

**Titre:** Optimisation de la représentation de profils d'ailes pour application  
Title: au design aérodynamique

**Auteur:** Jérôme Lépine  
Author:

**Date:** 1999

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Lépine, J. (1999). Optimisation de la représentation de profils d'ailes pour  
Citation: application au design aérodynamique [Master's thesis, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8723/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8723/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Jean-Yves Trépanier  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DE LA REPRÉSENTATION DE PROFILS D'AILES  
POUR APPLICATION AU DESIGN AÉRODYNAMIQUE

JÉRÔME LÉPINE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

AVRIL 1999

© Jérôme Lépine, 1999.



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*

*Our file* *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-42913-X

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

OPTIMISATION DE LA REPRÉSENTATION DE PROFILS D'AILES  
POUR APPLICATION AU DESIGN AÉRODYNAMIQUE

présenté par : LÉPINE Jérôme

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. TRÉPANIÉRIER Jean-Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PÉPIN François, Ph.D., membre

# Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de recherche, le professeur Jean-Yves Trépanier pour sa disponibilité et ses conseils avisés. Je souhaite également le remercier pour m'avoir laissé une grande liberté dans mon travail tout en me faisant bénéficier de ses connaissances dans le domaine de l'aérodynamique.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans la précieuse aide de François Pépin, dont l'expérience m'a beaucoup apporté, et de Bombardier Aéronautique qui m'a fourni le matériel et les logiciels nécessaires à mon travail.

Je tiens également à remercier tous les membres du CERCA et, tout particulièrement, Paul Labbé et François Guibault, professionnels de recherche, qui ont toujours su être disponibles pour répondre à mes nombreuses questions.

Enfin, je remercie la Fondation de l'X (Fondation de l'École Polytechnique de Paris) pour m'avoir aidé par son soutien financier à venir faire ma maîtrise à l'École Polytechnique de Montréal.

# Résumé

La conception automatisée de profils d'ailes d'avions est une discipline qui requiert, dans l'état actuel des connaissances, énormément de moyens informatiques. Le travail présenté dans ce mémoire s'attaque à la définition de ce type de problème afin d'en réduire le coût en terme de temps de calculs et de développement.

Une méthode de représentation géométrique des profils bidimensionnels est développée basée sur l'utilisation de NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) et d'une méthode d'optimisation. Partant d'un profil défini de manière quelconque, on construit une approximation initiale du profil en tenant compte de ses caractéristiques géométriques. Celle-ci est obtenue par interpolation par une B-spline ayant un nombre réduit de points de contrôle. L'approximation ainsi obtenue est ensuite améliorée en optimisant la position des points de contrôle et leurs poids avec une méthode quasi-Newton.

Une validation de la méthode d'approximation est présentée. Pour cela, on se base sur des critères de tolérance de fabrication et sur la sensibilité d'un résolveur de l'écoulement aérodynamique à l'erreur d'approximation. Ensuite, les performances de la méthode sont évaluées du point de vue de la qualité de l'approximation pour son utilisation ultérieure en conception automatisée. Les principaux avantages de la

méthode sont, d'une part, la réduction du nombre de paramètres intervenant dans la définition d'un profil et, d'autre part, l'absence de bruit dans la représentation.

Enfin, des résultats d'optimisation de profils suivant des critères aérodynamiques sont présentés en deux et en trois dimensions. Ces résultats révèlent que, grâce au nombre réduit de variables de design, la boucle d'optimisation est plus rapide et que, grâce à la régularité intrinsèque de la représentation par des NURBS, les solutions géométriquement incorrectes sont automatiquement écartées et la convergence de l'algorithme est grandement facilitée. Ces résultats démontrent l'efficacité de la représentation utilisant des NURBS pour l'automatisation des méthodes de conception de profils aérodynamiques à hautes performances.

# Abstract

At current time, the automatic design of a wing profile is a quite difficult task which requires enormous computing means. The present work tackles the definition of such a problem so as to reduce its computational and development times.

A profile geometrical representation method is developed by means of NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) and of an optimization method. Starting from a profile defined by any way, an initial approximation of the profile is built according to its geometrical characteristics. The approximation is obtained by interpolation with a B-spline defined by a reduced number of control points. Afterwards, this approximation is improved by optimization, with a quasi-Newton method, of the control points locations and weights.

A validation of the approximation method is presented, which is based on manufacturing tolerance criteria and on the sensibility of a flow solver to the approximation error. The efficiency of the method is then assessed according to the quality of the approximation for its use in an automatic design optimization process. The main advantages of this method are, on the one hand, the reduction of the number of parameters defining a profile and, on the other hand, the absence of noise in the representation.



Finally, aerodynamic optimization results are displayed for two and three-dimensional cases. Those results show that, owing to the reduced number of control points, the optimization procedure converges faster and that, owing to the natural regularity of the NURBS representation, geometrically wrong solutions are automatically avoided and convergence of the algorithm is greatly improved. This demonstrates the NURBS representation efficiency for the automation of high aerodynamic performance profile design.

# Table des matières

<b>Remerciements</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>Résumé</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>Abstract</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>Liste des figures</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>Liste des sigles et abréviations</b> . . . . .	<b>xix</b>
<b>Introduction</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 NURBS et modélisation géométrique</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1 Revue des méthodes usuelles de modélisation géométrique . . . . .	5
1.2 Choix de la méthode de représentation . . . . .	8

- 1.3 Caractéristiques des NURBS . . . . . 10
  - 1.3.1 Fonctions de base . . . . . 10
  - 1.3.2 Construction des NURBS . . . . . 11
  
- Chapitre 2 Le problème d'approximation . . . . . 16**
  - 2.1 Formulation du problème d'approximation . . . . . 16
    - 2.1.1 Description du problème . . . . . 16
    - 2.1.2 Evaluation de l'erreur . . . . . 17
    - 2.1.3 Ordre de grandeur de l'erreur . . . . . 18
    - 2.1.4 Paramètres d'optimisation . . . . . 23
  - 2.2 Algorithme d'optimisation : la méthode quasi-Newton . . . . . 25
    - 2.2.1 Vecteur direction de recherche . . . . . 26
    - 2.2.2 Recherche de ligne . . . . . 28
    - 2.2.3 Minimum global . . . . . 29
  - 2.3 Construction d'une solution initiale . . . . . 30
  
- Chapitre 3 Représentation optimale d'un profil . . . . . 34**
  - 3.1 Validation de l'optimiseur avec un profil analytique . . . . . 35
    - 3.1.1 Cas d'un arc de cercle . . . . . 35
    - 3.1.2 Cas d'un profil simple défini par une NURBS . . . . . 36
    - 3.1.3 Limite de convergence . . . . . 38
  - 3.2 Influence de la solution initiale sur l'optimisation . . . . . 40

3.3	Détermination de la précision à atteindre . . . . .	44
3.3.1	Précision en fonction du nombre de points de contrôle . . . . .	44
3.3.2	Précision requise pour la résolution de l'écoulement aérodynamique . . . . .	47
3.4	Approximation d'un profil quelconque . . . . .	51
3.5	Bruit et approximation . . . . .	58
3.6	Conclusion . . . . .	63
<b>Chapitre 4 Application au aérodynamique . . . . .</b>		<b>65</b>
4.1	Optimisation d'un profil par la méthode inverse . . . . .	66
4.1.1	Description du problème . . . . .	66
4.1.2	Optimisation du profil défini par une NURBS . . . . .	69
4.1.3	Optimisation du profil défini par des points . . . . .	70
4.1.4	Comparaison des deux méthodes . . . . .	76
4.2	Optimisation d'une aile tridimensionnelle . . . . .	79
4.2.1	Description du problème . . . . .	80
4.2.2	Optimisation de l'aile définie par des NURBS . . . . .	85
4.2.3	Optimisation de l'aile par la méthode des bosses . . . . .	86
4.2.4	Avantages des NURBS . . . . .	88
<b>Conclusion . . . . .</b>		<b>93</b>
<b>Références . . . . .</b>		<b>96</b>

**Annexe La méthode génétique . . . . . 100**

## Liste des tableaux

Tableau 3.1	Exemple de résultat de l'approximation du profil analytique .	37
Tableau 3.2	Précision de l'approximation en fonction du nombre de points de contrôle . . . . .	45
Tableau 3.3	Approximation de différents profils . . . . .	55
Tableau 4.1	Cycle d'optimisation du profil défini par des points . . . . .	74

# Liste des figures

Figure 1.1	Influence de l'ordre sur une NURBS à 5 points de contrôle . . .	12
Figure 1.2	Fonctions de base quadratiques uniformes pour 6 points de contrôle . . . . .	12
Figure 1.3	Propriété de l'enveloppe convexe pour une NURBS quadratique	14
Figure 1.4	Effet du déplacement d'un point de contrôle sur une NURBS quadratique . . . . .	15
Figure 1.5	Effet de la modification d'un poids sur une NURBS quadratique	15
Figure 2.1	Evaluation de l'erreur d'approximation . . . . .	17
Figure 2.2	Evolution de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de mesures . . . . .	19
Figure 2.3	Calcul de l'erreur de discrétisation d'un cercle . . . . .	21
Figure 2.4	Evolution de l'erreur de discrétisation en fonction du nombre de points . . . . .	22

Figure 2.5	Configuration d'un profil modélisé par une NURBS . . . . .	24
Figure 2.6	Profil d'aile supercritique Bombardier-Canadair . . . . .	31
Figure 2.7	Courbure du profil Bombardier . . . . .	32
Figure 2.8	Courbure intégrée du profil Bombardier . . . . .	32
Figure 2.9	Exemple d'approximation initiale du profil Bombardier . . . . .	33
Figure 3.1	Validation de la méthode sur un arc de cercle . . . . .	36
Figure 3.2	Profil défini par une NURBS à 5 points de contrôle . . . . .	37
Figure 3.3	Coefficients de pression du profil objectif et de son approximation	38
Figure 3.4	Exemple de fonction coût dans un cas fortement non-linéaire à une variable . . . . .	39
Figure 3.5	Profil NACA 2412 . . . . .	41
Figure 3.6	Erreur de l'approximation optimale en fonction du paramètre de décalage de l'approximation initiale . . . . .	42
Figure 3.7	Solution obtenue avec un décalage de 1 ( $\epsilon_{max}=1.2 \times 10^{-4}$ ) . . .	43
Figure 3.8	Solution obtenue avec un décalage de 2.5 ( $\epsilon_{max}=9.6 \times 10^{-5}$ ) . .	43
Figure 3.9	Solution obtenue avec un décalage de 5 ( $\epsilon_{max}=8.5 \times 10^{-5}$ ) . . .	43
Figure 3.10	Précision de l'approximation en fonction du nombre de points de contrôle . . . . .	46



Figure 3.11 Comparaison des coefficients de pression de diverses approximations . . . . .	48
Figure 3.12 Comparaison des coefficients de pression de diverses approximations en régime subsonique . . . . .	49
Figure 3.13 Comparaison des coefficients de pression de diverses approximations en régime transsonique . . . . .	50
Figure 3.14 Profil NACA 64A010 . . . . .	53
Figure 3.15 Profil Boeing A4 . . . . .	53
Figure 3.16 Profil Boeing A8 . . . . .	53
Figure 3.17 Profil RAE 2822 . . . . .	54
Figure 3.18 Profil à haute portance Selig S1210 . . . . .	54
Figure 3.19 Profil de pale d'hélicoptère Boeing-Vertol/Dadone VR-12 . . . . .	54
Figure 3.20 Approximation à 11 points du profil NACA 64A010 . . . . .	56
Figure 3.21 Approximation à 13 points de profil Bombardier-Canadair . . . . .	56
Figure 3.22 Approximation à 13 points de profil Boeing A4 . . . . .	56
Figure 3.23 Approximation à 13 points du profil Boeing A8 . . . . .	57
Figure 3.24 Approximation à 13 points du profil Selig S1210 . . . . .	57
Figure 3.25 Approximation à 11 points du profil VR-12 . . . . .	57

Figure 3.26	Courbure du profil Bombardier et de son approximation . . . . .	60
Figure 3.27	Courbure du profil Boeing A8 et de son approximation . . . . .	60
Figure 3.28	Approximation à 13 points de contrôle du profil Boeing A4 . . . . .	61
Figure 3.29	Approximation à 11 points de contrôle du profil Boeing A4 . . . . .	61
Figure 3.30	Courbure de l'approximation du profil Boeing A4 . . . . .	62
Figure 4.1	Ligne sonique autour du profil Bombardier-Canadair correspondant à l'écoulement de la figure 4.2 . . . . .	68
Figure 4.2	Coefficients de pression sur le profil Bombardier-Canadair . . . . .	68
Figure 4.3	Convergence des deux méthodes . . . . .	70
Figure 4.4	Comparaison des profils avant et après optimisation . . . . .	71
Figure 4.5	Agrandissement de la figure 4.4 . . . . .	71
Figure 4.6	$C_p$ de la solution obtenue avec la représentation par une NURBS . . . . .	72
Figure 4.7	Comparaison de la courbure avant et après l'optimisation avec des NURBS . . . . .	73
Figure 4.8	Courbure des profils obtenus par l'optimisation . . . . .	75
Figure 4.9	$C_p$ de la solution obtenue avec la représentation par des points . . . . .	76
Figure 4.10	Comparaison des $C_p$ des deux solutions à Mach 0.6 . . . . .	78
Figure 4.11	Comparaison des $C_p$ des deux solutions à Mach 0.8 . . . . .	78

Figure 4.12 Construction d'une aile tridimensionnelle . . . . .	80
Figure 4.13 $C_p$ sur l'extrados de l'aile avant optimisation . . . . .	82
Figure 4.14 Comparaison des $C_p$ avant et après optimisation (sections 1 à 4)	83
Figure 4.15 Comparaison des $C_p$ avant et après optimisation (sections 5 à 7)	84
Figure 4.16 Variables de design pour l'optimisation utilisant les NURBS .	85
Figure 4.17 Convergence de l'optimiseur avec les deux méthodes . . . . .	86
Figure 4.18 $C_p$ sur l'extrados de l'aile après optimisation avec des NURBS	87
Figure 4.19 $C_p$ sur l'extrados de l'aile après optimisation avec la méthode des bosses . . . . .	89
Figure 4.20 Profils de l'aile 3-D avant et après optimisation . . . . .	91

# Liste des sigles et abréviations

## Sigles

BFGS	Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno; méthode d'approximation de la matrice Hessienne pour l'optimisation par la méthode quasi-Newton.
BGK	Bauer, Garabedian et Korn; méthode de résolution des caractéristiques aérodynamique de profils d'aile par la méthode potentielle.
NURBS	Non-Uniform Rational B-splines (B-splines rationnelles non-uniformes).

## Caractères usuels

$c$	Longueur de la corde du profil
$C(u)$	Position du point de paramètre $u$ sur la NURBS
$\mathcal{C}(u)$	Courbure du profil au point de paramètre $u$
$C_L$	Coefficient de portance
$C_p$	Coefficient de pression à la surface de l'aile

$D$	Valeur de décalage
$d$	Distance entre deux profils
$F(\mathbf{X})$	Fonction coût de l'optimisation
$H$	Matrice des dérivées secondes de la fonction coût (Hessienne)
$M$	Nombre de Mach
$N_{i,p}$	$i^{\text{ème}}$ fonction de base B-splinaire de degré $p$
$n$	Nombre de points de discrétisation
$P_i$	Point de contrôle de la NURBS
$p$	Degré des fonctions de base B-splinaires, $p + 1$ correspond à l'ordre de la NURBS
$Re$	Nombre de Reynolds
$S$	Vecteur direction de recherche de l'optimisation
$U$	Vecteur nodal de la NURBS
$u$	Paramètre de parcourt de la NURBS
$u_i$	$i^{\text{ème}}$ terme du vecteur nodal
$X$	Vecteur de design
$x_i$	Variable de design
$x$	Abscisse d'un point
$y$	Ordonnée d'un point

## Lettres grecques

$\alpha$	Paramètre de la fonction coût
----------	-------------------------------

$\alpha_k$	Paramètre de recherche de ligne
$\beta$	Paramètre de la fonction coût
$\delta$	Petite variation
$\epsilon_{max}$	Distance maximale entre le profil objectif et son approximation
$\epsilon_{moy}$	Distance moyenne entre le profil objectif et son approximation
$\omega_i$	Poids associé au point de contrôle $P_i$
$\sigma$	Critère de descente suffisante (règle d'Armijo)

## Symboles

$\nabla$	Opérateur gradient
$\nabla \cdot$	Opérateur divergence

# Introduction

La compétition qui régit actuellement le domaine de l'industrie aéronautique oblige les constructeurs d'avions à automatiser le plus possible leurs méthodes de conception afin de réduire le temps de développement de leurs appareils. La conception des ailes est un point particulièrement délicat à cause de leur impact sur une grande partie des performances de l'avion et aussi à cause de la complexité des équations de l'aérodynamique.

Lors de la réalisation d'une aile, sa modélisation géométrique par une méthode mathématique est un élément influent sur le processus de conception. De plus, l'utilisation croissante de méthodes d'optimisation pour la conception des profils rend crucial le besoin d'une représentation géométrique précise et nécessitant peu de paramètres.

Il existe principalement deux méthodes permettant l'optimisation de profils : la méthode directe et la méthode inverse. La première consiste à modifier la géométrie de l'aile afin d'améliorer les caractéristiques globales du profil telles que la portance ou la traînée qui sont calculées par une résolution de l'écoulement autour du profil. Cette approche est très naturelle et peut être étendue à l'optimisation multi-disciplinaire [28] (MDO, i.e. Multi-Disciplinary Design Optimization) en faisant par exemple intervenir les caractéristiques structurales de l'aile. Cependant, elle requiert un choix judicieux

de contraintes à imposer sans quoi l'optimisation peut mener à des profils irréalistes ou peut même diverger. L'intervention de ces contraintes augmente beaucoup le volume des calculs, ce qui rend difficile l'utilisation des méthodes usuelles d'optimisation. Pour remédier à ce problème, on a généralement recours à la méthodes des sensibilités [5, 11, 15, 22, 25], à la méthode adjointe [12] ou encore à la différentiation automatique [14] pour faciliter l'évaluation des gradients lors de l'optimisation. Cette difficulté est aussi souvent contournée en utilisant la méthode d'optimisation génétique, décrite par exemple dans [13] et [7], et qui a connu beaucoup de développements ces dernières années [5, 16, 18, 19, 29].

La méthode inverse consiste à fixer une courbe de coefficients de pression ( $C_p$ ) et à chercher le profil d'aile permettant d'obtenir cette courbe. Ceci nécessite donc de traduire en terme de  $C_p$  les caractéristiques qu'on veut obtenir, ce qui est moins naturel que de travailler directement avec la portance ou la traînée. Cette méthode est relativement limitée car elle ne permet pas d'optimiser un profil pour différents régimes de vols et elle est difficilement applicable à la MDO. Néanmoins, elle possède l'énorme avantage d'être simple à mettre en œuvre et de ne pas nécessiter trop de calculs. Elle est donc souvent utilisée comme première étape dans la conception d'une aile [10, 23, 24] ou comme méthode de validation avant l'utilisation de la méthode directe [5, 29]. Signalons aussi l'approche mixte décrite dans [17] qui consiste à optimiser la courbe de  $C_p$  à la manière de la méthode directe et qui utilise ensuite la méthode inverse pour trouver le profil correspondant.

Ces deux méthodes nécessitent un choix de variables de design décrivant plus ou moins directement la géométrie du profil que l'on cherche à optimiser. Etant donné que la complexité d'un problème d'optimisation augmente de façon exponentielle avec le nombre de ses variables, il apparaît que la définition de la géométrie joue un rôle



crucial dans l'efficacité de ces méthodes. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés aux moyens d'optimiser cette représentation. Les deux principaux objectifs que nous nous sommes donc fixés sont :

- Réduire significativement le nombre de variables nécessaires à la représentation d'un profil.
- Conditionner la géométrie du profil afin de conserver, lors de la phase d'optimisation des performances aérodynamiques, des propriétés de continuité permettant d'obtenir des profils réalistes.

Le moyen d'atteindre ces objectifs consiste à trouver une méthode permettant d'approcher une géométrie en trouvant un compromis entre la précision nécessaire à la définition de profils complexes et la quantité d'information utilisée pour sa description. Contrairement à l'interpolation, qui consiste à faire passer une courbe la plus régulière possible par des points donnés, l'approximation, consistant à trouver la courbe simple la plus proche possible d'une courbe donnée, est un problème relativement difficile. Il faut d'abord déterminer quel type de courbe convient le mieux à la forme géométrique qu'on souhaite approcher, puis trouver les paramètres de la courbe permettant la meilleure approximation. La principale difficulté repose dans ce qui se dissimule derrière l'expression "meilleure approximation". En effet, ceci sous entend dans le présent travail un problème d'optimisation dont la fonction coût représente la distance entre les deux courbes. Or, dans le cas qui nous intéresse, la forme des courbes qu'on souhaite approcher laisse présager un problème fortement non-linéaire.

Cette étude présente, dans le premier chapitre, une description des méthodes usuelles de représentation géométrique des profils permettant de justifier l'utilisation des NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines). Le deuxième chapitre explique comment le problème d'approximation de la géométrie d'une aile par une NURBS se

traduit par un problème d'optimisation et comment on peut le résoudre. La méthode permettant d'obtenir une représentation efficace est explicitée dans le troisième chapitre et ses performances y sont comparées à celles des méthodes usuelles. Enfin, dans le quatrième chapitre, plusieurs tests d'optimisation de profils en fonction des exigences aérodynamiques sont présentés afin de démontrer l'efficacité de la méthode dans le contexte de la conception automatisée.

# Chapitre 1

## NURBS et modélisation géométrique

Ce chapitre décrit dans un premier temps les méthodes usuelles de modélisation géométrique afin d'expliquer ensuite pourquoi la méthode de représentation par des NURBS constitue le choix le plus adapté à notre problème. La dernière partie du chapitre est consacrée à la description des propriétés des NURBS.

### 1.1 Revue des méthodes usuelles de modélisation géométrique

La représentation d'une courbe du plan ou d'une surface de l'espace est un problème qui est à la base de la géométrie. Dans toute cette section, nous allons nous intéresser uniquement aux techniques bidimensionnelles, mais il est important de

noter que ces techniques peuvent toutes s'appliquer pour modéliser une surface de l'espace tridimensionnel. On peut distinguer quatre méthodes principales permettant la représentation d'une courbe :

**Equation analytique** : dans le cas de courbes usuelles, pouvant être décrites directement par une fonction mathématique, l'équation analytique permet d'obtenir tous les renseignements sur la géométrie de manière exacte et généralement très simple. Malheureusement, on trouve très peu de ce type de courbes qui soient utilisable en aérodynamique.

**Discrétisation** : il s'agit là de la méthode la plus simple et sûrement la plus utilisée. Elle consiste tout simplement à sélectionner des points sur la courbe et à ne travailler qu'avec ces points.

**Interpolation** : partant d'une discrétisation, l'interpolation permet d'obtenir une courbe passant par chacun des points de la discrétisation mais elle définit une approximation de la courbe en tout point. On peut ainsi imposer des propriétés de continuité à la courbe en conservant un nombre de paramètres égal à celui de la discrétisation, mais elle ne peut représenter exactement la géométrie initiale.

**Approximation** : pour obtenir de la précision, l'interpolation peut nécessiter un très grand nombre de points, c'est pourquoi il peut être intéressant de choisir judicieusement les paramètres de la courbe pour en réduire la quantité ou de chercher une expression analytique permettant d'approcher la géométrie à représenter.

Les courbes analytiques ont essentiellement un intérêt théorique, mais elles peuvent parfois être utiles pour la validation de méthodes numériques. Historiquement, les profils définis de manière analytique ont joué un rôle important dans le développement de l'aéronautique [1] à l'époque où les ordinateurs ne permettaient pas de faire mieux.

Les transformations conformes permettant d'obtenir les profils de Joukovski sont aujourd'hui rarement utilisées mais pas complètement abandonnées [23, 24]. Les profils NACA à 4 ou 5 chiffres dont la géométrie est définie par des fonctions analytiques sont encore très utilisés pour la validation des codes [16], sans doute à cause de l'énorme quantité de données expérimentales et numériques disponibles sur ces profils.

Les courbes analytiques finissent toujours par être discrétisées lorsqu'il s'agit de les utiliser dans un calcul numérique. Par exemple, la résolution numérique des équations de l'aérodynamique fait intervenir un maillage de l'espace, ce qui se traduit à la surface de l'aile par une discrétisation. Toutefois, une représentation discrète ne permet pas d'effectuer n'importe quel calcul sur la géométrie, d'où l'intérêt des méthodes d'interpolation.

Les splines constituent la première méthode d'interpolation à avoir été couramment utilisée. Elles ne sont malheureusement pas très appropriées au design aérodynamique car elles nécessitent trop de points, ce qui explique qu'elles n'apparaissent que rarement dans les publications sur le sujet [14]. Par ailleurs, les courbes de Bézier ont introduit la notion de point de contrôle permettant une interaction simple et visuelle avec la courbe. De plus, la simplicité de leur définition les rend très faciles à utiliser mais représente aussi un inconvénient dans le sens qu'elle limite un peu trop le champ des courbes représentables. C'est pourquoi les courbes de Bézier sont de moins en moins utilisées [5] au profit des B-splines qui se sont imposées ces dernières années comme la méthode d'interpolation de référence. Ce sont en effet elles qui sont utilisées par la plupart des auteurs [12, 15, 17, 18, 22] car elles possèdent de nombreux avantages. Les B-splines utilisent des points de contrôle comme les courbes de Bézier mais avec des fonctions d'interpolation différentes. Ces fonctions peuvent être paramétrées par un *vecteur nodal*, dont la définition est donnée dans la section suivante. Il est ainsi

possible de choisir le jeu de fonctions d'interpolation le plus approprié à la géométrie que l'on cherche à représenter. De plus, ces fonctions sont à support compact de sorte que les points de contrôle n'ont qu'une influence locale sur la courbe contrairement au cas des courbes de Bézier.

Pour approcher une courbe, on se sert généralement des méthodes d'interpolation décrites ci-dessus mais avec des points de contrôle choisis de telle sorte que pour un nombre de points donné la différence entre la géométrie à représenter et son approximation soit minimale. Tout le problème de l'approximation réside dans cette définition. En effet, derrière l'expression "différence minimale" se cache un problème d'optimisation généralement non-linéaire qui interdit l'utilisation de méthodes d'approximation du type "moindres carrés". L'approximation est essentiellement une affaire de compromis entre le nombre de points que l'on souhaite le plus petit possible et la précision qui doit être suffisante.

## 1.2 Choix de la méthode de représentation

Les remarques précédentes font des B-splines le choix évident des fonctions d'interpolation à utiliser pour représenter efficacement une géométrie. Néanmoins, dans un objectif d'optimisation de profils, l'interpolation n'est pas vraiment une solution satisfaisante pour la modélisation de la géométrie à cause du trop grand nombre de points de contrôle qu'elle nécessite, ce qui nous pousse à nous orienter vers l'approximation.

En outre, un des gros problèmes engendré par la discrétisation et l'interpolation est la présence de bruit sur la représentation. Ce bruit se traduit généralement par

de petites fluctuations de la courbe perceptibles au niveau de ses dérivées et tout particulièrement au niveau de la courbure. Or, même si le bruit est souvent invisible du point de vue la géométrie de la courbe, sa présence peut-être très problématique pour la conception d'un profil car il détériore la précision des calculs effectués à partir la géométrie. Par exemple, lors de la résolution numérique de l'écoulement autour de l'aile, la présence de bruit perturbe l'application des conditions aux frontières et peut mener à des résultats imprécis. Pour limiter le bruit, la seule solution réellement efficace est de réduire le plus possible le nombre de sections d'interpolation définissant la courbe, c'est à dire le nombre de points de contrôle.

L'utilisation de fractions de fonctions d'interpolation pondérées, permet aussi de diminuer le nombre de points de contrôle en conservant une quantité d'informations équivalente. Ainsi, les NURBS sont des fractions rationnelles de B-splines et possèdent donc tous leurs avantages en plus d'une plus grande flexibilité. En effet, une NURBS à 10 points de contrôle contient autant d'informations (10 abscisses, 10 ordonnées et 10 poids) qu'une B-spline à 15 points (15 abscisses et 15 ordonnées) et est donc moins susceptible d'être bruitée.

Parmi leurs propriétés qui sont décrites dans la section suivante, les NURBS possèdent en outre l'avantage sur les autres méthodes d'interpolation de pouvoir représenter de manière exacte un très grand nombre de courbes analytiques classiques, notamment les coniques.

### 1.3 Caractéristiques des NURBS

Les considérations précédentes ont porté notre choix sur les NURBS dont nous allons décrire les principales caractéristiques. Dans notre travail, toutes les manipulations concernant les B-splines ont été réalisées en C++ *Pirate*<sup>1</sup>, développée au Centre de Recherche (CERCA) et utilisant les algorithmes de Piegl et Tiller [10]. Références pour toute cette section.

#### Fonctions de base

Soit  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  une suite croissante de nombres réels. Soit  $U$  un vecteur nodal. La  $i$ ème fonction de base de degré  $p$ , d'ordre  $p-1$ , notée  $N_{i,p}(u)$ , est définie pour  $0 \leq i \leq m-p$

$$N_{i,p}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Il est clair que les fonctions  $N_{i,p}$  sont nulles en dehors de l'intervalle  $[u_i, u_{i+1}]$  qui confère leur caractère local aux B-splines et permet une très grande variété de fonctions de base.

[http://www.cerca.fr/science/pirate.html](#)



## 1.3 Caractéristiques des NURBS

Les considérations précédentes ont porté notre choix de la méthode géométrique vers les NURBS dont nous allons décrire les principales caractéristiques. Pour l'ensemble de notre travail, toutes les manipulations concernant les NURBS font appel à la bibliothèque de classes en C++ *Pirate*<sup>1</sup>, développée au Centre de Recherche en Calcul Appliqué (CERCA) et utilisant les algorithmes de Piegl et Tiller [20] qui nous sert aussi de référence pour toute cette section.

### 1.3.1 Fonctions de base

Les NURBS utilisent les fonctions de base des B-splines qui sont définies de la façon suivante. Soit  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  une suite croissante de nombres réels appelés *nœuds* où  $U$  est le *vecteur nodal*. La  $i^{\text{ième}}$  fonction de base de degré  $p$ , correspondant à une B-spline d'ordre  $p + 1$ , notée  $N_{i,p}(u)$ , est définie pour  $0 \leq i \leq m - p - 1$  comme suit :

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (1.1)$$

De cette définition, il ressort clairement que les fonctions  $N_{i,p}$  sont nulles en dehors de l'intervalle  $[u_i, u_{i+p+1}]$  ce qui confère leur caractère local aux B-splines et aux NURBS. Le choix du vecteur nodal permet une très grande variété de fonctions de

<sup>1</sup><http://www.cerca.umontreal.ca/science/pirate.html>

base. Dans le cas particulier où ce vecteur est de la forme

$$\underbrace{\{0, \dots, 0\}}_p, u_{p+1}, \dots, u_{m-p+1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_p \quad (1.2)$$

où les nœuds entre 0 et 1 sont régulièrement espacés, alors la courbe est dite uniforme.

