

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DE L'INSPECTION DES SYSTÈMES SUJETS À UNE
DÉGRADATION STOCHASTIQUE COMPOSÉE

HAKIM AOUDJIT

DÉPARTEMENT DE MATHÉTIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

(GÉNIE INDUSTRIEL)

AVRIL 2004



National Library
of Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

Acquisitions et
services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-612-91930-7

Our file Notre référence

ISBN: 0-612-91930-7

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

OPTIMISATION DE L'INSPECTION DES SYSTÈMES SUJETS À UNE
DÉGRADATION STOCHASTIQUE COMPOSÉE

Présenté par : AOUDJIT Hakim

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

Mme. YACOUT Soumaya, D.Sc., présidente

M. OUALI M-Salah, Doctorat, membre et directeur de recherche

M. ZDZISLAW Klim, Ing., Ph.D., membre

À ma mère, mon père, mon épouse et à Myriam.

À ma grande famille à Alger.

REMERCIEMENTS

Mes remerciements les plus sincères vont d'abord à mon directeur de recherche M.Ouali, qui, par sa disponibilité, ses directives et son soutien moral et financier m'a motivé à entreprendre et mener à terme ce travail de recherche.

Je remercie les membres du jury, Mme Yacout, professeur au département de mathématique et de génie industriel, ainsi que M. Klim, spécialiste principal, ingénierie, fiabilité, maintenabilité et sécurité chez Bombardier aéronautique, pour avoir accepté d'évaluer avec intérêt ce mémoire.

RÉSUMÉ

Cette étude développe un modèle d'optimisation de l'inspection des systèmes qui sont sujets à une dégradation aléatoire et dont l'aboutissement est une défaillance inopinée de l'équipement. Ces défaillances ne sont détectées que par les inspections. C'est une situation qui est souvent rencontrée sur les relais de protection, les coupes circuits ainsi que sur les équipements passifs dans les circuits redondants.

La dégradation étudiée pour les systèmes en question, est accumulée selon deux modes: un mode continu dû à l'usure normale, provenant des effets de la fatigue des matériaux, des frottements, de la corrosion et divers effets physico-chimiques, ainsi que d'un mode discontinu dû à l'effet de chocs répétitifs, qui s'accumulent et dont le résultat est une baisse par bonds successifs du potentiel durée de vie de l'équipement. Cet effet est observé par la suite d'actions généralement issues de l'environnement dans lequel l'équipement opère. Pour un relais, ce mode peut représenter des fluctuations dans l'alimentation en courant électrique par exemple.

La stratégie d'inspection consiste alors à ressortir des âges prédéterminés, dans lesquels le système est inspecté pour évaluer son état et proposer les actions de maintenance adéquates qu'il faut entreprendre. L'intérêt de cette recherche est alors de déterminer des stratégies d'inspections pratiques et surtout faciles à mettre en place.

Les soucis économiques induits par la maintenance ainsi que l'efficacité de la production liée à la disponibilité des équipements induisent des contraintes qui permettent d'aborder

l'optimisation de ce modèle d'inspection. Pour réaliser les compromis nécessaires pour minimiser les coûts dans certains cas et maximiser la disponibilité dans d'autres, l'inspection non périodique et périodique est utilisée pour atteindre cet objectif.

ABSTRACT

This study develops an optimization model for deteriorating equipment with non-self announcing failures under an inspection policy. A failure can be detected only by these inspections. This model applies to cases encountered on protective relays, circuit-breakers and stand-by systems on redundant equipments.

The degradation for the considered systems is accumulated in two underlying modes: a continuous deterioration due to normal wear, caused by fatigue, corrosion, friction, and different other physical and chemical effects. The second mode is a staircase, discontinuous deterioration due to repetitive shocks occurring suddenly which lower the lifetime potential of the equipment. This effect result the environment in which the system operates. For protective relay, this mode can represent fluctuations of electric current input.

The inspection policy consists of pre-assigned ages at which the equipment is inspected to assess its degradation state and instructions on what maintenance actions to perform upon observing the level of deterioration. This research focuses in determining practical and useful policies.

Economic issues and production effectiveness arise in conjunction with maintenance activity. Optimization is then needed to construct policies which reach trade-offs between these constraints. That is, we assign periodic and non-periodic inspection schemes to achieve lower maintenance costs and high availability levels.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xiii
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES ABRÉVIATIONS	xvi
LISTE DES ANNEXES	xviii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : PROBLÉMATIQUE ET REVUE DE LITTÉRATURE	5
1.1 Notions préliminaires	5
1.1.1 Variables aléatoires	5
1.1.2 Temps de la première défaillance	6
1.1.3 Convolution	8
1.1.4 Transformée de LAPLACE	9

1.1.5 Inversion de la transformée de LAPLACE	11
1.2 Dégradation et processus aléatoire	11
1.3 Processus cumulatifs	14
1.4 Problématique	15
1.5 Revue de littérature	17
1.5.1 Les modèles de dégradation	17
1.5.2 Les modèles d'inspection	22
CHAPITRE 2 : MODÉLISATION DE LA DÉGRADATION	27
2.1 Introduction	27
2.2 Modèles de dégradation	28
2.2.1 Processus de WIENER.....	29
2.2.2 Processus de chocs (compound point process)	32
2.3 Modèle de dégradation stochastique composé.....	36
2.3.1 Formulation du modèle	36
2.3.2 Distribution des défaillances	38
2.3.3 Influence des paramètres du modèle	46
CHAPITRE 3 : STRATÉGIES D'INSPECTION	52
3.1 Introduction	52

3.2 Coût total moyen par cycle	54
3.3 Disponibilité.....	55
3.4 Stratégie d'inspection non périodique	56
3.4.1 Expression du coût	56
3.4.2 Minimisation du coût	57
3.5 Stratégie d'inspection périodique	63
3.5.1 Expression de la disponibilité	64
3.5.2 Maximisation de la disponibilité.....	65
CHAPITRE 4 : APPLICATION	67
4.1 Mise en situation	67
4.2 Description du logiciel	69
4.3 Résultats pour le client 1	75
4.4 Résultats pour le client 2	80
4.5 Comparaison des résultats.....	83
CHAPITRE 5 : CONCLUSION	85
5.1 Récapitulatif des réalisations	85
5.2 Recommandations pour des travaux futurs	87
RÉFÉRENCES.....	90

ANNEXE 1 : Programmes Informatiques.....	94
ANNEXE 2 : Méthode de Romberg	136
ANNEXE 3 : Méthode de la sécante.....	144

LISTE DES TABLEAUX

- Tableau 3.1 Exemple de recherche de séquence d'inspection selon l'algorithme de Barlow et al pour $\alpha = 0.1$, $c_i = 2$, $c_r = 10$, $c_p = 1$ pour $F(t)$ selon l'équation (2.10)
- Tableau 4.1 Conditions d'utilisation chez deux clients
- Tableau 4.2 Données de dégradations simulées chez le client 1
- Tableau 4.3 Séquences d'inspections possibles pour le client 1
- Tableau 4.4 Données de dégradations simulées chez le client 2
- Tableau 4.5 Séquences d'inspections possibles pour le client 2

LISTE DES FIGURES

- Figure 1.1 Domaine d'intégration
- Figure 1.2 Données de dégradation physique par fissuration de l'alliage-A (Meeker et Escobar, 1998)
- Figure 1.3 Dégradation et instant de défaillance
- Figure 1.4 Taux de défaillance $\phi(t, y)$ (tirée de (Giglmayr, 1982))
- Figure 2.1 Trajectoires d'un processus de Wiener avec différentes valeurs de $(\sigma; \nu)$
- Figure 2.2 Courbes $F(t)$, $f(t)$, $\phi(t)$ et $R(t)$ d'un système se dégradant selon le processus de Wiener pour $\vartheta = 1, 2, 3; \beta = 1$
- Figure 2.3 Trajectoires d'un processus de chocs Poissonien (λ, ρ)
- Figure 2.4 Courbes $F(t)$, $f(t)$, $\phi(t)$ et $R(t)$ d'un système se dégradant selon le processus de chocs pour $\lambda = 1, 2, 3; \rho = 2; \xi = 4$
- Figure 2.5 Trajectoires du processus composé
- Figure 2.6 Courbes $F(t)$, $f(t)$, $\phi(t)$ et $R(t)$ d'un système se dégradant selon le processus composé avec $(\sigma, \nu, \rho, \lambda, \xi) = (0.01, 0.01, 0.1, 0.1, 4)$
- Figure 2.7 Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre $\sigma = \{0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$
- Figure 2.8 Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre $\nu = \{0.01, 0.1, 1, 0.001\}$

- Figure 2.9 Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre $\lambda = \{0.1, 1, 10, 0.001\}$
- Figure 2.10 Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre $\rho = \{0.1, 1, 2, 0.001\}$
- Figure 3.1 Dégradations et inspections
- Figure 3.2 Cycle de remplacement
- Figure 3.3 Détermination numérique de l'instant de la première inspection
- Figure 4.1 Interface de la page données
- Figure 4.2 Interface de la page dégradations
- Figure 4.3 Interface de la page distributions
- Figure 4.4 Interface de la page inspections
- Figure 4.5 Graphique de la dégradation simulée sur un cycle pour le client 1
- Figure 4.6 Courbes caractéristiques pour le client 1
- Figure 4.7 Détermination de la séquence optimale pour le client
- Figure 4.8 Courbes de disponibilité moyenne pour le client 1
- Figure 4.9 Graphique de la dégradation pour le client 2
- Figure 4.10 Courbes caractéristiques pour le client 2
- Figure 4.11 Courbes de disponibilité moyenne pour le client 2

LISTE DES ABBRÉVIATIONS

Acronymes:

Pdf	Fonction de densité de probabilité
Cdf	Fonction de répartition ou densité cumulative
i.i.d	Indépendant(e) et identiquement distribué(e)
v.a	Variable aléatoire
TFF	Temps de la première défaillance

Notations:

$\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$	Processus continu à droite décrivant l'état de dégradation du système
V, v	$P\{\tilde{X}_t \leq x\}, \frac{\partial}{\partial x} P\{\tilde{X}_t \leq x\}$ Cdf, pdf de $\tilde{X}(t)$
T	v.a décrivant le TFF
F, f	$P\{T \leq t\}, \frac{\partial}{\partial t} P\{T \leq x\}$ Cdf, pdf du TFF
ϕ, R	Taux de défaillance et fiabilité du TFF
$\{N_t, t \geq 0\}$	Processus de Poisson décrivant l'arrivée des chocs de taux λ
*	Opérateur de convolution
$\delta_1, \delta_2, \dots$	Amplitudes des chocs successifs

G, g	$P\{\delta_t \leq x\}, \frac{\partial}{\partial x} P\{\delta_t \leq x\}$ Cdf, pdf de l'amplitude des chocs
ρ	Taux de G dans le cas d'une distribution de Poisson
$G^{(n)}$	Produit de convolution d'ordre n de G avec elle-même
Z_t	Amplitude de la somme des chocs accumulés jusqu'à t
H_t, h_t	$P\{Z_t \leq x\}, \frac{\partial}{\partial x} P\{Z_t \leq x\}$ Cdf et pdf de Z_t
$\{X_t, t \geq 0\}$	Processus de Wiener
W, w	$P\{X_t \leq x\}, \frac{\partial}{\partial x} P\{X_t \leq x\}$ Cdf et pdf de $X(t)$
$\{B_t, t \geq 0\}$	Mouvement brownien standard
ν, σ^2	Coefficient de dérive (drift) et variance du processus de Wiener
ξ	Barrière. Seuil de dégradation (constant). Point de défaillance
$E[.]$	Espérance mathématique de .
c_r	Coût de remplacement d'un item
c_i	Coût d'inspection d'un item
c_p	Perte encourue par unité de temps entre la défaillance et sa découverte
$C(\tau)$	Coût total moyen par cycle de remplacement
$U(\tau)$	Longueur moyenne d'un cycle de remplacement
$C_{\text{moy}}(\tau)$	Coût total moyen par unité de temps pour un horizon infini
α	Réel positif

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE 1	Programmes Informatiques
ANNEXE 2	Méthode de Romberg
ANNEXE 3	Méthode de la sécante

INTRODUCTION

L'âge est une caractéristique commune à tous ce qui est matériel. Mis à part les particules élémentaires qui ne soucient guère du passage des années, toute entité subit d'une façon ou d'une autre l'épreuve de temps.

Que le système soit biologique ou technologique, la prolongation et la maîtrise de la durée de vie ont des retombés importants sur la qualité de vie des uns et diverses considérations économiques pour les autres. L'amélioration du capital durée de vie productive de l'équipement, la réduction du nombre d'arrêts critiques des appareils, une meilleure planification des opérations de maintenance nécessaires, la réduction des pertes de production dues aux arrêts des machines et la promotion de la santé et sécurité au travail, en sont quelques unes.

La réalisation de ces objectifs pour les individus, passe par la visite régulière chez le médecin, la prise de médicaments et malheureusement, quelques séjours à l'hôpital de temps à autre. Pour les systèmes techniques, cela se traduit par un ensemble d'actions parmi lesquelles on peut citer l'inspection, l'entretien et la rénovation.

Mais malgré tout, la défaillance survient pour tous les systèmes. Et sa particularité est son caractère aléatoire dans la majorité des situations. C'est le résultat d'interactions complexes entre les caractéristiques physico-chimique de la matière et les contraintes extérieures qui sont supportées. Le processus par lequel elles interagissent est tout aussi complexe et la variété des systèmes induit une variété de processus aussi différents les

uns des autres. L'un de ces processus est la dégradation qui est un phénomène par lequel les effets des dommages s'accumulent avec le temps et finalement conduisent à la défaillance. Les exemples typiques sont la propagation de fissures sur des composants mécaniques ou de déchirures sur les courroies des convoyeurs ainsi que l'usure des roulements. Il serait utile d'observer en continu cette dégradation pour pouvoir déclencher l'opération de maintenance appropriée, telle que la réparation ou le remplacement. Cette observation en continu permettra sans doute d'éviter un arrêt brutal de l'équipement. La tragédie de la navette spatiale Columbia en 2003 est un cas typique où la surveillance en continue du bouclier thermique aurait pu éviter la catastrophe. Malheureusement, il n'est pas toujours possible, d'observer en continu l'état physique d'un équipement. Par contre, il est concevable de réaliser des inspections et de déterminer son état réel avant d'entreprendre les actions appropriées. Pour un équipement sujet à des défaillances aléatoires, les pertes dues aux temps d'arrêts peuvent être diminuées en faisant des inspections ou des contrôles fréquents. Par contre, il y a une pression pour réduire le nombre d'inspections parce que leurs coûts sont aussi rajoutés aux coûts d'exploitation de l'équipement. D'habitude, les modèles d'inspection supposent que l'état du système est complètement inconnu jusqu'à ce qu'une inspection soit réalisée (Valdez-flores et Feldman, 1989).

D'autres contraintes peuvent motiver l'optimisation d'une stratégie d'inspection. Un critère de disponibilité d'un outil de production peut être privilégié dans une usine ou des questions de sécurité ou de respect de normes environnementales dans une centrale nucléaire par exemple.

Cette recherche se consacre à l'optimisation de stratégies de maintenances basées sur l'inspection d'un équipement sujet à une dégradation continue résultant de son utilisation normale et d'une accumulation de dégradation supplémentaire issue de son environnement. Le but est de dériver des stratégies d'inspection qui permettront de minimiser les coûts de maintenance ou de maximiser la disponibilité.

Dans un premier temps, c'est la dégradation de l'équipement qui est représentée par un concept mathématique. Celle ci est considérée comme la résultante de deux modes de dégradations: le premier mode est le mode continu, inhérent à la matière et à l'usure normale et le second est issu de l'environnement. Considérés séparément, les deux modes de dégradation sont représentés chacun par un processus stochastique continu. Ce qui est recherché, c'est l'effet combiné des deux modes. Cela permet d'approcher la réalité et de dériver une distribution de l'instant de la première défaillance de l'équipement qui modélise de la façon la plus fidèle possible la dégradation. Cette distribution est finalement utilisée pour formuler un modèle de coût et de disponibilité de l'équipement. Cette formulation tient compte des actions de maintenances que sont les inspections, les remplacements ainsi que les pertes encourus lors de défaillances non détectées. C'est ensuite la recherche de séquences d'inspections particulières qui est d'un grand intérêt. Elles doivent permettre l'atteinte d'un objectif d'économie ou de rendement. La situation est considérée de ce fait comme un problème d'optimisation et la résolution du modèle a pour but de trouver la séquence d'inspection optimale à même de garantir des dépenses minimales ou bien une utilisation maximale des ressources.

Ce mémoire comprend quatre chapitres. Dans le premier chapitre, après un bref rappel des notions préliminaires de fiabilité, la problématique est exposée. Suit alors une revue de littérature détaillée des travaux accomplis concernant la modélisation des processus de dégradation ainsi que les modèles d'inspection. La contribution de ce mémoire à l'élargissement des modèles existants est présentée au second chapitre. Il est consacré à la formulation du modèle mathématique du processus de dégradation, la présentation de la stratégie d'inspection et les modèles de coûts et de disponibilité. Le troisième chapitre est consacré au problème d'optimisation, à l'explication des méthodes de résolution et à la présentation et l'analyse des résultats obtenus. Finalement, une application à un problème de la littérature est réalisée au quatrième chapitre et les résultats sont exposés et commentés.

CHAPITRE 1

PROBLÉMATIQUE ET REVUE DE LITTÉRATURE

1.1 Notions préliminaires

La théorie de la fiabilité traite de la détermination de la probabilité qu'un système, possiblement constitué de plusieurs composants, va fonctionner. Les paragraphes suivants, esquissent un bref rappel des notions mathématiques fondamentales.

1.1.1 Variables aléatoires

En menant des expériences ou des essais de laboratoire, dont les résultats sont aléatoires, il est souvent intéressant d'obtenir certaines fonctions des résultats des essais par opposition aux résultats des essais eux mêmes. Par exemple, en jetant deux dès, on s'intéresse à la somme des dès et non pas au résultat courant du jet. Ces fonctions à valeurs réelles définies sur l'espace échantillon sont appelées variables aléatoires.

Puisque la valeur d'une variable aléatoire est le résultat d'une expérience, il est alors naturel d'assigner des probabilités aux valeurs possibles de cette variable. Dans le cas où les valeurs possibles ne sont pas dénombrables, une variable aléatoire T est dite continue quand il existe une fonction $f(t)$ non négative, définie pour tout réel t , ayant

la propriété de donner la probabilité d'appartenance de la variable aléatoire à un segment $[t_1, t_2]$ de la façon suivante :

$$P\{T \in [t_1, t_2]\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \quad (1.1)$$

La fonction $f(t)$ est appelée fonction densité de probabilités de la variable aléatoire T .

1.1.2 Temps de la première défaillance

L'instant de la première défaillance d'un composant est décrit par une variable aléatoire positive T et pour les cas qui nous intéressent, cette variable est continue et est décrite par sa fonction de répartition $F(t)$ ou sa fonction de densité de probabilité $f(t)$ qui satisfait les relations suivantes:

$$F(t) = P(T \leq t), t \in \Re \quad (1.2)$$

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) \quad (1.3)$$

Pour des situations particulières, il est utile de travailler avec la fonction de fiabilité $R(t)$ qui est une fonction complémentaire de $F(t)$, (notée aussi pour cela $\bar{F}(t)$) et définie par:

$$R(t) = \bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t) \quad (1.4)$$

Le taux de défaillance $\phi(t)$ est une autre fonction utile. Elle est définie par (voir par exemple (Aven et Jensen, 1999; Cox ,1962):

$$\phi(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1.5)$$

Le taux de défaillance donne la probabilité conditionnelle de panne immédiate à l'instant t . La fonction taux cumulatif de défaillance $\Lambda(t)$ est définie par :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \phi(u) du \quad (1.6)$$

Par ailleurs, une relation bien utile qui relie le taux de défaillance à la fiabilité est donnée par: (Cox ,1962):

$$\bar{F}(t) = \exp\{-\Lambda(t)\} \quad (1.7)$$

Il en résulte que, $\phi(t)$ détermine de façon unique la fonction de densité de probabilité $f(t)$ par:

$$f(t) = \phi(t) \exp\left\{-\int_0^t \phi(u) du\right\} \quad (1.8)$$

1.1.3 Convolution

Si deux variables aléatoires X et Y ont respectivement les distributions F_X et F_Y , alors la distribution de $X + Y$, notée $F_X * F_Y$, est la convolution de F_X et de F_Y et elle est donnée par (Ross, 1970):

$$\begin{aligned} (F_X * F_Y)(t) &= \iint_{X+Y \leq t} dF_X(x) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{t-y} dF_X(x) dF_Y(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y) dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(t-x) dF_X(x) \end{aligned}$$

En particulier, la distribution de $X + X$, est donnée par:

$$F_X^{(2)} = F_X * F_X$$

De même la distribution de la somme d'ordre k de la même variable aléatoire est notée:

$$F_X^{(k)} = \underbrace{F_X * F_X * \dots * F_X}_{k \text{ fois}} \quad (1.9)$$

De plus, si $X > 0$, $Y > 0$ et $X + Y \leq t$ alors:

$$\begin{aligned} (F_X * F_Y)(t) &= \int_0^t F_X(t-y) dF_Y(y) \\ &= \int_0^t F_Y(t-x) dF_X(x) \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.1.4 Transformée de Laplace

Pour une fonction $F(t)$ définie pour $t \geq 0$, la transformée de Laplace $F(s)$ est définie au moyen de la fonction suivante:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1.11)$$

La transformée de Laplace d'une fonction est usuellement notée $L_s(F(t))$. De plus, la propriété d'un intérêt particulier de la transformée est celle concernant le produit de convolution de deux fonctions. En effet, en notant que:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-st} F(t-1) dt &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+1)} F(u) du \\ &= e^{-s} \int_0^{\infty} e^{-su} F(u) du \\ &= e^{-s} L_s(F(t)) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Alors, la transformée du produit $F_X * F_Y$ s'écrit en utilisant (1.10):

$$\begin{aligned} L_s(F_X * F_Y(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t F_X(t-y) dF_Y(y) \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t F_X(t-y) f_Y(y) dy \right] dt \end{aligned} \quad (1.13)$$

D'après la figure 1.1, le domaine d'intégration D est limité par la droite $y = 0$ et la droite $t = y$. En considérant (1.13) comme une intégrale double sur ce domaine, et en intervertissant l'ordre d'intégration, on obtient (Bellman et al., 1966):

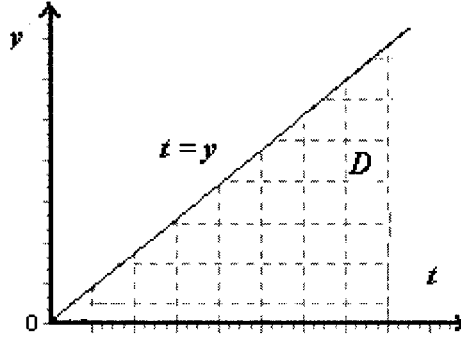


Figure 1.1: Domaine d'intégration

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_s(F_X * F_Y(t)) &= \iint_D e^{-st} F_X(t-y) f_Y(y) dt dy \\
 &= \int_0^\infty f_Y(y) \left[\int_y^\infty e^{-st} F_X(t-y) dt \right] dy
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Alors, en utilisant l'équation (1.12), il ressort que:

$$\int_y^\infty e^{-st} F_X(t-y) dt = e^{-sy} \mathcal{L}_s(F_X(t)) \tag{1.15}$$

De (1.14) et (1.15):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_s(F_X * F_Y(t)) &= \int_0^\infty f_Y(y) e^{-sy} \mathcal{L}_s(F_X(t)) dy \\
 &= \mathcal{L}_s(F_X(t)) \int_0^\infty e^{-sy} f_Y(y) dy
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Finalement:

$$\mathcal{L}_s(F_X * F_Y(t)) = \mathcal{L}_s(F_X(t)) \mathcal{L}_s(f_Y(t)) \tag{1.17}$$

1.1.5 Inversion de la transformée de Laplace

Sous certaine condition (Cox ,1962), l'inversion de la transformée de Laplace existe et est définie par:

$$F(t) = \mathcal{L}_s^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{sx} F(s) ds \quad (1.18)$$

Où la variable d'intégration est $s = \gamma + j\omega$. L'usage direct de (1.18) est bien difficile. Par contre, des algorithmes de calcul numérique de la fonction inverse existent et peuvent donner des approximations avec les précisions désirées.

1.2 Dégradation et processus aléatoire

Les données de dégradation des équipements sont très utiles dans les phases de design et de développement de systèmes desquels on exige une fiabilité rigoureuse. Dans les tests de fiabilité, on mesure la dégradation physique en fonction du temps d'un échantillon de composants comme dans l'exemple de la propagation d'une fissure dans une pièce en alliage (figure 1.2), chaque courbe représentant la dégradation d'une pièce de l'échantillon.

