



**Titre:** Convection naturelle en milieu poreux anisotrope-effet du maximum de densité  
Title:

**Auteur:** Ahmed Mahidjiba  
Author:

**Date:** 2001

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Mahidjiba, A. (2001). Convection naturelle en milieu poreux anisotrope-effet du maximum de densité [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8661/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8661/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Luc Robillard, & Patrick Vasseur  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONVECTION NATURELLE EN MILIEU POREUX  
ANISOTROPE - EFFET DU MAXIMUM DE DENSITÉ

AHMED MAHIDJIBA  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 2001



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

**0-612-65544-X**

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

CONVECTION NATURELLE EN MILIEU POREUX  
ANISOTROPE - EFFET DU MAXIMUM DE DENSITÉ

présentée par : MAHIDJIBA Ahmed

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. KAHAWITA René, Ph.D., président

M. ROBILLARD Luc, D.Sc., membre et directeur de recherche

M. VASSEUR Patrick, Ph.D. membre et codirecteur de recherche

M. GALANIS Nicolas, Ph.D, membre

M. PRUD'HOMME Michel, Ph.D., membre

## DÉDICACE

À mes chers parents

À ma femme

À mes deux filles Asmaa et Soumia

À mes frères et sœurs

À toute la famille Mahidjiba

À toute la famille Kalla

À tous mes amis.

## REMERCIEMENTS

La présente thèse a été réalisée sous la supervision du professeur Luc Robillard, directeur de recherche et de Patrick Vasseur, codirecteur de recherche. Tous les travaux de cette thèse ont été menés dans le département de génie mécanique, section aérothermique, de l'École Polytechnique de Montréal. Je désire tout d'abord remercier chaleureusement et vivement messieurs Luc Robillard et Patrick Vasseur pour l'aide appréciable, pour leurs conseils précieux et pour leurs contributions dans la préparation de cette thèse. Ma profonde gratitude et mes remerciements les plus chaleureux vont particulièrement à mon directeur de recherche M. Luc Robillard pour sa disponibilité permanente, pour son orientation efficace et pour ses idées originales qui ont servi à enrichir cette thèse.

Mes vifs et sincères remerciements vont aussi aux professeurs René Kahawita, Michel Prud'homme et Nicolas Galanis pour avoir bien voulu participer au jury, malgré leurs multiples occupations.

Je désire également remercier le personnel du département de génie mécanique et, en particulier, celui de la section aérothermique pour leur aide et leur disponibilité. Mes remerciements vont également au gouvernement du Québec pour la bourse d'étude FCAR et au gouvernement du Canada pour la bourse d'étude CRSNG.

Mes chaleureux remerciements s'adressent à ma femme Sara, mes filles Asmaa et Soumia pour leurs encouragements et leur soutien permanent qui m'ont permis de mener ce travail dans d'excellentes conditions familiales jusqu'à la fin.

Je tiens à remercier chaleureusement mes chers parents qui m'ont soutenu dans toutes mes études avec tous les moyens dont ils disposaient et ce, malgré les milliers de kilomètres qui nous séparent.

Mes remerciements vont également à M. Lamine Kalla et M. Mahmoud Mamou pour leurs aides appréciables et leur soutien permanent et sans relâche durant toute cette période.

Je remercie M. Khaled Benhadji, Nabil Boutana et Frédéric Joly de l'équipe convection, pour leur encouragement et pour l'ambiance qui a régné dans notre équipe. Ma gratitude va aussi à tous mes amis et à tous qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, en particulier M. Karim Settouane, M. Si Youssef Si Chaib, M. Youssef Sahnoune et tous les autres membres du Centre culturel algérien pour leur soutien, leurs encouragements et leur solidarité.

Finalement je dis : Louange à Dieu qui m'a donné la force, le courage et la foi pour avoir réalisé ce travail et pour pouvoir contribuer au développement de la recherche scientifique!

## RÉSUMÉ

Les mouvements convectifs et le transfert de chaleur ont une incidence directe sur la formation ou la suppression de la couverture de glace. Ces mouvements convectifs précédant le gel ou la fonte de la glace jouent un rôle très important sur la rapidité avec laquelle les phénomènes de changement de phase se produisent. Il est important pour les pays nordiques, comme le Canada par exemple, d'étudier les diverses facettes associées au transfert de chaleur convectif dans l'eau au voisinage du point de congélation ( $T = 4^{\circ}C$ ).

L'étude de la convection naturelle pénétrante dans les milieux poreux anisotropes en perméabilité saturés par de l'eau froide a suscité relativement peu d'attention dans le passé. Les matériaux fibreux d'isolation, les formations géologiques (formation de roches), quelques matériaux biologiques, matrices de coulage des métaux, le cœur des réacteurs nucléaires sont quelques exemples de milieux anisotropes qui existent dans la nature ou en industrie. De plus, dans la plupart des études menées dans le passé sur la convection naturelle dans les milieux poreux, la relation entre la densité du fluide saturant la matrice poreuse et la température a été supposée linéaire. Cette hypothèse ne s'applique évidemment pas quand la densité de l'eau passe par son maximum à une température de  $4^{\circ}C$ . Des substances comme le bismuth, l'antimoine et le gallium sont des exemples de matériaux possédant une inversion de leur densité similaire à celle de l'eau. Dans le cas d'une couche horizontale chauffée et refroidie par les parois horizontales, la convection impliquant un maximum de densité est appelée convection pénétrante (penetrative convection) parce que le mouvement convectif résultant de la couche instable du bas pénètre plus ou moins profondément dans la couche stable du haut.

Dans cette thèse la convection impliquant un maximum de densité, c'est-à-dire la convection pénétrante, a été étudiée au sein d'une cavité rectangulaire et horizontale



remplie d'un milieu poreux anisotrope de perméabilité. La couche poreuse est saturée par de l'eau froide dont la densité varie d'une façon non linéaire avec la température, en passant par un maximum. Le milieu poreux est modélisé à l'aide des équations classiques de Darcy. Des conditions aux frontières de type Dirichlet (températures constantes) ont été appliquées sur les parois horizontales (parois actives) de la cavité. Pour le cas d'une couche confinée, nous avons supposé des parois verticales imperméables et adiabatiques. Pour simuler le cas d'une couche infinie, des conditions aux frontières périodiques ont été imposées. Le problème est régi par un ensemble d'équations appelées équations gouvernantes, en l'occurrence l'équation de la conservation de la masse ou l'équation de continuité, l'équation de mouvement et l'équation de l'énergie. Les paramètres de contrôle sur le mouvement convectif au sein de la cavité sont le rapport de forme de la cavité,  $A$ , le nombre de Rayleigh,  $R$ , le rapport de perméabilité,  $K^*$ , l'angle d'orientation des axes principaux de la perméabilité,  $\theta$  et le paramètre d'inversion de densité,  $\gamma$ . Ce dernier détermine la position verticale du maximum de la densité dans le cas de la conduction pure. Lorsque  $\gamma$  prend des valeurs largement supérieures à la valeur 2.0 ( $\gamma \gg 2$ ), nous retrouvons la convection naturelle classique c'est-à-dire le cas où la matrice poreuse est saturée par un fluide ayant une relation linéaire entre la densité et la température. Les nombres de Rayleigh critiques pour différentes conditions ont été déterminés par l'analyse de stabilité linéaire. Notons dès le départ que les Rayleigh critiques ainsi obtenus ne marquent pas un seuil absolu de convection puisque la présence d'un maximum de densité confère un caractère sous-critique à la bifurcation.

### • Stabilité linéaire

L'effet des paramètres de contrôle cités précédemment sur le nombre de Rayleigh critique a été étudié. Les résultats obtenus ont montré que le mouvement convectif qui s'amorce d'abord dans la zone instable du bas de la cavité (près de la paroi inférieure), pénètre de plus en plus dans la partie du haut (près de la paroi supérieure) lorsque  $\gamma$  augmente, pour éventuellement rejoindre la limite supérieure de la cavité pour  $\gamma \geq 2$ . À  $\gamma = 2$ , la couche instable occupe toute la profondeur de la cavité. De façon générale, la

paroi supérieure exerce alors un effet important équivalant à la paroi inférieure sur les cellules convectives en réduisant leurs tailles ainsi que leurs longueurs d'ondes. Cet effet devient de moins au moins important lorsque  $\gamma$  diminue. On assiste alors à l'apparition de nouvelles cellules de convection de faible intensité, appelées cellules secondaires, lesquelles sont superposées aux cellules de forte intensité, déjà existantes, appelées cellules primaires. À  $\gamma = 1$ , l'effet de la paroi supérieure devient quasi-négligeable et n'affecte plus la taille des cellules convectives primaires au bas de la cavité.

L'effet de l'anisotropie sur la structure de l'écoulement pour une valeur constante du paramètre d'inversion plus petite que l'unité a été aussi étudié. Lorsque la perméabilité maximum est dans la direction horizontale, la taille des cellules convectives primaires est maintenue à une hauteur très légèrement au-dessus de la hauteur de la couche instable. Cependant, la longueur de ces cellules est augmentée de sorte que la longueur d'onde critique est plus grande que celle obtenue pour le cas isotrope. Quand la perméabilité maximum est dans la direction verticale, la pénétration des cellules convectives primaires dans la couche stable du haut devient importante.

L'effet de l'angle d'orientation des axes principaux a été également mis en évidence. Les résultats obtenus ont démontré que la longueur d'onde diminue au fur et à mesure que l'angle d'orientation augmente de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ . Toujours pour  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , on constate que les cellules secondaires deviennent incorporées aux cellules convectives primaires.

L'effet de confinement a été considéré en faisant varier le rapport de forme de la cavité. En particulier, nous avons constaté que toute forme de symétrie disparaît lorsque les axes principaux sont obliques et que le maximum de densité est situé entre la paroi supérieure et la paroi inférieure. Cette absence de symétrie explique le comportement particulier selon lequel les nouvelles cellules convectives sont introduites dans le système lorsque le rapport de forme de la cavité augmente.

Dans cette investigation, on a montré comment les propriétés d'anisotropie et les différentes orientations de la perméabilité modifient le seuil de convection, tel qu'il a été établi par l'analyse de stabilité linéaire.

- **Convection d'amplitude finie**

Dans un premier temps, nous avons considéré le cas de la convection naturelle classique, obtenue asymptotiquement quand  $\gamma \gg 2$ . Les résultats obtenus pour le cas d'une couche confinée dont les axes principaux de perméabilité sont inclinés à  $\theta = 45^\circ$  ont montré l'existence de deux différents écoulements à savoir un écoulement dit naturel et un écoulement dit antinaturel, l'écoulement naturel étant celui vers lequel le système converge à partir de conditions initiales ne comportant aucun mouvement. On a remarqué que les cellules convectives qui sont allongées selon la direction de la perméabilité maximum et séparées par des lignes de courant inclinées dans le cas d'une couche infinie sont influencées par les parois latérales qui exercent alors une contrainte additionnelle sur les cellules qui leur sont adjacentes en modifiant leurs formes. Nous avons aussi constaté que les écoulements avec un nombre pair de cellules convectives sont différents de ceux comportant un nombre impair. La multiplicité des solutions a été aussi observée dans cette étude.

Quelques résultats types obtenus dans le cas où la relation densité-température est non linéaire ont indiqué l'existence d'une bifurcation sous-critique, c'est-à-dire l'existence d'un mouvement convectif en deçà de la valeur du nombre de Rayleigh critique prédit par la stabilité linéaire.

## ABSTRACT

Convective motion and heat transfer have a direct influence on the ice cover formation or suppression. Convective motion before the freezing or melting of ice constitutes a very important factor on the rate at which phase changes occur. Studies related to all aspects of that transfer in water near its freezing point ( $T = 4^{\circ}C$ ) are important for northern countries such as Canada, for instance.

The study of penetrative convection in porous media having an anisotropic permeability and being saturated by cold water did not receive much attention in the past. Fibrous isolating materials, geological formations (rock aggregates), materials involved in metal casting, nuclear reactor cores, are a few examples of anisotropic media found in nature or industry. In most studies of the past devoted to natural convection in porous media, the relation between density and temperature has been considered linear. Obviously, that assumption does not hold when water encompasses its maximum density at  $4^{\circ}C$ . Metals such as bismuth, antimony, and gallium have a density inversion similar to water. When a horizontal layer is heated and cooled by its horizontal boundaries, the resulting convection occurring in the presence of a density maximum is called penetrative convection because the motion originating from the lower unstable layer penetrates to various degrees into the originally upper stable layer.

In this thesis, convection involving a maximum density (or penetrative convection) has been studied for the case of rectangular horizontal cavity filled with a porous medium anisotropic in permeability. The porous layer is saturated by cold water whose density varies in a nonlinear way with temperature, through a maximum value. The porous medium is modeled by the classical Darcy equations. Dirichlet boundary conditions (constant temperature) are applied to active boundaries. For the case of a confined layer, vertical boundaries are assumed impermeable and adiabatic. For the case of an infinite layer, periodic boundary conditions are imposed. The problem is defined by

a system of equations, called governing equations, which include the mass conservation equation or continuity equation, the momentum equation and the energy equation. The control parameters for convective motion are the cavity aspect ratio  $A$ , the Rayleigh number  $R$ , the permeability ratio  $K^*$ , the orientation angle  $\theta$  of principal axes and the inversion parameter  $\gamma$ . This last parameter determines the vertical position of the maximum density in pure conduction. When  $\gamma$  takes values much larger than 2.0 ( $\gamma \gg 2$ ) the classical natural convection is recovered, i.e., the porous matrix is then saturated by a fluid with a linear relationship between density and temperature. Critical Rayleigh numbers have been established through a linear stability analysis. One must note that the critical Rayleigh obtained produces such a way does not represent an absolute threshold since the presence of a maximum density produces a subcritical bifurcation.

#### • Linear stability

The effect of the already mentioned control parameters on the critical Rayleigh number has been studied. Results obtained have shown that convection motion originates in the unstable layer at the bottom of the cavity (near the lower boundary), penetrates more and more in the upper part of the cavity (near the upper boundary) and ultimately reaches the upper boundary for  $\gamma \geq 2$ . At  $\gamma = 2$ , the unstable layer covers the whole depth of the cavity. Then, the upper wall exerts in general an important effect, equivalent to the lower boundary, on the convection cells, which consists in decreasing their size and their wavelength. This effect is reduced when  $\gamma$  decreases. One may then notice the occurrence of weak convection cells, called secondary cells, superposed to the already existing strong cells, called primary cells. At  $\gamma = 1$ , the effect of the upper boundary becomes practically negligible and does not affect anymore the size of the primary cells at the bottom of the cavity.

The effect of anisotropy on the flow structure has also been studied for a constant value of the inversion parameter smaller than unity. When the maximum permeability is

in the horizontal direction, the size of the primary convective cells is maintained at a height slightly above the height of the unstable layer. However the length of these cells is increased so that their critical wavelength is larger than for the isotropic case. When the maximum permeability is in the vertical direction, the penetration of the primary convection cells in the upper stable layer becomes more important.

The effect produced by changing the orientation angle of the principal axes has also been evidenced. Results have shown that the wavelength decreases as the orientation angle increases from  $0^\circ$  to  $90^\circ$ . For this situation, we notice that secondary cells are absorbed by primary convective cells.

The confinement effect has been studied by varying the aspect ratio of the cavity. In particular we have observed the absence of any type of symmetry when the principal axes are oblique and when the density maximum is located between the upper wall and the lower wall. This lack of symmetry explains the particular behavior of the system when new convective cells are introduced with increasing aspect ratio.

In the present investigation, we have shown how anisotropic properties and various orientations of the principal axes modify the threshold of convection, as established by the linear stability analysis.

- **Finite Amplitude Convection**

As a first step, we have considered the case of classical natural convection, reached asymptotically for  $\gamma \gg 2$ . Results obtained in the case of a confined layer, with principal axes inclined at  $45^\circ$ , have revealed the existence of two different flows, one termed natural and the other termed anti-natural, the natural flow being the one toward which the system converges from no flow initial conditions. We have observed that convective cells, which are stretched in the direction of the maximum permeability and which are separated by inclined dividing streamlines for a layer of infinite extent, are affected by lateral solid boundaries, those last ones exerting an additional constraint by

modifying the shape of the adjacent cells. We have also observed that convection flows with an even number of cells are different from those having an odd number of cells. The multiplicity of solutions has also been discussed in this thesis.

A few typical results for the case of a nonlinear density-temperature relationship have revealed the existence of a subcritical bifurcation, i.e., the existence of convective motion below the critical Rayleigh number predicted by the linear stability analysis.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	iv
REMERCIEMENTS .....	v
RÉSUMÉ.....	vii
ABSTRACT .....	xi
TABLE DES MATIÈRES .....	xv
LISTE DES FIGURES.....	xviii
LISTE DES TABLEAUX.....	xxv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS .....	xxvi
 INTRODUCTION.....	 1
 CHAPITRE I : REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	
1.1 Introduction.....	7
1.2 Relation densité-température linéaire .....	7
1.3 Relation densité-température non linéaire .....	13
1.3.1 Milieux fluides .....	13
1.3.2 Milieux poreux isotropes.....	17
1.3.3 Milieux poreux anisotropes .....	19
 CHAPITRE II : FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME	
2.1 Définition du problème.....	20
2.2 Équation de Darcy généralisée pour un milieu poreux anisotrope .....	21
2.3 Hypothèse de Boussinesq .....	23
2.4 Équations de base et conditions aux frontières.....	24
2.5 Forme adimensionnelle.....	27
2.6 Paramètre de contrôle et leur interprétation.....	29
2.7. Transfert thermique.....	31



### CHAPITRE III : SOLUTION NUMÉRIQUE

3.1	Introduction.....	33
3.1	Méthode des éléments finis.....	33
3.2.1	Formulation faible du problème.....	35
3.2.2	Discretisation et approximation par éléments finis .....	36
3.3	Critère de convergence .....	39
3.2	Méthode et algorithme de résolution .....	39
3.5	Validation de la méthode de résolution .....	41
3.6	Effet de maillage.....	44

### CHAPITRE IV : ANALYSE DE LA STABILITÉ LINÉAIRE DU SYSTÈME

4.1	Introduction.....	46
4.2	Solution analytique pour le cas $\theta = 0^\circ$ (ou $\theta = 90^\circ$ ) : $\gamma \gg 2$ , $A_m = A$ .....	46
4.3	Solution numérique.....	49
4.3.1	Couche horizontale infinie .....	51
4.3.2	Validation des résultats .....	54
4.3.3	Couche horizontale confinée .....	56
4.3.4	Validation des résultats .....	57

### CHAPITRE V : PRÉSENTATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

5.1	Introduction.....	61
5.2	Stabilité linéaire .....	62
5.2.1	Cas linéaire ( $\gamma \gg 2$ , $A_m = A$ ) .....	62
5.2.2	Cas non linéaire .....	66
5.2.2.1	Couche infinie .....	66
5.2.2.2	Couche confinée.....	77
5.3	Convection d'amplitude finie .....	91
5.3.1	Cas linéaire ( $\gamma \gg 2$ , $A_m = A$ ) .....	91
5.3.1.1	Influence du nombre de Rayleigh $\bar{R}_m$ .....	91

5.3.1.2 Multiplicité de la solution .....	98
5.3.2 Cas non linéaire .....	100
5.3.2.1 Convection sous-critique .....	100
CONCLUSION .....	107
RÉFÉRENCES .....	115

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Variation non linéaire de la densité versus la température (forme quadratique) : maximum de la densité obtenu à $T' = T'_{\max} = 4^{\circ}C$ ..... 13
Figure 2.1	Définition du modèle physique : cavité rectangulaire soumise à des températures uniformes sur les parois du haut et du bas ..... 21
Figure 2.2	Position verticale de la densité maximum $\rho_m$ en conduction pure : (a) $\rho_m$ entre les deux parois horizontales et (b) $\rho_m$ au dessus de la paroi supérieure. .... 29
Figure 3.1	Domaine de calcul après discrétisation ..... 34
Figure 3.2	Élément rectangulaire de Lagrange à neuf nœuds dans le système référentiel..... 37
Figure 3.3	Lignes de courant et isothermes pour le cas $K^* = 1$ , $\gamma = 10^4$ , $\bar{A}_m = 0.8$ et $\bar{R}_m = 200$ ..... 42
Figure 3.4	Lignes de courant et isothermes pour le cas $\gamma = 10^4$ , $A_m = 1$ , $K^* = 0.125$ , $R = 10^4$ et pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison des axes principaux $\theta$ ( $\theta = 0^{\circ}$ , $60^{\circ}$ et $90^{\circ}$ ) : (a) solution "naturelle" (l'écoulement est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) et (b) solution "antinaturelle" (l'écoulement est dans le sens des aiguilles d'une montre). Pour les définitions de l'écoulement "naturel" et de l'écoulement "antinaturel", voir la partie 5.3.1 du chapitre V. .... 43
Figure 3.5	Lignes de courant et isothermes pour le cas $\gamma = 1$ , $K^* = 1$ , $\theta = 0^{\circ}$ , $\bar{R}_m/\bar{R}_{mc} = 1.01$ et $\bar{A}_m = 2$ ..... 44

Figure 3.6	Effet du maillage sur la précision des résultats : variation de la fonction de courant, $\bar{\Psi}_c$ au centre en fonction du nombre des éléments, $Ne$ ..... 45
Figure 4.1	Variation du nombre de Rayleigh critique $\bar{R}_{mC}$ en fonction de l'angle $\theta$ , pour différentes valeurs de $K^*$ pour le cas d'une couche infinie ..... 54
Figure 4.2	Lignes de courant pour $\theta = 40.1^\circ$ , $K^* = 0.125$ , $\bar{R}_{mC} = 35.820$ ( $R_{mC} = 16.407$ ) et $\gamma = 10^4$ pour le cas d'une couche infinie ..... 55
Figure 4.3	Variation des nombres de Rayleigh critique $\bar{R}_{mC}$ en fonction de $\gamma$ pour le cas d'un milieu de Darcy isotrope ( $K^* = 1$ ) ..... 56
Figure 4.4	Variation du nombre de Rayleigh critique $\bar{R}_{mC}^1$ correspondant au premier mode en fonction de l'angle d'orientation $\theta$ pour différentes valeurs de $K^*$ pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) ..... 58
Figure 4.5	Variation du nombre de Rayleigh critique $\bar{R}_{mC}^2$ correspondant au deuxième mode en fonction de l'angle d'orientation $\theta$ pour différentes valeurs de $K^*$ pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) ..... 58
Figure 4.6	Variation du nombre de Rayleigh $\bar{R}_{mC}$ en fonction du rapport de forme de la cavité $\bar{A}_m$ et du paramètre d'inversion $\gamma$ pour le cas d'un milieu de Darcy isotrope ( $K^* = 1$ ) et $\theta = 0^\circ$ ..... 60
Figure 5.1	Effet du rapport de perméabilité $K^*$ sur le nombre de Rayleigh critique ( $\theta = 0^\circ$ ) ..... 62
Figure 5.2	Variation du nombre de Rayleigh $\bar{R}_{mC}$ en fonction du rapport de forme de la cavité $\bar{A}_m$ pour le cas $K^* = 0.1$ , $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 90^\circ$ ..... 65

Figure 5.3	Variation du nombre de Rayleigh $\bar{R}_{mC}$ en fonction du rapport de forme de la cavité $\bar{A}_m$ pour le cas $\theta = 45^\circ$ et $K^* = 0.1$ ..... 66
Figure 5.4	Lignes de courant et isothermes pour le cas $K^* = 0.1$ , $\theta = 45^\circ$ et pour différentes valeurs du rapport de forme $\bar{A}_m$ ( $\bar{A}_m = 0.562$ , 1.068 et 1.518)..... 66
Figure 5.5	Variation du nombre de Rayleigh critique $\bar{R}_{mC}$ en fonction du paramètre d'inversion $\gamma$ pour $\theta = 0^\circ$ et pour différentes valeurs de $K^*$ . .... 67
Figure 5.6	Variation de la longueur d'onde critique, $\bar{\lambda}_{mC}$ en fonction du paramètre d'inversion $\gamma$ pour $\theta = 0^\circ$ et pour différentes valeurs de $K^*$ . .... 68
Figure 5.7	Lignes de courant pour le cas $K^* = 0.1$ , et $\theta = 0^\circ$ et pour différentes valeurs du paramètre d'inversion $\gamma$ (a) $\gamma = 2$ , (b) $\gamma = 3/2$ , (c) $\gamma = 1$ , (d) $\gamma = 2/3$ , (e) $\gamma = 1/2$ et (f) $\gamma = 1/3$ ( $\bar{\lambda}_{mC} = 4.73K^{*1/4}$ pour $\gamma \leq 1$ ) ..... 69
Figure 5.8	Lignes de courant pour le cas $\gamma = 0.5$ , $\theta = 0^\circ$ et pour différentes valeurs de $K^*$ : (a) $K^* = 0.1$ , (b) $K^* = 1$ et (c) $K^* = 10$ ... ..... 71
Figure 5.9	Variation du nombre de Rayleigh critique, $\bar{R}_{mC}$ en fonction du paramètre d'inversion $\gamma$ pour le cas $\theta = 45^\circ$ et pour différentes valeurs de $K^*$ ..... 72
Figure 5.10	Variation de la longueur d'onde critique $\lambda_{mC}$ en fonction du paramètre d'inversion $\gamma$ pour le cas $\theta = 45^\circ$ et pour différentes valeurs de $K^*$ ..... 73
Figure 5.11	Lignes de courant pour le cas $\gamma = 0.5$ , $\theta = 45^\circ$ , $K^* = 0.1$ , $\bar{R}_{mC} = 26.802$ et $\lambda_{mC} = 2.200$ ..... 74

- Figure 5.12 Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour  $\gamma = 0.5$  et pour différentes valeurs de  $K^*$  ..... 75
- Figure 5.13 Variation de la longueur d'onde critique  $\bar{\lambda}_{mC}$  en fonction de  $\theta$  pour  $\gamma = 0.5$  et pour différentes valeurs du rapport de perméabilité  $K^*$  ( $K^* = 0.02, 0.1, 0.1$ , et  $1$ )..... 76
- Figure 5.14 Effet de l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$  sur la structure de l'écoulement pour le cas  $\gamma = 0.5$  et  $K^* = 0.1$  (pour chaque champ d'écoulement une longueur d'onde est représentée) ..... 77
- Figure 5.15 Effet du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  pour  $\theta = 0^\circ$ ,  $K^* = 0.1, 10$  et pour différentes valeurs du paramètre d'inversion  $\gamma$  ( $\gamma = 0.5, 1, 1.8, 2$  et  $1000$ )..... 79
- Figure 5.16 Effet du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le deux premiers nombres de Rayleigh critiques correspondant aux deux premières valeurs propres les plus élevées pour  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 90^\circ$ ) : (a)  $\gamma = 0.5$  et (b)  $\gamma = 1.8$  ..... 80
- Figure 5.17 Effet du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  pour  $\theta = 45^\circ$ ,  $K^* = 0.1$  et pour différentes valeurs du paramètre d'inversion  $\gamma$  ( $\gamma = 0.5, 1, 1.8, 2$  et  $1000$ )..... 82
- Figure 5.18 Apparition des nouvelles cellules convectives quand la centro-symétrie prévaut : (a)  $\bar{A}_m = 1.21$  et (b)  $\bar{A}_m = 1.24$  pour  $\gamma = 1000$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$  ..... 85

- Figure 5.19 Apparition des nouvelles cellules convectives quand la symétrie image-miroir prévaut : (a)  $\bar{A}_m = 3.25$  et (b)  $\bar{A}_m = 3.30$  pour  $\gamma = 1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$  ..... 86
- Figure 5.20 Apparition des nouvelles cellules convectives quand la symétrie image-miroir prévaut : (a)  $\bar{A}_m = 3.22$  et (b)  $\bar{A}_m = 3.31$  pour  $\gamma = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$  ..... 86
- Figure 5.21 Effet du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le trois premiers nombres de Rayleigh critiques correspondant aux trois premières valeurs propres les plus élevées pour  $K^* = 0.1$   $\theta = 45^\circ$  : (a)  $\gamma = 0.5$  et (b)  $\gamma = 1.8$  ..... 87
- Figure 5.22 Apparition progressive des nouvelles cellules convectives dans la cavité lorsque la symétrie est absente pour le cas  $\gamma = 1.8$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$  ..... 88
- Figure 5.23 Apparition progressive des nouvelles cellules convectives dans la cavité lorsque la symétrie est absente pour le cas  $\gamma = 1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$  ..... 89
- Figure 5.24 Apparition progressive des nouvelles cellules convectives dans la cavité lorsque la symétrie est absente pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$  ..... 90
- Figure 5.25 Lignes de courant au voisinage du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  ( $\bar{R}_m / \bar{R}_{mC} = 1.2$ ) pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $\bar{A}_m$  ..... 93

- Figure 5.26 Isothermes au voisinage du nombre de Rayleigh critique,  $\bar{R}_{mC}$  ( $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC} = 1.2$ ) pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $\bar{A}_m$  ..... 94
- Figure 5.27 Influence du rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  sur : (a) la fonction de courant extremum  $\Psi_{ext}$  et (b) sur le nombre de Nusselt  $\bar{Nu}$  pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\bar{A}_m = 0.562$  ..... 95
- Figure 5.28 Influence du rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  ( $1 \leq \bar{R}_m/\bar{R}_{mC} \leq 1.2$ ) sur : (a) la fonction de courant extremum  $\Psi_{ext}$  et (b) sur le nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\bar{A}_m = 1.058$  ..... 97
- Figure 5.29 (a) Lignes de courant au voisinage de  $\bar{R}/\bar{R}_C = 4.148$  (b) Variation de la fonction de courant  $\Psi_{ext}$  versus le rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  pour le cas  $K^* = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\bar{A}_m = 0.84$  ..... 99
- Figure 5.30 Variation du nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  en fonction du rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  pour le cas  $K^* = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\bar{A}_m = 0.84$  ..... 100
- Figure 5.31 Lignes de courant et des isothermes pour le cas  $\gamma = 2/3$ ,  $K^* = 1$ ,  $\bar{A}_m = 4.92$  ( $A = 1.64$ ) et  $\bar{R}_m = 45.866$  ( $\bar{R}_{mC} = R_{mC} = 29.685$ )..... 103
- Figure 5.32 Distribution de la température et de la densité au sein de la cavité : (a) conduction pure ( $\bar{R}_m = 0$ ) et (b) conduction-convection  $\bar{R}_m = 45.866$  ( $K^* = 1$ ,  $\bar{A}_m = 4.92$ ,  $\gamma = 2/3$  et  $\bar{R}_{mC} = R_{mC} = 29.685$ ).. ..... 104



Figure 5.33	Convection sous-critique et le phénomène d'hystérésis.....	105
Figure 5.34	Variation de la fonction de courant $\Psi_{ca}$ versus le rapport $\bar{R}_m/\bar{R}_{mc}$ pour le cas $\gamma = 0.5$ , $K^* = 0.1$ , $\theta = 0^\circ$ et $\bar{A}_m = 2.249$ ( $\bar{R}_{mc} = 38.654$ ).....	106
Figure 5.35	Variation du nombre de Nusselt moyen $\bar{Nu}$ versus le rapport $\bar{R}_m/\bar{R}_{mc}$ pour le cas $\gamma = 0.5$ , $K^* = 0.1$ , $\theta = 0^\circ$ et $\bar{A}_m = 2.249$ ( $\bar{R}_{mc} = 38.654$ )..	106

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Les valeurs du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}$ et de la fonction de courant maximale $ \Psi_{cr} $ obtenues pour le cas $K^* = 1$ (isotrope), $\gamma = 10^4$ $A_m = 0.8$ et pour $R_m = 200, 300$ ..... 42
Tableau 4.1	Comparaison avec les travaux de <i>Horton et Rogers [24]</i> et <i>Lapwood [25]</i> pour le cas $K^* = 1$ et $\overline{A}_m = 1$ et $\gamma = 10^4$ pour différents type de maillage. .... 59

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

$A$	rapport de forme de la cavité, $L'/H'$
$\bar{A}$	rapport de forme modifié, $AK'^{1/4}$
$g$	accélération de la pesanteur
$H'$	hauteur de la cavité
$h'_{\max}$	hauteur de la couche instable
$J'$	vecteur représentant les termes de gravité et de pression
$k$	nombre d'onde, $2\pi/A_c$
$k_p$	conductivité thermique de la couche poreuse saturée
$\bar{\bar{K}}$	tenseur des perméabilités
$K_1, K_2$	perméabilités extrêmes selon les directions $x$ et $y$ respectivement
$K^*$	rapport des perméabilités, $K_2/K_1$
$L'$	largeur de la cavité
$Nu$	nombre de Nusselt, Eq. (2.42)
$\bar{Nu}$	nombre de Nusselt moyen, Eq. (2.43)
$R$	nombre de Darcy-Rayleigh, $K_2 g \beta_1 \Delta T'^2 H' / (\alpha \nu)$
$\bar{R}$	nombre de Rayleigh normalisé, $4R / (1 + K'^{1/2})^2$
$R_m$	nombre de Darcy-Rayleigh modifié, Eq. (2.34)
$R_1, R_2$	résistivités selon les directions $x'$ et $y'$ , $1/K_1$ et $1/K_2$ , respectivement
$T$	température adimensionnelle, $(T' - T'_r) / \Delta T'$
$T'_u$	température froide exercée sur la paroi supérieure
$T'_l$	température chaude exercée sur la paroi inférieure
$T'_{\max}$	température correspondant à la densité maximum
$T'_r$	température de référence, $(T'_l + T'_u) / 2$
$\Delta T'$	écart de température caractéristique, $T'_l - T'_u$

$\Delta T'_m$	écart de température correspondant à $T'_{\max}$
$t$	temps adimensionnel, $t' \sigma \alpha / H'^2$
$u$	vitesse adimensionnelle dans la direction $x$ , $u' H' / \alpha$
$v$	vitesse adimensionnelle dans la direction $y$ , $v' H' / \alpha$
$u'_r, v'_r$	vitesse relatives selon les directions $x'_r$ et $y'_r$ respectivement
$\bar{V}'$	vecteur vitesse dimensionnel, $(u', v')$
$x, y$	coordonnées cartésiennes adimensionnelles du système, $(x', y') / H'$
$x'_r, y'_r$	coordonnées cartésiennes correspondant aux axes principaux

### SYMBOLES GRECS

$\alpha$	diffusivité thermique, $k_p / (\rho_0 C)_p$
$\beta$	coefficient d'expansion thermique
$\beta_1$	coefficient intervenant dans la relation non-linéaire entre la densité et la température, Eq. (2.10)
$\gamma$	paramètre d'inversion, $2(T'_{\max} - T'_L) / \Delta T'$
$\lambda$	longueur d'onde adimensionnelle, $\lambda' / H'$
$\bar{\lambda}$	longueur d'onde adimensionnelle normalisée, $\lambda K'^{1/4}$
$\lambda^*$	valeur propre
$\nu$	viscosité cinématique du fluide
$\theta$	angle entre la perméabilité $K_1$ et la direction horizontale $x$
$\rho$	densité du fluide
$\rho_{\max}$	densité maximum du fluide obtenue à $T'_{\max} = 4^\circ \text{C}$
$\rho_r$	densité de référence à la température $T'_0$
$(\rho_r C)_f$	capacité calorifique du fluide
$(\rho_r C)_p$	capacité calorifique du milieu poreux saturé

$\sigma$	rapport des capacités calorifiques, $(\rho_r C)_p / (\rho_r C)_f$
$\Psi$	fonction de courant adimensionnelle, $\Psi' / \alpha$
$\Psi_{ext}$	valeur extrême de la fonction de courant

## EXPOSANTS

$e$	élémentaire
$'$	variable dimensionnelle

## INDICES

$C$	valeur critique
$L$	inférieure
$U$	supérieure
$f$	fluide
$m$	valeur modifiée, Eqs. (2.37) et (2.40)
$p$	milieu poreux
$r$	milieu de référence

## AUTRES

$\{ \quad \}$	représentation vectorielle
$[ \quad ]$	représentation matricielle

## INTRODUCTION

### Généralités

La convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes suscite une attention considérable par ses applications dans certains secteurs industriels et parce qu'elle se manifeste dans les écoulements souterrains. L'anisotropie est en général la conséquence de l'axisymétrie géométrique des grains ou des fibres possédant une orientation préférentielle. De tels milieux sont souvent rencontrés dans de nombreux systèmes naturels ou industriels, comme par exemple les fibres de certains matériaux (composites, biologiques), les formations géologiques, etc. Une revue complète sur la convection naturelle dans les milieux poreux anisotropes est donnée dans le livre de *Ingham et Pop [1]*.

### Motivation et intérêt

Dans le cadre de la convection en milieu poreux isotrope, bon nombre d'investigations antérieures ont porté sur la couche horizontale instable d'étendue latérale infinie ou comportant la présence de parois latérales en général adiabatiques (*Rudraiah et al. [2]*, *Rosenberg and Spera [3]*, *Nilsen and Storesletten [4]*, *Kimura et al. [5]*, etc.). Certaines de ces investigations concernaient le seuil de la convection, étudié en général par la théorie de la stabilité linéaire, les parois supérieure et inférieure étant soumises à des conditions aux frontières de type Dirichlet et/ou Newman (*Nield [6]*, *Caltagirone [7]*, *Taunton and Lightfoot [8]*, *Mamou et al. [9,10]*, *Mahidjiba et al. [11]*, etc.). Dans le cas d'une couche confinée latéralement, des études sur la convection d'amplitude finie ont été effectuées par *Mamou [12]* et *Mahidjiba [13]*.

Toujours dans le cadre d'une couche poreuse instable, il existe des études portant sur le seuil de la convection avec effet d'anisotropie, notamment les travaux de *Mckibbin and Tyvand [14]*, *Rosenberg and Spera [15]*, *Trew and Mckibbin [16]*, *Bera et al. [17]*

*Zhang et al. [18]* (cavité carrée) et de *Storesletten [19]* (couche infinie). Cependant, l'effet du rapport de forme de la cavité n'a pas été étudié d'une façon systématique dans ces travaux. De plus, la convection d'amplitude finie qui se manifeste au delà du seuil tel qu'établi par la méthode de stabilité linéaire n'a pas reçu toute l'attention nécessaire, notamment en ce qui concerne les possibilités de solutions multiples.

Enfin, toujours en situation anisotrope, les études de la couche instable citées précédemment ont porté sur des fluides dont la relation entre la densité  $\rho$  et la température  $T'$  est linéaire. La carence d'informations sur l'effet du confinement, que ce soit dans l'établissement du seuil de la convection ou dans la compréhension des phénomènes reliés à la convection à amplitude finie et l'absence totale d'informations sur les problèmes d'instabilité en milieu poreux anisotrope dans le cas d'une relation non linéaire entre  $\rho$  et  $T'$  nous a amenés à entreprendre la présente investigation. Notons en passant que l'eau froide passe par un maximum de densité à  $4^{\circ}C$ , et de ce fait, l'étude de son comportement en convection requiert une relation densité-température autre que linéaire.

### **Le phénomène de l'inversion de densité**

Il est bien connu que l'eau au voisinage du point de congélation possède une densité qui passe par un maximum à  $4^{\circ}C$  pour décroître ensuite jusqu'à  $0^{\circ}C$ . C'est grâce à cette particularité qu'une couche conductive stable est possible entre la glace d'un lac ou d'un étang à  $0^{\circ}C$  et un fond dont la température a déjà atteint un niveau inférieur à  $4^{\circ}C$ . Aucun mouvement de convection n'étant déclenché, le transfert de chaleur est ainsi minimisé et une partie importante de l'eau demeure dans sa phase liquide, ce qui est primordial pour les écosystèmes. Par ailleurs, lorsque la température du fond dépasse  $4^{\circ}C$ , la présence d'un maximum de densité à cette température entraîne des mouvements convectifs hors de l'ordinaire, qu'on ne peut traiter suivant l'hypothèse linéaire de Boussinesq. Or ces mouvements convectifs qui précèdent le gel ou accompagnent la fonte de la glace sont souvent déterminants dans la rapidité avec laquelle les phénomènes

de changement de phase se produisent. Pour ces raisons, un bon nombre d'études ont été déjà faites sur le sujet comme par exemple les travaux réalisés par *Robillard et Vasseur* [20, 21]. Les situations pratiques impliquant l'eau au voisinage de point de congélation sont évidemment nombreuses dans des régions nordiques comme le Québec et le Canada. Il peut s'agir par exemple de conduites où de réservoirs aux parois partiellement ou entièrement exposées au froid. En particulier, il existe des situations où le gradient de température imposé est vertical, par exemple, une couche d'eau recouverte de glace, limitée en dessous par une surface relativement plus chaude. Le contraire existe aussi, c'est à dire que la glace peut être au dessous, l'eau étant par dessus. Pour l'un ou l'autre de ces deux cas, le système est caractérisé en conduction pure par une couche inférieure instable à laquelle est superposée une couche stable. Les phénomènes d'instabilité sont alors très particuliers. Le fait d'agiter le liquide par convection entraîne une pénétration de la couche instable dans la couche stable et le mélange ainsi produit accroît l'épaisseur de la couche instable (convection pénétrante). Le système est donc sensible à une perturbation de grande amplitude et un mouvement convectif stable peut exister en bas du seuil, tel qu'établi par une étude classique de stabilité linéaire. On a alors affaire à ce qu'il est convenu d'appeler une bifurcation sous-critique selon *Veronis* [22] et *Moore et Weiss* [23]. Ce comportement propre à l'eau en situation d'instabilité au voisinage de son point de congélation existe non seulement pour l'eau en tant que milieu fluide mais aussi pour l'eau en tant que liquide saturant un milieu poreux. Des travaux plus récents ont porté sur les seuils critiques tels qu'établis par la théorie linéaire ou sur les oscillations qui surviennent à des nombres de Rayleigh élevés. Bien qu'un certain nombre d'études ait déjà été accompli en transfert de chaleur convectif avec maximum de densité, il reste à préciser beaucoup d'aspects, notamment ceux qui concernent une couche poreuse anisotrope horizontale instable. Ce problème est de grande importance pratique puisque la convection de l'eau froide dans les formations géologiques (milieux poreux anisotropes) est souvent rencontrée dans la nature.

