

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**CALCUL DE LA TRAJECTOIRE D'UN PANACHE HUMIDE DANS UN
ENVIRONNEMENT STRATIFIÉ**

**CRISTINA DUMITRAS
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL,
GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE CIVIL)
NOVEMBRE 1999**



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-48850-0

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

CALCUL DE LA TRAJECTOIRE D'UN PANACHE HUMIDE DANS UN
ENVIRONNEMENT STRATIFIÉ

présenté par: DUMITRAS Cristina

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BRIÈRE François G., M.E., président

M. KAHAWITA René, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., membre

À mon père,
Constantin Dumitras, ing.

REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur de recherche, le Professeur René Kahawita, pour m'avoir offert la possibilité d'étudier un sujet passionnant. Je lui suis reconnaissante pour sa disponibilité et ses conseils qui ont eu une contribution essentielle à la réalisation du projet.

Je remercie ma famille et mes amis pour m'avoir soutenue et encouragée, et aussi pour avoir accepté que mon travail leur vole des heures qui leur étaient destinées.

À mes chers collègues du laboratoire d'hydraulique, je dois un grand merci pour leur aide et spécialement je mentionne Claudine Boisson, qui a rendu possible la rédaction de ce mémoire dans un bon français.

Je remercie le professeur François G. Brière et le professeur Michel Prud'Homme pour avoir accepté de juger ce projet.

La bourse accordée par les Fonds pour la Formation des Chercheurs et l'Aide à la Recherche a permis la continuation de mes études dans de meilleures conditions.

RÉSUMÉ

Pour enlever les particules et les gaz acides comme le dioxyde de soufre(SO_2) avant d'être rejetés dans l'atmosphère, certaines industries utilisent le procédé de lavage par voie humide. Par ce procédé, l'eau ou une solution d'alcali sont pulvérisées sous pression dans le flux de gaz. L'eau s'évapore dans le gaz chaud non-saturé et la chaleur latente absorbée est suffisante pour refroidir le gaz. Si la température du gaz descend en-dessous du point de rosée, la vapeur d'eau se condense et forme un nuage. Les gouttelettes contenues dans le nuage sont trop petites pour être retenues par les éliminateurs de gouttes. Lors de sa sortie par la cheminée, l'effluent qui a une humidité relative de 100% et contient des gouttelettes d'eau, commence à se mélanger avec l'air atmosphérique. En fonction de la différence de température entre le gaz et l'air atmosphérique, deux phénomènes peuvent se produire près de la cheminée : la condensation de la vapeur d'eau ou l'évaporation des gouttelettes.

L'objectif du présent travail est de modéliser les caractéristiques de ce type de panache, nommé "humide", en tenant compte de ces phénomènes thermodynamiques qui ont lieu après la sortie du panache dans l'atmosphère.

On emploie une forme différentielle des équations de conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie, qui sont intégrées sur la section transversale du panache, qui est considérée d'une forme elliptique plutôt que la plus utilisée section circulaire . Dans cette section, la vitesse, la densité et la concentration du polluant ont un profil gaussien. Les caractéristiques du panache en aval de la source sont calculées par intégration numérique en utilisant une procédure Bulirsch-Stoer avec une réduction automatique du pas de calcul pour le contrôle des erreurs numériques.

On considère une atmosphère neutre, bien mélangée et avec des gradients de température dans la direction verticale.

On calcule la variation du rayon des gouttelettes d'eau, la trajectoire du panache dans deux dimensions, la température dans l'axe du panache et la température atmosphérique correspondante, la vitesse dans l'axe du panache et la concentration de polluant au niveau du sol, toutes en fonction de la distance horizontale parcourue par le panache.

L'analyse de sensibilité est réalisée pour la dynamique de l'évaporation des gouttelettes, la hauteur du panache et la concentration de polluant au sol. L'influence des cinq paramètres sur le comportement du panache humide est examinée : le rayon initial des gouttelettes d'eau contenues dans le panache, l'humidité relative atmosphérique, la vitesse et la température de sortie du gaz et la vitesse du vent.

On compare la trajectoire et le niveau de concentration de polluant au sol obtenus pour le panache humide avec ceux obtenus dans le cas du panache sec. À cause du manque des mesures sur les panaches humides, les résultats numériques sont comparés avec les résultats théoriques des autres chercheurs.

ABSTRACT

Wet washing of flue gases is used by some industries to remove particulates and acidic gases such as sulfur dioxide(SO_2) before they are discharged into the atmosphere. The process consists of pressure spraying water or an alkali solution into the gas flow. Partial evaporation of the droplets into the hot, unsaturated gas takes place and the absorbed latent heat is sufficient to cool the gas. If the gas temperature decreases below the dew point, the water droplets condense to form a cloud. The droplets contained in the cloud are too small to be removed by the spray eliminators. At the stack exit the effluent that has a relative humidity of 100% and contains water droplets, begins to mix with the atmosphere. Its subsequent behavior depends on the temperature difference between the gas and the atmosphere. Close to the stack, two thermodynamic phenomena could occur : the condensation of the water vapor or the evaporation of the water droplets.

The aim of the present work is to model the properties of this kind of plume, named a "wet plume", by taking into account the thermodynamics phenomena at the stack exit.

The conservation equations for mass, momentum and energy are written in differential form. They then are integrated over the cross-section of the plume which is assumed to be elliptic in shape rather than the more commonly used circular section. The speed, density and concentration profiles in the cross-sections are assumed to be of Gaussian shape. The downwind properties of the plume are found by numerical integration. We use a Bulirsch-Stoer procedure with an automatic stepsize reduction that allows the control of numerical errors.

A neutral, well-mixed environment with vertical temperature gradients is considered here.

The variation of droplet radius, the two-dimensional plume path, the temperature along the plume axis and the corresponding atmospheric temperature, the speed along the plume axis and the ground level pollutant concentration are obtained as a function of downwind distance.

A sensitivity analysis is performed for the droplet evaporation dynamics, the plume path and the ground level concentration. The influence of five parameters on the wet plume behavior is investigated : the initial radius of the droplets contained in the plume, the atmospheric relative humidity, the stack exit speed, stack temperature and the ambient wind speed.

The plume path and the ground level concentration obtained in the case of a wet plume are compared with those obtained for a dry plume. Due to the lack of field measurements, the numerical results are compared with the theoretical results of other researchers.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	iv
REMERCIEMENTS.....	v
RÉSUMÉ.....	vi
ABSTRACT.....	viii
TABLE DES MATIÈRES.....	x
LISTE DES FIGURES.....	xiii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS.....	xvii
LISTE DES ANNEXES.....	xviii

INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

CHAPITRE I : DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE DU MODÈLE 13

1.1	Aspects théoriques.....	13
1.1.1	Entraînement.....	14
1.1.2	Facteurs météorologiques et la dispersion.....	16
1.1.3	Vent.....	16
1.1.4	Cisaillement.....	16
1.1.5	Turbulence.....	17
1.1.6	Stabilité atmosphérique.....	17
1.1.7	Terrain.....	18
1.1.8	Effet aérodynamique de rabattement sur la cheminée (downwash").....	19
1.1.9	Surélévation du panache.....	19
1.1.10	Caractéristiques de l'effluent.....	19
1.2	Preliminaires.....	20
1.2.1	Systèmes de coordonnées.....	21
1.2.2	Vitesse du vent.....	22
1.2.3	Force de traînée.....	24

1.2.4	Section du panache.....	25
1.2.5	Profils de similarité.....	26
1.3	Équation de l'entraînement.....	27
1.4	Équations de conservation.....	30
1.4.1	Conservation de la masse de polluant.....	30
1.4.2	Conservation de la quantité de mouvement dans la direction Ox	31
1.4.3	Conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oy	32
1.4.4	Conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oz	33
1.4.5	Conservation de l'énergie.....	34
1.5	Zone d'établissement du courant.....	38
1.5.1	Théorie de Keffer et Baines.....	38
1.5.2	Caractéristiques du panache à l'interface.....	38
1.6	Calcul de la concentration du polluant au sol.....	43
CHAPITRE II : ÉVAPORATION DES GOUTTELETTES D'EAU.....		46
2.1	Évaporation des gouttelettes d'eau pure.....	46
2.2	Influence de la superficie courbe sur l'évaporation des gouttelettes d'eau.....	52
2.3	Mélange isobarique de deux masses d'air humide.....	55
2.4	Calcul de l'humidité relative du panache humide.....	58
CHAPITRE III : MÉTHODE DE CALCUL.....		61
3.1	Calculs préliminaires.....	61
3.1.1	Notations.....	61
3.1.2	Calcul de β et de U_a	62
3.2	Intégration des équations.....	64
3.3	Dérivation des équations.....	67
3.4	Méthodes numériques appliquées.....	70
3.5	Programme de calcul.....	71

CHAPITRE IV : RÉSULTATS ET DISCUSSIONS.....	74
4.1 Conditions de calcul.....	74
4.2 Calcul du cas de référence.....	75
4.3 Analyse de sensibilité.....	85
4.3.1 Variation du rayon initial des gouttelettes.....	86
4.3.2 Variation de l'humidité relative atmosphérique.....	86
4.3.3 Variation de la température de sortie du panache.....	87
4.3.4 Variation de la vitesse de sortie du panache.....	96
4.3.5 Variation de la vitesse du vent.....	96
4.4 Comparaison avec le panache sec.....	97
4.5 Comparaison avec d'autres modèles.....	108
4.5.1 Évaporation dans le panache.....	108
4.5.2 Courbe de saturation.....	109
 CONCLUSIONS.....	 116
 RÉFÉRENCES.....	 120
 ANNEXES.....	 126

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Zone d'établissement du courant et zone du courant établi.....	15
Figure 1.2	Systèmes de coordonnées du panache.....	23
Figure 1.3	Section transversale elliptique du panache.....	26
Figure 1.4	Décroissance de la vitesse axiale du jet libre.....	40
Figure 1.5	Emplacement de la ligne centrale du jet libre.....	41
Figure 1.6	Géométrie en vue du calcul de la concentration de polluant au sol.....	44
Figure 2.1	Arrangement des molécules d'eau à l'interface d'une surface plane de l'eau et de l'air.....	53
Figure 2.2	Arrangement des molécules d'eau à l'interface d'une surface courbe de l'eau et de l'air.....	53
Figure 2.3	Courbe de saturation de l'air humide.....	57
Figure 4.1	Variation du rayon des gouttelettes dans les conditions de référence.....	77
Figure 4.2	Variation de la hauteur du panache mouillé dans les conditions de référence	78
Figure 4.3	Variation de la température du panache mouillé et de la température atmosphérique dans les conditions de référence	79
Figure 4.4	Variation de la vitesse du panache mouillé dans les conditions de référence.....	80
Figure 4.5	Variation du demi-axe horizontal de la section transversale elliptique du panache mouillé dans les conditions de référence.....	81
Figure 4.6	Variation du demi-axe vertical de la section transversale elliptique du panache mouillé dans les conditions de référence.....	82
Figure 4.7	Variation de la concentration de polluant au sol dans les conditions de référence.....	83
Figure 4.8	Variation de l'angle d'incidence du panache mouillé dans les conditions de référence.....	84

Figure 4.9	Influence du rayon initial sur la décroissance du rayon normalisé des gouttelettes.....	88
Figure 4.10	Influence du rayon initial des gouttelettes sur la hauteur du panache mouillé.....	89
Figure 4.11	Influence du rayon initial des gouttelettes sur le niveau de la concentration de polluant au sol.....	90
Figure 4.12	Influence de l'humidité relative atmosphérique sur la variation du rayon des gouttelettes.....	91
Figure 4.13	Influence de l'humidité relative atmosphérique sur la variation de la hauteur du panache mouillé.....	92
Figure 4.14	Influence de l'humidité relative atmosphérique sur le niveau de la concentration de polluant au sol.....	93
Figure 4.15	Influence de la température de sortie du gaz sur la variation du rayon des gouttelettes.....	94
Figure 4.16	Influence de la température de sortie du gaz sur la variation de la hauteur du panache mouillé.....	95
Figure 4.17	Influence de la température de sortie du gaz sur le niveau de la concentration de polluant au sol.....	98
Figure 4.18	Influence de la vitesse de sortie du gaz sur la variation du rayon des gouttelettes.....	99
Figure 4.19	Influence de la vitesse de sortie du gaz sur la variation de la hauteur du panache mouillé.....	100
Figure 4.20	Influence de la vitesse de sortie du gaz sur le niveau de la concentration de polluant au sol.....	101
Figure 4.21	Influence de la vitesse du vent sur la variation du rayon des gouttelettes.....	102
Figure 4.22	Influence de la vitesse du vent sur la variation de la vitesse du panache mouillé.....	103
Figure 4.23	Influence de la vitesse du vent sur la variation de la hauteur du panache mouillé.....	104

Figure 4.24	Influence de la vitesse du vent sur le niveau de la concentration de polluant au sol.....	105
Figure 4.25	Comparaison entre la hauteur du panache sec et celle du panache mouillé..	106
Figure 4.26	Concentration de polluant au sol pour un panache sec et un panache mouillé.....	107
Figure 4.27	Rayon moyen des gouttes dans un panache qui a subi un procédé de lavage pour des températures atmosphériques de 10 et -10 °C.....	112
Figure 4.28	Condensation et évaporation des gouttelettes qui ont le rayon initial de 10µm.....	113
Figure 4.29	Vitesse du panache qui contient des gouttelettes avec le rayon initial de 10µm.....	114
Figure 4.30	Conditions critiques de condensation pour les effluents de tours de refroidissement	115
Figure 4.31	Conditions critiques de condensation pour les effluents de tours de refroidissement et le panache humide.....	115

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVATIONS

Fifth International Conf. Water Pollut. Res. = Fifth International Conference on Water Pollution Research

Int. J. Air Water Pollut. = International Journal of Air and Water Pollution

J. Air Pollut. Contr. Assoc. = Journal of Air Pollution Control Association

J. of Applied Meteorology = Journal of Applied Meteorology

J. Atmos. Sci. = Journal of the Atmospheric Sciences

J. of Climate and Applied Meteorology = Journal of Climate and Applied Meteorology

J. Fluid Mech. = Journal of Fluid Mechanics

Proc. Inst. Mech. Eng. = Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers

Proc. Roy. Society = Proceedings of the Royal Society

Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. = Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society

Trans. A.S.C.E. = Transactions of the American Society of Civil Engineers

Trans. Faraday Society = Transactions of the Faraday Society

Z. Angew. Math. mech. = Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

LISTE DES ANNEXES

Annexe I:	Intégration des équations de conservation.....	126
Annexe II:	Dérivation des équations de conservation.....	129

INTRODUCTION

En cette fin de siècle on est très concerné par le niveau de pollution créé par les êtres humains. Des scientifiques et des ingénieurs cherchent des solutions pour mieux contrôler et réduire les rejets dans l'environnement.

Un apport non-négligeable à la pollution atmosphérique est détenu par les usines d'incinération des déchets, les chaufferies au charbon pulvérisé, la sidérurgie, l'industrie chimique, les cimenteries et les centrales électriques. Ces industries utilisent le lavage par voie humide pour empêcher les particules ou les gaz acides comme le dioxyde de soufre(SO_2) d'être rejétés dans l'atmosphère avec le gaz.

Pour extraire les particules du courant de polluant, on utilise des dépoussiéreurs hydrauliques. Dans ces appareils on pulvérise de l'eau sur le flux poussiéreux. L'eau colle aux particules, augmente leur inertie et favorise leur agglutination. Pour enlever le dioxyde de soufre (SO_2), le gaz entre dans un tour de lavage où circule à contre-courant une solution d'alcali qui dissout le dioxyde de soufre (SO_2). Par les deux procédés, l'eau s'évapore dans le gaz chaud non-saturé et à cause de l'absorption de la chaleur latente d'évaporation le gaz se refroidit. Si la température du gaz descend en-dessous du point de rosée, la vapeur d'eau se condense et forme un nuage. Les gouttelettes contenues dans le nuage sont trop petites pour être retenues par les éliminateurs de gouttes. Le refroidissement du gaz continue dans la cheminée et la densité du nuage augmente. Lors de sa sortie, l'effluent est blanc et a une température supérieure à celle de l'atmosphère de quelques degrés seulement.

Le procédé de lavage par voie humide a deux grands inconvénients : il refroidit les gaz chauds et les sature en vapeur d'eau, ce qui réduit de façon importante les conditions de

dispersion à la sortie de la cheminée. Pour compenser le manque de surélévation thermique de l'effluent il est nécessaire d'augmenter sa vitesse de sortie.

Lors de sa sortie de la cheminée, le gaz commence à se mélanger avec l'air atmosphérique. La dilution du panache permet l'évaporation des gouttelettes d'eau. La chaleur latente absorbée est assez importante pour refroidir le panache et le faire descendre.

L'évaporation de l'eau dans l'équipement de dépollution et le refroidissement avant l'émission influencent les paramètres de sortie du panache. Ces processus sont contrôlés par la différence de température entre le gaz et l'eau de lavage, leurs débits et leur mécanisme de contact. Le refroidissement après l'émission dépend de l'entraînement de l'air atmosphérique et de l'évaporation de l'eau contenue dans le panache. Le taux d'évaporation est déterminé principalement par la température et l'humidité de l'atmosphère.

Il faut faire la distinction entre les gouttes d'eau pulvérisées dans le courant de gaz par l'équipement de lavage, qui ont la grandeur de la bruine et seront captées par la suite dans les éliminateurs de gouttes, et les gouttelettes d'eau formées par la condensation qui sont trop petites pour être enlevées de la même façon. Ces dernières vont continuer à être portées par le panache comme la fumée et vont indiquer la trajectoire de celui-ci.

Du point de vue de la pollution au sol, l'évaporation des gouttelettes d'eau est une caractéristique négative, car elle réduit la force de flottaison du panache et donc sa surélévation.

OBJECTIFS ET HYPOTHÈSES DE RECHERCHE

Le présent ouvrage cherche à déterminer la trajectoire tridimensionnelle d'un panache mouillé produit à la suite d'un procédé de lavage par voie humide. On suppose qu'à la

sortie le panache contient du gaz, des gouttelettes d'eau et de la vapeur d'eau. On emploie une forme différentielle des équations de conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie qui sont intégrées sur la section transversale de forme elliptique. Dans cette section la vitesse, la densité et la concentration du polluant ont un profil gaussien. Les caractéristiques du panache en aval de la source sont trouvées par une intégration numérique des équations différentielles gouvernantes en utilisant une procédure Bulirsch-Stoer avec une réduction automatique du pas de calcul pour le contrôle des erreurs numériques.

L'émission du polluant se fait dans les conditions d'une source unique en régime stationnaire d'émission et placée dans un terrain plat. Les données initiales requises par le modèle sont les dimensions de la source, les caractéristiques de l'effluent et les conditions atmosphériques. On néglige les effets de la rotation de la terre, la friction à la surface de la terre et on ne prend pas en considération l'hypothèse de Boussinesq. On considère que l'eau est présente dans la phase gazeuse et liquide selon une distribution "top hat" dans la section transversale du panache. On considère une atmosphère neutre et bien mélangée avec des gradients de température seulement dans la direction verticale. On ne prend pas en considération la collision et la coalescence des gouttelettes.

Tant que le panache est mouillé, on considère une humidité relative du panache de 100%. Lorsque l'air atmosphérique est entraîné dans le panache, l'humidité relative du mélange baisse. Dans l'hypothèse de la théorie de l'équilibre on suppose qu'une partie de l'eau liquide s'évaporerait instantanément jusqu'à l'obtention de la pression de saturation.

La valeur de $100\ \mu\text{m}$ pour le rayon représente la limite conventionnelle entre les gouttelettes d'eau typiques des nuages et les gouttes de pluie (Rogers, 1979). On suppose que la taille des gouttelettes d'eau contenues dans le panache est plus petite que $100\ \mu\text{m}$ pour qu'elles soient entraînées dans le courant d'air du panache et transportées avec celui-ci sans produire des précipitations.

La plus grande probabilité d'apparition de la condensation de la vapeur d'eau existe à la sortie de la cheminée, quand l'excès de température du panache est maximal. On suppose que la densité de noyaux de condensation est assez grande pour éviter la sursaturation. Au fur et à mesure que le panache s'élève, sa température et celle de l'atmosphère se rapprochent et la possibilité d'apparition de la condensation est réduite.

REVUE DE LITTÉRATURE

La plupart des modèles pour l'obtention des concentrations de polluant au niveau du sol utilisent une analyse en deux étapes. La première détermine la hauteur effective de la cheminée, qui est la hauteur de l'axe du panache au-dessus du sol et la deuxième calcule la diffusion des gaz à partir de l'axe du panache et la déposition des polluants.

Calcul de la surélévation du panache

On considère qu'un panache horizontal fictif qui se trouve à la hauteur effective de la cheminée diffuse comme le panache réel. Près de la source il y a une très grande différence entre les deux, de sorte qu'on ne doit pas utiliser des modèles pour des petites distances. Une origine virtuelle est établie en amont pour tenir compte du fait que la source n'est pas ponctuelle et que le processus de diffusion au début peut être différent de celui modélisé par les équations. La distance en amont de la cheminée où la source virtuelle sera considérée, devra être plus grande dans des conditions stables, à cause de l'angle réduit d'expansion du panache.

L'importance de la hauteur de la cheminée et de la force de flottaison dans la réduction des concentrations de polluant au sol a été reconnue depuis longtemps. Dans son étude sur la surélévation du panache, Briggs (1969) fait un résumé des contributions des scientifiques à ce sujet. Nous rappelons les plus importantes ci-dessous :

En 1936 Bosanquet et Pearson ont montré que dans certaines conditions la concentration maximale au sol est inversement proportionnelle au carré de la hauteur de la cheminée. Plus tard, la hauteur de la cheminée a été remplacée par la hauteur effective. Il y a différentes opinions en ce qui concerne la définition de la hauteur effective. Lucas (1966) suggère de prendre en considération la surélévation en dessus du point de concentration maximale. Mais la difficulté réside dans l'absence de mesures prises à cette distance.

Schmidt (1941) a été le premier à analyser le panache chaud dans des conditions de vent nul et Yih (1951) a étudié la transition du régime laminaire au régime turbulent dans ce type de panaches. Rouse, Yih et Humphreys (1952) ont mesuré la température et la vitesse verticale dans un panache chaud turbulent et ils ont trouvé la forme conique de celui-ci dans un air calme non-stratifié ainsi que la distribution gaussienne de la vitesse verticale et de la température dans une section transversale. Un résultat important de leurs recherches est la découverte que la diminution de la vitesse verticale et de la température avec la distance respecte les principes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Plus tard Pai (1954) et Schlichting (1960) ont fait des mesures sur les jets. Morton, Taylor et Turner (1956) ont réalisé des études concernant la surélévation du panache dans un environnement stable. Bryant, Cowdrey (1955) et Vadot (1965) ont étudié l'effet de la force de flottaison près de la cheminée. Fan (1967) a modélisé le panache incliné dans un courant traversier uniforme ou avec un gradient de densité constant.

Tennessee Valley Authority a fait aussi des mesures pendant plusieurs années. Les premiers résultats ont été publiés en 1964. En 1967 ils ont obtenu des profils de température et de vent.

Dispersion des polluants

Priestley (1956) a été le premier à identifier deux phases dans le développement du panache : la première phase est dominée par la turbulence du panache; le mouvement dans

la deuxième phase est influencé par la turbulence atmosphérique. Csanady (1956) divise la deuxième phase dans deux sections : la première section est dominée par des tourbillons de diffusion de grandeur inertielle et la deuxième section par des tourbillons de la grandeur du diamètre du panache.

Dans les modèles gaussiens de dispersion des polluants on considère que la concentration du polluant dans la section transversale du panache peut-être décrite par une distribution normale. Le modèle gaussien le plus utilisé par les ingénieurs est celui développé par Pasquill (1962). Il inclut la réflexion du polluant par la surface du sol.

Panache humide

Le premier à étudier l'influence de l'humidité sur les panaches est Morton (1957). Il décrit un modèle pour le transport de la vapeur d'eau par le panache vertical dans une atmosphère humide, dans l'hypothèse d'un taux d'entraînement de l'air proportionnel à la vitesse verticale moyenne du panache. Il fait l'hypothèse d'une atmosphère sans vent dans laquelle la température potentielle est uniforme et les températures, humidités spécifiques et vitesses verticales sont uniformes dans une section transversale du panache. La solution est obtenue à partir des équations de conservation de la masse, quantité de mouvement, chaleur et eau liquide.

Les gaz secs qui sortent d'une cheminée entraînent la vapeur d'eau présente dans l'atmosphère humide. Avec l'altitude, l'humidité et la température atmosphérique décroissent, tandis que le panache devient plus humide que l'air environnant et arrive à la saturation. Un nuage peut apparaître si les noyaux de condensation sont présents.

Morton étudie surtout le panache thermique qui s'élève au-dessus d'un incendie et qui n'est pas chargé d'humidité, mais prend l'humidité de l'air atmosphérique. Il montre que dans une atmosphère uniforme, le niveau de condensation peut être atteint. Dans une

atmosphère stable, le panache devient saturé seulement si la source est assez puissante pour permettre au panache d'arriver au niveau de condensation.

Slawson et Csanady (1967) comparent les observations faites sur la surélévation du panache provenant de la centrale électrique Lakeview Generation Station (Ontario) avec quelques formules théoriques existantes. Un programme d'observation systématique a été réalisé et des données sur la trajectoire du panache ont été collectées dans des conditions de stratification atmosphérique neutre et instable.

Csanady (1971) développe une théorie sur le comportement des panaches mouillés. Dans son article il fait référence aux ouvrages précédents de Morton (1957), qu'il considère le seul à avoir apporté des contributions majeures dans le domaine. La base de sa théorie est constituée par l'entraînement de l'air dans un panache avec une distribution « top hat » de ses propriétés, c.a.d. uniformes dans une section transversale du panache et nulles à l'extérieur. Il calcule de façon différenciée l'entraînement de l'air pour chacune de trois phases du panache : initiale, intermédiaire et finale, et applique les équations de conservation de la masse, quantité de mouvement et énergie et l'équation de Clausius-Clapeyron. Les effets du changement dans la température potentielle atmosphérique sont prises en considération. Dans le cas d'un environnement bien mélangé, sans gradient d'humidité ni stratification thermique, la fréquence Brünt-Vaisala est négligée et la pression absolue est considérée constante. Des résultats plus simples sont obtenus dans des conditions d'approximation satisfaisante. Même dans un environnement stratifié, les changements dans la température potentielle sont négligeables par rapport à l'excès initial de température du panache.

Csanady trouve que la trajectoire du panache mouillé, à partir du point où la condensation et l'évaporation dans le panache ont cessé, peut être établie en déplaçant d'une certaine distance la trajectoire d'un panache sec qui sort dans les mêmes conditions. L'effet dynamique de la condensation et l'évaporation sur la trajectoire du panache est mineur.

En supposant à la sortie de la cheminée un panache humide sans eau liquide, Csanady détermine les conditions pour éviter la condensation de la vapeur d'eau. Il conclut que les différences de température réduites entre le panache et son environnement empêchent la condensation.

Wigley et Slawson (1971) suivent les théories de Morton et Csanady et montrent que la condensation de la vapeur d'eau dans le panache peut apparaître seulement près de la cheminée. Donc seulement la phase initiale du panache est considérée. En conséquence, des résultats satisfaisants peuvent être obtenus en négligeant les variations dans la température potentielle et l'humidité spécifique atmosphérique. Ils trouvent aussi que le calcul du panache mouillé demande l'utilisation de la température virtuelle et qu'un panache non-condensé se comporte similairement au panache sec.

Sur la base des théories données par Csanady (1971) et Wigley et Slawson (1971), qui divisent le panache en trois phases différentes, en supposant des vitesses d'entraînement différentes pour chaque phase, Wigley et Slawson (1972) font une comparaison entre un panache sec et un panache mouillé qui ont des paramètres d'effluent identiques. Ils trouvent que les caractéristiques de la surélévation du panache mouillé correspondent à ceux du panache sec si les classes de stabilité atmosphériques sont définies selon le taux adiabatique de saturation. Alors, un panache mouillé peut être nommé stable, neutre ou instable si la courbe d'état de l'air est respectivement inférieure, égale ou supérieure au taux adiabatique de saturation.

Il est intéressant de noter que dans un environnement conditionnellement instable ($\Gamma_{as} < \Gamma < \Gamma_{ad}$) un panache mouillé est instable, tandis qu'un panache sec est stable. Dans une atmosphère stable, les deux sont stables, mais les oscillations du panache mouillé ont une amplitude plus grande et une fréquence plus faible. Les auteurs discutent le cas des panaches qui subissent une condensation à la sortie de la cheminée, applicable surtout aux cas des tours de refroidissement, et ils obtiennent des surélévations plus grandes pour

les panaches mouillés, qui « ressentent » l'atmosphère plus instable que les panaches secs.

Hanna (1972) détermine une méthode analytique pour le calcul de la surélévation finale et du niveau initial de condensation dans le cas des panaches provenant de tours de refroidissement. Il suggère l'utilisation de la formule de Briggs si la possibilité du relâchement de la chaleur latente est comprise dans la définition du flux de la force de flottaison initiale. Si la condensation n'a pas lieu, la force de flottaison initiale est déterminée seulement par la différence de température entre le panache et l'atmosphère. Lors du cas de la condensation partielle de la vapeur d'eau, la surélévation du panache est calculée par une procédure itérative.

La condensation se produit lorsque le flux initial de vapeur et d'eau liquide est suffisant pour saturer le flux du volume initial plus celui de l'air atmosphérique entraîné. Des variations légères dans la température et l'humidité relative atmosphérique peuvent causer des comportements différents des panaches.

Les modèles de Csanady (1971) et Wigley et Slawson (1971, 1972) s'applique jusqu'à une altitude de 100 m. Dans cette couche la température et l'humidité spécifique de saturation sont considérées constantes. Hanna (1972) continue le développement de ces modèles et discute le comportement du panache aux altitudes plus grandes. Il exprime l'humidité spécifique de saturation en fonction de la température du panache et de l'altitude, en utilisant une intégration de l'équation de Clausius-Clapeyron, la loi hydrostatique et celle du gaz idéal.

La vérification de la théorie de Hanna (1972) est empêchée par le manque des mesures sur les panaches provenant des tours de refroidissement.

Weil (1974) présente les équations intégrales pour le mouvement d'un panache humide dans un courant traversier et les effets de l'humidité sur la trajectoire d'un panache mouillé dans un environnement stable et saturé. Il trouve que la simple substitution du taux adiabatique atmosphérique avec le taux adiabatique de saturation dans l'équation de l'énergie pour le panache saturé est valable seulement si l'atmosphère est saturée. L'approximation du Boussinesq est faite et les différences entre les températures, les humidités spécifiques et les rapports de mélange correspondant au panache et à l'atmosphère sont négligées. Weil (1974) utilise un profil « top hat » pour les caractéristiques du panache et des valeurs moyennes pour la température, vitesse, humidité spécifique et le rapport de mélange dans une section transversale. Ses résultats diffèrent de ceux présentés par Hanna (1972). Pour une atmosphère isotherme, l'effet de l'humidité sur la trajectoire du panache est mineur. Il devient significatif lorsque la courbe d'état atmosphérique a une valeur de $-0,55^{\circ}\text{K/km}$.

La différenciation entre les trajectoires du panache sec et mouillé dépend des profils verticaux de température et d'humidité. Des différences sont trouvées dans l'emplacement du point de surélévation maximale et dans la valeur de la surélévation maximale. La fréquence d'oscillation est moins grande pour le panache humide qui se refroidit selon le taux adiabatique de saturation.

Schatzmann et Policastro (1984) développent un modèle intégral pour la prédiction de la surélévation du panache d'une tour de refroidissement avec tirage naturel. Dans l'élaboration du modèle sont évitées les hypothèses de simplifications non-nécessaires. Un profil gaussien pour la vapeur d'eau est utilisé tant que le panache est non-saturé. À la saturation, ils obtiennent une expression pour l'excès d'humidité spécifique en fonction de l'excès local de température. Pour tenir compte de l'effet de rabattement sur une cheminée avec un diamètre de 50 m, ils emploient une fonction d'entraînement dérivée dans l'hypothèse de Boussinesq et un coefficient de traînée corrigé selon la valeur du nombre de Reynolds. Ce coefficient, qui dans l'exemple de calcul présenté a une valeur

de 2,5, prend en considération les effets de viscosité et de résistance causés par les différences de pression autour du panache dans le sillage de la cheminée et aussi la forme non-circulaire du panache pendant son inclinaison. Parce que le modèle contient des constantes empiriques, sa calibration est nécessaire.

Pour tester les performances du modèle de Schatzmann (1979), Davidson (1986) réalise une comparaison de ce modèle avec un développement des équations utilisées par Schatzmann (1979), mais cette fois appliquées à un volume de contrôle. Des différences apparaissent entre les équations de conservation de Schatzmann (1979) et celles de Davidson à cause des champs de vitesses considérées. Davidson (1986) suppose que la vitesse horizontale du vent a une composante le long de la trajectoire du panache et une autre dans la direction radiale, tandis que la vitesse du panache a une seule composante selon la direction de la trajectoire. Schatzmann (1979) inclut deux composantes de la vitesse du panache, une dans la direction de la ligne centrale et l'autre dans la direction radiale. La composante radiale de la vitesse du panache est difficile à justifier dans une analyse intégrale qui utilise un tel système de coordonnées.