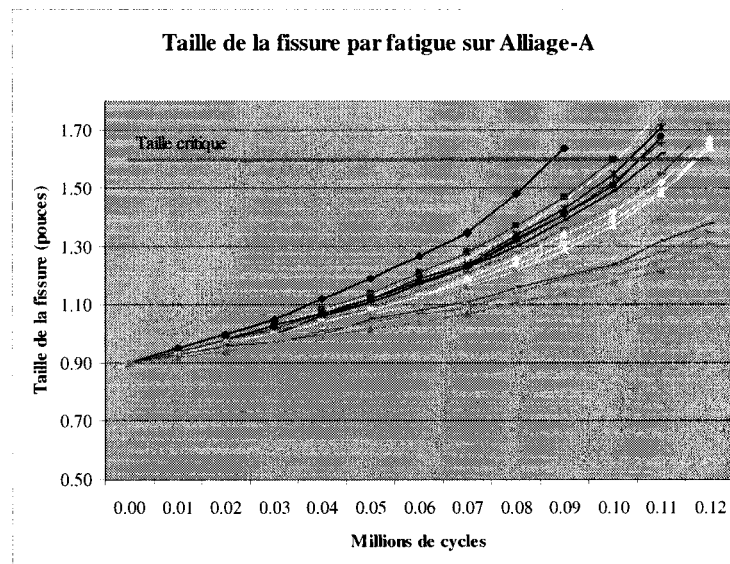


Figure 1.2: Données de dégradation physique par fissuration de l'alliage-A (Meeker et Escobar, 1998)

Il y a des situations par contre où la dégradation physique ne peut pas être observable et des mesures secondaires, comme la puissance en sortie d'un générateur, renseignent alors sur l'état de dégradation de l'équipement. Mais cela reste limité car ces mesures ne renseignent pas sur les processus physiques de dégradations sous-jacents.

En considérant la figure 1.2, la dégradation en un instant donné semble aléatoire. Ainsi, pour donner forme à ce caractère, une loi de probabilité serait utile pour faire différentes prévisions dans l'utilisation de l'équipement. Dans cette optique et afin de caractériser certains processus de dégradation qui concourent à la dégradation totale, les processus stochastiques sont un outil privilégié de modélisation. En effet, l'état de l'équipement à un instant donné étant aléatoire, il est représenté par une variable aléatoire. En plus cette variable va dépendre du temps et c'est ainsi qu'on va disposer d'une collection de

variables aléatoires dont des réalisations particulières vont décrire l'état de dégradation de notre équipement à chaque instant de l'intervalle de temps considéré.

En termes plus formels, soit alors un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ représentant une collection de variables aléatoires. Pour chaque $t \geq 0$, X_t décrit l'évolution de l'état du processus à cet instant (Ross, 2003). Si cet état peut être observé, alors le temps de la première défaillance du système est défini par:

$$T = \inf \{t \in \mathbb{R}_+, X_t \geq \xi \} \quad (1.19)$$

où X_t est la réalisation du processus de dégradation à l'instant t et ξ est une valeur fixée de la dégradation. L'équation (1.19) exprime le fait que le processus stochastique frappe pour la première fois une barrière ξ considérée comme la durée de vie nominale du composant (Aven et Jensen, 1999). Une interprétation physique de cette barrière est la suivante: c'est une valeur moyenne de la dégradation au delà de laquelle l'équipement est réputé ne plus remplir sa fonction et est donc défaillant. Cette barrière peut être considérée elle même comme une variable aléatoire mais cela complique davantage le problème. Dans ce qui suit, la valeur de ξ est considérée comme constante et préalablement connue. La figure 1.3 montre une réalisation du processus de dégradation considéré.

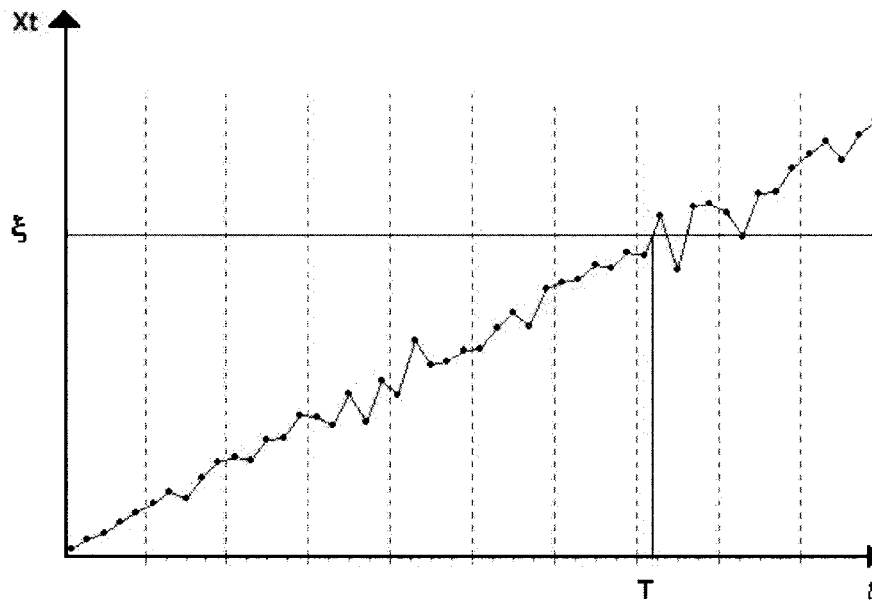


Figure 1.3: Degré de dégradation et instant de défaillance

La description du phénomène de dégradation nécessite dans plusieurs cas, la combinaison de plusieurs processus. Le processus résultant est généralement la superposition des processus élémentaires.

1.3 Processus cumulatifs

Ce sont des processus qui décrivent le fait que la dégradation à un instant donné est la somme de dégradations successives survenues depuis la mise en fonctionnement. La dégradation augmente dans ce cas par bonds d'amplitudes aléatoires.

Soit N_t le nombre aléatoire de bonds survenus jusqu'à l'instant t . Le processus décrivant les instants d'arrivées de ces événements est noté $\{N_t, t \geq 0\}$. A l'instant du n^e événement, le phénomène physique subit une variation aléatoire décrite par une variable

δ_n . Dans le cas de variations positives, s'accumulant avec le temps, à un instant quelconque t , la variation totale sera alors:

$$Z_t = \begin{cases} \sum_{n=1}^{N_t} \delta_n & \text{pour } N_t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.20)$$

Par exemple, si la variation δ_n est toujours d'une unité alors la variation totale sera égale à N_t .

1.4 Problématique

La défaillance dans les systèmes issus de l'ingénierie apparaît à la suite de causes spécifiques, qu'elles soient prévisibles ou pas. C'est un concept complexe dont une représentation est le concept de dégradation-résistance (damage-endurance). Avec l'âge, un système perd de ses performances et devient défaillant sous l'effet combiné de l'usure graduelle et de l'influence de l'environnement (surcharges). Si la dégradation ne peut pas être mesurée, la modélisation est le seul outil de prévention des défaillances. On considère un composant qui devient défaillant quand sa dégradation atteint un seuil prédéterminé. La dégradation s'accumule de façon graduelle et sous l'effet de surcharges dans le temps. L'état de défaillance n'est relevé que par les inspections. À l'inspection, il est remplacé de façon préventive si la dégradation mesurée excède le seuil limite. Sinon, il continue à être utilisé sans perturbation. Les inspections et les remplacements sont

instantanés. À la défaillance le composant est remplacé immédiatement et un nouveau cycle d'inspections recommence.

Le problème traité dans ce mémoire est de trouver, en considérant la situation décrite plus haut, comment planifier ces inspections pour retirer le meilleur avantage des équipements mis en exploitation.

Pour ce faire, des éléments de la théorie sur les processus stochastiques seront mis à contribution pour la caractérisation des dégradations aléatoires. La dégradation continue est représentée par un processus de diffusion avec une dérive (drift) positive, connu aussi sous le nom de processus de Wiener et l'influence de l'environnement par un processus de Poisson composé. Une formulation mathématique d'un modèle de coût de maintenance et de la disponibilité du système sera proposée. Vu la complexité des équations obtenues, l'optimisation du problème sera réalisée numériquement. L'analyse de certains paramètres du modèle telle que la variation dans l'environnement d'utilisation sera étudiée. Finalement, c'est à travers la réalisation d'un programme informatique, faisant appel aux résultats théoriques obtenus, qu'un problème pratique inspiré de la littérature sera utilisé pour mettre en relief l'application du modèle.

1.5 Revue de littérature

Dans cette section, les travaux antérieurs les plus significatifs et faisant explicitement référence à la dégradation et à l'inspection seront passés en revue et les particularités des modèles brièvement exposées.

1.5.1 Les modèles de dégradation

Ces modèles sont étudiés généralement en probabilités appliquées. Dans les publications présentant un intérêt pour l'ingénierie, il est surtout question de ressortir une représentation pratique de la dégradation et négliger les aspects purement mathématiques: existence, continuité, comportement asymptotique et propriétés détaillées des distributions.

Dans (Esary et al., 1973), les auteurs étudient en détails l'analogie entre modèle de chocs et processus de dégradation. Ils s'intéressent aux processus de chocs Poissonien et étudient la distribution du temps de première défaillance ainsi que les caractéristiques du taux de défaillance sur les modèles de dégradation avec un seuil fixe et aléatoire. En particulier, pour le cas de la dégradation cumulative, le modèle s'écrit en fonction de la fiabilité comme suit:

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k! \quad (1.21)$$

avec $\bar{P}_k$ la probabilité que le système survive aux k premiers chocs. Dans le cas des chocs indépendants avec la même distribution G , ils relèvent la relation intéressante:

$$\bar{P}_k = G^{(k)} \quad (1.22)$$

où $G^{(k)}$ est le produit de convolution d'ordre k de G avec elle même.

Ils démontrent aussi que l'indépendance des chocs avec une même distribution est une simplification du cas général. Ils avancent que l'accumulation de dégradation se manifeste généralement dans une perte de capacité du système à résister à des chocs supplémentaires. Les caractéristiques de la nouvelle distribution sont aussi mises en évidence.

Nakagawa et Osaki, dans (Nakagawa et Osaki, 1974), proposent un modèle de dégradation bimodal. La défaillance aléatoire est introduite dans ce cas par le fait que le système peut tomber en panne à la suite d'une dégradation linéaire ou bien d'une façon catastrophique. Il y a composition de deux modes de défaillance: le mode 1 est une dégradation continue et linéaire qui amène la panne quand le processus touche un seuil prédéterminé et le mode 2 l'amène instantanément à la défaillance. Les probabilités de défaillance selon les deux modes sont brièvement exposées.

D'autres processus plus généraux ont été utilisés pour représenter les modèles de dégradation avec seuil notamment dans (Zuckerman, 1977; Zuckerman, 1978; Abdel-Hameed, 1984) qui étudient la dégradation avec un processus de Lévy tronqué d'un côté

(one sided Lévy process). C'est un processus qui est caractérisé par la mesure de Lévy ν et le processus de Poisson composé ainsi que le processus gamma en sont des cas particuliers. Un seuil aléatoire avec une distribution connue est utilisé pour étudier un cas de remplacement optimal de composants. Une application du processus gamma pour modéliser la dégradation est fait dans (Abdel-Hameed, 1975) où des caractéristiques utiles du processus sont soulignées.

Giglmayr, dans (Giglmayr, 1982) et (Giglmayr, 1987), considère un modèle intégrant l'âge du composant aussi bien que la dégradation pour établir une dépendance fonctionnelle avec la probabilité de panne. Il utilise un processus de Poisson seuil-limite (Cut-off Poisson process). Il le décrit par un taux de défaillance particulier qui intègre l'influence de l'âge et de l'usure. Son souci était de proposer un modèle pour les problèmes de fiabilité en génie électrique notamment dans les systèmes électroniques. Il écrit le taux de défaillance sous la forme:

$$\phi(t, y) = \phi_1(t) + \phi_2 + \phi_3 y^k, \quad k = 1, 2 \quad (1.23)$$

où y décrit la dégradation. Le taux est décomposé de façon à obtenir un diagramme en "baignoire" (figure 1.4). En particulier, pendant un intervalle de temps Δt , la probabilité qu'une défaillance précoce apparaisse (zone I de la figure 1.4) est considérée comme étant approximativement égale à $\phi_1(t)\Delta t + o(\Delta t)$, les défaillances aléatoires (zone II) apparaissent avec une probabilité $\phi_2\Delta t + o(\Delta t)$ et les deux sont indépendantes de

l'usure. Finalement les défaillances dues principalement à l'usure peuvent apparaître avec une probabilité approximative égale à $y^k \Delta t + o(\Delta t)$.

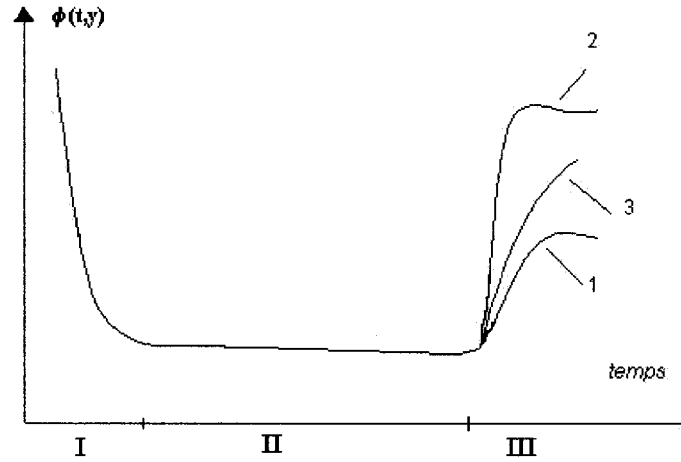


Figure 1.4: Taux de défaillance $\phi(t, y)$ (tirée de (Giglmayr, 1982))

Dans la figure 1.4, les section 1 et 2 du graphe montrent le taux de défaillance pour un processus de diffusion pour $k = 1, 2$ et la section 3, représente le taux de défaillance pour un processus de diffusion limite.

Des modèles de dégradation linéaires sont énumérés dans (Park, 1988; Xue et Yang, 1997). Ils modélisent la dégradation de la résistance dans les matériaux. La dégradation est formulée en fonction de deux coefficients aléatoires A et B. La dégradation à un instant t est donnée par:

$$X(t) = A - B t \quad (1.24)$$

La moyenne et la variance associées au modèle de dégradation sont de la forme:

$$\mu(t) = \mu_0 - \beta t \text{ et } \sigma^2(t) = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 t^2 \quad (1.25)$$

Dans le cas où A et B sont normalement distribués alors $X(t)$ est normalement distribué selon la loi $N(\mu_0 - \beta t, \sigma_A^2 + \sigma_B^2 t^2)$.

Les chaînes de Markov à temps continu sont utilisées dans (Lam et Yeh, 1994). En plus, ils considèrent que plus la détérioration augmente plus les coûts de maintenance encourus augmentent. Le système est décrit par des états successifs $0, 1, \dots, n, n+1$ à dégradations croissantes. Un état donné est caractérisé par sa dégradation et des coûts de maintenance relatifs à cet état. Les transitions entre les états sont représentées par un processus Markovien à temps continu. Des algorithmes explicites sont dérivés pour l'optimisation de diverses stratégies de maintenance. Un modèle plus simple à deux phases seulement de dégradation est traité dans (Coolen et Dekker, 1995).

La connaissance de l'évolution de la dégradation cumulée est plus significative pour la stratégie de maintenance que la connaissance de l'âge de l'équipement pour faire un remplacement par exemple. Dans la stratégie de remplacement selon l'âge la dégradation cumulée peut être plus faible que la dégradation limite. L'équipement garde toujours un potentiel de fonctionnement pour une durée plus longue. (Kong et Park, 1997) généralise le modèle de (Park, 1988) en utilisant un processus stationnaire et à incrément indépendants pour représenter la dégradation.

1.5.2 Les modèles d'inspection

Le modèle d'inspection qui a servi de base à divers autres modèles est sans doute celui présenté dans (Barlow et al., 1996). C'est un modèle où seule l'inspection permet de déterminer si une unité est défaillante ou non. L'instant de découverte de la défaillance est souvent postérieur à l'instant exact où l'unité tombe effectivement en panne. L'objectif du modèle proposé est de trouver une stratégie d'inspection afin de minimiser les coûts résultants des actions d'inspections elles mêmes ainsi que les pertes engendrées entre le moment de défaillance et l'instant où la panne est découverte. Le modèle considère que la loi de défaillance est connue. Il est notamment montré qu'une procédure d'inspection aléatoire $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ peut toujours être améliorée en choisissant une séquence d'inspection déterministe. L'attention est alors portée sur les solutions où la suite $\{\tau_n\}$ est constante. Des séquences optimales sont discutées pour des lois usuelles et en particulier pour une densité de défaillance PF_2 (Pólya frequency). La séquence d'inspection qui minimise le modèle de coût est donnée par:

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \frac{F(\tau_n) - F(\tau_{n-1})}{f(\tau_n)} - \frac{c_1}{c_2}, \quad n \geq 1 \quad (1.26)$$

C'est une séquence itérative obtenue en faisant un choix sur la première inspection τ_1 et le reste de la séquence est obtenu par itérations successives.

(Munford et Shahani, 1972a; Munford et Shahani, 1972b) proposent de simplifier le calcul de la séquence d'inspection en la rendant dépendante d'une seule variable p . Ils

liant en plus, la longueur des intervalles entre les inspections à la fonction taux de défaillance. Ces intervalles diminuent (respectivement augmentent), quand le taux de défaillance augmente (respectivement diminue). Il est montré que la séquence τ_n^p est presque optimale, pour un choix judicieux de p . Une comparaison est effectuée avec le modèle précédent et le calcul est réalisé dans (Munford et Shahani, 1972a) pour la loi de Weibull avec un paramètre de forme $\beta \geq 1$, c'est-à-dire dans le cas général de taux de défaillance non décroissant.

Le problème d'optimisation des coûts a été étudié aussi avec l'approche de (Keller, 1974). Cette approche suppose que les inspections sont si fréquentes qu'elles peuvent être représentées par une densité continue $n(t)$ d'inspections par unité de temps. La densité optimum est alors trouvée en utilisant des calculs de variations. L'espacement entre les contrôles est alors égal à la fonction inverse de $n(t)$ notée $n(t)^{-1}$. En faisant la première inspection à $\tau_1 = n(0)^{-1}$, la seconde se fera à $\tau_2 = \tau_1 + n(\tau_1)^{-1}$ et ainsi de suite. Cette approche est intéressante quand le coût d'une inspection est relativement bas comparé aux autres coûts encourus. L'idée utile à retenir est la transformation d'un problème discret en un problème continu.

Les inspections prennent toujours du temps avant d'être complétées et nécessitent dans certains cas l'arrêt du système en question et des fois pour une longue période entraînant des coûts d'arrêt important. (Luss, 1977) étudie ce cas et dérive un modèle de coût. La séquence d'inspection est déterminée par deux résolutions différentes: à partir d'une

approche similaire que celle dans (Barlow et al., 1996) et par programmation dynamique. Une extension est aussi proposée par (Wattanapanom et Shaw, 1979) où est considéré l'effet des inspections sur le systèmes. Celles-ci dégradent le système à chaque fois. Cet effet est modélisé par une accélération du temps à l'inspection k par un facteur θ_k . Pour une séquence $\{\theta_k\}$, le système, qui est encore en fonctionnement à l'instant t_k , a consommé un temps $\tilde{t}_k$ de son potentiel durée de vie sur l'échelle de temps initiale. À l'instant t_k , c'est comme si le temps écoulé était:

$$\tilde{t}_k = t_1 + \theta_1(t_2 - t_1) + \dots + \theta_{k-1}(t_k - t_{k-1}) \quad (1.27)$$

La densité conditionnelle, prenant en compte l'historique des inspections, est utilisée dans le cas exponentiel et un modèle de coûts est proposé. Le problème est résolu par programmation dynamique pour dériver un plan d'inspection optimal.

En 1989, une revue de l'état de l'art comprenant des modèles d'inspections est publiée dans (Valdez-flores et Feldman, 1989). Et à partir 1989, des travaux prennent en compte les variations des coûts de remplacement relativement au seuil de dégradation. (Nakagawa et Yasui, 1991) étudient un problème de remplacement périodique, utilisant l'inspection, en considérant que les coûts sont plus importants selon que le nombre de défaillances survenues, ou la dégradation accumulée, dans la période considérée dépasse ou non un seuil K . Sous certaines hypothèses, un modèle de coût est dérivé et une période optimale d'inspection/remplacement est déterminée.

La disponibilité des équipements est l'autre critère majeur de l'optimisation des stratégies d'inspection. Dans (Wortman et al., 1994), les inspections sont des événements qui suivent un processus de renouvellement. Il est notamment démontré que quel que soit le taux moyen d'inspection, la disponibilité du système est maximale en choisissant des intervalles déterministes entre les inspections.

L'inspection périodique est un cas particulier de la séquence d'inspections $\{\tau_n\}$ et cela quand $\tau_n = n\tau$ avec τ constant. Cela facilite les calculs dans de nombreuses formulations mais cette méthode ne prend pas en compte l'information disponible depuis la dernière opération d'inspection effectuée. En plus, on peut faire autant d'inspection dans des périodes de faibles probabilités de défaillances ou dans d'autres de plus grande probabilité de pannes. Quand la fonction de répartition est strictement croissante (Yang et Klutke, 2000a; Yang et Klutke, 2000b; Yang et Klutke, 2001) proposent la séquence d'inspection suivante:

Choisir $0 < \alpha < 1$ et poser:

$$\tau_1 = \sup\{t > 0 : P\{T > t\} \geq \alpha\}, \quad (1.28)$$

et:

$$\tau_n = \sup\{t > \tau_{n-1} : P\{T > t \mid T > \tau_{n-1}\} \geq \alpha\}, \quad n \geq 2 \quad (1.29)$$

Alors la séquence d'inspection prend la forme:

$$\tau_n = \bar{F}^{-1}(\alpha^n), n = 0, 1, \dots \quad (1.30)$$

Cette stratégie d'inspection, appelée stratégie $QBI(\alpha)$ (Quantile-Based Inspection), garantie une disponibilité d'au moins α en tous temps. En utilisant la disponibilité moyenne limite et le taux d'inspection sur un horizon infini comme mesure de performance, la stratégie est bien meilleure que dans le cas périodique.

Dans le chapitre suivant, les caractéristiques du temps de première défaillance d'un équipement subissant une dégradation composée est construit sur la base de deux processus de dégradations déjà utilisés dans la littérature. C'est l'effet combiné de la dégradation continue et l'effet de l'environnement qui sont recherchés. La formulation mathématique rigoureuse du modèle ne fait pas partie des objectifs de ce mémoire. Par contre, la résolution numérique est favorisée pour permettre une approximation suffisante pour des applications pratiques.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION DE LA DÉGRADATION

2.1 Introduction

Les distributions des temps de la première défaillance, utilisées dans les études de fiabilité en ingénierie, proviennent des données recueillies durant l'utilisation des équipements ou bien elles le sont à partir de tests de durée de vie réalisées en laboratoire. Ces données permettent, généralement d'obtenir un modèle empirique de dégradation en fonction de conditions spécifiques d'utilisation. Cependant, dans plusieurs cas, il est difficile de collecter assez d'informations pour obtenir une approximation valide de cette durée. De plus, il y a des situations où ces tests ne sont pas appropriés car les tests de laboratoires ne peuvent pas reproduire exactement un environnement aléatoire d'utilisation, ou bien parce que le coût de réalisation est prohibitif. Pour éviter ces difficultés, les efforts sont portés sur la modélisation du processus de dégradation pour décrire les effets d'un environnement aléatoire sur le mécanisme de défaillance, et de là sur la durée de vie.

Dans ce qui suit, la première partie est consacrée à la description des outils de modélisation de la dégradation, en décrivant les caractéristiques des processus utilisés. Dans la seconde partie, c'est la formulation du modèle de dégradation stochastique

composée, sous les conditions décrites dans les objectifs de ce mémoire, qui est réalisée et ceci en faisant ressortir les caractéristiques principales du temps de la première défaillance d'un système soumis à ces conditions, ainsi que l'analyse de sensibilité du modèle.

2.2 Modèles de dégradation

Dans cette section, les processus stochastiques appropriés, pouvant servir à la modélisation de la dégradation sont présentés. Le processus de dégradation cumulatif noté $\{X_t, t \geq 0\}$ décrit la dégradation totale subie par un équipement jusqu'à l'instant t . L'équipement (ou le système) a un seuil de dégradation fixe ξ , au delà duquel il est déclaré défaillant. Cet instant de défaillance est appelé temps de premier passage du processus (First passage time). Ainsi le temps de la première défaillance T du système est donné par:

$$T = \inf \{ t \in \mathbb{R}_+, X_t \geq \xi \} \quad (2.1)$$

et sa distribution ou fonction de répartition $F(t)$ par (voir §1.4):

$$P[T > t] = 1 - F(t) = P[X_t \leq \xi] \quad (2.2)$$

Si la dégradation de l'équipement évolue de façon continue dans le temps, comme dans le cas de l'usure par fatigue par exemple, le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ qui décrit cette dégradation, est un processus continu. Les processus dit de Wiener, discutés dans la section suivante, sont utiles pour représenter ce genre d'évolutions. Par contre, quand la

dégradation survient par bonds discontinus dans le temps, les processus dit de chocs (Marked Point Processes), sont utilisés pour décrire cette évolution discrète de la dégradation dans le temps.

2.2.1 Processus de Wiener

Le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus de Wiener avec un drift ν et une variance σ^2 s'il satisfait les propriétés suivantes (Chhikara et Folks, 1989):

- $X_0 = 0$;
- $\{X_t, t \geq 0\}$ a des incréments indépendants et stationnaires;
- $X_{t_2} - X_{t_1}$ suit la loi normale avec une moyenne $\nu(t_2 - t_1)$ et une variance $\sigma^2(t_2 - t_1)$ avec $t_1 < t_2$.

