

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DU BRUIT DE PROCÉDÉ ET DE MESURE POUR DES SYSTÈMES AVEC  
CONTRÔLEURS COMMUTANTS DANS UN CADRE SCALAIRE ET STATIONNAIRE

BERTRAND PIGEON  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE CHIMIQUE)  
JUN 2012

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

ÉTUDE DU BRUIT DE PROCÉDÉ ET DE MESURE POUR DES SYSTÈMES AVEC  
CONTRÔLEURS COMMUTANTS DANS UN CADRE SCALAIRE ET STATIONNAIRE

présentée par: PIGEON Bertrand

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de:

M. HENRY Olivier, Ph.D., président

M. PERRIER Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. SRINIVASAN Bala, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. ZHU Guchuan, Doct., membre

M. DUCHESNE Carl, Ph.D., membre

## DÉDICACE

À ceux qui m'ont enduré, les autres étant partis

"And you will find someday that, after all, it isn't as horrible as it looks."

Richard Feynman

## REMERCIEMENTS

Je termine ce projet de recherche avec la pleine conscience que son succès (ou du moins l'apparence) est plus dû aux gens qui m'ont entouré qu'à moi. C'est ainsi que j'écris ces remerciements, non pas en reconnaissance, mais en devoir de mémoire. En fait, je ne veux pas seulement souligner la contribution de ceux qui m'ont soutenu, la plupart ne liront pas ces lignes. Si j'écris ces remerciements, c'est pour me souvenir de ceux-ci et me rappeler que sans leur présence, ce projet ne serait pas le centième de ce qu'il est.

Tout d'abord, je voudrais remercier mes parents qui m'ont supporté durant ce projet. Mes frères (Christian et Mathieu) qui eux m'ont enduré durant cette période. Mes amis et collègues de travail avec qui je n'ai pas assez passé de temps. Christine, Pascal, Guillaume, Victor, Claude, Yanick, Louis-Philippe, Mathieu, Michel, Mathieu, Patrice, Robert, Olivier, Jonathan, Jocelyn, Félix, Lyne, Farhad, Roberto, Massi, Masood, Nicolas et Sébastien. Et aussi, la technicienne en informatique Michelle McNicoll qui m'a laissé le privilège administrateur pour l'ordinateur de bureau.

Finalement, je voudrais remercier mes directeurs Michel Perrier et Bala Srinivasan pour leur soutien durant toute la durée de ce projet. Sans eux, le projet n'aurait jamais pu avoir l'envergure qu'il a.

## RÉSUMÉ

Les procédés chimiques sont constamment soumis à la variabilité des conditions d'opération, par exemple : la concentration des réactifs, l'activité des catalyseurs, etc. Il en résulte que les produits de ces réactions exhibent une certaine variabilité. Cette variabilité a un coût puisque si les caractéristiques d'un produit dépassent certaines contraintes, il devient un risque litigieux s'il est vendu au client. Une des façons de calculer le coût de la variabilité implique l'utilisation des fonctions de densité de probabilité (FDP). Dans un autre ordre d'idées, les contrôleurs commutants sont fréquemment utilisés dans l'industrie pour des scénarios où il y a une contrainte à ne pas dépasser. Par conséquent, l'objectif de cette thèse est l'analyse des FDP produites par des contrôleurs commutants avec des procédés bruités.

Le premier objectif a été de développer une expression analytique de la FDP d'un système bruité avec un contrôleur commutant avec l'aide de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). Cette expression analytique a été ensuite appliquée à un exemple de formage de FDP. Ainsi, deux types de non-linéarités ont pu être comparés. Il en résulte que le contrôleur commutant est plus robuste qu'un contrôleur polynomial (où la variable manipulée est une fonction polynômiale de l'écart entre le point de consigne et l'état), mais il ne peut émuler des FDP complexes (comme des bimodales).

Le deuxième objectif a été d'obtenir une expression analytique d'un contrôleur commutant pour un système avec bruit de mesure. La difficulté du problème réside dans le fait que le bruit de mesure entre de façon non linéaire dans le système. Par conséquent, l'équation de FPK ne peut être utilisée directement. Il a fallu développer une nouvelle méthode analogue à une approximation de Taylor, mais stochastique. Ce qui donne une expression analytique qui doit être résolue numériquement, diminuant considérablement le temps pour obtenir une FDP comparé au temps d'une simulation de Monte-Carlo. Cette expression analytique a été validée et il a été possible d'analyser certains effets du système sur la FDP, le plus important étant que le bruit de mesure avec un contrôleur non linéaire induit une translation de la FDP. Le troisième objectif est d'analyser l'optimalité d'une FDP asymétrique face à une FDP symétrique. Il a été plutôt prouvé qu'une FDP symétrique n'est pas optimale sous certaines conditions. Cela veut dire que sous certaines conditions, un contrôleur non linéaire asymé-

trique va donner de meilleurs résultats qu'un contrôleur symétrique. Ces trois conditions sont la présence de bruit de procédé, l'asymétrie de la fonction coût et la présence de la variable manipulée dans la fonction à minimiser. Si une de ces conditions n'est pas respectée, alors le contrôleur symétrique redevient optimal.

Le quatrième objectif est l'extension du troisième objectif avec du bruit de mesure. Le problème est que l'expression analytique n'est pas intégrable comme dans le cas précédent. Alors, seulement les résultats des résolutions numériques des expressions développées sont utilisées. Ceux-ci ont permis d'affirmer que ces mêmes conditions sont valables quand il y a du bruit de mesure. Cependant, l'utilisation d'un contrôleur asymétrique est moins avantageuse quand le bruit de mesure est élevé. Par la suite, l'optimalité du système a été testée sans la condition sur la variable manipulée. Il a été observé que le contrôleur asymétrique est optimal seulement s'il est possible qu'un des deux gains soit supérieur au gain à variance minimale, ce qui va à l'encontre des théorèmes mathématiques développés à propos de la variance minimale. Cela montre les limites de l'approximation développée.

En conclusion, il a été possible de développer une expression analytique de la forme de la FDP d'un système avec un contrôleur commutant, et ce pour les cas sans et avec bruit de mesure. De plus, il a été possible de poser les conditions sous lesquelles un contrôleur asymétrique est optimal.

## ABSTRACT

Chemical processes are constantly submitted to the variability of the operating conditions, for example : reactants concentration, activity of the catalysts. It results that the reactions products also show variability. This variability has a cost since if the product concentration violates certain constraints, it becomes a litigious risk if it is sold to the customer. One of the methods to calculate the cost of variability necessitate the utilization of the probability density function (PDF). Switching controllers are used in the industry in scenarios where there are constraints to satisfy. Consequently, the objective of this thesis is the analysis of PDF produced by switching controllers with noisy processes.

The first objective is to develop an analytical expression for the PDF of a system with process noise and a switching controller. It has been obtained with the Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK) equation. This expression has been applied to an example of PDF shaping. Therefore, two types of non linearity were compared . It has came to light that the switching controller is more robust than a polynomial controller (where the manipulated variable is a function of a polynomial expression of the error), but it has difficulties to emulate complex PDF like a bimodal PDF.

The second objective is to develop an analytical expression for a switching controller and a process and measurement noise. The difficulty of the problem comes from the fact that the measurement noise enters the system nonlinearly, meaning that the FPK equation cannot be used directly. It has been necessary to develop a method which is analog to the Taylor approximation but in a stochastic context. An analytical expression has been obtained, but it it has to be resolved numerically. It reduces considerably the computing time to obtain a PDF compared to the Monte-Carlo method. The analytical expression has been validated and it has been possible to analyze certain effects of the system on the PDF. The most important is that the measurement noise and a nonlinear controller will induce a translation of the PDF.

The third objective is to analyze the optimality of an asymmetrical PDF vis-à-vis the a symmetrical one. It has been proved that, under certain conditions, a symmetrical PDF is not optimal, which means that under those same conditions, an asymmetrical controller will

give better results than a symmetrical one. Those conditions are the presence of process noise, an asymmetrical cost function and this cost function has to take account of the manipulated variable. If one of those condition is absent, the symmetrical controller remains optimal.

The fourth objective is the extension of the previous results to the case with measurement noise. The problem is that there was no analytical expression that could be used as previously. So, numerical solutions were used. They have allowed to affirm that the three conditions are also valid with measurement noise, but the measurement noise decrease the economical difference with the symmetrical controller. After, the manipulated variable has been removed to see if the switching controller remains optimal. It has been observed that the asymmetrical controller remains optimal only if one the the gain is higher than the minimum variance gain. Which goes against the minimum variance theory and shows the limits of the developed approach.

In conclusion, it has been possible to develop an analytical expression of the shape of the PDF of a system with a switching controller, and this for the cases with and without measurement noise. It has been possible to obtain see the effects of the measurement noise like the shift, and also to pose conditions under a switching controller is optimal vis-à-vis a constant controller.



## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xv
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xviii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .	9
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Coût de la variabilité . . . . .	9
1.2.1 Méthode avec la réduction de variance . . . . .	11
1.2.2 Méthode par utilisation de fonction de densité de probabilité . . . . .	13
1.3 Formage de fonction de densité de probabilité . . . . .	17
1.3.1 Formage de fonction de densité de probabilité dynamique . . . . .	20
1.3.2 Formage de fonction de densité de probabilité statique . . . . .	21
1.3.2.1 Méthode avec l'équation de FPK . . . . .	21
1.3.2.2 Méthode avec l'approximation de Gram-Charlier . . . . .	23
1.3.3 Solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov . . . . .	24
CHAPITRE 2 FDP PAR L'ÉQUATION DE FPK . . . . .	25
2.1 Introduction . . . . .	25

2.2	Solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov . . . . .	25
2.2.1	Modèle . . . . .	28
2.3	Validation avec un système avec bruit de procédé seulement . . . . .	29
2.3.1	Effets non linéaires . . . . .	29
2.3.1.1	Contrôleur linéaire . . . . .	30
2.3.1.2	Contrôleur polynomial . . . . .	30
2.3.1.3	Validation . . . . .	31
2.3.2	Effet de discontinuité . . . . .	33
2.3.2.1	Contrôleur commutant . . . . .	33
2.3.2.2	Variable manipulée avec un contrôleur commutant . . . . .	34
2.4	Système avec bruit de procédé et bruit de mesure . . . . .	37
2.4.1	Cas contrôleur linéaire avec bruit de mesure et de procédé . . . . .	39
2.4.2	Exemple avec contrôleur quadratique . . . . .	42
2.4.3	Exemple avec contrôleur commutant . . . . .	45
2.4.4	Exemple avec procédé du second ordre . . . . .	46
2.5	Conclusion . . . . .	49
CHAPITRE 3 FORMAGE DE FDP . . . . .		51
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Formage de fonction de densité de probabilité . . . . .	54
3.2.1	Conception des contrôleurs non linéaires . . . . .	54
3.2.2	Méthodes utilisées pour émuler la FDP . . . . .	56
3.2.2.1	Minimisation directe du carré de l'erreur . . . . .	56
3.2.2.2	Couplage des coefficients de Gram Charlier . . . . .	57
3.3	Exemple . . . . .	60
3.3.1	Formulation du problème . . . . .	60
3.3.2	Résultats pour une FDP faiblement non gaussienne . . . . .	61
3.3.3	Résultats avec une FDP cible triangulaire . . . . .	64
3.3.4	Résultats avec une FDP bimodale . . . . .	66
3.3.5	Discussion . . . . .	67

3.4	Conclusion . . . . .	68
CHAPITRE 4 EFFETS DU BRUIT DE MESURE . . . . .		69
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Analyse des effets du bruit de mesure sur le biais . . . . .	70
4.3	Résultats de simulation . . . . .	74
4.3.1	Effets du bruit de mesure . . . . .	74
4.3.2	Effets du bruit de procédé . . . . .	76
4.3.3	Effet de la non-linéarité . . . . .	76
4.3.4	Effet sur les performances économiques . . . . .	77
4.4	Conclusion . . . . .	79
CHAPITRE 5 OPTIMALITÉ D'UNE FDP ASYMÉTRIQUE . . . . .		80
5.1	Introduction . . . . .	80
5.2	Formulation du problème . . . . .	82
5.3	Contrôleur utilisé . . . . .	83
5.4	Solutions analytiques développées . . . . .	84
5.5	Non optimalité de la solution symétrique . . . . .	86
5.6	Exemple . . . . .	89
5.6.1	Design du contrôleur . . . . .	90
5.6.2	Résultats . . . . .	90
5.7	Conclusion . . . . .	91
CHAPITRE 6 OPTIMALITÉ AVEC BRUIT DE MESURE . . . . .		93
6.1	Introduction . . . . .	93
6.2	Approche de la problématique . . . . .	93
6.3	Extension des 3 conditions au cas avec bruit de mesure . . . . .	94
6.3.1	Résultats . . . . .	95
6.4	Problème sans composante de la variable manipulée . . . . .	98
6.4.1	Fonction coût . . . . .	100
6.4.2	Système . . . . .	100

6.4.3	Développement de la preuve . . . . .	102
6.4.4	Résultats . . . . .	104
6.4.4.1	Fonction coût . . . . .	105
6.4.5	Validation . . . . .	105
6.5	Conclusion . . . . .	108
CHAPITRE 7 CONCLUSION . . . . .		109
7.1	Introduction . . . . .	109
7.2	Contributions . . . . .	109
7.2.1	Outils . . . . .	109
7.2.2	Analyses . . . . .	110
7.3	Travaux futurs . . . . .	111
BIBLIOGRAPHIE . . . . .		114

## LISTE DES FIGURES

Figure 1	Variations de la concentration de chlore durant une journée . . . . .	2
Figure 2	Boucle de contrôle . . . . .	3
Figure 3	Fonction coût pour un produit sensible à la chaleur . . . . .	5
Figure 1.1	FDP avant et après amélioration du procédé de séchage . . . . .	10
Figure 1.2	Rapprochement du point de consigne dû à une diminution de la variabilité . . . . .	13
Figure 1.3	Fonction économique du procédé de séchage du papier . . . . .	15
Figure 1.4	Fonction espérance de coût pour la FDP du % humidité avant et après améliorations . . . . .	16
Figure 2.1	Système général . . . . .	28
Figure 2.2	FDP pour le contrôleur linéaire et polynomial, cas avec bruit de procédé	32
Figure 2.3	FDP avec bruit de procédé pour la variable d'état( $x$ ) et la variable manipulée ( $u$ ) . . . . .	36
Figure 2.4	FDP pour le cas contrôleur linéaire avec bruit de mesure et bruit de procédé . . . . .	41
Figure 2.5	FDP un contrôleur quadratique avec bruit de mesure et de procédé .	44
Figure 2.6	FDP pour un contrôleur commutant avec bruit de procédé et bruit de mesure . . . . .	46
Figure 2.7	FDP pour un cas réaction chimique 2ième ordre avec contrôleur commutant . . . . .	49
Figure 3.1	FDP pour le cas avec une FDP cible faiblement asymétrique . . . . .	62
Figure 3.2	Gros-plan sur la moyenne du graphique des FDP pour le cas de la FDP cible faiblement asymétrique . . . . .	63
Figure 3.3	Comportement de la variable manipulée pour le cas de la FDP cible faiblement asymétrique . . . . .	63
Figure 3.4	FDP résultant de la paramétrisation avec un nombre différent de paramètres pour l'approximation de GC . . . . .	65

Figure 3.5	FDP résultant de la paramétrisation avec IEC et différents ordres de contrôleurs pour le contrôleur polynomial . . . . .	65
Figure 3.6	FDP pour contrôleur commutant et polynomial paramétrés avec l'IEC avec FDP cible bimodale . . . . .	67
Figure 4.1	Graphique du pourcentage d'amélioration en tenant compte de la translation pour différents bruits de mesure . . . . .	79
Figure 5.1	Exemple d'une fonction coût asymétrique . . . . .	81
Figure 5.2	FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple. . . . .	91
Figure 5.3	FDP de la variable manipulée pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple. . . . .	92
Figure 6.1	FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, bruit de mesure faible . . . . .	96
Figure 6.2	FDP de la variable manipulée pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, bruit de mesure faible . . . . .	96
Figure 6.3	Différence entre le coût optimum du système à gain simple et le système à contrôleur commutant, bruit de mesure faible . . . . .	97
Figure 6.4	FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, bruit de mesure fort . . . . .	98
Figure 6.5	FDP de la variable manipulée pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, bruit de mesure fort . . . . .	99
Figure 6.6	Différence entre le coût optimum du système à gain simple et le système à contrôleur commutant, bruit de mesure fort . . . . .	99
Figure 6.7	FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, cas sans composante de la variable manipulée . . . . .	106
Figure 6.8	Validation des contrôleurs optimaux . . . . .	106
Figure 6.9	FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant pour deux valeurs de gains à variance minimale . . . . .	107
Figure 6.10	FDP pour le contrôleur à variance minimale et contrôleur commutants avec gains supérieurs au gain à variance minimale . . . . .	108

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

$x$ :	État du système
$u$ :	Variable manipulée
$y$ :	Variable mesurée
$v$ :	Bruit de procédé
$w$ :	Bruit de mesure
$\alpha$ :	Variance du bruit de procédé
$\beta$ :	Variance du bruit de mesure
$p(x)$ :	Fonction de densité de probabilité de $x$
$FDP$ :	Fonction de densité de probabilité
$FPK$ :	Fokker-Planck-Kolmogorov
$k()$ :	Contrôleur du système
$k_a$ :	Gain du contrôleur commutant quand état $>0$
$k_b$ :	Gain du contrôleur commutant quand état $\leq 0$
$k_i$ :	Gain du terme $k_i(x - x_{sp})^i$
$x_{sp}$ :	Point de consigne
$C_{d\sigma}$ :	Coût de la variabilité
$\delta_{x_{sp}}$ :	Rapprochement du point de consigne
$Se$ :	Facteur économique reliant une valeur monétaire au point de consigne
$F_{HS}$ :	Fraction de la population dépassant la contrainte
$p_i(x)$ :	FDP initiale de l'état
$p_i(x)$ :	FDP après amélioration du procédé
$C(x)$ :	Fonction coût
$T$ :	Coûts fixes
$P$ :	Coût de la pénalité quand la contrainte est dépassée
$E[]$ :	Fonction espérance
$J_x$ :	Fonction coût évaluée à $x$

$J_{sp}$ :	Fonction coût évaluée au point de consigne
$M$ :	Indice de la discrétisation du temps
$\Upsilon$ :	Poids pour les fonctions de base de la spline de type B
$\mathfrak{J}$ :	Fonction de base de la spline de type B
$e$ :	Erreur entre la FDP cible et la FDP du système
$t$ :	Temps
$p_0$ :	Constante de normalisation de la FDP.
$p_{0,i}$ :	Constante de normalisation de la FDP spécifique à un type de FDP
$\xi(t)$ :	Procédé de Wiener
$\hat{p}(x)$ :	FDP cible
$p_w$ :	FDP du bruit de mesure
$M(x)$ :	Réponse du système en boucle fermée
$c_i$ :	Poids multipliant les fonctions de base pour l'approximation de Gram-Charlier
$H(x)$ :	Fonction de base pour l'approximation de Gram-Charlier
$N_{\mu,\sigma}$ :	FDP gaussienne avec une moyenne de $\mu$ et un écart type de $\sigma$
$\hbar$ :	Matrice pour transformer les moments centraux en coefficient de l'approximation de Gram-Charlier
$a(x)$ :	Dynamiques libres du système
$b(x)$ :	Dynamiques forcées du système
$f_a(x)$ :	Dynamiques libres d'un système brownien
$g_b(x)$ :	Dynamiques forcées d'un système brownien
$D_1$ :	Coefficient de dérive de Stratonovich de l'équation de FPK
$D_2$ :	Coefficient diffusion de l'équation de FPK
$F(x)$ :	Regroupement de termes pour la solution de l'équation de FPK
$h(x, v, w)$ :	Système dynamique avec bruit de mesure et bruit de procédé
$q$ :	Regroupement de termes pour la solution analytique de la FDP avec bruit de procédé et bruit de mesure et contrôleur quadratique



$r_i$ :	Regroupement de termes pour la solution analytique de la FDP avec bruit de procédé et bruit de mesure et contrôleur quadratique
$g_w(x)$ :	Contribution du bruit de mesure au terme $g_b(x)$
$ISE$ :	Intégrale des moindres carrés
$r(x)$ :	Fonction de pondération de la FDP
$i_i$ :	Regroupement de termes pour calculer les moments
$F(x)$ :	Regroupement de termes pour la solution de l'équation de FPK
$\pi$ :	$\pi$
$\phi$ :	Fonction coût
$\phi$ :	Fonction coût augmentée (avec contrainte)
$l(x)$ :	Partie de la fonction coût reliée à l'état
$h^2(x)$ :	Variance de la variable manipulée
$\gamma$ :	Facteur multipliant la variance de la variable manipulée dans la fonction coût
$\Sigma$ :	Facteur multipliant la partie symétrique de la fonction coût
$\Lambda$ :	Facteur multipliant la partie asymétrique de la fonction coût

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2	Structure de la thèse . . . . .	6
Tableau 1.1	Paramètres de la fonction coût de l'exemple . . . . .	14
Tableau 2.1	Mode et moments centraux pour le contrôleur linéaire et polynomial avec bruit de procédé seulement. . . . .	33
Tableau 2.2	Mode et moments centraux de $x$ et $u$ pour le contrôleur commutant avec bruit de procédé. . . . .	37
Tableau 2.3	Mode et moments centraux pour le contrôleur linéaire avec bruit de procédé et bruit de mesure . . . . .	41
Tableau 2.4	Mode et moments centraux pour le contrôleur quadratique avec bruit de mesure et bruit de procédé . . . . .	44
Tableau 2.5	Mode et moments centraux pour pour le contrôleur commutant avec bruit de procédé et bruit de mesure . . . . .	47
Tableau 2.6	Paramètres du modèle de réaction du deuxième ordre . . . . .	49
Tableau 2.7	Mode et moments centraux pour les résultats analytiques et simulés pour le cas réaction chimique de deuxième ordre avec contrôleur commutant . . . . .	50
Tableau 3.1	Paramètres du modèle procédé réaction de premier ordre . . . . .	60
Tableau 3.2	Paramètres du contrôleur polynomial pour le cas avec une FDP cible faiblement asymétrique . . . . .	62
Tableau 3.3	Paramètres du contrôleur commutant pour le cas avec une FDP cible faiblement asymétrique . . . . .	62
Tableau 4.1	Variations des moments centraux et du mode par rapport au bruit de mesure pour un système avec un contrôleur quadratique . . . . .	75
Tableau 4.2	Variations des moments centraux et du mode par rapport au bruit de mesure pour un contrôleur commutant . . . . .	75
Tableau 4.3	Moments centraux et mode par rapport au bruit de procédé pour le contrôleur quadratique . . . . .	76

Tableau 4.4	Moments centraux et mode par rapport au bruit de procédé pour le contrôleur commutant . . . . .	76
Tableau 4.5	Moment centraux et mode par rapport à la non-linéarité du contrôleur quadratique . . . . .	77
Tableau 4.6	Moments centraux et mode par rapport au bruit de procédé pour le contrôleur commutant . . . . .	77
Tableau 5.1	Paramètres des contrôleurs et coût associés . . . . .	91
Tableau 6.1	Paramètres des contrôleurs et coût associés, avec bruit de mesure faible	97
Tableau 6.2	Paramètres des contrôleurs et coût associés, bruit de mesure fort . . .	98
Tableau 6.3	Paramètres des contrôleurs et coût associés, sans variable manipulée .	105

## INTRODUCTION

### Contexte

La variabilité est un phénomène intrinsèque à la nature. Cette variabilité se retrouve dans les procédés industriels utilisant des ressources naturelles. Par exemple, les caractéristiques d'un papier dépendent de la qualité du bois qui le compose. La température, la qualité du sol et l'ensoleillement d'une région peuvent varier selon la présence de montagnes, rivières ou marais, influençant la composition des arbres qui y poussent. Et celle-ci influence la qualité du papier produit. D'un autre côté, il y a un autre type de variabilité qui est induite directement par les changements de conditions de procédé en modifiant des paramètres d'opération afin de changer la quantité de papier produit ou le grade du papier produit. Dans cette optique, cette variabilité pourrait être prédite avec la modélisation du procédé. Ainsi, les procédés chimiques sont soumis à deux types de variabilité l'une probabilistique et l'autre déterministe.

La variabilité déterministe est un oxymore. Dans les faits, l'acte de changer de grade de produit induit des changements dans tout le procédé. Ainsi, la qualité du produit va varier à cause de ces changements. En d'autres mots, c'est la variabilité d'un procédé qui est due à l'opération du procédé même. Ce type de variabilité est traité par l'optimisation en régime permanent, la gestion de chaîne d'approvisionnement et le design de procédé. Ce n'est pas ce type de variabilité qui sera traité dans ce travail de recherche.

La variabilité probabiliste d'un procédé vient de toute autre source que celle induite par le changement volontaire des conditions d'opération. Elle vient des conditions météorologiques, des concentrations des réactifs, de l'activité des catalyseurs, etc. La différence entre la variabilité décrite plus haut est que ces variations ne peuvent être liées à des changements sur l'opération du procédé. Si seulement la moyenne est analysée, cette variabilité ne serait pas visible. Pourtant à cause de son imprévisibilité, elle a beaucoup d'impact, il faut poser les points de consigne relativement éloignés des contraintes afin de ne pas les dépasser. C'est de cette variabilité qu'on traitera dans ce projet de recherche.

Voici un exemple afin de mieux comprendre la différence entre ces deux types de variabilité. Dans une usine de filtration où la quantité de chlore injectée dans l'eau ne varie pas, la concentration de chlore de l'eau produite dépend du débit d'eau produite. Cette concentration est tracée en fonction du temps (une journée) à la figure 1. La quantité de d'eau produite est augmentée à 12h00. Ce qui induit une baisse de la concentration de chlore. Ainsi, la variabilité déterministe est représentée par la baisse de la concentration de chlore à 12h00 tandis que la variabilité probabiliste est représentée par toutes les autres variations qui ne peuvent être expliquées par l'opération du procédé.

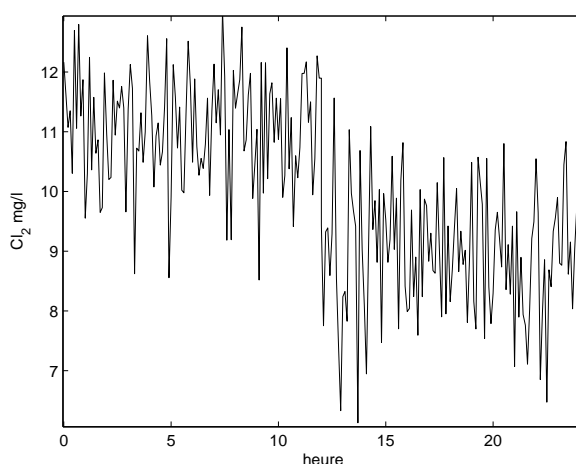


Figure 1 Variations de la concentration de chlore durant une journée

Cette variabilité est souvent mitigée par des boucles de contrôle, voir figure 2. Leur but principal est de manipuler certains paramètres de procédé afin de réduire la variabilité pour qu'elle se retrouve le moins possible dans le produit fini. Ces boucles de contrôle sont formées d'un élément de mesure. Cet élément transforme la mesure physique en signal (électrique, pneumatique, etc) qui est relayé au contrôleur. À ce signal, s'ajoute souvent une autre variabilité, le bruit de mesure. Le bruit de mesure vient du fait qu'il y a toujours des variations qui s'ajoutent à la mesure. Leur source est diverse ; ce peut être l'élément de mesure qui induit un courant électrique ou un équipement mécanique dans l'usine qui fait vibrer le capteur. Comme il a déjà été dit, ce signal est envoyé au contrôleur. Celui-ci transforme mathématiquement le signal de mesure en un signal de commande qui est envoyé à un élément de contrôle. Cet élément est souvent une vanne, un élément chauffant ou une pompe. Et l'élé-

ment réagit en réponse au signal envoyé. Le résultat final est que la perturbation s'en trouve atténuée.

