

**Titre:** Fonctions d'appartenance et programmation linéaire  
Title:

**Auteur:** Antoine Massoud  
Author:

**Date:** 1999

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Massoud, A. (1999). Fonctions d'appartenance et programmation linéaire  
[Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8624/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8624/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Gilles Savard  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FONCTIONS D'APPARTENANCE ET  
PROGRAMMATION LINÉAIRE

ANTOINE MASSOUD

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

JUIN 1999



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services  
395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques  
395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-48866-7

Canadä

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

FONCTIONS D'APPARTENANCE ET  
PROGRAMMATION LINÉAIRE

présenté par: MASSOUD Antoine

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LANGEVIN André, Ph.D., président

M. SAVARD Gilles, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CHAUNY Fabien, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. GAUVIN Jacques, Ph.D., membre

*À mes parents.*

# REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier très sincèrement mon directeur de recherche, Gilles Savard, pour la qualité du projet qu'il m'a proposé. Ses précieux conseils, commentaires concis et pertinents ont grandement amélioré ce mémoire.

Je remercie aussi ardemment mon codirecteur de recherche, Fabien Chauny, pour son support tout au long de mon travail. Pour sa rigueur intellectuelle à laquelle j'ai pu me référer, pour ses nombreux conseils judicieux qu'il m'a prodigués.

Je remercie chaleureusement mes parents pour m'avoir éduqué dans un milieu où la connaissance, l'effort et l'indépendance sont importants. Pour m'avoir encouragé et supporté pendant toutes ces années d'études, je désirerais exprimer toute ma gratitude et mon amour.

Je termine avec un remerciement bien particulier à quiconque qui de près ou de loin a contribué à ma réussite.

# RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous traitons des programmes linéaires où les données sont continues avec incertitude. Des causes majeures d'incertitudes (erreurs dans l'estimation des paramètres du modèle ainsi que l'ambiguité des objectifs et contraintes) peuvent significativement affecter les décisions. La théorie probabiliste a toujours été l'unique approche capable de représenter toutes les incertitudes présentes dans les problèmes de la vie courante. Par ailleurs durant les trois dernières décennies la recherche dans le domaine de l'intelligence artificielle, des mathématiques et des systèmes en ingénierie a démontré que la théorie probabiliste n'était efficace que pour un type spécifique d'incertitude, et que d'autres approches étaient possibles pour la compléter. Parmi ces nouvelles approches, la théorie des ensembles flous est particulièrement pertinente pour ce type de problèmes; elle offre une structure pour représenter l'information imprécise.

Le but de cet ouvrage est d'étudier des programmes linéaires avec des données imprécises. Plus particulièrement, nous analyserons l'impact des perturbations apportées aux valeurs des paramètres. Nous désirons développer des algorithmes exacts pour les cas où les coefficients de l'objectif, du membre de droite et de la matrice des contraintes vérifient une fonction d'appartenance. La courbe *possibiliste* lorsque les données du problème sont perturbées est alors obtenue.

Notons que l'approche de ce mémoire n'inclut pas uniquement l'aspect théorique mais considère également un problème avec des données imprécises sur la gestion de la qualité de l'eau. Ce problème est résolu analytiquement pour la première fois. La résolution du problème démontre bien l'utilité de la programmation linéaire possibiliste. La solution fournit une évaluation (estimation) possibiliste du risque associé à la décision. Avec ses liens étroits avec l'optimisation classique, la méthode présentée semble répondre aux importants critères du modèle d'optimisation: simplicité, rigidité et adaptabilité. L'approche peut également servir comme moyen d'effectuer une analyse de sensibilité.

# ABSTRACT

In this thesis, we discuss linear programming in the case where data is known with imprecision. Major causes of imprecision (errors in the estimation of the model parameters as well as ambiguity in the objective and constraints) can significantly affect decision making. The probabilistic theory has always been the unique approach capable of representing all the imprecision found in real world problems. On the second hand, during the last three decades, research in the field of artificial intelligence, mathematics and control systems showed that the probabilistic theory is only efficient for one specific type of imprecision and that other approaches exist to complement it. Among the new approaches, the theory of fuzzy sets is particularly relevant to this types of problems; it offers a structure to represent imprecise information.

The main goal of this work is to study linear programs with imprecise data. We will mainly analyze the impact of perturbations applied to the parameters. We are interested in developing exact algorithms where coefficients of the objective function, the right hand side and technological matrix follow a membership function. The possibilistic curve, when data are subject to perturbations, is obtained.

We note that the approach of this thesis includes not only the theoretical aspect but also considers a problem with imprecise data on water quality management. This problem is completely solved for the first time. The solution of the problem shows the utility of possibilistic linear programming. The solution gives a possibilistic evaluation (estimation) of the risk associated with the decision. With its close link to classical optimization, the method presented in this thesis seems to meet important criteria in the optimization models: simplicity, rigidity and adaptivity. The approach can also be used as a way to carry out sensitivity analysis.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>DÉDICACE</b>	iv
<b>REMERCIEMENTS</b>	v
<b>RÉSUMÉ</b>	vi
<b>ABSTRACT</b>	vii
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	viii
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	xi
<b>LISTE DES FIGURES</b>	xii
<b>CHAPITRE 1: INTRODUCTION</b>	1
<b>CHAPITRE 2: NOTIONS GÉNÉRALES ET UTILES SUR LES ENSEMBLES FLOUS</b>	5
2.1 Définitions de base	5
2.1.1 Définition d'un ensemble flou	7
2.1.2 Nombre flou	9
2.2 Opérations sur les ensembles flous	10
2.2.1 Définitions des opérations de base	11
2.2.2 Support d'un ensemble flou	13
2.2.3 Noyau d'un ensemble flou	13

2.2.4	Produit cartésien d'ensembles flous	13
2.3	Mesures floues	14
2.3.1	Propriétés d'une mesure floue	15
2.4	Mesure de possibilité	16
2.4.1	Distribution possibiliste	18
2.4.2	Distribution de possibilité conjointe	19
2.5	Coupe de niveau $\alpha$ ou $\alpha$ -coupe	21
2.6	Programmation linéaire	22
2.6.1	Programmation linéaire possibiliste	22
2.6.2	Résolution des programmes linéaires possibilistes	25
2.7	Dualité	26
2.7.1	Interprétation des valeurs optimales $\lambda_i^*$	27
2.8	Notation dans les programmes linéaires possibilistes	27
2.8.1	Distribution de $Z^*$	28
<b>CHAPITRE 3: EXEMPLES ET RÉSULTATS</b>		<b>32</b>
3.1	Formulation du problème	32
3.2	Problème de gestion de la qualité de l'eau en programmation linéaire possibiliste: approche par discréétisation	34
3.2.1	Séparation du problème	37
3.3	Solution analytique pour le problème de gestion de la qualité de l'eau	41
3.3.1	Exploration des points extrêmes	45
<b>CHAPITRE 4: ANALYSE DE SENSIBILITÉ DANS UN PROGRAMME LINÉAIRE POSSIBILISTE</b>		<b>51</b>
4.1	Algorithme du simplexe	52

4.2 Perturbation des coefficients de la fonction objectif . . . . .	54
4.2.1 Illustration numérique lors d'une variation des coefficients de la fonction objectif . . . . .	56
4.3 Modification des membres de droite . . . . .	58
4.3.1 Illustration numérique lors d'une variation du vecteur ressource	61
4.4 Modification des coefficients des contraintes . . . . .	63
4.4.1 Cas où $x_j$ est hors base . . . . .	63
4.4.2 Cas où $x_j$ est variable de base . . . . .	64
4.4.3 Calcul des coûts réduits . . . . .	66
4.4.4 Illustration numérique lors d'une variations des coefficients de la matrice technologique . . . . .	67
4.4.5 Pour les coefficients des variables de bases . . . . .	69
4.5 Variations simultanées des coefficients de la fonction objectif avec le vecteur ressource . . . . .	71
<b>CONCLUSION</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> . . . . .	<b>75</b>

# LISTE DES TABLEAUX

3.1	Programme linéaire qui génère le plus petit coût optimal à des niveaux de possibilité voulue	39
3.2	Programme linéaire qui génère le plus grand coût optimal à des niveaux de possibilité voulue	40
4.1	Tableau final du simplexe	53
4.2	Tableau du simplexe avec $x_1$ et $x_2$ comme base	57
4.3	Tableau du simplexe avec $x_3$ et $x_2$ comme variables de base	63
4.4	Tableau obtenu par l'algorithme dual du simplexe avec $x_3$ et $x_4$ comme variables de base	63
4.5	Tableau final du simplexe avec $\alpha\Delta_{ij}$	67
4.6	Tableau final	69

# LISTE DES FIGURES

2.1	Fonction d'appartenance d'un nombre flou de forme trapézoïdale. . . . .	10
2.2	Fonction d'appartenance d'un nombre flou de forme triangulaire. . . . .	11
2.3	Simulation de Monte Carlo pour un problème en programmation linéaire stochastique. . . . .	30
2.4	Simulation de Monte Carlo pour un problème en programmation linéaire possibiliste. . . . .	31
3.1	Le problème de gestion de la qualité d'eau . . . . .	33
3.2	Distribution possibiliste des coefficients de coût imprécis . . . . .	35
3.3	Distribution possibiliste des coefficients imprécis du transfert . . . . .	36
3.4	Distribution possibiliste de la concentration voulue d'oxygène . . . . .	36
3.5	Solution par interpolation de la distribution possibiliste de $Z^* = z$ . .	41
3.6	Le pire programme linéaire avec $\alpha = 0$ . . . . .	42
3.7	Le pire programme linéaire avec $\alpha = 1$ . . . . .	42
3.8	Le meilleur programme linéaire avec $\alpha = 0$ . . . . .	43
3.9	Le meilleur programme linéaire avec $\alpha = 1$ . . . . .	43
3.10	Solution analytique de la distribution possibiliste de $Z^* = z$ . . . . .	49
3.11	Solution par interpolation (-) vs solution analytique (--) . . . . .	50
4.1	Valeur optimale en fonction de $\alpha$ lorsqu'on fait varier la fonction objectif	59
4.2	Valeur optimale en fonction de $\alpha$ lorsqu'on fait varier le vecteur ressource. . . . .	64

4.3 Valeur optimale en fonction de $\alpha$ lorsqu'on fait varier simultanément la fonction objectif avec le vecteur ressource . . . . .	72
--	----

# CHAPITRE 1

## Introduction

*“As a rule,” said Holmes, “the more bizarre a thing is the less mysterious it proves to be.”*

**Sir Conan Doyle**

*The Red-Headed League*

Les connaissances dont nous disposons sur une situation quelconque sont généralement imparfaites, soit parce que nous avons un doute sur leur validité, elles sont alors *incertaines*, soit parce que nous éprouvons une difficulté à les exprimer clairement, elles sont alors *imprécises*.

Les deux types d'imperfection dans les connaissances n'ont cependant pas eu la même importance dans les préoccupations des scientifiques. En ce qui concerne *l'incertain*, il a été abordé par la notion de probabilité dès le XVII<sup>e</sup> siècle par Pascal et Fermat. Cependant, celle-ci ne permet pas de traiter aisément des croyances subjectives comme on a longtemps pensé qu'elle pouvait le faire, ni de résoudre le problème posé par les connaissances *imprécises ou vagues*. Afin de traiter ces dernières, *la théorie possibiliste* fut introduite en 1978 par L.A. Zadeh; elle constitue ainsi un cadre permettant de traiter des concepts d'incertitude de nature non probabiliste.

Dans la plupart des applications pratiques des problèmes de programmation linéaire, on rencontre ces deux types d'incertitude, soit dans la matrice, soit dans les termes constants. Depuis 1955, différents auteurs dont Dantzig (1963) et Charnes et Cooper (1961) ont cherché à étendre les méthodes de la programmation linéaire pour traiter le problème de l'optimisation, dans une certaine acceptation du terme, d'une fonction économique, sous réserve de contraintes dont les coefficients sont sujets à

des variations. Alors que la programmation stochastique constitue le meilleur outil pour traiter des études de prise de décision dans un environnement *incertain*, la programmation possibiliste, quant à elle, s'applique à un environnement *imprécis*.

Les connaissances imprécises n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965, lorsque L. A. Zadeh, professeur à l'université de Californie à Berkeley, a introduit la notion de *sous-ensemble flou*, à partir de l'idée *d'appartenance partielle* à une classe, de catégorie aux limites mal définies, de gradualité dans le passage d'une situation à une autre, dans une généralisation de la théorie classique des ensembles admettant des situations intermédiaires entre le tout et le rien.

Les premières publications sur la théorie des ensembles flous datent de 1965 (Zadeh 1965) suivies par les travaux de Goguen en 1967 et 1969. Ces travaux démontrent l'intention de leurs auteurs à généraliser la notion classique d'un ensemble et d'une proposition afin d'accompagner les données floues. Dans le même contexte, Bellman et Zadeh (1970) ont développé la *programmation linéaire floue* qu'ils ont appliquée à un processus de décision dans un environnement flou.

Zadeh (1965) prétend que la notion d'ensemble flou fournit un point de départ convenable pour la construction d'une structure en parallèle aux ensembles ordinaires, mais plus générale avec un plus grand éventail d'applicabilité surtout dans le domaine de la classification des patrons et de l'analyse de l'information. Une telle structure permet le traitement de problèmes où la source d'imprécision est à l'origine de critères mal définis et non de variables aléatoires. Le terme "imprécision" est utilisé dans le sens d'ambiguïté plutôt qu'un manque d'information sur la valeur d'un paramètre.

La théorie des ensembles flous offre donc une structure mathématique dans laquelle des concepts vagues peuvent être précisément et rigoureusement étudiés. Elle peut également être considérée comme un langage de modélisation convenable à des situations caractérisées de relations, critères ou phénomènes flous.

Il n'existe pas de définition unique à la notion du flou; elle peut signifier différentes choses selon le contexte d'application et la façon dont elle est mesurée.

La théorie des probabilités et la théorie des ensembles flous, si elles sont distinctes, peuvent, par contre, être associées. La notion d'événement flou est ex-

trêmement fréquente dans les mécanismes de la pensée humaine et dans la communication. On entend souvent dire "il est peu probable qu'il va pleuvoir". Comme les événements formels, les événements flous sont soumis à des structures mathématiques à partir desquelles des opérateurs sont mis en place.

La théorie des décisions se ramène à la question suivante: existe-t-il une solution qui est située dans un domaine d'acceptation sachant qu'un ensemble de contraintes doit être satisfait? Ces contraintes sont parfois représentées sous la forme de relations mathématiques plus ou moins compliquées (demeurer à l'intérieur d'un domaine), ou sous la forme d'objectifs à atteindre, à dépasser ou à ne pas dépasser, etc. Dans cette optique, on aura à considérer des sous-ensembles flous du référentiel constitué par l'ensemble des variables prises en compte. Ainsi, la théorie des sous-ensembles flous convient-elle particulièrement bien aux problèmes de décision qui ne peuvent être formellement explicités, ce qui est le plus souvent le cas.

Dans ce mémoire, nous allons étudier les problèmes de programmation linéaire où les données sont connues avec incertitude. Nous nous intéresserons principalement aux variations de la solution optimale induites par des perturbations apportées aux valeurs des paramètres. Nous désirons développer des algorithmes exacts pour les cas où les coefficients de l'objectif, du membre de droite et de la matrice des contraintes vérifient une *distribution possibiliste*.

Afin d'atteindre nos objectifs, nous proposerons un algorithme qui permettra de faire une analyse de sensibilité sur les coefficients de la matrice des contraintes (cas où  $x_j$  est une variable de base ou hors base). Nous verrons également l'effet de faire varier simultanément les coefficients de la fonction coût avec les coefficients du vecteur ressource. Quelques résultats numériques seront présentés.

Le chapitre 2 présente une revue de littérature sur la théorie possibiliste. Des notions sur la théorie des ensembles flous sont présentées. Suivent des exemples pour s'assurer de la compréhension des différents concepts. Les simulations de Monte Carlo pour un problème en programmation stochastique et pour un problème en programmation possibiliste y sont décrites. Enfin, les stratégies de résolution d'un problème en programmation possibiliste sont abordées.

Le chapitre 3 décrit d'une façon détaillée les résultats de Julien(1996) (interpolation avec des différentes valeurs d'un paramètre  $\alpha$  compris entre 0 et 1) sur le

problème de la gestion de la qualité d'eau. Nous constatons que l'approche proposée par Julien n'est pas tout à fait bien adaptée à des programmes linéaires possibilistes (données imprécises dans un programme linéaire). Nous verrons également, pour la première fois, la solution exacte de ce problème. Le chapitre 4 innove par la présentation des algorithmes originaux permettant de résoudre les problèmes en programmation linéaire possibiliste. De plus, nous analyserons la façon de déterminer la courbe possibiliste si:

- les coefficients de la fonction coût dépendent d'un paramètre  $\alpha$ ;
- les coefficients du vecteur ressource dépendent de  $\alpha$ ;
- les coefficients de la matrice des contraintes dépendent de  $\alpha$ .

Nous verrons aussi comment nous avons obtenu la courbe possibiliste lorsque les coefficients de la fonction coût et du vecteur ressource varient simultanément. Nous trouvons, lorsque le vecteur ressource est perturbé dans un programme linéaire possibiliste, que la courbe possibiliste est une fonction convexe et affine par morceaux. D'autre part, lorsque la fonction coût est perturbée, la courbe possibiliste est une fonction concave. Par contre, nous verrons qu'elle n'est ni concave ni convexe en général lorsqu'il y a variation simultanée de la fonction coût et du vecteur ressource. Des exemples seront étudiés. Enfin, une courte conclusion fera le point sur les résultats trouvés et sur les directions de recherches possibles.

# CHAPITRE 2

## Notions générales et utiles sur les ensembles flous

*“We all learn by experience, and your lesson this time is that you should never lose sight of the alternative.”*

**Sir Conan Doyle**

*The Adventure of Black Peter*

Dans ce chapitre, nous présenterons les principaux concepts de la théorie des ensembles flous. Ces concepts nous permettront de définir le paradigme de la programmation linéaire possibiliste et voir les principales différences qui existent entre ce dernier et celui de la programmation linéaire stochastique. Dans un premier temps, nous introduisons les quantités floues qui nous permettront de décrire les nombres flous. Nous verrons ensuite la notion de possibilité d'un événement avec un accent particulier sur la programmation linéaire possibiliste. Quelques exemples permettront de faciliter la compréhension des différents concepts.

### 2.1 Définitions de base

Un ensemble classique est normalement défini comme une collection d'éléments ou d'objets, satisfaisant des propriétés spécifiques ou non. L'ensemble peut être soit fini, soit infini, dénombrable ou non-dénombrable.

Soit  $X$  une collection d'éléments ou d'objets. Pour un sous-ensemble  $A$ ,  $A \subset X$ , chaque élément de  $X$  peut appartenir ou non à  $A$ . Dans un tel cas, pour un élément  $x$  de  $X$ , l'affirmation " $x \in A$ " sera vraie ou fausse.

Un tel ensemble peut être décrit de différentes façons. Une des façons est d'énumérer tous les éléments qui appartiennent à l'ensemble. Une autre façon est de décrire analytiquement l'ensemble en fixant des conditions d'appartenance, par exemple  $A = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 8\}$ . On peut aussi utiliser, pour indiquer cette appartenance, un autre concept celui de "fonction caractéristique" (Oshiro et al, 1987),  $\mu_A(x)$  dont la valeur indique si, oui ou non,  $x$  appartient à  $A$ :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, si  $X$  est un ensemble fini à 6 éléments et  $A \subset X$  avec

$$\begin{aligned} X &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\} \\ \text{et } A &= \{y_1, y_3, y_5\} \end{aligned}$$

on écrira;

$$\mu_A(y_1) = 1, \mu_A(y_2) = 0, \mu_A(y_3) = 1, \mu_A(y_4) = 0, \mu_A(y_5) = 1 \text{ et } \mu_A(y_6) = 0.$$

Avec cette notation, on peut représenter  $A$  en accompagnant les éléments de  $X$  de la valeur de la fonction caractéristique:

$$A = \{(y_1|1), (y_2|0), (y_3|1), (y_4|0), (y_5|1), (y_6|0)\}.$$

Donc les 6 éléments de  $X$  appartiennent ou pas à  $A$ . La fonction caractéristique ne peut prendre que la valeur 0 ou 1. Il arrive certaines situations où la définition de  $A$  est moins nette. Par exemple, si  $A$  est l'ensemble des maisons confortables dans un quartier. Certaines maisons seront assurément dans  $A$  et d'autres non. Mais pour certaines maisons la notion de "confortable" n'est pas assez clairement définie pour dire si elles appartiennent ou non à  $A$ . Si par exemple  $X$  désigne une communauté donnée et que le sous-ensemble  $A$  est défini par la caractéristique d'être vieux, on a trois possibilités selon le critère de sélection appliqué à l'univers  $X$ :

- $A$  est vide et  $\mu_A(x) = 0 \forall x \in X$ : la communauté ne compte aucun vieux parmi ses membres;

- $A = X$ : tous les membres de la communauté sont vieux ou  $\mu_A(x) = 1 \forall x \in X$ ;
- $A$  est un sous-ensemble propre ( $A \neq \emptyset$  et  $A \neq X$ ); dans ce cas  $\forall x \in X, \mu_A(x) = 1$  si  $x$  est vieux et  $\mu_A(x) = 0$  si  $x$  est jeune (vieux et jeune sont deux attributs mutuellement exclusifs définissant les deux sous-ensembles complémentaires  $A$  et  $\bar{A}$ ).

La fonction caractéristique  $\mu_A(x)$  (fonction d'appartenance) signifie donc que tout membre de la communauté  $X$  est soit jeune soit vieux, excluant par conséquent tout cas intermédiaire qui supposerait l'existence d'éléments  $x$  près de la frontière de  $A$  (individus d'âge moyen par exemple). Il sera alors pratique de généraliser la fonction caractéristique pour lui permettre de prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[0,1]$ . Par exemple, l'ensemble  $\tilde{A}$  tel que

$$\tilde{A} = \{(y_1|0.1), (y_2|0), (y_3|0.2), (y_4|1), (y_5|0.8), (y_6|0)\} \quad (2.1)$$

où d'une part  $y_i$  est un élément du référentiel  $X$ , et d'autre part le nombre placé après la barre est la valeur de la fonction caractéristique de cet élément, définit un concept mathématique appelé "sous-ensemble flou" de  $X$  et noté par  $\tilde{A} \in X$ . Ainsi, le sous-ensemble flou défini par l'équation (2.1) contient  $y_4$  mais ne contient pas  $y_2$  ni  $y_6$ . Quant à  $y_1$ ,  $y_3$  et  $y_5$  il est possible de les retrouver,  $y_5$  est très certainement inclus alors que pour  $y_1$  et  $y_2$  la possibilité est *faible*. Avec ce concept, on peut construire une structure mathématique qui permettra une manipulation d'objets assez mal définis mais dont l'appartenance à des sous-ensembles a pu être hiérarchisée. De cette manière la notion d'appartenance peut prendre une intéressante extension et amener à des développements très utiles.

La théorie des ensembles flous se propose donc de généraliser cette fonction d'appartenance pour des catégories vagues.

### 2.1.1 Définition d'un ensemble flou

Soit un ensemble de référence  $X$ , on définit un ensemble flou  $A$  dans  $X$  par la donnée d'une application  $\mu_A$  de  $X$  dans l'intervalle  $[0,1]$ . À tout élément  $x \in X$  on

associe une valeur  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  telle que

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad (2.2)$$

Cette fonction sera aussi appelée “fonction d’appartenance” (Zimmermann 1985, Dubois et Prade 1985) de l’ensemble flou  $A$ , généralisant ainsi le concept d’appartenance et donc la notion de fonction caractéristique.