Le degré  $p$  des fonctions utilisées joue un rôle essentiel sur la représentation géométrique de la courbe. Plus le degré est bas, plus la courbe "suit" les points de contrôle et plus le domaine d'influence d'un point est petit, mais moins elle est régulière. Cette propriété est illustrée par la figure 1.1. Dans le cas qui nous intéresse, le degré 3 est un bon compromis car il assure la continuité de la courbe, de ses tangentes et de sa courbure tout en lui laissant suffisamment de liberté pour bien refléter les détails d'un profil d'aile.

La figure 1.2 permet d'observer l'allure des fonctions de base pour  $p = 2$ . Il faut remarquer que ces fonctions sont construites par morceaux sur les intervalles du vecteur nodal. Les fonctions et leurs dérivées sont continues sur  $[0, 1]$ . Seules  $N_{0,2}$  et  $N_{5,2}$  prennent la valeur 1 respectivement en 0 et en 1. Ceci se traduit géométriquement par le fait que les seuls points de contrôle par lesquels la courbe passe sont les extrémités.

### 1.3.2 Construction des NURBS

Partant des fonctions de bases précédentes, on construit une NURBS à  $n$  points, d'ordre  $p + 1$  et utilisant un vecteur nodal à  $n + p + 1$  points de manière suivante :

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1.3)$$

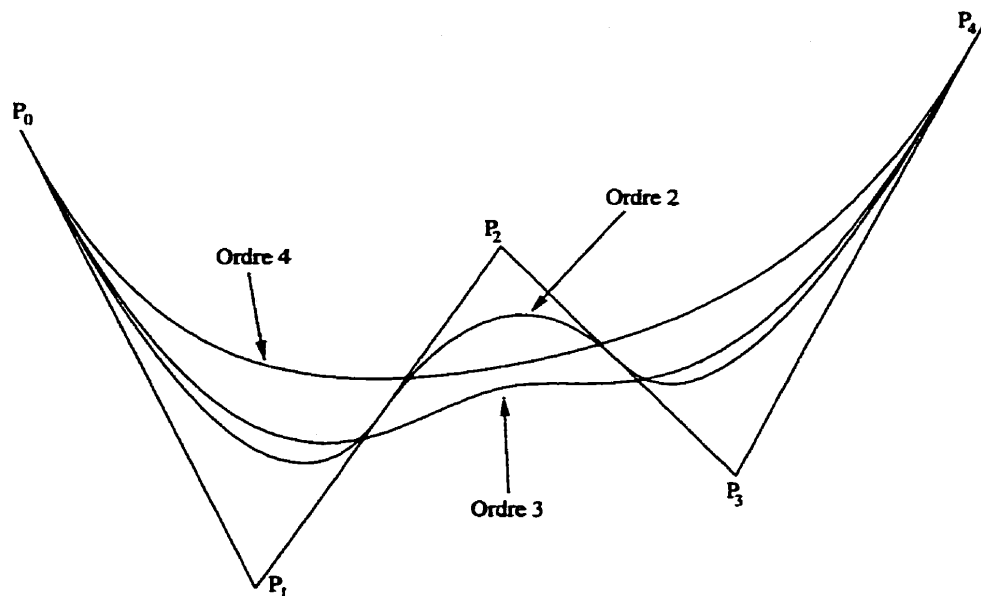


Figure 1.1: Influence de l'ordre sur une NURBS à 5 points de contrôle

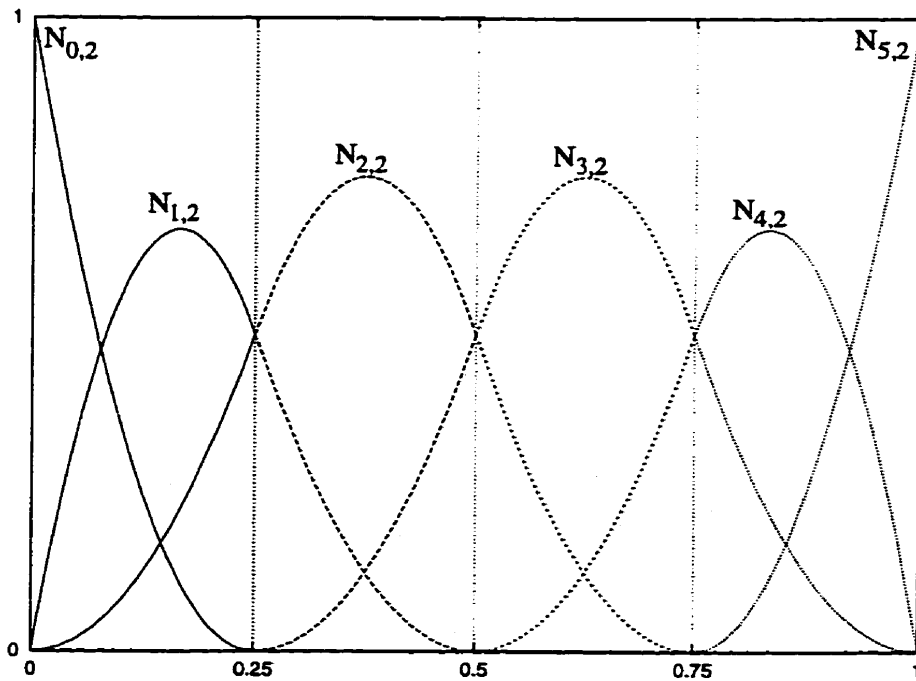


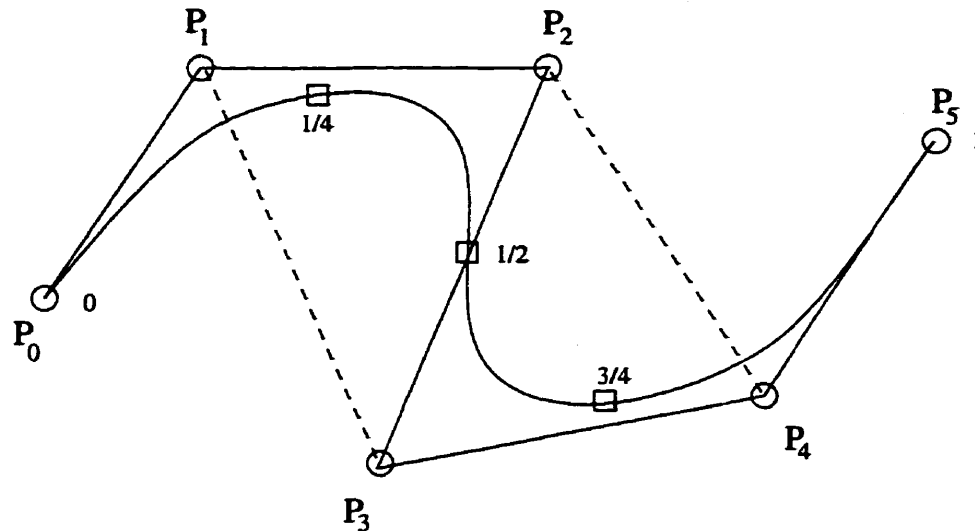
Figure 1.2: Fonctions de base quadratiques uniformes pour 6 points de contrôle

où les  $\mathbf{P}_i$  sont les vecteurs position des points de contrôle auxquels sont associés les poids  $\omega_i$ .

Les propriétés des fonctions de base et la relation 1.3 nous donnent les propriétés importantes des NURBS :

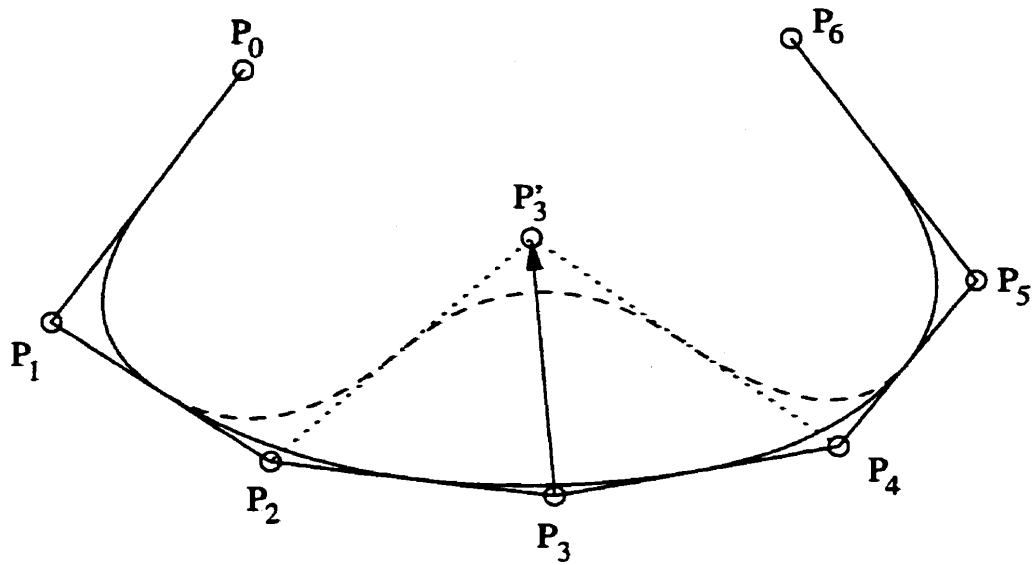
- Une NURBS dont tous les poids sont égaux à un est une B-spline.
- $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$ , i.e. une NURBS a pour extrémités le premier et le dernier de ses points de contrôle.
- La courbe est tangente en ses extrémités aux segments  $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n$ .
- Une NURBS est invariante par transformation affine.
- Propriété de l'enveloppe convexe : si  $u \in [u_i, u_{i+1}]$ , alors  $\mathbf{C}(u)$  se trouve à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points  $\mathbf{P}_{i-p}, \dots, \mathbf{P}_i$ . Dans le cas où le degré est 2, ceci signifie que chaque portion de la courbe située entre deux nœuds est localisée à l'intérieur du triangle formé par les points de contrôle correspondants (cf. figure 1.3).
- $\mathbf{C}(u)$  est infiniment dérivable sur chaque section située entre deux nœuds et  $p - 1$  fois dérivable à chaque nœud. Dans le cas de degré 2, la courbe et ses tangentes sont continues mais il peut y avoir des sauts de courbure aux nœuds.
- Propriété d'approximation locale : si on déplace un point  $\mathbf{P}_i$  ou qu'on modifie son poids  $\omega_i$ , seule la partie de la courbe située entre les nœuds  $u_i$  et  $u_{i+p+1}$  est modifiée. Ceci est illustré dans le cas de degré 2 par les figures 1.4, pour le déplacement d'un point, et 1.5, pour la modification d'un poids.
- Interpolation : par  $N$  points, pour un vecteur nodal bien choisi, il passe une unique B-spline d'ordre  $k$  à  $N$  points de contrôle qui s'obtient en résolvant un système linéaire. Si le vecteur nodal est mal choisi, il se peut que le problème

n'ait aucune de solution. Il n'existe pas de méthode d'interpolation simple permettant d'obtenir une NURBS non réduite à une B-spline, c'est à dire avec des poids différents de 1, car la présence de poids rend le problème non-linéaire.

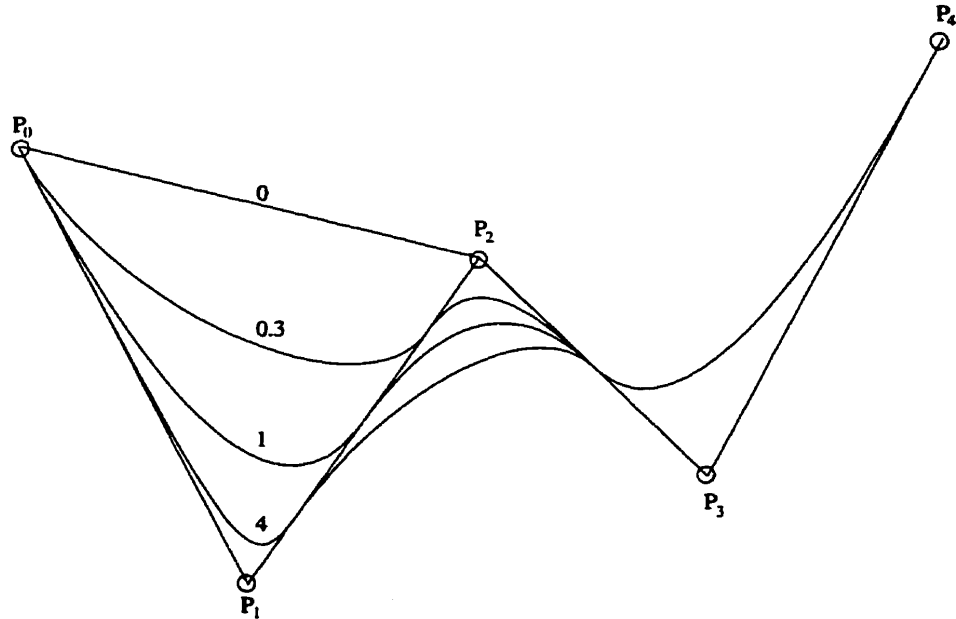


**Figure 1.3: Propriété de l'enveloppe convexe pour une NURBS quadratique**

En plus de ces propriétés, on peut ajouter quelques caractéristiques des NURBS qui peuvent se révéler utiles pour la conception de profils d'ailes. Il est par exemple possible d'insérer des points de contrôle sans modifier la courbe. Ceci permet notamment, si on veut modifier une petite partie du profil, de restreindre la zone d'influence d'un point de contrôle. On peut ainsi choisir la section de la courbe qui est modifiée lorsqu'on déplace un point. Il est aussi possible de représenter de manière exacte un grand nombre de courbes analytiques, dont les coniques. Ainsi, on peut par exemple imposer à un profil de former un arc de cercle sur une partie du bord d'attaque.



**Figure 1.4: Effet du déplacement d'un point de contrôle sur une NURBS quadratique**



**Figure 1.5: Effet de la modification d'un poids sur une NURBS quadratique**  
 Les valeurs indiquées sur le dessin correspondent au poids  $\omega_1$ , les autres poids sont fixés à la valeur 1

## Chapitre 2

# Le problème d'approximation

Le but du problème est d'approcher une courbe objectif définie par un grand nombre de points, une expression analytique ou n'importe quelle forme d'interpolation par une NURBS définie par un nombre de points restreint. Le moyen d'arriver à une approximation efficace consiste à utiliser un algorithme d'optimisation afin de trouver les positions des points de contrôle de la NURBS qui minimisent l'erreur d'approximation.

## 2.1 Formulation du problème d'approximation

### 2.1.1 Description du problème

En terme d'optimisation, les variables  $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$  du problème sont appelées *variables de design*. Ces variables permettent de calculer la valeur de la *fonction coût*  $F(\mathbf{X})$  qui représente la quantité à minimiser, c'est à dire, dans notre cas, l'erreur de

l'approximation. Le problème est donc le suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{X}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \\ \text{Tel que } F(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Nous nous intéressons uniquement au cas où les variables ne sont soumises à aucune contrainte. La présence de contraintes n'apporte pas de différences fondamentales aux méthodes d'optimisations mais rend les calculs numériques beaucoup plus lourds. C'est une des raisons qui nous a poussé à rechercher une représentation efficace de la géométrie telle que les contraintes liées à une géométrie réaliste soient incluses directement et naturellement dans la paramétrisation des profils.

### 2.1.2 Evaluation de l'erreur

Pour mener à bien cette approximation, il nous faut un moyen d'évaluer l'erreur commise lors de l'approximation, c'est à dire la "distance" qui sépare les deux courbes.

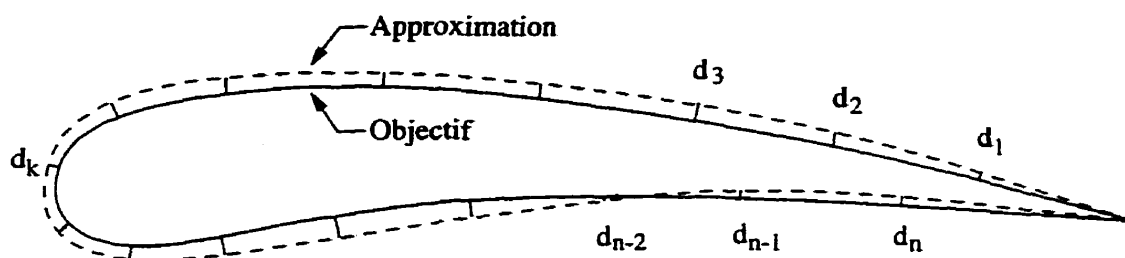


Figure 2.1: Evaluation de l'erreur d'approximation

Pour cela, on calcule, tel que montré sur la figure 2.1, la distance euclidienne entre les deux courbes en plusieurs points équirépartis sur le profil objectif par projection de ces points sur la courbe d'approximation. Il est préférable de projeter des points



de l'objectif sur l'approximation et non l'inverse. En effet, l'approximation possédant peu de points de contrôles, son évaluation est plus rapide et, par conséquent, il en est de même pour la détermination de la projection. Ceci peut être réalisé avec une courbe objectif quelconque, ce qui assure la généralité de la méthode. On obtient alors les valeurs  $d_1, \dots, d_n$  de ces distances, qui nous permettent de calculer l'erreur moyenne de l'approximation :

$$\epsilon_{moy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k \quad (2.2)$$

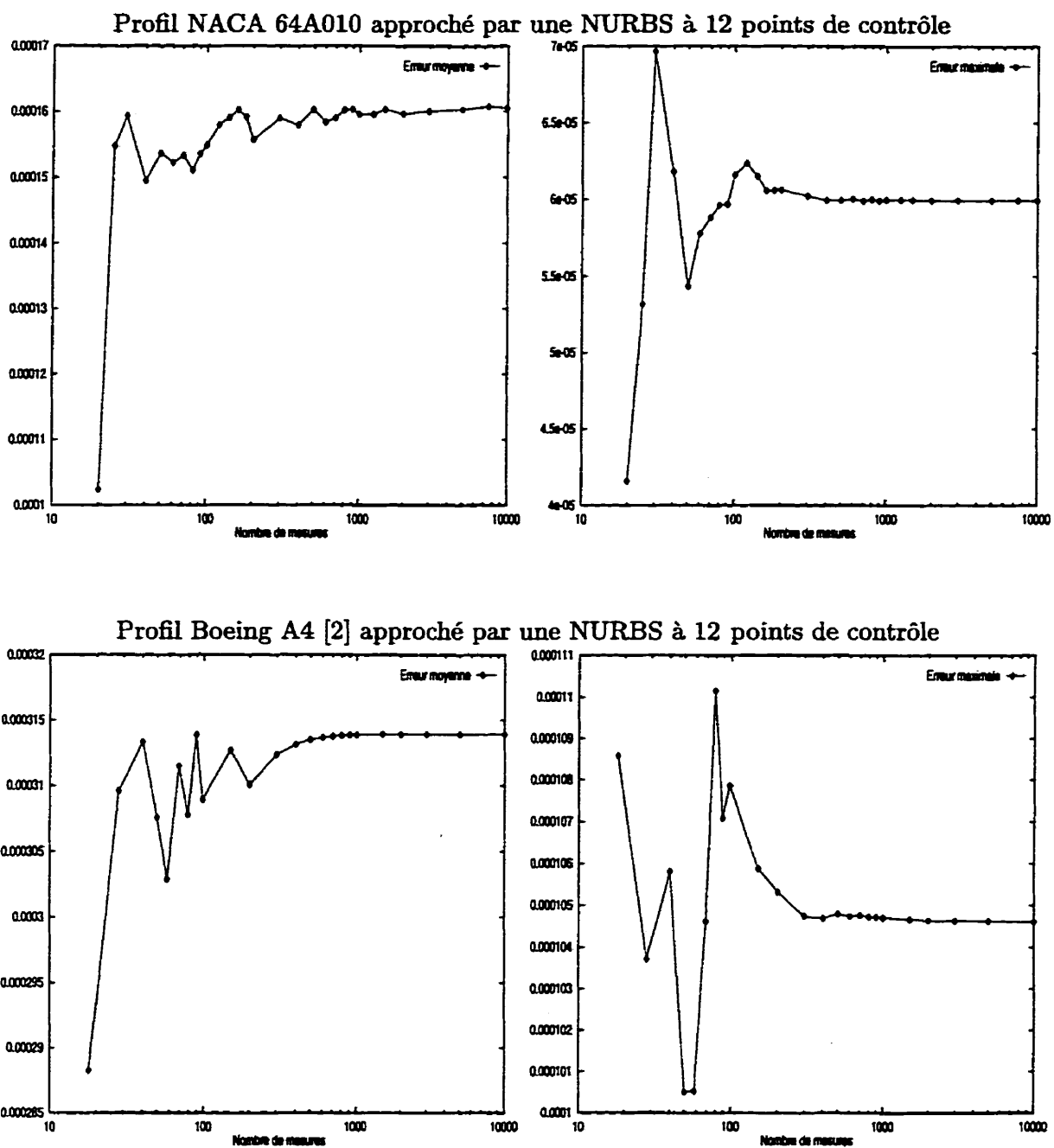
et l'erreur maximale :

$$\epsilon_{max} = \max_{1 \leq k \leq n} d_k \quad (2.3)$$

Le choix du nombre de mesures est important car il détermine la précision sur l'évaluation de l'erreur mais aussi le temps de calcul. La figure 2.2 montre l'évolution de l'erreur moyenne et de l'erreur maximale en fonction du nombre de points utilisés pour les mesures et pour deux exemples d'approximation. Il ressort de cette figure qu'en dessous de 500 mesures, l'évaluation est imprécise, ce qui se traduit par de fortes fluctuations des valeurs d'erreur. En revanche, toutes les courbes développent un plateau lorsque le nombre de mesures augmente, ce qui est essentiel pour la validité de la méthode d'évaluation. On effectuera donc tous les calculs d'erreur avec au moins 500 points de mesure et on augmentera cette valeur lorsqu'une grande précision sera requise.

### 2.1.3 Ordre de grandeur de l'erreur

Pour savoir si une approximation est satisfaisante ou non, on se fie essentiellement à l'erreur  $\epsilon_{max}$  correspondante puisqu'elle caractérise la distance par rapport au profil



**Figure 2.2: Evolution de l'erreur d'approximation en fonction du nombre de mesures**

objectif. C'est pourquoi il est intéressant de savoir à partir de quel ordre de grandeur d'erreur on peut considérer qu'une approximation est satisfaisante.

Toutes les valeurs d'erreur présentées dans ce mémoire sont normalisées de telle sorte qu'elles correspondent à une distance en mètres pour un profil ayant une corde d'un mètre. Le premier ordre de grandeur sur lequel on peut se baser est donné par la tolérance qui est utilisée lors de l'usinage de l'aile. Un profil est alors jugé acceptable si les erreurs de fabrication sont inférieures à  $2 \times 10^{-4}$ , c'est à dire moins de 0.2 mm pour une corde d'un mètre.

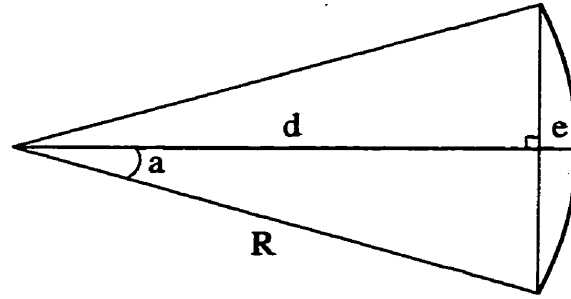
Pour donner un sens à cette valeur, on peut faire une analogie avec l'erreur qui est commise lorsqu'on discrétise une courbe. Si la courbe est un cercle, l'erreur peut se calculer de manière exacte. La figure 2.3 représente un arc de cercle délimité par deux points de discrétisation voisins et montre à quoi l'erreur correspond : il s'agit de la distance entre la courbe de départ (le cercle) et la courbe définie par l'interpolation linéaire des points de discrétisation choisis sur la courbe de départ. Sur le dessin, l'erreur correspond au segment de longueur  $e$  situé entre l'arc de cercle et sa corde. L'erreur  $e$  est liée au rayon  $R$  du cercle par la relation :

$$d + e = R \quad (2.4)$$

et la distance  $d$  par la relation :

$$\cos(a) = \frac{d}{R} \quad (2.5)$$

où  $a$  est le demi-angle de l'arc de cercle.



**Figure 2.3: Calcul de l'erreur de discrétisation d'un cercle**

Si le cercle est discrétisé avec  $n$  points, le demi-angle  $a$  vaut  $\frac{\pi}{n}$ , d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{e}{R} &= 1 - \frac{d}{R} \\
 &= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
 &\approx \frac{\pi^2}{2n^2} \quad \text{pour } n \text{ grand}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

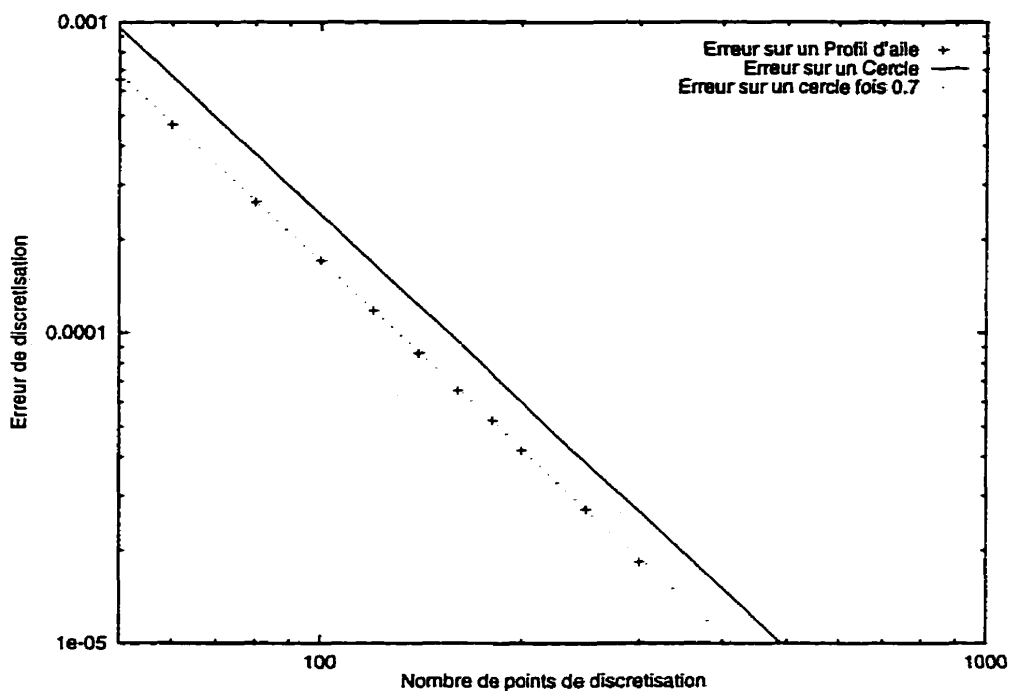
Pour normaliser l'erreur de la même manière que pour les profils d'ailes, on prend un rayon de  $\frac{1}{2}$ , ce qui donne alors :

$$e \approx \frac{\pi^2}{4n^2} \tag{2.7}$$

On peut ensuite calculer l'erreur de discrétisation sur un profil d'aile réaliste et le comparer à la relation 2.7. Pour cela, il suffit d'utiliser un profil défini de manière exacte et de calculer par la méthode décrite dans la section précédente la distance entre ce profil et sa discrétisation à  $n$  points. Nous avons utilisé comme profil exact une représentation NURBS à 9 points de contrôle d'un profil NACA 2412 [1] que nous avons discrétisé en répartissant les points de discrétisation de telle sorte qu'ils soient plus concentrés là où la courbure du profil est grande. Les erreurs calculées ont été

reportées sur la figure 2.4 ainsi que la courbe définie par l'équation 2.7 et celle définie par la relation :

$$\begin{aligned} e' &\approx 0.7 \frac{\pi^2}{4n^2} \\ &\approx \frac{1.7}{n^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$



**Figure 2.4: Evolution de l'erreur de discrétisation en fonction du nombre de points**

Ce graphique montre à quel point les calculs confirment parfaitement la théorie élaborée à partir du cercle. L'échelle logarithmique fait ressortir l'ordre 2 en  $n$  de la loi d'erreur et la courbe décalée d'un facteur 0,7 souligne la concordance de la courbe théorique avec celle obtenue par le calcul. On peut donc utiliser la relation 2.8 pour faire le lien entre l'erreur et le nombre de points. Ainsi, pour satisfaire à la tolérance de fabrication, il faut utiliser au moins 93 points.

Pour la résolution des équations régissant l'écoulement aérodynamique autour d'un profil, on utilise habituellement un maillage, ce qui équivaut à discrétiser le profil. Pour obtenir une solution satisfaisante, on est généralement amené à utiliser entre 150 et 200 points sur le profil. L'erreur que l'on commet alors sur la discrétisation est, d'après la loi 2.8, comprise entre  $8 \times 10^{-5}$  et  $4 \times 10^{-5}$ . Si on veut que notre méthode soit consistante avec les méthodes de calculs aérodynamiques pour lesquelles on l'a mise au point, il faut donc que l'erreur de l'approximation d'un profil par une NURBS ne soit pas plus grande que  $8 \times 10^{-5}$ .

Les remarques ci-dessus nous permettent d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de la précision qu'on doit obtenir. La valeur  $8 \times 10^{-5}$  dictée par l'aérodynamique est plus précise que la tolérance de fabrication. On utilisera donc comme référence le critère imposant la plus grande précision, c'est-à-dire la valeur  $8 \times 10^{-5}$ .

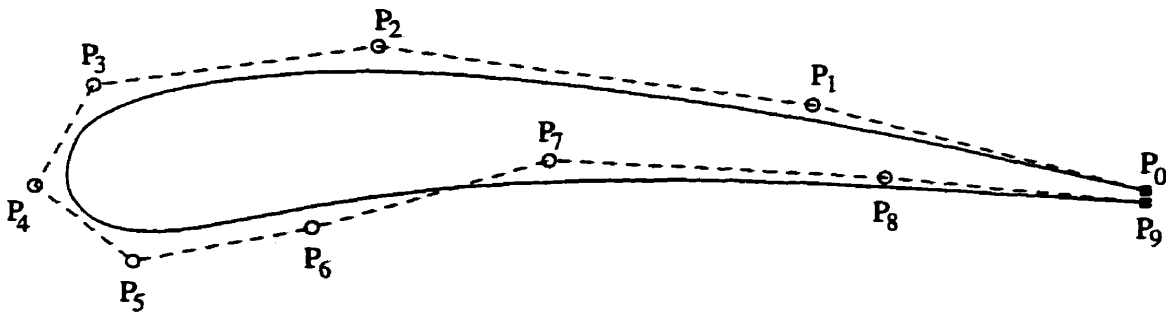
#### 2.1.4 Paramètres d'optimisation

Un problème d'optimisation est caractérisé par les variables qui lui sont associées (variables de design) et par sa fonction coût, qui à chaque jeu de variables associe un nombre d'autant plus petit que la qualité de la solution correspondante est bonne. Etant donné que notre but est de trouver une représentation optimale d'un profil, nous allons utiliser comme variables de design les coordonnées et les poids des points de contrôle de la NURBS représentant le profil. La figure 2.5 donne un exemple de profil comportant 10 points de contrôle. Les deux points correspondants au bord de fuite ( $P_0$  et  $P_9$  sur la figure) restent fixés pendant toute la phase d'optimisation ; leur position est imposée par le bord de fuite du profil objectif et leur poids est fixé à 1. Le bord de fuite pouvant être d'épaisseur non nulle, ces deux points ne sont pas

nécessairement superposés. Dans le cas de la figure 2.5, les variables de design sont donc :

$$\mathbf{X} = \{x_1, y_1, \omega_1, x_2, \dots, x_8, y_8, \omega_8\} \quad (2.9)$$

où  $x$ ,  $y$  et  $\omega$  désignent respectivement l'abscisse, l'ordonnée et le poids des points de contrôle.