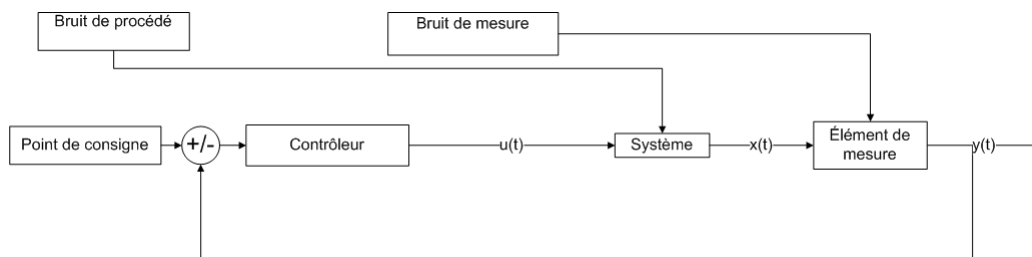


Figure 2 Boucle de contrôle

La détermination du gain économique dû à la diminution de la variabilité est une discipline importante en contrôle de procédé. Elle consiste à calculer le gain monétaire quand la variabilité diminue. Celui-ci justifie l'investissement pour de meilleures stratégies de contrôle (Senyard Sr et Senyard, 1983). Ce gain provient essentiellement de deux sources. La première est la diminution de produits hors-spécification, réduisant les coûts de re-transformation. La deuxième est le rapprochement du point de consigne vers les contraintes, réduisant les coûts de sur-transformation. Les méthodes les plus précises requièrent le maximum d'informations statistiques sur le système, c'est-à-dire, la fonction de densité de probabilité du système et la fonction coût associée à ce système (Zhou et Forbes, 2003).

Les recherches dans ce domaine vont au-delà de la simple réduction de la variabilité. Plusieurs stratégies de contrôle ont été développées afin de réduire la variabilité (Ogunnaike et Ray, 1994). La commande prédictive (Batina et al., 2002) et les contrôleurs à variance minimale (Harris et Yu, 2007) n'en sont que quelques exemples. Dans le cadre de ce projet de recherche, on s'intéresse plus particulièrement aux contrôleurs commutants. Les contrôleurs commutants sont des contrôleurs qui changent leur paramétrisation selon l'état du système. Ainsi, ils peuvent réagir agressivement dans certains cas (quand la variable contrôlée s'approche d'une contrainte du système) et doucement pour d'autres (pour ménager la variable manipulée) (Koumboulis et Tzamtzi, 2005). Par exemple, la plupart des conducteurs d'automobile appuient plus fortement sur le frein quand ils dépassent la limite de vitesse que lorsqu'ils appuient sur l'accélérateur pour augmenter leur vitesse. C'est pourquoi ce type de contrôleur est utilisé dans les procédés chimiques (Koumboulis et Tzamtzi, 2005) autant que

pour le contrôle de trajectoire pour véhicule autonome (Garone et al., 2010). Malheureusement, peu de travaux traitent des propriétés d'une FDP résultant d'un système régulé avec contrôleur commutant. La plupart traitent de la stabilité du système, de l'optimalité du système (Sun et Ge, 2005) ou de leur application avec des systèmes non linéaires (Ye, 2005). Il y a les travaux de Liberzon (Liberzon, 1998), mais ceux-ci sont pour des variables manipulées quantifiées (*quantized*), ce qui n'est pas le cas dans ce projet de recherche.

Un autre point d'intérêt est l'analyse stochastique d'un contrôleur non linéaire (cela comprend les contrôleurs commutants) par rapport au coût de la variabilité. La plupart des fonctions coût sont non linéaires (Latour, 1992). C'est-à-dire que même si le coût d'opération est linéaire, il y a souvent une contrainte à ne pas dépasser. Par exemple, le coût d'entreposage d'un produit se dégradant à la chaleur est tracé en fonction de la température à la figure 3. Si la température dépasse 11 degrés Celsius, le produit se dégrade; cependant, plus la température est froide, plus il coûte cher d'entreposer le produit. De plus, les non-linéarités dans les stratégies de contrôle avancées induisent une asymétrie dans la FDP de l'état (Forbes, 2003). Ce qui rend nécessaire l'étude de la fonction de densité de probabilité. L'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov est utilisée pour relier le système à sa FDP. L'intérêt pour l'équation de FPK a réellement commencé au milieu des années 1950 (Soong, 1973) où elle a été appliquée à des problèmes d'acoustique, de mécanique des bâtiments et de sismologie. Cet intérêt a favorisé l'analyse mathématique de l'équation de FPK (Caughey, 1963; Wong et Zakai, 1965). La contribution dans ce domaine la plus importante par rapport à ce projet de recherche est celle de Stratonovich, qui lui a reformulé l'équation de FPK, pour être solutionnée sans calcul d'Îto (Stratonovich, 1966). Cet intérêt pour l'équation de FPK est toujours présent aujourd'hui (Kumar et al., 2009b; Zhu et al., 2010).

Le dernier point d'intérêt sont les travaux exécutés avec le but d'optimiser le système procédé-contrôleur face à une fonction coût. La première approche consiste à optimiser directement le système face à la fonction coût (Speyer et al., 1974; Batina et al., 2002). La deuxième approche consiste à poser une fonction de densité de probabilité cible et trouver ensuite les paramètres du système de sorte que la fonction de densité de la variable ressemble le plus à la FDP cible. Ce domaine s'appelle le formage de fonction de densité. Son principe est l'ajout d'une

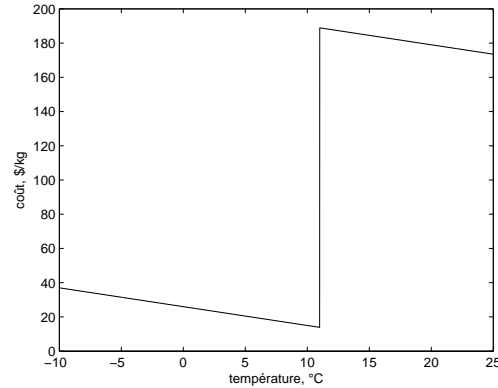


Figure 3 Fonction coût pour un produit sensible à la chaleur

non-linéarité dans un système afin que la FDP du système émule le mieux possible une FDP cible. La plupart des méthodes diffèrent sur la non-linéarité utilisée et sa paramétrisation.

#### *Définition du problème*

On trouve peu de travaux liés à l'analyse d'un contrôleur commutant dans un cadre stochastique. De plus, la plupart des travaux traitent le problème de l'optimisation d'une fonction quadratique continue, ce qui n'est pas nécessairement le cas quand il y a des contraintes. Premièrement, il y a l'absence du développement analytique d'une expression de la FDP où il y a une discontinuité dans le système. En d'autres mots, on ne trouve pas d'expression analytique de la FDP d'un système avec un contrôleur commutant. Cette absence fait en sorte qu'il n'est pas possible de vérifier l'optimalité d'un système à contrôleur commutant face à un système à gain simple. L'ajout de bruit de mesure complique encore plus les choses car le bruit de mesure entre de façon non linéaire dans le système et l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) ne peut être directement utilisée, celle-ci requérant que le bruit entre de façon linéaire. Par conséquent, il faut modifier la représentation du système afin qu'il soit possible d'utiliser l'équation de FPK. Par la suite, il est possible d'avoir une expression analytique. Celle-ci permet l'analyse de l'optimalité des contrôleurs commutants dans un cadre où il y a du bruit de mesure.

Finalement, il n'y a pas d'analyse qui a été réalisée afin de savoir si une FDP asymétrique est optimale par rapport à une FDP symétrique. Certains travaux comme ceux de Speyer et al.



(1974) abordent le problème avec une approche linéaire quadratique. Cependant, aucune preuve d'optimalité n'a été développée. Avec une telle preuve, il serait possible de voir sous quelles conditions l'optimalité est atteinte. Cette analyse requiert des outils qui doivent être développés pour des cas de contrôleurs commutants avec ou sans bruit de mesure. Une fois cette analyse faite, il sera possible d'affirmer si une FDP asymétrique peut être optimale face à une FDP symétrique. L'intérêt vient du contrôleur à variance minimale qui est le contrôleur qui a la plus petite variance pour le cas où le procédé a du bruit de mesure. Il serait intéressant de voir s'il est possible d'obtenir une variance plus petite que la variance minimale à l'aide de contrôleurs non linéaires.

### *Objectif principal*

L'objectif principal est l'étude de l'influence d'un contrôleur commutant sur l'optimalité en présence de bruit de mesure et de bruit de procédé.

### **Objectifs spécifiques et structure de la thèse**

Par rapport à cet objectif, il y a deux objectifs secondaires, le développement d'une expression analytique de la FDP et l'analyse d'optimalité qui se divisent, selon qu'il y a du bruit de mesure ou pas :

	Système avec bruit de procédé seulement	Système avec bruit de procédé et bruit de mesure
Expression de la FDP	Chapitre 3	Chapitre 4
Optimalité	Chapitre 5	Chapitre 6

Tableau 2 Structure de la thèse

Chapitre 1 : Le premier chapitre porte la revue de littérature. Un état des connaissances est fait pour : le coût de la variabilité, le formage de fonction de densité de probabilité, la solution analytique de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov et les contrôleurs commutants.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, l'équation de FPK est développée. Premièrement pour le cas avec contrôleur non linéaire et bruit de procédé seulement. Par la suite, une nouvelle méthode d'approximation est développée afin d'appliquer l'équation de FPK à un système avec contrô-

leur non linéaire, bruit de mesure et bruit de procédé. Avec cette nouvelle approximation, il est possible d'avoir une expression analytique de ce système.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, l'expression pour un système avec contrôleur non linéaire et bruit de procédé est utilisée dans un cadre de formage de FDP. Ainsi, on peut analyser les non-linéarités par rapport à leurs capacités à émuler une FDP prédéterminée. Deux types de contrôleurs non linéaires seront analysés : un contrôleur polynomial et un contrôleur commutant.

Chapitre 4 : Dans ce chapitre, l'expression pour un système avec un contrôleur non linéaire, bruit de mesure et bruit de procédé est utilisée. C'est ainsi que divers facteurs qui influencent la forme de la FDP sont analysés : le bruit de mesure, la non-linéarité et le bruit de procédé. De plus, chaque facteur est analysé sur un contrôleur quadratique et un contrôleur commutant.

Chapitre 5 : Dans ce chapitre, l'expression d'une FDP pour un système avec contrôleur non linéaire et bruit de procédé est utilisée pour trouver les conditions où une structure de contrôleur non linéaire est optimale par rapport à un contrôleur linéaire. Ainsi, trois conditions sont trouvées avec lesquelles un contrôleur non linéaire va donner de meilleurs résultats qu'un contrôleur linéaire.

Chapitre 6 : Dans ce chapitre, les conditions développées au chapitre précédent sont étendues au problème d'optimalité avec bruits de procédé et de mesure. Ainsi, les trois conditions précédentes sont appliquées au système avec bruits de procédé et de mesure. C'est ainsi qu'on a pu tester ces conditions face au contrôleur à variance minimale. Il en résulte qu'un contrôleur commutant peut donner de meilleurs résultats que le contrôleur à variance minimale sous les mêmes conditions que le chapitre 5. D'autres tests ont été faits en modifiant ces conditions, mais ils n'ont menés qu'à la découverte des limites de l'approximation développée au chapitre 2.

Finalement, la conclusion est consacrée aux contributions et aux travaux futurs.

## Contributions

Les principales contributions de cette thèse ont été identifiées comme suit :

1. Développement et analyse d'un algorithme de formage de FDP à partir de FPK pour un contrôleur commutant.
2. Développement et analyse de la solution analytique d'un contrôleur non linéaire pour un système avec bruit de mesure.
3. Développement des conditions d'optimalité d'une FDP asymétrique.

## CHAPITRE 1

### REVUE DE LITTÉRATURE

#### 1.1 Introduction

Le coût de la variabilité, qui justifie l'investissement en contrôle de procédé, est le premier concept décrit. Plusieurs méthodes ont été développées. L'une d'elles lie ce coût à la fonction de densité de probabilité (FDP) d'une variable, justifiant l'intérêt à changer la forme de la FDP. Ce domaine est le formage de FDP. C'est un concept où la forme de la fonction de densité de probabilité d'un système est choisie en introduisant une non-linéarité.

Considérons un exemple simple. Pour un système de séchage du papier, le pourcentage d'humidité ne peut pas dépasser 11 %. Sinon, le papier sera rejeté par l'imprimeur. À la suite d'un programme d'améliorations apportées au procédé, la variance du pourcentage d'humidité a diminué, faisant passer la fonction de densité de probabilité de  $p_i(x)$  à  $p_m(x)$  (voir fig 1.1). Cette baisse peut être due à l'amélioration ou l'optimisation du procédé, comme le remplacement d'une vanne, reparamétrisation de la boucle de contrôle, utilisation de réactifs avec des concentrations moins variables, etc. Cette amélioration a diminué la fraction hors spécification. Cependant, il demeure plusieurs questions. Quel est le gain économique de cette amélioration ? Est-ce qu'il est possible d'optimiser le point de consigne ? Est-ce que la forme de la FDP est optimale ? C'est à ces questions qu'il sera tenté de répondre dans ce chapitre.

#### 1.2 Coût de la variabilité

Le terme « coût de la variabilité » est défini par le gain économique dû à une diminution de la variabilité d'un procédé. Le coût d'opération avant étant représenté par  $J_{avant}$  et le coût après améliorations étant représenté par  $J_{opt}$ .  $J$  est un coût d'opération, représenté par  $C()$  optimisé par rapport à  $s$  un paramètre d'opération quelconque :

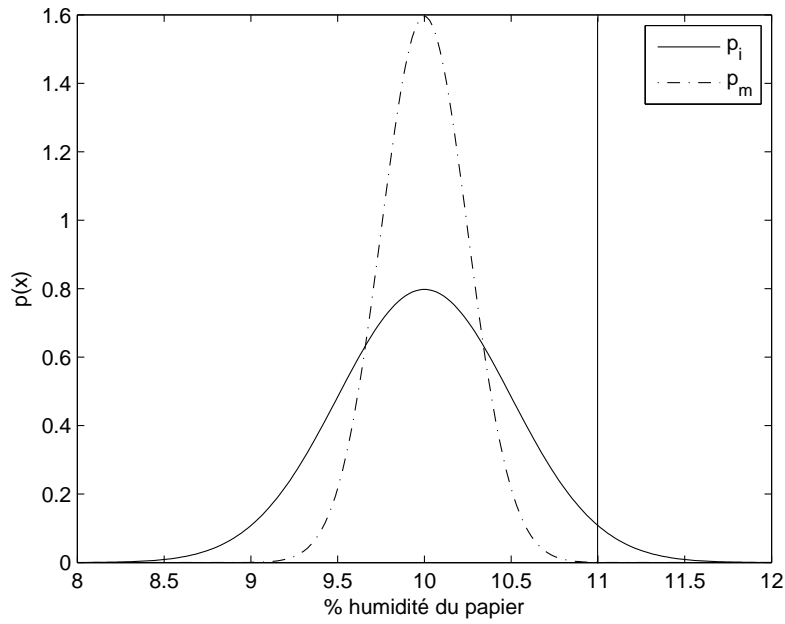


Figure 1.1 FDP avant et après amélioration du procédé de séchage

$$J_{opt} = \min_{\text{Paramètres d'opération}} \int_{-\infty}^{\infty} C(s) ds \quad (1.1)$$

Et le coût de la variabilité  $CV$  peut être vu comme :

$$CV = J_{avant} - J_{opt} \quad (1.2)$$

Ainsi, en associant une valeur monétaire à un changement à la stratégie de contrôle, l'investissement en contrôle de procédé peut être justifié. C'est pourquoi plusieurs auteurs se sont intéressés au sujet du calcul du gain économique dû à une stratégie de contrôle avancée (Eder, 2003; Bauer et Craig, 2008).

### 1.2.1 Méthode avec la réduction de variance

La première approche est axée sur le calcul du gain économique résultant d'une réduction de la variance. Celle-ci étant plus faible, le point de consigne peut être approché de la contrainte, ce qui fait baisser le coût de production ou augmente les profits. Mathématiquement, le coût de la variabilité  $C_{d\sigma}$  est calculé *par le rapprochement  $\delta x_{sp}$  du point de consigne vers une contrainte et multiplié par un facteur économique  $S_e$*  (Brewsters, 1970).

$$C_{d\sigma} = \delta x_{sp} S_e \quad (1.3)$$

Par conséquent, cette méthode peut être décomposée en deux parties : la première étant de trouver la variance avec la nouvelle stratégie de contrôle pour déterminer le facteur  $\delta x_{sp}$  et la deuxième qui consiste à déterminer le facteur  $S_e$ . Le rapprochement  $\delta x_{sp}$  est calculé de différentes façons (Senyard Sr et Senyard, 1983) : par empirisme (expérience), ou par modélisation. Il est à noter qu'il y a d'autres travaux qui ont une démarche inverse, c'est-à-dire que le gain économique est déterminé après que la stratégie de contrôle avancée soit installée (Craig et Henning, 2000).

La première façon de trouver la réduction de la variance, est de l'estimer par expérience ou par manière empirique. Elle est basée sur l'analyse de données d'opération normales. Souvent, les données demandent un traitement avant de les analyser : filtrage, spectre de fréquence, histogrammes (Stanton, 1990). Par la suite, il ne reste qu'à calculer le rapprochement du point d'opération vers une contrainte. Il existe plusieurs règles, dépendant de la tolérance à dépasser la contrainte, mais elles sont toutes basées sur une baisse de la variance posée (souvent la moitié de la variance actuelle) (Martin et al., 1991). L'avantage principal d'utiliser cette méthode est sa rapidité et le fait qu'elle ne nécessite pas beaucoup de données. Le désavantage est que la méthode est imprécise à cause des hypothèses qui sont posées, comme une distribution normale et une diminution de variance imposée d'avance. En conclusion, les méthodes empiriques sont bonnes pour faire une première estimation du gain possible en utilisant une meilleure stratégie de contrôle.

La deuxième façon de trouver la diminution de la variance est plus complexe mais beaucoup plus précise. Elle se base sur l'utilisation de modèles mathématiques pour simuler la réponse du procédé à une perturbation. Ensuite, le rapprochement du point de consigne vers la contrainte peut être calculé. Cet algorithme a été un des premiers à être utilisé pour déterminer le gain économique de l'amélioration d'un système de contrôle (Brewsters, 1970; Tolfo, 1983; Senyard Sr et Senyard, 1983). Plus récemment, on a utilisé le modèle directement pour calculer la variance après avoir amélioré la stratégie de contrôle d'un procédé (Muske, 2003). L'avantage de ces méthodes est d'avoir une meilleure estimation de la réduction de la variance que les méthodes empiriques. Cependant, le désavantage principal vient de l'hypothèse que tous les signaux du système suivent une loi statistique normale, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Lorsque le point de consigne s'approche d'une contrainte, il est préférable d'avoir une courbe de distribution asymétrique avec une longue queue du côté opposé à la contrainte. Une autre façon est de simuler le système avec différentes entrées aléatoires. Pour chaque entrée, un coût est calculé et mis en graphique. On peut ainsi voir l'étendue des coûts selon la stratégie de contrôle (un meilleur contrôle donnant une distribution plus serrée) (Di Mascio, 2002). Cette méthode n'a pas été retenue étant trop subjective et mal adaptée pour calculer le gain résultant d'une amélioration dynamique du procédé. Donc, l'approche utilisant un modèle est plus précise qu'une méthode empirique, sauf qu'en supposant que toutes les distributions, de la courbe optimale aux perturbations, sont normales, le résultat obtenu peut s'éloigner de la réalité.

Une fois que la diminution de variance est connue, pour y relier un coût, il faut calculer de combien il est possible d'approcher le point de consigne de la contrainte,  $\delta x_{sp}$ . Souvent, le rapprochement est déterminé de sorte que la probabilité de dépasser la contrainte demeure la même. Ainsi, la fraction de produits hors-spécification ne change pas. Cette fraction  $F_{HS}$  se calcule par le calcul de la surface de la fonction de densité de probabilité du système  $p(x)$  qui dépasse la contrainte  $c$ . Par exemple, reprenons le procédé de séchage du papier du début du chapitre. Sauf que maintenant, à la figure 1.2, on a déplacé le point de consigne. Ainsi, le point de consigne a pu passer de 10 à 10.5, sans augmenter la probabilité de dépasser 11 %, ce qui fait qu'il n'y a pas plus de papier hors-spécification, mais il y a moins d'énergie

gaspillée à sur-sécher le papier.

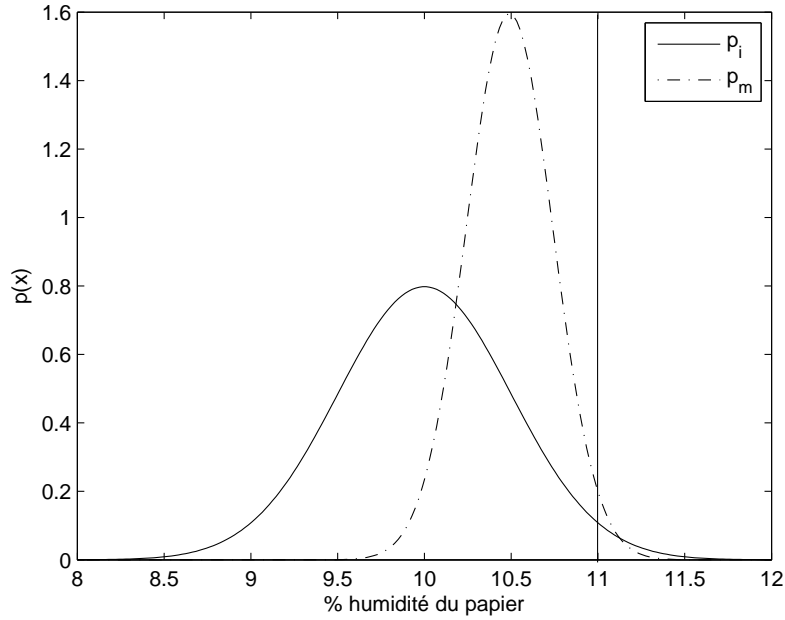


Figure 1.2 Rapprochement du point de consigne dû à une diminution de la variabilité

Mathématiquement, la fraction qui dépasse la contrainte,  $F_{HS}$  est définie par :

$$F_{HS} = \int_c^{\infty} p_m(x) dx = \int_c^{\infty} p_i(x) dx \quad (1.4)$$

Finalement, il ne reste qu'à multiplier le  $\delta x_{sp}$  par le facteur économique  $S_e$  dans l'équation 1.3. Ce facteur est le coût par unité de point de consigne. Conséquemment, dans l'exemple précédent,  $S_e$  est l'énergie utilisée pour enlever un % d'humidité de point de consigne. Donc, plus le papier est humide, moins il coûte cher de le produire (tant que la contrainte n'est pas dépassée).

### 1.2.2 Méthode par utilisation de fonction de densité de probabilité

Contrairement à la méthode précédente, la méthode décrite dans cette section utilise toute la courbe de fonction de densité de probabilité. Quand l'hypothèse d'une distribution normale



est posée, seulement la moyenne et la variance sont utilisées. Négligeant les autres moments, cela peut poser des problèmes avec les distributions non normales, et le gain économique s'en trouve faussé. De plus, la fonction coût comporte souvent une pénalité  $P$  qui n'est pas tenue en compte dans la méthode précédente. Par conséquent, cette nouvelle méthode a besoin d'une fonction coût qui pourra être appliquée sur tous les points de la fonction de densité de probabilité  $p(x)$ . Ainsi, on optimise le point de consigne  $x_{sp}$  selon :

$$J_{opt} = \min_{x_{sp}} \int_{-\infty}^{\infty} C(x)p(x)dx \quad (1.5)$$

$$C(x) = \begin{cases} S_e x + T & \text{si } x < C \\ S_e x + T + P & \text{si } x > C \end{cases} \quad (1.6)$$

Il est à noter que le facteur  $S_e$  est le même que dans l'équation 1.3. Reprenant l'exemple de la section précédente, les valeurs numériques des paramètres de l'équation 1.6 sont présentées au tableau 1.1, ce qui donne la fonction économique présentée à la figure 1.3.

Paramètre	Valeur
$S_e$	$\frac{-0.55\$}{\% \text{humidité}} / t$
$T$	26\$ / t
$P$	175\$ /t
$C$	11% humidité

Tableau 1.1 Paramètres de la fonction coût de l'exemple

La fonction coût s'applique sur toute la courbe de distribution, c'est pourquoi le coût diminue quand la variance diminue même si le point de consigne n'est pas changé. Ceci est dû au fait qu'il y a moins de produits hors spécification, qui nécessitent plus de ressources ou qui doivent être rejetés (Latour, 1992). Ce même auteur a développé une façon de trouver le coût de cette distribution, la méthode CLIFFTENT (Latour, 1996). D'autres ont utilisé l'espérance  $E[f(x)]$  d'une fonction, l'équation 1.7, et ont obtenu le même résultat (Zhou et Forbes, 2003). Quand la méthode d'espérance de coût est appliquée sur plusieurs points  $x$  de consigne, on obtient la fonction espérance de coût. Son minimum est le point de consigne optimal compte tenu

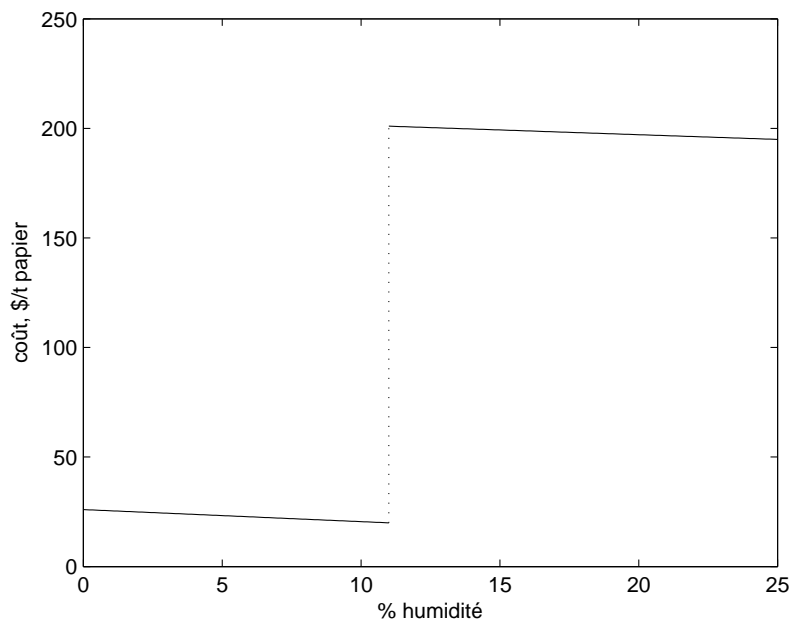


Figure 1.3 Fonction économique du procédé de séchage du papier

de la variabilité présente dans le procédé . Si celle-ci diminue, le point de consigne optimal s'approchera naturellement de la contrainte. Cette démarche ne peut être appliquée que si l'hypothèse de linéarité du procédé et de la stratégie de contrôle est posée. De ce fait, la fonction de distribution de probabilité ne change pas selon le point de consigne. Ensuite, il est possible d'intégrer la fonction de distribution de probabilité à chaque point de consigne. Dans l'exemple précédent, la fonction espérance est donnée à la figure 1.4. On y voit qu'avec une plus faible variance, le point de consigne est plus proche de la contrainte.

