

Titre: Solutions probabilistes de problèmes en optimisation
Title:

Auteur: Mourad Mazigh
Author:

Date: 2000

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Mazigh, M. (2000). Solutions probabilistes de problèmes en optimisation [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8650/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8650/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Mario Lefebvre
Advisors:

Programme: Non spécifié
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

SOLUTIONS PROBABILISTES DE PROBLÈMES EN OPTIMISATION

MAZIGH MOURAD

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)

MAI 2000

© MAZIGH Mourad, 2000.



**National Library
of Canada**

**Acquisitions and
Bibliographic Services**

**385 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

**Bibliothèque nationale
du Canada**

**Acquisitions et
services bibliographiques**

**385, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada**

Your file *Votre référence*

Our file *Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-60944-8

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

SOLUTIONS PROBABILISTES DE PROBLÈMES EN OPTIMISATION

présentée par : MAZIGH Mourad

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. MALHAMÉ Roland P., Ph.D., président

M. LEFEBVRE Mario, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BOUKAS EL-Kébir, Ph.D., membre

M. HAURIE Alain, Ph.D., membre

*À mes parents,
à Bihac,
à ma soeur,
et à la mère de Bihac.*

Remerciements

En tout premier lieu, je veux rendre grâce à Dieu et lui donner toute la gloire pour l'œuvre qu'il accomplit dans ma vie et particulièrement dans mes études.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon directeur de recherche, le professeur M. Mario Lefebvre pour la confiance qu'il m'a témoignée ainsi que pour ses conseils et encouragements qu'il m' a prodigués tout au long de ce travail.

Mme Michèle Breton mérite aussi toute ma gratitude pour m'avoir soutenu moralement et financièrement pendant les premières années de mon doctorat. Je lui suis très reconnaissant pour ses conseils et son amitié.

Je remercie le fonds pour la formation des chercheurs et aide à la recherche pour m'avoir aidé à mener à bien cette thèse.

Je remercie les professeurs et membres du département de mathématiques appliquées que j'ai côtoyés pour leur travail consciencieux.

Enfin, ma gratitude va à toute ma famille et mes amis qui m'ont permis d'arriver à ce point et m'ont soutenu durant ces années.

Résumé

Nous considérons des problèmes d'optimisation régis par des équations d'états stochastiques. Nous introduisons dans la fonction de coût un facteur tenant compte de l'attitude des décideurs face au risque. Nous établissons les conditions d'optimalité pour ce genre de problèmes.

Le contrôle optimal s'obtient en considérant uniquement le système non commandé. L'évaluation de la commande optimale se ramène à la recherche de la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire temps du système non commandé. C'est le temps que met le système pour atteindre l'état final. Il s'agit d'un problème d'instant de premier passage.

Nous illustrons le résultat théorique par des exemples concrets. En tout premier lieu, nous traitons des problèmes classiques de poursuite où nous rajoutons le paramètre tenant compte de l'attitude des décideurs face au risque. Dans un deuxième modèle, nous proposons de déterminer la commande optimale d'un système dynamique qui régit l'exploitation d'une même espèce animale par deux pays. Finalement, nous proposons un modèle de négociation salariale entre le syndicat et le patronat. Dans les trois types de modèles, nous calculons explicitement la commande optimale en considérant des perturbations différentes et des cas limites pertinents. Nous présenterons dans le cas du modèle de pêche les résultats d'une simulation numérique pour confirmer l'exactitude de nos résultats théoriques.

Abstract

We consider stochastic control problems which take into account the risk sensitive factor. We establish the new optimality conditions for these types of problems.

We obtain the optimal control by considering only the uncontrolled system. We compute the optimal control by calculating the moment generating function of the random variable time of the uncontrolled system, known as the first passage time.

We go through concrete examples to illustrate our theoretical work. First of all, we solve some classical pursuit problems by adding the risk sensitive parameter to the cost function. In the second model, we consider a stochastic optimal problem that describes the evolution of a certain animal species exploited by two countries. Finally, we propose two stochastic models for labor-management negotiations. For each of these examples, we compute explicitly the value of the optimal control by considering different types of perturbations. At the same time, we study some limit cases. For the hunting model, we present some simulation studies of numerical examples to verify the theoretical results.

Table des matières

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : MODÈLES ET SOLUTIONS	6
1.1 Introduction	6
1.2 Théorème de Whittle	7
1.3 Théorème de Kuhn	9
1.4 Cas des jeux différentiels stochastiques	12

1.5 Conclusion	19
CHAPITRE 2 : PROBLÈMES DE POURSUITE	20
2.1 Cas de jeux stochastiques différentiels bidimensionnels	20
2.2 Premier exemple	25
2.3 Deuxième exemple	28
2.4 Conclusion	30
CHAPITRE 3 : UN MODÈLE STOCHASTIQUE DE PÊCHE IM- PLIQUANT DEUX PAYS	31
3.1 Introduction	31
3.2 Commande optimale dans l'intervalle (d_1, d_2)	34
3.3 Le cas où d_2 tend vers l'infini	41
3.4 Le cas où d_1 décroît vers zéro	49
3.5 Exemples numériques	55
3.6 Conclusion	58
CHAPITRE 4 : MODÈLES STOCHASTIQUES DE NÉGOCIATION	61
4.1 Introduction	61

4.2 Pénaliser les longues négociations	64
4.3 Forcer les deux parties à conclure une entente	75
4.4 Un processus intégré pour modéliser la négociation	77
4.5 Conclusion	82
CONCLUSION	84
BIBLIOGRAPHIE	85

Liste des figures

3.1 Exemple 1	56
3.2 Exemple 2	57
3.3 Exemple 3	58
3.4 Exemple 4	59
3.5 Exemple 5	60

Introduction

Selon l'acception courante, un jeu est une situation où des individus (les "joueurs") sont conduits à faire des choix parmi un certain nombre d'actions possibles, et ce dans un cadre défini à l'avance (les "règles du jeu"). Le résultat de ces choix constituent une issue du jeu, à laquelle est associé un gain, positif ou négatif, pour chacun des participants.

Un exemple classique est celui des jeux de société -comme les échecs ou le bridge- où les choix des joueurs se traduisent par des issues telles que la victoire, la défaite ou le match nul. Ces issues entraînent des gains monétaires (si, par exemple, des paris ont été pris), ou des gains d'ordre psychologique (la satisfaction d'avoir gagné ou le dépit d'avoir perdu).

Le propos de la théorie des jeux est l'étude de toute situation présentant des caractéristiques semblables à celles des jeux de société, c'est-à-dire des situations où des individus font des choix en interaction, dans un cadre stipulé à l'avance. Son domaine d'application est donc extrêmement large, puisqu'il recouvre théoriquement l'ensemble des activités des humains vivant en société.

Le livre que le mathématicien John Von Neuman [39] publia en 1947 avec l'économiste Oskar Morgenstern suscita un enthousiasme inouï. Il fut unanimement reconnu comme posant "les premières bases saines pour une explication scientifique du passage du comportement individuel au comportement collectif". Depuis lors, la "théorie des jeux" a acquis ses lettres de noblesse dans la communauté scientifique à la suite des travaux de John Nash, Lloyd Shapley et Robert Aumann, entre autres. Aujourd'hui, elle constitue un discours d'une ampleur comparable à l'automatique théorique

ou à la théorie des systèmes. Ses applications les plus marquantes concernent la modélisation des comportements des agents économiques et politiques. Ainsi, il n'est plus possible de nos jours de développer une analyse de la concurrence interindustrielle sans préciser quel concept de la théorie des jeux de société (par la théorie des graphes) ou cinématiques (jeux différentiels) est à l'oeuvre.

C'est pourquoi économistes, sociologues, politicologues et autres, recourent de plus en plus aux concepts de la théorie des jeux. L'objectif essentiel de cette théorie est de "définir" des comportements rationnels, et de là d'en dégager les principales caractéristiques de leurs interactions, avec le plus grand degré de généralité possible.

La notion de risque a depuis longtemps suscité l'intérêt des chercheurs et des scientifiques et le suscitera toujours. Comment pouvons nous le quantifier ? La notion de l'attitude du décideur face au risque a été introduite dans la fonction d'utilité de l'individu qui cherche à la maximiser ou à la minimiser selon la situation où il se trouve. Un décideur opposé au risque se contente toujours de s'assurer de l'espérance mathématique de la loterie plutôt que la loterie elle-même. Ce comportement est quantifié dans la concavité de la fonction d'utilité. Dans le même contexte, un vrai parieur ne pourra pas avoir du plaisir au jeu s'il ne participe pas au jeu et dans ce cas, sa fonction d'utilité sera convexe. Tandis qu'un décideur neutre face au risque présente une fonction d'utilité linéaire. Ainsi, nous voyons que la notion de risque est très importante car elle permet de caractériser l'attitude du décideur dans certains aspects de son comportement [35].

L'intérêt que certains chercheurs ont porté aux problèmes de contrôle stochastique sensible au risque est dû en partie aux développements réalisés en contrôle robuste et à la théorie des jeux différentiels. La solution aux problèmes sensibles au risque se ramène à une stratégie optimale correspondant à un décideur opposé au risque. Jacobson [14] a été parmi les premiers à établir une relation entre des problèmes de

jeux différentiels et des problèmes de contrôle sensible au risque avec information complète tout en considérant une fonction de coût linéaire ou quadratique. Des problèmes non linéaires similaires ont été étudiés récemment et une solution à des jeux différentiels a été obtenue comme étant un problème limite avec un bruit assez petit [11], [15], [43]. La solution à des problèmes de contrôle optimal neutre au risque est proposée dans le cas limite d'un bruit assez petit [15].

Jacobson [14] a proposé aussi pour la première fois l'espérance mathématique d'une fonction exponentielle comme étant une mesure de la performance. Le coût est employé comme étant un critère d'optimisation pour un système markovien gaussien avec une information parfaite [3], [32]. Le critère de performance a été par la suite étudié dans le cas d'une information imparfaite. L'intérêt dans les problèmes avec des fonctions de coût exponentielles a été considéré quand les solutions obtenues étaient directement liées à l'espace H_∞ (espace de Hilbert muni de la norme de la convergence uniforme) [8], [12]. Dans son article, Jacobson a pu établir la relation entre une fonction de coût exponentielle et un jeu différentiel. La plupart des résultats existant sur les problèmes ayant une fonction de coût exponentielle supposent une équivalence exacte pour optimiser un coût quadratique.

Whittle [40] a résolu le problème à temps discret de contrôle stochastique sensible au risque avec information incomplète et la solution est obtenue en utilisant le principe d'équivalence certain (solution du problème linéaire quadratique déterministe obtenu par l'élimination du facteur bruit du problème de contrôle stochastique). Le problème analogue en temps continu a été résolu par Bensoussan et Van Schuppen [3]. Le problème a été converti pour obtenir un problème avec information complète. Une technique de transformation a aussi été utilisée pour résoudre des problèmes de jeux différentiels partiellement observés.

Whittle [44] a considéré des problèmes de contrôle stochastique sensible au risque non linéaires et à temps continu. Il a proposé une solution approximative en utili-

sant le principe d'équivalence certain dans le cas limite d'un petit bruit blanc. Ces résultats n'étaient pas suffisamment rigoureux mais ils ont énormément contribué à l'émergence de nouveaux résultats.

Whittle et Kuhn [45] ont traité la sensibilité face au risque dans des problèmes de contrôle optimal stochastique. Dans leur modèle, l'attitude face au risque est représentée par un paramètre que le décideur fixe pour pouvoir lui permettre d'exprimer son pessimisme ou son optimisme quant à l'issue du jeu. Ainsi, le décideur peut agir sur le processus aléatoire qui caractérise en partie la dynamique du système en fixant un paramètre par lequel il peut exprimer son attitude envers le jeu et de cette façon, il peut imposer son choix.

La thèse consiste à résoudre de façon explicite des problèmes de jeux différentiels stochastiques et de contrôle stochastique qui tiennent compte de la sensibilité au risque des décideurs. Ainsi, la thèse se divise en deux parties. Dans la première partie, nous reprenons le travail de Whittle et Kuhn et nous l'appliquerons au cas des jeux différentiels stochastiques. Ainsi, nous proposons d'établir les nouvelles conditions d'optimalité dans le cas des jeux différentiels. Nous prendrons aussi le soin de pouvoir illustrer ce résultat théorique par deux exemples. En deuxième partie de la thèse, nous proposons des modèles de contrôle stochastique que nous résoudrons explicitement par la technique proposée par Whittle et Kuhn. Ainsi, notre travail consiste à proposer des modèles associés à des problèmes de contrôle stochastique avec risque et nous obtenons des solutions explicites à ces problèmes en utilisant la démarche de Whittle et Kuhn.

Dans le chapitre 1, nous présenterons les nouvelles conditions d'optimalité pour une classe de problèmes de jeux stochastiques différentiels dans lesquels nous introduirons dans la fonction de coût un paramètre qui quantifiera l'attitude face au risque des joueurs.

Dans le chapitre 2, nous illustrerons le résultat théorique trouvé dans le chapitre 1 par deux exemples classiques de problèmes de poursuite.

Dans le chapitre 3, nous présenterons un modèle de pêche impliquant deux pays. Ce modèle a été développé par Hämäläinen, Haurie et Kaitala. Nous apporterons des modifications au modèle pour qu'il puisse traduire le mieux possible la réalité. Nous étudierons les cas limites sous toutes leurs formes ainsi que leur impact sur la commande optimale et sur l'état des stocks.

Enfin dans le chapitre 4, nous reprendrons un modèle de négociation salariale proposé par Leitmann. Nous rajouterons dans ce modèle le facteur incertitude par l'intermédiaire d'un bruit blanc. Ce rajout rendra le modèle plus approprié et cela nous permettra de mieux évaluer ses performances.

La matière qui apparaît dans les chapitres 2, 3 et 4 a servi à la rédaction de trois articles qui ont été déjà publiés [25], [26] et [27].

Chapitre 1

Modèles et solutions

Nous considérons des problèmes de contrôle stochastique et de jeux différentiels stochastiques où la fonction de coût contient un paramètre qui tient compte de l'attitude du décideur face au risque. Les solutions optimales de ces types de problèmes sont calculées en considérant uniquement le système non commandé. Nous présentons les conditions d'optimalité pour ces types de problèmes.

1.1 Introduction

Dans le livre de Whittle [41, p. 289], il a été démontré, sous certaines hypothèses, que la solution optimale de la commande d'un système dynamique peut être obtenue en considérant uniquement le système non commandé. Lefebvre [16], [18] s'est appuyé sur ce résultat pour déterminer la solution optimale de certains systèmes dynamiques. Il a par la suite élargi l'utilisation du théorème de Whittle pour inclure une plus grande classe de systèmes dynamiques [17]. De même, Lefebvre [20] a appliqué ce nouveau résultat sur des cas particuliers. Kuhn [31] a généralisé le théorème de Whittle en considérant une fonction de coût incluant un paramètre tenant compte de l'attitude du décideur face au risque. Dans ce chapitre, nous généralisons le théorème de Kuhn en établissant les nouvelles conditions d'optimalité pour le cas des jeux différentiels stochastiques.

1.2 Théorème de Whittle

Dans le livre de Whittle [41, p. 289], le système dynamique considéré est régi par le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(x, u, t)dt + [N(x, t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \\ &= a(x, t)dt + B(x, t)udt + [N(x, t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

où :

- $x(t)$ représente le vecteur des variables d'état du système appartenant à \mathfrak{R}^n .
- u est la loi de commande appartenant à \mathfrak{R}^m . u peut être une rétroaction qui est une fonction de x et de t .
- $f(x, u, t)$ et $a(x, t)$ sont des vecteurs de n fonctions continues, bornées et vérifiant les conditions de Lipschitz.
- $B(x, t) = [B_{ij}(x, t)]$ est une matrice $n \times m$ où $B_{ij}(x, t)$ sont des fonctions continues, bornées et vérifiant les conditions de Lipschitz .
- $N(x, t) = [N_{ij}(x, t)]$ est une matrice symétrique $n \times n$ non négative où $N_{ij}(x, t)$ sont des fonctions continues, bornées et vérifiant les conditions de Lipschitz .
- $W(t)$ est un processus de Wiener de dimension n .

Whittle a trouvé la commande optimale u qui minimise l'espérance mathématique de la fonction de coût suivante :

$$J(x, u, s) = \frac{1}{2} \int_s^T u'Q(x, t)udt + K[x(T), T] \quad (1.2)$$

où

$$T = T(x, s) = \inf \{t \geq s : (x(t), t) \in D \mid x(s) = x\},$$

$Q(x, t)$ est une matrice symétrique définie positive de taille $m \times m$, K est la fonction de coût final. K est une fonction continue, bornée et vérifiant les conditions de Lipschitz. D est un sous espace de $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. D est une région dans laquelle le processus se termine et cette région est dite "région de terminaison".

Le problème consiste à trouver la commande optimale u^* qui permet de minimiser l'espérance mathématique de la fonction $J(x, u, s)$ pour tout $t \in [s, T]$ définie comme suit :

$$F(x, s) = \inf_u E[J(x, u, s)] \quad (1.3)$$

Ainsi, Whittle a prouvé ce qui suit :

Théorème 1.1 *L'équation de programmation dynamique du problème défini dans les équations (1.1), (1.2) et (1.3) s'écrit comme suit :*

$$\begin{aligned} \inf_u \left[\frac{1}{2} u' Q u + F_s + F_x (a + B u) + \frac{1}{2} \text{tr}(N F_{xx}) \right] &= 0 & x \notin D \\ F(x, s) &= K[x(s), s] & x \in D \end{aligned} \quad (1.4)$$

et la commande optimale est :

$$u^* = -Q^{-1} B' F'_x \quad (1.5)$$

Maintenant, supposons qu'il existe un certain réel α positif de sorte que la relation suivante soit vérifiée :

$$N = \alpha B Q^{-1} B' \quad (1.6)$$

alors il existe une fonction unique $\Phi(x, s)$ qui vérifie la relation suivante pour tout x et s :

$$\Phi(x, s) = \exp \left[-\frac{1}{\alpha} F(x, s) \right] \quad (1.7)$$

et qui est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_s + \Phi_x a + \frac{1}{2} \text{tr}(N \Phi_{xx}) &= 0 & x \notin D \\ \Phi(x, s) &= \exp \left[-\frac{1}{\alpha} K[x(s), s] \right] & x \in D \end{aligned} \quad (1.8)$$

La fonction $F(x, s)$ est ainsi calculée à partir de :

$$\Phi(x, s) = \exp \left[-\frac{1}{\alpha} F(x, s) \right] = E \left\{ \exp \left[-\frac{1}{\alpha} K[y(\tau), \tau] \right] \mid y(s) = x \right\} \quad (1.9)$$

où $y(t)$ est le processus non commandé qui commence au point (x, s) et se termine avec une probabilité 1 dans la région D et qui a la forme suivante :

$$dy(t) = a(y, t)dt + [N(x, t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \quad (1.10)$$

et τ représente T dans le cas du système non commandé $y(t)$.

Quand le vecteur a et les matrices B , N et Q ne dépendent pas de la variable d'état x , et que le système n'a pas atteint l'état final, les problèmes considérés par Whittle sont des problèmes linéaires quadratiques gaussiens (LQG). En fait Whittle leur a attribué le nom de LQG "homing".

1.3 Théorème de Kuhn

Kuhn [31] a généralisé le théorème de Whittle 1.1 en considérant une fonction de coût contenant un paramètre sensible au risque. Dans ce cas, la fonction de coût s'écrit :

$$C(x, u, s, \theta) = -\frac{1}{\theta} \log E \{ \exp [-\theta J(x, u, s)] \} \quad (1.11)$$

où θ tient compte de l'attitude du décideur face au risque et la fonction $J(x, u, s)$ a cette expression :

$$J(x, u, s) = \frac{1}{2} \int_s^T [u'Q(x, t)u + h(x, t)] dt + K[x(T), T] \quad (1.12)$$

où $h(x, t)$ est une fonction continue et bornée.