Gangoiti et al. (1997) présentent un modèle pour la surélévation du panache provenant des cheminées hautes, valable pour les profils atmosphériques complexes. Ils considèrent que le panache a quatre composantes : le gaz, l'air sec, la vapeur d'eau et l'eau liquide. Les profils de température, vitesse et densité sont axisymétriques. Le modèle de transfert turbulent de masse entre le panache et l'air atmosphérique de Netterville (1990) est appliqué et un seul coefficient d'entraînement est employé. L'approximation de Boussinesq n'est pas utilisée puisque la température de sortie des gaz est plus haute que la température atmosphérique. Lorsque le modèle est testé, on ne considère pas un contenu initial d'eau liquide dans le panache. La condensation qui survient après le mélange avec l'air ambiant est supposée uniforme dans le volume du panache. Les températures considérées sont en dessus de 0°C, donc la formation de glace n'a pas lieu. Le modèle concorde assez bien avec les données obtenues par des mesures dans deux

centrales électriques en Espagne. On a trouvé que la condensation dans le panache est la cause principale de sous-estimation de la surélévation des panaches dans les modèles plus simples.

Jusqu'à aujourd'hui, la littérature spécialisée a étudié la condensation de la vapeur d'eau dans les panaches des tours de refroidissement et la formation des nuages plutôt que l'évaporation et les effets qu'elle implique.

Entre le panache mouillé qui sort d'une cheminée et celui qui est rejeté par un tour de refroidissement il y a des similitudes, mais la différence de grandeur leur impose des comportements distincts. Le diamètre d'une cheminée industrielle est de l'ordre de quelques mètres, tandis qu'une tour de refroidissement a un diamètre de dizaines de mètres. La force de flottaison d'un panache dépend de l'intensité de son mélange avec l'air atmosphérique. Donc les panaches plus larges maintiendront plus longtemps leur excès de température, à cause de leur rapport réduit entre la surface et le volume et, dans les mêmes conditions de sortie, elles s'élèveront plus rapidement et plus haut que les panaches des petites cheminées.

CHAPITRE I

DÉVELOPPEMENT THÉORIQUE DU MODÈLE

1.1 Aspects théoriques

Lors d'une émission d'un polluant dans l'atmosphère par une haute cheminée, il est très important d'être capable de calculer la trajectoire et le taux de diffusion du panache. Plusieurs processus influencent simultanément la dispersion des polluants. Les caractéristiques de sortie de la cheminée, comme les dimensions géométriques de la source et spécialement la vitesse de sortie et la force de flottaison des polluants contribuent à la surélévation du panache. L'ampleur de cette surélévation dépend aussi des conditions météorologiques : vitesse du vent, stratification atmosphérique, niveau de turbulence. Dans des conditions de stratification stable les polluants atteindront une hauteur d'équilibre, tandis qu'en cas de stratification instable et neutre, au moins théoriquement, la hauteur d'équilibre ne pourrait jamais être atteinte. Une fois que le panache est arrivé au niveau d'équilibre, sa dispersion est due à la turbulence atmosphérique et ce processus peut être considéré similaire à la dispersion des polluants sans force de flottaison initiale et issus d'une source imaginaire dont la hauteur est égale à la hauteur d'équilibre.

Les émissions sont caractérisées par leur vitesse, masse, quantité de mouvement et force de flottaison. Une émission qui possède la quantité de mouvement et la force de flottaison est nommée panache forcé ou jet flottant. Dans la plupart des cas, la première partie du panache est dominée par la quantité de mouvement.

Lorsque l'effluent quitte la cheminée, il est bien mélangé, de sorte que la vitesse et la densité sont uniformes dans une section transversale du panache, dont la dimension radiale est égale au rayon de la cheminée (si on néglige l'effet aérodynamique de

rabattement sur la cheminée). Une telle distribution est appelée "top hat". L'entraînement des tourbillons va détruire ce profil, qui deviendra gaussien quelques diamètres en aval. Cette partie du panache est appelée la zone d'établissement de courant (figure 1.1).

Quelques diamètres en aval commence la zone de courant établi dans laquelle le panache perd sa quantité de mouvement et sa force de flottaison et a atteint son niveau d'équilibre. Il arrête de monter, mais continue de disperser.

Les effluents sont soumis aux variations des conditions météorologiques, spécialement aux fluctuations longitudinales et latitudinales du vent, aux tourbillons dus à la topographie du terrain et à la stabilité atmosphérique. À cause de ces facteurs, la forme du panache varie rapidement. Toute fois, pour des moyennes allant de 30 secondes à 2 ou 3 minutes, on peut observer une forme établie et dominante. La modélisation dans une atmosphère instable est difficile à cause de l'échelle temporelle réduite des tourbillons, qui est plus courte que l'échelle utilisée pour les moyennes.

1.1.1 Entraînement

L'accroissement du panache est accompli par l'arrivée du courant d'air et le mélange ultérieur. On suppose ce courant perpendiculaire à l'axe du panache. On distingue trois phases dans l'évolution du panache. Pour la plupart des panaches forcés, la zone de turbulence intense dans la première phase est générée par le mouvement du panache lui-même. Lorsque le panache s'approche de sa hauteur d'équilibre, l'effet de la quantité de mouvement diminue et l'élévation est contrôlée par les effets de flottaison. Le mélange turbulent n'est plus le résultat du cisaillement des vitesses, il se présente comme des tourbillons dans le panache (deuxième phase) et des tourbillons à l'échelle plus grande de l'atmosphère qui contiennent de l'énergie (troisième phase). À chaque phase du panache est associée une vitesse d'entraînement. La transition d'une phase à l'autre a lieu lorsque

les vitesses d'entraînement deviennent égales. Puisque ces transitions ne peuvent pas avoir lieu dans le même point, on suggère de prendre comme valeur pour la vitesse

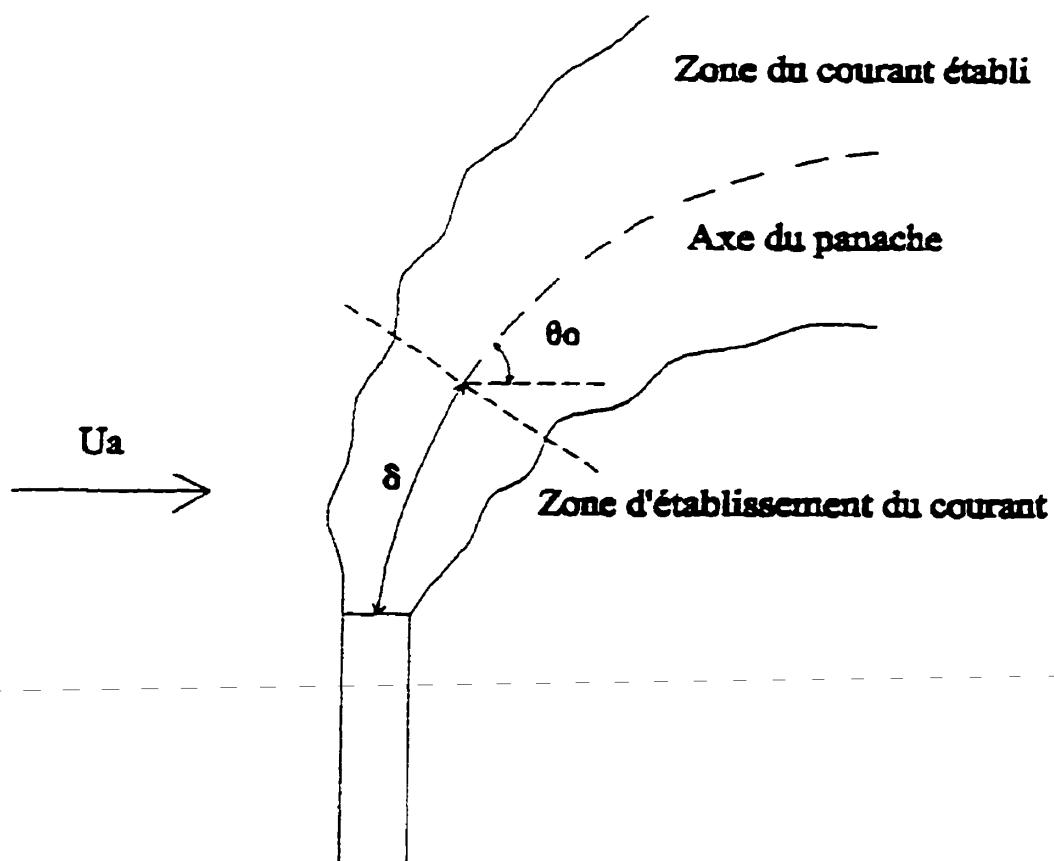


Figure 1.1 – Zone d'établissement du courant et zone du courant établi

d'entraînement la somme des trois différents mécanismes. On a trouvé qu'en général un seul de ces trois termes domine la somme. On explique ce processus par le fait que le mélange est influencé par des tourbillons d'une échelle différente dans chaque phase. Les tourbillons mélangent le panache lorsque le rayon de celui-ci est du même ordre de grandeur que la dimension des tourbillons.

1.1.2 Facteurs météorologiques et la dispersion

La dispersion du panache rejeté dans l'atmosphère dépend de conditions météorologiques qui prédominent dans la couche limite atmosphérique (les premiers 1000 m). Elle est contrôlée par les fluctuations de la vitesse du vent et sa direction. Il y a d'autres facteurs, comme la stabilité atmosphérique, les caractéristiques topographiques, la rugosité du terrain, qui influencent l'importance de la dilution des émissions par le vent.

1.1.3 Vent

Le courant général du vent au-dessus du sol est produit par le système de pressions à grande échelle. La force du vent et sa direction sont déterminées par la position, l'intensité et les mouvements de ces systèmes. Il y a aussi des influences locales importantes, comme la présence de la mer et de la terre, des montagnes et des vallées.

1.1.4 Cisaillement

Dans la partie supérieure de la couche limite atmosphérique (approximativement 600 m) le vent n'est pas influencé par la présence de la surface de la terre et il est presque parallèle aux isobares. Sa vitesse est déterminée par le gradient de pression horizontal. La friction causée par la rugosité du sol réduit la vitesse du vent au voisinage de la terre. On peut représenter le profil vertical de la vitesse du vent dans la couche limite atmosphérique par une loi simple :

$$\frac{u_z}{u_1} = \left(\frac{z}{z_1} \right)^\alpha \quad (1.1.1)$$

u_1 = vitesse de référence au niveau z_1

u_z = vitesse de calcul au niveau z

Le coefficient α varie entre 0,40 et 0,14 selon la rugosité du sol.

1.1.5 Turbulence

La turbulence atmosphérique peut avoir une origine convective ou mécanique. La turbulence convective est produite par les variations dans le réchauffement de la surface par le soleil et dépend de la stabilité thermique de l'atmosphère. Elle est maximale à midi pendant une journée ensoleillée et minimale pendant la nuit ou le matin.

La turbulence mécanique est causée par les mouvements de l'air au-dessus de la terre. Plus la rugosité est grande, plus la turbulence est élevée. La déviation standard des fluctuations de la vitesse du vent, moyennées pour une certaine période du temps, 1 h par exemple, représente une bonne méthode pour décrire l'intensité de la turbulence.

1.1.6 Stabilité atmosphérique

Parce que dans l'atmosphère aucune variation de température n'intervient à une vitesse suffisante pour uniformiser les températures, on admet que tout déplacement vertical suit un processus adiabatique. Lorsqu'une parcelle d'air monte, elle est soumise à des pressions de plus en plus faibles, car la pression atmosphérique décroît avec l'altitude. D'où l'augmentation de son volume et la baisse de sa température. Lorsque la parcelle descend, à cause de la croissance de la pression atmosphérique, elle se comprime et sa température augmente. Le taux de refroidissement d'une parcelle s'élevant adiabatiquement dans l'atmosphère est le gradient adiabatique sec Γ . Il a une valeur de

-9,8 °C/km. Une stratification atmosphérique dans laquelle la courbe d'état de l'air a cette valeur, est appelée stratification adiabatique. Dans une stratification adiabatique la force de flottaison est conservée, mais la turbulence favorise l'entraînement de l'air dans le panache, ce qui dilue sa quantité de mouvement initiale et sa force de flottaison. Alors, le panache continuera de monter avec une pente de plus en plus faible. Les conditions réelles de répartition des températures existant à un instant donné pour une masse d'air donnée ne sont pas toujours celles de l'adiabatisme. Si la courbe d'état de l'air ambiant est inférieure au taux adiabatique, on parle d'une atmosphère stable. Dans une atmosphère stable la force de flottaison du panache décroît avec l'altitude. Elle peut devenir négative et alors le panache descend jusqu'à la hauteur où sa force de flottaison devienne nulle. Si la température de l'air atmosphérique décroît à un taux supérieur au taux adiabatique, on a une stratification instable. Dans une atmosphère instable la force de flottaison augmente avec la surélévation du panache, mais en même temps existe l'entraînement causé par la turbulence. Le résultat est que, dans des conditions d'instabilité, la surélévation du panache est plus importante que dans le cas d'une atmosphère adiabatique.

1.1.7 Terrain

La topographie du terrain peut changer la vitesse et la direction du vent, ce qui a des répercussions sur la stratification atmosphérique. La présence des bâtiments dans le périmètre de la cheminée peut causer des problèmes de retour de fumée ("downdraft"). On évite ces inconvénients en s'assurant que la cheminée est une fois et demie plus haute que les bâtiments voisins. On peut rencontrer des conditions de forte pollution dans les vallées, car l'air froid s'accumule par densité dans les basses couches, ce qui entraîne une extrême stabilité de l'air jusqu'au niveau supérieur de la vallée. De tels épisodes peuvent durer même quelques jours avant que l'inversion soit détruite par le soleil.

Dans le présent projet on ne tient pas compte de l'influence du terrain, car on considère l'emplacement de la cheminée sur un terrain plat et sans obstacle (bâtiments, etc).

1.1.8 Effet aérodynamique de rabattement sur la cheminée (“downwash”)

Si la vitesse de sortie des gaz est trop petite en comparaison avec la vitesse horizontale du vent, le panache est piégé dans la région de basse pression derrière la cheminée. Des études dans des tunnels ont montré que ce phénomène ne se produit pas lorsque la vitesse de sortie des gaz est supérieure à 1,5 fois la vitesse du vent.

1.1.9 Surélévation du panache

Lorsque les gaz sortent de la cheminée, ils se mélangent avec l'air ambiant, le panache se penche et atteint la vitesse de l'air entraîné. Mais à cause de sa quantité de mouvement et sa force de flottaison initiales, il continue de monter. La surélévation du panache est un facteur important dans la prédiction du niveau de concentration de polluant au sol. Le sujet a été traité par plusieurs scientifiques et il existe plus de 30 formules pour le calcul de la surélévation du panache.

La hauteur de la surélévation du panache dépend de la chaleur des émissions, de la quantité de mouvement initiale, de la vitesse du vent au niveau du panache, de la distance parcourue, de la hauteur de la cheminée, de la variation de la température avec l'altitude.

1.1.10 Caractéristiques de l'effluent

❖ Hauteur de la cheminée

Sa fonction principale est de réduire le niveau de pollution au sol. On parle de la hauteur effective, qui est la somme de la hauteur physique et la hauteur thermique.

$$H_{\text{effective}} = H_{\text{physique}} + H_{\text{thermique}}$$

La hauteur thermique est la distance verticale sur laquelle la force de flottaison soulève le panache avant que la dispersion commence.

❖ Température de sortie du gaz

Celle-ci établit l'importance de la force de flottaison. Une température de sortie plus grande donne une force de flottaison plus élevée, donc une plus grande hauteur thermique

❖ Vitesse de sortie du gaz

La vitesse de sortie du gaz doit être assez élevée pour éviter l'effet de rabattement sur la cheminée ("downwash") et la pénétration de l'air froid à vitesse élevée dans la cheminée. Les autorités dans ce domaine recommandent pour les centrales électriques des cheminées de 200-260 m de hauteur et des vitesses de sortie de 15 à 25 m/s, obtenues, si nécessaire, à l'aide de ventilateurs. Une vitesse trop grande produit un mélange trop rapide avec l'air atmosphérique, ce qui réduit la surélévation du panache.

❖ Diamètre de la cheminée

Le diamètre de la cheminée est décidé par le flux de gaz et sa vitesse de sortie. Il faut s'assurer aussi que le rapport hauteur/diamètre soit plus grand que 15, pour donner une belle apparence à la construction.

1.2 Préliminaires

Le présent projet représente une extension de l'étude tridimensionnelle de la trajectoire du panache sec ou mouillé réalisé par Thu (1979). Nous considérons plus en détail le processus d'évaporation des gouttelettes d'eau présentes dans le panache dès sa sortie par la cheminée et de plus évaluons les caractéristiques du panache à la fin de la zone d'établissement du courant.

Le modèle de calcul de la trajectoire du panache a pour base l'ouvrage d'Ooms (1972) et ses versions ultérieures Ooms et al.(1974, 1981) et Li et al.(1986). La méthode développée par Ooms et al. pendant ces années n'utilisent pas l'hypothèse de Boussinesq et considèrent la zone d'établissement du courant, la turbulence et la stratification atmosphérique.

Les hypothèses énoncées par Ooms (1972) sont utilisées aussi dans ce modèle :

- (a) la vitesse du courant dans la direction perpendiculaire à l'axe du panache est petite comparativement à la vitesse du courant le long de l'axe.
- (b) les profils de vitesse, de densité du panache et de concentration de polluant sont similaires dans toutes les sections normales à l'axe du panache.
- (c) le transport moléculaire est négligeable comparativement au transport turbulent.
- (d) le transport longitudinal turbulent est faible comparativement au transport longitudinal convectif.

Dans le modèle présenté dans ce mémoire, le calcul de la trajectoire se fait seulement dans la zone de courant établi.

1.2.1 Systèmes de coordonnées

Le panache est divisé en deux parties, la zone d'établissement du courant et la zone de courant établi (figure 1.2). Dans la zone d'établissement du courant, les profils de similarité pour la vitesse, densité et concentration dans le panache ne sont pas valables. Celles-ci évoluent de la forme de « top hat » à la sortie vers les profils de similarité. On utilise les résultats de Keffer et Baines (1963) pour trouver les caractéristiques du panache dans la zone d'établissement du courant. Dans la zone de courant établi les profils de similarité sont valables. L'origine du système de coordonnées est choisie dans l'axe du panache, à la limite de ces deux zones. Les coordonnées du panache sont s , r , θ ; s est la distance le long de l'axe du panache, r est la distance radiale à cet axe dans une section normale du panache, γ est l'angle que fait la projection du panache dans le plan horizontal avec l'axe Ox et θ est l'angle d'incidence de l'axe du panache relativement à l'horizontale.

On choisit aussi un système de coordonnées cartésiennes avec l'origine située au sol, au point central de la base de la cheminée. Les coordonnées du panache sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations suivantes :

$$\bar{s} = \bar{x} \cos \theta \cos \gamma + \bar{y} \cos \theta \sin \gamma + \bar{z} \sin \theta$$

$$\bar{n} = \bar{x} \sin \theta \cos \gamma + \bar{y} \sin \theta \sin \gamma - \bar{z} \cos \theta$$

$$\bar{r} = \bar{s} \times \bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ \cos \theta \cos \gamma & \cos \theta \sin \gamma & \sin \theta \\ \sin \theta \cos \gamma & \sin \theta \sin \gamma & -\cos \theta \end{vmatrix} = -\bar{x} \sin \gamma + \bar{y} \cos \gamma$$

(1.2.1)

1.2.2 Vitesse du vent

On va utiliser une matrice de translation notée A pour calculer les composantes du vecteur de la vitesse du vent dans les deux systèmes de coordonnées.

La vitesse du vent u_a est considérée horizontale et l'axe Ox est choisi selon la direction et le sens de la vitesse du vent. Ses composantes sur les axes s, n, r sont alors :

$$\begin{pmatrix} u_{as} \\ u_{an} \\ u_{ar} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \gamma & \cos \theta \sin \gamma & \sin \theta \\ \sin \theta \cos \gamma & \sin \theta \sin \gamma & -\cos \theta \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

matrice A

$$u_{as} = u_a \cos \theta \cos \gamma$$

donc :

$$u_{an} = u_a \sin \theta \cos \gamma \quad (2.2.3)$$

$$u_{ar} = -u_a \sin \gamma$$

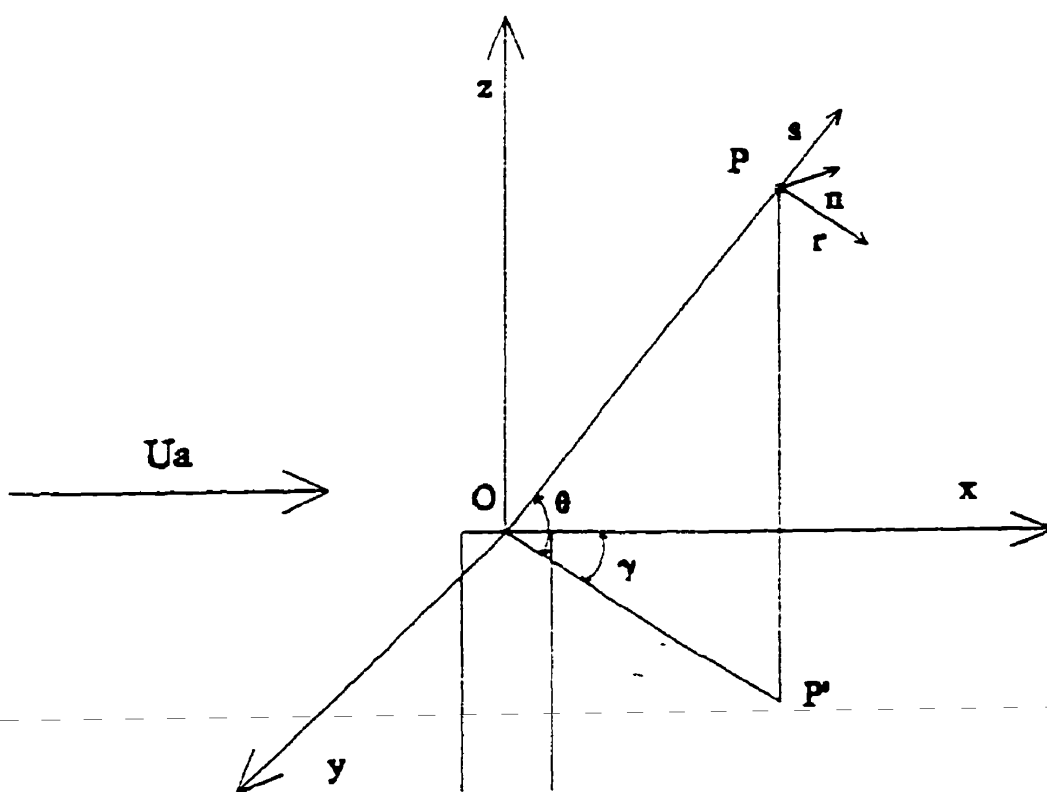


Figure 1.2 – Systèmes de coordonnées du panache

1.2.3 Force de traînée

On suppose que la force de traînée F_D exercée par le vent sur le panache agit seulement dans les directions perpendiculaires à l'axe du panache et pour les directions s, n, r elle peut être exprimée de la façon suivante :

$$F_{Ds} = 0$$

$$F_{Dn} = 0.5 \rho_a A C_d u_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \quad (1.2.4)$$

$$F_{Dr} = -0.5 \rho_a A C_d u_a^2 \sin^2 \gamma$$

où ρ_a = densité de l'air atmosphérique (kg/m^3)

A = superficie latérale du panache sur laquelle agit la force de traînée (m^2)

C_d = coefficient de traînée

On va écrire maintenant les composantes de la force de traînée dans la base de coordonnées cartésiennes, en utilisant la matrice de rotation B , qui est la transposée de la matrice A :

$$\begin{pmatrix} F_{Dx} \\ F_{Dy} \\ F_{Dz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \gamma & \sin \theta \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \cos \theta \sin \gamma & \sin \theta \sin \gamma & \cos \gamma \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{Ds} \\ F_{Dn} \\ F_{Dr} \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

matrice B

Donc :

$$F_{Dx} = 0.5 \rho_a A C_d u_a^2 (\sin^3 \theta \cos^3 \gamma + \sin^3 \gamma)$$

$$F_{Dy} = 0.5 \rho_a A C_d u_a^2 (\sin^3 \theta \cos^2 \gamma \sin \gamma - \sin^2 \gamma \cos \gamma) \quad (1.2.6)$$

$$F_{Dz} = -0.5 \rho_a A C_d u_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta$$

1.2.4 Section du panache

Les mesures atmosphériques démontrent que la section transversale d'un panache présente une forme elliptique avec les axes principaux dans la direction verticale et horizontale et que sa forme est influencée par la stabilité atmosphérique (Ooms et al., 1981). On va donc utiliser dans les calculs une section transversale elliptique pour laquelle a et b sont les demi-axes principaux respectivement horizontal et vertical de l'ellipse. Leur rapport dépend de la stabilité atmosphérique selon la relation suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{\sigma_y}{\sigma_y \sin \theta + \sigma_z \cos \theta} \quad (1.2.7)$$

où σ_y et σ_z sont respectivement les coefficients de dispersion atmosphérique latérale et verticale. Notre relation diffère de celle utilisée par Ooms et al.(1981), qui ont considéré que le rapport des principaux axes de l'ellipse est égal au rapport des coefficients de dispersion atmosphérique. Nous avons ajouté l'effet de l'inclinaison du panache.

On va noter B la distance radiale du centre de l'ellipse jusqu'à son périmètre. Elle est variable et peut être exprimée en fonction des demi-axes de l'ellipse et de l'angle φ qui donne sa position relative à l'axe horizontal (figure 1.3) :

$$B = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \varphi}} \quad (1.2.8)$$

Le périmètre de la section transversale elliptique sera approximé par la relation suivante :

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (1.2.9)$$

et sa superficie sera calculée selon la relation : $A = \pi ab$ (1.2.10)

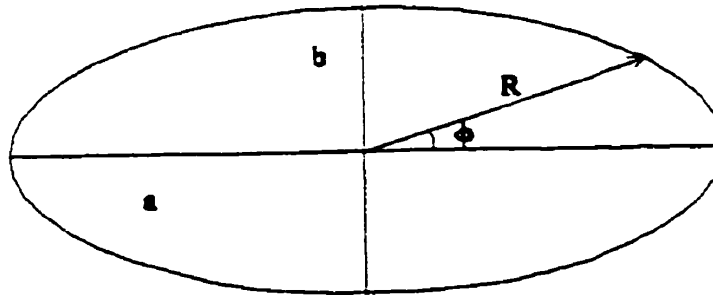


Figure 1.3 – Section transversale elliptique du panache

1.2.5 Profils de similarité

Les profils de similarité pour la vitesse et la densité du panache et pour la concentration du polluant sont supposés avoir une forme gaussienne :

$$\begin{aligned}
 u(s, r, \theta) &= u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe}(s) e^{-r^2/B^2(s)} \\
 \rho(s, r, \theta) &= \rho_a + \rho_{axe}(s) e^{-r^2/\lambda^2 B^2(s)} = \rho_a + (\rho_{max}(s) - \rho_a) e^{-r^2/\lambda^2 B^2(s)} \quad (1.2.11) \\
 c(s, r, \theta) &= c_{axe}(s) e^{-r^2/\lambda^2 B^2(s)}
 \end{aligned}$$

On va nommé "axe du panache" la courbe qui rejoint les centres de toutes les sections transversales elliptiques du panache. $u(s, r, \theta)$ représente la vitesse du panache relative au système de coordonnées pour un point quelconque du panache dans la direction de la tangente à l'axe du panache; u_{axe} est la vitesse du panache relative à l'atmosphère environnante dans l'axe du panache et dans la direction de la tangente à l'axe du panache; u_a est la vitesse moyenne du vent à la hauteur du panache; $\mathbf{B}(s)$ est le paramètre défini dans la section précédente. La valeur du rayon du panache $\mathbf{R}(\phi)$ est choisie arbitrairement $\mathbf{B}\sqrt{2}$ et représente la distance à partir de l'axe du panache dans une section normale jusqu'au point où la vitesse a diminué à une valeur de $1/e^2$ fois la valeur maximale de la vitesse dans la section considérée. $\rho(s, r, \theta)$ représente la densité dans un point quelconque du panache, ρ_a la densité atmosphérique et ρ_{axe} la différence entre la densité du panache dans l'axe ρ_{max} et la densité de l'atmosphère. $c(s, r, \theta)$ est la concentration d'un polluant donné dans un point à l'intérieur du panache et c_{axe} est la valeur de cette concentration dans l'axe. λ^2 ($\approx 1,35$) est le nombre turbulent de Schmidt et représente la petite différence qui existe dans une section normale du panache entre le profil de la vitesse et celui de la densité et de la concentration. Les profils de similarité ont été choisis de telle façon qu'à la limite du panache les conditions atmosphériques soient approximées.

1.3 Équation de l'entraînement

Pour l'entraînement de l'air dans le panache on va utiliser la description de Ooms (1972), qui a choisi la théorie proposée par Abraham (1970).

À la sortie du gaz de la cheminée, la vitesse d'éjection est supérieure à la vitesse du vent. L'entraînement est similaire à celui concernant un jet libre turbulent. L'équation différentielle de l'entraînement dans la première phase est la suivante :

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r dr d\varphi \right) = \alpha_1 \rho_a |u_{axe}| 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (1.3.1)$$

α_1 est le coefficient d'entraînement pour un jet libre et selon Albertson et al. (1950) il a la valeur de 0.057 pour un nombre de Reynolds suffisamment grand ($> 10^4$). On a utilisé la valeur absolue pour u_{axe} , parce que dans certains cas celle-ci peut être négative.

Lorsque la vitesse du panache devient égale à celle du vent, l'entraînement est décrit comme si le panache était un cylindre thermique dans une atmosphère stagnante :

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r dr d\varphi \right) = \alpha_2 \rho_a |u_{an} + u_{ar}| 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (1.3.2)$$

On remplace u_{an} et u_{ar} par les valeurs calculées dans la section 1.2.2 et on obtient :

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r dr d\varphi \right) = \alpha_2 \rho_a u_a |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (1.3.3)$$

α_2 est le coefficient d'entraînement pour une ligne thermique et selon Richards (1963) il a la valeur de 0,5 pour un nombre de Reynolds suffisamment grand ($> 10^4$). On a utilisé la valeur absolue dans la partie droite de l'équation pour éliminer la possibilité d'obtenir un terme négatif lorsque le panache descend ($-\pi/2 < \theta < 0$).

Abraham (1970) a suggéré qu'en général, l'entraînement de l'air atmosphérique dans un panache peut être décrit par la relation suivante :

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r dr d\varphi \right) = \alpha_1 \rho_a |u_{axe}| 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \alpha_2 \rho_a u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (1.3.4)$$

qui est une bonne approximation de :

- l'équation (1.3.1) pour des petites valeurs de s , quand le terme $\cos \theta$ introduit arbitrairement disparaît
- l'équation (1.3.3) pour des larges valeurs de s , quand le terme u_{axe} disparaît.

Dans la troisième phase le panache a perdu "la mémoire" des toutes ses caractéristiques initiales et la turbulence atmosphérique devient prédominante. L'entraînement dû à la turbulence atmosphérique est donné par l'équation suivante:

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r dr d\varphi \right) = \alpha_3 \rho_a u' 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (1.3.5)$$

dans laquelle u' représente la vitesse d'entraînement dû à la turbulence et α_3 le coefficient d'entraînement dû à la turbulence. Briggs (1969) a montré que $\alpha_3 = 1$ et que la vitesse d'entraînement de l'air dans le panache causé par la turbulence atmosphérique dépend de l'énergie de dissipation des tourbillons ε :

$$u' = (\varepsilon b)^{1/3} \quad (\text{m/s}) \quad (1.3.6)$$

Pour $\square$ on utilise dans le modèle les valeurs trouvées par Kaimal et al.(1976) avec des mesures atmosphériques. Pour une stabilité atmosphérique neutre ils ont obtenu :

$$\varepsilon = 0,0677 * u_a / z \quad (\text{m}^2/\text{s}^3) \quad (1.3.7)$$

pour les premiers 300 m au dessus du sol et

$$\varepsilon = 0,000225 * u_a \quad (\text{m}^2/\text{s}^3) \quad (1.3.8)$$

pour des altitudes supérieures à 300 m.

z est la hauteur au-dessus du sol et u_a est la vitesse du vent.

L'effet de la turbulence atmosphérique sur l'entraînement est ajouté à l'équation (1.3.4)

et on obtient l'équation de l'entraînement total de l'air atmosphérique dans le panache :

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho_a r dr d\varphi \right) = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) \quad (1.3.9)$$

1.4 Équations de conservation

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie seront utilisées pour trouver la trajectoire du polluant et la concentration de polluant au sol.