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} C(\xi)p(\xi)d\xi \quad (1.7)$$

$p$  est la fonction de densité de probabilité de la fonction de distribution et  $C$  est une fonction économique qui relie le point de consigne avec un profit ou un coût de production. L'approche utilisée par Zhou et Forbes est de calculer l'espérance pour chaque point de consigne de la fonction coût et de trouver le minimum de cette nouvelle fonction par optimisation probabilistique. Ensuite, puisque la fonction de distribution de probabilité est connue, une incertitude

peut être posée sur la justesse du gain économique. L'avantage d'une telle méthode est que toute la cloche de distribution de probabilité est utilisée, donc l'hypothèse d'une courbe normale n'a plus à être posée. De plus, avec la fonction de l'espérance de coût en fonction de point de consigne, le comportement économique du procédé peut être analysé. Le désavantage de cette méthode résulte du fait qu'elle n'optimise pas la forme de la FDP (seulement le point de consigne) afin de faire baisser l'espérance de coût. En conclusion, la méthode décrite est plus adaptée pour calculer le gain économique résultant d'une amélioration de la stratégie de contrôle car elle tient compte de toute la courbe de distribution.

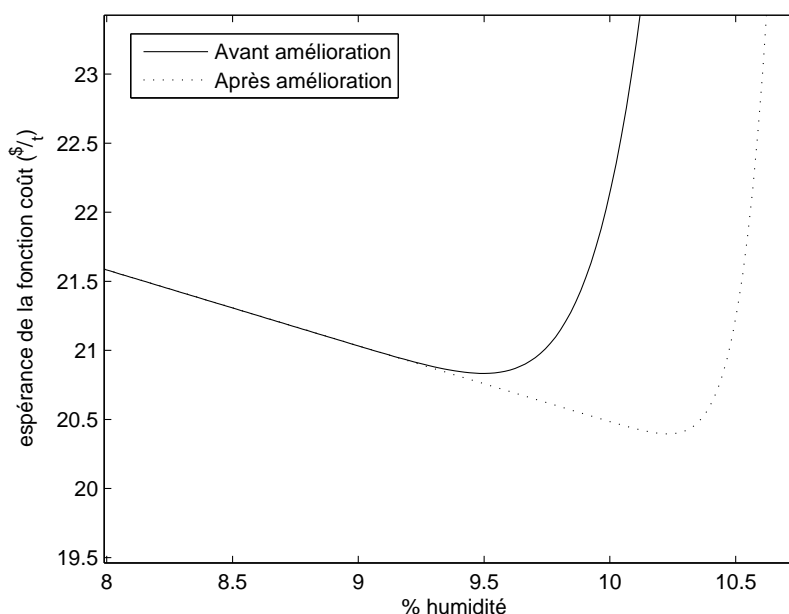


Figure 1.4 Fonction espérance de coût pour la FDP du % humidité avant et après améliorations

L'approche choisie est basée ici sur les travaux de Zhou et Forbes qui utilise la fonction espérance, tandis que la fonction économique s'inspire de la méthode de Latour qui englobe les aspects économiques du procédé. Par conséquent, chaque variable est traduite économiquement par rapport au point de consigne. Par exemple, dans le procédé de séchage, la fonction économique diminue avec une augmentation de la quantité d'eau. Sauf si le pourcentage d'eau dépasse un certain critère, il ne peut pas être vendu au client et il doit être recirculé en tête de chaîne de production. Ces coûts sont directement ajoutés à la fonction économique. La fonction de densité de probabilité  $p(x)$  représente la courbe de distribution face au point de

consigne  $x$ . À cause de la variabilité, l'état du système se situe d'une part et d'autre du point de consigne. La FDP est créée à partir de données d'opération pour faire le cas de base. Selon ce que l'on veut faire, on utilise des données de simulation pour évaluer un projet futur, des données d'opération post-implantation pour évaluer la rentabilité réelle d'un procédé ou une simple courbe avec une variance moindre pour se fixer un objectif de baisse de variance.

À ce point, il est important de répéter le rôle important de la fonction économique. Comme il a déjà été dit, celle-ci présente le coût de production en fonction du point de consigne. Étant donné que les contraintes probabilistes ne sont pas utilisées, il est important de tout traduire en termes économiques, incluant les contraintes de sécurité. L'oubli d'une contrainte de sécurité peut résulter en un point de consigne dangereux. Donc, par pénalisation économique, il faut s'assurer que le point de consigne optimal sera suffisamment éloigné de cette contrainte de sécurité. De l'autre côté, si on pénalise trop cette même contrainte, le point de consigne optimal sera trop loin et entraînera des pertes monétaires. Après, une nouvelle fonction coût, sans contraintes de sécurité ou de qualité, peut être recalculée. Ceci pour calculer une fonction d'espérance de coût de production qui n'a que des coûts réels pour savoir le coût de production sans l'inclusion des coûts associés à la sécurité, satisfaction du client, etc. De plus, dans plusieurs cas, il faut refaire la fonction économique pour le cas simulé. Étant donné que la nouvelle stratégie de contrôle change les conditions d'opération, la fonction économique doit aussi changer.

### 1.3 Formage de fonction de densité de probabilité

Tout d'abord, les premiers essais pour faire du formage de fonction de densité de probabilité ont porté sur la diminution de la variance. Le résultat principal consiste en la variance minimale qui est la variance d'un système excité par un signal aléatoire stationnaire quand le contrôleur est paramétré selon un problème d'optimisation stochastique (Åström, 1970). Ainsi, avec une fonction de densité de probabilité plus étroite, le point de consigne peut s'approcher de la contrainte. C'est pour cette raison que le contrôleur à variance minimale a été développé. L'approche par la variance minimale est basée sur les théorèmes stochastiques

avec l'hypothèse que le système est en régime permanent et que les perturbations aléatoires suivent une loi de distribution normale. Cette variance minimale est, par conséquent, la meilleure performance possible d'un point de vue mathématique. Cependant, il faut paramétrer le contrôleur à partir de données en boucle ouverte pour calculer la variance minimale. Ce fut un obstacle majeur, car les données d'opération en boucle ouverte sont difficiles à obtenir dans un contexte d'opération industrielle. Cet obstacle a été surmonté en adaptant une série chronologique aux données d'opération pour avoir la variance minimale (Harris, 1989). Par la suite, la méthode s'est développée pour des systèmes MIMO (Harris et al., 1996; Huang et al., 1997) et pour les systèmes avec anticipation (Huang et al., 2000). Pour plus de références, le lecteur est invité à lire la revue de littérature d'Harris (Harris et al., 1999). De plus, un contrôleur à variance minimale est généralement très agressif et n'est pas souvent applicable au milieu industriel. Donc, ces méthodes sont bonnes pour calculer la variance minimale résultante de l'installation d'un contrôleur à variance minimale, mais cette borne est souvent non atteignable.

Parallèlement à la démarche de la variance, il y a eu l'optimisation de systèmes où la fonction coût était asymétrique (non quadratique). Ces travaux ne cherchaient pas à trouver la variance minimale, mais à minimiser une fonction coût pour un système bruité. C'est un concept analogue au formage de PDF, dans l'optique qu'il y a du bruit et une structure de contrôle de procédé à optimiser. La grande différence, est que le changement de forme de la fonction de densité de probabilité ne fait pas partie de la démarche de résolution du problème. Cependant, la structure optimale va donner la forme de fonction de densité de probabilité optimale. Les premiers travaux recensés dans ce domaine ont été faits par Jacobson (Jacobson, 1973), où le problème a été traité avec la théorie des jeux et Speyer et al. (1974) où le problème est traité en mettant plus d'emphasis sur la fonction de densité de probabilité. Ensuite, le problème avec bruit de procédé et un bruit dépendant de l'état est traité avec une fonction coût quadratique où il y a des puissances paires (Speyer, 1976). Ensuite, les travaux de Harris (Harris, 1992) ont été faits pour trouver le contrôleur optimal pour des problèmes où la fonction coût n'était pas quadratique. Le contrôleur optimal est une variante du contrôleur à variance minimale. Liberzon (Liberzon et Brockett, 2000) traite un problème spécifique où la

fonction de densité de probabilité du système est analysable et où la variable manipulée est quantifiée. Çimen (Çimen et Banks, 2004) traite le problème où le système est non linéaire, celui-ci est linéarisé par parties et ce sont ces parties qui sont optimisées par la suite. Elbeyli travaille sur des systèmes non linéaires dont la fonction de densité de probabilité est calculée par l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov, et le problème d'optimisation dépend des amplitudes de la sortie et de la variable manipulée (Elbeyli et Sun, 2006). En résumé, la plupart des travaux traitent le problème de l'optimisation d'une fonction quadratique continue, ce n'est pas le cas quand il y a des contraintes.

Par la suite, le formage de fonction de densité de probabilité a évolué afin de choisir les moments autres que la moyenne et la variance. Cette nouvelle approche dans le domaine de contrôle de procédé permet de changer la forme de la fonction de densité de probabilité. Par conséquent, elle a un impact direct sur le coût de la variabilité puisqu'elle permet d'optimiser le coût d'opération en changeant la forme de la fonction de densité de probabilité. Cette méthode est basée sur le paramétrage de la fonction de densité de probabilité désirée. C'est-à-dire que la forme de la FDP désirée est exprimée par un ensemble de paramètres. Ensuite, les paramètres du système sont optimisés pour que la FDP de celui-ci émule la FDP désirée. Finalement, une loi de commande est obtenue permettant au système d'exprimer la fonction de densité de probabilité qui va minimiser le coût d'opération. Peu de publications ont été écrites dans ce domaine. La première mention de la possibilité de former la fonction de densité de probabilité a été faite par Kárný (Kárný, 1996). Ensuite, Wang a développé une stratégie de contrôle avec les poids d'une spline neurale de type B qui paramètre la fonction de densité de probabilité (Wang, 1998, 1999). Crespo (Crespo et Sun, 2002b) utilise l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov pour trouver un contrôleur. Forbes, par un paramétrage de Gram-Charlier, trouve l'équation d'un quotient de polynômes pour le contrôleur (Forbes, 2003; Forbes et al., 2003b, 2004). En résumé, le formage de fonction de densité de probabilité a été réalisé avec ces méthodes, mais aucune méthode à date n'a été reprise par un autre chercheur.

### 1.3.1 Formage de fonction de densité de probabilité dynamique

Un seul parmi les auteurs cités dans le recensement des connaissances scientifiques applique le formage de FDP dynamique. Il s'agit de Wang qui utilise un paramétrage de la FDP cible avec une spline B neurale. Le formage de FDP dynamique transforme les équations pour en dériver la FDP à chaque pas de temps. Par conséquent, la progression de la FDP originale vers la FDP désirée peut être observée.

Avec Wang, le paramétrage de la FDP (ou de sa racine carrée) avec une spline B permet de faire un algorithme qui affecte directement les poids multipliant les fonctions de base. Ce qui fait que la dynamique de la FDP est directement reliée à l'algorithme. Cependant, le choix des fonctions de base se fait par essais et erreurs, donc cette méthode est difficile à mettre en pratique. Plusieurs algorithmes pour trouver le contrôleur ont été développés (Wang, 1998, 1999, 2002; Wang et Jian Hua, 2001; Wang et Wang, 2002a,b; Wang et al., 2009; Zhou et al., 2010; Guo et Wang, 2003, 2005a,b). Voici les grandes lignes du premier algorithme (Wang, 1999).

Soit  $u(m) = [u_1(m), u_2(m), u_3(m), u_m(m)]^T$  le vecteur arbitraire de contrôle en temps discrétisé  $m$  qui contrôle la distribution de  $y$ , un vecteur aléatoire continu borné qui est la sortie du procédé,  $y = [y_1, y_2, y_3, ..y_n]^T$ . Le système stochastique peut être écrit sous la forme :

$$\{u(m)\} \rightarrow \{y\} \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

La fonction de densité de probabilité désirée  $p(y, u(m))$  est définie par :

$$p(y, u(m)) = \sum_{i=1}^{N+1} \clubsuit_i(u(m)) \heartsuit_i(y(m)) + e_0(y, u(m)) \quad (1.9)$$

qui est une spline B de réseaux neuronaux où les  $\clubsuit_i(u(m))$  sont les poids qui multiplient les fonctions de base  $\heartsuit_i(y(m))$ . Les fonctions de base sont trouvées par essais et erreurs. Il n'y

a pas de lien entre elles et le modèle physique (Wang, 2002). Les poids étant une fonction de la variable manipulée, un changement dans la fonction de densité de probabilité (FDP) provient directement d'un changement de la variable manipulée. La valeur  $e_0(y, u(m))$  est l'erreur entre la FDP obtenue et celle désirée. Le contrôleur est défini par la minimisation d'une fonction coût. Deux algorithmes ont été développés, l'un connaissant l'entrée aléatoire du système, l'autre plus robuste décompose la fonction coût afin de minimiser l'impact de l'entrée inconnue. Cela est fait en incorporant les termes influencés par l'entrée inconnue dans la fonction coût. Puisque cette méthode est difficilement applicable aux procédés industriels à cause des fonctions de base, elle n'a pas été analysée plus en profondeur.

### 1.3.2 Formage de fonction de densité de probabilité statique

Le formage de fonction de densité de probabilité (FDP) statique est défini par le design de contrôleur afin d'avoir une FDP en régime stationnaire; la dynamique pour faire passer la FDP à la FDP désirée n'est pas tenue en compte. Dans cette partie, deux méthodes sont décrites : celle de Forbes (Forbes et al., 2004) qui utilise une approximation de Gram-Charlier et celle de Crespo (Crespo et Sun, 2002b) qui utilise l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). Les deux utilisent des polynômes dans leurs algorithmes de formage pour créer la non-linéarité nécessaire pour former une FDP asymétrique.

#### 1.3.2.1 Méthode avec l'équation de FPK

Selon Crespo (Crespo et Sun, 2002b), le système choisi est un procédé de Itô excité par un bruit qui est un procédé de Wiener. Avec l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) et sa solution stationnaire, une équation de la FDP du système est obtenue. Ensuite, le contrôleur est obtenu par la solution d'un problème d'optimisation où l'on veut minimiser l'erreur qui est la différence entre la FDP obtenue et la FDP désirée. Cependant, pour simplifier les calculs afin d'obtenir un contrôleur, l'erreur entre la FDP cible et la FDP d'opération est modifiée. La forme du contrôleur est un polynôme de la variable mesurée et ce sont les



coefficients qui multiplient la mesure. Pour en revenir à la méthode développée par Crespo, voici les grandes lignes :

Considérant le procédé stochastique à une dimension décrit par l'équation d'Itô suivante

$$dz(t) = \{\Xi(z) + K(z)\}dt + d\xi(t) \quad (1.10)$$

où  $z(t)$  est la variable d'état,  $\Xi$  est une fonction non linéaire de  $z$ ,  $K(z)$  est le contrôleur et  $\xi(t)$  est un procédé de Wiener tel que  $E[d\xi(t)] = 0$  et  $E[d\xi(t)d\xi(t')] = 2(t - t')$ . L'équation de FPK associée à ce système est :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial x} [\{\Xi(x) + K(x)\}p] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (1.11)$$

La solution stationnaire de cette équation est la FDP  $p_s$  suivante :

$$p_s(x) = D \exp^{2F(x)} \quad (1.12)$$

$D$  est une constante de normalisation et  $F(x) = \int \{F(x) + U(x)\}dx$  est le potentiel de probabilité. Après, une FDP cible,  $\hat{p}$  est posée ainsi que la structure de l'algorithme de formage. Dans l'exemple cité par Crespo, celui-ci est un polynôme avec un terme de commutation pour tenir compte de l'incertitude du modèle. Ensuite, une fonction d'erreur modifiée,  $E_1$ , est minimisée par une optimisation des coefficients du polynôme.

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x) \sum_{r=0}^N \left[ \frac{d^r}{dz^r} (F - \hat{F}) \right]^2 dz \quad (1.13)$$

### 1.3.2.2 Méthode avec l'approximation de Gram-Charlier

La méthode développée par Forbes (Forbes, 2003; Forbes et al., 2003a,b, 2004)) se base sur l'équation 1.14 et les propriétés orthogonales des fonctions de bases de Gram-Charlier. On se retrouve avec un ensemble d'équations à résoudre en fonction des coefficients qui multiplient les fonctions de base de l'approximation de la FDP par Gram-Charlier.

$$p(x) = \int_{\mathfrak{R}} p_v(x - M(\zeta))p(\zeta)d\zeta \quad (1.14)$$

L'équation 1.14 relie la valeur d'une FDP en boucle fermée à un point  $x$  à l'intégrale de  $\zeta$  sur  $\mathfrak{R}$  de la multiplication de la FDP du bruit entrant dans le système évaluée au point  $x$  moins la réponse du système en boucle fermée évaluée à  $\zeta$  par la FDP en boucle fermée évaluée à  $\zeta$ .

Avec l'approximation de la FDP cible  $\hat{p}$  par une approximation de Gram-Charlier où  $H(x)$  est un polynôme d'Hermite :

$$\hat{p}(x; c) = c^T H(x) N_{\mu, \sigma}(z) \quad (1.15)$$

En choisissant une réponse en boucle fermée avec autant de coefficients à déterminer qu'il y a de fonctions de base pour l'approximation de  $\hat{p}$  par Gram-Charlier, l'équation 1.14 devient :

$$c^T h(x) N_{\mu, \sigma}(z) = \int_{\mathfrak{R}} p_v(z - M(\zeta)) c^T h(\zeta) N_{\mu, \sigma}(\zeta) d\zeta \quad (1.16)$$

Ensuite en invoquant la condition d'orthogonalité des coefficients de l'approximation de Gram-Charlier où  $i$  est  $i$ ème terme de l'approximation :

$$c^i = \int_{\mathfrak{R}} h^i p(\zeta) d\zeta \quad (1.17)$$

L'équation 1.16 devient :

$$c^T = c^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P_w(z - M(\zeta)) c^T h(\zeta) N_{\mu, \sigma} d\zeta dz \quad (1.18)$$

La double intégrale est une matrice  $\tilde{h}$  de dimension  $N \times N$  composée de valeurs réelles.

$$c^T = c^T \tilde{h} \quad (1.19)$$

Le vecteur  $c$  est le vecteur propre de la matrice  $\Gamma$  associé à la valeur propre de 1. Il suffit de résoudre les équations pour trouver la valeur des coefficients du paramétrage en boucle fermée et retrouver l'équation du contrôleur par la suite.

### 1.3.3 Solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov

La solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov est une partie importante de ce projet de recherche. Un chapitre y sera consacré. Alors, pour éviter la redondance, les développements mathématiques seront omis dans cette partie. Donc, l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) permet de calculer la forme de la fonction de densité de probabilité sans simuler le système avec un long vecteur aléatoire. Ainsi, le temps de simulation en est réduit de beaucoup pour avoir la forme de la FDP qui en plus est lisse (l'utilisation de vecteurs aléatoires fait en sorte que la courbe de la FDP est parsemée de petites bosses qui peuvent compliquer (ou fausser) les algorithmes d'optimisation qui utilisent cette même FDP).

## CHAPITRE 2

### FDP PAR L'ÉQUATION DE FPK

#### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). Celle-ci permet de calculer la forme de la fonction de densité de probabilité d'un système dynamique. Cette solution peut être sous forme analytique ou numérique. De plus, la solution a été développée pour plusieurs scénarios pour différents types de bruits et types de contrôleurs. Les scénarios choisis sont élaborés de façon à analyser un aspect spécifique du problème des contrôleurs non linéaires avec des systèmes bruités. Ces analyses seront faites dans les chapitres subséquents.

La structure du chapitre est la suivante. Tout d'abord, le système dynamique général y est présenté. Ceci permet aussi de discuter des limites de l'approche choisie. Ensuite, la dynamique du système est contrôlée par un algorithme de commande linéarisante. Cet ensemble est ensuite développé de façon à calculer sa fonction de densité de probabilité (FDP) avec l'équation de FPK. Finalement, la solution générale de l'équation de FPK est décrite pour être solutionnée pour divers cas. Par après, les solutions spécifiques seront décrites pour expliciter leur application dans le cadre de ce projet de recherche.

#### 2.2 Solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov

La FDP d'un système peut être obtenue avec l'équation de FPK avec la formulation de Stratonovich du terme de dérive. Le système peut être écrit tel que le procédé Brownien suivant :

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)d\theta, \quad t > t_0 \quad (2.1)$$

où  $x$  est une variable scalaire,  $f_a(x, t)$  est une fonction décrivant les dynamiques libres,  $g_b(x, t)$  est une fonction décrivant les dynamiques forcées et  $\theta$  est un procédé Brownien.

L'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov décrit l'évolution temporelle de la fonction de densité de probabilité d'un système. L'évolution de sa FDP en fonction de  $x$  est donnée par

$$\frac{\partial p(x, t; y, \tau)}{\partial t} = D_1 + D_2 \quad (2.2)$$

où  $D_1$  est la forme du coefficient de dérive de Stratonovich (Kumar et al., 2009b; Stratonovich, 1966)

$$D_1 = \frac{-\partial \left[ p(x, t; y, \tau) \left\{ f(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} g(t, x) \right\} \right]}{\partial x} \quad (2.3)$$

et  $D_2$  est le coefficient diffusion :

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [p(x, t; y, \tau) g^2(x, t)]}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

Puisqu'il est posé que le régime est permanent  $\frac{\partial p(x, t; y, \tau)}{\partial t} = 0$ , donc  $D_1 = -D_2$

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(x)}{\partial x} p(x) g(x) \right] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} [p(x) g^2(x)] \quad (2.5)$$

Chaque côté est intégré et le terme de droite est développé.

$$p(x) f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial g(t, x)}{\partial x} p(x) g(x) = \frac{1}{2} g^2(x) \frac{dp(x)}{dx} + \frac{1}{2} 2p(x) g(x) \frac{dg(x)}{dx} + C \quad (2.6)$$

Avec les conditions limites suivantes

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial p(x)}{\partial x} = 0$
3.  $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$

la constante  $C$  est nulle. La dérivée  $\frac{dp(x)}{dx}$  est isolée :

$$\frac{dp(x)}{dx} = \left[ p(x) \left\{ f(x) - \frac{1}{2} g(x) \frac{dg(x)}{dx} \right\} \right] \frac{2}{g^2(x)} \quad (2.7)$$

Les termes sont réarrangés :

$$\frac{dp(x)}{p(x)} = \left\{ \frac{2f(x)}{g^2(x)} - \frac{1}{g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \right\} dx \quad (2.8)$$

La solution de l'équation précédente est :

$$p(x) = p_0 e^{\int_0^x F(\xi) d\xi} \quad (2.9)$$

où

$$F(x) = \frac{2f(x) - g(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}}{g^2(x)} \quad (2.10)$$

et  $p_0$  est la valeur de la FDP à  $x = x_{sp} = 0$ . Puisque  $p_0$  est une constante normalisante qui rend l'intégrale de la FPD à 1, ce paramètre peut être calculé :

$$\frac{1}{p_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{\int_0^x F(\xi) d\xi} dx \quad (2.11)$$

Pour la plupart des développements qui suivront, une valeur pour  $p_0$  ne peut être obtenue analytiquement, celle-ci est alors calculée numériquement.

Il est à noter que pour chaque cas, la formule analytique sera validée avec un exemple. Un vecteur d'une longueur de 100000 points aléatoires est créé et est simulé par le système. S'il y a aussi une deuxième source de bruit, un deuxième vecteur non corrélé est aussi créé. La FDP du système est créée avec la sortie du système.

### 2.2.1 Modèle

Le modèle utilisé est un système scalaire non linéaire avec une entrée contrôlée  $u$  et une entrée bruitée  $w$  de variance  $\alpha$ . La variable mesurée  $y$  est la variable d'état  $x$  à laquelle un bruit de mesure est ajouté,  $v$  avec variance de  $\beta$  comme à la figure 2.1. Il est à noter que les bruits sont deux bruits blanc gaussiens et  $b(x)$  est non nul pour assurer la commandabilité. Le point de consigne est à 0.

$$\frac{dx}{dt} = a(x) + b(x)u + w \quad (2.12)$$

$$y = x + v \quad (2.13)$$

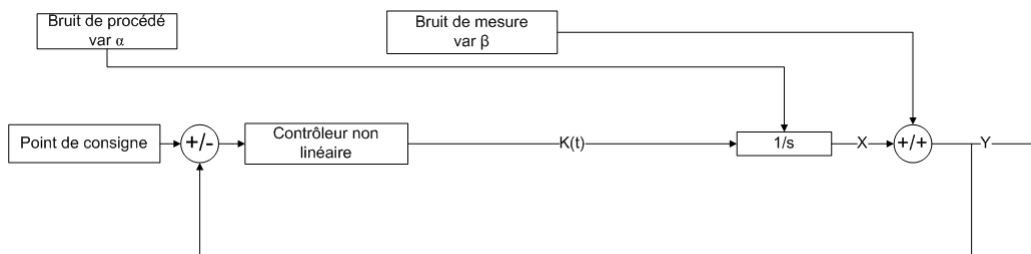


Figure 2.1 Système général

## 2.3 Validation avec un système avec bruit de procédé seulement

On peut appliquer le système précédent directement aux contrôleurs linéaires et même aux contrôleurs non linéaires puisque que le bruit entre de façon linéaire. C'est ainsi que dans cette section la solution de la FDP est développée pour 3 types de contrôleurs : contrôleur linéaire, contrôleur polynomial et contrôleur commutant. Le système est un système intégrateur ( $a = 0$  et  $b = 1$ ) pour simplifier les expressions analytiques. De plus, la variance du bruit de procédé est la même pour tous les cas,  $\alpha = 1$ . Donc, pour ce système la dynamique  $f(x)$  devient :

$$f(x) = -K(y) \quad (2.14)$$

Et la dynamique  $g(x)$

$$g(x) = \sqrt{\alpha} \quad (2.15)$$

On peut voir que peu importe l'algorithme de contrôle, la valeur de  $g(x)$  ne variera jamais.

### 2.3.1 Effets non linéaires

Dans cette section, la solution sera testée pour les non-linéarités. C'est ainsi que la solution développée sera validée sur un système avec un contrôleur linéaire et contrôleur polynomial. Le contrôleur linéaire est validé afin de voir si le solveur numérique (Simulink de MatLab) est fiable.



### 2.3.1.1 Contrôleur linéaire

Le cas le plus simple est un contrôleur linéaire. C'est un contrôleur à rétroaction à gain simple. L'équation du contrôleur est :

$$K(x) = K_0x \quad (2.16)$$

L'équation 2.9 devient donc :

$$p(x) = p_{0,1} \exp \frac{-K_0x^2}{\alpha} \quad (2.17)$$

où

$$p_{0,1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \quad (2.18)$$

avec

$$\sigma = \frac{\alpha}{\sqrt{2K_0}}, \quad (2.19)$$

Il est à noter qu'ici la variance n'est pas bornée, ainsi il serait possible d'avoir une variance nulle avec un gain infini.

### 2.3.1.2 Contrôleur polynomial

Ce type de contrôleur est un contrôleur dont un polynôme multiplie l'erreur par rapport au point de consigne :

$$K(x) = k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + k_4x^4 \quad (2.20)$$

C'est un contrôleur dont la non-linéarité est continue, ce qui simplifie son analyse mathématique. Ainsi, contrairement au cas précédent, la solution de l'équation de FPK pour ce cas est continue. En plus, à cause de sa simplicité l'expression analytique de sa FDP peut être analysée aisément. Pratiquement, c'est un contrôleur peu utilisé parce que sa zone de stabilité est limitée. Il sera comparé au contrôleur commutant au chapitre 3 en ce qui concerne ses capacités à former une FDP donnée.

La solution analytique de l'équation 2.9 pour ce type de contrôleur est :

$$p(x) = p_{0,3} \exp^{\frac{-2}{\alpha} \left\{ k_1 \frac{-x^2}{2} + k_2 \frac{-x^3}{3} + k_3 \frac{-x^4}{4} + k_4 \frac{-x^5}{5} \right\}} \quad (2.21)$$

Cette équation est validée à la section suivante.

