UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE ET MODÉLISATION D'UN ACTUATEUR À ACTION RAPIDE UTILISANT LES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME

AURORE LANDRY
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
MAI 1999

© Aurore Landry, 1999.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-46655-8

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉTUDE ET MODÉLISATION D'UN ACTUATEUR
À ACTION RAPIDE UTILISANT LES ALLIAGES
À MÉMOIRE DE FORME

présenté par: LANDRY Aurore

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BALAZINSKI Marek, Ph.D., président

M. TROCHU François, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BRAÏLOVSKI Vladimir, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. TERRIAULT Patrick, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Cette étude a été réalisée au sein du groupe d'étude et de modélisation sur les matériaux et les méthodes de fabrication (GEM3F) de l'École Polytechnique de Montréal. Je tiens à en remercier tous les membres pour leur aide précieuse.

Je remercie en particulier mon directeur de recherche, le professeur François Trochu, de m'avoir confié ce projet et de m'avoir guidée tout au long de sa réalisation. Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude au Docteur Vladimir Braïlovski dont l'expertise en matière d'alliages à mémoire de forme ainsi que la disponibilité ont été d'une aide inestimable. Je remercie également le Docteur Patrick Terriault pour sa disponibilité ainsi que pour avoir accepté d'être membre du Jury.

J'adresse des remerciements particuliers à Nicolas Sacépé, étudiant en maîtrise, pour n'avoir pas compté son temps lors des nombreuses manipulations qu'il m'a aidée à effectuer. Je remercie également l'ensemble des étudiants du centre de recherche appliquée sur les polymères, ainsi que les techniciens du département de génie mécanique pour leur soutien dans le domaine expérimental.

Je remercie le professeur Marek Balazinski d'avoir accepté d'être président du jury.

Enfin, je remercie la Fondation de l'École Polytechnique (France) pour m'avoir aidée par son soutien financier à venir effectuer ma maîtrise à l'École Polytechnique de Montréal.

RÉSUMÉ

Les alliages à mémoire de forme (AMF) trouvent de nombreuses applications en tant qu'actuateurs contrôlés par la température. Grâce à l'effet mémoire de forme, une action mécanique contrôlée peut en effet être générée par le chauffage de l'alliage. La transformation martensitique inverse, un changement de phase à l'état solide, est responsable de ce phénomène.

Le but de cette étude est de concevoir un actuateur AMF à action rapide contrôlé par la température. Nous présentons le cas d'une arche basse en AMF, dont la courbure s'inverse soudainement sous l'effet d'une charge d'origine mécanique ou lors du chauffage au-delà de la température de transformation de phase. Le phénomène d'instabilité mécanique décrivant cette inversion de courbure est le flambement en *snap*. La principale application d'un tel dispositif est un interrupteur commandé thermiquement.

Bien que la vitesse de changement de phase soit assez grande, il est difficile d'obtenir pratiquement un temps d'actionnement d'un élément AMF plus court que 0.1s. La transformation martensitique étant un phénomène activé thermiquement, sa vitesse de propagation dépend en effet des conditions de transfert de chaleur dans la matière. La combinaison d'un phénomène d'instabilité mécanique avec l'effet mémoire de forme permet de contourner cet obstacle.

Une revue préliminaire des méthodes utilisées dans les problèmes de stabilité élastique permet de dégager deux approches particulièrement adaptées au calcul du flambement en *snap* des arches basses : l'approche classique prenant pour inconnue la ligne élastique de l'arche ainsi que l'approche énergétique. L'approche classique mène à une solution analytique décrivant le flambement en *snap* d'une arche basse élastique sinusoïdale soumise à une charge sinusoïdale. Cette solution peut être étendue au cas des AMF si l'on se restreint au domaine élastique de leur loi de comportement, ce qui est justifié dans le cas de l'actuateur

que nous présentons. Une modélisation du flambement en *snap* d'une arche AMF causé par chauffage est alors présentée. Elle s'appuie sur la rigidification que subit l'AMF au cours de la transformation martensitique inverse.

L'approche énergétique est utilisée dans le cadre d'un code de calcul numérique fondé sur la représentation de la déformée d'une arche élastique par krigeage dual et la minimisation de l'énergie totale grâce à un algorithme d'optimisation. Ce code de calcul permet d'étendre l'étude du flambement en *snap* d'une arche AMF à des arches possédant une ligne élastique et des conditions aux limites quelconques. Il est validé grâce à des solutions analytiques.

Une brève étude expérimentale confirme l'effectivité du flambement en *snap* d'une arche AMF lors de son chauffage, si sa flèche est dans une certaine gamme de hauteur.

ABSTRACT

Shape Memory Alloys (SMA) are most commonly used as actuators controlled by temperature. Thanks to the shape memory effect, a mechanical action can be generated by heating of the alloy. The reverse martensitic transformation, a phase transformation between two solid state phases, is responsible for this phenomenon.

The aim of this study is to design a rapid action SMA actuator controlled by temperature. We present the case of an SMA shallow arch that undergoes a sudden change of curvature when laterally loaded or heated beyond the phase transformation temperature, exhibiting the snap buckling phenomenon. The main field of application of such a device is a thermally controlled switch.

Despite a fairly large speed of phase transformation, it is still difficult to make the actuation of an SMA device take less than 0.1 second. The martensitic transformation being a thermally activated phenomenon, its propagation velocity depends on heat transfer conditions in the alloy. Combining a mechanical instability phenomenon with the shape memory effect makes it possible to circumvent this obstacle.

A review of the methods used to solve problems of elastic stability shows that two approaches are particularly adapted to the calculation of snap buckling of shallow arches: the classical approach and the energy approach. The classical approach - using the equation of the centerline of the arch as the unknown - leads to an analytical solution describing snap buckling of a shallow elastic sinusoidal arch subjected to a sinusoidal load. This solution can be extended to the case of SMA if the elastic part of their material law only is considered. A model for snap buckling of a SMA arch caused by heating is presented. It is based on the rigidification undergone by the alloy during the reverse martensitic transformation.

The energy approach is used within a numerical code based on the representation of the centerline of an elastic arch by dual kriging and the minimization of total energy with an optimization algorithm. This computer code extends the study of snap buckling of SMA arches to any geometry and any boundary conditions. It is validated with analytical solutions.

A brief experimental study confirms that a SMA low arch undergoes snap buckling when heated beyond the phase transformation temperature, if its height is within a certain range.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS iv

RÉSUMÉ v

ABSTRACT vii

TABLE DES MATIÈRES ix

LISTE DES TABLEAUX xiii

LISTE DES FIGURES xiv

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xvii

INTRODUCTION 1

CHAPITRE 1 CONCEPTS ET MÉTHODES UTILISÉS DANS L'ÉTUDE DE LA STABILITE DES STRUCTURES 4

1.1 Le concept de stabilité d'une structure 5

1.2 Les différents modes de flambement d'une structure élastique 6

1.2.1 Le flambement avec point de bifurcation symétrique stable 7

1.2.2 Le flambement avec point de bifurcation symétrique instable 9

1.2.3 Le flambement avec point de bifurcation asymétrique 11

1.2.4 Le flambement avec point limite 13

1.3 Les différentes approches pour traiter un problème de stabilité élastique 15
1.3.1 Les modèles exemples 16
1.3.2 L'approche dynamique 17
1.3.3 L'approche classique 18
1.3.4 L'approche énergétique 31

1.4 L'approche énergétique appliquée à des structures continues 35
1.4.1 Les quotients de Rayleigh et de Timoshenko 35
1.4.2 La méthode de Rayleigh-Ritz 39
1.4.3 La méthode de Galerkin 43

1.5 Etude de stabilité pour une structure non élastique 44

1.6 Complément de synthèse bibliographique sur le flambement de l'arche basse chargée latéralement 46
1.6.1 Arche élastique 47
1.6.2 Arche inélastique 47

1.7 Conclusion 48

CHAPITRE 2 ÉTUDE D'UN ACTUATEUR À ACTION RAPIDE UTILISANT LE FLAMBEMENT EN SNAP D'UNE ARCHE AMF 49

2.1 Revue bibliographique sur les actuateurs à action rapide contrôlés par la température 49

2.2 Principe de l'actuateur AMF à action rapide 50

2.3 Rappel sur le comportement des AMF 52

2.4 Etude analytique du flambement en snap d'une arche AMF 55
2.4.1 Méthode d'analyse 55
2.4.2 Etape a : armement du dispositif 57
2.4.3 Etape b : conservation de la position armée 58

2.4.4 Etape c : retour à la géométrie initiale 59
2.4.5 Résumé des conditions nécessaires au fonctionnement de l'actuateur AMF.. 62

2.5 Etude expérimentale 62
2.5.1 Protocole expérimental 63
2.5.2 Observations et comparaison avec l'étude analytique 65
2.5.3 Recommendations pour une étude expérimentale approfondie 67

2.6 Conclusion 68

CHAPITRE 3 UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR LES CALCULS DE STABILITÉ DES ARCHES ET DES POUTRES 70

3.1 Choix de la méthode numérique 70

3.2 Présentation de la méthode 71

3.3 Le krigeage dual appliqué au calcul de la déformée d'une poutre 72
3.3.1 Présentation de la méthode d'interpolation du krigeage dual 72
3.3.2 Lien entre le krigeage dual et la flexion des poutres 74
3.3.3 Représentation de la déformée d'une poutre par krigeage dual 80

3.4 Expression de l'énergie en grands déplacements 86

3.5 Algorithme de résolution 86
3.5.1 Choix des points de contrôle 86
3.5.2 Schéma de l'algorithme de résolution 89
3.5.3 Algorithme d'optimisation 90

3.6 Validation de la méthode 100
3.6.1 Flexion et traction-compression en résistance des matériaux 100
3.6.2 L'élastique 103
3.6.3 Flambement en snap d'une arche chargée latéralement 107

3.7 Application au calcul du flambement en snap d'arches en AMF 116
3.7.1 Cas d'une arche sinusoïdale 116
3.7.2 Cas d'une arche encastrée 119

3.8 Conclusion 121

CONCLUSION 122

RÉFÉRENCES 124

ANNEXE 129

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1- Charges critiques en fonction de la hauteur réduite 27

Tableau 2.1 - Charges critiques en fonction de la hauteur réduite 56

Tableau 3.1 - Formules de l'élastique 104

Tableau 3.2 - Modes de flambement et charges critiques 108

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 – Les différents types d'équilibre 5

Figure 1.2 – Flambement par bifurcation symétrique stable 8

Figure 1.3 – Colonne d'Euler et relation flèche-charge 8

Figure 1.4 - Flambement par bifurcation symétrique instable 9

Figure 1.5 - Colonne console retenue par un ressort de direction constante et relation flèche-charge correspondante 10

Figure 1.6 – Le flambement par bifurcation asymétrique 11

Figure 1.7 - Colonne console retenue par un ressort fixe et relation flèche-charge correspondante 12

Figure 1.8 – Flambement avec point limite 13

Figure 1.9 – L'arche simple 14

Figure 1.10 – Relation charge-déplacement et régions de stabilité 15

Figure 1.11 – Géométrie de la colonne d'Euler 16

Figure 1.12 – Géométrie de l'arche basse chargée latéralement 17

Figure 1.13 - Chemins d'équilibre de la colonne d'Euler, calculés avec la théorie de deuxième ordre 21

Figure 1.14 - Théorie du deuxième ordre appliquée au calcul d'un point limite 23

Figure 1.15 – Chemins d'équilibre avec ou sans imperfections au voisinage d'un point de bifurcation asymétrique 24

Figure 1.16 - Chemins d'équilibre pour trois arches de hauteurs différentes 27

Figure 1.17 – L'élastique 30

Figure 2.1 - Etapes de chargement 51

Figure 2.2 - Courbes contrainte-déformation isothermes et surfaces de chargement-déchargement principales de la loi de matériau obtenue par krigeage dual 53

Figure 2.3 - Courbes déformation-contrainte à température constante 54

Figure 2.4 - Etapes de chargement sur le diagramme flèche-charge réduite..... 57

Figure 2.5 – Evolution de la relation flèche-charge réduite en fonction de β 60

Figure 2.6 – Montage expérimental 63

Figure 2.7 – Caractérisation de l'élastomère 64

Figure 3.1 - Poutre soumise à des forces latérales et des moments concentrés..... 74

Figure 3.2 - Calcul du moment fléchissant..... 75

Figure 3.3 - Poutre soumise à des forces latérales et axiales concentrées..... 79

Figure 3.4 - Représentation de la déformée d'une arche par krigeage 81

Figure 3.5 - Arches tests..... 82

Figure 3.6 - Erreur due à l'interpolation, dans le cas de l'arche sur rotules..... 84

Figure 3.7 - Erreur due à l'interpolation, dans le cas de l'arche encastrée..... 85

Figure 3.8 - Schéma de l'algorithme de résolution 90

Figure 3.9 - Précision de l'évaluation de la fonction-coût 98

Figure 3.10 - Poutre en flexion..... 101

Figure 3.11 - Flexion d'une poutre..... 102

Figure 3.12 - Flambement d'une colonne sur rotules..... 103

Figure 3.13 - Flambement d'une colonne encastrée..... 104

Figure 3.14 - L'élastique, colonne sur rotules 106

Figure 3.15 - L'élastique, colonne encastrée 106

Figure 3.16 - Arche basse..... 107

Figure 3.17 - Relation flèche-charge latérale pour $\lambda = 0.95$ 109

Figure 3.18 - Relation flèche-charge latérale pour $\lambda = 1.91$ 109

Figure 3.19 - Relation flèche-charge latérale pour $\lambda = 23.9$, n=1 111

Figure 3.20 - Isovaleurs de l'énergie totale en l'absence de charge latérale 112

Figure 3.21 - Isovaleurs de l'énergie totale en l'absence de charge latérale, agrandissement 112

Figure 3.22 – Charge fonction de la flèche au milieu de l'arche 113

Figure 3.23 - Isovaleurs de l'énergie totale avec une charge latérale $Q = d_0 * 2000\,N$ 115

Figure 3.24 - Isovaleurs de l'énergie totale avec une charge latérale $Q = d_0 * 2000\,N$, agrandissement 115

Figure 3.25 – Choix des points d'interpolation 117

Figure 3.26 - Comparaison des méthodes analytique et numérique 118

Figure 3.27 - Arche encastrée 119

Figure 3.28 - Relation hauteur réduite-charge critique pour des arches sur rotules et encastrée 120

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Sigles

AMF	Alliages à mémoire de forme
BFGS	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanna; méthode d'actualisation de la matrice hessienne pour l'optimisation par une méthode quasi-Newton

Caractères usuels

a	Flèche de l'arche
A	Aire de la section de l'arche ou de la colonne
d_0	Portée initiale de l'arche
d	Portée de l'arche après chargement
E	Module d'Young
E_{BT}	Module d'Young à basse température (pour un AMF)
E_{HT}	Module d'Young à haute température (pour un AMF)
E_{totale}	Énergie totale du système(aussi notée E ou U_{totale})
H_0	Charge axiale de précontraite de l'arche
H	Charger axiale après chargement latéral de l'arche
I	Second moment de section de l'arche ou de la colonne
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité
L_0	Longueur totale initiale de l'arche ou de la colonne

L	Longueur totale de l'arche ou de la colonne après chargement
M	Moment fléchissant
P_{cr}	Charge critique
q	Charge latérale (aussi notée Q)
q_0	Facteur de charge latérale (pour un chargement non uniforme)
$\mathbf{Q}$	Vecteur des coordonnées généralisées
Q_i	$i^{ème}$ coordonnée généralisée
R	Charge latérale réduite
S	Charge axiale réduite
$w_0(x)$	Ligne élastique initiale de l'arche ou de la colonne
$w(x)$	Ligne élastique de l'arche ou de la colonne après chargement

Lettres grecques

α	Rigidité du support axial
β	Rigidité réduite du support axial
λ	Hauteur réduite de l'arche
Λ	Facteur de charge
$\rho(x)$	Rayon de courbure
Φ_i	$i^{ème}$ fonction de base (pour les méthodes de Ritz et de Galerkin)

INTRODUCTION

Les alliages à mémoire de forme (AMF) présentent trois caractéristiques remarquables : l'effet mémoire de forme, la superélasticité et l'amortissement. L'effet mémoire de forme se manifeste par un retour à une forme enregistrée au préalable - grâce à un traitement thermique - lors du chauffage de l'alliage au-delà d'une certaine température. L'effet mémoire de forme est celle des trois caractéristiques remarquables des AMF qui a donné lieu jusqu'ici au plus grand nombre d'applications industrielles. Il est principalement utilisé dans la conception d'actuateurs, comme convertisseur d'un signal électrique ou thermique en une action mécanique.

Le comportement exceptionnel des AMF, et en particulier l'effet mémoire de forme, provient de l'existence de deux phases à l'état solide : la martensite, stable à basse température, et l'austénite, stable à haute température. La transformation de phase, réversible, est appelée transformation martensitique. Elle est thermoélastique, c'est-à-dire qu'elle est régie par la température, mais aussi par l'état de contrainte interne du matériau.

L'effet mémoire de forme se manifeste au cours de la transformation martensitique inverse (dans le sens martensite-austénite), causée par le chauffage de l'AMF. Ainsi, même si la transformation de phase en elle-même est très rapide, le transfert de chaleur responsable de la propagation du front de transformation de phase se fait relativement lentement dans les montages habituels. Il est donc difficile d'obtenir pratiquement un temps d'actionnement d'un élément en AMF inférieur à 0.1 seconde, si l'action est issue uniquement de l'effet mémoire de forme.

Dans des application telles que les interrupteurs ou les valves, les AMF tiennent à la fois lieu de système de contrôle et d'actuateur. Ils peuvent donc s'avérer compétitifs malgré leur coût élevé par rapport à des métaux classiques. Il est cependant nécessaire de réduire leur temps

d'actuation. En combinant un phénomène d'instabilité mécanique avec l'effet mémoire de forme, il est possible de palier ce manque, et de concevoir un actuateur à action rapide contrôlé directement par la température.

Le système que nous allons étudier consiste en une arche basse en AMF, dont les extrémités sont fixées sur différents types de supports. L'application d'une charge latérale peut - sous certaines conditions - entraîner l'inversion soudaine de la courbure de l'arche, suivant le phénomène d'instabilité appelé "flambement en *snap*". Or, il apparaît que l'effet mémoire de forme peut également entraîner le flambement en *snap*, dans le sens de la reprise de la forme initiale de l'arche. Une arche basse AMF peut donc remplir le rôle d'actuateur à action rapide contrôlé par la température.

Le présent travail consiste en l'étude et la modélisation du comportement d'une arche basse en AMF chargée mécaniquement puis chauffée. Il est composé de trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à une revue bibliographique approfondie sur le traitement des phénomènes d'instabilité des structures, dans le cas de matériaux conventionnels. Il a pour but d'acquérir une vision claire des différentes méthodes disponibles et de leur domaine d'application, avant de les adapter au cas des AMF. Nous exposerons à titre d'exemple les solutions analytiques disponibles pour traiter le flambement en *snap* de certaines configurations particulières d'arches basses élastiques chargées latéralement.

Nous verrons dans le chapitre 2 que certaines considérations guidant la conception d'un actuateur AMF à action rapide suggèrent de se limiter au domaine élastique de leur loi de comportement. L'une des solutions présentées au chapitre 1 est alors adaptée au cas des AMF, et fournit une solution analytique pour le flambement en *snap* d'une arche basse sinusoïdale en AMF. Une brève étude expérimentale est menée afin de confirmer l'occurrence des phénomènes mis en évidence par l'étude analytique.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation d'un code de calcul numérique développé afin d'étendre l'étude analytique présentée au chapitre 2 à toutes les géométries d'arches. Ce

code de calcul est fondé sur la modélisation de la ligne élastique de l'arche par krigeage dual et la minimisation de l'énergie totale.

CHAPITRE 1

CONCEPTS ET MÉTHODES UTILISÉS DANS L'ÉTUDE DE LA STABILITE DES STRUCTURES

Le concept de stabilité d'un état d'équilibre est une notion très intuitive et, à ce titre, a été étudié très tôt dans le développement de la mécanique classique. La littérature concernant l'étude de la stabilité d'une structure élastique est donc large et les outils de traitement en sont nombreux. En revanche, le domaine est beaucoup moins bien balisé en ce qui concerne la stabilité d'une structure inélastique.

Nous présenterons dans un premier temps le concept très général de stabilité d'une structure ainsi que les différents paramètres susceptibles de nous intéresser lors d'une étude de stabilité. Nous nous restreindrons ensuite au domaine élastique. Nous classifierons les phénomènes d'instabilité susceptibles de survenir lors du chargement d'une structure élastique en quatre types. Parmi ces quatre types de flambement, trois se manifestent par un bond soudain vers une position éloignée de la position initiale autrement appelé le phénomène de flambement en *snap*. Ce phénomène correspond à l'action rapide qui nous intéresse dans le cadre de ce mémoire. Nous présenterons ensuite les trois approches susceptibles d'être adoptées pour traiter un problème d'instabilité élastique, ainsi que les méthodes les plus courantes se rattachant à chacune de ces approches. Nous discuterons de leurs avantages respectifs et de leurs limitations. Nous finirons par une brève description des méthodes utilisées pour l'étude de la stabilité en-dehors du domaine élastique.

1.1 Le concept de stabilité d'une structure

Une définition relativement intuitive du concept de stabilité est donnée par Simitses [28] : lorsqu'une structure est soumise à un chargement quasi-statique, elle se déforme afin de maintenir l'état d'équilibre statique; lorsque la structure déformée est soumise à une petite perturbation autour de sa position d'équilibre, si celle-ci réagit en oscillant autour de cette position, on dit que l'équilibre est stable. Notons que par petite, on entend aussi petite qu'on le souhaite. Si la structure reste dans l'état perturbé, l'équilibre est qualifié d'indifférent. Enfin, si elle diverge de son état d'équilibre, l'équilibre est dit instable. La Figure 1.1 illustre les trois formes d'équilibre possibles grâce à l'exemple d'une bille se déplaçant sur une courbe : équilibre stable en A, instable en B, indifférent en C.

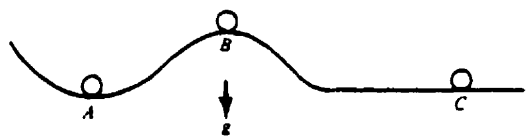


Figure 1.1 – Les différents types d'équilibre

Lorsqu'au cours du chargement d'une structure, un état d'équilibre instable ou indifférent est atteint, le niveau des charges extérieures est appelé charge critique ou charge de flambement.

La définition parfaitement rigoureuse de la stabilité généralement invoquée est celle de Liapunov [17]. Elle se rapporte à l'espace des phases $2n$-dimensionnel d'un système à n degrés de libertés et précise le sens des termes employés dans la définition ci-dessus, cette dernière n'en étant qu'une retranscription. Il s'agit donc d'une définition dynamique de la stabilité.

Les quatre points susceptibles de nous intéresser dans une étude de stabilité sont la charge critique, la déformation du système juste en-dessous de la charge critique, i.e., juste avant le flambement, le comportement du système quand la charge critique est atteinte, i.e., le type de

flambement, ainsi que le comportement du système au-delà de la charge critique, i.e., le chemin post-flambement.

1.2 Les différents modes de flambement d'une structure élastique

On distingue quatre modes de flambement, auxquels correspondent quatre types de points critiques : le point de bifurcation symétrique stable, le point de bifurcation symétrique instable, le point de bifurcation asymétrique et le point limite. Ils sont présentés entre autres par Thompson et Hunt [30].

Afin de les caractériser, nous considérons des structures possédant un nombre fini n de degrés de liberté, caractérisés par des coordonnées généralisées $(Q_i)_{1\le i\le n}$. Nous noterons $\boldsymbol{Q}$ le vecteur de coordonnées $(Q_i)_{1\le i\le n}$. Ces coordonnées peuvent correspondre à un déplacement, une rotation en un point, l'amplitude d'une harmonique, etc. En-dehors de quelques cas spécifiques, le comportement d'une structure continue peut toujours être approché de cette manière grâce à une procédure de discrétisation, telle que la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies ou l'expansion en série de Fourier tronquée par exemple. La charge, supposée conservative, est représentée par un scalaire Λ. Le fait que la charge soit conservative permet d'avoir recours à l'énergie totale $E(\boldsymbol{Q},\Lambda)$ du système, et ainsi de visualiser les états d'équilibre comme des minima ou maxima de l'énergie totale. Nous reviendrons beaucoup plus longuement à cette classification au paragraphe 1.3.4. Notons seulement qu'un point $(\boldsymbol{Q},\Lambda)$ correspond à un état d'équilibre à la condition :

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{Q},\Lambda)}{\partial Q_j}=0 \quad \text{pour } 1\le j\le n$$

et que l'équilibre est stable s'il s'agit d'un minimum de l'énergie totale et instable s'il s'agit d'un maximum.

Associant les variables $(Q_i)_{1\le i\le n}$ et Λ aux axes d'un espace de dimension $n+1$, on voit que les n équations d'équilibre spécifiant la stationnarité de l'énergie totale par rapport aux n

coordonnées généralisées définissent des variétés de dimension 1, i.e., des chemins de cet espace. C'est la forme et la stabilité de ces chemins que nous allons étudier afin de modéliser les différents types de points critiques. A des fins de représentation, ces chemins sont projetés sur le plan (Q_i, Λ), où Q_i est choisi tel que la figure soit la plus représentative possible. Il faut donc garder à l'esprit que le même chemin projeté sur un autre plan peut avoir une allure très différente, bien que le phénomène physique soit le même. En revanche, les quatre structures présentés à titre d'exemple possèdent un seul degré de liberté, et il s'agit donc des chemins d'équilibres réels et non projetés.

1.2.1 Le flambement avec point de bifurcation symétrique stable

Présentation générale

Ce mode de flambement est illustré par le diagramme de la Figure 1.2, comportant la coordonnée généralisée Q_i en abscisse et le facteur de charge Λ en ordonnée. Les courbes en trait épais représentent les différents chemins d'équilibre, stables en trait plein et instables en trait pointillé. Les diagrammes en traits fins superposés aux courbes en trait épais donnent l'énergie totale en fonction de Q_i, la charge Λ étant fixée à trois valeurs Λ^1 Λ^c, Λ^2 différentes.

Dans ce premier cas, un chemin d'équilibre fondamental partant de l'origine du repère perd sa stabilité initiale en intersectant un chemin d'équilibre stable post-flambement. Ce dernier a une pente nulle au point critique. L'énergie totale possède une unique valeur stationnaire pour une charge inférieure à la charge critique, et trois au-delà de la charge critique, dont les deux stables sont sur le chemin post-flambement. L'état critique est stable, si bien qu'un système chargé progressivement va quitter le chemin d'équilibre fondamental en atteignant la charge critique, pour passer en douceur sur le chemin post-flambement. La direction dépend des petites perturbations auxquelles est soumis le système. Les états d'équilibre juste avant et juste après le flambement sont donc infiniment proches.

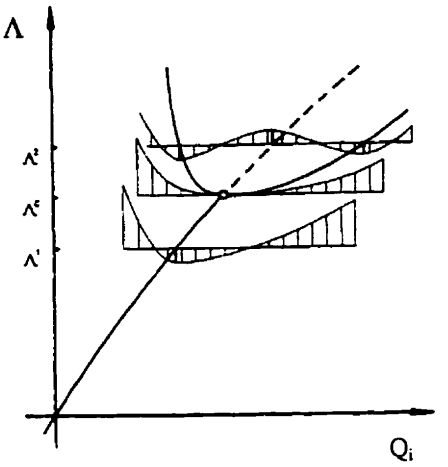


Figure 1.2 – Flambement par bifurcation symétrique stable

Ce mode de flambement est celui de la colonne d'Euler que nous allons évoquer en guise d'exemple. Il est traité plus largement au paragraphe 1.3.3.

Exemple : la colonne d'Euler

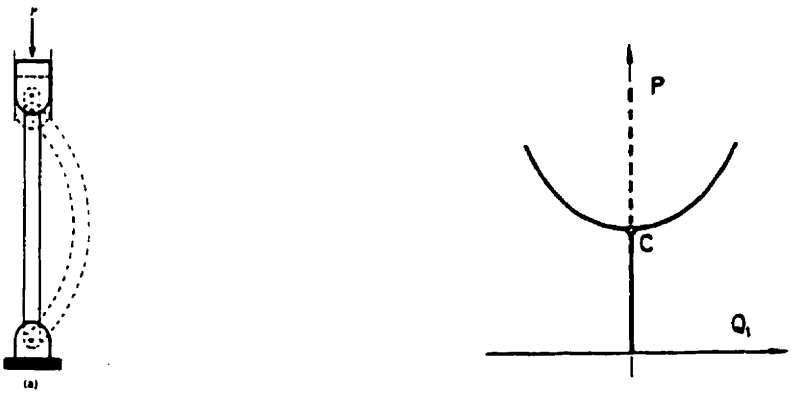


Figure 1.3 – Colonne d'Euler et relation flèche-charge

Une colonne telle que celle représentée ci-dessus, chargée par une force axiale P appliquée de manière quasi-statique, restera droite tant que P ne dépassera pas la charge critique bien connue :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{1.1}$$

où E est le module d'élasticité du matériau, I le second moment de section et L la longueur de la colonne.

Ainsi, si Q_1 représente la flèche au milieu de la colonne, le chemin d'équilibre fondamental est donné par l'équation $Q_1 = 0$, et s'arrête au point critique C correspondant à la charge P_{cr} (cf. (1.1)). Si l'on dépasse la charge critique, la colonne accuse une flèche non nulle, et l'on suit désormais le chemin post-flambement.

1.2.2 Le flambement avec point de bifurcation symétrique instable

Présentation générale

Dans cette deuxième configuration, illustrée par la Figure 1.4, le chemin d'équilibre fondamental intersecte le chemin d'équilibre post-flambement instable.

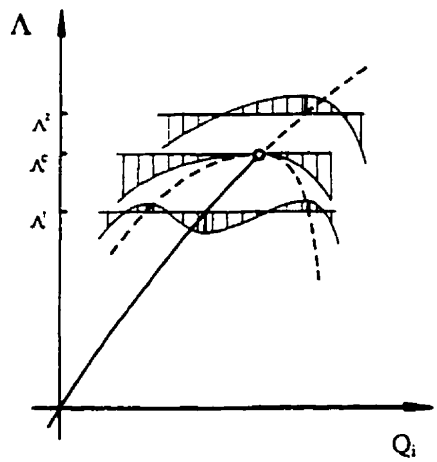


Figure 1.4 - Flambement par bifurcation symétrique instable

Pour une charge inférieure à la charge critique, l'énergie totale possède trois valeurs stationnaires, à savoir un minimum et deux maxima. A partir de la charge critique, ces trois

points stationnaires se rejoignent en un unique maximum. L'état d'équilibre critique est donc instable, et un système chargé jusqu'à la charge critique se déplace soudainement vers un état d'équilibre éloigné non représenté sur la figure, si tant est qu'il en existe un. C'est ce que l'on nomme le phénomène de "*snap*". Nous allons voir dans les paragraphes suivants que deux autres types de points critiques conduisent au flambement en *snap*.

Exemple

Considérons une colonne parfaitement rigide, verticale en l'absence de charge, et retenue par un ressort horizontal, comme représenté à la Figure 1.5. Elle est soumise à une charge P verticale dirigée vers le bas.

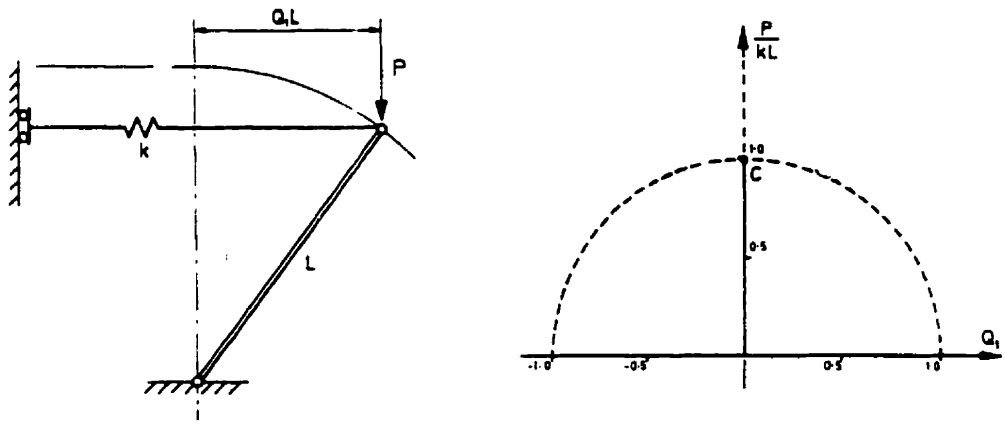


Figure 1.5 - Colonne console retenue par un ressort de direction constante et relation flèche-charge correspondante

Si P est inférieure à la charge critique kL, la structure à un degré de liberté – Q_1 - est stable, et la colonne reste verticale. On suit alors le chemin d'équilibre fondamental caractérisé par $Q_1=0$. Lorsque P atteint la valeur critique, un chemin d'équilibre instable (représenté en traits pointillés) intersecte le chemin d'équilibre fondamental qui devient lui aussi instable. Contrairement au cas de la colonne d'Euler, il n'existe alors aucun état d'équilibre stable pour le système dans un voisinage de l'état initial. La configuration représentée à la Figure 1.5 correspond donc à un état d'équilibre instable, i.e., ne peut pas exister dans la réalité.

