



**Titre:** Modèle intégral axisymétrique pour le calcul des pertes AC dans les bobinages supraconducteurs  
Title:

**Auteur:** Madeleine Carlier  
Author:

**Date:** 2012

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Carlier, M. (2012). Modèle intégral axisymétrique pour le calcul des pertes AC dans les bobinages supraconducteurs [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/866/>  
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/866/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Frédéric Sirois  
Advisors:

**Programme:** Génie Électrique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLE INTÉGRAL AXISYMÉTRIQUE POUR LE CALCUL DES PERTES  
AC DANS LES BOBINAGES SUPRACONDUCTEURS

MADELEINE CARLIER

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

MAI 2012

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÈLE INTÉGRAL AXISYMÉTRIQUE POUR LE CALCUL DES PERTES AC DANS LES  
BOBINAGES SUPRACONDUCTEURS

présenté par : CARLIER Madeleine

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. DUFOUR Steven, Ph.D., président

M. SIROIS Frédéric, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CAVE Julian, Ph.D., membre

## DÉDICACE

*À Erwan et notre fille*

## REMERCIEMENTS

Tout d’abord, je tiens à remercier mon directeur de recherche Frédéric Sirois, pour m’avoir partagé sa passion des supraconducteurs, pour son aide et son soutien tout au long du projet, pour sa disponibilité malgré un emploi du temps extrêmement chargé.

Je veux aussi remercier les membres du jury qui lisent ce mémoire, et apportent un travail de correction précieux. Merci à Steven Dufour, à Julian Cave et à Frédéric Sirois.

J’aimerais aussi remercier Majid Siarang et Simon Brault qui m’ont aidé à démarrer mon projet en partageant avec moi leurs connaissances.

Je voudrais encore une fois remercier Simon Brault pour sa disponibilité, pour m’avoir fourni tous les outils nécessaires afin de mener à bien ma recherche (installation d’un ordinateur, des logiciels, accès à des ordinateurs puissants).

Je remercie Etienne Laurin pour m’avoir aidé à combler mes lacunes en programmation, pour son temps, sa patience et sa grande générosité.

Mes remerciements vont aussi à Andy Wan pour les nombreuses discussions, son aide, ses conseils et son soutien.

Je tiens à remercier du fond du cœur, l’ensemble de mes camarades de laboratoire qui m’ont toujours beaucoup encouragé, qui m’ont beaucoup soutenu, et qui ont su créer un bon environnement de travail dans la bonne humeur. Je pense à Lyes, Steeve, Laure, Octavio, Jean-Nicolas, Charles-Henri, Mathieu, Saeedeh, Hani et tous les autres.

Je remercie aussi tout le personnel du département d’énergie électrique, professeurs, secrétaires et techniciens.

Merci à tous ceux et celles que je ne nomme pas explicitement, mais qui ont contribué au succès de ce projet.

Une pensée spéciale à ma famille en France et au Canada, merci pour tout votre soutien.

Pour finir, j’aimerais remercier mon fiancé Erwan, qui m’a soutenu quotidiennement, qui n’a jamais cessé de croire en moi, et sans qui je n’aurais jamais été si loin...

## RÉSUMÉ

L'objectif de ce mémoire est de développer un modèle numérique précis et rapide qui permette de déterminer la distribution de courant et/ou des champs magnétiques dans les bobinages supraconducteurs, notamment pour aider à la conception de transformateurs supraconducteurs. Ce modèle doit donc être capable de déterminer la distribution de la densité de courant et les pertes en régime alternatif (par la suite appelées pertes AC) dans les rubans supraconducteurs constituant la bobine simulée. En effet, il n'existe pas encore de modèle numérique efficace et suffisamment rapide qui résolve les pertes AC de bobinages supraconducteurs comportant un grand nombre de tours, de l'ordre de 100 à 1000. Or depuis la découverte des matériaux supraconducteurs dits à haute température critique ( $HT_c$ ) en 1986, la recherche dans le domaine de la supraconductivité ne cesse d'évoluer, et leur utilisation dans les appareillages électrotechniques devient de plus en plus réalisable et même avantageux. En effet, non seulement les transformateurs supraconducteurs ont un rendement supérieur à celui des transformateurs conventionnels, mais ils occupent un espace physique beaucoup plus réduit par rapport aux transformateurs conventionnels (réduction de l'ordre de 30% en taille et en masse). Cependant, de nouveaux outils de conception doivent devenir disponibles afin de diminuer les coûts de fabrication des prototypes (en optimisant l'utilisation du supraconducteur) et ainsi assurer le développement des appareillages supraconducteurs. La résistivité fortement non-linéaire des matériaux supraconducteurs et le grand nombre de tours présents dans un bobinage réel rend cette tâche difficile avec les outils de conception existants. En particulier, les logiciels d'éléments finis commerciaux ne sont pas du tout adaptés à cette tâche.

Dans le contexte de ce mémoire, afin de trouver la distribution de courant et les pertes AC dans les rubans supraconducteurs d'une bobine, nous proposons une variation d'une méthode numérique développée par Frédéric Sirois et son équipe. Le développement du modèle est fait sur Matlab et l'équation de base du modèle, à partir de laquelle la résolution de la distribution du courant est effectuée, est l'équation des courants de Foucault sous forme intégrale en basses fréquences (i.e. le terme de courant de déplacement est négligé).

Tous les rubans supraconducteurs sont discrétisés en éléments dans lesquels la densité de courant est considérée uniforme. L'intégrale de Biot-Savart est utilisée afin d'établir une relation directe entre la densité de courant et le potentiel vecteur dans la formulation du problème.

Aussi, pour pouvoir calculer les pertes AC d'une bobine à grand nombre de tours en un temps acceptable, nous introduisons dans ce mémoire une nouvelle méthode d'approximation nommée « méthode d'approximation des rubans éloignés » (MARE). L'idée derrière cette approximation est de réduire la taille du problème en utilisant une discrétisation différente pour chacun des rubans constituant le bobinage. La finesse de la discrétisation est plus ou moins importante, selon qu'il s'agit du ruban à l'étude (ruban pour lequel le calcul de la densité de courant est effectué), de ses voisins proches, ou encore des rubans suffisamment éloignés de celle-ci. Pour ce qui est des « rubans éloignés », ils sont regroupés en terme de rayons  $r$  identiques, c'est-à-dire tous les rubans ayant la même coordonnée radiale seront regroupés entre eux et considérés comme un seul et unique élément, ayant une densité de courant uniforme et connue. Cela est possible lorsque ces derniers sont suffisamment éloignés du ruban d'intérêt (ruban à l'étude), puisque dans ce cas ils contribuent au potentiel vecteur de ce dernier de façon similaire que l'on considère sa distribution de courant détaillée ou une version uniforme de celle-ci. Cette approximation des rubans éloignés (MARE) permet de réduire considérablement le nombre d'inconnues pour la détermination de la densité de courant, et ainsi, le temps de calcul est considérablement réduit. Enfin, le projet se termine par une optimisation du code numérique développé afin de l'accélérer. Pour cela, une partie du code a été entièrement réécrite en C.

## ABSTRACT

The goal of this Master's thesis is to develop an accurate and a fast numerical model to solve current distribution and/or magnetic fields in superconductor windings, and especially to improve the conception of superconducting transformers. The model must be able to determine current distribution and alternative current losses (called AC losses) in the superconducting tapes of the simulated winding. Indeed, efficient and fast numerical models that compute AC losses of a superconducting winding with a large number of turns (10 to 1000 turns) do not exist yet. However, since the discovery of high temperature superconductors (HTS) in 1986, research in the superconductivity field never stopped evolving and the use of these materials in power devices becomes more and more realistic and even advantageous. Indeed, superconducting transformers have a greater efficiency than conventional transformers and are much more compact (about 30% smaller in terms of size and weight compared to conventional ones). Yet, new conception tools are required in order to reduce the cost of prototypes (by optimizing the use of superconductors) and thus, ensure the development of superconducting devices. The highly non-linear resistivity of superconductor materials and the large number of turns of real windings make the task challenging with the existing conception tools. In particular, commercial finite element software packages are not adapted to this task.

In this Master's thesis, in order to find the current distribution and the AC losses in superconducting tapes of a winding, we present a variation of a numerical method developed by my research supervisor Frederic Sirois and his team. The model was developed in Matlab environment and the main equation of the model, from which the solution of the current distribution is found consist of the integral form of the eddy current equation at low frequency (i.e. displacement current neglected). All the superconducting tapes are discretized in elements in which the current distribution is uniform. In the problem formulation, the Biot-Savart integral equation is used in order to establish a direct relationship between the current density and the vector potential.

Moreover, in order to compute the AC losses of a winding with a large number of turns within an acceptable time, we introduce in this Master's thesis a new approximation method called "far tape approximation". The idea behind it is to reduce the size of the problem by using different discretization for each tape of the winding. The fineness of the discretization is different



whether we consider the studied tape (i.e. the tape for which the current density is being computed) or if it's one of its nearest neighbor, or a tape that is far enough from the studied one. These "far tapes" are regrouped in term of identical radius  $r$ , i.e. all the tapes that have the same radial coordinate are regrouped and considered as one single element with a uniform and known current density. This is possible as long as these tapes are far enough from the studied one, their contribution to the potential vector of the studied tape being about the same, whether we consider their detailed current distribution or an uniform version of it. This approximation reduces tremendously the number of unknowns for current density computation, and thus, the computing time is also much reduced.

At last, the project ends by the optimization of the numerical code in order to make the code as fast as possible. In order to do this, a part of the code has been written entirely in C.

## TABLE DES MATIERES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT .....	VII
TABLE DES MATIERES .....	IX
LISTE DES TABLEAUX.....	XI
LISTE DES FIGURES.....	XIII
LISTE DES SIGLES ET ABREVIATIONS .....	XVII
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1    CONTEXTE ET REVUE DE LITTÉRATURE .....	3
1.1    Concepts de base en supraconductivité.....	3
1.1.1    Bref historique.....	3
1.1.2    Les grandeurs critiques des supraconducteurs .....	5
1.1.3    L'origine des pertes AC dans les matériaux supraconducteurs.....	10
1.1.4    Caractéristique E-J .....	11
1.1.5    Modélisation de la caractéristique E-J des supraconducteurs .....	12
1.2    Les transformateurs supraconducteurs .....	13
1.3    Modélisation numérique.....	15
1.3.1    Méthode des éléments finis .....	15
1.3.2    Méthodes intégrales.....	17
1.4    Modèle analytique – Méthode de calcul .....	20
CHAPITRE 2    DÉVELOPPEMENT DU CODE .....	25
2.1    Validation du code de calcul du potentiel vecteur A .....	25

2.1.1	Test de vérification de CalculA sur un cylindre à section rectangulaire.....	25
2.1.2	Test de vérification de CalculA sur un cylindre de dimension d'un ruban supraconducteur .....	30
2.2	Méthode intégrale pour le calcul des pertes AC .....	32
2.2.1	Construction du modèle .....	33
2.2.2	Méthode de l'approximation des rubans éloignés.....	35
2.2.3	Calcul des pertes AC .....	44
2.2.4	Conclusion.....	45
CHAPITRE 3	SIMULATIONS ET VALIDATION .....	46
3.1	Simulations.....	46
3.1.1	Ruban supraconducteur simple .....	46
3.1.2	Bobine constituée de plusieurs rubans supraconducteurs .....	49
3.1.3	Approximation des rubans éloignés .....	65
3.1.4	Optimisation en C.....	76
CHAPITRE 4	CONCLUSION .....	79
BIBLIOGRAPHIE	.....	85
ANNEXE	.....	88

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1: Tableau des champs critiques $H_{c1}$ et $H_{c2}$ de quelques supraconducteurs de type II.	8
Tableau 2.1 : Ordres de grandeur des dimensions de la bobine supraconductrice.....	33
Tableau 3.1 : Valeurs des paramètres pour la simulation d'un ruban supraconducteur simple.....	47
Tableau 3.2 : Tableau des résultats et comparaison pour un ruban simple .....	49
Tableau 3.3 : Valeurs des paramètres pour la simulation de la bobine $5 \times 1$ .....	50
Tableau 3.4 : Tableau des résultats et comparaison pour une bobine $5 \times 1$ .....	52
Tableau 3.5 : Valeurs des paramètres pour la simulation de la bobine $1 \times 5$ .....	54
Tableau 3.6 : Tableau des résultats et comparaison pour la bobine $1 \times 5$ .....	56
Tableau 3.7 : Comparaison de la différence relative.....	58
Tableau 3.8 : Valeurs des paramètres pour la simulation de la bobine $4 \times 3$ .....	60
Tableau 3.9 : Tableau des résultats et comparaison pour la bobine $4 \times 3$ .....	62
Tableau 3.10 : Comparaison des pertes AC déterminées avec la méthode intégrale avec l'approximation des rubans éloignés (un seul niveau de plus proches voisins) et la méthode intégrale sans approximation.....	69
Tableau 3.11 : Comparaison des pertes AC avec et sans approximation des rubans éloignés (les rubans voisins étant divisés en plus grand nombre d'éléments (100 éléments au lieu de 50)) .....	69
Tableau 3.12 : Comparaison des pertes AC avec et sans approximation des rubans éloignés, considérant deux niveaux de plus proches voisins (les rubans voisins étant subdivisés en 50 éléments) .....	69
Tableau 3.13 : Gain de temps pour le calcul de $[MA]$ avec approximation des rubans éloignés ..	73
Tableau 3.14 : Gain de temps pour le calcul J (avec le solver) avec approximation des rubans éloignés (excluant le temps de calcul de $[MA]$ ) .....	73
Tableau 3.15 : Gain de temps total pour le calcul des pertes AC avec approximation des rubans éloignés (incluant le temps de calcul de $[MA]$ ).....	73

Tableau 3.16 : Gain de temps pour le calcul de $[MA]$ pour un ruban simple avec la fonction Mex .....	77
Tableau 3.17 : Gain de temps pour le calcul de $[MA]$ de la bobine $4 \times 3$ avec la fonction Mex.....	77
Tableau 4.1 : Première configuration.....	81
Tableau 4.2 : Deuxième configuration.....	82
Tableau 4.3 : Troisième configuration .....	83
Tableau 4.4 : Quatrième configuration .....	84

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Effet Meissner dans une sphère supraconductrice refroidie dans un champ magnétique uniforme. Au-dessus de la température critique, les lignes de champ traversent le matériau, en-dessous, les lignes de champ ne pénètrent pas le matériau .....	3
Figure 1.2 : Évolution des températures critiques au cours du temps [3] .....	5
Figure 1.3 : Surface critique de différents matériaux supraconducteurs [4] .....	6
Figure 1.4 : Dépendance de la résistivité en fonction de la température d'un élément supraconducteur YBCO [5] .....	6
Figure 1.5 : Induction magnétique dans des supraconducteurs idéaux de type I et II [5] .....	7
Figure 1.6 : Dépendance du champ magnétique en fonction de la température (a: type I, b: type II) .....	8
Figure 1.7 : (a) réseau de vortex obtenu avec de fines particules ferromagnétiques, (b) courant de transport dans un supraconducteur à l'état mixte [4] .....	9
Figure 1.8 : caractéristique E-J d'un matériau supraconducteur <i>HTc</i> . La ligne en pointillés représente la caractéristique E-J d'un matériau homogène à T=0 K [6] .....	11
Figure 1.9 : Caractéristique E(J) basée sur le Modèle de Bean .....	12
Figure 1.10 : Caractéristique E-J avec le modèle de la loi de puissance pour différente valeur de $n$ .....	13
Figure 1.11 : "Pancake coil" (photo) [25] .....	17
Figure 1.12 : « Pancake coil » (Coupe selon $\phi$ ) .....	19
Figure 1.13 : Géométrie de la bobine supraconductrice modélisée .....	21
Figure 2.1 : Modèle de la bobine multi-tours modélisé dans le logiciel Comsol 3.5a, pour lequel le rayon de la boîte d'air est de 100 m. ....	26
Figure 2.2 : Définition des contours sur lesquels le potentiel vecteur est calculé i) par Comsol Multiphysics, et ii) à l'aide de <i>CalculA</i> .....	27

Figure 2.3 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code <i>CalculA</i> pour le contour 1, b) Erreur relative.....	27
Figure 2.4 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code <i>CalculA</i> pour le contour 2, b) Erreur relative.....	28
Figure 2.5 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code <i>CalculA</i> pour le contour 3, b) Erreur relative.....	29
Figure 2.6 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code <i>CalculA</i> pour le contour 4, b) Erreur relative.....	29
Figure 2.7 : Définition des contours sur lesquels le potentiel vecteur est calculé i) par Comsol Multiphysics, et ii) à l'aide de <i>CalculA</i> .....	31
Figure 2.8 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code <i>CalculA</i> pour le contour 1, b) Erreur relative.....	31
Figure 2.9 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code <i>CalculA</i> pour le contour 2, b) Erreur relative.....	32
Figure 2.10 : Construction de la bobine (coupe selon $\phi$ ).....	34
Figure 2.11 : Vue du dessus .....	34
Figure 2.12 : L'indexation des rubans supraconducteurs de la bobine à l'étude.....	37
Figure 2.13 : Méthode de l'approximation des rubans éloignés (les chiffres représentent le nombre d'éléments par ruban modélisé) .....	38
Figure 3.1 : Ruban supraconducteur simple en forme de « pancake » (a) en coordonnées cylindriques, (b) vue du dessus .....	46

Figure 3.2 : Coupe selon $\phi$ du ruban supraconducteur simple (l'épaisseur du ruban n'est pas à l'échelle).....	47
Figure 3.3 : Discrétisation du ruban en 200 éléments (l'épaisseur n'est pas à l'échelle) .....	48
Figure 3.4 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode intégrale semi-découplée sur Matlab et avec la méthode des éléments finis sur Comsol pour un ruban supraconducteur simple .....	48
Figure 3.5 : Coupe selon $\phi$ de la bobine 5×1 (l'épaisseur n'est pas à l'échelle).....	50
Figure 3.6 : Discrétisation des rubans de la bobine 5×1. Chaque ruban est subdivisé en 200 éléments (l'épaisseur pas à l'échelle).....	51
Figure 3.7 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode intégrale semi-découplée sur Matlab et avec la méthode des éléments finis sur Comsol pour une bobine 5×1.....	52
Figure 3.8 : Profils de la densité de courant de la bobine 5×1 sur tous les rubans à t = 25 ms obtenus sur Matlab et Comsol : a) ruban(1,1), b) ruban(2,1), c) ruban(3,1), d) ruban(4,1), e) ruban(5,1) .....	53
Figure 3.9 : Coupe selon $\phi$ de la bobine 1×5 (épaisseur pas à l'échelle) .....	55
Figure 3.10 : Discrétisation des rubans de la bobine 1×5. Chaque ruban est subdivisé en 200 éléments (l'épaisseur n'est pas à l'échelle).....	55
Figure 3.11 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode intégrale semi-découplée sur Matlab et avec la méthode des éléments finis sur Comsol pour une bobine 1×5.....	56
Figure 3.12 : Profils de la densité de courant de la bobine 1×5 sur tous les rubans à t = 25 ms obtenus sur Matlab et Comsol : a) ruban(1,1), b) ruban(1,2), c) ruban(1,3), d) ruban(1,4), e) ruban(1,5) .....	57
Figure 3.13 : Comparaison des pertes AC calculées avec la MISD et sur Comsol pour différents nombre d'éléments par ruban.....	59
Figure 3.14 : Coupe selon $\phi$ de la bobine 4×3 (épaisseur pas à l'échelle) .....	60
Figure 3.15 : Discrétisation des rubans de la bobine 4×3. Chaque ruban est discrétisé en 200 éléments (l'épaisseur n'est pas à l'échelle).....	61



Figure 3.16 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode des éléments finis sur Comsol et avec la méthode intégrale sur Matlab pour une bobine 4×3 .....	61
Figure 3.17 : Profils de densité de courant de la bobine 4×3 sur les rubans 1 à 6 pour $t = 25\text{ms}$ obtenus sur Comsol et Matlab : a) ruban(1,1), b) ruban(2,1), c) ruban(3,1), d) ruban(4,1), e) ruban(1,2), f) ruban(2,2).....	63
Figure 3.18 : Profils de densité de courant de la bobine 4×3 sur les rubans 7 à 12 pour $t = 25\text{ms}$ obtenus sur Comsol et Matlab : g) ruban(3,2), h) ruban(4,2), i) ruban(1,3), j) ruban(2,3), k) ruban(3,3), l) ruban(4,3).....	64
Figure 3.19 : Approximation des rubans éloignés pour le ruban (1,1) de la bobine 4×3 .....	65
Figure 3.20 : Discrétisation des rubans de la bobine 4×3 avec l'approximation des rubans éloignés.....	67
Figure 3.21: Discrétisation des rubans de la bobine 4×3 avec l'approximation des rubans éloignés avec les voisins de deuxième rang inclus.....	71
Figure 3.22 : Temps de calcul des pertes AC en fonction du nombre de rubans de la bobine .....	74
Figure 3.23 : Temps de calcul des pertes AC en fonction du nombre de rubans de la bobine avec la MARE (MISD) et avec la MEF (Comsol) .....	75
Figure 4.1 : Coupe de la bobine 5×5 .....	80

## LISTE DES SIGLES ET ABREVIATIONS

### Abréviations :

1D	Une dimension
2D	Deux dimensions
AC	Courant alternatif
BCS	Bardeen, Cooper, and Schrieffer
$BT_c$	Basse température critique
MARE	Méthode de l'approximation des rubans éloignés
MISD	Méthode intégrale semi-découplée
MEF	Méthode des éléments finis
$HT_c$	Haute température critique
SAM	« Semi-analytical method »
TAFF	« Thermally assisted flux flow »
YBCO	Oxydes mixtes de baryum de cuivre et d'yttrium

### Notations:

$A$	Potentiel vecteur magnétique (T.m)
$A_{ext}$	Potentiel vecteur magnétique externe (T.m)
$B$	Densité de flux (T)
$e$	Épaisseur (m)
$E$	Champ électrique (V/m)
$E_0$	Critère du champ définissant $J_c$ pour un matériau à $HT_c$ (V/m)
$F_L$	Force de Lorentz par unite de longueur de vortex (N/m)
$F_p$	Force d'ancrage moyenne ( <i>pinning</i> ) par unité de longueur de vortex (N/m)

$H$	Champ magnétique (A/m)
$H_c$	Champ magnétique critique (A/m)
$H_{c1}$	Premier champ critique (matériaux de type II) (A/m)
$H_{c2}$	Second champ critique (matériaux de type II) (A/m)
$H_{c3}$	Troisième champ critique (matériaux de type II) (A/m)
$I$	Courant (A)
$I_c$	Courant critique (A)
$I_s$	Courant de source (A)
$J$	Densité de courant (A/m <sup>2</sup> )
$J_c$	Densité de courant critique (A/m <sup>2</sup> )
$l$	Largeur (m)
$M_A$	Matrice des coefficients
$n$	Exposant du modèle E-J en loi de puissance (sans unité)
$P$	Puissance (W)
$Q$	Pertes (W)
$R_i$	Rayon intérieur de la bobine (m)
$S$	Section d'un conducteur (m <sup>2</sup> )
$T$	Température (K)
$T_c$	Température critique (K)
$V$	Tension (V)
$\phi$	Potentiel électrique (V/m)
$\mu_0$	Perméabilité magnétique du vide ( $4\pi \times 10^{-7}$ H/m)
$\rho$	Résistivité électrique ( $\Omega \cdot m$ )

## INTRODUCTION

La supraconductivité est un phénomène remarquable, découvert en 1911 par Onnes, caractérisé par l'absence de résistance électrique et l'expulsion du champ magnétique dans les matériaux dits supraconducteurs en dessous d'une température dite critique ( $T_c$ ). Cependant, les applications des supraconducteurs étaient jusqu'à récemment limitées par le coût élevé de l'hélium liquide requis pour refroidir les matériaux à leur température de fonctionnement.

La découverte de la supraconductivité à haute température critique ( $HT_c$ ), en 1986, par Bednorz et Müller, a ouvert des perspectives inédites en termes d'applications industrielles. Plus facile et moins coûteux à mettre en œuvre que les supraconducteurs à basse  $T_c$ , les supraconducteurs  $HT_c$  ont un champ d'application potentiellement considérable.

D'importants travaux de recherche et développement consacrés à ce domaine ont permis de réaliser des applications concrètes. Toutes les propriétés de l'état supraconducteur étant exploitées, on aboutit à des applications diverses allant du stockage de l'énergie à la limitation des courants de court-circuit en passant par les moteurs électriques et les transformateurs de puissance.

Le transformateur est l'un des appareils électriques les plus anciens qui contribue au transport et à la distribution de l'énergie dans les réseaux électriques à courant alternatif (souvent abrégé AC). Ils sont indispensables pour le transport de l'énergie électrique car ils permettent l'acheminement de l'électricité sous haute tension, et donc avec le minimum de pertes, depuis les centrales de production jusqu'aux utilisateurs. Le remplacement des bobinages en cuivre ou en aluminium par un matériau supraconducteur a plusieurs avantages : un meilleur rendement, la réduction du poids et de la taille et la possibilité d'intégrer une limitation du courant de court-circuit.

Pour pouvoir correctement dimensionner les appareillages, il est indispensable d'être en mesure d'estimer le plus précisément possible les pertes AC dans les assemblages de fils supraconducteurs qui entrent dans leur constitution. La simulation numérique est un outil de choix pour arriver à cette fin, car elle permet de minimiser les coûts de développement des prototypes ainsi que leur nombre. Les outils de calcul numérique s'avèrent aussi essentiels dans la conception et l'optimisation des dispositifs supraconducteurs. La mise en place des calculs

numériques pour les supraconducteurs, et entre autre pour les bobines supraconductrices, progresse d'année en année. Néanmoins, il n'existe pas encore de modèle numérique capable de réaliser les calculs nécessaires pour déterminer les pertes AC d'un bobinage à très grand nombre de tours (typiquement 100 à 1000), comme ceux que l'on rencontre typiquement dans un transformateur de puissance.

Dans cette optique, le sujet de ce mémoire consiste à mettre en place un modèle intégral axisymétrique pour les calculs des pertes AC dans des bobinages supraconducteurs comportant un très grand nombre de tours.

Le mémoire se divise ainsi. Tout d'abord, le chapitre 1 fait l'objet d'une revue de littérature qui résume brièvement la théorie de base sur la supraconductivité et les différentes approches de modélisation numérique s'appliquant aux supraconducteurs. Le chapitre 2, qui est le cœur du mémoire, présente la mise en place d'un code numérique original, efficace et rapide pour le calcul des pertes AC d'un bobinage de transformateur supraconducteur. Le développement du code numérique est fait sur Matlab, puis le langage C est utilisé pour optimiser le code afin de le rendre le plus rapide possible. Dans le chapitre 3, les résultats des simulations sont présentés, et l'approche numérique proposée est validée. La vérification se fait grâce à une comparaison des résultats avec le logiciel Comsol *MultiPhysics*. Une modélisation fiable des pertes AC d'une bobine à petit nombre de tours a pu être mise en place sur le logiciel Comsol, mais ce dernier rencontre vite ses limites. En effet, il ne peut s'étendre au-delà d'une vingtaine de tours, car très vite la mémoire de l'ordinateur est saturée. De plus, le temps de calcul est extrêmement grand et inacceptable en pratique si on envisage coupler la résolution numérique avec un optimisateur. La très fine épaisseur des rubans supraconducteurs, qui résulte en un grand nombre d'éléments dans le maillage, et conséquemment un grand nombre d'inconnues, est en bonne partie responsable de ces temps de calculs démesurés. Enfin, la dernière partie du chapitre 3 présente l'optimisation du code, c'est-à-dire, la façon dont le code a été accéléré.

## CHAPITRE 1 CONTEXTE ET REVUE DE LITTÉRATURE

### 1.1 Concepts de base en supraconductivité

#### 1.1.1 Bref historique

Le phénomène de la supraconductivité a été découvert en 1911 par le physicien hollandais Heike Kamerlingh Onnes. Celui-ci a montré que pour de très basses températures (de quelques Kelvins) les propriétés physiques de certains métaux changent drastiquement, en particulier la résistance électrique qui s'annule dans certains cas. Ainsi, dans ces conditions, un courant électrique continu peut circuler sans dissipation d'énergie. La transition de l'état conducteur normal vers l'état supraconducteur survient à une température appelée la *température critique*  $T_c$ .

En 1933, W. Meissner et R. Ochsenfeld observent la propriété du supraconducteur d'exclure toute pénétration de flux magnétique à l'intérieur du matériau à l'état supraconducteur, grâce à la circulation de super-courants dans le supraconducteur. Cet effet de non-pénétration du champ magnétique est nommé *effet Meissner* (Figure 1.1).

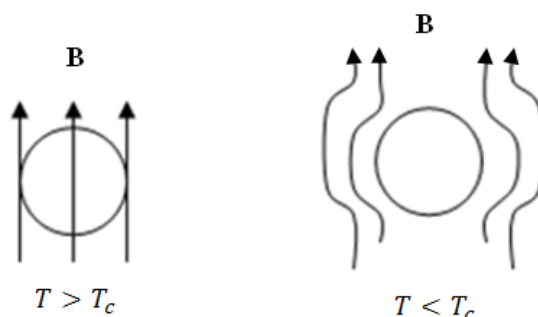


Figure 1.1 : Effet Meissner dans une sphère supraconductrice refroidie dans un champ magnétique uniforme. Au-dessus de la température critique, les lignes de champ traversent le matériau, en-dessous, les lignes de champ ne pénètrent pas le matériau

Avec ces deux phénomènes cités ci-dessus, on peut dire qu'un matériau supraconducteur est à la fois un conducteur parfait et un diamagnétique parfait.

En 1957, John Bardeen, Leon N. Cooper et John Schrieffer ont émis la première théorie microscopique (BCS) [1] qui explique la supraconductivité, ce qui leur a valu un prix Nobel de

physique en 1972. Cette théorie explique qu'à très basse température, les électrons s'apparient et forment des paires de Cooper. Cet état ordonné résulte de l'existence d'une attraction entre électrons par l'intermédiaire des vibrations du réseau atomique. En effet, un électron, lorsqu'il se déplace, modifie légèrement la position des ions positifs (les noyaux des atomes) situés sur son parcours. Ces distorsions, nommées phonons, créent de petites zones positives qui attirent l'autre électron de la paire et entraînent son déplacement. L'interaction entre les deux électrons peut avoir une assez grande portée. Aussi, les deux électrons couplés ne se comportent plus du tout de la même façon qu'un électron isolé. En effet, les électrons sont des fermions, c'est-à-dire des particules qui ne peuvent se trouver au même endroit dans le même état physique (principe d'exclusion de Pauli). Mais la théorie de la supraconductivité à très basse température repose sur le fait que les paires de Cooper, elles, forment des bosons qui, eux, peuvent se trouver en grand nombre dans le même état physique, en l'occurrence dans un état de plus basse énergie que les deux électrons considérés séparément. De plus, la cohérence entre les paires de Cooper est parfaite, de sorte que la circulation des paires n'engendre aucune perte d'énergie par dissipation, celles-ci permettent l'existence d'un courant électrique ne rencontrant aucune résistance.

Les matériaux supraconducteurs dont le comportement est basé sur cette théorie ont des températures critiques qui ne peuvent être supérieures à une trentaine de Kelvin, au-delà de laquelle l'agitation thermique casse les paires des électrons. Cependant, en 1986, Johannes Goerg Bednorz et Karl Alexander Müller ont élaboré le premier supraconducteur céramique [2]. Le composé Barium, Lanthanum, Cuivre et Oxygène (BaLaCuO) était supraconducteur à la température  $T_c$  la plus élevée connue, soit 30K. Ceci connaît un retentissement considérable et déclenche une course à la  $T_c$  la plus élevée (Figure 1.2). En 1987, Wu et ses élèves à l'université d'Alabama à Huntsville, et Chu et ses élèves à l'Université de Houston, ont découvert l'YBaCuO à une température de 92 K. Pour la première fois, un matériau (aujourd'hui mentionné comme YBCO) permettant la supraconductivité à des températures plus élevées que l'azote liquide (77K) venait d'être découvert. L'azote liquide est un liquide de refroidissement facilement disponible et bien moins coûteux que l'hélium liquide. Nous appelons ces matériaux des supraconducteurs à haute température critique ( $HT_c$ ). Ces supraconducteurs ne fonctionnent pas exactement selon les mêmes mécanismes que les supraconducteurs classiques. À la différence des supraconducteurs à  $BT_c$  (basse température critique), les mécanismes de supraconduction dans les  $HT_c$  n'ont pas été complètement élucidés à ce jour, bien que plusieurs hypothèses aient été proposées.