**Figure 2.5: Configuration d'un profil modélisé par une NURBS**

Le vecteur  $\mathbf{X}$  définit donc un unique profil pour lequel on calcule l'erreur moyenne et l'erreur maximale par rapport au profil objectif en utilisant les relations 2.2 et 2.3. Ceci permet alors de calculer la valeur correspondante de la fonction coût :

$$F(\mathbf{X}) = \alpha \epsilon_{moy} + \beta \epsilon_{max} \quad (2.10)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres de la fonction permettant de spécifier l'importance de l'erreur moyenne par rapport à l'erreur maximale. De ces deux paramètres dépend la manière dont l'algorithme va converger. En pratique, c'est l'erreur maximale qui va déterminer la qualité d'une approximation. Toutefois, si la fonction coût ne tenait compte que d'elle, la convergence serait lente. En effet, le déplacement de certains points de contrôle pourrait alors ne pas avoir d'effet dans le cas où la plus grande erreur serait localisée hors de leur zone d'influence. Les meilleurs résultats s'obtiennent

généralement en fixant les paramètres de telle sorte que les deux termes de la fonction coût 2.9 aient le même ordre de grandeur. Suivant cette règle, nous avons généralement utilisé  $\beta$  égal à 1 et  $\alpha$  égal à 2 ou 3.

## 2.2 Algorithme d'optimisation : la méthode quasi-Newton

L'optimisation est un domaine très vaste et il existe de nombreuses méthodes plus ou moins adaptées selon le type de problème. Les principales méthodes sont décrites dans [26] qui nous sert de référence pour cette section.

Lorsque la fonction coût est une forme quadratique, le problème est dit linéaire et peut se résoudre avec des méthodes spécifiques exploitant cette linéarité. Dans le cas contraire, qui est celui qui nous concerne, on parle d'optimisation non-linéaire. Il s'agit alors d'un problème généralement complexe pour lequel il n'existe pas de méthode universelle de résolution. Nous nous sommes particulièrement intéressés à une méthode dite du deuxième ordre, la *méthode quasi-Newton*.

Comme la plupart des méthodes d'optimisation, la méthode quasi-Newton est une méthode itérative de recherche du minimum de la fonction coût. Elle consiste à partir d'un point  $\mathbf{X}_0$  suffisamment proche du minimum et à passer à la  $k^{\text{ième}}$  itération du point  $\mathbf{X}_k$  au point  $\mathbf{X}_{k+1}$  par la relation

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \alpha_k \mathbf{S}_k \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{S}$  désigne le vecteur direction de recherche et où  $\alpha$  est un scalaire définissant la dis-



tance que l'on souhaite parcourir dans cette direction. Comme cette relation le montre, l'itération comporte deux étapes successives que nous allons détailler. D'abord le choix du vecteur de descente  $\mathbf{S}$ , puis le choix de  $\alpha$  qui constitue la *recherche de ligne*.

### 2.2.1 Vecteur direction de recherche

Considérant les caractéristiques de l'opérateur gradient, un premier choix possible pour le vecteur  $\mathbf{S}$  est  $\mathbf{S}_k = -\nabla F(\mathbf{X}_k)$  et constitue la *méthode du gradient*. Néanmoins, pour un algorithme efficace, il est nécessaire d'aller un peu plus loin. Ecrivons le développement de Taylor à l'ordre deux en un point  $\mathbf{X}$  proche de  $\mathbf{X}_k$

$$F(\mathbf{X}) \simeq F(\mathbf{X}_k) + \nabla F(\mathbf{X}_k) \cdot \delta\mathbf{X} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{X} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{X}_k) \cdot \delta\mathbf{X} \quad (2.12)$$

où  $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_k$  et où  $\mathbf{H}$  désigne la matrice des dérivées secondes de  $F$ , aussi appelée matrice Hessienne..

En prenant le gradient de l'équation 2.12, on obtient

$$\nabla F(\mathbf{X}) \simeq \nabla F(\mathbf{X}_k) + \mathbf{H}(\mathbf{X}_k) \cdot \delta\mathbf{X} \quad (2.13)$$

L'extremum cherché est caractérisé par  $\nabla F = 0$ . Donc, pour  $\mathbf{X}$  suffisamment proche de l'optimum, la relation 2.13 mène à

$$\delta\mathbf{X} = -\mathbf{H}(\mathbf{X}_k)^{-1} \cdot \nabla F(\mathbf{X}_k) \quad (2.14)$$

Ceci nous donne donc un choix possible pour le vecteur de recherche

$$\mathbf{S} = -\mathbf{H}(\mathbf{X}_k)^{-1} \cdot \nabla F(\mathbf{X}_k) \quad (2.15)$$

et constitue la méthode de Newton. Celle-ci a surtout un intérêt théorique car en pratique, le calcul de la matrice Hessienne est très onéreux en temps de calcul. En effet, les dérivées de la fonction coût sont rarement connues de manière analytique ce qui oblige à les calculer par différences finies. Il faut  $n$  évaluations de la fonction  $F$  pour calculer un gradient et  $n^2$  pour calculer la matrice Hessienne, ce qui devient vite prohibitif lorsque la fonction coût est onéreuse à évaluer; d'où l'idée d'utiliser une approximation  $\mathbf{H}_k$  de la matrice  $\mathbf{H}(\mathbf{X}_k)$ . Il s'agit alors de la méthode de quasi-Newton qui utilise la relation

$$\mathbf{S} = -\mathbf{H}_k^{-1} \cdot [\nabla F(\mathbf{X}_k) - \nabla F(\mathbf{X}_{k-1})] \quad (2.16)$$

déoulant de l'équation 2.13. Pour assurer l'existence du vecteur  $\mathbf{S}_k$ , il faut que la matrice  $\mathbf{H}_k$  soit inversible. Or au voisinage d'un minimum, la matrice Hessienne est symétrique définie positive. Donc, pour assurer la consistance de la méthode, il suffit d'imposer à  $\mathbf{H}_k$  d'être symétrique définie positive.

Le choix de l'approximation de la matrice Hessienne peut se faire de plusieurs façons. La méthode que nous avons choisi d'utiliser consiste à mettre à jour la matrice d'approximation de la façon suivante :

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{\mathbf{Y}_k \otimes \mathbf{Y}_k}{\mathbf{Y}_k \cdot \mathbf{S}_k} - \frac{(\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{S}_k) \otimes (\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{S}_k)}{\mathbf{S}_k \cdot \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{S}_k} \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{Y}_k = \nabla F(\mathbf{X}_{k+1}) - \nabla F(\mathbf{X}_k)$ . Cette méthode de mise à jour porte de le nom de

méthode BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno) et permet de faire converger la matrice d'approximation vers la matrice Hessienne de  $F$  à proximité du minimum tout en la conservant symétrique définie positive. Pour débiter l'itération, il suffit de choisir une matrice  $\mathbf{H}_0$  symétrique définie positive. Le plus souvent la matrice identité suffit à mener à la convergence.

En outre, l'approximation de la matrice Hessienne possède l'avantage sur la méthode de Newton de faciliter la convergence lorsque le point de départ de l'itération est relativement loin de la solution. En effet, dans un tel cas, il est possible que la matrice Hessienne ne soit pas inversible alors que son approximation l'est toujours puisqu'on lui impose d'être définie positive.

### 2.2.2 Recherche de ligne

Une fois le vecteur  $\mathbf{S}$  calculé, il faut déterminer la distance à parcourir dans cette direction. Cette étape est déterminante pour l'efficacité de l'algorithme. En effet, il faut progresser le plus vite possible pour limiter le temps de calculs. En revanche, si la progression se fait trop vite, la méthode peut diverger.

Les méthodes de la section d'or et de l'interpolation quadratique décrites dans [21] donnent de bons résultats mais les meilleurs résultats ont été obtenus en utilisant la règle d'Armijo. Celle-ci consiste à prendre  $\alpha_k = \left(\frac{1}{2}\right)^m$  avec  $m$  le plus petit entier tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$F(\mathbf{X}_k + \alpha_k \mathbf{S}_k) \leq F(\mathbf{X}_k) + \sigma \alpha_k \nabla F(\mathbf{X}_k) \cdot \mathbf{S}_k \quad (2.18)$$

où  $\sigma$ , appelé le *critère de descente suffisante* doit être compris entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . En général

on le choisit égal à  $10^{-4}$ .

Etant donné que le terme  $\nabla F(\mathbf{X}_k) \cdot \mathbf{S}_k$  de la relation 2.18 est toujours négatif, il ressort que le critère de descente suffisante interdit à la méthode de diverger car on oblige la fonction coût à décroître à chaque itération. Ceci confère une certaine robustesse à la méthode, mais il se peut qu'elle stagne si le choix du point de départ à été mal fait. Ceci se traduit en pratique par des valeurs très petites de  $\alpha$ .

### 2.2.3 Minimum global

Dans la plupart des cas, la méthode décrite ci-dessus permet d'obtenir un minimum de la fonction coût. Toutefois, il est en général impossible de prouver qu'un tel minimum est bien le minimum global de la fonction et non pas un simple minimum local. Pour des fonctions fortement non-linéaires, comme celles qui nous concernent, il n'y pas d'autre solution que de procéder à plusieurs optimisations en partant de différents points puis de sélectionner le meilleur des minima locaux que l'on a obtenus. Le choix des points de départ reste encore un problème délicat car il est souvent difficile a priori d'avoir une idée même approximative de la solution.

Si la formulation du problème ne donne aucun indice sur un choix approprié de points de départ pour l'optimisation, il faut avoir recours à une méthode de recherche globale. Ce type de problème est généralement très complexe, surtout lorsque la dimension de l'espace est grande. D'une part, les méthodes itératives sont peu appropriées car elles convergent toujours vers le premier minimum qu'elles trouvent, que celui-ci soit local ou global. D'autre part, pour un espace de dimension  $n$ , les méthodes purement statistiques nécessitent un nombre d'évaluation de la fonction

coût de l'ordre de  $a^n$  où  $a$  est un nombre supérieur à 2 dépendant de la précision requise. Ainsi pour un problème à seulement 10 variables, en supposant  $a = 3$ , le nombre d'évaluations est déjà égal à 60000. Il est donc parfaitement inconcevable d'utiliser de telles méthodes pour effectuer une recherche globale. Pour pallier les inconvénients des méthodes statistiques en tout conservant leur caractère global, il est possible d'utiliser la méthode génétique décrite dans l'annexe A. Cette méthode nous a permis d'obtenir de bons résultats mais elle nécessite encore beaucoup de calculs. Ces calculs peuvent dans la plupart des cas être évités en prenant la peine de chercher une solution initiale suffisamment proche de ce qu'on imagine être la solution finale. Nous allons maintenant voir comment construire ce type de solution.

## 2.3 Construction d'une solution initiale

Etant donné la non-linéarité du problème, le choix du profil servant de point de départ à l'optimisation est capital. Comme il l'a été expliqué précédemment, les méthodes d'optimisation à gradient ne garantissent pas l'obtention d'un minimum global. Donc si l'optimiseur démarre trop loin de la solution qu'on souhaite atteindre, il risque de converger vers une solution peu intéressante, caractérisée par un minimum local de la fonction coût. Si, au contraire, on peut avoir une idée assez précise de l'allure de la solution, on réduit fortement les risques de tomber sur une solution inadéquate. Nous allons donc nous intéresser à la manière de trouver, avant optimisation, une approximation du profil suffisamment bonne pour aider la convergence de l'optimiseur.

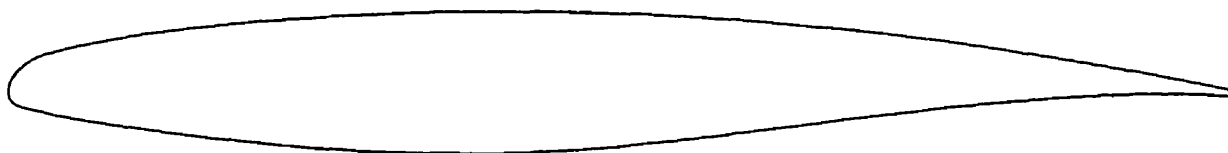
Pour obtenir une première approximation du profil, on utilise la propriété d'in-

terpolation des B-splines (c.f. section 1.3.2) permettant de construire une courbe à  $N$  points de contrôle passant  $N$  points. Si les points d'interpolation sont bien choisis sur le profil, alors la courbe interpolée en donnera une bonne approximation. Le principal problème réside dans l'automatisation du choix des points pour que la méthode soit efficace.

Partant du principe qu'il est en général plus facile d'approcher une courbe lorsqu'elle présente peu de courbure, on se base sur la courbure du profil pour sélectionner les points de collocation. Pour une courbe définie par une paramétrisation  $(x(u), y(u))$ , la courbure  $C(u)$  en un point s'exprime par :

$$C(u) = \frac{x_u y_{uu} - x_{uu} y_u}{[(x_u)^2 + (y_u)^2]^{3/2}} \quad (2.19)$$

où les indices désignent des dérivées.



**Figure 2.6: Profil d'aile supercritique Bombardier-Canadair**

La figure 2.6 présente le profil d'aile qui va nous servir à illustrer la suite de cette section. Il s'agit d'un profil supercritique, c'est à dire prévu pour voler en régime transsonique, le régime de croisière de la plupart des avions commerciaux. Pour ce profil, on calcule la courbure avec la formule 2.19, que l'on présente figure 2.7. Il suffit ensuite d'intégrer et de normaliser cette fonction pour obtenir une fonction de concentration basée sur la courbure du profil. Toutefois, pour contrôler cette fonction

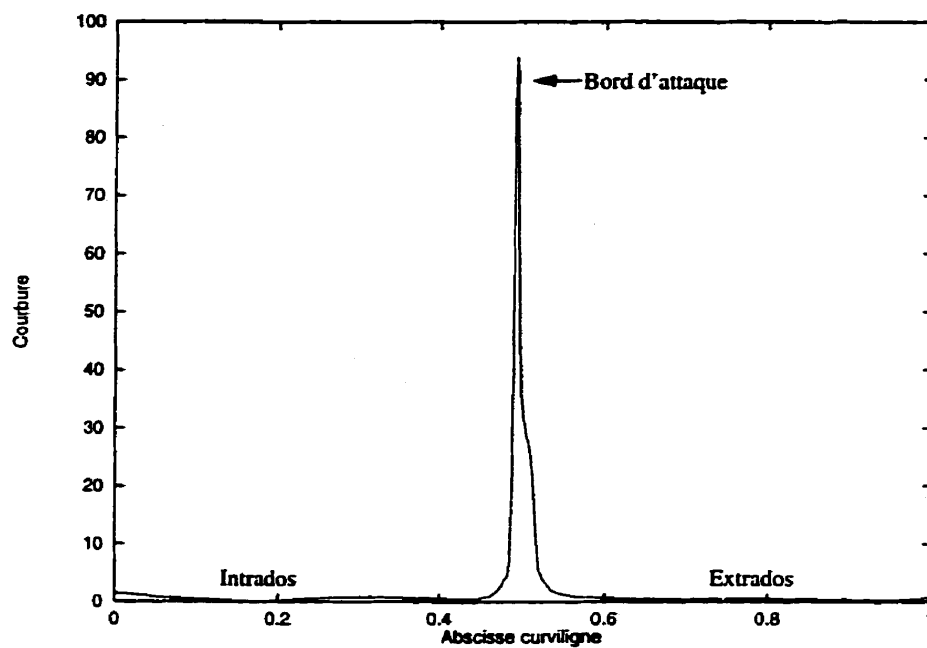


Figure 2.7: Courbure du profil Bombardier

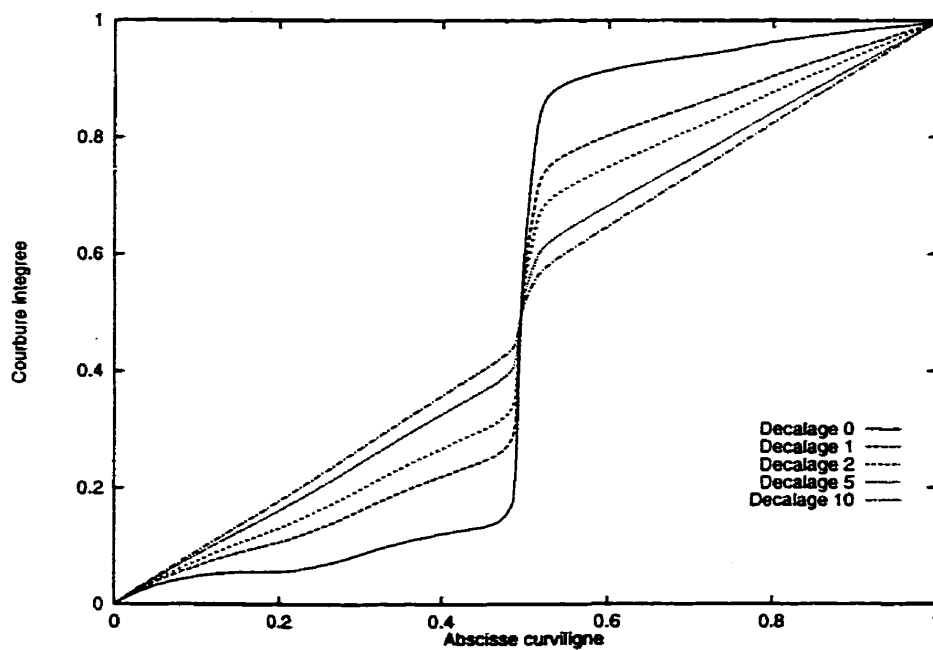


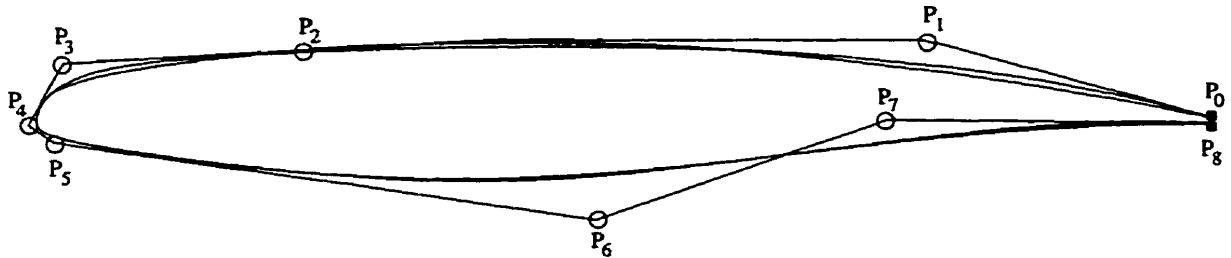
Figure 2.8: Courbure intégrée du profil Bombardier  
Le décalage correspond à la constante ajoutée avant intégration

de concentration, on ajoute une constante  $D$  à l'intégration de la manière suivante :

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{K} \int_0^1 C(v) + D dv \quad (2.20)$$

où  $K$  est une constante de normalisation telle que  $\max \mathcal{F}(u) = 1$ . La constante de *décalage*  $D$  atténue l'effet d'une forte courbure. Pour de très grandes valeurs de décalage, on obtient une répartition uniforme des points. La figure 2.8 illustre ceci et présente le résultat de l'intégration pour différentes valeurs du décalage.

Le paramètre de décalage permet aussi de générer plusieurs approximations initiales du profil nécessaire à la recherche de l'optimum global.



**Figure 2.9: Exemple d'approximation initiale du profil Bombardier**

La figure 2.9 donne un exemple d'approximation initiale à 9 points de contrôle obtenue avec un décalage de 2. Il est difficile de discerner le profil de son approximation car l'erreur maximale n'est que de  $5.4 \times 10^{-3}$ , c'est à dire 5 millimètres pour une corde de 1 mètre. On peut néanmoins voir des différences sur l'extrados vers le bord d'attaque et le bord de fuite. Ce sont ces différences qui justifient l'utilisation d'un algorithme d'optimisation.



## Chapitre 3

# Représentation optimale d'un profil

Les deux premiers chapitres nous ont permis de poser les bases de la méthode d'approximation que nous allons maintenant utiliser pour obtenir une représentation efficace d'un profil d'aile quelconque. Pour juger de l'efficacité de la méthode, nous utiliserons sur les critères suivants :

- L'approximation doit être suffisamment proche du profil objectif pour que les deux représentations soient équivalentes du point de vue de leur utilisation.
- Le nombre de points de contrôle de la NURBS doit être petit car il est directement lié au nombre de paramètres qui seront utilisés lors d'une optimisation aérodynamique.
- Il ne doit pas y avoir de bruit dans la représentation. Ceci signifie non seulement que la courbe du profil doit être régulière mais que ses dérivées devront aussi être régulières. Pour juger de la régularité d'un profil, on s'intéressera tout

particulièrement à la courbure des profils.

- La méthode doit être assez générale pour permettre de représenter avec la même précision n'importe quel type de profil.
- La méthode doit être suffisamment automatique; c'est à dire que partant d'un profil quelconque, on doit pouvoir obtenir sa représentation NURBS optimale rapidement et avec une intervention humaine minimale.

Ce chapitre décrit, dans un premier temps, la validation de la méthode sur des profils analytiques puis il présente différents tests pour en évaluer ses performances.

## **3.1 Validation de l'optimiseur avec un profil analytique**

### **3.1.1 Cas d'un arc de cercle**

Puisque les NURBS peuvent représenter exactement un grand nombre de courbes, on peut espérer qu'elles puissent également approcher avec précision n'importe quel type de courbe. Si la courbe à approximer se représente de manière exacte par une NURBS, la méthode devrait être capable de trouver les points de contrôle et les poids correspondants.

Nous avons tout d'abord effectué un test sur un arc de cercle qui peut se représenter exactement par une NURBS à 3 points de contrôle (c.f. figure 3.1). Les deux points extrêmes étant fixés, ce problème comporte 3 variables de design  $(x, y, \omega)$ . Nous avons lancé l'optimiseur pour différents points de départ plus ou moins éloignés de

la solution  $(1, 1, 1/\sqrt{2})$ . Dans tous les cas l'algorithme a convergé en moins de 30 itérations. Ce test simple, vérifie la validité de la méthode d'évaluation de l'erreur d'approximation et de la méthode d'optimisation.

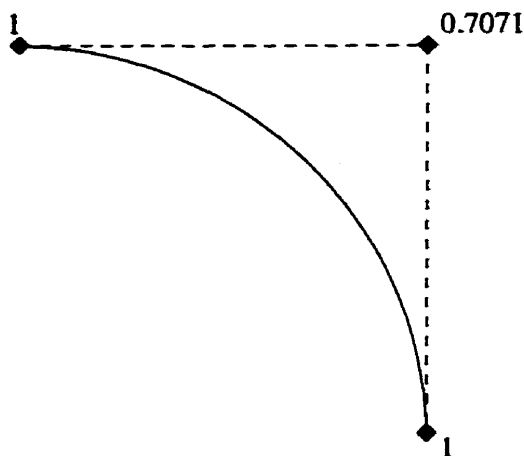
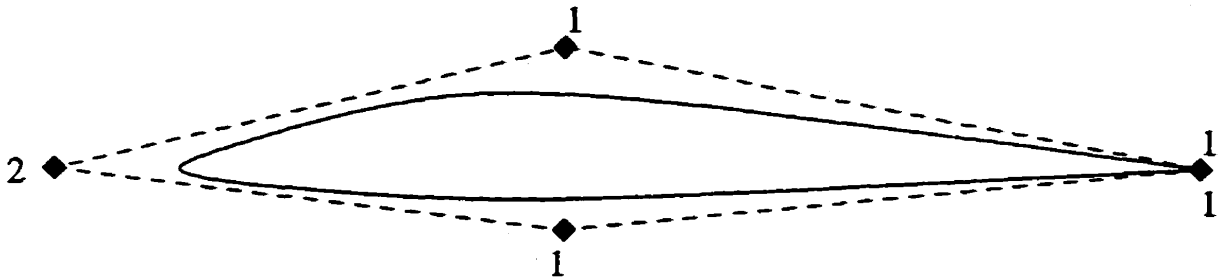


Figure 3.1: Validation de la méthode sur un arc de cercle

### 3.1.2 Cas d'un profil simple défini par une NURBS

La seconde et principale étape de la validation consiste à approcher un profil d'aile défini par une NURBS. La figure 3.2 présente le profil que nous avons utilisé. Il est constitué de 5 points de contrôle si bien que le problème comporte 9 variables d'optimisation.

Plusieurs points de départ ont été essayés pour l'optimisation. La première remarque est que si le profil de départ est trop loin de l'objectif, l'optimisation ne converge que très rarement vers la solution, d'où l'intérêt de la section précédente. Lorsque le profil de départ est suffisamment proche de la solution, l'optimisation converge presque toujours en moins de 50 itérations vers une solution. Le tableau 3.1 donne un exemple de solution après convergence. Avec les résultats présentés, l'erreur max-



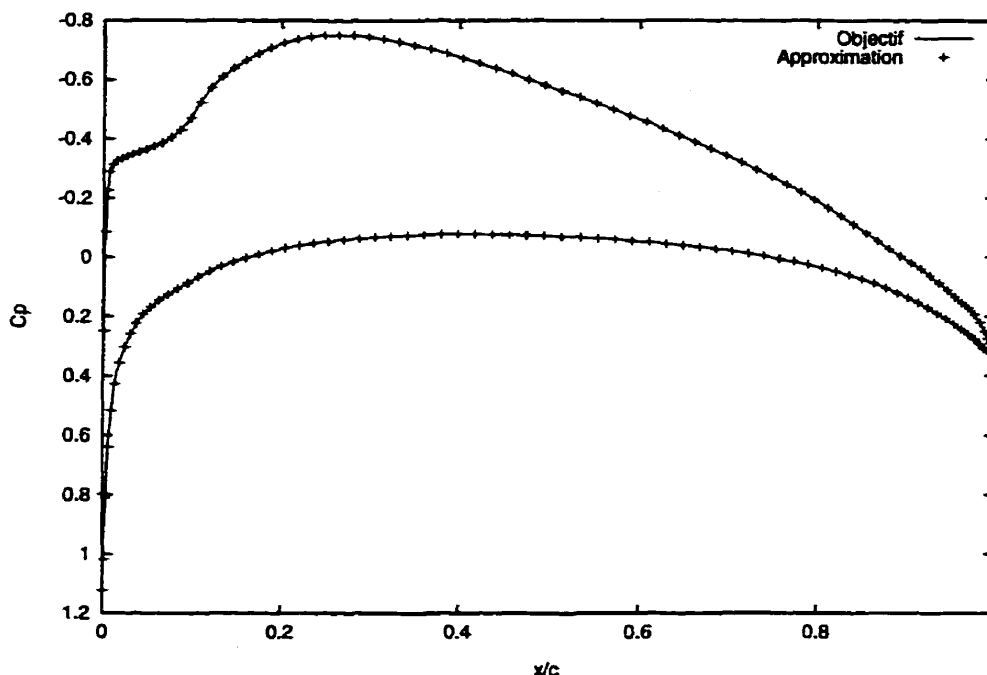
**Figure 3.2: Profil défini par une NURBS à 5 points de contrôle**  
*Les chiffres indiquent le poids associé à chaque point de contrôle*

imale de l'approximation est inférieure à  $10^{-5}$ , ce qui peut être comparé à l'erreur de  $8 \times 10^{-5}$  calculée dans la section 2.1.3. La précision de notre solution est meilleure d'un ordre de grandeur, si bien qu'il n'y a pratiquement pas différence entre les deux profils.

**Tableau 3.1: Exemple de résultat de l'approximation du profil analytique**

Point	Objectif			Solution de l'optimisation		
	x	y	$\omega$	x	y	$\omega$
$P_1$	0.5	0.1	1	0.5009	0.0996	0.997
$P_2$	0	0	2	-0.002	$-1.3 \times 10^{-4}$	1.954
$P_3$	0.5	-0.05	1	0.502	-0.0496	1.003

Une autre façon de vérifier la validité de la solution consiste à comparer les résultats obtenus avec une résolution de l'écoulement aérodynamique pour chacun des deux profils. La figure 3.3 compare les coefficients de pression calculés avec le solveur BGK (Bauer, Garabedian et Korn) [4, 3] résolvant les équations du potentiel couplées avec une résolution de couche limite. La superposition des deux courbes de  $C_p$  illustre l'excellence de la concordance entre les deux solutions.



**Figure 3.3: Coefficients de pression du profil objectif et de son approximation**

Conditions de l'écoulement :  $M = 0.7$ ,  $C_L = 0.45$ ,  $Re = 10^7$

### 3.1.3 Limite de convergence

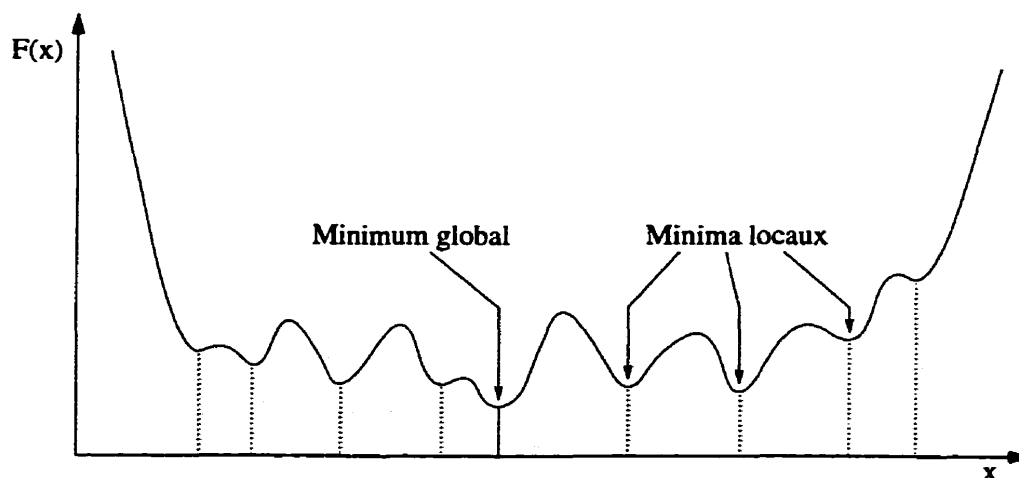
L'approximation que nous avons obtenue est tout à fait satisfaisante pour l'usage que l'on veut en faire. Cependant, il peut paraître quelque peu surprenant que l'optimisation n'ait pas convergée vers les valeurs exactes du profil analytique données par le tableau 3.1. En effectuant de nombreux tests d'optimisation en variant le point de départ, nous avons obtenu de nombreuses solutions toutes aussi acceptables que celle présentée mais jamais exactement identiques à la solution analytique. Ceci est dû la forte non-linéarité du problème. Celle-ci est essentiellement attribuable au deux points suivants.