1.2.3 Le flambement avec point de bifurcation asymétrique

Présentation générale

Ce mode de flambement est illustré à la Figure 1.6. Ici, le chemin d'équilibre stable fondamental perd sa stabilité en coupant un chemin d'équilibre post-flambement continu. Les deux chemins ont une pente non nulle au point de bifurcation. Pour une charge inférieure à la charge critique, l'énergie totale possède un minimum sur le chemin fondamental et un maximum sur le chemin post-flambement. Lorsque la charge augmente à partir de zéro, le maximum et le minimum se rapprochent jusqu'à coïncider, si bien que l'énergie totale possède un point d'inflexion à l'état critique, après lequel le maximum et le minimum réapparaissent. L'état critique est donc instable comme précédemment, et si l'on augmente régulièrement la charge jusqu'à la charge critique, une perturbation infinitésimale va faire "snapper" le système vers une position d'équilibre stable éloignée, malgré l'existence d'états d'équilibre pour de plus grandes valeurs de la charge. Il s'agit donc d'une deuxième configuration de flambement en *snap*. Nous allons la rencontrer dans le cas qui nous intéresse plus particulièrement : celui d'une arche chargée latéralement.

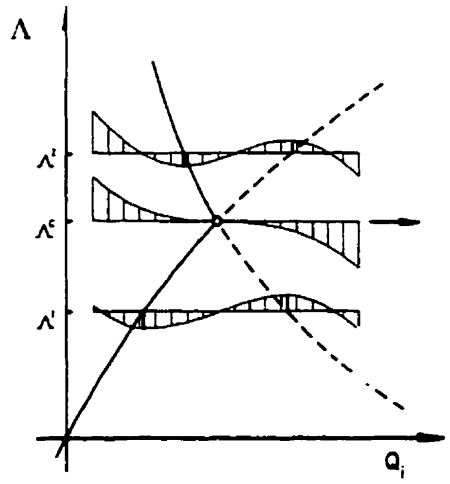


Figure 1.6 – Le flambement par bifurcation asymétrique

Notons que comme dans les deux cas précédents, le flambement avec point de bifurcation symétrique stable et le flambement avec point de bifurcation symétrique instable, le chemin d'équilibre fondamental perd sa stabilité en rencontrant un autre chemin d'équilibre. En particulier, dans le cas du flambement avec point de bifurcation asymétrique qui nous intéresse ici, le chemin d'équilibre fondamental et le chemin post-bifurcation effectuent un 'échange de stabilité' en se coupant : celui qui était stable pour $\Lambda \leq \Lambda^c$ devient instable pour $\Lambda \geq \Lambda^c$ et vice-versa. Il s'agit de l'échange de stabilité discuté par Poincaré [22] en 1885. Il permet de conclure quant au comportement post-flambement d'une structure dans le cadre d'une étude statique, comme nous allons le retrouver au paragraphe 1.3.3.

Le flambement avec point de bifurcation asymétrique va s'avérer être l'un des deux types de flambement qui interviennent lors du chargement latéral d'une arche basse, et il est donc important de le garder en mémoire.

Exemple

Ce type de flambement est celui qui survient dans le cas de la structure représentée ci-dessous. Elle est constituée d'une colonne retenue par un ressort incliné à 45°.

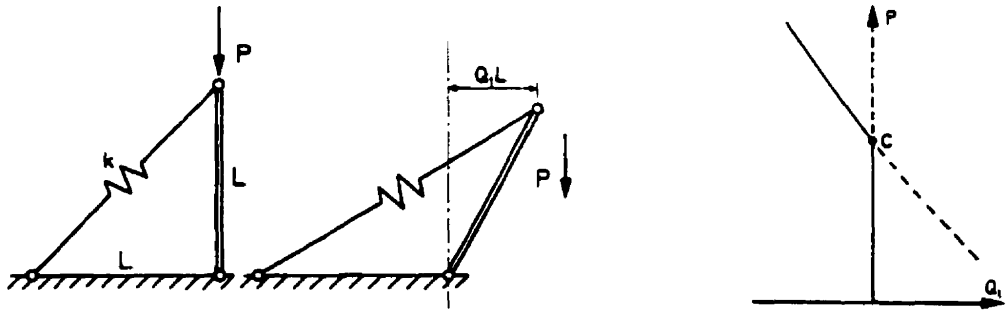


Figure 1.7 - Colonne console retenue par un ressort fixe et relation flèche-charge correspondante

Comme dans l'exemple précédent, la colonne est verticale et la structure est stable pour $P<P_{cr}$. La stabilité est perdue lorsque l'on atteint $P=P_{cr}$. Bien qu'il existe des états d'équilibre stable pour $P>P_{cr}$, ceux-ci ne seront jamais atteints.

1.2.4 Le flambement avec point limite

Présentation générale

Ce phénomène est illustré à la Figure 1.8. Pour une valeur de la charge inférieure à Λ^c, l'énergie totale possède un minimum (équilibre stable) et un maximum (équilibre instable). Lorsque la charge augmente, les deux optima se rapprochent jusqu'à se confondre, si bien que l'énergie totale possède un point d'inflexion horizontal au *point limite*. Pour une valeur de la charge supérieure à la charge critique Λ^c, il n'existe pas localement d'état d'équilibre, contrairement aux trois cas de flambement avec point de bifurcation traités précédemment. L'état critique étant lui-même instable, un système chargé de manière quasi-statique jusqu'à la charge critique va sauter soudainement vers un état d'équilibre éloigné non représenté sur la figure. Il s'agit donc d'une troisième et dernière configuration de flambement en *snap*.

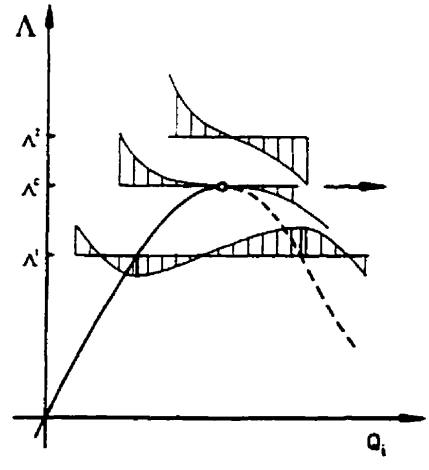


Figure 1.8 – Flambement avec point limite

Exemple : l'arche simple

Le modèle le plus simple permettant de démontrer le phénomène de flambement avec point limite est celui de l'arche simple, ou barres de Von Mises, représentée à la figure ci-dessous. Il est traité à la fois par Simitses [28], Thompson et Hunt [30], et Bazant et Cedolin [2].

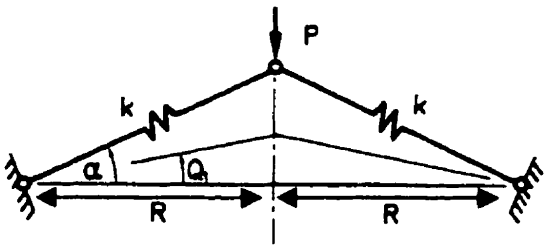


Figure 1.9 – L'arche simple

Il consiste en deux barres articulées considérées comme des ressorts de raideur k, fixées à des supports rigides par l'intermédiaire d'articulations. En l'absence de force latérale, les barres font un angle α avec l'horizontale. Lorsque l'on applique une force latérale P de manière quasi-statique, l'angle entre les barres et l'horizontale diminue pour prendre une valeur Q_1. Il s'agit ici de trouver la relation entre P et Q_1 afin de déterminer s'il existe une valeur de P au-delà de laquelle le système saute brusquement vers les Q_1 négatifs. Nous ne présenterons que les résultats dans ce paragraphe, le calcul étant développé au paragraphe 1.3.4 en tant qu'exemple de l'approche énergétique appliquée à un système discret.

Le premier diagramme de la Figure 1.10 représente l'unique chemin d'équilibre obtenu. Le deuxième donne la valeur de la dérivée seconde $\partial^2 E/\partial(\alpha - Q_1)^2 = \partial^2 E/\partial Q_1^2$ de l'énergie totale au point d'équilibre correspondant à chaque valeur de $\alpha - Q_1$. En d'autres termes, si $\partial^2 E/\partial Q_1^2 > 0$, l'équilibre est stable, tandis que si $\partial^2 E/\partial Q_1^2 < 0$, l'équilibre est instable. On peut déduire de ces deux diagrammes le comportement de l'arche simple chargée de manière quasi-statique à partir d'une charge nulle.

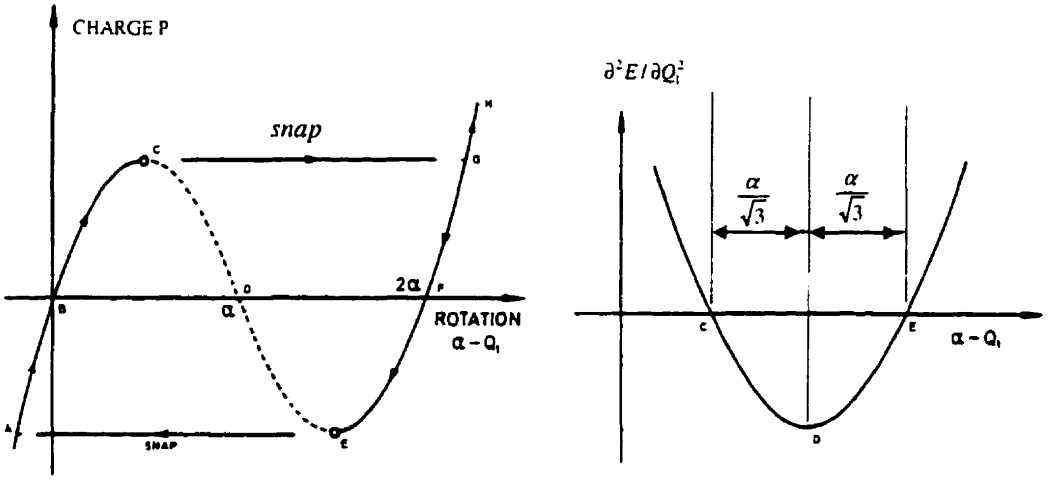


Figure 1.10 – Relation charge-déplacement et régions de stabilité

Lorsque la charge P augmente, l'angle Q_1 diminue régulièrement en suivant la courbe BC. Lorsque P atteint la valeur critique (on se trouve alors au point limite, $\partial^2 E / \partial Q_1^2 = 0$), l'équilibre devient instable et le système "snappe" vers la position d'équilibre stable correspondant à la charge P_{cr}, c'est-à-dire au point G. Le comportement est exactement symétrique si l'on part de $Q_1 = -\alpha$.

1.3 Les différentes approches pour traiter un problème de stabilité élastique

Trois approches différentes peuvent être utilisées pour traiter les problèmes d'instabilité élastique: l'approche dynamique, l'approche statique (ou classique) et l'approche énergétique. L'approche dynamique est celle sur laquelle s'appuie la définition même de la stabilité (cf. paragraphe 1.1) et est donc la plus fondamentale. Elle est cependant d'usage très lourd et à ce titre très peu employée. L'approche classique peut fournir des solutions de manière simple mais ne permet pas en général de décider si un état d'équilibre est stable ou instable. L'approche énergétique constitue un bon compromis entre les deux approches précédentes, puisqu'elle permet de décider de la stabilité d'un état d'équilibre tout en restant relativement légère d'emploi. Elle ne peut néanmoins s'appliquer qu'à un certain type de problèmes.

En-dehors de l'approche dynamique sur laquelle nous ne nous attarderons pas, chaque méthode sera illustrée par le traitement, généralement issu de la littérature, du problème bien connu de la colonne d'Euler, ou de celui d'une arche basse chargée latéralement. Le premier est intéressant du fait de sa simplicité tandis que le deuxième est au cœur de notre problème. Ces illustrations constituent donc une première partie de synthèse bibliographique. Nous allons dans un premier temps présenter ces deux problèmes.

1.3.1 Les modèles exemples

La colonne d'Euler

Le problème de la colonne a été brièvement présenté au paragraphe 1.2.1, grâce à une colonne fixée sur des rotules à ses deux extrémités, dont l'une repose sur un chariot (cf. Figure 1.3). Ce problème est équivalent, en ce qui concerne la première charge critique, à celui de la colonne encastrée à une extrémité et libre à l'autre représentée ci-dessous. Il suffit en effet de lui adjoindre sa symétrique par rapport à l'axe des z et on est ramené au problème précédent.

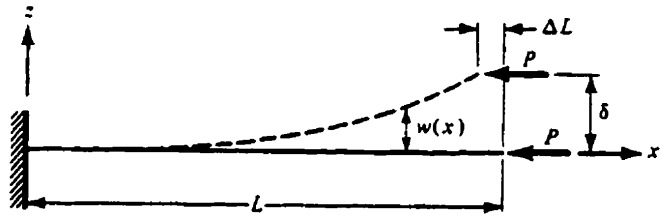


Figure 1.11 – Géométrie de la colonne d'Euler

La charge P est de direction constante, parallèle à l'axe des x, et est comptée positivement vers les x négatifs.

L'arche basse chargée latéralement

Considérons une arche basse de longueur totale L_0 telle que celle représentée à la figure ci-dessous. Par basse, on entend que la flèche $w(d/2)$ est faible devant la portée d. Lors du chargement par des forces latérales, la compression ne doit alors pas être négligée devant la flexion.

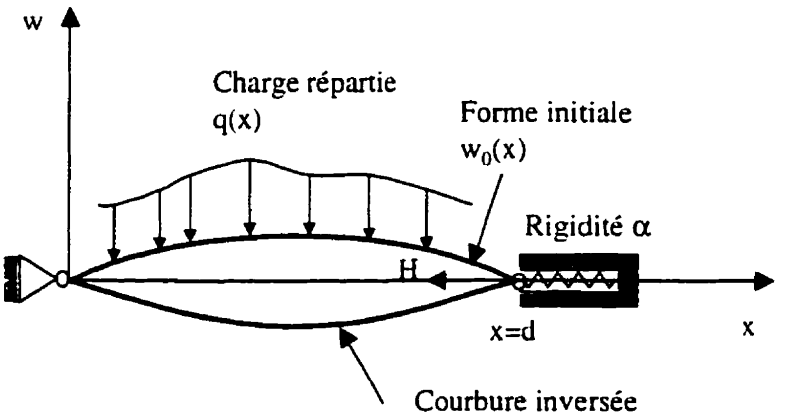


Figure 1.12 – Géométrie de l'arche basse chargée latéralement

L'arche sur rotules, de ligne élastique initiale $w_0(x)$ et éventuellement précontrainte par une force axiale H_0 exercée par les rotules, est soumise à une force latérale répartie $q(x)$ ou concentrée. La ligne élastique de sa déformée est notée $w(x)$. La poussée exercée par les rotules après application de la charge latérale est notée H. Le support de gauche est rigide, tandis que le support de droite peut être soit rigide, soit élastique, de rigidité α. On cherche à savoir pour quelle valeur de la charge latérale la courbure de l'arche va brusquement s'inverser, suivant le phénomène de flambement en *snap*.

1.3.2 L'approche dynamique

L'approche dynamique est la seule qui soit applicable à absolument tous les cas de figures, y compris en-dehors du domaine élastique. Elle consiste à écrire les équations gouvernant les

petites vibrations d'une structures pour les différents niveaux de charge, et à trouver pour quel niveau de charge les vibrations cessent d'être bornées. Cette approche présente cependant deux inconvénients de taille. D'une part les équations incluent la variable temporelle en plus des variables spatiales et du chargement, et sont donc beaucoup plus difficiles à résoudre que des équations statiques. D'autre part, une résolution numérique des équations nécessite la connaissance des perturbations initiales responsables du flambement, perturbations dont on ne possède généralement pas d'évaluation quantitative. Cette approche n'est donc utilisée qu'en dernier recours.

L'approche dynamique reste cependant la seule valable dans le cas de structures soumises à des forces non conservatives telles que le vent ou des impulsions par exemple. L'approche statique fournit dans ce cas des résultats erronés tandis que l'approche énergétique n'est pas utilisable (absence de potentiel).

1.3.3 L'approche classique

L'approche classique consiste à écrire les équations différentielles et les conditions aux limites gouvernant l'équilibre du système. L'issue du calcul dépend entièrement du degrés d'approximation choisi.

Approximation de la flexion des poutres en résistance des matériaux

Prenons l'exemple de la colonne d'Euler. Dans un premier temps, utilisons l'approche classique utilisée en résistance des matériaux pour calculer la flexion des poutre. Cette approche consiste à calculer les moments exercés par les forces sur la configuration initiale du système, c'est-à-dire ici sur la colonne parfaitement droite, et à les remplacer dans l'équation suivante :

$$M = \frac{EI}{\rho} \tag{1.2}$$

Le rayon de courbure ρ a pour expression exacte

$$\frac{1}{\rho} = \frac{w''}{\left(1 + w'^2\right)^{3/2}} \tag{1.3}$$

Dans le cadre de cette approximation, il est évalué à l'ordre 1 en w, w', w'' (l'égalité ci-dessous est en réalité exacte à l'ordre 2 en w, w', w''), d'où

$$\frac{1}{\rho} = w'' \tag{1.4}$$

On retrouve finalement l'équation classique de la flexion des poutres :

$$M = EIw'' \tag{1.5}$$

La seule force appliquée étant axiale, on a naturellement en tout point $M=0$. La condition d'encastrement impose finalement $w = 0$ pour toute la colonne, et aucun phénomène de flambement ne peut être mis en évidence.

Pour le traitement du cas de l'arche basse, notons seulement que le raccourcissement de l'arche est d'ordre 2 en w' (cf. théorie du quatrième ordre) et n'intervient donc pas. On se ramène alors simplement à la flexion d'une poutre possédant une flèche initiale, et on n'est donc pas en mesure d'exhiber un quelconque phénomène de flambement en *snap*.

La théorie de deuxième ordre

La théorie du deuxième ordre (cf. [2]) consiste à évaluer encore une fois w, w', w'' à l'ordre 1, c'est-à-dire en linéarisant, mais cette fois en calculant les moments des forces sur la configuration déformée. Cette théorie ne peut concerner qu'une structure élastique linéaire idéale dans le domaine des petits déplacements. Elle ne permet pas de tenir compte des

imperfections. De plus, elle ne peut évidemment pas rendre compte du flambement avec point limite, comportement fondamentalement non linéaire (cf. paragraphe 1.2.4).

Exemple

C'est cette théorie qui conduit au calcul bien connu de la charge d'Euler, présenté par exemple par Timoshenko [32]. Considérons donc de nouveau la colonne encastrée représentée à la Figure 1.11. L'équation (1.5) est toujours valable. En revanche, on n'a plus $M=0$, mais

$$M(x) = P \cdot (\delta - w(x))$$

En substituant dans l'équation (1.5), on trouve l'équation différentielle :

$$w'' + k^2 w = k^2 \delta \tag{1.6}$$

où $k^2 = P / EI$. La solution en est

$$w = A\cos(kw) + B\sin(kw) + \delta$$

Les conditions d'encastrement en $x=0$ imposent

$$A = -\delta \qquad B = 0$$

D'où

$$y = \delta(1 - \cos(kx)) \tag{1.7}$$

La condition à l'extrémité libre impose

$$y = \delta \quad \text{pour } x = L$$

d'où

$$\delta \cdot \cos(kL) = 0 \tag{1.8}$$

condition qui sera satisfaite dans l'un des deux cas suivants :

$$\begin{aligned} &1) \quad \delta = 0 \\ &2) \quad \cos(kL) = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ces deux cas correspondent à des relations charge-flèche, c'est-à-dire à des chemins d'équilibre. Explicitons le deuxième chemin, qui décrit une configuration fléchie de la poutre :

$$kL = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

La plus petite valeur de kL qui convienne correspond à n=1, d'où l'on tire la charge critique, autrement appelée charge d'Euler :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{1.10}$$

Les deux chemins d'équilibre définis par les équations (1.9) sont tracés à la Figure 1.13.

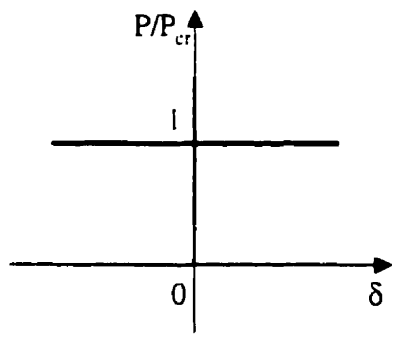


Figure 1.13 - Chemins d'équilibre de la colonne d'Euler, calculés avec la théorie de deuxième ordre

Notons bien que la théorie utilisée ici ne nous permet pas de déterminer si le chemin d'équilibre fondamental devient instable au-delà de P_{cr}, ni si le chemin post-flambement correspond à des états d'équilibre stable. La seule considération qui nous permette d'affirmer que P_{cr} correspond bien à la charge critique est le théorème d'échange de Poincaré (cf. paragraphe 1.2.3).

Signalons également que la pente horizontale du chemin post-flambement n'indique pas que l'équilibre est indifférent au-delà de la charge critique, mais plutôt que la flèche ne peut être déterminée dans le cadre de la théorie de deuxième ordre.

La théorie du deuxième ordre a été utilisée dans le cas de la colonne d'Euler afin d'obtenir une solution analytique. Elle peut également être associée à une méthode de discrétisation, et conduire à un problème linéaire aux valeurs propres du type :

$$\boldsymbol{K}(\Lambda)\cdot\boldsymbol{Q}=0 \tag{1.11}$$

où $\boldsymbol{Q}$ est le vecteur des déplacements généralisés comptés à partir de l'état initial, $\boldsymbol{K}$ est la matrice de rigidité et Λ le facteur de charge. Cette équation est à rapprocher de l'équation (1.8) obtenue pour la colonne d'Euler, $\boldsymbol{Q}$ jouant le rôle de δ et Λ celui de k.

Cette formulation peut être obtenue par la "méthode de la matrice de rigidité" (cf. [2]) utilisée dans le cadre du calcul du flambement de charpentes, ou, plus couramment, par analyse par éléments finis. Cette méthode de calcul de stabilité est entre autres proposée par le logiciel ANSYS sous le nom "Eigenvalue Buckling Analysis". Nous reviendrons à son mode d'obtention grâce aux éléments finis au paragraphe 1.4.2, et allons pour l'instant nous contenter d'expliciter en quoi il s'agit ici d'un problème aux valeurs propres, quoique non standard. La solution exacte au problème (1.11) est

$$\det(\boldsymbol{K}(\Lambda))=0$$

Or $\boldsymbol{K}$ dépend de Λ de manière généralement non linéaire. Une méthode de résolution possible consiste à partir de l'équation (1.11), et à développer $\boldsymbol{K}$ en série de Taylor autour d'un point Λ_0 :

$$\boldsymbol{K}(\Lambda)\cdot\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{K}_0+(\Lambda-\Lambda_0)\boldsymbol{K}_1]\cdot\boldsymbol{Q}=0$$

où $\boldsymbol{K}_0$ et $\boldsymbol{K}_1$ sont des matrices constantes. En multipliant cette équation par $\boldsymbol{K}_1^{-1}$, on obtient

$$(\boldsymbol{C} - \Lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{Q} = 0 \tag{1.12}$$

où $\boldsymbol{C} = \Lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_1^{-1} \boldsymbol{K}_0$ et $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité. On retrouve ainsi un problème classique de recherche de valeurs propres.

Cette théorie appliquée à un phénomène de flambement avec point limite fournira une réponse très approximative, telle que celle illustrée par la Figure 1.14.

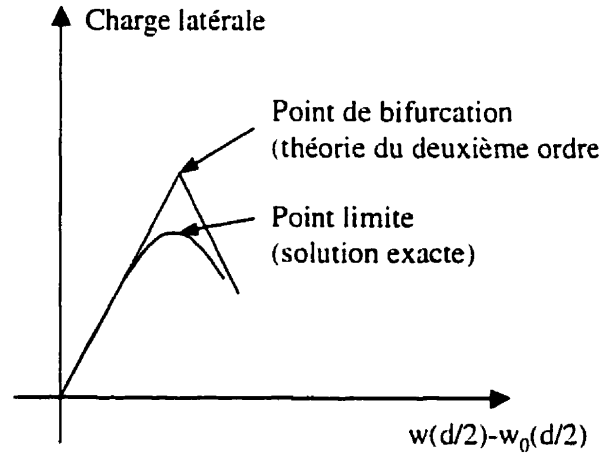


Figure 1.14 - Théorie du deuxième ordre appliquée au calcul d'un point limite

La théorie de quatrième ordre

La théorie du quatrième ordre consiste à évaluer w, w' et w'' à l'ordre 2. Les moments sont naturellement calculés comme dans la théorie du deuxième ordre sur la configuration déformée. On peut cette fois introduire des non-linéarités géométriques et des non-linéarités dans la relation constitutive du matériau, ainsi que des imperfections. On est alors en mesure de montrer l'existence d'un point limite et de calculer sa position. De plus, si l'on tient compte des imperfections de la structure, on supprime les points de bifurcation (cf. Figure 1.15) et on règle ainsi le problème de l'échange de stabilité à l'intersection de deux chemins d'équilibre. Cependant, la présence d'imperfections alourdit considérablement les calculs, et si l'on décide de les négliger, on ne dispose pas de plus d'information pour déterminer la

stabilité des chemins d'équilibre que dans le cadre de la théorie de deuxième ordre. Ce fait est inhérent à l'approche classique.

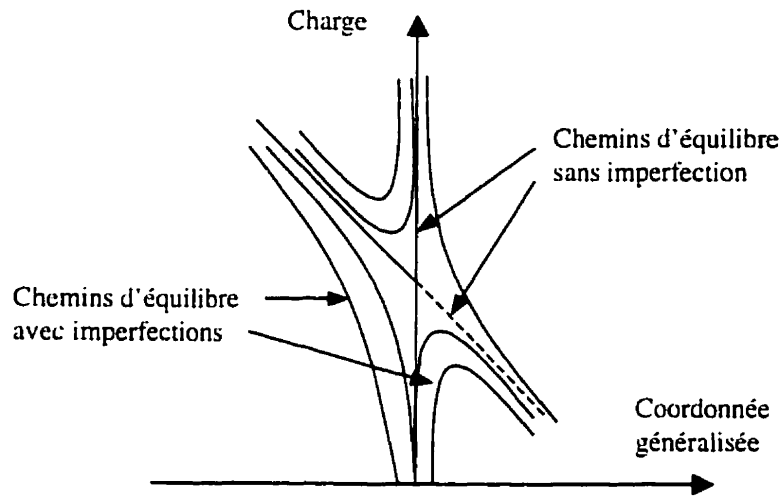


Figure 1.15 – Chemins d'équilibre avec ou sans imperfections au voisinage d'un point de bifurcation asymétrique

Exemple

Afin d'illustrer la théorie de quatrième ordre, nous allons présenter et prolonger le calcul effectué par Fung et Kaplan [7] sur le flambement de l'arche basse chargée latéralement. C'est sur ce calcul que va reposer la modélisation analytique du flambement en *snap* d'une arche en AMF (cf. chapitre 3) et nous allons donc le présenter en détail. Les notations sont celles de la Figure 1.12.

En substituant dans l'équation (1.5) les moments produits par la charge latérale et la poussée des rotules, on trouve :

$$EI\frac{d^4(w-w_0)}{dx^4}+H\frac{d^2w}{dx^2}-H_0\frac{d^2w_0}{dx^2}=-q \qquad (1.13)$$

Or la poussée axiale H des rotules contrebalance les contraintes issues du raccourcissement ΔL de l'arche, d'où :

$$H = H_0 + EA\frac{\Delta L}{L}$$

et ΔL s'exprime géométriquement de la manière suivante :

$$\Delta L = \int_0^d \sqrt{1+w'^2}\,dx - \int_0^d \sqrt{1+w_0'^2}\,dx - \Delta$$

où $\Delta = H - H_0 / \alpha$ est le raccourcissement du ressort, très petit devant d.

On en déduit finalement l'expression de H, à l'ordre le plus bas non nul en w' :

$$H = H_0 + \frac{EA\alpha}{2L\alpha + 2EA}\int_0^d \left(w_0'^2 - w'^2\right)dx \qquad (1.14)$$

On voit bien ici que la poussée H est nulle à l'ordre 1 en w', ce qui explique qu'elle ne soit pas apparue dans la théorie à l'ordre 2 (qui ne prend en compte que les termes d'ordre 1).

En substituant l'expression donnée par l'équation (1.14) pour H dans l'équation (1.13), on obtient l'équation différentielle non linéaire en w qui décrit le comportement de l'arche basse :

$$EI\frac{d^4(w-w_0)}{dx^4} + \left(H_0 + \frac{EA\beta}{2L}\int_0^d \left(w_0'^2 - w'^2\right)dx\right)\frac{d^2w}{dx^2} - H_0\frac{d^2w_0}{dx^2} = -q \qquad (1.15)$$

où β est défini de la manière suivante :

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha + EA/L}$$

Si l'on développe les lignes élastiques initiale w_0 et finale w de l'arche ainsi que la charge q en série de Fourier, l'équation différentielle est transformée en un système d'équations algébriques. Une solution exacte peut être obtenue pour une arche sinusoïdale soumise à une

charge sinusoïdale. Les lignes élastiques initiale et déformée de l'arche ainsi que la charge latérale s'écrivent dans ce cas :

$$w_0 = a \sin \frac{\pi x}{d}$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{d}$$

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{d}$$

Les coefficients adimensionnels suivants sont introduits afin de simplifier le traitement de l'équation (1.15) :

$$\lambda = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{A}{I}} \qquad R = \frac{q_0 L^4}{2\pi^4 EI}\sqrt{\frac{A}{I}} \qquad S = \frac{H_0 L^2}{\pi^2 EI} \qquad (1.16)$$

Notons que λ, que nous appellerons hauteur réduite, est - à un facteur multiplicatif près - égal au rapport entre la flèche de l'arche et le rayon de giration de sa section. Le coefficient adimensionnel R sera appelé la charge réduite. S est le rapport entre la charge de compression axiale initiale et la charge d'Euler.

La résolution de la forme algébrique de l'équation (1.15) montre que trois types de comportement doivent être distingués en fonction de la valeur de λ. Les résultats concernant les charges critiques sont regroupés dans le tableau 1.1.

Cas 1 Si $\lambda \leq \sqrt{(1-S)/\beta}$, i.e., l'arche est très basse, la relation flèche-charge est monotone (cf. Figure 1.16, $\lambda = 0.8$) et la courbure s'inverse pour une certaine charge, mais sans saut. Ceci est vrai aussi bien à partir d'une courbure dirigée vers le haut que vers le bas.

Tableau 1.1- Charges critiques en fonction de la hauteur réduite

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
	$\lambda \leq \sqrt{(1-S)/\beta}$	$\sqrt{(1-S)/\beta} \leq \lambda \leq \sqrt{(5.5-S)/\beta}$	$\lambda \geq \sqrt{(5.5-S)/\beta}$
R_1	pas de flambement	$\lambda(1-S)+\sqrt{\frac{4}{27\beta}(\beta\lambda^2-1+S)^3}$	$\lambda(1-S)+3\sqrt{\frac{1}{\beta}(\beta\lambda^2-4+S)}$
R_2	pas de flambement	$\lambda(1-S)-\sqrt{\frac{4}{27\beta}(\beta\lambda^2-1+S)^3}$	$\lambda(1-S)-3\sqrt{\frac{1}{\beta}(\beta\lambda^2-4+S)}$

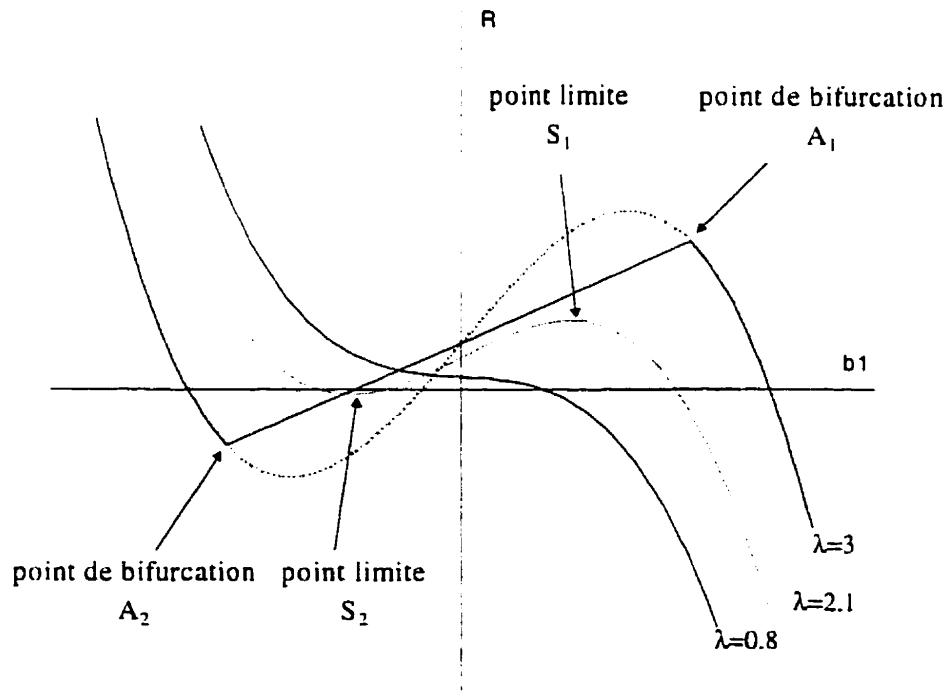


Figure 1.16 - Chemins d'équilibre pour trois arches de hauteurs différentes

Cas 2 Si la hauteur réduite λ est comprise entre $\sqrt{(1-S)/\beta}$ et $\sqrt{(5.5-S)/\beta}$, la courbure s'inverse soudainement lorsque la charge critique est atteinte, la ligne élastique gardant pendant le flambement une forme de sinusoïde. Il s'agit alors de flambement avec point limite. Il a lieu au point S_1 - correspondant à une charge que nous noterons R_1 -de la Figure 1.16 $(\lambda = 2.1)$ dans le sens "flèche positive vers flèche négative", et au point S_2 - correspondant à la charge R_2 - dans le sens "flèche négative vers flèche positive". Notons que la portion de courbe entre S_1 et S_2 correspond à des états d'équilibre instables, et ne sera jamais atteinte sous contrôle de la charge.