Dans cette thèse, nous considérons l'étude de la convection pénétrante "penetrative convection" au sein d'une couche poreuse anisotrope confinée dans une



cavité rectangulaire horizontale dont la matrice poreuse est saturée par de l'eau froide (densité-température non linéaire). Des conditions aux frontières de type Dirichlet (températures constantes) ont été imposées sur les parois supérieure et inférieure de la cavité. Pour cette situation, nous commençons d'abord par déterminer les seuils de la convection par la théorie de la stabilité linéaire pour des couches infinies et confinées latéralement dans le cas de milieux poreux saturés répondant à la loi de Darcy. Des programmes numériques en éléments finis ont aussi été développés pour simuler la convection d'amplitude finie et déterminer ainsi le comportement, non seulement du transfert de chaleur, mais des autres paramètres caractéristiques spécifiques à ces problèmes particuliers. Rappelons que le cas de la convection naturelle classique, c'est-à-dire lorsque la densité du fluide varie linéairement avec la température, peut être obtenu à partir du problème général.

### **Définition du problème**

On considère une couche poreuse anisotrope confinée dans une cavité rectangulaire horizontale et saturée par de l'eau froide. L'anisotropie dans le milieu poreux ne concerne que la perméabilité, les axes principaux ayant une orientation arbitraire. Les parois horizontales de la cavité sont soumises à des températures constantes. Les parois verticales sont imperméables et adiabatiques. Les propriétés physiques du fluide saturant la matrice poreuse sont considérées constantes, excepté la densité. Cette dernière varie, soit linéairement avec la température, soit paraboliquement (non linéaire). L'écoulement dans la cavité est supposé laminaire. Pour des raisons de simplification, le modèle mathématique du problème a été établi en modélisant l'équation de mouvement par la loi de Darcy qui néglige les effets des forces visqueuses (termes de Brinkman) aux parois de la cavité et de l'inertie (termes de Forchheimer). L'anisotropie du milieu poreux, l'inclinaison des axes principaux et la non-linéarité de la relation entre la densité et la température donnent lieu à trois paramètres additionnels qui interviennent dans la formulation du problème et le rendent relativement complexe. À cet effet, le choix d'une géométrie simple pour la cavité nous a permis de réduire à son maximum le

nombre de paramètres géométriques, et, ce partant, de cerner plus facilement le comportement physique de l'écoulement sous l'influence de ces trois paramètres additionnels.

### **Contenu de la thèse**

L'importance de la convection dans le cas d'un milieu poreux anisotrope saturé d'eau au voisinage de  $4^{\circ}C$  a été mise en évidence dans l'introduction. Le premier chapitre consiste à présenter une large revue bibliographique englobant la majorité des travaux de recherche effectués dans le passé dans ce domaine. Ces études ont été réalisées soit en milieux fluides soit en milieux poreux isotropes et anisotropes tout en tenant compte du phénomène de l'inversion de densité.

La formulation mathématique du problème sera abordée dans le deuxième chapitre de cette thèse. Cette formulation est générale de sorte que les deux cas linéaire et non linéaire de la relation entre la densité du fluide et la température peuvent être traités moyennant un choix approprié des paramètres. Les conditions aux frontières associées aux équations de base seront spécifiées. Le chapitre se termine par une interprétation des paramètres de contrôle en rapport avec le phénomène d'inversion de densité.

Le troisième chapitre concerne la méthode de résolution des équations gouvernantes du système. À cette fin la méthode des éléments finis sera utilisée. L'effet de maillage sur les différents résultats ainsi que la validation de cette méthode par rapport aux travaux antérieurs seront examinés à la fin de ce chapitre.

L'analyse de la stabilité linéaire fait l'objet du quatrième chapitre de cette thèse. La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de la solution analytique pour le cas d'une couche confinée lorsque l'angle d'orientation  $\theta$  des axes principaux coïncide avec la direction de la gravité, c'est-à-dire  $\theta = 0^{\circ}$  (ou  $\theta = 90^{\circ}$ ). Cette solution analytique a été développée en se basant sur le travail réalisé par *Storesletten [19]* pour le cas d'une couche infinie. Par ailleurs, la deuxième partie concerne la résolution

numérique des équations de perturbation de la stabilité linéaire en utilisant la méthode des éléments finis. La validation de cette méthode à partir d'autres travaux effectués dans le passé est également présentée.

Le cinquième chapitre porte sur les différents résultats obtenus dans cette thèse et leur discussion. La première partie de cette thèse est consacrée aux résultats obtenus par l'analyse de stabilité linéaire. Tous les résultats obtenus pour la convection d'amplitude finie (résolution complète des équations gouvernantes du système) sont présentés et discutés dans la deuxième partie. Pour des raisons de simplification et d'interprétation, les résultats obtenus dans le cas où la relation entre la densité du fluide et la température est linéaire sont traités dans une section séparée à ceux obtenus pour le cas où cette relation est non linéaire.

La conclusion générale est consacrée à la mise en évidence des différents points majeurs de cette étude ainsi que les perspectives envisagées à long terme qui peuvent faire l'objet d'autres recherches.

## CHAPITRE I

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

#### 1.1 Introduction

Cette revue est consacrée aux différentes investigations réalisées sur l'étude du phénomène de la convection naturelle. Ces investigations concernent soit les milieux fluides, soit les milieux poreux isotropes ou anisotropes, selon des configurations géométriques rectangulaires ou cylindriques.

#### 1.2. Relation densité-température linéaire

Depuis les premiers travaux réalisés par *Horton et Rogers [24]* et *Lapwood [25]*, l'étude de l'instabilité (seuil de convection) d'une couche horizontale poreuse isotrope saturée par un fluide et chauffée par le bas a fait l'objet d'un grand nombre de recherches dans le domaine des milieux poreux. Des travaux similaires ont également été réalisés pour le cas des milieux fluides. Les différents résultats obtenus pour ces situations ont été récapitulés dans les papiers publiés par *Bear [26]*, *Bejan [27, 28, 29, 30]*, *Platten et Legros [31]* et *Nield et Bejan [32]*. Ces recherches ont été effectuées en supposant que la densité du fluide varie linéairement avec la température.

Dans l'ensemble des travaux cités précédemment, l'effet de l'anisotropie du milieu poreux n'a pas été pris en considération. Le nombre d'études en convection naturelle tenant compte de l'effet de l'anisotropie en perméabilité (milieu poreux anisotrope) est beaucoup moins important que celui des couches poreuses isotropes. Malgré l'existence fréquente de l'anisotropie en perméabilité dans la nature et dans les applications industrielles, son effet reste malheureusement mal connu et les études réalisées à ces fins sont relativement récentes. Selon *Neale [33]*, l'anisotropie en perméabilité dans les milieux poreux a une plus forte incidence en pratique que celle en diffusivité thermique.

La première étude sur l'écoulement convectif anisotrope dans un milieu poreux a été réalisé par *Castinel et Combarnous [34]*. Le critère définissant le seuil de la convection a été établi par ces auteurs pour le cas d'une couche poreuse horizontale avec des conditions aux frontières de type Dirichlet (températures constantes) imposées sur les parois supérieure et inférieure. Les résultats expérimentaux obtenus par ces auteurs sont en accord avec leurs prédictions analytiques. Leurs résultats ont été complétés par *Epherre [35]* et *Tyvand [36]* qui ont tenu compte respectivement de l'anisotropie de la diffusivité thermique et de l'effet de la dispersion dans le cas d'un écoulement uniforme de base.

L'influence de la température sur la viscosité et celle de la perméabilité anisotropique sur la forme des cellules au seuil de la convection ont été considérées par *Wooding [37]*. *McKibbin [38]* a effectué une étude des effets de l'anisotropie sur la stabilité convective de la couche poreuse.

Récemment, *Tyvand et Storesletten [39]* ont réalisé une étude du seuil convectif dans le cas d'un milieu poreux anisotrope dont les axes ont une orientation quelconque. Ce type de situation est important en pratique puisque dans la majorité des matériaux poreux, l'orientation des axes principaux est arbitraire. En conséquence, de nouvelles configurations d'écoulements dont le mouvement est dans un plan incliné ont été prédites par *Tyvand et Storesletten [39]* et *Kvernfold and Tyvand [40]*.

L'effet de l'anisotropie de la diffusivité thermique sur la stabilité a été considéré par *Storesletten [19]*. Il a été constaté que selon l'importance de la diffusivité thermique longitudinale par rapport à la diffusivité thermique transversale, différents types de cellules convectives sont possibles.

La prédiction du seuil convectif pour le cas de deux couches superposées, une couche fluide et une couche poreuse anisotrope, a fait l'objet d'une étude réalisée par *Chen et al. [41]*. Ces auteurs ont considéré que l'anisotropie de la couche poreuse est caractérisée à la fois par la perméabilité et par la conductivité thermique. Les axes

principaux de la perméabilité coïncidaient dans leur étude avec les axes du système de coordonnées. Le calcul du nombre de Rayleigh critique et de la longueur d'onde critique était basé essentiellement sur le rapport d'épaisseur des deux couches (fluide et poreuse) ainsi que sur l'intensité de l'anisotropie en perméabilité et en diffusivité thermique.

*Chen et Hsu [42]* ont étudié le seuil de la convection par une approche de stabilité linéaire dans une cavité remplie d'un milieu poreux anisotrope et d'un milieu fluide. Dans la direction horizontale de la couche, ces auteurs ont supposé que le milieu poreux était isotrope. L'anisotropie en perméabilité et en diffusivité thermique a été également considérée. L'étude de la stabilité a montré que le nombre de Rayleigh critique dépendait de trois paramètres de contrôle à savoir le rapport des perméabilités, le rapport des diffusivités thermiques et le rapport d'épaisseur des deux couches (poreuse et fluide). Les deux investigations citées précédemment ont été réalisées avec des conditions aux frontières de type Dirichlet (températures constantes). L'étude de l'effet d'un gradient de température incliné sur l'instabilité thermique d'un milieu poreux anisotrope a été effectuée par *Parthiban et Patil [43]*. Cette investigation a montré que l'anisotropie confère à l'écoulement convectif une stabilité plus grande que celle d'un milieu isotrope.

*Ni et Beckermann [44]* ont effectué une étude numérique sur le transfert de chaleur d'une couche poreuse verticale. Le milieu poreux était anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique. Il a été démontré que l'augmentation (diminution) du transfert de chaleur au sein de la cavité est conditionnée par l'augmentation (diminution) du rapport des perméabilités  $K^*$  et la diminution (augmentation) du rapport des conductivités thermiques  $k^*$ . Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par *Walker et Homsy [45]* et *Shiralkar et al. [46]*. Il est à noter que ces études ont été réalisées pour des axes principaux de perméabilité orientés selon le système de coordonnées.

L'effet de l'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique sur les écoulements convectifs dans une couche poreuse rectangulaire a fait également l'objet d'une investigation réalisée par *Chang et Lin [47]*. Ces auteurs ont considéré des axes principaux en perméabilité orientés selon les coordonnées. Il a été démontré que le

nombre de Nusselt  $Nu$  caractérisant le transfert de chaleur diminue continuellement au fur et à mesure que le rapport des perméabilités  $K^*$  augmente. Les résultats obtenus ont aussi montré l'existence d'une valeur critique du rapport des conductivités thermiques  $k^*$  donnant lieu à une valeur minimale du nombre de Nusselt.

La convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope confiné dans une cavité bidimensionnelle avec génération interne de chaleur a été considérée par *Royers et Flores [48]*. L'instabilité des cellules convectives et l'obtention d'un écoulement turbulent pour des valeurs du nombre de Rayleigh suffisamment grandes ont été abordées.

*Sinha et al. [49]* ont établi un modèle théorique permettant de modéliser le transfert thermique durant le procédé de solidification des alliages dans une cavité carrée. Ces auteurs ont tenu compte uniquement de l'anisotropie en perméabilité. Toujours dans le cas de procédés industriels, l'effet de l'anisotropie en perméabilité sur le procédé de transport massique pendant la solidification d'un mélange binaire ( $\text{NH}_4\text{Cl}-\text{H}_2\text{O}$ ) a été étudié par *Yoo et Viskanta [50]*. Les résultats obtenus par simulation numérique ont été comparés à ceux obtenus par l'expérimentation. Selon cette étude, l'anisotropie joue un rôle important dans les procédés de solidification.

En se basant sur le travail réalisé par *Pearlstein [51]*, *Patil et al. [52]* ont étudié le phénomène de la convection naturelle avec l'anisotropie en perméabilité pour le cas d'un milieu poreux anisotrope en rotation. Il a été démontré que l'anisotropie a un effet déstabilisant sur l'écoulement. Le transfert de chaleur convectif dans une couche poreuse anisotrope isolante verticale a fait l'objet d'une étude analytique réalisée par *Burns et al. [53]*. Ces travaux confirment le fait déjà établi que l'anisotropie en perméabilité influence considérablement la valeur du nombre de Nusselt.

Un nombre très limité d'études qui tiennent compte de l'anisotropie, mais dans des configurations géométriques différentes de celles citées précédemment (cavités rectangulaires) est disponible dans la littérature. L'étude de la convection naturelle pour le cas d'une matrice poreuse anisotrope confinée dans un cylindre vertical a été réalisée

par *Chang et Hsiao [54]*. Ces auteurs ont considéré l'anisotropie en perméabilité et celle en conductivité thermique dont les axes principaux sont radial et vertical. L'influence des paramètres de contrôle, en l'occurrence le rapport de forme, le nombre de Rayleigh, le rapport des perméabilités et le rapport des conductivités thermiques a été mise en évidence dans cette étude.

Un autre travail portant sur l'étude de la convection naturelle dans un espace annulaire où la rotation et l'anisotropie sont prises en considération a été réalisé par *Aboubi et al. [55]*. Seule, l'anisotropie en perméabilité a été considérée, la conductivité thermique étant supposée isotrope. Des solutions analytiques et numériques pour les cas d'un milieu fluide et celui d'un milieu poreux ont été établies. Le nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de la convection a été prédit analytiquement par la théorie de la stabilité linéaire. Les champs de vitesse et de température ainsi que le nombre de Nusselt ont été obtenus analytiquement et numériquement en utilisant la convection à amplitude finie.

Dans l'ensemble des études citées précédemment, les axes principaux de l'anisotropie en perméabilité et ceux de l'anisotropie thermique coïncidaient avec les axes du système de coordonnées.

L'effet de l'inclinaison des axes principaux de la perméabilité par rapport à la gravité sur l'écoulement convectif, a fait l'objet d'une étude réalisée par *Peder et al. [56]*. Le seuil de convection a été déterminé par ces auteurs pour le cas d'une couche poreuse horizontale anisotrope. L'orientation des axes principaux de la perméabilité a été supposée arbitraire. Dans cette investigation, le nombre de Rayleigh critique et la longueur d'onde critique ont été calculés. Les résultats obtenus ont montré l'existence de deux types différents de champs convectifs : (1) des cellules convectives avec un plan de mouvement incliné, les cellules latérales étant verticales. Cette situation existe quand la perméabilité transversale est plus grande que la perméabilité longitudinale; (2) des cellules convectives avec un plan de mouvement vertical tandis que les cellules latérales sont inclinées.



L'effet de l'inclinaison des axes principaux de la perméabilité a fait également l'objet des études analytiques et numériques réalisées par *Degan et al. [57, 58, 59]*. Ces auteurs ont démontré que la convection naturelle est fortement influencée par le rapport de perméabilité  $K^*$  et l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$ . Il a été aussi démontré qu'une perméabilité minimale dans la direction de la gravité, minimise le transfert de chaleur.

Le seuil de convection dans une cavité poreuse anisotrope chauffée par le bas et refroidie par le haut avec des flux de chaleur constants (conditions aux frontières de type Neumann) a été étudié par *Mamou et al. [60]*. Plus récemment, *Mahidjiba et al. [61]* ont considéré un milieu poreux anisotrope dans lequel l'orientation des axes principaux est arbitraire. Cette dernière investigation comprend des études de stabilité linéaire et de convection d'amplitude finie. Les résultats obtenus ont démontré l'existence possible de deux types d'écoulement, l'un qualifié d'écoulement naturel et l'autre d'écoulement anti-naturel.

La majorité des investigations portant sur le seuil de la convection concerne le cas d'une couche horizontale poreuse anisotrope infinie. Cependant, il existe une étude sur le seuil de la convection dans une cavité confinée réalisée par *Zhang et al. [18]*. Les résultats obtenus par *Mahidjiba et al. [61]* et *Zhang et al. [18]*, basés sur l'analyse de la stabilité linéaire, indiquent que le rapport de perméabilité  $K^*$  et l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$  modifient considérablement le nombre de Rayleigh critique  $R_c$  par rapport à celui obtenu dans un milieu de Darcy isotrope.

Toutes ces études déjà mentionnées sur le phénomène de la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope ont été réalisées en supposant que l'eau saturant le milieu poreux varie linéairement avec la température. La section suivante présente les différentes investigations qui ont tenu compte de la non-linéarité entre la densité et la température.

### 1.3 Relation densité-température non linéaire

Un nombre limité d'études a été consacré à l'étude de l'instabilité d'une couche horizontale poreuse saturée par de l'eau froide impliquant un maximum de densité. Dans ce qui suit, nous présentons les différentes investigations qui ont été réalisées sur le sujet dans le passé, tant pour les milieux fluides que pour les milieux poreux isotropes et anisotropes. La figure 1.1 montre la variation non linéaire (forme quadratique) de la densité du fluide en fonction de la température.

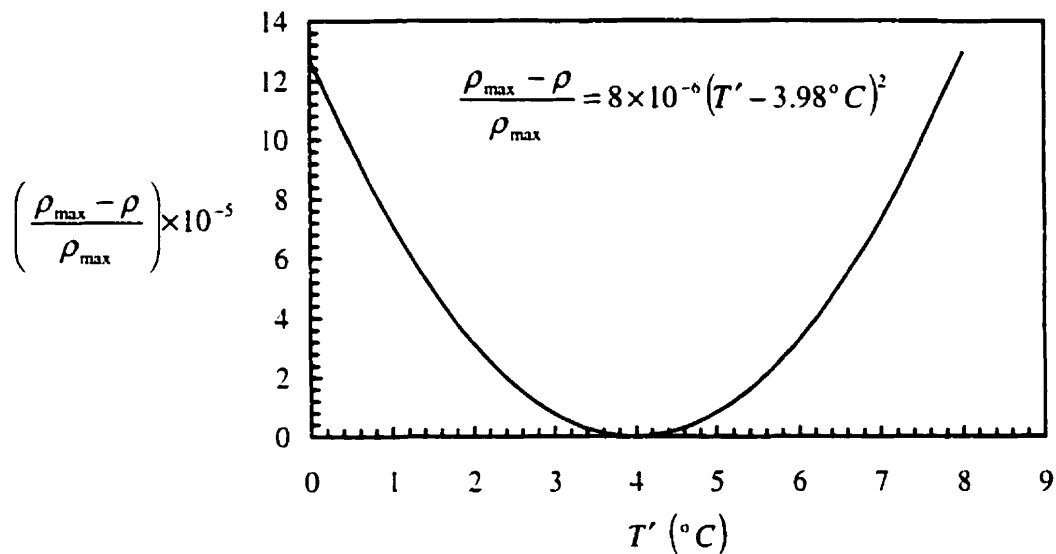


Figure 1.1 : Variation non linéaire de la densité versus la température (forme quadratique) : maximum de la densité obtenu à  $T' = T'_{\max} = 4^{\circ}\text{C}$

#### 1.3.1 Milieux Fluides

Selon *Spiegel [62]*, les problèmes de convection rencontrés dans les domaines d'astrophysique ou ceux de la météorologie impliquent l'effet de la convection pénétrante que nous retrouvons dans la convection de l'eau au voisinage de  $4^{\circ}\text{C}$ . De tels mouvements sont observés par exemple dans les régions stables de la couche externe du soleil. Ces mouvements résultent vraisemblablement de la région convective solaire qui se trouve au-dessous de la couche stable. Une étude détaillée de ces phénomènes est

présentée dans les travaux réalisés par *Leighton* [63]. La convection pénétrante existe aussi dans la dynamique des cumulus (nuages à basse altitude) étudiée par *Simpson et al.* [64].

Dans le cadre des travaux expérimentaux destinés à l'étude du phénomène de la convection pénétrante, *Malkus* [65] a exposé la limite inférieure d'une couche d'eau froide à une température de  $0^{\circ}\text{C}$ , la limite supérieure étant maintenue à une température supérieure à  $4^{\circ}\text{C}$ . Cet auteur a d'abord noté le fait que la région juste au-dessous de la valeur maximale de la densité  $\rho_m$  près de  $4^{\circ}\text{C}$  est instable, alors que la région en dessus du maximum de densité est stable. Il a ensuite observé que les mouvements convectifs se produisant dans la région instable inférieure peuvent pénétrer dans la région stable supérieure. Ces résultats expérimentaux ont été corroborés par *Furumoto et Rooth* [66], *Townsend* [67] et *Myrup et al.* [68].

*Veronis* [22] a étudié théoriquement le problème de la convection pénétrante en considérant le même système que celui de *Malkus* [65]. Cette configuration a été utilisée pour déterminer l'importance de la pénétration de la couche instable dans la couche stable. Il a établi un critère du seuil de l'instabilité du système similaire à celui trouvé par Rayleigh pour la convection de Bénard. Ce seuil est en conformité avec les travaux de *Chandrasekhar* [69]. Selon les résultats obtenus par *Veronis*, le système peut devenir instable à une perturbation à amplitude finie à des nombres de Rayleigh inférieurs au nombre de Rayleigh critique prédit par la théorie de la stabilité linéaire. Ceci correspond à l'existence d'une bifurcation sous critique.

Le phénomène de la convection pénétrante dans l'eau a fait également l'objet d'une étude numérique réalisée par *Musman* [70]. Dans ses travaux, ce dernier a calculé le transfert de chaleur en fonction du nombre de Rayleigh. Il a déterminé le nombre de Rayleigh critique caractérisant le début de la convection.

*Moore et Weiss* [23] ont étudié la convection pénétrante bidimensionnelle pour le cas d'une couche d'eau froide au dessus de la glace. La prédiction du nombre de

Rayleigh critique marquant le seuil de convection non linéaire et l'augmentation du transfert de chaleur (nombre de Nusselt) en fonction du nombre Rayleigh ont été établies par ces auteurs. Une étude comparative entre les résultats obtenus numériquement et expérimentalement a été également mise en évidence.

*Sun et al. [71]* ont aussi étudié le problème de la convection pénétrante (maximum de densité) pour le cas des milieux fluides. Dans cette investigation, les auteurs ont déterminé le seuil de convection pour une couche horizontale de fluide dont les parois inférieure et supérieure sont soumises à des températures constantes  $T'_L$  et  $T'_U$ , respectivement. Une forme cubique de la relation entre la densité et la température a été utilisée dans les équations de base du problème. Cette dernière a la forme suivante :

$$\rho = \rho_{\max} \left[ 1 - \gamma_1 (T' - T'_{\max})^2 + \gamma_2 (T' - T'_{\max})^3 \right] \quad (1.1)$$

Il a été démontré que le nombre de Rayleigh dépend essentiellement de deux paramètres, soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Ces derniers sont définis comme suit :

$$\lambda_1 = \left( -\frac{1}{A} \right) \left[ \frac{1 + 3 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A \Delta T'}{1 + \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A \Delta T'} \right] \quad (1.2)$$

$$\lambda_2 = \left( \frac{1}{A^2} \right) \left[ \frac{\frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A \Delta T'}{1 + \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} A \Delta T'} \right] \quad (1.3)$$

Les paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  s'écrivent en fonction des températures appliquées aux parois inférieure et supérieure,  $T'_L$  et  $T'_U$ , respectivement, des coefficients  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  intervenant dans la relation entre la densité et la température (voir Eq. 1.1), du rapport de forme de la cavité  $A$ . La température  $T'_{\max}$  correspond au maximum de la densité du fluide  $\rho_{\max}$ . Les résultats théoriques ont été comparés à ceux obtenus expérimentalement par les mêmes auteurs.

L'effet de l'inversion de densité a fait l'objet d'une étude expérimentale et théorique réalisée par *Tien et al.* [72]. Les auteurs ont étudié le comportement d'une couche de fluide chauffée par le bas et refroidie par le haut. Les résultats obtenus théoriquement donnent le nombre de Nusselt en fonction du nombre de Raleigh et des paramètres caractérisant le système physique, à savoir le paramètre d'inversion  $\gamma$  et le paramètre  $\delta = \pi/2a$  dans lequel  $a$  représente la longueur d'onde. Ces résultats ont été comparés avec les résultats expérimentaux d'une cavité carrée (couche horizontale ayant un rapport de forme  $A = 1$ ).

En utilisant la théorie de la stabilité linéaire, *Merker et al.* [73] ont étudié le problème de l'inversion de densité dans une couche d'eau au voisinage de  $4^{\circ}\text{C}$ . La méthode de Galerkin a été utilisée pour résoudre les équations linéaires de perturbation. Des diagrammes de stabilité,  $Ra = Ra(T'_L, T'_U)$  ont été obtenus pour représenter les résultats. Trois polynômes de degrés différents (2, 3 et 5) ont été utilisés pour représenter la relation entre la densité et la température. Une comparaison entre les résultats en termes du nombre de Rayleigh critique obtenus à partir de ces polynômes est présentée dans cette étude.

Une étude expérimentale et numérique du phénomène de la convection naturelle au voisinage du maximum de densité dans l'eau et dans les solutions salines a été réalisée par *Bennacer et al.* [74]. Les résultats ont montré que la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur par convection sont affectés par une variation non linéaire densité-température.

La convection naturelle transitoire dans une couche d'eau tenant compte de l'inversion de densité a été étudiée numériquement par *Tong et Koster* [75] en utilisant la méthode des éléments finis. Les résultats illustrent le fait que la différence de température déterminant la position du maximum de densité dans la couche d'eau peut modifier sensiblement le transfert thermique dans le champ d'écoulement. L'effet du rapport de forme de la cavité sur la convection naturelle transitoire a été également étudié par ces

auteurs. Il a été aussi montré que le transfert thermique atteint son maximum dans une cavité carrée ( $A = 1$ ).

*Inaba et Fukuda [76]* ont étudié l'effet de l'inversion de densité sur la convection naturelle pour le cas d'une cavité rectangulaire inclinée et remplie d'eau. Une des deux parois est maintenue à  $0^{\circ}\text{C}$  tandis que l'autre est soumise à une température variant entre  $2^{\circ}\text{C}$  et  $20^{\circ}\text{C}$ . Le champ d'écoulement, la distribution de la température et le nombre de Nusselt moyen sont représentés en fonction de l'angle d'inclinaison de la cavité et pour différentes valeurs de la température de la paroi chaude. Les résultats obtenus ont montré que l'inversion de densité a un effet considérable sur la convection naturelle et sur le transfert de chaleur au sein de la cavité, le nombre de Nusselt moyen étant fonction de la différence de température entre les deux parois de la cavité (froide et chaude) et de l'angle d'inclinaison de la cavité.

### 1.3.2 Milieux poreux isotropes

En utilisant la même relation cubique (Eq. 1.1) entre la densité et la température, *Sun et al. [77]* ont été parmi les premiers à aborder l'étude du seuil de la convection dans le cas d'une couche poreuse isotrope contenant un fluide avec maximum de densité.

L'effet de l'inversion de la densité sur le transfert de chaleur dans un milieu poreux chauffé par le bas a été étudié expérimentalement par *Yen [78]*. Il a été démontré dans cette étude que le nombre Rayleigh critique, caractérisant le seuil de convection dépend essentiellement de deux paramètres adimensionnels identiques à ceux établis par *Sun et al. [71]* pour le cas des milieux fluides (voir équations 1.2 et 1.3).

Les résultats prédits par la stabilité linéaire dans le travail de *Sun et al. [77]* ont été vérifiés numériquement par *Blake et al. [79]*. Ces derniers ont étudié le phénomène de la convection naturelle pour le cas d'une couche poreuse saturée par de l'eau froide et chauffée par le bas. L'influence du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur pour le cas de la convection d'amplitude finie a été également déterminée par ces auteurs.

*Altimir [80]* a étudié numériquement le phénomène de la convection naturelle tridimensionnelle pour le cas des milieux poreux en tenant compte de l'inversion de densité. La densité du fluide saturant la matrice poreuse a été représentée paraboliquement en fonction de la température dans l'équation de Darcy généralisée. Les équations de base gouvernant le système ont été résolues par la méthode de Galerkin. L'interprétation des résultats obtenus dans cette étude s'appuie sur l'existence de deux couches superposées. Dans la première couche dite couche instable qui occupe la partie basse de la cavité, le transfert de chaleur se produit par convection tandis que dans la deuxième couche dite stable il s'effectue par conduction. L'effet de la convection pénétrante sur le nombre de Nusselt a été également mis en évidence.

Le problème du maximum de densité a été aussi étudié théoriquement par *Poulikakos [81]*, pour le cas d'une couche poreuse horizontale saturée par de l'eau froide. Cette étude avait pour objectif principal de déterminer le temps critique à partir duquel la convection se déclenche dans la cavité, quand la température associée à la paroi supérieure est abaissée soudainement de façon à ce que le nombre de Rayleigh soit considérablement plus élevé que le nombre de Rayleigh critique. Ce problème a été résolu en utilisant l'analyse de la stabilité linéaire. Les résultats obtenus relient le temps critique marquant le seuil de convection et la longueur d'onde critique au nombre de Rayleigh et à la température initiale de la couche,  $T_0$ .

Plus récemment, le problème de la convection pénétrante dans une couche poreuse horizontale saturée par de l'eau froide a fait l'objet d'une étude numérique réalisée par *Zhang [82]*. Le nombre de Rayleigh critique  $R_c$  et la longueur d'onde critique  $A_c$  ont été prédits à partir de la théorie de la stabilité linéaire. Les résultats obtenus pour la convection à amplitude finie ont montré l'existence d'une convection sous-critique. La loi de Darcy a été utilisée pour modéliser le milieu poreux.

Basée sur les travaux de *Sun et al. [77]* et *Poulikakos [81]*, une étude numérique de la stabilité linéaire et de la convection à amplitude finie dans une cavité horizontale

poreuse isotrope saturée par de l'eau froide a été réalisée par *Mamou et al. [83]*. Dans la formulation du problème, les auteurs ont utilisé le modèle de Brinkman. L'inversion de densité a été modélisée en utilisant une relation parabolique entre la densité et la température. Les résultats numériques de la convection à amplitude finie indiquent que la convection sous-critique est possible quand la couche stable supérieure s'étend au delà de la moitié de la profondeur de la cavité. Il a été également démontré que pour des valeurs fixes des paramètres de contrôle, il est possible d'obtenir des solutions multiples.

### 1.3.3 Milieux poreux anisotropes

En se basant sur le modèle de la convection anisotrope de *Tyvand et Storesletten [39]*, *Straughan et Walker [84]* ont utilisé une forme quadratique de la relation entre la densité et la température pour résoudre le problème de la convection pénétrante. Un modèle mathématique a été développé en utilisant les analyses de stabilité linéaire et non linéaire (prédiction de la bifurcation sous-critique). Les résultats indiquent que la bifurcation obtenue en utilisant une forme quadratique pour relier la densité à la température est très différente de celle obtenue en utilisant une relation densité-température linéaire.

Plus récemment, *Mahidjiba et al. [85, 86]* ont étudié le seuil de convection pour le cas d'une couche poreuse anisotrope saturée par l'eau au voisinage de  $4^{\circ}\text{C}$ . La méthode des éléments finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations linéaires de la stabilité. Les résultats obtenus relient le seuil du mouvement convectif au rapport de perméabilité  $K^*$  et au paramètre d'inversion  $\gamma$ .



## CHAPITRE II

### FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

#### 2.1 Définition du problème

Il s'agit d'étudier le problème bidimensionnel de la convection thermique naturelle dans une couche poreuse anisotrope. La configuration géométrique de l'écoulement est constituée d'une cavité bidimensionnelle horizontale de longueur  $L'$  et de hauteur  $H'$  illustrée à la figure 2.1. Le milieu poreux est saturé par de l'eau froide. Des températures uniformes  $T'_L$  et  $T'_U$  sont imposées sur les parois supérieure et inférieure de la cavité, respectivement, et la distribution de température en conduction pure est linéaire. Les deux parois verticales peuvent être adiabatiques ou soumises à des conditions aux frontières périodiques (ces conditions sont définies ultérieurement), selon le type de la couche à considérer (confinée ou infinie). Le milieu poreux considéré dans le présent travail est caractérisé par une perméabilité anisotrope mais comporte une conductivité thermique isotrope. Les perméabilités selon les axes principaux de la matrice poreuse sont  $K_1$  et  $K_2$ . L'anisotropie du milieu poreux est définie par le rapport des perméabilités  $K^* = K_2/K_1$  et l'angle d'orientation  $\theta$ , défini comme l'angle entre la direction horizontale et l'axe principal avec la perméabilité  $K_1$ .

Dans ce chapitre, nous établirons dans l'ordre :

1. Les équations de Darcy pour un milieu poreux anisotrope;
2. L'application de l'hypothèse de Boussinesq dans le cas d'une relation densité-température qui tienne compte du maximum de densité pour l'eau à  $4^\circ C$ ;
3. Les équations gouvernantes et les conditions aux frontières;
4. La mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes;
5. L'interprétation des paramètres de contrôle;
6. Le nombre de Nusselt relié au transfert thermique.

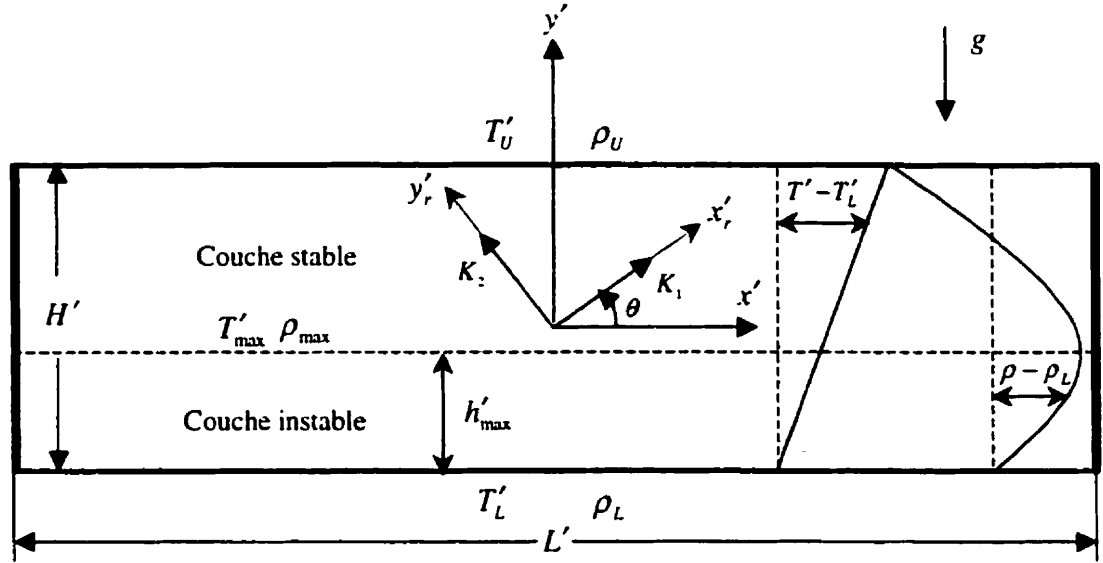


Figure 2.1 : Définition du modèle physique : cavité rectangulaire soumise à des températures uniformes sur les parois du haut et du bas

## 2.2 Équation de Darcy généralisée pour un milieu poreux anisotrope

Dans le repère  $(x'_r, y'_r)$  défini à la figure 2.1, l'équation de Darcy pour un milieu anisotrope a la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u'_r \\ v'_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} J'_{r1} \\ J'_{r2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} [K] \{J'\} \quad (2.1)$$

Les perméabilités  $K_1$  et  $K_2$  du tenseur de perméabilité  $[K]$  correspondent aux axes principaux  $x'_r$  et  $y'_r$ ; les composantes de vitesse du vecteur  $\{V'\}$  dans la direction de ces axes sont  $u'_r$  et  $v'_r$ ;  $J'_{r1}$  et  $J'_{r2}$  sont les composantes d'un vecteur  $\{J'\}$  qui inclut les gradients de pression et les composantes de la force de gravité, à définir ultérieurement.

En multipliant l'équation (2.1) par l'inverse du tenseur de perméabilité, c'est-à-dire par  $[K]^{-1} = [R]$ , on obtient :

$$[R]\{V'\} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_r \\ v'_r \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu} \begin{Bmatrix} J'_{r1} \\ J'_{r2} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

où  $[R]$  est le tenseur de résistivité hydraulique (Bear [26]) avec  $R_1 = 1/K_1$  et  $R_2 = 1/K_2$  représentant les résistivités hydrauliques dans la direction des axes principaux  $x'_r$  et  $y'_r$ , respectivement.

L'équation (2.2) peut être reformulée dans le repère  $(x', y')$  (voir figure 2.1) par l'utilisation des matrices de rotation reliant les composantes du vecteur  $\{V'\}$  (ou du vecteur  $\{J'\}$ ) d'un système de coordonnées à l'autre selon :

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} u'_r \\ v'_r \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_r \\ v'_r \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

L'équation résultante multipliée par  $K_2$  prend la forme explicite suivante :

$$\begin{bmatrix} K^* \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & (K^* - 1) \sin^2(\theta) \\ (K^* - 1) \sin^2(\theta) & K^* \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u' \\ v' \end{Bmatrix} = \frac{K_2}{\mu} \begin{Bmatrix} J'_1 \\ J'_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

$u'$ ,  $v'$  et  $J'_1$ ,  $J'_2$  étant les composantes des vecteurs  $\{V'\}$  et  $\{J'\}$  dans le repère  $(x', y')$ .

Dans ce repère, les composantes  $J'_1$  et  $J'_2$  ont pour expression :

$$\begin{Bmatrix} J'_1 \\ J'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial P'}{\partial x'} \\ \frac{\partial P'}{\partial y'} - \rho g \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

dans lesquelles  $P'$  est la pression et  $g$  la constante de gravité terrestre.

### 2.3 Hypothèse de Boussinesq

Selon l'hypothèse de Boussinesq, les variations de température engendrent des faibles variations de densité, lesquelles sont néanmoins à l'origine du mouvement. La densité peut être exprimée comme suit :

$$\rho = \rho_r + \Delta\rho \quad (2.6)$$

avec

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_r} = \frac{\rho - \rho_r}{\rho_r} \ll 1 \quad (2.7)$$

$\rho_r$  étant une densité de référence.

D'autre part, la pression peut être exprimée comme suit

$$P' = P'_r - \rho_r g y' + p' \quad (2.8)$$

où  $P'_r$  est une pression de référence et  $p'$ , une pression dite résiduelle. le terme intermédiaire donnant la variation de pression hydrostatique. L'expression (2.5) prend donc la forme

$$\begin{Bmatrix} J'_1 \\ J'_2 \end{Bmatrix} = \rho_r \begin{Bmatrix} \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p'}{\partial x'} \\ \frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p'}{\partial y'} - \frac{\Delta\rho}{\rho_r} g \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Pour représenter la variation non linéaire de la densité en fonction de la température nous choisissons une relation parabolique de la forme

$$\frac{\rho - \rho_{\max}}{\rho_{\max}} = -\beta_1 (T' - T'_{\max})^2 \quad (2.10)$$

avec  $T'_{\max} = 3.98 \text{ } ^\circ\text{C}$  et  $\beta_1 = 8 \times 10^{-6} (\text{ } ^\circ\text{C})^{-2}$ .  $\rho_{\max}$  étant la densité maximum de l'eau. la relation (2.9) est valide à 4% près pour la plage de température  $0^\circ - 8^\circ\text{C}$  (voir Mamou et al. [83])

Bien que la distribution verticale de température en conduction pure donnée à la figure 2.1 soit linéaire, la densité, elle, varie suivant une parabole et la position verticale du maximum  $(\rho_{\max} - \rho_L)$  dépend du choix des températures  $T'_L$  et  $T'_U$ . Cette position du maximum définit une couche instable au bas, d'épaisseur  $h'_{\max}$ , la couche supérieure d'épaisseur  $H' - h'_{\max}$  étant stable.

Choissant  $\rho_L$  comme densité de référence, la différence de densité intervenant dans la relation (2.9) peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_L} = \frac{\rho - \rho_L}{\rho_L} = \frac{\rho - \rho_{\max}}{\rho_L} - \frac{\rho_L - \rho_{\max}}{\rho_L} \quad (2.11)$$

Compte tenu de l'équation (2.10), nous pouvons écrire :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho - \rho_{\max}}{\rho_L} &= \frac{\rho - \rho_{\max}}{\rho_{\max}} = -\beta_1 (T' - T'_{\max})^2 \\ \frac{\rho_L - \rho_{\max}}{\rho_L} &= \frac{\rho_L - \rho_{\max}}{\rho_{\max}} = -\beta_1 (T'_L - T'_{\max})^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

de sorte que l'équation (2.11) devient :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_L} \approx \beta_1 \left[ 2 (T'_{\max} - T'_L)(T' - T'_L) - (T' - T'_L)^2 \right] \quad (2.13)$$

## 2.4 Équations de base et conditions aux frontières

Le principe de conservation de la masse conduit à l'équation de continuité suivante pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} = 0 \quad (2.14)$$

Le principe de conservation d'énergie conduit à l'équation de l'énergie dans laquelle la dissipation visqueuse est négligée :

$$\sigma \frac{\partial T'}{\partial t'} + u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{k_p}{(\rho C)_f} \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2} \right) \quad (2.15)$$

Dans cette équation,  $T'$  est la température,  $t'$  le temps,  $k_p$  la conductivité thermique du milieu poreux saturé,  $\sigma = (\rho, C)_p / (\rho, C)_f$  le rapport des capacités calorifiques,  $(\rho, C)_p$  est la capacité calorifique du milieu poreux saturé et  $(\rho, C)_f$  est la capacité calorifique du fluide. Le rapport  $k_p / (\rho, C)_f$  correspond à la diffusivité thermique  $\alpha$  pour un milieu poreux.

