UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UN FORMALISME DE SYSTÈMES À SAUTS POUR LA RECIRCULATION OPTIMALE DES CASSÉS DANS UNE MACHINE À PAPIER

MARYAM KHANBAGHI

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)

(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

JUILLET 98

© Maryam Khanbaghi, 1998.

National Library of Canada
Acquisitions and Bibliographic Services
395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale du Canada
Acquisitions et services bibliographiques
395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-37376-2

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

UN FORMALISME DE SYSTÈMES À SAUTS POUR LA RECIRCULATION OPTIMALE DES CASSÉS DANS UNE MACHINE À PAPIER

présentée par : KHANBAGHI Maryam

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. HURTEAU Richard, D.Ing., président

M. MALHAMÉ Roland P., Ph.D., membre et directeur de recherche

M. PERRIER Michel, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. THISTLE John G., Ph.D., membre

M. DUMONT Guy, Ph.D., membre

À MON GRAND-PÈRE

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur de recherche, professeur Roland P. Malhamé, pour m'avoir fait connaître le monde de la commande stochastique, pour sa vision scientifique très claire dont j'ai bénéficié tout au long de cette thèse et pour son encadrement modèle. Je lui suis redevable pour la confiance qu'il m'a témoignée, pour le temps qu'il a consacré à cette recherche et pour l'aide financière qu'il m'a accordée.

Je désire aussi remercier mon codirecteur, professeur Michel Perrier pour ses conseils et commentaires pertinents et pour l'aide financière qu'il m'a accordée.

Je souhaite remercier les membres de jury, professeur Richard Hurteau, professeur John Thistle et professeur Guy Dumont, pour avoir accepté d'évaluer cette thèse.

Je remercie aussi M. Alain Roche de PAPRICAN (Pulp and Paper Research Institue of Canada) pour ses conseils et son temps.

Je remercie PAPRICAN pour m'avoir attribué une bourse d'étude.

J'aimerais remercier M.Yves Léonard et M. Richard Grenier, techniciens à la section Automation et Systèmes et M. Patrick Timmons analyste de réseau au Département de Génie Électrique et de Génie Informatique.

A tous mes collègues de la section, en particulier à Jean Mbihi, je vous dis merci pour votre agréable soutien.

Enfin, un mot de remerciement à mes parents et à mon frère Aptin pour leur appui moral et leurs encouragements.

RÉSUMÉ

La fermeture des circuits d'eaux blanches dans les usines intégrées de pâtes et papiers affecte la gestion et le contrôle des inventaires d'eaux blanches et augmente l'impact des casses de papier sur la qualité du papier et sur la productivité de l'usine. Dans cette thèse, l'objectif principal est de développer une politique de recirculation des eaux blanches et des cassés. La thèse est composée de trois parties principales consacrées respectivement à une modélisation statistique des casses de papiers sur une machine à papier, à la conception d'un modèle mathématique de base pour la formulation du problème de recirculation des eaux blanches et des cassés dans l'usine de papier, et enfin au réglage de la loi de commande fondé sur la théorie des premiers temps de passage. Le cas où le processus de casses dépend du taux de variation du débit de cassés est aussi analysé.

Dans la première partie, à partir d'une analyse statistique des données de casses, nous avons montré que le processus de casses peut être représenté de façon adéquate par une chaîne de Markov à trois états : état opérationnel, état de casse de type 1 (partie humide) et état de casse de type 2 (partie sèche). Nous avons aussi établi la variation du taux de casses en fonction de la vitesse d'opération de la machine et le taux de recirculation de cassés. L'une des conséquences immédiates de cette étude, est la possibilité de formuler une

Dans la deuxième partie, nous avons montré qu'une des applications naturelles de la théorie des systèmes linéaires à sauts markoviens est le problème de la gestion des réservoirs d'eaux blanches et de cassés dans une usine de papier. Nous avons, de fait, utilisé la théorie du régulateur linéaire quadratique à sauts en vue de minimiser la variabilité des taux de recirculation tout en maintenant le temps moyen entre deux incidents (débordement ou mise à sec de réservoirs) à une borne inférieure acceptable. Une approche heuristique - fondée sur des simulations successives - est proposée pour le choix des paramètres de la mesure de performance du régulateur quadratique en vue de maintenir l'intervalle moyen entre deux incidents successifs suffisamment long.

Dans la troisième partie, une méthodologie fondée sur la théorie des premiers temps de passages des processus stochastiques est proposée pour le choix des paramètres de la mesure de performance en vue de réaliser des compromis nécessaires entre variabilité des débits de recirculés et temps moyens entre deux incidents. L'élément central de cette approche est une technique d'approximation pour évaluer le temps moyen inter-incidents. Cette technique d'approximation paraît admettre des applications diverses incluant celle suggérée dans la thèse. Enfin, une stratégie de commande pouvant tenir compte de la relation entre taux de casses et variabilité des débits de recirculés est développée.

ABSTRACT

Increasing closure of white water circuits is making mill productivity and quality of paper produced increasingly affected by the occurrence of paper breaks. In this thesis the main objective is the development of white water and broke recirculation policies. The thesis consists of three main parts, respectively corresponding to the synthesis of a statistical model of paper breaks in a paper mill, the basic mathematical setup for the formulation of white water and broke recirculation policies in the mill as a jump linear quadratic regulation problem, and finally the tuning of the control law based on first passage-time theory, and its extension to the case of control sensitive paper break rates.

More specifically, in the first part a statistical model of paper machine breaks is developed. We start from the hypothesis that the breaks process is a Markov chain with three states : the first state is the operational one, while the two others are associated with the general types of paper-breaks that can take place in the mill (wet breaks and dry breaks). The Markovian hypothesis is empirically validated. We also establish how paper-break rates are correlated with machine speed and broke recirculation ratio. Subsequently, we show how the obtained Markov chain model of paper-breaks can be used to formulate a machine operating speed parameter optimization problem.

In the second part, upon recognizing that paper breaks can be modelled as a Markov chain type of process which, when interacting with the continuous mill dynamics, yields a jump Markov model, jump linear theory is proposed as a means of constructing white water and broke recirculation strategies which minimize process variability. Reduced process variability comes at the expense of relatively large swings in white water and broke tanks level. Since the linear design does not specifically account for constraints on the state-space, under the resulting law, damaging events of tank overflow or emptiness can occur. A heuristic simulation-based approach is proposed to choose the performance measure design parameters to keep the mean time between incidents of fluid in broke and white water tanks either overflowing, or reaching dangerously low levels, sufficiently long.

In the third part, a methodology, mainly founded on the first passage-time theory of stochastic processes, is proposed to choose the performance measure design parameters to limit process variability while accounting for the possibility of undesirable tank overflows or tank emptiness. The heart of the approach is an approximation technique for evaluating mean first passage-times of the controlled tanks levels. This technique appears to have an applicability which largely exceeds the problem area it was designed for. Furthermore, the introduction of control sensitive break rates and the analysis of the ensuing control problem are presented. This is to account for the experimentally observed increase in breaks concomitant with flow rate variability.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv

REMERCIEMENTS v

RÉSUMÉ vii

ABSTRACT ix

LISTE DES FIGURES xiv

LISTE DES SYMBOLES xv

LISTE DES ANNEXES xvi

1 - INTRODUCTION 1

2 - MODÉLISATION STATISTIQUE DES CASSES DE PAPIER 13

2.1 - Fonctionnement d'une machine à papier 13

2.2 - Nature et classification des données expérimentales 15

2.3 - Hypothèse markovienne et validation expérimentale 19

2.4 - Variation des taux de transition en fonction des paramètres d'opération . . . 21

2.5 - Réglage optimal de la vitesse d'opération 23

2.6 - Conclusion 24

3 - GESTION OPTIMALE DE LA RECIRCULATION DES EAUX BLANCHES ET DES CASSÉS : UN FORMALISME DE SYSTÈMES À SAUTS MARKOVIENS . 25

3.1 - Formulation du problème 26

3.2 - Modèle mathématique simplifié 28

3.2.1 - Solution par la théorie de la commande optimale des systèmes linéaires continus à sauts markoviens 29

3.2.2 - Ajustement du modèle 30

3.3 - Stratégie de conception 31

3.4 - Conclusion 32

4 - GESTION OPTIMALE DE LA RECIRCULATION DES EAUX BLANCHES ET DES CASSÉS : ANALYSE DES INTERVALLES INTER-INCIDENTS ; EXTENSIONS 34

4.1 - Calcul approximatif des premiers temps de passage 35

4.1.1 - Nature de l'approximation mathématique 36

4.1.2 - Calcul du temps moyen inter-incidents 37

4.2 - Loi de commande dans le cas d'un processus de casses sensible à la commande 38

4.2.1 - Formulation du problème 38

4.3 - Conclusion 39

5 - CONCLUSION 41

RÉFÉRENCES 45

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Machine à papier 14

Figure 2.2 : Séquence typique du processus de casses : état 1 (fonctionnement normal), état 2 (casse partie humide) et état 3 (casse partie sèche) 20

LISTE DES SYMBOLES

λ_i : paramètre de la distribution exponentielle

Q : matrice de pondération du vecteur d'état associé à la fonction coût

R : matrice de pondération du vecteur de commande associé à la fonction coût

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I : " A Statistical Model of Paper Breaks in an Integrated TMP-Newsprint Mill"48

ANNEXE II : "Optimal White Water and Broke Recirculation Policies in Paper Mills via Jump Linear Quadratic Control : Part I - Basic Setup" 75

ANNEXE III : "Optimal White Water and Broke Recirculation Policies in Paper Mills via Jump Linear Quadratic Control : Part II - First Passage-Time Analysis ; Extensions" . . .104

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'industrie des pâtes et papiers est confrontée de façon de plus en plus marquée à la question de son impact sur l'environnement. En effet, les nouvelles réglementations environnementales (septembre 95) obligent cette industrie à traiter ses effluents de manière plus poussée. La réduction du volume d'effluents entraîne un accroissement de la recirculation des eaux du procédé, et il en découle deux types de problèmes nouveaux dans l'opération des usines:

- Le premier est un problème de *qualité* du papier produit : l'augmentation significative de la concentration en matières dissoutes ou en suspension dans les eaux recirculées affecte les propriétés de la pâte, modifie les propriétés de drainage et de rétention de la feuille humide, et enfin détériore la qualité du papier produit.

- Le second problème en est un de *vulnérabilité accrue* des usines dans leur fonctionnement : du fait de la recirculation des eaux blanches, l'opération de chacune des unités et de l'ensemble du système de fabrication devient plus sensible aux perturbations dans la production ; bris de la feuille sur la machine à papier, arrêt temporaire d'une machine à papier, déséquilibre entre les productions de pâte et de papier, panne d'équipement, etc...

Afin de pallier à ce problème, deux approches peuvent être considérées. La première consiste à réduire la sensibilité de l'opération aux perturbations par l'adjonction de réservoirs d'eaux blanches de grande capacité, ce qui aurait pour effet de réduire les interactions entre les différents niveaux de traitement du papier. Cela peut être une solution coûteuse et qui n'est pas toujours envisageable. La seconde approche consiste à utiliser l'information sur la nature et les statistiques des casses (bris de la feuille sur la machine) afin de gérer les inventaires existants par des techniques modernes de contrôle tendant à favoriser l'utilisation optimale de la capacité de stockage. Dans cette thèse, nous retenons la seconde approche.

La mise au point de toute stratégie de contrôle nécessite une connaissance au moins partielle de la dynamique du système et de ses perturbations. Étant donné que les casses sur la machine à papier constituent la principale perturbation au réseau d'eaux blanches, et sachant que la nature, l'instant de manifestation et la durée des casses sont aléatoires, la gestion et le contrôle de l'inventaire et de la répartition des eaux blanches et des cassés deviennent essentiellement un problème d'optimisation stochastique qui, à notre connaissance, n'a jamais été abordé dans le but d'optimiser l'utilisation de la capacité de stockage disponible. Même si la fermeture du réseau d'eaux blanches dans les usines intégrées de pâtes et papiers attire un grand intérêt depuis de nombreuses années, il n'y a eu jusqu'à présent que très peu de travaux consacrés à la gestion des niveaux de réservoirs.

Les stratégies de contrôle utilisées jusque là pour la gestion des eaux blanches et des cassés sont limitées par une vision déterministe d'un phénomène de nature essentiellement stochastique.

Pendant les dernières trente années, des progrès considérables ont été accomplis quant à l'application des méthodes de contrôle avancé dans l'industrie de pâtes et papiers. Dans ce domaine, Aström fut le premier à proposer une stratégie de contrôle utilisant la théorie de la commande linéaire stochastique [2]. La loi de commande optimale présentée (la commande à variance minimale) a pour but de contrôler le procédé de telle sorte que les fluctuations du grammage (poids de base) soient minimales (un contrôle serré du grammage permet d'obtenir une meilleure qualité de papier, c'est-à-dire un papier plus uniforme). Cegrell et Hedqvist [6] sont aussi parmi les premiers à appliquer une commande adaptative pour le contrôle des fluctuations du grammage et de l'humidité du papier. Fjeld [11] a appliqué la théorie de la commande optimale stochastique LQG pour le contrôle de la consistance de pâte épaisse et le contrôle de la caisse d'arrivée. Dans la partie de la formation de la pâte, Bélanger *et al* [3] et Dumont *et al* [9] proposent un régulateur auto-réglable pour le contrôle de niveau des copeaux dans le lessiveur Kamyr. Dumont [8] applique un régulateur auto-réglable pour le contrôle de la charge du moteur du raffineur. Les travaux cités sont parmi les premières applications des méthodes de contrôle avancé dans l'industrie des pâtes et papiers. Pour notre recherche, nous nous sommes penchés plus particulièrement sur des stratégies de contrôle relatives à la recirculation des cassés et des eaux blanches dans

les usines de pâtes et papier. Dans ce qui suit nous rapportons les résultats de notre recherche bibliographique.

A partir d'une analyse des données de casses recueillies sur une machine à papier durant une année, Rounsley [20] conclut que la distribution des durées de casses suit une loi exponentielle. Il utilise un simulateur à événements discrets pour évaluer le système de manutention des cassés.

A l'aide d'un simulateur développé à Paprican, Croteau et Roche [7] analysent le problème de la recirculation des cassés et de la gestion des eaux blanches. Ils proposent deux stratégies de gestion pour les réservoirs d'eaux blanches. L'une est le contrôle de niveau à l'aide de l'ajout d'eau fraîche, et l'autre est un ajout constant d'eau fraîche à ce réservoir tout au long de l'opération. En ce qui concerne les réservoirs de cassés, les auteurs (d'après leurs résultats de simulation) concluent qu'il n'est pas possible d'éliminer le débordement de ces réservoirs pendant les journées où le nombre des casses est supérieur à la moyenne.

Bussière *et al.* [6] ont aussi utilisé un simulateur développé à Paprican pour analyser le problème de la recirculation des fines (petites fibres) de l'eau blanche dans une usine intégrée de papier journal. Ils constatent que les casses, et l'augmentation subséquente de la demande d'eaux blanches en vue de la dilution de casses, sont les seules perturbations susceptibles de provoquer un changement significatif du transfert de fines et donc une

variation des caractéristiques de la composition de fabrication. Cet excès de demande d'eaux blanches fait diminuer le niveau du réservoir associé. De plus, sachant qu'une mauvaise gestion du système de réseau d'eaux blanches peut entraîner une grande consommation d'énergie, des fluctuations sur les propriétés de la pâte et un transfert occasionnel des fines d'une ligne de production à l'autre, ils évaluent deux stratégies de contrôle. L'une est le contrôle du niveau de réservoir d'eaux blanches à l'aide du débit d'eaux blanches riches venant de la machine à papier, l'autre est le contrôle de ce niveau à l'aide de l'ajout d'eau fraîche.

A la suite de ce travail, Noël *et al.* [19] proposent aussi des stratégies de gestion des eaux blanches dans une usine moderne de papier journal PTM. Ils proposent d'abord de recirculer les eaux blanches venant de la machine à papier. Mais étant donné que cela n'est pas suffisant, ils proposent une réutilisation appropriée des eaux blanches venant de la presse et une augmentation de l'utilisation des eaux blanches dans les douches de la machine à papier. D'après les résultats de leurs simulations, ces stratégies permettent de réduire la consommation d'eau fraîche qui est la plus grande source d'augmentation de l'inventaire d'eau dans l'usine. Elles permettent, en outre, de minimiser le débordement des réservoirs d'eaux blanches.

Margolis [17], décrit le développement d'un système expert qui fait le diagnostic des problèmes à la suite d'une casse dans la machine à papier. Ce système est développé en vue

de réduire la fréquence et la durée de l'arrêt non prévu de la machine à papier afin de réaliser des économies d'énergie et d'argent.

Comme mentionné plus haut, la limitation majeure des travaux présentés précédemment est que l'étude se fait dans un environnement déterministe, en négligeant le caractère aléatoire du processus de casse. En outre, même si dans certains (rares) travaux, le processus de casses est considéré comme un phénomène aléatoire, aucune méthode systématique de contrôle de niveaux des réservoirs n'a été proposée.

Lorsque des casses surviennent, l'opération de la machine se poursuit, mais dans un mode différent (redistribution des inventaires d'eaux blanches, modification du parcours de la pâte à papier, changement de la composition de l'alimentation à la machine). L'opération de l'usine sera classifiée suivant un certain nombre de modes. Le passage d'un mode d'opération à l'autre sera associé à un changement brusque des paramètres caractérisant les aspects continus de la dynamique. Ces passages pourraient être décrits dans le cas le plus simple par une chaîne de Markov. De plus, étant donné la capacité de stockage limitée des réservoirs d'eaux blanches et de cassés, il devient nécessaire de recourir à une recirculation régulière. Cependant, il est utile de veiller à limiter l'impact sur le système du point de vue de la variation en température et de la variation en nature du mélange de pâte à l'entrée de la machine. Il importe également d'éviter les débordements des réservoirs ou encore une vidange excessive de ces derniers, et ceci, dans des conditions de stochasticité quant à la

nature, l'instant de manifestation et la durée des casses. Par conséquent, le formalisme des *systèmes à sauts markoviens* nous a semblé constituer un contexte naturel en vue de la formalisation mathématique des compromis nécessaires, et leur expression en une loi de commande appropriée. Dans ce qui suit, nous passons en revue le segment particulier de la littérature scientifique associée aux systèmes stochastiques à sauts, et qui a constitué le point de départ de nos travaux de thèse.

L'intérêt porté aux systèmes linéaires à sauts a été initié par les travaux de Krasovskii, Lidskii [14] et Florentin [12]. Ce type de système qui possède des paramètres aléatoires, mais constant par morceaux, est utilisé principalement pour modéliser des systèmes sujets à des pannes, ou encore à des changements brusques de modes d'opération lorsque l'environnement du système est modifié. Plus tard Sworder [21] et Wonham [25] proposent la résolution du problème de commande optimale de tels systèmes sur un horizon de temps fini. Sworder utilise le principe de maximum stochastique, alors que Wonham utilise la programmation dynamique stochastique. Ce dernier a de plus résolu le problème dans le cas d'un horizon infini tout en dérivant un ensemble de conditions suffisantes pour assurer l'existence d'une loi de commande finie unique en régime permanent.

Sworder est parmi les premiers à s'intéresser à l'applicabilité des systèmes à sauts. En 1973, Sworder et Robinson [23] ont proposé une loi de commande sous optimale pour une classe de système à sauts, pour laquelle les variations du processus à sauts dépendent de

la loi de commande appliquée. A cause de la complexité de cette étude, peu de recherches ont été entreprises depuis.

Plus tard, Sworder et Rogers [24] se sont intéressés au problème de commande dans une centrale à énergie solaire. Le processus dynamique linéarisé autour d'un point d'opération d'un générateur de vapeur à énergie solaire change brusquement quand les nuages bloquent les rayons de soleil. Le modèle utilisé est un modèle à sauts markoviens. Les sauts sont associés aux mouvements soudains des nuages. Il s'ensuit que le régulateur de température de vapeur qui est utilisé pour maintenir des conditions adéquates pour la sortie des vapeurs doit contrôler un système de structure (localement linéaire) variable. Les auteurs proposent une commande optimale pour un tel système.

En outre, les propriétés de commandabilité (stabilisabilité) et d'observabilité (détectabilité) pour les systèmes à sauts markoviens sont introduites et étudiées d'abord par Mariton [18] et ensuite par Ji et Chizeck [13]. Les conditions nécessaires et suffisantes de convergence du régulateur linéaire quadratique à sauts sont fondées sur de telles propriétés. De plus, pour le calcul du gain de ce régulateur il est nécessaire de résoudre un système d'équations matricielles de Riccati couplées ayant une structure particulière. Nombre de chercheurs se sont penchés sur ce problème, mais nous retenons en particulier Abou-Kandil *et al* [1]. Ils ont développé un algorithme itératif pour la résolution du système d'équations algébriques de Riccati couplées en se basant sur les propriétés des équations algébriques de

Riccati classiques.

Dans le cas linéaire quadratique, le problème de la commande optimale des systèmes à sauts markoviens admet une solution analytique si l'on choisit d'ignorer les contraintes sur les hauteurs maximales et minimales permises dans les réservoirs. Or, un des objectifs principaux de la commande dans la gestion des eaux blanches et des cassés, est, outre une limitation des taux de variation des flux recirculés, d'éviter précisément les débordements ou la mise à sec des réservoirs. De ce point de vue, nous pensons alors que la théorie des *premiers temps de passages* des processus stochastiques (calcul de la fonction densité de probabilité du temps que met un processus aléatoire pour passer d'un niveau de départ à un niveau donné différent pour la première fois) permet d'éclaircir le choix des paramètres qui caractérisent la mesure de performance, et dont dépendront directement, la qualité et l'applicabilité de la commande obtenue. Afin de pouvoir appliquer cette théorie, nous nous sommes intéressés à son application dans un contexte quelque peu similaire, celui des ateliers de fabrication. Malhamé et Boukas [15] sont parmi les premiers à appliquer la théorie des premiers temps de passage dans ce domaine. Partant de ce travail, Malhamé [16] propose une méthodologie relativement simple pour le calcul des moments d'ordre arbitraire des premiers temps de passage pour un processus stochastique scalaire avec vitesses constantes par morceaux. Plus tard, El-Férik et Malhamé [10] généralisent cette méthodologie. Nous exploiterons ces travaux dans notre recherche.

La présente thèse a pour but, d'une part, de présenter le développement d'un modèle statistique de casses dans une machine à papier et les applications qui peuvent en découler, et d'autre part de développer des outils d'analyse permettant de construire des stratégies de contrôle visant à minimiser l'impact des perturbations sur la stabilité et le rendement des usines intégrées, opérant à un degré élevé de fermeture du réseau d'eaux blanches. En plus de la présente introduction, la thèse comporte quatre chapitres dont nous décrivons brièvement le contenu dans ce qui suit.

Dans notre étude, nous avons jugé essentiel de fonder notre modélisation des casses, autant que possible, sur des données expérimentales. Ainsi, au Chapitre 2, à travers la présentation du fonctionnement d'une machine à papier, nous analysons et classifions un ensemble de données expérimentales issues d'une usine de pâtes et papier situé au Québec. Cette analyse nous permettra de suggérer que le processus de casses peut raisonnablement être considéré comme une chaîne de Markov à trois états. L'une des premières applications intéressantes qu'il devient possible d'envisager à partir d'un tel modèle est celle de l'optimisation des paramètres d'opération (la vitesse en particulier) de la machine. Un tel modèle est essentiel pour concevoir une commande optimale stochastique, et son développement constitue notre première contribution. L'article intitulé "A Statistical Model of Paper Breaks in an Integrated TMP-Newsprint Mill" est la référence principale de ce chapitre.

Au Chapitre 3, nous présentons le problème de gestion des eaux blanches et des cassés, en proposant une méthodologie de résolution basée sur les techniques de commande des systèmes à sauts proposées dans la littérature [24]. Un modèle mathématique simplifié est proposé, et un problème de commande stochastique optimale de type linéaire quadratique est formulé. Sa solution mathématique est possible si l'on choisit d'ignorer les contraintes sur les hauteurs maximale et minimale permises dans les réservoirs. Une approche de réglage par simulation de Monte Carlo, des paramètres de la mesure de performance quadratique, est proposée en vue de maintenir les temps moyens entre incidents (débordements ou mise à sec de réservoirs) à une borne inférieure acceptable. L'article intitulé "Optimal White Water and Broke Recirculation Policies in Paper Mills via Jump Linear Quadratic Control : Part I - Basic Setup", constitue la référence principale de ce chapitre.

Finalement, au Chapitre 4, nous montrons comment la théorie des premiers temps de passage des processus stochastiques permet de développer des expressions analytiques approximatives des temps moyens entre incidents pour un choix donné de mesure de performance. Le réglage de la commande devient de ce fait beaucoup plus aisé. En outre, dans ce chapitre, en se basant sur l'article [23], nous proposons une extension de la commande optimale au cas plus réaliste où nous considérons des processus de casses dépendant du taux de variation du flux de retour des cassés, sachant qu'en pratique, lorsqu'on minimise la variation du débit de retour de cassés, il est possible de réduire la fréquence des casses. L'article intitulé "Optimal White Water and Broke Recirculation

Policies in Paper Milles via Jump Linear Quadratic Control: Part II - First Passage-Time Analysis ; Extensions " constitue la référence principale de ce chapitre. Les chapitres 3 et 4 constituent l'essentiel de notre contribution. Enfin, dans le Chapitre 5, nous présentons nos conclusions et proposons des extensions possibles à nos recherches.

CHAPITRE 2

MODÉLISATION STATISTIQUE DES CASSES DE PAPIER

Dans ce chapitre, à partir de la présentation du fonctionnement d'une machine à papier, nous classifions et analysons les données expérimentales de casses. Cette analyse permet de penser qu'il est raisonnable de modéliser le processus de casse par une chaîne de Markov à trois états. Nous présentons une des premières applications de ce modèle.

L'article intitulé : " A Statistical Model of Paper Breaks in an Integrated TMP-Newsprint" mis en annexe, constitue l'essentiel de ce chapitre.

2.1 - FONCTIONNEMENT D'UNE MACHINE À PAPIER

L'usine de papier est composée en général de trois grands secteurs. Dans le premier secteur le bois est traité et récupéré sous forme de copeaux. Parfois ce secteur est séparé de l'usine de papier. Dans le deuxième secteur la pâte à papier est préparée à partir des copeaux. Enfin le troisième secteur est celui de la machine à papier à proprement parler. C'est la partie où le papier se forme. De plus c'est le secteur le plus instrumenté où les problèmes de commande les plus ardus se posent. Nous nous intéresserons donc plus particulièrement à

ce dernier secteur.

Un schéma simplifié d'une machine à papier est présenté à la Figure 1. Dans le secteur de la machine à papier il existe un certain nombre de réservoirs. Certains de ces réservoirs permettent la récupération, l'emmagasinage et la redistribution de l'eau blanche à l'intérieur de l'usine de papier, d'autres permettent la récupération des feuilles cassées et des rognures.