- Le calcul de la distance entre les deux courbes fait intervenir des projections

de points d'une des courbes sur l'autre. Dans le cas de courbes non triviales, la relation entre le déplacement d'une des courbes et la distance avec l'autre n'est pas linéaire.

- Les poids intervenant dans la construction des NURBS sont aussi une source directe de non-linéarité. En effet, une NURBS en 2 dimensions définie par des points de contrôles  $(x_i, y_i, \omega_i)$  possède exactement les mêmes propriétés que la B-spline en 3 dimension définie par les points de contrôles  $(w_i x_i, w_i y_i, w_i)$ . Ceci traduit le fait que l'espace associé aux poids n'a pas les mêmes propriétés topologiques que le plan, c'est-à-dire l'espace associé aux coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

La figure 3.4 permet de mieux comprendre comment cette non-linéarité intervient dans le problème d'optimisation. La fonction coût qui y est représentée comporte de nombreux minima locaux très proches du minimum global, si bien qu'une recherche de minimum dans ce cas aboutira presque systématiquement à un minimum local. Sachant que le problème comporte non pas une mais 9 variables, on conçoit fort bien qu'il soit quasiment impossible de trouver le vrai minimum global.



**Figure 3.4: Exemple de fonction coût dans un cas fortement non-linéaire à une variable**

De plus, la convergence est limitée par la précision sur l'évaluation de la fonction coût. Par exemple, avec 1000 mesures pour l'évaluation de l'erreur (c.f. figure 2.2) la précision sur le calcul est de l'ordre de  $10^{-8}$  à comparer à l'ordre de grandeur de l'erreur qu'on cherche à atteindre qui est de  $10^{-5}$ . Cette imprécision est relativement faible, mais lors du calcul du gradient de la fonction coût pour l'optimisation, les erreurs s'additionnent et sont amplifiées. Ceci fixe un plancher à la convergence qui vient s'ajouter au problème de la non-linéarité.

Toutefois, les remarques précédentes ne signifient pas pour autant que la méthode n'est pas fiable. Les résultats sont tout à fait acceptables si l'on peut se contenter d'une précision de l'ordre de  $10^{-5}$ . En pratique, la précision est fixée par l'aérodynamique et la tolérance de fabrication et est supérieure à cette limite. Ceci justifie entièrement la validité de notre méthode.

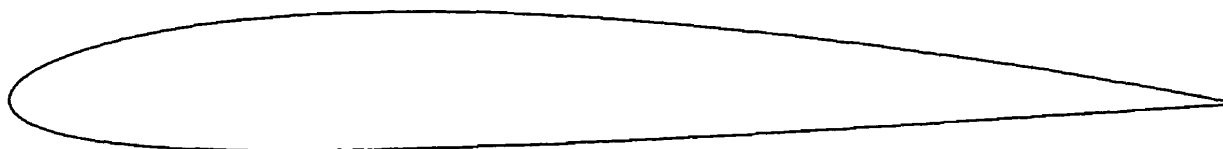
Tenant compte de ces remarques, nous considérons par la suite que l'optimiseur a convergé lorsqu'il a atteint la limite du bruit sur le calcul de la fonction coût.

## 3.2 Influence de la solution initiale sur l'optimisation

Nous avons vu qu'il est difficile, voire impossible, d'obtenir directement la solution à notre problème. Il faut donc effectuer plusieurs optimisations en partant de solutions initiales différentes et sélectionner la meilleure. Nous allons donc évaluer l'influence de la solution initiale telle que décrite dans la section 2.3.

Nous appliquons donc la méthode d'optimisation au profil NACA 2412 [1] repré-

senté figure 3.5. Les différentes solutions initiales sont obtenues en variant le paramètre de décalage jouant sur l'intégration de la courbure du profil objectif. Ce paramètre intervient directement sur la paramétrisation de l'approximation initiale en fixant son vecteur nodal et indirectement sur la position ses points de contrôle obtenus par interpolation.

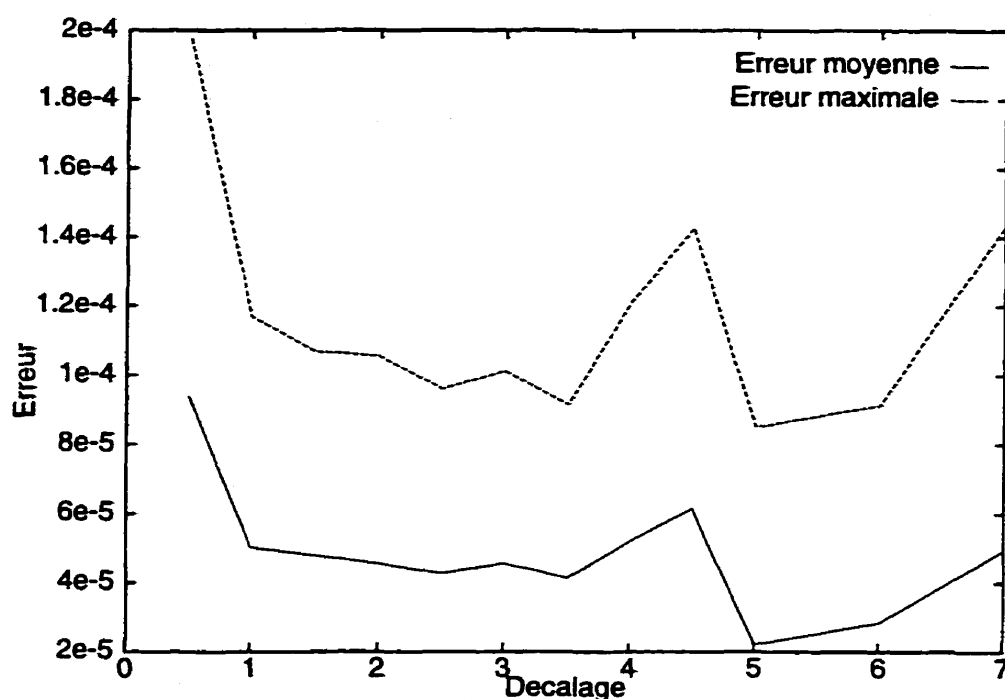


**Figure 3.5: Profil NACA 2412**

La figure 3.6 donne les valeurs de l'erreur moyenne et de l'erreur maximale de l'approximation par une NURBS à 9 points de contrôles (i.e. 21 variables d'optimisation) en fonction du paramètre de décalage. Conformément à nos attentes, les solutions obtenues sont toutes différentes ce qui se traduit par des erreurs différentes. Toutefois, la qualité de l'approximation est du même ordre de grandeur pour toutes les valeurs de décalage supérieures à 1. Ces deux courbes traduisent bien la complexité de ce problème. Chacune des approximations que nous avons obtenu correspond à un minimum local de la fonction coût. Deux solutions initiales même proches peuvent aboutir à deux solutions optimales différentes. Par exemple, un décalage de 4.5 mène à une erreur d'approximation  $\epsilon_{max}=1.4 \times 10^{-4}$  alors qu'avec 5, on aboutit à  $\epsilon_{max}=8.5 \times 10^{-5}$ .

Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 présentent les positions des points de contrôle avant et après optimisation ainsi que les poids pour la solution optimisée (les poids de la solution initiale sont fixé à un) pour différentes valeurs du décalage. Ceci confirme la différence des solutions et montre l'influence de la solution initiale sur l'approximation.





**Figure 3.6: Erreur de l'approximation optimale en fonction du paramètre de décalage de l'approximation initiale**

En effet, une petite valeur de décalage correspond à une solution initiale dont les points de contrôle sont concentrés vers le bord d'attaque alors qu'une grande valeur conduit à une équirépartition des points sur le profil. Ces caractéristiques se retrouvent sur les figures, notamment sur la figure 3.7 où les points sont globalement concentrés vers le bord d'attaque.

Le principal intérêt de l'optimisation est de pouvoir jouer pleinement sur les poids de la NURBS. En effet, la solution initiale étant obtenue par interpolation, tous ses poids sont fixés à la valeur 1. Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 montrent que les poids ont été modifiés lors de l'optimisation d'une amplitude atteignant 20%. Afin de saisir l'importance des poids, nous avons réalisé la même boucle d'optimisation en fixant les poids à 1. Alors que la meilleure approximation à 9 points de contrôle à poids

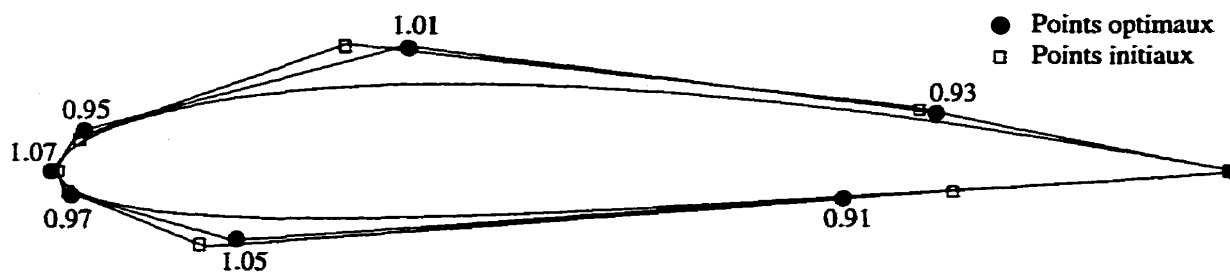


Figure 3.7: Solution obtenue avec un décalage de 1 ( $\epsilon_{max}=1.2 \times 10^{-4}$ )

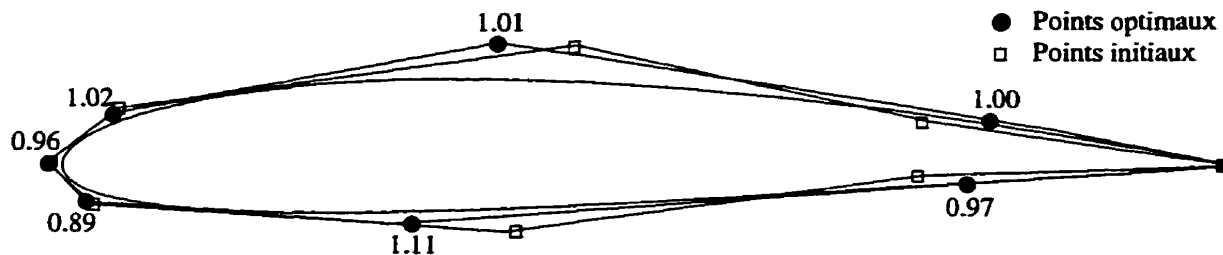


Figure 3.8: Solution obtenue avec un décalage de 2.5 ( $\epsilon_{max}=9.6 \times 10^{-5}$ )

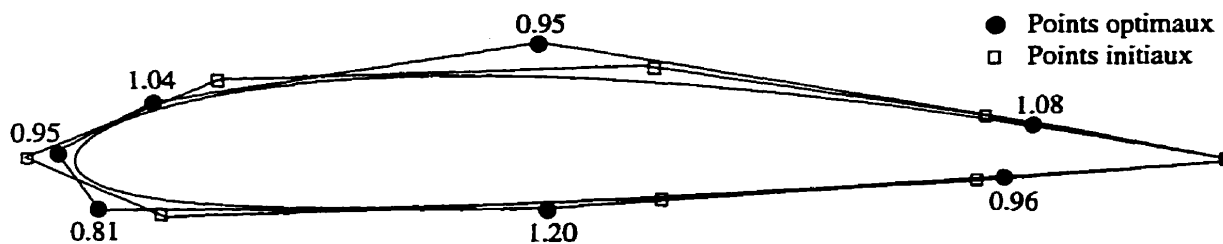


Figure 3.9: Solution obtenue avec un décalage de 5 ( $\epsilon_{max}=8.5 \times 10^{-5}$ )

variables donnait une erreur  $\epsilon_{max}$  de  $8 \times 10^{-5}$ , son équivalent à poids fixés unitaires conduit à une erreur de  $2.5 \times 10^{-4}$ . Ainsi, pour un nombre de points de contrôle donné, l'utilisation de courbes rationnelles permet de gagner approximativement un ordre de grandeur sur la précision de l'approximation.

Bien qu'il soit clair que les courbes rationnelles, c'est-à-dire avec des poids différents de un, permettent un gain de précision pour un nombre de points de contrôle constant, on peut se demander si des courbes non rationnelles avec un peu plus de points de contrôle ne permettraient pas d'obtenir des résultats équivalents à moindre coût. Toujours en fixant la valeur des poids à 1, nous avons donc cherché la meilleure configuration permettant d'aboutir à une erreur inférieure ou égale à  $8 \times 10^{-5}$  pour l'approximation du profil NACA 2412. Celle-ci a été obtenue avec une courbe à 14 points de contrôle, ce qui correspond à 24 variables, c'est-à-dire 3 de plus que pour la NURBS à 9 points. Ceci suffit à justifier l'utilisation des courbes rationnelles, mais on peut de plus ajouter à leur crédit le fait qu'ayant moins de points de contrôle que leur équivalent non rationnel, elles risquent moins de contenir du bruit dans leur représentation.

### **3.3 Détermination de la précision à atteindre**

#### **3.3.1 Précision en fonction du nombre de points de contrôle**

Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence du nombre de points de contrôle de l'approximation sur sa qualité afin de déterminer à partir de quel niveau de précision une approximation pourra être considérée acceptable. On emploie désormais

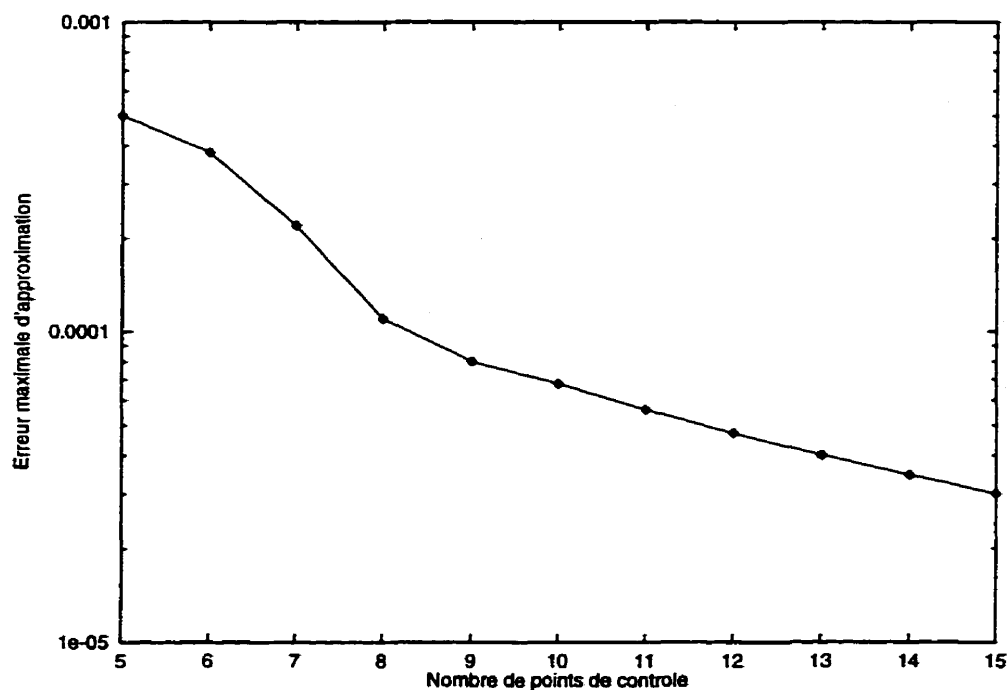
le terme *approximation* pour désigner la meilleure des solutions obtenues en variant le décalage pour un nombre de points fixé. Ceci signifie qu'une approximation est le résultats de plusieurs optimisations avec des valeurs de décalages différentes, dont on retient celle donnant la plus petite erreur  $\epsilon_{max}$ .

Le tableau 3.2, qui est résumée par la figure 3.10, montre l'évolution des valeurs de  $\epsilon_{max}$  pour l'approximation de l'aile NACA 2412 en fonction du nombre de points de contrôle. Notons que le nombre de points tient compte des deux points du bord de fuite qui restent fixes durant l'optimisation.

**Tableau 3.2: Précision de l'approximation en fonction du nombre de points de contrôle**

Nombre de points de contrôle	Nombre de variables de design	Erreur $\epsilon_{max}$ de l'approximation
5	9	$5.0 \times 10^{-4}$
6	12	$3.8 \times 10^{-4}$
7	15	$2.2 \times 10^{-4}$
8	18	$1.1 \times 10^{-4}$
9	21	$8.0 \times 10^{-5}$
10	24	$6.8 \times 10^{-5}$
11	27	$5.6 \times 10^{-5}$
12	30	$4.7 \times 10^{-5}$
13	33	$4.0 \times 10^{-5}$
14	36	$3.45 \times 10^{-5}$
15	39	$3.0 \times 10^{-5}$

Notons d'abord qu'avec 7 points de contrôle (i.e. 15 variables de design) l'approximation est déjà très bonne puisque l'erreur  $\epsilon_{max}$  est égale à  $2.2 \times 10^{-4}$ , c'est-à-dire quasiment égale à la tolérance de fabrication qui est de  $2 \times 10^{-4}$ . Ensuite, on voit que la précision augmente rapidement avec le nombre de points et que cette progression est très régulière au delà de 8 points de contrôle. Il n'y pas de limite théorique à la précision lorsqu'on augmente le nombre de points de contrôle. Toutefois, en pratique,



**Figure 3.10: Précision de l'approximation en fonction du nombre de points de contrôle**

la méthode est limitée par l'évaluation de la fonction coût dont le bruit empêche d'atteindre une erreur  $\epsilon_{max}$  inférieure à  $10^{-5}$ , à moins de pénaliser fortement le temps de calcul. Il existe aussi une autre limite pratique imposée par la précision du profil qu'on essaie d'approcher. On ne travaille en général pas avec des profils analytiques, si bien que la définition des profils qu'on cherche à approcher détermine une erreur intrinsèque au problème que l'on ne peut espérer dépasser.

L'erreur de référence  $8 \times 10^{-5}$  déterminée dans la section 2.1.3 est atteinte avec 9 points de contrôle ce qui correspond à seulement 21 variables de design. En augmentant encore le nombre de points, on voit qu'avec 15 points de contrôle, l'erreur  $\epsilon_{max}$  est de  $2 \times 10^{-5}$ . Sachant qu'une telle précision équivaut à ce qu'on obtient avec une discrétisation comportant 300 points, on comprend mieux la puissance de la modélisation géométrique utilisant les NURBS.

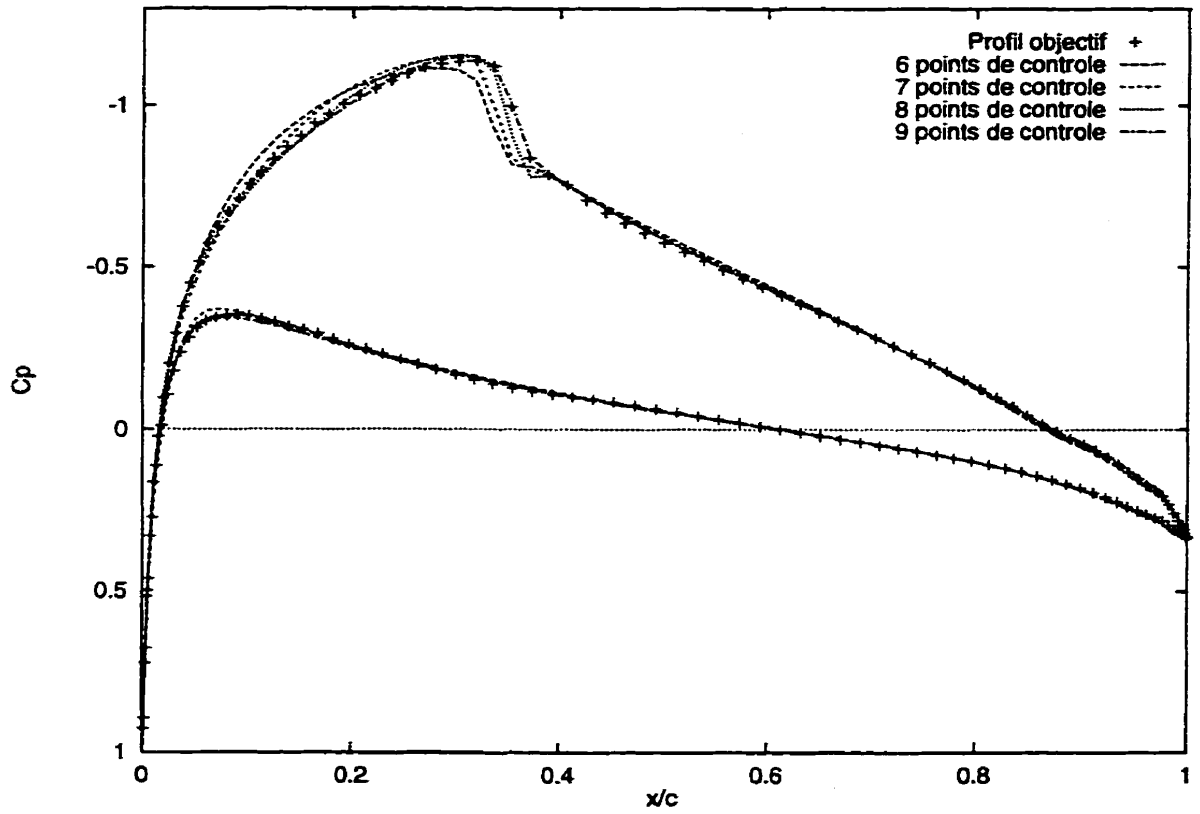
### 3.3.2 Précision requise pour la résolution de l'écoulement aérodynamique

Puisque notre but ultime est de faire de l'optimisation aérodynamique de profils d'ailes, il est important de déterminer à partir de quelle précision d'approximation un résolveur des équations de l'aérodynamique ne fait plus la différence entre le profil de départ et son approximation. C'est pourquoi nous avons comparé les courbes de coefficients de pression de diverses approximations avec la courbe calculée à partir du profil objectif. Les calculs ont été effectués avec le solveur BGK.

La figure 3.11 illustre l'évolution de la courbe de  $C_p$  lorsqu'on augmente de le nombre de points de contrôle pour une configuration présentant un faible choc sur l'extrados. On voit que déjà avec 6 points de contrôle (i.e. 12 variables de design) la courbe de  $C_p$  est très proche de celle du profil objectif mais qu'il subsiste tout de même une différence marquée près du choc. Pour cette approximation, on peut lire dans la table 3.2 que l'erreur  $\epsilon_{max}$  vaut  $3.8 \times 10^{-4}$ , ce qui est encore assez loin de l'objectif de précision établi précédemment. En revanche, l'approximation à 9 points de contrôle, qui respecte cet objectif puisque son erreur  $\epsilon_{max}$  vaut  $8 \times 10^{-5}$ , donne une courbe de  $C_p$  qui est quasiment superposée en tout point à celle du profil objectif.

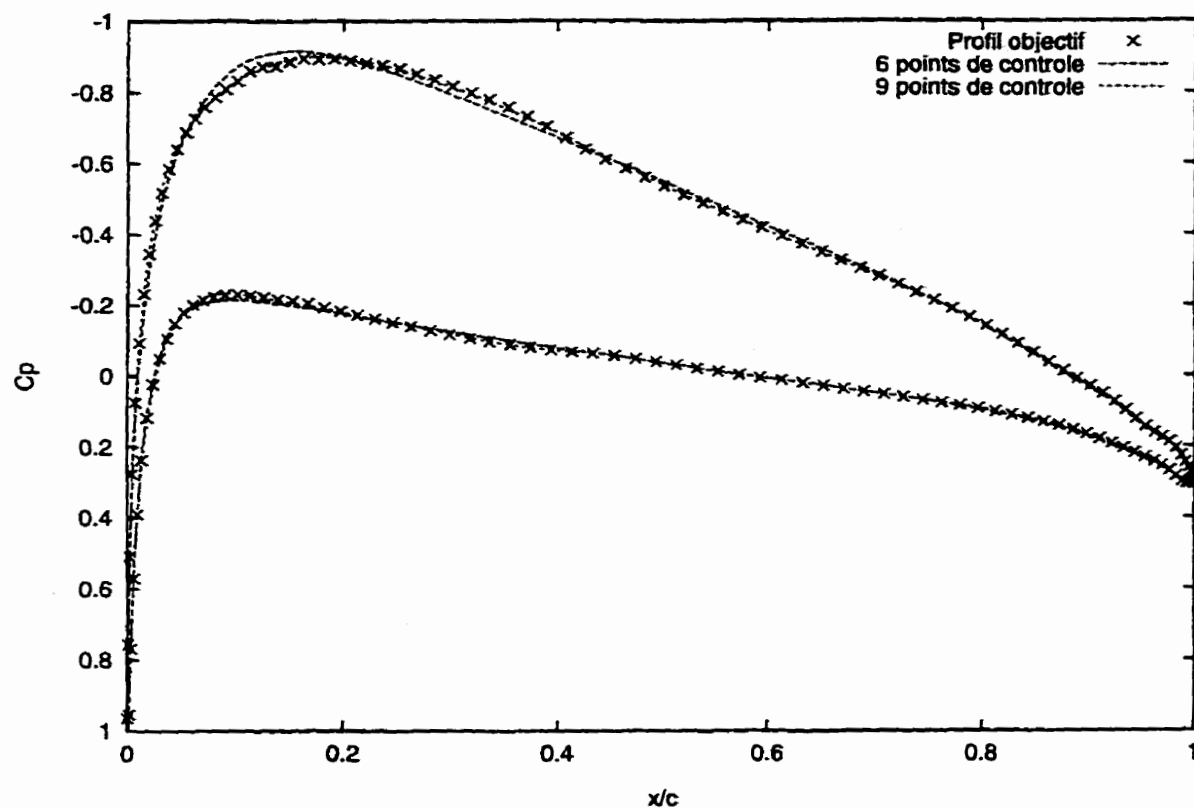
Enfin, les figures 3.12 et 3.13 présentent le même type de comparaisons à des régimes d'écoulement différents et confirment les remarques faites pour la figure 3.11. La courbe de  $C_p$  de l'approximation à 9 points de contrôle est presque indiscernable à l'œil nu de celle de l'objectif, même dans le cas relativement critique de l'écoulement transsonique présentant un choc assez fort, illustré sur les figures 3.13

Ceci nous permet de confirmer la valeur  $8 \times 10^{-5}$  de l'erreur  $\epsilon_{max}$  qu'il faut at-



**Figure 3.11: Comparaison des coefficients de pression de diverses approximations**

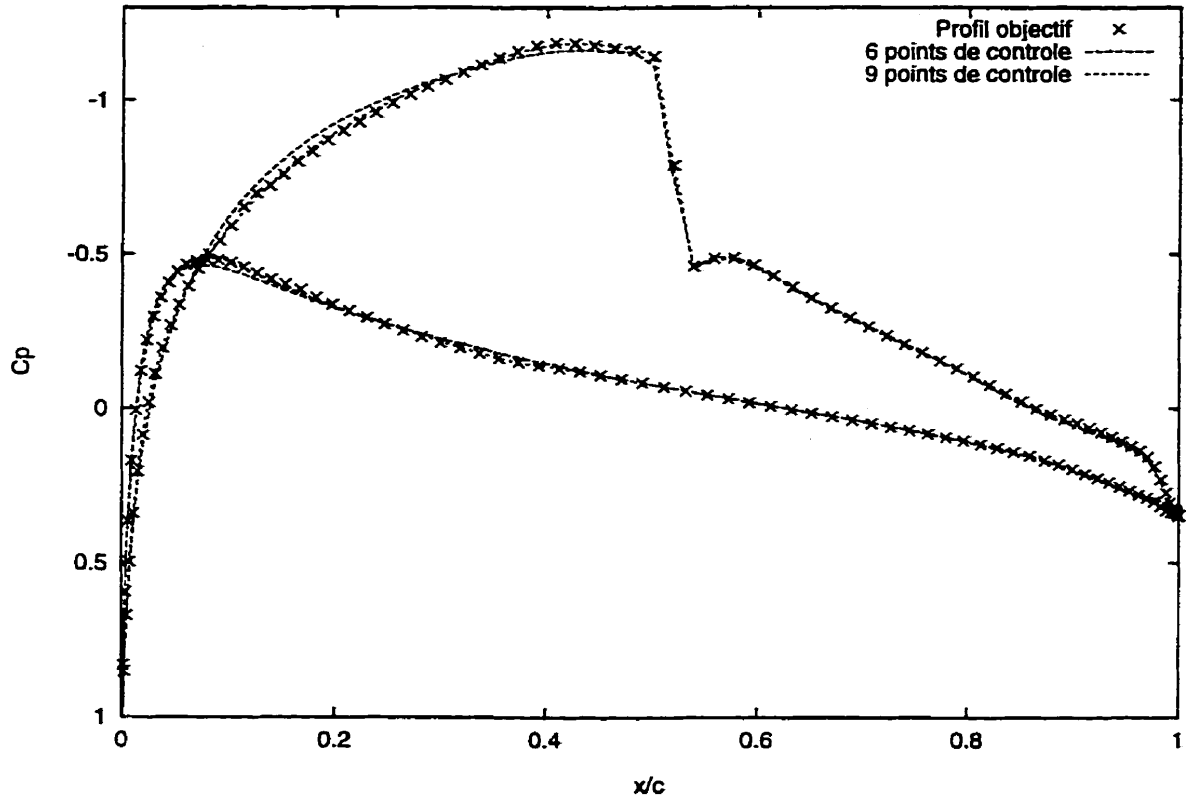
Conditions de l'écoulement :  $M = 0.7$ ,  $C_L = 0.45$  et  $Re = 10^7$



**Figure 3.12: Comparaison des coefficients de pression de diverses approximations en régime subsonique**

Conditions de l'écoulement :  $M = 0.6$ ,  $C_L = 0.45$  et  $Re = 10^7$





**Figure 3.13: Comparaison des coefficients de pression de diverses approximations en régime transsonique**

Conditions de l'écoulement :  $M = 0.75$ ,  $C_L = 0.45$  et  $Re = 10^7$

teindre pour qu'une approximation soit acceptable. Si une approximation ne satisfait pas à ce critère de précision, il est possible que le profil résultant n'ait pas tout à fait les mêmes caractéristiques aérodynamiques que celui qu'elle est supposée représenter. En revanche, essayer d'obtenir une meilleure précision n'a pas beaucoup de sens non plus. La détermination des caractéristiques du profil n'en serait pas améliorée pour autant puisque la précision des résolveurs de l'aérodynamique ne le permet pas.