### 2.3.1.3 Validation

Pour cette section, le contrôleur linéaire ainsi que le contrôleur polynomial sont validés. La paramétrisation du contrôleur linéaire est  $K = 0.35$ , tandis que la paramétrisation du contrôleur polynomial est  $k_1 = 0.0105$ ,  $k_2 = -0.2401$ ,  $k_3 = 1.3648$  et  $k_4 = 0.0507$ . Un vecteur de valeurs aléatoires d'une longueur de 400000 points est créé comme bruit de procédé. Celui-ci est simulé numériquement dans le système décrit au début de la section pour en obtenir une FDP. Ensuite, celle-ci sert à valider la FDP calculée par la solution analytique. Ces FDP sont à la figure 2.2. Il y a très peu de différences entre les courbes créées avec la solution analytique et celles créées avec la simulation Monte-Carlo. Les moments et le mode sont calculés pour chaque FDP au tableau 2.1. On peut voir que l'effet principal d'une non-linéarité dans le contrôleur ajoute une composante asymétrique à la FDP.

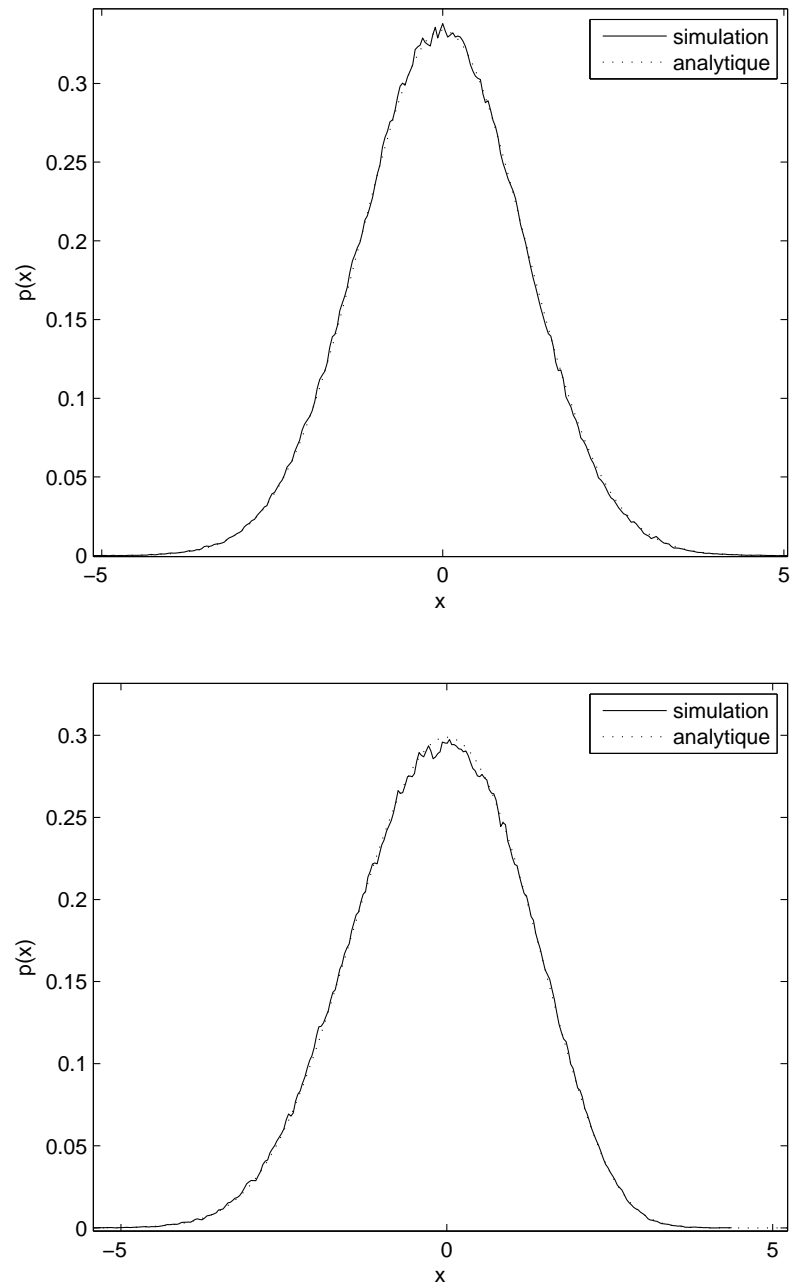


Figure 2.2 Comparaison entre les FDP obtenues analytiquement et par simulation avec bruit de procédé pour le cas contrôleur linéaire (haut) et polynomial (bas)

### 2.3.2 Effet de discontinuité

Pour cette partie, la solution développée précédemment sera validée pour un cas où il y a une discontinuité dans le contrôleur, comme un contrôleur commutant. De plus, l'expression analytique de la FDP de la variable manipulée pour ce type de contrôleur sera aussi validée.

#### 2.3.2.1 Contrôleur commutant

Ce cas est analysé parce que pour plusieurs applications en formage de FDP, il n'y a pas de bruit de mesure,  $\beta = 0$ . L'absence de bruit de mesure simplifie la solution de l'équation de FPK ; cependant, le point de commutation pose problème. Puisque la dérivée est non définie au point de commutation, il faut solutionner l'équation de FPK en deux parties.

Le contrôleur a la forme suivante :

$$K(x) = \begin{cases} K_a \{x - x_{sp}\} & \text{pour } x \geq x_{sp} \\ K_b \{x - x_{sp}\} & \text{pour } x < x_{sp} \end{cases} \quad (2.22)$$

Quand  $x_{sp} = 0$  la solution de l'équation 2.9 devient donc :

		Linéaire	Polynomial
mode	Simulé	0	0
	Analytique	0	0
moyenne	Simulé	-0.02	-0.13
	Analytique	0	-0.12
variance	Simulé	1.42	1.64
	Analytique	1.43	1.61
asymétrie	Simulé	0	-0.33
	Analytique	0	-0.33

Tableau 2.1 Mode et moments centraux pour les résultats analytiques et simulés pour le contrôleur linéaire et polynomial avec bruit de procédé seulement.

$$p(x) = \begin{cases} p_{0,2} \exp^{-k_a \frac{x^2}{2\alpha}} & \text{pour } x \geq x_{sp} \\ p_{0,2} \exp^{-k_b \frac{x^2}{2\alpha}} & \text{pour } x < x_{sp} \end{cases} \quad (2.23)$$

Cette solution peut être interprétée comme une fonction gaussienne par partie divisée au milieu. La variance de chaque côté étant différente; l'écart type de chaque côté peut être calculé tel que :

$$\sigma_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2k_a}}, \quad \sigma_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2k_b}} \quad (2.24)$$

D'ailleurs, la constante de normalisation peut être calculée analytiquement :

$$p_{0,2} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \{\sigma_1 + \sigma_2\}} \quad (2.25)$$

### 2.3.2.2 Variable manipulée avec un contrôleur commutant

Pour une application subséquente, il faudra avoir la FDP de la variable manipulée. C'est pourquoi l'expression analytique de la FDP de la variable manipulée est développée pour ce cas.

Donc, à partir de Borrie (1992)

$$p_u(u) = p(K^{-1}(x)) \left| \frac{dk^{-1}(x)}{dx} \right| \quad (2.26)$$

Plus précisément avec un contrôleur commutant où  $K(x)$  est l'équation 2.22, la solution de l'équation devient donc :

$$p(u) = \begin{cases} \frac{p_{0,u}}{k_a} \exp^{-\frac{-u^2}{2\sigma_{u_a}^2}} & \text{pour } u > 0 \\ \frac{p_{0,u}}{k_b} \exp^{-\frac{-u^2}{2\sigma_{u_b}^2}} & \text{pour } u < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Cette solution peut être interprétée comme une fonction gaussienne par partie divisée au milieu. Cependant, contrairement au cas de la variable d'état, il y a une discontinuité au point de commutation. La variance de chaque côté étant différente, l'écart type de la variable manipulée de chaque côté peut être calculé tel que :

$$\sigma_{u_a} = \frac{\alpha}{\sqrt{2k_a}}, \sigma_{u_b} = \frac{\alpha}{\sqrt{2k_b}} \quad (2.28)$$

D'ailleurs, la constante de normalisation peut être calculée analytiquement :

$$p_{0,u} = \frac{1}{\sqrt{\pi/2} \{ \sigma_{u_a}/k_a + \sigma_{u_b}/k_b \}} \quad (2.29)$$

Pour ce cas, la paramétrisation du contrôleur est  $k_a = 0.6$  et  $k_b = 0.1$  et la longueur du vecteur aléatoire est de 1200000 points. Les FDP simulées et analytiques pour la variable manipulée et l'état sont présentées à la figure 2.3. Les deux formes analytiques représentent bien la simulation numérique. Les queues donnent de bons résultats, ce qui est important car elles représentent souvent la fraction de la production qui dépasse la contrainte. De plus, la discontinuité observée pour la variable manipulée est bien reproduite par l'expression analytique. Les moments sont au tableau 2.2, les résultats sont très bons pour la variable manipulée, mais moins bons pour la variable d'état. Ce pourrait être expliqué par le fait que le simulateur numérique a de la difficulté avec le point de commutation, celui-ci changeant la dynamique du système.

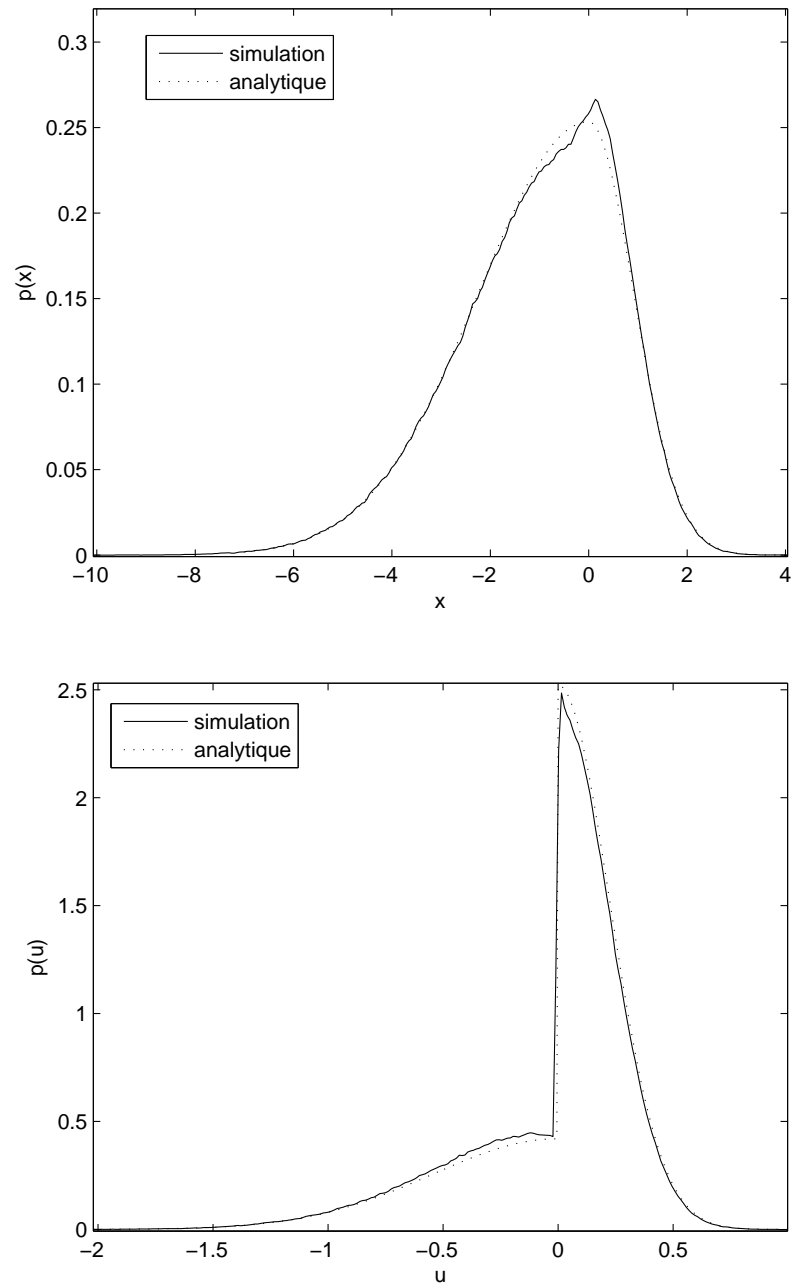


Figure 2.3 Comparaison entre les FDP obtenues analytiquement et par simulation avec bruit de procédé pour la variable d'état( $x$ ) (haut) et la variable manipulée ( $u$ ) (bas)

## 2.4 Système avec bruit de procédé et bruit de mesure

Il a été démontré dans les sections précédentes que si le bruit entre de façon linéaire dans les équations différentielles, la fonction de densité de probabilité (FDP) peut être calculée à l'aide de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK). Cependant, avec l'équation du système 2.12 et un contrôleur non linéaire de la forme  $K(x)$ , le système devient :

$$\frac{dx}{dt} = a(x) - b(x)K(x + v) + w \quad (2.30)$$

C'est ainsi qu'il est possible de voir que si un contrôleur non linéaire est utilisé, le bruit de mesure entre de façon non linéaire dans le système. C'est pourquoi il faut linéariser le système pour tracer la FDP avec l'équation de FPK.

Deuxièmement, il y a deux bruits qui entrent dans le système tandis qu'il y en a un seul dans le système pour lequel l'équation de FPK a été développée (voir équation 2.1). C'est ainsi que les deux bruits sont additionnés sachant que la variance de la somme de deux distributions gaussiennes est la somme de leur variance.

Considérons le système dynamique non linéaire 2.30 s'écrit sous la forme :

		état $x$	manipulée $u$
mode	Simulé	0	0
	Analytique	0	0
moyenne	Simulé	-1.04	-0.02
	Analytique	-1.05	0
variance	Simulé	2.68	0.12
	Analytique	2.62	0.12
asymétrie	Simulé	-2.77	-0.06
	Analytique	-2.38	-0.06

Tableau 2.2 Mode et moments centraux de  $x$  et  $u$  pour les résultats analytiques et simulés pour le contrôleur commutant avec bruit de procédé seulement.



$$\frac{dx}{dt} = h(x, v, w) \quad (2.31)$$

Il est à noter que  $w$  entre linéairement et  $v$  entre non linéairement. Le système solutionné par l'équation de FPK, équation 2.1, a une dynamique non forcée  $f(x)$  et une dynamique forcée  $g(x)$ . L'idée est, à partir de  $h(x)$ , d'avoir une partie non forcée en faisant la moyenne du système et une partie forcée par linéarisation :

$$f(x) = E[h(x, v, 0)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, v, 0)p(v)dv \quad (2.32)$$

De plus, la partie forcée venant du bruit de mesure est calculée comme une approximation de Taylor de premier ordre.

$$g_v(x) = E \left[ \frac{\partial h(x, v, 0)}{\partial v} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h(x, v, 0)}{\partial v} p(v)dv \quad (2.33)$$

La partie forcée venant du bruit de procédé, celui-ci entrant dans le système de façon linéaire est donnée par :

$$g_w = 1 \quad (2.34)$$

La variance du bruit de procédé étant  $\alpha$  et la contribution du bruit de mesure étant  $\beta g_v^2(x)$ , la dynamique forcée aura la forme de :

$$g^2(x) = \alpha + \beta g_v^2(x) \quad (2.35)$$

Il est à noter que pour le bruit de mesure dont la distribution est gaussienne, ces deux équation simplifient le développement d'expression analytiques :  $\int_{-\infty}^{\infty} p(v)dv = 1$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} vp(v)dv = 0$ . Si celui-ci n'est pas gaussien, l'approximation tient toujours, mais il sera plus difficile d'avoir une solution analytique.

### 2.4.1 Cas contrôleur linéaire avec bruit de mesure et de procédé

Le cas le plus simple est quand le contrôleur est linéaire et le système, un intégrateur ( $a = 0$  et  $b = 1$ ). Son développement mathématique permet de voir l'effet de la composante linéaire d'un contrôleur sans se soucier des non-linéarités inhérentes aux contrôleurs non linéaires. Donc, l'équation d'un contrôleur linéaire est :

*Développement des équations avec l'équation de FPK*

$$K(x) = K_0 \quad (2.36)$$

Les paramètres  $f(x)$  et  $g(x)$  prennent la forme

$$f(x) = -K_0x \quad (2.37)$$

et

$$g(x) = \sqrt{\alpha + K_0^2\beta} \quad (2.38)$$

L'équation 2.9 devient donc :

$$p(x) = p_{0,1} \exp^{\frac{-K_0x^2}{\alpha + K_0^2\beta}} \quad (2.39)$$

Il est à noter que pour ce type de système, il existe un gain qui donne la variance minimale pour le système.

$$k_{min} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{b\beta} \quad (2.40)$$

*Développement des équations avec la nouvelle linéarisation*

Pour mieux expliquer cette linéarisation, la méthode est appliquée au système avec bruit de procédé, bruit de mesure et un contrôleur linéaire  $K(y) = K_0y$ . Dans ce cas :

$$h(x, v, w) = a(x) - b(x)K_0x - b(x)K_0v + w \quad (2.41)$$

En appliquant la linéarisation décrite par les équations 2.34 et 2.33 au système précédent 2.41, on se retrouve avec :

$$f(x) = a(x) - b(x)K_0x \quad (2.42)$$

et

$$g_v(x) = b(x)K_0 \quad (2.43)$$

donc

$$g(x) = \sqrt{\alpha + K_0^2\beta} \quad (2.44)$$

Ce qui revient aux résultats précédents : les équations 2.38 et 2.37.

### Validation

Ici, le problème est trivial, mais la formule doit être quand même validée, si ce n'est que pour prouver que le programme de validation est valide. Donc, sur la figure 2.4 il y a deux FDP tracées pour le même système : intégrateur ( $a = 0$  et  $b = 1$ ),  $K = 0.3$ ,  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ . L'une provient d'une simulation avec un vecteur aléatoire l'autre avec un système où une solution analytique a été calculée avec l'équation de FPK. Il y a peu de différences entre les deux. Les mêmes conclusions peuvent être déduites du tableau 2.3 où les moments de chaque FDP ont été calculés.

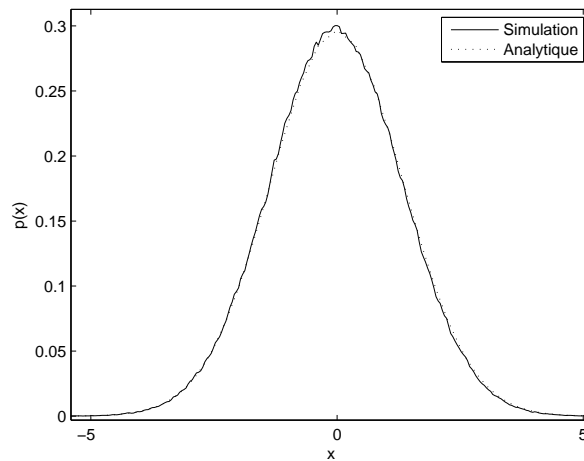


Figure 2.4 Comparaison entre les FDP obtenues analytiquement et par simulation pour le cas contrôleur linéaire avec bruit de mesure et bruit de procédé.

	Analytique	Simulation
mode	0.00	$\approx 0.00$
moyenne	-0.05	-0.02
variance	1.82	1.79
asymétrie	0.08	-0.01

Tableau 2.3 Mode et moments centraux pour les résultats analytiques et simulés pour le contrôleur linéaire avec bruit de procédé et bruit de mesure.

### 2.4.2 Exemple avec contrôleur quadratique

Pour un contrôleur quadratique, qui est une variante du contrôleur polynomial,  $K(y) = K_0y + K_1y^2$  (si le point de consigne est à 0). Le contrôleur n'a pas d'utilité industrielle, mais d'un point de vue mathématique, il est très intéressant car puisque sa non-linéarité est faible, il est possible pour certains cas d'avoir une expression analytique de la solution de FPK. Donc, pour un système contrôlé par un contrôleur quadratique, l'expression  $h(x)$  devient :

$$h(x, v, w) = a(x) - b(x)K_0 \{x + v\} - b(x)K_1 \{x + v\}^2 + w \quad (2.45)$$

Toujours en appliquant la linéarisation 2.34 et 2.33, il est possible d'en extraire les dynamiques libre( $f(x)$ ) et forcée ( $g(x)$ )

$$f(x) = a(x) - b(x)K_0x - b(x)K_1x^2 - b(x)K_1\beta \quad (2.46)$$

et

$$g_v(x) = -b(x)K_0 - 2b(x)K_1x \quad (2.47)$$

et  $g(x)$  aura la forme

$$g(x) = \sqrt{\alpha + \{-b(x)K_0 - 2b(x)K_1x\}^2} \beta \quad (2.48)$$

Il est à noter que  $f(0) = -b_0K_1\beta \neq 0$ , ce qui implique que le maximum de la FDP n'est pas au point de consigne. Il en sera discuté davantage au chapitre 4.

Pour le cas où  $a = 0$  et  $b = 1$  une solution analytique de la FDP a été développée. Avec les équations précédentes, on trouve  $f(x)$  et  $g(x)$

$$f(x) = -\{K_0 + K_1x\}x - K_1\beta \quad (2.49)$$

et

$$g(x) = \sqrt{\alpha + \{K_0 + 2K_1x\}^2 \beta} \quad (2.50)$$

Par la suite, la solution de l'équation 2.9 est :

$$p(x) = p_0 \exp^{-2[q\{r_1+r_2+r_3+r_4+r_5\}]} \quad (2.51)$$

avec

$$\begin{aligned} q &= \frac{-1}{4} \frac{1}{K_1^2 \beta^{3/2} \alpha^{1/2}} \\ r_1 &= 2K_1 \sqrt{\alpha \beta} x \\ r_2 &= 2K_1^2 \sqrt{\alpha \beta^3} \log [\alpha + \beta K_0^2 + 4\beta K_0 K_1 x + 4\beta K_1^2 x^2] \\ r_3 &= 4\beta^2 K_1^2 \operatorname{atan} \left[ \frac{\sqrt{\beta} \{K_0 + 2K_1 x\}}{\sqrt{\alpha}} \right] \\ r_4 &= -\alpha \operatorname{atan} \left[ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \{K_0 + 2K_1 x\} \right] \\ r_5 &= -\beta K_0^2 \operatorname{atan} \left[ \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \{K_0 + 2K_1 x\} \right] \end{aligned}$$

Cette solution analytique n'est qu'une preuve de concept. Elle est dérivable, mais non intégrable.

### Validation

La validation est réalisée sur un système simple où  $a = 0$  et  $b = 1$ . Un vecteur de 100 000 valeurs aléatoires gaussiennes est injecté dans le système. La FPD de la variable de sortie est ainsi calculée. La simulation a été testée avec un cas où le bruit de procédé est dominant ( $\alpha = 1, \beta = 0.2$ ) et pour le cas où le bruit de mesure est dominant ( $\alpha = 0.2, \beta = 1$ ). Puisque les résultats de simulation sont "grossiers", le mode de la distribution est déterminé approximativement.

Premièrement, un contrôleur quadratique avec  $K_0 = 0.5$  et  $K_1 = 0.05$  est analysé. L'expression analytique de celui-ci est validé à la figure 2.5, la solution utilisant l'équation de FPK est très proche de la solution obtenue par simulation. Les deux courbes sont pratiquement l'une sur l'autre. Le tableau 2.4 montre que les moments centraux et le mode sont très proches.

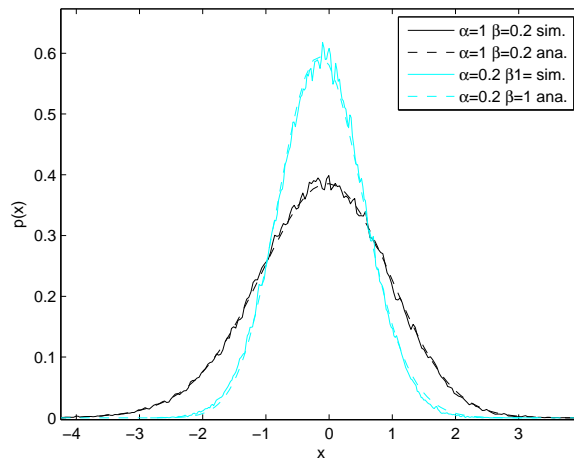


Figure 2.5 Graphiques des FDP utilisant l'équation de FPK et simulation Monte-Carlo pour un contrôleur quadratique.

	$\alpha = 1, \beta = 0.2$		$\alpha = 0.2, \beta = 1$	
	Analytique	Simulation	Analytique	Simulation
mode	-0.03	$\approx -0.05$	-0.15	$\approx -0.10$
moyenne	-0.15	-0.13	-0.11	-0.12
variance	1.10	1.08	0.45	0.45
asymétrie	-0.23	-0.21	0.05	0.00

Tableau 2.4 Mode et moments centraux pour les résultats analytiques et simulés pour le contrôleur quadratique avec bruit de mesure et bruit de procédé.

### 2.4.3 Exemple avec contrôleur commutant

L'avantage de la linéarisation développée est qu'elle est applicable sur des situations où  $K(x)$  n'est pas dérivable sur un nombre fini de points, tel un contrôleur commutant. Donc, pour un contrôleur commutant :

$$h(x, w, w) = \begin{cases} a(x) - b(x)K_a \{x + v\} + w & \text{si } (x + v) \geq 0 \\ a(x) - b(x)K_b \{x + v\} + w & \text{si } (x + v) < 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

$g_v(x)$  est calculé :

$$\begin{aligned} g_v(x) &= -\frac{b(x)}{\sqrt{2\pi\beta}} \left\{ K_b \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{v^2}{2\beta}} dv + K_a \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\beta}} dv \right\} \\ &= -b(x) \left\{ \frac{K_a + K_b}{2} + \frac{K_b - K_a}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{x}{\sqrt{2\beta}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.53)$$

$g(x)$  devient donc :

$$g(x) = \sqrt{\alpha + g_v(x)^2 \beta} \quad (2.54)$$

$f(x)$ , la dynamique libre, est décrite par :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) - \frac{b(x)}{\sqrt{2\pi\beta}} \left\{ K_b \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{v^2}{2\beta}} \{x + v\} dv + K_a \int_{-x}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2\beta}} \{x + v\} dv \right\} \\ &= a(x) - b(x)g_v(x)x - b(x) \{K_b - K_a\} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\beta}} \end{aligned} \quad (2.55)$$



### Validation

En utilisant le même système que la section précédente ( $a = 0$ ,  $b = 1$ ), la validation est faite avec deux essais, l'un où le bruit de mesure est dominant, l'autre où c'est le bruit de procédé qui est dominant. Par après, un contrôleur commutant avec les paramètres  $K_a = 0.05$ ,  $K_b = 0.95$  a été utilisé pour valider les concepts précédents. À la figure 2.6, les résultats utilisant FPK sont très proches des résultats de simulation qui ont nécessité 600 000 points aléatoires cette fois-ci. Les petites différences sont attribuables aux approximations faites pour utiliser l'équation de FPK et aussi au solveur numérique de la simulation. À partir de ces courbes, les 3 moments centraux et le mode ont été calculés à la table 2.5.

Il est intéressant de constater que dans tous les cas, le mode a bien été estimé. Aussi, il est possible de voir l'effet du bruit de mesure sur le déplacement du mode et la diminution de l'asymétrie sur toutes les deux figures. Ces effets seront discutés plus en profondeur au chapitre 4.