Cas 3 Si la hauteur réduite λ est supérieure à $\sqrt{(5.5-S)/\beta}$, le flambement en *snap* a également lieu, mais une deuxième harmonique b_2 asymétrique apparaît dans la ligne élastique pendant le flambement. Il s'agit cette fois de flambement avec point de bifurcation asymétrique (cf. Figure 1.16, $\lambda = 3$). Il a lieu au point A_1 dans le sens "flèche positive vers flèche négative" et au point A_2 dans le sens "flèche négative vers flèche positive". Les points de flambement symétrique ne sont dans ce cas jamais atteints. Les charges critiques correspondant respectivement aux points A_1 et A_2 sont encore notées R_1 et R_2.

Nous rencontrons donc là deux des trois types de flambement susceptibles de se traduire par le phénomène de flambement en *snap* : le flambement avec point limite et le flambement avec point de bifurcation asymétrique.

Pour les autres formes d'arches – toujours sur rotules- et types de chargement, une solution approchée peut être obtenue en sommant les termes d'une série de Fourier rapidement convergente. En particulier, pour une arche sinusoïdale soumise à une charge concentrée $P = q_0 d$ appliquée au milieu de la portée, les charges critiques peuvent être déduites de celles données au Tableau 1.1 en appliquant à ces dernières un coefficient multiplicatif de 1/2. Dans le cas d'une arche non sinusoïdale, on constate que la présence d'une harmonique

asymétrique peut considérablement diminuer la charge critique. A titre d'exemple, si l'amplitude relative de la seconde harmonique est de 1%, la charge critique baisse de 10% dans le cas d'un chargement sinusoïdal. En revanche, la présence d'une harmonique symétrique ne modifie que sensiblement la charge critique. Pour une charge non sinusoïdale, les composantes asymétriques ont également une influence beaucoup plus notable que les composantes symétriques. Cette sensibilité aux imperfections sera reprise dans le paragraphe sur la validation expérimentale.

La comparaison avec les résultats expérimentaux fournie par Fung et Kaplan montre que cette méthode de calcul constitue une approche satisfaisante pour d'assez grandes valeurs de λ_1, mais surestime d'environ 25% la charge critique pour $\lambda_1 \leq 3$.

Les théories d'ordre supérieur

Les théories d'ordres supérieur rendent globalement compte des mêmes phénomènes que la théorie d'ordre 2, mais avec une meilleure précision.

Exemple

Nous allons citer en exemple le calcul exact des flèches de grande valeur produites par la flexion des poutres, car il nous servira pour la validation du code de calcul présenté au chapitre 2.

Rappelons que le calcul concernant la colonne d'Euler effectué dans le cadre de la théorie de premier ordre ne nous a fourni que la charge critique. Si l'on utilise l'expression exacte de la courbure, la flèche n'est plus indéterminée et la forme de la ligne élastique de la colonne est appelée simplement "l'élastique ". Ce calcul a été effectué en premier par Euler, et est présenté par Timoshenko [32].

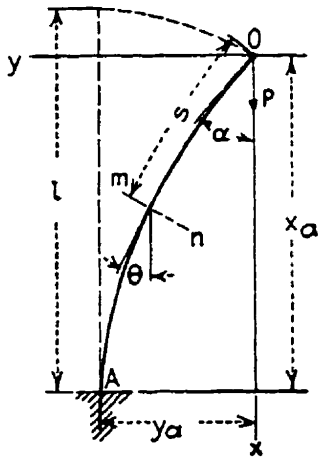


Figure 1.17 – L'élastique

Considérons la barre mince de la Figure 1.17. En adoptant les notations de la figure, l'équation différentielle exacte de la courbe élastique est :

$$EI\frac{d\theta}{ds} = -Py \tag{1.17}$$

Si l'on néglige la compression, ce qui est justifié pour les matériaux usuels, et grâce à différents changements de variables et intégrations, on arrive au résultat :

$$\begin{cases} x_a = \dfrac{2}{k}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-p^2\sin(\varphi)^2}\,d\varphi - l \\ y_a = \dfrac{2p}{k} \end{cases} \tag{1.18}$$

avec

$$k^2 = \frac{P}{EI}$$

et où p est défini implicitement par l'intégrale

$$l = \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2\sin(\varphi)^2}}$$

On obtient donc une relation charge-flèche valable pour des flèches de grande valeur.

1.3.4 L'approche énergétique

On a vu au paragraphe précédent que l'approche classique ne contient pas en elle-même d'outils permettant de décider de la stabilité d'un état d'équilibre. L'approche dynamique quant à elle nécessite des calculs très lourds. D'importants efforts ont donc été fournis très tôt dans l'histoire de la mécanique pour trouver un critère de stabilité n'exigeant pas la résolution des équations du mouvement. Le plus simple et le plus ancien a été présenté par Lagrange [14] en 1788 et prouvé par Dirichlet au XIXème siècle. Il s'agit du théorème de Lagrange-Dirichlet ou "principe de l'énergie totale minimale", énoncé ci-dessous.

De tous les champs de déformation cinématiquement admissibles dans un système élastique conservatif, pour un niveau de charges extérieures et le niveau de charges intérieures correspondant, seuls ceux qui minimisent localement l'énergie totale correspondent à un état d'équilibre stable.

La réciproque de ce théorème n'est pas prouvée mais généralement admise, et le critère énoncé par le principe de l'énergie totale minimale est utilisé comme une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Il est prouvé dans [36] que cette approche est rigoureusement équivalente à l'approche cinétique dans les cas ou elle s'applique. Ce principe peut aussi être utilisé en présence de forces non conservatives, mais uniquement du type dissipatives (stationnaires, dépendantes de la vitesse) telles que l'amortissement ou la friction.

Pour un système conservatif, l'énergie totale E est la somme de l'énergie de déformation U (élastique) et de l'énergie potentielle $-W$ associée aux charges (opposée du travail effectué par les charges) :

$$E = U - W \tag{1.19}$$

Considérons en premier lieu un système discret décrit, comme au paragraphe 1.2, par les coordonnées généralisées $(Q_i)_{1 \le i \le n}$ - notées $\boldsymbol{Q}$ en notation vectorielle - et soumis à des

charges caractérisées par un facteur de charge Λ. Si l'énergie totale E est développée en série de Taylor à l'ordre 2 autour du point d'équilibre statique, caractérisé à une translation près par $Q_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, alors :

$$E(\delta Q_1,....,\delta Q_n;\Lambda) = E(0,...,0;\Lambda) + \delta E + \delta^2 E \tag{1.20}$$
$$= E(0,...,0;\Lambda) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial Q_i}\delta Q_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial Q_i \partial Q_j}\delta Q_i \delta Q_j$$

Or un état d'équilibre statique correspond à un point stationnaire de l'énergie totale d'où :

$$\frac{\partial E}{\partial Q_i}(0,...,0;\Lambda) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \tag{1.21}$$

et l'équation (1.20) se réduit à :

$$\Delta E = E(\delta Q_1,....,\delta Q_N;\Lambda) - E(0,....0;\Lambda) = \delta^2 E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\delta Q_i \delta Q_j \tag{1.22}$$
$$= \frac{1}{2}\delta \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{K} \delta \boldsymbol{Q}$$

où $\boldsymbol{K}$ est la matrice des coefficients K_{ij} définis par :

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 E}{\partial Q_i \partial Q_j}(0,....,0)$$

D'après le théorème de Lagrange-Dirichlet, l'équilibre est stable si ΔE est strictement positif pour tout $\delta \boldsymbol{Q}$ (infinitésimal) ce qui équivaut au fait que la forme quadratique donnée par l'équation (1.22), ou autrement dit la matrice $\boldsymbol{K}$, soit définie positive. Une manière très lourde de s'en assurer est de chercher les valeurs propres de $\boldsymbol{K}$, qui doivent toutes être strictement positives (notons que $\boldsymbol{K}$ étant symétrique, ses valeurs propres sont réelles). Une méthode plus légère consiste à appliquer le critère de Sylvester : une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si son déterminant D ainsi que ses mineurs principaux D_i sont strictement positifs :

$$D = \det \boldsymbol{K} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & \dots & K_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

$$D_i = \begin{vmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} \end{vmatrix} > 0$$

Le principe de l'énergie totale minimale peut être utilisé avec deux orientations différentes. La première consiste à résoudre le système d'équations (1.21) afin de trouver les chemins d'équilibre, puis à utiliser directement le théorème de Lagrange-Dirichlet afin de décider de la stabilité de ces chemins. La deuxième consiste à s'intéresser uniquement aux conditions critiques, en cherchant à quel niveau de charge le système cesse d'être en état d'équilibre stable. On peut utiliser à cette dernière fin le critère de Trefftz qui s'énonce comme suit. Si l'on augmente la charge à partir d'une charge nulle (et donc d'un état d'équilibre stable), lorsque la charge critique est atteinte, la forme quadratique de l'équation (1.22) devient semi-définie positive. En d'autres termes, 0 devient valeur propre de $\delta^2 E$ et donc :

$$D = \det \boldsymbol{K} = 0 \tag{1.23}$$

Le vecteur propre $\delta \boldsymbol{Q}$ associé à la valeur propre 0 correspond au mode de flambement.

<u>Exemple</u>

Considérons de nouveau l'arche basse introduite au paragraphe 1.2.4 et représentée à la Figure 1.9. L'énergie totale du système est la somme de l'énergie emmagasinée dans les ressorts et de l'énergie potentielle liée à la force P :

$$E = kR^2\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos Q_1}\right)^2 - PR(\tan\alpha - \tan Q_1) \tag{1.24}$$

L'équilibre statique est déterminé par l'annulation de la dérivée première de E par rapport à l'unique variable Q_1, ce qui conduit à l'équation

$$P_{eq} = 2kR \cdot \sin Q_1 \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos Q_1} \right) \tag{1.25}$$

Notons l'équation donnant la dérivée de P_{eq} par rapport à Q_1 :

$$\frac{dP_{eq}}{dQ_1} = \frac{-2kR}{\cos^2 Q_1 \cos\alpha} \left(\cos\alpha - \cos^3 Q_1 \right) \tag{1.26}$$

La stabilité de l'équilibre est déterminée par le signe de la dérivée seconde de E (égale à K_{11} pour se ramener aux notations du paragraphe précédent), égale, après qu'on a substitué P_{eq} (cf. (1.25)), à :

$$\left. \frac{d^2 E}{dQ_1^{\,2}} \right|_{P=P_{eq}} = \frac{2kR^2}{\cos^4 Q_1 \cos\alpha} \left(\cos\alpha - \cos^3 Q_1 \right) \tag{1.27}$$

Avec les notations du paragraphe précédent, cette équation s'écrit:

$$\Delta E = \delta^2 E = \frac{2kR^2}{\cos^4 Q_1 \cos\alpha} \left(\cos\alpha - \cos^3 Q_1 \right) \left(\delta Q_1 \right)^2$$

Il s'agit bien d'une forme quadratique en δQ_1 (rappelons que Q_1 est considéré ici comme un paramètre), définie positive en dehors de l'intervalle :

$$-\arccos\left((\cos\alpha)^{1/3} \right) \leq Q_1 \leq \arccos\left((\cos\alpha)^{1/3} \right)$$

Cet intervalle correspond à la portion du chemin d'équilibre située entre les points C et E sur le premier diagramme de la Figure 1.10. Les deux valeurs de la charge critique sont donc données par:

$$P_{cr} = 2kR \cdot \sin Q_{1cr} \cdot \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos Q_{1cr}} \right) \tag{1.28}$$

où

$$Q_{1cr} = \pm \arccos\left((\cos\alpha)^{1/3}\right) \tag{1.29}$$

On observe que les valeurs de Q_{1cr} et donc de P_{cr} obtenues grâce à l'annulation de $\partial^2 E / \partial Q_1^2$ correspondent bien à l'annulation de dP_{eq} / dQ_1, qui exprime le fait qu'on a affaire à des points limites. Par ailleurs, on ne peut trancher quant à la stabilité du point limite qu'en effectuant une étude plus approfondie sur les dérivées suivantes de E . Il se trouve que la dérivée troisième de E par rapport à Q_1 n'est pas nulle aux points limites. L'équilibre est donc instable au point limite.

1.4 L'approche énergétique appliquée à des structures continues

Le critère énergétique de stabilité fourni par le théorème de Lagrange-Dirichlet constitue, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le moyen le plus efficace de d'analyser la stabilité d'un système conservatif discret. Cependant, l'usage le plus courant qui en est fait, et en particulier celui que nous allons en faire pour analyser le flambement de l'arche basse chargée latéralement, concerne des structures continues. Le critère énergétique va alors nous permettre de trouver des expressions approchées des chemins d'équilibre et des valeurs approximatives de la charge critique. Ces méthodes approximatives issues de la méthode énergétique sont toutes fondées sur l'approximation de la forme de la structure par des fonctions connues.

1.4.1 Les quotients de Rayleigh et de Timoshenko

Les méthodes du quotient de Rayleigh et celle du quotient de Timoshenko sont exposées à la fois dans [2] et dans [32]. Elles permettent d'obtenir très simplement une valeur approximative mais assez précise de la charge critique dans le cas du flambement avec point de bifurcation, c'est-à-dire quand les états d'équilibre pré- et post-flambement sont adjacents.

Nous allons les présenter grâce à l'exemple de la colonne d'Euler (cf paragraphe 1.3.1), et en utilisant les arguments de Timoshenko.

Lorsque la charge P augmente à partir de zéro, le travail effectué est stocké dans le système sous forme d'énergie de compression. Pour une charge P donnée, si l'on autorise la colonne à subir une déformation en flexion $w(x)$ suffisamment petite pour ne pas modifier l'énergie de compression, la variation ΔE de l'énergie totale est donnée, d'après l'équation (1.19), par :

$$\Delta E = \Delta U_{flexion} - \Delta W \tag{1.30}$$

où $\Delta U_{flexion}$ est l'énergie de flexion et ΔW est le travail effectué par la force P. L'argument de Timoshenko est le suivant : si l'énergie de flexion emmagasinée dans le système en cas de flexion est supérieure à l'énergie fournie sous forme de travail par la force P pour arriver à la forme fléchie, la flexion n'aura pas lieu. En d'autres termes, la forme rectiligne de la colonne comprimée sera stable si $\Delta E > 0$, et instable si $\Delta E < 0$. La charge critique correspond donc à $\Delta E = 0$.

Pour des petits déplacements (à l'ordre 2 en w, w', w''), $\Delta U_{flexion}$ s'exprime en fonction de la déformée $w(x)$ de la poutre de la manière suivante :

$$\Delta U_{flexion} = \frac{1}{2}\int_0^L EIw''^2\, dx \tag{1.31}$$

Si l'on note $L' = L - \Delta L$, grâce à l'hypothèse selon laquelle la longueur de la poutre n'a pas changé lors du flambement (énergie de compression inchangée), on a

$$L = \int_0^{L'} \sqrt{1 + w'^2}\, dx \approx \int_0^{L'} \left(1 + \frac{1}{2} w'^2\right) dx = L' + \frac{1}{2}\int_0^{L'} w'^2\, dx \approx L' + \frac{1}{2}\int_0^{L} w'^2\, dx \tag{1.32}$$

d'où

$$\Delta L = L - L' \approx \frac{1}{2}\int_0^L w'^2\, dx \tag{1.33}$$

et finalement

$$\Delta W = \frac{1}{2} P \int_0^L w'^2 \, dx \tag{1.34}$$

En substituant les expressions obtenues en (1.31) et (1.34) pour $\Delta U_{flexion}$ et ΔW dans $\Delta E = 0$, on trouve la charge critique :

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L EI(w'')^2 \, dx}{\int_0^L (w')^2 \, dx} \tag{1.35}$$

Cette expression est appelée quotient de Rayleigh et est en réalité valable pour toute colonne quelles que soient les conditions aux limites. Une inconnue nécessaire à l'évaluation du quotient de Rayleigh est la forme de la poutre, ou sa ligne élastique, après flambement. On doit alors faire une hypothèse plausible quant à la déformée, respectant autant que possible les conditions aux limites. Les conditions aux limites sont dans notre cas :

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(L) = 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

Si l'on choisit l'expression suivante pour la déformée, qui vérifie les conditions aux limites :

$$w(x) = A\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{1.37}$$

on trouve :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{1.38}$$

Ce résultat correspond à l'expression exacte de la charge d'Euler, car on a choisi pour déformée la solution obtenue dans le cadre de la théorie du deuxième ordre (cf. paragraphe 1.3.1), qui correspond au degré d'approximation adopté ici. En d'autres termes, on a choisi la

forme exacte. Si maintenant on choisit une forme différente, par exemple polynômiale de degré 3, et vérifiant les conditions aux limites, on trouvera une charge critique surestimée de 1.3%.

Le quotient de Timoshenko est une variante qui consiste à exprimer l'énergie de flexion non pas à partir de $w''(x)$, mais grâce à l'expression explicite du moment en fonction de $w(x)$. On obtient finalement :

$$P_{cr} = \frac{\int_0^L w'^2 \, dx}{\int_0^L w^2 / EI \, dx}$$

Cette expression fournit des résultats généralement plus proches du résultat exact car l'incertitude sur $w(x)$ est moins grande que celle sur $w''(x)$.

Remarquons d'ores et déjà que la charge critique obtenue avec une équation approximative de la déformée est supérieure à la charge critique théorique. Cela provient du fait que la vraie courbe élastique d'une barre flambée est celle qui correspond à la moindre résistance de la barre. Travailler sur une courbe hypothétique revient à introduire dans la structure une contrainte additionnelle qui ne peut qu'augmenter sa rigidité, et donc la valeur de la charge critique. Si on utilise plusieurs courbes arbitraires, celle qui donnera la plus faible charge critique sera la plus exacte.

Notons bien que la méthode de Timoshenko telle que présentée ici fournit une approximation de la charge critique uniquement dans un cas de flambement avec point de bifurcation symétrique stable, et non dans le cas du flambement avec point limite où les états d'équilibre ne sont pas adjacents. Elle n'est pas non plus directement utilisable dans le but d'établir une relation charge-déplacement car l'expression $\Delta E = 0$ caractérise explicitement la charge critique, et non une charge quelconque. En effet, pour une charge inférieure à la charge

critique on doit avoir $\Delta E > 0$ et pour une charge supérieure à la charge critique $\Delta E < 0$, d'après l'argument de Timoshenko.

Bien que cette méthode ne soit pas applicable telle quelle à l'objet de notre étude - elle n'est pas valable pour le point limite - il était intéressant de la présenter car elle fournit des remarques intéressantes quant à l'utilisation d'une approximation de la ligne élastique, sur laquelle est fondé le code de calcul présenté au chapitre 3.

1.4.2 La méthode de Rayleigh-Ritz

Dans bien des cas, il n'est pas facile de trouver une fonction qui approchera suffisamment bien la forme post-flambement de la structure, et le quotient de Rayleigh est alors assez imprécis. On peut améliorer la méthode en considérant la déformée comme une combinaison linéaire de fonctions indépendantes $(\Phi_i)_{1\le i\le n}$ vérifiant les conditions aux limites. Dans le cas de l'arche basse ou de la colonne d'Euler, on écrira :

$$w(x) \approx \sum_{i=1}^{n} Q_i \Phi_i(x) \tag{1.39}$$

Les $(Q_i)_{1\le i\le n}$ tiennent lieu de coordonnées généralisées. Le problème étant discrétisé, on peut appliquer la théorie présentée au paragraphe précédent, et minimiser l'énergie totale par rapport aux $(Q_i)_{1\le i\le n}$.

<u>Exemple</u>

Considérons le cas de la colonne d'Euler soumise, en plus de la charge axiale, à une force latérale répartie $p(x)$. L'énergie totale est donnée, dans le cadre de la théorie du deuxième ordre (cf. [2]), par :

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \left(EIw''^2 - Pw'^2\right)dx - \int_0^L pw\,dx$$

En remplaçant $w(x)$ par son expression approchée donnée en (1.39), on obtient :

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(P)Q_iQ_j - \sum_{i=1}^{n} B_i(p)Q_i$$

où les A_{ij} et les B_i sont calculés à partir des fonctions de base $(\Phi_i)_{1\le i\le n}$. Les états d'équilibre sont solution du système d'équations :

$$\frac{\partial E}{\partial Q_i} = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} A_{ij}Q_j - B_i = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le n \tag{1.40}$$

Notons, afin de nous ramener aux notations du paragraphe 1.3.4, que l'on a :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Q_i \partial Q_j} = A_{ij} \quad \text{d'où} \quad A_{ij} = K_{ij}$$

Si l'on note $\boldsymbol{B}$ la matrice de coefficients B_i, le système (1.40) s'écrit en notation matricielle :

$$\boldsymbol{K}(P)\cdot\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}(p) \tag{1.41}$$

A P fixé, un chemin d'équilibre « p fonction de $\boldsymbol{Q}$ » s'obtient en résolvant le système ci-dessus. Celle-ci n'est possible que si la matrice $\boldsymbol{K}$ est inversible. Le cas $\boldsymbol{K}$ non inversible correspond donc à un état critique. Souvenons nous maintenant (cf. paragraphe 1.3.4), qu'un point critique est précisément donné par :

$$\det \boldsymbol{K} = 0$$

Tout est donc cohérent. Considérons maintenant le cas $p = 0$, i.e., l'absence de charge latérale. Le chemin d'équilibre « P fonction de $\boldsymbol{Q}$ » est cette fois donné par le système :

$$\boldsymbol{K}(P)\cdot\boldsymbol{Q} = 0$$

On retrouve ici le problème aux valeurs propres généralisé évoqué au paragraphe 1.3.3. Les deux chemins d'équilibre sont donnés respectivement par $\boldsymbol{Q} = 0$ et $\det \boldsymbol{K} = 0$, i.e., $P = P_{cr}$.

Grâce à la formulation énergétique et au critère de Trefftz, on sait cette fois que la charge P_{cr}, en temps que solution de l'équation $\det \boldsymbol{K} = 0$, correspond à la perte de stabilité.

Remarquons maintenant que le fait que la matrice $\boldsymbol{K}$ ne soit pas fonction de $\boldsymbol{Q}$ provient du degré d'approximation des énergies : on a utilisé l'approximation de la théorie du deuxième ordre (ceci explique aussi le fait qu'on retrouve les mêmes chemins d'équilibre que dans le cadre de l'approche classique, dans la partie "théorie du deuxième ordre"). Si l'on utilise l'expression exacte pour les énergies, on aboutit au lieu de l'équation (1.41), à l'équation suivante :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}, P) \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B}(p) \tag{1.42}$$

Cette théorie permet de prendre en compte les phénomènes non linéaires, comme expliqué dans le cadre de l'approche classique, théorie du quatrième ordre. La formulation générique pour un problème non linéaire issu de la méthode de Ritz est (cf. [5]) :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B} \tag{1.43}$$

Ce type de problème est généralement résolu par une méthode incrémentale-itérative, la plus courante étant la méthode de Newton-Raphson. Le terme "incrémentale" signifie que la charge représentée par la matrice B est augmentée pas à pas à partir de 0, et qu'on ne résout pas le système non linéaire (1.43) mais plutôt sa forme incrémentale, ou linéarisée :

$$\dot{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{Q}) \cdot \Delta \boldsymbol{Q} = \Delta \boldsymbol{B} \tag{1.44}$$

Le terme "itérative" signifie que pour chaque niveau de charge, l'équation ci-dessus est résolue par une méthode itérative. Un point critique correspond à :

$$\det \dot{\boldsymbol{K}} = 0$$

Le cas particulier de la méthode de Rayleigh-Ritz le plus utilisé est la méthode des éléments finis. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de la méthode ni ne présenterons ses qualités bien établies, mais signalerons ses inconvénients pour traiter le cas qui nous intéresse. La principale difficulté concerne la détection d'un point de bifurcation. La détection d'un point limite ne pose naturellement pas de problème, puisque le chemin d'équilibre ne se poursuit pas au voisinage du dernier point d'équilibre pour des valeurs croissantes de la charge (voir par exemple la figure 1.8). En revanche, le chemin d'équilibre fondamental se poursuit au-delà d'un point de bifurcation. Le seul moyen de repérer avec certitude qu'on est au-delà du point de bifurcation consiste à regarder le signe des valeurs propres de $\dot{\boldsymbol{K}}$ (cf. 1.3.4). Plus simplement, on peut surveiller le signe du déterminant : si le déterminant est négatif alors qu'il était positif avant chargement, il est nécessairement passé par 0 pour une configuration donnée de la structure, i.e., pour une valeur donnée de la charge. On a alors dépassé le point critique. Ce test sur le déterminant de $\dot{\boldsymbol{K}}$ est facile à programmer, mais il n'est pas installé sur les logiciels commerciaux tels que ANSYS par exemple. La présence d'un point de bifurcation ne peut alors être mise en évidence qu'en tombant exactement dessus (on a alors $\det \dot{\boldsymbol{K}} = 0$, et le système (1.44) n'est pas soluble), ou tout du moins en passant très près de ce point (la procédure itérative ne convergera pas). Si l'on ne veut pas avoir à effectuer un nombre excessif d'incréments de charge, il est donc nécessaire d'avoir conscience de la présence d'un point de bifurcation et de connaître un ordre de grandeur de la charge ou du déplacement $\boldsymbol{Q}$ auxquels il survient.

Dans le cadre d'un logiciel de calcul par éléments finis dans lequel on intègre le test sur le signe des valeurs propres, la recherche du point critique en diminuant le pas de l'incrément de charge ne s'avère pas efficace. En effet, le changement du pas modifie le résultat. Certaines techniques ont été mises au point pour palier cet inconvénient, en particulier la méthode présentée par Riks [24].

1.4.3 La méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est fondée sur les équations différentielles régissant l'équilibre d'un système et non sur l'énergie totale. On la présente cependant dans ce paragraphe, car elle conduit aux mêmes équations que la méthode de Ritz, dans le cas où cette dernière est utilisable. Elle est plus générale que la méthode de Ritz en ce sens qu'elle ne nécessite pas l'existence d'une énergie potentielle. Elle est donc applicable en particulier au cas de systèmes non élastiques. En revanche, elle ne traite que les problèmes d'équilibre et n'apporte de réponse aux problèmes de stabilité que par son équivalence à la méthode de Ritz, donc dans les cas où celle-ci est applicable. Son application la plus courante est également la méthode des éléments finis, qui peut être déduite indifféremment de l'une ou de l'autre des deux méthodes (lorsque la méthode de Ritz est valable).

Supposons que l'on cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$L(w)=0 \qquad 0 \le x \le d \tag{1.45}$$

où L est un opérateur différentiel agissant sur w, fonction d'une variable soumise à des conditions aux limites.

On cherche, comme dans la méthode de Rayleigh-Ritz, une solution approchée de la forme

$$w \approx \sum_{i=1}^{N} Q_i \Phi_i(x) \tag{1.46}$$

où $(\Phi_i)_{1\le i\le n}$ est une suite de fonctions satisfaisant les conditions aux limites, mais pas nécessairement l'équation différentielle, et les $(Q_i)_{1\le i\le n}$ des coefficients indéterminés. Si la solution exacte de (1.45) est notée $w_0(x)$, l'opérateur L agissant sur la différence $(w-w_0)$ représente une erreur ou un résidu, $e(x)$.

$$e(x) = L(w - w_0) = L\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i \Phi_i(x) - w_0\right) \tag{1.47}$$

Il s'agit maintenant de choisir les coefficients $(Q_i)_{1 \le i \le n}$ qui minimisent l'erreur. Pour ce faire, on projette l'erreur sur des fonctions de base, qui peuvent être les fonctions $(\Phi_i)_{1 \le i \le n}$. On obtient les N intégrales de Galerkin :

$$\int_0^l \left[L\left(\sum_{j=1}^{N} Q_j \Phi_j(x) - w_0\right) \Phi_i(x) \right] dx = 0 \qquad \text{pour} \quad 1 \le i \le n \tag{1.48}$$

On obtient un système de N équations à N inconnues semblable au système (1.43). On le résout de la même manière que ce dernier. Les inconvénients de cette méthode sont les mêmes que ceux de la méthode de Rayleigh-Ritz. L'avantage par rapport à celle-ci est la possibilité de l'appliquer à des structures non élastiques.

1.5 Etude de stabilité pour une structure non élastique

Nous avons vu au paragraphe précédent que la méthode énergétique est la plus adaptée à la résolution d'un problème de stabilité d'une structure élastique. Elle nécessite cependant l'existence d'un potentiel d'où doit dériver l'ensemble des forces extérieures et intérieures. Or l'existence d'un potentiel suppose que l'état final de la structure ne dépende pas du chemin de chargement, ce qui est faux dans le cas de la plasticité par exemple. Le théorème de Lagrange-Dirichlet est donc inappliquable en-dehors du domaine élastique. La méthode dynamique est toujours valide en théorie, mais nécessite l'intégration, extrêmement compliquée, des équations non-linéaires du mouvement. Elle ne s'avère donc pas appliquable dans la pratique. Les équations d'équilibre sur lesquelles est fondée la méthode classique existent naturellement toujours en-dehors du domaine élastique, et les chemins d'équilibre peuvent être obtenus grâce à cette méthode. C'est donc vers l'approche classique que nous allons nous tourner, et plus précisément vers l'une de ses applications, la méthode des

éléments finis (qui doit cette fois être considérée comme un cas particulier de la méthode de Galerkin).

Reprenons donc les différents types de flambement présentés au paragraphe 1.2 afin de voir dans quelle mesure les concepts liés à la stabilité élastique peuvent être transposés à la stabilité inélastique. La détection d'un point limite ne s'avère pas plus compliquée que dans le cas d'une structure élastique, puisque le chemin d'équilibre ne se poursuit pas au-delà de la charge correspondant au point limite (cf. paragraphe 1.2.4). Il s'agit donc nécessairement d'un point critique, i.e., d'un point de perte de stabilité. En revanche, seule la méthode énergétique ou le théorème de Poincaré permettaient de savoir que le chemin fondamental devenait instable au-delà d'un point de bifurcation, et donc qu'il s'agissait d'un point critique. Or le théorème de Poincaré, au même titre que la méthode énergétique, n'est plus valable en-dehors du domaine élastique. En effet, il est alors possible que le chemin fondamental ainsi que le chemin l'intersectant soient tous deux stables au-delà d'un point de bifurcation. Il est donc nécessaire de trouver un nouveau critère de stabilité pour traiter le cas du flambement avec point de bifurcation.

Une méthode très générale et fondamentale (cf. [2]) consiste à utiliser le deuxième principe de la thermodynamique, selon lequel la transformation d'un système à partir de son état d'équilibre ne peut se produire que si l'inégalité suivant est vérifiée :

$$\Delta S - \frac{\Delta Q}{T} \geq 0$$

où S est l'entropie, $\Delta Q / T$ le flux de chaleur apporté au système. On en déduit qu'une structure décrite par le vecteur $\boldsymbol{q}$ de ses coordonnées généralisées est:

$$\begin{array}{lll} \textit{stable si} & \Delta S - \dfrac{\Delta Q}{T} < 0 & \textit{pour tout vecteur } \delta \mathbf{q} \\ \textit{critique si} & \Delta S - \dfrac{\Delta Q}{T} = 0 & \textit{pour un certain vecteur } \delta \mathbf{q} \\ \textit{instable si} & \Delta S - \dfrac{\Delta Q}{T} > 0 & \textit{pour un certain vecteur } \delta \mathbf{q} \end{array}$$

Grâce à l'introduction de l'énergie interne et de l'énergie libre de Helmholtz du système structure-charge, on dérive un critère de stabilité dont nous n'allons citer ici que la restriction à la méthode des éléments finis, et à un cas particulier de structure :

Si la matrice de rigidité tangentielle K du système ne dépend pas de la direction du vecteur des coordonnées généralisées incrémentales, une structure est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la partie symétrique de K sont strictement positives, et critique si et seulement si au moins une des valeurs propres s'annule.

On retrouve donc presque le même critère que dans le cas d'une structure élastique, à ceci près que l'on doit considérer la partie symétrique de K si celle-ci n'est pas symétrique. L'analyse par éléments finis se prête donc très bien à un calcul de stabilité, y compris en-dehors du domaine élastique. Notons par ailleurs que, d'après [2], lorsqu'un chemin d'équilibre primaire préservant la symétrie est intersecté par un chemin d'équilibre rompant la symétrie, il faut suivre ce dernier chemin au-delà du point de bifurcation. En d'autres termes, on peut prévoir que, comme dans le cas élastique, l'arche basse chargée latéralement flambera en atteignant le point de bifurcation asymétrique si celui-ci se présente avant le point limite.