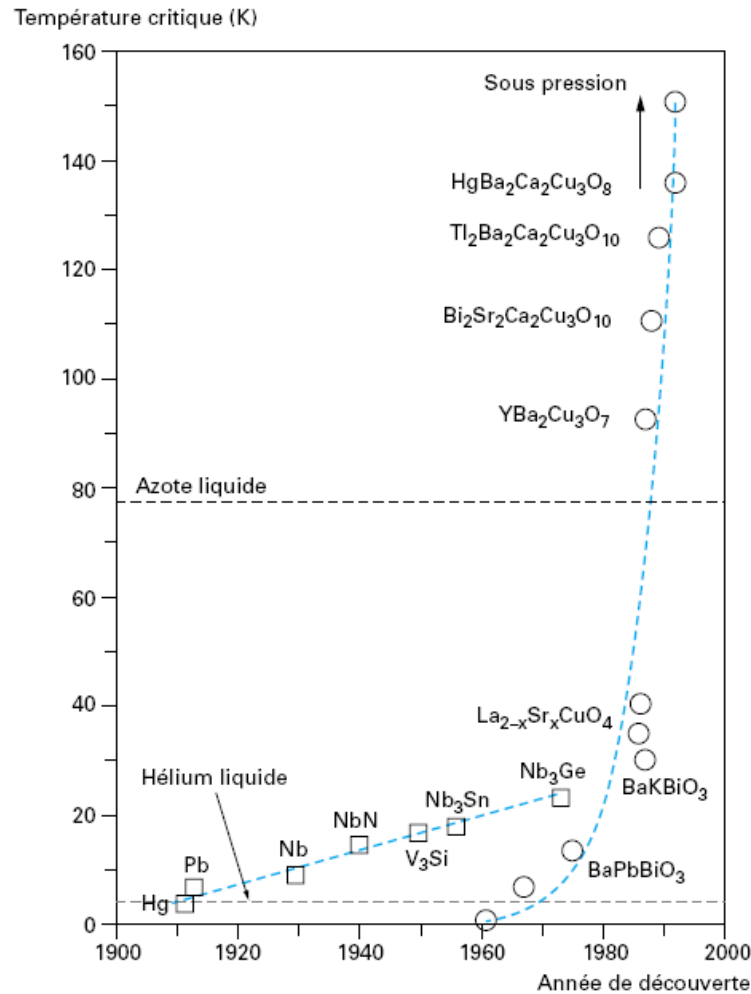


Figure 1.2 : Évolution des températures critiques au cours du temps [3]

### 1.1.2 Les grandeurs critiques des supraconducteurs

La supraconductivité existe seulement dans un domaine limité par trois grandeurs maximales : température, champ et densité de courant critiques. A l'intérieur de ce domaine d'opération, le supraconducteur est dans l'état supraconducteur, non résistif et diamagnétique. Si l'une des grandeurs dépasse sa valeur critique, le supraconducteur sera dans l'état normal c'est-à-dire résistif et amagnétique.



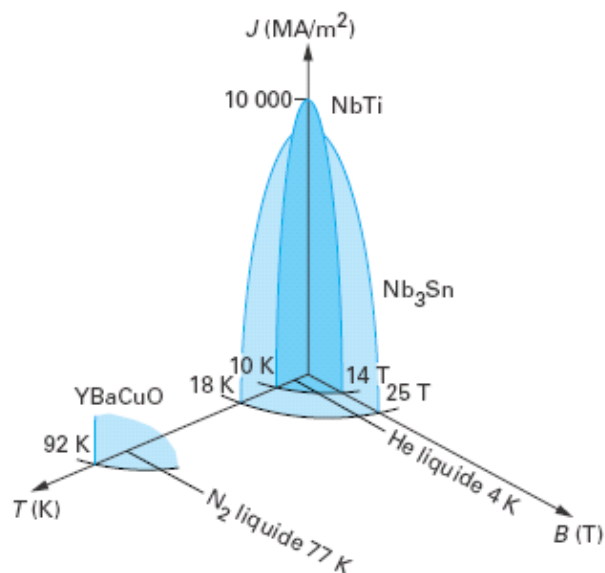


Figure 1.3 : Surface critique de différents matériaux supraconducteurs [4]

### Température critique ( $T_c$ ) :

La température critique est la température en-dessous de laquelle un matériau devient supraconducteur. Proche de  $T_c$ , la variation de la résistivité en fonction de la température est très brusque (Figure 1.4). Cette grandeur critique est intrinsèque au matériau.

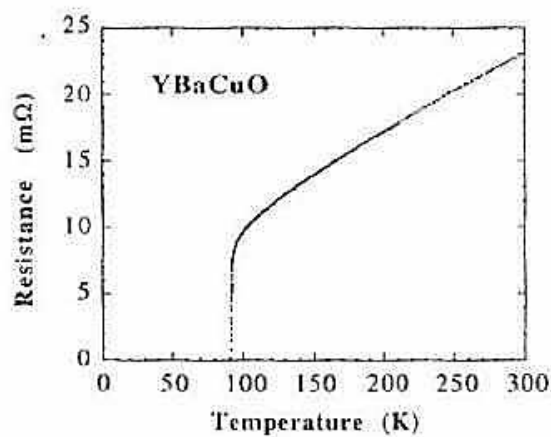


Figure 1.4 : Dépendance de la résistivité en fonction de la température d'un élément supraconducteur YBCO [5]

### Champ magnétique critique ( $H_c$ ) :

L'état supraconducteur peut disparaître sous un champ magnétique appliqué d'une certaine intensité  $H_c$  qui dépend de la température.

Le tracé de l'induction en fonction du champ magnétique extérieur (Figure 1.5) donne deux comportements différents. Ils définissent deux types de supraconducteurs, le type I et le type II.

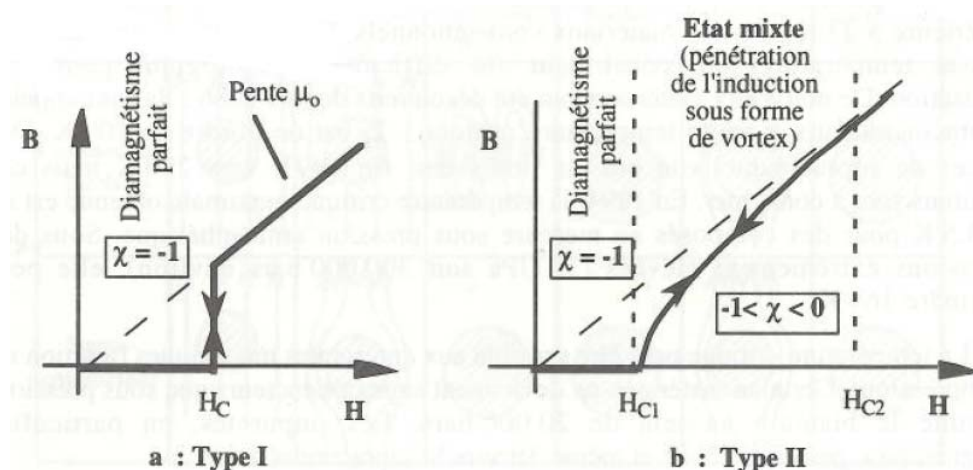


Figure 1.5 : Induction magnétique dans des supraconducteurs idéaux de type I et II [5]

Les supraconducteurs se divisent donc en deux catégories : type *I* et type *II*. Ceux de *type I* sont caractérisés par le fait que si le champ magnétique extérieur atteint la valeur critique  $H_c$ , l'effet Meissner s'arrête brusquement. Le diamagnétisme est parfait pour un  $H$  inférieur à  $H_c$ , et la dépendance avec la température est parabolique (Figure 1.6a).

La caractéristique  $H(T)$  des supraconducteurs de *type II* comporte plusieurs zones (Figure 1.6b):

- Zone de l'effet Meissner, de diamagnétisme total, dans laquelle la résistivité électrique est nulle
- Zone de l'état mixte : Dans un supraconducteur de *type II*, le diamagnétisme parfait n'existe qu'en-dessous d'un champ magnétique  $H_{c1}$ . Au-delà de ce premier champ critique, le champ magnétique pénètre le supraconducteur sous forme de vortex (Figure 1.7). Dans cette zone de l'état mixte, où la résistivité électrique  $\rho$  du matériau varie spatialement entre zéro et la valeur à l'état normal.

- Zone de la supraconductivité de surface, dans laquelle seulement une fine partie en surface du matériau est supraconductrice
- Zone correspondant à l'état normal

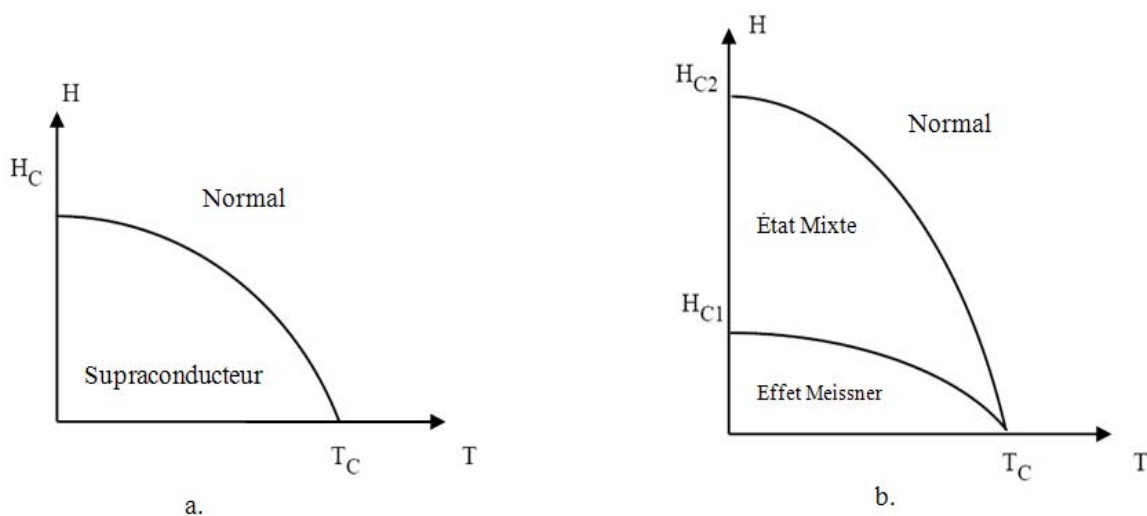


Figure 1.6 : Dépendance du champ magnétique en fonction de la température (a: type I, b: type II)

Tableau 1.1: Tableau des champs critiques  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$  de quelques supraconducteurs de type II

Composés	$T_c$ (K)	$\mu_0 H_{c1}$ (T)	$\mu_0 H_{c2}$ (T)
Nb (fil)	9.3	0.0181	2
Nb Ti	9.5		13
Nb <sub>3</sub> Sn	18.2	0.0035	23
Pb Mo <sub>6</sub> S <sub>8</sub>	15		60
Rb <sub>3</sub> C <sub>60</sub>	29.6	0.0013	32
Y Ba Cu O	92	0.0032	115
Hg Ba <sub>2</sub> Ca <sub>2</sub> Cu <sub>3</sub> O <sub>8</sub>	131	0.0045	190

Pour les applications des supraconducteurs dans le domaine de l'électrotechnique, ce sont bien évidemment les supraconducteurs du type II à haute température critique qui seront les candidats de choix. Ainsi, dans ce mémoire, seuls les supraconducteurs de type II sont traités.

### Densité de courant critique ( $J_c$ ):

La densité de courant critique correspond à la valeur maximale au-delà de laquelle une résistivité apparaît. En pratique, la densité de courant critique est définie à l'apparition d'un champ électrique moyen  $E_0$  de  $1 \mu\text{V}/\text{cm}$ , lorsqu'on mesure la tension aux bornes du supraconducteur. Pour un matériau supraconducteur de type II dans l'état mixte, soumis à une induction transverse, si le supraconducteur était idéal, il présenterait une densité de courant critique nulle. Ceci résulte du fait que le courant de transport interagit avec les vortex (Figure 1.7) et la force de Lorentz qui est engendrée déplacent ces vortex, entraînant une dissipation dans le matériau. Pour faire face à ces inconvénients, il faut être capable de « bloquer » les déplacements des vortex. Leur ancrage est possible sur les imperfections (défauts) du matériau. Ainsi, pour les supraconducteurs de type II, la densité de courant critique est définie comme la densité de courant qui crée une force de Lorentz ( $J_c \cdot B$ ) supérieure aux forces d'ancrages des vortex, ce qui les met en mouvement.

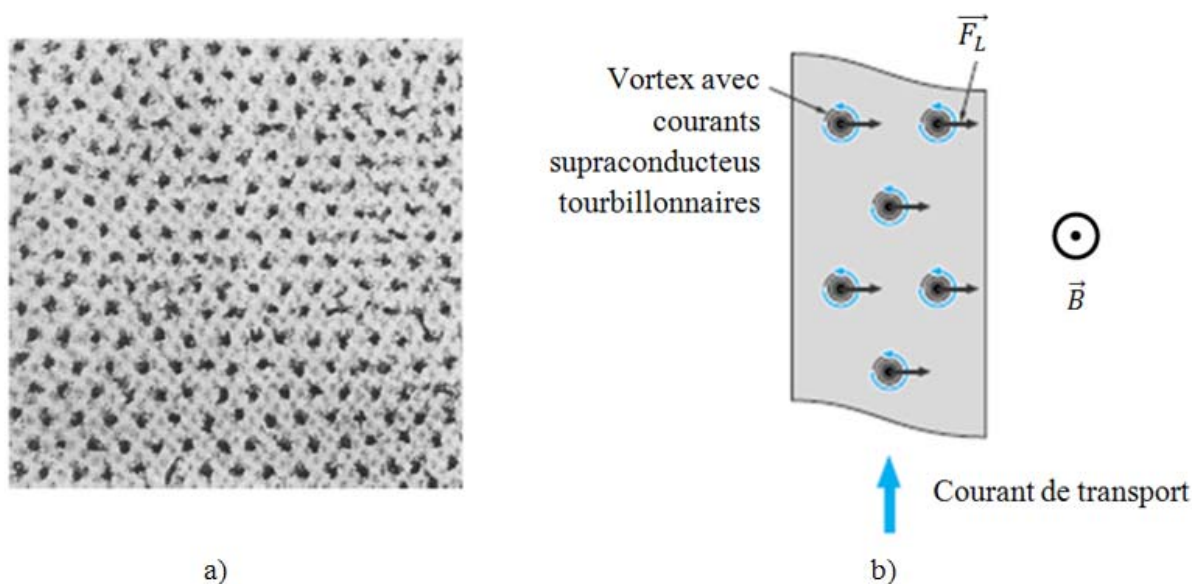


Figure 1.7 : (a) réseau de vortex obtenu avec de fines particules ferromagnétiques, (b) courant de transport dans un supraconducteur à l'état mixte [4]

### 1.1.3 L'origine des pertes AC dans les matériaux supraconducteurs

Dans un supraconducteur à  $HT_C$ , le diamagnétisme parfait n'existe qu'en-dessous d'un champ magnétique  $H_{c1}$  (très faible). Pour des valeurs de champ entre  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$ , les matériaux présentent des zones à l'état normal, dans lesquelles l'induction magnétique est non nulle. À l'état mixte, le flux magnétique commence donc à pénétrer sous forme de tubes engendrés par des vortex de courant (courant non-dissipatif) (Figure 1.7). Dans chaque vortex on a une conductivité normale alors que la conductivité est infinie dans le reste du matériau. Ces derniers se développent sur les impuretés, des imperfections du matériau, et sont donc piégés sur ces défauts du matériau. Cependant, dans un supraconducteur à l'état mixte, lorsqu'un courant de transport est perpendiculaire aux vortex, on assiste à des déplacements latéraux des vortex. Ces déplacements s'expliquent par le fait que les vortex sont soumis à la force de Lorentz ( $\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B}$ ) supérieure aux forces d'ancrage (ou de « pinning »  $\vec{F}_p$ ), qui est la force de réaction exercée par les défauts sur un vortex. Puisque les vortex en mouvement résultent en une variation locale de l'induction magnétique  $B$ , la loi de Maxwell-Faraday ( $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ ) indique qu'il apparaîtra un champ électrique. Les déplacements de vortex entraînent donc la création d'un champ électrique colinéaire au courant de transport, et donc des pertes. Les pertes instantanées par unité de volume ( $W/m^3$ ) sont égales au produit du champ électrique par la densité de courant:

$$p(\vec{r}, t) = \vec{E} \cdot \vec{j} \quad \text{Équation 1.1}$$

Les pertes instantanées sur tout le volume (en  $W$ ) sont données par :

$$p(t) = \int_{Vol} \vec{E} \cdot \vec{j} dV \quad \text{Équation 1.2}$$

Enfin, les pertes moyennes sur tout le volume (en  $J/s$ ) sont obtenus par :

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{Vol} \vec{E} \cdot \vec{j} dV dt, \quad \text{Équation 1.3}$$

avec  $T$ , la période temporelle.

### 1.1.4 Caractéristique E-J

Tant que la force d'ancrage reste supérieure à la force de Lorentz  $F_p > F_L$ , les vortex ne peuvent pas se mettre en mouvement. On parle dans ce cas d'un régime d'ancrage des lignes de flux, aussi appelé « *flux pinning* » (Figure 1.8).

Lorsque  $F_p < F_L$ , les défauts du matériau ne sont plus capables de retenir les vortex, qui se mettent alors en mouvement. Ce régime est appelé le régime fluage ou « *flux flow* » (Figure 1.8). Sous certaines hypothèses, on peut approximer la caractéristique E-J comme étant linéaire dans ce régime.

On appelle état critique ou « *critical state* » le point d'équilibre pour lequel  $F_p = F_L$ . L'état critique est généré par une densité de courant égale à la densité de courant critique  $J_c$ . En pratique,  $J_c$  ne prend pas une valeur bien définie, mais suit une distribution statistique [6] qui se traduit expérimentalement par un arrondissement de la courbe caractéristique E-J. L'agitation thermique est un autre facteur qui contribue à arrondir la caractéristique E-J, particulièrement dans le cas des supraconducteurs  $HT_c$ . Par conséquent, même en-dessous de l'état critique, l'agitation thermique rend le mouvement des vortex probables. Ce phénomène porte le nom de reptation de flux ou « *flux creep* », et les vortex formés sont mis en mouvement avec une vitesse moyenne très faible. Ce mouvement, attribué à l'énergie d'activation thermique, entraîne une petite dissipation dans le matériau. C'est le régime dit « *Thermally Activated Flux Flow* » (TAFF) (Figure 1.8).

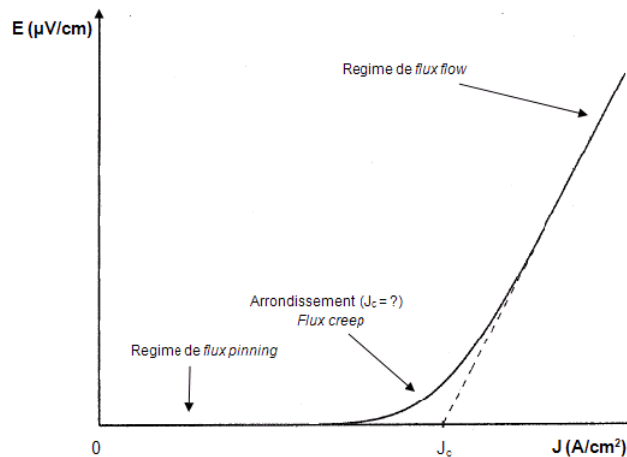


Figure 1.8 : caractéristique E-J d'un matériau supraconducteur  $HT_c$ . La ligne en pointillés représente la caractéristique E-J d'un matériau homogène à  $T=0\text{ K}$  [6]

## 1.1.5 Modélisation de la caractéristique E-J des supraconducteurs

### 1.1.5.1 Le modèle de l'état critique et le modèle de Bean

Le modèle de l'état critique stipule que, dans un matériau à l'état supraconducteur, la densité de courant est soit nulle, soit égale à la densité de courant critique  $J_c$ . Le modèle de Bean (1962) suppose, en plus, que la densité de courant critique est indépendante de la valeur de l'induction magnétique  $B$ , et aucune agitation thermique n'est considérée.

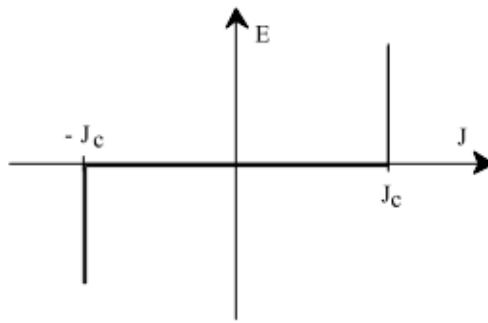


Figure 1.9 : Caractéristique  $E(J)$  basée sur le Modèle de Bean

### 1.1.5.2 Le modèle en loi de puissance

La caractéristique  $E(J)$  réelle d'un supraconducteur peut être représentée, autour de  $J_c$ , par une loi de puissance.

$$\vec{E}(\vec{J}) = \frac{E_0}{J_c} \left( \frac{|\vec{J}|}{J_c} \right)^{n-1} \vec{J} \quad \text{Équation 1.4}$$

Où  $E_0 = 1 \mu V/cm$ ,  $J_c$  est la densité de courant critique pour  $E = E_0$ , et  $n$  est l'index de transition résistive, qui représente la raideur de la transition. La valeur de  $n$  est considérée comme un facteur de qualité. Plus  $n$  est grand, meilleur est considéré le conducteur du point de vue de l'homogénéité.

Cette loi de puissance est purement empirique. Elle n'est plus valable lorsqu'on s'éloigne significativement de  $J_c$ .

La résistivité des supraconducteurs sera définie par :

$$\rho = \frac{E_0}{J_c} \left( \frac{|J|}{J_c} \right)^{n-1} \quad \text{Équation 1.5}$$

Pour les supraconducteurs de type II à  $HT_c$ ,  $n$  est généralement compris entre 8 (échantillons massifs) et 50 (couches minces). Lorsque  $n$  est infiniment grand, le modèle en loi de puissance devient équivalent au modèle de Bean (Figure 1.10).

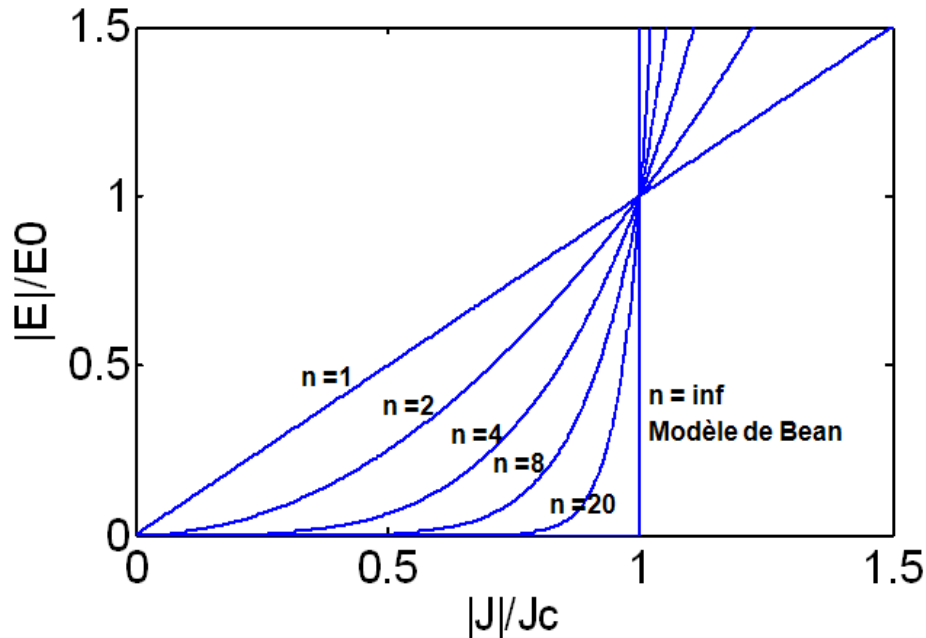


Figure 1.10 : Caractéristique E-J avec le modèle de la loi de puissance pour différente valeur de  $n$

## 1.2 Les transformateurs supraconducteurs

Le transformateur est l'un des appareils électriques les plus anciens qui contribue au transport et à la distribution de l'énergie dans les réseaux électriques, qui permet de faire varier une tension alternative à puissance pratiquement constante grâce à des bobinages primaires et secondaires couplés magnétiquement [7]. Les transformateurs sont indispensables pour le transport de l'énergie électrique car ils permettent l'acheminement de l'électricité sous haute tension et donc avec le minimum de pertes depuis les centrales jusqu'aux utilisateurs.



Malgré un excellent rendement des transformateurs (de l'ordre de 95% pour les transformateurs de quelques kVA et jusqu'à plus de 99% pour les très gros transformateurs), ces derniers présentent des pertes cuivres dans les bobinages, des pertes fer dans le circuit magnétique et des pertes liées aux courants induits par la variation temporelle de flux magnétique. Même si un transformateur a un très bon rendement, la diminution des pertes permettrait un gain d'énergie considérable à long terme sachant que le temps de vie d'un transformateur est de l'ordre de 40 ans.

Les pertes par effet Joule représente une proportion importante des pertes en charge d'un transformateur. Le remplacement des bobinages en cuivre ou en aluminium par un matériau supraconducteur, donc très peu résistif, permettrait de diminuer les pertes dans les bobinages et ainsi d'améliorer le rendement.

L'utilisation des supraconducteurs offrent plusieurs avantages dans les transformateurs [8, 9]:

- Une densité de courant très importante, ce qui permet une réduction du poids et le volume des bobinages, ainsi que le volume du noyau magnétique, puisque la fenêtre requise pour les bobinages est réduite.
- Des pertes AC très faibles ce qui permet d'améliorer le rendement global
- Fonctionnement illimité dans le temps jusqu'à deux fois la puissance nominale sans affecter la durée de vie du transformateur [10]
- Le remplacement de l'huile par l'azote liquide écarte les problèmes liés à l'inflammation et aux fuites d'huile (donc plus écologique)
- La possibilité de limiter les courants trop élevés. Lors d'un court-circuit, le courant peut être limité presque instantanément par la transition résistive des enroulements supraconducteurs. Des études sur transformateurs limiteurs montrent la faisabilité du concept et leur intérêt [11, 12]

Des études ont montré que pour des transformateurs de forte puissance (plus de 1.5 MVA), les transformateurs supraconducteurs seraient moins dispendieux et, bien entendu plus efficaces [13-15].

Pour pouvoir bien dimensionner les appareillages supraconducteurs, tels que les transformateurs, et les optimiser au mieux, il est indispensable de pouvoir calculer les pertes AC dans les

bobinages de façon simple, rapide et précise. C'est précisément le but du présent projet de maîtrise. Même si la motivation initiale de ce projet était en relation avec la conception de transformateurs supraconducteurs, les outils développés ici sont très génériques, et pourraient être utilisés dans le contexte de bien d'autres applications.

## 1.3 Modélisation numérique

La modélisation numérique des pertes AC dans un matériau supraconducteur peut être réalisée à l'aide de différentes méthodes. Cette section donne un bref aperçu des deux principales approches présentes dans la littérature.

### 1.3.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) est une première méthode utilisée pour le cas de l'étude des rubans supraconducteurs. La méthode des éléments finis est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle qui donne l'énergie totale du système modélisé, décrit en termes d'équations aux dérivées partielles. Ces modèles calculent les quantités électromagnétiques en couplant l'équation non linéaire de la loi de puissance avec les équations de Maxwell. Grilli *et al* utilisent la méthode des éléments d'arête (« edge element » en anglais) qui est une variante de la méthode des éléments finis pour modéliser les rubans supraconducteurs. Avec la méthode des éléments d'arête, les fonctions de base ont une forme vectorielle plutôt que scalaire. Les inconnues sont alors la valeur de champ tangentielle sur les arêtes des éléments plutôt qu'une valeur scalaire sur les nœuds des éléments, comme dans le cas classique. Grilli, Brambilla et Martini présentent un modèle qui permet de trouver le champ et la distribution de courant dans les supraconducteurs basé sur la formulation des éléments d'arête d'ordre 1 [16, 17]. Le problème est formulé en termes de champ magnétique en partant des équations de Maxwell :

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \times E = 0; \quad \text{Équation 1.6}$$

$$E = \rho \nabla \times H. \quad \text{Équation 1.7}$$

On sait aussi que :

$$J = \nabla \times H, \quad \text{Équation 1.8}$$

avec

$$\int_{\Omega} J \, d\Omega = I, \quad \text{Équation 1.9}$$

où  $I$  est le courant imposé dans chaque conducteur (contrainte).

L'utilisation de fonctions de base de type « edge element » est en général privilégiée car celles-ci satisfont automatiquement la condition  $\nabla \vec{B} = 0$ , ce qui rend le problème plus stable du point de vue numérique. Ce modèle de Grilli *et al*, a été largement utilisé dans différentes modélisations des phénomènes électromagnétiques et des pertes AC dans les matériaux supraconducteurs [18, 19].

Amemiya a aussi développé de très bons modèles par la méthode des éléments finis pour faire l'étude des pertes AC dans les supraconducteurs  $HT_c$  [20]. Pour cela, il utilise la loi de puissance pour la caractéristique E-J, et pour ce qui est de la modélisation de la dépendance en champ, il utilise une loi de Kim [21, 22]. La MEF a aussi été utilisée pour étudier des bobinages de type « pancake » (« pancake coils»), tel qu'illustré à la Figure 1.11. Dans le travail de Grilli *et al* sur les bobinages de type « pancake » [23, 24], la symétrie est utilisée afin de réduire le nombre d'inconnues dans le système à résoudre numériquement. Cependant, les rubans supraconducteurs étant extrêmement minces (de l'ordre de quelques micromètres), le ratio largeur sur épaisseur se situe typiquement entre 1000 et 10000, le nombre d'éléments s'avère très grand et le temps de calcul devient inacceptable.



Figure 1.11 : "Pancake coil" (photo) [25]

### 1.3.2 Méthodes intégrales

Cette méthode est basée sur la résolution des équations intégrales au lieu des équations différentielles. Les méthodes intégrales sont souvent plus complexes à mettre en œuvre et souvent moins adaptées au traitement des problèmes non linéaires. Néanmoins, elles sont assez populaires dans la communauté de la supraconductivité appliquée.

Brandt est le premier à proposer une méthode intégrale pour des problèmes en deux dimensions, avant même qu'on commence à utiliser la MEF. Sa méthode est basée sur des équations intégrales (du type Biot-Savart) et ne nécessite plus de faire le maillage des régions d'air, mais seulement des conducteurs. Ainsi, cela permet d'optimiser le calcul des pertes en termes de temps de calcul et de mémoire requise, dans la mesure où le nombre d'inconnues reste inférieur à quelques milliers. En effet, avec l'approche intégrale, le potentiel est directement calculé à partir d'une intégrale de la densité de courant que l'on intègre sur tout l'espace des termes sources. Ceci nous évite de faire le maillage de l'air et ne requiert pas de conditions aux frontières. Cependant, la matrice de calcul qui en résulte est pleine, et la résolution du problème peut prendre un temps considérable. En contrepartie, cette matrice ne dépend que de la géométrie du problème et étant indépendante des paramètres des matériaux, il n'est requis de la calculer qu'une seule fois, et elle peut être réutilisée autant de fois que l'on souhaite. En bref,

avec cette approche, en ayant les équations d'intégrations reliant  $J$  et le potentiel vecteur  $A$  (intégrale de Biot-Savart), il est possible de déterminer directement la distribution de courant  $J$  dans chaque région conductrice [26].