En tenant compte des relations (2.9) et (2.13), l'équation de Darcy généralisée (2.4) devient :

● **Selon la direction x**

$$(K^* \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) u' + (K^* - 1) \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{K_2}{\nu} \frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (2.16a)$$

● **Selon la direction y**

$$(K^* - 1) \frac{\sin 2\theta}{2} u' + (K^* \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) v' = \frac{K_2}{\nu} \left( \frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p'}{\partial y'} + g \beta_1 \left[ 2(T' - T'_L)(T'_{\max} - T'_L) - (T' - T'_L)^2 \right] \right) \quad (2.16b)$$

L'équation de continuité (2.14) est la condition d'existence d'une fonction courant  $\Psi'$  à partir de laquelle les composantes de vitesse peuvent être définies selon :

$$u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y'} \quad (2.17a)$$

$$v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x'} \quad (2.17b)$$

Prenant le rotationnel de l'équation de Darcy, (2.16ab) et remplaçant les composantes de vitesse par leurs expressions en  $\Psi'$ , nous obtenons :

$$a \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x'^2} + b \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x' \partial y'} + c \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y'^2} = \frac{K_2 \beta_l g}{\nu} [2(T'_{\max} - T'_L) - 2(T' - T'_L)] \frac{\partial(T' - T'_L)}{\partial x'} \quad (2.18)$$

Dans cette dernière équation, les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont définis comme suit :

$$a = \cos^2 \theta + K^* \sin^2 \theta \quad (2.19a)$$

$$b = (K^* - 1) \sin 2\theta \quad (2.19b)$$

$$c = \sin^2 \theta + K^* \cos^2 \theta \quad (2.19c)$$

#### • Conditions aux frontières

Dans le cas d'une cavité avec confinement latéral, les conditions d'imperméabilité sur les parois solides prennent la forme :

$$y' = \pm L'/2 \quad \Psi' = 0 \quad (2.20a)$$

$$y' = \pm H'/2 \quad \Psi' = 0 \quad (2.20b)$$

Les conditions thermiques pour les parois du haut et du bas, celles soumises à des températures uniformes, sont les suivantes :

$$y' = -H'/2 \quad T' = T'_L \quad (2.21a)$$

$$y' = H'/2 \quad T' = T'_u \quad (2.21b)$$

Pour les parois verticales adiabatiques, les conditions thermiques sont définies comme suit :

$$x' = \pm \frac{L'}{2} \quad \frac{\partial T'}{\partial x'} = 0 \quad (2.22)$$

Dans le cas d'une couche infinie, on impose des conditions périodiques sur les parois verticales selon :

$$\phi'(-\lambda', y') = \phi'(\lambda', y') \quad (2.23)$$

La fonction  $\phi'$  représente ici une variable physique quelconque, par exemple, la fonction de courant  $\Psi'$  ou la température  $T'$ ;  $\lambda'$  est la demi-longueur d'onde.

Les équations (2.15), (2.17ab) et (2.18) constituent les équations gouvernantes sous forme dimensionnelle du problème à étudier. Elles sont assujetties aux conditions aux frontières (2.20)-(2.23).

Considérant le terme de droite de l'équation (2.18), il est à noter que, lorsque la condition suivante est remplie :

$$|T'_L - T'_{\max}| \gg |T'_U - T'_L| \geq |T' - T'_L| \quad (2.24)$$

Nous retrouvons asymptotiquement la situation de convection classique, c'est-à-dire celle obtenue à partir d'une relation linéaire entre la densité et la température.

## 2.5 Forme adimensionnelle

Pour rendre adimensionnelle les équations gouvernantes et les conditions aux frontières déjà obtenues, les variables adimensionnelles suivantes sont utilisées :

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= (x', y') / H' & \{u, v\} &= \{u', v'\} / (\alpha / H') \\ \tau &= t' / (\sigma H'^2 / \alpha) & \Psi &= \Psi' / \alpha \\ T &= (T' - T'_U) / \Delta T' & \Delta T' &= T'_U - T'_L \\ h_{\max} &= h'_{\max} / H' & A &= L' / H' \text{ et } \lambda = \lambda' / H' \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

En introduisant ces définitions dans les équations gouvernantes (2.15), (2.17ab) et (2.18), de même que dans les conditions aux frontières (2.20)-(2.23) on obtient :



• **Équations gouvernantes :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.26)$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = R(\gamma - 2T) \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.28)$$

Dans ces équations, les paramètres  $R$  et  $\gamma$  ont les formes suivantes :

$$R = \frac{g \beta_1 K_2 H' \Delta T'^2}{(\nu \alpha)} \quad (2.29)$$

$$\gamma = 2 \frac{T'_{\max} - T'_L}{T'_U - T'_L} = 2 \frac{T'_{\max} - T'_L}{\Delta T'} \quad (2.30)$$

Le premier paramètre ( $R$ ) est le nombre de Rayleigh; le second paramètre ( $\gamma$ ) est appelé paramètre d'inversion; les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  conservent leurs définitions données en (2.19 abc).

Les conditions aux frontières pour cavité avec confinement latéral deviennent :

$$x = \pm A/2 \quad \Psi = 0 \quad \partial T / \partial x = 0 \quad (2.31a)$$

$$y = -1/2 \quad \Psi = 0 \quad T = 0 \quad (2.31b)$$

$$y = +1/2 \quad \Psi = 0 \quad T = 1 \quad (2.31c)$$

Le paramètre  $A = L'/H'$  est le rapport de forme de la cavité.

Pour le cas d'un milieu infini, on utilise des conditions périodiques qui limitent le domaine de solution à une longueur d'onde. La condition (2.31a) est remplacée par :

$$\varphi(-\lambda/2, y) = \varphi(\lambda/2, y) \quad (2.32)$$

Dans laquelle  $\varphi$  représente une quantité adimensionnelle quelconque ( $\Psi$ ,  $T$ , etc.) et  $\lambda$  est la longueur d'onde.

## 2.6 Paramètres de contrôle et leur interprétation

Les paramètres de contrôle sont le nombre de Rayleigh  $R$ , le paramètre d'inversion  $\gamma$  et, pour la cavité confinée, le rapport de forme  $A$ , de même que l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$  et le rapport de perméabilité  $K^*$ . Le paramètre d'inversion est relié à la position verticale du maximum de densité en conduction pure selon :

$$h_{\max} = \frac{h'_{\max}}{H'} = \frac{\gamma}{2} \quad (2.33)$$

$h'_{\max}$  étant l'épaisseur de la couche instable, telle que définie à la figure 2.1. Selon que  $\gamma$  est plus petit ou plus grand que la valeur 2, la couche instable a une profondeur inférieure à  $H'$  ou occupe toute la distance  $H'$ . La figure 2.2 illustre ces deux situations.

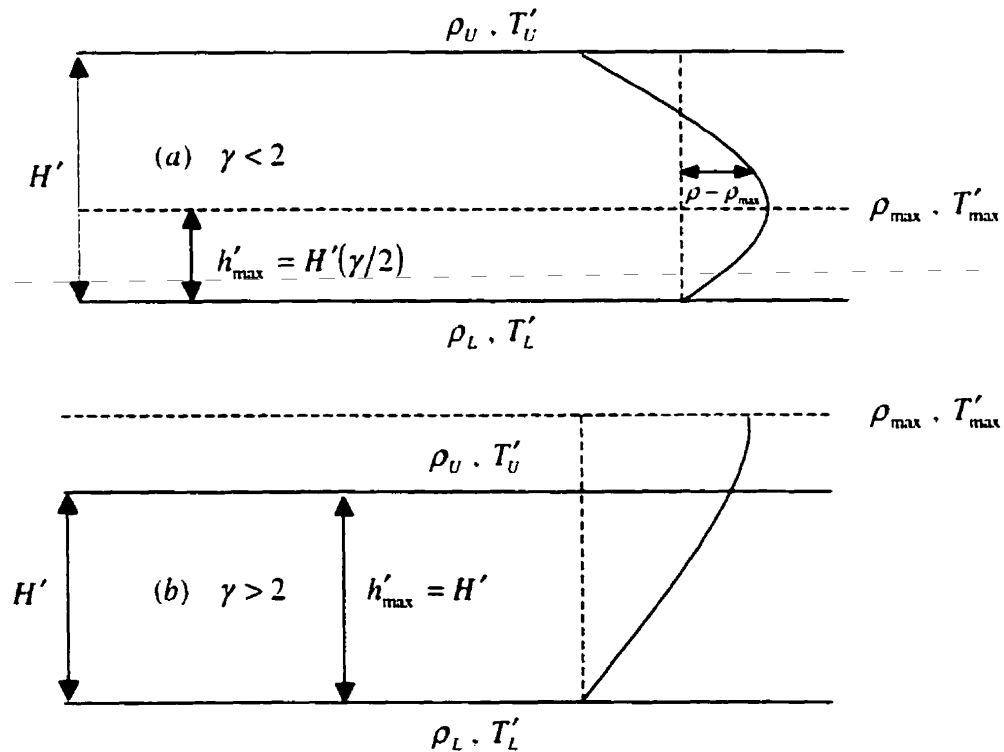


Figure 2.2 : Position verticale de la densité maximum  $\rho_{\max}$  en conduction pure : (a)  $\rho_{\max}$  entre les deux parois horizontales, (b)  $\rho_{\max}$  au-dessus de la paroi supérieure

Pour fins de comparaison des résultats provenant des équations gouvernantes, il est plus approprié d'utiliser un nombre de Rayleigh modifié  $R_m$ , et un rapport de forme modifié  $A_m$ , les deux, basés sur la profondeur de la couche instable  $h'_{\max}$  en conduction pure et sur l'écart de densité  $\Delta\rho_m$ , toujours en conduction pure, entre le haut et le bas de cette couche. La définition physique du nombre de Rayleigh modifié, basée sur l'approche de *Moore and Weiss* [23], demeure la même :

$$R_m = \frac{gK_2}{\alpha\nu} h'_{\max} \left( \frac{\Delta\rho_m}{\rho_{\max}} \right) \quad (2.34)$$

mais donne lieu à deux définitions mathématiques différentes, selon le cas :

**a.**  $0 < \gamma \leq 2$  :

$$\begin{aligned} h'_{\max} &= H \left( \frac{\gamma}{2} \right) \\ \frac{\Delta\rho_m}{\rho_{\max}} &= \frac{\rho_{\max} - \rho_L}{\rho_{\max}} = \beta_1 (T'_{\max} - T'_L)^2 = \beta_1 \Delta T_m'^2 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Selon la définition (2.30) de  $\gamma$  et celle de (2.25) de  $\Delta T'$ , nous obtenons :

$$\Delta T_m' = \left( \frac{\gamma}{2} \right) \Delta T' \quad (2.36)$$

de sorte que

$$R_m = R \left( \frac{\gamma}{2} \right)^3 \quad \text{et} \quad A_m = A \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{-1} \quad (2.37)$$

**b.**  $\gamma \geq 2$  :

$$h'_{\max} = H' \quad (2.38)$$

$$\frac{\Delta\rho_m}{\rho_{\max}} = \frac{\rho_U - \rho_L}{\rho_{\max}} = -\frac{\rho_{\max} - \rho_U}{\rho_{\max}} + \frac{\rho_{\max} - \rho_L}{\rho_{\max}}$$

Selon l'expression (2.13) et selon la définition de  $\Delta T'$  (2.25), on obtient :

$$\frac{\Delta \rho_m}{\rho_{\max}} = \beta_1 \Delta T'^2 (\gamma - 1) \quad (2.39)$$

de sorte que :

$$R_m = R (\gamma - 1) \quad \text{et} \quad A_m = A \quad (2.40)$$

Considérant la figure 2.2b, le fait d'augmenter  $\gamma$  vers des valeurs très grandes reporte beaucoup plus loin vers le haut la densité maximum  $\rho_{\max}$  de sorte que la distribution de densité entre les deux parois horizontales s'approche de plus en plus d'une distribution linéaire en conduction pure. Cette distribution étant celle de la convection naturelle classique avec relation linéaire densité-température. Il suffit donc de donner une valeur suffisamment grande à  $\gamma$  pour simuler la convection naturelle classique à partir des équations gouvernantes déjà données, ce qui revient à rendre négligeable le second terme du membre de droite de l'équation (2.28). Considérant les définitions de  $R$  et de  $\gamma$  données par les relations (2.29) et (2.30), le produit de ces deux paramètres correspond alors au nombre de Rayleigh utilisé en convection naturelle classique :

$$R_m = R \gamma = \frac{g K_z H' \Delta T'}{\nu \alpha} \beta_1 2 (T'_{\max} - T'_L) = \frac{g K_z H' \Delta T' \beta}{\nu \alpha} \quad (2.41)$$

$\beta$  étant le coefficient d'expansion thermique qui relie linéairement la densité à la température (pour de plus amples détails voir la référence [20]). Il est à noter que pour  $\gamma = 2$ , les définitions de  $R_m$  et de  $A_m$  données par les équations (2.37) et (2.40) coïncident.

## 2.7 Transfert thermique

Le transfert de chaleur à travers la cavité est caractérisé par le nombre de Nusselt  $Nu$ . Étant donné que les parois actives (parois horizontales) sont soumises à des températures constantes, le nombre de Nusselt  $Nu$  à une position  $x$  donnée s'écrit :

$$Nu = \frac{k_p \frac{\partial T'}{\partial y'} \Big|_{y'=\pm H'/2}}{k_p \frac{\Delta T'}{H'}} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\pm l/2} \quad (2.42)$$

La valeur moyenne du nombre de Nusselt  $\overline{Nu}$  le long des parois horizontales (parois actives) de la cavité est donnée par :

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} Nu \Big|_{y=\pm l/2} dx \quad (2.43)$$

## **CHAPITRE III**

### **SOLUTION NUMÉRIQUE**

#### **3.1 Introduction**

Dans ce chapitre, nous discutons de la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations gouvernantes du problème telles que présentées dans le chapitre II. La méthode proposée est basée sur la technique des éléments finis. Cette méthode sera appliquée aux équations complètes pour fins d'étude de la convection d'amplitude finie. Il sera alors possible de connaître le comportement, non seulement du transfert de chaleur, mais des autres caractéristiques spécifiques à un extremum de densité comme par exemple le degré de pénétration au mouvement convectif dans la couche stable et la possibilité d'avoir des régimes d'écoulement sous-critique.

Dans ce qui suit, nous développons une forme discrétisée des équations de base (2.26)-(2.28), applicable à la fois au cas d'une relation "classique" c'est-à-dire linéaire entre la densité et la température et au cas d'une relation parabolique permettant de simuler un extremum de densité. Nous décrivons toutes les étapes menant à une solution des équations discrétisées. Nous terminons le chapitre par une validation des codes numériques développés en comparant les résultats de ces codes avec ceux de la littérature.

Rappelons que ce chapitre ne vise qu'à résoudre le problème de la convection d'amplitude finie, la formulation nécessaire à la solution des équations linéarisées pour fins d'étude de la stabilité faisant l'objet du chapitre suivant.

#### **3.2 Méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement les équations gouvernantes du système. Cette méthode permet d'utiliser différents types de

maillage. Elle permet également de passer d'un maillage à un autre sans changer le schéma de discrétisation. Le domaine physique du problème  $\Omega$  est découpé en plusieurs sous domaine  $\Omega'$ , appelés éléments. Ce domaine discrétisé donne lieu à des équations discrètes qui nécessitent l'utilisation de la formulation faible, appelée formulation variationnelle de Galerkin.

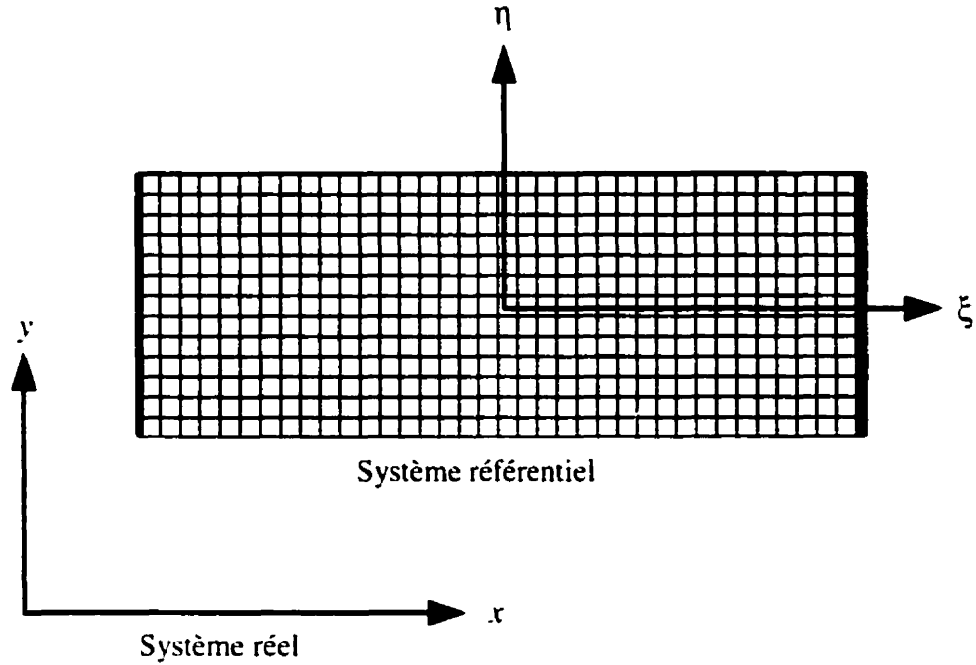


Figure 3.1 : Domaine de calcul après discrétisation

Dans le but de faciliter l'usage de la formulation variationnelle de Galerkin, nous devons décomposer la solution générale des équations de base en la somme d'une solution conductive et d'une autre convective. Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \Psi = \Psi_c + \bar{\Psi}(t, x, y) \\ T = T_c + \Theta(t, x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $(\Psi_c, T_c)$  et  $(\bar{\Psi}, \Theta)$  représentent respectivement, les solutions conductive et convective du problème. La solution conductive est définie par :

$$\left. \begin{array}{l} \Psi_c = 0 \\ T_c = y \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

Nous introduisons les équations (3.1) et (3.2) dans les équations de base (2.26)-(2.28) et après calcul et réarrangement des termes, nous obtenons les relations suivantes :

$$\left( a \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial y^2} \right) = R \Re(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \left( 1 + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

avec  $\Re = \gamma - 2y - 2\Theta$ .

- **Conditions aux frontières**

Les nouvelles conditions aux frontières hydrodynamiques et thermiques associées aux équations (3.3)-(3.4) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \pm \frac{A}{2} & \Rightarrow \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \bar{\Psi} = 0 \\ y = \pm \frac{1}{2} & \Rightarrow \quad \Theta = \bar{\Psi} = 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

### 3.2.1 Formulation faible du problème

Pour obtenir la formulation variationnelle de Galerkin des équations (3.3) et (3.4), nous les multiplions respectivement par les fonctions test  $\bar{u}$  et  $\bar{w}$ . Ces deux fonctions sont choisies d'une manière arbitraire mais elles doivent satisfaire les conditions aux frontières (3.5). Nous appliquons le théorème de Green (théorème de la divergence) et après calcul et réarrangement des termes, nous obtenons les intégrales suivantes :



$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( a \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} + b \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} + c \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} \bar{u}^T \left[ (a+b) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} n_x + c \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} n_y \right] d\Gamma = R \left[ \int_{\Omega} \Re(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \bar{u} d\Omega \right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \bar{w}^T \frac{\partial \Theta}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{w}^T \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \left( 1 + \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) \right] d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.7}$$

où  $n_x$  et  $n_y$  sont les normales à la frontière  $\partial\Omega$  selon les directions  $x$  et  $y$  respectivement et  $d\Gamma$  représente un élément infinitésimal de la frontière  $\partial\Omega$ , avec  $\partial/\partial n = (\partial/\partial x)n_x + (\partial/\partial y)n_y$ . Selon les conditions aux frontières (3.5), nous pouvons constater que les intégrales sur la frontière  $\partial\Omega$  s'annulent.

### 3.2.2 Discrétisation et approximation par éléments finis

À cause de la forme géométrique simple de la cavité, l'élément rectangulaire de Lagrange à neuf nœuds a été choisi comme élément de discrétisation du domaine de calcul. Les profils de la fonction de courant et de la température sont quadratiques et continus pour chaque élément. Au niveau élémentaire, les fonctions  $\bar{\Psi}(x, y)$  et  $\Theta(x, y)$  sont approximées de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Psi}(x, y) \\ \Theta(x, y) \end{Bmatrix}_e = \sum_{j=1}^9 N_j(x, y) \begin{Bmatrix} \bar{\Psi}_j \\ \Theta_j \end{Bmatrix}_e \tag{3.8}$$

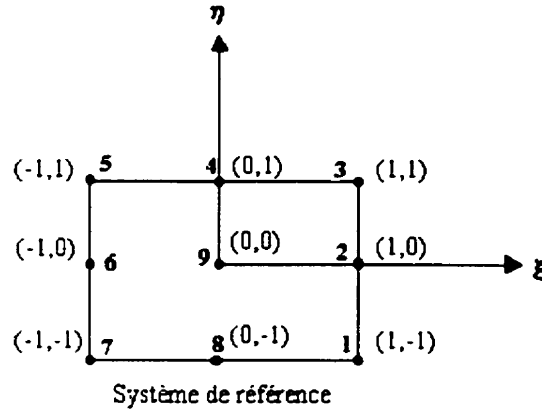


Figure 3.2 : Éléments rectangulaires de Lagrange à neuf nœuds dans le système référentiel

Les variables  $\bar{\Psi}_j$  et  $\Theta_j$  représentent les vecteurs nodaux inconnus et  $N_j$  sont les fonctions d'interpolation de Lagrange. Ces dernières sont utilisées pour décrire l'approximation par éléments finis et elles sont définies par :

$$\begin{cases} N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \xi \xi_j (1 + \xi \xi_j) \eta \eta_j (1 + \eta \eta_j), & j = 1, 3, 5, 7 \\ N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \xi \xi_j (1 + \xi \xi_j) (1 - \eta^2), & j = 4, 8 \\ N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \eta \eta_j (1 + \eta \eta_j), & j = 2, 6 \\ N_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta^2), & j = 9 \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $(\xi, \eta)$  représentent les coordonnées des nœuds dans le domaine de référence. Au niveau élémentaire, les coordonnées physiques  $(x, y)$  sont calculées en fonction des coordonnées de références  $(\xi, \eta)$  et les fonctions de forme  $N_j$  par l'approximation suivante :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_e = \sum_{j=1}^9 N_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix}_e \quad (3.10)$$

Nous présentons maintenant les équations de base (3.3) et (3.4) sous leurs formes discrétisées. Pour la discrétisation de ces équations, nous avons utilisé un schéma implicite en se basant sur le théorème de Bubnov-Galerkin.

Nous introduisons les expressions (3.8) et (3.10) dans les intégrales (3.6) et (3.7) et nous remplaçons les fonctions test  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  par les fonctions de forme  $N_j$ . Après calcul et réarrangement des termes, nous obtenons les systèmes d'équations suivants :

$$[K_\psi] \{\bar{\Psi}_k^n\} = R [B] \{\Theta_{k-1}^n\} \quad (3.11)$$

$$\left[ \frac{1}{\Delta t^0} [M] - [C] + [K_\theta] \right] \{\Theta_k^n\} = [D] \{\bar{\Psi}_k^n\} + \frac{1}{\Delta t^0} [M] \{\Theta^0\} \quad (3.12)$$

dans lesquelles  $\Theta = T - T_c$  ( $T_c$ : solution de la conduction pure); les matrices  $[B]$ ,  $[C]$ ,  $[D]$ ,  $[K_\theta]$ ,  $[K_\psi]$  et  $[M]$  sont des matrices carrées de dimension  $m \times m$  où  $m = (2N_{ex} + 1)(2N_{ey} + 1)$  est le nombre total de nœuds ( $N_{ex}$  et  $N_{ey}$  représentent les nombres d'éléments selon les directions  $x$  et  $y$ , respectivement). Les quantités  $\Theta^0$  et  $\Delta t^0$  sont définies comme suit :  $\Theta^0 = (4\Theta^{n-1} - \Theta^{n-2})/3$  et  $\Delta t^0 = 2\Delta t/3$ , où  $n$  correspond au temps  $t = n\Delta t$ ;  $\Delta t$  représente l'incrément sur le temps et  $k$  est le nombre d'itérations. Les matrices élémentaires sont données par les expressions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} [B]^e &= [D]^e = - \int_{\Omega^e} \Re(\Theta_k^n) \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot N_i \, d\Omega^e \\ [K_\theta]^e &= \int_{\Omega^e} \nabla N_i \cdot \nabla N_i \, d\Omega^e, \quad [M]^e = \int_{\Omega^e} N_i N_i \, d\Omega^e \\ [K_\psi]^e &= \int_{\Omega^e} \left( a \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + b \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + c \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega^e \\ [C]^e &= \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \{\bar{\Psi}_{k-1}^n\} N_i \, d\Omega^e \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

avec  $\Re(\Theta_k^n) = \gamma - y - 2\Theta_k^n$ .

Ces matrices sont calculées numériquement par la méthode d'intégration de Gauss à deux dimensions, donnée par l'expression suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{N_G} \sum_{j=1}^{N_G} W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.14)$$

la variable  $f$  est une fonction arbitraire,  $W_i$  et  $W_j$  sont les fonctions de poids de Gauss pour le cas bidimensionnel,  $N_G$  est le nombre de points de Gauss et  $(\xi_i, \eta_j)$  sont les coordonnées de ces points.

### 3.3 Critère de convergence

On suppose que le régime permanent du problème (solution permanente) est atteint lorsque l'expression suivante est satisfaite :

$$\frac{\left| \sum_i \varphi_i^{t+\Delta t} - \sum_i \varphi_i^t \right|}{\left| \sum_i \varphi_i^t \right|} \leq 10^{-10} \quad (3.15)$$

$\varphi$  représentant la fonction de courant  $\bar{\Psi}$  ou la température  $\Theta$ .

### 3.4 Méthode et algorithme de résolution

La méthode de surrelaxation successive (S.O.R) et la méthode P.D.M.A (Penta-Diagonal Method Algorithm) ont été utilisées respectivement pour résoudre les équations de mouvement (3.11) et de l'énergie (3.12). La forme linéarisée des deux systèmes d'équations (3.11) et (3.12) est donnée par la relation :

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (3.16)$$

où  $[A]$  représentant la matrice résultante du système,  $\{X\}$  est le vecteur des inconnus et  $\{B\}$  représente le terme de droite de l'équation (3.16). Dans notre cas, la matrice  $[A]$

contient cinq matrices penta-diagonales successives. Cette dernière peut être décomposée de la façon suivante :

$$[A] = [PD] + [LU] \quad (3.17)$$

dans laquelle  $[PD]$  représente la matrice principale penta-diagonale de  $[A]$  et  $[LU]$  représente sa matrice résiduelle.

L'équation (3.17) est résolue en utilisant l'algorithme de la méthode itérative PDMA. Cette dernière est beaucoup moins coûteuse en terme de temps CPU. Dans le but d'augmenter la vitesse de la convergence de la solution, nous avons introduit le terme de sous-relaxation  $w$ . Finalement, l'équation (3.16) s'écrit :

$$[PD]\{X^k\} = [PD]\{X^{k-1}\} + w(\{F\} - [A]\{X^{k-1}\}) \quad (3.18)$$

avec  $0 < w < 1$ .

L'algorithme que nous avons utilisé dans le programme pour résoudre les équations (3.11) et (3.12) procède de la façon suivante :

1. Déclaration des variables du problème.
2. Initiation des variables et des paramètres du problème.
3. **Début de la boucle sur le temps** (  $t = 0$  ) à partir de la conduction pure ou des conditions initiales (ou à partir des résultats obtenus dans l'itération précédente).
  - 3.1 Résoudre les équations (3.11) et (3.12).
  - 3.2 Refaire l'étape (3.1) jusqu'à l'obtention de la convergence de la solution.
  - 3.3 Incrémenter le temps d'un pas de  $\Delta t$  ( $t + \Delta t$ ) et refaire l'étape (3.1).
4. **Fin de la boucle sur le temps** : une fois la solution permanente ou la solution transitoire est atteinte.
5. Impression des résultats
6. Fin du programme.

### 3.5 Validation de la méthode de résolution

Dans cette section, nous validons le code numérique qui a servi à la résolution des équations gouvernantes du système par trois exemples différents. Il s'agit de trois cas limites qui peuvent être déduits à partir de notre problème général. Dans le premier cas, nous examinons un milieu de Darcy isotrope saturé par un fluide avec relation linéaire densité-température. Ce dernier est obtenu pour  $K^* = 1$  et  $\gamma \rightarrow \infty$ . Pour le deuxième cas limite, il s'agit d'une couche poreuse anisotrope ( $K^* \neq 1$ ) saturée par un fluide avec relation linéaire densité-température ( $\gamma \rightarrow \infty$ ). Quant au dernier cas limite, il s'agit d'une couche poreuse isotrope (milieu de Darcy) saturée par de l'eau froide dont la densité varie paraboliquement (non linéaire) avec la température ( $K^* = 1$  et  $0 < \gamma \leq 2$ ). Rappelons que le nombre de Rayleigh  $R_m$  et le rapport de forme de la cavité  $A_m$  étant définis à l'équation (2.40).

- **Milieu de Darcy ( $K^* = 1$ ) avec relation densité-température linéaire ( $\gamma \rightarrow \infty$ )**

Le présent code a été validé par rapport aux résultats obtenus par *Caltagirone* [7] dans le cas d'une couche poreuse dont les parois horizontales sont soumises à des conditions aux frontières isothermes. Cette situation est pratiquement obtenue pour  $\gamma = 10^4$ . Les résultats sont illustrés à la figure 3.3 pour un rapport de forme  $A_m = 0.8$  et pour  $R_m = 200$ . Nous constatons que les lignes de courant et d'isothermes de la figure 4 de *Caltagirone* [7] ont été intégralement reproduites.

Les valeurs du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  et de la fonction de courant maximale  $|\Psi_{cr}|$  ont été aussi comparées à celles obtenues par *Caltagirone* [7] pour le cas  $A_m = 0.8$ ,  $R_m = 200$  et  $R_m = 300$ . Un accord très satisfaisant a été observé entre les deux résultats (voir tableau 3.1). Les différences minimales observées entre les deux résultats, en terme des valeurs de la fonction de courant maximale  $|\Psi_{cr}|$  et du nombre de Nusselt  $\overline{Nu}$ , sont dues d'une part à la méthode de résolution numérique utilisée; les

différence finies pour *Caltagirone* [7] et les éléments finis pour le présent travail et d'autre part de maillage différent utilisé dans chaque approche.

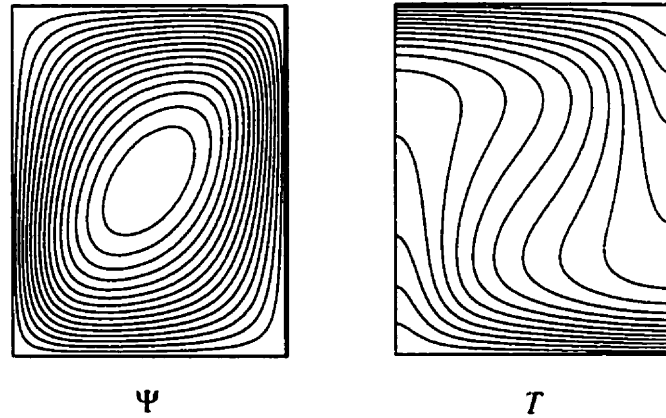


Figure 3.3 : Lignes de courant et isothermes pour le cas  $K^* = 1$ ,  $\gamma = 10^4$ ,  $A_m = 0.8$  et  $R_m = 200$

Tableau 3.1 : Les valeurs du nombre de Nusselt moyen,  $\overline{Nu}$  et de la fonction de courant maximale,  $|\Psi_{cr}|$  obtenues pour le cas  $K^* = 1$  (isotrope),  $\gamma = 10^4$ ,  $A_m = 0.8$  et pour  $R_m = 200, 300$

Auteur	$R_m = 200$		$R_m = 300$	
	Présent travail	Caltagirone [7]	Présent travail	Caltagirone [7]
$ \Psi_{cr} $	8.179	8.180	10.546	10.544
$\overline{Nu}$	3.938	3.941	4.695	4.699

- **Couche poreuse anisotrope avec relation densité-température linéaire ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) :**

La figure 3.4 montre des représentations typiques des lignes de courant et des isothermes pour un paramètre d'inversion  $\gamma$  suffisamment grand ( $\gamma = 10^4$ ) et pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison des axes principaux de la perméabilité  $\theta$  ( $\theta = 0^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$ ). Le rapport de forme de la cavité  $A_m$ , le rapport de perméabilité  $K^*$

et le nombre de Rayleigh  $R_m$  étant respectivement de 1, 0.125 et 40. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux de *Zhang et al. [18]* dans le cas d'une couche poreuse anisotrope saturée par un fluide dont la densité varie linéairement avec la température. Il est à noter que les champs d'écoulement et les isothermes pour les cas  $\theta = 60^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$  correspondent à des structures à deux cellules.

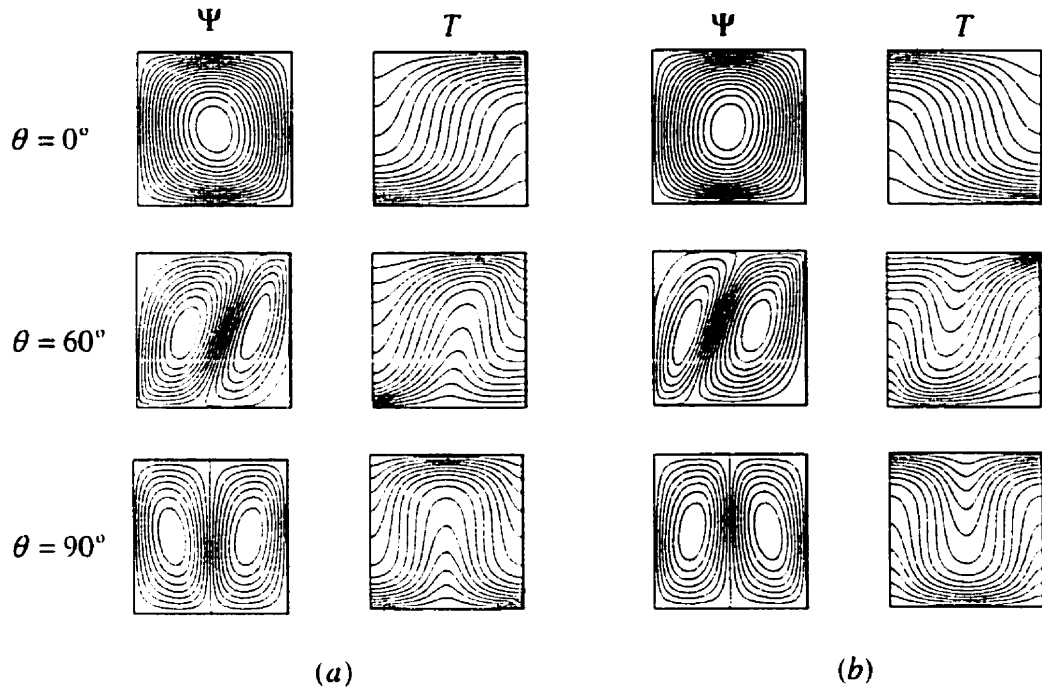


Figure 3.4 : Lignes de courant et des isothermes pour le cas  $\gamma = 10^4$ ,  $A_m = 1$ ,  $K^* = 0.125$ ,  $R_m = 40$  et pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$  ( $\theta = 0^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ ) : (a) solution "naturelle" (l'écoulement est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) et (b) solution "antinaturelle" (l'écoulement est dans le sens des aiguilles d'une montre). Pour les définitions de l'écoulement "naturel" et de l'écoulement "antinaturel", voir la partie 5.3.1 du chapitre V



- **Milieu de Darcy isotrope avec relation densité-température non linéaire :**

Les résultats obtenus dans le cas de la convection d'amplitude finie ont été aussi comparés à ceux obtenus par *Mamou et al. [83]* dans le cas d'un milieu de Darcy isotrope dont la densité du fluide saturant la matrice poreuse varie paraboliquement (non linéaire) avec la température. Des représentations des lignes de courant et des isothermes pour  $\gamma = 1$ ,  $K^* = 1$ ,  $\theta = 0^\circ$ ,  $A_m = 2$ , ( $A = 1$ ), et  $R_m/R_{mC} = 1.01$  sont données dans la figure 3.5. En nous référant à la figure 9(d) de *Mamou et al. [83]*, nous constatons que les champs de vitesse et de température ont été reproduits tels quels. Cette figure correspond à une des solutions possibles pour le cas  $\gamma = 1$ ,  $K^* = 1$ ,  $\theta = 0^\circ$  et  $R_m/R_{mC} = 1.01$ .

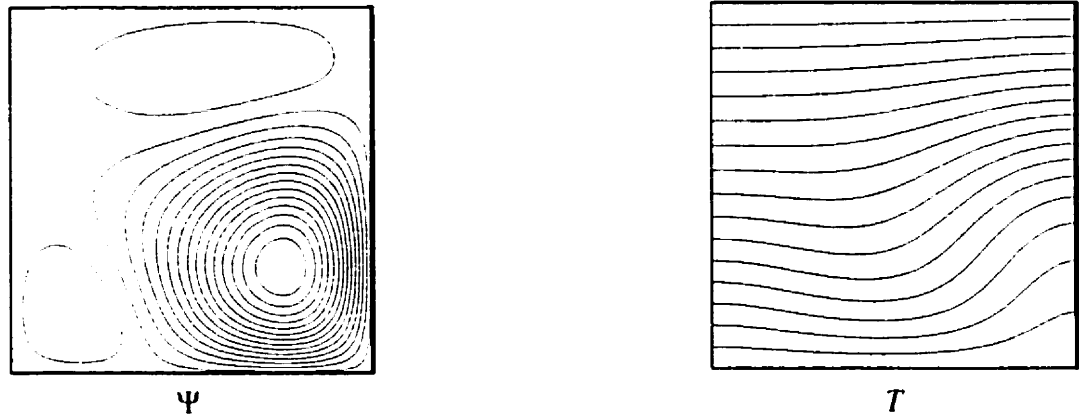


Figure 3.5 : Lignes de courant et isothermes pour le cas  $\gamma = 1$ ,  $K^* = 1$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

$$R_m/R_{mC} = 1.01 \text{ et } A_m = 2 \text{ ( } A = 1 \text{ )}$$

### 3.6 Effet du maillage

La figure 3.6 illustre l'effet du maillage sur les résultats obtenus pour le cas.  $\gamma = 10^4$ ,  $K^* = 1$  (isotrope),  $\theta = 0^\circ$ ,  $A_m = 1$  et  $R_m = 100$ . Cette figure montre la variation de la fonction de courant au centre  $\Psi_c$  en fonction du nombre d'éléments,  $Ne = Nex \times Ney$ .  $Nex$  et  $Ney$  représentent respectivement le nombre d'éléments selon

les directions  $x$  et  $y$ . Nous constatons qu'à partir de  $Ne = 20$ , les résultats deviennent indépendants du maillage.

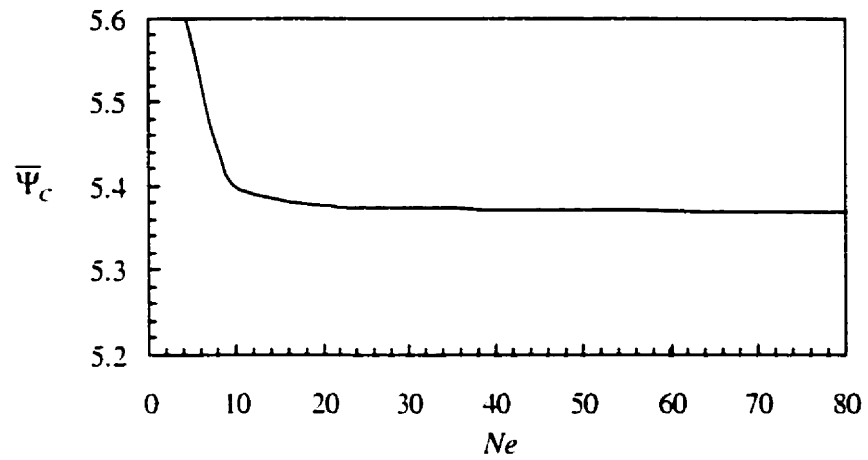


Figure 3.6 : Effet du maillage sur la précision des résultats : variation de la fonction de courant  $\bar{\Psi}_c$  au centre en fonction du nombre des éléments  $Ne$

## CHAPITRE IV

### ANALYSE DE LA STABILITÉ LINÉAIRE

#### 4.1 Introduction

Le chapitre IV est consacré à l'étude de la stabilité linéaire du problème défini au chapitre II. Ce problème est résolu numériquement par la méthode des éléments finis. Dans ce chapitre, on s'intéresse principalement à la prédiction des nombres de Rayleigh critiques correspondant au seuil de la convection et à la nature des mouvements convectifs associés. Les couches infinies et confinée sont considérées dans ce chapitre.

Dans le cas où la relation entre la densité volumique de l'eau et la température est linéaire, une solution analytique est possible pour  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 90^\circ$ ). Les détails de cette solution analytique telle qu'établie par *Storesletten [19]* sont présentés dans la première section de ce chapitre. Dans la deuxième section, nous présentons une solution numérique traitant le problème de stabilité d'une façon générale c'est-à-dire dans le cas où la relation entre la densité et la température est non linéaire et pour n'importe quelle valeur de l'angle d'orientation des axes principaux  $\theta$ . Rappelons que lorsque le paramètre d'inversion prend des valeurs suffisamment supérieures à la valeur 2.0 ( $\gamma \gg 2$ ), nous retrouvons le cas linéaire de la densité versus température. La dernière section de ce chapitre porte sur la validation de la solution numérique.

