POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Contributions à l'optimisation, en temps réel et à court terme, des ressources hydroélectriques d'une rivière
Auteur: Author:	Abdelghani Hammadia
Date:	2000
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Hammadia, A. (2000). Contributions à l'optimisation, en temps réel et à court terme, des ressources hydroélectriques d'une rivière [Ph.D. thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/8671/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/8671/
Directeurs de recherche: Advisors:	Gilles Savard
Programme: Program:	Unspecified

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONTRIBUTIONS À L'OPTIMISATION, EN TEMPS RÉEL ET À COURT TERME, DES RESSOURCES HYDROÉLECTRIQUES D'UNE RIVIÈRE

ABDELGHANI HAMMADIA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
AOÛT 2000

© Abdelghani Hammadia, 2000.

National Library of Canada
Acquisitions and Bibliographic Services
395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale du Canada
Acquisitions et services bibliographiques
395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-60946-4

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONTRIBUTIONS À L'OPTIMISATION, EN TEMPS RÉEL ET À COURT TERME, DES RESSOURCES HYDROÉLECTRIQUES D'UNE RIVIÈRE

présentée par : HAMMADIA Abdelghani

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. SMITH Benjamin, Ph.D., président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

Mme BRETON Michèle, Ph.D., membre et codirectrice de recherche

M. SOUMIS François, Ph.D., membre

M. GOFFIN Jean-Louis, Ph.D., membre externe

À mes parents...

À ma femme Hajiba...

À mon fils Taha...

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mes directeurs de recherche Gilles Savard et Michèle Breton pour l'encadrement, le support technique et financier et la qualité de l'environnement de travail qu'ils m'ont fournis tout au long de mon doctorat.

Par la subvention qu'ils nous ont octroyée, HydroSoft Énergie Inc. conjointement avec le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) ont contribué au financement de ces travaux et je les en remercie.

Ma reconnaissance s'adresse à Saeb Hachem dont les suggestions m'ont été très précieuses. Il m'a donné le courage d'aller plus avant en domaine hydroélectrique.

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui ont accepté de lire et d'évaluer cette thèse.

Enfin, je n'oublierai pas ma femme Hajiba Chahtane qui m'a énormément supporté, surtout pendant les moments difficiles de ma thèse.

Résumé

La gestion des ressources hydroélectriques d'une rivière a fait l'objet d'un nombre important de projets d'études et de recherche. Cette importance accordée à ce problème est motivée par les gains significatifs qui peuvent être obtenus en optimisant la gestion des centrales hydrauliques et des réservoirs de la rivière.

À l'intérieur d'une centrale, la gestion consiste en une hiérarchie de deux niveaux d'optimisation. Le premier niveau vise à planifier l'engagement et le désengagement des groupes sur un horizon de plusieurs périodes, alors que le second niveau consiste à déterminer, pour chaque période de l'horizon, les niveaux de production des groupes ainsi choisis par le niveau supérieur.

Dans le cas d'une rivière, la gestion à court terme des réservoirs consiste à allouer l'énergie potentielle (l'eau stockée) entre ces réservoirs, et ce, en respectant l'ensemble des contraintes liées à cette gestion. Bien entendu, cette gestion des réservoirs n'est optimale que si elle intègre correctement la gestion des centrales qui y sont adjacentes.

Dans cette thèse, une approche constructive est adoptée pour introduire, de manière progressive, les différentes facettes de la complexité du problème réel. Ainsi, en partant des problèmes liés à la gestion d'une centrale et en arrivant à la gestion à court terme d'une rivière, on présente les caractéristiques de chaque problème et son intérêt dans une gestion plus globale de la rivière.

Abstract

Several research projects and studies have been devoted to optimize river hydropower management. The importance given to this issue has been motivated by the significant potential gain that optimization can drive.

Within hydropower stations, management consists in, one side, appropriately commit the units and, on the other side, address the distribution of the output between online units.

At the river level, the purpose of short-term management is to get an optimal schedule of hydropower stations supply and spillage from reservoirs while respecting the operation constraints. Of course, it should integrate correctly the hydropower stations requirements.

In the present thesis, a constructive approach is adopted. It introduces progressively the complexity of real problems at these different levels: modeling, optimization and usefulness of each program as stand-alone module or within global management system. The unit loading problem is presented first, then the unit commitment problem that encompasses the previous problem, and finally the short term river management. All the software issued from this work is on use or will be soon integrated in river management system of several major companies in North America.

Table des matières

DÉDICACE iv

REMERCIEMENTS v

RÉSUMÉ vi

ABSTRACT vii

TABLE DES MATIÈRES viii

LISTE DES TABLEAUX xv

LISTE DES FIGURES xvi

INTRODUCTION 1

Motivation 1

Résumé de contributions 3

Retombées pratiques de la thèse 7

Organisation de la thèse 7

CHAPITRE 1 : PRODUCTION HYDROÉLECTRIQUE: GÉNÉRALITÉS 10

1.1 Avantages de la production hydroélectrique 11

1.2 Types d'aménagements hydroélectriques 12

1.3 Génération de l'électricité 13

1.4 Le groupe turbine-alternateur (T/A) 14

1.5 Pertes énergétiques 17

1.5.1 Effet de la variation des niveaux 18

1.5.2 Pertes de charge 19

1.6 Hauteur de chute et similitude en hydraulique 20

1.6.1 Motivation 21

1.6.2 Fondement théorique 21

1.6.3 Courbes de débit-puissance et similitude 23

CHAPITRE 2 : PROBLÈME DE CHARGEMENT OPTIMAL: MODÈLES DE RÉFÉRENCE 28

2.1 Position du problème 28

2.2 Modèle conventionnel 30

2.2.1 Notations et modèle 30

2.2.2 Revue de la littérature 32

2.2.3 Résolution du modèle conventionnel 36

2.2.4 Défaut de la formulation conventionnelle 39

2.2.5 Limitations de la formulation conventionnelle 41

2.3 Modèle de référence généralisé 42

2.3.1 Notations et modèle 42

2.3.2 Approche de décomposition 44

2.4 Problème avec consigne de puissance 50

2.4.1 Intérêt 50

2.4.2 Modèle 50

2.5 Tests numériques 53

CHAPITRE 3 : PROBLÈME DE CHARGEMENT OPTIMAL: MODÈLES AVEC PERTES HYDRAULIQUES . 57

3.1 Position du problème 57

3.2 Modélisation des pertes hydrauliques 59

3.2.1 Hypothèses 62

3.2.2 Notations 63

3.2.3 Définitions et propriétés 64

3.2.4 Modèle 66

3.3 Résolution du problème 68

3.3.1 Modèle à deux niveaux de pertes 69

3.3.2 Généralisation à plusieurs niveaux de pertes 72

3.4 Tests numériques 75

CHAPITRE 4 : PLANIFICATION DES ARRÊTS-DÉMARRAGES 78

4.1 Position du problème 78

4.2 Modélisation 83

4.2.1 Hypothèses 83

4.2.2 Notations 83

4.2.3 Fonction objectif 85

4.2.4 Contraintes 88

4.2.5 Résumé du modèle 95

4.3 Revue des algorithmes de la littérature 96

4.3.1 Énumération exhaustive et listes de priorité 97

4.3.2 Programmation en nombres entiers 97

4.3.3 Relaxation lagrangienne 98

4.3.4 Programmation dynamique 100

4.4 Résolution du problème 101

4.4.1 Description générale de l'algorithme 101

4.4.2 Approche de décomposition 102

4.4.3 Résolution des sous-problèmes 104

4.4.4 Résolution du problème maître 104

4.4.5 Structures de données 111

4.4.6 Algorithme des A/D versus décomposition de Benders 118

4.5 Tests numériques 120

CHAPITRE 5 : GESTION À COURT TERME D'UNE RIVIÈRE: MODÉLISATION 124

5.1 Position du problème 124

5.2 Modèle de Base 127

5.2.1 Hypothèses 127

5.2.2 Notations 128

5.2.3 Fonction objetctif 130

5.2.4 Contraintes du problème 133

5.2.5 Résumé du modèle de base 138

5.3 Propriétés du modèle de base 140

5.4 Extensions du modèle de base 142

5.4.1 Écoulement dynamique dans les tronçons 142

5.4.2 Contraintes liées à la gestion des centrales 147

5.4.3 Traitement de certaines zones interdites 150

5.4.4 Gestion des déversoirs 151

5.4.5 Autres extensions 153

CHAPITRE 6 : GESTION À COURT TERME D'UNE RIVIÈRE: RÉSOLUTION ET TESTS NUMÉRIQUES 157

6.1 Généralités 157

6.2 Revue de certains algorithmes de la littérature 158

6.2.1 Programmation dynamique 159

6.2.2 Gradient réduit 160

6.2.3 Optimisation duale 161

6.3 Algorithme de résolution 162

6.3.1 Problème général 163

6.3.2 Aperçu de la méthode PLS 164

6.4 Mise en oeuvre du modèle GestRiv 171

6.5 Tests numériques 176

6.5.1 Problèmes tests 177

6.5.2 Analyse de performances 178

6.5.3 Visualisation des résultats 180

CONCLUSION **188**

BIBLIOGRAPHIE **190**

Liste des tableaux

2.1 Résultats de la répartition optimale du modèle généralisé 56

3.1 Caractéristiques des centrales tests 75

3.2 Comparaison entre Super-ChOp et Iter-ChOp 76

4.1 Réduction des instances du vecteur de décision 109

4.2 Réduction des instances de e_t (avec $\bar{n} = 5$) 110

4.3 Opérateurs binaires de base 112

4.4 Données dynamiques des périodes de l'horizon 121

4.5 Comparaison des plans de production entre ArrDem et Super-ChOp 123

6.1 Dimension des six problèmes tests 178

6.2 Performances de l'algorithme PLSND 179

6.3 Performances de PLSND vis-à-vis LOQO et MINOS 180

Liste des figures

1.1 Principales composantes d'une centrale hydroélectrique 15

1.2 Exemple d'une fonction de débit-puissance 17

1.3 Exemple d'une courbe de rendement en fonction du débit 25

1.4 Transformation par similitude de débit-puissance 26

2.1 Exemple avec contrainte globale de puissance 40

2.2 Exemple d'une configuration avec deux canaux et trois réseaux 42

2.3 fonctions de débit-puissance de l'exemple numérique 54

3.1 Configuration physique avec deux niveaux de pertes 61

3.2 Structure d'arbre correspondante 61

5.1 Exemple d'aménagement avec deux réservoirs 125

5.2 Réseau espace-temps multi-flots d'un système hydroélectrique (en cascade) avec un délai d'écoulement d'une heure 135

5.3 Exemple de construction de la fonction de débit-puissance (linéaire par morceaux) dans le cas où la centrale i comprend deux groupes 143

5.4 Déplacement des points de rendement optimal en fonction de la hauteur de chute 144

5.5 Exemple d'écoulement linéaire versus celui par délais fixes 146

5.6 Déversement par dessus d'une crête déversante 154

6.1 Configuration du système hydrique A 183

6.2 Configuration du système hydrique B 184

6.3 Évolution de la production du système A en parallèle avec le prix 185

6.4 Évolution des niveaux des réservoirs du système A 186

6.5 Évolution des niveaux des réservoirs du système B 187

Introduction

Motivation

Actuellement, environ 18% de la production mondiale d'énergie électrique provient des ressources hydrauliques.[1] Ce pourcentage montre l'importance de l'énergie d'origine hydraulique dans le monde. La proportion d'hydroélectricité varie cependant beaucoup d'un pays à l'autre. Ainsi, la production d'électricité de la Norvège est presque entièrement assurée par ses barrages. Au Québec, 93% de la production électrique provient des centrales hydroélectriques de la compagnie Hydro-Québec, chef de file mondial en matière de production d'énergie verte avec plus de 36 000 *MW* en 1997.[2] Au Canada, premier producteur mondial d'hydroélectricité, 60% de l'électricité produite est d'origine hydraulique.[3]

La gestion rationnelle des ressources hydroélectriques d'une rivière est une préoccupation importante pour de nombreux producteurs d'électricité. Cette gestion est largement étudiée et documentée par plusieurs auteurs dans des livres et revues spécialisés. Les premiers articles publiés sur le sujet remontent aux années 1950, au moment de l'expansion remarquable de l'industrie de l'électricité après la seconde guerre mondiale. À l'époque, plusieurs producteurs d'électricité se sont intéressés à l'exploitation économique des systèmes, qu'ils soient hydrauliques ou thermiques. Plus tard, du fait de la crise pétrolière de 1973 et de la rapide escalade du prix des combustibles fossiles, le nombre d'installations hydroélectriques s'est multiplié

[1] Source : Électricité de France
[2] Source : Hydro-Québec
[3] Source : Électricite de France

et beaucoup de pays industriels se sont davantage intéressés à cette technologie de production de la puissance électrique. Par conséquent, le besoin s'est intensifié pour le développement de nouveaux modèles et méthodes de résolution.

Les approches systématiques qui visent à perfectionner cette gestion sont généralement guidées par l'optimisation de l'allocation de la production entre les groupes (turbine-alternateur) de la centrale. Une étude préliminaire effectuée à Hydro-Québec montre que grâce à une telle optimisation, des gains de l'ordre de 1 à 4% peuvent être réalisés (Robitaille et al. [77]). En Asie du sud-est, on a identifié un potentiel de gain encore plus élevé (Zhang et al. [109]). L'importance significative d'un gain, même d'une fraction de pourcentage, est l'une des raisons qui peut justifier la grande quantité de travaux et de recherches se rapportant à ce sujet.

La complexité de la gestion des ressources hydroélectriques d'une rivière exige une adaptation des formalisations mathématiques, la conception de nouveaux modèles et le développement d'algorithmes performants et appropriés. Les multiples facettes du problème qu'on vient de soulever peuvent être classées en trois catégories :

- Problème de modélisation d'ordre mathématique, le modèle étant une représentation simplifiée de la réalité décrivant une partie du modèle réel et de son fonctionnement ;
- Problème du choix d'un algorithme approprié devant répondre aux critères suivants : optimalité, robustesse, rapidité et flexibilité permettant de résoudre le problème avec toutes les exigences de la modélisation ;
- Problème d'ordre informatique ; celui-ci est lié à la conception d'un modèle de données et au développement de codes répondant à certains facteurs de qualité qui se résument dans la qualité générale du logiciel, à savoir : modularité, adaptabilité, rapidité, etc.

Résumé des contributions de la thèse

À l'intérieur d'une centrale, la modélisation conventionnelle de base du problème d'optimisation de la gestion des centrales hydroélectriques comporte des restrictions individuelles sur les groupes, ainsi que quelques conditions hydrauliques pour la centrale. Elle se limite généralement à une seule période. Une modélisation plus appropriée devrait supporter des restrictions sur des sous-ensembles des groupes, incorporer certaines conditions hydrauliques pertinentes et intégrer la dimension temporelle dans la gestion.

Les principales contributions de cette thèse à ce niveau consistent en des généralisations de la modélisation conventionnelle et à la spécialisation de la programmation dynamique (PD), algorithme que l'on croit être le plus pertinent pour résoudre ce type de problème. La généralisation de la modélisation porte non seulement sur l'amélioration du modèle d'une seule période, mais s'étend aussi à la planification des arrêts-démarrages des groupes sur un horizon de plusieurs périodes. L'algorithme adopté pour résoudre ces extensions de la modélisation est basé sur une approche mixte qui combine à la fois le principe de décomposition par les ressources et la technique de programmation dynamique.

Plus précisément, pour une seule période de planification, l'optimisation vise une meilleure répartition, en terme de puissance ou de débit, de la production entre les groupes disponibles d'une centrale. Ce problème statique, lié à une période donnée, est souvent connu dans la littérature sous le nom de "static economic dispatch problem" que l'on va traduire dorénavant par "problème de chargement optimal" (ChOp). Dans cette thèse, on propose un modèle plus général de chargement optimal qui modélise mieux la réalité physique du problème réel. Cette généralisation supporte des configurations physiques de centrales plus compliquées, à savoir des contraintes sur

les capacités des canaux d'amenée d'eau aussi bien que sur les capacités des réseaux électriques. En outre, la prise en compte des conditions hydrauliques constitue une autre contribution originale apportée au modèle ChOp. Elle consiste, d'une part, à intégrer des pertes de charge dans le réseau hydraulique et, d'autre part, à tenir compte des variations de hauteur de chute par rapport à celle de référence (voir chapitres 2 et 3).

Pour satisfaire un profil de demande en puissance s'étalant sur plusieurs périodes, on ne peut pas dissocier la politique des arrêts-démarrages de celle de répartition de la production entre les groupes. Il en est de même lorsqu'on exige de la centrale de turbiner une série de débits durant des périodes successives. Cette problématique est connue sous le nom de "dynamic unit commitment problem" que l'on va traduire par "planification des arrêts-démarrages" (ArrDem). Très rares sont les articles et livres spécialisés qui traitent ce problème dans le cas spécifique de l'hydroélectricité. Par contre, il a été soulevé par plusieurs auteurs dans le cadre de la production électrique à l'intérieur de stations thermiques.

La planification des arrêts-démarrages (A/D, en abrégé) des groupes constitue une problématique importante, tant sur le plan algorithmique que du point de vue économique et pratique. L'importance de l'optimisation des A/D est mise en relief en plusieurs facettes. D'abord, du point de vue pratique, elle permet d'améliorer la qualité des solutions en stabilisant, dans la mesure du possible, les changements inutiles (ou non significatifs) de statuts des groupes le long de la période de planification (par exemple, en temps réel ou à court terme). Ensuite, du point de vue économique, cette planification rationnelle des A/D contribue, d'une portion non négligeable, à réduire le coût de réparation et de maintenance des groupes à moyen ou à long terme.

Dans cette thèse, on propose une nouvelle approche de résolution de la planification des A/D des groupes à l'intérieur des centrales hydroélectriques. Il s'agit d'une

méthode d'optimisation globale basée sur un schéma de décomposition de Benders. La résolution du problème maître est effectuée par l'algorithme de programmation dynamique (PD), alors que les sous-problèmes (de chargement optimal) sont résolus par l'approche mixte de PD et de décomposition par les ressources. Du point de vue implantation, l'originalité se situe au niveau de la résolution des sous-problèmes. Pour ce faire, on propose une technique de stockage et de mise à jour des données qui permet de résoudre chaque sous-problème en se basant sur les résultats d'optimisation des sous-problèmes déjà résolus. Cette technique exploite en particulier le fait que la résolution du problème paramétrique du chargement optimal nécessite marginalement peu d'effort par rapport à la résolution du problème de chargement optimal avec une consigne donnée. Elle utilise, de façon constructive, des combinaisons de résultats partiels qui ont permis d'obtenir la solution de sous-problèmes déjà résolus (voir chapitre 4).

Puisque la gestion d'une rivière englobe celle des centrales, des gains potentiels peuvent être obtenus si l'optimisation des centrales est intégrée dans un modèle de gestion à court terme d'une rivière. Ce problème de coordination entre les centrales d'une rivière est dénommé dans cette thèse par "gestion à court terme d'une rivière" (GestRiv).

L'intégration complète de la gestion detaillée des centrales dans la gestion à court terme d'une rivière est une tâche très complexe; c'est pourquoi on l'aborde dans cette thèse par une approche hiérarchique. Dans une première étape, on résoud le problème GestRiv où l'on résume la production d'une centrale par une courbe globale de débit-puissance. Ce premier cycle de résolution est effectué en négligeant certaines contraintes difficiles liées principalement à l'optimisation à l'intérieur des centrales. L'exemple le plus pertinent de cette dernière situation est celui de la planification des arrêts-démarrages. Ainsi, les résultats du premier cycle d'optimisation, tels que les débits à turbiner et les hauteurs de chute des centrales (tout au long de l'horizon de

planification), sont ensuite utilisés comme données (ou paramètres) dans le problème ArrDem.

Pour le problème de la gestion à court terme d'une rivière, les contributions de la thèse se retrouvent en deux aspects : modélisation et résolution du problème. Parmi les originalités du point de vue modélisation, on cite : la modélisation appropriée de la production globale des centrales hydroélectriques et la modélisation de certains aspects de stabilité (ou régularité) des solutions. En ce qui concerne le premier point, la production de chaque centrale est résumée par une courbe de débit-puissance qui tient compte de la variation dynamique de hauteur de chute. Quant au volet de régularité des solutions, il concerne la stabilisation, d'une part, des engagements et désengagements des groupes à l'intérieur des centrales et, d'autre part, des fluctuations des débits de tronçons durant certaines périodes de l'horizon de planification. D'autres originalités, liées à la modélisation des écoulements dans les tronçons aussi bien que dans les déversoirs, sont aussi proposées comme extensions du modèle GestRiv (voir chapitre 5).

Dans la partie consacrée à la résolution du problème GestRiv, un effort important porte sur la mise au point de l'algorithme de programmation linéaire successive (PLS). Les raisons pour lesquelles on choisit d'implanter ce type d'algorithme sont discutées plus en détail dans le chapitre 6 (section 3). Il est important de noter que l'algorithme PLS suppose que les fonctions non-linéaires, que comporte le problème, soient différentiables. Toutefois, cette hypothèse de base n'est pas satisfaite par le modèle GestRiv. Ceci est dû principalement à la nature des fonctions globales de débit-puissance des centrales hydroélectriques. Ainsi, l'une des plus importantes originalités de ce chapitre consiste en la reformulation du problème GestRiv en un modèle équivalent (différentiable) qui peut être traité par l'algorithme mentionné ci-dessus.

Finalement, pour pouvoir juger de la qualité relative de l'algorithme PLS, la mise en

oeuvre du problème GestRiv est réalisée sur les deux codes commerciaux suivants : MINOS (pour une implantation d'une variante du lagrangien augmenté) et LOQO (pour une implantation d'une variante de la méthode des points intérieurs). Il importe de signaler que le travail réalisé, à ce propos, peut être qualifié comme une contribution importante de la thèse. En effet, cette thèse constitue le premier document publiant ce genre d'étude comparative des trois algorithmes mentionnés ci-dessus dans le domaine de la gestion des ressources hydroélectriques (voir chapitre 6).

Retombées pratiques

Les travaux de recherche et développement réalisés dans le cadre de cette thèse ont été conjointement subventionnés par CRSNG et HydroSoft Énergie, filiale de la compagnie Hydro-Québec en recherche et développement en matière de production d'énergie hydroélectrique. Ces travaux sont couronnés par la mise au point de quatre logiciels commercialisables : ChOp, Super-ChOp (avec prise en compte de pertes hydrauliques), ArrDem et GestRiv.

La plupart de ces logiciels sont présentemment implantés, non seulement dans le système d'Hydro-Québec, mais aussi chez d'autres compagnies nord-américaines comme Duke Power et MacLaren via les deux programmes commerciaux GESTEAU et PPCT de la filiale HydroSoft Énergie. Ceci constitue certainement la retombée la plus tangible des travaux de recherche et développement de la thèse.

Organisation de la thèse

Dans cette thèse, on adopte une approche constructive et compréhensive pour étudier et analyser les différents problèmes qu'on a soulevés précédemment, ainsi que les

complications qui s'ajoutent en passant d'un problème à l'autre. Les différents sujets sont organisés en six chapitres.

Le premier chapitre présente certaines caractéristiques générales des aménagements hydroélectriques. Ceci permet, d'une part, de se positionner par rapport au contexte physique du problème et, d'autre part, d'introduire une bonne partie de la terminologie utilisée par la suite.

Le deuxième chapitre traite du problème de chargement optimal : modélisation du problème, généralisation du modèle et présentation de l'approche de résolution. Il importe de signaler que ce modèle constitue la base de tous les problèmes qui sont discutés le long de cette thèse.

Dans le troisième chapitre, on présente le modèle général de chargement optimal avec prise en compte des pertes hydrauliques. Pour ce faire, on discute, dans un premier temps, le modèle ChOp avec deux niveaux de pertes (le plus courant en pratique) ; ensuite, on généralise le modèle à plusieurs niveaux de pertes.

Le quatrième chapitre porte sur le problème de planification des arrêts-démarrage des groupes. Dans ce chapitre, on présente, dans un premier temps, le contexte général du problème, et ce, en mettant en relief son importance pratique et économique dans une gestion plus globale des ressources hydroélectriques d'une rivière ; ensuite, on aborde la modélisation et la résolution du problème.

Dans les cinquième et sixième chapitres, on aborde le problème de la gestion à court terme d'une rivière. À cette fin, on commence, dans le chapitre 5, par modéliser les éléments les plus pertinents de la réalité physique du problème, c'est-à-dire qu'on présente un modèle mathématique assez général qui tient compte, d'une part, de la réalité physique des ouvrages hydrauliques (ou hydroélectriques) et, d'autre part, des règles

de gestion ou d'exploitation qui les régissent. Le chapitre 6 présente l'algorithme de résolution, la mise oeuvre du modèle GestRiv et, enfin, une étude comparative de performance entre cet algorithme et ceux de deux autres librairies commerciales de programmation mathématique non-linéaire : MINOS et LOQO.

Chapitre 1

Production hydroélectrique : généralités

L'objectif de ce chapitre n'est pas de donner une description détaillée et exhaustitve en matière de la production hydroélectrique, mais plutôt un aperçu très concis et simplifié de sa réalité physique. En effet, le sujet est suffisamment large et complexe pour que la description de ses différentes composantes sorte du cadre général de la thèse. Par contre, une présentation (au moins simplifée) du modèle physique est nécessaire à la compréhension des modèles mathématiques qui seront présentés dans les chapitres qui suivent.

Les références utilisées dans le développement de la matière de ce chapitre sont principalement les quatres livres [10, 22, 33, 98].

Ce chapitre introductif est organisé en six sections. D'abord, dans la prochaine section, on discute certains avantages de la production électrique d'origine hydraulique. Ensuite, dans la section 1.2, on décrit (brièvement) les trois catégories d'aménagements hydroélectriques qui peuvent exister en pratique. Dans la section 1.3, on illustre, d'une manière générale, le processus de génération de l'énergie hydroélectrique. La section 1.4, présente certaines caractéristiques de l'une des composantes les plus importantes dans la génération d'électricité, à savoir : le groupe turbine-alternateur (T/A, en abrégé). Dans la section 1.5, on discute de la nature des pertes énergétiques dans une centrale hydroélectrique. Ensuite, à la section 1.6, on pré-

sente les transformations par similitude des fonctions de débit-puissance des groupes (turbine-aternateur).

1.1 Avantages de la production hydroélectrique

L'énergie d'origine hydraulique joue un rôle important dans le dispositif mondial de production d'électricité. En effet, l'eau est une source d'énergie souple, fiable, et stockable. En outre, son exploitation pour la production d'électricité ne génère ni déchets toxiques ni pollution atmosphérique.

À la différence des centrales thermiques, les aménagements hydroélectriques démarrent presque instantanément. Par exemple, une centrale d'Hydro-Québec peut fournir en quelques minutes une puissance dépassant 1 000 mégawatts, soit l'équivalent d'une centrale nucléaire standard. Lorsque la demande en électricité risque de dépasser la production, la rapide mise en route des groupes hydrauliques constitue l'une des meilleures alternatives visant à combler le manque éventuel d'énergie.

L'eau est une source d'énergie renouvelable. En effet, après avoir traversé les turbines des barrages, les eaux rejoignent les rivières, puis les fleuves, pour enfin se jeter dans des mers et océans. Sous l'effet du soleil, l'eau s'évapore, gonfle les nuages qui arroseront de pluie ou de neige les plaines et les montagnes : c'est le cycle de l'eau. Chaque année, les barrages profitent de cette énergie naturelle, gratuite et indéfiniment renouvelable.

Les turbines des centrales hydroélectriques sont animées par la force d'une eau passant d'un niveau élevé à un niveau inférieur. Dans ce processus, aucune fumée ne s'échappe et l'eau reste une source d'énergie essentiellement non-polluante. En effet, les conséquences de l'exploitation hydroélectrique (accumulation de sédiments ou de

déchets flottants, variation rapide du débit des cours d'eau, différences de températures) sont maintenant bien connues et maîtrisées.

En dépit d'un lourd investissement initial, nécessaire à la construction des barrages, les aménagements hydroélectriques restent, à long terme, des équipements très rentables. Comparés aux centrales thermiques, ils produisent un kilowatt moins cher grâce à l'exploitation d'un "combustible" gratuit et renouvelable. De plus, les centrales hydroélectriques exigent une maintenance réduite et ont une durée de vie de plusieurs dizaines d'années.

1.2 Types d'aménagements hydroélectriques

On désigne par aménagement hydroélectrique l'ensemble de divers ouvrages nécessaires pour exploiter un cours d'eau. Généralement, ces aménagements sont classés en trois catégories : hautes, moyennes et basses chutes.

Les aménagements de la première catégorie comprennent les centrales hydroélectriques ayant une hauteur de chute dépassant 200 m. Ce type d'aménagements est souvent réalisé sur les sections de cours d'eau situées dans la partie amont des bassins versants, c'est-à-dire en haute montagne. Les bassins versants aménagés sont, en général, de faible superficie et, de ce fait, le débit moyen des cours d'eau est relativement faible. Les centrales de ce type d'aménagements sont dotées de turbines hydrauliques à action où l'énergie de l'eau, à l'entrée de la turbine, est entièrement transformée en énergie cinétique ; et par suite, l'eau sort de la turbine à la pression atmosphérique.

Les aménagements de la deuxième catégorie englobent les centrales hydroélectriques ayant une hauteur de chute comprise, en général, entre 40 m et 200 m. Ces derniers

aménagements sont souvent établis sur le cours d'eau moyen des rivières. Suivant la topographie du terrain, la centrale peut être aménagée directement au pied du barrage ou alimentée par un ou plusieurs canaux (ou galeries) d'amenée s'étendant sur plusieurs kilomètres. En général, pour ce type d'aménagements, les centrales sont équipées de turbines à réaction où l'énergie de l'eau se transforme, en partie sous forme d'énergie cinétique et en partie sous forme d'énergie de pression.

Enfin, la troisième catégorie d'aménagements inclut les centrales hydroélectriques ayant, en général, une hauteur de chute inférieure à 40 m. D'une manière générale, ces aménagements sont établis sur les cours inférieurs des rivières. Cette catégorie d'aménagements comprend également les usines marémotrices. Pour ce dernier type de centrales, la hauteur de chute est de l'ordre de grandeur de l'amplitude de la marée. Les centrales de cette troisième catégorie sont également equipées de turbines à réaction. Cependant, ces turbines sont souvent dotées d'hélices ajustables permettant de s'adapter à des hauteurs de chutes fortement variables.

1.3 Génération de l'électricité

La puissance d'une centrale hydroélectrique résulte de la conjonction de deux facteurs : la hauteur de chute et le débit du cours d'eau qui l'alimente. Plus la hauteur de chute et le débit sont importants, plus la puissance électrique sera élevée. Les torrents de montagne possèdent un faible débit, mais chutent de très haut. À l'inverse, les fleuves plus proches du niveau de la mer ont une faible chute, mais un débit abondant. Enfin, il existe des situations intermédiaires où la hauteur de chute et le débit sont tous les deux moyens. À chaque situation correspond un aménagement spécifique.

Le premier impératif est d'avoir de l'eau en abondance. Le rôle du barrage consiste à

la retenir en s'opposant à l'écoulement naturel de l'eau. De grandes quantités d'eau s'accumulent et forment un lac de retenue ou un réservoir.

Lorsque l'eau est stockée, il suffit d'ouvrir des vannes pour amorcer le cycle de production d'électricité. L'eau s'engouffre alors dans une conduite forcée ou dans une galerie creusée dans la roche (suivant l'installation) et se dirige vers la salle des groupes de turbines-alternateurs de la centrale située en contrebas.

À la sortie de la conduite, la pression ou la vitesse (ou les deux en même temps) entraînent la rotation de la turbine qui entraîne, à son tour, celle du rotor de l'alternateur. La turbine est directement couplée à l'alternateur qui, en tournant toujours à la même vitesse, produit du courant alternatif. Pour faciliter son acheminement et sa distribution, le courant électrique transite ensuite par un transformateur qui le transforme en un courant à haute ou très haute tension. Ce courant est ensuite transporté sur un ou plusieurs réseaux électriques de transport ou de distribution.

L'eau turbinée qui a perdu son énergie s'échappe par le canal d'évacuation et rejoint la rivière ou le niveau aval de la centrale. La figure 1.1 illustre les principales composantes entrant en jeu dans le processus décrit précédemment.

1.4 Le groupe turbine-alternateur (T/A)

La turbine permet de transformer l'eau qui s'échappe de la conduite en énergie de rotation. La forme et les caractéristiques des turbines dépendent des types d'installations hydroélectriques dans lesquelles elles sont employées. Généralement, les turbines hydroélectriques sont de l'un de trois types de base : Pelton, Francis et Kaplan. Chaque type convient à une plage particulière de hauteur de chute. Ainsi, la turbine Pelton est généralement réservée aux centrales de haute chute. Pour les

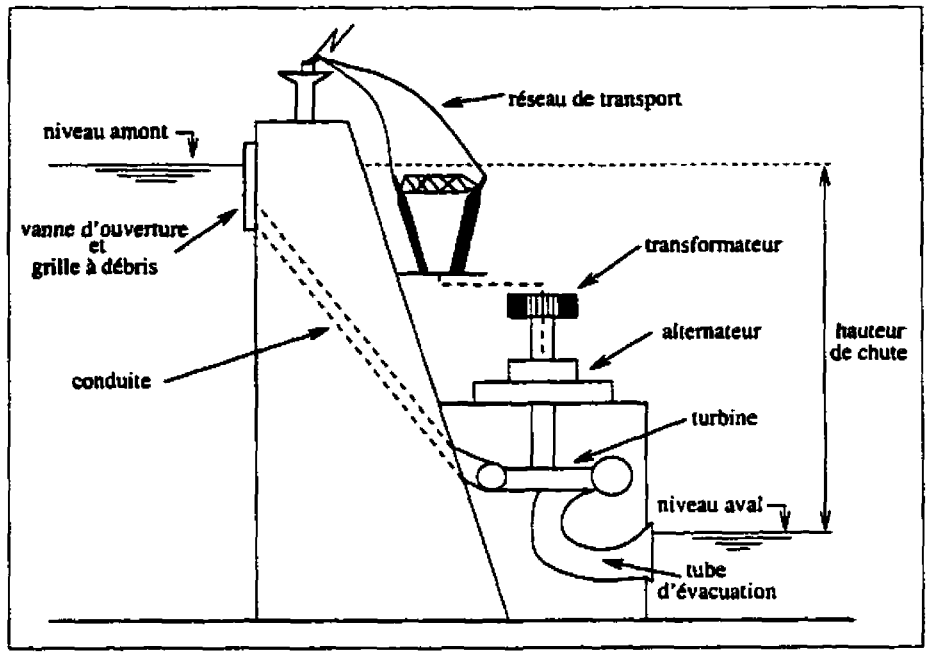

Figure 1.1 – Principales composantes d'une centrale hydroélectrique

moyennes chutes ce sont les turbines Francis qui sont les plus utilisées. Enfin, la turbine Kaplan est considérée comme la turbine la plus appropriée aux centrales de basse chute. Une variante de turbines Kaplan est celle des "groupes bulbes" dont la technique a été développée en France pour l'usine marémotrice de la Rance. Dans ce type de groupes, l'alternateur est accolé à la turbine et grâce à un système de protection étanche, ces groupes peuvent être complètement immergés dans l'eau.

L'énergie potentielle convertible en énergie électrique dépend de la hauteur de chute de la centrale, c'est-à-dire de la différence d'altitude entre le niveau amont et le niveau aval de la centrale. Cependant, la hauteur de chute nette au niveau de la turbine est légèrement inférieure à celle de la centrale. Ceci est dû, d'une part, aux pertes énergétiques au niveau de la grille à débris, généralement installée à l'entrée de la conduite pour protéger la turbine et, d'autre part, au frottement de l'eau avec la conduite et aux pertes au niveau du tube d'évacuation vers la sortie de la centrale. Le

niveau d'eau à la sortie est, par ailleurs, sensiblement influencé par le débit turbiné par les groupes de la centrale.

Chaque groupe turbine-alternateur est caractérisé par une courbe d'entrée-sortie appelée fonction de débit-puissance pour une hauteur de chute constante appelée hauteur de référence. Le domaine de cette fonction est, en terme de volume d'eau par unité de temps, exprimé en mètres cubes par seconde (m^3/s). L'image de cette fonction est en terme de puissance active ou réelle, usuellement exprimée en mégawatts (MW). Généralement, cette fonction est approchée par une fonction polynomiale par morceaux allant jusqu'au quatrième ou cinquième degré. Cette approximation est basée sur les données obtenues à la suite d'une série de tests empiriques sur les groupes. Les méthodes les plus utilisées d'approximation par des polynômes sont celles des moindres carrés et la méthode de Gram-Schmidt (Liang et Glover [49]).

Pour les groupes hydrauliques, les fonctions de débit-puissance ne sont, en général, ni concaves et ni convexes. Elles sont souvent composées d'une partie convexe suivie d'une partie concave (une zone de production marginale croissante est alors suivie d'une zone de production marginale décroissante). L'étendue et le rendement de ces deux zones de production varient beaucoup d'un type à l'autre de groupes de turbines-alternateurs.

Les caractéristiques individuelles des groupes impliquent une restriction sur le débit maximal à turbiner ou sur la puissance limite à générer. Par définition, la puissance limite correspond au débit maximal que peut turbiner le groupe. En plus, pour des raisons d'opération, on peut imposer des restrictions sur le débit (ou la puissance) minimal d'opération du groupe. En outre, certaines zones de production peuvent être dangereuses à cause de phénomènes de cavitation ou de vibration. Elles doivent donc être évitées dans tout chargement des groupes de la centrale. La figure 1.2 illustre un exemple de fonction de débit-puissance avec débits minimal et maximal et deux zones de production interdites.

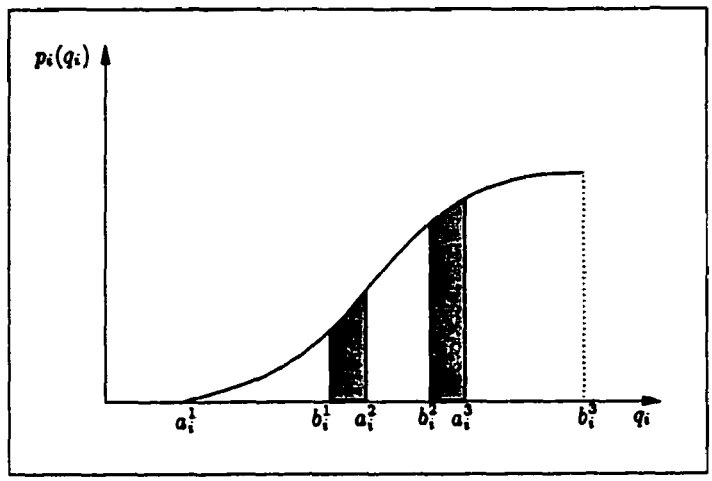

Figure 1.2 – Exemple d'une fonction de débit-puissance

1.5 Pertes énergétiques

Les pertes énergétiques dans une centrale hydroélectrique sont de deux natures : hydraulique et électrique. Les pertes de nature hydraulique sont dues, d'une part, à la variation des niveaux amont et aval de la centrale et, d'autre part, à des pertes de charge, que ce soit des pertes singulières (par exemple, au niveau des grilles) ou des pertes par frottement dans des conduites et canaux d'amenée d'eau. Les pertes électriques, par contre, sont dues à la chaleur dégagée (ou effet Joule) dans les différentes composantes du système électrique de la centrale (conducteurs, rotor et stator des alternateurs, circuits électriques, transformateurs, etc).

L'intégration complète et détaillée des pertes énergétiques (hydrauliques et électriques) complexifie les approches de résolution des modèles d'optimisation à l'intérieur des centrales hydroélectriques. Ainsi, étant donné son importance dans une centrale hydroélectrique, on se limite dans le cadre de cette thèse à la prise en compte des pertes de nature hydraulique, à savoir : les pertes dues à la variation des niveaux (amont et aval) et les pertes de charge dans le réseau hydraulique. Quant aux

pertes électriques, on suppose que les composantes électriques (alternateurs, transformateurs, etc) sont caractérisées par un facteur de rendement constant, quitte à développer des modèles appropriés dans les extensions futures de la thèse.

1.5.1 Effet de la variation des niveaux

La hauteur de chute (totale) est définie comme la différence de niveau entre les surfaces libres des deux sections du cours d'eau entre lesquelles l'écoulement est modifié par l'aménagement de la centrale hydroélectrique. Autrement dit, cette hauteur de chute est la différence entre le niveau amont (prise d'eau de la centrale, par exemple) et le niveau aval de la centrale (canal de fuite, par exemple).

Le niveau amont de la centrale peut dépendre de plusieurs paramètres (ou variables) comme, par exemple, le niveau du réservoir en amont, le débit en apports naturels, le débit turbiné par les groupes de la centrale et le débit déchargé par les déversoirs du réservoir amont de la centrale. En ce qui concerne le niveau aval, il est souvent donné par une fonction de hauteur appelée fonction de tarage; celle-ci résume l'altitude de la surface libre d'écoulement en aval de la centrale rapportée à un plan horizontal de référence arbitraire (par exemple, le plan au niveau moyen de la mer). Ce niveau aval peut dépendre lui aussi de plusieurs paramètres (ou variables) comme, par exemple, le niveau du réservoir ou de tronçon de la rivière en aval, le débit turbiné par la centrale, le débit déversé du réservoir amont, etc.

Du fait de cette dépendance entre les niveaux (amont et aval) de la centrale et les débits turbiné et déversé, la hauteur de chute peut varier en fonction, par exemple, du débit total déchargé à la sortie de la centrale. En effet, selon la capacité d'évacuation à l'aval de la centrale, il peut se produire une accumulation d'eau qui cause une réduction de la hauteur de chute. C'est justement cette réduction de hauteur en fonction du débit sortant que l'on désigne par pertes de hauteur au tarage.

1.5.2 Pertes de charge

Le degré de complexité d'un réseau hydraulique de transport d'eau aux turbines d'une centrale hydroélectrique peut varier d'un aménagement hydraulique à un autre. Dans certains cas, le réseau hydraulique est formé simplement de conduites acheminant l'eau vers des turbines. Dans d'autres cas, le réseau hydraulique est composé d'un grand nombre de parties façonnées de toutes formes d'embranchements et d'obstacles divers : étranglements, dispositifs de régulation, grilles, etc. Dans tous les cas, il est nécessaire de calculer la résistance hydraulique de l'ensemble de canalisation du réseau hydraulique.

En pratique, la résistance hydraulique d'une canalisation est caractérisée par des pertes de charge dans les différents éléments qui la compose. Ces pertes de charge proviennent du processus de transformation de l'énergie mécanique du courant en chaleur. Cette transformation est due à la viscosité moléculaire et turbulente de l'eau en mouvement. On distingue deux types de pertes de charge : pertes par frottement et pertes singulières.

Les pertes de charge par frottement sont provoquées par la viscosité de l'eau en écoulement dans des conduites et canaux d'amenée. Elles résultent principalement de la friction des molécules de l'eau en mouvement contre la paroi d'un élément de canalisation (conduite ou canal d'amenée, par exemple).

Les pertes de charge singulières se produisent quand il y a perturbation de l'écoulement normal : décollement des parois, formation de tourbillons aux endroits où il y a changement de section ou de direction de la conduite, présence d'obstacles (entrée dans la conduite, élargissement, rétrécissement, courbure et branchement, grilles, etc). Toutes les formes des pertes singulières se produisent sur une longueur plus ou moins grande de la conduite et ne sont pas séparables des pertes par frottement.

Toutefois, pour la commodité du calcul, il est convenu de les considérer concentrées dans une section et ne comprenant pas les pertes par frottement. La sommation est effectuée suivant le principe de la superposition des pertes, d'après lequel on prend la somme arithmétique des pertes par frottement et des pertes singulières.

En vue de transposer la réalité des pertes de charge de manière explicite dans le modèle du chargement optimal, le plus commode consiste à exprimer ces pertes énergétiques adéquatement en terme de réduction de la hauteur de chute. Par la suite, toutes les formes de pertes de charge mentionnées ci-dessus (qui sont d'ailleurs des pertes d'origine purement hydrauliques) seront exprimées analytiquement en unité de mètre (m). Ainsi, en terme de cette unité, le théorème de Bernoulli (principe de conservation de l'énergie d'un fluide en mouvement) permet d'exprimer une perte de charge, notée Δh, de façon proportionnelle au carré de la vitesse d'écoulement de l'eau (Idelcik [33]). Par ailleurs, la vitesse d'écoulement v est fonction du debit q et de l'aire de la section considérée a :

$$v = \frac{q}{a} \quad [m/s].$$

En conclusion, il en résulte que les pertes de charge sont proportionnelles au carré du débit ; on peut représenter donc la perte de charge Δh par une parabole passant par l'origine (w étant le facteur constant de proportionnalité) :

$$\Delta h = w \cdot q^2 \quad [m]. \tag{1.1}$$

1.6 Hauteur de chute et similitude en hydraulique

Bien que la similitude soit une technique utilisée en plusieurs domaines scientifiques, il est difficile, par contre, de trouver des références spécialisées qui expliquent sa mise en oeuvre en optimisation hydroélectrique. Ainsi, on se propose dans la présente section de donner une justification à son utilisation comme outil pour modéliser la dépendance entre les fonctions de débit-puissance et la variation de hauteur de chute.

1.6.1 Motivation

L'idée vient tout naturellement de déterminer la courbe de débit-puissance d'un groupe T/A à une hauteur de chute donnée (appelée hauteur de référence), pour ensuite la transposer à d'autres valeurs de hauteur de chute. Certaines lois hydrauliques (physiques ou mathématiques) peuvent être utilisées pour modéliser la dépendance de la courbe aux deux hauteurs de chute. Dans ce contexte, la similitude en hydraulique constitue une des méthodes les plus utilisées pour effectuer une telle extrapolation d'une hauteur de référence (qu'on appelle modèle) à d'autres hauteurs de chute (qu'on appelle prototypes ou hauteurs projetées). Les avantages de la similitude sont multiples : d'une part, les essais sur le modèle permettent d'effectuer aisément de nombreuses expériences, de les répéter en cas de nécessité en faisant varier certains paramètres du problème (comme, par exemple, l'étude de l'évolution de la puissance produite pour différentes valeurs du débit) ; d'autre part, les dépenses nécessitées par des essais sur modèle ne représentent qu'une fraction du montant total qui peut être généré en faisant des essais sur plusieurs prototypes représentatifs.

1.6.2 Fondement théorique

Le problème se pose comme suit : dans quelle mesure et suivant quelles lois les courbes de débit-puissance du groupe i obtenue à la hauteur h_i^0 peuvent-elles être transposées à une autre hauteur de chute h_i ? Autrement dit, étant donné le rapport $\lambda_i^h = h_i/h_i^0$ (appelé rapport de similitude des hauteurs), comment peut-on déterminer les autres rapports les plus pertinents caractérisant l'écoulement et la production hydroélectrique, à savoir : vitesse (v_i), débit (q_i) et puissance hydraulique[1] (p_i) à une section donnée de la turbine.

[1] La puissance hydraulique est définie comme la puissance disponible sur l'arbre de la turbine.

Le rapport des vitesses (noté λ_i^v) est donné par la condition de similitude de Reech-Froude (voir Carlier [10, pp 521-526]) ; ce dernier doit satisfaire l'égalité suivante :

$$\left(\frac{v_i}{v_i^0}\right)^2 = \frac{h_i}{h_i^0}$$

ou

$$\lambda_i^v = \sqrt{\lambda_i^h}. \tag{1.2}$$

Le rapport des débits (noté λ_i^q) est obtenu par les relations suivantes :

$$\lambda_i^q = \frac{q_i}{q_i^0} = \frac{a\, v_i}{a\, v_i^0} = \lambda_i^v = \sqrt{\lambda_i^h} = \left(\frac{h_i}{h_i^0}\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

où a est l'aire de la section considérée.

Enfin, pour déduire le rapport des puissances, on utilise la définition de la puissance hydraulique disponible sur l'arbre d'une turbine. Cette puissance (voir Ginocchio [22, pp 47-56]) est donnée en fonction du débit, de la hauteur de chute nette[2] et du rendement hydraulique de la turbine (η_i) ; ce rendement (inférieur à l'unité) caractérise l'importance des pertes énergétiques (de nature hydraulique) à l'intérieur de la turbine. Formellement, cette puissance est exprimée comme suit :

$$p_i = \eta_i \rho g q_i h_i.$$

où ρ est la masse volumique de l'eau (densité de l'eau) et g la constante gravitationnelle.

Ainsi, le rapport des puissances (noté λ_i^p) s'écrit :

$$\lambda_i^p = \frac{p_i}{p_i^0} = \frac{\eta_i \rho g q_i h_i}{\eta_i^0 \rho g q_i^0 h_i^0} = \lambda_i^\eta \lambda_i^q \frac{h_i}{h_i^0} = \lambda_i^\eta \left(\frac{h_i}{h_i^0}\right)^{3/2} \tag{1.4}$$

avec $\lambda_i^\eta = \eta_i/\eta_i^0$.

[2] C'est la différence entre la hauteur de chute totale et les pertes de charge dans les différents éléments de canalisation avant l'entrée à la turbine.

1.6.3 Courbes de débit-puissance et similitude

Lorsque la hauteur de chute nette h_i du groupe i est maintenue constante, la courbe de débit-puissance est obtenue en portant en abscisses les débits utilisés q_i et en ordonnées les puissances utiles (électriques) p_i^u disponibles aux bornes de l'alternateur du groupe i. La puissance utile est donnée par la relation suivante :

$$p_i^u = p_i - p_i^d \tag{1.5}$$

où p_i est la puissance hydraulique et p_i^d la puissance mécanique dissipée au niveau du groupe i.

Les pertes en puissance dissipée sont dues, d'une part, aux frottements mécaniques dans les paliers de la turbine, au frottement de la roue de celle-ci sur le fluide ambiant (air et eau) et, d'autre part, à la puissance en marche à vide : celle-ci sert à vaincre les résistances passives existant à vide (frottements mécaniques au niveau du groupe entraîné à vide) en vue d'amener et maintenir la turbine à sa vitesse de régime.[3] L'importance de cette puissance dissipée varie selon le type et la capacité (en puissance nominale[4]) du groupe T/A. Toutefois, étant donné le fait que les groupes tournent à vitesse constante (puisqu'ils débitent sur un réseau électrique du courant alternatif à fréquence constante), les pertes en puissance dissipée (exprimées en MW) varient relativement peu avec le débit turbiné (voir Ginocchio [22, pp 446-447]), ce qui permet de supposer (sans trop de perte de généralité) que la puissance dissipée p_i^d (caractérisant le groupe i) est invariante dans l'expression de la fonction de débit-puissance (1.5).