Plusieurs auteurs utilisent des variantes de la méthode de Brandt pour des problèmes de pertes AC et de magnétisation en deux dimensions. Pour les bobines supraconductrices, des études [27, 28] se basent sur le modèle de Kim [21, 22] qui propose un modèle considérant la dépendance de la densité de courant critique avec l'induction magnétique, et sur le modèle de Clem [29], qui dit que les rubans sont électriquement isolés les uns les autres et que chaque ruban est parcouru par le même courant de transport.

Si le rayon de la bobine est bien plus grand que la largeur des rubans supraconducteurs, la bobine peut être approximée en un empilement de rubans supraconducteurs infiniment longs [28], électriquement isolés les uns les autres et parcourus par le même courant de transport. Cependant, cette méthode n'est applicable que pour des bobines présentant un grand diamètre.

Qu'il s'agisse d'une MEF ou d'une méthode intégrale, à cause du rapport d'aspect (largeur/épaisseur) très élevé et du grand nombre d'éléments dans ce type de géométrie, le temps de calcul s'avère inacceptable pour des bobines à plusieurs rubans. Pour contrer cet inconvénient, une réduction de dimensionnalité pour ainsi réduire la taille du problème peut se faire autant en éléments finis qu'avec une formulation intégrale. Cependant, il est plus naturel à implémenter sous forme intégrale. Brambilla *et al* [30, 31] appliquent les équations intégrales pour des empilements et des spires de rubans supraconducteurs. Ils ont développé un modèle d'équation d'intégrale (IEM, « integral equation model ») qui réduit les sections des conducteurs à un problème à 1D, utilisant la loi de puissance pour la relation E-J. Ceci élimine le problème de mailler l'intérieur des rubans et accélère grandement le temps de calcul.

Pardo *et al* ont présenté une autre méthode numérique pour analyser les bobines jusqu'à 200 tours [32]. Ce modèle utilise le modèle de l'état critique avec une densité de courant critique constante. La distribution du courant est calculée par la méthode MMEV (« minimum magnetic energy variation ») et prend en compte la réelle épaisseur du conducteur et l'interaction magnétique entre les tours de bobinage. Cependant, Pardo ne présente des calculs de pertes AC que pour un simple « pancake coil » (Figure 1.11 et Figure 1.12). L'auteur précise bien que le travail présenté ne constitue qu'une base pour des calculs futurs des empilements de spires.

La méthode de Brandt repose sur la discrétisation du conducteur en des éléments rectangulaires. Par conséquent, celle-ci ne permet pas de traiter des géométries complexes [33, 34]. Cependant, une adaptation de la méthode de Brandt présentée par Sirois a permis de s'affranchir de cette contrainte [35]. Celle-ci consiste en une approche semi-analytique (SAM) pour calculer la distribution de courant dans des supraconducteurs en 2D ayant une géométrie arbitraire et discrétisée en éléments triangulaires. Il s'agit d'une variante de la méthode de Brandt qui repose sur des relations analytiques entre la distribution de courant, le vecteur potentiel et le champ magnétique pour une variation linéaire de  $J$  le long des éléments triangulaires en 2 dimensions. La SAM est plus rapide que la MEF pour un nombre de degrés de liberté de l'ordre de 800 à 1000 pour l'ensemble des régions conductrices [36]. Cette méthode a été exploitée pour développer un calcul numérique fiable et rapide de la distribution du courant et des pertes AC dans un ruban supraconducteur hélicoïdal par Siahraang [37].

L'approche développée par Sirois [35] sera le point de départ du projet présenté dans ce mémoire, qui consiste à mettre en place un modèle numérique conciliant rapidité et précision pour les calculs de pertes AC des bobines comportant un grand nombre de tours.

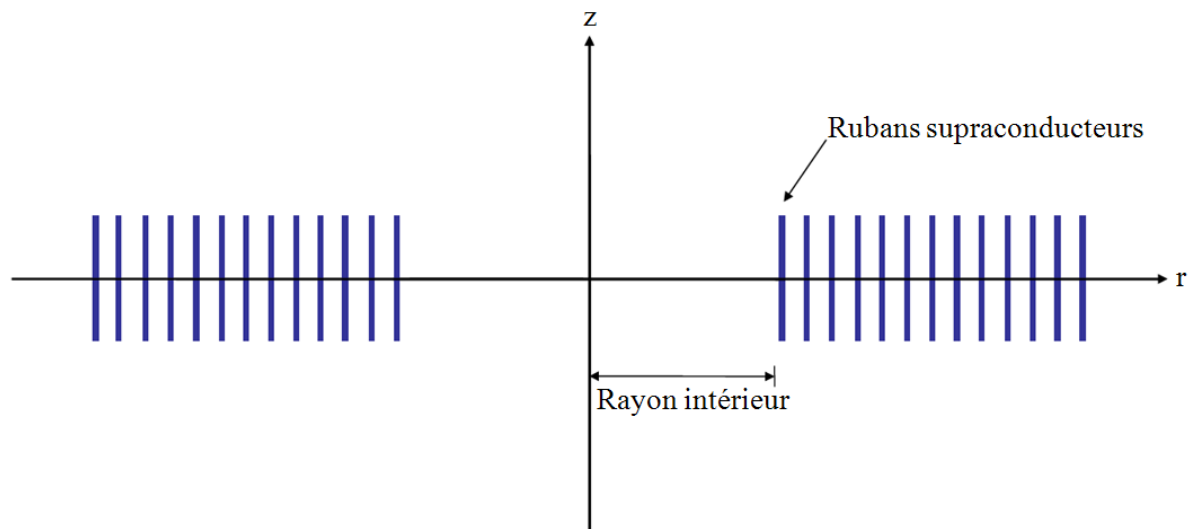


Figure 1.12 : « Pancake coil » (Coupe selon  $\phi$ )

## 1.4 Modèle analytique – Méthode de calcul

Le projet de recherche est basé sur le modèle analytique décrit par Sirois dans [6, 35] et Siahraang dans [37]. Pour calculer les pertes AC d'un bobinage quelconque, et en particulier celui d'un transformateur de puissance, il faut d'abord trouver la distribution de la densité de courant dans les rubans constituant le bobinage. Pour cela, nous partons de l'équation du champ électrique exprimée sous sa forme locale à basse fréquence :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \text{Équation 1.10}$$

où  $\vec{E}$ ,  $\vec{A}$ , et  $\nabla \phi$  sont respectivement, le champ électrique, le potentiel vecteur magnétique, et le gradient du potentiel électrique.

Compte tenu de la symétrie de notre problème (Figure 1.13), seule la densité de courant selon  $\widehat{u}_\phi$  a besoin d'être résolue (c'est-à-dire selon l'axe orthoradial). Nous avons alors :

$$E_\phi = -\frac{\partial A_\phi}{\partial t} - \nabla V, \quad \text{Équation 1.11}$$

où  $E_\phi$ ,  $A_\phi$  sont les composantes selon la composante orthoradiale  $\widehat{u}_\phi$ , de  $\vec{E}$  et  $\vec{A}$ , et  $\nabla V$  est la constante qui représente la tension par unité de longueur du ruban et qui permet d'obtenir le courant désiré dans chaque ruban. Dans ce qui suit, nous allons faire abstraction de l'index " $\phi$ ", qui traduit la composante orthoradiale, afin de simplifier la notation.

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla V, \quad \text{Équation 1.12}$$

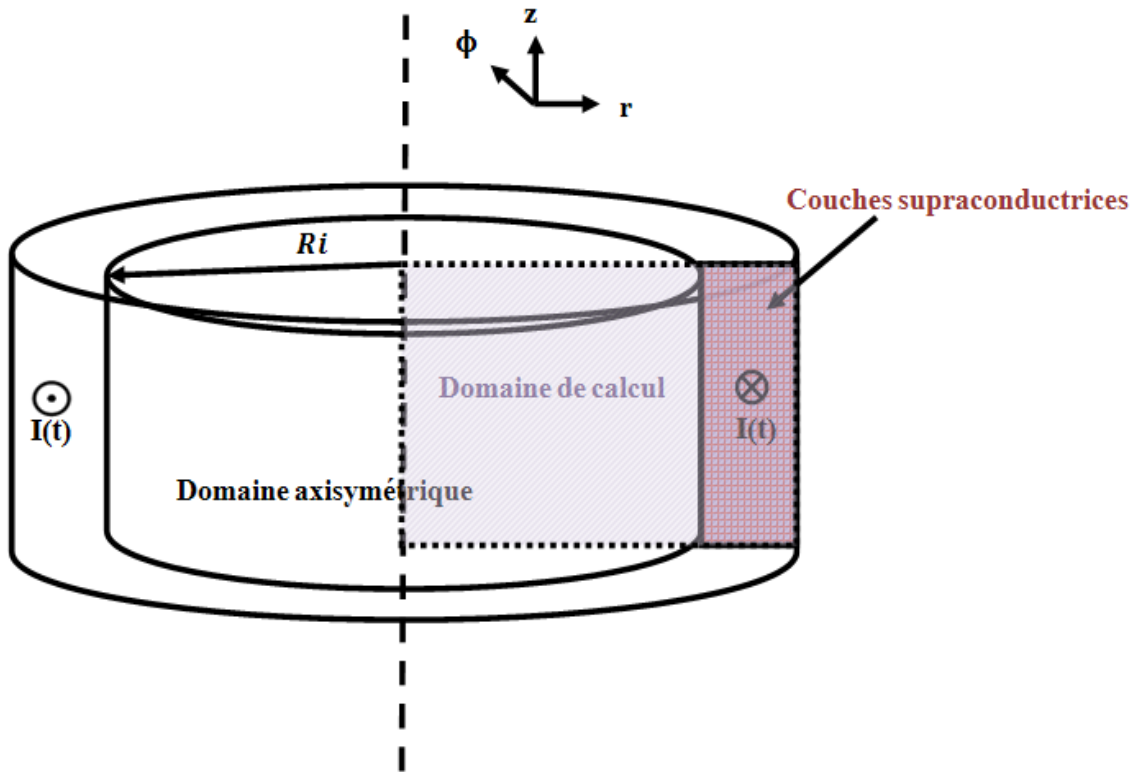


Figure 1.13 : Géométrie de la bobine supraconductrice modélisée

Pour pouvoir déterminer directement la densité de courant, il faut exprimer  $E$  et  $A$  en termes de  $J$ . Pour le terme à gauche de l'équation 1.12, la loi d'Ohm sous forme locale est utilisée :

$$E = \rho J, \quad \text{Équation 1.13}$$

où  $\rho$  représente la résistivité intrinsèque des rubans constituant le bobinage. Dans son cas le plus général,  $\rho$  peut être une constante (conducteur métallique) ou fonction d'une autre variable électromagnétique ( $J$  ou  $B$ ) comme c'est le cas pour les rubans supraconducteurs. Dans notre cas,  $\rho$  est défini par l'expression de la loi de puissance (Équation 1.5).

Pour ce qui est des termes se situant à droite de l'équation 1.12, le potentiel magnétique  $A$  sera exprimé en fonction de  $J$ , en utilisant l'équation de Biot-Savart :



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint I \frac{\vec{dl}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS. \quad \text{Équation 1.14}$$

Chaque ruban étant discrétisé en des éléments pour lesquels on considère une densité de courant uniforme, l'intégrale de Biot-Savart permet d'établir une relation directe entre le potentiel vecteur magnétique  $A$  et la densité de courant  $J$  dans tous les éléments du domaine à l'étude. Nous obtenons ainsi une équation sous forme matricielle :

$$[A]_{n \times 1} = [M_A]_{n \times n} * [J]_{n \times 1}, \quad \text{Équation 1.15}$$

où  $n$  correspond aux degrés de liberté associés au nombre d'éléments dans la géométrie discrétisée,  $[A]$  et  $[J]$  contiennent respectivement le potentiel vecteur magnétique et la densité de courant de chaque élément du domaine à l'étude. La matrice  $[M_A]$  s'appelle la matrice des coefficients, et relie  $A$  de chaque élément au  $J$  de tous les éléments. Etant une matrice carrée ( $n \times n$ ) et pleine, la génération de celle-ci prend beaucoup de temps. Cependant, puisque la détermination de  $[M_A]$  ne dépend que de la géométrie, elle n'est générée qu'une seule fois seulement pour une discrétisation donnée, et est utilisée autant de fois que nécessaire.

Finalement l'équation 1.10 devient :

$$\text{diag}[\rho(J_i)]_{n \times n} [J]_n = -\frac{\partial}{\partial t} ([M_A] * [J]_n) - [\nabla V]_{n \times 1} \quad \text{Équation 1.16}$$

où  $i$  correspond à l' $i^{\text{ème}}$  élément du domaine discrétisé et où  $\text{diag}[\rho(J_i)]_{n \times n}$  est une matrice diagonale ( $n \times n$ ) qui contient les résistivités de chaque élément  $i$ .  $[J]_{n \times 1}$  et  $[\nabla V]_{n \times 1}$  sont respectivement les vecteurs colonnes représentant les composantes orthoradiales de la densité de courant et la tension par unité de longueur dans chaque conducteur du problème, et  $[M_A]$  est la matrice carrée ( $n \times n$ ) portant le nom de la matrice de coefficients.

Si le courant est imposé plutôt que la tension,  $\nabla V$  est a priori inconnue. Par conséquent, afin de spécifier un courant  $I_s$  imposé sur un ruban par une source externe, une équation additionnelle correspondant à la contrainte de courant doit être imposée. Cette équation s'écrit en termes de la densité de courant, et il s'agit tout simplement de l'intégrale de  $J$  sur la section discrétisée de chacun des conducteurs à l'étude, i.e. :

$$I_s = \int_S J(r, z) dS = [C]_{1 \times n} [J]_{n \times 1}, \quad \text{Équation 1.17}$$

où  $[C]_{1 \times n}$  est un vecteur ligne dont les termes correspondent à l'aire de la surface de chaque élément [6].

Pour notre cas d'une bobine supraconductrice constituée de plusieurs rubans, nous avons plusieurs sources de courant (égal au nombre de rubans). Il faut donc imposer le courant  $I_s$  sur chacun des rubans, ce qui fait un grand nombre d'équations algébriques (contraintes).

Si on appelle matrice augmentée  $[M_{A+}]$  la matrice suivante :

$$[M_{A+}] = \begin{bmatrix} M_A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Équation 1.18}$$

$B$  étant une matrice de taille  $n \times \text{nombre de conducteurs}$  qui impose  $\nabla V$  aux rubans supraconducteurs. On obtient ainsi l'équation :

$$[M_{A+}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} J \\ \nabla V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\rho(J_i)]_{n \times n} [J]_n \\ -\frac{\partial}{\partial t} I_s \end{bmatrix} \quad \text{Équation 1.19}$$

Ainsi, pour trouver  $J$  on résout :

$$\frac{\partial}{\partial t} J = -M_J \begin{bmatrix} \text{diag}[\rho(J_i)]_{n \times n} [J]_n \\ -\frac{\partial}{\partial t} I_s \end{bmatrix}, \quad \text{Équation 1.20}$$

où  $[M_J]$  est la matrice qui contient les  $n$  premières lignes de  $[M_{A+}]^{-1}$ . Puisque la matrice  $[M_A]$  n'est qu'à calculer une seule fois pour une géométrie donnée, l'inversion de la matrice  $[M_A]$  ou de  $[M_{A+}]$  n'est qu'à effectuer seulement une seule fois aussi.

Afin de générer la matrice de coefficients  $M_A$ , il faut être capable de calculer le vecteur potentiel généré par les rubans constituant le bobinage du transformateur. Urankar [38] a effectué la résolution analytique du potentiel vecteur pour un cylindre fini à section rectangulaire. Cette résolution analytique a été ensuite développée et programmée sur Matlab par Rahal [39].

Une fois que le système d'équations différentielles est résolu par l'intermédiaire d'un résolveur (solver CVODE) [40] bien adapté, la valeur de  $J$  dans chaque élément du domaine de l'étude est obtenue. Ainsi, nous pouvons calculer les pertes AC.

Une fois que  $J$  a été trouvé, les pertes AC par ruban supraconducteur peuvent être calculées par la relation :

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \int_S (J \cdot E) dS dt, \quad \text{Équation 1.21}$$

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \int_S \rho J^2 dS dt, \quad \text{Équation 1.22}$$

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^{T=\frac{1}{f}} dt \int_S \rho J^2 dS, \quad \text{Équation 1.23}$$

avec  $\rho$  défini par la loi de puissance (Équation 1.5) et  $T$  étant la période du courant AC.

## CHAPITRE 2 DÉVELOPPEMENT DU CODE

Avant de commencer à développer le nouveau code numérique, il faut tout d'abord valider les parties de code existantes qui sont intégrées et réutilisées dans le cadre de ce projet.

### 2.1 Validation du code de calcul du potentiel vecteur A

Nadim Rahal a développé des fonctions de calcul du potentiel vecteur et du champ magnétique basées sur des solutions analytiques dans le cas d'un cylindre fini à section rectangulaire [39]. Une de ces fonctions appelée *CalculA* (description en Annexe), programmée en Matlab, est celle qui permet de calculer le potentiel vecteur généré par un cylindre fini à section rectangulaire. Dans le cadre de ce mémoire, le bobinage du transformateur supraconducteur est modélisé par un empilement de rubans supraconducteurs en forme de « pancake ». La fonction *CalculA* sera utile pour le calcul de la matrice de coefficients  $[M_A]$  qui relie le potentiel vecteur  $A$  de chaque élément discrétisé au  $J$  de tous les éléments (voir section 1.4). Il est primordial de valider la fonction *CalculA* avant de l'utiliser.

La vérification est faite grâce à une comparaison avec un modèle en éléments finis construit sur le logiciel Comsol Multiphysics. Ce dernier est un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) par éléments finis. Il possède une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques comme la magnétostatique, l'écoulement des fluides, la déformation des matériaux etc. Une autre spécificité à ce logiciel est la possibilité de coupler différentes EDP pour décrire des phénomènes multi-physiques. Au départ, Comsol a été développé comme un « toolbox » de Matlab. Aujourd'hui, il dispose de son propre environnement graphique pour construire des géométries et effectuer le post-traitement des données.

#### 2.1.1 Test de vérification de CalculA sur un cylindre à section rectangulaire

Le premier test de vérification est effectué sur une bobine de section rectangulaire de 20 m de hauteur et 8 m de largeur, avec un rayon intérieur égal à 2 m. Sur le logiciel Comsol, un cylindre avec une symétrie axiale « *2D axisymétrique* » est dessiné. Il faut bien spécifier que l'axe  $r = 0$  est l'axe de la symétrie axiale afin que le logiciel comprenne qu'il s'agit d'un cylindre. La dimension totale du domaine d'étude doit être suffisamment grande par rapport au

cylindre étudié car un champ nul sur la frontière extérieure est imposé. Par conséquent, au lieu d'avoir des champs qui s'étendent jusqu'à l'infini, l'énergie magnétique est forcée à être plus concentrée dans l'espace. Pour cela, un rectangle de 200 m de hauteur et 100 m de largeur est choisi pour le domaine d'étude.

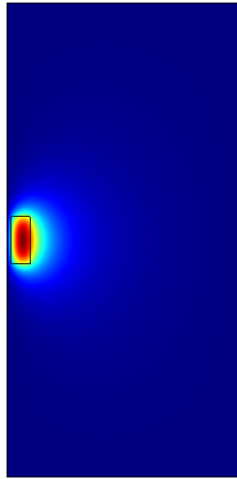


Figure 2.1 : Modèle de la bobine multi-tours modélisé dans le logiciel Comsol 3.5a, pour lequel le rayon de la boîte d'air est de 100 m.

Pour être certain de la validité de la fonction *CalculA*, il est important de comparer et vérifier les valeurs du potentiel vecteur obtenues sur les contours du rectangle et notamment sur les coins, car c'est dans les coins que les singularités sont rencontrées.

Le potentiel vecteur est calculé sur les quatre contours du cylindre sur Comsol, puis ensuite sur Matlab avec la fonction *CalculA*. Ainsi, les résultats sont comparés. Les Figures 2.3 à 2.6 présentent les résultats obtenus sur chacun des quatre contours comparés (Figure 2.2).

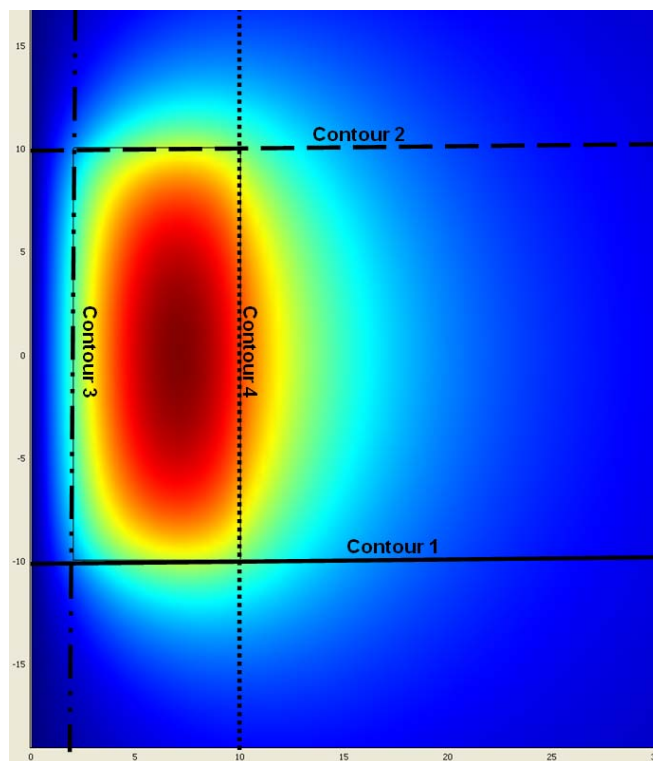


Figure 2.2 : Définition des contours sur lesquels le potentiel vecteur est calculé i) par Comsol Multiphysics, et ii) à l'aide de *CalculA*

Contour 1 :

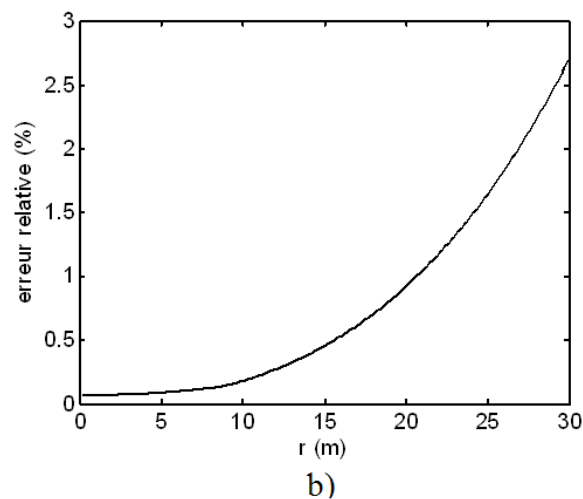
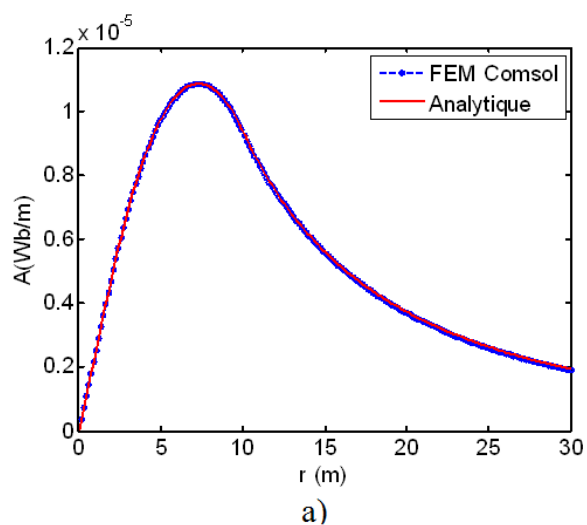


Figure 2.3 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code *CalculA* pour le contour 1, b) Erreur relative

Pour le contour 1, l'erreur relative ne dépasse pas les 3%. De plus, dans la zone autour du conducteur, l'erreur relative est inférieure à 1%. Avec la méthode des éléments finis, il faut imposer des conditions aux frontières et il est normal d'observer une différence plus grande entre les deux courbes lorsqu'on s'éloigne du conducteur et que l'on se rapproche d'une frontière du domaine d'étude. En effet, le fait d'imposer un champ nul sur la frontière extérieure, l'énergie magnétique se trouve forcée à être plus concentrée dans l'espace, plutôt que d'avoir des champs qui s'étendent à l'infini.

### Contour 2 :

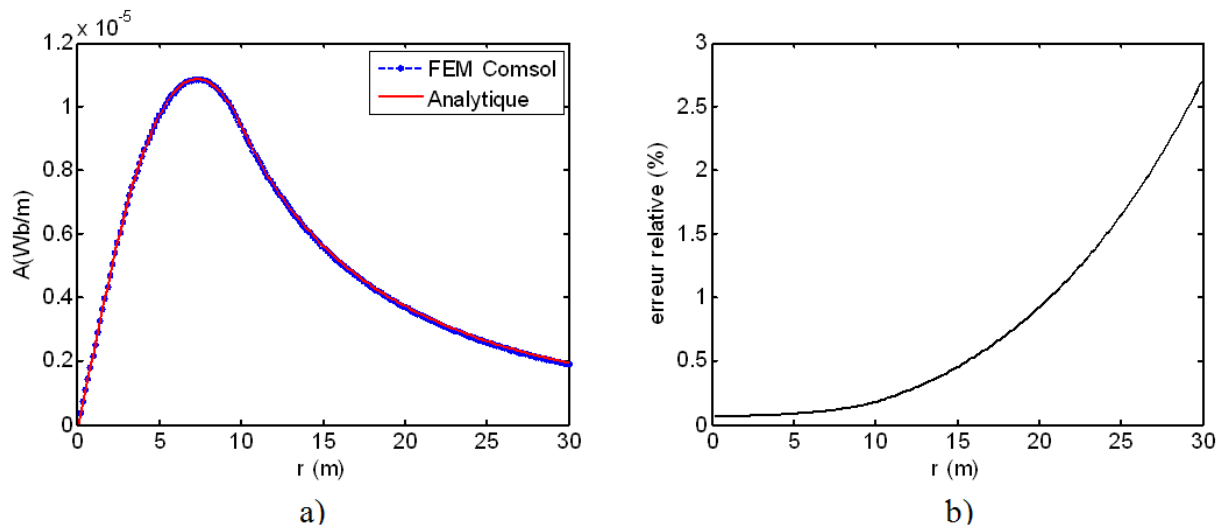


Figure 2.4 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code *CalculA* pour le contour 2, b) Erreur relative

Pour le contour 2, la même observation que pour le contour 1 est faite. Autour du conducteur, l'erreur relative est inférieure à 1%, et plus on s'éloigne de ce dernier, plus l'erreur relative augmente (ce qui est normal), sans toutefois dépasser les 3%.

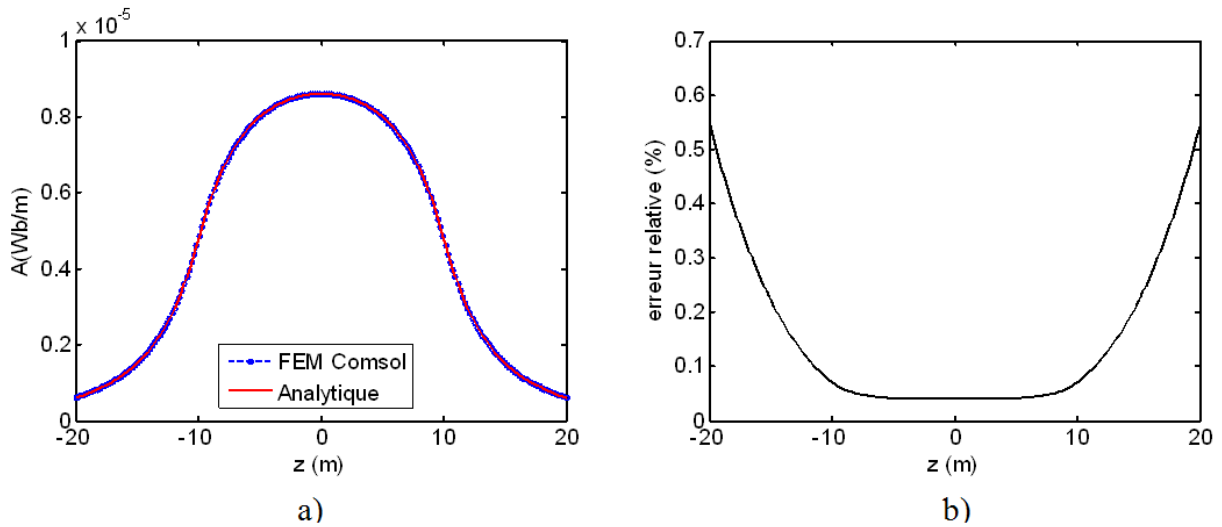
Contour 3 :

Figure 2.5 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code *CalculA* pour le contour 3, b) Erreur relative

Pour le contour 3, les deux courbes (courbe MEF et courbe Analytique) se suivent très bien aussi. De plus, l'erreur relative reste inférieure à 0,6%.

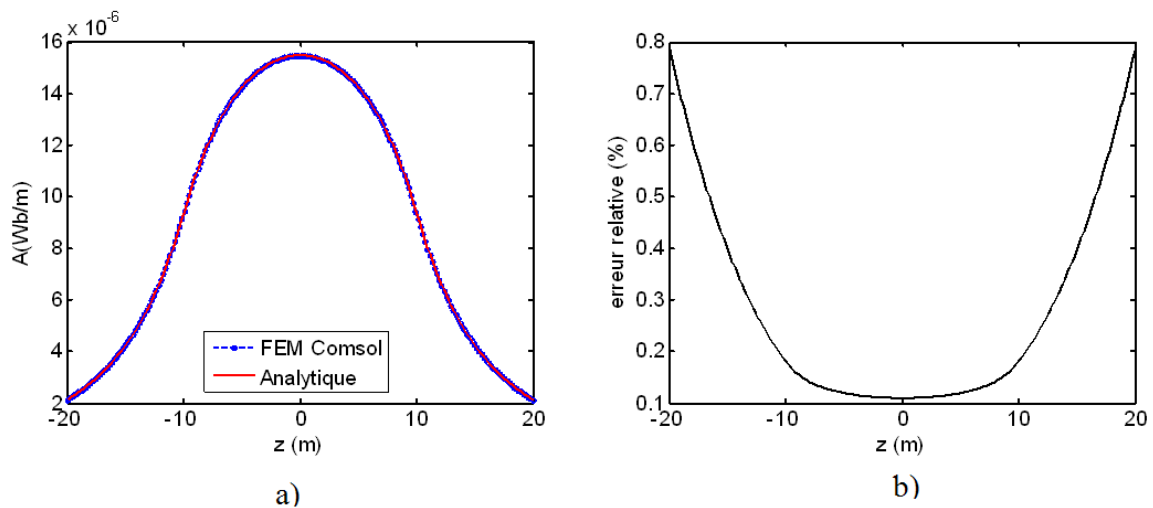
Contour 4 :

Figure 2.6 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code *CalculA* pour le contour 4, b) Erreur relative



Pour le cas du contour 4, les mêmes observations que pour le contour 3 sont faites. Les deux courbes se suivent parfaitement et l'erreur relative reste inférieure à 0,8%.

Ce premier cas de vérification montre pour chaque contour une petite erreur relative. Pour les contours 1 et 2, il est observé qu'autour du conducteur l'erreur relative est en-dessous de 1%, et que plus on s'éloigne du conducteur, plus l'erreur relative augmente sans jamais dépasser les 3%. Pour les contours 3 et 4, la même chose est observée, et l'erreur relative ne dépasse pas 0,8%.