Les incréments indépendants expriment le fait que $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendants. Ils sont en plus stationnaires s'il satisfont le fait que $X_{t+s} - X_t$ ont la même distribution quel que soit t . Cela étant, $X_{t+s} - X_t$ ne dépend que de s (Ross, 1996).

La fonction de densité de probabilité $w_t(x)$ de X_t s'écrit alors:

$$w_t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - \nu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \quad (2.3)$$

Usuellement, le processus de Wiener s'écrit aussi:

$$X_t = \sigma B_t + \nu t \quad (2.4)$$

Avec $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard (Ross, 2003). La figure 2.1 ci dessous décrit des réalisations typiques d'un processus de Wiener.

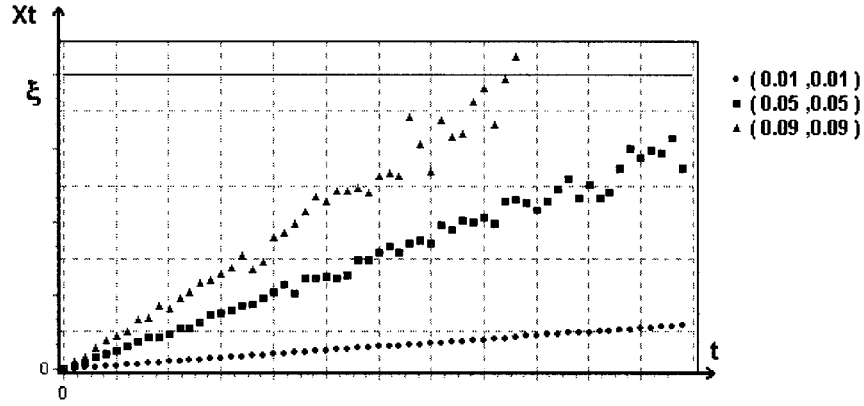


Figure 2.1: Trajectoires d'un processus de Wiener avec différentes valeurs de $(\sigma; \nu)$.

Quand le seuil ξ est constant, le temps de première défaillance T du système est reconnu pour avoir une distribution gaussienne inverse (en notation abrégée $T \sim \text{IGAU}(\vartheta, \beta)$). Cette distribution a été étudiée par Schrödinger pour la première fois en 1915 (Chhikara et Folks, 1989). La fonction densité de probabilité est donnée par:

$$f(t; \vartheta, \beta) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} t^{-3/2} \exp\left\{-\frac{\beta (t - \vartheta)^2}{2\vartheta^2 t}\right\}, \quad t > 0 \quad (2.5)$$

et la fonction de répartition par:

$$F(t) = P[T \leq t; \vartheta, \beta] = \Phi_{nor} \left[\sqrt{\frac{\beta}{t}} \left(\frac{t}{\vartheta} - 1 \right) \right] + \exp \left(\frac{2\beta}{\vartheta} \right) \Phi_{nor} \left[- \sqrt{\frac{\beta}{t}} \left(1 + \frac{t}{\vartheta} \right) \right], t > 0 \quad (2.6)$$

avec Φ_{nor} , la loi normale centrée réduite et $\vartheta > 0, \beta > 0$ des paramètres ayant les mêmes unités que T . Dans le cas du processus de Wiener avec un drift positif $X(t) = \sigma B(t) + \nu t$ les paramètres ϑ et β prennent valeurs $\frac{\xi}{\nu}$ et $\frac{\xi}{\sigma}$.

La figure 2.2 donne les allures des fonctions caractérisant le temps de première défaillance d'un système soumis à une dégradation selon un processus de Wiener.

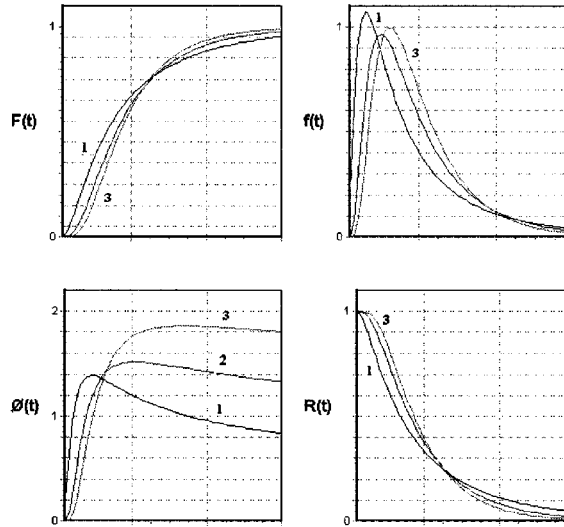


Figure 2.2: Courbes $F(t)$, $f(t)$, $\phi(t)$ et $R(t)$ d'un système se dégradant selon le Processus de Wiener pour $\vartheta = 1, 2, 3; \beta = 1$.

2.2.2 Processus de chocs (Compound point process)

Les processus ponctuels composés décrivent les processus appelés processus de chocs qui sont utilisés pour représenter la dégradation que subit un équipement sujet à des chocs qui apparaissent de façon discontinue et qui ajoutent à chaque fois une quantité supplémentaire de dégradation. Les instants successifs d'apparition des chocs ω_n sont donnés par une séquence croissante $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots$ de variables aléatoires. A chaque fois, le point ω_n est associé à une marque aléatoire δ_n à valeur réelle qui décrit la dégradation additionnelle causée par le n^e choc. L'exemple le plus simple est le processus de Poisson composé dans lequel le processus d'arrivée des chocs est un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ de taux λ et la valeur des dégradations δ_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) avec une distribution $G(x)$ avec un taux ρ dans le cas exponentiel. Le temps de première défaillance T du système est l'instant où la dégradation accumulée atteint le seuil ξ . Le processus modélise l'occurrence des chocs dans le temps et la marque associée caractérise l'amplitude de la dégradation. La figure 2.3 présente des réalisations du processus pour différentes valeurs des paramètres (λ, ρ) .

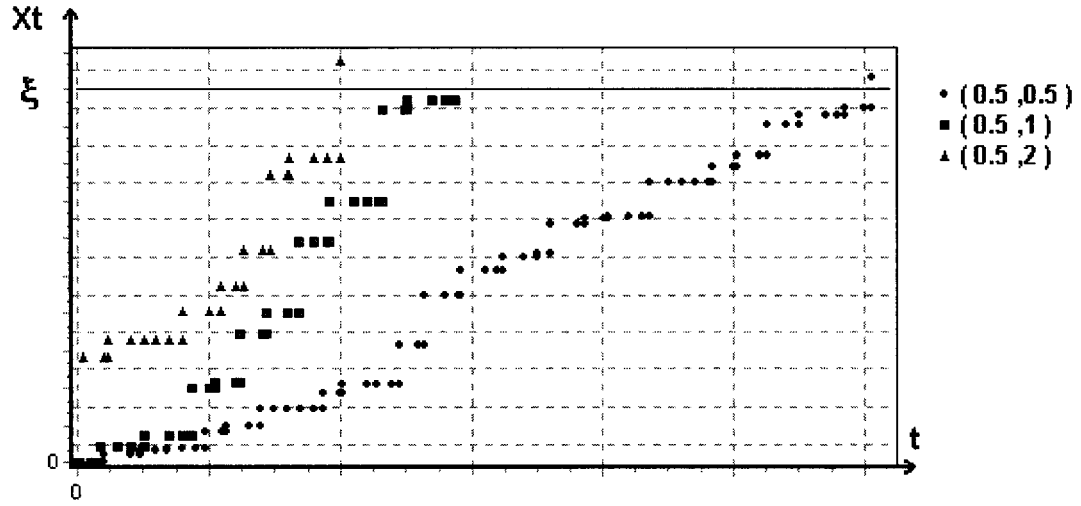


Figure 2.3: Trajectoires d'un processus de chocs Poissonien (λ, ρ)

Soit N_t le nombre de chocs reçus dans $[0, t)$. La dégradation totale Z_t est donnée par:

$$Z_t = \sum_{n=1}^{N(t)} \delta_n \quad (2.7)$$

Si le processus de Poisson est de taux λ , alors la fonction de répartition $H_t(z)$ de la variable aléatoire Z_t , somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, est :

$$H_t(z) = P[Z_t \leq z] = P\left[\sum_{n=1}^{N(t)} \delta_n \leq z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P[Z_t \leq z \mid N(t) = n] P[N(t) = n]$$

$$H_t(z) = G^{(N(t))}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(z) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad (2.8)$$

où $G^{(n)}$ est le produit de convolution de la fonction G avec elle même défini par (voir section 1.1.3):

$$G^{(1)}(x) = G(x) \text{ et,}$$

$$G^{(n+1)}(x) = \int_0^x G^{(n)}(x-u)g(u)du \quad (2.9)$$

Ainsi, la distribution du temps de premier passage T est:

$$P[T > t] = 1 - F(t) = P[Z_t \leq \xi] = H_t(\xi)$$

Ce qui donne:

$$F(t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(\xi) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad (2.10)$$

Si l'amplitude des chocs est aussi distribuée selon une loi exponentielle de paramètre ρ , le produit de convolution $G^{(n)}$ n'est autre qu'une loi Gamma de paramètres (ρ, n) .

Alors:

$$G^{(n)}(\xi) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\rho \xi} u^{n-1} e^{-u} du$$

Puisque n est un entier et en intégrant par parties, on démontre que (Cox, 1962):

$$G^{(n)}(\xi) = 1 - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{e^{-\rho \xi} (\rho \xi)^r}{r!} \quad (2.11)$$

La distribution du temps de la première défaillance T est dans ce cas là donné par:

$$F(t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{e^{-\rho \xi} (\rho \xi)^r}{r!} \right) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad (2.12)$$

et sa densité de probabilité par:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{e^{-\rho \xi} (\rho \xi)^r}{r!} \right) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} (\lambda - n/t)}{n!} \quad (2.13)$$

La figure 2.4 donne l'allure des fonctions caractérisant le temps de première défaillance d'un système soumis à une dégradation selon un processus de chocs.

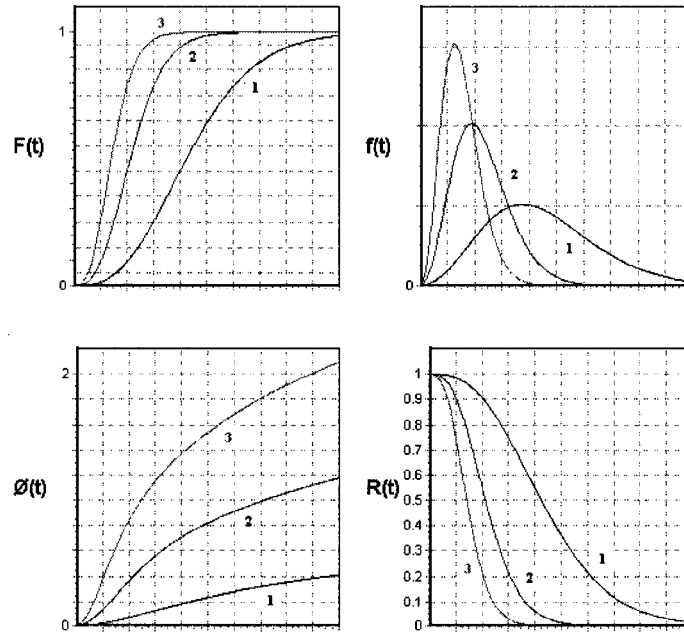


Figure 2.4: Courbes $F(t)$, $f(t)$, $\phi(t)$ et $R(t)$ d'un système se dégradant selon le processus de chocs pour $\lambda = 1, 2, 3$; $\rho = 2$; $\xi = 4$

2.3 Modèle de dégradation stochastique composé

L'objectif de cette section est de présenter le modèle dégradation composé. Il combine l'effet continu et l'effet discret des processus de dégradation. Ainsi, cela permettra de répondre à la problématique considérée dans ce mémoire. Le mode continu est représenté par un processus de Wiener le mode discontinu par un processus de chocs.

2.3.1 Formulation du modèle

Un équipement subissant une dégradation combinant un effet continu et discontinu est considéré:

- les chocs arrivent selon un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ avec un taux λ ;
- les amplitudes des chocs δ_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) ayant une fonction de répartition $G(x)$;
- $Z_t = \sum_{n=1}^{N(t)} \delta_n$ est la somme des dégradations par chocs accumulées à l'instant t ;
- $\{B_t, t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard subissant une dérive (drift) positive ν de façon que la dégradation à l'instant t est décrite par un processus de Wiener $X_t = \sigma B_t + \nu t$;
- $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$ est le processus de dégradation cumulatif résultant de la composition des deux processus;

- Les deux processus stochastiques décrivent un seul et même mode de dégradation au point de vue physique (par fatigue ou par corrosion, etc.).

La dégradation totale à l'instant t et dans les conditions précitées s'écrit:

$$\tilde{X}_t = X_t + Z_t \quad (2.14)$$

ou plus explicitement:

$$\tilde{X}_t = \sigma B_t + \sum_{n=1}^{N_t} \delta_n + \nu t \quad (2.15)$$

Les processus $\{X_t, t \geq 0\}$ et $\{N_t, t \geq 0\}$ ayant des incréments stationnaires (voir §2.2), qu'en est-il alors du processus résultant? Pour le fait qu'il soit stationnaire, il faut que $\tilde{X}(t+s) - \tilde{X}(t)$ ne dépende que de s . En développant l'expression:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t+s) - \tilde{X}(t) &= X(t+s) + Z(t+s) - X(t) - Z(t) \\ &= X(t+s) - X(t) + Z(t+s) - Z(t) \\ &= X(t+s) - X(t) + \sum_{n=1}^{N(t+s)} \delta_n - \sum_{n=1}^{N(t)} \delta_n \\ &= X(t+s) - X(t) + \sum_{n=N(t)+1}^{N(t+s)} \delta_n \end{aligned}$$

Le processus de Wiener ayant par définition des incréments indépendants et stationnaires, alors $X(t+s) - X(t)$ ne dépend que de s . Il en est visiblement de même

pour $\sum_{n=N(t)+1}^{N(t+s)} \delta_n$, car la dégradation supplémentaire accumulée entre le nombre $N(t)$ et

$N(t+s)$ ne dépends que de la durée s . Le processus résultant a donc aussi des incréments indépendants et stationnaires.

La figure 2.5 donne un exemple de réalisation du processus composé défini ci-dessus à partir des deux processus sous-jacents.

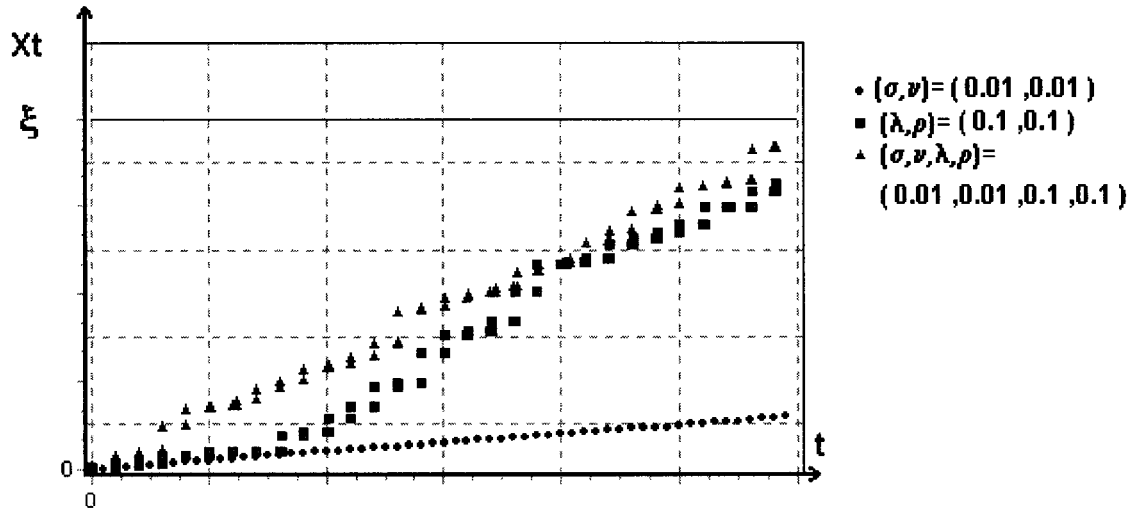


Figure 2.5: Trajectoires du processus composé

2.3.2 Distribution des défaillances

Le but est d'étudier les caractéristiques de la distribution en un instant t des valeurs prises par le processus composé et de là, la dégradation totale en cet instant.

On peut écrire d'après (2.2) et (2.14):

$$1 - F(t) = P[T > t] = P[\tilde{X}(t) \leq \xi] = P[X_t + Z_t \leq \xi] \quad (2.16)$$

D'après le paragraphe 1.1.2, la fonction de répartition de $X_t + Z_t$ est donnée par le produit de convolution de la fonction de répartition W_t de la variable aléatoire X_t et de la fonction de répartition H_t de la variable aléatoire Z_t de cette façon:

$$P[X_t + Z_t \leq \xi] = W_t * H_t(\xi)$$

De là, la fonction $F(t)$ est donnée par:

$$F(t) = 1 - P[X_t + Z_t \leq \xi] = 1 - W_t * H_t(\xi) \quad (2.17)$$

La transformée de Laplace du produit de convolution notée $L_s(W_t * H_t(x))$ est:

$$L_s(W_t * H_t(x)) = L_s(w_t(x))L_s(H_t(x)) \quad (2.18)$$

De (1.11) et (2.3), on obtient:

$$\begin{aligned} L_s(w_t(x)) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} w_t(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - \nu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - \nu t)^2}{2\sigma^2 t} - sx\right\} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - \nu t)^2 + 2\sigma^2 t s x}{2\sigma^2 t}\right\} dx \end{aligned}$$

La quantité sous l'exponentielle s'écrit:

$$\begin{aligned}
(x - \nu t)^2 + 2\sigma^2 tsx &= x^2 - 2\nu tx + (\nu t)^2 + 2\sigma^2 tsx \\
&= x^2 - 2tx(\nu - \sigma^2 s) + (\nu t)^2 \\
&= \left(x - t(\nu - \sigma^2 s)\right)^2 - t^2(\nu - \sigma^2 s)^2 + (\nu t)^2 \\
&= \left(x - t(\nu - \sigma^2 s)\right)^2 - t^2(\nu^2 - 2\nu \sigma^2 s + \sigma^4 s^2) + (\nu t)^2 \\
&= \left(x - t(\nu - \sigma^2 s)\right)^2 - t^2\nu^2 + 2t^2\nu \sigma^2 s - t^2\sigma^4 s^2 + (\nu t)^2 \\
&= \left(x - t(\nu - \sigma^2 s)\right)^2 + \sigma^2 t^2 s(2\nu - \sigma^2 s)
\end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
L_s(w_t(x)) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{\left(x - t(\nu - \sigma^2 s)\right)^2 + \sigma^2 t^2 s(2\nu - \sigma^2 s)}{2\sigma^2 t}\right\} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{\left(x - t(\nu - \sigma^2 s)\right)^2}{2\sigma^2 t}\right\} \exp\left\{-\frac{ts(2\nu - \sigma^2 s)}{2}\right\} dx \\
&= \exp\left\{-\frac{ts(2\nu - \sigma^2 s)}{2}\right\} \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{\left(x - t(\nu - \sigma^2 s)\right)^2}{2\sigma^2 t}\right\} dx
\end{aligned}$$

On démontre que la valeur de l'intégrale vaut $1/2$. De cette façon la transformée

$L_s(w_t(x))$ se réduit à:

$$L_s(w_t(x)) = \frac{1}{2} \exp\left\{-ts\left(\nu - \sigma^2 s/2\right)\right\} \quad (2.19)$$

De la même façon, pour obtenir la transformée:

$$L_s(H_t(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ G^{(n)}(x) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \right\} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-sx} G^{(n)}(x) dx \right\}$$

Le passage de l'intégrale d'une somme à la somme des intégrales est justifié par le théorème de Fubini (Ash, 1972) car tous les termes sont non négatifs.

La transformée de la fonction de répartition s'écrit en fonction de la fonction densité de probabilité à partir de la relation (Cox, 1962):

$$\mathbb{L}_s(G(x)) = \mathbb{L}_s\left(\int_0^x g(u)du\right) = \frac{\mathbb{L}_s(g(x))}{s} \quad (2.20)$$

La transformée du produit de convolution devient alors:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-sx} G^{(n)}(x)dx &= \mathbb{L}_s(G^{(n)}(x)) \\ &= \mathbb{L}_s(g(x))(\mathbb{L}_s(G(x)))^{n-1} \\ &= (\mathbb{L}_s(g(x)))^{n-1} \mathbb{L}_s(G(x)) \\ &= (\mathbb{L}_s(g(x)))^{n-1} \frac{\mathbb{L}_s(g(x))}{s} \\ &= \frac{(\mathbb{L}_s(g(x)))^n}{s} \end{aligned}$$

D'où:

$$\mathbb{L}_s(H_t(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \mathbb{L}_s(G(x))^n \right\} = \frac{e^{-\lambda t}}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\lambda t \mathbb{L}_s(g(x)))^n}{n!} \right\}$$

IL est intéressant de noter que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\lambda t \mathbb{L}_s(g(x)))^n}{n!} \right\} = \exp\{\lambda t \mathbb{L}_s(g(x))\} \quad (2.21)$$

Alors:

$$\mathbb{L}_s(H_t(x)) = \frac{1}{s} \exp\{-\lambda t[1 - \mathbb{L}_s(g(x))]\} \quad (2.22)$$

En utilisant (2.19) et (2.22), on obtient successivement:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_s(W_t * H_t(x)) &= \frac{1}{2} \exp\left\{-ts\left(\nu - \sigma^2 s/2\right)\right\} \frac{1}{s} \exp\{-\lambda t[1 - \mathbb{L}_s(g(x))]\} \\ &= \frac{1}{2s} \exp\left\{-ts\left(\nu - \sigma^2 s/2\right) - \lambda t[1 - \mathbb{L}_s(g(x))]\right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

En notant par $\mathbb{L}_s^{-1}$ l'opérateur d'inversion de la transformée de la place, on écrit :

$$W_t * H_t(x) = \mathbb{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{2s} \exp\left\{-ts\left(\nu - \sigma^2 s/2\right) - \lambda t[1 - \mathbb{L}_s(g(x))]\right\}\right) \quad (2.24)$$

De plus, si l'amplitude des chocs est aussi distribuée selon une loi exponentielle de paramètre ρ alors:

$$\mathbb{L}_s(g(x)) = \frac{\rho}{(s + \rho)} \quad (2.25)$$

En mettant (2.25) dans (2.24) on trouve:

$$W_t * H_t(x) = \mathbb{L}_s^{-1}\left(\frac{1}{2s} \exp\left\{-ts\left(\nu - \sigma^2 s/2\right) - \lambda t\left(1 - \frac{\rho}{(s + \rho)}\right)\right\}\right) \quad (2.26)$$

L'inversion analytique de (2.26), s'il est possible, dépasse le cadre de ce mémoire. Par contre, l'évaluation de la transformée inverse peut être effectuée numériquement, en

utilisant un algorithme de calcul d'une intégrale, dite intégrale de Bromwich, sur un domaine complexe.

En effet, en posant :

$$L(s) = \frac{1}{2s} \exp \left\{ -ts \left(\nu - \frac{\sigma^2 s}{2} \right) - \lambda t \left(1 - \frac{\rho}{(s + \rho)} \right) \right\} \quad (2.27)$$

Alors:

$$W_t * H_t(x) = \mathbb{L}_s^{-1}(L(s)) \quad (2.28)$$

Une approximation de $\mathbb{L}_s^{-1}(L(s))$ est obtenue en utilisant l'algorithme décrit dans (Valsa et Brancik, 1998). De là:

$$\mathbb{L}_s^{-1}(L(s)) = \frac{e^a}{2x} \left\{ \frac{1}{2} L\left(\frac{a}{x}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{Re} \left\{ L\left(\frac{a}{x} + jn \frac{\pi}{x}\right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ L\left(\frac{a}{x} + j\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{x}\right) \right\} \right] \right\} \quad (2.29)$$

Alors:

$$W_t * H_t(x, a) = \frac{e^a}{2x} \left\{ \frac{1}{2} L\left(\frac{a}{x}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{Re} \left\{ L\left(\frac{a}{x} + jn \frac{\pi}{x}\right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ L\left(\frac{a}{x} + j\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{x}\right) \right\} \right] \right\} \quad (2.30)$$

Les valeurs $a = 6$ et la somme faite sur un nombre suffisant de termes donnent une très bonne approximation de la transformée inverse (Valsa et Brancik, 1998). Les calculs réalisés sur les transformées usuelles donnent de très bons résultats aussi.