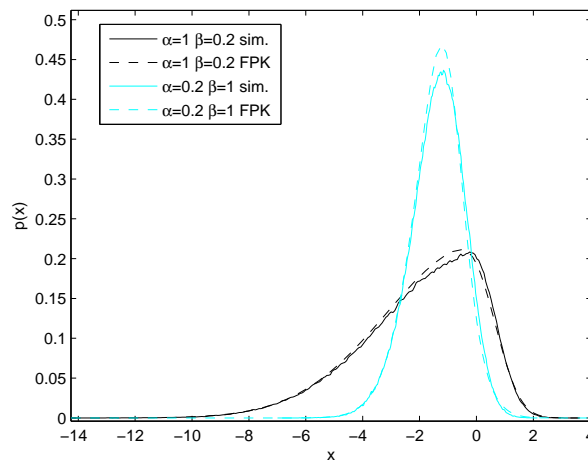


Figure 2.6 Graphiques des FDP utilisant l'équation de FPK et simulation Monte-Carlo pour un contrôleur commutant

#### 2.4.4 Exemple avec procédé du second ordre

Puisque l'exemple précédent est relativement simple, les concepts développés précédemment ont été appliqués à un modèle plus compliqué. C'est ainsi qu'un modèle analogue à celui de

	$\alpha = 1, \beta = 0.2$		$\alpha = 0.2, \beta = 1$	
	Analytique	Simulation	Analytique	Simulation
mode	-0.49	$\approx -0.30$	-1.21	$\approx -1.20$
moyenne	-2.05	-1.98	-1.43	-1.38
variance	4.52	4.45	0.90	0.90
asymétrie	-7.19	-7.40	-0.25	-0.32

Tableau 2.5 Mode et moments centraux pour les résultats analytiques et simulés pour le contrôleur commutant

Forbes et al. (2004) a été développé. Le modèle en question est un réacteur parfaitement mélangé en continu où l'on veut dégrader une concentration  $c$  de polluant. L'entrée est un courant d'eau contaminée avec une concentration de polluant  $c_{in}$  et est dégradée par une réaction du second ordre. Cette concentration est contrôlée par le facteur de dilution  $D$ . Il est à noter que la notation utilisée est spécifique à cette section.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{D(t)}{V} \{c_{in} - c\} - \frac{k}{V}c^2 + \frac{1}{V}w \quad (2.56)$$

$$y(t) = c + v \quad (2.57)$$

$$D(t) = \begin{cases} k_a \{c_{sp} - y(t)\} & si & y \geq c_{sp} \\ k_b \{c_{sp} - y(t)\} & si & y < c_{sp} \end{cases} \quad (2.58)$$

Ainsi, pour ce problème les valeurs de  $a(x)$  et  $b(x)$  sont de :

$$a(x) = -k \frac{c^2 - c_{sp}^2}{V} \quad (2.59)$$

$$b(x) = \frac{c_{in} - c_t}{V} \quad (2.60)$$

Par la suite, les expressions  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $k(x)$  pour solutionner l'équation 2.9 sont données par :

$$k(c) = \frac{k_a + k_b}{2} + \frac{k_a - k_b}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{c - c_{sp}}{\sqrt{2\beta}} \right] \quad (2.61)$$

$$f(c) = a(c) - b(c)k(c) \{c - c_{sp}\} - b(c) \{k_b - k_a\} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp^{\frac{1}{2\beta}\{c - c_{sp}\}^2} \quad (2.62)$$

$$g_v(c) = b(c)k(c) \quad (2.63)$$

et  $g(x)$  :

$$g(c) = \sqrt{\alpha + g_v(c)^2\beta} \quad (2.64)$$

Les paramètres du modèle sont :  $c$  est la concentration dans le réacteur,  $V$  est le volume du réacteur,  $c_{in}$  est la concentration entrant dans le réacteur,  $k$  est la constante de réaction et  $w$  est un bruit blanc gaussien additionné à la constante de réaction.  $v$  est le bruit de mesure, un autre bruit blanc gaussien, non corrélé avec  $v$ . Les valeurs numériques sont données au tableau 2.6.

Par après, un contrôleur commutant avec les paramètres  $K_a = 0.45$ ,  $K_b = 0.05$  a été utilisé. À la figure 2.7, les résultats utilisant FPK sont très proches des résultats de simulation faits avec 300000 points. Cependant, la translation semble être surestimée, cela peut être attribué

Paramètre	valeur
$V$	$3 \text{ m}^3$
$c_{in}$	$5 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$
$c_{sp}$	$2.5 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$
$k$	$0.1 \frac{\text{m}^3}{\text{secmol}}$
$w$	moyenne=0, écart type = $0.0005 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$
$v$	moyenne=0, écart type = $0.0005 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$

Tableau 2.6 Paramètres du modèle de réaction du deuxième ordre

aux approximations faites pour utiliser l'équation de FPK et aussi au solveur numérique de la simulation. Mais en gros, les résultats sont satisfaisants considérant la complexité du système utilisé. On obtient les mêmes conclusions en analysant le mode et moments au tableau 2.7.

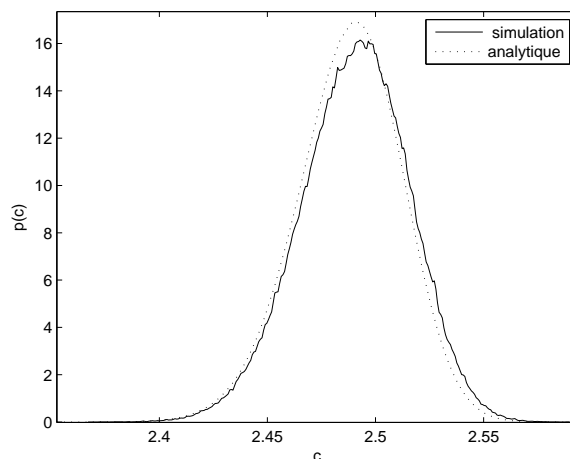


Figure 2.7 Graphiques des FDP utilisant l'équation de FPK et simulation pour un cas réaction chimique 2ième ordre avec contrôleur commutant

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de développer des outils à partir de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) afin d'analyser les effets statistiques des contrôleurs non linéaires. La première application est le formage de densité de probabilité où les capacités d'un contrôleur commutant à émuler une fonction de densité (FDP) prédéterminée sont comparées à un contrôleur polynomial qui a déjà été utilisé dans une application de formage de FDP (Forbes et al., 2004). Ensuite, les effets d'un contrôleur non linéaire sur les moments de la FDP ont

	Analytique	Simulation
mode	2.4915	$\approx 2.492$
moyenne	2.487	2.4903
variance	$6.02 \times 10^{-4}$	$6.28 \times 10^{-4}$
asymétrie	$-3.59 \times 10^{-6}$	$-2.98 \times 10^{-6}$

Tableau 2.7 Mode et moments centraux pour les résultats analytiques et simulés pour le cas réaction chimique de deuxième ordre avec contrôleur commutant

été caractérisés. Finalement, pour analyser l'optimalité d'un contrôleur non linéaire, il a fallu développer la solution analytique de la FDP de la variable manipulée pour le cas d'un système avec bruit de procédé et contrôleur commutant. Pour ce cas, il a été prouvé qu'un contrôleur non linéaire pouvait battre le contrôleur symétrique sous certaines conditions.

## CHAPITRE 3

### FORMAGE DE FDP

#### 3.1 Introduction

L'un des buts du contrôle de procédé est l'atténuation des différentes perturbations inhérentes aux procédés industriels. L'approche classique est l'utilisation de contrôleurs linéaires pour réduire la variance des variables de procédé affectées par les perturbations. Pour chaque variable de procédé, il existe une fonction coût qui relie la variable à un coût de production. Si une approche statistique est choisie, la fonction d'espérance de cette fonction coût est calculée par l'équation 1.7. Par conséquent, tout changement à la stratégie contrôle induit un changement à sa fonction d'espérance de coût. Si la fonction coût est symétrique (comme une parabole), une diminution de la variance entraînera dans le même sens la valeur de l'espérance de coût. Cependant, pour plusieurs problèmes d'optimisation, les contraintes rendent la fonction coût asymétrique. Pour ces problèmes, le dépassement de ces contraintes engendre plus de coûts qu'un dépassement identique du côté opposé à la contrainte. Pour ces problèmes, l'approche typique est de réduire la variance et de déplacer le point de consigne plus près de la contrainte, ce qui entraîne un gain économique (Brewsters, 1970; Senyard Sr et Senyard, 1983; Tolfo, 1983).

Cependant, des études récentes ont proposé que le gain économique pourrait être amélioré encore plus si la forme de la fonction de densité de probabilité (FDP) des variables d'intérêt pouvait être modifiée pour s'adapter à l'asymétrie de la fonction coût (Latour, 1992; Zhou et Forbes, 2003; Harris, 1992). Dans ce contexte, deux approches ont été rapportées dans la littérature. La première approche consiste à maximiser le gain économique avec un contrôleur non linéaire, la forme de la FDP étant implicite; par exemple, les travaux de Speyer (Speyer (1976) et Speyer et al. (1974)) où une fonction coût non quadratique est optimisée. La forme de la FDP n'y est jamais prise en compte, mais le contrôleur résultant ne fait pas que réduire

la variance de la FDP, il change aussi les autres moments de la FDP. La deuxième approche implique le choix d'une FDP qui tient compte de la fonction coût et un algorithme qui va faire en sorte que la FDP de la variable émule le mieux possible une FDP prédéterminée. Pour cette seconde catégorie, l'emphasis est mise strictement sur la forme de la FDP et aucunement sur l'optimisation de la fonction coût. Toutes les méthodes de formage de FDP ont la même structure : l'introduction d'une non-linéarité paramétrisée dans le système, le calcul de la FDP soit par paramétrisation ou approximation, et la mesure de la différence entre la FDP prédéterminée et la FDP venant du système avec le contrôleur non linéaire.

La plupart des méthodes répertoriées dans la littérature utilisent de simples contrôleurs polynomiaux pour induire la non-linéarité. La seule exception est présentée par Wang (1998) qui utilise des splines de type B. L'avantage principal d'avoir de simples contrôleurs polynomiaux est leur continuité, une propriété intéressante d'un point de vue mathématique. Cependant, pour induire une non-linéarité significative, il faut avoir plusieurs termes et des puissances élevées. Par conséquent, ce type de contrôleur est moins robuste et peut devenir instable advenant de fortes perturbations.

Deuxièmement, la solution exacte de la FDP est non intuitive quand il y a un contrôleur non linéaire. Une approche développée par Forbes paramétrise la FDP en utilisant les fonctions de base de Gram-Charlier et dérive une expression analytique des coefficients de Gram-Charlier (Forbes, 2003; Forbes et al., 2003b, 2004). Une alternative développée par Crespo consiste travailler avec le potentiel de probabilité à travers l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) (Crespo et Sun, 2002b). Une autre approche, par Wang, utilise une approximation de la FDP par un réseau neuronal (Wang, 1999, 2002; Wang et Jian Hua, 2001; Wang et Wang, 2002a,b; Guo et Wang, 2003, 2005a,b).

Le dernier aspect est le choix de la mesure de la différence entre les deux FDP. Cela dépend de la manière dont les expressions analytiques FDP ont été calculées. Quand ce sont les coefficients de Gram-Charlier qui sont utilisés, la somme du carré de la différence est utilisée comme mesure de la distance entre les FDP (Forbes et al., 2003a,b, 2004). Quand le potentiel de probabilité est utilisé, l'intégrale de la différence au carré entre les dérivées des potentiels

est utilisée (Crespo et Sun, 2002b). Avec une approximation de la FDP par un réseau neuronal, l'intégrale du carré de la différence entre la FDP du système et la FDP prédéterminée est utilisée (Wang, 1998). Finalement, Kàrnỳ (Kàrnỳ (1996); Kàrnỳ et Guy (2006)) propose l'utilisation de la divergence de Kullback-Leiber comme mesure de la distance entre les deux FDP.

La justification des travaux entrepris dans cette partie provient du fait que, pour des raisons de stabilité, le gain des contrôleurs non linéaires ne peut changer de signe. Pour un système linéaire, si le gain du contrôleur change de signe, le système accroîtra l'erreur à la place de la diminuer. Ainsi, le gain ne peut pas beaucoup varier dans la zone d'opération. Donc, la solution élaborée dans ce projet de recherche consiste à remplacer le contrôleur polynomial par un contrôleur commutant, qui consiste en deux contrôleurs linéaires et un point de commutation. Par conséquent, en ayant deux dynamiques différentes de chaque côté du point de commutation, le contrôleur est moins agressif d'un côté et le procédé restera plus longtemps dans cette zone. Ainsi la FDP sera asymétrique en ayant une queue plus longue du côté du gain le moins agressif (le gain le plus petit). Puisqu'avec le point de commutation, la non-linéarité est forte, il est possible d'avoir des FDP plus asymétriques sans à avoir à utiliser des non-linéarités agressives continues telles que des fonctions exponentielles. De plus, un contrôleur commutant est moins susceptible de devenir instable loin du point de commutation si les gains choisis sont stables. C'est à dire que l'action de contrôle va amener le système à converger vers une valeur définie.

Deuxièmement, les contrôleurs discontinus sont rarement étudiés parce qu'il était sous-entendu que la FDP serait plus difficile à déterminer. Cependant, il a été démontré au chapitre 2 qu'une solution analytique de la FDP d'un système avec contrôleur commutant peut être calculée. De plus, les coefficients de l'approximation de l'équation de Gram-Charlier d'une FDP sont aussi développés.

Grâce à ces solutions, deux options peuvent être utilisées pour déterminer la différence entre la FDP cible et la FDP du système : soit l'intégrale de la différence au carré entre les deux FDP, soit la somme de la différence au carré entre les paramètres de l'approximation de la



FDP par les fonctions de base de Gram-Charlier. Les deux options sont comparées entre elles et il en ressort que l'intégrale de la différence au carré donne de meilleurs résultats et qui sont un peu plus stables. Finalement, les contrôleurs commutants et polynomiaux sont aussi comparés entre eux pour analyser leur capacité à émuler une FDP.

## 3.2 Formage de fonction de densité de probabilité

### 3.2.1 Conception des contrôleurs non linéaires

Logiquement, quand un système linéaire est perturbé par un bruit gaussien, la fonction de densité de probabilité (FDP) du système sera aussi gaussienne. Par conséquent, si les bruits entrant dans un système sont tous gaussiens, seul la présence de non-linéarités dans le système peut induire des caractéristiques non gaussiennes. Comme il a déjà été dit, une FDP asymétrique peut être requise pour certains problèmes d'optimisation. Une FDP asymétrique est nécessairement non gaussienne, conséquemment, le système doit contenir une non-linéarité.

L'option la plus facile est l'utilisation des non-linéarités déjà présentes au niveau du procédé. Cependant, la forme de la FDP découlant de ces non-linéarités ne peut pas être choisie, à moins que le procédé ait été élaboré avec cet objectif. Donc, l'approche proposée est de compenser toutes les non-linéarités et en introduire d'autres avec un contrôleur non linéaire. Celui-ci est conçu pour que la FDP de la variable d'intérêt suive une FDP cible.

Pour des besoins de simplicité du développement mathématique, le problème a été développé pour un système scalaire dont le contrôleur non linéaire est affine. Le système est décrit par :

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u + w \quad (3.1)$$

où  $x$  est la variable d'état,  $u(t)$  est la variable manipulée et  $w$  est le bruit de procédé.  $a(x)$  est une fonction non linéaire décrivant les dynamiques non forcées et  $b(x)$  décrit la dynamique forcée. Pour assurer la contrôlabilité du système scalaire et linéaire, il est posé que  $b(x) \neq 0$ .

De plus, le bruit de procédé est considéré comme blanc et gaussien.

Ensuite, un contrôleur par commande linéarisante est décrit par l'équation suivante :

$$u = \frac{f(x) - a(x)}{b(x)} \quad (3.2)$$

Par cette rétroaction, (3.1) devient :

$$\dot{x} = f(x) + w \quad (3.3)$$

Il est à noter qu'avec la commande linéarisante, la FDP de la variable d'intérêt est indépendante des dynamiques du système et ne dépend que du contrôleur  $f(x)$ . C'est ainsi que le lien entre les paramètres du contrôleur et la FDP pourront être analysés. Dans l'optique du projet de recherche, deux types de contrôleur seront analysés, un contrôleur polynomial et un contrôleur commutant.

Le contrôleur commutant est décrit :

$$f(x) = \begin{cases} k_a \{x_{sp} - x\} & \text{si } x > x_{sp} \\ k_b \{x_{sp} - x\} & \text{si } x < x_{sp} \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $x_{sp}$  est le point de consigne et le contrôleur polynomial (du quatrième ordre) est donné par :

$$f(x) = k_1 \{x_{sp} - x\} + k_2 \{x_{sp} - x\}^2 + k_3 \{x_{sp} - x\}^3 + k_4 \{x_{sp} - x\}^4 \quad (3.5)$$

Puisque que des contrôleurs non linéaires sont utilisés, la stabilité sans le bruit du système est importante. Cependant, puisque le système étudié est scalaire, une simple condition doit

être fournie. Le concept de stabilité de Lyapunov est utilisé, lequel dit que si une fonction définie positive  $V > 0$  a une dérivée définie négative  $\dot{V} < 0$ , l'équilibre est stable (Khalil, 2002). Pour le système (3.3), la fonction de Lyapunov est  $V = \frac{1}{2} \{x - x_{sp}\}^2$ . Par la suite,  $\dot{V} = \{x - x_{sp}\} \dot{x} = \{x - x_{sp}\} f(x)$ . Donc,  $f(x) \{x - x_{sp}\} < 0$  est une condition suffisante de stabilité. Cela veut dire que  $f(x)$  et  $\{x_{sp} - x\}$  devraient avoir le même signe. En conclusion, pour un contrôleur commutant, si  $k_a > 0$  et  $k_b > 0$ , le contrôleur est toujours stable. Les conditions de stabilité pour un contrôleur polynomial sont plus complexes.

### 3.2.2 Méthodes utilisées pour émuler la FDP

Une fois que l'algorithme de contrôle a été choisi, la prochaine étape est de comparer la FDP résultante de l'algorithme à la FDP cible (ou leur approximation). C'est ce qui sera décrit dans cette partie. Par la suite, la FDP est formée par minimisation pour que la forme de la FDP de la variable de sortie suive la FDP cible. Deux méthodes de minimisation seront décrites. La première consiste à minimiser directement l'intégrale de l'erreur au carré entre la FDP de la variable de sortie et la FDP cible. L'autre méthode utilise l'approximation d'une FDP par des coefficients et fonctions de base de Gram-Charlier. La méthode utilisée consiste à minimiser la somme des carrés de la différence entre chaque coefficient. Pour chaque cas, les FDP sont obtenues avec les solutions appropriées de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) développées au chapitre 2, plus précisément les équations 2.20 et 2.21 pour le contrôleur polynomial et les équations 2.22 à 2.25 pour le contrôleur commutant.

#### 3.2.2.1 Minimisation directe du carré de l'erreur

Pour cette méthode, la différence entre la FDP cible et la FDP de la variable d'intérêt est minimisée en manipulant le paramètre de l'algorithme de contrôle :

$$J_{ISE} = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) \{p_{\text{intérêt}}(x) - p_{\text{cible}}(x)\}^2 dx \quad (3.6)$$

où  $r(x) \geq 0$  est une fonction coût. Il est à noter que quand  $r(x) = 1$ , toutes les parties de la FDP ont la même importance. Cependant, en choisissant une fonction  $r(x)$  appropriée, il serait possible de donner plus d'emphase à certaines parties de la FDP (par exemple, les queues). Cela fait en sorte que l'émulation serait meilleure sur ces parties au dépend d'une émulation moins bonne pour les autres parties. Cette intégrale peut être résolue numériquement.

### 3.2.2.2 Couplage des coefficients de Gram Charlier

Ici, la FDP est approximée par un ensemble de fonctions de base multipliées par des coefficients. L'approximation de Gram-Charlier (GC) est choisie parce que les fonctions de base de cette paramétrisation sont orthonormales. Donc, les fonctions de base de la paramétrisation de Gram-Charlier sont :

$$H_i(x) = \{-1\}^i \frac{\sigma^i}{\sqrt{i!}} \frac{d^i N_{\mu,\sigma}(x)}{dx^i} \quad (3.7)$$

où  $N_{\mu,\sigma}(x)$  est une distribution gaussienne avec une moyenne de  $\mu$  et un écart type de  $\sigma$ . Le coefficient  $c_i$  multipliant la fonction de base  $\phi_i(x)$  est calculé par :

$$c_i = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)p(x)dx, \quad h_i(x) = \frac{H_i(x)}{N_{\mu,\sigma}(x)} \quad (3.8)$$

Avec un nombre  $q$  de fonctions de base pour l'approximation, la FDP approximée est donnée par :

$$p(x) \approx \sum_{i=1}^q c_i h_i(x) N_{\mu,\sigma}(x) \quad (3.9)$$

Les coefficients de GC peuvent être aussi calculés par les moments  $m_j$  de la FDP originale.

Cela est fait par multiplication matricielle (Kuznetsov et al., 1965).

$$c_i = \sum_{j=1}^i C_{ij} m_j \quad (3.10)$$

où les éléments de la matrice triangulaire inférieure sont donnés par

$$C_{ij} = \frac{1}{\sqrt{i-1!} \sigma^{i-1}} \frac{\{j-1\}!}{\{i-1\}! \{i-j\}!} P(i-j) \quad (3.11)$$

où  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = -\mu$ ,  $P(2) = \mu^2 - \sigma^2$ ,  $P(3) = -\mu \{3\mu^2 - \sigma^2\}$ ,  $P(4) = 3\sigma^4 - 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$ .

Il est à noter qu'à cause de la troncature, l'approximation ne sera probablement pas positive pour toutes les valeurs de  $x$  et son intégrale ne sera pas nécessairement égale à 1.

Cependant, l'intérêt de cette approximation est dans l'expression de la distance entre la FDP du procédé et la FDP désirée en utilisant la somme des carrés de la différence entre les coefficients des deux FDP. Les paramètres du contrôleur peuvent être déterminés en minimisant la fonction objective suivante :

$$\min J_{GC} = \sum_{i=1}^N \{c_i - c_{i \text{ target}}\}^2 \quad (3.12)$$

Il est à noter qu'à cause de la relation linéaire entre les moments et les coefficients de GC (Kuznetsov et al., 1965), le pairage des coefficients de GC est équivalent au pairage des moments avec une matrice de pondération ( $CC^T$ ) appropriée. La matrice de pondération est déterminée par le choix des fonctions de base.

*Expression analytique pour les coefficients de Gram-Charlier pour le cas d'un contrôleur commutant*

Dans Forbes (2003), un lien analytique est établi entre les coefficients de GC et le contrôleur polynomial. Dans cette partie, un lien similaire sera élaboré entre les coefficients de GC et

un contrôleur commutant. La variance du bruit de procédé étant  $\alpha$ , les intégrales suivantes peuvent être résolues. Le processus est long, mais les calculs sont directs et solvables avec un logiciel. Les expressions suivantes ont été obtenues avec Matlab<sup>TM</sup>.

$$i_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - x_{sp}\} p(x) dx = \left\{ \frac{\eta}{k_a k_b} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{k_b^{1/2} - k_a^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \right\} \quad (3.13)$$

$$i_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - x_{sp}\}^2 p(x) dx = \frac{\eta}{k_a k_b} \left\{ \frac{k_b^{3/2} + k_a^{3/2}}{k_a^{1/2} + k_b^{1/2}} \right\} \frac{1}{2} \quad (3.14)$$

$$i_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - x_{sp}\}^3 p(x) dx = \left\{ \frac{\eta}{k_a k_b} \right\}^{3/2} \left\{ \frac{k_b^{1/2} - k_a^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \right\} (k_a + k_b) \quad (3.15)$$

$$i_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - x_{sp}\}^4 p(x) dx = \left\{ \frac{\eta}{k_a k_b} \right\}^2 \left\{ \frac{k_b^{3/2} + k_a^{3/2}}{k_a^{1/2} + k_b^{1/2}} \right\} \frac{3}{4} \quad (3.16)$$

Avec ces intégrales et  $i_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$ , les moments  $m_j$  peuvent être calculés tel que :

$$m_j = \sum_{n=0}^j \frac{j!}{n! \{j-n\}!} i_n x_{sp}^{j-n} \quad (3.17)$$

Les coefficients de GC peuvent être ensuite calculés avec (3.11).

Il est sous-entendu que les expressions analytiques ont une application limitée, puisqu'une expression analytique ne peut pas être trouvée pour une simple extension du problème où la dynamique forcée n'est pas unitaire,  $g(x) \neq 1$ . Cependant, le but de cette démonstration est de prouver qu'il n'est pas plus difficile d'utiliser un contrôleur commutant qu'un contrôleur polynomial pour résoudre ce type de problème.

### 3.3 Exemple

Pour cet exemple, les capacités de formage de FDP d'un contrôleur commutant et d'un contrôleur polynomial sont comparées. De plus deux types de paramétrages sont analysés : le pairage de coefficients de Gram-Charlier et la minimisation de l'intégrale de l'erreur au carré (IEC).

#### 3.3.1 Formulation du problème

L'exemple choisi est un réacteur parfaitement mélangé en continu. L'entrée, qui est un courant d'eau contaminée avec une concentration de polluant  $c_{in}$ , est traitée (Forbes et al., 2004). Le modèle est obtenu par bilan molaire et la variable manipulée est le débit  $D$ . Il est à noter que la notation utilisée est spécifique à cette section.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{D}{V} \{c_{in} - c\} - \frac{k}{V}c + \frac{1}{V}w \quad (3.18)$$

Dans l'équation 3.18,  $c$  est la concentration dans le réacteur,  $V$  est le volume du réacteur,  $c_{in}$  est la concentration entrant dans le réacteur,  $k$  est la constante de réaction et  $w$  est un bruit blanc gaussien ajouté à la constante de réaction. La valeur numérique des paramètres provient de Forbes et al. (2004) et sont donnés au tableau 3.1

Paramètre	valeur
$V$	$3 \text{ m}^3$
$c_{in}$	$5 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$
$c_{sp}$	$0.05 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$
$k$	$0.297 \frac{\text{m}^3}{\text{sec}}$
$w$	moyenne=0, écart type = $0.0005 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$

Tableau 3.1 Paramètres du modèle procédé réaction de premier ordre

Le but est que la concentration à la sortie soit en-dessous d'une norme environnementale. La structure de contrôle est la même qu'à la figure 2.1, mais sans bruit de mesure.

La commande linéarisante a la forme suivante :

$$D = \frac{V}{\{c_{in} - c\}} \left\{ f(c) + \frac{k}{V}c \right\} \quad (3.19)$$

Ce qui donne la dynamique suivante en vue de former la FDP.

$$\frac{dc}{dt} = f(c) + \frac{1}{V}w \quad (3.20)$$

Un contrôleur commutant (3.4) ou polynomial est utilisé en vue de former la FDP.

### 3.3.2 Résultats pour une FDP faiblement non gaussienne

Ensuite, la FDP cible choisie est la même que dans l'article de Forbes (Forbes et al., 2004). La FDP semble peu intéressante dans un contexte de formage de FDP puisqu'elle est presque Gaussienne. Cependant, cette même FDP a déjà été utilisée dans d'autres travaux, elle est donc choisie par soucis de cohérence et pour comparer les différentes approches en vue former une FDP. Les coefficients de GC pour cette FDP cible sont :  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -0.078$ ,  $c_4 = 0.048$ . Le troisième moment, l'asymétrie, est de  $1.53 \times 10^{-10}$ . L'asymétrie est si faible qu'elle est à peine visible. D'autres exemples avec plus d'asymétrie seront traités plus tard.

Pour cette FDP cible, le paramétrage du contrôleur commutant(3.4) et du contrôleur polynomial (3.5) a été fait pour les deux approches de paramétrages. Les quatre cas sont donnés aux tableaux (3.2) et (3.3).