1.4.1 Conservation de la masse de polluant

On suppose qu'il n'existe pas de polluant dans l'atmosphère à l'extérieur du panache :

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} c u r dr d\varphi \right) = 0 \quad (1.4.1)$$

1.4.2 Conservation de la quantité de mouvement dans la direction Ox

La variation de la quantité du mouvement (dans l'espace et dans le temps) dans la direction Ox est due à l'entraînement de l'air atmosphérique dans le panache et à la force de traînée exercée par le vent sur le panache dans la direction Ox :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r u_x dr d\varphi \right) = \\ = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a \cos \gamma \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) + \frac{F_{Dx}}{ds} \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Conformément à l'hypothèse de Fan (1967), le vent exerce sur le panache une force de traînée perpendiculaire à l'axe du panache et proportionnelle à l'énergie cinétique de la composante de la vitesse du vent qui est perpendiculaire à l'axe du panache et à la circonférence du panache. Le coefficient de proportionnalité, appelé coefficient de traînée C_d doit être déterminé expérimentalement. Ooms (1972) trouve que pour des nombres Reynolds suffisamment élevés, il peut être considéré constant :

$$C_d = 0.3 \quad (1.4.3)$$

u_x est la composante de la vitesse du panache u sur la direction Ox :

$$u_x = u \cos \theta \cos \gamma \quad (1.4.4)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u^2 r \cos \theta \cos \gamma dr d\varphi \right) = \\
& = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a \cos \gamma \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) + \\
& + C_D \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 (\sin^3 \theta \cos^3 \gamma + \sin^3 \gamma)
\end{aligned}
\tag{1.4.5}$$

1.4.3 Conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oy

La variation de la quantité du mouvement (dans l'espace et dans le temps) selon la direction Oy est due à l'entraînement de l'air atmosphérique dans le panache et à la force de traînée exercée par le vent sur le panache dans la direction Oy :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r u_y dr d\varphi \right) = \\
& = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a \cos \gamma \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) + \\
& + C_D \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 (\sin^3 \theta \cos^2 \gamma \sin \gamma - \sin^2 \gamma \cos \gamma)
\end{aligned}
\tag{1.4.6}$$

u_y est la composante de la vitesse du panache u dans la direction Oy :

$$u_y = u \cos \theta \sin \gamma \tag{1.4.7}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u^2 r \cos \theta \sin \gamma dr d\varphi \right) = \\
& = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a \sin \gamma \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) + \quad (1.4.8) \\
& + C_D \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 (\sin^3 \theta \cos^2 \gamma \sin \gamma - \sin^2 \gamma \cos \gamma)
\end{aligned}$$

1.4.4 Conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oz

La variation de la quantité du mouvement (dans l'espace et dans le temps) selon la direction Oz est due à la force de flottaison du panache, à la force de traînée exercée par le vent sur le panache dans la direction Oz et à la force de gravité qui agit sur les gouttelettes d'eau présentes dans le panache :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r u_z dr d\varphi \right) = \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} g(\rho_a - \rho) r dr d\varphi - C_D \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta - \\
& - g \gamma \frac{4}{3} \pi r_g^3 N_L
\end{aligned} \quad (1.4.9)$$

u_z est la composante de la vitesse du panache u dans la direction Oz :

$$u_z = u \sin \theta \quad (1.4.10)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u^2 r \sin \theta dr d\varphi \right) &= \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} g(\rho_a - \rho) r dr d\varphi - \\ &- C_D \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta - g \gamma \frac{4}{3} \pi r_g^3 N_L \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

où γ est la densité de l'eau, r_g est le rayon d'une gouttelette et N_L est le nombre de gouttelettes par unité de longueur.

Si dans l'équation (1.4.11) on pose $N_L = 0$ on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oz pour le panache sec :

$$\frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u^2 r \sin \theta dr d\varphi \right) = \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} g(\rho_a - \rho) r dr d\varphi - C_D \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta \quad (1.4.12)$$

1.4.5 Conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie pour le panache implique que la quantité de chaleur émise par la cheminée par unité de temps est conservée par rapport au niveau de référence choisi. On choisi comme niveau de référence la sortie de la cheminée. On écrit l'équation de la conservation de l'énergie du panache sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u c_g (T - T_{ao}) r dr d\varphi \right) &= \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a c_a (T_a - T_{ao}) (\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u') + L \frac{dm}{dt} N_L \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

où T , T_a , T_{ao} sont les températures respectives du panache, de l'atmosphère et de l'atmosphère à la hauteur de la cheminée; c_a et c_g représentent respectivement les chaleurs latentes de l'air et du gaz du panache; L est la chaleur latente de vaporisation de l'eau et dm/dt le débit d'eau évaporée.

Le terme de gauche représente la variation de l'énergie relative du panache. Les termes de droite représentent l'énergie relative apportée par l'air atmosphérique entraîné dans le panache et la chaleur latente nécessaire à la vaporization des goutelletes d'eau présentes dans le panache.

On écrit l'équation d'état pour l'air atmosphérique :

$$p = \rho_a R_a T_a (1 + 0,61w) = \rho_a R_a T \quad (1.4.14)$$

Dans (2.4.14) on a exprimé la constante spécifique de l'air humide R_a de la façon suivante :

$$R_a = R_d (1 + 0,61w) \quad (1.4.15)$$

où w est le rapport de mélange pour l'air humide et R_d est la constante spécifique pour l'air sec.

Selon Smith (1997), pour l'air saturé qui contient de l'eau sous forme liquide, appelé des maintenant nuage, on peut écrire l'équation d'état de la façon suivante :

$$p = \rho R_d T \frac{1 + w/\epsilon}{1 + w_T} = \rho_a R_p T \quad (1.4.16)$$

Dans (1.4.16) on a exprimé la constante spécifique du nuage R_p de la façon suivante :

$$R_p = R_a \frac{1 + w/\varepsilon}{1 + w_T} \quad (1.4.17)$$

où p = pression atmosphérique

R_a = constante spécifique pour l'air sec = 287,04 (J/kg·°K)

R_v = constante spécifique pour la vapeur d'eau = 461,50 (J/kg·°K)

R_a = constante spécifique pour l'air atmosphérique (J/kg·°K)

R_p = constante spécifique pour l'air du panache (J/kg·°K)

w = rapport de mélange de la vapeur d'eau (kg/kg)

w_T = rapport total de mélange pour l'eau gazeuse et liquide (kg/kg)

$\varepsilon = R_a/R_v = 0,622$

L'air du panache est appelé nuage, tant qu'il contient de l'eau liquide. La chaleur spécifique à pression constante pour l'air humide c_{pa} est donnée par l'expression suivante :

$$c_{pa} = c_{pd}(1 + 0,84w) \quad (1.4.18)$$

où c_{pd} = chaleur spécifique à pression constante pour l'air sec = 1870 J/kg·°K

$$\text{Pour le nuage on a : } c_{pn} = c_{pd} \frac{1 + w \frac{c_{pa}}{c_{pd}} + w_l \frac{c_w}{c_{pd}}}{1 + w + w_l} \quad (1.4.19)$$

où c_{pn} = chaleur spécifique à pression constante pour le nuage

c_w = chaleur spécifique à pression constante pour l'eau liquide = 4183 J/kg·°K

w_l = rapport de mélange pour l'eau liquide (kg/kg)

Pour ne pas compliquer inutilement les calculs, les valeurs de R_a , R_p , c_{pn} et c_w seront considérées constantes pour l'intégration sur la section elliptique du panache et la dérivation, mais différentes d'un pas de calcul à l'autre.

Avec les nouvelles relations, l'équation de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^2 u \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{ao}} * \frac{R_p}{R_a} \right) r dr d\varphi \right) = \\
 = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \frac{c_{pa}}{c_{pn}} * \frac{R_p}{R_a} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} \right) (\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u') + \\
 + \frac{R_p}{c_{pn} p} L \frac{dm}{dt} N_L
 \end{aligned}
 \tag{1.4.20}$$

La contribution des gouttelettes d'eau dans le processus de transfert de chaleur est insignifiante et elle n'est pas considérée dans l'équation de conservation de l'énergie.

L'équation de l'énergie pour le panache sec est obtenue à partir de l'équation (1.4.2) dans laquelle les valeurs pour les constantes spécifiques et chaleurs spécifiques pour l'air atmosphérique et l'air du panache sont identiques (puisque l'air atmosphérique et l'air du panache ont la même humidité relative) et on pose $N_L = 0$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left(\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^2 u \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{ao}} \right) r dr d\varphi \right) = \\
 = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} \right) (\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u')
 \end{aligned}
 \tag{1.4.21}$$

1.5 Zone d'établissement du courant

1.5.1 Théorie de Keffer et Baines

Keffer et Baines (1963) analysent la trajectoire d'un jet croisée par un vent uniforme. À la source, le jet a un profil uniforme de vitesses et une intensité de turbulence réduite. Immédiatement après son entrée dans le courant transversal, ses frontières sont soumises à des forces de cisaillement importantes, causées par le gradient de vitesse entre le jet et le vent. Les tourbillons d'air entraînés dans le jet détruisent le profil initial de vitesses. Ce stade initial est appelé zone d'établissement du courant. Il est suivi par la zone de courant établi où la diffusion latérale du moment du jet diminue la vitesse maximale au long de l'axe. Cette zone présente une turbulence intense dans toute la section transversale. Sur la figure 1.4, tirée de Keffer et Baines (1963), est représentée la décroissance de la vitesse axiale du jet, ce qui nous permet de choisir la longueur de la zone d'établissement du courant en fonction du rapport $R = U_j/U_o$ (U_j est la vitesse initiale du jet considérée constante dans l'axe jusqu'à l'entrée dans la zone de courant établi et U_o est la vitesse du vent). U_m est la vitesse maximale dans la section transversale du jet, d est le diamètre de l'orifice de sortie et ξ' est la coordonnée du jet au long de sa trajectoire. La figure 1.5, tirée aussi de Keffer et Baines (1963), nous indique l'emplacement de l'axe du jet pour nous permettre d'établir ses coordonnées (x/d , z/d) à la fin de la zone d'établissement du courant.

1.5.2 Caractéristiques du panache à l'interface

Le calcul pour la trajectoire du panache commence à l'interface entre la zone d'établissement du courant et la zone de courant établi. On doit donc connaître les caractéristiques du panache à la fin de la zone d'établissement du courant. Les résultats de Keffer et Baines (1963) sont utilisés pour établir les valeurs pour la longueur δ de la zone d'établissement du courant et l'angle d'inclinaison θ_o du panache au début de la

zone de courant établi. Puisque la direction de la vitesse du vent reste la même, l'angle γ que fait la projection du panache dans le plan horizontal fait avec l'axe Ox reste constant. Selon les mesures de Li et al.(1986) dans la zone d'établissement du courant le débit de quantité de mouvement décroît jusqu'à 0,85 de sa valeur initiale à la sortie de la cheminée, ce qui pour l'axe ox est écrit de la façon suivante :

$$\int_0^{2\pi R_o(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho_o u_o^2 r \cos \theta_o \cos \gamma dr d\varphi = 0.85 \pi \frac{D^2}{4} \rho_e U_e^2 \cos \theta_o \cos \gamma \quad (1.5.1)$$

Li et al.(1986) utilisent aussi dans leurs calculs de la trajectoire du panache l'hypothèse des profils de similarité à l'interface entre les deux phases du panache :

$$\begin{aligned} u_o &= u_a \cos \theta_o \cos \gamma + u_{axe}^o e^{-r^2/\lambda^2 B_o^2} \\ \rho_o &= \rho_a^o + \rho_{axe}^o e^{-r^2/\lambda^2 B_o^2} \\ c_o &= c_{axe}^o e^{-r^2/\lambda^2 B_o^2} \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

où :

- u_o représente la vitesse du panache en un point à l'interface dans la direction de la tangente à l'axe du panache
- u_{axe}^o représente la vitesse du panache relative au milieu dans l'axe du panache à l'interface

Conformément aux hypothèses de Li et al.(1986), les valeurs de l'excès de vitesse, de l'excès de densité et de la concentration à l'interface sont égales à leurs valeurs à la sortie de la cheminée :

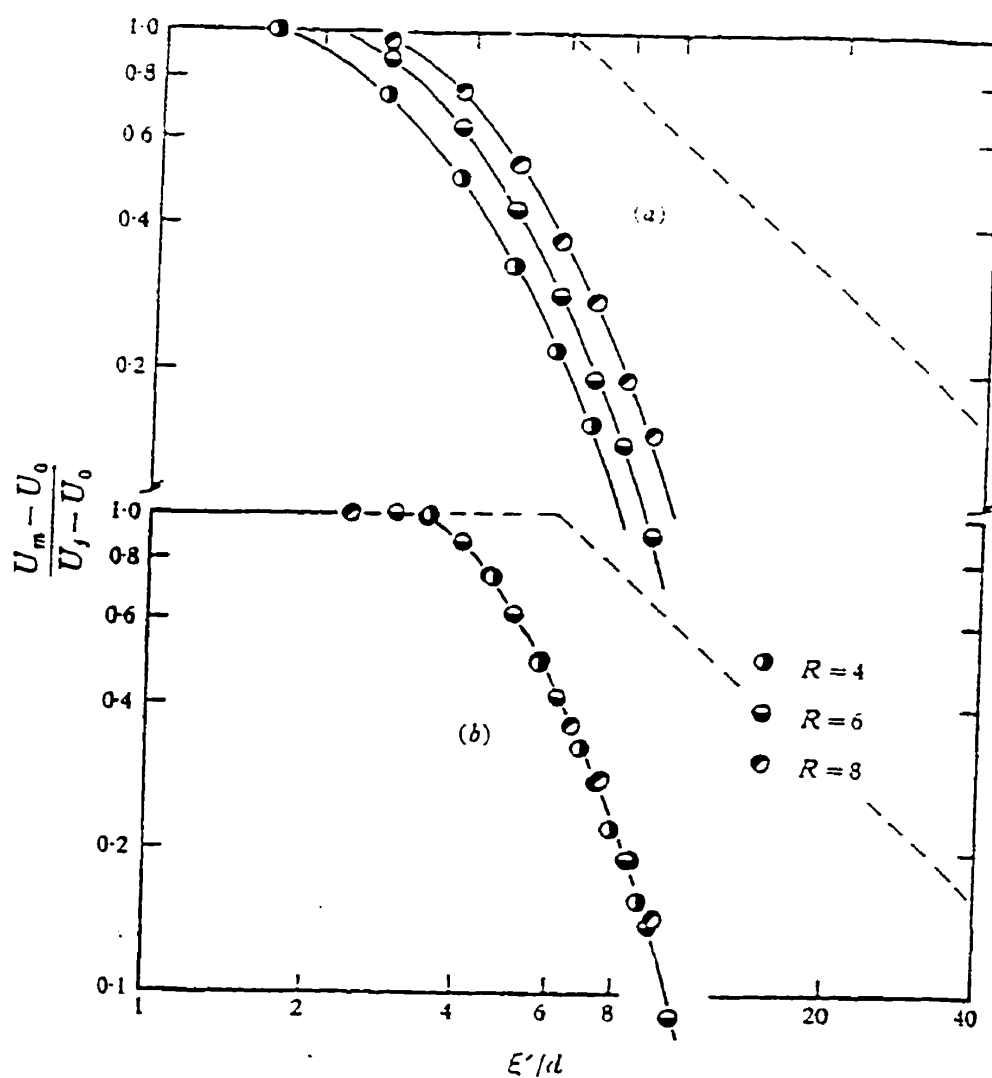


Figure 1.4 – Décroissance de la vitesse axiale du jet libre : a) à partir de l'orifice de sortie, b) à partir de la source virtuelle (tirée de Keffer et Baines, 1963)

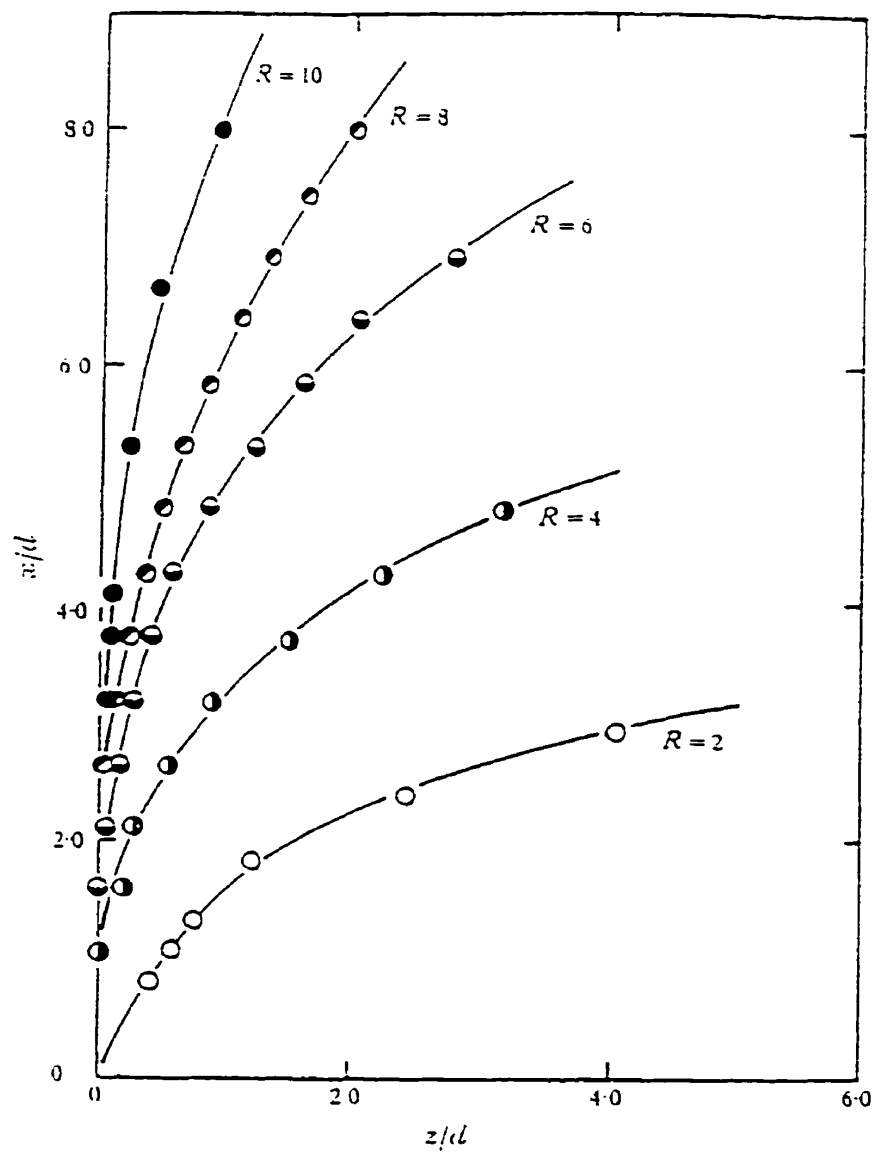


Figure 1.5 – Emplacement de la ligne centrale du jet libre (tirée de Keffer et Baines, 1963)

$$\begin{aligned}
 u_{axe}^o &= u_e - u_a \cos \theta_o \\
 \rho_{axe}^o &= \rho_e - \rho_{a,e} \\
 c_{axe}^o &= c_o
 \end{aligned}
 \tag{1.5.3}$$

- u_e représente la vitesse du panache à la sortie de la cheminée

Nous supposons que les rayons des gouttelettes respectivement à la sortie du gaz r_{go} et à l'interface r_{ge} sont les mêmes :

$$r_{go} = r_{ge} \tag{1.5.4}$$

On remplace les profils de similarité dans l'équation 1.5.1 et on accomplit l'intégration du terme de gauche. On obtient une relation entre les demi-axes principaux de l'ellipse à l'interface :

$$a_o b_o = 0.85 \frac{D^2}{4} \rho_e U_e^2 \left\{ \begin{aligned} &u_a \cos \theta_o \cos \gamma \left[\rho_a^o (2u_a \cos \theta_o \cos \gamma + u_{axe}^o) + \right. \\ &\quad \left. + \rho_{axe}^o \left(2u_{axe}^o \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} + \lambda^2 u_a \cos \theta_o \cos \gamma \right) \right] + \\ &\quad \left. + u_{axe}^o{}^2 \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \rho_{axe}^o + \frac{\rho_a^o}{2} \right) \right\}
 \end{aligned} \right. \tag{1.5.5}$$

À la fin de la zone d'établissement, la section transversale du panache est elliptique et sa forme dépend de la stabilité atmosphérique selon la relation :

$$\frac{a_o}{b_o} = \frac{\sigma_y}{\sigma_y \sin \theta_o + \sigma_z \cos \theta_o} \tag{1.5.6}$$

Avec les équations (1.5.5) et (1.5.6) on est capable de calculer les axes de l'ellipse à l'interface de la zone d'établissement du courant avec la zone de courant établi.

1.6 Calcul de la concentration du polluant au sol

Pour estimer la concentration du polluant au sol, on suppose que le sol est inerte, c.a.d. qu'il ne retient ni n'absorbe le polluant. On considère l'intersection du plan de la section transversale du panache, qu'on va appeler plan radial, avec le plan horizontal situé au niveau du sol. Conformément à la figure 1.6, on peut calculer la distance radiale r dans le plan radial de l'axe du panache jusqu'au sol :

$$r = \frac{z}{\cos \theta} \quad (1.6.1)$$

où z est l'élévation du panache et θ l'angle d'inclinaison du panache.

Le point au sol qui a la coordonnée sur l'axe Oy de la même valeur que le point d'intersection du plan radial considéré avec l'axe du panache, présente la concentration de polluant au sol la plus élevée pour une section transversale donnée. La concentration de polluant au sol sera donc estimée en ce point noté B, dont la coordonnée sur l'axe Ox est donnée par la relation suivante :

$$x_B = x + r \sin \theta \quad (1.6.2)$$

Dans la section transversale du panache, la concentration de polluant respecte le profil gaussien :

$$c(s, r, \theta) = c_{axe}(s) e^{-r^2 (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) / \lambda^2 a^2 b^2} \quad (1.6.3)$$

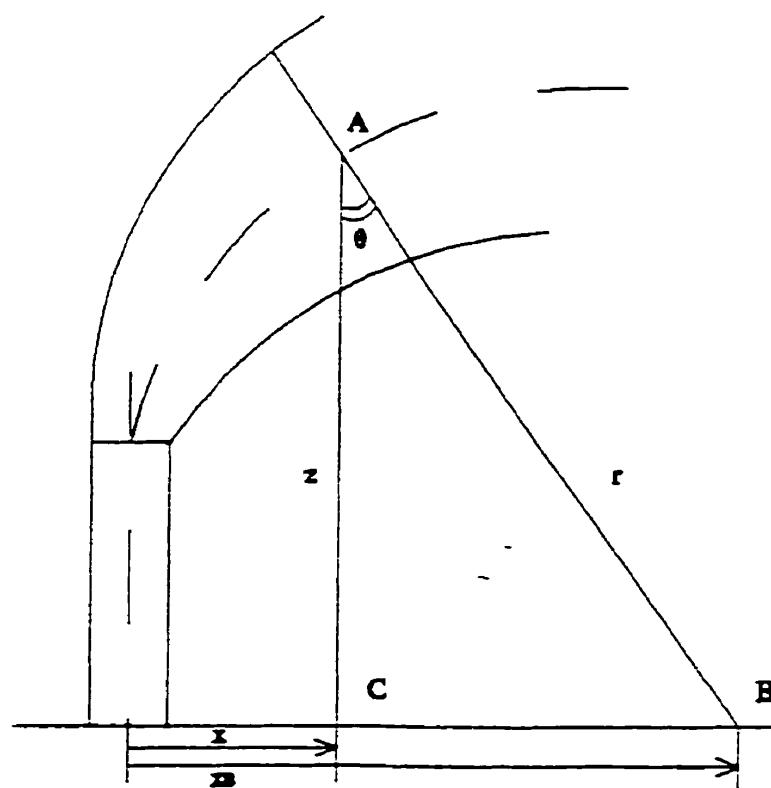


Figure 1.6 – Géométrie en vue du calcul de la concentration de polluant au sol

La droite **AB** fait un angle $\varphi = 90^\circ$ avec l'axe principal horizontal de l'ellipse dans la section transversale considérée. La valeur de la concentration de polluant est doublée pour tenir compte de la réflexion du panache par la surface du sol. Les nouvelles informations sont introduites dans l'équation précédente et on obtient alors :

$$c_B = 2c_{axe} e^{-r^2/\lambda^2 b^2} \quad (1.6.4)$$

où c_{axe} est la concentration de polluant dans l'axe du panache au point d'intersection avec le plan radial considéré.

CHAPITRE II

ÉVAPORATION DES GOUTTELETTES D'EAU

2.1 Évaporation des gouttelettes d'eau pure

Dans les conditions naturelles, le phénomène d'évaporation de l'eau est un processus très complexe. La masse d'eau de la goutte s'évapore presque immédiatement. Le processus est non-stationnaire et a lieu dans un environnement avec des températures et concentrations de vapeur inégales. Le transfert de chaleur entre les gouttes et le milieu se réalise par trois différents mécanismes : conduction, convection et radiation. La théorie est très complexe et on fait des hypothèses simplificatrices. On va traiter l'évaporation et le transfert de chaleur comme des processus stationnaires. Dans plusieurs cas, l'évaporation et le transfert de chaleur peuvent être traités comme des processus stationnaires avec une bonne approximation.

On va analyser d'abord l'évaporation d'une goutte d'eau au repos relativement à son environnement.

La base de la théorie de l'évaporation des gouttes dans un milieu gazeux a été émise par Maxwell. Dans un article publié en 1877 pour *Encyclopedia Britannica*, sous le titre « Theory of the wet-bulb thermometer », Maxwell a considéré le cas le plus simple, celui de l'évaporation d'une goutte de forme sphérique, au repos relativement à son milieu uniforme et infini. Il a supposé que la concentration de la vapeur à la surface de la goutte est égale à la concentration d'équilibre, c.a.d. la concentration de saturation de la vapeur pour la température de la goutte. Cette hypothèse est valable lorsque le rayon de la goutte est significativement plus grand que le libre parcours des molécules de la vapeur d'eau dans l'air ($8 \times 10^{-8} \text{ m}$), ce qui correspond à notre cas. Par exemple, le rayon des gouttes de pluie est de l'ordre 10^{-3} m et les gouttes d'eau formées dans les nuages ont le rayon de 10^{-5} m (McDonald 1958).

Dans le cas d'une évaporation stationnaire, le taux de diffusion de la vapeur d'eau à travers une superficie sphérique de rayon ρ et concentrique avec la goutte est constant et exprimé par l'équation suivante :

$$I = -4\pi\rho^2 \frac{dc}{d\rho} D \quad (\text{g/s}) \quad (2.1.1)$$

où D (m^2/s) est le coefficient de diffusion de la vapeur et c (g/m^3) est sa concentration. L'intégration de l'équation (2.1.1) donne :

$$c = \frac{I}{4\pi\rho D} + \text{constante} \quad (2.1.2)$$

Si c_∞ est la concentration de la vapeur à une distance infinie de la goutte, (on considère c_∞ la concentration du milieu), on obtient les conditions suivantes à la limite :

$$c = c_\infty \quad \text{lorsque} \quad \rho = \infty \quad (2.1.3)$$

Similairement :

$$c = c_0 \quad \text{lorsque} \quad \rho = r \quad (2.1.4)$$

où r est le rayon de la goutte et c_0 la concentration de la vapeur à la surface de la goutte. Il suit que

$$c_0 - c_\infty = \frac{I_0}{4\pi r D} \quad (2.1.5)$$

d'où on obtient l'équation de Maxwell :

$$I_0 = 4\pi r D (c_0 - c_\infty) \quad (2.1.6)$$

Le taux d'évaporation d'une goutte dans les conditions décrites ci-dessus est déterminé par le taux de diffusion de la vapeur dans le milieu. L'équation (2.1.6) nous montre que dans ce cas, le taux d'évaporation d'une goutte d'eau dans un milieu gazeux est proportionnel au rayon de la goutte.

Supposons que la vapeur d'eau se comporte selon la loi du gaz idéal et exprimons sa concentration de la façon suivante :

$$c_o = \frac{e_s M}{RT_o} \quad (2.1.7) \quad \text{et} \quad c_\infty = \frac{e_\infty M}{RT_\infty} \quad (2.1.8)$$

T_o = température de la goutte d'eau (°K)

T_∞ = température de l'air et de la vapeur d'eau à une distance infinie (°K)

e_s = pression de la vapeur d'eau à la saturation (N/m²)

e_∞ = pression partielle de la vapeur d'eau dans l'atmosphère (N/m²)

M = masse molaire de l'eau (kg/kmol)

R = constante universelle des gaz (J/kmol·°K)

L'équation de Maxwell devient :

$$I = \frac{4\pi r D M}{R} \left(\frac{e_s}{T_o} - \frac{e_\infty}{T_\infty} \right) \quad (2.1.9)$$

Parce que le rayon de la goutte d'eau est en décroissance continue, l'évaporation ne peut pas être un processus stationnaire. Mais lorsque $c_o \ll \gamma$ (= la densité de la goutte d'eau), on peut regarder l'évaporation comme un processus stationnaire et écrire

$$I = -\frac{dm}{dt} \quad (2.1.10)$$

où m est la masse de la goutte d'eau. On va donc avoir :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{4\pi DM}{R} \left(\frac{e_s}{T_o} - \frac{e_\infty}{T_\infty} \right) \quad (2.1.11)$$

Les valeurs pour le coefficient de diffusion de la vapeur D ont été trouvées expérimentalement pour des températures supérieures à 0°C. Hall et Pruppacher (1976) arrivent à mieux estimer le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air pour des températures entre -40 °C et 40 °C avec la formule suivante :

$$D = 0,211 \left(\frac{T}{T_o} \right)^{1,94} \left(\frac{p_o}{p} \right) \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (2.1.12)$$

où $T_o = 273,15$ °K, $p_o = 1013,25$ mb, T et p sont respectivement la température et la pression de calcul.

Pour les gouttelettes avec le rayon plus petit que le libre parcours des molécules de la vapeur d'eau dans l'air λ , cette description de l'évaporation du point de vue de la diffusion n'est pas valable. On a supposé que la concentration de la vapeur d'eau dans l'air humide était continue jusqu'à la surface de la gouttelette. Mais pour les gouttelettes avec des rayons comparables au libre parcours des molécules de la vapeur d'eau, il existe un changement rapide dans la concentration de la vapeur à la surface de la petite gouttelette qui s'évapore. Fuchs (1959) considère que l'équation de diffusion de la vapeur d'eau est valide seulement pour des distances supérieures à λ . Dans la couche $r_g < a < r_g + \lambda$ le transport de la vapeur se réalise par le mécanisme cinétique élémentaire du gaz.

Pruppacher et Klett (1997) écrivent la condition de continuité pour le flux de la vapeur à la limite entre les deux régions où $a = r_g + \lambda$ et obtiennent une expression pour le coefficient de diffusion modifié D^* :

$$D^* = \frac{D}{\frac{r_g}{r_g + \Delta} + \frac{D}{r_g} \left(\frac{2\pi M}{RT_o} \right)^{1/2}} \quad (2.1.13)$$

Lorsqu'il existe une vitesse relative entre la gouttelette et l'air ambiant, le taux d'évaporation de l'eau est augmenté. Alors on introduit dans l'équation de la diffusion de la vapeur d'eau un coefficient de ventilation f qui dépend de la forme de la surface d'évaporation. Pour une gouttelette d'eau, il a été déterminé expérimentalement par Fuchs (1959) :

$$f = 1 + 0,276 \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/3} \quad (2.1.14)$$

où $\text{Re} = \frac{vd}{\nu}$ est le nombre de Reynolds et $\text{Sc} = \frac{\nu}{D}$ est le nombre de Schmidt. ν est la viscosité cinématique de la vapeur, d le diamètre de la gouttelette, v la vitesse relative de la gouttelette par rapport à l'air.

L'équation de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air devient alors :

$$\frac{dm}{dt} = - \frac{4\pi r_g D^*}{R_v} \left[\frac{e_s}{T_0} - \frac{e_\infty}{T_\infty} \right] \left[1 + 0,276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right] \quad (2.1.15)$$

On peut exprimer la masse d'une gouttelette selon la relation :

$$m = \gamma \frac{4}{3} \pi r_g^3 \quad (2.1.16)$$

où γ est la densité de l'eau liquide. Après la dérivation de la relation (2.1.16) selon la coordonnée s on obtient :

$$\frac{dm}{ds} = 4\pi\gamma r_g^2 \frac{dr_g}{ds} \quad (2.1.17)$$

On considère u_s la vitesse moyenne de la section transversale du panache dans la direction de la trajectoire s . On peut donc écrire :

$$dt = \frac{ds}{u_s} \quad (2.1.18)$$

et on introduit les relations (2.1.17) et (2.1.18) dans l'équation de diffusion de la vapeur d'eau (2.1.15). Par la suite on obtient une équation pour la variation du rayon des gouttelettes :

$$\frac{dr_g}{ds} = -\frac{D^*}{\gamma r_g R_v u_s} \left[\frac{e_s}{T_0} - \frac{e_\infty}{T_\infty} \right] \left[1 + 0.276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right] \quad (2.1.19)$$

La vitesse moyenne u_s est calculée selon la relation suivante :

$$u_s = \frac{\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^0 \rho u r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^0 \rho r dr d\varphi} \quad (2.1.20)$$

Après l'intégration on obtient :

$$u_s = \frac{\lambda^2 \rho_{axe} \left(u_{axe} \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \rho_a (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe})}{2\rho_a + \lambda^2 \rho_{axe}} \quad (2.1.21)$$

Les paramètres utilisés dans les équations (2.1.20) et (2.1.21) sont définis dans le chapitre précédent.

2.2 Influence de la superficie courbe sur l'évaporation des gouttelettes d'eau

Le processus d'évaporation dépend fortement de la température de la goutte d'eau et de la tension superficielle, puisque les molécules situées à la surface doivent disposer de l'énergie suffisante pour surmonter les forces de liaison avec leurs voisins et s'échapper.