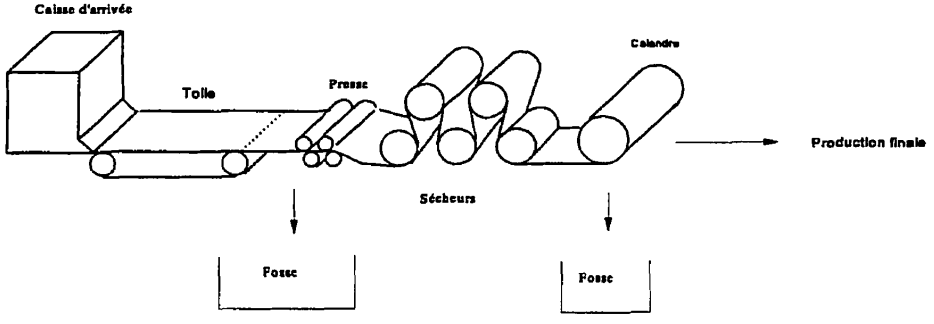


Figure 2.1 : Machine à papier

La machine à papier comporte quatre sections en général. La première est la partie humide ; c'est la section à l'intérieur de laquelle la feuille prend forme en passant d'une consistance de 1% à 20%. La *consistance* est le pourcentage massique de fibres sèches contenu dans la pâte. Ainsi une grande quantité d'eau est extraite de la pâte. Toute eau

soutirée de la pâte contient de petites fibres appelées *fines*, qui donnent une coloration blanchâtre à l'eau. C'est pourquoi cette eau est appelée *eau blanche*. Les eaux blanches sont récupérées dans les réservoirs. Dans cette première section la feuille est supportée par une toile. La deuxième section est la presse ; il s'agit d'une série de rouleaux, qui permettent d'extraire l'eau de la pâte par action mécanique pour la ramener à une consistance de 40%. La troisième section est la sécherie ; elle est composée d'une série de rouleaux à l'intérieur desquels circule une vapeur surchauffée à basse pression. La feuille à la sortie de la sécherie a une consistance de 92%. Enfin la quatrième section comporte la calandre et l'enrouleuse.

Il faut remarquer que la vitesse de roulement (liée à l'épaisseur de la pâte à papier) varie le long du parcours. L'ordre de grandeur de la vitesse actuelle des machines est de 1 km/min.

2.2 - NATURE ET CLASSIFICATION DES DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Régulièrement la production du papier est perturbée par des casses de la feuille de papier. Ces casses peuvent se produire à n'importe quel moment le long du parcours de feuille de papier. Les casses surviennent lorsque la pâte est de mauvaise qualité ou lorsque certains paramètres d'opération de la machine ne sont pas optimaux, comme par exemple la température. Il existe des réservoirs dont la fonction est de permettre de récupérer la pâte à papier qui ne suit plus son cours suite à une casse. Cette pâte est rediluée pour atteindre une

consistance de 4% environ, qui peut nécessiter des tonnes d'eaux de dilution. Ceci entraîne un important transfert d'eaux blanches des réservoirs d'eaux blanches aux réservoirs de cassés, entraînant une baisse des niveaux de réservoirs d'eaux blanches. Parfois un ajout en eau fraîche est nécessaire pour éviter la mise à sec des réservoirs. Cet ajout modifie les caractéristiques de l'eau blanche dans les usines (baisse de consistance et de température) et modifie donc les caractéristiques de la pâte appelée à réalimenter la machine, et de ce fait celles du papier qui en résulte.

La machine peut donc être considérée comme possédant un mode d'opération *normal*, et plusieurs modes de *panne* correspondant à l'apparition de casses de différents types (différents points de parcours de la pâte à papier). En général, dans le mode de fonctionnement normal, la machine est contrôlée. Il existe des contrôleurs pour la régulation du niveau des réservoirs, d'autres contrôlent la qualité du papier, le débit de la caisse d'arrivée (voir Figure 1). Lorsqu'une casse se présente, tout le fonctionnement subséquent se fait manuellement ; la machine n'est pas arrêtée, et toute la production tombe dans les fosses (réservoirs de cassés) et ceci, en attendant que les techniciens remettent la feuille dans la machine. Comme nous l'avons dit plus haut la casse crée une perturbation, car il faut recirculer la pâte issue des feuilles cassées (que nous appellerons *cassés* dans le reste du texte) et ceci entraîne une augmentation de la consommation d'eau. D'autre part, le pourcentage de cassés dans la pâte parvenant à la caisse d'arrivée est alors augmenté, facteur pouvant lui-même entraîner l'augmentation des casses.

Bien évidemment, l'effet des perturbations est proportionnel à la durée des casses. Comme la position, l'instant d'arrivée des casses ainsi que leur durée sont aléatoires, notre but est d'analyser à partir d'échantillons de taille suffisante, le comportement statistique des casses. Nous en tirerons un modèle de prédiction de fréquence, durée et type de casse. Ce modèle sera, tel qu'annoncé plus haut, avant tout utilisé pour les besoins de l'analyse, de type chaîne de Markov. Auparavant, il faudra cependant valider l'hypothèse markovienne ainsi qu'estimer les paramètres de la chaîne de Markov.

Mais tout d'abord, comment pouvons-nous classifier les casses de manière utile ? Plusieurs types de classifications sont possibles. Les casses peuvent être classifiées en fonction de :

- la durée (la durée d'une casse peut varier de quelques minutes à quelques heures),
- l'endroit de la casse,
- le pourcentage des cassés dans la pâte,
- les causes de la casse.

Pour les besoins de cette thèse, la classification choisie a été dictée par notre objectif final qui est celui d'aboutir à un modèle dynamique du procédé qui soit le plus simple possible (nombre minimal d'états de casse différents), mais tel que les états de casse retenus correspondent à la mise en jeu de réservoirs différents et d'une recirculation de l'eau différente. Chaque type de casse est donc associé à une dynamique différente de l'usine

durant la casse. Nous avons par conséquent opté pour une classification des casses en fonction de l'endroit où la casse survient. Il s'avère de surcroît que l'endroit de la casse est fortement corrélé avec la durée de réparation requise.

Pour notre étude nous avons choisi une usine située au Québec. La particularité de cette usine est qu'elle comporte trois machines à papier de différents taux de fiabilité (Dynaformer, Papriformer et Bel-Baie II). Leurs sections de formation sont différentes et elles sont toutes alimentées par le même réservoir de cassés. La machine Dynaformer, avec la vitesse d'opération la moins rapide, reçoit environ 25% de cassés et la machine Bel-Baie II avec la vitesse d'opération la plus rapide, reçoit environ 50% de cassés. La majorité des casses sont envoyées vers cette machine car elle est la plus fiable. Les données ont été réunies durant 4 mois (116 jours) et contiennent un total de 2005 casses pour les trois machines.

A l'aide des données fournies par cette usine nous avons abouti à une classification des casses en deux grands types. Le premier type est celui des casses dans la section bout humide, (le rouleau coucheur), ainsi que la presse et la sécherie. Afin d'alléger le texte nous appellerons l'ensemble *partie humide*. Selon la machine, il existe une à deux fosses pour récupérer de tels cassés. Leur durée (temps requis pour remettre la feuille sur la machine) est en général entre 10 à 60 minutes. Le deuxième type est celui des casses dans la calandre et l'enrouleuse. Nous appelons l'ensemble *partie sèche*. Étant donné qu'ils sont situés à la fin

de la machine, leur durée est en générale inférieure à 10 minutes.

Dans le paragraphe suivant, nous rapportons une analyse des données expérimentales de casses selon la taxonomie décrite ci-dessus.

2.3 - HYPOTHÈSE MARKOVIENNE ET VALIDATION EXPÉRIMENTALE

L'hypothèse d'un processus de casse markovien est fort attirante au niveau de la simplicité d'analyse mathématique du modèle résultant, mais il est nécessaire de valider auparavant sa plausibilité.

Une condition de validité de l'hypothèse markovienne est l'indépendance statistique des durées de casses successives du même type ou de différents types. Une deuxième condition est la vérification du caractère exponentiel des temps de séjour de la chaîne de Markov.

Pour notre étude nous admettons que notre processus de casse est stationnaire, c'est-à-dire que les propriétés statistiques d'un ensemble d'observations de ce processus générées sequentiellement dans le temps sont indépendantes du temps absolu. Une condition nécessaire pour la stationnarité est que la fonction de densité soit indépendante du temps et donc un ensemble stationnaire d'observations ait une moyenne et une variance constantes.

Nous avons calculé à partir des données les estimés des fonctions d'autocorrélation pour des durées de casses successives et ceci pour les deux types de casses, partie sèche et partie humide, des trois machines. La méthode de calcul utilisée est celle donnée par Box et Jenkins [4]. D'après les résultats de calcul nous constatons que les temps de séjours de chaque type de casse ne sont pas corrélés entre eux (voir Fig.1-4, Annexe I). Nous supposons alors pour notre étude qu'ils sont indépendants, bien que la non corrélation ne représente qu'une condition nécessaire et en général non suffisante d'indépendance.

La deuxième condition de validité de l'hypothèse markovienne est que le temps de séjour d'une chaîne de Markov dans un état i soit distribué de façon exponentielle avec une moyenne $1/\lambda_i$ où λ_i est le paramètre de la distribution exponentielle. Nous avons donc tracé le nombre de casses en fonction de durée de chaque casse (voir Fig.5, Annexe I). Ceci permet de vérifier si le temps passé dans chaque état suit une loi exponentielle. λ_i est l'inverse de la moyenne de durée des casses de type i.

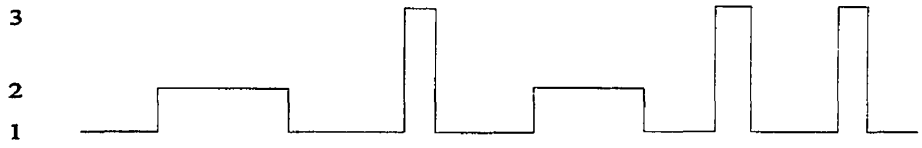


Figure 2.2 : Séquence typique du processus de casses : état 1 (fonctionnement normal), état 2 (casse partie humide) et état 3 (casse partie sèche).

Le caractère exponentiel des temps de séjours dans chaque état, et aussi l'indépendance entre ces temps de séjours constituent une validation préliminaire de modélisation du processus comme chaîne de Markov à trois états. La figure 2 représente une séquence typique de ce processus. Connaissant la relation qui existe entre les temps moyens de séjour dans chaque état et les taux de transitions, nous pouvons estimer la matrice de taux de transition (voir Section III-2,Annexe I)

2.4 - VARIATION DES TAUX DE TRANSITION EN FONCTION DES PARAMÈTRES D'OPÉRATION

Nous avons montré à travers une analyse statistique que le processus de casses peut être adéquatement représenté par une chaîne de Markov continue à trois états. Pour cette analyse nous avons supposé que les taux de transitions ne dépendent pas des paramètres d'opérations de la machine. En réalité ils peuvent dépendre de plusieurs paramètres. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'influence du taux de recirculation de cassés et de la vitesse d'opération de la machine sur ces taux de transitions. Nous avons constaté que pour un pourcentage fixe de taux de recirculation de cassés, une augmentation de la vitesse entraîne une augmentation des taux de transitions vers les états de casses (voir Fig.7, Annexe I). Nous avons également étudié l'effet de l'augmentation du taux de recirculation sur les taux de transitions pour un éventail de vitesses relativement restreint (vitesse relativement constante).

Nous avons alors pu constater que pour la machine 1, lorsque le taux de recirculation de cassés augmente, les taux de transitions vers les états de casses décroissent faiblement. Tandis que pour la machine 3, l'augmentation du taux de recirculation entraîne une faible croissance du taux de transition (voir Fig.9-10, Annexe I). Ces effets en apparence contradictoires découlent du fait que dans l'usine particulière étudiée, les trois machines sont alimentées par le même réservoir de cassés et les pourcentages de recirculation correspondent en fait aux pourcentages globaux. La machine 3 étant la plus fiable, reçoit plus de recirculés que les autres. Ainsi, lorsqu'une casse arrive sur la machine 1, le taux de recirculation individuel vers cette machine décroît alors qu'il croît pour les deux autres machines. Il s'ensuit qu'une augmentation du taux de recirculation global entraîne une augmentation du taux de transition vers les états de casses pour la machine 3.

En outre, nous avons établi la variation du taux de casses à la bobineuse (la partie où les rouleaux de feuille sont embobinés pour le transport et la manutention) en fonction du taux de recirculation de cassés ainsi que la vitesse d'opération (voir Fig.8 et Fig.11, Annexe I). Notons que le taux de casses à la bobineuse peut être considéré comme un indicateur approximatif de la qualité du papier fini. Cette courbe de dépendance peut alors être utilisée en vue d'établir un choix optimal de vitesse d'opération de la machine à papier pour un taux de recirculation de cassés fixe. Nous rapportons ce résultat dans la section qui suit.

2.5 - RÉGLAGE OPTIMAL DE LA VITESSE D'OPÉRATION

L'objectif ici est de développer, compte tenu des informations sur la variation des divers taux de casses en fonction de la vitesse d'opération de la machine, une méthode systématique pour le choix de cette dernière. En effet, lorsque la vitesse augmente, la productivité semble augmenter pour un intervalle de temps court, suite à quoi le nombre de casses tend à augmenter, et par conséquent également le taux de recirculation des cassés. Ce dernier a éventuellement un impact négatif sur les productivité et qualité du papier produit. Un choix raisonnable de la vitesse d'opération serait celui qui optimiserait la moyenne à long terme d'une mesure combinée de productivité et de qualité de papier produit (voir Section V, Annexe I).

Dans le cas de l'usine étudiée, la vitesse optimale calculée est rarement celle utilisée par le personnel de l'usine. La machine à papier opère de fait à une vitesse qui est soit en-dessous, soit au-dessus de cette valeur. Il serait donc peut-être possible de réduire le nombre de casses et ainsi augmenter les bénéfices réels de l'usine, si la machine fonctionnait à cette vitesse. L'obtention de la vitesse optimale constitue la première application du modèle markovien.

2.6 - CONCLUSION

Dans ce chapitre à partir d'une analyse statistique des donnés de casses, nous avons montré que le processus de casses peut être représenté de façon adéquate par une chaîne de Markov à trois états. Par la suite, en se concentrant sur un ensemble restreint de données (vitesse constante ou taux de recirculation constant), nous avons établi de façon empirique la variation des taux de casses en fonction de la vitesse d'opération et du taux de recirculation des cassés. L'une des conséquences immédiates de cette étude, est la possibilité de formuler une approche systématique en vue du choix de la vitesse d'opération de la machine à papier. Mais l'application la plus importante du modèle demeure la conception d'une stratégie de contrôle stochastique pour la gestion de niveau des réservoirs d'eaux blanches et de cassés. En effet, la modélisation du processus de casses est le passage obligé en vue de développer une stratégie de gestion optimale des cassés. Le développement d'une telle stratégie est l'objet des deux chapitres suivants.

CHAPITRE 3

GESTION OPTIMALE DE LA RECIRCULATION DES EAUX BLANCHES ET DES CASSÉS : UN FORMALISME DE SYSTÈMES À SAUTS MARKOVIENS

Dans ce chapitre nous nous appuyons sur le formalisme du régulateur linéaire quadratique à sauts markoviens pour résoudre le problème de la gestion des réservoirs dans un contexte simple de deux réservoirs, l'un destiné au stockage des eaux blanches, et l'autre destiné au stockage des cassés. Après avoir présenté le problème de gestion des réservoirs d'eaux blanches et de cassés dans une usine de papier, nous développons un modèle mathématique simplifié du système, et obtenons pour ce modèle une commande optimale fondée sur la théorie du régulateur linéaire quadratique à sauts markoviens. Cette commande ne tient toutefois pas compte des contraintes sur l'espace d'état (hauteurs maximales et minimales des réservoirs). Afin de pallier à cette insuffisance, nous suggérons, une méthodologie itérative fondée sur la simulation, permettant de choisir les paramètres de la mesure de performance en vue d'obtenir un compromis acceptable entre la variabilité de la commande et la durée des temps moyens entre incidents de débordement ou de mise à sec

des réservoirs.

L'article intitulé "Optimal White Water and Broke Recirculation Policies in Paper Mills via Jump Linear Quadratic Control : Part I - Basic Setup" mis en annexe constitue l'essentiel de ce chapitre.

3.1 - FORMULATION DU PROBLÈME

La fermeture des circuits d'eaux dans les usines intégrées de pâtes et papiers affecte la gestion et le contrôle des inventaires d'eaux blanches et augmente l'impact des casses de papier sur la qualité du papier et sur la productivité de l'usine. Au chapitre précédent nous avons montré que le taux de recirculation des cassés peut affecter la fréquence des casses de papier et éventuellement la qualité du papier. En minimisant la variation du débit de cassés recirculés vers la machine à papier, il serait donc possible de diminuer la variabilité du mélange de la pâte à l'entrée de la machine, et de diminuer les casses ainsi qu'améliorer la qualité de papier. Il est par conséquent important de maintenir un débit de recirculation aussi constant que possible. Nous savons d'autre part qu'une recirculation insuffisante de cassés peut entraîner le débordement de son réservoir. Minimiser ce dernier type d'incidents en même temps que minimiser la variabilité du débit de recirculation de cassés, constituent des objectifs contradictoires et il faudra savoir réaliser un compromis acceptable dans le choix de la commande. Enfin, une grande quantité d'eau est nécessaire pour diluer les cassés

en vue de la recirculation. L'insuffisance d'eaux blanches pour dilution entraîne une mise à sec du réservoir associé ou un ajout d'eau fraîche. Les deux situations - mise à sec ou ajout d'eau fraîche - sont indésirables pour l'usine, l'ajout d'eau fraîche pouvant entraîner une variation de la température du mélange de pâte à l'entrée de la machine. Il est alors impératif de minimiser l'ajout d'eaux fraîches et ainsi minimiser la variabilité du débit d'eaux blanches vers l'atelier de Pâte Thermomécanique (l'atelier où l'on prépare la pâte). Développer une stratégie de contrôle qui permettrait de minimiser la recirculation de cassés, d'eaux blanches et leur variabilité, ainsi que l'ajout d'eau fraîche et l'excès d'eaux blanches vers l'atelier de PTM (Pâte Thermomécanique), tout en empêchant les réservoirs de déborder ou de se vider constitue donc l'objectif principal de notre étude.

Les casses de papier sont accompagnées de changements soudains de structure et de paramètres dans la dynamique du système. Ces changements peuvent être modélisés, comme suggéré au chapitre précédent, par une chaîne de Markov. Si de plus on impose un apport d'eau fraîche nul dans le système, le modèle obtenu devient linéaire. (En annulant l'apport d'eau fraîche, les concentrations des débits du réservoir d'eaux blanches deviennent égales). Il est alors possible de ramener le problème à celui de synthèse d'un régulateur linéaire quadratique à sauts markoviens. Ce chapitre relate le développement du modèle mathématique à sauts markoviens pour les réservoirs de cassés et d'eaux blanches, ainsi que la synthèse analytique de la commande optimale, fondée sur la théorie associée de régulation linéaire quadratique. Le réglage des paramètres de la mesure de performance du problème

de commande optimale correspondant est effectué par simulation.

3.2 - MODÈLE MATHÉMATIQUE SIMPLIFIÉ

Tel que mentionné plus haut, chaque machine à papier possède des réservoirs qui permettent la récupération, l'emmagasinage et la recirculation des eaux blanches et des cassés. Pour notre étude nous avons supposé que la machine à papier possède seulement *deux* réservoirs. Le premier récupère l'eau blanche qui est ensuite recirculée soit vers l'atelier de PTM ou vers le réservoir de dilution de cassés. Le second récupère les cassés qui y sont dilués avant d'être graduellement renvoyés vers la machine à papier. Dans l'élaboration de notre modèle, nous supposons que le débit et la concentration d'eaux blanches provenant de la machine à papier sont constants et ne dépendent pas du type de casses. Nous éliminons également l'ajout d'eau fraîche afin de rendre le modèle linéaire. La minimisation de l'ajout d'eau fraîche est de toute manière un objectif désirable. En supposant l'apport d'eau fraîche nul, il est possible que le réservoir d'eaux blanches se vide complètement. Afin d'estimer analytiquement le temps moyen entre deux incidents de ce type, une approche sera proposée au Chapitre 4.

Sous les hypothèses simplificatrices ci-dessus, le modèle obtenu est linéaire, invariant dans le temps et continu par morceaux avec des changements soudains lors de casses associés à un changement brusque de débit et concentration des cassés déversés dans le

réservoir de cassés. En effet lorsqu'il n'y a pas de casses, le réservoir de cassés reçoit uniquement les rognures (les bords coupés de la feuille) qui ont un débit et une concentration constantes données. La machine est alors dans l'état de fonctionnement, que nous appelons mode 1. Lors d'une casse, ce réservoir reçoit les cassés. La machine est alors dans l'état de casse que nous appelons mode 2 ou mode 3 respectivement, selon que la casse est de type 1 (partie humide) ou de type 2 (partie sèche). Le débit et la concentration de chaque type de casses sont constants mais différents d'un type de casses à l'autre. La transition d'un mode à l'autre, et le séjour dans chaque mode, sont modélisés par une chaîne de Markov. La dynamique linéaire résultante, ponctuée par des changements brusques associées aux transitions d'une chaîne de Markov, confère du système résultant le nom de système linéaire à sauts markoviens (voir Eq.(4), Annexe II).

3.2.1 - Solution par la théorie de la commande optimale des systèmes linéaires continus à sauts markoviens

L'état d'équilibre des niveaux de réservoirs est bien évidemment différent de zéro et en général dépend du mode. Dans chaque mode, le vecteur d'état sera défini comme déplacement ou translation par rapport au vecteur d'état désiré (voir Eq.(7), Annexe II). Ceci crée des discontinuités dans l'état du système résultant au *moment des sauts*. Sworder et Rogers [24] proposent un régulateur optimal pour les systèmes à sauts markoviens avec discontinuités dans l'état (voir Eq.(8-16), Annexe II). Pour des raisons de simplicité de

structure, nous nous sommes particulièrement intéressés au comportement asymptotique de ce régulateur (voir Eq.(14-16), Annexe II). Moyennant un ajustement minimal de notre modèle que nous discutons à la sous-section 3.2.2, il est possible d'utiliser directement le formalisme développé par Sworder.

3.2.2 - Ajustement du modèle

Rappelons que l'objectif ultime est de concevoir une loi de commande qui minimiserait la variation des débits d'eaux blanches et de cassés tout en maintenant le taux moyen d'incidents de débordement ou de mise à sec de réservoir suffisamment bas. Moyennant la modification du modèle (voir Eq.(17-19), Annexe II), nous pouvons obtenir une telle loi (voir Eq.(23), Annexe II) en nous basant sur le formalisme de Sworder. Cette modification se résume à remplacer les débits par leur dérivée comme variables manipulées (commande) dans le modèle. Cette modification a un objectif double : d'une part elle permet de pénaliser l'intensité de la dérivée du débit dans la mesure de performance, celle-ci étant une mesure de variabilité de la commande, et d'autre part elle permet d'avoir des discontinuités dans la dérivée du débit associé à la commande optimale, sans pour autant en avoir dans le débit lui-même. Cette caractéristique de continuité du débit est désirable du point de vue de l'application.

3.3 - STRATÉGIE DE CONCEPTION

La loi de commande obtenue ne tient pas compte des contraintes sur les hauteurs maximales et minimales permises dans les réservoirs. Or, un des objectifs principaux de la gestion des eaux blanches et des cassés est d'éviter précisément les débordements et les mises à sec des réservoirs. Nous reconnaissons qu'un choix judicieux des matrices de pondération Q et R de la fonction coût (voir Section V, Annexe II), et des états d'équilibre dans les différents modes, permet de réaliser un compromis acceptable entre variabilité des débits et temps moyen inter-incidents (débordement ou mise à sec) dans les réservoirs.

A l'aide du logiciel MATLAB, et à partir du modèle du système et des données fournies par l'usine, nous avons construit un simulateur du comportement des niveaux de réservoirs, des débits et les variations du débit sous l'effet de la commande optimale pour un choix donné des matrices de pondération et des niveaux d'équilibre dans la fonction coût. (voir Figures 2-4, Annexe II). Deux types de simulation ont été entrepris : une série de simulation avec les données réelles de l'usine (la durée et le temps de casses) recueillies durant quatre mois, et une autre série de simulation basée sur les techniques de Monte Carlo sur un horizon d'un an. La seconde série de simulation consiste à reproduire le comportement du processus de casses au moyen de la chaîne de Markov présentée au chapitre précédent. Nous présentons à la Section IV, Annexe II, une technique itérative pour l'ajustement des paramètres de la fonction coût, fondée sur des simulations successives. Après un choix

adéquat des états d'équilibre et des matrices de pondération, nous constatons pour l'exemple étudié, qu'en moyenne le réservoir d'eaux blanches se vide complètement une fois par mois alors que le réservoir de cassés déborde deux fois par mois, pour un niveau de variabilité des débits qui semble acceptable. Nous avons également constaté que le réservoir d'eaux blanches ne déborde jamais. Nous pensons que ce phénomène est dû à l'absence d'apport, postulée dès le départ, d'eau fraîche à ce réservoir.

3.4 - CONCLUSION

Nous avons montré qu'une des applications naturelles de la théorie des systèmes linéaires à sauts markoviens est le problème de la gestion des réservoirs d'eaux blanches et de cassés dans une usine de papier. Nous avons de ce fait utilisé la théorie du régulateur linéaire quadratique à sauts pour minimiser la variabilité des taux de recirculation tout en maintenant le temps moyen entre deux incidents (débordements ou mise à sec) à un niveau acceptable. Pour le modèle étudié, nous avons supprimé le débit d'eau fraîche. L'ajout de ce débit comme une variable manipulée rend le modèle non linéaire. Étant donné que la recherche sur les systèmes non linéaires à sauts markoviens se trouve encore à un niveau embryonnaire, la seule possibilité immédiate de synthèse de commande pour un tel modèle serait de procéder par linéarisation autour des points de fonctionnement associés à chaque mode. Cette approche sera étudiée dans un travail futur.

En outre, l'approche heuristique proposée pour le réglage itératif des matrices de pondération nécessite des simulations coûteuses et de longue durée. Rappelons que le choix de ces matrices de pondération doit correspondre à un compromis acceptable entre variabilité de la commande et longueur moyenne des temps entre les incidents associés à l'un des deux réservoirs. Au chapitre suivant nous proposons une méthodologie fondée sur la théorie des premiers temps de passage des processus stochastiques pour le calcul approximatif des temps moyens inter-incidents permettant ainsi une approche plus structurée au choix des matrices de pondération.

Enfin, dans ce chapitre nous avons supposé que la chaîne de Markov utilisée est *indépendante* de la loi de commande. Au prochain chapitre nous proposons une extension de la commande optimale au cas plus réaliste où nous considérons des processus de casses avec taux de transition dépendant de la variation du débit de cassés recirculés.

CHAPITRE 4

GESTION OPTIMALE DE LA RECIRCULATION DES EAUX BLANCHES ET DES CASSÉS : ANALYSE DES INTERVALLES INTER-INCIDENTS; EXTENSIONS

La minimisation de la variation des débits d'eaux blanches et de cassés recirculés, a pour conséquence de grandes variations du niveau des réservoirs associés. Ces variations de niveaux peuvent à leur tour mener à court ou moyen terme à des débordements ou mises à sec des réservoirs en question. L'approche heuristique présentée au chapitre précédent et visant à maintenir l'intervalle moyen entre deux incidents successifs (débordement ou mise à sec) d'un réservoir, suffisamment long, sans pour autant augmenter de manière inacceptable la variabilité des débits de recirculés, exige de longues séries de simulations. Dans ce chapitre, nous présentons une approche alternative de type (partiellement) analytique, fondée sur la théorie des premiers temps de passage des processus stochastiques, et permettant d'éclairer le choix des grandeurs relatives des entrées dans les matrices de pondération Q et R de la fonction coût. Rappelons que la matrice Q pénalise la variabilité des niveaux dans les réservoirs, alors que R pénalise la variabilité des débits de recirculés. Or une grande variabilité des niveaux de réservoirs tend à diminuer les intervalles moyens entre

incidents de débordement ou de mise à sec. Il s'ensuit que le compromis $\overline{Q}$, $\overline{R}$ correspond en pratique à un compromis entre le niveau de variabilité des débits de recirculés et la longueur de l'intervalle moyen entre incidents. Les méthodes proposées dans ce chapitre permettent à partir de calculs numériques relativement rapides, de réaliser les compromis nécessaires.