Pour toute valeur de z , le développement limité de la fonction $\exp(z)$ s'écrit comme suit :

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + o(z^3)$$

et le développement limité de la fonction $\log(1+z)$ s'écrit comme suit :

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^3)$$

Pour comprendre l'idée derrière l'utilisation de la fonction de coût $C(x, u, s, \theta)$, considérons le cas où θ est très petit. Cela nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} C(x, u, s, \theta) &= -\frac{1}{\theta} \log \mathbb{E} \left[1 - \theta J + \frac{\theta^2}{2} J^2 + o(\theta^3) \right] \\ &= -\frac{1}{\theta} \log \left[1 - \theta \mathbb{E}(J) + \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}(J^2) + o(\theta^3) \right] \\ &= -\frac{1}{\theta} \log \left\{ 1 + \left[-\theta \mathbb{E}(J) + \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}(J^2) + o(\theta^3) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{\theta} \times \left\{ -\theta \mathbb{E}(J) + \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}(J^2) + o(\theta^3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\theta \mathbb{E}(J) - \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}(J^2) - o(\theta^3) \right]^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{\theta} \left\{ -\theta \mathbb{E}(J) + \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}(J^2) - \frac{\theta^2}{2} \mathbb{E}^2(J) + o(\theta^3) \right\} \\ &= \mathbb{E}(J) - \frac{\theta}{2} [\mathbb{E}(J^2) - [\mathbb{E}(J)]^2] + o(\theta^2) \\ &= \mathbb{E}(J) - \frac{\theta}{2} \text{Var}(J) + o(\theta^2) \end{aligned}$$

Le développement limité de la fonction de coût $C(x, u, s, \theta)$ montre qu'on tient compte non seulement de l'espérance mathématique mais également de la variance de J .

A partir du développement limité de la fonction de coût $C(x, u, s, \theta)$, nous pouvons facilement montrer que :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C(x, u, s, \theta) = \mathbb{E}[J(x, u, s)] \quad (1.13)$$

Ainsi, à partir de l'équation (1.13), nous pouvons déduire que le problème de minimisation de l'espérance mathématique de la fonction de coût décrite dans l'équation

(1.11) est un cas où le décideur est neutre par rapport au risque. En fait, Whittle [42] a consacré un ouvrage dans lequel il traite du sujet de la commande optimale associée à l'attitude d'un décideur face au risque. Dans son livre [42], il rappelle que l'attitude d'un décideur opposé au risque est obtenue quand $\theta < 0$ et que quand $\theta > 0$, le décideur a une attitude aimant le risque.

La généralisation du théorème de Whittle 1.1 par Kuhn se traduit comme suit :

Théorème 1.2 *L'équation de programmation dynamique du problème dont la dynamique est définie dans l'équation (1.1) et la fonction $C(x, u, s, \theta)$ est définie dans l'équation (1.11) s'écrit comme suit :*

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_u \left[\frac{1}{2} u' Q u + h + F_s + F_x(a + Bu) - F_x \left(\frac{\theta N}{2} \right) F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}(N F_{xx}) \right] & x \notin D \\ F(x, s) &= K[x(s), s] & x \in D \end{aligned} \quad (1.14)$$

La commande optimale s'écrit :

$$u^* = -Q^{-1} B' F'_x \quad (1.15)$$

Maintenant, supposons qu'il existe un certain réel α de sorte que la relation suivante soit vérifiée :

$$\alpha N = BQ^{-1} B' + \theta N \quad (1.16)$$

alors, il existe une fonction unique $\Phi(x, s)$ qui vérifie la relation suivante pour tout x et s :

$$\Phi(x, s) = \exp[-\alpha F(x, s)] \quad (1.17)$$

et qui est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned} -h\alpha\Phi + \Phi_s + \Phi_x a + \frac{1}{2} \text{tr}(N\Phi_{xx}) &= 0 & x \notin D \\ \Phi(x, s) &= \exp[-\alpha K[x(s), s]] & x \in D \end{aligned} \quad (1.18)$$

La fonction $F(x, s)$ est ainsi calculée à partir de :

$$\Phi(x, s) = \exp[-\alpha F(x, s)] = E \{ \exp[-\alpha K[y(\tau), \tau] \mid y(s) = x] \} \quad (1.19)$$

où $y(t)$ est le processus non commandé qui commence au point (x, s) et se termine avec une probabilité 1 dans la région D et qui a la forme suivante :

$$dy(t) = a(y, t)dt + [N(x, t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \quad (1.20)$$

et τ représente T dans le cas du système non commandé $y(t)$.

Remarque 1.1 Dans la formulation du problème de Kuhn, la fonction de coût final K dépend seulement de l'état final $x(T)$. Cependant, il n'est pas difficile de montrer que K peut également dépendre de T . Par exemple, en choisissant $h(x, t) = L$, une constante, ceci revient à dire que K dépend de T (comme Kuhn l'a fait dans un exemple).

Remarque 1.2 Les relations définies dans les équations 1.6 et 1.16 apparaissent plutôt spéciales. Ces relations supposent que les composantes du terme $dx(t)$ doivent être relativement affectées de la même façon aussi bien par la commande u que par le bruit blanc. Pour un ensemble de processus, ces relations ne viennent pas trop sérieusement violer la réalité.

1.4 Cas des jeux différentiels stochastiques

Nous considérons le système dynamique défini à l'équation (1.1) ainsi que la fonction de coût $C(x, u, s, \theta)$ définie à l'équation (1.11) et la fonction J définie à l'équation (1.2).

Dans le cas des jeux différentiels stochastiques, nous sommes en présence de deux décideurs. Nous avons $u = (u_1, u_2)$. Ainsi, les commandes des deux décideurs sont représentées respectivement par u_1 et u_2 . Le premier décideur cherche à minimiser la fonction de coût $C(x, u_1, u_2, s, \theta)$ en agissant sur la commande u_1 , tandis que le deuxième désire maximiser la fonction de coût $C(x, u_1, u_2, s, \theta)$, en agissant sur la commande u_2 . Ainsi, notre objectif consiste à déterminer les valeurs de u_1^* et u_2^* des commandes u_1 et u_2 telles que :

$$C(x, u_1^*, u_2, s, \theta) \leq C(x, u_1^*, u_2^*, s, \theta) \leq C(x, u_1, u_2^*, s, \theta) \quad \forall (u_1, u_2) \quad (1.21)$$

Posons :

$$F(x, s) = \inf_{u_1} \sup_{u_2} C(x, u_1, u_2, s, \theta) \quad (1.22)$$

où le maximum et le minimum sont calculés pour $t \in [s, T]$.

Proposition 1.1 *L'équation de la programmation dynamique du problème ayant une dynamique définie par le système d'équation (1.1) et une fonction de coût définie par l'équation (1.22) s'écrit comme suit :*

$$0 = \inf_{u_1} \sup_{u_2} \left\{ \frac{1}{2} u' Q u + F_s + F_x f - F_x \left(\frac{\theta N}{2} \right) F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}(N F_{xx}) \right\} \quad x \notin D$$

$$F(x, s) = K[x(s), s] \quad x \in D \quad (1.23)$$

Preuve. Dans le cas où x se trouve dans la région D , nous pouvons facilement écrire à partir de la définition même de $J(x, u_1, u_2, s,)$ que :

$$J(x, u_1, u_2, s) = K[x(s), s]$$

Il s'ensuit que :

$$F(x, s) = C(x, u_1, u_2, s, \theta) = K[x(s), s]$$

Maintenant, considérons le cas où $x \notin D$. Dans ce cas, pour démontrer la proposition, nous utiliserons le principe de la récursivité de la programmation dynamique. Nous avons par définition :

$$\begin{aligned} F(x, s) &= \inf_{u_1} \sup_{u_2} C(x, u_1, u_2, s, \theta) \\ &= \inf_{u_1} \sup_{u_2} \left\{ -\frac{1}{\theta} \log E \{ \exp [-\theta J(x, u_1, u_2, s)] \} \right\} \end{aligned}$$

Nous proposons d'utiliser la transformation suivante :

$$F^*(x, s) = \exp [-\theta F]$$

Sachant que la fonction exponentielle est strictement monotone, nous pouvons ainsi écrire :

$$F^*(x, s) = \text{ext}_{u_1 u_2} E \{ \exp [-\theta J(x, u_1, u_2, s)] \}$$

où :

$$\text{ext}_{u_1 u_2} = \begin{cases} \sup_{u_1} \inf_{u_2} & (\theta \geq 0) \\ \inf_{u_1} \sup_{u_2} & (\theta < 0) \end{cases}$$

En utilisant le principe de récursivité de la programmation dynamique, nous pouvons écrire que :

$$F^*(x, s) = \text{ext}_{u_1 u_2} E \left\{ \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \theta u' Q(x, s) u \Delta s \right) \right] \times F^*(x(s + \Delta s), s + \Delta s) \right\}$$

La suite de la preuve est identique à celle d'un problème de programmation dynamique dans lequel nous cherchons à minimiser la fonction de coût. De ce fait, nous référons le lecteur à l'article de Kuhn [31] et au livre de Whittle [42].□

Proposition 1.2 *En supposant que les dérivées partielles d'ordre 2 de $u'Q(x, t)u$ par rapport à u_1 et u_2 sont respectivement positive et négative, la commande optimale $u^* = (u_1^*, u_2^*)'$ qui satisfait aux inéquations (1.21) est exprimée par :*

$$u^* = -Q^{-1} B' F'_x \quad (1.24)$$

Preuve. Pour trouver les commandes optimales, il faut que l'équation de programmation dynamique (1.23) vérifie les conditions d'optimalité de premier ordre et de deuxième ordre.

Nous posons ainsi :

$$H(x, u, s, \theta) = \frac{1}{2}u'Qu + F_s + F_x f - F_x \left(\frac{\theta N}{2}\right) F_x' + \frac{1}{2}\text{tr}(NF_{xx})$$

Les conditions d'optimalité de premier ordre consistent à trouver les valeurs de la commande optimale u^* qui vérifient l'équation suivante :

$$\frac{\partial H(x, u^*, s, \theta)}{\partial u} = 0$$

Sachant, par hypothèse, que la matrice Q est symétrique et inversible, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (u^*)'Q &= -F_x B \\ \Leftrightarrow (u^*)' &= -F_x B Q^{-1} \\ \Leftrightarrow u^* &= -(F_x B Q^{-1})' \\ \Leftrightarrow u^* &= -Q^{-1} B' F_x' \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité de second ordre se traduisent par le calcul de la matrice hessienne (notée : $\nabla^2 H(x, u, s, \theta)$). Nous obtenons ainsi :

$$\nabla^2 H(x, u, s, \theta) = Q$$

Vu que Q est indépendante de la commande u , nous obtenons ainsi :

$$\nabla^2 H(x, u^*, s, \theta) = Q$$

Dans le cas de jeux stochastiques, la commande u^* doit être un point de selle. Ainsi, contrairement aux théorèmes 1.1 et 1.2 où la matrice de coût Q doit être définie positive, dans ce cadre, la matrice Q peut ne pas être définie positive ni définie négative. \square

Proposition 1.3 *Supposons qu'il existe un certain réel α de sorte que la relation suivante soit vérifiée :*

$$\alpha N = BQ^{-1}B' + \theta N \quad (1.25)$$

L'équation de la programmation dynamique (1.23) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_s + \Phi_x a(x, s) + \frac{1}{2} \text{tr}(N\Phi_{xx}) &= 0 & x \notin D \\ \Phi(x, s) &= \exp[-\alpha K[x(s), s]] & x \in D \end{aligned} \quad (1.26)$$

Preuve. Sachant qu'il existe un réel α de sorte que nous avons :

$$\alpha N = BQ^{-1}B' + \theta N$$

nous pouvons toujours définir une fonction Φ qui vérifie la relation suivante pour toute valeur de x et de s :

$$\Phi(x, s) = \exp[-\alpha F[x(s), s]] \quad (1.27)$$

donc, pour le cas particulier où $x \in D$, la définition de Φ reste valable aussi.

Traisons maintenant le cas où $x \notin D$. Nous savons que la commande optimale est définie par l'équation (1.24); ainsi, l'équation de programmation dynamique (1.23) obtenue à la proposition 1.1 s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} F_x BQ^{-1}B'F'_x + F_s + F_x [a(x, s) - BQ^{-1}B'F'_x] - F_x \left(\frac{\theta N}{2}\right) F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}(NF_{xx}) \\ &= F_s + F_x a(x, s) - \frac{1}{2} F_x BQ^{-1}B'F'_x - F_x \left(\frac{\theta N}{2}\right) F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}(NF_{xx}) \\ &= F_s + F_x a(x, s) - \frac{1}{2} F_x (BQ^{-1}B' + \theta N) F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}(NF_{xx}) \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.25), l'équation de programmation dynamique évaluée avec la commande optimale devient :

$$F_s + F_x a(x, s) - \frac{1}{2} F_x (\alpha N) F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}(NF_{xx}) = 0$$

Maintenant, exprimons cette équation de programmation dynamique en fonction de la fonction $\Phi(x, s)$. D'après la définition de la fonction $\Phi(x, s)$, nous pouvons déduire :

$$\begin{aligned}\Phi(x, s) &= \exp[-\alpha F(x, s)] \\ \Leftrightarrow \log[\Phi(x, s)] &= -\alpha F(x, s) \\ \Leftrightarrow F(x, s) &= -\frac{\log[\Phi(x, s)]}{\alpha}\end{aligned}$$

Ainsi, en supposant que $\Phi(x, s) \neq 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_s}{\Phi} \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_{x_i}}{\Phi} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_{x_i x_i} \Phi - \Phi_{x_i} \Phi_{x_j}}{\Phi^2}\end{aligned}$$

En substituant les expressions des dérivées partielles de F dans l'équation de programmation dynamique, nous obtenons :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_s}{\Phi} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{x_i}}{\Phi} a_i(x, s) - \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \frac{\Phi_{x_i}}{\Phi} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \frac{\Phi_{x_j}}{\Phi} N_{ij} \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n -\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_{x_i x_i} \Phi - \Phi_{x_i} \Phi_{x_j}}{\Phi^2} N_{ij} &= 0 \\ -\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_s}{\Phi} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{x_i}}{\Phi} a_i(x, s) - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_{x_i} \Phi_{x_j}}{\Phi} N_{ij} \\ - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_{x_i x_i}}{\Phi} N_{ij} + \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_{x_i} \Phi_{x_j}}{\Phi^2} N_{ij} &= 0\end{aligned}$$

En simplifiant les termes qui s'annulent entre eux, nous trouvons :

$$-\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_s}{\Phi} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{x_i}}{\Phi} a_i(x, s) - \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Phi_{x_i x_i}}{\Phi} N_{ij} = 0$$

En simplifiant le terme $\alpha\Phi$, cette dernière équation peut s'écrire en notation matricielle sous sa forme finale :

$$\Phi_s + \Phi_x a(x, s) + \frac{1}{2} \text{tr}(N\Phi_{xx}) = 0 \quad \square$$

Proposition 1.4 *L'équation (1.26) correspond à :*

$$\Phi(x, s) = \exp[-\alpha F(x, s)] = E\{-K[y(\tau), \tau] \mid y(s) = x\}$$

où la variable aléatoire τ représente le temps de premier passage dans la région finale D avec une probabilité de 1 (ce qui assure l'unicité de la solution) :

$$\tau(x, s) = \inf \{t \geq s : (y(t), t) \in D \mid y(s) = x\}$$

du système non commandé $y(t)$ défini comme suit :

$$dy(t) = a(y, t)dt + [N(y, t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \quad (1.28)$$

Preuve. L'équation (1.26) est l'équation inverse de Kolmogorov [7] d'un problème de temps de premier passage d'un système non commandé défini comme suit :

$$dy(t) = a(y, t)dt + [N(y, t)]^{\frac{1}{2}} dW(t)$$

Ainsi, $\Phi(x, s)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\Phi_s + \Phi_y a(y, s) + \frac{1}{2} \text{tr}(N \Phi_{yy}) = 0$$

sous les contraintes définies à l'équation (1.28) et qui vérifient la condition à la frontière suivante :

$$\Phi(y, s) = \exp[-\alpha K[y(s), s]] \quad \text{si } (y, s) \in D$$

La fonction Φ représente l'unique solution de F et cette unicité est assurée par le fait que le passage dans la région D se fait avec une probabilité de 1 (voir Whittle [41, p. 289]). □

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré qu'il est possible d'obtenir les valeurs des commandes optimales d'une classe de jeux différentiels stochastiques et ceci en considérant un problème équivalent non commandé. Ce résultat est une extension des résultats de Kuhn [31]. Nous avons ainsi pu obtenir les nouvelles conditions d'optimalité dans le cas des problèmes de jeux différentiels. Dans le but de pouvoir utiliser le résultat de ce chapitre, il faut s'assurer de la validité de deux conditions mentionnées ci-dessus. La première consiste à vérifier que le jeu se termine à l'intérieur d'une région spécifique. La deuxième condition nous amène à vérifier une relation entre le terme bruit et le contrôle.

La première condition ne présente aucun problème. Si l'entrée finale n'est pas assurée, nous pouvons rajouter un coût additionnel pour pénaliser les joueurs qui ne tentent pas de finir le jeu dans la région en question. La seconde condition est un peu spéciale. Dans le théorème de Whittle 1.1 et celui de Kuhn 1.2 et dans la proposition 1.2, la relation entre les matrices est difficile à satisfaire si la taille des problèmes est grande. Par contre, si nous nous limitons à des cas où la relation doit être vérifiée pour des variables appartenant à un espace à une dimension, nous avons plus de chances de trouver des valeurs qui puissent satisfaire la deuxième condition. Nous pensons qu'il faut éliminer cette condition, du moins partiellement. Cela pourrait être rendu possible en exprimant la fonction $F(x, s)$, nécessaire pour l'obtention des commandes optimales, par une espérance mathématique qui ne serait pas nécessairement obtenue à partir de la dynamique du même système [23], [24].

Dans le chapitre 2, nous appliquerons les résultats obtenus dans le cas des jeux stochastiques différentiels sur des exemples de problèmes de poursuite. Et dans les chapitres trois et quatre, nous appliquerons les résultats de Kuhn sur les deux modèles de pêche et de négociations.

Chapitre 2

Problèmes de poursuite

Nous utiliserons les résultats théoriques développés dans le chapitre 1 pour trouver des solutions explicites à des problèmes de jeux différentiels stochastiques bidimensionnels.

2.1 Cas de jeux stochastiques différentiels bidimensionnels

Bien que la proposition 1.3 soit valable pour toute matrice N bidimensionnelle qui satisfait à l'équation (1.25), nous montrerons dans ce qui suit que les matrices B et N doivent être singulières. En effet la relation (1.25) s'écrit comme suit :

$$(\alpha - \theta)N = BQ^{-1}B'$$

En introduisant la fonction déterminant sur cette équation et sachant que nous avons des matrices de dimension deux, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\alpha - \theta)^2 \det(N) &= \det(BQ^{-1}B') \\ &= \det(B) \det(Q^{-1}) \det(B') \end{aligned}$$

Nous savons aussi que $\det(B) = \det(B')$ et que $\det(Q^{-1}) = \frac{1}{\det(Q)}$, donc nous pouvons écrire que :

$$(\alpha - \theta)^2 \det(N) = \frac{[\det(B)]^2}{\det(Q)} \quad (2.1)$$

Dans le cas de jeux différentiels à deux dimensions, la relation de l'équation (2.1) ne peut être vraie que si $\det(N) = 0$. Et de ce fait, nous pouvons conclure que $\det(B) = 0$. Du moment que $\det(N) = 0$, nous pouvons ainsi déduire que les processus stochastiques doivent être complètement corrélés, autrement dit que leur coefficient de corrélation doit être égal à 1 ou -1.