Dans le cas d'une superficie plane, selon la figure 2.1, la molécule qui se trouve à la surface de l'eau a quatre voisins, tandis que dans le cas d'une superficie courbe, selon la figure 2.2, elle a seulement trois voisins. Les dessins présentés dans les figures 2.1 et 2.2 sont réalisés dans deux dimensions. En réalité les molécules d'eau sont tridimensionnelles et se déplacent dans l'espace en trois dimensions. Les figures 2.1 et 2.2 peuvent être considérées comme des moyens de représentation afin de mieux comprendre la réalité. Avec moins de voisins, la force d'attraction qui tient la molécule liée à la surface de la gouttelette est moindre. Donc il est plus facile pour la molécule d'eau de s'échapper. Parce que l'humidité relative est calculée relativement à une superficie plane d'eau, l'humidité relative de l'air en équilibre avec la goutte d'eau est supérieure à 100%, selon le rayon de la goutte. Dans les nuages on rencontre cette situation, appelée sursaturation. Mais la présence de noyaux de condensation réduit l'humidité relative d'équilibre, parce qu'ils agissent comme des solutés dans l'eau et

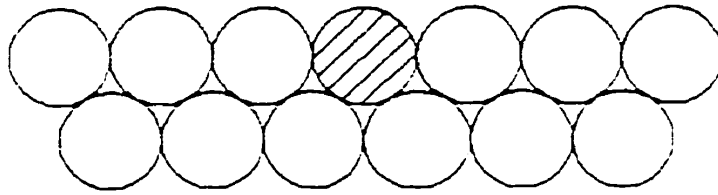


Figure 2.1 - Arrangement des molécules d'eau à l'interface d'une surface plane de l'eau et de l'air

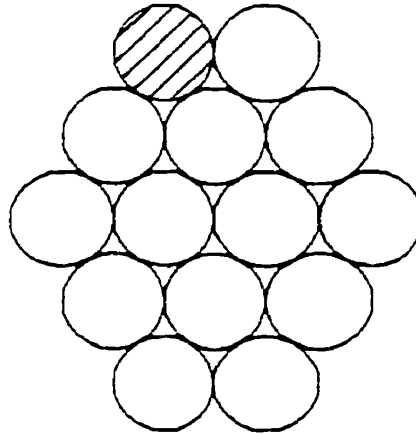


Figure 2.2 – Arrangement des molécules d'eau à l'interface d'une surface courbe de l'eau et de l'air

diminuent le nombre des molécules d'eau disponibles pour l'évaporation. Dans l'atmosphère terrestre l'humidité relative dépasse rarement 101-102% dans les nuages.

Lorsque l'équilibre entre les deux phases s'établit, le taux d'évaporation est égal au taux de condensation et la pression d'équilibre à la surface de la goutte est nommée pression de vapeur saturante. La pression de vapeur saturante dépend de la courbure de la sphère, comme on a discuté plus haut et est donnée par la relation suivante (Rogers, 1979):

$$e_s(r) = e_s(\infty) \times \exp\left(\frac{2\sigma}{rR_vT_0}\right) \quad (2.2.1)$$

où $e_s(\infty)$ est la pression de vapeur saturante au-dessus d'une surface plane d'eau et σ la tension superficielle. On observe que la pression saturante augmente au fur et à mesure que le rayon de la goutte décroît. Une forme légèrement différente de cette équation a été utilisée en 1870 par William Thompson (plus tard Lord Kelvin) pour expliquer l'ascendance des liquides dans les tubes capillaires. La tension superficielle est définie comme travail par unité de surface nécessaire pour augmenter la surface à température constante. Dans le domaine de la météorologie, elle a pour l'eau une valeur approximative de 0,075 N/m.

On substitue (2.2.1) en (2.1.19) et l'équation de la variation du rayon de la gouttelette devient alors :

$$\frac{dr_g}{ds} = -\frac{D^*}{\gamma r_g R_v u_s} \left[\frac{e_s(\infty)}{T_0} \exp\left(\frac{2\sigma}{r_g \gamma R_v T_0}\right) - \frac{e_\infty}{T_\infty} \right] \left[1 + 0.276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right] \quad (2.2.2)$$

Dans notre modèle la température T_0 de la gouttelette et la température du panache T_p sont considérées égales. La pression de saturation e_s est calculée à l'aide de l'équation de

Clausius-Clapeyron en fonction de la température du panache. Autour de la gouttelette se trouve l'air du panache qui a la pression de la vapeur e_p . Avec les nouvelles hypothèses on peut écrire :

$$\frac{dr_g}{ds} = -\frac{D^*}{r_g R_v u_s} \left[\frac{e_s(\infty)}{T_p} \exp\left(\frac{2\sigma}{r_g R_v T_p}\right) - \frac{e_p}{T_p} \right] \left[1 + 0.276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right] \quad (2.2.3)$$

2.3 Mélange isobare de deux masses d'air humide

On considère la masse d'air du panache qui se mélange avec la masse d'air atmosphérique. Il s'agit d'un mélange isobarique de deux masses d'air humide. On va noter M_p et M_a les masses de ces deux composants et q_p et q_a leurs humidités spécifiques. Après le mélange isobarique, on aura une masse d'air avec l'humidité spécifique q et la masse $M = M_p + M_a$. L'humidité spécifique du mélange est donnée par la relation suivante :

$$q = \frac{M_p}{M_p + M_a} q_p + \frac{M_a}{M_p + M_a} q_a \quad (2.3.1)$$

Avec une bonne approximation on peut écrire :

$$w = \frac{M_p}{M_p + M_a} w_p + \frac{M_a}{M_p + M_a} w_a \quad (2.3.2)$$

$$e = \frac{M_p}{M_p + M_a} e_p + \frac{M_a}{M_p + M_a} e_a \quad (2.3.3)$$

Si on suppose qu'il n'existe pas de perte ou d'ajout de chaleur à ce processus, alors la chaleur cédée par la masse d'air plus chaude est égale à la chaleur reçue par la masse d'air plus froide :

$$M_p c_{pn} (T_p - T_e) = M_a c_{pa} (T_e - T_a) \quad (2.3.4)$$

d'où on obtient la valeur de la température du mélange T_e :

$$T_e = \frac{M_p c_{pn}}{M_p c_{pn} + M_a c_{pa}} T_p + \frac{M_a c_{pa}}{M_p c_{pn} + M_a c_{pa}} T_a \quad (2.3.5)$$

Le processus est décrit dans le diagramme hygrométrique de la figure 2.3. Chaque masse d'air est représentée par un point, noté respectivement A pour l'air atmosphérique et B pour l'air du panache. Les équations 2.3.3 et 2.3.5 impliquent que le point qui représente le mélange de ces deux masses d'air humide se trouve sur la ligne qui lie les positions A et B. La courbe représente la pression de la vapeur à la saturation, conformément à l'équation de Clausius-Clapeyron. Selon le diagramme, le mélange est sous-saturé, de sorte qu'il existe la possibilité pour les gouttelletes d'eau de s'évaporer jusqu'à la saturation. Le nouvel état de l'air du panache est maintenant décrit par le point F. On observe que la température correspondant au point F est moins élevée que celle attribuée au point E, ce qui est tout à fait normal, à cause du refroidissement du mélange imposé par la perte de la chaleur latente d'évaporation de l'eau.

Lee (1976) affirme que dans une région non-saturée du panache, l'eau liquide du panache va s'évaporer jusqu'à la saturation du panache. La pression de vapeur saturante est calculée avec l'équation de Clausius-Clapeyron pour la température à la surface de la gouttelette, qui est donnée par la température de mélange T_e . On néglige la baisse de

température pour la gouttelette pendant l'évaporation et on suppose que la température de la gouttelette est uniforme.

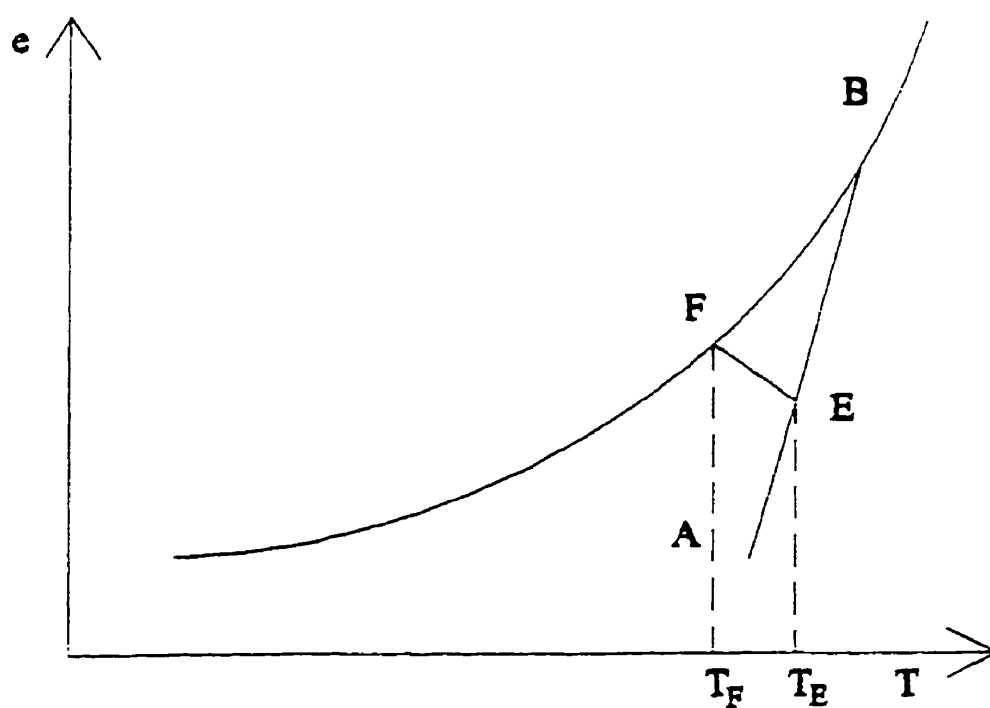


Figure 2.3 – Courbe de saturation de l'air humide

Le comportement des gouttelettes dépend de la température et de l'humidité à proximité de leur surface. On considère que la quantité de vapeur libérée par l'évaporation des gouttelettes ne contribue pas à l'augmentation de l'humidité relative du milieu ambiant.

On considère la théorie de l'équilibre, c.a.d. l'évaporation des gouttelettes s'arrête lorsque la saturation est atteinte, même si en réalité les gouttelettes avec des rayons inférieurs à $0,1 \text{ }\mu\text{m}$ s'évaporent même en conditions de sursaturation selon Reist (1984).

2.4 Calcul de l'humidité relative du panache humide

Dans la thermodynamique de l'air humide le rapport de mélange w et le rapport de mélange à la saturation w_s sont calculés selon les formules suivantes :

$$w = 0,622 \frac{e}{P - e} \quad \text{et} \quad w_s = 0,622 \frac{e_s}{P - e_s} \quad (2.4.1)$$

où e est la pression de la vapeur d'eau, e_s la pression de vapeur d'eau saturante et P la pression atmosphérique. Dans la plupart des cas, parce que le contenu en vapeur dans l'air a une valeur réduite pour les températures atmosphériques, on peut approximer le rapport de mélange avec l'humidité spécifique q et le rapport de mélange à la saturation avec l'humidité spécifique à la saturation q_s :

$$q = 0.622 \frac{e}{P} \equiv w \quad \text{et} \quad q_s = 0.622 \frac{e_s}{P} \equiv w_s \quad (2.4.2)$$

L'humidité relative HR est calculée selon la relation suivante :

$$HR = \frac{e}{e_s} 100 \quad (2.4.3)$$

On combine les équations (2.4.2) et (2.4.3) et on obtient :

$$HR = \frac{w}{w_s} 100 \quad (2.4.4)$$

On considère l'entraînement de l'air atmosphérique (qui a le rapport de mélange w_a) dans l'air du panache (qui a le rapport de mélange w_p). On obtient un nouveau rapport de mélange w qui est calculé selon la relation suivante :

$$w = \frac{w_a M_a + w_p M_p}{M_a + M_p} \quad (2.4.5)$$

où M_a et M_p représentent respectivement la masse d'air atmosphérique entraînée et la masse d'air du panache dans laquelle l'entraînement a lieu.

w_a et w_p sont calculés selon la relation (2.4.2) dans laquelle les pressions saturantes pour l'air atmosphérique et l'air du panache sont estimées avec l'équation de Clausius-Clapeyron en considérant respectivement la température de l'air ambiant T_a et la température du panache T_p . w_s qui apparaît dans l'équation (2.4.4) est calculé à l'aide de l'équation de Clausius-Clapeyron en utilisant la température de mélange T_e définie dans la section précédente.

Donc on peut écrire la relation de calcul pour l'humidité relative du panache **HR** :

$$HR = \frac{(M_a w_a(T_a) + M_p w_p(T_p)) / (M_a + M_p)}{w_s(T_e)} 100 \quad (2.4.6)$$

et introduire l'humidité relative du panache dans l'équation (2.2.3). On a alors :

$$\frac{dr_g}{ds} = -\frac{D^*}{\gamma_g R_v u_s} \frac{e_s(\infty)}{T_p} \left[\exp\left(\frac{2\sigma}{r_g \gamma R_v T_p}\right) - \frac{HR}{100} \right] \left[1 + 0.276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right] \quad (2.4.7)$$

CHAPITRE III

MÉTHODE DE CALCUL

La nature des conditions à la limite impose le type de méthode numérique à utiliser. Parce qu'on est dans le cas d'un problème de valeur initiale, la solution du modèle présenté est trouvée à l'aide de la méthode de Bulirsch-Stoer. Cette méthode est un outil puissant d'intégration des équations différentielles ordinaires, qui utilise l'extrapolation de Richardson. Le principe de calcul est basé sur l'extrapolation d'un résultat vers une valeur obtenue avec un pas de calcul de plus en plus petit.

L'application de la méthode numérique décrite ci-dessus demande des calculs préliminaires pour les équations présentées dans le chapitre précédant et leur arrangement dans un système d'équations différentielles ordinaires.

3.1 Calculs préliminaires

Pour les équations présentées dans le deuxième chapitre on réalise d'abord leur intégration, après on les rend sans dimensions et on les dérive. Le calcul détaillé est présenté dans les annexes 1 et 2.

3.1.1 Notations

Premièrement on définit plusieurs valeurs sans dimensions qui aideront à la simplification des calculs :

$$f = \frac{\rho_{\max} - \rho_a}{\rho_e - \rho_{ae}}$$

$$U_a = \frac{u_a}{u_e}$$

$$C_{axe} = \frac{c_{axe}}{c_e}$$

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{\rho_e - \rho_{ae}}{\rho_{ae}} & U_{axe} &= \frac{u_{axe}}{u_e} & AB &= \frac{ab}{a_e b_e} \\
 \beta &= \frac{\rho_a}{\rho_{ae}} & U' &= \frac{u'}{u_e} & d\zeta &= \frac{ds}{\sqrt{a_e b_e}} \\
 \alpha &= \frac{r_k}{r_{ge}} & K &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a_e b_e}} & & (3.1.1)
 \end{aligned}$$

Les notations utilisées sont les mêmes que celles du deuxième chapitre. L'indice e fait référence aux valeurs de sortie du panache.

3.1.2 Calcul de β et de U_a

Le paramètre β , qui représente la valeur normalisée de la densité atmosphérique peut être estimée à chaque pas de calcul. On utilise l'équation hydrostatique et la forme dérivée de l'équation d'état de l'air atmosphérique pour obtenir :

$$-\frac{g}{R_a} = \frac{dT}{dz} + \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \quad (3.1.2)$$

On multiplie l'équation (3.1.2) avec dz/T et on effectue l'intégration du niveau de la cheminée jusqu'à la hauteur de calcul :

$$\log \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} + \log \frac{T_a}{T_{ao}} = \int_0^z \frac{g}{R_a (T_{ao} - \Gamma z)} dz \quad (3.1.3)$$

On a exprimé la température atmosphérique T_a en fonction de l'altitude et du taux adiabatique Γ :

$$T_a = T_{ao} - \Gamma z \quad (3.1.4)$$

Après l'intégration du terme de droite de l'équation (3.1.3) on obtient :

$$\log\left(\beta \frac{T_a}{T_{ao}}\right) = \frac{g}{R_a \Gamma} \log\left(\frac{T_{ao} - \Gamma z}{T_{ao} - \Gamma z_o}\right) \quad (3.1.5)$$

Donc :

$$\beta = \left(\frac{T_a}{T_{ao}}\right)^{\frac{g}{R_a \Gamma} - 1} \quad (3.1.6)$$

et sa forme dérivée sera :

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\zeta} &= \left(\frac{g}{R_a \Gamma} - 1\right) \left(\frac{T_a}{T_{ao}}\right)^{\frac{g}{R_a \Gamma} - 1} \left(\frac{T_{ao}}{T_a}\right) \frac{1}{T_{ao}} \frac{dT_a}{d\zeta} = \\ &= \left(\frac{g}{R_a \Gamma} - 1\right) \frac{1}{T_a} \beta (-\Gamma) \frac{dz}{d\zeta} = \left(1 - \frac{g}{R_a \Gamma}\right) \frac{\beta \Gamma b_o \sin \theta}{(T_{ao} - \Gamma z)} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Pour estimer la valeur normalisée de la vitesse du vent à chaque pas de calcul, on considère le profil du vent :

$$U_a = \frac{u_a}{u_o} = \frac{u_{ao}}{u_o} \left(\frac{z}{H_o}\right)^{1/7} \quad (3.1.8)$$

et sa forme dérivée sera :

$$\frac{dU_a}{d\zeta} = \frac{u_{ao}}{u_o} \frac{1}{7} \left(\frac{z}{H_o}\right)^{1/7} \frac{H_o}{z} \frac{1}{H_o} \frac{dz}{d\zeta} = U_a \frac{1}{7z} b_o \sin \theta \quad (3.1.9)$$

3.2 Intégration des équations

Le terme gauche des équations de conservation est intégré selon la section elliptique du panache. Après l'intégration les équations deviennent :

a) Équation de l'entraînement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\lambda^2 ab \rho_{axe} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + ab \rho_a (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe}) \right) = \\ (3.2.1) \\ = 2 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) \end{aligned}$$

b) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction θx :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ ab \cos \theta \cos \gamma \left[\lambda^2 (\rho_{\max} - \rho_a) \left(u_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2u_a u_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{u_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\rho_a}{2} (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe})^2 \right\} = \\ = 2 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a \cos \gamma \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) + \\ + C_D \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 (\sin^3 \theta \cos^3 \gamma + \sin^3 \gamma) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

c) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oy :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left\{ ab \cos \theta \sin \gamma \left[\lambda^2 (\rho_{\max} - \rho_a) \left(u_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2u_a u_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{u_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho_a}{2} (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe})^2 \right\} = \\ & = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a \sin \gamma (\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u') + \\ & + C_D \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 (\sin^3 \theta \cos^2 \gamma \sin \gamma - \sin^2 \gamma \cos \gamma) \end{aligned}$$

(3.2.3)

d) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oz pour le panache sec :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left\{ ab \sin \theta \left[\lambda^2 (\rho_{\max} - \rho_a) \left(u_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2u_a u_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{u_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho_a}{2} (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe})^2 \right\} = \\ & = -g\lambda^2 ab (\rho_{\max} - \rho_a) - C_D \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta \end{aligned}$$

(3.2.4)

e) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction $0z$ pour le panache mouillé :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ ab \sin \theta \left[\lambda^2 (\rho_{\max} - \rho_a) \left(u_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2u_a u_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{u_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\rho_a}{2} (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe})^2 \right\} = \\ = -g\lambda^2 ab (\rho_{\max} - \rho_a) - C_D \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \rho_a u_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta - g\gamma \frac{4}{3} r_g^3 N_L \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

f) Équation de conservation de l'énergie pour le panache sec :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ ab \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} \right) (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe}) - \lambda^2 \frac{\rho_{\max} - \rho_a}{\rho_{ao}} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) \right] \right\} = \\ = 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} \right) (\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u') \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

g) Équation de conservation de l'énergie pour le panache mouillé :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \left\{ ab \left[\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} \frac{R_p}{R_a} \right) (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe}) - \lambda^2 \frac{R_p}{R_a} \frac{\rho_{max} - \rho_a}{\rho_{ao}} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) \right] \right\} = \\
 = 2 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} \right) \frac{R_p}{R_a} \frac{c_a}{c_g} \left(\alpha_1 |u_{axe}| + \alpha_2 u_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 u' \right) - \\
 - \frac{4R_p L N_L r_g D^*}{R_v c_g p_{atm}} \left[\frac{e_{sat}}{T_p} \exp \left(\frac{2\sigma}{r_g \gamma_w R_v T_p} \right) - \frac{e_p}{T_p} \right] \left[1 + 0.276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.2.7}$$

h) Équation de conservation du polluant :

$$\frac{d}{ds} \left[c_{axe} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma \pi a b \lambda^2 + u_{axe} \pi a b \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \right) \right] = 0
 \tag{3.2.8}$$

3.3 Dérivation des équations

Après que les équations sont rendues sans dimensions, on effectue la dérivation des termes gauches. Tout le calcul est présenté dans l'annexe II. On obtient des systèmes d'équations différentielles ordinaires de la forme suivante :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{B}
 \tag{3.3.1}$$

Les inconnues sont $\frac{df}{d\zeta}, \frac{dU_{axe}}{d\zeta}, \frac{d\theta}{d\zeta}, \frac{d(AB)}{d\zeta}, \frac{d\gamma}{d\zeta}, \frac{d\alpha}{d\zeta}$

Pour le panache sec on a le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1,1) \frac{df}{d\zeta} + A(1,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(1,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(1,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(1,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} = B(1) \\ A(2,1) \frac{df}{d\zeta} + A(2,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(2,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(2,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(2,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} = B(2) \\ A(3,1) \frac{df}{d\zeta} + A(3,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(3,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(3,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(3,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} = B(3) \\ A(4,1) \frac{df}{d\zeta} + A(4,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(4,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(4,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(4,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} = B(4) \\ A(5,1) \frac{df}{d\zeta} + A(5,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(5,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(5,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(5,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} = B(5) \end{array} \right.$$

(3.3.2)

Pour le panache mouillé on a le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(1,1) \frac{df}{d\zeta} + A(1,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(1,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(1,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(1,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} + A(1,6) \frac{d\alpha}{d\zeta} = B(1) \\ A(2,1) \frac{df}{d\zeta} + A(2,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(2,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(2,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(2,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} + A(2,6) \frac{d\alpha}{d\zeta} = B(2) \\ A(3,1) \frac{df}{d\zeta} + A(3,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(3,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(3,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(3,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} + A(3,6) \frac{d\alpha}{d\zeta} = B(3) \\ A(4,1) \frac{df}{d\zeta} + A(4,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(4,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(4,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(4,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} + A(4,6) \frac{d\alpha}{d\zeta} = B(4) \\ A(5,1) \frac{df}{d\zeta} + A(5,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(5,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(5,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(5,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} + A(5,6) \frac{d\alpha}{d\zeta} = B(5) \\ A(6,1) \frac{df}{d\zeta} + A(6,2) \frac{dU_{axe}}{d\zeta} + A(6,3) \frac{d\theta}{d\zeta} + A(6,4) \frac{d(AB)}{d\zeta} + A(6,5) \frac{d\gamma}{d\zeta} + A(6,6) \frac{d\alpha}{d\zeta} = B(6) \end{array} \right.$$

(3.3.3)

ainsi que les équations de la trajectoire :

$$\frac{dX}{d\zeta} = \cos \theta \cos \gamma$$

$$\frac{dY}{d\zeta} = \cos \theta \sin \gamma \quad (3.3.4)$$

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \sin \theta$$

et l'équation de conservation du polluant :

$$C_{\max} = \frac{1}{AB} \frac{\frac{u_{ae}}{u_e} \cos \theta_e \cos \gamma_e + \frac{1}{\lambda^2 + 1}}{U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1}} \quad (3.3.5)$$

3.4 Méthodes numériques appliquées

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires sont résolus par le programme de calcul. D'abord on applique la méthode LU de décomposition des matrices pour les écrire sous la forme :

$$A = LU \quad (3.4.1)$$

Donc nos systèmes d'équations ont la forme suivante :

$$LUx = L(Ux) = Ly = B \quad (3.4.2)$$

et par la suite le vecteur y est résolu selon la méthode de substitution par l'avant (*forward substitution*). On arrive à l'équation :

$$Ux = y \quad (3.4.3)$$

qui est résolue selon la méthode de substitution par l'arrière (*back substitution*). On obtient le vecteur y :

$$y = \left(\frac{df}{d\zeta} \quad \frac{dU_{axe}}{d\zeta} \quad \frac{d\theta}{d\zeta} \quad \frac{d(AB)}{d\zeta} \quad \frac{d\gamma}{d\zeta} \quad \frac{dX}{d\zeta} \quad \frac{dY}{d\zeta} \quad \frac{dZ}{d\zeta} \right) \quad (3.4.5)$$

pour le panache sec et le vecteur y'

$$y' = \left(\frac{df}{d\zeta} \quad \frac{dU_{axe}}{d\zeta} \quad \frac{d\theta}{d\zeta} \quad \frac{d(AB)}{d\zeta} \quad \frac{d\gamma}{d\zeta} \quad \frac{d\alpha}{d\zeta} \quad \frac{dX}{d\zeta} \quad \frac{dY}{d\zeta} \quad \frac{dZ}{d\zeta} \right) \quad (3.4.6)$$

pour le panache mouillé. Ces vecteurs sont intégrés selon la méthode de Bulirsch-Stoer et on obtient les valeurs de f , U_{axe} , θ , AB , γ , α , X , Y , Z à chaque pas de calcul.

3.5 Programme de calcul

Le modèle a été implementé dans le langage de programmation Fortran Lahey 90. Le code de calcul consiste dans un programme principal qui appelle plusieurs routines. Les erreurs numériques inévitables introduites dans la solution sont contrôlées par un changement automatique du pas de calcul.

Le programme principal initialise les vecteurs, propose un pas de calcul et la distance maximale de calcul, estime la concentration du polluant et imprime les résultats dans un fichier. Aussi il appelle les routines de commande et de contrôle. Le calcul est effectué d'abord pour le panache mouillé jusqu'à l'évaporation complète des gouttelettes d'eau, ensuite on considère le panache sec. Puisque l'évaporation des gouttelettes est plus rapide pour les rayons plus petits, le pas de calcul est diminué vers la fin de l'évaporation pour avoir une meilleure observation de la variation des paramètres.

Les routines utilisées par le programme sont les suivantes :

1. La routine de décomposition *ludcmp*, remplace la matrice A par une décomposition de sa permutation, en tenant compte des changements effectués lors de la permutation.

2. La routine de substitution *lubksb* résout le système linéaire d'équations différentielles ordinaires, introduit dans la forme déterminée par *ludcmp*. La routine *lubksb* utilise les méthodes de substitution par avant et par arrière.
3. La routine d'algorithme *mmid* introduit les formules de base de la méthode d'intégration du point du milieu modifiée, commence le calcul avec la valeur du vecteur au point x et retourne les nouvelles valeurs des variables au point $x-h$, où h est le pas de calcul.
4. La routine de contrôle du pas de calcul *bsstep* effectue la vérification de la qualité de la solution. Elle appelle la routine d'algorithme et peut rejeter la solution pour établir un pas de calcul plus petit. La routine d'algorithme est appelée jusqu'à l'obtention de la solution avec la précision désirée.
5. La routine d'extrapolation *rzextr* est appelée par *bsstep* pour réaliser l'extrapolation de la fonction rationnelle.
6. Les routines de commande *derivssec* et *derivs* commencent et arrêtent l'intégration et gardent dans mémoire les valeurs calculées. Il existe deux routines de commandes, une pour le panache sec et l'autre pour le panache mouillé.
7. Les routines de calcul *atmsec* et *atm* évaluent certains paramètres atmosphériques dépendant de l'altitude. Elles complètent les routines de commandes dans la réalisation des calculs.

Les routines *ludcmp*, *lubksb*, *mmid*, *bsstep* et *rzextr* sont tirées de "Numerical Recipes in FORTRAN : the art of scientific computing", 1992 et adaptées pour notre code de calcul.

Les données initiales requises par le programme sont :

- les caractéristiques de la cheminée : hauteur, diamètre, angle d'inclinaison
- les caractéristiques du gaz à la sortie : température et vitesse de sortie, nombre de gouttelettes et leur rayon initial, concentration du polluant
- les caractéristiques atmosphériques : température, stabilité atmosphérique, humidité relative, profil du vent
- les caractéristiques de la zone d'établissement du courant
- pas et distance de calcul
- divers coefficients et constantes

Le programme lit le fichier d'entrée qui s'appelle "hydronm.inp" afin d'établir les valeurs de toutes ces données. Les lignes de sortie qui montrent les paramètres calculés sont écrites dans un fichier de sortie pendant l'exécution.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

4.1. Conditions de calcul

Pour le calcul du comportement du panache mouillé on choisit certains paramètres de sortie qui serviront de point de départ dans nos discussions. Ces paramètres, appelés paramètres de référence, sont divisés en paramètres atmosphériques, paramètres pour la cheminée et paramètres pour le panache.

Paramètres atmosphériques de référence :

- ❖ température atmosphérique de 10°C à une hauteur de 10 m du sol
- ❖ humidité relative atmosphérique constante de 70 %
- ❖ stratification neutre de l'atmosphère avec une courbe d'état de l'air ambiant de 9,8°C/km
- ❖ vitesse du vent de 3 m/s à 10 m du sol
- ❖ coefficient de dispersion atmosphérique latéral pour une stratification atmosphérique neutre, selon Singer et Smith (1966), $\sigma_y = 0,32 \times 0,78$
- ❖ coefficient de dispersion atmosphérique vertical pour une stratification atmosphérique neutre, selon Singer et Smith (1966), $\sigma_z = 0,223 \times 0,776$

Paramètres de référence pour la cheminée :

- ❖ hauteur de 150 m
- ❖ diamètre de 3 m
- ❖ angle d'incidence avec l'horizontale 90°

Paramètres de référence pour le panache :

- ❖ température à la sortie 30°C
- ❖ vitesse de sortie 20 m/s
- ❖ humidité relative de 100%
- ❖ nombre de gouttelettes par unité de longueur : 56,5 millions/m, ce qui représente approximativement un contenu d'eau liquide de 1 g/m³, valeur habituelle dans le cas des nuages
- ❖ rayon des gouttelettes 30 µm
- ❖ concentration de polluant au sol 1000 mg/m³
- ❖ caractéristiques de la zone d'établissement du courant, selon Keffer et Baines.(1963) :
 $x_s = 0,2$ diamètre, $y_s = 0$, $z_s = 1,7$ diamètre, $s_s = 1,8$ diamètre, $\theta_o = 75^\circ$

Nous avons calculé la variation du rayon des gouttelettes, la trajectoire du panache dans deux dimensions, la température dans l'axe du panache et la température atmosphérique correspondante, la vitesse dans l'axe du panache et la concentration de polluant au niveau du sol, toutes en fonction de la distance horizontale parcourue par le panache.

4.2. Calcul du cas de référence

On va analyser maintenant la variation des paramètres du panache en fonction de la distance horizontale x .

La variation du rayon des gouttelettes est présentée dans la figure 4.1. À cause de la différence de température à la sortie de la cheminée entre le panache et l'atmosphère, la vapeur d'eau contenue dans le panache condensera d'abord et au fur et à mesure que la différence de température diminue, l'évaporation commence avec un taux de plus en plus élevé. Conformément à la figure 4.3 on observe que les températures du panache et de l'atmosphère s'uniformisent vite, mais l'évaporation continue à cause de la différence d'humidité relative entre le panache et l'air atmosphérique. Pour des rayons plus petits on

a une évaporation plus accélérée, fait connu grâce aux modèles disponibles et aux expériences effectuées (Andreas, 1990).

Après sa sortie par la cheminée, le panache monte à cause de sa quantité de mouvement initiale et de sa force de flottaison. Le vent transversal à sa direction initiale contribue à son inclinaison. La vitesse de sortie du panache est rapidement diminuée par l'entraînement de l'air atmosphérique, qui a, au début, une vitesse inférieure à celle du panache (figure 4.4). Le panache continue à se déplacer avec la même vitesse que celle du vent. La quantité de mouvement verticale du panache est réduite aussi par la force de gravité des gouttelettes d'eau présentes dans le panache. La force de flottaison initiale du panache est diminuée à cause de l'entraînement de l'air atmosphérique plus frais et à cause de la chaleur latente perdue par l'évaporation. D'un autre côté, la condensation des gouttelettes augmente au début la force de flottaison du panache, mais dans cet exemple son effet est faible. Lorsque la température du panache devient inférieure à celle de son environnement, le panache commence à descendre (figure 4.2). La chaleur latente perdue par l'évaporation est assez importante pour refroidir le panache malgré l'entraînement de l'air maintenant plus chaud. Le panache continue à descendre jusqu'à l'évaporation complète. À partir de ce moment il est considéré comme un panache sec et sa trajectoire est calculée en conséquence. Sa température suit la température atmosphérique et après quelques oscillations il se stabilise à une hauteur d'équilibre. Dans notre calcul nous avons toujours considéré une stratification neutre de l'atmosphère, qui conserve la force de flottaison des masses d'air, contrairement à une atmosphère instable, qui augmente la force de flottaison ou une atmosphère stable qui diminue la force de flottaison. On pense que les oscillations faibles qui apparaissent avant l'arrivée du panache sec à sa hauteur d'équilibre sont causées par la présence de la stratification atmosphérique neutre. On sait que cette stratification représente la transition de l'atmosphère stable à celle instable, donc le comportement du panache sec dans une atmosphère neutre se situe entre le comportement d'un panache sec dans une atmosphère stable, qui supprime les

oscillations des masses d'air et le comportement d'un panache sec dans une atmosphère instable, qui amplifie les oscillations des masses d'air.