La fonction d’appartenance n’est pas limitée à des valeurs entre 0 et 1. Si le  $\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ , l’ensemble flou  $\tilde{A}$  est appelé normal. Un ensemble flou fini,  $\tilde{A}$  non vide peut toujours être normalisé en divisant  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  par  $\sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$ . On suppose dans ce mémoire que les ensembles flous seront normalisés et ainsi

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1] \quad (2.3)$$

À tout élément de  $x$  de  $X$  la valeur  $\mu_{\tilde{A}}$  associée n’est pas nécessairement égale à 0 ou à 1; elle est a priori quelconque et désigne le degré d’appartenance de  $x$  à l’ensemble  $A$ . On peut distinguer trois cas  $\forall x \in X$ :

- $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ ,  $x$  n’appartient pas à  $A$ , c’est-à-dire l’élément  $x$  ne satisfait pas du tout la propriété vague sous-entendue par  $A$  (par exemple  $x$  n’est pas vieux selon le critère de définition de la catégorie  $A$  des vieux).
- $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ ,  $x$  appartient à  $A$ , c’est-à-dire  $x$  satisfait pleinement la propriété vague définie par  $A$  (par exemple une personne âgée de 70 ans est pleinement vieille si la classe  $A$  des vieux comprend des personnes âgées d’au moins 55 ans).
- $\mu_{\tilde{A}}(x) \notin \{0, 1\}$ ; dans ce cas, le degré d’appartenance  $\mu_{\tilde{A}}$  est une valeur intermédiaire entre 0 et 1. C’est le cas où certaines personnes considéreront que  $x \in A$  et d’autres non!

Dans ce mémoire le concept d’ensemble flou sera défini comme suit:

### Définition:

Si  $X$  est une collection d'objets notés généralement par  $x$ , alors l'ensemble flou  $\tilde{A}$  dans  $X$  est un ensemble de couples

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)); x \in X\} \quad (2.4)$$

où  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  est appelé degré d'appartenance de  $x$  dans  $\tilde{A}$  (Zadeh 1978, Zimmermann 1985, Dubois et Prade 1985) ou bien grade d'appartenance (aussi degré de comptabilité ou degré de vérité, niveau de possibilité, degré de possibilité).

Par exemple, soit  $\mathbb{N}$  l'ensemble des nombres naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

on peut définir le sous-ensemble flou  $\tilde{A}$  des "petits" nombres entiers comme:

$$\tilde{A} = \{(0|1), (1|0.8), (2|0.6), \dots, (5|0), \dots\}.$$

Un autre ensemble flou pourrait être

$$\tilde{B} = \{(0|1), (1|0.9), (2|0.7), \dots, (5|0), \dots\}$$

où, bien entendu, les valeurs de la fonction  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ,  $\forall x = 0, 1, 2, \dots$  sont ici données subjectivement.

### 2.1.2 Nombre flou

Lorsque l'ensemble de référence  $X$  ne contient que des nombres, on parle alors du concept de nombre flou, noté  $\tilde{N}$ . Dans la littérature (Buckley (1989)), on utilise une fonction d'appartenance  $\mu(x | \tilde{N})$  ayant les propriétés suivantes: soit  $n_1, n_2, n_3$  et  $n_4$  4 nombres réels tels que  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ . Alors

- $\mu_{\tilde{N}}(x) = \mu(x | \tilde{N}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n_1 \text{ ou } x > n_4 \\ 1 & \text{si } n_2 \leq x \leq n_3 \end{cases}$
- $\mu(x | \tilde{N})$  est continue et monotone croissante de 0 à 1 sur  $[n_1, n_2]$

- $\mu(x | \tilde{N})$  est continue et monotone décroissante de 1 à 0 sur  $[n_3, n_4]$ .

Lorsque la fonction  $\mu$  est linéaire dans les intervalles  $[n_1, n_2]$  et  $[n_3, n_4]$ ,  $\tilde{N}$  a une forme trapézoïdale quand  $n_2 < n_3$  (figure 2.1) et une forme triangulaire si  $n_2 = n_3$  (figure 2.2). Si  $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n$ , alors  $\tilde{N} = n$  est un nombre réel (non-flou).

De plus, on dit que  $\tilde{N}$  est non-négatif ( $\tilde{N} \geq 0$ ) si  $n_1 \geq 0$ ,  $\tilde{N}$  est non-positif ( $\tilde{N} \leq 0$ ) lorsque  $n_4 \leq 0$ , et  $\tilde{N}$  contient 0 quand  $n_2 \leq 0 \leq n_3$  (Buckley 1989).

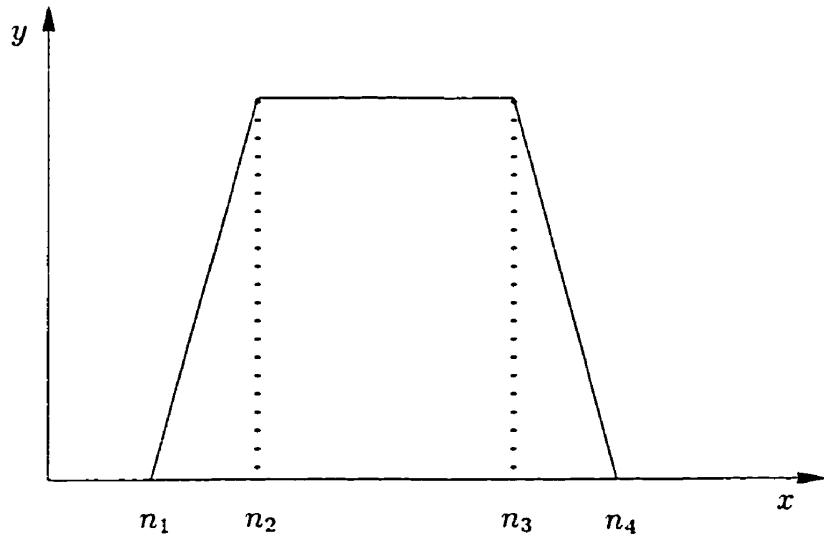
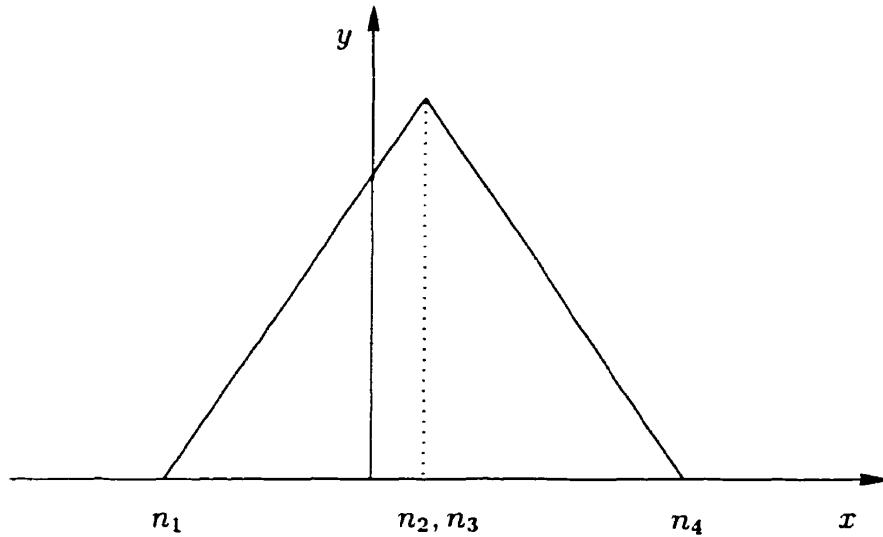


Figure 2.1: Fonction d'appartenance d'un nombre flou de forme trapézoïdale.

## 2.2 Opérations sur les ensembles flous

Les opérations sur les ensembles flous sont généralement des extensions des opérations connues sur les ensembles classiques (égalité, réunion, intersection, complément, etc.). Elles s'appliquent d'ailleurs aux ensembles classiques lorsque les fonctions d'appartenance se réduisent à des fonctions caractéristiques. Cependant d'autres définitions ont été proposées par divers auteurs.



**Figure 2.2: Fonction d'appartenance d'un nombre flou de forme triangulaire.**

### 2.2.1 Définitions des opérations de base

#### Égalité

Soit deux ensembles flous  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  dans un univers  $X$ . On dit que  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont égaux (Kaufmann 1977, Dubois et Prade 1985, Klir et al. 1988) si et seulement si leurs fonctions d'appartenance ont la même valeur en tout point  $x$  de  $X$ :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x), \forall x \in X$$

Si au moins un élément  $x$  de  $X$  est tel que l'égalité précédente n'est pas satisfaite, on dira que  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont inégaux.

#### Complément

Le complément d'un ensemble flou  $\tilde{A}$  (Kaufmann 1977, Dubois et Prade 1985, Klir et al. 1988) dans un univers  $X$ , est l'ensemble flou  $\tilde{\bar{A}}$  dont la fonction d'appartenance  $\mu_{\tilde{\bar{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ . Si  $\tilde{A}$  est un sous-ensemble classique, on retrouve la

notion habituelle du complément, c'est-à-dire

$$\bar{A} = \{x \in X; x \notin A\}$$

car lorsque la fonction caractéristique de  $A$  vaut 1, celle de son complément vaut 0 et réciproquement. Par contre, pour  $\mu_{\bar{A}}(x) \neq 1$ ,  $\mu_{\bar{A}}(x)$  a une valeur quelconque non nulle.

### Réunion

La réunion de deux ensembles flous  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  de même référentiel  $X$  est un ensemble flou noté  $\bar{A} \cup \bar{B}$  (Kaufmann 1977, Dubois et Prade 1985, Klir et al. 1988) dont la fonction d'appartenance est:

$$\mu_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = \max\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \quad \forall x \in X,$$

si  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont deux ensembles classiques, on retrouve l'union classique

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

La réunion floue indique que l'appartenance à l'une ou à l'autre des deux caractéristiques floues  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  (ou aux deux) est fournie par le degré le plus grand, (à moins que les deux propriétés ne soient satisfaites au même niveau:  $\mu_{\bar{A}}(x) = \mu_{\bar{B}}(x)$  pour l'élément  $x$  considéré), parmi  $\mu_{\bar{A}}(x)$  et  $\mu_{\bar{B}}(x)$ .

### Intersection

L'intersection de deux ensembles flous  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  de même référentiel  $X$  est l'ensemble flou noté  $\bar{A} \cap \bar{B}$  (Kaufmann 1977, Dubois et Prade 1985, Klir et al. 1988) dont la fonction d'appartenance  $\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}$  est définie par:

$$\mu_{\bar{A} \cap \bar{B}} = \min\{\mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Une intersection floue signifie qu'un élément  $x$  de l'univers  $X$  appartenant à la

fois aux deux catégories vagues  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  ne peut pas avoir un degré dépassant  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  et  $\mu_{\tilde{B}}(x)$ . Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles classiques, on retrouve l'intersection classique:

$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

### 2.2.2 Support d'un ensemble flou

Le support d'un ensemble flou  $\tilde{A}$ , noté  $S(\tilde{A})$  est l'ensemble (non-flou)  $\{x; \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$  (Zadeh 1978, Zimmermann 1985, Dubois et Prade 1985, Klir et al. 1988). Pour l'ensemble flou  $\tilde{A}$  défini par l'équation (2.1), le support de  $\tilde{A}$  est  $S(\tilde{A}) = \{y_1, y_3, y_4, y_5\}$ . Les éléments  $y_2$  et  $y_6$  ne font pas partie du support de  $\tilde{A}$ .

### 2.2.3 Noyau d'un ensemble flou

Le noyau d'un ensemble flou  $\tilde{A}$  dans  $X$  est un sous-ensemble ordinaire de  $X$  dont chaque élément a un degré d'appartenance égal à 1 (Dubois et Prade 1985). On note:

$$Ker(\tilde{A}) = \{x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}. \quad (2.5)$$

Le noyau est constitué d'éléments qui satisfont pleinement la caractéristique vague définie par  $A$ . Lorsque le noyau n'est pas vide, c'est-à-dire  $Ker(A) \neq \emptyset$ , on dit que l'ensemble flou  $\tilde{A}$  est normal ou normalisé, sinon on dit qu'il est sous-normal. Si  $A$  est un ensemble classique alors  $Ker(A) = A$ .

### 2.2.4 Produit cartésien d'ensembles flous

Soit  $n$  ensembles flous  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$  de référentiels respectifs  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ; le produit cartésien des ensembles flous est un ensemble flou noté  $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n$  (Zadeh 1978, Dubois et Prade 1985) dont la fonction d'appartenance est:

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\}, x_i \in X, i = 1, \dots, n.$$

## 2.3 Mesures floues

Soit  $X$  un univers et  $A, B, C$ , et  $D$  des sous-ensembles ordinaires de  $X$ ; soit d'autre part un élément  $x \in X$  sur lequel nous n'avons pas une information complète. En particulier, nous ne sommes pas en mesure de dire avec certitude si  $x$  appartient à l'un ou l'autre des quatre sous-ensembles. Cependant, nous pouvons affecter à chacun des sous-ensembles un coefficient indiquant le degré de certitude ou d'évidence avec lequel nous pensons que l'élément  $x$  lui appartient.

On appelle mesure floue, une représentation de l'incertitude attribuant des coefficients aux sous-ensembles d'un univers  $X$  donné. Chacun des coefficients fournit le degré de certitude avec lequel un élément de  $X$ , appartient au sous-ensemble correspondant. Il est à noter qu'une mesure floue, associe une valeur à un sous-ensemble classique afin d'indiquer l'incertitude d'appartenir à ce sous-ensemble; alors qu'une fonction d'appartenance associe une valeur à un élément  $x$  de  $X$  afin d'indiquer dans quelle mesure cet élément satisfait une propriété vague modélisée par un ensemble flou dans  $X$ .

Par exemple si  $X$  est une association composée de professeurs titulaires, de professeurs agrégés, d'étudiants à la maîtrise et d'étudiants au doctorat,

- $A$  = sous-ensemble de professeurs titulaires
- $B$  = sous-ensemble de professeurs agrégés
- $C$  = sous-ensemble d'étudiants à la maîtrise
- $D$  = sous-ensemble d'étudiants au doctorat.

Pour classer un membre donné de l'association de  $X$  sur lequel on ne dispose que d'informations partielles, nous pouvons attribuer à  $A, B, C$ , et  $D$  les coefficients suivants:

- $A \longrightarrow 0.90$
- $B \longrightarrow 0.30$
- $C \longrightarrow 0.20$

$$D \longrightarrow 0.10.$$

Ainsi la valeur de 0.30 attribuée à  $B$  indique le degré avec lequel nous croyons que l'individu considéré est un professeur agrégé.

### 2.3.1 Propriétés d'une mesure floue

Une mesure floue  $f$  (Dubois et Prade 1985) est une application de  $\mathcal{P}(X)$  dans  $[0,1]$ , où  $\mathcal{P}(X)$  est l'ensemble des parties de  $X$ , qui vérifie les 3 conditions suivantes:

- Cas limites:  $f(\emptyset)=0$  et  $f(X)=1$
- Monotonie:  $\forall A$  et  $B \in \mathcal{P}(X)$  tels que  $A \subseteq B$  alors  $f(A) \leq f(B)$
- Continuité: Pour des sous-ensembles emboîtés  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$  ou  $A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \dots \subseteq A_1$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(A_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n).$$

Comme dans le cas des probabilités, une mesure floue  $f$  peut avoir comme domaine de définition une tribu  $\mathcal{T}$  au lieu de l'ensemble des parties  $\mathcal{P}(X)$  de  $X$  ( $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(X)$ ). Par ailleurs, la monotonie de  $f$  et les propriétés classiques de la réunion ( $A \subseteq A \cup B$ ,  $B \subseteq A \cup B$ ) et de l'intersection ( $A \cap B \subseteq A$ ,  $A \cap B \subseteq B$ ) d'ensembles ordinaires nous permettent de déduire les relations suivantes:

$$f(A \cup B) \geq \max\{f(A), f(B)\}$$

$$f(A \cap B) \leq \min\{f(A), f(B)\}.$$

Dans la littérature de la théorie floue, il existe 4 mesures floues classiques, soit:

- Mesure de *croyance*;
- Mesure de *plausibilité*;
- Mesure de *nécessité*;

- Mesure de *possibilité*.

Dans ce mémoire on ne s'intéressera qu'à la mesure de possibilité qui est traitée plus en détail dans la section suivante.

## 2.4 Mesure de possibilité

Une mesure floue peut être interprétée comme une mesure de la confiance accordée à l'occurrence d'un événement  $A$ , sous-ensemble d'un ensemble fondamental  $X$ . Étant donné un ensemble de référence fini  $X$ , on attribue à chaque événement de  $X$ , un coefficient compris entre 0 et 1 évaluant à quel point cet événement est possible. Pour définir ce coefficient, on introduit une *mesure de possibilité*  $\Pi$ , (Zadeh 1975, Kaufmann 1977, Dubois et Prade 1985) qui est une fonction définie sur l'ensemble  $\mathcal{P}(X)$  des parties de  $X$ , prenant ses valeurs dans  $[0,1]$ , telle que:

- $\Pi(\emptyset) = 0$ ,  $\Pi(X) = 1$ ,
- $\Pi(\bigcup_{i=1,2,\dots} A_i) = \sup_{i=1,2,\dots} \Pi(A_i)$

où le sup indique le supremum des valeurs concernées, c'est-à-dire la plus grande d'entre elles dans le cas fini. La dernière propriété se réduit dans le cas de deux parties à

$$\forall A \text{ et } B \in \mathcal{P}(X), \Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}. \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) exprime que la réalisation de l'un des deux événements  $A$  et  $B$ , pris indifféremment, est affectée du même coefficient de possibilité que la réalisation de l'événement le plus possible. Un événement est tout à fait possible si la mesure de sa possibilité est égale à 1 ( $\Pi(A) = 1$ ), et impossible si celle-ci est nulle ( $\Pi(A) = 0$ ).

Donc une mesure de possibilité est une mesure floue particulière satisfaisant les trois axiomes de base, à savoir celui de cas limites, celle de la monotonie et de la continuité. On remarque que le coefficient attribué à l'intersection d'événements, c'est-à-dire la valeur de la mesure de possibilité associée à l'intersection de parties de  $X$ , n'est pas donné par les deux conditions qui définissent cette mesure. Par

contre cette valeur est toujours majorée par le plus petit des coefficients attribués à chacun des deux événements. Comme dans le cas d'une mesure floue une mesure de possibilité vérifie donc:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad \Pi(A \cap B) \leq \min\{\Pi(A), \Pi(B)\}$$

et par conséquent, deux événements peuvent être possibles ( $\Pi(A) \neq 0, \Pi(B) \neq 0$ ) alors que leur occurrence concomitante est impossible ( $\Pi(A \cap B) = 0$ ) (Dubois et Prade 1985). Nous avons aussi par la monotonie de  $A$  et  $B$  ( $A \subseteq B$ ) que  $\Pi(A) \leq \Pi(B)$ , de même si  $\bar{A} = B$  nous avons par l'équation (2.6) que:

$$\Pi(A \cup \bar{A}) = \max\{\Pi(A), \Pi(\bar{A})\} \quad (2.7)$$

$$\Pi(X) = \max\{\Pi(A), \Pi(\bar{A})\} \quad (2.8)$$

$$1 = \max\{\Pi(A), \Pi(\bar{A})\}. \quad (2.9)$$

On déduit aussi que :

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq 1.$$

Exemple:

Une personnalité doit être reçue par le maire d'une grande ville à une journée quelconque de la semaine, entre lundi et dimanche. L'ensemble universel des journées possibles de réception est

$$X = \{\text{lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche}\}. \quad (2.10)$$

Mais comme la journée de cette réception n'a pas été précisée, différents événements affectés de coefficients de possibilité peuvent être envisagés. Nous définissons ainsi par exemple 5 événements  $A, B, C, D, E$  munis de leurs coefficients respectifs

$$A = \{\text{lundi, mercredi, vendredi}\} \longrightarrow \Pi(A) = 0.9 \quad (2.11)$$

$$B = \{\text{mardi, mercredi, samedi}\} \longrightarrow \Pi(B) = 0.7 \quad (2.12)$$

$$C = \{\text{mardi, jeudi, samedi}\} \longrightarrow \Pi(C) = 0.3 \quad (2.13)$$

$$D = \{\text{mardi, samedi}\} \longrightarrow \Pi(D) = 0 \quad (2.14)$$

$$E = \{\text{mardi, jeudi, samedi, dimanche}\} \longrightarrow \Pi(E) = 1. \quad (2.15)$$

On voit clairement que l'événement  $A$  est fortement possible tandis que  $E$  est totalement possible. Quant à l'événement  $D$  il est tout simplement impossible: on estime que suite à certaines contraintes ou habitudes, la réception envisagée ne peut avoir lieu le mardi ou le samedi. On peut envisager des combinaisons d'événements, par exemple:

$$\Pi(A \cup B) = 0.9, \quad \Pi(B \cap C) = \Pi(D) = 0.$$

#### 2.4.1 Distribution possibiliste

Toute mesure de possibilité peut être complètement définie à partir des coefficients de possibilités affectés aux singltons de l'univers  $X$  (Dubois et Prade 1985). On appelle *distribution de possibilité*  $\pi$  une application

$$\pi : X \longrightarrow [0, 1] \quad (2.16)$$

satisfaisant la condition de normalisation suivante:  $\sup_{x \in X} \pi(x) = 1$ . L'application  $\pi$  est dite normalisée. On peut très bien associer mesure et distribution possibiliste. À partir d'une distribution  $\pi$ , qui attribue un coefficient de possibilité à chaque élément de  $X$ , on construit une mesure de possibilité  $\Pi$  en considérant, pour toute partie de  $X$ , les coefficients des éléments de  $X$  qui la composent. On définit alors:

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad \Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x).$$

À partir de  $\pi$  on construit donc  $\Pi$ . Réciproquement, tout mesure de possibilité  $\Pi$  attribue un coefficient de possibilité à toutes les parties de  $X$ , donc en particulier à celles réduites à un seul élément. On peut donc s'en servir pour définir une distribution de possibilité affectant un coefficient à chaque élément de  $X$ . La mesure  $\Pi$  est alors utilisée pour définir une fonction  $\pi$  par:

$$\forall x \in X, \quad \pi(x) = \Pi(\{x\}).$$

Cette dernière expression satisfait la condition de normalisation, ce qui fait d'elle une distribution de possibilité. A partir de  $\Pi$ , on construit donc  $\pi$ . Soit  $A$  un ensemble (non flou) sur  $X$  et  $v \in X$ . Dire que  $v$  prend ses valeurs dans  $A$  indique que n'importe quel élément dans  $A$  peut possiblement être une valeur de  $v$  et inversement, c'est-à-dire n'importe quel élément qui n'est pas dans  $A$  ne peut être une valeur de  $v$ . La proposition " $v$  prend ses valeurs dans  $A$ " peut être vu comme une induction à la distribution possibiliste  $\pi$  sur  $X$  qui associe à chaque élément  $x$  la possibilité que  $x$  est une valeur de  $v$ :

$$\Pi(v = x) = \pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'extension de cette présentation à un ensemble flou  $\tilde{A}$  conduit naturellement à

$$\Pi(v = x) = \pi(x) = \mu_{\tilde{A}}(x).$$

On utilisera tout au long de ce mémoire la définition de Buckley(1988a) qui est:

$$Poss(A) = \Pi(A) \tag{2.17}$$

$$= \sup_{x \in A} \pi(x) \tag{2.18}$$

$$= \sup_{x \in A} \mu(x|\tilde{F}) \tag{2.19}$$

$$\text{et } Poss(v = \xi) = \pi_v(\xi) \tag{2.20}$$

où  $\tilde{F}$  est un sous-ensemble flou du référentiel  $X$  et  $A$  est un sous-ensemble (non vide) de  $X$ .