Le système d'équations régissant la dynamique définie à partir du système d'équations (1.1) se ramène à :

$$\begin{cases} dx_1 = a_1 dt \\ dx_2 = a_2 dt + [b_1 u_1 + b_2 u_2] dt + c^{\frac{1}{2}} dW \end{cases} \quad (2.2)$$

où a_i , b_i et c (> 0) peuvent dépendre de x_1 , x_2 et t pour $i = 1, 2$. Nous prenons :

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}$$

où q et r sont positifs. Ainsi nous avons :

$$u'Qu = qu_1^2 - ru_2^2 \quad (2.3)$$

Les dérivées partielles de second ordre par rapport à u_1 et u_2 de $u'Qu$ sont positive et négative respectivement. Nous cherchons ainsi l'optimum de la fonction coût définie dans l'équation (1.11). Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.1 *L'équation de la programmation dynamique du problème ayant une dynamique définie par le système d'équation (2.2) et une fonction F définie par l'équation (1.22) s'écrit comme suit :*

$$0 = \inf_{u_1} \sup_{u_2} \left\{ \frac{1}{2} (qu_1^2 - ru_2^2) + F_s + a_1 F_{x_1} + (a_2 + b_1 u_1 + b_2 u_2) F_{x_2} - \frac{\theta}{2} c F_{x_2}^2 + \frac{c}{2} F_{x_2 x_2} \right\} \quad x \notin D \quad (2.4)$$

$$F(x, s) = K(x, s) \quad x \in D$$

Preuve. La démonstration de cette proposition est une conséquence directe de la proposition 1.1. En effet dans ce cas particulier, nous avons :

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$F_x = (F_{x_1}, F_{x_2}), \quad F_{xx} = \begin{bmatrix} F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} \\ F_{x_1x_2} & F_{x_2x_2} \end{bmatrix}$$

L'équation de programmation dynamique (1.23) s'écrit comme suit :

$$0 = \inf_{u_1} \sup_{u_2} \left\{ \frac{1}{2} u' Q u + F_s + F_x f - F_x \left(\frac{\theta N}{2} \right) F_x' + \frac{1}{2} \text{tr}(N F_{xx}) \right\} \quad x \notin D$$

Donc pour tout $x \notin D$ et connaissant les expressions de $u' Q u$, a , B et N , l'équation ci-dessus s'écrit comme suit :

$$0 = \inf_{u_1} \sup_{u_2} \left\{ \frac{1}{2} (q u_1^2 - r u_2^2) + F_s + (F_{x_1}, F_{x_2}) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + b_1 u_1 + b_2 u_2 \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{\theta}{2} (F_{x_1}, F_{x_2}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_1x_1} & F_{x_1x_2} \\ F_{x_1x_2} & F_{x_2x_2} \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$0 = \inf_{u_1} \sup_{u_2} \left\{ \frac{1}{2} (q u_1^2 - r u_2^2) + F_s + a_1 F_{x_1} + (a_2 + b_1 u_1 + b_2 u_2) F_{x_2} \right. \\ \left. - \frac{\theta c}{2} F_{x_2}^2 + \frac{c}{2} F_{x_2x_2} \right\}$$

Ainsi nous retrouvons l'équation (2.4). \square

Proposition 2.2 *Supposons que la matrice Q vérifie les hypothèses de la proposition 1.2. Alors les commandes u_1^* et u_2^* pour lesquelles les inéquations :*

$$C(x, u_1^*, u_2, \theta) \leq C(x, u_1^*, u_2^*, \theta) \leq C(x, u_1, u_2^*, \theta)$$

sont satisfaites pour tout couple (u_1, u_2) sont données respectivement par :

$$u_1^* = -\frac{b_1}{q} F_{x_2} \quad (2.5)$$

et :

$$u_2^* = \frac{b_2}{r} F_{x_2} \quad (2.6)$$

où $x_2 = x_2(s)$, et $F(x)$ est obtenue à partir de la fonction Φ définie dans l'équation (1.27).

Preuve. La démonstration découle directement de la proposition 1.2. Nous savons que :

$$u^* = -Q^{-1}B'F'_x$$

En substituant les expressions de Q^{-1} , B' et F'_x dans l'expression de la commande optimale définie dans l'équation ci-dessus, nous avons :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{q}F_{x_2} \\ \frac{b_2}{r}F_{x_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi les équations (2.5) et (2.6). \square

Proposition 2.3 *En supposant qu'il existe un réel α de sorte que la relation suivante est vérifiée :*

$$\alpha c = \left(\frac{b_1^2}{q} - \frac{b_2^2}{r} \right) + \theta c \quad (2.7)$$

l'équation de programmation dynamique (2.4) s'écrit :

$$0 = \Phi_s + a_1\Phi_{x_1} + a_2\Phi_{x_2} + \frac{c}{2}\Phi_{x_2x_2} \quad (2.8)$$

pour tout $(x, s) \notin D$, et

$$\Phi(x, s, \alpha) = \exp[-\alpha K(x, s)] \quad (2.9)$$

pour tout $(x, s) \in D$.

Preuve. D'après la proposition 1.3, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \alpha N &= BQ^{-1}B' + \theta N \\ \Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha c &= \left(\frac{b_1^2}{q} - \frac{b_2^2}{r} \right) + \theta c \end{aligned}$$

D'après l'équation (1.26), nous pouvons écrire que pour tout $(x, s) \notin D$:

$$\begin{aligned} \Phi_s + (\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2}) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{x_1 x_1} & \Phi_{x_1 x_2} \\ \Phi_{x_1 x_2} & \Phi_{x_2 x_2} \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \iff \Phi_s + a_1 \Phi_{x_1} + a_2 \Phi_{x_2} + \frac{c}{2} \Phi_{x_2 x_2} &= 0 \end{aligned}$$

Le cas où $(x, s) \in D$ est un résultat direct de la proposition 1.3.

Proposition 2.4 *La solution de l'équation (2.8) correspond à :*

$$\Phi(x, s) = \exp[-\alpha F(x, s)] = E\{-K[y(\tau), \tau] \mid y(s) = x\}$$

où la variable aléatoire τ représente le temps de premier passage dans la région finale D (en étant sûr que ça se réalise) :

$$\tau(x, s) = \inf \{t \geq s : (y(t), t) \in D \mid y(s) = x\}$$

du système non commandé $y(t)$ défini comme suit :

$$\begin{cases} dy_1(t) = a_1 dt \\ dy_2(t) = a_2 dt + c^{\frac{1}{2}} dW \end{cases}$$

Preuve. La démonstration de cette proposition est une conséquence directe de la proposition 1.4. Pour que la solution soit unique, nous insistons sur le fait qu'il faut avoir $P[\tau(x_1, x_2, s) < \infty] = 1$. \square

Remarque 2.1 *i) Dans ce problème particulier, si toutes les fonctions b_1 , b_2 , q , r et c sont des constantes, la relation (2.7) est toujours satisfaite.*

ii) Dans la section 2, nous prenons T comme étant le temps du premier passage de $x_1(t) = x_2(t)$. Ainsi, les problèmes considérés dans ce chapitre peuvent être associés à des problèmes de poursuite.

2.2 Premier exemple

Nous commençons par considérer le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} dx_1(t) = 0 \\ dx_2(t) = [2u_1 + u_2]dt + c^{\frac{1}{2}}dW(t) \end{cases}$$

Cela veut dire que nous fixons les variables des équations (2.2) à $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = 2$ et $b_2 = 1$. Par ailleurs, nous supposons que c est une constante et nous fixons $q = r = 1$. Ainsi la relation (2.7) est satisfaite pour :

$$\alpha = \frac{3}{c} + \theta$$

Supposons maintenant que :

$$T(x_1, x_2, s) = \inf \{t \geq s : x_1(s) = x_2(s) \mid x_1(s) = x_1, x_2(s) = x_2\}$$

et que la fonction de coût final est exprimée par l'égalité suivante :

$$K[x_1(T), x_2(T), T] = \lambda T$$

où λ est une constante positive. Dans ce cas, nous avons un problème de poursuite et le jeu s'arrête quand le processus $x_2(t)$ rattrape le processus $x_1(t)$. Le premier joueur utilise la commande u_1 et essaie de se rapprocher de $x_2(t)$ le plus vite possible tandis que le second joueur utilise la commande u_2 et désire que $x_1(t)$ reste loin de $x_2(t)$ le plus longtemps possible. Les deux joueurs doivent tenir compte du coût exprimé dans la fonction quadratique associée au jeu.

En utilisant le résultat de la proposition 2.4 et en supposant que le système non commandé doit se terminer sûrement dans la région dite de terminaison, la commande optimale (u_1^*, u_2^*) peut être obtenue en considérant le système bidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} dy_1(t) = 0 \\ dy_2(t) = c^{\frac{1}{2}}dW(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Posons :

$$\tau(x_1, x_2, s) = \inf \{t \geq s : y_2(t) = x_1 \mid y_1(s) = x_1, y_2(s) = x_2\}$$

Ainsi, nous pouvons écrire que :

$$\exp[-\alpha F(x_1, x_2, s)] = E \{ \exp[-\alpha \lambda \tau(x_1, x_2, s)] \} \quad (2.11)$$

Sachant que le mouvement brownien possède une variance ct et que $y_2(t)$ vérifie l'équation (2.10), la solution de l'équation (2.11) s'écrit (voir [7], p. 221) :

$$E \{ \exp[-\alpha \lambda \tau(x_1, x_2, s)] \} = \exp \left[(x_2 - x_1) \sqrt{\frac{2\lambda\alpha}{c}} \right] \quad (2.12)$$

où $x_2 \geq x_1$ et $\lambda\alpha > 0$.

Soit X une variable aléatoire continue et f sa fonction de densité. Nous définissons $\phi(t)$ comme étant la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X pour toute valeur de t . Par définition, nous avons :

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f(x) dx$$

Calculons $\lim_{t \downarrow 0} \phi(t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \phi(t) &= \lim_{t \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(tx)] f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{t \downarrow 0} [\exp(tx)] f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &= P[X < \infty] \end{aligned}$$

Ainsi, dans notre cas spécifique, si $\lambda\alpha$ décroît vers zéro dans l'équation (2.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} P[\tau(x_1, x_2, s) < \infty] &= \lim_{\lambda\alpha \downarrow 0} \exp \left[(x_2 - x_1) \sqrt{\frac{2\lambda\alpha}{c}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

En combinant le résultats des équations (2.11) et (2.12), nous pouvons obtenir l'expression de F :

$$-\alpha F = (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{2\lambda\alpha}{c}}$$

Ainsi, nous pouvons écrire que :

$$F_{x_2} = -\sqrt{\frac{2\lambda}{c\alpha}}$$

Donc, d'après la proposition 2.2, les commandes optimales u_1^* et u_2^* sont :

$$u_1^* = -2u_2^* = 2 \left(\frac{2\lambda}{\theta c + 3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

Avec cette solution optimale, le système dynamique décrit dans (2.2) s'écrit :

$$\begin{cases} dx_1(t) = 0 \\ dx_2(t) = 3 \left(\frac{2\lambda}{\theta c + 3} \right)^{\frac{1}{2}} dt + c^{\frac{1}{2}} dW(t) \end{cases}$$

Nous concluons que si le paramètre θ croît vers ∞ , les deux commandes u_1^* et u_2^* tendent vers zéro. Les deux joueurs prennent de plus en plus de risque, et en même temps ils ont tendance à contrôler de moins en moins le jeu. Cependant, nous ne pouvons pas permettre aux joueurs d'être opposés au risque autant qu'ils le veulent. En effet, de l'équation (2.13), nous pouvons déduire que :

$$\theta > -\frac{3}{c}$$

Notons que le fait que $\theta > -\frac{3}{c}$ découle aussi de la condition que $\lambda\alpha > 0$. Cette condition est primordiale pour que l'équation (2.12) admette des solutions. Dans le cas où $\theta = -\frac{3}{c}$, les deux commandes u_1^* et u_2^* tendent vers l'infini. Pour $\theta < -\frac{3}{c}$, le problème n'admet pas de solution. Finalement, notons que si λ tend vers ∞ , u_1^* et u_2^* tendent à leur tour vers ∞ . Cela s'explique par le fait que les joueurs sont pénalisés si le jeu a tendance à trop durer. De ce fait, les joueurs ont le choix de prolonger le

jeu et augmenter leur coût en choisissant des valeurs élevées pour les commandes ou plutôt arrêter le jeu.

Ainsi, nous avons pu considérer un coût final $K = -\lambda T$. Cependant, nous n'aurions pas pu permettre aux joueurs de chercher plus de risque ou même d'être neutres face au risque car le paramètre θ serait plus petit que $-\frac{3}{c}$.

2.3 Deuxième exemple

Le deuxième système dynamique que nous considérons est défini par :

$$\begin{cases} dx_1(t) = 0 \\ dx_2(t) = x_2(t) + [b_1 u_1 + b_2 u_2] dt + [2x_2^2(t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous prenons $b_1 = 2x_2(t)$, $b_2 = x_2(t)$ et $q = r = 1$. Ainsi, la relation de l'équation (2.7) est vérifiée pour :

$$\alpha = \frac{3}{2} + \theta$$

L'espérance mathématique de l'équation (2.11) s'écrit comme suit (voir [29], p. 281) :

$$E \{ \exp [-\alpha \lambda \tau(x_1, x_2, s)] \} = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\sqrt{\alpha \lambda}} \quad (2.15)$$

pour tout $0 < x_2 \leq x_1$ et $\alpha \lambda > 0$. A partir de l'équation (2.15), nous pouvons déduire que :

$$P[\tau(x_1, x_2, s) < \infty] = \lim_{\alpha \lambda \downarrow 0} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\sqrt{\alpha \lambda}} = 1$$

A partir des équations (2.11) et (2.15), nous pouvons aussi déduire que :

$$F(x_1, x_2) = -\frac{1}{\alpha} \log \left[\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\sqrt{\alpha \lambda}} \right]$$

Donc, nous pouvons calculer F_{x_2} :

$$F_{x_2} = -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \frac{1}{x_2} \quad (2.16)$$

A partir des équations (2.5) et (2.6), nous obtenons les deux expressions suivantes :

$$u_1^* = \frac{2x_2}{x_2} \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{2\lambda}{2\theta + 3}}$$

et

$$u_2^* = -\sqrt{\frac{2\lambda}{2\theta + 3}}$$

Ainsi, en injectant les valeurs optimales trouvées, le système de l'équation (2.14) devient :

$$\begin{cases} dx_1(t) = 0 \\ dx_2(t) = \left[1 + 3\sqrt{\frac{2\lambda}{2\theta + 3}} \right] x_2(t)dt + [2x_2^2(t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \end{cases}$$

Dans cet exemple, la borne inférieure du paramètre θ est $\theta_c = -\frac{3}{2}$. Les cas limites sont identiques à ceux du premier exemple.

Supposons que nous utilisons $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ et $q = r = [2x_2^2(t)]^{-1}$, la relation (2.7) est vérifiée pour une valeur de $\alpha = 3 + \theta$. L'équation (2.16) reste inchangée mais les commandes optimales s'expriment comme suit :

$$u_1^* = 2x_2 \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

et

$$u_2^* = -x_2 \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$$

Ainsi, le choix de ces nouveaux paramètres nous a permis d'obtenir des commandes optimales u_1^* , et u_2^* qui sont linéaires en x_2 au lieu d'être des constantes. Finalement, la dynamique du système (2.14) s'écrit :

$$\begin{cases} dx_1(t) = 0 \\ dx_2(t) = \left[1 + 3\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} \right] x_2(t)dt + [2x_2^2(t)]^{\frac{1}{2}} dW(t) \end{cases}$$

où $\alpha = \theta + 3$ est une constante positive.

Remarque 2.2 *Le processus non commandé $y(t) = (y_1, y_2)'$ qui correspond à $x(t)$ est un processus ayant une fonction de densité lognormale. En plus, dans ce cas précis, l'origine est une frontière naturelle (voir [29, p. 281] et [5]).*

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu illustrer les résultats théoriques du chapitre 1 à travers deux exemples de problèmes de poursuite. Nous avons montré qu'il est possible d'obtenir les valeurs des commandes optimales d'une classe de jeux différentiels stochastiques et ceci en considérant son problème équivalent non commandé.

Ainsi, notre résultat a été prouvé pour des cas particuliers ; plus tard nous aimerions élargir le champ d'application de la proposition 1.2 à des cas d'ordre plus général. En particulier, il serait intéressant de pouvoir trouver le même type de résultat pour un système bidimensionnel d'ordre plus général. Ceci pourrait peut-être être accompli en considérant une nouvelle fonction de coût.

Chapitre 3

Un modèle stochastique de pêche impliquant deux pays

Nous étudions l'évolution d'une certaine espèce animale et plus spécialement des poissons qui à l'instant t possède un nombre $x(t)$ en vie. La dynamique régissant le comportement de cette espèce animale est modélisée par un système dynamique stochastique où la croissance de cette même espèce animale est représentée par une fonction non linéaire. Deux pays exploitent le même stock. Nous proposons de déterminer la commande optimale qui minimise une certaine fonction de coût. La fonction en question tient compte de l'attitude des décideurs face au risque et intègre une récompense aux décideurs qui font l'effort nécessaire de maintenir le niveau du stock dans une région spécifique. Nous illustrons nos résultats théoriques par des simulations numériques.

3.1 Introduction

Hämäläinen, Haurie et Kaitala [13] ont considéré le modèle déterministe suivant :

$$\dot{x}(t) = F[x(t)] - [q_1 u_1 + q_2 u_2]x(t) \quad (3.1)$$

où $x(t)$ représente le nombre de baleines à l'instant t , $F(\cdot)$ est la fonction de croissance naturelle, u_i est la variable de contrôle qui correspond à l'effort de pêche de chaque

pays i et q_i est le coefficient de prise de chaque pays i , pour $i = 1, 2$. Dans leur formulation, Hämäläinen, Haurie et Kaitala se sont inspirés du modèle de Clark [6]. Ce dernier a étudié l'évolution de deux espèces animales quand l'exploitation du stock est effectué par un seul pays. Chaque espèce animale est représentée par une dynamique ayant une croissance différente. Hämäläinen, Haurie et Kaitala ont choisi une fonction non linéaire pour décrire la croissance de l'espèce animale. Cette fonction s'écrit comme suit :

$$F(x) = rx\left[1 - \frac{x}{k}\right]$$

où r représente le taux de croissance intrinsèque de l'espèce animale et k est la capacité de prise. Hämäläinen Haurie et Kaitala se sont proposés de maximiser la fonction de coût suivante par rapport à la variable de décision u_i pour déterminer un équilibre de jeux coopératif et non coopératif :

$$J_i = \int_0^{\infty} \exp[-\rho_i t] L_i [x(t), u_i] dt$$

où ρ_i est le facteur d'actualisation pour $i = 1, 2$. La fonction L_i est quadratique en u_i . Les variables $x(t)$ et u_i doivent être supérieures ou égales à zéro.

Dans ce chapitre, $x(t)$ représente le nombre d'une certaine espèce animale à l'instant t . Ce nombre peut représenter des centaines ou des milliers, etc. Nous avons modifié le modèle de l'équation (3.1) et nous suggérons de l'écrire sous la forme suivante :

$$dx(t) = rx(t)\left[1 - \frac{x(t)}{k}\right]dt - [q_1 u_1 x(t) + q_2 u_2 x^2(t)]dt + \sqrt{2x^2(t)}dW(t) \quad (3.2)$$

où $W(t)$ représente un mouvement brownien standard. Nous nous proposons de trouver la commande optimale $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ qui minimise la fonction de coût suivante :

$$C(x, u, \theta) = -\frac{1}{\theta} \log(\mathbf{E}\{\exp[-\theta J(x, u)]\}) \quad (3.3)$$

où :

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{T(x)} \left\{ \left[\frac{q_1^2}{2} u_1^2 + \frac{q_2^2 x^2(t)}{2} u_2^2 \right] - \lambda \right\} dt \quad (3.4)$$

où θ est un paramètre réel qui tient compte de l'attitude des décideurs face au risque et λ est une constante positive. Le taux intrinsèque de croissance noté r est supérieur ou égal à 1, la capacité de transport k ainsi que les paramètres de prise q_1 et q_2 de la fonction de coût $J(x, u)$ sont choisis positifs. La fonction $J(x, s)$ représente le coût associé directement au nombre de poissons pêchés. Nous diminuons ce coût par le paramètre λ qui est directement lié à la variable $T(x)$ car tant et aussi longtemps que les deux pays respectent les limites permises de pêche, cela leur permettra de continuer à exercer l'activité et d'augmenter ainsi leur profit. Ainsi, le paramètre λ représente une forme de récompense aux décideurs. Finalement, le temps $T(x)$ est défini par :

$$T(x) = \inf\{t \geq 0 : x(t) \notin (d_1, d_2) | x(0) = x \in [d_1, d_2]\}$$

où $d_1 \geq 0$. Vu que λ est positive, une récompense est remise aux pays qui essaient de maintenir le niveau du stock dans les limites permises. En fait, aucun des deux pays ne cherche à faire diminuer le stock en dessous de la limite permise car cela constitue un danger sur l'espèce animale qui risque de disparaître. D'autre part, les pays qui exploitent l'espèce animale ne souhaitent pas que le niveau du stock dépasse la limite supérieure car cela viendrait affecter la rentabilité de l'activité. En effet, une offre très abondante risque d'entraîner la chute des prix de l'espèce en question.

Nous aurions pu modifier le modèle de Hämäläinen, Haurie et Kaitala en rajoutant simplement le terme bruit $\sqrt{2}x(t)dW(t)$. Cependant, le modèle (3.2) semble correspondre plus à la réalité de tous les jours. En fait, le modèle considéré tient compte du fait que les deux pays ne possèdent pas les mêmes facilités de pêche. Ainsi, leur effort de pêche peut varier et avoir différents impacts sur la variable $x(t)$. Cette différence dans les moyens apparaît dans la fonction de coût.

Notons que dans notre modèle, nous n'avons pas posé la contrainte $u_i \geq 0$. Une valeur de u_i positive se traduit par le fait que les deux pays pratiquent la pêche. Pour

$u_i = 0$, la pêche est interdite, et si à l'instant t , u_i est négative, cela veut dire que le pays i est en train de faire un effort pour ramener le stock de l'espèce animale à un niveau qui permet aux deux pays de reprendre la pêche. Cette effort de pêche peut être traduit par une activité d'ensemencement.