Sur la figure 4.3 on observe la descente rapide de la température initiale du panache vers la température atmosphérique, malgré la faible condensation qui a lieu en même temps. La température atmosphérique varie selon l'élévation au taux adiabatique de $9,8^{\circ}\text{C}/\text{km}$.

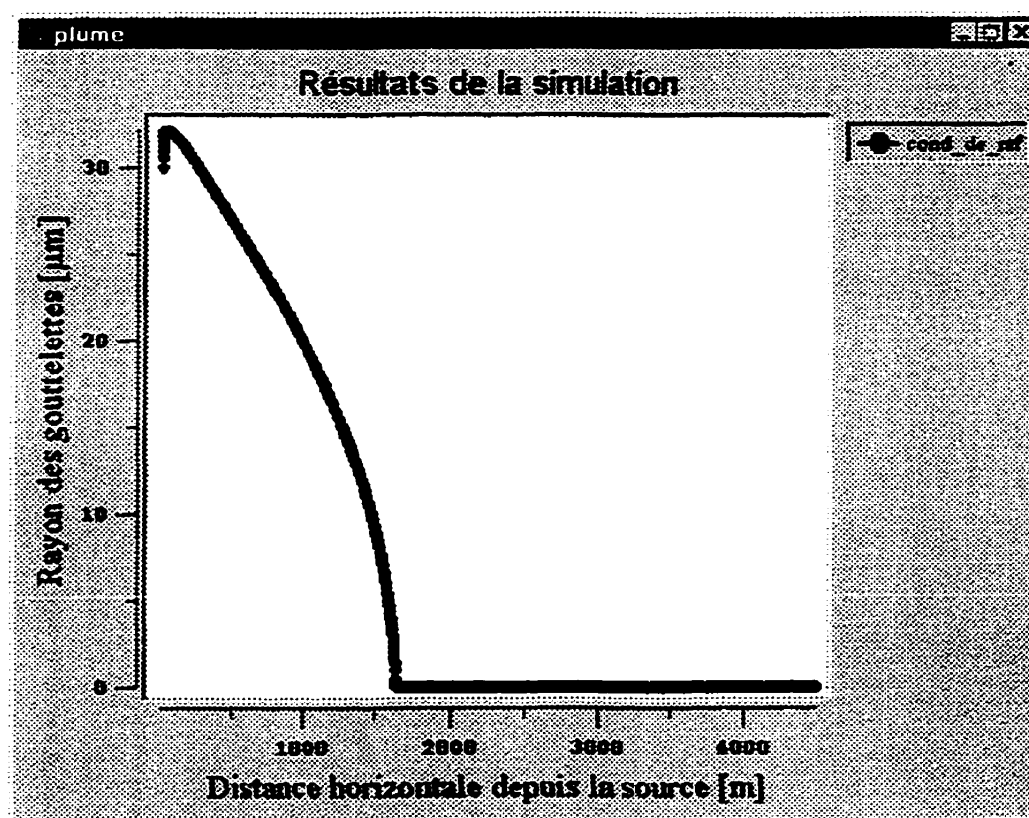


Figure 4.1 – Variation du rayon des gouttelettes dans les conditions de référence

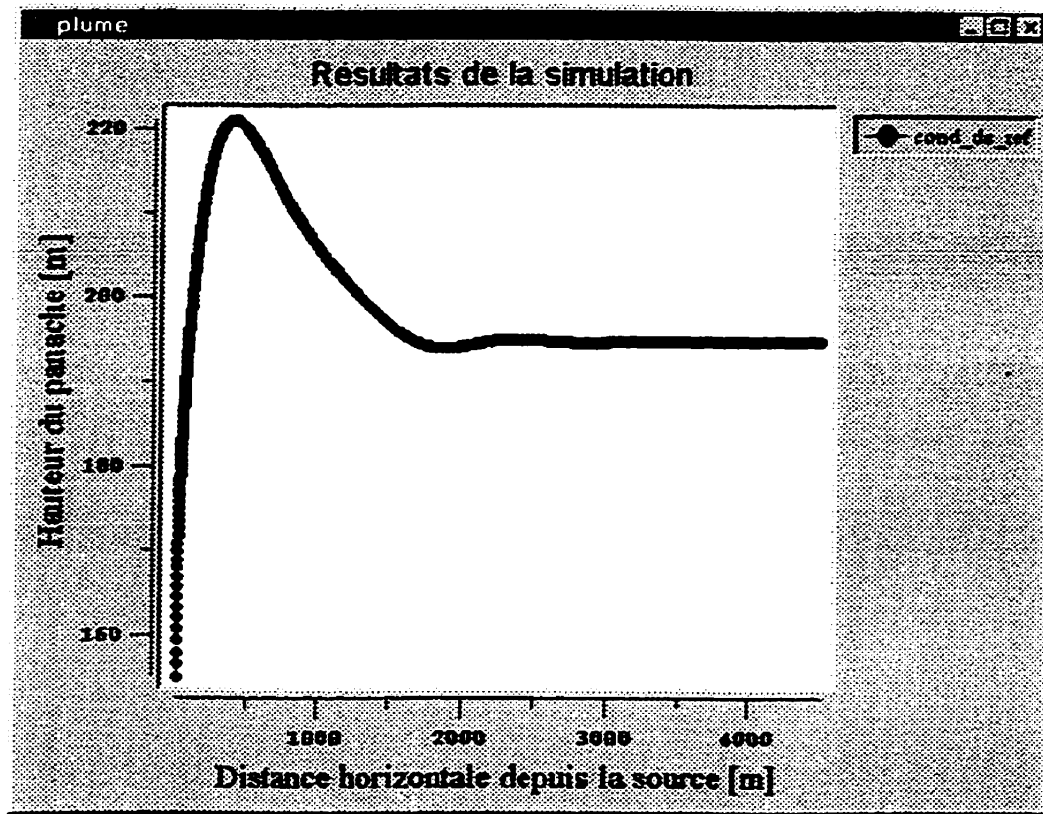


Figure 4.2 – Variation de la hauteur du panache mouillé dans les conditions de référence

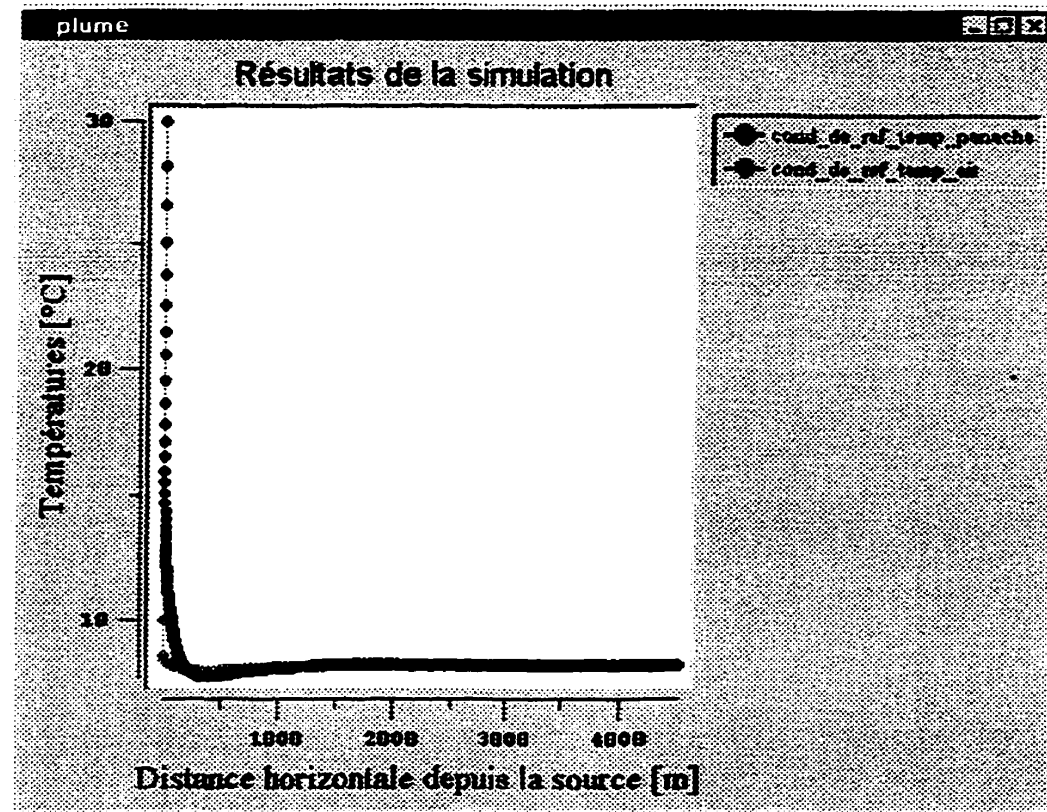


Figure 4.3 - Variation de la température du panache mouillé et de la température atmosphérique dans les conditions de référence

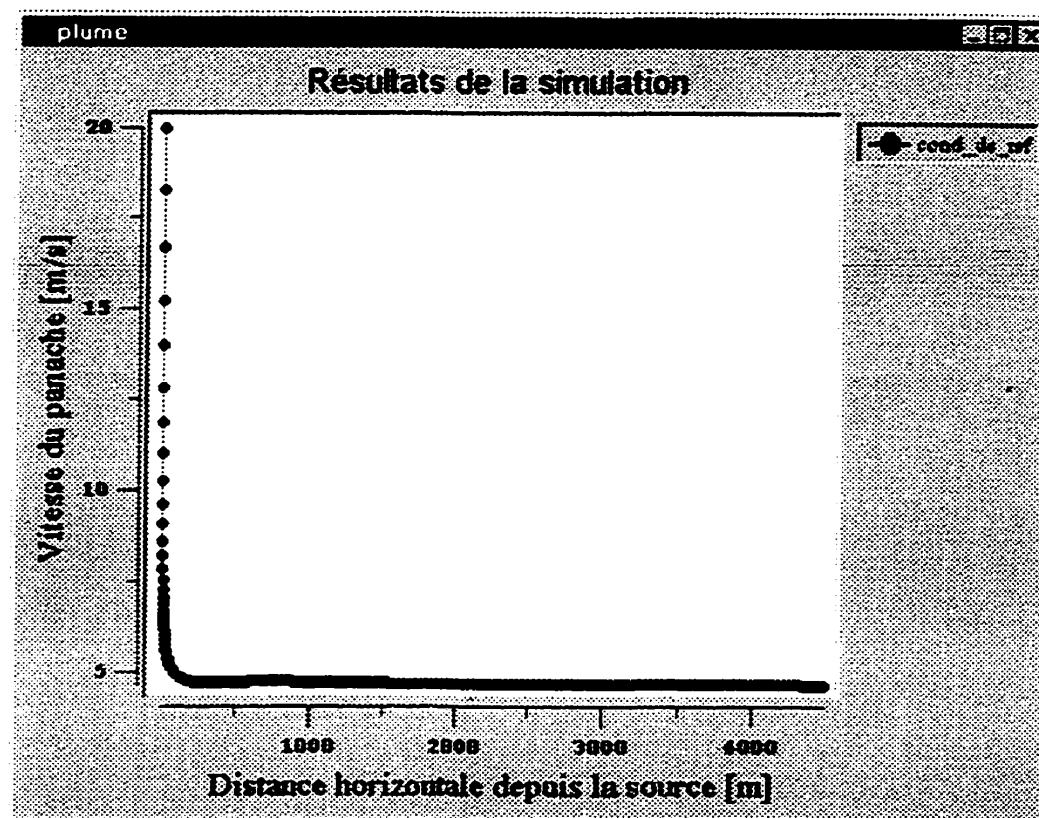


Figure 4.4 - Variation de la vitesse du panache mouillé dans les conditions de référence

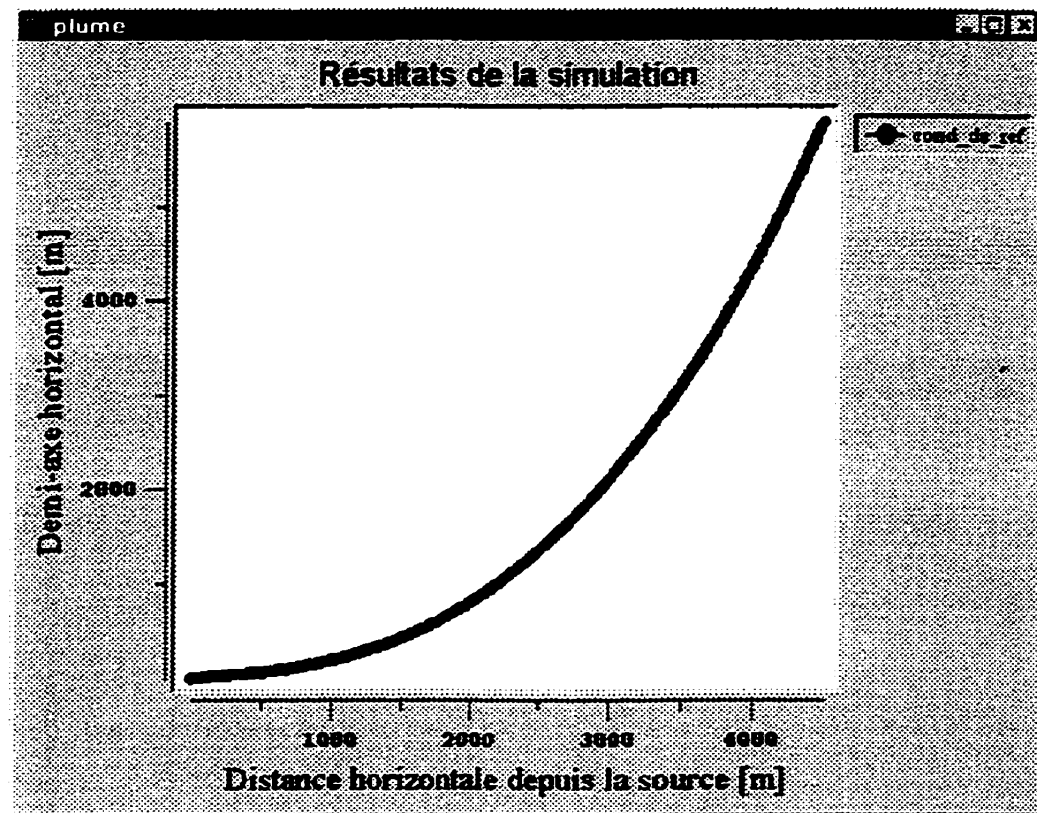


Figure 4.5 - Variation du demi-axe horizontal de la section transversale elliptique du panache mouillé dans les conditions de référence

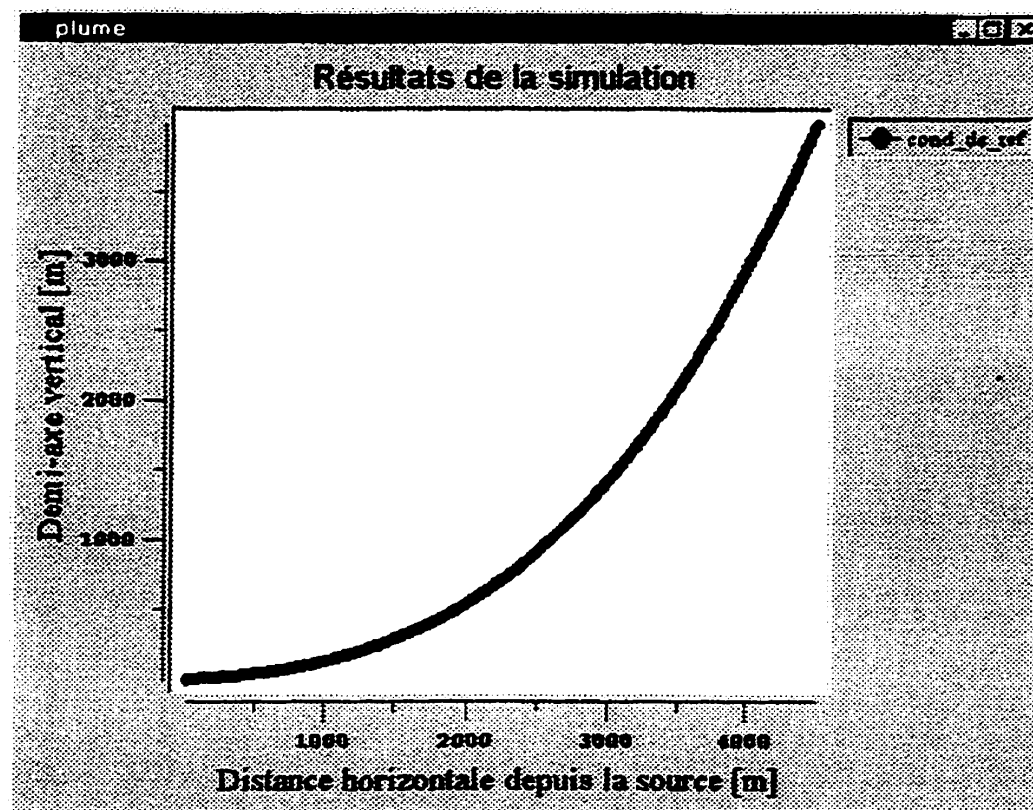


Figure 4.6 - Variation du demi-axe vertical de la section transversale elliptique du panache mouillé dans les conditions de référence

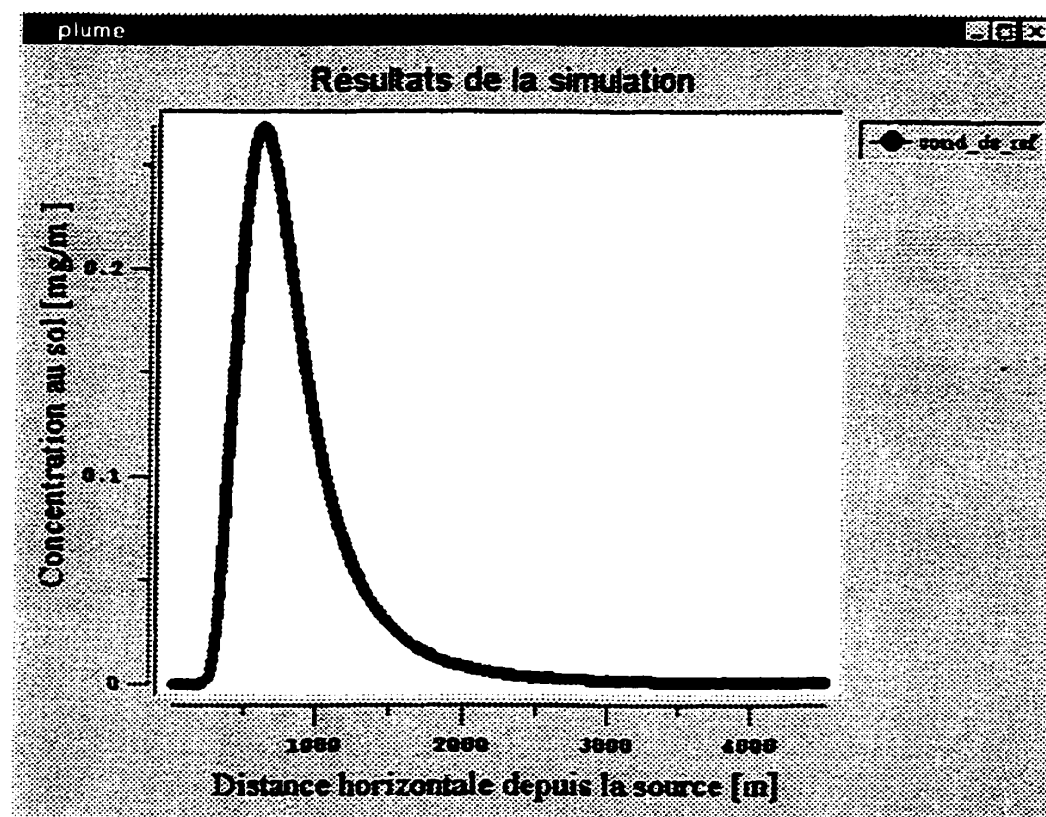


Figure 4.7 - Variation de la concentration de polluant au sol dans les conditions de référence

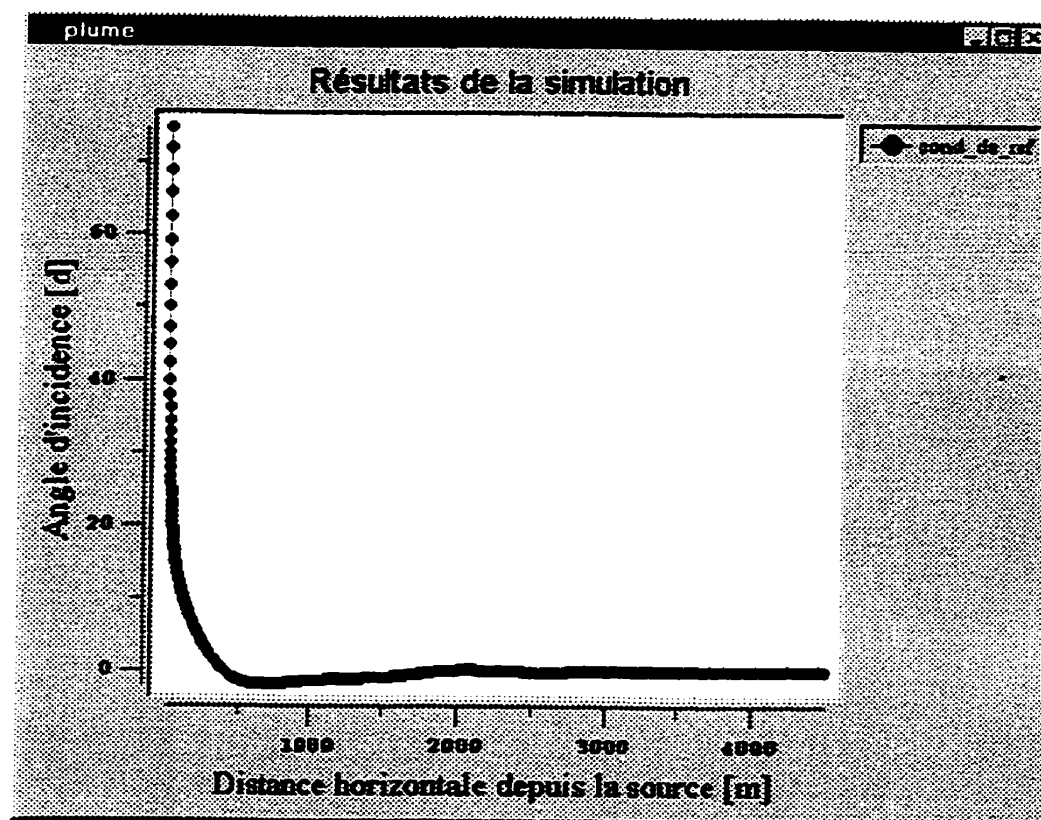


Figure 4.8 - Variation de l'angle d'incidence du panache mouillé dans les conditions de référence

Le panache perd rapidement sa quantité de mouvement initiale à cause de l'entraînement de l'air atmosphérique. La vitesse du panache diminue dans les premières dizaines de mètres à la valeur de la vitesse du vent. À partir de ce moment, le panache est porté par le vent.

Les demi-axes horizontal et vertical de la section transversale elliptique du panache ont une variation similaire (figure 4.5 et figure 4.6), mais le demi-axe horizontal s'agrandit plus parce que l'écart type horizontal σ_y a une valeur supérieure à l'écart type vertical σ_z . Les demi-axes de l'ellipse augmentent rapidement après le premier kilomètre parcouru, ce qui influence la variation de la concentration de polluant au sol (figure 4.7). La valeur maximale de la concentration de polluant au sol est donc obtenue avant que le panache ne parcoure son premier kilomètre, car plus loin le polluant est fortement dilué par la turbulence atmosphérique.

L'angle d'incidence de la trajectoire du panache est présenté sur la figure 4.8. On observe que sa valeur descend rapidement dans les premières centaines de mètres, ce qui indique que l'inclinaison du panache devient zéro là où le panache atteint sa hauteur maximale et ensuite négative lorsque le panache descend.

Une fois que la hauteur d'équilibre est atteinte, l'angle d'incidence garde la valeur constante de 0° .

4.3. Analyse de sensibilité

Nous avons examiné l'influence des cinq paramètres sur le comportement du panache mouillé : le rayon initial des gouttelettes d'eau contenues dans le panache, l'humidité relative atmosphérique, la vitesse et la température de sortie du gaz et la vitesse du vent. Nous avons effectué les calculs en changeant seulement un de ces cinq paramètres à la fois, en gardant pour les autres les valeurs établies dans les conditions de référence.

L'analyse de sensibilité a été réalisée pour la dynamique de l'évaporation des gouttelettes, la hauteur du panache et la concentration de polluant au sol. La température, la vitesse du panache et les caractéristiques géométriques de sa section transversale ne sont pas beaucoup influencées par la variation des paramètres choisis.

4.3.1 Variation du rayon initial des gouttelettes

On a considéré des rayons initiaux de 10, 30, 50 et 70 μm à la fois. On s'aperçoit que la condensation se produit toujours en premier et elle semble plus évidente pour les petites gouttelettes (figure 4.9). On explique ce comportement par le fait que le taux d'évaporation ou de condensation est plus élevé pour les gouttelettes plus petites. Donc les gouttelettes de 10 μm s'évaporent très vite et la chaleur latente nécessaire à leur évaporation n'est pas assez importante pour faire descendre le panache. Plus les gouttelettes sont grandes, plus la chaleur requise pour leur évaporation augmente et plus le panache descend (figure 4.10). Dans le cas des gouttelettes de 70 μm , le panache atteint le sol avant que l'évaporation ne finisse. Donc une petite différence dans la grandeur des gouttelettes a un grand effet sur le comportement du panache. Le niveau de concentration au sol est influencé par la hauteur du panache (figure 4.11). En conséquence, il est le plus élevé dans le cas des gouttelettes de 70 μm et le plus bas dans le cas des gouttelettes de 10 μm .

4.3.2 Variation de l'humidité relative atmosphérique

On fait le calcul pour des humidités relatives atmosphériques de 30%, 70% et 100%. On voit que plus l'atmosphère est humide, plus la condensation qui se produit après la sortie de la cheminée est importante et l'évaporation des gouttelettes est retardée (figure 4.12). Donc la hauteur maximale du panache sera plus petite dans le cas d'une humidité relative atmosphérique plus élevée à cause de la présence prolongée de l'évaporation qui réduit la force de flottaison du panache (figure 4.13). Dans le cas d'une humidité relative de 100%

l'évaporation continue sur une distance supplémentaire de 500 m, comparativement au cas de 30% d'humidité relative atmosphérique. Dans une atmosphère avec seulement 30% humidité relative, lorsque l'évaporation finit, le panache possède encore une fraction de sa force de flottaison initiale, ce qui lui permet de continuer de monter jusqu'à l'égalisation de sa température avec celle de l'air atmosphérique. Les panaches dans une atmosphère avec 100% et 70% humidité relative ont une force de flottaison négative au moment où l'évaporation des gouttelettes est complète. À partir de ce moment, ils commencent à gagner de l'énergie thermique à cause de l'entraînement de l'air atmosphérique plus chaud et après quelques oscillations arrivent à l'hauteur d'équilibre.

La concentration de polluant au sol (figure 4.14) dépend de la hauteur atteinte par le panache: plus la hauteur du panache est grande, plus la concentration est faible. Donc dans une atmosphère plus humide la pollution est plus importante.

4.3.3 Variation de la température de sortie du panache

On a choisi des températures de sortie du panache de 10°C, 20°C et 30°C. Les résultats sont présentés sur les figures (4.15) – (4.17). Plus l'écart de température à la sortie entre le panache et l'air atmosphérique est grand, plus la condensation est importante. Lorsque le panache sort avec une température de 10°C, la différence de température à la sortie entre le panache et l'air atmosphérique est d'approximativement 1,5°C et l'évaporation des gouttelettes commence tout de suite. Dans ce cas, le panache ne reçoit plus au début l'apport de chaleur latente due à la condensation. Dans les autres cas les panaches ont des élévations plus grandes à cause de leur force de flottaison initiale supérieure, qui en plus est augmentée par la suite par la condensation des gouttelettes. Si on étudie maintenant les deux derniers cas, on observe que le panache qui a la température de sortie de 20°C arrive à une hauteur finale plus grande que celle du panache dont la température de sortie est de 30°C, même si sa hauteur maximale est inférieure. La cause est la condensation de

la vapeur d'eau qui a lieu à la sortie du panache. Un écart de température plus élevé détermine une condensation plus importante. Par la suite l'évaporation des gouttelettes plus grandes réduit beaucoup plus la force de flottaison du panache que l'évaporation des gouttelettes plus petites. Donc il n'existe pas une compensation entre la chaleur latente gagnée par la condensation et celle perdue par l'évaporation, à cause des taux différents de ces deux processus.