#### 2.4.2 Distribution de possibilité conjointe

Étant donné deux ensembles de référence  $X$  et  $Y$ , on s'intéresse au degré avec lequel chacun des couples  $(x, y)$ , avec  $x \in X$  et  $y \in Y$ , est possible. On définit alors une distribution possibiliste sur le produit cartésien  $X \times Y$ , que l'on appelle *distribution de possibilité conjointe*, pour tout  $x \in X$  et  $y \in Y$ . Elle exprime les influences respectives de la prise en considération de l'élément  $x$  de  $X$  et de celle de l'élément  $y$  de  $Y$  et indique dans quelle mesure il est possible qu'ils apparaissent simultanément.

Cette connaissance globale sur  $X \times Y$  fournit une information sur chacun des ensembles de référence  $X$  et  $Y$  pris individuellement. On fait correspondre à la distribution de possibilité conjointe  $\pi$  une *distribution de possibilité marginale* définie sur  $X$  par exemple, en conservant la plus grande valeur de  $\pi$  relativement à l'ensemble de référence  $Y$ :

$$\forall x \in X, \pi_X(x) = \sup_{y \in Y} \pi(x, y).$$

On définit de même la distribution de possibilité marginale sur  $Y$  par:

$$\forall y \in Y, \pi_Y(y) = \sup_{x \in X} \pi(x, y).$$

Ces deux égalités impliquent que tout  $\pi_X(x)$  et tout  $\pi_Y(y)$  soient au moins égaux à  $\pi(x, y)$ , quels que soient  $x$  et  $y$ , donc:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \pi(x, y) \leq \min\{\pi_X(x), \pi_Y(y)\}.$$

On observe qu'une distribution de possibilité conjointe  $\pi$  fournit de façon unique un couple de distributions marginales. Mais, réciproquement, si l'on donne les distributions possibiliste  $\pi_X$  sur  $X$  et  $\pi_Y$  sur  $Y$ , la définition de  $\pi$  dépend des interactions entre les ensembles de références  $X$  et  $Y$ . Si celles-ci sont inconnues, on ne peut pas préciser  $\pi$ , on sait seulement que  $\pi(x, y)$  admet pour borne supérieure  $\min\{\pi_X(x), \pi_Y(y)\}$ . Les ensembles de référence sont dits *non-interactifs* si:

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \pi(x, y) = \min\{\pi_X(x), \pi_Y(y)\},$$

cette distribution de possibilité conjointe particulière étant la plus grande de celles compatibles avec des distributions marginales données  $\pi_X$  et  $\pi_Y$ . Deux variables respectivement définies sur ces univers sont alors également dites *non-interactives*.

L'influence réciproque des ensembles de référence peut également être étudiée par l'intermédiaire du degré avec lequel un élément  $y$  de  $Y$  est possible, sachant que l'élément  $x$  de  $X$  est pris en considération. On définit donc une *distribution de possibilité conjointe*. Dans le cas de deux référentiels  $X$  et  $Y$  non interactifs, on a

(Dubois et Prade 1985) :

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \pi(x, y) = \min\{\pi_X(x), \pi_Y(y)\}. \quad (2.21)$$

## 2.5 Coupe de niveau $\alpha$ ou $\alpha$ -coupe

On appelle coupe de niveau  $\alpha$  ou  $\alpha$ -coupe de l'ensemble flou  $\tilde{A}$  pour une valeur donnée  $\alpha \in [0,1]$ , le sous-ensemble classique  $A_\alpha$  de  $X$  défini par (Dubois et Prade 1985, Klir et al 1988):

$$A_\alpha = \{x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (2.22)$$

$$A'_\alpha = \{x \in X; \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} \quad (2.23)$$

La deuxième égalité est appelée  $\alpha$ -coupe forte ("strong  $\alpha$ -cut"). Une  $\alpha$ -coupe,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , d'un nombre flou  $\tilde{N}$  est

$$\tilde{N}^\alpha = [N_l^\alpha, N_u^\alpha] \quad (2.24)$$

où

$$[N_l^\alpha, N_u^\alpha] = \{x \mid Poss(x) \geq \alpha\} \quad (2.25)$$

On voit qu'une  $\alpha$ -coupe définit un seuil  $\alpha$  de satisfaction du caractère flou énoncé par  $A$ . Elle définit en quelque sorte une relation d'équivalence classique sur l'univers  $X$ , celle d'avoir un degré d'appartenance à  $A$  au moins égal à  $\alpha$ . Pour  $\alpha = 0$ ,  $\tilde{N}^0 = [N_l^0, N_u^0] = [n_1, n_4] = [n_1, n_4]$  correspond à la fermeture du support de  $Poss(x)$ . Toutes les  $\alpha$ -coupes des nombres flous seront des ensembles fermés et bornés.

Par exemple soit  $\tilde{A} = \{(12|0), (24|0.1), (30|0.3), (45|0.6), (60|0.9), (70|1), (80|1)\}$ . Supposons qu'on s'intéresse uniquement aux individus d'au moins 45 ans; on définit dans ce cas une coupe de niveau 0.6. On a  $A_{0.6} = \{45, 60, 70, 80\}$ . Dans le cas des individus de plus de 45 ans, on a une 0.6-coupe forte, soit:  $A'_{0.6} = \{60, 70, 80\}$ .

## 2.6 Programmation linéaire

La programmation mathématique a comme objet l'étude des problèmes d'optimisation en dimension fini. Ces problèmes ou modèles représentent généralement une abstraction mathématique d'une problématique réelle. Selon le niveau de connaissance des données quant à leur occurrence, on parle de *programmation déterministe* (toutes les données sont connues), de *programmation stochastique ou probabiliste* (les données comportent de l'incertitude mais sont complètement déterminées par une loi de distribution probabiliste) et de *programmation possibiliste* (les données comportent de l'incertitude mais sont décrites par des fonctions d'appartenance dans un certain intervalle). La programmation linéaire stochastique vise un objectif donné en tenant compte d'une fonction de probabilités associée à divers scénarios. La réponse sera des valeurs associées aux variables de décision tandis que la programmation possibiliste étudie le niveau d'appartenance de  $z$ .

L'essentiel des activités de recherche en programmation mathématique a porté sur la programmation déterministe même si un intérêt constant et grandissant s'intéresse à la programmation stochastique (probabiliste), la puissance des ordinateurs rendant maintenant possible la résolution de problèmes de taille réaliste. La programmation possibiliste est quant à elle beaucoup plus récente.

### 2.6.1 Programmation linéaire possibiliste

La programmation linéaire constitue le domaine de la programmation mathématique le plus étudié. Elle concerne l'optimisation d'un programme mathématique où la fonction objectif et les fonctions définissant les contraintes sont linéaires.

Le modèle classique d'un programme linéaire peut être formulé comme suit:

$$\min z = c^t x \quad (2.26)$$

$$\text{sujet à } Ax * b \quad (2.27)$$

$$x \geq 0 \quad (2.28)$$

où \* dénote  $\leq$ ,  $=$  ou  $\geq$ ,  $x$  et  $c \in \mathbf{R}^n$ ,  $b \in \mathbf{R}^m$  et finalement  $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ .

On suppose que tous les coefficients de  $A$ ,  $b$  et  $c$  sont connus avec précision. Bien entendu, ces coefficients peuvent avoir un caractère flou soit parce qu'ils sont flous dans la nature soit parce que leur perception est floue. Dans ce cas, on parle de programmation possibiliste.

Un programme linéaire possibiliste s'écrit:

$$\min z = \tilde{c}^t x \quad (2.29)$$

$$\text{sujet à } \tilde{A}x * \tilde{b} \quad (2.30)$$

$$x \geq 0 \quad (2.31)$$

où  $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$  est une matrice  $m$  par  $n$  de nombres flous et  $\tilde{b} \in \mathbf{R}^m$  et  $\tilde{c} \in \mathbf{R}^n$  sont des vecteurs de nombres flous. La programmation linéaire floue doit être vue comme une approche pour les prises de décision dans un environnement flou (Julien 1994).

Le rôle des contraintes peut être différent de celui d'un programme linéaire classique où la violation de n'importe quelle contrainte par une quantité rend la solution non-réalisable. Dans le cadre de la programmation linéaire possibiliste ou encore stochastique, on peut associer un niveau de réalisabilité des contraintes. La programmation linéaire floue offre plusieurs façons pour traiter cette réalisabilité.

Pour résoudre un programme linéaire possibiliste qui s'écrit sous la forme:

$$\min z = \tilde{c}^t x \quad (2.32)$$

$$\text{sujet à } \tilde{A}_1 x \leq \tilde{b}_1 \quad (2.33)$$

$$\tilde{A}_2 x \geq \tilde{b}_2 \quad (2.34)$$

$$\tilde{A}_3 x = \tilde{b}_3 \quad (2.35)$$

$$x \geq 0 \quad (2.36)$$

on le décompose en deux sous-programmes, à savoir celui du **pire programme linéaire** et du **meilleur programme linéaire**<sup>1</sup>. Le meilleur programme linéaire

---

<sup>1</sup>Ces deux programmes linéaires seront expliqués dans la prochaine section.

s'écrit:

$$(z_L^*)^\alpha = \min \sum_{j=1}^n (c_j)_L^\alpha x_j \quad (2.37)$$

$$\text{ sujet à } \sum_{j=1}^n (a_{ij})_L^\alpha x_j \leq (b_1)_U^\alpha \quad i \in S_1 \quad (2.38)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij})_U^\alpha x_j \geq (b_2)_L^\alpha \quad i \in S_2 \quad (2.39)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij})_U^\alpha x_j = (b_3)_L^\alpha \quad i \in S_3, \quad \text{si } \lambda_i \geq 0 \quad (2.40)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij})_L^\alpha x_j = (b_3)_U^\alpha \quad i \in S_3, \quad \text{si } \lambda_i < 0 \quad (2.41)$$

$$x_j \geq 0 \quad (2.42)$$

et pour le pire programme linéaire, il s'écrit sous la forme suivante:

$$(z_U^*)^\alpha = \min \sum_{j=1}^n (c_j)_U^\alpha x_j \quad (2.43)$$

$$\text{ sujet à } \sum_{j=1}^n (a_{ij})_U^\alpha x_j \leq (b_1)_L^\alpha \quad i \in S_1 \quad (2.44)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij})_L^\alpha x_j \geq (b_2)_U^\alpha \quad i \in S_2 \quad (2.45)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij})_L^\alpha x_j = (b_3)_U^\alpha \quad i \in S_3, \quad \text{si } \lambda_i \geq 0 \quad (2.46)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij})_U^\alpha x_j = (b_3)_L^\alpha \quad i \in S_3, \quad \text{si } \lambda_i < 0 \quad (2.47)$$

$$x_j \geq 0 \quad (2.48)$$

où  $S_1, S_2$  et  $S_3$  sont les ensembles des indices pour lesquelles les contraintes sont satisfaites par les signes  $\geq$ ,  $<$  et  $=$ . Les  $\lambda_i$  représentent les variables duales et elle seront traitées à la section 2.7.

La signification des contraintes d'égalité (2.40-2.41 et 2.46-2.47) d'un programme

linéaire possibiliste s'explique à l'aide de la dualité.

### 2.6.2 Résolution des programmes linéaires possibilistes

Buckley(1989) a proposé une approche pour déterminer la solution d'un type commun de problèmes de la programmation linéaire possibiliste. Avec cette approche, on travaille avec des paramètres imprécis traités comme des nombres flous accompagnés de leur distributions possibilistes. Puisque dans la programmation linéaire possibiliste la valeur de la fonction coût  $Z$  est un nombre floue muni d'une distribution possibiliste, une valeur optimale de l'objectif  $Z^*$ , ne peut être produite. Une distribution possibiliste de la valeur de la fonction objectif optimale est alors définie  $Poss(Z^* = z)$ .<sup>2</sup> Pour un problème de minimisation, la méthode consiste à sélectionner parmi un ensemble infini de programmes linéaires possibles celui qui produit comme valeur du minimum la moins élevée au niveau de possibilité  $\alpha$ . Le "meilleur" programme linéaire est déterminé en faisant des coupes aux paramètres flous au niveau de possibilité considéré.

Le meilleur programme linéaire au niveau de possibilité  $\alpha$  est défini en affectant la borne inférieure ou la borne supérieure des  $\alpha$ -coupes aux paramètres. Le principe est de générer le programme linéaire classique avec la contrainte la moins restrictive et la fonction objectif la plus bénéfique. Dans les problèmes d'optimisation, le principe se traduit dans la sélection des frontières (borne) des  $\alpha$ -coupes inférieures ou supérieures pour les coefficients de la fonction objectif, pour produire la plus petite ou la plus grande valeur objectif selon le cas. De la même façon que la solution optimale d'un programme linéaire classique se trouve sur les points extrêmes du polyèdre convexe de la région réalisable, la solution optimale d'un programme linéaire possibiliste se situe sur les frontières des  $\alpha$  coupes des nombres flous. Cette méthode ne fournit pas la distribution possibiliste complète de la valeur objectif optimale  $Z^*$ . Seulement les "meilleurs" programmes linéaires sont considérés et les  $\alpha$ -coupes de  $Poss(Z^* = z)$  sont des intervalles ouverts avec une seule borne. La distribution possibiliste complète de  $Z^*$  peut être générée en prolongeant la méthode pour la définition d'un "pire" programme linéaire à un niveau donné  $\alpha$  de possibilité. Le "pire" programme linéaire est donné par le programme avec les plus

---

<sup>2</sup>On verra cette définition plus en détail à la section 2.8.

fortes contraintes et la fonction objectif la moins bénéfique. Ce pire programme linéaire à un niveau  $\alpha$  de possibilité est obtenu en affectant aux paramètres les frontières  $\alpha$ -coupes en opposition à ceux sélectionnés pour le meilleur programme linéaire. La solution du meilleur et celle du pire programme linéaire fournissent les bornes des intervalles  $\alpha$ -coupes fermés pour  $Z^*$ ,  $[(Z^*)_L^\alpha, (Z^*)_U^\alpha]$ <sup>3</sup> et la valeur optimale correspondante à  $x_j$ .

## 2.7 Dualité

Il est intéressant d'étudier l'impact sur la solution optimale lorsque dans un programme linéaire possibiliste nous sommes en présence de contraintes d'égalités. Dans ce cas, il est commode de faire appel à la dualité. Soit le programme linéaire possibiliste:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{c}^T x \\ \text{sujet à} \quad & \tilde{A}x = \tilde{b} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

son dual est donné par

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda^T \tilde{b} \\ \text{sujet à} \quad & \lambda^T \tilde{A} \leq \tilde{c}^T \end{aligned}$$

Les relations qui existent entre les solutions optimales de ces deux programmes linéaires sont bien connues et sont données dans tout bon livre de programmation linéaire (voir par exemple Chvátal 1983).

Si dans le modèle original, le but est de minimiser la fonction objectif, la variable duale  $\lambda_i$  indique l'accroissement<sup>4</sup> (diminution) de cette fonction économique

---

<sup>3</sup> $(Z^*)_L^\alpha$  est la borne inférieure au niveau  $\alpha$  de possibilité et  $(Z^*)_U^\alpha$  est la borne supérieure au niveau  $\alpha$  de possibilité.

<sup>4</sup>On doit se rappeler que cette variable duale est de signe quelconque. Si  $\lambda_i > 0$ , alors  $Z$  augmente réellement, tandis que si  $\lambda_i < 0$ ,  $Z$  diminue.

correspondant à un accroissement marginal de la  $i^{\text{ème}}$  ressource ( $b_i$ ).

### 2.7.1 Interprétation des valeurs optimales $\lambda_i^*$

Nous allons commencer par donner une interprétation des valeurs optimales  $\lambda_i^*$  des variables duales. Supposons que l'on ait une solution de base optimale non dégénérée du programme linéaire plus haut. Si  $b$  varie et devient  $b + \Delta b$ , alors, dans le cas où  $\Delta b$  est assez petit, la base optimale ne changera pas. La valeur de l'objectif  $z$  deviendra dans ce cas

$$z + \Delta z = c_B \mathbf{x}_B^* + c_B \Delta \mathbf{x}_B^* \quad (2.49)$$

où

$$\Delta \mathbf{x}_B^* = B^{-1} \Delta b$$

c'est-à-dire

$$\Delta z = c_B B^{-1} \Delta b = \lambda^* \Delta b \quad (2.50)$$

Ainsi,  $\lambda_i^*$  mesure l'accroissement de  $z$  si  $b_i$  est augmenté d'une unité (pour autant que la base optimale reste la même).

## 2.8 Notation dans les programmes linéaires possibilistes

Les paramètres du programme linéaire (2.29-2.31) qui sont des nombres flous sont notés de la façon suivante:

$$\tilde{a}_{ij} = (a_{ij1} | a_{ij2}, a_{ij3} | a_{ij4}) \quad \forall i, j \quad (2.51)$$

$$\tilde{b}_i = (b_{i1} | b_{i2}, b_{i3} | b_{i4}) \quad \forall i \quad (2.52)$$

$$\text{et } \tilde{c}_j = (c_{j1} | c_{j2}, c_{j3} | c_{j4}) \quad \forall j \quad (2.53)$$

avec  $\text{Poss}[\tilde{a}_{ij} = \xi] = \mu(\xi | \tilde{a}_{ij})$  est la possibilité que  $\tilde{a}_{ij}$  soit égal à  $\xi$ .

Aussi  $Poss[\tilde{c}_j = \eta] = \mu(\eta | \tilde{c}_j)$  est la possibilité que  $\tilde{c}_j$  soit égal à  $\eta$  et finalement  $Poss[\tilde{b}_i = \theta] = \mu(\theta | \tilde{b}_i)$  est la possibilité que  $\tilde{b}_i$  puisse être égal à  $\theta$ . Ces valeurs de  $\mu(\xi | \tilde{a}_{ij})$ ,  $\mu(\eta | \tilde{c}_j)$  et  $\mu(\theta | \tilde{b}_i)$  sont trouvées à partir de  $(a_{ij1} | a_{ij2}, a_{ij3} | a_{ij4})$ ,  $(b_{i1} | b_{i2}, b_{i3} | b_{i4})$  et  $(c_{j1} | c_{j2}, c_{j3} | c_{j4})$ . Dans ce cas,  $\Pi(c, A, b)$  est la fonction de possibilité conjointe et est définie (Julien 1994, Buckley 1990) en prenant le minimum des distributions possibilistes des coefficients de la fonction objectif  $c$ , de la matrice  $A$  et du vecteur ressource  $b$  (Buckley 1989), c'est-à-dire

$$\Pi(c, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{\mu(c_j | \tilde{c}_j), \mu(a_{ij} | \tilde{a}_{ij}), \mu(b_i | \tilde{b}_i)\} \quad (2.54)$$

$$= \min_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} [Poss(c_j), Poss(a_{ij}), Poss(b_i)] \quad (2.55)$$

$$= \min_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} [\Pi(c_j), \Pi(a_{ij}), \Pi(b_i)] \quad (2.56)$$

### 2.8.1 Distribution de $Z^*$

Dans un problème de minimisation nous voulons trouver  $Prob(Z^* \leq z)$  dans le cas d'un programme linéaire stochastique et  $Poss(Z^* \leq z)$  pour un programme linéaire possibiliste et ceci  $\forall z \in \mathbb{R}$ . Buckley(1990) a comparé la programmation linéaire stochastique avec la programmation linéaire possibiliste en considérant des simulations de Monte Carlo (Julien 1994) pour trouver la solution approximative d'un programme linéaire avec des paramètres représentés par une variable aléatoire ou par des données floues. Ces deux algorithmes sont présentés dans les figures (2.3) et (2.4). Ces deux simulations requièrent la solution de  $N$  programmes linéaires classiques. L'ensemble de tous les programmes linéaires adéquats pour une fonction objectif donnée au niveau de  $z$  est défini par

$$\mathcal{A}(z) = \{(c, A, b) | Z^* \leq z\} \quad (2.57)$$

Si le programme linéaire est non réalisable alors  $Z^* = \infty$ , sinon  $Z^* = \min cx$ . Alors

$$Prob(Z^* \leq z) = \int_{\mathcal{A}(z)} \psi(c, A, b) dc dA db \quad (2.58)$$

$$Poss(Z^* \leq z) = \max_{\mathcal{A}(z)} \Pi(c, A, b) \quad (2.59)$$

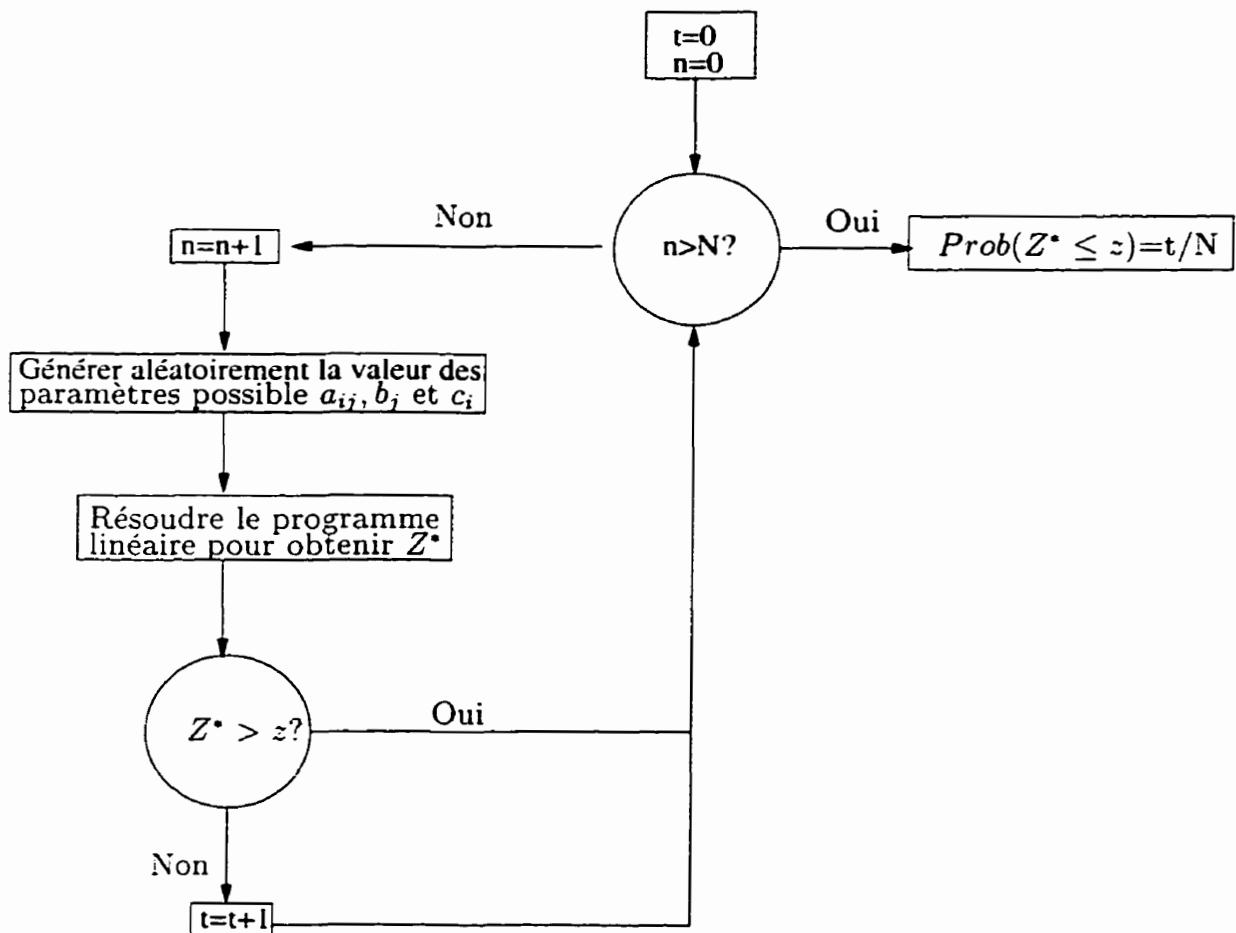
où  $\psi(c, A, b)$  est la fonction de densité conjointe. Si  $\mathcal{A}(z) = \emptyset$ , alors  $Prob$  et  $Poss$  seront 0. La distribution possibiliste  $Poss(Z^* = z)$  est définie en déterminant à différents niveaux  $z$  le programme linéaire avec la plus grande possibilité

$$Poss(Z^* = z) = \left\{ \begin{array}{l} \max_{c, A, b} \Pi(c, A, b) : \text{la solution optimale} \\ \text{du programme linéaire est } z \end{array} \right\} \quad (2.60)$$