Ces résultats témoignent d'une bonne corrélation entre les résultats obtenus avec *CalculA* et ceux de Comsol. Il est important de vérifier s'il en est de même pour un conducteur qui a les mêmes dimensions qu'un ruban supraconducteur.

### **2.1.2 Test de vérification de CalculA sur un cylindre de dimension d'un ruban supraconducteur**

Un deuxième test est effectué avec une section rectangulaire de hauteur égale à 1 cm et de largeur égale à 10  $\mu\text{m}$ , afin de se rapprocher de la réalité des dimensions des rubans supraconducteurs. Les rubans ont généralement une épaisseur de l'ordre de 1  $\mu\text{m}$ , mais les tests sont réalisés en prenant pour largeur 10  $\mu\text{m}$ , sinon, le logiciel Comsol met un temps démesuré pour le calcul du potentiel vecteur. Le rayon intérieur est fixé à 1 cm.

Cette fois-ci, les points comparés sont ceux de la droite qui passe au milieu du rectangle et parallèle à l'axe  $r$ , et les points de la droite qui passent par le milieu du rectangle parallèle à l'axe  $z$ .

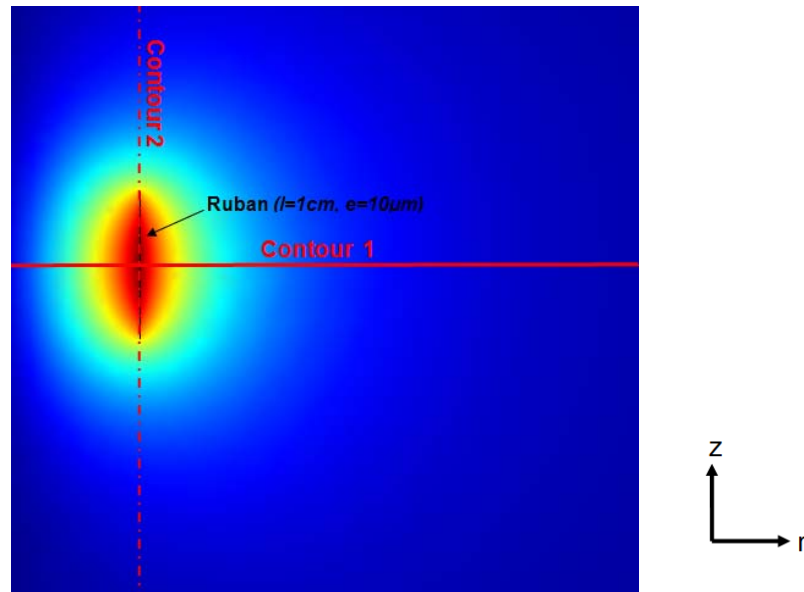


Figure 2.7 : Définition des contours sur lesquels le potentiel vecteur est calculé i) par Comsol Multiphysics, et ii) à l'aide de *CalculA*

Les Figures 2.8 et 2.9 présentent les résultats obtenus sur chacun des contours 1 et 2 (Figure 2.7).

#### Contour 1 :

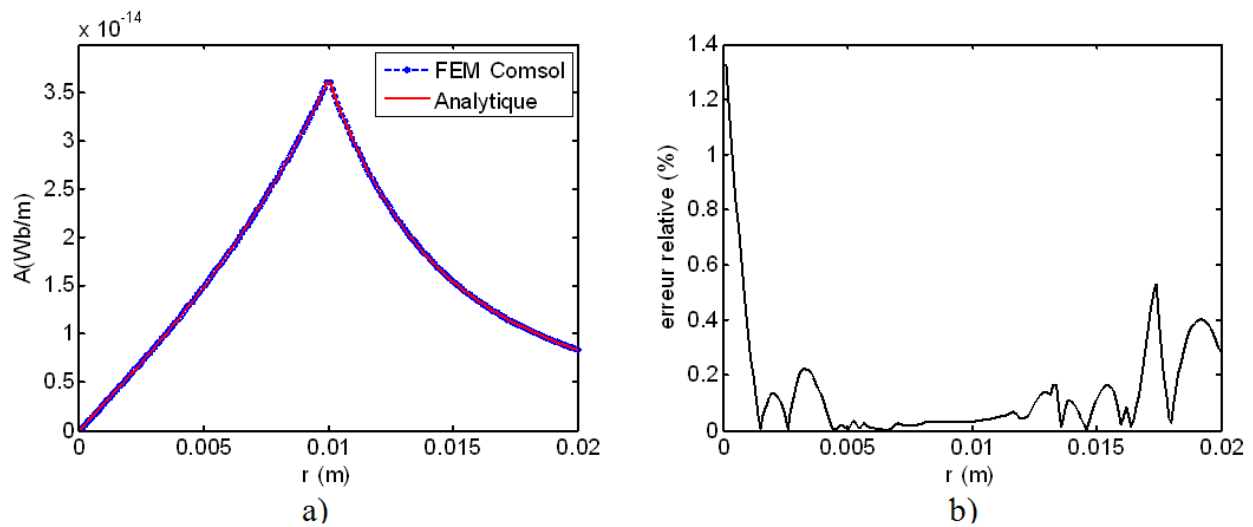


Figure 2.8 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code *CalculA* pour le contour 1, b) Erreur relative

### Contour 2 :

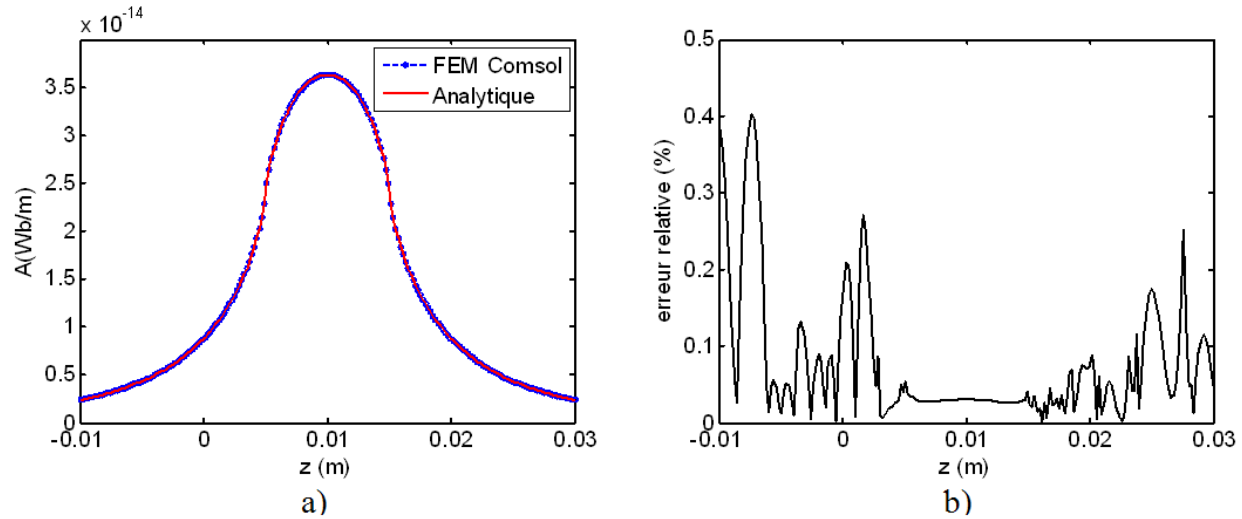


Figure 2.9 : a) Courbes du potentiel vecteur obtenues par MEF avec Comsol ainsi qu'avec les formules analytiques implémentées dans le code *Calcula* pour le contour 2, b) Erreur relative

Pour les deux contours, les courbes des potentiels vecteurs obtenus sur Matlab avec les relations analytiques et sur Comsol se superposent. L'erreur relative reste inférieure à 0,8% pour le contour 1, sauf pour le cas  $r = 0$  m (1,327%). Pour le contour 2, l'erreur relative est toujours inférieure à 0,4%. Le test 2 valide aussi la fonction *Calcula* comme étant une fonction fiable utilisable pour les dimensions réelles des rubans supraconducteurs.

Les deux tests ayant donnés de bons résultats, nous concluons que la fonction *Calcula* développée sur Matlab est valide et fiable en laquelle nous faisons confiance dans la suite des travaux. Cette fonction est donc utilisée et implémentée dans le code développé dans le cadre du projet.

## 2.2 Méthode intégrale pour le calcul des pertes AC

Afin de calculer les pertes AC d'un bobinage, la première étape consiste en la construction de la matrice de coefficient  $[M_A]$  de la bobine. La solution du problème peut être extrêmement lente, notamment si le bobinage est constitué d'un grand nombre de tours. Afin de réduire le plus

possible la taille du problème, nous utilisons ici la **méthode de l'approximation des rubans éloignés**.

### 2.2.1 Construction du modèle

Pour simplifier la géométrie, les rubans supraconducteurs formant la bobine seront considérés comme étant des anneaux concentriques très minces. La bobine sera constituée de  $nb_r$  couches de rubans (selon l'axe radial) et de  $nb_z$  rubans qui se suivent selon l'axe z. Le bobinage est donc constitué d'un nombre total de rubans supraconducteurs égal à  $nb_r \times nb_z$ . Entre chaque ruban qui se superpose, il existe un interstice (espace les séparant) de l'ordre d'un millimètre. Il existe aussi un interstice entre les rubans qui se suivent selon l'axe z, du même ordre de grandeur (Figure 2.10, Figure 2.11 et Tableau 2.1).

Tableau 2.1 : Ordres de grandeur des dimensions de la bobine supraconductrice

<i>Paramètre</i>	<i>Ordre de grandeur</i>
Largeur d'un ruban ( $l$ )	4 à 12 mm
Épaisseur ( $e$ )	1 $\mu$ m
Rayon intérieur ( $R_i$ )	5 à 10 cm
Interstice radial ( $dist_r$ )	1 mm
Interstice selon z ( $dist_z$ )	1 mm

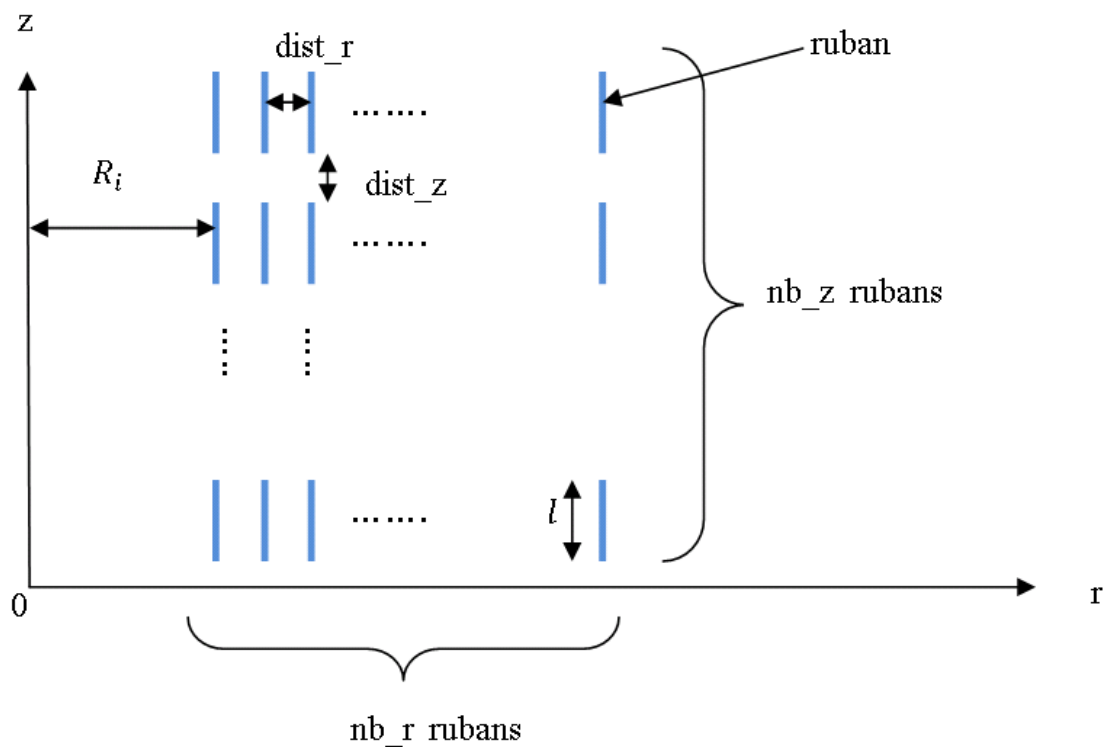


Figure 2.10 : Construction de la bobine (coupe selon  $\phi$ )

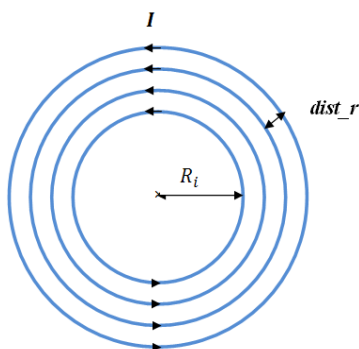


Figure 2.11 : Vue du dessus

Pour calculer la distribution de courant par la méthode introduite à la fin du chapitre précédent, les rubans sont discrétisés en un grand nombre d'éléments. Selon l'axe  $z$ , chaque ruban est divisé en de petits anneaux concentriques tous identiques avec une section rectangulaire de dimension  $\Delta r \times \Delta z$  dans les directions radiale et verticale respectivement. Il n'est pas

nécessaire de discrétiser les rubans selon l'axe  $r$  puisque l'épaisseur des rubans est déjà très fine ( $l = 1 \mu m$ ). Ainsi, dans chaque élément, la densité de courant  $J$  est considérée uniforme.

La valeur du potentiel vecteur  $A(r, z)$  à un point  $(r, z)$  quelconque est déterminée par la sommation de la contribution au potentiel vecteur en ce point de chacun des éléments. En considérant en plus la possibilité d'un champ externe (exprimée en termes de potentiel vecteur) on a :

$$A(r, z) = \sum_{k=1}^N A_k(r, z) + A_{ext}(r, z). \quad \text{Équation 2.1}$$

Avec l'équation de Biot Savart, on peut exprimer directement  $A$  en termes de  $J$  (comme vu au chapitre précédent) :

$$A = M_A J + A_{ext} \quad \text{Équation 2.2}$$

Le calcul de la matrice  $[M_A]$  se fera ruban par ruban, i.e. chaque ruban supraconducteur de la bobine aura sa propre matrice  $[M_A]$ . Les pertes AC de la bobine seront aussi calculées ruban par ruban, puis ensuite sommées afin d'obtenir les pertes totales de la bobine supraconductrice.

### 2.2.2 Méthode de l'approximation des rubans éloignés

La matrice de coefficient  $[M_A]$  étant une matrice pleine de taille importante (minimalement quelques centaines à quelques milliers de lignes/colonnes), elle prend énormément de temps à générer. Cependant,  $[M_A]$  ne dépendant que de la géométrie du bobinage, il n'est nécessaire de la calculer qu'une seule fois. Ensuite il s'agit de la sauvegarder et de la réutiliser autant de fois que nécessaire.

Dans cette section, la méthode d'approximation des « rubans éloignés » (MARE) est présentée. Elle permet de diminuer de façon considérable le temps de construction de la matrice  $[M_A]$  sans pour autant affecter la précision des calculs.

Tel que mentionné plus haut, la génération de la matrice  $[M_A]$  se fait ruban par ruban. Pour cela, il faut discrétiser le ruban à l'étude ainsi que tous les autres rubans de la bobine, chaque élément ainsi formé étant associé à une densité de courant uniforme.

L'idée de base permettant de réduire la taille du problème est d'utiliser une discrétisation différente pour chacun des rubans. Le ruban à l'étude est discrétisé en un plus grand nombre d'éléments, et ensuite, pour ses rubans voisins proches, la finesse de la discrétisation est réduite. Pour ce qui est des autres rubans (les « rubans éloignés »), ils sont regroupés par «  $r$  identique », c'est-à-dire tous les rubans ayant la même coordonnée radiale sont regroupés entre eux et considérés comme un seul et unique élément, ayant une densité de courant uniforme et connue. Cette approche réduit considérablement le nombre d'inconnues et donc la dimension de la matrice  $[M_A]$ . Il est possible de procéder de la sorte lorsque les « autres rubans » sont suffisamment éloignés du ruban d'intérêt, car dans ce cas, la contribution au potentiel vecteur dans le ruban d'intérêt est similaire, que l'on considère sa distribution de courant détaillée ou une version uniforme de celle-ci. Il faut bien sûr s'assurer que le nombre d'ampère-tours soit le même dans les deux cas. Afin de systématiser l'approche et de la rendre programmable, chaque ruban est indexé en  $(x, y)$ ,  $x$  allant de 1 au nombre de rubans selon l'axe  $r$  ( $nb\_r$ ), et  $y$  allant de 1 au nombre de rubans selon l'axe  $z$  ( $nb\_z$ ) (Figure 2.12).

Le ruban pour lequel la matrice doit être calculée est discrétisé (i.e. découpé) en plusieurs rectangles élémentaires (au nombre de *division\_1*). Nous choisissons 200 éléments dans le cadre de ce mémoire, ce qui est raisonnable compte tenu des travaux passés sur des problèmes analogues [41]. Les rubans voisins du ruban étudié sont divisés en un nombre plus petit (égal à *division\_2*). Dans le cadre de ce mémoire, *division\_2* est égal à 50 éléments. Les autres rubans sont regroupés par «  $r$ -identiques » et considérés comme étant un seul ruban (Figure 2.13).

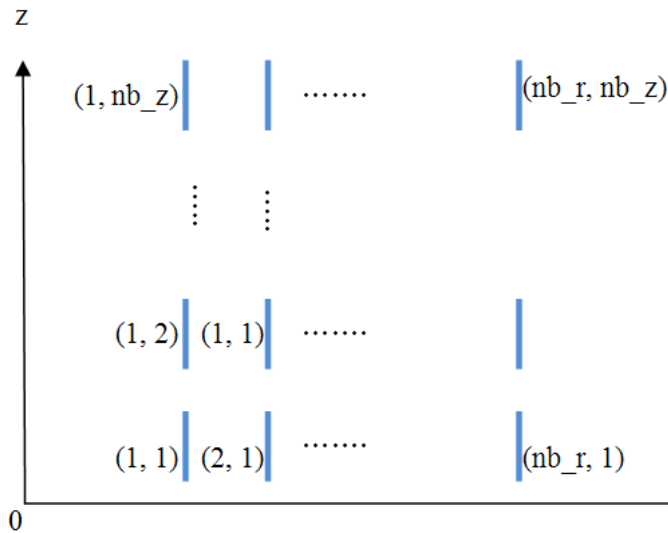


Figure 2.12 : L'indexation des rubans supraconducteurs de la bobine à l'étude

L'indexation des rubans est effectuée afin de pouvoir déterminer quels sont les plus proches voisins du ruban à l'étude et de déterminer quels sont les autres rubans à regrouper. Une fois qu'ils sont tous identifiés, ils sont subdivisés selon leur « statut » (pour le ruban lui-même et ses voisins), et regroupés (pour les autres rubans). La situation est illustrée par l'exemple ci-dessous.

Considérons (de façon arbitraire) un bobinage constitué de 100 rubans supraconducteurs ( $nb_r = 10$  et  $nb_z = 10$ ), et que le ruban indexé (2, 2) est le ruban à l'étude, c'est-à-dire le ruban pour lequel les calculs de la distribution de courant et des pertes AC sont effectués (le ruban rouge sur la Figure 2.13). Les rubans voisins (les rubans verts sur la Figure 2.13) sont au nombre de 8 et sont : (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (1, 3), (3, 2) et (3, 3). Le ruban (2, 2) est donc subdivisé en 200 rubans élémentaires, les 8 voisins en 50 rubans élémentaires et les rubans restant sont regroupés en rubans uniformes équivalents en terme de rayons  $r$  identiques.



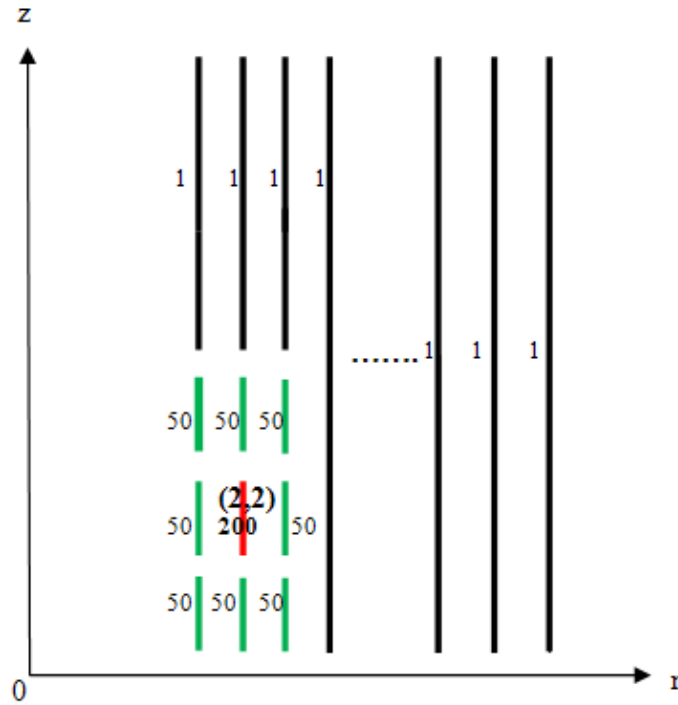


Figure 2.13 : Méthode de l'approximation des rubans éloignés (les chiffres représentent le nombre d'éléments par ruban modélisé)

Pour calculer les pertes AC, il nous faut déterminer la distribution de  $J$ . Nous avons dans notre cas :  $200 + 50 * 8 = 600$  inconnues, au lieu de  $100 * 200 = 20\,000$  inconnues, les courants dans les rubans regroupés (i.e. en noir dans la Figure 2.13) n'étant pas des inconnues. Ces derniers ont chacun une densité de courant uniforme égale à :

$$J = \frac{(\text{nombre de rubans regroupés}) * I_{\text{imposé}}}{\text{largeur totale} * \text{épaisseur}} \quad \text{Équation 2.3}$$

Comme nous travaillons avec un modèle axisymétrique, les quantités d'intérêt sont toutes situées dans le même plan, par exemple  $\phi = 0$ .

Tel que mentionné ci-dessus, on associe à chacun des éléments de la discrétisation une densité de courant constante. Il est donc maintenant possible de calculer la matrice  $M_A$  du ruban à l'étude en

calculant l'influence de chacun des courants sur le potentiel vecteur au point milieu de chacun des éléments du ruban à l'étude et de ses voisins.

On obtient ainsi une matrice  $[M_A]$  de taille :  $n_I \times n_{tot}$ , où :

$n_I$ : nombre d'inconnues (exclut les rubans regroupés) ;

$n_{tot}$ : nombre total de rubans élémentaires après discrétisation et regroupement (rubans regroupés inclus). Dans l'exemple de la Figure 2.13,  $n_I = 600$  et  $n_{tot} = 610$ .

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n_I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{ma_{1,1} \dots \dots \dots ma_{1,n_{tot}}}^{n_{tot}} \\ \vdots \\ \underbrace{ma_{n_I,1} \dots \dots ma_{n_I,n_I}}_{n_I} \quad \underbrace{ma_{n_I,n_I+1} \dots \dots ma_{n_I,n_{tot}}}_{n_{tot}-n_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_{tot}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} J_a (n_I) \\ J_b \end{matrix} \quad \text{Équation 2.4}$$

$M_{A1} \qquad M_{A2}$

$J$

On peut réécrire la forme matricielle de manière plus compacte ainsi :

$$A = M_{A1}J_a + M_{A2}J_b \quad \text{Équation 2.5}$$

Avec  $J_a$  et  $J_b$  des vecteurs colonnes tels que  $J_a = J_{\{1,n_I\}}$  et  $J_b = J_{\{n_I+1,n_{tot}\}}$ .

D'après [35] et l'Équation 2.2, on sait que :

$$A_i = [M_{A1,i}]_{1 \times n_I} [J]_{n_I \times 1} + A_{ext,i}, \quad \text{Équation 2.6}$$

où  $[M_{A1,i}]$  correspond à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $[M_{A1}]$ , et  $A_{ext,i}$  à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $A_{ext}$ .

Le potentiel vecteur extérieur  $A_{ext}$  est le potentiel généré par les rubans « éloignés » dont on connaît la distribution de courant, d'où :

$$A_{ext} = [M_{A2}][J_b]. \quad \text{Équation 2.7}$$

Sachant que  $M_{A1} = [M_A]_{n_I \times n_I}$  et avec l'équation 2.7, il est possible de réécrire l'équation 1.16 sous forme vectorielle:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{n_I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 J_1 \\ \rho_2 J_2 \\ \vdots \\ \rho_{n_I} J_{n_I} \end{bmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} M_{A1} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_{n_I} \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A_{ext,1} \\ A_{ext,2} \\ \vdots \\ A_{ext,n_I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \nabla V_{n_I} \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2.8}$$

Comme on l'a mentionné plus haut,  $\nabla V$  est constant et donc indépendant de  $r$  et de  $z$ .  $\nabla V$  représente une seule inconnue par conducteur et sa valeur est identique pour chaque élément appartenant à ce conducteur. De plus, afin de spécifier un courant  $I_s$  imposé par une source externe, une équation supplémentaire va être ajoutée afin de contraindre le courant dans les rubans à être égal au courant de la source. Pour un seul ruban on a :

$$I_s = [c_{1,1} \ c_{1,2} \ \dots \ \dots \ c_{1,n_I}] \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ J_{n_I} \end{bmatrix}, \quad \text{Équation 2.9}$$

avec :

$$C = [c_{1,1} \ c_{1,2} \ \dots \ \dots \ c_{1,n_I}],$$

tous les coefficients  $c_{i,i}$  étant identiques, car on découpe le ruban de manière à ce que chaque élément ait la même surface :  $c_{i,i} = (\text{largeur} * \text{épaisseur})/n$ ,  $n$  étant le nombre de subdivision par ruban.

Une bobine, elle, est constituée de plusieurs rubans sur lesquels il faut imposer un courant  $I_s$ . Aussi, l'aire des éléments rectangulaires n'est pas toujours égale selon que l'élément appartient au ruban à l'étude ou à un ruban voisin.

Si on note  $n_r$  le nombre de rubans constituant la bobine on a :

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,division_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{v1,1} & c_{v1,2} & \dots & c_{v1,division_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{v2,1} & c_{v2,2} & \dots & c_{v2,division_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{vn_v,1} & c_{vn_v,2} & \dots & c_{vn_v,division_2} \end{bmatrix},$$

avec :

- $c_{1,i} = \frac{\text{largeur} * \text{epaisseur}}{\text{division}_1} \quad (1 \leq i \leq \text{division}_1)$
- $c_{vj,i} = \frac{\text{largeur} * \text{epaisseur}}{\text{divison}_2} \quad (1 \leq j \leq \text{nombre de voisins et } 1 \leq i \leq \text{division}_2)$
- $\text{division}_1$ : le nombre d'éléments du ruban à l'étude
- $\text{division}_2$ : le nombre d'éléments des rubans voisins

Et on a :

$$\begin{bmatrix} I_{s1} \\ I_{s2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{sn_I} \end{bmatrix} = [C] \cdot [J] \quad \text{Équation 2.10}$$

L'Équation 1.18 devient [35] :

$$-\begin{bmatrix} M_{A_1} & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} J \\ \nabla V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\rho(J_i)]_{n_I * n_I} [J]_n + \frac{\partial A_{ext}}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial t} I_s \end{bmatrix}, \quad \text{Équation 2.11}$$

$B$  étant la matrice augmentée qui permet d'introduire le gradient de potentiel. La dérivée temporelle  $\frac{\partial}{\partial t} I_s$  est effectuée, pour ne pas se retrouver avec des termes en  $J$ , et d'autres en  $\frac{\partial J}{\partial t}$ , c'est-à-dire avec un système d'équations différentielles algébriques, qui est beaucoup plus difficile à traiter.

Avec l'équation 2.7, l'équation 2.11 devient :

$$-\begin{bmatrix} M_{A_1} & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} J \\ \nabla V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\rho(J_i)]_{n_I * n_I} [J]_{n_I} + \frac{\partial (M_{A_2} * J_b)}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial t} I_s \end{bmatrix}, \quad \text{Équation 2.12}$$

que l'on peut expliciter ainsi :

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c|cccc} & \overbrace{1 + n_{\text{voisins}}} & & & \\ \hline \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]}_{= M_A^+} \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \partial J_1 / \partial t \\ \partial J_2 / \partial t \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \partial I_{n_I} / \partial t \\ \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \nabla V_{n_I} \end{array} \right]} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \rho_1 J_1 + \partial(M_{A_2} J_b)_1 / \partial t \\ \rho_2 J_2 + \partial(M_{A_2} J_b)_2 / \partial t \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_{v_I} I_{n_I} + \partial(M_{A_2} J_b)_{n_I} / \partial t \\ \partial I_s / \partial t \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \partial I_s / \partial t \end{array} \right]}_{= U} \quad \text{Équation 2.13}$$

Pour les « rubans éloignés », la densité de courant est connue. Les termes  $J_b$  sont données par :

$$J_b = \frac{N_i}{L_i \cdot e_i} \cdot I_s \quad \text{Équation 2.14}$$

avec :

- $N_i$  : le nombre de rubans dans la colonne en question (nombre de rubans regroupés)
- $L_i$  : la longueur de cette colonne de rubans (« ruban regroupé »)
- $e_i$  : l'épaisseur du « ruban regroupé »
- $I_s$  : le courant dans un ruban individuel.

On peut alors écrire :

$$A_{ext} = M_{A2} J_b \quad \text{Équation 2.15}$$

$$\frac{\partial A_{ext}}{\partial t} = \frac{\partial M_{A2} J_b}{\partial t} \quad \text{Équation 2.16}$$

Comme il n'y a que le courant  $I_s$ , imposé par une source externe, qui dépende du temps, on peut écrire :

$$\frac{\partial A_{ext}}{\partial t} = M_{A2} \left[ \frac{N_i}{L_i \cdot e_i} \right] \frac{\partial I_s}{\partial t} \quad \text{Équation 2.17}$$

où  $\frac{\partial I_s}{\partial t}$  est une quantité scalaire, et  $\left[ \frac{N_i}{L_i \cdot e_i} \right]$  est un vecteur colonne de la même taille que  $J_b$ .

Une fois le produit matrice vecteur effectué, il ne reste qu'un vecteur colonne de même dimension que  $J_b$ . Appelons ce vecteur colonne «  $[q]$  » :

$$\frac{\partial A_{ext}}{\partial t} = q \frac{\partial I_s}{\partial t} \quad \text{Équation 2.18}$$

Finalement, on substitue l'équation 2.18 dans 2.11 pour obtenir :

$$-\begin{bmatrix} M_{A1} & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} J \\ \nabla V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\rho(J_i)]_{n \times n} [J]_n + q_i \frac{\partial I_s}{\partial t} \\ -\frac{\partial}{\partial t} I_s \end{bmatrix}, \quad \text{Équation 2.19}$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} M_{A1} \\ C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial J_1 / \partial t \\ \partial J_2 / \partial t \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \partial J_{n_l} / \partial t \\ \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \nabla V_{n_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 J_1 + q_1 \partial I_s / \partial t \\ \rho_2 J_2 + q_2 \partial I_s / \partial t \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_{n_l} J_{n_l} + q_{n_l} \partial I_s / \partial t \\ \partial I_s / \partial t \\ \partial I_s / \partial t \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \partial I_s / \partial t \end{bmatrix} \quad \text{Équation 2.20}$$

Appelons  $M_J$  la matrice qui contient les  $n_I$  premières lignes de la matrice inverse de  $M_{A+}$  ( $M_{A+}^{-1}$ )

$$M_J = M_{A+\{1..n_I\}}^{-1}. \quad \text{Équation 2.21}$$

Finalement nous avons :

$$\left[ \frac{\partial J}{\partial t} \right] = -M_J U. \quad \text{Équation 2.22}$$

Le vecteur  $\left[ \frac{\partial J}{\partial t} \right]$  contient la dérivée temporelle de  $J$  à chacun des éléments. Afin de solutionner  $J(t)$ , il ne reste qu'à intégrer numériquement à partir de la condition initiale  $J(0)$ . Il s'agit de discrétiser l'intégrale en utilisant, par exemple la méthode d'Euler ou Runge-Kutta. Pour améliorer la convergence du problème, il est recommandé d'utiliser les algorithmes adaptés comme ceux de Matlab qui sont spécialement conçus pour traiter les problèmes à forme matricielle (ode45, ode113, ode15s...) [42], ou d'utiliser des solvers plus sophistiqués, tels que « DASSL » ou « DASPK » [43, 44]. Ces derniers sont disponibles à titre de « open source codes ». Dans le cadre de ce projet, les solvers de *SUNDIALS solver suite* [40] sont utilisés.