De même, il n'est pas nécessaire d'imposer la condition sur $x(t)$ pour qu'elle soit positive car $x(t)$ ne peut pas être plus petite que $d_1 \geq 0$. Cette condition est incorporée dans le modèle lui-même. Nous pouvons même imaginer le cas limite où $x(t) = d$ serait un état absorbant. Il s'agit du nombre d d'animaux à partir duquel l'espèce animale n'arrive plus à se régénérer et ainsi être vouée à la disparition. Si le contrôle est absent, le terme bruit constitue en lui-même une condition naturelle. En effet, le processus $x(t)$ ne peut pas traverser la limite $x(t) = 0$. Ainsi, l'origine constitue une frontière naturelle dans le cas où $u_i = 0$. Ce fait peut être prouvé en utilisant les résultats de [29].

Dans la fonction de coût, nous avons tenu compte de l'attitude des décideurs face au risque caractérisée par le paramètre θ .

Dans la section 2, nous proposons de calculer les valeurs de la commande optimale u_i^* . Ces valeurs seront exprimées sous forme de fonctions spéciales. Dans la section 3 et 4, nous traiterons les cas où nous serons en présence d'une seule borne. Enfin, dans la section 5, nous présenterons les résultats des simulations numériques.

3.2 Commande optimale dans l'intervalle (d_1, d_2)

Posons :

$$F(x) = \inf_u \left\{ -\frac{1}{\theta} \log(\mathbb{E}\{\exp[-\theta J(x, u)]\}) \right\}$$

D'après le théorème de Kuhn 1.2, la commande optimale solution de l'équation ci-dessus et du problème régi par une dynamique décrite dans l'équation (3.2) possède cette expression :

$$u^* = -Q^{-1}B'F'_x \quad (3.5)$$

Maintenant si la relation suivante :

$$\alpha N = BQ^{-1}B' + \theta N \quad (3.6)$$

est vérifiée pour un réel α , alors $F(x)$ peut ainsi être obtenue de la formule suivante :

$$\exp[-\alpha F(x)] \doteq \Phi(x) = E\{\exp[\alpha \lambda \tau(x)]\} \quad (3.7)$$

où la variable $\tau(x)$ joue le même rôle que $T(x)$, dans un système non commandé $x_1(t)$ qui s'écrit comme suit :

$$dx_1(t) = rx_1(t)\left[1 - \frac{x_1(t)}{k}\right]dt + \sqrt{2x_1^2(t)}dW(t)$$

Afin que l'équation (3.7) admette une solution unique, il est nécessaire que $P[\tau(x) < \infty] = 1$.

Nous sommes en présence d'un système à une dimension en x . Ainsi dans notre cas, les paramètres du théorème de Kuhn 1.2 sont :

$$N = 2x^2(t)$$

$$B = [-q_1x(t) \quad -q_2x^2(t)]$$

et :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{q_1^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{q_2^2 x^2(t)}{2} \end{bmatrix}$$

La matrice Q est semi-définie positive pour toute valeur de q_1 et q_2 non nulles. Et du moment que $x(t) \neq 0$, la matrice Q est inversible. Ainsi, la relation (3.6) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha 2x^2(t) &= [-q_1x(t) \quad -q_2x^2(t)] \frac{1}{\left[\frac{q_1q_2x(t)}{2}\right]^2} \begin{bmatrix} \frac{q_2^2x^2(t)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{q_1^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1x(t) \\ -q_2x^2(t) \end{bmatrix} \\ &+ \theta 2x^2(t) \\ &= 4x^2(t) + \theta 2x^2(t) \\ \alpha &= 2 + \theta \end{aligned}$$

Le calcul des valeurs des commandes optimales u_i^* se ramène à l'évaluation de l'espérance mathématique dans l'équation (3.7), tout en vérifiant que $P[\tau(x) < \infty] = 1$.

Posons :

$$L(x; a) = E\{\exp[-a\tau(x)]\}$$

$L(x; a)$ est la fonction génératrice des moments de la variable $\tau(x)$ (la transformée de Laplace de la fonction de densité). Nous supposons que a est positive. De même, le processus commence tout le temps à partir de l'instant $t = 0$. Donc, la fonction $L(x; a)$ est indépendante du temps. Ainsi, la fonction $L(x; a)$ qui satisfait à l'équation de Kolmogorov [voir le théorème de Kuhn 1.2] s'écrit :

$$aL + rx\left[1 - \frac{x}{k}\right]L_x + x^2L_{xx} = 0 \quad (3.8)$$

tout en sachant que :

$$L(d_1; a) = L(d_2; a) = 1 \quad (3.9)$$

De plus, nous avons :

$$0 < L(x; a) \leq 1 \quad \forall x \in [d_1, d_2]$$

La solution de l'équation (3.8) qui vérifie la condition (3.9) est (voir Abramowitz et Stegun [1]) :

$$L = \frac{x^\gamma}{\Delta} \{ [d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1] U(\gamma, 1 + \beta, vx) + [d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2] M(\gamma, 1 + \beta, vx) \} \quad (3.10)$$

où, par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} v &= \frac{r}{k} \\ \beta &= \sqrt{(r-1)^2 + 4a} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(1 - r + \beta) \quad (3.12)$$

$$M_i = M(\gamma, 1 + \beta, v d_i)$$

$$U_i = U(\gamma, 1 + \beta, v d_i)$$

$$\Delta = U_1 M_2 - M_1 U_2$$

et $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ et $M(\cdot, \cdot, \cdot)$ sont des fonctions confluentes hypergéométriques définies comme suit (voir Abramowitz et Stegun [1], p. 504) :

$$M(a, b, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}$$

où :

$$(a)_n \doteq a(a+1) \cdots (a+n-1) \quad ((a)_0 = 1)$$

et

$$U(a, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left\{ \frac{M(a, b, z)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{M(1+a-b, 2-b, z)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right\} \quad (3.13)$$

Lorsque a décroît vers 0, β tend vers $r-1$ car $r \geq 1$. Nous pouvons déduire aussi que γ tend vers 0. D'après la définition même de la fonction M , nous avons $M(0, b, z) \equiv 1$, ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{a \downarrow 0} L(x; a) &= \lim_{\gamma \downarrow 0} \frac{x^\gamma}{\Delta} \left\{ [d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1] U(\gamma, 1 + \beta, vx) \right. \\ &\quad \left. + [d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2] M(\gamma, 1 + \beta, vx) \right\} \\ &= \left\{ \lim_{\gamma \downarrow 0} \frac{x^\gamma}{\Delta} \right\} \left\{ \lim_{\gamma \downarrow 0} [d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1] U(\gamma, 1 + \beta, vx) \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\gamma \downarrow 0} [d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2] M(\gamma, 1 + \beta, vx) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \frac{\lim_{\gamma \downarrow 0} x^\gamma}{\lim_{\gamma \downarrow 0} U_1 M_2 - M_1 U_2} \right\} \{ (1 \times 1 - 1 \times 1) U(\gamma, 1 + \beta, vx) \\
&\quad + (U_1 - U_2) \times 1 \} \\
&= \frac{1}{U_1 - U_2} (U_1 - U_2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ceci implique que $P[\tau(x) < \infty] = 1$.

Nous pouvons ainsi utiliser l'équation (3.5) pour pouvoir calculer la commande optimale u_i , pour $i = 1, 2$.

Dans le cadre de notre problème, nous avons $a = -\alpha\lambda$, ainsi, nous avons :

$$\Phi(x) = L(x; -\alpha\lambda)$$

où $\alpha = \theta + 2$. Si le paramètre θ est plus petit que -2 , il est clair que l'espérance mathématique de l'équation (3.7) existe et elle est donnée par $L(x; -\alpha\lambda)$, où $L(x; a)$ est définie dans l'équation (3.10). Si θ est égal à -2 , nous avons $\alpha = 0$ et nous obtenons de l'équation (3.7) que $\Phi(x) \equiv 1$. Finalement, quand $\theta > -2$, nous ne pouvons pas admettre que $\Phi(x)$ existe. Cependant nous pouvons déduire des équations (3.10), (3.11) et (3.12) que la solution reste valable si $\beta \in \mathfrak{R}$. Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
(r-1)^2 + 4a &\geq 0 \\
(r-1)^2 - 4\lambda\alpha &\geq 0 \\
\alpha &\leq \frac{(r-1)^2}{4\lambda}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\theta \leq \frac{(r-1)^2}{4\lambda} - 2 \tag{3.14}$$

La condition (3.14) est intéressante. Elle nous permet de conclure que les décideurs peuvent être opposés au risque autant qu'ils le désirent. Mais nous ne pouvons pas leur permettre d'aimer le risque autant qu'ils le souhaitent. Nous pouvons déduire

de cette équation que le paramètre θ tenant compte de l'attitude des décideurs face au risque est directement lié à la valeur intrinsèque de croissance r . Plus la valeur de r est grande, plus grand serait l'attitude risquée admissible des décideurs. L'inverse de cette conclusion s'applique pour le cas de λ .

Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Les commandes optimales u_i^* qui minimisent la fonction de coût $C(x, u, \theta)$ de l'équation (3.3) sont données par :*

$$u_1^* = -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ 1 + vx \left[\frac{-\delta U(1 + \gamma, 2 + \beta, vx) + \epsilon(1 + \beta)^{-1} M(1 + \gamma, 2 + \beta, vx)}{\delta U(\gamma, 1 + \beta, vx) + \epsilon M(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right] \right\}$$

si $d_1 < x < d_2$ et $\theta \neq -2$, où :

$$\delta = d_1^{-\gamma} M(\gamma, 1 + \beta, vd_2) - d_2^{-\gamma} M(\gamma, 1 + \beta, vd_1)$$

et

$$\epsilon = d_2^{-\gamma} U(\gamma, 1 + \beta, vd_1) - d_1^{-\gamma} U(\gamma, 1 + \beta, vd_2)$$

et

$$u_2^* = \frac{q_1 u_1^*}{q_2 x}$$

Enfin, le paramètre β de l'équation (3.20) est défini dans l'équation (3.11) et a pour valeur $-\lambda\alpha$.

Quand $\theta = -2$, nous obtenons :

$$u_1^* = u_2^* \equiv 0. \quad (3.15)$$

Preuve. Dans le cas où $\theta \neq -2$, et d'après l'équation (3.5), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\left[\frac{q_1 q_2 x(t)}{2} \right]^2} \begin{bmatrix} \frac{q_2^2 x^2(t)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{q_1^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -q_1 x(t) \\ -q_2 x^2(t) \end{bmatrix} F_x \\ \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2x}{q_1} F_x \\ \frac{q_1}{2} F_x \\ \frac{2x}{q_2} F_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir du système d'équation ci-dessus, nous pouvons exprimer u_2^* en fonction de u_1^* . En effet :

$$u_2^* = \frac{q_1}{q_2 x} u_1^*$$

D'après l'équation (3.7), nous pouvons écrire que :

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha} \log [\Phi(x)]$$

Donc, nous avons :

$$F_x = -\frac{\Phi_x}{\alpha \Phi}$$

Ainsi, le calcul de F_x passe par celui de Φ_x .

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \frac{d}{dx} [L(x, -\alpha\lambda)] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\frac{x^\gamma}{\Delta} \{ [d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1] U(\gamma, 1 + \beta, vx) \right. \\ &\quad \left. + [d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2] M(\gamma, 1 + \beta, vx) \right] \end{aligned}$$

Posons :

$$\delta = d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1$$

et :

$$\epsilon = d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2$$

Nous pouvons ainsi écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^\gamma}{\Delta} [\delta U(\gamma, 1 + \beta, vx) + \epsilon M(\gamma, 1 + \beta, vx)] \right\} \\ &= \gamma \frac{x^{\gamma-1}}{\Delta} [\delta U(\gamma, 1 + \beta, vx) + \epsilon M(\gamma, 1 + \beta, vx)] \\ &\quad + \frac{x^\gamma}{\Delta} \left[\delta \frac{d}{dx} [U(\gamma, 1 + \beta, vx)] + \epsilon \frac{d}{dx} [M(\gamma, 1 + \beta, vx)] \right] \end{aligned}$$

Nous avons les propriétés suivantes (voir Abramowitz et Stegun [1], p. 507)

$$\frac{d}{dz} U(a, b, z) = -aU(a+1, b+1, z)$$

$$\frac{d}{dz} M(a, b, z) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, z)$$

donc, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \gamma \frac{1}{x} \left\{ \frac{x^\gamma}{\Delta} [\delta U(\gamma, 1 + \beta, vx) + \epsilon M(\gamma, 1 + \beta, vx)] \right\} \\ &= + \frac{x^\gamma}{\Delta} \left[-\delta \gamma v U(\gamma + 1, 2 + \beta, vx) + \epsilon \frac{\gamma}{1 + \beta} v M(\gamma, 1 + \beta, vx) \right] \\ &= \frac{\gamma}{x} \Phi + v \gamma \frac{x^\gamma}{\Delta} \left[-\delta U(\gamma + 1, 2 + \beta, vx) + \frac{\epsilon}{1 + \beta} M(\gamma, 1 + \beta, vx) \right]\end{aligned}$$

d'où, nous obtenons :

$$F_x = -\frac{\gamma}{\alpha} \left[\frac{1}{x} + v \frac{-\delta U(\gamma + 1, 2 + \beta, vx) + \epsilon (1 + \beta)^{-1} M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{\delta U(\gamma, 1 + \beta, vx) + \epsilon M(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right]$$

A partir de l'équation (3.16), nous pouvons ainsi trouver l'expression de u_1^* :

$$\begin{aligned}u_1^* &= \frac{2x}{q_1} F_x \\ &= -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left[1 + vx \frac{-\delta U(\gamma + 1, 2 + \beta, vx) + \epsilon (1 + \beta)^{-1} M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{\delta U(\gamma, 1 + \beta, vx) + \epsilon M(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right]\end{aligned}$$

Quand $\theta = -2$, nous avons déjà montré que $\Phi(x) \equiv 1$. Donc, le résultat de l'équation (3.15) se déduit directement de cette affirmation. \square

3.3 Le cas où d_2 tend vers l'infini

Dans cette section, la constante d_2 de l'intervalle (d_1, d_2) tend vers l'infini. Ainsi, le système s'arrête pour la première fois quand le nombre de l'espèce animale atteint la borne inférieur d_1 . La pêche reste profitable pour des quantités de prise très grandes. Ainsi, la commande optimale u_1^* ne peut pas être positif. Ceci est prouvé dans ce qui suit :

Lemme 3.1 *Quand la valeur de d_2 tend vers l'infini, la commande optimale u_1^* qui minimise la fonction de coût $C(x, u, \theta)$ est plus petite ou égale à zéro.*

Preuve. Nous avons déjà montré indépendamment de la valeur de d_1 et d_2 (voir la preuve de la proposition 3.1) que si $\alpha = 0$, $\Phi(x) \equiv 1$ et $u_i^* \equiv 0$.

Nous savons d'une part que :

$$\Phi(x) = \exp[\alpha\lambda\tau(x)]$$

D'autre part, nous avons d'après l'équation (3.7) que :

$$F_x = -\frac{\Phi_x}{\alpha\Phi}$$

Donc, si $\alpha < 0$, alors $\Phi(x) \in (0, 1]$, donc :

$$\text{sign}(F_x) = \text{sign}(\Phi_x)$$

Nous sommes en présence d'un cas où nous avons une seule borne. $\tau(x)$ représente le temps que met le système pour atteindre cette borne. Donc, plus nous sommes éloignés de cette borne et plus de temps nous est requis pour atteindre cette borne. Donc $\tau(x)$ croît avec x . Alors $\Phi(x)$ décroît quand x croît, donc $\Phi_x < 0$. Ce résultat, combiné à l'équation (3.16), prouve que $u_i^* < 0$ pour $i = 1, 2$.

Maintenant si $\alpha > 0$, alors $\Phi(x) \in [1, \infty)$ et :

$$\text{sign}(F_x) = -\text{sign}(\Phi_x)$$

Donc, si x croît, $\Phi(x)$ croît à son tour. Ceci implique que $\Phi_x > 0$. Nous pouvons ainsi déduire, d'après l'équation (3.16), que la commande optimale $u_i^* < 0$ pour $i = 1, 2$.

□

Maintenant, si $z \rightarrow \infty$, nous avons (voir Abramowitz et Stegun[1], p. 504) :

$$M(a, b, z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} \quad (3.17)$$

et :

$$U(a, b, z) \sim z^{-a}. \quad (3.18)$$

En utilisant ces formules asymptotiques et en faisant tendre d_2 vers l'infini dans l'équation (3.10) et si $\alpha \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} L(x; a) &= \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{x^\gamma}{\Delta} \{ (d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1) U(\gamma, 1 + \beta, vx) \\ &\quad + (d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2) M(\gamma, 1 + \beta, vx) \} \\ &= \left\{ \frac{x^\gamma}{\lim_{d_2 \rightarrow \infty} \Delta} \right\} \left\{ U(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_2 \rightarrow \infty} (d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1) \right. \\ &\quad \left. + M(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_2 \rightarrow \infty} (d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2) \right\} \end{aligned}$$

Étudions cette limite en fonction de γ .

1. Si $\gamma > 0$, d'après l'équation (3.12), nous avons :

$$\begin{aligned} 1 - r + \beta &> 0 \\ \beta &> r - 1 \end{aligned}$$

En remplaçant β par son expression (voir équation (3.11)), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sqrt{(r-1)^2 - 4\alpha\lambda} &> r-1 \\ (r-1)^2 - 4\alpha\lambda &> (r-1)^2 \\ \alpha &< 0 \end{aligned}$$

Ceci nous permettra d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \Delta &= \lim_{d_2 \rightarrow \infty} U_1 M_2 - M_1 U_2 \\ &= U_1 \lim_{d_2 \rightarrow \infty} M_2 - M_1 \lim_{d_2 \rightarrow \infty} (vd_2)^{-\gamma} \\ &= U_1 \lim_{d_2 \rightarrow \infty} M_2 \end{aligned}$$

et

$$\lim_{d_2 \rightarrow \infty} d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1 = d_1^{-\gamma} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} M_2$$

et enfin :

$$\begin{aligned} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2 &= U_1 \lim_{d_2 \rightarrow \infty} d_2^{-\gamma} - d_1^{-\gamma} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} d_2^{-\gamma} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi conclure que :

$$\begin{aligned} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} L(x; a) &= \frac{x^\gamma}{U_1 \lim_{d_2 \rightarrow \infty} M_2} U(\gamma, 1 + \beta, vx) d_1^{-\gamma} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} M_2 \\ &= \left(\frac{x}{d_1} \right)^\gamma \frac{U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} \quad \text{pour } x \geq d_1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

2. Si $\gamma < 0$, nous avons $\beta < r - 1$ et $\alpha > 0$. Nous pouvons ainsi écrire que :

$$\begin{aligned} \lim_{d_2 \rightarrow \infty} L(x; a) &= \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{x^\gamma}{(U_1 M_2 - M_1 U_2)} \left\{ (d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1) U(\gamma, 1 + \beta, vx) \right. \\ &\quad \left. + (d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2) M(\gamma, 1 + \beta, vx) \right\} \\ &= x^\gamma \left\{ U(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{d_1^{-\gamma} M_2 - M_1 d_2^{-\gamma}}{U_1 M_2 - M_1 U_2} \right. \\ &\quad \left. + M(\gamma, 1 + \beta, vx) \frac{U_1 d_2^{-\gamma} - d_1^{-\gamma} U_2}{U_1 M_2 - M_1 U_2} \right\} \\ &= x^\gamma \left\{ U(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{d_1^{-\gamma} - M_1 \frac{d_2^{-\gamma}}{M_2}}{U_1 - M_1 \frac{U_2}{M_2}} \right. \\ &\quad \left. + M(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{U_1 \frac{d_2^{-\gamma}}{M_2} - d_1^{-\gamma} \frac{U_2}{M_2}}{U_1 - M_1 \frac{U_2}{M_2}} \right\} \end{aligned}$$

Calculons $\lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{U_2}{M_2}$ en utilisant les équations (3.17) et (3.18) :

$$\lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{U_2}{M_2} = \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{(vd_2)^{-\gamma}}{\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\gamma)} e^{vd_2} (vd_2)^{\gamma - \beta - 1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\gamma) (vd_2)^{-2\gamma+\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)e^{vd_2}} \\
&= \lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\gamma) (vd_2)^\gamma}{\Gamma(\beta+1)e^{vd_2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous pouvons déduire aussi que la limite de $\lim_{d_2 \rightarrow \infty} \frac{d_2^{-\gamma}}{M_2} = 0$ car $U_2 = (vd_2)^{-\gamma}$.