#### 4.2. Solution analytique pour le cas $\theta = 0^\circ$ ( ou $\theta = 90^\circ$ ) : $\gamma \gg 2$ , $A_m = A$

Lorsqu'un des axes principaux coïncide avec la direction de la gravité, l'obtention d'une expression analytique pour le nombre de Rayleigh critique est possible. Cette expression a été développée par *Storesletten [19]* à partir d'une analyse de stabilité

linéaire. Cette dernière donne la relation suivante entre le nombre de Rayleigh  $R_m$  et le nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda_m$  ( $\lambda_m = \lambda$ ).

$$R_{mC} = \frac{(k^2/K^* + \pi^2)(k^2 + \pi^2)}{k^2/K^*} \quad (4.1)$$

Pour une couche infinie, le nombre d'onde  $k$  prend une valeur minimisant le nombre de Rayleigh  $R_m$ . On trouve ainsi :

$$R_{mC} = \pi^2 \left(1 + K^{*1/2}\right)^2 \quad \text{avec} \quad k = \pi K^{*1/4} \quad (4.2)$$

*Storesletten [19]* s'est arrêté à ce dernier résultat sans chercher à interpréter son approche analytique en termes d'une cavité confinée. Nous allons montrer que l'équation (4.1) telle qu'établie par *Storesletten [19]* est applicable au cas d'une couche confinée.

Pour la couche confinée avec  $\theta = 0^\circ$  traitée dans le présent travail, les parois verticales exercent une contrainte sur  $k$  en fixant la longueur d'onde. Cette contrainte est la seule exercée sur le nombre d'onde  $k$  puisqu'un milieu de Darcy implique que les parois de la cavité, y compris les parois verticales, sont libres de contraintes de cisaillement. Il est à noter que les cellules convectives pour une couche infinie avec  $\theta = 0^\circ$  sont séparées par des limites verticales.

Pour une cavité qui contient une seule cellule convective, le nombre d'onde imposé est  $k = \pi/A_m$ . L'équation (4.1) donne alors le nombre de Rayleigh critique selon :

$$R_{mC} = \pi^2 \left(1 + A_m^2 K^*\right) \left(1 + 1/A_m^2\right) \quad (4.3)$$

Pour le cas particulier d'une cavité carrée, le nombre de Rayleigh critique  $R_{mC}$  est donné par :

$$R_{mC} = 2\pi^2 (1 + K^*) \quad (4.4)$$

ce résultat étant en accord avec les résultats établis par *Zhang et al.* [18].

Quand le rapport de forme  $A_m$  vaut la moitié de la longueur d'onde de la cavité infinie ( $A_m = \pi/k = K^{*-1/4}$ ), le nombre de Rayleigh critique  $R_{mC}$  prend alors la valeur déjà donnée par l'équation (4.2). Le nombre de Rayleigh  $R_{mC}$  et le rapport de forme  $A_m$  peuvent être normalisés de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{mC} &= \frac{4R_{mC}}{(1 + K^{*1/2})^2} = \frac{4\pi^2 (1 + K^{*1/2} \bar{A}_m^2) (1 + K^{*1/2} / \bar{A}_m^2)}{(1 + K^{*1/2})^2} \\ \bar{A}_m &= A_m K^{*1/4} \end{aligned} \right\} \quad (4.5ab)$$

Ainsi normalisée, l'équation (4.5a), valable pour un écoulement monocellulaire, donne, pour  $\bar{A}_m = 1$ , la valeur de  $4\pi^2$  pour le nombre de Rayleigh critique normalisé  $\bar{R}_{mC}$ , et ce, quelle que soit la valeur de  $K^*$ . Cette valeur est un minimum qui correspond au  $\bar{R}_{mC}$  de la couche infinie. Lorsque  $\bar{A}_m$  s'écarte de l'unité,  $\bar{R}_{mC}$  augmente. Il est à noter que  $\bar{R}_{mC}(K^*) = \bar{R}_{mC}(1/K^*)$ ,  $\bar{A}_m$  étant maintenu fixe.

L'équation donnant le nombre de Rayleigh  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme  $\bar{A}_m$  pour une cavité contenant  $n$  cellules peut être obtenue en remplaçant  $\bar{A}_m$  par  $\bar{A}_m/n$  dans l'équation (4.5). On trouve :

$$\bar{R}_{mC} = \frac{4R_{mC}}{(1 + K^{*1/2})^2} = \frac{4\pi^2 (1 + K^{*1/2} \bar{A}_m^2 / n^2) (1 + n^2 K^{*1/2} / \bar{A}_m^2)}{(1 + K^{*1/2})^2} \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) a la même valeur minimum  $4\pi^2$  que celle de l'équation (4.1). Cette valeur minimum est localisée à  $\bar{A}_m = n$ .

### 4.3. Solution numérique

Lorsque l'orientation des axes principaux est arbitraire ( $\theta \neq 0^\circ$  ou  $90^\circ$ ), et lorsque la relation densité-température est non linéaire, l'obtention du seuil de convection analytiquement apparaît difficile. Dans cette section, nous proposons une solution numérique pour résoudre ce type de problème. La stabilité linéaire marginale a été utilisée pour prédire le nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de la convection en utilisant les transformations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \Psi_R + \psi_0 e^{pt} F(x, y) \\ T(x, y, t) &= T_R + \phi_0 e^{pt} G(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

dans lesquelles les conditions  $\Psi_R = 0$  et  $T_R = y + 1/2$  correspondent à l'état de repos du fluide.  $F$  et  $G$  sont deux fonctions qui décrivent les profils de la fonction de courant et de la température respectivement au seuil de la convection;  $\psi_0$  et  $\phi_0$  ( $\psi_0$  et  $\phi_0 \ll 1$ ) sont les amplitudes et  $p$  est un paramètre qui mesure le taux d'accroissement de l'amplitude de la perturbation. Les conditions aux frontières de la fonction  $F(x, y)$  sont similaires à celles de la fonction de courant  $\Psi(x, y)$ , déjà exprimées dans le chapitre II par les équations (2.31abc), sauf pour  $y = 1/2$  où la fonction  $F(x, y)$  prend la valeur zéro. La fonction  $G(x, y)$  est aussi assujettie aux conditions aux frontières associées à la température, exprimées par les équations (2.31abc).

La stabilité marginale correspond alors à  $p = 0$ , pour lequel l'échange de la stabilité est valide. Les équations (4.7) s'écrivent ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x, y) &= \psi_0 F(x, y) \\ T(x, y) &= y + \frac{1}{2} + \phi_0 G(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

On remplace les équations (4.8) dans les équations de base (2.26)-(2.28) et on néglige les termes non linéaires (second ordre) résultants des perturbations ( $\psi_0$  et  $\phi_0$  sont de très petites quantités au seuil de la convection). Les équations linéarisées sont alors :

$$\psi_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F = R h(y) \phi_0 \frac{\partial G}{\partial x} \quad (4.9)$$

$$-\psi_0 \frac{\partial F}{\partial x} = \phi_0 \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \quad (4.10)$$

avec  $h(y) = \gamma - 2y - 1$

Les équations linéaires (4.9) et (4.10) sont résolues numériquement par la méthode des éléments finis. En utilisant le théorème de Green, la formulation variationnelle donne les intégrales de Galerkin suivantes :

$$\psi_0 \int_{\Omega} \left( a \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + b \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + c \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) d\Omega = -\phi_0 R \int_{\Omega} h(y) \frac{\partial G}{\partial x} \bar{u} d\Omega \quad (4.11)$$

$$\psi_0 \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} \bar{v} d\Omega = \phi_0 \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \bar{v} d\Omega - \phi_0 \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} \bar{v} d\Gamma \quad (4.12)$$

où  $\Gamma$  représente la frontière du domaine physique  $\Omega$ ,  $n$  la normale,  $H^2(\Omega)$  est l'espace de Hilbert et  $\bar{u}(x, y)$  et  $\bar{v}(x, y)$  sont des fonctions de test choisies arbitrairement et devant satisfaire les conditions aux frontières (2.31abc).

Pour des raisons de précision, l'élément de Hermite de haute précision a été utilisé pour discrétiser le domaine physique  $\Omega$ . Pour le cas d'un élément de Hermite à quatre nœuds par exemple, les fonctions  $F(x, y)$  et  $G(x, y)$  pour chaque élément sont définies par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{Bmatrix}^e = \sum_{j=1}^4 \begin{bmatrix} F_j & \frac{\partial F_j}{\partial x} & \frac{\partial F_j}{\partial y} & \frac{\partial^2 F_j}{\partial x \partial y} \\ G_j & \frac{\partial G_j}{\partial x} & \frac{\partial G_j}{\partial y} & \frac{\partial^2 G_j}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} N_{j+4}(x, y) \\ N_{j+8}(x, y) \\ N_{j+12}(x, y) \end{Bmatrix}^e \quad (4.13)$$

dans laquelle  $F_j(x, y)$  et  $G_j(x, y)$  sont les vecteurs nodaux et  $N_j(x, y)$  sont les fonctions d'interpolation de Hermite.

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre l'ensemble des équations. Le domaine physique  $\Omega$  de notre système est discrétisé en plusieurs sous domaines  $\Omega^e$ , avec  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^e$ ,  $n_e$  étant le nombre total des éléments. Le degré de liberté pour chaque nœud permet d'améliorer la valeur de la fonction, ses premières dérivées et ses dérivées croisées.

#### 4.3.1 Couche horizontale infinie

Le seuil de la convection pour une couche infinie a été déjà étudié par Tyvand et Storesletten [39] pour le cas linéaire densité-température ( $\gamma \gg 2$ ) pour des conditions anisotropes et des axes principaux obliques. L'analyse de stabilité linéaire marginale développée dans ce chapitre a été adaptée à ce cas afin de contrôler la validité de notre approche. La fonction de courant et la température s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x, y, t) &= \Psi_R + \psi_0 e^{i\omega t} f(y) \\ T(x, y, t) &= T_R + \phi_0 e^{i\omega t} g(y) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

pour une cavité confinée,  $k = n\pi/A_m$ , où  $A_m$  est le rapport de forme et  $n$  le nombre de cellules. Pour une cavité infinie,  $k = 2\pi/\lambda_{mc}$  où  $\lambda_{mc}$  est la longueur d'onde critique.

Les fonctions  $f$  et  $g$  doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$y = \pm 1/2 \quad f = \partial g / \partial x = 0 \quad (4.15)$$



Les conditions aux frontière périodiques définies dans l'équation (2.32) sont automatiquement satisfaites par l'expression (4.15).

On injecte l'équation (4.14) dans les équations gouvernantes (2.26)-(2.28) et en négligeant les termes non linéaires, on obtient :

$$\psi_0 \left[ -a \omega^2 f(y) + i \omega b f'(y) + c f''(y) \right] = i \omega \phi_0 R h(y) g(y) \quad (4.16)$$

$$\phi_0 \left[ g''(y) - \omega^2 g(y) \right] = -i \omega \psi_0 f(y) \quad (4.17)$$

Avec l'utilisation du théorème de Green et de la formulation variationnelle, nous obtenons les intégrales de Galerkin suivantes :

$$\psi_0 \int_{\Omega} \left( a \omega^2 f \bar{u} - i b \omega \frac{df}{dy} \bar{u} + c \frac{df}{dy} \frac{d\bar{u}}{dy} \right) dy = -i \omega \phi_0 R \int_{\Omega} h(y) g \bar{u} dy \quad (4.18)$$

$$\phi_0 \int_{\Omega} \left( \frac{dg}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} + \omega^2 g \bar{v} \right) dy = i \omega \psi_0 \int_{\Omega} f \bar{v} dy \quad (4.19)$$

avec  $\Omega = [-1/2, 1/2]$ .

On substitue l'équation (4.13) dans les équations (4.18) et (4.19), on remplace les fonctions test  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  par les fonctions d'interpolation  $N_j$  et après intégration on obtient les systèmes matriciels élémentaires suivants :

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 \left[ K_{\Psi} \right]^e \{ f \}^e - \phi_0 R \left[ B_{\Psi} \right]^e \{ g \}^e &= 0 \\ \phi_0 \left[ K_{\phi} \right]^e \{ g \}^e - \psi_0 \left[ B_{\phi} \right]^e \{ f \}^e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Les matrices élémentaires  $[K_{\Psi}]^e$ ,  $[B_{\Psi}]^e$ ,  $[K_{\phi}]^e$  et  $[B_{\phi}]^e$  sont données par les intégrales suivantes :

$$\left. \begin{aligned} [B_\psi]^\epsilon &= -i\omega \int_{\Omega'} h(y) N_j N_i dy \quad ; \quad [B_\phi]^\epsilon = i\omega \int_{\Omega'} N_j N_i dy \\ [K_\psi]^\epsilon &= \int_{\Omega'} \left[ a \omega^2 N_j N_i - i b \omega \frac{dN_j}{dy} N_i + c \frac{dN_j}{dy} \cdot \frac{dN_i}{dy} \right] dy \\ [K_\phi]^\epsilon &= \int_{\Omega'} \left[ \frac{dN_j}{dy} \frac{dN_i}{dy} + \omega^2 N_j N_i \right] dy \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Les intégrales (4.21) sont calculées numériquement par la méthode de Gauss à une seule dimension, définie par l'expression :

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= \sum_{i=1}^{N_G} W_i f(\xi_i) \\ x &= \sum_{j=1}^4 N_j(\xi) x_j \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

où  $W_i$  sont les fonctions de poids de Gauss pour le cas unidimensionnel.  $N_G$  est le nombre de points de Gauss.  $\xi_i$  sont les coordonnées de ces points et  $x_j$  sont les coordonnées des nœuds dans le système physique.

Des équations (4.20), nous obtenons le problème aux valeurs propres suivant :

$$([E] - \lambda^* [I]) \{f\} \quad \text{avec} \quad [E] = [K_\psi]^{-1} [B_\psi] [K_\phi]^{-1} [B_\phi] \quad (4.23)$$

dans lequel  $[I]$  représente la matrice identité,  $\{f\}$  est le vecteur propre,  $\lambda^* = 1/R$  sont les valeurs propres associées.

D'un point de vue mathématique, on constate qu'une solution triviale ( $\{F\} = 0$ ), peut exister pour l'équation (4.23) si et seulement si le déterminant de  $[E - \lambda I]$  est égal à zéro. Le calcul de toutes les valeurs propres  $\lambda_i^*$  ( $i = 1, n$ ) de la matrice  $[E]$  est effectué

en utilisant le sous-programme (DE2CRG) de la librairie MSMSL de Fortran Power Station 4. En général,  $\lambda^*$ , sont des nombres complexes. Pour le présent cas, ils sont réels et peuvent être réarrangés par ordre croissant selon :  $\lambda^*_1 \leq \lambda^*_2 \leq \dots \leq \lambda^*_{n-1} \leq \lambda^*_n = \lambda^*_{\max}$ . En fonction de la valeur de l'angle  $\theta$ , la valeur de  $\lambda^*$  peut être positive ou négative. À partir de l'équation (4.23), on peut déduire que les valeurs positives correspondent à  $R > 0$  et les valeurs négatives à  $R < 0$  (inversion de la gravité). Le nombre de Rayleigh critique caractérisant le début de la convection est donné par  $R_c = 1/\lambda^*_n = 1/\lambda^*_{\max}$ .

#### 4.3.2. Validation des résultats

La figure 4.1 illustre la variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mc}$  en fonction de l'angle d'orientation  $\theta$  pour différentes valeurs de  $K^*$  et pour  $\gamma \gg 2$  telle qu'obtenue par la présente approche. Cette figure montre que ces résultats sont identiques à ceux obtenus par *Tyvand et Storesletten* [39]. On peut vérifier que la figure 4.1 reproduit à un facteur de normalisation près, les résultats de ces auteurs.

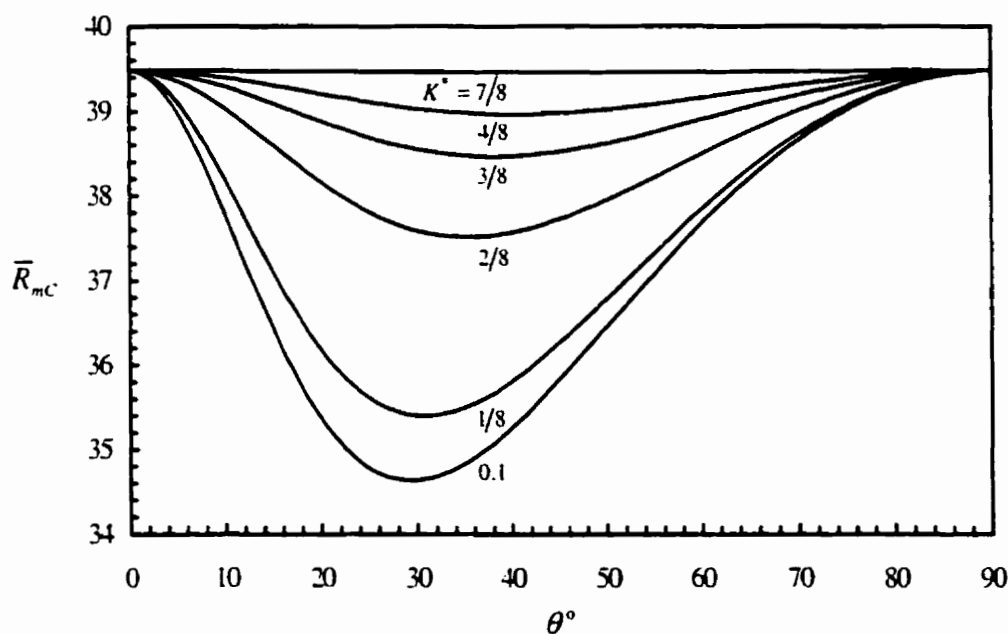


Figure 4.1 : Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mc}$  en fonction de l'angle  $\theta$  pour différentes valeurs de  $K^*$  pour le cas d'une couche infinie

Une représentation typique des lignes de courant pour le cas  $K^* = 0.125$ ,  $\theta = 40.1^\circ$ ,  $\bar{R}_{mC} = 35.820$  et  $\gamma \gg 2$  est illustrée dans la figure 4.2. On peut constater aussi que cette représentation correspond à celle de *Tyvand et Storesletten [39]* obtenue pour les mêmes conditions. Le nombre d'onde pour ce champ d'écoulement est  $k = 2\pi/\bar{\lambda}_{mC} = 3.3562$  comparé à 3.3560 de *Tyvand et Storesletten [39]*.

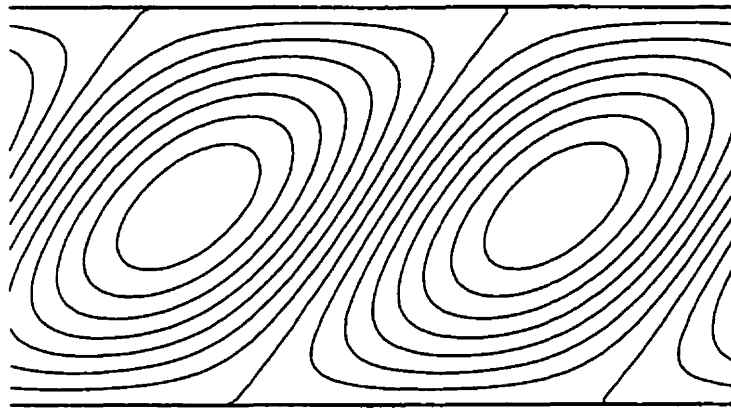


Figure 4.2 : Lignes de courant pour  $\theta = 40.1^\circ$ ,  $K^* = 0.125$ ,  $\bar{R}_{mC} = 35.820$  ( $R_{mC} = 16.407$ ) et  $\gamma = 10^4$  pour le cas d'une couche infinie

Pour le cas  $K^* = 1$  (cas isotrope),  $\gamma = 10^4$  (relation densité-température linéaire), avec l'utilisation de quinze éléments dans la direction  $x$ , l'approche numérique prédit un nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC} = 39.483$  et une longueur d'onde  $k = 2\pi/\bar{\lambda}_{mC} = 3.142$ . Ce résultat est conforme aux valeurs  $\bar{R}_{mC} = 4\pi^2$  et  $k = \pi$  prédites analytiquement par *Horton et Rogers [24]* et *Lapwood [25]*, basées sur l'analyse de stabilité linéaire. La figure 4.3 illustre la variation du nombre de Rayleigh  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour le cas d'un milieu de Darcy isotrope. La limite asymptotique ( $\gamma \gg 2$ ) de  $4\pi^2$  prédite par *Horton et Rogers [24]* et *Lapwood [25]* est obtenue. La courbe dans son ensemble correspond à celle de *Mamou et al. [83]* obtenue pour les mêmes conditions.

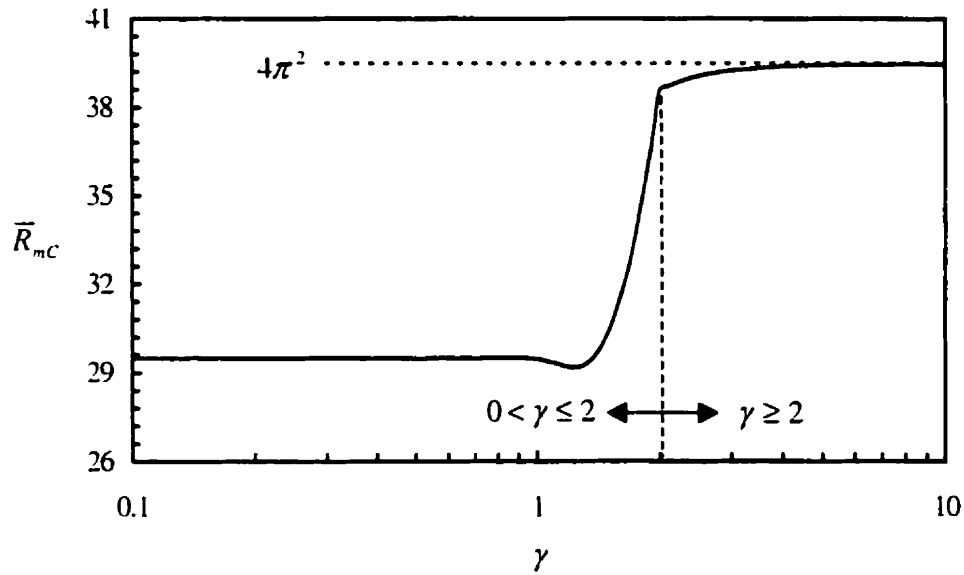


Figure 4.3 :Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction de  $\gamma$  pour le cas d'un milieu de Darcy isotrope ( $K^* = 1$ )

#### 4.3.3. Couche horizontale confinée

Si on substitue l'équation 4.13 et on remplace les fonctions  $\bar{u}$  et  $\bar{v}$  par  $N_i(x, y)$  dans les équations (4.11) et (4.12) on obtient les systèmes matriciels suivants :

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 [A]^e \{F\}^e - \phi_0 R_m [B]^e \{G\}^e &= 0 \\ \phi_0 [C]^e \{G\}^e - \psi_0 [D]^e \{F\}^e &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Les matrices  $[A]^e$ ,  $[B]^e$ ,  $[C]^e$  et  $[D]^e$  étant calculées à l'aide des intégrales données ci dessous :

$$\begin{aligned} [A]^e &= \int_{\Omega^e} \left( a \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + b \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} + c \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega^e & ; & \quad [B]^e = - \int_{\Omega^e} h(y) \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot N_i d\Omega^e \\ [C]^e &= \int_{\Omega^e} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega^e & ; & \quad [D]^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot N_i d\Omega^e \end{aligned}$$

Ces intégrales sont évaluées numériquement en utilisant la méthode d'intégration de Gauss à deux dimensions selon :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{N_{\xi}} \sum_{j=1}^{N_{\eta}} W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (4.25)$$

$f$  étant une fonction quelconque et  $(\xi_i, \eta_j)$  étant les coordonnées de Gauss. Pour le cas d'un élément de Hermite à quatre nœuds, les coordonnées  $(\xi_i, \eta_j)$  sont liées aux coordonnées réelles du système par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_j \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Les équations (4.24) conduisent au problème aux valeurs propres suivant :

$$\left. \begin{aligned} ([E] - \lambda^* [I]) \{F\} &= 0 \\ [E] &= [A]^{-1} [B] [C]^{-1} [D] \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

où  $[I]$  est la matrice identité,  $\{F\}$  est le vecteur propre et  $\lambda^* = 1/R$  sont les valeurs propres associées.

#### 4.3.4. Validation des résultats

Les résultats obtenus pour le cas d'une couche confinée ont été d'abord comparés à ceux obtenus par *Zhang et al. [18]* pour le cas d'une cavité carrée avec relation densité-température linéaire ( $\gamma \gg 2$ ). En particulier, les figures 4.4 et 4.5 donnent le premier et le second mode des nombres de Rayleigh critiques  $\bar{R}_{mC}^1$  ( $R_C^1 = 1/\lambda_{n-1}^*$ ) et  $\bar{R}_{mC}^2$  ( $R_C^2 = 1/\lambda_{n-1}^*$ ) en fonction de  $\theta$  et  $K^*$ . Les résultats de la présente approche sont identiques à ceux obtenus par *Zhang et al. [18]*.

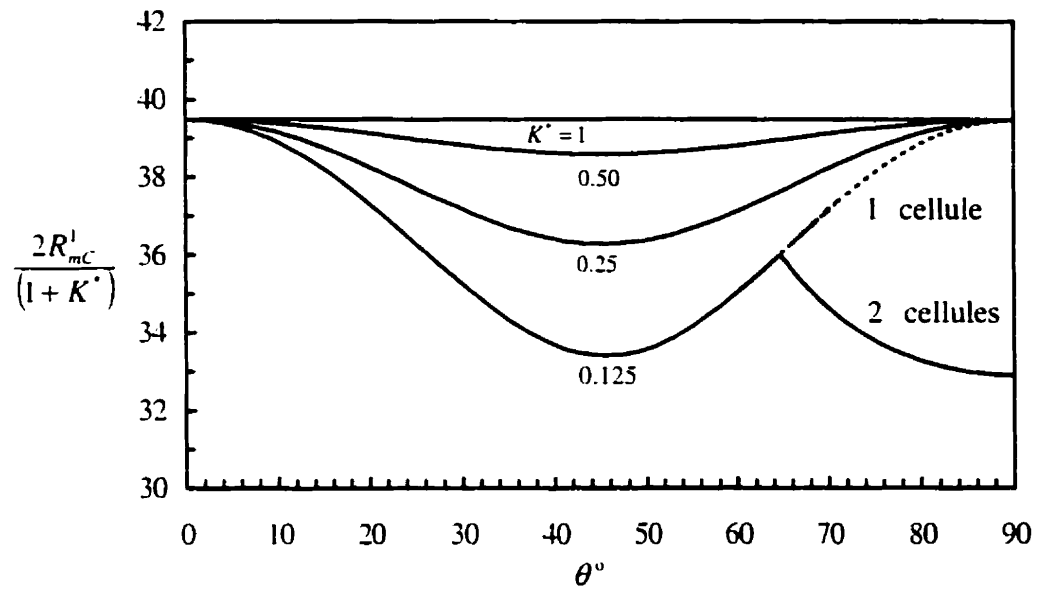


Figure 4.4 : Variation du nombre de Rayleigh critique  $R_{mC}^I$  correspondant au premier mode en fonction de l'angle d'orientation  $\theta$  pour différentes valeurs de  $K^*$  pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ )

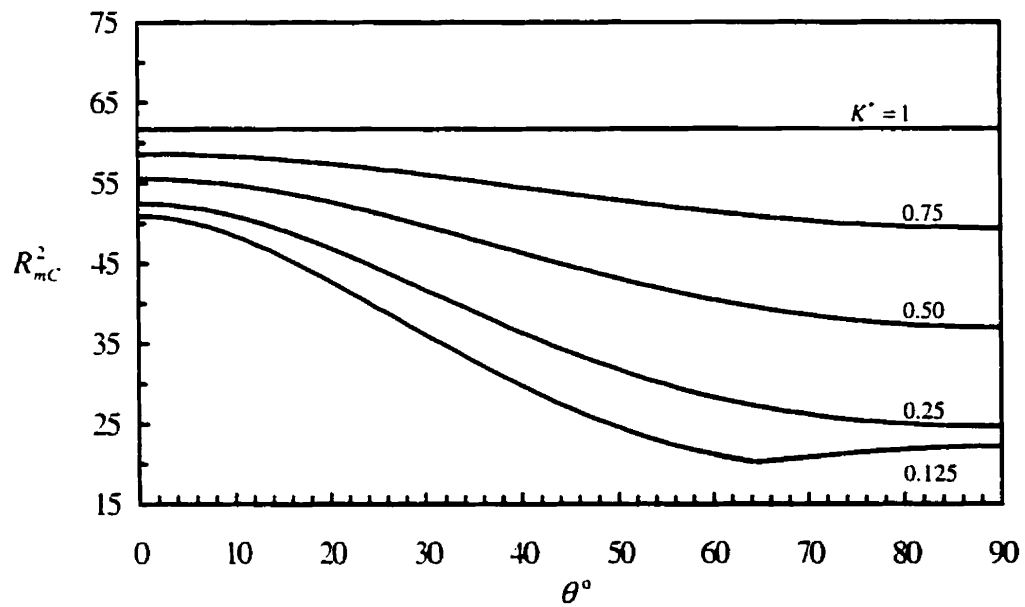


Figure 4.5 : Variation du nombre de Rayleigh critique  $R_{mC}^2$  correspondant au deuxième mode en fonction de l'angle d'orientation  $\theta$  pour différentes valeurs de  $K^*$  et pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ )

L'influence du maillage a été également étudiée pour vérifier la précision des résultats. A cet effet nous avons pris pour fins de comparaison le cas classique (relation linéaire densité-température) d'un milieu de Darcy isotrope ( $K^* = 1$ ) tel que résolu analytiquement par *Horton et Rogers* [24] et *Lapwood* [25]. La rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  étant fixé à la valeur 1.0. La précision de la présente méthode numérique (méthode des éléments finis) dépend essentiellement du nombre d'éléments utilisés lors de la discrétisation du domaine physique. Selon le tableau 4.1, il est clair que le maillage  $8 \times 8$  est suffisant pour modéliser le problème et obtenir une précision satisfaisante sur les résultats.

Tableau 4.1 : Comparaison avec les travaux de *Horton et Rogers* [24] et *Lapwood* [25] pour le cas  $K^* = 1$ ,  $\bar{A}_m = 1$  et  $\gamma = 10^4$  pour différents types de maillage

Cavité carrée ( $\bar{A}_m = 1$ )				
$N_x \times N_y$	$4 \times 4$	$8 \times 8$	$16 \times 16$	Réf [24] et [25]
$\bar{R}_{mc}$	39.4788886	39.4784265	39.4784177	$4\pi^2 = 39.4784176$
Erreur en %	$1.193 \times 10^{-1}$	$2.254 \times 10^{-5}$	$2.533 \times 10^{-7}$	

Rappelons que  $N_x$  et  $N_y$  sont les nombres d'éléments, respectivement selon les directions  $x$  et  $y$ .

Nos résultats ont été également comparés à ceux obtenus par *Mamou et al.* [83] pour le cas d'une couche poreuse isotrope ( $K^* = 1$ ) confinée. La figure 4.6 montre la variation du nombre de Rayleigh  $\bar{R}_{mc}$  en fonction du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  pour le cas isotrope  $\bar{A}_m = A_m = A(\gamma/2)^{-1}$  pour différentes valeurs du paramètre d'inversion  $\gamma$  ( $\gamma = 0.5, 1, 1.8, 2$  et  $1000$ ). La figure 4.6 reproduit intégralement les résultats de *Mamou et al.* [83].



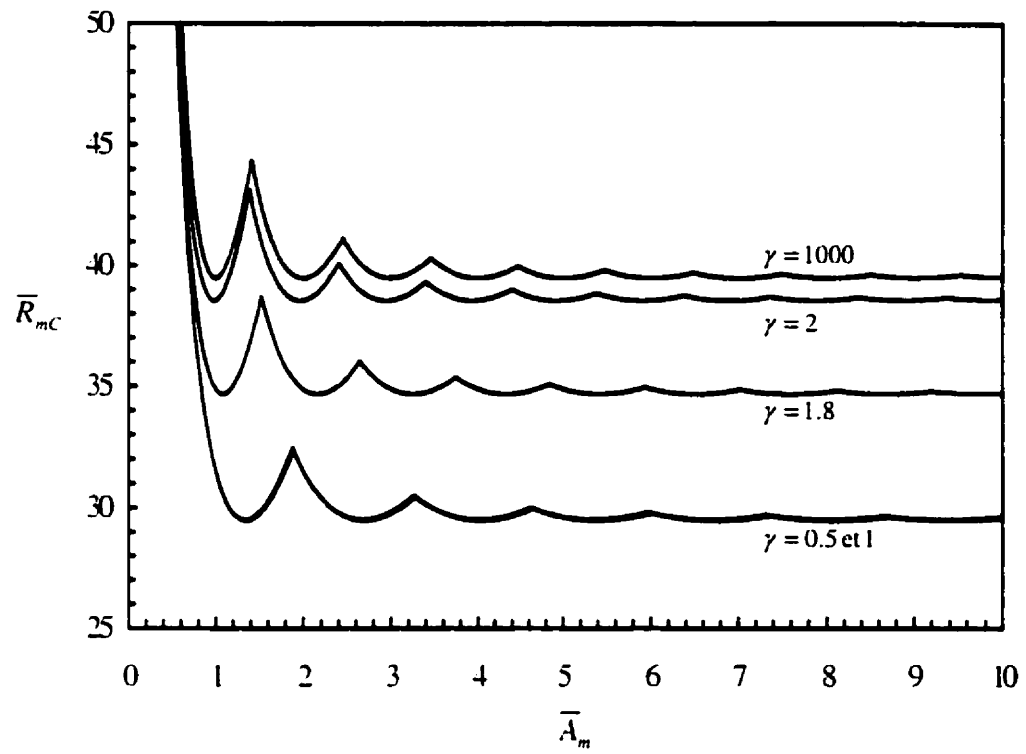


Figure 4.6 : Variation du nombre de Rayleigh  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  et du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour le cas d'un milieu de Darcy isotrope ( $K^* = 1$ ) et  $\theta = 0^\circ$

## CHAPITRE V

### PRÉSENTATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

#### 5.1 Introduction

Les résultats obtenus dans la présente thèse sont donnés dans ce chapitre. Dans la première section, nous présentons les résultats prédits par la stabilité linéaire. Les résultats de la convection d'amplitude finie sont présentés dans la deuxième section. Pour chacune de ces sections, on considère les deux cas  $\rho$  vs  $T$  linéaire et non linéaire.

Au cours de ce chapitre, nous utilisons les définitions déjà introduites aux chapitres précédents à savoir

- **Nombre de Rayleigh, rapport de forme et longueur d'onde modifiés :**

$$\begin{aligned}
 0 < \gamma \leq 2 \quad R_m &= R \left( \frac{\gamma}{2} \right)^3 & A_m &= A \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{-1} & \lambda_m &= \lambda \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{-1} \\
 \gamma \geq 2 \quad R_m &= R(\gamma - 1) & A_m &= A & \lambda_m &= \lambda
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec  $R = \frac{g\beta_1 K_z H' \Delta T'^2}{(\nu\alpha)}$  (équation (2.29))

- **Nombre de Rayleigh, rapport de forme et longueur d'onde normalisés :**

$$\bar{R}_m = \frac{4R_m}{(1 + K^{*1/2})^2} \quad \bar{A}_m = A_m K^{*1/4} \quad \bar{\lambda}_m = \lambda_m K^{*1/4} \tag{5.2}$$

Comme on le verra au cours de ce chapitre, l'emploi de paramètres modifiés Eq. (5.1) et/ou normalisés Eq. (5.2) aura pour effet de mettre en évidence des situations asymptotiques et de faire converger en des courbes uniques des résultats obtenus pour différentes valeurs de  $K^*$ .

## 5.2 Stabilité linéaire

### 5.2.1 Cas linéaire ( $\gamma \gg 2$ , $A_m = A$ )

La Figure 5.1 donne  $\bar{R}_{mC}$  en fonction de  $\bar{A}_m$  à partir de l'expression analytique (4.6) pour  $K^* = 1$  et 0.1 et pour  $n = 1$  et 2. Il est à noter que la solution numérique présentée à la partie 4.3.2 reproduit exactement les mêmes courbes lorsque l'on porte sur graphique l'inverse  $R = 1/\lambda^*$  correspondant aux deux valeurs propres les plus élevées.

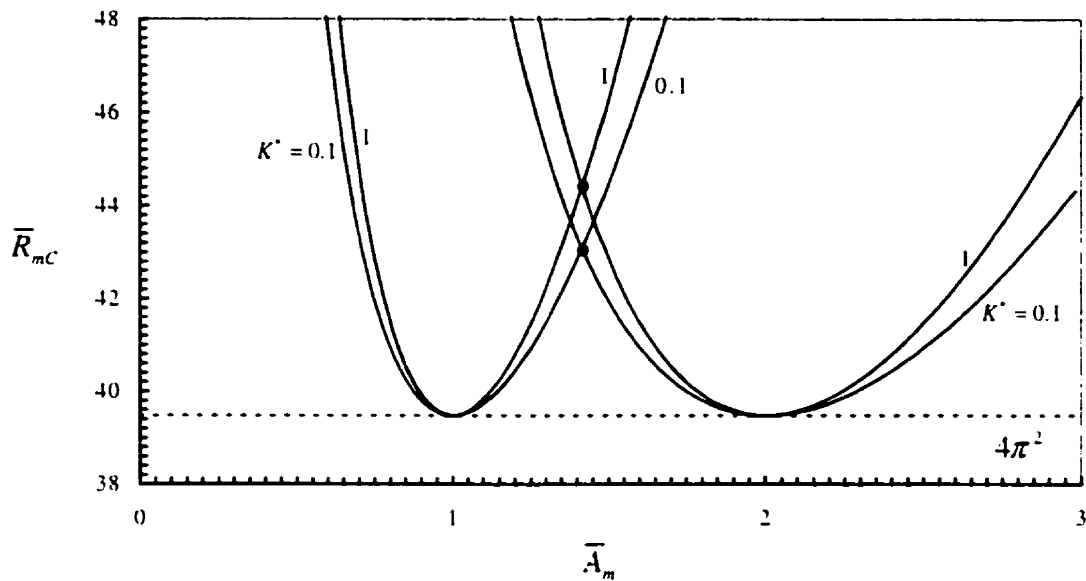


Figure 5.1 : Effet du rapport de perméabilité sur le nombre de Rayleigh critique ( $\theta = 0^\circ$ )

On constate sur cette figure que l'écart entre les courbes du cas isotrope et celles du cas anisotropie est faible, compte tenu de l'échelle de l'ordonnée, même pour une anisotropie importante ( $K^* = 0.1$ ) comme celle représentée. La proximité des deux séries de courbes est attribuable au choix de la norme utilisée (expression (5.2)) pour le nombre de Rayleigh et pour le rapport de forme. Les valeurs minimas ( $4\pi^2$ ) des deux séries de courbes sont d'ailleurs les mêmes. Pour obtenir le seuil critique au-delà duquel la convection se déclenche, il faut s'en remettre à la courbe la plus basse, en se déplaçant le long de l'abscisse, ce qui définit un sommet représenté par un cercle plein pour chacune des deux série de courbes. Ce sommet marque le passage de une à deux cellules

convectives. On constate que l'anisotropie a pour effet d'abaisser légèrement le sommet. On peut vérifier que le sommet supérieur de la figure 5.1, celui du cas isotrope, correspond au sommet de gauche de la courbe  $\gamma = 1000$  à la figure 4.6. les deux séries de courbes  $K^* = 1$  et  $K^* = 0.1$  étant très près l'une de l'autre, on s'en tiendra, pour les résultats présentés dans cette sous-section, à une seule valeur d'anisotropie ( $K^* = 0.1$ ) en sachant que toute réduction d'anisotropie augmente la hauteur au sommet lors du passage de  $n$  à  $n + 1$  cellules convectives.

Les figures. 5.2 et 5.3 montrent la variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme  $\bar{A}_m$  pour  $\theta = 0^\circ$  et  $45^\circ$  respectivement, le rapport de perméabilité  $K^* = 0.1$  étant fixe. On peut constater que pour chaque graphe le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  subit une variation irrégulière, en passant par des minimas et des maximas. On peut également constater que des valeurs asymptotiques sont obtenues pour des couches infinies ( $\bar{A}_m = \infty$ ). Ces valeurs sont représentées sur les graphiques par des lignes horizontales en pointillé. Ces valeurs asymptotiques sont pratiquement obtenues au voisinage de  $\bar{A}_m = 10$  pour chacune des deux courbes.

En ce qui concerne la figure 5.2, il est à noter que la substitution de la valeur  $K^*$  par son inverse ( $1/K^*$ ) produit les mêmes résultats puisque les deux perméabilités extrêmes sont impliquées avec le même poids dans la définition de l'ordonnée  $\bar{R}_{mC} = 4R_{mC} / (1 + \sqrt{K^*})^2$ . La figure 5.2 représente donc, le cas  $\theta = 90^\circ$  à la condition de remplacer l'abscisse  $\bar{A}_m = A_m K^{*1/4}$  par  $\bar{A}_m = A_m K^{*-1/4}$ .

Le graphe 5.2 illustre la variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  pour le cas  $K^* = 0.1$ . Les courbes en ligne continue représentent le seuil minimum du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  pour un rapport de forme donné. Avec  $\bar{A}_m$  augmentant, chaque sommet correspond à l'addition

d'une cellule convective. On remarque aussi que les sommets diminuent de façon continue quand  $\bar{A}_m$  augmente, pour disparaître complètement lorsque  $\bar{A}_m \rightarrow \infty$ . Chaque valeur de  $K^*$ , correspond à une courbe spécifique comme celle de la figure 5.2, ayant les mêmes minimas mais des sommets différents.