[3] Un alternateur débitant sur un réseau électrique du courant alternatif à fréquence constante, doit tourner obligatoirement (malgré les variations de charge) à vitesse constante et il en va de même pour la turbine.

[4] la puissance nominale est la puissance maximale d'un groupe T/A à une hauteur de chute de référence.

Il est important de souligner que le rendement η_i subit des variations avec le débit turbiné. En effet, chaque turbine hydraulique est conçue et tracée pour un débit bien déterminé (appelé débit de tracé). En conséquence, le meilleur rendement de la turbine est recherché pour ce débit. Lorsque la charge de l'alternateur subit une variation (suite à une variation de demande en puissance), le débit turbiné passe en deçà ou au-delà du débit de tracé. Ainsi, en s'écartant de ce débit spécifique à la turbine, les frottements augmentent et le rendement (hydraulique) de la turbine diminue, d'où l'existence d'un maximum de rendement pour le débit de tracé (un exemple de la courbe des rendements est donnée à la figure 1.3).

Par ailleurs, lorsque la hauteur de chute h_i varie autour de la hauteur de référence h_i^0 (par exemple, une variation de 3% par rapport à h_i^0, ce qui constitue une variation gigantesque des volumes de grands réservoirs), le rendement hydraulique de la turbine varie très peu par rapport aux débits q_i^0 et q_i et, par suite, on peut supposer (comme approximation) que le rapport des rendements λ_i^η est très voisin de l'unité. En effet, lorsque, par exemple, h_i diminue de 3% par rapport à h_i^0, on aura :

$$q_i^0 = \left(\frac{h_i^0}{h_i}\right)^{1/2} q_i = \left(\frac{h_i^0}{0.97\, h_i^0}\right)^{1/2} q_i \simeq 1.015\, q_i.$$

Il en résulte donc que le débit q_i varie (à peu près) de 1.5% par rapport au débit q_i^0. Ainsi, sous certaines hypothèses pratiques, on peut supposer que les deux rendements (η_i^0 et η_i) sont très proches. Cette hypothèse simplificatrice est pourtant réaliste pour plusieurs centrales hydroélectriques dont la variation de hauteur de chute est peu significative dans un horizon de très court terme (une journée, par exemple). En outre, pour certaines architectures de turbines (comme, par exemple, des turbines du type Kaplan et certaines turbines du type Pelton), la courbe des rendements est suffisamment étalée et aplatie sur quelques plages de débits (surtout autour de débit de tracé) où le rendement hydraulique varie très peu suite à une petite variation de débit (par exemple, de 1% à 3%). En conclusion, on peut admettre, comme approximation, que le rapport des rendements hydrauliques λ_i^η d'une turbine est égal à 1

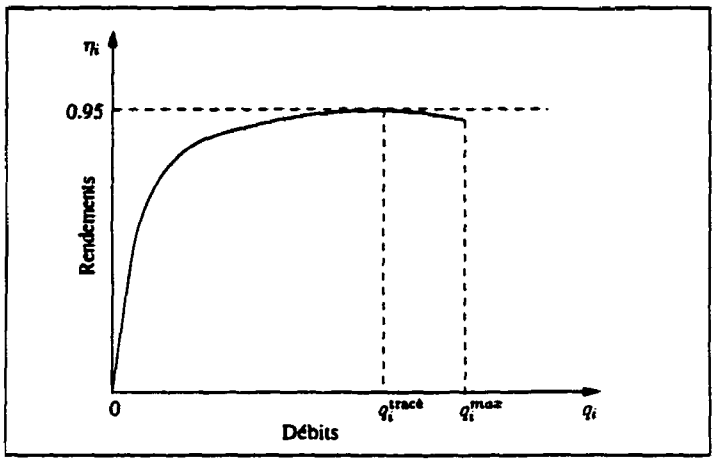

Figure 1.3 – Exemple d'une courbe de rendement en fonction du débit

pour deux hauteurs de chute voisines h_i et h_i^0. Plus les deux hauteurs de chute sont proches, meilleure est cette approximation. Le livre de Varlet [98, chap. 23] constitue une excellente référence à ce sujet.

Ainsi, selon cette approximation, on déduit de la formule (1.4) :

$$\begin{aligned} p_i(q_i)/p_i^0(q_i^0) &= \left(h_i/h_i^0\right)^{3/2} \\ \Longrightarrow \qquad p_i(q_i) &= \left(h_i/h_i^0\right)^{3/2} p_i^0(q_i^0). \end{aligned}$$

Mais, d'après la formule (1.3), le débit q_i^0 s'écrit : $q_i^0 = \left(h_i/h_i^0\right)^{-1/2} q_i$. D'où :

$$p_i(q_i) = \left(h_i/h_i^0\right)^{3/2} p_i^0\left(\left(h_i/h_i^0\right)^{-1/2} q_i\right). \tag{1.6}$$

En posant $\alpha_i(h_i) = \left(h_i/h_i^0\right)^{-1/2}$ et $\beta_i(h_i) = \left(h_i/h_i^0\right)^{3/2}$, la fonction de débit-puissance à la hauteur de chute (nette) h_i est déduite de celle à la hauteur de référence h_i^0 via les deux multiplicateurs de hauteur $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$:

$$p_i(q_i) = \beta_i(h_i)\, p_i^0\left(\alpha_i(h_i)\, q_i\right). \tag{1.7}$$

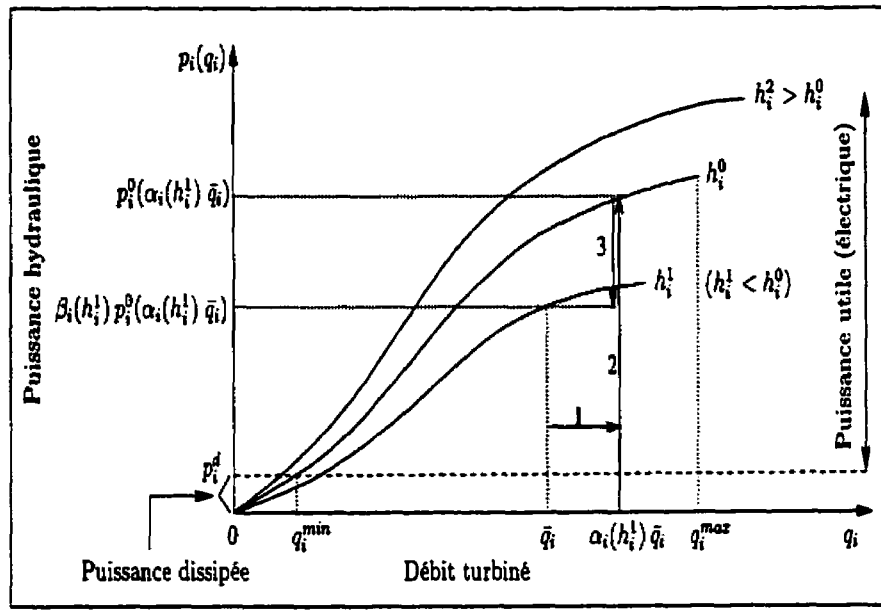

Figure 1.4 – Transformation par similitude de débit-puissance

La formule (1.7) peut être considérée géométriquement comme un mécanisme de transformation de la courbe de débit-puissance d'une hauteur de chute à une autre. Cette transformation s'effectue de façon à ce que le débit maximum et la puissance générée augmentent avec la hauteur de chute. Ainsi, étant donné une fonction de débit-puissance $p_i^0(\cdot)$ (du groupe i) à la hauteur de référence h_i^0, la valeur de la fonction de débit-puissance à la hauteur de chute h_i (pour un débit turbiné q_i) devient $p_i(q_i) = \beta_i(h_i)\, p_i^0(\alpha_i(h_i)\, q_i)$. La figure 1.4 illustre ce mécanisme de transformation des courbes de débit-puissance en fonction de la hauteur de chute.

Sur le graphique de la figure 1.4, le point (q_i^{min}, p_i^d) subdivise la courbe de débit-puissance (correspondant à la hauteur de référence h_i^0) en deux parties distinctes caractérisant le fonctionnement physique d'un groupe T/A. En effet, la génération de la puissance électrique au niveau du groupe n'est amorcée qu'à partir du moment où le groupe commence à turbiner au-delà d'un minimum de débit, noté q_i^v. À la

hauteur de référence h_i^0, le débit q_i^v correspond au débit de marche à vide (nominal[5]) q_i^{min}. Par contre, à une hauteur de chute h_i, le débit minimum q_i^v est calculé par la relation suivante :

$$\beta_i(h_i)\, p_i^0(\alpha_i(h_i)\, q_i^v) = p_i^d. \tag{1.8}$$

Par ailleurs, dans le modèle de chargement optimal des groupes T/A, on s'intéresse plutôt à l'optimisation de la puissance utile (électrique) des groupes en marche (ou engagés). Mais puisque cette puissance utile est donnée en fonction de la puissance hydraulique par la relation (1.5), il s'ensuit alors qu'on doit s'intéresser à la puissance hydraulique située au dessus de la puissance dissipée p_i^d (supposée constante). Autrement dit, pour une hauteur de chute h_i du groupe i, la fonction de débit-puissance est exprimée (par similitude) comme suit : $q_i \longmapsto p_i(q_i) = \beta_i(h_i)\, p_i^0(\alpha_i(h_i)\, q_i)$, à laquelle on ajoute les contraintes :

$$0 \leq \alpha_i(h_i)\, q_i \leq q_i^{max} \qquad \text{et} \qquad \beta_i(h_i)\, p_i^0(\alpha_i(h_i)\, q_i) \geq p_i^d \tag{1.9}$$

où q_i^{max} est le débit maximal du groupe i à la hauteur de référence h_i^0.

[5]Débit de marche à vide à la hauteur de référence h_i^0.

Chapitre 2

Problème de chargement optimal : modèles de référence

2.1 Position du problème

On appelle problème de chargement optimal (ChOp, en abrégé) le problème d'optimisation qui traite de la gestion d'une centrale hydroélectrique durant une seule période de planification. Il consiste à répartir la production entre les groupes disponibles en vue d'optimiser un objectif donné. Généralement, l'objectif consiste soit à maximiser la puissance utile produite par les groupes étant donné un débit total disponible, soit à minimiser le total du débit turbiné par les groupes pour répondre à une demande de puissance donnée.

La première situation (maximisation de la puissance) se présente dans le cas où le débit turbiné par la centrale est prédéterminé soit par un niveau supérieur de planification, soit par des règles de gestion ou d'exploitation de la centrale. La deuxième situation (minimisation du débit) constitue une alternative intéressante dans le cas où le producteur cherche à satisfaire une certaine demande de puissance. C'est le cas, par exemple, des industries hydroélectriques qui visent à satisfaire leur propre consommation en énergie électrique. Par convention, on utilise, dans ce texte, la terminologie "consigne de débit" pour désigner le débit total disponible aux groupes de la centrale et "consigne de puissance" pour désigner la demande en puissance.

De nos jours, le modèle de chargement optimal occupe une position assez importante dans les préoccupations des ingénieurs et chercheurs travaillant dans le domaine. En effet, ce modèle constitue la base des problèmes d'optimisation dans la gestion des centrales hydroélectriques et, par conséquent, dans la gestion optimale des ressources hydroélectriques d'une rivière.

La formulation conventionnelle consiste à maximiser la puissance générée par la centrale pour un total donné du débit à turbiner ou, inversement, à minimiser le total du débit turbiné pour répondre à une demande donnée de puissance. Dans les deux cas, on respecte les restrictions individuelles sur les groupes.

La formulation générale du problème présentée ici comporte, en plus, des restrictions globales sur des sous-ensembles de groupes. C'est le cas, par exemple, des bornes imposées sur le débit d'un canal acheminant l'eau à plusieurs turbines ou sur la puissance débitée sur un réseau électrique auquel sont connectés plusieurs alternateurs (de groupes).

Jusqu'à présent, la solution la plus satisfaisante du problème conventionnel de chargement optimal est obtenue par l'algorithme de programmation dynamique (PD). Contrairement à plusieurs approches alternatives de résolution, la PD n'impose aucune restriction sur les caractéristiques des courbes de débit-puissance des groupes et permet d'obtenir une solution globalement optimale.

En vue de résoudre le problème général, une extension directe de l'algorithme de PD consisterait à associer une variable d'état à chacune des contraintes globales ou couplantes (c'est-à-dire, celles qui impliquent plusieurs groupes à la fois). On se retrouvait ainsi avec un vecteur d'état de dimension égale au nombre des contraintes globales et un temps de calcul qui augmente rapidement avec le nombre de contraintes et le nombre de groupes.

Dans ce chapitre, on suggère une nouvelle méthode qui combine la technique de PD et la décomposition par les ressources. Il s'agit d'une approche qui exploite la structure particulière du problème et préserve la globalité de la solution optimale tout en maintenant le vecteur d'état à une seule dimension.

Le présent chapitre est organisé en cinq sections. Dans la section 2.2, on présente la formulation conventionnelle du problème de chargement optimal : notations, modèle, revue de la littérature et algorithme de résolution. Dans la section 2.3, on discute une généralisation du modèle en incorporant des contraintes sur les canaux d'amenée et sur les réseaux électriques de transport ; pour ce faire, on propose un algorithme de solution qui résout cette généralisation sans augmentation significative du temps de calcul. Le modèle inverse de chargement optimal (avec consigne de puissance) est exposé dans la section 2.4. Enfin, la section 2.5 illustre certains résultats numériques obtenus par application de l'algorithme de résolution, proposé dans la section 2.4, en faisant ressortir l'importance de la prise en compte des contraintes couplantes.

2.2 Modèle conventionnel

2.2.1 Notations et modèle

Soit

n : nombre de groupes disponibles,

q_i : débit à turbiner par le groupe i,

m_i : nombre de zones de débit permises pour le groupe i,

$[a_i^j, b_i^j]$: zone j permise de débit à turbiner par le groupe i,

D_i : domaine admissible de débit à turbiner par le groupe i,

$D_i \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j=1}^{m_i} [a_i^j, b_i^j]$,

$p_i(\cdot)$: fonction de débit-puissance du groupe i,
q_i^{min} : débit minimal à turbiner par le groupe i ($q_i^{min} = a_i^1$),
q_i^{max} : débit maximal que peut turbiner le groupe i ($q_i^{max} = b_i^{m_i}$),
p_i^{max} : puissance maximale du groupe i ($p_i^{max} = p_i(q_i^{max})$),
Q^T : débit total disponible (consigne de débit).

Remarque: Il est important de noter que, le long de ce chapitre, les hauteurs de chute disponibles aux groupes T/A sont supposées connues ou mesurées. Ainsi, toutes les données ci-dessus sont exprimées en fonction de ces hauteurs de chute.

Les contraintes du problème consistent à respecter des restrictions individuelles sur les groupes, à savoir :

- fonctionner à l'intérieur des seuils minimum et maximum des débits à turbiner, ou puissances produites, par ces groupes ;
- éviter les zones de cavitation et de vibration.

Dans la formulation qui suit, l'objectif consiste à maximiser la puissance générée par la centrale pour une consigne de débit donnée Q^T. Le problème se formule alors comme suit :

$$P^C(Q^T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{q_i} \sum_{i=1}^{n} p_i(q_i)$$

$$(C) \qquad \text{s.à.} \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = Q^T \tag{2.1}$$

$$q_i \in D_i \qquad i=1,\cdots,n. \tag{2.2}$$

On trouve cette formulation (ou une version équivalente dans le cas de la minimisation du débit) dans plusieurs articles et livres comme, par exemple, Hansen et Mladenovič [28], Klein et Sim [37], Wood [103], Zhang et al. [109]. On note que le modèle inverse de chargement optimal est discuté dans la section 2.4.

2.2.2 Revue de la littérature

Plusieurs méthodes numériques ont été proposées pour résoudre le modèle conventionnel de chargement optimal (C). Ces méthodes peuvent être classées en quatre catégories : analyse convexe, exploration des optima locaux, heuristiques et programmation dynamique.

Analyse convexe

La première classe, la plus traditionnelle, est fondée sur les conditions nécessaires d'optimum du premier ordre. Il s'agit de satisfaire ces conditions en égalisant les productions marginales entre les groupes disponibles, c'est-à-dire que les pentes des tangeantes aux courbes de débit-puissance sont les mêmes aux points de chargement des groupes. Cette technique a été utilisée par plusieurs auteurs dont Davis et Sorensen [16] et Wood [104].

Tous les algorithmes basés sur l'égalité des productions marginales supposent que les courbes de puissance en fonction du débit sont concaves, présentant une production marginale décroissante. Cependant, en pratique, cette hypothèse n'est pas souvent vérifiée. Par conséquent, l'application d'une telle méthode peut mener à des solutions non-optimales. Un optimum local peut être obtenu par l'une des méthodes itératives de la programmation non-linéaire comme, par exemple, la méthode du gradient ou celle de Newton. Cependant, à moins que l'objectif ne soit concave, l'optimalité globale n'est pas assurée même avec des méthodes dotées de plus de raffinement, incorporant les conditions d'optimum du second ordre.

En outre, toutes les méthodes basées sur l'analyse convexe supposent que le domaine défini par l'ensemble des contraintes est convexe. Or, la présence des zones inter-

dites rend le domaine de chaque groupe non seulement non-convexe, mais aussi non-connexe. Une façon de remédier à cette difficulté consiste à combiner ces méthodes avec des procédures du genre évaluation-séparation successive (Lee et Breipohl [46]). Toutefois, bien que la quantité de calcul soit tolérable pour des problèmes de taille relativement petite, les méthodes de ce genre sont souvent coûteuses en temps de calcul.

Par ailleurs, quelque soit l'algorithme utilisé de cette catégorie, la génération de la courbe globale de débit-puissance de la centrale ne peut être qu'approximative. En effet, toute tentative de la générer de manière exacte le serait au prix d'un temps de calcul considérable, puisque chaque point correspond à la résolution d'une instance du problème (C) avec une nouvelle consigne de débit.

Exploration des optima locaux

L'approche d'exploration des optima locaux a été proposée principalement par Bernholtz [6] et Gauvin et al. [20]. Ils supposent que tous les groupes sont identiques et que les fonctions de production sont convexes sur un intervalle de petits débits et concaves pour des débits plus élevés en possédant certaines formes particulières. Ces hypothèses facilitent l'identification des points où les productions marginales sont égales, propriété caractérisant une bonne partie des optima locaux.

Gauvin et al. [20] ont étudié le problème dans le cas particulier d'une fonction de débit-puissance polynomiale de troisième degré caractérisée par une seule zone interdite de production. Ils utilisent les conditions d'optimalité du premier et second ordre. Les optima locaux qu'ils caractérisent sont des solutions réalisables du type chargement à l'identique et dans la partie concave d'un sous-ensemble de groupes, alors que les autres groupes sont chargés à leur débit minimal. Pour la prise en compte

de la zone interdite, réduisant le domaine réalisable de la fonction de production de chaque groupe à deux intervalles disjoints, ils projettent les optima locaux sur une classe de rectangles (ou pavés) obtenue à partir du produit cartésien de ces intervalles qui contiennent une solution réalisable. Chaque projection nécessite la résolution d'un programme quadratique convexe simple bien conditionné avec une seule contrainte linéaire. Cependant, cette projection peut conduire à une solution qui n'est pas globalement optimale. Ainsi, elle est améliorée moyennant une technique spécifique de descente fondée sur des propriétés particulières du problème considéré. La comparaison de différentes projections améliorées fournit la meilleure répartition que peut fournir cet algorithme heuristique. La solution obtenue semble être de qualité.

Bernholtz [6] cherche, d'une part, à maximiser la puissance totale pour une consigne de débit total et, d'autre part, à générer la courbe de production de la centrale en faisant varier ce débit. Il considère une fonction de production égale à zero pour la partie convexe, linéaire pour le début de la partie concave et non-linéaire pour les débits élevés. En utilisant les conditions du premier ordre, il caractérise deux types d'optima locaux : ceux observés par Gauvin et al. [20] et ceux qui consistent à charger au débit maximal un sous-ensemble de groupes, puis charger un seul groupe dans la partie convexe et, enfin, charger le reste de groupes à leur débit minimal. Il montre que le nombre optimal de groupes chargés, au delà de leur débit minimal, augmente progressivement avec le débit total disponible. On note que cette propriété permet de construire, de manière quasiment analytique, la courbe globale de production de la centrale.

Heuristiques

Parallèlement aux algorithmes d'analyse convexe, d'autres algorithmes heuristiques ont été développés pour résoudre le problème (C). Parmi ces méthodes, on cite les

algorithmes génétiques (proposés par Bakirtzis et al. [2], Sheblé et Britting [86]) et l'algorithme de recuit simulé (proposé par Wong et Fung [102]). Bakirtzis et al. [2] montrent que ce dernier type d'algorithme fournit des solutions sous-optimales dans 40% des problèmes testés. En outre, ces heuristiques partagent les mêmes inconvénients que les méthodes précédentes quant à la génération des courbes de débit-puissance de la centrale. Par conséquent, l'intégration, à travers ces courbes, de la gestion des centrales à l'intérieur d'une gestion globale d'une rivière ne pourrait être qu'approximative ou bien au prix d'un temps de calcul considérable.

Programmation dynamique

Aujourd'hui, la solution la plus générale du problème de chargement optimal est basée sur la programmation dynamique (PD). Contrairement aux autres approches, la PD n'impose aucune restriction, ni sur la concavité des fonctions caractéristiques des groupes, ni sur la convexité ou la connexité des domaines, en admettant par exemple la présence de zones interdites de production. De plus, les solutions obtenues par la PD sont plus précises que celles fournies par toutes les méthodes alternatives connues jusqu'à présent.

En revanche, on reproche à la PD sa technique d'énumération et la relation entre sa performance et la dimension du vecteur des variables d'état. En effet, sa complexité pseudo-polynomiale croît de manière quadratique avec la finesse de discrétisation des fonctions de débit-puissance, phénomène fortement amplifié par la dimension du vecteur d'état.

Malgré ces inconvénients, la programmation dynamique a déjà été suggérée dans plusieurs publications pour résoudre le problème conventionnel, par exemple, Hansen et Mladenović [28], Liang et Glover [50], Zhang et al. [109]. Elle a aussi été retenue par

plusieurs développeurs et compagnies productrices d'électricité dont, à titre indicatif, le programme commercial de la compagnie Norvégienne RUNAID [81], le programme de production GESTEAU de la compagnie québécoise Hydro-Québec et certains modules de contrôle de la compagnie américaine TVA (Tennesse Valley Autority).

Les raisons de cet intérêt pour l'utilisation de la programmation dynamique sont multiples. D'une part, la courbe globale de la centrale est générée avec la même complexité que la résolution du problème avec une consigne individuelle de débit ou de puissance. D'autre part, la rapidité croissante des nouveaux ordinateurs rend très acceptable une implantation efficace de l'algorithme de PD.

Dans la section 2.3, on montre comment la résolution du problème généralisé avec des contraintes physiques et hydrauliques peut être faite de manière efficace à l'intérieur d'un schéma qui combine à la fois la technique de PD et la méthode de décomposition par les ressources.

2.2.3 Résolution du modèle conventionnel

Le but de cette section est de montrer comment on peut résoudre le problème conventionnel (C) par application de l'algorithme de programmation dynamique. Pour ce faire, on commence d'abord par identifier les principales caractérisiques de la reformulation dynamique du problème :

1. **Étapes :** Groupes de turbine-altérnateur à traiter, indexés de 1 à n. Par convention, l'indice 0 est utilisé pour désigner l'étape de l'algorithme où aucun groupe de la centrale n'est chargé.
2. **Variable d'état :** On note s la variable d'état associée à la contrainte (2.1). À une étape donnée (pour $i = 1, \ldots, n$), les instances de cette variable d'état

représentent le débit total à allouer aux groupes indexés de i à n. Si on note par $\mathcal{S}_i$ l'ensemble des instances possibles de la variable d'état à l'étape i, alors on peut limiter cet ensemble par l'intervalle :

$$\mathcal{S}_i = \left[\sum_{j=i}^{n} q_j^{min},\ \min\left\{\sum_{j=i}^{n} q_j^{max}, Q^T - \sum_{j=1}^{i-1} q_j^{min}\right\}\right] \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

où $\sum_{j=1}^{0} q_j^{min} = 0$ (par convention).

En effet, à chaque étape i de la PD, on doit disposer d'un minimum de débit disponible correspondant à la somme des débits minimum des groupes. En outre, vu les exigences en débit minimal, le débit maximum à allouer aux groupes i à n (pour $i = 1, \ldots, n$) ne doit pas dépasser le total de débit disponible Q^T après avoir soustrait la somme de débits minimum exigés par les $i-1$ premiers groupes.

3. **Variable de décision :** Les variables du problème q_i (pour $i = 1, \ldots, n$) déterminent les débits à turbiner par les groupes disponibles de la centrale. On rappelle que ces variables sont soumises aux contraintes (2.1)-(2.2) du problème (C).
4. **Fonction de récurrence :** Soit $P_i^*(s)$ la production maximale générée par les groupes $i, \ldots, n$, si le débit total à allouer est s. La fonction $s \mapsto P_i^*(s)$ est définie, par récurrence, comme suit :

$$P_i^*(s) = \max_{q_i \in X_i(s)} \left\{p_i(q_i) + P_{i+1}^*(s - q_i)\right\} \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{2.4}$$

$$P_n^*(s) = \begin{cases} p_n(s) & \text{si } s \in D_n \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où $X_i(s) = \{q_i \in D_i : q_i \leq s,\ (s - q_i) \in \mathcal{S}_{i+1}\}$.

Dans la formule récurrente (2.4), le débit à turbiner par le groupe i doit respecter son domaine de définition D_i et le total du débit à allouer s. De plus, les valeurs de la variable de décision q_i doivent être définies de sorte que les transitions de la variable d'état à l'étape $i+1$ $(s - q_i)$ soient admissibles.

Enfin, la production optimale de la centrale $P^C(Q^T)$ est donnée par $P_1^*(Q^T)$.

Proposition 1 *Soit Δ le nombre de points de discrétisation des courbes de débit-puissance des groupes (on suppose que Δ est le même pour tous les groupes). La complexité de l'algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème conventionnel (C) est $O(n^2\Delta^2)$.*

Démonstration: Soit i l'indice des étapes de la PD du problème (C). Sans perte de généralité, on suppose que $D_i = [0, \Delta-1]$. On note que l'étape n de l'algorithme PD est une simple affectation des valeurs admissibles de la courbe de débit-puissance du groupe n et peut être assimilée à la lecture des données. Maintenant à l'étape $i=1,\ldots,n-1$ de l'algorithme, les intervalles S_i ont la forme suivante : $S_n = [0, \Delta-1], \ldots, S_i = [0, (n+1-i)(\Delta-1)], \ldots, S_1 = [0, n(\Delta-1)]$. Ainsi, à l'étape $i=1,\ldots,n-1$, le nombre total d'opérations (additions et comparaisons) requises par l'équation récurrente (2.4) est calculé comme suit :

- Pour $s = 0,\ldots,\Delta-1$, l'ensembe $X_i(s)$ prend $1,\ldots,\Delta$ valeurs possibles (respectivement). Dans ce cas, le nombre d'opérations est donné par :

$$1+2+\cdots+\Delta = \frac{1}{2}\Delta(\Delta+1).$$

- Si $i < n-1$ alors pour chaque instance $s = \Delta,\ldots,(n-i)(\Delta-1)$, l'ensembe $X_i(s)$ peut prendre Δ valeurs possibles. Dans ce cas, le nombre d'opérations est donné par :

$$\underbrace{\Delta+\Delta+\cdots+\Delta}_{s\in[\Delta,(n-i)(\Delta-1)]} = (n-i-1)(\Delta-1)\Delta.$$

- Pour $s = (n-i)(\Delta-1)+1,\ldots,(n+1-i)(\Delta-1)$, l'ensembe $X_i(s)$ prend $\Delta-1,\ldots,1$ valeurs possibles (respectivement). Dans ce cas, le nombre d'opérations est donné par :

$$1+2+\cdots+\Delta-1 = \frac{1}{2}(\Delta-1)\Delta.$$

On déduit alors que le nombre total d'opérations à l'étape i, pour $i = 1, \ldots, n-1$, est :

$$\frac{1}{2}(\Delta+1)\Delta + (n-i-1)(\Delta-1)\Delta + \frac{1}{2}\Delta(\Delta-1) \; < \; (n-i)\Delta^2.$$

Ce qui permet de conclure que le nombre maximal d'opérations requises pour résoudre le problème (C) est borné supérieurement par :

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\;\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i\;\Delta^2 = \frac{1}{2}\Delta^2 n(n-1). \tag{2.5}$$

D'où, une complexité $O(n^2\Delta^2)$. □

Remarque: Pour générer la courbe globale optimale de la centrale, il suffit de considérer le débit total disponible Q^T comme un paramètre ; c'est à dire, Q^T peut prendre toutes les valeurs possibles de débit que peuvent décharger les groupes disponibles de la centrale. Dans ce cas, on parle d'un algorithme de programmation dynamique paramétrique (PDP).

2.2.4 Défaut de la formulation conventionnelle

La formulation conventionnelle comporte un défaut qui prête à la critique. En effet, l'utilisation de la contrainte d'égalité (2.1) pour modéliser le débit total à décharger par la centrale peut engendrer une certaine inefficacité du fait de la présence des zones interdites ou des contraintes globales sur un sous-ensemble de groupes (comme les contraintes de bornes sur la puissance à générer).

Pour illustrer la première situation d'inefficacité, soit deux groupes ayant des caractéristiques identiques avec un domaine admissible $D_i = \{0\} \cup [30, 69] \cup [81, 96]$. La fonction de débit-puissance[1] est telle que $p(52) = 13$, $p(69) = 22$ et $p(81) = 27$ (en

[1] La fonction de débit-puissnce est définie par : $p_i(0) = 0$ et $p_i(q_i) = 31.81\,ln(q_i) - 112.69$, si $q_i \in [30, 96]$.

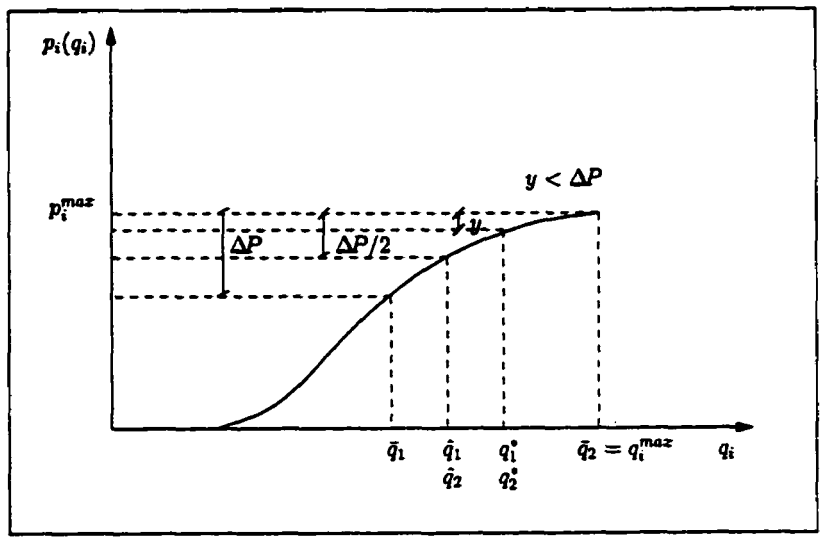

Figure 2.1 – Exemple avec contrainte globale de puissance

MW). La solution du problème (C) pour une consigne de débit $Q^T = 104$ consiste à affecter 52 m^3/s à chaque groupe pour générer une puissance totale de 26 MW. Une meilleure solution est obtenue en faisant fonctionner un seul groupe au débit de 81 m^3/s. Cette solution génère plus de puissance en consommant moins de débit que celui indiqué par la consigne Q^T. Cette solution est obtenue en remplaçant la contrainte d'égalité (2.1) par une inégalité dans le problème (C).

La deuxième situation d'inefficacité du modèle (C) est obtenue en combinant la contrainte d'égalité (2.1) avec une contrainte globale de puissance. Pour ce faire, on considère deux groupes identiques dont la fonction de débit-puissance est illustrée dans la figure 2.1. La contrainte globale sur les deux groupes est de type :

$$p_1(q_1) + p_2(q_2) \leq 2p_1^{max} - \Delta P \tag{2.6}$$

La solution du problème, en négligeant la contrainte globale (2.6), consiste à partager la production entre les deux groupes, c'est-à-dire $q_1^* = q_2^* = Q^T/2$. La solution du problème (C) auquel on ajoute la contrainte (2.6) est $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ générant ainsi une

puissance totale de $(2p_i^{max} - \Delta P)$. Une solution alternative $(\hat{q}_1, \hat{q}_2)$ (satisfaisant la contrainte (2.6)) génère la même puissance en déchargeant moins de débit. Cette solution est également obtenue en substituant la contrainte d'égalité (2.1) par une inégalité.

Les deux exemples montrent que la formulation de la contrainte (2.1) sous forme d'égalité peut engendrer une certaine inefficacité dans le chargement des groupes. Pour cette raison, dans ce qui suit et le long des chapitres de cette thèse, on opte pour la formulation de cette contrainte sous forme d'inégalité ($\leq$).

2.2.5 Limitations de la formulation conventionnelle

Le modèle conventionnel (C) est très limitatif : il ne supporte aucune restriction, ni sur la production d'électricité ni sur les débits à turbiner par un sous-ensemble de groupes. En réalité, la configuration physique d'une centrale présente souvent une structure plus compliquée que ce que supporte le modèle (C). En effet, elle peut avoir plus d'un canal d'amenée d'eau aussi bien qu'un ensemble de réseaux électriques. Dans ce cas, des restrictions (physique ou d'exploitation) peuvent être imposées sur le débit à amener dans un canal ou sur la puissance à générer sur un réseau. La figure 2.2 illustre un exemple de configuration d'une centrale qui ne pourrait être traité correctement par le modèle (C) si de telles contraintes étaient présentes.

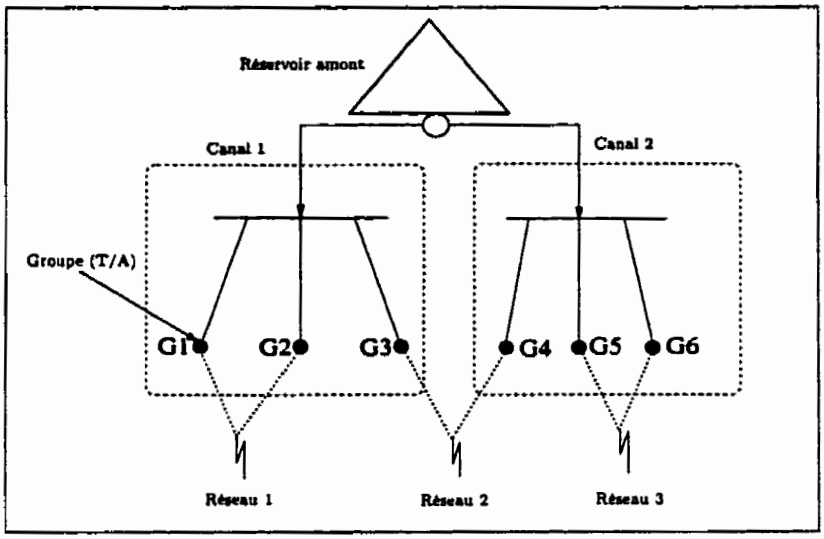

Figure 2.2 – Exemple d'une configuration avec deux canaux et trois réseaux

2.3 Modèle de référence généralisé

2.3.1 Notations et modèle

Soit :

K :	ensemble de canaux de la centrale,
η_k :	débit minimal du canal k,
φ_k :	débit maximal du canal k,
I_k :	ensemble de groupes alimentés par le canal k,
R_k :	ensemble de réseaux du canal k,
γ_r^k :	puissance minimale à produire sur le réseau r du canal k,
ν_r^k :	puissance maximale qui peut être produite sur le réseau r du canal k,
J_r^k :	ensemble de groupes connectés au réseau r du canal k,
$q^{r,k} = (q_i)_{i \in J_r^k}$:	vecteur de variables de decision au niveau des groupes du réseau r du canal k,
q_r^k :	débit alloué aux groupes du réseau r du canal k, on note $q^k = (q_r^k)_{r \in R_k}$,
q_k^C :	débit alloué aux groupes du canal k, on note $q^C = (q_k^C)_{k \in K}$.

Hypothèse: La notation utilisée suppose que les groupes connectés à un réseau électrique[2] sont alimentés par le même canal amont. On note que cette hypothèse est généralement vérifiée par la plupart des centrales hydroélectriques. Dans le cas où cette hypothèse ne serait pas remplie, l'algorithme présenté dans ce chapitre pourrait être modifié en ajoutant une variable d'état supplémentaire pour en tenir compte, ce qui ne sera pas discuté, plus précisément, dans cette thèse.

Avec cette hypothèse, le modèle généralisé (à une hauteur de référence) se formule comme suit :

$$P^G(Q^T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{q_i} \sum_{k\in K}\sum_{r\in R_k}\sum_{i\in J_r^k} p_i(q_i)$$

s.à.

$$(G) \qquad \sum_{k\in K}\sum_{r\in R_k}\sum_{i\in J_r^k} q_i \le Q^T \tag{2.7}$$

$$\eta_k \le \sum_{r\in R_k}\sum_{i\in J_r^k} q_i \le \varphi_k \quad k\in K \tag{2.8}$$

$$\gamma_r^k \le \sum_{i\in J_r^k} p_i(q_i) \le \nu_r^k \quad r\in R_k,\ k\in K \tag{2.9}$$

$$q_i \in D_i \quad i=1,\ldots,n. \tag{2.10}$$

Contrairement au modèle (C), la contrainte de consigne (2.7) est une inégalité. Les contraintes de type (2.8) sont utilisées pour modéliser des restrictions (physiques ou d'exploitation) sur les débits à amener dans les canaux. De la même façon, les contraintes de type (2.9) sont incorporées pour modéliser des exigences sur la production électrique, à savoir satisfaire une demande minimale donnée de puissance (par exemple pour satisfaire les besoins d'une zone donnée desservie par le réseau électrique) ou éviter le rechauffement dans les réseaux électriques alimentés par les alternateurs des groupes de la centrale.

[2]En fait, l'hypothèse ne concerne que les réseaux électriques soumis à des contraintes d'exploitation susceptibles d'être violées.

2.3.2 Approche de décomposition

Une extension directe de l'algorithme de PD (à ce modèle généralisé) consiste à associer à chaque contrainte globale du problème une variable d'état. Celle-ci représente, à chaque étape de la PD, la quantité d'eau utilisée par les groupes alimentés par un canal donné ou la puissance générée par les groupes d'un réseau donné. Ainsi, on se retrouve avec un vecteur d'état de dimension égale au nombre de contraintes couplantes du problème.

Bien que cette approche soit relativement simple à implanter, son inconvénient est que le temps de calcul augmente rapidement avec la dimension du vecteur d'état. Une approche plus intéressante, proposée dans le présent chapitre, consiste à combiner à la fois le principe de décomposition par les ressources (ou quantités) et la technique de programmation dynamique.

Les contraintes (2.8) et (2.9) ont une structure particulière qui permet de les gérer de manière implicite par l'algorithme de PD avec une seule variable d'état. En effet, le terme du centre des contraintes (2.9) se trouve dans la fonction objectif et celui des contraintes (2.8) est le même que celui dans la première sommation de la contrainte de consigne (2.7). Par conséquent, il n'est pas nécessaire de créer une redondance dans l'information en introduisant des variables d'état supplémentaires spécifiques aux contraintes (2.8) et (2.9).

Du point de vue algorithmique, le total de débit turbiné par les groupes d'un canal k peut être comptabilisé directement dans la valeur de la variable d'état associée à la contrainte (2.7). De la même manière, la puissance générée par les alternateurs des groupes connectés à un réseau électrique peut être comptabilisée à partir des valeurs prises par la fonction objectif.

Cette prise en compte implicite des contraintes couplantes peut être effectuée dans un

cadre de décomposition nichée par les ressources (Lasdon [42, Chap. 9]). Au niveau supérieur, le total de débit disponible Q^T est partagé entre les différents canaux; ensuite, le débit de chaque canal est distribué entre les sous-ensembles de groupes connectés au même réseau électrique; enfin, chaque débit relatif à cette dernière partition est alloué entre les groupes correspondants. Évidemment, ces allocations successives doivent être effectuées de manière optimale.

Le processus de construction de la solution optimale se déroule comme suit :

- la première étape de l'algorithme consiste à optimiser à l'intérieur des réseaux à partir des courbes de débit-puissance des groupes auxquels ils sont connectés.
- La deuxième étape optimise à l'intérieur des canaux à partir des courbes des réseaux générées par la première étape, et ce, en éliminant les solutions non-admissibles dues aux contraintes (2.9).
- Enfin, la troisième étape est une optimisation globale à partir des courbes des canaux générées par le deuxième niveau en coupant les solutions non-réalisables dues aux contraintes (2.8).

Formellement, on peut énoncer le principe de décomposition comme suit : le problème initial (G)est subdivisé en sous-problèmes $(SC_k)_{k\in K}$ de telle sorte que chacun d'eux n'implique que les variables de décision $(q_i)_{i\in I_k}$ représentant les groupes du canal k. De la même façon, le sous-problème (SC_k) est décomposé en sous-problèmes $(SR_r^k)_{r\in R_k, k\in K}$ tel que chaque sous-problème restreint ne contient que les variables de décision $(q_i)_{i\in J_r^k}$ liées au réseau r du canal k.

Ainsi, soit $P_r^k(Q)$ la production optimale du réseau r du canal k auquel on a alloué une ressource de débit Q. Cette production est calculée en résolvant le sous-problème suivant :

$$
\begin{aligned}
& & P_r^k(Q) \stackrel{\text{def}}{=} & \max_{q_i} \sum_{i \in J_r^k} p_i(q_i) \\
(SR_r^k) & & \text{s.à.} & \sum_{i \in J_r^k} q_i = Q \qquad (2.11) \\
& & & q_i \in D_i \qquad \forall i \in J_r^k.
\end{aligned}
$$

Il est important de noter que ce dernier sous-problème est une instance du modèle conventionnel (C).[3] Sa résolution paramétrique par l'algorithme PD permet de calculer la fonction valeur $P_r^k(\cdot)$. Du fait de la contrainte d'égalité (2.11), cette dernière fonction n'est pas nécessairement monotone. Par la suite, on note $\bar{q}^{r,k}(Q) = (\bar{q}_i(Q))_{i \in J_r^k}$ la solution de ce dernier sous-problème (si cette solution existe).

Au niveau du canal k, on note V_r^k les valeurs possibles du débit à allouer aux groupes du réseau r du canal k. Cet ensemble est défini par le domaine suivant :

$$
V_r^k = \left\{ Q \in \left[\sum_{i \in J_r^k} q_i^{min}, \sum_{i \in J_r^k} q_i^{max} \right] : \gamma_r^k \leq P_r^k(Q) \leq \nu_r^k \right\}. \qquad (2.12)
$$

Ainsi, le canal $k \in K$ fonctionne de manière optimale en résolvant le sous-problème :

$$
\begin{aligned}
& & P_k^C(Q) \stackrel{\text{def}}{=} & \max_{q_r^k} \sum_{r \in R_k} P_r^k(q_r^k) \\
(SC_k) & & \text{s.à.} & \sum_{r \in R_k} q_r^k = Q \\
& & & q_r^k \in V_r^k \qquad \forall r \in R_k.
\end{aligned}
$$

Encore une fois, le sous-problème (SC_k) est une instance du modèle conventionnel (C). Sa résolution paramétrique par l'algorithme PD permet de calculer la fonction

[3] Par convention, $P_r^k(Q) = -\infty$ si le sous-problème (SR_r^k) est non-réalisable.

valeur $P_k^C(\cdot)$ en fonction du débit alloué au canal k (par convention, elle vaut $-\infty$ si le sous-problème est non-réalisable). Par la suite, on note $\bar{q}^k(Q) = \left(\bar{q}_r^k(Q)\right)_{r \in R_k}$ la solution de ce dernier sous-problème (si cette solution existe).

Enfin, si on note V_k les bornes possibles du débit à amener dans le canal k, le problème maître (M) s'écrit comme suit :

$$P^M(Q^T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{q^C} \sum_{k \in K} P_k^C(q_k^C) \tag{2.13}$$

$$(M) \qquad \text{s.à.} \qquad \sum_{k \in K} q_k^C \leq Q^T \tag{2.14}$$

$$q_k^C \in V_k^C \qquad \forall k \in K \tag{2.15}$$

$$\text{où} \qquad V_k^C = \left\{ Q \in \left[\sum_{i \in I_k} q_i^{min}, \sum_{i \in I_k} q_i^{max} \right] : \eta_k \leq Q \leq \varphi_k \right\}. \tag{2.16}$$

Ce dernier problème est également une instance du problème conventionnel (C), mais avec une contrainte de consigne sous forme d'inégalité. Par la suite, on note $\bar{q}^C(Q^T) = \left(\bar{q}_k^C(Q^T)\right)_{k \in K}$ la solution du problème maître (si cette solution existe).

Remarque: dans le cas où la contrainte (2.1) est une inégalité, la solution optimale du problème (C), par la PD, est donnée par :

$$P^C(Q^T) = \max_{s \leq Q^T} \{P_1^*(s)\}.$$

Ainsi, dans le cas où le débit total disponible Q^T est égal à la capacité des groupes disponibles, l'algorithme de PD effectue un nombre de calculs équivalent à celui que nécessite la génération de la courbe globale optimale. Il en résulte que la complexité de l'algorithme est la même, que ce soit pour une consigne de débit donnée ou pour la génération de la courbe globale de la centrale.

Proposition 2 *Les problèmes* (M) *et* (G) *sont équivalents.*

Démonstration: Pour démontrer l'équivalence, on procède en deux étapes. D'abord on démontre que si le problème (M) est non-réalisable alors il en est de même pour (C). Ensuite on démontre que si (M) est réalisable alors le problème (G) est réalisable et on a $P^M(Q^T) = P^G(Q^T)$.

• Si le problème (M) est non-réalisable alors soit un point $q^C \geq 0$ quelconque satisfaisant la contrainte (2.14). On a alors l'une des situations suivantes :
- $\exists k \in K$ tel que $q_k^C \notin V_k^C$,

ou

- $\exists k \in K$ tel que $P_k^C(q_k^C) = -\infty$ (c'est-à-dire, (SC_k) est non-réalisable).

Dans le premier cas, la non-réalisabilité est due à une violation d'une contrainte du canal, alors que dans le deuxième cas, elle est due à une violation d'une contrainte du réseau. Comme le choix de q^C est arbitraire, on en déduit que le problème (G) est non-réalisable et on a $P^M(Q^T) = P^G(Q^T) = -\infty$

• Si (PM) est réalisable, alors chaque sous-problème (SC_k) est réalisable pour le débit alloué au canal k : $\bar{q}_k^C(Q^T)$. En conséquence, chaque sous-problème (SR_r^k) est réalisable pour le débit alloué au réseau r du canal k : $\bar{q}_r^k\left(\bar{q}_k^C(Q^T)\right)$. D'où, le vecteur $\bar{q} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bar{q}^{r,k}(\bar{q}_r^k(\bar{q}_k^C(Q^T)))\right)_{r\in R_k, k\in K}$ est réalisable pour le problème (G) ; on déduit alors la première inégalité :

$$P^G(Q^T) \geq P^M(Q^T). \tag{2.17}$$

Maintenant, soit $\hat{q} = (\hat{q}_i)$ une solution optimale du problème (G). En posant $\hat{q}_r^k = \sum_{i\in J_r^k} \hat{q}_i$ et $\hat{q}_k^C = \sum_{r\in R_k} \hat{q}_r^k$, alors il est facile de démontrer que le vecteur $\hat{q} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{q}_k^C)_{k\in K}$ est une solution réalisable pour le problème (M). Ainsi, on déduit la deuxième inégalité :

$$P^G(Q^T) \leq P^M(Q^T). \tag{2.18}$$

Des inégalités (2.17) et (2.18), on conclut l'égalité :

$$P^M(Q^T) = P^G(Q^T).$$

□

Proposition 3 *Les problèmes (C) et (G) ont la même complexité en programmation dynamique.*

Démonstration: Pour alléger la démonstration, on démontre la complexité sous les hypothéses non restrictives suivantes :

Δ :	nombre de points de discrétisation des courbes de débit-puissance des groupes. On suppose que Δ est le même pour tous les groupes,
$\|K\| = n_1$:	nombre de canaux de la centrale,
$\|R_k\| = n_2$:	nombre de réseau de chaque canal $k \in K$. On suppose que n_2 est le même pour tous les canaux,
$\|J_r^k\| = n_3$:	nombre de groupes dans chaque réseau $r \in R_k$. On suppose que n_3 est le même pour tous les réseaux,
$n = n_1 n_2 n_3$:	nombre total des groupes de la centrale.

On rappelle que la complexité du problème (C) est $O(n^2\Delta^2)$. Dans ce qui suit, on va démontrer que les deux problèmes (C) et (M) ont le même nombre de calculs.

En se basant sur les résultats de la proposition 1, le nombre maximal d'opérations pour résoudre un sous-problème (SR_r^k) est donné par :

$$\sum_{i=1}^{n_3-1} i\,\Delta^2 \;=\; \frac{1}{2}\Delta^2 n_3(n_3-1).$$

De la même façon, le nombre maximal d'opérations pour construire une fonction valeur $P_k^C(\cdot)$ est égal au total d'opérations requises pour résoudre, d'une part, les sous-problèmes (SR_r^k) et, d'autre part, le sous-problème (SC_k) :

$$n_2\left(\frac{1}{2}\Delta^2 n_3(n_3-1)\right) \;+\; \sum_{i=1}^{n_2-1} i\,(n_3\Delta)^2 \;=\; \frac{1}{2}\Delta^2 n_2 n_3(n_2 n_3-1).$$

Enfin, en suivant la même démarche, le nombre de calculs nécessaires pour résoudre le problème (M) est donné par (avec $n = n_1 n_2 n_3$) :

$$n_1 \left(\frac{1}{2}\Delta^2 n_2 n_3 (n_2 n_3 - 1) \right) + \sum_{i=1}^{n_1 - 1} i \, (n_2 n_3 \Delta)^2 = \frac{1}{2}\Delta^2 n(n-1).$$

En conclusion, les deux problèmes (C) et (G) nécessitent le même nombre de calculs par l'algorithme PD. Dans les deux cas, la complexité est $O(n^2\Delta^2)$. □

2.4 Problème avec consigne de puissance

2.4.1 Intérêt

Dans le modèle de chargement optimal présenté dans la section précédente, l'objectif consiste à maximiser la puissance générée par les groupes de la centrale étant donné un débit total disponible Q^T. Toutefois, on peut se retrouver dans certaines situations où on s'interesse plutôt à une optimisation par rapport à une consigne de puissance notée P^T. Cette situation peut se justifier par le fait que les groupes sont généralement contrôlables en terme de puissance et rarement en terme de débit. En outre, cette optimisation est recommandée dans le cas par exemple d'un large réservoir où l'objectif consiste à utiliser juste le débit nécessaire pour satisfaire une demande de puissance P^T.