La distribution possibiliste pour  $Z^* \leq z$  et  $Z^* \geq z$  peut être déduite par l'expression  $Poss(Z^* = x)$ . D'après l'équation (2.60) et le fait que  $Poss(Z^* = z)$  soit une fonction croissante de  $z$  pour  $z < (Z^*)_L^1$  et décroissante pour  $z > (Z^*)_U^1$ , nous obtenons

$$Poss(Z^* \leq z) = \begin{cases} Poss(Z^* = z) & \text{si } z < (Z^*)_L^1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.61)$$

$$Poss(Z^* \geq z) = \begin{cases} Poss(Z^* = z) & \text{si } z > (Z^*)_U^1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.62)$$



**Figure 2.3: Simulation de Monte Carlo pour un problème en programmation linéaire stochastique.**

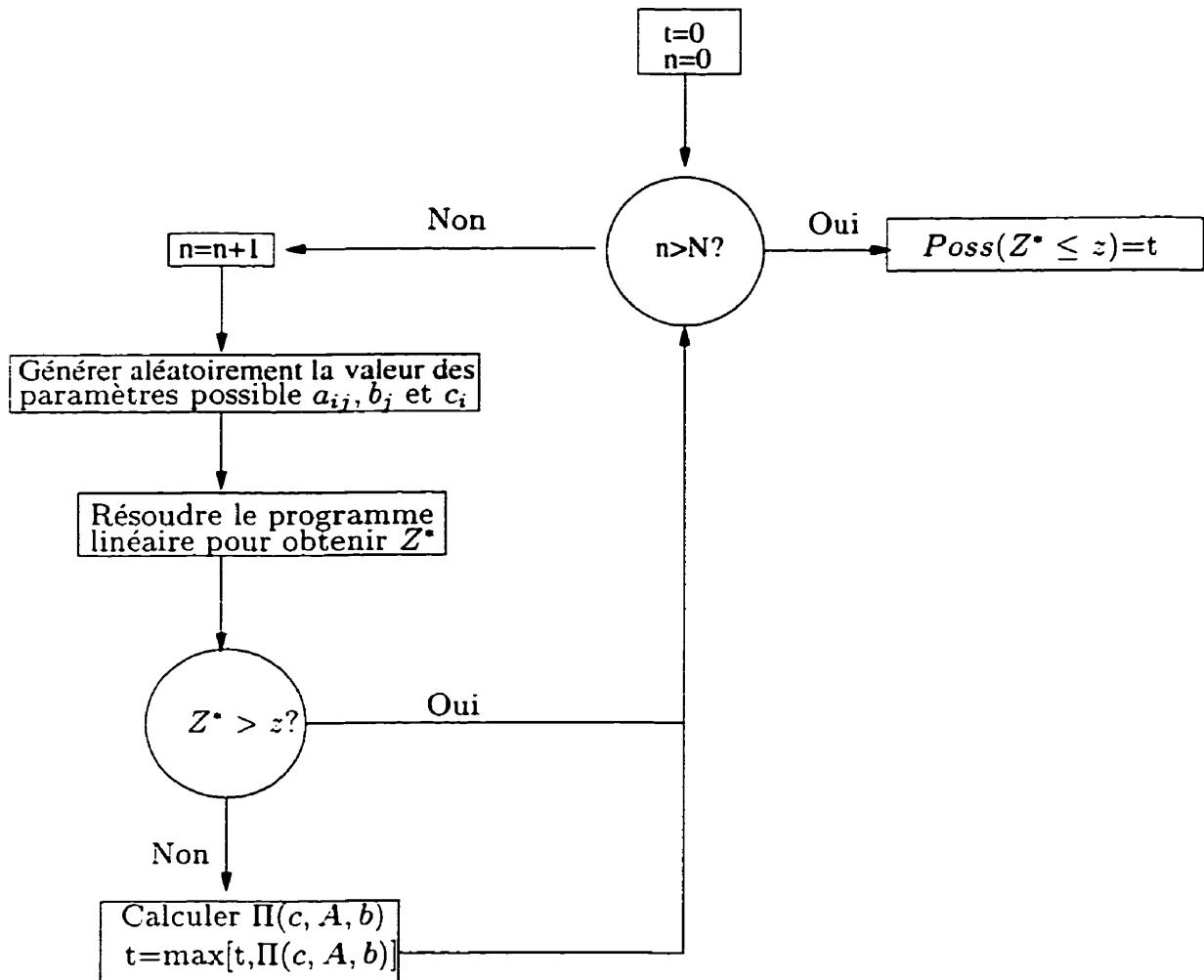


Figure 2.4: Simulation de Monte Carlo pour un problème en programmation linéaire possibiliste.

# CHAPITRE 3

## Exemples et résultats

*“Data! Data! Data!” he cried impatiently.*

*“I can’t make bricks without clay.”*

**Sir Conan Doyle**

*The Adventure of the Copper Beeches*

### 3.1 Formulation du problème

Dans ce chapitre, nous reprenons le problème de gestion de la qualité de l'eau qui a été étudié par Loucks et al. en 1981 et repris par Julien en 1994 (approche par discréétisation). Nous proposons pour la première fois une solution optimale analytique et nous discutons des résultats obtenus.

Considérons le problème de gestion de la qualité d'eau qui reçoit des impuretés issues des sources localisées aux sites 1 et 2 (Fig. 3.1). Notre but est de trouver un niveau d'efficacité du traitement de ces impuretés aux sites 1 et 2 pour obtenir un niveau de qualité d'eau désiré aux sites A et B à un coût minimum. Supposons que la diminution d'une unité d'impureté (particule, molécule) au site 1 améliore la qualité de l'eau au site 2 de  $0.025 \text{ mg}/\ell$ , et celle au site 3 de  $0.0125 \text{ mg}/\ell$  et la diminution d'une unité d'impureté au site 2 améliore la qualité de l'eau au site 3 de  $0.025 \text{ mg}/\ell$ . Dans ce problème, la qualité de l'eau au site 2 est mesurée en remontant le courant à partir du point d'écoulement d'eau malsaine, par conséquent, l'écoulement d'eau polluée au niveau du site 2 affecte uniquement la qualité de l'eau au site B.

On dénote ces transferts par  $a_{ij}$  (l'amélioration de l'indice de qualité de l'eau au site  $j$  par unité d'impureté enlevée au site  $i$ ), par  $W_i$  la quantité des impuretés à traiter au site  $i$  et par  $x_i$  la fraction (pourcentage) des impuretés enlevées suite

à un traitement au site  $i$ . Ainsi l'amélioration de la qualité de l'eau au site  $j$  suite à l'élimination de  $W_i x_i$  unités d'impureté au site  $i$  est  $(a_{ij})(W_i x_i) \text{mg/l}$ . Pour toutes les valeurs de  $x_1$  entre 0 et 1, l'indice de la qualité d'eau au site 2 sera égal à la concentration actuelle  $q_2$  (telle que celle de l'oxygène par exemple) plus l'amélioration, c'est-à-dire  $(a_{12})(W_1 x_1)$  suite à un traitement réalisé au niveau du site 1. L'indice de la qualité au site 3 sera égal à la concentration actuelle  $q_3$  plus l'amélioration  $(a_{13})(W_1 x_1) + (a_{23})(W_2 x_2)$  suite aux traitements effectués aux sites 1 et 2. Le coût du traitement  $C_i(x_i)$  au niveau de chaque site  $i$  sera une fonction dépendant uniquement de la fraction d'impureté enlevées  $x_i$ . L'objectif dans cet exemple est de trouver les valeurs des fractions d'impuretés enlevées,  $x_1$  et  $x_2$ , qui minimisent le coût total.

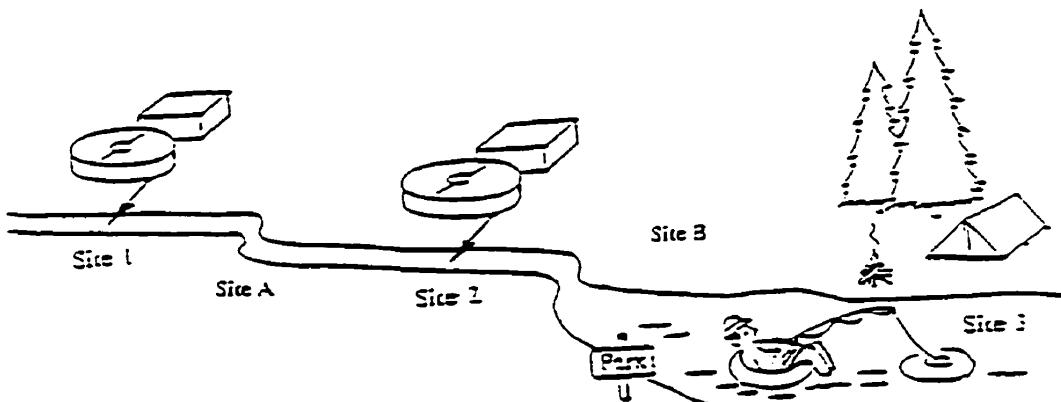


Figure 3.1: Le problème de gestion de la qualité d'eau

Dans le contexte où tous les paramètres seraient connus, le problème s'écrirait:

$$\text{minimiser } C_1(x_1) + C_2(x_2) \quad (3.1)$$

$$\text{sujet à } q_2 + a_{12}W_1 x_1 \geq Q_2 \quad (3.2)$$

$$q_3 + a_{13}W_1 x_1 + a_{23}W_2 x_2 \geq Q_3 \quad (3.3)$$

où  $Q_i$  est la concentration désirée au site  $i$ ,  $i = 2, 3$ . Pour compléter le modèle, des contraintes additionnelles limitant la proportion d'impureté éliminée sont requises. Pour cet exemple, au moins 30% des impuretés doivent être éliminées au niveau des

deux sites A et B.

Une borne supérieure de 95% reflète la meilleure technologie disponible sans avoir recours à une distillation ou dévier les impuretés vers un autre emplacement.

$$x_i \geq 0.30 \quad i = 1, 2 \quad (3.4)$$

$$x_i \leq 0.95 \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

Cette formulation du problème définie par les équations (3.1-3.5) contient des contraintes linéaires et une fonction objectif qui n'est pas nécessairement linéaire. Dans beaucoup d'applications réelles, les fonctions coût,  $C_i(x_i)$  sont inconnues. Dans certains cas, on pourra cependant avoir des approximations de ces fonctions.

### 3.2 Problème de gestion de la qualité de l'eau en programmation linéaire possibiliste: approche par discréétisation

Dans cette section, la formulation linéaire classique du problème de qualité de l'eau en programmation linéaire est donnée par:

$$\min = c^t x \quad (3.6)$$

$$\text{ sujet à } q + aWx \geq Q \quad (3.7)$$

$$x \leq U \quad (3.8)$$

$$x \geq L \quad (3.9)$$

où

$z$ : le coût total annuel à minimiser;

$x = (x_1, x_2)^t$  est la fraction d'impuretés enlevées de l'eau aux deux sites;

$c = (c_1, c_2)^t$  est le coût annuel du traitement par unité d'efficacité;

$Q = (Q_A, Q_B)^t$  est la concentration voulue d'oxygène aux sites A et B;

$q = (q_A, q_B)^t$  est la concentration actuelle d'oxygène;

$a = a_{ij}$  est l'amélioration de l'indice de qualité de l'eau au site  $j$  par unité

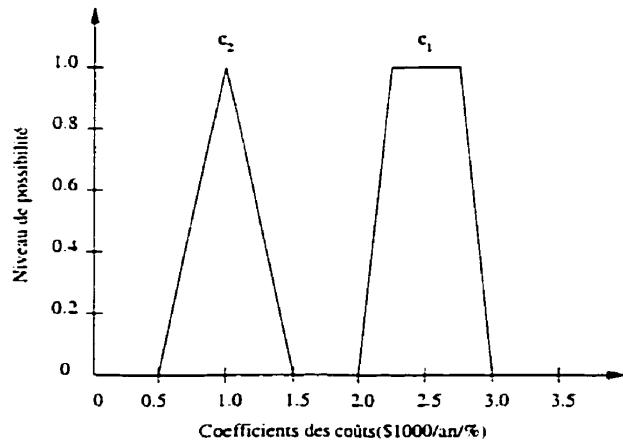
d'impureté enlevée au site  $i$ ;

$W = W_i$  la quantité d'impuretés à traiter au site  $i$ ;

$U = (U_1, U_2)^t$  est le niveau d'efficacité maximale qu'on peut atteindre;

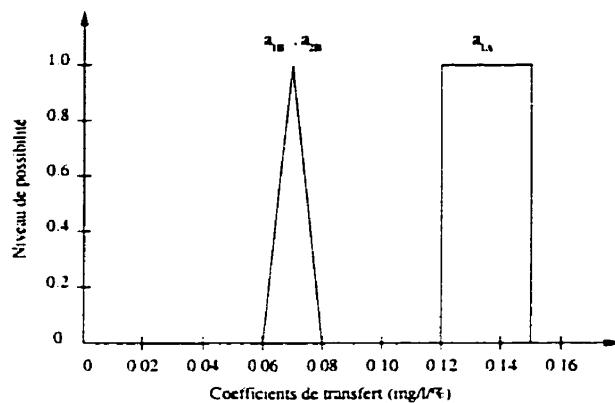
$L = (L_1, L_2)^t$  est le niveau d'efficacité minimale qu'on doit atteindre.

Dorénavant, on notera  $aW$  par  $A$ . On peut déduire que  $Ax(\text{mg}/\ell)$  représente l'amélioration de la qualité de l'eau au site  $j$  due à  $W_i x_i$  unités d'impuretés enlevées au site  $i$ . Dans notre cas, les vecteurs  $q$ ,  $U$  et  $L$  sont connus avec certitude:  $q_A = 1\text{mg}/\ell$ ,  $q_B = 2\text{mg}/\ell$ ,  $U_1 = U_2 = 95\%$  et  $L_1 = L_2 = 30\%$ . Cette formulation suppose une fonction coût qui est linéaire et sert à illustrer l'utilisation de la programmation possibiliste dans la gestion de la qualité de l'eau. La solution de ce problème de prise de décision peut être clairement affectée par l'imprécision. Par exemple, les coefficients  $c$  peuvent être approximés en décrivant une fonction coût inconnue. De plus, la qualité de l'eau demandée,  $Q$ , correspond souvent à des niveaux de qualité imprécis et subjectifs. Aussi, l'information valable ne nous permet pas de déterminer les valeurs précises des coefficients de transfert  $a_{ij}$ . Les distributions possibilistes

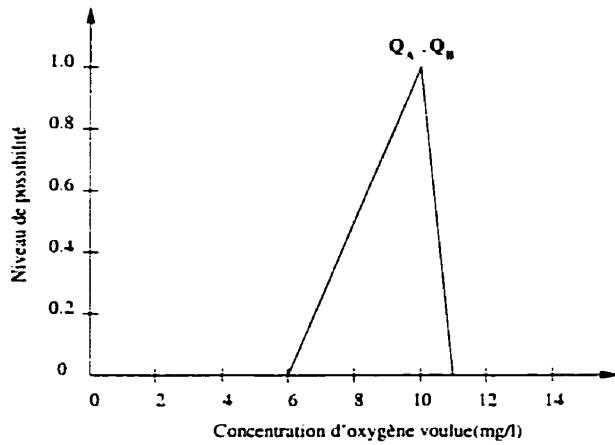


**Figure 3.2: Distribution possibiliste des coefficients de coût imprécis**

affectées aux paramètres imprécis du problème de gestion de la qualité de l'eau sont présentées aux figures 3.2, 3.3 et 3.4. Nous utilisons pour ces paramètres des fonctions qui sont linéaires par morceaux pour la représentation des différentes distributions possibilistes qui illustrent des niveaux variés de l'imprécision. Avec ces paramètres décrits par leurs distributions possibilistes, le modèle en programmation



**Figure 3.3: Distribution possibiliste des coefficients imprécis du transfert**



**Figure 3.4: Distribution possibiliste de la concentration voulue d'oxygène**

possibiliste peut être reformulé comme suit:

$$\min = \tilde{c}^t x \quad (3.10)$$

$$\text{sujet à } q + \tilde{A}x \geq \tilde{Q} \quad (3.11)$$

$$x \leq U \quad (3.12)$$

$$x \geq L \quad (3.13)$$

où  $\tilde{c}$ ,  $\tilde{A}$  et  $\tilde{Q}$  sont les coûts “imprécis”, les coefficients de transfert et la concentration imprécise d’oxygène voulue.

### 3.2.1 Séparation du problème

Les bornes des intervalles des  $\alpha$ -coupes des paramètres sont utilisées pour définir les programmes linéaires avec le plus petit et le plus grand coût optimal au niveau  $\alpha$  de possibilité. Pour la formulation (3.10-3.13), le coût total annuel optimal le plus bas au niveau de possibilité  $\alpha$ ,  $(Z^*)_L^\alpha$ , peut être déterminé en résolvant un programme linéaire classique où les coefficients du coût et la concentration d'oxygène,  $c_L^\alpha$  et  $Q_L^\alpha$ , sont à leurs plus basses valeurs  $\alpha$ -coupe, et les coefficients de transfert,  $A_U^\alpha$ , sont à leurs plus grandes valeurs. Ce programme linéaire correspond au problème avec la fonction objectif la plus bénéfique et les plus faibles contraintes à un niveau  $\alpha$  de possibilité:

$$\min z = (c_1)_L^\alpha x_1 + (c_2)_L^\alpha x_2 \quad (3.14)$$

sujet à

$$q_A + (a_{1A})_U^\alpha x_1 \geq (Q_A)_L^\alpha \quad (3.15)$$

$$q_B + (a_{1B})_U^\alpha x_1 + (a_{2B})_U^\alpha x_2 \geq (Q_B)_L^\alpha \quad (3.16)$$

$$x_1 \leq U_1 \quad (3.17)$$

$$x_2 \leq U_2 \quad (3.18)$$

$$x_1 \geq L_1 \quad (3.19)$$

$$x_2 \geq L_2 \quad (3.20)$$

De même, le programme linéaire avec la fonction objectif la moins bénéfique et les contraintes les plus strictes à un niveau  $\alpha$  de possibilité produit la plus grande valeur optimale du coût annuel total,  $(Z^*)_U^\alpha$ :

$$\min z = (c_1)_U^\alpha x_1 + (c_2)_U^\alpha x_2 \quad (3.21)$$

sujet à

$$q_A + (a_{1A})_L^\alpha x_1 \geq (Q_A)_U^\alpha \quad (3.22)$$

$$q_B + (a_{1B})_L^\alpha x_1 + (a_{2B})_L^\alpha x_2 \geq (Q_B)_U^\alpha \quad (3.23)$$

$$x_1 \leq U_1 \quad (3.24)$$

$$x_2 \leq U_2 \quad (3.25)$$

$$x_1 \geq L_1 \quad (3.26)$$

$$x_2 \geq L_2 \quad (3.27)$$

Désormais ces deux programmes linéaires sont appelés **meilleur programme linéaire** et **pire programme linéaire**. Pour le meilleur programme linéaire, la fonction objectif devient plus bénéfique (les coefficients du coût deviennent petits) et ceux des contraintes s'affaiblissent (plus petite qualité requise et plus grands coefficients de transfert) à mesure que le niveau de possibilité décroît. Ceci résulte en une région réalisable plus large avec un plus petit coût total à un petit niveau de possibilité  $\alpha$ . L'effet inverse est réalisé en résolvant le pire programme linéaire (c'est-à-dire une petite région réalisable et un plus grand coût total avec un grand niveau de possibilité  $\alpha$ ). Donc, la région réalisable se contracte à mesure que la valeur du coût total annuel minimal  $Z^*$  croît. Les figures (3.6-3.9) illustrent la contraction de la région réalisable à mesure que le niveau de possibilité croît pour le meilleur et le pire programme linéaire. Les lignes pleines correspondent aux équations (3.17-3.20) pour le meilleur programme linéaire et aux équations (3.24-3.27) pour le pire programme linéaire tandis que les lignes pointillées correspondent aux équations (3.15-3.16) et (3.22-3.23). La ligne en gras représente le sens de déplacement de la fonction coût. Les tableaux 3.1 et 3.2 indiquent, pour les niveaux de possibilité fixés à 0, 0.25, 0.50, 0.75 et 1, les valeurs de chacun des paramètres de chaque programme linéaire, la valeur de la fonction objectif correspondante  $Z^*$ , et les niveaux d'efficacité  $x^*$ . La figure (3.5) présente la distribution possibiliste résultante du coût total annuel optimal ( $Poss(Z^* = z)$ ). La partie croissante de cette distribution avait été approximée en résolvant le meilleur programme linéaire aux mêmes niveaux de possibilité cités plus-haut et en interpolant linéairement entre ces points. De même, la partie décroissante de  $Poss(Z^* = z)$  a été obtenue en résolvant le pire programme linéaire aux 5 mêmes niveaux de possiblités.

Les  $\alpha$ -coupes de la distribution possibiliste permettent à l'usager lorsqu'il est confronté à prendre une ou des décisions de savoir le rayon (la portée) du coût minimum à des niveaux de possibilité  $\alpha$  différents. Il est à noter que la 0-coupe de  $Poss(Z^* = z)$  nous indique qu'il est impossible pour le coût annuel total  $Z^*$ , d'être plus petit que 81700\$/année ou plus grand que 350000\$/année.<sup>1</sup> De l'autre coté, il

<sup>1</sup> Ce 350000\$/année représente le résultat de la meilleure décision à prendre dans le pire des cas.