### 2.2.3 Calcul des pertes AC

Les pertes AC par cycle et par unité de longueur du ruban (J/m/cycle) peuvent être calculées à partir de la distribution de courant  $J$  obtenue précédemment, et avec l'Équation 1.22.

On calcule les pertes ruban par ruban. Sachant que, sur chaque élément, la densité de courant est uniforme, et que le ruban à l'étude est divisé en  $n$  éléments, les pertes AC par cycle par unité de longueur de ruban sont :

$$Q_{ruban} = \sum_{i=1}^n S_i \rho_i J_i^2 T = ST \sum_{i=1}^n \rho_i J_i^2, \quad \text{Équation 2.23}$$

où  $T$  est la période temporelle du signal AC,  $S$  est l'aire de la section rectangulaire des éléments, où tous les éléments ont une section identique, i.e. pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $S_i = S$ .

### 2.2.4 Conclusion

Le modèle numérique développé dans ce chapitre est appelé « Méthode Intégrale Semi-Découplée » (MISD), qui traduit le fait que cette méthode calcule les pertes en plusieurs étapes distinctes plutôt que d'un seul coup. Les interactions électromagnétiques entre les rubans sont prises en compte, avec un niveau de détail plus important à courte portée, et simplifié à longue portée. Cette simplification consiste à regrouper les rubans plus éloignés du ruban à l'étude et à y approximer la densité de courant comme étant uniforme. L'acronyme MARE (Méthode d'Approximation des Rubans Éloignés) a été introduit pour désigner cette approche.



## CHAPITRE 3 SIMULATIONS ET VALIDATION

### 3.1 Simulations

Dans cette partie, la méthode intégrale semi-découplée (MISD) introduite au chapitre 2 est testée pour différentes configurations de bobines à base de rubans supraconducteurs. Afin de valider la MISD, les résultats de pertes AC obtenus par le biais de cette dernière sont comparés à ceux obtenus avec Comsol.

#### 3.1.1 Ruban supraconducteur simple

Le premier cas de référence consiste en la vérification du code numérique pour un ruban supraconducteur simple (bobine avec un seul tour) (Figure 3.1).

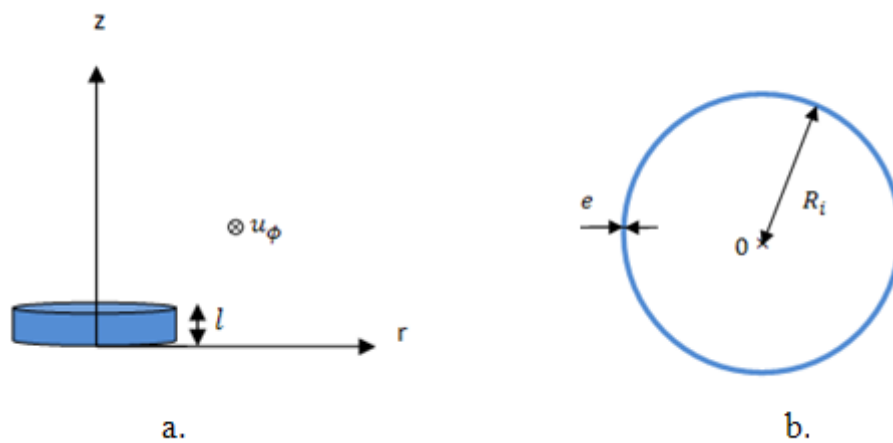
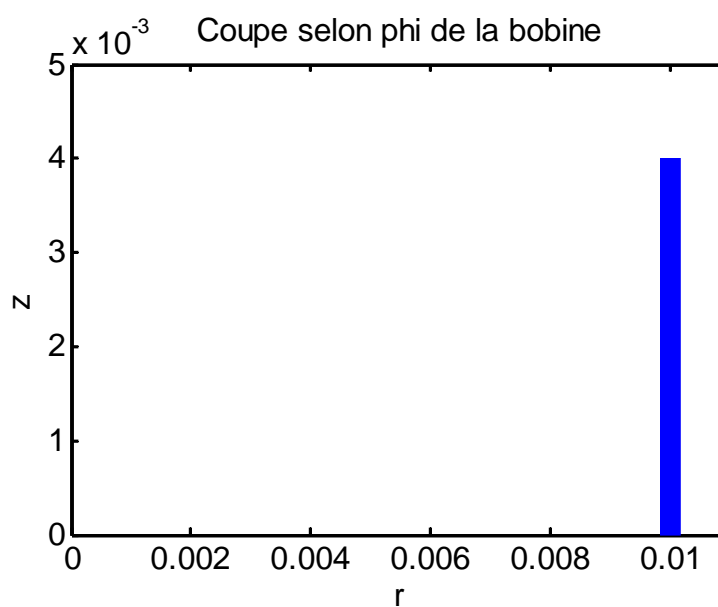


Figure 3.1 : Ruban supraconducteur simple en forme de « pancake » (a) en coordonnées cylindriques, (b) vue du dessus

À une fréquence égale à 50 Hz, la simulation est faite sur deux cycles, c'est-à-dire pour 40 ms, ceci parce qu'il faut un certain temps pour que le régime permanent soit atteint (environ un demi-cycle). Les pertes AC totales qui sont comparées sont seulement celles du deuxième cycle, afin de s'assurer que le régime permanent soit déjà bien atteint et ainsi éviter des incohérences dues au démarrage (initialisation du problème). Les paramètres de la simulation sont donnés au Tableau 3.1, et la coupe selon l'axe orthoradial du ruban et la discrétisation de ce dernier sont illustrées à la Figure 3.2 et à la Figure 3.3.

Tableau 3.1 : Valeurs des paramètres pour la simulation d'un ruban supraconducteur simple

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur</i>
Largeur	4 mm
Épaisseur	10 $\mu\text{m}$
Rayon intérieur	1 cm
Nombre d'éléments	100
Courant critique ( $I_c$ )	100 A
Courant de transport ( $I_{ext}$ )	$0,7 \cdot I_c = 70$ A
Indexe de la loi de puissance ( $n$ )	50
Champ électrique ( $E_0$ )	1 $\mu\text{V/cm}$
Fréquence	50 Hz

Figure 3.2 : Coupe selon  $\phi$  du ruban supraconducteur simple (l'épaisseur du ruban n'est pas à l'échelle)

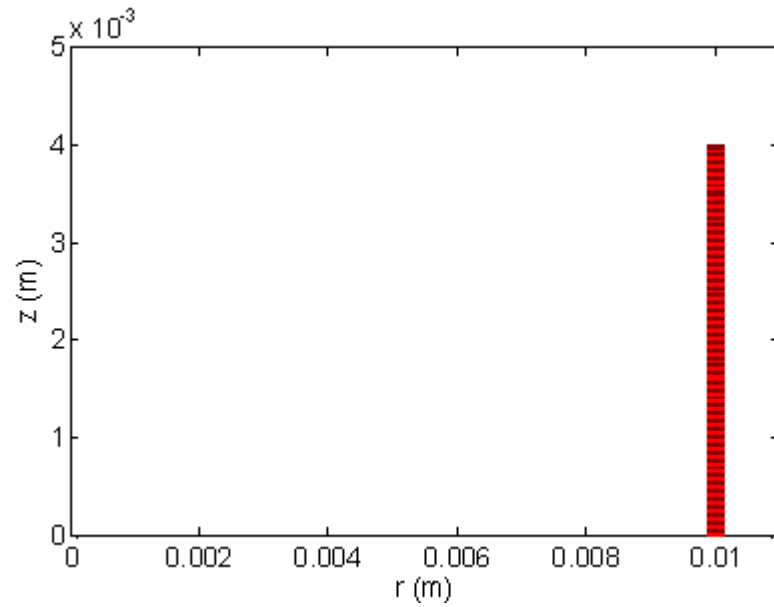


Figure 3.3 : Discretisation du ruban en 200 éléments (l'épaisseur n'est pas à l'échelle)

Les résultats obtenus pour les pertes AC sont présentés à la Figure 3.4 et au Tableau 3.2:

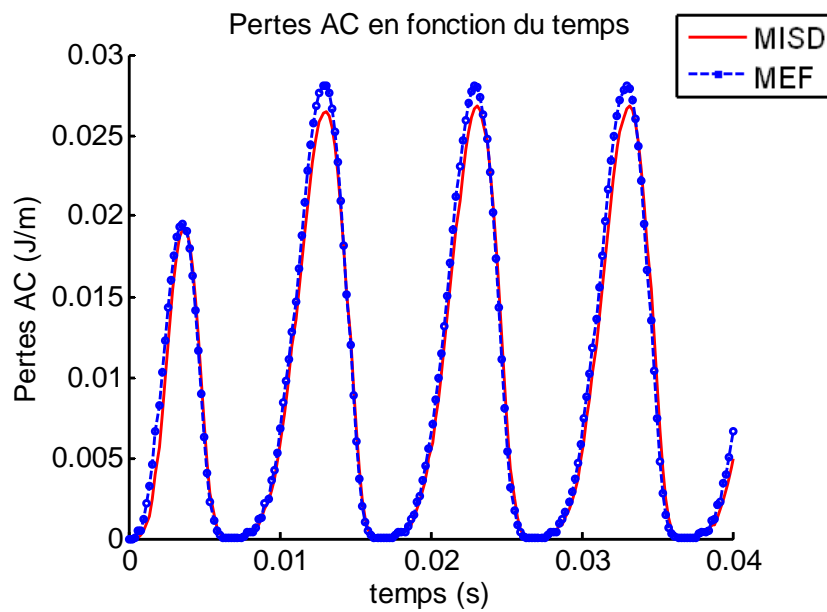


Figure 3.4 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode intégrale semi-découplée sur Matlab et avec la méthode des éléments finis sur Comsol pour un ruban supraconducteur simple

Tableau 3.2 : Tableau des résultats et comparaison pour un ruban simple

<i>Pertes AC totales pour le 2<sup>e</sup> cycle</i>	
Pertes MEF	$2.0526 \times 10^{-4}$ J/m/cycle
Pertes MISD	$1.9851 \times 10^{-4}$ J/m/cycle
<b>Différence relative : 3.3%</b>	

Les résultats obtenus avec les deux méthodes sont très proches. Cependant, nous remarquons une légère différence entre les deux résultats. En effet, les pertes AC calculées par la MEF avec Comsol est sont plus élevées que celles obtenus par la MISD. Nous pouvons émettre l'hypothèse d'une sous-estimation des pertes AC avec la MISD ou au contraire d'une sur-estimation des pertes AC avec la MEF sur Comsol. Néanmoins, la différence relative étant seulement de quelques pourcents, la MISD pour un ruban supraconducteur simple est vérifiée avec Comsol. Il est ensuite nécessaire de vérifier si la même conclusion peut être faite pour une bobine constituée de plusieurs rubans. De plus, l'hypothèse de l'approximation des rubans éloignés doit être vérifiée.

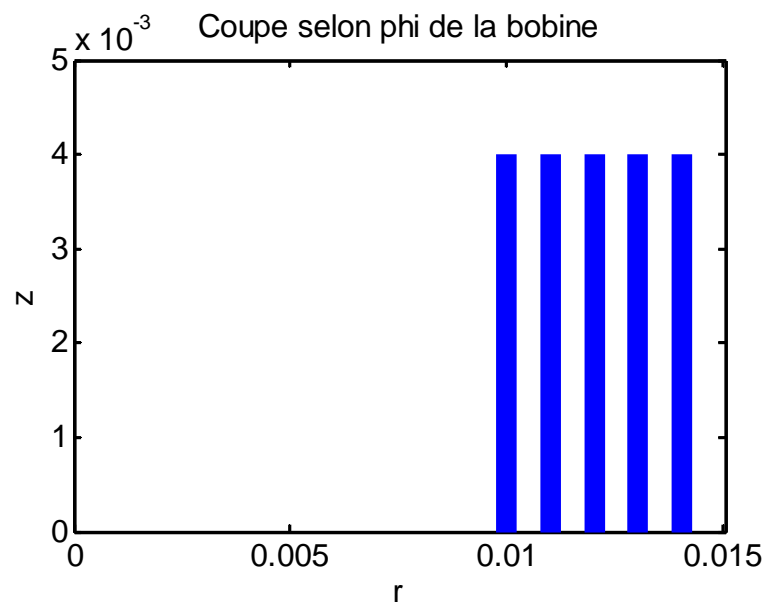
### 3.1.2 Bobine constituée de plusieurs rubans supraconducteurs

#### 3.1.2.1 Bobine 5×1

Le modèle numérique est testé pour une bobine constituée de 5 rubans qui se superposent en forme de « pancake ». Les paramètres de simulation sont présentés au Tableau 3.3, et la coupe de la bobine selon l'axe orthoradial et la discrétisation des rubans sont illustrées à la Figure 3.5 et à la Figure 3.6.

Tableau 3.3 : Valeurs des paramètres pour la simulation de la bobine 5×1

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur</i>
Nombre de rubans selon $r$	5
Nombre de rubans selon $z$	1
Nombre total de rubans	5
Largeur des rubans	4 mm
Épaisseur des rubans	10 $\mu\text{m}$
Rayon intérieur	1 cm
Nombre d'éléments par ruban	200
Courant critique ( $I_c$ )	100 A
Courant de transport ( $I_{ext}$ )	$0,7I_c = 70$ A
Indexe de la loi de puissance ( $n$ )	50
Champ électrique ( $E_0$ )	1 $\mu\text{V/cm}$
Fréquence	50 Hz

Figure 3.5 : Coupe selon  $\phi$  de la bobine 5×1 (l'épaisseur n'est pas à l'échelle)

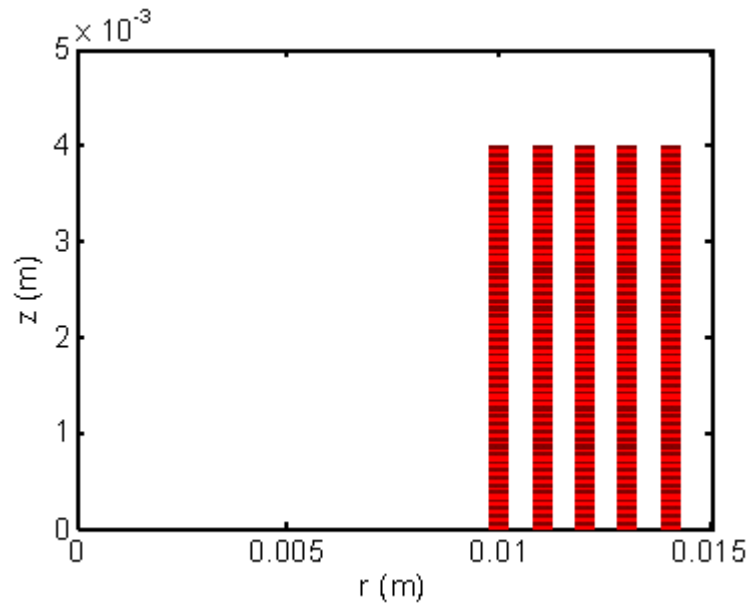


Figure 3.6 : Discretisation des rubans de la bobine 5×1. Chaque ruban est subdivisé en 200 éléments (l'épaisseur pas à l'échelle)

Les résultats obtenus pour les pertes AC sont présentés à la Figure 3.7 et au Tableau 3.4, et les profils de densité de courant sur chaque ruban obtenus sur Matlab et Comsol à un temps  $t$  donné sont donnés à la Figure 3.8.

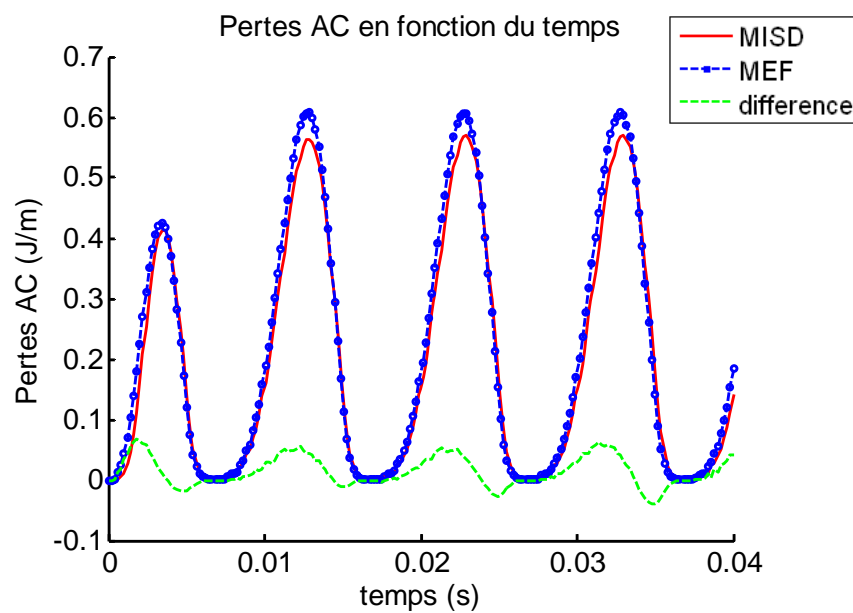


Figure 3.7 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode intégrale semi-découplée sur Matlab et avec la méthode des éléments finis sur Comsol pour une bobine  $5 \times 1$

Tableau 3.4 : Tableau des résultats et comparaison pour une bobine  $5 \times 1$

<i>Pertes AC totales pour le 2<sup>e</sup> cycle</i>	
Pertes MEF	$4.6581 \times 10^{-3}$ J/m/cycle
Pertes MISD	$4.3930 \times 10^{-3}$ J/m/cycle
<b>Différence relative : 5.69 %</b>	

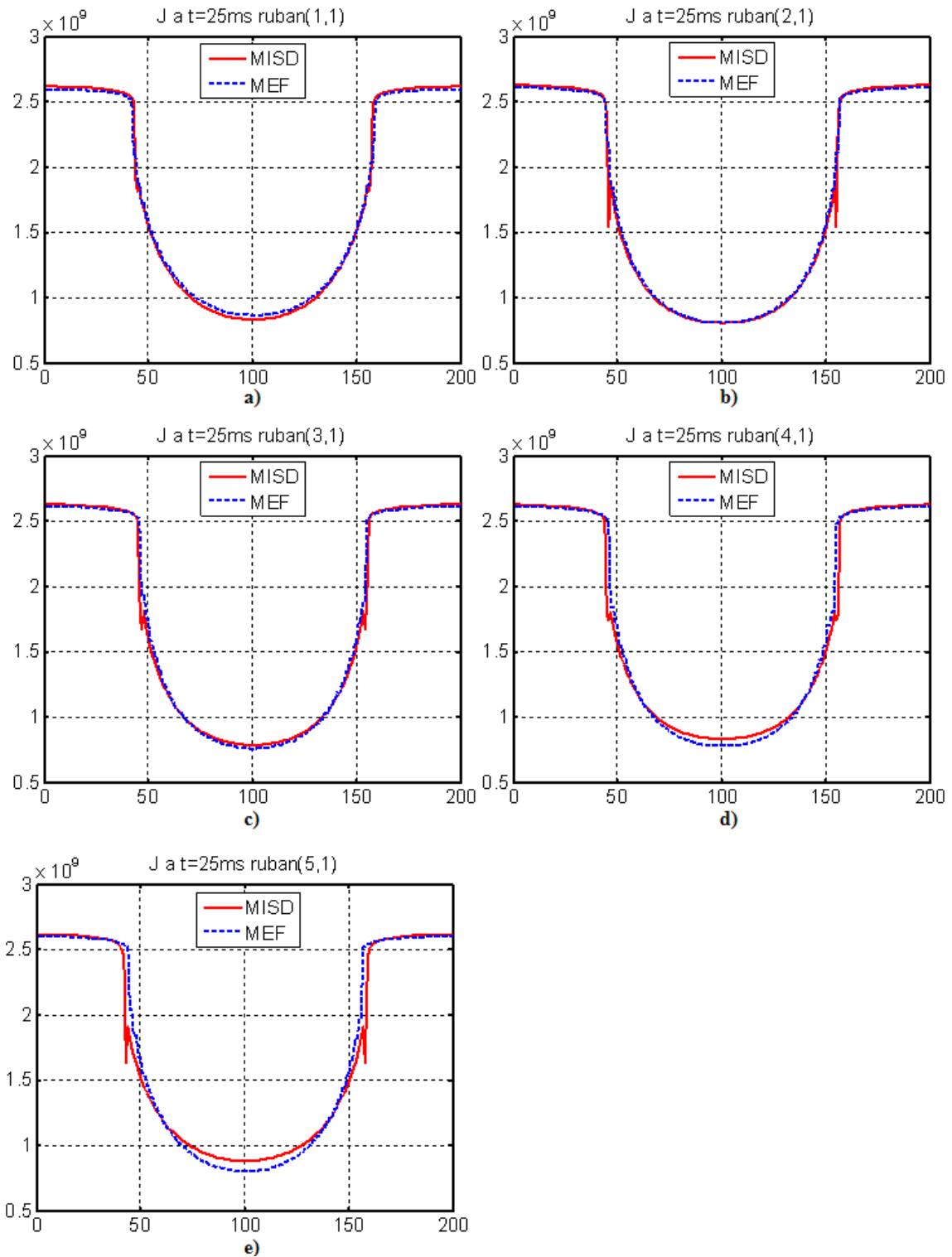


Figure 3.8 : Profils de la densité de courant de la bobine  $5 \times 1$  sur tous les rubans à  $t = 25$  ms obtenus sur Matlab et Comsol : a) ruban(1,1), b) ruban(2,1), c) ruban(3,1), d) ruban(4,1), e) ruban(5,1)



Comme pour le cas du ruban simple, les pertes AC calculées par la MISD est plus petite que celles obtenues avec la MEF. L'hypothèse de la sous-estimation des pertes AC avec la MISD ou la sur-estimation de celles-ci avec la MEF reste toujours valable. Aussi, les formes de la densité de courant sur chacun des rubans sont semblables mais nous observons des discontinuités dans les profils de courant obtenus avec la MISD près des régions où  $J = 0$ . La présence des celles-ci permet de soupçonner une petite dérive numérique de la solution à ce point précis, ce qui pourrait expliquer les différences observées au niveau des pertes lorsque l'on compare avec la MEF. Cependant, cela reste à confirmer. Néanmoins, la différence relative est de 5.69%, ce qui reste relativement raisonnable.

### 3.1.2.2 Bobine 1×5

La MISD est testée pour une bobine constituée de 5 rubans qui se suivent selon l'axe vertical  $z$ . Les paramètres de simulation sont présentés au Tableau 3.5, et la coupe de la bobine selon l'axe orthoradial ainsi que la discrétisation des rubans sont illustrées à la Figure 3.9 et à la Figure 3.10.

Tableau 3.5 : Valeurs des paramètres pour la simulation de la bobine 1×5

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur</i>
Nombre de rubans selon $r$	1
Nombre de rubans selon $z$	5
Nombre total de rubans	5
Largeur des rubans	4 mm
Épaisseur des rubans	10 $\mu\text{m}$
Rayon intérieur	1 cm
Nombre d'éléments par ruban	200
Courant critique ( $I_c$ )	100 A
Courant de transport ( $I_{ext}$ )	$0,7I_c = 70$ A
Indexe de la loi de puissance ( $n$ )	50
Champ électrique ( $E_0$ )	1 $\mu\text{V/cm}$
Fréquence	50 Hz

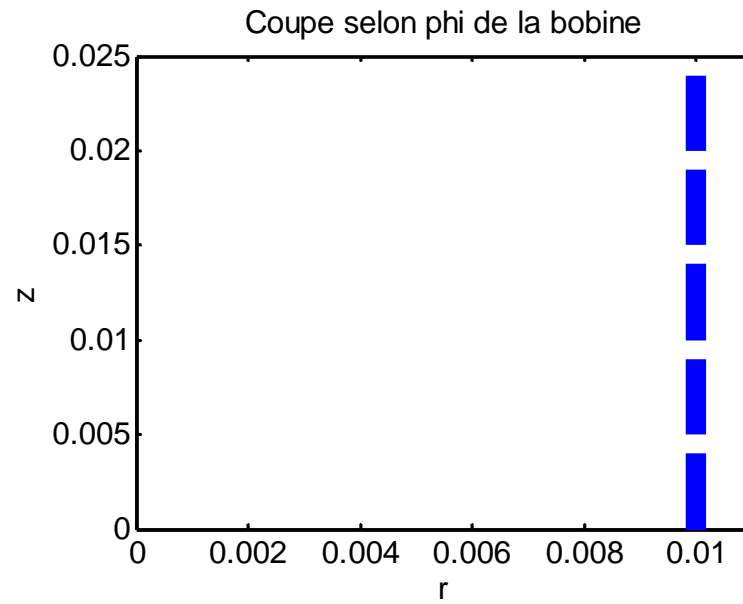


Figure 3.9 : Coupe selon  $\phi$  de la bobine 1×5 (épaisseur pas à l'échelle)

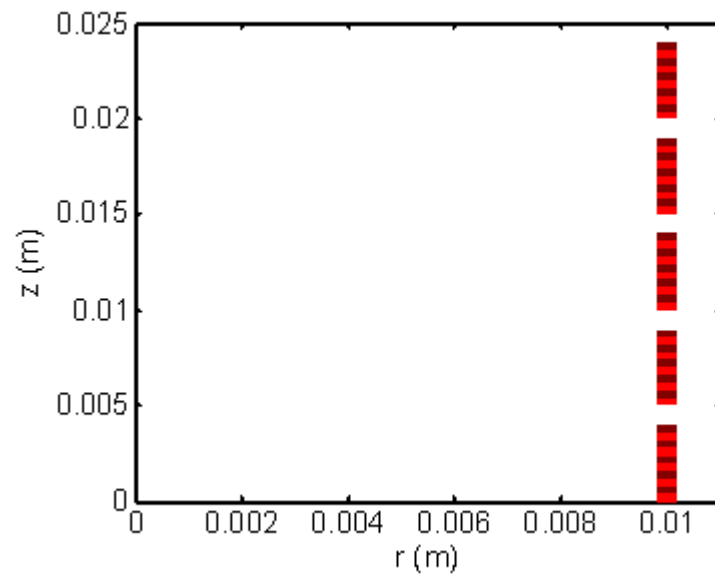


Figure 3.10 : Discretisation des rubans de la bobine 1×5. Chaque ruban est subdivisé en 200 éléments (l'épaisseur n'est pas à l'échelle)

Les résultats pour les pertes AC obtenus sont présentés à la Figure 3.11 et au Tableau 3.6.

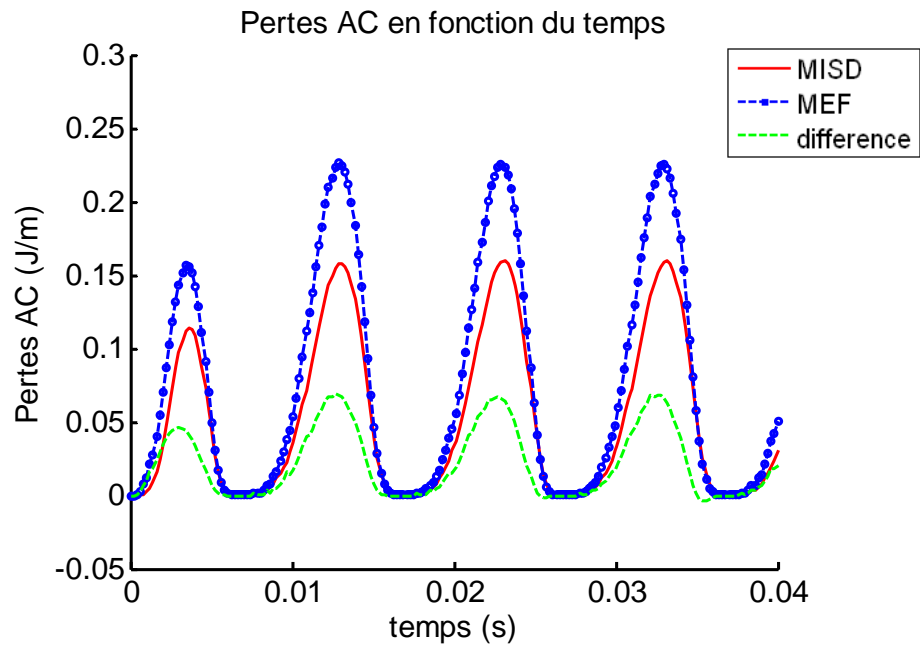


Figure 3.11 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode intégrale semi-découplée sur Matlab et avec la méthode des éléments finis sur Comsol pour une bobine 1×5

Tableau 3.6 : Tableau des résultats et comparaison pour la bobine 1×5

<i><b>Pertes AC totales pour le 2<sup>e</sup> cycle</b></i>	
Pertes MEF	$1.662 \times 10^{-3} \text{ J/m/cycle}$
Pertes MISD	$1.1871 \times 10^{-3} \text{ J/m/cycle}$
<b>Différence relative : 28.57 %</b>	

Les profils de densité de courant sur chacun des rubans obtenus sur Matlab avec la MISD et sur Comsol à un temps  $t$  donné sont comparés à la Figure 3.12.