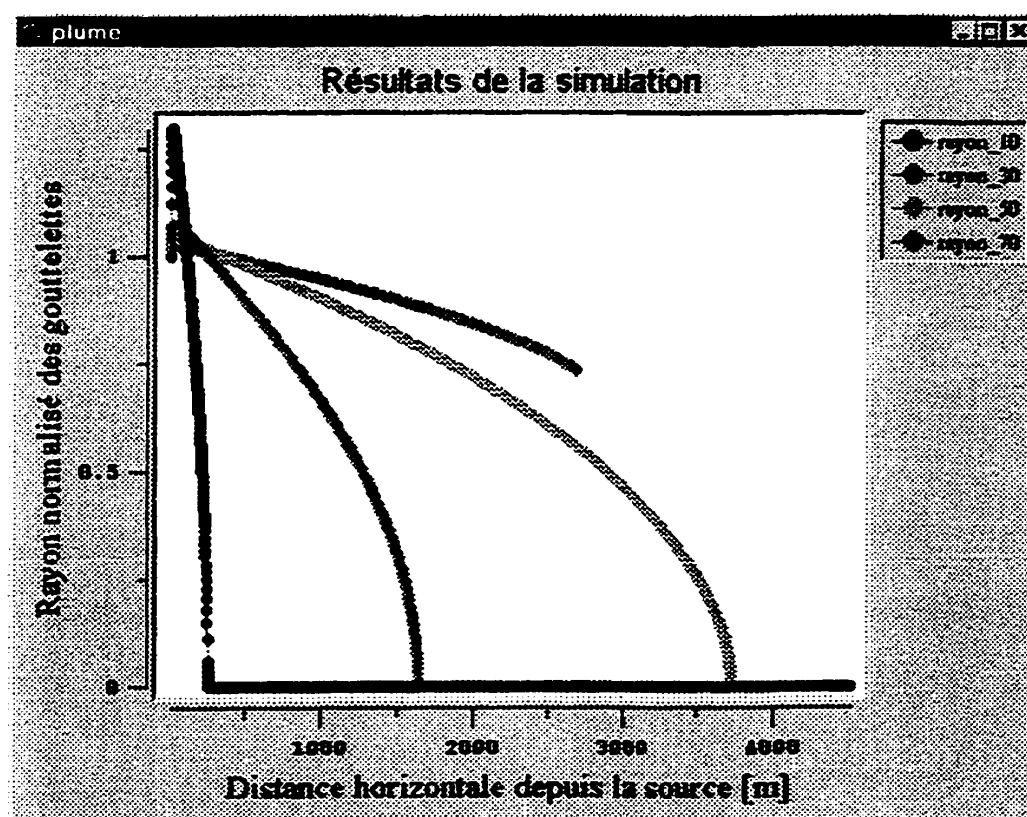


Figure 4.9 – Influence du rayon initial sur la décroissance du rayon normalisé des gouttelettes

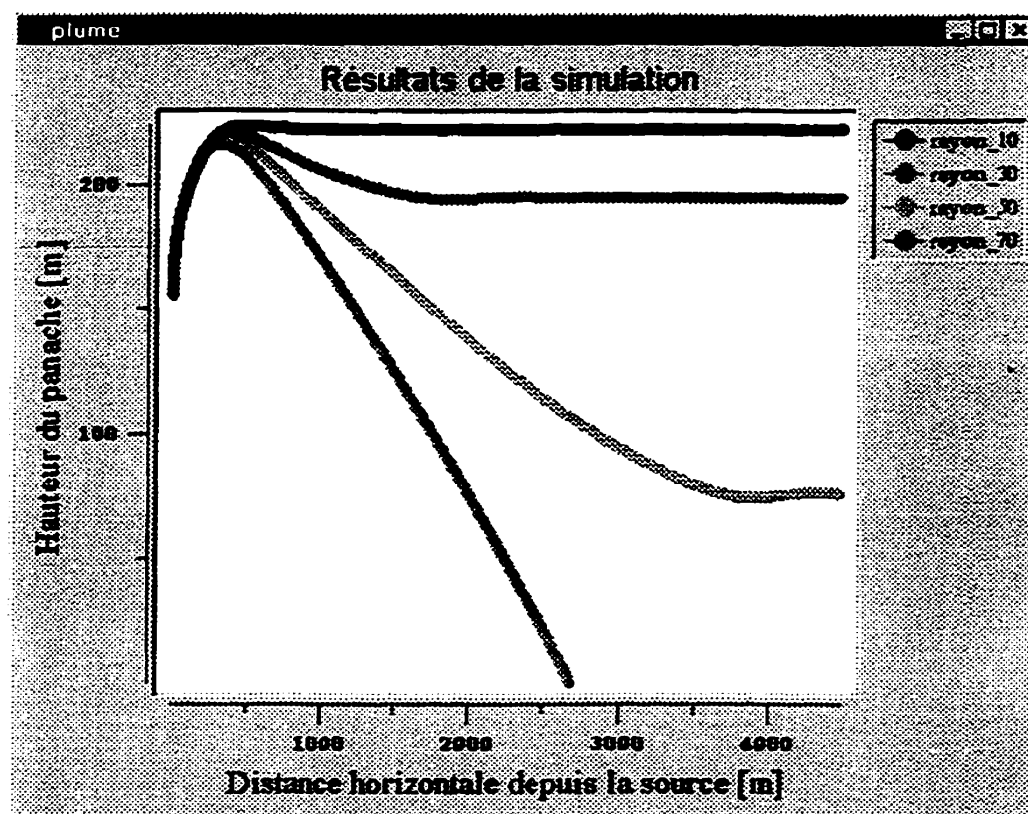


Figure 4.10 – Influence du rayon initial des gouttelettes sur la hauteur du panache mouillé

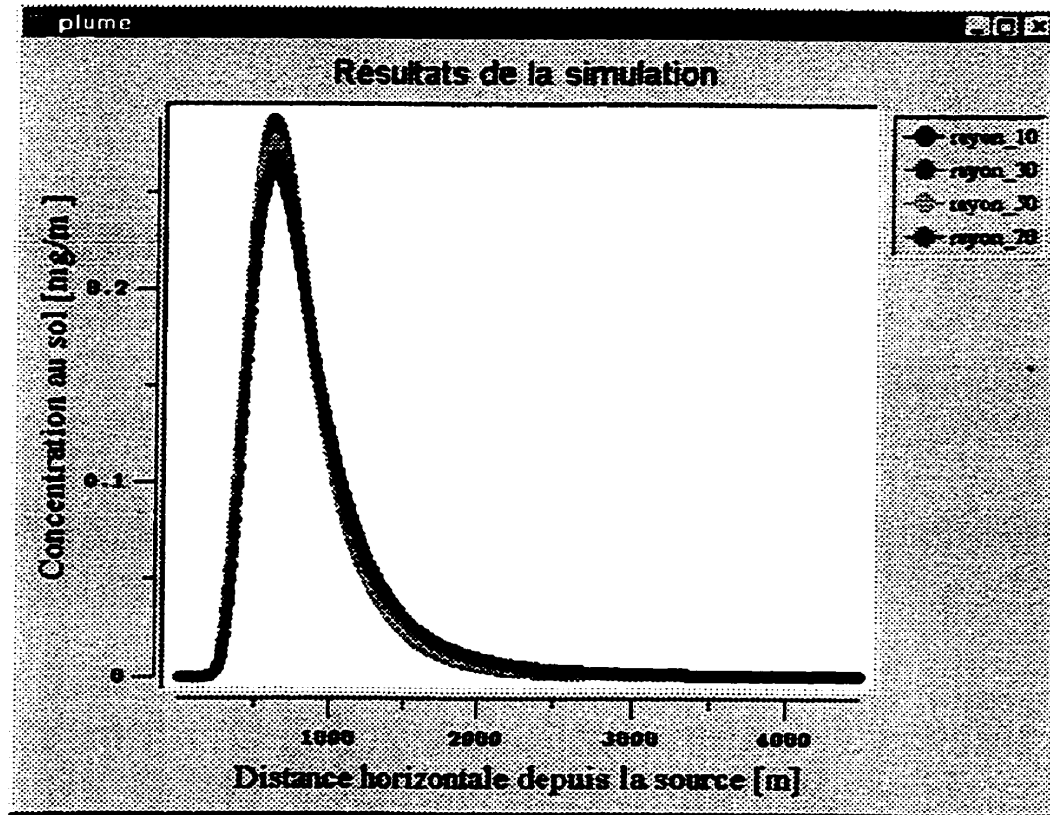


Figure 4.11 – Influence du rayon initial des gouttelettes sur le niveau de la concentration de polluant au sol

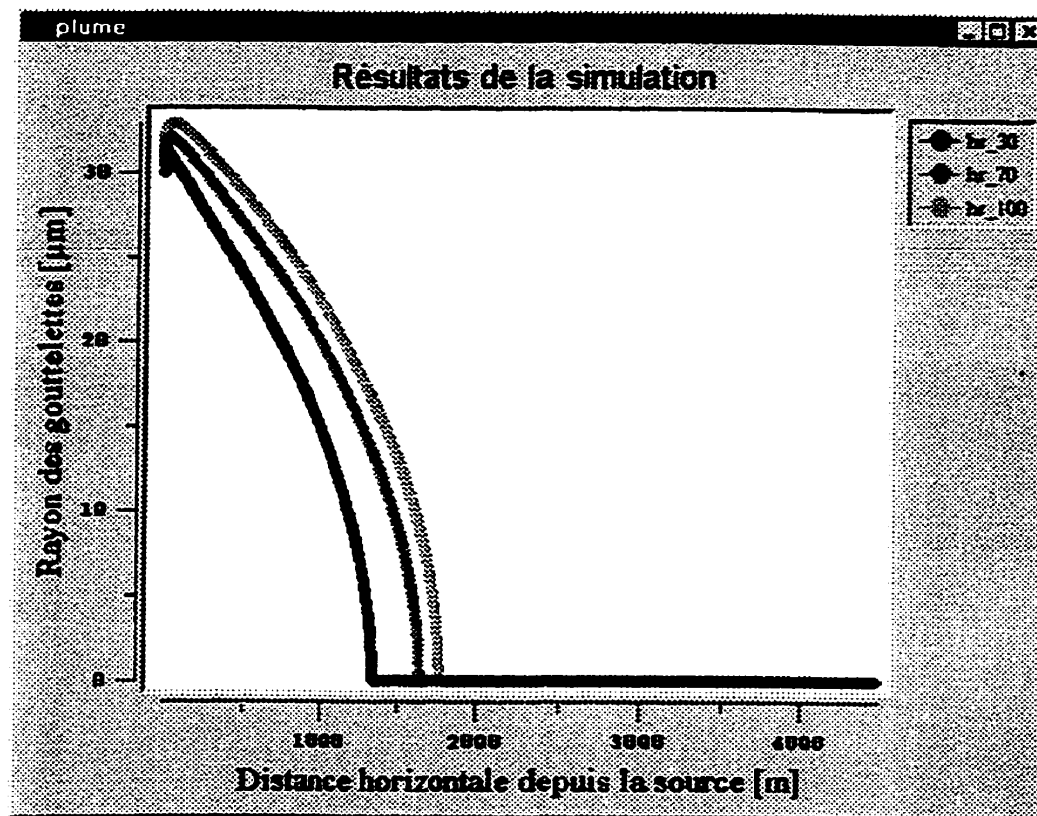


Figure 4.12 – Influence de l'humidité relative atmosphérique sur la variation du rayon des gouttelettes

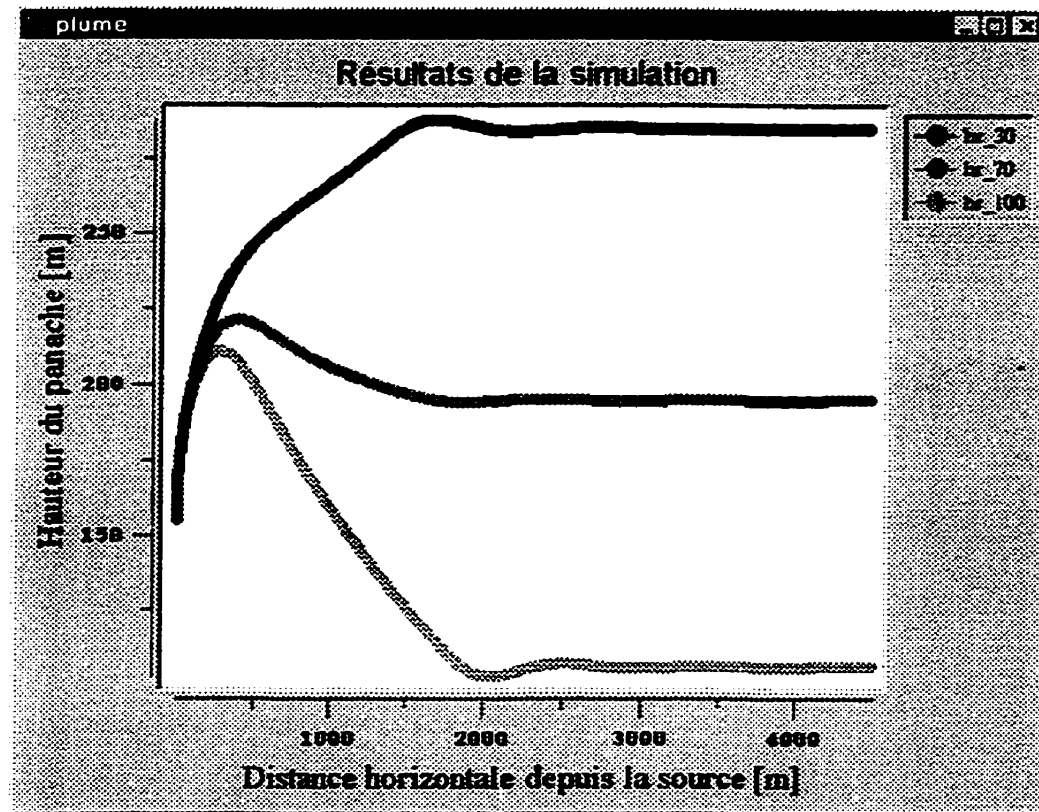


Figure 4.13 – Influence de l'humidité relative atmosphérique sur la variation de la hauteur du panache mouillé

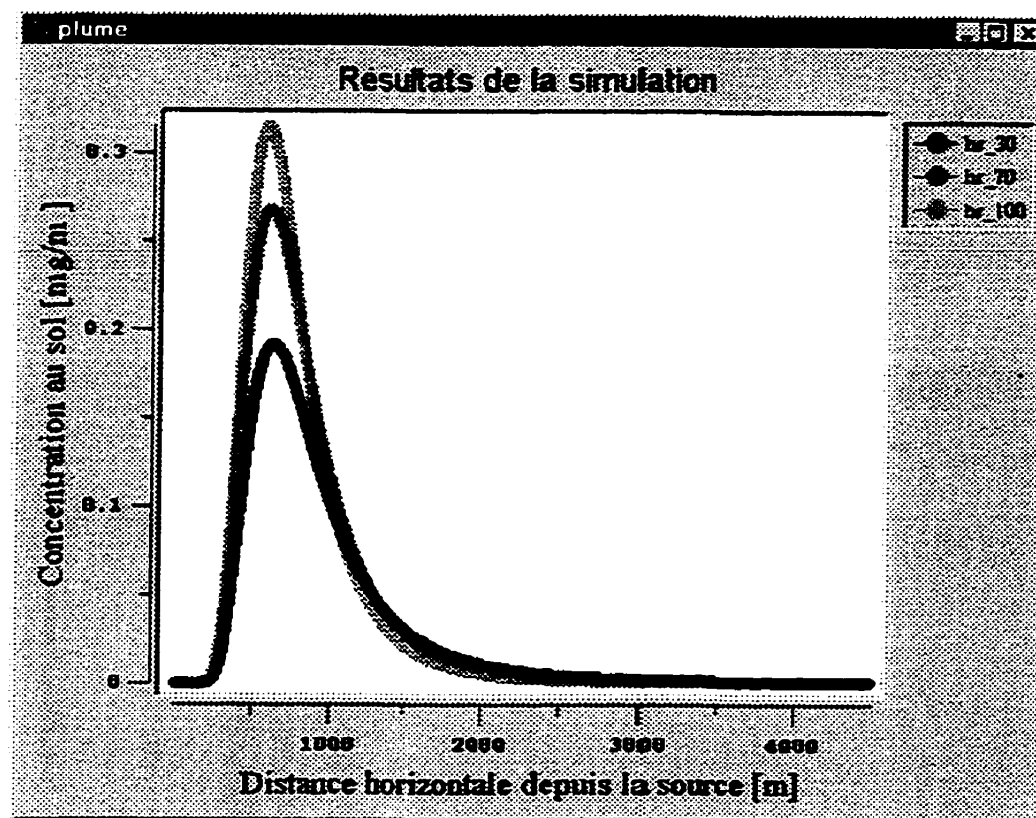


Figure 4.14 – Influence de l'humidité relative atmosphérique sur le niveau de la concentration de polluant au sol

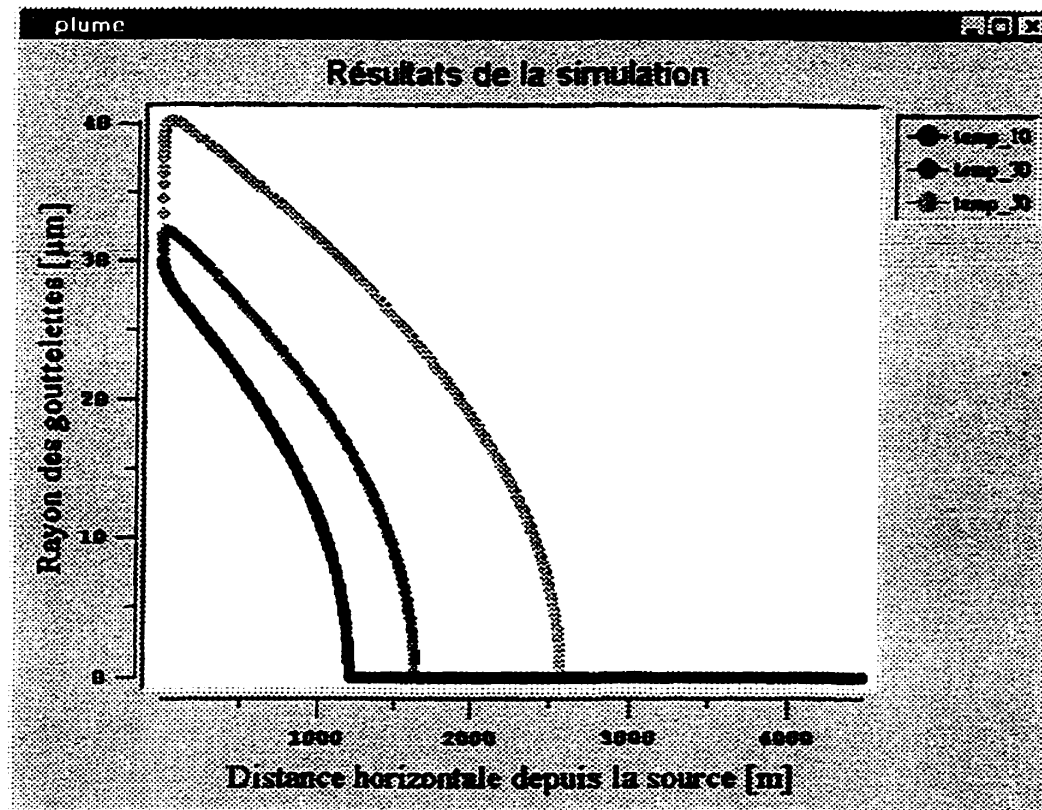


Figure 4.15 – Influence de la température de sortie du gaz sur la variation du rayon des gouttelettes

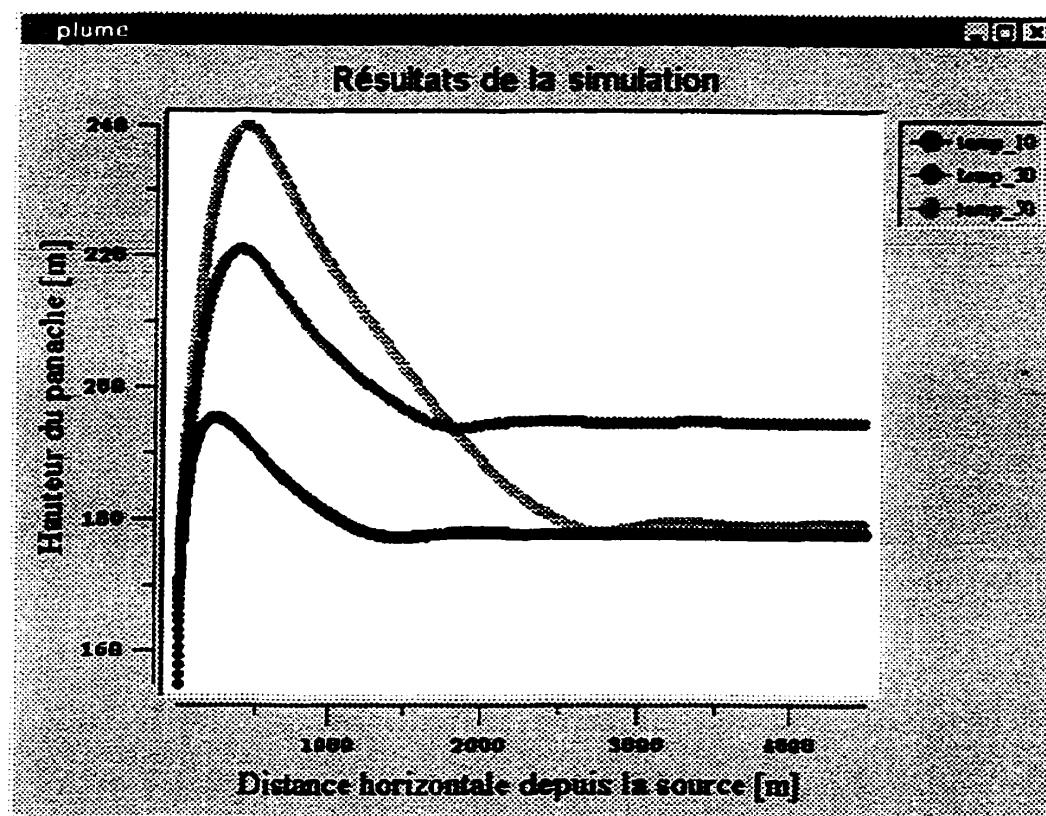


Figure 4.16 – Influence de la température de sortie du gaz sur la variation de la hauteur du panache mouillé

Comme dans les autres cas discutés, la valeur de la concentration de polluant au sol dépend de la hauteur que le panache atteint dans le premier kilomètre parcouru. Une température de sortie du gaz plus élevée détermine une concentration de polluant au sol plus faible (figure 4.17).

4.3.4 Variation de la vitesse de sortie du panache

La variation de la vitesse de sortie du panache n'apporte pas des différences sensibles dans la dynamique des processus de condensation et d'évaporation (figure 4.18). Elle influence l'élévation du panache, par la grandeur de la quantité de mouvement que le panache possède à sa sortie. Une vitesse de sortie plus élevée permet au panache d'atteindre une hauteur plus grande avant de descendre (figure 4.19). La concentration de polluant au sol est plus élevée dans le cas d'une vitesse de sortie du gaz supérieure, parce que la masse de polluant rejeté par la cheminée dans l'unité de temps est plus grande (figure 4.20).

4.3.5 Variation de la vitesse du vent

Pour étudier l'influence de la vitesse du vent sur le comportement du panache on choisit, en plus du cas de référence, le cas d'une vitesse du vent de 7 m/s à la hauteur de 10 m du sol. L'effet de la vitesse du vent sur la distance d'évaporation est évident sur la figure 4.21. Si la vitesse du vent est plus grande, l'évaporation des mêmes gouttelettes a lieu sur une distance horizontale plus grande. On sait que la vitesse de sortie du panache est importante seulement dans la phase initiale, parce que une fois incliné, le panache acquiert vite la vitesse du vent correspondant à sa hauteur (figure 4.22). Donc dans le cas d'un vent plus fort, le panache incliné est porté plus vite que dans le cas du vent plus faible. Le taux d'évaporation ne change pas sensiblement d'un cas à l'autre, mais la distance sur laquelle le processus a lieu est plus grande lorsque la vitesse du vent est plus élevée. La condensation des gouttelettes après la sortie du gaz est plus importante lorsque

la vitesse du vent est plus faible. La condensation cesse lorsque l'excès de température entre le panache et l'air atmosphérique atteint une valeur critique qui est constante à une humidité relative et un excès de température donnés. Cette valeur est atteinte plus vite dans le temps dans le cas d'une vitesse du vent plus élevée, à cause de la fraction plus grande d'air entraîné dans le panache.

La zone du courant établi commence plus vite lorsque la vitesse du vent est plus grande, ce qui diminue la hauteur maximale du panache (figure 4.23). On observe que dans les conditions d'un vent plus fort la pente de variation de la hauteur du panache est réduite, parce que le taux de variation de la quantité de mouvement horizontale est plus élevé, à cause d'un entraînement d'air plus important.

Dans le cas d'une vitesse du vent plus grande, le pic de la concentration de polluant au sol se déplace vers l'aval et sa valeur est diminuée par suite de la dilution plus forte du panache (figure 4.24).

4.4. Comparaison avec le panache sec

Si on compare maintenant la trajectoire d'un panache mouillé avec celle d'un panache sec qui sort avec les mêmes paramètres et dans les mêmes conditions atmosphériques, on constate une surélévation du panache mouillé, par rapport au panache sec, due à l'augmentation de la force de flottaison initiale par la condensation des gouttelettes qui a lieu après la sortie du gaz saturé de la cheminée (figure 4.25). Si le rayon initial des gouttelettes contenues dans le panache est petit ($10\text{ }\mu\text{m}$), la chaleur latente nécessaire à leur évaporation n'est pas assez importante pour faire descendre le panache par la suite. Mais, si ce rayon a une valeur plus grande ($30\text{ }\mu\text{m}$), le panache descend sous la hauteur d'équilibre du panache sec, à cause de sa force de flottaison négative développée pendant l'évaporation.

Les concentrations de polluant au sol varient selon les élévations que les panaches ont avant que la dilution ne devienne trop importante (figure 4.26). La concentration au sol la plus élevée est obtenue pour le panache sec.

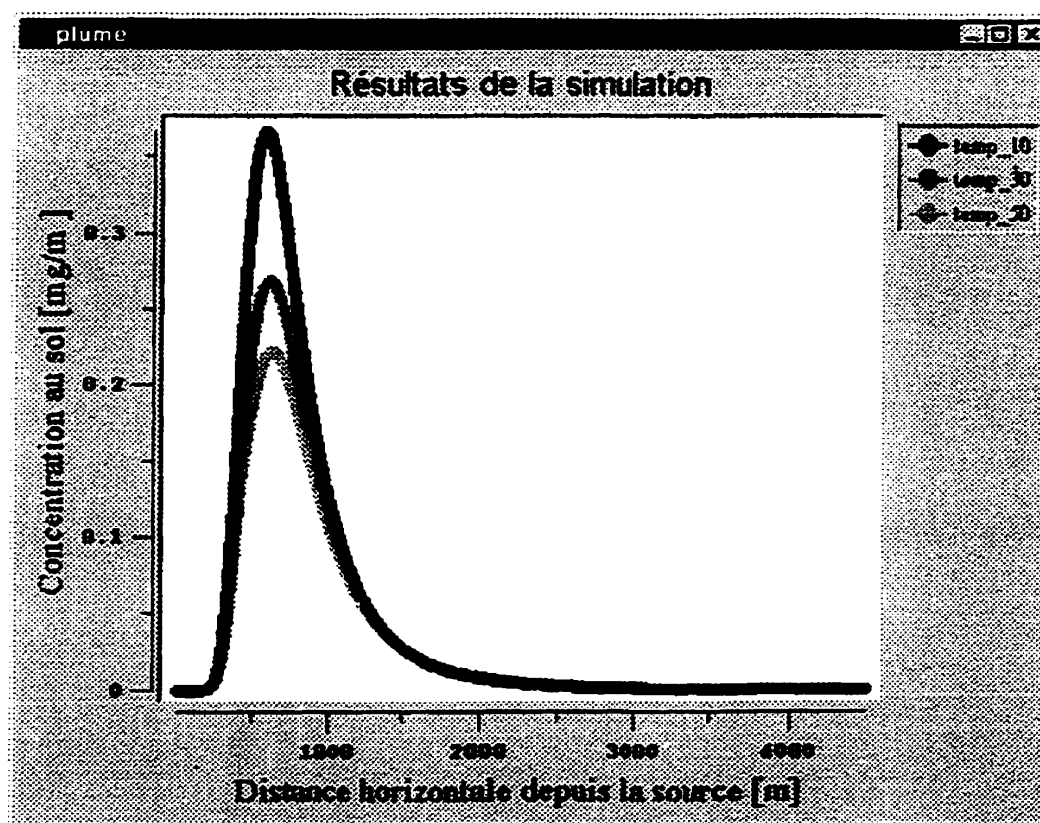


Figure 4.17 – Influence de la température de sortie du gaz sur le niveau de la concentration de polluant au sol

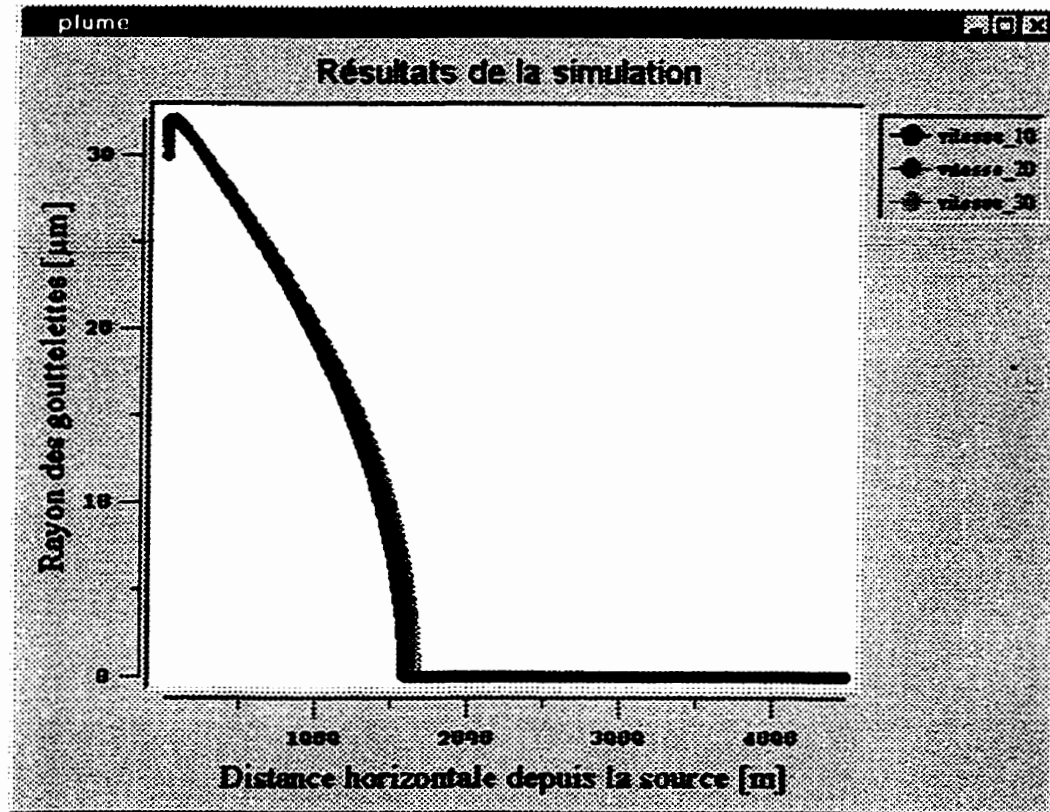


Figure 4.18 – Influence de la vitesse de sortie du gaz sur la variation du rayon des gouttelettes

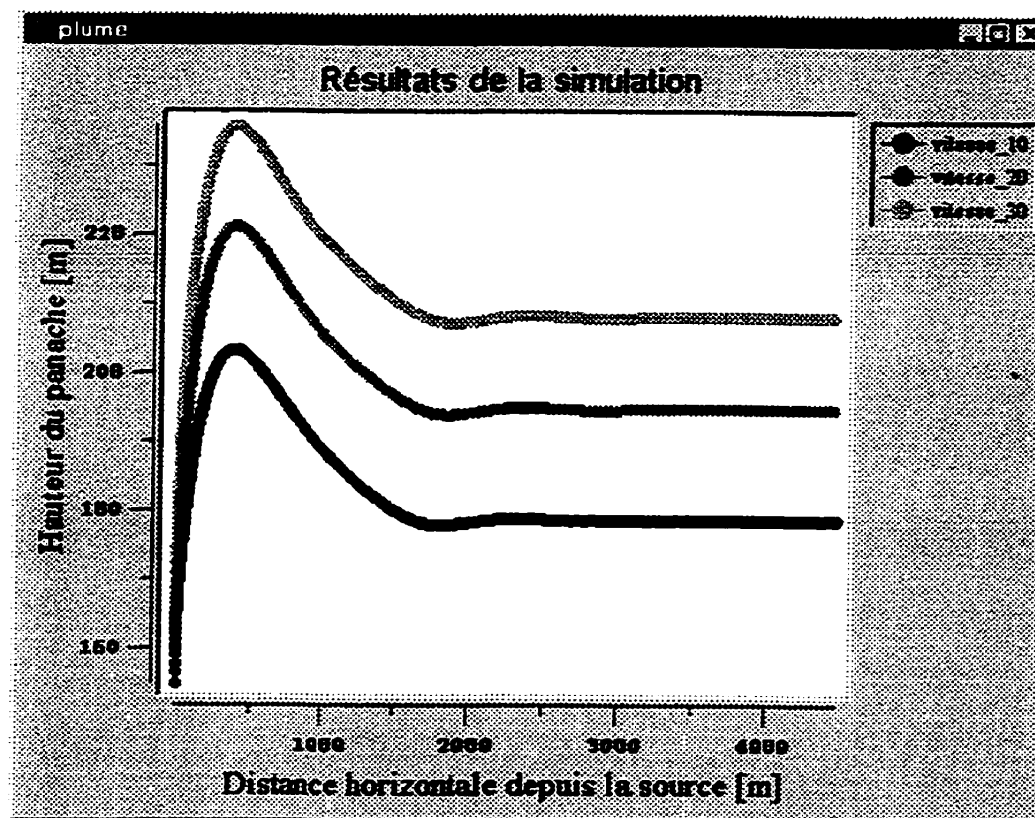


Figure 4.19 – Influence de la vitesse de sortie du gaz sur la variation de la hauteur du panache mouillé

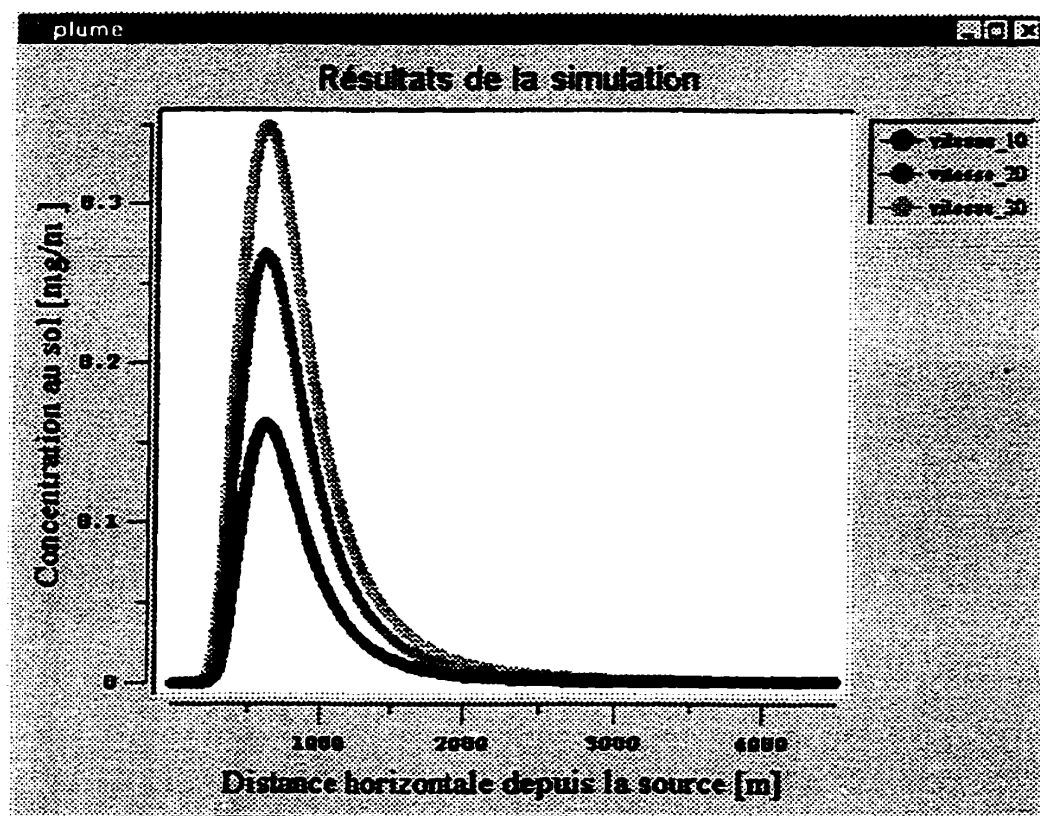


Figure 4.20 – Influence de la vitesse de sortie du gaz sur le niveau de la concentration de polluant au sol