Finalement, la distribution $F(t)$ est alors approchée par l'expression:

$$F(t) = 1 - W_t * H_t(\xi) \approx F(t,6) \approx 1 - W_t * H_t(\xi,6) \quad (2.31)$$

La densité de probabilité $f(t)$ par:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\partial}{\partial t} F(t) = -\frac{\partial}{\partial t} W_t * H_t(x) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{L}_s^{-1} \left(\frac{1}{2s} \exp \left\{ -ts \left(\nu - \sigma^2 s/2 \right) - \lambda t \left(1 - \frac{\rho}{(s+\rho)} \right) \right\} \right) \\ &= -\mathbb{L}_s^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2s} \exp \left\{ -t \left[s \left(\nu - \sigma^2 s/2 \right) + \lambda \left(1 - \frac{\rho}{(s+\rho)} \right) \right] \right\} \right] \right) \quad (2.32) \\ &= \mathbb{L}_s^{-1} \left(\frac{1}{2s} \left[s \left(\nu - \sigma^2 s/2 \right) + \lambda \left(1 - \frac{\rho}{(s+\rho)} \right) \right] \exp \left\{ -ts \left(\nu - \sigma^2 s/2 \right) - \lambda t \left(1 - \frac{\rho}{(s+\rho)} \right) \right\} \right) \end{aligned}$$

En utilisant (2.27):

$$f(t) = \mathbb{L}_s^{-1} \left\{ L(s) \left(s \left(\nu - \sigma^2 s/2 \right) + \lambda \left(1 - \frac{\rho}{(s+\rho)} \right) \right) \right\} \quad (2.33)$$

En posant:

$$l(s) = L(s) \left(s \left(\nu - \sigma^2 s/2 \right) + \lambda \left(1 - \frac{\rho}{(s+\rho)} \right) \right) \quad (2.34)$$

Alors:

$$f(t) \approx f(t, a) \approx \frac{e^a}{2\xi} \left\{ \frac{1}{2} l\left(\frac{a}{\xi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{Re} \left\{ l\left(\frac{a}{\xi} + jn\frac{\pi}{\xi}\right) \right\} + \operatorname{Im} \left\{ l\left(\frac{a}{\xi} + j(n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\xi}\right) \right\} \right] \right\} \quad (2.35)$$

La figure 2.6 montre le tracé des fonctions caractéristiques du temps de première défaillance de l'équipement sujet à la dégradation composée décrite par le processus $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$.

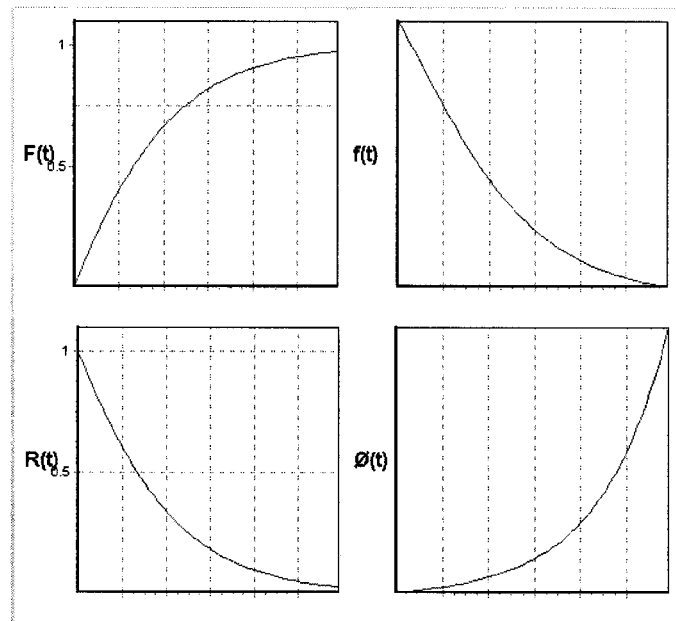


Figure 2.6: Courbes $F(t)$, $f(t)$, $\phi(t)$ et $R(t)$ d'un système se dégradant selon le processus composé avec $(\sigma, \nu, \rho, \lambda, \xi) = (0.01, 0.01, 0.1, 0.1, 4)$.

2.3.3 Influence des paramètres du modèle

Le but de cette section est de donner un aperçu de l'importance relative de chacun des paramètres du modèle de dégradation composée. L'analyse de la variance par des méthodes statistiques classiques basées sur les plans d'expérience ne sera pas tentée sur ce modèle. La difficulté réside dans le fait que la distribution de la valeur de la dégradation en un instant donné est issue d'une transformation assez complexe et de là, reconnaître des paramètres ou une combinaison de paramètres qui influencent qualitativement le comportement du modèle est difficile. L'approche est alors de simuler la dégradation numériquement, de faire varier les paramètres un à la fois et fixer le reste. L'analyse est alors faite graphiquement.

Paramètre σ : Ce paramètre est caractéristique du mouvement brownien. En effet, les valeurs croissantes de σ montre une plus grande variation des valeurs de dégradation en un instant donnée par rapport à la dégradation moyenne en ce même instant. La figure 2.7 montre les dégradations simulées pour diverses valeurs de σ : $\sigma = \{0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$.

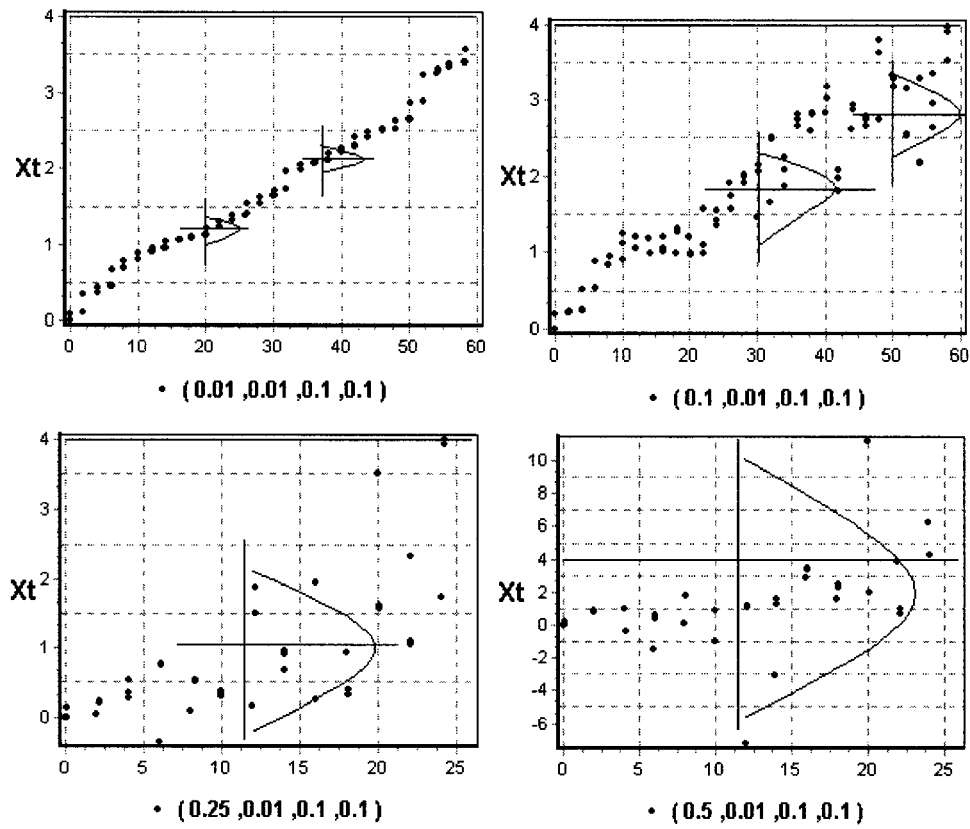


Figure 2.7: Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre $\sigma = \{0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$.

Paramètre ν : Ce paramètre est la dérive du processus de dégradation continu. C'est en quelque sorte la pente avec laquelle le processus atteint le seuil. Plus la valeur est grande, plus le seuil est atteint plus rapidement. Pour les faibles valeurs, c'est le processus de chocs qui contribue le plus à l'atteinte du seuil de dégradation.

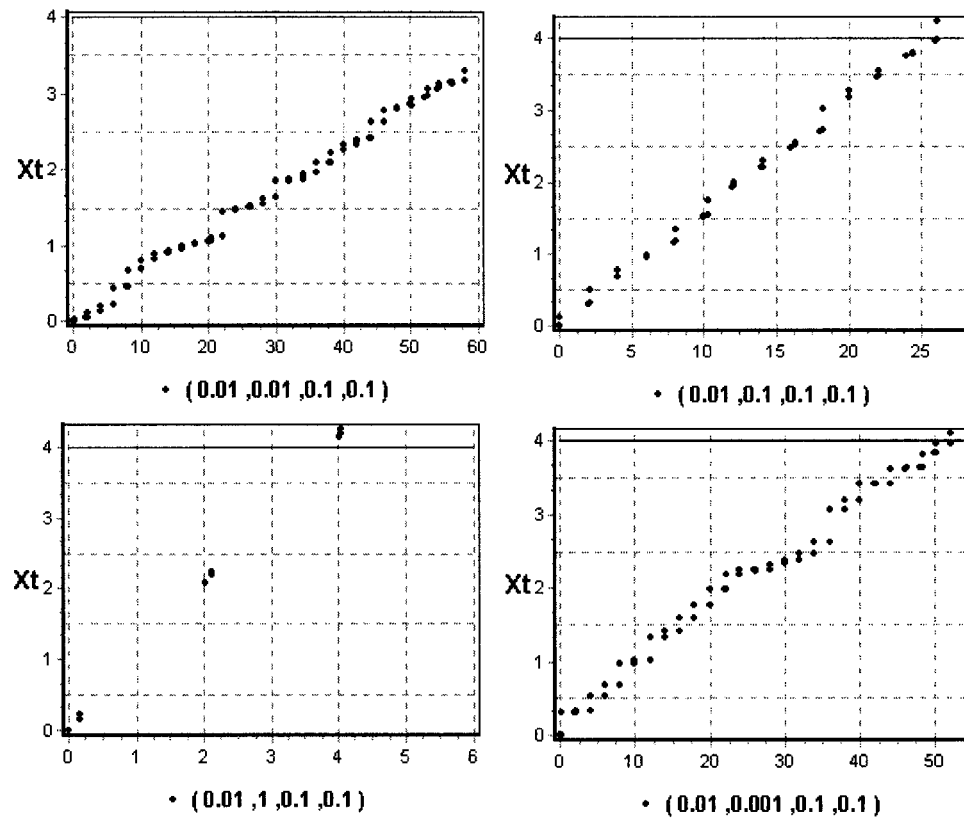


Figure 2.8: Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre

$$\nu = \{0.01, 0.1, 1, 0.001\}.$$

Paramètre λ : C'est le paramètre qui caractérise la fréquence d'arrivée des chocs. Pour un horizon d'observation donné, le plus grand est λ , les moins espacées sont les arrivées des chocs en moyenne. La figure 2.9 illustre les graphiques obtenus en faisant varier λ . Les bonds dans les graphiques sont caractéristiques des arrivées des chocs.

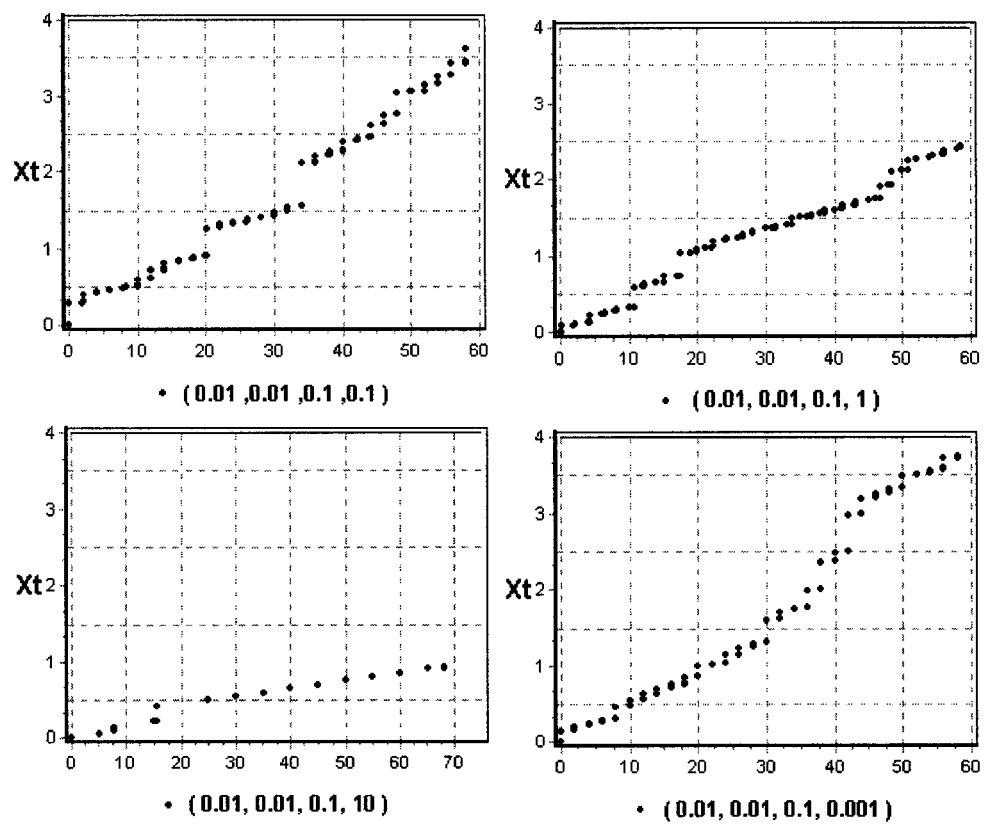


Figure 2.9: Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre

$$\lambda = \{0.1, 1, 10, 0.001\}.$$

Paramètre ρ : Finalement, l'amplitude des chocs est significative pour ce modèle. La plus grande est l'amplitude, le plus vite le seuil est atteint, ce qui est assez compréhensible. La figure 2.10 illustre bien ce fait.

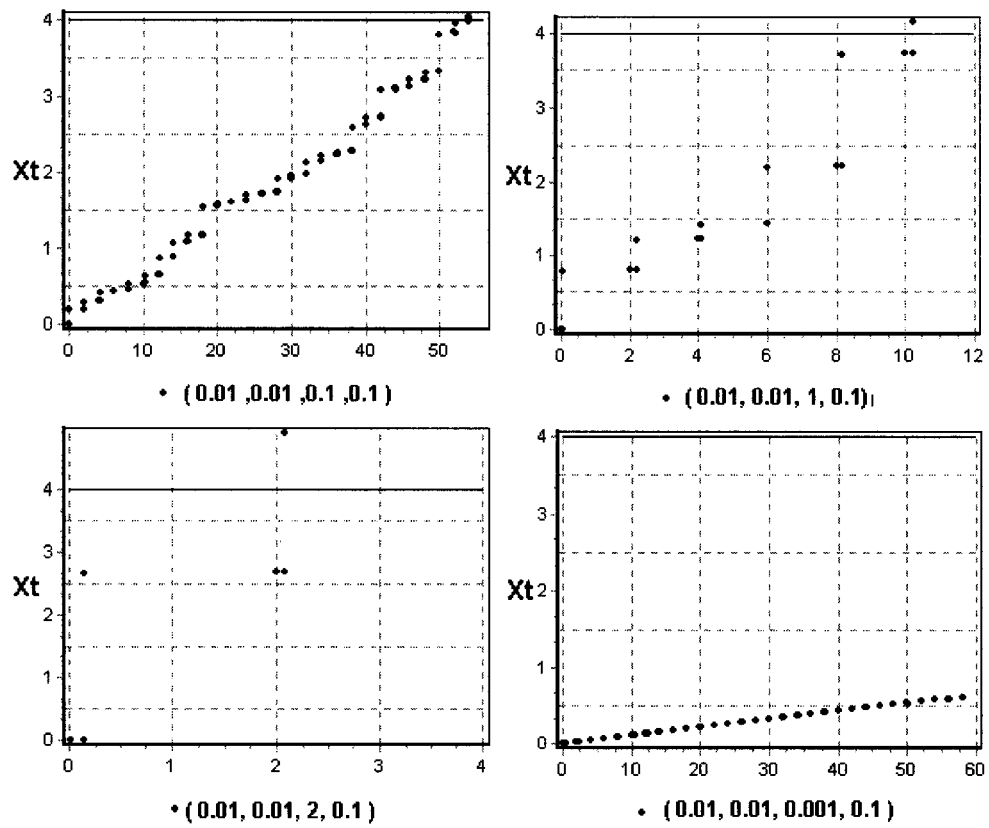


Figure 2.10: Variation du modèle défini par $(\sigma, \nu, \rho, \lambda)$, selon le paramètre $\rho = \{0.1, 1, 2, 0.001\}$.

Maintenant que les caractéristiques du temps de la première défaillance d'un équipement subissant une dégradation composée sont connues, dans le chapitre suivant, ces résultats sont utilisés pour la formulation de l'algorithme qui permettra de déterminer la séquence d'inspections non périodique $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ et la séquence périodique $\tau = (\tau, 2\tau, 3\tau, \dots)$ permettant de minimiser le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini et les séquences qui permettent de maximiser la disponibilité.

CHAPITRE 3

STRATÉGIES D'INSPECTION

3.1 Introduction

On considère un équipement constitué d'une seule unité. Celui ci est déclaré défaillant lorsque sa dégradation, représentée par un processus cumulatif $\{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$, atteint la limite ξ . À l'inspection, il est remplacé quand la dégradation relevée dépasse le seuil limite ou sinon, il est laissé tel quel sans perturbation. Les inspections et les remplacements sont supposés instantanés. Quand une défaillance survient et que l'unité est immédiatement remplacée, un nouveau cycle d'inspections recommence. Il est intéressant de noter, qu'un modèle avec un seuil de remplacement préventif ξ_p inférieur à ξ , constitue une variante de l'approche de modélisation. En effet, il serait judicieux dans certaines situations, de rechercher un seuil optimal de remplacement pour une séquence d'inspection donnée, mais cette situation ne pourra pas être abordée dans ce mémoire. Pour ce qui nous concerne ξ et ξ_p sont confondus.

Les réalisations typiques d'une telle situation sont représentées à la figure (3.1).

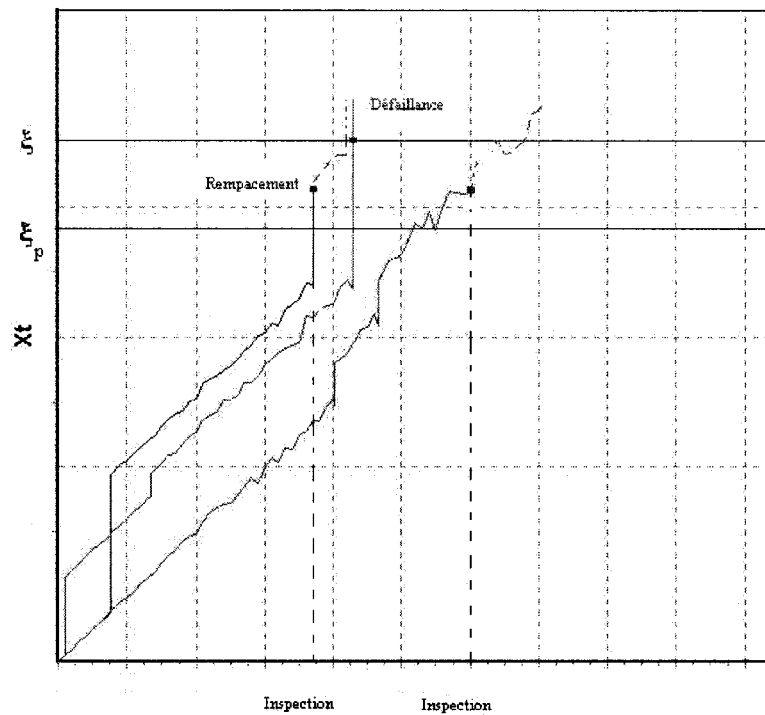


Figure 3.1: Dégradation et inspections

Considérons un cycle de fonctionnement débutant à l'instant où l'équipement est activé et se terminant au moment du remplacement et supposons que:

la défaillance n'est détectée que par l'inspection;

l'inspection est parfaite (i.e. aucune dégradation supplémentaire n'est ajoutée);

le coût d'une inspection et d'un remplacement sont respectivement c_i et c_r ;

les pertes par unité de temps encourues entre la défaillance et sa découverte est c_p ;

les durées d'inspections et de remplacement sont considérées négligeables;

l'équipement, après remplacement, est comme neuf et un nouveau cycle d'inspections $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots)$ recommence.

3.2 Coût total moyen par cycle

Soit M_t le nombre d'inspections réalisées jusqu'à l'instant t et γ_t la durée entre la défaillance et l'inspection qui la met à jour (figure 3.2). En utilisant les résultats de la théorie de renouvellement, on écrit que le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini $C_{moy}(\tau)$ est donné par le rapport du coût total moyen encouru sur un cycle $C(\tau)$ divisé par la longueur moyenne $U(\tau)$ de ce cycle. Alors:

$$C_{moy}(\tau) = \frac{C(\tau)}{U(\tau)} \quad (3.1)$$

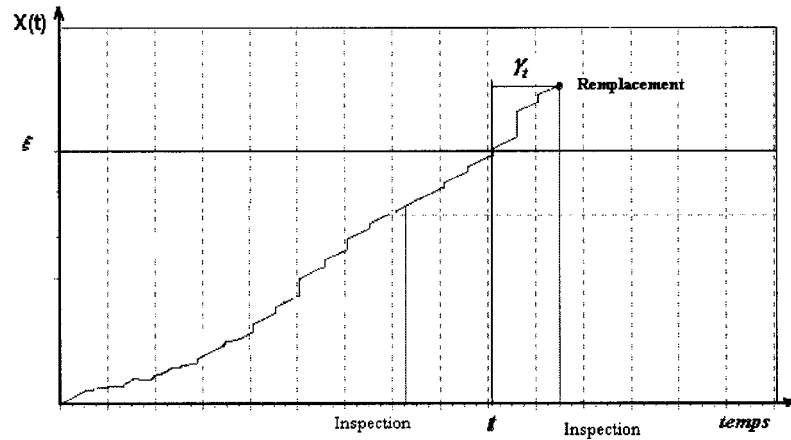


Figure 3.2: Cycle de remplacement

En considérant que la défaillance arrive à l'instant t , d'après la figure 3.2, le coût encouru sur un cycle est:

$$\text{coût sur un cycle} = c_i(M_t + 1) + c_p \gamma_t + c_r \quad (3.2)$$

La loi de défaillance est décrite par la fonction de répartition $F(t)$, selon le processus de dégradation décrit au §2.3, le coût total moyen par cycle est donné par (Barlow et al., 1996):

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} [c_i(M_t + 1) + c_p \gamma_t] dF(t) + c_r \quad (3.3)$$

3.3 Disponibilité

La disponibilité moyenne est une mesure de performance d'un intérêt particulier en maintenance. Elle est définie dans (Ash, 1972) par:

$$D_{\text{moy}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t E[I_u] du}{t} \quad (3.4)$$

avec I une variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le système est en fonctionnement à l'instant t ou la valeur 0 sinon. De même que pour le coût total moyen sur un horizon infini et en utilisant l'argument de la théorie de renouvellement, on écrit que la disponibilité moyenne est le rapport entre l'espérance du temps de la première défaillance de l'équipement μ sur la durée moyenne d'un cycle $U(\tau)$:

$$D_{\text{moy}} = \frac{\mu}{U(\tau)} \quad (3.5)$$

L'espérance de la variable aléatoire T est par définition égale à:

$$\mu = E[T] = \int_0^{\infty} t dF(t) \quad (3.6)$$

3.4 Stratégie d'inspection non périodique

La stratégie d'inspection non périodique trouve son intérêt en relation avec les problèmes de maintenance avec des contraintes diverses. Les contraintes de coûts sont parmi elles. Dans (Barlow et al., 1996), la forme de la distribution du temps de la première défaillance est prise en compte pour trouver les inspections qui se déroulent selon une séquence croissante $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots)$. Dans (3.3), l'intégrale est décomposée en une somme d'intégrales sur les intervalles successifs $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ séparant deux inspections.

3.4.1 Expression du coût

Le coût total se décompose selon la séquence d'inspection comme suit:

$$C(\tau) = C(\tau_1, \tau_2, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [c_i(k+1) + c_p(\tau_{k+1} - t)] dF(t) + c_r \quad (3.7)$$

De même, la longueur moyenne d'un cycle par:

$$U(\tau) = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [(\tau_{k+1} - t)] dF(t) \quad (3.8)$$

Finalement, le coût total moyen sur un horizon infini est:

$$C_{moy}(\tau) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [c_i(k+1) + c_p(\tau_{k+1} - t)] dF(t) + c_r}{\mu + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [(\tau_{k+1} - t)] dF(t)} \quad (3.9)$$

3.4.2 Minimisation du coût

Comme prouvé dans (Barlow et al., 1996), si $F(t)$ est continue avec une moyenne finie, une stratégie d'inspection optimale doit exister.