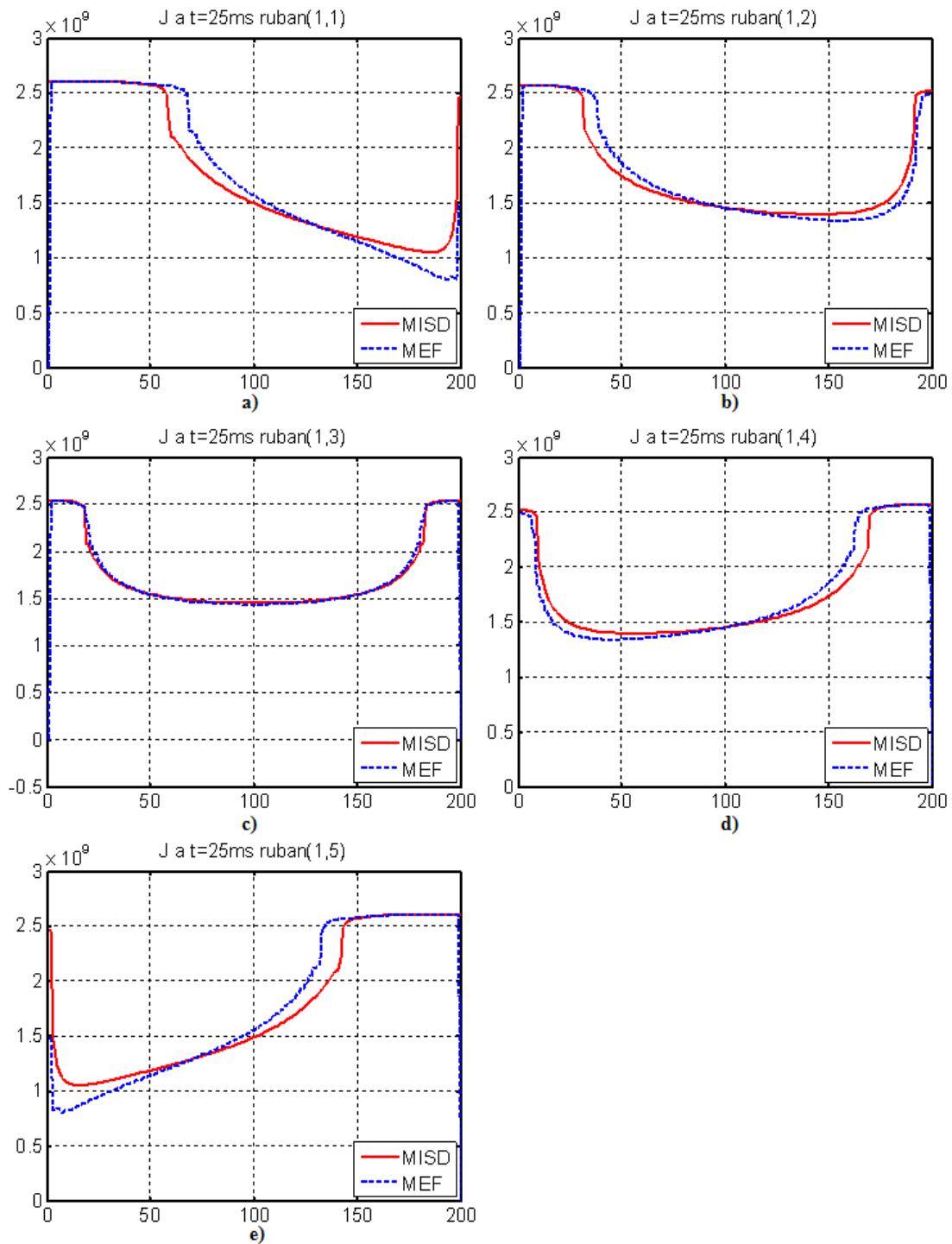


Figure 3.12 : Profils de la densité de courant de la bobine 1×5 sur tous les rubans à  $t = 25$  ms obtenus sur Matlab et Comsol : a) ruban(1,1), b) ruban(1,2), c) ruban(1,3), d) ruban(1,4), e) ruban(1,5)

Pour cette bobine, la différence relative est de 28.57%, ce qui est relativement élevée. Comme les cas précédents, on observe que les pertes AC calculées à l'aide de Comsol sont plus élevées que celles calculées avec Matlab. On peut encore une fois se demander si Comsol surestimerait les pertes AC ou qu'au contraire, si la MISD sous-estimerait celles-ci. Aussi, lorsque nous observons les profils de la densité de courant sur chacun des rubans, nous remarquons que plus on va vers les extrémités de la bobine, plus la différence entre les résultats obtenus sur Comsol et Matlab est grande. Ceci peut être dû au fait que plus on se rapproche des frontières délimitant la surface de l'air (domaine d'étude) dans la MEF, plus les résultats diffèrent d'avec la MISD. Pour vérifier si l'erreur vient effectivement du fait de la proximité aux frontières, l'aire du domaine d'étude est agrandie sur Comsol et les résultats sont comparés.

Tableau 3.7 : Comparaison de la différence relative

<i>Erreurs relatives (entre MISD et MEF)</i>	
MEF (précédent)	28.57 %
MEF avec une plus grande surface de l'air	28.57 %
<b>Amélioration : 0%</b>	

La différence relative n'est pas améliorée par un agrandissement de la surface d'air. Notre hypothèse est donc invalide.

La différence relative peut être expliquée par le fait que les méthodes de résolution utilisées sont différentes, l'une étant une méthode intégrale et l'autre la méthode des éléments finis. Cependant, les deux solutions devraient converger si on augmente le nombre d'éléments pour le cas de la méthode intégrale et si on raffine le maillage pour la méthode des éléments finis. Afin de vérifier ceci, nous faisons varier le nombre d'éléments d'un ruban pour la MISD et sur Comsol le maillage est raffiné ; on vérifie ensuite si on observe une convergence vers une solution commune. Le test est réalisé sur un ruban simple (le cas le plus simple) pour ne pas rencontrer de problèmes de saturation de mémoire. Sur Matlab, on fait varier la discrétisation du ruban entre 50 et 500 éléments. De même sur Comsol, chaque ruban est maillé avec un nombre

d'éléments variant entre 50 et 500, et on choisit un maillage « normal » pour l'air. De plus, sur Comsol, on solutionne d'abord avec l'utilisation de fonctions de bases d'ordre 2 (quadratiques), puis d'ordre 3 (cubiques), afin de voir si le choix de l'ordre aurait un impact sur la convergence.

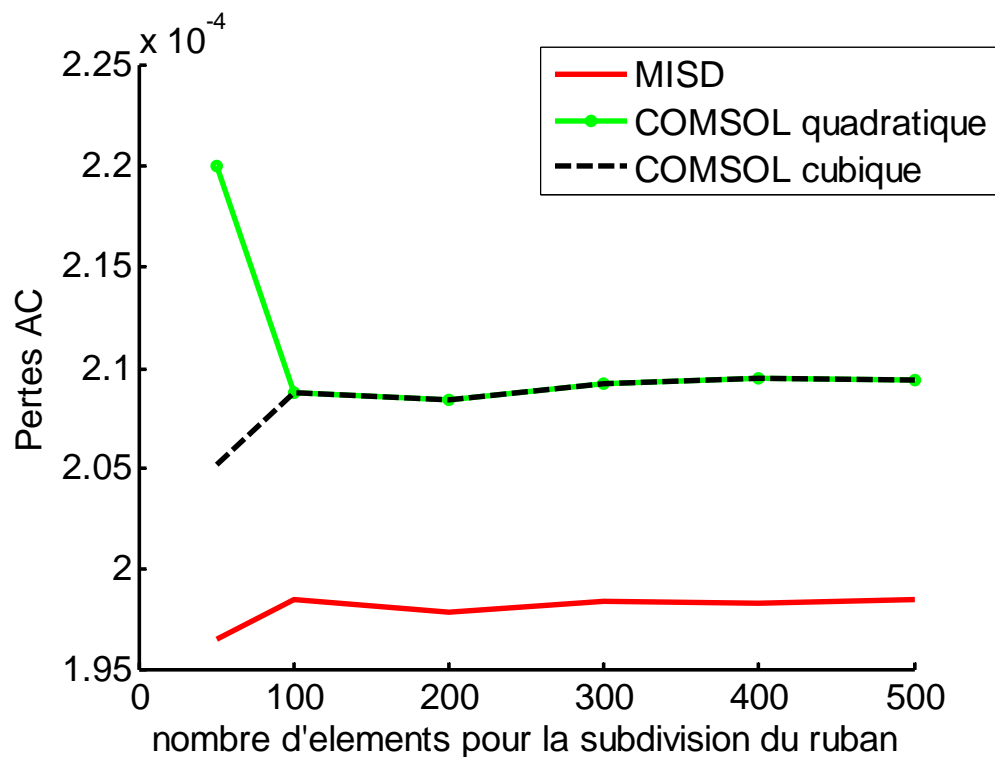


Figure 3.13 : Comparaison des pertes AC calculées avec la MISD et sur Comsol pour différents nombre d'éléments par ruban

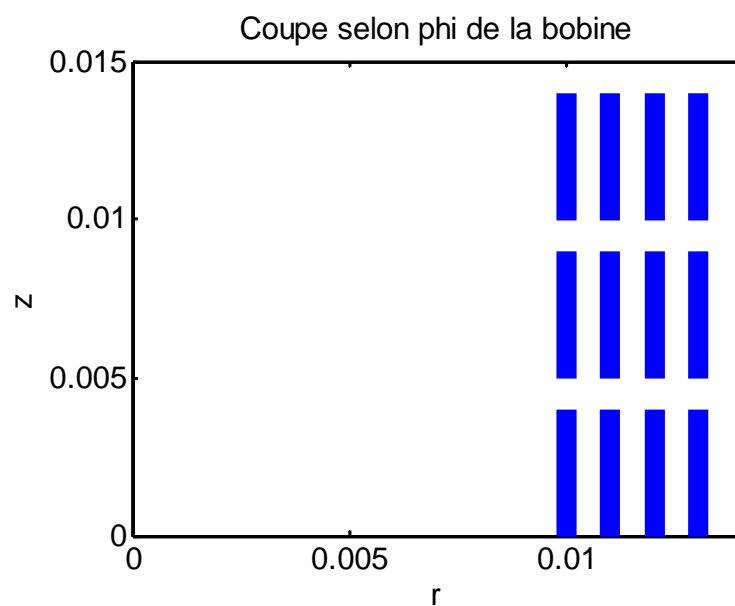
On observe que chaque méthode converge bien vers une solution, mais différente. Il faut donc poser d'autres hypothèses afin d'identifier la cause de ces différences. Dans le cadre de ce mémoire, par manque de temps, il n'a pas été possible d'apporter une solution à ce problème.

### 3.1.2.3 Bobine 4×3

La MISD est testée pour une bobine constituée de 12 rubans (bobine 4×3). Les paramètres de simulation sont présentés au Tableau 3.8, et la coupe de la bobine selon l'axe orthoradial ainsi que la discrétisation des rubans sont illustrées à la Figure 3.14 et à la Figure 3.15.

Tableau 3.8 : Valeurs des paramètres pour la simulation de la bobine 4×3

<i>Paramètre</i>	<i>Valeur</i>
Nombre de rubans selon r	4
Nombre de rubans selon z	3
Nombre total de rubans	12
Largeur des rubans	4 mm
Épaisseur des rubans	10 $\mu\text{m}$
Rayon intérieur	1 cm
Nombre d'éléments par ruban	200
Courant critique ( $I_c$ )	100 A
Courant de transport ( $I_{ext}$ )	$0,7I_c = 70 \text{ A}$
Index de la loi de puissance ( $n$ )	50
Champ Électrique ( $E_0$ )	1 $\mu\text{V/cm}$
Fréquence	50 Hz

Figure 3.14 : Coupe selon  $\phi$  de la bobine 4×3 (épaisseur pas à l'échelle)

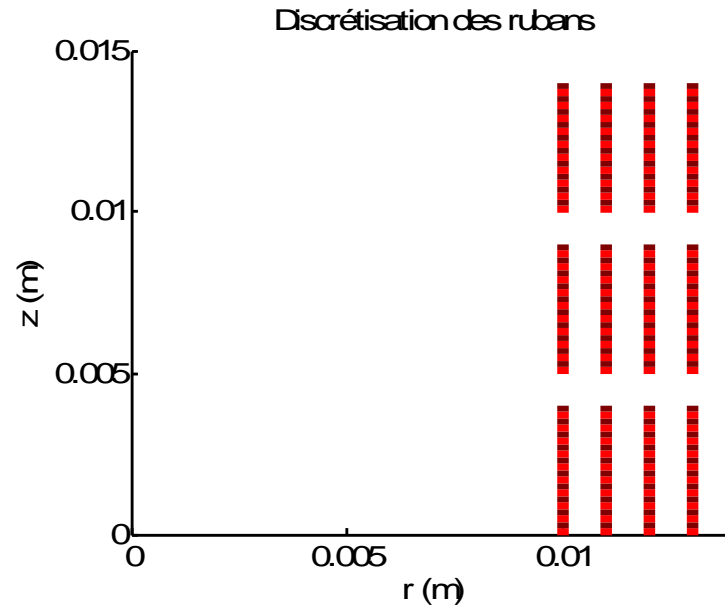


Figure 3.15 : Discretisation des rubans de la bobine 4×3. Chaque ruban est discrétisé en 200 éléments (l'épaisseur n'est pas à l'échelle)

Les résultats pour les pertes AC obtenus sont présentés à la Figure 3.16 et au Tableau 3.9.

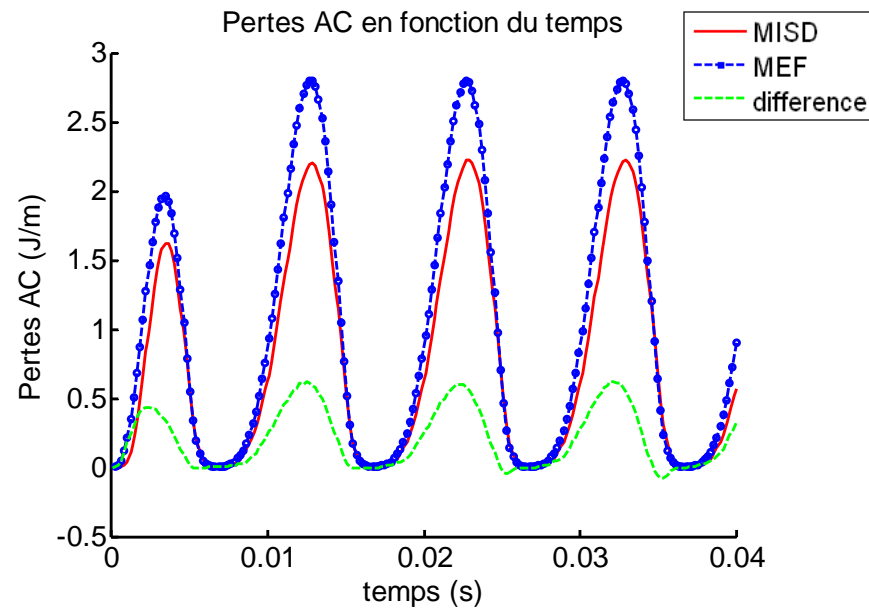


Figure 3.16 : Pertes AC en fonction du temps calculées avec la méthode des éléments finis sur Comsol et avec la méthode intégrale sur Matlab pour une bobine 4×3



Tableau 3.9 : Tableau des résultats et comparaison pour la bobine 4×3

<i>Pertes AC totales pour le 2<sup>e</sup> cycle</i>	
Pertes MEF	$2,171 \times 10^{-2} \text{ J/m/cycle}$
Pertes MISD	$1,7348 \times 10^{-2} \text{ J/m/cycle}$
<b>Différence relative : 20,09 %</b>	

La différence relative est de l'ordre de 20%. Nous observons toujours une sous estimation des pertes AC avec la MISD. Il est aussi important d'observer les formes des densités de courant sur chacun des rubans. La Figure 3.17 et la Figure 3.18 illustrent les profils de la densité de courant sur chaque ruban constituant la bobine à  $t=25\text{ms}$ , et on observe tel que précédemment, que les profils de courant sont bien semblables, mais plus on va vers les extrémités de la bobine et vers la couche externe de celle-ci, moins les profils se superposent. L'origine de ces différences reste donc un élément à éclaircir (sous l'hypothèse que les résultats de Comsol sont fidèles à la réalité). Malheureusement, il n'existe pas d'autres codes qui font ces mêmes calculs de pertes AC et qui pourraient jouer le rôle d'arbitre.

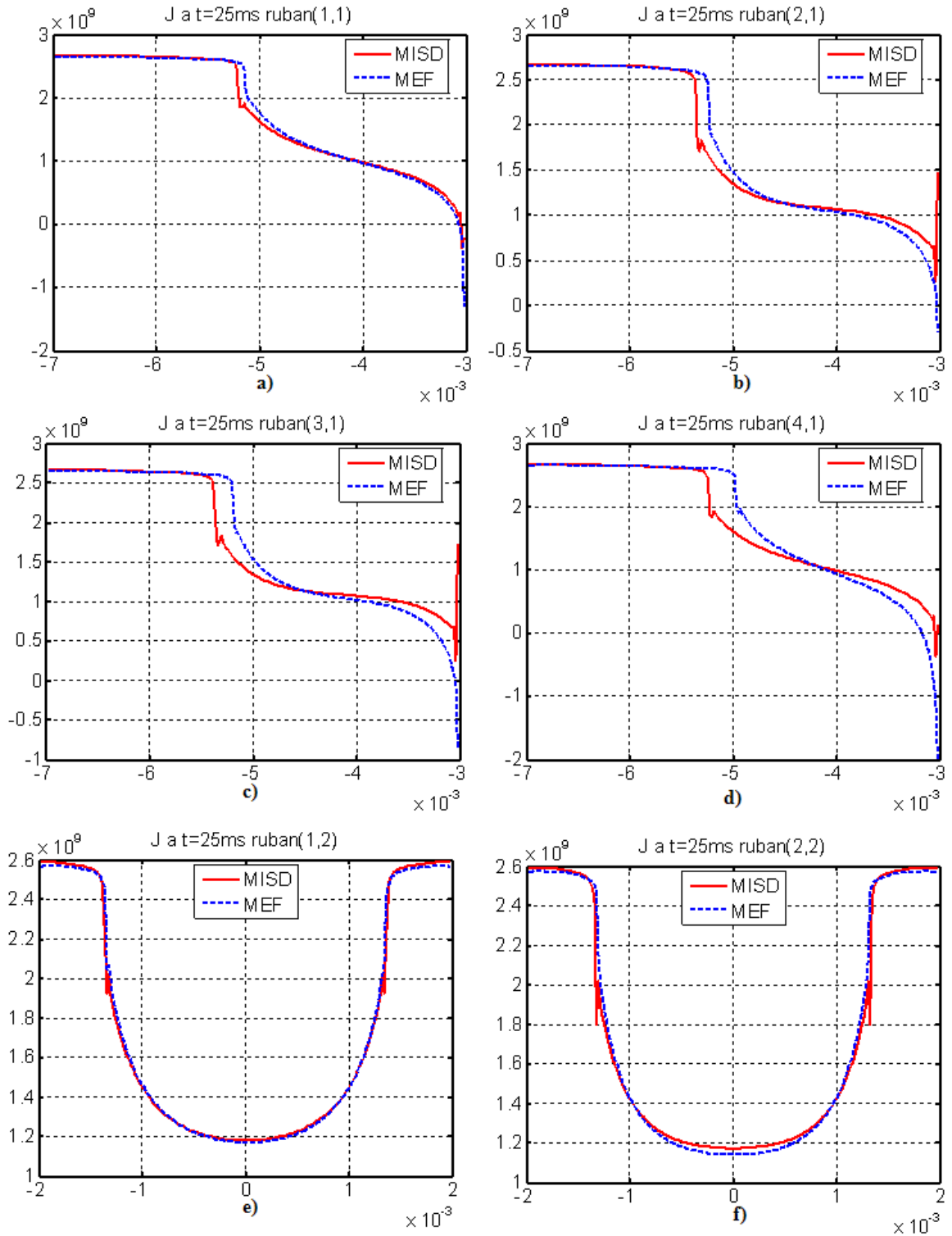


Figure 3.17 : Profils de densité de courant de la bobine  $4 \times 3$  sur les rubans 1 à 6 pour  $t = 25\text{ms}$  obtenus sur Comsol et Matlab : a) ruban(1,1), b) ruban(2,1), c) ruban(3,1), d) ruban(4,1), e) ruban(1,2), f) ruban(2,2)

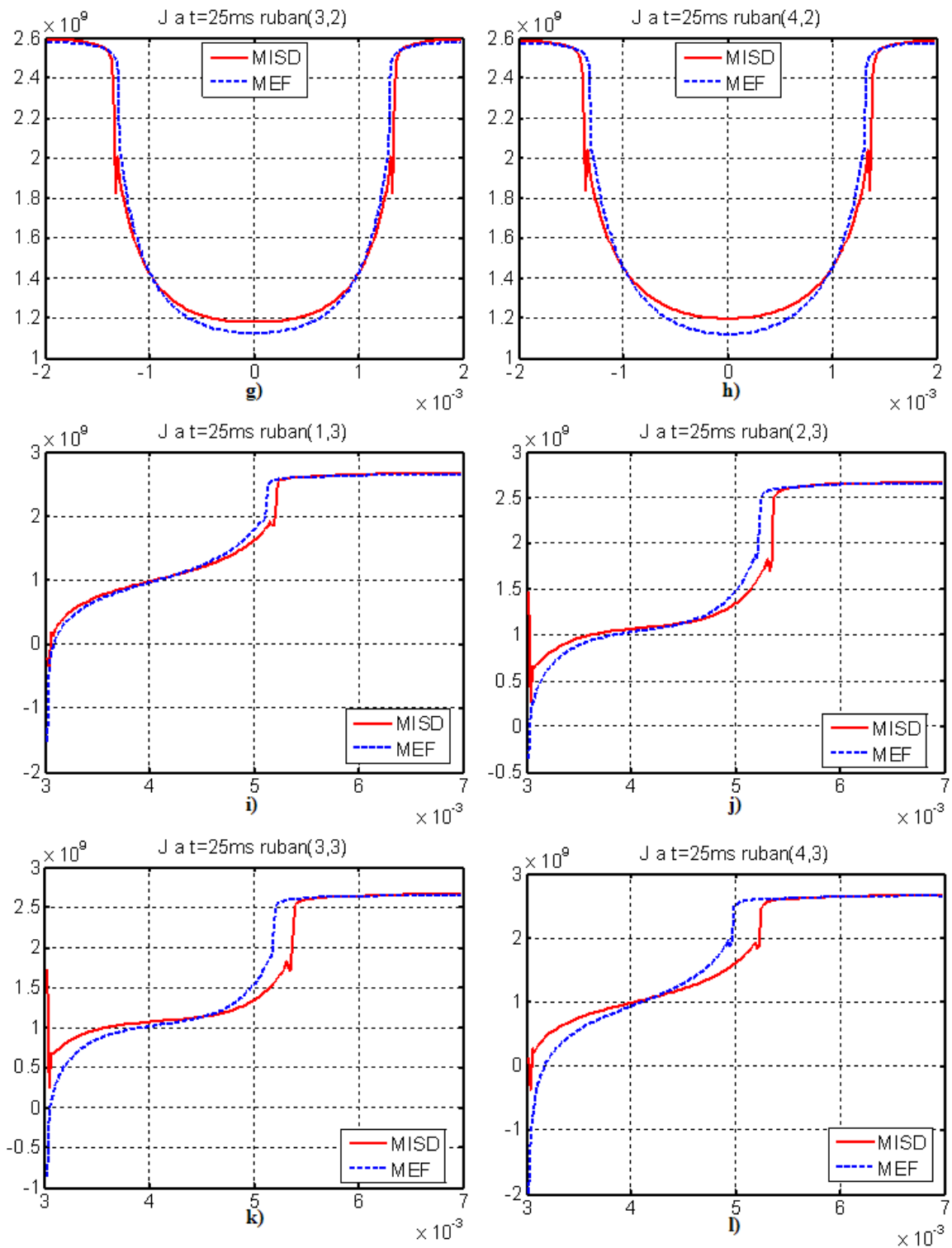


Figure 3.18 : Profils de densité de courant de la bobine  $4 \times 3$  sur les rubans 7 à 12 pour  $t = 25\text{ms}$  obtenus sur Comsol et Matlab : g) ruban(3,2), h) ruban(4,2), i) ruban(1,3), j) ruban(2,3), k) ruban(3,3), l) ruban(4,3)

### 3.1.3 Approximation des rubans éloignés

Dans cette section, la méthode d'approximation des rubans éloignés est évaluée en termes de précision et rapidité. En effet, cette méthode d'approximation est validée si elle apporte un gain de temps intéressant sans affecter, de façon significative, la précision du résultat final.

Le cas d'une bobine  $4 \times 3$  est encore une fois étudié. Par contre, cette fois-ci, seulement le ruban à l'étude est discrétisé en 200 éléments. Ses plus proches voisins sont discrétisés en 50 éléments et les autres rubans sont regroupés ensemble par rayon identique, tel qu'illustré à la Figure 3.19.

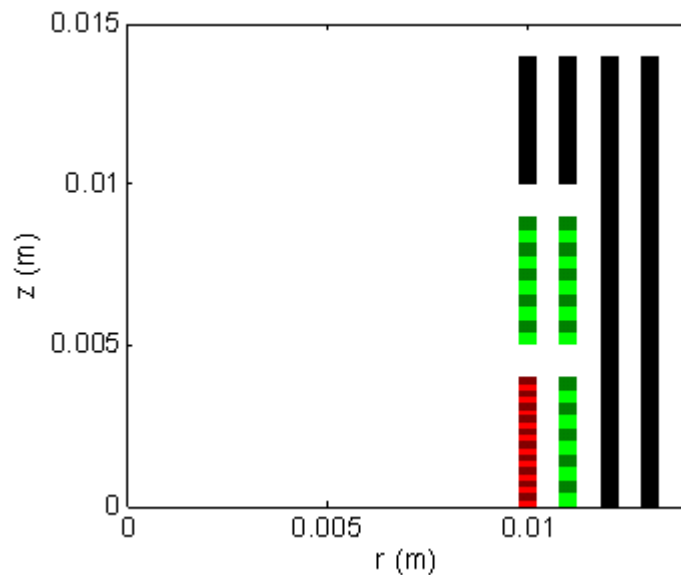
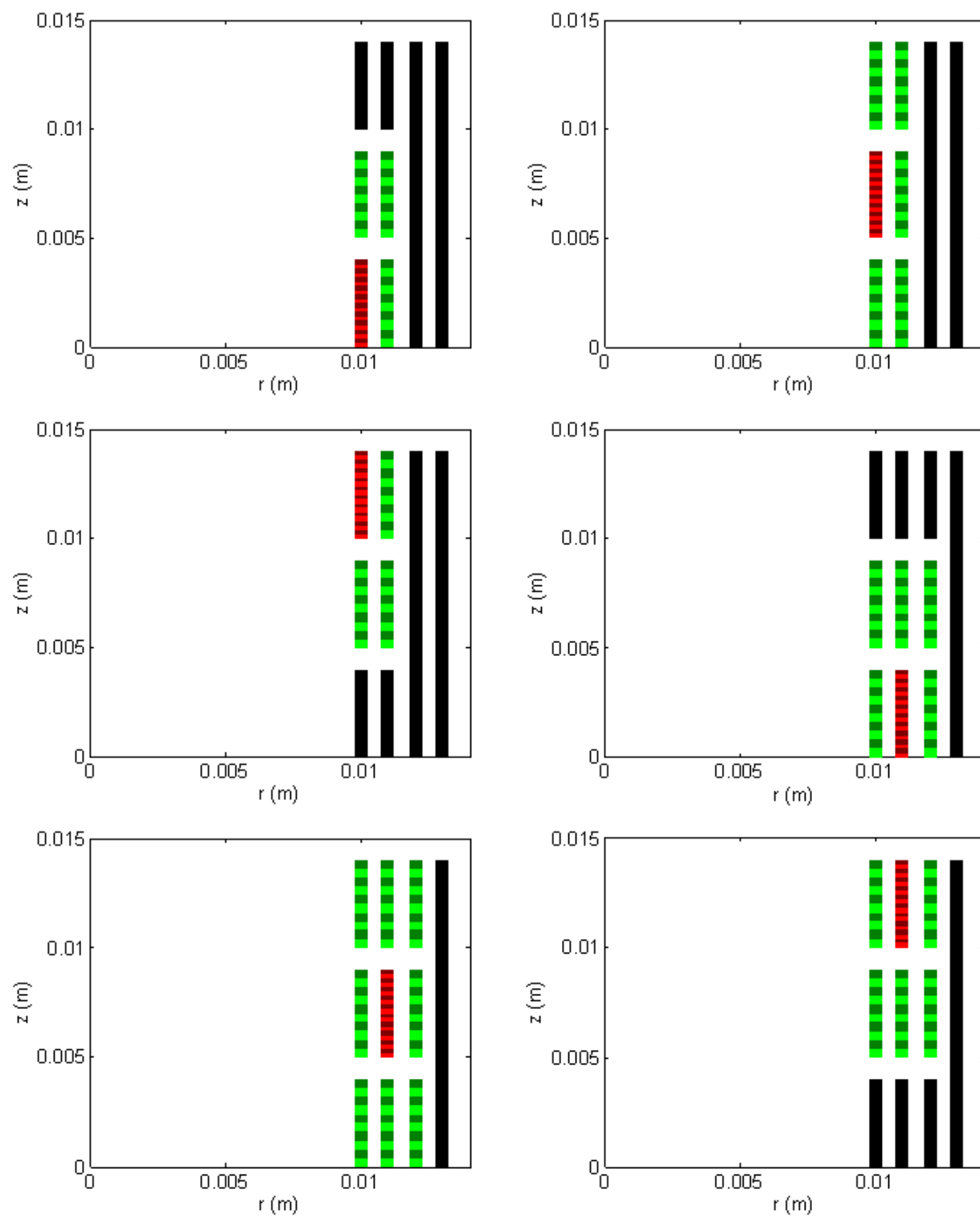


Figure 3.19 : Approximation des rubans éloignés pour le ruban (1,1) de la bobine  $4 \times 3$

Par exemple, si le ruban (1,1) de la bobine  $4 \times 3$  est le ruban à l'étude (en rouge), celui-ci est subdivisé en 200 éléments. Ses plus proches voisins, c'est à dire les rubans (1,2), (2,1) et (2,2) (en vert), sont discrétisés en 50 éléments. Les autres rubans sont regroupés par rayons identiques (en noir), et leurs densités de courant ne sont plus désormais des inconnues, puisque nous imposons  $J$  comme étant uniforme dans les rubans éloignés, sans affecter de façon significative (hypothèse) le champ local dans le conducteur à l'étude.

La subdivision de chaque ruban de la bobine  $4 \times 3$ , en appliquant la méthode des rubans éloignés, est illustrée à la Figure 3.20.



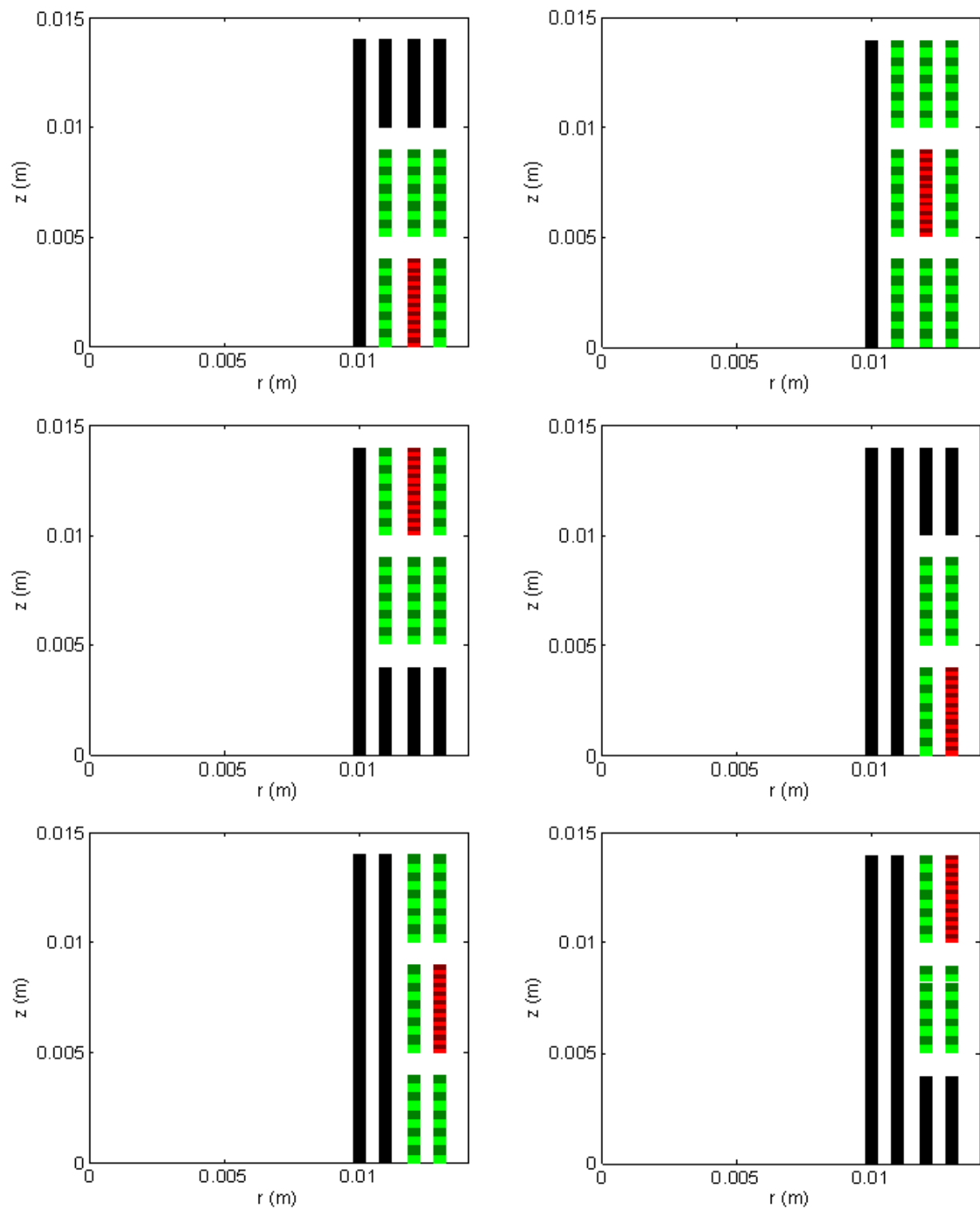


Figure 3.20 : Discrétisation des rubans de la bobine 4×3 avec l'approximation des rubans éloignés

### 3.1.3.1 Validation de la précision

Afin de valider l'approximation des rubans éloignés, il faut vérifier que celle-ci n'affecte pas la précision des pertes AC calculées de façon significative. Une comparaison des pertes AC déterminées avec la méthode de l'approximation des rubans éloignés et la méthode intégrale sans approximation est présentée au Tableau 3.10. Dans cet essai, on ne considère qu'un seul niveau de voisins, i.e. seuls les rubans contigus au ruban à l'étude sont considérés comme étant des rubans « voisins ». On observe une erreur relative qui est grande. La méthode des rubans éloignés a un trop grand impact sur les résultats finaux des pertes AC. Afin d'améliorer la précision des résultats, il va falloir soit augmenter le nombre d'éléments des rubans voisins, soit augmenter le nombre de rubans voisins, ou les deux.