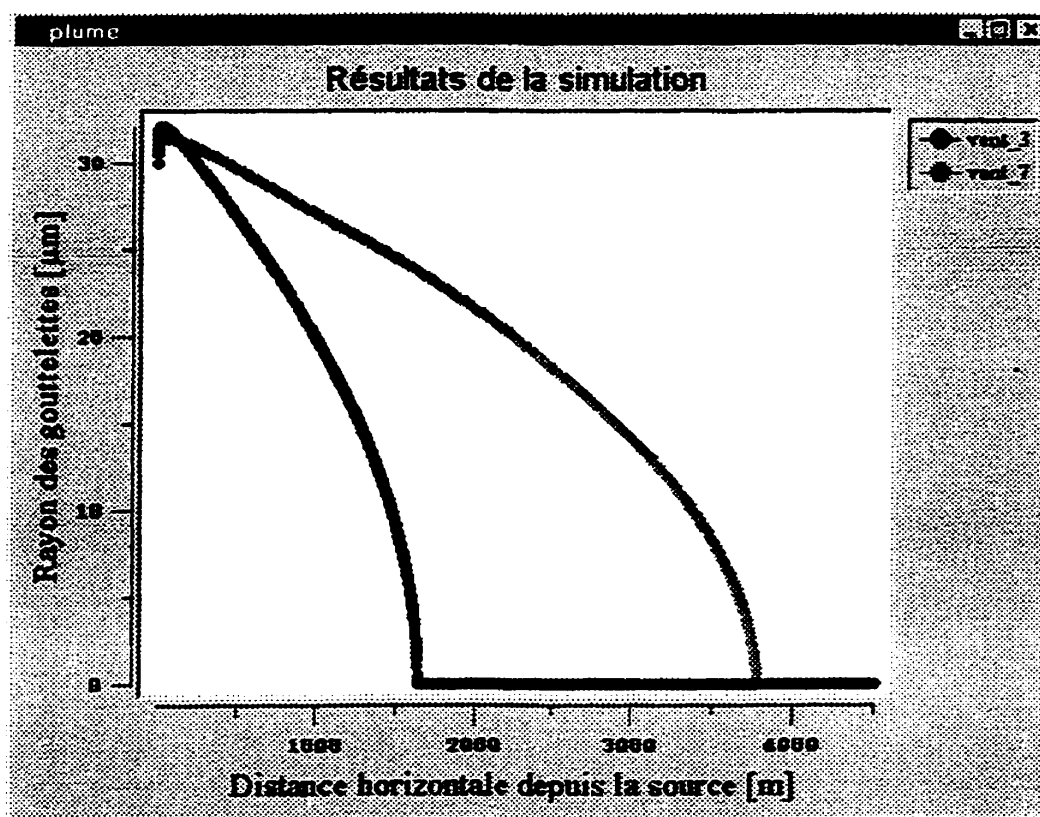


Figure 4.21 – Influence de la vitesse du vent sur la variation du rayon des gouttelettes

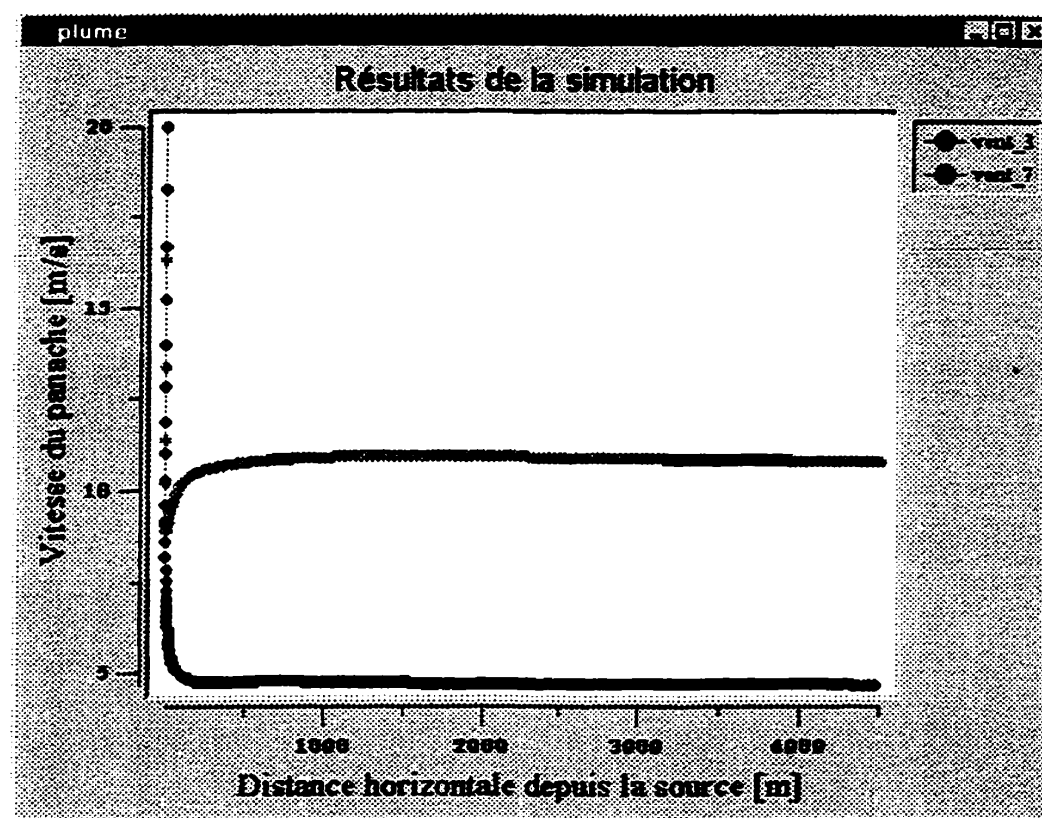


Figure 4.22 – Influence de la vitesse du vent sur la variation de la vitesse du panache mouillé

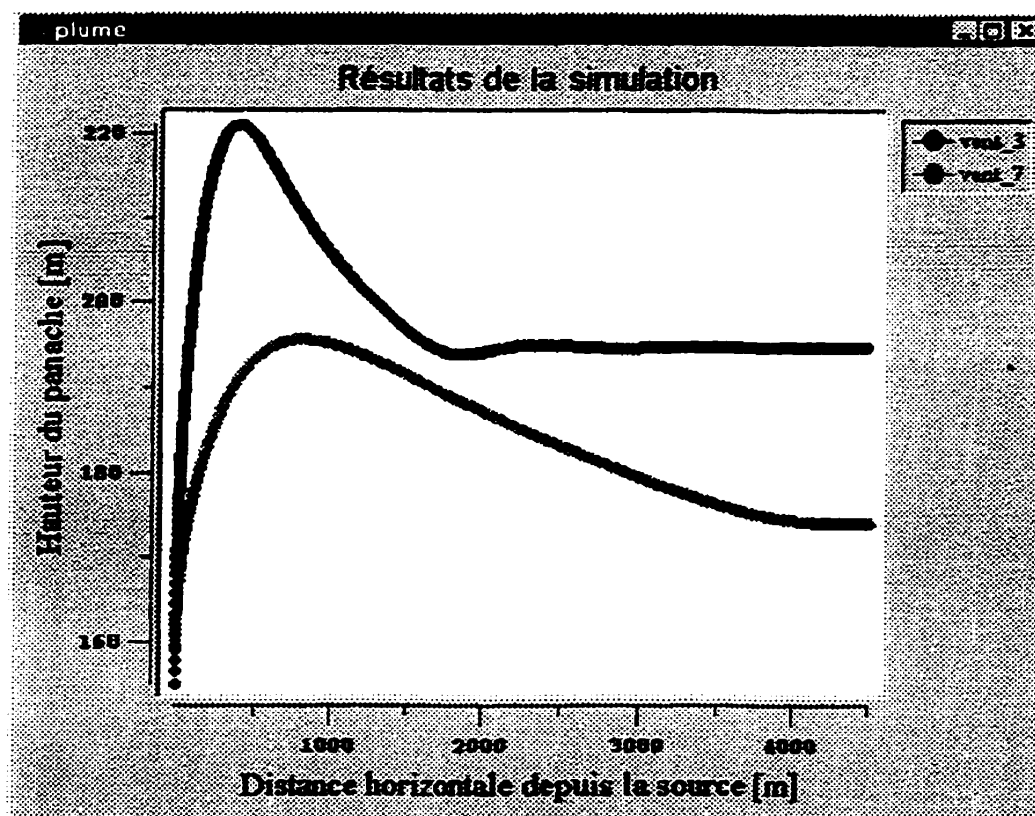


Figure 4.23 – Influence de la vitesse du vent sur la variation de la hauteur du panache mouillé

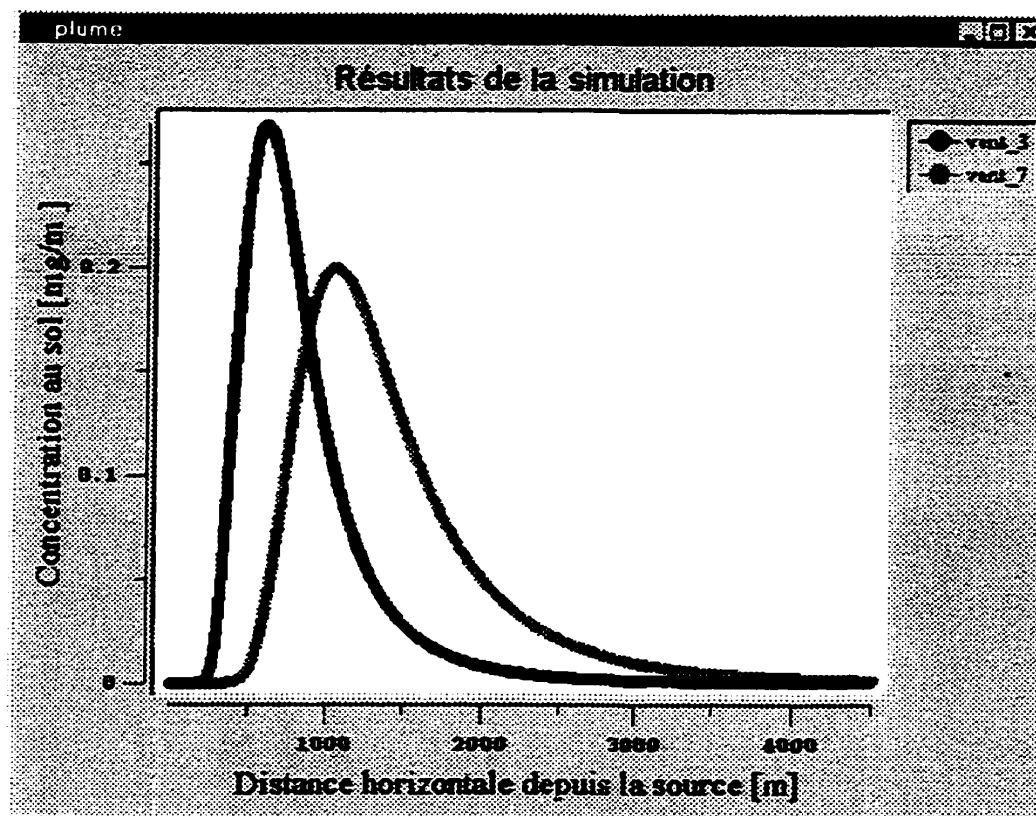


Figure 4.24 – Influence de la vitesse du vent sur le niveau de la concentration de polluant au sol

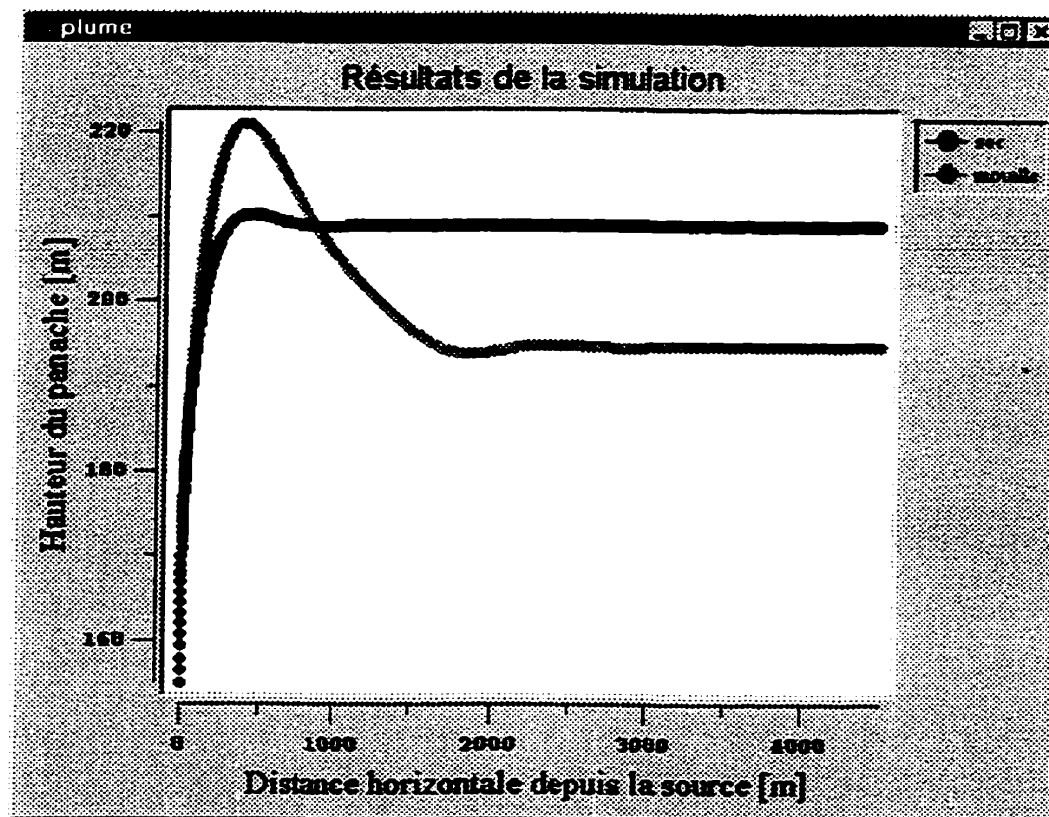


Figure 4.25 – Comparaison entre la hauteur du panache sec et celle du panache mouillé

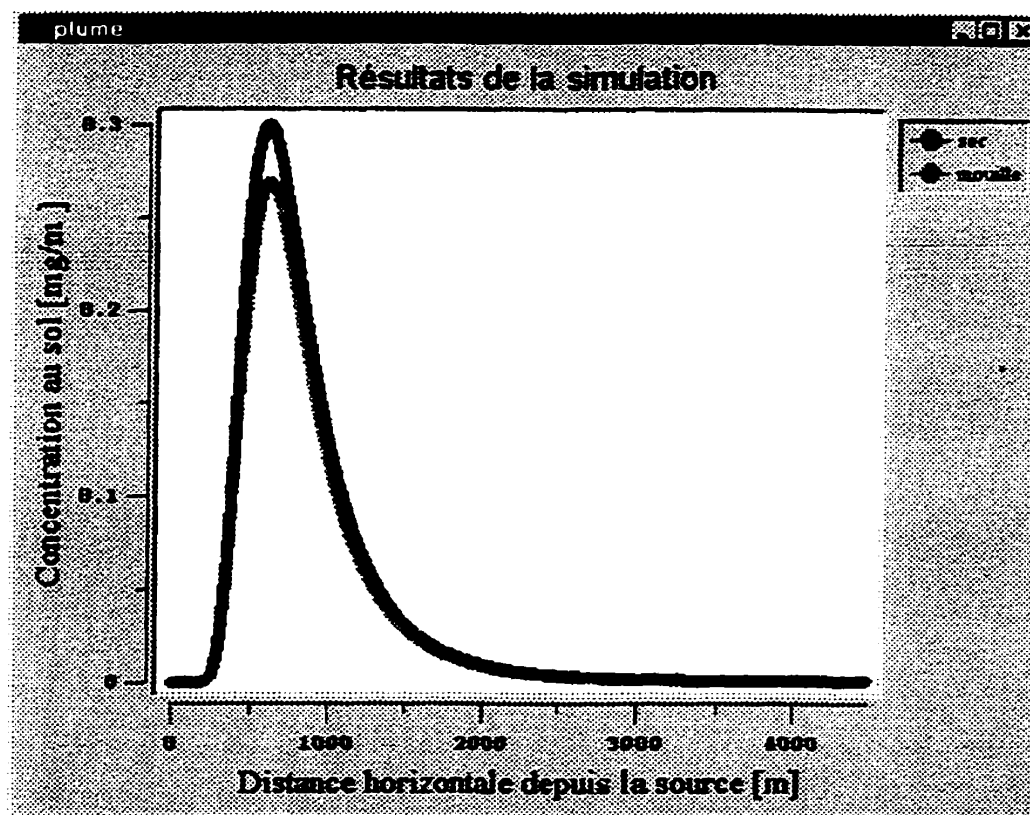


Figure 4.26 – Concentration de polluant au sol pour un panache sec et un panache mouillé

4.5. Comparaison avec d'autres modèles

4.5.1. Évaporation dans le panache

Wigley (1975) décrit la condensation et l'évaporation des gouttelettes d'eau dans un panache qui a subi un lavage avant la sortie dans une atmosphère neutre et bien mélangée. Il inclut la sursaturation du panache dans sa théorie comme une variable supplémentaire de calcul et un profil "top hat" pour les propriétés du panache dans la section transversale. Les paramètres introduits dans le calcul sont : la température atmosphérique, 10°C, l'humidité relative atmosphérique, 70%, la vitesse du vent, 5 m/s, la densité de noyaux de condensation dans l'atmosphère et dans le panache, 2000 /cm³, le rayon des noyaux de condensation, 0.5 µm, la température de sortie du gaz, 50°C, la vitesse de sortie du gaz, 20 m/s, le diamètre de la cheminée, 6 m, le coefficient d'entraînement pour la phase initiale du panache, $\alpha = 0.3$. Nous avons pris les mêmes paramètres dans le calcul, moins la densité initiale de noyaux de condensation dans le panache, qui dans notre cas représente la densité initiale des gouttelettes et a une valeur de 40 /cm³ et le coefficient d'entraînement pour la phase initiale du panache $\alpha = 0.057$. Notre modèle ne considère pas la sursaturation et la densité des gouttelettes diminue avec l'entraînement de l'air, tandis que dans le modèle de Wigley, la densité des gouttelettes reste constante.

Les résultats de Wigley sont présentés sur la figure 4.27 et nos résultats sur la figure 4.28. On observe une bonne concordance pour la forme de la courbe d'évaporation des gouttelettes. Le taux de condensation est très élevé à cause du grand excès de température à la sortie entre le panache et l'air atmosphérique. Les gouttelettes arrivent vite au rayon maximal et ensuite s'évaporent plus lentement. Vers la fin, l'évaporation est plus rapide.

Pour une comparaison plus facile, nous avons attaché au graphique de Wigley une deuxième abscisse qui exprime en mètres la distance horizontale parcourue par le

panache. On sait qu'il a utilisé dans son modèle une vitesse constante de 5 m/s pour le vent et que le panache est incliné et se déplace dans la direction du vent. Wigley obtient un rayon maximal des gouttelettes de $7,36 \mu\text{m}$ à une distance de 8 m et l'évaporation complète à 120 m. Nos résultats montrent un rayon maximal de $18,5 \mu\text{m}$, donc deux fois et demi plus grand, à une distance de la cheminée de 43 m et l'évaporation complète à 847 m. Le fait que nous avons obtenu un rayon maximal plus grand que celui obtenu par Wigley peut être expliqué par la considération de la sursaturation dans son modèle, ce qui diminue le contenu d'eau condensée dans le panache, donc le rayon des gouttelettes. Nous ne pouvons pas estimer le taux d'évaporation des gouttelettes, parce qu'on ne connaît pas la variation de la vitesse du panache dans le temps. On représente sur la figure 4.29 la variation de la vitesse du panache dans l'espace. On observe la diminution de la valeur de sortie vers la valeur de la vitesse du vent.

On ne peut donc pas situer notre taux de variation du rayon des gouttelettes relativement à celui trouvé par Wigley, mais on peut affirmer que le comportement des gouttelettes est similaire : une condensation du panache très rapide à la sortie de la cheminée, suivi d'une évaporation relative plus lente au début et accélérée vers la fin.

4.5.2. Courbe de saturation

Maintenant on considère un panache saturé qui ne contient pas des gouttelettes d'eau, mais un nombre suffisant de noyaux de condensation pour éviter la supersaturation et on détermine par essais successifs si la vapeur du panache se condense après la sortie de la cheminée. La théorie de Wigley et Slawson (1971) montre que la vapeur du panache mouillé se condense soit très près de sa sortie, soit pas du tout.

La valeur du rayon initial des gouttelettes n'a pas d'importance dans le calcul de la possibilité de condensation. L'apparition de la condensation ne dépend pas de la grandeur initiale des gouttelettes d'eau dans le panache, ni de leur nombre. Il est important de

choisir un pas de calcul petit pour ne pas manquer la valeur maximale qui peut exister entre deux pas de calcul. On calcule donc avec un pas de 0.01 fois le rayon initial du panache. La température atmosphérique considérée à la sortie du panache est de 10°C . Le point où la condensation a lieu pour la première fois dépend de l'excès de température du panache et de l'humidité relative de l'atmosphère. On va nommer point de condensation la valeur minimale de l'excès de température à une humidité relative donnée, pour laquelle la vapeur du panache se condense. Les points de condensation obtenus avec notre modèle sont comparés avec ceux trouvés par Wigley et Slawson (1971) pour la même température atmosphérique de 10°C . Ces derniers considèrent le cas d'un panache de tour de refroidissement qui sort avec une humidité relative de 100% dans une atmosphère neutre et bien mélangée. Les propriétés du panache dans la section transversale respectent un profil "top hat". Les auteurs déterminent une courbe qui représente les conditions critiques d'apparition de la condensation et affirment que leurs résultats sont indépendants de la dynamique du panache (figure 4.30). La condensation peut avoir lieu seulement dans les conditions situées au dessus de la courbe.

Les points où la vapeur d'eau condense pour la première fois après la sortie de la cheminée trouvés avec notre modèle sont superposés au graphique de Wigley et Slawson (figure 4.31). Elles approximent bien la courbe de saturation, surtout pour des humidités relatives atmosphériques élevées. On obtient des différences de $1-2^{\circ}\text{C}$ seulement entre les excès de température qui déterminent la condensation du panache saturé pour une humidité relative atmosphérique donnée. Pour un excès de température du panache respectivement de $13,5^{\circ}\text{C}$ pour notre modèle et de $15,5^{\circ}\text{C}$ pour le modèle de Wigley et Slawson (1971), on a une condensation de la vapeur d'eau du panache pour n'importe quelle humidité relative de l'atmosphère. Nous pensons que la modélisation différente de l'entraînement de l'air dans le panache dans sa phase initiale dans les deux méthodes est la cause des différences entre les résultats. L'humidité relative du panache à la sortie est toujours de 100%. Pour des humidités relatives atmosphériques petites, l'entraînement de l'air atmosphérique dans le panache apporte des changements plus importants dans

l'humidité relative du panache que dans le cas des humidités relatives atmosphériques proches de la valeur unitaire. Donc, dans le premier cas, la différence entre les modélisations est plus visible.

Il ne faut pas oublier aussi que le diamètre des tours de refroidissement sont dix fois plus grands que celui que nous avons considéré dans le calcul (3 mètres) et que le rapport superficie / volume pour le panache est dix fois plus grand dans le cas des cheminées industrielles que dans le cas des tours de refroidissements. Donc, dans le mélange, la contribution de la masse d'air atmosphérique est plus importante pour les panaches provenant des cheminées industrielles, ce qui devrait réduire la possibilité d'apparition de la condensation. Selon ces explications, on conclut que la différence entre la modélisation de l'entraînement de l'air atmosphérique dans les deux modèles doit être encore plus importante qu'on pensait au début, parce que Wigley et Slawson ont obtenu des possibilités plus petites d'apparition de la condensation dans le panache.

Notre modélisation produit des légères variations des points de condensation en fonction de la vitesse de sortie du panache et de la vitesse du vent. Pour une humidité relative atmosphérique donnée, la condensation se produit pour la première fois à un excès de température plus grand dans le cas d'un vent plus fort que dans le cas d'un vent plus faible, à cause de l'entraînement plus important de l'air atmosphérique dans les conditions de vent plus fort.

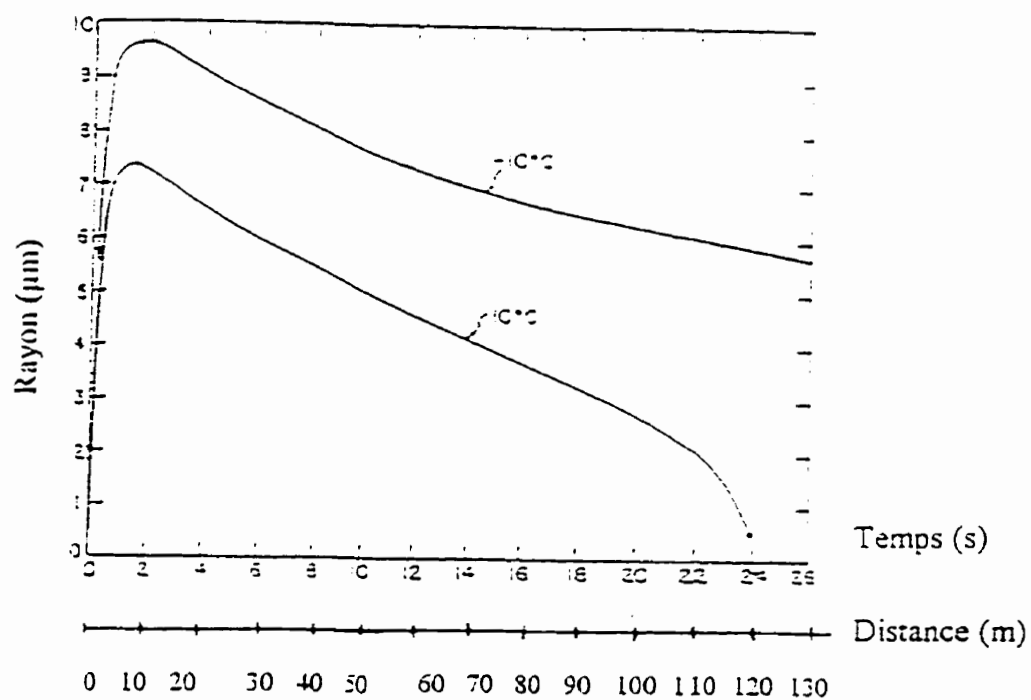


Figure 4.27 – Rayon moyen des gouttes dans un panache qui a subi un procédé de lavage pour des températures atmosphériques de 10 et -10°C (selon Wigley, 1975)

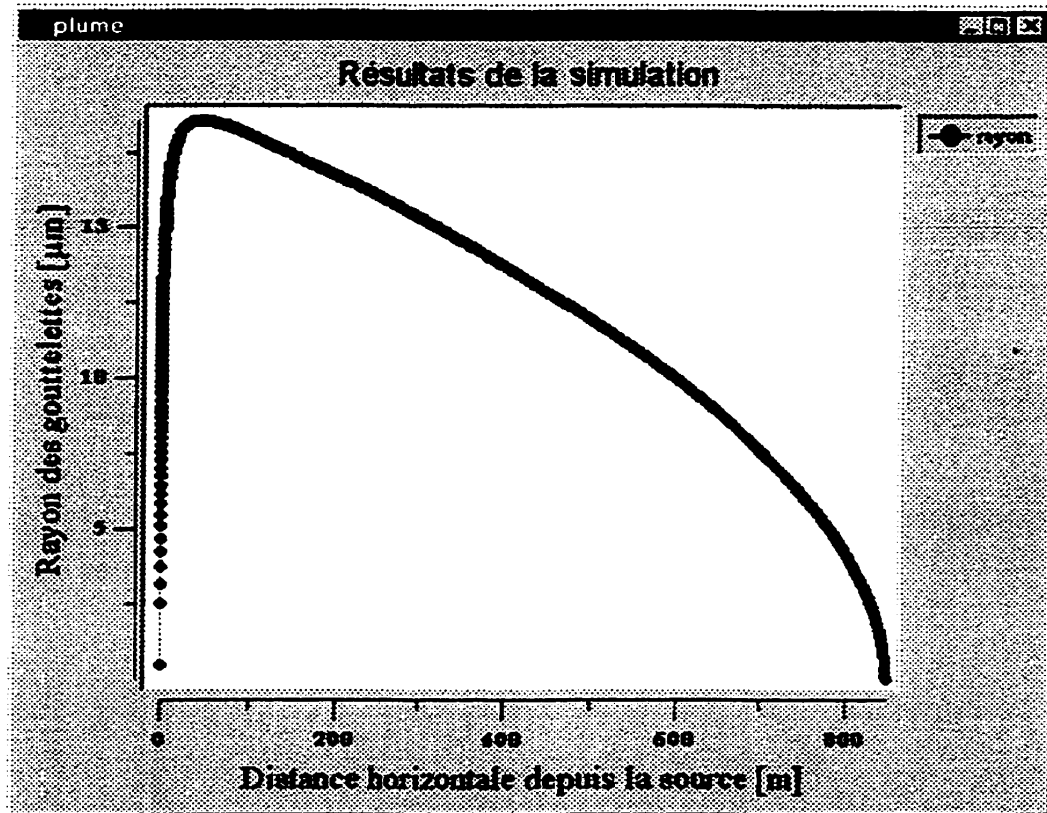
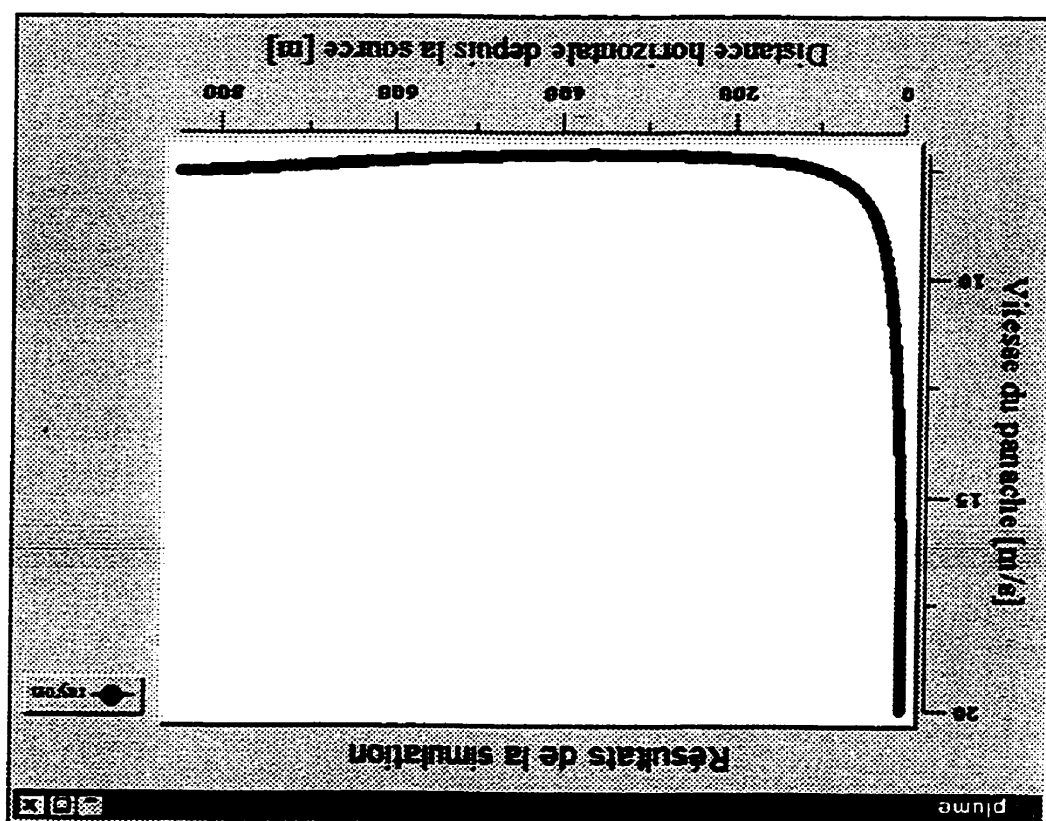


Figure 4.28 – Condensation et évaporation des gouttelettes qui ont le rayon initial de $10\mu\text{m}$

Figure 4.29 – Vitesse du panache qui contient des gouttelettes avec le rayon initial de 10 μ m



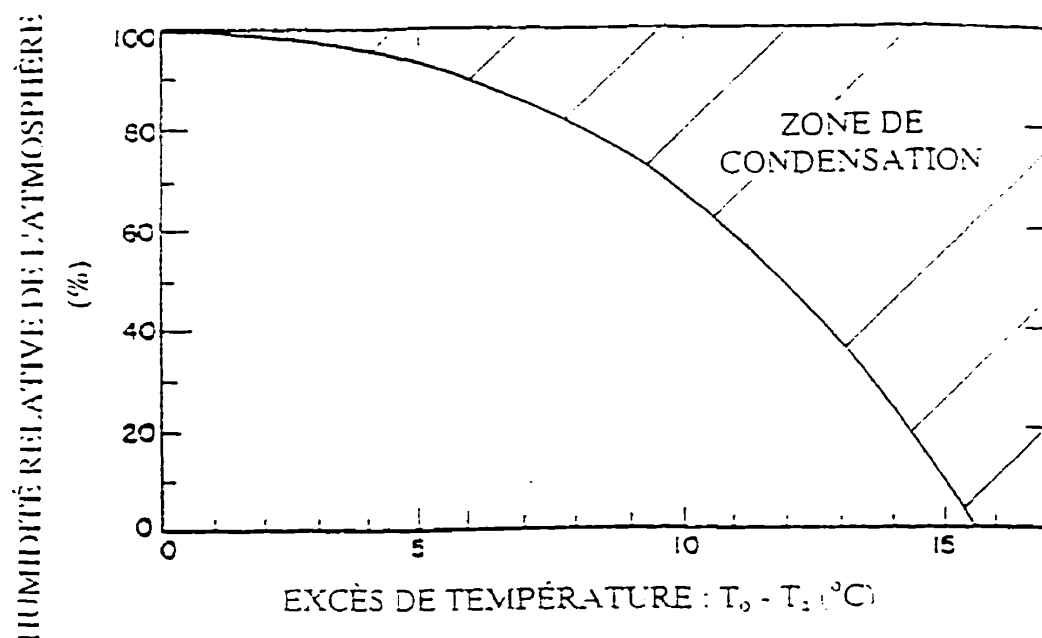


Figure 4.30 – Conditions critiques de condensation pour les effluents de tours de refroidissement (tirée de Wigley et Slawson, 1971)

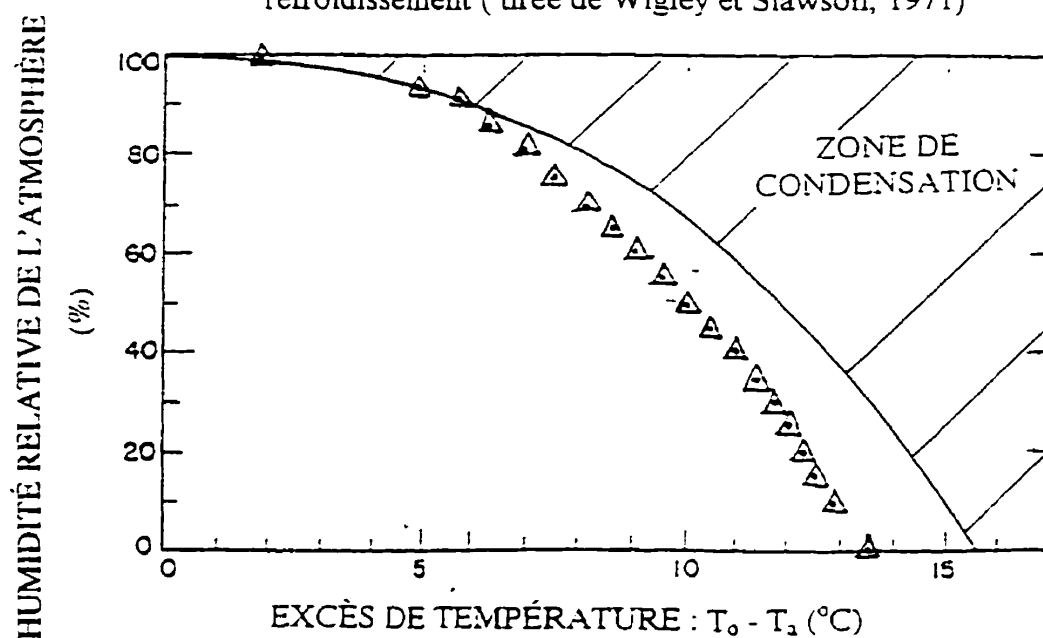


Figure 4.31 – Conditions critiques de condensation pour les effluents de tours de refroidissement et le panache humide (Δ : travaux de Dumitras, 1999)

CONCLUSIONS

La présente étude a développé un modèle pour l'analyse du comportement d'un panache mouillé dans une atmosphère humide. On a trouvé que les conditions à la sortie du gaz de la cheminée sont déterminantes pour le développement ultérieur du panache. L'influence des paramètres de sortie du panache et des paramètres atmosphériques a été examinée afin d'établir leur importance dans la variation des caractéristiques du panache.