En reprenant l'équation (3.1):

$$C_{moy}(\tau) = \frac{C(\tau)}{U(\tau)}$$

On pose:

$$K_c(\alpha, \tau) = C(\tau) - \alpha U(\tau) \quad (3.10)$$

Avec $\alpha > 0$. En utilisant (3.7), (3.8) et (3.10), on obtient successivement :

$$\begin{aligned} K_c(\alpha, \tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [c_i(k+1) + c_p(\tau_{k+1} - t)] dF(t) + c_r - \alpha \left[\mu + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [(\tau_{k+1} - t)] dF(t) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [c_i(k+1) + (c_p - \alpha)(\tau_{k+1} - t)] dF(t) + c_r - \alpha \mu \end{aligned} \quad (3.11)$$

En considérant la densité de défaillance $f(t)$ décrite dans §2.2, une condition nécessaire pour que les inspections à effectuer selon la séquence $\tau = \{\tau_k\}$ minimisent $K_c(\alpha, \tau)$ est de poser, pour tout k :

$$\frac{\partial K_c(\alpha, \tau)}{\partial \tau_k} = 0 \quad (3.12)$$

En utilisant (3.11), cette condition devient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_k} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [c_i(k+1) + (c_p - \alpha)(\tau_{k+1} - t)] dF(t) + c_r - \alpha \mu \right] &= 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \tau_k} \left[\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} [c_i k + (c_p - \alpha)(\tau_k - t)] dF(t) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} [c_i(k+1) + (c_p - \alpha)(\tau_{k+1} - t)] dF(t) \right] &= 0 \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient successivement:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_k} \left[\left[(c_i k + (c_p - \alpha)(\tau_k - t)) F(t) \right]_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} + (c_p - \alpha) \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} F(t) dt + \left[(c_i(k+1) + (c_p - \alpha)(\tau_{k+1} - t)) F(t) \right]_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} + (c_p - \alpha) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F(t) dt \right] = 0 \Leftrightarrow$$

Ce qui donne:

$$\left[c_i k \frac{\partial F(\tau_k)}{\partial \tau_k} - (c_p - \alpha) F(\tau_{k-1}) - \left(c_i(k+1) + (c_p - \alpha)(\tau_{k+1} - \tau_k) \right) \frac{\partial F(\tau_k)}{\partial \tau_k} + (c_p - \alpha) F(\tau_k) - c_p F(\tau_k) + c_p F(\tau_k) \right] = 0$$

En notant que:

$$f(\tau_k) = \frac{\partial F(\tau_k)}{\partial \tau_k}$$

Alors:

$$c_i k f(\tau_k) - (c_p - \alpha) F(\tau_{k-1}) - (c_i(k+1) + (c_p - \alpha)(\tau_{k+1} - \tau_k)) f(\tau_k) + (c_p - \alpha) F(\tau_k) = 0 \Rightarrow$$

$$(c_i + (c_p - \alpha)(\tau_{k+1} - \tau_k)) f(\tau_k) = (c_p - \alpha) (F(\tau_k) - F(\tau_{k-1})) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{c_i}{(c_p - \alpha)} + (\tau_{k+1} - \tau_k) \right) = \frac{F(\tau_k) - F(\tau_{k-1})}{f(\tau_k)}$$

et cela pour $f(t) > 0$ et $c_p \neq \alpha$.

On retrouve finalement une forme du résultat similaire à (1.26):

$$\tau_{k+1} - \tau_k = \frac{F(\tau_k) - F(\tau_{k-1})}{f(\tau_k)} - \frac{c_i}{(c_p - \alpha)} \quad (3.13)$$

Cette dernière équation permet d'établir une relation de récurrence entre les inspections.

En choisissant l'instant de la première inspection, la suite de la séquence est obtenue par itérations successives. L'algorithme qui suit permet de choisir la valeur de départ des inspections ainsi que de déterminer α pour obtenir la séquence d'inspection qui minimise le coût total moyen sur un horizon infini.

Algorithme:

Cet algorithme a été à l'origine appliqué à un modèle d'inspection sans remplacement (étapes 2 à 4). Des étapes supplémentaires dans l'algorithme sont rajoutées pour pouvoir traiter le modèle avec remplacement. Ces étapes supplémentaires sont issues de (Brender, 1963).

Étape 1. Poser: $\varepsilon_k = \tau_{k+1} - \tau_k$;

Soit $\{\tau^*\}$ la séquence d'inspection optimale et selon la notation précédente $\varepsilon_k^* = \tau_{k+1}^* - \tau_k^*$. Les séquences $\{\tau\}$ et $\{\tau^*\}$ satisfont l'équation (3.13) et le rapport $F(t)/f(t)$ est considérée strictement croissant (cette hypothèse est vérifiée graphiquement). Un accroissement de τ_1 à partir de la valeur τ_1^* implique un accroissement de ε_1 . On démontre que pour certaines valeurs n , $\varepsilon_n > \tau_1$ et ainsi $\varepsilon_n > \varepsilon_{n-1}$. De même, une diminution τ_1 de à partir de la valeur τ_1^* résulte dans une diminution de plus en plus importante de ε_k quand k augmente et cela tant que ε_k reste positif. Ainsi $\varepsilon_n < 0$ pour certain n (plus de détails dans (Barlow et al., 1996) et illustration dans tableau 3.1)

Étape 2. Choisir τ_1 de telle façon que le coût de la première inspection est balancé par le coût moyen induit par la première défaillance non détectée, ce qui revient à écrire:

$$c_i = c_p \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - t) dF(t) = c_p \int_0^{\tau_1} F(t) dt \quad (3.14)$$

Étape 3. Pour une valeur fixée de α , calculer $\tau_2, \tau_3, \dots$ par récurrence selon (3.13);

Étape 4. Dans le cas où:

* $\varepsilon_k > \varepsilon_{k-1}$: réduire τ_1 et recommencer;

* $\varepsilon_k < 0$: augmenter τ_1 et recommencer;

Étape 5. Trouver alors la séquence $\tau(\alpha)$ avec $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ qui minimise $K_c(\alpha, \tau)$;

Étape 6. Faire varier α de façon à trouver $\alpha = \alpha^*$ pour lequel $K_c(\alpha^*, \tau(\alpha^*)) = 0$.

Alors $\tau(\alpha^*)$ minimisera $C_{moy}(\tau)$;

La figure 3.3 montre le tracé de résolution numérique de l'étape 2 de l'algorithme de recherche. L'intégrale est évaluée numériquement par la méthode de Romberg ($Err = o(h^n)$) où n est le nombre de nœuds (voir une description de la méthode dans l'annexe 2).

L'intersection de la droite $y = c_i$ et la courbe $y = c_p \int_0^{\tau_1} F(t) dt$, donnant le point τ_1

(figure 3.3), est obtenue par la méthode de la sécante (voir annexe 3).

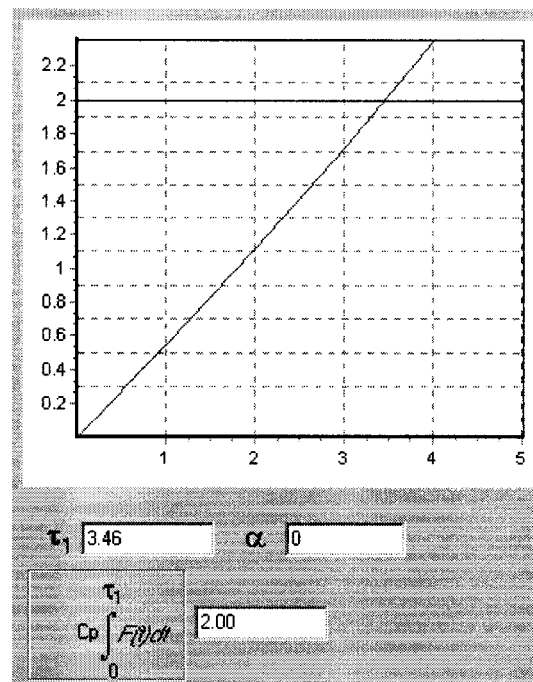


Figure 3.3: Détermination numérique de l'instant de la première inspection

Le tableau 3.1 montre un exemple d'exécution de l'algorithme selon l'équation (3.14). Un processus de chocs ($F(t)$ donnée par l'équation 2.10) est utilisé pour la détermination de la séquence d'inspection. Dans cet exemple, le coût moyen par cycle pour $\alpha = 0.1$ est minimal, pour une valeur de τ_1 situé entre 7.43 et 7.44 unités de temps.

Tableau 3.1: Exemple de recherche de séquence d'inspection selon l'algorithme de Barlow et al pour $\alpha = 0.1$, $c_i = 2$, $c_r = 10$, $c_p = 1$ pour $F(t)$ selon l'équation (2.10)

k	Exécution 1		Exécution 2	
	τ_k	ε_k	τ_k	ε_k
1	7.430	7.252	7.440	7.268
2	14.682	7.128	14.708	7.155
3	21.810	7.029	21.863	7.074
4	28.839	6.945	28.937	7.020
5	35.784	6.866	35.957	6.994
6	42.651	6.784	42.951	7.001
7	49.435	6.687		
8	69.047	6.074		
9	75.121	5.610		
10	80.731	4.879		
11	85.611	3.769		
12	89.380	2.193		
13	91.573	0.1804		
14	91.754	-2.0405		

3.5 Stratégie d'inspection périodique

Cette stratégie est indiquée dans les situations où l'amélioration de la disponibilité est l'objectif majeur. Pour cette stratégie, l'inspection est faite à des intervalles de temps égaux à τ . À ce moment là, la séquence d'inspection est $\tau = (\tau, 2\tau, 3\tau, \dots)$, c'est à dire:

$$\tau_k = k \tau \quad (3.15)$$

3.5.1 Expression de la disponibilité

Pour la longueur moyenne d'un cycle, la périodicité étant constante, on écrit:

$$U(\tau) = \tau E[M_t] \quad (3.16)$$

Cela veut dire que la longueur moyenne d'un cycle est égale au nombre moyen d'inspections réalisées par la durée τ . De plus, par définition:

$$E[M_t] = \sum_{k=0}^{\infty} P\{M_t > k\} \quad (3.17)$$

Mais si k inspections sont réalisées, ceci implique que le temps de la première défaillance est strictement supérieur à $k\tau$. On peut établir alors l'égalité suivante:

$$P\{M_t > k\} = P\{T > k\tau\} \quad (3.18)$$

Et comme:

$$P\{T > k\tau\} = \bar{F}(k\tau) \quad (3.19)$$

Alors, de ce qui précède, on écrit que:

$$U(\tau) = \tau \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}(k\tau) \quad (3.20)$$

3.5.2 Maximisation de la disponibilité

L'approche dans ce cas est légèrement différente. Le temps de la première défaillance moyen est écrit sous la forme:

$$E[T] = \int_0^{\infty} P\{T > t\} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \bar{F}(t) dt \quad (3.21)$$

Alors, la disponibilité moyenne devient:

$$D_{moy} = \frac{E[T]}{U(\tau)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \bar{F}(t) dt}{\tau \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}(k\tau)} \quad (3.22)$$

Ce résultat montre que pour atteindre une disponibilité moyenne donnée, les séquences d'inspections périodiques devraient vérifier l'équation:

$$\tau D_{moy} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}(k\tau) - \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \bar{F}(t) dt = 0 \quad (3.23)$$

Dans ce chapitre, les principales caractéristiques d'une stratégie de maintenance basée sur l'inspection ont été évaluées. Les modèles mathématiques pour l'optimisation du coût et de la disponibilité des équipements sous les conditions énoncées au début de ce chapitre et sur le long terme ont été établis.

La méthode d'optimisation utilisant les dérivées est assez classique et procède par étapes avec une variable à la fois. D'autres méthodes, telles que la programmation dynamique et les algorithmes de recherche par motifs, existent pour traiter l'optimisation globale sur plusieurs variables et de ce fait assurent l'obtention d'un minimum global. Ces méthodes pourront être utilisées dans une extension de ce travail pour minimiser les coûts de maintenance pour l'inspection périodique par exemple.

Dans le chapitre suivant, une utilisation concrète des résultats obtenus est faite par le biais de la réalisation d'un logiciel informatique permettant la saisie des conditions d'utilisations, de simuler les dégradations, de tracer les distributions, d'évaluer les séquences d'inspections et de déterminer les coûts et disponibilités respectives.

CHAPITRE 4

APPLICATION

Dans ce chapitre, l'utilisation effective du modèle d'inspection dans une situation pratique dans le domaine de la maintenance est mise en avant. Les résultats analytiques obtenus dans les chapitres précédents sont transposés dans un programme informatique réalisant les principaux objectifs de ce mémoire.

4.1 Mise en situation

La situation traitée est adaptée d'un problème de la littérature et concerne un manufacturier qui fabrique et fournit des composants à une clientèle diversifiée. Une catégorie de composants est utilisée chez deux de ses clients dans des conditions assez différentes. Selon le cahier des charges de chacun des clients, il veut alors s'assurer de fournir un plan d'inspection à chacun d'eux à même de garantir des coûts de maintenance les plus bas dans un premier cas et une disponibilité moyenne donnée de 85% dans un autre et ceci pour des stratégies d'inspection non périodique et périodique.

Les défaillances surviennent dans les conditions décrites au chapitre 2, c'est-à-dire que la panne survient lorsque la dégradation cumulée dans le composant atteint un seuil limite indépendamment de l'environnement. Les composants, produits en série, sont similaires

et lors de leurs mise en service, ils se dégradent principalement par l'action de chocs répétitifs et dont l'action s'accumule ainsi que par une dégradation continue, sous jacente à la première.

Le manufacturier dispose d'un laboratoire pour reproduire les conditions d'utilisation chez chacun des clients et cela pour tirer des conclusions sur les durées de vie des composants. Mais ces opérations sont coûteuses ou même impossible à réaliser. En plus, le fait de devoir reproduire les conditions d'utilisation pour chaque client à chaque nouvelle vente est quelque peu prohibitif en terme de coûts. Le manufacturier s'appuie alors sur les données d'utilisations recueillies chez les clients pour réaliser ses programmes de maintenance. D'abords, dans les essais de laboratoire, le manufacturier détermine le seuil de défaillance ξ de ses équipements. En connaissant les conditions d'utilisation chez chaque client, le manufacturier réalise des simulations pour estimer les paramètres du modèle de dégradation à utiliser dans chaque situation et finalement, en s'appuyant sur les relations développées aux chapitres 2 et 3, pour obtenir numériquement, les données sur le temps de première défaillance, les séquences d'inspection, les coûts et les disponibilités relatives à chaque client.

Pour les conditions d'utilisation chez le client i ($i = 1, 2$), les paramètres du modèle de dégradations sont $(\sigma_i, \nu_i, \lambda_i, \rho_i)$. La dégradation continue est représentée par un processus de Wiener de paramètres (σ_i, ν_i) . Les chocs apparaissent selon un processus

de Poisson de taux λ_i . Les amplitudes des chocs sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre ρ_i .

Pour illustrer une situation pratique, supposons que pour l'un des équipements vendus, le seuil de bon fonctionnement ξ est fixé à 4mm. L'inspection de l'état de dégradation engage des frais c_i de 10\$ et le coût de remplacement c_r du composant défaillant se monte à 50\$. De plus, les pertes encourues c_p sont de 2\$ par unité de temps pendant la durée où la défaillance n'est pas détectée. Le manufacturier dispose des données décrites dans le tableau (4.1) sur les conditions d'utilisation chez ses deux clients. Avec ces paramètres pris en entrée, le logiciel décrit brièvement dans la section suivante, donne les données de dégradation simulées, le plan d'inspection et les caractéristiques attendues.

Tableau 4.1: Conditions d'utilisation chez deux clients.

	Dégradation continue	Taux d'arrivée des chocs	Amplitude des chocs
Client 1	$\nu_1 = \sigma_1 = 0.01$	$\lambda_1 = 1/10$	Expo $\rho_1 = 1/10$
Client 2	$\nu_2 = \sigma_2 = 0.01$	$\lambda_2 = 1/10$	Expo $\rho_2 = 1/2$

4.2 Description du logiciel

Cette application informatique, réalisée par programmation en langage orienté objet, est organisée pour réaliser 5 étapes successives.

Étape 1. saisie des données; ce sont les paramètres des processus de dégradation, les coûts encourus et les paramètres des graphes (origine, horizon, incrément);

Étape 2. simulation des dégradations;

Cette composante du logiciel est un module indépendant qui, à partir de la loi normale pour le processus de Wiener et la loi exponentielle pour le processus de chocs, génère pseudo-aléatoirement (L'Ecuyer, 1998; L'Ecuyer, 2001; Matsumoto et Nishimura, 1998)) des dégradations et détermine les quantités Z_t et X_t jusqu'à l'instant t . Il calcule par la suite la valeur de la dégradation totale $\tilde{X}_t$ en additionnant les dégradations sous jacentes;

Étape 3. tracé des distributions selon les lois développées au §2.3.2;

Étape 4. calcul des séquences d'inspections;

Étape 5. évaluations des coûts et de la disponibilité pour les séquences déterminées précédemment.

L'interface graphique pour chaque phase est représentée par une page distincte sur l'interface globale de l'application informatique.

Page "Données"

Dans cette page (figure 4.1), permet la saisie des paramètres des processus de dégradations $(\sigma_i, \nu_i, \lambda_i, \rho_i)$, le seuil limite ξ , les données sur les coûts et les paramètres des graphiques.

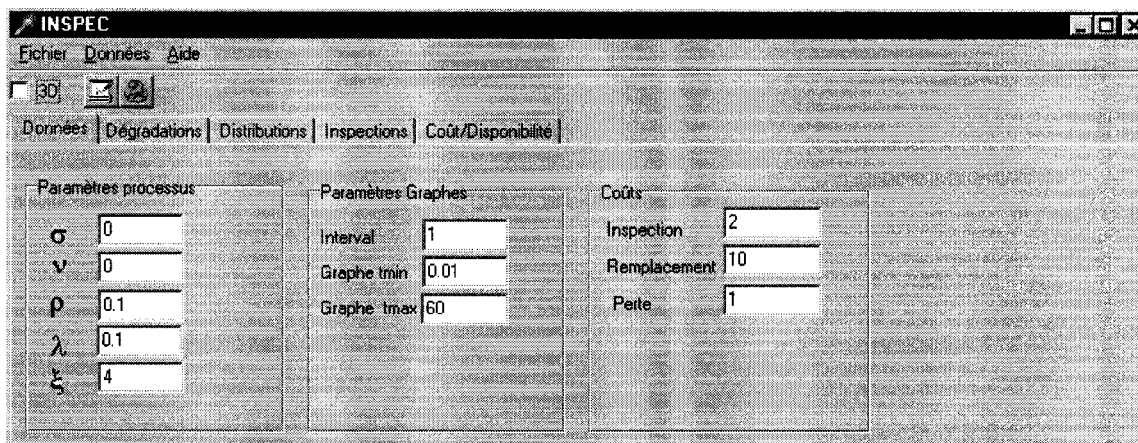


Figure 4.1: Interface de la page données.

Page Dégradations

Sur cette page, un sous menu est disponible (figure 4.2). Il permet de simuler les réalisations successives des processus de dégradations continue, de chocs et le la dégradation composée résultante, en arrière plan et enfin réalise le tracé des graphiques correspondants.

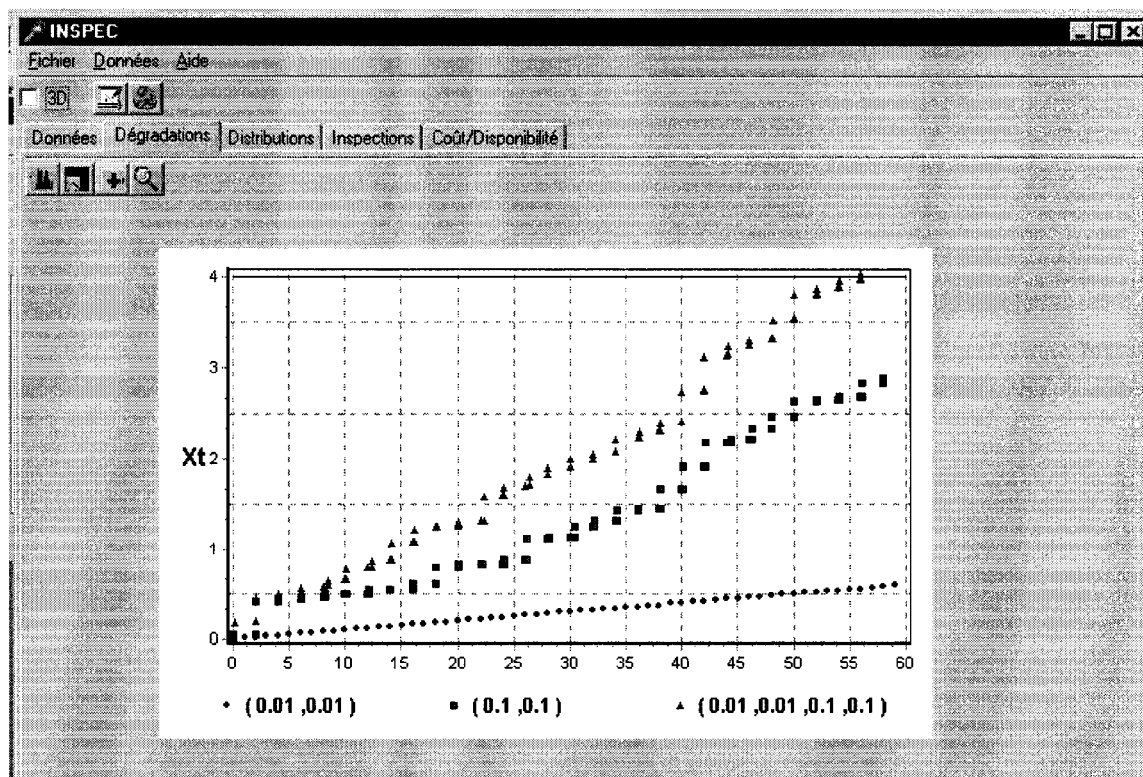


Figure 4.2: Interface de la page dégradations.

Page "Distributions"

Toujours selon un menu local, les courbes caractéristiques de l'instant de défaillances sont évaluées. Il s'agit de la fonction de répartition $F(t)$, la densité de probabilité $f(t)$, la courbe de fiabilité $R(t)$ et de taux de défaillance $\phi(t)$. Une commande permet ensuite d'évaluer la moyenne et la variance de la loi de défaillance obtenue.

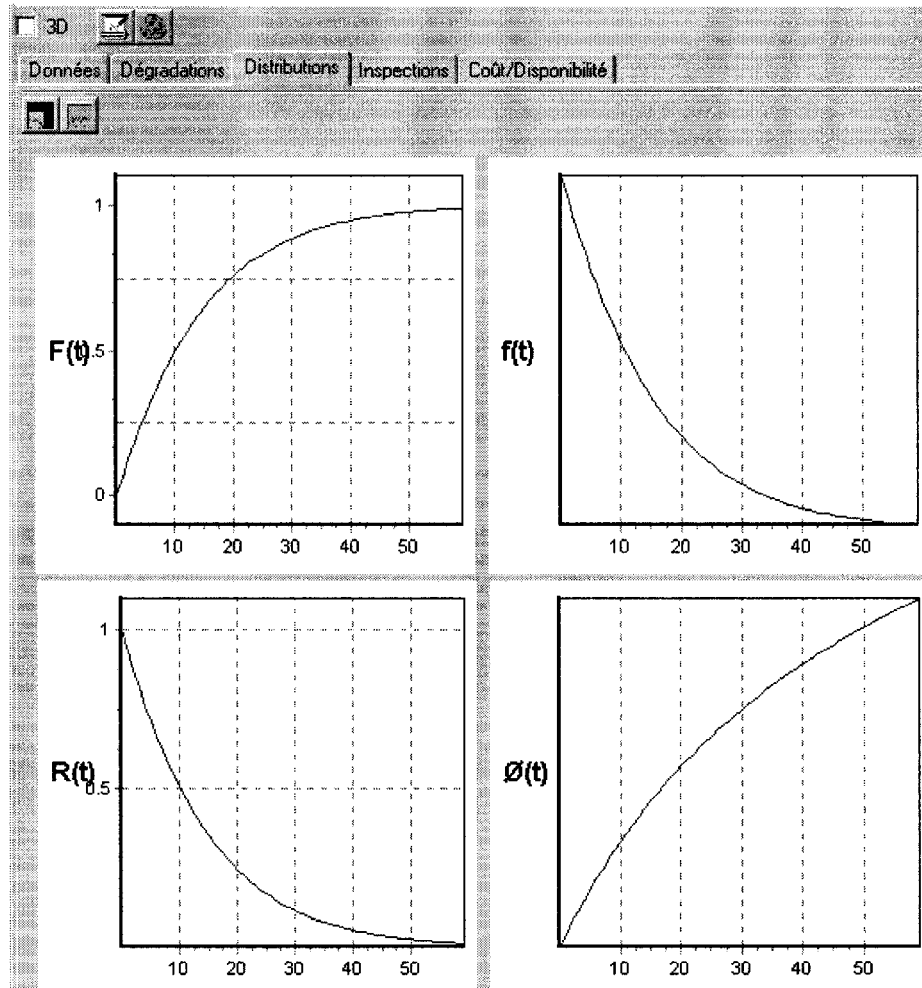


Figure 4.3: Interface de la page distributions.

Page "Inspections"

Dans cette page, le menu permet successivement d'évaluer la première valeur de τ_1 et ensuite de l'améliorer par itérations successives et finalement de sortir la séquence d'inspection nécessaires.