La figure 5.3 donne la variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme  $\bar{A}_m$  pour le cas  $K^* = 0.1$  et  $\theta = 45^\circ$ . La limite asymptotique représentée par une ligne en pointillé correspond à la valeur  $\bar{R}_{mC} = 35.8$ , valeur quelque peu inférieure à  $4\pi^2$ , en conformité avec le travail de *Tyvan and Storesletten* [39]. Une différence significative est constatée par rapport à la courbe de la figure 5.2. Au fur et à mesure que le rapport de forme  $\bar{A}_m$  augmente à partir de zéro, les premiers minimas du nombre de Rayleigh critique sont considérablement supérieurs à la limite asymptotique. Notons également que la distance entre ces minimas n'est pas constante comme celle observée dans la figure 5.2. En effet, cette distance diminue quand  $\bar{A}_m$  augmente, pour atteindre asymptotiquement la valeur 0.4718. Cette dernière valeur correspond à la moitié de la longueur d'onde obtenue dans le cas d'une couche infinie. Ce comportement est différent du cas représenté à la figure 5.2. Il est la conséquence d'une contrainte supplémentaire imposée sur le système par les parois verticales. Pour une couche infinie, l'inclinaison des axes principaux crée des cellules convectives avec des limites de séparation inclinées. Or, les parois verticales de la cavité modifient la forme des cellules adjacentes à ces parois. Toutes les cellules convectives sont obliques pour le cas d'une couche infinie (voir figure 4.2).

La figure 5.4 montre les champs d'écoulement pour les cas  $K^* = 0.1$  et  $\theta = 45^\circ$  pour différentes valeurs de  $\bar{A}_m$ . Ces valeurs de  $\bar{A}_m$  correspondent aux premiers minimas du nombre de Rayleigh critique de la figure 5.3. Les champs d'écoulement sont représentés par des lignes de courant avec des incréments égaux dans la fonction de courant. Chacun de ces champs est symétrique par rapport au centre de la cavité.

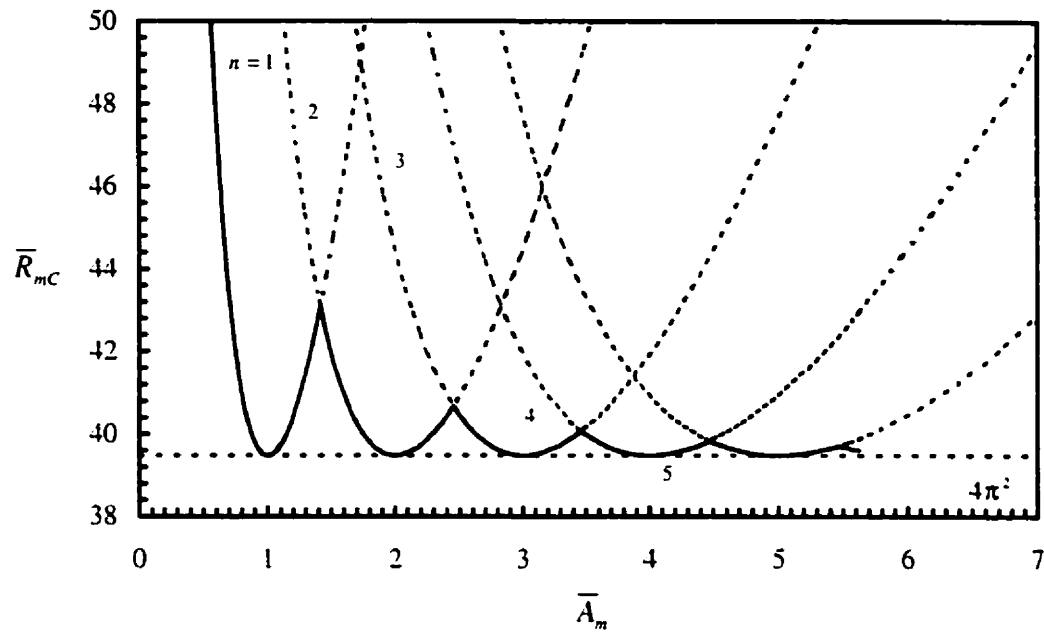


Figure 5.2 : Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$

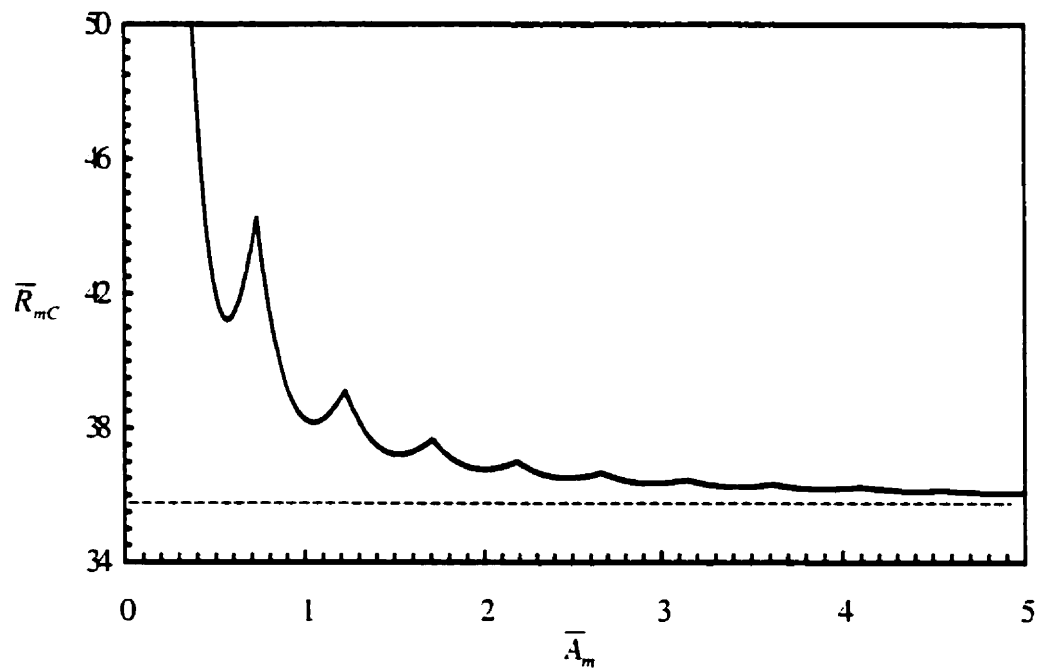


Figure 5.3 : Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  pour le cas  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$

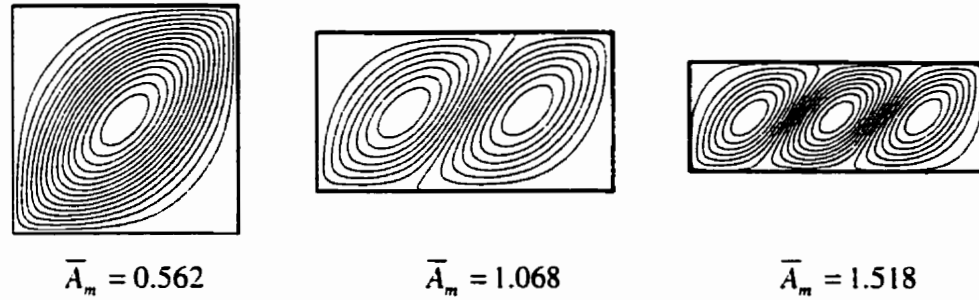


Figure 5.4 : Lignes de courant pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  ( $\bar{A}_m = 0.562, 1.068$  et  $1.518$ )

### 5.2.2 Cas non linéaire

En se basant sur le travail réalisé par *Veronis* [22] sur la convection pénétrante, *Musman* [70] a utilisé la profondeur de la couche instable  $h'_{\max}$  comme longueur d'échelle dans son analyse de stabilité linéaire d'une couche d'eau froide de même que la différence de densité entre le haut et le bas de la couche stable. Les résultats pour une couche poreuse isotrope saturée par de l'eau froide ont été obtenus par *Mamou et al.* [83] en suivant cette approche. La présente investigation suit également cette procédure.

#### 5.2.2.1 Couche infinie

##### a. Effet du paramètre d'inversion $\gamma$ et le rapport des perméabilités $K^*$

La figure 5.5 montre la variation du nombre de Rayleigh critique en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour  $\theta = 0^\circ$ . Il est à noter que le facteur  $4/(1 + K^{*1/2})^2$  se réduit à l'unité pour le cas isotrope ( $K^* = 1$ ). Avec cette normalisation, nous pouvons constater que toutes les courbes obtenues pour différentes valeurs de  $K^*$  ( $K^* = 0.01, 0.1, 1, 10$  et  $100$ ) se confondent sur une seule courbe quand  $\gamma$  est largement supérieur à la valeur 2.0, situation où la forme standard de la convection pour le cas linéaire de la densité en fonction de la température est atteinte. Indépendamment des valeurs de  $K^*$ , avec un  $\gamma$  suffisamment grand, la valeur asymptotique de  $\bar{R}_{mc} = 4\pi^2$  est atteinte. Cette situation

asymptotique est celle obtenue par Mamou *et al.* [83] pour le cas d'une couche poreuse isotrope. Lorsque  $\gamma$  s'approche de la valeur 2.0 à partir des valeurs supérieures, le terme quadratique en  $T$  de l'équation (2.13) est responsable de cette légère diminution du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$ . Cependant, la couche instable occupe toujours toute la profondeur de la cavité, avec  $h'_{\max} = H'$ . À  $\gamma = 2.0$ , la paroi supérieure est précisément à  $4^\circ C$  et un changement au niveau de la définition de  $\bar{R}_{mC}$  se produit (Eqs. (2.37) et (2.40)). Au fur et à mesure que  $\gamma$  diminue, une couche stable superposée à la couche instable survient et prend de l'ampleur. Comme il a été déjà décrit dans les travaux de Mamou *et al.* [83], la contrainte sur l'écoulement provenant de la paroi supérieure est graduellement réduite pour disparaître complètement lorsque  $\gamma$  atteint l'unité.

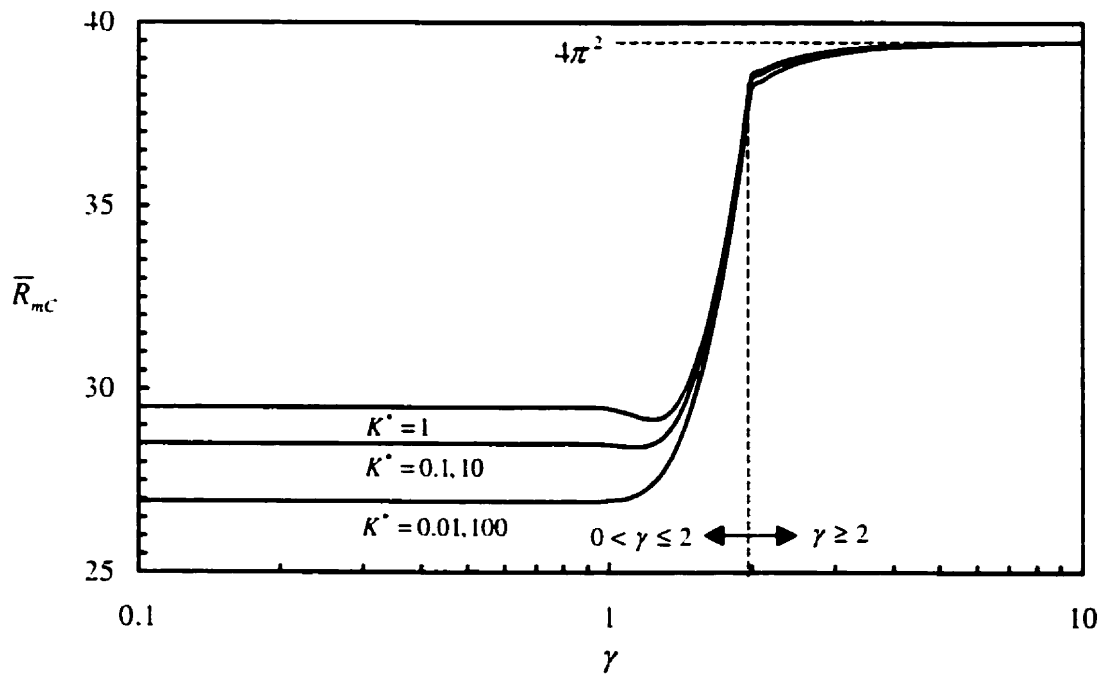


Figure 5.5 :Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour  $\theta = 0^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$

Pour l'intervalle  $0 < \gamma \leq 1$ , le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  garde une valeur constante pour chaque rapport de perméabilité  $K^*$ . Nous pouvons également constater



que cette valeur est sensiblement inférieure à celle de la convection standard, obtenue pour le cas de la densité linéaire ( $\gamma \gg 2$ ). Pour cette situation, nous pouvons aussi remarquer que les courbes correspondant à différents  $K^*$  ne se confondent pas tout à fait comme c'était le cas pour des valeurs de  $\gamma$  supérieures à 2.0. Il est également important de noter que la substitution de  $K^*$  par  $1/K^*$  produit les mêmes résultats tel que mentionné précédemment puisque les deux perméabilités extrêmes sont impliquées avec le même poids dans la définition de l'ordonnée  $4R_{mC}/(1+K^{*1/2})^2$ .

La figure 5.6 illustre la variation de la longueur d'onde critique  $\bar{\lambda}_{mC}$  associée au nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$ , en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour différentes valeurs de  $K^*$  ( $K^* = 0.01, 0.1, 1, 10$  et  $100$ ). Nous remarquons aussi qu'avec l'utilisation de la norme définie par l'équation (5.2) pour l'ordonnée, tous les résultats convergent pour donner une seule courbe pour des valeurs de  $\gamma \gg 2$ .

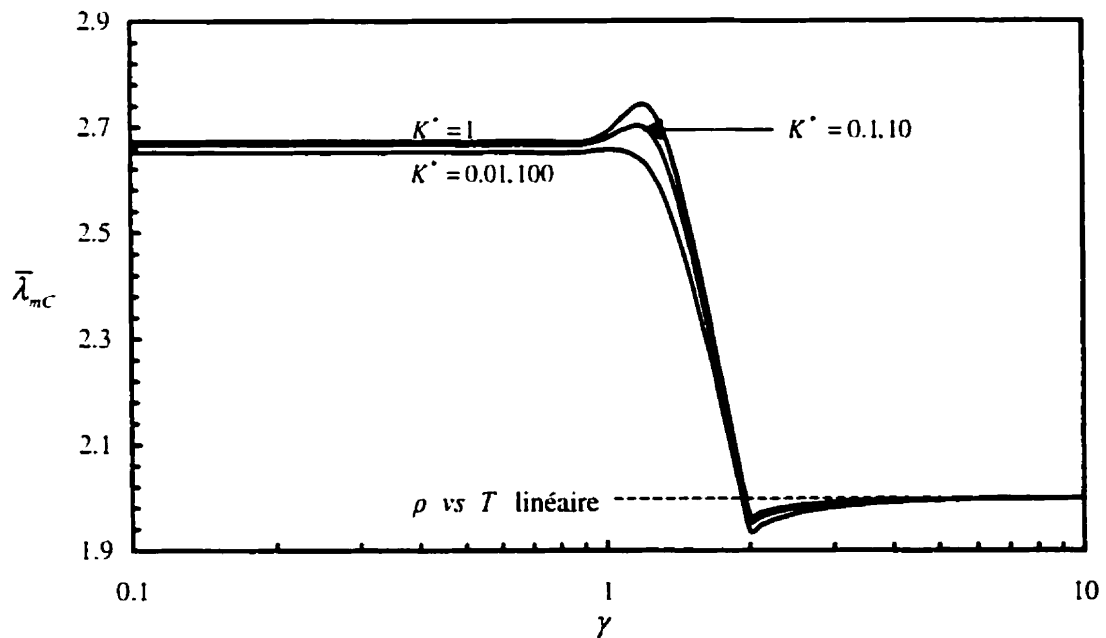


Figure 5.6 : Variation de la longueur d'onde critique  $\bar{\lambda}_{mC}$  en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour le cas  $\theta = 0^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$

Pour l'intervalle  $0 < \gamma \leq 1$ , nous obtenons une solution asymptotique pour laquelle aucun effet de la paroi supérieure n'est présent et où  $\bar{\lambda}_{mC}$  garde une valeur constante sensiblement supérieure à 2.0 pour chaque valeur de  $K^*$ , 2.0 étant la valeur caractérisant la convection standard obtenue pour le cas linéaire  $\rho$  vs  $T$ . La substitution de  $K^*$  par  $1/K^*$  donne les mêmes résultats (par exemple :  $K^* = 0.1$  et 10); cependant, des courbes de niveau légèrement différent sont obtenues, selon le degré d'anisotropie imposé. Quand le paramètre d'inversion  $\gamma$  diminue à partir de la valeur 2.0, la longueur d'onde  $\bar{\lambda}_{mC}$  augmente de façon rapide. À  $\gamma \leq 1$ , un comportement asymptotique comme à celui du nombre de Rayleigh  $R_{mC}$  (figure 5.5) est observé. Pour le cas asymptotique  $\gamma \gg 2$ , nous avons  $\bar{\lambda}_{mC} = 2$ , tel qu'établi analytiquement pour *Tyvand et Storesletten* [39].

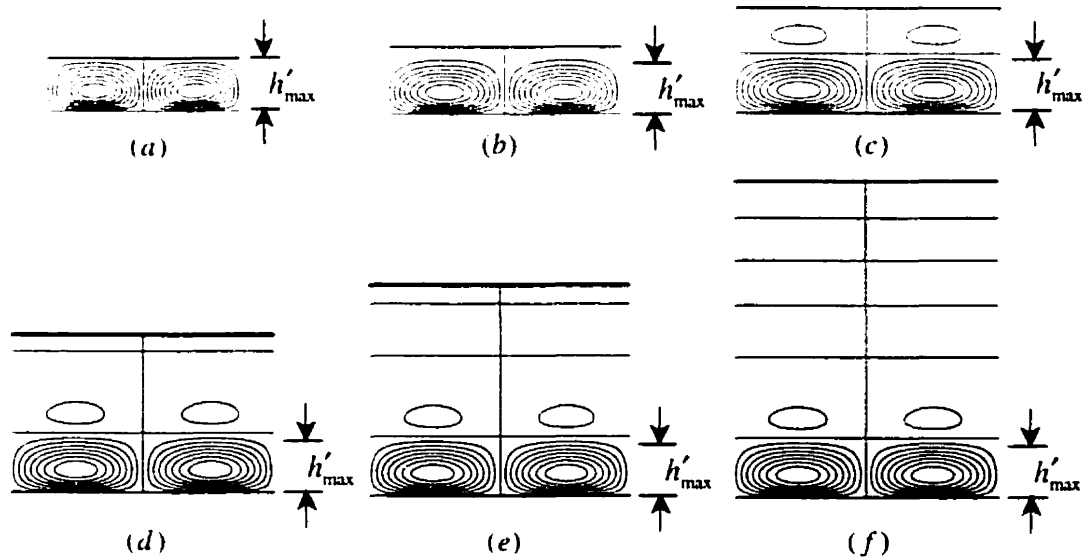


Figure 5.7 : Lignes de courant pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 0^\circ$  et pour différentes valeurs du paramètre d'inversion  $\gamma$  (a)  $\gamma = 2$ , (b)  $\gamma = 3/2$ , (c)  $\gamma = 1$ , (d)  $\gamma = 2/3$ , (e)  $\gamma = 1/2$  et (f)  $\gamma = 1/3$  ( $\bar{\lambda}_{mC} = 4.73K^{*1/4}$  pour  $\gamma \leq 1$ )

Des représentations typiques des lignes de courant pour une longueur d'onde sont données à la figure 5.7 pour différentes valeurs de  $\gamma$  ( $\gamma = 2, 3/2, 1, 2/3, 1/2$  et  $1/3$ ),

$K^* = 0.1$ . L'ensemble des champs d'écoulement des figures 5.7.a-f montre comment le paramètre d'inversion  $\gamma$  peut affecter la taille des cellules au seuil de la convection. Pour tous les champs d'écoulement avec  $\gamma \leq 1$ , la longueur d'onde critique  $\bar{\lambda}_{mC}$  demeure constante ( $\bar{\lambda}_{mC} = 4.73K^{*1/4}$ ). Il est à noter que ces champs d'écoulement sont tracés avec la même dimension  $h'_{\max}$  de la couche instable. La figure 5.7a représente le cas particulier d'une paroi supérieure à la température  $-4^\circ C$ . Pour cette situation, la hauteur de la couche instable  $h'_{\max}$  occupe toute la profondeur de la cavité et la paroi supérieure exerce un effet important qui consiste à réduire la taille des cellules convectives, y compris leur longueur d'onde critique. Au fur et à mesure que  $\gamma$  diminue, tel qu'illustré dans les figures 5.7b-c, la couche stable superposée à la couche instable se développe, l'effet de la paroi supérieure est réduit et la longueur d'onde critique de même que le nombre de cellules convectives secondaires superposées aux cellules primaires du bas augmente. Pour chaque valeur de  $\gamma$ , on constate que les cellules primaires du bas pénètrent légèrement dans la couche stable. À  $\gamma = 1$ , l'effet de la paroi supérieure devient négligeable, de sorte que la diminution de  $\gamma$  en deçà de l'unité n'affecte plus la taille des cellules convectives primaires et la longueur d'onde critique devient constante. Le seul effet de  $\gamma$  consiste à superposer de plus en plus de cellules convectives secondaires au-dessus des cellules principales. Par ailleurs, ces cellules secondaires sont d'une intensité très faible par rapport aux cellules principales et sont sans effet notable sur le champ d'écoulement primaire.

La figure 5.8 illustre l'effet du rapport de perméabilité  $K^*$  sur la forme des cellules convectives. Pour chacun des trois champs d'écoulement, une longueur d'onde est représentée. Cet effet est traduit par le changement de la longueur d'onde critique. Pour tous les champs d'écoulement des figures 5.8a-c, la valeur du paramètre d'inversion  $\gamma$  est maintenue constante ( $\gamma = 0.5$ ). De plus, chaque champ d'écoulement est représenté avec le même hauteur  $h'_{\max}$ . La figure 5.8b montre le champ d'écoulement obtenu pour le cas isotrope ( $K^* = 1$ ). Selon la figure 5.8a ( $K^* = 0.1$ ), une perméabilité maximum dans

la direction horizontale de la cavité maintient la taille des cellules convectives à une hauteur très légèrement supérieure à  $h'_{\max}$ . Cependant, leurs largeurs sont augmentées de sorte que la longueur d'onde critique est beaucoup plus grande que pour le cas isotrope. Dans la figure 5.8c ( $K^* = 10$ ), la perméabilité maximum est dans la direction verticale de la cavité avec des effets opposés, notamment une pénétration des cellules convectives dans la couche stable plus importante. Il est à noter également que la longueur d'onde de la figure 5.8a multipliée par  $(0.1)^{1/4}$  est égale à la longueur d'onde de la figure 5.8c multipliée par  $10^{1/4}$ , et ce, en conformité avec la norme utilisée pour l'ordonnée de la figure 5.6.

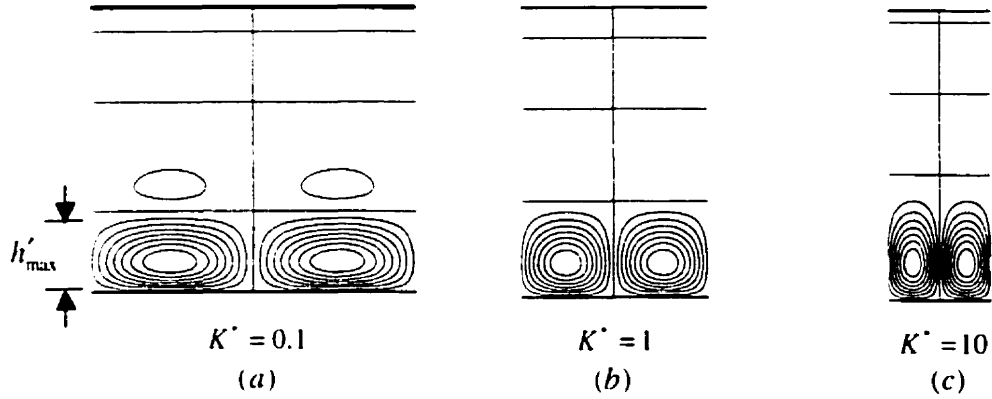


Figure 5.8 : Lignes de courant pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $\theta = 0^\circ$  et pour différentes valeurs du rapport de perméabilité  $K^*$  : (a)  $K^* = 0.1$ , (b)  $K^* = 1$  et (c)  $K^* = 10$

#### b. Effet de l'angle d'inclinaison $\theta$

L'influence du paramètre d'inversion  $\gamma$  et du rapport de perméabilité  $K^*$  sur les résultats a été aussi examinée pour le cas d'axes principaux inclinés. Les figures 5.9 et 5.10 donnent respectivement le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  et la longueur d'onde critique  $\lambda_{mC}$  en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$  ( $K^* = 0.01, 0.1, 1, 10$  et  $100$ ). La normalisation  $4R_{mC}/(1 + K^{*1/2})^2$  pour le

nombre de Rayleigh critique a été également utilisée pour tracer le graphe de la figure 5.9. En général, ces courbes se comportent individuellement de la même manière que pour une couche infinie dont les axes principaux sont horizontaux/verticaux ( $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ ) avec la différence que ces dernières ne se confondent pas sur une seule courbe pour un  $\gamma$  suffisamment supérieur à 2.0 et demeurent séparées pour n'importe quelle valeur de  $\gamma$ . Il est à noter également que le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  et la longueur d'onde associée  $\lambda_{mC}$  sont toujours inférieurs à ceux du milieu isotrope, quelque soit la valeur de  $\gamma$ .

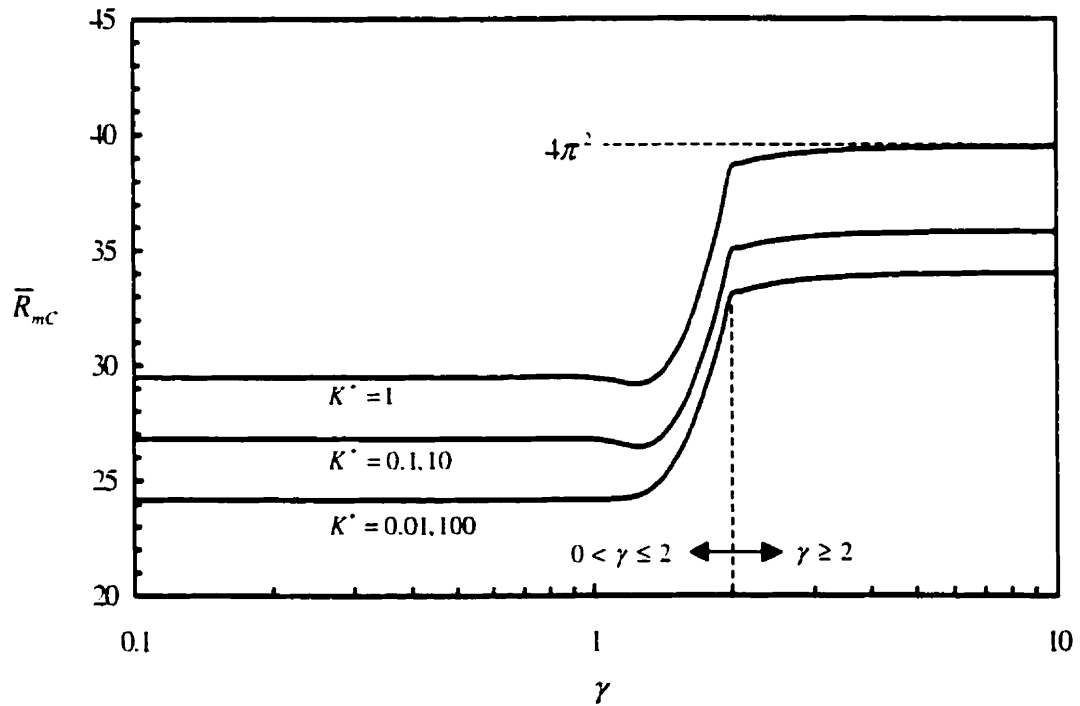


Figure 5.9 : Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour le cas  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$

La figure 5.11 montre les lignes de courant obtenues pour  $\theta = 45^\circ$ ,  $K^* = 0.1$  et  $\gamma = 0.5$ . Ces lignes de courant proviennent du vecteur caractéristique  $\bar{\Psi}$  associé au

nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mc} = 26.802$  et correspondent à la longueur d'onde critique  $\lambda_{mc} = 2.2$ . La figure 5.11 contenant quatre longueurs d'onde représente d'une façon plus complète la forme des cellules principales dans la cavité. L'importance relative de la couche stable et de la couche instable peut être déduite du fait que  $h'_{\max} = \gamma H'/2$ . La proportion est la même que celle de la figure 5.8. Une différence notable entre la figure 5.11 et 5.8 est l'absence de cellules convectives secondaires dans le cas de la figure 5.11, les seules cellules convectives étant les cellules convectives principales, lesquelles sont obliques et rejoignent la paroi supérieure. La structure de l'écoulement représentée à la figure 5.11 correspond au nombre de Rayleigh et à la longueur d'onde obtenus des figures 5.9 et 5.10, pour  $\gamma = 0.5$  et  $K^* = 0.1$ . Nous pouvons également observer sur la figure 5.11 que trois longueurs d'onde sont requises pour reproduire la dimension horizontale d'une seule cellule convective.

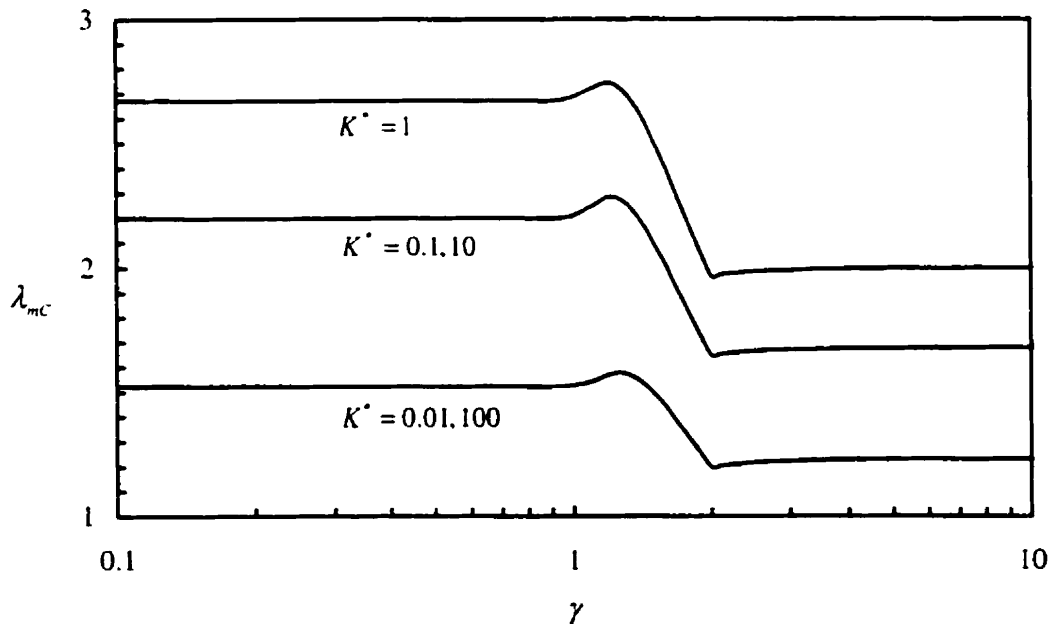


Figure 5.10 : Variation de la longueur d'onde critique  $\lambda_{mc}$  en fonction du paramètre d'inversion  $\gamma$  pour le cas  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $K^*$

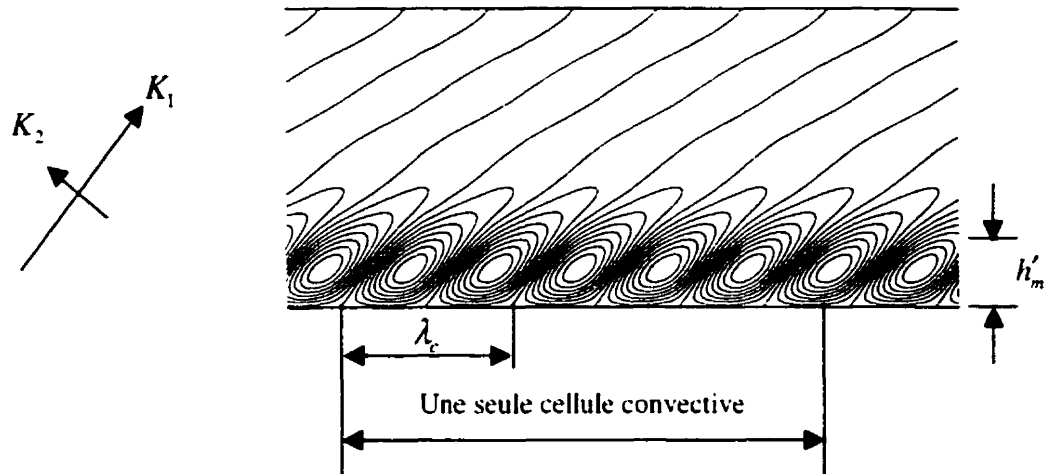


Figure 5.11 : Lignes de courant pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $K^* = 0.1$ ,  $\bar{R}_{mC} = 26.802$  et  $\lambda_{mC} = 2.200$

L'influence de l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  et sur la longueur d'onde critique  $\lambda_{mC}$  est illustrée sur les figures 5.12 et 5.13 pour le cas  $\gamma = 0.5$  pour différentes valeurs du rapport de perméabilité  $K^*$  ( $K^* = 0.02, 0.1, 0.3$  et  $1$ ). Des représentations typiques de lignes de courant sont données à la figure 5.14 pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$ , pour  $\gamma = 0.5$  et  $K^* = 0.1$ . La figure 5.12 montre que pour l'intervalle  $0 \leq \theta < 45^\circ$ , le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  varie grandement en fonction de l'angle  $\theta$  pour des valeurs  $K^*$  éloignées de l'unité. Au fur et à mesure que  $K^*$  se rapproche de l'unité, cette variation devient de moins en moins importante, étant donné que le milieu anisotrope s'approche de plus en plus au milieu de Darcy ( $K^* = 1$ ) et l'effet de la perméabilité directionnelle sur l'écoulement devient négligeable. Au delà du minimum de chaque courbe anisotrope, le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  augmente avec  $\theta$  pour rejoindre à  $\theta = 90^\circ$  la valeur obtenue pour  $\theta = 0^\circ$ .

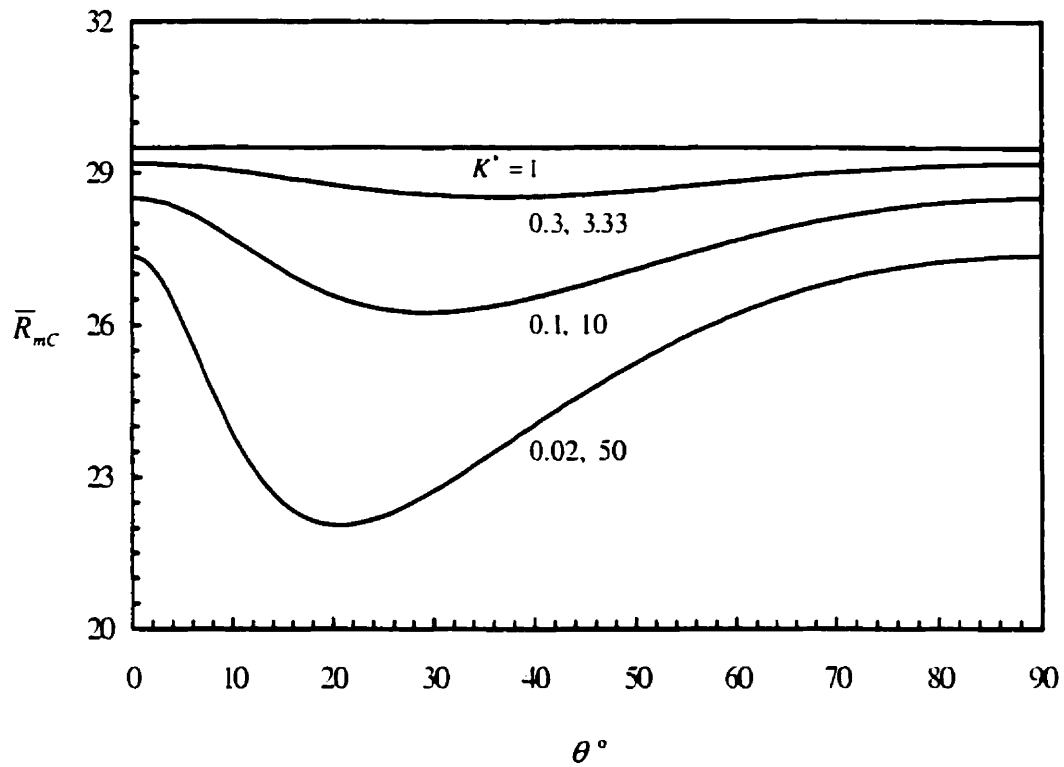


Figure 5.12 : Variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mc}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour  $\gamma = 0.5$  et pour différentes valeurs de  $K'$

La figure 5.13 donne l'évolution de la longueur d'onde  $\bar{\lambda}_{mc}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour différentes valeurs du rapport de perméabilité  $K'$  ( $K' = 1, 0.3, 0.1$  et  $0.02$ ). À  $\theta = 0^\circ$ , les longueur d'ondes critiques ont à peu près la même valeur qui correspond à celle de la figure 5.6 pour  $\gamma = 0.5$ . Ces courbes se séparent de plus en plus au fur et à mesure qu'on s'éloigne de  $\theta = 0^\circ$ . Notons que la valeur maximale  $\bar{\lambda}_{mc} = 2.67$  correspond au cas d'un milieu de Darcy isotrope ( $K' = 1$ ).

La figure 5.14 montre les lignes de courant pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $K' = 0.1$  et pour différentes valeurs de l'angle  $\theta$  ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 25^\circ$ ,  $\theta = 35^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\theta = 65^\circ$ ,  $\theta = 75^\circ$ ,  $\theta = 80^\circ$  et  $\theta = 90^\circ$ ). Nous constatons à partir de cette figure, que la longueur d'onde



critique diminue en fonction de l'angle d'orientation des axes principaux  $\theta$  qui augmente de  $0^\circ$  à  $90^\circ$ . De plus, nous constatons que lorsque  $\theta$  augmente à partir de  $0^\circ$ , les cellules convectives secondaires deviennent incorporées aux cellules convectives principales. Les cellules résultantes sont superposées obliquement le long de la cavité et couvrent chacune une distance horizontale qui dépasse la longueur d'onde critique  $\lambda_c$ . Une cellule convective complète peut être visualisée à la figure 5.11 pour  $\theta = 45^\circ$ . À  $\theta = 90^\circ$ , ces cellules convectives se fractionnent à nouveau pour recréer les cellules convectives secondaires selon une situation comparable à celle obtenue pour  $\theta = 0^\circ$ .