Le calcul du panache mouillé a été effectué d'abord dans les conditions de référence et on est arrivé aux résultats suivants concernant la vitesse, la température et la forme du panache, ainsi que son angle d'incidence avec l'horizontale et le niveau de concentration de polluant au sol :

- ❖ La quantité de mouvement initiale du panache est vite diminuée par l'entraînement de l'air atmosphérique.
- ❖ La température du panache tend à atteindre celle de l'atmosphère et à se stabiliser à une hauteur d'équilibre.
- ❖ La forme de la section transversale du panache est elliptique à cause de la différence de grandeur entre les écarts type horizontal et vertical.
- ❖ L'angle d'incidence du panache avec l'horizontale descend assez rapidement de la valeur à la sortie vers une valeur négative si l'évaporation des gouttelettes est importante et par la suite se stabilise à une valeur de zéro.
- ❖ La concentration de polluant au sol atteint son maximum dans le premier kilomètre de distance horizontale de la cheminée, parce que plus loin le panache est dilué fortement par l'entraînement de l'air atmosphérique.

On a obtenu une descente du panache mouillé vers le sol à cause de la diminution de sa force de flottaison principalement par la chaleur latente nécessaire à l'évaporation des gouttelettes d'eau contenues dans le panache. Immédiatement après sa sortie de la

cheminée, en fonction de la valeur de l'excès de température entre le panache et l'air atmosphérique, la vapeur d'eau qui se trouve dans le panache peut se condenser. Si l'excès de température dépasse une valeur critique, la condensation a lieu. Les valeurs critiques trouvées pour l'excès de température en fonction de l'humidité relative atmosphérique sont similaires à celles obtenus par Wigley et Slawson (1971), surtout pour des humidités relatives atmosphériques élevées. Le panache commence à descendre lorsque sa force de flottaison devient négative. Selon la grandeur initiale des gouttelettes, il descend plus ou moins jusqu'à l'évaporation complète de l'eau et par la suite devient un panache sec qui se stabilise à une hauteur d'équilibre.

L'élévation du panache mouillé est aussi influencée par l'humidité atmosphérique. Dans une atmosphère plus sèche le panache s'élève plus que dans une atmosphère plus humide, à cause de la durée d'évaporation qui est plus courte, donc son influence est de plus courte durée que dans le cas d'une humidité relative supérieure. En conséquence le niveau de pollution au sol est plus grand dans le cas d'une humidité atmosphérique élevée.

Une température de sortie du gaz plus élevée permet au panache d'avoir une élévation plus grande qu'une température de sortie plus basse, mais la hauteur d'équilibre peut être plus petite (figure 4.16), selon l'excès de température à la sortie du gaz. Mais plus le gaz a une température de sortie élevée, plus le niveau de pollution au sol est réduit.

La vitesse de sortie du panache a un effet faible sur la condensation et l'évaporation des gouttelettes, mais elle contribue à l'élévation du panache. Malgré cela, la concentration de polluant au sol est plus élevée dans le cas d'une vitesse de sortie supérieure, parce que plus la vitesse de sortie du gaz augmente, plus la masse de polluant rejetée par la cheminée dans l'unité de temps augmente.

Un vent plus fort, comparativement au vent plus faible, augmente la distance horizontale sur laquelle se produit l'évaporation des gouttelettes et diminue l'élévation du panache. Mais parce qu'il détermine une dilution plus forte du panache, le niveau de la concentration de polluant au sol est réduite.

La comparaison avec le panache sec qui sort dans les mêmes conditions que le panache mouillé nous a montré que le panache mouillé atteint une élévation supérieure au panache sec à cause de la force de flottaison supplémentaire fournie par la condensation qui se produit après la sortie par la cheminée. Mais, en fonction de la taille initiale des gouttelettes d'eau que le panache contient, la hauteur d'équilibre peut être plus petite. La concentration de polluant au sol est plus élevée dans le cas du panache sec.

La dynamique de la condensation et de l'évaporation des gouttelettes modélisée dans notre théorie a été comparée avec celle énoncée par Wigley (1975). Le comportement des gouttelettes est similaire, mais des différences apparaissent dans la valeur maximale obtenue à la fin de la condensation et dans la distance d'évaporation. On a expliqué cette variation dans les résultats par le fait que Wigley a considéré la sursaturation du panache et a utilisé un coefficient de valeur supérieure pour l'entraînement de l'air.

Suggestions pour la continuation de l'étude

Dans ce projet, le comportement du panache mouillé a été étudié seulement dans le cas d'une atmosphère neutre avec une humidité relative constante avec l'altitude. Plusieurs stabilités atmosphériques peuvent être considérées, ainsi qu'un gradient d'humidité relative atmosphérique différent de la valeur nulle. On recommande la consultation de l'article "A Comparison of Wet and Dry Bent-Over Plumes", par Wigley et Slawson (1972).

Un profil Ekman pourrait être introduit pour la vitesse du vent, parce que notre modèle est capable de calculer la trajectoire du panache en trois dimensions.

RÉFÉRENCES

ABRAHAM G. (1970). Round buoyant jet in cross-flow. Fifth International Conf. Water Pollut. Res., San Francisco, U.S.A.

ALBERTSON M.L., DAI Y.B., JENSEN R.A. et ROUSE H. (1950). Diffusion of submerged jet. Trans. A.S.C.E., 115, 639-697

ANDREAS E.L. (1990). Time constants for the evolution of sea spray droplets. Tellus, 42B, 481-497

BOSANQUET C.H. et PEARSON J.L. (1936). The spread of smoke and gases from chimneys. Trans. Faraday Society, 32, 1249-1264

BRIGGS G.A. (1969). Plume rise. U.S. Atomic Energy Commission

BRYANT L.W. et COWDREY C.F. (1955). The effects of velocity and temperature of discharge on the shape of smoke plumes from a tunnel or chimney : experiments in a wind tunnel. Proc. Inst. Mech. Eng. (London), 169, 371-400

CARPENTER S.B. et al. (1967). Report on a full scale study of plume rise at large electric generating stations, Paper 67-82, 60th Annual Meeting of the Air Pollution Control Association, Cleveland, Ohio

CSANADY G.T. (1971). Bent-over vapor plumes. J. of Applied Meteorology, 10, 36-42

DAVIDSON G.A. (1986). A discussion of Schatzmann's integral plume model from a control volume viewpoint. J. of Climate and Applied Meteorology, 25, 858-867

FAN L. (1967). Turbulent buoyant jets into stratified or flowing ambient fluids. California Institute of Technology Report No. KH-R-15, California Institute of Technology, Pasadena, California

FUCHS N.A. (1959). Evaporation and droplet growth in gaseous media. Pergamon Press

GANGOITI G., SANCHO J., IBARRA G., ALONSO L., GARCÍA J.A., NAVAZO M., DURANA N. ET ILARDIA J.L. (1997). Rise of moist plumes from tall stacks in turbulent and stratified atmospheres. Atmospheric Environment, 31, 253-269

GARTRELL F.E., THOMAS F.W. et CARPENTER S.B. (1961). An interim report on full scale study of dispersion of stack gases. J. Air Pollut. Contr. Ass., 11, 60-65

GARTRELL F.E., THOMAS F.W. et CARPENTER S.B. (1964). Full scale study of dispersion of stack gases, Tennessee Valley Authority, Chattanooga

HALL W.D. et PRUPPACHER H.R. (1976). The survival of ice particles falling from cirrus clouds in subsaturated air. J. Atmos. Sci., 33, 1995-2006

HANNA S.R. (1972). Rise and condensation of large cooling tower plumes. J. of Applied Meteorology, 11, 793-799

KAIMAL J.C., WYNGAARD J.C., HAUGEN D.A., COTÉ O.R. et IZUMI Y. (1976). Turbulence structure in the convective boundary layer. J. Atmos. Sci., 33, 2152-2165

KEFFER J.F. et BAINES W.D. (1963). The round turbulent jet in a cross-wind. J. Fluid Mech., 15, 481-496

LEE J. (1976). A numerical simulation of atmospheric convection caused by heat dissipation at large power centers. Third Symposium on Atmospheric Turbulence, Diffusion and Air Quality, Raleigh, N.C., 1976, oct. 19-22

LI X., LEIJDENS H. et OOMS G.(1986). An experimental verification of a theoretical model for the dispersion of a stack plume heavier than air. Atmospheric Environment, 20, 1087-1094

LUCAS D.H. (1966). Symposium on plume behavior. Int. J. Air Water Pollut., 10, 343-409

MAXWELL J.C. (1890). Collected scientific papers, Cambridge, 11, 625

McDONALD J.E. (1958). The physics of cloud modification. Advances in Geophysics, vol. 5, 223-303, Academic Press, Inc.

MORTON, B.R. (1957). Buoyant plumes in a moist atmosphere. J. Fluid Mech., 2, 127-144.

MORTON B.R., TAYLOR G.I. et TURNER J.S. (1956). Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources. Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A, 234, 1-23

NETTERVILLE D.D.J. (1990). Plume rise entrainment and dispersion in turbulent winds. Atmospheric Environment, 24A, 1061-1081

OOMS G., MAHIEU A.P. et ZELIS F. (1974). The plume path of vent gases heavier than air. First International Symposium on Loss prevention and Safety Promotion in the Process Industries, The Hague, May 1974

OOMS G. (1972). A new method for the calculation of the plume path of gases emitted by a stack. Atmospheric Environment, 6, 899-909

OOMS G. et MAHIEU A.P. (1981). A comparison between a plume path model and a virtual point source model for a stack plume. Applied Scientific Research, 36, 339-356

PAI S.I. (1954). Fluid dynamics of jets. D. Van Nostrand Company, Inc., New York

PASQUILL F. (1962). Atmospheric Diffusion, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J.

PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., FLANNERY B.P. et VETTERLING W.T. (1992). Numerical Recipes in FORTRAN : the art of scientific computing, Cambridge University Press

PRIESTLEY C.H.B. (1956). A working theory of the bent-over plume of hot gas. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 82, 165-176

PRUPPACHER H.R. et KLETT J.D. (1997). Microphysics of clouds and precipitation. Kluwer Academic Publishers

REIST P.C. (1984). Introduction to aerosol science. Macmillan Publishing Company, NY

RICHARDS J.M. (1963). Experiments on the motion of isolated cylindrical thermals through unstratified surroundings. Int. J. Air Water Pollut., 7, 17-34

ROGERS R.R. (1979). A short course in cloud physics, Pergamon, NY

ROUSE H., YIH C.S. et HUMPHREYS H.W. (1952). Gravitational convection from a boundary source. Tellus, 4, 201-210

SCHATZMANN M. (1979). An integral model of plume rise. Atmospheric Environment, 13, 721-731

SCHATZMANN M. et POLICASTRO A.J. (1984). An advanced integral model for cooling tower plume dispersion. Atmospheric Environment, 18, 663-673

SCHLICHTING H. (1960). Boundary layer theory. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York

SCHMIDT W. (1941). Turbulente ausbreitung eines stromes erhitzter luft. Z. Angew. Math. Mech., 21, 265-278 et 21, 351-363

SINGER I.A. et SMITH M.E. (1966). Atmospheric Dispersion at Brookhaven National Laboratory. Int. J. Air Water Pollut., 10, 125-135

SLAWSON, P.R. et CSANADY G.T. (1967). On the mean path of the buoyant, bent-over chimney plumes. J. Fluid Mech., 28, 311-322.

SMITH R.K. (1997). The physics and parameterization of moist atmospheric convection. NATO ASI Series, Mathematical and Physical Science, 55, 29-39

THU L. (1979). Étude tridimensionnelle de la trajectoire d'un panache sec ou mouillé. Mémoire de maîtrise. École Polytechnique de Montréal, Canada

THOMPSON W. (1870). On the equilibrium of vapour at a curved surface of liquid. Proc. Roy. Soc. Edinb., 7, 63-68

VADOT L. (1965). Étude de la diffusion des panaches de fumée dans l'atmosphère. Centre Interprofessionnel Technique d'Études de la Pollution Atmosphérique, Paris

WEIL J.C. (1974). The rise of moist, buoyant plumes. J. of Applied Meteorology, 13, 435-443

WIGLEY T.M.L. (1975). Condensation in jets, industrial plumes and cooling tower plumes. J. of Applied Meteorology, 14, 78-86

WIGLEY T.M.L. ET SLAWSON P.R. (1971). On the condensation of the buoyant, moist, bent-over plume. J. of Applied Meteorology, 10, 253-259

WIGLEY T.M.L. ET SLAWSON P.R. (1972). A comparison of wet and dry bent-over plumes. J. of Applied Meteorology, 11, 335-340

YIH C.S. (1951). Free convection due to a point source of heat, Proceedings of First U.S. National Congress of Applied Mechanics, 941-947, American Society of Mechanical Engineers

ANNEXE I

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE CONSERVATION

a) Équation de l'entraînement de l'air atmosphérique

D'abord on remplace les profils de similarité (2.2.11) dans le terme à gauche de l'équation de l'entraînement de l'air atmosphérique (2.3.9) et on divise l'intégrale en quatre parties :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r dr d\varphi &= \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} (\rho_a + \rho_{axe} e^{-r^2/\lambda^2 B^2}) (u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe} e^{-r^2/B^2}) r dr d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho_a u_a \cos \theta \cos \gamma r dr d\varphi + \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho_a u_{axe} e^{-r^2/B^2} r dr d\varphi + \\
 &+ \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho_{axe} e^{-r^2/\lambda^2 B^2} u_a \cos \theta \cos \gamma r dr d\varphi + \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho_{axe} e^{-r^2/\lambda^2 B^2} u_{axe} e^{-r^2/B^2} r dr d\varphi
 \end{aligned}
 \tag{A.1.1}$$

On tient compte que

$$R(\varphi) = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \varphi}} \tag{A.1.2}$$

et on réalise l'intégration :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u r dr d\varphi &= \pi ab (2\rho_a u_a \cos \theta \cos \gamma + \rho_a u_{axe} + \lambda^2 \rho_{axe} u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \rho_{axe} u_{axe}) = \\
 &= \pi ab \left[\lambda^2 \rho_{axe} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \rho_a (2u_a \cos \theta \cos \gamma + u_{axe}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{A.1.3}$$

On procède similairement avec les autres équations de conservation et on obtient :

b) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction Ox :

$$\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u^2 \cos \theta \cos \gamma r dr d\varphi = \pi ab \left[\cos \theta \cos \gamma \left[\lambda^2 \rho_a \left(u_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2u_a u_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} \right) + \frac{u_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right] + \frac{\rho_a}{2} (u_{axe} + 2u_a \cos \theta \cos \gamma)^2 \right] \quad (A.1.4)$$

c) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oy :

$$\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u^2 \cos \theta \sin \gamma r dr d\varphi = \pi ab \left[\cos \theta \sin \gamma \left[\lambda^2 \rho_a \left(u_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2u_a u_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} \right) + \frac{u_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right] + \frac{\rho_a}{2} (u_{axe} + 2u_a \cos \theta \cos \gamma)^2 \right] \quad (A.1.5)$$

d), e) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oz pour le panache sec et humide :

$$\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^{\varphi} \rho u^2 \sin \theta r dr d\varphi = \pi \left\{ ab \sin \theta \left[\lambda^2 \rho_a \left(u_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2u_a u_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{u_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \frac{\rho_a}{2} (u_{axe} + 2u_a \cos \theta \cos \gamma)^2 \right] \right\} \quad (A.1.6)$$

f) Équation de conservation de l'énergie pour le panache sec :

$$\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^u \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{ao}}\right) r dr d\varphi = \pi ab \left[\left(u_{axe} + 2u_a \cos \theta \cos \gamma\right) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}}\right) - \lambda^2 \frac{\rho_{axe}}{\rho_{ao}} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1}\right) \right] \quad (A.1.7)$$

g) Équation de conservation de l'énergie pour le panache humide :

$$\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^u \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{ao}} \star \frac{R_p}{R_a}\right) r dr d\varphi = \pi ab \left[\left(u_{axe} + 2u_a \cos \theta \cos \gamma\right) \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_{ao}} \star \frac{R_p}{R_a}\right) - \lambda^2 \frac{\rho_{axe}}{\rho_{ao}} \star \frac{R_p}{R_a} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1}\right) \right] \quad (A.1.8)$$

h) Équation de conservation du polluant :

$$\int_0^{2\pi R(\varphi)} \int_0^u c r dr d\varphi = \pi ab \lambda^2 c_{axe} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{u_{axe}}{\lambda^2 + 1}\right) \quad (A.1.9)$$

ANNEXE II

DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE CONSERVATION

Après l'intégration des équations, on rend sans dimensions les paramètres de calcul dans les équations, en tenant compte des notations (4.1.1) et on réalise la dérivation :

a) Équation de l'entraînement de l'air atmosphérique

Normalisation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left(fp \lambda^2 AB \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + AB \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right) = \\ = 2K\beta \left(\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U' \right) \end{aligned} \quad (A.2.1)$$

Dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} \left[p \lambda^2 AB \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) \right] + \frac{dU_{axe}}{d\zeta} AB \left(fp \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} + \beta \right) - \\ - \frac{d\theta}{d\zeta} AB U_a \sin \theta \cos \gamma (2\beta + fp \lambda^2) + \frac{d(AB)}{d\zeta} \left[fp \lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ \left. + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d\gamma}{d\zeta} AB U_a \cos \theta \sin \gamma (2\beta + fp\lambda^2) = -\frac{dU_a}{d\zeta} AB \cos \theta \cos \gamma (2\beta + fp\lambda^2) - \\
& -\frac{d\beta}{d\zeta} AB (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) + 2K\beta (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') \\
& \quad (A.2.2)
\end{aligned}$$

b) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction Ox

Normalisation :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\zeta} \left\{ AB \cos \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right] \right\} = \\
& = 2K\beta U_a \cos \gamma (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') + \\
& + C_D K \beta U_a^2 (\sin^3 \theta \cos^3 \gamma + \sin^3 \gamma) \\
& \quad (A.2.3)
\end{aligned}$$

Dérivation :

$$\begin{aligned}
& \frac{df}{d\zeta} p\lambda^2 AB \cos \theta \cos \gamma \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \\
& + \frac{dU_{axe}}{d\zeta} AB \cos \theta \cos \gamma \left[2pf\lambda^2 \left(\frac{U_a \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}}{2\lambda^2 + 1} \right) + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[2U_a \cos \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] + \right. \\
& - \frac{d\theta}{d\zeta} AB \sin \theta \cos \gamma \left. + pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right] + \\
& + \frac{d(AB)}{d\zeta} \cos \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right] -
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
& 2U_a \cos \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] + \\
& - \frac{d\gamma}{d\zeta} AB \cos \theta \sin \gamma \left\{ + pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right\} =
\end{aligned} \right.$$

$$= - \frac{d\beta}{d\zeta} \frac{AB \cos \theta \cos \gamma}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 -$$

$$- \frac{dU_a}{d\zeta} 2AB \cos^2 \theta \cos^2 \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
\left. + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] +$$

$$+ 2K\beta U_a \cos \gamma (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') +$$

$$+ C_D K \beta U_a^2 (\sin^3 \theta \cos^3 \gamma + \sin^3 \gamma)$$

(A.2.4)

c) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction θ_y

Normalisation :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\zeta} \left\{ AB \cos \theta \sin \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right\} = \\ & = 2K\beta U_a \sin \gamma (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') + \\ & + C_D K \beta U_a^2 (\sin^3 \theta \cos^2 \gamma \sin \gamma - \sin^2 \gamma \cos \gamma) \\ & \quad (A.2.5) \end{aligned}$$

Dérivation :

$$\begin{aligned} & \frac{df}{d\zeta} p\lambda^2 AB \cos \theta \sin \gamma \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \\ & + \frac{dU_{axe}}{d\zeta} AB \cos \theta \sin \gamma \left[2pf\lambda^2 \left(\frac{U_a \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}}{2\lambda^2 + 1} \right) + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} & 2U_a \cos \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] + \right. \\ & -\frac{d\theta}{d\zeta} AB \sin \theta \sin \gamma \left. + pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right] + \\ \\ & + \frac{d(AB)}{d\zeta} \cos \theta \sin \gamma \left[\begin{aligned} & pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \\ & + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \end{aligned} \right] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{d\gamma}{d\zeta} AB \left\{ \begin{aligned} & 2U_a \cos^2 \theta \sin^2 \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ & \left. + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \\ & - pf\lambda^2 \cos \theta \cos \gamma \left[\left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right] \end{aligned} \right\} =$$

$$= -\frac{d\beta}{d\zeta} \frac{AB \cos \theta \sin \gamma}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 -$$

$$-\frac{dU_a}{d\zeta} 2AB \cos^2 \theta \sin \gamma \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ \left. + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] +$$

$$+ 2K\beta U_a \sin \gamma (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') +$$

$$+ C_D K\beta U_a^2 (\sin^3 \theta \cos^2 \gamma \sin \gamma - \sin^2 \gamma \cos \gamma)$$

(A.2.6)

d) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction $0z$ pour le panache sec

Normalisation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} \left\{ AB \sin \theta \left[pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right\} = \\ = -f\lambda^2 RiAB - C_D K \beta U_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta \end{aligned} \quad (A.2.7)$$

où

$$Ri = \frac{\sqrt{a_e b_e}}{u_e^2} g \frac{\rho_e - \rho_{ae}}{\rho_{ae}} \quad (A.2.8)$$

Dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} p\lambda^2 AB \sin \theta \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \\ + \frac{dU_{axe}}{d\zeta} AB \sin \theta \left[2pf\lambda^2 \left(\frac{U_a \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}}{2\lambda^2 + 1} \right) + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{d\theta}{d\zeta} AB \cos \theta \left\{ -2U_a \sin^2 \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \right. \\ \left. - pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right\} +$$

$$+ \frac{d(AB)}{d\zeta} \sin \theta \left[pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right] -$$

$$-\frac{d\gamma}{d\zeta} AB 2U_a \sin \theta \cos \theta \sin \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ \left. + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] =$$

$$= -\frac{d\beta}{d\zeta} \frac{AB \sin \theta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 -$$

$$-\frac{dU_a}{d\zeta} 2AB \cos \theta \sin \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\ \left. + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] -$$

$$- C_D K \beta U_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta - f\lambda^2 RiAB$$

(A.2.9)

e) Équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction $0z$ pour le panache mouillé

Normalisation :

$$\frac{d}{d\zeta} \left\{ AB \sin \theta \left[fp\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right\} =$$

$$= -f\lambda^2 RiAB - C_D K \beta U_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta - T\alpha^3$$

(A.2.10)

où

$$T = \frac{4}{3} r_{ge}^3 N_L \frac{g\gamma}{\rho_{ae} u_e^2 \sqrt{a_e b_e}} \quad (A.2.11)$$

Dérivation :

$$\begin{aligned}
& \frac{df}{d\zeta} p \lambda^2 AB \sin \theta \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \\
& + \frac{dU_{axe}}{d\zeta} AB \sin \theta \left[2pf\lambda^2 \left(\frac{U_a \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}}{2\lambda^2 + 1} \right) + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \\
& - \frac{d\theta}{d\zeta} AB \cos \theta \left\{ -pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. 2U_a \sin^2 \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \beta(2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right\} + \\
& + \frac{d(AB)}{d\zeta} \sin \theta \left[pf\lambda^2 \left(U_a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \gamma + \frac{2U_a U_{axe} \cos \theta \cos \gamma}{\lambda^2 + 1} + \frac{U_{axe}^2}{2\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d\gamma}{d\zeta} AB 2U_a \sin \theta \cos \theta \sin \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] = \\
& = -\frac{d\beta}{d\zeta} \frac{AB \sin \theta}{2} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe})^2 - \\
& -\frac{dU_a}{d\zeta} 2AB \cos \theta \sin \theta \cos \gamma \left[pf\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \beta (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) \right] - \\
& - C_D K \beta U_a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \gamma \cos \theta - f\lambda^2 RiAB - T\alpha^3
\end{aligned}$$

(A.2.12)

f) Équation de conservation de l'énergie pour le panache sec

Normalisation :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\zeta} \left\{ AB \left[(1 - \beta) (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) - fp\lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) \right] \right\} = \\
& = 2K(1 - \beta) (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U')
\end{aligned}$$

(A.2.13)

Dérivation :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{df}{d\zeta} p \lambda^2 AB \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \frac{dU_{axe}}{d\zeta} AB \left(1 - \beta - \frac{fp \lambda^2}{\lambda^2 + 1} \right) - \\
 & -\frac{d\theta}{d\zeta} U_a \sin \theta \cos \gamma AB (2 - 2\beta - fp \lambda^2) + \\
 & + \frac{d(AB)}{d\zeta} \left[(1 - \beta) (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) - fp \lambda^2 \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) \right] - \\
 & -\frac{d\gamma}{d\zeta} U_a \cos \theta \sin \gamma AB (2 - 2\beta - fp \lambda^2) = \\
 & = \frac{dU_a}{d\zeta} \cos \theta \cos \gamma (2\beta - 2 + fp \lambda^2) + \frac{d\beta}{d\zeta} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) + \\
 & + 2K(1 - \beta) (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') \\
 & \quad \quad \quad (A.2.14)
 \end{aligned}$$

g) Équation de conservation de l'énergie pour le panache mouillé

Normalisation :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{d\zeta} \left\{ AB \left[\left(1 - \beta \frac{R_p}{R_a} \right) (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) - fp \lambda^2 \frac{R_p}{R_a} \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) \right] \right\} = \\
 & = 2K(1 - \beta) \frac{R_p}{R_a} \frac{c_a}{c_g} (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') - \\
 & - \frac{4R_p LN_L r_g \epsilon D^*}{R_v c_g p_{atm} T_{ae} u_e \sqrt{a_e b_e}} \alpha \left[\frac{e_{sat}}{T_p} \exp \left(\frac{2\sigma}{r_g \gamma_w R_v T_p} \right) - \frac{e_p}{T_p} \right] \left[1 + 0.276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right] \\
 & \quad \quad \quad (A.2.15)
 \end{aligned}$$

Dérivation :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{df}{d\zeta} p \lambda^2 AB \frac{R_p}{R_a} \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) + \frac{dU_{axe}}{d\zeta} AB \left(1 - \beta \frac{R_p}{R_a} - \frac{fp \lambda^2}{\lambda^2 + 1} \frac{R_p}{R_a} \right) - \\
 & -\frac{d\theta}{d\zeta} U_a \sin \theta \cos \gamma AB \left(2 - 2\beta \frac{R_p}{R_a} - fp \lambda^2 \frac{R_p}{R_a} \right) + \\
 & + \frac{d(AB)}{d\zeta} \left[\left(1 - \beta \frac{R_p}{R_a} \right) (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) - fp \lambda^2 \frac{R_p}{R_a} \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right) \right] - \\
 & -\frac{d\gamma}{d\zeta} U_a \cos \theta \sin \gamma AB \left(2 - 2\beta \frac{R_p}{R_a} - fp \lambda^2 \frac{R_p}{R_a} \right) = \\
 & = \frac{dU_a}{d\zeta} \cos \theta \cos \gamma \left(2\beta \frac{R_p}{R_a} - 2 + fp \lambda^2 \frac{R_p}{R_a} \right) + \frac{d\beta}{d\zeta} \frac{R_p}{R_a} (2U_a \cos \theta \cos \gamma + U_{axe}) + \\
 & + 2K(1 - \beta) (\alpha_1 |U_{axe}| + \alpha_2 U_a \cos \theta |\sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma| + \alpha_3 U') - \\
 & - \frac{4R_p L N_L r_g \epsilon D^*}{R_v c_g p_{atm} T_{ac} u_e \sqrt{a_e b_e}} \alpha \left[\frac{e_{sat}}{T_p} \exp \left(\frac{2\sigma}{r_g \gamma_w R_v T_p} \right) - \frac{e_p}{T_p} \right] \left[1 + 0.276 \left(\frac{u_{rel} 2r_g}{g} \right)^{1/2} \left(\frac{g}{D^*} \right)^{1/3} \right]
 \end{aligned}
 \tag{A.2.16}$$

h) Équation de conservation du polluant

De l'équation (4.2.8) on obtient que l'expression

$$c_{axe} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma \pi a b \lambda^2 + u_{axe} \pi a b \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \right) \tag{A.2.17}$$

a une valeur constante au

long de la trajectoire. On connaît sa valeur à la sortie de la cheminée. On peut écrire alors:

$$c_{axe} \left(u_a \cos \theta \cos \gamma ab \lambda^2 + u_{axe} ab \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \right) = c_e \left(u_a^e \cos \theta_e \cos \gamma_e a_e b_e \lambda^2 + u_e a_e b_e \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \right)$$

(A.2.18)

et on substitue les notations (4.1.1) dans (A.2.18). On obtient la valeur normalisée de la concentration de polluant dans l'axe du panache :

$$C_{axe} = \frac{\left(\frac{u_a^e}{u_e} \cos \theta_e \cos \gamma_e + \frac{1}{\lambda^2 + 1} \right)}{AB \left(U_a \cos \theta \cos \gamma + \frac{U_{axe}}{\lambda^2 + 1} \right)} \quad (\text{A.2.19})$$