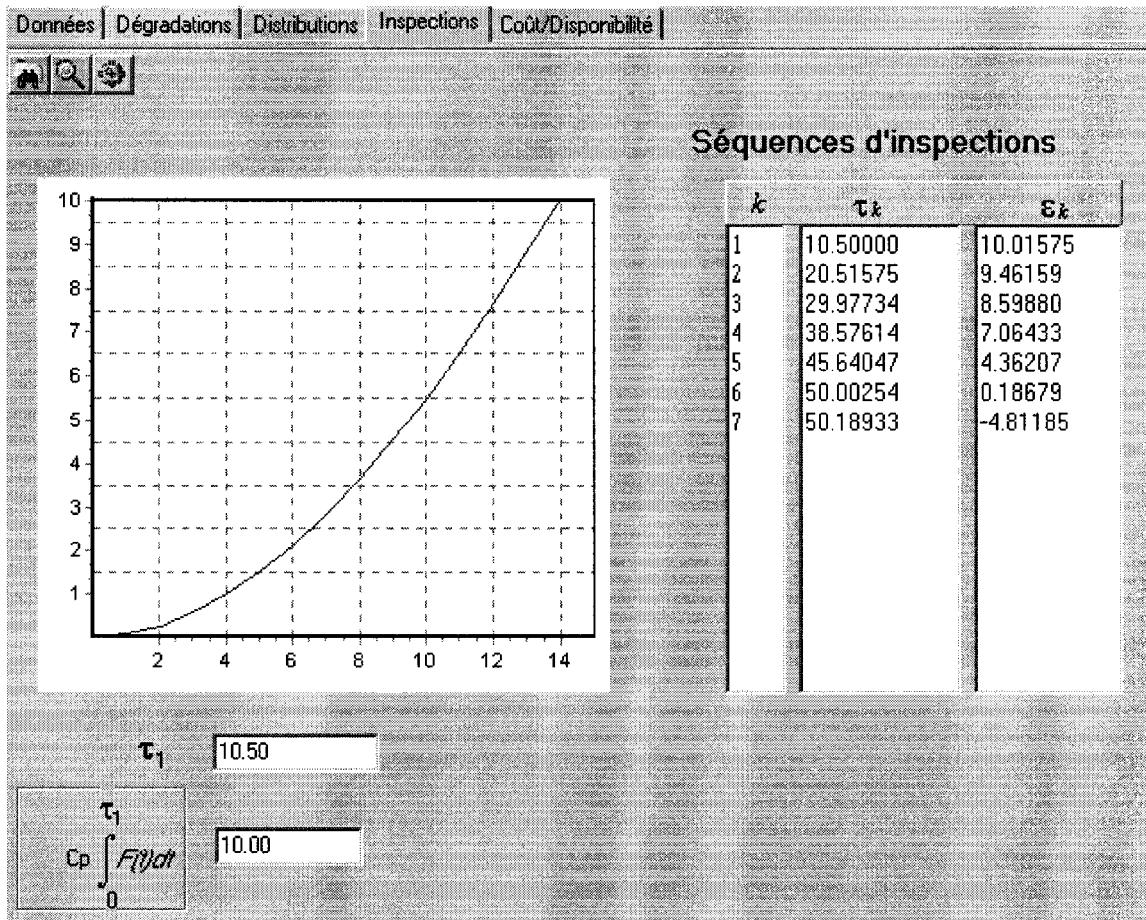


Figure 4.4: Interface de la page inspections.

Page "Coûts/Disponibilité"

Finalement, cette section utilisera les résultats de la page précédente pour l'évaluation des coûts et disponibilité correspondant à la séquence d'inspection retenue.

En annexe 1 sont reproduits les programmes complets correspondants.

4.3 Résultats pour le client 1

Le tableau (4.2) et la figure (4.5) donnent respectivement, les valeurs de dégradation simulée sur un cycle de fonctionnement et le tracé correspondant.

Tableau 4.2 : Données de dégradations simulées chez le client 1.

t	Z_t	$\tilde{X}_t$	t	Z_t	$\tilde{X}_t$
0.026	0.009	0.009	38.027	1.867	2.243
2	0	0.029	40	0	2.268
2.215	0.023	0.045	40.024	1.98	2.382
4.062	0.03	0.07	42.114	2.057	2.479
6	0	0.091	44	0	2.497
8.289	0.378	0.459	46.09	2.449	2.916
10	0	0.479	48	0	2.935
12.188	0.738	0.86	50.155	2.544	3.048
14	0	0.878	52	0	3.06
16.063	0.849	1.009	54.168	2.752	3.298
18	0	1.028	56	0	3.311
18.061	0.938	1.12	56.067	2.757	3.309
20	0	1.14	58	0	3.332
20.056	1.046	1.248	58.023	2.805	3.384
24	0	1.295	62	0	3.518
24.001	1.139	1.38	62.277	3.007	3.62
26	0	1.397	64	0	3.655
26.017	1.178	1.439	64.034	3.086	3.725
28.005	1.213	1.488	66.034	3.165	3.829
30	0	1.513	68	0	3.854
32.056	1.509	1.83	70.176	3.253	3.954
34	0	1.85	72	0	3.97
36	0	1.904	74	0	4.001
36.092	1.556	1.924	74.002	3.346	4.103

Le tableau (4.2) donne un relevé des dégradations simulées, accumulées par chocs Z_t ainsi que la dégradation totale accumulée $\tilde{X}_t$. Les instants d'apparition des chocs sont les instants où Z_t n'est pas nul. Pour ce client, la dégradation par chocs participe à plus de 80% de la dégradation totale pour $(\nu_1, \sigma_1, \lambda_1, \rho_1) = (0.01, 0.01, 0.1, 0.1)$.

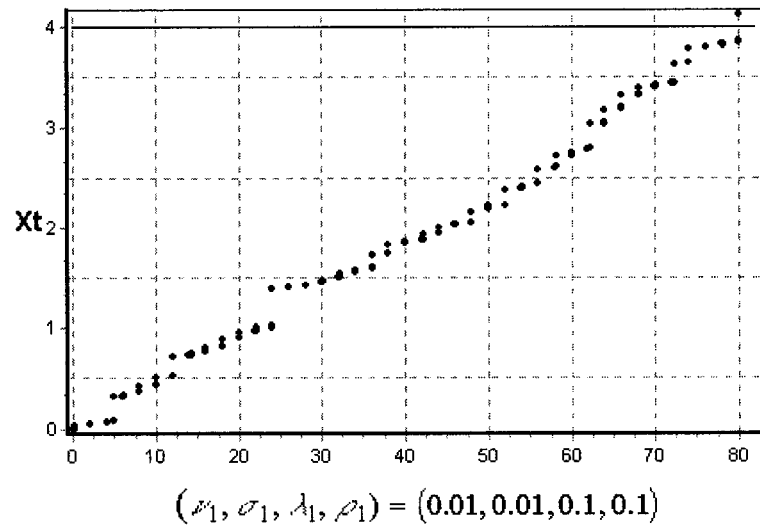


Figure 4.5: Graphique de la dégradation simulée sur un cycle pour le client 1.

La figure (4.6) donne les tracés des courbes $F(t)$, $f(t)$, $R(t)$ et $\phi(t)$.

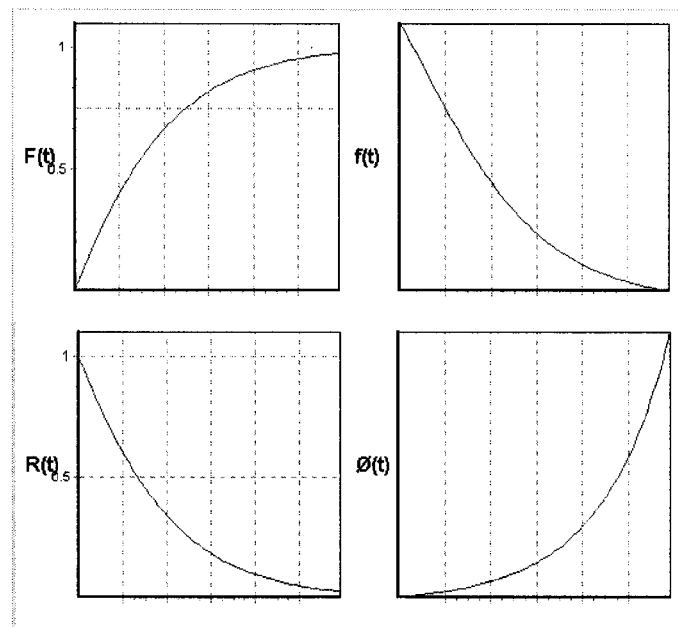


Figure 4.6: Courbes caractéristiques pour le client 1.

A partir des données simulées sur le temps de la première défaillance, la moyenne pour le client 1 est de 75.88 unités de temps.

Inspection non périodique

Pour différentes valeurs de α , les τ_1 sont choisis de telle façon que le coût de la première inspection est balancé avec le coût moyen induit par la première défaillance non détectée. Les séquence d'inspections pour diverses valeurs de α pour le client 1 sont représentées dans le tableau (4.3).

Tableau 4.3: Séquences d'inspections possibles pour le client 1.

$\tau_k \setminus \alpha$	0.00	0.50	1.00	1.99	2.14
1	12.50	14.25	17.00	33.99	38.20
2	23.84	27.15	32.34	61.80	52.34
3	34.30	39.13	46.76	86.17	65.34
4	43.75	50.08	60.31	108.67	77.33
5	51.66	59.35	72.50	127.55	87.81
6	57.03	65.60	81.90	128.15	95.19
7	58.50	66.78	85.44		
8					
9					
10					
	\$33.14	\$29.74	\$25.57	\$10.61	\$-0.04

Il apparaît d'après le tableau 4.3 ainsi que la figure 4.7, que le terme $K(\alpha, \tau)$ de l'équation (3.12) s'annule pour la séquence pour laquelle $\alpha = 2.14$.

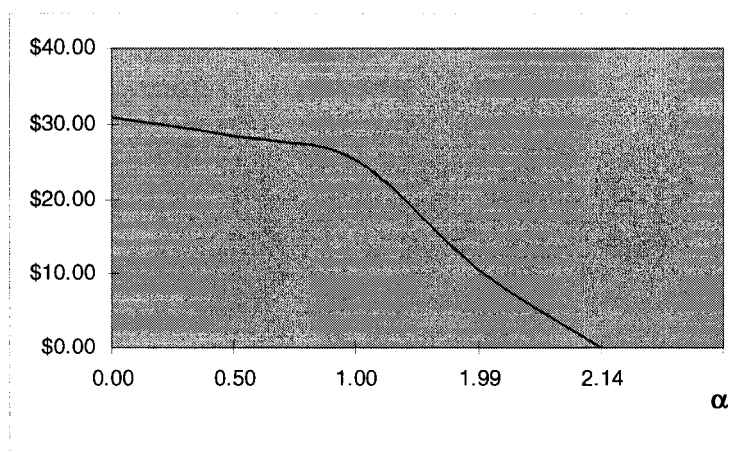


Figure 4.7: Détermination de la séquence optimale

De là, la séquence optimale pour le client 1 est la séquence:

$$\tau = (38.20, 52.34, 65.34, 77.33, 87.81, 95.19)$$

Inspection périodique

Pour différentes valeurs de τ , la figure 4.8 montre l'évolution de la disponibilité moyenne pour le client 1.

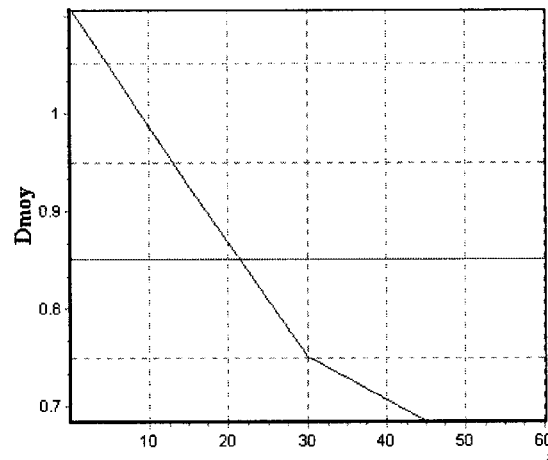


Figure 4.8: Courbe de disponibilité moyenne client 1.

La séquence d'inspections pour assurer une disponibilité de 85% pour le client 1 est de prendre $\tau = 22$ unités de temps. Ainsi la séquence sera:

$$\tau = (22, 44, 66, 88)$$

4.4 Résultats pour le client 2

Le tableau (4.4) et la figure (4.9) donnent respectivement, les valeurs de dégradation simulée sur un cycle de fonctionnement et le tracé correspondant.

Tableau 4.4: Données de dégradations simulées chez le client 2.

t	Z_t	$\tilde{X}_t$	t	Z_t	$\tilde{X}_t$
0.071	0.026	0.026	42	0	2.606
2.007	0.09	0.11	42.03	2.251	2.672
4	0	0.13	44	0	2.695
4.001	0.346	0.387	44.184	2.306	2.748
14	0	1.076	46	0	2.762
14.046	1.155	1.296	46.046	2.324	2.784
16.017	1.238	1.397	48.035	2.419	2.903
18	0	1.416	50	0	2.921
18.005	1.245	1.426	50.013	2.557	3.06
20	0	1.447	52	0	3.074
22.01	1.352	1.572	54	0	3.139
24.052	1.371	1.615	54.046	2.724	3.265
26	0	1.628	56	0	3.282
28	0	1.827	58	0	3.453
28.003	1.581	1.864	58	2.89	3.475
34	0	1.968	60	0	3.485
34.057	1.667	2.009	60.032	2.893	3.48
36.025	2.026	2.387	62.052	2.999	3.628
38	0	2.41	64	0	3.644
38.03	2.136	2.519	64.052	3.044	3.688
40	0	2.54	66	0	3.704
40.087	2.184	2.591	66.152	3.447	4.111

Pour ce client, la dégradation par chocs participe à plus de 84% de la dégradation totale

pour $(\nu_2, \sigma_2, \lambda_2, \rho_2) = (0.01, 0.01, 0.1, 0.5)$.

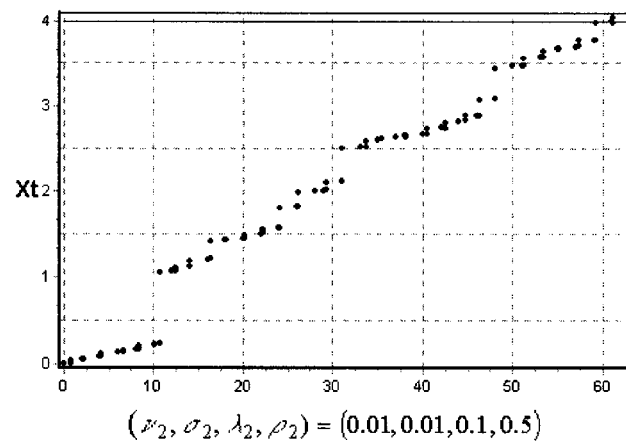


Figure 4.9: Graphique de la dégradation pour le client 2.

La figure (4.10) donne les tracés des courbes $F(t)$, $f(t)$, $R(t)$ et $\phi(t)$.

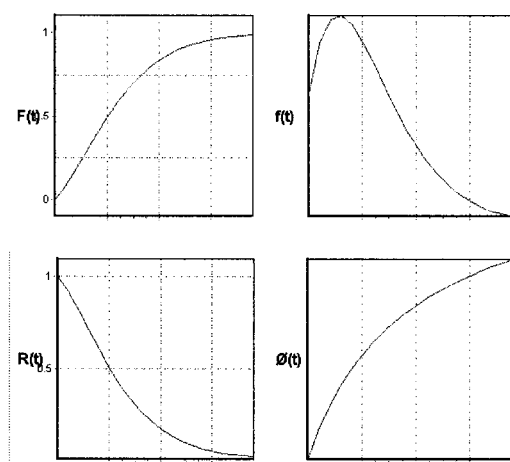


Figure 4.10: Courbes caractéristiques pour le client 2.

A partir des données simulées sur le temps de la première défaillance, la moyenne pour le client 2 est de 60.88 unités de temps.

Inspection non périodique

Les séquence d'inspections pour diverses valeurs de α pour le client 2 sont représentées dans le tableau (4.5).

Tableau 4.5: Séquences d'inspections possibles pour le client 2.

$\tau_k \setminus \alpha$	0.00	0.50	1.00	1.75
1	10.25	11.65	13.90	17.50
2	20.15	22.90	27.38	42.03
3	29.62	33.70	40.51	60.04
4	38.41	43.73	53.21	73.98
5	45.98	52.25	65.08	78.39
6	51.29	57.76	75.01	
7	52.90	58.01	80.35	
8				
	\$28.65	\$15.54	\$5.38	\$ 0.01

De là, la séquence optimale pour le client 1 est la séquence:

$$\tau = (17.50, 42.03, 60.04, 73.98, 78.39)$$

Inspection périodique

Pour différentes valeurs de τ , la figure 4.11 montre l'évolution de la disponibilité moyenne.

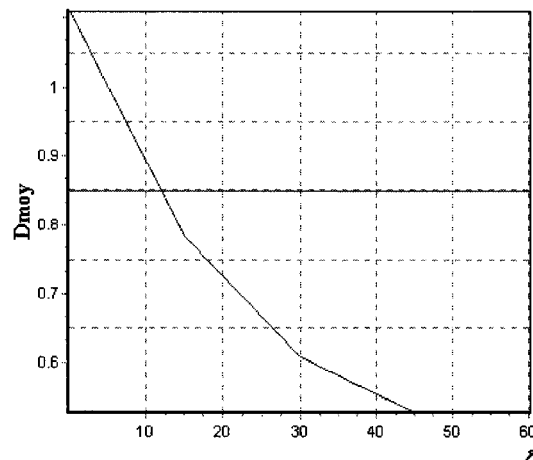


Figure 4.11: Courbe de disponibilité moyenne pour le client 2.

La séquence d'inspections pour assurer une disponibilité de 85% pour le client 2 est de prendre $\tau = 12.5$ ainsi la séquence sera:

$$\tau = (12.5, 25, 37.5, 50, 62.5)$$

4.5 Comparaison des résultats

Le but est d'établir un comparatif entre les stratégies d'inspection proposées pour chacun des clients en tenant compte de la variation de l'environnement d'utilisation et pour les mêmes coûts encourus.

L'équipement du client 1 subissant une amplitude moyenne des chocs ρ_1 plus faible que celle du client 2, l'inspection non périodique pour client 2 est décalée vers l'origine. L'amplitude moyenne des chocs ρ_2 étant plus importante, l'inspection non périodique commence plus tôt.

Pour la même raison, l'inspection périodique est plus étalée dans le temps pour le client 1, c'est-à-dire que la première inspection est réalisée plus tard que pour le client 2.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

Ce chapitre présente un récapitulatif et les réalisations de cette recherche. Quelques remarques et recommandations sur des travaux futurs sont aussi discutées.

5.1 Récapitulatif et réalisations

L'objectif de cette recherche est de proposer une stratégie d'inspection basée sur la dégradation des équipements dont la défaillance n'est détectée que par l'inspection. La motivation principale est la proposition d'une méthode pratique pour combler le vide entre le foisonnement de résultats théoriques dans le domaine et le manque d'outils utilisables à mettre à dispositions des gestionnaires de la maintenance dans l'industrie. Plusieurs recherches dans le domaine proposent des modèles mathématiques rigoureux, mais usuellement les retombées pratiques n'ont pas la même attention de la part des chercheurs et les ingénieurs n'ont pas nécessairement les capacités de traduire concrètement les résultats obtenus.

L'environnement aléatoire, dans lequel les systèmes opèrent affecte de façon significative la distribution du temps de la première défaillance et les distributions de type général répondent rarement de façon satisfaisante à la réalité. De là, la stratégie d'inspection s'en trouve normalement affectée.

Avec les limitations des approches précédentes, cette recherche développe des stratégies d'inspection pratiques pour des équipements dont les défaillances sont décelables par inspections et considère explicitement les systèmes opérant dans des environnements aléatoires. Les mesures de performance utilisées dans les stratégies d'inspection sont le coût moyen par unité de temps sur un horizon infini et la disponibilité moyenne limite sur un horizon infini.

Dans le chapitre 1 justement, une brève revue de la littérature est effectuée sur les modèles de dégradations cumulatifs des systèmes. Le processus de Wiener et le processus de chocs sont discutés comme modèles de dégradations. Les algorithmes permettant de déduire des stratégies d'inspection pour les équipements, utilisés dans des conditions aléatoires et dont les défaillances ne sont détectées que par l'inspection sont aussi passés en revue.

Comme travail préliminaire, nous avons analysé un système dans lequel le taux de dégradation change de façon quasi continue avec le temps et ensuite de façon discontinue dans le temps. Avec ces structures simples de processus de dégradation, il apparaît que l'obtention des distributions du temps de la première défaillance est assez difficile analytiquement. Ces difficultés avec ces modèles ont motivé l'approche numérique utilisée pour le reste du travail.

À partir des structures des processus de dégradations connus, leur combinaison a permis de mieux reproduire les conditions de l'environnement d'utilisation. Ensuite, la stratégie

d'inspection est formulée de façon à prendre en compte la variation de l'environnement par le biais de la loi de défaillance. Dans la pratique, l'inspection périodique est utilisée largement car elle est facilement mise en place et analysable. Cependant, elle n'emploie pas d'informations sur la forme de la distribution des défaillances. En effet, on peut inspecter de la même façon dans des zones où il est peu probable qu'il y est des défaillances et dans d'autres où la probabilité est plus importante. Alors, une stratégie d'inspection qui prend en compte les caractéristiques de la distribution du temps de la première défaillance est proposée.

Le volet pratique trouve son expression finalement, dans la réalisation d'un logiciel informatique qui est supporté par la théorie développée dans les différents chapitres. Le programme est réalisé en langage évolué, orienté objet, permettant une flexibilité de programmation et une réutilisation à souhait des "objets" pour construire des structures de plus en plus complexes. Il permet une interactivité simple avec l'utilisateur qui peut faire des simulations de dégradations, réaliser divers scénarios économiques et obtenir des coûts et des disponibilités moyennes sur un horizon infini. À partir de là, il pourra faire un choix éclairé quand à la stratégie d'inspection à adopter.

5.2 Recommandations pour des travaux futurs

Comme mentionné plutôt, l'objectif de cette recherche est de développer une stratégie d'inspection dont l'implémentation est utilisable. Cependant, les conditions et les situations auxquelles on fait face en pratique sont diverses et de là, ce travail ne peut pas

couvrir toutes les situations possibles. Plusieurs variations du modèle décrit dans ce mémoire peuvent faire l'objet d'une future recherche.

Une première perspective est de considérer que les inspections et les remplacements ne se font pas instantanément. Les suppositions concernant des durées négligeables, simplifient le modèle. Mais leur prise en compte ne pourra qu'améliorer la justesse de la modélisation de l'environnement. Les durées peuvent être considérées comme constantes ou plus généralement, des variables aléatoires distribuées selon une loi donnée.

Une deuxième perspective est de considérer des inspections imparfaites. Parce que les pannes ne se font pas connaître d'elles mêmes, il y a des cas où une inspection parfaite n'est pas réalisable. Par exemple, un système d'armement ne peut pas être déclaré fonctionnel avec une probabilité de 1 sans l'avoir utilisé préalablement. L'inspection d'un missile est souvent citée comme exemple. Les inspections pour ce type de systèmes peuvent pas être parfaite car l'inspecteur ne peut pas lancer le missile pour tester s'il est opérationnel ou pas. Dans ce cas, il faut considérer l'inspection imparfaite pour modéliser le système.

Une troisième perspective est de considérer que l'inspection peut causer un dommage supplémentaire à l'équipement. Si l'inspection nécessite un désassemblage, l'erreur humaine peut apparaître lors de la procédure de réassemblage après l'inspection. Dans ce cas, le comportement de la durée de vie est différent de notre modèle et la relation entre la dégradation et la séquence d'inspection devra être modifiée.

Finalement, une dernière perspective est l'optimisation du seuil de dégradation comme évoqué dans le chapitre 3. Il s'agira alors de trouver, pour des conditions d'utilisation données, un seuil de dégradation optimal inférieur au seuil limite pour effectuer un remplacement et pour lequel les coûts ou les disponibilités moyennes seront optimales.

RÉFÉRENCES

ABDEL-HAMEED, M. (1975). "Gamma wear process.". *IEEE Transactions on Reliability*. R-24:2. 153-152.

ABDEL-HAMEED, M. (1984). "Life distribution properties of devices subject to a Levy wear process.". *Mathematics of Operations Research*. 9:4. 606-614.

ASH, R. (1972). *Real analysis and probability*. Academic Press.

AVEN, T., JENSEN, U. (1999). *Stochastic Models in Reliability*. New York : Springer. xii,270 p p.

BARLOW, R.E., PROSCHAN, F., HUNTER, L.C. (1996). *Mathematical theory of reliability*. Philadelphia : SIAM. xv, 258 p p.

BELLMAN, R., KALABA, R.E., LOCKET, J.A. (1966) . Numerical inversion of the Laplace Transform: Application to Biology, Economics, Engineering and physics. New York : Elsevier.

BRENDER, D.M. (1963). *A surveillance model for reccurent events*. IBM Watson Research Center Report.

CHHIKARA, R.S., FOLKS, J.L. (1989). *The inverse Gaussian Distribution*. New York :

COX, D.R. (1962). *Renewal theory*. London : Methuen & Co.Ltd.

ESARY, J.D., MARSHALL, A.W., PROSCHAN, F. (1973). "Shock models and wear processes". *The annals of probability*. 1:4. 627-649.

GIGLMAYR, J. (1982). "Age-wear-dependent model of failure and its description by cut-off Markov processes.". *Reliability in Electrical and Electronic Components and*

Systems, 5th European Conference on Electrotechnics - EUROCON '82, Preprints. Copenhagen, Den : North-Holland Publ Co, Amsterdam, Neth. P. 116-112.