**Tableau 3.1: Programme linéaire qui génère le plus petit coût optimal à des niveaux de possibilité voulue**

Valeur des var.	Unité	Niv. de Poss. $\alpha$				
		0	0.25	0.5	0.75	1
$(c_1)_L^\alpha$	(\$1000/an/%)	2	2.0625	2.125	2.1875	2.25
$(c_2)_L^\alpha$	(\$1000/an/%)	0.5	0.625	0.75	0.875	1
$(a_{1A})_U^\alpha$	(mg/ℓ/%)	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$(a_{1B})_U^\alpha, (a_{2B})_U^\alpha$	(mg/ ℓ/%)	0.08	0.0775	0.075	0.0725	0.07
$q_A$	(mg/ℓ)	1	1	1	1	1
$q_B$	(mg/ℓ)	2	2	2	2	2
$(Q_A)_L^\alpha, (Q_A)_U^\alpha$	(mg/ℓ)	6	7	8	9	10
$L_1, L_2$	(%)	30	30	30	30	30
$U_1, U_2$	(%)	95	95	95	95	95
$x_1^*$	(%)	33.3	40	46.7	53.3	60
$x_2^*$	(%)	30	30	33.3	43.2	54.3
$(Z^*)_L^\alpha$	(\$1000/an)	81.7	101.2	124.2	154.5	189.2

est fortement possible (1-coupe) que  $Z^*$  soit dans une portée de 189200\$/année à 245500\$/année.

Ce résultat s'interprète comme suit: si à chaque matin, on observe les valeurs de  $\bar{c}$ ,  $\bar{Q}$  et  $\bar{a}$  et qu'on adopte la solution optimale pour la journée, le moins que cela pourrait coûter est  $\frac{81700}{365}$  et le plus que cela pourrait coûter est  $\frac{350000}{365}$  pour la journée. Maintenant si on regarde toutes les valeurs de  $Z$  observées pour un horizon assez grand, ces valeurs sont contenues dans un intervalle. Les bornes de cet intervalle sont évidemment floues. On est sûr que cet intervalle contient  $[\frac{189200}{365}, \frac{245500}{365}]$  si l'horizon est assez grand. Il peut sûrement englober l'intervalle  $[\frac{154500}{500}, \frac{267600}{365}]$  et on est certain qu'il est inclus dans l'intervalle  $[\frac{81700}{365}, \frac{350000}{365}]$ .

Avec cette information, l'usager confronté à prendre une décision doit réaliser un échange entre les coûts et leur niveau de possibilité. Ce choix est basé sur une évaluation possibiliste du risque. Par exemple,  $Poss(Z^* = \$319400) = 0.25$  avec une efficacité optimale de  $x_1^* = 81.2\%$ ,  $x_2^* = 58.8\%$ . Basé sur des équations vues  
Le coût pourrait être plus élevé si l'on ne prend pas la décision optimale.

**Tableau 3.2: Programme linéaire qui génère le plus grand coût optimal à des niveaux de possibilité voulue**

Val. des var.	Unité	Niv. de Poss. $\alpha$				
		0	0.25	0.5	0.75	1
$(c_1)_U^\alpha$	(\$1000/an/%)	3	2.9375	2.875	2.8125	2.75
$(c_2)_U^\alpha$	(\$1000/an/%)	1.5	1.375	1.25	1.125	1
$(a_{1A})_L^\alpha$	(mg/ℓ/%)	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12
$(a_{1B})_U^\alpha, (a_{2B})_U^\alpha$	(mg/ℓ/%)	0.06	0.0625	0.065	0.0675	0.07
$q_A$	(mg/ℓ)	1	1	1	1	1
$q_B$	(mg/ℓ)	2	2	2	2	2
$(Q_A)_U^\alpha, (Q_B)_U^\alpha$	(mg/ℓ)	11	10.75	10.5	10.25	10
$L_1, L_2$	(%)	30	30	30	30	30
$U_1, U_2$	(%)	95	95	95	95	95
$x_1^*$	(%)	83.3	81.2	79.2	77.1	75
$x_2^*$	(%)	66.7	58.8	51.6	45.1	39.3
$(Z^*)_U^\alpha$	(\$1000/an)	350.0	319.4	292.1	267.6	245.5

dans le chapitre précédent, l'estimation possibiliste peut être faite:

$$Poss(Z^* \leq \$319400/an) = 1 \quad \text{et} \quad Poss(Z^* > \$319400/an) = 0.25. \quad (3.28)$$

Dans cet exemple tous les meilleurs et les pires programmes linéaires ont une solution optimale. Dans certains cas, il est possible que les bornes des  $\alpha$ -coupes des paramètres imprécis produisent des programmes linéaires qui n'ont pas de solution réalisable. Ceci peut être le cas si la borne inférieure de l'intervalle 0-coupe pour la distribution possibiliste des paramètres  $a_{1B}$  et  $a_{2B}$  était de 0.06mg/ℓ/% au lieu de 0.02mg/ℓ/%. Au niveau de possibilité 0.25, la région réalisable du pire programme linéaire est vide et conséquemment il n'existe pas de solution qui satisfasse toutes les contraintes simultanément.

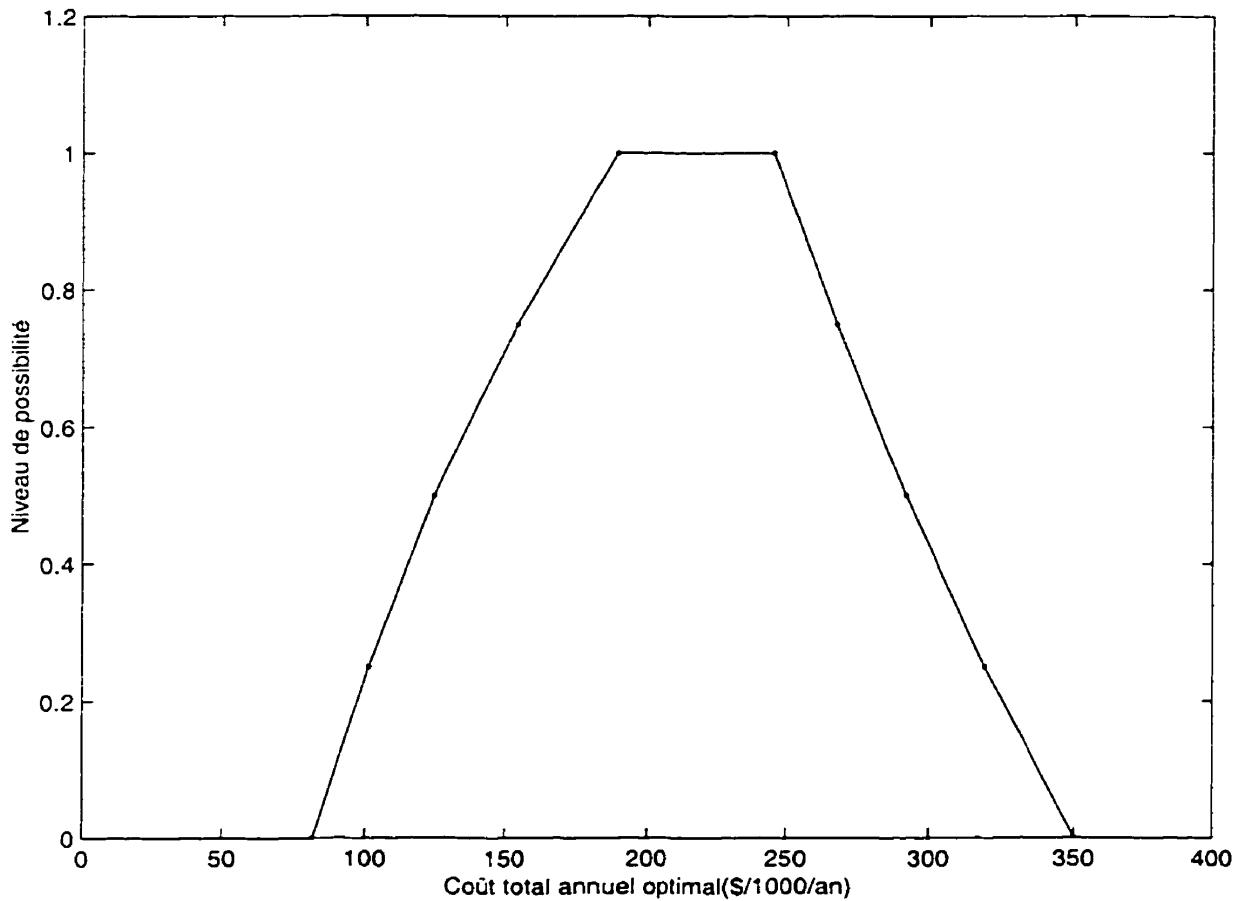


Figure 3.5: Solution par interpolation de la distribution possibiliste de  $Z^* = z$

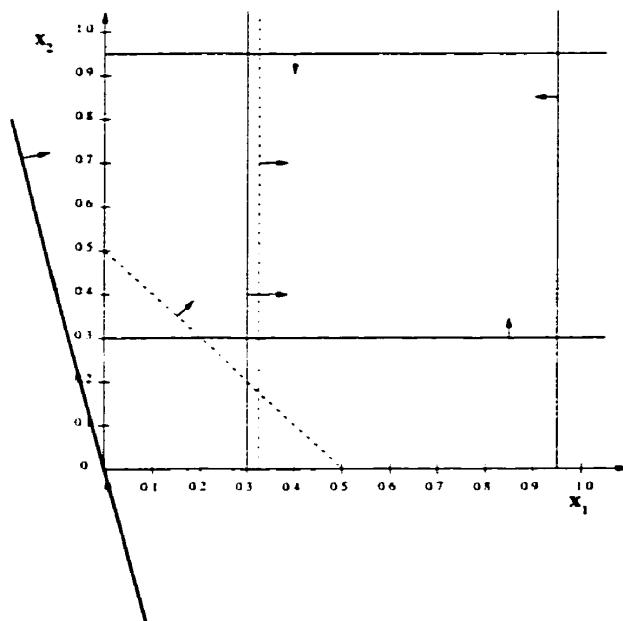
### 3.3 Solution analytique pour le problème de gestion de la qualité de l'eau

Puisque la fonction objectif  $Z^*$  dépend de  $\alpha$ , on a jugé utile d'exprimer  $Z^*$  en fonction de  $\alpha$ . Sachant que les nombres flous sont exprimés par des équations linéaires, nous obtenons:

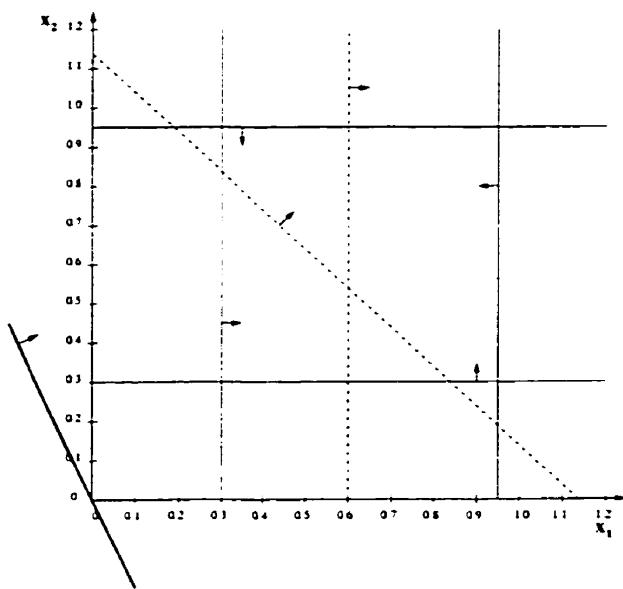
$$(c_1)_L^\alpha = \frac{\alpha + 8}{4} \quad (3.29)$$

$$(c_1)_U^\alpha = \frac{12 - \alpha}{4} \quad (3.30)$$

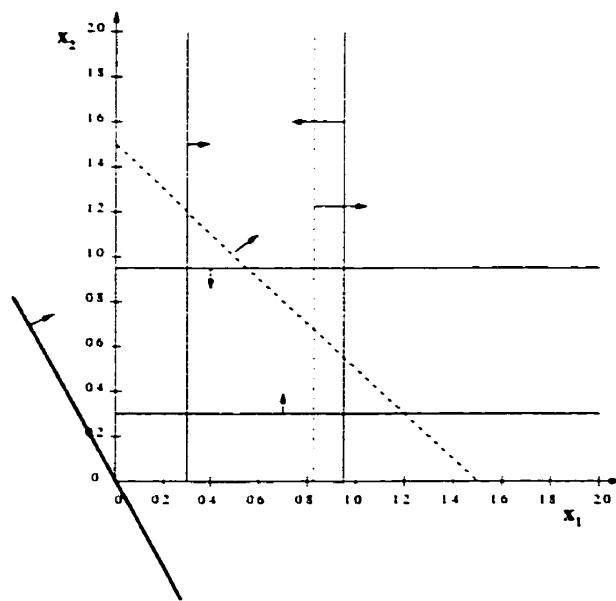
$$(c_2)_L^\alpha = \frac{\alpha + 1}{2} \quad (3.31)$$



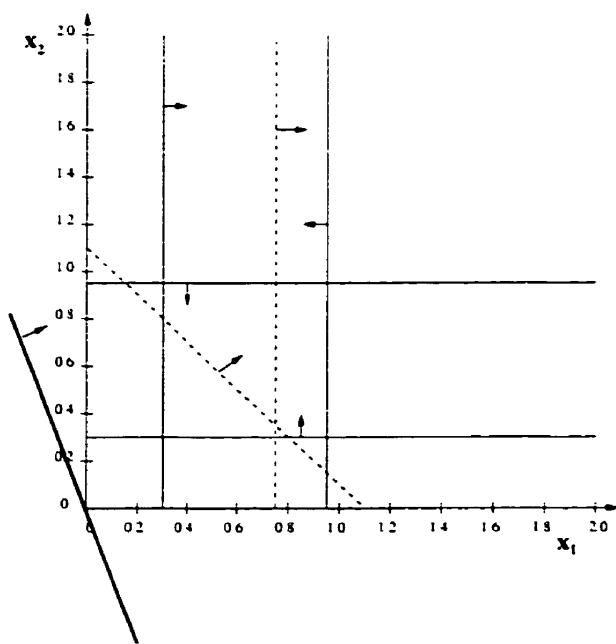
**Figure 3.6: Le pire programme linéaire avec  $\alpha = 0$**



**Figure 3.7: Le pire programme linéaire avec  $\alpha = 1$**



**Figure 3.8: Le meilleur programme linéaire avec  $\alpha = 0$**



**Figure 3.9: Le meilleur programme linéaire avec  $\alpha = 1$**

$$(c_2)_U^\alpha = \frac{3-\alpha}{2} \quad (3.32)$$

$$(Q_A)_L^\alpha = (Q_B)_L^\alpha = 4\alpha + 6 \quad (3.33)$$

$$(Q_A)_U^\alpha = (Q_B)_U^\alpha = 11 - \alpha \quad (3.34)$$

$$(a_{1B})_L^\alpha = (a_{2B})_L^\alpha = \frac{\alpha + 6}{100} \quad (3.35)$$

$$(a_{1B})_U^\alpha = (a_{2B})_U^\alpha = \frac{8-\alpha}{100} \quad (3.36)$$

$$(a_{1A})_L^\alpha = 0.12 \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (3.37)$$

$$(a_{1A})_U^\alpha = 0.15 \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (3.38)$$

Dans ce contexte, pour le pire programme linéaire nous trouvons:

$$\min z = \frac{\alpha + 8}{4}x_1 + \frac{\alpha + 1}{2}x_2 \quad (3.39)$$

sujet à

$$\frac{15}{100}x_1 \geq \frac{4\alpha + 5}{100} \quad (3.40)$$

$$\frac{(8-\alpha)}{100}(x_1 + x_2) \geq \frac{4\alpha + 4}{100} \quad (3.41)$$

$$x_1 \leq 0.95 \quad (3.42)$$

$$x_2 \leq 0.95 \quad (3.43)$$

$$x_1 \geq 0.3 \quad (3.44)$$

$$x_2 \geq 0.3 \quad (3.45)$$

et pour le meilleur programme linéaire nous obtenons:

$$\min z = \frac{12-\alpha}{4}x_1 + \frac{3-\alpha}{2}x_2 \quad (3.46)$$

sujet à

$$\frac{12}{100}x_1 \geq \frac{10-\alpha}{100} \quad (3.47)$$

$$\frac{(\alpha + 6)}{100}(x_1 + x_2) \geq \frac{9-\alpha}{100} \quad (3.48)$$

$$x_1 \leq 0.95 \quad (3.49)$$

$$x_2 \leq 0.95 \quad (3.50)$$

$$x_1 \geq 0.3 \quad (3.51)$$

$$x_2 \geq 0.3 \quad (3.52)$$

Les figures (3.40-3.52) nous permettent de visualiser la région réalisable du pire programme linéaire et du meilleur programme linéaire lorsque  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ .

### 3.3.1 Exploration des points extrêmes

Puisque ce sont des programmes linéaires en deux dimensions et que  $\alpha$  est un paramètres entre 0 et 1, on a exploré tous les points extrêmes de chacun des programmes et on a étudié leur réalisabilité. Pour le pire programme linéaire, nous avons trouvé les points suivants:

$$(3.40; 3.41) \quad P_1(x_1, x_2) = \left( \frac{4\alpha + 5}{15}, \frac{4\alpha^2 + 33\alpha + 20}{15(8 - \alpha)} \right)$$

$$(3.40; 3.45) \quad P_2(x_1, x_2) = \left( \frac{4\alpha + 5}{15}, 0.3 \right)$$

$$(3.40; 3.43) \quad P_3(x_1, x_2) = \left( \frac{4\alpha + 5}{15}, 0.95 \right)$$

$$(3.44; 3.41) \quad P_4(x_1, x_2) = \left( 0.3, \frac{4.3\alpha + 1.6}{8 - \alpha} \right)$$

$$(3.41; 3.45) \quad P_5(x_1, x_2) = \left( \frac{4.3\alpha + 1.6}{8 - \alpha}, 0.3 \right)$$

$$(3.42; 3.41) \quad P_6(x_1, x_2) = \left( 0.95, \frac{4.95\alpha - 3.6}{8 - \alpha} \right)$$

$$(3.41; 3.43) \quad P_7(x_1, x_2) = \left( \frac{4.95\alpha - 3.6}{8 - \alpha}, 0.95 \right)$$

$$(3.44; 3.45) \quad P_8(x_1, x_2) = (0.3, 0.3)$$

$$(3.44; 3.43) \quad P_9(x_1, x_2) = (0.3, 0.95)$$

$$(3.42; 3.45) \quad P_{10}(x_1, x_2) = (0.95, 0.3)$$

$$(3.42; 3.44) \quad P_{11}(x_1, x_2) = (0.95, 0.95)$$

Ensuite, nous avons étudié leur réalisabilité, nous trouvons des points réalisables dans certain intervalles:

Si  $\alpha$  est tel que  $0 \leq \alpha \leq 0.41$

alors nous trouvons les points suivants:

$$P_2(x_1, x_2) = \left( \frac{4\alpha + 5}{15}, 0.3 \right) \quad (3.53)$$

$$P_3(x_1, x_2) = \left( \frac{4\alpha + 5}{15}, 0.95 \right) \quad (3.54)$$

$$P_{10}(x_1, x_2) = (0.95, 0.3) \quad (3.55)$$

$$P_{11}(x_1, x_2) = (0.95, 0.95) \quad (3.56)$$

Par contre si  $\alpha$  est tel que  $0.41 \leq \alpha \leq 1$

nous trouvons les cinq points suivants:

$$P_1(x_1, x_2) = \left( \frac{4\alpha + 5}{15}, \frac{4\alpha^2 + 33\alpha + 20}{15(8 - \alpha)} \right) \quad (3.57)$$

$$P_3(x_1, x_2) = \left( \frac{4\alpha + 5}{15}, 0.95 \right) \quad (3.58)$$

$$P_5(x_1, x_2) = \left( \frac{4.3\alpha + 1.6}{8 - \alpha}, 0.3 \right) \quad (3.59)$$

$$P_{10}(x_1, x_2) = (0.95, 0.3) \quad (3.60)$$

$$P_{11}(x_1, x_2) = (0.95, 0.95). \quad (3.61)$$

Et de même pour le meilleure programme linéaire, nous trouvons 11 points extrêmes qui sont:

$$(3.47; 3.48) \quad P_1(x_1, x_2) = \left( \frac{10 - \alpha}{12}, \frac{\alpha^2 - 16\alpha + 48}{12(\alpha + 6)} \right)$$

$$(3.47; 3.50) \quad P_2(x_1, x_2) = \left( \frac{10 - \alpha}{12}, 0.95 \right)$$

$$(3.47; 3.52) \quad P_3(x_1, x_2) = \left( \frac{10 - \alpha}{12}, 0.3 \right)$$

$$(3.49; 3.48) \quad P_4(x_1, x_2) = \left( 0.95, \frac{-1.95\alpha + 3.3}{\alpha + 6} \right)$$

$$(3.51; 3.48) \quad P_5(x_1, x_2) = \left( 0.3, \frac{-1.3\alpha + 7.2}{\alpha + 6} \right)$$

$$(3.48; 3.50) \quad P_6(x_1, x_2) = \left( \frac{-1.95\alpha + 3.3}{\alpha + 6}, 0.95 \right)$$

$$(3.48; 3.52) \quad P_7(x_1, x_2) = \left( \frac{-1.3\alpha + 7.2}{\alpha + 6}, 0.3 \right)$$

$$(3.49; 3.50) \quad P_8(x_1, x_2) = (0.95, 0.95)$$

$$(3.49; 3.52) \quad P_9(x_1, x_2) = (0.95, 0.3)$$

$$(3.51; 3.50) \quad P_{10}(x_1, x_2) = (0.3, 0.95)$$

$$(3.51; 3.52) \quad P_{11}(x_1, x_2) = (0.3, 0.3).$$

Pour ce qui est de leur réalisabilité, nous avons les résultats suivants: Si  $0 \leq \alpha \leq \frac{2}{3}$ , les points extrêmes admissibles sont:

$$P_1(x_1, x_2) = \left( \frac{10 - \alpha}{12}, \frac{\alpha^2 - 16\alpha + 48}{12(\alpha + 6)} \right) \quad (3.62)$$

$$P_2(x_1, x_2) = \left( \frac{10 - \alpha}{12}, 0.95 \right) \quad (3.63)$$

$$P_4(x_1, x_2) = (0.95, \frac{-1.95\alpha + 3.3}{\alpha + 6}) \quad (3.64)$$

$$P_8(x_1, x_2) = (0.95, 0.95). \quad (3.65)$$

Et si  $\frac{2}{3} \leq \alpha \leq 1$ , les points extrêmes admissibles sont:

$$P_1(x_1, x_2) = \left( \frac{10 - \alpha}{12}, \frac{\alpha^2 - 16\alpha + 48}{12(\alpha + 6)} \right) \quad (3.66)$$

$$P_2(x_1, x_2) = \left( \frac{10 - \alpha}{12}, 0.95 \right) \quad (3.67)$$

$$P_7(x_1, x_2) = \left( \frac{-1.3\alpha + 7.2}{\alpha + 6}, 0.3 \right) \quad (3.68)$$

$$P_8(x_1, x_2) = (0.95, 0.95) \quad (3.69)$$

$$P_9(x_1, x_2) = (0.95, 0.3). \quad (3.70)$$

En remplaçant les points extrêmes qui sont réalisables dans la fonction objectif on trouve pour le pire programme linéaire:

$$Z_\alpha(P_1) = \frac{4\alpha^3 + 69\alpha^2 + 362\alpha + 360}{60(8 - \alpha)} \quad (3.71)$$