### 3.4 Approximation d'un profil quelconque

Afin d'illustrer la généralité de la méthode proposée, nous l'avons appliquée à différents profils couvrant une large gamme des profils couramment utilisés en aéronautique. Pour chaque profil, nous avons cherché la représentation minimale en terme de points de contrôle et permettant de satisfaire au critère  $\epsilon_{max}$  inférieur à  $8 \times 10^{-5}$ . Ainsi, pour chaque profil et pour un nombre de points de contrôle fixé, nous avons effectué plusieurs optimisations en partant d'approximations initiales différentes. La meilleure de ces approximations a été comparée à celles obtenues pour un nombre de points de contrôle différents. Finalement, nous n'avons conservé que l'approximation minimale permettant de satisfaire au critère.

Les profils que nous avons approchés sont les suivants<sup>1</sup> :

- Le profil symétrique NACA 64A010 défini par 161 points (figure 3.14). Dans ce cas particulier, l'optimisation a été réalisée en exploitant la symétrie du profil, ce qui permet de diviser par deux le nombre de variables de design.

---

<sup>1</sup>La plupart de ces profils sont disponibles sur le site internet de Michael S. Selig à l'adresse : [http://amber.aae.uiuc.edu/~m-selig/ads/coord\\_database.html](http://amber.aae.uiuc.edu/~m-selig/ads/coord_database.html)

- Les profils transsoniques Boeing A4, défini par une spline à 80 points, et A8, défini par 190 points (figures 3.15 et 3.16) [2]. Le profil A8 est très épais car il correspond à une section très proche de l'emplanture de l'aile.
- Le profil transsonique RAE 2822 défini par une spline à 130 points (figure 3.17).
- Le profil transsonique Bombardier-Canadair, défini par 143 points et dont nous avons étudié la courbure au chapitre précédent (figure 2.6).
- Le profil à haute portance et faible nombre de Reynolds Selig S1210, défini par une spline à 81 points.
- Le profil de pale d'hélicoptère Boeing-Vertol/Dadone VR-12, défini par une spline à 83 points. Ce profil est intéressant à cause de sa cambrure qui s'inverse au niveau du bord de fuite.

En premier lieu, il faut souligner le fait que tous ces profils, bien que très différents les uns des autres, s'approchent exactement de la même manière avec notre méthode. Dans tous les cas, la précision augmente rapidement avec le nombre de points de contrôle puis stagne lorsqu'on atteint le bruit de la représentation initiale. Le tableau 3.3 fait le point sur les résultats des optimisations. L'objectif de précision de  $8 \times 10^{-5}$  a pu être obtenu dans presque tous les cas avec au plus 13 points de contrôle, c'est-à-dire avec seulement 33 variables de design. La seule exception est le profil Boeing A8 pour lequel la limite de convergence est située au dessus de cette valeur. Nous n'avons pas pu dépasser la valeur  $9.2 \times 10^{-5}$  pour  $\epsilon_{max}$  même en augmentant le nombre de points. Néanmoins, dans tous les cas l'erreur  $\epsilon_{max}$  de l'approximation est inférieure à  $10^{-4}$  ce qui est déjà deux fois mieux que la tolérance de fabrication.

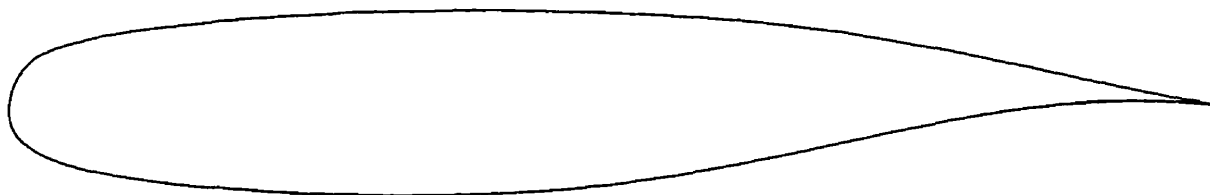
Les figures 3.20 à 3.25 présentent les caractéristiques des approximations de certains des profils. Elles permettent notamment d'observer l'importance des poids qui varient d'environ 30% autour de la valeur 1. D'autre part, la position des points de



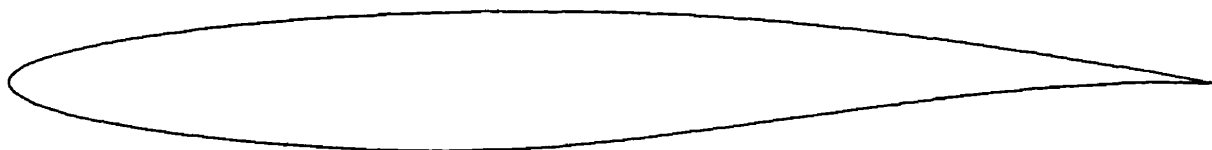
**Figure 3.14: Profil NACA 64A010**



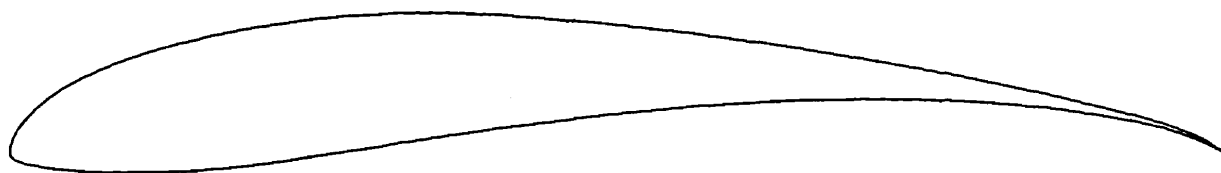
**Figure 3.15: Profil Boeing A4**



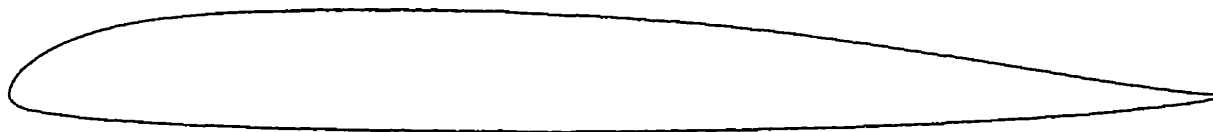
**Figure 3.16: Profil Boeing A8**



**Figure 3.17: Profil RAE 2822**



**Figure 3.18: Profil à haute portance Selig S1210**



**Figure 3.19: Profil de pale d'hélicoptère Boeing-Vertol/Dadone VR-12**

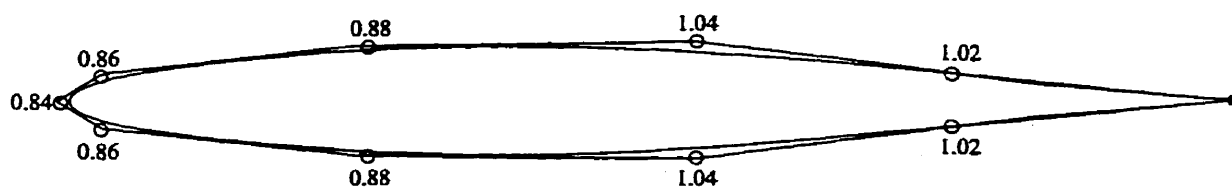
**Tableau 3.3: Approximation de différents profils**

Chaque approximation a été obtenue en utilisant la solution initiale correspondant à la valeur de *décalage* indiquée

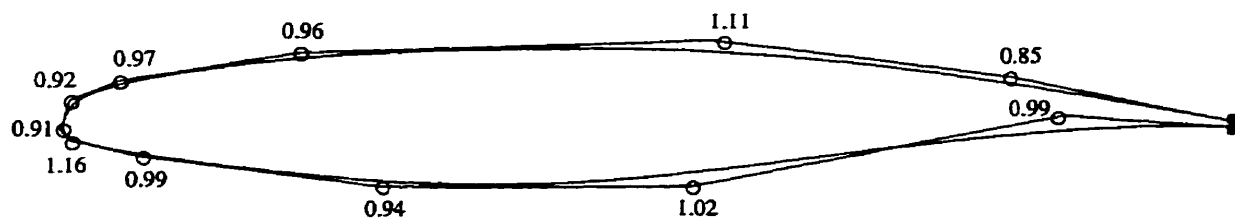
Profil	Nombre de points de contrôle	Valeur de <i>décalage</i>	Erreur $\epsilon_{max}$ de l'approximation
NACA 2412	9	5	$8.0 \times 10^{-5}$
NACA 64A010	11	3.5	$7.8 \times 10^{-5}$
Bombardier-Canadair	13	4.2	$7.9 \times 10^{-5}$
Boeing A4	13	2.5	$8.1 \times 10^{-5}$
Boeing A8	13	4	$9.2 \times 10^{-5}$
RAE 2822	13	6.2	$7.8 \times 10^{-5}$
S1210	13	2.5	$7.3 \times 10^{-5}$
VR 12	11	5.5	$8.2 \times 10^{-5}$

contrôle ne semble suivre aucune règle précise, ce qui est tout à fait possible puisque leur positions sont déterminées par la boucle d'optimisation. C'est justement cette absence de règle (ou la difficulté d'en trouver une) qui justifie l'utilisation d'un algorithme d'optimisation. Cela permet d'obtenir pour chaque profil une solution adaptée à sa configuration propre et de trouver des solutions aérodynamiques de bonne qualité pour des configurations aussi différentes qu'un profil transsonique et un profil à basse vitesse et forte portance.

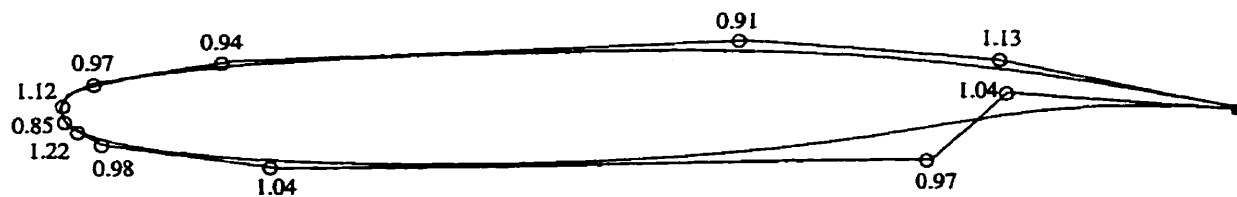
Grâce à ces tests, on peut conclure que la méthode d'approximation est suffisamment générale pour s'appliquer à la plupart des profils d'usage courant en aéronautique. Ce résultat est très important pour la conception d'un profil car, lors de son optimisation aérodynamique ou structurelle, il faut que la définition de la géométrie soit suffisamment flexible pour ne pas nuire à l'optimisation. Or, avec au plus 13 points de contrôle, on peut représenter une large gamme de profils. On s'assure donc que la méthode de représentation ne sera pas un frein à d'éventuelles modifications pour l'optimisation aérodynamique.



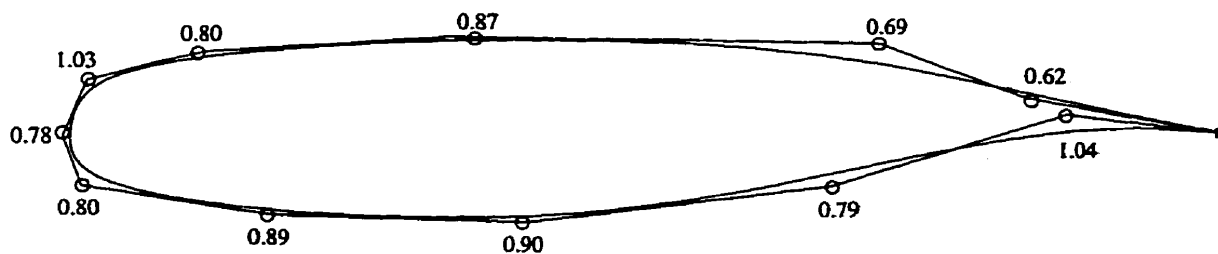
**Figure 3.20: Approximation à 11 points du profil NACA 64A010**



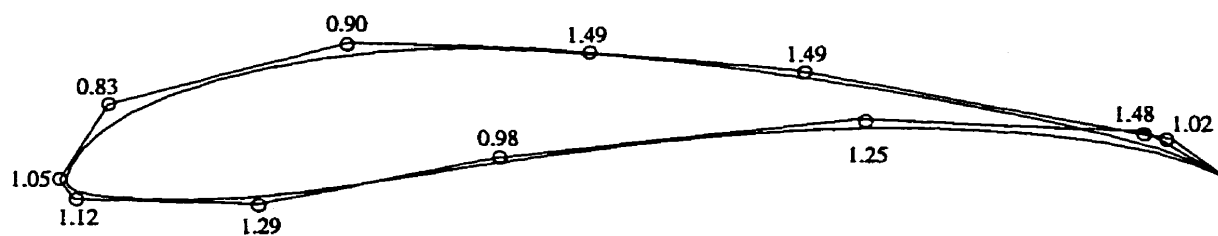
**Figure 3.21: Approximation à 13 points de profil Bombardier-Canadair**



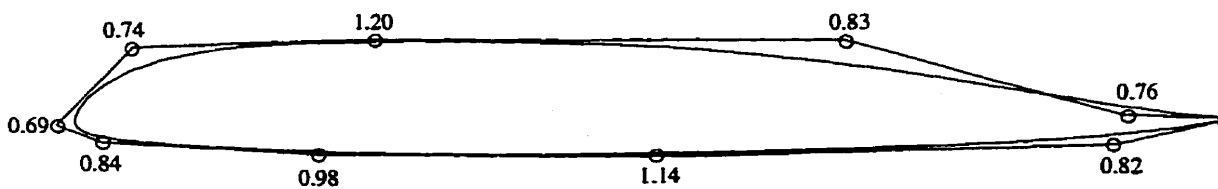
**Figure 3.22: Approximation à 13 points de profil Boeing A4**



**Figure 3.23: Approximation à 13 points du profil Boeing A8**



**Figure 3.24: Approximation à 13 points du profil Selig S1210**



**Figure 3.25: Approximation à 11 points du profil VR-12**



### 3.5 Bruit et approximation

Nous nous intéressons maintenant à la qualité de nos approximations en terme de régularité et de bruit. Nous avons utilisé des fonctions d'interpolation cubiques qui nous assurent une continuité jusqu'à la deuxième dérivée. En revanche, le bruit est plus complexe à maîtriser mais la forte réduction du nombre de points de contrôle d'un profil permet de s'en prémunir, ainsi que nous allons l'illustrer.

Pour juger de la qualité d'une approximation, outre l'évaluation de l'erreur  $\epsilon_{max}$ , on peut se fier à sa courbure (relation 2.19). Le calcul de la courbure fait intervenir les dérivées du premier et du deuxième ordre de la représentation, si bien que les éventuelles irrégularités de la courbe sont amplifiées et apparaissent clairement.

La figure 3.26 compare la courbure du profil Bombardier-Canadair avec celle de son approximation (figure 3.21). Les deux courbes sont très proches l'une de l'autre sauf en deux régions très localisées et elles ne présentent pas d'irrégularités. Ceci montre la qualité de l'approximation puisque même après deux dérivations les deux représentations restent très proches. Il ne faut pas s'inquiéter de la petite bosse située au sommet de la courbe car la différence se fait sur un seul point de la discrétisation du profil de départ. L'autre écart, situé à l'abscisse 0.51 s'explique par la présence pour l'approximation d'une assez forte concentration de points de contrôle vers le bord d'attaque (c.f. figure 3.21) qui génère une petite irrégularité. Toutefois, l'écart est trop faible pour avoir une quelconque influence.

Le profil Boeing A8 paraît parfaitement lisse sur la figure 3.16. Pourtant, le calcul de sa courbure, représentée figure 3.27, fait apparaître la présence de bruit caractérisé par de faibles oscillations de la courbe. Ce type de bruit est très courant

notamment lorsque le profil a été déterminé expérimentalement. Les points servant à le représenter ont alors été mesurés sur un modèle, si bien le profil contient les inévitables imprécisions dues à la mesure. Ce type de bruit peut être éliminé avec des algorithmes de lissages tel que ceux intégrés au logiciel CATIA mais cela peut prendre plus d'une heure de travail pour obtenir un niveau de bruit acceptable. La courbure de l'approximation que nous avons obtenue pour ce profil est représentée sur la même figure 3.27 et permet de saisir un des principal avantage de notre méthode. La courbe suit de très près l'allure générale de la courbure du profil initial mais elle est parfaitement lisse. L'approximation donne donc une meilleure représentation du profil que la discrétisation dont on disposait initialement. En outre, la présence de bruit détériore fortement la qualité de la représentation initiale du profil, ce qui explique pourquoi l'optimisation n'a pas pu mener à une précision meilleure que  $9.2 \times 10^{-5}$ .

C'est la minimisation du nombre de points qui permet de réduire significativement le bruit dans la représentation. On a aussi vu que la précision de l'approximation augmente avec le nombre de points de contrôle. Ces deux aspects ont donc des effets opposés et nécessitent un compromis. A titre d'exemple, pour le profil Boeing A4 nous avons sélectionné trois approximations, deux à 13 points de contrôle et une à 11. La première à 13 points correspond à la meilleure approximation que nous ayons obtenue. Sa précision de  $8.1 \times 10^{-5}$  a été obtenue avec une paramètre de décalage de 2.5 et elle est représentée à la figure 3.22. Pour la seconde, nous avons utilisé un paramètre de décalage de 10 afin de répartir les points plus uniformément autour du profil, tel que l'illustre la figure 3.28. L'erreur  $\epsilon_{max}$  est de  $1.8 \times 10^{-4}$ . Enfin, l'approximation à 11 points, représentée figure 3.29 et correspondant à une erreur de  $1.2 \times 10^{-4}$ , est la meilleure approximation pour ce nombre de points et a été obtenue avec un décalage de 4. Leur courbure est représentées à la figures 3.30 et est comparée à celle du profil

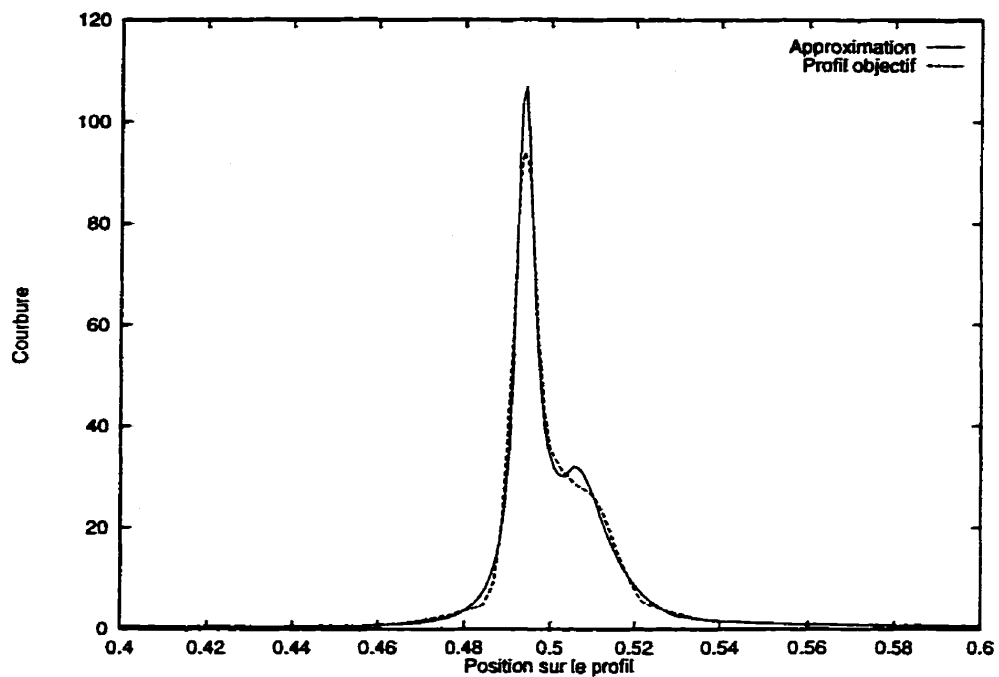


Figure 3.26: Courbure du profil Bombardier et de son approximation

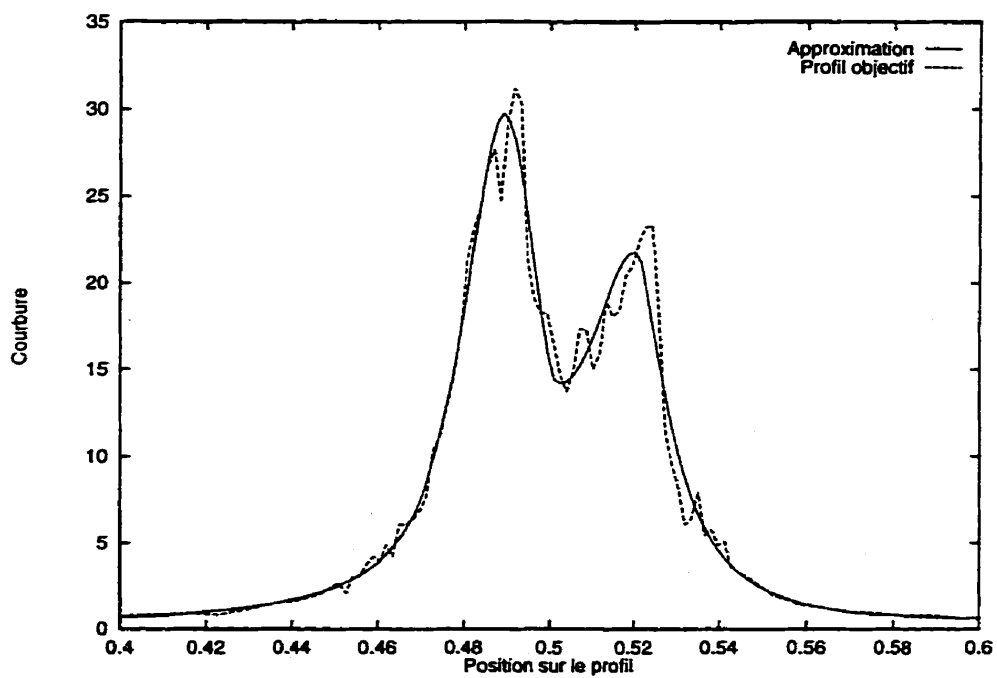
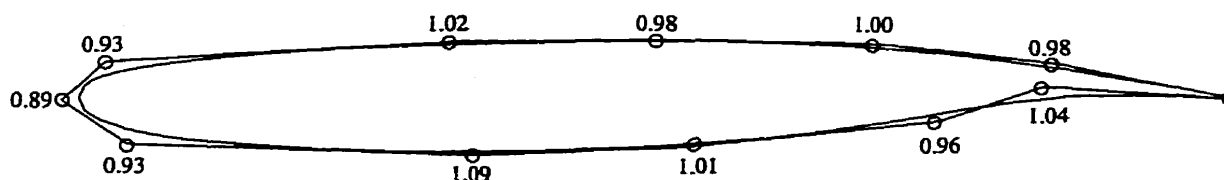
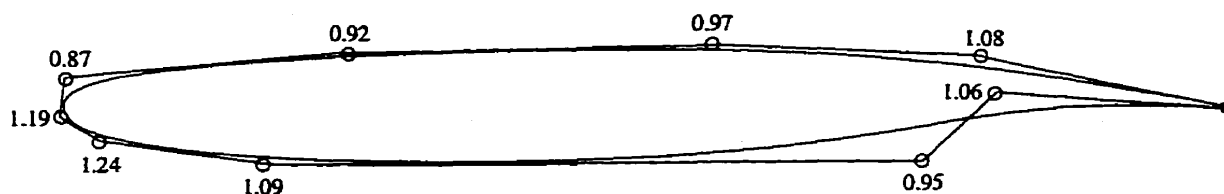


Figure 3.27: Courbure du profil Boeing A8 et de son approximation

initial.



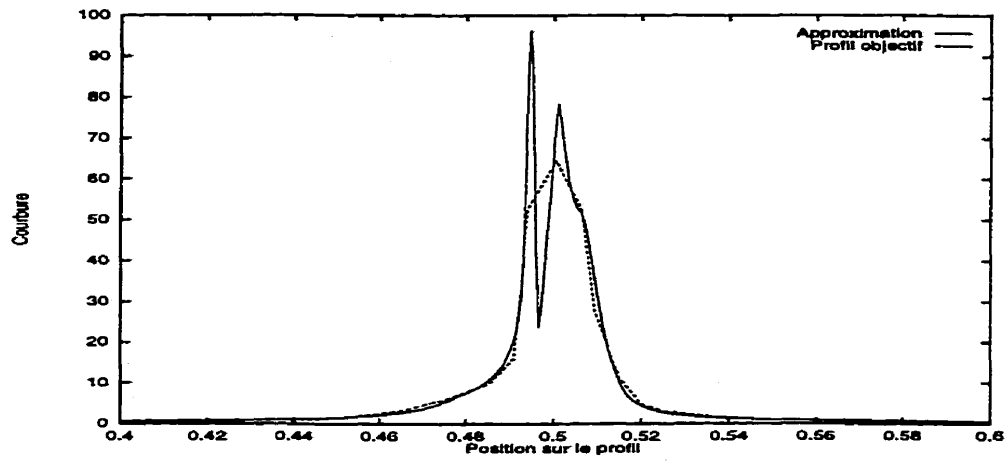
**Figure 3.28: Approximation à 13 points de contrôle du profil Boeing A4**



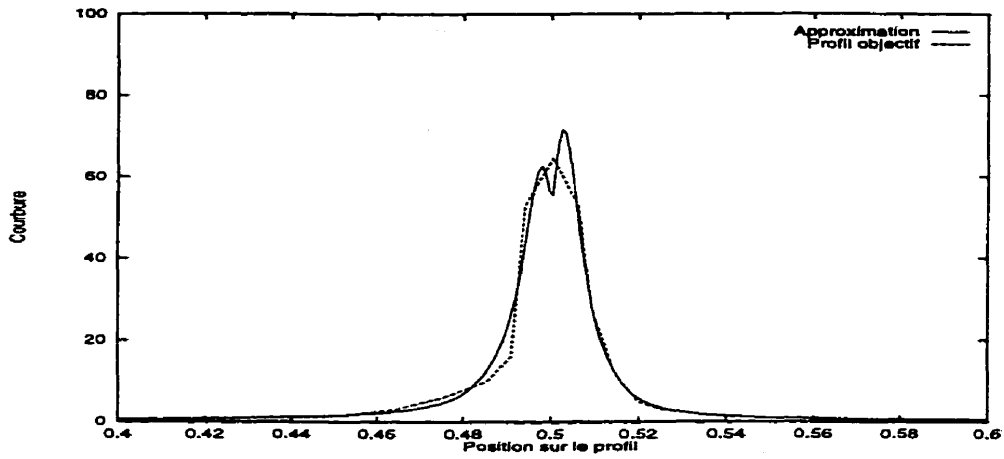
**Figure 3.29: Approximation à 11 points de contrôle du profil Boeing A4**

La courbe de la meilleure approximation à 13 points est clairement entachée de bruit près du bord d'attaque. Ceci s'explique facilement étant donné la position des points de contrôle sur la figure 3.22, où l'on voit qu'il y a 5 points de contrôle très rapprochés au bord d'attaque du profil. En revanche, les deux autres approximations ne présentent pas une telle concentration au bord d'attaque ce qui mène à une courbe plus lisse mais aussi légèrement moins proche du profil objectif. On remarque également qu'il est beaucoup plus intéressant de réduire le nombre de points de contrôle plutôt que d'essayer de les répartir autour du profil en jouant sur le décalage. En effet, la solution à 11 points est à la fois plus précise et plus lisse que celle à 13 points de la figure 3.28 alors qu'elle comporte 6 variables de moins.

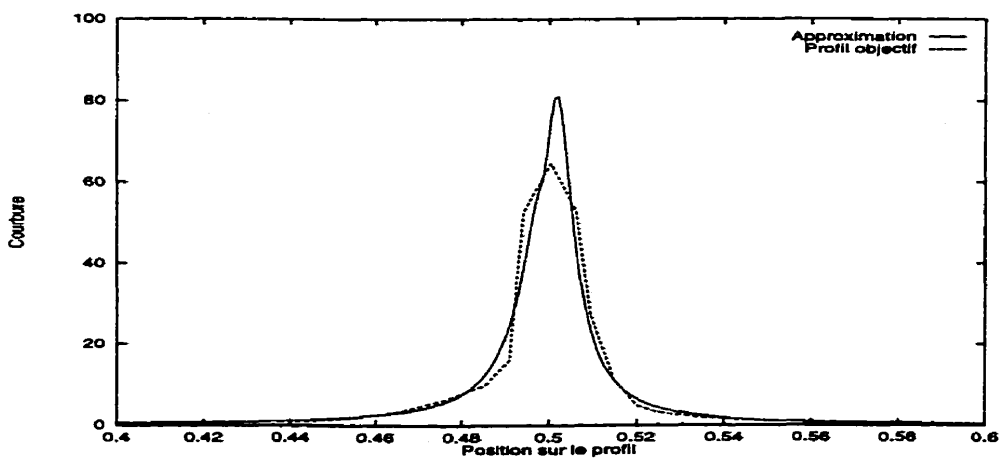
Afin de contrôler le bruit, on pourrait augmenter la régularité en utilisant des NURBS de degré plus élevé. Cependant, dans ce cas aussi la précision finale serait moins bonne car la NURBS aurait plus de mal à suivre les petits détails du profil objectif.



13 points de contrôle, *décalage*=2.5,  $\epsilon_{max}=8.1 \times 10^{-5}$



13 points de contrôle, *décalage*=10,  $\epsilon_{max}=1.8 \times 10^{-4}$



11 points de contrôle, *décalage*=4,  $\epsilon_{max}=1.2 \times 10^{-4}$

Figure 3.30: Courbure de l'approximation du profil Boeing A4

De manière générale, l'étude de la courbure des approximations que nous avons obtenu révèle des géométries très régulières même lorsque le profil de départ ne l'est pas. Les cas tels celui du profil Boeing A4, où une trop forte concentration en points de contrôle mène à des irrégularités de courbure, sont relativement rare. De plus, le bruit peut facilement être évité en concentrant moins les points avant optimisation (i.e. en utilisant des valeurs élevées de *décalage*) ou encore en diminuant le nombre de points de contrôle. Cela se fait au détriment de la précision, mais la différence du point de vue de  $\epsilon_{max}$  reste tout même assez faible.

### 3.6 Conclusion

La méthode d'approximation de profils que nous avons mise au point se révèle très efficace et satisfait tous les critères énoncés au début de ce chapitre. En résumé, on peut dire que :

- Sa précision n'est limitée que par celle de la représentation du profil qu'on cherche à approcher et par le nombre de points de contrôle utilisés. Dans la plupart des cas, une précision de  $8 \times 10^{-5}$  (i.e. 0.08 mm pour une corde d'un mètre) garantit qu'il n'y ait pas de différence significative entre un profil et son approximation.
- A condition que la qualité de représentation du profil objectif l'autorise, une approximation à 13 points de contrôle ou moins permet d'atteindre l'objectif de précision dans la majorité des cas.
- L'approximation obtenue est généralement très lisse même lorsque le profil de départ est fortement bruité.