1.6 Complément de synthèse bibliographique sur le flambement de l'arche basse chargée latéralement

L'arche basse étant un élément structurel couramment employé, son flambement est étudié de manière approfondie dans la littérature, quoique dans l'optique d'éviter le flambement plutôt que de le produire comme dans notre cas. Des solutions analytiques ou numériques sont

obtenues pour des configurations spécifiques (forme d'arche, type de chargement et conditions aux limites), mais aucune théorie n'englobe l'ensemble des configurations.

1.6.1 Arche élastique

Considérons en premier lieu les solutions concernant le flambement en *snap* d'une arche élastique. Timoshenko [32] donne une solution approchée au problème du flambement en *snap* d'une arche basse soumise à une charge répartie uniforme. La théorie présentée par Fung et Kaplan [7] et exposée au paragraphe 1.3.3 traite, rappelons-le, le cas d'arches articulées possédant différentes formes initiales et soumises à différentes distributions spatiales de la charge latérale. Les résultats sont repris par Ashwell [1]. Hoff et Bruce [11] présentent les résultats concernant une arche sinusoïdale soumise à une charge latérale sinusoïdale, comme cas particulier de leur analyse dynamique du flambement des arches chargées latéralement. Les résultats concordent avec ceux obtenus par Fung et Kaplan. Gjeslvik et Bodner [8] obtiennent une solution approchée au problème de l'arche basse circulaire soumise à une charge latérale concentrée appliquée au milieu de la portée. Schreyer et Masur [27] fournissent la solution exacte à ce problème et montrent que dans le cas d'une charge concentrée, le flambement en *snap* est symétrique (avec une troisième harmonique) quelle que soit la hauteur de l'arche. Masur et Lo [18] présentent une discussion générale au sujet du comportement de l'arche basse circulaire. Elle traite du flambement, du chemin post-flambement et de la sensibilité aux imperfections. Roorda [26] rapporte des résultats expérimentaux et en particulier des observations concernant la sensibilité aux imperfections. Simitses [28] pose le problème de l'arche basse articulée selon la formulation énergétique et le résout pour une arche sinusoïdale soumise à une charge sinusoïdale. Il obtient les mêmes résultats que Fung et Kaplan.

1.6.2 Arche inélastique

Le flambement en *snap* d'une arche basse parfaitement plastique a été étudié analytiquement par Franciosi et al. [6] d'une part et Onat et Shu [21] d'autre part. Lee et al. [16] traitent

numériquement le cas d'une arche basse circulaire encastrée constituée d'un matériau elasto-plastique. Kawashima et al. [12] ont étudié numériquement et validé par l'expérience le flambement asymétrique d'une arche circulaire sur rotules soumise à une charge ponctuelle. Seul la méthode employée par Chen [4] – les éléments finis non linéaires – pour traiter le cas d'une arche circulaire encastrée se prête à la généralisation à d'autres configurations.

1.7 Conclusion

Après une brève introduction sur le concept de stabilité d'une structure, nous avons présenté les quatre types de flambement et mis en évidence le fait que la distinction couramment effectuée entre le flambement avec point limite et le flambement avec point de bifurcation, n'est pas adaptée au problème du flambement en *snap*. En particulier, dans le cas de l'arche basse chargée latéralement, le flambement en *snap* peut être issu soit d'une instabilité à point limite, soit d'une instabilité à point de bifurcation asymétrique. Nous avons ensuite vu que, parmi les trois approches susceptibles d'être adoptées pour le traitement d'un problème de stabilité, deux sont particulièrement intéressantes dans le cadre de notre étude : l'approche classique et l'approche énergétique. L'approche classique prenant pour inconnue la déformée de la ligne élastique de l'arche conduit à une solution analytique simple décrivant le flambement en *snap* d'une arche basse sinusoïdale sur rotules et chargée latéralement. Pour étendre l'étude à des arches possédant d'autres géométries l'approche énergétique est la plus adaptée. Ses deux principaux avantages sont sa légèreté d'emploi, son adaptabilité ainsi que sa capacité à apporter une réponse spécifique à la question de la stabilité. Elle est cependant limitée au cas où les forces extérieures et intérieures dérivent d'une énergie potentielle, et par là au cas élastique. Dans le cas inélastique, on peut avoir recours à l'approche classique et en particulier à son cas particulier le plus utilisé, la méthode des éléments finis.

CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UN ACTUATEUR À ACTION RAPIDE UTILISANT LE FLAMBEMENT EN SNAP D'UNE ARCHE AMF

Après une brève revue bibliographique spécifique aux actuateurs à action rapide contrôlés par la température, nous allons exposer le principe général de fonctionnement de l'actuateur à action rapide utilisant le flambement en *snap* d'une arche en AMF. Nous allons en particulier montrer qu'il est justifié, dans une première approche, de limiter notre analyse à la zone élastique de la loi de comportement élastique des AMF. Nous rappellerons dans un deuxième temps les points essentiels de cette loi de comportement. Nous utiliserons ensuite la solution analytique - présentée au chapitre 1 - au problème du flambement en *snap* d'une arche élastique sinusoïdale chargée latéralement pour modéliser le flambement en *snap* d'une arche AMF. Nous verrons que la rigidification du matériau occasionnée par le chauffage d'un AMF est susceptible - sous certaines conditions - d'entraîner le flambement en *snap* d'une arche en AMF. Nous finirons par une brève étude expérimentale, visant à observer les comportements mis en évidence analytiquement.

2.1 Revue bibliographique sur les actuateurs à action rapide contrôlés par la température

Des actuateurs en AMF dont le fonctionnement est fondé sur le phénomène de flambement en *snap*, lui-même causé par l'effet mémoire de forme, ont déjà été étudiés expérimentalement dans le cas de coques ([13], [37]). Aucune modélisation n'est cependant disponible.

Par ailleurs, l'utilisation du flambement en *snap* d'arches basses non AMF contrôlé par la température a donné lieu à de nombreuses applications dans les domaines de la micro-mécanique et de la micro-électronique: micro-valves, micro-actuateurs [19], micro-interrupteurs [9]. La plupart d'entre elles utilisent le chauffage sélectif de poutres bimétalliques dont la dilatation différentielle entraîne la perte de stabilité mécanique et donc le flambement. Le principal reproche généralement émis à l'encontre de ce type d'actuateur est le manque de stabilité en période de "repos". Le flèches doivent en effet être très faibles pour que la dilatation thermique puisse provoquer le flambement, et un choc minime peut suffire à déclencher l'actuation. Le deuxième inconvénient de ce type d'actuateur est la délamination qui survient entre les deux couches de la poutre.

2.2 Principe de l'actuateur AMF à action rapide

Considérons une arche basse AMF telle que celle représentée à la Figure 2.1-a. Elle est fixée sur rotules, et l'une de ses extrémités repose sur un support axial de rigidité finie. En l'absence de charge latérale, la courbure de l'arche est dirigée vers le bas.

Par une action mécanique telle que l'application d'une charge latérale répartie ou concentrée sur l'arche en phase martensitique (phase à basse température), on inverse sa courbure. Si l'arche est suffisamment rigide en phase martensitique, elle reste dans le domaine élastique tout au long du passage de la flèche positive à la flèche négative. Sous certaines conditions sur la hauteur de l'arche - que nous pouvons alors déduire du paragraphe 1.3.2 puisque l'arche AMF reste dans le domaine élastique - l'inversion de courbure a lieu suivant le phénomène de flambement en *snap*. Sous d'autres conditions, que nous allons expliciter au paragraphe 2.4, la position de l'arche avec la courbure vers le haut, telle que représentée à la Figure 2.1-b, est stable une fois que l'on supprime la charge. La ligne élastique de l'arche avec la courbure inversée est alors parfaitement prévisible, et est indépendante des conditions d'application de la charge.

Si l'arche avait été plastifiée au cours du chargement, la forme avec courbure inversée dépendrait de l'application de la charge et serait extrêmement sensible aux variations de ces conditions d'application. La conception et la modélisation de l'actuateur en seraient rendues très délicates. Or, dans la mesure où l'expérience a montré qu'il est possible de concevoir un actuateur AMF tel que cette première inversion de courbure se fasse en restant dans le domaine élastique, nous considérerons dans le cadre de la modélisation que cette condition est vérifiée.

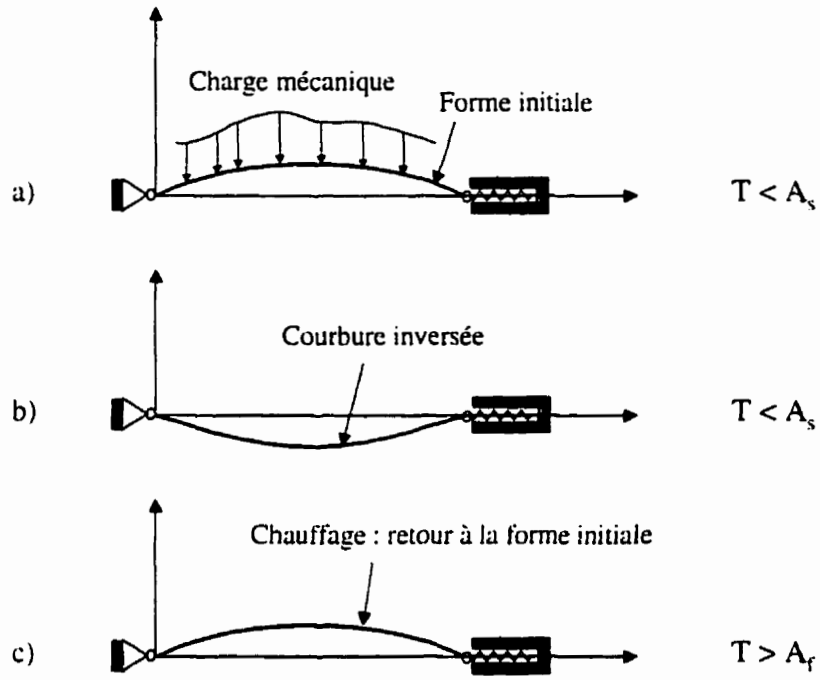


Figure 2.1 - Etapes de chargement

Si maintenant on chauffe l'arche suffisamment pour donner lieu au changement de phase - la transformation martensitique inverse - l'effet mémoire de forme fait tendre l'arche à retrouver sa forme initiale avec courbure vers le bas (cf. Figure 2.1-c). L'expérience montre que si cette reprise de forme a lieu, elle se produit soudainement, selon le même phénomène de flambement en *snap* que dans la première phase de chargement. Bien qu'il soit difficile de vérifier expérimentalement que l'arche AMF reste dans le domaine élastique tout au long de

la reprise de forme; nous considérerons néanmoins dans un premier temps que cette condition est vérifiée. Si l'arche est trop haute, l'énergie fournie lors de la transformation martensitique inverse peut ne pas suffire à franchir le pas, et le flambement en *snap* n'aura pas lieu.

Il s'agit donc de dimensionner un actuateur AMF en trouvant un compromis entre une arche trop basse qui ne pourra conserver sa courbure inversée en l'absence de charge, et une arche trop haute qui ne flambera pas lors de la transformation martensitique inverse. On peut de plus souhaiter pour certaines applications que la course du sommet de l'arche soit suffisamment importante, ce qui impose une hauteur minimum pour l'arche. En revanche, le temps d'actuation croît quand la flèche augmente, ce qui encourage à choisir une arche assez basse si l'on souhaite diminuer le temps d'action.

2.3 Rappel sur le comportement des AMF

Aucune loi de matériau simple ne décrit avec précision le comportement thermomécanique complexe des AMF. Ce comportement provient de l'existence de deux phases, évoquées ci-dessus : l'une stable à haute température - l'austénite - et l'autre stable à basse température - la martensite [34]. Les températures de début et de fin de transformation "martensite vers austénite" sont appelées respectivement A_S et A_F; les températures de début et de fin de transformation "austénite vers martensite " sont appelées respectivement M_S et M_F. Ces quatre températures dépendent de la composition de l'alliage et du traitement thermique qu'il a subi; elles sont de plus fonction de l'état de contrainte interne du matériau.

A basse température - en phase martensitique - les AMF ont un comportement pseudo-plastique : les déformations résiduelles issues d'un cycle chargement-déchargement peuvent être éliminées lors du chauffage par retour à la phase austénitique. Il s'agit alors de l'effet mémoire de forme simple sens. En phase austénitique, i.e., à haute température, les AMF ont un comportement super-élastique, et peuvent subir des déformations réversibles allant jusqu'à 8% pour les alliages Ni-Ti (Nickel-Titane). Par ailleurs, l'existence d'une hystérésis et de

cycles de chargement-déchargement ajoute à la difficulté de décrire le comportement des AMF par un système d'équations simples.

Trois approches différentes sont utilisées pour décrire le comportement des AMF. La première approche consiste à dériver une loi de matériau de l'analyse micro-structurale de l'alliage. A cause de leur complexité, les modèles micro-structuraux sont généralement très lourds à mettre en œuvre, et nous ne les considérerons pas dans le cadre de cette étude. La deuxième approche, phénoménologique, consiste à construire une loi de comportement fondée uniquement sur des observations expérimentales. La troisième approche emprunte aux deux précédentes : elle utilise les modèles micro-structuraux pour générer des courbes de l'espace température-contrainte-déformation et éviter d'avoir recours à la caractérisation expérimentale - particulièrement délicate pour les AMF - puis incorpore ces courbes dans la loi de comportement phénoménologique.

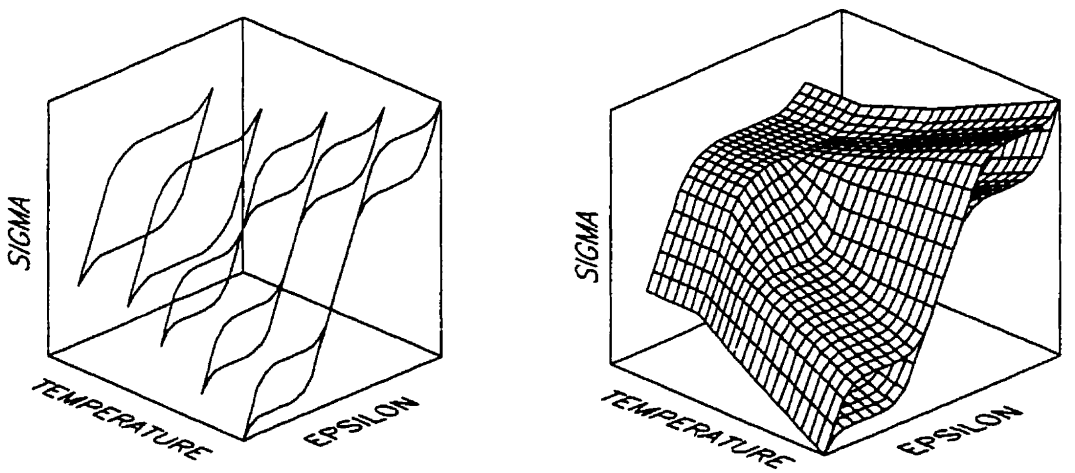


Figure 2.2 - Courbes contrainte-déformation isothermes et surfaces de chargement-déchargement principales de la loi de matériau obtenue par krigeage dual

Le modèle phénoménologique développé par Trochu et al. [29] est fondé sur l'interpolation par krigeage dual de surfaces de chargement-déchargement de l'espace température-contrainte-déformation, à partir de courbes contrainte-déformation isothermes (cf. Figure

2.2). Il peut s'inscrire aussi bien dans le cadre de la deuxième que de la troisième approche. Nous utiliserons ici le modèle fondé sur des observations expérimentales, i.e., le cadre théorique de la deuxième approche.

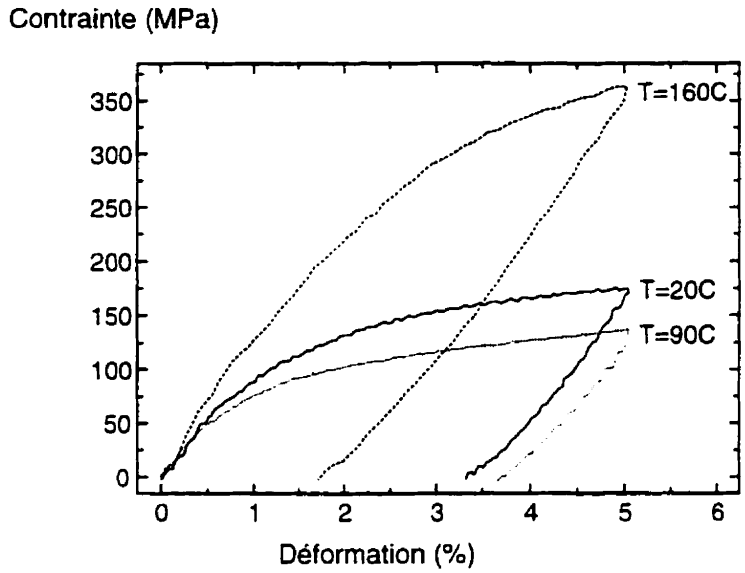


Figure 2.3 - Courbes déformation-contrainte à température constante

La Figure 2.3 représente des courbes déformation-contrainte (en cisaillement) obtenues expérimentalement par des essais de torsion à différentes températures. Le matériau utilisé est un alliage Ni-Ti équiatomique. On observe que le comportement de l'AMF peut être considéré comme linéaire - et l'expérience montre qu'il est élastique - pour de faibles niveaux de contrainte. Cette limite d'élasticité - au-delà de laquelle apparaissent la pseudo-plasticité en phase martensitique et la super-élasticité en phase austénitique - nous donne une indication sur le domaine de validité de l'hypothèse formulée au paragraphe 2.2. On observe de plus que la limite d'élasticité diminue au cours du chauffage, avant de remonter pour finir supérieure à sa valeur initiale. Il est donc possible que l'actuateur soit dans le domaine élastique à haute température ainsi que pendant toutes les étapes menées à basse température, mais quitte le domaine élastique au cours du chauffage. Des expériences approfondies doivent être menées si l'on souhaite connaître avec précision la valeur minimale prise par la limite d'élasticité, et ainsi vérifier la validité de notre hypothèse.

Si l'on se restreint au domaine élastique du comportement des AMF, la loi de matériau que l'on déduit des courbes contrainte-déformation à température constante grâce à l'approche de Trochu et al. se réduit à une relation entre le module d'Young et la température. On observe sur la Figure 2.3 que le module d'Young suit la même tendance que la limite d'élasticité : si l'on part de T=20°C, le module d'Young commence par diminuer lors du chauffage, puis augmente et est finalement largement supérieur pour T=160°C que pour T=20°C. Lors de la transformation martensitique inverse induite par chauffage, on assiste donc globalement à une rigidifiaction de l'AMF.

On a avantage, dans la conception du prototype d'actuateur AMF, à choisir un alliage et un traitement thermique tels que A_F soit supérieure à la température ambiante. Il n'est alors pas nécessaire de refroidir l'arche AMF dans les deux premières étapes de l'actuation. En d'autres termes, la "basse température" correspond à la température ambiante. La "haute température" est une température supérieure à A_F. Il n'est pas utile de prévoir précisément sa valeur, puisque le module d'Young se stabilise à partir de A_F.

Nous noterons respectivement les modules d'Young à basse et à haute température E_{BT} et E_{HT}.

2.4 Etude analytique du flambement en snap d'une arche AMF

2.4.1 Méthode d'analyse

L'étude analytique du comportement de l'actuateur décrit au paragraphe 2.2 va être effectuée grâce à la formulation de Fung et Kaplan, présentée et développée au paragraphe 1.3.3. La ligne élastique initiale de l'arche est choisie sinusoïdale, de même que la charge latérale, afin que le problème possède une solution analytique. Nous utiliserons les mêmes notations qu'au paragraphe 1.3.3. Rappelons néanmoins que λ est - à un facteur multiplicatif près - égal au rapport entre la flèche initiale de l'arche et le rayon de giration de sa section; R, la charge latérale réduite; S, le rapport entre la contrainte axiale initiale et la charge d'Euler; b_1,

l'amplitude de la première harmonique dans la ligne élastique de la déformée; β, le rapport entre la rigidité du support axial et la rigidité totale du système :

$$\lambda = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{A}{I}} \qquad R = \frac{q_0 L^4}{2\pi^4 EI}\sqrt{\frac{A}{I}} \qquad S = \frac{H_0 L^2}{\pi^2 EI} \qquad \beta = \frac{\alpha}{\alpha + EA/L}$$

Les points critiques S_1 - de flambement dans le sens "flèche positive vers flèche négative" - et S_2 - de flambement dans le sens "flèche négative vers flèche positive" - obtenus au paragraphe 1.3.3 correspondent respectivement aux charges réduites R_1 et R_2. Celles-ci sont rappelées au Tableau 2.1.

Tableau 2.1 - Charges critiques en fonction de la hauteur réduite

	Cas 1	Cas 2	Cas 3
	$\lambda \leq \sqrt{(1-S)/\beta}$	$\sqrt{(1-S)/\beta} \leq \lambda \leq \sqrt{(5.5-S)/\beta}$	$\lambda \geq \sqrt{(5.5-S)/\beta}$
R_1	pas de flambement	$\lambda(1-S)+\sqrt{\frac{4}{27\beta}(\beta\lambda^2-1+S)^3}$	$\lambda(1-S)+3\sqrt{\frac{1}{\beta}(\beta\lambda^2-4+S)}$
R_2	pas de flambement	$\lambda(1-S)-\sqrt{\frac{4}{27\beta}(\beta\lambda^2-1+S)^3}$	$\lambda(1-S)-3\sqrt{\frac{1}{\beta}(\beta\lambda^2-4+S)}$

Dans le cas 1, l'inversion de courbure a lieu sans flambement. Dans le cas 2, le flambement est symétrique; les charges critiques correspondent à des points limites. Dans le cas 3, le flambement est asymétrique; les charges critiques correspondent à des points de bifurcation asymétriques.

Nous allons maintenant chercher les conditions nécessaires pour que l'actuateur manifeste le comportement correspondant aux trois étapes de chargement (cf. paragraphe 2.2) :

a) flambement en *snap* dans le sens "flèche positive vers flèche négative" sous l'action d'une charge latérale sinusoïdale

b) position avec une flèche négative (courbure inversée) stable après la suppression de la charge

c) flambement en *snap* dans le sens "flèche négative vers flèche positive " au cours du chauffage (effet mémoire de forme).

Les étapes de chargement vont être suivies sur la Figure 2.4. Celle-ci concerne le flambement en *snap* d'une arche dans le cas 2, i.e., le flambement avec point limite. Elle suffit cependant pour illustrer le principe de l'actuateur. La position initiale de l'arche correspond au point A : aucune charge latérale n'est appliquée.

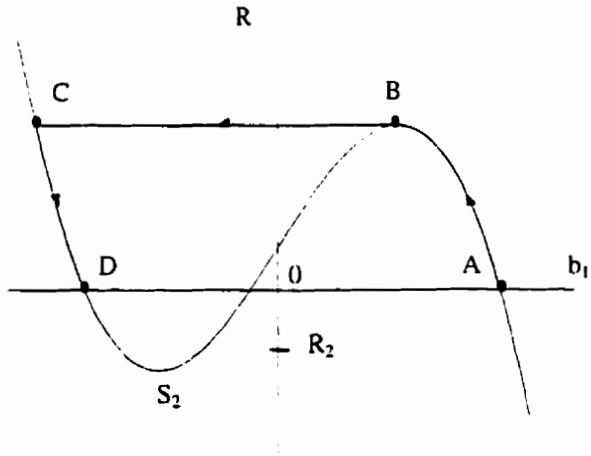


Figure 2.4 - Etapes de chargement sur le diagramme flèche-charge réduite

2.4.2 Etape a : armement du dispositif

La condition pour que le passage d'une flèche positive à une flèche négative soit accompagné d'un flambement est donnée directement dans le Tableau 2.1. La hauteur réduite λ de l'arche doit vérifier :

$$\lambda \geq \sqrt{(1-S)/\beta}$$

Cette étape de l'actuation est menée à basse température, i.e. pour une température inférieure à A_S. β doit alors être calculé avec le module d'Young à basse température de l'AMF. Nous noterons β_{BT} sa valeur :

$$\beta = \beta_{BT} = \frac{\alpha}{\alpha + AE_{BT}/L}$$

La seule condition structurale nécessaire pour mener à bien l'étape a) est donc :

$$\lambda \geq \sqrt{(1-S)/\beta_{BT}} \tag{2.1}$$

Après l'étape a), la position de l'arche correspond au point C de la Figure 2.4.

2.4.3 Etape b : conservation de la position armée

L'étape b) consiste à supprimer la charge latérale, la température restant à sa valeur initiale. L'arche doit alors être en mesure de rester dans une position avec la courbure inversée $(b_1 \leq 0)$ pour une charge réduite nulle. Ceci suppose que la charge - nulle -correspondant au point D soit supérieure à la charge critique R_2 (cf. Figure 2.4). En d'autres termes, on doit avoir $R_2 < 0$ (l'inégalité est stricte car le point critique est lui-même instable aussi bien dans le cas du flambement avec point limite que du flambement avec point de bifurcation asymétrique). D'après le Tableau 2.1, cette condition se traduit par :

$$Cas\,2 \qquad \lambda(1-S) - \sqrt{\frac{4}{27\beta_{BT}}\left(\beta_{BT}\,\lambda^2 - 1 + S\right)^3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > \sqrt{\frac{4}{\beta_{BT}}(1-S)}$$

Cas 3 $$\lambda(1-S)-3\sqrt{\frac{1}{\beta_{BT}}\left(\beta_{BT}\lambda^2-4+S\right)}<0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda>\frac{3}{\sqrt{(2+S)\beta_{BT}}}$$

Rappelons que le cas 3 correspond à une hauteur réduite $\lambda \geq \sqrt{(5.5-S)/\beta_{BT}}$. La condition $\lambda > 3/\sqrt{(2+S)\beta_{BT}}$ est donc toujours vérifiée dans le cas 3, puisque $3/\sqrt{(2+S)\beta_{BT}} < \sqrt{(5.5-S)/\beta_{BT}}$ pour S entre 0 et 1. En revanche, on a $\sqrt{4(1-S)/\beta_{BT}} > \sqrt{(1-S)/\beta_{BT}}$, donc la condition n'est pas vérifiée a priori pour toute arche du cas 2.

La condition nécessaire à l'étape b) peut donc être résumée par :

$$\lambda > \sqrt{\frac{4}{\beta_{BT}}(1-S)} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > 2\sqrt{(1-S)\left(1+\frac{AE_{BT}}{L\alpha}\right)} \tag{2.2}$$

On remarque que cette condition sur la hauteur réduite de l'arche est plus exigeante que celle, énoncée en (2.1), nécessaire à l'étape a). Nous ne retiendrons donc que cette dernière condition comme nécessaire et suffisante pour pouvoir mener à bien les étapes a) et b).

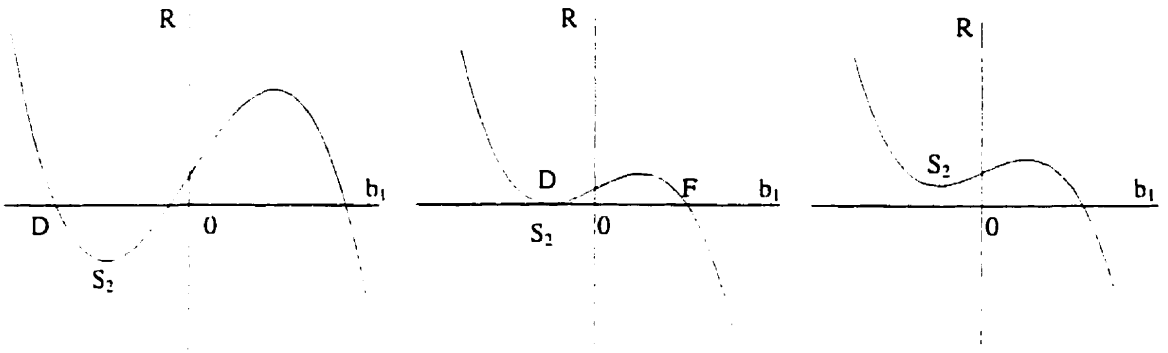
Après l'étape b), la position de l'arche correspond au point D de la Figure 2.4.

2.4.4 Etape c : retour à la géométrie initiale

L'étape c) consiste à chauffer l'arche AMF au-delà de le température A_F afin de la faire snapper dans le sens "flèche négative vers flèche positive", i.e., lui faire reprendre soudainement sa forme initiale. Cette étape est la seule spécifique aux AMF, les étapes a) et b) s'appliquant à toute arche élastique classique.

On a vu au paragraphe 2.3 qu'un AMF subit une rigidification - après un éventuel ramollissement – suite à la transformation martensitique inverse causée par chauffage. En

termes de module d'Young, on a donc $E_{HT} > E_{BT}$. β passant de $\beta_{BT} = \alpha/(\alpha + AE_{BT}/L)$ à $\beta_{HT} = \alpha/(\alpha + AE_{HT}/L)$, sa valeur à haute température est donc inférieure à celle à basse température. L'évolution de la courbe flèche-charge réduite lorsque β varie de 0.95 à 0.7 est illustrée à la Figure 2.5. L'arche considérée a une hauteur réduite $\lambda = 2.1$ et n'est pas précontrainte ($S = 0$). Il s'agit donc d'une arche correspondant au cas 2.



a) $\beta = 0.95$ b) $\beta = 0.85$ c) $\beta = 0.7$

Figure 2.5 – Evolution de la relation flèche-charge réduite en fonction de β

On observe que la courbe flèche-charge réduite se déplace vers les charges réduites croissantes lorsque β diminue. En d'autres termes, R_2 croît lorsque β diminue, et s'annule (cf. paragraphe 2.4.3 ou Tableau 2.1) pour :

Cas 2 $$\lambda = \sqrt{\frac{4}{\beta}(1-S)} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{4(1-S)}{\lambda^2} \tag{2.3}$$

Cas 3 $$\lambda = \frac{3}{\sqrt{(2+S)\beta}} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{9}{\lambda^2(2+S)} \tag{2.4}$$

Lorsque R_2 s'annule, le point D coïncide avec le point critique S_2 (cf. Figure 2.5-b), i.e., l'état d'équilibre avec courbure inversée devient instable. L'arche rejoint donc le seul état

d'équilibre stable correspondant à une charge nulle, au point F. Si β continue de diminuer, il n'existe plus aucun état d'équilibre avec courbure inversée pour une charge nulle (cf. Figure 2.5-c).

Dans le cas 2, le flambement en *snap* a lieu pour β tel que $\lambda = \sqrt{4(1-S)/\beta}$. L'arche fait alors toujours partie de la gamme de hauteurs réduite décrite par le cas 2, puisque $\sqrt{4(1-S)/\beta} > \sqrt{(1-S)/\beta}$.

En revanche, dans le cas 3, le flambement en *snap* a lieu pour β tel que $\lambda = 3/\sqrt{(2+S)\beta}$. Or, comme on a déjà observé au paragraphe 2.4.3, $3/\sqrt{(2+S)\beta} < \sqrt{(5.5-S)/\beta}$. Au cours de la diminution de β, l'arche est donc passée du cas 3 au cas 2. Seul le β critique correspondant au cas 2 est donc à prendre en compte.

La condition pour que le flambement en *snap* ait lieu au cours du chauffage est donc :

$$\beta_{HT} \leq \frac{4(1-S)}{\lambda^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\alpha + AE_{HT}/L} \leq \frac{4(1-S)}{\lambda^2}$$

d'où finalement la condition nécessaire pour mener à bien l'étape c) :

$$\lambda \leq 2\sqrt{(1-S)\left(1+\frac{AE_{HT}}{L\alpha}\right)} \tag{2.5}$$

A la fin de l'étape c), la position de l'arche correspond au point A de la Figure 2.4, i.e., au point de départ du cycle d'actuation.

2.4.5 Résumé des conditions nécessaires au fonctionnement de l'actuateur AMF

On a dégagé dans les trois paragraphes précédents les conditions nécessaires au fonctionnement de l'actuateur AMF tel qu'il a été prévu dans son principe. Les équations (2.2) et (2.5) nous donnent ces conditions, qui peuvent être regroupées de la manière suivante :

$$2\sqrt{(1-S)\left(1+\frac{AE_{BT}}{L\alpha}\right)} < \lambda \leq 2\sqrt{(1-S)\left(1+\frac{AE_{HT}}{L\alpha}\right)} \tag{2.6}$$

On a donc expliqué grâce à ce modèle le flambement en *snap* d'une arche AMF sinusoïdale sous l'effet de la rigidification entraînée par la transformation martensitique inverse. La condition nécessaire au fonctionnement de l'actuateur est obtenue analytiquement sous une forme très simple.

Notons par ailleurs que si les appuis sont parfaitement rigides, i.e., α est très grand par rapport à l'élasticité EA/L de l'arche, β reste toujours égal à 1. Le module d'Young n'intervient alors que comme facteur multiplicatif dans la charge critique R_2, et sa variation ne peut faire changer le signe de R_2. Ce modèle exclut donc tout flambement causé par la transformation martensitique inverse en présence d'appuis rigides.