En outre, la chaîne de Markov modélisant le processus de casses a été jusque là supposée indépendante de la loi de commande. Cependant, l'analyse des données expérimentales au Chapitre 2, indique qu'en minimisant également la variation des taux de recirculation, il est possible de réduire la fréquence des casses. Dans le but de pallier à cette insuffisance du modèle, nous considérons dans ce chapitre le problème de commande lorsque la chaîne de Markov associée au processus de casses présente la caractéristique que ses taux de transition dépendent du niveau de la commande.

L'article intitulé "Optimal White Water and Broke Recirculation Policies in Paper Mills via Jump Linear Quadratic Control : Part II - First Passage-Time Analysis ; Extensions" mis en annexe constitue l'essentiel de ce chapitre.

4.1 - CALCUL APPROXIMATIF DES PREMIERS TEMPS DE PASSAGE

Notre objectif principal dans ce chapitre est de développer une méthodologie pour le calcul du plus petit temps moyen entre deux incidents successifs de débordement ou de

mise à sec d'un réservoir donné. Dans ce qui suit nous appellerons cet intervalle : temps moyen inter-incidents. La théorie des premiers temps de passage des processus stochastiques (centrée sur le développement des caractéristiques statistiques du temps où pour la première fois un processus stochastique traverse une frontière donnée) sera utilisée en vue d'un calcul approximatif d'une expression théorique de ce temps moyen.

Notons que, le calcul des premiers temps de passage est fréquemment exploité pour l'analyse de la politique à seuils critiques dans un domaine connexe, celui de la commande optimale des ateliers de fabrication (voir section II, Annexe III). En adaptant les résultats obtenus dans ce domaine à notre problème, nous sommes en mesure d'obtenir un algorithme de calcul du temps moyen inter-incidents pour un choix donné de matrices de pondération, $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ (voir Eq.(2-19), Annexe III). L'algorithme consiste en la résolution d'un système d'équations différentielles linéaires évoluant dans l'espace d'état et couplées par des conditions frontières. Cependant, le calcul est fondé sur une approximation dont nous détaillons la nature à la section suivante.

4.1.1 - Nature de l'approximation mathématique

L'algorithme de calcul des moments des temps de passage d'un processus stochastique développé dans le contexte des ateliers de fabrication est applicable pour un processus scalaire, de vitesse constante par morceaux sur des intervalles de temps

correspondant aux temps de séjour d'une chaîne de Markov homogène. Or l'évolution des niveaux de réservoir sous l'action de la commande optimale (voir Chapitre 3) *ne correspond pas* à un processus de vitesse constante par morceaux. L'approximation consiste alors à calculer le temps inter-incidents moyen pour un processus de vitesse constante par morceaux, égale à la *vitesse moyenne à long terme* de l'évolution des niveaux de réservoir dans le mode de casses correspondant (voir Section II.1.1, Annexe III).

4.1.2 - Calcul du temps moyen inter-incidents

En calculant la valeur moyenne des débits dans chaque mode, nous avons pu utiliser le formalisme des stratégies à seuils critiques, pour le calcul du temps moyen inter- incidents (voir Section II.1.2, Annexe III). L'application de la technique de calcul pour l'exemple numérique au Chapitre 3, nous permet de constater (tel qu'anticipé) que pour une matrice $\overline{Q}$ donnée, l'augmentation de la matrice $\overline{R}$ entraîne une diminution du temps moyen de débordement ou de mise à sec. Nous constatons également qu'une augmentation du temps moyen inter-incidents se fait aux dépens d'une augmentation de la variabilité du débit (voir Figures 4-5, Annexe III). L'approximation s'avère, au moins pour les exemples numériques étudiés, d'excellente qualité, et permet un réglage rapide des paramètres de contrôle dans la fonction coût. Notons que les simulations associées à ces calculs s'avèrent extrêmement longues et que par conséquent, nous ne rapportons dans l'article en annexe que les résultats pour deux valeurs de $||\overline{R}||$. Dans la version finale nous rapporterons les résultats pour un

échantillonnage de valeurs de $||\overline{R}||$ plus complet.

4.2 - LOI DE COMMANDE DANS LE CAS DU PROCESSUS DE CASSES SENSIBLE À LA COMMANDE

La matrice de taux de transition de la chaîne de Markov obtenue au Chapitre 2, est invariante et de ce fait, la chaîne est homogène. La loi de commande obtenue au Chapitre 3 est elle-même fondée sur l'hypothèse d'homogénéité de la chaîne de Markov. En réalité, en minimisant la variation du débit des cassés recirculés, il est possible de réduire la fréquence des casses. Par conséquent, il est important d'analyser le cas d'une loi de commande qui puisse avoir une influence sur le processus de casses. Une telle situation est décrite à la section 4.2.1.

4.2.1 - Formulation du problème

Sworder et Robinson [23] ont été les premiers et parmi les seuls à étudier une loi de commande pour des systèmes à sauts tels que la loi de probabilité de transition du processus de sauts dépende de la commande obtenue. Du fait de la difficulté d'une résolution exacte des équations aux dérivées partielles caractérisant la loi de commande optimale associée, Sworder et Robinson ne présentent qu'une solution sous-optimale au problème. Notons que la théorie développée [23] est limitée du cas où la composante continue du système à sauts

ne présente pas de discontinuité au moment des sauts. Or, dans la situation qui nous intéresse, il est important de rappeler que la composante continue de l'état admet des discontinuités, ce phénomène ajoute un niveau de difficulté supplémentaire. En se basant sur l'étude de [23], nous parvenons à développer une loi de commande sous-optimale qui non seulement affecte le processus de casses, mais également tient compte des discontinuités du système (voir Eq.(43-55), Annexe III).

4.3 - CONCLUSION

La loi de commande obtenue au Chapitre 3, ne tient pas compte des contraintes sur les niveaux de réservoirs. Calculer une loi de commande avec contraintes pour les systèmes à sauts demeure encore un problème ouvert et de toute évidence très complexe. A travers une approximation mathématique correspondant à remplacer les taux de variation réel des niveaux de réservoir sous l'action de la commande optimale par leurs moyennes respectives, l'estimation du temps moyen inter-incidents pour un choix donné de matrices de pondération de la fonction coût associée, est ramenée à un calcul de caractéristiques d'une loi de production à seuils critiques dans un atelier de fabrication. Le réglage des matrices de pondération en vue de réaliser les compromis nécessaires entre variabilité des débits de recirculés et fréquence d'incidents dans les réservoirs devient aisé.

Par ailleurs, nous avons également été en mesure de développer une stratégie de

commande pouvant tenir compte de la relation entre taux de casses et variabilités des débits de recirculés. A cause de la complexité des équations, la solution obtenue est approximative, et le taux de transition du processus de sauts est contraint à dépendre faiblement de la loi de commande. L'étude par simulation de la loi de commande obtenue, ainsi qu'un approfondissement des propriétés de convergence des lois de commande obtenues seront considérés dans des travaux futurs.

CHAPITRE 5

CONCLUSION

En raison du niveau accru de fermeture des circuits d'eaux blanches dans les usines intégrées de pâtes et papiers, les casses de la feuille de papier durant sa fabrication deviennent une perturbation qui se répercute à court terme dans toute l'usine affectant ainsi la stabilité de ses opérations. Dans ces conditions, il devient primordial de gérer de manière rigoureuse la recirculation des cassés ainsi que des eaux blanches (utilisées pour rediluer les cassés) pour une capacité de stockage (réservoirs existants) donnée. Notre objectif, dans cette thèse, a été d'utiliser le paradigme de la commande stochastique en vue de développer des stratégies de recirculation adéquates.

L'utilisation du paradigme de la commande stochastique en vue de la mise au point d'une stratégie de contrôle nécessite une connaissance de la dynamique du système et, en particulier, la caractérisation statistique des perturbations. La justification de l'utilisation d'un tel paradigme dans notre cas, provient du fait que la principale perturbation, en l'occurrence le bris de la feuille de papier, est un phénomène essentiellement aléatoire. À partir d'une analyse statistique des données expérimentales de casses, nous avons montré au Chapitre 2 de cette thèse que le processus de casses peut raisonnablement être représenté par une chaîne de Markov à trois états. L'une des premières applications illustrées dans la thèse

d'un tel modèle est l'optimisation de la vitesse d'opération de la machine à papier. Avec ce modèle, il devient possible de rechercher une stratégie optimale de gestion des réservoirs d'eaux blanches et de cassés.

Au Chapitre 3, nous avons d'abord établi un modèle mathématique simplifié d'une situation de stockage dans une usine à papier incluant deux réservoirs, un réservoir de cassés et un d'eaux blanches. Nous avons alors pu montrer qu'une gestion acceptable de la recirculation des cassés correspond en fait à la recherche d'un compromis entre variabilité des débits de recirculation et fréquence moyenne de débordement ou de mise à sec des réservoirs qui peut être identifié de manière naturelle à un problème de synthèse de régulateur linéaire quadratique à sauts markoviens. Étant donné que la commande obtenue ne tient pas compte des hauteurs maximales et minimales des réservoirs, à ce stade, nous avons proposé une approche heuristique - fondée sur des simulations successives - pour le choix des paramètres de la mesure de performance du régulateur quadratique en vue de maintenir l'intervalle moyen entre deux incidents successifs (débordement ou mise à sec) d'un réservoir suffisamment long sans pour autant augmenter de manière inacceptable la variabilité des débits de recirculés.

Un des résultats centraux du Chapitre 4 est d'avoir établi le fait que la théorie des premiers temps de passage des processus stochastiques (qui est au coeur du problème étudié) permet de développer des expressions analytiques approximatives des temps moyens inter-

incidents pour un choix donné de la mesure de performance. De fait, moyennant une approximation mathématique de la vitesse d'évolution des niveaux de réservoir, nous avons pu ramener le problème de calcul du temps moyen inter-incidents à un problème connexe de calcul de premier temps de passages dans les ateliers de production et dont la solution est bien établie. Cette méthodologie donne le plus petit temps moyen inter-incidents en fonction des paramètres de pondération de la fonction coût, et conduit par là-même à un choix plus structuré de ces derniers. Il suffira en effet de choisir les paramètres qui pénalisent le plus fortement la variabilité des débits de recirculés sans pour autant que le temps moyen inter-incidents de réservoirs ne devienne trop court, ce dernier étant calculable à partir de l'algorithme développé.

De plus au Chapitre 4, nous avons analysé l'extension de la commande optimale au cas plus réaliste où nous considérons que le processus de casses dépend faiblement de la variabilité du débit de cassé recirculé. Malheureusement à cause de la non homogénéité du processus de sauts, nous n'avons pas été en mesure d'évaluer la loi de commande obtenue. Pour une étude mathématique plus complète, la convergence et l'unicité des matrices de gains de la loi de commande devraient être analysées. Dans un travail, futur nous considérerons ces aspects.

A notre connaissance, cette thèse est le premier travail à utiliser explicitement l'information sur la nature et les statistiques de casses en vue de formuler le problème de

commande optimale stochastique associé à la gestion des réservoirs de cassés et d'eaux blanches. Le modèle statistique des casses ainsi obtenu permet d'avancer une méthode systématique pour le calcul de la commande optimale, ce qu'il n'est pas possible de faire dans un environnement déterministe. En effet, un traitement déterministe (commande robuste) du problème tendrait à essayer de définir un "pire cas" (débit de cassés constant maximal par exemple) contre lequel la commande tenterait de protéger les réservoirs. Or ceci mènerait à une situation où l'on risque de mettre à sec le réservoir de cassés plutôt que d'éviter son débordement. L'hypothèse inverse pour le pire cas (débit de cassés minimal) mènerait cette fois-ci à un débordement systématique. Il est donc impossible de définir un pire cas sur lequel on voudrait fonder une commande robuste. A la différence de la commande robuste, le paradigme stochastique permet de considérer tous les modes de casse à la fois et de doser leur importance relative.

Afin de pouvoir explorer la performance d'une telle commande nous avons dû poser les hypothèses simplificatrices telles que : nombre restreint de réservoirs, consistances constantes, masse spécifique des courants constantes et ajout d'eau fraîche nul. Si l'on choisit de lever l'une ou l'autre de ces hypothèses, il est possible d'entrevoir des généralisations potentielles de nos travaux.

RÉFÉRENCES

1 - ABOU-KANDIL, H., FREILING, G. et JANK, G. (1994). Solution and Asymptotic Behavior of Coupled Riccati Equations in Jump Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, 39*, 1631-1635.

2 - ASTRÖM, K.J. (1967). Computer Control of a Paper Machine - an Application of Linear Stochastic Control Theory. *IBM Journal, 11*, 389-404.

3 - BÉLANGER, P. R., DUMONT, G.A., GENDRON, S. et ROCHON, L. (1986). Self Tuning Control of Chip Level in Kamyr Digester. *AIChE Journal, 32*, 65-74

4 - BOX, G.E.P. et JENKINS, G.M. (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day.

5 - BUSSIERE, S., ROCHE, A. et PARIS, J. (1992). Analysis and Control of White Water Network Perturbations in an Integrated Newsprint Mill. *Pulp and Paper Canada, 93(4)*,97-100.

6 - CEGRELL, T. et HEDQVIST, T. (1975). Successful Adaptative Control of Paper Machines. *Automatica, 11*, 53-60.

7 - CROTEAU, A.P. et ROCHE, A.A. (1987). Study of Broke Handling and White Water Management Using a Dynamic Simulation. *Pulp and Paper Cananda, 88(11)*, 420-423.

8 - DUMONT, G.A. (1982). Self Tuning Control of a Chip Refiner Motor Load, *Automatica, 18*, 307-314.

9 - DUMONT, G.A., GENDRON, S. et BÉLANGER, P.R. (1984). Practical Experience with Kamyr Digester Chip Level, *American Control Conference*, 48-53.

10 - EL-FÉRIK, S. et MALHAMÉ, R.P. (1997). Padé Approximants for the Transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing. *IEEE Transactions on Automatic Control, 42*, 440-457.

11 - FJELD, M. (1978). Application of Modern Control Concepts on a Kraft Paper Machine. *Automatica, 14*, 107-117.

12 - FLORENTIN, J.J. (1961). Optimal Control of Continuous Time Markov Stochastic Systems. *J. Electron. Cont.,10*, 473-487.

13 - JI, Y. et CHIZECK, H.J. (1990). Controllability, Stabilizability and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control. *IEEE Transactions on Automatic Control, 35*, 777-788.

14 - KRASOVSKII, N.N. et LIDSKII, E.A. (1961), Analytical Design of Controller in System with Random Attributes, I-II, *Automat. Remote. Control, 22*, 1021-1025, 1141-1146.

15 - MALHAMÉ, R. P. et BOUKAS, E. (1991).A Renewal Theoretic Analysis of a Class of Manufacturing systems. *IEEE Transactions on Automatic Control, 36*, 580-587.

16 - MALHAMÉ, R. P. (1993). Ergodicity of Hedging Point Policies in Single-Part Multiple-State Manufacturing Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control,38*, 340-343.

17 - MARGOLIS, N.G. (1988). Development of an Expert System for Paper Machine Problem Diagnosis, *Computer Engineering*, 367-369.

18 - MARITON, M. (1992). *Jump Linear Systems in Automatic control,* Marcel Dekker.

19 - NOEL, A., PARIS, J. et ROCHE, A. (1993). Simulation of White Water Management Strategies for an Integrated Newsprint Mill. *Pulp and Paper Canada, 94(11)*, 383-386.

20 - ROUNSLEY, R.R. (1983). Discrete Event Simulation of a Broke System. *Tappi Jouranl, 66*, 69-73.

21 - SWORDER, D.D. (1968). On the Stochastic Maximum Principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24*, 627-640.

22 - SWORDER, D.D. (1969). Feedback Control of a Class of Linear Systems with Jump Parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control, 14*, 9-14.

23 - SWORDER, D.D. et ROBINSON, V.G. (1973). Feedback Regulators for Jump Parameters Systems with State and Control Dependent Transition Rates. *IEEE Transactions on Automatic Control, 18*, 355-360.

24 - SWORDER, D.D. et ROGERS, R.O. (1983). An LQ-Solution to a Control Problem Associated with a Solar Thermal Central Receiver. *IEEE Transactions on Automatic Control, 28*, 971-978.

25 - WONHAM, W.M., (1971). Random Differential Equations in Control Theory. *Probabilistic Methods in Applied Mathematics, vol. 2*, T. Bharucha-reid, New-York, Academic.

ANNEXE I

A STATISTICAL MODEL OF PAPER BREAKS IN AN INTEGRATED TMP-NEWSPRINT MILL*

M. Khanbaghi [1], R. Malhamé [1], M. Perrier [2] A.Roche [3]
1 - Department of Electrical Engineering, Ecole Polytechnique, Montreal.
2 - Department of Chemical Engineering, Ecole Polytechnique, Montreal
3 - PAPRICAN
E-Mail : malhame@auto.polymtl.ca

ABSTRACT

Due to broke recirculation, the process of paper production is directly affected by the occurrence of breaks. In this paper, a statistical model of paper machine breaks is developed. We start from the hypothesis that the breaks process is a Markov chain with three states : the first state is the operational one, while the two others are associated with the general types of paper-breaks that can take place (wet breaks and dry breaks). The Markovian hypothesis is empirically validated. We also establish how paper-break rates are correlated with machine speed and broke recirculation ratio. Subsequently, we show how the obtained Markov chain model of paper-breaks can be used to formulate a machine operating speed parameter optimization problem. The long term goal is to use the statistical model to

*- Paru dans le *Journal of Pulp and Paper Science*, juin 97

I - INTRODUCTION

In order to satisfy new environmental regulations, newsprint mills attempt to recirculate the maximum amount of white water in the mill. Due to this recirculation the major disturbance in the mill, i.e. paper-breaks, has an important impact on the production and on the quality of the paper [3,6]. Under these conditions, it becomes essential to understand the dynamics of paper-breaks and to introduce a realistic model of these breaks. A characteristic feature of paper-breaks is the virtual impossibility of predicting their exact time of occurrence and their duration. Therefore it is not possible to conceive a deterministic mathematical model which would play that role. Instead, our aim in this paper is to develop a statistical model of the paper-break process. The model is used here for an optimization study concerned with machine operating parameters, and is to be used later for the synthesis of adequate broke recirculation control strategies.

The paper is organized as follows. In section II, we first analyze and classify our experimental data. This analysis allows us to suggest that the process of paper-breaks could be seen as a so-called continuous Markov chain with three states. Therefore in section III, we give some pertinent definitions and further, validate the Markovian assumption. In section IV we establish the dependency of the paper-break rate on the machine operation speed, and the broke recirculation ratio respectively. We also establish the dependency of the break rate on these two parameters at the winder, since such breaks could be considered a reasonable indicator of the (loss of) quality of paper as to be perceived in the press room.

Using this information, in section V, we propose a systematic method for determining the machine optimal operating speed. Finally, some directions for further research are proposed.

II - ANALYSIS AND CLASSIFICATION OF EXPERIMENTAL DATA

Our data originates from a mill which has the particularity of operating with three different types of paper machines ; the three machines use the same broke tank. The data was gathered over four months (116 days) and involved a total of 2005 break incidents on the three machines. In this section we first explain how we classified the breaks and why we classified them in this way. Subsequently, we give the results of our correlation tests and the histogram for the time between successive breaks.

II.1 - Classification of breaks

We know that breaks could occur in every part of a paper machine where the paper is not supported by a transfer roll. For our study we classified them into two types : all breaks which occur in the wet end, the press and the dryers are called breaks of type one; and all breaks which occur in the calender and the reel are called breaks of type two. The justification for such a classification is twofold : 1 . Each time a break occurs, depending on where it occurs in the machine, the broke will be collected in one of two different pits ;
2 . Since these two pits collect brokes with different consistencies, the recirculation circuits

of brokes and water will be distinct.

We find that about 60% of breaks are of type one for machine 1, while the corresponding figures are 40% for machines 2 and 3. The main reason for this discrepancy is that in machine 1, unlike in machines 2 or 3, the paper is not supported by transfer rolls, between wet end and press.

II.2 - Correlation tests

For our study we assume that the paper-break process is a stationary process, i.e. the statistical properties of a set of observations generated sequentially in time are independent of absolute time. A minimum requirement for this to hold is that the probability distribution function is independent of time and therefore a stationary set of observations has a constant mean and a constant variance (hypothesis validated in [4]).

For the correlation tests, interruptions related to scheduled maintenance and shutdown were not included. Estimates of the autocorrelation function for lengths of successive breaks of the same type, and of the estimate of the cross-correlation function for lengths of successive breaks of different types, all on the same machine were first calculated. Subsequently, we obtained estimates of the autocorrelation function of time intervals between successive breaks of any kind on the same machine, and the cross correlation function of time intervals between successive breaks of any kind, for two different machines. The method used to calculate these estimates is given by Box and Jenkins [2]. A satisfactory

estimation of the kth lag autocorrelation coefficient, r_k is :

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}$$

with

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z}) \quad for \quad k=0,1,\ldots,K$$

and

$$\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} z_t$$

where N is the total number of observations, while $z_1,\ldots,z_N$ are the observations, i.e. z_t is the duration of a break, z_{t+1} is the duration of the next break and so on. $\bar{z}$ is the mean value of the break durations. K must be usually kept smaller than $N/4$. Therefore we can plot the autocorrelation and cross correlation functions for the three machines. We also calculate the standard error on the autocorrelation estimate. This permits a rough check on whether the estimate of a autocorrelation function is effectively zero beyond a certain lag. The approximate expression for the variance of the estimated autocorrelation function is given by Bartlett [1]:

$$var(r_k) \approx \frac{1}{N} \sum_{v=-\infty}^{v=\infty} \{r_k^2 + r_{v+k} r_{v-k} - 4 r_k r_v r_{v-k} + 2 r_v^2 r_k^2\}$$

Figures 1 to 4 show the estimated autocorrelation (including the standard error) and cross correlation function for only one machine. (We show results for a single machine given that the conclusions are the same for all three machines). In fact we can see from these estimates that, for a given machine, there is no correlation, neither between durations of successive like type breaks, nor between durations of successive breaks of different types. The same holds for time intervals between any breaks. Finally there appears to be some short term correlation between time intervals between breaks for distinct machines. This may be explained, in part, by the fact that changes in the quality of the furnish (particularly broke recirculation ratio) to each machine are dependent for the different machines. Note that, in the absence of a theoretical expression for the confidence interval of the estimated cross-correlation function, we used for that purpose the sample root-mean square of the estimated values (Fig. 4a and 4b).

These estimates are used in section III as a preliminary check as to the plausibility of a Markovian model. Indeed, a necessary condition for the validity of the Markovian hypothesis in this context is the statistical independence of successive break durations of the same type or of different types.

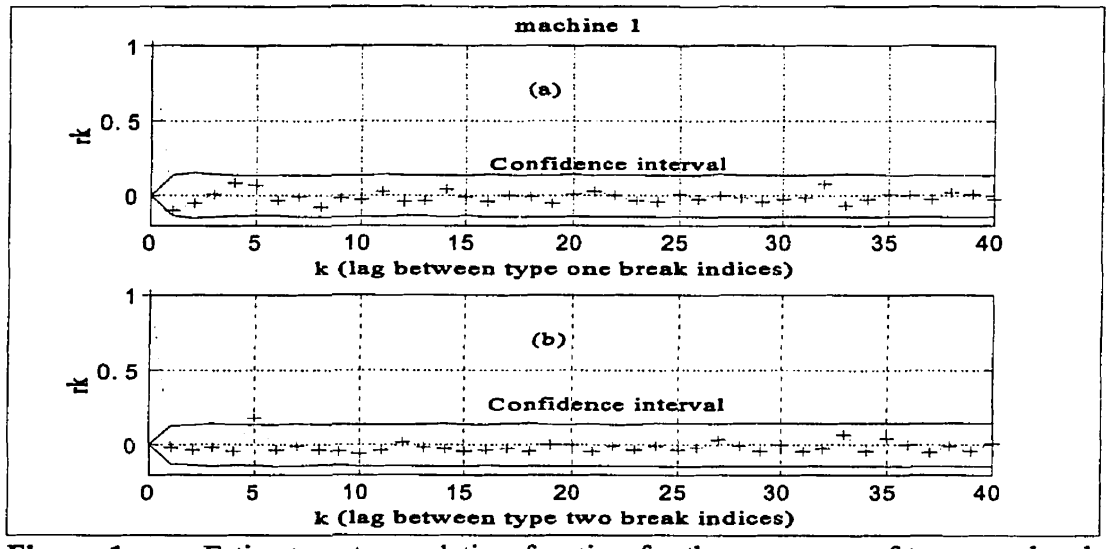


Figure 1 : a - Estimate autocorrelation function for the sequences of type one break durations. b - Estimated autocorrelation function for the sequences of type two break durations.

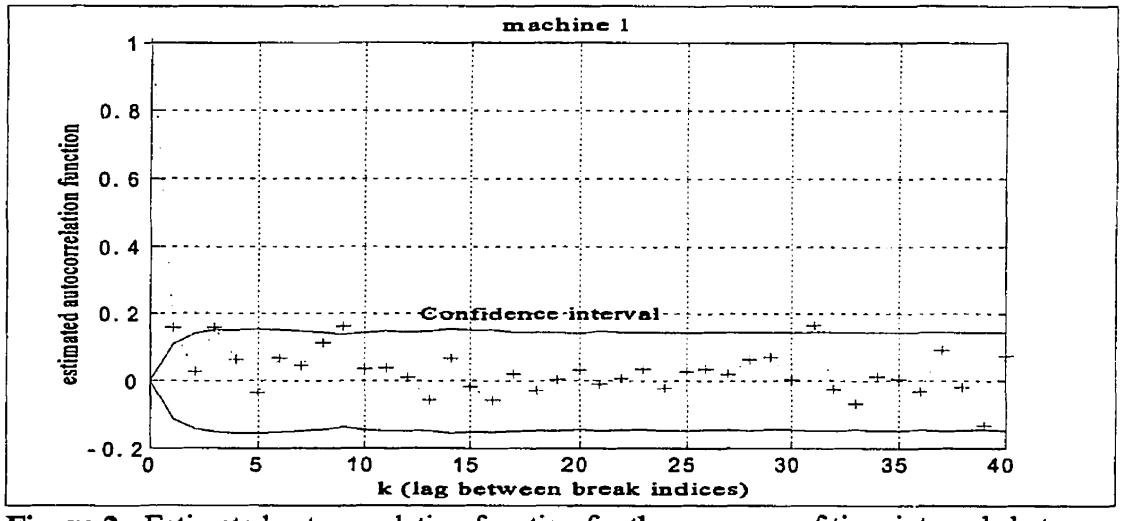


Figure 2 : Estimated autocorrelation function for the sequence of time intervals between breaks.