2.4.2 Modèle

Soit $q_i(\cdot)$ la fonction réciproque de $p_i(\cdot)$ (par sa nature, $p_i(\cdot)$ est strictement croissante) et soit D_i^{-1} son domaine de définition qui correspond à l'image de D_i par l'application

$p_i(\cdot)$. Le problème de chargement optimal consiste cette fois-ci à engager un nombre suffisant de groupes pour générer une demande (minimale) de puissance P^T tout en minimisant le débit d'eau turbiné. Ainsi le problème inverse s'écrit :

$$Q^I(P^T) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{p_i} \sum_{k\in K}\sum_{r\in R_k}\sum_{i\in J_r^k} q_i(p_i)$$

s.à.

$$(I) \qquad \sum_{k\in K}\sum_{r\in R_k}\sum_{i\in J_r^k} p_i \geq P^T \tag{2.19}$$

$$\sum_{r\in R_k}\sum_{i\in J_r^k} q_i(p_i) \in [\eta_k, \varphi_k] \quad k \in K \tag{2.20}$$

$$\sum_{i\in J_r^k} p_i \in \left[\gamma_r^k, \nu_r^k\right] \quad r \in R_k, k \in K \tag{2.21}$$

$$p_i \in D_i^{-1} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.22}$$

Lemme 1 *La fonction valeur $P^G(\cdot)$ du problème (G) est croissante.*

Démonstration: Par convention, on note $P^G(Q) = -\infty$ si le problème (G) est non-réalisable par rapport à la consigne Q. Maintenant, soit Q_1 et Q_2 tel que $Q_1 < Q_2$. Si (G) est non-réalisable par rapport à Q_1, alors on a $P^G(Q_1) = -\infty \leq P^G(Q_2)$. Par contre, si (G) est réalisable pour Q_1, alors sa solution optimale est réalisable pour (G) au point Q_2. D'où, $P^G(Q_1) \leq P^G(Q_2)$ et par suite $P^G(\cdot)$ est croissante. □

Proposition 4 *Les solutions du problème (I) peuvent être obtenues par résolution du problème (G).*

Démonstration: La résolution du problème (G) par la programmation dynamique permet de calculer la fonction valeur $P^G(\cdot)$. On note $q^*(Q) = (q_i^*(Q))_{i=1,\ldots,n}$, la solution optimale du problème (G) au point Q (si elle existe). Dans ce qui suit, on démontre qu'on peut résoudre le problème (I) à partir de la fonction valeur du problème P^T. Pour celà, on note $Q^{\min}$ le débit tel que $P^G(Q) = -\infty \; \forall Q < Q^{\min}$ et $Q^{\max}$

le débit maximal que peuvent turbiner tous les groupes disponibles de la centrale. Ainsi, tout débit réalisable doit être défini dans l'intervalle $[Q^{\min}, Q^{\max}]$.

Vu la monotonicité croissante de la fonction $P^G(\cdot)$, une consigne de puissance P^T peut engendrer une de deux situations suivantes :

i) Soit il n'existe aucune valeur vérifiant $P^G(Q) = P^T$. Dans ce cas, on a soit $P^T > P^G(Q^{\max})$ ou $P^T < P^G(Q^{\min})$. Si $P^T > P^G(Q^{\max})$, alors la demande P^T ne peut être satisfaite et, par conséquent, le problème (I) est non-réalisable. Si $P^T < P^G(Q^{\min})$, alors la demande (minimale) P^T peut être remplie en turbinant le débit minimal admissible $Q^{\min}$. Il est clair, dans ce dernier cas, que la solution du problème (I) est $(p_i(q_i^*(Q^{\min}))_{i=1,\dots,n}$.

ii) Soit il existe un intervalle unique, noté $[\underline{Q}, \overline{Q}]$, tel que $P^G(Q) = P^T$ pour tout $Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ (éventuellement $\underline{Q} = \overline{Q}$). Dans ce cas, (I) est réalisable en P^T et (G) est réalisable en $[\underline{Q}, \overline{Q}]$. On note $p^* = (p_i^*)_{i=1,\dots,n}$ une solution optimale du problème (I), avec $\sum_{i=1}^n q_i(p_i^*) = Q^I(P^T)$ et $\sum_{i=1}^n p_i^* \geq P^T$. On déduit alors que $(q_i(p_i^*))_{i=1,\dots,n}$ est une solution réalisable pour le problème (G) au point $Q^I(P^T)$ et par suite :

$$P^G(Q^I(P^T)) \geq \sum_{i=1}^n p_i^* \geq P^T = P^G(\underline{Q}) = P^G(\overline{Q}).$$

Puisque $P^G(\cdot)$ est croissante, alors on peut conclure la première inégalité suivante :

$$Q^I(P^T) \geq \underline{Q}. \tag{2.23}$$

Maintenant, on note $q^* = (q_i^*)_{i=1,\dots,n}$ une solution optimale du problème (G) au point $\underline{Q}$. Puisque $\sum_{i=1}^n p(q_i^*) = P^T$, on déduit alors que $(p(q_i^*))_{i=1,\dots,n}$ est réalisable pour le problème (I) au point P^T. On peut conclure donc la deuxième inégalité suivante :

$$Q^I(P^T) \leq \sum_{i=1}^n q_i^* \leq \underline{Q}. \tag{2.24}$$

Des inégalités (2.23) et(2.24), on déduit l'égalité $Q^I(P^T) = \underline{Q}$. Ainsi, $\underline{Q}$ est une valeur optimale du problème (I). En outre, la solution du problème (I) est donnée par le vecteur $\left(p(q_i^*(\underline{Q}))\right)_{i=1,\ldots,n}$. □

Suite à ce résultat, le modèle (G) peut être utilisé pour déterminer le chargement des groupes avec les deux types de consigne. Ainsi, dans le cas d'une consigne de débit Q^T, la résolution du problème (G) se fait de manière directe par l'algorithme PD ; par contre, dans le cas d'une consigne de puissance, la solution du problème inverse (I) est obtenue en paramétrisant le problème (G) par rapport à la consigne de débit. On obtient alors la fonction valeur $P^G(\cdot)$ qui permet, en conséquence, d'exhiber la solution du problème inverse (I).

2.5 Tests numériques

Le but de cette section est de montrer, à l'aide d'un exemple réel, l'importance de la prise en compte (de manière exacte) des contraintes globales qu'on a proposées dans le modèle (G). Pour celà, on considère une centrale hydroélectrique dont la configuration est illustrée à la figure 2.2. Les fonctions de débit-puissance des six groupes de cette centrale sont résumées à la figure 2.3.[4]

On suppose que les deux canaux d'amenée 1 et 2, alimentant les six groupes de la centrale, ont des capacités définies (respectivement) dans les intervalles $[100, 260]$ et $[50, 225]$ (en m^3/s). En outre, on suppose que les réseaux électriques 1 et 3, de type sectoriel, sont dédiés à satisfaire certaines demandes (en puissance) de deux zones différentes : le réseau 1 doit débiter une puissance comprise dans l'intervalle $[60, 76]$, alors que le réseau 3 doit le faire dans l'intervalle $[10, 40]$ (en MW). Quant au réseau

[4] Il s'agit des fonctions de débit-puissance des groupes d'une centrale réelle.

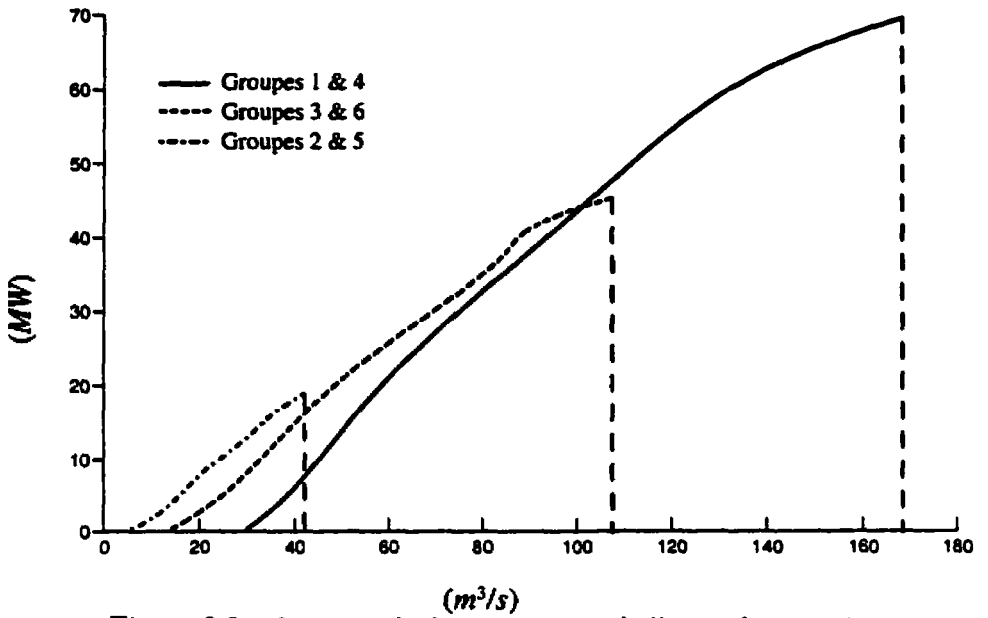

Figure 2.3 – fonctions de débit-puissance de l'exemple numérique

2, il débite sur un réseau régional d'une capacité dépassant la capacité de production de la centrale, et par conséquent aucune contrainte n'est imposée à la puissance générée par les alternateurs des groupes 3 et 4.

Pour un débit total disponible $Q^T = 470\ m^3/s$, la solution du problème conventionnel (C) donne la répartition suivante (en MW) : $(44, 13, 34.5, 43.5, 13, 34.5)$, ce qui génère une puissance globale de 182.5 MW. Toutefois, cette solution est non-admissible puisque la puissance générée sur le réseau 1 est de 57 alors que celle générée sur le réseau 3 est de 47.5. Devant une telle situation, on peut proposer aux exploitants de la centrale, entre autres alternatives, l'une de deux solutions qui seront discutées par la suite.

La première tentative consiste à arrondir les solutions obtenues à l'aide du modèle conventionnel (C). Pour ce faire, on fixe la production des groupes 1 et 2 à 60 MW et on résoud une instance du modèle (C) (avec minimisation de débit). On obtient alors une répartition de $(46.5, 13.5)$ (en MW) avec un débit à turbiner de 154.1 m^3/s.

La même approche est utilisée pour calculer le chargement des groupes 5 et 6 (du réseau 3) pour un total de puissance fixé à 40 MW. Dans ce dernier cas, on obtient un chargement de $(5.5, 34.5)$ avec un débit à turbiner de 106.3 m^3/s. Après avoir déterminé une répartition admissible entre les groupes alimentant les réseaux 1 et 3, le chargement des autres groupes 3 et 4 est obtenu en maximisant leur puissance à générer étant donnée la quantité de débit disponible qui reste 209.6 m^3/s. La solution ainsi obtenue est $(38.5, 40.5)$ (en MW). Celle-ci est obtenue en imposant des contraintes de bornes (sur le débit individuel de chaque groupe) de sorte que les contraintes de débit sur les canaux soient respectées. En conclusion, cette procédure d'arrondi permet d'obtenir une puissance globale de 179 MW.

La deuxième tentative consiste à satisfaire une demande moyenne des zones desservies par les deux réseaux 1 et 3 : 68 et 25 (MW) (respectivement). À cette fin, pour chaque réseau, on résoud une instance du modèle (C) (avec minimisation de débit). On obtient alors les deux ensembles de solutions suivantes : $(52.5, 15.5)$ pour les deux groupes du réseau 1 (avec un débit minimal de 175.1) et $(7, 18)$ pour les deux groupes du réseau 3 (avec un débit minimal de 72.2). On note que cette solution satifait les contraintes de canaux. Maintenant, le débit disponible qui reste, c'est-à-dire 222.7 m^3/s, est réparti (par résolution d'une instance du modèle (C)) entre les groupes 3 et 4 comme suit $(35.5, 52)$ (en MW). Ainsi, on produit une puissance globale de $180.5MW$.

La résolution exacte du problème, à l'aide du modèle généralisé (G), permet d'obtenir une meilleure solution avec une production globale de 182.5 MW.[5] La répartition de cette puissance entre les groupes est résumée dans le tableau 2.1. Il est important de souligner que, dans le cas de cet exemple, le modèle généralisé (G) permet d'améliorer le rendement de la centrale de 1.1%. [6]

[5]Cette solution est obtenue, avec une discrétisation de 0.5 MW, en 0.04 secondes sur un PC pentium II 350 MHz.

[6]Un gain potentiel de 2 MW correspond à une énergie annuelle de 17 520 $MW.h$. Ainsi, avec un prix moyen de 20\$/$MW.h$, le gain potentiel s'élève à 350 400\$ par année.

Tableau 2.1 – Résultats de la répartition optimale du modèle généralisé

	Groupes				Canaux		Réseaux		
	1&4	2&5	3	6	1	2	1	2	3
Puissance (MW)	49	14	35	21.5			63	84	35.5
Débit (m^3/s)	124.7	36.4	88.9	58.9	250	220			

Chapitre 3

Problème de chargement optimal : modèles avec pertes hydrauliques

3.1 Position du problème

Dans une centrale hydroélectrique, la hauteur de chute représente l'énergie potentielle qui se transforme (en grande partie) en énergie électrique au niveau du groupe turbine-alternateur. La détermination des fonctions de débit-puissance repose sur des mesures prises à une hauteur donnée, appelée hauteur de référence. Toutefois, la hauteur de chute d'une centrale n'est pas toujours égale à la hauteur de référence. En effet, la hauteur de chute (nette) disponible à une turbine subit des variations à cause, d'une part, de la variation des niveaux amont et aval de la centrale et, d'autre part, des pertes de charge, que ce soit des pertes singulières (par exemple, au niveau des grilles) ou des pertes par frottement dans des conduites et canaux d'amenée d'eau.

Afin de modéliser le problème de chargement optimal (ChOp) conformément à des conditions hydrauliques autres que celles de la hauteur de référence, un mécanisme approprié, mathématique ou physique, est souvent utilisé. Dans cette thèse, on adopte des transformations basées sur des règles hydrauliques de similitude (voir section 1.6 du chapitre 1). À cette fin, on utilise deux facteurs multiplicatifs (fonctions de hauteur) notés $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$, pour transformer respectivement les variables de débit et de puissance. Cette transformation s'effectue de façon à ce que le débit maximum et la puissance générée augmentent avec la hauteur de chute.

Sous certaines hypothèses pratiques, cette transformation moyennant les deux facteurs de hauteur $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$ (basée sur la similitude hydraulique) constitue une bonne modélisation des effets de la variation de hauteur de chute sur la production électrique d'une centrale hydraulique. Ces hypothèses (exposées plus en détail dans la section 1.6 du chapitre 1) sont principalement liées au rapport des rendements (hydrauliques) qui est supposé être très proche de l'unité. C'est le cas, par exemple, lorsque la hauteur de chute ne varie pas trop par rapport à celle de référence (variation de 2% à 3%) ou lorsque la courbe des rendements (hydrauliques) est suffisament applatie (surtout autour du débit optimal de conception de la turbine) à tel point que le rendement de la turbine varie relativement peu avec le débit turbiné.

La plupart des articles de la littérature traitent du problème ChOp à une hauteur donnée (hauteur de référence). Très rares sont les articles qui tentent d'incorporer la variation des niveaux (amont et aval) et les pertes de charge. Dans ce contexte, il importe de mentionner le travail publié dans le rapport technique de RUNAID [81]. Dans ce rapport, on propose une méthode itérative pour corriger le chargement de chaque groupe (débit et puissance) par rapport à la hauteur de chute nette qui en résulte. Pour ce faire, l'algorithme itératif commence par résoudre le problème ChOp en négligeant toutes les pertes de charge. Les débits à turbiner (résultant de cette optimisation) sont utilisés pour calculer la hauteur de chute nette disponible au niveau de chaque groupe. Ces dernières hauteurs sont ensuite injectées, comme hauteurs de chutes des groupes, dans l'itération subséquente de ChOp. L'algorithme se termine dès qu'on obtient les mêmes pertes de charge après deux itérations successives. Pour fins de comparaisons, cet algorithme a été implanté dans le cadre de cette thèse. D'une manière générale, l'algorithme nécessite plusieurs itérations (10 à 20 itérations) avant que les pertes de charge ne se stabilisent. Ainsi, le temps de calcul de cet algorithme augmente proportionnellement au nombre d'itérations. Par ailleurs, pour certaines centrales ayant plusieurs éléments de pertes, la convergence de l'algorithme est très lente.

Dans le présent chapitre, on propose une nouvelle méthode pour résoudre, de manière efficace, le problème de ChOp en tenant compte des pertes hydrauliques. Il s'agit d'une approche qui exploite, d'une part, la nature des pertes hydrauliques et, d'autre part, la structure particulière du problème.

Ce chapitre est organisé en quatre sections. Dans la prochaine section, on présente la modélisation des pertes hydrauliques dans une centrale hydroélectrique : hypothèses, notations, définitions, propriétés et modèle mathématique. Dans la section 3.3, on expose la méthode de résolution. Pour ce faire, on commence d'abord par discuter la méthode dans le cas d'un modèle particulier, mais le plus courant en pratique; ensuite, on généralise la méthode pour un modèle plus général incorporant plusieurs éléments de pertes. Enfin, dans la section 3.4, on illustre certains résultats numériques obtenus en appliquant la méthode de résolution proposée dans la section précédente.

3.2 Modélisation des pertes hydrauliques

Dans cette section, on se propose de modéliser les pertes énergétiques dans le réseau hydraulique d'une centrale. Ce réseau est constitué, en amont des groupes T/A, des composantes de type : galeries (ou canaux) d'amenée, cheminées d'équilibre, grilles à débris, conduites forcées et bâches[1] spirales. En aval des groupes T/A, le débit turbiné passe, selon les centrales, par des tubes d'évacuation (ou canaux de fuite), ensuite par des chambres d'équilibre (si tel est le cas) pour, enfin, se jeter en bief aval (tarage) de la centrale.

Chaque composante (ou élément) du réseau hydraulique présente une résistance qui s'oppose à l'écoulement naturel de l'eau. À l'exception des fonctions de tarage (au

[1] C'est une conduite, en forme de colimaçon, reliant la conduite forcée à la section d'entrée du distributeur de la turbine.

bief aval de la centrale), la résistance d'un élément du réseau hydraulique est souvent considérée proportionnelle au carré du débit qui y passe (voir section 1.5.2 du chapitre 1). Par contre, les pertes de hauteur en bief aval de la centrale sont souvent approchées par une fonction non-linéaire, appelée fonction de tarage, qui dépend du débit total déchargé par les groupes de la centrale (voir section 1.5.1 du chapitre 1).

D'une manière générale, les pertes dans le réseau hydraulique peuvent être modélisées par une structure arborescente des noeuds. Les noeuds feuilles de cet arbre représentent les groupes T/A. Les noeuds prédécesseurs à ces noeuds feuilles représentent les différents éléments du réseau hydraulique pouvant engendrer des pertes énergétiques. On note que les éléments de pertes se situant en aval des groupes (comme les canaux de fuite et le tarage de la centrale) sont aussi représentés par des noeuds (non-feuilles). L'idée de ramener ces derniers éléments de pertes en amont des groupes se justifie par le fait que les pertes énergétiques sont additives. Ainsi, que les pertes soient en amont ou aval des groupes, tous les éléments de pertes dans le réseau hydraulique sont représentés par des noeuds précédant les noeuds feuilles associés aux groupes T/A.

À chaque configuration réelle, on fait correspondre une structure d'arbre qui permet de modéliser au mieux le problème physique. Les figures 3.1 et 3.2 montrent, sur un exemple illustratif, comment on peut passer d'une configuration réelle à une structure d'arbre. Dans cet exemple, le réservoir amont de la centrale est lié à deux canaux d'amenée alimentant (chacun) trois groupes via trois conduites forcées. En aval des groupes, les débits turbinés traversent deux canaux de fuite avant de rejoindre le bief aval de la centrale. La représentation par la structure d'arbre (voir figure 3.2) comporte un ensemble de noeuds et un ensemble d'arcs. Les noeuds représentent les différents éléments de pertes dans le réseau hydraulique, alors que les arcs représentent les flux qui y passent.

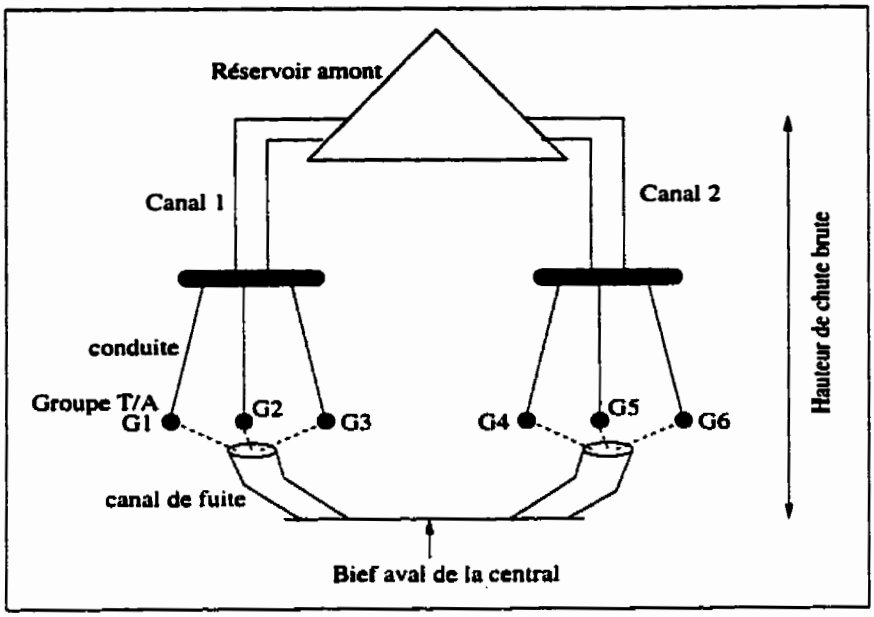

Figure 3.1 – Configuration physique avec deux niveaux de pertes

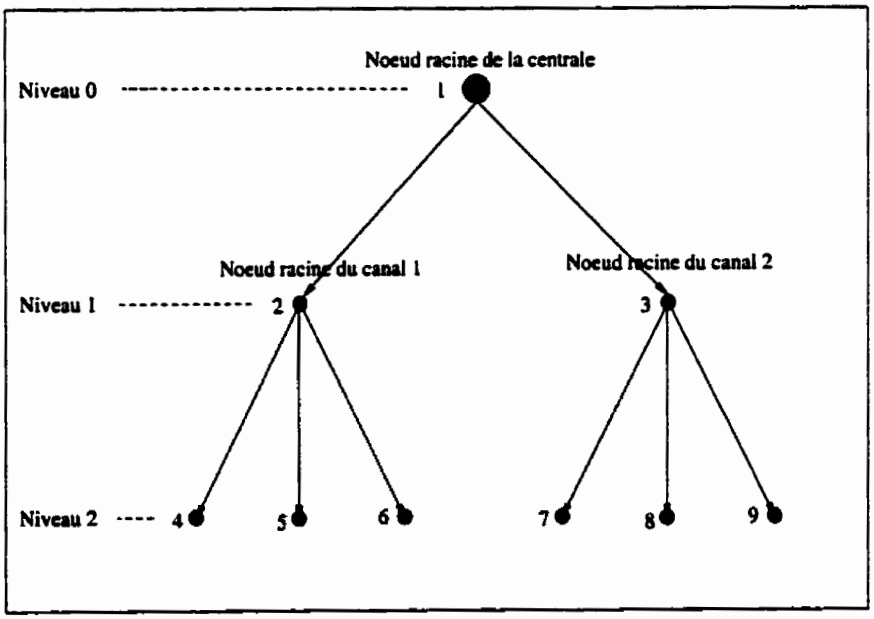

Figure 3.2 – Structure d'arbre correspondante

3.2.1 Hypothèses

H1 : On suppose que le réseau hydraulique peut être schématiquement représenté sous forme d'une structure d'arbre. Par convention, on suppose que le noeud racine de l'arbre représente les pertes en bief aval de la centrale.

H2 : Hormis la fonction de tarage, on suppose que les pertes dans chaque élément du réseau hydraulique sont proportionnelles au carré du débit qui y passe.

H3 : Dans tout le développement des modèles qui vont suivre, on se sert de deux facteurs multiplicatifs $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$ pour transformer les fonctions de débit-puissance à une hauteur de chute autre que celle de référence. Ces deux fonctions sont données, pour une hauteur de chute (nette) h_i du groupe i, comme suit (voir section 1.6 du chapitre 1) :

$$\alpha_i(h_i) = \left(\frac{h_i}{h_i^0}\right)^{-0.5} \qquad \text{et} \qquad \beta_i(h_i) = \left(\frac{h_i}{h_i^0}\right)^{1.5} \tag{3.1}$$

où h_i^0 est la hauteur de chute de référence du groupe i.

H4 : En vue de simplifier l'exposé du problème, on suppose (sans perte de généralité) que le domaine de définition de la fonction de débit-puissance d'un groupe i est donné par $D_i = [q_i^{min}, q_i^{max}]$ où q_i^{min} et q_i^{max} représentent les débits minimal et maximal du groupe i à sa hauteur de référence. En outre, on néglige des contraintes globales, que ce soit des bornes de débit sur les canaux d'amenée ou des bornes de puissance sur les réseaux électriques. On note qu'il est possible de généraliser la méthode pour tenir compte de ces derniers types de contraintes.

3.2.2 Notations

Notations générales

Soit
- h_i^0 : hauteur de chute de référence du groupe i,
- $\overline{h}$: niveau amont de la centrale,
- $\underline{h}$: niveau aval de la centrale,
- h^c : hauteur de chute brute de la centrale ($h^c = \overline{h} - \underline{h}$),
- λ_i^h : facteur de hauteur, c'est-à-dire le rapport entre la hauteur de chute h^c et la hauteur de référence h_i^0 ($\lambda_i^h = h^c/h_i^0$),
- q_i^0 : débit du groupe i à la hauteur de référence h_i^0,
- $p_i^0(\cdot)$: fonction de débit-puissance à la hauteur de référence h_i^0,
- Q^T : débit total disponible aux groupes de la centrale.

Notations liées à la structure d'arbre

Soit
- $\mathcal{N}$: ensemble des noeuds de l'arbre,
- i : noeud i dans l'arbre. Par convention, le noeud 1 représente la racine de l'arbre,
- l_i : profondeur du noeud i, c'est-à-dire le nombre d'arcs dans le chemin unique qui relie la racine de l'arbre au noeud i,
- L : profondeur de l'arbre. Elle est définie comme la plus grande profondeur des noeuds, c'est-à-dire $L = \max_{i \in \mathcal{N}} \{l_i\}$,
- i^- : père du noeud i, c'est-à-dire le prédécesseur direct du noeud i,
- $\mathcal{P}_i^j$: ensemble des noeuds appartenant au chemin unique (orienté) qui relie les deux noeuds j et i (inclusivement),
- Γ_i^+ : ensemble des noeuds fils du noeud i, c'est-à-dire les successeurs directs du noeud i,
- $\mathcal{N}_0$: ensemble des noeuds feuilles, c'est-à-dire les noeuds qui n'ont pas de successeurs (on note que ces noeuds feuilles représentent les groupes T/A),
- q_i : débit qui sort du noeud i (en m^3/s),
- $f_i(\cdot)$: fonction de pertes au niveau du noeud i (en m). À l'exception du noeud 1 (représentant les pertes de hauteur en bief aval de la centrale), ces fonctions sont données par la forme quadratique : $f_i(q_i) = \omega_i q_i^2$ où ω_i est un paramètre à valeur prédéterminée pour l'élément associé au noeud i.

Remarque : Les niveaux $\overline{h}$ et $\underline{h}$ sont supposés être des paramètres mesurés en temps réel ou estimés par un niveau supérieur de planification à court terme. De la même façon, le débit total disponible aux groupes de la centrale Q^T est un paramètre estimé par un niveau supérieur de planification à court terme.

3.2.3 Définitions et propriétés

En vue de faciliter la lecture du chapitre, on regroupe dans la présente section l'ensemble de définitions et propriétés auxquelles on fait référence dans les sections qui suivent.

Définition 1 *Au niveau de chaque noeud i de l'arbre, on définit la fonction des pertes totales $\Delta h_i(\cdot)$ par la formule suivante :*

$$\Delta h_i \stackrel{\text{def}}{=} \Delta h_i\Big((q_j)_{j\in\mathcal{P}_i^1}\Big) = \sum_{j\in\mathcal{P}_i^1} f_j(q_j). \tag{3.2}$$

Définition 2 *Au niveau de chaque groupe T/A i ($i \in \mathcal{N}_0$), la fonction de hauteur de chute (nette) $h_i(\cdot)$ est donnée par :*

$$h_i \stackrel{\text{def}}{=} h_i\Big((q_j)_{j\in\mathcal{P}_i^1}\Big) = h^c - \Delta h_i\Big((q_j)_{j\in\mathcal{P}_i^1}\Big). \tag{3.3}$$

Définition 3 *Pour une perte (de hauteur) total Δh_i, on définit les deux fonctions $\overline{\alpha}(\cdot)$ et $\overline{\beta}(\cdot)$ comme suit :*

$$\overline{\alpha}(\Delta h_i) = \left(1 - \frac{\Delta h_i}{h^c}\right)^{-0.5} \quad \text{et} \quad \overline{\beta}(\Delta h_i) = \left(1 - \frac{\Delta h_i}{h^c}\right)^{1.5}. \tag{3.4}$$

Définition 4 *Au niveau de chaque noeud i de l'arbre, on introduit deux fonctions, notées $\tilde{\alpha}_i(\cdot)$ et $\tilde{\beta}_i(\cdot)$, prenant en compte les pertes locales en fonction du débit sortant du noeud i. Ces fonctions sont définies par les relations suivantes :*

$$\tilde{\alpha}_i(q_i) = \left(1 - \frac{f_i(q_i)}{h^c}\right)^{-0.5} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}_i(q_i) = \left(1 - \frac{f_i(q_i)}{h^c}\right)^{1.5}. \tag{3.5}$$

Définition 5 *Au niveau de chaque noeud i de l'arbre, on définit la fonction $y \Longrightarrow g_i(\cdot)$ comme suit :*

$$g_i(y) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(y)\, y & si\ i \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_0, \\ (\lambda_i^h)^{-0.5}\, \tilde{\alpha}_i(y)\, y & si\ i \in \mathcal{N}_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Propriété 1

(a) *La fonction $\tilde{\alpha}_i(\cdot)$ est strictement croissante et $\tilde{\beta}_i(\cdot)$ est strictement décroissante.*

(b) *Pour $i \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_0 - \{1\}$, la fonction $g_i(\cdot)$ est strictement croissante et sa fonction réciproque est donnée par :*

$$g_i^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\omega_i}{h^c}\right)^{-0.5} & si\ x > 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

(c) *Pour $i \in \mathcal{N}_0$, la fonction $g_i(\cdot)$ est strictement croissante et sa fonction réciproque est donnée par :*

$$g_i^{(-1)}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ \left(\frac{1}{h^c}\left(\frac{h_i^0}{x^2} + \omega_i\right)\right)^{-0.5} & si\ x > 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Démonstration:

(a) La stricte monotonicité des fonctions $\tilde{\alpha}_i(\cdot)$ et $\tilde{\beta}_i(\cdot)$ découle directement de leur définition dans (3.5).

(b) Pour $y = 0$ on a $g_i(y) = 0$. Maintenant, pour $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x \overset{\text{def}}{=} g_i(y) &= \tilde{\alpha}_i(y)\, y \\ &= \left(y^{-2} - \frac{\omega_i}{h^c}\right)^{-0.5} \\ \Longrightarrow \qquad x^{-2} &= y^{-2} - \frac{\omega_i}{h^c} \\ \Longrightarrow \qquad y &= \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\omega_i}{h^c}\right)^{-0.5} \\ &\overset{\text{def}}{=} g_i^{(-1)}(x) \end{aligned}$$

d'où la démonstration de la partie (b) de la propriété 1.

(c) La partie (c) découle directement de (b). □

Propriété 2 *Les deux fonctions $\overline{\alpha}(\cdot)$ et $\overline{\beta}(\cdot)$ peuvent s'exprimer, de manière récurrente, par les relations suivantes :*

$$\overline{\alpha}(\Delta h_i) = \overline{\alpha}(\Delta h_{i-})\ \tilde{\alpha}_i(\overline{\alpha}(\Delta h_{i-})\, q_i) \quad \forall i \in \mathcal{N}-\{1\}, \tag{3.9}$$

$$\overline{\beta}(\Delta h_i) = \overline{\beta}(\Delta h_{i-})\ \tilde{\beta}_i(\overline{\alpha}(\Delta h_{i-})\, q_i) \quad \forall i \in \mathcal{N}-\{1\}. \tag{3.10}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}(\Delta h_i) &= \left(1 - \frac{\Delta h_{i-}}{h^c} - \frac{\omega_i q_i^2}{h^c}\right)^{-0.5} \\
&= \left(1 - \frac{\Delta h_{i-}}{h^c}\right)^{-0.5} \left(1 - \frac{\omega_i}{h^c} q_i^2 \left(1 - \frac{\Delta h_{i-}}{h^c}\right)^{-1}\right)^{-0.5} \\
&= \overline{\alpha}(\Delta h_{i-}) \left(1 - \frac{\omega_i}{h^c}\left(q_i \left(1 - \frac{\Delta h_{i-}}{h^c}\right)^{-0.5}\right)^2\right)^{-0.5} \\
&= \overline{\alpha}(\Delta h_1) \left(1 - \frac{\omega_i\,(\overline{\alpha}(\Delta h_{i-})\, q_i)^2}{h^c}\right)^{-0.5} \\
&= \overline{\alpha}(\Delta h_{i-})\ \tilde{\alpha}_i\,(\overline{\alpha}(\Delta h_{i-})\, q_i)\,.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on démontre la relation (3.10). □

3.2.4 Modèle

En utilisant les transformations de similitude par les deux fonctions de hauteur $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$ définies dans (3.1), le modèle généralisé (avec pertes hydrauliques) peut s'écrire comme suit :

$$P^{\mathcal{H}}(Q^T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{q_i, q_i^0} \sum_{i \in \mathcal{N}_0} \beta_i(h_i)\, p_i^0(q_i^0)$$

$$\text{s.à.} \quad q_i^0 = \alpha_i(h_i)\, q_i \qquad i \in \mathcal{N}_0, \tag{3.11}$$

$$(\mathcal{H}) \qquad \sum_{i \in \mathcal{N}_0} q_i \le Q^T, \tag{3.12}$$

$$q_i^{min} \leq q_i^0 \leq q_i^{max} \qquad i \in \mathcal{N}_0. \tag{3.13}$$

Le modèle ($\mathcal{H}$) n'est pas séparable (par groupe T/A) à cause des termes qui reflètent la prise en compte explicite des pertes énergétiques. En effet, la hauteur de chute h_i dépend des débits $(q_j)_{j \in \mathcal{P}_i^1}$ qui sont, à priori, inconnus parce qu'ils proviennent du résultat de l'optimisation. Ainsi, on procède à une transformation appropriée du problème original permettant de mettre en relief sa structure particulière. La première étape de cette transformation consiste à récrire les fonctions $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$ sous leur forme multiplicative, et la deuxième étape consiste à reformuler le problème en introduisant un certain nombre de changements de variables de décision.

En se basant sur les résultats de la propriété 2, les deux fonctions de hauteur $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$ peuvent s'écrire sous une forme plus adéquate pour un schéma de décomposition par noeuds. En effet, soit $1 \stackrel{\text{def}}{=} i_0 \rightarrow i_1 \cdots \rightarrow i_{l_i} \stackrel{\text{def}}{=} i$ le chemin unique qui relie la racine de l'arbre (noeud 1) au noeud i, et soit $\tilde{q}_i$ le débit transformé par le changement de variable suivant :

$$\tilde{q}_i = \overline{\alpha}(\Delta h_{i^-})\, q_i \qquad \forall i \in \mathcal{N} - \{1\} \tag{3.14}$$

Alors, les deux fonctions $\alpha_i(\cdot)$ et $\beta_i(\cdot)$ peuvent se récrire comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_i(h_i) &= \left(\lambda_i^h\right)^{-0.5} \overline{\alpha}(\Delta h_i) \\ &= (\lambda_i^h)^{-0.5} \underbrace{\tilde{\alpha}_1(q_1)\, \tilde{\alpha}_{i_1}(\tilde{q}_{i_1}) \ \ldots \ \tilde{\alpha}_i(\tilde{q}_i)}_{1=i_0 \rightarrow i_1 \cdots \rightarrow i_{l_i}=i} \qquad \forall i \in \mathcal{N}_0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \beta_i(h_i) &= \left(\lambda_i^h\right)^{1.5} \overline{\beta}(\Delta h_i) \\ &= (\lambda_i^h)^{1.5} \underbrace{\tilde{\beta}_1(q_1)\, \tilde{\beta}_{i_1}(\tilde{q}_{i_1}) \ \ldots \ \tilde{\beta}_i(\tilde{q}_i)}_{1=i_0 \rightarrow i_1 \cdots \rightarrow i_{l_i}=i} \qquad \forall i \in \mathcal{N}_0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

En introduisant les changements de variables (3.14) et en utilisant les relations (3.15) et (3.16), on obtient une reformultation du modèle, notée ($\mathcal{H}'$), qui met en relief plus

clairement la structure hiérarchique du problème. Par souci de notations et en vue de simplifier la reformulation du modèle, on suppose (sans perte de généralité) que tous les noeuds feuilles ont la même profondeur ($l_i = L$). On note que cette hypothèse ne sera pas considérée dans le schéma de décomposition que l'on discutera dans la prochaine section. Ainsi, le problème ($\mathcal{H}$) peut se reformuler comme suit :

$$P^{\mathcal{H}}(Q^T) = \max_{q_i, q_i^0, \tilde{q}_i} \tilde{\beta}_1(q_1) \sum_{i_1 \in \Gamma_1^+} \tilde{\beta}_{i_1}(\tilde{q}_{i_1}) \cdots \tilde{\beta}_{i_{L-1}}(\tilde{q}_{i_{L-1}}) \sum_{i_L \in \Gamma_{i_{L-1}}^+} (\lambda_{i_L}^h)^{1.5} \tilde{\beta}_{i_L}(\tilde{q}_{i_L}) p_{i_L}^0(q_{i_L}^0)$$

s.à.

$$(\mathcal{H}') \qquad \tilde{q}_i = \overline{\alpha}(\Delta h_{i^-})\, q_i \qquad i \in \mathcal{N} - \{1\}, \tag{3.17}$$

$$q_i^0 = (\lambda_i^h)^{-0.5}\, \tilde{\alpha}_i(\tilde{q}_i)\, \tilde{q}_i \qquad i \in \mathcal{N}_0, \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}_1(q_1)} \sum_{i_1 \in \Gamma_1^+} \frac{1}{\tilde{\alpha}_{i_1}(\tilde{q}_{i_1})} \cdots \sum_{i_{L-1} \in \Gamma_{i_{L-2}}^+} \frac{1}{\tilde{\alpha}_{i_{L-1}}(\tilde{q}_{i_{L-1}})} \sum_{i_L \in \Gamma_{i_{L-1}}^+} \tilde{q}_{i_L} \leq Q^T, \tag{3.19}$$

$$q_i^{min} \leq q_i^0 \leq q_i^{max} \qquad i \in \mathcal{N}_0. \tag{3.20}$$

3.3 Résolution du problème

Après avoir reformulé le problème ($\mathcal{H}$) sous sa forme hiérarchique ($\mathcal{H}'$), on peut tenter de le décomposer en plusieurs sous-problèmes paramétriques dont les solutions sont adéquatement combinées dans un problème maître afin de fournir la solution globale du problème original ($\mathcal{H}$). Par souci d'introduire de manière progressive l'approche de résolution, on commence d'abord par présenter le problème dans le cas d'une configuration à deux niveaux de pertes (le cas le plus fréquent en pratique) ; ensuite, on généralise la méthode au modèle présentant plusieurs niveaux de pertes.

3.3.1 Modèle à deux niveaux de pertes

On désigne par deux niveaux de pertes le cas d'une configuration où l'eau passe par des canaux d'amenée, puis par des conduites forcées, ensuite par des canaux de fuite (après avoir traversé les groupes T/A) pour, enfin, se jeter en bief aval de la centrale. Des grilles à débris sont parfois installées entre les canaux d'amenée et les conduites forcées. Dans cette configuration, on considère que le sous-ensemble de groupes T/A alimentés (en amont) par un canal d'amenée déchargent leur débits (en aval) dans un même canal de fuite. La figure 3.1 illustre un exemple de ce dernier type de configuration. Ainsi, dans ce modèle (à deux niveaux de pertes), la hauteur de chute disponible à un groupe dépend de deux variables et un paramètre : le débit turbiné par ce groupe, le débit total déchargé par le sous-ensemble de groupes alimentés par le même canal (d'amenée ou de fuite) et, enfin, le débit total déchargé par la centrale (qu'on présume égal au débit total disponible Q^T).

Le modèle à deux niveaux de pertes, noté ($\mathcal{H}^2$), est représenté par une structure d'arbre de profondeur (maximale) deux. Chaque chemin dans cet arbre, reliant le noeud racine 1 au noeud feuille i, est de type : $1 \rightarrow i^- \rightarrow i$. On rappelle que la notation i^- désigne le noeud père (ou prédécesseur direct) du noeud i. Ainsi, la hauteur de chute disponible pour le groupe i ($i \in \mathcal{N}_0$) est donnée par :

$$h_i = h^c - f_1(Q^T) - f_{i^-}(q_{i^-}) - f_i(q_i).$$

Le problème qu'on vient de discuter est une instance du modèle général ($\mathcal{H}$). Il s'écrit alors comme suit :

$$P^{\mathcal{H}^2}(Q^T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{q_i, q_i^0, \tilde{q}_i} \tilde{\beta}_1(Q^T) \sum_{k \in \Gamma_1^+} \tilde{\beta}_k(\tilde{q}_k) \sum_{i \in \Gamma_k^+} (\lambda_i^h)^{1.5}\, \tilde{\beta}_i(\tilde{q}_i)\, p_i^0(q_i^0)$$

$$\text{s.à.} \quad \tilde{q}_i = \overline{\alpha}(\Delta h_{i^-})\, q_i \qquad i \in \mathcal{N} - \{1\}, \tag{3.21}$$

$(\mathcal{H}^2)$

$$q_i^0 = (\lambda_i^h)^{-0.5}\, \tilde{\alpha}_i(\tilde{q}_i)\, \tilde{q}_i \qquad i \in \mathcal{N}_0, \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}_1(Q^T)} \sum_{k \in \Gamma_1^+} \frac{1}{\tilde{\alpha}_k(\tilde{q}_k)} \sum_{i \in \Gamma_k^+} \tilde{q}_i \leq Q^T, \tag{3.23}$$

$$q_i^{min} \leq q_i^0 \leq q_i^{min} \qquad i \in \mathcal{N}_0. \tag{3.24}$$

À patir de ce dernier modèle $(\mathcal{H}^2)$, il est possible de gérer, de manière implicite, la non séparabilité du problème via une décomposition appropriée : un problème maître (associé au noeud racine de l'arbre) et des sous-problèmes impliquant les débits sortant des noeuds successeurs de la racine 1 (Γ_1^+). Le problème maître s'écrit comme suit :

$$P^{\mathcal{H}^2}(Q^T) = \max_{\tilde{q}_k, q_k^0} \tilde{\beta}_1(Q^T) \sum_{k \in \Gamma_1^+} \tilde{\beta}_k(\tilde{q}_k)\, P_k^0(q_k^0) \tag{3.25}$$

(M^2)

$$\text{s.à.} \quad q_k^0 = \tilde{\alpha}_k(\tilde{q}_k)\, \tilde{q}_k \quad k \in \Gamma_1^+ \tag{3.26}$$

$$\sum_{k \in \Gamma_1^+} \tilde{q}_k \leq \tilde{\alpha}_1(Q^T)\, Q^T, \tag{3.27}$$

$$q_k^0 \in V_k \stackrel{\text{def}}{=} \left[\underline{q}_k^0, \overline{q}_k^0\right] \quad k \in \Gamma_1^+, \tag{3.28}$$

où la fonction valeur $q_k^0 \in V_k \longmapsto P_k^0(q_k^0)$ est obtenue en résolvant le sous-problème (S_k^2) suivant :

$$P_k^0(q_k^0) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\tilde{q}_i} \sum_{i \in \Gamma_k^+} \tilde{p}_i(\tilde{q}_i)$$

$$(S_k^2) \qquad \text{s.à.} \quad \sum_{i \in \Gamma_k^+} \tilde{q}_i = q_k^0, \tag{3.29}$$

$$g_i^{(-1)}(q_i^{min}) \leq \tilde{q}_i \leq g_i^{(-1)}(q_i^{max}) \quad i \in \Gamma_k^+, \tag{3.30}$$

où :

$$\tilde{p}_i(\tilde{q}_i) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_i^h)^{1.5}\, \tilde{\beta}_i(\tilde{q}_i)\, p_i^0\, (\tilde{\alpha}_i(\tilde{q}_i)\, \tilde{q}_i) \quad i \in \Gamma_k^+. \tag{3.31}$$

On note que les contraintes de bornes (3.30) sont obtenues par application de la propriété 1 (partie (c)) aux équations (3.22) du modèle $(\mathcal{H}^2)$.

L'algorithme hiérarchique pour résoudre le problème $(\mathcal{H}^2)$ suit les deux étapes suivantes :

1. En premier lieu, on résoud, de manière paramétrique, les sous-problèmes $(S_k^2)_{k \in \Gamma_1^+}$. Il est important de noter que chaque sous-problème (S_k^2) est une instance du modèle conventionnel (C) discuté dans le chapitre précédent. Ainsi, sa résolution est effectuée par le même algorithme de PD développé pour le modèle (C).

2. Une fois construites les courbes paramétriques $q_k^0 \in V_k \longmapsto P_k^0(q_k^0)$, le problème maître consiste à faire une répartition optimale entre les noeuds du niveau 1, c'est-à-dire $k \in \Gamma_1^+$. Ce problème peut se récrire, de manière équivalente, comme suit :

$$P^{\mathcal{H}^2}(Q^T) = \max_{\tilde{q}_k} \sum_{k \in \Gamma_1^+} \tilde{P}_k(\tilde{q}_k)$$

$$(M^2) \quad \text{s.à.} \quad \sum_{k \in \Gamma_1^+} \tilde{q}_k \leq \tilde{Q}^T \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\alpha}_1(Q^T)\, Q^T,$$

$$g_k^{(-1)}(q_k^0) \leq \tilde{q}_k \leq g_k^{(-1)}(\overline{q}_k^0) \quad k \in \Gamma_1^+,$$

où :

$$\tilde{P}_k(\tilde{q}_k) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\beta}_1(Q^T)\,\tilde{\beta}_k(\tilde{q}_k)\,P_k^0\left(\tilde{\alpha}_k(\tilde{q}_k)\,\tilde{q}_k\right) \quad k \in \Gamma_1^+. \tag{3.32}$$

Ce dernier problème est également une instance du modèle conventionnel (C), mais avec une contrainte de consigne sous forme d'inégalité. Sa résolution est aussi discutée dans le chapitre 2.

3.3.2 Généralisation à plusieurs niveaux de pertes

Dans cette section, on généralise l'approche de décomposition (discutée précédemment) pour le cas d'un réseau hydraulique comportant plusieurs éléments de pertes. En effet, dans certaines centrales, l'eau passe par des tunnels (ou galeries) d'amenée avant de se distribuer en plusieurs canaux d'amenée munies de grilles de protection contre les solides transportés par le cours d'eau, pour finalement se répartir dans des conduites forcées aux différents groupes T/A. Des cheminées d'équilibre sont parfois installées entre les canaux d'amenée et les conduites forcées. La modélisation globale du problème est présentée dans la section 3.2.

En se basant sur la reformulation du problème $(\mathcal{H})$ sous sa forme hiérarchique $(\mathcal{H}')$, il est facile de généraliser le schéma de décomposition qu'on a discuté dans le cadre du modèle à deux niveaux de pertes. Pour celà, on associe à chaque noeud $i \neq 1$ un sous-problème paramétrique noté (S_i). Ce sous-problème implique seulement les variables de débits des noeuds fils et sa résolution repose sur les solutions des sous-problèmes $(S_j)_{j\in\Gamma_i^+}$ associés à ces noeuds fils. Quant au problème maître, noté (M), il est associé au noeud racine de l'arbre 1. On obtient ainsi un ensemble hiérarchique de problèmes disjoints qui peuvent être résolus de manière efficace par l'algorithme de PD avec une seule variable d'état.