Sur la figure 3.1, chaque méthode donne des résultats similaires. Toutes montrent un peu d'asymétrie avec une queue qui tend vers la gauche. Cependant, sur le gros-plan de la figure 3.2, les algorithmes qui utilisent l'approximation de GC semblent performer moins bien que ceux qui minimisent l'IEC. Ils sont un peu plus distants de la FDP cible que les FDP venant



Paramètre	Avec l'approximation de GC	Avec la minimisation de l'IEC
$k_1$	0.126	0.161
$k_2$	13.28	3.051
$k_3$	$1.041 \times 10^4$	5504
$k_4$	$-5.6 \times 10^6$	1.104

Tableau 3.2 Paramètres du contrôleur polynomial pour le cas avec une FDP cible faiblement asymétrique

Paramètre	Avec l'approximation de GC	Avec la minimisation de l'IEC
$k_a$	0.1451	0.1450
$k_b$	0.1610	0.1438

Tableau 3.3 Paramètres du contrôleur commutant pour le cas avec une FDP cible faiblement asymétrique

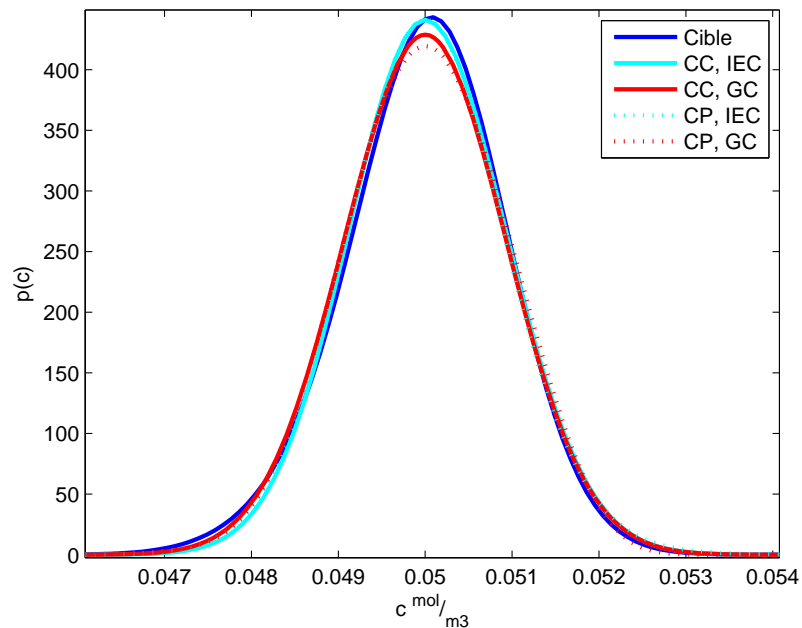


Figure 3.1 FDP pour le cas avec une FDP cible faiblement asymétrique (CP : contrôleur polynomial , CC : Contrôleur commutant)

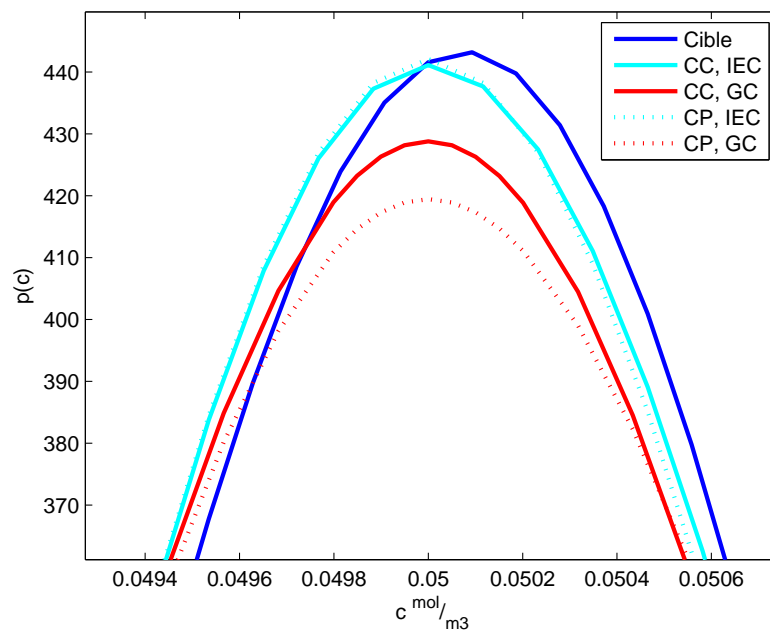


Figure 3.2 Gros-plan sur la moyenne du graphique des FDP pour le cas de la FDP cible faiblement asymétrique (CP : Contrôleur polynomial, CC : contrôleur commutant)

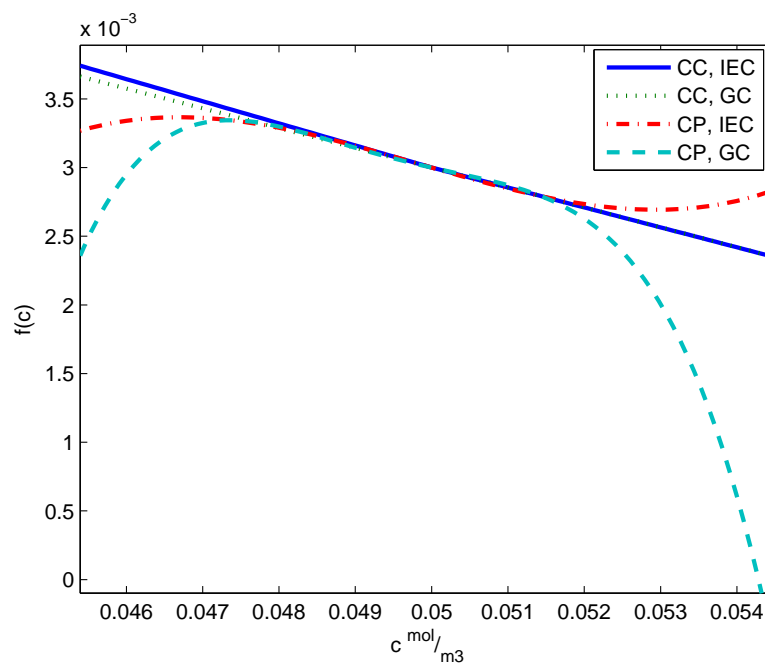


Figure 3.3 Comportement de la variable manipulée pour le cas de la FDP cible faiblement asymétrique (CP : Contrôleur polynomial, CC : contrôleur commutant)

de contrôleurs paramétrés avec l'IEC. C'est dû au fait que l'approximation de GC s'est faite avec seulement les 4 premiers paramètres, les autres étant négligés. Quant à la différence entre les contrôleurs polynomiaux et commutants, le résultat final est pratiquement le même les courbes étant l'une sur l'autre.

Cependant, il y a des grandes différences du point de vue de l'installation des contrôleurs. Le pairage des paramètres de GC mènent à des valeurs élevées pour les paramètres du contrôleur polynomial. Cela peut mener à des problèmes de robustesse puisqu'une petite erreur sur l'un de ces paramètres changera le comportement du polynôme grandement. De plus, en observant les fonctions non linéaires de la figure 3.3, il est possible de voir que tous les 4 contrôleurs ont le même comportement aux alentours du point de consigne. Il est à prendre en compte que les contrôleurs polynomiaux deviennent instables lorsque la courbe coupe l'axe des x. C'est le cas pour les valeurs en bas de 0.046 pour le contrôleur polynomial paramétré avec l'approximation de GC. Pour le contrôleur polynomial paramétré avec la minimisation de l'IEC, la zone de stabilité se trouve entre 0.044 et 0.056. À l'inverse, les contrôleurs commutants seront stables sur toute la plage d'opération.

### 3.3.3 Résultats avec une FDP cible triangulaire

Pour cette partie, la FDP cible choisie est une FDP triangulaire avec un angle droit à droite. À part cette spécification, les autres paramètres sont choisis de façon à ce que la moyenne et la variance soient les mêmes que celles de l'exemple précédent. C'est ainsi qu'avec une FDP cible beaucoup plus asymétrique que l'exemple précédent, les différences entre les méthodes de paramétrisation et la différence entre le nombre de paramètres utilisés pourront être plus évidentes.

Pour la première partie, le paramétrage utilisera la méthode par approximation de GC. Ainsi, l'impact du nombre de coefficients à paier pourra être abordé. À la figure (3.4), le contrôleur commutant donne de meilleurs résultats que le contrôleur polynomial. C'est dû à la dérivée non définie au point de commutation qui crée une non-linéarité qui rend la FDP plus asymé-

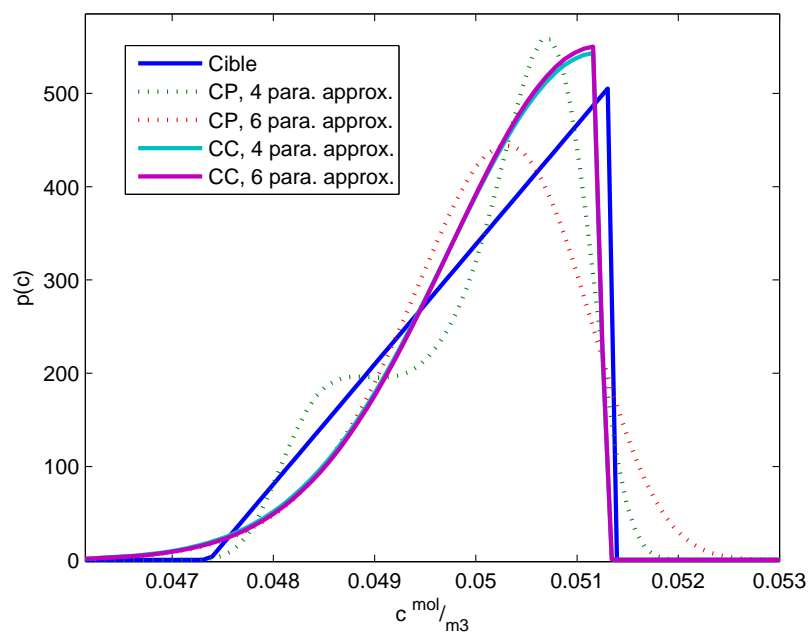


Figure 3.4 FDP résultant de la paramétrisation avec un nombre différent de paramètres pour l'approximation de GC. (CP : contrôleur polynomial, CC : contrôleur commutant)

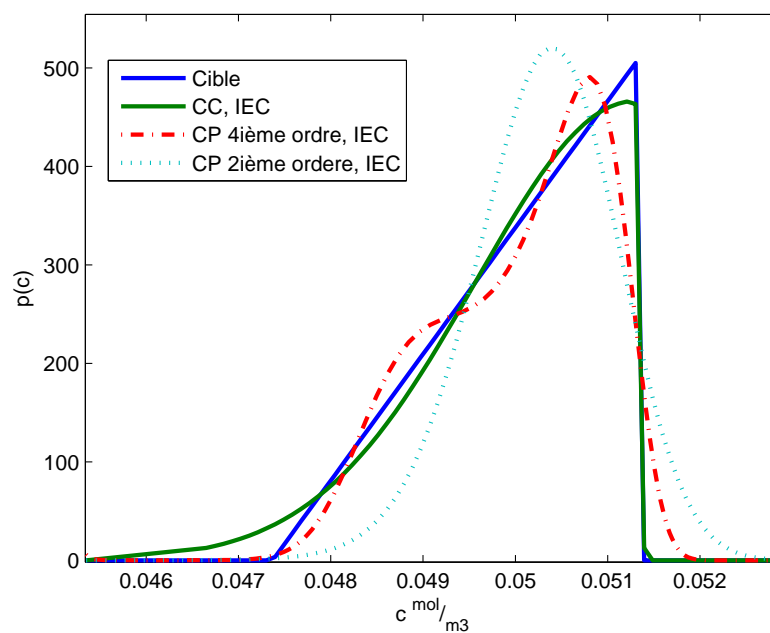


Figure 3.5 FDP résultant de la paramétrisation avec IEC et différents ordres de contrôleurs pour le contrôleur polynomial. (CP : contrôleur polynomial, CC : contrôleur commutant)

trique qu'avec un contrôleur polynomial. De plus, le nombre de coefficients de GC n'influence pas beaucoup les résultats du contrôleur commutant. Quant au contrôleur polynomial, il y a une différence entre le pairage de 4 et 6 paramètres( figure 3.4). Le contrôleur qui paire 4 coefficients de GC avec un polynôme de 4 paramètres donne une forme plus triangulaire, tandis que le contrôleur qui paire 6 coefficients de GC avec un polynôme de 6 paramètres donne une forme plus ronde.

Par la suite, le paramétrage par minimisation de l'intégrale de l'erreur est abordé. L'impact de l'ordre du polynôme du contrôleur polynomial est analysé. Un contrôleur polynomial du second ordre est analysé. Celui-ci a la même structure que l'équation (3.5), mais avec les paramètres  $k_3$  et  $k_4$  nuls. À la figure 3.5, le contrôleur commutant donne de meilleurs résultats que le contrôleur polynomial. Quant au contrôleur polynomial, il y a une différence significative entre les structures à 2 et à 4 paramètres. Le contrôleur à 4 paramètres est plus proche de la cible triangulaire, mais montre une oscillation. D'un autre côté, le contrôleur de second ordre donne une forme plus ronde.

Pour en revenir aux approches entre le pairage des coefficients et la minimisation de l'erreur au carré, il ne semble pas y avoir de différence significative.

### 3.3.4 Résultats avec une FDP bimodale

Pour la dernière partie, la figure 3.6, une FDP cible bimodale a été choisie pour montrer les limites du formage avec un contrôleur commutant. C'est ainsi qu'une FDP cible composée de deux triangles est choisie. Ce cas extrême est choisi sachant qu'aucun résultat ne sera parfait et c'est seulement pour voir comment les contrôleurs pourront approcher cette forme.

La méthode choisie est la minimisation de l'intégrale de l'erreur au carré pour les deux types de contrôleurs. À la figure 3.6, le contrôleur polynomial a assez de flexibilité mathématique pour émuler une forme bimodale. À l'inverse, le contrôleur commutant échoue lamentablement, il n'y a qu'une cloche. Finalement, les résultats montrent aussi qu'il est probablement impossible d'avoir une valeur nulle entre les deux cloches comme la FDP cible.

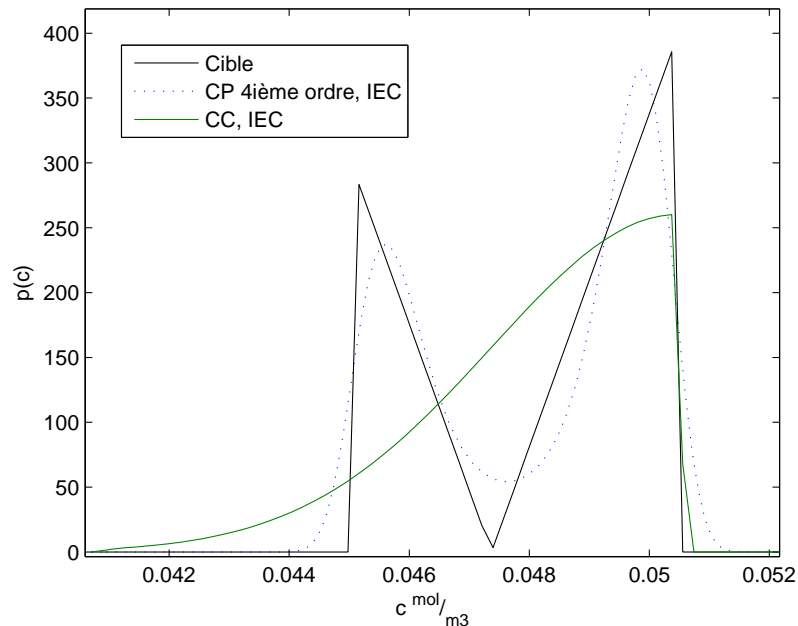


Figure 3.6 FDP pour contrôleur commutant et polynomial paramétrés avec l'IEC avec FDP cible bimodale (CO : contrôleur polynomial, CC : contrôleur commutant)

### 3.3.5 Discussion

*Comparaison entre un contrôleur polynomial et un contrôleur commutant.* Les raisons principales d'utiliser un contrôleur polynomial sont : (i) la continuité de leur formulation mathématique qui facilite leur installation dans un milieu industriel et (ii) la possibilité d'ajouter des termes afin d'améliorer leur flexibilité. Premièrement, les résultats montrent que les contraintes de stabilité font en sorte que le contrôleur doit avoir un comportement plus ou moins linéaire autour de sa région d'opération. Par conséquent, un contrôleur commutant pourrait tout aussi bien performer qu'un contrôleur polynomial. Deuxièmement, il a été démontré qu'il n'y avait pas plus de difficultés à traiter mathématiquement la discontinuité d'un contrôleur commutant par rapport au contrôleur polynomial. De plus, le contrôleur commutant est plus stable et robuste sur une plus grande plage d'opération. Cela, même si la non-linéarité est assez forte pour avoir des FDP qui sont très asymétriques. Cependant, le défaut du contrôleur commutant est qu'il n'y a que 3 paramètres (2 gains et le point de consigne), le rendant incapable d'émuler des formes de FDP cible complexes. Dans ces cas, il faudrait analyser la possibilité d'utiliser un contrôleur avec plusieurs points de commutation

ou un contrôleur commutant non linéaire.

*Comparaison entre la méthode de paramétrisation par pairage des coefficients de GC et la minimisation de l'erreur au carré :* Parmi les méthodes de paramétrage, la minimisation a l'avantage de tenir en compte tous les moments de la FDP, tandis qu'avec la méthode par pairage de coefficients de GC, seulement les moments associés aux coefficients choisis sont émulés. Les moments supérieurs étant négligés. Par conséquent, la minimisation devrait donner de meilleurs résultats, mais les résultats démontrent que cet avantage est seulement marginal.

### **3.4 Conclusion**

Ce chapitre a démontré qu'un contrôleur commutant peut être utilisé dans des applications de formage de fonction de densité de probabilité. Il est tout aussi efficace, et dans certains cas, plus efficace, que le contrôleur polynomial. La solution analytique de la forme de la FDP d'un système avec contrôleur commutant peut être obtenue, même s'il y a discontinuité au point de commutation. Par la suite, cette solution a été utilisée pour comparer deux types de paramétrage : le pairage de coefficients de Gram-Charlier et la minimisation de l'intégrale de l'erreur au carré. Il a été déterminé que la minimisation donne de meilleurs résultats parce que tous les moments de la FDP sont utilisés.

## CHAPITRE 4

### EFFETS DU BRUIT DE MESURE

#### 4.1 Introduction

Ce chapitre va traiter spécifiquement des effets du bruit de mesure dans un système lorsqu'il y a un contrôleur non linéaire. Il utilisera les concepts mathématiques développés au chapitre 2 et plus précisément à la section 2.4.

La fonction de densité de probabilité (FDP) est un outil important pour déterminer la variabilité d'un procédé. Cette variabilité influence la performance économique du procédé, cette influence peut être calculée avec l'aide de la FDP (Latour (1992); Zhou et Forbes (2003)). En général, avec une FDP plus étroite, donc une diminution de la variance, le procédé est plus rentable. C'est pourquoi la plupart des études se sont concentrées sur le deuxième moment central (la variance) (Aström (1970); Harris (1989); Harris et al. (1999)).

Pour influencer la variance d'un système dynamique, le paramétrage d'un contrôleur linéaire est suffisant. Cependant, il a été démontré que lorsqu'un contrôleur non linéaire est utilisé, il est possible d'influencer la forme de la FDP au complet. Ce domaine est nommé le formage de fonction de densité de probabilité, qui traite de la structure et du paramétrage d'algorithmes non linéaires afin que la FDP de la variable d'intérêt d'un procédé émule une FDP cible. Le problème du formage de FDP a déjà été traité au chapitre 3. Cependant, le problème traité n'avait pas de bruit de mesure. Comme il sera démontré dans ce chapitre, le bruit de mesure a une influence significative sur la FDP et seulement quelques études (Liberzon et Brockett, 2000; Speyer et al., 1974) ont abordé sommairement le problème sans l'analyser en profondeur.

Le but principal de ce chapitre est l'étude de la FDP d'un système dynamique avec bruit de procédé et bruit de mesure, avec un contrôleur non linéaire. L'équation de Fokker-Planck-



Kolmogorov est utilisée pour calculer la forme de FDP de la variable d'état du système. La difficulté principale vient du fait que le bruit de mesure entre de façon non linéaire dans le système et que l'équation de FPK requiert que le bruit entre de façon linéaire. C'est pourquoi il a fallu linéariser le système comme à la section 2.4 du chapitre 2.

Du côté de l'analyse, il y est démontré qu'avec l'absence de bruit de mesure et en présence d'un contrôleur non linéaire, la FDP peut montrer des caractéristiques asymétriques, tandis que le mode demeure au point de consigne. C'est aussi le cas des contrôleurs antisymétriques (le gain du contrôleur est symétrique d'une part et d'autre du point de consigne). Cependant, avec du bruit de mesure et un contrôleur non linéaire, le mode de la FDP n'est plus au point de consigne. En plus, l'asymétrie diminue avec une augmentation du bruit de mesure.

Le chapitre se divise en deux parties. La première partie discute des propriétés de la FDP avec un système avec un contrôleur non linéaire avec bruit de procédé et bruit de mesure. La deuxième partie contient des résultats de simulations. Il est à noter que les outils mathématiques pour les deux parties proviennent du chapitre 2.

## 4.2 Analyse des effets du bruit de mesure sur le biais

Pour cette section, la position du mode est analysée afin de quantifier les effets du bruit de mesure sur un système avec un contrôleur non linéaire. Le mode correspond au maximum de la FDP et représente la valeur où la probabilité de survenir est la plus élevée. Le mode est obtenu en dérivant la FDP,  $p(x)$ . Pour cette démonstration, l'équation 2.9 du chapitre 2 est dérivée :

$$\frac{dp}{dx} = p_0 e^{\int_0^x \frac{2f(\xi) - g(\xi) \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi}}{g^2(\xi)} d\xi} \left\{ \frac{2f(x) - g(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}}{g^2(x)} \right\} \quad (4.1)$$

Excepté pour  $x = -\infty$  et  $x = \infty$ , la racine de l'équation est donnée par :

$$2f(x) = g(x) \frac{\partial g}{\partial x} \quad (4.2)$$

**Propriété 4.2.1.** *la position du mode n'est pas influencée par le bruit de procédé , et ce, pour tous les types de contrôleurs non linéaires.*

**Preuve :** La position du mode est déterminée par les racines de  $2f(x) = g(x) \frac{\partial g}{\partial x}$ . Par définition,  $f(x)$  n'est pas influencée par le bruit de procédé. À la section 2.4,  $g(x)$  est définie par :

$$g^2(x) = \alpha + \beta g_v^2(x) \quad (4.3)$$

Se servant de l'équation précédente :

$$g(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial g^2(x)}{\partial x} = \beta \frac{1}{2} \frac{\partial g_v^2(x)}{\partial x} = \beta g_v(x) \frac{\partial g_v}{\partial x} \quad (4.4)$$

C'est ainsi que les parties de l'égalité ne sont pas influencées par le bruit de procédé ( $\alpha$ ), et par le fait même, celui-ci n'influence pas le mode.

**Propriété 4.2.2.** *En l'absence de bruit de mesure, le mode est zéro pour tous les types de contrôleurs non linéaires.*

**Preuve :**

Au point de consigne (ici 0),  $f(0) = a(0) - b(0)K(0)$ . Puisque pour les système linéaires affines,  $a(0) = 0$ ,  $K(0) = 0$ , et  $b(0) = b_0$ . Donc,  $f(0) = 0$ . En absence de bruit de mesure,  $g(x) = \sqrt{\alpha}$  et  $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ . Par conséquent, à  $x = 0$ ,  $f(x)$  et  $g(x) \frac{\partial g}{\partial x}$  sont nuls, ce qui fait que le maximum de  $p(x)$  est à  $x = 0$ .

**Propriété 4.2.3.** Si (i) le contrôleur est antisymétrique, i.e.,  $K(-x) = -K(x)$  et (ii)  $\frac{\partial b}{\partial x}(0) = 0$ , alors le mode est égal à zéro.

**Preuve :**

Si le contrôleur est antisymétrique, cela implique que le gain du contrôleur,  $\frac{\partial K}{\partial v}$ , est symétrique et  $\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}$  est antisymétrique. Il est à noter que  $p(v)$  est symétrique puisque c'est un bruit gaussien avec une moyenne de zéro. Donc, les expressions pour les dynamiques forcées et libres sont données par :

$$f(0) = b_0 \int_{-\infty}^{\infty} K(v)p(v)dv = 0 \quad (4.5)$$

$$g_v(0) = b_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial v}(v)p(v)dv \neq 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial g_v}{\partial x}(0) = \frac{\partial b}{\partial x}(0)g_v(0) + b_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 K}{\partial v^2}(v)p(v)dv = 0 \quad (4.7)$$

$$g^2(x) = \alpha + \beta g_v^2(x) \quad (4.8)$$

Considérant que  $\frac{\partial b}{\partial x}(0) = 0$ , les expressions de  $f(x)$  et  $g(x)\frac{\partial g}{\partial x}$  sont nulles au point  $x = 0$ .

Dans ce qui va suivre, il sera démontré que le mode n'est pas toujours zéro.

**Proposition :** Dans le cas où le contrôleur n'est pas antisymétrique et que le bruit de mesure est non nul, le mode est non nul. Cependant, avec certains choix spécifiques pour le contrôleur, il est possible de contrecarrer cet effet.

Il en résulte que le bruit de mesure peut translater la FDP quand le gain du contrôleur n'est pas symétrique. Dans ce qui va suivre, excepté pour un choix spécifique des paramètres de

contrôleur, le mode ne sera pas à zéro.

Pour le contrôleur quadratique,  $f(0) = -b_0 K_1 \beta$  ou  $\beta$  est la variance du bruit de mesure. Il est à noter que le terme quadratique fait en sorte que la valeur de  $f(0)$  est non nulle. De plus,  $g_v(0) = -b_0 K_0$  et  $g'_v(0) = -b'(0)K_0 - 2b_0 K_1$ . Pour que l'égalité  $2f(x) = \beta g_v(x) \frac{\partial g_v}{\partial x}$  ait une solution à  $x = 0$ , il faut que  $K_1 = -\frac{K_0^2 b'(0)}{2\{1+b_0 K_0\}}$ . Tout autre choix pour  $K_1$  résultera en un mode non nul, une translation de la FDP. Si  $b(x)$  est une constante, il faut que  $K_1 = 0$  pour que le mode soit à zéro. *Entre d'autres mots*, le contrôleur ne devrait pas avoir de partie quadratique, source de non-linéarité.

Une conclusion similaire, peut être obtenue avec le contrôleur commutant. À  $x = 0$ , il est possible de calculer :

$$f(0) = -b_0 \{K_b - K_a\} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \quad (4.9)$$

$$g_v(0) = -b_0 \frac{K_a + K_b}{2} \quad (4.10)$$

$$g'_v(0) = -b'(0) \frac{K_a + K_b}{2} - b_0 \frac{K_b - K_a}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta}} \quad (4.11)$$

Cela mène à  $\{K_b - K_a\} = -b'(0) \sqrt{2\pi\beta} \frac{\{K_a + K_b\}^2}{8 + b_0 \{K_a + K_b\}}$ . Par conséquent, seul un choix particulier pour  $K_a$  et  $K_b$  peut mener à un mode à 0. En particulier, si  $b(x)$  est une constante  $K_b = K_a$  est le seul choix pour avoir un mode à zéro.

Il y a d'autres propriétés intéressantes qui ne peuvent être facilement démontrées analytiquement. La plus intrigante est l'asymétrie décroissante avec le bruit de mesure. Celle-ci sera démontrée par des simulations à la section suivante.

En résumé, 3 effets d'un contrôleur non linéaire sur une FDP d'une variable d'état ont été décrits. La composante linéaire influence la variance, le terme non linéaire influence l'asymétrie et le bruit de mesure induit une translation de la FDP.