$$Z_\alpha(P_2) = \frac{4\alpha^2 + 46\alpha + 49}{60} \quad (3.72)$$

$$Z_\alpha(P_3) = \frac{8\alpha^2 + 131\alpha + 137}{120} \quad (3.73)$$

$$Z_\alpha(P_5) = \frac{3.7\alpha^2 + 40.2\alpha + 17.6}{4(8 - \alpha)} \quad (3.74)$$

$$Z_\alpha(P_{10}) = 0.3875\alpha + 2.05 \quad (3.75)$$

$$Z_\alpha(P_{11}) = 0.7125\alpha + 2.375 \quad (3.76)$$

et pour le meilleur programme linéaire on trouve:

$$Z_\alpha(P_1) = \frac{-\alpha^3 + 22\alpha^2 - 204\alpha + 1008}{48(\alpha + 6)} \quad (3.77)$$

$$Z_\alpha(P_2) = \frac{\alpha^2 - 44.8\alpha + 188.4}{48} \quad (3.78)$$

$$Z_\alpha(P_4) = \frac{1.475\alpha^2 - 6.3\alpha + 44.1}{2(\alpha + 6)} \quad (3.79)$$

$$Z_\alpha(P_7) = \frac{0.7\alpha^2 - 24.6\alpha + 97.2}{4(\alpha + 6)} \quad (3.80)$$

$$Z_\alpha(P_8) = -0.7125\alpha + 4.275 \quad (3.81)$$

$$Z_\alpha(P_9) = \frac{1}{80}(-31\alpha + 264). \quad (3.82)$$

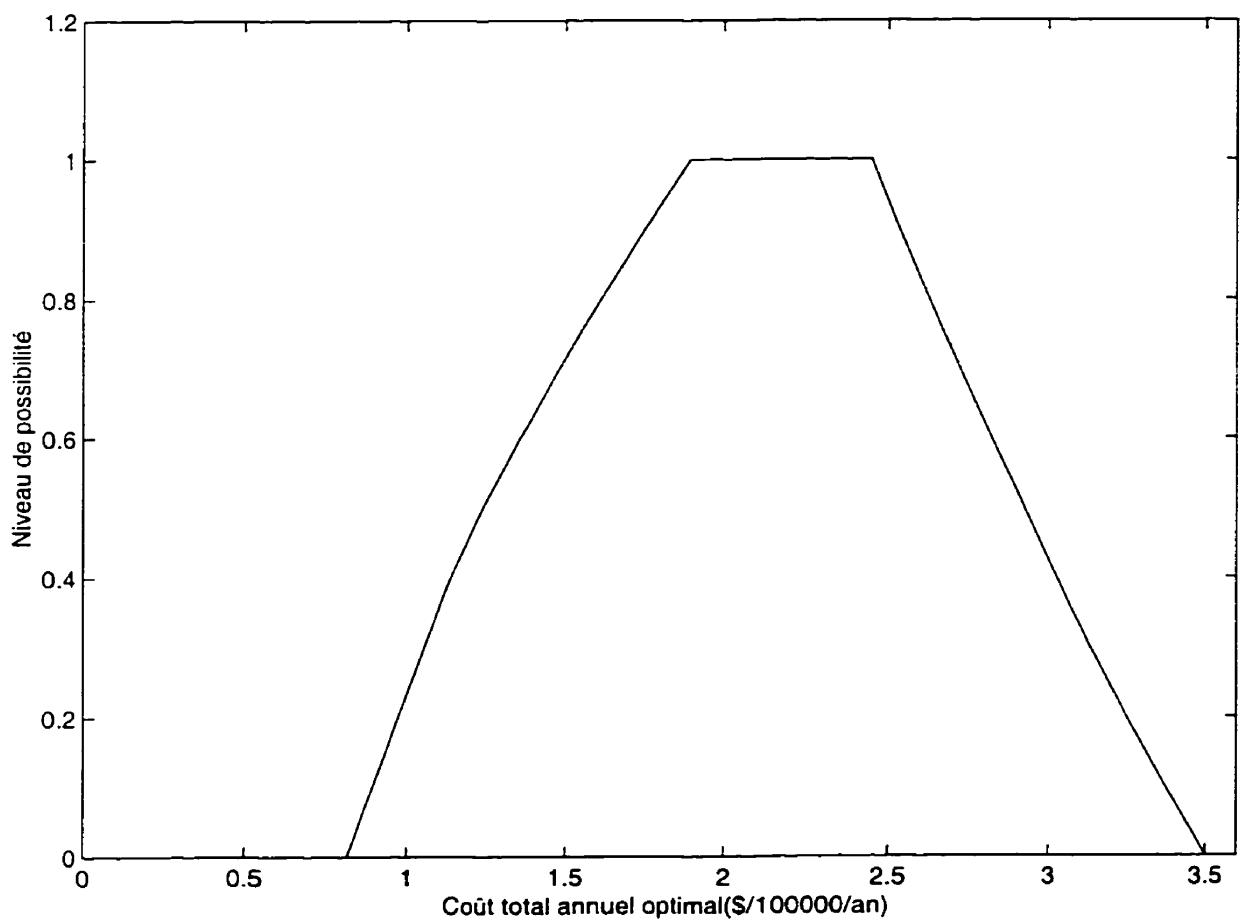
Après comparaison de ces fonctions, pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  on retrouve celles qui minimisent la fonction objectif

$$(Z^*)_L^\alpha = \begin{cases} \frac{4\alpha^2 + 46\alpha + 49}{60} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq 0.41 \\ \frac{4\alpha^3 + 69\alpha^2 + 362\alpha + 360}{60(8 - \alpha)} & \text{si } 0.41 \leq \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (3.83)$$

$$(Z^*)_U^\alpha = \frac{-4\alpha^3 + 22\alpha^2 - 204\alpha + 1008}{48(\alpha + 6)} \quad \forall \alpha, 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (3.84)$$

On voit clairement que pour le pire programme linéaire, nous avons une fonction de deuxième degré pour  $\alpha$  entre 0 et 0.41 et une fonction cubique pour  $\alpha$  entre 0.41 et 1. Tandis que pour le meilleur programme linéaire nous avons pour  $\alpha$  entre 0 et 1 une fonction cubique (voir figure 3.10).

Donc à la lumière de ce chapitre, on peut obtenir le niveau de possibilité de  $Z^*$



**Figure 3.10: Solution analytique de la distribution possibiliste de  $Z^* = z$**

avec précision quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . Ce qui est une autre approche que celle de Julien (1992) qui estime un niveau de possibilité pour quelques valeurs de  $\alpha$  et approxime ce niveau par une fonction linéaire par morceaux. Dans le prochain chapitre nous verrons comment systématiser ce processus. La figure (3.11) illustre la différence entre l'approche par interpolation et l'approche exacte.

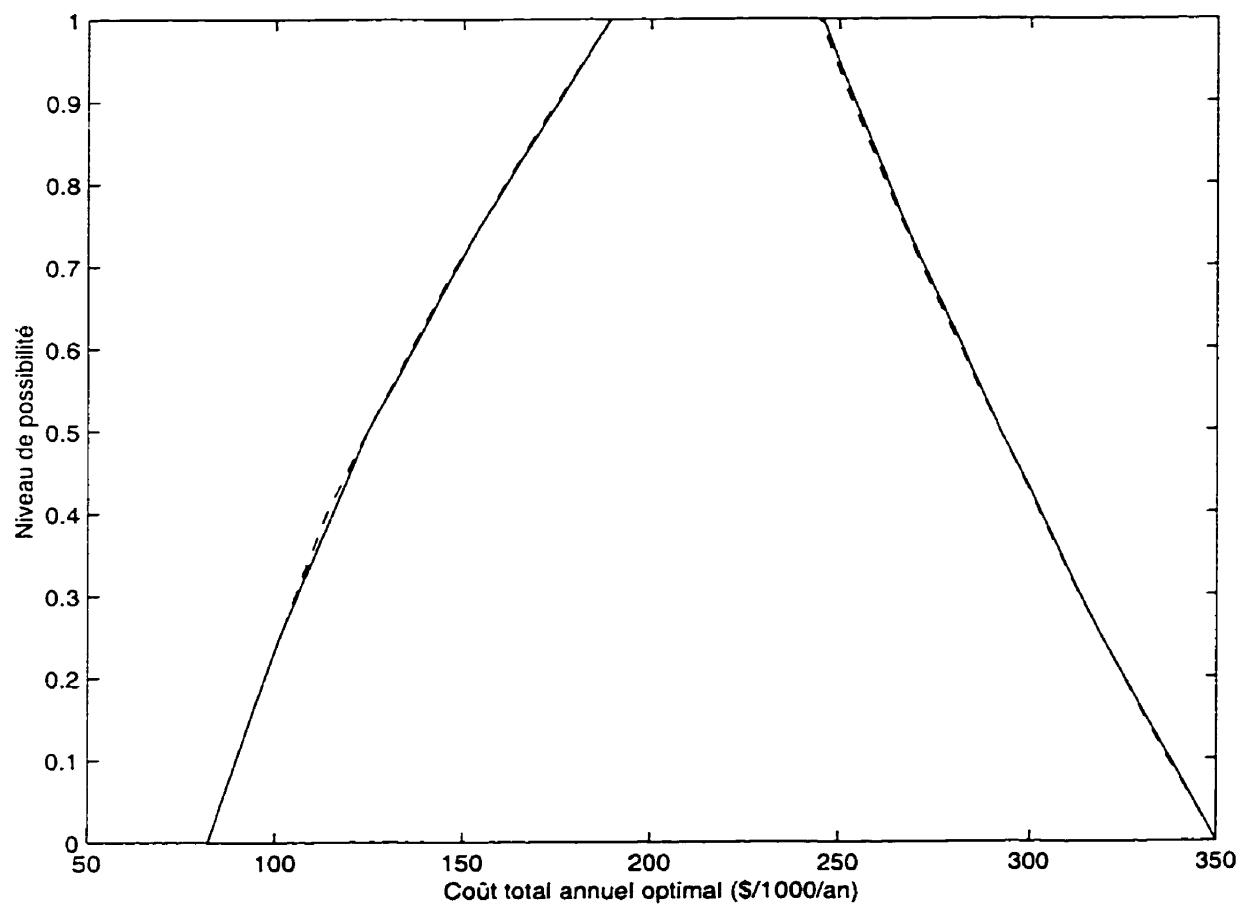


Figure 3.11: Solution par interpolation (—) vs solution analytique (---)

# CHAPITRE 4

## Analyse de sensibilité dans un programme linéaire possibiliste

*"Still, it is an error to argue in front of your data.  
You find yourself insensibly twisting them round to fit your theories."*

**Sir Conan Doyle**  
*The Adventure of Wisteria Lodge*

Très souvent, les coefficients définissant les coûts, les membres de droite et les coefficients de la matrice des contraintes sont connus de l'utilisateur avec plus ou moins de précision. Il est alors intéressant pour ce dernier de connaître les coefficients dont la variation entraîne une modification sérieuse de la solution optimale. Il peut ainsi concentrer son énergie à estimer avec plus de précision les coefficients les plus critiques à ce point de vue. L'analyse postoptimale a pour but de mesurer l'influence sur la solution optimale de la modification de paramètres du problème. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas où une série de coefficients varient en même temps, situation qui se présente en programmation linéaire possibiliste.

Dans un premier temps nous reprenons les principaux résultats de l'analyse paramétrique dans le cas de la variation des coefficients de la fonction objectif et celui de la variation des coefficients du membre de droite. Nous proposons ensuite une approche originale pour analyser la variation des coefficients de la matrice des contraintes. Enfin, nous discutons de la variation simultanée des coefficients de la fonction objectif et du membre de droite.

Afin de faciliter la compréhension, un exemple bien défini sera traité au fur et à mesure que la théorie sera développée.

## 4.1 Algorithme du simplexe

Considérons un programme linéaire sous sa forme canonique

$$\min z = c^t x \quad (4.1)$$

$$\text{sujet à } Ax \leq b \quad (4.2)$$

$$x \geq 0. \quad (4.3)$$

Un résultat fondamental de la programmation linéaire indique que si un programme linéaire est réalisable et de valeur finie, alors la valeur optimale est atteinte entre autres à l'un des sommets du polyèdre convexe de ses solutions admissibles. À un sommet donné, correspond au moins une base admissible de  $A$  (une sous-matrice carrée  $B$  formée de  $m$  colonnes linéairement indépendantes de  $A$ ) telle que

$$x_B = B^{-1}b \geq 0, \quad x_N = 0$$

correspond à ce sommet. Ainsi, la solution et la valeur correspondante à une base s'expriment sous forme

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}A_N x_N \quad (4.4)$$

$$z = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}A_N)x_N \quad (4.5)$$

avec  $x_N = 0$ . Cette base sera réalisable si  $x_B \geq 0$  et optimale si le vecteur coût réduit vérifie

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}A_N \geq 0.$$

Les coefficients de la fonction objectif des variables de base et ceux hors-base sont représentés par  $c_B$  et  $c_N$  respectivement.  $A_N$  est la matrice formée des colonnes des variables hors-base.

Le système (4.4-4.5) est appelé dictionnaire (Chvátal, 1983) ou encore tableau du simplexe.

D'une base réalisable non optimale, l'algorithme du simplexe détermine la variable hors-base de coût réduit négatif qui entre dans la base et la variable de la base

qui en sort pour obtenir une nouvelle base de valeur inférieure (strictement dans le cas non dégénéré). Comme le nombre de bases est fini, à l'aide d'une procédure d'anti-cyclage en cas de dégénérescence, l'algorithme détermine la solution optimale ou montre que le programme est non-borné en un nombre fini d'itérations.

Pour illustrer les notions théoriques, nous considérons l'exemple suivant:

$$\min z = -45x_1 - 100x_2 - 30x_3 - 50x_4 \quad (4.6)$$

$$\text{sujet à } 7x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 9x_4 \leq 1200 \quad (4.7)$$

$$3x_1 + 40x_2 + x_3 + x_4 \leq 800 \quad (4.8)$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4. \quad (4.9)$$

Dans ce cas nous obtenons le tableau optimal suivant:

$$x_3 = \frac{800}{3} - \frac{5}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_4 - \frac{4}{15}x_5 + \frac{1}{15}x_6 \quad (4.10)$$

$$x_2 = \frac{40}{3} - \frac{1}{30}x_1 + \frac{1}{30}x_4 + \frac{1}{150}x_5 - \frac{2}{75}x_6 \quad (4.11)$$

$$z = -\frac{28000}{3} + \frac{25}{3}x_1 + \frac{50}{3}x_4 + \frac{22}{3}x_5 + \frac{2}{3}x_6. \quad (4.12)$$

Les variables  $x_5$  et  $x_6$  sont les variables d'écart. On y remarque que la solution optimale est donnée par  $z^* = -\frac{28000}{3}$  avec  $x_2 = \frac{40}{3}$  et  $x_3 = \frac{800}{3}$  qui sont des variables de base. Alors

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{800}{3} \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

**Tableau 4.1: Tableau final du simplexe**

var. de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$-Z$	$b_i$
$x_3$	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0	$\frac{800}{3}$
$x_2$	$\frac{1}{30}$	1	0	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	0	$\frac{40}{3}$
$-Z$	$\frac{25}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{28000}{3}$

$$c_B = \begin{pmatrix} c_3 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -100 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Le vecteur dual est donné par

$$\lambda_B^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} -30 & -100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{22}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

## 4.2 Perturbation des coefficients de la fonction objectif

Considérons la solution optimale du programme linéaire (4.4-4.5) non perturbé

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}A_N x_N \quad (4.17)$$

$$z = c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}A_N)x_N. \quad (4.18)$$

La valeur optimale de la solution courante est alors

$$z(c) = c_B^T B^{-1}b.$$

Suite à une perturbation  $\alpha\Delta c$  des coefficients de la fonction coût, et sous l'hypothèse que le système (4.1-4.3) est réalisable, fini et non dégénéré primal (solution optimale unique), la valeur de la solution courante devient:

$$z(c + \alpha\Delta c) = (c_B + \alpha\Delta c_B)^T B^{-1}b \quad (4.19)$$

$$= c_B^T B^{-1}b + \alpha\Delta c_B^T B^{-1}b \quad (4.20)$$

$$= z(c) + \alpha\Delta c_B^T x_B. \quad (4.21)$$

Très clairement, cette perturbation ne modifie pas l'admissibilité de la solution de base. Cependant elle peut modifier l'optimalité de cette dernière. Le vecteur de

coûts réduits devient

$$\begin{aligned} &= (c_N^T + \alpha \Delta c_N^T - (c_B^T + \alpha \Delta c_B^T) B^{-1} A_N) \\ &= [(c_N^T - c_B^T B^{-1} A_N) + \alpha (\Delta c_N^T - \Delta c_B^T B^{-1} A_N)]. \end{aligned}$$

La solution de base restera optimale  $\forall \alpha$  tel que

$$(c_N^T - c_B^T B^{-1} A_N) + \alpha (\Delta c_N^T - \Delta c_B^T B^{-1} A_N) \geq 0 \quad (4.22)$$

ce qui définit un intervalle. A l'extérieur de cet intervalle, un changement de base est requis. On définit  $\alpha^*$  par la plus petite valeur de  $\alpha$  qui fera qu'un coût réduit  $\bar{c}_j$  s'annule. Si  $\alpha^* > 1$  alors quand  $\alpha$  passe de 0 à 1, la valeur de la solution optimale  $z$  passe de  $\bar{c}_B^T \mathbf{x}^*$  à  $\bar{c}_B^T \mathbf{x}^* + \alpha \Delta c_B^T \mathbf{x}^*$  de façon linéaire. Si ce n'est pas le cas, il existe un  $j$  tel que:

$$\bar{c}_j^T + \alpha^* \bar{\Delta}_j = 0$$

$\bar{c}_j^T$  est plus grand que 0, et  $\bar{\Delta}_j = 0$  est plus petit que 0, alors  $x_j$  correspond à une variable hors base qui entrera dans la base. Par contre, s'il n'existe pas de variable de base à sortir, le problème devient non borné dès que  $\alpha$  dépasse  $\alpha^*$ , sinon en effectuant une itération du simplexe on trouve une nouvelle base et on recommence. Pour  $\alpha$  passant de 0 à  $\alpha^*$ , la solution optimale,  $z$ , passera de  $\bar{c}_B^T x_B$  à  $(\bar{c}_B^T + \alpha^* \Delta c_B^T) x_B$  de façon linéaire.

Terminons cette section en énonçant le théorème de Gauvin (1998) qui est parmi plusieurs auteurs ayant traité l'analyse de sensibilité. Considérons la valeur optimale d'un programme linéaire standard qui peut s'exprimer de la façon suivante:

$$z(c) = \inf\{c^T x; \quad Ax = b, \quad x \geq 0\} \quad (4.23)$$

lorsqu'on considère les composantes de la fonction objectif comme des paramètres et il a démontré le théorème suivant sous l'hypothèse que le système (4.1-4.3) est réalisable et fini:

**Théorème:**

Si  $z(c) = \min\{c^T x; \quad Ax = b, \quad x \geq 0\} = \max\{\lambda^T b; \quad \lambda^T A \leq c^T, \quad x \geq 0\}$  alors pour toute direction  $\Delta c$  et pour tout scalaire  $\alpha > 0$  suffisamment petit nous avons

$$z(c + \alpha \Delta c) = z(c) + \alpha \inf\{\Delta c^T x; \quad Ax = b, \quad c^T x = z(c), \quad x \geq 0\}.$$

On remarque que le théorème confirme l'équation (4.21). De plus, on voit clairement que, si la solution primale est unique,

$$\alpha \inf\{\Delta c^T x; \quad Ax = b, \quad c^T x = z(c), \quad x \geq 0\} = \alpha \Delta c_B^T x_B.$$

#### 4.2.1 Illustration numérique lors d'une variation des coefficients de la fonction objectif

Dans la programmation linéaire possibiliste, il y a de l'imprécision dans certaines données (coefficients de la fonction objectif, coefficients de la matrice technologique et le vecteur ressource). On ne connaît le comportement des données que sur des intervalles où elles sont représentées par des fonctions d'appartenance. On cherche à connaître le comportement de la solution optimale sur ces intervalles. Supposons que les coefficients de la fonction coût nous soient donnés par

$$\tilde{c}_1 = -45 + \alpha \Delta_1; \quad (4.24)$$

$$\tilde{c}_2 = -100 + \alpha \Delta_2; \quad (4.25)$$

$$\tilde{c}_3 = -30 + \alpha \Delta_3; \quad (4.26)$$

$$\tilde{c}_4 = -50 + \alpha \Delta_4; \quad (4.27)$$

avec  $\Delta_1 = 5, \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 10$  et  $\alpha$  est un paramètre qui varie entre 0 et 1. Calculons la dernière ligne du tableau final:

$$\tilde{c}_1 = \frac{25}{3} + \alpha \Delta_1 - \frac{5}{3} \alpha \Delta_3 - \frac{1}{30} \alpha \Delta_2 = \frac{25}{3} - 12\alpha; \quad (4.28)$$

$$\tilde{c}_2 = \tilde{c}_3 = 0; \quad (4.29)$$

$$\tilde{c}_4 = \frac{50}{3} + \alpha \Delta_4 - \frac{7}{3} \alpha \Delta_3 + \frac{1}{30} \alpha \Delta_2 = \frac{50}{3} - 13\alpha; \quad (4.30)$$

$$\tilde{c}_5 = \frac{22}{3} - \frac{4}{15} \alpha \Delta_3 + \frac{1}{150} \alpha \Delta_2 = \frac{22}{3} - \frac{13}{5} \alpha; \quad (4.31)$$

$$\tilde{c}_6 = \frac{2}{3} + \frac{1}{15} \alpha \Delta_3 - \frac{2}{75} \alpha \Delta_2 = \frac{2}{3} + \frac{6}{15} \alpha; \quad (4.32)$$

Nous voulons que ces nouveaux coûts réduits demeurent positifs, ce qui sera toujours le cas si

$$-\frac{5}{3} \leq \alpha \leq \frac{25}{36}. \quad (4.33)$$

Si  $\alpha$  est dans cet intervalle, nous avons toujours la même base optimale, à savoir,  $B_1 = \{x_2, x_3\}$ . Voyons maintenant ce qui se passe entre  $\frac{25}{36}$  et 1. Puisque c'est  $c_1$  qui impose une limite à  $\alpha$  (équation 4.28), alors la variable associée,  $x_1$  sera affectée. Une itération du simplexe sera nécessaire pour faire entrer  $x_1$  dans la base. C'est  $x_3$  qui en sortira (tableau 4.2).