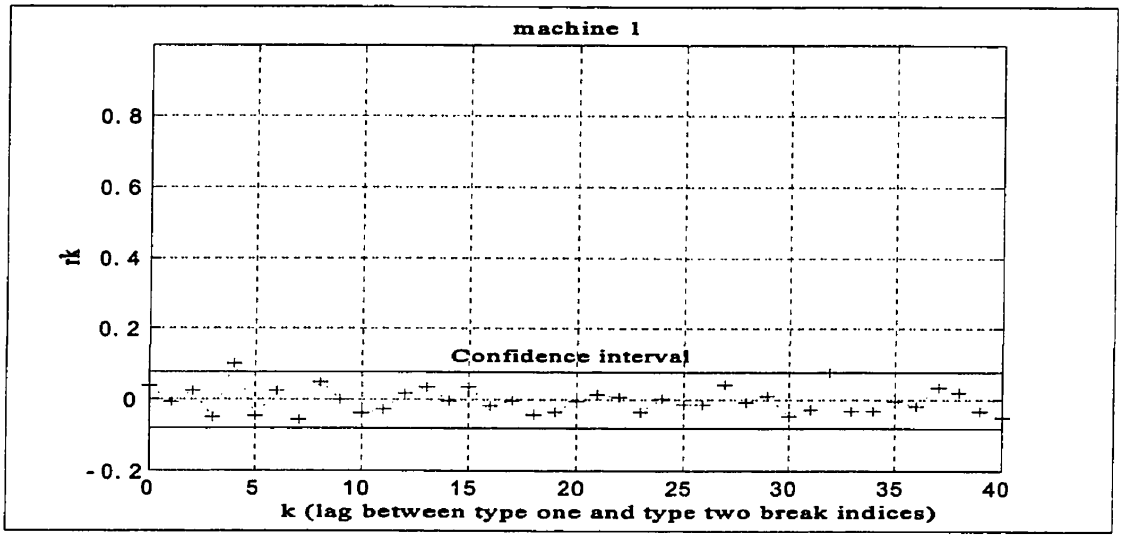


Figure 3 : Estimated cross-correlation function between type one and type two break durations sequences.

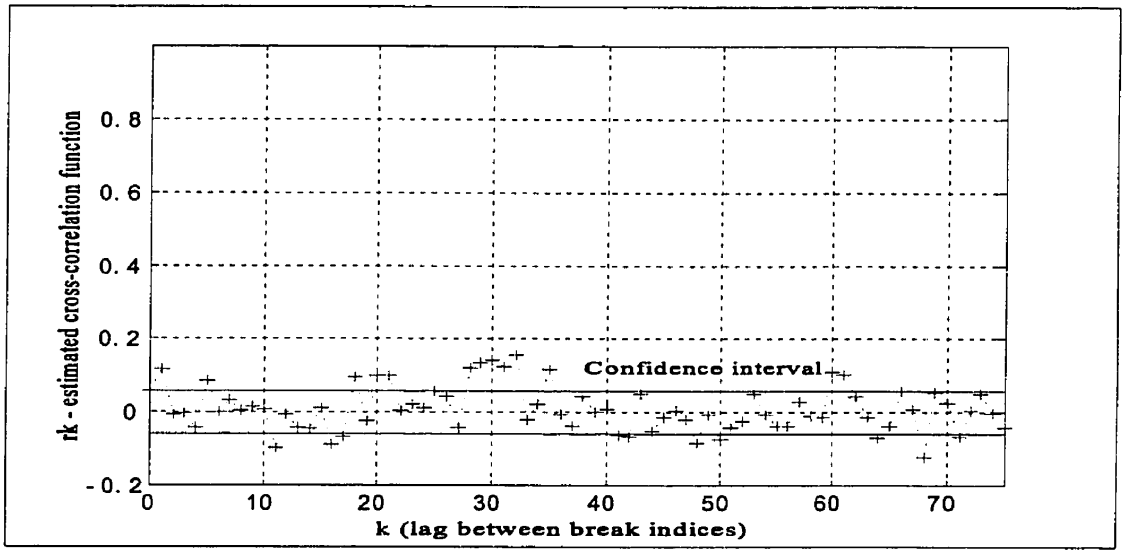


Figure 4a : Estimates of cross-correlation function between machine 1 and 2.

NOTE TO USERS

Page(s) not included in the original manuscript are unavailable from the author or university. The manuscript was microfilmed as received.

57 - 59

UMI

$$\lambda_i = -\lambda_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \lambda_{ij}$$

or equivalently :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} = 0$$

III.1.2 - The Exponential Distribution

A continuous random variable X is said to have an exponential distribution with parameter $\lambda>0$, if its probability density function is given by :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0 \\ &= 0 \quad\quad\quad\;\; x < 0 \end{aligned}$$

The mean and the variance of the exponential distribution are given respectively by $E[X]=1/\lambda$ and $\mathrm{var}(X)=1/\lambda^2$ [7].

One of the important properties of the exponential distribution is to be memoryless, that is:

$$Prob[X>s+t \mid X>t] = Prob[X>s] \quad for\ all \quad s,t \geq 0$$

By the memoryless property, the parameter λ is often referred to as the failure rate of the distribution. Note that the failure rate is the reciprocal of the mean [7], that is, if T_i is the time

spent in state i then $E[T_i]=1/\lambda_i$.

III.2 - Validation

In this subsection we present a preliminary verification of the plausibility of the Markovian hypothesis. As shown in section II, the amount of time the process spends in state i and the next state visited are uncorrelated random variables. The uncorrelatedness is always a necessary condition for independence. Also as we mentioned in subsection (III-1-a), the amount of time a Markov chain spends in state i before proceeding to the next state, is exponentially distributed with mean $1/\lambda_i$. In figure 5, we show a histogram of experimental data which represents a probability graph, and it is approximated by a (solid line) density function with equation :

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \\ &= 0 \quad t < 0 \end{aligned}$$

λ is the reciprocal of the (empirically estimated) mean time between all breaks.

The histogram is drawn for a very narrow interval of speeds (from 548.5 (m/min) to 549.7 (m/min)) and a fixed broke recirculation ratio (25%). This is because as we show in

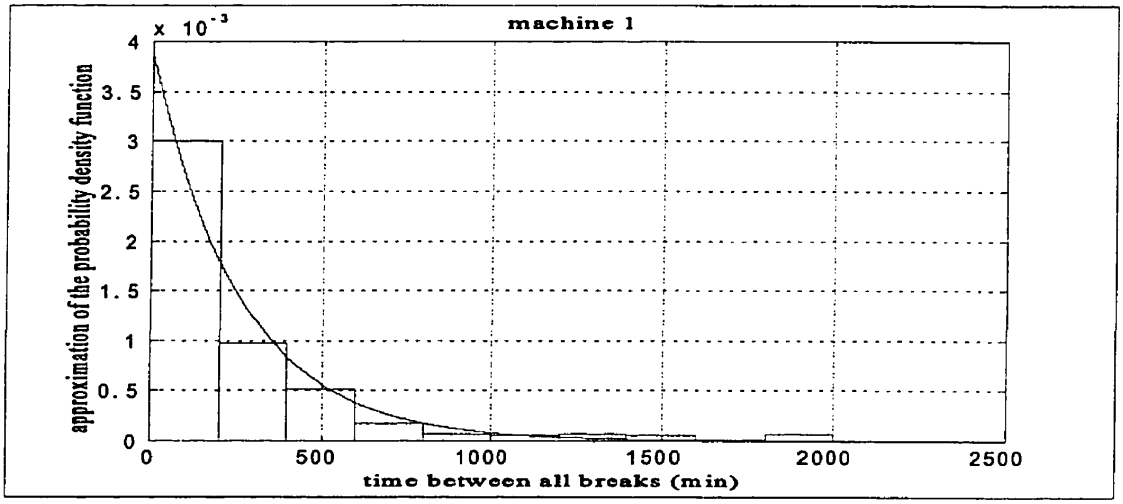


Figure 5 : Histogram of a probability graph and its approximation. The Chi-square test for an exponential fit is good at 5% level.

section IV, failure rates do depend on these two parameters. Figure 5 together with other empirical histograms not reported here [4] suggests that sojourn times in the various states are exponentially distributed. The chi-square test is used for the goodness of fit : *the fit is good at the 0.05 level.* The exponential character of sojourn times in each one of the three earlier defined states (operating state, type one break and type two break respectively), as well the independence of these sojourn times as random variables constitute a preliminary validation of a three state Markov chain model. Figure 6 represents a typical sequence of the process.

As can be verified from figure 6, there is no observed transition from state 2 to state 3, and vice versa. Indeed, during the time that breaks occur at the wet end there are no breaks

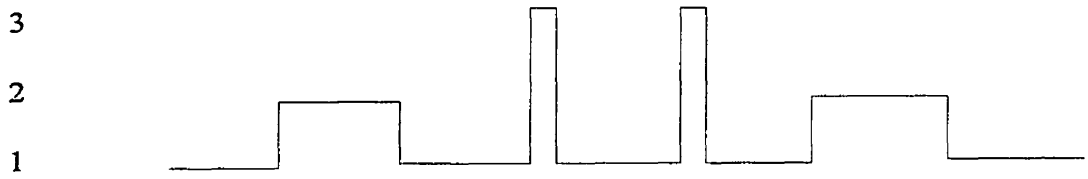


Figure 6 : A typical sequence of the process.

at the dry end, and vice versa. We then have the following matrix of transition rates :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix} .$$

Knowing that :

$$\lambda_i = \frac{1}{E[T_i]} = -\lambda_{ii}$$

$$-\lambda_{ii} = \sum_{j=1, i \neq j}^{3} \lambda_{ij}$$

we can estimate all the entries in the matrix.

IV - DEPENDENCY OF TRANSITION RATES ON OPERATING PARAMETERS

In section II we carried out all calculations without regard to the potential dependency of transition rates on machine operating parameters. In section III we focus on data

corresponding to a fixed operating speed and broke recirculation ratio. In the following section we first analyze the dependency of the Markov transition rates on the above two relevant operating parameters, namely paper machine speed and broke recirculation ratio respectively. Furthermore, given that the paper-break rate at the winder can be viewed as a very approximate but reasonable indicator of the (loss of) quality of the finished paper, since each time a break occurs at the winder the possibility that the finished paper will be returned to the mill increases, we also establish its dependency on these same parameters. Finally we propose a systematic method to determine the machine optimal operating speed *under the condition that the broke recirculation ratio is fixed.* Note that in all our parameter sensitivity studies, we have retained only those segments of data over which the relevant parameters were kept constant long enough for all transient effects due to changes to vanish.

**** Transition rate versus paper machine speed***

Here, we have considered data with *identical broke recirculation ratio* fixed at 25 %. Figure 7 shows the variation of the inverse of time between two breaks versus machine speed $v(t)$ i.e. $\lambda_{11}(v(t))$ for the paper machine. The points represent the inverses of times between two breaks (inverses of time intervals over which the machine is operational) for each operating speed while the dotted straight line, which is obtained using a linear regression method, represents the estimated transition rates. Also, given that for each speed operational times are random and exponentially distributed, as shown before, we calculate the chi-square

goodness of fit for each speed whenever the available data is sufficient. Finally a weighted average goodness of fit is obtained where the weights are the fraction of experimental points associated with a given figure. The goodness of fit for each figure is given in its legend. Figure 8 shows the corresponding transition rates at the winder, itself considered as a two state Markov chain. We can see from figure 7 that as the speed increases, the transition rates to break states increase which means that the probability of moving to states 2 or 3 increases. Also from figure 8 we can observe that the number of breaks at the winder decreases as the speed increases which means that the quality of the paper tends to increase with speed. This

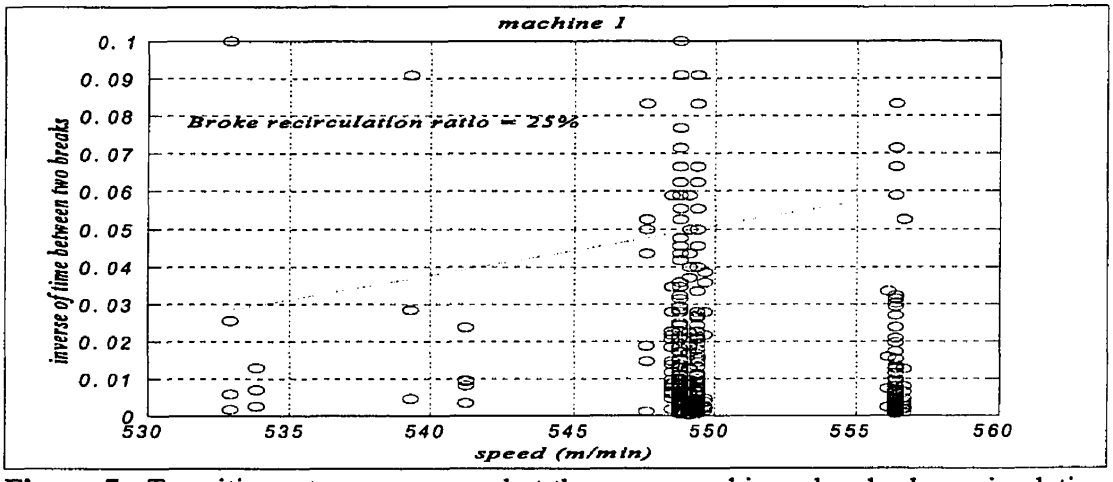


Figure 7 : Transition rates versus speed at the paper machine when broke recirculation ratio is fixed at 25 %. The weighted average fit is good at the 0.16 level.

paradoxical result can be explained as follows : as speed of paper production increases the tensile force to which the sheet of paper is subjected increases. Thus while breaks tend to increase within the paper machine itself (Fig. 7) any sheet of paper which passes through

unbroken is such that it can withstand a high tensile force and therefore is less likely to break at the winder.

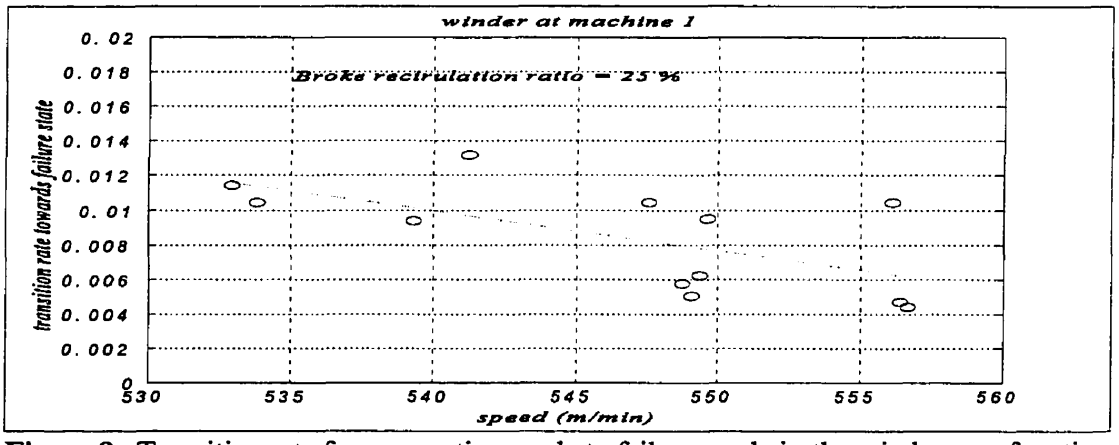


Figure 8 : Transition rate from operating mode to failure mode in the winder as a function of speed when broke recirculation ratio is fixed at 25%.

**** Transition rate versus broke recirculation ratio***

We now consider data which were obtained for an approximately constant operating speed (a very narrow interval : from 548.5 (m/min) to 549.7 (m/min)). Figure 9 shows the variation of transition rate versus the broke recirculation ratio $b(t)$ i.e. $\lambda_{11}(b(t))$ for the paper machine, and figure 11 shows the corresponding variation for the winder. For figures 9 and 10 the same procedure as in previous section is used for the weighted average goodness of fit. Figure 9 suggest that the transition rate decreases slightly when the broke recirculation

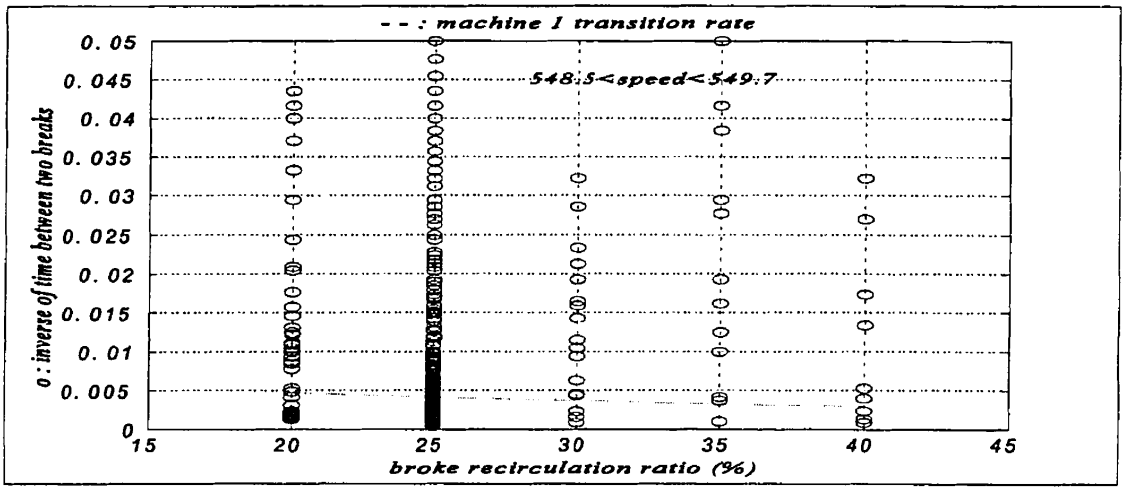


Figure 9 : Transition rate versus broke recirculation ratio at the paper machine for a narrow machine speed range from 548.5 (m/min) to 549.7 (m/min). The weighted average fit is good at the 0.03 level.

ratio of the pulp increases. This is in contradiction with the commonly accepted idea in the field that, as recirculation increases, break rate tends to increase. However, it is important to remember that for this particular mill, all brokes are gathered and recirculated for the most part (about 70%) towards the machine with highest reliability record (machine 3 in this case). What is used in establishing the curves is the *global* broke recirculation ratio. Individual machine recirculation ratios are *not available*. Indeed a similar study for machine 3 (Fig. 10) yields the opposite result : as recirculation increases, break rates increase. What is likely happening here is that as breaks at machine 1 increase, its own individual recirculation ratio is decreased and the individual recirculation ratios of machine 2 and particularly 3 are increased, resulting in an overall increase of the global recirculation ratio. Hence, an increase in the global recirculation ratio is concomitant with an increase of break rates for

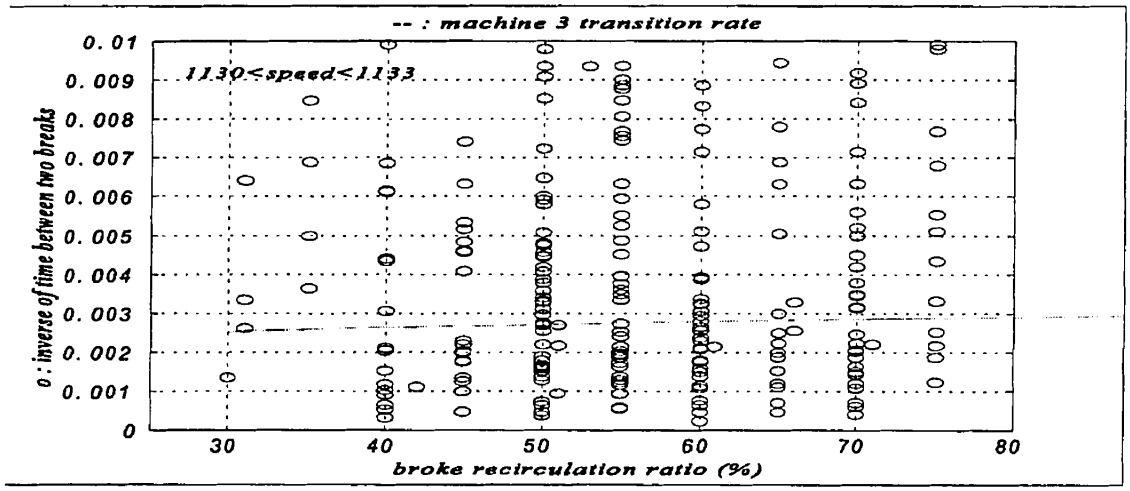


Figure 10 : Transition rate versus broke recirculation ratio at the paper machine for a narrow machine speed range from 1130 (m/min) to 1133 (m/min). The weighted average fit is good at the 0.11 level.

example at machine 3. It may also be concomitant with a decrease of the effective recirculation ratio at machine 1, thus helping to explain the unusual behavior in Fig. 9. However a more positive conclusion should await more adequate data.

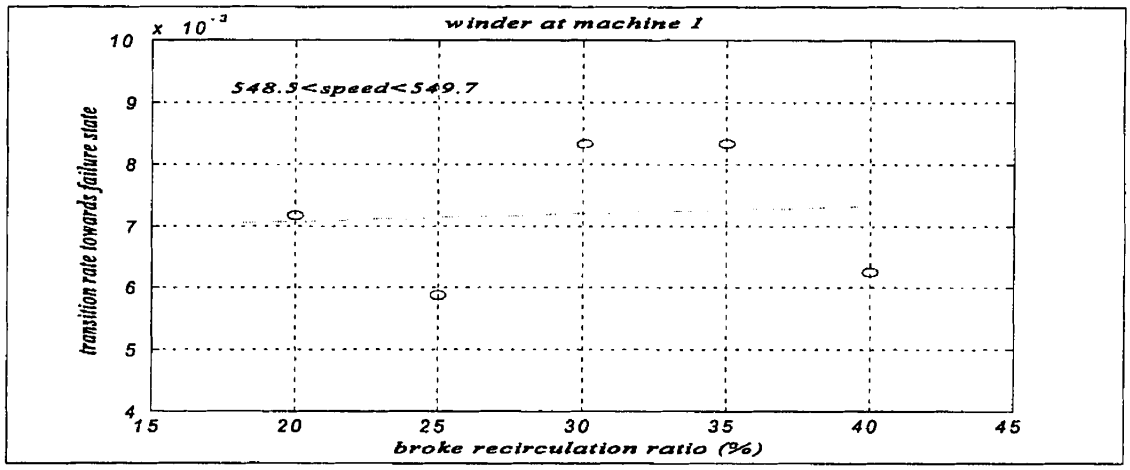


Figure 11 : Transition rate from operating mode to failure mode in the winder versus broke recirculation ratio for a narrow machine speed range from 548.5 (m/min) to 549.7 (m/min).

Figure 11 shows that when the broke recirculation increases the quality of the paper decreases. However again, the data in our possession are too scant to warrant a strong conclusion.

V - PAPER MACHINE OPTIMAL SPEED OF OPERATION

The usefulness of having obtained a statistical model as presented here is now illustrated via an application in operating parameter optimization. The particular parameter of interest is machine speed. The optimal choice of machine speed is defined as one that optimizes the long term average of a combined measure of productivity and quality of produced paper as captured by the average number of breaks at the winder. Indeed, as machine operating speed is increased, productivity increases in the short term, but the average number of break incidents rises, thus limiting the increase in productivity. Simultaneously, the quality of the paper introduced appears to improve (Fig. 8). The precise mathematical formulation of this optimization problem is as follows; the optimal machine speed is the one which maximizes the objective function J defined over a time horizon of length T by :

$$J = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{T}\int_0^T K I(r(t)=1)\, v\, dt - \frac{1}{T} N_T\, L\right] \tag{1}$$

with K : paper produced, assumed to be sold in totality (dollars/ton)

v : constant speed (tons produced/unit time)

L : cost of inadequate paper returning to the mill (loss in dollars/break at winder)

N_T : total number of breaks during time interval T at the winder

$r(t)$: the paper machine discrete state. It is 1 when the machine is operational, 2 when the machine is in a wet break state, 3 when the machine is in a dry break state.

$I(r(t))$ is the indicator function, i.e. : $I(r(t)=1) = 1$ if $r(t)=1$

$= 0$ if $r(t) \neq 1$

Note that the quantities in Eq.(1) can be related to the characteristics of the underlying Markov chain, the parameters of which have been experimentally determined as a function of v, the speed to be optimized (see Fig.7 for instance). Indeed :

$$\lim_{T\to\infty}[\frac{1}{T}\int_0^T I(r(t)=1)dt] = P_{1ss}(v), \tag{2}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}[N_T] = \lambda(v), \tag{3}$$

and finally

$$J = KP_{1ss}(\nu)\nu - L\lambda(\nu) \quad . \tag{4}$$

Indeed, Eq.(2) states that the average long term occupancy of state 1 is equal to the steady-state probability of the Markov chain being in state 1, while Eq.(3) states that the long term average number of breaks at the winder is simply the experimentally determined break rate (Fig. 8).

Furthermore, in order to compute the steady-state distribution of the Markov chain, it is enough to solve the following system of equations :

$$P_{ss}(\nu)\Pi(\nu) = 0 \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{3} P_{iss}(\nu) = 1 \tag{6}$$

where : $\boldsymbol{P}_{ss}(\nu) = [P_{1ss}(\nu)\ P_{2ss}(\nu)\ P_{3ss}(\nu)]$, and

$$\Pi(\nu) = \begin{bmatrix} \lambda_{11}(\nu) & \lambda_{12}(\nu) & \lambda_{13}(\nu) \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ \lambda_{31} & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix} \tag{7}$$

(5) and (6) yield :

$$P_{1ss}(v)=\frac{\lambda_{22}\lambda_{33}}{\lambda_{22}\lambda_{33}-\lambda_{33}\lambda_{12}(v)-\lambda_{22}\lambda_{13}(v)}$$

For $L/K = 0.05$ for example, the cost J as a function of v is represented in Fig.12. Since the curve is concave, the speed maximizing the cost J is the one satisfying $dJ/dv=0$. The optimal speed in this case is $v_{op}(t)$=562.4 m/min.

V - CONCLUSION

In this paper we have performed a statistical analysis of paper-break data from a typical paper mill. Our results show that the paper-break process could be reasonably modeled as a continuous Markov chain with three states, an operating state, a failure state

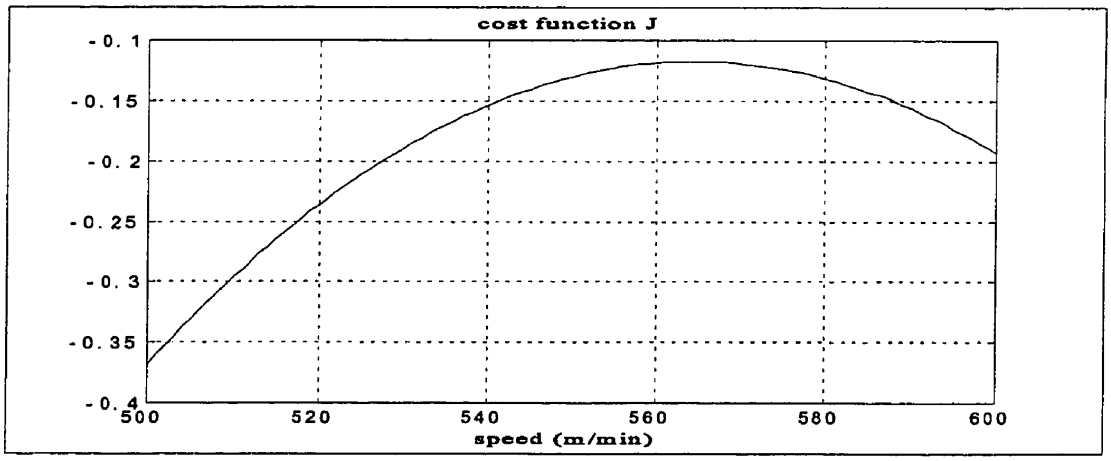


Figure 12 : Cost function J versus speed v.

of type one resulting from breaks in the wet area, and a failure state of type 2 resulting from breaks in the dry area of the paper machine. Using a more restricted set of data, we subsequently empirically established the dependency of failure rates on machine operating speed and broke recirculation ratio. The same type of dependency was analyzed at the level of the winder where failure rate is a measure of the (loss of) quality of paper. This work was carried out with a view towards future applications of the resulting mathematical model of the paper-break process. One of these applications, reported here, is the development of more systematic ways of choosing the nominal speed of operation of the paper machine. Indeed, as operating speed increases, while productivity appears to increase in the short term, the number of breaks tends to increase while paper quality improves slightly. The global result may be a decrease in effective productivity. A reasonable choice of operating speed is one that would optimize a long term average of a combined measure of productivity and quality of the paper produced. In future work, we shall report on other applications such as the construction of adequate white water and broke recirculation policies, based on the knowledge provided by the Markov chain model.