GIGLMAYR, J. (1987). "Age-wear dependent model of failure.". *IEEE Transactions on Reliability*. R-36:5. Dec. 1987.

KELLER, J.B. (1974). "Optimum Checking Schedules for Systems Subject to Random Failure". *Management science*. 21:3. 257-259.

KONG, M.B., PARK, K.S. (1997). "Optimal replacement of an item subject to cumulative damage under periodic inspections". *Microelectronics and Reliability*. 37:3. Mar. 467-472.

L'ECUYER, P. (1998). "Uniform random number generators". *Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference, WSC. Part 1 (of 2)*. Piscataway, NJ : IEEE. P. 97-104.

L'ECUYER, P. (2001). "Software for uniform random number generation: distinguishing the good and the bad". *Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference, WSC*.

LAM, C.T., YEH, R.H. (1994). "Optimal maintenance-policies for deteriorating systems under various maintenance strategies". *IEEE Transactions on Reliability*. 43:3. 423-430.

LUSS, H. (1977). "Inspection policies for a system which is inoperative during inspection periods". *AIIE Transactions*. 9:189-194.

MATSUMOTO, M., NISHIMURA, T. (1998). "Mersenne Twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator". *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 8:1. 3-30.

MEEKER, W.Q., ESCOBAR, L.A. (1998). *Statistical methods for reliability data*. New York : Wiley. xxii, 680 p p.

MUNFORD, A.G., SHAHANI, A.K. (1972a). "An Inspection policy for the Weibull Case". *Operational Research Quarterly*. 24:3. 453-457.

MUNFORD, A.G., SHAHANI, A.K. (1972b). "A Nearly Optimal Inspection policy". *Operational Research Quarterly*. 23: 3. 373-379.

NAKAGAWA, T., OSAKI, S. (1974). "Combining drift and catastrophic modes.". R-23:4. Oct. 278-279.

NAKAGAWA, T., YASUI, K. (1991). "Periodic-Replacement Models with Threshold Levels". *IEEE Transactions on reliability*. 40:3. 395-397.

PARK, K.S. (1988). "Optimal Continuous-Wear Limit Replacement Under Periodic Inspection". *IEEE Transactions on Reliability*. 37 :1. 97-102.

ROSS, S.M. (1970). *Applied probability models with optimization applications*. San Francisco Calif. Holden-Day. 198 p p.

ROSS, S.M. (1996). *Stochastic processes*. New York : Wiley. xv, 510 p. : p.

ROSS, S.M. (2003). *Introduction to probability models*. San Diego, CA : Academic Press. xvii, 755 p. : p.

VALDEZ-FLORES, C., FELDMAN, R.M. (1989). "A survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems". *Naval Research Logistics Quarterly*. 36:419-446.

VALSA, J., BRANCIK, L. (1998). "Approximate formulae for numerical inversion of Laplace transforms". *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*. 11:3. 153-166.

WATTANAPANOM, N., SHAW, L. (1979). "Optimal inspection schedule for failure detection in a model where tests hasten failures". *Operation research*. 27:303-317.

WORTMAN, M.A., KLUTKE, G.-A., AYHAN, H. (1994). "Maintenance strategy for systems subjected to deterioration governed by random shocks". *IEEE Transactions on Reliability*. 43:3. Sept. 439-445.

XUE, J., YANG, K. (1997). "Upper & Lower Bounds of Stress-Strength Interference Reliability with Random Strength-Degradation". *IEEE Transactions on Reliability*. 46:1. 142-145.

YANG, Y., KLUTKE, G.-A. (2000a). "Lifetime-characteristics and inspection-schemes for Levy degradation processes". *IEEE Transactions on Reliability*. 49:4. 377-382.

YANG, Y., KLUTKE, G.-A. (2000b). "Improved inspection schemes for deteriorating equipment ". *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. 14:5. 445-460.

YANG, Y., KLUTKE, G.-A. (2001). "A distribution-free lower bound for availability of quantile-based inspection schemes". *IEEE Transactions on Reliability*. 50:4. 419-421.

ZUCKERMAN, D. (1977). "Replacement models under additive damage". *Naval research logistics quarterly*. 24:549-558.

ZUCKERMAN, D. (1978). "Optimal replacement policy for the case where damage process is a one sided Lévy process". *stochastic processes and their applications*. 7:141-151.

ANNEXE 1 : Programmes informatiques

Le programme informatique est rédigé en langage pascal orienté objet avec DELPHI 4 version client serveur. Il comprend le programme principal avec l'en-tête "program" et des unités distinctes assemblées lors de la compilation et qui ont l'en-tête "Unit".

L'unité principale (unité Main), est le noyau central du programme. Elle s'occupe de la gestion des commandes entrées (handling events), ainsi que de l'appel des unités comprenant les algorithmes de calcul pour produire les résultats. L'unité "utils" comprend les fonctions caractéristiques (Cdf, Pdf,...) et l'unité "inverse", la transcription de l'algorithme d'inversion de la transformée de Laplace. L'unité "complex" réalise les opérations usuelles sur les nombres complexes et l'unité "mersenne" produit les nombres pseudo-aléatoires.

```

program INSPEC;

uses

  Forms,

  Main in 'Main.pas' {Mainfrm},

  mersenne in 'mersenne.pas',

  Inverse in 'Inverse.pas',

  Complex in 'Complex.pas',

  Utils in 'Utils.pas';

{$R *.RES}

```

begin

Application.Initialize;

Application.CreateForm(TMainfrm, Mainfrm);

Application.Run; end.

unit Main;

interface

uses

Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics, Controls, Forms, Dialogs,

ToolWin, Menus, StdCtrls, ImgList, ActnList, TeEngine,

TeeFunci, Series, ExtCtrls, TeeProcs, Chart, Utils, Grids, DBGrids, Db, DBTables,
ComCtrls, UNonLinearEquation, UIntegral;

type

TMainfrm = class(TForm)

chocs: TAction; Cout: TAction; Dispo: TAction; draw: TAction; Func: TAction;

Inspec: TAction; Model: TAction; Moy: TAction; period: TAction; Refresh: TAction;

Sequ: TAction; tau1: TAction; Variabilite: TAction; Wiener: TAction;

ActionList1 : TActionList; Chart1: TChart; Chart2: TChart; Chart3: TChart;

Chart4: TChart; Chart5: TChart; Chart6: TChart; Chart7: TChart;

cb3d: TCheckBox; DataSource1: TDataSource; DataSource2: TDataSource;

DBGrid2: TDBGrid; edt1: TEdit; edt2: TEdit; edtAlfa: TEdit; edtCi: TEdit;

edtC: TEdit; edtCr: TEdit; edtDenom: TEdit; edtDisp: TEdit;

edtGrafmax : TEdit; edtGrafmin : TEdit; edtMean: TEdit; edtnu: TEdit;

```

edtNum: TEdit; edtScale: TEdit; edtShape: TEdit; edtsigma: TEdit;

edtStep: TEdit; edthres: TEdit; edtVar: TEdit; ImageList1 : TImageList;

Integral1: TIntegral; MainMenu1: TMainMenu; Memo1: TMemo;

Aide1: TMenuItem; Donnes1:TMenuItem; Exit1: TMenuItem;

Fichier1: TMenuItem; NonLinear1: TNonLinear;

PageControl1: TPageControl; Panel1: TPanel; Table1: TTable;

Table2: TTable; TabSheet1: TTabSheet; TabSheet2 : TTabSheet;

TabSheet3: TTabSheet; TabSheet4: TTabSheet; TabSheet5 : TTabSheet;

ToolBar1: TToolBar; ToolBar2: TToolBar; ToolBar3: TToolBar;

ToolBar4: TToolBar; ToolBar5: TToolBar; tbChocs: TToolButton;

tbFct: TToolButton; tbModel: TToolButton; tbWiener: TToolButton;

ToolButton1: TToolButton; ToolButton10: TToolButton;

ToolButton2: TToolButton; ToolButton3: TToolButton;

ToolButton4: TToolButton; ToolButton5: TToolButton;

ToolButton6: TToolButton; ToolButton7: TToolButton;

ToolButton8: TToolButton; ToolButton9: TToolButton;

procedure FormCreate(Sender: TObject);

procedure FormClose(Sender: TObject; var Action: TCloseAction);

procedure Parametres(var Sigma, Nu, Shape, Scale,thres, Step,Grafmin, Grafmax, Ci,
                    Cp, Cr :Double);

procedure WienerExecute(Sender: TObject);

procedure chocsExecute(Sender: TObject);

```

```

procedure ModelExecute(Sender: TObject);

procedure RefreshExecute(Sender: TObject);

procedure FuncExecute(Sender: TObject);

procedure tau1Execute(Sender: TObject);

procedure drawExecute(Sender: TObject);

procedure InspecExecute(Sender: TObject);

procedure SequExecute(Sender: TObject);

procedure CoutExecute(Sender: TObject);

procedure ModelCdfMeanVar(var m, v:Extended);

procedure MoyExecute(Sender: TObject);

procedure VariabiliteExecute(Sender: TObject);

procedure DispoExecute(Sender: TObject);

procedure periodExecute(Sender: TObject);

private

  { Private declarations }

  FCount:integer;

  procedure prepare;

  function Integral(tu:Extended):Extended;

  procedure sequence(var sq:array of extended);

end;

var

  Mainfrm: TMainfrm;  util:TUtils;

```

```

    temps, Nu, Sigma, Shape, Scale, Thres, Step, Grafmin, Grafmax, Ci, Cp, Cr,
    Alfa:Double; Law :integer; Graf:array[0..6] of TChart; tau:array of double;
    ek:array of double; ki:integer;

implementation

{$R *.DFM}

//*****

// Miscellaneous Routines

//*****

procedure TMainfrm.FormCreate(Sender: TObject);

var i:integer;

begin
    table1.EmptyTable; table2.EmptyTable;

    util := TUtils.Create;

    Graf[0]:=Chart1; Graf[1]:=Chart2; Graf[2]:=Chart3; Graf[3]:=Chart4; Graf[4]:=Chart5;
    Graf[5]:=Chart6; Graf[6]:=Chart7;

    for i:=0 to 6 do
    begin
        Graf[i].Series[0].SeriesColor:=clBlack;
        Graf[i].Series[1].SeriesColor:=clBlue;
        Graf[i].Series[2].SeriesColor:=clRed;
        Graf[i].Series[3].SeriesColor:=clGreen;
        Graf[i].Series[4].SeriesColor:=clFuchsia;
    end
end

```

```

Graf[i].Series[5].SeriesColor:=clMaroon;

end;

FCount:=1;

end;

procedure TMainfrm.FormClose(Sender: TObject; var Action: TCloseAction);

begin

util.free; table1.Close; table2.Close;

end;

procedure TMainfrm.Parametres(var Sigma,Nu ,Shape, Scale, thres, Step,

                               Grafmin, Grafmax, Ci, Cp, Cr: Double);

begin

    Try

        Nu:=strToFloat(edtNu.text);

        Sigma:=strToFloat(edtsigma.text);

        Shape:=strToFloat(edtShape.text);

        Scale:=strToFloat(edtScale.text);

        thres:=strToFloat(edtthres.text);

        Step:=strToFloat(edtStep.text);

        Grafmin:=strToFloat(edtGrafmin.text);

        Grafmax:=strToFloat(edtGrafmax.text);

        Ci:=strToFloat(edtCi.text);

        Cr:=strToFloat(edtCr.text);

```

```

    Cp:=strToFloat(edtCp.text);

except

begin

    ShowMessage('Contrôler les paramètres');

    Application.Terminate; end;    end;end;

procedure TMainfrm.prepare;

begin

    Parametres(Sigma, Nu, Shape, Scale, Thres, Step,Grafmin,Grafmax,Ci, Cp, Cr);

    if cb3D.Checked=True then

        begin

            chart1.View3D:=True;    chart2.View3D:=True;    chart3.View3D:=True;

            chart4.View3D:=True;    chart5.View3D:=True;    chart6.View3D:=True;

        end    else

            begin

                chart1.View3D:=False;    chart2.View3D:=False;    chart3.View3D:=False;

                chart4.View3D:=False;    chart5.View3D:=False;    chart5.View3D:=False;

            end;

        end;

    end;

procedure TMainfrm.RefreshExecute(Sender: TObject);

var i,j:integer;

begin

    for i:=0 to 6 do

```

```

for j:=0 to 5 do

begin

Graf[i].Series[j].Clear;

end;

for i:=0 to 6 do

Graf[i].Repaint;

Fcount:=1;

Memo1.Clear; Memo2.Clear; Memo3.Clear; Memo4.Clear; Memo5.Clear;

Memo6.Clear; Memo7.Clear;

end;

procedure TMainfrm.drawExecute(Sender: TObject);

var i:integer;

begin

for i:=0 to 6 do

Graf[i].SaveToBitmapFile('Chart'+intToStr(i)+'.bmp');

end;

//*****

// Degradation Simulation Routines

//*****

procedure TMainfrm.WienerExecute(Sender: TObject);

var Wt, hours:Extended;

begin

```

```

prepare; hours:=Grafmin; Chart5.Series[0].Clear;

Chart5.LeftAxis.Maximum:=1.1*Thres;

Repeat

Wt:=util.RandGauss(Nu*hours,sqr(Sigma)*hours);

Chart5.Series[FCount].AddXY(hours,Wt,"clTeeColor);

if FCount=1 then Chart5.Series[0].AddXY(hours,Thres,"clTeeColor);

hours:=hours+Step;

until (hours>=Grafmax) or (Wt>=Thres);

Chart5.Series[0].AddXY(0,Thres,"clTeeColor);

Chart5.Series[0].AddXY(Grafmax,Thres,"clTeeColor);

Chart5.Repaint;

Chart5.Series[FCount].Title:='(' +FloatToStr(Sigma)+' '+floattoStr(Nu)+' )';

Inc(FCount);

end;

procedure TMainfrm.chocsExecute(Sender: TObject);

var Zt,t,ti:Extended;

begin

prepare; t:=Grafmin; ti:=0; Zt:=0; Chart5.LeftAxis.Maximum:=1.1*Thres;

Repeat

Repeat

ti:=ti+Util.RandExpo(Scale);

until ti>t;

```

```

While t<ti do

begin

Chart5.Series[FCount].AddXY(t,Zt,"clTeeColor);

t:=t+Step;

end;

Chart5.Series[FCount].AddXY(ti,Zt,"clTeeColor);

Zt:=Zt+util.RandExpo(Shape);

Chart5.Series[FCount].AddXY(ti,Zt,"clTeeColor);

t:=t+Step;

until (t>Grafmax) or (Zt>=Thres);

Chart5.Series[0].AddXY(0,Thres,"clTeeColor);

Chart5.Series[0].AddXY(t,Thres,"clTeeColor); Chart5.Repaint;

Chart5.Series[FCount].Title:=( ' +FloatToStr(Scale)+' ,'+floattoStr(Shape)+' ');

Inc(FCount);

end;

procedure TMainfrm.ModelExecute(Sender: TObject);

var  Xt,Zt,Wt,t,ti:Extended;

begin

prepare; if Fcount=1 then temps:=0; t:=0 ; ti:=0; Zt:=0;

Chart5.LeftAxis.Maximum:=1.2*Thres;

table2.Open;

Repeat

```

```

Repeat
ti:=ti+Util.RandExpo(Scale);

until ti>t;

While t<ti do

begin

Wt:=util.RandGauss(Nu*t,sqr(Sigma)*t);

Xt:=Zt+Wt;

Chart5.Series[Fcount].AddXY(temps+t,Xt,"clTeeColor);

table2.InsertRecord([FCount,0,FormatFloat('0.000',t),0,FormatFloat('0.000',Xt)]);

t:=t+Step;

end;

Wt:=util.RandGauss(Nu*ti,sqr(Sigma)*ti);

Xt:=Zt+Wt;

Chart5.Series[Fcount].AddXY(temps+ti,Xt,"clTeeColor);

Zt:=Zt+util.RandExpo(Shape);

Xt:=Wt+Zt;

Chart5.Series[Fcount].AddXY(temps+ti,Xt,"clTeeColor);

table2.InsertRecord([FCount,1,FormatFloat('0.000',ti),FormatFloat('0.000',Zt),FormatFlo
at('0.000',Xt)]);

t:=t+step;

until (Xt>=Thres);

if Fcount=1 then

```

```

Chart5.Series[FCount].Title:=( ' '+FloatToStr(Sigma)+' ', '+floattoStr(Nu)+' ', '+
                                FloatToStr(Scale)+' ', '+floattoStr(Shape)+' ');

Chart5.Series[0].AddXY(0,Thres,",clTeeColor);

Chart5.Series[0].AddXY(temps+t,Thres,",clTeeColor); Chart5.Repaint;

Inc(FCount);

temps:=temps+t;

util.ARandNumber.RandomInit(int64(Round(time)));

util.BRandNumber.RandomInit(int64(Round(time)));

end;

//*****

// Cdf Pdf And Related Functions

//*****

procedure TMainfrm.FuncExecute(Sender: TObject);

var x,y, hours:Extended;

begin

prepare;  hours:= Grafmin;

Repeat

if chart1.SeriesCount<=Fcount then

begin

Showmessage('Elist Complete');

break;

end else

```

```

begin

x:=util.ModelCdf(hours, Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);
y:=util.ModelPdf(hours, Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);
Chart1.Series[FCount].AddXY(hours,x,"clTeeColor);
Chart2.Series[FCount].AddXY(hours,y,"clTeeColor);
Chart3.Series[FCount].AddXY(hours,1-x,"clTeeColor);
Chart4.Series[FCount].AddXY(hours,x/y,"clTeeColor);

hours:=hours+Step;

Chart1.Repaint; Chart2.Repaint; Chart3.Repaint; Chart4.Repaint;

end;

until hours >=Grafmax;

Inc(FCount);

end;

function FMean(wm:array of Double): Double;

begin

MainFrm.prepare;

result:=wm[0]*util.Modelpdf(wm[0], Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);

end;

function FVar(wr:array of Double): Double;

begin

MainFrm.prepare;

result:=sqr(wr[0])*util.Modelpdf(wr[0], Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);

```

```

end;

procedure TMainfrm.ModelCdfMeanVar(var m, v:Extended);

begin

MainFrm.prepare;

m:=Integral1.Romberg(0,1000,16,FMean);

v:=Integral1.Romberg(0,1000,16,FVar)-sqr(m); end;

procedure TMainfrm.MoyExecute(Sender: TObject);

var mean, stdev:Extended;

begin

ModelCdfMeanVar(mean,stdev);

edtMean.Text:=format('%2.2f',[mean]);

edtvar.Text:=format('%2.2f',[stdev]);

end;

//*****

// Inspection Related Routines

//*****

function Fsin(wi:array of Double): Double;

begin

MainFrm.prepare;

result:=util.ModelCdf(wi[0], Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);

end;

function TMainfrm.Integral(tu:Extended):Extended;

```

```

begin

    result:=Integral1.Romberg(0,tu,16,FSin);

end;

function FCoba(xo:array of double):double;

begin

    result:=Ci-Cp*MainFrm.Integral(xo[0]);

end;

procedure TMainfrm.tau1Execute(Sender: TObject);

var x, ti : double;

    I: Boolean;

begin

prepare; ti:=Grafmin; I:=False; SetLength(tau,100);

Repeat

    x:=Cp*Integral(ti);

    if (x >= Ci) and (I=False) then

        begin

            tau[1]:=ti;

            I:=True;

        end;

Chart6.Series[FCount].AddXY(ti,x,"clTeeColor");

ti:=ti+step;

Chart6.Repaint;

```

```

until (x>=Ci);

Inc(FCount);

Chart6.Series[0].AddXY(Grafmin,Ci,",clTeeColor);

Chart6.Series[0].AddXY(ti,Ci,",clTeeColor); Chart6.Repaint;

edt1.text:=Format('%2.2f',[tau[1]]);

edt2.text:=Format('%2.2f',[x] );

edt1.repaint; edt2.repaint;

tau[1]:=NonLinear1.Secant(tau[1]-Step,tau[1],FCoba);

x:=Cp*Integral(tau[1]);

edt1.text:=Format('%2.2f',[tau[1]]);

edt2.text:=Format('%2.2f',[x] );

end;

procedure TMainfrm.InspecExecute(Sender: TObject);

var  j:integer;

begin

prepare;

Alfa:=StrToFloat(MainFrm.edtAlfa.text);

SetLength(ek,100);

SetLength(tau,100);

tau[0]:=0;

tau[1]:=StrToFloat(edt1.text);

```

```

j:=1;

Repeat

Try

    tau[j+1]:=util.ModelInsp(tau[j-1], tau[j], Scale, Shape, Nu, Sigma,

        Thres, Ci,Cp, Alfa);

    ek[j]:=tau[j+1]-tau[j];

    Memo1.Lines.Add(IntToStr(j));

    Memo2.Lines.Add(Format('%2.5f',[tau[j]]));

    Memo3.Lines.Add(Format('%2.5f',[ek[j]]));

    if (j>1) and (ek[j] > ek[j-1]) then

        begin

            Showmessage (' Réduire Tau 1');

            break;

        end;

    if ek[j]<0 then

        begin

            Showmessage (' augmenter Tau 1');

            exit;

        end;

    Inc(j);

except

    Memo1.Lines.Add('t '+IntToStr(j+1));

```

```

Memo2.Lines.Add('Fin');

break;

end;

until j=100;

end;

procedure TMainfrm.sequence(var sq:array of extended);
var j:integer ;
begin
  prepare;

  SetLength(tau,100);

  tau[0]:=0;

  tau[1]:=StrToFloat(edt1.text);

  j:=1;

  Repeat
    Try
      tau[j+1]:=util.ModelInsp(tau[j-1], tau[j], Scale, Shape, Nu, Sigma,
                                Thres, Ci,Cp, Alfa);

      if (tau[j+1]> 10*tau[j]) or (tau[j+1]-tau[j]<0) then
        begin
          tau[j+1]:=0;  break;  end;

          Inc(j);  except  break;  end;
        until j=100;

```

```

for j:=0 to High(sq) do

sq[j]:=tau[j];

end;

procedure TMainfrm.SequExecute(Sender: TObject);

var i:integer;

begin

Memo1.Clear; Memo2.Clear; Memo3.Clear; Alfa:=StrToFloat(edtAlfa.text);

sequence(tau);

i:=1;

Repeat

Memo1.Lines.Add('t '+IntToStr(i));

Memo2.Lines.Add(Format('%2.5f',[tau[i]]));

inc(i)

until (tau[i]=0)

end;

//*****

// Costs and Availability Related Routines

//*****

function FKalpha(ts:array of Double): Double;

begin

MainFrm.prepare;

result:=( Ci*(ki+1)+(Cp-Alfa)*(tau[ki+1]-ts[0]))

```

```

        *util.ModelPdf(ts[0], Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);
end;

procedure TMainfrm.CoutsExecute(Sender: TObject);

var

    sum, int:double;

    j:integer;

begin

    prepare;

    sum:=0;

    Alfa:=StrToFloat(MainFrm.edtAlfa.text);

    if tau[1]=0 then Showmessage('tau=0');

    for j:=0 to 100 do

        begin

            if tau[j+1]< tau[j] then

                begin

                    sum:=sum +Integral1.Romberg(tau[j],1000,16,FKalpha);;

                    break;

                end;

            ki:=j;

            Memo4.Lines.add(Format('%2.4f',[tau[j]]));

            Memo5.Lines.add(Format('%2.2f',[tau[j+1]]));

            int:=Integral1.Romberg(tau[j],tau[j+1],16,FKalpha);

```

```

Memo6.Lines.add(Format('%2.2f',[int]));

sum:=sum + int;

Memo7.Lines.add(Format('%2.2f',[sum]));

end;

sum:=sum+cr;

Memo7.Lines.add(Format('%2.2f',[sum]));

end;

procedure TMainfrm.VariabiliteExecute(Sender: TObject);
var  Xt,Zt,Wt,t,ti:Extended;

begin
prepare;

t:=Grafmin;

ti:=0;

Zt:=0;

Chart5.LeftAxis.Maximum:=1.2*Thres;

table2.Open;

Repeat

repeat

ti:=ti+Util.RandExpo(Scale);

until ti>t;

While t<ti do

begin

```

```

Wt:=util.RandGauss(Nu*t,sqr(Sigma)*t);

Xt:=Zt+Wt;

Chart5.Series[Fcount].AddXY(t,Xt,"clTeeColor);

table2.InsertRecord([FCount,0,FormatFloat('0.000',t),0,FormatFloat('0.000',Xt)]);

t:=t+Step;

end;

Wt:=util.RandGauss(Nu*ti,sqr(Sigma)*ti);

Xt:=Zt+Wt;

Chart5.Series[Fcount].AddXY(ti,Xt,"clTeeColor);

Zt:=Zt+util.RandExpo(Shape);

Xt:=Wt+Zt;

Chart5.Series[Fcount].AddXY(ti,Xt,"clTeeColor);

table2.InsertRecord([FCount,1,FormatFloat('0.000',ti),FormatFloat('0.000',Zt),FormatFlo
at('0.000',Xt)]);

t:=t+step;

until (t>Grafmax) or (Xt>=Thres);

Chart5.Series[FCount].Title:=( ' +FloatToStr(Sigma) + ' );

Chart5.Series[0].AddXY(0,Thres,"clTeeColor);

Chart5.Series[0].AddXY(t,Thres,"clTeeColor);

Chart5.Repaint;

Inc(FCount);

end;