Soit $q^0 \in V_k \longmapsto P_k^0(q_k^0)$ la solution paramétrique du sous-problème (S_k) associé au noeud $k \in \mathcal{N} - \mathcal{N}_0 - \{1\}$. Cette solution est obtenue en résolvant, par la PD

paramétrique, le sous-problème suivant :

$$
\begin{aligned}
P_k^0(q_k^0) \stackrel{\text{def}}{=} \quad & \max_{\tilde{q}_i, q_i^0} \sum_{i \in \Gamma_k^+} \tilde{P}_i(\tilde{q}_i) \\
(S_k)_{k \in \mathcal{N}-\mathcal{N}_0-\{1\}} \qquad \text{s.à.} \quad & \tilde{q}_i = g_i^{(-1)}(q_i^0), \quad i \in \Gamma_k^+ \\
& \sum_{i \in \Gamma_k^+} \tilde{q}_k = q_k^0 \\
& q_i^0 \in V_i \stackrel{\text{def}}{=} \left[\underline{q}_i^0, \overline{q}_i^0\right] \quad i \in \Gamma_k^+,
\end{aligned}
$$

où $V_i = [q_i^{min}, q_i^{max}]$ lorsque i est un noeud feuille ($i \in \mathcal{N}_0$) et la fonction $\tilde{P}_i(\cdot)$ est donnée par :

$$
\tilde{P}_i(\tilde{q}_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\lambda_i^h)^{1.5}\, \tilde{\beta}_i(\tilde{q}_i)\, p_i^0\, (\tilde{\alpha}_i(\tilde{q}_i)\, \tilde{q}_i) & \text{si } i \in \mathcal{N}_0, \\ \tilde{\beta}_i(\tilde{q}_i)\, P_i^0\, (\tilde{\alpha}_i(\tilde{q}_i)\, \tilde{q}_i) & \text{si } i \in \mathcal{N}-\mathcal{N}_0-\{1\}. \end{cases}
$$

Enfin, le problème maître peut être vu comme une façon d'établir un partage optimal de la consigne Q^T entre les noeuds directement liés à la racine de l'arbre. Ce problème se formule comme suit :

$$
P^{\mathcal{H}}(Q^T) = \max_{\tilde{q}_k, q_k^0} \tilde{\beta}_1(Q^T) \sum_{k \in \Gamma_1^+} \tilde{\beta}_k(\tilde{q}_k)\, P_k^0(q_k^0)
$$

$$
\begin{aligned}
(M) \qquad \text{s.à.} \quad & \tilde{q}_k = g_k^{(-1)}(q_k^0) \quad k \in \Gamma_1^+ \\
& \sum_{k \in \Gamma_1^+} \tilde{q}_k \leq \tilde{Q}^T \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\alpha}_1(Q^T)\, Q^T, \\
& q_k^0 \in V_k \stackrel{\text{def}}{=} \left[\underline{q}_k^0, \overline{q}_k^0\right] \quad k \in \Gamma_1^+.
\end{aligned}
$$

Remarques :

1. Pour générer la courbe globale de la centrale $P^{\mathcal{H}}(\cdot)$, il suffit d'appliquer la PD paramétrique (du paramètre $\tilde{Q}^T$) au problème maître (M). On déduit alors la courbe $Q^T \longmapsto P^{\mathcal{H}}(Q^T)$ par la transformation inverse $Q^T = g_1^{(-1)}(\tilde{Q}^T)$. Il est important de noter que toutes les approches de résolution, y compris l'approche itérative proposée dans le rapport de RUNAID [81], ne peuvent générer cette courbe qu'au prix d'un temps de calcul considérable.

2. En suivant le raisonnement utilisé pour établir les deux propositions 2 et 3 du chapitre 2, il est facile de démontrer l'équivalence entre les deux problèmes $(\mathcal{H})$ et (M). En outre, on peut démontrer que la complexité de calculs du problème (M) est également $O(n^2\Delta^2)$ où n est le nombre de groupes T/A et Δ le nombre de points de discrétisation des courbes de débit-puissance de ces groupes.

Résumé de l'algorithme

L'algorithme de résolution du problème généralisé $(\mathcal{H})$ se résume dans les étapes suivantes :

Début Super-ChOp

Étape 0 : Transformation du problème original

- effectuer les changements de variables ;
- décomposer le problème en des sous-problèmes et un problème maître ;

Étape 1 : Résolution des sous-problèmes $(S_i)_{i\in\mathcal{N}-\mathcal{N}_0-\{1\}}$

- poser $d = L-1$. On rappelle que L est la profondeur de l'arbre, c'est-à-dire $L = \max_{i\in\mathcal{N}}\{l_i\}$ où l_i est la profondeur du noeud i ;
- Tant que $d > 0$ faire
  - poser $\mathcal{N}' = \{i \in \mathcal{N} : l_i = d\}$;
  - appliquer l'algorithme de PD aux sous-problèmes paramétriques $(S_i)_{i\in\mathcal{N}'}$;

- déterminer les bornes $\underline{q}_i^0$ et $\overline{q}_i^0$ de la solution paramétrique $P_i^0(\cdot)$;
- poser $d = d - 1$;

Étape 2 : Résolution du problème maître (M)

- appliquer l'algorithme de PD au problème (M) ;
- déterminer les débits réels (q_i^*) qui forment la solution optimale du problème original $(\mathcal{H})$:

$$q_i^* = \frac{1}{\overline{\alpha}(\Delta h_{i^-})} \overline{q}_i^* \qquad i \in \mathcal{N} - \{1\}.$$

Fin Super-ChOp

3.4 Tests numériques

Les développements théoriques et algorithmiques de ce chapitre ont été intégrés dans un logiciel commercial, appelé "Super-ChOp". Pour pouvoir juger de la qualité et la robustesse de ce logiciel, on propose une étude comparative avec l'approche itérative basée sur la correction des hauteurs de chute. Par la suite, on réfère à cette méthode par le terme agrégé "Iter-ChOp". On note que cette approche itérative est implantée dans certains programmes commerciaux dont on cite le logiciel de la compagnie Norvégienne RUNAID (voir rapport technique [81]).

Tableau 3.1 – Caractéristiques des centrales tests

Centrales	n	$\overline{Q}$	$\overline{P}$	L	$\lvert\mathcal{N}\rvert$	Q^T	$P^{ref}(Q^T)$
C1	11	1490	385	2	14	718	280.75
C2	12	6260	1500	2	17	4354	1085.5
C3	12	2140	2650	4	23	1415	1861
C4	17	1910	180	2	20	1234	126.1
C5	36	9050	1510	3	43	5755	1209.2

La comparaison entre les deux algorithmes est basée sur des données réelles de cinq centrales hydroélectriques assez diversifiées. Le tableau 3.1 résume certaines carac-

Tableau 3.2 – Comparaison entre Super-ChOp et Iter-ChOp

Algorithme	*Super-ChOp*		*Iter-ChOp*		
Centrales	CPU (s)	$P(Q^T)$	Nb. Iter.	CPU (s)	$P(Q^T)$
C1	0.44	280	3	1.53	280
C2	1.05	1000	12	13.24	1000
C3	1.1	1800	46	45.37	1800
C4	0.5	125	5	3.4	125
C5	4.12	1150	10	51.8	1150

téristiques de ces centrales, notées C1,...,C5. Dans ce tableau, la deuxième colonne donne le nombre de groupes T/A de chaque problème test. La troisième et la quatrième colonnes renseignent sur la capacité installée, en terme de débit et de puissance, et ce, aux hauteurs de référence des groupes de chaque centrale. La cinquème et la sixième colonne donnent la profondeur et le nombre de noeuds de l'arbre modélisant chaque centrale. La septième colonne contient les valeurs du débit total disponible aux centrales et, enfin, la dernière colonne donne la puissance, aux hauteurs de chute de référence, correspondant à l'allocation optimale du débit total Q^T. Dans ce tableau, les débits sont exprimés en m^3/s alors que les puissances sont en MW. Par ailleurs, il est important de noter que la discrétisation des fonctions de débit-puissance est très fine, de l'ordre de 1 m^3/s.

Le tableau 3.2 résume l'étude comparative entre les deux algorithmes. Les indicateurs utilisés dans cette étude sont : le temps de calcul,[2] le nombre d'itérations de l'algorithme Iter-ChOp[3] et la production des centrales (correspondant au débit total disponible Q^T). D'une manière générale, le nombre d'itérations de l'algorithme Iter-ChOp augmente en fonction de l'importance des pertes dans le réseau hydraulique. De plus, la convergence de l'algorithme est très lente pour certaines centrales ayant

[2]La machine utilisée est un PC Pentium II 350 MHz.

[3]L'algorithme Iter-ChOp s'arrête dès que les pertes totales au niveau de chaque groupe T/A se stabilisent à une tolérance de 0.05% par rapport à la hauteur de chute de référence de la centrale.

un réseau hydraulique plus complexe (voir la centrale C3, par exemple). En conséquence, on peut conclure que l'algorithme de prise en compte explicite des pertes hydrauliques (Super-ChOp) performe beaucoup mieux que l'approche itérative proposée par RUNAID [81].

Par ailleurs, l'analyse de la production des centrales (voir colonnes $P^{ref}(Q^T)$ et $P(Q^T)$ des tableaux 3.1 et 3.2) met clairement en relief l'ampleur des pertes énergétiques dans les réseaux hydrauliques. En effet, selon les centrales, cette production peut varier d'un pourcentage (assez significatif) dépassant, par exemple, le seuil de 5%. D'où l'importance de disposer d'un modèle de chargement optimal qui tienne compte de l'impact des pertes hydrauliques sur la production des groupes d'une centrale hydroélectrique.

Chapitre 4

Planification des arrêts-démarrages

4.1 Position du problème

Dans ce chapitre on traite du problème de planification des arrêts-démarrages (A/D, en abrégé) des groupes dans une centrale hydroélectrique sur un horizon de plusieurs périodes. Il consiste à planifier l'engagement et le désengagement des groupes et à déterminer, pour chacune des périodes de l'horizon de planification, les niveaux de production des groupes ainsi engagés. Ce problème sera noté en référence par ArrDem.

Aujourd'hui, l'optimisation des A/D des groupes est considérée parmi les outils puissants qui peuvent contribuer à la gestion rationnelle des ressources hydroélectriques d'une rivière, comme en témoignent plusieurs tentatives d'intégrer ce problème dans cette gestion. (voir, par exemple, Chancelier et Renaud [13], Nilsson et Sjevgren [68]). L'importance de l'optimisation des A/D est mise en relief en plusieurs facettes. Par exemple, du point de vue pratique, elle permet d'améliorer la qualité des solutions en stabilisant, dans la mesure du possible, les changements inutiles (ou non significatifs) de statut des groupes le long de la période de planification (par exemple, en temps réel ou à court terme). En outre, du point de vue économique, la planification rationnelle des A/D contribue, d'une portion non négligeable, à réduire le coût de réparation et de maintenance des groupes à moyen ou à long terme (voir, par exemple, Nilsson et Sjevgren [67]).

L'intégration complète de la gestion detaillée des centrales dans la gestion globale d'une rivière est une tâche très complexe, c'est pourquoi une approche hiérarchique est souvent adoptée. Dans une première étape, on résout le problème global de la gestion à court terme d'une rivière où l'on résume la production d'une centrale par une courbe globale de débit-puissance.[1] Les résultats de cette optimisation, tels que les débits à turbiner et les hauteurs de chute des centrales (tout au long de l'horizon de planification), sont ensuite utilisés comme données (ou paramètres) du problème ArrDem traité dans ce chapitre.

Sous forme dynamique,[2] ce problème a attiré très peu d'attention dans la plupart des publications spécialisées. Parmi les rares articles qui traitent le cas dynamique, on cite Chancelier et Renaud [13], Zhang et al. [109]. Dans ces deux articles, la programmation dynamique (PD) est mentionnée comme technique de résolution, mais aucune information n'est apportée quant à l'implantation de l'algorithme, le traitement de la réserve tournante, la prise en compte des conditions hydrauliques ou la modélisation des contraintes couplantes sur les engagements et désengagements des groupes.

Dans le problème ArrDem, la durée d'une période est définie comme l'intervalle de temps durant lequel l'ensemble des facteurs les plus pertinents pour la production de la centrale peuvent être supposés constants. Parmi ces facteurs déterminants, on peut citer les conditions hydrauliques, le débit disponible à décharger et la demande en puissance de réserve tournante. Ainsi, la durée des périodes varie selon la fréquence à laquelle la valeur de ces facteurs change. En pratique, selon les centrales hydroélectriques, cette durée peut varier d'une heure à quelques heures. Toutefois, il existe des cas où cette durée est de l'ordre de 15 à 30 minutes.

[1] Cette courbe est obtenue par résolution du problème paramétrique de chargement optimal.

[2] L'expression "forme dynamique" est utilisée pour désigner la dynamique dans le temps (plusieurs périodes de planification)

Dans la fonction économique du problème ArrDem, il s'agit de maximiser le cumul, sur tout l'horizon de planification, de la différence entre la valeur de la puissance et le coût des A/D des groupes. Un objectif alternatif consiste à minimiser les coûts cumulés de la valeur de l'eau turbinée et des A/D. Dans les deux cas, il s'agit d'un problème d'optimisation dynamique, de surcroît, mixte et non-convexe.

Les variables du problème ArrDem peuvent être classées en trois catégories. Une première catégorie contient des variables d'état qui décrivent les statuts d'engagement (groupes en repos ou en marche) ainsi que les historiques de fonctionnement (nombre de périodes successives d'arrêt ou de retrait et fréquence des A/D). La deuxième catégorie est constituée des variables (discrètes) qui modélisent les transitions des groupes de l'état d'arrêt à l'état de fonctionnement et inversement. Enfin, la troisième catégorie comporte les variables (continues) du chargement optimal (débit de chaque groupe).

Les trois catégories de variables, citées ci-dessus, sont également soumises à trois catégories de contraintes : des contraintes statiques liées à une seule période, des contraintes dynamiques portant sur plusieurs périodes et, enfin, les contraintes du problème de chargement optimal. Les deux premières catégories de contraintes délimitent le domaine de définition des variables de transition et, par conséquent, l'évolution des variables d'état, alors que la dernière catégorie détermine les restrictions individuelles ou globales sur la production des groupes (voir chapitres 2 et 3).

Parmi les contraintes les plus pertinentes de la première catégorie, on cite la demande en puissance de réserve tournante. Il est important de noter que cette demande en réserve tournante doit être considérée comme une contrainte liant les états des groupes et non pas faisant partie du problème de chargement optimal. En effet, la formulation du ChOp, dans ce cas, n'est plus valide puisque la demande en réserve doit être assurée par les groupes qui tournent et non plus par ceux arrêtés ou

disponibles. Ainsi, pour modéliser une telle situation, une formulation avec des variables booléennes peut être utilisée pour refléter l'état de fonctionnement de chaque groupe. Quant aux contraintes chevauchant plusieurs périodes, elles créent des liens dynamiques entre les états successifs des groupes. L'exemple le plus rencontré est l'imposition d'un minimum d'arrêts ou de périodes de fonctionnement des groupes. Il est important de noter que certaines contraintes du problème peuvent résulter, par exemple, de décisions prises dans le cadre d'une gestion plus globale s'étalant sur plusieurs jours, voire plusieurs semaines. Un exemple de ces dernières contraintes, fréquemment rencontrées dans la planification des A/D, est celui de la maintenance des groupes. Ainsi, durant certaines périodes de l'horizon, des groupes deviennent non-disponibles pour des fins de réparation ou d'entretien.

Jusqu'à présent, les méthodes numériques utilisées pour résoudre le problème Arr-Dem peuvent être classées en trois catégories : la programmation mixte et les techniques d'énumération implicite de genre évaluation-séparation successive (Branch and Bound), la relaxation lagrangienne et la programmation dynamique. Toutefois, la plupart des articles traitant de ce sujet utilisent ces méthodes dans le contexte de la planification des A/D des groupes thermiques. Les différences de complexité entre les deux problèmes sont multiples. D'une part, dans le cas thermique, la fonction objectif (à minimiser) est linéaire (coût marginal constant) ou convexe (coût marginal croissant), alors que celle (à maximiser) dans le contexte hydroélectrique est non-convexe. Ainsi dans ce dernier cas, la programmation mixte et les techniques d'énumération implicite deviennent moins applicables. D'autre part, dans le cas thermique, la fonction objectif est généralement séparable (par groupe T/A), alors qu'elle ne l'est pas nécessairement dans le cas des groupes hydrauliques (voir section 4.2.3 du présent chapitre). Ainsi, cette non-séparabilité rend les méthodes de relaxation lagrangienne inapproppriées.

Dans cette partie de la thèse, on propose une nouvelle approche de résolution de la planification des A/D des groupes à l'intérieur des centrales hydroélectriques. Il

s'agit d'une méthode d'optimisation globale basée sur un schéma de décomposition de Benders (voir Geoffrion [21], Habibollahzadeh et Bubenko [23]). La résolution du problème maître est effectuée par l'algorithme de programmation dynamique (PD), alors que les sous-problèmes (de chargement optimal) sont résolus par l'approche mixte de PD et de décomposition par les ressources présentée dans les deux chapitres précédents. Du point de vue implantation, l'originalité se situe au niveau de la résolution des sous-problèmes. En effet, on propose une technique de stockage et de mise à jour des données qui permet de résoudre chaque sous-problème à partir des résultats de l'optimisation de sous-problèmes déjà résolus. Cette technique exploite en particulier le fait que la résolution du problème paramétrique du chargement optimal nécessite marginalement peu d'effort par rapport à la résolution du problème de chargement optimal avec une consigne donnée. Elle utilise, de façon constructive, des combinaisons de résultats partiels obtenus lors de la solution de sous-problèmes résolus précédemment.

Ce chapitre est organisé en cinq sections. La section 2 présente la totalité de la modélisation mathématique : hypothèses, notations, fonction objectif et contraintes du problème. La section 3 passe en revue la plupart des méthodes utilisées pour résoudre ce type de problème dans le contexte des centrales thermiques. La section 4 présente l'approche de résolution adoptée dans le contexte des centrales hydroélectriques : décomposition, résolution des sous-problèmes, résolution du problème maître, certaines structures de données utilisées dans l'implantation de l'algorithme et une comparaison de la méthode de résolution versus le schéma conventionnel de décomposition de Benders. Enfin, dans la section 5 on résume certains résultats numériques obtenus en appliquant cette dernière méthode.

4.2 Modélisation

4.2.1 Hypothèses

H1 : Sans perte de généralité, on suppose que toutes les périodes de l'horizon ont la même durée; et pour fixer les idées, on suppose également que cette durée correspond à une heure.

H2 : Le débit total disponible à chaque période est résumé en un seul paramètre estimé, par exemple, à partir d'un niveau supérieur de planification à court terme.

H3 : On suppose la disponibilité des groupes durant les périodes futures. Autrement dit, les groupes de la centrale peuvent fonctionner correctement sans aucun risque de tomber en panne.

H4 : On suppose que le prix d'un mégawatt-heure est connu, à priori, pour chaque période de l'horizon.

4.2.2 Notations

Données du problème

n : nombre de groupes disponibles de la centrale,
T : nombre de périodes de l'horizon,
$\mathcal{I}$: ensemble des indices des groupes ($\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$),
$\mathcal{T}$: ensemble des indices des périodes ($\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$),
H^0 : hauteur de chute de référence de la centrale (en m),
H_t : hauteur de chute de la centrale à la période t (en m),
Q^{max} : débit maximal d'exploitation qui peut être turbiné par les groupes de la centrale (en m^3/s),
Q_t : total de débit disponible à décharger à la période t (en m^3/s),

S_t : demande en puissance de réserve tournante à la période t (en MW),
τ_i : minimum de périodes de fonctionnement du groupe i, une fois qu'il est démarré ($\tau_i \geq 1$),
$\bar{\tau}_i$: minimum de périodes d'arrêt du groupe i, une fois qu'il est arrêté ($\bar{\tau}_i \geq 1$),
σ_t : nombre maximal d'arrêts-démarrages des groupes à la période t,
L_i : ensemble des groupes qui doivent être engagés impérativement avant de démarrer le groupe i,
π_t : prix d'un mégawatt-heure à la période t en ($\$/MW.h$),
Λ : ensemble générique des contraintes statiques sur les groupes, incorporant, par exemple, les zones interdites et les restrictions (individuelles ou globales) sur les groupes.

Variables du problème

- *Variables (discrètes) d'état*

e_{it} : statut du groupe i à la fin de la période t : en arrêt (0) ou en marche (1). On note e_t le vecteur $(e_{1t}, \ldots, e_{nt})$;
v_{it} : nombre de périodes successives de fonctionnement du groupe i depuis son dernier démarrage jusqu'à la fin de la période t. On note v_t le vecteur $(v_{1t}, \ldots, v_{nt})$;
$\bar{v}_{it}$: nombre de périodes successives d'arrêt du groupe i depuis son dernier arrêt jusqu'à la fin de la période t. On note $\bar{v}_t$ le vecteur $(\bar{v}_{1t}, \ldots, \bar{v}_{nt})$;
z_{it} : nombre de démarrages du groupe i depuis le début de la période 1 jusqu'à la fin de la période t. On note z_t le vecteur $(z_{1t}, \ldots, z_{nt})$.

- *Variables (discrètes) de transition*

x_{it} : type de transition du groupe i au début de la période t. On note x_t le vecteur $(x_{1t}, \ldots, x_{nt})$, avec la convention suivante :

$$x_{it} = \begin{cases} -1 & \text{arrêter le groupe } i \\ 0 & \text{maintenir l'état précédent du groupe } i \\ 1 & \text{démarrer le groupe } i \end{cases} \tag{4.1}$$

- *Variables (continues) de chargement optimal*

q_{it} : débit à turbiner par le groupe i durant la période t (en m^3/s). On note q_t le vecteur $(q_{1t}, \ldots, q_{nt})$.

Fonctions du problème

$q_t \longmapsto h_{it}(q_t)$: fonction de hauteur de chute (nette) disponible au groupe i à la période t. Cette fonction incorpore, d'une part, les pertes de charge (au niveau des canaux, conduites et grilles à débris) et, d'autre part, les réductions de hauteur au niveau de tarage de la centrale ;

$q_i^{min}(\cdot), q_i^{max}(\cdot)$: débit minimal et maximal que peut turbiner le groupe i. Ces débits sont fonction de la hauteur de chute $h_{it}(\cdot)$ disponible pour le groupe i (en m^3/s) ;

$c_i(\cdot)$: coût de démarrage du groupe i. Ce coût est défini de manière explicite dans les deux sections qui suivent ;

$\bar{c}_i(\cdot)$: coût d'arrêt du groupe i. Ce coût sera également défini de manière explicite dans les deux sections qui suivent ;

$x_{it} \longmapsto (x_{it})^+$: fonction indicatrice du passage du groupe i de l'état d'arrêt à l'état de fonctionnement. Cette fonction est définie par :

$$(x_{it})^+ = \max\{0, x_{it}\} \tag{4.2}$$

$x_{it} \longmapsto (x_{it})^-$: fonction indicatrice du passage du groupe i de l'état de fonctionnement à l'état d'arrêt. Cette fonction est définie par :

$$(x_{it})^- = -\min\{0, x_{it}\} \tag{4.3}$$

4.2.3 Fonction objectif

Dans la formulation dynamique ArrDem, l'objectif consiste à maximiser le profit relatif provenant de la génération de puissance par les différentes combinaisons de groupes planifiées sur un horizon de plusieurs périodes en déchargeant une suite de débits disponibles $(Q_t)_{t=1,\ldots,T}$. Typiquement, ce profit est défini comme la différence entre la valorisation de la puissance générée par la centrale et le coût d'A/D des groupes.

Un problème d'optimisation équivalent peut également être considéré dans la planification des arrêts-démarrages : il s'agit de minimiser la somme totale des coûts de démarrages et des coûts d'utilisation des débits, en satisfaisant un minimum de demande en puissance et en réserve tournante. Pour alléger le texte et faciliter l'exposé du modèle, on présente ici le premier de ces deux modèles.

Coûts d'arrêt-démarrage

D'une manière générale, les coûts d'A/D peuvent être classés en trois catégories : coût de marche à vide, coût d'entretien ou de maintenance et coût de stabilisation des A/D.

i) Le coût de marche à vide résulte de la perte de débit lors du démarrage d'un groupe (fonctionnement du groupe en marche à vide pendant 5 à 10 minutes, par exemple). Ce coût (noté c_{it}^{vide}) peut être estimé comme suit, par la valorisation de l'énergie potentielle du débit de marche à vide à la hauteur de chute

$$c_{it}^{vide} = \pi_t \vartheta \eta g \rho Q_i^{vide} t_i h_t \tag{4.4}$$

où :

η :	rendement moyen de la centrale (paramètre entre 0 et 1),
g :	accélération de la pesanteur (en m/s^2),
ρ :	masse volumique de l'eau ($10^3 kg/m^3$),
Q_i^{vide} :	débit de marche à vide du groupe i (en m^3/s),
t_i :	durée de marche à vide du groupe i (en s),
ϑ :	facteur de conversion de l'unité $kW.s$ à l'unité $MW.h$, c'est-à-dire $\vartheta = 1/36\,10^{-5}$ (on rappelle la relation suivante : $1kW.s = 10^3 kg \cdot m^2/s^2$).

ii) La combinaison du coût de démarrage avec celui associé aux arrêts des groupes peut servir (de manière indirecte) à la modélisation du coût de maintenance des groupes sur un horizon de moyen ou long terme. La détermination de ce dernier coût est complexe ; il comprend, entre autres, le coût de réparation des équipements

défaillants et le manque à gagner dû aux pertes de débit durant la période de maintenance. Toutefois, l'incorporation de ce coût dans une gestion à court terme peut être justifiée par le fait que le coût de maintenance est affecté par la façon dont les groupes sont opérés. Autrement dit, la planification à court terme des A/D des groupes se répercute, de manière directe ou indirecte, sur le coût de leur maintenance à moyen ou à long terme. Pour plus de détails sur ce sujet, on réfère à l'article de Nilsson et Sjevgren [67].

iii) La stabilité des engagements et désengagements des groupes le long de l'horizon de planification constitue un aspect fort préoccupant pour les opérateurs des centrales hydroélectriques. Elle peut être modélisée moyennant un coût, souvent non-linéaire, qui pénalise adéquatement les changements de statuts des groupes à mesure que la fréquence des A/D devient plus importante. En effet, ce dernier coût peut être défini pour chaque groupe en fonction, par exemple, de son historique en termes de nombre de périodes de fonctionnement ou du nombre d'arrêts ou démarrages depuis la première période de l'horizon.

Par la suite, on suppose que le coût de démarrage du groupe i, noté $c_i(\cdot)$, dépend de deux variables : d'une part, du nombre de fois où le groupe est démarré depuis la première période et, d'autre part, du nombre de périodes successives de retrait du groupe depuis son dernier arrêt. Quant au coût d'arrêt, noté $\bar{c}(\cdot)$, il est fonction du nombre de périodes successives d'opération des groupes. De plus, on considère que ces deux fonctions de coût d'A/D sont non-linéaires et pas nécessairement convexes ou concaves.

Fonction de débit-puissance

La détermination des fonctions de débit-puissance des groupes T/A repose sur des mesures prises à une hauteur donnée, appelée hauteur de référence. Toutefois, la

hauteur de chute nette (repésentant l'énergie potentielle) disponible pour un groupe n'est pas toujours égale à la hauteur de référence. En effet, cette hauteur de chute, notée $h_{it}(\cdot)$, dépend, d'une part, des niveaux amont et aval de la centrale et, d'autre part, des pertes de charge dans certains éléments (canaux, conduites et grilles) par où le débit du groupe passe. En outre, cette hauteur de chute peut dépendre également des variations de hauteur dues aux effets de tarage en aval de la centrale. Pour alléger l'écriture, on note tout simplement cette fonction de hauteur par h_{it}. Ainsi, tenant compte des effets de hauteur, pour une hauteur h_{it} et un débit q_{it} donnés, la puissance générée par le groupe i est donnée par la fonction $p_i(h_{it}, q_{it})$.

Quant à la valorisation de la puissance, elle est définie comme le produit de l'énergie, exprimée en mégawatts-heure ($MW.h$), par le prix courant d'un $MW.h$ sur le marché.

Ainsi, l'objectif de l'optimisation consiste à maximiser la fonction économique suivante :

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \pi_t \; p_i(h_{it}, q_{it}) - (x_{it})^+ \, c_i(\bar{v}_{it}, z_{it}) - (x_{it})^- \, \bar{c}_i(v_{it}) \right\}. \tag{4.5}$$

L'objectif est défini comme la différence entre les revenus provenant de la valorisation de la puissance et les coûts d'A/D des groupes. Dans cet objectif, un groupe qui était en arrêt durant la période t–1 et que l'on décide de faire fonctionner durant la période t doit subir une pénalité de démarrage. Par contre, un groupe qui était opérationnel durant la période t–1 et qui continue à fonctionner durant la période t n'y subit aucun coût. Cette façon de calculer les coûts est exprimée par le deuxième terme de la fonction objectif.

4.2.4 Contraintes

Dans le problème dynamique ArrDem, un très grand nombre de contraintes doit être pris en compte. Ces contraintes peuvent être classées en trois catégories : contraintes

sur les groupes, contraintes de demande en réserve tournante et contraintes d'exploitation et de maintenance. La première catégorie comprend toutes les restrictions individuelles sur les fonctions caractéristiques des groupes, ainsi que les contraintes de capacité sur le réseau hydraulique et le réseau électrique de transport. La deuxième catégorie modélise la demande en puissance de réserve tournante pour des fins de stabilité et sécurité du réseau électrique. Enfin, la troisième catégorie reflète des règles d'exploitation et de maintenance sur l'opération des groupes générateurs de puissance. Celle-ci regroupe différentes restrictions dynamiques portant sur une ou plusieurs périodes.

Contraintes sur les groupes

Cette catégorie de contraintes comprend des restrictions individuelles sur les groupes comme, par exemple, les bornes à respecter sur les débits des groupes et les zones de production à éviter dues au phénomène de cavitation ou de vibration. On peut également incorporer dans cette catégorie les pertes hydrauliques et certains types de contraintes globales sur des sous-ensembles de groupes, comme des bornes sur le débit d'un canal ou des bornes sur la puissance générée sur un réseau. Pour plus de détails sur cette catégorie de contraintes, on fait référence aux chapitres 2 et 3 de la thèse. Dans le modèle des A/D qui sera présenté dans ce chapitre, on note ces différentes contraintes statiques sur les groupes par l'ensemble générique A.

Demande en réserve tournante

Dans un système de production hydroélectrique, plusieurs types de réserve peuvent exister. Toutefois, dans le problème ArrDem, on s'intéresse particulièrement à la demande en puissance de réserve tournante. Cette réserve tournante est définie comme

la puissance totale supplémentaire que peut générer une centrale avec l'ensemble de ses groupes engagés. Autrement dit, cette réserve peut être vue comme le supplément en puissance qui peut être généré par les groupes réellement en marche. Dans le problème dynamique, la réserve de puissance joue un rôle important dans l'absorbtion de toute perturbation dans les réseaux électriques ou en cas d'augmentation temporaire de la demande en puissance. Elle est également utile pour compenser la production perdue suite à une panne de l'un des groupes de la centrale. Cette réserve est déterminée selon des règles locales (ou normalisées) tenant compte de la fiabilité du système électrique de chaque producteur. Typiquement, la réserve est donnée en pourcentage de la demande maximale en puissance prévue pour la période de pointe. D'autres facteurs peuvent aussi contribuer à la détermination de cette réserve, comme par exemple la probabilité d'avoir un aléa dans le réseau électrique ou la probabilité qu'un groupe tombe en panne.

Dans certaines situations, on peut imposer des restrictions sur la façon dont la réserve est assurée par les groupes de la centrale. C'est le cas, par exemple, lorsqu'on demande que la réserve soit suffisamment répartie entre les groupes. Ceci peut, d'une part, diminuer le risque qu'un groupe qui tombe en panne détienne une partie importante de la réserve et, d'autre part, éviter le dépassement éventuel des capacités de certains réseaux électriques de transport (cette dernière situation peut surgir lorsqu'un ensemble de groupes contribuant à la réserve est connecté à un réseau déjà saturé). On note que ce type de contrainte est facile à incorporer dans le modèle moyennant des bornes imposées sur la production des groupes.

Dans les centrales hydroélectriques, une attention particulière doit être accordée à la contrainte de réserve tournante, fait rarement mentionné dans la littérature. À la différence des groupes thermiques, la puissance maximale d'un groupe dépend de l'énergie potentielle disponible pour ce groupe. En conséquence, la capacité maximale d'un groupe doit être redéfinie à chaque période de l'horizon en fonction de la hauteur

de chute nette disponible pour ce groupe. Ainsi, cette puissance maximale du groupe i, notée p_{it}^{max}, est donnée comme suit :

$$p_{it}^{max} = p_i\left(h_{it}, q_i^{max}(h_{it})\right) \tag{4.6}$$

Après avoir défini les capacités maximales des groupes, on peut maintenant définir la contrainte de réserve tournante. Étant donné une demande en puissance de réserve S_t à la période t, la contrainte de la réserve tournante s'énonce comme suit : la puissance totale supplémentaire que peut générer la centrale avec l'ensemble des groupes engagés doit être suffisante pour satisfaire à la demande en puissance de réserve. Formellement, on a le type de contraintes suivant :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(e_{it} p_{it}^{max} - p_i(h_{it}, q_{it})\right) \geq S_t \qquad t=1,\ldots,T. \tag{4.7}$$

Règles d'exploitation et de maintenance

Parmi les principales contraintes de cette catégorie, on cite les règles suivantes :

- **Minimum d'arrêt / minimum de fonctionnement (R1) :** le minimum d'arrêt d'un groupe spécifie le temps minimal d'arrêt (généralement exprimé en terme de nombre d'heures) qu'il faut assigner à un groupe avant qu'il puisse redémarrer. De la même façon, le minimum de fontionnement spécifie le temps minimal de fonctionnement d'un groupe une fois qu'il est engagé. Cette exigence en terme de minimum de fonctionnement et de minimum d'arrêt est recommandée pour la fiabilité des groupes, pour diminuer le taux de pannes et pour contrôler l'usure des turbines-alternateurs, faits fortement accentués par la fréquence des A/D des groupes.

- **Liste de priorité (R2)** : Dans certains cas, le choix des groupes doit suivre l'ordre de priorité d'engagement de ces groupes. Souvent, ces listes de priorité reflètent des règles pratiques d'exploitation selon l'efficacité des groupes.
- **Premier arrêté / premier redémarré (R3)** : Dans le but de faire fonctionner les groupes de la centrale de manière équilibrée, l'engagement des groupes peut être géré selon la politique du premier arrêté est le premier redémarré.
- **Orientation par types de groupes (R4)** : Certains types de groupes sont plus performants que d'autres, il est donc plus naturel d'utiliser les groupes de ces types en premier. Ainsi, le choix des groupes à engager est orienté suivant leurs types. C'est une règle très pratique pour modérer le caractère combinatoire dans le choix des combinaisons de groupes à opérer.
- **Minimum et maximum des groupes en marche (R5)** : Pour des considérations de maintenance, l'opérateur d'exploitation peut limiter le nombre de groupes en marche à une période donnée. Ainsi, on définit un nombre minimum et maximum de groupes qui seront en fonctionnement à chaque période de l'horizon.
- **Statuts des groupes (R6)** : pour des considérations d'entretien ou de réparation, certains groupes doivent être absolument arrêtés. De la même façon, on peut imaginer qu'à une période donnée, un ou plusieurs groupes doivent forcément fonctionner. On voit une des applications de cette règle lorsqu'on veut par exemple désigner quelques groupes à fonctionner en marche à vide (les groupes ainsi désignés sont donc forcés à turbiner un minimum de débit).
- **Groupes du dernier recours (R7)** : Certains groupes (très anciens par exemple) peuvent être désignés pour ne pas fonctionner tout au long des périodes de l'horizon. Toutefois, on peut avoir recours à l'engagement de ces groupes pour assurer, par exemple, la réalisabilité du problème à une des périodes de l'horizon.
- **Autres règles** : En plus de ces règles, on peut avoir des contraintes supplémentaires, par exemple, sur la disponibilité de personnel qualifié pour la mise en fonctionnement des groupes. Ceci peut se traduire, par exemple, par des contraintes sur

le nombre maximal d'arrêts-démarrages des groupes à une période donnée. Également, on peut se retrouver avec des limites sur la marge permise d'augmentation ou de diminution de la production d'un groupe pendant deux périodes adjacentes. Ces dernières contraintes deviennent de plus en plus importantes lorsque la durée des périodes de l'horizon est très courte (par exemple 15 à 30 min). Par contre, elles sont moins pertinentes lorsque cette durée est d'une heure ou plus.

La combinaison de l'ensemble de ces règles peut aboutir à un conflit dans la détermination du domaine de réalisabilité. Dans ce cas, des règles sur ces règles peuvent être définies (comme par exemple la définition de relations de dominance).

En vue d'alléger la discussion de la modélisation du problème ArrDem, on se contente de donner la formulation mathématique de quelques règles pertinentes, à savoir les contraintes de minimum d'arrêt et de fonctionnement, et les listes de priorité.

Minimum d'arrêt / minimum de fonctionnement :

Si le groupe i est démarré à la période t, alors on a $e_{it'}=1$ pour $t'=t,\ldots,t+\tau_i-1$. De la même façon, Si le groupe i est arrêté à la période t, alors on a $e_{it'}=0$ pour $t'=t,\ldots,t+\bar{\tau}_i-1$. Formellement, on a les contraites suivantes :

$$e_{it'} \geq (x_{it})^+ \quad \text{pour} \quad t=1,\ldots,T;\ t'=t,\ldots,\min\{t+\tau_i-1,T\}, \tag{4.8a}$$

$$e_{it'} \leq 1-(x_{it})^- \quad \text{pour} \quad t=1,\ldots,T-1;\ t'=t,\ldots,\min\{t+\bar{\tau}_i-1,T\}. \tag{4.8b}$$

Une autre formulation non-linéaire, qui se prête bien à la programmation dynamique est la suivante : soit v_{it} le nombre de périodes successives de fonctionnement du groupe i depuis son dernier démarrage jusqu'à la fin de la période t. Ce nombre est calculé par la formule récurrente suivante :

$$v_{it} = e_{it}(v_{it-1}+1). \tag{4.9}$$

De la même façon, on définit $\bar{v}_{it}$ le nombre de périodes successives d'arrêt du groupe i depuis qu'il est arrêté jusqu'à la fin de la période t. Il est calculé par la formule récurrente suivante :

$$\bar{v}_{it} = (1 - e_{it})(\bar{v}_{it-1} + 1). \tag{4.10}$$

Ainsi, on peut maintenant formuler les contraintes de minimum d'arrêt et de fonctionnement comme suit :

$$v_{it-1} \geq (x_{it})^{-}\tau_i \quad t = 1, \ldots, T, \tag{4.11a}$$
$$\bar{v}_{it-1} \geq (x_{it})^{+}\bar{\tau}_i \quad t = 1, \ldots, T. \tag{4.11b}$$

Si $(x_{it})^{-} = 1$, c'est-à-dire le groupe i est arrêté à la période t, alors on doit avoir $v_{it-1} \geq \tau_i$; d'où le respect de minimum de fonctionnement. De manière analogue, si $(x_{it})^{+} = 1$ (c'est-à-dire le groupe i est démarré à la période t) alors on a nécessairement $\bar{v}_{it-1} \geq \bar{\tau}_i$; et par suite la durée minimale d'arrêt est respectée.

Listes de priorité :

Soit L_i l'ensemble des groupes qui doivent être engagés impérativement avant de démarrer le groupe i. Dans ce cas les contraintes de priorité d'engagement peuvent être formulées comme suit :

$$e_{jt} \geq e_{it} \qquad j \in L_i;\ t = 1, \ldots, T; \tag{4.12}$$

Ou sous sa forme compacte :

$$\sum_{j \in L_i} e_{jt} \geq e_{it} \parallel L_i \parallel \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{4.13}$$

4.2.5 Résumé du modèle

Le modèle ArrDem se résume comme suit :

$$
\begin{aligned}
Z^{AD} \stackrel{\text{def}}{=} & \max_{e_t, v_t, \bar{v}_t, x_t, q_t} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \pi_t \, p_i(h_{it}, q_{it}) - (x_{it})^+ \, c_i(\bar{v}_{it}, z_{it}) - (x_{it})^- \, \bar{c}_i(v_{it}) \right\} \\
\text{s.à.,} \quad & \text{pour } t = 1, \ldots T, \\
& \sum_{i=1}^{n} q_{it} \leq Q_t & (4.14) \\
(AD) \qquad & \sum_{i=1}^{n} (e_{it} p_{it}^{max} - p_i(h_{it}, q_{it})) \geq S_t & (4.15) \\
& \sum_{i=1}^{n} (x_{it})^+ \leq \sigma_t & (4.16) \\
& \sum_{j \in L_i} e_{jt} \geq e_{it} \parallel L_i \parallel, \quad i = 1, \ldots, n & (4.17) \\
& e_{it} = e_{it-1} + x_{it}, \quad i = 1, \ldots, n & (4.18) \\
& z_{it} = z_{it-1} + (x_{it})^+, \quad i = 1, \ldots, n & (4.19) \\
& v_{it} = e_{it}(v_{it-1} + 1), \quad i = 1, \ldots, n & (4.20) \\
& \bar{v}_{it} = (1 - e_{it})(\bar{v}_{it-1} + 1), \quad i = 1, \ldots, n & (4.21) \\
& v_{it-1} \geq (x_{it})^- \tau_i, \quad i = 1, \ldots, n & (4.22) \\
& \bar{v}_{it-1} \geq (x_{it})^+ \bar{\tau}_i, \quad i = 1, \ldots, n & (4.23) \\
& e_{it} q_i^{min}(h_{it}) \leq q_i \leq e_{it} q_i^{max}(h_{it}), \qquad i = 1, \ldots, n & \\
& q_t \in \Lambda & (4.24) \\
& e_t \in \{0,1\}^n & (4.25)
\end{aligned}
$$

Remarque: Avec un coût de démarrage positif, le terme $(x_{it})^+$ peut être remplacé par une variable continue (notée u_{it}) sous la contrainte linéaire suivante : $u_{it} \geq x_{it}$ (avec $u_{it} \geq 0$). Ainsi, lorsque x_{it} vaut -1 ou 0, à l'optimum, u_{it} vaut systématiquement 0. De manière analogue (avec un coût d'arrêt positif), le terme $(x_{it})^-$ peut être remplacé par une variable continue (noté $\bar{u}_{it}$) sous la contrainte linéaire suivante : $\bar{u}_{it} \geq -x_{it}$ (avec $\bar{u}_{it} \geq 0$).

On note que dans le modèle ($\mathcal{AD}$), les contraintes de type (4.16) modélisent des restrictions sur le maximum de démarrages des groupes à une période donnée. La

prise en compte des listes de priorité est donnée par les contraintes de type (4.17). Enfin, on rappelle que les contraintes (4.20)-(4.23) font référence à la formulation non-linéaire de la règle R1 (Minimum d'arrêt / minimum de fonctionnement).

Le modèle ($\mathcal{AD}$) est un problème en variables mixtes avec un grand nombre de variables discrètes (des milliers de ces variables). En outre, ce modèle est non-linéaire, non-séparable (par groupe) et non-convexe. Ainsi, il est difficile à résoudre.

La non-séparabilité du problème ($\mathcal{AD}$) provient principalement de la fonction de débit-puissance $(h_{it}, q_{it}) \longmapsto p_i(h_{it}, q_{it})$. En effet, la puissance générée par un groupe dépend, d'une part, de la hauteur de chute disponible pour ce groupe et, d'autre part, du débit turbiné par ce groupe. Or, cette hauteur de chute peut dépendre de débits turbinés par un autre sous-ensemble de groupes. C'est le cas, par exemple, des pertes énergétiques dans une conduite (ou un canal) qui achemine l'eau à un sous-ensemble de groupes. La même situation peut se produire dans le cas de la présence d'une grille qui protège (contre les solides traînés par la rivière) un sous-ensemble de groupes.

4.3 Revue des algorithmes de la littérature

Les articles qui traitent du problème ArrDem dans son contexte hydraulique sont très rares. Par contre, un très grand nombre d'articles proposant des méthodes de résolution assez variées ont été publiés dans le cadre de la planification des A/D des groupes thermiques. Évidemment, la qualité de la solution peut différer d'une méthode à l'autre. Sauf la programmation dynamique, la majorité de ces méthodes ne peuvent être facilement adaptées pour planifier les A/D des groupes à l'intérieur des centrales hydroélectriques où la dimension hydraulique constitue un facteur déterminant dans la production d'électricité. Les approches les plus traitées dans la littérature se résument dans les méthodes qui suivent.

4.3.1 Énumération exhaustive et listes de priorité

Le problème ArrDem peut être résolu par une énumération exhaustive de toutes les combinaisons admissibles des groupes. Ainsi, en supposant que chaque combinaison constituée d'un seul groupe est admissible, alors le nombre de combinaisons possibles sur T périodes avec n groupes est de $(2^n - 1)^T$. Une fois qu'on a énuméré toutes ces combinaisons, on peut exhiber celle qui donne le meilleur profit. Bien entendu, pour chaque combinaison énumérée, on résout un problème de chargement optimal. Il en résulte alors que l'énumération exhaustive est impossible pour des valeurs relativement grandes de n et T.

Dans une tentative de modérer le caractère combinatoire du problème, des listes de priorité sont utilisées dans le choix des groupes à engager. Ces listes sont préétablies selon des règles pratiques et heuristiques d'exploitation de la centrale. Ainsi, le choix des groupes à engager revient à déterminer le nombre de groupes qui donne la meilleure production en respectant la demande en réserve de puissance. Bien entendu, ce nombre qu'il faut déterminer correspond aux premiers groupes dans ces listes de priorité. Une variante de cette méthode consiste à mettre à jour, de manière dynamique, l'ordre de priorité d'engagement des groupes. Parmi les auteurs qui ont utilisé des approches basées sur des listes de priorité on cite Lee [44, 45], Shoults et al. [88].

4.3.2 Programmation en nombres entiers

Les algorithmes regroupés dans cette catégorie sont basés principalement sur la méthode d'évaluation-séparation progressive (Branch & Bound). Ils ont été proposés par certains auteurs des années 80 comme, par exemple, Cohen et Yoshimura [15], Lauer et al. [43]. Des tests numériques ont démontré que les algorithmes de ce type

nécessitent énormément de temps de calcul dès que la taille du problème devient grande (voir Bosch et Honderd [8]).

Toutefois, certains travaux (apparus récemment) proposent une réhabilitation à l'approche primale en variables mixtes $0-1$. Ces travaux ont bénéficié principalement de développement algorithmique dans la méthode de "Branch-and-cut" en se basant sur les inégalités valides publiées par Roy et Wolsey [80]. Avec ces améliorations, Caroe et al. [11] montrent que le problème ArrDem peut être résolu avec un temps de calcul modéré.

4.3.3 Relaxation lagrangienne

Dans sa version simple où la fonction objectif et les contraintes couplantes (impliquant plusieurs groupes) sont séparables (par groupe T/A) le problème de planification des arrêts-démarrages se prête particulièrement bien à la décomposition lagrangienne. La technique d'optimisation basée sur cette approche déplace toutes les contraintes couplantes dans la fonction objectif en leur associant des prix (multiplicateurs de Lagrange). Ensuite, elle décompose le problème ArrDem en un problème maître dual, et un certain nombre de sous-problèmes qui sont résolus de manière itérative jusqu'à ce qu'une solution satisfaisante soit obtenue. Les sous-problèmes, chacun déterminant la planification d'un groupe T/A disponible, sont résolus de manière indépendantes par l'algorithme de PD (voir Zhuang et Galiana [110]). Ces sous-problèmes sont reliés dans le problème maître par les multiplicateurs de Lagrange, ce qui donne lieu à un nouveau problème dual. Généralement la dimension de ce dernier problème est considérablement inférieure à celle du problème primal et par conséquent, il est relativement facile à résoudre par rapport au problème original. Dans ce type du problème, la fonction duale est convexe mais non-différentiable. Ainsi, la minimisation de cette fonction duale est effectuée par l'une des méthodes suivantes :

- Algorithme de sous-gradient,
- Méthode de faisceaux,
- Méthode de points intérieurs.

Des tests numériques ont montré que l'algorithme de sous-gradient nécessite beaucoup d'itérations avant de converger. Toutefois, il a l'avantage de nécessiter moins de calculs par itération ; de plus, il est simple à mettre en oeuvre. Parmi les auteurs qui ont utilisé cet algorithme, on cite Zhuang et Galiana [110], Muckstadt et Wilson [63].

La méthode de faisceaux constitue une alternative interessante pour résoudre le problème dual. Lemaréchal et al. [47] montrent que cette méthode converge plus rapidement que l'algorithme de sous-gradient. Cependant, son inconvénient réside dans l'ajustement des paramètres de stabilisation.

Dans une tentative d'éviter l'ajustement des paramètres dans la résolution du problème dual, une autre méthode de points intérieurs a été proposée récemment (voir Madrigal et Quintana [53]). Du point de vue vitesse de convergence, cette méthode partage le même avantage que la méthode de faisceaux. Mais, en plus, elle élimine la nécessité d'ajuster des paramètres dans la résolution du problème dual.

Cependant, quelle que soit la méthode utilisée pour résoudre le problème dual, l'approche basée sur la relaxation lagrangienne présente deux inconvénients (sauf, bien entendu, sous certaines conditions de convexité stricte du problème primal). D'une part, la réalisabilité du problème primal n'est pas assurée à la fin de l'algorithme, ce qui nécessite le développement d'une procédure (généralement heuristique) de recherche d'une solution primale réalisable. D'autre part, dans le problème ArrDem avec maximisation du profit, la valeur du primal est toujours inférieure ou égale à celle du dual à cause de la dualité faible de l'optimisation non-linéaire. La différence entre ces deux valeurs définit le saut de dualité et constitue un des critères les plus

importants pour juger de la qualité de la solution ainsi obtenue. Des dizaines d'articles ont été dédiés à cette aprroche de résolution dont Fisher [18], Merlin et Sandrin [61], Bertsekas et al. [7], Zhuang et Galiana [110], Rusic et Rajakovic [82].

4.3.4 Programmation dynamique

Dans l'algorithme de PD, les instances à évaluer du vecteur d'état augmentent de manière exponentielle avec le nombre de groupes disponibles. En vue de réduire la dimension énorme du domaine de définition du vecteur d'état, des listes de priorité ont été utilisées en se basant sur les performances des groupes. Avec ces listes, les groupes sont organisés dans des classes à l'intérieur desquelles les groupes sont ordonnés selon leur ordre de priorité d'engagement. Des fenêtres à l'intérieur de chaque classe peuvent être définies pour distinguer entre les groupes qui doivent automatiquement fonctionner, ceux qui doivent s'arrêter et ceux qui sont disponibles.

Il est important de noter que très peu d'auteurs se sont intéressés à ce genre d'algorithme aussi bien dans le cas des centrales hydroélectriques que thermiques. En outre, tous ces auteurs ont tenté de résoudre le problème de manière heuristique en se basant sur l'algorithme de PD ou de manière exacte en se limitant à une version simplifiée du problème global. Dans ce contexte, il importe de mentionner le travail publié par Bosch et Honderd [8]. Les auteurs de cet article ont tenté de résoudre le problème ArrDem (dans sa globalité) par une méthode d'approximation successive basée sur l'algorithme de PD. Pour ce faire, à chaque itération de l'algorithme, on résout plusieurs problèmes restreints, chacun impliquant un sous-ensemble de groupes disponibles. Vu l'époque de développement de cet algorithme (au milieu des années 80) où les ressources informatiques étaient limitées et très coûteuses, cette approche présentait une solution très pratique pour modérer le caractère combinatoire et énumératif de l'algorithme de PD. Cependant, on reproche à cette méthode son aspect

heuristique qui fait que sa convergence vers une solution optimale (du problème original) ne peut être assurée à la fin de l'algorithme.