REFERENCES

1 - BARTLETT, M.S., "On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time Series", *Journal of the Royal Statistical Society*, B8, 1-27, 1948.

2 - BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M., *Time Series Analysis, Forecasting and Control*,

Holden-Day, 1976.

3 - BUSSIERE, S., ROCHE, A. and PARIS, J., "Analysis and Control of White Water Network Perturbations in an Integrated Newsprint Mill", *Pulp and Paper Canada,* 93(4):T97, 1992.

4 - KHANBAGHI, M. and MALHAME, R., *Rapport Technique*, ETM/RT-97/05, Département de génie électrique et de génie informatique, Ecole Polytechnique, Montréal, 1995.

5 - MARITON, M., *Jump Linear Systems in Automatic control,* Marcel Dekker, 1992.

6 - NOEL, A., PARIS, J. and ROCHE, A., "Simulation of White Water Management Strategies for an Integrated Newsprint Mill, *Pulp and Paper Canada,* 94(11) : T383, 1993

7 - ROSS, S.M., *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 1993.

ACKNOWLEDGEMENT

The authors wish to thank Professor Jean Paris for stimulating discussions concerning this work. Also, the remarks of Dr. Paul Shallhorn and the anonymous reviewers were quite instrumental in improving the quality of the paper. This work was supported by the NSERC Strategic Grant Program and by PAPRICAN. Their support is gratefully acknowledged.

ANNEXE II

Optimal White Water and Broke Recirculation Policies in Paper Mills via Jump Linear Quadratic Control*

Part I - Basic Setup

M. Khanbaghi[1], R. Malhamé[1,3], M. Perrier[2]
1- Department of Electrical Engineering, Ecole Polytechnique, Montreal
maryam@auto.polymtl.ca, malhame@auto.polymtl.ca
2- Department of Chemical Engineering, Ecole Polytechnique, Montreal
michel.perrier@mail.polymtl.ca
3 - GERAD

ABSTRACT

With the increasing closure of white water circuits in paper mills, breaks in the sheet of paper have become a systemwide disturbance. Upon recognizing that such breaks can be modelled as a Markov chain type of process which when interacting with the continuous mill dynamics yields a jump Markov model, jump linear theory is proposed as a means of constructing white water and broke recirculation strategies which minimize process variability. A methodology is proposed to choose the performance measure design parameters so as to keep the mean time between incidents of fluid in broke and white water tanks either overflowing, or reaching dangerously low levels, sufficiently long.

---

* - soumis à la revue *IEEE Transactions on Control Systems Technology*

I - INTRODUCTION

A paper machine is a very complex unit operation. It has several types of tanks that allow the recuperation, the storage and the recirculation of white water (water coming from the pulp and containing small fibres which are responsible for its white colouration) and broke (pulp coming from the paper breaks). Paper breaks could occur in different parts of a paper machine and are recuperated in generally distinct broke tanks. White water coming from the paper machine is also recuperated in a white water tank. Whenever necessary, the brokes are diluted with white water until the mix reaches an appropriate level of fluidity to be sent back to the paper machine. Also the thermomechanical pulp (TMP) mill which provides the pulp to the paper machine, allows the recuperation of a significant amount of white water.

In previous work [4], we showed that broke recirculation can affect the occurrence of further breaks in the paper sheet, while lack of sufficient recirculation of breaks can lead to an overflow of a broke tank. Indeed, within the mill, overflows are not desirable, and thus the actual control policy for avoiding overflows, is to send back the necessary amount of diluted brokes to the paper machine for processing. However, by doing so, the risks of having more breaks increase as evidenced by statistical analysis [4]. The root physical cause for increased incidence of paper breaks is the variability in the nature and conditions of paper machine furnish concomitant with broke recirculation. Indeed the variation of broke recirculation flow rate induces a variability of the pulp mix, thus making mill operating

parameters often inadequate. This is one reason for the *desirability of nearly constant broke recirculation flow rates*. Furthermore, frequent breaks require significant amounts of dilution. If the white water tank cannot provide the adequate amount of white water, fresh water must be added to the tank. This addition of fresh water creates upon broke recirculation an additional variability in the furnish condition because of the concomitant temperature changes. Thus it is desired to *minimize fresh water addition*. Also, the TMP mill requires only a certain amount of white water. Consequently, the white water flow to the TMP mill must be kept within bounds. To our knowledge, no truly systematic methods exist to optimally control the broke and white water tank levels and the variation of their inputs and outputs. Therefore the synthesis of control strategies that would minimize the broke recirculation rate and its variability, as well as additions of fresh water and white water excess recirculation flow to the TMP mill, while keeping the various tanks from overflowing or becoming too empty, is a highly desirable goal. This work is aimed at addressing the above issues.

In view of the regularity yet randomness in the position, time of occurrence and duration of paper breaks in paper mills, and the abrupt changes these breaks induce in the circulation of paper pulp, it has become apparent to us that an appropriate framework for capturing and analysing the resulting dynamics was that of random jump dynamic systems theory [3,5]. Thus, in a two-part paper, we discuss modelling and control issues in relation to broke and white water recirculation strategies within the framework of jump linear quadratic control theory. In the current Part I paper the basic modelling and simulation-based

tuning procedures are presented, while in Part II, both modelling and control extensions are presented as well as an approximate analytical first passage-time theory based control tuning procedure. Part I is organized as follows. In section II, we summarize our previous work on the statistical (Markov chain) modelling of paper breaks. In section III, we develop a simplified mathematical model of the white water and broke tanks combined dynamics. The synthesis of white water and broke recirculation control policies is then formulated as a quadratic regulation problem for a jump linear Markov model with the continuous component of the state subject to discontinuities at jump times [7]. The solution to the problem emerges as a piecewise-constant gain state feedback law, for a given choice of the performance measure. However, this solution does not account for the fact that tanks can overflow or become empty. In section IV, we suggest how one can, in a Monte Carlo simulation environment, iteratively adjust parameters of the performance measure so as to achieve minimal recirculation flows variability while keeping mean times to overflow or emptiness of tanks at sufficiently high levels. In section V, we illustrate the application of the design methodology for a given system, followed by conclusions and remarks preparatory for the extensions in Part II.

II - BACKGROUND

In order to satisfy new environmental regulations, newsprint mills attempt to recirculate the maximum amount of white water in the mill. Owing to this recirculation, the

major disturbance in the mill, i.e. paper breaks, has an important impact on both the production rate and quality of the paper [2]. Under these conditions, it becomes essential to understand the dynamics of paper breaks and to be able to construct adequate mathematical models of the breaks process. A characteristic feature of paper breaks is the virtual impossibility of predicting their exact time of occurrence and their duration. Therefore, it is not possible to conceive a deterministic mathematical model that would play that role. Instead we have developed a statistical model. In fact in [4], by analyzing and classifying the experimental data, we suggest that the paper break process could be viewed as a continuous Markov chain with three states : an operating state, a failure state of type one resulting from breaks in the wet area, and a failure state of type two resulting from breaks in the dry area of the paper machine. Also, in [4], we have analyzed the dependency of break rates on important machine operating parameters such as machine speed, or control parameters such as broke recirculation rate.

In the following, we use the resulting mathematical model of the paper break process as a basis for the design of white water and broke recirculation control policies.

III - MATHEMATICAL MODELLING AND OPTIMAL CONTROL PROBLEM FORMULATION

In this section, we first develop a simplified two-tank model of white water and broke recirculation dynamics with random paper break disturbances. If fresh water addition is set

to zero, the resulting (generally non linear) model becomes a jump linear Markov model. Subsequently, a quadratic optimal control problem is formulated and the model is transformed so that the existing theory [7] can be brought to bear on its solution.

III.1 - Simplified Mathematical Model

In this preliminary simplified analysis of the recirculation problem, we assume that the paper machine is associated with only two tanks : a white water tank, where white water is stored and subsequently recirculated either toward the TMP mill or the other tank for

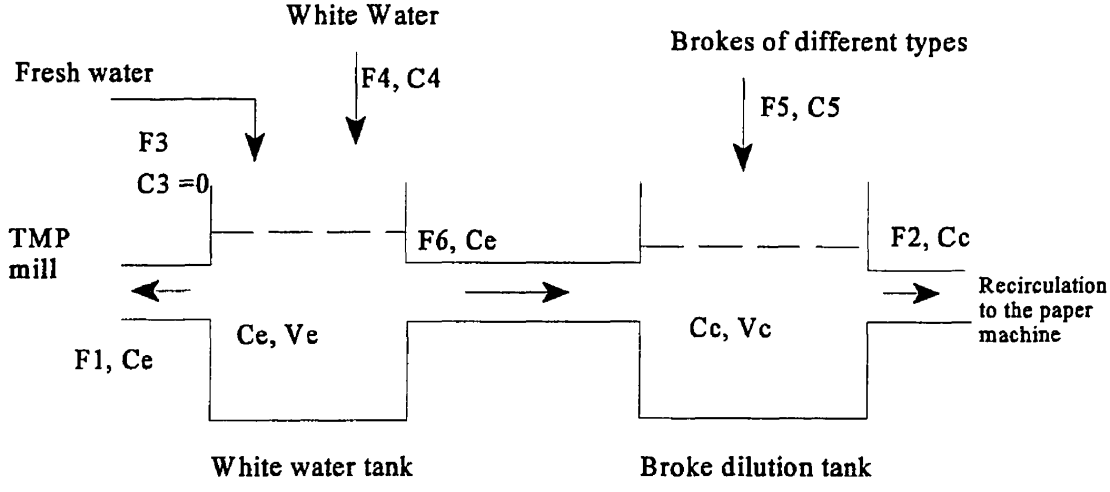


Figure 1 : Broke and white water tanks configurations. The *F*'s stand for flow rates, the *V*'s for volumes and the *C*'s for concentrations.

dilution of brokes and a broke tank, where the brokes are gathered for dilution before recirculating them in the paper machine. Figure 1 illustrates the two tanks with their inputs

and outputs, where $F_i(t)$, $i = 1..6$, represent the time-varying flow rates; C_4, C_e, C_c and C_5 represent respectively, the white water concentration of the incoming flow from the paper machine, the white water concentration in the tank 1 (white water tank), the broke concentration in tank 2 (broke dilution tank) and the broke concentration of the incoming flow from the paper machine; V_e and V_c represent the volume of the tanks. We assume that all flows and all concentrations are constant and that is constant are known parameters. It is also assumed that the tanks are perfectly mixed, so that the concentration of the outgoing flow equals the concentration within the tank. Furthermore, we assume that all streams have equal and constant density. Under this assumption, the mass balance equations can be written as follows :

$$\begin{cases} \dfrac{dV_e(t)}{dt} = F_3(t) + F_4(t) - F_1(t) - F_6(t), \\ \dfrac{dV_c(t)}{dt} = F_5(t) + F_6(t) - F_2(t), \\ \dfrac{d(V_e(t)C_e(t))}{dt} = F_4(t)C_4(t) - F_6(t)C_e(t) - F_1(t)C_e(t), \\ \dfrac{d(V_c(t)C_c(t))}{dt} = F_5(t)C_5(t) + F_6(t)C_e(t) - F_2(t)C_c(t), \end{cases} \tag{1}$$

with $F_1(t)$: outgoing white water flow rate to TMP mill,
$F_2(t)$: outgoing broke flow rate to paper machine,
$F_3(t)$: incoming fresh water flow rate to the white water tank,
$F_4(t)$: incoming white water flow rate to the white water tank,
$F_5(t)$: incoming broke flow rate from paper machine,
$F_6(t)$: white water flow rate from white water tank to the broke tank.

Furthermore the following assumptions are made : $F_4(t)$ and $C_4(t)$ are constant, $F_3(t) = 0$. The

first two assumptions are consistent with the fact that the amounts of white water extracted from the pulp and the concentration of this water vary little with the occurrence of breaks. The last assumption is tantamount to considering that no fresh water can be added to the white water tank. This is a strong assumption, but it makes the model linear and corresponds in itself to a desirable situation. The challenge is to design the control strategy to make this possible. Since in general the broke concentration C_c is to be maintained at 4%, $F_6(t)$ must be proportional to $F_5(t)$, i.e. $F_6(t) = F_5(t)L(t)$. This results in the following simplified mass balance equations :

$$\begin{cases} \dfrac{dV_e(t)}{dt} = F_4 - F_1(t) - L(t)F_5(t), \\ \dfrac{dV_c(t)}{dt} = F_5(t)(1 + L(t)) - F_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

$$with \quad L(t) = \frac{C_c - C_5(t)}{C_4 - C_c}$$

Thus the state space equations become:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -u_1(t) + F_4 - L(t)F_5(t), \\ \dot{x}_2(t) = -u_2(t) + F_5(t)(1 + L(t)), \end{cases} \tag{3}$$

with $x_1(t) \triangleq V_e(t)$, $x_2(t) \triangleq V_c(t)$, $u_1(t) \triangleq F_1(t)$ and $u_2(t) \triangleq F_2(t)$, where $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$ is the system state and $u(t) = [u_1(t)\ u_2(t)]^T$ is the control input.

If we now recall that in [4] we showed that the break process could be reasonably

modelled as a continuous Markov chain with 3 states, since $F_5(t)$ and C_5 (t) represent respectively flow rate and concentration of breaks, they will be piecewise constant with the changes coinciding with jumps in the "break mode" (state of the underlying break mode Markov chain). Thus the global system can be described as a continuous linear time invariant system with Markovian jumps, and a hybrid (continuous-discrete) state space $[x_1\ x_2\ r]^T$. Recalling Eq.(3), the corresponding equations are :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= B\,u(t) + F(r(t)), \\ y(t) &= C\,x(t). \end{aligned} \tag{4}$$

$x(t)\in\mathbb{R}^2$ is the continuous portion of the state, $y(t)\in\mathbb{R}^2$ is the output, while :

$$B = -I, \qquad C = I, \qquad F(r(t)) = \begin{bmatrix} F_4 - L(r(t))F_5(r(t)) \\ F_5(r(t))(1 + L(r(t))) \end{bmatrix},$$

where I is the identity matrix, and $r(t)$ is the discrete portion of the state (break mode) and evolves according to a continuous-time irreducible Markov chain taking values in a finite set $S = \{1,2,3\}$, with transition probability matrix $P=\{p_{ij}\}$ given by :

$$\begin{aligned} p_{ij} = Prob(r(t+\Delta) = j \mid r(t) = i) &= \lambda_{ij}\Delta + o(\Delta) \qquad \text{if } i \neq j \\ &= 1 + \lambda_{ii}\Delta + o(\Delta) \qquad \text{if } i = j \\ \text{with} \quad \lim_{\Delta\to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

where $\Delta>0$, λ_{ij} is the (non-negative) transition rate from i to j, $i \neq j$ and

$$\lambda_i \triangleq -\lambda_{ii} \triangleq \sum_{j=1, j\neq i}^{3} \lambda_{ij} \tag{6}$$

We assume $|\lambda_{ij}| < \infty$, $\forall$ i,j = 1,2,3.

III.2 - Formulation of a jump linear quadratic regulator optimal control problem

In general, the desired equilibrium states for the tank levels may be mode-dependent. It is not completely clear at the outset what equilibrium states are indeed desirable. Define x_0^i to be the desired equilibrium state in mode i, i =1,2,3. Also, define u_0^i to be an input consistent with equilibrium state x_0^i. Equation (4) can be written in terms of the "shifted" variables $\bar{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= B\bar{u}(t) + \bar{F}(r(t)) \\ with \quad & \bar{x} \triangleq x - x_0^i, \\ & \bar{u} \triangleq u - u_0^i, \\ & \bar{F}^i \triangleq F^i + Bu_0^i \end{aligned} \tag{7}$$

For notational simplicity superscript i indicates association with mode i. Thus when $r(t)=i$ we denote $F(r(t))$ by F^i, and accordingly for other variables.

Our objective is to find a control law that will minimize the variation of flow rates ($u_1(t)=F_1(t)$ and $u_2(t)=F_2(t)$) around their set points, while keeping set points for broke

recirculation rates as low as possible under stability constraints. The regulator will be chosen to minimize a quadratic function of the state error, t_0 being the initial time, T the final time, and $E(.)$ indicating expected value,

$$J=E\{\int_{t_0}^{T}(\bar{x}^T Q\bar{x}+\bar{u}^T R\bar{u})\,dt\}. \tag{8}$$

Matrices Q and R are symmetric weighting matrices, which are respectively semi-positive definite and positive-definite. The relative importance of the conflicting control objectives in the cost function is determined by these matrices. Q and R must be chosen so as to yield the smallest variation of the tanks outputs while avoiding overflows and dry ups. $u_0{}^i$ and $x_0{}^i$, $i = 1,2,3$, must also be chosen in a way to satisfy respectively dynamic stability and the tank height constraints. Since the desired equilibrium state will in general not be the origin and is in general different in each mode, the linear system resulting from Eq.(7) has *discontinuous* state trajectories. Our objective is to control such a system. The standard solution to control problem defined by Eq. (7)-(8) is based on a common unique reference point in the displacement variables in Eq.(7), for all modes [5,6]. However, in [7] Sworder gives the design equations of the optimal regulator for a linearized system when the desired operating conditions of the system shift with the mode as is the case for our problem. Indeed, when r changes, two changes immediately occur in Eq.(7). First, since the model coefficients depend upon r, the dynamics changes. Secondly, the shifted variables change

discontinuously. To illustrate this, suppose that $r(t) = j \neq r(t^-) = i$. At time t, the shifted variable is given by

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= x(t) - x_0^j \\ \bar{x}(t) &= x(t) - x_0^i + x_0^i - x_0^j \end{aligned} \tag{9}$$

Assuming $x(t)$ is continuous, we have

$$\begin{aligned} &\bar{x}(t) = \bar{x}(t^-) + q_{ij} \\ &with \quad q_{ij} \triangleq x_0^i - x_0^j \end{aligned} \tag{10}$$

Thus q_{ij} is the change in the nominal operating point resulting from the change in r. For the finite horizon problem with performance measure given by Eq.(8), the optimal regulator is given as a time varying feedback law affine in the state :

$$\bar{u}(t)^* = -R_i^{-1} B_i^T K_i(t)(\bar{x}(t) + \alpha_i(t)) \qquad if\ r(t) = i \tag{11}$$

where $K_i(t)$ (i=1,2,3) satisfy the set of coupled differential matrix Riccati equations :

$$\begin{aligned} &\dot{K}_i(t) + A_i^T K_i(t) + K_i(t) A_i - K_i(t) B_i R_i^{-1} B_i^T K_i(t) + \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} K_j(t) + Q = 0 \\ &K_i(T) = 0 \quad i = 1,2,3 \end{aligned} \tag{12}$$

while the $\alpha_i(t)$ bias vectors evolve according to :

$$\dot{\alpha}_i(t) = (A_i + K_i(t)^{-1}Q)\alpha_i(t) + \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} K_i(t)^{-1} K_j(t)(\alpha_i(t) - \alpha_j(t) - q_{ij}) \qquad (13)$$
$$\alpha_i(T) = 0, \quad i = 1,2,3$$

The bias $\alpha_i(t)$ relative to the standard solution comes from the fact that mode jumps coincide effectively with state discontinuities obtained by Eq. (10). Intuitively the regulator attempts to move the state and inputs in a direction which would put them closer to the desired operating point in the current mode.

Under specific controllability and observability conditions ([3], Theorem 5), the Riccati gains for the infinite horizon problem will converge to the unique positive definite solutions of the following set of coupled algebraic Riccati equations :

$$A_i^T K_i^\infty + K_i^\infty A_i - K_i^\infty B_i R_i^{-1} B_i^T K_i^\infty - \lambda_i K_i^\infty + \sum_{j=1, j \neq i}^{3} \lambda_{ij} K_j^\infty + Q = 0 \qquad (14)$$

In the case of the infinite horizon problem the regulator minimizes the following performance measure:

$$J = \overline{\lim}_{T \to \infty} \frac{1}{T} E\{ \int_{t_0}^{T} (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u})\, dt \}, \qquad (15)$$

while if the biases converge to respective steady-states, the resulting control law becomes:

$$\bar{u}(t)^* = -R_i^{-1} B_i^T K_i^\infty (\bar{x}(t) + \alpha_i^\infty) \qquad if\ r(t) = i \tag{16}$$

The solution of Eq.(14) is, in general, obtained using a numerical algorithm developed by Abou-Kandil *et al.* [1]. The α_i^∞ 's can be obtained from Eq.(13) considered in the steady-state, once Eq.(14) is solved.

In the following, we adapt the above results to our problem and we propose a strategy for the design of a practical regulator.

IV - AN ITERATIVE NUMERICAL DESIGN STRATEGY

As mentioned in the previous section, the aim of our study is to find a control law that minimizes the variability of flow rates $F_1(t)$ and $F_2(t)$ in Fig. 1 while avoiding as much as possible overflowing or emptying the white water and broke tanks. In this section we first show how the existing theory can be adapted to our problem. Subsequently, we propose an iterative design strategy for modifying the weights in the performance measure so that tanks heights operating constraints can be satisfactorily accounted for.

IV.1 - Model adjustment

From the application standpoint, it is highly undesirable that the control law have

discontinuities. However, unless modifications are made to the standard problem formulation, this is exactly the kind of control law that the optimal solution in Eq. (16) dictates. In order to avoid this problem, we modify the model so that the "apparent" inputs become in fact the time derivatives of the real inputs. Thus we define x_3, x_4, u_1 and u_2 as follows :

$$x_3 = u_1,\ x_4 = u_2,\ \tilde{u}_1 = \frac{du_1}{dt},\ \tilde{u}_2 = \frac{du_2}{dt}. \tag{17}$$

By doing so the new control inputs become the derivatives, and the optimal control law will have piecewise continuous derivatives but will itself be continuous. Furthermore, the introduction of these new inputs allows the penalization of the rate of change of the control action which is fundamentally a measure of variability. The new model becomes :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) + G^{i}$$

$$with \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},\ \tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix},\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},\ G^{i} = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

where 0's are matrices with appropriate dimension. If the system is in mode i we have :

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1(t) = A_{12} z_2(t) + G_{11}^{i} \\
&\dot{z}_2(t) = \tilde{u}(t) \\
&with \quad z_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \; z_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = -I, \; G_{11}^{i} = F^{i},
\end{aligned} \tag{19}$$

As stated in section III.1, we define the state variables and inputs shifted with respect to their desired operating points. The shifted variables evolve according to :

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{z}}_1(t) = A_{12} \bar{z}_2(t) + \overline{G}^{i} \\
&\dot{\bar{z}}_2(t) = \tilde{u}(t) \qquad\qquad i = 1,2,3, \\
&with \quad \bar{z}_1 \triangleq z_1 - z_{10}^{i}, \; \bar{z}_2 \triangleq z_2 - z_{20}^{i}, \; \overline{G}^{i} \triangleq A_{12} z_{20}^{i} + G_{11}^{i}.
\end{aligned} \tag{20}$$

As in Eq.(7), superscript i stands for the current mode. In Eq.(20), A_{12} is a non singular matrix. In order to complete the formulation as in Sworder's framework, we do away with the piecewise constant bias matrices $\overline{G}^{i}$ in the right hand side of Eq.(20) by means of the following changes of variables :

$$\tilde{z} \triangleq \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 + A_{12}^{-1} \overline{G}^{i} \end{bmatrix} \tag{21}$$

The resulting state equation is :

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{A} \tilde{z}(t) + \tilde{B} \tilde{u}(t) \tag{22}$$

In terms of the new state equation, the new performance functional is :

$$\bar{J} = \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T} E\{ \int_{t_0}^{T} [(\tilde{z}-\tilde{z}_0)^T \bar{Q} (\tilde{z}-\tilde{z}_0) + \tilde{u}^T \bar{R} \tilde{u}] dt \}$$
$$with \quad \tilde{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{12}^{-1} \bar{G}^i \end{bmatrix} \tag{23}$$

where $\bar{Q}$ and $\bar{R}$ are symmetric respectively semi-positive and positive-definite matrices of the appropriate dimension. As in Eq.(14)-(16) the control law that minimizes the cost function $\bar{J}$ is:

$$\tilde{u}(t)^* = -\bar{R}^{-1} \tilde{B}^T \bar{K}_i^{\infty} (\bar{z}(t) + \bar{\alpha}_i^{\infty}) \tag{24}$$

Note that the state matrices $\tilde{A}$ and $\tilde{B}$ in Eq.(22) are independent of mode i, but the system is still affected by abrupt changes caused by piecewise constant bias matrices $\bar{G}^i$. Since neither $\bar{Q}$ nor $\bar{R}$ depend on mode i, the coupled differential matrix Riccati equation become corresponding to Eq.(12) becomes :

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{K}}(t) + A^T \bar{K}(t) + \bar{K}(t) A - \bar{K}(t) B \bar{R}^{-1} B^T \bar{K}(t) + \bar{Q} = 0 \\ &\bar{K}(T) = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

which is the same as in deterministic case, where the conditions for the existence of a unique steady-state positive definite solution of the Riccati equations can easily be verified. Thus, the obtained optimal regulator is an adaptation of the one proposed by Sworder *et al.* in [7]. However in our case, discontinuities of state trajectories at jump times originate from two

distinct sources : the first one is the differences in desired equilibrium states in each mode and is common with [7], while the second one is specific to our problem and is due to constant perturbations that differ from mode to mode. Thus the system model is given by Eq.(22) at continuity points of $r(t)$ and by :

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}(t^-) + \tilde{q}_{ij}$$
$$with \quad \tilde{q}_{ij} = \begin{bmatrix} z_{10}^{i} - z_{10}^{j} \\ z_{20}^{i} - z_{20}^{j} + A_{12}^{-1}(\overline{G}^{j} - \overline{G}^{i}) \end{bmatrix} \tag{26}$$

at jump instants from mode i to mode j.

IV.2 - Monte Carlo simulation based tuning of the parameters in the performance measures

At this point in the proposed control law synthesis procedure, constraints on tank heights *have not been taken into account.* Thus, in principle, and under the action of the proposed control law the white water or the diluted brokes heights could possibly either become negative or exceed their respective maximum values. One way to account for these constraints is to reformulate the problem as a state-constrained optimal stochastic control problem. This can be a very difficult problem. Instead here, we recognize that the weighting matrices $\overline{Q}$ and $\overline{R}$, as well as the set points in the various modes, constitute degrees of freedom which when used appropriately can help drive system trajectories away from

forbidden zones. In the following, we shall go through some principles which can guide the choice of the free parameters.

IV.2.1 - Choice of set points

There are three types of set points to be specified respectively, tank heights, controllable flow values (broke recirculation and white water recirculation flow rates), and the rates of change of controllable flow values.