Pour tester la première hypothèse, le nombre de voisins discrétisés reste inchangé mais ces derniers sont subdivisés en 100 éléments au lieu de 50. Les résultats sont présentés au Tableau 3.11, et nous observons que l'erreur relative est en effet améliorée, mais pas autant qu'on le souhaiterait. Celle-ci demeurant proche de 30%, cela suggère qu'il faille considérer davantage de voisins pour améliorer la précision.

Nous testons donc la deuxième hypothèse. La Figure 3.21 illustre la façon dont la subdivision des rubans en éléments est effectuée. Les rubans voisins (en vert) ne sont plus seulement les rubans contigus au ruban à l'étude, mais inclus aussi les voisins de « deuxième rang », qui sont aussi discrétisés en 50 éléments. Les résultats des pertes AC obtenus en augmentant le nombre de voisins, sont présentés au Tableau 3.12. Nous observons qu'en augmentant le nombre de rubans voisins, l'erreur relative est beaucoup plus petite. La méthode des rubans éloignés est donc applicable, à condition de bien choisir le nombre de rubans voisins et le nombre de subdivisions de ces derniers.

Tableau 3.10 : Comparaison des pertes AC déterminées avec la méthode intégrale avec l'approximation des rubans éloignés (un seul niveau de plus proches voisins) et la méthode intégrale sans approximation

<i>Pertes AC totales pour le 2<sup>e</sup> cycle</i>	
Pertes avec MARE	$6.8237 \times 10^{-3}$ J/m/cycle
Pertes sans MARE	$1.7336 \times 10^{-2}$ J/m/cycle
<b>Erreur relative : 60.6 %</b>	

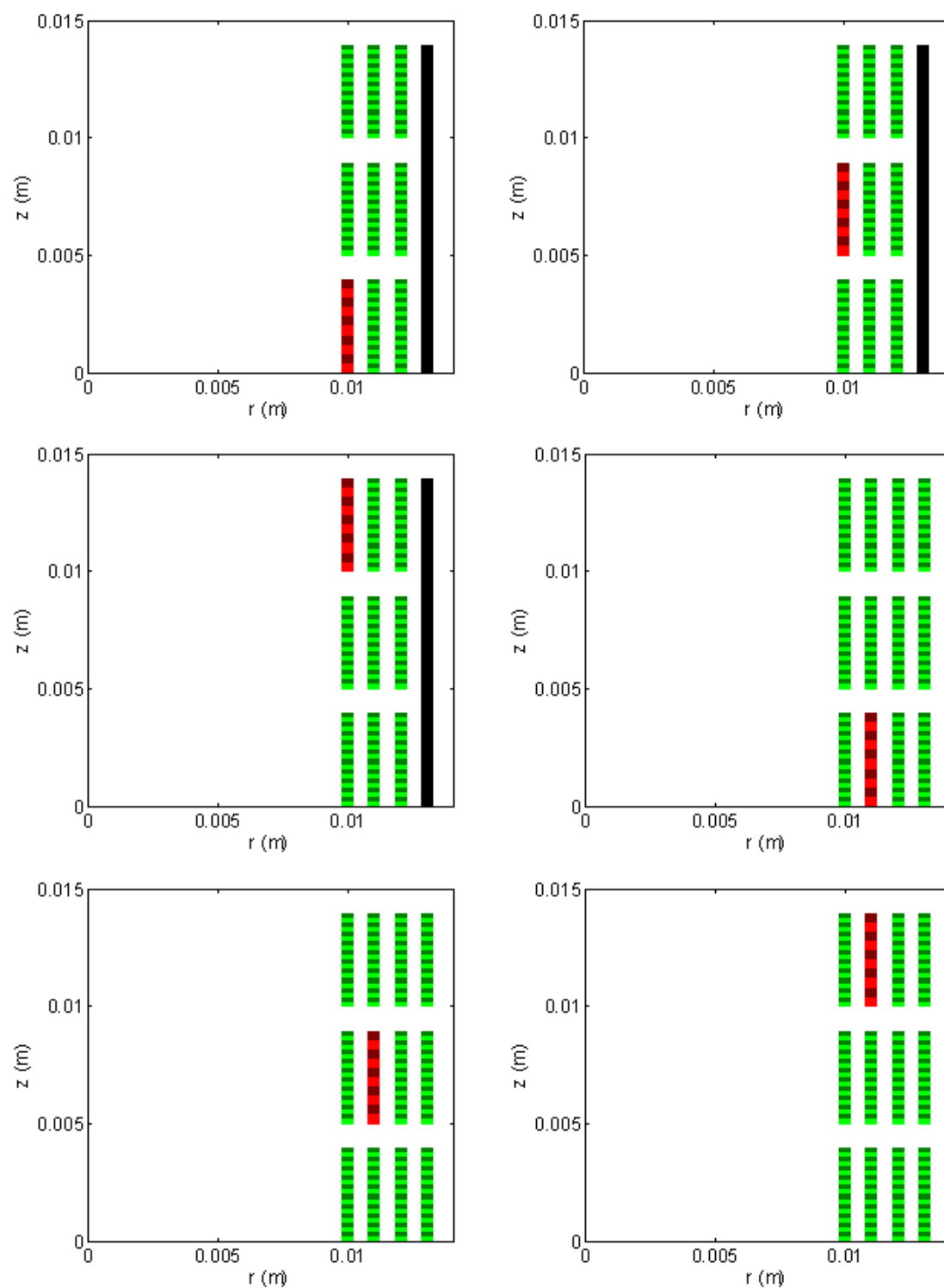
Tableau 3.11 : Comparaison des pertes AC avec et sans approximation des rubans éloignés (les rubans voisins étant divisés en plus grand nombre d'éléments (100 éléments au lieu de 50))

<i>Pertes AC totales pour le 2<sup>e</sup> cycle</i>	
Pertes avec MARE	$1.2443 \times 10^{-2}$ J/m/cycle
Pertes sans MARE	$1.7336 \times 10^{-2}$ J/m/cycle
<b>Erreur relative : 28.2 %</b>	

Tableau 3.12 : Comparaison des pertes AC avec et sans approximation des rubans éloignés, considérant deux niveaux de plus proches voisins (les rubans voisins étant subdivisés en 50 éléments)

<i>Pertes AC totales pour le 2<sup>e</sup> cycle</i>	
Pertes avec MARE	$1.5007 \times 10^{-2}$ J/m/cycle
Pertes sans MARE	$1.7336 \times 10^{-2}$ J/m/cycle
<b>Erreur relative : 13.4 %</b>	





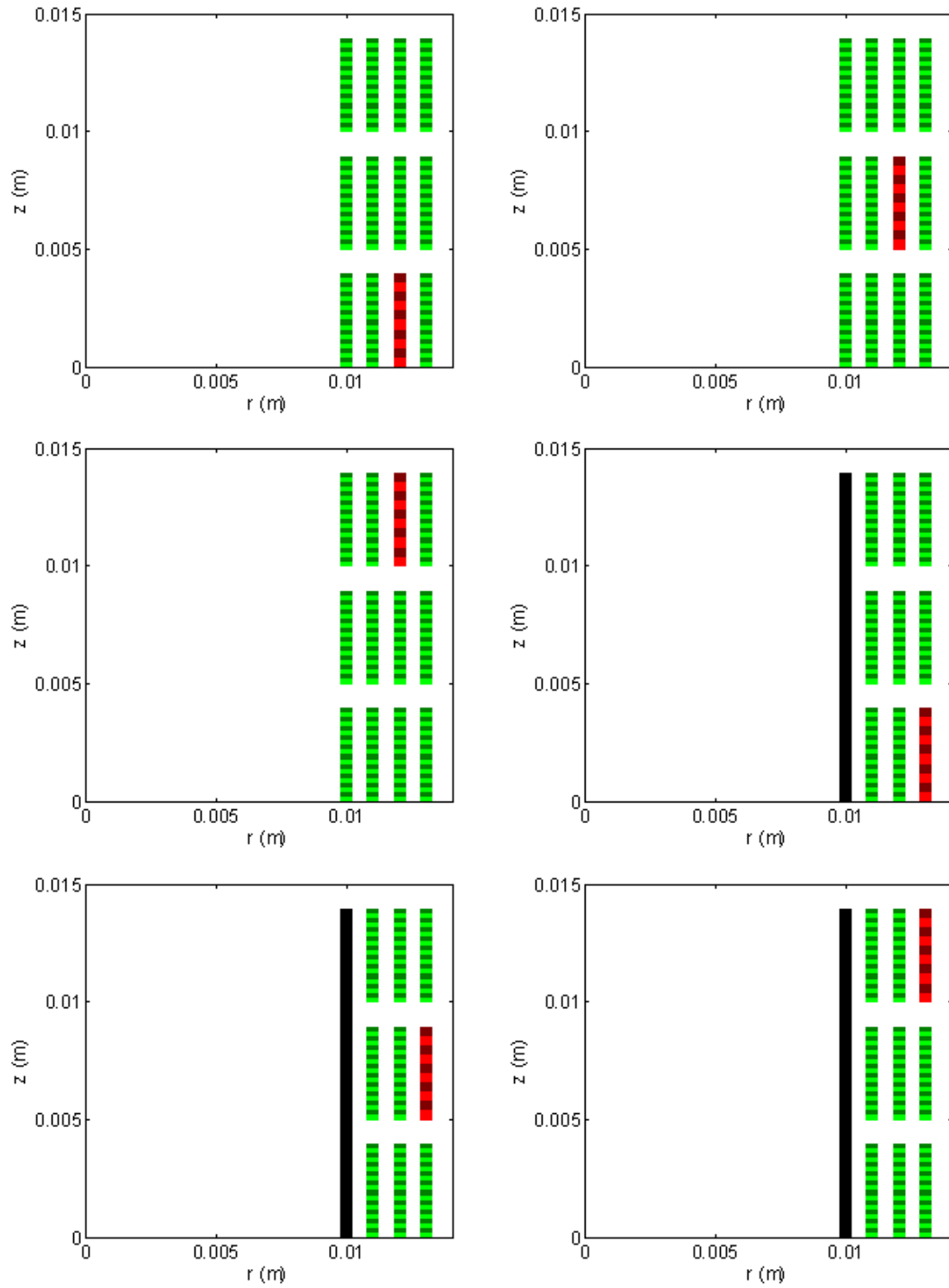


Figure 3.21: Discrétisation des rubans de la bobine 4×3 avec l'approximation des rubans éloignés avec les voisins de deuxième rang inclus

### 3.1.3.2 Validation du gain en temps de calcul

Prenons encore comme cas de référence le calcul de la distribution de courant dans le ruban (1,1) de la bobine  $4 \times 3$ . Avec la méthode de l'approximation des rubans éloignés, au lieu d'avoir  $12 * 200 = 2400$  inconnues, il ne reste plus que tout au plus 600 inconnues. Le nombre d'inconnues a été réduit d'un facteur 4. Sachant que le temps de calcul de la méthode intégrale est proportionnel à la puissance 3 du nombre d'inconnues (approximativement) [36], on prédit une réduction du temps de calcul de l'ordre de 64, excluant les gains sur le temps d'assemblage de la matrice  $[M_A]$ . Cependant, cette prédiction ne s'applique pas intégralement dans le cadre de ce mémoire car le nombre de contraintes est plus élevé ici que dans [36]. Le gain en temps d'assemblage de la matrice  $[M_A]$  obtenu grâce à la MARE, est présenté au Tableau 3.13. Il faut savoir que les temps de calcul présentés au Tableau 3.13 sont les temps d'assemblage de  $[M_A]$  de tous les rubans de la bobine (dans cet exemple, 12 assemblages de la matrice  $[M_A]$ ). Aussi, nous précisons que dans cette section, tous les calculs sont faits sur Matlab.

Grâce à la méthode de l'approximation des rubans éloignés, l'assemblage de toutes les matrices  $[M_A]$  est calculé 28.17 fois plus rapidement sur Matlab. Le gain de temps pour le calcul de  $J$  excluant le temps de calcul de  $[M_A]$ , est présenté au Tableau 3.14, et le gain de temps total pour le calcul des pertes AC (incluant le temps d'assemblage des matrices  $[M_A]$  pour chaque ruban) est présenté au Tableau 3.15.

Tableau 3.13 : Gain de temps pour le calcul de  $[M_A]$  avec approximation des rubans éloignés

<i>Temps de calcul de <math>M_A</math> (bobine <math>4 \times 3</math>)</i>	
Temps mis avec MARE	4 982.81 secondes
Temps mis sans MARE	14 0356.28 secondes
<b>Gain de temps : 28.17</b>	

Tableau 3.14 : Gain de temps pour le calcul J (avec le solver) avec approximation des rubans éloignés (excluant le temps de calcul de  $[M_A]$ )

<i>Temps de calcul des pertes AC (bobine <math>4 \times 3</math>)</i>	
Temps mis avec MARE	439.036 secondes
Temps mis sans MARE	98 302.32 secondes
<b>Gain de temps : 224</b>	

Tableau 3.15 : Gain de temps total pour le calcul des pertes AC avec approximation des rubans éloignés (incluant le temps de calcul de  $[M_A]$ )

<i>Temps de calcul des pertes AC (bobine <math>4 \times 3</math>)</i>	
Temps mis avec MARE	5 421.87 secondes
Temps mis sans MARE	238 658.62 secondes
<b>Gain de temps total : 44</b>	

Il est clair qu'en adoptant l'approximation des rubans éloignés, le temps de calcul des pertes AC sera réduit de façon considérable pour une bobine à très grand nombre de tours. La Figure 3.22 illustre ceci. On observe qu'avec la méthode d'approximation des rubans éloignés, le

temps de calcul en fonction du nombre de tours augmente beaucoup moins vite que si l'approximation n'était pas utilisée. Plus le nombre de tours de bobinage est grand, plus le facteur du gain de temps sur le calcul de pertes AC est grand. Ainsi, l'approximation des rubans éloignés serait une solution exploitable pour enfin réussir à calculer des pertes AC d'une bobine à grand nombre de tours, tel que dans le cas d'un transformateur de puissance. La Figure 3.22 présente le temps de calcul des pertes AC pour différents nombres de rubans constituant la bobine (en échelle log-log). Nous identifions les équations qui décrivent les tendances des courbes obtenues avec la fonction *polyfit* sur Matlab. Les pentes des droites (« a » sur la Figure 3.22), donnent approximativement la croissance du temps de calcul en fonction du nombre de conducteurs.

Remarque : La comparaison des temps de calcul des pertes AC en fonction du nombre de rubans a été effectuée avec un maillage grossier pour réduire le temps de simulations. Pour le calcul des pertes AC sans la MARE, tous les rubans sont subdivisés en 20 éléments. Pour le calcul des pertes AC avec la MARE, le ruban d'intérêt est subdivisé en 20 éléments et ses voisins en 5 éléments.

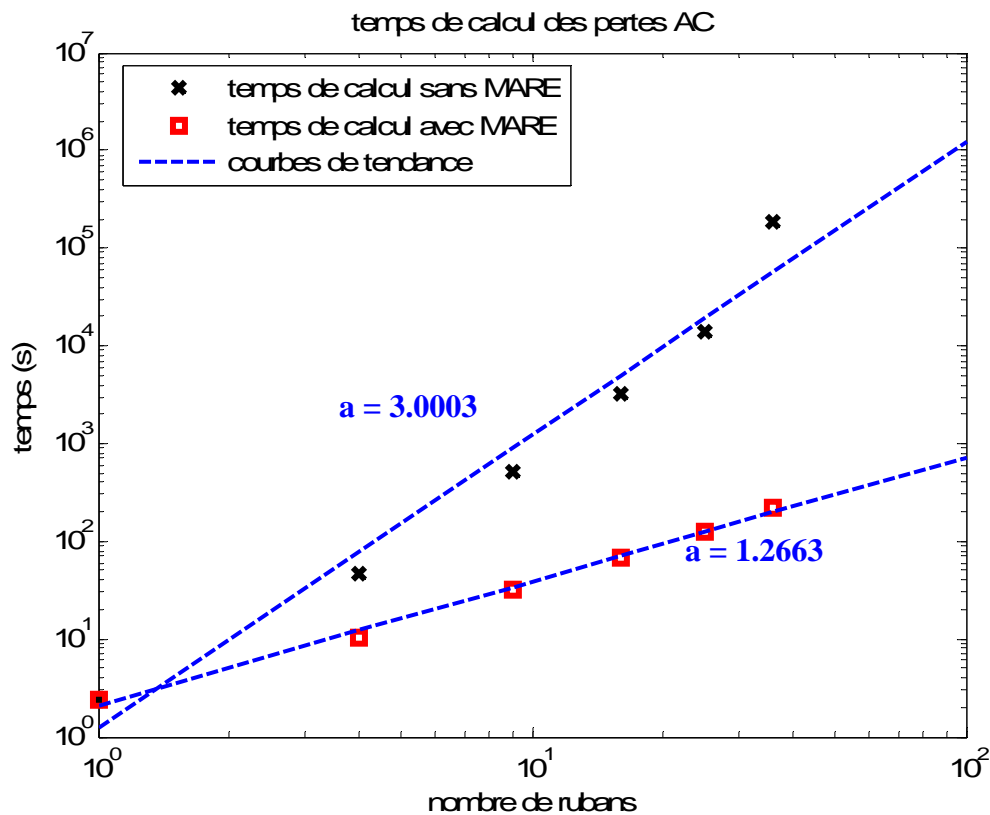


Figure 3.22 : Temps de calcul des pertes AC en fonction du nombre de rubans de la bobine

La Figure 3.23 présente le temps de calcul des pertes AC pour différent nombre de rubans constituant la bobine, avec la MARE, basé sur le vrai maillage (ruban d'intérêt subdivisé en 200 éléments, ses voisins en 50 éléments, et les autres rubans étant regroupés par rayons identiques), et avec Comsol (les courbes sont données en échelle log-log). Pour ce qui est du temps de calcul des pertes AC avec la MARE, la valeur de la pente est égale à 1.3801, proche de celle obtenue pour un plus mauvais maillage (Figure 3.22). Il existe donc une relation quasi-linéaire entre le temps de calcul des pertes et le nombre de rubans du bobinage. Pour ce qui est du temps de calcul des pertes AC avec la MEF avec Comsol, à cause du grand nombre de degrés de liberté, les calculs prennent beaucoup de temps et la mémoire est vite saturée. Par conséquent, peu de points sont présentés sur la Figure 3.23, mais nous pouvons tout de même observer que le temps de calcul des pertes AC avec Comsol est plus important qu'avec la méthode intégrale avec la MARE.

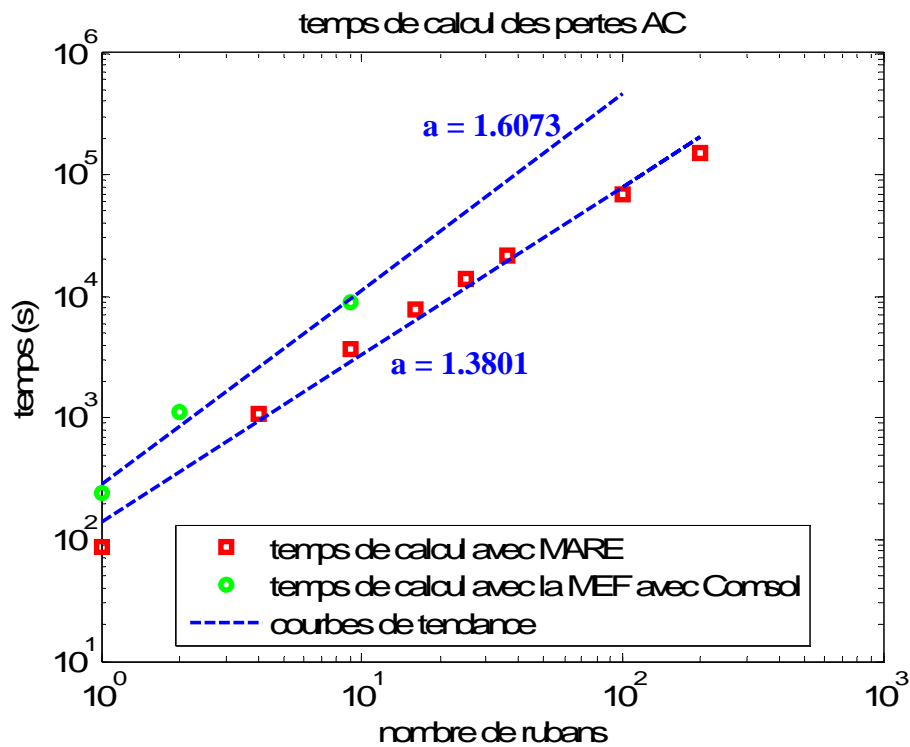


Figure 3.23 : Temps de calcul des pertes AC en fonction du nombre de rubans de la bobine avec la MARE (MISD) et avec la MEF (Comsol)

### 3.1.4 Optimisation en C

Pour adapter davantage le modèle intégral développé aux calculs de pertes AC d'une bobine à très grand nombre de tours, il est possible de réécrire une partie du code Matlab en C pour ainsi rendre les simulations encore plus rapides.

#### 3.1.4.1 Fichiers mex

Il est possible de créer un programme en C et de l'exécuter en interaction directe avec Matlab. Pour cela il faut créer un fichier MEX.

La partie du code Matlab qui prend le plus de temps est le calcul de la matrice de coefficients  $[M_A]$ , qui est une matrice carrée et pleine, de taille relativement grande. Pour réduire le temps d'assemblage, la fonction *CalculMA* est réécrite en C afin d'en faire un fichier MEX pour ensuite l'appeler via Matlab.

La réécriture à la main d'une fonction complexe en C est une tâche difficile. Nous l'avons essayée mais ensuite, nous avons pu nous doter d'un logiciel qui permet de convertir un code Matlab en fichier MEX directement. Ce logiciel porte le nom de Matlab Coder. Il est assez facile à utiliser mais si on l'utilise mal, le code C peut s'avérer plus lent. Il faut donc bien définir ses variables et, il ne faut pas avoir de fonctions imbriquées.

Un tel fichier respecte la syntaxe suivante :

```
#include "mex.h"

void mexFunction(
    int nlhs,          mxArray *plhs[],
    int nrhs, const mxArray *prhs[] )
{
    /* le code C ... */
}
```

Avec *nlhs* le nombre d'arguments de sortie (« left hand side ») et *plhs* le tableau de pointeurs vers les arguments de sortie, et, *nrhs* et *prhs* sont pour les arguments d'entrées (« right hand side »).

### 3.1.4.2 Gain de temps

Matlab Coder n'accélère généralement pas les fonctions internes de Matlab telles qu'EIG, SVD, FFT, FFT2, FFTN, QR, LU, etc. Enfait, les fonctions MEX générées par Matlab Coder qui contiennent des fonctions internes pourraient même parfois être plus lentes que les fonctions équivalentes sur Matlab, ceci parce que ces fonctions Matlab sont déjà compilées et sont même parfois multi-tâches. Or, la fonction que nous désirons convertir en fichier MEX (*CalculMA*) contient des appels à la fonction EIG. Cette fonction, qui calcule les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice, ralentit notre temps de simulation de façon considérable. Nous avons tout de même réussi à réduire le temps de calcul associé à la création de la matrice  $[M_A]$ . Les résultats sont présentés au Tableau 3.16 et au Tableau 3.17.

Tableau 3.16 : Gain de temps pour le calcul de  $[M_A]$  pour un ruban simple avec la fonction Mex

<i>Temps de calcul de <math>M_A</math> (ruban simple)</i>	
Temps mis avec la fonction mex	2.1205 secondes
Temps sans la fonction mex	19.6804 secondes
<b>Gain de temps total : 9.28</b>	

Tableau 3.17 : Gain de temps pour le calcul de  $[M_A]$  de la bobine 4×3 avec la fonction Mex

<i>Temps de calcul de <math>M_A</math> (bobine 4*3)</i>	
Temps mis avec la fonction mex	10056.0 secondes
Temps sans la fonction mex	109837.1 secondes
<b>Gain de temps total : 10.92</b>	

Rien que dans le cas d'un ruban simple (Tableau 3.16), on observe une nette amélioration du temps de calcul sans que la précision des résultats ne soit affectée. Ce progrès aura un impact important pour le calcul des grosses bobines. Les résultats en gain de temps présentés au Tableau



3.17 montrent que plus le nombre de rubans augmente, plus le gain de temps est important, ce qui est primordiale dans ce projet puisque le but est de rendre possible un calcul numérique des pertes AC pour les bobinages à grand nombre de tours.

## CHAPITRE 4 CONCLUSION

L'objectif principal de ce mémoire était de développer un modèle numérique précis et rapide pour le calcul de pertes AC d'une bobine supraconductrice comportant un grand nombre de tours. Pour répondre à cet objectif, une méthode numérique de type intégral adaptée à notre géométrie a été développée sur Matlab. Le code développé est très facile à utiliser mais son temps de calcul peut s'avérer très long si on ne prend pas de mesures particulières pour simplifier partiellement le problème. Ainsi, pour répondre au souci de la rapidité, une « méthode d'approximation des rubans éloignés » (MARE) a été présentée et une optimisation du code a été effectuée. La MARE permet une importante réduction du nombre d'inconnues, entraînant par le même fait une réduction du temps de calcul des pertes AC d'un bobinage. Plus le nombre de tours de bobinage est important, plus le gain en temps de calcul est important. Afin de rendre le code numérique encore plus rapide, une partie de celui-ci a été retranscrit en langage C. Le modèle ainsi construit porte le nom de « méthode intégrale semi-découplée » (MISD) et peut être utilisé pour le calcul de pertes AC d'une bobine supraconductrice. Une méthodologie de vérification a été effectuée avec l'aide du logiciel Comsol.

À la lumière des résultats obtenus dans ce mémoire, plus on s'approche des extrémités de la bobine, plus la différence des profils de la densité de courant des rubans obtenus avec la MISD et la MEF est grande. Plusieurs tests ont été réalisés afin de comprendre la cause de ces différences. Malgré ces efforts, le problème n'a pu être résolu au cours de ce projet de maîtrise.

Les suggestions (pour travaux futurs) afin de rendre la MISD encore plus performante et rapide sont les suivantes : tout d'abord, il est primordial de trouver le problème de la différence entre les résultats obtenus avec la MEF et avec la MISD. Il faudrait commencer par faire des tests sur Comsol afin de vérifier et de valider les résultats obtenus sur Comsol. Il serait aussi très intéressant d'avoir des mesures expérimentales afin de les comparer avec nos résultats de simulations. Deuxièmement, il serait possible d'optimiser davantage les calculs de pertes AC en exploitant mieux la géométrie de la bobine. En effet, il serait possible de ne pas faire l'assemblage de toutes les matrices  $[M_{A1}]$  pour chacun des rubans, si on arrive à détecter les rubans ayant la même disposition dans le bobinage. Pour illustrer ceci, prenons l'exemple d'une bobine constituée de 25 rubans supraconducteurs (bobine 5×5) (Figure 4.1).

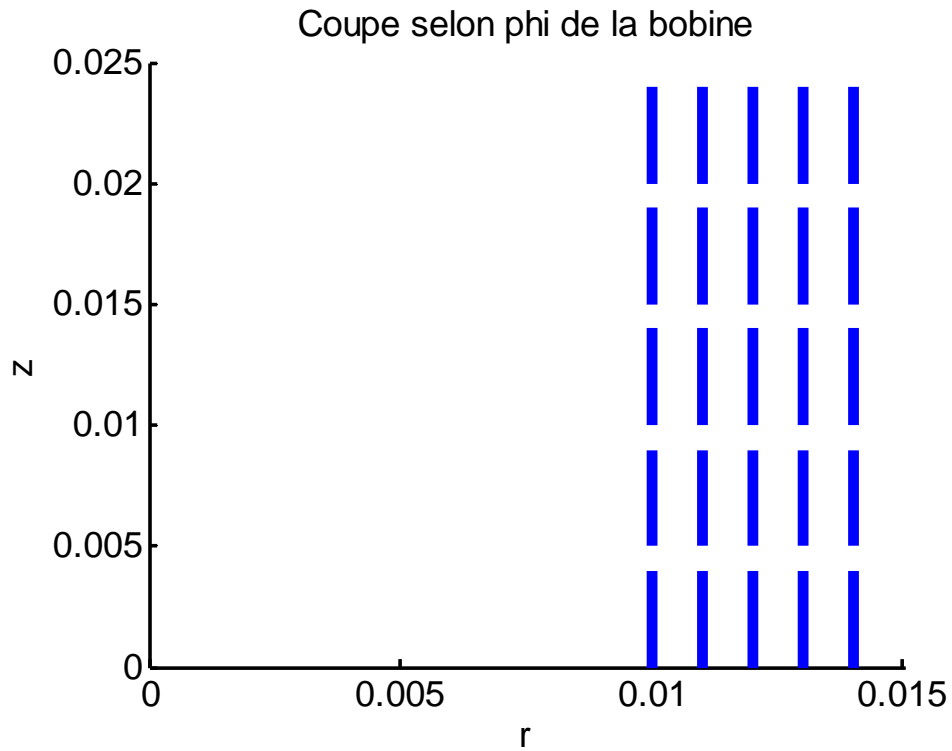


Figure 4.1 : Coupe de la bobine 5×5

En appliquant la MARE pour le calcul de la matrice  $[M_A]$ , on remarque qu'il n'est pas nécessaire de générer la matrice  $M_{A1}$  pour chacun des rubans (25 assemblages) puisque plusieurs configurations se répètent. Au final, il y a seulement 4 configurations différentes (Tableau 4.1, Tableau 4.2, Tableau 4.3 et Tableau 4.4).