2.5 Etude expérimentale

Le but de cette étude expérimentale, plus qualitative que quantitative, est double : en premier lieu, vérifier grâce à un montage préliminaire qu'on observe bien les comportements prévus analytiquement pour une arche en AMF; en deuxième lieu, mettre en évidence les paramètres expérimentaux déterminants et donner des recommandations pour une étude expérimentale approfondie.

2.5.1 Protocole expérimental

Le montage utilisé est représenté à la Figure 2.6

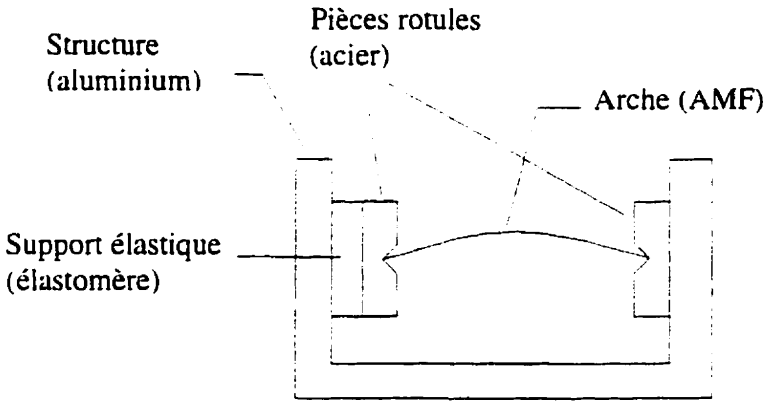


Figure 2.6 – Montage expérimental

Le support en aluminium constitue une structure rigide. L'élastomère tient lieu de support élastique. Les deux pièces d'acier usinées en V jouent le rôle des rotules.

La caractérisation de l'élastomère a été effectuée grâce à une machine de traction-compression. La relation force-déplacement est tracée à la Figure 2.7, pour deux essais consécutifs. Le bruit est dû à la cellule de charge, prévue pour des charges supérieures à celles qui nous intéressent. Les portions de courbes horizontales proviennent du décalage du zéro lors de l'initialisation. Dans le domaine des forces de réaction susceptibles d'être générées lors du chargement de l'arche en AMF, le comportement de l'élastomère est presque linéaire. Sa rigidité est α=2,4.10^5 *N/m*.

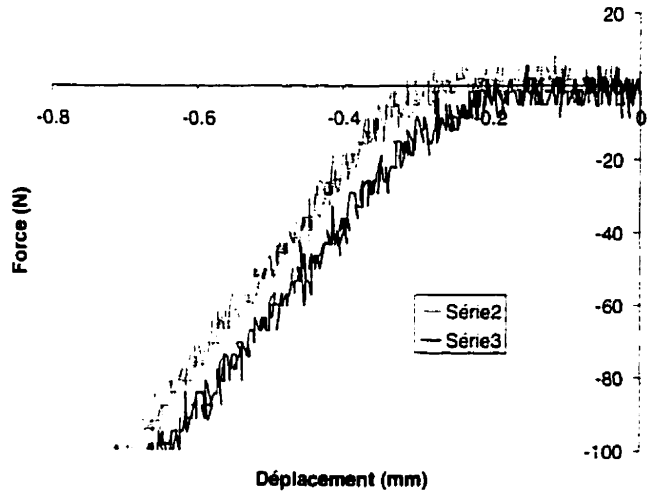


Figure 2.7 – Caractérisation de l'élastomère

L'échantillon AMF est un ruban en alliage Ni-Ti à 49.9% de Nickel, laminé à froid et fourni par la compagnie *Special Metals* (New York, USA). Les traitements thermiques habituellement pratiqués pour obtenir l'effet mémoire de forme– recuit d'une heure entre 400°C et 500°C - se sont montrés inadaptés. La limite d'élasticité de l'AMF - en phase martensitique - ayant subi un tel traitement thermique est en effet beaucoup trop faible pour que l'inversion de courbure puisse avoir lieu tout en restant dans le domaine élastique (cf. paragraphe 2.2). Dans un premier temps, les essais ont donc été pratiqués sur des rubans d'AMF sortant directement du laminage, qui présentent une limite d'élasticité suffisamment élevée. L'inconvénient de ne pas effectuer de traitement thermique est la présence de contraintes résiduelles qui nuisent à la reproductibilité des essais : d'une part plusieurs cycles de chargement-déchargement sont nécessaires à stabiliser le comportement d'une arche donnée; d'autre part deux arches taillées dans des rubans différents peuvent se comporter différemment. Pour ce qui est de l'effet mémoire de forme, il est naturellement beaucoup plus faible pour une arche non traitée que pour une arche traitée adéquatement, mais cependant existant.

Les échantillons taillés dans le ruban possèdent une légère courbure initiale du fait que le ruban est enroulé. Par une précontrainte axiale H_0, on peut fixer la flèche de l'arche à la

valeur souhaitée. Cette contrainte axiale - et donc la flèche initiale a - peut être modifiée très simplement grâce à la compression de l'élastomère. Pour une arche initialement quasiment plate de $25mm$ de long, une compression de l'élastomère de moins de $0.01mm$ suffit à conserver une flèche de $2mm$. Or nous ne dépasserons pas cette flèche. On est donc bien dans le domaine de caractérisation de l'élastomère de la Figure 2.7. La valeur de la précontrainte axiale H_0 est calculée grâce à la variation de la longueur d de la projection de l'arche en prenant pour hypothèse l'incompressibilité de l'arche.

Des essais de flexion de l'arche AMF dans le domaine élastique ont donné les valeurs suivantes des modules d'Young E_{BT} à basse température et E_{HT} à haute température :

$$E_{BT} = 90\,GPa$$
$$E_{HT} = 120\,GPa$$

Ces valeurs sont supérieures à celles rencontrées habituellement du fait que les échantillons n'ont pas subi de traitement thermique.

Les dimensions de l'arche utilisée pour les essais sont les suivantes :

Longueur	$L_0 = 24.12\,mm$
Epaisseur	$h = 0.18\,mm$
Largeur	$l = 5.2\,mm$
Flèche initiale	$a_{initiale} = 0.40\,mm$

2.5.2 Observations et comparaison avec l'étude analytique

En faisant varier la flèche de l'arche – par compression de l'élastomère – on a observé les trois types de comportement prévus par l'étude analytique : si l'arche est trop basse, elle ne peut maintenir sa courbure inversée en l'absence de charge latérale. On note $a_{\min}$ cette flèche minimale et $S_{\min}$ le rapport précontrainte axiale sur charge d'Euler correspondant (cf.

paragraphe 2.4.1). Pour une flèche a comprise entre a_{min} et a_{max} (qui correspond à S_{max}), l'arche maintient sa courbure inversée en l'absence de charge latérale et flambe lors du chauffage, i.e., elle fonctionne comme prévu dans le principe d'actuateur à action rapide (cf. paragraphe 2.2). Pour une flèche supérieure à a_{max}, l'arche ne flambe pas au cours du chauffage. Cette étude qualitative conforte donc la théorie.

Les valeurs de a_{min} et a_{max} observées, celles de S_{min} et S_{max} ainsi que de λ_{min} et λ_{max} calculées sont les suivantes :

$$\begin{cases} a_{min} = 1.69\,mm \\ \lambda_{min} = 16.4 \\ S_{min} = 0.79 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{max} = 2.04\,mm \\ \lambda_{max} = 19.8 \\ S_{max} = 0.83 \end{cases}$$

Notons en premier lieu que ces flèches sont très importantes, et garantissent une bonne stabilité de l'actuateur entre deux phases d'actuation. La sensibilité aux chocs est donc très faible.

Si l'on suppose que l'arche est sinusoïdale – ce qui n'est valable que dans une première approximation – on peut appliquer la théorie développée au paragraphe 2.4 afin de la comparer avec l'expérience. On trouve que, pour que la théorie décrive l'expérience, on doit avoir les valeurs suivantes du module d'Young à basse et à haute température :

$$E_{BT} = 1960\,GPa$$
$$E_{HT} = 3540\,GPa$$

Ces valeurs sont environ 20 fois supérieures aux valeurs mesurées. Inversement, la rigidité du support telle que le flambement en *snap* ait lieu entre $E_{BT} = 90\,GPa$ et $E_{HT} = 120\,GPa$ doit être à peu près égale à $\alpha = 1{,}5.10^4\,N/m$ - soit 20 fois supérieure à la rigidité mesurée. Bien que les résultats expérimentaux paraissent très éloignés des valeurs analytiques, il faut

garder à l'esprit que de nombreuses incertitudes expérimentales subsistent, et que celles-ci peuvent profondément modifier les résultats :

1 l'arche n'ayant pas été traitée thermiquement, plusieurs cycles de chargement-déchargement (environ une dizaine) sont nécessaires à éliminer les contraintes résiduelles et la stabilisation n'a pu être constatée avec les moyens mis-en-œuvre;

2 la forme de l'arche est éventuellement assez éloignée d'une sinusoïde et ne peut être choisie précisément sans traitement thermique. Or la présence d'une harmonique asymétrique diminue considérablement les charges critiques et par là le module d'Young critique (une amplitude relative de la deuxième harmonique de 1% baisse la charge critique de 10%, cf. paragraphe 1.3.3);

3 la flèche de l'arche ainsi que la précontrainte axiale ont été calculées à partir de la variation – très faible – de la longueur de la projection de l'arche, et ce en supposant que la ligne élastique de l'arche soit sinusoïdale. Les valeurs utilisées n'ont pas été mesurées et ne coïncident donc pas parfaitement avec les valeurs réelles;

4 la rigidité du support a été calculée en compression simple, mais une rotation des pièces d'acier constituant les rotules est susceptible d'intervenir lors du flambement de l'arche. La rigidité effective du support est donc éventuellement inférieure à la rigidité en compression de l'élastomère.

2.5.3 Recommendations pour une étude expérimentale approfondie

La première étape à mettre au point est le traitement thermique. Il s'agit de trouver un traitement thermique tel que l'AMF reste suffisamment rigide à basse température, mais permettant néanmoins d'éliminer les contraintes internes et de donner à l'arche la forme souhaitée. Des moules en arc de cercle possédant des rayons de courbure de 0.75" et 2.06" ont déjà été fabriqués à cet effet. La flèche de l'arche peut alors être calculée à partir de sa

longueur totale et du rayon de courbure du moule, ou mesurée très précisément grâce à un appareil optique.

Il s'agit ensuite de concevoir un système d'attache ajustable avec une très grande précision, afin que l'arche ne soit pas compressée initialement, et qu'il n'y ait pas non plus de jeu. Si l'on souhaite être en mesure de donner une compression initiale à l'arche, elle doit pouvoir être mesurée précisément - avec par exemple une cellule de charge montée en série entre l'arche et le support rigide.

Le support doit être tel que la réaction qu'il fournit au cours du flambement soit en compression pure. Sa rigidité doit être connue avec précision.

Parallèlement à la mise au point d'un montage expérimental, une étude de validité de la théorie peut être menée en cherchant la limite d'élasticité de l'AMF à différentes températures (par le tracé de courbes contrainte-déformation isothermes). Il est cependant probable que le passage en-dessous de la limite de rigidité –si tant est qu'il survienne - n'influe que faiblement sur le flambement en *snap* de l'arche AMF, dans la mesure où ce passage s'accompagne d'une baisse de rigidité de l'alliage. La position avec courbure inversée est alors stabilisée et non destabilisée.

2.6 Conclusion

Un modèle analytique décrivant le flambement en *snap* d'une arche basse sinusoïdale en AMF chargée mécaniquement et thermiquement a été présenté. Ce modèle montre en particulier que la rigidification de l'AMF occasionnée par la transformation martensitique inverse est susceptible d'entraîner le flambement en *snap*, sous certaines conditions sur la hauteur de l'arche. Il permet le dimensionnement d'un actuateur AMF à action rapide.

Quoique ce modèle rende compte qualitativement des phénomènes observés expérimentalement, on constate un assez grand écart entre les résultats quantitatifs issus des

deux approches. Cet écart est attribuable à trois facteurs : l'incertitude expérimentale en premier lieu, l'hypothèse d'élasticité, le modèle utilisé pour la loi de comportement des AMF. L'incertitude expérimentale peut être fortement réduite, en particulier grâce à la mise au point d'un traitement thermique spécifique. L'hypothèse selon laquelle l'actuation se passe entièrement dans le domaine élastique doit être vérifiée par une caractérisation expérimentale détaillée de l'alliage utilisé. Son invalidation ne constituerait cependant qu'une faible remise en cause du modèle analytique. Le modèle utilisé pour décrire le comportement des AMF, enfin, postule que l'effet mémoire de forme peut être totalement décrit par un changement de rigidité (non uniforme en général) du matériau. Or cette hypothèse n'a pas été totalement validée.

L'étude effectuée dans ce chapitre a permis d'expliquer le flambement en *snap* d'une arche AMF, grâce à la solution analytique existant pour une arche sinusoïdale sur rotules. Or cette configuration n'est pas nécessairement la plus adaptée à une application industrielle. Un encastrement est en effet beaucoup plus simple à réaliser. Une méthode plus générale doit donc être développée pour traiter les autres formes d'arches et de conditions aux limites.

CHAPITRE 3

UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR LES CALCULS DE STABILITÉ DES ARCHES ET DES POUTRES

La modélisation du flambement en *snap* d'une arche AMF sinusoïdale présentée au chapitre 2 peut être étendue à d'autres formes d'arches grâce au développement en série de Fourier, mais ne peut être adaptée à d'autres conditions aux limites qu'au prix de lourds développements analytiques. Nous avons vu également au chapitre 2 qu'il est justifié de se restreindre au domaine élastique de la loi de comportement des AMF, dans la mesure où un éventuel écart hors du domaine élastique s'accompagne d'une perte de rigidité de l'alliage et n'est a priori pas susceptible d'entraîner le flambement en *snap* d'une arche AMF.

L'objectif de ce chapitre est donc de mettre au point un algorithme simple permettant de calculer la charge critique de flambement en *snap* d'une arche élastique chargée latéralement, et ce pour tous les types d'arches, de conditions aux limites et de charge.

3.1 Choix de la méthode numérique

On a vu au chapitre 1 que l'approche la plus performante pour traiter les problèmes de stabilité est l'approche énergétique. Contrairement à l'approche dynamique, elle est légère d'emploi. Elle se prête de plus très bien à un traitement numérique, et permet de répondre directement à la question de la stabilité, contrairement à l'approche classique.

Parmi les méthodes numériques fondées sur l'approche énergétique, les plus fréquemment utilisées sont les méthodes d'éléments finis non linéaires. Des logiciels commerciaux tels qu'ANSYS les mettent en œuvre mais présentent néanmoins un inconvénient majeur : s'ils sont bien adaptés au repérage d'un point limite, ils ne permettent en revanche de mettre en évidence un point de bifurcation que par l'absence de convergence de l'algorithme, laquelle n'aura lieu que si l'on passe très près du point critique (cf paragraphe 1.4.2). Or, on a vu que les conditions aux limites influent fortement sur les charges critiques, et on n'a donc pas a priori d'idée valable de la valeur de la charge critique. De plus, l'absence de convergence peut également avoir une origine numérique. Le repérage d'un point de bifurcation est donc difficile avec les logiciels commerciaux.

Une possibilité est de développer un code utilisant les éléments finis non linéaires, dans lequel on teste le signe des valeurs propres de la matrice des éléments finis (cf. paragraphe 1.3.4). Cependant, l'inconvénient d'une méthode de ce type - utilisant la formulation variationnelle du principe de l'énergie totale minimale – est que l'on perd une partie de l'information sur l'énergie. Elle nécessite de plus un grand savoir-faire.

Nous allons donc opter pour une méthode conservant l'intégralité de l'information sur l'énergie, et permettant d'utiliser des bibliothèques de fonctions déjà disponibles. Elle est fondée sur la représentation de la ligne élastique de l'arche par krigeage dual, et la minimisation de l'énergie totale grâce à un algorithme d'optimisation.

3.2 Présentation de la méthode

La méthode que nous proposons est inspirée des méthodes du quotient de Rayleigh (cf. 1.4.1) et de Rayleigh-Ritz (cf. 1.4.2). Elle consiste, comme ces dernières, à supposer connue - à certains coefficients près - la forme de la ligne élastique de l'arche, et à minimiser l'énergie totale en fonction de ces coefficients. Dans la méthode de Rayleigh-Ritz, la ligne élastique de l'arche est écrite comme une somme pondérée de fonctions de bases alors que dans notre

méthode, elle est décrite par une courbe interpolée grâce au krigeage dual. Les points d'interpolation, en nombre fini, sont pris comme coordonnées généralisées.

Le problème continu étant ainsi discrétisé, l'énergie totale peut être minimisée en fonction d'un nombre fini de variables, selon le principe de l'énergie totale minimale énoncé au paragraphe 1.2.3. Nous n'avons pas recours à une formulation variationnelle de ce principe, mais à son application directe.

Nous allons dans un premier temps présenter brièvement la méthode d'interpolation du krigeage dual et souligner l'intérêt particulier de son application aux calculs de flexion des poutres. Nous dériverons ensuite les équations énergétiques régissant la flexion d'une poutre dans le domaine des déplacements finis. Nous expliciterons enfin les choix algorithmiques, et en particulier le choix de l'algorithme d'optimisation.

3.3 Le krigeage dual appliqué au calcul de la déformée d'une poutre

3.3.1 Présentation de la méthode d'interpolation du krigeage dual

Le krigeage dual est une méthode numérique générale permettant, entre autres, d'interpoler des fonctions de $\Re^n$ dans $\Re^n$. Il est également possible d'intégrer des conditions sur les dérivées ou sur les gradients. La méthode du krigeage est fondée sur une approche probabiliste et consiste à construire le meilleur estimateur linéaire sans biais d'une fonction aléatoire. Nous ne donnerons ici que les éléments indispensables à la compréhension du contenu de ce mémoire, tous les détails concernant la théorie et la mise en œuvre du krigeage dual pouvant être trouvés dans [33].

Considérons une fonction f de $\Re$ dans $\Re$ dont on connaît la valeur en p points $x_1,...,x_p$, et la dérivée en m points $\dot{x}_1,...,\dot{x}_m$:

$$f(x_i) = f_i \ \ pour\ 1 \le i \le p$$
$$f'(x_j') = f_j' \ \ pour\ 1 \le j \le m$$

La fonction krigée, ou interpolée, que nous noterons u, s'exprime

$$u(x) = P(x) + \sum_{i=1}^{p} b_i K(|x - x_i|) + \sum_{j=1}^{m} c_j \varepsilon(x_j' - x) K'(|x - x_j'|) \tag{3.1}$$

avec

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \ge 0 \\ -1 & sinon \end{cases}$$

P est un polynôme de degré 0, 1 ou 2, ou bien une somme de fonctions trigonométriques, que l'on appelle la *dérive*. Il correspond à l'espérance de la fonction f considérée comme une fonction aléatoire. En d'autres termes, la dérive représente le comportement moyen du phénomène. K est une fonction de $\Re$ dans $\Re$ appelée *covariance*. Les termes comprenant K correspondent à une correction par rapport à la dérive, reflétant la corrélation entre la valeur prise par la fonction f en x et les valeurs observées de f ou de sa dérivée aux points échantillonnés. Si l'on choisit le degré 1 pour le polynôme P et une covariance cubique, u s'exprime alors sous la forme

$$u(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{i=1}^{p} b_i |x - x_i|^3 + \sum_{j=1}^{m} 3c_j \varepsilon(x_j' - x) |x - x_j'|^2 \tag{3.2}$$

Les coefficients a_0, a_1, b_i et c_j sont solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} & & & & & & 1 & x_1 \\ & |x_i - x_l|^3 & & & 3\varepsilon(x_k' - x_i')|x_i - x_k'|^2 & & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 & x_m \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & 3\varepsilon(x_j' - x_l')|x_l - x_j'|^2 & & & -6|x_j' - x_k'| & & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_m & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \\ c_1 \\ \dots \\ c_m \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_p \\ f'_1 \\ \dots \\ f'_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.3.2 Lien entre le krigeage dual et la flexion des poutres

Flexion d'une poutre soumise à des forces latérales et des moments concentrés

Le lien entre le krigeage dual et la flexion des poutres a été mis en évidence en premier lieu par Montes [20].

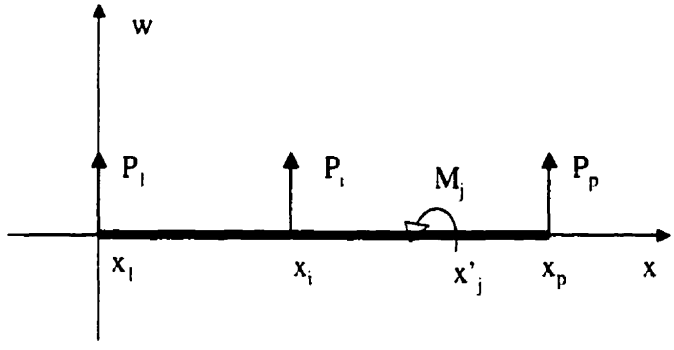


Figure 3.1 - Poutre soumise à des forces latérales et des moments concentrés

Considérons une poutre mince élastique telle celle que représentée à la Figure 3.1, soumise à p charges latérales concentrées $(P_i)_{1\le i\le p}$ et m moments concentrés $(M_j)_{1\le j\le m}$. La réaction des supports ainsi que les moments liés à l'éventuel encastrement de la poutre font partie des P_i et des M_j et ne sont pas soumis à un traitement particulier. L'équation différentielle donnant la déformée $w(x)$ de la poutre dans le domaine linéarisé est

$$EI\frac{d^2w(x)}{dx^2} = M(x) \tag{3.4}$$

La poutre étant en équilibre, la somme des moments externes et internes est nulle en tout point. On peut alors exprimer le moment fléchissant M de deux manières, soit en considérant la partie gauche de la poutre, soit en considérant la partie droite (cf. Figure 3.2).

On trouve alors

$$M = \sum_{i=1}^{p} P_i\langle x - x_i\rangle^1 - \sum_{j=1}^{m} M_j\langle x - x'_j\rangle^0 = \sum_{i=1}^{p} P_i\langle x_i - x\rangle^1 + \sum_{j=1}^{m} M_j\langle x'_j - x\rangle^0 \tag{3.5}$$

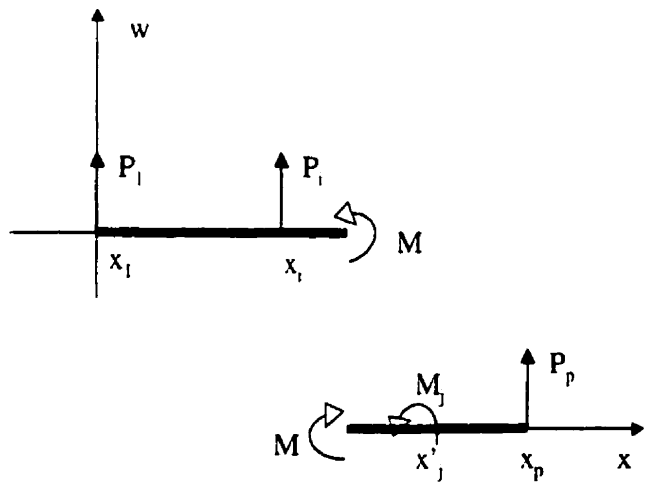


Figure 3.2 - Calcul du moment fléchissant

Les fonctions de singularité représentées par des crochets dans l'expression ci-dessus sont définies comme suit pour $n \geq 0$:

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n & si\ x \geq a \\ 0 & si\ x < a \end{cases}$$

Elles s'intègrent comme des fonctions ordinaires :

$$\int_{-\infty}^{x} \langle x-a \rangle^{n} = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1}$$

On peut aussi exprimer M comme la demi-somme des deux termes auxquels il est égal:

$$M = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{p} P_i\left(\langle x-x_i \rangle^1 + \langle x_i - x \rangle^1\right) + \sum_{j=1}^{m} M_j\left(\langle x'_j - x \rangle^0 - \langle x - x'_j \rangle^0\right)\right] \qquad (3.6)$$

d'où, en substituant dans (3.4)

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{2EI}\left[\sum_{i=1}^{p} P_i\left(\langle x-x_i \rangle^1 + \langle x_i - x \rangle^1\right) + \sum_{j=1}^{m} M_j\left(\langle x'_j - x \rangle^0 - \langle x - x'_j \rangle^0\right)\right] \qquad (3.7)$$

En intégrant

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{2EI}\left[\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2} P_i\left(\langle x-x_i \rangle^2 - \langle x_i - x \rangle^2\right) + \sum_{j=1}^{m} M_j\left(-\langle x'_j - x \rangle^1 - \langle x - x'_j \rangle^1\right)\right] + a_1$$

$$w(x) = \frac{1}{2EI}\left[\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{6} P_i\left(\langle x-x_i \rangle^3 + \langle x_i - x \rangle^3\right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} M_j\left(\langle x'_j - x \rangle^2 - \langle x - x'_j \rangle^2\right)\right] + a_1 x + a_0$$

ce qui équivaut, avec les notations du paragraphe précédent, à

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{i=1}^{p} \frac{P_i}{12EI}\left|x - x_i\right|^3 + \sum_{j=1}^{m} 3\frac{M_j}{12EI}\varepsilon\left(x'_j - x\right)\left|x - x'_j\right|^2 \qquad (3.8)$$

En notant

$$b_i = \frac{P_i}{12EI} \qquad\qquad c_j = \frac{Mj}{12EI}$$

l'équation (3.8) s'écrit alors

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{i=1}^{p} b_i |x - x_i|^3 + \sum_{j=1}^{m} 3c_j \varepsilon(x'_j - x) |x - x'_j|^2 \tag{3.9}$$

On reconnaît ici l'équation (3.2) d'une courbe krigée. De plus, on a en chacun des points x_i

$$w_i = w(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \sum_{l=1}^{p} b_l |x_i - x_l|^3 + \sum_{k=1}^{m} 3c_k \varepsilon(x'_k - x_i) |x_i - x'_k|^2 \tag{3.10}$$

En dérivant l'équation (3.9), on trouve de même en chacun des points x'_j

$$w'_j = w'(x'_j) = a_1 + \sum_{l=1}^{p} 3b_l \varepsilon(x'_j - x_l) |x'_j - x_l|^2 - \sum_{k=1}^{m} 6c_k |x'_j - x'_k| \tag{3.11}$$

Les conditions d'équilibre impliquent la nullité de la somme des forces extérieures et de la somme des moments extérieurs, entre autres à l'origine en x=0:

$$\sum_{i=1}^{p} P_i = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{p} b_i = 0 \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} P_i x_i + \sum_{j=1}^{m} M_j = 0 \;&\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{p} 12EI \cdot b_i x_i + \sum_{j=1}^{m} 12EI \cdot c_j = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{p} b_i x_i + \sum_{j=1}^{m} c_j = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

En réunissant les équations (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13), on aboutit au système suivant:

$$\begin{bmatrix} & & & & & & 1 & x_1 \\ & |x_i - x_l|^3 & & & 3\varepsilon(x_k' - x_i)|x_i - x_k'|^2 & & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 & x_m \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & 3\varepsilon(x_j' - x_l)|x_l - x_j'|^2 & & & -6|x_j' - x_k'| & & \dots & \dots \\ & & & & & & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & \dots & x_m & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_p \\ c_1 \\ \dots \\ c_m \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_p \\ w'_1 \\ \dots \\ w'_m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

On reconnaît là le système d'équations du krigeage dual (3.3), à cela près qu'ici, les w_i et les w'_j sont les inconnues, alors que dans le cadre du krigeage dual, les inconnues sont les b_i et les c_j. En d'autres termes, on aboutit à la même solution pour la déformée de la poutre soit en partant des forces et moments appliqués et en utilisant la théorie classique de la résistance des matériaux, soit en considérant les déplacements et rotations aux points d'application des forces et des moments et en utilisant le krigeage dual. Si l'on connaît la force (ou le moment) appliquée en certains points et le déplacement (ou la rotation) en certains autres, on peut effectuer une combinaison des deux méthodes en résolvant le système (3.14) pour les bonnes inconnues et en substituant dans l'équation (3.9).

Malgré ses fondements purement mathématiques et probabilistes, la méthode d'interpolation du krigeage dual utilisée avec une dérive linéaire et une covariance cubique est donc particulièrement adaptée au problème de la flexion des poutres. Elle fournit en effet la solution exacte de la déformée d'une poutre fléchie sous l'action de forces latérales et de moments concentrés dans le domaine des petits déplacements.

Flexion d'une poutre soumise à des forces latérales et axiales concentrées

Dans le problème du flambement en *snap* d'une arche chargée latéralement, que l'on considère une arche ou une poutre flambée, des forces axiales interviennent en plus des forces latérales. Il serait donc intéressant que le krigeage dual fournisse également la solution exacte de la déformée dans le cas de forces latérales et axiales concentrées.

Considérons une poutre mince élastique soumise à p charges latérales concentrées $(P_i)_{1\le i\le p}$ et une force axiale Q, telle que représentée à la Figure 3.3.

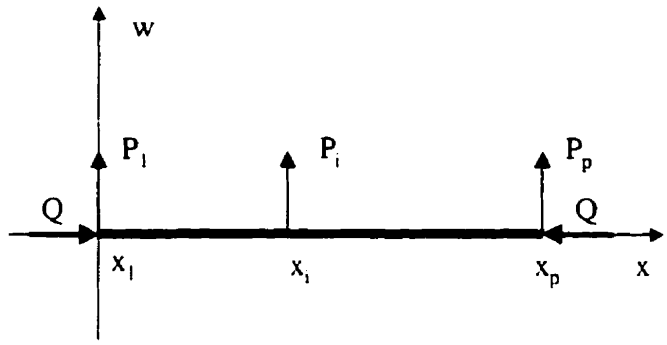


Figure 3.3 - Poutre soumise à des forces latérales et axiales concentrées

L'équation donnant la déformée de la poutre en flexion dans le domaine linéarisé est toujours :

$$EI\frac{d^2w(x)}{dx^2}=M(x)$$

mais l'expression du moment fléchissant doit prendre en compte la force axiale :

$$M=\sum_{i=1}^{p}P_i\langle x-x_i\rangle^1-Q\cdot w(x)=\sum_{i=1}^{p}P_i\langle x_i-x\rangle^1-Q\cdot w(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}P_i|x-x_i|-Qw(x) \quad (3.15)$$

d'où

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2}+\frac{Q}{EI}w(x)=\frac{1}{2EI}\sum_{i=1}^{p}P_i|x-x_i| \quad (3.16)$$

Si l'on note $k^2=Q/EI$, la solution de cette équation différentielle s'écrit

$$w(x) = A\cos(k \cdot x) + B\sin(k \cdot x) + \sum_{i=1}^{p} \frac{P_i}{2Q} |x - x_i| \tag{3.17}$$

Les conditions d'équilibre sont

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} P_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{p} P_i x_i = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Pour pouvoir une nouvelle fois retrouver les équations du krigeage dual, cette fois avec une dérive trigonométrique et une covariance linéaire, on doit avoir à la place des équations d'équilibre le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} P_i \cos(k \cdot x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{p} P_i \sin(k \cdot x_i) = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Le krigeage dual ne semble donc pas fournir dans le cas d'une poutre soumise à des forces latérales et axiales la solution exacte de la déformée. Nous l'utiliserons néanmoins dans notre étude, aussi bien pour des petits que pour des grands déplacements, et ce pour deux raisons : d'une part pour ses qualités en matière de minimisation de la courbure illustrées par le cas d'une poutre soumise à des forces latérales et des moments concentrés, d'autre part pour son adaptabilité aux conditions aux limites grâce au krigeage des dérivées.

3.3.3 Représentation de la déformée d'une poutre par krigeage dual

Principe

Considérons une poutre ou une arche de forme quelconque, possédant des conditions aux

limites quelconques, et soumise à une force axiale Q ainsi que des forces latérales et des moments quelconques, telle que représentée à la Figure 3.4.

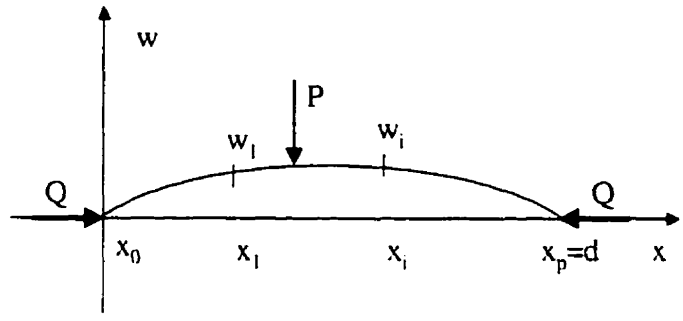


Figure 3.4 - Représentation de la déformée d'une arche par krigeage

Les points $(x_0, w_0), (x_i, w_i), ..., (x_p, w_p)$ sont des données du problème. Nous verrons plus loin que soit ils correspondent à des conditions imposées à l'arche, soit ils sont issus du processus d'optimisation. Ils ne coïncident pas nécessairement avec des points d'application de forces ou de moments. On peut aussi avoir des données du type (x'_j, w'_j), i.e., des conditions imposées sur les dérivées, si l'arche est encastrée par exemple. On adopte en tant que déformée de l'arche la courbe obtenue par krigeage dual à partir des données $(x_i, w_i), (x'_j, w'_j)$, avec une dérive linéaire et une covariance cubique.