For all types of set points, it is important to recognize that the (statistically) dominant machine mode is the operating mode and thus set-points in the dominant mode will have most impact. In the case of the broke tank, it will have a tendency to fill up rather than become empty, particularly if the aim of the control is to minimize recirculation rate. Thus it is best to choose broke tank height set point "sufficiently low". The situation is the complete opposite in the case of the white water tank. It will have a tendency to become empty (while the broke tank is filling up). In this case, it is best to choose the white water height set point "sufficiently high". As for broke recirculation rate, in an ideal situation, it would remain constant at a value dictated by stability constraints (average input flows and average output flows to the broke tank must be equal). This dictates the choice of the broke tank recirculation flow rate set point. In turn, the white water tank recirculation flow rate set point is fixed (it must be such that the right dilution level is attained in the broke tank). Finally, the rates of change of these flow rates should be ideally zero and this dictates the

choice of the associated set points. Thus, in summary, the procedure for choosing set points is based on averaging calculations for flow rates, as well as estimates of mean maximum and minimum excursions from equilibrium state for tank heights.

IV.2.2 - Choice of weighting matrices

For a given choice of matrix $\overline{Q}$, it can be seen that an increase in the coefficients of $\overline{R}$ in Eq.(23), will increase the penalty on the variability of broke and white water recirculation flow rates, thus favouring the stability of the nature and temperature conditions of the furnish to the paper machine. This lack of variability will however be achieved at the expense of a greater variability of broke and white water tank heights. This in turn decreases (sometimes excessively) the mean times to tank overflows or emptiness. The suggested procedure is to set the $\overline{R}$ weights at very high values at the outset, compute and test the resulting controller in a (Monte Carlo) simulation environment. If mean times to overflow or emptiness are considered sufficiently long, then one can consider the control law to be acceptable; otherwise, the weights are to be decreased, so as to reduce tank heights variability. The iterative process continues until simulations yield a solution deemed acceptable.

In the next section, we present an application of the design methodology on a sample system.

V - EXPERIMENTAL RESULTS

In this section, we report design results for an example where the following data was used in Eq.(2) :

$$
\begin{aligned}
&F_5^1 = 70\ l/\mathrm{min} \quad C_5^1 = 50\%, \\
&F_5^2 = 2300\ l/\mathrm{min} \quad C_5^2 = 18\%, \\
&F_5^3 = 2300\ l/\mathrm{min} \quad C_5^3 = 90\%, \\
&F_4 = 6700\ l/\mathrm{min} \quad C_4 = 0.3\% \quad C_c = 4\%, \\
&x_0^1 = [2.10^6\ \ 10^5]\ \ u_0^1 = [5800\ \ 500], \\
&x_0^2 = [2.10^6\ \ 10^5]\ \ u_0^2 = [5000\ \ 700], \\
&x_0^3 = [2.10^6\ \ 10^5]\ \ u_0^3 = [5000\ \ 700].
\end{aligned}
$$

The maximum capacities of the tanks are : $3.10^6\ l$ for white water tank and $2.10^6\ l$ for the broke tank.

Also, the break Markov process used for this sample system is the one we have experimentally estimated [4]. It is described by the following matrix of transition rates :

$$
\Pi = \begin{bmatrix} -0.004 & 0.003 & 0.001 \\ 0.07 & -0.07 & 0 \\ 0.29 & 0 & -0.29 \end{bmatrix}
$$

Figure 2a represents the break process with the 3 modes (one operating mode and two different failure modes). Figure 2b represents the control derivative, which has discontinuities caused by jumps. Two sets of weighting parameters have been used ; a unique

matrix $\overline{Q}$ given by :

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

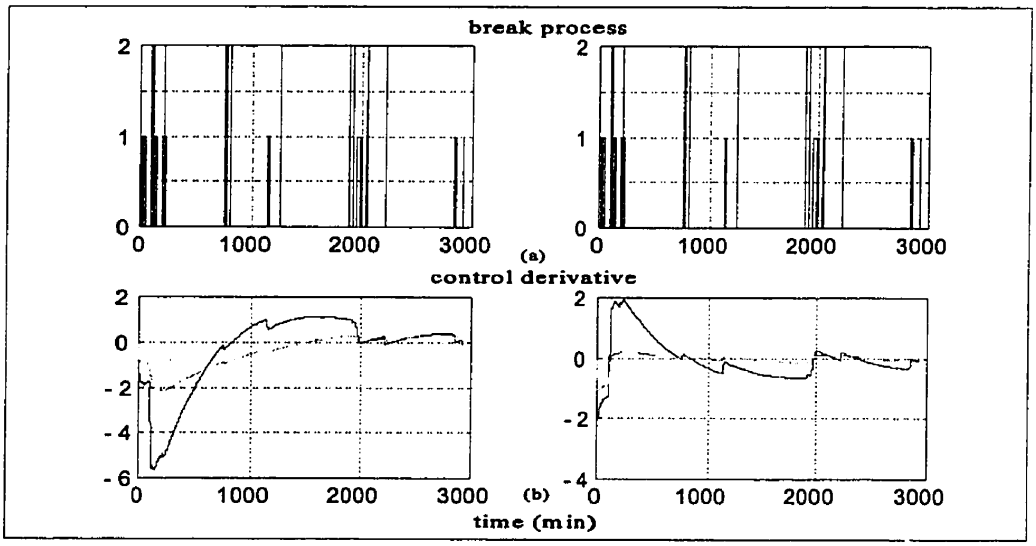


Figure 2 : a) Break process, b) control derivative for two different values respectively R_1 for the dashed line and R_2 for the solids line. R_1= [9.10^9 0; 0 9.10^{10}], R_2 = [9.10^8 0; 0 9.10^9].

and two different $\overline{R}$'s respectively given by :

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9.10^9 & 0 \\ 0 & 9.10^{10} \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 9.10^8 & 0 \\ 0 & 9.10^9 \end{bmatrix}$$

As mentioned in the previous section, in order to discover adequate set points and values for $\overline{R}$, we started with some tank heights set points together with $\overline{R}$ set at R_1 (the high value).

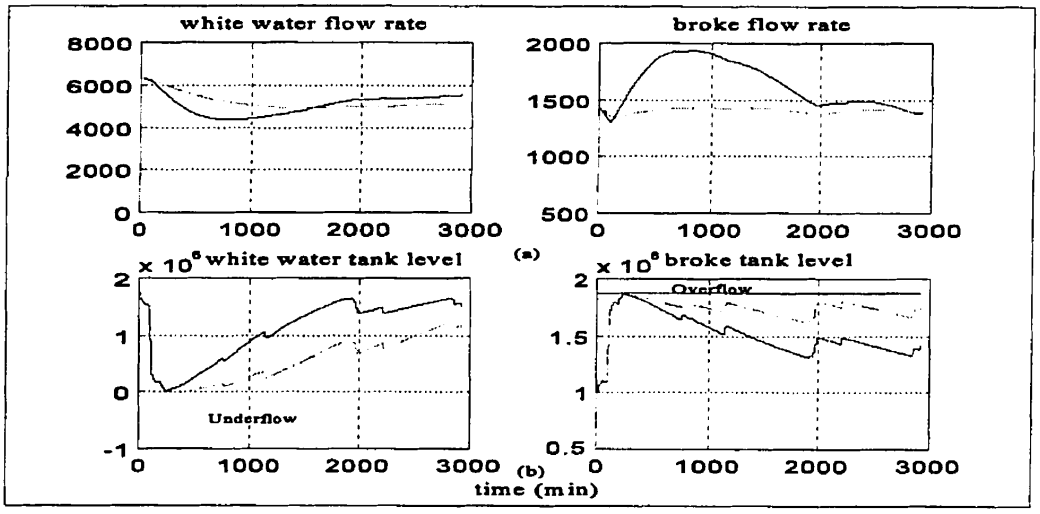


Figure 3 : a) White water flow rate u_1 and broke flow rate u_2, b) white water tank level and broke tank level for two different values respectively R_1 for the dashed line and R_2 for the solids line.

Subsequently $\overline{R}$ was change to R_2. In Figure 3b we observe that for both choices, the white water tank level reaches zeros over a period of several minutes, while the broke tank overflows. Note also that, for $\overline{R}=R_1$, the variation of broke flow rate and broke tank level is practically zero. With the lower set of values for $\overline{R}$ ($\overline{R}=R_2$) although a greater flow rates variability is permitted, it does not prolong enough the time to first incidents. One diagnoses here a poor choice of set points.

Thus, in order to move further away times to first incidents, we modify the tank level set points (increasing the one for the white water tank and decreasing the one for the broke tank). Figure 4 shows the results for $R=R_1$, and $R=R_2$.

We note that no tank overflow or tank emptiness occurs over the displayed time horizon. Also, although the flow rates are not constant, they do not show large variations. For $R=R_1$ (dashed line), even though there is no overflow or emptiness over the displayed time horizon, over several months there is a higher possibility of incidents. Therefore we choose $R=R_2$.

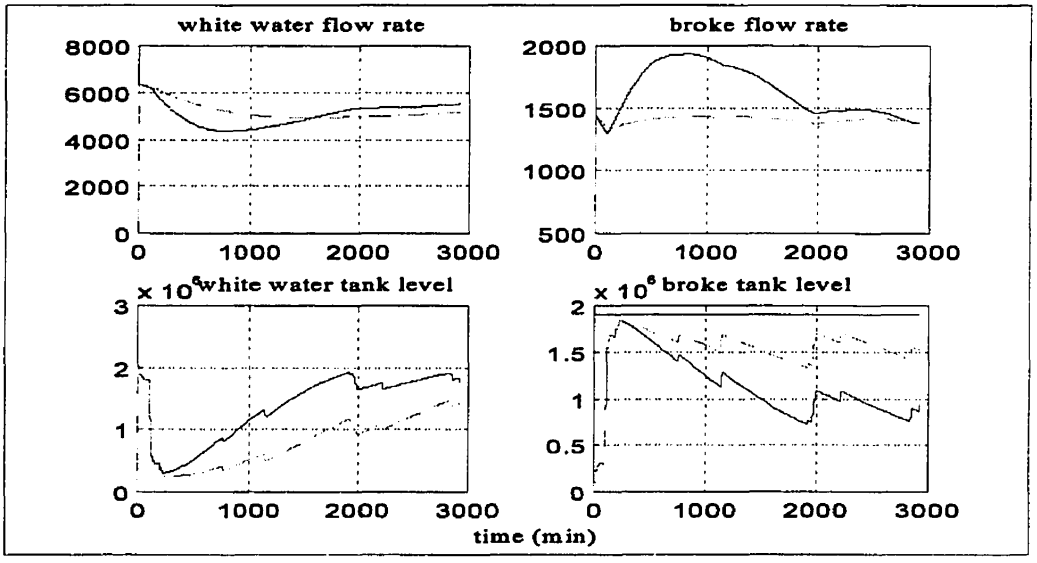


Figure 4 : a)White water flow rate u_1 and broke rate u_2, b) white water tank level and broke tank level for a different set point and the same R. R_1 and R_2 are respectively associated with the dashed lines and the solid lines.

This is the kind of compromise one should make between tank level variability and flow rates variations to reach a desirable situation.

Note also, that as breaks occur, white water is needed for the dilution of breaks; consequently the white water flow rate from tank 1 to tank 2 increases, so the level of the white water tank decreases. Also since the obtained control law minimizes the variation of the flow rate, it is not possible to recirculate the same amount of broke to the paper machine, thus the level of broke tank increases. During the displayed 3000 minutes, there was no tank overflow nor tank emptiness, although in the chosen example up to 10 breaks occur in one day (1440 minutes), which is high relative to the daily average experimentally observed [4] number of breaks (6 per day).This is an extreme case where several breaks occur, but not enough to cause either tank overflow or tank emptiness. Nevertheless, if the simulation is carried over a long enough period of time, such accidents could happen. In our case we ran the simulation over several months and with the chosen values, the broke tank on average overflows twice in a month and the white water tank becomes empty on the average once a month.

The results show that a good design procedure must adjust both weighting matrices and tank level set points under the constraint that tank capacities are fixed.

Unfortunately, the iterative strategy proposed above involves lengthy and repeated Monte Carlo simulations which can be computationally expensive. In Part II, we show how the tools of stochastic theory can be used to obtain computable and reliable approximations of times to first overflow or emptiness in the various tanks as well as an appropriately defined variability index for flow rates. This in turn alleviates the need for extensive Monte Carlo simulations in tuning the control parameters.

VI - CONCLUSION

We have presented an application of jump linear Markov theory to the problem of optimally recirculating white water and broke within a paper mill. Indeed, the paper break process can be considered as a jump Markov type of disturbance, and it is possible to use jump linear quadratic theory to enforce minimal variability of recirculation rates, while choosing adequately the free parameters in the performance measure to keep the frequency of incidents of storage tanks overflow or emptiness within reasonable limits. The approach presented suffers from several limitations among which the major one is that any intake of fresh water in the white water tank has been prevented. Indeed, allowing otherwise would make the model nonlinear. This remains however an avenue for future research. Another drawback is that the choice of the weighting parameters is still quite experimental/simulation-based. Finally, the hypothesized Markov jump process was such that its jump rate was independent of the control law, but previous experimental results indicate that breaks are affected by broke recirculation rates. An interesting avenue for future research is to compute the optimal policy by conceiving a random process with transition probability depending upon broke flow rates. First passage-time analysis as a control tuning device, and the introduction of control-sensitive break jump rates are studied in Part II.

REFERENCES

1 - H. Abou-Kandil, G. Freiling and G. Jank, "Solution and Asymptotic Behavior of Coupled Riccati Equations in Jump Linear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-39, no 8, pp. 1631-1635, 1994.

2 - S. Bussière, A. Roche et J. Paris, "Analysis and Control of White Water Network Perturbations in an Integrated Newsprint Mill", *Pulp and Paper Canada*, pp. 41-44, 1993.

3 - Y. Ji and H.J. Chizeck, "Controllability, Stabilizability and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-35, no 7, pp. 777-788 1990.

4 - M. Khanbaghi, R. Malhamé, M. Perrier and A. Roche, "A Statistical Model of Paper Breaks in an Integrated TMP-Newsprint Mill", *Journal of Pulp and Paper Science,* vol 23, no 6, pp. 282-288, 1997.

5 - M. Mariton, *Jump Linear Systems in Automatic Control*, Marcel Dekker, 1990.

6 - D.D. Sworder, " Feedback Control of a Class of Linear Systems with Jump Parameters", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-14, no 1, pp. 9-14, 1969.

7 - D.D Sworder et R.O. Rogers, "An LQ-Solution to a Control Problem Associated with a Solar Thermal Central Receiver", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-28, no 10, pp. 971-978, 1983.

ACKNOWLEDGMENT

This research was supported by a PAPRICAN (Pulp and Paper Research Institute of Canada) scholarship and a NSERC (National Sciences and Engineering Research Council of Canada) strategic grant. Discussions with Dr. Alain Roche of PAPRICAN, Pointe-Claire are gratefully acknowledged.

ANNEXE III

Optimal White Water and Broke Recirculation Policies in Paper Mills via Jump Linear Quadratic Control*

Part II - First Passage-Time Analysis ; Extensions

M. Khanbaghi[1], R. Malhamé[1,3], M. Perrier[2]
1- Department of Electrical and Computer Engineering, Ecole Polytechnique, Montreal
maryam@auto.polymtl.ca, malhame@auto.polymtl.ca
2- Department of Chemical Engineering, Ecole Polytechnique, Montreal
michel.perrier@mail.polymtl.ca
3 - GERAD

ABSTRACT

Linear quadratic jump regulation theory has been used to derive white water and broke recirculation strategies which minimize process variability. Reduced process variability comes at the expense of relatively large swings in white water and broke tanks levels. Since the linear design does not specifically account for constraints on the state-space, under the resulting control law, damaging events of tanks overflow or emptiness can occur. A methodology, mainly founded on the first passage-time theory of stochastic processes, is proposed to choose the performance measure design parameters to limit process variability while maintaining mean time between incidents of fluid in broke and white water tanks either

---

* - soumis à la revue *IEEE Transactions on Control Systems Technology*

overflowing, or reaching dangerously low levels, sufficiently long. The heart of the approach is an approximation technique for evaluating mean first passage-times of the controlled stochastic processes. This technique appears to have an applicability which largely exceeds the problem area it was designed for. Furthermore, the introduction of control sensitive break rates and the analysis of the ensuing control problem are presented. This is to account for the experimentally observed increase in breaks concomitant with flow rate variability.

I - INTRODUCTION

In Part I of this paper a method to optimally control the broke and white water tank levels and the variation of their inputs and outputs was proposed. It is founded on jump linear regulator theory. The solution to the problem emerges as a piecewise constant gain feedback law, for a given choice of the performance measure. However, this solution does not account for state-space limitations such as tanks' maximal and minimal heights, and as a result, under the resulting control law, tanks can overflow or become empty. Therefore an iterative method was suggested to adjust parameters of the performance measure so as to achieve minimal recirculation flows variability while keeping mean times to overflow or emptiness of tanks at sufficiently high levels. The implementation of the tuning methodology for performance measure parameters requires in general repeated, lengthy and computationally expensive Monte Carlo simulations. The aim of Part II of the paper is to use the theory of stochastic processes and their first passage-times to develop approximate theoretical expressions of

tanks mean times to first overflow or first emptiness (here after referred to as *times to first incidents*) as a function of the performance measure parameters used in deriving the unconstrained control law. Subsequently, this knowledge is to be used in achieving a rapid tuning of the control law. Furthermore, in Part I, the random variation was described by a Markov jump process which was required to be independent of the control policy. In fact, as explained in [3], an experimentally observed fact is that by reducing the rate of change of broke recirculation, it is possible to reduce the occurrence of paper breaks. This effect is not captured by the actual Markov chain. Thus, we consider a modelling refinement whereby the break rate is made dependent on the rate of variation of flows, together with the corresponding control problem.

Part II is organized as follows. In Section II, we show how tanks' mean times to first overflow or first emptiness can be approximately computed using the theory of stochastic processes and their first passage-times, and how such a computational technique can become the basis of an analytical control tuning methodology. In Section III, we consider an extension of the control problem under control-dependent break transition rates. Finally in Section IV, conclusions and directions for future research are presented.

II - APPROXIMATE COMPUTATION OF MEAN TIMES TO FIRST EMPTINESS OR FIRST OVERFLOW FOR A GIVEN PIECEWISE CONSTANT GAIN FEEDBACK LAW.

The tuning methodology delineated in Part I is workable, except for requiring in general a large number of Monte Carlo simulations. While the performance measure leads to a tradeoff between tank level variability on the one hand, and flow rate variability on the other hand, the underlying practical tradeoff is between the latter and the mean length of *times to first incidents* (itself inversely correlated with tank levels' variability). Thus, theoretical estimates of mean times to first incidents as well as flow rates' variability indices as defined by the following equation (one possibility out of many) :

$$var_l = \overline{\lim}_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left|\frac{\tilde{u}_l(t)}{u_{l0}}\right| dt, \quad l=1,2 \tag{1}$$

for a given control policy, with u_1, u_2, u_{10}, u_{20} as defined in Eq. (19) and Eq. (20) of Part I,

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}; \quad z_{20}^{1} = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

would be very useful tools in assessing the acceptability of the policy from an engineering point of view.

First passage-time type calculations are very common in the analysis of so-called

hedging control policies [4]. Briefly summarized, a hedging control policy in manufacturing is one where in order to meet a certain (constant) rate of demand for parts given a manufacturing system which is not fully reliable, one must maintain a critical parts inventory level as a hedge against possible manufacturing system failure. Thus, whenever operational, the manufacturing system will have to produce at maximum rate until the critical inventory is attained, at which point, and until the next failure, it will only produce the required demand for parts. The exact optimal critical level is obtained as an adequate compromise between the cost of storing parts and that of late delivery of parts. First passage-time distributions play an important role in evaluating the exact optimal critical inventory levels. In [4], the manufacturing models studied are such that the inventory dynamics under hedging policies is characterized by a piecewise-constant velocity process, with a single velocity (rate of change of inventory) associated with a given "mode" of operation of the manufacturing system. The modes are defined much like for the paper machine and correspond to either full operation, partial, or even total failure of the manufacturing system. Once the critical inventory level is reached, production is such that the net inventory velocity is zero.

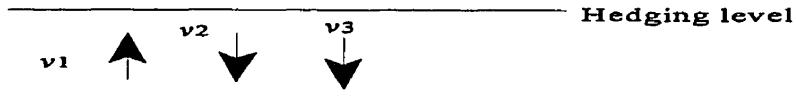


Figure 1 : Motion in the inventory space for a three modes system.

This will be the case until the next failure state for which demand cannot be met. Motion occurs as shown in Fig.1 for a three modes (a single operational mode 1 and two failure modes 2,3) system. Adapting the theory in [1,5], we can easily derive a theorem which will be directly useful for the estimation of mean times to first incidents. Consider a dynamic system described by the following (hybrid) state equation :

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = v(r(t)), \quad for \quad x \in [\min(h_0, h_{inc}), \max(h_0, h_{inc})] \\ &\dot{x}(t) = 0 \quad for \;\; x = h_0 \end{aligned} \tag{2}$$

where h_0 and h_{inc} are two constant levels, respectively referred to as the hedging and incidents levels. $r(t)$ is a discrete mode evolving according to a Markov chain with finite state space S = $\{1,2,...,n\}$, and a nxn transition probability matrix $P = \{p_{ij}\}$ obeying Eq. (5) and (6) of Part I (with coefficient 3 replaced by n). We shall assume that $v(r(t) = 1)(h_{inc} - h_0) < 0$ (i.e. the velocity vector points towards h_0), while for i $\neq$ 1, $v(r(t) = \mathrm{i})(h_{inc} - h_0) > 0$. Define for λ arbitrary real and $d\lambda$ infinitesimal :

$$f_i(\lambda,t)\, d\lambda = Pr[(\lambda < x < \lambda + d\lambda) \cap (r(t) = i)], \quad i = 1,...,n \tag{3}$$

and the probability density vector :

$$\vec{f}(x,t) = [f_1(x,t) \ldots f_n(x,t)]^T. \tag{4}$$

Also define : $P_{h0}(t) = Pr[x(t) = h_0]$ (the probability at time t that the inventory $x(t)$ sits at the hedging level). Let $x(0) = h_0$. Then, the probability density function of the time to first

passage from h_0 to h_{inc} (time to first incident), $g(t)$ is obtained from the following theorem.

Theorem 1 : Given $x(t)$, $r(t)$, $f(x,t)$, $P_{h0}(t)$, h_0, h_{inc}, $g(t)$ as above, $g(t)$ evolves according to the following system of coupled ordinary and partial differential equations :

$$\frac{\partial \vec{f}(x,t)}{\partial t} = -V\frac{\partial \vec{f}(x,t)}{\partial x} + \Lambda^T \vec{f}(x,t) \qquad x \in [\min(h_0,h_{inc}),\max(h_0,h_{inc})] \tag{5}$$

with

$$V = diag[v_i], \qquad v_i \triangleq v(r(t)=i)$$

$$\frac{dP_{h_0}(t)}{dt} = \lambda_{11}P_{h_0}(t) + |v_1| f_1(h_0^+,t), \tag{6}$$

with boundary conditions :

$$f_1(h_{inc},t) = 0, \quad f_i(h_0^+,t)|v_i| = \lambda_{1i}P_{h_0}(t), \quad i=2,\ldots,n \tag{7}$$

and initial conditions :

$$P_{h_0}(0)=1, \quad f_i(x,0)=0, \quad i=1,\ldots,n, \quad \forall x \in [\min(h_0,h_{inc}),\max(h_0,h_{inc})],$$

while

$$g(t) = \sum_{i=2}^{n} |v_i| f_i(h_{inc}^-,t). \tag{8}$$

Theorem 1 can be used to compute the mean time to first incident starting from the hedging point. This can be achieved by recognizing that :

$$\int_0^\infty tg(t)dt = -\frac{d}{ds}g^*(s)\Big|_{s=0}$$

where $g^*(s)$ is the Laplace transform of $g(t)$.

Thus, taking Laplace transforms of Eq. (5)- (8) yields :

$$s\vec{f}^*(x,s) = -V\frac{\partial \vec{f}^*}{\partial x}(x,s) + \Lambda^T\vec{f}^*(x,s), \tag{9}$$

$$sP_{h_0}^*(s) - 1 = \lambda_{11}P_{h_0}^*(s) + |v_1|f_1^*(h_0^+,s), \tag{10}$$

$$f_1^*(h_{inc},s)=0, \quad f_i^*(h_o^+,s)|v_i| = \lambda_{1i}P_{h_0}^*(s), \quad i=2,\ldots,n \tag{11}$$

$$g^*(s) = \sum_{i=2}^{n} |v_i|f_i^*(h_{inc}^-,s), \tag{12}$$

where the * indicates Laplace transformation.

Upon differentiation with respect to s of Eq. (9)-(12), one obtains :

$$\vec{f}^*(x,s) + s\frac{\partial \vec{f}^*}{\partial s}(x,s) = -V[\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial \vec{f}^*}{\partial s}(x,s)]] + \Lambda^T\frac{\partial \vec{f}^*}{\partial s}(x,s), \tag{13}$$

$$P_{h_0}{}^*(s) + s\frac{dP_{h_0}{}^*}{ds}(s) = \lambda_{11}\frac{dP_{h_0}{}^*}{ds}(s) + |v_1|\frac{df_1^*}{ds}(h_0^+,s), \tag{14}$$

$$\frac{df_1^*}{ds}(h_{inc},s)=0, \quad \frac{df_i^*}{ds}(h_0^+,s)|v_i| = \lambda_{1i}\frac{dP_{h_0}{}^*}{ds}(s), \quad i=2,\ldots,n \tag{15}$$

$$\frac{dg^*}{ds} = \sum_{i=2}^{n} |v_i|\frac{df_i^*}{ds}(h_{inc}^-,s), \tag{16}$$

Now letting s go to zero in Eq. (13) - (16), after establishing that $s = 0$ is in the domain of analyticity of all Laplace transforms (see Appendix A in [1]), we obtain the following system of differential equations :

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} \vec{f}^*(x,0) \\ \frac{\partial}{\partial s}\vec{f}^*(x,s)|_{s=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1}\Lambda^T & 0 \\ -V^{-1} & V^{-1}\Lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{f}^*(x,0) \\ \frac{\partial}{\partial s}\vec{f}^*(x,s)|_{s=0} \end{bmatrix} \tag{17}$$

with boundary conditions :

$$\begin{aligned} &f_1^*(h_0^+,0) = -|v_1^{-1}|(1+\lambda_{11}P_{h_0}{}^*(0)) \\ &f_i^*(h_0^+,0) = \lambda_{1i}|v_i^{-1}|P_{h_0}{}^*(0), \quad i=2,..,n, \quad f_1^*(h_{inc},0)=0 \end{aligned} \tag{18a}$$

From the above , one obtains :

$$\frac{df_i^*}{ds}(h_{inc}^-,s)\big|_{s=0}, \quad i=2,..,n,$$

$$\frac{df_1^*}{ds}(h_{inc},s)\big|_{s=0}=0, \quad \frac{df_1^*}{ds}(h_0^+,s)\big|_{s=0}=|v_1^{-1}|(\lambda_{11}\frac{dP_{h_0}^*}{ds}(s)\big|_{s=0}-P_{h_0}^*(0)),$$
$$\frac{df_i^*}{ds}(h_0^+,s)\big|_{s=0}=|v_i^{-1}|\lambda_{1i}\frac{dP_{h_0}^*}{ds}(s)\big|_{s=0}, \quad i=2,..,n. \tag{18b}$$

from which it follows that :

$$\int_0^\infty tg(t)dt=-\frac{dg^*}{ds}\big|_{s=0}=-\sum_{i=2}^{n}|v_i|\frac{df_i^*}{ds}(h_{inc}^-,s)\big|_{s=0}. \tag{19}$$

In effect, the calculations proceed as follows. First $f_i^*(h_{inc},0)$, $i = 2,...,n$ are obtained using the first line of Eq. (17) with $\vec{f}^*(h_0^+,0)$ expressed in term of $P_{h0}^*(0)$, and subsequently solving for $P_{h0}^*(0)$ using $f_1^*(h_{inc},0) = 0$. At that point Eq.(18b) is used to express $df^*_i(h_0^+,s)/ds|_{s=0}$, $i=1,..,n$ in terms of $dP_{h0}^*(s)/ds|_{s=0}$, and as a result propagating these expressions through the second line of Eq.(17) to obtain $df_i^*(h_{inc},s)/ds|_{s=0}$, $i = 2,..,n$ in terms of $dP_{h0}^*(s)/ds|_{s=0}$. The latter is obtained from $df_1^*(h_{inc},s)/ds|_{s=0}=0$. At that point $df_i^*(h_{inc},s)/ds|_{s=0}$, $i\neq 1$ can be calculated and Eq. (19) is applied to obtain the mean time to first incident. Therefore, for a *piecewise-constant velocity process* under a hedging policy, it is possible to compute the

mean time to first incidents (first hitting time of h_{inc}).