Dans les deux sections qui suivent, on montre comment la technique de PD peut être une approche très acceptable pour résoudre de manière efficace le problème maître qui résulte d'un schéma de décomposition de Benders.

4.4 Résolution du problème

4.4.1 Description générale de l'algorithme

L'approche développée ici pour résoudre ce type de problème est une méthode d'optimisation globale qui combine à la fois la décomposition de Benders du problème original ($\mathcal{AD}$) et la technique de programmation dynamique. Ainsi, dans ce schéma de décomposition, les fonctions non-linéaires de débit-puissance (aussi bien que les coûts d'engagement/désengagement des groupes) ne sont pas nécessairement supposées concaves ou convexes. En outre, la demande en réserve tournante et le respect des différentes règles d'exploitation et de maintenance sont comptabilisées de manière explicite lors de la détermination de domaine admissible des états des groupes à chaque période de l'horizon. Ces contraintes sont négligées (complétement ou partiellement) par la plupart des articles publiés dans la littérature portant sur le problème ArrDem.

Le succès de l'approche utilisée repose, d'une part, sur la robustesse et la flexibilité de l'algorithme de PD et, d'autre part, sur les techniques de stockage, d'accès et de mise à jour des données en utilisant les principes des bases de données relationnelles. En ce sens, la méthode de résolution peut être vue comme un algorithme hiérarchique à deux niveaux doté d'un dictionnaire de données alimenté et mis à jour de façon permanente.

Le niveau supérieur de cette hiérarchie détermine, pour chaque période de l'horizon, l'ensemble des combinaisons admissibles (d'engagement et de désengagement des groupes) en respectant les différentes contraintes de production et d'opération de la centrale. Quant au niveau inférieur, il consiste à calculer le chargement optimal de chaque combinaison de statuts des groupes transmise par le niveau supérieur. Pour ce faire, l'algorithme de ce niveau inférieur consulte le dictionnaire pour localiser la courbe optimale correspondant à la combinaison des groupes ainsi engagés. Cette combinaison est utilisée comme un mot clé de recherche dans ce dictionnaire. Bien entendu, le résultat de cette recherche peut exhiber soit la courbe recherchée soit deux ou plusieurs courbes correspondant à des sous-combinaisons de la combinaison initiale, localisées dans ce processus de recherche. Dans ce dernier cas, une phase intermédiaire de PD est exécutée pour générer la courbe optimale agglomérée des courbes de ces sous-combinaisons. La dernière étape de l'algorithme de ce deuxième niveau consiste à mettre à jour le dictionnaire en stockant les différentes courbes aggrégées (intermédiaires et finale) qui résultent du processus de construction par la PD de la courbe optimale.

4.4.2 Approche de décomposition

La décomposition de Benders consiste à découper le problème original ArrDem (en variables mixtes) en un problème maître non-linéaire de choix des groupes (en variables discrètes) et en sous-problèmes non-linéaires de chargement optimal des groupes (en variables continues). Dans ce sens, le problème d'arrêt-démarrage des groupes peut être considéré comme un processus dynamique de décisions à deux niveaux :

$$Z^{\mathcal{MD}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{e_t, v_t, \bar{v}_t, x_t} \sum_{t=1}^{T} \left\{ \pi_t P_t(e_t; Q_t) - (x_{it})^+ c_i(\bar{v}_{it}, z_{it}) - (-x_{it'})^+ \bar{c}_i(v_{it}) \right\}$$
$$\text{s.à,} \quad \text{pour } t = 1, \ldots T,$$

$$
\begin{aligned}
& P_t(e_t; Q^{max}) - P_t(e_t; Q_t) \geq S_t && (4.26)\\
& \sum_{i=1}^{n} (x_{it})^+ \leq \sigma_t && (4.27)\\
& \sum_{j \in L_i} e_{jt} \geq e_{it} \parallel L_i \parallel, \quad i=1,\ldots,n && (4.28)\\
(\mathcal{MD}) \qquad & e_{it} = e_{it-1} + x_{it}, \quad i=1,\ldots,n && (4.29)\\
& z_{it} = z_{it-1} + (x_{it})^+, \quad i=1,\ldots,n && (4.30)\\
& v_{it} = e_{it}(v_{it-1} + 1), \quad i=1,\ldots,n && (4.31)\\
& \bar{v}_{it} = (1 - e_{it})(\bar{v}_{it-1} + 1), \quad i=1,\ldots,n && (4.32)\\
& v_{it-1} \geq (x_{it})^- \tau_i \quad i=1,\ldots,n && (4.33)\\
& \bar{v}_{it-1} \geq (x_{it})^+ \bar{\tau}_i, \quad i=1,\ldots,n && (4.34)\\
& e_t \in \{0,1\}^n && (4.35)
\end{aligned}
$$

où les puissances $P_t(e_t; Q_t)$ et $P_t(e_t; Q^{max})$ sont calculées par le sous-problème suivant :

$$
\begin{aligned}
P_t(e; Q) = \quad & \max_{q_1,\ldots,q_n} \sum_{i=1}^{n} p_i(h_{it}, q_i) \\
\text{s.à.} \quad & \\
(\mathcal{SD}) \qquad & \sum_{i=1}^{n} q_i \leq Q && (4.36)\\
& e_i q_i^{min}(h_{it}) \leq q_i \leq e_i q_i^{max}(h_{it}), \qquad i=1,\ldots,n \\
& (q_1,\ldots,q_n) \in \Lambda
\end{aligned}
$$

où e et Q sont deux paramètres génériques représentant respectivement le vecteur de statuts des groupes et le débit total disponible à la centrale.

Dans le problème maître, la contrainte de type (4.26) est une reformulation de la contrainte de demande en réserve tournante (4.15). Par définition de la réserve tournante, ces deux formulations sont équivalentes. On rappelle que Q^{max} est le débit maximal d'exploitation qui peut être turbiné par les groupes de la centrale.

4.4.3 Résolution des sous-problèmes

Une fois le choix des groupes fixé par le niveau supérieur (le problème maître ($\mathcal{MD}$)), le sous-problème ($\mathcal{SD}$) consiste à déterminer la répartition optimale de la production entre les groupes ainsi choisis. Cette répartition de la production doit respecter le total de débit disponible Q_t.

Dans le cas simple où les conditions hydrauliques et les contraintes globales sur des sous-ensembles de groupes sont négligées, la solution globale du problème ($\mathcal{SD}$) est obtenue par l'algorithme de programmation dynamique. La seule variable d'état requise pour résoudre ce problème par la PD est associé à la contrainte de ressource (4.36). On rappele que les détails de cet algorithme se trouvent au chapitre 2 (section 2)

Une généralisation de cet algorithme est proposée au chapitre 2 (section 3) et au chapitre 3 de la thèse. Cette généralisation consiste, d'une part, à incorporer certaines contraintes globales sur la puissance ou le débit turbiné par un sous-ensemble de groupes et, d'autre part, à tenir compte de certaines conditions hydrauliques. C'est un algorithme qui combine la décomposition par les ressources et l'algorithme de PD. La prise en compte des conditions hydrauliques concerne, d'une part, les pertes de charge dans des canaux, conduites et grilles et, d'autre part, les variations de hauteur au tarage de la centrale. Dans la section 4.4.5, on propose une structure de données qui permet de résoudre chaque sous-problème en se basant sur les résultats des sous-problèmes déjà résolus.

4.4.4 Résolution du problème maître

On propose ici une méthode de résolution du problème maître basée sur l'algorithme de programmation dynamique (PD). Pour cela, on commence d'abord par définir les

ingrédients de PD appliquée à ce type de problème, à savoir les étapes de PD, le vecteur d'état, le vecteur de décision et la fonction de récurrence.

Reformulation dynamique du problème maître

Pour le problème ArrDem, les étapes correspondent aux périodes de l'horizon ($t = 1, \ldots, T$), le vecteur d'état est noté par $s_t = (e_t, v_t, \bar{v}_t, z_t)$ et le vecteur de décision correspond aux variables de transition, noté x_t. On rappelle la convention adoptée pour le vecteur de décision x_t :

$$x_{it} = \begin{cases} -1 & \text{arrêter le groupe } i \\ 0 & \text{maintenir l'état précédent du groupe } i \\ 1 & \text{démarrer le groupe } i \end{cases} \tag{4.37}$$

La relation de récurrence est définie comme suit : sachant une instance du vecteur d'état s_{t-1}, le profit optimal généré par les groupes de la centrale depuis le début de la période t jusqu'à la fin de l'horizon, noté $P_t^*(s_{t-1})$, est calculé par la formule récurrente suivante :

$$\begin{cases} P_t^*(s_{t-1}) = \max\limits_{x_t \in X_t(s_{t-1})} \left\{ \left[\pi_t P_t(e_t; Q_t) - (x_{it})^+ c_i(\bar{v}_{it}, z_{it}) - (x_{it})^- \bar{c}_i(v_{it}) \right] + P_{t+1}^*(s_t) \right\} \\ P_{T+1}^*(\cdot) = 0 \end{cases} \tag{4.38}$$

où $X_t(s_{t-1})$ est le domaine admissible du vecteur de décision au début de la période t, étant donné une instance du vecteur d'état s_{t-1}. Ce domaine est induit, d'une part, par les contraintes statiques (liées à une seule période) de types (4.26)-(4.28) et, d'autre part, par les contraintes dynamiques (portant sur plusieurs périodes) de type (4.29)-(4.34). Dans la section qui suit, on propose une méthode intuitive de construction de ce domaine de réalisabilité $X_t(s_{t-1})$.

Détermination des domaines de réalisabilité

Soit Ω_t l'ensemble des valeurs possibles du vecteur d'état à la fin de la période t. Évidemment, $\Omega_0 = \{s_0\}$ où $s_0 = (e_0, v_0, \bar{v}_0, z_0)$ sont des données du problème. En supposant que $X_t(\cdot)$ soient disponibles, l'ensemble Ω_t est construit (de manière récurrente) comme suit, pour $s_{t-1} \in \Omega_{t-1}$ et $x_t \in X_t(s_{t-1})$:

$$e_t = e_{t-1} + x_t, \tag{4.39a}$$

$$z_{it} = z_{it-1} + (x_{it})^+ \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.39b}$$

$$v_{it} = e_{it}\,(v_{it-1} + 1) \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.39c}$$

$$\bar{v}_{it} = (1 - e_{it})\,(\bar{v}_{it-1} + 1) \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.39d}$$

Maintenant, il reste à déterminer, pour chaque période t, les ensembles $X_t(\cdot)$ étant donné l'ensemble Ω_{t-1}. Ces ensembles sont définis en fonction de l'historique de fonctionnement des groupes et des règles de maintenance et d'exploitation qui gouvernent l'opération de ces groupes comme suit :

- **Réserve tournante**

La contrainte de réserve tournante exige que la puissance supplémentaire qui peut être générée par les groupes en marche satisfasse un minimum de demande en puissance de réserve. Dans ce cas, puisque dans le modèle $(\mathcal{AD})$ on n'exige aucune demande minimale en puissance générée, alors les décisions doivent être incluses dans l'ensemble suivant :

$$X_t^1(s_{t-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x_t : \sum_{i=1}^{n} (e_{it-1} + x_{it})\,\bar{p}_{it} \geq S_t \right\} \tag{4.40}$$

où $\bar{p}_{it}$ est la puissance maximale correspondant à une hauteur de chute maximale au niveau du groupe i. On note que $\bar{p}_{it}$ est une surestimation de la vraie puissance

maximale p_{it}^{max} du groupe i. Il en résulte alors que certaines décisions (de l'ensemble $X_t^1(s_{t-1})$) peuvent être, à postériori, rejetées (ne satisfaisant pas la demande en réserve tournante) suite à une optimisation par rapport à la hauteur de chute (nette) du groupe i.

- **Priorité d'engagement des groupes**

Soit L_i l'ensemble des groupes qui doivent être engagés impérativement avant de démarrer le groupe i, il en résulte une relation d'ordre formulée de la façon suivante :

$$X_t^2(s_{t-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_t : x_{it} \leq x_{jt} + e_{jt-1} - e_{it-1},\ i \in \mathcal{I},\ , j \in L_i\} \tag{4.41}$$

Ceci est équivalent à exiger pour tout $i \in \mathcal{I}$ et $j \in L_i$:

$$\begin{aligned} e_{it} \leq e_{jt} &\Longrightarrow e_{it-1} + x_{it} \leq e_{jt-1} + x_{jt} \\ &\Longrightarrow x_{it} \leq x_{jt} + e_{jt-1} - e_{it-1}. \end{aligned}$$

- **Minimum d'arrêt / minimum de fonctionnement**

On rappelle que τ_i (resp. $\bar{\tau}_i$) est la durée minimale de fonctionnement (resp. d'arrêt) lorsque le groupe i est démarré (resp. arrêté). Les décisions qu'on peut prendre au début de la période t, en respectant cette règle d'opération, dépendent de l'historique de ce groupe, à savoir v_{t-1} et $\bar{v}_{t-1}$. Formellement, les contraintes (4.33)-(4.34) peuvent se traduire explicitement par le type de décisions suivantes :

$$\begin{aligned} X_t^3(s_{t-1}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{x_t : v_{it-1} \geq (x_{it})^- \tau_i\right\} \\ &= \{x_t : (v_{it-1} < \tau_i \text{ et } e_{it-1} = 1) \Longrightarrow x_{it} = 0\} \qquad (4.42) \\ X_t^4(s_{t-1}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{x_t : \bar{v}_{it-1} \geq (x_{it})^+ \bar{\tau}_i\right\} \\ &= \{x_t : (\bar{v}_{it-1} < \bar{\tau}_i \text{ et } e_{it-1} = 0) \Longrightarrow x_{it} = 0\} \qquad (4.43) \end{aligned}$$

Ainsi, à la période t, le groupe maintient son statut précédent si il était en marche (resp. en arrêt) et n'a pas expiré sa durée minimale de fonctionnement (resp. d'arrêt).

Finalement, l'ensemble $X_t(s_{t-1})$ est défini comme la conjonction des domaines associés à chacune des règles d'exploitation et de maintenance. Formellement, on a :

$$X_t(s_{t-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x_t \in \{-1,0,1\}^n : \ x_t \text{ satisfait (4.40) à (4.43)}\} \qquad (4.44)$$

Remarque: On note que la règle du premier arrêté est le premier démaré peut être reformulée d'une façon équivalente qui consiste à gérer des listes de priorité dynamiques dans le temps.

Analyse de l'algorithme de programmation dynamique

Théoriquement, avec n groupes disponibles, les variables d'état e_t peuvent prendre 2^n valeurs possibles à une étape t de la PD. Ce nombre de valeurs devient gigantesque dès que la nombre de groupes dépasse la taille moyenne qu'on peut trouver dans une centrale hydroélectrique (par exemple, lorsque $n \geq 20$). Il devient alors pratiquement impossible de stocker (en mémoire centrale de l'ordinateur) toutes les valeurs possibles de e_t.

Heureusement, la nature des problèmes réels, rencontrés dans la planification des arrêts-démarrages des groupes dans une centrale hydraulique, fait qu'en pratique cette explosion exponentielle des instances des variables d'état e_t n'a pas vraiment sa raison d'être. En effet, en plus de l'ensemble de règles vues précédement (règles R1 à R7), deux autres aspects très spécifiques à ce type du problème doivent être exploités pour réduire le domaine de définition de e_t.

Généralement, le démarrage d'un groupe nécessite l'intervention de personnel qualifié et nécessite de plus un certain temps, par exemple, de l'ordre de 5 à 10 min. Ainsi, étant donné la contrainte sur la disponibilité de personnel qualifié, en pratique, le nombre total de démarrages des groupes (à une période donnée) est borné

Tableau 4.1 – Réduction des instances du vecteur de décision

n	σ_t	2^n	$\sum_{i=0}^{\sigma_t} C_i^n$
10	4	1024	386
20	5	1048576	21700
30	6	1073741824	768212
40	8	1099511627776	100146724

supérieurement. C'est une règle forte intéressante qui permet de modérer le caractère combinatoire de l'ensemble de décisions $X_t(s_{t-1})$ et, par conséquent, réduit la taille de l'ensemble $\Omega_t(s_{t-1})$. Le tableau 4.1 compare la valeur 2^n au nombre des instances selon le nombre maximal d'arrêts-démarrages des groupes (noté σ_t). Dans ce tableau, C_i^n désigne le nombre de combinaisons possibles résulant de i arrêts (ou démarrages) parmi n groupes disponibles. En outre, dans cette comparaison, on suppose que la disponibilité de personnel qualifié (et par conséquent, le nombre maximal d'arrêts-démarrages des groupes) augmente avec le nombre des groupes disponibles de la centrale.

Un autre aspect spécifique aux groupes (aussi bien hydrauliques que thermiques) est celui de leur classification par types (ou modèles). En effet, dans une centrale hydroélectrique, les groupes ayant le même type sont caractérisés par une seule fonction de débit-puissance à une hauteur de chute de référence. En pratique, dans une centrale hydroélectrique, le nombre total de types de groupes est significativement inférieur au nombre total de groupes. Ainsi, il en résulte, de manière naturelle, un ordre de priorité partiel à l'intérieur de chaque type, ce qui permet de modérer le caractère combinatoire dans le nombre de plans de production possibles à une étape donnée de la PD.

Soit m le nombre total de types de groupes d'une centrale. Si on suppose que tous les types possèdent le même nombre de groupes, noté $\bar{n}$, alors le nombre de combinaisons

Tableau 4.2 – Réduction des instances de e_t (avec $\bar{n} = 5$)

n	m	2^n	$(\bar{n}+1)^m$
10	2	1024	36
20	4	1048576	1296
30	6	1073741824	46656
40	8	1099511627776	1679616

possibles des variables d'état e_t est donné comme suit :

$$1 + \bar{n}C_1^m + \bar{n}^2C_2^m + \cdots + \bar{n}^iC_i^m + \cdots + \bar{n}^mC_m^m = (\bar{n}+1)^m.$$

Le tableau 4.2 montre des réductions obtenues (en termes de nombres de combinaisons possibles de e_t) en fonction du nombre de types lorsque la centrale comporte 5 groupes de chaque type.

Par ailleurs, en plus de tous ces aspects visant à réduire le nombre d'instances possibles du vecteur d'état, on peut également incorporer d'autres mesures de réduction (de nature heuristique) proposées par Bosch Honderd [8]. Parmi les mesures de réduction les plus pertinentes, on cite la règle heuristique suivante : aucun arrêt (resp. démarrage) n'est permis si le débit à décharger et la demande en réserve augmentent (resp. diminuent). On note que cette règle n'est pas toujours applicable lors de la présence de contraintes sur les statuts des groupes (R6). Ainsi, certains arrêts (ou démarrages) obligatoires durant ces périodes peuvent invalider l'utilisation d'une telle règle.

En conclusion, étant donné l'ensemble des règles d'exploitation et de maintenance (R1 à R7) et tenant compte des différents aspects de réduction spécifiques au problème, l'approche de résolution par la PD semble un bon choix pour résoudre ce type du problème dans son contexte hydraulique. Cette observation repose, d'une part, sur

la robustesse et la flexibilité de l'algorithme de PD, qui permet d'incorporer d'autres types de contraintes couplantes dans le temps ou impliquant plusieurs groupes. C'est le cas par exemple de la prise en compte des pertes énergétiques impliquant des sous-ensembles de groupes ou de la règle sur les groupes du dernier recours (règle R7). D'autre part, la rapidité et la capacité de stockage (en mémoire centrale) des nouveaux ordinateurs rendent très acceptable une implantation efficace de l'algorithme de PD.

4.4.5 Structures de données

La performance de l'algorithme de PD appliqué à ce type de problème dépend, d'une part, de la stratégie de stockage et d'accès aux données utilisées pour résoudre les sous-problèmes et, d'autre part, des structures de données utilisées, que ce soit pour implanter le vecteur d'état ou pour gérer certaines règles d'exploitation comme la gestion des listes de priorité (R2) et la règle du premier arrêté / premier redémarré (R3).

Vecteur d'état

Sous sa forme vectorielle, la dimension du vecteur des variables e_t (ou tout simplement e) correspond au nombre de groupes n de la centrale. Toutefois, grâce à un effort d'implantation supplémentaire, ce vecteur de statuts des groupes peut être considéré comme une seule variable faisant partie du vecteur d'état s_t. En effet, le vecteur e peut être implanté sur l'ordinateur comme une séquence de bits de taille n étant donné que chacune de ses composantes vaut 0 ou 1. Ainsi, avec cette façon de construire le vecteur e, on peut définir des opérations logiques qui ne nécessitent qu'un temps de calcul d'ordre $\lceil n/k \rceil$ au lieu d'ordre n où $\lceil n/k \rceil$ est le plus petit entier supérieur

Tableau 4.3 – Opérateurs binaires de base

e_i^1	e_i^2	$e_i^1 \vee e_i^2$	$e_i^1 \oplus e_i^2$	$e_i^1 \wedge e_i^2$	$\neg e_i^1$
0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0

ou égal à (n/k) et k est la taille (en termes de bits) du mot machine utilisé à cette fin (souvent, on prend un mot de 32 bits ou 64 bits). Généralement, une centrale hydroélectrique contient entre une dizaine et une quarantaine de groupes et il est très rare (éventuellement jamais) que le nombre n dépasse une soixantaine de groupes. Cette constatation permet de conclure que les opérations logiques qu'on va définir plus bas ne nécessitent qu'un temps de calcul constant (indépendamment de la valeur de n) et qui est à peu près équivalent à celui des opérations de base comme l'addition et la soustraction sur des opérandes entiers.

Le tabeau 4.3 résume (bit à bit) les quatres opérateurs logiques de base, à savoir : la disjonction inclusive ($\vee$), la disjonction exclusive ($\oplus$), la conjonction logique ($\wedge$) et la négation logique ($\neg$).

Il est important de souligner les avantages de la représentation binaire du vecteur e. D'une part, elle permet de limiter (de manière significative) l'espace mémoire requis (sur ordinateur) pour stocker les instances du vecteur e. D'autre part, en utilisant les opérateurs binaires de l'ordinateur, certaines procédures de l'algorithme de résolution du problème maître sont effectuées avec un temps de calcul très réduit. Un exemple de ces procédures est discuté dans la section suivante traitant du dictionnaire pour les A/D des groupes.

Dictionnaire pour les A/D des groupes

Dans la fonction récurrente (4.38), le terme $P_t(e_t; Q_t)$ résulte de la résolution du sous-problème de chargement optimal (SD). Celui-ci retourne la puissance optimale générée par les groupes engagés correspondant à e_{it}=1 étant donné un total du débit disponible Q_t. La résolution efficace de l'équation (4.38) dépend étroitement de la quantité de travail exigée par la sous-routine qui calcule cette valeur $P_t(e_t; Q_t)$. Par la suite, on propose une technique de stockage et de mise à jour des données utilisant une structure de données que l'on appelle "dictionnaire pour les A/D des groupes". L'idée innovatrice sous-tendant cette technique est le fait de pouvoir résoudre chaque sous-problème (SD) en se basant sur les résultats d'optimisation d'autres sous-problèmes précédemment traités.

Pour alléger la discussion du dictionnaire, on suppose le cas (le plus courant en pratique) de pertes hydrauliques où la hauteur disponible à un groupe dépend de la hauteur de chute de la centrale, du débit total déchargé par les groupes de cette centrale (qu'on présume égal au débit total disponible Q_t) et du débit turbiné par ce groupe. Dans ce cas la fonction de hauteur $h_{it}(\cdot)$ est définie comme suit :

$$h_{it}(q_t) = H_t - f(Q_t) - w_i q_{it}^2$$

où :

$f(Q_t)$: pertes de hauteur en bief aval de la centrale (en m),

w_i : coefficient de pertes de charge (singulières et par frottement) au niveau du groupe i (en m).

Afin de mieux profiter des calculs effectués aux périodes précédentes, l'incorporation des variations de la hauteur de chute dans la génération des courbes (paramétriques) est réalisée en deux étapes. Dans une première étape, on génère cette courbe par rapport à la hauteur de chute de référence en incorporant uniquement les pertes individuelles. La courbe ainsi générée à cette hauteur de référence est notée $P^{ref}(e; \cdot)$.

Dans une deuxième étape, on transforme la courbe $P^{ref}(e;\cdot)$ à la hauteur de chute courante en incorporant les variations au tarage de la centrale. Cette transformation (basée sur la similitude hydraulique en hauteurs) est effectuée par la relation suivante :

$$P_t(e;Q_t) = \beta_t(Q_t)\; P^{ref}\,(e;\alpha_t(Q_t)Q_t) \tag{4.45}$$

où :

$$\alpha_t(Q) = \left(1 - \frac{f(Q) - \Delta H_t}{H^0}\right)^{-0.5} \quad \text{et} \quad \beta_t(Q) = \left(1 - \frac{f(Q) - \Delta H_t}{H^0}\right)^{1.5}$$

avec $\Delta H_t = H^0 - H_t$.

Pour mettre en relief cette décomposition des pertes de hauteur à deux niveaux, il suffit de considérer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{h_{it}(q_t)}{H^0} &= \frac{H_t - f(Q_t) - w_i q_{it}^2}{H^0} \\
&= \left(1 - \frac{f(Q_t) - \Delta H_t}{H^0} - \frac{w_i q_{it}^2}{H^0}\right) \\
&= \left(1 - \frac{f(Q_t) - \Delta H_t}{H^0}\right)\left(1 - \frac{w_i \tilde{q}_{it}^2}{H^0}\right)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

où $\tilde{q}_{it} = \alpha_t(Q_t)\, q_{it}$.

Comme mentionné plus haut, les groupes T/A sont classés par type (les groupes d'un même type ont des caractéristiques identiques). Cette propriété permet de modérer de manière significative le caractère combinatoire du problème. Ainsi, si on note m le nombre de types de groupes de la centrale, alors le mot clé de la recherche dans le dictionnaire est constitué de m rubriques (ou champs) où la rubrique j représente le nombre de groupes du type j, noté n_j.

Soit e une instance du vecteur e_t, pour exhiber du dictionnaire la valeur optimale $P_t(e;Q_t)$, on procède en deux étapes. La première étape consiste à construire le mot

clé de la recherche dans le dictionnaire à partir de la valeur de e. Cette procédure nécessite un temps de calcul d'ordre $O(log(n)\sum_{j=1}^{m} n_j) = O(n\,log(n))$. Toutefois, étant donné la représentation binaire du vecteur e_t, il est facile de construire ce mot clé de recherche dans un temps linéaire d'ordre $O(\sum_{j=1}^{m} n_j) = O(n)$. En effet, soit e^j le vecteur associé aux groupes disponibles du type j. Sans perte de généralité, on suppose que les groupes du type 1 sont indexés de 1 à n_1, les groupes du type 2 sont indexés de n_1+1 à n_2 et ainsi de suite. Dans ce cas, e_i^j vaut 1 si le groupe i appartient au type j. Ainsi, pour déterminer le nombre de groupes engagés du type j dans la combinaison de groupes e, on effectue d'abord une conjonction binaire entre les deux vecteurs e et e^j (soit $\bar{e}$ le vecteur résultant de cette opération, c'est-à-dire $\bar{e} = e \wedge e^j$). On note que le temps de calcul de cette opération est $O(1)$. Ensuite, on itère sur n_j bits dans le vecteur $\bar{e}$ pour comptabiliser le nombre de groupes engagés faisant partie du type j. En répétant la même procédure pour tous les types de groupes ($j = 1, \cdots, m$), on construit alors le mot clé de recherche dans un temps linéaire d'ordre $O(\sum_{j=1}^{m} n_j) = O(n)$.

Une fois ce mot clé construit, il suffit d'activer le moteur de recherche pour exhiber la courbe $P^{ref}(e;\cdot)$. Dans ce processus de recherche, deux cas peuvent se présenter. Si la courbe globale $P^{ref}(e;\cdot)$ existe déjà, alors il suffit de retourner la valeur correspondant au débit total disponible Q_t. Dans le cas contraire, deux ou plusieurs courbes, correspondant à des sous-clés du mot clé initial, sont localisées dans ce processus de recherche. Une phase intermédiaire basée sur l'algorithme de PD est alors exécutée pour générer la courbe optimale agglomérée des courbes de ces sous-clés ; ensuite, le moteur de recherche met à jour le dictionnaire en stockant les différentes courbes aggrégées (intermédiaires et finale) qui résultent du processus de construction par la PD de la courbe optimale. Enfin, une fois que la courbe $P^{ref}(e;\cdot)$ est construite, il suffit d'appliquer la relation (4.45) pour retrouver la valeur de $P_t(e;Q_t)$.

L'approche adoptée pour initialiser consiste à construire, de manière successive, les courbes agglomérées des courbes de débit-puissance des groupes de chaque type.

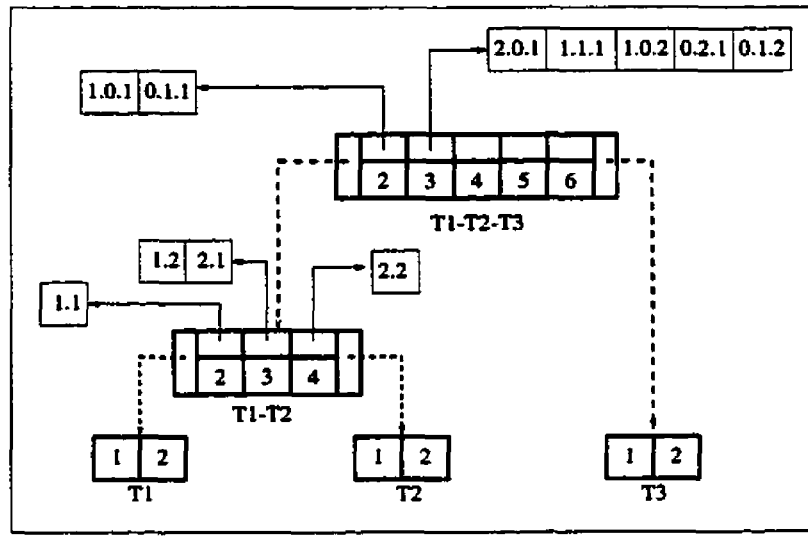

Figure 4.4.5 Exemple de dictionnaire d'arrêt-démarrage

Ainsi, pour un type j (avec $n_j \geq 2$), on construit la courbe globale des deux premiers groupes, ensuite des trois premiers groupes, et ainsi de suite jusqu'à la courbe globale de tous les groupes du type.

Pour fixer les idées, soit une centrale avec trois types et six groupes classés comme suit :

- Type 1 : groupes 1 et 2,
- Type 2 : groupes 3 et 4,
- Type 3 : groupes 5 et 6.

Soit $e = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$ une instance du vecteur e_t (les groupes 1, 3, 4 et 6 sont engagés, alors que les deux groupes 2 et 5 sont arrêtés). Le mot clé correspondant à cette instance du vecteur e_t est 1.2.1 (c'est-à-dire, un seul groupe du type 1, deux groupes du type 2 et un seul groupe du type 3). Initialement, le dictionnaire contient, pour chaque type, la courbe de débit-puissance des groupes du type ainsi que la courbe globale optimale de deux groupes de ce type. Alors, pour construire la courbe agglomérée correspondant au mot clé 1.2.1, on procède en deux étapes, à savoir :

1. on construit d'abord la courbe optimale qui correspond au sous-clé 1.2 en utilisant

la courbe de débit-puissance des groupes du type 1 et celle agglomérée de deux groupes du type 2, ensuite on la stocke dans le dictionnaire ;

2. on construit la courbe optimale qui correspond au mot clé 1.2.1 en utilisant la courbe correspondant au sous-clé 1.2 et celle de débit-puissance des groupes du type 3, ensuite on la stocke dans le dictionnaire.

La figure 3 illustre la construction, de manière incrémentale, du dictionnaire des A/D des groupes pour le cas de l'exemple précédent.

Piles et files d'attentes

La gestion de certaines règles d'exploitation peut être réalisée moyennant des listes gérées en FIFO (*First In First Out*) ou en LIFO (*Last In First Out*). C'est le cas par exemple de la règle sur les priorités d'engagement et celle du premier arrêté est le premier redémarré. Ainsi, si on note L une liste de groupes (arrêtés) triée selon leur ordre de priorité, alors la première règle peut être prise en compte en gérant une pile (liste en LIFO) selon la politique suivante :

$$\begin{cases} empiler(L, i) & \text{si } x_i = -1 \\ i \stackrel{\text{def}}{=} desempiler(L) & \Longrightarrow x_i = 1 \end{cases}$$

où la fonction $empiler(L, i)$ insère le groupe i en tête de la liste L alors que la fonction $desempiler(L)$ retourne le premier élément de la liste L.

Quant à la règle du premier arrêté est le premier redémarré, elle peut être prise en compte par une simple file d'attente circulaire.

Remarque: La présence de listes de priorité sur des groupes brise la règle du premier arrêté est le premier redémarré. Ceci est dû au fait que si un groupe i est plus prioritaire qu'un groupe i' alors, en tout temps, le groupe i ne peut être en arrêt pendant que le groupe i' est en marche. Par suite, le groupe i est toujours arrêté

après l'arrêt du groupe i' ; or, la règle du premier arrêté est le premier redémarré exige que le groupe i' soit redémarré avant le groupe i. D'où un conflit entre les deux règles. Pour remédier à ce problème, on peut imaginer une autre règle qui définit une certaine dominance. Ainsi, on propose une autre règle que l'on nomme "le plus prioritaire est le premier redémarré". Avec cette règle, on assure toujours que le groupe le plus prioritaire est celui qui sera engagé ; de plus, cette règle assure que si deux groupes ont le même niveau de priorité, alors le premier arrêté de ces deux groupes est celui qui sera engagé. Par contre, cette règle tolère l'arrêt du groupe i pendant que le groupe i' le moins prioritaire continue à fonctionner.

4.4.6 Algorithme des A/D versus décomposition de Benders

La décomposition de Benders se prête bien à la résolution des problèmes mixtes en variables continues et discrètes. Autrement dit, l'optimisation par rapport aux variables discrètes se fait dans le programme maître et celle concernant les variables continues dans le sous-problème.

En principe, selon le schéma conventionnel de décomposition de Benders, chaque solution du problème maître correspond à une stratégie dynamique des A/D des groupes. Pour évaluer la valeur de la fonction objectif relative à cette stratégie (ou solution), il est nécessaire de résoudre plusieurs instances du sous-problème de chargement optimal ($\mathcal{SD}$). Plus précisement, le sous-problème doit être résolu pour chaque composante (ou combinaison des groupes choisis) de la stratégie courante.

Toutefois, la résolution du problème ArrDem ne procède pas de la même manière ; il suit une procédure dictée par l'utilisation de l'algoritme de PD pour résoudre le problème maître ($\mathcal{MD}$). Les stratégies du problème maître sont générées de manière constructive à partir de sous-stratégies optimales qui maximisent le profit relatif d'une

partie de l'horizon. Autrement dit, à chaque étape t de la PD, on résout uniquement les sous-problèmes de chargement optimale permettant de calculer le profil relatif optimal, et ce, entre le début de la période t et la fin de l'horizon T.

En outre, dans le schéma conventionnel de Benders, on génère habituellement des coupes d'optimalité et celles de réalisabilité. En général, les coupes d'optimalité, sous forme d'hyperplans, ne peuvent pas décrire globalement la fonction objectif non convexe du problème maître. Ainsi, dans le processus de résolution de ce dernier, la description de la fonction objectif est faite moyenant l'information cumulée dans le dictionnaire des A/D. On note, par ailleurs, que l'algorithme de PD discrète n'a pas besoin de procéder aux approximations (extérieures) plus fines pour décrire la fonction objectif.

En ce qui concerne les coupes de réalisabilité, elles sont générées de manière particulière pour traiter les contraintes compliquantes de la réserve tournante. Pour ce faire, on considère à priori un domaine admissible plus large en relaxant les contraintes de demande en réseve tournante (4.26). Cette relaxation se fait de la façon suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} e_{it}\bar{p}_i \geq S_t. \tag{4.47}$$

où $\bar{p}_i$ est la puissance maximale du groupe correspondant à sa hauteur de chute maximale.

En résolvant le problème maître par la forme recurrente (4.38), certaines solutions peuvent être non-admissibles (violant les contraintes de la réserve tournante). Ces dernières solutions sont éliminées au niveau du problème maître en les pénalisant par une valeur très grande ($-\infty$). Ainsi elles ne pourrons plus figurer comme sous-stratégie d'une solution optimale du problème maître.

4.5 Tests numériques

Dans cette section, on montre l'impact de la prise en compte des A/D des groupes, tant du point de vue économique que pratique, sur la stabilité des solutions le long de l'horizon de planification. Les tests sont effectués sur des données réelles d'une centrale hydroélectrique comportant onze groupes T/A, indexés de 1 à 11, de cinq types différents. Hormis les groupes 9, 10 et 11, on suppose que tous les groupes sont arrêtés au début de la première période de l'horizon. En vue de tenir compte de l'aspect combinatoire du problème, on ne considère aucune priorité d'engagement ni sur les groupes T/A, ni sur leurs types. En outre, on suppose que la durée du minimum d'arrêt/minimum de fonctionnement (règle R1) est d'une heure. Quant aux coûts associés aux A/D des groupes, ils sont synthétisés dans un seul coût de démarrage comme suit : \$50 pour les groupes 1 à 5, \$150 pour les groupes 6 à 8 et \$300 pour les derniers groupes 9 à 11. En ce qui concerne la valorisation de l'énergie électrique produite par la centrale, on suppose le même prix pour toutes les périodes de l'horizon, soit $\$30/MW.h$.

En pratique, dans la planification des A/D des groupes d'une centrale hydroélectrique, on considère un horizon de 24 heures commençant souvent à 1 heure du matin. En outre, du fait de la variabilité de débit disponible à turbiner, la durée des périodes de l'horizon peut varier d'une période à l'autre. Ainsi, durant la nuit où la demande en énergie électrique est assez stable, on considère des pas de temps relativement grossiers allant, par exemple, de 3 à 5 heures. Par contre, durant les périodes de pointes (du jour ou du soir), l'horizon est souvent discrétisé en pas plus fins allant, par exemple, de 30 minutes à une heure. Le tableau 4.4 résume les données dynamiques les plus pertinentes du problème test. Dans ce tableau, on peut lire, pour chaque période de planification, le débit disponible à turbiner, la demande en réserve tournante et la durée (en heures) de la période en question.

Tableau 4.4 – Données dynamiques des périodes de l'horizon

Période	Consigne de débit Q_t m^3/s	Demande en réserve MW	Nombre d'heures
1	382	15	5
2	432	15	2
3	508	15	1
4	713	30	1
5	635	30	1
6	508	15	1
7	392	15	2
8	560	30	1
9	713	30	1
10	610	30	1
11	560	30	1
12	470	30	1
13	635	30	1
14	713	30	1
15	508	15	4

L'analyse des résultats du tableau 4.5 révèle certains aspects importants qui méritent d'être signalés. À l'exception de deux périodes 7 et 12 où la différence totale entre les deux algorithmes, en terme de l'énergie produite, est de l'ordre de 13 *MW.h* (soit l'équivalent de $390), les planifications de deux algorithmes génèrent la même énergie électrique. Cependant, la comparaison en termes de coûts d'A/D montre clairement les pertes significatives qui peuvent être engendrées par l'approche en temps réel de l'algorithme Super-ChOp. En effet, avec l'algorithme ArrDem, le coût total des A/D vaut $950, tandis que la planification du Super-ChOp génère un coût de l'ordre de $2150, soit l'équivalent d'une différence totale de 27 *MW.h*. En outre, il importe de signaler que certaines solutions, résultant du Super-ChOp, ne satisfont pas la contrainte de réserve tournante (période 12, par exemple).

Du point de vue pratique, la planification proposée par l'agorithme ArrDem semble plus réaliste en terme de politique d'engagement et de désengagement des groupes.

Certes, suivant la structure des coûts associés aux A/D, l'optimisation a tendance à minimiser les manoeuvres non justifiées (ou non significatives en terme de production) liées aux changements de statuts des groupes d'une période à l'autre de l'horizon de planification. À ce propos, il est intéressant de souligner que l'aspect de stabilité des solutions, discuté ci-dessus, constitue un élément important pour une implantation réussie, correspondant à une vision pratique des exploitants des centrales, des modèles d'optimisation (en temps réel) des centrales hydroélectriques.

Enfin, il est nécessaire de noter que le problème test est résolu (sur un PC Pentium II de 350 MHz) en un temps de calcul acceptable, soit 19.2 s. La discrétisation utilisée (pour les courbes de débit-puissance) est 2 m^3/s.

Tableau 4.5 – Comparaison des plans de production entre ArrDem et Super-ChOp

Algorithme	*ArrDem*			*Super-ChOp*		
Périodes	Groupes choisis	Production *MW.h*	Coût A/D $	Groupes choisis	Production *MW.h*	Coût A/D $
1	9 10 11	750	0	9 10 11	750	0
2	1 2 9 10 11	340	100	1 2 9 10 11	340	100
3	1 2 6 9 10 11	200	150	1 2 3 4 9 10 11	200	100
4	1 2 3 4 6 7 9 10 11	280	250	1 2 6 7 8 9 10 11	280	450
5	1 2 6 7 9 10 11	250	0	1 2 3 4 5 6 9 10 11	250	150
6	1 2 6 7 9 10	200	0	1 2 3 4 9 10 11	200	0
7	1 2 6 7 9 10	300	0	9 10 11	308	0
8	1 2 6 7 8 9 10	220	150	1 2 3 6 9 10 11	220	300
9	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	280	150	1 2 6 7 8 9 10 11	280	300
10	1 2 3 6 7 8 9 10	240	0	1 2 6 7 9 10 11	240	0
11	1 2 6 7 8 9 10	220	0	1 2 3 6 9 10 11	220	50
12	1 2 6 7 8 9 10	180	0	1 2 9 10 11	185	0
13	1 2 3 6 7 8 9 10	250	50	1 2 3 4 5 6 9 10 11	250	300
14	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	280	100	1 2 6 7 8 9 10 11	280	300
15	1 2 6 7 9 10	800	0	1 2 3 4 9 10 11	800	100

Chapitre 5

Gestion à court terme d'une rivière : modélisation

5.1 Position du problème

La gestion à court terme d'une rivière (GestRiv, en abrégé) consiste à allouer de manière optimale l'énergie potentielle (l'eau stockée) entre les réservoirs de la rivière, et ce, en respectant un grand nombre de contraintes liées à cette gestion. Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse principalement au cas où la rivière est aménagée pour la production de la puissance électrique. C'est le cas rencontré chez plusieurs compagnies d'électricité comme Hydro-Québec, Électricité de France et TVA (Tennesse Valley Authority). Dans ce contexte, la rivière se présente comme une disposition en cascade (ou en réseau) de plusieurs réservoirs situés en amont des centrales hydroélectriques et dont la gestion à court terme couvre généralement un horizon allant d'une journée (24 heures) à une semaine (168 heures). La Figure 5.1 illustre un exemple d'aménagement avec deux réservoirs disposés en cascade.

L'aménagement hydroélectrique d'une rivière consiste en la construction d'un certain nombre d'installations et ouvrages hydrauliques (ou hydroélectriques) qui peuvent être classés en trois grandes catégories :

1. des installations de retenue pour stocker les eaux de la rivière comme, par exemple, les barrages et les digues qui ferment des vallées étendues, constituant ainsi des réservoirs d'emmagasinement des eaux ;

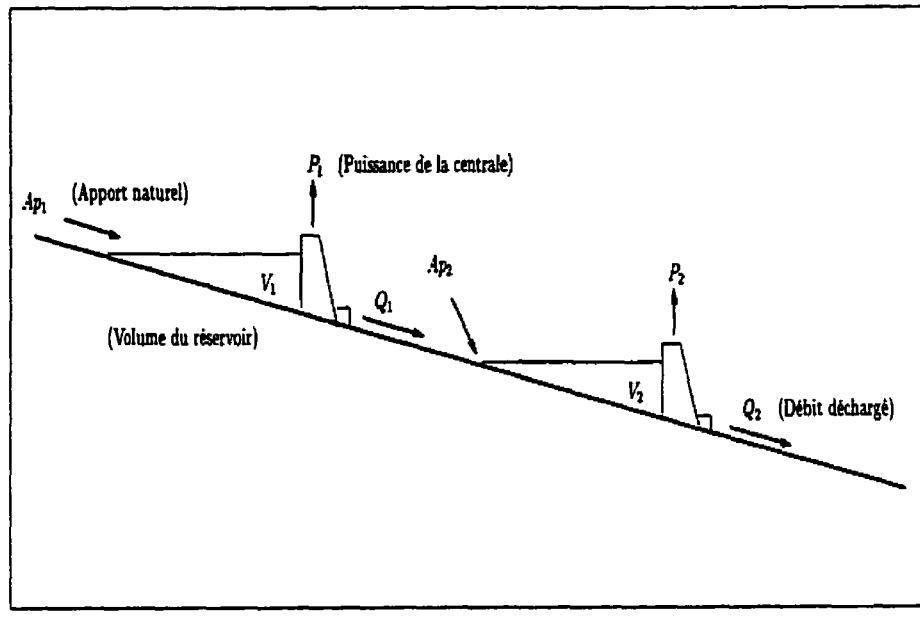

Figure 5.1 – Exemple d'aménagement avec deux réservoirs

2. des centrales hydroélectriques aménagées aux pieds des réservoirs. Ces centrales servent à transformer de l'énergie potentielle hydraulique stockée à une hauteur de chute donnée en une énergie de puissance électrique ;
3. des ouvrages de régulation ou d'évacuation des débits. Les évacuateurs sont utilisés pour restituer dans le cours naturel de la rivière les apports excédentaires qui pénètrent dans le réservoir, surtout lors des périodes de crue. Les ouvrages régulateurs assurent, par contre, le transfert des eaux, de façon relativement continue, du réservoir vers les autres tronçons aménagés de la rivière.

Par définition, un tronçon est une portion ou un segment de rivière qui s'intercale entre deux réservoirs consécutifs du système hydrique. Il peut être également défini comme une portion entrant ou sortant du système. Généralement les débits d'un tronçon entrant représentent des apports naturels en eaux et, par suite, peuvent être considérés comme constants pour des périodes de courte durée.

Comme on a déjà mentionné au chapitre 4, l'intégration complète de la gestion de-

taillée des centrales dans la gestion à court terme d'une rivière est une tâche très complexe. C'est pourquoi une approche hiérarchique est souvent adoptée. Dans une première étape, on résout le problème GestRiv où l'on résume la production d'une centrale par une courbe globale de débit-puissance.[1] Ce premier cycle de résolution est effectué en négligeant certaines contraintes difficiles liées principalement à l'optimisation à l'intérieur des centrales (l'exemple le plus pertinent de cette situation est celui de la planification des arrêts-démarrages). Les résultats du premier cycle d'optimisation, tels que les débits à turbiner et les hauteurs de chutes des centrales (tout le long de l'horizon de planification) sont ensuites utilisés comme données (ou paramètres) dans le problème ArrDem (voir chapitre 4).

Pour pouvoir résoudre le problème GestRiv, il est nécessaire d'abord de modéliser (correctement ou, au moins, de manière approximative) les éléments les plus pertinents de la réalité physique du problème. Ainsi, dans ce chapitre, on se propose de dresser un modèle mathématique assez général qui tient compte, d'une part, de la réalité physique des ouvrages hydrauliques (ou hydroélectriques) et, d'autre part, des règles de gestion ou d'exploitation qui les régissent.

Parmi les originalités (de modélisation) du présent chapitre, on cite la modélisation appropriée de la production globale des centrales hydroélectriques et la modélisation de certains aspects de stabilité (ou régularité) des solutions. En ce qui concerne le premier point, la production de chaque centrale est résumée par une courbe de débit-puissance qui tient compte de la variation dynamique de hauteur de chute. Adoptant une approche progressive le long de cette thèse, cette hauteur de chute est considérée dans le modèle de base comme fonction du volume du réservoir amont. Toutefois, une définition plus générale de cette fonction de hauteur est proposée parmi les extensions possibles du modèle de base. Cette fonction est souvent considérée

[1] Cette courbe est obtenue par résolution du problème paramétrique du chargement optimal.

(dans la littérature) par rapport à une seule hauteur de chute, appelée hauteur de référence. En outre, les rares articles qui tiennent compte de cette variation de hauteur l'ont traitée comme un terme linéaire dans la fonction objectif (comme Brännlund et al. [9]) ou de manière heuristique en itérant sur la hauteur de chute (comme Habibollahzadeh et Bubenko [23]). Quant au volet de régularité des solutions, il concerne la stabilisation, d'une part, des engagements et désengagements des groupes à l'intérieur des centrales et, d'autre part, des fluctuations des débits de tronçons durant certaines périodes de l'horizon de planification. D'autres originalités, liées à la modélisation des écoulements aussi bien dans les tronçons que dans les déversoirs, sont aussi proposées comme extensions à la fin du chapitre.

Ce chapitre est organisé en quatre sections. Dans la section 2, on présente un modèle de base pour la gestion à court terme d'une rivière : hypothèses, notations, variables de décisions, fonction objectif et contraintes du problème. Certaines propriétés mathématiques de ce modèle sont discutées dans la section 3. Enfin, des extensions possibles du modèle de base sont passées en revue dans la section 4.

5.2 Modèle de Base

5.2.1 Hypothèses

H1 : Toutes les périodes de l'horizon ont la même durée ; et pour fixer les idées, on suppose que cette durée correspond à une heure.

H2 : Dans le but de faciliter l'exposé du modèle de base, on suppose que le système hydrique est constitué de plusieurs installations disposées en cascade et reliées par des tronçons relevant de la même rivière (voir figure 5.1). Chaque installation est un ensemble de trois éléments, à savoir : un réservoir de retenue, un déversoir de régulation ou d'évacuation et enfin une centrale hydroélectrique (dans le cas où

cette dernière composante est absente, il suffit de considérer une centrale fictive dont le débit turbiné et la puissance générée sont nuls par défaut).

H3 : Les écoulements sont considérés comme négligeables à l'intérieur des installations hydrauliques (ou hydroélectriques). Le long des tronçons, par contre, on utilise l'hypothèse simplificatrice qui consiste à modéliser les écoulements en termes de délais fixes. Ainsi, en adoptant la convention voulant que chaque pas de l'horizon de court terme représente une période d'une heure, le délai d'écoulement est un entier positif ou nul reflétant le nombre d'heures nécessaires pour transporter une masse d'eau d'un réservoir à l'autre.