Ainsi, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned}
\lim_{d_2 \rightarrow \infty} L(x; a) &= x^\gamma \frac{d_1^{-\gamma} U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U_1} \\
&= \left(\frac{x}{d_1}\right)^\gamma \frac{U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)}
\end{aligned}$$

Cette équation est identique à celle obtenue dans le cas où $\gamma > 0$ (voir équation (3.19)).

3. Si $\gamma = 0$, nous avons $\alpha = 0$. Dans ce cas, nous avons déjà montré que :

$$L(x; a) = 1$$

Proposition 3.2 *Quand $d_2 \rightarrow \infty$, les commandes optimales u_1^* et u_2^* qui minimisent la fonction de coût $C(x, u, \theta)$, telle qu'exprimée dans l'équation (3.3), sont définies par :*

$$u_1^* = u_2^* \equiv 0$$

dans le cas où $\alpha = 0$.

Preuve. Nous avons déjà montré indépendamment de la valeur de d_1 et d_2 (voir la preuve de la proposition 3.1) que si $\alpha = 0$, $\Phi(x) \equiv 1$ et $u_i^* \equiv 0$. \square

Proposition 3.3 *Maintenant si $\alpha \neq 0$, nous obtenons :*

$$u_1^* = \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ -1 + vx \frac{U(1 + \gamma, 2 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right\} \quad (3.20)$$

et

$$u_2^* = \frac{q_1 u_1^*}{q_2 x} \quad (3.21)$$

Finalement, le paramètre β de l'équation (3.20) est défini dans l'équation (3.11) et a prend la valeur $-\lambda\alpha$.

Preuve. Le résultat est démontré en procédant de la même façon que dans la proposition 3.1. Calculons donc Φ_x :

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{x}{d_1} \right)^\gamma \frac{U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} \right\} \\ &= \frac{1}{d_1} \gamma \left(\frac{x}{d_1} \right)^{\gamma-1} \frac{U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} + \left(\frac{x}{d_1} \right)^\gamma \frac{\frac{d}{dx} U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} \\ &= \frac{1}{d_1} \gamma \left(\frac{x}{d_1} \right)^{\gamma-1} \frac{U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} + \left(\frac{x}{d_1} \right)^\gamma \frac{-\gamma v U(\gamma + 1, 2 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} \\ &= \gamma \left(\frac{x}{d_1} \right)^\gamma \left\{ \frac{1}{x} \frac{U(\gamma, 1 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} - v \frac{U(\gamma + 1, 2 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vd_1)} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons calculer F_x :

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\Phi_x}{\alpha \Phi} \\ &= -\frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \frac{1}{x} - v \frac{U(\gamma + 1, 2 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right\} \end{aligned}$$

donc, à partir de l'équation (3.16), nous obtenons u_1^* :

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{2x}{q_1} F_x \\ &= \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ -1 + vx \frac{U(1 + \gamma, 2 + \beta, vx)}{U(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right\} \end{aligned}$$

Maintenant, nous devons nous assurer que $P[\tau(x) < \infty]$ est égale à 1 quand $d_2 \rightarrow \infty$. Lorsque a décroît vers 0, β tend vers $r - 1$ car $r \geq 1$. Nous pouvons déduire aussi que γ tend vers 0 :

$$\lim_{a \downarrow 0} L(x; a) = \lim_{\gamma \downarrow 0} L(x; a) = \lim_{\gamma \downarrow 0} \frac{U(\gamma, r, vx)}{U(\gamma, r, vd_1)}$$

En utilisant la définition de $U(a, b, z)$ donnée par l'équation (3.13) et en sachant que $\Gamma(a) \rightarrow \infty$ et $M(a, b, z) \rightarrow 1$ quand $a \downarrow 0$, nous pouvons ainsi trouver que :

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \downarrow 0} U(0, r, vx) &= \lim_{\gamma \downarrow 0} \frac{\pi}{\sin \pi b} \left\{ \frac{M(\gamma, r, vx)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(r)} - (vx)^{1-b} \frac{M(1-r, 2-r, vx)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(2-r)} \right\} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi b} \frac{\lim_{\gamma \downarrow 0} M(\gamma, r, vx)}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(r)} - (vx)^{1-b} \frac{M(1-r, 2-r, vx)}{\lim_{\gamma \downarrow 0} \Gamma(\gamma)\Gamma(2-r)} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi b} \frac{1}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(r)} \end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique pour trouver que :

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} U(0, r, vd_1) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \frac{1}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(r)}$$

donc :

$$\lim_{a \downarrow 0} L(x; a) = 1$$

Cela permet de confirmer que la condition $P[\tau(x) < \infty] = 1$ est bel et bien vérifiée.

□

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, le cas où $x(t) = d$ (d étant la valeur à partir de laquelle l'espèce animale est condamnée à disparaître) est important. En effet si $x(t) = d$, l'espèce animale disparaîtra avec une probabilité de 1. Si nous remplaçons x par 1 dans les équations (3.20) et (3.21), la valeur de u_1^* sera légèrement affectée. Cependant si $x(t)$ est exprimée en milliers et que $x(t)$ devient très petit, alors nous pouvons déduire que le pays 2, contrairement au pays 1, utilisera une commande optimale très grande (en valeur absolue) pour protéger l'espèce animale. Il faut noter aussi que u_2^* peut prendre des valeurs très grandes, en valeurs absolues, quand $x(t)$ est très petit parce que la fonction de coût de l'équation (3.4) comprend le terme $u_2^2 x^2(t)$.

Pour conclure cette section, nous exposons les cas asymptotiques où x prend une très grande valeur et x prend une très petite valeur. En utilisant le résultat de l'équation

(3.18), et sachant que x est très grand et $\gamma > 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ -1 + vx \frac{U(1+\gamma, 2+\beta, vx)}{U(\gamma, 1+\beta, vx)} \right\} \\ &\approx \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left[-1 + vx \frac{(vx)^{-1-\gamma}}{(vx)^{-\gamma}} \right] \\ &= \frac{2\gamma}{\alpha q_1} [-1 + 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'après l'équation (3.16), il s'ensuit que :

$$u_2^* \approx 0$$

Maintenant si $\beta > 0$ et d'après la formule suivante (voir Abramowitz et Stegun [1], p. 508) :

$$U(a, b, z) \sim \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} \quad \text{si } z \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

et connaissant la propriété suivante de la fonction gamma :

$$\Gamma(v) = (v-1)\Gamma(v-1)$$

Quand x prend une très petite valeur, nous avons :

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ -1 + vx \frac{U(1+\gamma, 2+\beta, vx)}{U(\gamma, 1+\beta, vx)} \right\} \\ &\approx \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ -1 + vx \frac{\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+1)} (vx)^{-1-\beta}}{\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} (vx)^{-\beta}} \right\} \\ &= \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ -1 + \frac{\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+1)}}{\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}} \right\} \\ &= \frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ -1 + \frac{\beta}{\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

d'où :

$$u_2^* \approx \frac{2\gamma}{\alpha q_2 x} \left\{ -1 + \frac{\beta}{\gamma} \right\} \quad (3.24)$$

Déterminons dans quel cas $\left(-1 + \frac{\beta}{\gamma}\right) \leq 0$.

$$\begin{aligned} -1 + \frac{\beta}{\gamma} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\gamma} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \beta &\leq \gamma \\ \Leftrightarrow \beta &\leq 1 - r \\ \Leftrightarrow \sqrt{(r-1)^2 - 4\alpha\lambda} &\leq 1 - r \\ \Leftrightarrow \alpha &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc pour n'importe quelle valeur de $\alpha \leq 0$, nous $\left(-1 + \frac{\beta}{\gamma}\right) \leq 0$. Ainsi, d'après l'équation (3.24), nous pouvons confirmer le fait que contrairement à u_1^* , u_2^* tend vers $-\infty$ quand x décroît vers zéro.

Dans le cas où $\beta = 0$, nous avons $\alpha = 0$. Dans ce cas spécifique, nous avons :

$$L(x; a) = 1$$

et nous avons déjà montré que :

$$u_1^* = u_2^* \equiv 0$$

Dans la section 5, nous utiliserons la simulation numérique pour illustrer l'évolution de la variable $x(t)$ en fonction des commandes optimales u_1^* et u_2^* .

3.4 Le cas où d_1 décroît vers zéro

Dans cette section, nous traiterons le cas où aucune action n'est prise pour protéger l'espèce animale. Ainsi, la valeur de d_1 décroît vers zéro. Une récompense d'une valeur

de λ par unité de temps sera ainsi attribuée aux décideurs tant et aussi longtemps que le nombre d'animaux reste inférieur à la borne supérieure d_2 . Ainsi, la seule contrainte qui reste active consiste à ne pas dépasser la constante d_2 pour ne pas nuire à la rentabilité de la pêche. En effet, si le niveau des stocks augmente, les prix sur le marché vont baisser.

Dans le modèle considéré, nous savons que $x(t)$ ne peut pas être égale à zéro même si $u_i = 0$, pour $i = 1, 2$. Donc, nous ne tiendrons pas compte du problème où l'espèce animale est condamnée à disparaître. Comme nous l'avons mentionné auparavant, l'unité dans laquelle $x(t)$ est exprimée peut avoir un effet sur les résultats.

Lemme 3.2 *Sachant que :*

$$T(x) = \inf\{t \geq 0 : x(t) \notin (0, d_2) | 0 < x(0) \doteq x \leq d_2\} \quad (3.25)$$

Alors, les commandes optimales u_i^ , pour $i = 1, 2$, qui minimisent la fonction de coût $C(x, u, \theta)$ définie dans l'équation (3.3), ne sont pas négatives.*

Preuve. La démonstration est similaire à celle du lemme 3.1 sauf que dans ce cas, la variable $\tau(x)$ décroît (respectivement croît) quand x croît (respectivement décroît).

□

Maintenant, en utilisant la formule suivante (voir Abramowitz et Stegun [1], p. 504) :

$$\lim_{z \rightarrow 0} M(a, b, z) = 1 \quad \text{si } b \neq -n$$

Déterminons :

$$\begin{aligned} \lim_{d_1 \rightarrow 0} L(x; a) &= \lim_{d_1 \rightarrow 0} \frac{x^\gamma}{\Delta} \{ (d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1) U(\gamma, 1 + \beta, vx) \\ &\quad + (d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2) M(\gamma, 1 + \beta, vx) \} \end{aligned}$$

Calculons cette limite selon la valeur de γ et celle de β . Dans le cas, où $\beta = 0$, nous avons $\alpha = 0$. Dans ce cas spécifique, nous avons :

$$L(x; a) = 1$$

Donc, dans ce qui suit, nous tiendrons compte juste du cas où $\beta > 0$. Ainsi, la forme asymptotique de la fonction U est définie dans l'équation (3.22).

1. Si $\gamma > 0$, nous avons $\beta > r - 1$ et $\alpha < 0$. Nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \lim_{d_1 \downarrow 0} L(x; a) &= \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{x^\gamma}{(U_1 M_2 - M_1 U_2)} \left\{ (d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1) U(\gamma, 1 + \beta, vx) \right. \\ &\quad \left. + (d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2) M(\gamma, 1 + \beta, vx) \right\} \\ &= x^\gamma \left\{ U(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_1^{-\gamma} M_2 - M_1 d_2^{-\gamma}}{U_1 M_2 - M_1 U_2} \right. \\ &\quad \left. + M(\gamma, 1 + \beta, vx) \frac{U_1 d_2^{-\gamma} - d_1^{-\gamma} U_2}{U_1 M_2 - M_1 U_2} \right\} \\ &= x^\gamma \left\{ U(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{\frac{d_1^{-\gamma}}{U_1} M_2 - \frac{M_1 d_2^{-\gamma}}{U_1}}{M_2 - \frac{M_1 U_2}{U_1}} \right. \\ &\quad \left. + M(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_2^{-\gamma} - \frac{d_1^{-\gamma} U_2}{U_1}}{M_2 - \frac{M_1 U_2}{U_1}} \right\} \end{aligned}$$

Calculons $\lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_1^{-\gamma}}{U_1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_1^{-\gamma}}{U_1} &= \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_1^{-\gamma}}{\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} (v d_1)^{-\beta}} \\ &= \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{\Gamma(\gamma) v^{-\beta} d_1^{\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \end{aligned}$$

Sachant que $\beta > \gamma$ pour tout $r > 1$, nous pouvons ainsi conclure que :

$$\lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_1^{-\gamma}}{U_1} = 0$$

Ainsi, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned}\lim_{d_1 \downarrow 0} L(x; a) &= x^\gamma \frac{d_2^{-\gamma} M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M_2} \\ &= \left(\frac{x}{d_2}\right)^\gamma \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} \quad \text{si } 0 < x \leq d_2\end{aligned}\quad (3.26)$$

2. Si $\gamma < 0$, nous avons $\beta < r - 1$ et $\alpha > 0$. Nous pouvons ainsi écrire que :

$$\begin{aligned}\lim_{d_1 \downarrow 0} L(x; a) &= \left\{ \frac{x^\gamma}{\lim_{d_1 \downarrow 0} \Delta} \right\} \left\{ U(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_1 \downarrow 0} (d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1) \right. \\ &\quad \left. + M(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_1 \downarrow 0} (d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2) \right\}\end{aligned}$$

Calculons $\lim_{d_1 \downarrow 0} \Delta$:

$$\begin{aligned}\lim_{d_1 \downarrow 0} \Delta &= \lim_{d_1 \downarrow 0} U_1 M_2 - M_1 U_2 \\ &= M_2 \lim_{d_1 \downarrow 0} U_1 - U_2 \lim_{d_1 \downarrow 0} M_1 \\ &= M_2 \lim_{d_1 \downarrow 0} U_1 - U_2\end{aligned}$$

Calculons $\lim_{d_1 \downarrow 0} (d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1)$:

$$\begin{aligned}\lim_{d_1 \downarrow 0} d_1^{-\gamma} M_2 - d_2^{-\gamma} M_1 &= M_2 \lim_{d_1 \downarrow 0} d_1^{-\gamma} - d_2^{-\gamma} \\ &= -d_2^{-\gamma}\end{aligned}$$

et enfin :

$$\begin{aligned}\lim_{d_1 \downarrow 0} d_2^{-\gamma} U_1 - d_1^{-\gamma} U_2 &= d_2^{-\gamma} \lim_{d_1 \downarrow 0} U_1 - d_2^{-\gamma} \lim_{d_1 \downarrow 0} d_1^{-\gamma} \\ &= d_2^{-\gamma} \lim_{d_1 \downarrow 0} U_1\end{aligned}$$

donc, du moment que $\lim_{d_1 \downarrow 0} U_1 = \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} (vd_1)^{-\beta} = \infty$, l'expression de $L(x; a)$ quand $d_1 \downarrow 0$ devient :

$$\lim_{d_1 \downarrow 0} L(x; a) = x^\gamma \left\{ U(\gamma, 1 + \beta, vx) \frac{d_2^{-\gamma}}{M_2 \lim_{d_1 \downarrow 0} U_1 - U_2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + M(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_2^{-\gamma} U_1}{M_2 U_1 - U_2} \Big\} \\
& = x^\gamma M(\gamma, 1 + \beta, vx) \lim_{d_1 \downarrow 0} \frac{d_2^{-\gamma}}{M_2 - \frac{U_2}{U_1}} \\
& = x^\gamma M(\gamma, 1 + \beta, vx) \frac{d_2^{-\gamma}}{M_2} \\
& = \left(\frac{x}{d_2} \right)^\gamma \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)}
\end{aligned}$$

Nous remarquons que ce résultat est identique à celui de l'équation (3.26).

Maintenant, quand $a \downarrow 0$, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}
\lim_{a \downarrow 0} L(x; a) & = \lim_{\gamma \downarrow 0} \left(\frac{x}{d_2} \right)^\gamma \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} \\
& = \lim_{\gamma \downarrow 0} \left(\frac{x}{d_2} \right)^\gamma \lim_{\gamma \downarrow 0} \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} \\
& = 1 \times \frac{1}{1} \\
& = 1
\end{aligned}$$

nous pouvons ainsi utiliser l'équation (3.16) pour déterminer explicitement les expressions des commandes optimales u_1^* and u_2^* . Donc, la proposition s'énonce comme suit :

Proposition 3.4 *Sachant que $T(x)$ est définie dans l'équation (3.25), et $\alpha \neq 0$, alors les commandes optimales u_1^* et u_2^* qui minimisent la fonction de coût $C(x, u, \theta)$, définie dans l'équation (3.3), sont données par :*

$$u_1^* = -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ 1 + \frac{vx}{1 + \beta} \frac{M(1 + \gamma, 2 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right\}$$

et

$$u_2^* = \frac{q_1 u_1^*}{q_2 x}.$$

Dans le cas où $\alpha = 0$, nous avons $u_1^* = u_2^* \equiv 0$.

Preuve. Connaissant l'expression de $L(x, a)$ pour $a \neq 0$, nous pouvons ainsi calculer

Φ_x . Nous avons :

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{x}{d_2} \right)^\gamma \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} \right\} \\ &= \frac{1}{d_2} \gamma \left(\frac{x}{d_2} \right)^{\gamma-1} \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} + \left(\frac{x}{d_2} \right)^\gamma \frac{\frac{d}{dx} M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} \\ &= \frac{1}{d_2} \gamma \left(\frac{x}{d_2} \right)^{\gamma-1} \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} + \left(\frac{x}{d_2} \right)^\gamma \frac{\frac{v}{\beta+1} M(\gamma+1, 2 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} \\ &= \gamma \left(\frac{x}{d_2} \right)^\gamma \left\{ \frac{1}{x} \frac{M(\gamma, 1 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} + \frac{v\gamma}{\beta+1} \frac{M(\gamma+1, 2 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vd_2)} \right\}\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons calculer F_x :

$$\begin{aligned}F_x &= -\frac{\Phi_x}{\alpha\Phi} \\ &= -\frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{v\gamma}{\beta+1} \frac{M(\gamma+1, 2 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right\}\end{aligned}$$

Donc, à partir de l'équation 3.16, nous obtenons u_1^* :

$$\begin{aligned}u_1^* &= \frac{2x}{q_1} F_x \\ &= -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ 1 + \frac{vx}{\beta+1} \frac{M(1 + \gamma, 2 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right\}\end{aligned}$$

□

Ainsi, nous avons pu examiner les cas asymptotiques où la variable d'état prenait des valeurs très grandes et des valeurs extrêmement petites. Nous avons pu trouver que pour $\alpha \neq 0$ et x ayant des valeurs très grandes :

$$\begin{aligned}u_1^* &= -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ 1 + \frac{vx}{\beta+1} \frac{M(1 + \gamma, 2 + \beta, vx)}{M(\gamma, 1 + \beta, vx)} \right\} \\ &\approx -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ 1 + \frac{vx}{\beta+1} \frac{\frac{\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\gamma+1)} [\exp(vx)] (vx)^{\gamma-\beta-1}}{\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\gamma)} [\exp(vx)] (vx)^{\gamma-\beta-1}} \right\} \\ &= -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ 1 + \frac{vx}{\gamma} \right\}\end{aligned}$$

Maintenant, si $x \downarrow 0$, nous avons $M(a, b, 0) \equiv 1$, alors que nous pouvons affirmer la commande optimale u_1^* devient :

$$u_1^* \approx -\frac{2\gamma}{\alpha q_1} \left\{ 1 + \frac{vx}{1+\beta} \right\}$$

quand x décroît vers zéro. Dans les deux cas, nous nous apercevons que u_1^* est approximativement une fonction linéaire de x alors que u_2^* prend la forme de x^{-1} .

Nous présenterons dans la section suivante un exemple de $x^*(t)$ qui est la valeur de $x(t)$ obtenue en utilisant les commandes optimales u_1^* and u_2^* données dans la proposition 3.4.

3.5 Exemples numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats de la simulation de différents exemples numériques. En premier lieu, nous considérons le problème où l'intervalle est borné des deux côtés. Nous traitons trois exemples différents. Dans les figures 1 à 3, nous avons tracé la courbe du nombre d'animaux $x(t)$ en fonction de la variable temps t , ainsi que la commande optimale u_1^* qui lui est associée. Dans chaque cas, nous avons considéré la constante d_2 comme étant plus grande que la valeur de k . En fait, dans le modèle (3.2) que nous avons considéré, la commande u_i peut prendre des valeurs négatives. Toutefois à cause du facteur bruit, le nombre de l'espèce animale $x(t)$ peut excéder la valeur de la constante k qui représente la capacité de prise dans le modèle proposé par Hämäläinen, Haurie et Kaitala [13].