II.1 - Mathematical approximation and hedging control policies formulation

In the above, we have established an algorithm, to compute mean times to first incidents for a hedging policy resulting in a *piecewise-constant velocity process*. We wish to use the algorithm to evaluate the performance of the optimal controls as developed in Part I, from the point of view of susceptibility to leading to tanks overflows or emptiness. Under the applied control policies the rate of change of tank height corresponds to the integral over time of the expression in Eq. (24) in Part I and will, in general, not be constant for a given operational mode ; thus the computational algorithm is not directly applicable. However, we can approximate the dynamics of tank heights by a hedging policy with the hedging level chosen to be the equilibrium tank height in the operational mode. Furthermore, we shall approximate the variable rate of change of the tank height within a given mode (velocity), by a *constant* rate of change equal to the associated long term *average rate of change* within the given mode. The approximate tank height dynamics would then correspond to that of a piecewise-constant velocity hedging control policy with one operational mode and two failure modes. Assuming, as we shall show below, that the long term average within mode velocity can be computed, one must then ask the following question : is the resulting approximated height dynamics process satisfactory insofar as computing mean time to first incidents ? We feel that it can provide a reasonable approximation because of the following

collection of circumstances :

- Incidents of tank overflow or tank emptiness will tend to be rare for an adequate design and therefore will not occur until a large number of mode changes have taken place. While the average height change during a given mode depends on the initial height when the mode was entered , it is thus eventually the average over all sojourns in the given mode which is relevant for first incident type calculations. This is because despite the weak dependence from one on-off cycle to another, laws of large numbers are at work.
- The approximation tends to give an exact estimate of the average height in the tank, starting from the hedging level just after a large *integer* number of mode changes. The variance of that height is dictated by the Markov chain nature of the underlying mode jumps. However that same Markov chain structure is preserved in the approximate model.
- Incidents of tank overflow or tank emptiness can occur only during failure modes. While the average rates of change of height during the fraction of sojourn time in the last mode before incident are inadequately calculated, this has little impact because of the large number of on-off cycles involved and the fact that failure modes (which are the ones leading to incidents) tend themselves to be much shorter than operational modes.

The above arguments are reinforced by simulation results we report in Table 1 in the next subsection. We now discuss the manner in which long term average within mode height

velocities are computed.

II.1.1 - Computation of long term average rate of change of height in mode *i*

We shall first note that the instantaneous rate of change of height in a given tank is simply the net flow rate ; it can be easily calculated in a given mode once $u_2(t)$ is known for the broke tank, and $u_1(t)$ is known for the white water tank. The long term averages of $u_1(t)$ and $u_2(t)$ can themselves be computed from the long term average of the modified input variables in Eq.(20) of Part I, under the feedback law in Eq.(24) of Part I. In order to compute the latter, we proceed as follows :

- We recognize in view of Eq. (24) in Part I, that the long term average of $\tilde{u}(t)$ *right after the onset of mode i* is directly related to the long term average of the modified state $\bar{z}(t)$ right after the onset of mode i. Let $\hat{\bar{z}}_i$ be that value for $i=1,2,3$.
- We further recognize that a typical cycle is made up of a sojourn in operational mode 1 for a random length of time followed by a sojourn in a failure mode either of type 2 or type 3, again for a random length of time.
- Given the stationarity of $\hat{\bar{z}}_i$, in particular for $i=1$, it follows that $\hat{\bar{z}}_1$ must be such that if $\bar{z}(t)$ starts at $\hat{\bar{z}}_1$ with the onset of mode 1, at the end of a typical on-off cycle, the expected value of $\bar{z}(t)$ must be again $\hat{\bar{z}}_1$ (fixpoint property). This stationarity property can then be used to compute $\hat{\bar{z}}_1$. The same

approach can be used to compute $\hat{\bar{z}}_2$ and $\hat{\bar{z}}_3$.

More specifically, one can write at the onset of mode i, i=1,2,3 :

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{z}} = \bar{A}\bar{z} + \overline{BU}_i \\ \textit{with}\quad &\bar{A} \triangleq \tilde{A} - \tilde{B}\ (\bar{R}^{-1}\tilde{B}^T\bar{K}^{\infty}) \\ &\overline{BU}_i \triangleq \tilde{B}\ (-\bar{R}^{-1}\tilde{B}^T\bar{K}^{\infty}\bar{\alpha}_i^{\infty}) + \begin{bmatrix} \bar{G}^i \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \tag{20}$$

where 0 is a matrix with appropriate dimension and because in our case matrices $\bar{A}, \tilde{B}, \bar{R}$ and $\bar{Q}$ are identical in each mode, we designate by $\bar{K}^{\infty}$ the common Riccati gains $\bar{K}_i^{\infty}$, i=1,2,3. In mode i, the evolution of $\bar{z}(t)$ starting from $z(0) = z_0$, is given by :

$$\bar{z}(i,t,\bar{z}_0) = \exp(\bar{A}t)\bar{z}_0 + \int_0^t \exp(\bar{A}\tau)\overline{BU}_i d\tau, \qquad \textit{for}\ \ i=1,2,3. \tag{21}$$

Based on Eq. (21) and the stationarity property of $\hat{\bar{z}}_1$, $\hat{\bar{z}}_2$ and $\hat{\bar{z}}_3$, it is then possible to write the following system of equations :

$$\hat{\bar{z}}_2 = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\bar{z}(1,t,\hat{\bar{z}}_1)\,dt + \begin{bmatrix} z_{10}^1 \\ z_{20}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^2 \\ z_{20}^2 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\hat{\bar{z}}_3 = \int_0^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\bar{z}(1,t,\hat{\bar{z}}_1)\,dt + \begin{bmatrix} z_{10}^1 \\ z_{20}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^3 \\ z_{20}^3 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

where in Eq.(24)

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}+\lambda_{13}}, \quad p_3 = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}+\lambda_{13}}.$$

Recalling that the sojourn time in mode 1 is exponentially distributed with parameter λ_1, Eq.

$$\begin{aligned}\hat{\bar{z}}_1 = [\int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\bar{z}(2,t,\hat{\bar{z}}_2)\,dt + \begin{bmatrix} z_{10}^2 \\ z_{20}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^1 \\ z_{20}^1 \end{bmatrix}]p_2 + \\ [\int_0^\infty \lambda_3 e^{-\lambda_3 t}\bar{z}(3,t,\hat{\bar{z}}_3)\,dt + \begin{bmatrix} z_{10}^3 \\ z_{20}^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^1 \\ z_{20}^1 \end{bmatrix}]p_3\end{aligned} \tag{24}$$

(22) and Eq. (23) express the fact that long term average values of state $\bar{z}(t)$ right after the onset of modes 2 or 3 must be the expected value of $\bar{z}(t)$ at the end of an evolution of $\bar{z}(t)$ in mode 1 given that it has started at stationary value $\hat{\bar{z}}_1$ (this is the meaning of the integrals in Eq. (22)-(23)). The additional terms on the right hand-sides correspond to discontinuities in $\bar{z}(t)$ whenever set points are different from mode to mode. Eq. (24) expresses the fact that, up to a jump term due to the mode change, $\hat{\bar{z}}_1$ must be the expected value of $\bar{z}(t)$ right after the onset of mode 1 given that it was right before either in mode 2 (with probability p_2) and value $\hat{\bar{z}}_2$ as it entered mode 2, or it was in mode 3 (with probability p_3) and value $\hat{\bar{z}}_3$ as it entered mode 3. Finally, we introduce the following notation :

$$C_2 \triangleq \begin{bmatrix} z_{10}^{1} \\ z_{20}^{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^{2} \\ z_{20}^{2} \end{bmatrix}, \quad C_3 \triangleq \begin{bmatrix} z_{10}^{1} \\ z_{20}^{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^{3} \\ z_{20}^{3} \end{bmatrix},$$

$$C_{21} \triangleq \begin{bmatrix} z_{10}^{2} \\ z_{20}^{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^{1} \\ z_{20}^{1} \end{bmatrix}, \quad C_{31} \triangleq \begin{bmatrix} z_{10}^{3} \\ z_{20}^{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{10}^{1} \\ z_{20}^{1} \end{bmatrix}.$$

The above argument is summarized pictorially in Fig.2.

At this point, we note that due to the stabilizing nature of the optimal control ([2], Corollary 1), matrix A has all its eigenvalues in the open left-half plane, and thus is invertible. The same holds for matrices $[-\lambda_1 I+A]$, $[-\lambda_2 I+A]$ and $[-\lambda_3 I+A]$ given that their eigenspectra are shifted to the left by a real negative amount.

Thus, integrating (21) yields :

$$\bar{z}(i,t,\bar{z}_0) = \exp(\bar{A}t)(\bar{z}_0 + \bar{A}^{-1}\overline{BU}_i) - \bar{A}^{-1}\overline{BU}_i. \tag{25}$$

Further substitution of Eq. (25) with the appropriate index in Eq. (22)-(24) yields :

$$\hat{\bar{z}}_2 = -\lambda_1(-\lambda_1 I + \bar{A})^{-1}(\hat{\bar{z}}_1 + \bar{A}^{-1}\overline{BU}_1) - \bar{A}^{-1}\overline{BU}_1 + C_2, \tag{26}$$

$$\hat{\bar{z}}_3 = -\lambda_1(-\lambda_1 I + \bar{A})^{-1}(\hat{\bar{z}}_1 + \bar{A}^{-1}\overline{BU}_1) - \bar{A}^{-1}\overline{BU}_1 + C_3, \tag{27}$$

$$\hat{\bar{z}}_1 = p_2[-\lambda_2(-\lambda_2 I+\bar{A})^{-1}(\hat{\bar{z}}_2+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_2)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_2+C_{21}]+ \\ p_3[-\lambda_3(-\lambda_3 I+\bar{A})^{-1}(\hat{\bar{z}}_3+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_3)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_3+C_{31}]. \tag{28}$$

Equations (26), (27) and (28) yield the following expressions :

$$\begin{aligned}
&\hat{\bar{z}}_2 = N_2^{-1}N_1, \\
&\hat{\bar{z}}_3 = N_2^{-1}N_1, \\
&\hat{\bar{z}}_1 = p_2[\lambda_2(\lambda_2 I+\bar{A})^{-1}(\hat{\bar{z}}_2+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_2)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_2]+p_3[\lambda_3(\lambda_3 I+\bar{A})^{-1}(\hat{\bar{z}}_3+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_3)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_3], \\
&with\ :\ N_1 = \lambda_1(\bar{A}-\lambda_1 I)^{-1}[p_2\lambda_2(\bar{A}-\lambda_2 I)^{-1}\bar{A}^{-1}\overline{BU}_2+p_3\lambda_3(\bar{A}-\lambda_3 I)^{-1}\bar{A}^{-1}\overline{BU}_3] \\
&\quad +\lambda_1(\bar{A}-\lambda_1 I)^{-1}\bar{A}^{-1}(p_2\overline{BU}_2+p_3\overline{BU}_3-\overline{BU}_1)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_1-\lambda_1(\bar{A}-\lambda_1 I)^{-1}(p_2C_{21}+p_3C_{31})+C_2, \\
&N_2 = \lambda_1(\bar{A}-\lambda_1 I)^{-1}[-p_2\lambda_2(\bar{A}-\lambda_2 I)^{-1}-p_3\lambda_3(\bar{A}-\lambda_3 I)^{-1}+I],
\end{aligned} \tag{29}$$

from which, recalling (25), the long term average of $\bar{z}(t)$ within modes 1 can be computed using the key renewal theorem [6], as follows :

$$\begin{aligned}
z_i^{\infty} &= \frac{[\int_0^{\infty}\lambda_i e^{-\lambda_i T}\int_0^{T}\exp(\bar{A}t)(\hat{\bar{z}}_i+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i]dtdT]}{expected\ length\ of\ sojourn\ in\ mode\ i\ (=\frac{1}{\lambda_i})} \\
&= \lambda_i^2\int_0^{\infty}[\exp(\bar{A}t)(\hat{\bar{z}}_i+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i\int_t^{\infty}e^{-\lambda_i T}dT]dt \\
&= \lambda_i\int_0^{\infty}[\exp(\bar{A}t)(\hat{\bar{z}}_i+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i[e^{-\lambda_i t}]dt \\
&= -\lambda_i(-\lambda_i I+\bar{A})^{-1}(\hat{\bar{z}}_i+\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i)-\bar{A}^{-1}\overline{BU}_i, \quad i=1,2,3,
\end{aligned}$$

where in the above, the order of the double integration has been interchanged. Recalling Eq. (19)-(20) in Part I, one can then obtain, in a straightforward manner, the long term averages of state subvector $[x_3\ x_4]^T$, or equivalently $[u_1\ u_2]^T$, in each one of the modes. A Monte Carlo simulation based on the data of the sample system was used to experimentally estimate these averages and compare them with the theoretical formula. The results are summarized in Table 1 and indicate good agreement.

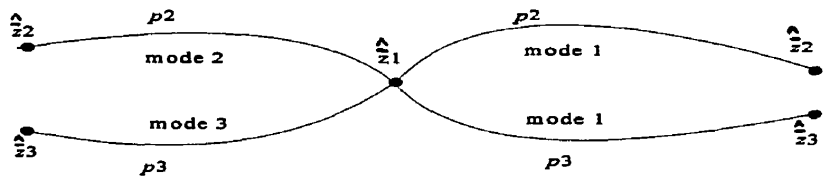


Figure 2 : Stationarity property of $\hat{z}_i$, $i = 1,2,3$

Mean value of $u(x)$	Monte Carlo method	analytical method
$\hat{u}^1$	$[5330\ \ 1529]^T$	$[5336\ \ 1533]^T$
$\hat{u}^2$	$[5350\ \ 1512]^T$	$[5331\ \ 1537]^T$
$\hat{u}^3$	$[5328\ \ 1532]^T$	$[5334\ \ 1534]^T$

Table 1 : Comparaison of the theoretical and Monte Carlo simulation based estimates of the mean values of $u(x)$ for modes 1,2,3.

II.1.2 - Hedging control policy formulation

In the previous section we obtained the mean value of $u(x)$ in each mode. We now assume that $\hat{u}^1$, $\hat{u}^2$ and $\hat{u}^3$ are the *piecewise constant* flow rates in modes i=1,2,3 respectively.

Furthermore $u^i(x)$, i=1,2,3 , is a vector with 2 components (first component is the flow rate from the white water tank to the TMP (Thermomechnanical Pulp) mill, the second component is the flow rate from the broke dilution tank to the paper machine). These two flow rates have opposite actions. In fact, when one increases the other decreases. Therefore we can consider each component separately, and bring the analysis to the scalar case. As a result we can apply the existing hedging control policy formulation. Recalling Eq. (4) in Part I, we hereon focus mainly on the broke tank, but the analysis is equally valid for the white water tank. We have the following scalar equations :

$$\dot{x}_2(t) = -u_2^i(x_2) + F_{22}^i \ , \quad i=1,2,3$$

The optimum flow rate under the hedging control policy is :

$$u_2^1(x_2) = \begin{cases} \hat{u}_2^1 & x_2 > h_{02} \\ F_{22}^1 & x_2 = h_{02} \\ 0 & x_2 < h_{02}, \end{cases}$$

while in the failure modes :

$$u_2^i(x_2) = \hat{u}_2^i, \ i=2,3 \ \ \forall x_2 .$$

Figure 3 gives a geometric representation of the dynamics for both tanks with

$$v_{ji} \triangleq -\hat{u}_j^i + F_{jj}^i, \ i=1,2,3 \ j=1,2$$

the rates of change of height in the various modes.

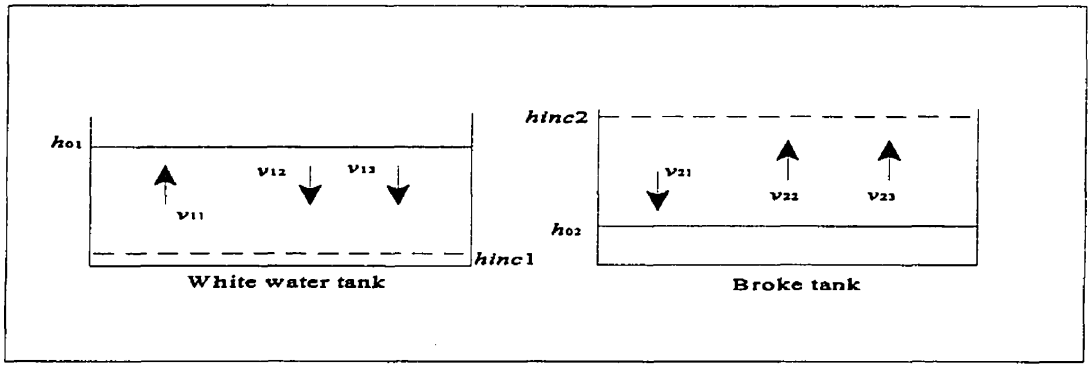


Figure 3 : Velocity vectors in modes 1,2,3 for white water and brokes tanks.

Since there is only one hedging level, the tank volume decreases towards it (the equilibrium point) in the operational mode 1, and it remains there as long as there is no transition to other modes. In modes 2 and 3, the tank volume has a tendency to increase. Occasionally, cumulative sojourn times in modes 2 and 3 can be long enough so as to cause an overflow. Hence it is important to estimate mean times to first emptiness and overflows.

For a given choice of matrix $\overline{Q}$, an increase of $\overline{R}$ will decrease the variability of the flow rate in the resulting optimal control law, and force a greater variability of broke and white water tank heights (for further details see Part I). This in turn decreases the mean time to tank emptiness or overflow. Mean times to first incidents have been estimated using the algorithm developed above. Figures 4-a and 4-b respectively represent the dependence of mean time to first overflow and the flow rate variability index on the Euclidian norm of matrix $\overline{R}$, denoted $\| \overline{R} \|$.

It is interesting to see that after a sufficiently high value of $\| \overline{R} \|$, around 9.10^{9}, the

mean time to first incidents stabilizes in the broke tank at a worst case value of about 10 days. After this value, one observes no further reduction when increasing R. Note that for the same range of $\| \overline{R} \|$, the flow rate variability index drops to zero. In fact for large values of $\overline{R}$, the flow rate becomes constant at value corresponding to an equilibrium between the mean incoming flow rates and the mean outgoing flow rates. It is possible to achieve a higher mean time to first overflow but at the cost of a higher variability index (see figure 4b). For the white water tank the worst case (shortest) mean time to first emptiness is as about 26 days (see figure 5 a-b).

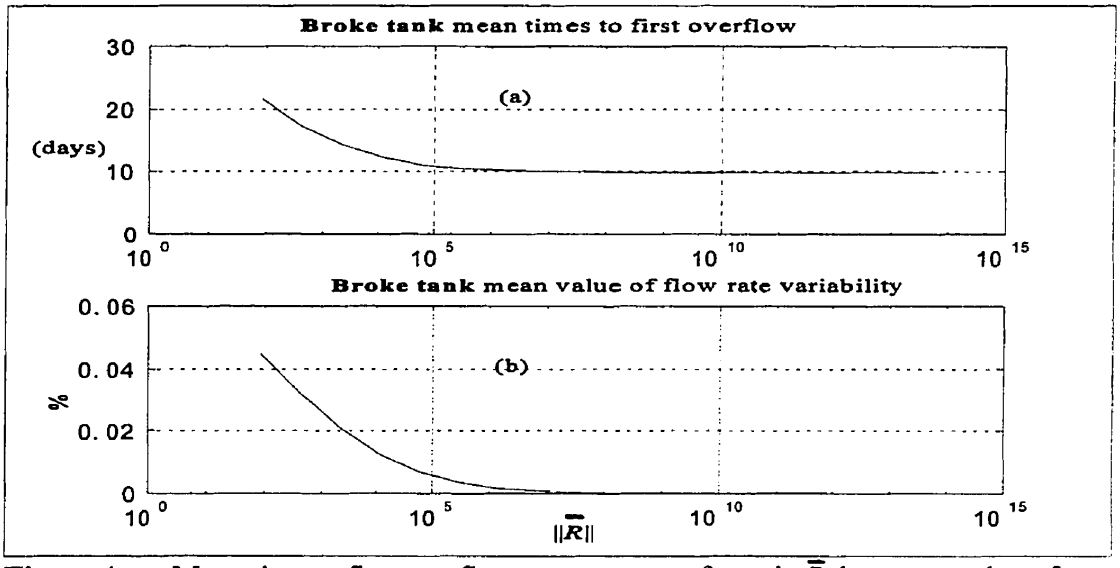


Figure 4 : a- Mean time to first overflow versus norm of matrix $\overline{R}$, b - mean value of flow rate variability indices versus norm of matrix $\overline{R}$

One reason that this tank becomes empty less frequently than the broke tank overflows, is its larger capacity. Table 2 gives the mean time to first incidents for both analytical and Monte Carlo simulation based computations.

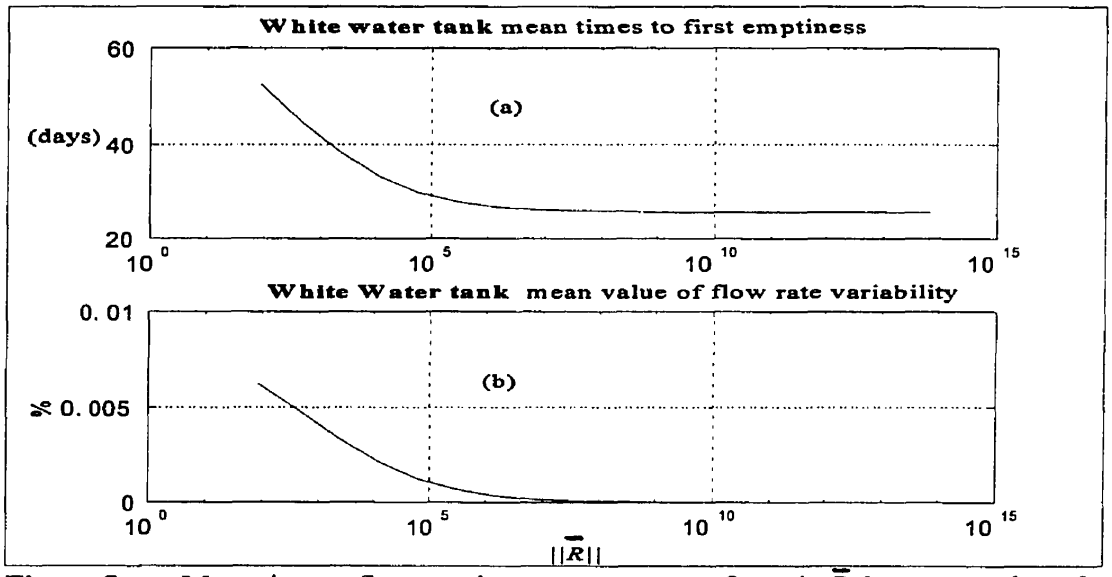


Figure 5 : a - Mean time to first emptiness versus norm of matrix $\bar{R}$, b - mean value of flow rate variability indices versus norm of matrix $\bar{R}$

norm of R	mean times Monte Carlo simulation	analyticalmethod
$\|\bar{R}\| = 9.10^4$	[30 11] (days)	[29 11](days)
$\|\bar{R}\| = 9.10^9$	[27 10] (days)	[26 10](days)

Table 2 : Mean time to first incidents. The first value is for the white water tank while the second is for the broke tank.

III - CONTROL POLICY FOR A SYSTEM WITH BOTH CONTROL DEPENDENT JUMP TRANSITION RATE AND STATE DISCONTINUITIES.

In Part I, based on Sworder's approach [8] we have proposed an optimal control policy for a jump linear system where the continuous part of the state changes

discontinuously at the onset of the jumps. The random variation was described by a Markov jump process which was required to be independent of the control policy. In fact, by reducing the variation of broke recirculation, as explained in [3], it is possible to reduce the occurrence of paper breaks. This effect is not captured by the actual Markov chain. However, it is interesting to design a stochastic model of the random process, which would include in its probability law the effect of changes in actuating signal on the stochastic variation.

In [7], Sworder and Robinson by studying a jump parameter system in which the probability law of the parameter process depends upon the control policy used, propose a near optimal control policy using the stochastic maximum principle. In the following we propose a design equation of the control law where, not only the random jump process is affected by the control policy, but also the continuous part of the state is allowed to change discontinuously.

III.1 - Background

In order to simulate the fact the discrete jump probability depends upon the control policy, Sworder and Robinson propose in [7] the use of a new variable $\rho(t)$ called the "speed measure".

Thus, the model of the system to be controlled is given by the linear differential equation:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(r(\rho(t)))x(t) + B(r(\rho(t)))u(t); \quad 0 \le t \le T \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{30}$$

Also, as explained in Part I, because of the discontinuities of the $x(t)$ trajectories, the system model at jump instants from mode i to mode j is given by :

$$x(t) = x(t^-) + q_{ij} \tag{31}$$

where in Eq.(31), q_{ij} is a given constant.

From the point of view of the random process r, variable $\rho(t)$ simulates the flow of time. The evolution of $\rho(t)$ is given by the equation :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= f(x(t), u(t), r(\rho(t))) \quad 0 \le t \le T \\ \rho(0) &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

where f is continuously differentiable with respect to (x,u), bounded and strictly positive. The jumps of r are governed by :

$$\begin{aligned} Pr(r(\rho(t) + d\rho) = j \mid r(\rho(t)) = i, x(t) = x) &= \lambda_{ij} d\rho + o(d\rho) \qquad \text{if } i \neq j \\ &= 1 + \lambda_{ii} d\rho + o(d\rho) \qquad \text{if } i = j \end{aligned} \tag{33}$$

and $[A(r(\rho(t)), B(r(\rho(t))] = [A_i, B_i]$, if $r(\rho(t)) = i$. Note that relative to ρ, r *behaves as a homogeneous Markov chain.*

Furthermore, note in Eq.(32) that if $f=1$, the random variation is described by the known Markov chain. If $f>1$, jumps will occur sooner than when $f=1$ while if $f<1$ the

reverse is true.