### 4.3 Résultats de simulation

Cette section présente les résultats de simulation pour le système suivant, où  $v$  et  $w$  sont des bruit blancs gaussiens non corrélés :

$$\dot{x} = a(x) - b(x)K(x + w) + v \quad (4.12)$$

sur lequel on verra l'effet d'une non-linéarité provenant d'un contrôleur commutant de type :

$$K(y) = \begin{cases} K_a y & \text{si } y \geq 0 \\ K_b y & \text{si } y < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

et d'un contrôleur quadratique de la forme :

$$K(y) = K_0 y + K_1 y^2 \quad (4.14)$$

Le système est paramétré par  $a(x) = 0$  et  $b(x) = 1$ . En ce qui concerne le cas de base, la variance du bruit de procédé est fixée à  $\alpha = 0.5$  tout comme celle du bruit de mesure  $\beta = 0.5$ . Dans le même ordre d'idées, les paramètres pour le contrôleur quadratique du cas de base sont fixés à  $K_0 = 0.5$ ,  $K_1 = 0.05$  et ceux du contrôleur commutant à  $K_a = 0.35$  et  $K_b = 0.65$ . Chaque FDP est obtenue par la résolution numérique des équations pour le cas avec bruit de procédé et bruit de mesure développées au chapitre 2 à la section 2.4.

#### 4.3.1 Effets du bruit de mesure

Premièrement, les effets du bruit de mesure ont été analysés. Différentes variances ont été considérées pour avoir des cas où le bruit de mesures était dominant et d'autres cas où le

bruit de procédé était dominant.

Pour le cas du contrôleur quadratique, le tableau 4.1 présente les moments pour différentes variances du bruit de mesure ( $\beta$ ). Pour les scénarios ayant rapport au contrôleur commutant, les résultats sont présentés au tableau 4.2. Les deux tableaux ont les mêmes tendances, quoique les effets sont plus prononcés sur les cas avec un contrôleur commutant. L'aspect le plus important est l'accroissement du mode et de la moyenne causé par la translation discutée plus haut. L'augmentation de la variance est attribuable à l'accroissement de la variance du bruit de mesure. Aussi, un autre phénomène d'intérêt est la diminution de l'asymétrie avec une augmentation de la variance du bruit de mesure. Non seulement l'asymétrie diminue, mais elle change de signe. Cela est attribuable au bruit de mesure : plus il est élevé, plus le contrôleur fait des erreurs de choix de gains. C'est-à-dire que l'erreur induite par le bruit de mesure pousse le contrôleur dans une zone agressive alors qu'il devrait réagir doucement. Quand le contrôleur réagit agressivement, il pousse l'état dans la zone douce. Avec du bruit de mesure, si l'état est déjà dans une zone douce, il se retrouve envoyé encore plus profondément dans la zone douce. C'est ainsi que l'asymétrie change de signe. Il est à noter que tous les moments et le mode sont affectés par le bruit de mesure.

$\beta$	0	0.25	0.5	0.75	1
mode	0	-0.04	-0.08	-0.11	-0.15
moyenne	-0.06	-0.08	-0.10	-0.12	-0.14
variance	0.51	0.58	0.64	0.71	0.77
asymétrie	-0.06	-0.04	-0.03	0	0.03

Tableau 4.1 Variations des moments centraux et du mode par rapport au bruit de mesure pour un système avec un contrôleur quadratique ( $\alpha = 0.5$ ,  $K_0 = 0.5$ ,  $K_1 = 0.05$ ).

$\beta$	0	0.25	0.5	0.75	1
mode	0	-0.15	-0.21	-0.26	-0.30
moyenne	-0.19	-0.22	-0.25	-0.27	-0.29
variance	0.54	0.60	0.66	0.72	0.78
asymétrie	-0.10	-0.07	-0.04	-0.01	0.01

Tableau 4.2 Variations des moments centraux et du mode par rapport au bruit de mesure pour un contrôleur commutant ( $\alpha = 0.5$ ,  $K_a = 0.35$ ,  $K_b = 0.65$ ).

### 4.3.2 Effets du bruit de procédé

Par la suite, l'effet du bruit de procédé est analysé. Tout comme pour le cas du bruit de mesure, plusieurs variances du bruit de procédé sont considérées.

Les résultats sont donnés au tableau 4.3 pour le contrôleur quadratique et au tableau 4.4 pour le contrôleur commutant. L'aspect le plus important est qu'il n'y a pas d'influence de la variance du bruit de procédé sur le mode. Celui-ci ne change pas même si la variance du bruit de procédé varie. De plus, le bruit de procédé influence grandement l'asymétrie. Quand celui-ci est bas, la FDP est presque gaussienne même si le contrôleur est non linéaire. Donc, le bruit de procédé est plus important que le bruit de mesure quand il s'agit de l'asymétrie de la FDP.

$\alpha$	0	0.25	0.5	0.75	1
mode	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07
moyenne	-0.05	-0.08	-0.10	-0.12	-0.15
variance	0.13	0.38	0.64	0.91	1.18
asymétrie	0.01	0.01	-0.02	-0.09	-0.20

Tableau 4.3 Moments centraux et mode par rapport au bruit de procédé pour le contrôleur quadratique ( $\beta = 0.5$ ,  $K_0 = 0.5$ ,  $K_1 = 0.05$ )

$\alpha$	0	0.25	0.5	0.75	1
mode	-0.21	-0.21	-0.21	-0.21	-0.21
moyenne	-0.16	-0.20	-0.25	-0.27	-0.30
variance	0.12	0.39	0.66	0.93	1.2
asymétrie	0.01	-0.01	-0.04	-0.11	-0.19

Tableau 4.4 Moments centraux et mode par rapport au bruit de procédé pour le contrôleur commutant ( $\beta = 0.5$ ,  $K_a = 0.35$ ,  $K_b = 0.65$ )

### 4.3.3 Effet de la non-linéarité

Troisièmement, l'effet de la non-linéarité du contrôleur a été analysé. Pour y arriver, le terme quadratique du contrôleur quadratique a été modifié, tandis que pour le contrôleur commutant, c'est la différence entre les gains qui a été modifiée, mais en gardant la somme des deux gains constante.

Pour le contrôleur quadratique, les résultats sont présentés au tableau Table 4.5 et ceux du contrôleur commutant au tableau 4.6. Pour le contrôleur quadratique, le mode et la moyenne augmentent de façon quasi-linéaire avec la valeur de la partie quadratique. Ce qui n'est pas le cas pour le contrôleur commutant. L'asymétrie est affectée non linéairement, s'accroissant considérablement quand la non-linéarité est grande.

Le dernier test a été fait pour voir si deux non-linéarités de signes différents sont le miroir l'une de l'autre. Par exemple,  $K_1 = 0.1$  et  $K_1 = -0.1$  pour le cas quadratique et  $K_b - K_a = -0.8$  pour le cas du contrôleur commutant. On y voit que la moyenne, le mode et l'asymétrie ne font que changer de signe, tandis que la variance reste la même. Puisque le système est linéaire, il est normal que les moments impairs se reflètent. Quant aux moments pairs, il est normal qu'ils ne changent pas puisque la FDP est l'image symétrique du gain opposé.

$K_1$	0	0.025	0.05	0.075	0.1	-0.1
mode	0	-0.04	-0.08	-0.11	-0.15	-0.15
moyenne	-0.01	-0.06	-0.10	-0.15	-0.22	0.20
variance	0.62	0.63	0.64	0.66	0.74	0.74
asymétrie	0.00	-0.01	-0.02	-0.05	-0.25	0.23

Tableau 4.5 Moment centraux et mode par rapport à la non-linéarité du contrôleur quadratique ( $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $K_0 = 0.5$ )

$K_b - K_a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	-0.8
mode	0	-0.13	-0.29	-0.42	-0.69	0.69
moyenne	-0.01	-0.18	-0.33	-0.58	-1.04	1.01
variance	0.62	0.64	0.70	0.85	1.29	1.25
asymétrie	-0.01	-0.01	-0.08	-0.18	-0.66	0.69

Tableau 4.6 Moments centraux et mode par rapport au bruit de procédé pour le contrôleur commutant ( $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $K_a + K_b = 1$ )

#### 4.3.4 Effet sur les performances économiques

Pour cette section, l'importance de la translation sur la PDF induite par la non-linéarité et le bruit de mesure sur les performances économiques du procédé est analysée. Plus précisément, la performance économique d'un procédé où cette translation a été prise en compte est comparée à celle où cette translation est ignorée. Le procédé en question est le même qu'à la



section précédente ( $a = 0$  et  $b = 1$ ) où la variance du bruit de procédé est  $\alpha = 1$ . Le contrôleur non linéaire est un contrôleur commutant où  $K_a = 0.05$  et  $K_b = 0.95$ . De plus, pour varier la translation, le bruit de mesure aura des valeurs différentes.

La fonction économique  $l(x)$  pour cet exemple est une fonction linéaire où les coûts variables sont représentés par  $S_e$  et les coûts fixes par  $B$ . De plus, il y a une pénalité  $P$  si la valeur de la variable dépasse une certaine valeur  $Z$ . Cependant, les coûts fixes et variables ne s'appliquent plus quand la contrainte est dépassée à cause que les matériaux sont recyclés.

$$l(x) = \begin{cases} S_e x + B & \text{si } y < Z \\ P & \text{si } y \geq Z \end{cases} \quad (4.15)$$

Les valeurs numériques utilisées sont  $S_e = -1$ ,  $B = 5$ ,  $C = 11$  et  $P = 175$ . Pour calculer le coût lié à une FDP spécifique  $p(x)$ , la fonction d'espérance d'une variable aléatoire est utilisée :

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)l(x)dx \quad (4.16)$$

Pour cette partie, la FDP pour le système est calculée en utilisant les concepts développés au chapitre 2. Par la suite, le point de consigne optimal est calculé vis-à-vis la fonction coût décrite par l'équation 4.16 prenant par le fait même la translation en compte. Cette valeur est appelée  $C_{shift}$ . Par la suite, la translation n'est pas prise en compte et la fonction coût est recalculée,  $C_{no,shift}$ . Finalement l'importance de la translation est calculée :

$$\% = \frac{C_{no,shift} - C_{shift}}{C_{shift}} \times 100 \quad (4.17)$$

Le % est calculé pour différentes variances du bruit de mesure à la figure 4.1. Sur cette figure, il est possible de voir l'amélioration due au changement de point de consigne sachant que la FDP est déplacée. Ainsi, même avec un faible bruit de mesure, l'amélioration due au fait

d'avoir tenu en compte la translation est significative. De plus, l'avantage économique semble se stabiliser plus la variance du bruit de mesure est élevée, ce qui est dû au lien non linéaire qui relie la translation à la variance du bruit de mesure.

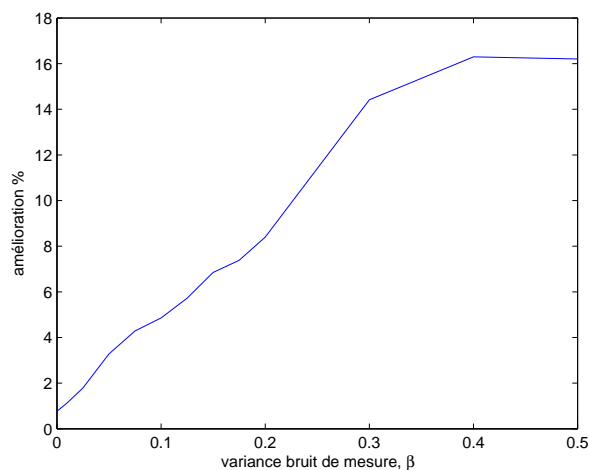


Figure 4.1 Graphique du pourcentage d'amélioration en tenant compte de la translation pour différents bruits de mesure

#### 4.4 Conclusion

Ce chapitre a traité de l'analyse de la FDP d'un système avec bruit de mesure et contrôleur non linéaire. Plusieurs effets ont pu être observés et liés à un paramètre du système. La translation de la FDP qui est principalement causée par le bruit de mesure. L'asymétrie est causée par le bruit de procédé. Celle-ci diminue jusqu'à changer de signe s'il y a trop de bruit de mesure. Ces deux phénomènes ne sont pas intuitifs à première vue.

## CHAPITRE 5

### OPTIMALITÉ D'UNE FDP ASYMÉTRIQUE

#### 5.1 Introduction

L'optimisation dans un contexte stochastique implique la valeur espérée d'une fonction objectif. Dans ce contexte, l'entière distribution est incluse dans la formulation du problème, non seulement la moyenne. Typiquement, avec la présence de contraintes, la variabilité est réduite avec l'usage approprié des contrôleurs. Par après, le point de consigne est approché de la contrainte. L'utilisation de contrôleurs à variance minimale a été largement étudiée dans la communauté scientifique (Muske, 2003).

Cependant, le formage de fonction de densité de probabilité (FDP) pourrait être une alternative pour réduire les coûts d'opération. La première mention de ce concept a été faite par Karny (Karny, 1996). Par la suite Wang (Wang, 1998) a développé un algorithme de formage de FDP basé sur les poids d'une spline de type B qui paramétrise la FDP de la variable d'état. Cette méthode a été améliorée depuis par les mêmes auteurs (Wang, 2002; Wang et Wang, 2002a,b; Guo et Wang, 2005a,b). Crespo (Crespo et Sun, 2002b) a utilisé une solution analytique de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) en régime permanent pour faire un algorithme de formage de FDP. D'un autre côté, Forbes (Forbes et al., 2004) a développé un algorithme basé sur la paramétrisation d'une FDP cible avec des fonctions de base de Gram-Charlier. Cependant, tous les travaux cités abordent le problème d'émuler une FDP cible, même si l'objectif principal est d'optimiser le système. Aucune indication sur la manière choisir mathématiquement une FDP cible appropriée pour la fonction coût du procédé n'est développée.

Il a été posé dans tous les travaux précédents que l'avantage du formage de FDP est d'avoir une FDP de forme asymétrique. La nécessité d'une FDP asymétrique vient des asymétries de la fonction coût. Celles-ci proviennent des contraintes d'opération et de procédé. Dans

une telle situation, une approche par barrières est adoptée pour la résolution du problème ; un coût additionnel est ajouté lorsque qu'une contrainte est dépassée, causant ainsi une asymétrie.

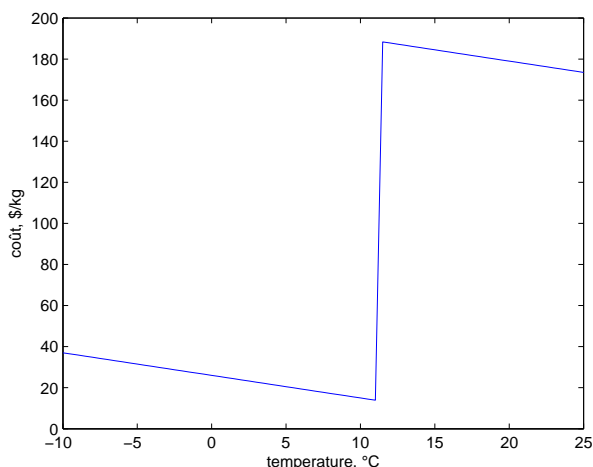


Figure 5.1 Exemple d'une fonction coût asymétrique

La figure 5.1 est un exemple où une pénalité constante est additionnée. Cette figure représente le coût pour d'entreposage d'un produit chimique, si la température est trop élevée, le produit se dégrade. Cependant, plus la température est froide, plus les coûts de refroidissement sont élevés. Si la température dépasse la contrainte de 11° C, alors le produit est dégradé, occasionnant une perte économique. De telles pénalités causent des asymétries importantes autour de la solution optimale. La solution optimale sans élément stochastique serait à 11° C. Cependant, avec du bruit de procédé, même avec un contrôleur qui réduit la variance du système, le point de consigne doit être en deçà de 11 ° C pour minimiser la fraction de la distribution qui dépasse la contrainte. Deux approches peuvent être utilisées, la première étant de paramétrer le contrôleur qui donnera la variance la plus petite, l'autre est le formage de FDP qui forme la FDP de la variable d'intérêt asymétriquement de façon à avoir le côté abrupt de la FDP du côté de la contrainte et une longue queue de l'autre côté.

Même si intuitivement, les FDP asymétriques semblent optimales, à la connaissance de l'auteur, aucun résultat formel n'a été produit pour distinguer les cas où une FDP asymétrique donnerait de meilleurs résultats qu'une FDP symétrique. C'est de cet aspect que ce chapitre

va traiter. La réponse dépend du poids accordé à la variable manipulée dans la fonction coût. Avec un contrôleur à variance minimale, la variance de la variable d'état diminue au dépend de la variable manipulée, ce qui use prématurément les équipements. Une FDP asymétrique permet de s'approcher de la contrainte sans une augmentation démesurée de la variance de la variable manipulée.

Ce chapitre fera un retour sur le système utilisé et la solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov(FPK) pour un contrôleur commutant. Ensuite, l'optimalité (ou la non optimalité) de la solution symétrique est testée. La dernière section est consacrée à un exemple de simulation où l'amélioration de performance économique est due à l'utilisation d'une FDP asymétrique.

## 5.2 Formulation du problème

Le modèle utilisé est un système scalaire non linéaire avec une entrée contrôlée  $u$  et  $w$  est un bruit blanc gaussien de variance  $\alpha$ .

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u + w \quad (5.1)$$

Les fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  représentent les dynamiques libres et forcées du système. Considérons l'optimisation du système en régime stationnaire expliqué ci-haut.

$$\min_u \phi(x, u) \quad (5.2)$$

$$C(x, u) \leq 0 \quad (5.3)$$

$$a(x) + b(x)u = 0 \quad (5.4)$$

où  $\phi$  est la fonction convexe à optimiser,  $C$  les contraintes. Il est à noter que l'optimisation

considère le système d'équations sans bruit en régime permanent comme des contraintes d'égalité.

Dans le contexte de ce chapitre, une fonction pénalité est introduite pour tenir compte des contraintes.

$$\min_u [\phi(x, u) + D(C(x, u))] \quad (5.5)$$

$$a(x) + b(x)u = 0 \quad (5.6)$$

$D(\cdot)$  représente la fonction coût augmentée, qui demeure convexe. Comme il a déjà été dit,  $D(\cdot)$  étant asymétrique, cela amène une asymétrie dans la fonction coût.

Dans le contexte de ce travail de recherche,  $x$  est considéré comme stochastique à cause de la présence de bruit. Dans ce chapitre il n'y aura que du bruit de procédé,  $v$ . Par conséquent, la fonction espérance de la fonction coût doit être calculée pour solutionner le problème d'optimisation. Celle-ci devient :

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, u) p(x, u) dx du \quad (5.7)$$

où  $p(x, u)$  est la FDP jointe.

### 5.3 Contrôleur utilisé

Dans cette section, le contrôleur non linéaire pour faire le formage de FDP sera présenté. Cette non-linéarité est cruciale, puisque si le procédé et le contrôleur étaient linéaires et le bruit entrant était gaussien, la FDP de la variable d'état serait elle aussi gaussienne.

Ici, un contrôleur commutant est utilisé pour créer la non-linéarité, celle-ci provenant de la

commutation entre les deux gains, il en résultera une FDP asymétrique.

$$K(y) = \begin{cases} K_a \{x - x_{sp}\} & \text{si } x \geq x_{sp} \\ K_b \{x - x_{sp}\} & \text{si } x < x_{sp} \end{cases} \quad (5.8)$$

#### 5.4 Solutions analytiques développées

Dans cette section, un bref retour sera fait sur les équations utilisées pour développer le problème d'optimisation. Celles-ci proviennent essentiellement du chapitre 2 où le problème d'un système avec seulement du bruit de procédé et un contrôleur commutant a été solutionné à la section 2.3.2.1.

C'est ainsi que le terme  $f(x)$  est défini par :

$$f(x) = \begin{cases} -K_a \{x - x_{sp}\} & \text{pour } x \geq x_{sp} \\ -K_b \{x - x_{sp}\} & \text{pour } x < x_{sp} \end{cases} \quad (5.9)$$

et le terme  $g(x)$  est défini par :

$$g(x) = \sqrt{\alpha} \quad (5.10)$$

Par après, ces deux équations sont insérées dans la solution de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov :

$$p(x) = p_0 \exp^{\int_0^x F(\xi) \xi} \quad (5.11)$$

où

$$F(x) = \frac{2f(x) - g(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}}{g^2(x)} \quad (5.12)$$

Cette équation peut être solutionnée analytiquement, ce qui donnera :

$$p(x) = \begin{cases} p_0 \exp^{-K_a \frac{\{x_{sp}-x\}^2}{2\alpha}} & \text{pour } x \geq x_{sp} \\ p_0 \exp^{-K_b \frac{\{x_{sp}-x\}^2}{2\alpha}} & \text{pour } x < x_{sp} \end{cases} \quad (5.13)$$

Cette solution peut être interprétée comme une fonction gaussienne par partie divisée au point de consigne. La variance de chaque côté étant différente, l'écart type de chaque côté peut être calculé tel que :

$$\sigma_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2K_a}}, \quad \sigma_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2K_b}} \quad (5.14)$$

D'ailleurs, la constante de normalisation peut être calculée analytiquement :

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \{\sigma_1 + \sigma_2\}} \quad (5.15)$$

Puisque la variable manipulée est utilisée, il faut avoir l'expression analytique de la FDP de celle-ci. Cette expression a été développée à la section 2.3.2.1 du chapitre 2 :

La solution de l'équation devient donc (où  $u_{sp}$  est la valeur de la variable manipulée au point de consigne (ici  $u_{sp} = 0$ )) :

$$p(u) = \begin{cases} \frac{p_{0,u}}{k_a} \exp^{-\frac{\{-u\}^2}{2\sigma_{u,a}^2}} & \text{pour } u \geq u_{sp} \\ \frac{p_{0,u}}{k_b} \exp^{-\frac{\{-u\}^2}{2\sigma_{u,b}^2}} & \text{pour } u < u_{sp} \end{cases} \quad (5.16)$$



Cette solution peut être interprétée comme une fonction gaussienne par partie divisée au milieu. La variance de chaque côté étant différente, l'écart type de chaque côté peut être calculé tel que :

$$\sigma_{u,a} = \frac{\alpha}{\sqrt{2K_a}}, \quad \sigma_{u,b} = \frac{\alpha}{\sqrt{2K_b}} \quad (5.17)$$

D'ailleurs, la constante de normalisation peut être calculée analytiquement :

$$p_{0,u} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \{ \sigma_{u,a}/K_a + \sigma_{u,b}/K_b \}} \quad (5.18)$$

### 5.5 Non optimalité de la solution symétrique

Dans cette section, il sera démontré qu'une FDP symétrique est suffisante même si la fonction objectif est asymétrique. S'il n'y a pas de poids sur la pénalité de la variable manipulée, alors la solution optimale est une FDP symétrique où le gain du contrôleur est infini. De plus, s'il n'y a pas de bruit de procédé, alors la solution optimale est un contrôleur symétrique avec un gain nul. Cependant, s'il y a asymétrie et un poids sur la variable manipulée pour la fonction coût, et qu'il y a du bruit de procédé, il sera démontré que la solution symétrique n'est pas optimale.

Considérons l'équation 5.7,  $u$  est une fonction de  $x$ , alors la fonction objectif n'est qu'une fonction de  $x$ . Pour les besoins de la fonction économique, la variance de la variable manipulée sera introduite,  $h^2(x)$  (puisque  $u$  est une fonction de  $x$ ). Le facteur  $\gamma$  représente le poids sur  $h^2(x)$ . Le restant de la fonction coût, ayant rapport directement aux coûts reliés à  $x$ , est nommé  $l(x)$  :

$$\phi(x, u) = l(x) + \gamma h^2(x) \quad (5.19)$$

À cause de la structure imposée, les degrés de liberté du problème d'optimisation sont :  $x_{sp}$ ,  $k_a$  et  $k_b$ .

$$\min_{x_{sp}, K_a, K_b} J = \int_{-\infty}^{\infty} l(x)dx + \gamma h^2(x) \quad (5.20)$$

La preuve de non optimalité est développée en dérivant les conditions nécessaires du problème d'optimisation ci-haut en considérant que  $k_a$  et  $k_b$  sont indépendants. Par la suite, une condition de symétrie est imposée, i.e.  $k_a = k_b$ . Cela donne 4 conditions (3 nécessaires et une de symétrie) pour 3 variables. Si les 3 conditions sont consistantes, alors la solution symétrique est optimale. De l'autre côté, si cela mène à une inconsistance mathématique, cela montrera que la solution symétrique n'est pas optimale pour le cas développé.

*Théorème : Le contrôleur commutant symétrique pour un système linéaire est localement optimal si et seulement si (i)  $l(x)$  est symétrique autour de l'optimum, c'est-à-dire que la troisième dérivée est nulle. Ou, (ii) le poids sur la variance de la variable manipulée,  $\gamma$  est nul.*

Sans perdre de généralité, soit  $x = 0$ ,  $l(x) = 0$ ,  $J = 0$  est l'optimum en absence de bruit. L'approximation de Taylor au troisième ordre est faite sur  $l(x)$  autour de  $x = 0$ . Les deux premiers termes sont nuls puisque  $l(0) = 0$  et la première dérivée est nulle à cause de l'optimalité. Par conséquent, l'expansion est donnée par :

$$l(x) = \Sigma x^2 + \Lambda x^3 \quad (5.21)$$

où  $\Sigma$  et  $\Lambda$  sont les secondes et troisièmes dérivées à l'origine, faisant en sorte que l'équation est localement convexe et asymétrique. L'espérance de coût, l'équation 5.7, devient donc :

$$J = \Sigma \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx + \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^3 p(x) dx + \gamma h^2(x) \quad (5.22)$$

Les conditions d'optimalité requièrent que les dérivées de  $J$  par rapport à  $x_{sp}, K_a$  et  $K_b$  soient nulles. Ces expressions sont obtenues grâce au solveur algébrique de MatLab<sup>TM</sup>. Pour analyser la solution symétrique, l'égalité  $K_a = K_b = K$  est posée. Substituant l'expression précédent dans les dérivées, on obtient :

$$\frac{dJ}{dx_{sp}} = \frac{1}{2K} \{4\Sigma K x_{sp} + 6\Lambda K x_{sp}^2 + 3\Lambda\alpha\} = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{dJ}{dK_a} + \frac{dJ}{dK_b} = \frac{\alpha}{2K^2} \{-3\Lambda x_{sp} - \Sigma + \gamma K^2\} = 0 \quad (5.24)$$

et

$$\frac{dJ}{dK_a} - \frac{dJ}{dK_b} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi K^3}} \{2\Sigma K x_{sp} + 3\Lambda K x_{sp}^2 + 2\Lambda\alpha\} = 0 \quad (5.25)$$

En simplifiant les termes (qui sont dans le même ordre), on obtient :

$$2\Sigma x_{sp} + 3\Lambda x_{sp}^2 + \frac{3\Lambda\alpha}{2K} = 0 \quad (5.26)$$

$$\frac{\gamma\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2K^2} \{\Sigma + 3\Lambda x_{sp}\} = 0 \quad (5.27)$$

$$\frac{2\Lambda\alpha}{K} + 2\Sigma x_{sp} + 3\Lambda x_{sp}^2 = 0 \quad (5.28)$$

Si l'équation 5.28 est soustraite de 5.26 :

$$\frac{\Lambda\alpha}{2K} = 0 \quad (5.29)$$

Cela donne 3 cas où la solution numérique est optimale.

$\Lambda = 0$  . C'est le cas où la fonction coût n'est plus asymétrique puisque  $\Lambda$  représente la partie asymétrique de la fonction coût. Cela ressemble au cas de la variance minimale où il y a un gain optimal, celui-ci ayant la valeur de  $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ . Dans ce cas, le point de consigne optimal est à  $x_{sp} = 0$

$K = \infty$  (*implique  $\gamma = 0$* ) dans l'équation 5.27. C'est le cas où la variable manipulée n'est plus pénalisée. Sans surprise, alors le gain optimal a une valeur infinie. Par conséquent, la variance tend vers zéro et le point de consigne est à l'optimum de la fonction coût  $x_{sp} = 0$ .