```

```

function FDisp1(td1:array of Double): Double;

begin

    MainFrm.prepare;

    result:=td1[0]*util.ModelPdf(td1[0], Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);

end;

function FDisp2(td2:array of Double): Double;

begin

    MainFrm.prepare;

    result:=(tau[ki+1]-td2[0])*util.ModelPdf(td2[0], Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);

end;

procedure TMainfrm.DispoExecute(Sender: TObject);

var  sum1,sum2:Extended;  j:integer;

begin

    prepare; sum1:=0; sum2:=0;

    for j:=0 to 100 do

        begin

            if tau[j+1]< tau[j] then break;

            ki:=j;

            Memo4.Lines.add(Format('%2.4f',[tau[j]]));

            Memo5.Lines.add(Format('%2.2f',[tau[j+1]]));

            sum1:=sum1 +Integral1.Romberg(tau[j],tau[j+1],16,FDisp2);

            sum2:=sum2 +Integral1.Romberg(tau[j],tau[j+1],16,FMean);

```

```

Memo6.Lines.add(Format('%2.2f',[sum1]));

Memo7.Lines.add(Format('%2.2f',[sum2]));

end;

edtNum.text:=Format('%2.2f',[sum1]);

edtDenom.text:=Format('%2.2f',[sum2]);

edtDisp.text:=Format('%2.2f',[sum1/sum2]);

end;

function FReli(r1:array of Double): Double;

begin

MainFrm.prepare;

result:=1-util.ModelCdf(r1[0], Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres);

end;

procedure TMainfrm.periodExecute(Sender: TObject);

var tauc: Double;    sum1, sum2:Extended;    k:integer;

begin

tauc:=1e10; sum1:=0; sum2:=0;

Repeat

For k:=0 to 20 do

begin

sum1:=sum1+ integral1.Romberg(k*tauc, (k+1)*tauc,16, FReli);

sum2:=sum2+ (1-util.ModelCdf(k*tauc, Scale, Shape, Nu, Sigma, Thres));

end;

```

```

Chart7.Series[Fcount].AddXY(5*tauc,sum1/(tauc*sum2),"clTeeColor);

Chart7.Repaint;

tauc:=tauc+ Step;

until tauc> grafmax;

end;

function FReel(x:array of double):double;

begin

MainFrm.prepare;

result:= util.Gausspdf(x[0], Nu*temps, Sigma*sqrt(temps))*

        util.ShocksCdf(Scale*temps, Shape*(Thres-x[0]));

end;

end.

unit Complex;

interface

type

    Tplx=record

        Re:Extended;

        Im:Extended;

    end;

function Add(s1,s2:Tplx):Tplx;

function Divide(s1,s2:Tplx):Tplx;

function prod(s1,s2:Tplx):Tplx;

```

```

function afois(a:double;s1: Tplx): Tplx;

function Exponen(s1: Tplx): Tplx;

implementation

uses Maths2;

function afois(a:double;s1: Tplx): Tplx;

var afoi:Tplx;

begin

    afoi.Re:= a*s1.Re;

    afoi.Im:= a*s1.Im;

    result:=afoi;

end;

function Exponen(s1: Tplx): Tplx;

var expon:Tplx;

begin

expon.Re:= exp(s1.Re)* cos(s1.Im);

expon.Im:= exp(s1.Re)* sin(s1.Im);

result:=expon;

end;

function Add(s1, s2: Tplx): Tplx;

var sum:Tplx;

begin

sum.Re:=s1.Re+s2.Re;

```

```

sum.Im:=s1.Im+s2.Im;

result:=sum;

end;

function module(s:Tplx):double;

begin

result:=sqrt(sqr(s.Re)+sqr(s.Im));

end;

function Divide(s1, s2: Tplx): Tplx;

var divi:Tplx;

begin

divi.Re:=(s1.Re*s2.Re + s1.Im*s2.Im)/module(s2);

divi.Im:=(s2.Re*s1.Im - s1.Re*s2.Im)/module(s2);

result:=divi;

end;

function prod(s1, s2: Tplx): Tplx;

var produ:Tplx;

begin

produ.Re:=s1.Re*s2.Re - s1.Im*s2.Im;

produ.Im:=s1.Re*s2.Im + s2.Re*s1.Im;

result:=produ;

end;

end.

```

```

unit Utils;

interface

uses SysUtils, Math, Dialogs, Mersenne;

type

  TUtils = Class (TObject)

    ARandomNumber:TRandomMersenne;

    BRandomNumber:TRandomMersenne;

    constructor Create;

    Destructor Done;

  public

    function RandExpo(lbda:double):double;

    function GaussCdf(tt:double;Amu,Asigma:double):double;

    function Gausspdf(tt:double;Amu,Asigma:double):double;

    function RandGauss(Amu, Asigma: double):double;

    function ExpoCdf(arg:double;Shape:double):double;

    function GammaCdf(shapro: double;n:integer):double;

    function IGaussPdf(tf:Double; Sigma, Nu, Thres:double):double;

    function IGaussCdf(tt,Sigma, Nu, Thres:double):double;

    function ShocksCdf(scalt,shapro:double):double;

    function Shockspdf(tt,scalt,shapro:double):double;

    function ModelCdf(tt, Scale, Shape, Mu, Sigma, Thres: double): Extended;

    function Modelpdf(tt, Scale, Shape, Mu, Sigma, Thres: double): Extended;

```

```

function ModelInsp(tau0, tau1, Sc, Sh, M, Sig,Th, pi,pp, pa: double): double;
end;

implementation

uses Main, Maths1, Probabilities, inverse;

Constructor TUtils.Create;

begin

    inherited;

    ARandNumber:=TRandomMersenne.create(int64(Round(time)));

    BRandNumber:=TRandomMersenne.create(int64(Round(time)));

end;

Destructor TUtils.Done;

begin

    inherited;

    ARandNumber.Free;

    BRandNumber.Free;

end;

function TUtils.RandExpo(lbda:double):double;

begin

    Result:=-Ln(ARandNumber.Random)*lbda;

end;

function TUtils.GaussCdf(tt:double;Amu,Asigma:double):double;

begin

```

```

Result:=NormalCDF(tt,Amu,Asigma);

end;

function TUtils.Gausspdf(tt:double;Amu,Asigma:double):double;

begin

Result:=NormalPDF(tt,Amu,Asigma);

end;

function TUtils.RandGauss(Amu,Asigma:double):double;

{ Marsaglia-Bray algorithm }

var  U1, S2: double;

begin

repeat

    U1 := 2*BRandNumber.Random - 1;

    S2 := Sqr(U1) + Sqr(2*BRandNumber.Random-1);

until S2 < 1;

Result := (Sqrt(-2*Ln(S2)/S2) * U1 * Asigma + Amu);

end;

function TUtils.IGaussCdf(tt, Sigma, Nu, Thres:double):double;

var res:double;

begin

if tt=0 then

res:=- (1+exp(2*Nu/sigma))

else

```

```

res:=NormalCDF(sqrt(Thres/(sigma*tt))*(Nu*tt/Thres-1),0,1) +
    exp(2*Nu/Sigma)*NormalCDF(-sqrt(Thres/(Sigma*tt))*(Nu*tt/Thres+1),0,1);
result:=res;
end;

function TUtils.IGaussPdf(tf:Double; Sigma, Nu, Thres:double):double;
var res:double ;
begin
    if tf=0 then
        res:=0
    else
        res:=sqrt(Thres/(2*Pi*Sigma))*power(tf,-3/2)*
            exp(-sqr(tf-Thres/Nu)*Sigma/(2*Thres*tf));
        result:=res;
    end;
end;

function TUtils.ExpoCdf(arg:double;Shape:double):double;
begin
    Result:=1-exp(-Shape*arg);
end;

function TUtils.GammaCdf(shapro:double;n:integer):double;
var r:integer;
    exparg, ss:double;
begin

```

```

    ss:=0;

    exparg:=exp(-shapro);

    if n=0 then ss:=0

    else

        For r:=0 to (n-1) do

            ss:=ss + ESBintPower(shapro,r)*exparg/FactorialX(r);

        Result:=1-ss;

end;

function TUtils.ShocksCdf(scal,shapro:double):double;

var n:integer;

    expscal,Sum:double;

begin

    Sum:=0;

    expscal:=exp(-scal);

    For n:=0 to 1000 do

        Sum:=Sum+GammaCdf(shapro,n)*ESBintPower(scal,n)*expscal/FactorialX(n);

    Result:=1-Sum;

end;

function TUtils.Shockspdf(tt,scal,shapro:double):double;

var n:integer;    expargg,Sum:double;

begin

    Sum:=0;

```

```

expargg:=exp(-scalt);

For n:=0 to 1000 do

Sum:=Sum + GammaCdf(shapro,n)*ESBIntPower(scalt,n)*expargg*
    (scalt-n)/(tt*FactorialX(n));

Result:=Sum;

end;

function TUtils.ModelCdf(tt, Scale, Shape, Mu, Sigma, Thres: double): Extended;
begin
    if (Mu=0) and (Sigma=0) then
        begin
            result:=ShocksCdf(Scale*tt,Shape*Thres);
        end
    else
        if (Shape =0) and (Scale=0) then
            begin
                result:=IGaussCdf(tt,Sigma, Nu, Thres);
            end
        else
            result:=1-Cdf(tt,Scale, Shape, Mu, Sigma, Thres,6);
        end
    end;

function TUtils.Modelpdf(tt, Scale, Shape, Mu, Sigma, Thres: double): Extended;
begin
    if (Mu=0) and (Sigma=0) then
        begin

```

```

        result:=Shockspdf(tt,Scale*tt,Shape*Thres);

    end    else

    if (Shape =0) and (Scale=0) then

    begin

    result:=IGausspdf(tt,Sigma, Nu, Thres);

    end    else

    result:=pdf(tt,Scale, Shape, Mu, Sigma, Thres,6);

end;

function TUtils.ModelInsp(tau0, tau1, Sc, Sh, M, Sig,
    Th, pi,pp, pa : double): double;

begin

    result:=tau1+

    ( ModelCdf(tau1, Sc, Sh, M, Sig, Th)- ModelCdf(tau0, Sc, Sh, M, Sig, Th))

    /ModelPdf(tau1, Sc, Sh, M, Sig, Th) - pi/(pp-pa);

end;

end.

```

```

unit Inverse;

interface

uses Complex, Maths1;

function Cdf(ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double;a:integer): Extended;

function Pdf(ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double;a:integer): Extended;

implementation

function LsGx(splsgx:Tplx; param:double):Tplx;

var  un:Tplx;

begin

  un.Re:=1;

  un.Im:=0;

  result:=Divide(afois(param,un), Add(splsgx,afois(param,un)));

end;

function LsCdf(splscdf:Tplx;ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double):Tplx;

var  c1,c2,c3, un:Tplx;

begin

  un.Re:=1;  un.Im:=0;

  c1:=Add(afois(0.5*sqr(sig)*ta,prod(splscdf,splscdf)),afois(-Mu*ta,splscdf)) ;

  c2:=Add(c1,afois(-Scal*ta,un));

  c3:=afois(Scal*ta,LsGx(splscdf,Shap));

  result:=Divide(exponen(Add(c2,c3)),afois(2,splscdf));

end;

```

```

function Lspdf(splspdf:Tplx;ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double):Tplx;

  var un,c1,c2,c3:Tplx;

  begin

    un.Re:=1;

    un.Im:=0;

    c1:=Add(afois(-0.5*sqr(sig),prod(splspdf,splspdf)),afois(Mu,splspdf)) ;

    c2:=Add(c1,afois(Scal,un));

    c3:=Afois(-Scal,LsGx(splspdf,Shap));

    result:=Prod(LsCdf(splspdf,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr), Add(c2,c3));

  end;

function Ls(i:integer;spls:Tplx;ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double):Tplx;

  begin

    case i of

      0: result:=LsCdf(spls,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr);

      1: result:=Lspdf(spls,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr);

    end; end;

function invLaplacefs(i:integer;ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double;

  a:integer): Extended;

  var  x,y:Tplx;  sum, im :Extended;  n:integer;

  begin

    sum:=0;

    x.Re:= a/Thr;

```

```

y.Re:=a/Thr;

im:= Pi/Thr;

for n:=1 to 10000 do

begin

x.Im:=n*im;

y.Im:=(n-0.5)*im ;

sum:=sum + ESBIntPower(-1,n)*(Ls(i,x,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr).Re+
                                Ls(i,y,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr).Im);

end;

x.Im:=0;

result:=0.5*exp(a)/Thr*(0.5*Ls(i,x,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr).Re + sum);

end;

function Cdf(ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double; a:integer): Extended;

begin

result:=invLaplacefs(0,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr, a);

end;

function Pdf(ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr:double; a:integer): Extended;

begin

result:=invLaplacefs(1,ta,Scal, Shap, Mu, Sig, Thr, a);

end;

end.

```

```

{ /***** MERSENNE.Pas *****/ AgF 2001-10-18 *

* Random Number generator 'Mersenne Twister' *

* This random number generator is described in the article by *

* M. Matsumoto & T. Nishimura, in: *

* ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, *

* vol. 8, no. 1, 1998, pp. 3-30. *

* Experts consider this an excellent random number generator. *

*****/}

unit mersenne;

interface

const

    { // define constants for MT11213A

        N=351; M=175; R=9; MATRIX_A= 0xEABD75F5;

        TEMU=11;  TEMS=7;  TEMT=15;  TEML=17;  TEMB=0x655E5280;
        TEMC=0xFFD58000; }

    // or constants for MT19937

    N=624; M=397; R=31; MATRIX_A=$9908B0DF;

    TEMU=11; TEMS=7; TEMT=15; TEML=18;

    TEMB=$9D2C5680;

    TEMC=$EFC60000;

    LOWER_MASK:longword=$7fffffff;

    UPPER_MASK:longword=$80000000;

```

```

    mti:LongInt = N+1;

type

  TRandomMersenne=Class // encapsulate random number generator

  public

    constructor create(seed:int64);      // constructor

    procedure RandomInit(seed:int64);    // re-seed

    function IRandom(min, max:longint):longint; // output random integer

    function Random():Extended;          // output random float

    function BRandom():longword;         // output random bits

  private

    mt:array[0..N-1]of longword;         // state vector

  //  mti:Longint;

end;

type

  Tconvert=record

    case tag:boolean of

      False: (f:double);

      True: (i:array[0..1] of longword);

  end;

implementation

  constructor TRandomMersenne.Create(seed:int64);

begin

```

```

RandomInit(seed);

end;

procedure TRandomMersenne.RandomInit(seed:int64);

var

    s:longword;

begin

    // re-seed generator

    s:= longWord(seed);

    mti:=0;  while mti< N do

        begin

            s:= s * 29943829 - 1;

            mt[mti]:= s ;    inc(mti);  end; end;

function TRandomMersenne.BRandom():longword;

var y:longword;

    kk, km: integer;

begin

    // generate 32 random bits

    if (mti >= N) then

        begin

            // generate N words at one time

            km:=M;

```

```

kk:=0;

While (kk< N-1) do

begin

y:= (mt[kk] and UPPER_MASK) or (mt[kk+1] and LOWER_MASK);

mt[kk]:= mt[km] xor (y shr 1) xor (-longint(y and $1) and MATRIX_A);

Inc(km);

if (km >= N) then km:= 0;

Inc(kk);

end;

y := (mt[N-1] and UPPER_MASK) or (mt[0] and LOWER_MASK);

mt[N-1]:= mt[M-1] xor (y shr 1) xor (-longint(y and $1) and MATRIX_A);

mti:= 0;

end;

mti:=mti+1;

y:= mt[mti]; // Tempering (May be omitted):

y := y xor (y shr TEMU);

y := y xor ((y shl TEMS) and TEMB);

y := y xor ((y shl TEMT) and TEMC);

y := y xor ( y shr TEML);

result:=y;

end;

function TRandomMersenne.Random():Extended;

```

```

var r:longword;

    convert:Tconvert;

begin

    r:= BRandom();

    convert.tag:=True;

    convert.i[0]:= r shl 20;

    convert.i[1]:= (r shr 12) or $3FF00000;

    convert.tag:=False;

    result:=convert.f - 1.0;

end;

function TRandomMersenne.IRandom(min,max:longint):longint;

var r:longint;

begin

    // output random integer in the interval min <= x <= max

    r:= Trunc((max-min + 1)*Random())+ min; // multiply interval with random and
truncate

    if (r > max) then r:= max;

    if (max < min) then begin result:=$800000000-1 ;exit;end;

    result:=r;

end; end.

```

ANNEXE 2 : Méthode de Romberg

(tiré de <http://www.mat.ulaval.ca/anum/ch5/html/node12.html>)

" Bien que la méthode du trapèze soit la plus simple des formules de Newton-Cotes, nous avons montré qu'en général sa précision est insuffisante. La méthode de Romberg est une méthode itérative qui utilise la simplicité de la méthode du trapèze pour obtenir une première approximation, puis une extrapolation pour améliorer la précision.

Si on connaît f aux nœuds $a_0 = a, a_1, \dots, a_m = b$, l'utilisation de la formule nous donne l'approximation

$$T(m) = \frac{(b-a)}{2m} \left\{ f(a) + 2 \sum_{n=1}^{m-1} f(a_n) + f(b) \right\}.$$

Si on double le nombre de nœuds en divisant chacun des intervalles $[a_j, a_{j+1}]$

en 2 on obtient $2m+1$ nœuds $a_0^* = a_0, a_1^* = \frac{a_0+a_1}{2},$

$a_2^* = a_1, \dots, a_{2m}^* = a_m$ et l'approximation

$$T(2m) = \frac{b-a}{4m} \left\{ f(a) + 2 \sum_{n=1}^{2m-1} f(a_n^*) + f(a) \right\}.$$

Si $h = \frac{b-a}{m}$ on peut réécrire cette dernière équation sous la forme

$$T(2m) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ impair}}}^{2m-1} f(a_n^*) \right] + h \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ impair}}}^{2m-1} f(a_n^*) \right\} ;$$

or $a_{2j}^* = a_j$ et $a_{2j-1}^* = a + (2j-1)\frac{h}{2}$, donc

$$T(2m) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(a_j) \right] + h \sum_{j=1}^m f\left(a + (2j-1)\frac{h}{2}\right) \right\}$$

$$T(2m) = \frac{1}{2} \left\{ T(m) + h \sum_{j=1}^m f\left(a + (2j-1)\frac{h}{2}\right) \right\}.$$

On constate que, lorsqu'on connaît $T(m)$, le calcul de $T(2m)$ nécessite m évaluations de f au lieu de 2m+1.

En commençant à m=1, $h_0 = (b-a)$, on obtient la suite on pose $T_0 = T(2^0)$ en posant $h_j = \frac{b-a}{2^j}$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 = \frac{h_0}{2} [f(a) + f(b)] \\ T_1 = \frac{1}{2} \left[T_0 + h_0 f\left(a + \frac{h_0}{2}\right) \right] \\ \vdots \\ T_j = \frac{1}{2} \left[T_{j-1} + h_{j-1} \sum_{i=1}^{2^{j-1}} f\left(a + (2i-1)h_j\right) \right]. \end{array} \right.$$

EXEMPLE 5.7

Le calcul de T_5 pour $\int_0^\pi \sin x \, dx$ donne la suite

$$\begin{aligned}
T_0 &= \frac{\pi}{2} [\sin 0 + \sin \pi] = 0 \\
T_1 &= \frac{1}{2} \left[0 + \pi \sin \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2} = 1.57079633 \\
T_2 &= \frac{1}{2} \left[T_1 + \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right] = 1.89611890 \\
T_3 &= \frac{1}{2} \left[T_2 + \frac{\pi}{4} \left(\sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{7\pi}{8} \right) \right] = 1.97423160 \\
T_4 &= 1.9935704 \\
T_5 &= 1.99839336.
\end{aligned}$$

La valeur exacte est 2. Il apparaît donc clairement que, même si les calculs sont simples, la convergence est très lente, ce qui est dû au fait que la formule du trapèze composée n'est que d'ordre 2.

Pour améliorer cette convergence, nous avons besoin d'étudier l'erreur commise en utilisant puisque c'est cette erreur qui indique le taux de convergence.

Dans le cas où l'on utilise la suite $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ pour approximer $\int_a^b f(x)dx$, on utilise plutôt une expression de l'erreur où apparaissent un terme en h^2 et un terme en h^4 . Plus précisément, on pourrait montrer que :

$$(1.23) \quad \int_a^b f(x)dx = T_j - \frac{h_j^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)}{720} h_j^4 f^{(4)}(\mu_j)$$

où $\mu_j \in [a, b]$.

Si on récrit cette égalité pour $j=j-1$ et qu'on se rappelle que $h_{j-1} = 2h_j$, on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = T_{j-1} - \frac{4h_j^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{(b-a)16h_j^4}{720} f^{(4)}(\mu_{j-1}),$$

ce qui nous permet d'éliminer le terme en h_j^2 pour avoir finalement

$$(1.24) \quad \int_a^b f(x)dx = \frac{4T_j - T_{j-1}}{3} + \frac{(b-a)}{2160} h_j^4 [4f^{(4)}(\mu_j) - 16f^{(4)}(\mu_{j-1})].$$

En comparant (1.24) et (1.23) on constate que $T_{j,1} = \frac{4T_j - T_{j-1}}{3}$ donne une meilleure approximation que T_j puisque l'erreur varie comme h^2 dans le premier cas et h^4 dans le second. C'est donc dire que la suite $\{T_{j,1}\}_{j=1}^{\infty}$ converge plus vite vers l'intégrale que la suite $\{T_{j,0} = T_j\}_{j=0}^{\infty}$. On pourrait continuer cette procédure pour obtenir une troisième suite $\{T_{j,2} = \frac{16T_{j,1} - T_{j-1,1}}{15}\}_{j=2}^{\infty}$, puis une quatrième, ..., une k-ième $\{T_{j,k}\}_{j=k}^{\infty}$, où

$$T_{j,k} = \frac{4^k T_{j,k-1} - T_{j-1,k-1}}{4^k - 1}.$$

On obtient ainsi un schéma triangulaire :

$$\begin{array}{ccccccc} T_{0,0} & & & & & & \\ T_{1,0} & T_{1,1} & & & & & \\ T_{2,0} & T_{2,1} & T_{2,2} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ T_{j,0} & T_{j,1} & T_{j,2} & \cdots & T_{j,j} & & \end{array}$$

où chacune des colonnes converge plus vite que la précédente. On s'attendra donc à ce que la convergence de la diagonale $\{T_{j,j}\}_{j=0}^{\infty}$ soit très rapide. Tout ceci suggère l'algorithme suivant.

Algorithme de Romberg:

1- Posez $i=j=0$, $h_0 = b - a$, $T_{0,0} = \frac{1}{h_0} 2[f(b) + f(a)]$, allez à 3.

2- Si $|T_{i,i} - T_{i-1,i-1}| < \epsilon$ allez à 9.

3- $i=i+1$

$$h_i = \frac{h_{i-1}}{2}$$

4-

$$T_{i,0} = \frac{1}{2} \left[T_{i-1,0} + h_{i-1} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f \left(a + (2j-1) \frac{h_i-1}{2} \right) \right]$$

5-j=j+1

6- Si j>i posez j=0 et allez à 2

7- Posez

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$$

8- Allez à 5

9- Fin $\int_a^b f(x)dx \simeq T_{i,i}$ "

ANNEXE 3 : Méthodes de la sécante

(Source: <http://www.mat.ulaval.ca/anum/ch2/html/node5d.html>)

"Il est parfois ennuyeux dans l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson d'avoir à calculer $f'(p_n)$. Il se peut par exemple qu'on ne dispose pas du programme d'ordinateur pour en effectuer le calcul alors qu'on peut facilement calculer $f(x)$. L'algorithme suivant peut être considéré comme une approximation de la méthode de Newton.

Au lieu d'utiliser la tangente au point p_n nous allons utiliser la sécante passant par les points d'abscisses p_n et p_{n-1} pour en déduire p_{n+1} . L'équation de la sécante s'écrit:

$$s(x) = f(p_n) + (x - p_n) \frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}$$

Si $s(p_{n+1}) = 0$, on tire

$$p_{n+1} = p_n - f(p_n) \frac{p_n - p_{n-1}}{f(p_n) - f(p_{n-1})}.$$

Algorithme de la sécante

But: Trouver une solution de $f(x) = 0$.

Entrées: Deux approximations précision p_0 et p_1

ε (la précision désirée)

N_0
(le nombre maximum d'itérations)

Sortie: valeur approché de $\bar{p}$ ou un message d'échec.

Étape 1 : Poser $n = 2$

$$q_0 = f(p_0)$$

$$q_1 = f(p_1)$$

Étape 2: Tant que $n \leq N_0 + 1$, faire les étapes 3 à 6

Étape 3: Poser
$$p = p_1 - q_1 \frac{(p_1 - p_0)}{q_1 - q_0}$$

Étape 4: Si $|p - p_1| \leq \varepsilon$ Alors imprimer (p) ; Fin

Étape 5: Poser $n = n + 1$

Étape 6: Poser $p_0 = p_1$

$$q_0 = q_1$$

$$p_1 = p$$

$$q_1 = f(p)$$

Étape 7: Imprimer (la méthode a échoué après N_0 itérations);

Étape 9: Fin "