Dans les exemples 1¹ et 2², le paramètre θ tenant compte de l'attitude des décideurs face au risque a été choisi négatif; par conséquent, il s'agit de décideurs opposés au

¹Ces figures sont obtenues quand $\theta = -3$, $\lambda = 10$, $r = 2$, $k = 80$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $d_1 = 10$, $d_2 = 100$, $x_0 = 50$

²Ces figures sont obtenues quand $\theta = -1$, $\lambda = 3$, $r = 5$, $k = 100$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $d_1 = 10$, $d_2 = 150$, $x_0 = 70$

risque. Dans l'exemple 3³, les décideurs aiment le risque puisque $\theta = 2$. A ce niveau,

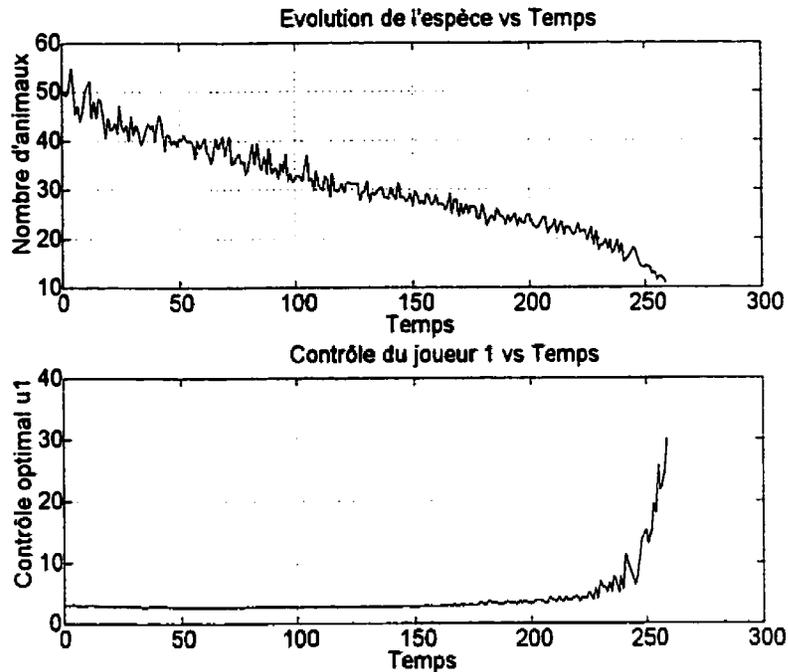


Figure 3.1: Exemple 1

il est intéressant de noter que lorsque le taux de croissance intrinsèque r est grand, le jeu se termine quand la variable d'état $x(t)$ atteint d_2 . Par contre quand cette même constante r prend de très petite valeur, le jeu se termine quand la variable d'état $x(t)$ atteint d_1 . La commande optimale u_1^* est positive dans l'exemple 1 alors qu'elle devient négative dans les exemples 2 et 3. Nous n'avons pas tracé la courbe de la commande optimale u_2^* car nous pouvons déduire le comportement de cette commande directement de la commande optimale u_1^* [voir proposition 3.1].

Finalement, il est intéressant de noter que la variable d'état $x(t)$ reste plus longtemps entre les limites d_1 et d_2 quand la valeur de la récompense par unité de temps noté

³Ces figures sont obtenues quand $\theta = 2$, $\lambda = 3$, $r = 9$, $k = 70$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $d_1 = 10$, $d_2 = 150$, $x_0 = 70$

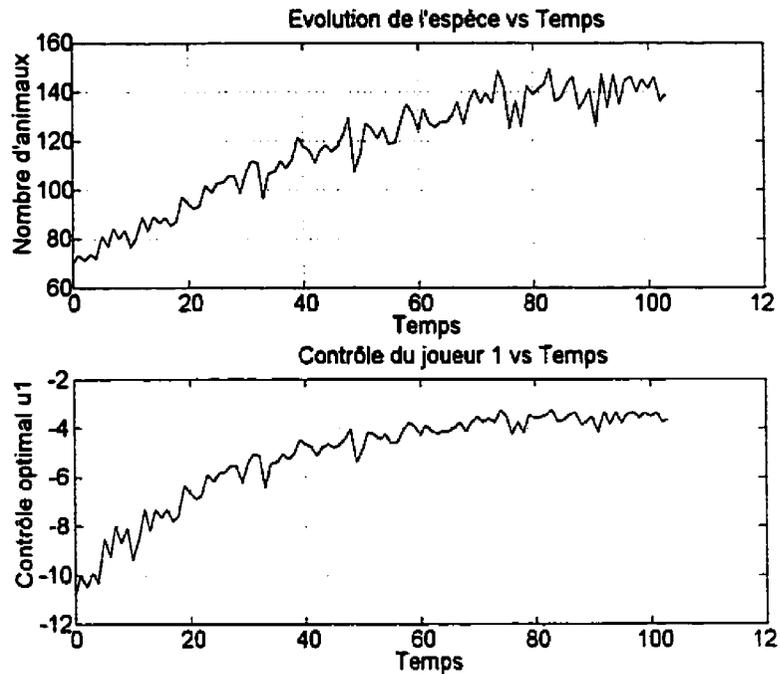


Figure 3.2: Exemple 2

λ est grande ($\lambda = 10$) (Exemple 1 vs Exemple 2 et 3). Ce qui vient confirmer les résultats théoriques.

Dans l'exemple 4⁴, nous avons pu illustrer le cas où nous sommes en présence d'un intervalle borné seulement à gauche. Nous avons choisi des décideurs opposés au risque en fixant une valeur de θ négative. Nous avons pris une valeur de k assez grande. Nous avons pu observer que la pêche s'arrête quand la valeur de d_1 est atteinte.

L'exemple 5⁵ illustre le cas où nous avons un intervalle borné seulement à droite. Le nombre d'animaux reste longtemps au-dessous de la limite supérieure pour finir

⁴Ces figures sont obtenues quand $\theta = -2,5$, $\lambda = 10$, $r = 3$, $k = 100$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $d_1 = 10$, $x_0 = 50$

⁵Ces figures sont obtenues quand $\theta = -3$, $\lambda = 5$, $r = 7$, $k = 100$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $d_2 = 150$, $x_0 = 70$

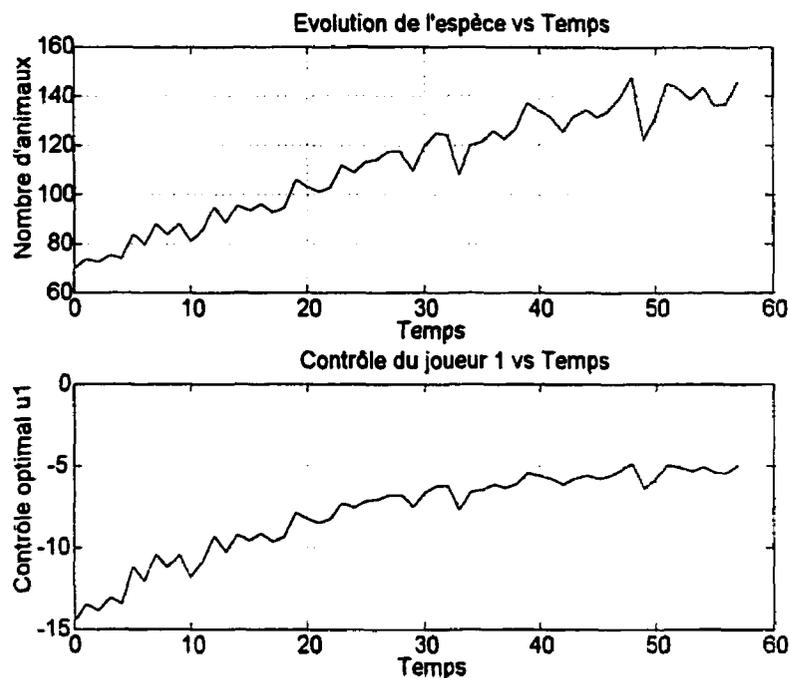


Figure 3.3: Exemple 3

par se rapprocher de zéro. Ceci a été réalisé avec une commande optimale u_1^* assez petite et presque constante. Notons que la variable d'état $x(t)$ n'a pas pu atteindre zéro, sinon la commande optimale u_2^* tend vers ∞ . Ainsi, les décideurs recevront une récompense λ sans avoir à fournir un effort important.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons considéré un modèle de pêche stochastique impliquant deux pays. Le but était de minimiser la fonction de coût qui tenait compte de l'attitude des décideurs face au risque. Dans le modèle, nous avons supposé que l'activité de pêche (par là il faut entendre l'effort pour protéger et l'espèce animale et l'industrie) n'est pas identique dans les deux pays. Ainsi, les deux pays ont des coûts

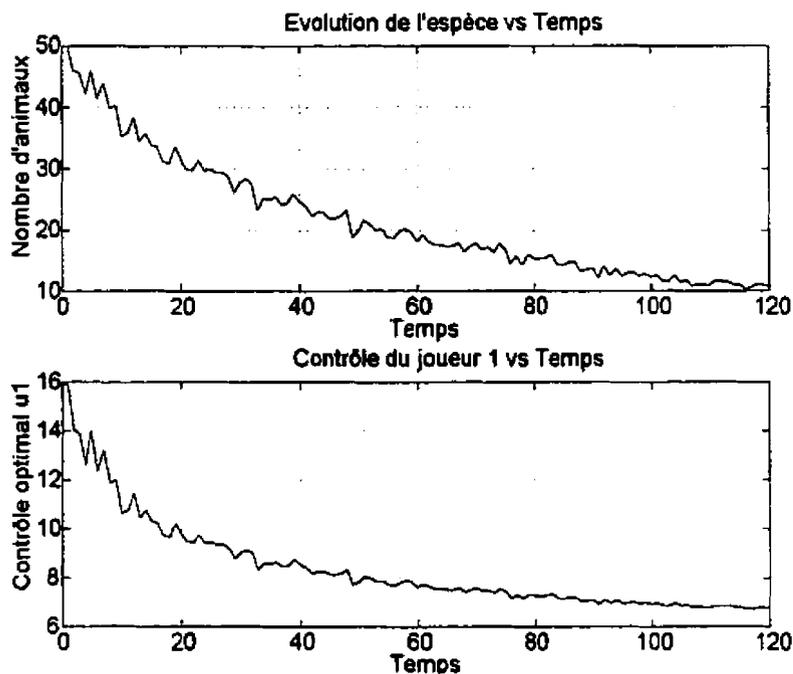


Figure 3.4: Exemple 4

différents. Le pays numéro 1 a un coût proportionnel à u_1^2 alors que le pays numéro 2 présente un coût proportionnel à $u_2^2 x^2(t)$. Nous avons aussi attribué une récompense aux décideurs s'ils gardent un niveau de stock à l'intérieur d'une certaine région. Nous avons traité les cas où nous étions en présence des deux bornes ou d'une borne à la fois. Dans les différents cas, nous avons pu calculer explicitement les commandes optimales u_i^* . Nous avons de même effectué le même travail pour les cas asymptotiques. A la fin, nous avons présenté une simulation numérique pour illustrer les différents cas traités.

La commande optimale a été obtenue en considérant le système non commandé. L'évaluation de la commande optimale se ramenait toujours à la recherche de la fonction génératrice des moments de la variable temps $T(x)$ du système commandé. C'est le temps que met le système pour quitter la région (d_1, d_2) en sachant que $x(0) = x$. Une fois que la commande optimale est obtenue, cela nous permet de

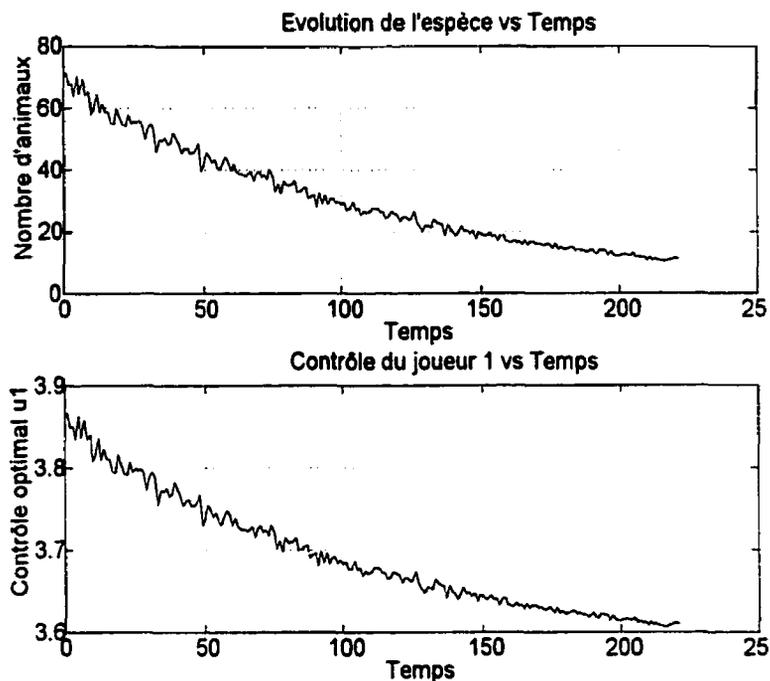


Figure 3.5: Exemple 5

retrouver la distribution de la variable $T(x)$ du processus commandé en résolvant l'équation de Kolmogorov.

Finalement, il serait intéressant de considérer le cas où nous forçons les deux pays à garder le niveau de stock au-dessus d'une certaine limite pour éviter de faire disparaître l'espèce animale. Ceci peut être accompli en suivant la démarche de Lefebvre dans son article [20]. Mais pour être capable de calculer la commande optimale u_i^* , il faut connaître la fonction de répartition de $\tau(x)$. Ceci revient à calculer l'inverse de la transformée de Laplace obtenue dans ce chapitre. Ceci exige un travail élaboré et ardu.

Chapitre 4

Modèles stochastiques de négociation

Dans ce chapitre, nous exposons deux modèles stochastiques de négociation entre les parties syndicale et patronale. Nous nous proposons de résoudre explicitement ces deux modèles. Nous considérons deux types de fonctions de coût final qui serviront à pénaliser les deux parties en négociations. La première fonction de coût final pénalisera les deux parties pendant la discussion tandis que la deuxième fonction de coût final engendrera une pénalité si les discussions n'aboutissent pas à une entente après un temps fixé. De même, nous tenons compte de l'attitude des décideurs face au risque dans ce genre de négociations.

4.1 Introduction

Leitmann [33] a considéré un modèle de jeu différentiel pour modéliser un problème de négociation. Le modèle en question s'énonce comme suit :

$$\dot{o}(t) = u(t), \quad o(0) = o_0, \quad (4.1)$$

$$\dot{d}(t) = -v(t), \quad d(0) = d_0 \quad (4.2)$$

où $o(t)$ représente l'offre salariale par unité de temps du patronat à l'instant t et $d(t)$ représente la demande salariale par unité de temps du syndicat à l'instant t . o_0 et

d_0 sont respectivement les offres et les demandes initiales. Le jeu se termine quand la condition $d(t) - o(t) = 0$ est atteinte pour la première fois. Les variables $u(t)$ et $v(t)$ représentent les taux de concession qui sont contrôlés par les deux parties. Nous introduisons la variable $w(t)$ qui prend la valeur 1 s'il y a une grève à l'instant t sinon la valeur 0. Le patronat cherche à choisir $u(t)$ de façon à minimiser l'offre finale $o(T)$, limiter la perte dans les profits pendant la période de grève :

$$\int_0^T w(t) [k - d(t)] dt \quad (4.3)$$

et maximiser la perte des salaires pendant la période de grève :

$$\int_0^T w(t) o(t) dt \quad (4.4)$$

De son côté, le syndicat cherche à maximiser la demande finale $d(T)$, la perte dans les profits de la compagnie durant la grève et minimiser la perte des salaires pendant cette même période de grève. Dans l'équation (4.3), le paramètre k est le profit brut de la compagnie (le profit avant les dépenses salariales) par unité de temps. Nous supposons que k est une constante. Nous définissons T comme suit :

$$T = T(o_0, d_0) = \inf\{t \geq 0 : d(t) - o(t) = 0 \mid o(0) = o_0, d(0) = d_0\}$$

Sous certaines conditions, Leitmann a obtenu une stratégie d'équilibre qui dépend du signe de $k - 2$ et il a montré qu'il y aura grève (respectivement, il n'y aura pas de grève) si :

$$o^*(t) < k - d^*(t) \quad [\text{resp. } o^*(t) > k - d^*(t)]$$

où $o^*(t)$ et $d^*(t)$ représentent les stratégies optimales. Dans le cas où $o^*(t) = k - d^*(t)$, il se peut qu'il y ait grève mais ceci n'est pas nécessairement vrai non plus.

Dans ce chapitre, nous notons $x(t)$ (respectivement $y(t)$) comme étant le pourcentage en terme d'augmentation salariale que le syndicat exige à l'instant t (respectivement

l'augmentation salariale offerte par le patronat à l'instant t). Nous considérons le modèle suivant :

$$\begin{aligned} dx(t) &= -u(t)dt + dW_1(t) \\ dy(t) &= v(t)dt + dW_2(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

où $u(t)$ et $v(t)$ représentent les taux de concessions contrôlés respectivement par le syndicat et le patronat. $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont deux processus de Wiener indépendants, ou des mouvements browniens avec une moyenne 0 et une variance infinitésimale $c > 0$.

Posons :

$$x(0) = x \geq y(0) = y$$

Nous définissons :

$$T = T(x, y) = \inf\{t \geq 0 : x(t) - y(t) = 0 \mid x(0) = x, y(0) = y\}$$

Nous proposons de déterminer les valeurs optimales $u^*(t)$ et $v^*(t)$ des variables $u(t)$ et $v(t)$ qui minimisent la fonction de coût suivante :

$$C(\theta) = C(x, y, \theta) = -\frac{1}{\theta} \log\{E[\exp[-\theta J(x, y)]]\} \quad (4.6)$$

où :

$$J(x, y) = \int_0^{T(x, y)} [qu^2(t) + rv^2(t)] dt + K(T) \quad (4.7)$$

où q et r sont des valeurs positives indépendantes de $u(t)$ et $v(t)$, et $K(T)$ est la fonction de coût final. Dans l'équation (4.6), le paramètre θ tient compte de l'attitude des décideurs face au risque. Nous rappelons que si θ est positif, les décideurs aiment le risque. Dans le cas où θ est négatif, les décideurs sont opposés au risque. Et enfin dans le cas où θ est égal à zéro, le problème se réduit à la minimisation de l'espérance mathématique de la fonction $J(x, y)$. Ce qui revient à être neutre par rapport au risque.

Nous considérons dans ce qui suit deux fonctions de coût final particulières. Dans la section 2, nous prenons :

$$K(T) = \lambda T \quad (4.8)$$

où λ est un paramètre positif. Tandis que dans la section 3, nous choisirons une fonction $K(T)$ définie comme suit :

$$K(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T < \tau \\ \infty & \text{si } T \geq \tau \end{cases} \quad (4.9)$$

où τ est une constante fixée d'avance. Dans le premier cas, tant et aussi longtemps que les deux parties sont en train de négocier, une pénalité leur est attribuée. Dans le deuxième cas, aucune pénalité n'est attribuée si les deux parties arrivent à une entente avant l'instant fixé τ . Une fois que cette contrainte temps est violée et que les deux parties n'arrivent pas à s'entendre, la pénalité infligée atteint l'infini. Ce type de fonction de coût final force les deux parties à conclure une entente avant l'échéance imposée τ [20]. Dans les deux cas, nous obtenons explicitement les solutions optimales.

Pour conclure ce chapitre, nous considérerons dans la section 4 un autre type de modèle de négociation qui utilise un mouvement brownien géométrique.

4.2 Pénaliser les longues négociations

Nous considérons les modèles de négociations définis dans l'équation (4.5). Nous nous proposons de minimiser la fonction de coût définie dans l'équation (4.6).

Posons :

$$F(x, y, \theta) = \inf_{u, v} C(x, y, \theta)$$

où $0 \leq t \leq T$. $F(x, y, \theta)$ est l'infimum de la fonction de coût.

Ce problème tel que posé est une application directe du théorème de Kuhn 1.2. Il s'agit d'un problème à deux dimensions. La fonction $F(x, y, \theta)$ est indépendante de la variable s .

Pour établir ainsi les conditions d'optimalité de ce problème, nous allons commencer par identifier en premier lieu les paramètres du théorème 1.2.