On note d_0 la longueur initiale de la projection de la poutre sur l'axe des abscisses, et d la longueur de la projection de sa déformée. La poutre sera toujours comprise entre x=0 et x=d, i.e., on considère qu'elle est fixée en 0, ce qui ne nuit en rien à la généralité. De plus, on note L_0, la longueur totale initiale de l'arche, et L, la longueur de sa déformée.

Précision de la représentation par krigeage dual

Avant de passer à la minimisation de l'énergie, nous allons évaluer l'erreur commise par modélisation de la ligne élastique d'une arche par krigeage dual, en fonction du nombre de

points d'interpolation. Le krigeage est effectué avec une covariance cubique et une dérive linéaire.

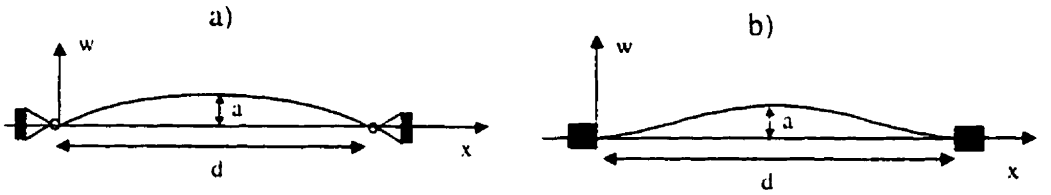


Figure 3.5 - Arches tests

Deux formes d'arches sont envisagées : une arche sinusoïdale sur rotules (cf. Figure 3.5-a), de ligne élastique :

$$w_0(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{d_0}\right)$$

et une arche encastrée (cf. Figure 3.5-b), de ligne élastique :

$$w_0(x) = \frac{a}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{d_0}\right)\right]$$

Le calcul numérique est mené pour deux arches assez hautes - afin d'avoir une borne supérieure de l'erreur dans les calculs qui vont suivre- avec :

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ a = 0.1 \end{cases}$$

L'écart $u - w_0$ entre l'arche et la courbe qui la modélise, l'écart $u' - w_0'$ entre leurs dérivées, ainsi que l'écart $u'' - w_0''$ entre leurs dérivées secondes sont tracés à la Figure 3.6 pour l'arche sur rotules et à la Figure 3.7 pour l'arche encastrée. L'interpolation par krigeage dual est menée avec n=1, 3 et 5 points d'interpolation (extrémités non comprises). A titre de

comparaison, l'erreur est aussi calculée pour la modélisation grâce aux fonctions d'interpolation de Lagrange de degré 2, sur lesquelles sont généralement fondés les calculs par éléments finis avec des éléments quadratiques.

On observe en premier lieu que l'interpolation par krigeage donne des résultats très précis avec peu de points : pour n=1, l'erreur sur la ligne élastique de l'arche est inférieure à 0.002 - soit 2% de la flèche - pour une arche sur rotules et à 0.001 - soit 1% de la flèche – pour une arche encastrée. Avec n=5, on réduit cette erreur à moins de 0.00005 – soit 0.05% de la flèche - pour une arche sur rotules et à 0.0002 - soit 0.2% de la flèche – pour une arche encastrée. Ces résultats sont très satisfaisants pour l'application à laquelle nous les destinons, et nous nous contenterons en général de n=5 points de krigeage, parfois moins. En ce qui concerne les dérivées première et seconde de la ligne élastique- qui interviennent toutes deux dans le calcul de l'énergie totale - la précision est moindre mais néanmoins satisfaisante. Pour n=5, les erreurs commises sur les dérivées première et seconde sont respectivement de l'ordre de 0.001 et 0.02 pour l'arche sur rotules, et de l'ordre de 0.003 et 0.2 pour l'arche encastrée.

La comparaison avec l'interpolation grâce aux fonctions de Lagrange montre que cette dernière méthode converge rapidement en ce qui concerne la ligne élastique, mais beaucoup plus lentement pour ses dérivées. Pour obtenir avec les fonctions de Lagrange la même précision sur la dérivée seconde qu'avec le krigeage à n=5 points, il est nécessaire d'avoir recours à 55 éléments quadratiques - soit n=109 nœuds de calcul – dans le cas de l'arche sur rotules, et à 32 éléments quadratiques - soit n=63 nœuds de calcul – dans le cas de l'arche encastrée.

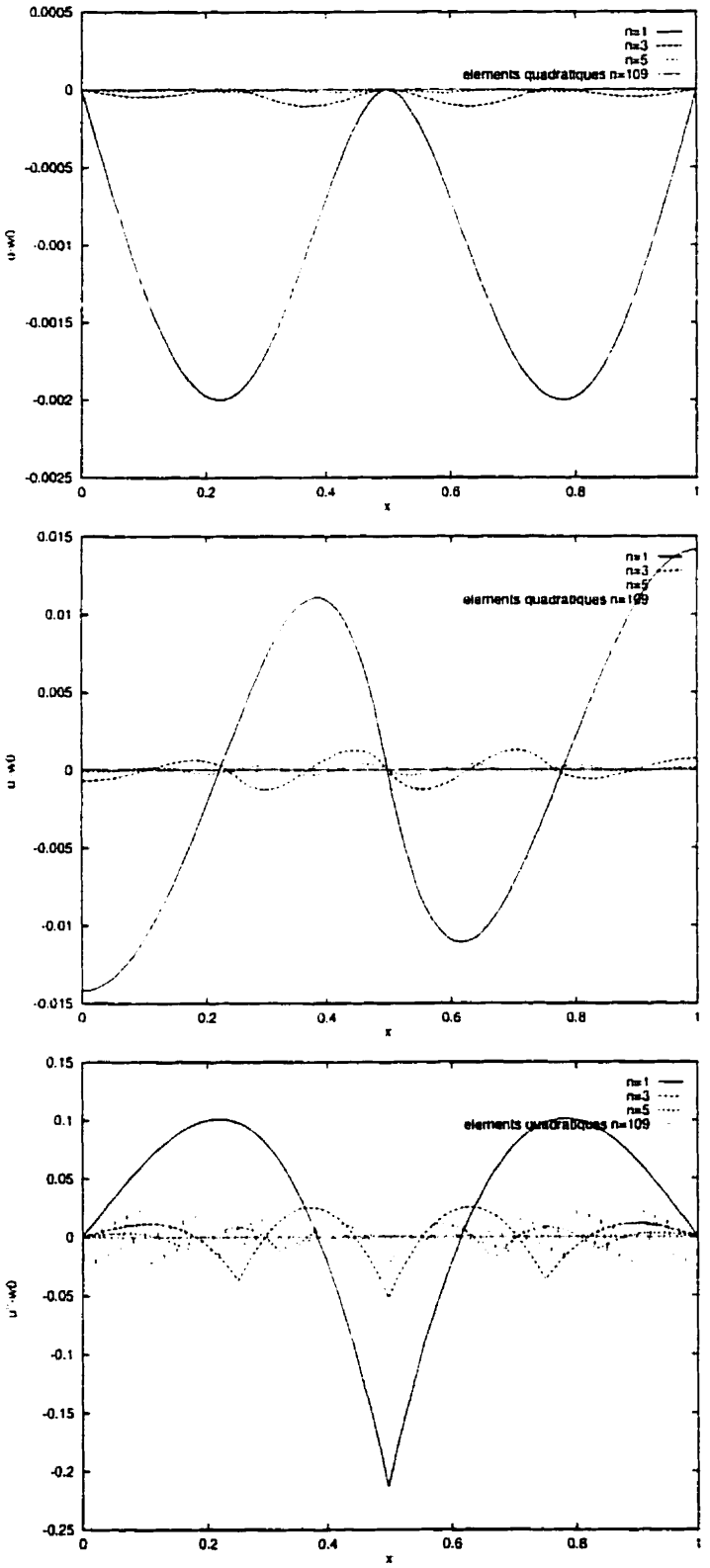


Figure 3.6 - Erreur due à l'interpolation, dans le cas de l'arche sur rotules

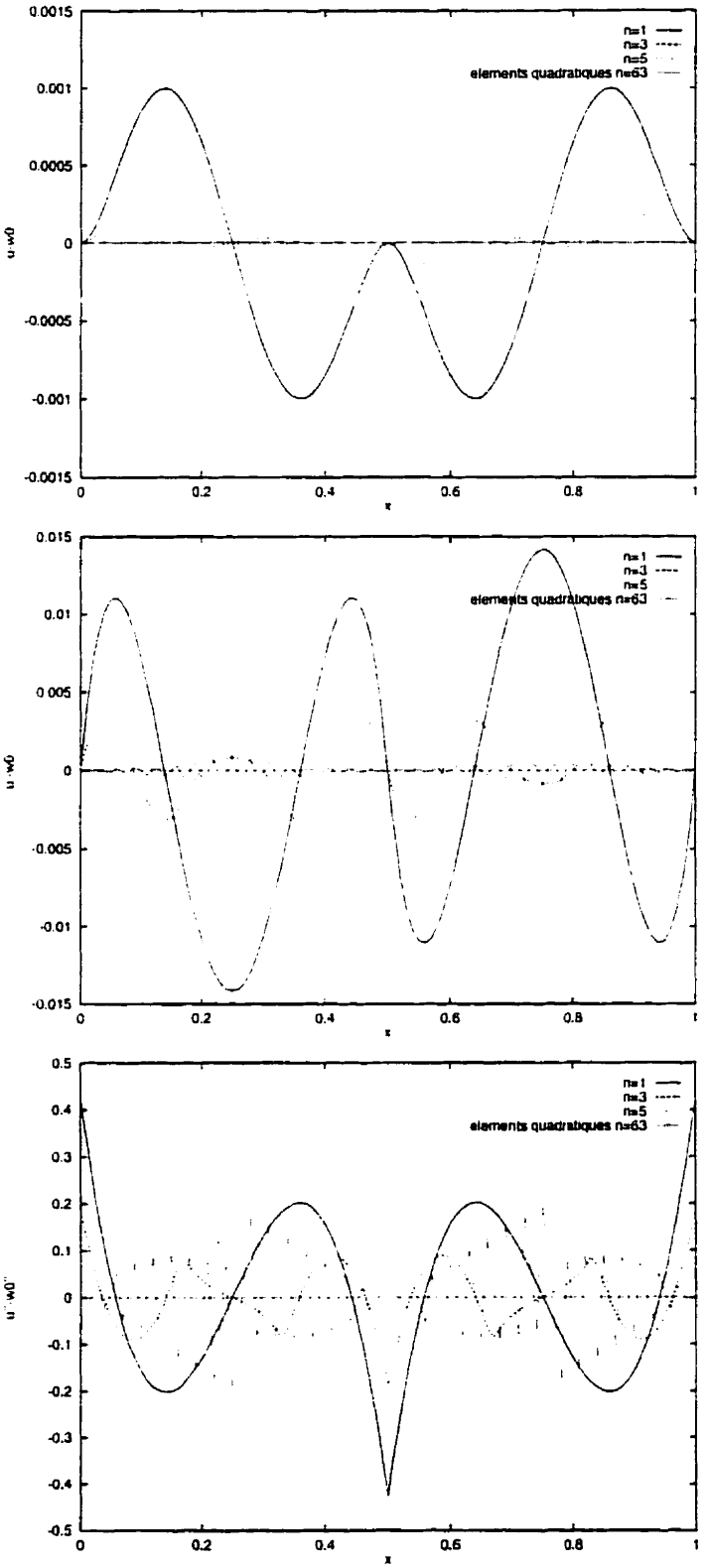


Figure 3.7 - Erreur due à l'interpolation, dans le cas de l'arche encastrée

3.4 Expression de l'énergie en grands déplacements

Soit $w_0(x)$ la forme initiale de l'arche, et $w(x)$ l'expression obtenue par krigeage dual pour sa déformée. On peut alors calculer, pour cet état de déformation, la valeur des différentes énergies qui entrent en jeu dans le chargement: l'énergie de flexion, l'énergie de compression et l'énergie potentielle liée aux charges extérieures, qui doivent donc nécessairement toutes être conservatives. Elles s'expriment indépendamment des contraintes et des déformations :

$$U_{flexion} = \frac{EI}{2}\int_0^d \left(\frac{w''(x)}{\left(1+w'^2(x)\right)^{3/2}} - \frac{w_0''(x)}{\left(1+w_0'^2(x)\right)^{3/2}} \right)^2 \sqrt{1+w'^2(x)}dx \tag{3.20}$$

$$U_{compression} = \frac{EA\delta^2}{2L_0} \quad avec \ \delta = L - L_0 = \int_0^d \sqrt{1+w'^2(x)}dx - \int_0^{d_0} \sqrt{1+w_0'^2(x)}dx \tag{3.21}$$

$$U_{extérieures} = Q \cdot L + P \cdot x(P) + \ldots \tag{3.22}$$

$$U_{totale} = U_{flexion} + U_{compression} + U_{extérieures} \tag{3.23}$$

L'énergie de compression telle qu'elle est exprimée ici suppose que la force de compression soit constante tout le long de l'arche, et donc que celle-ci ne soit pas trop courbée. Ce facteur n'est cependant pas limitant, car dans les cas où la flèche est très importante, on considère pour les matériaux usuels que la compression est négligeable devant la flexion, et donc que l'arche est incompressible. L'énergie de compression n'intervient donc que dans les cas où l'approximation effectuée dans l'expression (3.21) est valide.

3.5 Algorithme de résolution

3.5.1 Choix des points de contrôle

Considérons la barre mince de la Figure 3.4. Le premier choix à effectuer est celui des points

de contrôle de la déformée, i.e., des points à partir desquels la déformée est calculée par krigeage. Lors du chargement, on considère dans tous les cas (cf. paragraphe 3.3.3) que l'extrémité gauche de la barre est fixée, et on prend donc toujours le point $(x_0 = 0, w_0 = 0)$ comme premier point de contrôle. Si l'extrémité droite de la barre est fixée également, on prend aussi $(d = d_0, 0)$ comme deuxième point de contrôle.

Il s'agit ensuite de choisir des points additionnels répartis le long de la barre, grâce auxquels le plus grand nombre possible de configurations de la déformée puissent être obtenues par krigeage. Si l'on choisit de ne prendre que le point au milieu de la barre $(x_1 = d/2, w_1)$, et en l'absence de conditions sur les dérivées, on ne pourra obtenir que des déformées symétriques à cause de la symétrie des données. Or nous avons vu dans le chapitre 2 que le flambement en *snap* d'une arche peut être asymétrique. Il est donc nécessaire de prendre au moins deux points de contrôle dans la longueur de la barre si l'on veut rendre compte du flambement asymétrique et ne pas surestimer la charge critique de flambement en *snap*. Nous prendrons en général trois ou cinq points, régulièrement espacés.

On note n est le nombre de points de contrôle additionnels. Trois situations doivent être distinguées, en fonction du type de problème à résoudre :

a) Si l'extrémité droite de la poutre est fixée, les points de contrôle additionnels sont choisis de la manière suivante :

$$x_i = i\frac{d_0}{n+1} \quad \text{pour } 1 \le i \le n$$

Les paramètres d'optimisation sont alors les

$$w_i = w(x_i) \quad \text{pour } 1 \le i \le n$$

b) Si l'extrémité droite de la barre n'est pas fixée, et la barre est considérée comme compressible, on prend les mêmes points de contrôle qu'énoncé précédemment, plus l'extrémité droite :

$$x_i = i\frac{d}{n} \quad \text{pour } 1 \le i \le n$$

Les paramètres d'optimisation sont alors :

$$\begin{cases} w_i = w(x_i) & \text{pour } 1 \le i \le n-1 \\ d & \end{cases}$$

c) Si l'extrémité droite de la barre n'est pas fixée, et la barre est considérée comme incompressible, on choisit les mêmes points de contrôle que dans le cas a) :

$$x_i = i\frac{d}{n+1} \quad \text{pour } 1 \le i \le n$$

d est inconnue comme dans le cas b), et est calculée par résolution de l'équation implicite stipulant que la longueur de la poutre reste constante:

$$\int_0^d \sqrt{1+w'^2(x)}dx - \int_0^{d_0} \sqrt{1+w_0'^2(x)}dx = 0 \tag{3.24}$$

Les paramètres d'optimisation sont alors :

$$w_i = w(x_i) \quad \text{pour } 1 \le i \le n$$

Grâce à ce mode de représentation des poutres, tous les types de chargement peuvent être traités de la même manière, sans avoir recours à l'optimisation sous contrainte.

3.5.2 Schéma de l'algorithme de résolution

Le fonctionnement du code de calcul est détaillé en annexe. Nous ne donnerons ici que des explications algorithmiques.

Le principe de l'algorithme est le suivant : pour un niveau de charge donné, on minimise l'énergie totale du système (qui tient ici lieu de fonction-coût) en faisant varier les $(w_i)_{1\le i\le n}$ et d le cas échéant. Le problème est formulé selon l'approche dite de la "boîte noire" : dans le cas incompressible, où l'équation (3.24) constitue une contrainte, celle-ci est éliminée en rendant la variable d dépendante des $(w_i)_{1\le i\le n}$. En d'autres termes, au lieu d'effectuer une optimisation sous contrainte en prenant les $(w_i)_{1\le i\le n}$ et d pour variables, on prend uniquement les $(w_i)_{1\le i\le n}$ pour variables et d est ajustée afin que la condition d'incompressibilité soit vérifiée. Un seul algorithme d'optimisation permet ainsi de traiter tous les cas de figures d'une poutre en flexion-compression. Seule la fonction-coût doit être adaptée à chaque cas particulier.

Les fonctions krigées sont générées puis manipulées grâce à des fonctions de la librairie de krigeage LIBKRIG, développée à l'Ecole Polytechnique.

L'algorithme global comprend trois sous-algorithmes issus de la littérature : un algorithme d'intégration, un algorithme de recherche de racine et un algorithme d'optimisation.

L'algorithme d'intégration suit la méthode d'intégration de Romberg (cf. [23]) qui consiste en l'extrapolation pour un pas tendant vers 0 du résultat obtenu par la méthode des trapèzes avec différents pas. Malgré sa relative lenteur (en particulier en comparaison avec la méthode de Gauss), elle présente l'avantage d'offrir une bonne maîtrise de la précision de l'intégration. Or nous verrons plus loin que la précision de l'évaluation de la fonction-coût est un point crucial dans le déroulement du programme.

L'algorithme de recherche de racine choisi est celui de Winjgaarden-Dekker-Brent (cf. [23]). Il consiste en la combinaison d'une bissection et d'une interpolation quadratique inverse. Il est utilisé pour résoudre l'équation (3.24) en d, les paramètres $(w_i)_{1\le i\le n}$ étant fixés.

Le choix et l'usage de l'algorithme d'optimisation sont présentés au paragraphe suivant.

L'algorithme de résolution est schématisé à la Figure 3.8 :

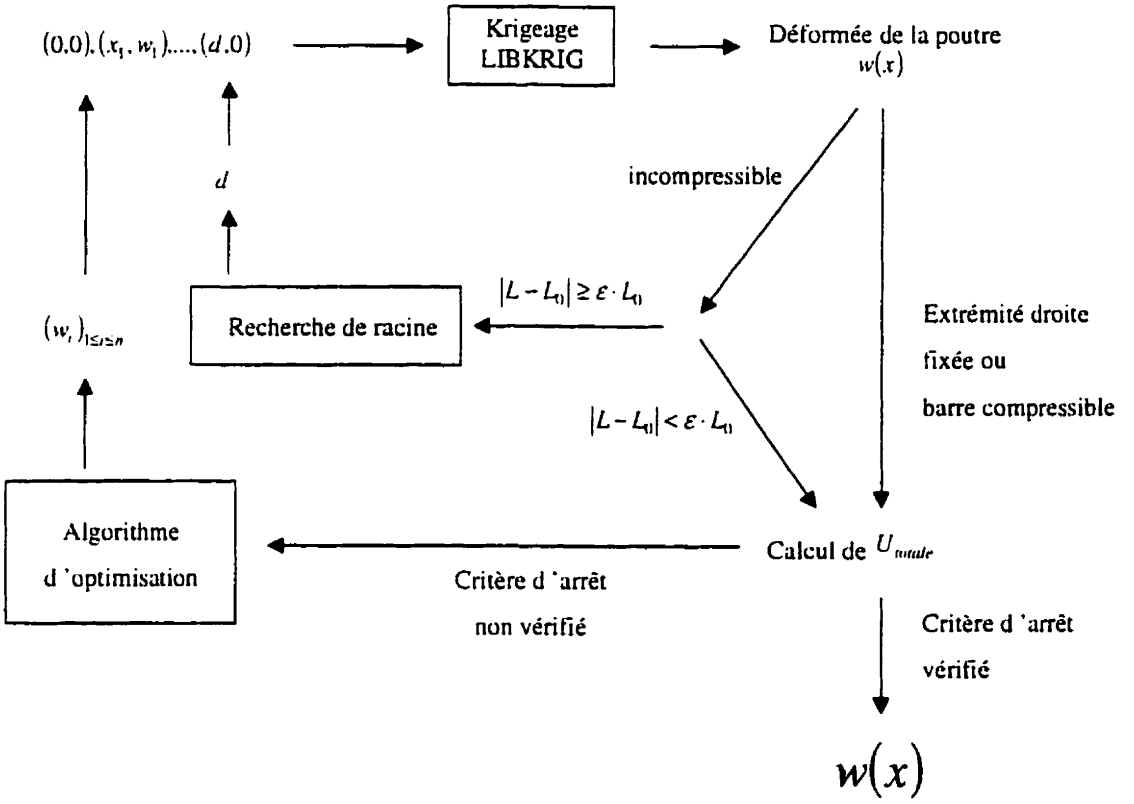


Figure 3.8 - Schéma de l'algorithme de résolution

3.5.3 Algorithme d'optimisation

Cahier des charges

L'algorithme d'optimisation est utilisé pour minimiser la fonction U_{totale} en fonction des

$(w_i)_{1\leq i\leq n}$ et de d dans le cas d'une barre non fixée et compressible. Rappelons que l'objectif est avant tout de calculer la charge critique de flambement en *snap* d'une arche chargée latéralement, même s'il est possible à l'aide de cette approche de calculer la déformée d'une poutre en flexion-compression, dans la limite des restrictions citées précédemment. On procède donc comme suit : en partant d'une charge latérale nulle, on augmente celle-ci de manière "quasi-statique", jusqu'à ce que la flèche s'inverse. En d'autres termes, on reproduit numériquement les expériences réelles de recherche du point critique. On sait de plus qu'à partir d'une certaine charge, il existe plusieurs états d'équilibre possibles (cf. paragraphe 1.3), mais on souhaite rester sur le chemin fondamental aussi longtemps qu'on ne rencontre pas de point critique (point limite ou point de bifurcation asymétrique dans notre cas). Il est donc essentiel d'adopter un algorithme d'optimisation local et non global. L'algorithme d'optimisation se décompose en deux sous-algorithmes : un algorithme d'optimisation multi-dimensionnelle et un algorithme de recherche de ligne. Ce dernier effectue une optimisation unidimensionnelle dans une direction privilégiée sélectionnée par l'algorithme précédent.

Optimisation multi-dimensionnelle

L'évaluation de la fonction-coût ainsi que celle de son gradient par la méthode des différences finies est possible en tout point. Nous avons donc choisi une méthode à différences finies, qui présente l'avantage de converger rapidement. Plus précisément, nous avons opté pour une méthode Quasi-Newton : la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (cf. [23]) que l'on notera simplement BFGS.

Le principe en est le suivant. Soit f une fonction de $\Re^n$ dans $\Re$, non linéaire et différentiable. On cherche un minimum local de f, c'est-à-dire un point x^* tel que

$$f(x^*) \leq f(x)$$

pour tout x appartenant à un voisinage de x^*. Soit x_k une approximation de x^*, et m un modèle simple de f sur ce voisinage, c'est-à-dire

$$m(x) \approx f(x)$$

Alors on aura

$$\min m(x) \approx \min f(x)$$

Au lieu de résoudre $\min f(x)$, on résout $\min m(x)$, en espérant que le point $\tilde{x}$ en lequel m atteint son minimum fournisse une meilleure approximation de x^* que x_k.

Dans le cas des méthodes quasi-Newton, le modèle m à la k-ième itération s'écrit

$$m_k(x) = f(x_k) + \nabla f^T(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H_k (x - x_k) \tag{3.25}$$

où H_k est une matrice définie positive approchant la matrice hessienne. On a alors

$$\tilde{x} = x_k - H_k^{-1} \nabla f(x_k)$$

et la direction de la recherche de ligne est donc donnée par le vecteur

$$s_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k) = \tilde{x} - x_k \tag{3.26}$$

La matrice H_0 est généralement une matrice diagonale, éventuellement un multiple de la matrice identité. Les différentes méthodes quasi-Newton se distinguent par le mode d'actualisation de H_k. Dans le cas de la méthode BFGS, on passe de H_{k-1} à H_k selon la formule d'actualisation :

$$H_k = H_{k-1} + \frac{y_{k-1} \cdot y_{k-1}^T}{y_{k-1}^T \cdot s_{k-1}} - \frac{H_{k-1} \cdot s_{k-1} \cdot s_{k-1}^T \cdot H_{k-1}}{s_{k-1}^T \cdot H_{k-1} \cdot s_{k-1}} \tag{3.27}$$

où

$$y_{k-1} = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})$$

Recherche de ligne

La recherche de ligne est effectuée dans la direction s_k donnée par l'équation (3.26). Elle permet de trouver le réel positif t_k qui minimise l'expression

$$f(x_k + t_k s_k) \tag{3.28}$$

Plusieurs méthodes ont été essayées pour remplir cette fonction. Essayée en premier lieu, la méthode de Brent (cf. [23]) ne s'est pas montrée concluante car elle ne convergeait que très difficilement à l'approche des points critiques. On n'était alors pas non plus assuré de progresser dans la recherche du minimum de l'expression (3.28), i.e., il était possible d'obtenir t_k tel que

$$f(x_k + t_k s_k) \geq f(x_k)$$

Nous avons donc opté pour une méthode beaucoup moins élaborée mais plus robuste, fondée sur la loi d'Armijo (cf. [10]). Elle consiste à trouver le plus petit entier n tel que

$$f(x_k + t_k s_k) \leq f(x_k) + \sigma t_k \underbrace{\nabla f(x_k) \cdot s_k}_{<0}$$

où

$$t_k = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

σ doit être pris dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Nous avons choisi, selon le conseil de l'auteur, $\sigma = 10^{-4}$.

Critère d'arrêt

Le choix du critère d'arrêt est l'un des points cruciaux de l'algorithme d'optimisation. Si celui-ci est trop faible, les résultats seront approximatifs, voire assez éloignés du résultat théorique à proximité des points critiques. S'il est trop exigeant et suppose une précision de l'évaluation de la fonction-coût supérieure à la précision effective, on sera dans l'un des cas de figures suivants : soit, dans le meilleur des cas, l'algorithme convergera vers le bon résultat, mais avec un nombre d'itérations excessif, soit l'algorithme ne convergera pas, soit, dans le cas le plus problématique car difficilement diagnostiquable, l'algorithme convergera vers un résultat totalement erroné.

En théorie, une condition suffisante pour que le point x^* soit un minimum local de f est

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) = 0 \\ \nabla^2 f(x^*) \text{ définie positive} \end{cases}$$

Dans la pratique, on ne vérifiera que la condition sur le gradient, car l'algorithme est écrit de telle sorte qu'il ne pourra converger vers un point où la matrice hessienne $\nabla^2 f$ n'est pas définie positive.

Dans un contexte numérique, on n'aura jamais $\nabla f(x^*) = 0$. Il s'agit donc de trouver un ε cohérent pour poser comme critère d'arrêt :

$$\| \nabla f(x_k) \| \leq \varepsilon \tag{3.29}$$

Précisons dans un premier temps le mode de calcul de $\nabla f(x)$. On utilise la méthode des différences finies. A l'ordre 2 non nul, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{f(x + h\, e_i) - f(x - h\, e_i)}{2h} + O(h^2) \tag{3.30}$$

A l'ordre 5 non nul, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{h}\left[\frac{4}{3}\left(f\left(x + \frac{h}{2} e_i\right) - f\left(x - \frac{h}{2} e_i\right)\right) - \frac{1}{6}\left(f(x + h\, e_i) - f(x - h\, e_i)\right)\right] + O(h^4)$$

Le calcul du gradient à l'ordre 5 nécessite donc l'évaluation de la fonction-coût en quatre point au lieu de 2 ce qui double le temps de calcul. Or il s'avère que les résultats obtenus avec les différences finies calculées à l'ordre 3 et 5 sont parfaitement identiques, donc on se contentera de l'ordre 3.

Or supposons que la fonction-coût soit calculée avec une précision relative η :

$$\left| f(x_{numérique}) - f(x_{analytique}) \right| \leq \eta \left| f(x_{analytique}) \right|$$

Alors le calcul du gradient par l'équation (3.30) n'a de sens que si

$$\left| f(x + h \cdot e_i) - f(x - h \cdot e_i) \right| \geq \eta \cdot f(x)$$

d'où

$$\frac{|f(x+h\cdot e_i)-f(x-h\cdot e_i)|}{2\cdot h} \geq \frac{\eta}{2\cdot h}|f(x)| \tag{3.31}$$

et

$$\|\nabla f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|f(x+h\cdot e_i)-f(x-h\cdot e_i)|}{2\cdot h}\right)^2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\frac{\eta}{h}|f(x)| \approx \frac{\eta}{h}|f(x)|$$

Le critère d'arrêt le plus restrictif que l'on puisse choisir, et que l'on choisit, est donc

$$\|\nabla f(x)\| \leq \frac{\eta}{h}|f(x)| \tag{3.32}$$

On peut éventuellement lui appliquer un facteur de sécurité.

Comme dans tout algorithme itératif, on pose aussi une condition sur la différence entre la solution obtenue à la dernière itération et celle obtenue à l'itération précédente, i.e., une condition du type :

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon \|x_k\|$$

qui se traduit ici par

$$t_k \|s_k\| \leq \varepsilon \|x_k\| \tag{3.33}$$

Précision de l'évaluation de la fonction-coût

L'évaluation de la fonction-coût est soumise à deux types d'approximations. En premier lieu,

les intégrales qui entrent en jeu sont calculées à l'aide d'une méthode numérique, l'intégration de Romberg, et non analytiquement. En second lieu, lors d'un calcul en incompressibilité, la contrainte est remplacée par la résolution en d (longueur de la projection de la poutre) de l'équation suivante :

$$\int_0^d \sqrt{1+w'^2(x)}\,dx - \int_0^{d_0} \sqrt{1+w_0'^2(x)}\,dx = 0 \qquad (3.34)$$

Or cette résolution, qui consiste en une recherche de racine, est également effectuée à l'aide d'une méthode numérique, la méthode de Brent. De plus, dans ce dernier cas, les deux approximations sont imbriquées puisque d est obtenue par la résolution d'une équation comprenant des intégrales, puis est elle-même utilisée dans des calculs d'intégrales, comme par exemple celui de l'énergie de flexion :

$$U_{flexion} = \frac{EI}{2}\int_0^d \left(\frac{w''(x)}{\left(1+w'^2(x)\right)^{3/2}} - \frac{w_0''(x)}{\left(1+w_0'^2(x)\right)^{3/2}} \right)^2 \sqrt{1+w'^2(x)}dx \qquad (3.35)$$

Ainsi, dans le cas compressible, la seule approximation effectuée dans le calcul de la fonction-coût provient de l'intégration, et est parfaitement maîtrisable grâce à la méthode de Romberg. On a choisi comme compromis entre précision et temps de calcul l'incertitude ΔI sur le calcul de toute intégrale I :

$$\Delta I = 10^{-8} I$$

La précision relative théorique sur l'évaluation de la fonction-coût est alors 10^{-8}, et ce chiffre se vérifie numériquement.

En revanche, dans le cas incompressible, en gardant la même précision sur l'intégration et en cherchant pour l'équation (3.34) une solution d telle que

$$\int_0^d \sqrt{1+w'^2}\,dx = \left(1 \pm 10^{-8}\right)\int_0^{d_0} \sqrt{1+w_0'^2}\,dx$$

on constate que la précision finale de l'évaluation de la fonction-coût est largement inférieure aux espérances. La Figure 3.9 illustre ce fait, pour un cas de poutre encastrée à ses deux extrémités et flambée en compression avec une charge axiale $P = 1.01 * P_{cr}$. Pour n=5 points de krigeage, on fait varier l'ordonnée du point du milieu en gardant les autres fixes. On peut ainsi visualiser la projection de la fonction-coût sur un plan $w_1 = w_2 = w_4 = w_5 = constante$ à proximité du minimum, et ce pour une précision relative théorique de $10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-8}$ et 10^{-10}.