H4 : Dans sa version déterministe, le modèle suppose que tous les apports naturels sont prédéterminés et que le prix de vente et la demande d'énergie électrique sont connus à priori. En outre, les équipements principaux des installations sont supposés indéfectibles, y compris les groupes de turbines-alternateurs et le réseau électrique de transport.

H5 : On suppose que le bilan hydraulique final du système dépend simplement du vecteur des volumes finaux des réservoirs à la fin de l'horizon.

5.2.2 Notations

Soit

t : indice générique d'une période (une heure),
i : indice générique d'une installation (centrale, réservoir ou déversoir).

Constantes

N :	nombre d'installations,
T :	nombre de périodes,
L :	ensemble des zones de demande en énergie électrique,
P_t^ℓ :	demande minimale en énergie électrique de la zone ℓ à la période t (en $MW.h$),
I_ℓ :	ensemble des centrales qui alimentent en puissance la zone ℓ,
Ap_{it} :	apports naturels au réservoir i à l'heure t (en Hm^3),
δ_i :	délai fixe d'écoulement dans le tronçon qui relie les deux réservoirs i et $i-1$ (entier positif ou nul),
$\underline{V}_{it}, \overline{V}_{it}$:	borne inférieure et supérieure du volume emmagasiné dans le réservoir i (en hm^3),
$\underline{QT}_{it}, \overline{QT}_{it}$:	borne inférieure et supérieure du volume turbiné par la centrale i (en hm^3),
$\underline{QD}_{it}, \overline{QD}_{it}$:	borne inférieure et supérieure du volume déversé par le déversoir i (en hm^3),
$\underline{QL}_{it}, \overline{QL}_{it}$:	borne inférieure et supérieure du débit total (volume turbiné et déversé) sortant de l'installation i (centrale et déversoir),
ΔV_{it} :	variation maximale du volume de réservoir i (en hm^3),
ΔQT_{it} :	variation maximale du volume turbiné par la centrale i entre deux périodes adjacentes t et $t-1$ (en hm^3),
ΔQD_{it} :	variation maximale du volume déversé par le déversoir i entre deux périodes adjacentes t et $t-1$ (en hm^3),
H_i^{ref} :	hauteur de chute de référence de la centrale i (en m),
H_i^d :	niveau aval de référence de la centrale i (en m),
$\bar{Q}_i^{ref}$:	volume maximum qui peut être turbiné par la centrale i à la hauteur de chute de référence H_i^{ref} (en hm^3),
π_t :	prix sur le marché d'un mégawatt-heure (en $\$/MW.h$),
$\hat{\pi}$:	prix moyen estimé de l'énergie potentielle du bilan hydraulique à la fin de l'horizon (en $\$/MW.h$).

Variables de décision

V_{it} : volume du réservoir i à la fin de la période t (en $hm^3 = 10^6 m^3$),

QT_{it} : volume turbiné par la centrale i pendant la période t, (en hm^3),

QD_{it} : volume déversé par le déversoir i pendant la période t (en hm^3).

Fonctions

$H_i^u(\cdot)$: niveau amont de la centrale i en fonction du volume de réservoir adjacent i (en m),

$P_i^{ref}(\cdot)$: courbe optimale de débit-puissance à la hauteur de chute de référence H_i^{ref}. Cette fonction (définie sur le domaine $[0, \bar{Q}^{ref}]$) donne, pour chaque volume turbiné, l'énergie produite (en $MW.h$) par la centrale i,

$\Phi_i(\cdot)$: fonction qui donne le rapport entre la hauteur de chute au temps t et celle de référence. Cette fonction est définie par :

$$\Phi_i(V_{it}) = \frac{H_i^u(V_{it}) - H_i^d}{H_i^{ref}} \tag{5.1}$$

$B^{hyd}(\cdot)$: énergie potentielle (en $MW.h$) du bilan hydraulique final étant donnés les volumes finaux des réservoirs $V_T \stackrel{\text{def}}{=} (V_{1T}, \cdots, V_{NT})$ à la fin de l'horizon T.

5.2.3 Fonction objetctif

La définition de la fonction à optimiser est inspirée en grande partie des pratiques usuelles des producteurs d'électricité. Souvent, cet objectif peut se ramener au cas conventionnel qui consiste à maximiser la valeur monétaire de la puissance générée, ainsi que la valeur de l'eau stockée dans les réservoirs (et dans les tronçons) à la fin de l'horizon (voir Piekutowski et al. [74], Nilsson et Sjevgren [68]). L'avantage de cette

approche conventionnelle réside dans la possibilité de l'appliquer à tout système hydroélectrique, y compris ceux qui comportent des réservoirs pouvant déverser sur des tronçons de plusieurs rivières. En outre, l'évaluation monétaire du bilan hydraulique final se combine de façon naturelle au prix de vente ou d'achat de la puissance électrique. Son désavantage réside, par contre, dans la difficulté de modéliser de manière fiable et précise la valeur de l'eau stockée, tant dans les réservoirs que dans les tronçons à la fin de l'horizon. Typiquement dans ce cas, la fonction objectif est construite à partir des informations fournies par un modèle plus global (de moyen terme par exemple) ou à partir des données historiques ou de l'expérience de l'exploitant.

Une autre définition de l'objectif est proposée par Lafond [39] et Robitaille et al. [78] ; elle consiste à minimiser, sur tout l'horizon, les principales pertes de production des centrales par rapport à une exploitation "idéale" de chaque centrale vue séparément. Cette exploitation "idéale" peut être obtenue, par exemple, en supposant que les centrales produisent à des hauteurs de chute maximales où les déversements sont pénalisés par des pertes d'énergie potentielle et que, pour un nombre fixé de groupes, les niveaux de production de ces derniers correspondent à leur meilleur rendement moyen. Ce rendement moyen est donné par le meilleur rapport (P/Q) dans la courbe globale de débit-puissance des groupes ainsi engagés.

Cette dernière façon de définir l'objectif a l'avantage de correspondre à une vision immédiate de l'utilisation de l'eau en se rapprochant autant que possible d'une meilleure exploitation de chaque centrale. Toutefois, cette approche présente certaines limitations lorsque, par exemple, un réservoir débouche sur deux ou plusieurs tronçons ne relevant pas de la même rivière ou dans le cas de la présence de deux ou plusieurs centrales parallèles. En effet, la minimisation des pertes de production (dans ce cas) ne suffit pas nécessairement à assurer un meilleur partage des débits entre les différentes centrales hydroélectriques du système.

On peut donner une illustration simple de cette situation, en considérant le cas de

deux centrales parallèles (aménagées sur un même réservoir amont) caractérisées par deux niveaux avals différents. Ainsi, les deux centrales en question turbinent à deux hauteurs de chute différentes. Devant une telle situation (et qu'une partie de l'objectif consiste à minimiser les pertes de production dues au turbinage à une hauteur de chute non maximale), l'optimisation aurait tendance à diminuer la production de la centrale dont la hauteur de chute est la plus écartée par rapport à sa hauteur maximale. Or, on peut à l'aide d'un exemple simple montrer que cette politique n'est pas toujours optimale. En effet, considérons le cas où les deux centrales ont le même rendement (noté η). Si on note $H1$ et $H2$ les hauteurs de chute de ces deux centrales parallèles ($H1$ étant la hauteur de chute la plus écartée par rapport à sa hauteur maximale et $H2$ coïncidant avec sa hauteur maximale) alors, il suffit de supposer que $H1 > H2$ pour se convaincre qu'on peut produire, avec un débit Q, plus de puissance si on le turbine dans la centrale 1 (et non pas dans celle qui minimise les pertes dues à la production à une hauteur non maximale) puisqu'on a : $P1 = \eta Q H1 > P2 = \eta Q H2$.

Pour cette raison, dans le cadre de cette thèse, on opte pour l'objectif conventionnel, c'est-à-dire la maximisation de la valeur (monétaire) totale de l'énergie produite et celle de l'énergie potentielle du système disponible à la fin de l'horizon. Cette énergie potentielle est fonction des volumes stockés dans les réservoirs et ceux en transit dans les tronçons à la fin de l'horizon.

Le bilan hydraulique final du système à la fin de l'horizon est synthétisé par la fonction (d'énergie potentielle) $B^{hyd}(\cdot)$. Pour alléger la fonction objectif, on a supposé (hypothèse **H5**) que cette fonction du bilan hydraulique dépend simplement des volumes finaux dans les réservoirs à la fin de l'horizon (ces volumes sont notés par la forme vectorielle $V_T = (V_{1T}, \cdots, V_{NT})$). On note cependant qu'on peut aisément incorporer dans ce bilan hydraulique l'ensemble des volumes en transit dans les tronçons à la

fin de l'horizon. Ainsi, l'objectif consiste donc à maximiser la fonction suivante :

$$\left(\sum_{t=1}^{T}\pi_t\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(V_{it})^{3/2}\,P_i^{ref}\left(\Phi_i(V_{it})^{-1/2}QT_{it}\right)\right)\;+\;\hat{\pi}B^{hyd}(V_T).$$

5.2.4 Contraintes du problème

À l'exception des tronçons entrant au système hydrique qui sont à débits prédéterminés, les débits dans tous les autres tronçons peuvent être contrôlés par l'ajustement des débits déchargés par les réservoirs. Dans le cas où un réservoir est doté d'une ou plusieurs centrales hydroélectriques, la quantité d'eau déchargée se scinde en une partie turbinée par ces centrales et en une autre partie déversée par les ouvrages de déversement (ou déversoirs). Il en résulte que les débits peuvent être utilisés comme variables de décision dans les modèles liés à la gestion à court terme d'une rivière.

L'exploitation des aménagements hydroélectriques doit tenir compte des autres usagers de l'eau (industriels, agriculteurs, collectivités, pêcheurs, promeneurs, etc) et de l'ensemble des contraintes qui en résultent. En outre, cette utilisation multiple des eaux est gouvernée par des lois en matière du respect de l'environnement qui visent à protéger la vie aquatique des rivières.

A) Conservation de l'eau

Dans les équations de conservation de l'eau, la variation du volume d'un réservoir est définie par la différence entre la quantité d'eau (provenant des réservoirs amont) qui entre dans ce réservoir et celle qui sort vers les autres réservoirs situés en aval. De telles équations ne sont réalistes que si les délais des écoulements y sont pris en compte correctement ou, du moins, de manière approximative. On définit le délai

d'écoulement comme le temps nécessaire pour qu'une masse d'eau transite dans un tronçon à partir du réservoir source (origine) jusqu'au réservoir de destination. Deux cas extrêmes doivent être distingués dans la modélisation des écoulements. Ainsi, dans le cas des réservoirs de très grande capacité, une modélisation grossière et approximative affecte peu la gestion du système. Pour les petits réservoirs, par contre, la précision dans la modélisation des écoulements est assez significative. La plupart des modèles utilisés jusqu'à présent considèrent des délais fixes pour les écoulements. Dans certains modèles comme celui présenté par Lafond [39], ce délai fixe est exprimé en multiples de la plus petite durée des périodes de l'horizon. C'est l'approche qu'on choisit dans le cadre du modèle de base proposé ici.

Ainsi, en adoptant les notations définies dans la section précédente, on a alors pour chaque période t le type de contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} V_{1t} &= V_{1t-1} + Ap_{1t} - (QT_{1t} + QD_{1t}), \\ V_{it} &= V_{it-1} + Ap_{it} + (QT_{i-1,t-\delta_i} + QD_{i-1,t-\delta_i}) - (QT_{it} + QD_{it}), \quad 2 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

Ces dernières contraintes de conservation de l'eau peuvent être schématisées par un réseau espace-temps $G(\mathcal{N}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ multi-flots où :

- chaque noeud $v_{it} \in \mathcal{N}$ représente une installation (réservoir, centrale et déversoir) i au temps t,
- chaque arc $(v_{it-1}, v_{it}) \in \mathcal{A}_1$ représente la transition du volume (du réservoir i) de l'état V_{it-1} à l'état V_{it},
- chaque arc multi-flots $(v_{i-1,t-\delta_i}, v_{it}) \in \mathcal{A}_2$ représente les flots (en volume turbiné ou déversé) qui transitent du réservoir amont $i-1$ au réservoir aval i entre les deux périodes $t-\delta_i$ et t.

La figure 5.2 montre un exemple d'un système hydroélectrique dont le délai d'écoulement est d'une heure pour chaque tronçon du système.

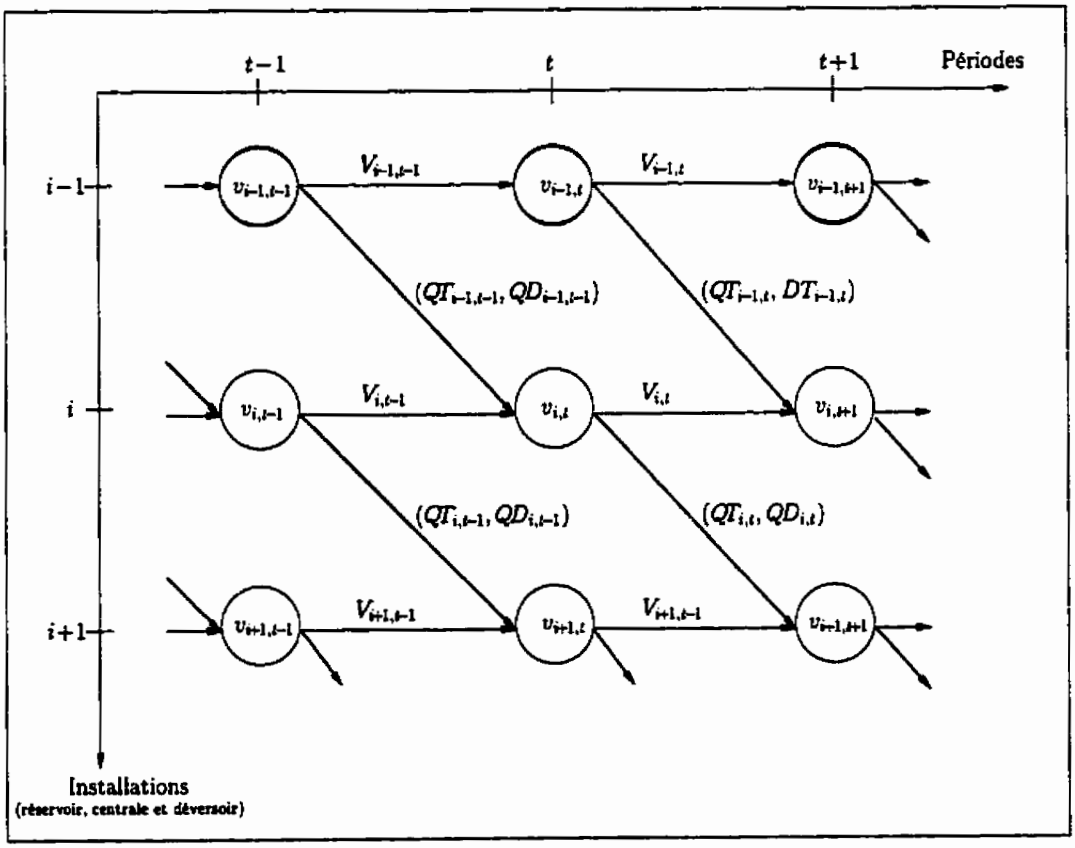

Figure 5.2 – Réseau espace-temps multi-flots d'un système hydroélectrique (en cascade) avec un délai d'écoulement d'une heure

B) Contraintes de bornes

Plusieurs contraintes peuvent être satisfaites, y compris celle du respect de l'environnement, en imposant simplement un débit minimum sur chaque tronçon. Le maintien d'un débit minimum a pour but, d'une part, de conserver le taux d'oxygénation et de surchauffement dans les limites des normes environnementales et, d'autre part, de maintenir un niveau d'eau acceptable pour la navigation fluviale ou pour des fins d'irrigation (par exemple). De la même façon, on peut imposer des bornes supérieures sur les débits pour permettre par exemple la prise en compte des capacités des installations et des tronçons.

En outre, les aménagements hydrauliques aident également à faire face à des situations climatiques exceptionnelles. Dans ce sens, les réservoirs doivent pouvoir absorber les surplus imprévus d'apports naturels en vue d'éviter les inondations. Une façon pratique pour résoudre ce problème consiste à imposer des bornes supérieures sur les volumes des réservoirs. En outre, la gestion des réservoirs devrait prévenir toute pénurie d'eau, surtout pendant les périodes de sécheresse prolongée où un besoin minimum de plusieurs activités doit être assuré. Encore une fois, on peut imposer des restrictions de la même façon que précédemment, mais cette fois-ci par des bornes inférieures sur le volume des réservoirs.

Formellement, on a les contraintes de bornes suivantes (pour $t = 1, \cdots, T$ et $i = 1, \cdots, N$) :

$$\begin{aligned}
&\underline{QL}_{it} \leq QT_{it} + QD_{it} \leq \overline{QL}_{it}, \\
&\underline{QT}_{it} \leq QT_{it} \leq \overline{QT}_{it}, \\
&\underline{QD}_{it} \leq QD_{it} \leq \overline{QT}_{it}, \\
&\underline{V}_{it} \leq V_{it} \leq \overline{V}_{it}.
\end{aligned}$$

Remarque: Il est important de noter que la gestion à court terme d'une rivière s'insère dans le cadre d'une planification plus globale s'étalant, par exemple, sur

plusieurs semaines. Par conséquent, les volumes des réservoirs à la fin de l'horizon devraient dans une certaine mesure coïncider avec des décisions prises au niveau de cette programmation à horizon plus étendue. C'est ainsi qu'on définit des conditions finales qu'il faudrait restaurer à la fin de l'horizon. Typiquement, on impose à la dernière période de l'horizon des bornes très serrées sur les niveaux ou, de manière équivalente, sur les volumes des réservoirs.

C) Contraintes de variations

Des variations significatives des débits ou des niveaux entre deux périodes adjacentes peuvent causer des effets désagréables, aussi bien dans les tronçons que pour l'efficacité des centrales. En effet, les variations importantes de débit dans les tronçons peuvent engendrer des vagues et une instabilité du niveau des eaux de la rivière, phénomène qui peut être nuisible pour d'autres activités partageant la même ressource. Quant à la gestion des centrales, les variations importantes des niveaux des réservoirs et des débits turbinés par les centrales se répercutent, de manière directe ou indirecte, tant sur la politique d'arrêt/démarrage que sur le balancement optimal des groupes. En fait, toute variation significative du débit turbiné peut entraîner des arrêts ou des démarrages des groupes ou, du moins, des changements dans leurs niveaux de production, effet fort indésirable pour la plupart des producteurs d'électricité. En conséquence, des limites sont imposées tant sur les débits sortant des installations (turbinage des centrales et déversement des déversoirs) que sur les variations des volumes des réservoirs. On a alors les contraintes de variations suivantes (pour $t = 1, \cdots, T$ et $i = 1, \cdots, N$) :

$$
\begin{aligned}
&-\Delta V_{it} \leq V_{it} - V_{it-1} \leq \Delta V_{it}, \\
&-\Delta QT_{it} \leq QT_{it} - QT_{it-1} \leq \Delta QT_{it}, \\
&-\Delta QD_{it} \leq QD_{it} - QD_{it-1} \leq \Delta QD_{it}.
\end{aligned}
$$

D) Demande minimale en énergie électrique

À chaque période de l'horizon, les centrales du système hydroélectrique devraient assurer pour chaque zone (désservie par le système) une demande minimale en énergie électrique. Ainsi, en se servant des règles de similitude par rapport à la hauteur de chute (voir chapitre 3), les contraintes en demande minimale en énergie électrique sont formulées comme suit :

$$\sum_{i \in I_\ell} \Phi_i(V_{it})^{3/2} P_i^{ref}\left(\Phi_i(V_{it})^{-1/2} QT_{it}\right) \geq P_t^\ell, \qquad t = 1, \cdots, T, \ \ell \in L,$$

où le terme $\Phi_i(V_{it})^{-1/2} QT_{it}$ doit être défini à l'intérieur du domaine réalisable de la fonction $P^{ref}(\cdot)$, à savoir :

$$0 \leq \Phi_i(V_{it})^{-1/2} QT_{it} \leq \bar{Q}_i^{ref}.$$

ou encore :

$$\bar{Q}_i^{ref}\, \Phi_i(V_{it})^{1/2} - QT_{it} \geq 0 \qquad (QT_{it} \geq 0).$$

Remarque: Dans le cas où la production hydroélectrique est couplée avec la production thermique, l'objectif est défini dans plusieurs articles par la minimisation des coûts de l'opération des centrales thermiques. Bien entendu, cette minimisation des coûts peut être combinée avec la valeur monétaire du bilan hydraulique obtenu à la fin de l'horizon (voir Rux [83], Magee et al. [54]).

5.2.5 Résumé du modèle de base

En adoptant les notations définies précédemment, le modèle de base de gestion à court terme, noté (PCT), est formulé comme suit :

Modèle (PCT) :

$$Z^{PCT} = \max\left(\sum_{t=1}^{T}\pi_t\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(V_{it})^{3/2}\,P_i^{ref}\left(\Phi_i(V_{it})^{-1/2}QT_{it}\right)\right) + \hat{\pi}B^{hyd}(V_T)$$

s.à., pour $t = 1,\dots T$:

$$\sum_{i\in I_\ell}\Phi_i(V_{it})^{3/2}\,P_i^{ref}\left(\Phi_i(V_{it})^{-1/2}QT_{it}\right) \geq P_t^{\ell}, \qquad \ell \in L, \tag{5.2}$$

$$\bar{Q}_i^{ref}\,\Phi_i(V_{it})^{1/2} - QT_{it} \geq 0, \quad i = 1,\cdots,N, \tag{5.3}$$

$$(V_{1t} + QT_{1t} + QD_{1t}) - V_{1t-1} = Ap_{1t}, \tag{5.4}$$

(PCT)

$$(V_{it} + QT_{it} + QD_{it}) - (V_{it-1} + QT_{i-1,t-\delta_i} + QD_{i-1,t-\delta_i}) = Ap_{it}, \quad 2 \leq i \leq N, \tag{5.5}$$

pour $t = 1,\dots T,\ i = 1,\cdots,N$:

$$-\Delta V_{it} \leq V_{it} - V_{it-1} \leq \Delta V_{it}, \tag{5.6}$$

$$-\Delta QT_{it} \leq QT_{it} - QT_{it-1} \leq \Delta QT_{it}, \tag{5.7}$$

$$-\Delta QD_{it} \leq QD_{it} - QD_{it-1} \leq \Delta QD_{it}, \tag{5.8}$$

$$\underline{QL}_{it} \leq QT_{it} + QD_{it} \leq \overline{QL}_{it}, \tag{5.9}$$

$$\underline{V}_{it} \leq V_{it} \leq \overline{V}_{it}, \tag{5.10}$$

$$\underline{QT}_{it} \leq QT_{it} \leq \overline{QT}_{it}, \tag{5.11}$$

$$\underline{QD}_{it} \leq QD_{it} \leq \overline{QT}_{it}. \tag{5.12}$$

Remarque: Il est important de noter que le modèle (PCT) présente une originalité particulière par rapport aux modèles publiés dans la litérature. En effet, la plupart de ces modèles n'optimisent pas par rapport à la hauteur de chute en tenant compte, de manière précise, de l'effet de la variation de hauteur tant sur le débit turbiné que sur la puissance générée.

5.3 Propriétés du modèle de base

Le modèle (PCT) est un problème de programmation mathématique non-linéaire, non-différentiable et non-convexe. La principale source de non-linéarité provient des termes $\Phi_i(V_{it})^{-1/2}QT_{it}$ et $\Phi_i(V_{it})^{3/2}\, P_i^{ref}\left(\Phi_i(V_{it})^{-1/2}QT_{it}\right)$. On rappelle que la fonction $\Phi_i(\cdot)$ est définie par :

$$\Phi_i(V_{it}) = \frac{H_i^u(V_{it}) - H_i^d}{H_i^{ref}} \tag{5.13}$$

où $V_{it} \mapsto H_i^u(V_{it})$ est la fonction d'emmagasinement qui donne le niveau (en m) en fonction du volume emmagasiné dans le réservoir i. Cette fonction est non-linéaire, continûment différentiable et pas nécessairement concave. Une autre source de non-linéarité peut également provenir de la fonction du bilan hydraulique $B^{hyd}(\cdot)$. Dans certains cas, cependant, cette fonction peut prendre la forme simple d'une fonction affine.

Par ailleurs, la principale source de non-différentiabilité du modèle provient de la fonction $P_i^{ref}(\cdot)$. Cette fonction est par sa construction concave et linéaire par morceaux. En effet, la courbe de production $P_i^{ref}(\cdot)$ est générée (de manière paramétrique) par le module de chargement optimal à la hauteur de chute de référence H_i^{ref}. En plus du respect des contraintes d'opérations des groupes d'une centrale (bornes sur les débits/puissances, zones interdites, etc.), cette courbe doit intégrer également les pertes énergétiques au niveau des turbines de la centrale, à savoir (voir chapitre 2 et 3) : les pertes de charge (dans les canaux et conduites) et les pertes de niveau au tarage de la centrale (dues au total du débit turbiné par les groupes de la centrale). On obtient alors une courbe (sous forme d'un nuage de points) que l'on approxime par une fonction (croissante) concave et linéaire par morceaux.

Dans ce type de problème, le choix des points de cassure (dans l'approximation linéaire par morceaux de la fonction $P_i^{ref}(\cdot)$) est crucial. En effet, certains points de

la courbe jouissent d'une importance très particulière du point de vue de rendement des groupes aussi bien que sur le plan de leur opération (usure, cavitation, etc.). Selon le jargon des hydrauliciens, ces points sont appelés "points de rendement optimal". Chaque point (correspondant à un nombre fixé de groupes engagé) donne le maximum d'énergie qu'on peut produire par un hm^3 turbiné. Autrement dit, si on suppose que la courbe (discrétisée) de la centrale i est donnée par l'ensemble des points (Q_i^j, P_i^j) (pour $j = 1, \cdots, \bar{j}$ où $\bar{j}$ est le nombre de points de discrétisation de cette courbe), alors le point de rendement optimal (correspondant à un nombre de groupes engagé, noté n_i) est celui qui maximise le rapport suivant :

$$\left\{ \frac{P_i^j}{Q_i^j} \ : \ (Q_i^j, P_i^j) \text{ correspond à l'engagement de } n_i \text{ groupes de la centrale } i \right\}.$$

Du point de vue opérationnel, ces points correspondent aux débits (ou puissances) de tracé pour lesquels les groupes (turbines-alternateurs) sont technologiquement conçus pour fonctionner de manière "idéale". Il en résulte alors que le chargement des groupes à ces points de rendement optimal engendre le minimum de frottement mécanique, de cavitation, d'usure et assure une durée de vie plus prolongée aux turbines-alternateurs. C'est ainsi que les points de cassure de l'approximation linéaire par morceaux de la fonction $P_i^{ref}(\cdot)$ sont donnés par l'ensemble des points suivants :

- les deux points (minimum et maximum de la fonction) $(0,0)$ et $(\bar{Q}_i^{ref}, P_i^{ref}(\bar{Q}_i^{ref}))$,
- les $\bar{n}_i$ points de rendement optimal $(\bar{Q}_i^{n_i}, \bar{P}_i^{n_i})$ (pour $n_i = 1, \cdots, \bar{n}_i$),

où $\bar{n}_i$ représente le nombre de groupes de la centrale i et $(\bar{Q}_i^{n_i}, \bar{P}_i^{n_i})$ le point de rendement optimal correspondant à n_i groupes engagés de la centrale i. La figure 5.3 montre la construction de la fonction $P_i^{ref}(\cdot)$ à la hauteur de référence H_i^{ref} pour une centrale avec deux groupes.

On note que la similitude hydraulique par rapport au débit turbiné est donnée par la relation suivante :

$$QT_{it}(H_i(V_{it})) = \Phi_i(V_{it})^{1/2} \, QT_{it}(H_i^{ref}). \tag{5.14}$$

Il en résulte alors que les points de cassure de l'approximation linéaire par morceaux (à la hauteur de chute de référence H_i^{ref}) se déplacent en fonction de la hauteur de chute. On note que, dans ce cas (avec l'approximation linéaire par morceaux), on a l'égalité suivante :

$$\Phi_i(V_{it})^{3/2}\, P_i^{ref}\left(\Phi_i(V_{it})^{-1/2} QT_{it}\right) = \Phi_i(V_{it})\; P_i^{ref}\left(QT_{it}\right) \tag{5.15}$$

où la variable de débit QT_{it} (à la hauteur de chute $H_i(V_{it})$) est définie à l'intérieur de segments obtenus par application de la relation (5.14) aussi bien sur les points de rendement optimal que sur le point limite de debit maximum (bien entendu, ces derniers points sont tous à la hauteur de référence H_i^{ref}). la figure 5.4 montre le déplacement de ces points en fonction de la hauteur de chute.

5.4 Extensions du modèle de base

5.4.1 Écoulement dynamique dans les tronçons

L'exactitude du bilan hydraulique d'un réservoir dépend étroitement du degré de précision du modèle d'écoulement dans les tronçons débouchant à ce réservoir. La plupart des modèles traitant du sujet de la gestion à court terme d'une rivière proposent un modèle d'écoulement à délais fixes. Dans ce cas, le volume d'eau (turbiné et déversé) quittant le site amont i–1 est supposé arriver (en un seul bloc) au site aval i après un délai fixe δ_i. Le principal avantage de ce modèle d'écoulement (simplifié) est son insertion dans le modèle d'optimisation (PCT) sans présenter de complications significatives quant à sa résolution. Toutefois, il ne permet pas de représenter la dynamique réelle des écoulements dans les segments de la rivière. En effet, les débits sortant du site amont sont propagés dans les tronçons (situés en aval) sous forme de vagues. La vitesse de propagation de ces vagues dépend de l'état actuel

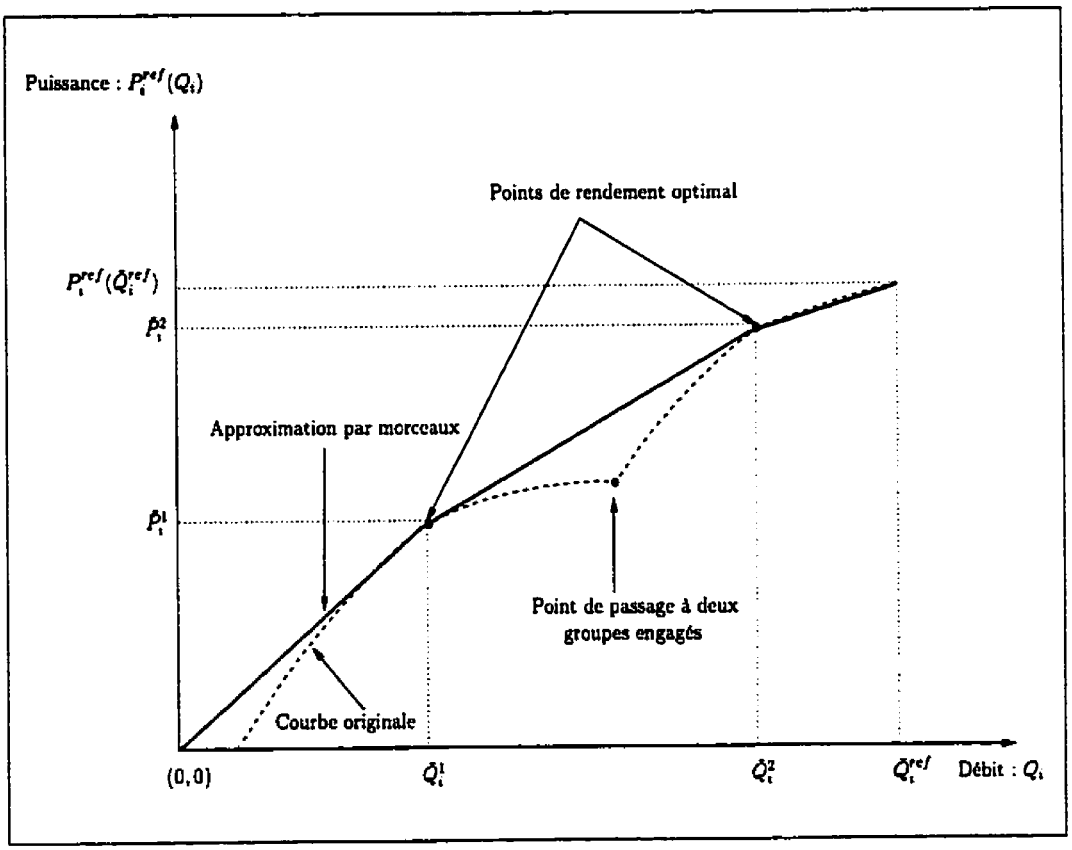

Figure 5.3 – Exemple de construction de la fonction de débit-puissance (linéaire par morceaux) dans le cas où la centrale i comprend deux groupes

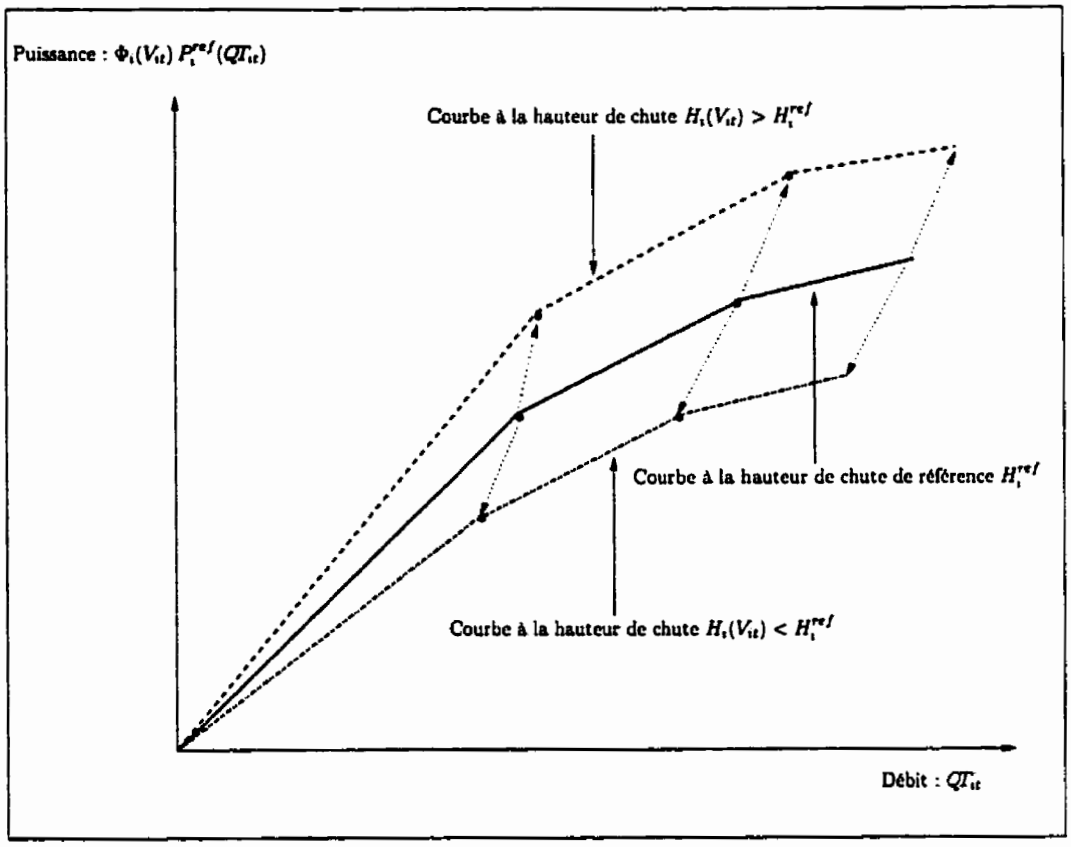

Figure 5.4 – Déplacement des points de rendement optimal en fonction de la hauteur de chute

(global) de chaque tronçon du système. Cette dépendance dynamique (par rapport à l'état des tronçons) peut être résumée dans un modèle d'écoulement plus précis, généralement non-linéaire. L'incorporation de ce modèle (sous forme d'équations non-linéaires) dans le modèle d'optimisation (PCT) rend, souvent, sa résolution plus difficile à cause de la forte non-linéarité et non-convexité du problème qui en résulte.

En pratique, l'écoulement réel dans un segment de rivière est approché par un modèle linéaire simulant la propagation des volumes en transit entre deux sites adjacents. En vue de rendre ce modèle linéaire plus réaliste, cette approximation est paramétrisée par plage de débits donnés (réalisables) du tronçon. Dans ce sens, pour chaque plage de débits, un ensemble de paramètres (ou coefficients, notés θ_{it}) sont estimés donnant chacun la portion du volume qui arrive au site aval i au temps t. Ainsi, si on suppose que le volume total (déchargé par le site amont $i-1$ à la période t) nécessite un délai total d'écoulement δ_i avant d'être acheminé (au complet) au site aval i, alors on peut exprimer, à chaque période t, le volume total arrivé au site aval i par la fonction suivante :

$$\Theta_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t'=t-\delta_i}^{t} \theta_{it'}(QT_{i-1,t'} + QD_{i-1,t'}) \quad \text{avec} \quad \sum_{t'=t-\delta_i}^{t} \theta_{it'} = 1.$$

En conséquence de ce modèle linéaire, les contraintes de conservation de l'eau de type (5.5) deviennent :

$$(V_{it} + QT_{it} + QD_{it}) - (V_{it-1} - \Theta_i(t)) = Ap_{it}, \quad t = 1, \cdots, T, \ i = 2, \cdots, N.$$

La figure 5.5 donne une comparaison entre le modèle d'écoulement linéaire et celui à délais fixes. Sur cette figure, en délais fixes, le débit sortant du site amont arrive sous forme d'un seul bloc, alors que dans le modèle linéaire, ce débit se propage en paquets décalés dans le temps.

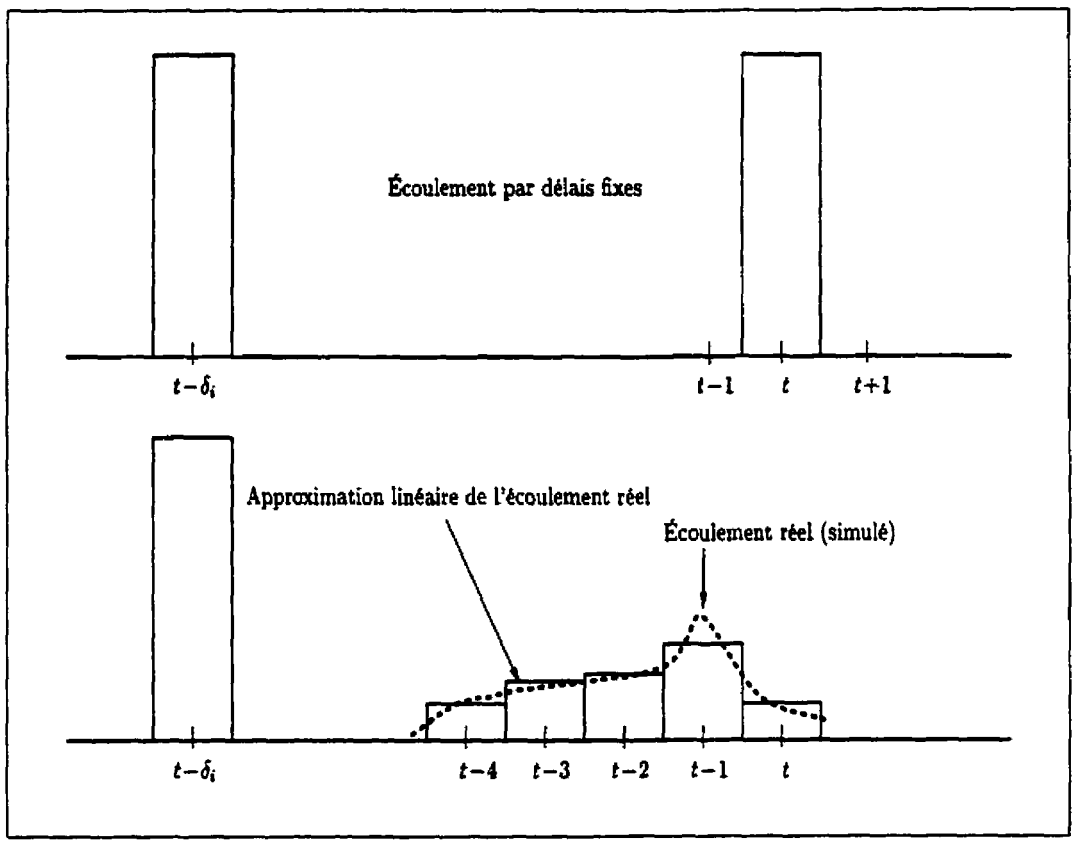

Figure 5.5 – Exemple d'écoulement linéaire versus celui par délais fixes

Remarque: Il faut noter que les paramètres du modèle d'écoulement linéaire (aussi bien que celui à délais fixes) peuvent changer d'un horizon de planification à un autre et par suite, la dynamique (par exemple, mensuelle ou saisonnière) des états de tronçons est naturellement supportée par le modèle de gestion à court terme.

5.4.2 Contraintes liées à la gestion des centrales

Pour certains types de contraintes liées à la gestion des centrales, en pratique, on ne peut pas (ou on ne veut pas) les modéliser de manière explicite dans le modèle d'optimisation (PCT). C'est le cas, par exemple, des contraintes liées à la planification des arrêts-démarrages des groupes (turbines-alternateurs) des centrales (voir chapitre 4 pour une description plus détaillée de ces contraintes). En effet, la modélisation exacte de ce type de contraintes nécessite l'introduction de plusieurs centaines (voire milliers) de variables discrètes dans le modèle de base (PCT). On se retrouve alors dans le cadre d'un problème d'optimisation mixte non-linéaire (non-convexe) à variables entières. Ce type de problème est extrêmement difficile à résoudre en un temps de calcul acceptable, surtout dans un contexte de programmation plus globale où le module (PCT) devrait être exécuté à une fréquence très élevée chaque jour (toutes les heures par exemple). Il en résulte que la modélisation explicite de ces contraintes dans le modèle (PCT) est impraticable.

En pratique, dans le cadre de la gestion à court (et à très) court terme des centrales d'une rivière, on se contente de chercher une solution plus régulière via la stabilisation des engagements des groupes le long des périodes de planification. Dans le cadre de cette thèse, on propose deux modélisations permettant de contribuer à obtenir une solution régulière dans le temps.

La première de ces deux modélisations consiste à incorporer un coût d'opération proportionnel aux variations de débits turbinés par les groupes de la centrale. Dans ce sens, chaque variable de débit turbiné QT_{it} est subdivisée en $\bar{n}_i+1$ sous-variables $q_{it}^{m_i}$ (où $\bar{n}_i$ est le nombre de groupes de la centrale i), chacune étant associée à un morceau de la courbe $P^{ref}(\cdot)$. La relation qui relie la variable QT_{it} aux sous-variables $q_{it}^{m_i}$ est donnée par :

$$QT_{it} = \sum_{m_i=1}^{\bar{n}_i+1} q_{it}^{m_i}, \tag{5.16}$$

$$0 \leq q_{it}^{m_i} \leq \bar{q}_{it}^{m_i} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(V_{it})^{1/2} \left(\bar{Q}_i^m - \bar{Q}_{it}^{m-1}\right) \tag{5.17}$$

où les sous-variables $q_{it}^{m_i}$ doivent être remplies de gauche à droite; autrement dit, si $q_{it}^{m_i} < \bar{q}_{it}^{m_i}$ alors $q_{it}^{m_i+1} = \cdots = q_{it}^{\bar{n}_i+1} = 0$. On rappelle que les points $\bar{Q}_{it}^1, \cdots, \bar{Q}_{it}^{n_i}$ sont les débits correspondant aux points de rendement optimal de la courbe de référence $P^{ref}(\cdot)$ ($\bar{Q}_{it}^0$ et $\bar{Q}_{it}^{\bar{n}_i+1}$ étant les débits minimum et maximum de la courbe).

Ainsi, suite à cette subdivision de la variable QT_{it}, le coût de variation du débit turbiné est introduit dans la fonction objectif comme suit (où $\hat{V}_{it}$ est le volume moyen du réservoir amont de la centrale i, c'est-à-dire $\hat{V}_{it} = 1/2(\overline{V}_{it} + \underline{V}_{it})$) :

$$-\frac{\varepsilon_t^m}{\Phi(\hat{V}_{it})^{1/2}\left(\bar{Q}_{it}^m - \bar{Q}_{it}^{m-1}\right)} \max\left\{q_{it}^m - q_{it-1}^m, 0\right\} \quad m = 1, \cdots, \bar{n}_i \tag{5.18}$$

où le coût ε_t^m peut être estimé par la relation suivante :

$$\varepsilon_t^m = \pi_t \, Ep^m \tag{5.19}$$

où Ep^m est l'énergie potentielle (estimée) du volume turbiné de marche à vide lors du démarage du groupe correspondant au morceau m (un estimé de cette énergie potentielle est donné à la section 4.2.3 du chapitre 4).

Avec un coût positif ($\varepsilon_t^m > 0$), le terme (5.18) reste linéaire si on remplace le terme $\max\left\{q_{it}^m - q_{it-1}^m, 0\right\}$ par la variable z_{it}, sous la contrainte : $z_{it} \geq q_{it}^m - q_{it-1}^m$ (avec $z_{it} \geq 0$).

On note que le terme (5.18) donne une bonne approximation du coût de démarrage des groupes lorsque les débits turbinés (à l'optimum) coïncident avec des points de cassure des courbes de production (linéarisées) des centrales. Pour certains systèmes hydroélectriques bien dimensionnés, le chargement des groupes aux points de cassure est souvent constaté pour la plupart des centrales du système, ce qui justifie encore le choix des points de rendement optimal comme étant des points de cassure dans la linéarisation de la fonction $P^{ref}(\cdot)$.

Une autre modélisation, pouvant aussi contribuer à régulariser le débit turbiné des centrales, consiste à contrôler la variation maximale du débit turbiné le long d'une plage de temps (ou sous-horizon). Généralement, cette variation du débit turbiné correspond (de manière approximative) à l'engagement (ou désengagement) d'un ou deux groupes de la centrale. Formellement, on note $\mathcal{T}$ ce sous-horizon et soit QT_i^{min} et QT_i^{max} le débit minimum et maximum turbiné par la centrale i le long du sous-horizon $\mathcal{T}$. Ceci est équivalent à écrire (sous forme de contraintes pour $t \in \mathcal{T}$) :

$$QT_i^{min} \leq K\, QT_{it},$$
$$QT_i^{max} \geq K\, QT_{it}.$$

où K est un facteur de conversion de l'unité hm^3 à l'unité m^3/s.

Ainsi, le respect de la variation maximale le long du sous-horizon $\mathcal{T}$ est obtenu en pénalisant, avec un coût approprié dans la fonction objectif, tout dépassement de la variation maximale permise. Si M désigne ce coût et ΔQT_i^{max} cette variation maximale, alors le terme à introduire dans la fonction objectif est :

$$-M \max\left\{QT_i^{max} - QT_i^{min} - \Delta QT_i^{max}, 0\right\}$$

ou de manière équivalente : $-M\, y_i$, sous la contrainte :

$$y_i \geq QT_i^{max} - QT_i^{min} - \Delta QT_i^{max} \quad \text{et} \quad y_i \geq 0.$$

Remarque: Dans certaines situations, quelques règles de gestion s'imposent quant à l'opération des groupes à l'intérieur des centrales. C'est le cas, par exemple, de la durée minimale de fonctionnement (resp. d'arrêt) d'un groupe une fois que celui-ci est démarré (resp. arrêté). L'insertion de ce type de contraintes dans le modèle de base (PCT) nécessite une modélisation rigoureuse en variables discrètes, ce qui peut alourdir, de manière très significative, la résolution du problème.

Une façon heuristique permettant de respecter (dans la mesure du possible) ce type de contraintes consiste à appliquer le module des arrêts-démarrages (ArrDem) à chaque centrale i, une fois qu'on a calculé les valeurs optimales $H_i(V_{it}^*)$ et QT_{it}^*, suite à la résolution du module de base (PCT) (voir chapitre 4).

5.4.3 Traitement de certaines zones interdites

La fonction globale de débit-puissance $P^{ref}(\cdot)$ d'une centrale est souvent non-linéaire (pas nécessairement concave) et non-différentiable. Il en résulte alors que, dans certaines zones, l'écart entre la courbe réelle $P^{ref}(\cdot)$ et son approximation par morceaux peut être non négligeable. C'est le cas, par exemple, de certaines zones de faible rendement situées (généralement) autour des points de changement du nombre de groupe engagés. En outre, pour des raisons de cavitation ou de vibration, la fonction $P^{ref}(\cdot)$ n'est pas partout définie à l'intérieur de son domaine, ce qui brise la connexité du domaine admissible du modèle de base (PCT).

L'intérêt de choisir les points de rendement optimal comme points de cassure (dans l'approximation linéaire par morceaux de la courbe de production) provient du fait que l'on s'attend à ce que le débit turbiné d'une centrale corresponde à l'un de ces points de cassure. Malheureusement, ceci n'est pas toujours le cas, surtout pour certains systèmes au fil de l'eau où les apports naturels peuvent connaître une grande variabilité (même à l'échelle horaire journalière). Il en résulte que cette façon de construire les courbes (linéarisées par morceaux) ne garantit pas d'éviter le chargement des groupes à des points situés dans des zones interdites ou encore à des points (dans des zones à faible rendement) où l'écart par rapport à la courbe réelle est très significatif.

Pour éviter ce type de zones non préconisées, il faudrait les interdire (de manière explicite) dans le modèle de base (PCT). Habituellemnt, ce type de contraintes est

modélisé à l'aide de variables binaires décrivant le chargement ou pas à l'intérieur d'une zone interdite. Formellement, on suppose d'abord (sans pertes de généralité) qu'on veuille interdire le chargement dans une zone interdite se situant à l'intérieur d'un segment m de la courbe (linéarisée) $P^{ref}(\cdot)$. Si on note $\bar{q}$ l'étendue (en débit) de cette zone interdite et q la sous-variable qui y est associée (avec $0 \leq q \leq \bar{q}$), alors le chargement de cette sous-variable ne peut prendre que deux valeurs possibles, soit : $q = 0$ ou bien $q = \bar{q}$. Tout chargement, autre que ces deux valeurs permises, doit être pénalisé avec un coût approprié dans la fonction objectif. Si on note M ce coût de pénalité, alors on peut interdire le chargement à l'intérieur de cette zone en ajoutant, dans la fonction objectif, le terme suivant :

$$-M \min\{q, \bar{q} - q\}. \tag{5.20}$$

Ceci est équivalent à dire que tout chargement des groupes à l'intérieur de la zone interdite engendre un coût très élevé. Il est important de noter que le terme (5.20) peut être reformulé de manière équivalente comme $-M\,y$, sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} & y \leq q, \\ & y \leq \bar{q} - q, \\ & y \geq (\bar{q} - q) - \bar{q}u, \\ & y \geq \bar{q}(u-1) + q, \\ & u \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $u = 0$, alors on a l'égalité suivante $y = \bar{q} - q$ et si $u = 1$, alors l'égalité $y = q$ est satisfaite. Inversement, si $y = \bar{q} - q$, alors on a nécessairement $u = 0$. Par contre, si $y = q$ alors la variable u doit valoir 1.