Dans ce cas spécifique, nous avons :

$$a_i(x, t) = 0 \quad \forall i = 1, 2$$

La matrice B s'écrit comme suit :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la matrice de variance covariance des processus de Wiener est égale à :

$$N = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Quant à la matrice Q , elle est définie comme suit :

$$Q = 2 \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

Dans le cas du théorème de Kuhn 1.2, la matrice Q doit être définie positive. En fait, vu que q et r sont tous deux positifs, nous pouvons facilement conclure que Q est définie positive puisque $\det(Q) = 4qr > 0$. Nous allons considérer dans ce qui suit le cas où $q = r$.

A partir de ces données, et en supposant que F admet des dérivées partielles de second ordre par rapport à x et y , la fonction F satisfait à l'équation de programmation dynamique suivante (voir l'équation 1.14) :

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{u,v} \left\{ \frac{1}{2} [u \ v] 2 \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \lambda + [F_x \ F_y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - [F_x \ F_y] \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \text{tr} \left(\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} \right) \right\} \\ 0 &= \inf_{u,v} \left[q(u^2 + v^2) + \lambda - F_x u + F_y v - \frac{\theta c}{2} (F_x^2 + F_y^2) + \frac{c}{2} (F_{xx} + F_{yy}) \right] \end{aligned}$$

Cette équation de programmation dynamique est vérifiée pour tout (x, y) tel que $x > y$. Si à l'instant $t = 0$, le point (x, y) se trouve dans la région D dans laquelle les deux parties arrivent à une entente, cela veut dire que les deux parties se sont entendues avant même d'engager des négociations, nous pouvons ainsi écrire que :

$$F(x, y, \theta) = 0$$

Donc, les commandes optimales sont solutions de l'équation matricielle suivante (voir l'équation (1.15)) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} &= -Q^{-1}B'F'_x \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_x \\ F'_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

nous trouvons ainsi :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{F'_x}{2q} \\ v^* &= -\frac{F'_y}{2q} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Maintenant, la relation que doit vérifier α s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha N &= BQ^{-1}B' + \theta N \\ (\alpha - \theta)N &= BQ^{-1}B' \\ (\alpha - \theta)^2 \det(N) &= [\det(B)]^2 \times \frac{1}{\det(Q)} \\ (\alpha - \theta)^2 \times c^2 &= 1 \times \frac{1}{(2q)^2} \\ \alpha &= \theta + \frac{1}{2cq} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Donc nous venons de trouver la valeur de α qui vérifie la relation (1.16).

Connaissant la valeur de α , nous pouvons retrouver l'équation différentielle que vérifie la fonction $\Phi(x, y)$ définie comme suit :

$$\Phi(x, y) = \exp[-\alpha F(x, y, \theta)]$$

Cette équation différentielle est vraie pour tout $x > y$ et elle s'énonce comme suit (voir équation (1.18)) :

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda\alpha\Phi + \Phi_x \times 0 + \frac{1}{2}c(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) \\ &= -\frac{2\lambda\alpha}{c}\Phi + \Phi_{xx} + \Phi_{yy} \end{aligned}$$

Dans le cas où $x = y$, le point se trouve dans la région D . Donc, nous avons :

$$\Phi(x, x) = \exp[-\alpha F(x, x, \theta)] = \exp(0) = 1$$

Donc, d'après le théorème de Kuhn 1.2, la fonction Φ est donnée par :

$$\Phi(x, y) = E\{\exp[-\alpha K[T_1(x, y)]]\} \quad (4.12)$$

où la variable aléatoire T_1 a la même définition que la variable T , mais pour un système non commandé défini par :

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= dW_1(t) \\ dy_1(t) &= dW_2(t) \end{aligned}$$

Donc, $(x_1(t), y_1(t))$ est un mouvement brownien bidimensionnel avec une moyenne zéro et une matrice de variance covariance notée N_1 :

$$N_1 = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

En plus, il faut que :

$$P[T_1(x, y) < \infty] = 1$$

Avec le choix de la fonction de coût final que nous avons effectué, nous pouvons écrire que :

$$\Phi(x, y) = E\{\exp[-\alpha\lambda T_1(x, y)]\}$$

où α est définie dans l'équation (4.11).

Maintenant, sachant que $x_1(t)$ et $y_1(t)$ sont deux processus de Wiener indépendants et unidimensionnels, nous savons que :

$$z_1(t) = x_1(t) - y_1(t)$$

est un processus de Wiener, avec une moyenne zéro et une variance infinitésimal égale à $2c$. Ainsi, nous pouvons formuler l'expression de T_1 de la façon suivante :

$$T_1(x, y) = \inf \{t \geq 0 : z_1(t) = 0 \mid z_1(0) = x - y \geq 0\} \quad (4.13)$$

Si $\alpha\lambda > 0$, nous pouvons écrire (voir [7], p. 221 ou [34], p. 105) que :

$$E \{ \exp [-\alpha\lambda T_1(x, y)] \} = \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{c}} (x - y) \right] \quad (4.14)$$

Il reste à montrer que $P[T_1(x, y) < \infty] = 1$. Nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} P [T_1(x, y) < \infty] &= \lim_{\alpha\lambda \downarrow 0} E \{ \exp [-\alpha\lambda T_1(x, y)] \} \\ &= \lim_{\alpha\lambda \downarrow 0} \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{c}} (x - y) \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Si $q = r$ dans la fonction de coût $J(x, y)$ définie dans l'équation (4.7), les valeurs de u et v notées u^* et v^* qui minimisent la fonction de coût de l'équation (4.6) sont données par :*

$$u^* = v^* = \sqrt{\frac{\lambda}{2q(1 + 2c\theta q)}} \quad (4.15)$$

Preuve. Sachant que :

$$F(x, y, \theta) = -\frac{1}{\alpha} \log [\Phi(x, y)]$$

et que :

$$\Phi(x, y) = \exp \left[-\sqrt{\frac{\alpha\lambda}{c}}(x - y) \right]$$

l'expression de F est la suivante :

$$\begin{aligned} F(x, y, \theta) &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha\lambda}{c}}(x - y) \\ &= \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha c}}(x - y) \\ &= \sqrt{\frac{2q\lambda}{1 + 2c\theta q}}(x - y) \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons calculer F_x et F_y dont les expressions sont les suivantes :

$$F_x = \sqrt{\frac{2q\lambda}{1 + 2c\theta q}} = -F_y$$

Nous pouvons ainsi déduire les expressions de u^* et v^* directement de l'équation (4.10) :

$$u^* = v^* = \frac{F_x}{2q} = \sqrt{\frac{\lambda}{2q(1 + 2c\theta q)}}$$

□

Nous remarquons que u^* et v^* sont des constantes. Nous pouvons déduire de l'équation (4.15) que le paramètre de θ peut prendre des valeurs aussi grandes que les décideurs le souhaitent. Ainsi, θ peut tendre vers l'infini et dans ce cas, u^* et v^* décroissent vers zero. Cependant, les décideurs ne peuvent pas être opposés au risque autant qu'ils le souhaitent car d'après l'équation (4.15), θ doit être plus grand qu'une valeur critique θ_c :

$$\theta_c = -\frac{1}{2qc}$$

Dans le cas contraire, u^* et v^* divergent. Cette condition peut être aussi déduite du fait que $\lambda\alpha$, dans la transformée de Laplace définie dans l'équation (4.14), doit être positive.

Il est aussi intéressant de noter que le paramètre de bruit noté c et le paramètre θ ont le même effet sur les variables u^* et v^* sauf que le paramètre c ne peut pas être négatif.

La fonction de densité de la variable aléatoire T_1 est connue (voir [7], p. 211) et T_1 n'admet pas de moments finis. Cependant, sachant que les décideurs utilisent un peu de contrôle, la distribution de T doit être différente de celle de T_1 . En effet, T est le temps que cela prend à un mouvement brownien unidimensionnel pour aller frapper l'origine en partant du point $x - y$ et ayant une moyenne infinitésimale $-2u^*$ et une variance infinitésimale $2c$. Ainsi, la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire T est définie pour toute valeur de β par (voir [7], p. 221) :

$$E \{ \exp [-\beta T(x, y)] \} = \exp \left\{ (x - y) \left[u^* + \frac{\sqrt{(u^*)^2 + \beta c}}{c} \right] \right\}$$

La moyenne de T ainsi que sa variance sont données par :

$$E[T] = \frac{(x - y)c}{2u^*} \quad (4.16)$$

$$\text{Var}[T] = \frac{(x - y)c}{(2u^*)^3} \quad (4.17)$$

Remarque 4.1 *Si nous nous intéressons seulement à la valeur moyenne de la variable aléatoire T , nous pouvons utiliser le fait que si :*

$$\eta(t) = [x^*(t) - x(0)] - [y^*(t) - y(0)]$$

où $x^*(t)$ et $y^*(t)$ sont les processus optimaux contrôlés, alors :

$$T = \inf \{ t \geq 0 : \eta(t) = y - x \} \quad (4.18)$$

$$d\eta(t) = -2u^*dt + dW_1(t) - dW_2(t)$$

Donc, nous avons :

$$\eta(t) = \eta(0) - 2 \int_0^t u^* ds + \int_0^t dW_1(s) - \int_0^t dW_2(s)$$

Calculons $\eta(0)$. Nous avons par définition que :

$$\begin{aligned} \eta(0) &= [x^*(0) - x(0)] - [y^*(0) - y(0)] \\ &= [x^*(0) - x] - [y^*(0) - y] \end{aligned}$$

x et y représentent les conditions initiales de n'importe quel processus qui est solution de notre problème. Donc x et y sont aussi les conditions initiales des trajectoires de $x^*(t)$ et $y^*(t)$ il s'ensuit que :

$$\eta(0) = 0$$

Nous pouvons ainsi écrire que (W_1 et W_2 étant tous les deux des processus de Wiener, donc nous avons $W_1(0) = W_2(0) = 0$) :

$$\eta(T) = -2u^*T + W_1(T) - W_2(T)$$

Ainsi, nous obtenons que :

$$E[\eta(T)] = -2u^*E(T)$$

Sachant que $\eta(T) = y - x$, nous obtenons ainsi l'équation (4.16) (voir [18])

Pour conclure cette section, nous proposons de déterminer la distribution de la variable aléatoire $x^*(T)$ qui représente la distribution de l'augmentation salariale convenue par les parties patronale et syndicale.

Posons :

$$x_0(t) = x^*(t) - x(0)$$

$$y_0(t) = y^*(t) - y(0)$$

et définissons le processus stochastique suivant :

$$\xi(t) = x_0(t) + y_0(t) \quad (4.19)$$

Nous avons aussi :

$$\eta(t) = x_0(t) - y_0(t)$$

Ainsi, puisque $x^*(t)$ et $y^*(t)$ sont des mouvements browniens indépendants ayant respectivement $-u^*$ et u^* comme moyenne infinitésimale (u^* est définie à l'équation (4.15)) et des variances infinitésimales identiques c , nous pouvons affirmer que $\xi(t)$ est un processus de Wiener ayant une moyenne zéro et une variance infinitésimale $2c$. De plus $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont deux processus indépendants. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\xi(t), \eta(t)] &= \text{E}[\xi(t)\eta(t)] - \text{E}[\xi(t)] \text{E}[\eta(t)] \\ &= \text{E}[x_0^2(t) - y_0^2(t)] \\ &= \text{Var}[x_0(t)] + (\text{E}[x_0(t)])^2 - \text{Var}[y_0(t)] - (\text{E}[y_0(t)])^2 \\ &= ct + (-u^*t)^2 - ct - (u^*t)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vu que $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont des processus gaussiens et que leur covariance est nulle, nous pouvons conclure qu'ils sont indépendants.

A l'instant T , les deux parties concluent une entente, donc nous avons :

$$x(T) = y(T)$$

Ainsi, nous pouvons noter que :

$$\begin{aligned} \xi(T) &= x_0(T) + y_0(T) = 2x^*(T) - x - y \\ \eta(T) &= x_0(T) - y_0(T) = -x + y \end{aligned} \quad (4.20)$$

De plus, vu que $\eta(0) = 0$, nous pouvons déduire de l'équation (4.18) que la fonction de densité de la variable T est donnée par (voir [7], p. 221) :

$$f_T(t) = \frac{x - y}{\sqrt{2c}\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left\{ -\frac{(x - y - 2u^*t)^2}{4ct} \right\}$$

Sachant que :

$$\xi(t) \sim N(0, 2ct)$$

et que $\xi(t)$ et $\eta(t)$ sont deux processus indépendants, donc en d'autres termes, $\xi(t)$ et T sont deux processus indépendants car T est en fonction de $\eta(t)$, nous pouvons ainsi écrire :

$$\begin{aligned} f_{\xi(T)}(\xi) &= \int_0^{\infty} [f_{\xi(T)|t}(\xi|t)] f_T(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} f_{\xi(t)}(\xi) f_T(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2ct}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4ct}\right) \\ &\quad \frac{x-y}{\sqrt{2c}\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(x-y-2u^*t)^2}{4ct}\right\} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2ct}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4ct}\right) \\ &\quad \frac{x-y}{\sqrt{2c}\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2 + (2u^*t)^2 - 4(x-y)u^*t}{4ct}\right\} dt \\ &= \frac{x-y}{4\pi c} \exp\left[\frac{(x-y)u^*}{c}\right] \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{\xi^2 + (x-y)^2 + 4(u^*)^2 t^2}{4ct}\right\} dt \end{aligned} \tag{4.21}$$

Maintenant, en utilisant la formule suivante (voir [37], p. 11) :

$$\int_0^{\infty} \exp(-st)t^{-2} \exp\left(-\frac{a}{t}\right) dt = \sqrt{\frac{s}{a}} K_1(\sqrt{as})$$

qui est vérifiée pour $\text{Re}(a) > 0$ et $\text{Re}(s) > 0$, et en posant :

$$\begin{aligned} s &= \frac{(u^*)^2}{c} \\ a &= \frac{\xi^2 + (x-y)^2}{4c} \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$f_{\xi(T)}(\xi) = \left[\frac{(x-y)u^*}{\pi c \sqrt{\xi^2 + (x-y)^2}} \exp\left[\frac{(x-y)u^*}{c}\right] \right] \times K_1\left(\sqrt{\xi^2 + (x-y)^2} \frac{u^*}{c}\right) \tag{4.22}$$

D'après les équations (4.20), nous avons :

$$\xi(T) = 2x^*(T) - x - y = g[x^*(T)]$$

donc, la fonction de densité de la variable aléatoire $x^*(T)$ est définie comme suit :

$$f_{x^*(T)}(\zeta) = f_{\xi(T)}(\zeta) \frac{d}{dx^*(T)} [g] = 2f_{\xi(T)}(2\zeta - x - y)$$

Remarque 4.2 i) Si, dans l'équation (4.22), nous faisons décroître u^* vers zéro et nous utilisons la formule suivante (voir [1], p. 375) :

$$K_1(z) \sim \frac{1}{z} \quad \text{si } z \rightarrow 0$$

nous obtenons ce qui suit (voir [10], p. 376) :

$$\begin{aligned} f_{\xi(T)}(\xi) &= \lim_{u^* \rightarrow 0} \left[\frac{(x-y)u^*}{\pi c \sqrt{\xi^2 + (x-y)^2}} \exp \left[\frac{(x-y)u^*}{c} \right] \right] \times K_1 \left(\sqrt{\xi^2 + (x-y)^2} \frac{u^*}{c} \right) \\ &= \lim_{u^* \rightarrow 0} \frac{(x-y)u^*}{\pi c \sqrt{\xi^2 + (x-y)^2}} \exp \left[\frac{(x-y)u^*}{c} \right] \times \lim_{u^* \rightarrow 0} K_1 \left(\sqrt{\xi^2 + (x-y)^2} \frac{u^*}{c} \right) \\ &= \left\{ \lim_{u^* \rightarrow 0} \frac{(x-y)u^*}{\pi c \sqrt{\xi^2 + (x-y)^2}} \times \exp \left[\frac{(x-y)u^*}{c} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (x-y)^2} \frac{u^*}{c}} \\ &= \frac{(x-y)}{\pi [\xi^2 + (x-y)^2]} \end{aligned}$$

ii) En utilisant la formule suivante (voir [1], p. 376) :

$$K_0'(z) = -K_1(z)$$

et sachant que $K_0(\infty) = K_0(-\infty) = 0$, nous obtenons :

$$E[\xi(T)] = 0$$

Nous pouvons ainsi déduire de l'équation (4.20) que :

$$E[x^*(T)] = \frac{x+y}{2}$$

Ce qui est logique. En fait, ces deux résultats auraient pu être obtenus directement de l'équation (4.21).

4.3 Forcer les deux parties à conclure une entente

Nous considérons maintenant le cas où la fonction de coût final est définie dans l'équation (4.9). Ce type de fonction peut être utilisé quand il y a un risque que la compagnie ferme ses portes si une entente entre les parties patronale et syndicale n'est pas conclue avant l'instant fixée τ ou quand le gouvernement peut voter une loi spéciale pour forcer le retour au travail si un dénouement de la grève n'est pas obtenu avant l'instant τ . Ainsi, les deux parties ont tendance à accélérer les discussions et conclure une entente avant la date limite pour éviter que la situation ne se détériore. Donc, l'équation (4.12) devient :

$$\Phi(x, y) = P [T_1(x, y) < \tau]$$

où T_1 est définie dans l'équation (4.13) et α est un paramètre non négatif. Nous avons donc :

$$P [T_1(x, y) < \tau] = \int_0^\tau \frac{x-y}{\sqrt{4\pi ct^3}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4ct} \right\} dt$$

Nous pouvons aussi écrire que (voir [38], p. 461) :

$$P [T_1(x, y) < \tau] = 2 \left[1 - \Psi \left(\frac{x-y}{\sqrt{2c\tau}} \right) \right]$$

où Ψ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite que nous pouvons exprimer en terme de la fonction d'erreur définie par :

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$$

Il s'ensuit que :

$$F(x, y, \theta) = -\frac{1}{\alpha} \log \left[2F \left(\frac{x-y}{\sqrt{2c\tau}} \right) \right]$$

où :

$$F(z) = 1 - \Psi(z)$$

Ainsi, en utilisant l'équation (4.10), nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.2 Si $q = r$ et la fonction de coût final est définie dans l'équation (4.9), alors les valeurs optimales de u et v sont données par :

$$u^* = v^* = \frac{1}{\left[4\alpha q \sqrt{\pi c \tau} F\left(\frac{x-y}{\sqrt{2c\tau}}\right)\right]} \exp\left[\frac{(x-y)^2}{\sqrt{4c\tau}}\right]$$

où α est définie dans l'équation (4.11).

Remarque 4.3 Nous remarquons que les expressions de u^* et v^* sont complètement différentes de celles obtenues dans la proposition 4.1 où elles étaient constantes. Dans ce cas, u^* et v^* sont des fonctions non linéaires des variables x et y .

La plus petite valeur du paramètre θ est dans ce cas identique à celle de la section 2 :

$$\theta_c = -(2cq)^{-1}$$

vu que le paramètre α de l'équation (4.11) doit être non négatif.

Finalement, il est très difficile d'obtenir de l'information concernant la distribution de la variable aléatoire T et ou $x^*(T)$ car u^* et v^* sont des fonctions non linéaires en x et y . Cependant, sachant que $u^* = v^*$, le processus $\xi(t)$ défini dans l'équation (4.19) reste un processus de Wiener unidimensionnel avec une moyenne 0 et une variance infinitésimale $2c$. Donc, par symétrie, nous pouvons écrire que :

$$E[\xi(T)] = 0$$

Ce qui implique que d'après l'équation (4.20), nous avons :

$$E[x^*(T)] = \frac{x+y}{2}$$

4.4 Un processus intégré pour modéliser la négociation

Le modèle de négociation défini dans l'équation (4.5) et que nous avons utilisé dans les sections 2 et 3 est une généralisation directe du modèle de Leitmann [33], puisque nous avons rajouté seulement un processus de Wiener. Le modèle est assez utile car il est facile à contrôler, spécialement quand nous utilisons la fonction de coût final $K(T) = \lambda T$. Cependant, ce modèle peut être sujet aux critiques. En effet, d'après l'équation (4.5), nous pouvons constater que les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ peuvent augmenter ou diminuer à n'importe quel instant sans même que les deux parties appliquent un contrôle. Ce phénomène peut être expliqué de plusieurs façons : par exemple, le taux d'inflation et ou le taux de change viennent changer les valeurs de $x(t)$ et $y(t)$. En plus, si le paramètre de bruit c est petit, les variations des valeurs de $x(t)$ et $y(t)$ sont également petites. Mais, il est préférable que $x(t)$ soit une fonction de t non croissante et que $y(t)$ soit décroissante. Ceci implique que la différence :

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

est une fonction non croissante de t . Pour obtenir cette propriété, nous considérons le modèle suivant :

$$\begin{aligned} dz(t) &= w(t)dt \\ dw(t) &= w(t)dt + [u(t) + v(t)]dt + \sqrt{2w^2(t)}dW_w(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

où $W_w(t)$ est un mouvement brownien standard. $w(t)$ est un processus connu sous le nom de mouvement brownien géométrique. La fonction de densité de transition de ce processus est lognormale (voir [30], p. 175). L'origine est une frontière naturelle pour le processus $w(t)$ (voir [29], p. 281). Donc, si nous supposons que $w(0) = w$ est négatif, pendant l'absence de toute forme de contrôle, la valeur de $z(t)$ à l'instant t doit être non croissante (en fait, elle est décroissante). Dans ce modèle, $w(t)$ représente la

vitesse à laquelle la différence entre la demande du syndicat et l'offre du patronat croît ou décroît. De plus, $u(t)$ et $v(t)$ sont les variables de contrôle qui représentent les concessions faites respectivement par le syndicat et le patronat.