La nouvelle base sera  $B_2 = \{x_1, x_2\}$ . La même démarche est répétée pour trouver de nouvelles bornes pour  $\alpha$ .

$$\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0; \quad (4.34)$$

$$\bar{c}_3 = (-30 + \alpha\Delta_3) - \frac{3}{5}(-45 + \alpha\Delta_1) + \frac{1}{50}(-100 + \alpha\Delta_2) = -5 + \frac{36\alpha}{5}; \quad (4.35)$$

$$\bar{c}_4 = (-50 + \alpha\Delta_4) - \frac{7}{5}(-45 + \alpha\Delta_1) + \frac{4}{50}(-100 + \alpha\Delta_2) = 11 + \frac{89\alpha}{5}; \quad (4.36)$$

$$\bar{c}_5 = -\frac{4}{25}(-45 + \alpha\Delta_1) + \frac{3}{250}(-100 + \alpha\Delta_2) = 6 - \frac{17\alpha}{25}; \quad (4.37)$$

$$\bar{c}_6 = \frac{1}{25}(-45 + \alpha\Delta_1) - \frac{7}{250}(-100 + \alpha\Delta_2) = 1 - \frac{2\alpha}{25}; \quad (4.38)$$

Donc la base optimale sera  $B_1 = \{x_1, x_2\}$  si

$$\frac{25}{36} \leq \alpha \leq \frac{150}{17}. \quad (4.39)$$

En résumé, si

**Tableau 4.2: Tableau du simplexe avec  $x_1$  et  $x_2$  comme base**

var de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$-Z$	$b_i$
$x_1$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{25}$	$-\frac{1}{25}$	0	$\frac{800}{5}$
$x_2$	0	1	$-\frac{1}{50}$	$-\frac{4}{50}$	$-\frac{3}{250}$	$\frac{7}{250}$	0	8
$-Z$	0	0	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_5$	$\bar{c}_6$	1	$-8000 + 880\alpha$

$$0 \leq \alpha \leq \frac{25}{36}$$

$$z_{\alpha}^* = (-100 + \alpha\Delta_2)\mathbf{x}_2^* + (-30 + \alpha\Delta_3)\mathbf{x}_3^* \quad (4.40)$$

$$= (-100 + 10\alpha)\frac{40}{3} + (-30 + 10\alpha)\frac{800}{3} \quad (4.41)$$

$$= -\frac{28000}{3} + 2800\alpha, \quad (4.42)$$

et si

$$\frac{25}{36} \leq \alpha \leq 1$$

$$z_{\alpha}^* = (-45 + \alpha\Delta_1)\mathbf{x}_1^* + (-100 + \alpha\Delta_2)\mathbf{x}_2^* \quad (4.43)$$

$$= -8000 + 880\alpha \quad (4.44)$$

$$z_{\alpha}^* = \begin{cases} -\frac{28000}{3} + 2800\alpha & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{25}{36} \\ -8000 + 880\alpha & \text{si } \frac{25}{36} \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (4.45)$$

L'équation (4.45) nous montre que la fonction objectif en fonction de  $\alpha$  ( $z_{\alpha}^*$ ) est linéaire par morceaux (voir la figure 4.1). Cette figure illustre l'allure de la fonction. Comme le veut la "coutume" possibiliste, la valeur du paramètre  $\alpha$  est sur l'axe vertical.

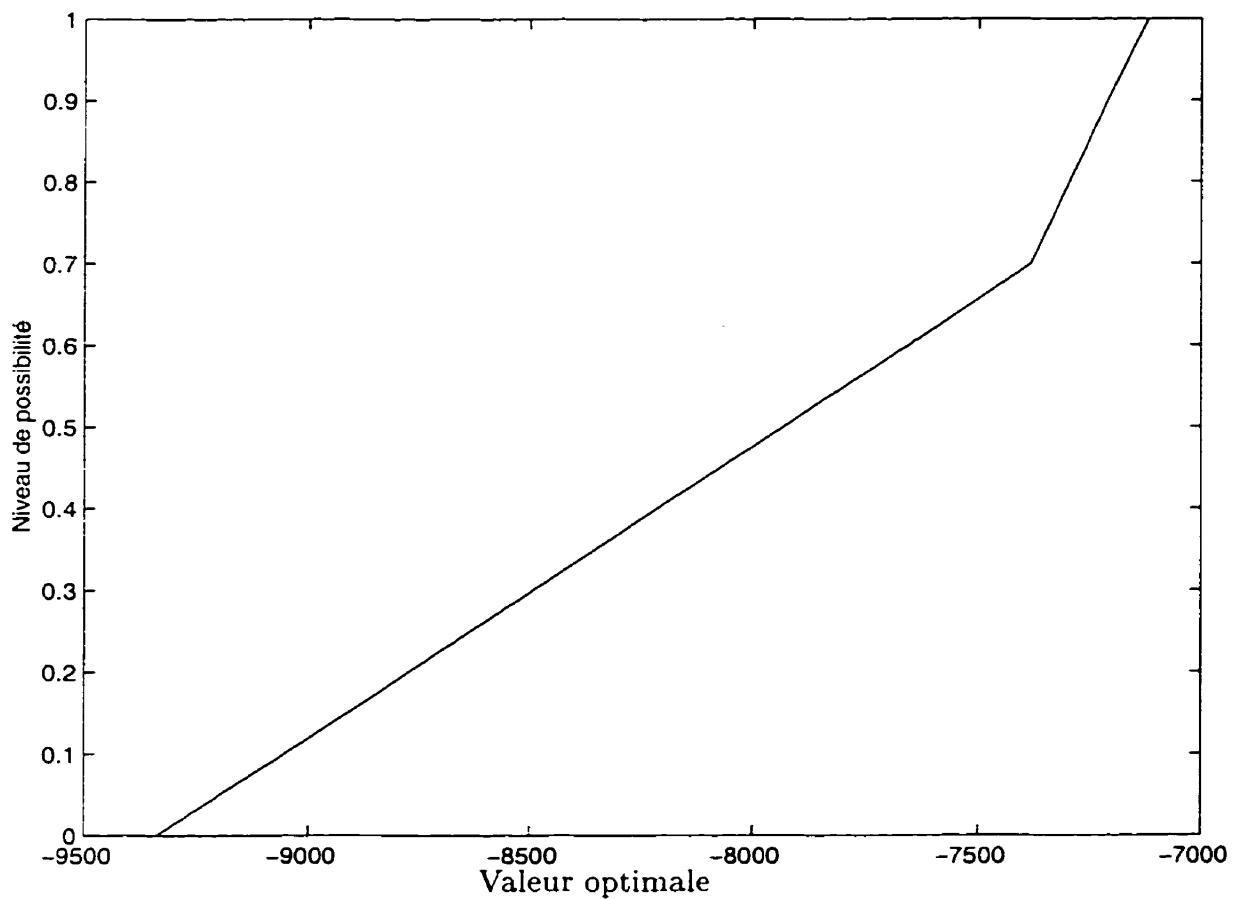
### 4.3 Modification des membres de droite

Une variation de ressources affecte les valeurs des variables qui sont dans la base optimale et la valeur de la fonction économique puisque  $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$  et  $\mathbf{z}^* = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B$  où  $\mathbf{x}_B$  est la solution de base correspondant à la base  $B$ . Dans ce cas, la valeur à l'optimum sera donnée, si le système (4.1-4.3) est réalisable, fini et sous l'hypothèse de non-dégénérescence duale, par

$$v(b + \alpha\Delta b) = \mathbf{c}_B^T B^{-1}(b + \alpha\Delta b) \quad (4.46)$$

$$= \mathbf{c}_B^T B^{-1}b + \alpha\mathbf{c}_B^T B^{-1}\Delta b \quad (4.47)$$

$$= v(b) + \alpha\mathbf{c}_B^T B^{-1}\Delta b. \quad (4.48)$$



**Figure 4.1: Valeur optimale en fonction de  $\alpha$  lorsqu'on fait varier la fonction objectif**

La modification du vecteur ressource implique que l'on doit se préoccuper non pas de l'optimalité de la solution mais plutôt de s'assurer que la nouvelle solution soit réalisable. Il est à noter que si jamais la solution n'est plus réalisable sous l'effet du changement, nous déterminons une nouvelle solution optimale pour le nouveau problème par l'algorithme dual du simplexe.

Gauvin (1998) a considéré la valeur optimale d'un programme linéaire standard qui peut s'exprimer de la façon suivante:

$$v(b) = \inf\{c^T x; \quad Ax = b, \quad x \geq 0\} \quad (4.49)$$

lorsqu'on considère les composantes du membre de droite du système d'équations

comme des paramètres. Il a démontré le théorème suivant sous l'hypothèse que le système (4.1-4.3) est réalisable et fini.

**Théorème:**

Si  $v(b) = \min\{c^T x; Ax = b, x \geq 0\} = \max\{\lambda^T b; \lambda^T A \leq c^T, x \geq 0\}$ , alors pour toute direction  $\Delta b$  et pour tout scalaire  $\alpha > 0$  suffisamment petit nous avons  $v(b + \alpha \Delta b) = v(b) + \alpha \sup\{\lambda^T \Delta b; \lambda^T A \leq c^T, \lambda^T b = v(b)\}$ .

On remarque que l'équation (4.48) confirme ce théorème et on voit clairement, si la solution duale est unique, que

$$\alpha c_B^T B^{-1} \Delta b = \alpha \sup\{\lambda^T \Delta b; \lambda^T A \leq c^T, \lambda^T b = v(b)\}.$$

La fonction décrite par l'équation (4.49) est une fonction convexe et affine par morceaux. Nous allons maintenant construire un intervalle pour  $\alpha$  à l'intérieur duquel la solution du problème initial demeure optimale.

Si le terme de droite  $b_j$  est modifié pour devenir  $b_j + \alpha \Delta b_j$ , alors les termes de droite du tableau final du simplexe seront évidemment affectés pour devenir

$$B^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + \alpha B^{-1} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \vdots \\ \Delta b_j \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Soit  $[\beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{mj}]^t$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B^{-1}$ . Alors les termes de droite dans le tableau final du simplexe deviennent

$$\bar{b}_i + \alpha \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \Delta b_j, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.51)$$

La solution optimale du problème initial demeure optimale pour le problème modifié

si

$$\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\sum_{j=1}^m \beta_{ij} \Delta b_j} : \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \Delta b_j < 0 \right\}. \quad (4.52)$$

Que se passe-t-il s'il n'y a pas de  $i$  tel que  $\sum_{j=1}^m \beta_{ij} \Delta b_j < 0$ ? S'il n'existe pas de  $\alpha^*$ ,  $0 \leq \alpha^* \leq 1$ , tel que une ligne du système (4.52) s'annule, alors la solution optimale.  $z^*$ , varie linéairement de  $c_B^T B^{-1} b$  à  $c_B^T B(b + \alpha \Delta b)$  quand  $\alpha$  passe de 0 à 1. S'il existe  $\alpha^*$ ,  $0 \leq \alpha^* \leq 1$  tel qu'une variable de base  $x_i$  doit sortir de la base, une variable hors base sera sélectionnée pour entrer dans la base au moyen de l'algorithme dual de simplex. Si aucune variable hors base n'est candidate pour entrer dans la base c'est que le problème est devenu irréalisable.

#### 4.3.1 Illustration numérique lors d'une variation du vecteur ressource

Considérons les modifications de  $b$  dans un programme linéaire possibiliste,

$$b_1 = 1200 + \alpha \Delta_1 \quad (4.53)$$

$$b_2 = 800 + \alpha \Delta_2 \quad (4.54)$$

avec  $\Delta_1 = 2100$  et  $\Delta_2 = 10$ . La solution de base associée à ce tableau sera optimale si elle demeure admissible. Nous avons par (4.51)

$$\left( \begin{array}{c} \frac{800}{3} \\ \frac{40}{3} \end{array} \right) + \alpha \left( \begin{array}{cc} \frac{4}{5} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{150} & \frac{2}{75} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{array} \right). \quad (4.55)$$

On veut que

$$\frac{800}{3} + \alpha \left( \frac{1678}{3} \right) \geq 0 \quad (4.56)$$

$$\frac{40}{3} - \alpha \left( \frac{206}{15} \right) \geq 0, \quad (4.57)$$

et on trouve que

$$-\frac{800}{1678} \leq \alpha \leq \frac{100}{103}. \quad (4.58)$$

Donc pour toutes les valeurs de  $\alpha$ , nous avons trouvé que la solution de base du tableau final fournit une solution admissible (et optimale) pourvu que  $\alpha$  soit dans l'intervalle (4.58).

Pour  $\frac{100}{103} \leq \alpha \leq 1$  la solution de base n'est plus réalisable pour le nouveau problème. Pour retrouver une solution optimale pour le nouveau problème, nous pouvons résoudre ce problème en utilisant l'algorithme du simplexe. Une autre méthode consiste à utiliser l'information de la forme canonique de la solution optimale du problème original. Pour y arriver, reprenons le tableau final (optimal) lors de la résolution originale et remplaçons les termes de droite par

$$\begin{pmatrix} \frac{800}{3} + \alpha(\frac{1678}{3}) \\ \frac{40}{3} - \alpha(\frac{206}{15}) \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Il y a plusieurs éléments négatifs (2) dans la ligne où doit se faire le pivot (la deuxième ligne dans ce tableau). On choisit l'élément de telle sorte que les coûts relatifs demeurent non-négatifs.

Par l'équation (4.51) et par le tableau (4.4), la solution optimale nous sera donnée par

$$z_\alpha^* = c_B^T B^{-1}(b + \alpha \Delta b) \quad (4.60)$$

$$= -\frac{28000}{3} - 2100(\frac{22}{3})\alpha - 10(\frac{2}{3})\alpha \quad (4.61)$$

$$= -\frac{28000}{3} - (\frac{46220}{3})\alpha, \text{ pour } \alpha \text{ entre } 0 \text{ et } \frac{100}{103}, \quad (4.62)$$

et par

$$z_\alpha^* = -\frac{8000}{3} - \alpha(\frac{66820}{3}) \text{ pour } \alpha \text{ entre } \frac{100}{103} \text{ et } 1. \quad (4.63)$$

$$z_\alpha^* = \begin{cases} -\frac{28000}{3} - \frac{46220}{3}\alpha & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{100}{103} \\ -\frac{8000}{3} - \frac{66820}{3}\alpha & \text{si } \frac{100}{103} \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (4.64)$$

**Tableau 4.3: Tableau du simplexe avec  $x_3$  et  $x_2$  comme variables de base**

var de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$-Z$	$b_i$
$x_3$	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	0	$\frac{800}{5} + \alpha(\frac{1678}{3})$
$x_2$	$\frac{1}{30}$	1	0	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{150}$	$-\frac{2}{75}$	0	$\frac{40}{3} - \alpha(\frac{206}{15})$
$-Z$	$\frac{25}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{22}{150}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{28000}{3} - \alpha(\frac{46220}{3})$

**Tableau 4.4: Tableau obtenu par l'algorithme dual du simplexe avec  $x_3$  et  $x_4$  comme variables de base**

var de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$-Z$	$b_i$
$x_3$	4	70	1	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{9}{5}$	0	$1200 - 402\alpha$
$x_2$	-1	-1	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$-30(\frac{40}{3} - \alpha(\frac{206}{15}))$
$-Z$	25	500	0	0	4	14	1	$-\frac{8000}{3} - \alpha(\frac{66820}{3})$

## 4.4 Modification des coefficients des contraintes

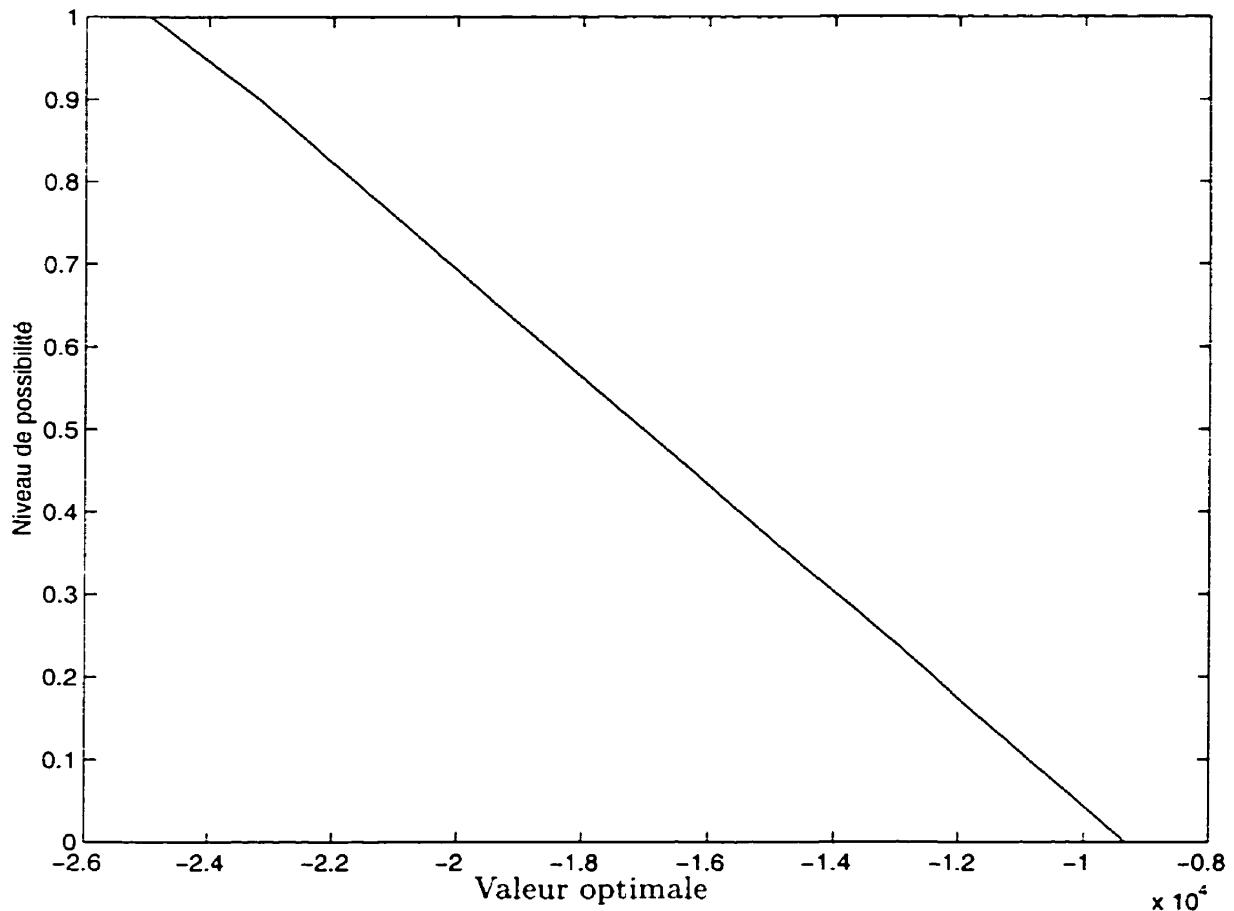
Pour de petites variations dans la matrice technologique  $A(\alpha)$  Gauvin(1998) a proposé une formulation où le vecteur des paramètres apparaît dans le membre de droite c'est-à-dire

$$v(\alpha) = \min\{c^T x \text{ tel que } A(y)x = b \quad y = \alpha \quad x \geq 0\} \quad (4.65)$$

On remarque que ce programme n'est plus linéaire (apparition des termes en  $xy$ ). Dans le cadre de ce mémoire, nous proposons un algorithme qui nous permette de faire une analyse de sensibilité sur la matrice en question, d'évaluer l'impact et de faire modifier les coefficients des variables de base et ceux hors base.

### 4.4.1 Cas où $x_j$ est hors base

On examine ici le cas où un coefficient  $a_{ij}$  de la matrice technologique est modifié, et la variable  $x_j$  concernée est hors base à l'optimum. Si ce coefficient prend maintenant la valeur  $a_{ij} + \alpha\Delta_{ij}$  cela n'aura aucun impact sur la valeur de la solution courante. Toutefois le coût réduit de  $x_j$  en sera modifié. Soit  $\lambda_i$  la valeur de la



**Figure 4.2: Valeur optimale en fonction de  $\alpha$  lorsqu'on fait varier le vecteur ressource.**

variable duale de la contrainte correspondant à ce coefficient. Alors le nouveau coût réduit  $\bar{c}'_j$  de  $x_j$  sera

$$\bar{c}'_j = \bar{c}_j - \lambda_i \alpha \Delta_{ij}$$

La solution demeure donc optimale si  $\bar{c}'_j \geq 0$ , ou encore si  $\alpha \leq \frac{\bar{c}_j}{\lambda_i \Delta_{ij}}$ .

#### 4.4.2 Cas où $x_j$ est variable de base

Si la variable  $x_j$  est en base à l'optimum l'impact d'une modification se répercute sur la solution optimale et sur les coûts réduits.

L'approche proposée ici consiste à transformer ce problème de la façon suivante : on introduit une nouvelle variable  $x'_j$  et on sépare le terme  $(a_{ij} + \alpha\Delta_{ij})x_j$  en  $(a_{ij}x_j + \alpha\Delta_{ij}x'_j)$ . On introduit ensuite une contrainte spécifiant que ces deux variables sont les mêmes. Les contraintes s'écrivent donc

$$Ax + \alpha\Delta_{ij}e_i x'_j = b \quad (4.66)$$

$$-x_j + x'_j = 0 \quad (4.67)$$

où  $e_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice identité.

La solution optimale du problème initial augmentée de  $x'_j = 0$  respecte les contraintes (4.66) mais pas les contraintes (4.67). En ajoutant une variable artificielle ( $Art$ ) à cette contrainte, on peut très facilement retrouver le tableau du simplexe correspondant à cette solution à partir du tableau courant. Ce tableau aura  $n + 2$  colonnes ( $n$  variables originales +  $x'_j$  + la variable artificielle) et  $m + 1$  lignes (soit les  $m$  contraintes originales plus la contrainte  $-x'_j + x_j + Art = 0$ ).

Les  $n$  premières colonnes des  $m$  premières lignes correspondent au tableau final du simplexe actuel. La colonne de  $x'_j$  commence avec la colonne correspondant à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $B^{-1}$  fois  $\alpha\Delta_{ij}$ , alors que la dernière commence avec  $m$  fois l'élément 0.

Pour retrouver la dernière ligne on utilise la ligne correspondant à  $x_j$  dans le tableau final. Cette ligne s'interprète comme suit:

$$x_j + \sum_{k \in N} \bar{a}_{jk} x_k + \bar{a}_{n+i,j} \alpha \Delta_{ij} x'_j = \bar{b}_j \quad (4.68)$$

La contrainte ajoutée sera donc

$$(-\bar{b}_j + \sum_{k \in N} \bar{a}_{jk} x_k) + \bar{a}_{n+i,j} \alpha \Delta_{ij} x'_j + x'_j + Art = 0 \quad (4.69)$$

$$(1 + \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,j}) x'_j - \bar{b}_j + \sum_{i \in N} \bar{a}_{ij} x_i + Art = 0. \quad (4.70)$$

Puisque nous n'avons aucune variable de base du problème original dans cette dernière équation, la variable artificielle devient alors la nouvelle variable de base.

Si  $\alpha = 0$ , la colonne de  $x'_j$  est une colonne de 0 sauf à la dernière ligne où on retrouve un 1.  $x'_j$  peut donc servir de variable de base et aucune itération n'est nécessaire. Si on augmente légèrement la valeur de  $\alpha$ , à moins que la solution actuelle ne soit dégénérée, la base optimale devrait rester la même. Seul  $x'_j$  devrait passer de 0 à une valeur voisine de  $\bar{b}_j$  en entrant dans la base et  $Art$  devrait prendre la valeur 0 et sortir de la base. Pour que cela se produise, il faut qu'au moment d'entrer  $x'_j$  dans la base ce soit  $Art$  qui sorte de la base, et que la solution reste non-négative. Ce sera le cas si le pivot se trouve à l'intersection de la colonne  $x_j$  et de la ligne  $Art$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\bar{b}_j}{1 + \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,j}} < \frac{\bar{b}_k}{\alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,k}} \quad \forall k \text{ tel que } \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,k} > 0 \quad (4.71)$$

$$\alpha \Delta_{ij} (\bar{b}_j \bar{a}_{n+i,k} - \bar{b}_k \bar{a}_{n+i,j}) < \bar{b}_k \quad \forall k \text{ tel que } \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,k} > 0 \quad (4.72)$$

Si nous voulons entrer  $x'_j$  dans la base, deux cas peuvent se produire:

- si  $\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_k}{\alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,k}} : \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,k} > 0 \right\} < \frac{\bar{b}_j}{(1 + \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,j})}$  c'est que  $\alpha \Delta_{ij}$  est trop grand. C'est-à-dire que le changement imposé à  $a_{ij}$  est trop important pour conserver la même base.
- si  $\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_k}{\alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,k}} : \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,k} > 0 \right\} > \frac{\bar{b}_j}{(1 + \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,j})}$  alors c'est la variable artificielle qui sort de la base et une seule itération du simplexe sera nécessaire pour rétablir la réalisabilité de la solution. Il faudra aussi regarder les coûts réduits pour s'assurer de l'optimalité de la solution.