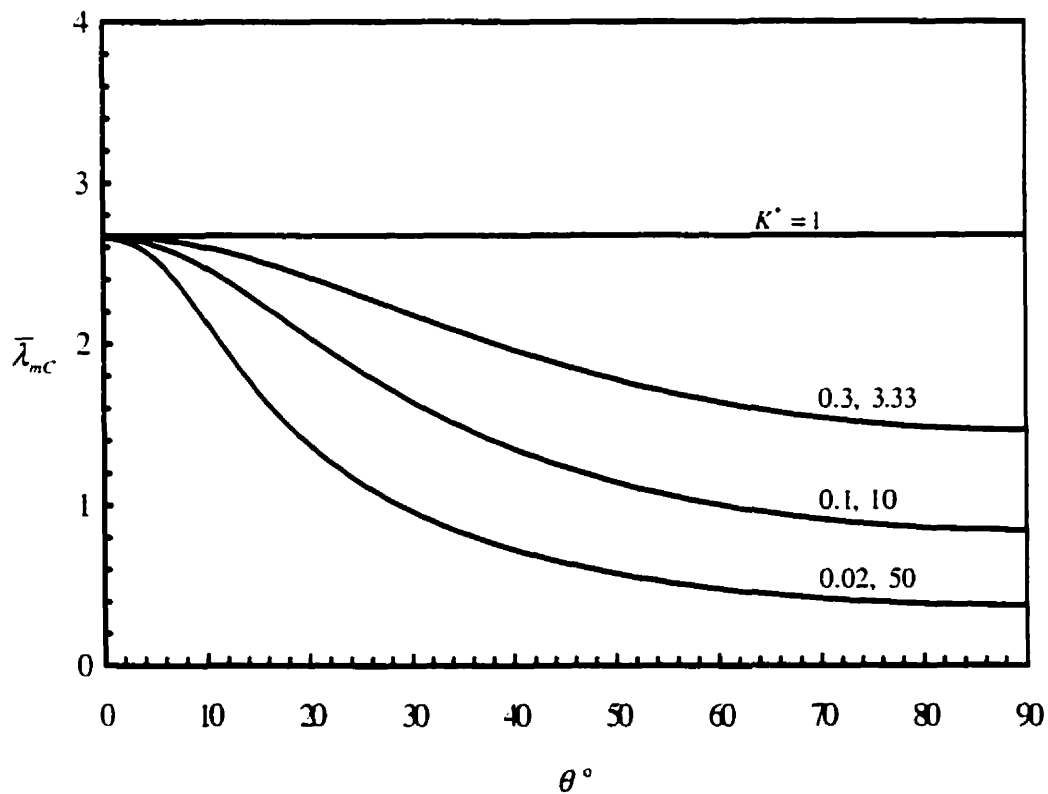


Figure 5.13 : Variation de la longueur d'onde critique  $\bar{\lambda}_{mc}$  en fonction de  $\theta$  pour  $\gamma = 0.5$  et pour différentes valeurs du rapport de perméabilité  $K^*$  ( $K^* = 0.02, 0.1, 0.1$ , et 1)

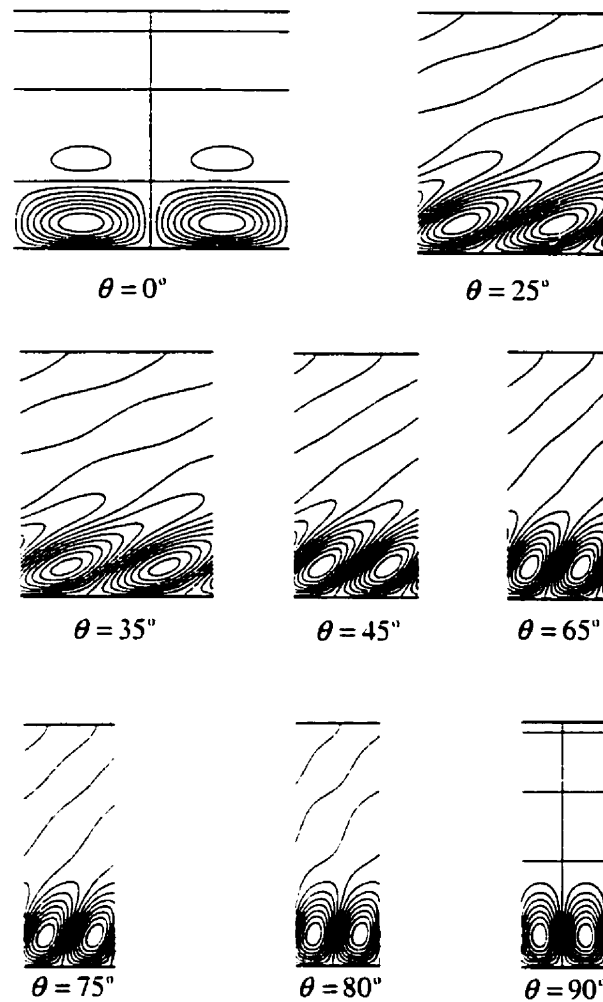


Figure 5.14 : Effet de l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$  sur la structure de l'écoulement pour le cas  $\gamma=0.5$  et  $K^*=0.1$  (pour chaque champ d'écoulement une longueur d'onde est représentée)

### 5.2.2.2 Couche confinée

#### a. Effet du rapport de forme $\bar{A}_m$ et du paramètre d'inversion $\gamma$

L'effet du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mc}$  pour le cas d'une couche poreuse confinée est maintenant discuté. La figure 5.15

montre la variation du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  en fonction du rapport de forme  $\bar{A}_m$ , pour  $\theta = 0^\circ$  (ou  $90^\circ$ ) et pour différentes valeurs de  $\gamma$  ( $\gamma = 0.5, 1, 1.8, 2$  et  $1000$ ) avec  $K^*$  maintenu fixe à  $0.1$ . Pour les raisons déjà mentionnées précédemment concernant le facteur de normalisation  $4/(1 + K^{*1/2})^2$  utilisé dans la définition de l'ordonnée, le paramètre  $K^*$  peut être remplacé par son inverse  $1/K^*$  sans changer la valeur de l'ordonnée. De plus, avec le facteur  $K^{*1/4}$  qui affecte  $A_m$ , les résultats pour une valeur donnée de  $K^*$  ou pour son inverse  $1/K^*$ , sont les mêmes pour un  $\gamma$  donné. Les courbes de la figure 5.15 sont donc également valides pour  $K^* = 0.1$  ou  $K^* = 10$ . Finalement, si on tient compte de ces considérations, ces courbes sont aussi valides pour le cas  $\theta = 90^\circ$  à condition de changer l'abscisse  $A_m K^{*1/4}$  par  $A_m K^{*-1/4}$ .

Les courbes de la figure 5.15 subissent les mêmes variations en passant par des maxima et des minima que celles du cas linéaire (densité versus température linéaire, figures 5.2 et 5.3). Également comme pour le cas linéaire, les sommets de ces courbes indiquent le passage du nombre de cellules convectives de  $n$  à  $n+1$ . Comme il a été déjà décrit par *Mahidjiba et al. [85]*, les minima de chaque courbe sont localisés à  $\bar{A}_{mC} = n \bar{\lambda}_{mC}/2$  ( $n$  étant un entier positif) et, avec  $\bar{A}_m$  augmentant, la valeur du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  tend asymptotiquement vers celle qui caractérise la couche infinie. Toutes les courbes de la figure 5.15 rejoignent pratiquement les limites asymptotiques d'une couche infinie quand la valeur de  $A_m K^{*1/4}$  ( $\theta = 0^\circ$ ) ou  $A_m K^{*-1/4}$  ( $\theta = 90^\circ$ ) est supérieure à  $\sim 5$ . Ainsi, la courbe obtenue pour  $\gamma = 1$  (ou  $\gamma = 0.5$ ) tend asymptotiquement vers la valeur  $\bar{R}_{mC} = 28.5$  donnée dans la figure 5.5 pour le cas  $K^* = 0.1$  et  $\theta = 0^\circ$ . Notons également que c'est la contrainte exercée par les parois verticales sur la longueur d'onde de la cavité qui augmente la valeur du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  entre les minima.

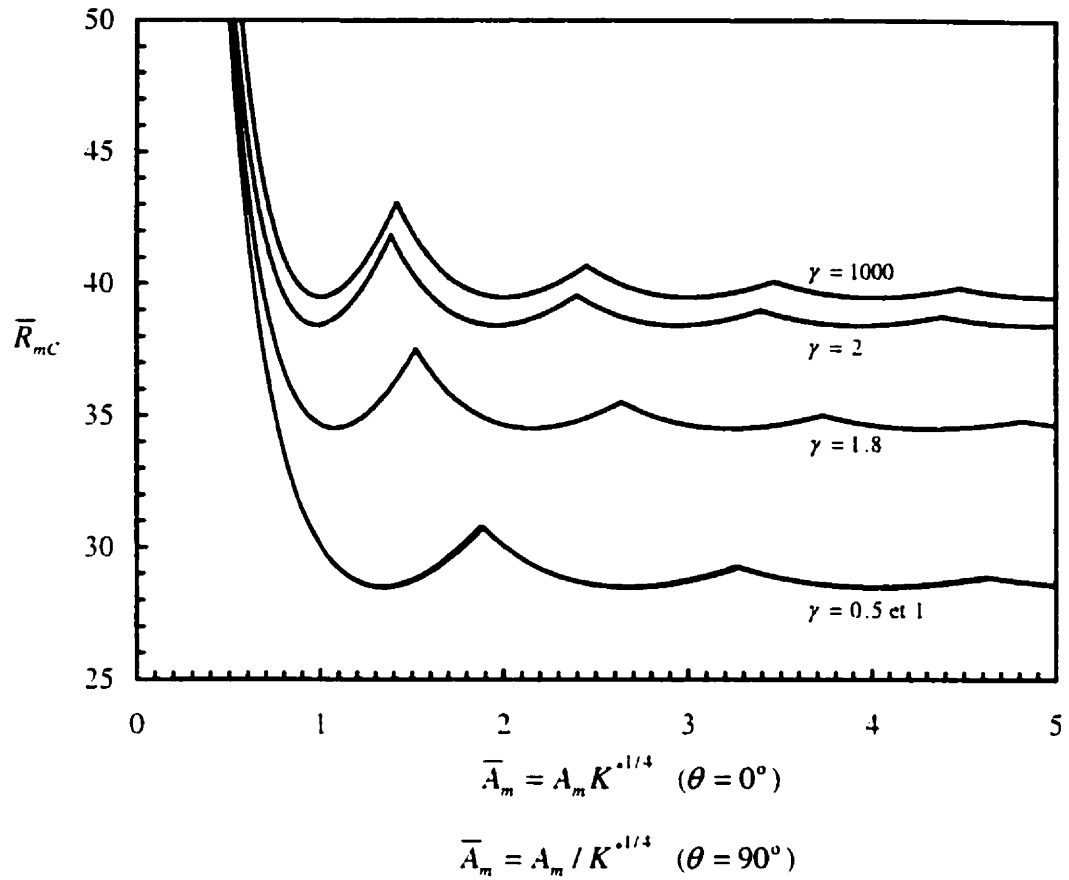


Figure 5.15 : Effet du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le nombre de Rayleigh critique

$\bar{R}_{mc}$  pour  $\theta = 0^\circ$ ,  $K^* = 0.1, 10$  et pour différentes valeurs du paramètre d'inversion  $\gamma$  ( $\gamma = 0.5, 1, 1.8, 2$  et  $1000$ )

La courbe supérieure de la figure 5.15 obtenue pour  $\gamma = 1000$  ( $\gamma \gg 2$ ) correspond pratiquement à la solution asymptotique obtenue pour le cas d'une relation linéaire entre la densité et la température, situation déjà étudiée par *Mahidjiba et al. [61]*. Pour le cas  $\gamma = 2$ , la forme quadratique en  $T$  de l'équation (2.13) introduit la légère différence entre les courbes  $\gamma = 2$  et  $\gamma = 1000$ . Pour la courbe  $\gamma = 1.8$ , l'effet moindre de la paroi supérieure de la cavité, dû essentiellement à la présence d'une couche stable supérieure, a comme conséquence une réduction beaucoup plus prononcée du nombre de

Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$ . Pour  $\gamma \leq 1$ , une solution asymptotique est atteinte de sorte que les résultats obtenus pour  $\gamma = 0.5$  et  $\gamma = 1$  finissent sur une seule et même courbe.

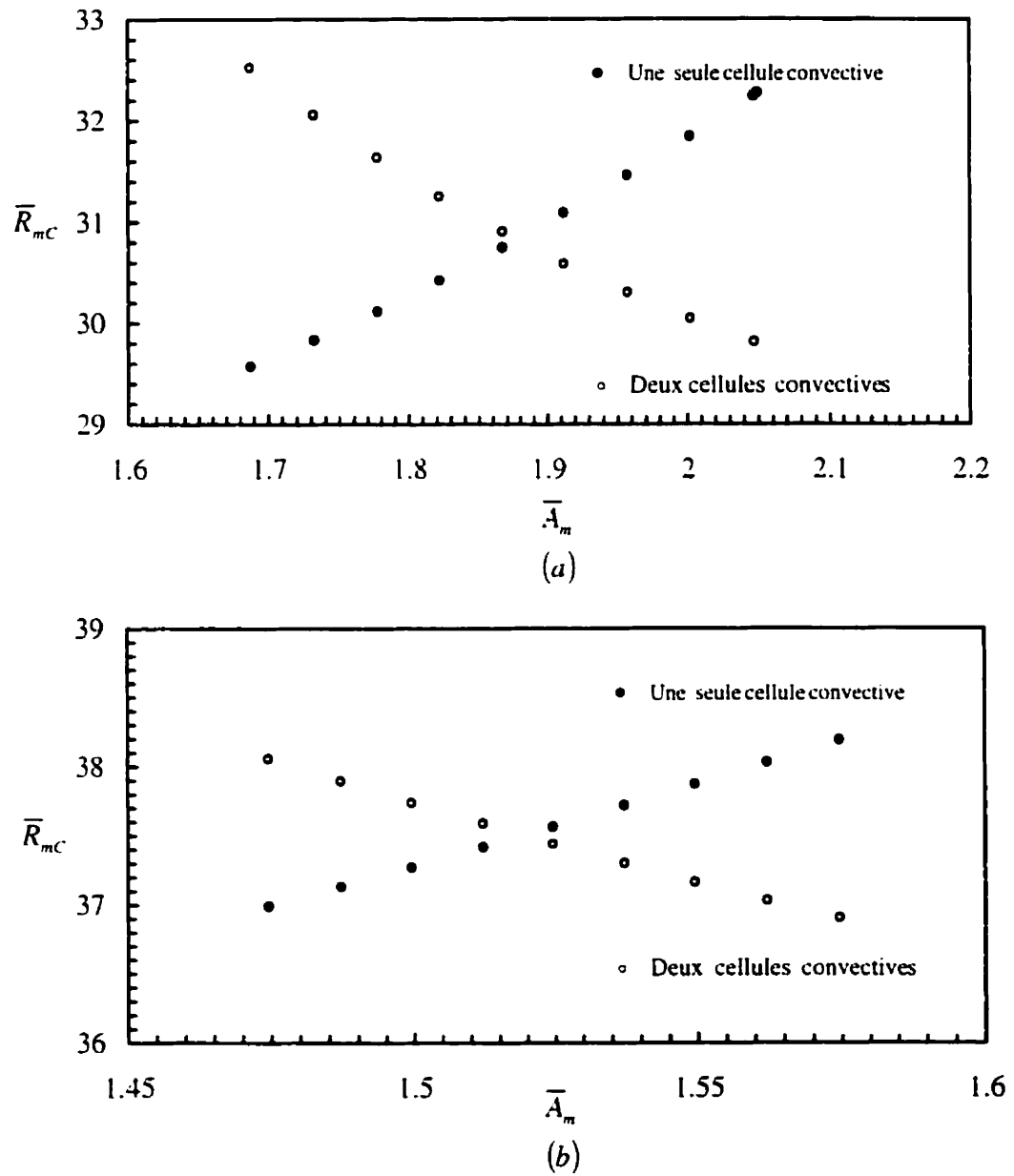


Figure 5.16 : Effet du rapport de forme  $\bar{A}_m$  sur les deux premiers nombres de Rayleigh critiques correspondant aux deux premières valeurs propres les plus élevées pour  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 90^\circ$ ) : (a)  $\gamma = 0.5$  et (b)  $\gamma = 1.8$

Rappelons que chacune des courbes de la figure 5.15 représente le seuil le plus bas à partir duquel le mouvement convectif se produit. L'analyse de stabilité linéaire décrite précédemment fournit d'autres seuils non représentés sur ces courbes. Par exemple, la partie de la courbe qui précède le premier sommet, sur chacune des courbes représente le seuil au-delà duquel une cellule convective simple apparaîtra dans la cavité. Cette partie de la courbe pourrait être extrapolée comme c'est le cas à la figure 5.2 au-delà du premier sommet, à des rapports de forme plus élevés où elle continuerait à fournir le seuil pour une seule cellule convective. Cependant pour des rapports de forme entre le premier et le deuxième sommet, il existe un seuil inférieur correspondant à deux cellules convectives. Les figures 5.16a et 5.16b donnent les deux premiers seuils, situés au voisinage du premier sommet, pour les cas  $\gamma = 0.5$  et  $\gamma = 1.8$ , respectivement. L'endroit où les deux séries de points se croisent correspond au premier sommet

La figure 5.17 montre l'effet du rapport de forme  $\bar{A}_m$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  pour  $K^* = 0.1$  et  $\theta = 45^\circ$ . La normalisation concernant l'abscisse et l'ordonnée utilisée dans les graphiques précédents, est également de mise dans cette figure. Trois courbes correspondant à  $\gamma = 1000$ , 1.8 et 1.0 (ou 0.5) sont données sur ce graphique. Des différences notables peuvent être observées par rapport à la figure 5.15 particulièrement à propos des deux courbes  $\gamma = 1.8$  et 1.0 (ou 0.5). Considérons en premier la courbe  $\gamma = 1000$ , laquelle représente la solution asymptotique obtenue pour le cas d'une relation densité-température linéaire. Le comportement de cette dernière a été déjà discuté précédemment (voir section cas linéaire). La limite asymptotique d'une couche infinie  $\bar{R}_{mC} = 35.8$  est pratiquement obtenue à  $\bar{A}_m = 5$ . Cette limite est légèrement en dessous de  $4\pi^2$ , en conformité avec les résultats de *Tyvand et Storesletten* [39]. Lorsque  $\bar{A}_m$  augmente à partir de zéro, les premiers minimas du nombre de Rayleigh critique sont supérieurs à la limite asymptotique, et les distances qui les séparent ne sont plus constantes mais diminuent lentement avec  $\bar{A}_m$  augmentant. Ce comportement est différent de celui illustré dans la figure 5.15. Il est la conséquence de la

contrainte additionnelle imposée par les parois verticales quand  $\theta \neq 0^\circ$  et  $\theta \neq 90^\circ$ . Ces parois n'imposent pas seulement une longueur d'onde donnée mais modifient également la forme des cellules convectives adjacentes, tel qu'illustré dans la figure 5.18. Sans la présence de ces parois verticales, ce qui est le cas pour une couche infinie, toutes les cellules convectives sont allongées obliquement comme le montrent les figures 5.11 et 5.14

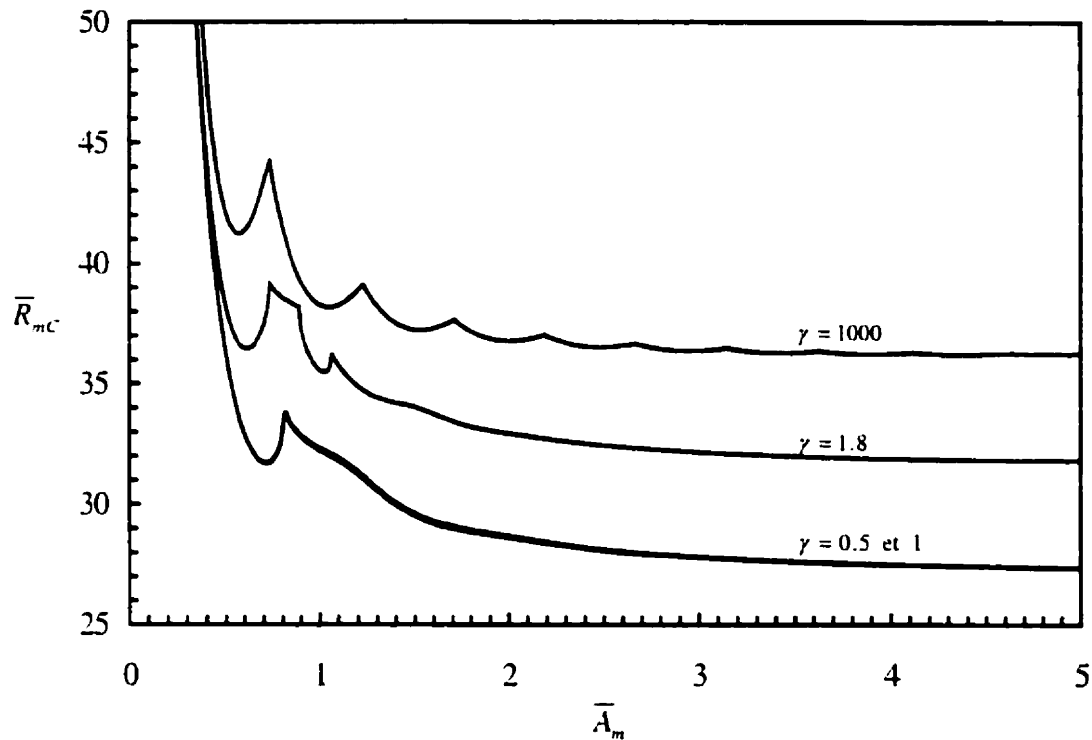


Figure 5.17 : Effet du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  pour  $\theta = 45^\circ$ ,  $K^* = 0.1$  et pour différentes valeurs du paramètre d'inversion  $\gamma$  ( $\gamma = 0.5$ , 1, 1.8, et 1000)

Les courbes  $\gamma = 1.8$  et  $\gamma = 1$  (ou 0.5) de la figure 5.17 sont différentes des courbes déjà décrites précédemment. Mis à part le comportement plus au moins erratique dans la région  $\sim 0.7 < \bar{A}_m < \sim 1.3$ , ces courbes montrent une décroissance monotone et

rejoignent la limite asymptotique d'une couche infinie lorsque  $\bar{A}_m$  augmente. Cette décroissance monotone est liée à la manière dont les nouvelles cellules convectives sont introduites dans la couche quand le rapport de forme  $\bar{A}_m$  augmente. Contrairement aux courbes précédentes, celles de la figure 5.15 et celles du haut de la figure 5.17, les nouvelles cellules prennent place d'une façon très progressive. Ce comportement est lié à la perte complète des symétries caractérisant les champs d'écoulement obtenus pour  $\gamma < 2$  et  $\theta \neq 0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Sans la présence des contraintes de symétrie, les nouvelles cellules convectives sont insérées en douceur lorsque le rapport de forme  $\bar{A}_m$  augmente.

Les champs d'écoulement reliés aux courbes précédentes déjà discutées sont assujettis à deux types de symétrie : la première est associée à une valeur  $\gamma$  suffisamment grandes ( $\gamma \gg 2$ ) et la deuxième correspond à  $\theta = 0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Ces deux types de symétrie sont maintenant discutés :

1. **Symétrie par rapport au centre de la cavité ("centro-symétrie") :** pour la convection classique ( $\rho$  vs  $T$  linéaire), obtenue asymptotiquement quand  $\gamma \gg 2$ , les parois supérieure et inférieure exercent une influence équivalente sur les champs d'écoulement. Il en résulte une symétrie par rapport au centre de la cavité ( $x = 0$  et  $y = 0$  dans la figure 2.1). Cette symétrie prévaut quelle que soit la valeur de l'angle d'orientation  $\theta$  et prend la forme suivante :

$$\Psi(-x, -y) = \Psi(x, y) \quad (\text{nombre impair de cellules}) \quad (5.3a)$$

$$\Psi(-x, -y) = -\Psi(x, y) \quad (\text{nombre pair de cellules}) \quad (5.3b)$$

Avec cette contrainte de symétrie, l'apparition d'une nouvelle cellule convective dans le champ d'écoulement rend nécessaire le réarrangement de toutes les cellules existantes dans leurs formes ainsi que dans leurs forces relatives, comme on peut le



constater sur les figures 5.18ab. Les deux champs de vitesse représentés se situent de part et d'autre du deuxième sommet de la figure 5.17 à  $\bar{A}_m = 1.22$  ( $\gamma = 1000$ ).

- 2. Symétrie par rapport à l'axe vertical  $x = 0$  (symétrie image-miroir) :** quelle que soit la valeur du paramètre d'inversion  $\gamma$ , tous les champs d'écoulement pour le cas  $\theta = 0^\circ$  (or  $\theta = 90^\circ$ ) sont symétriques par rapport à l'axe vertical  $x = 0$ , lequel divise la cavité en deux parties égales. Ce type de symétrie prend la forme suivante :

$$\Psi(-x, y) = \Psi(x, y) \quad (\text{nombre impair de cellules}) \quad (5.4a)$$

$$\Psi(-x, y) = -\Psi(x, y) \quad (\text{nombre pair de cellules}) \quad (5.4b)$$

Avec cette contrainte de symétrie, toutes les cellules convectives ont la même forme et la même intensité. L'addition d'une nouvelle cellule convective rend donc nécessaire le réarrangement du champ d'écoulement. Ce réarrangement est illustré aux figures 5.19 et 5.20, lesquelles donnent, respectivement pour  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 0.5$ , les champs d'écoulement de part et d'autre du second sommet de la figure 5.15, sommet situé approximativement à  $\bar{A}_m = 3.27$ .

Les contraintes associées aux symétries (5.3ab) et (5.4ab) produisent des valeurs propres dont l'inverse  $\bar{R}_{mC} = 4(1/\lambda_{\max}^*) / (1 + K^{*1/2})^2$  est représenté à de la figure 5.16, près d'un sommet donné. Ces contraintes ne s'appliquent pas aux deux courbes inférieures de la figure 5.17. La figure 5.21 donne l'évolution des valeurs propres associées au comportement particulier des courbes  $\gamma = 1.8$  et 1 (ou 0.5) dans la zone déjà décrite comme ayant un comportement erratique, comportement qui se distingue nettement de la figure 5.16. Les figures 5.22, 5.23 et 5.24 illustrent l'évolution progressive de la structure de l'écoulement quand les nouvelles cellules convectives sont introduites, en l'absence de toute symétrie, à proximité de la parois inférieure. Ces figures

concernent respectivement les cas  $\gamma = 1.8$ ,  $\gamma = 1$  et  $\gamma = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$ . Les figures 5.23 et 5.24 montrent un champ d'écoulement dont la partie supérieure semble erratique. L'augmentation du maillage n'a pas permis d'éliminer ce comportement. Il faut toutefois noter que, d'une part, les cellules primaires de ces deux figures correspondent pour un  $\bar{A}_m$  donné et que, d'autre part, les courbes  $\gamma = 0.5$  et  $\gamma = 1$  se superposent sur la figure 5.17. Enfin, mentionnons que les résultats numériques de ces deux figures proviennent du même programme numérique qui produit les figures 5.18, 5.19 et 5.20.

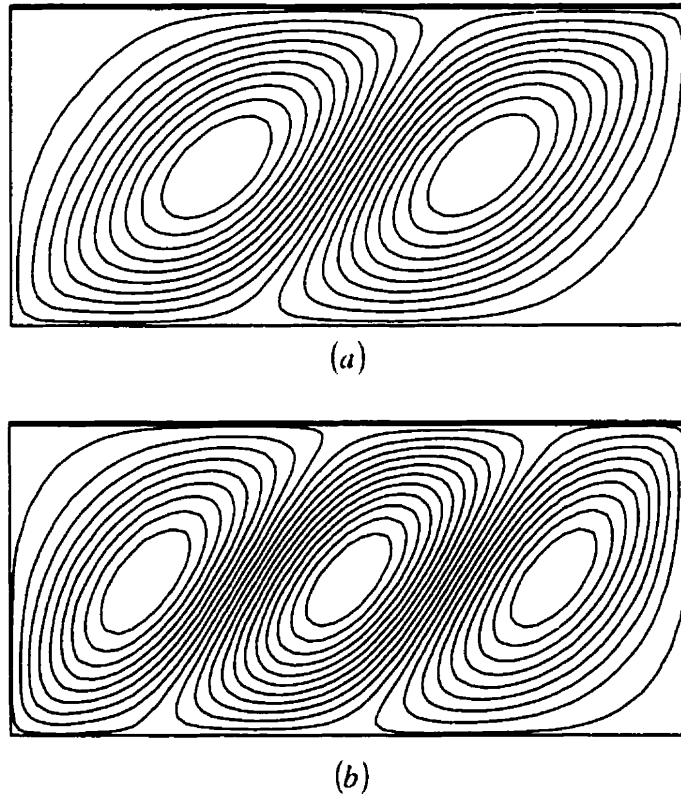


Figure 5.18 : Apparition des nouvelles cellules convectives quand la centro-symétrie prévaut (a)  $\bar{A}_m = 1.21$  et (b)  $\bar{A}_m = 1.24$  pour  $\gamma = 1000$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$

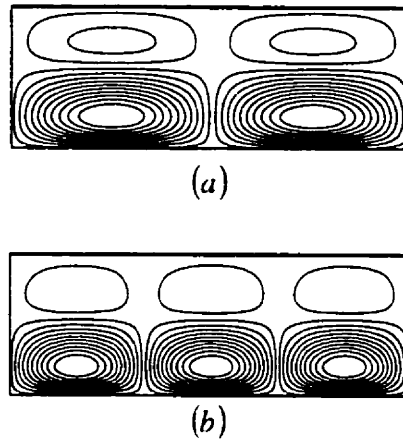


Figure 5.19 : Apparition des nouvelles cellules convectives quand la symétrie image-miroir prévaut (a)  $\bar{A}_m = 3.25$  et (b)  $\bar{A}_m = 3.30$  pour le cas  $\gamma = 1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$

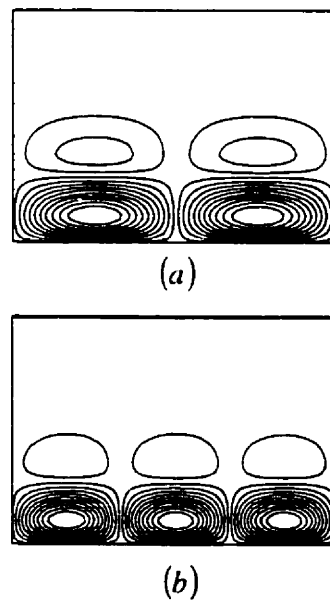


Figure 5.20 : Apparition des nouvelles cellules convectives quand la symétrie image-miroir (a)  $\bar{A}_m = 3.22$  et (b)  $\bar{A}_m = 3.31$  pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$

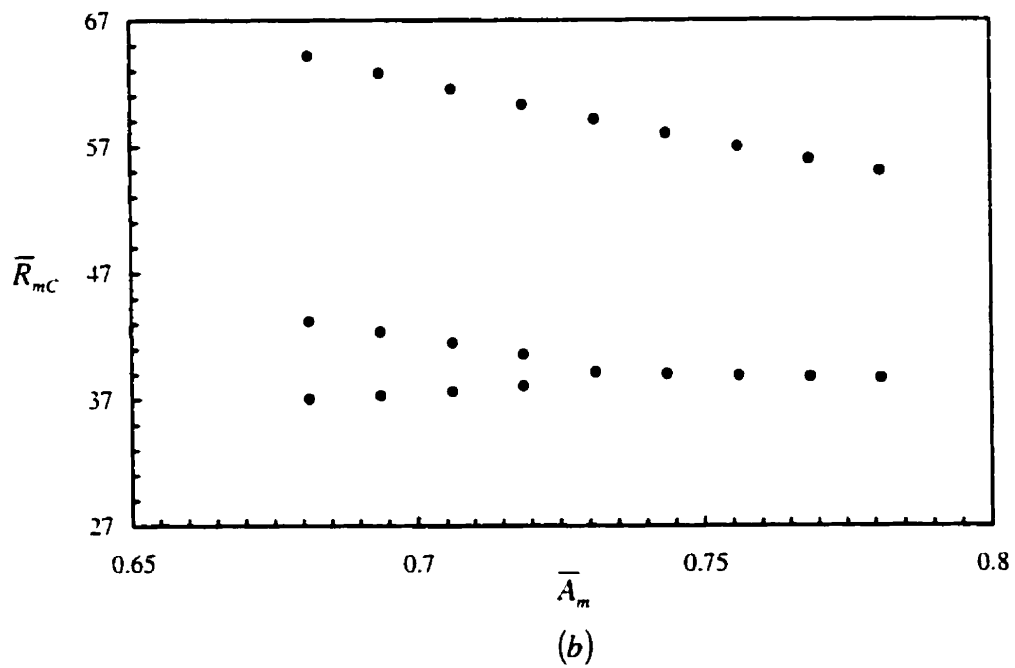
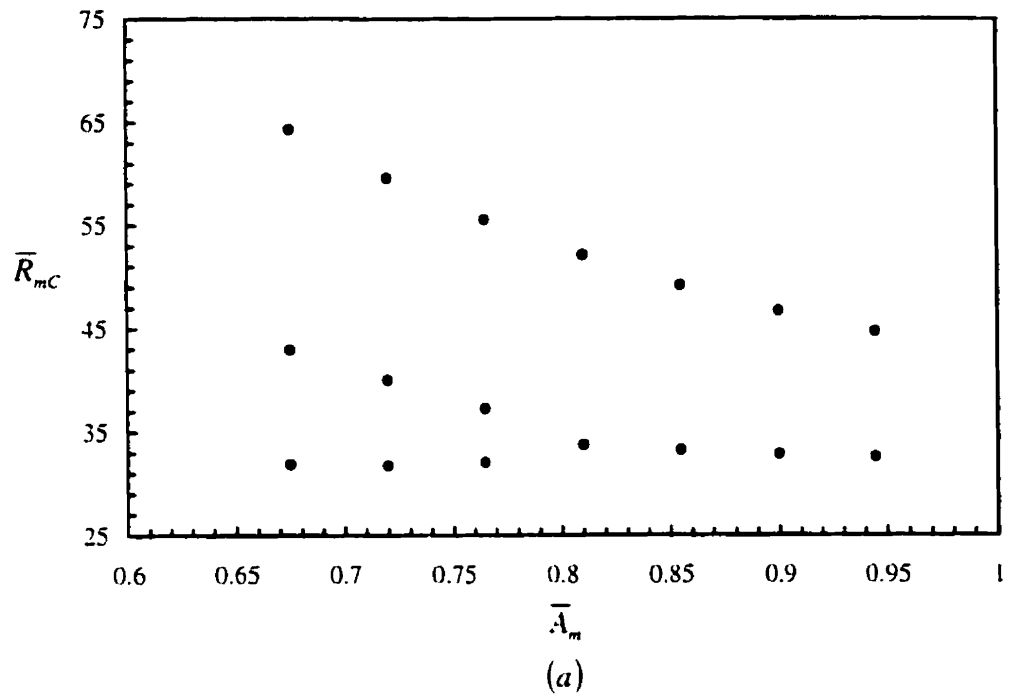


Figure 5.21 : Effet du rapport de forme  $\bar{A}_m$  sur les trois premiers nombres de Rayleigh critiques correspondant aux trois premières valeurs propres les plus élevées pour  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  : (a)  $\gamma = 0.5$  et (b)  $\gamma = 1.8$

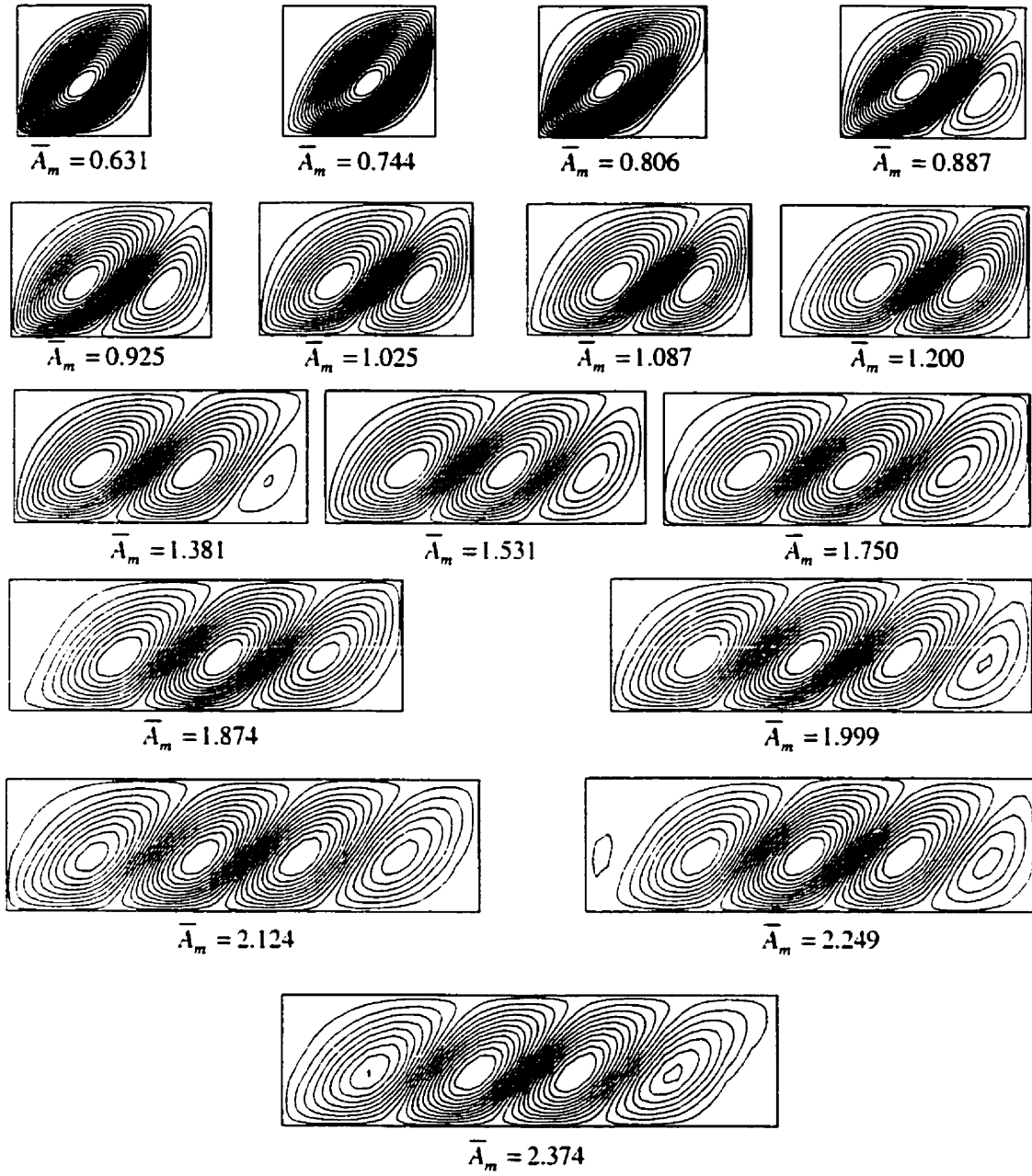


Figure 5.22 : Apparition progressive des nouvelles cellules convectives dans la cavité lorsque la symétrie est absente pour le cas  $\gamma = 1.8$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$

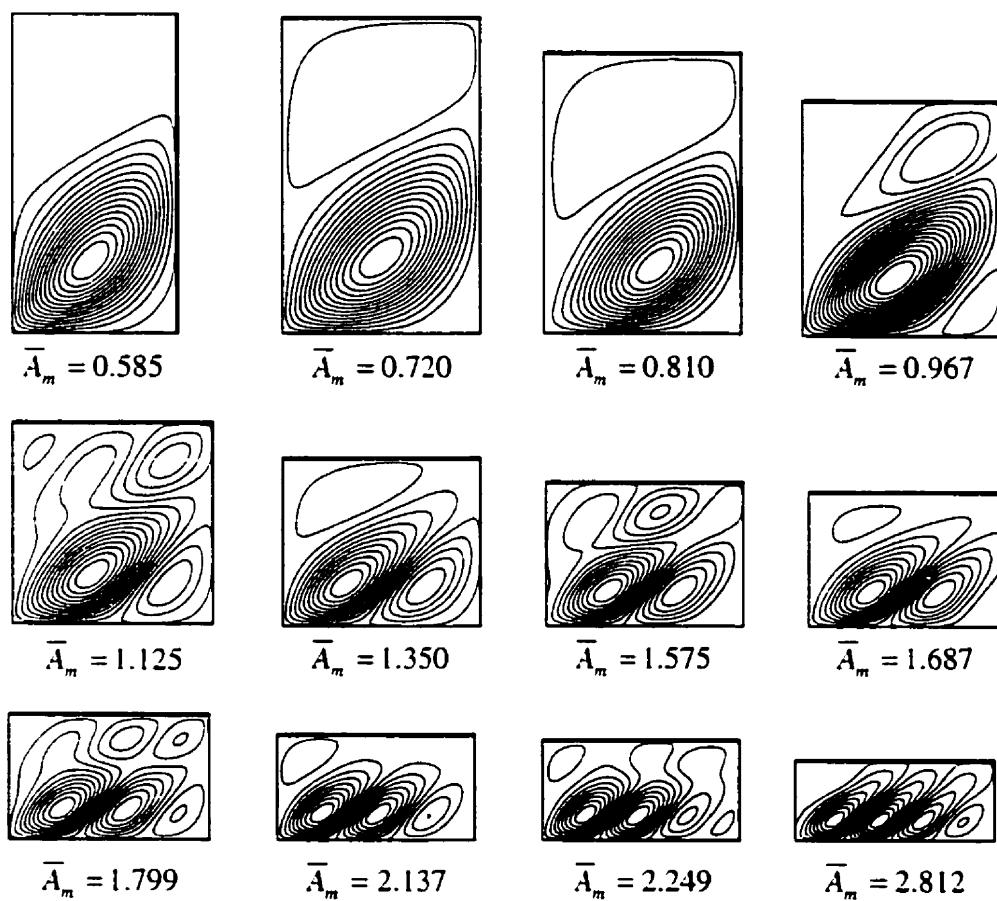


Figure 5.23 : Apparition progressive des nouvelles cellules convectives dans la cavité lorsque la symétrie est absente pour le cas  $\gamma = 1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$

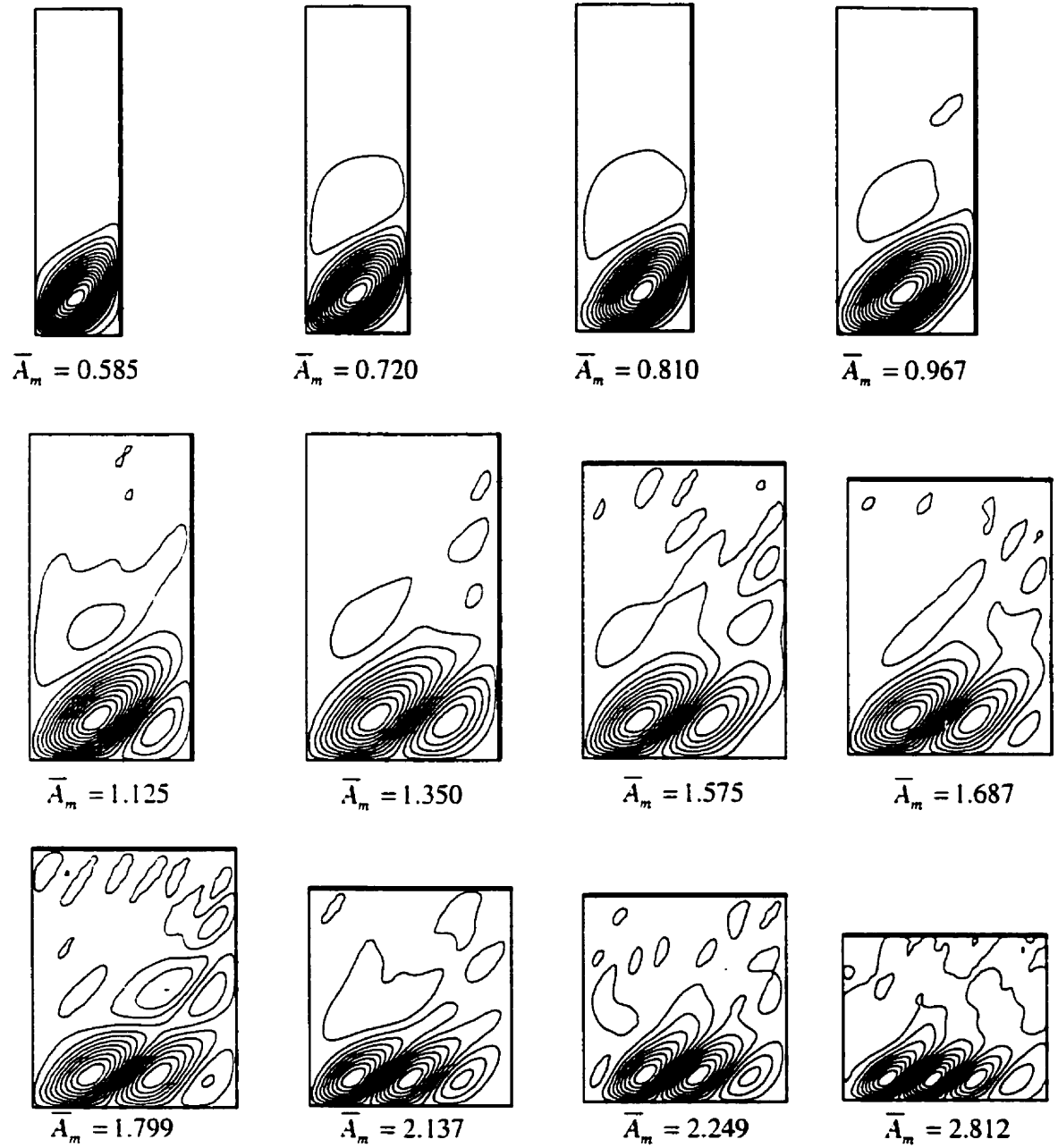


Figure 5.24 : Apparition progressive des nouvelles cellules convectives dans la cavité lorsque la symétrie est absente pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$

### 5.3 Convection d'amplitude finie

#### 5.3.1 Cas linéaire ( $\gamma \gg 2$ , $A_m = A$ )

##### 5.3.1.1 Influence du nombre de Rayleigh $\bar{R}_m$

Les figures 5.25-5.28 représentent les résultats numériques obtenus pour le cas de la convection d'amplitude finie. La figure 5.25 montre cinq paires de configurations d'écoulements pour différentes valeurs du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  ( $\bar{A}_m = 0.562, 1.068, 1.518, 1.856, 2.024$ ) avec  $K^* = 0.1$  et  $\theta = 45^\circ$ . Les cinq paires de configurations contiennent respectivement une, deux, trois, quatre et cinq cellules convectives. Chaque paire a été obtenue à un nombre de Rayleigh  $\bar{R}_m$ , légèrement au dessus ( $\bar{R}_m = 1.2 \bar{R}_{mC}$ ) des nombres de Rayleigh critiques de la figure 5.3. Les champs d'écoulement au seuil de la convection sont donnés à la figure 5.4.