Nous supposons que :

$$K(T) = \lambda T$$

où :

$$T = T(z, w) = \inf \{t \geq 0 : z(t) = 0 \mid z(0) = z = x - y \geq 0, w(0) = w\}$$

et nous considérons la fonction de coût définie dans l'équation (4.6). Dans ce cas précis, nous allons identifier les paramètres du théorème de Kuhn 1.2. D'après l'équation (4.23), nous pouvons écrire que :

$$a_1(z, w, t) = w(t)$$

$$a_2(z, w, t) = w(t)$$

Il s'ensuit que :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et que :

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2w^2(t) \end{bmatrix}$$

Dans ce problème tel que posé, nous prenons une matrice Q ayant cette forme :

$$Q = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

où les paramètres q et r sont positifs pour assurer que la matrice Q soit définie positive.

A partir de ces informations, la relation (1.16) nous permet de trouver que :

$$\begin{aligned}
 (\alpha - \theta)N &= BQ^{-1}B' \\
 (\alpha - \theta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2w^2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 (\alpha - \theta) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2w^2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \end{bmatrix} \\
 \alpha &= \frac{1}{2w^2(t)} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) + \theta
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Dans le but d'avoir le paramètre α indépendant de $w(t)$, nous supposons que les paramètres q et r sont choisis de sorte qu'ils doivent être proportionnels à $w^{-2}(t)$

$$q = k_1 w^{-2}(t) \quad r = k_2 w^{-2}(t) \tag{4.25}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes positives. Du moment que $w(t)$ n'est jamais égale à zéro, les valeurs de q et r représentent tout le temps des quantités finies. De plus, ces choix impliquent que les négociations coûtent moins chers si la progression dans les discussions est rapide.

D'après le théorème de Kuhn 1.2, nous pouvons ainsi retrouver les expressions des commandes optimales des variables u et v qui sont données par (voir l'équation (1.15)) :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} &= -Q^{-1}B'F'_z \\
 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_w \end{bmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{q} \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_z \\ F_w \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ainsi, nous avons :

$$u^* = -\frac{F_w}{q} \tag{4.26}$$

$$v^* = -\frac{F_w}{r} \quad (4.27)$$

De plus, la fonction $F(z, w, \theta)$ peut être obtenue de la formule suivante (voir l'équation (1.17)) :

$$F(z, w, \theta) = -\frac{1}{\alpha} \log [\Phi(z, w)]$$

où :

$$\Phi(z, w) = E \{ \exp [-\alpha \lambda T_1(z, w)] \}$$

Comme dans la section 2, il faut que :

$$P [T_1(z, w) < \infty] = 1$$

où $T_1(z, w)$ joue le même rôle que la variable $T(z, w)$, mais pour un problème non commandé :

$$\begin{aligned} dz_1(t) &= w_1(t) dt \\ dw_1(t) &= w_1(t) dt + \sqrt{2w_1^2(t)} dB(t) \end{aligned}$$

Maintenant, le processus bidimensionnel $(z_1(t), w_1(t))$ a été étudié par Lefebvre [22] où il a montré que si $\lambda\alpha > 0$, nous avons :

$$E \{ \exp [-\alpha \lambda T_1(z, w)] \} = \frac{\Gamma(\sqrt{\alpha\lambda} + 1)}{\Gamma(\sqrt[3]{\alpha\lambda} + 1)} \times \left[\frac{-w}{z} \right]^{\sqrt{\alpha\lambda}} M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda} + 1, \frac{w}{z}) \quad (4.28)$$

où M est une fonction confluyente hypergéométrique. (voir [1], p. 504).

En faisant tendre $\lambda\alpha$ vers zéro dans l'équation (4.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha\lambda \rightarrow 0} E \{ \exp [-\alpha \lambda T_1(z, w)] \} &= P [T_1(z, w) < \infty] \\ &= M(0, 1, \frac{w}{z}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les équations (4.26) et (4.27), nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.3 Si la relation (4.24) est vérifiée, alors les valeurs des commandes optimales de u et v sont données par :

$$u^* = \frac{1}{\alpha q} \left\{ -\frac{\gamma}{w} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{M(\gamma+1, 2\gamma+2, \frac{w}{z})}{M(\gamma, 2\gamma+1, \frac{w}{z})} \frac{1}{z} \right\} \quad (4.29)$$

$$v^* = \frac{q}{r} u^* \quad (4.30)$$

où :

$$\gamma = \sqrt{\alpha\lambda}$$

Preuve. Nous avons :

$$\Phi(z, w) = \frac{\Gamma(\sqrt{\alpha\lambda}+1)}{\Gamma(\sqrt[3]{\alpha\lambda}+1)} \times \left[\frac{-w}{z} \right]^{\sqrt{\alpha\lambda}} M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda}+1, \frac{w}{z})$$

de même, nous savons que :

$$F(z, w, \theta) = -\frac{1}{\alpha} \log [\Phi(z, w)]$$

donc, nous pouvons déterminer F_w en fonction de Φ_w :

$$F_w = -\frac{1}{\alpha} \frac{\Phi_w}{\Phi}$$

déterminons ainsi Φ_w :

$$\begin{aligned} \Phi_w &= \frac{\Gamma(\sqrt{\alpha\lambda}+1)}{\Gamma(\sqrt[3]{\alpha\lambda}+1)} \left\{ -\frac{1}{z} \left[\frac{-w}{z} \right]^{\sqrt{\alpha\lambda}-1} M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda}+1, \frac{w}{z}) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{-w}{z} \right]^{\sqrt{\alpha\lambda}} \frac{d}{dw} \left[M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda}+1, \frac{w}{z}) \right] \right\} \\ &= \frac{\Gamma(\sqrt{\alpha\lambda}+1)}{\Gamma(\sqrt[3]{\alpha\lambda}+1)} \left[\frac{-w}{z} \right]^{\sqrt{\alpha\lambda}} \left\{ \frac{1}{w} M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda}+1, \frac{w}{z}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dw} \left[M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda}+1, \frac{w}{z}) \right] \right\} \end{aligned}$$

En utilisant la formule suivante (voir [1], p. 507) :

$$\frac{d}{dz} [M(a, b, z)] = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, z)$$

nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \Phi_w = & \frac{\Gamma(\sqrt{\alpha\lambda} + 1)}{\Gamma(\sqrt[3]{\alpha\lambda} + 1)} \left[\frac{-w}{z} \right]^{\sqrt{\alpha\lambda}} \left\{ \frac{1}{w} M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda} + 1, \frac{w}{z}) \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{\alpha\lambda}}{\sqrt[3]{\alpha\lambda} + 1} \left[M(\sqrt{\alpha\lambda} + 1, \sqrt[3]{\alpha\lambda} + 2, \frac{w}{z}) \right] \times \frac{1}{z} \right\} \end{aligned}$$

donc F_w est égale à :

$$F_w = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{w} + \frac{\sqrt{\alpha\lambda}}{\sqrt[3]{\alpha\lambda} + 1} \frac{M(\sqrt{\alpha\lambda} + 1, \sqrt[3]{\alpha\lambda} + 2, \frac{w}{z})}{M(\sqrt{\alpha\lambda}, \sqrt[3]{\alpha\lambda} + 1, \frac{w}{z})} \frac{1}{z} \right\}$$

Ainsi les équations (4.29) et (4.30) peuvent être déduites directement des équations (4.26) et (4.27). \square

Puisque u^* et v^* sont exprimées en termes de fonctions spéciales, comme dans la section 3, il n'est pas facile de trouver la distribution de la variable aléatoire T .

Finalement, la valeur critique de θ est obtenue quand $\alpha\lambda = 0$ où α est définie dans l'équation (4.24). Sachant que λ est positive et q et r sont définies à l'équation (4.25), nous avons alors :

$$\theta_c = -\frac{1}{2w^2(t)} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right) = -\frac{k_1^{-1} + k_2^{-1}}{2}$$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré deux modèles stochastiques de négociation. Le premier modèle est une généralisation directe du modèle de Leitmann [33]. Nous

avons suggéré l'utilisation de fonctions de coûts différentes. Dans les deux cas, nous avons choisi des fonctions de coûts quadratiques en fonction du contrôle et nous avons tenu compte de l'attitude des décideurs face au risque. En plus nous avons utilisé deux types de fonction de coût final. La première fonction de coût final pénalise les deux parties tout au long de leur discussion. Tandis que dans le deuxième type de fonction de coût final, nous obligeons le patronat et le syndicat à atteindre une entente avant un temps fixé sinon la pénalité qui leur sera imposée serait de l'ordre de l'infini.

Dans la section 4, nous avons proposé un autre modèle stochastique de négociation dans lequel la différence entre la demande syndicale et l'offre patronale ne peut pas croître. Ce modèle a été suggéré afin de mieux décrire la réalité, mais il est plus difficile à contrôler.

Pour conclure, nous mentionnons que le modèle stochastique de négociation qui traduit le mieux possible la réalité serait décrit dans l'équation (4.5) en considérant un mouvement brownien géométrique. Dans ce cas, $x(t)$ [respectivement $y(t)$] décroît [respectivement croît] avec le temps. Cependant, le problème de temps de premier passage qui serait indispensable aux calculs explicites des commandes optimales u^* et v^* n'a pas encore fait l'objet d'une étude approfondie.

Conclusion

L'objectif de cette thèse est de généraliser le résultat de Whittle et Kuhn sur une classe de problèmes de contrôle optimal stochastique et de jeux stochastiques différentiels. En fait, Kuhn a essayé de résoudre des problèmes de contrôle optimal en introduisant un paramètre qui tient compte de l'attitude du décideur face au risque dans la fonction de coût. Il a utilisé le résultat de Whittle qui consiste à considérer la solution du problème d'un processus non commandé pour ainsi trouver les stratégies optimales du système commandé. Dans notre cas, nous avons obtenu les nouvelles conditions d'optimalité des jeux stochastiques différentiels tout en tenant compte de l'attitude des décideurs face au risque. Ainsi, nous avons pu élargir le résultat théorique de Kuhn sur un ensemble de problème ayant deux joueurs à la place d'un seul.

Par la suite, nous avons pu illustrer le résultat théorique à travers des exemples. Dans le chapitre deux, nous avons présenté des problèmes de poursuite où nous avons tenu compte de l'attitude des décideurs face au risque. Dans le cadre de notre deuxième chapitre, nous avons pu reprendre le modèle de Hämäläinen, Haurie et Kaitala dans le cadre d'une exploitation d'une espèce animale par deux pays. Enfin, le modèle de Leitmann a été réexaminé dans le cadre d'un problème de négociation. Dans les trois cas, nous avons tenu à améliorer la formulation des modèles pour que nous puissions avoir des dynamiques qui traduisent la réalité le mieux possible. Nous avons ainsi introduit de l'incertitude par le moyen de bruits blancs. En fait, les modèles de départ étaient déterministes. Nous avons aussi considéré différents modèles de perturbation et nous avons étudié leur effet sur les stratégies optimales. Pour ce faire, nous avons explicitement calculé, dans le trois cas, les commandes optimales. Nous avons tenu

aussi à illustrer le modèle de pêche par une simulation numérique. Cela nous a permis de confirmer l'exactitude des nos résultats théoriques.

Comme future recherche, nous pensons qu'il serait souhaitable de prospecter les avenues suivantes :

1. pouvoir traiter des problèmes de grande taille. En effet, nous nous sommes limités au cas des problèmes à deux dimensions. Pour résoudre d'autres problèmes de même taille ou avec plus de variables, il faut passer par la résolution de problèmes d'instant de premier passage.
2. Suite aux simulations faites dans le cadre du problème de pêche, nous avons pu constater la sensibilité des solutions optimales à certains paramètres et en particulier à celui du facteur tenant compte de l'attitude des décideurs face au risque. Il serait très intéressant de consacrer toute une étude sur la sensibilité des stratégies optimales au paramètre tenant compte de l'attitude des décideurs face au risque et proposer ainsi des solutions adéquates pour mieux stabiliser les commandes optimales.
3. Nous avons considéré des modèles où la fonction de coût était commune aux deux joueurs. Il faudra exploiter l'idée où chaque joueur aura une fonction de coût propre à lui et par le fait même un paramètre tenant compte de l'attitude face au risque qui peut être différent de celui des autres joueurs.
4. Tout au long de notre travail, nous nous sommes limités à ramener la résolution des problèmes à la recherche d'une fonction génératrice des moments pour des systèmes non commandés. Nous avons pu remarquer qu'il s'agit d'une contrainte difficile à contourner quand nous devons résoudre des problèmes de grandes tailles. Ainsi, nous pensons qu'il faudra éliminer cette contrainte. Une solution consiste à résoudre directement l'équation de programmation dynamique par des méthodes numériques.

Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M. et SETGUN, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, New York, Dover.
- [2] BAŞAR, T. et OLSDER, G. J. (1982). *Dynamic Noncooperative Game Theory*, New York, Academic Press.
- [3] BENSOUSSAN, A. et VAN SCHUPPEN, J. H. (1985). Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential of integral performance index, *SIAM J. Contr. Optimiz.*, **23**, pp. 599-613.
- [4] BERTSEKAS, D. P. (1976). *Dynamic Programming and Stochastic Control*, New York, Academic Press.
- [5] CAPOCELLI, R. M. et RICCARDI, L. M., (1972). On the inverse of the first passage time probability problem, *J. Appl. Prob.*, **9**, pp. 270-287.
- [6] CLARK, C. W. (1975). The economy of whaling in : New directions in the analysis of ecological systems, *Simulation Council Proc.*, Ser. 5, Part 1, pp. 111-119, G.S Innis (ed.).
- [7] COX, D. R. et MILLER, H. D., (1965). *The Theory of Stochastic Processes*, London, Methuen.
- [8] DOYLE, J. C., GLOVER K., KHARGONEKAR, P. P. et FRANCIS, B.A (1989). State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **34**, no. 8, pp. 831-847.
- [9] DUSSAIX, A. M., et HAURIE, A. (1971). Un modèle de négociation sous forme d'un jeu semi-différentiel, *École des Hautes Études Commerciales de Montréal*, Rapport de recherche no. 5.

- [10] FELLER, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2, 2nd Edition, New York, Wiley.
- [11] FLEMING, W. H. et McENEANEY, W. M. (1991) Risk sensitive optimal control and differential games, *Proc. Conf. Adaptive Stochastic Contr.* Univ. of Kansas.
- [12] GLOVER, K. (1989) Minimum entropy and risk-sensitive optimal control : the continuous time case, *Proc. 28th IEEE Conf. Dec. Contr.*, pp.388-391.
- [13] HÄMÄLÄINEN, R. P., HAURIE, A. et KAITALA, V. (1983) Bargaining on whales : A differential game model with Pareto optimal equilibria, *Cahier du Gerad*, G-83-21.
- [14] JACOBSON, D. H. (1973). Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **18**, no. 2, pp. 124-131.
- [15] JAMES, M. R. (1992). Asymptotic analysis of nonlinear stochastic risk-sensitive control and differential games. *Math. Contr. Sign. Syst.*, **5**, no. 4, pp. 401-417.
- [16] LEFEBVRE, M. (1987). Optimal control of an Ornstein-Uhlenbeck process, *Stoc. Proc. Appl.*, **24**, pp. 89-97.
- [17] LEFEBVRE, M. (1988). Utilisation des densités de premier passage en commande optimale stochastique, *Adv. Appl. Prob.*, **20**, pp. 231-234.
- [18] LEFEBVRE, M. (1989). Commande optimale du processus de Wiener, *J. Appl. Prob.*, **26**, pp. 50-57.
- [19] LEFEBVRE, M. (1989). First passage densities of controlled Gaussian processes, *Canadian Journal of Statistics*, **17**, pp. 319-327.
- [20] LEFEBVRE, M. (1991). Forcing a stochastic process to stay in or to leave a given region, *Ann. Appl. Probab.*, **1**, pp. 167-172.
- [21] LEFEBVRE, M. (1992). Sur une classe de problèmes en théorie des jeux différentiels, *Actes des premières journées de mathématiques appliquées*, Rabat, Maroc, pp. 229-234.

- [22] LEFEBVRE, M. (1996). First passage problems involving processes with lognormal density functions, *Rendiconti dell' Istituto Lombardo (Scienze-Serie A)*, **130**, Fasc. 1 et 2, pp. 63-78.
- [23] LEFEBVRE, M. (1997). Reducing a nonlinear dynamic programming equation to Kolmogorov equation, *Optimization*, **42**, pp. 125-137.
- [24] LEFEBVRE, M. (1998). Solving an LQG homing problem via a different uncontrolled process, *Int. J. Control.*, **71**, no. 6, pp. 1021-1026.
- [25] LEFEBVRE, M. et MAZIGH, M. (1995). On a pursuit problem, *Optimization*, **33**, pp. 81-89.
- [26] LEFEBVRE, M. et MAZIGH, M. (1995). Stochastic bargaining models, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **84**, pp. 377-391.
- [27] LEFEBVRE, M. et MAZIGH, M. (1995). A stochastic hunting model involving two countries, *International Journal of Systems Science*, **26**, pp. 2355-2368.
- [28] LIMEBEER, D. J. N., ANDERSON, B. D. O., KHARGONEKAR, P. P. et GREEN M. (1992). A game theoretic approach to H_∞ control for time varying systems, *SIAM J. Contr. Optim.*, **30**, pp. 262-283.
- [29] KANNAN, D. (1979). *An Introduction to Stochastic Processes*, New York, North Holland.
- [30] KARLIN, S. et TAYLOR, H. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*, New York, Academic Press.
- [31] KUHN, J. (1985). The risk-sensitive homing problem, *J. Appl. Prob.*, **22**, pp. 796-803.
- [32] KUMAR, P. R. et VAN SCHUPPEN, J. H. (1981). On the optimal control of stochastic systems with an exponential of integral performance index, *J. Math. Anal. Appl.*, **80**, pp. 312-332.

- [33] LEITMANN, G. (1973). Collective bargaining : A differential game, *Journal of Optimization Theory And Applications*, **11**, pp. 405-412.
- [34] PRAHBU, N. U. (1965). *Stochastic Processes : Basic Theory and Its Applications*, New York, Macmillan.
- [35] PRATT, J. W. (1964). Risk aversion in the small and in the large, *Econometrica*, **32**, pp.122-136.
- [36] RHEE, I. et SPEYER, J. L. (1991). A game theoretic approach to a finite-time disturbance attenuation problem, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **36**, pp. 1021-1032.
- [37] ROBERTS, G. E. et KAUFMAN, H. (1966). *Table of Laplace Transforms*, Philadelphia, Pennsylvania, Saunders.
- [38] ROSS, S. M. (1993). *Introduction to Probability Models*, 5th Edition, San Diego, California, Academic Press.
- [39] VON NEUMANN, J. et MORGENSTERN O. (1947). *Theory of games and economic behavior*, 2nd Edition, Princeton, NJ, Princeton Univ. Press.
- [40] WHITTLE, P., (1981). Risk-sensitive linear-quadratic Gaussian control, *Advances in Applied Probability*, **13**, pp. 764-777.
- [41] WHITTLE, P. (1982). *Optimization Over Time, I.*, Chichester, Wiley.
- [42] WHITTLE, P., (1990). *Risk-sensitive optimal control*, Chichester, Wiley.
- [43] WHITTLE, P., (1990). A Risk-sensitive maximum principle, *Sys. Contr. Lett.*, **15**, pp. 182-192.
- [44] WHITTLE, P. (1991). A risk-sensistive maximum principle : The case of imperfect state observation, *IEEE Trans. Automat. Control.*, **36**, pp. 793-801.
- [45] WHITTLE, P. et KUHN, J., (1986). A Hamiltonian formulation of risk-sensitive linear-quadratic-Gaussian control, *International Journal of Control*, **43**, pp. 1-12.