Tableau 4.1 : Première configuration

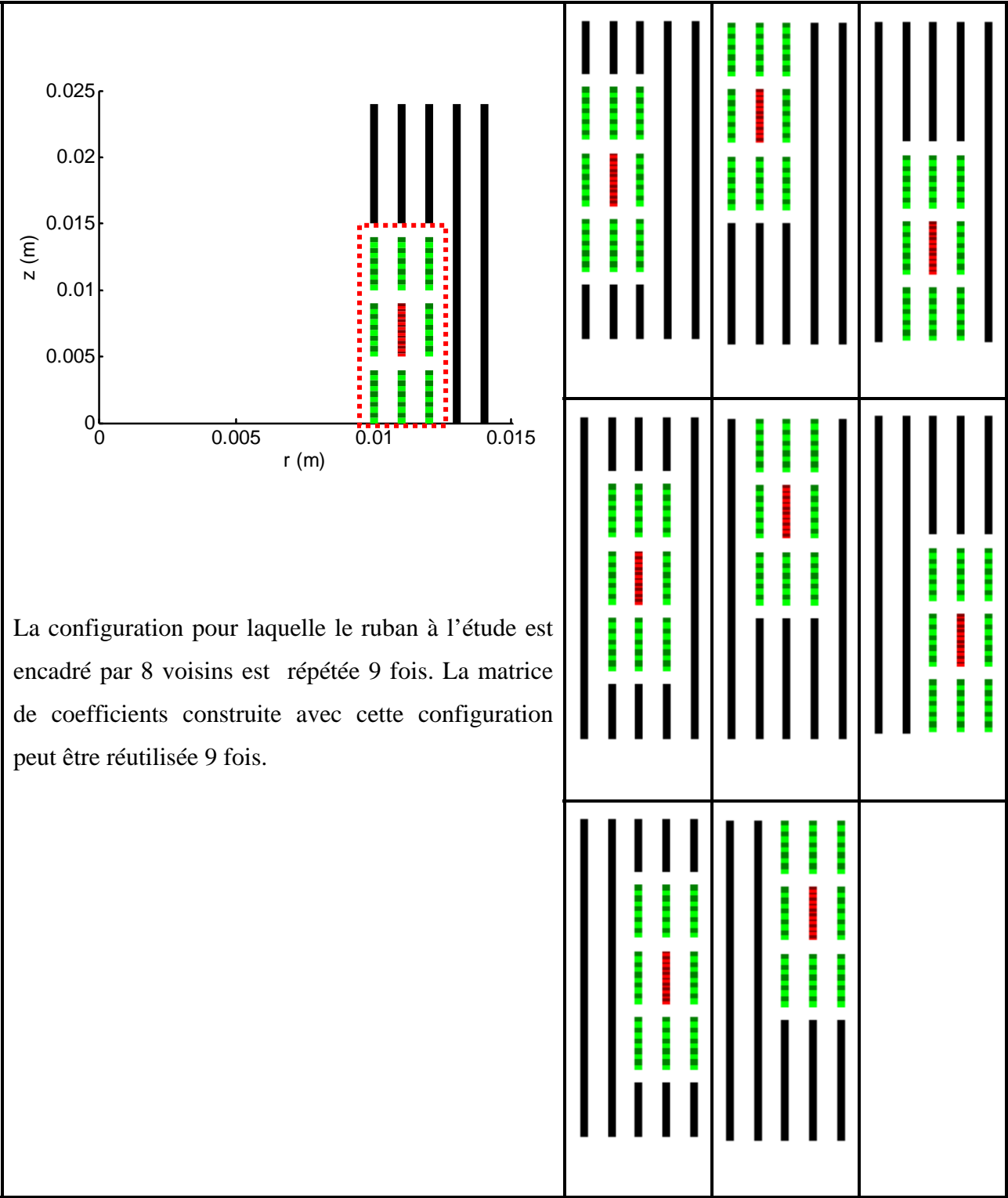


Tableau 4.2 : Deuxième configuration

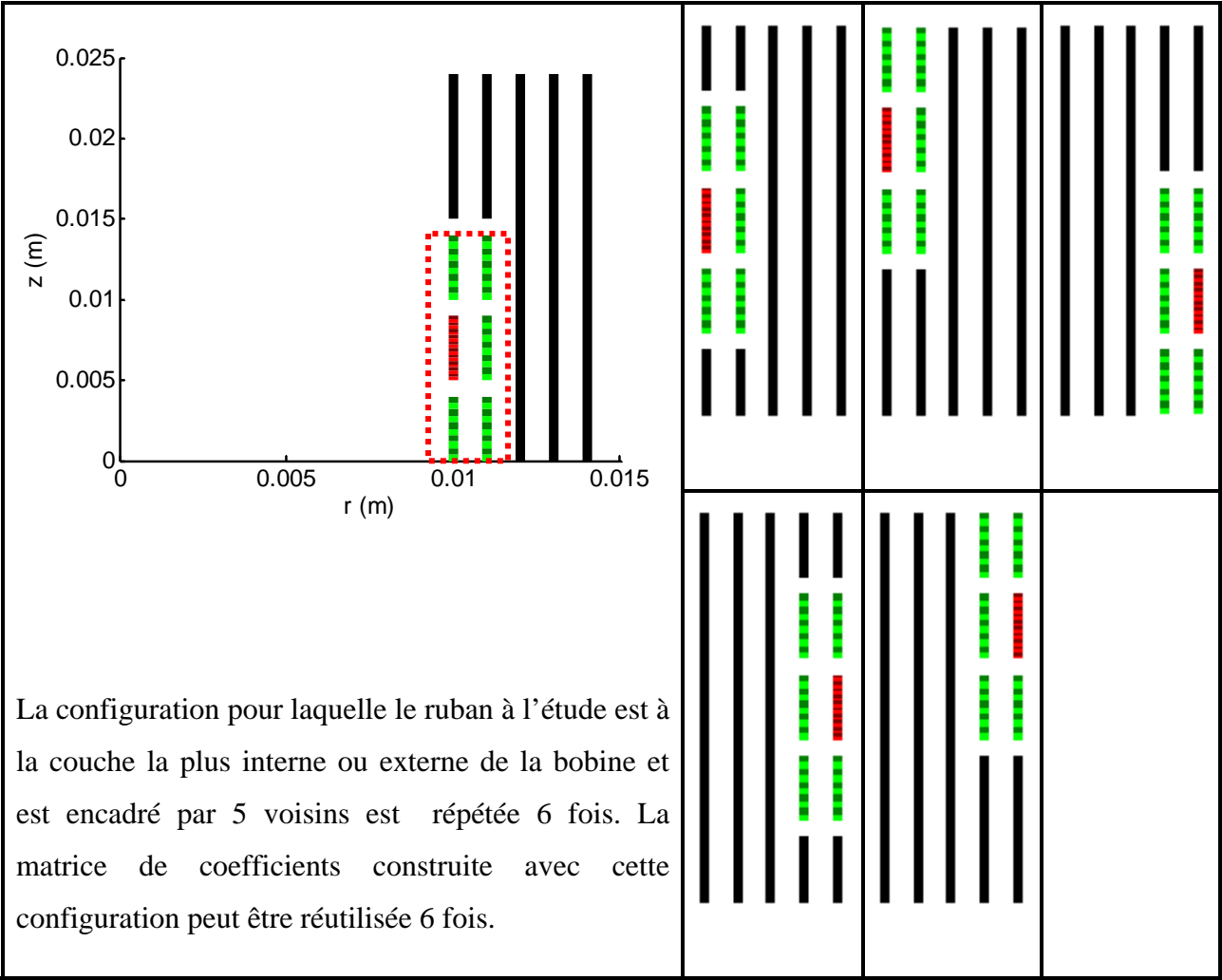


Tableau 4.3 : Troisième configuration

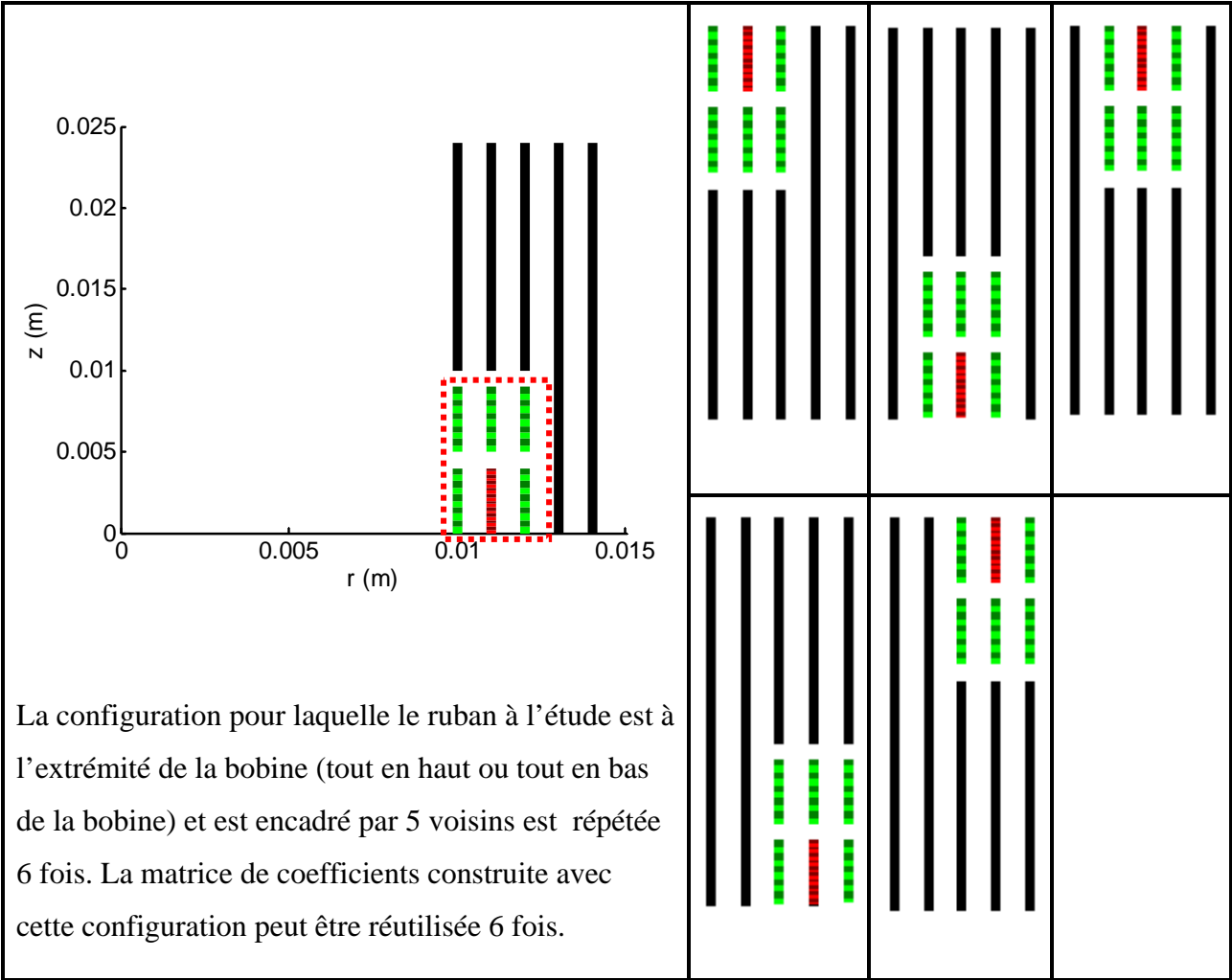
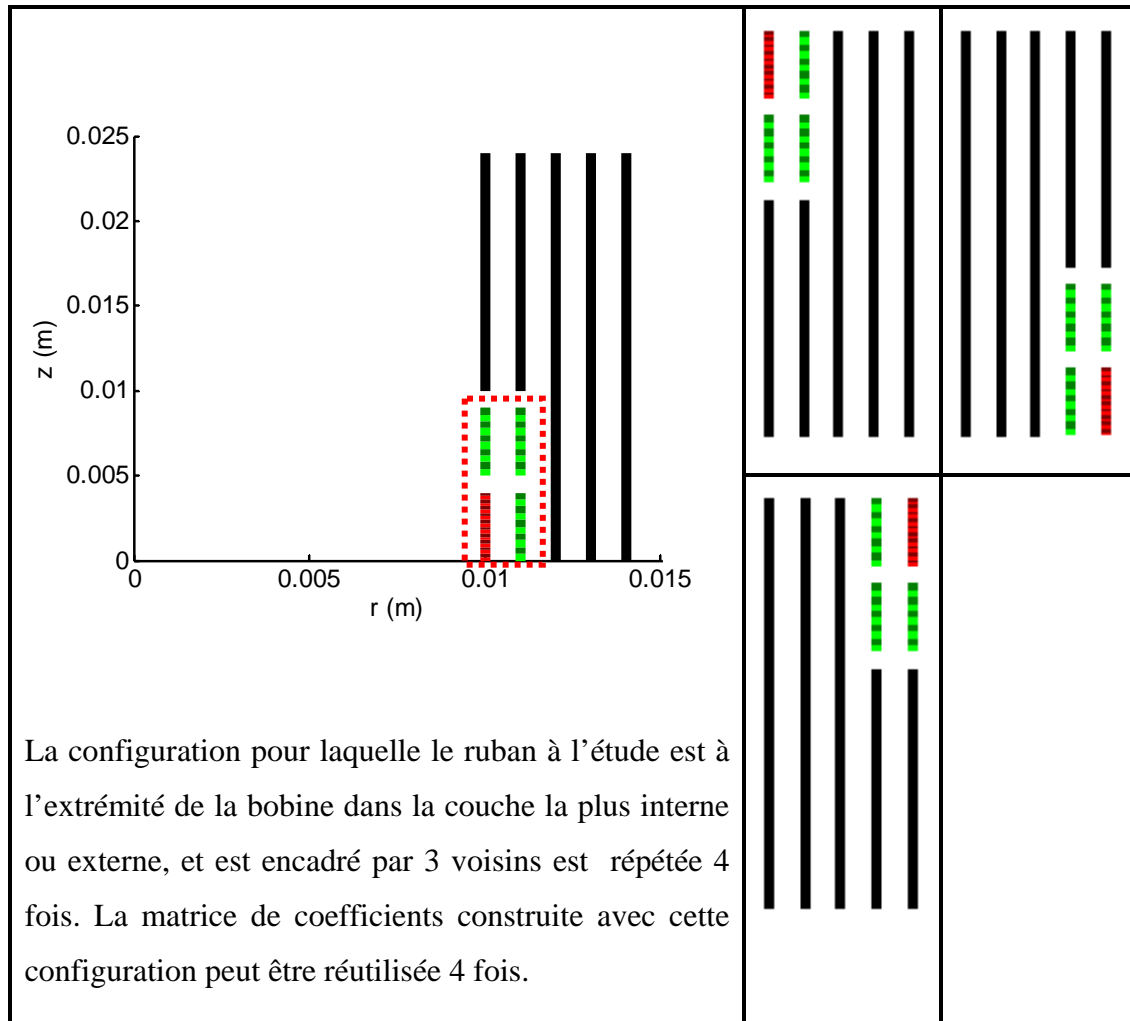


Tableau 4.4 : Quatrième configuration



Pour des bobines à très grand nombre de tours, une nouvelle implémentation qui permettrait d'exploiter la géométrie en rassemblant les différentes configurations, accélérerait l'assemblage de la matrice de coefficients  $[M_A]$  d'une manière considérable, car il y aura beaucoup moins de calculs à effectuer.

Il reste donc un travail important à réaliser afin de proposer une méthode de calcul de pertes AC ultra-rapide et optimale. Ce projet a néanmoins permis d'ouvrir une voie prometteuse pour rendre possible le calcul de pertes AC dans les bobines supraconductrices à très grand nombre de tours.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, "Theory of superconductivity," *Physical Review*, vol. 108, pp. 1175-1203, 1957.
- [2] J. G. Bednorz and K. A. Muller, "Possible high T<sub>c</sub> superconductivity in the BaLaCuO system," *z. Phys. B.*, vol. 64, pp. 189-193, 1986.
- [3] B. Leridon and J.P. Contour, "Techniques de l'ingénieur, E 1 110," 10 fév. 1999.
- [4] P. Tixador and Y. Brunet, "Techniques de l'ingénieur, D 2 701," 10 nov. 2003.
- [5] P. Tixador, *Les supraconducteurs*. Paris: Ed Hermes, 1995.
- [6] F. Sirois, "Modélisation de la caractéristique E-J des supraconducteurs à haute température critique," Ph.D, génie électrique, Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal, 2002.
- [7] Réal-Paul Bouchard and G. Olivier, *Électrotechnique, 2e édition*, Fév. 1999.
- [8] J. K. Sykulski, C. Beduz, R. L. Stoll, M. R. Harris, K. F. Goddard, and Y. Yang, "Prospects for large high-temperature superconducting power transformers: conclusions from a design study," *Electric Power Applications, IEE Proceedings*, vol. 146, pp. 41-52, 1999.
- [9] C. T. Reis, S. P. Mehta, B. W. McConnell, and R. H. Jones, "Development of high temperature superconducting power transformers," in *Power Engineering Society Winter Meeting, 2002. IEEE*, 2002, pp. 151-156 vol.1.
- [10] J.K. Sykulski, R.L. Stoll, A. J. P. C. Beduz, K.F. Goddard, and M. K. Al-Mosawi, "The design, construction and operation of high temperature superconducting transformers - practical considerations," presented at the 38th Session of the International Conference on Large High Voltage Electric Systems (CIGRE), Paris, 27th Aug-1st Sep 2000.
- [11] N. Hayakawa, S. Chigusa, N. Kashima, S. Nagaya, and H. Okubo, "Feasibility study on superconducting fault current limiting transformer (SFCLT)," *Cryogenics*, vol. 40, pp. 325-331.
- [12] H. Kagawa, N. Hayakawa, N. Kashima, S. Nagaya, and H. Okubo, "Experimental study on superconducting fault current limiting transformer for fault current suppression and system stability improvement," *Physica C: Superconductivity*, vol. 372-376, Part 3, pp. 1706-1710, 2002.
- [13] B. W. McConnell, "Transformers-a successful application of high temperature superconductors," *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, vol. 10, pp. 716-720, 2000.
- [14] V.R Ramanan, S.J Dale, G.N Riley, and L. J. Masur, "A vision for applications transformers," *International Wire & Cable Symposium Proceedings*, p. 360, 1998.
- [15] F. J. Mumford, "A techno-economic study of high T<sub>c</sub> superconducting power transformers," *International Conference on Electrical Machines*, Paris, France Sept 1994.



- [16] F. Grilli, R. Brambilla, and L. Martini, "Modeling High-Temperature Superconducting Tapes by Means of Edge Finite Elements," *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, vol. 17, pp. 3155-3158, 2007.
- [17] R. Brambilla, F. Grilli, and L. Martini, "Development of an edge-element model for AC loss computation of high-temperature superconductors," *Superconductor Science and Technology*, vol. 20, p. 16, 2007.
- [18] D. N. Nguyen, S. P. Ashworth, J. O. Willis, F. Sirois, and F. Grilli, "A new finite-element method simulation model for computing AC loss in roll assisted biaxially textured substrate YBCO tapes," *Superconductor Science and Technology*, vol. 23, p. 025001, 2010.
- [19] Z. Hong and T. Combs, "Numerical modelling of AC loss in coated conductors by finite element software using h formulation," *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, vol. 23, pp. 1551-1562, 2010.
- [20] N. Amemiya and N. Banno, "FEM analysis of ac losses in multifilamentary HTS tapes with various twist pitch and matrix conductivity," in *Advances in Cryogenic Engineering (Materials)* vol. 46, ed, 2000, pp. pp. 631-638.
- [21] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, "Magnetization and Critical Supercurrents," *Physical Review*, vol. 129, pp. 528-535, 1963.
- [22] Y. B. Kim, C. F. Hempstead, and A. R. Strnad, "Critical Persistent Currents in Hard Superconductors," *Physical Review Letters*, vol. 9, pp. 306-309, 1962.
- [23] F. Grilli and S. P. Ashworth, "Measuring transport AC losses in YBCO-coated conductor coils," *Superconductor Science and Technology*, vol. 20, p. 794, 2007.
- [24] F. Grilli and S. P. Ashworth, "Quantifying AC Losses in YBCO Coated Conductor Coils," *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, vol. 17, pp. 3187-3190, 2007.
- [25] A. Matrone, *SATT12 Poster Contribution P39*.
- [26] E. H. Brandt, "Superconductors of finite thickness in a perpendicular magnetic field: Strips and slabs," *Physical Review B*, vol. 54, pp. 4246-4264, 1996.
- [27] Y. Zhao, J. Fang, W. Zhang, J. Zhao, and L. Sheng, "Comparison between measured and numerically calculated AC losses in second-generation high temperature superconductor pancake coils," *Physica C: Superconductivity*, vol. 471, pp. 1003-1006, 2011.
- [28] T. Hardono and C. Cook, "Characterisation and modelling of HTS coils," *Physica C: Superconductivity*, vol. 372-376, Part 3, pp. 1410-1412, 2002.
- [29] J. R. Clem, J. H. Claassen, and Y. Mawatari, "AC losses in a finite Z stack using an anisotropic homogeneous-medium approximation," *Superconductor Science & Technology*, vol. 20, pp. 1130-9, 2007.
- [30] R. Brambilla, F. Grilli, D. N. Nguyen, L. Martini, and F. Sirois, "AC losses in thin superconductors: the integral equation method applied to stacks and windings," *Superconductor Science and Technology*, vol. 22, p. 075018, 2009.

- [31] R. Brambilla, F. Grilli, L. Martini, and F. Sirois, "Integral equations for the current density in thin conductors and their solution by the finite-element method," *Superconductor Science and Technology*, vol. 21, p. 105008, 2008.
- [32] E. Pardo, "Modeling of coated conductor pancake coils with a large number of turns," *Superconductor Science and Technology*, vol. 21, p. 065014, 2008.
- [33] R. Jakob, "Calculation of AC losses in HTSC wires with arbitrary current voltage characteristics," *Physica C: Superconductivity*, vol. 310, pp. 42-47, 1998.
- [34] T. Yazawa, J. J. Rabbers, B. ten Haken, H. H. J. ten Kate, and Y. Yamada, "Numerical calculation of current density distributions in high temperature superconducting tapes with finite thickness in self field and external field," *Physica C: Superconductivity*, vol. 310, pp. 36-41, 1998.
- [35] F. Sirois and F. Roy, "Computation of 2-D Current Distribution in Superconductors of Arbitrary Shapes Using a New Semi-Analytical Method," *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, vol. 17, pp. 3836-3845, 2007.
- [36] F. Sirois, F. Roy, and B. Dutoit, "Assessment of the Computational Performances of the Semi-Analytical Method (SAM) for Computing 2-D Current Distributions in Superconductors," *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, vol. 19, pp. 3600-3604, 2009.
- [37] M. Siahraang, F. Sirois, D. N. Nguyen, S. Babic, and S. P. Ashworth, "Fast Numerical Computation of Current Distribution and AC Losses in Helically Wound Thin Tape Conductors: Single-Layer Coaxial Arrangement," *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, vol. 20, pp. 2381-2389, 2010.
- [38] L. Urankar, "Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, Part III: Exact computation for rectangular cross section," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 18, pp. 1860-1867, 1982.
- [39] N. Rahal, "Calcul et Evaluation Numérique du Vecteur Potentiel et du Champ Magnétique généré par un Electro-aimant Cylindrique à Section Rectangulaire," genie électrique, Ecole Polytechnique de Montreal, Montreal, aout 2007.
- [40] *Suite of Nonlinear and Differential/ALgebraic Equation Solvers (SUNDIALS) [Internet]*. Available: <http://computation.llnl.gov/casc/sundials>
- [41] S. Majid, "Numerical electromagnetic modeling of HTS transmission cables," Ph.D., Genie électrique, Ecole Polytechnique de Montreal, Montreal, 2011.
- [42] *The MathWorks Inc. MATLAB [Internet]*. Available: <http://www.mathworks.com>
- [43] L. R. Petzold, *Description of DASSL: a differential/algebraic system solver*, 1982.
- [44] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [45] E. H. Neville, "Jacobian elliptic functions," *Oxford, Clarendon*, 1951.
- [46] P.F. Byrd and M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*. Berlin and New York: Springer-Verlag, 1971.

## ANNEXE

**Résolution analytique du potentiel vecteur (code CalculA.m)**

Dans le cas d'un électroaimant cylindrique, de section rectangulaire, la résolution analytique a été effectuée par L.R. Urankar [38]. Plus exactement, l'auteur calcule dans son article le champ magnétique et le potentiel vecteur pour un électroaimant en arc à section rectangulaire, le cas précédent étant un cas particulier de celui-ci.

La méthode de résolution et les étapes de calculs menant à la forme finale sont décrites dans cette annexe. Tout d'abord, l'électroaimant est défini en coordonnées cylindriques par les angles  $(\varphi_1; \varphi_2)$ , les rayons  $(R_1; R_2)$  et les élévations  $(Z_1, Z_2)$ . La surface de la section de l'électroaimant est alors de  $(R_2 - R_1) \times (Z_2 - Z_1)$ , et la longueur d'arc azimutale est  $(\varphi_2 - \varphi_1)$ . De plus, on définit  $\vec{r} = (r, \varphi, z)$  et  $\vec{r}' = (r', \varphi', z')$ , les vecteurs positions de source et de point d'observation respectivement, tel que  $R_1 \ll r' \ll R_2$  et  $Z_1 \ll z' \ll Z_2$ .

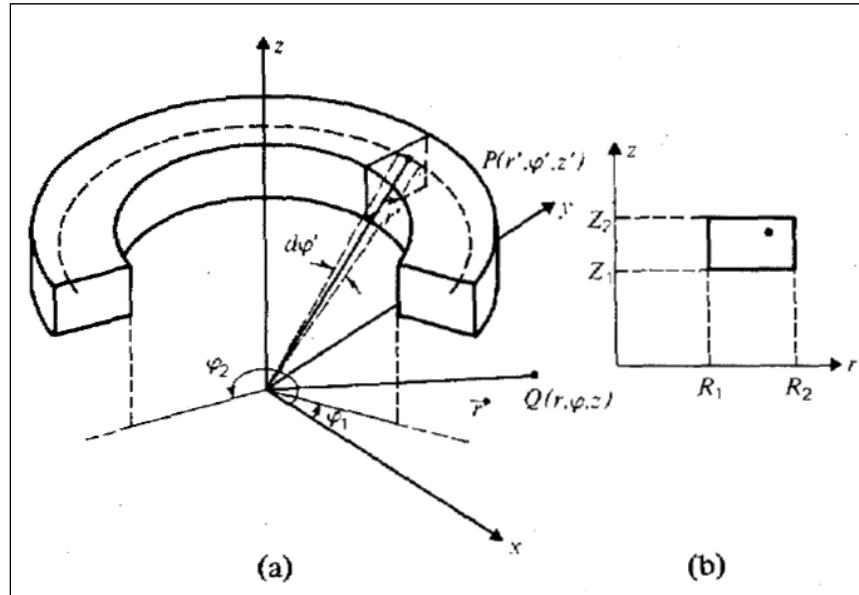


Figure 1 - Calcul du champ pour un électroaimant cylindrique à section rectangulaire : (a) vue dans l'espace, (b) vue dans le plan de la section [38].

La loi de Biot-Savart, loi fondamentale de la magnétostatique, qui permet de calculer le potentiel vecteur généré par une distribution spatiale de courant  $J$ , est donnée par :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_s J \frac{\vec{dl}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds \quad (1)$$

où  $\vec{dl}$  est un vecteur de longueur infinitésimale parcouru par le courant  $J$ ,  $\vec{r}'$  et  $\vec{r}$  sont les vecteurs positions de la source et du point d'observation respectivement, et  $ds$  est un élément de surface infinitésimal orthogonal à  $dl$ .

Sachant que  $A_z = 0$ , la démarche consiste à intégrer partiellement selon  $r'$  et  $z'$  la relation (1) pour obtenir la forme suivante :

$$\vec{A}_j(\vec{r}) = \frac{J}{4\pi} \vec{\hat{A}}_j(\vec{r}), \quad j = r, \varphi \quad (1')$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_j(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\phi [\gamma D(\phi) + 2\gamma r \cos(\phi) \sinh^{-1}(\beta_1(\phi)) \\ + (r'^2 - r^2 \cos(2\phi)) \sinh^{-1}(\beta_2(\phi)) \\ - r^2 \sin(2\phi) \tan^{-1}(\beta_3(\phi))] \begin{cases} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{cases}, j = r, \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

avec :

$$\gamma = z' - z \quad (3a)$$

$$\phi = \varphi' - \varphi \quad (3b)$$

$$D^2(\phi) = \gamma^2 + B^2(\phi) \quad (3c)$$

$$B^2(\phi) = r'^2 + r^2 - 2rr' \cos(\phi) \quad (3d)$$

$$G(\phi)^2 = \gamma^2 + r^2 \sin^2(\phi) \quad (3e)$$

$$\beta_1(\phi) = \frac{r' - r \cos(\phi)}{G(\phi)} \quad (3f)$$

$$\beta_2(\phi) = \frac{\gamma}{B(\phi)} \quad (3g)$$

$$\beta_3(\phi) = \frac{\gamma(r' - r \cos(\phi))}{r \sin(\phi) D(\phi)}. \quad (3h)$$

L'étape suivante consiste à effectuer la transformation angulaire  $\phi = \pi - 2\alpha$ , et de diviser l'intégrale en deux parties allant de 0 à  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ). Nous obtenons en tenant compte de la parité des fonctions :

$$\hat{A}_j(\vec{r}) = \sum_{i=1}^2 (-1)^{(i+1)} \left( \delta_{jr} + \delta_{j\phi} \text{sgn}(\alpha_i) \right) \hat{A}_j(|\alpha_i|), \quad j = r, \phi \quad (4)$$

avec  $\alpha_i = \frac{1}{2}(\pi + \varphi - \varphi_i)$ .

En transformant à cette étape, les intégrales en fonctions elliptiques de Jacobi [45] et en utilisant par la suite les formules de récurrences associées à ces fonctions [46], on obtient le potentiel vecteur, le champ magnétique et son gradient [38]. Il suffit ensuite de calculer leur valeurs pour  $\alpha_i = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ , et on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \hat{A}_\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) &= C_\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \gamma r J\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\gamma a}{2r} [U(k)K(k) - 2r'E(k)] \\ &+ \frac{\gamma}{6ar} \sum_{p=1}^3 (-1)^p P_\phi(n_p) Z(n_p^2, k) \end{aligned} \quad (5)$$

où :

$$k^2 = \frac{4rr'}{a^2} \quad (6a)$$

$$a^2 = \gamma^2 + b^2 \quad (6b)$$

$$b = r + r' \quad (6c)$$

$$c^2 = \gamma^2 + r^2 \quad (6d)$$

$$n_p^2 = \frac{2r}{r + (-1)^p c} \quad (6e)$$

$$n_3^2 = \frac{4rr'}{b^2} \quad (6f)$$

$$C_\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi r^2}{6 \operatorname{sgn}(\gamma(r' - r))} \quad (6g)$$

$$U(k) = \frac{k^2(4\gamma^2 + 3r'^2 - 5r^2)}{4r} \quad (6h)$$

$$P_\varphi(n_p) = \frac{\delta_{pq}[r' - (-1)^p c]n_p^2 c(3r^2 - c^2)}{2r} - \frac{\delta_{p3}r'}{b(r' - r)(3r^2 - r'^2)}, q = 1, 2. \quad (6i)$$

Les fonctions  $K(k)$ ,  $E(k)$ , et  $Z(n_p^2, k)$  sont les intégrales elliptiques complètes de 1<sup>ère</sup>, 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> espèce respectivement, de module  $k$  et d'argument  $\pi/2$  [46].

La fonction  $J(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sinh^{-1}(\beta_1(\alpha)) d\alpha$  est une intégrale sans solution analytique connue, et l'on doit l'évaluer numériquement.

Notons que dû à la symétrie cylindrique, les composantes  $A_r$  et  $A_z$  sont nulles et le reste des composantes est indépendant de  $\varphi$ , d'où le choix de  $\varphi = 0$  donnant  $\alpha_i = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Finalement, en remplaçant les valeurs obtenues en (5) dans (4), puis les résultats obtenus dans (1'), nous aboutissons à :

$$A_{\varphi}(\vec{r}) = \frac{J}{4\pi} 2\hat{A}_{\varphi}(\pi/2) \quad (7)$$

Cette formule (7) est très utile car elle permet de déterminer la valeur du potentiel vecteur en tout point de l'espace, avec comme seuls pré-requis la dimension et la position de l'électroaimant  $(R_1, R_2, Z_1, Z_2)$  et la densité de courant  $J$  le parcourant. Ce résultat quasi-analytique a été implémenté dans la fonction ***CalculA.m***, qui est utilisée tout au long de ce mémoire.