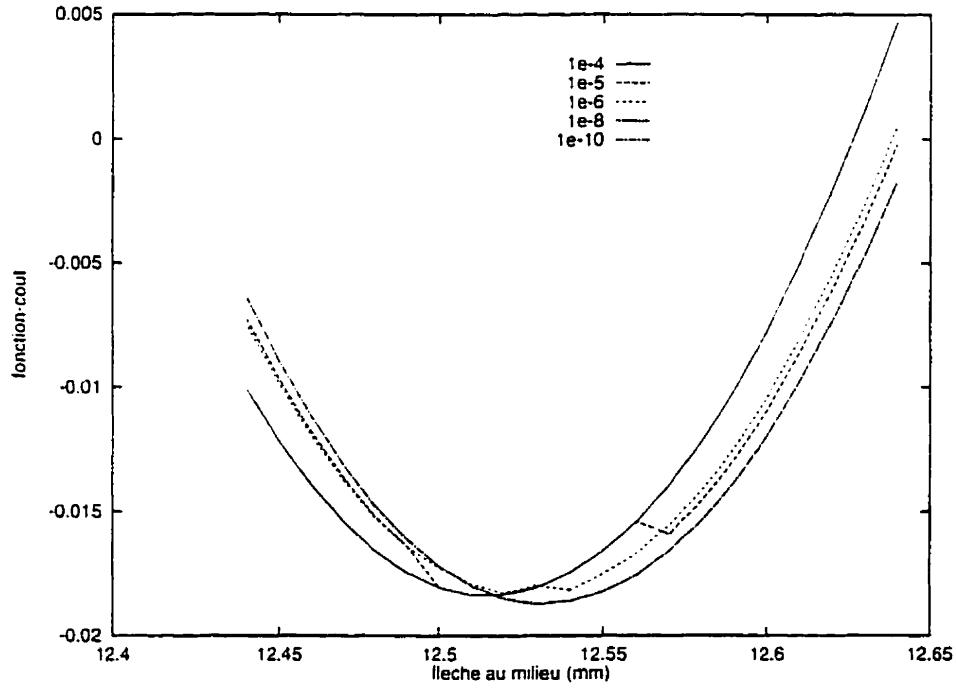


Figure 3.9 - Précision de l'évaluation de la fonction-coût

Il sera donc nécessaire, avant tout calcul en incompressibilité, d'évaluer la précision du calcul de la fonction-coût, afin de choisir un critère d'arrêt approprié pour l'algorithme d'optimisation.

Choix du pas des différences finies

Le choix du pas h de calcul des différences finies résulte également d'un compromis. D'une part on veut minimiser le résidu en $O(h^2)$ de l'équation (3.30), i.e., l'erreur due à l'approximation par différences finies, et à cette fin choisir h petit. D'autre part, h doit être tel que la différence finie ait un sens, et donc ne pas être trop petit. On revient ici à des considérations abordées lors de l'étude du critère d'arrêt, ce qui n'est en rien un hasard. Reprenons en effet le critère d'arrêt adopté pour le gradient de la fonction-coût. D'après l'équation (3.32), le critère d'arrêt acceptable le plus restrictif est :

$$\| \nabla f(x) \| \leq \frac{\eta}{h} |f(x)|$$

En d'autres termes, la précision η de l'évaluation de la fonction-coût étant fixée, si l'on veut pouvoir adopter un critère d'arrêt sur le gradient relativement exigeant, on doit choisir h grand. Rappelons que la précision de l'algorithme d'optimisation repose naturellement grandement sur la valeur du critère d'arrêt sur le gradient.

En général, avec une précision de l'évaluation de la fonction-coût $\eta = 10^{-8}$ on choisira $h = 10^{-3}$ et le critère d'arrêt

$$\| \nabla f(x) \| \leq 10^{-4} | f(x) |$$

Revenons au cas incompressible. Ne connaissant pas η, on peut avoir recours à la démarche inverse : choisir le critère d'arrêt, par exemple celui indiqué ci-dessus, et tracer la fonction-coût autour du minimum en fonction de l'ordonnée du point d'interpolation que l'on prend unique pour le krigeage. On est alors en mesure de voir à quelle échelle de h la courbe est régulière et une différence finie a du sens.

3.6 Validation de la méthode

La validation de la méthode se décompose en trois étapes. Dans un premier temps, nous allons considérer des cas élémentaires de compression et de flexion d'une poutre, résolus analytiquement grâce aux méthodes de la résistance des matériaux. Nous passerons ensuite au volet grands déplacements, et comparerons nos résultats numériques à la solution analytique du problème de l'élastique (cf. paragraphe 2.1.2). Nous aborderons ensuite le problème spécifique de stabilité pour lequel l'algorithme a été écrit : le flambement en *snap* d'une arche basse. Nous comparerons nos solutions numériques avec les solutions analytiques obtenues dans le cas particulier décrit au paragraphe 2.2.2.

Toutes les simulations numériques (sauf celle de la colonne sur fondations élastiques) sont effectuées pour une poutre possédant les caractéristiques suivantes :

longueur	$d_0 = 143.5\ mm$
largeur	$l = 12.0\ mm$
épaisseur	$e = 0.52\ mm$
module d'élasticité	$E = 200\ GPa$

3.6.1 Flexion et traction-compression en résistance des matériaux

Traction-compression d'une poutre

La déformation ε subie par une poutre en traction-compression est

$$\varepsilon = \frac{P}{AE}$$

avec P compté positivement en traction.

Dans la mesure où l'on s'intéresse à la compression de la poutre en-dehors de toute considération de stabilité, les $(w_i)_{1\le i\le n}$ restent nuls, et il est donc superflu de les considérer comme des variables. On choisit donc comme unique variable la longueur d de la poutre projetée, qui correspond ici à sa longueur réelle.

Les paramètres de l'algorithme d'optimisation sont fixés aux valeurs suivantes :

$$h = 10^{-3}$$
$$arrêt = 10^{-4}$$

En faisant varier la charge axiale P entre -100 N et 100 N, on trouve pour la déformation ε des valeurs égales aux valeurs théoriques à une précision relative de 10^{-12} près.

Flexion d'une poutre dans le domaine linéaire

Considérons une poutre incompressible sur rotules dont l'une des extrémités est sur rouleaux, telle que celle représentée ci-dessous. Une force ponctuelle Q comptée positivement vers le bas est appliquée au milieu de la poutre.

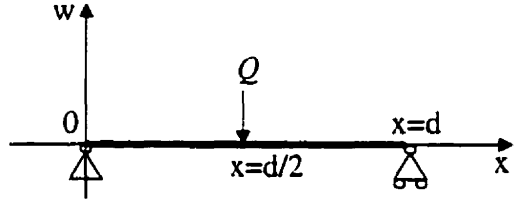


Figure 3.10 - Poutre en flexion

Les équations de la résistance des matériaux donnent la flèche au milieu de la poutre en fonction de la charge dans le domaine linéaire, i.e., pour $w'^2 << 1$:

$$w(d/2) = -\frac{Q \cdot d_0^3}{48EI}$$

La simulation numérique est effectuée pour n=1, 3 et 5 points de krigeage, avec les mêmes paramètres de l'algorithme d'optimisation que dans l'étude de la compression. Les résultats sont illustrés à la Figure 3.11.

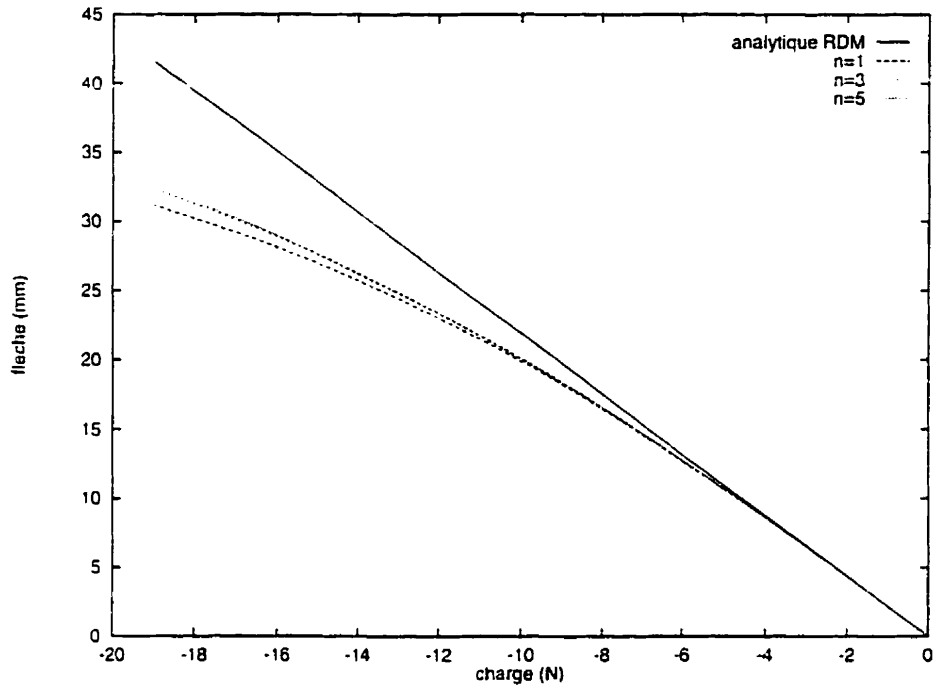


Figure 3.11 - Flexion d'une poutre

On observe que les résultats numériques concordent parfaitement avec la solution analytique pour une flèche faible, i.e., dans le domaine linéaire. Pour Q=-1N, le rapport flèche sur longueur étant de l'ordre de 1%, on est bien dans le domaine linéaire. L'erreur relative sur le calcul de la flèche est alors de 0.1% avec n=1, 3 et 5.

En-dehors de la zone linéaire, la courbe analytique n'est plus valable et la comparaison n'entre donc pas dans le cadre de la validation. On peut cependant noter deux faits intéressants. D'une part, les courbes correspondant à n=3 et n=5 sont beaucoup plus rapprochées que celles correspondant à n=1 et n=3. Il semble donc que la méthode soit convergeante. D'autre part, comme évoqué au paragraphe 1.4.1, la modélisation de la ligne élastique par une courbe krigée introduit une rigidité artificielle, que l'on réduit en

augmentant le nombre de points de krigeage, i.e., en augmentant le nombre de degrés de liberté de la poutre. Il est donc correct que, pour une charge Q donnée, on trouve des flèches correspondant à n=1, 3 et 5 telles que

$$w_{n=1} \leq w_{n=3} \leq w_{n=5}$$

L'évaluation de la fonction-coût pour une poutre sans flèche initiale et dans le domaine des petits déplacements ainsi que l'algorithme d'optimisation sont donc validés, aussi bien dans le cas compressible qu'incompressible.

3.6.2 L'élastique

Le calcul en grands déplacements de la relation charge-flèche d'une colonne soumise à une force de compression axiale, i.e., le problème de l'élastique, a été présenté au paragraphe 2.1.2. Nous considérerons ici deux cas : celui d'une colonne sur rotules (cf. Figure 3.12), ainsi que celui d'une colonne encastrée aux deux extrémités (cf. Figure 3.13). Dans les deux cas, l'extrémité en $x = d$ est sur rouleaux.

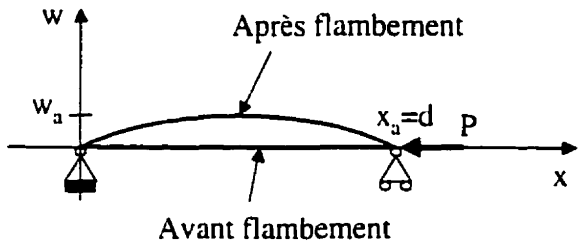


Figure 3.12 - Flambement d'une colonne sur rotules

Comme expliqué précédemment, ces deux problèmes se ramènent à celui présenté au paragraphe 2.1.2. Si l'on considère les colonnes comme incompressibles, les solutions analytique sont données au Tableau 3.1 :

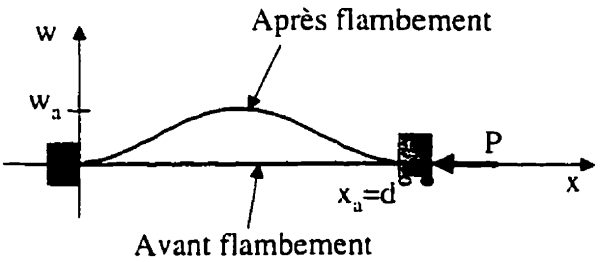


Figure 3.13 - Flambement d'une colonne encastrée

Tableau 3.1 - Formules de l'élastique

	Rotules	**Encastrement**
x_a	$\frac{4}{k}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-p^2\sin(\varphi)^2 d\varphi}-1$	$\frac{8}{k}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-p^2\sin(\varphi)^2 d\varphi}-1$
w_a	$\frac{2p}{k}$	$\frac{4p}{k}$
où p est défini implicitement par	$\frac{d_0}{2}=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2 sin(\varphi)^2}}$	$\frac{d_0}{4}=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-p^2 sin(\varphi)^2}}$

k est défini par

$$k^2=\frac{P}{EI}$$

On peut ainsi comparer les résultats numériques avec n=1, 3, 5 et 7 points de contrôle pour le krigeage. Ils sont présentés sur la Figure 3.14 et la Figure 3.15. L'axe des abscisses correspond au rapport entre la flèche w_a et la longueur $d=d_0$ de la barre. L'axe des ordonnées correspond au rapport entre la charge axiale P et la charge axiale théorique de flambement P_{cr} (ou charge d'Euler). Rappelons que celle-ci s'exprime de la manière suivante :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad \textit{Colonne sur rotules}$$

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \qquad \textit{Colonne encastrée}$$

On trouve que pour n=1, la courbe numérique est assez éloignée de la courbe analytique, et en particulier que la charge de flambement est supérieure à la charge critique théorique. Ceci est normal puisque le fait d'adopter une forme inexacte, quoique réaliste, pour la déformée de la poutre revient à augmenter artificiellement sa rigidité. Quand n augmente, la courbe numérique se rapproche de la courbe analytique. Pour n=5, on a une très grande précision jusqu'à $P = 1.05 * P_{cr}$, ce qui représente déjà une flèche de grande valeur, environ égale à 22% de la longueur totale de la poutre. Dans le cas de la colonne encastrée, notons qu'on obtient pour n=3 une courbe confondue avec celle correspondant à n=1. Ceci tient à la géométrie particulière de la poutre encastrée. En effet, on aura toujours

$$w(d/4) = \frac{1}{2} w(d/2)$$

donc on ne rajoute pas de degré de liberté effectif en passant de n=1 à n=3.

Les calculs illustrés ici ont été effectués pour une colonne incompressible, mais on obtient des courbes parfaitement confondues en effectuant le calcul en compressible. L'hypothèse d'incompressibilité est donc bien justifiée.

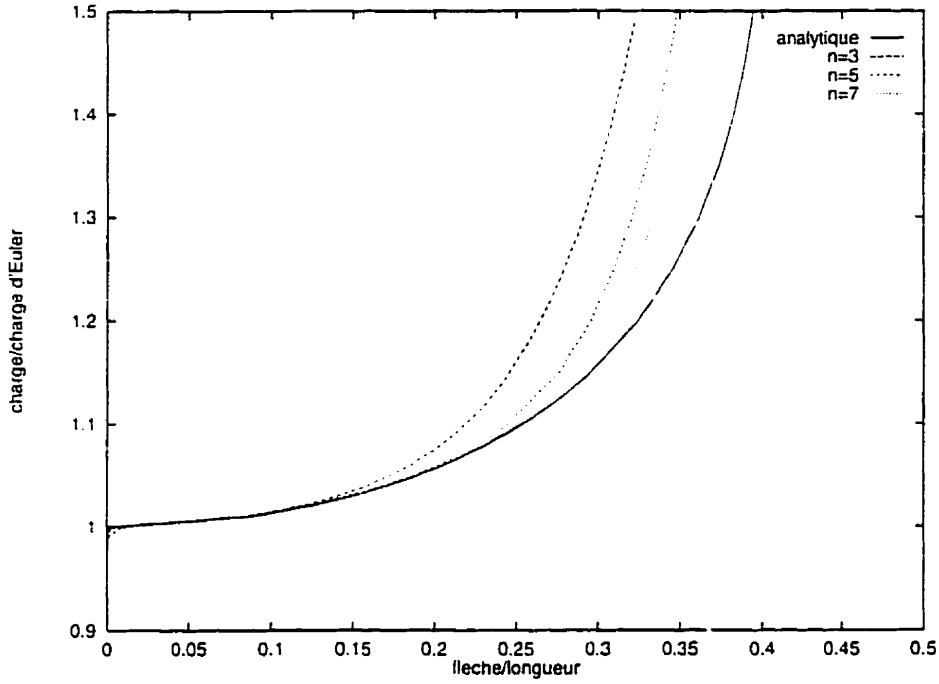


Figure 3.14 - L'élastique, colonne sur rotules

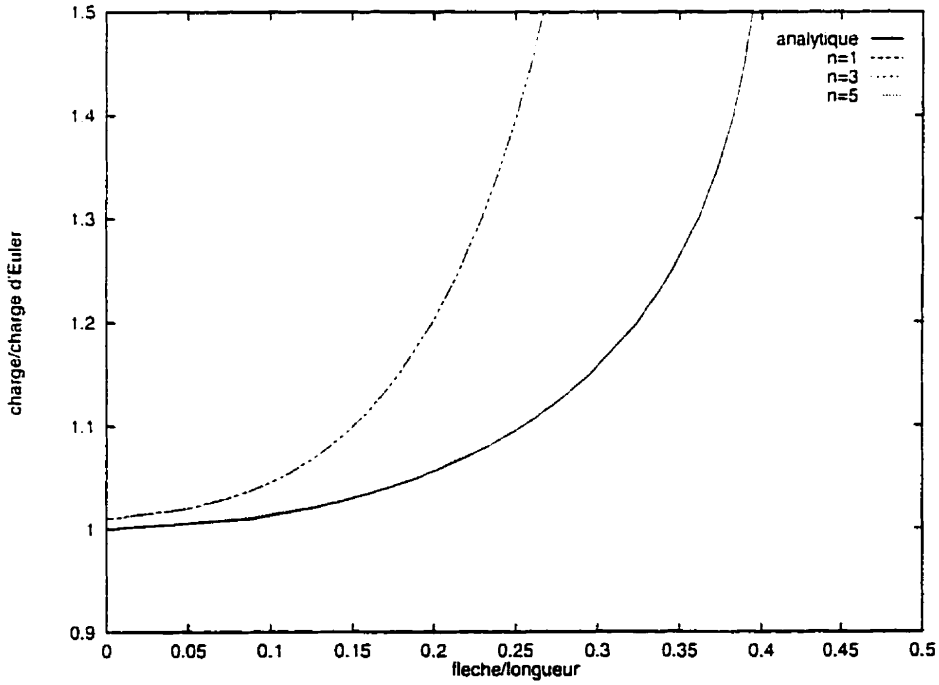


Figure 3.15 - L'élastique, colonne encastrée

3.6.3 Flambement en snap d'une arche chargée latéralement

Nous abordons maintenant l'étape essentielle de la validation de l'algorithme : l'étude du flambement en *snap* d'une arche chargée latéralement. Nous nous restreindrons au cas de l'arche basse, et prendrons comme référence les résultats analytiques de Fung et Kaplan [7], présentés au paragraphe 2.2.2 et utilisés au chapitre 2. Toutes les arches considérées dans les calculs numériques possèdent les caractéristiques géométriques données au début du paragraphe 3.5. On doit de plus spécifier la valeur de la flèche initiale de l'arche.

Considérons une arche basse compressible sur rotules et fixée aux deux extrémités, telle que celle représentée à la Figure 3.16. On ne lui applique aucune contrainte axiale initiale. En l'absence de charge latérale, sa ligne élastique est donnée par :

$$w(x) = a \cdot sin\left(\frac{\pi x}{d_0}\right)$$

Elle est chargée latéralement par une force ponctuelle appliquée en son milieu, comptée positivement vers le bas.

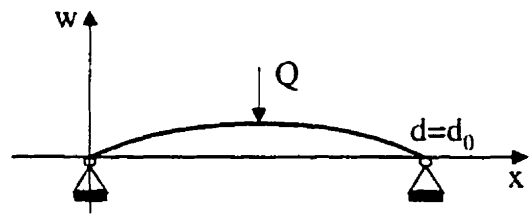


Figure 3.16 - Arche basse

Nous utilisons les notations et reprenons les résultats obtenus au paragraphe 1.3.3, avec $S = 0$ et $\beta = 1$.

Tableau 3.2 - Modes de flambement et charges critiques

$\lambda \leq 1$	$1 \leq \lambda \leq \sqrt{5.5}$	$\lambda \geq \sqrt{5.5}$
Pas de flambement, l'arche fléchit continûment	Flambement symétrique	Flambement asymétrique
	$R_{cr} = \frac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\frac{4}{27}\left(\lambda^2 - 1\right)^3}\right)$	$R_{cr} = \frac{1}{2}\left(\lambda + 3\sqrt{\lambda^2 - 4}\right)$

Le Tableau 3.2 résume les modes de flambement ainsi que les charges critiques - dans le sens "flèche positive vers flèche négative" - correspondant aux différentes valeurs de λ, i.e., du rapport entre la flèche initiale et l'épaisseur de l'arche.

Arche très basse $(\lambda \leq 1)$

Prenons pour flèche initiale $a = 0.002 * d_0$, ce qui équivaut à $\lambda = 0.95$. La simulation numérique est menée avec n=5. La flèche au milieu de l'arche est tracée en fonction de la charge latérale à la Figure 3.17.

On trouve bien que la flèche varie continûment avec la charge latérale, jusque dans la zone des flèches négatives. Il n'y a pas de phénomène de *snap*.

Arche basse $\left(1 \leq \lambda \leq \sqrt{5.5}\right)$

Prenons pour flèche initiale $a = 0.004 * d_0$, ce qui équivaut à $\lambda = 1.91$. La simulation numérique est menée avec n=5. La flèche au milieu de l'arche est tracée en fonction de la charge latérale à la Figure 3.18. Le flambement est à point limite comme attendu. On trouve une charge de flambement telle que :

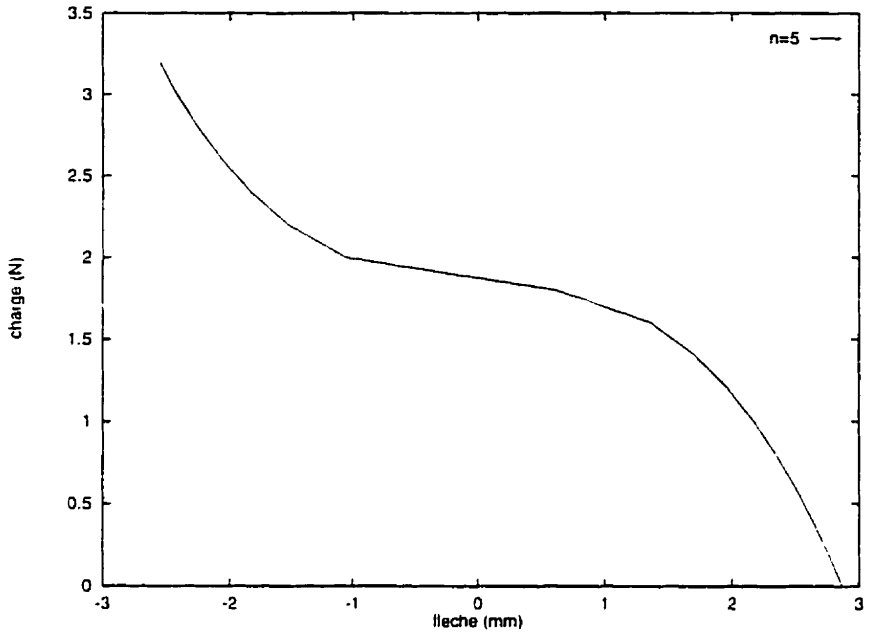


Figure 3.17 - Relation flèche-charge latérale pour $\lambda = 0.95$

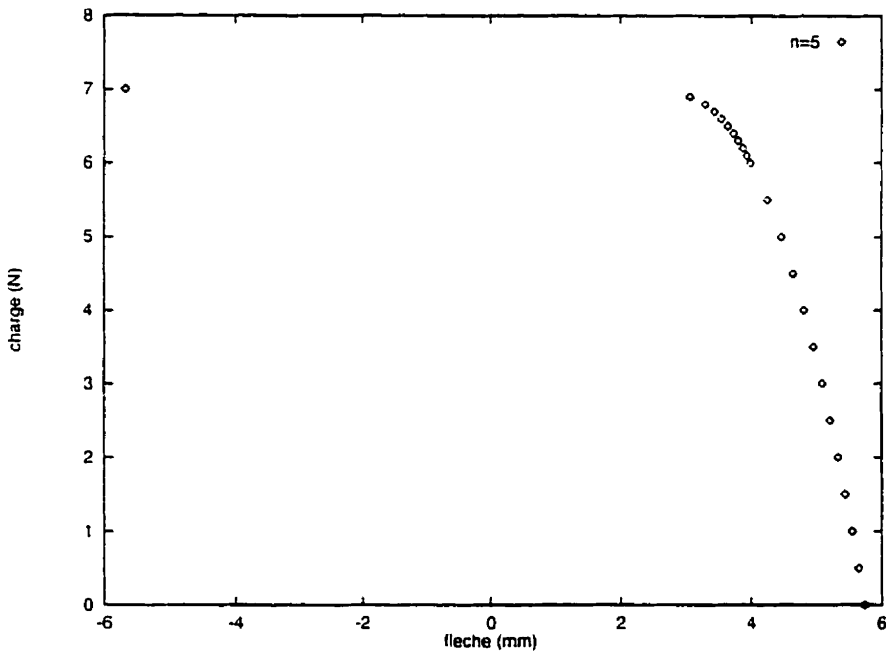


Figure 3.18 - Relation flèche-charge latérale pour $\lambda = 1.91$

$$6.9N \leq Q_{flambement} \leq 7.0N$$

ce qui correspond parfaitement à la charge critique analytique :

$$Q_{critique} = 6.93N$$

<u>Arche intermédiaire</u> $\left(\lambda \geq \sqrt{5.5}\right)$

Prenons pour flèche initiale $a = 0.05 * d_0 = 7.17mm$, ce qui équivaut à $\lambda = 23.9$. En théorie, le flambement est asymétrique puisque la charge de flambement asymétrique $\left(Q_{asymétrique} = d_0 * 92.4\ N\right)$ est de très loin inférieure à la charge de flambement symétrique $\left(Q_{symétrique} = d_0 * 5104\ N\right)$. Une première simulation avec n=1 a permis d'obtenir la courbe avec point limite tracée à la Figure 3.19. Les points correspondant à l'état d'équilibre instable sont obtenus en minimisant l'opposé de l'énergie totale.

Il est tout-à-fait naturel que l'on ne rencontre pas de point de bifurcation en ne prenant qu'un seul point de krigeage, puisque la courbe krigée sera nécessairement symétrique. On ne laisse tout simplement pas assez de degrés de liberté au système pour faire apparaître le comportement asymétrique. Notons cependant que la charge de flambement symétrique correspondant au point limite $\left(d_0 * 4900\ N \leq Q_{flambement} \leq d_0 * 5000\ N\right)$ est très proche de la charge critique symétrique théorique $\left(Q_{symétrique} = d_0 * 5104\ N\right)$. Il est donc impératif de considérer au moins deux points de krigeage le long de la ligne élastique de l'arche, si l'on souhaite être en mesure d'observer un comportement asymétrique.

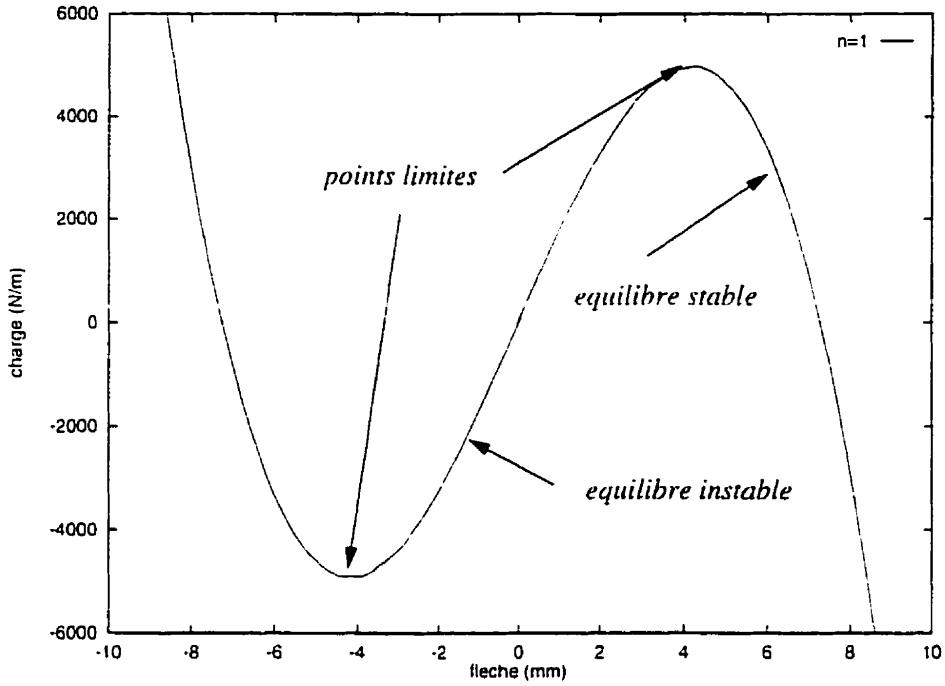


Figure 3.19 - Relation flèche-charge latérale pour $\lambda = 23.9$, n=1

Si l'on prend n=2 points de krigeage (également espacés sur la ligne élastique de l'arche), on peut visualiser les différents états d'équilibre du système grâce au réseau d'isovaleurs de l'énergie totale. Cette approche est particulièrement éclairante pour la compréhension du flambement avec point de bifurcation. Une isovaleur est une courbe de l'espace (w_1, w_2) sur laquelle l'énergie totale est constante. Les isovaleurs sont obtenus simplement par évaluation de l'énergie totale, sans optimisation.

Pour une charge latérale nulle, on obtient le réseau d'isovaleurs tracé aux Figure 3.20 et 3.21. Les différents points d'équilibre - repérés grâce à ces figures - sont reportés sur la Figure 3.22. Celle-ci permet de faire le lien entre les informations issues des isovaleurs et la courbe flèche-charge. Notons qu'à des fins de lisibilité, le point de bifurcation a été placé sur la Figure 3.22 au point correspondant à une charge de 1000 *N/m* au lieu des 94.5 *N/m* que l'on trouve lors de la simulation numérique (cf. suite du paragraphe).

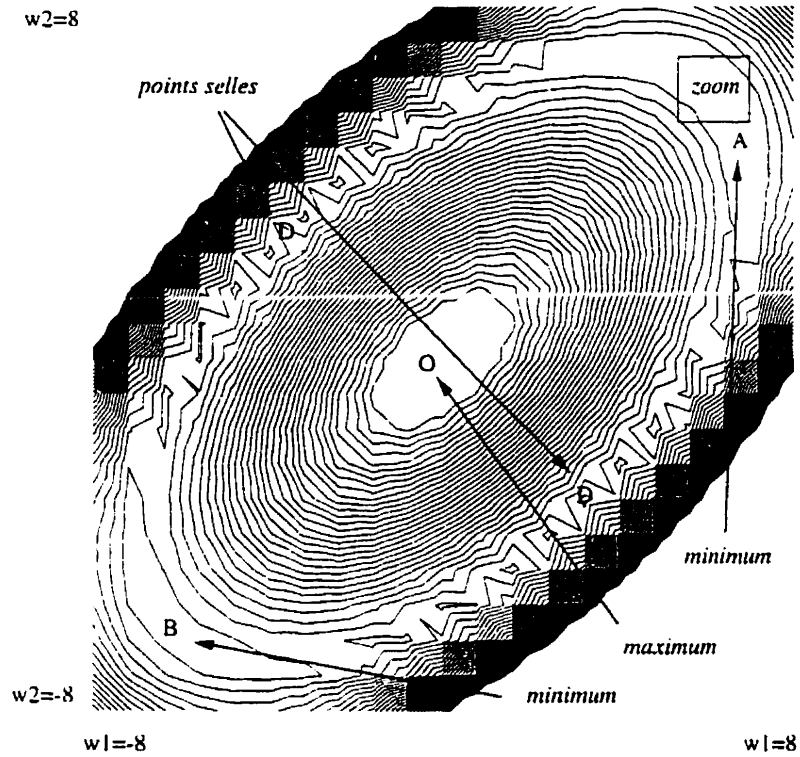


Figure 3.20 - Isovaleurs de l'énergie totale en l'absence de charge latérale

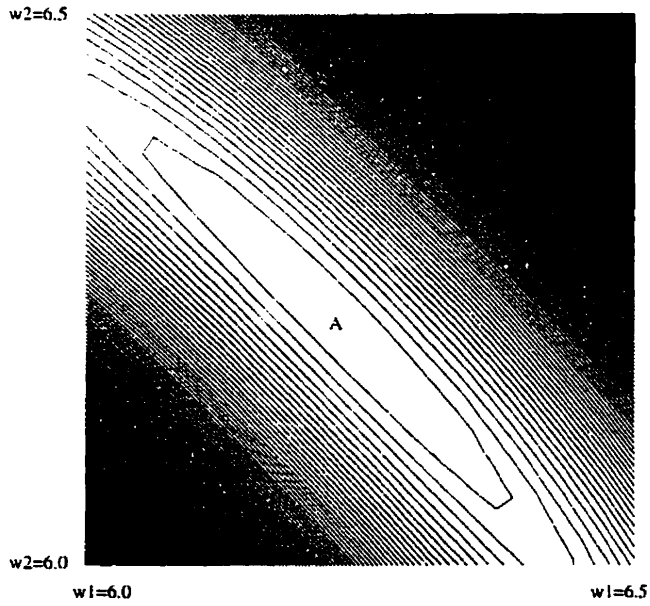


Figure 3.21 - Isovaleurs de l'énergie totale en l'absence de charge latérale, agrandissement

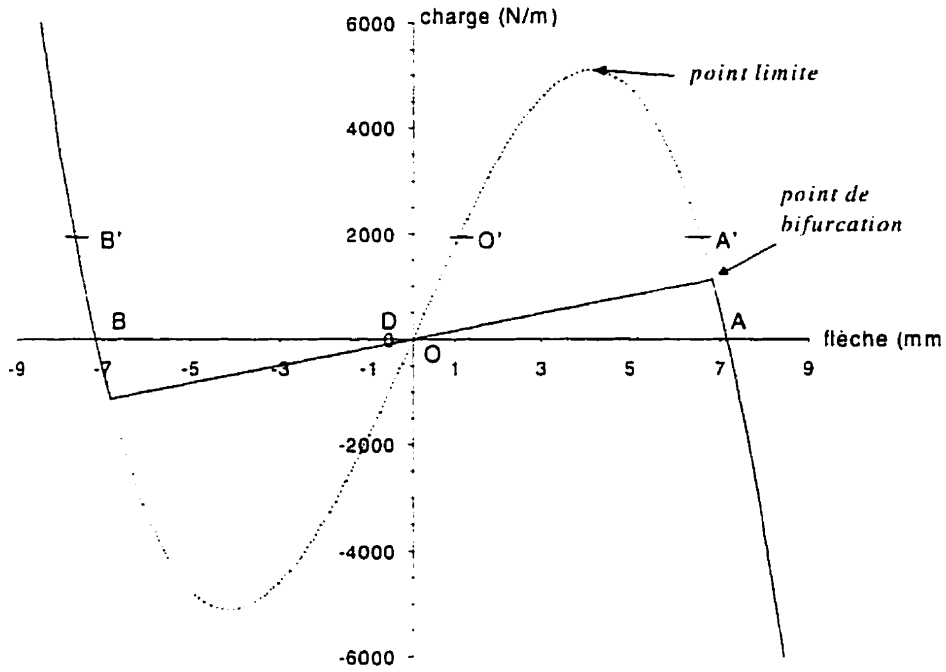


Figure 3.22 – Charge en fonction de la flèche au milieu de l'arche

On observe sur la Figure 3.20 la présence de deux minima aux alentours de $A(6.2,6.2)$ et $B(-6.2,-6.2)$, ainsi que d'un maximum en $O(0,0)$. La Figure 3.21 est un agrandissement d'un voisinage du point $A(6.2,6.2)$, et confirme le fait qu'il s'agisse d'un minimum. Le point A correspond à la forme initiale de l'arche, naturellement stable. Le point B correspond à la configuration de l'arche avec la courbure inversée, que l'arche peut donc maintenir en l'absence de forces extérieures autres que la réaction des rotules. Le maximum en O correspond à l'état d'équilibre instable où l'arche est totalement aplatie. Il confirme le fait que la portion de courbe entre les deux points limites (cf. Figure 3.22) correspond à des états d'équilibre instable. Les points A, B et O sont sur le chemin d'équilibre fondamental. Deux points selles aux environs de $(4,-4)$ et $(-4,4)$ (qui correspondent à une même valeur de la flèche au milieu de l'arche et donc au même point D, ici confondu avec O, de la Figure 3.22), représentent les points d'équilibre instable du chemin d'équilibre secondaire.