- La méthode est suffisamment générale pour s'appliquer à n'importe quel type de profil d'aile.
- Elle est aussi relativement automatique, puisqu'en jouant sur un seul paramètre (le *décalage*), on peut obtenir rapidement une approximation pour un nombre de points fixé. Sachant que dans la majorité des cas, 13 points contrôle suffisent, on obtient alors une approximation acceptable en ne réalisant que quelques optimisations, chacune ne prenant pas plus de 5 minutes sur une station de travail SGI équipée d'un processeur R8000 à 75 MHz.

L'approximation ainsi obtenue, comporte également de nombreux avantages du point de vue la conception automatisée de profils. D'une part, le faible nombre de variables nécessaire à la description de la géométrie accélère le processus d'optimisation. D'autre part, les propriétés de régularité de ce type de représentation limitent fortement les risques d'aboutir à des profils géométriquement incorrects. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des contraintes géométriques lors de l'optimisation puisque ces contraintes sont à toutes fins pratiques incluses dans la définition même de la représentation du profil.

## Chapitre 4

# Application au design aérodynamique

Le travail présenté dans les chapitres précédents nous a permis de mettre au point une définition de la géométrie des profils bien adaptée à leur optimisation aérodynamique. Nous allons maintenant mettre à profit ces avantages et comparer les performances de notre méthode de représentation à celle actuellement employée chez Bombardier Aéronautique pour la conception automatisée.

Notre but est d'améliorer les performances de profils existants. Ceci sera réalisé en modifiant légèrement un profil existant. La méthode proposée n'est donc pas appropriée pour obtenir, par exemple, à partir d'un profil générique tel qu'un NACA symétrique un profil transsonique tel que proposé dans [5] et [27].

Partant du principe que le profil de départ est déjà proche de ce que l'on souhaite obtenir, il est alors assez facile de travailler directement sur les caractéristiques de sa courbe de  $C_p$ . C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser la méthode inverse pour



évaluer notre méthode de représentation.

Ce chapitre présente dans un premier temps l'optimisation aérodynamique d'un profil transsonique par la méthode de design inverse. Ensuite, le même type d'optimisation est réalisé sur une aile tridimensionnelle. Les calculs sont effectués en utilisant la représentation NURBS du profil ainsi que sa représentation discrète. Ces exercices ont pour but d'évaluer les performances de la méthode de représentation par des NURBS pour l'optimisation aérodynamique. La réalisation d'une optimisation identique avec la représentation discrète apporte un élément de comparaison des performances de la méthode.

## 4.1 Optimisation d'un profil par la méthode inverse

### 4.1.1 Description du problème

La méthode inverse consiste à fixer comme objectif une courbe de pression et à modifier le profil afin d'atteindre cet objectif. Partant du profil Bombardier-Canadair de la figure 2.6, nous allons chercher un profil ayant de meilleures performances de croisière.

La figure 4.2 donne l'allure de la courbe de  $C_p$  calculée avec le code BGK, couplé à un calcul de couche limite, autour de ce profil pour une vitesse à l'infini de Mach 0.735 et un angle d'attaque fixé de telle sorte que le coefficient de portance ( $C_L$ ) soit égal à 0.6. Le nombre de Reynolds de l'écoulement vaut  $10^7$ . La courbe initiale est

assez peu régulière et présente un choc assez fort vers le milieu de l'extrados. Ceci est confirmé à la figure 4.1, qui montre l'allure de la ligne sonique. On peut y observer que le domaine supersonique est assez étendu et que sa limite présente des irrégularités qui reflètent la mauvaise adaptation du profil à ce type de régime de vol.

Afin d'améliorer les performances du profil, on se fixe comme objectif d'obtenir un choc de plus faible amplitude et situé plus en arrière de l'aile. Ceci peut être atteint avec une courbe de  $C_p$  telle que présentée par la figure 4.2. Cette dernière est construite de telle sorte que l'aire à l'intérieur de la courbe soit la même que pour le profil initial afin que la portance soit conservée. En revanche, le fait que le choc soit plus faible implique une traînée plus faible et un domaine de vol plus étendu.

La fonction coût servant à l'optimisation est indépendante de la méthode de résolution et évalue simplement l'aire comprise entre les deux courbes de  $C_p$ . En revanche, les variables de design dépendent du mode de représentation du profil. Dans le cas présent, puisqu'on ne cherche à optimiser l'écoulement que sur l'extrados, elles doivent être choisies de telle sorte que l'intrados ne soit pas affecté par les modifications.

Deux exemples d'optimisation ont été réalisés avec le même optimiseur. Il s'agit d'un optimiseur développé par Bombardier-Canadair qui utilise la méthode de quasi-Newton QNMDIF adaptée pour pouvoir effectuer les calculs en parallèle sur plusieurs machines. Il est donc peu significatif de parler de temps CPU pour juger du temps de calcul. C'est pourquoi nous nous référons uniquement au nombre d'évaluations de la fonction coût pour juger du temps nécessaire à obtenir une solution. Quelque soit la méthode de représentation, une évaluation, incluant le calcul de l'écoulement par le solveur BGK, nécessite environ 4 secondes de calculs sur une station de travail

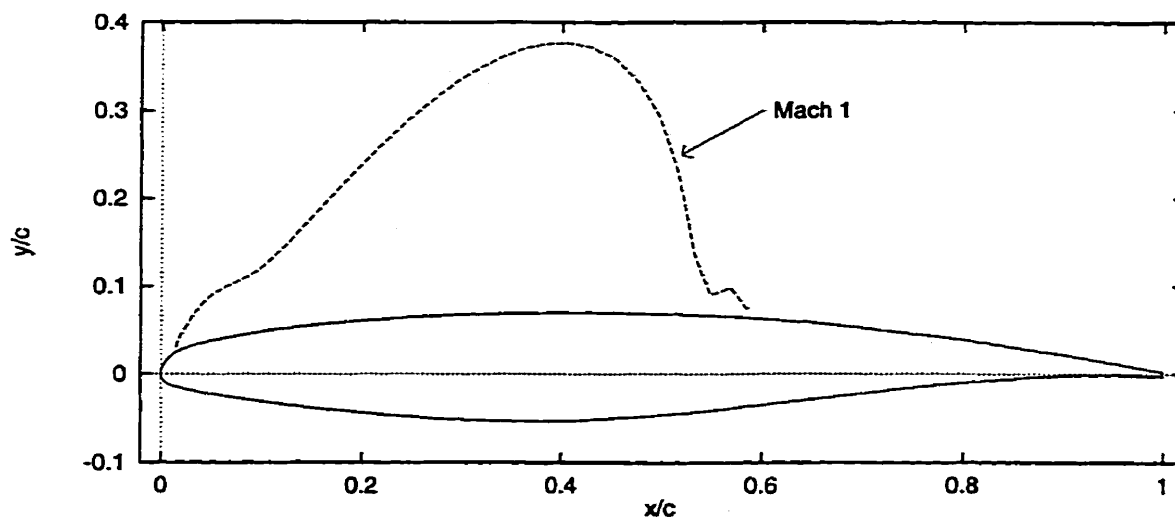


Figure 4.1: Ligne sonique autour du profil Bombardier-Canadair correspondant à l'écoulement de la figure 4.2

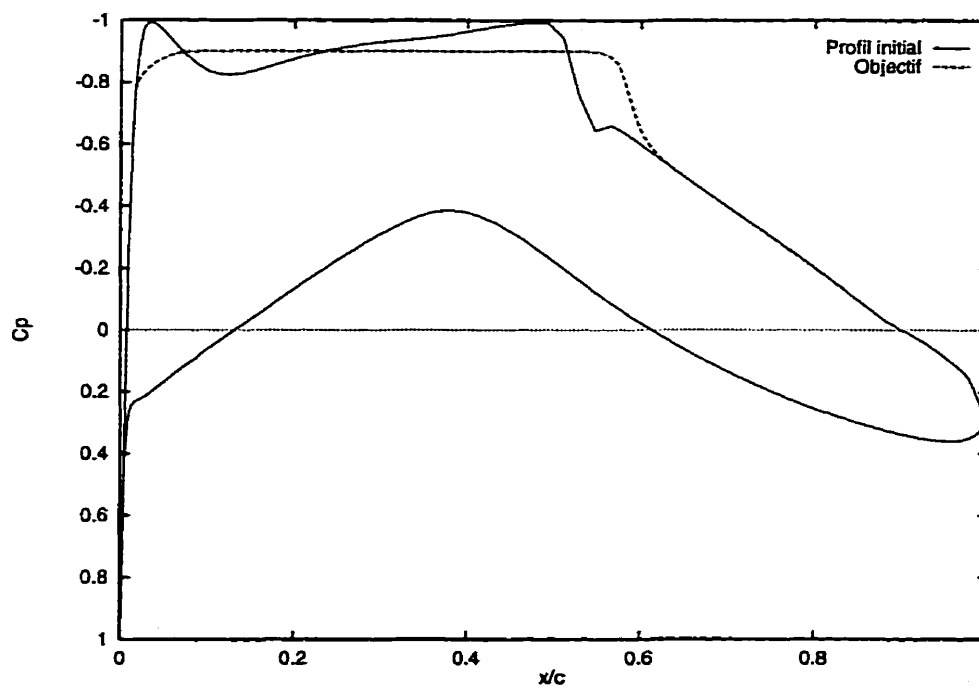


Figure 4.2: Coefficients de pression sur le profil Bombardier-Canadair  
Conditions de l'écoulement :  $M = 0.735$ ,  $C_L = 0.6$  et  $Re = 10^7$

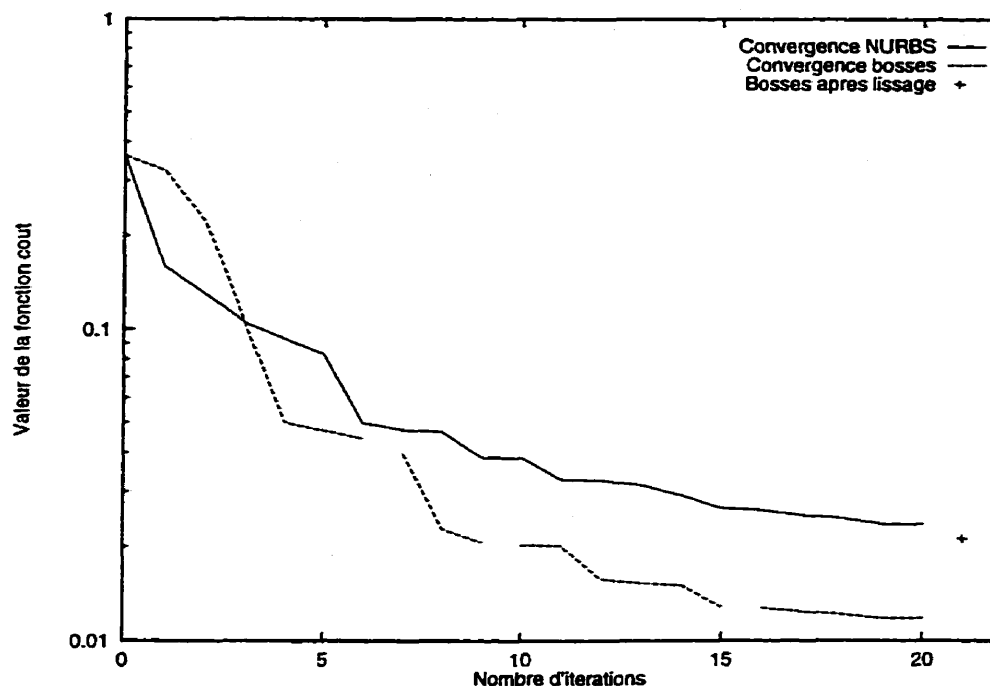
Octane de SGI équipée d'un processeur R10000 à 195 MHz.

#### 4.1.2 Optimisation du profil défini par une NURBS

On utilise une représentation NURBS du profil Bombardier-Canadair comportant 14 points de contrôle. Puisqu'on s'attend uniquement à de petites modifications du profil, on a choisi de ne pas déplacer les abscisses des points de contrôle. On utilise donc comme variables de design les ordonnées et les poids des 6 points de contrôle correspondant à l'extrados.

Avec ces 12 variables de design, l'optimiseur a convergé en 20 itérations. L'ensemble de l'optimisation a nécessité 1010 évaluations de la fonction coût dont la valeur est passée de 0.32 à 0.023 ainsi que l'illustre la figure 4.3. Le profil optimal est présenté aux figures 4.4 et 4.5, la courbe de  $C_p$  est tracée à la figure 4.6.

L'optimisation n'a nécessité aucune intervention humaine et la solution obtenue est proche de l'objectif de  $C_p$  qui était fixé comme l'illustre la figure 4.6. L'écart qui subsiste provient directement des contraintes géométriques liées à la représentation. Ainsi, le profil optimal conserve toutes les propriétés de régularité du profil de départ. Ceci est illustré par la courbure représentée à la figure 4.7. Le graphique du haut présente un agrandissement de la courbure près du bord d'attaque et celui du bas celle obtenue sur le reste du profil. Sur les deux graphiques, on observe que l'optimisation du profil n'a introduit ni bruit ni perte de régularité.



**Figure 4.3: Convergence des deux méthodes**

Chaque interruption dans la courbe de la méthode des bosses correspond à un arrêt de l'optimiseur pour une intervention humaine

### 4.1.3 Optimisation du profil défini par des points

#### Méthode d'optimisation

Dans le cas de la représentation par une NURBS, les points de contrôle s'imposent de manière évidente comme variables de design. En revanche, lorsque le profil est défini par un grand nombre de points, il est relativement coûteux de prendre tous les points comme variables de design. De plus, trop de degrés de liberté peuvent entraver la convergence du résolveur ou de l'optimiseur. Pour remédier à ce problème, on a recours à la "méthode des bosses" développée par Hicks et Vanderplaats [8, 9] et adaptée par Bombardier-Canadair.

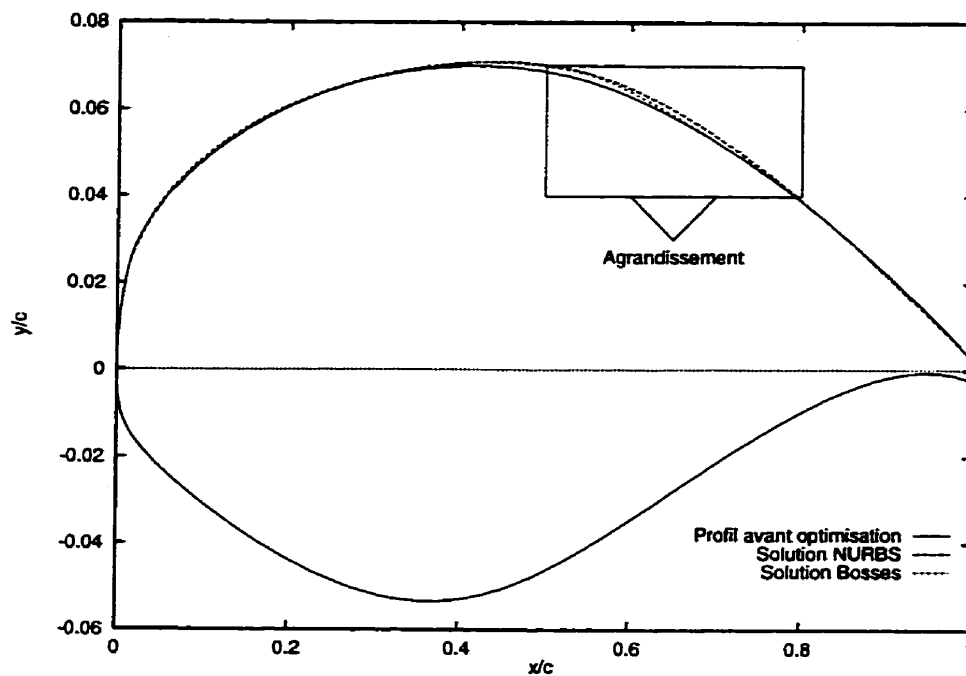


Figure 4.4: Comparaison des profils avant et après optimisation

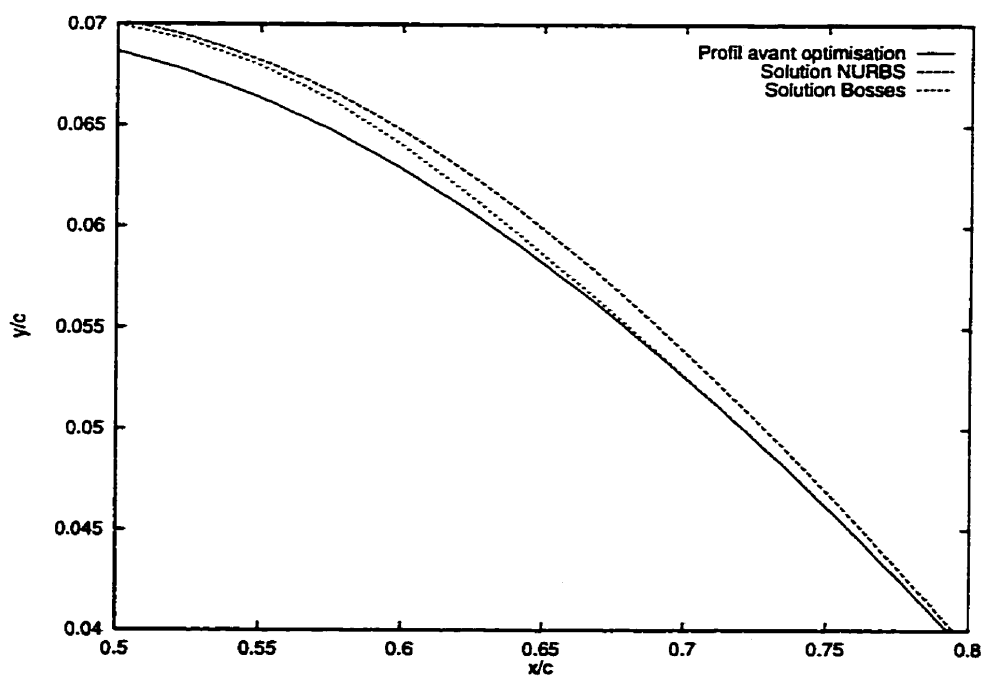
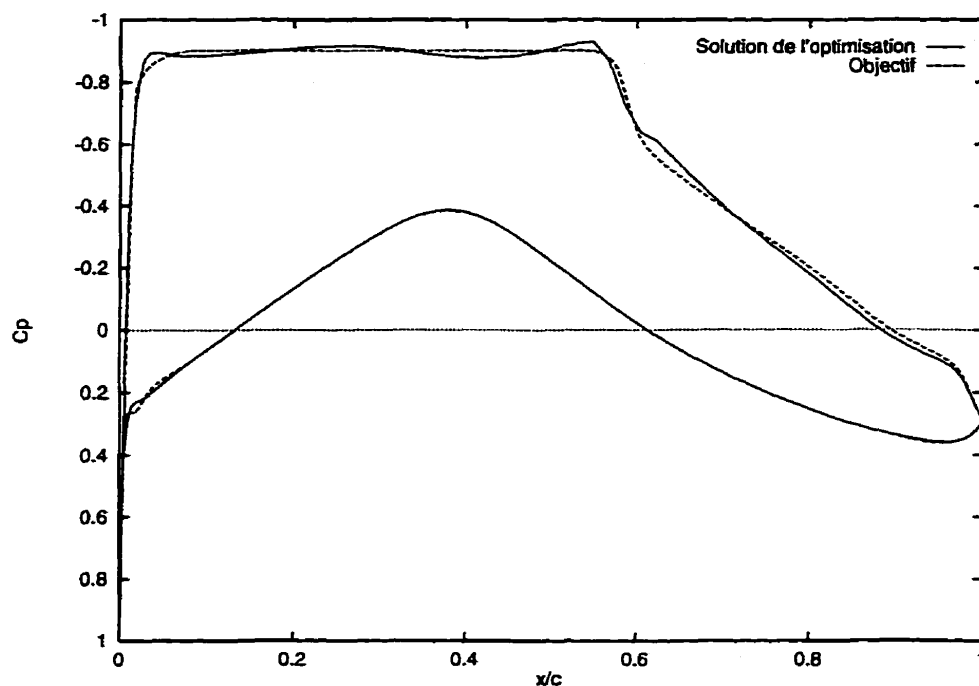
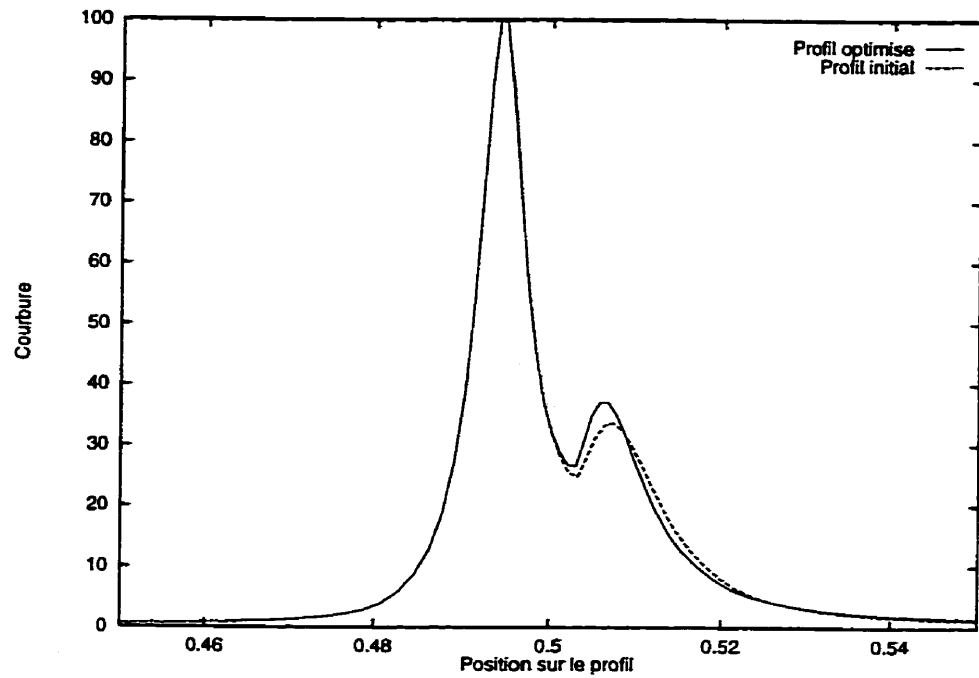


Figure 4.5: Agrandissement de la figure 4.4

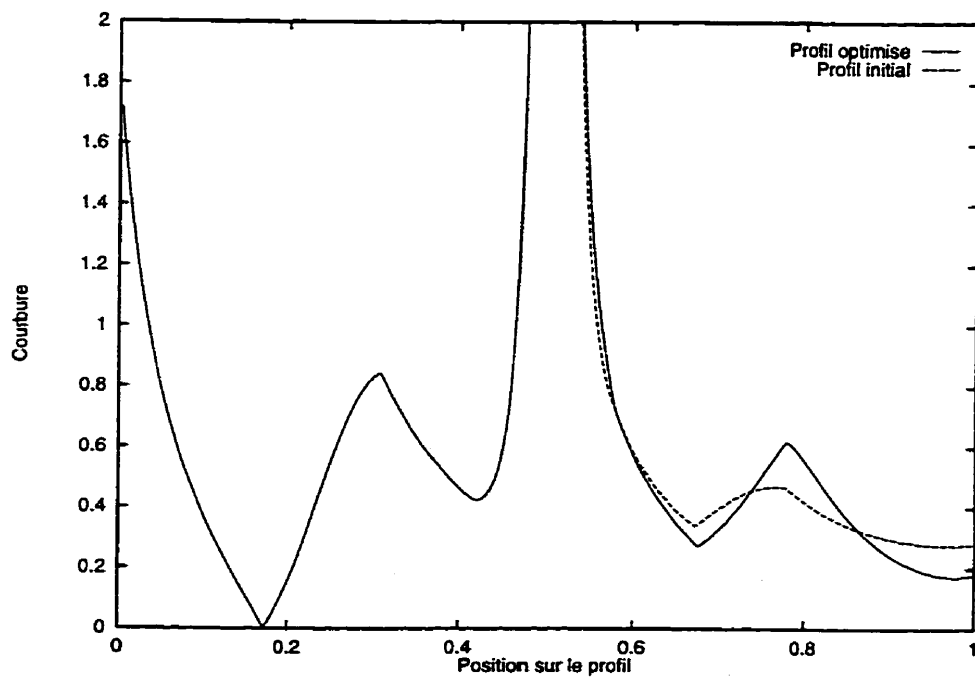


**Figure 4.6:**  $C_p$  de la solution obtenue avec la représentation par une NURBS

Elle consiste à appliquer des modifications à un profil par l'intermédiaire de "fonctions" bosses. Chaque bosse contrôle, selon son amplitude et sa largeur, le déplacement d'un certain nombre de points du profil, si bien qu'une modification du profil peut se traduire comme la superposition de plusieurs bosses à la manière de la décomposition en série de Fourier d'un signal quelconque. En augmentant le nombre de bosses, on augmente le champ des modifications permises mais on augmente en même temps les risques d'obtenir un profil peu régulier. A chaque bosse correspond une variable de design qui mesure son amplitude alors que sa position et sa largeur sont fixées par l'utilisateur. Cette méthode fait appel au savoir faire et à l'intuition de l'utilisateur pour le choix judicieux des bosses, mais elle permet de gagner beaucoup de temps sur les premières itérations de l'optimisation en déplaçant plusieurs points du profil en même temps. Toutefois, pour arriver à un résultat acceptable, il faut utiliser



Courbure au bord d'attaque



Courbure sur l'intrados et sur l'extrados

Figure 4.7: Comparaison de la courbure avant et après l'optimisation avec des NURBS



comme variables de design lors les dernières itérations toutes les ordonnées des points de la section du profil que l'on souhaite modifier. Cette étape permet de rattraper les oscillations indésirables créés par la méthode des bosses. L'inconvénient de cette technique est qu'elle mène généralement à des profils bruités qui doivent ensuite être lissés.

### Résultats de l'optimisation

Le profil à modifier est défini par 72 points sur l'intrados et 72 sur l'extrados et la section à modifier comporte 39 points. Ce cas a été choisi comme un exemple représentatif de ce qui se fait en optimisation aérodynamique. Le principal but de cet exemple est d'évaluer la méthode des NURBS sur un cas pratique.

Le tableau 4.1 résume les étapes de l'optimisation du profil en utilisant la méthode des bosses. Le cycle complet a nécessité 20 itérations et 4 interventions humaines en cours d'optimisation. Entre la première et la deuxième étape, il a notamment été nécessaire de modifier les caractéristiques des bosses (position et largeur) afin de relancer l'optimisation qui avait convergé vers un minimum local. Au total, la fonction coût a été évaluée 1328 fois et sa valeur est passée de 0.32 à 0.012 ainsi que le montre la courbe de convergence représentée à la figure 4.3.

**Tableau 4.1: Cycle d'optimisation du profil défini par des points**

Etape	Nombre de variables	Type de variables	Nombre d'itérations	Nombre d'évaluation de la fonction coût
1	4	bosses	6	90
2	4	bosses	3	65
3	39	ordonnées	6	591
4	39	ordonnées	5	582

L'utilisation des points du profil comme variables de design mène forcément à un profil bruité. La figure 4.8 présente la courbure du profil obtenu et confirme la présence d'irrégularités. Afin d'améliorer la qualité du profil, il a été nécessaire de le lisser à l'aide des outils du logiciel CATIA. La courbure du profil résultant, également représentée à la figure 4.8, est beaucoup plus régulière. La valeur de la fonction coût correspondant à ce nouveau profil est de 0.021.

Les courbes de  $C_p$  correspondant à la solution avant et après lissage sont tracées à la figure 4.9. On observe que le profil avant lissage est très proche de l'objectif et que le lissage détériore significativement la qualité de la solution du point de vue de l'accord avec la courbe de  $C_p$  objectif.

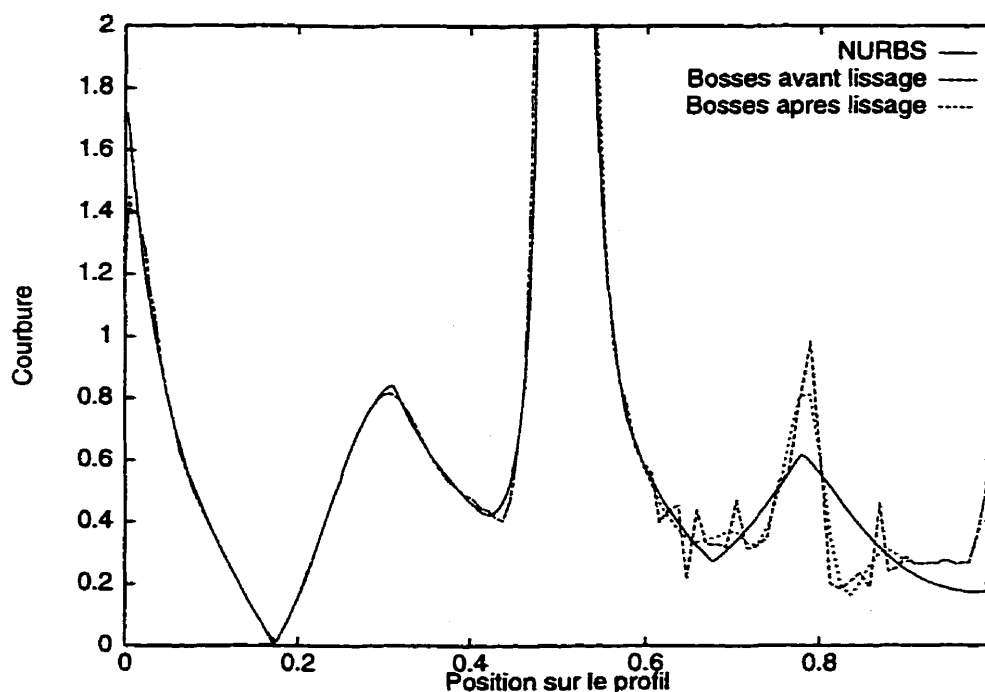


Figure 4.8: Courbure des profils obtenus par l'optimisation

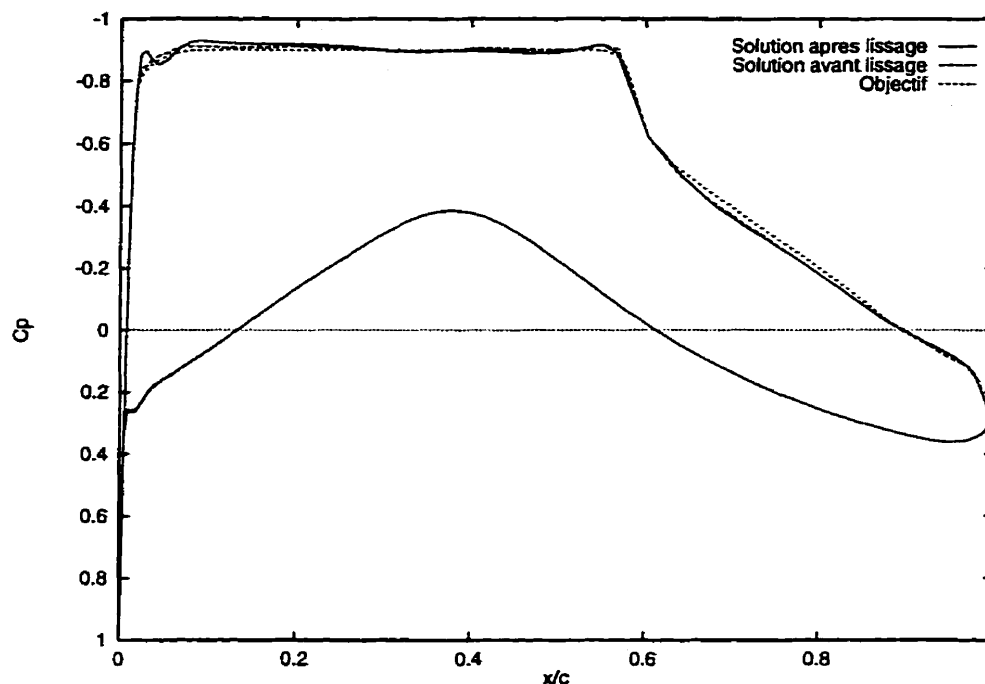


Figure 4.9:  $C_p$  de la solution obtenue avec la représentation par des points

#### 4.1.4 Comparaison des deux méthodes

Les deux méthodes ont permis d'obtenir des solutions de qualités équivalentes du point de vue de la fonction coût. Toutefois, en observant les courbes de convergence de la figure 4.3, on s'aperçoit qu'il a fallu 7 itérations de plus et 3 interventions de l'utilisateur pour mener à bien l'optimisation par la méthode des bosses. A cela, il faut encore ajouter le temps nécessaire au lissage des profils avec le logiciel CATIA. La représentation du profil par une NURBS permet non seulement une optimisation plus rapide en temps de calcul (environ 1000 évaluations au lieu 1300) mais elle a surtout l'avantage d'un processus quasiment automatique.