Éventuellement puisque  $(1 + \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,j})$  représente le pivot,  $\alpha \Delta_{ij}$  doit être suffisamment petit pour avoir  $(1 + \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,j}) \geq 0$ . Le tableau final du simplexe sera donné par

#### 4.4.3 Calcul des coûts réduits

Le calcul des éléments de la ligne des coûts marginaux peut s'effectuer directement à partir du tableau (4.5). Puisque c'est  $(1 + \alpha \Delta_{ij} \bar{a}_{n+i,j})$  qui représente le pivot et que les nouveaux coûts réduits demeurent positifs ou nuls pour avoir le vecteur

**Tableau 4.5: Tableau final du simplexe avec  $\alpha\Delta_{ij}$** 

	$x_j$	$e_i$	$x'_j$	$Art$	$b$
	0	$\bar{a}_{n+i,1}$	$\alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,1}$	0	$\bar{b}_1$
	0	$\bar{a}_{n+i,2}$	$\alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,2}$	0	$\bar{b}_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{a}_{1j}$	$\bar{a}_{2j}$	$\dots 1 \dots$	$\bar{a}_{n+i,j}$	$\dots$	$\alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,j}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	$\bar{a}_{n+i,m}$	$\alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,m}$	0	$\bar{b}_m$
$\bar{a}_{1j}$	$\bar{a}_{2j}$	0	$\bar{a}_{n+i,j}$	$1 + \alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,j}$	1
$\bar{c}_1 - M\bar{a}_{1j}$	$\bar{c}_2 - M\bar{a}_{2j}$	0	$\bar{c}_{n+i} - M\bar{a}_{n+i,j}$	$\alpha\Delta_{ij}\bar{c}_{n+i} - M(1 + \alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,j})$	0

prix qui sera réalisable pour le dual, c'est-à-dire

$$(\bar{c}_k - M\bar{a}_{kj}) - \frac{\{\Delta\bar{c}_{n+i} - M(1 + \alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,j})\}\bar{a}_{kj}}{1 + \alpha\Delta_{ij}\bar{a}_{n+i,j}} > 0 \quad (4.73)$$

$\iff$

$$\bar{c}_k > \alpha\Delta(\bar{c}_{n+i}\bar{a}_{kj} - \bar{c}_k\bar{a}_{n+i,j}) \quad \forall k \quad (4.74)$$

#### 4.4.4 Illustration numérique lors d'une variations des coefficients de la matrice technologique

##### 4.4.4.1 Pour les coefficients des variables hors base

Calculons l'intervalle de variation pour les  $a_{ij}$  hors base, c'est-à-dire pour  $a_{11}, a_{14}, a_{21}$  et  $a_{24}$  où

$$a_{11} = a_{11} + \alpha\Delta_{11} \quad (4.75)$$

$$a_{14} = a_{14} + \alpha\Delta_{14} \quad (4.76)$$

$$a_{21} = a_{21} + \alpha\Delta_{21} \quad (4.77)$$

$$a_{24} = a_{24} + \alpha\Delta_{24} \quad (4.78)$$

avec  $\Delta_{11} = \Delta_{13} = \Delta_{21} = \Delta_{24} = 2$

- Pour  $a_{11}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \text{ devient } \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha\Delta_{11} \\ a_{21} + \alpha\Delta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + \alpha\Delta_{11} \\ 3 + \alpha\Delta_{21} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Cette modification n'influence que le coût relatif de la variable  $x_1$

$$\bar{c}_1 = c_1 - \lambda_B^T \begin{pmatrix} 7 + \alpha\Delta_{11} \\ 3 + \alpha\Delta_{21} \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

nous aurons donc

$$\bar{c}_1 = -45 - \begin{pmatrix} -\frac{22}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 + \alpha\Delta_{11} \\ 3 + \alpha\Delta_{21} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

$$\frac{25}{3} + \frac{48}{3}\alpha.$$

La solution demeure optimale si

$$\begin{aligned} \frac{25}{3} + \frac{48}{3}\alpha &\geq 0 \\ \Rightarrow \alpha &\geq -\frac{25}{48}. \end{aligned}$$

Nous trouvons l'intervalle de variation pour les autres coefficients. Dans ce cas, la solution optimale ne change pas.

- Pour  $a_{14}$  et  $a_{24}$ ,  $\alpha \geq -\frac{5}{7}$

- Pour  $a_{21}$ ,  $\alpha \geq -\frac{25}{48}$

#### 4.4.5 Pour les coefficients des variables de bases

Calculons maintenant l'intervalle de variation pour les  $a_{ij}$  dont les variables correspondantes sont dans la base, c'est-à-dire pour  $a_{12}, a_{13}, a_{22}$  et  $a_{23}$  où

$$a_{12} = a_{12} + \alpha \Delta_{12} \quad (4.82)$$

$$a_{13} = a_{13} + \alpha \Delta_{13} \quad (4.83)$$

$$a_{22} = a_{22} + \alpha \Delta_{22} \quad (4.84)$$

$$a_{23} = a_{23} + \alpha \Delta_{23} \quad (4.85)$$

avec  $\Delta_{12} = 3$ ,  $\Delta_{13} = \Delta_{23} = 2$  et  $\Delta_{22} = 4$

D'après le tableau final du simplexe nous savons que  $x_2$  et  $x_3$  sont des variables de bases. Trouvons à l'aide de l'algorithme décrit précédemment, les variations des coefficients des variables de bases, à savoir,  $a_{12}, a_{13}, a_{22}$  et  $a_{23}$ :

Tableau 4.6: Tableau final

var de base	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x'_j$	$Art$	$b_i$
$x_3$	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{4\alpha\Delta_{12}}{15}$	0	$\frac{800}{3}$
$x_2$	$\frac{1}{30}$	1	0	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$-\frac{\alpha\Delta_{12}}{150}$	0	$\frac{40}{3}$
$x'_j$	$\frac{1}{30}$	0	0	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$1 - \frac{\alpha\Delta_{12}}{150}$	1	$\frac{40}{3}$
	$\frac{25}{3} - \frac{M}{30}$	0	0	$\frac{50}{3} + \frac{M}{30}$	$\frac{22}{3} + \frac{M}{150}$	$\frac{2}{3} - \frac{2M}{75}$	$\frac{22\alpha\Delta_{12}}{3} - M + \frac{\alpha\Delta_{12}M}{150}$	0	

- $1 - \frac{\alpha\Delta_{12}}{150} \geq 0$  car c'est le pivot  $\Rightarrow \alpha\Delta_{12} \leq 150$
- Si  $\alpha\Delta_{12} \geq 0 \Rightarrow \frac{4\alpha\Delta_{12}}{15} \geq 0$  et on veut  $\frac{\frac{800}{3}}{\frac{4\alpha\Delta_{12}}{15}} \geq \frac{\frac{40}{3}}{1 - \frac{\alpha\Delta_{12}}{150}} \Rightarrow \alpha\Delta_{12} \leq 50$ , c'est toujours vrai car  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $\Delta_{12} = 3$ .
- Puisque  $-\frac{\alpha\Delta_{12}}{150} < 0$ ,  $x_2$  ne peut sortir de la base.

Donc si  $\alpha\Delta_{12} \leq 50$  alors  $x'_j$  entre dans la base et  $Art$  en sort. Est-ce que la solution obtenue devient optimale? Pour cela vérifions les coûts réduits en y appliquant la formule:

$$\bar{c}_1 = \frac{1250 - 45\alpha\Delta_{12}}{150 - \alpha\Delta_{12}}$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_4 &= \frac{2500 + 20\alpha\Delta_{12}}{150 - \alpha\Delta_{12}} \\ \bar{c}_5 &= 150 - \alpha\Delta_{12} \\ \bar{c}_6 &= \frac{100 - 30\Delta_{12}}{150 - \alpha\Delta_{12}}\end{aligned}$$

La solution est optimale si les  $c_j \geq 0 \forall j \in \text{base}$  dans ce cas-ci, c'est-à-dire

$$\bar{c}_1 \geq 0 \iff \alpha\Delta_{12} \leq \frac{250}{9} \quad (4.86)$$

$$\bar{c}_4 \geq 0 \iff \alpha\Delta_{12} \geq -125 \quad (4.87)$$

$$\bar{c}_5 \geq 0 \iff \alpha\Delta_{12} \leq 150 \quad (4.88)$$

$$\bar{c}_6 \geq 0 \iff \alpha\Delta_{12} \leq \frac{10}{3} \quad (4.89)$$

$$(4.90)$$

Donc tant que  $-125 \leq \alpha\Delta_{12} \leq \frac{10}{3}$ , c'est-à-dire  $-\frac{125}{3} \leq \alpha \leq \frac{40}{3}$  on conserve toujours la même base. On procède d'une façon similaire pour les autres coefficients étudiés de base et on trouve:

$$-1 \leq \alpha\Delta_{13} \leq \frac{5}{6} \quad (4.91)$$

$$\frac{20}{3} \leq \alpha\Delta_{22} < \infty \quad (4.92)$$

$$-\infty < \alpha\Delta_{23} \leq -\frac{5}{3} \quad (4.93)$$

- Pour  $a_{12}$ , on trouve que:  $-\frac{125}{3} \leq \alpha \leq \frac{10}{9}$
- Pour  $a_{13}$ , on trouve que:  $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{5}{12}$
- Pour  $a_{22}$ , on trouve que:  $\frac{5}{3} \leq \alpha < \infty$
- Finalement, pour  $a_{23}$  on trouve que:  $-\infty < \alpha \leq \frac{5}{6}$

## 4.5 Variations simultanées des coefficients de la fonction objectif avec le vecteur ressource

Faire varier simultanément les coefficients de la fonction objectif avec le vecteur ressource ne change en rien l'analyse effectuée ci-dessus. Puisque c'est uniquement les coûts réduits et la solution optimale qui seront affectées, il suffit de s'assurer de la réalisabilité de la solution de base. Donc cela revient à les traiter séparément. La valeur de la solution optimale courante nous a donné par:

$$z^* = c_B^T B^{-1} b.$$

Après une perturbation des coefficients de la fonction coût et le vecteur ressource, sous l'hypothèse que le système (4.1-4.3) est réalisable et fini, la valeur de la nouvelle solution optimale ( $z_\alpha^*$ ) sera donnée par un polynôme du deuxième degré, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} z_\alpha^* &= (c_B + \alpha \Delta c_B)^T B^{-1} (b + \alpha \Delta b) \\ &= c_B^T B^{-1} b + \alpha (c_B^T B^{-1} \Delta b + \Delta c_B^T B^{-1} b) + \alpha^2 \Delta c_B^T B^{-1} \Delta b \\ &= z^* + \alpha (\lambda^* \Delta b + \Delta c_B^T x^*) + \alpha^2 \Delta c_B^T B^{-1} \Delta b. \end{aligned}$$

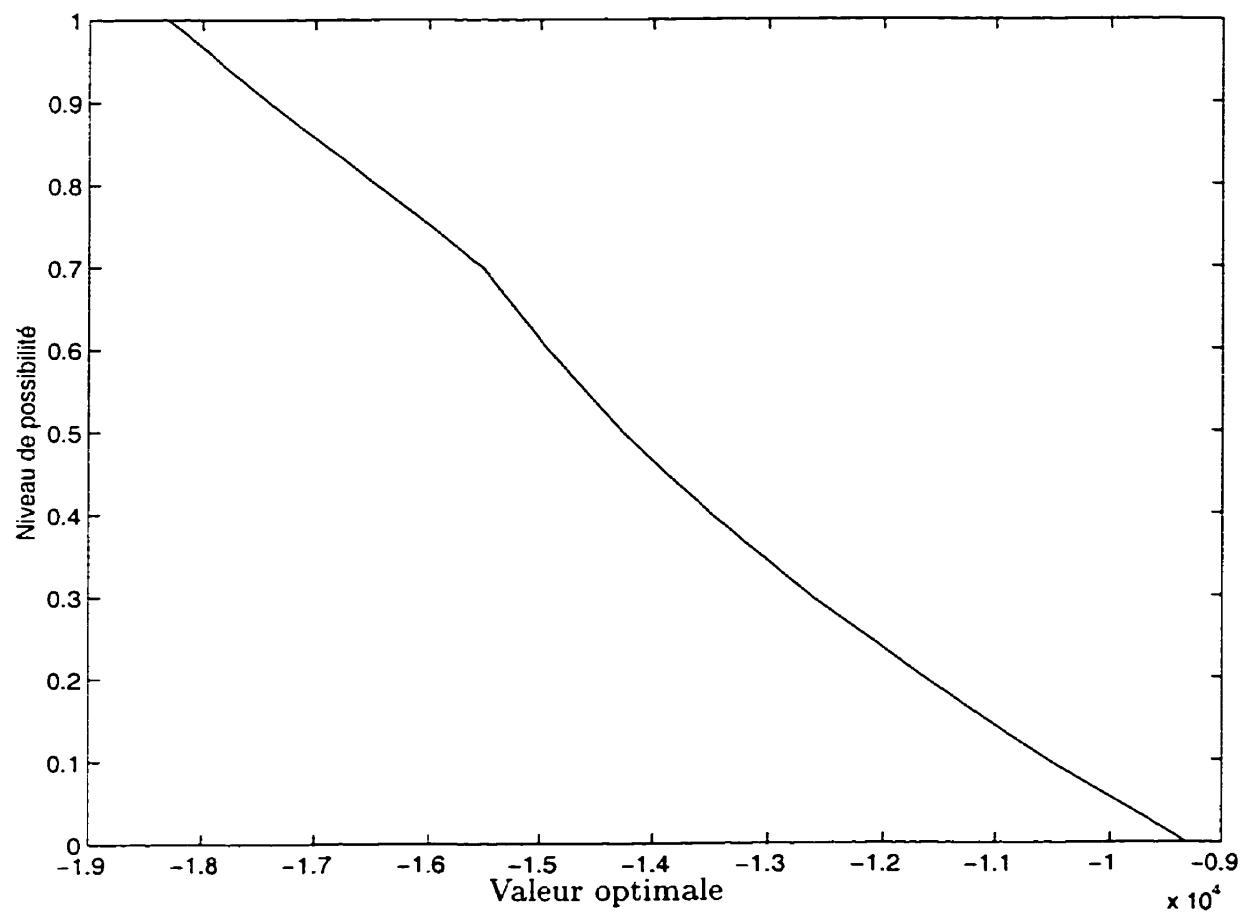
Cette fonction n'est ni convexe ni concave en général et ni linéaire par morceaux. Elle est quadratique par morceaux. Reprenons la fonction objectif et le vecteur ressource avec les mêmes variations citées plus haut. Calculons la valeur de la solution optimale. En prenant les équations (4.26) à (4.29) et (4.55) à (4.56) on a

$$\text{Si } 0 < \alpha \leq \frac{25}{36}$$

$$z_\alpha^* = 5456\alpha^2 - \frac{37820}{3}\alpha - \frac{28000}{3} \quad (4.94)$$

$$\text{Si } \frac{25}{36} \leq \alpha \leq 1$$

$$z_\alpha^* = \frac{7144}{5}\alpha^2 - 11730\alpha - 8000 \quad (4.95)$$



**Figure 4.3: Valeur optimale en fonction de  $\alpha$  lorsqu'on fait varier simultanément la fonction objectif avec le vecteur ressource**

# CONCLUSION

*“...when you have eliminated all which is impossible, then whatever remains, however improbable, must be the truth.”*

**Sherlock Holmes**  
*The Adventure of the Blanched Soldier*

La théorie des ensembles flous et la théorie possibiliste ont été développées pour représenter l'incertitude due à l'imprécision dans l'information ne pouvant être modélisée par la théorie probabiliste. Bien que la recherche ait renforcé la théorie possibiliste et la théorie des ensembles flous, il n'existe toujours pas de consensus sur la détermination des fonctions d'appartenance.

Nous avons résolu analytiquement un problème de gestion de la qualité de l'eau pour démontrer l'utilité de la programmation possibiliste. Nous avons trouvé la solution optimale en fonction d'un certain paramètre  $\alpha$  compris entre 0 et 1. Le graphique de la valeur optimale en fonction de  $\alpha$  nous montre clairement qu'elle n'est pas linéaire par morceaux comme le prétendait Julien (1994). Nous avons trouvé comme expression le rapport d'un polynôme de degré 3 par un polynôme de degré 1 (équations 3.83-3.84).

L'incertitude dans la gestion de la qualité de l'eau peut être attribuée au caractère flou et aléatoire de l'information disponible. L'aléatoire est principalement introduit par l'erreur dans les mesures, ou la variabilité des données. L'imprécision réfère à l'absence de contraintes bien définies dans l'information; cette imprécision est généralement due aux facteurs humains tel que le jugement ou les préférences subjectives.

L'objectif de ce travail était d'étudier des programmes linéaires où les données sont imprécises. Nous avons proposé des algorithmes lorsque les données du problème sont perturbées, à savoir, la fonction objectif, la matrice technologique et le vecteur ressource. Ces algorithmes nous donnent toute l'information nécessaire, c'est-à-dire la base optimale, la portée de la solution optimale (la borne inférieure et la

borne supérieure à un niveau  $\alpha$  de possibilité). De plus, ces algorithmes permettent d'obtenir des résultats fiables, en présence d'un nombre considérables de contraintes et de variables.

Nous avons aussi déterminé la courbe possibiliste dans chacun des cas, de plus nous avons pu établir la courbe possibiliste lorsque la fonction objectif et le vecteur ressource étaient modifiés simultanément. Nous avons vu que, dans ce cas là, la solution optimale nous a été donnée par un polynôme du deuxième degré. Devant de tels problèmes en programmation linéaire, la prise de décision peut être prise avec plus d'aisance.

Il pourrait être intéressant, dans le cadre des recherches futures, d'automatiser ces algorithmes afin de répandre l'intérêt. De plus ce domaine de recherche n'est pas évidemment fermé. Bien au contraire, il mérite d'être poursuivi. Peut-être trouvera-t-on de l'intérêt pour l'appliquer à des problèmes en nombres entiers ou à des problèmes non-linéaires?

# BIBLIOGRAPHIE

*“Like all Holmes’s reasoning the thing seemed simplicity itself when it was once explained.”*

**Dr. Watson**

*The Stockbroker’s Clerk*

- [1] BELLMAN, R.E., L.A. ZADEH (1970). Decision-making in a Fuzzy Environment. Nasa contractor report. NASA CR-1594. Electronics research laboratory. University of California.
- [2] BUCKLEY, J.J. (1988a). Possibility and Necessity in Optimization, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 25, 1–13.
- [3] BUCKLEY, J.J. (1988b). Possibilistic Linear Programming with Triangular Fuzzy Numbers, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 26, 135–139.
- [4] BUCKLEY, J.J. (1989). Solving Possibilistic Linear Programming Problems, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 31, 329–341.
- [5] BUCKLEY, J.J. (1990). Stochastic versus Possibilistic Programming, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 34, 173–177.
- [6] BUCKLEY, J.J. (1990). Multi-objective Possibilistic Linear Programming, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 35, 23–28.
- [7] CHARNES, A., COOPER, W. W. (1961). Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, New York: Wiley.
- [8] CHVÁTAL, V. (1983). Linear Programming, New York: W.H.: Freemann.
- [9] DANTZIG, G.B. (1963). Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [10] DUBOIS, D., PRADE, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

- [11] DUBOIS, D., PRADE, H.(1985). Théories des possibilités, Applications à la représentation des connaissances en informatique, Masson, 2e édition.
- [12] DUBOIS, D., PRADE, H.(1988). Possibility Theory, an Approach to Computerized Processing of Uncertainty, Plenum Press, New York.
- [13] GAUVIN, J. (1995). Leçons de programmation mathématique, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal.
- [14] GAUVIN, J. (1998). A Formula for the Sensitivity Analysis of Programming Problems, rapport technique, École Polytechnique de Montréal.
- [15] GOGUEN, J.A. (1967). L-Fuzzy Sets in: *JMAA* Vol. 18, 145–174.
- [16] GOGUEN, J.A. (1969). The Logic of Inexact Concepts, *Synthese* Vol.19, 325–373.
- [17] JULIEN, B. (1988). Fuzzy Decision-making in Water Quality Management, disponible par l'auteur.
- [18] JULIEN, B. (1994). Water Quality Management with Imprecise Information, *European Journal Of Operational Research*, vol. 76, p. 15–27.
- [19] JULIEN, B., HIROTA K., TÜRKŞWEN I.B. (1996). Intelligent Manufacturing and Process Design, CANADA-JAPAN, Bilateral Workshop.
- [20] KACPRZYK, J., ORLOVSKI, S.A. (eds) (1986). Optimization Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory, Reidel, Dordrecht.
- [21] KAUFMANN, A., (1977). Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, A l'usage des Ingénieurs, (Fuzzy Sets Theory), Tome I, Éléments théoriques de base, Masson, Paris.
- [22] KLIR, G.J., FOLGER, T.A. (1988). Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [23] LOUCKS, D.P., STEDINGER, J.R., HAITH, D.A. (1981). Water Resource Systems Planning and Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- [24] LUHANDJULA, M.K. (1982). Compensatory Operators in Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives, *Fuzzy Sets And Systems* Vol. 8, 245–252.
- [25] LUHANDJULA, M.K. (1983). Linear Programming Under Randomness and Fuzziness, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 10, 45–55.
- [26] LUHANDJULA, M.K. (1986). On Possibilistic Linear Programming, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 18, 15–30.
- [27] LUHANDJULA, M.K. (1987). Multiple Objective Programming Problems with Possibilistic Coefficients, *Fuzzy Sets And Systems* Vol. 21, 135–145.
- [28] LUHANDJULA, M.K. (1989). Fuzzy Optimization: an Appraisal, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 30, 257–282.
- [29] MADAN M.G., RAMMOHAN K.R., YAGER, R.R. (1979). Advances In Fuzzy Set Theory and Applications.
- [30] OZAN, T.M. (1986). Applied Mathematical Programming for Production and Engineering Management.
- [31] TERANO O., ASAI K., SUGENO M. (1992). Fuzzy Systems Theory and its Applications, Academic Press, Inc.
- [32] YAGER R.R., OVCHINNIKOV S., TONG R.M., NGUYEN H.T. (1987). *Fuzzy Sets and Applications, selected papers by L.A. Zadeh*, John Wiley & Sons.
- [33] YAZENIN, A.V. (1987). Fuzzy And Stochastic Programming, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 22, p. 171–180.
- [34] ZADEH, L.A. (1965). Fuzzy Sets in: *Information and Control* Vol. 8, 338–353.
- [35] ZADEH, L.A. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-I, *Informations Sciences* Vol. 8/3, p. 199–249.
- [36] ZADEH, L.A. (1978). Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 1, 3–28.
- [37] ZIMMERMANN, H.J. (1985). Fuzzy Set Theory and its Applications, Kluwer-Nijhoff, Dordrecht.