It will be assumed that, at time t, the state $(x(t),r(t))$ is fully observed. Based upon this observation the controller selects a control action $u(t)$, i.e.

$$u(t)=u(t,x,r),$$

The optimal control is one which minimizes the following performance measure :

$$J(u,t_0,x_0,r(t_0)) = E\{\int_{t_0}^{T}(x^T Qx + u^T Ru)dt \,|\, t_0,x_0,r(t_0)\} \tag{34}$$

Throughout the forthcoming developments, we shall designate by $\partial_x f(x_1, x_2, ..., x_m)$, $i=1,...,m$ for some integer m, the partial derivative of a function of several variables with respect to argument x_i. Also, whenever this does not create potential confusion, we shall neglect to write the arguments of a function. In order to compute the optimal control policy, we use the stochastic minimum principle. For any admissible u, define the Hamiltonian function at $(t,x(t),\rho(t))$ as

$$\begin{aligned} H(t,x,\rho,u) &= [p(t)^T \;\; s(t)]\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\rho}(t)\end{bmatrix} + x^T(t)Qx(t) + u^T(t,x,r)Ru(t,x,r) \\ &= p(t)^T(A(r(\rho(t)))x(t) + B(r(\rho(t)))u(t,x,r)) + s(t)f(x,u,r) + x^T(t)Qx(t) + \\ &\qquad u^T(t,x,r)Ru(t,x,r) \end{aligned} \tag{35}$$

Because of the random speed measure, we need the following notation ; for any time function $g(t)$ denote,

$$dg(t) = g(t+dt) - g(t). \tag{36}$$

while for any continuous function $g(t,x(t),r(\rho(t)))$ denote :

$$\Delta_\rho g(t,x,r(\rho(t))) = g(t,x(t),r(\rho(t)+d\rho)) - g(t,x(t),r(\rho(t))) \tag{37}$$

where in Eq.(37), $d\rho$ is an increase in ρ while variables t and x are *considered fixed.* The random adjoint process $p(t)$ and $s(t)$ must satisfy the following equations :

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) = -\partial_x H(t,x,\rho,u^*) = -[A(r(\rho(t)) + B(r(\rho(t))\partial_x u^*(t,x,r))]^T p(t) - 2Qx - \\ s(t)[\partial_x f(x,u^*,r) + \partial_u f(x,u^*,r)\partial_x u^*(t,x,r)] - 2u^*(t,x,i)R\partial_x u^*(t,x,i) \end{aligned} \tag{38}$$

with boundary condition : $p(T) = 0$,

$$\dot{s}(t) = -\partial_\rho H(t,x,\rho,u^*) \tag{39}$$

with boundary condition : $s(T) = 0$. The boundary conditions $p(T)$ and $s(T)$ are set equal zero, because the final time T is fixed and the final state is free. u^* is the optimal control. From Eq.(39), and for dt infinitesimal

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\Delta_\rho H}{d\rho} \tag{40}$$

where in Eq.(40), we used the notation of Eq.(36) and Eq.(37). Hence

$$
\begin{aligned}
ds &= -\Delta_\rho H \frac{dt}{d\rho} \\
&= -\{p(t)^T \Delta_\rho (A(r(\rho(t))x(t) + B(r(\rho(t))u^*(t,x,r)) + s(t)\Delta_\rho f(x,u^*,r) + \\
&\quad \Delta_\rho (x(t)^T Q x(t) + u^*(t,x,r)^T R u^*(t,x,r))\} f^{-1}(x,u^*,r)
\end{aligned} \tag{41}
$$

Notice that in Eq.(41), we switched to considering the increment of $s(t)$ rather than its derivative in view of the fact that it will not be differentiable at jump instants.

In the stochastic context, the Hamiltonian , the co-state vectors p and s are random processes. As a consequence of Theorem 1 of [7] and for any admissible u, the stochastic extension of the minimum principle can be written as follows :

$$
E\{H(t,x,u)|(x,r)\} \geq E\{H(t,x,u^*)|(x,r)\} \tag{42}
$$

Thus, define $H_r(t,x,u) \triangleq E\{H(t,x,u)|x,r\}$. By defining $P_r(t,x) = E\{p(t)|x,r\}$ and $S_r(t,x) = E\{s(t)|x,r\}$, we obtain upon partial differentiation with respect to u in Eq.(35) :

$$
u^*(t,x,r) = -\frac{1}{2} R^{-1}\{P_r(t,x)^T B(r(\rho(t))) + S_r(t,x)\partial_u f(x,u,r)\} \tag{43}
$$

Taking expectations for x arbitrary, and $r(t)=i$ on both sides of Eq.(38) and Eq.(41), and using the results in (A10) and (A11) from Appendix A, we obtain Eq.(44) and Eq.(45) below:

$$\partial_t P_i(t,x) + \partial_x P_i(t,x)\dot{x} + \sum_j \lambda_{ij} P_j(t,x+q_{ij}) f(x,u^*,i) = -(A_i + B_i \partial_x u^*(t,x,i))^T P_i(t,x) - S_i(t,x)\partial_x f(x,u^*,i) - 2u^*(t,x,i) R \partial_x u^*(t,x,i) - 2Qx \tag{44}$$
$$P_i(T,x) = 0, \forall (x,i)$$

$$\partial_t S_i(t,x) + \partial_x S_i(t,x)\dot{x}(t) = -\sum_j \lambda_{ij}\{P_i(t,x+q_{ij})[A_j(x+q_{ij}) + B_j u^*(t,x+q_{ij},j)] + S_i(t,x) f(x+q_{ij},u^*,j) + S_j(t,x+q_{ij}) f(x+q_{ij},u^*,i) + u^{*T}(t,x+q_{ij},j) R u^*(t,x+q_{ij},j)\} \tag{45}$$
$$S_i(t,x) = 0, \quad \forall (x,i)$$

These equations are non linear partial differential equations and their analytical solution is not within reach. Therefore following [7], attention is restricted to the case where f is weakly dependent on u. More specifically :

$$f(u,i) = 1 + \varepsilon \eta_i u + o(\varepsilon) \tag{46}$$

where η_i is a constant coefficient vector for each i and ε a small scalar parameter. The $o(\varepsilon)$ term in Eq.(46) and all term of $o(\varepsilon)$ in the subsequent equation will be neglected. The terms of $o(\varepsilon)$ depend on (x,u) as well as ε. Although, no intrinsic bounds can be established for the entries of u, we assume that they are bounded, otherwise $f(u,i)$ could occasionally become negative which is excluded if ρ is to simulate the flow of time. The obtained approximate controller is a first step in computing a more general optimal control. Recall that based for our particular application, matrices A, B and K are independent of mode i. Also, x represents

tank levels and flow rates, u represents flow rates variability. The components of these vectors, because of physical restrictions (but not because of the model itself) are indeed inherently bounded.

In the following we attempt to solve the control problem under assumption given by Eq.(46) and when ε goes to zero. It is assumed that P and S have the following continuity property where $\Gamma_i(t,x)$ is some vector function to be determined :

$$\begin{aligned} P_i(t,x) &= P_i(t,x)\big|_{f=1} + \varepsilon\Gamma_i(t,x) \\ \lim_{\varepsilon\to 0} S_i(t,x) &= S_{i0}(t,x) \end{aligned} \tag{47}$$

If $f=1$,

$$P_i(t,x) = 2K(x+\alpha_i) \tag{48}$$

and the following equations obtained for the case of a discontinuous $x(t)$ trajectory in Part I, are valid:

$$\begin{aligned} &\dot{K}(t) = -A^T K(t) - K(t)A + K(t)BR^{-1}B^T K(t) - Q \\ &K(T) = 0, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha}_i(t) = (A + K(t)^{-1}Q)\alpha_i(t) - \sum_j^n \lambda_{ij}(\alpha_j(t) + q_{ij}) \\ &\alpha_i(T) = 0 \quad i = 1,..,n \end{aligned} \tag{50}$$

where $\alpha_i(t)$, $i = 1,...,n$ are the bias vectors. Assuming that $S_{i0}(t,x)$ is an affine function of x, with $m_i(t)$ and $\beta_i(t)$, time-dependent vectors to be determined,

$$S_{i0}(t,x)=2m_i^T(t)(x+\beta_i(t)), \tag{51}$$

Eq.(45) yields :

$$\begin{aligned}2\dot{m}_i^T(x+\beta_i)+2m_i^T\dot{\beta}_i+2m_i^T(Ax-BR^{-1}B^TK(x+\alpha_i))=-\sum_j\lambda_{ij}\{2(Aq_{ij}-\\ BR^{-1}B^TK(x+\alpha_j+q_{ij}))^TK(x+\alpha_i)+2m_j^T(x+\beta_j+q_{ij})+\\ (x+\alpha_j+q_{ij})^TKBR^{-1}B^TK(x+\alpha_j+q_{ij})+2x^TQq_{ij}+q_{ij}^TQq_{ij}\}\end{aligned} \tag{52}$$

Eq.(45) and Eq.(52) yields :

$$\begin{cases}\dot{m}_i=-(A^T-KBR^{-1}B^T)m_i-\sum_j\lambda_{ij}\{m_j+(KA+Q)q_{ij}\}\\ m_i(T)=0,\ i=1,..,n\end{cases} \tag{53}$$

while $\beta_i(t)$ evolves according to :

$$\begin{aligned}m_i^T\dot{\beta}=m_i^T(A-BR^{-1}B^TK)\beta_i+m_i^TBR^{-1}B^TK\alpha_i-\sum_j\lambda_{ij}\{m_j^T(\beta_j-\beta_i+q_{ij})-\\ (\alpha_j+q_{ij})^TK(t)BR^{-1}B^TK(t))(\alpha_i(t)-0.5(\alpha_j+q_{ij}))\\ q_{ij}(A^TK\alpha_i+0.5Qq_{ij}-(Q+A^TK)\beta_i)\}\\ \beta_i(T)=0,\quad i=1,..,n\end{aligned} \tag{54}$$

Also Eq. (54) becomes :

$$u^*(t,x,i)=-R^{-1}B^TK(t)(x+\alpha_i)-\frac{\varepsilon}{2}R^{-1}[B^T\Gamma_i(t,x)+2\eta_i^Tm_i(t)(x+\beta_i)] \tag{55}$$

To complete the solution for this near optimal control law an equation for Γ is needed. By direct substitution of Eq. (43) and Eq.(47) into Eq.(44), the following is obtained :

$$\partial_t\Gamma_i(t,x)+\partial_x\Gamma_i(t,x)[Ax-BR^{-1}B^TK(x+\alpha_i)]+(A^T-KBR^{-1}B^T)\Gamma_i(t,x)- \\ S_iKBR^{-1}\eta_i+\sum_j\lambda_{ij}\{\Gamma_j(t,x+q)-2(x+\alpha_j+q_{ij})^TK\eta_iR^{-1}B^TK(x+\alpha_i)\}=0 \tag{56}$$

Now assuming that the kth component of $\Gamma_i(t,x)$, $(\Gamma_i(t,x))_k$ can be expressed as follows, for some time function $\theta_{i,k}(t)$ and N by 1 vector $\gamma_{i,k}(t)$, it follows that :

$$(\Gamma_i(t,x))_k=2\gamma_{i,k}(t)^T(x+\theta_{i,k}(t)) \quad for \;\; k=1,..,N \tag{57}$$

Then by direct substitution it can be verified that if the γ_k's satisfy Eq.(58) below, then Eq.(57) yields a solution to Eq.(56).

$$\dot{\gamma}_{i,k}=-(A^T-KBR^{-1}B^T)\gamma_{i,k}-\sum_l[A^T-KBR^{-1}B^T]_{k,l}\gamma_{i,l}+[KBR^{-1}\eta_i^T]_km_i- \\ \sum_j\lambda_{ij}\{\gamma_{j,k}-KBR^{-1}\eta_i^T(K)_k(\alpha_j+q_{ij})\} \tag{58}$$
$$\gamma_{i,k}(T)=0 \quad i=1,..,n \quad k=1,..,N$$

While $\theta_{i,k}(t)$ must evolve according to :

$$\gamma_{i,k}^T\dot{\theta}_{i,k}=\gamma_{i,k}^T(A-BR^{-1}B^TK)\theta_{i,k}+\gamma_{i,k}BR^{-1}B^TK\alpha_i^T+(KBR^{-1}\eta_i^T)_km_i^T(\beta_i-\theta_{i,k})+ \\ \sum_j\lambda_{ij}\{(\alpha_j+q_{ij})^T(K)_k\eta_iR^{-1}B^TK(\alpha_i-\theta_{i,k})+\gamma_{j,k}^T(\theta_{i,k}-\theta_{j,k}-q_{ij})\} \tag{59}$$
$$\theta_i(T)=0, \quad i=1,..,n$$

since all the above equations can be solved (at least at steady-state), and the corresponding

boundary conditions can be satisfied, these equations constitute the basis of an algorithm for building a near optimal controller in the case of weakly control sensitive jump rates.

III.2 - Form of the control law for the sample system

The model of the system is described in Part I. At continuity points of $r(t)$ it is represented by:

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{A}\tilde{z}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t)$$

$$with \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

and at jump instants by :

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}(t^-) + \tilde{q}_{ij}$$

The structure of the control law becomes :

$$\tilde{u}^*(t,\bar{z},i) = -\bar{R}^{-1}\tilde{B}^T\bar{K}(t)(\bar{z}(t) + \bar{\alpha}_i(t)) - \frac{\varepsilon}{2}\bar{R}^{-1}[\tilde{B}^T\Gamma_i(t,\bar{z}) + \eta_i^T m_i(t)^T(\bar{z} + \beta_i(t))]$$

Note that when ε approaches zero, the problem degenerates to the problem solved in Part I. The part linear in ε is in fact used to adjust the control action. Also, the choice of η_i depends on the physical understanding of the system. For our problem we choose, $\eta_2=\eta_3=[0\ 0]$. The

reason is, that in break modes repair rate is for all practical purposes independent of the recirculation rate. In fact, it is a function of the time that the machine operator needs to put back the paper on the paper machine. Parameters ε and η_1 (operating model) are to be obtained from a parameter identification procedure on real data.

The numerical result is presented for an infinite horizon problem. Hence, all the parameters could be computed off-line. Hereon, we designate steady-state value by subscript ∞. $\bar{K}^{\infty}$ and $\bar{\alpha}^{\infty}_i$ are as obtained in Part I (control insensitive jump rate case). Knowing $\bar{K}^{\infty}$ and $\bar{\alpha}^{\infty}_i$ one can compute m^{∞}_i and therefore β^{∞}_i (Eq.(53) and Eq.(54)). Subsequently each component of Γ^{∞}_i and θ^{∞}_i can be calculated (Eq.(58) and Eq.(59)). We set $\eta_1 = [0\ 1]$, assuming through this choice that only broke recirculation can affect the occurrence of breaks. The resulting control law is as follows :

$$\tilde{u}(t,z,1)=\begin{bmatrix} 0 & -0.29\varepsilon & -2.6\,10^{-3} & 0 \\ -10^{-3} & 3\,10^{-4}\varepsilon & 34.25\varepsilon & -2.2\,10^{-3}+8.6\varepsilon \end{bmatrix}\bar{z}+\begin{bmatrix} 9\,10^{-2}-3.8\,10^{-2}\varepsilon \\ -1.9\,10^{-2}+3.2\,10^{9}\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}(t,z,2)=\begin{bmatrix} 0 & -1.5\,10^{-2}\varepsilon & -2.6\,10^{-3} & 0 \\ 0 & 3.10^{-4}\varepsilon & 0 & -2.2\,10^{-3} \end{bmatrix}\bar{z}+\begin{bmatrix} -1.94+9.44\varepsilon \\ 0.41 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}(t,z,3)=\begin{bmatrix} 0 & -4.4\,10^{-4}\varepsilon & -2.6\,10^{-3} & 0 \\ 0 & -10^{-4}\varepsilon & 0 & -2.2^{-3} \end{bmatrix}\bar{z}+\begin{bmatrix} -1.97 \\ 0.41-0.2\varepsilon \end{bmatrix}$$

We observe that the resulting control law is affine in the state. However, in order to numerically evaluate the performance of this controller, one needs to be able to generate a nonhomogeneous jump Markov chain. The simulation issue will be addressed in future work.

IV - CONCLUSION

We have applied first passage-time theory to the problem of optimally designing broke recirculation policies. Indeed, since the paper break process can be considered as a jump Markov type of disturbance, it is possible to use jump linear quadratic theory to enforce minimal variability of recirculation rates. However, under the action of the obtained control law the white water or broke tank level could possibly either become negative or exceed their respective maximum values. By computing the long term average rates of change of tank heights in each mode, one can use the existing first passage-time theory of Markov processes to approximately compute mean time to first incidents as a function of the performance measure parameters. This approximate algorithm then becomes a useful tuning device for the control law. Note that the first passage-time approximation theory developed in this paper could find numerous independent applications.

We also have proposed a control policy for a model where the break rates depend on the rate of variation of broke flow rate. Unfortunately, because of the non homogeneity of the random process we were unable to evaluate the proposed control law. Furthermore, for a mathematically more complete study, the convergence and uniqueness of gain matrices for the infinite horizon problem, must be studied. We will consider all these issues in future work.

REFERENCES

1 - S. El-Férik and R. P. Malhamé, "Padé Approximants for the Transient Optimization of Hedging Control Policies in Manufacturing", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-42, no 4, pp. 440-457, 1997.

2 - Y. Ji and H.J. Chizeck, "Controllability, Stabilizability and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-35, no 7, pp. 777-788, 1990.

3 - M. Khanbaghi, R. Malhamé, M. Perrier and A. Roche, "A Statistical Model of Paper Breaks in an Integrated TMP-Newsprint Mill", *Journal of Pulp and Paper Science,* vol 23, no 6, pp. 282-288, 1997.

4 - R. P. Malhamé and E. Boukas, "A Renewal Theoretic Analysis of a Class of Manufacturing systems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-36, no 5, pp. 580-587, 1991.

5 - R. P. Malhamé, "Ergodicity of Hedging Point Policies in Single-Part Multiple-State Manufacturing Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-38, no 2, pp. 340-343, 1993.

6 - S.M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 1993.

7 - D.D Sworder and V.G. Robinson, "Feedback Regulators for Jump Parameters Systems with State and Control Dependent Transition Rates", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-18, no 4, pp. 355-360, 1973.

8 - D.D Sworder et R.O. Rogers, "An LQ-Solution to a Control Problem Associated with a Solar Thermal Central Receiver", *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol AC-28, no 10, pp. 971-978, 1983.

ACKNOWLEDGMENT

This research was supported by a PAPRICAN (Pulp and Paper Research Institute of Canada) scholarship and a NSERC (National Sciences and Engineering Research Council of Canada) strategic grant. We are also grateful to Dr. A. Roche of PAPRICAN for useful discussions.

APPENDIX A

DIFFERENTIAL GENERATOR

Using iterated conditioning and the Markovian property :

$$\begin{aligned} E\{p(t+dt)|x,r(\rho)\} &= E\{E\{p(t+dt)|x+dx,r(\rho+d\rho),x,r(\rho)\}|x,r(\rho)\} \\ &= E\{P_{r(\rho+d\rho)}(t+dt,x+dx)|x,r(\rho)\} \end{aligned} \tag{A1}$$

Thus :

$$\begin{aligned} E\{\dot{p}(t)|x,r\} &= \lim_{dt\to 0}\frac{1}{dt}\{E\{P_{r(\rho+d\rho)}(t+dt,x+dx)|x,r(\rho)\} - P_r(t,x)\} \\ &= \dot{P}_r(t,x) \end{aligned} \tag{A2}$$

$$\begin{aligned} E\{P_{r(\rho+d\rho)}(t+dt,x+dx)|x,r(\rho)\} &= \partial_x P_r(t,x)dx + \partial_t P_r(t,x)dt + P_r(t,x)(1+\lambda_{ii}d\rho) + \\ &\sum_{j=1,j\neq i}\lambda_{ij}P_j d\rho + o(dt) \\ &with \quad \lim_{dt\to 0}\frac{o(dt)}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{A3}$$

where in (A3), the dependance of r on ρ is implicit. Eq.(A1)-(A3) yield :

$$\dot{P}_r(t,x) = \partial_t P_r(t,x) + \partial_x P_r(t,x)\dot{x} + \sum_j \lambda_{ij}P_j(t,x)f(x,u,i) \tag{A4}$$

where in Eq.(A4) one recalls that

$$\frac{d\rho}{dt}=f(x,u,r(\rho(t)))$$

Similarly :

$$\Delta_\rho H=\{p(t)^T\Delta_\rho(A(r(\rho(t))x(t)+B(r(\rho(t))u(t,x,r))+s(t)\Delta_\rho f(x,u,r)+ \\ \Delta_\rho(x(t)^TQx(t)+u(t,x,r)^TRu(t,x,r))\} \tag{A5}$$

Thus :

$$E\{\Delta_\rho H|x,r\}=\sum_j \lambda_{ij}\{P_i^T(t,x)[(A_j-A_i)x(t)+B_ju(t,x,j)-B_iu(t,x,i)]+ \\ S_i(t,x)(f(x,u,j)-f(x,u,i))+u^T(t,x,j)Ru(t,x,j)-u^T(t,x,i)Ru(t,x,i)\}d\rho \tag{A6}$$

and, recalling Eq.(26) after taking expectations conditional on x and r :

$$\lim_{dt\to 0}\frac{1}{dt}[E\{ds(t)|x,r(\rho)\}]=-\sum_j \lambda_{ij}\{P_i^T(t,x)[A_jx(t)+B_ju(t,x,j)]+S_i(t,x)f(x,u,j)+ \\ u^T(t,x,j)Ru(t,x,j)\} \\ =\dot{S}_i(t,x)=\partial_tS_i(t,x)+\partial_xS_i(t,x)\dot{x}+\sum_j \lambda_{ij}S_j(t,x)f(x,u,i) \tag{A7}$$

where one uses the fact that

$$\sum_j \lambda_{ij}=0$$

in moving from Eq.(A6) to Eq.(A7). Furthermore, in Eq.(A7), $S_i(t,x)$ is obtained via an infinitesimal generator expression similar to Eq.(A4).

$$\partial_t S_i(t,x) + \partial_x S_i(t,x)\dot{x}(t) = -\sum_j \lambda_{ij}\{P_i(t,x)[A_j x(t) + B_j u(t,x,j)] + (S_i(t,x) + S_j(t,x))f(x,u,j) + u^T(t,x,j)Ru(t,x,j)\} \tag{A8}$$

For the case with discontinuities of state $x(t)$, since jumps of $\rho(t)$ is the cause of jumps in the system, Eq.(A6) becomes :

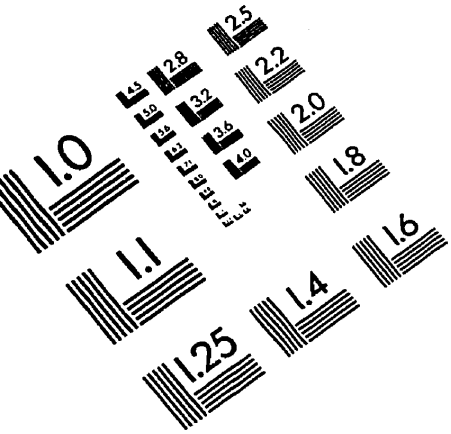
$$E\{\Delta_\rho H|x,r\} = \sum_j \lambda_{ij}\{P_i^T(t,x)[(A_j(x+q_{ij}) - A_i x + B_j u(t,x+q_{ij},j) - B_i u(t,x,i)] + S_i(t,x)(f(x,u,j) - f(x,u,i)) + (x+q_{ij})^T Q(x+q_{ij}) - x^T Qx + (u^T(t,x+q_{ij},j)Ru(t,x+q_{ij},j) - u^T(t,x,i)Ru(t,x,i)\}d\rho. \tag{A9}$$

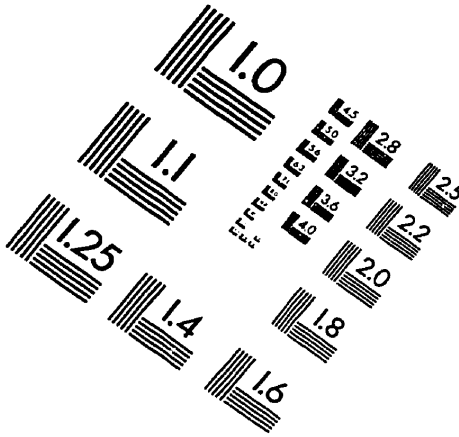
Eq.(A4) and Eq.(A8) become :

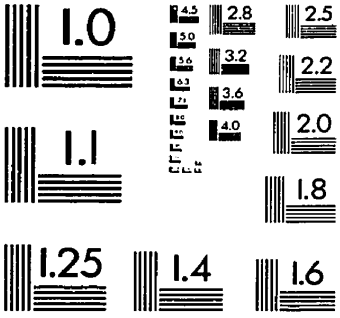
$$\dot{P}_r(t,x) = \partial_t P_r(t,x) + \partial_x P_r(t,x)\dot{x} + \sum_j \lambda_{ij} P_j(t,x+q_{ij})f(x,u,i), \tag{A10}$$

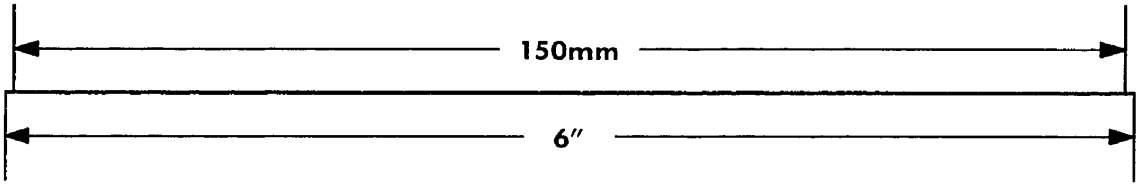
$$\partial_t S_i(t,x) + \partial_x S_i(t,x)\dot{x} + \sum_j \lambda_{ij} S_j(t,x+q_{ij})f(x,u^*,i) = -\sum_j \lambda_{ij}\{[A_j(x+q_{ij}) + B_j u^*(t,x+q_{ij},j)]^T P_i(t,x) + S_i(t,x)f(x+q_{ij},u^*,j) + u^{*T}(t,x+q_{ij},j)Ru^*(t,x+q_{ij},j) + 2x^T Q q_{ij} + q_{ij}^T Q q_{ij})\}. \tag{A11}$$

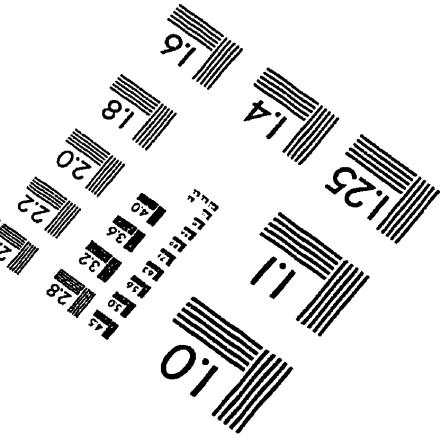
IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)

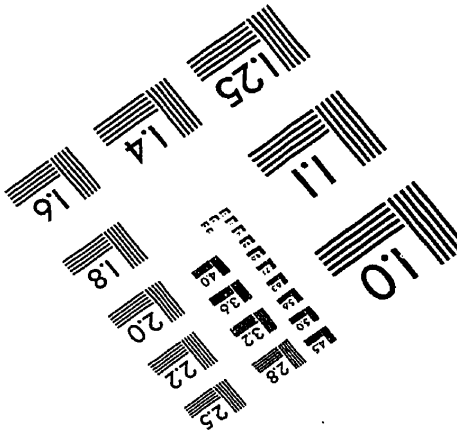












APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved