=1,MY
   30 PN(V,Q)=-L7(V,Q)*((BETAY(Q)/AR)**2)
C
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,FEP,MY,MY,MY,MU,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,MU,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,LEP,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,PN,MY,MY,MY,LQ,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,LQ,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,LP,MY)
      CALL DLINRG(MY,LP,MY,LQ,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,LEP,MY,MY,MY,LQ,MY,MY,MY,NCR,MY)
      DO 31 V=1,MY
      DO 31 Q=1,MY
   31 DNC(V,Q)=NCR(V,Q)*FORCE
      NKC=NCR(MCR,MCR)
      DKC=DNC(MCR,MCR)
C ..................................................COEFFICIENT DE FLAMBAGE ELASTIQUE
      KC=NKC*ZETA/PI2
C ..........................................................CHARGEMENT DANS LE PLAN
      NY0=DN0/FORCE
      NYT=DNT/FORCE
C ..........................................................FREQUENCES NATURELLES CHARGEES
      DO 32 V=1,MY
      DO 32 Q=1,MY
      LEP(V,Q)=FEP(V,Q)-NY0*PN(V,Q)
   32 CONTINUE
      CALL DEVCRG(MY,LEP,MY,RF,REV,MY)
      DO 85 I = 1,MY
      SLF(I) = DREAL(RF((MY+1)-I))
      DO 85 J = 1,MY
      EV(I,J) = DREAL(REV((MY+1)-I,J))
   85 CONTINUE
      DO 33 Q=1,MY
      LNF(Q)=DSQRT(SLF(Q))/TIME
   33 CONTINUE
      DO 34 V=1,MY
      DO 34 Q=1,MY
      LP(V,Q)=EV(V,Q)
   34 CONTINUE
      CALL DLINRG(MY,LP,MY,INEV,MY)
C
C ..........................................................SORTIE: SYCHA.OUT
      OPEN(OUT,FILE='sycha.out')
```

```
      WRITE(OUT,600) TIME
      WRITE(OUT,600) AR
      WRITE(OUT,605) ((V,Q,EV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,605) ((V,Q,INEV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,601) MCR
      WRITE(OUT,600) KC
      WRITE(OUT,602) NY0,DN0
      WRITE(OUT,602) NYT,DNT
      WRITE(OUT,602) NKC,DKC
      WRITE(OUT,603) (V,SFF(V),FNF(V),V=1,MY)
      WRITE(OUT,603) (V,SLF(V),LNF(V),V=1,MY)
      WRITE(OUT,604) ((V,Q,NCR(V,Q),DNC(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,605) ((V,Q,FEP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,605) ((V,Q,PN(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,777)
C
  777 FORMAT(/7X,'MATRICE DE PASSAGE')
      WRITE(OUT,605) ((V,Q,EV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      CLOSE(OUT)
C
C .....FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
  500 FORMAT(2I5)
  501 FORMAT(3D15.4)
  502 FORMAT(D20.10,D10.3,D20.5)
  503 FORMAT(2D10.3,F10.2)
  504 FORMAT(7X,D23.16)
C
  600 FORMAT(7X,D23.16)
  601 FORMAT(1X,I2)
  602 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16)
  603 FORMAT(4X,I2,1X,D23.16,1X,D23.16)
  604 FORMAT(2(1X,I2),1X,D23.16,1X,D23.16)
  605 FORMAT(2(1X,I2),1X,D23.16)
  606 FORMAT(4X,I2,1X,D23.16)
C   .
C
      STOP
      END
```

C.5 - Programme cubic.for

```
C ***********************************************************************
C *                  RIGIDITES CUBIQUES                                 *
C ***********************************************************************
C
C          NOM DU PROGRAMME :  CUBIC.FORT
C          FICHIERS D'ENTREE :  BC.INPUT
C                               ROOTS.OUT
C                               COEFBC*.OUT
C                               STRECBC*.OUT
C                               SYCHBC*.OUT
C          FICHIERS DE SORTIE :  CUBICBC*.OUT
C          ROUTINES IMSL :  DMRRRR
C
C OBJETS
C -------
C  EVALUER LES RIGIDITES CUBIQUES DU SYSTÈME.
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C ---------------------------
C  GG               - MATRICES DES NONLINEARITES
C  CUEV             - MATRICE PROPRE SPECIALE
C
C   ..................................
```

```
C
      INTEGER P,Q,R,S,U,V,BC,IN1,IN2,IN3,IN4,OUT,N1,N2,NG
      REAL*8 AR,AR2,PI2,PA2,RT(8),WK(50),K7(1,1),L7(3,3)
      REAL*8 K1(1,1),K2(1,1,1),K3(1,1,1),K4(1,1,1),K5(1,1,1),K6(1,1,1)
      REAL*8 L1(3,3),L2(3,3,3),L3(3,3,3),L4(3,3,3),L5(3,3,3),L6(3,3,3)
      REAL*8 GE(3,1,3),GB(3,3),BB(3,9),GR(3,9),GG(3,27),GV(3,27)
      REAL*8 EV(3,3),INEV(3,3),XEV,YEV,ZEV,CUEV(27,27),MM(3,3,3,3)
      REAL*8 PI/3.141592653589793D0/
      EQUIVALENCE (GE(1,1,1),GB(1,1))
      EQUIVALENCE (MM(1,1,1,1),GG(1,1))
      DATA IN1/5/,IN2/6/,IN3/7/,IN4/8/,OUT/2/
      DATA MX/1/,MY/3/,P/1/,R/1/,U/1/,NR/8/
C
      N1=MX*MY
      N2=MY*MY
      NG=MY*N2
C
C .....ENTREE: STREC.IN
      OPEN(IN1,FILE='strec.in')
      READ(IN1,500) BC
      READ(IN1,501) AR
      CLOSE(IN1)
C .....ENTREE: ROOTS.OUT
      OPEN(IN2,FILE='roots.out')
      READ(IN2,501) (RT(I),I=1,NR)
      CLOSE(IN2)
C .....ENTREE: COEFS.OUT
      OPEN(IN3,FILE='coefs.out')
      READ(IN3,501) K7(U,P)
      READ(IN3,501) ((L7(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
      READ(IN3,501) ((K1(I,M),M=1,MX),I=1,MX)
      READ(IN3,501) ((L1(J,N),N=1,MY),J=1,MY)
      READ(IN3,502) (K2(I,P,R),K3(I,P,R),I=1,MX)
      READ(IN3,502) (((L2(J,Q,S),L3(J,Q,S),S=1,MY),Q=1,MY),J=1,MY)
      READ(IN3,503) (K4(U,M,R),K5(U,M,R),K6(U,M,R),M=1,MX)
      READ(IN3,503) (((L4(V,N,S),L5(V,N,S),L6(V,N,S),S=1,MY),N=1,MY),
     #            V=1,MY)
      CLOSE(IN3)
C .....ENTREE: STREC.OUT
      OPEN(IN4,FILE='strec.out')
      READ(IN4,501) ((BB(I,J),J=1,N2),I=1,N1)
      CLOSE(IN4)
C
C .....MATRICE DES COEFF. CUBIQUES
      LG=1
      AR2=AR*AR
      PI2=PI*PI
      PA2=PI2/AR2
      DO 1 S=1,MY
      DO 2 N=1,MY
      DO 2 M=1,MX
      DO 2 V=1,MY
      IF (BC.EQ.2) GO TO 112
      IF (BC.EQ.3) GO TO 113
      IF (BC.EQ.4) GO TO 114
C
C .....SS-SS-SS-SS PLAQUE .
      GE(V,M,N)=(2.*S*RT(M)*RT(N)*K6(U,M,R)*L6(V,N,S)-
     #          RT(N)*RT(N)*K4(U,M,R)*L5(V,N,S)-
     #        S*S*RT(M)*RT(M)*K5(U,M,R)*L4(V,N,S))*PA2
      GO TO 2
C
C .....SS-C-SS-C PLAQUE .
  113 GE(V,M,N)=(2.*PI*RT(M)*RT(N)*RT(S)*K6(U,M,R)*L6(V,N,S)-
     #          PI2*RT(N)*RT(N)*K4(U,M,R)*L5(V,N,S)-
     #       RT(M)*RT(M)*RT(S)*RT(S)*K5(U,M,R)*L4(V,N,S))/AR2
```

```
      GO TO 2
C
C .....C-SS-C-SS PLAQUE .
  112 GE(V,M,N)=(2.*PI*S*RT(M)*RT(N)*RT(R)*K6(U,M,R)*L6(V,N,S)-
     #          RT(N)*RT(N)*RT(R)*RT(R)*K4(U,M,R)*L5(V,N,S)-
     #            PI2*S*S*RT(M)*RT(M)*K5(U,M,R)*L4(V,N,S))/AR2
      GO TO 2
C
C .....C-C-C-C PLAQUE .
  114 GE(V,M,N)=(2.*RT(M)*RT(N)*RT(R)*RT(S)*K6(U,M,R)*L6(V,N,S)-
     #          RT(N)*RT(N)*RT(R)*RT(R)*K4(U,M,R)*L5(V,N,S)-
     #          RT(M)*RT(M)*RT(S)*RT(S)*K5(U,M,R)*L4(V,N,S))/AR2
    2 CONTINUE
      CALL DMRRRR(N1,N1,GB,N1,N1,N2,BB,N1,N1,N2,GR,N1)
      DO 3 L=1,N2
      DO 4 K=1,MY
      GG(K,LG)=GR(K,L)
    4 CONTINUE
      LG=LG+1
    3 CONTINUE
    1 CONTINUE
C
C
C .....SORTIE: CUBIC.OUT
      OPEN(OUT,FILE='cubic.out')
      WRITE(OUT,600) ((V,J,GG(V,J),J=1,NG),V=1,MY)
      WRITE(OUT,601) BC,AR
      CLOSE(OUT)
C     WRITE(*,700) ((((V,J,K,L,MM(V,J,K,L),L=1,MY),K=1,MY),
C    #                          J=1,MY),V=1,MY)
C
C .....FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
  500 FORMAT(I5)
  501 FORMAT(7X,D23.16)
  502 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16)
  503 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16,1X,D23.16)
  504 FORMAT(/7X,D23.16)
C
  600 FORMAT(2(1X,I4),1X,D23.16)
  601 FORMAT(/1X,'CONDITION FRONTIERE:',I2,/1X,'RAPPORT DE FORME:',F7.4)
  700 FORMAT(4(1X,I4),1X,D23.16)
C     .
C
      STOP
      END
```

C.6 - Programme imper.for

```
C ***********************************************************************
C *              EFFETS DES IMPERFECTIONS                               *
C ***********************************************************************
C
C          NOM DU PROGRAMME :     IMPER.FORT
C          FICHIERS D'ENTREE :    IMPER.IN
C                                 SYCHA.OUT
C                                 CUBIC.OUT
C          FICHIERS DE SORTIE :   IMPER.OUT
C          ROUTINE IMSL :         DNEQNJ
C                                 DMRRRR
C                                 DEVCRG
C
C OBJET
C -----
C  PREMIEREMENT CE PROGRAMME EST UTILISE POUR DETERMINER LA DEFORMATION
C  DUE A LA COMPOSANTE STATIQUE DU CHARGEMENT DANS LA PLAN.
```