Observons maintenant les isovaleurs de la Figure 3.23 tracées pour une charge latérale $Q = d_0 * 2000\,N$, comprise entre le point de bifurcation et le point limite théoriques. Le minimum autour de $(-6.2,-6.2)$ - en B' - est toujours présent quoique décalé vers des valeurs plus petites (ce qui est normal puisque l'on applique une charge latérale positive). Il en est de même du maximum proche de $(0,0)$ - en O' - décalé, lui, vers des valeurs positives. En revanche, le minimum proche de $(6.2,6.2)$, en A' - semble s'être transformé en un point selle, ce qui est confirmé par l'agrandissement (cf. Figure 3.24). Il ne correspond plus à un état d'équilibre stable, et il n'existe plus d'état d'équilibre stable dans le domaine des flèches positives. On est bien au-delà du point de bifurcation. Le point de bifurcation correspond donc au moment où les deux points selles de la Figure 3.20 se rejoignent et se superposent à la place du point limite.

Une simulation numérique menée avec n=7 donne la charge critique plus précisément qu'avec n=2. On trouve $Q_{flambement} = d_0 * 94.5\,N$, ce qui ne diffère que de 2% du résultat analytique.

Notons qu'il est nécessaire, pour obtenir numériquement le point de bifurcation asymétrique sans calculer le déterminant de la matrice hessienne, de désymétriser légèrement le problème. En effet, si les points de krigeage sont parfaitement symétriques et que le point de départ de l'algorithme l'est également, on élimine toutes les configurations autres que celles respectant cette symétrie.

Ainsi, pour n=2, on reste sur l'axe $w_1 = w_2$ (cf. Figure 3.24) et l'algorithme converge vers le minimum de l'axe $w_1 = w_2$, bien que celui-ci ne soit qu'un point selle dans le plan (w_1, w_2).

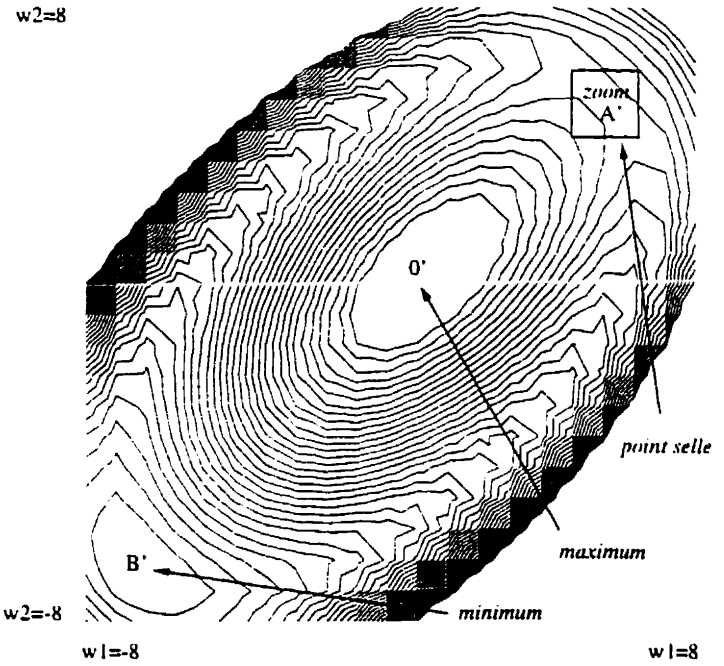


Figure 3.23 - Isovaleurs de l'énergie totale avec une charge latérale $Q = d_0 * 2000\ N$

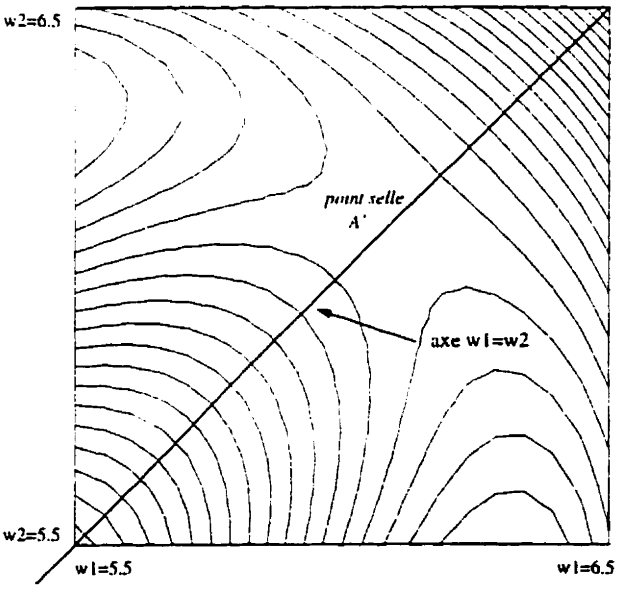


Figure 3.24 - Isovaleurs de l'énergie totale avec une charge latérale $Q = d_0 * 2000\ N$, agrandissement

Notons par ailleurs que la solution analytique est obtenue en linéarisant les équations, alors que les calculs présentés ici sont non-linéaires. Un calcul complémentaire linéarisé permettrait d'effectuer une comparaison plus précise entre l'algorithme et la solution analytique.

L'algorithme permet donc de repérer aussi bien les points limites que les points de bifurcation, et ainsi de traiter le cas des arches de toutes hauteurs. Il donne de plus, grâce à sa formulation énergétique très "physique", une vision claire de ce qu'est un point critique.

L'algorithme est désormais validé dans le domaine élastique et l'application au cas des AMF peut être effectuée.

3.7 Application au calcul du flambement en snap d'arches en AMF

3.7.1 Cas d'une arche sinusoïdale

Les méthodes numérique et analytique vont être comparées dans un cas où cette dernière est valide : une arche basse sinusoïdale sur rotules et reposant sur un appui axial élastique est soumise à une charge latérale sinusoïdale. On cherche pour quelle valeur du module d'Young la position avec courbure inversée cesse d'être stable pour une charge latérale nulle. Le système présente les caractéristiques suivantes (les notations sont celles du chapitre 2) :

$$d = 25{,}4.10^{-3}\ m$$
$$I = 2{,}52.10^{-15}\ m^4$$
$$A = 9{,}36.10^{-7} m^2$$
$$\alpha = 3{,}40.10^6 N/m$$
$$S = 0$$
$$E_{BT} = 15.10^9 Pa$$

Arche basse

Considérons en premier lieu une arche de flèche $a = 0{,}255.10^{-3} m$, i.e., de hauteur réduite $\lambda = 2.46$. Cette arche correspond au cas 2 du paragraphe 2.4. La simulation numérique a été menée avec $n = 1$ et $n = 3$ points d'interpolation - autres que ceux traduisant les conditions aux limites - répartis régulièrement sur la ligne élastique comme représenté à la Figure 3.25.

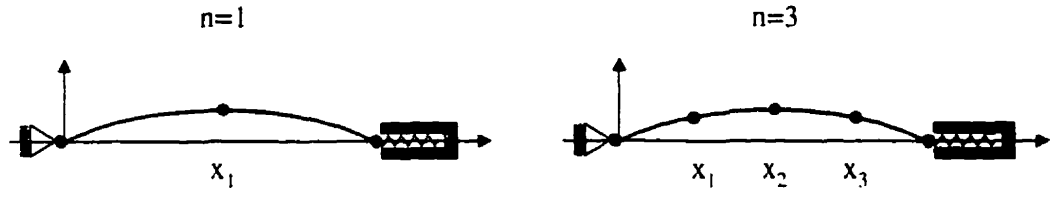


Figure 3.25 – Choix des points d'interpolation

Rappelons que la charge réduite R est liée à la charge q_0 par la relation :

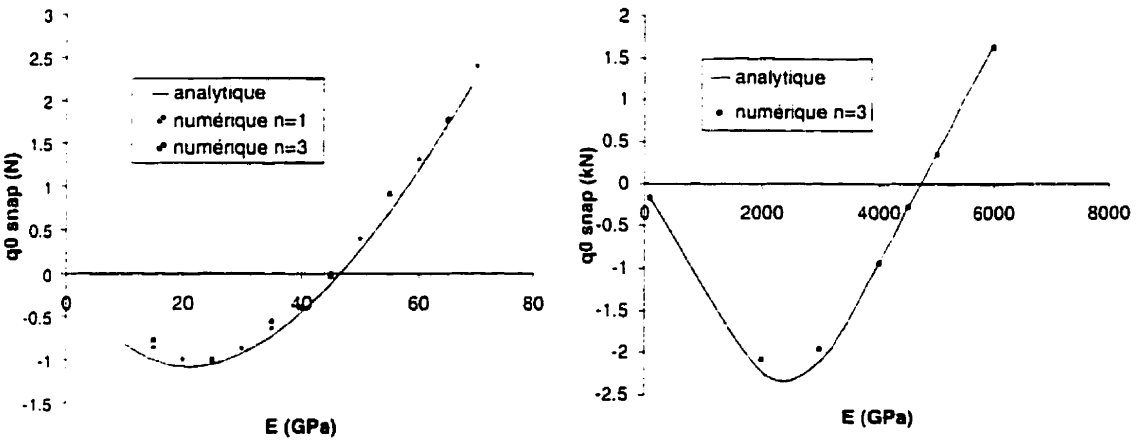
$$R = \frac{q_0 L^4}{2\pi^4 EI}\sqrt{\frac{A}{I}}$$

La charge critique $q_{0\,snap}$ - correspondant à R_2 - de flambement dans le sens "flèche négative vers flèche positive" est tracée en fonction du module d'Young E à la Figure 3.26-a, d'après l'étude analytique et les simulations numériques. On constate que l'approximation avec $n = 1$ est aussi bonne que celle avec $n = 3$. De plus, le flambement est symétrique dans toute la gamme de modules d'Young considérée, donc trois points suffisent à modéliser l'ensemble des lignes élastiques possibles.

Le module d'Young critique - correspondant à $q_{0\,snap} = 0$ - obtenu analytiquement grâce à (2.3) et numériquement avec $n = 1$, est :

$$E_{critique\ analytique} = 46{,}6\,GPa$$
$$E_{critique\ numérique} = 46{,}1\,GPa$$

L'écart est d'environ 1%. Cette valeur du module d'Young correspond bien à la plage balayée lors de la transformation martensitique inverse d'un AMF. C'est donc dans cette gamme de hauteurs qu'il faut prévoir l'arche AMF de l'actuateur.



a) $\lambda = 2.46$ b) $\lambda = 14.45$

Figure 3.26 - Comparaison des méthodes analytique et numérique

Arche intermédiaire

Une deuxième simulation a été menée avec une flèche $a = 1{,}5.10^{-3}\,m$, ce qui correspond à $\lambda = 14.45$ et donc au cas 3 du Tableau 2.1. Avec $E = 15\,GPa$, le flambement est asymétrique. Cependant, on observe que, conformément à la théorie présentée au chapitre 2, le flambement devient symétrique avant d'atteindre le module d'Young critique. La charge critique $q_{0\,snap}$ est tracée en fonction du module d'Young à la Figure 3.26-b.

Les modules d'Young critiques obtenus analytiquement et numériquement sont :

$$E_{critique\ analytique} = 4{,}71.10^3\ GPa$$
$$E_{critique\ numérique} = 4{,}73.10^3\ GPa$$

soit un écart d'environ 0.5%. Cette valeur du module d'Young est de très loin supérieure à celle qu'est susceptible d'atteindre un AMF. L'arche AMF de l'actuateur doit donc être beaucoup plus basse que celle envisagée ici.

La méthode numérique fournit donc des résultats en très bon accord avec le modèle analytique, dans le cas d'une arche sinusoïdale sur rotules. Elle peut donc être appliquée à un cas que le modèle analytique ne permet pas de traiter, et qui présente néanmoins un grand intérêt du point de vue de l'application industrielle : le cas d'une arche encastrée.

3.7.2 Cas d'une arche encastrée

Considérons une arche encastrée d'équation :

$$w(x) = \frac{a}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\right]$$

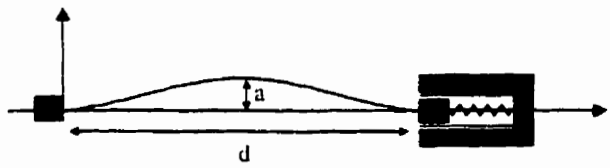


Figure 3.27 - Arche encastrée

et possédant les mêmes caractéristiques géométriques que l'arche sinusoïdale étudiée précédemment. Elle est représentée à la Figure 3.27.

Les courbes donnant la charge critique $q_{0\,snap}$ en fonction de la hauteur réduite de l'arche, pour l'arche encastrée et une arche sinusoïdale sur rotules, sont tracées à la Figure 3.28. Les fondations sont dans un premier temps considérées comme rigides.

On observe que l'arche encastrée doit être prise beaucoup plus haute que l'arche sur rotules si l'on souhaite que l'état d'équilibre avec la courbure inversée pour une charge latérale nulle soit stable (étape b) de l'actuation, cf. paragraphe 2.4.3), i.e., que $q_{0\,snap}$ soit négatif. Ceci s'explique par la présence de moments de rappels au niveau des encastrements.

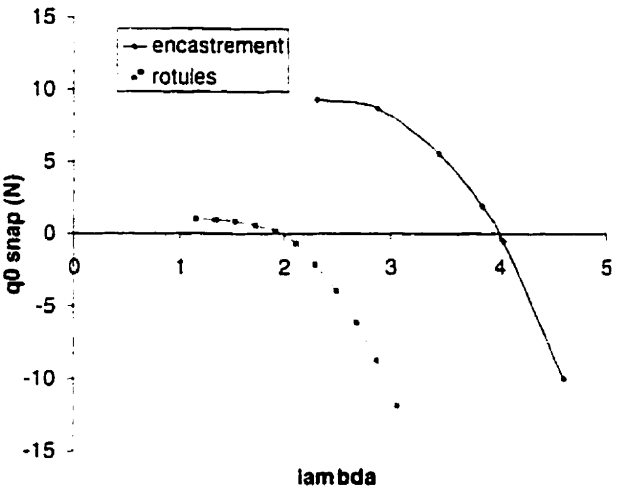


Figure 3.28 - Relation hauteur réduite-charge critique pour des arches sur rotules et encastrée

Prenons donc $a = 1{,}5.10^{-3} m$, i.e., $\lambda = 14.45$, comme pour la deuxième arche sinusoïdale étudiée. Le module d'Young critique obtenu numériquement est :

$$E_{critique\ numérique} = 210\,GPa$$

Il diffère largement – d'un facteur 20 - de celui obtenu au paragraphe 3.7.1 pour une arche sinusoïdale sur rotules de même hauteur. Par ailleurs, le flambement est asymétrique,

contrairement au cas de l'arche sur rotules. La forme de l'arche et les conditions aux limites ont donc une influence très importante sur le flambement de l'arche et en particulier sur le module d'Young critique.

3.8 Conclusion

Une méthode numérique adaptée aux calculs de stabilité des arches et des poutres élastiques a été présentée et validée grâce à des solutions analytiques. Elle permet en particulier de traiter le flambement en *snap* d'une arche chargée latéralement, quels que soient sa ligne élastique, ses conditions aux limites, et le mode de chargement. L'application au cas des AMF a montré une très bonne adéquation entre les résultats numériques et les résultats obtenus grâce au modèle analytique du chapitre 2. L'étude a donc pu être étendue à des arches non sinusoïdales, et possédant d'autres conditions aux limites que des rotules. Il s'avère que le flambement en *snap* provoqué par la rigidification du matériau peut également avoir lieu pour une arche AMF encastrée.

CONCLUSION

Une revue bibliographique approfondie a permis d'identifier les concepts propres à décrire les phénomènes d'instabilité dans les structures ainsi que les différentes méthodes utilisées pour leur modélisation. Ces outils de base ont ainsi pu être utilisés pour l'étude d'un actuateur AMF à action rapide, dont le fonctionnement repose sur le flambement en *snap* d'une arche basse.

En modélisant le comportement des AMF dans le domaine élastique par une évolution du module d'Young en fonction de la température, le flambement en *snap* d'une arche basse sinusoïdale en AMF provoqué par l'effet mémoire de forme a été mis en évidence analytiquement. Il s'explique par la rigidification du matériau occasionnée par la transformation martensitique inverse. Des conditions explicites portant sur la hauteur de l'arche ont été obtenues, et constituent une première étape de la conception d'un actuateur à action rapide contrôlé par la température. Une brève étude expérimentale a confirmé l'occurrence des phénomènes identifiés dans le modèle analytique, et validé le principe d'actuateur AMF à action rapide. Elle a également montré la nécessité de mettre au point un traitement thermique spécifique à cette application des AMF.

Un code de calcul numérique a été présenté afin d'étendre le domaine d'investigation à des arches possédant une géométrie et des conditions aux limites quelconques. Le code de calcul a été validé par la comparaison avec des solutions analytiques de la littérature, ainsi qu'avec le modèle analytique de flambement en *snap* d'une arche AMF sinusoïdale. Il a été appliqué au cas d'une arche encastrée, plus réaliste dans l'optique d'un design industriel.

Afin de prolonger ce travail, il est dans un premier temps nécessaire de mettre en place un banc d'essais expérimental permettant d'effectuer une comparaison quantitative avec les solutions analytiques et les simulations numériques. Dans un deuxième temps, si

l'adéquation entre les observations expérimentales et les résultats numériques n'est pas satisfaisante, il sera nécessaire de modifier le modèle par la prise en compte de la non-linéarité de la loi de comportement des AMF, en utilisant un code d'éléments finis non linéaires par exemple.

RÉFÉRENCES

[1] ASHWELL D. G (1962). Non-linear problems: buckling of low arches or slightly curved beams, Handbook of engineering mechanics, Mc Graw-Hill.

[2] BAZANT, Z. P. , CEDOLIN, L. (1991). Stability of Structures : Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, Oxford University Press.

[3] BAZERGUI, A. , BUI-QUOC, T. , BIRON, A. , McINTYRE, G. , LABERGE, C. (1993). Résistance des Matériaux, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal.

[4] CHEN, C.-N.(1996), A finite element study of bifurcation and limit point buckling of elastic-plastic arches.

[5] FAN., S., WAGENHUBER, W., KROPLIN, B., GEIER, B. (1989). A strategy for postbuckling structural analysis, AIAA.

[6] FRANCIOSI, V., AUGUSTI, G., SPARACIO, R. (1964). Collapse of arches under repeated loading, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 90, No. STI, Part 1, Proc. Paper 3803, p. 165-201.

[7] FUNG, Y. C. , KAPLAN, A. (Nov. 1952). Buckling of low arches or curved beams of small curvatures, NACA TN 2840.

[8] GJELSVIK, A. , and BODNER, S. R. (1962). The Energy Criterion and Snap Buckling of Arches, J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 88, EM5, p. 87.

[9] GO, J.S., CHO, Y.-H., KWAK, B.M. (1995). Acceleration microswitches with adjustable snapping threshold, Proc. 8th International Conference on Solid-State sensors and Actuators, and Eurosensors IX, Stockholm, pp. 691-694.

[10] HEIKENSCHLOSS, M. (1998), Introduction to Optimization Techniques, Optimal Design and MDO, CERCA

[11] HOFF, N J, and BRUCE, V. J. (1954). Dynamic Analysis of the Buckling of Laterally Loaded Flat Arches, J. Math. and Phys. , Vol. XXXII, No. 4.

[12] KAWASHIMA, K., ITO, T. (1989). Snap-through buckling of arches in the elasto-plastic range, AIAA.

[13] KHUSAINOV, M.A., MALUKHINA, O.A., BELYAKOV, V.N., LETENKOV, O.V. (1997). Investigation of resistance of alloy spherical sheaths with shape memory effect, Proc. 2nd International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, pp. 215-219.

[14] LAGRANGE, J. L. (1788). Mécanique Analytique, Courier, Paris.

[15] LARROUTUROU, B. , LIONS, P. L. (1996). Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur : optimisation et analyse numérique, Ecole Polytechnique.

[16] LEE, L.H.N., MURPHY, L.M. (Fev. 1968). Inelastic Buckling of Shallow Arches, J. Eng. Mech. Div. , ASCE, EM1, pp. 225-239.

[17] LIAPUNOV, A. M. (1966). Stability of motion (réimpression de l'œuvre de Liapunov), Academic Press, New York.

[18] MASUR, E. F. , and LO, D. L. C. (1972). The Shallow Arch – General Buckling, Post-buckling, and Imperfection Analysis, J. Struct. Mech. , Vol. 1, No. 1, p. 91.

[19] MATOBA, H., ISHIKAWA, T., KIM, C.-J., MULLER, R.S. (1994). A bistable snapping microactuator, Proc. Micro Electro Mechanical Systems Workshop, MEMS '94, pp. 45-50.

[20] MONTES, P. (1990). Communication interne, Ecole Polytechnique de Montréal.

[21] ONAT, E.T., SHU, L.S. (1962). Finite deformation of a rigid perfectly plastic arch, ASME, Vol. 84, No. 3, pp.549-553.

[22] POINCARE, H. (1885). Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta. Math., 7:259.

[23] PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T (1989). Numerical Recipes in C, Cambridge University Press.

[24] RIKS, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, Int. J. Solids Structures, Vol. 15, pp. 529-551.

[25] ROGERS, G. (1990). SMA, its modelling and applications, two-day Seminar on Intelligent Material Systems and Structures, Lancaster, PA.

[26] ROORDA, J. (1965). Stability of Structures with Small Imperfections, J Eng. Mech. Div. , ASCE, Vol. 91, EM1, p. 87.

[27] SCHREYER H. L. and MASUR E. F. (1966). Buckling of shallow arches, *J. Eng. Mech. Div.* , ASCE, Vol. 92, EM4, p. 1.

[28] SIMITSES, G. J. (1976). An Introduction to the Elastic Stability of Structures, Prentice-Hall, Inc.

[29] TERRIAULT, P., MEUNIER, M.-A., TROCHU, F. (1997). Application of dual kriging to the construction of a general phenomenological material law for shape memory alloys, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, Vol. 8, pp. 608-618.

[30] THOMPSON, J. M. T., and HUNT, G. W. (1973). A General Theory of Elastic Stability, John Wiley & sons.

[31] THOMSON, J. M. T. , HUNT, G. W. (1984). Elastic Instability Phenomena, John Wiley & sons.

[32] TIMOSHENKO, S. P. , and GERE, J. M. (1956). Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Co. , New York.

[33] TROCHU, F. (1993). A Contouring Program Based on Dual Kriging Interpolation, Engineering with Computers, Vol.9, p. 160.

[34] TROCHU, F., BRAILOVSKI, V., TERRIAULT, P. (1996). Shape Memory Alloys : Fundamentals and Modeling, Communication interne, Ecole Polytechnique de Montréal, 1996.

[35] WARAM, T. (1992). Actuator design using shape memory alloys, Canada.

[36] WHITTAKER, E. T. (1944). Analytical Dynamics, Dover Publications, New York.

[37] YADONG, L., QIN, X. (1997). Design concepts for hopping diaphragm of two way shape memory alloy, 2nd International Conference on Shape Memory and Superelastic Technologies, pp. 329-333.

ANNEXE

GUIDE D'UTILISATEUR DU CODE DE CALCUL DE STABILITE DES ARCHES ET DES POUTRES

Le code de calcul de stabilité est développé sur plateforme Unix (AIX). Il est fondé sur la modélisation de la ligne élastique d'une arche ou d'une colonne par krigeage dual. Il utilise à ce titre la bibliothèque de fonctions LIBKRIG, qui permet de générer une fonction interpolée puis de la manipuler. Le calcul de l'énergie totale associée à une déformée donnée de l'arche ainsi que la minimisation de l'énergie sont effectués dans le corps du programme.

Modules

Le code comprend cinq modules :

- **vecteur.C** une classe de vecteurs;
- **matrice.C** une classe de matrices contenant une méthode de résolution de systèmes linéaires (par décomposition LU)
- **outils.C** un fichier comprenant des algorithmes d'intégration et de recherche de racine utilisés à plusieurs reprises dans le programme; qui peuvent être considérés comme des boîtes noires;
- **optim.C** un fichier contenant l'algorithme d'optimisation multi-dimensionnelle (méthode quasi-Newton actualisée selon la méthode BFGS);
- **snap.C** le programme principal, décrit ci-dessous.

La librairie de krigeage LIBKRIG peut être atteinte par le chemin ~/landry/krigeage/lib_6000.

Organisation de snap.C

Le programme snap.C est articulé autour d'un vecteur appelé généralement y. Il contient les "variables de design", c'est-à-dire les variables permettant de représenter l'arche, sur lesquelles agit l'optimiseur afin de minimiser l'énergie totale. Concrètement, ces variables sont ici les ordonnées des points d'interpolation de la ligne élastique de l'arche (cf. Figure 1-a), auxquelles on adjoint, dans le cas où l'extrémité droite de l'arche n'est pas fixée et que l'arche est considérée comme compressible, l'abscisse de l'extrémité droite de l'arche (cf. Figure 1-b). Ce vecteur y est initialisé par l'utilisateur puis modifié par l'algorithme d'optimisation.

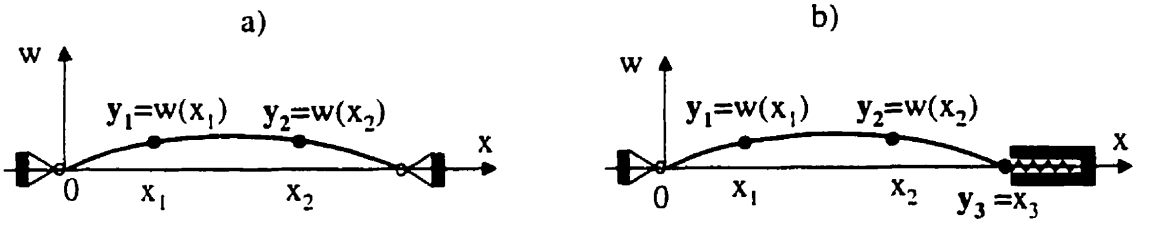


Figure 1 – Variables de design

Ainsi, la plupart des fonctions de snap.C ont pour variables le vecteur de design y, ou bien l'objet du type Handle_t (généralement appelé afield) issu de la librairie LIBKRIG, représentant la déformée de l'arche.

Le programme snap.C est divisé en 8 sections :

- **Ligne élastique initiale de l'arche et ses dérivées**

Cette section doit être remplie en premier lieu car elle définit la géométrie de l'arche. Elle contient les équations analytiques de la ligne élastique initiale de l'arche ainsi que de ses dérivées première et seconde.

- **Calcul par krigeage de la ligne élastique de l'arche et de ses dérivées**

Pour une ache générée par krigeage (du type **Handle_t**), la fonction **poutre** renvoie la valeur de l'ordonnée d'un point d'abscisse x de la ligne élastique de l'arche. Les fonctions **dpoutre** et **ddpoutre** renvoient respectivement les valeur de la dérivée et de la dérivée seconde de la ligne élastique de l'arche au point x. La fonction **abscisse_max** renvoie l'abscisse de l'extrémité droite de l'arche générée par krigeage (l'extrémité gauche est toujours en x=0).

- **Génération de la ligne élastique de l'arche par krigeage dual**

A partir de la donnée des points d'interpolation et des conditions aux limites, on fait appel à la librairie LIBKRIG pour générer une courbe krigée du type Handle_t. Deux fonctions sont disponibles, selon les variables sur lesquelles on souhaite optimiser dans le cas de Figure 1-a, qui correspond soit à une arche dont l'extrémité droite est fixée, soit à une arche incompressible, on fait appel à la fonction **genere_poutre1**. Dans tous les autres cas, et en particulier celui de la Figure 1-b, on fait appel à la fonction **genere_poutre2**.

- **Incompressibilité en grands déplacements**

Lorsque l'arche est considérée comme incompressible, l'abscisse maximale de l'arche est ajustée par la fonction **incompressibilite**– le vecteur de design y étant maintenu constant - afin que la longueur de la courbe obtenue grâce à la fonction **genere_poutre1** soit égale à la longueur initiale de l'arche.

- **Energie en grands déplacements**

Pour une arche du type Handle_t générée par krigeage, les différentes énergies entrant en jeu sont calculées en grands déplacements : l'énergie de flexion, l'énergie de compression, puis les énergies potentielles associées aux différentes forces appliquées. La fonction **Energie_totale** est la somme des différentes énergies. Elles doit être adaptée pour prendre en compte les contributions associées au type de chargement.

- **Fonctions-coûts : fonctions de y à minimiser**

Les différentes fonctions-coûts évaluent, à partir d'un vecteur de design y donné, la valeur de l'énergie totale associée à l'arche générée grâce au vecteur y. La valeur renvoyée par la fonction-coût est transmise à l'algorithme d'optimisation, qui minimise cette valeur en faisant varier y. Trois fonctions-coûts ont été écrites afin de couvrir tous les cas de figures rencontrés : la fonction **cout1** traite le cas d'une arche incompressible, non fixée à son extrémité droite; la fonction **cout2** traite le cas d'une arche compressible, fixée à son extrémité droite; la fonction **cout3** traite le cas d'une arche compressible, non fixée à son extrémité droite.

- **Visualisation Vu**

Un fichier au format d'entrée du logiciel Vu permet de visualiser l'énergie totale pour différentes valeurs du vecteur y.

- **Programme principal**

Pour un chargement donné, la position d'équilibre stable de l'arche est trouvée grâce à la minimisation de la fonction-coût, qui doit être passée en paramètre à la fonction **optimise**. Le fichier optim.C, dans lequel se trouve la fonction **optimise**, peut être considéré comme une boîte noire et nous n'en présenterons pas le détail. En-dehors de la fonction-coût, les variables de la fonction **optimise** sont : le vecteur de design y, qui est modifié par la fonction car optimisé; un réel qui est passée en paramètre à la fonction-coût (lorsqu'on utilise la

fonction-coût **cout2**, il s'agit de l'abscisse de l'extrémité droite de l'arche, pour les autres fonctions-coûts, il est quelconque); le pas relatif des différences finies (utilisées pour les calculs de gradient), fixé par défaut à 10^{-1}; le nombre maximum d'itérations au cours de l'optimisation, fixé par défaut à 100.