En plus de ces différences, il est aussi intéressant de comparer les solutions auxquelles ces deux méthodes aboutissent. La figure 4.4 illustre les deux profils obtenus

ainsi que la géométrie de départ. On y observe que les deux méthodes ont eu le même effet général sur le profil mais ont des effets différents dans le détail. Dans les deux cas, l'affaiblissement du choc a été obtenu en épaississant le profil principalement vers le milieu de la corde et très légèrement vers le bord d'attaque. L'agrandissement de la figure 4.5 révèle la différence principale entre les deux résultats : une sorte de cassure sur le profil obtenu par la méthode des bosses. Cette cassure est visible sur la courbure (figure 4.8) à l'endroit du pic situé à la position 0.8 sur cette courbe, correspondant à  $x/c = 0.6$  sur l'extrados.

D'un point de vue aérodynamique, la présence d'une telle cassure force la position du choc pour satisfaire à l'objectif. Seulement ceci détériore la géométrie du profil et conduit à une solution de qualité uniquement pour l'écoulement au point de design. En effet, pour d'autres régimes de vol, cette petite irrégularité risque de diminuer les performances de l'aile. Afin d'illustrer ce phénomène, l'écoulement pour le même angle d'attaque et le même nombre de Reynolds a été calculé, mais à des nombres de Mach différents (0.6 et 0.8). Les courbes de  $C_p$  correspondant à ces deux régimes de vol sont représentées sur les figures 4.10 et 4.11. On y voit clairement l'influence de la cassure située en  $x/c = 0.6$ . Dans les deux écoulements, cette cassure génère une petite bosse sur la courbe de  $C_p$  alors que la courbe obtenue avec les NURBS ne présente pas de telles irrégularités.

Ceci permet de saisir l'importance d'imposer une certaine régularité à la géométrie pendant l'optimisation. En effet, si on autorise l'optimiseur à modifier le profil n'importe comment, il essaye de coller le plus possible à la fonction coût sans tenir compte des contraintes de régularité de l'aile. Des méthodes existent pour contourner ce problème. On pourrait par exemple ajouter des contraintes lors de l'optimisation pour contrôler la régularité. L'optimisation deviendrait alors beaucoup plus complexe

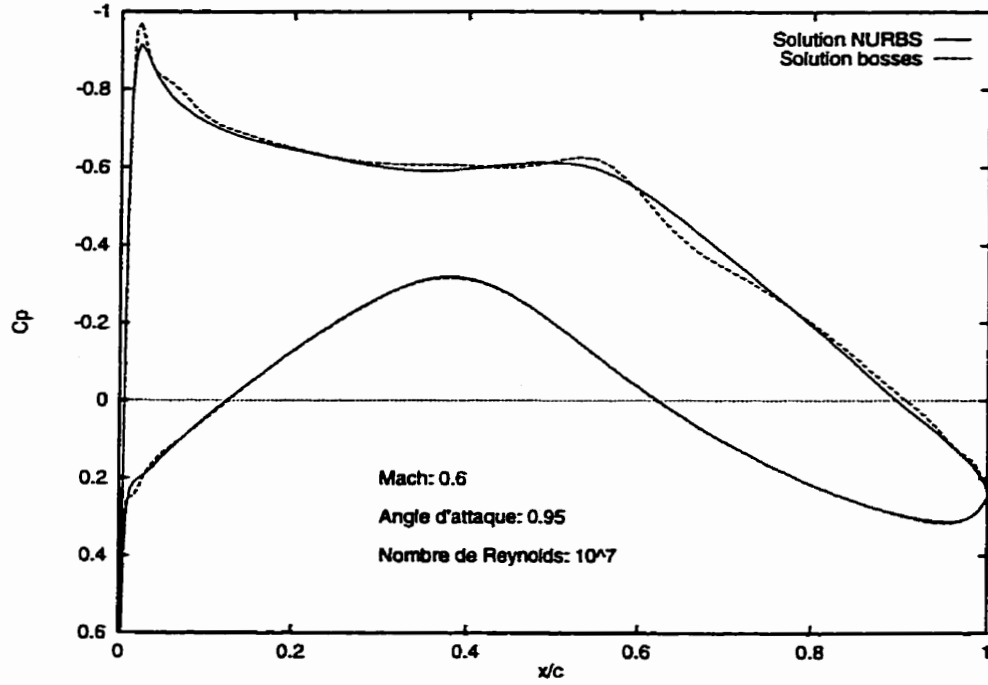


Figure 4.10: Comparaison des  $C_p$  des deux solutions à Mach 0.6

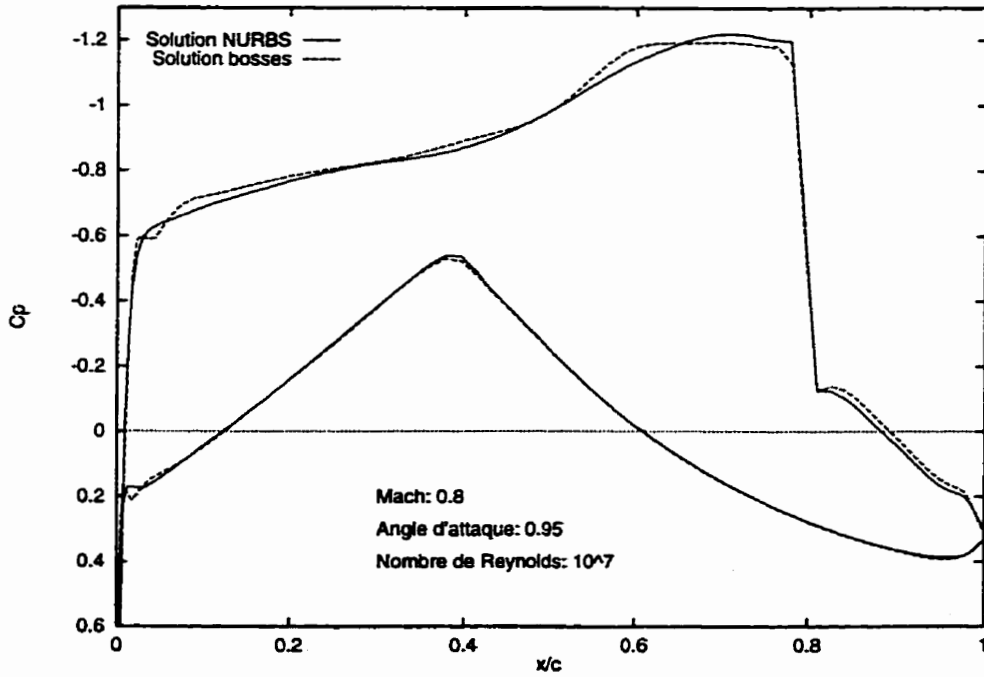


Figure 4.11: Comparaison des  $C_p$  des deux solutions à Mach 0.8

sans compter la difficulté de mettre au point une formulation efficace pour ces contraintes. Il serait également possible de modifier la formulation du problème en ayant recours à une optimisation multi-objectifs. Ceci serait réalisé en fixant des objectifs pour plusieurs régimes de vol, ce qui augmenterait grandement le temps de calcul. Il est donc beaucoup plus intéressant d'utiliser une représentation telle que les NURBS car elle limite naturellement les risques d'obtenir des profils peu réalistes.

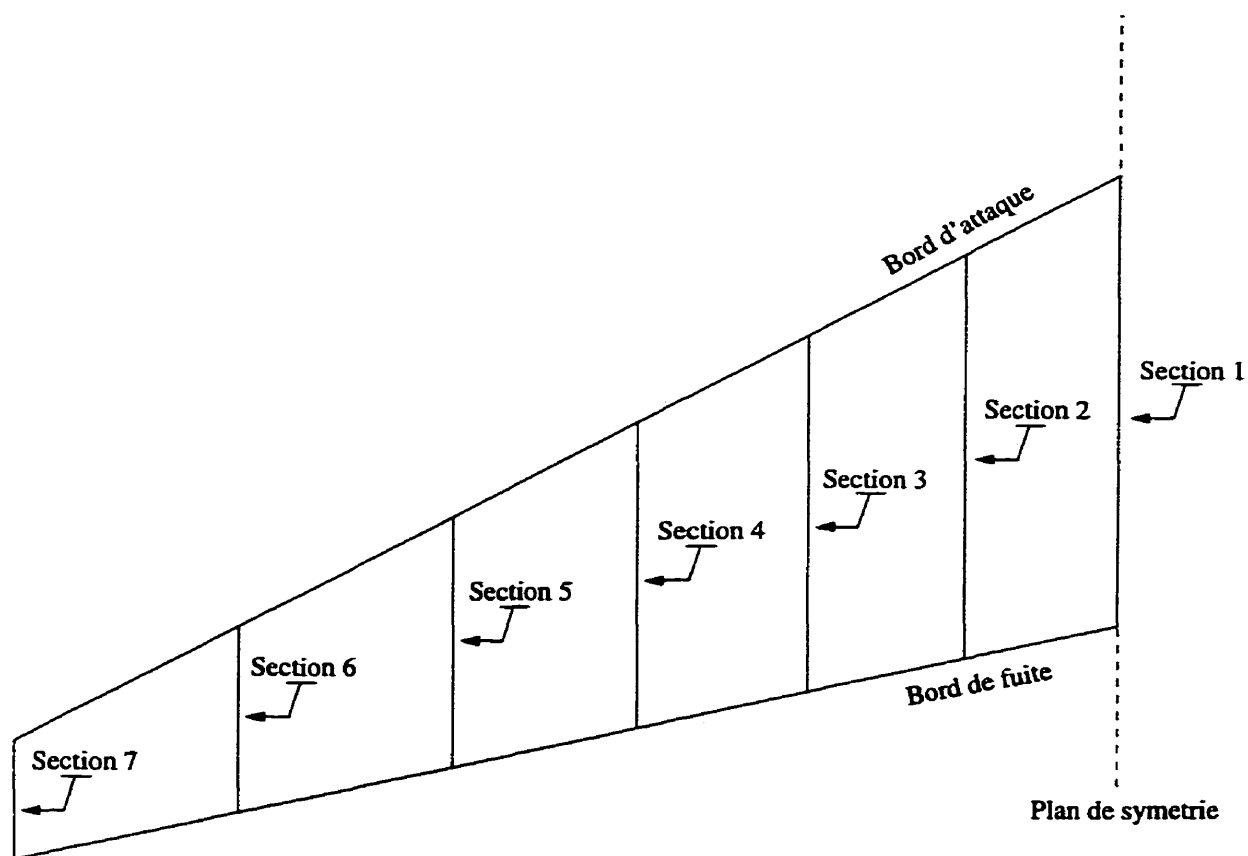
## 4.2 Optimisation d'une aile tridimensionnelle

Le passage à la troisième dimension augmente énormément le volume des calculs liés à l'optimisation aérodynamique. En effet, le temps de résolution de l'écoulement autour d'une aile tridimensionnelle est beaucoup plus élevé que pour un profil bidimensionnel et le nombre de variables nécessaires à la définition de l'aile complète est lui aussi beaucoup plus grand. C'est pourquoi, il est alors essentiel d'utiliser une définition du problème minimisant le nombre de variables de design.

Dans le cas de l'optimisation bidimensionnelle présentée dans la première partie de ce chapitre, la méthode de représentation de la géométrie par des NURBS a montré son efficacité. Le principal avantage qu'elle possède sur la méthode des bosses est son automatisme, qui permet d'obtenir des profils acceptables presque sans intervention humaine. Dans le cas tridimensionnel, pour lequel la visualisation, et par conséquent l'intervention humaine, sont beaucoup moins aisées, cet automatisme devrait amplifier fortement l'écart entre les deux méthodes.

### 4.2.1 Description du problème

Partant du profil Bombardier-Canadair de la figure 2.6, on construit une aile suivant le schéma présenté à la figure 4.12. On utilise 7 sections de contrôle pour lesquelles l'épaisseur du profil est proportionnel à sa corde. Le bord d'attaque et le bord de fuite sont des portions de droites ayant un angle de flèche respectifs 30 et 15 degrés. De plus, on a donné à l'aile un vrillage allant de +3 degrés à l'emplanture à -3.5 degrés au bout d'aile. Les portions de l'aile situées entre deux sections sont obtenues par interpolation linéaire.



**Figure 4.12: Construction d'une aile tridimensionnelle**

La résolution de l'écoulement se fait avec le solveur KTRAN par la méthode des

petites perturbations. Le temps de résolution est d'environ 10 minutes sur une station de travail AIX R6000 mais devient inférieur à 2 minutes lorsque l'on peut utiliser une solution de départ proche de la solution de l'écoulement. Ceci est généralement le cas lorsque l'on fait de l'optimisation et que les modifications entre deux itérations restent faibles. Pour simplifier les calculs, on travaille sur une aile symétrique sans fuselage.

La figure 4.13 présente les courbes iso- $C_p$  sur l'extrados de l'aile ainsi construite. La concentration des lignes de niveau permet d'observer la présence d'un choc assez fort s'étendant sur presque toute l'envergure de l'aile. Pour améliorer les performances de l'aile, on se fixe comme objectif de réduire l'étendue et la force du choc. On souhaite notamment qu'il n'y ait pas d'onde de choc à l'emplanture de l'aile. Pour atteindre ce but, on fixe, comme dans le cas bidimensionnel, des courbes de  $C_p$  objectifs pour les 7 sections et on modifie la géométrie de l'aile pour satisfaire à ces objectifs. La seule exception est le bout d'aile où l'objectif a été légèrement décalé vers l'intérieur de l'aile afin que les perturbations du bout d'aile ne dérangent pas l'optimisation. Ces 7 objectifs sont représentés avec les courbes de  $C_p$  initiales aux figures 4.14 et 4.15.

La fonction coût est construite en prenant la somme, pour les 7 sections de calcul, des écarts entre les courbes de  $C_p$  de l'aile et les courbes objectifs, calculés de la même manière que dans le cas bidimensionnel. Pour l'aile initiale, la fonction coût vaut 23.5.

#### 4.2.2 Optimisation de l'aile définie par des NURBS

Chaque section de contrôle de l'aile est représentée par une NURBS à 15 points de contrôle tel qu'illustré par la figure 4.16. Comme on peut le voir sur les figures 4.14



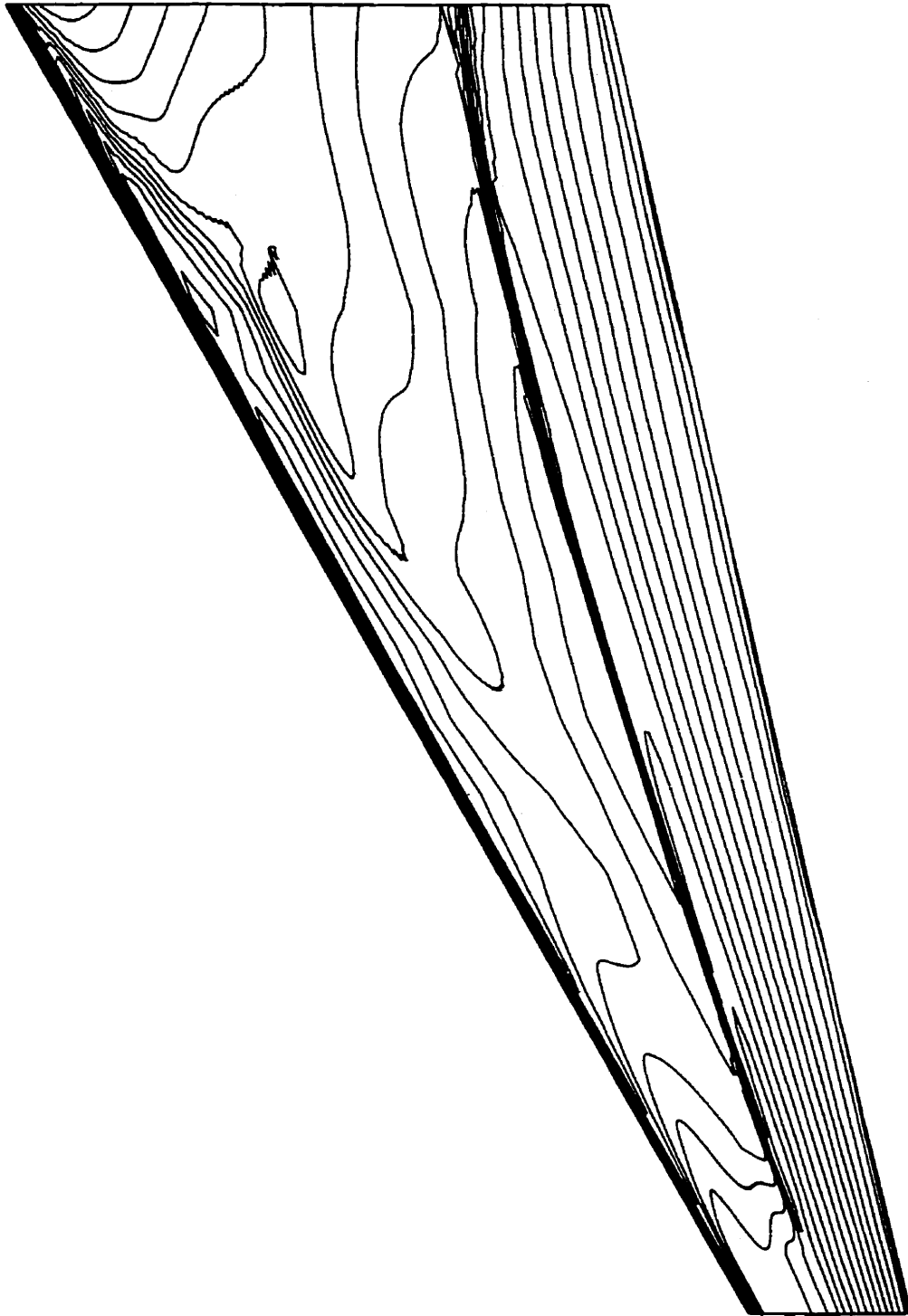


Figure 4.13:  $C_p$  sur l'extrados de l'aile avant optimisation

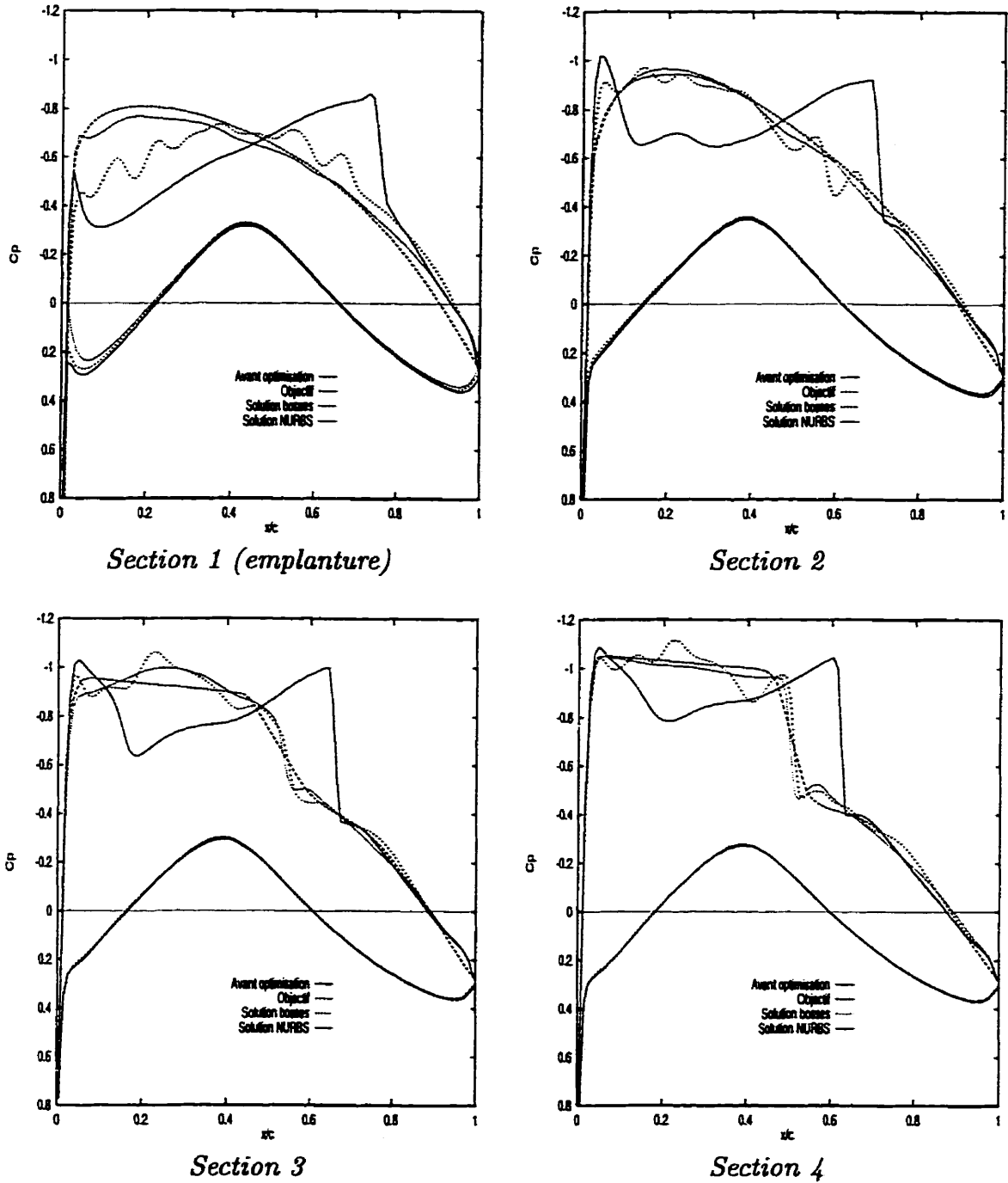


Figure 4.14: Comparaison des  $C_p$  avant et après optimisation (sections 1 à 4)

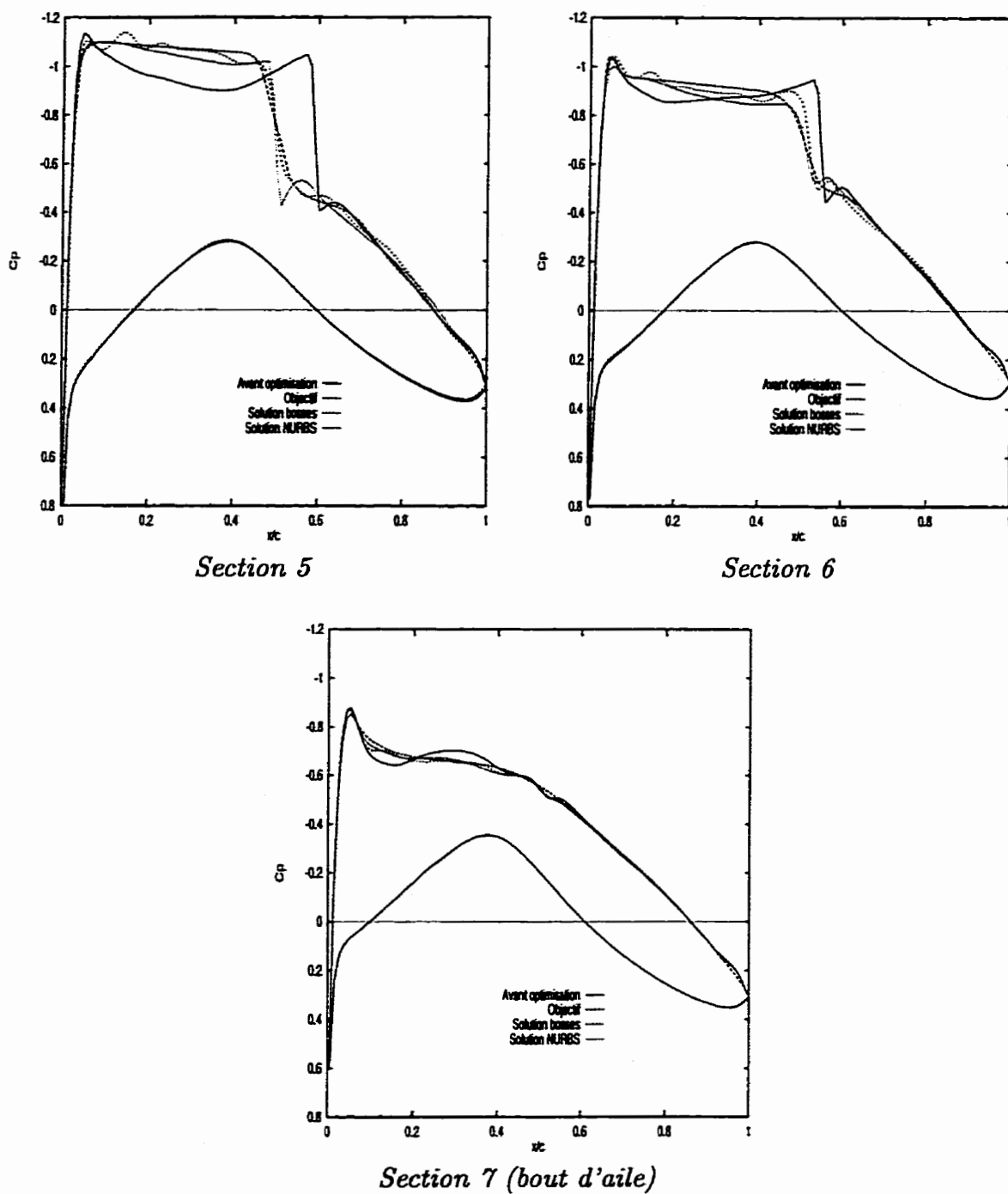
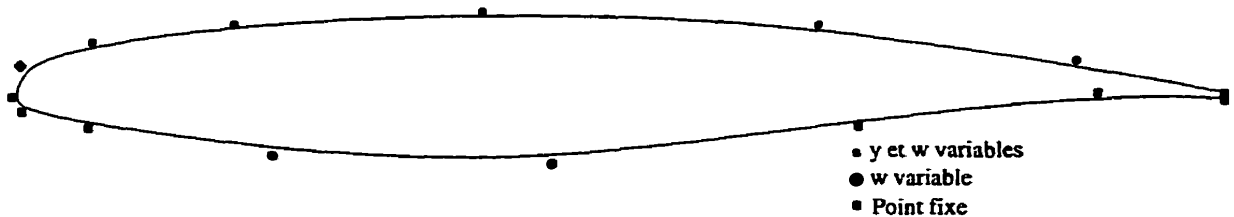


Figure 4.15: Comparaison des  $C_p$  avant et après optimisation (sections 5 à 7)

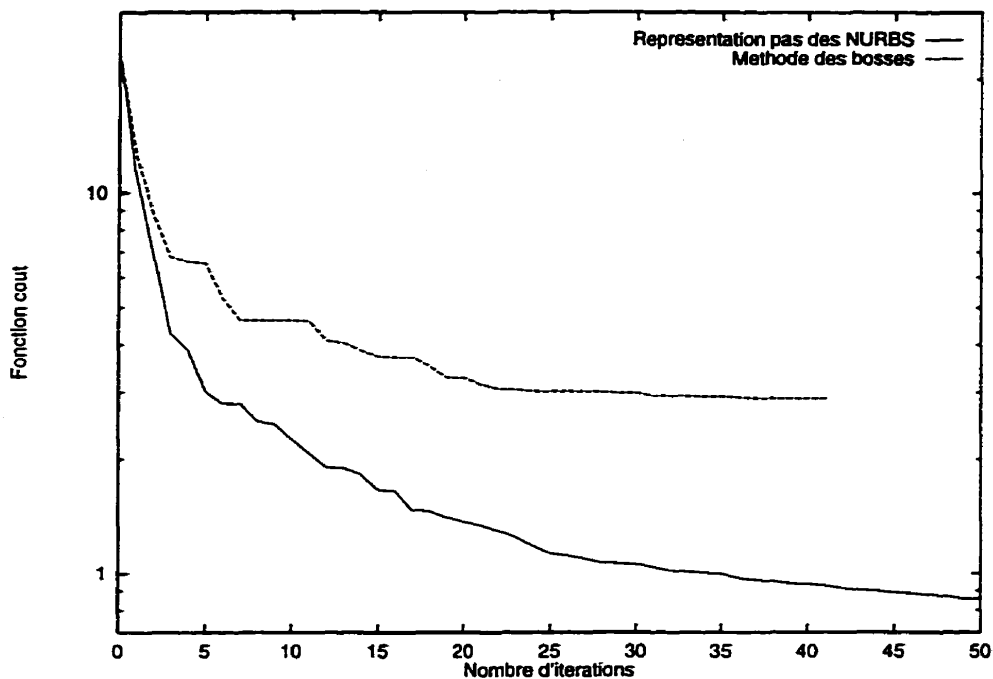
et 4.15, les modifications des courbes de  $C_p$  affectent uniquement l'extrados de l'aile, ce qui permet de fixer les points de contrôle correspondant à l'intrados. Comme dans le cas bidimensionnel, on s'attend à de petites modifications de l'aile, ce qui permet également de fixer les abscisses des points de contrôles. Pour chaque section, on a donc sélectionné 11 variables de design correspondant à 5 ordonnées et 6 poids de points de contrôle positionnés tel qu'illustré par la figure 4.16. L'aile au complet est donc définie par 77 variables de design.