```
C  DEUXIEMEMENT, IL DETERMINE LES FREQUENCES NATURELLES DE LA PLAQUE
C  IMPARFAITE CHARGEE.
C
C DESCRIPTION DES PARAMETRES
C ---------------------------
C  TIME              - FACTEUR DE CONVERSION DU TEMPS ADIMENSIONNEL AU TEMPS
C                      DIMENSIONNEL.
C  NY0, DN0          - COMPOSANTE STATIQUE DU CHARGEMENT FORME ADIMENSIONNELLE
C                      ET DIMENSIONNELLE.
C  SFF, SLF          - FREQUENCE LIBRE ET CHARGEE AU CARREES.
C  FNF, LNF          - FREQUENCE LIBRE ET CHARGEE AU CARREES EN HERTZ.
C  ILF               - FREQUENCE DE LA PLAQUE IMPARFAITE CAHRGEE EN HERTZ.
C
C  W0     - AMPLITUDE DE L'IMPERFECTION GEOMETRIQUE INITIALE
C  DI     - AMPLITUDE DE LA DEFORMATION STATIQUE
C  ------------------------------
C
      INTEGER P,Q,R,S,U,V,BC,IN1,IN2,IN3,OUT,NG,ITMAX
      REAL*8 ERRREL,TIME,AR
      REAL*8 PI,NY0,NYT,DN0,DNT
      REAL*8 W0(3),DI(3),GG(3,27),MM(3,3,3,3),MMM(3,3,3,3),GGG(3,27)
      REAL*8 MM1(3,3,3,3),MM2(3,3,3,3),MM3(3,3,3,3)
      REAL*8 GG1(3,27),GG2(3,27),GG3(3,27),LAR(3,3),MAT(3,3)
      REAL*8 SFF(3),FNF(3),SLF(3),LNF(3),ISLF(3),ILNF(3),RPF(3)
      REAL*8 ILNF1,ILNF2,ILNF3,ISLF1,ISLF2,ISLF3,RPF1,RPF2,RPF3,MU(3,3)
      REAL*8 FEP(3,3),KI(3,3),EV(3,3),PN(3,3),LP(3,3),LQ(3,3),INEV(3,3)
      REAL*8 FCN,FNORM,XGUESS(3),X(3),DAMP(3,3),DECR(3)
      COMPLEX*16 RF(3),REV(3,3)
      COMPLEX*16 TEMP
      REAL*8 VTEMP(3)
      EXTERNAL FCN,DNEQNF,DEVCRG,DMRRRR
      EQUIVALENCE (GG1,MM1)
      EQUIVALENCE (GG2,MM2)
      EQUIVALENCE (GG3,MM3)
      EQUIVALENCE (GG,MM)
      COMMON /ZONE/ MM,PN,FEP,W0,NY0
      DATA IN1/2/,IN2/3/,IN3/4/,OUT/6/
      DATA PI/3.141592653589793D0/
      DATA P/1/,R/1/,U/1/
      DATA MX/1/,MY/3/,N/3/
      DATA ITMAX/999/,ERRREL/0.1D-10/
      NG=MY*MY*MY
C
C ..................................................ENTREE: IMPER.IN
      OPEN(IN1,FILE='imper.in')
      READ(IN1,500) (W0(L),L=1,MY)
      READ(IN1,550) (DECR(L),L=1,MY)
      CLOSE(IN1)
C
C ..................................................ENTREE: SYCHA.OUT
C
      OPEN(IN2,FILE='sycha.out')
      READ(IN2,500) TIME
      READ(IN2,500) AR
      READ(IN2,800)
  800 FORMAT(19(/))
      READ(IN2,500) NY0
      READ(IN2,500) NYT
      READ(IN2,802)
  802 FORMAT(' ')
      READ(IN2,504) (SFF(V),FNF(V),V=1,MY)
      READ(IN2,504) (SLF(V),LNF(V),V=1,MY)
      READ(IN2,803)
  803 FORMAT(8(/))
      READ(IN2,500) ((FEP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(IN2,500) ((PN(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
```

```
      READ(IN2,804)
  804 FORMAT(10(/))
      CLOSE(IN2)
C
C .....ENTREE: CUBIC.OUT
      OPEN(IN3,FILE='cubic.out')
      READ(IN3,509) ((GG(V,J),J=1,NG),V=1,MY)
      CLOSE(IN3)
C
C       ==========( * )==========
C
      DO 1 V=1,MY
      DO 1 Q=1,MY
      MU(V,Q)  =0.
      LQ(V,Q)  =0.
      DAMP(V,Q)=0.
    1 CONTINUE
C
C     ..... RECHERCHE DE LA DEFORMATION STATIQUE
C
      DO 6 L = 1,MY
      XGUESS(L) = W0(L)
    6 CONTINUE
C
      CALL DNEQNF (FCN,ERRREL,N,ITMAX,XGUESS,X,FNORM)
C
      DO 8 L = 1,MY
      DI(L) = X(L)-W0(L)
    8 CONTINUE
C
      IF((W0(1).NE.0.).AND.(W0(2).EQ.0.).AND.(W0(3).EQ.0.)) GOTO 50
      IF((W0(1).EQ.0.).AND.(W0(2).NE.0.).AND.(W0(3).EQ.0.)) GOTO 52
      IF((W0(1).EQ.0.).AND.(W0(2).EQ.0.).AND.(W0(3).NE.0.)) GOTO 54
   50 DI(2) = 0.
      DI(3) = 0.
      GOTO 56
   52 DI(1) = 0.
      DI(3) = 0.
      GOTO 56
   54 DI(1) = 0.
      DI(2) = 0.
      GOTO 56
   56 CONTINUE
C
C     ..... DETERMINATION DE LA MATRICE "KI"
C
      DO 9 I = 1,MY
      DO 9 J = 1,MY
      LAR(I,J) = 0.
    9 CONTINUE
C
      DO 14 V = 1,3
      DO 14 Q = 1,3
      LAR(V,Q) = 0.
      DO 13 L = 1,3
      DO 13 H = 1,3
      LAR(V,Q) = LAR(V,Q)
     #         +(MM(V,Q,L,H)+MM(V,L,H,Q)+MM(V,L,Q,H))*X(L)*X(H)
     #         - MM(V,Q,L,H)*W0(L)*W0(H)
C
   13 CONTINUE
      MAT(V,Q) = FEP(V,Q) - NY0*PN(V,Q)
      KI(V,Q)  = FEP(V,Q) - NY0*PN(V,Q) + LAR(V,Q)
   14 CONTINUE
C
C
```

```
C     ..... FREQUENCES DE LA PLAQUE IMPARFAITE CHARGEE
C
      CALL DEVCRG(MY,KI,MY,RF,REV,MY)
      DO 43 I = 1,3
      DO 43 J = 1,3
      EV(I,J) = DREAL(REV(I,J))
   43 CONTINUE
C
C     .....REMISE EN ORDRE DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES
C                  (ON SUPPOSE QU'ILS SONT AU NOMBRE DE TROIS)
C
      TEMP = RF(1)
      RF(1)= RF(3)
      RF(3) = TEMP
      DO 5 J = 1,MY
      VTEMP(J) = EV(1,J)
      EV(1,J) = EV(3,J)
      EV(3,J) = VTEMP(J)
    5 CONTINUE
C
      ISLF1 = DABS(DREAL(RF(1)))
      ISLF2 = DABS(DREAL(RF(2)))
      ISLF3 = DABS(DREAL(RF(3)))
C
      ILNF1 = DSQRT(ISLF1)/TIME
      ILNF2 = DSQRT(ISLF2)/TIME
      ILNF3 = DSQRT(ISLF3)/TIME
C
C
      RPF1 = ILNF1/LNF(1)
      RPF2 = ILNF2/LNF(2)
      RPF3 = ILNF3/LNF(3)
C
      ISLF(1) = ISLF1
      ISLF(2) = ISLF2
      ISLF(3) = ISLF3
      ILNF(1) = ILNF1
      ILNF(2) = ILNF2
      ILNF(3) = ILNF3
      RPF(1)  = RPF1
      RPF(2)  = RPF2
      RPF(3)  = RPF3
C
C
      CALL DLINRG(MY,EV,MY,INEV,MY)
C
C     ..... PARAMETRES D'EXCITATION
C
      DO 35 V=1,MY
      DO 35 Q=1,MY
      PN(V,Q) = NYT*PN(V,Q)
   35 CONTINUE
      CALL DMRRRR(MY,MY,PN,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,LP,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,LP,MY,MY,MY,PN,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,INEV,MY,MY,MY,KI,MY,MY,MY,LQ,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,LQ,MY,MY,MY,EV,MY,MY,MY,KI,MY)
      CALL DLINRG(MY,KI,MY,LP,MY)
      CALL DMRRRR(MY,MY,PN,MY,MY,MY,LP,MY,MY,MY,LQ,MY)
      DO 36 V=1,MY
      DO 36 Q=1,MY
      MU(V,Q) = LQ(V,Q)/2.
   36 CONTINUE
C
C     .....COEFFICIENTS D'AMORTISSEMENT VISQUEUX
C
      DO 37 V=1,MY
```

```
      DAMP(V,V) = DECR(V)*DSQRT(ISLF(V))/(2.*PI)
   37 CONTINUE
C
C     ..... SORTIE: IMPER.OUT
C
      OPEN(OUT,FILE='imper.out')
      WRITE(OUT,600)
      WRITE(OUT,601) (L,W0(L),L=1,MY)
      WRITE(OUT,604)
      WRITE(OUT,605) (L,DI(L),L=1,MY)
      WRITE(OUT,610)
      WRITE(OUT,611) (V,ISLF(V),ILNF(V),RPF(V),V=1,MY)
      WRITE(OUT,619)
      WRITE(OUT,620) ((V,Q,MU(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,621)
      WRITE(OUT,620) ((V,Q,EV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,623)
      WRITE(OUT,620) ((V,Q,INEV(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      WRITE(OUT,625)
      WRITE(OUT,620) ((V,Q,DAMP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      CLOSE(OUT)
C
C     ..... FORMATS D'ENTREE ET DE SORTIE
C
  400 FORMAT(7X,F5.3)
  450 FORMAT(7X,I2)
  500 FORMAT(7X,D23.16)
  501 FORMAT(21(/),7X,D23.16)
  502 FORMAT(7X,D23.16)
  503 FORMAT(3(/7X,D23.16,1X,D23.16))
  504 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16)
  509 FORMAT(11X,D23.16)
  550 FORMAT(3X,D12.5,3X,D12.5,3X,D12.5)
C
  600 FORMAT(/15X,'IMPERFECTION INITIALE')
  601 FORMAT(11X,I2,' MODE : ',1X,D23.16)
  604 FORMAT(/15X,'DEPLACEMENT STATIQUE INITIAL')
  605 FORMAT(11X,I2,' MODE : ',1X,D23.16)
  610 FORMAT(/15X,'FREQUENCE PLAQ.IMP. CHARGEE',25X,'RATIO')
  611 FORMAT(2X,I2,' MODE : ',1X,D23.16,2X,D23.16,' HZ',2X,F6.4)
  619 FORMAT(/15X,'PARAMETRES D EXCITATION')
  620 FORMAT(10X,I2,1X,I2,1X,D23.16)
  621 FORMAT(/15X,'MATRICE DE PASSAGE')
  623 FORMAT(/9X,'INVERSE DE LA MATRICE DE PASSAGE')
  625 FORMAT(/15X,'MATRICE D"AMORTISSEMENT')
C     .
C
  999 STOP
      END
C
C        ---------- * ----------
C
      SUBROUTINE FCN(X,F,N)
      INTEGER   N
      REAL*8    X(N),F(N),T(3,3),NY0
      REAL*8    W0(3),MM(3,3,3,3),FEP(3,3),PN(3,3)
      COMMON /ZONE/ MM,PN,FEP,W0,NY0
C
      T(1,1) = FEP(1,1)-NY0*PN(1,1)
      T(1,2) = FEP(1,2)-NY0*PN(1,2)
      T(1,3) = FEP(1,3)-NY0*PN(1,3)
      T(2,1) = FEP(2,1)-NY0*PN(2,1)
      T(2,2) = FEP(2,2)-NY0*PN(2,2)
      T(2,3) = FEP(2,3)-NY0*PN(2,3)
      T(3,1) = FEP(3,1)-NY0*PN(3,1)
      T(3,2) = FEP(3,2)-NY0*PN(3,2)
```

```
      T(3,3) = FEP(3,3)-NY0*PN(3,3)
C
      F(1) = T(1,1)*X(1) + T(1,2)*X(2) + T(1,3)*X(3)
     #     - FEP(1,1)*W0(1) - FEP(1,2)*W0(2) - FEP(1,3)*W0(3)
     #     + MM(1,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(1,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(1,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(1,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(1,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(1,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(1,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(1,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(1,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(1,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(1,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(1,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(1,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(1,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(1,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(1,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(1,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(1,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(1,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,1,2) * ( X(3)*X(1)*X(2) - X(3)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(1,3,1,3) * ( X(3)*X(1)*X(3) - X(3)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(1,3,2,1) * ( X(3)*X(2)*X(1) - X(3)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,2,2) * ( X(3)*X(2)*X(2) - X(3)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(1,3,2,3) * ( X(3)*X(2)*X(3) - X(3)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(1,3,3,1) * ( X(3)*X(3)*X(1) - X(3)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(1,3,3,2) * ( X(3)*X(3)*X(2) - X(3)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(1,3,3,3) * ( X(3)*X(3)*X(3) - X(3)*W0(3)*W0(3) )
C
      F(2) = T(2,1)*X(1) + T(2,2)*X(2) + T(2,3)*X(3)
     #     - FEP(2,1)*W0(1) - FEP(2,2)*W0(2) - FEP(2,3)*W0(3)
     #     + MM(2,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,1,3) * ( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(2,1,2,1) * ( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,2,2) * ( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,2,3) * ( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(2,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(2,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(2,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,2,2) * ( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(2,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(2,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(2,2,3,3) * ( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
     #     + MM(2,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(2,3,1,2) * ( X(3)*X(1)*X(2) - X(3)*W0(1)*W0(2) )
     #     + MM(2,3,1,3) * ( X(3)*X(1)*X(3) - X(3)*W0(1)*W0(3) )
     #     + MM(2,3,2,1) * ( X(3)*X(2)*X(1) - X(3)*W0(2)*W0(1) )
     #     + MM(2,3,2,2) * ( X(3)*X(2)*X(2) - X(3)*W0(2)*W0(2) )
     #     + MM(2,3,2,3) * ( X(3)*X(2)*X(3) - X(3)*W0(2)*W0(3) )
     #     + MM(2,3,3,1) * ( X(3)*X(3)*X(1) - X(3)*W0(3)*W0(1) )
     #     + MM(2,3,3,2) * ( X(3)*X(3)*X(2) - X(3)*W0(3)*W0(2) )
     #     + MM(2,3,3,3) * ( X(3)*X(3)*X(3) - X(3)*W0(3)*W0(3) )
C
      F(3) = T(3,1)*X(1) + T(3,2)*X(2) + T(3,3)*X(3)
     #     - FEP(3,1)*W0(1) - FEP(3,2)*W0(2) - FEP(3,3)*W0(3)
     #     + MM(3,1,1,1) * ( X(1)*X(1)*X(1) - X(1)*W0(1)*W0(1) )
     #     + MM(3,1,1,2) * ( X(1)*X(1)*X(2) - X(1)*W0(1)*W0(2) )
```

```
     #    + MM(3,1,1,3) *( X(1)*X(1)*X(3) - X(1)*W0(1)*W0(3) )
     #    + MM(3,1,2,1) *( X(1)*X(2)*X(1) - X(1)*W0(2)*W0(1) )
     #    + MM(3,1,2,2) *( X(1)*X(2)*X(2) - X(1)*W0(2)*W0(2) )
     #    + MM(3,1,2,3) *( X(1)*X(2)*X(3) - X(1)*W0(2)*W0(3) )
     #    + MM(3,1,3,1) * ( X(1)*X(3)*X(1) - X(1)*W0(3)*W0(1) )
     #    + MM(3,1,3,2) * ( X(1)*X(3)*X(2) - X(1)*W0(3)*W0(2) )
     #    + MM(3,1,3,3) * ( X(1)*X(3)*X(3) - X(1)*W0(3)*W0(3) )
     #    + MM(3,2,1,1) * ( X(2)*X(1)*X(1) - X(2)*W0(1)*W0(1) )
     #    + MM(3,2,1,2) * ( X(2)*X(1)*X(2) - X(2)*W0(1)*W0(2) )
     #    + MM(3,2,1,3) * ( X(2)*X(1)*X(3) - X(2)*W0(1)*W0(3) )
     #    + MM(3,2,2,1) * ( X(2)*X(2)*X(1) - X(2)*W0(2)*W0(1) )
     #    + MM(3,2,2,2) *( X(2)*X(2)*X(2) - X(2)*W0(2)*W0(2) )
     #    + MM(3,2,2,3) * ( X(2)*X(2)*X(3) - X(2)*W0(2)*W0(3) )
     #    + MM(3,2,3,1) * ( X(2)*X(3)*X(1) - X(2)*W0(3)*W0(1) )
     #    + MM(3,2,3,2) * ( X(2)*X(3)*X(2) - X(2)*W0(3)*W0(2) )
     #    + MM(3,2,3,3) *( X(2)*X(3)*X(3) - X(2)*W0(3)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,1,1) * ( X(3)*X(1)*X(1) - X(3)*W0(1)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,1,2) * ( X(3)*X(1)*X(2) - X(3)*W0(1)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,1,3) * ( X(3)*X(1)*X(3) - X(3)*W0(1)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,2,1) * ( X(3)*X(2)*X(1) - X(3)*W0(2)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,2,2) * ( X(3)*X(2)*X(2) - X(3)*W0(2)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,2,3) * ( X(3)*X(2)*X(3) - X(3)*W0(2)*W0(3) )
     #    + MM(3,3,3,1) * ( X(3)*X(3)*X(1) - X(3)*W0(3)*W0(1) )
     #    + MM(3,3,3,2) *( X(3)*X(3)*X(2) - X(3)*W0(3)*W0(2) )
     #    + MM(3,3,3,3) * ( X(3)*X(3)*X(3) - X(3)*W0(3)*W0(3) )
C
      RETURN
      END
```

C.7 - Programme ip3.for

```
C ***********************************************************************
C *        INSTABILITE DYNAMIQUE ET RESONANCES                          *
C *       DES PLAQUES RECTANGULAIRES IMPARFAITES                        *
C * ***********************************************************************
C *                                                                     *
C *          EXTRACTION DES DONNEES NECESSAIRES                         *
C *        POUR EFFECTUER UNE INTEGRATION NUMERIQUE                     *
C *           DU SYSTEME D'EQUATIONS A 3 D.L.                           *
C *        EN REGIME STATIONNAIRE ET NON-STATIONNAIRE                   *
C *                                                                     *
C *    FICHIER DE SORTIE ORDONNANCE POUR ETRE LU DIRECTEMENT            *
C *   PAR LE PROGRAMME D'INTEGRATION NUMERIQUE IP3S ET IP3NS            *
C *                                                                     *
C ***********************************************************************
C
C              PROGRAM NAME :       IP3F.F
C              INPUT FILES :        SYCHA.OUT
C                                   CUBIC.OUT
C                                   IMPER.OUT
C
C PURPOSE
C -------
C DESCRIPTION OF PARAMETERS
C ----------------------
C  X          - DEVIATION TOTALE DE L'ETAT PLAN, APRES
C               APPLICATION DU CHARGEMENT STATIQUE
C  ILF        - DIMENSIONLESS LOADED FREQUENCY - PLAQ. IMP
C  IMF        - LOADED NATURAL FREQUENCY      - PLAQ. IMP.
C  CN         - COEFFICIENT OF DAMPING
C  PEX        - EXCITATION PARAMETER.
C  GN         - NORMALISED CUBIC NONLINEARITIES.
C  HN         - SOMMES DE COEFFICIENTS CUBIQUES NORMALISES
C  EPN        - COMBINAISONS DE HN ET X
```

```
C
C  ..................................
C
      INTEGER OUT,PLATE,BC
      INTEGER M,P,Q,R,S
      REAL*8 AR,PCR,DCR,TIME,NY0,NYT
      REAL*8 ISLF(3),ILF(3),IMF(3)
      REAL*8 CN(3,3),PEX(3,3),DAMP(3,3),GG(3,27),MM(3,3,3,3)
      REAL*8 PN(3,3),FEP(3,3),SFF(3),FNF(3),SLF(3),LNF(3)
      REAL*8 W0(3),DI(3),X(3)
      REAL*8 PI/3.141592653589793D0/
      EQUIVALENCE (MM(1,1,1,1),GG(1,1))
      DATA N/2/,NE/4/,ITMAX/999/,MY/3/,MX/1/,ZERO/0./
      DATA IN2/2/,IN3/3/,IN4/4/,OUT/6/
      NG=MY*MY*MY
C
C ..................................................ENTREE: SYCHA.OUT
C
      OPEN(IN2,FILE='sycha.out')
      READ(IN2,500) TIME
  500 FORMAT(7X,D23.16)
      READ(IN2,800)
  800 FORMAT(20(/))
      READ(IN2,500) NY0
      READ(IN2,500) NYT
      READ(IN2,802)
  802 FORMAT(' ')
      READ(IN2,504) (SFF(V),FNF(V),V=1,MY)
      READ(IN2,504) (SLF(V),LNF(V),V=1,MY)
  504 FORMAT(7X,D23.16,1X,D23.16)
      READ(IN2,803)
  803 FORMAT(8(/))
      READ(IN2,500) ((FEP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(IN2,500) ((PN(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(IN2,804)
  804 FORMAT(10(/))
      CLOSE(IN2)
C
C
C ..................................................ENTREE: CUBIC.OUT
      OPEN(IN3,FILE='cubic.out')
      READ(IN3,509) ((GG(V,J),J=1,NG),V=1,MY)
  509 FORMAT(11X,D23.16)
      CLOSE(IN3)
C
C ..................................................INPUT: IMPER.OUT
C
      OPEN(IN4,FILE='imper.out')
      READ(IN4,501) (W0(L),L=1,MY)
      READ(IN4,501) (DI(L),L=1,MY)
  501 FORMAT(//22X,D23.16,/22X,D23.16,/22X,D23.16)
      READ(IN4,551)
  551 FORMAT(1(/))
      READ(IN4,552) (ISLF(V),V=1,MY)
      READ(IN4,551)
      READ(IN4,554) ((PEX(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      READ(IN4,553)
  553 FORMAT(23(/))
      READ(IN4,554) ((DAMP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
      CLOSE(IN4)
C
C
C ..................................................TOTAL INITIAL STATIC DEFLECTION
      DO 40 P=1,MY
        X(P) = W0(P) + DI(P)
   40 CONTINUE
```

```
C
C     .....ADIMENSIONAL LOADED NATURAL FREQUENCIES(ILF)
C               AND DIMENSIONAL LOADED FREQUENCIES (IMF, HZ)
C
      DO 50 P=1,MY
        ILF(P) = DSQRT(ISLF(P))
        IMF(P) = ILF(P)/TIME
   50 CONTINUE
C
C     .....OUTPUT : IP3.OUT
C
      OPEN(OUT,FILE='ip3.out')
      WRITE(OUT,599) (TIME)
      WRITE(OUT,601)
      WRITE(OUT,600) ((PN(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
      WRITE(OUT,601)
      WRITE(OUT,600) ((((MM(P,Q,R,S),S=1,MY),R=1,MY),Q=1,MY),P=1,MY)
      WRITE(OUT,601)
      WRITE(OUT,600) ((FEP(V,Q),Q=1,MY),V=1,MY)
      WRITE(OUT,601)
      WRITE(OUT,600) (W0(V),V=1,MY)
      WRITE(OUT,601)
      WRITE(OUT,600) (X(V),V=1,MY)
      WRITE(OUT,601)
      WRITE(OUT,600) ((DAMP(V,Q),V=1,MY),Q=1,MY)
            WRITE(OUT,601)
            WRITE(OUT,600) (ILF(V),V=1,MY)
            WRITE(OUT,601)
            WRITE(OUT,599) (NY0)
            WRITE(OUT,599) (NYT)
      CLOSE(OUT)
C     ..... INPUT FORMATS
C
  512 FORMAT(I5,I5,I5)
  520 FORMAT(2I5)
  522 FORMAT(3D15.4)
  524 FORMAT(D20.10,D10.3,D20.5)
  526 FORMAT(2D10.3,F10.2)
  542 FORMAT(19X,D23.16)
  544 FORMAT(//22X,D23.16,/22X,D23.16,/22X,D23.16)
  552 FORMAT(13X,D23.16)
  554 FORMAT(16X,D23.16)
C
C     ..... OUTPUT FORMATS
C
  599 FORMAT(e23.16,2X,'0',2X,'0')
  600 FORMAT(e23.16,2X,e23.16,2X,e23.16)
  601 FORMAT(' ')
      END
```

ANNEXE D

PROGRAMMES MATLAB UTILISÉS POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

D.1 - Programme ip3s.m

```
% Programme d'integration numerique: cas stationnaire
% Integrateur: Adams-Bashforth de 3e ordre
%
% ------------ Parametres numeriques ---------------
%
%    c         : amortissement modal
%    Pv        : parametre de chargement
%    Nyt       : chargement dynamique non-dimensionnel
%    Nyo       : chargement statique non-dimensionnel
%    fexc_init : frequence d'excitation initiale
%    fexc_fin  : frequence d'excitation finale
%    Xv        : deflexion statique
%    Mv        : nonlinearite cubique
%    nx,ny     : nb de modes de vibration consideres selon x,y
%
%
% ------------ Initialisation a zero ---------------
clear;
clg;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%     SECTION DE DEFINITION DE TOUS LES PARAMETRES
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
%
% *************** Nom du fichier de sortie ********************
essai='y:ptest';
%
% ------------ Caractéristiques de la plaque ---------------
nx=1;
ny=3;
% ------ Lecture du fichier de donnees 'ip3.out' ------
% NOTE: ces parametres sont non dimensionnels
%
load 'ip3.out' -ascii
time=ip3(1,1);
P=ip3(2:4,1:3);
M=ip3(5:31,1:3);
M=M';
K=ip3(32:34,1:3);
W0=ip3(35,1:3);
X=ip3(36,1:3);
C=ip3(37:39,1:3);
fnat=ip3(40,1:3);
Nyo=ip3(41,1);
Nyt=ip3(42,1);
% ------------ Parametres de l'excitation ------------
% NOTE: les frequences d'excitation doivent etre donnees en Hz
fexc_init_hz=8;
fexc_fin_hz=20;
inc_fexc_hz=0.1;
% Parametres non dimensionnels qui seront utilises dans les calculs
fexc_init=fexc_init_hz*time/(2*pi);
fexc_fin=fexc_fin_hz*time/(2*pi);
```

```
inc_fexc=inc_fexc_hz*time/(2*pi);
fnat_hz=fnat/time;
% ------------ Parametres temporels ---------------
temps_total_sec=35;
%
temps_total=round(temps_total_sec/time);
% incrementation du temps qui doit etre un nombre = entier / *
inc_temps=0.025;
% intervalle temporel qui sera utilise pour determiner l'amplitude
% du signal temporel pour elaborer la reponse frequentielle
delta_temps=5;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% ------------ Nb de points de calcul temporel --------
nb_iter_temps=temps_total/inc_temps;
nb_iter_temps=round(nb_iter_temps);
%
% ------------ Initialisation des variables ----------
fexc=fexc_init;
no_freq=0;
depl_init=[1.1,0.2,0];
vit_init=[0,0,0];
acc_init=[0,0,0];
%
% --------- calcul des coefficients non lineaire H -------
for j=1:ny
  for q=1:ny
    for s=1:ny
      for l=1:ny
        i1 = (q-1)*9 + (s-1)*3 + l;
        i2 = (q-1)*9 + (l-1)*3 + s;
        i3 = (l-1)*9 + (q-1)*3 + s;
        H(j,i1) = M(j,i1) + M(j,i2) + M(j,i3);
      end;
    end;
  end;
end;
%
%*********** Debut de la boucle pour chaque frequence **********
%               CAS STATIONNAIRE
while fexc < fexc_fin
no_freq=no_freq+1;
% Calcul de la frequence d'excitation en Hz
fexc_hz=fexc*2*pi/time;
fexc_hz
freq_exc(no_freq,1)=fexc;
%
%-*-*-*-*-*-*- Debut du calcul:reponse temporelle -*-*-*-*-*-*-*
%
% ------------ Valeurs initiales ---------------
if no_freq==1
  depl_init=depl_init(1,1:ny);
  vit_init=vit_init(1,1:ny);
  acc_init=acc_init(1,1:ny);
end
%
for i=1:nb_iter_temps
  temps=i*inc_temps;
  if i==1
    depl(1,:)=depl_init;
    vit(1,:)=vit_init;
  end;
  if i==2
    depl(i,:)=depl_init + (inc_temps*vit_init);
    vit(i,:) = vit_init + (inc_temps*acc_init);
```

```
  end;
  if i==3
    depl(i,:)=depl(i-1,:) + (inc_temps/2)*(3*vit(i-1,:) - vit(i-2,:));
    vit(i,:) = vit(i-1,:) + (inc_temps/2)*(3*acc(i-1,:) - acc(i-2,:));
  end;
  if i>=4
    depl(i,:)=depl(i-1,:)+(inc_temps/12)*(23*vit(i-1,:)-16*vit(i-2,:)+5*vit(i-3,:));
    vit(i,:) =vit(i-1,:) +(inc_temps/12)*(23*acc(i-1,:)-16*acc(i-2,:)+5*acc(i-3,:));
  end;
  if i==1
    W = depl_init;
    V = vit_init;
  end;
  if i>1
    W = depl(i,:);
    V = vit(i,:);
  end;
  exc=cos(2*pi*fexc*temps);
  force(i)=exc;
% ------- calcul des accelerations --------
  for j=1:ny
% - - - - calcul des sommations - - - - -
    som_P(j)=0;
    som_KP(j)=0;
    som_HM(j)=0;
    som_H(j)=0;
    som_M(j)=0;
    for q=1:ny
      for l=1:ny
        for h=1:ny
          ind=(q-1)*9 + (l-1)*3 + h;
          som_HM(j) = som_HM(j) + (H(j,ind )*X(l)*X(h) - M(j,ind)*W0(l)*W0(h))*W(q);
          som_H(j)  = som_H(j)  + H(j,ind)*W(q)*W(l)*W(h);
          som_M(j)  = som_M(j)  + M(j,ind)*W(q)*W(l)*W(h);
        end;
      end;
      som_P(j)  = som_P(j)  + P(j,q)*X(q);
      som_KP(j) = som_KP(j) + (K(j,q)-(Nyo+Nyt*exc)*P(j,q))*W(q);
    end;
% - - - - fin du calcul des sommations - - - -
    acc(i,j)=Nyt*exc*som_P(j) - 2*C(j)*V(j) - som_KP(j) - som_HM(j) - som_H(j) - som_M(j);
  end;
% ------- fin du calcul des accelerations -----
%
  abcisse(i)=temps;
  imax=i;
  if temps==temps_total-delta_temps
    imin=i;
  end;
%
end;
% ---------- Fin de la boucle temporelle ----------
abcisse=abcisse*time;
fexc=fexc+inc_fexc;
if no_freq==1
  clg;
  title('Reponse temporelle');
  ylabel('Amplitude');
  xlabel('Temps');
  affichage=(' Figure No.1: réponse temporelle type');
  disp(affichage)
  plot(abcisse,depl);
  hold;
  affichage=(' Pressez une touche pour débuter ');
  disp(affichage)
  affichage=(' le calcul de la réponse fréquentielle');
```

```
  disp(affichage)
  pause
end;
plot(abcisse,depl);
pause(0.5);
clg;
%
for j=1:ny
  max(j)=0;
  min(j)=0;
  force_max(j)=0;
  for i=imin:imax
    if depl(i,j)>max(j)
      max(j)=depl(i,j);
    elseif depl(i,j)<min(j)
      min(j)=depl(i,j);
    end
  end;
end;
for i=imin:imax
  if force(i)>force_max
    force_max=force(i);
    i_fmax=i;
  end;
end;
ampl_pos(no_freq,:)=max;
ampl_neg(no_freq,:)=min;
depl_init = depl(i_fmax,:);
vit_init  = vit(i_fmax,:);
%
end
% ********** Fin de la boucle frequentielle **********
%
affichage=('Pressez une touche pour afficher la réponse fréquentielle');
disp(affichage)
pause
clg;
title('Reponse frequentielle (Hz)');
hold;
ylabel('Amplitude');
hold;
xlabel('Frequence');
hold;
freq_exc_hz=freq_exc*2*pi/time;
for j=1:ny
  if j~=1
    affichage=('Pressez une touche pour afficher la réponse du mode suivant');
    disp(affichage)
    pause
  end;
  amplitude(1,:)=ampl_pos(:,j)';
  amplitude(2,:)=-ampl_neg(:,j)';
  title('j');
  plot(freq_exc_hz,amplitude);
  hold;
  hold
end;
affichage=('Pressez une touche pour afficher la reponse + de tous les modes');
pause
plot(freq_exc_hz,ampl_pos);
hold;
result(:,1)=freq_exc_hz(:,1);
result(:,2)=ampl_pos(:,1);
result(:,3)=ampl_pos(:,2);
result(:,4)=ampl_pos(:,3);
save essai result  -ascii
```

D.2 - Programme ip1ns.m

```
% Programme d'integration numerique: cas non-stationnaire
% Integrateur: Adams-Bashforth de 3e ordre
%
% ------------- Parametres numeriques ----------------
%
%     fnat      : frequence naturelle plaque imparfaite chargee
%     c         : amortissement modal
%     Pv        : parametre de chargement
%     Nyt       : chargement dynamique non-dimensionnel
%     fexc_init : frequence d'excitation initiale
%     fexc_fin  : frequence d'excitation finale
%     fsweep    : vitesse de variation de la frequence, hz/sec
%     Xv        : deflexion statique
%     Mv        : nonlinearite cubique
%     Nbmode    : nombre de modes de vibration consideres
%
% ------------- Initialisation a zero de tout ---------
clear;
clg;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%      SECTION DE DEFINITION DE TOUS LES PARAMETRES
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% ------------- Parametres de la plaque -------------
%
%          Mode de resonance considere (car ce programme ne considere qu'un mode)
md=1;
%
% - - - - - - Lecture du fichier de donnees 'ip3.out' - - - - - -
% NOTE: ces parametres sont non dimensionnels
load 'ip3.out' -ascii
time=ip3(1,1);
P=ip3(2:4,1:3);
M=ip3(5:31,1:3);
M=M';
K=ip3(32:34,1:3);
W0=ip3(35,1:3);
X=ip3(36,1:3);
C=ip3(37:39,1:3);
fnat=ip3(40,1:3);
Nyo=ip3(41,1);
Nyt=ip3(42,1);
% ------------- Parametres de la plaque -------------
fnat=fnat(1,md);
c=C(md,md);
Pv=P(md,md);
Xv=X(md,md);
Mv=M(md,md);
%
% ------------- Parametres de l'excitation -----------
% NOTE: les frequences d'excitation doivent etre donnees en Hz
fexc_init_hz=0.5;
fsweep_hz=0.1;
% Parametres non dimensionnels qui seront utilises dans les calculs
fexc_init=fexc_init_hz*time/(2*pi);
fsweep=fsweep_hz*time/(2*pi);
fnat_hz=fnat/time;
% ------------- Parametres temporels ----------------
temps_total=10;
inc_temps=0.05;
% intervalle temporel qui sera utilise pour atteindre la solution
% stationnaire du signal temporel de depart
```

```
temps_depart=5;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% ------------ Nb de points de calcul temporel --------
nb_iter_temps=round(temps_total/inc_temps);
nb_iter_depart=round(temps_depart/inc_temps);
%
% ------------ Initialisation des variables ----------
fexc=fexc_init;
no_freq=1;
j=0;
freq_exc(1)=fexc;
%
% ******************** CAS NON-STATIONNAIRE ******************
%
%-*-*-*-*-*-*- Debut du calcul:reponse temporelle -*-*-*-*-*-*-*-
%
% ------------ Valeurs initiales -----------------
if no_freq==1
  depl_init=0;
  vit_init=0;
  acc_init=0;
end;
%
for i=1:(nb_iter_temps + nb_iter_depart)
%
  temps(i)=i*inc_temps;
  if i<=nb_iter_depart
    fexc=fexc_init;
  elseif i>nb_iter_depart
    j=j+1;
    temps_ns(j)=temps(i);
    fexc=fexc + fsweep*inc_temps;
    no_freq=no_freq+1;
    freq_exc(no_freq)=fexc;
  end
%
  fexc_hz=fexc*2*pi/time;
  fexc_hz
%
  if i==1
    depl(i)=depl_init;
    vit(i)=vit_init;
  end;
  if i==2
    depl(i)=depl_init + (inc_temps*vit_init);
    vit(i) = vit_init + (inc_temps*acc_init);
  end;
  if i==3
    depl(i)=depl(i-1) + (inc_temps/2)*(3*vit(i-1) - vit(i-2));
    vit(i) = vit(i-1) + (inc_temps/2)*(3*acc(i-1) - acc(i-2));
  end;
  if i>=4
    depl(i)=depl(i-1)+(inc_temps/12)*(23*vit(i-1)-16*vit(i-2)+5*vit(i-3));
    vit(i) =vit(i-1) +(inc_temps/12)*(23*acc(i-1)-16*acc(i-2)+5*acc(i-3));
  end;
%
  Wv = depl(i);
  Vv = vit(i);
%
  exc=cos(2*pi*fexc*temps(i));
  force(i)=exc;
  acc(i)=Nyt*Pv*exc*(Wv+Xv) - Mv*(3*Wv^2*Xv + Wv^3) - fnat^2*Wv - 2*c*Vv;
end;
% ------------ Fin de la boucle temporelle ------------
```

```
%
depl_ns=depl((nb_iter_depart+1):(nb_iter_depart+nb_iter_temps));
%
j=0;
for i=4:(nb_iter_temps-3)
   if depl_ns(i-1)<=depl_ns(i)
     if depl_ns(i-2)<=depl_ns(i-1)
       if depl_ns(i-3)<=depl_ns(i-2)
         if depl_ns(i)>=depl_ns(i+1)
           if depl_ns(i+1)>=depl_ns(i+2)
             if depl_ns(i+2)>=depl_ns(i+3)
               if depl_ns(i)>0
               j=j+1;
               ampl(j)=depl_ns(i);
               freq_ampl(j)=freq_exc(i);
             end;
           end;
         end;
         end;
       end;
     end;
  end;
end;
%
% Parametres en temps reel
%
temps_ns_hz=temps_ns*time;
freq_ampl_hz=freq_ampl*2*pi/time;
%
clg;
subplot(1,2,1);
title('Reponse temporelle');
ylabel('Amplitude');
xlabel('temps reel');
plot(temps_ns_hz,depl_ns);
affichage=('Pressez une touche pour afficher la reponse frequentielle (Hz)');
disp(affichage)
pause
%
subplot(1,2,2)
title('Reponse frequentielle');
ylabel('Amplitude');
xlabel('Frequence');
plot(freq_ampl_hz,ampl);
hold
```

D.3 - Programme ip3ns.m

```
% Programme d'integration numerique: cas non-stationnaire, systeme a 3 DDL
% Integrateur: Adams-Bashforth de 3e ordre
%
% ---------- Parametres numeriques ----------
%
%    c        : amortissement modal
%    Pv       : parametre de chargement
%    Nyt      : chargement dynamique non-dimensionnel
%    Nyo      : chargement statique non-dimensionnel
%    fexc_init : frequence d'excitation initiale
%    fexc_fin  : frequence d'excitation finale
%    fsweep    : vitesse de variation de la frequence, hz/sec
%    Xv       : deflexion statique
%    Mv       : nonlinearite cubique
%    nx,ny    : nb de modes de vibration consideres selon x,y
%
```

```
% ------------- Initialisation a zero  de tout ----------
clear;
clg;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%      SECTION DE DEFINITION  DE TOUS LES PARAMETRES
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% ------------- Parametres de la plaque -------------
nx=1;
ny=3;
% - - - - - - Lecture du fichier de donnees 'ip3.out' - - - - - -
% NOTE: ces parametres sont non dimensionnels
load 'ip3.txt' -ascii
time=ip3(1,1);
P=ip3(2:4,1:3);
M=ip3(5:31,1:3);
M=M';
K=ip3(32:34,1:3);
W0=ip3(35,1:3);
X=ip3(36,1:3);
C=ip3(37:39,1:3);
fnat=ip3(40,1:3);
Nyo=ip3(41,1);
Nyt=ip3(42,1);
% ------------- Parametres de l'excitation -------------
% NOTE: les frequences d'excitation  doivent etre donnees en Hz
fexc_init_hz=0.5;
fsweep_hz=0.1
% Parametres non dimensionnels qui seront utilises dans les calculs
fexc_init=fexc_init_hz*time/(2*pi);
fsweep=fsweep_hz*time/(2*pi);
fnat_hz=fnat/time;
% ------------- Parametres temporels ----------------
temps_total=10;
inc_temps=0.05;
% intervalle temporel qui sera utilise pour atteindre la solution
% stationnaire du signal temporel de depart
temps_depart=4;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% ------------- Nb de points de calcul temporel --------
nb_iter_temps=round(temps_total/inc_temps);
nb_iter_depart=round(temps_depart/inc_temps);
%
% ------------- Initialisation des variables ----------
fexc=fexc_init;
no_freq=1;
jt=0;
freq_exc(1)=fexc;
depl_init=[0,0,0];
vit_init=[0,0,0];
acc_init=[0,0,0];
%
% --------- calcul des coefficients non lineaire H --------
for j=1:ny
  for q=1:ny
    for s=1:ny
      for l=1:ny
        i1 = (q-1)*9 + (s-1)*3 + l;
        i2 = (q-1)*9 + (l-1)*3 + s;
        i3 = (l-1)*9 + (q-1)*3 + s;
        H(j,i1) = M(j,i1) + M(j,i2) + M(j,i3);
      end;
    end;
```

```
  end;
end;
%
% ******************** CAS NON-STATIONNAIRE ******************
%
%-*-*-*-*-*-*-*- Debut du calcul:reponse temporelle -*-*-*-*-*-*-*-*-
%
% ---------- Valeurs initiales ----------
if no_freq==1
  depl_init=depl_init(1,1:ny);
  vit_init=vit_init(1,1:ny);
  acc_init=acc_init(1,1:ny);
end;
%
for i=1:(nb_iter_temps + nb_iter_depart)
%
  temps(i,1)=i*inc_temps;
  if i<=nb_iter_depart
    fexc=fexc_init;
  elseif i>nb_iter_depart
    jt=jt+1;
    temps_ns(jt,1)=temps(i,1);
    fexc=fexc + fsweep*inc_temps;
    no_freq=no_freq+1;
    freq_exc(no_freq)=fexc;
  end
%
  fexc_hz=fexc*2*pi/time;
  fexc_hz
%
  if i==1
    depl(i,:)=depl_init;
    vit(i,:)=vit_init;
  end;
  if i==2
    depl(i,:)=depl_init + (inc_temps*vit_init);
    vit(i,:) = vit_init + (inc_temps*acc_init);
  end;
  if i==3
    depl(i,:)=depl(i-1,:) + (inc_temps/2)*(3*vit(i-1,:) - vit(i-2,:));
    vit(i,:) = vit(i-1,:) + (inc_temps/2)*(3*acc(i-1,:) - acc(i-2,:));
  end;
  if i>=4
    depl(i,:)=depl(i-1,:)+(inc_temps/12)*(23*vit(i-1,:)-16*vit(i-2,:)+5*vit(i-3,:));
    vit(i,:) =vit(i-1,:) +(inc_temps/12)*(23*acc(i-1,:)-16*acc(i-2,:)+5*acc(i-3,:));
  end;
%
  W = depl(i,:);
  V = vit(i,:);
%
  exc=cos(2*pi*fexc*temps(i));
  force(i)=exc;
% - - - - - - - calcul des accelerations - - - - - - - -
  for j=1:ny
% - - - - - calcul des sommations - - - - - -
    som_P(j)=0;
    som_KP(j)=0;
    som_HM(j)=0;
    som_H(j)=0;
    som_M(j)=0;
    for q=1:ny
      for l=1:ny
        for h=1:ny
          ind=(q-1)*9 + (l-1)*3 + h;
          som_HM(j) = som_HM(j) + (H(j,ind )*X(l)*X(h) - M(j,ind)*W0(l)*W0(h))*W(q);
          som_H(j)  = som_H(j)  + H(j,ind)*W(q)*W(l)*W(h);
```

```
          som_M(j) =som_M(j) + M(j,ind)*W(q)*W(l)*W(h);
        end;
      end;
      som_P(j) = som_P(j) + P(j,q)*X(q);
      som_KP(j) = som_KP(j) + (K(j,q)-(Nyo+Nyt*exc)*P(j,q))*W(q);
    end;
% - - - - fin du calcul des sommations - - - -
%
    acc(i,j)=Nyt*exc*som_P(j) - 2*C(j)*V(j) - som_KP(j) - som_HM(j) - som_H(j) - som_M(j);
  end;
% ------- fin du calcul des accelerations -----
%
end;
% ---------- Fin de la boucle temporelle ----------
%
depl_ns=depl((nb_iter_depart+1):(nb_iter_depart+nb_iter_temps),1:ny);
%
for j=1:ny
  nb=0;
  for i=2:(nb_iter_temps-1)
    if depl_ns(i-1,j)<=depl_ns(i,j)
      if depl_ns(i,j)>=depl_ns(i+1,j)
        if depl_ns(i,j)>0
          nb=nb+1;
          ampl(nb,j)=depl_ns(i,j);
          freq_ampl(nb,j)=freq_exc(i);
        end;
      end;
    end;
  end;
end;
%
% Parametre temporel en temps reel
%
temps_ns_hz=temps_ns*time;
freq_ampl_hz=freq_ampl*2*pi/time;
%
affichage=('Pressez une touche pour afficher la réponse temporelle globale');
disp(affichage);
pause;
clg;
title('Reponse temporelle');
ylabel('Amplitude');
xlabel('temps');
plot(temps_ns_hz,depl_ns);
hold;
affichage=('Pressez une touche pour afficher la réponse fréquentielle (Hz) du premier mode');
disp(affichage);
pause;
%
for j=1:ny
  if j==1
    clg;
  end;
  if j~=1
    affichage=('Pressez une touche pour afficher la réponse en fréquence du mode suivant');
    disp(affichage);
    pause
  end;
  imax=max(size(ampl));
  ampl_fin=imax;
  for i=2:imax
    if ampl(i-1,j)==0 & ampl((i),j)==0
      ampl_fin=i-2;
    end
  end;
```

```
  title('Reponse frequentielle');
  ylabel('Amplitude');
  xlabel('Frequence');
  plot(freq_ampl_hz(1:ampl_fin,j),ampl(1:ampl_fin,j));
  hold;
end;
```

D.4 - Programme fft3d.m

```
% Programme d'integration numerique: cas stationnaire
% Integrateur: Adams-Bashforth de 3e ordre
%
% ------------- Parametres numeriques ---------------
%
%    c       : amortissement modal
%    Pv      : parametre de chargement
%    Nyt     : chargement dynamique non-dimensionnel
%    Nyo     : chargement statique non-dimensionnel
%    fexc_init : frequence d'excitation initiale
%    fexc_fin  : frequence d'excitation finale
%    Xv      : deflexion statique
%    Mv      : nonlinearite cubique
%    nx,ny   : nb de modes de vibration consideres selon x,y
%    fexc    : frequence d'excication non dimensionnelle
%              equivalent a [rad/s] (teta=fexc*t)
%
% NOTE: les graphiques de reponse en frequence et les calculs
%      des harmoniques sont donnes en [Hz]
%
% ------------- Initialisation a zero ---------------
clear;
clg;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%     SECTION DE DEFINITION DE TOUS LES PARAMETRES
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
% ------------- Caractéristiques de la plaque ---------------
nx=1;
ny=2;
% - - - - - - Lecture du fichier de donnees 'ip3.out' - - - - - -
% NOTE: ces parametres sont non dimensionnels
%
load 'ip3.txt' -ascii
time=ip3(1,1);
P=ip3(2:4,1:3);
M=ip3(5:31,1:3);
M=M';
K=ip3(32:34,1:3);
W0=ip3(35,1:3);
X=ip3(36,1:3);
C=ip3(37:39,1:3);
fnat=ip3(40,1:3);
Nyo=ip3(41,1);
Nyt=ip3(42,1);
% ------------- Parametres de l'excitation -------------
% NOTE: les frequences d'excitation doivent etre donnees en Hz
fexc_init_hz=0.5;
fexc_fin_hz=2.5;
inc_fexc_hz=0.1;
% Parametres non dimensionnels qui seront utilises dans les calculs
fexc_init=fexc_init_hz*time;
fexc_fin=fexc_fin_hz*time;
inc_fexc=inc_fexc_hz*time;
fnat_hz=fnat/(2*pi*time);
```

```
% ------------- Parametres temporels ----------------
inc_temps=0.05;
% Intervalle temporel du signal temporel sur lequel sera effectue la fft
% Calcule en considerant N=1024
delta_temps=1024*inc_temps;
temps_total=30+delta_temps;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% ------------- Nb de points de calcul temporel --------
nb_iter_temps=temps_total/inc_temps;
nb_iter_temps=round(nb_iter_temps);
%
% ------------- Initialisation des variables ----------
i1=1;
indf2=1;
indp2=1;
fexc=fexc_init;
no_freq=0;
depl_init=[0,0,0];
vit_init=[0,0,0];
acc_init=[0,0,0];
%
% --------- calcul des coefficients non lineaire H -------
for j=1:ny
  for q=1:ny
    for s=1:ny
      for l=1:ny
        i1 = (q-1)*9 + (s-1)*3 + l;
        i2 = (q-1)*9 + (l-1)*3 + s;
        i3 = (l-1)*9 + (q-1)*3 + s;
        H(j,i1) = M(j,i1) + M(j,i2) + M(j,i3);
      end;
    end;
  end;
end;
%
%*********** Debut de la boucle pour chaque frequence **********
%                CAS STATIONNAIRE
while fexc < fexc_fin
no_freq=no_freq+1;
% Calcul de la frequence d'excitation en Hz
fexc_hz=fexc/time;
fexc_hz
freq_exc(no_freq,1)=fexc;
%
%-*-*-*-*-*-*- Debut du calcul:reponse temporelle -*-*-*-*-*-*-*
%
% --------------- Valeurs initiales ------------------
if no_freq==1
  depl_init=depl_init(1,1:ny);
  vit_init=vit_init(1,1:ny);
  acc_init=acc_init(1,1:ny);
end
%
for i=1:nb_iter_temps
  temps=i*inc_temps;
  if i==1
    depl(1,:)=depl_init;
    vit(1,:)=vit_init;
  end;
  if i==2
    depl(i,:)=depl_init + (inc_temps*vit_init);
    vit(i,:) = vit_init + (inc_temps*acc_init);
  end;
  if i==3
```

```
    depl(i,:)=depl(i-1,:) + (inc_temps/2)*(3*vit(i-1,:) - vit(i-2,:));
    vit(i,:) = vit(i-1,:) + (inc_temps/2)*(3*acc(i-1,:) - acc(i-2,:));
  end;
  if i>=4
    depl(i,:)=depl(i-1,:)+(inc_temps/12)*(23*vit(i-1,:)-16*vit(i-2,:)+5*vit(i-3,:));
    vit(i,:) =vit(i-1,:) +(inc_temps/12)*(23*acc(i-1,:)-16*acc(i-2,:)+5*acc(i-3,:));
  end;
  if i==1
    W = depl_init;
    V = vit_init;
  end;
  if i>1
    W = depl(i,:);
    V = vit(i,:);
  end;
  exc=cos(2*pi*fexc*temps);
  force(i)=exc;
% ------- calcul des accelerations --------
  for j=1:ny
% - - - - - calcul des sommations - - - - -
    som_P(j)=0;
    som_KP(j)=0;
    som_HM(j)=0;
    som_H(j)=0;
    som_M(j)=0;
    for q=1:ny
      for l=1:ny
        for h=1:ny
          ind=(q-1)*9 + (l-1)*3 + h;
          som_HM(j) = som_HM(j) + (H(j,ind )*X(l)*X(h) - M(j,ind)*W0(l)*W0(h))*W(q);
          som_H(j)  = som_H(j)  + H(j,ind)*W(q)*W(l)*W(h);
          som_M(j)  = som_M(j)  + M(j,ind)*W(q)*W(l)*W(h);
        end;
      end;
      som_P(j)  = som_P(j)  + P(j,q)*X(q);
      som_KP(j) = som_KP(j) + (K(j,q)-(Nyo+Nyt*exc)*P(j,q))*W(q);
    end;
% - - - - fin du calcul des sommations - - - -
    acc(i,j)=Nyt*exc*som_P(j) - 2*C(j)*V(j) - som_KP(j) - som_HM(j) - som_H(j) - som_M(j);
  end;
% ------- fin du calcul des accelerations -----
%
  abcisse(i)=temps;
  imax=i;
  if temps==temps_total-delta_temps
    imin=i;
  end;
%
end;
% ---------- Fin de la boucle temporelle ----------
%
% Calcul de l'amplitude des divers modes de vibration present (fft)
%    Passage des parametres dimensionnel (Hz)
t=abcisse*time;
f_echant=1/(inc_temps*time);
for mode=1:ny
  x=depl(imin:imax,mode);
  proc_fft;
%
% Creation d'une matrice comprenant tous les resultats frequentiels
%   qui sera utilisee pour enregistre les calculs effectues
%
  dim_fft=size(signal_reel);
  nb_harmonique=dim_fft(1,1);
  for j=1:nb_harmonique
    cumul_fft(i1,1)=fexc_hz;
```

```
      cumul_fft(i1,2)=mode;
      cumul_fft(i1,3)=signal_reel(j,1);
      cumul_fft(i1,4)=signal_reel(j,2);
      i1=i1+1;
    end;
  %
  end;
  %
  fexc=fexc+inc_fexc;
  force_max=0;
  for i=imin:imax
    if force(i)>force_max
      force_max=force(i);
      i_fmax=i;
    end;
  end;
  depl_init = depl(i_fmax,:);
  vit_init  = vit(i_fmax,:);
  %
  end
  %*************** Fin de la boucle frequentielle *****************
  %
  % Reponse forcee
  %
  i1=1;
  i2=1;
  i3=1;
  siz=size(rep_forcee);
  ms=siz(1,1);
  for j=1:ms
    if rep_forcee(j,1)==1
      f1(i1,1)=rep_forcee(j,3);
      af1(i1,1)=rep_forcee(j,4);
      i1=i1+1;
    end;
    if rep_forcee(j,1)==2
      f2(i2,1)=rep_forcee(j,3);
      af2(i2,1)=rep_forcee(j,4);
      i2=i2+1;
    end;
    if rep_forcee(j,1)==3
      f3(i3,1)=rep_forcee(j,3);
      af3(i3,1)=rep_forcee(j,4);
      i3=i3+1;
    end;
  end;
  plot(f1,af1)
  pause(3)
  clg;
  plot(f2,af2)
  pause(3)
  clg;
  plot(f3,af3)
  pause(3)
  clg;
  %
  % Reponse parametrique
  %
  i1=1;
  i2=1;
  i3=1;
  siz=size(rep_par);
  ms=siz(1,1);
  for j=1:ms
    if rep_par(j,1)==1
      p1(i1,1)=rep_par(j,3);
```

```
    ap1(i1,1)=rep_par(j,4);
    i1=i1+1;
  end;
  if rep_par(j,1)==2
    p2(i2,1)=rep_par(j,3);
    ap2(i2,1)=rep_par(j,4);
    i2=i2+1;
  end;
  if rep_par(j,1)==3
    p3(i3,1)=rep_par(j,3);
    ap3(i3,1)=rep_par(j,4);
    i3=i3+1;
  end;
end;
plot(p1,ap1)
pause(3)
clg;
plot(p2,ap2)
pause(3)
clg;
plot(p3,ap3)
pause(3)
clg;
%
%
% Enregistrement des resultats frequentiels sous la forme
%   Freq.exc. - mode - Freq. vib. - amplitude
%
save 'res_fft' cumul_fft -ascii
```

D.5 - Programme zone.m

```
% Programme d'integration numerique: cas stationnaire
% Integrateur: Adams-Bashforth de 3e ordre
% Determine les zones d'instabilité des trois modes de vibration
%
%
% ------------ Parametres numeriques ----------------
%
%    fnat      : frequence naturelle plaque imparfaite chargee
%    c         : amortissement modal
%    Pv        : parametre de chargement
%    Nyt       : chargement dynamique non-dimensionnel
%    fexc_init : frequence d'excitation initiale
%    fexc_fin  : frequence d'excitation finale
%    Xv        : deflexion statique
%    Mv        : nonlinearite cubique
%    Nbmode    : nombre de modes de vibration consideres
%
% ------------ Initialisation a zero de tout ----------
% ????? clear; ???? a remettre en utilisation si prog. utilisé seul
clg;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%     SECTION DE DEFINITION DE TOUS LES PARAMETRES
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
% - - - - - - Lecture du fichier de donnees 'ip3.out' - - - - - -
% NOTE: ces parametres sont non dimensionnels
% ???????? load 'ip3.out' -ascii ?????? a enlever pour un essai
time=ip3(1,1);
P=ip3(2:4,1:3);
M=ip3(5:31,1:3);
M=M';
K=ip3(32:34,1:3);
```

```
W0=ip3(35,1:3);
X=ip3(36,1:3);
C=ip3(37:39,1:3);
fnat_tot=ip3(40,1:3);
Nyo=ip3(41,1);
Nyt=ip3(42,1);
%
inc_fexc_hz=0.1;
% ---------------------------------------------------------
% 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000
% ---------------------------------------------------------
%          Mode de resonance considere (car ce programme considere un mode a la fois)
%
for mode_res=1:3
  md=mode_res;
%
% Remise a zero des tableaux de resultats
amplitude=[];
ampl_pos=[];
ampl_neg=[];
freq_exc=[];
freq_exc_hz=[];
limite_zone=[];
%
% ------------- Parametres de la plaque -------------
fnat=fnat_tot(1,md);
c=C(md,md);
Pv=P(md,md);
Xv=X(1,md);
Mv=M(md,md);
%
% ------------- Parametres de l'excitation -----------
% NOTE: les frequences d'excitation doivent etre donnees en Hz
%
fnat_hz=fnat/time;
fexc_init_hz=0.75*fnat_hz;
fexc_fin_hz=2.5*fnat_hz;
%
% Parametre pour determiner la region d'instabilite parametrique
seuil = 0.1;
%
% Parametres non dimensionnels qui seront utilises dans les calculs
fexc_init=fexc_init_hz*time/(2*pi);
fexc_fin=fexc_fin_hz*time/(2*pi);
inc_fexc=inc_fexc_hz*time/(2*pi);

% ------------- Prametres temporels ----------------
temps_total=50;
inc_temps=0.05;
% intervalle temporel qui sera utilise pour determiner l'amplitude
% du signal temporel pour elaborer la reponse frequentielle
delta_temps=5;
%
%@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
%
% ------------- Nb de points de calcul temporel ---------
nb_iter_temps=temps_total/inc_temps;
nb_iter_temps=round(nb_iter_temps);
%
% ------------- Initialisation des variables -----------
fexc=fexc_init;
no_freq=0;
%
%*********** Debut de la boucle pour chaque frequence **********
%            CAS STATIONNAIRE
mode = 0;
```

```
while fexc >= fexc_init
no_freq=no_freq+1;
freq_exc(no_freq)=fexc;
fexc_hz=fexc*2*pi/time;
fexc_hz
%
%-*-*-*-*-*-*- Debut du calcul:reponse temporelle -*-*-*-*-*-*-*-
%
% ---------- Valeurs initiales ----------
if no_freq==1
  depl_init=0;
  vit_init=0;
  acc_init=0;
end
%
for i=1:nb_iter_temps
  temps=i*inc_temps;
  if i==1
    depl(i)=depl_init;
    vit(i)=vit_init;
  end;
  if i==2
    depl(i)=depl_init + (inc_temps*vit_init);
    vit(i) = vit_init + (inc_temps*acc_init);
  end;
  if i==3
    depl(i)=depl(i-1) + (inc_temps/2)*(3*vit(i-1) - vit(i-2));
    vit(i) = vit(i-1) + (inc_temps/2)*(3*acc(i-1) - acc(i-2));
  end;
  if i>=4
    depl(i)=depl(i-1)+(inc_temps/12)*(23*vit(i-1)-16*vit(i-2)+5*vit(i-3));
    vit(i) =vit(i-1) +(inc_temps/12)*(23*acc(i-1)-16*acc(i-2)+5*acc(i-3));
  end;
  if i==1
    Wv = depl_init;
    Vv = vit_init;
  end;
  if i>1
    Wv = depl(i);
    Vv = vit(i);
  end;
  exc=cos(2*pi*fexc*temps);
  force(i)=exc;
  acc(i)=Nyt*Pv*exc*(Wv+Xv) - Mv*(3*Wv^2*Xv + Wv^3) - fnat^2*Wv - 2*c*Vv;
  abcisse(i)=temps;
  imax=i;
  if temps==temps_total-delta_temps
    imin=i;
  end;
end;
% ---------- Fin de la boucle temporelle ----------
abcisse=abcisse*time;

% Mode de balayage de la frequence d'excitation
%          0 croissant      1 decroissant
if fexc>=fexc_fin
  mode=1;
end;
if mode==0
  fexc=fexc+inc_fexc;
end;

if mode==1
  fexc=fexc-inc_fexc;
end;
if no_freq==1 & md==1
```

```
  clg;
  title('Reponse temporelle');
  ylabel('Amplitude');
  xlabel('Temps');
  plot(abcisse,depl);
  hold;
  affichage=(' Figure No.1: allure de la réponse temporelle calculée');
  disp(affichage)
  affichage=(' Pressez une touche pour proceder au calcul de la réponse fréquentielle');
  disp(affichage)
  pause
end;
%
max=0;
min=0;
force_max=0;
for i=imin:imax
  if depl(i)>max
    max=depl(i);
  elseif depl(i)<min
    min=depl(i);
  end
  if force(i)>force_max
    force_max=force(i);
    i_fmax=i;
   end;
end;
ampl_pos(no_freq)=max;
ampl_neg(no_freq)=min;
depl_init=depl(i_fmax);
vit_init=vit(i_fmax);
%
end
% *************** Fin de la boucle frequentielle *****************
%
freq_exc_hz=freq_exc*2*pi/time;
amplitude(1,:)=ampl_pos;
amplitude(2,:)=-ampl_neg;
%
% Recherche des limites de la zone d'instabilite parametrique
for i=2:size(amplitude,2)
  if freq_exc_hz(i) > (1.5*fnat_hz)
    if freq_exc_hz(i-1) < freq_exc_hz(i)
      if (amplitude(1,i-1) < seuil) & (amplitude(1,i) >= seuil)
            limite_zone(1,1) = freq_exc_hz(i);
      end;
    end;
    if freq_exc_hz(i-1) > freq_exc_hz(i)
      if (amplitude(1,i-1) < seuil) & (amplitude(1,i) >=seuil)
        limite_zone(1,2) = freq_exc_hz(i);
      end;
    end;
  end;
end;
%
if md==1
  fexc_1=freq_exc_hz;
  ampl_1=amplitude;
  zone_1=limite_zone;
end;
if md==2
  fexc_2=freq_exc_hz;
  ampl_2=amplitude;
  zone_2=limite_zone;
end;
if md==3
```

```
  fexc_3=freq_exc_hz;
  ampl_3=amplitude;
  zone_3=limite_zone;
end;
%
end;
%
%                    Fin de la boucle pour chaque mode
% ------------------------------------------------------------------
% 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
% ------------------------------------------------------------------
% ??? title('Reponse temporelle');
% ??? ylabel('Amplitude');
% ??? xlabel('Temps');
% ??? affichage=(' Figure No.1: allure de la réponse temporelle calculée');
% ??? disp(affichage)
% ??? affichage=(' Pressez une touche pour voir la réponse fréquentielle');
% ??? disp(affichage)
% ??? pause
clg;
title('Reponse frequentielle (Hz)');
hold;
ylabel('Amplitude');
hold;
xlabel('Frequence (Hz)');
hold;
plot(fexc_1,ampl_1);
hold
plot(fexc_2,ampl_2);
hold
plot(fexc_3,ampl_3);
hold;
```

ANNEXE E

PROGRAMME MATLAB UTILISÉ POUR CALCULER LES COEFFICIENTS DÉCRIVANT L'IMPERFECTION

E.1 - Programme cimp.m

```
%*************************************************************************
%          PROGRAMME QUI CALCULE LES COEFFICIENTS Woi                    *
%                                                                        *
%  FICHIER D'ENTREE                                                      *
%   donnees.m:     fichier de donnees renfermant les caracteristiques    *
%                  physiques de la plaque                                *
%   forme:         fichier contenant les points (x,y,z) de la plaque     *
%   calculf.m :fichier contenant une fonction, fonction propre           *
%                  utilisee pour decrire le mvt lateral de la plaque     *
%   weigh :        fichier contenant la matrice de ponderation           *
%                  utilisee par la methode des moindres carres           *
%                                                                        *
%  FICHIER DE SORTIE                                                     *
%    b:coeff.dat                                                         *
%                                                                        *
%  CONSTANTES UTILISEES                                                  *
%    nmodex  :nombre de mode en x                                        *
%    nmodey  :nombre de mode en y                                        *
%    alpha   :racine l'equation transcendante, n=nb de mode max.         *
%                                                                        *
%*************************************************************************
%
%Remise a zero des parametres et des graphiques
clear;
clg;
%
% Definition du nombre de lignes utilisees pour la definition graphique en X et Y
nblignes=30;
%
% DEFINITION DES CONSTANTES
nmodex=1;nmodey=3;nmax=3;
alpha=[0.4730040744862704E1,0.7853204624095838E1,0.1099560783800167E2,0.1413716549125746,
0.1727875965739948];
%
% CALCUL DES COEFFICIENTS 1/gamma
for n=1:nmax
  igamma(n)=(sinh(alpha(n))-sin(alpha(n)))/(cosh(alpha(n))-cos(alpha(n)));
end
%
% LECTURE DU FICHIER DE DONNEES
donnees;
load 'forme'  -ascii;
%
nbpts=max(size(forme));
points(:,1)=(forme(:,1)/dimx);
points(:,2)=(forme(:,2)/dimy);
% Remise du contour a z=0 par soustraction de z_init
points(:,3)=((forme(:,3)-z_init)/epais);
%
premiere_valeur_x=points(1,1);
vtx=-1;vty=-1;
val_x=[];val_y=[];
nx=0;ny=0;
for n=1:nbpts
```

```
    if points(n,1)==premiere_valeur_x
      nx=0;
    end
    if points(n,1) ~= vtx
      nx=nx+1;
      vtx=points(n,1);
      val_x(nx)=points(n,1);
    end
    if points(n,2) ~= vty
      ny=ny+1;
      vty=points(n,2);
      val_y(ny)=points(n,2);
    end
    val_z(nx,ny)=points(n,3);
  end
  %
  % CALCUL DES VALEURS PONCTUELLES DES FONCTIONS PROPRES
  %
  % CONDITION FRONTIERE S-S-S-S
  if cf==1
    for p=1:nmodex
      ai=0;bi=0;betai=p*pi;
      ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
      for n=1:nx
        x=val_x(n);
        fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
      end;
    end;
    for q=1:nmodey
      ai=0;bi=0;betai=q*pi;
      ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
      for n=1:ny
        y=val_y(n);
        fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
      end;
    end;
  %
  % CONDITION FRONTIERE S-E-S-E
  elseif cf==2
    for p=1:nmodex
      ai=igamma(p);bi=-1;betai=alpha(p);
      ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
      for n=1:nx
        x=val_x(n);
        fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
      end;
    end;
    for q=1:nmodey
      ai=0;bi=0;betai=q*pi;
      ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
      for n=1:ny
        y=val_y(n);
        fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
      end;
    end;
  %
  % CONDITION FRONTIERE E-S-E-S
  elseif cf==3
    for p=1:nmodex
      ai=0;bi=0;betai=p*pi;
      ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
      for n=1:nx
        x=val_x(n);
        fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
      end;
    end;
```

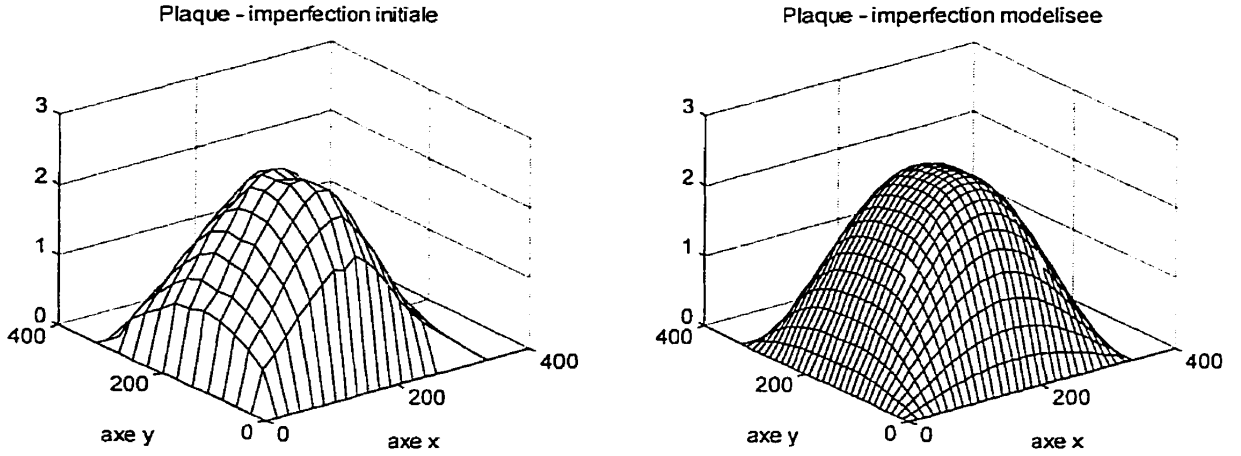
```
    for q=1:nmodey
      ai=igamma(q);bi=-1;betai=alpha(q);
      ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
      for n=1:ny
        y=val_y(n);
        fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
      end;
    end;
  %
  % CONDITION FRONTIERE E-E-E-E
  elseif cf==4
    for p=1:nmodex
      ai=igamma(p);bi=-1;betai=alpha(p);
      ax(p)=ai;bx(p)=bi;betax(p)=betai;
      for n=1:nx
        x=val_x(n);
        fctpx(n,p)=calculf(ai,bi,betai,x);
      end;
    end;
    for q=1:nmodey
      ai=igamma(q);bi=-1;betai=alpha(q);
      ay(q)=ai;by(q)=bi;betay(q)=betai;
      for n=1:ny
        y=val_y(n);
        fctpy(n,q)=calculf(ai,bi,betai,y);
      end;
    end;
  end
  %
  % CREATION DES MATRICES A ET B (AX=B)
  B=[];
  i=0;
  for n=1:nx
    for m=1:ny
    i=i+1;
    j=0;
      for k=1:nmodex
        for l=1:nmodey
          j=j+1;
          A(i,j)=fctpx(n,k)*fctpy(m,l);
        end
      end
      B(i,1)=points(i,3);
    end
  end
  %
  % RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS
  % F'F(Woi) = F'(Wi)
  % Woi = inv(F'F) * F'(Wi)
  %
  % Avec ponderation:
  % F'(wght)F(Woi) = F'(wght)(Wi)
  % Woi = inv(F'(wght)F) * F'(wght)(Wi)
  %
  load 'weight'  -ascii;
  wght=[0];
  for i=1:nx
    for j=1:ny
      ind=((i-1)*ny) + j;
      wght(ind,ind)=weight(i,j);
    end;
  end;
  Wo_calc=(((inv((A'*wght)*A))*A')*wght)*B
  %
  n=0;
  for i=1:nmodex
```

```
  for j=1:nmodey
    n=n+1;
    Woi(i,j)=Wo_calc(n);
  end
end

Woi
%save b:coeff.dat Woi  -ascii
%
%*************************************************************************
%          TRACAGE GRAPHIQUE DE L'IMPERFECTION MESUREE                   *
%      Cette procedure peut etre utilisee pour le cas ou les points      *
% de mesure de l'imperfection sont situes sur tous les points            *
% d'intersection d'un plan quadrille. De plus, l'enumeration des         *
% points doit etre faite en procedant par rangee de points ayant la      *
% meme coordonnee X. Cette procedure suppose que le pourtour de la       *
% plaque est parfaitement plat.  Dans tous les autres cas, il est        *
% impossible de faire un "mesh" pour illustrer l'imperfection            *
%*************************************************************************
%
cx=[];
cy=[];
cz=[];
%
for j=1:ny
  cx(1,j)=0;
  cx(nx+2,j)=1;
end;
for i=1:nx
  cy(i,1)=0;
  cy(i,ny+2)=1;
end;
for i=1:nx
  for j=1:ny
    cx(i+1,j)=val_x(i);
    cy(i,j+1)=val_y(j);
    cz(1,j)=0;
    cz(i,1)=0;
    cz(i+1,j+1)=val_z(i,j);
    cz(nx+2,j)=0;
    cz(i,ny+2)=0;
  end
end
cx(:,ny+1)=cx(:,1);
cx(:,ny+2)=cx(:,1);
cy(nx+1,:)=cy(1,:);
cy(nx+2,:)=cy(1,:);
%
% TRACAGE GRAPHIQUE DE Wo
inc=1/(nblignes-1);
for n=1:nblignes
  for m=1:nblignes
    X(n,m)=(n-1)*inc;
  end
end
Y=X';
for m=1:nblignes
  for n=1:nblignes
    Womn=0;
    for i=1:nmodex
      for j=1:nmodey
        Womn=Womn+(Woi(i,j)*calculf(ax(i),bx(i),betax(i),X(m,n))*calculf(ay(j),by(j),betay(j),Y(m,n)));
      end
    end
    Wo(m,n)=Womn;
  end
```

```
end
%
% RETOUR AUX COORDONNEES REELLES
cx=cx*dimx;
cy=cy*dimy;
cz=cz*epais;
x=X*dimx;
y=Y*dimy;
mimp=Wo*epais;
clg;
graph
end;
```

E.2 - Exemple de résultats



Expression mathématique de l'imperfection modélisée: w_{0i} = [1,8232, 0.2264, 0,3234]

Figure E.1 - Représentation graphique de l'imperfection géométrique initiale mesurée et de l'imperfection modélisée correspondante