Tous les champs d'écoulement de la figure 5.25 sont représentés par des lignes de courant avec des incréments égaux en  $\Psi$ . Dans tous les cas, les cellules convectives sont allongées selon la direction de la perméabilité maximum et séparées par des lignes de courant obliques. En raison de la forme particulière de ces cellules convectives imposée par la direction oblique de la perméabilité maximum, les parois latérales influencent les cellules adjacentes différemment, selon le comportement de l'écoulement à proximité de ces parois. Les particules fluides, en se déplaçant le long de la paroi latérale, peuvent s'en rapprocher, comme c'est le cas, près des deux parois du champ d'écoulement de la figure 5.25a à gauche, où le mouvement de l'écoulement est dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Les particules fluides peuvent également s'éloigner de la paroi verticale au fur et à mesure qu'elles se déplacent le long de cette paroi, comme c'est le cas près des parois latérales de la figure 5.25a à droite où le mouvement de l'écoulement est dans le sens des aiguilles d'une montre. Le premier type d'écoulement est appelé "naturel" étant donné qu'en général un calcul numérique qui commence par un écoulement nul et utilise la conduction pure comme condition initiale convergera toujours dans le temps vers cet écoulement. Le comportement opposé, c'est à dire l'écoulement "antinaturel", ne peut être



obtenu qu'en utilisant des conditions initiales appropriées. L'écoulement dans le sens des aiguilles d'une montre n'est donc pas l'image-miroir de l'écoulement dans le sens contraire, comme c'est le cas pour le milieu poreux isotrope et comme c'est également le cas au seuil de la convection. Les champs de température correspondants donnés par des isothermes sont représentés à la figure 5.26.

Le diagramme de bifurcation correspondant aux deux écoulements de la figure 5.25a est montré dans la figure 5.27a., laquelle donne l'influence du rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mc}$  sur la fonction de courant extremum  $\Psi_{ext}$ . On note que sur les deux graphiques de la figure 5.27 la courbe correspondant à la solution antinaturelle ne s'étend pas au delà de la valeur  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mc} = 2.3$ . On peut également noter que le nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$ , (figure 5.27b) correspondant à cette solution est inférieur à celui de la solution naturelle. On peut s'attendre à ce que tous les champs d'écoulement avec un nombre impair de cellules se comportent de la même façon puisque leurs deux cellules latérales sont affectées de la même manière, c'est à dire que l'écoulement près des parois latérales est soit naturel, soit antinaturel. Cette particularité impose la symétrie du champ d'écoulement par rapport au centre de la cavité. Ces caractéristiques sont aussi illustrées par les deux champs d'écoulement (naturel à droite et à antinaturel à gauche) des figures 5.25c et 5.25e. La symétrie par rapport au centre de la cavité vaut donc, pour les champs d'écoulement des figures 5.25a, 5.25c et 5.25e.

Contrairement à un écoulement avec un nombre impair de cellules, celui avec un nombre pair, comme celui représenté dans la figure 5.25b ou la figure 5.25d, se comporte différemment, parce qu'il y a toujours une paroi latérale avec un écoulement "naturel" et l'autre avec un écoulement "antinaturel".

Ces considérations données à propos des cinq types de champs d'écoulement de la figure 5.25 peuvent être extrapolées pour des champs d'écoulement comportant un plus grand nombre de cellules.

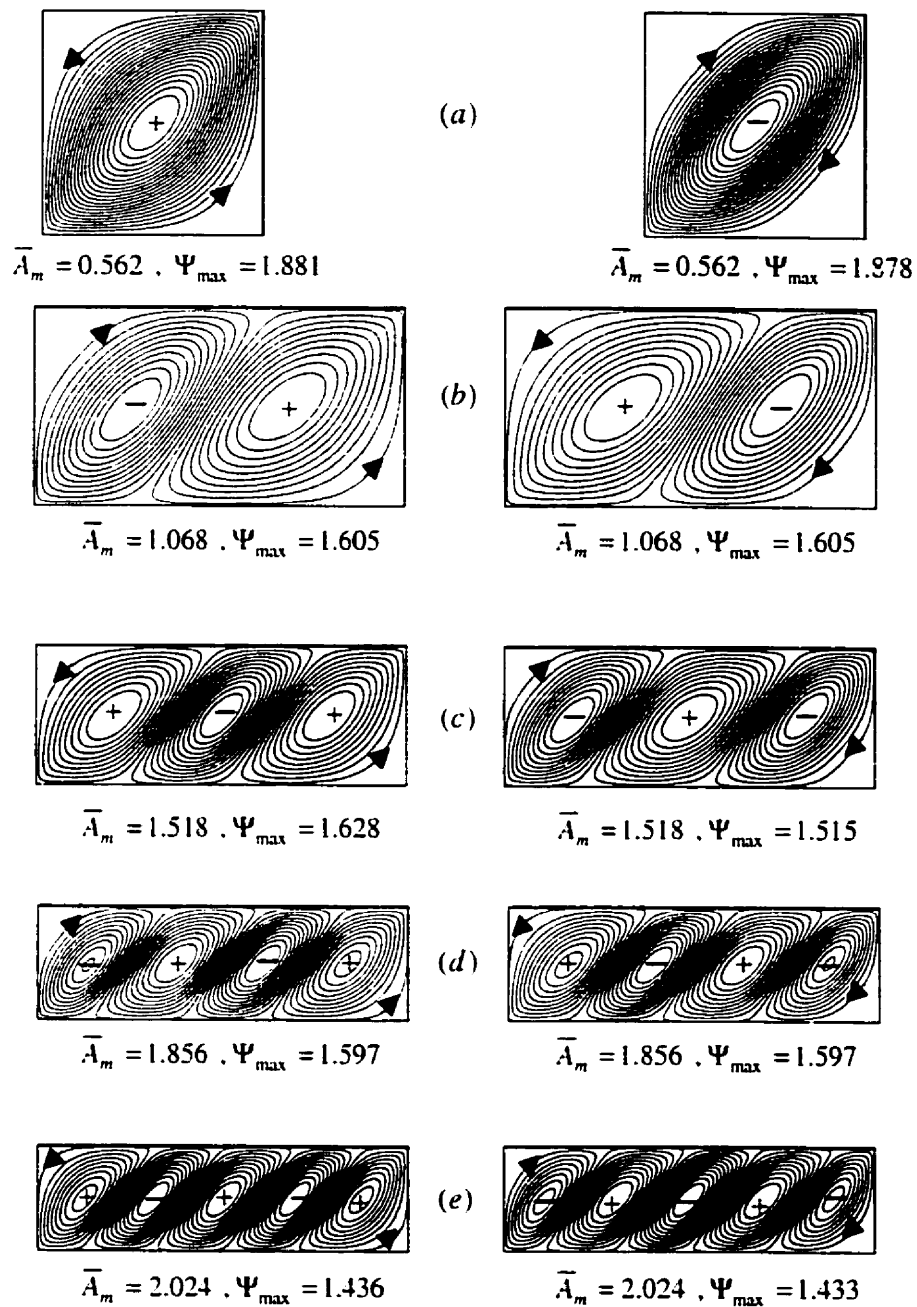


Figure 5.25 : Lignes de courant au voisinage du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  ( $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC} = 1.2$ ) pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $\bar{A}_m$

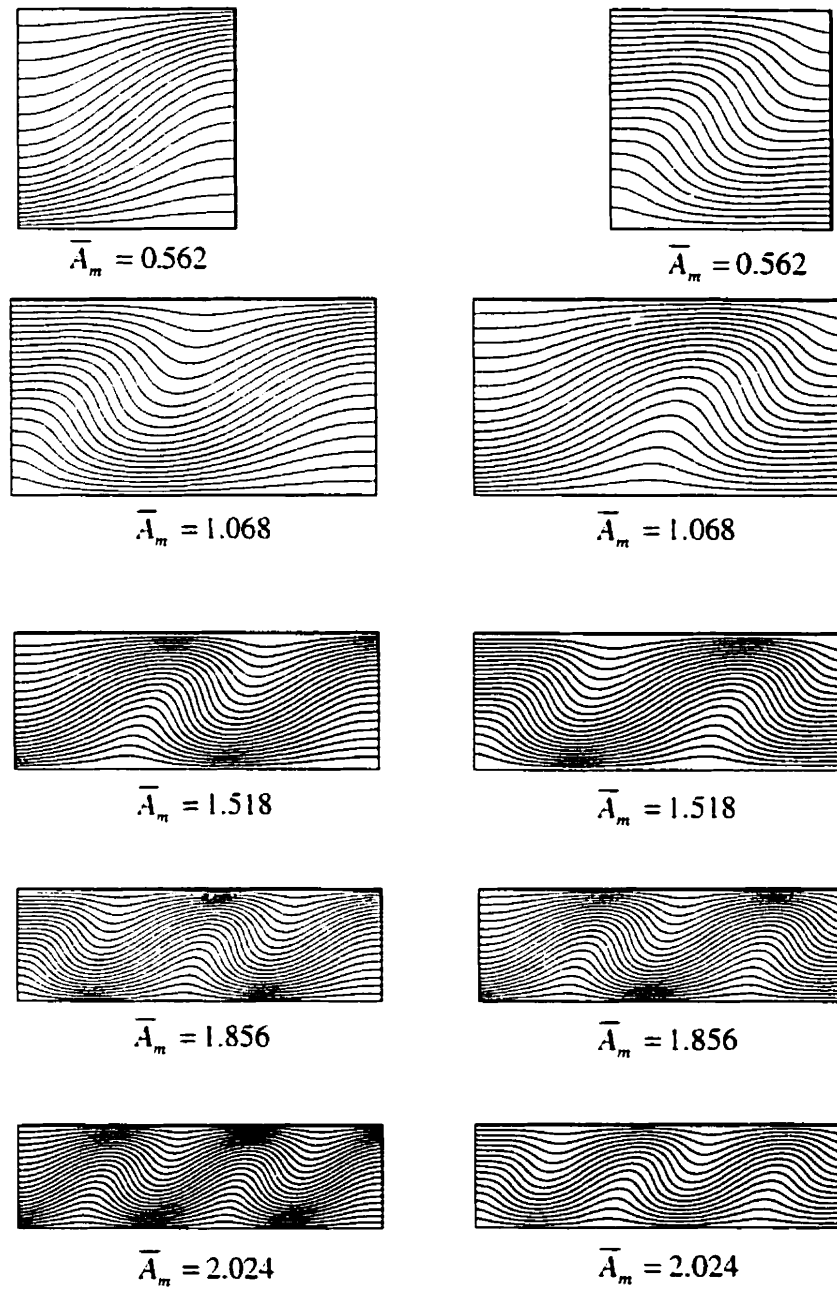


Figure 5.26 : Isothermes au voisinage du nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mC}$  ( $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC} = 1.2$ ) pour le cas  $K'' = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et pour différentes valeurs de  $\bar{A}_m$

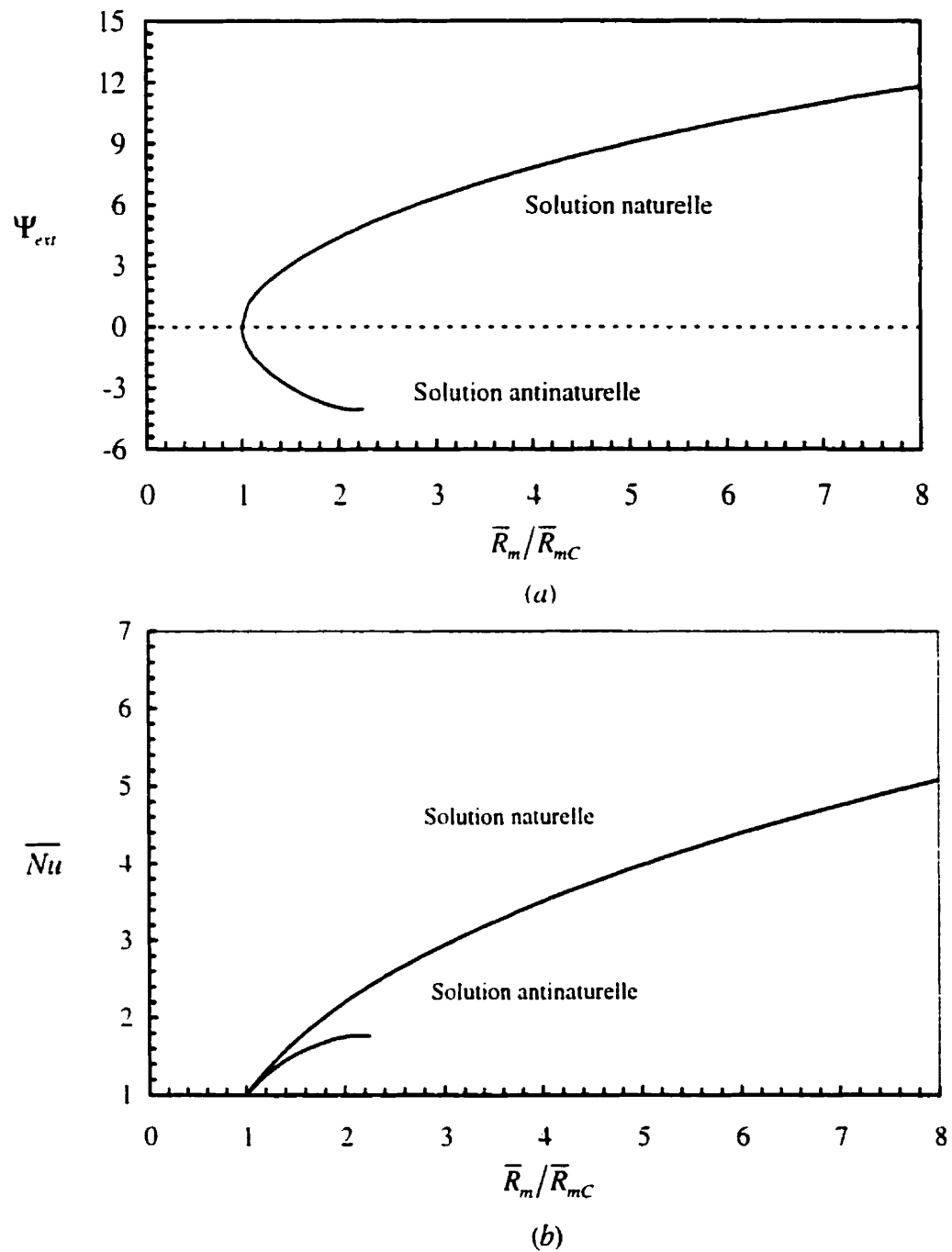


Figure 5.27 : Influence du rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m / \bar{R}_{mC}$  sur : (a) la fonction de courant extremum  $\Psi_{ext}$  et (b) le nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\bar{A}_m = 0.562$

Les figures 5.28a et 5.28b donnent respectivement, l'influence du rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  ( $1 \leq \bar{R}_m/\bar{R}_{mC} \leq 1.2$ ) sur la fonction de courant extremum  $\Psi_{ext}$  et le nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  pour un rapport de forme de  $\bar{A}_m = 1.068$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.1$ . Ces figures correspondent aux champs d'écoulement représentés à la figure 5.25b. Les deux configurations d'écoulements de la figure 5.25b sont susceptibles de se produire avec une égale probabilité et ont un comportement équivalent en terme du nombre de Nusselt moyen  $\bar{Nu}$  et du nombre de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$ . Il est à noter que les courbes  $\Psi_{max}$  et  $\Psi_{min}$  de la figure 5.28a ne sont pas symétriques ( $|\Psi_{max}| \neq |\Psi_{min}|$ ).

L'équivalence entre les deux champs d'écoulement de la figure 5.25b est mise en évidence en faisant pivoter l'un des deux champs par  $180^\circ$ . Les valeurs de  $\Psi_{max}$  et de  $\Psi_{min}$  de la fonction de courant de la figure 5.28a correspondent au champ d'écoulement représenté à gauche, figure 5.25b. Afin de trouver les extremums des valeurs de la fonction de courant pour le champ d'écoulement situé dans la partie gauche (droite) de la figure 5.25b, il suffit d'interchanger  $\Psi_{max}$  et  $\Psi_{min}$  dans la figure 5.28a.

Notons finalement que les deux écoulements de la figure 5.25d sont équivalents à la même manière de ceux de la figure 5.25b.

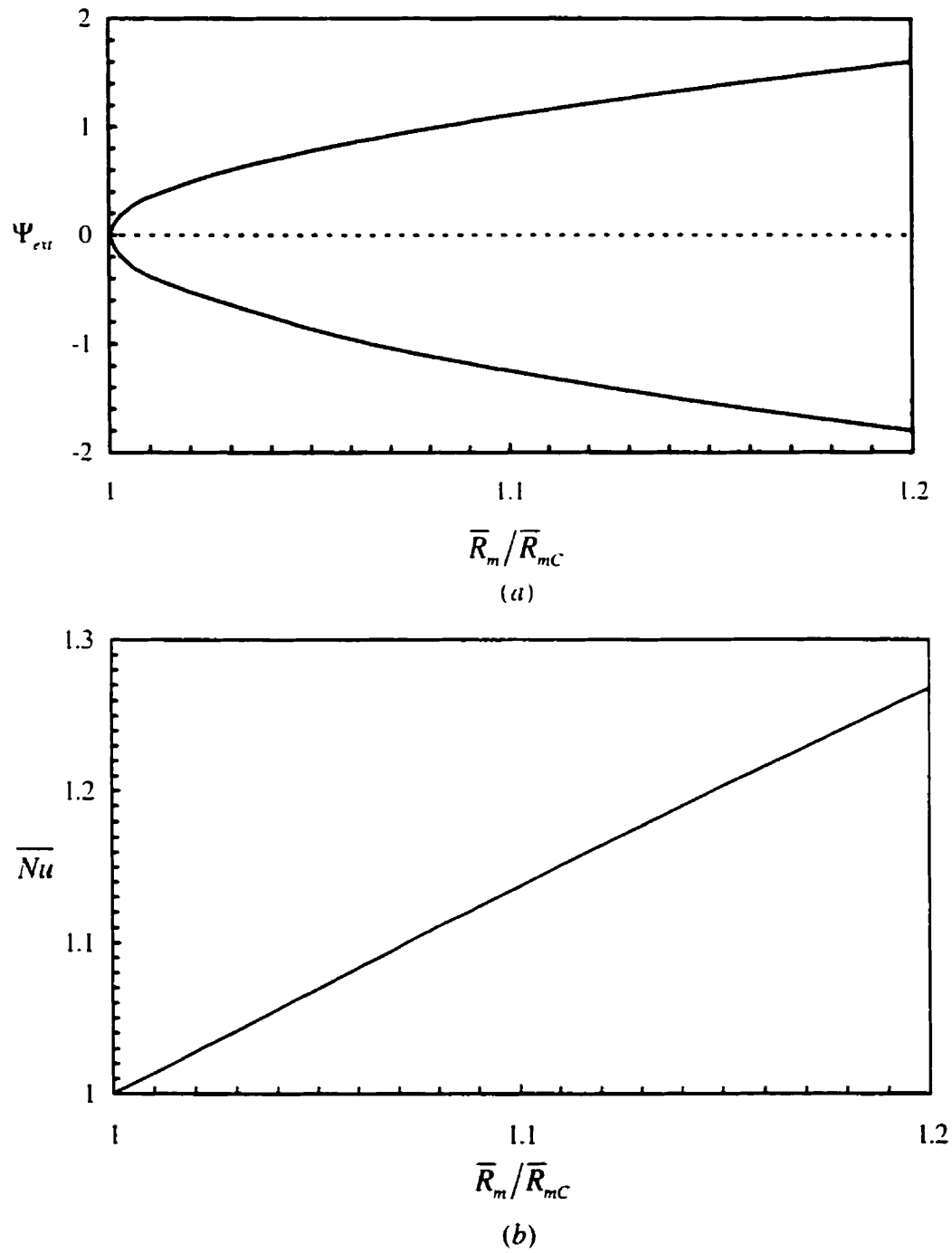


Figure 5.28 : Influence du rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m / \bar{R}_{mC}$  ( $1 \leq \bar{R}_m / \bar{R}_{mC} \leq 1.2$ ) sur : (a) la fonction de courant extremum  $\Psi_{ext}$  et (b) sur le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  pour le cas  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\bar{A}_m = 1.068$

### 5.3.1.2 Multiplicité de la solution

Le nombre de configurations d'écoulements qu'il est possible d'obtenir en convection d'amplitude finie pour les mêmes conditions, c'est-à-dire pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle, est illustré dans cette partie par l'exemple de la cavité carrée ( $A = 1$ ). Nous considérons ici le cas particulier  $\theta = 45^\circ$  et  $K^* = 0.5$  ( $\bar{A}_m = 0.84$ ). La figure 5.29a montre quatre configurations de champs d'écoulement et de température qu'il est possible d'obtenir pour le rapport  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC} = 4.148$  ( $R_C = 28.93$ ). Les solutions identifiées (1) et (2) sont unicellulaires, l'une (1) naturelle, l'autre (2) antinaturelle. Les solutions (3) et (4) comportent deux cellules convectives, l'une étant l'image-miroir de l'autre. la figure 5.29b donne l'intensité des cellules convectives, c'est-à-dire les valeurs extremum ( $\Psi_{en}$ ) au centre de la cellule, en fonction du rapport  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$ . La courbe identifiée  $S_1$  se rapporte au mouvement unicellulaire, la partie positive  $S_1^+$  correspondant à l'écoulement naturel (1) la partie négative  $S_1^-$  à l'écoulement antinaturel (2). La courbe identifiée  $S_2$  se rapporte au mouvement bicellulaire. La partie positive  $S_2^+$  correspond à la cellule de gauche de la configuration (3) et la partie négative  $S_2^-$  à la cellule de droite de la même configuration. La position de ces cellules convectives est inchangée pour la configuration (4). L'obtention de la courbe antinaturelle  $S_1^-$  requiert que l'impose du départ un mouvement unicellulaire dans la direction appropriée. Il en va de même pour la courbe  $S_2$  qui requiert que l'on impose deux cellules convectives comme conditions initiales. Pour un rapport  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC} > \sim 4.7$  on réussit même à stabiliser trois cellules convectives dans la cavité carrée. Cette multiplication de cellules pour un rapport de forme donné avec  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  augmentant est conforme au comportement d'un milieu poreux isotrope.

La figure 5.30 donne le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  qui correspond à chacune des courbes de la figure 5.30 en fonction de  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$ .

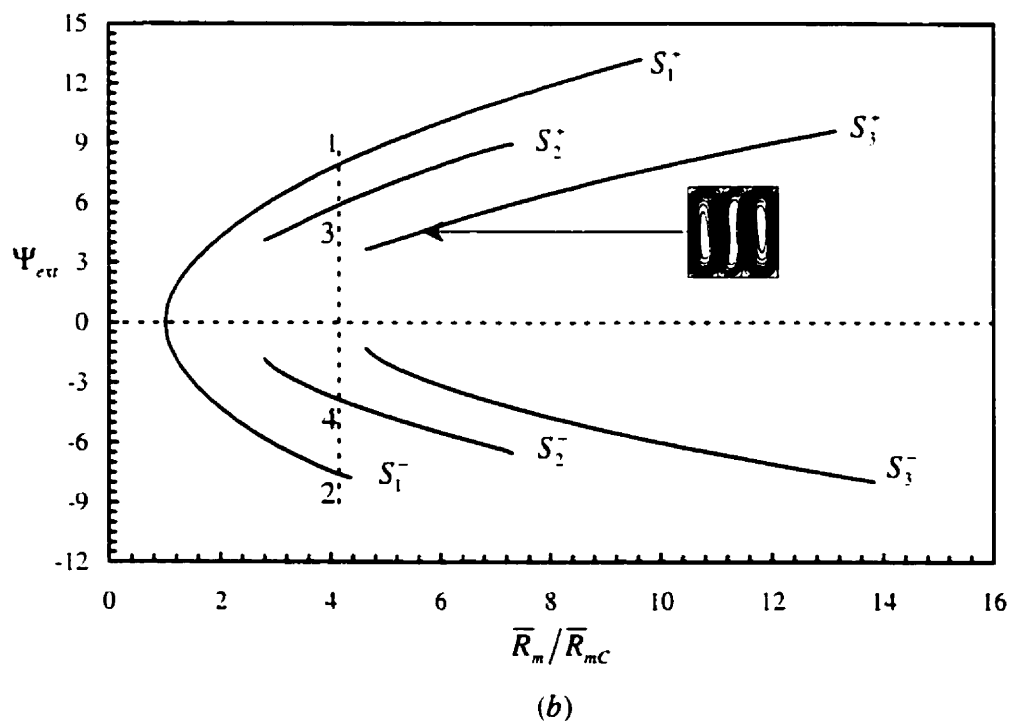
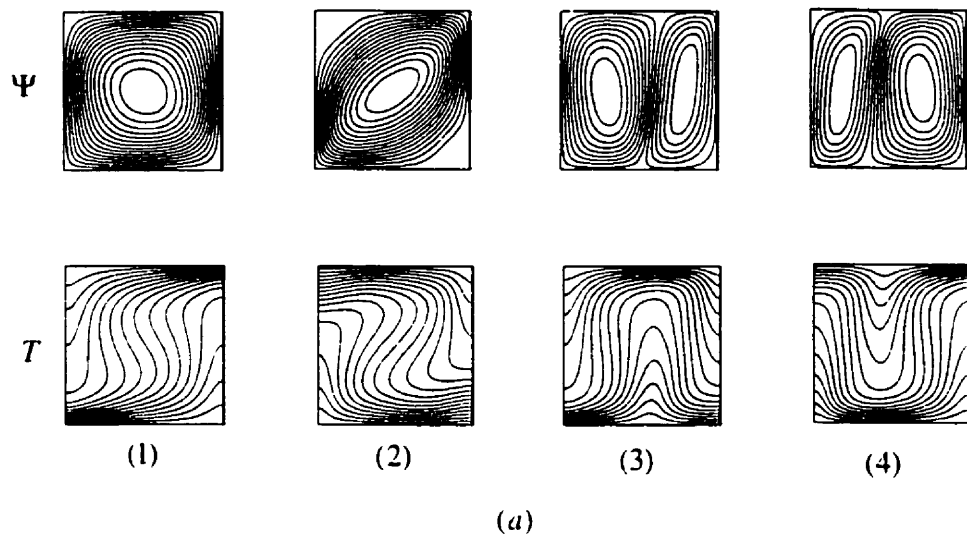


Figure 5.29 : (a) Lignes de courant au voisinage de  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC} = 4.148$  (b) Variation de la fonction de courant  $\Psi_{ext}$  versus le rapport des nombres de Rayleigh  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  pour le cas  $K^* = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\bar{A}_m = 0.84$



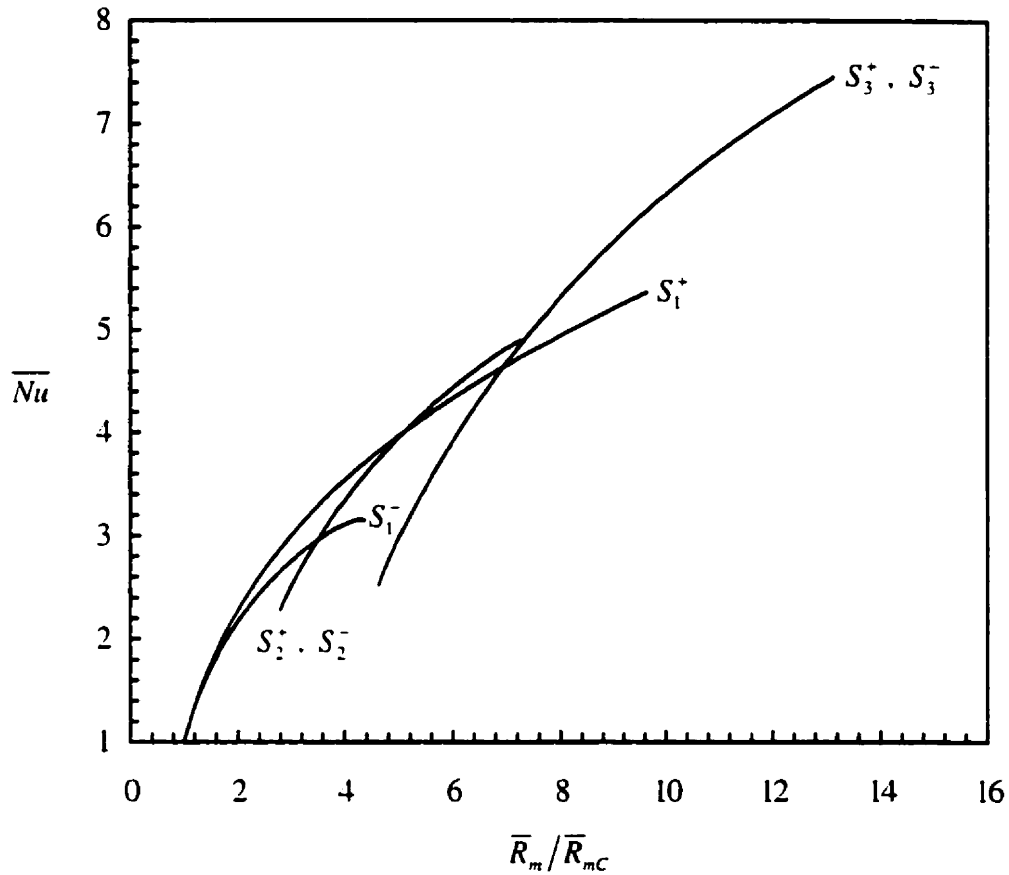


Figure 5.30 : Variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  en fonction du rapport des nombres de Rayleigh  $\overline{R}_m / \overline{R}_{mC}$  pour le cas  $K^* = 0.5$ ,  $\theta = 45^\circ$  et  $\overline{A}_m = 0.84$

### 5.3.2 Cas non linéaire

#### 5.3.2.1 Convection sous-critique

Au début des années 70, *Moore et Weiss* [23] ont démontré l'existence d'une convection sous critique en milieux fluide lorsqu'un maximum de densité est impliqué. Cette convection sous-critique a aussi été obtenue par *Mamou et al.* [83] pour le cas d'un milieu poreux isotrope saturé par de l'eau au voisinage de  $4^\circ\text{C}$ . Par convection sous-critique, on sous-entend que la couche fluide ou poreuse, tout en demeurant stable en

conduction pure pour une perturbation d'amplitude infinitésimale, peut néanmoins être déstabilisée par une perturbation d'amplitude finie et donner lieu, même en deçà du nombre de Rayleigh critique  $R_{mC}$  à un mouvement convectif qui persiste et devient stationnaire. Ce phénomène peut être expliqué par le comportement de l'écoulement en situation d'amplitude finie. Considérons à titre d'illustration le cas d'un écoulement qui se situe au-delà du seuil de la convection. La figure 5.31 donne le champ de vitesse (lignes de courant) et le champ de température (isotherme) pour le cas d'un milieu poreux isotrope ( $K^* = 1$ ) avec  $\gamma = 2/3$ ,  $A = 1.64$  ( $\bar{A}_m = 4.92$ ) et  $\bar{R}_m = 45.866$  ( $\bar{R}_{mC} = 29.685$ ). On constate que les cellules convectives s'étendent vers le haut bien au delà de  $h'_{\max} = (\gamma/2)H'$ ,  $h'_{\max}$  étant l'épaisseur de la couche instable en conduction pure. Les cellules convectives pénètrent donc loin dans la couche originalement stable. Ce comportement porte le nom de convection pénétrante (penetrative convection).

La figure 5.32b donne la température moyennée sur une horizontale ( $\bar{T}$ ) et la différence de densité correspondante  $\rho - \rho_m$  en fonction de la hauteur. Pour fins de comparaison, nous avons aussi reproduit les distributions de température et de densité en conduction pure à la figure 5.32a. On constate que la convection augmente la densité au voisinage de  $T'_{\max}$  et que  $T'_{\max}$  est reporté beaucoup plus haut dans la cavité. L'épaisseur de la couche instable  $h'_p$  en conduction d'amplitude finie est donc beaucoup plus grande que  $h'_{\max}$  (l'indice "p" réfère à la convection pénétrante). Cet effet est attribuable au mélange convectif des différentes couches de fluide, par exemple celle de  $2^\circ C$  avec celle de  $6^\circ C$  qui donne  $4^\circ C$ . Le même effet se produit en deçà du seuil critique si la perturbation est suffisamment forte. La zone instable ne correspond plus alors à  $h'_{\max}$  et le nombre de Rayleigh critique  $R_{mC}$ , basé sur la hauteur  $h'_{\max}$  ne définit plus correctement le seuil critique.

L'existence d'une convection sous-critique donne lien au phénomène d'hystérésis défini à la figure 5.33 avec  $R_m$  augmentant à partir de zéro, la conduction pure avec  $\Psi_{cr} = 0$  peut être maintenue jusqu'au seuil critique  $R_{mC}$ , pourvu que les perturbations demeurent infinitésimales. Au-delà de  $R_{mC}$ , une perturbation même infinitésimale déclenche le mélange et  $\Psi_{cr}$  s'accroît brusquement pour atteindre la courbe de convection d'amplitude finie. Si par la suite  $R_m$  est diminué progressivement, lors de calculs numériques utilisant les résultats précédents comme conditions initiales, la convection d'amplitude finie peut être maintenue même en deçà du seuil critique  $R_{mC}$ , tel qu'établi par la théorie de stabilité linéaire. Il est à noter que tous les champs d'écoulement qui correspondent au seuil de la convection, tant ceux de la couche infinie, figures 5.7, 5.8 et 5.11, que ceux de la couche confinée, figures 5.19, 5.20 et 5.23 à 5.25, ont des cellules primaires qui pénètrent déjà dans la couche stable. Le simple fait d'amplifier tant soit peu cet écoulement, en allant légèrement au delà de  $R_{mC}$ , provoque un mélange, une pénétration et donne lieu à un saut brusque de la fonction de courant extremum  $\Psi_{cr}$ , tel qu'illustré à la figure 5.33.

À titre d'illustration de la convection sous-critique, nous considérons le cas d'une cavité carrée  $A = 1$  ( $\bar{A}_m = 2.249$ ) avec,  $\gamma = 0.5$ ,  $K^* = 0.1$  et  $\theta = 0^\circ$ . La perméabilité minimum étant dans la direction verticale, il s'agit du cas le plus défavorable à la convection sous-critique au sens où la pénétration des cellules primaires au seuil de la convection est alors très faible. On obtient néanmoins une convection sous-critique bien marquée comme le font voir les figures 5.34 et 5.35, lesquelles donnent respectivement l'intensité de la convection  $\Psi_{cr}$  et le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  en fonction du rapport  $\bar{R}_m / \bar{R}_{mC}$ .