**Figure 4.16: Variables de design pour l'optimisation utilisant les NURBS**

On utilise le même optimiseur que le dans cas bidimensionnel. La convergence est résumée à la figure 4.17 qui présente la valeur de la fonction coût en fonction de nombre d'itérations. Chaque itération nécessite en moyenne 130 évaluations de la fonction coût, lors de l'optimisation. La valeur de la fonction coût est passée de 23.5 à 0.85 en 50 itérations et 6200 évaluations de la fonction coût.

Les figures 4.14 et 4.15 confirment la convergence de la solution vers l'objectif. On y observe, en effet, que sur les 7 sections de calcul les courbes de  $C_p$  de l'aile optimisée sont très proches de l'objectif. Toutefois, les contraintes géométriques inhérentes aux NURBS empêchent la solution de coller parfaitement à l'objectif. La figure 4.18 présentant les iso- $C_p$  sur l'extrados de l'aile optimisée avec les NURBS montrent également les améliorations aérodynamiques apportées à l'aile. Il n'y a plus d'onde de choc sur le premier tiers de l'aile près de l'emplanture et le choc situé vers le milieu



**Figure 4.17: Convergence de l'optimiseur avec les deux méthodes**

de l'aile a été déplacé vers le bord d'attaque.

### 4.2.3 Optimisation de l'aile par la méthode des bosses

En trois dimensions, il est difficile d'intervenir lors de l'optimisation pour modifier la position ou la largeur des bosses. C'est pourquoi il est préférable d'en prendre directement un grand nombre afin de laisser suffisamment de liberté au système pour converger. On réalise donc l'optimisation en utilisant 11 bosses sur chacun des profils. De plus, ceci a l'avantage de faciliter la comparaison avec l'optimisation précédente puisque le nombre de variables de design (77) est le même. En outre, étant donné le nombre de sections, il n'est pas possible de prendre toutes les ordonnées des points de l'extrados comme variables de design car cela représenterait près de 300 variables

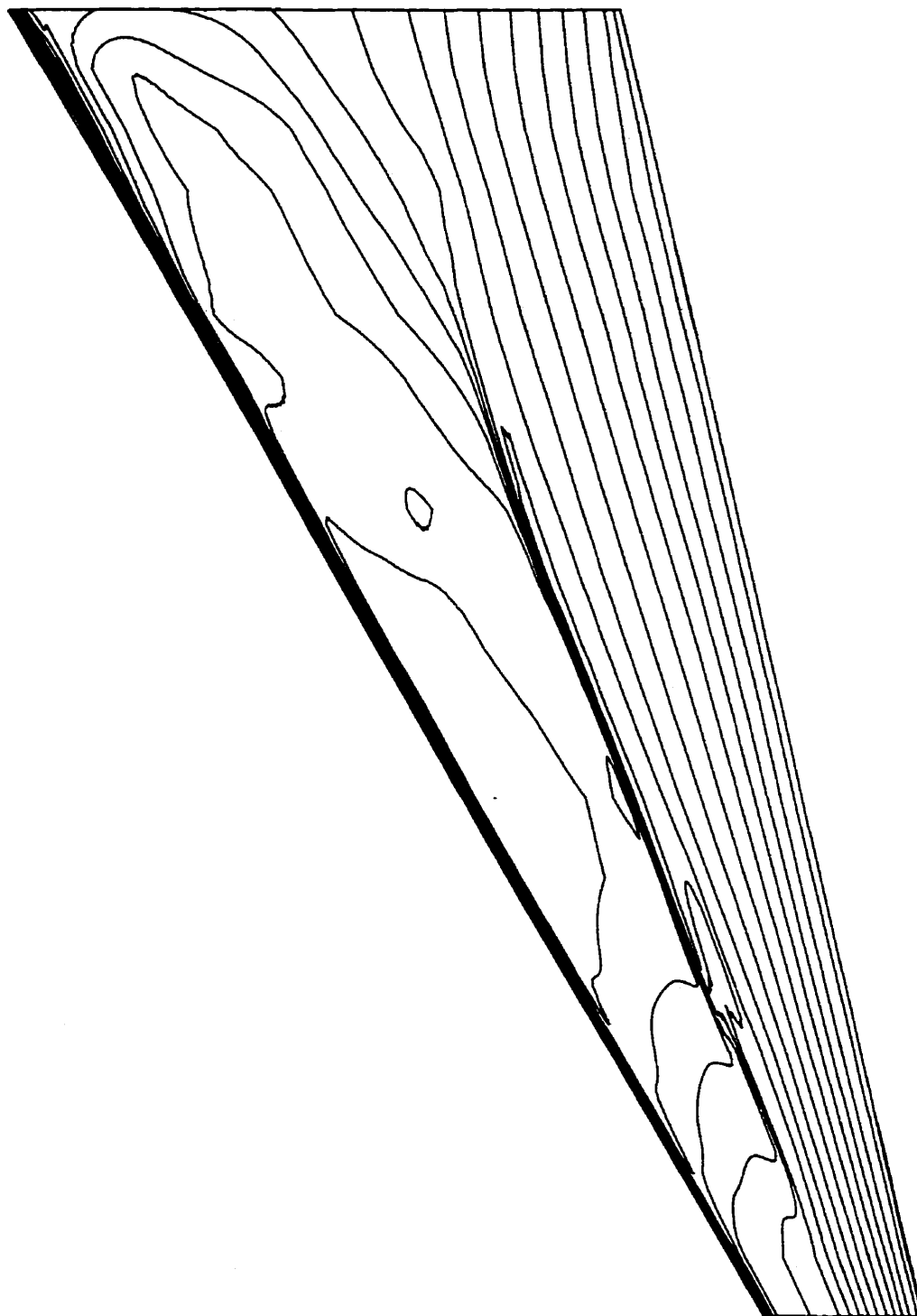


Figure 4.18:  $C_p$  sur l'extrados de l'aile après optimisation avec des NURBS

de design. Il faut donc s'attendre à ce que la solution finale contienne du bruit de basse fréquence (i.e. du bruit dont l'amplitude est de l'ordre de celle des bosses) qui soit difficile à lisser, ce qui risque de limiter la qualité de la solution finale.

L'optimisation s'est arrêtée après 42 itérations et 6000 évaluations de la fonction coût dont la valeur est passée de 23.5 à 2.9 ainsi que le montre la figure 4.17. La valeur finale de la fonction coût n'est pas très petite et ceci est confirmé par les courbes de  $C_p$  présentées aux figures 4.14 et 4.15. Pour la section 1 correspondant à l'emplanture de l'aile, la courbe est relativement loin de l'objectif et, de plus, elle est fortement bruitée. Sur les autres sections la solution est meilleure bien que bruitée. La figure 4.19 montrant les iso- $C_p$  sur l'extrados de l'aile optimisée par la méthode des bosses reflète également ces irrégularités par des courbes niveaux fortement bruitées.

#### 4.2.4 Avantages des NURBS

Comme on vient de le voir, la solution obtenue par la méthode des bosses est très différente de celle obtenue en utilisant une représentation par des NURBS. En effet, le passage en 3 dimensions permet de pousser à leurs limites les méthodes d'optimisation aérodynamique. Si le problème est mal défini, il est insoluble car le nombre de variables de design est alors trop élevé pour pouvoir mener à bien une boucle d'optimisation dans un temps raisonnable. C'est notamment ce qui empêche l'utilisation des ordonnées de tous les points de définition du profil comme variables de design alors que c'est possible en deux dimensions.

Il faut donc avoir recours à des méthodes permettant de réduire le nombre de variables. La méthode des bosses a été conçue dans ce but. Toutefois, la piètre qualité des

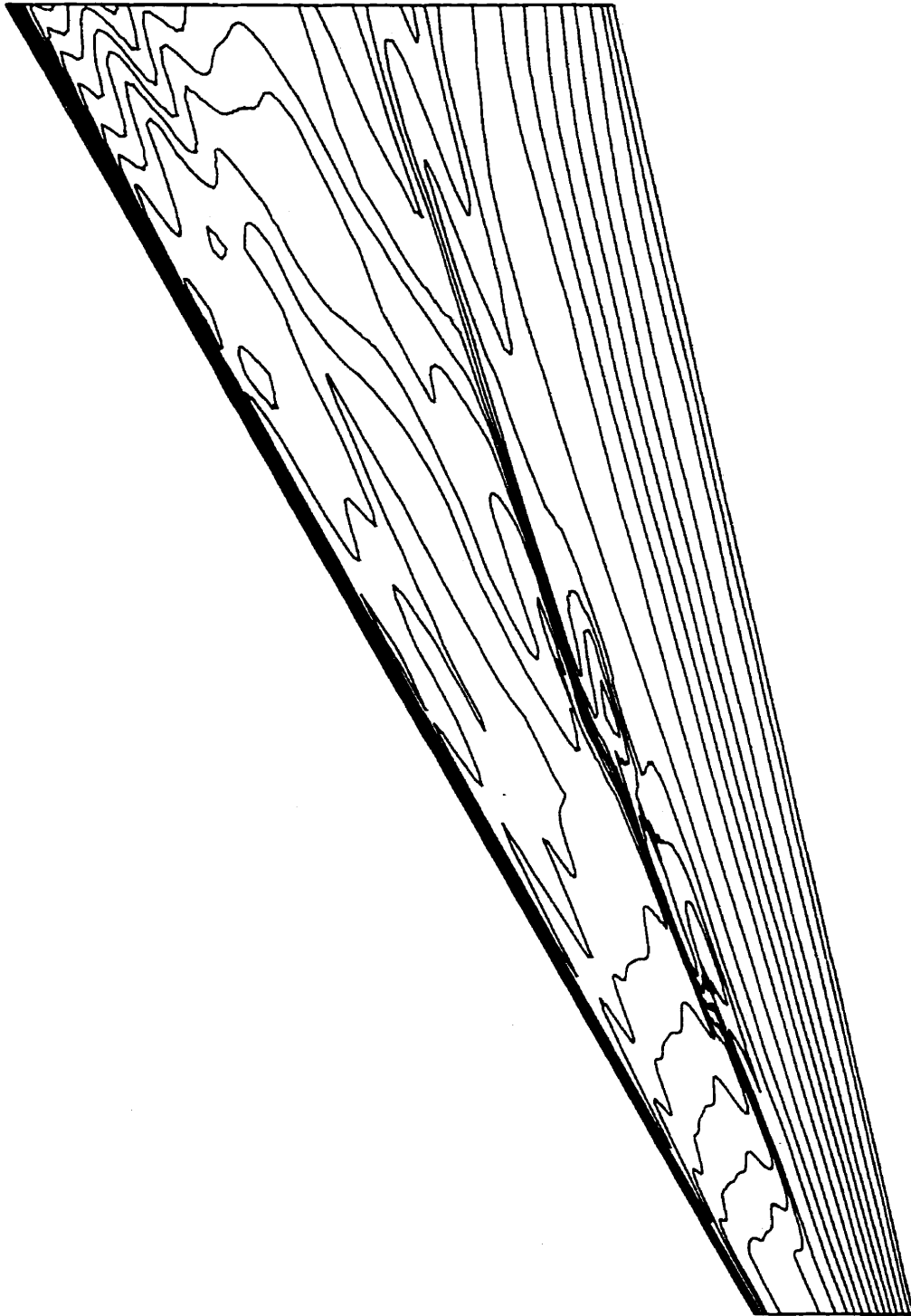


Figure 4.19:  $C_p$  sur l'extrados de l'aile après optimisation avec la méthode des bosses

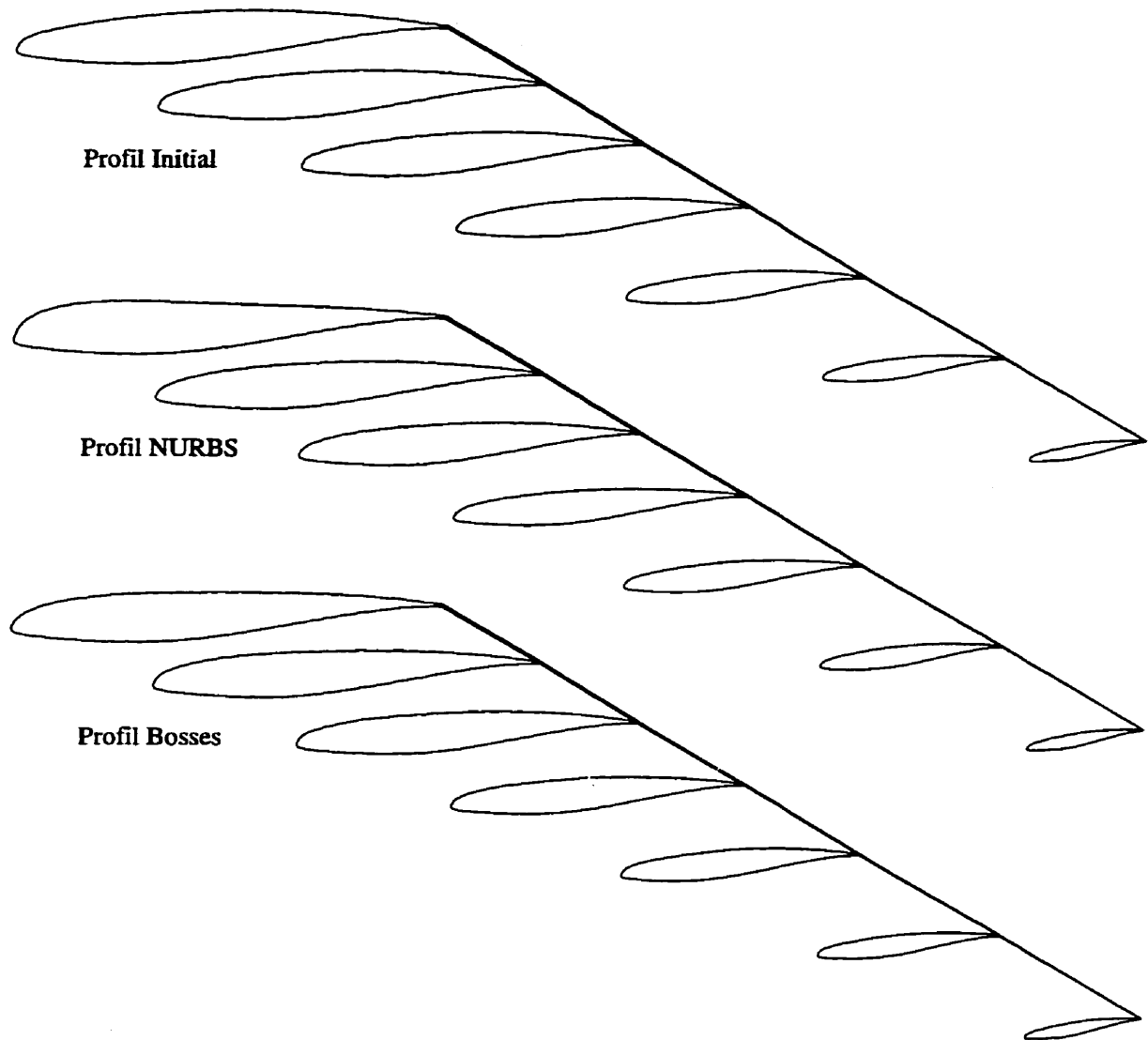


résultats obtenus avec cette méthode fait ressortir ses deux principaux défauts. Tout d'abord, elle ne permet pas d'obtenir un résultat lorsque la modification nécessaire pour aboutir à l'objectif est trop importante. En effet, la figure 4.20, présentant les profils des 7 sections de contrôle avant optimisation pour les deux représentations, révèle l'ampleur de la modification au profil d'emplanture de l'aile (section 1 du profil NURBS). On peut aussi observer que le profil de la section 1 pour la méthode des bosses est restée très proche du profil initial. Ceci explique que la courbe de  $C_p$  correspondante soit restée assez loin de l'objectif.

En revanche, pour les autres sections, ne nécessitant que de petites modifications, la méthode des bosses a réussi à atteindre l'objectif. Toutefois, les solutions obtenues sont fortement bruitées, ce qui constitue le second défaut de la méthode. Pour remédier à cela, il faut lisser les profils après l'optimisation ce qui résulte en une perte de temps considérable.

Les NURBS permettent de pallier ces deux défauts tout en conservant un nombre de variables très restreint. Ainsi que le montrent les courbes de  $C_p$  des figures 4.14 et 4.15, la solution est très proche de l'objectif même dans le cas de la section 1 et les profils ne sont pas bruités. La solution ainsi obtenue est donc directement utilisable sans avoir à lisser les profils.

Cet exemple d'optimisation d'une aile tridimensionnelle met en valeur l'importance de la définition de la géométrie pour la réussite d'une optimisation aérodynamique. Alors qu'en deux dimensions une telle carence d'une méthode peut être rattrapée par des interventions humaine, en trois dimension le problème devient plus complexe et requiert énormément de travail de la part de l'utilisateur. La réduction du nombre de variables de design devient un élément essentiel pour remédier à cet



**Figure 4.20: Profils de l'aile 3-D avant et après optimisation**

inconvenient, mais le conditionnement de la géométrie est encore plus important. En effet, outre l'avantage évident d'avoir des profils lisses, la présence de bruit dans la représentation et donc dans la solution aérodynamique peut nuire à la convergence de l'optimiseur. Dans le cas de la représentation par des NURBS, la régularité des profils est directement liée au faible nombre de points de contrôle utilisés. Ceci explique l'efficacité des NURBS pour ce type de problèmes. Enfin, l'utilisation des points de contrôle comme variables de design permet de grandes modifications du profils en limitant fortement les risques d'aboutir à des géométries inacceptables.

## Conclusion

L'objectif principal de ce projet était la mise au point d'une méthode de représentation géométrique de profils d'ailes adaptée à l'optimisation aérodynamique automatisée. Dans cette optique, plusieurs critères ont été retenus pour juger de la qualité d'une représentation. Puisque l'optimisation aérodynamique est une discipline extrêmement exigeante en temps de calculs, il faut en premier lieu que la définition de la géométrie utilise un nombre minimal de paramètres afin de minimiser le nombre de variables de design de l'optimisation. Ensuite, il faut que la représentation mène naturellement à des géométries régulières, c'est-à-dire sans bruit ni sauts au niveau de ses dérivées. De plus, celle-ci doit être facile à manipuler afin de pouvoir être utilisée de manière automatique lors de l'optimisation. Enfin, la méthode de représentation doit être suffisamment flexible de façon à permettre de représenter une grande famille de profils.

A la suite d'une brève revue des méthodes de représentation géométrique utilisées pour la conception assistée par ordinateur, les NURBS se sont imposées comme la méthode de modélisation la plus adaptée au problème. Une fois ce mode de représentation choisi, le problème de représentation optimale, c'est-à-dire d'approximation, a été posé comme un problème d'optimisation non-linéaire qui a pu être résolu avec

une méthode quasi-Newton. La principale difficulté réside dans la recherche d'un minimum global. Bien qu'on ne puisse jamais être certain d'avoir trouvé ce minimum global, il est néanmoins possible, en choisissant différentes solutions de départ pour l'optimisation, d'obtenir des représentations parfaitement adaptées à l'optimisation aérodynamique.

Ces représentations "optimales" ont été comparées en terme de précision à la tolérance de fabrication utilisée par Bombardier Aéronautique et à la sensibilité d'un résolveur des équations de l'aérodynamique à l'erreur d'approximation. Ainsi, on arrive à la conclusion que la plupart des profils peuvent être représentés en utilisant une NURBS ayant au plus 15 points de contrôle et avec une précision telle que la résolution de l'écoulement autour du profil et autour de son approximation mènent au même résultat. De plus, on observe que grâce aux propriétés géométriques des NURBS et au faible nombre de points de contrôle, les profils ainsi définis sont très peu susceptibles de contenir du bruit.

Enfin, des essais d'optimisation aérodynamique ont été réalisés en utilisant la méthode de représentation développée précédemment. La comparaison des résultats de l'optimisation en deux et en trois dimensions avec ceux obtenus par la méthode des bosses révèlent l'efficacité de la représentation par des NURBS pour ce type d'optimisation. Non seulement, la convergence est plus rapide, mais en plus la solution est toujours très lisse. Ceci permet de réaliser des boucles d'optimisation quasiment automatiques et de gagner un temps considérable sur l'étape fastidieuse et dans ce cas inutile du lissage des profils.

La méthode développée s'avère donc très efficace pour l'optimisation aérodynamique. Ceci est très prometteur et permet d'envisager plusieurs applications ulté-

rieures. Tout d'abord la méthode est suffisamment générale pour pouvoir être étendue à la troisième dimension. Ainsi, il est tout à fait réaliste d'espérer pouvoir représenter une aile avec une centaine de points de contrôles. Ensuite, ce passage en trois dimension permettrait de réaliser de l'optimisation multidisciplinaire (MDO) et d'atteindre des objectifs fixés non seulement par l'aérodynamique mais aussi par la structure de l'aile. Ceci peut même être envisagé directement en modélisant les ailes tridimensionnelles comme dans le second exemple du chapitre 4. Enfin, le problème de la représentation optimale d'une géométrie se retrouve dans de nombreux domaines et la méthode peut très bien être appliquée à des géométries assez éloignées de celle d'un profil d'aile. Tout en demeurant dans le domaine de l'aérodynamique externe, la méthode pourrait être étendue à la représentation générique des fuselages, pylones, harnais et autres composantes des avions. Ceci permettrait une uniformisation des méthodes de représentation tout en conduisant à un nombre restreint de paramètres de design.

## Références

- [1] ABBOTT, I. H., AND VON DOENHOFF, A. E. *Theory of wing sections : including a summary of airfoil data*. Dover Publications, New-York, 1959.
- [2] AGARD. A selection of experimental test cases for the validation of cfd codes. AR 303, NATO, August 1994.
- [3] BAUER, F., GARABEDIAN, P., AND KORN, D. *Supercritical wing sections*. No. 66 in Lecture notes in economics and mathematical systems. Springer Verlag, 1972.
- [4] BAUER, F., GARABEDIAN, P., KORN, D., AND JAMESON, A. *Supercritical wing sections II*. No. 108 in Lecture notes in economics and mathematical systems. Springer Verlag, 1975.
- [5] BURGREN, G., AND BAYSAL, O. Aerodynamic shape optimization preconditioned conjugate gradient methods. *AIAA Journal* 32, 11 (November 1994), 2145–2152.
- [6] CHAMBERS, L. *Practical handbook of genetic algorithms*. CRC Press, Florida, 1995.
- [7] GEN, M., AND CHENG, R. *Genetic algorithms and engineering design*. John Wiley & sons, Inc, New-York, Toronto, 1997.

- [8] HICKS, R. M., ET AL. Airfoil section drag reduction at transonic speeds by numerical optimization. *SAE paper*, 760477 (1976).
- [9] HICKS, R. M., AND VANDERPLAATS, G. N. Application of numerical optimization to the design of supercritical airfoils with drag creep. *SAE paper*, 770440 (1977).
- [10] HIROSE, N., TAKANASHI, S., AND KAWAI, N. Transonic airfoil design procedure utilizing a navier-stokes analysis code. *AIAA Journal* 25, 3 (March 1987), 253-359.
- [11] IBRAHIM, A., HOU, G.-W., AND TIWARI, S. Variational methods in design optimization and sensitivity analysis for two-dimensional euler equations. In *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (January 1997), no. AIAA-97-0102.
- [12] KYLE ANDERSON, W. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. In *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (January 1997), no. AIAA-97-0643.
- [13] MITCHELL, M. *An introduction to genetic algorithms*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1996.
- [14] MOHAMMADI, B. Optimal shape design, reverse mode of automatic differentiation and turbulence. In *35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (January 1997), no. AIAA-97-0099.
- [15] NIELSEN, E., AND KYLE ANDERSON, W. Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the navier-stokes equations. In *7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization* (September 1998), no. AIAA-98-4809.



- [16] OBAYASHI, S., AND OYAMA, A. Three-dimensional aerodynamic optimization with genetic algorithm. In *Proceedings of the third ECCOMAS CFD conference* (Paris, September 1996), John Wiley & Sons Ltd, pp. 420–424.
- [17] OBAYASHI, S., AND TAKANASHI, S. Genetic optimization of target pressure distributions for inverse design methods. *AIAA Journal* 34, 5 (May 1996), 881–886.
- [18] OBAYASHI, S., TAKANASHI, S., AND FEJTEK, I. Transonic wing design by inverse optimization using moga. In *Proceedings of the 6th annual conference of the CFD society of Canada* (June 1998), pp. II-41 – II-46.
- [19] OBAYASHI, S., AND TSUKAHARA, T. Comparison of optimization algorithms for aerodynamic shape design. *AIAA Journal* 35, 8 (August 1997), 1413–1414. Technical note.
- [20] PIEGL, L., AND TILLER, W. *The NURBS book*. Springer, 1995.
- [21] PRESS, W. H. *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*, 2 ed. Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1992.
- [22] SADREHAGHIGHI, I., SMITH, R. E., AND TIWARI, S. N. Grid sensitivity and aerodynamic optimization of generic airfoils. *Journal of Aircraft* 32, 6 (Nov-Dec 1995), 1234.
- [23] SELIG, M., AND MAUGHMER, M. Generalized multipoint inverse airfoil design. *AIAA Journal* 30, 11 (November 1992), 2618–2625.
- [24] SELIG, M., AND MAUGHMER, M. Multipoint inverse airfoil design method based on conformal mapping. *AIAA Journal* 30, 5 (May 1992), 1162–1170.
- [25] SONI, B., YANG, S., KOOMULLIL, R., AND HUR, J. Nurbs in cfd based design optimization. In *Numerical Grid Generation in computational field simulations* (July 1998), pp. 737–746.

- [26] VANDERPLAATS, G. N. *Numerical optimization techniques for engineering design with applications*. Series in mechanical engineering. McGraw-Hill, 1984.
- [27] VICINI, A., AND QUAGLIARELLA, D. Inverse and direct airfoil design using a multiobjective genetic algorithm. *AIAA Journal* 35, 9 (September 1997), 1499–1505.
- [28] WAKAYAMA, S., AND KROO, I. Subsonic wing design using multidisciplinary optimization. *AIAA Journal* (July 1994), 1358–1368.
- [29] ZHU, Z. W., AND CHAN, Y. Y. An efficient optimization method for aerodynamic designs - geometric genetic algorithm. In *Proceedings of the 6th annual conference of the CFD society of Canada* (June 1998), pp. II-9 – II-14.

## Annexe

# La méthode génétique

L'algorithme génétique est une méthode d'optimisation semi-statistique, développée dans les années 70 et qui repose sur les principes de l'évolution naturelle. Cette méthode connaît aujourd'hui un grand regain d'intérêt pour son efficacité dans les problèmes non linéaires se prêtant mal aux méthodes à gradient. C'est pourquoi on trouve depuis peu de nombreux ouvrages traitant du sujet [6, 7, 13].

La méthode consiste à utiliser une population d'individus, chaque individu étant un vecteur de design, et à simuler l'évolution par sélection avec cette population. Partant d'une population initiale tirée aléatoirement dans le domaine de design ou autour d'une solution de départ, on la fait évoluer en itérant les trois étapes suivantes :

**Reproduction** : des paires d'individus sont tirés au sort parmi la population pour se reproduire suivant la règle :

$$\text{Enfant1} = r * \text{Parent1} + (1 - r) * \text{Parent2}$$

$$\text{Enfant2} = (1 - r) * \text{Parent1} + r * \text{Parent2}$$

où  $r$  est un nombre aléatoire entre 0 et 1 et où les termes *Parent* et *Enfant* désignent des vecteurs contenant les variables de design correspondant à chaque individu. Grâce à cette combinaison, les individus les plus forts (i.e. ceux correspondant à une petite valeur de la fonction coût) font bénéficier leur descendance de leurs caractéristiques.

**Mutation** : dans certains cas déterminés aléatoirement suivant une probabilité de mutation donnée, la reproduction donne lieu à une mutation. La descendance s'obtient alors suivant la règle :

$$\text{Enfant1} = r * \text{Parent1} + (1 - r) * \text{Parent2} + \text{Mutation1}$$

$$\text{Enfant2} = (1 - r) * \text{Parent1} + r * \text{Parent2} + \text{Mutation2}$$

où le terme *Mutation* désigne une variation aléatoire des variables de design dont l'amplitude est réglée selon le dynamisme qu'on souhaite donner à la population. La mutation est essentielle au bon fonctionnement de l'algorithme car c'est cette opération qui permet l'évolution par l'introduction de "gènes" nouveaux dans la population.

**Sélection** : comme dans la nature, seuls les individus les plus forts peuvent survivre.

On sélectionne donc ceux ayant les plus petites valeurs de la fonction coût afin de garder une population de taille constante à chaque itération. Grâce à cette sélection, on écarte systématiquement les mauvaises solutions et on concentre l'optimisation sur les meilleurs éléments, ce qui distingue l'algorithme génétique des méthodes purement statistiques.

Pour une optimisation efficace, plusieurs paramètres interviennent. La taille de la population doit être suffisamment grande pour permettre à plusieurs types de solu-

tions de coexister et ainsi assurer la globalité de la solution finale, mais une population trop nombreuse risque de ralentir l'algorithme. La probabilité de mutation joue aussi un rôle important dans le phénomène d'évolution et une valeur de l'ordre de 30% est souvent un bon compromis. L'amplitude des mutations doit être adaptée à l'ordre de grandeur de la distance qui sépare la population initiale de la solution finale. Enfin, il est difficile de déterminer un critère d'arrêt pour ce type d'algorithme car l'évolution a tendance à se faire par sauts. De longues périodes avec peu progrès alternent avec des itérations où la population évolue très vite; ceci arrive généralement lorsqu'une mutation vient de créer un individu meilleur que l'ensemble de la population, lequel va ensuite le temps de quelques générations répandre ses gènes dans la population et ainsi la faire progresser. On peut décider de stopper l'itération après un certain nombre de générations sans changement, mais le plus simple reste encore de lancer le programme pour un nombre fixé d'itérations.

Sa robustesse fait de l'algorithme génétique un outil très utile, néanmoins cette robustesse coûte cher en temps de calcul car il faut beaucoup d'itérations, et donc beaucoup d'évaluations de la fonction coût, pour arriver à un résultat raisonnable. Toutefois, le principal intérêt de cette méthode résidant dans la recherche d'un minimum global, on s'en sert généralement comme une première étape du processus d'optimisation permettant d'obtenir une bonne approximation du minimum global avant de le déterminer avec précision en utilisant une méthode à gradient. De plus, si la population a été choisie suffisamment grande, elle contient généralement plusieurs solutions correspondant à différents minima de la fonction coût. Ceci permet donc d'obtenir naturellement un certain nombre de points de départ. Lorsque l'algorithme génétique est utilisé dans ce but, il devient alors inutile de chercher à obtenir avec précision les différents minima, ce qui permet une résolution relativement rapide.