5.4.4 Gestion des déversoirs

On appelle déversoir l'ensemble des ouvrages de déversement à travers lesquels l'eau (non turbinée) passe du niveau amont du site vers son niveau aval. Ces ouvrages peuvent être classés en deux types : ouvrages contrôlables et ceux non contrôlables.

Pour un ouvrage non contrôlable (comme par exemple une crête déversante), le débit déversé (par dessus) est fonction de la dénivellation entre le sommet de cet ouvrage et le plan d'eau du réservoir adjacent (voir figure 5.6). Par contre, le débit déversé à travers un ouvrage contrôlable (comme par exemple un évacuateur de crues) dépend, en plus du niveau amont du réservoir adjacent, de son état d'ouverture.

En théorie, le débit déversé à travers un ouvrage contrôlable (vanne ou évacuateur) doit être déterminé en fonction de son ouverture. Ce qui amène à introduire de nouvelles variables de décisions dans le modèle de base (PCT), à savoir : le vecteur des ouvertures de l'ensemble d'ouvrages (de déversement) adjacents à l'installation i au temps t (ce vecteur est noté o_{it}). Le domaine de définition de ce vecteur des ouvertures peut être complexe. Il peut comprendre, entre autres, l'ensemble (non contigu) des ouvertures admissibles pour chaque ouvrage contrôlable, des règles de gestion et de maintenance (comme la durée minimale d'une ouverture et l'ordre de précédence entre les ouvertures des ouvrages) et la disponiblité de personnel qualifié pour manoeuvrer ces ouvrages. Généralement, une modélisation exacte des ouvertures (contrôlables) rend le modèle qui en résulte difficile à résoudre en un temps de calcul acceptable.

En pratique, la manoeuvre des ouvrages contrôlables de déversement constitue dans bien des cas un événement rare dans la gestion quotidienne des installations hydroélectriques d'une rivière. En effet, étant donné que tout déversement injustifié représente un gaspillage de l'énergie potentielle de la centrale adjacente, cette manoeuvre n'est généralement sollicitée que durant les périodes de crues où les apports naturels arrivent aux réservoirs à un débit très exceptionnel. Ceci est particulièrement vrai pour la plupart des systèmes dotés de grands réservoirs (saisonniers ou annuels). Cependant, pour un système au fil de l'eau, la variablité des apports naturels peut être très significative même à l'echelle journalière. Pour ce type de système, la préoccupation majeure des opérateurs est la sécurité des riverains. C'est pourquoi (dans ce cas), la manoeuvre des évacuateurs (fréquemment solicités et extrêmement contrôlés) est souvent laissée à la gestion en temps réel des opérateurs du système.

Pour pouvoir résoudre ce type de problème (en l'insérant dans le modèle de base) en un temps de calcul raisonnable, un compromis de modélisation s'impose. Dans cette thèse, on propose la procédure qui suit. Dans une première partie, on résoud le problème en incorporant dans le modèle de base, de manière précise, les déversements à travers les ouvrages non contrôlables (et ceux contrôlables dont les ouvertures sont déjà déterminées). Formellement, soit $Q_i^{dev}(\cdot)$ le débit total déversé par les ouvrages de déversement non contrôlables du site i en fonction de la hauteur de chute. De manière analogue, on note $\tilde{Q}_i^{dev}(\hat{o}_{it};\cdot)$ le débit total déversé par les ouvrages de déversement contrôlables du site i en fonction de la hauteur de chute dont les ouvertures (notées $\hat{o}_{it}$) sont déjà fixées. Généralement, ces deux fonctions $Q_i^{dev}(\cdot)$ et $\tilde{Q}_i^{dev}(\cdot;\hat{o}_{it})$ sont convexes ou approchées par des fonctions (convexes) linéaires par morceaux. Ainsi, avec ces notations, la variable du débit déversée QD_{it} doit satisfaire la contrainte suivante :

$$QD_{it} \geq Q_i^{dev}(H_i(V_{it})) + \tilde{Q}_i^{dev}(H_i(V_{it});\hat{o}_{it}). \tag{5.21}$$

Une fois que les valeurs optimales (V_{it}^*, QD_{it}^*) sont calculées, suite à la résolution du modèle de base (en incorporant les contraintes de type (5.21)), la deuxième étape de la procédure consiste à déterminer les ouvertures (des ouvrages contrôlables de déversement) qui coïncident le mieux possible avec le surplus de débit déversé : $QD_{it}^* - Q_i^{dev}(H_i(V_{it}^*)) - \tilde{Q}_i^{dev}(\hat{o}_{it};H_i(V_{it}^*))$.

5.4.5 Autres extensions

Le modèle de base (PCT) peut être étendu en y incorporant d'autres éléments liés à la gestion hydroélectrique d'une rivière. C'est le cas, par exemple, de la prise en compte de la variation du plan d'eau à l'aval des centrales. En réalité, le niveau aval d'une centrale est souvent donné par une fonction de hauteur appelée fonction

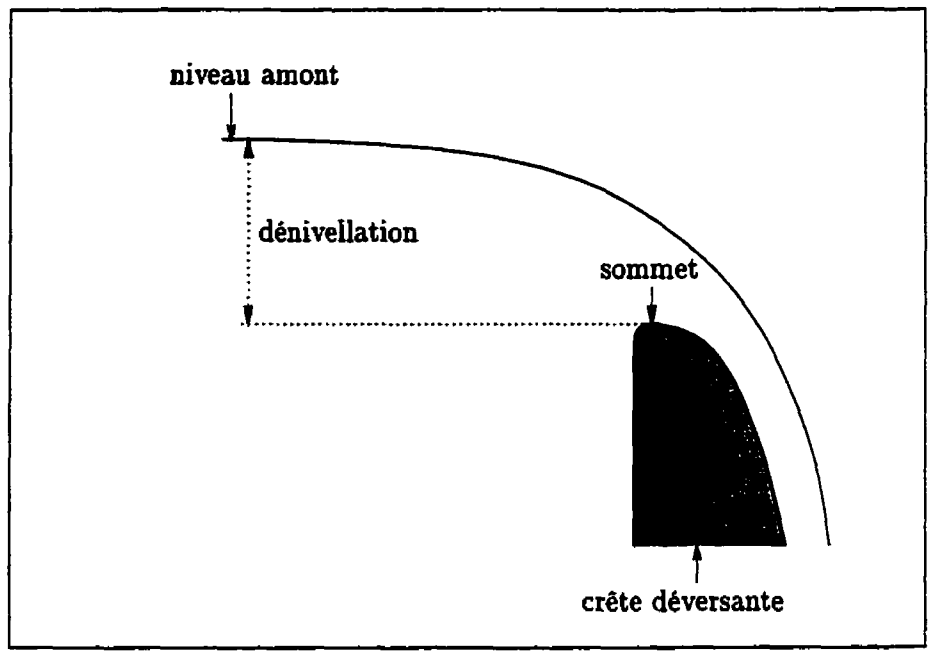

Figure 5.6 – Déversement par dessus d'une crête déversante

de tarage ; celle-ci résume l'altitude de la surface libre d'écoulement en aval de la centrale rapportée à un plan horizontal de référence arbitraire (par exemple, le plan au niveau moyen de la mer). Ce niveau aval peut dépendre de plusieurs paramètres (ou variables) comme, par exemple, le niveau du réservoir ou de tronçon de la rivière en aval, les débits turbinés par les groupes de la centrale et le débit déversé du réservoir amont. On note que la dépendance du niveau aval vis-à-vis les débits turbinés par les groupes de la centrale peut être incorporée directement dans le modèle de chargement optimal (Super-ChOp) lors de la génération de la courbe globale de débit-puissance de la centrale. Dans ce cas, on peut supposer que le niveau aval dépend uniquement du débit évacué par le déversoir i. Ainsi, la constante H_i^d du modèle de base doit être substituée par une fonction du niveau aval, notée $H_i^d(\cdot)$. Par la suite, la fonction du rapport de hauteur $\Phi(\cdot)$ doit être redéfinie comme suit :

$$\Phi(V_{it}, QD_{it}) = \frac{H_i^u(V_{it}) - H_i^d(QD_{it})}{H_i^{ref}}.$$

Une autre extension possible consiste à raffiner le modèle de base, en lui ajoutant la structure de marché (de vente et/ou d'achats) de l'énergie électrique. Dans ce cas, une partie de demande (en énergie) d'une zone desservie par le système peut être satisfaite par l'achat de l'énergie électrique. En outre, avec cette structure du marché d'énergie, on peut supposer le cas où la production des centrales peut être débitée sur plusieurs marchés de vente ayant une structure de prix différente.

Par ailleurs, dans certaines situations, des aléas affectant quelques paramètres du modèle de base deviennent une préoccupation majeure dans la gestion à court terme d'une rivière. C'est le cas, par exemple, des aléas affectant les apports naturels. En ce qui concerne ce sujet, la pratique habituelle consiste à utiliser une moyenne statistique en se basant sur des données historiques ou sur des prévisions météorologiques très récentes. Toutefois, les modèles déterministes basés sur ce genre de pratique, d'une part, ne se méfient pas de l'inexactitude de ces prévisions météorologiques qui ne peuvent être qu'approximatives et, d'autre part, ne tiennent pas compte de l'aspect aléatoire des apports naturels (surtout pendant les périodes des crues). La modélisation stochastique des apports naturels est complexe. Ceci est dû à la complexité du modèle stochastique pour simuler ces apports à une échelle de temps appropriée pour la gestion à court terme d'une rivière (échelle horaire ou journalière). En outre, une condition nécessaire pour la réussite de l'approche stochastique est la représentativité du modèle de simulation utilisé pour générer ces apports naturels. En effet, si le modèle stochastique ne reflète pas adéquatement la réalité hydrologique (état actuel des bassins du système, corrélations entre plusieurs systèmes ou rivières, température, précipitations, fonte de neige, saturation du sol, etc.), les conclusions que l'on peut tirer de l'étude seront fausses ou, du moins, peu réalistes.

À ce propos, il est important de noter que le pas de temps (de l'horizon de planification) est une caractéristique fondamentale de la pertinence des séries d'apports prévisionnels qui peuvent être générées. Dans ce sens, si les apports annuels ou saisonniers (mensuels ou hebdomadaires) possèdent certaines propriétés de stationarité

(permettant ainsi de les simuler par des modèles appropriés de prévision en séries chronologiques), les apports journaliers et horaires, par contre, présentent une grande variabilité (surtout pour des bassins de petite et moyenne taille). En effet, ces derniers types d'apports peuvent montrer des variations à hautes fréquences dues, par exemple, à la réponse rapide à un évenement pluvieux suivi par une récession (plus ou moins) lente. Plusieurs facteurs publiés dans la littérature hydrologique (voir, par exemple, Yakowitz [105]) montrent que les modèles de prévisions les plus utilisés en pratique (comme, par exemple, l'analyse fréquentielle et les modèles du type ARIMA généralisés) ne sont pas adéquats pour modéliser des apports journaliers (ou à une échelle inférieure au pas journalier); d'où la nécessité de développer de nouvelles méthodes pour traiter ce type de problème.

En conclusion, il résulte de ce qui précède que la modélisation (aussi bien que le traitement) de l'aspect aléatoire des apports naturels est particulièrement difficile à incorporer correctement dans le modèle de base (PCT). En effet, ce dernier problème constitue, à lui seul, un sujet d'étude approfondie. Ainsi, dans le cadre de cette thèse, on se limite à considérer la version déterministe des apports naturels.

Chapitre 6

Gestion à court terme d'une rivière : résolution et tests numériques

6.1 Généralités

Le présent chapitre est consacré à la résolution du problème de la gestion à court terme d'une rivière (GestRiv). Pour ce faire, on se propose d'analyser et tester trois algorithmes très utilisés en optimisation non-linéaire à savoir : la programmation linéaire successive, le lagrangien augmenté et la méthode des points intérieurs. Hormis la programmation linéaire successive, plusieurs codes commerciaux sont disponibles que ce soit pour l'implantation du lagrangien augmenté aussi bien pour celle de la méthode des points intérieurs. Ainsi, dans cette partie de la thèse, le grand effort est mis sur la mise au point du premier algorithme, soit la programmation linéaire successive (PLS, en abrégé).

Il est important de noter que les trois algorithmes mentionnés ci-dessus supposent que les fonctions non-linéaires du modèle soient différentiables. Toutefois, cette hypothèse de base de ces trois algorithmes n'est pas satisfaite par le modèle GestRiv. Ceci est dû principalement à la nature des fonctions globales de débit-puissance des centrales hydroélectriques (voir chapitre 5, section 3). Ainsi, l'une des plus importantes originalités de ce chapitre consiste à reformuler le problème GestRiv en un modèle équivalent (différentiable) qui peut être traité par les trois algorithmes mentionnés ci-dessus.

Par ailleurs, pour une étude comparative des performances avec les deux autres méthodes, un effort supplémentaire est consacré à la mise en oeuvre du problème GestRiv sur les deux codes commerciaux suivants : MINOS (pour une implantation d'une variante du lagrangien augmenté) et LOQO (pour une implantation d'une variante de la méthode des points intérieurs). Pour une description plus détaillée de ces deux dernières implantations, on se réfère (respectivement) au manuel [66] et aux deux articles de Vanderbei et Shanno [96, 97]. À ce propos, il importe de signaler une autre originalité importante du présent chapitre. En effet, ce chapitre constitue le premier document publiant ce genre d'étude comparative des trois algorithmes mentionnés ci-dessus (pour le problème de gestion des ressources hydroélectriques d'une rivière).

Ce chapitre est organisé en cinq sections. Dans la prochaine section, on passe en revue certains algorithmes proposés dans la littérature. Ensuite, dans la section 3, on présente, avec plus de détails, l'algorithme de résolution PLS en considérant l'hypothèse de base qui la sous-entend (différentiabilité des fonctions non-linéaires). La mise en oeuvre du problème non-différentiable GestRiv est discutée dans la section 4. Enfin, des tests numériques (des trois algorithmes considérés) sont illustrés dans la section 5.

6.2 Revue de certains algorithmes de la littérature

La plupart des approches publiées jusqu'à présent sont basées sur des hypothèses (plus ou moins) limitatives qui facilitent la résolution du problème. Ainsi, selon le type d'approche adoptée, on suppose souvent que les fonctions hydrauliques ou de production sont linéaires ou concaves (linéaires par morceaux) ; de plus, les fluctuations des niveaux amont (aussi bien que des niveaux avals) des centrales sont souvent considérées négligeables (Renaud [75]) ou sont prises en compte par des approximations linéaires estimant les pertes énergétiques de hauteur des centrales (Brännlund

et al. [9]). Dans ce qui suit, on expose brièvement les principales méthodes proposées dans la littérature pour résoudre le problème GestRiv.

6.2.1 Programmation dynamique

Historiquement, la gestion des ressources hydroélectriques a servi de catalyseur au développement même de la technique de programmation dynamique (PD). Le problème, par exemple, d'allocation d'une ressource de débit d'eau proposé par Warren Hall a été traité dans le livre fondamental de la PD de Bellman [5]. Plusieurs auteurs des années 1960 et 1970 se sont intéressés à cette approche de résolution, comme Heidari [31], Meier [60], Nopmongcol et Askew [70], Opricović et Djordjević [71], Yakowitz [106].

La PD est un outil puissant pour la gestion dynamique des réservoirs lorsque la taille du système le permet (par exemple, de 1 à 2 réservoirs). Sa popularité et son succès peuvent être attribués au fait que la non-linéarité, l'aspect dynamique et les caractéristiques stochastiques du problème s'insèrent de façon simple et naturelle dans la formulation de la PD. En outre, cette technique présente l'avantage de décomposer un problème de grande taille en une série de sous-problèmes résolus de manière récursive. Il n'y a pas de formulation générale qui puisse être appliquée à tout problème que l'on veut résoudre par la PD, dont l'algorithme doit être adapté à chaque type de problème. Cependant, la faiblesse de la PD provient de la dimension du vecteur d'état, dont la taille doit être extrêmement limitée. Ainsi dans la gestion d'une rivière, une composante importante du vecteur d'état représente les volumes d'eau dans les réservoirs ; plus le nombre de réservoirs augmente, moins l'approche de la PD devient utilisable, du fait des exigences en terme de temps de calcul et d'espace mémoire de stockage.

En vue de modérer ces effets non souhaitables de l'algorithme classique de PD, une variante de cette approche, connue sous le nom de "Incremental Dynamic Programming" a été proposée par certains auteurs dont Hall et al. [27], Nopmongcol et Askew [70]. Elle consiste en une procédure itérative pour résoudre l'équation récursive de PD sur un domaine admissible très restreint, défini à partir d'une politique (ou trajectoire) initiale réalisable. Les trajectoires ainsi générées par cette application itérative de la PD définissent un voisinage de la trajectoire initiale. À partir de ce voisinage, on génère une nouvelle politique, s'il en existe une, améliorant la valeur de l'objectif. Cette nouvelle politique devient la solution initiale de la prochaine itération. On convient que l'algorithme converge vers un minimum local si aucune meilleure solution n'est exhibée en explorant le voisinage de la solution courante. Bien que cette variante de la PD améliore le temps de calcul, sa convergence vers un optimum local ou global risque d'être lente, fait fortement accentué par la dimension du vecteur d'états.

6.2.2 Gradient réduit

Plusieurs auteurs ont considéré le problème GestRiv comme la maximisation d'une fonction non-linéaire concave sujette à des contraintes linéaires (Rosenthal [79], Brännlund et al. [9], Habibollahzadeh et Bubenko [24]). À cette fin, on procède à une linéarisation tant de la contrainte de demande en puissance et en réserve que des contraintes portant sur la puissance transitée sur les lignes de transport. Cette linéarisation consiste à remplacer les fonctions de débit-puissance par des termes linéaires en fonction du débit turbiné par une centrale et d'une constante exprimant son efficacité. Il en résulte ainsi un modèle d'optimisation qui consiste en une fonction économique non-linéaire définie sur un polyèdre convexe. Les algorithmes de gradient réduit (GR) sont particulièrement efficaces pour ce genre de problèmes, surtout si on

peut profiter de la sous-structure particulière de réseau incluse dans les contraintes de conservation de l'eau et les bornes sur les variables de ces contraintes. Cependant, vu la non linéarité de l'objectif, la solution optimale n'est pas nécessairement un point extrême.

L'algorithme de GR est une procédure itérative générant une séquence de directions de descente admissibles tout en améliorant la valeur de la fonction économique. À chaque itération, la dimension du problème est réduite en substituant certaines variables après en avoir partitionné l'ensemble en variables de base et hors-base. Sous sa forme primitive, la méthode de GR ne converge pas globalement (Wolfe [101]). Néanmoins, la convergence est obtenue en modifiant la direction de descente (voir McCormick [59]). Cette méthode est généralement reconnue comme un algorithme efficace (Minoux [62]).

6.2.3 Optimisation duale

La gestion à court terme de rivières est un problème de programmation mixte non-linéaire. L'approche habituelle pour traiter ce type de problèmes est de dualiser certaines contraintes couplantes de sorte que le problème relaxé ainsi obtenu puisse être décomposé en sous-problèmes relativement faciles à résoudre par rapport au problème original. La structure particulière du problème GestRiv fait qu'une telle relaxation génère un sous-problème pour chaque centrale hydroélectrique et un sous-problème pour les équations hydrologiques de conservation de l'eau. Ainsi, les sous-problèmes des centrales peuvent être résolus par l'une des méthodes présentées dans le chapitre précédent dans le cadre du problème ArrDem, alors que le sous-problème hydrologique peut être résolu de manière efficace par un algorithme de réseau à coût linéaire ou convexe, dépendamment de la caractéristique des termes associés dans la fonction économique.

La résolution efficace du problème-maître dual dépend en grande partie de la qualité des variables duales initiales. L'initialisation de ces dernières devrait se baser sur une bonne estimation des variables duales optimales. Typiquement, cette initialisation peut se faire en résolvant un modèle simplifié où les fonctions non-linéaires (hydrauliques et de production) sont approchées par des fonctions concaves linéaires par morceaux (Chancelier et Renaud [13], Nilsson et Sjevgren [68]). Quant à l'ensemble des variables primales qui en résulte, il n'y a aucune garantie qu'il fournisse une solution réalisable pour les contraintes relaxées. Dans ce cas, une méthode heuristique peut être utile pour retrouver une solution admissible à partir de la solution courante (Nilsson et Sjelvgren [67]). La différence entre la valeur du primal et celle du dual est un bon critère pour évaluer la proximité de la solution optimale. La dernière étape de l'algorithme dual consiste à mettre à jour les variables duales. Cette mise à jour peut se faire, par exemple, en utilisant la méthode de sous-gradient comme le proposent Nilsson et Sjelvgren [67, 68].

6.3 Algorithme de résolution

Dans cette partie de la thèse, un grand effort est mis sur la mise au point de l'algorithme de programmation linéaire successive (PLS). Le choix d'implanter cette méthode peut être justifié par au moins les deux raisons suivantes. D'une part, la PLS se prête bien à la résolution des problèmes non-linéaires comportant un nombre élevé de contraintes linéaires. C'est le cas du problème de la gestion à court terme d'une rivière où des milliers de contraintes linéaires délimitent le domaine. Des expériences sur des modèles non-linéaires ayant cette caractéristique montrent que la PLS jouit d'un intérêt très particulier. En effet, dans le domaine pétrolier, des résultats satisfaisants ont été obtenus (par l'application de la PLS) pour des modèles non-linéaires de raffinage (voir, par exemple, Palacios-Gomez et al. [72], Baker et Lasdon [1]). D'autre part,

puisque la PLS résout le problème non-linéaire par optimisation successive d'une séquence de problèmes linéaires, la disposition d'un optimiseur de programmation linéaire stable et efficace constitue un élément particulièrement important dans la réussite de l'approche PLS. Des expériences avec l'optimiseur CPLEX montrent que ce logiciel est très adéquat pour une implantation performante de la PLS. En effet, CPLEX est efficace pour la résolution de problèmes linéaires et peut traiter des problèmes de grande dimension (plusieurs milliers de variables et de contraintes). De plus, d'une itération à l'autre de l'algorithme PLS, CPLEX permet d'injecter la base de la solution optimale courante pour initialiser la résolution de l'itération suivante. D'où un gain du temps de calcul plus ou moins important en fonction de la proportion de coefficients modifiés du problème.

6.3.1 Problème général

D'un point de vue conceptuel, il est pratique de présenter d'abord l'algorithme de résolution dans le contexte général d'un programme mathématique non-linéaire sous certaines hypothèses de base. Ensuite, on en déduit que le problème de la gestion à court terme d'une rivière est un cas particulier de ce problème général. À cette fin, soit le programme mathématique suivant (noté PNL) :

$$\begin{array}{lll} PNL: & \min & f(x) \\ & \text{sujet à} & g_i(x) \leq 0 \qquad i = 1, \cdots, r \qquad (6.1) \\ & & x \in X \qquad (6.2) \end{array}$$

où les fonctions $f(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ sont supposées être de classe C^1 (continûment différentiables) et X est un polyèdre convexe décrit par l'ensemble des contraintes (d'égalité) linéaires :

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Re^n : Ax = b, x \geq 0\}. \qquad (6.3)$$

En outre, par souci d'alléger la discussion, on suppose que la matrice ($A : m \times n$ à valeurs réelles) est de plein rang (b étant un vecteur de $\Re^m$).

Le long de ce chapitre, on note C l'ensemble décrit par les contraintes non-linéaires du problème PNL :

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Re^n : g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \cdots, r\}. \tag{6.4}$$

6.3.2 Aperçu de la méthode PLS

La programmation linéaire successive utilise des pénalités extérieures (exactes) pour transformer un problème avec des contraintes non-linéaires en un problème dont le domaine réalisable est un polyèdre convexe défini par l'ensemble des contraintes linéaires et des bornes du problème original. Toutes les contraintes non-linéaires sont déplacées dans la fonction objectif via des paramètres (ou poids) qui pénalisent les points violant ces contraintes.

Pour chaque instance du vecteur de pénalités, la PLS consiste à résoudre de manière séquentielle une série de problèmes linéarisés par une des méthodes de la programmation linéaire (simplexe par exemple). Dans ce sens, la PLS peut être vue comme un algorithme itératif de descente où, à chaque itération, une direction de descente définie dans une région de confiance ("trust region" en anglais) est générée en résolvant un problème d'optimisation linéaire. Ce dernier problème est obtenu par une approximation du premier ordre du développement en série de Taylor. Cette approximation est appliquée aux termes non-linéaires de la fonction objectif modifiée obtenue en y incorporant les contraintes pénalisées. À la fin de la procédure, on s'attend à exhiber une solution qui remplisse les conditions d'optimum du premier ordre de Lagrange-Kuhn-Tucker (L-K-T, en abrégé).

Méthodologie

Les grandes lignes de la PLS se résument en deux étapes :

1. traitement des contraintes non-linéaires par la technique des pénalités exactes ;
2. résolution des problèmes non-linéaires pénalisés par un processus itératif, et ce, en se basant sur l'approximation tangentielle des termes non-linéaires du modèle et sur la logique des régions de confiance.

Traitement des contraintes non-linéaires

En programmation linéaire successive, le traitement des contraintes non-linéaires consiste à les déplacer dans la fonction objectif via une pénalité exacte de la norme l_1. On obient alors le problème à contraintes linéaires (noté $PCL(w)$) :

$$PCL(w): \min_{x \in X} \; p(x;w) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + \sum_{i=1}^{r} w_i \max\{0, g_i(x)\} \tag{6.5}$$

où $w = (w_1, \cdots, w_r)$ est le vecteur des paramètres positifs de pénalité exacte ($w_i > 0$).

Sous certaines hypothèses de régularité ou de normalité des contraintes du problème PLN ("constraint qualification" en anglais), les relations entre les optima locaux du problème PNL et ceux du problème PCL sont données par les résultats du théorème 1 (pour la démonstaration, voir Bazaraa et al. [4, §10.3] ou Zhang et al. [108]).

Théorème 1 *Soit $\bar{x}$ un point de L-K-T (c'est-à-dire, $\bar{x}$ satisfait les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre de Lagrange-Kuhn-Tucker) du problème PNL avec les multiplicateurs $\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_r$. Si le vecteur des poids de pénalité w satisfait $w_i \geq |\bar{\lambda}_i|$ (pour tout $i = 1, \cdots, r$), alors $\bar{x}$ est également un point de L-K-T du problème PCL. Inversement, si $\bar{x}$ est point de L-K-T du problème PCL et si, en plus, $\bar{x}$ satisfait l'ensemble des contraintes non-linéaires du problème PLN ($\bar{x} \in C$), alors $\bar{x}$ est un point de L-K-T du problème PNL.*

Suite à ce résultat, un optimum local du problème PLN peut être obtenu en résolvant une séquence de problèmes $PCL(w)$ où les poids de pénalité w (dans cette séquence

de problèmes) vont en augmentant. De plus, on démontre qu'il n'est pas nécessaire que ces poids tendent vers l'infini (voir, par exemple, Mangasarian [56], Zhang et al. [108]).

Résolution du problème pénalisé $PCL(w)$

On rappelle que le problème $PCL(w)$ consiste à minimiser la fonction $x \mapsto p(x;w)$ où la variable x est soumise à des contraintes linéaires définissant le polyèdre convexe X. Ainsi, étant donné un point initial appartenant à l'ensemble X, on peut tenter de résoudre le problème $PCL(w)$ par une optimisation successive d'une séquence de problèmes faciles à résoudre par rapport au problème original $PCL(w)$. Ainsi, dans ce proccesus itératif, chaque itération k consiste à minimiser une approximation linéaire de la fonction $p(\cdot;w)$ dans un voisinage d'un point courant, noté x^k. Cette approximation linéaire est obtenue en se basant sur le développement de Taylor (du premier ordre) des fonctions $f(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ autour du point courant x^k. Formellement, cette approximation tangentielle de la fonction $p(\cdot;w)$, notée $pl(\cdot;x^k,w)$, est donnée par :

$$pl(x;x^k,w) \stackrel{\text{def}}{=} f(x^k) + \nabla f(x^k)(x-x^k) + \sum_{i=1}^{r} w_i \max\{0, g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)(x-x^k)\} \qquad (6.6)$$

où les vecteurs-lignes $\nabla f(x^k)$ et $\nabla g_i(x^k)$ sont les gradients de $f(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ au point x^k (respectivement).

La qualité de l'approximation de la fonction $p(\cdot;w)$ par son modèle linéarisé $pl(\cdot;x^k,w)$ dépend étroitement de l'étendue du voisinage (ou de la région de confiance) considéré autour du point x^k. Autrement dit, plus la quantité $\| x - x^k \|_\infty$ est petite, meilleure est l'approximation tangentielle (6.6) ($\| \cdot \|_\infty$ étant la norme infinie : $\| z \|_\infty = \max_i | z_i |$). Si on note Δ^k une borne supérieure sur la norme infinie de

$(x - x^k)$, alors le problème linéarisé qui suit (notée $PL(x^k, \Delta^k, \omega)$) peut servir comme modèle d'approximation du problème $PCL(w)$ autour du point x^k :

$$\begin{aligned} PL(x^k, \Delta^k, \omega): \quad & \min_{x \in X} \quad pl(x; x^k, w) \\ & \text{s.à.} \quad \|x - x^k\|_\infty \leq \Delta^k. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Une façon simple de contourner la non-différentiabilité du problème $PL(x^k, \Delta^k, \omega)$ (due à l'utilisation de la norme l_1) consiste à le reformuler sous la forme équivalente suivante (notée $PL'(x^k, \Delta^k, \omega)$) :

$$\begin{aligned} PL'(x^k, \Delta^k, \omega): \quad \min \quad & f(x^k) + \nabla f(x^k)(x - x^k) + \sum_{i=1}^{r} w_i y_i \\ \text{s.à.} \quad & y_i \geq g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)(x - x^k) \quad i = 1, \cdots, r \\ & \|x - x^k\|_\infty \leq \Delta^k \\ & x \in X \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, r. \end{aligned}$$

L'objectif de chaque résolution du modèle $PL'(x^k, \Delta^k, \omega)$ est d'améliorer la valeur de la fonction $p(\cdot; w)$. Si le voisinage considéré (du point courant x^k) est très petit, l'amélioration risque de ne pas être satisfaisante. Par contre, s'il est grand, on risque de ne pas réaliser une amélioration de $p(\cdot; w)$. En effet dans ce cas, rien ne garantit la qualité de l'approximation tangentielle en un point significativement éloigné de la solution courante. Ainsi, la technique des régions de confiance consiste à chercher continuellement un compromis entre deux cas extrêmes : d'une part, risquer des itérations inutiles (et coûteuses en temps de calcul) dans le cas d'un voisinage relativement grand et, d'autre part, effectuer un nombre d'itérations très élevé pour obtenir une amélioration substantielle de la solution, et ce, dans le cas d'un voisinage très petit. Du point de vue algorithmique, suite au calcul d'une descente satisfaisante, ce compromis se traduit assez souvent par un élargissement de la région de confiance si l'approximation est jugée bonne, par la conservation ou réduction de la

région dans le cas contraire. On note que la région de confiance est systématiquement réduite dans le cas où l'approximation est jugée non satisfaisante.

Remarque: Il importe de signaler que cette technique de région de confiance permet d'éviter le recours aux techniques de recherche linéaire et, par conséquent, donne (dans le cas d'une amélioration substantielle) la direction de descente aussi bien que le pas de déplacement.

Algorithme

Plusieurs algorithmes de la PLS existent (voir, par exemple, Palacios-Gomez et al. [72], Baker et Lasdon [1], Zhang et al. [108]). Toutefois, le seul algorithme (à notre connaissance) qui a été publié dans la littérature avec une preuve de convergence est celui proposé dans l'article de Zhang et al. [108]. En conséquence, on s'est basé dans l'implantation de la PLS sur ce dernier algorithme dont voici les principales étapes :

Début PLS

0 : Initialisattion de l'algorithme

- calculer une solution initiale x^1 tel que $x^1 \in X$
- fixer le paramètre α de mise à jour de la région de confiance Δ^k (typiquement $\alpha = 1/2$, mais il peut être changé en cours de l'algorithme)
- fixer le paramètre β de mise à jour du vecteur de pénalité ω (typiquement $\beta = 2$, mais il peut également être changé en cours de l'algorithme)
- fixer $\bar{\omega}$ une borne supérieure sur les valeurs du vecteur ω (on peut éventuellement modifier $\bar{\omega}$ en cours de l'algorithme)
- fixer une valeur initiale de Δ^1
- fixer les paramètres $0 < \rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$ utilisés dans les tests de ratio pour décider de la qualité de l'approximation locale du modèle (typiquement, $\rho_0 = 10^{-6}$, $\rho_1 = 1/4$ et $\rho_2 = 3/4$)

- fixer des valeurs initiales du vecteur des pénalités ω^1
- poser $j = 1$ et $k = 1$

1 : Résolution d'une instance du problème $PCL(\omega)$

1.1 soit x^{k+1} la solution optimale de $PL'(x^k, \Delta^k, \omega^j)$

1.2 si $d^k \stackrel{\text{def}}{=} x^{k+1} - x^k = 0$, alors aller à l'étape 2

1.3 calculer la variation de la fonction exacte de pénalisation :

$$\Delta p^k \stackrel{\text{def}}{=} p(x^k; \omega^j) - p(x^{k+1}; \omega^j)$$

puis, la variation "prédite" par l'approximation tangentielle :

$$\Delta pl^k \stackrel{\text{def}}{=} p(x^k; \omega^j) - pl(x^{k+1}; x^k, \omega^j)$$

et ensuite, le ratio suivant :

$$R^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta p^k}{\Delta pl^k}$$

1.4 si $R^k < \rho_0$ alors rejeter la solution courante x^{k+1} ($x^{k+1} \leftarrow x^k$), rétrécir la région de confiance comme suit :

$$\Delta^{k+1} \leftarrow \max\{\alpha\, \Delta^k, \Delta^{inf}\}$$

et retourner en 1.1 (avec $k \leftarrow k+1$)

1.5 si $R^k \geq \rho_0$ alors mettre à jour Δ^{k+1} par :

$$\Delta^{k+1} = \begin{cases} \Delta^k & \text{si } \rho_1 \leq R^k \leq \rho_2 \\ \alpha\, \Delta^k & \text{si } R^k < \rho_1 \\ \Delta^k / \alpha & \text{si } R^k > \rho_2 \end{cases}$$

et retourner en 1.1 (avec $k \leftarrow k+1$)

2 : Mise à jour des pénalités

si les contraintes non-linéaires du problème PNL sont satisfaites ($x \in C$) alors l'algorithme PLS se termine. Sinon :

– mettre à jour les pénalités par :

$$\omega^{j+1} \leftarrow \min\{\beta\omega^j, \bar{\omega}\}$$

– poser $x^1 \leftarrow x^{k+1}$, $k \leftarrow 1$, $j \leftarrow j+1$ et retourner à l'étape 1

Fin PLS.

Dans ce dernier schéma, l'algorithme PLS se résume en deux boucles imbriquées (communément appelée, boucle extérieure et intérieure de PLS). À chaque itération de la boucle extérieure (avec l'itérateur j), on calcule une instance (notée ω^j) du vecteur de pénalités ω; elle prend fin dès qu'on obtient une solution admissible pour l'ensemble des contraintes non-linéaires du problème original PNL. Quant à la boucle intérieure (avec l'itérateur k), elle consiste à résoudre une instance du problème $PLC(w)$ lorsque le vecteur de pénalités ω prend la valeur ω^j transmise par la boucle extérieure (voir étapes 1.1–1.5). Ainsi, elle constitue la phase cruciale dans le processus de résolution du problème PNL. Dans ce qui suit, on décortique cette phase de résolution par quelques commentaires décrivant sommairement ses différentes étapes.

Étape 1.1 : À cette étape de la boucle intérieure, on résout une instance du problème (linéaire) $PL'(x^k, \Delta^k, \omega^j)$ servant comme modèle d'approximation locale du problème $PLC(w)$.

Étape 1.2 : Si la direction de descente générée à l'étape 1.1 est nulle, alors on peut déclarer que le point courant x^k est un point de L-K-T du problème $PCL(w^j)$ (pour la démonstration de cette affirmation, voir Bazaraa et al. [4, pp:435-436]). Ainsi, il suffit de se positionner à l'étape 2 pour tester si ce point x^k satisfait l'ensemble des contraintes non-linéaires du problème original PNL.

Étape 1.3 : Si la direction de descente générée à l'étape 1.1 est non nulle, alors on évalue la variation de la fonction (avec pénalités exactes) $p(\cdot; w^j)$, et ce, entre le

point courant et le point calculé. Une variation positive signifie une amélioration de la valeur de la fonction alors qu'une variation négative indique sa détérioration. Ensuite, on évalue les variations du modèle linéarisé entre ces deux points. Cette variation est toujours positive (non nulle), puisque x^k est une solution admissible pour le problème $PL'(x^k, \Delta^k, \omega^j)$, x^{k+1} est sa solution optimale et d^k est une direction de descente non nulle.

Étape 1.4 : Si l'indicateur de la qualité du modèle (R^k) est en dessous du seuil ρ_0, alors la solution calculée x^{k+1} est rejetée. Ainsi, on réduit la dimension des régions de confiance par le facteur α et on recalcule une nouvelle solution candidate. Zhang et al. [108] démontrent que, au cours d'un nombre fini de telles réductions, on doit nécessairement avoir $R^k \geq \rho_0$.

Étape 1.5 : Si le nouveau point calculé est admis comme nouvelle solution, les régions de confiances sont modifiées, suivant que l'amélioration est jugée de bonne qualité ($R^k > \rho_2$), acceptable ($\rho_1 \leq R^k \leq \rho_2$), médiocre ou non significative ($R^k < \rho_1$). Dans le premier cas, la région de confiance est élargie par le facteur $1/\alpha$; dans le second cas, cette région est maintenue constante et enfin, dans le troisième cas, la région est réduite par le facteur α.

6.4 Mise en oeuvre du modèle GestRiv

Le but de cette section est de reformuler le modèle de la gestion à court terme d'une rivière comme une instance du problème non-linéaire PNL. Par souci d'alléger l'exposé du problème, on se limite à la reformulation du modèle de base (PCT) étudié au chapitre précédent. On note que la démarche suivie dans cette section reste valide pour la plupart des extensions de ce modèle de base.

La principale difficulté dans la résolution du modèle de base (PCT) est due à la non-différentiabilité des fonctions de production $P_i^{ref}(\cdot)$ (voir chapitre 5). Il en résulte que

l'hypothèse de base de la PLS (à savoir : la différentiabilité des fonctions non-linéaires du problème général PNL) n'est pas satisfaite par le modèle (PCT). En vue de remédier à cette difficulté, on propose dans ce qui suit une formulation (équivalente) de ce modèle permettant de le traiter comme une instance du problème général PNL. Par la suite, on désigne par PLSND l'algorithme PLS appliqué au problème non-différentiable (PCT).

Dans le modèle (PCT), la fonction de débit-puissance (à la hauteur de référence) $P_i^{ref}(\cdot)$ est construite comme une fonction concave et linéaire par morceaux. Chaque morceau m_i de cette fonction est défini sur le sous-intervalle $[\bar{Q}_i^{m_i}, \bar{Q}_i^{m_i-1}]$ pour $m_i = 1, \cdots, \overline{m}_i$ (où $\overline{m}_i$ est le nombre de morceaux de la fonction $P_i^{ref}(\cdot)$). Ainsi, la variable (de décision) du débit turbiné QT_{it} peut être subdivisée (explicitement dans le modèle (PCT)) en $\overline{m}_i$ sous-variables, notées $q_{it}^{m_i}$, chacune étant associée au morceau m_i de la courbe $P_i^{ref}(\cdot)$. Si on note $c_i^{m_i}$ la pente du morceau m_i, alors la fonction de production $P^{ref}(\cdot)$ peut s'écrire comme suit :

$$P_i^{ref}(QT_{it}) = \sum_{m_i=1}^{\overline{m}_i} c_i^{m_i} q_{it}^{m_i} \tag{6.8}$$

sous contraintes :

$$QT_{it} = \sum_{m_i=1}^{\overline{m}_i} q_{it}^{m_i}, \tag{6.9}$$

$$0 \leq q_{it}^{m_i} \leq \bar{q}_{it}^{m_i} \stackrel{def}{=} \Phi(V_{it})^{1/2} (\bar{Q}_i^{m_i} - \bar{Q}_{it}^{m_i-1}) \qquad m_i = 1, \cdots, \overline{m}_i, \tag{6.10}$$

plus les contraintes d'adjacence. (6.11)

Ces contraintes d'adjacence stipulent que les sous-variables $q_{it}^{m_i}$ doivent être remplies de gauche à droite ; autrement dit, si $q_{it}^{m_i} < \bar{q}_{it}^{m_i}$ alors tous les autres sous-variables se situant à droite de $q_{it}^{m_i}$ doivent être nulles ($q_{it}^{m_i+1} = \cdots = q_{it}^{\overline{m}_i} = 0$). Pour un problème général non-convexe, la modélisation en recherche opérationnelle de ce type

de contraintes peut nécessiter l'utilisation des variables discrètes (binaires) pour assurer cette cohérence (de gauche à droite) dans le chargement des sous-variables $\bar{q}_{it}^{m_i}$. Toutefois, bien que le modèle (PCT) soit non-convexe (voir chapitre 5, section 3), le résultat de la proposition 5 montre que ces contraintes d'adjacence sont redondantes.

Proposition 5 *En tout point de L-K-T du modèle (PCT), les sous-variables $q_{it}^{m_i}$ sont toujours remplies de gauche à droite.*

Démonstration: Le modèle (PCT) peut s'écrire, de manière équivalente, sous la forme suivante :

$$\max \quad F \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{t=1}^{T} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \pi_t u_t^\ell \right) + \hat{\pi} B^{hyd}(V_T)$$

s.à. pour $t = 1, \ldots T$:

$$G_t^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in I_\ell} \Phi_i(V_{it}) \sum_{m_i}^{\overline{m}_i} c_i^{m_i} q_{it}^{m_i} - u_t^\ell - P_t^\ell \geq 0, \qquad \ell \in \mathcal{L} \tag{6.12}$$

$$u_t^\ell \geq 0, \qquad \ell \in \mathcal{L} \tag{6.13}$$

$$QT_{it} = \sum_{m_i=1}^{\overline{m}_i} q_{it}^{m_i}, \qquad i = 1, \cdots, N \tag{6.14}$$

$$\bar{q}_{it}^{m_i} - q_{it}^{m_i} \geq 0, \qquad i = 1, \cdots, N, \; m_i = 1 \cdots, \overline{m}_i \tag{6.15}$$

$$q_{it}^{m_i} \geq 0, \qquad i = 1, \cdots, N, \; m_i = 1 \cdots, \overline{m}_i \tag{6.16}$$

$$Ax = b \tag{6.17}$$

$$Bx \geq d \tag{6.18}$$

où :

- u_t^ℓ : variables de surplus représentant la production excédant la demande minimale en puissance électrique,
- x : vecteur de l'ensemble des variables de décisions V_{it}, QT_{it} et QD_{it},
- A : matrice des coefficients de l'ensemble des contraintes linéaires d'égalité (y compris celles de conservation de l'eau),
- B : matrice des coefficients de l'ensemble des contraintes linéaires d'inégalité (y compris celles des bornes).

Le lagrangien associé à ce modèle s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} L \stackrel{\text{def}}{=} F \; &+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \lambda_t^\ell G_t^\ell + \sum_{t=1}^{T} \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \varpi_t^\ell u_t^\ell + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \mu_{it} \left(QT_{it} - \sum_{m_i=1}^{\overline{m}_i} q_{it}^{m_i} \right) \\ &+ \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \sum_{m_i=1}^{\overline{m}_i} \gamma_{it}^{m_i} \left(\bar{q}_{it}^{m_i} - q_{it}^{m_i} \right) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \sum_{m_i=1}^{\overline{m}_i} \nu_{it}^{m_i} q_{it}^{m_i} \\ &+ \xi' (Ax - b) + \zeta' (Bx - d) \end{aligned} \tag{6.19}$$

où les multiplicateurs (dits de L-K-T) $\lambda_t^\ell \geq 0$, $\varpi_t^\ell \geq 0$, μ_{it}, $\gamma_{it}^{m_i} \geq 0$, $\nu_{it}^{m_i} \geq 0$, ξ et $\zeta \geq 0$ sont associés respectivement aux contraintes (6.12)–(6.18) (ξ' et ζ' étant les transposés des vecteurs colonnes ξ et ζ).

Sous l'hypothèse voulant que la matrice A soit de plein rang, il est facile de vérifier que cette dernière formulation du modèle (PCT) remplit les conditions de régularité de Mangasarian-Fromovitz [57]. On note que ces conditions de régularité assurent l'existence d'un ensemble (borné) de multiplicateurs de L-K-T.

Maintenant, en un point de L-K-T, on doit avoir nécessairement pour chaque sous-variable $q_{it}^{m_i}$ (avec $i \in I_\ell$) :

$$\frac{\partial L}{\partial q_{it}^{m_i}} = \lambda_t^\ell \, \Phi_i(V_{it}) \, c_i^{m_i} - \mu_{it} - \gamma_{it}^{m_i} + \nu_{it}^{m_i} = 0 \tag{6.20}$$

$$\gamma_{it}^{m_i} \left(\bar{q}_{it}^{m_i} - q_{it}^{m_i} \right) = 0 \tag{6.21}$$

$$\nu_{it}^{m_i} \, q_{it}^{m_i} = 0 \tag{6.22}$$

Dans ce qui suit, on démontre que si $q_{it}^{m_i} < \bar{q}_{it}^{m_i}$, alors :

$$q_{it}^{m_i+1} = \cdots = q_{it}^{\overline{m}_i} = 0.$$

Pour cela, on considère que l'inégalité $q_{it}^{m_i} < \bar{q}_{it}^{m_i}$ est vérifiée et on suppose (par contradiction) qu'il existe un $\hat{m}_i$ ($m_i < \hat{m}_i \leq \overline{m}_i$) tel que $q_{it}^{\hat{m}_i} > 0$. Des équations de complémentarité (6.21) et (6.22), il s'en suit alors que $\gamma_{it}^{m_i} = 0$ et $\nu_{it}^{\hat{m}_i} = 0$. Ainsi, d'après l'équation (6.20), on aura :

$$\lambda_t^\ell \, \Phi_i(V_{it}) \, c_i^{m_i} - \mu_{it} + \nu_{it}^{m_i} \; = 0 \tag{6.23}$$

$$\lambda_t^\ell \Phi_i(V_{it})\, c_i^{\bar{m}_i} - \mu_{it} - \gamma_{it}^{\bar{m}_i} = 0 \tag{6.24}$$

La concavité de la fonction $P_i^{ref}(\cdot)$ assure que les pentes des morceaux décroissent : $c_i^1 > c_i^2 > \cdots > c_i^{\bar{m}_i}$. Ainsi, en retranchant (6.24) de l'équation (6.23), on obtient :

$$\underbrace{\lambda_t^\ell}_{\geq 0} \underbrace{\Phi_i(V_{it})(c_i^{m_i} - c_i^{\bar{m}_i})}_{>0} + \underbrace{\nu_{it}^{m_i} + \gamma_{it}^{\bar{m}_i}}_{\geq 0} = 0 \tag{6.25}$$

Si $\lambda_t^\ell \neq 0$ on obtient une contradiction. Par contre, si $\lambda_t^\ell = 0$, alors puisque la dérivée du lagrangien par rapport à la variable u_t^ℓ doit s'annuler en tout point de L-K-T, on obtient :

$$\underbrace{\pi_t}_{>0} - \underbrace{\lambda_t^\ell}_{=0} + \underbrace{\varpi_t^\ell}_{\geq 0} = 0 \tag{6.26}$$

d'où une contradiction.

En conclusion, en tout point de L-K-T, les sous-variables $q_{it}^{m_i}$ sont toujours remplies de gauche à droite. □

Suite à ce résultat, la reformulation du modèle (PCT) se prête bien au traitement par la méthode PLS, aussi bien par toutes les autres méthodes d'optimisation non-linéaire différentiable (y compris la méthode du lagrangien augmenté et celle des points intérieurs).

Il est important de noter que la seule hypothèse considérée dans la démonstration de la proposition 5 est la concavité de la fonction de production $P_i^{ref}(\cdot)$ (avec $\pi_t > 0$ et $\Phi_i(V_{it}) > 0$ par leur définition).

Par ailleurs, il est facile de démontrer que tout point de L-K-T du problème (PCT) est un maximum local. Pour illustrer cette affirmation, soit $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ un point de L-K-T du problème de maximisation (PCT) où $\bar{\mathbf{x}}$ englobe toutes les variables de décisions du

problème et $\bar{\mathbf{y}}$ représente l'ensemble des multiplicateurs de L-K-T associés au point $\bar{\mathbf{x}}$. De l'équation (6.26), on déduit la relation suivante (vérifiée pour toute variable u_t^ℓ) :

$$\begin{aligned} & \pi_t = \bar{\lambda}_t^\ell - \bar{\omega}_t^\ell \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad & \pi_t + \bar{\lambda}_t^\ell - \bar{\omega}_t^\ell \neq 0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

D'où la non satisfaction de l'une des conditions nécessaires de L-K-T permettant de qualifier le point $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ comme un minimum local. Ainsi, on peut conclure que tout point de L-K-T du problème (PCT) est un maximum local. Toutefois, vu la non-convexité du modèle, ce maximum local ne peut toujours être qualifié comme une solution optimale globale. Ceci est dû principalement à la présence des contraintes de type (6.12). Ces dernières contiennent la somme de produits des fonctions $P_i^{ref}(\cdot)$ et $\Phi_i(\cdot)$. Même si le produit de ces deux fonctions définit un terme pseudo-concave à l'intérieur de leur domaine de définition, leur somme, par contre, représente une fonction qui n'est pas quasi-concave.