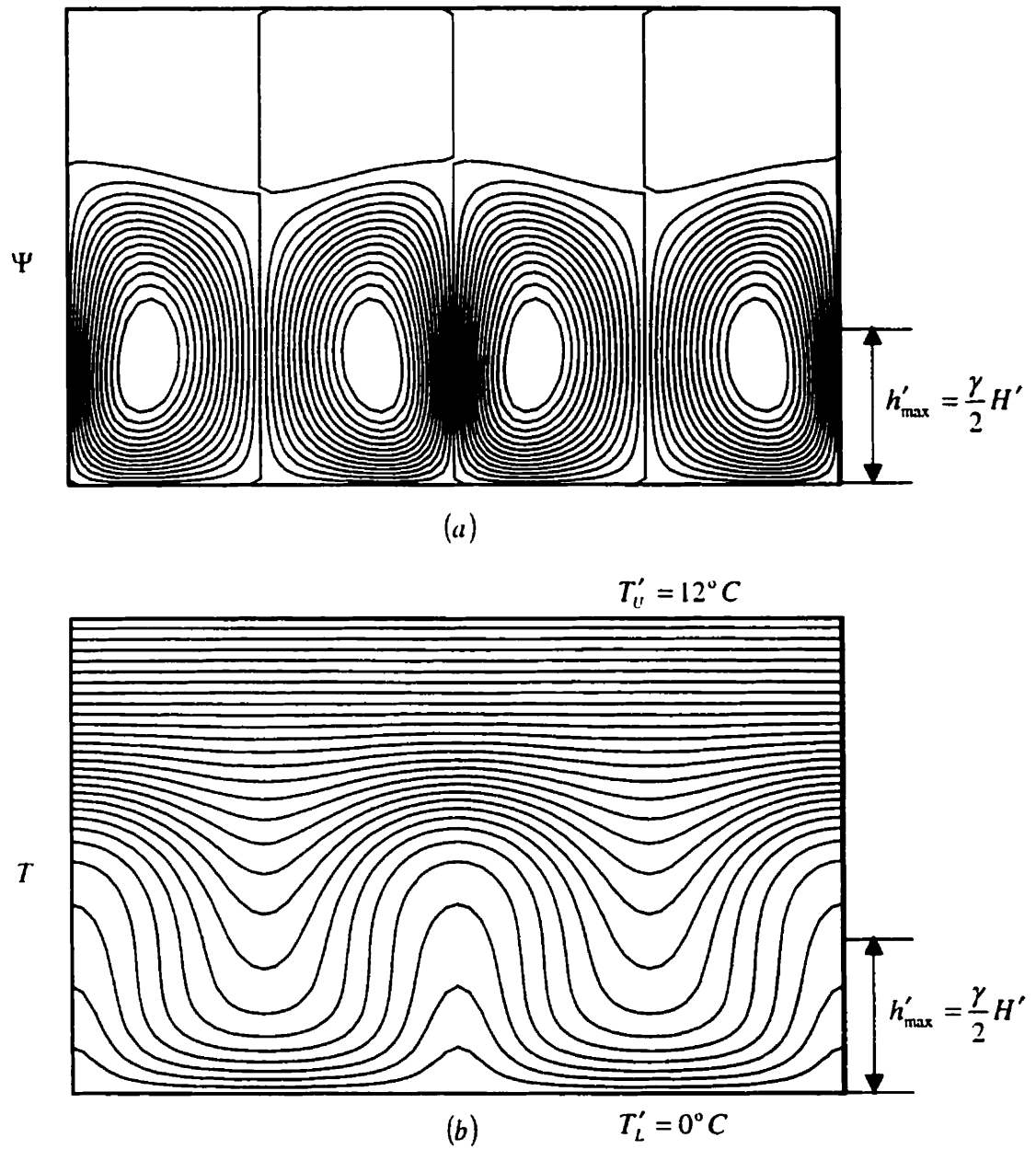


Figure 5.31 : Lignes de courant et des isothermes pour le cas  $\gamma = 2/3$ ,  $K^* = 1$ ,

$$\bar{A}_m = 4.92 \text{ (} A = 1.64 \text{)} \text{ et } \bar{R}_m = 45.866 \text{ (} \bar{R}_{mC} = R_{mC} = 29.685 \text{)}$$

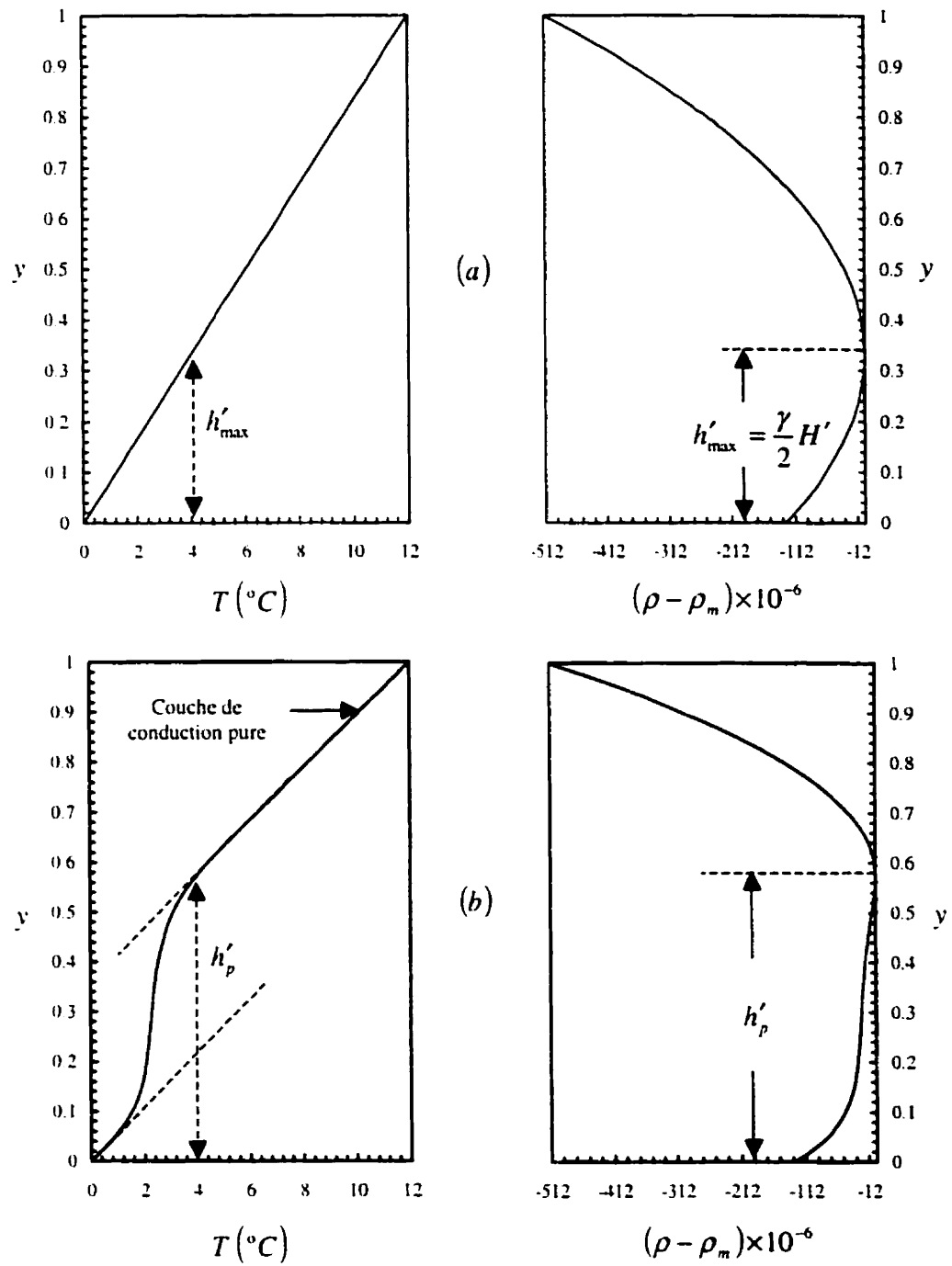


Figure 5.32 : Distribution de la température et de la densité au sein de la cavité : (a) conduction pure ( $\bar{R}_m = 0$ ) et (b) conduction-convection  $\bar{R}_m = 45.866$  ( $K^* = 1$ ,  $A_m = 4.92$ ,  $\gamma = 2/3$  et  $\bar{R}_{mC} = R_{mC} = 29.685$ )

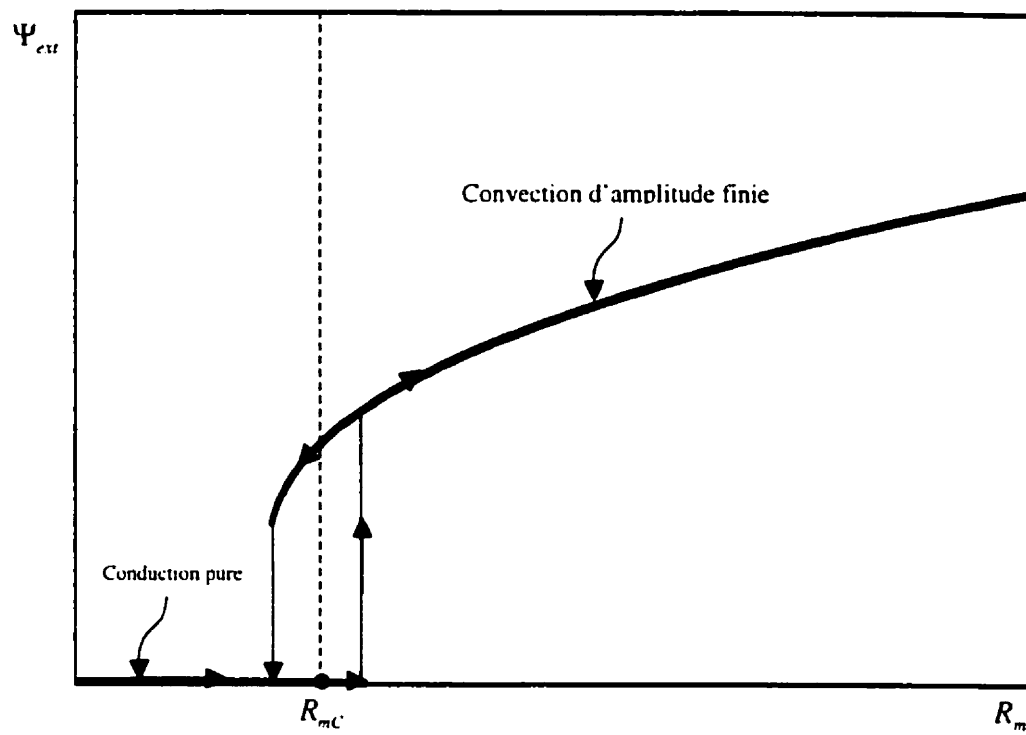


Figure 5.33 : Convection sous-critique et phénomène d'hystérésis

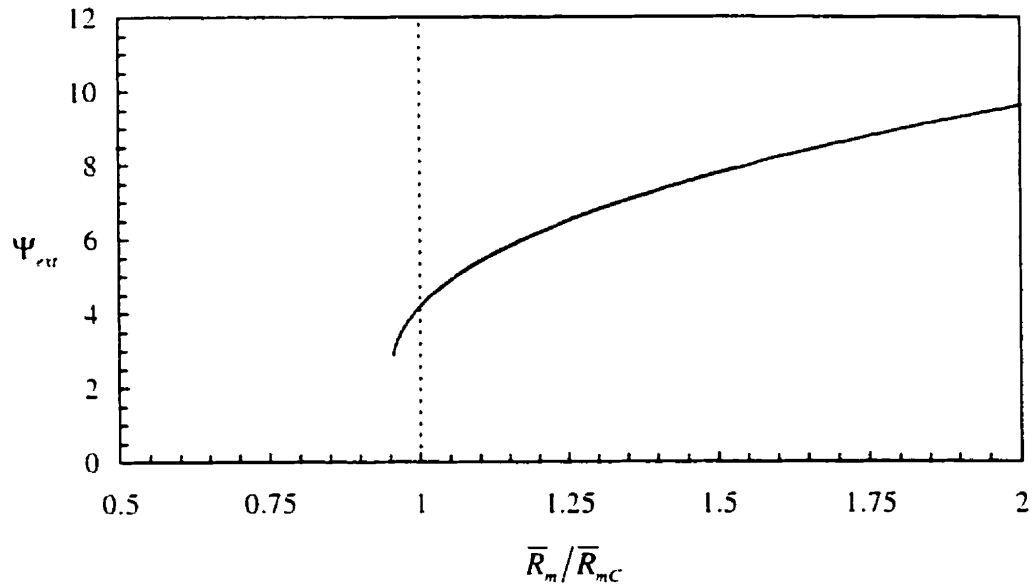


Figure 5.34 : Variation de la fonction de courant  $\Psi_{cr}$  versus le rapport  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 0^\circ$  et  $\bar{A}_m = 2.249$  ( $\bar{R}_{mC} = 38.654$ )

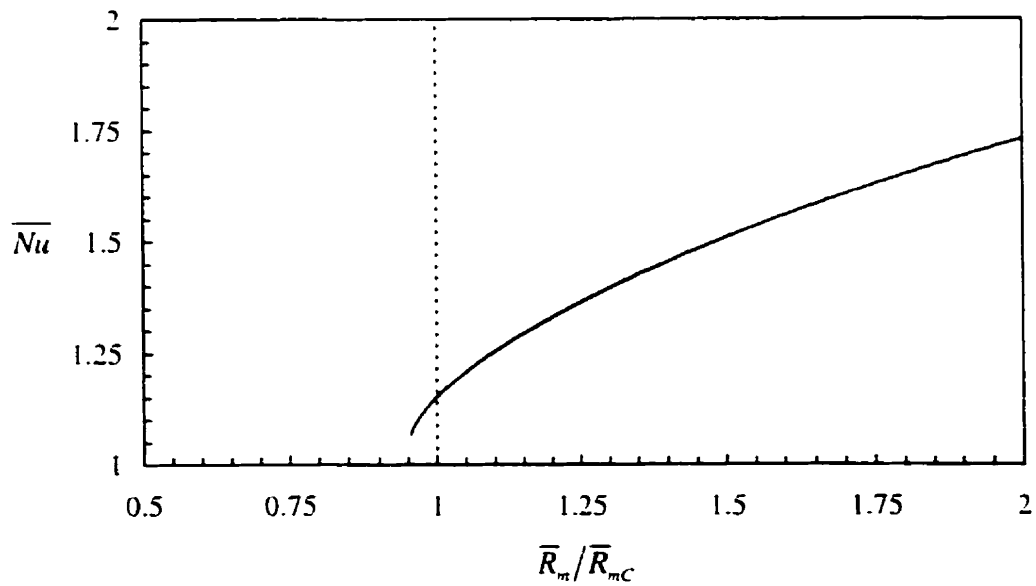


Figure 5.35 : Variation du nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  versus le rapport  $\bar{R}_m/\bar{R}_{mC}$  pour le cas  $\gamma = 0.5$ ,  $K^* = 0.1$ ,  $\theta = 0^\circ$  et  $\bar{A}_m = 2.249$  ( $\bar{R}_{mC} = 38.654$ )

## CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons étudié le phénomène de la convection naturelle pénétrante dans une couche rectangulaire horizontale poreuse et anisotrope, saturée par de l'eau froide. Les parois actives de la cavité (parois horizontales) sont soumises à des températures constantes. Les parois verticales sont supposées imperméables et adiabatiques. La loi de Darcy a été utilisée pour établir les équations gouvernantes du système. Les paramètres de contrôle régissant le système sont respectivement le nombre de Rayleigh  $R$ , le rapport de forme de la cavité  $A$ , le rapport de perméabilité  $K^* = K_2/K_1$ , l'angle d'inclinaison des axes principaux  $\theta$  et le paramètre d'inversion  $\gamma$ . L'effet de ces paramètres sur le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement a été mis en évidence grâce à l'étude de la convection d'amplitude finie. Nous avons aussi étudié l'instabilité de la couche poreuse en utilisant la théorie de la stabilité linéaire. Les différents nombres de Rayleigh critiques marquant le seuil de convection ont été obtenus pour le cas où la densité du fluide est liée linéairement avec la température ainsi que pour le cas où elle prend la forme quadratique avec la température. Les équations générales de base ainsi que les équations linéaires de stabilité ont été résolues numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. Cette méthode a été validée par rapport aux travaux antérieurs obtenus soit en convection d'amplitude finie soit en stabilité linéaire.

Les principales conclusions tirées de cette étude ainsi que les recommandations envisagées sont maintenant présentées.

### Stabilité linéaire

L'étude de la stabilité linéaire pour le cas d'une couche poreuse anisotrope horizontale infinie et confinée saturée par de l'eau froide avec la présence d'un maximum de densité à  $4^\circ\text{C}$  a été réalisée. Les nombres de Rayleigh critiques ont été déterminés en



fonction du rapport de forme de la cavité, du rapport de perméabilité, de l'angle d'orientation des axes principaux et du paramètre d'inversion. Il est à noter que ce dernier définit la position verticale du maximum de la densité dans le cas de la conduction pure. Vu la complexité du problème et dans le but d'alléger les difficultés d'interprétation des résultats et de vouloir bien comprendre le phénomène de la convection pénétrante, nous avons commencé d'abord par présenter les résultats obtenus pour la convection naturelle classique obtenue dans le cas où la relation entre la densité du fluide et la température est linéaire ( $\gamma \gg 2$ ). Les résultats obtenus pour le cas où la densité du fluide versus la température est non linéaire ont fait l'objet de la deuxième partie de cette thèse. Cette approche nous a également permis de mener une étude comparative entre les deux situations, en particulier au niveau de la structure de l'écoulement.

- **Densité-température linéaire**

Nous avons validé nos résultats par rapport à ceux obtenus par *Tyvand et Storesletten [39]*, pour le cas d'une couche infinie et par *Zhang et al. [18]*, pour le cas d'une couche confinée. Pour l'ensemble des travaux effectués dans le passé sur l'étude de l'instabilité d'une couche poreuse anisotrope, l'effet du confinement sur l'écoulement n'a pas été abordé, mis à part le travail réalisé par *Zhang et al. [18]*. Ces derniers se sont limités seulement au cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ). Dans le but de compléter ces travaux, nous avons mené une étude approfondie et détaillée sur le confinement et ce, pour diverses situations. Les différents points importants sur cette étude sont présentés dans ce qui suit.

- **Effet du confinement**

Le nombre de Rayleigh critique caractérisant le seuil de convection a été prédit en utilisant l'analyse de stabilité linéaire. L'effet du rapport de forme sur le nombre de Rayleigh critique a été aussi étudié pour différentes orientations des axes principaux de la perméabilité. Pour cette situation, nous avons observé que le nombre de cellules convectives augmente au fur et à mesure que le rapport de forme augmente. La transition

d'un nombre de cellules à un autre correspond à des sommets dans les figures. Une limite asymptotique de  $4\pi^2$  est obtenue pour des couches infinies dans les cas où l'angle d'orientation  $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ . Cette limite est en accord avec le travail réalisé par *Tyvand et Storesletten [39]* sur la couche infinie.

#### ➤ Effet de l'anisotropie $K^*$

L'effet de l'anisotropie sur la structure de l'écoulement a été aussi étudié. Pour le cas d'une cavité infinie inclinée d'un angle  $\theta = 45^\circ$ , et pour un rapport de perméabilité  $K^* = 0.1$ , les lignes de courant montrent que les parois verticales influent sur la structure de l'écoulement non seulement en fixant la longueur d'onde, mais en modifiant la forme des cellules convectives adjacentes. Il s'agit d'une contrainte additionnelle sur le système. La présence des lignes de séparation inclinées dans la cavité entre les parois adjacentes a été observée. Notons également pour cette situation, l'existence d'une symétrie par rapport au centre de la cavité.

#### ● Densité-température non linéaire

*Veronis [22]*, *Moore and Weiss [23]* et *Musman [70]* ont tous étudié le phénomène de la convection avec maximum de densité (convection pénétrante) dans les milieux fluides. *Mamou et al. [70]* ont considéré le milieu poreux de Brinkman. Dans un premier temps nous avons validé nos résultats par rapport au travail réalisé par *Mamou et al. [83]* dans le cas d'un milieu de Darcy isotrope ( $K^* = 1$ ) saturé par un fluide dont la densité varie paraboliquement avec la température. Ces résultats, en accord avec ceux obtenus par ces auteurs, nous ont permis d'approfondir nos recherches et d'étudier la convection pénétrante en tenant compte de l'anisotropie ( $K^* \neq 1$ ). Les résultats obtenus ont été exprimés sous une forme simplificatrice en utilisant des définitions particulières du nombre de Rayleigh et du rapport de forme, basées sur l'épaisseur et la différence de température à travers la couche instable.

## Couche infinie

### ➤ Effet du paramètre d'inversion $\gamma$

L'effet du paramètre d'inversion  $\gamma$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mc}$  et sur la longueur d'onde critique  $\bar{\lambda}_{mc}$  pour différentes valeurs du rapport de perméabilité  $K^*$  a été examiné pour le cas  $\theta = 0^\circ$  ( $\theta = 90^\circ$ ). Nous avons constaté que pour des valeurs de  $\gamma \gg 2$  toutes les courbes se confondent sur une seule quelque soit la valeur de  $K^*$ . Cela vient du fait que pour ces valeurs, nous retrouvons la convection naturelle classique obtenue dans le cas d'un milieu poreux saturé par un fluide dont la relation entre la densité et la température est linéaire. Toujours pour cette situation ( $\gamma \gg 2$ ), les résultats convergent vers une solution asymptotique de  $4\pi^2$ , en conformité avec celle obtenue par Mamou et al. [83] pour le cas d'un milieu de Darcy isotrope ( $K^* = 1$ ). Quand le paramètre d'inversion  $\gamma$  s'approche de la valeur 2.0 à partir des valeurs supérieures, une légère diminution du nombre de Rayleigh critique est observée et l'effet de la non linéarité de la densité versus la température devient de plus en plus apparent. Les lignes de courant correspondant à cette situation ont montré que les cellules convectives occupent toujours toute la profondeur de la cavité. Les résultats obtenus ont aussi montré la naissance d'une couche stable superposée à la couche instable lorsque  $\gamma$  diminue à partir de la valeur 2.0. À cause de cette couche, l'effet de la contrainte exercée par la paroi supérieure diminue progressivement pour disparaître complètement lorsque  $\gamma = 1$ . Nous avons également noté que pour  $0 < \gamma \leq 1$ , une situation asymptotique existe pour laquelle les valeurs du nombre de Rayleigh critique restent constantes et ne sont dépendantes que du rapport de perméabilité  $K^*$ . Ces valeurs sont beaucoup inférieures à celles de la convection naturelle classique.

L'effet du paramètre d'inversion  $\gamma$  sur le nombre de Rayleigh critique sur la longueur d'onde critiques a été aussi étudié pour le cas d'une couche infinie dont les axes principaux de la perméabilité sont inclinés de  $\theta = 15^\circ$ . Contrairement au cas d'une

couche infinie dont les axes principaux coïncident avec ceux de la cavité ( $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$ ), la situation asymptotique pour le cas  $\gamma \gg 2$  et  $\theta = 45^\circ$  donne des courbes très différentes en terme du nombre de Rayleigh critique et de la longueur d'onde associée en fonction de  $\gamma$ , selon le degré d'anisotropie. Le comportement établi par notre méthode est en accord avec celui de *Tyvand et Storesletten [39]* pour le cas des axes principaux obliques.

#### ➤ Effet de l'angle d'orientation $\theta$

L'influence de l'angle d'orientation  $\theta$  sur la structure de l'écoulement a été étudiée pour le cas d'une couche infinie. Pour  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 90^\circ$ ), les cellules convectives secondaires, situées dans le haut de la cavité sont clairement distinctes des cellules convectives principales ou primaires près de la paroi du bas. Nous avons constaté que pour des valeurs intermédiaires de  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ), les cellules principales fusionnent avec les cellules secondaires (obliquement localisées), c'est-à-dire celles ayant leur sens de rotation dans la même direction, avec le résultat que seules les cellules principales de forme allongée sont présentes. L'intensité maximum du mouvement convectif dans ces cellules allongées demeure localisée près de la paroi inférieure de la cavité et la force des cellules s'affaiblit vers le haut.

#### Couche confinée

L'influence du rapport de forme de la cavité  $\bar{A}_m$  sur le nombre de Rayleigh critique  $\bar{R}_{mc}$  pour le cas d'une couche confinée pour différentes valeurs de l'angle d'orientation  $\theta$  ( $\theta = 0^\circ$  ou  $\theta = 90^\circ$  et  $\theta = 45^\circ$ ) a été établie. Les résultats ont été obtenus pour différentes valeurs de  $\gamma$  et pour  $K^* = 0.1$ . Les courbes obtenues généralement d'une manière comparable à celles obtenues dans le cas où la densité varie linéairement avec la température ( $\gamma \gg 2$ ). Comme pour le cas linéaire, tous les résultats obtenus pour cette situation convergent vers les limites asymptotiques d'une couche infinie lorsque  $\bar{A}_m \gg 5$ . Nous avons constaté que la valeur du nombre de Rayleigh

critique augmentent sous l'effet de la contrainte exercée par les parois verticales sur la longueur d'onde de la cavité.

Les résultats obtenus pour le cas où les axes principaux sont inclinés de  $\theta = 45^\circ$  sont différents à ceux prédits pour le cas  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 90^\circ$ ). Pour  $\gamma = 1.8$  et  $\gamma = 1$  (ou 0.5), un comportement particulier dans la région  $\sim 0.7 < \bar{A}_m < \sim 1.3$  a été noté. Ce comportement s'explique par la manière dont les cellules convectives s'introduisent dans la couche avec  $\bar{A}_m$  augmentant. Contrairement à celui obtenu pour le cas  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 90^\circ$ ), ce comportement est lié à la perte totale des symétries caractérisant les champs d'écoulements obtenus pour  $\gamma < 2$  et  $\theta \neq 0^\circ$ , ou  $90^\circ$ . Sans les contraintes de symétrie, les nouvelles cellules convectives s'introduisent en douceur dans la couche lorsque le rapport de forme de la cavité augmente.

Dans cette étude, nous avons noté l'existence de deux types de symétrie dans les champs d'écoulements. Le premier type concerne le cas où  $\gamma$  prend des valeurs largement supérieures à 2.0 ( $\gamma \gg 2$ ) quelque soit l'angle d'orientation des axes principaux. Cette situation correspond à la convection classique, c'est-à-dire avec relation densité-température linéaire. Il s'agit d'une symétrie par rapport au centre de la cavité (centro-symétrie) résultant de l'effet équivalent exercé de part et d'autre par les deux parois horizontales. Le deuxième type de symétrie concerne le cas  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 90^\circ$ ) et est indépendant de la valeur du paramètre d'inversion. Il s'agit d'une symétrie par rapport à l'axe vertical séparant la cavité en deux parties égales (symétrie image-miroir). Toutes les cellules convectives ont donc la même forme et la même intensité.

### **Convection à amplitude finie**

- **Densité-température linéaire ( $\gamma \gg 2$ )**

En convection d'amplitude finie, il s'agit de résoudre numériquement les équations gouvernantes dans leur forme intégrale. Pour une cavité confinée dont les axes

principaux de la perméabilité sont inclinés et pour des valeurs du nombre de Rayleigh légèrement supérieures aux valeurs du nombre de Rayleigh critique, nous avons retrouvé la même structure d'écoulement que celle de la stabilité linéaire. Dans le cas où  $\theta \neq 0^\circ$  ou  $90^\circ$ , les cellules convectives sont allongées selon la direction de la perméabilité maximum et séparées par des lignes de courant obliques. La présence de deux écoulements différents à savoir l'écoulement "naturel" et l'écoulement "anti-naturel" a été aussi constatée. Le premier est obtenu lorsqu'on commence les calculs par un écoulement nul et on utilise la conduction pure comme conditions initiales. Quant au deuxième écoulement, il est possible seulement quand on commence les calculs par des conditions initiales appropriées.

L'influence du nombre de Rayleigh sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique au sein de la cavité a été aussi examinée. Cette influence a été mise en évidence par le diagramme de bifurcation. Nous avons remarqué que l'écoulement antinaturel ne peut pas aller au delà de  $\bar{R}/\bar{R}_c = 2.3$ . Une différence entre les champs d'écoulements avec un nombre impair de cellules convectives et ceux avec un nombre pair a été également notée. Les champs d'écoulements avec un nombre impair de cellules sont symétriques par rapport au centre de la cavité car les deux cellules près des deux parois verticales sont affectées de la même façon, soit par un écoulement naturel soit par écoulement antinaturel. Par contre, ceux avec un nombre pair se comportent différemment à cause de la présence d'un écoulement naturel près d'une paroi latérale et un autre anti-naturel sur l'autre paroi.

Nous avons également noté la multiplicité des solutions pour la convection à amplitude finie. Ainsi, pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ) avec  $K^* = 0.5$  et dont les axes principaux sont inclinés de  $\theta = 45^\circ$ , plusieurs solutions ont été établies.

- **Densité-température non linéaire**

Pour le cas où la relation reliant la masse volumique du fluide avec la température est non linéaire, on s'est limité seulement à démontrer l'existence possible d'une

bifurcation sous critique. Pour le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ), avec  $\gamma = 0.5$ ,  $K^* = 0.1$  et  $\theta = 0^\circ$ , les résultats obtenus ont montré qu'un mouvement convectif est possible en deçà du nombre de Rayleigh critique. Les champs d'écoulements et les isothermes obtenus pour cette situation ont montré l'existence d'une région en conduction pure près de la paroi supérieure. La pénétration de la couche instable dans la couche stable est amplifiée au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus par Mamou *et al.* [83] pour un milieu poreux isotrope.

### Recommandations

Cette thèse a porté sur l'étude de la convection naturelle dans les milieux poreux en tenant compte de l'anisotropie dans la perméabilité et de la non-linéarité de la densité versus la température. Voici quelques recommandations sur les possibilités de recherches futures :

1. Étude des bifurcations sous-critiques. Les codes numériques basés sur la méthode des éléments finis permettant de résoudre les équations générales du système sont déjà disponibles.
2. Étude de stabilité non linéaire. Cette étude permettrait de prédire les nombres de Rayleigh sous-critiques marquant le seuil de la convection sous-critique.
3. Étude de la pénétration des mouvements convectifs dans la couche stable qui sont encore mal connus.
4. Conditions aux frontières de type Neumann ou mixtes
5. Entreprendre une étude de la convection pénétrante dans les milieux fluides avec différentes conditions aux frontières.

## RÉFÉRENCES

1. INGHAM, D. B and POP, I. (1998). Transport Phenomena in Porous Media. Pergamon, Elsevier.
2. RUDRAIAH, N., SHRIMANI, P.K. and FRIEDRICH, R. (1982). Finite Amplitude Convection in a Two-Component Fluid Saturated Porous Layer. International Journal of Heat and Mass Transfer, 25, 715-722.
3. ROSENBERG, N. D. and SPERA, F. J. (1992). Thermohaline Convection in a Porous Medium Heated from Below. International Journal of Heat and Mass Transfer, 35, 1261-1273.
4. NILSEN, T. and STORESLETTEN, L. (1990). An Analytical Study on Natural Convection in Isotropic and Anisotropic Porous Channels. Trans ASME : Journal of Heat Transfer, 112, 396-401.
5. KIMURA, S. , VYNNYCKY, M. and ALAVYOON, F. (1995). Unicellular Natural Circulation in a Shallow Horizontal Porous Layer Heated From Below by a Constant Flux. Journal of Fluid Mechanics, 294, 231-257.
6. NIELD., D. A. (1968). Onset of Thermohaline Convection in Porous Medium. Water Resources Research, 4, 553-560.
7. CALTAGIRONE, J. P. (1975). Thermoconvective Instability in a Horizontal Porous Layer. Journal of Fluid Mechanics, 72, 269-287.
8. TAUNTON, J. W. and LIGHTFOOT, E. N. (1972). Thermohaline Instability and Salt Fingers in a Porous Medium. Physics Fluids, 15, 748-753.
9. MAMOU, M., VASSEUR, P., BILGEN, E. and GOBIN, D. (1995). Double-Diffusive Convection in an Inclined Slot Filled with Porous Medium. European Journal of Mechanics. B/Fluids, 14, 629-652.



10. MAMOU, M., VASSEUR, P. and BILGEN, E. (1998). A Galerkin Finite Element Study of the Onset of Double-Diffusive Convection in an Inclined Porous Enclosure. International Journal of Heat and Mass Transfer, 41, 1513-1529.
11. MAHIDJIBA A., MAMOU, M. and VASSEUR, P. (2000), Onset of Double-Diffusive Convection in Rectangular Porous Cavity Subject to Mixed Boundary Conditions. International Journal of Heat and Mass Transfer, 43, pp. 1505-1522.
12. MAMOU, M. (1998). Convection thermosolutale dans les milieux poreux et fluides confinés. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.
13. MAHIDJIBA, A. (1998). Convection naturelle thermosolutale au sein d'une couche poreuse horizontale. Thèse de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada.
14. MCKIBBIN, R. and TYVAND, P. A., (1982). Anisotropic Modelling of Thermal Convection in Multilayered Porous Media. Journal of Fluid Mechanics, 118, 315-339.
15. ROSERBERG, N. D. and SPERA, F. J., (1990). Role of Anisotropic and or Layered Permeability in Hydrothermal Convection. Geophysical Research Letters, 17, 235-238.
16. TREW, M. and MCKIBBIN, R., (1994). Convection in Anisotropic Inclined Porous Layers. Transport in Porous Media, 17, 271-283.
17. BERA, P., ESWARAN, V. and SINGH, P., (1998). Numerical Study of Heat and Mass Transfer in an Anisotropic Porous Enclosure Due to Constant Heating and Cooling. Numerical Heat Transfer, Part A, 34, 887-905.
18. ZHANG X., NGYEN T. H. and KAHAWITA, R. (1993). Convective Flow and Heat Transfer in an Anisotropic Porous Layer with Principal Axes Non-Coincident with the Gravity Vector. Fundamentals of Natural Convection ASME, HTD, 264, 79-86.
19. STORESLETTEN, L. (1993). Natural Convection in a Horizontal Porous Layer With Anisotropic Thermal Diffusivity. Transport in Porous Media, 12, 19-29.

20. ROBILLARD, L. and VASSEUR, P., (1982). Convective Response of a Mass of Water Near  $4^{\circ}\text{C}$  to a Constant Cooling Rate Applied on its Boundaries. Journal Fluid Mechanics **16**, 199-207.
21. ROBILLARD, L. and VASSEUR, P., (1991). Convective Flow Generated by a Pipe in a Semi-Infinite Porous Medium Saturated with Water in the Neighborhood of  $4^{\circ}\text{C}$ . Chap. 10, Freezing and Melting Heat Transfer in Engineering, Ed. Cheng, K.C., and Seki, N., Hemisphere Publishing Corporation.
22. VERONIS, G. (1963). Penetrative Convection. Astrophysics Journal, **137** 641-663.
23. MOORE, D. R. and WEISS, N. O. (1973). Nonlinear Penetrative Convection. Journal of Fluid Mechanics, **61**, 553-581.
24. HORTON, C. W. and ROGERS F. T., (1945). Convection Current in a Porous Medium. Journal of Applied Physics, **16**, 367-370.
25. LAPWOOD, E. R. (1948). Convection of a Fluid in a Porous Medium. Proceeding of Cambridge Philosophical Society, **44**, 508-521.
26. BEAR, J., (1972). Dynamics of fluids in Porous Media. Dover Publications.
27. BEJAN, A., (1979). On the Boundary-Layer Regime in a vertical Enclosure Filled With Porous Medium. Lett. Heat Mass Transfer, **6** , 93-102.
28. BEJAN, A., (1983). The boundary-Layer Regime in a Porous Layer With Uniform Heat Flux From the Side. International Journal of Heat and Mass Transfer, **26**, 1339-1346.
29. BEJAN, A., (1984). Convection Heat Transfer. Wiley-Interscience Publication.
30. BEJAN, A., (1985). The Method of Scale Analysis : Natural Convection in a Porous Medium. In natural Convection : Fundamentals and Applications, S. Kakas et al. (eds). Hemisphere, Bristol, P.A.

31. PLATTEN, J.K and LEGROS, J.C (1984). *Convection in Liquids*. Springer-Verlag.
32. NIELD, D. A. and BEJAN, A., (1999). Convection in Porous Media, 2nd ed. Springer-Verlag.
33. NEAL, G., (1977). Degree of Anisotropy for Fluid Flow and Diffusion (Electrical Conduction) Through Anisotropic Porous media. AIChE J., 23, 56-62.
34. CASTINEL, G. et COMBARNOUS, M., (1974). Critère d'application de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. C. R. Hebd. Seanc. Acad. Sci. Paris B, B 278, 701-704.
35. EPHERRE, J. F. (1975). Critère d'application de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope. Rev. Gén. Thermique, 168, 949-950.
36. TYVAND, P. A. (1977). Heat Dispersion Effet on Thermal Convection in Anisotropic Porous Media. J. Hydrol., 34, 335-342.
37. WOODING, R. A., (1978). Large Scale Geothermal Field Parameters and Convection Theory. New Zealand Journal of Science, 21, 219-228.
38. MCKIBBIN, R. (1986). Thermal Convection in a Porous Layer: Effects of Anisotropy and Surface Boundary Conditions. Transport in Porous Media 1, 271-292.
39. TYVAND, P. A. and STORESLETTEN, L. (1991). Onset of Convection in an Anisotropic Porous Medium with Oblique Principal Axes. Journal of Fluid Mechanics, 226, 371-382.
40. KVERNVOLD, O. and TYVAND, P. A. (1979). Nonlinear Thermal Convection in Anisotropic Porous Media. Journal of Fluid Mechanics, 90, 609-624.
41. CHEN, F., CHEN, C. F. and PEARLSTEIN, A. J., (1991). Convective Instability in Superposed Fluid and Anisotropic Porous Layers. Phys., Fluids, 3 N°4, 556-565.

42. CHEN, F. and HSU, L. H., (1991). Onset of Thermal Convection in an Anisotropic and Inhomogeneous Porous Layer Underlying a Fluid Layer. *J. Appl. Phys.*, 69, N°4 6289-
43. PARTHIBAN, C. and PATIL, P. R., (1993). Effect of Inclined Temperature Gradient on Thermal Instability in an Anisotropic Porous Medium. Warme-und Stoffubertragung, 29, 63-69.
44. NI, J. and BECKERMANN, C., (1991). Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media, Journal of Heat Transfer, 113, 1033-1037.
45. WALKER, K. L., and HOMSY, G. M., (1978). Convection in a Porous Cavity. Journal of Fluid Mechanics, 87, 449-474.
46. SHIRALKAR, G. S., HAAJIZADEH, M AND TIEN, G. L., (1983). Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure. Numerical Heat Transfer, 6, 223-234.
47. CHANG, W. J., and HSIAO, H. F., (1993). Natural Convection in a Finite Wall Rectangular Cavity Filled With an Anisotropic Porous Medium. International Journal of Heat and Mass Transfer, 36, 3361-3367.
48. ROYER, J. J. and FLORES, L., (1994). Two-dimensional Natural Convection in an Anisotropic and Heterogeneous Porous Medium With Internal Heat Generation. International Journal of Heat and Mass Transfer, 37, N°9, 1387-1399.
49. SINHA, S. K., SUNDARARAJAN, T. and GARG, V. K., (1982). A Variable Property Analysis of Alloy Solidification Using the Anisotropic Porous Medium Approach. International Journal of Heat and Mass Transfer, 35, N°11, 2865-2877.
50. YOO, H. and VISKANTA, R., (1992). Effect of Anisotropic Permeability on the Transport Process During Solidification of a Binary Mixture, International Journal of Heat and Mass Transfer, 35, N°10, 2335-2346.

51. PEARLSTEIN, A. J., (1981). Effect of Rotation on the Stability of a Doubly Diffusive Fluid Layer, Journal of Fluid Mechanics, 103, 389-412.
52. PATIL, P. R., PARVATHY, C. P. and VENKATAKRISHMAN, K. S., (1989). Thermohaline Instability in a Rotating Anisotropic Porous Medium, Applied Scientific Research, 46, 73-88.
53. BURNS, P. J., CHOW, L. C. and TIEN, C. L., (1977). Convection in a Vertical Slot Filled With Porous Insulation, International Journal of Heat and Mass Transfer, 20, 919-926.
54. CHANG, W. J. and HSIAO, C. F., (1983). Natural Convection in a Vertical Cylinder Filled with Anisotropic Porous Media, International Journal of Heat and Mass Transfer, 36, 3361-3367.
55. ABOUBI, K., ROBILLARD, L. and BILGEN, E. (1995). Convection Heat Transfer in Horizontal Annulus Filled with an Anisotropic Porous Medium, The Fourth ASME-JSME Thermal Engineering., 3, 415-422.
56. PEDER A. TYVAND, P. A. and STORESLETTEN, L. (1991). Onset of Convection in an Anisotropic Porous Medium with Oblique Principal Axes, Journal of Fluid Mechanics, 226, 371-382.
57. DEGAN, G., VASSEUR, P. and BILGEN, E., (1995). Convective Heat Transfer in a Vertical Anisotropic Porous Layer, International Journal of Heat and Mass Transfer, 38, N°11, 1975-1987.
58. DEGAN, G., and VASSEUR, P., (1996a). Natural Convection in a Vertical Slot Filled an Anisotropic Porous Medium with Oblique Principal Axes, Numerical Heat Transfer, 30, 397-412.
59. DEGAN, G., and VASSEUR, P., (1997). The boundary-Layer Regime in a Vertical Porous Layer with Anisotropic Permeability and Boundary Effects, International Journal of Heat and Fluid Flow, 18, N°11 334-343.

60. MAMOU, M., MAHIDJIBA, A., VASSEUR, P. and ROBILLARD L. (1998). Onset of Convection in an Anisotropic Porous Medium Heated From Below by a Constant Heat Flux, International Communication of Heat and Mass Transfer, 25, N°6, 799-808.
61. MAHIDJIBA A., ROBILLARD L., VASSEUR, P. and MAMOU, M., (2000). Onset of Convection in an Anisotropic Porous Layer of Finite Lateral Extent. International Communication Heat and Mass Transfer, 27, N°3, 333-342.
62. SPIEGEL, E. A. (1972). Convection in Stars :II. Special Effects, Annual Review of Astronomy and Astrophysics 10, 261
63. LEIGHTON, R. B. (1963). The Solar Granulation, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1, 19. Palo Alto : Annual Review Inc.
64. SIMPSON J., SIMPSON, R. H., ANDREWS, D. and EATON, M. A. (1965). Review Geophysics, 3, 38.
65. MALKUS W. V. R. (1960). Aerodynamics Phenomena in Stellar Atmospheres. p. 346. Bologna : Zanichelli.
66. FURUMOTO A. and ROTH, C. (1961). Notes of Summer Study Program in Geophysical Fluid Dynamics of the Woods Hole Oceanographics Institution.
67. TOWNSEND, A. A. (1964). Quart. J. Roy. Met. Soc. 90, 248.
68. MYRUP L., GROSS, D., HOO, L. S. and GODDARD, W. (1970). Weather, 25, 150.
69. CHANDRASEKHAR S. (1961). Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. Chap. 2 Clarendon Press.
70. MUSMAN S. (1968). Penetrative Convection. Journal of Fluid Mechanics, 31, 343-360.
71. SUN Z. S., TIEN C. and YEN Y. C. (1969). Thermal Instability of a Horizontal Layer of Liquid with Maximum Density, AIChE Journal, 15, N° 6, 910-915.

72. TIEN C., YEN Y. C. and DOTSON J. W. (1972). Free Convective Heat Transfer in a Horizontal layer of Liquid - The Effect of Density Inversion, Heat Transfer-Tulsa, AIChE Symposium Series, 68, 118.
73. MERKER G. P, WAAS P. and GRIGULL U. (1979). Onset of Convection in a Horizontal Water Layer with Maximum Density Effects, International Journal of Heat and Mass Transfer, 22, 505-515.
74. BENNACER, R., SUN L. Y., TOGUYENI Y. GOBIN D. et BENARD C. (1993). Structure d'écoulement et transfert de chaleur par convection naturelle au voisinage du maximum de densité, International Journal of Heat and Mass Transfer, 36, N°13, 3329-3342.
75. TONG W. and KOSTER J. N. (1994). Density Inversion Effect on Transient Natural Convection in a Rectangular Enclosure, International Journal of Heat and Mass Transfer, 37, N°10, 927-938.
76. INABA H. and FUKUDA T. (1984). An Experimental Study of Natural Convection in an Inclined Rectangular Cavity Filled With Water at its Density Extremum, Journal of Heat Transfer, 106, 109-115.
77. SUN Z. S., TIEN C. and YEN Y. C. (1972). Onset of Convection in a Porous Medium Containing Liquid with a Density Maximum, Proceeding of the Fourth International Heat Transfer Conference, Paris, Versailles, Paper NC 2.11.
78. YEN, Y. C. (1974). Effects of Density Inversion on Free Convection Heat Transfer in a Porous Layer Heated from Below, International Journal of Heat and Mass Transfer 17, 1349-1356.
79. BLAKE K. R. POULIKAKOS D. and BEJAN A. (1984). Natural Convection Near 4° C in a Water Saturated Porous Layer Heated from Below, International Journal of Heat and Mass Transfer, 27, 2355-2363.

80. ALTIMIR I. (1984). Convection Naturelle Tridimensionnelle en Milieux Poreux Saturé par un Fluide Présentant un Maximum de Densité, International Journal of Heat and Mass Transfer, 27, N°10, 1813-1824.
81. POULIKAKOS D. (1985). Onset of Convection in a Horizontal Porous Layer Saturated by Cold Water, International Journal of Heat and Mass Transfer, 28, 1899-1905.
82. ZHANG X. (1989). Wave Number in Penetrative Convection. Ph.D Thesis, Civil Engineering, École Polytechnique de Montréal, Canada.
83. MAMOU M., ROBILLARD L. and VASSEUR P. (1999). Thermoconvective Instability in a Horizontal Porous Cavity Saturated with Cold Water, International Journal of Heat and Mass Transfer, 42, 4487-4500.
84. STRAUGHAN B. and WALKER D. W. (1996). Anisotropic Porous Penetrative Convection, Proc. R. Soc. Lond. A 452, 97-115.
85. MAHIDJIBA A., ROBILLARD L. and VASSEUR P. (2000). Onset of Convection in a Horizontal Anisotropic Porous Layer Saturated with Water Near  $4^{\circ}\text{C}$ , International Communication of Mass and Transfer, 27, N° 6, 765-774.
86. MAHIDJIBA A., ROBILLARD L. and VASSEUR P. (2001). The Horizontal Anisotropic Porous Layer Saturated with Water Near  $4^{\circ}\text{C}$  - A Peculiar Stability Problem, CHT'01 : An International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer, Palm Cove, Queensland, Australia.