6.5 Tests numériques

L'algorithme PLSND (PLS appliqué au problème non-différentiable (PCT)) présenté dans ce chapitre a été implanté (en langage hybride C/C++) en utilisant l'optimiseur CPLEX pour résoudre les différents programmes linéaires construits à l'étape 1 de l'algorithme. Pour pouvoir juger de la qualité de la PLSND, on propose une étude comparative des performances de cette méthode, du lagrangien augmenté et des points intérieurs. À cette fin, pour une implantation de ces deux derniers algorithmes, on a utilisé les deux librairies de codes commerciaux MINOS (pour le lagrangien augmenté) et LOQO (pour les points intérieurs). Du point de vue informatique, ces deux codes commerciaux présentent une grande flexibilité qui permet de les utiliser comme des sous-routines à l'intérieur du code écrit en langage C/C++ ou en Fortran.

6.5.1 Problèmes tests

Les tests présentés dans cette section ont été effectués sur des données relevant de trois systèmes hydriques notés A, B et C. Le système A comprend 3 ouvrages dont les réservoirs ont une capacité d'emmagasinement très faibles. Le deuxième système B (composé de 6 ouvrages) est caractérisé par trois réservoirs de grande capacité, un seul réservoir de capacité relativement moyenne et deux petits réservoirs. Enfin, le troisième système hydrique C est une disposition (en cascade) de 12 centrales hydroélectriques alimentées par des réservoirs d'une capacité relativement moyenne.

En pratique, dans la gestion à court terme d'une rivière, on considère un horizon de temps couvrant 3 à 7 jours de planification. Ainsi, pour étudier la sensibilité des algorithmes à la durée de planification, on a considéré deux horizons ayant respectivement 72 et 168 heures. Par la suite, on désigne par A1 et A2 le système hydrique A avec un horison de 72 et 168 heures respectivement et similairement pour les deux autres systèmes B et C. On note que le pas de temps du premier système est d'une demi-heure alors que celui de deux derniers système (B et C) est d'une heure.

Le tableau 6.1 donne les dimensions des problèmes relatifs aux trois systèmes et aux deux horizons considérés. Dans ce tableau, la première et la troisième lignes donnent respectivement le nombre total des variables et des contraintes de chaque problème (# Var. et # Contr., en abrégé) alors que la deuxième et la quatrième ligne donnent respectivement le pourcentage des variables et des contraintes non-linéaires (% Var. NL. et % Contr. NL., en abrégé). On note que les contraintes de bornes sur les variables ne sont pas prises en compte dans ce tableau.

Tableau 6.1 – Dimension des six problèmes tests

	A1	A2	B1	B2	C1	C2
# Var.	2016	4704	1872	4368	3600	8400
% Var. NL.	64%	64%	69%	69%	72%	72%
# Contr.	576	1344	504	1176	936	2184
% Contr. NL.	25%	25%	14%	14%	7%	7%

6.5.2 Analyse de performances

L'approche suivie dans cette analyse de performances consiste, dans une première partie, à présenter certains aspects numériques des résultats obtenus par application de l'approche PLSND. Ensuite, on procède à une étude comparative entre ce dernier algorithme et les deux autres algorithmes du lagrangien augmenté et points intérieurs implantés respectivement en MINOS et LOQO.

Dans l'analyse des performances de l'algorithme PLSND, on a utilisé les trois indicateurs suivants :

- nombre d'itérations de la boucle extérieure, c'est à dire le nombre de mises à jour du vecteur de paramètres w (ce nombre d'itérations de la boucle extérieure sera noté par "# It. NL."). Pour les tests qui viennent, le vecteur du paramètre w (initialement mis à la valeur 50) est multiplié par le facteur 2 à chacune de ses mises à jour.
- nombre d'itérations de la boucle intérieure, c'est à dire le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre une instance du problème $PCL(w)$ par linéarisation successive (ce nombre d'itérations de la boucle intérieure sera noté par "# It. LP.").
- temps de calcul (la machine utilisée est un Pentium II 350 MHz).

Le tableau 6.2 résume les résultats obtenus par la PLSND. D'une manière générale, l'initialisation du vecteur de pénalités à une valeur appropriée réduit, de manière très

Tableau 6.2 – Performances de l'algorithme PLSND

Systèmes	A1	A2	B1	B2	C1	C2
# It. NL.	1	1	1	1	1	1
# It. LP.	16	18	18	27	10	11
Temps CPU (s)	3.9	15.9	3.0	14.5	7.1	39.8

significative, le nombre d'itérations de la boucle extérieure de l'algorithme PLS. Pour le modèle de la gestion à court terme d'une rivière, l'interprétation économique des variables duales (ou multiplicateurs de L-K-T) associées aux contraintes de demande en énergie électrique est étroitement liée au prix unitaire d'un mégawatt-heure à chaque période de l'horizon de planification. Ainsi, en choisissant une borne supérieure appropriée sur les valeurs optimales des variables duales, on peut s'attendre à ce que l'algorithme PLSND converge en une seule itération non-linéaire (voir théorème 1). Les résultats du tableau 6.2 confirment cette constatation. On note que dans cette série de tests, les paramètres de pénalité (associées aux contraintes de demande en énergie électrique) prennent, comme valeur initiale, le prix maximal d'un mégawatt-heure le long d'horizon de planification (soit, par exemple, $\$50/MW.h$).

Le tableau 6.3 résume l'étude comparative entre ce dernier algorithme et ceux des deux librairies MINOS et LOQO. Il est important de noter que les trois algorithmes débutent de la même solution initiale. De manière générale, on constate que les performances de PLSND et LOQO sont sensiblement comparables pour la plupart des problèmes tests. Cependant, LOQO performe un peu mieux pour certains problèmes de grande taille. Cependant, alors que les performances de PLSND et LOQO sont prometteuses, il n'en vas pas de même pour MINOS. Ainsi, il est clair que ce dernier algorithme est loin d'être avantageux dans une implantation (par exemple, en temps réel) de la gestion à court terme d'une rivière.

Tableau 6.3 – Performances de PLSND vis-à-vis LOQO et MINOS

Algorithmes	*PLSND*		*LOQO*		*MINOS*	
Systèmes	CPU (s)	Obj ($)	CPU (s)	Obj ($)	CPU (s)	Obj ($)
A1	3.9	312326.7	3.7	312326.8	66.9	312326.8
A2	15.9	727841.6	14.4	727841.3	382.8	727841.3
B1	3.0	2269349.2	4.5	2269349.2	14.7	2269349.2
B2	14.5	5287434.6	12.2	5287435.0	106.5	5287435.0
C1	7.1	866580.8	8.9	866580.7	80.7	866580.7
C2	39.8	1639999.9	27.3	1640000.0	534.1	1640000.0

6.5.3 Visualisation des résultats

Le but de cette section est de présenter graphiquement certains résultats obtenus de problèmes tests. Par souci d'alléger cette visualisation graphique, on se contente de présenter certains résultats de deux systèmes hydriques A et B (comportant moins d'ouvrages). Les figures 6.1 et 6.2 schématisent la configuration de ces deux systèmes.

Du fait des capacités de stockage des réservoirs du système A (voir figure 6.1), on constate que ce dernier est quasiment au fil de l'eau. Ainsi, la hauteur de chute (disponible aux groupes des centrales) peut connaître une variation non négligeable d'une période à l'autre de l'horizon. Cette variation est fonction de débits turbinés (ou déversés) et de volumes en apports naturels.

La figure 6.3 trace le profil de production du système A en parallèle avec celui du prix sur le marché d'un mégawatt-heure. Du fait de la variabilité du prix, la production de puissance (et, par conséquent, les niveaux des réservoirs) suivent une tendance évolutive qui se synchronise souvent avec les pointes de la courbe du prix de l'électricité. De manière générale, l'optimisation a tendance à chercher un bon compromis entre maintenir les niveaux des réservoirs à leur maximum d'exploitation (et, par conséquent, turbiner à une hauteur de chute très élevée) et produire durant le moment opportun où le prix de l'électricité est très élevé. Par ailleurs, du point de vue de

l'efficacité des centrales, on constate (sur la figure 6.4) que les petits réservoirs avals (2 et 3) se remplissent au détriment du réservoir amont 1. Ce type de comportement, souvent constaté dans la plupart des systèmes comportant de petits réservoirs, s'explique par un gain siginificatif en terme de hauteur de chute au niveau des centrales situées au pied de petits résevoirs. Quant à la variation importante des réservoirs 2 et 3 à la fin de l'horizon (voir figure 6.4), elle s'explique par les conditions finales imposées sur le système A ; elles consistent à restaurer, au moins, les niveaux initiaux de ses réservoirs à la fin de l'horizon.

La figure 6.2 montre un bon exemple d'un système hybride, contenant à la fois des résevoirs de grande, moyenne et petite capacité de stockage. En outre, la configuration du système B semble bien dimensionnée dans le sens que les réservoirs 3 et 4 (de capacité relativement faible) sont encadrés par deux lacs (réservoirs 2 et 5) de grande envergure. Ainsi, pourvu qu'il soit averti suffisament à l'avance, ce dernier système offre beaucoup de flexibilité pour l'absorption de certaines situations ou événements extrêmes. C'est le cas des apports naturels en abondance survenant, par exemple, lors des périodes de grande crue. Pour illustrer cette dernière situation, on a supposé, au niveau du résevoir 3 du système B, une crue de pointe (de $3000m^3/s$) prolongée durant 14 heures. Cette crue est supposée être survenue 48 heures après le début de planification.

La réponse de l'optimisation à cette situation est représentée à la figure 6.5. Celle-ci trace, sur le premier axe des ordonnées, l'évolution des niveaux des réservoirs 2 à 5 et, sur le second axe des ordonnées, le profil des apports naturels et des déversements des résevoirs 3 et 4 respectivement. En suivant l'évolution du niveau du résevoir 3, on constate que l'optimisation a anticipé la crue de pointe en creusant suffisament d'altitude aux premières périodes de l'horizon. Bien que les groupes de la centrale 3 produisent à leur capacité maximale (avec un rendement relativement faible), l'optimisation, par contre, a récupéré presque la totalité des débits de la

crue (ces derniers auraient dus être déversés pour assurer la sécurité du système). Ainsi, aucun déversement n'a été signalé au niveau du déversoir 3. Par contre, vu la contrainte d'exploitation imposée sur le niveau maximal du résevoir 4, un débit de $95m^3/s$ est déversé au long d'un sous-horizon de 15 heures.

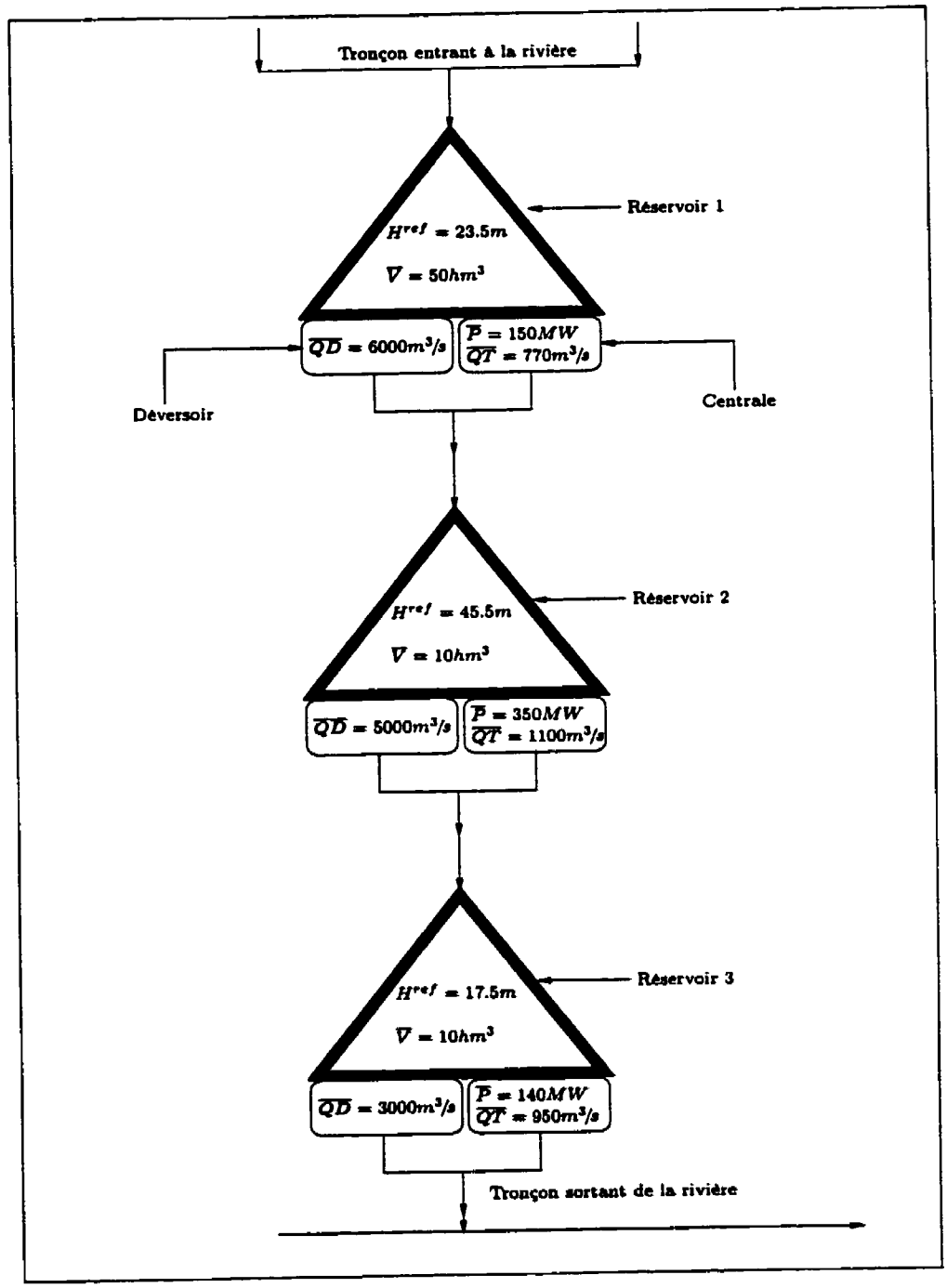

Figure 6.1 – Configuration du système hydrique A

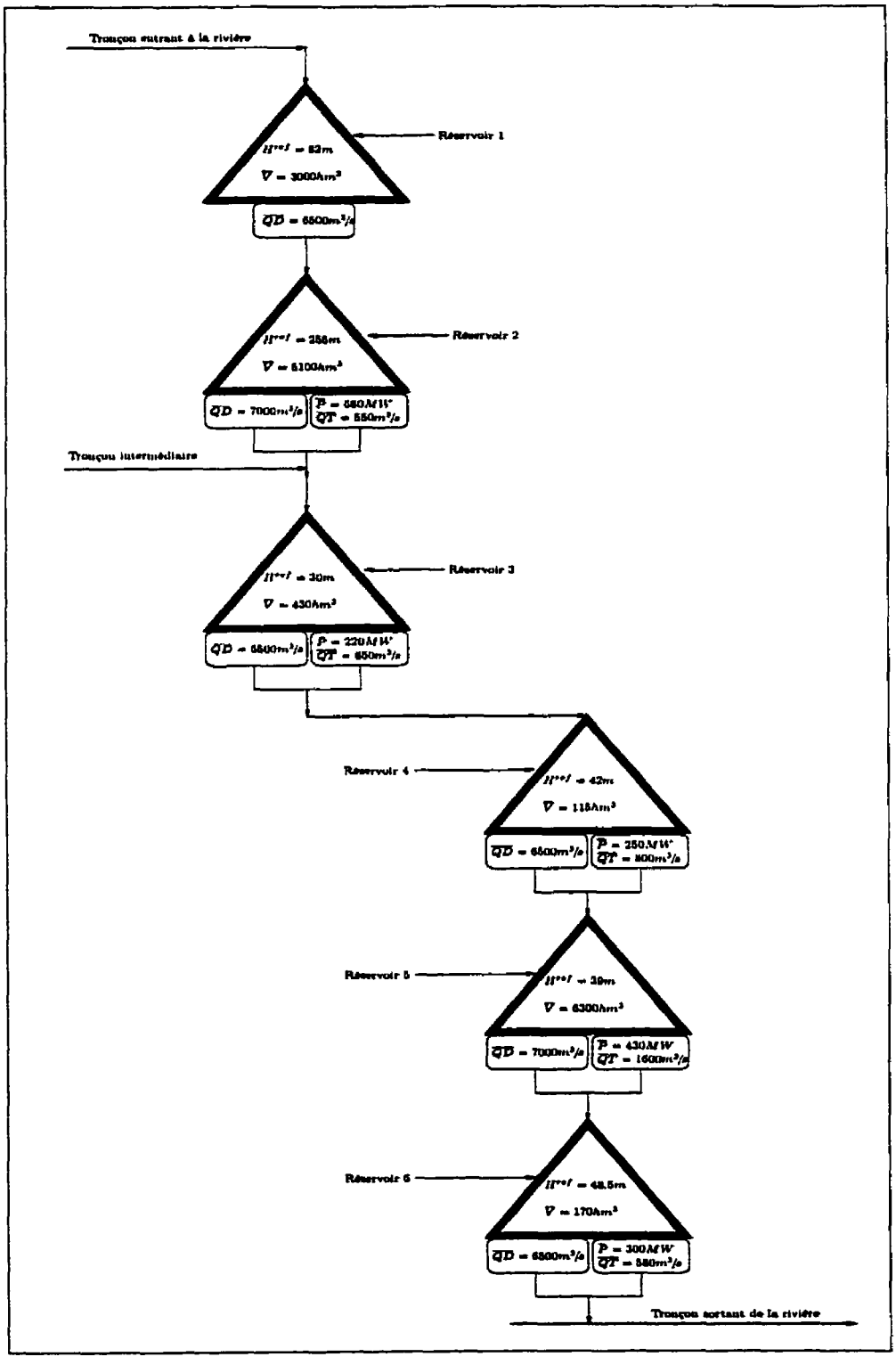

Figure 6.2 – Configuration du système hydrique B

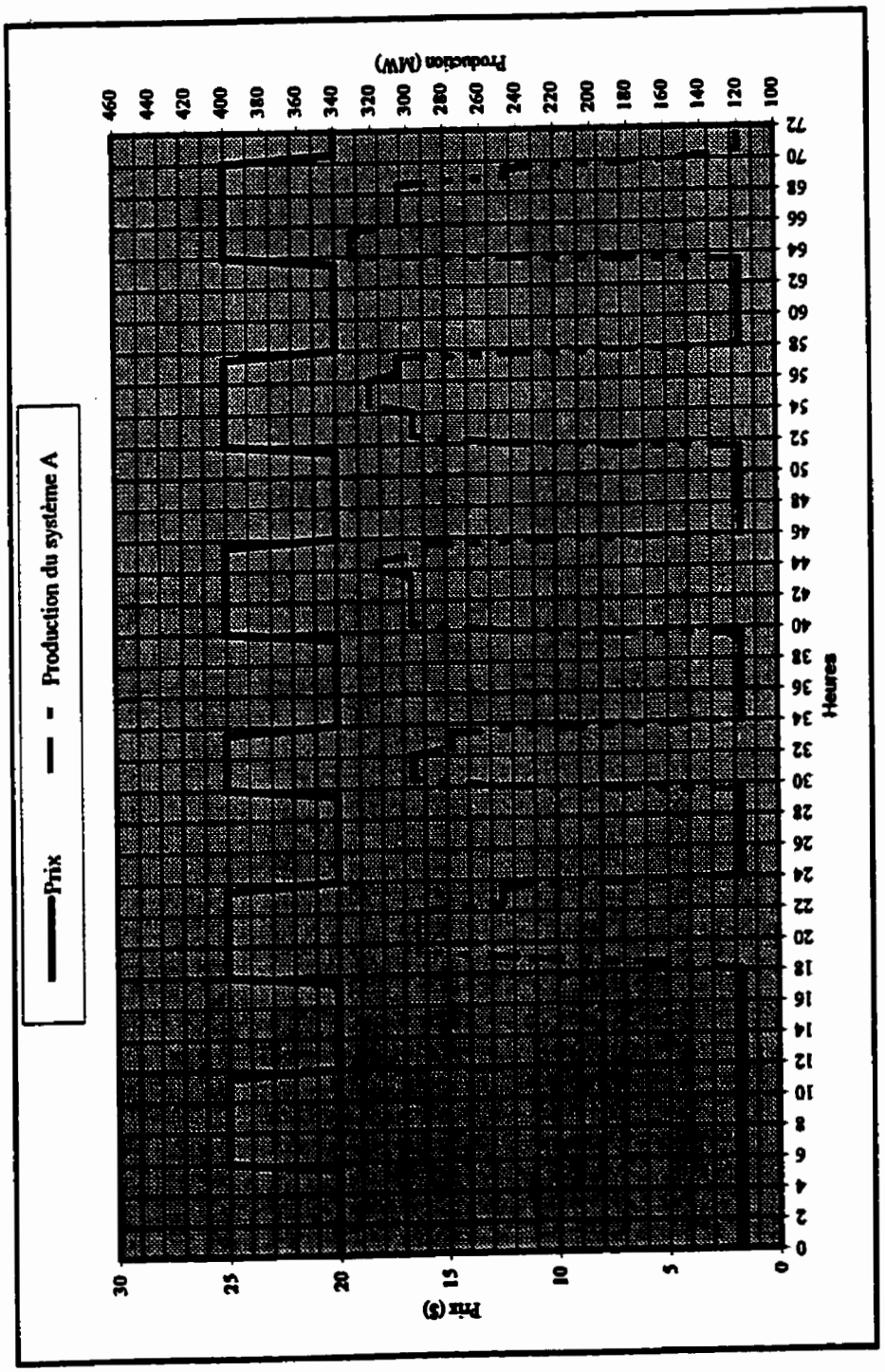

Figure 6.3 – Evolution de la production du système A en parallèle avec le prix

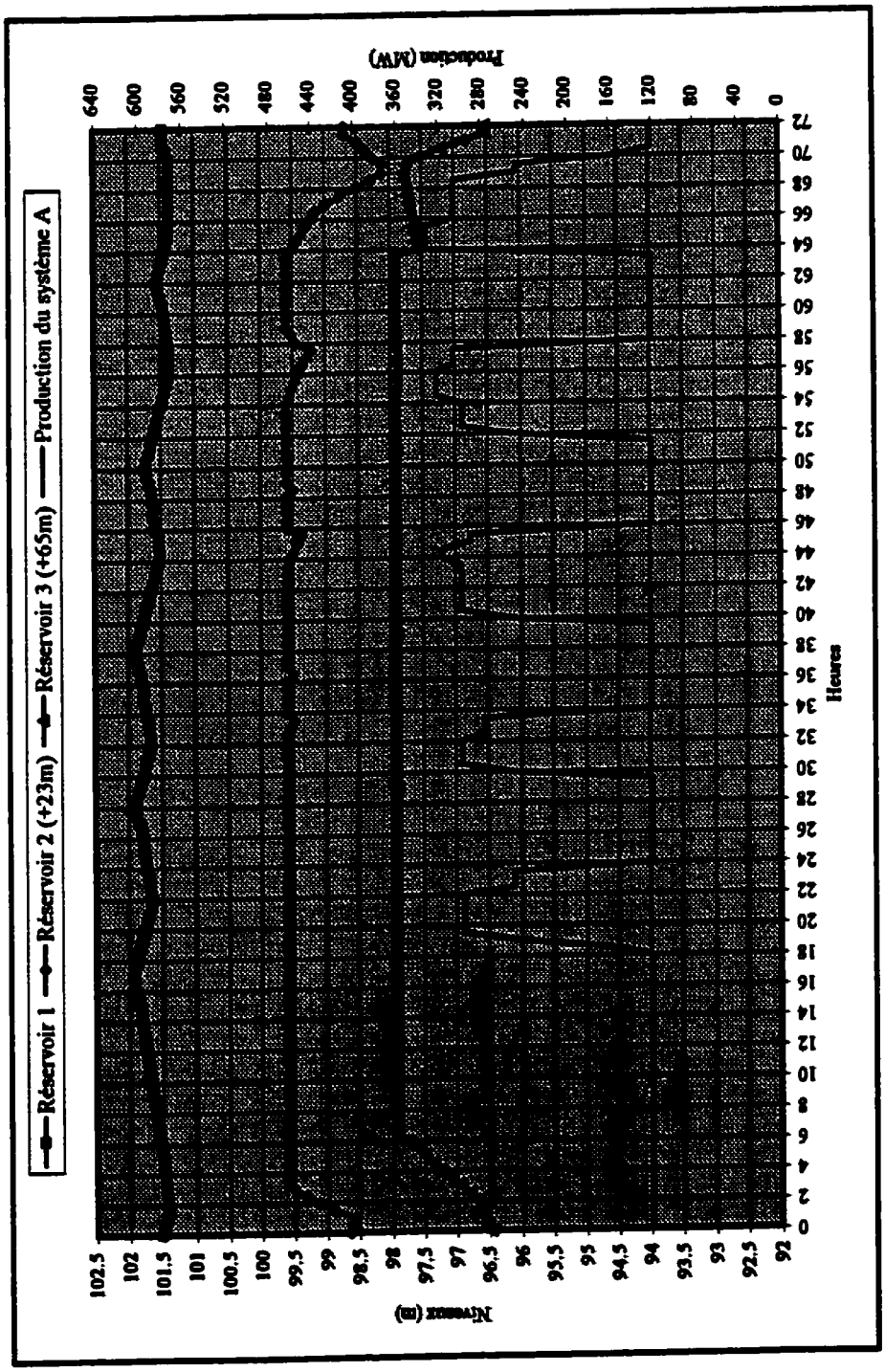

Figure 6.4 – Évolution des niveaux des réservoirs du système A

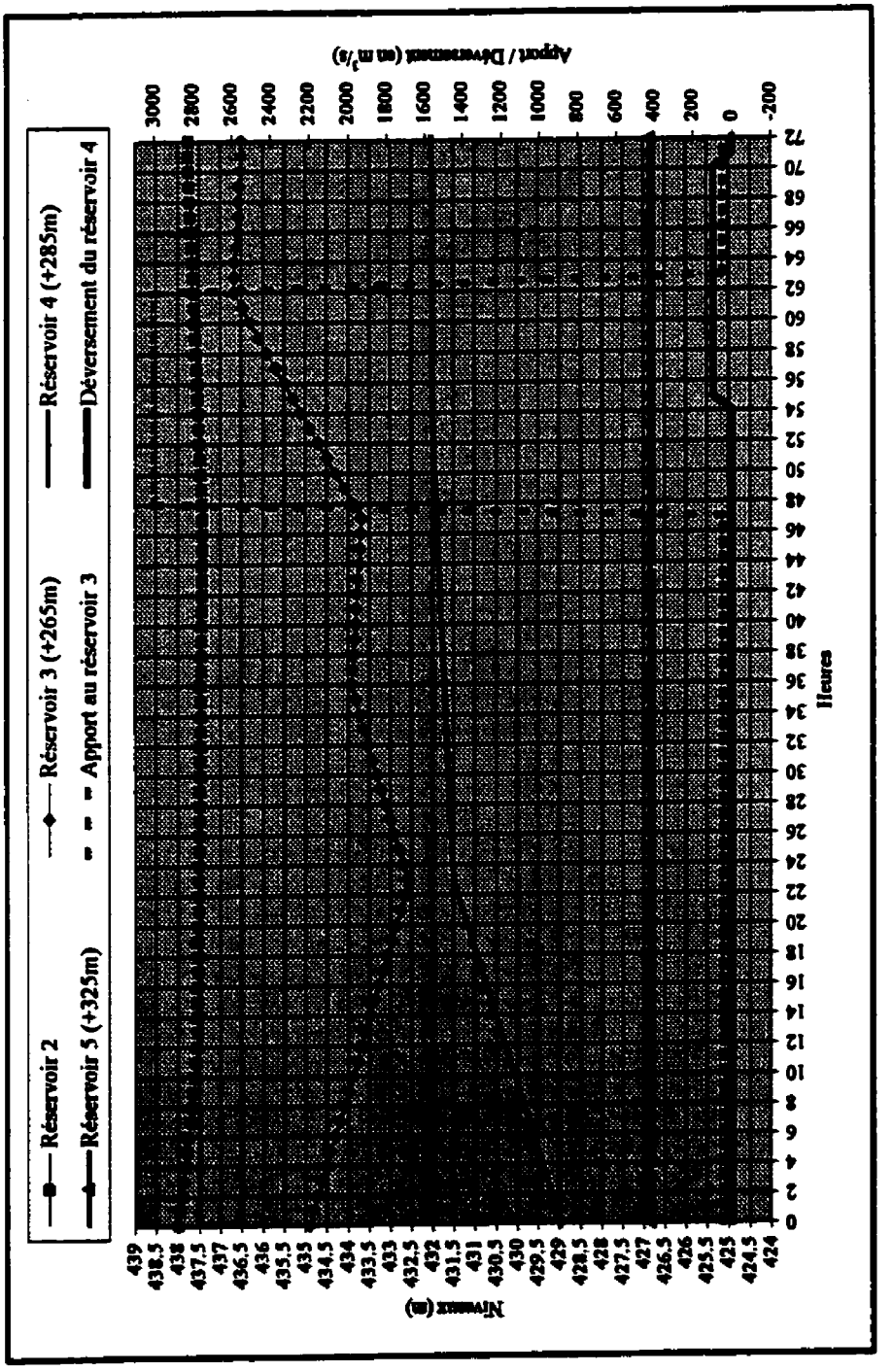

Figure 6.5 – Évolution des niveaux des réservoirs du système B

Conclusion

Dans cette thèse, on a adopté dans l'exposé du sujet une approche constructive visant à introduire, par degré de difficulté, les multiples facettes du problème réel. Ainsi en partant des problèmes liés à la gestion des centrales et en arrivant à la gestion à court terme des réservoirs d'une rivière, on a présenté les particularités de chaque problème et fait des liens avec les autres problèmes qui le suivent dans la hiérarchie du problème réel.

En temps réel, on a proposé certaines extensions de la formulation conventionnelle du problème de chargement optimal. Ces extensions portent, d'une part, sur l'intégration des contraintes de capacité tant sur le réseau hydraulique que sur le réseau électrique et, d'autre part, sur la prise en compte des conditions hydrauliques en incorporant les pertes énergétiques au niveau de la centrale.

En ce qui concerne la planification des arrêts-démarrage des groupes, on a mis l'accent sur l'importance pratique et économique du problème dans la gestion des ressources hydroélectriques d'une rivière. Également, on a proposé une méthode d'optimisation globale basée sur un schéma de décomposition de Benders et l'algorithme de programmation dynamique.

Enfin, pour la gestion à court terme d'une rivière, on a proposé un modèle mathématique assez général qui tient compte, d'une part, de la réalité physique des ouvrages hydrauliques (ou hydroélectriques) et, d'autre part, des règles de gestion ou d'exploitation qui les régissent. En outre, les résultats obtenus, soit par l'algorithme de programmation linéaire successive (PLSND) ou par les points intérieurs (LOQO), semblent être, en général, très encourageants. Ainsi, ces deux algorithmes peuvent

être choisis, comme des algorithmes candidats, dans un système de gestion à court terme des ressources hydroélectriques d'une rivière.

En définitive, les développements théoriques et algorithmiques de la thèse (ainsi que ses retombées pratiques en matière de production de l'énergie hydroélectrique) constituent une contribution à la résolution d'un problème réel complexe de grande ampleur. On envisage que les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse puissent ouvrir de nouveaux horizons à la modélisation et la résolution de certains aspects aléatoires du problème comme, par exemple, les aléas des apports naturels, l'incertitude de la demande en énergie électrique et, enfin, la volatilité des prix dans un marché d'énergie déréglémenté et fortement concurrentiel.

Bibliographie

[1] BAKER, T.E. et LASDON, L.S. (1985). Successive linear programming at Exxon. *Management Sciences*, 31 :264–274.

[2] BAKIRTZIS, A., PETRIDIS, V. et KAZARLIS, S. (1994). Genetic algorithm solution to the economic dispatch problem. *IEE Proc. Gener. Transm. Distrib.*, 141(4) :377–382.

[3] BATUT, J. et RENAUD, A. (1992). Daily Generation scheduling optimization with transmission constraints : A new class of algorithms. *IEEE Trans. on Power Systems*, 7(3) :982–989.

[4] BAZARAA, M.S., SHERALI, H.D. et SHETTY, C.M. (1993). *Nonlinear programming : Theory and algorithms.* John Wiley and Sons, New York, second edition.

[5] BELLMAN, R.E. (1957). *Dynamic programming.* Princeton University Press, PRENCETON, N.J.

[6] BERNHOLTZ, B. (1960). Optimum allocation of disharge to units in a hydro-electric generating station. *SIAM Review*, 2(4) :247–258.

[7] BERTSEKAS, D.P., LUER, G.S., SANDELL, N.R. et POSBERGH, T.A. (1983). Optimal short-term scheduling for large scale power systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 28(1) :1–11.

[8] BOSCH, P.P.J. et HONDERD, G. (1985). A solution of the unit commitment problem via decomposition and dynamic programming. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 104(7) :1684–1690.

[9] BRÄNNLUND, H., SJELVGREN, D. et BUBENKO, J.A. (1988). Short term generation scheduling with security constraints. *IEEE Trans. on Power Systems*, 3(1) :310–316.

[10] CARLIER, M. (1986). *Hydraulique générale et appliquée.* Eyrolles, Paris.

[11] CAROE, C.C., NOWAK, M.P., ROMISCH, W. et SCHULTZ, R. (1999). Primal and dual methods for unit commitment in a hydro-thermal power system. *à apparaître dans Proceedings 13th Power Systems Computation Conference (Trondheim 1999).*

[12] CARPENTIER, P., COHEN, G., CULIOLI, J.-C. et RENAUD, A. (1996). Stochastic optimization of unit commitment : A new decomposition framework. *IEEE Trans. on Power Systems*, pages 1067–1073.

[13] CHANCELIER, J.P. et RENAUD, A. (1994). Daily generation scheduling : Decomposition methods to solve the hydraulic problems. *Electrical Power and Energy Systems*, 16(3) :175–181.

[14] CHOWDHURY, B.H. et RAHMAN, S. (1990). A review of recent advances in economic dispatch. *IEEE Trans. on Power Systems*, 5(4) :1248–1257.

[15] COHEN, A.I. et YOSHIMURA, M. (1983). Branch and Bound algorithm for unit commitment. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 102(2) :441–451.

[16] DAVIS, C.V. et SORENSEN, K.E. (1969). Hydraulic Machinery. In *Handbook of Applied Hydraulics*, pages 48–49. McCraw Hill, third edition.

[17] FAURE, P. et HUARD, P. (1965). Résolution de programmes mathématiques à fonction non linéaire par la méthode du gradient réduit. *Revue Française de Recherche Opérationnelle*, 36 :167–206.

[18] FISHER, M.L. (1973). Optimal solution of scheduling problems using Lagrange multipliers. *Operations research*, 25(2) :387–403.

[19] FRAUENDORFER, K. et GLAVITSCH, H. (1992). *Optimization in planning and operation of electric power systems.* Physica-Verlag, Switzerland.

[20] GAUVIN, J., PARENT, P. et SAVARD, G. (1986). Répartition optimale de la puissance dans une centrale hydraulique à réserve pompée. *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, 20(1) :1–18.

[21] GEOFFRION, A.M. (1972). Generalized Benders Decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10 :237–260.

[22] GINOCCHIO, R. (1978). *L'Énergie hydraulique.* Eyrolles, Paris.

[23] HABIBOLLAHZADEH, H. et BUBENKO, J.A. (1986). Application of decomposition techniques to short-term operation planning of hydro-thermal power system. *IEEE Trans. on Power Systems*, 1(1) :41–47.

[24] HABIBOLLAHZADEH, H. et FRANCES, D. (1990). A new generation scheduling program at Ontario-Hydro. *IEEE Trans. on Power Systems*, 5(1) :65–72.

[25] HACHEM, S., HAMMADIA, A. et BRETON, M. (1997). Extensions of the unit loading problem. *Waterpower'97*, 1115–1123.

[26] HACHEM, S., WELT, F., HAMMADIA, A. et BRETON, M. (1997). Dynamics models for real time management of hydroplants. *Hydropower'97*, pages 341–346.

[27] HALL, W.A., BUTCHER, W.S. et ESOGBUE, A. (1968). Optimization of the operation of a multiple purpose reservoir by dynamic programming. *Water Resources Research*, 4(3) :471–477.

[28] HANSEN, P. et MLADENOVIĆ, N. (1996). Simultaneous static unit commitment and economic dispatch by dynamic programming. Technical Report G-96-26, GERAD, École Polytechnique de Montréal.

[29] HAPP, H.H. (1977). Optimal power dispatch - A comprehensive survey. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 96(3) :841–854.

[30] HARA, K., KIMURA, M. et HONDA, N. (1966). A method for planning economic unit commitment and maintenance of thermal power systems. *IEEE*

Trans. on Power Apparatus and Systems, 85(5) :427–436.

[31] HEIDARI, M., CHOW, V.T, KOKOTOVIĆ, P.V. et MEREDITH, D.D. (1971). Discrete differential dynamic programming approach to water resources systems optimization. *Water Resources Research*, 7(2) :273–282.

[32] HOBBS, W.J., HERMON, G. et SHEBLÉ, G.B. (1988). An enhanced dynamic programming for unit commitment. *IEEE Trans. on Power Systems*, 3(3) :1201–1205.

[33] IDELCIK, I.E. (1969). *Memento des pertes de charge.* Eyrolles, Paris.

[34] IKURA, Y. et GROSS, G. (1984). Efficient large-scale hydro system scheduing with forced spill conditions. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 103(12) :3502–3520.

[35] JACOBS, J., FREEMAN, G., GRYGIER, J., MORTON, D., SCHULTZ, G, STASCHUS, K. et STEDINGER, J. (1995). SOCRATES : A system for scheduling hydroelectric generation under uncertainty. *Annals of operations research*, 59 :99–133.

[36] KERR, R.H., SCHEIDT, J.L., FONTANA, A.J. et WILEY, J.K. (1966). Unit commitment. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 85(5) :417–421.

[37] KLEIN, E.M. et SIM, S.H. (1994). Discharge allocation for hydro-electric generating stations. *European Journal of Operational Research*, 73(1) :132–138.

[38] KUSIC, G.L. et PUTNAM, H.A. (1985). Dispatch and unit commitment including commonly owned units. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 104(9) :2408–2412.

[39] LAFOND, L. (1997). An optimization model for regional generation scheduling at Hydro-Québec. *Hydropower'97*, pages 259–266.

[40] LARSON, R.E. (1968). *State increment dynamic programming.* A.E.P.C. Inc., New York.

[41] LARSON, R.E. et KECKLER, W.G. (1969). Applications of dynamic programming to the control of water resources systems. *Automatica*, 5 :15–26.

[42] LASDON, L.S. (1970). *Optimization theory for large systems.* The Macmillan Company, London.

[43] LAUER, G.S., SANDEL, N.R., BERTSEKAS, D.P. et POSBERGH, T.A. (1982). Solution of large-scale optimal unit commitment problems. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 101(1) :79–86.

[44] LEE, F.N. (1988). Short-term unit commitment - A new Method. *IEEE Trans. on Power Systems*, 3(2) :421–428.

[45] LEE, F.N. (1991). The application of commitment utilization factor to thermal unit commitment. *IEEE Trans. on Power Systems*, 6(2) :691–698.

[46] LEE, F.N. et BREIPOHL, A.M. (1993). Reserve constrained economic dispatch with prohibited zones. *IEEE Trans. on Power Systems*, 18(1) :246–254.

[47] LEMARÉCHAL, C., PELLEGRINO, F., RENAUD, A. et SAGASTIZÁBAL, C. (1995). Bundle methods applied to the unit commitment problem. *Proceedings of The 17th IFIP-Conference on System Modeling and Optimization*, pages 395–402.

[48] LEVIN, O. (1969). Optimal control of storage reservoir during a flood season. *Automatica*, 5 :27–34.

[49] LIANG, Z.-X. et GLOVER, J.D. (1991). Improved cost functions for economic dispatch computations. *IEEE Trans. on Power Systems*, 6(2) :821–829.

[50] LIANG, Z.-X. et GLOVER, J.D. (1992). A zoom feature for a dynamic programming solution to economic dispatch including transmission losses. *IEEE Trans. on Power Systems*, 7(2) :544–550.

[51] LOAICIGA, H. et MARIÑO, M.A. (1985). An approach to parameter estimation and stochastic control in water resources with an application to reservoir operation. *Water Resources Research*, 21(11) :1575–1584.

[52] LOWERY, P.G. (1966). Generating unit commitment by dynamic programming. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 85(5) :422–426.

[53] MADRIGAL, M. et QUINTANA, V.H. (1999). An interior-point/cutting-plane method to solve unit commitment problems. *à paraître dans IEEE Trans. on*

Power Systems.

[54] MAGEE, T.M., ESCHENBACH, E.A. et ZAGONA, E.A. (1995). Object oriented optimization multi-reservoir management. *Waterpower'95*, pages 1858–1867.

[55] MAIFELD, T.T. et SHEBLÉ, G.B. (1996). Genetic-based unit commitment algorithm. *IEEE Trans. on Power Systems*, 11(3) :1497–1508.

[56] MANGASARIAN, O.L. (1969). *Nonlinear programming.* McGraw-Hill, New York.

[57] MANGASARIAN, O.L. et FROMOVITZ, S. (1967). The Fritz John Necessary Optimality Conditions in The Presence of Equality Constraints. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*, 17 :34–47.

[58] MARIÑO, M.A. et LOAICIGA, H. (1985). Dynamic model for multireservoir operation. *Water Resources Research*, 21(5) :619–630.

[59] MCCORMICK, G.P. (1969). Anti-zig-zagging by bending. *Management Science*, 15 :315–320.

[60] MEIER, W.L. (1967). An optimization method for branching multistage water resource systems. *Water Resources Research*, 3(3) :645–653.

[61] MERLIN, A. et SANDRIN, P. (1983). A new method for unit commitment at Électricité de France. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*,

102(5) :1212–1225.

[62] MINOUX, M. (1984). *Mathematical programming tome I : Theory and algorithms.* John Wiley and Sons, New York.

[63] MUCKSTADT, J.A. et KOENIG, S.A. (1977). An application of Lagrangian ralaxation to scheduling in power generation systems. *Operations Research*, 25(3) :387–403.

[64] MUCKSTADT, J.A. et WILSON, R.C. (1968). An application of mixed-integer programming duality to scheduling thermal generating systems. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 87(12) :1968–1977.

[65] MURRAY, D.M. et YAKOWITZ, S.J. (1979). Constrained differential dynamic programming and its application to multireservoir control. *Water Resources Research*, 15(5) :1017–1027.

[66] MURTAGH, B.A. et SAUNDERS, M.A. (1987). *MINOS 5.1 USER'S GUIDE.*

[67] NILSSON, O. et SJELVGREN, D. (1997). Hydro unit start-up costs and thier impact on the short term scheduling. *IEEE Trans. on Power Systems*, 12(1) :38–44.

[68] NILSSON, O. et SJEVGREN, D. (1996). Mixed-integer programming applied to short-term planning of a hydro-thermal system. *IEEE Trans. on Power Systems*, 11(1) :281–286.

[69] NILSSON, O. et SODER, L. (1997). Daily generation planning of a hydro dominated hydrothermal system. *HydroPower'97*, pages 293–300.

[70] NOPMONGCOL, P. et ASKEW, A.J. (1976). Multilevel incremental dynamic programming. *Water Resources Research*, 12(6) :1291–1297.

[71] OPRICOVIĆ, S. et DJORDJEVIĆ, B. (1976). Optimal long-term control of a multipurpose reservoir with indirect users. *Water Resources Research*, 12(6) :1286–1290.

[72] PALACIOS-GOMEZ, F., LASDON, L.S. et ENGQUIST, M. (1982). Nonlinear Optimization by successive linear programming. *Management Sciences*, 28 :1106–1120.

[73] PICCARDI, C. et SONCINI-SESSA, R. (1991). Stochastic dynamic programming for reservoir optimal control : Dense discretization and inflow correlation assumption made possible by parallel computing. *Water Resources Research*, 27(5) :729–741.

[74] PIEKUTOWSKI, M.R., LITWINOWICZ, T. et FROWD, R.J. (1994). Optimal short-term scheduling for a large-scale cascaded hydro system. *IEEE Trans. on Power Systems*, 9(2) :805–811.

[75] RENAUD, A. (1993). Daily generation management at Électricité de France : From planning towards real time. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 38(7) :1080–1093.

[76] RINGLEE, R.J. et WILLIAMS, D.D. (1963). Economic dispatch operation considering valve throtting losses II - Distribution of system loads by method of dynamic programming. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 82(1) :615–622.

[77] ROBITAILLE, A., ROBERT, S. et WELT, F. (1996). Making Money by improving plant efficiency. *Hydro Review Magazine*, 15(5) :92–98.

[78] ROBITAILLE, A, WELT, F. et LAFOND, L. (1995). Development of a real time river management system for Hydro-Québec's short term operation. *Waterpower'95*, pages 1849–1857.

[79] ROSENTHAL, R.E. (1981). A nonlinear network flow algorithm for maximisation of benefits in a hydroelectric power system. *Operations Research*, 29(4) :763–786.

[80] ROY, T.V. et WOLSEY, L.A. (1986). Valid Inequalities for Mixed 0-1 Programs. *Discrete Applied Mathematics*, 14 :199–213.

[81] RUNAID. (1992). Optimal Load distribution between units in hydro electric plants. Technical report, Hydropower Technologies, Inc, Schenectady, New York.

[82] RUSIC, S. et RAJAKOVIC, N. (1991). A new approach for solving extended unit commitment problem. *IEEE Trans. on Power Systems*, 6(1) :269–275.

[83] RUX, L.M. (1993). An incremental economic dispatch method for cascaded hydroelectric powerplants. *IEEE Trans. on Power Systems*, 8(3) :1266–1273.

[84] S.E.B.J. (1987). *Le complexe hydroélectrique de la grande rivière.* Société d'énergie de la Baie James, Hydro-Québec, Montréal, Québec.

[85] SHEBLÉ, G.B. (1989). Real-time economic dispatch and reserve allocation using merit order loading and linear programming rules. *IEEE Trans. on Power Systems*, 4(4) :1414–1420.

[86] SHEBLÉ, G.B. et BRITTING, K. (1995). Refined genetic algorithm - Economic dispatch example. *IEEE Trans. on Power Systems*, 10(1) :117–123.

[87] SHELDON, L.H. et LOUPIN, P.A. (1995). Optimizing efficiencies of multiunit hydro plants. *Waterpower'95*, pages 748–755.

[88] SHOULTS, R.R., CHANG, S.K., HELMICK, S. et GRADY, W.N. (1980). A practical approach to unit commitment, economic dispatch, and savings allocation for multiple area pool operation with import/export constraints . *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 99(2) :625–633.

[89] SHOULTS, R.R., VENKATESH, S.V., HELMICK, S.D., WARD, G.L. et LOLLAR, M.J. (1986). A dynamic programming based method for developing dispatch curves when incremental heat rate curves are non-monotonically increasing. *IEEE Trans. on Power Systems*, 1(1) :10–17.

[90] SNIEDOVICH, M. (1980). A variance-constrained reservoir control problem. *Water Resources Research*, 16(2) :271–274.

[91] STEDINGER, J.R., SULE, B. et LOUCKS, D. (1984). Stochastic dynamic programming models for reservoir operation optimization. *Water Resources Research*, 20(11) :1499–1505.

[92] SYNDER, W.L., POWELL, H.D. et RAYBURN, J.C. (1987). Dynamic programming approach to unit commitment. *IEEE Trans. on Power Systems*, 2(2) :339–350.

[93] TAKRITI, S., BIRGE, J.R. et LONG, E. (1996). A stochastic model for the unit commitment problem. *IEEE Trans. on Power Systems*, 11(3) :1497–1508.

[94] TSENG, C.L. (1996). On Power System Generation Unit Commitment Problems. Master's thesis, University of California, Berkley.

[95] TURGEON, A. (1980). Optimal Operation of multireservoir power systems with stochastic inflows. *Water Resources Research*, 16(2) :275–283.

[96] VANDERBEI, R. et SHANNO, D.F. (1997). An Interior point Algorithm for Nonconvex Nonlinear Programming. Technical Report SOR-97-21, Statistics and Operations Research, Princeton University, http ://www.sor.princeton.edu/~rvdb.

[97] VANDERBEI, R. et SHANNO, D.F. (1999). An Interior point Algorithm for Nonconvex Nonlinear Programming, Orderings and Higher-Order Methods.

Technical Report SOR-99-5, Statistics and Operations Research, Princeton University, http ://www.sor.princeton.edu/~rvdb.

[98] VARLET, H. (1964). *Turbines hydrauliques et groupes hydroélectriques.* Eyrolles, Paris.

[99] WAIGHT, J.G., BOSE, A.B. et SHEBLÉ, G.B. (1981). Generation dispatch with reserve margin constraints using linear programming. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 100(1) :252–259.

[100] WELT, F. (1995). Règles de similitude pour les fonctions d'agglomération aux ouvrages et centrales. Technical Report POPS/CE/18/1.0, HydroSoft Énergie, filiale d'Hydro-Québec, Montréal Québec.

[101] WOLFE, P. (1963). Methods of nonlinear programming. In R.L. Graves and P. Wolfe, editors, *Recent Advances in Mathematical Programming.*

[102] WONG, K.P. et FUNG, C.C. (1993). Simulated annealing based economic dispatch algorithm. *IEE Proceedings-C*, 140(6) :509–515.

[103] WOOD, A.J. (1982). Spinning reserve constrained static and dynamic economic dispatch. *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, 101(2) :381–388.

[104] WOOD, A.J. et WOLLENBERG, B.F. (1984). *Power generation, operation and control.* Wiley, New-York, first edition.

[105] YAKOWITZ, S. (1979). A non parametric Markov model for daily river flow. *Water Resources Research*, 15(5) :1053–1043.

[106] YAKOWITZ, S. (1982). Dynamic programming applications in water resources. *Water Resources Research*, 18(4) :673–696.

[107] YEH, W.W-G. (1985). Reservoir management and operations models : A state-of-the-art review. *Water Resources Research*, 21(12) :1797–1818.

[108] ZHANG, J.Z., KIM, N.H. et LASDON, L. (1985). An Improved successive linear programming algorithm. *Management Sciences*, 31 :1312–1331.

[109] ZHANG, Y., ZHONG, Q. et QUAN, X. (1991). Optimal real-time control of hydroelectric power using dynamic programming. *Proceedings of Waterpower'91*, pages 839–847.

[110] ZHUANG, F. et GALIANA, F.D. (1988). Towards a more rigorous and practical unit commitment by lagrangian relaxation. *IEEE Trans. on Power Systems*, 3(2) :763–773.