$\alpha = 0$ . C'est le cas où il n'y a pas de bruit de procédé. Alors, le gain peut prendre n'importe quelle valeur et le point de consigne est à l'optimum de la fonction coût  $x_{sp} = 0$ .

Donc, si  $\gamma \neq 0$ ,  $\Lambda \neq 0$  et  $\alpha \neq 0$ , cela fait en sorte que l'équation 5.29 n'est pas respectée et que la solution avec un gain symétrique n'est pas optimale.

## 5.6 Exemple

Dans cette section, un exemple où un système avec bruit de mesure est optimisé par rapport à une fonction coût asymétrique comprenant un terme pénalisant la variance de la variable manipulée. Le contrôleur commutant optimal est obtenu avec l'aide de la FDP de la variable d'état qui est obtenue avec l'expression analytique développée dans les sections précédentes. Il y sera démontré que le contrôleur optimal mène à une FDP asymétrique.

Une fonction coût analogue à la figure 5.1 est utilisée :

$$\phi(x) = 13 - x + D(c(x)) + 0.75h^2(x) \quad (5.30)$$

$$D(c(x)) = 175 \text{ si } x > 11 \quad (5.31)$$

$$D(c(x)) = 0 \text{ si } x \leq 11 \quad (5.32)$$

Le système dynamique est de type intégrateur ( $a = 0$  et  $b = 1$ ) avec un bruit de procédé avec une variance  $\alpha = 0.1$ .

### 5.6.1 Design du contrôleur

Le contrôleur décrit par l'équation 5.8 est utilisé ; par conséquent, il y a 3 paramètres à choisir :  $k_a$ ,  $k_b$  et  $x_{sp}$ . Ces paramètres sont trouvés par programmation non linéaire où l'équation 5.22 est minimisée.

$$J = 13 - \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx + 175 \int_{11}^{\infty} p(x)dx + 0.75 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)dx \quad (5.33)$$

### 5.6.2 Résultats

Les paramètres optimaux pour un contrôleur commutant et pour un contrôleur à simple gain ont été trouvés numériquement. Pour calculer les paramètres optimaux du contrôleur à simple gain, les mêmes algorithmes que pour le contrôleur commutant ont été utilisés, mais avec la contrainte supplémentaire  $k_a = k_b$ . Les gains optimaux et les valeurs des fonctions coût sont présentés au tableau 5.1. On peut y voir qu'avec le contrôleur commutant, les coûts sont réduits de 5.93%. C'est qu'avec un contrôleur commutant, il est possible d'avoir un gain plus grand que le gain optimal d'un contrôleur optimal à gain simple. Ceci permet d'avoir un côté plus abrupt. L'autre gain étant plus petit, cela ménage la variance de la variable manipulée.

La figure 5.2 montre la FDP pour les deux contrôleurs. La FDP pour le contrôleur à gain simple est symétrique, tandis que la FDP du système avec un contrôleur commutant est asymétrique. Cette asymétrie est inversée pour la figure 5.3 ; c'est parce que près de la contrainte, la variable manipulée doit travailler plus fort du côté du gain élevé pour réduire la variance, tandis que du côté du gain faible, la variable manipulée est moins sollicitée.

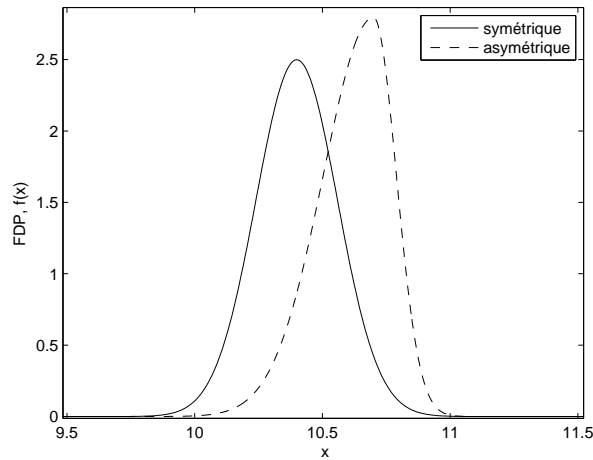


Figure 5.2 FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple.

## 5.7 Conclusion

Ce chapitre a démontré la non optimalité d'une FDP symétrique lorsque la fonction coût est asymétrique et la variable manipulée est contrainte. Cette conclusion a été obtenue en utilisant l'expression analytique de la FDP d'un système avec un contrôleur commutant. Finalement, un exemple numérique a été développé où une FDP asymétrique donne de meilleurs résultats qu'une FDP symétrique.

Type de contrôleur	Contrôleur commutant	Contrôleur gain simple
Point de consigne	10.70	10.40
$K_a$	6.26	1.96
$K_b$	1.30	1.96
Coût	2.53	2.69

Tableau 5.1 Paramètres des contrôleurs et coût associés

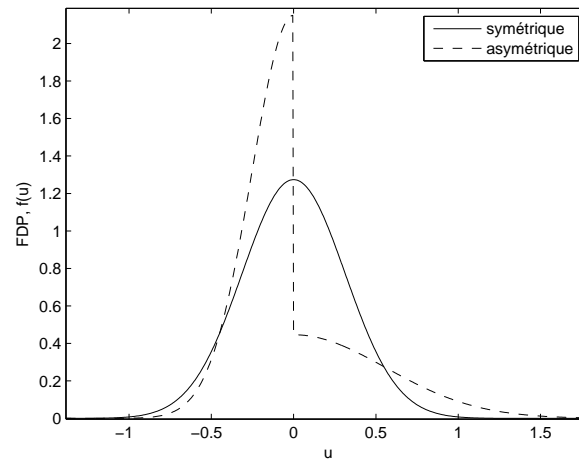


Figure 5.3 FDP de la variable manipulée pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple.

La signification de cette découverte est qu'elle montre clairement là où il est avantageux d'avoir une FDP asymétrique. De plus, l'utilisation d'un contrôleur commutant permet une implantation facile dans le milieu industriel.

## CHAPITRE 6

### OPTIMALITÉ AVEC BRUIT DE MESURE

#### 6.1 Introduction

Comme il a déjà été vu au chapitre 4, l'ajout du bruit a plusieurs effets sur la FDP. Par conséquent, ces effets se transmettent à toute fonction coût liée à cette FDP. C'est pourquoi les résultats du chapitre 5 ne peuvent être réutilisés pour ce cas. De plus, à cause de la nature des solutions analytiques, il n'a été pas possible de les intégrer analytiquement, rendant par le fait même impossible toute approche analytique. En plus, contrairement au cas sans bruit de mesure, la variance du système est bornée à une valeur finie, la variance minimale, ce qui limite par le fait même toute amélioration économique face à une fonction coût quelconque.

#### 6.2 Approche de la problématique

Ici, puisqu'il n'y a pas de solution analytique intégrable pour la FDP, seulement des résultats de simulation seront présentés, il n'y aura pas de preuve formelle, mais plutôt des extensions aux conclusions du chapitre 5. La première approche sera d'appliquer la fonction coût de l'exemple numérique du chapitre 5. Ainsi, il sera possible de voir si les 3 conditions pour qu'une FDP asymétrique soit optimale suffisent pour le cas avec un système avec bruit de procédé et bruit de mesure. Il en résultera qu'une FDP asymétrique est optimale aussi quand du bruit de mesure est ajouté au système. Le deuxième cas consiste à enlever la composante du bruit de mesure dans la fonction coût et voir s'il est possible pour une FDP asymétrique d'être optimale dans ce cas. Les résultats démontrent que la FDP asymétrique demeure optimale même si la variable manipulée n'intervient plus dans la fonction coût. Cependant, la solution optimale demande une plus grande fréquence d'échantillonnage, diminuant par le fait même la variance minimale du système. Par conséquent, il reste à débattre si la variance



minimale est réellement battue.

### 6.3 Extension des 3 conditions au cas avec bruit de mesure

Il a été vu au chapitre 5 que les deux conditions les plus importantes pour qu'une FDP asymétrique soit optimale face à une FDP symétrique sont que : premièrement, la fonction coût doit être asymétrique et deuxièmement, la variable manipulée doit être tenue en compte dans la fonction coût. C'est ainsi que pour cette partie, l'exemple numérique du chapitre 5 sera utilisé avec la solution numérique de la FDP d'un système avec contrôleur non linéaire, bruit de procédé et bruit de mesure (équations du chapitre 2). De plus, un cas sera optimisé avec une variance du bruit de mesure de 0.1 et l'autre cas aura une variance du bruit de mesure de 1. Pour les 2 cas, le système est de type intégrateur  $a = 0$ ,  $b = 1$  et la variance du bruit de procédé est 1. Finalement, la fonction coût utilisée pour cette partie est la même que l'exemple numérique du chapitre précédent :

Une fonction coût analogue à la figure 5.1 est utilisée :

$$\phi(x) = 13 - x + D(c(x)) + 0.75h^2(x) \quad (6.1)$$

$$D(c(x)) = \begin{cases} 175 & \text{si } x > 11 \\ 0 & \text{si } x \leq 11 \end{cases} \quad (6.2)$$

Le contrôleur qui optimisera cette fonction coût, est un contrôleur commutant :

$$K(x) = \begin{cases} K_a \{x - x_{sp}\} & \text{si } x \geq x_{sp} \\ K_b \{x - x_{sp}\} & \text{si } x < x_{sp} \end{cases} \quad (6.3)$$

Les paramètres utilisés pour le problème d'optimisation sont  $K_a, K_b$  et  $x_{sp}$ . Ces paramètres

sont trouvés par programmation non linéaire où le problème suivant est minimisé.

$$J = 13 - \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx + 175 \int_{11}^{\infty} p(x)dx + 0.75 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x)dx \quad (6.4)$$

### 6.3.1 Résultats

Le problème d'optimisation a été résolu numériquement pour deux variances de bruit de mesure différentes (0.1 et 1.0) pour en voir l'effet sur l'optimalité de la solution. La variance du bruit de procédé est fixée à 1.0. Comme au chapitre précédent, ce problème a été résolu pour un contrôleur commutant et pour un contrôleur à gain simple. Les résultats avec une variance du bruit de mesure de 0.1 sont au tableau 6.1, les FDP de la variable d'état sont à la figure 6.1 et les FDP des variables manipulées sont à la figure 6.2. De plus, à la figure 6.3, la différence entre le coût optimal du système à gain simple et le système à contrôleur commutant a été décomposée en 3 composantes qui proviennent de la fonction coût de l'équation 5.22. Ainsi, la première colonne regroupe la partie linéaire de la fonction coût, la deuxième représente la partie liée au dépassement de la contrainte et la troisième représente la partie de la fonction coût reliée à la variance de la variable manipulée. Quand la valeur est positive, cela veut dire que la valeur de la composante pour le système à contrôleur commutant est plus petite que la valeur de la composante de la fonction coût du système à gain simple. Premièrement, il est à noter que les coûts sont sensiblement plus élevés que dans l'exemple sans bruit de mesure du chapitre précédent à la section 5.6.2. Le gain économique passant de 5.93% à 1.7 %. Cependant, la tendance demeure, le contrôleur asymétrique est plus performant que le contrôleur symétrique. Ce qui laisse à croire que les conditions développées au chapitre précédent tiennent toujours. Il est à noter que les observations de la figure 6.3 vont dans le même sens ; l'optimalité du coût provient en grande partie de la variance de la variable manipulée. Cependant, si cette composante est enlevée, le système à contrôleur commutant n'est plus optimal.

La deuxième série de résultats provient du même problème d'optimisation mais avec une

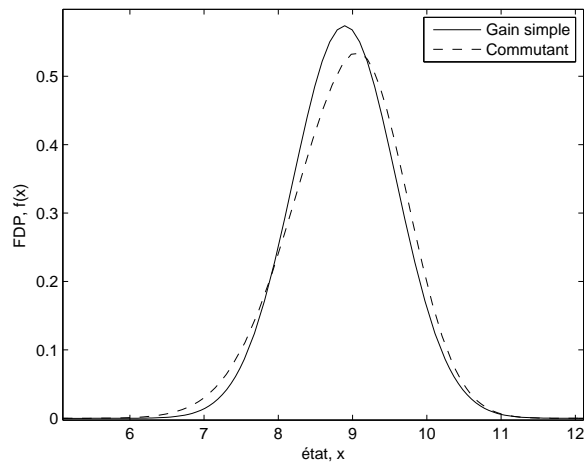


Figure 6.1 FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, cas  $\beta = 0.1$ .

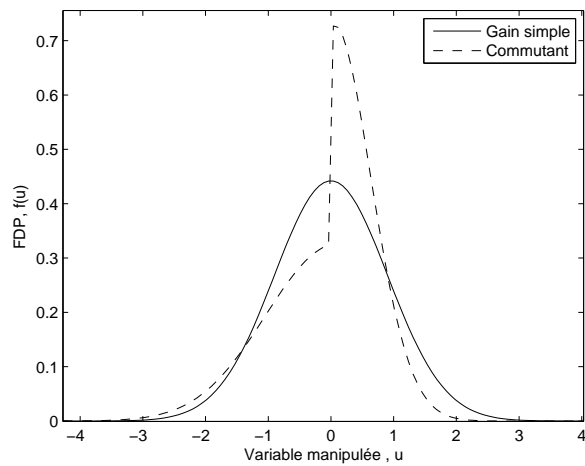


Figure 6.2 FDP de la variable manipulée pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, cas  $\beta = 0.1$ .

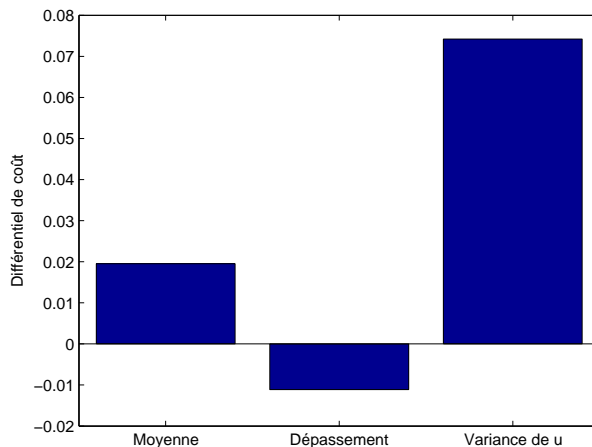


Figure 6.3 Différence entre le coût optimum du système à gain simple et le système à contrôleur commutant, cas  $\beta = 0.1$ .

variance plus grande du bruit de mesure passant de 0.1 à 1.0. Ainsi, il sera plus facile de voir les tendances que le bruit de mesure induit face aux performances économiques. C'est ainsi que les résultats de l'optimisation sont présentés au tableau 6.2, la FDP des variables d'état à la figure 6.4 et celles de la variable manipulée sont à la figure 6.5. Tout comme précédemment, la figure 6.6 divise la fonction coût en 3 parties. Encore ici, le contrôleur asymétrique donne de meilleurs résultats. La tendance diminuant l'avantage économique reste, mais l'avantage économique n'est que de 0.7 %. Il est à noter qu'à la figure 6.4, les deux FDP sont presque identiques. C'est parce qu'avec autant de bruit de mesure que de bruit de procédé, il n'y a pas beaucoup de marge de manœuvre possible. Quant à la figure 6.6, on peut y voir que la majorité de l'optimalité du système provient du rapprochement de la contrainte. On ne peut rien en déduire, puisque l'optimisation est numérique, on ne peut l'utiliser pour en déduire des tendances. C'est ainsi que pour déterminer si la composante liée à la variance de la variable manipulée est nécessaire, il faut changer la fonction coût, ce qui est fait à la

Type de contrôleur	Contrôleur commutant	Contrôleur gain simple
Point de consigne	9.10	8.93
$K_a$	1.50	1.18
$K_b$	0.68	1.18
Coût	4.82	4.91

Tableau 6.1 Paramètres des contrôleurs et coût associés, cas  $\beta = 0.1$ .

prochaine section.

Type de contrôleur	Contrôleur commutant	Contrôleur gain simple
Point de consigne	8.01	7.90
$K_a$	0.60	0.55
$K_b$	0.49	0.55
Coût	5.92	5.95

Tableau 6.2 Paramètres des contrôleurs et coût associés, cas  $\beta = 1.0$ .

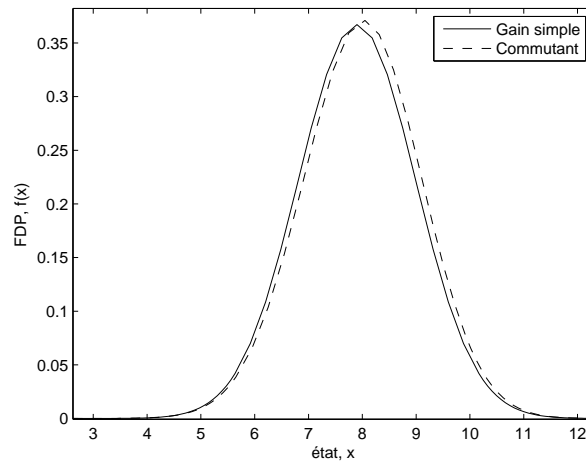


Figure 6.4 FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, cas  $\beta = 1.0$ .

Ce que l'on peut conclure de ces résultats, c'est que les conditions développées au chapitre 5 tiennent toujours quand du bruit de mesure est ajouté. Ces 3 conditions sont toujours valables, sauf que le gain économique diminue avec le bruit de mesure. Cependant, les résultats démontrent qu'il y a un intérêt à analyser le problème sans composante de la variable manipulée dans la fonction coût. Ce qui est fait à la prochaine section.

#### 6.4 Problème sans composante de la variable manipulée

Comme il a déjà été vu au chapitre 4, l'ajout du bruit de mesure a plusieurs effets sur la FDP. Par conséquent, ces effets se transmettent à toute fonction coût liée à cette FDP. C'est pourquoi les résultats du chapitre 5 ne peuvent être réutilisés. De plus, à cause de la nature des solutions analytiques, il n'est pas possible de les intégrer analytiquement, il faut

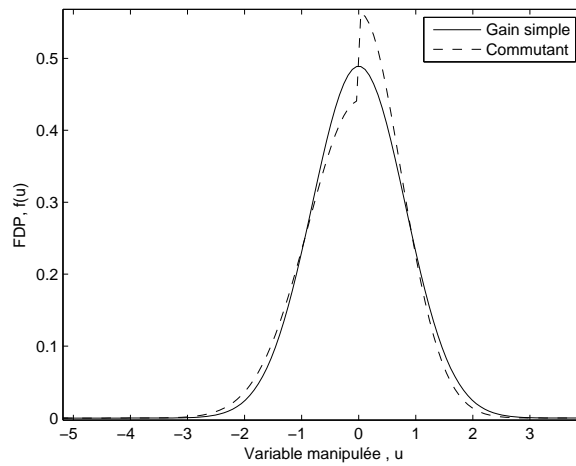


Figure 6.5 FDP de la variable manipulée pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, cas  $\beta = 1.0$ .

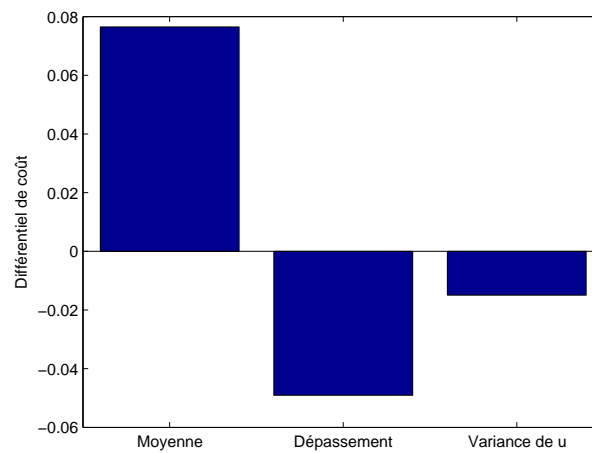


Figure 6.6 Différence entre le coût optimum du système à gain simple et le système à contrôleur commutant, cas  $\beta = 1.0$ .

développer un nouvelle approche. Cette nouvelle approche est basée sur une formulation de la solution analytique avec un contrôleur linéaire. Cette formulation est dérivable par rapport à  $\bar{k}$  qui est un paramètre qui peut ajouter une non-linéarité. Si la dérivée par rapport à ce terme n'est pas nulle, cela veut dire que le contrôleur optimum est non linéaire.

#### 6.4.1 Fonction coût

La fonction coût utilisée est décrite par :

$$J = \Sigma \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx + \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^3 p(x) dx \quad (6.5)$$

#### 6.4.2 Système

Le système utilisé est le même qu'au chapitre 5. Sauf que le contrôleur utilisé est un contrôleur symétrique avec un seul gain  $k$  qui est déjà optimal face à la fonction coût. De plus, il y a un facteur  $\bar{k}$  qui représente la non linéarité du contrôleur. Les paramètres de ce contrôleur optimal symétrique sont :

$$k_{symopt.} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (6.6)$$

$$x_{spsymopt.} = \frac{1}{6\Lambda} + \left\{ -2\Sigma + \sqrt{4\Sigma^2 - 36\Lambda^2} \right\} \quad (6.7)$$

$$\bar{k}_{sym.} = 0 \quad (6.8)$$

Étant un contrôleur symétrique, la valeur de  $\bar{k}$  est nulle, mais il est possible de dériver la fonction coût par rapport à ce terme. Si celle-ci est nulle, cela veut dire que le contrôleur

optimal pour ce système est symétrique. Si celle-ci est non nulle, un contrôleur asymétrique est optimal. Dans ce cas, la non-linéarité est analogue à un contrôleur commutant.

$$\bar{k} = \{k_2 - k_1\} / 2 \quad (6.9)$$

$$k = \{k_2 + k_1\} / 2 \quad (6.10)$$

La méthode est basée sur le fait qu'on dérive la fonction coût par rapport à la non-linéarité. Cette dérivée est évaluée quand ce paramètre est nul,  $\bar{k} = 0$ . Ainsi si la valeur de la dérivée est nulle, cela veut dire que le contrôleur linéaire est optimal. Dans le cas contraire, cela veut dire que le contrôleur linéaire est non optimal. i.e., un contrôleur non-linéaire est optimal.

$$\frac{\partial J}{\partial k} \Big|_{\bar{k}=0} = \Sigma \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\partial p(x)}{\partial k} \Big|_{\bar{k}=0} dx + \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{\partial p(x)}{\partial k} \Big|_{\bar{k}=0} dx \quad (6.11)$$

Il faut ensuite développer les équations nécessaires à la résolution du système tel que vues au chapitre 2.

$$g_v = - \left\{ k + \bar{k} \operatorname{erf} \left[ x / \sqrt{2 * v m} \right] \right\} \quad (6.12)$$

$$g^2 = \alpha + \beta * g_v^2 \quad (6.13)$$

$$f = g_v x - 2\bar{k} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\beta}} \quad (6.14)$$



Ainsi,

$$F = \frac{2f - g \frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \quad (6.15)$$

Comme il a déjà été vu :

$$p(x) = p_0 \exp \int_0^x F(\xi) d\xi \quad (6.16)$$

et sa dérivée par rapport à  $k$  est décrite par :

$$\frac{dp(x)}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} = p_0 \exp \int_0^x F(\xi) d\xi \cdot \int_0^x \frac{dF}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} (\xi) d\xi + \frac{dp_0}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} \cdot \exp \int_0^x F(\xi) d\xi \quad (6.17)$$

qui peut être simplifiée

$$\frac{dp(x)}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} = p(x) \cdot \int_0^x \frac{dF}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} (\xi) d\xi + \frac{p(x)}{p_0} \cdot \frac{dp_0}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} \quad (6.18)$$

### 6.4.3 Développement de la preuve

Par la suite, l'expression est dérivée par rapport à : l'état( $x$ ), au gain( $k$ ) et à la non-linéarité( $\bar{k}$ ).

$$\frac{dg^2}{dx} = -4g_v \bar{k} e^{-\frac{x^2}{2\beta}} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \quad (6.19)$$

Ensuite,

$$\frac{dF}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} = x \frac{-\alpha + \beta k^2}{[\alpha + \beta k^2]^2} \quad (6.20)$$

$$\frac{dF}{dk} \Big|_{\bar{k}=0} = -x \operatorname{erf} \left[ \frac{x}{\sqrt{2\beta}} \right] - \frac{x^2}{2\beta} - e^{-\frac{x^2}{2\beta}} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \frac{k+2}{\alpha + \beta k^2} \quad (6.21)$$

De la définition de l'équation d'une FDP avec contrôleur symétrique, la variance est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha + \beta k^2}{2k}} \quad (6.22)$$

La constante de normalisation est :

$$p_0 = \frac{1}{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.23)$$

Ce qui donne l'équation de la FDP suivante :

$$p(x) = p_0 e^{-\frac{kx^2}{\alpha + \beta k^2}} \quad (6.24)$$

Par la suite, les expressions suivantes sont calculées :

$$\frac{dp(x)}{dk} = \frac{\alpha - \beta k^2 \frac{p(x)}{2k} - x^2 p(x)}{\alpha + \beta k^2} \quad (6.25)$$

$$\frac{dp(x)}{dk} = p(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF}{dk} dx \quad (6.26)$$

Finalement, on utilise ces fonctions dans la fonction coût :

$$\frac{dJ}{dx_{sp}} = 2\sigma x_{sp} + 3\lambda \frac{\alpha + \beta k^2}{2k} + 3\lambda x_{sp}^2 \quad (6.27)$$

$$\frac{dJ}{dk} = \sigma x_{sp} \int_{-\infty}^{\infty} \{x + x_{sp}\}^2 \frac{dp(x)}{dk} dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \{x + x_{sp}\}^3 \frac{dp(x)}{dk} dx \quad (6.28)$$

$$\frac{dJ}{dk} = \sigma x_{sp} \int_{-\infty}^{\infty} \{x + x_{sp}\}^2 \frac{dp(x)}{dk} dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \{x + x_{sp}\}^3 \frac{dp(x)}{dk} dx \quad (6.29)$$

On ne peut trouver de solution analytique à l'équation 6.29. Le gain optimal est trouvé avec l'équation 6.25. Donc par construction, l'équation 6.28 est nulle au gain de la variance minimale. Et avec ce gain, le point de consigne optimal est calculé quand l'équation 6.27 est nulle. Si ces deux valeurs sont introduites dans la troisième équation, celui-ci ne sera jamais nulle pour la valeur de  $\bar{k} = 0$ . L'équation 6.21 étant toujours négative, son intégrale sera donc toujours non-nulle. Ce qui veut dire que le système symétrique n'est pas optimal.

#### 6.4.4 Résultats

Pour cette section, cette preuve est validée par un exemple numérique, où la fonction coût est linéaire par partie.

#### 6.4.4.1 Fonction coût

$$J(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x > 11 \\ 10x & \text{si } x \leq 11 \end{cases} \quad (6.30)$$

Le système est intégrateur ( $a = 0$  et  $b = 1$ ). La variance du bruit de procédé est 0.1 et celle du bruit de mesure est 1.0. Ce qui fait que la valeur du gain de la variance minimale est 0.3162. Les résultats sont au tableau 6.7. Le contrôleur commutant donne une performance meilleur de 3%. Cette amélioration est expliquée à la figure 6.7, elle est due au fait que la FDP avec contrôleur commutant est plus abrupte du côté où la fonction coût est élevée. En étant plus abrupte que la FDP de la variance minimale, il est possible d'approcher la FDP plus près de la contrainte. Cependant, il est étonnant de voir que la pente de la variance minimale puisse être dépassée. Une validation de ce résultat est réalisée à la section suivante.

Type de contrôleur	Contrôleur commutant	Contrôleur gain simple
Point de consigne	-1.3717	-0.7508
$K_a$	0.5836	0.3162
$k$	-0.3909	0
Coût	0.979408	1.01203

Tableau 6.3 Paramètres des contrôleurs et coût associés, cas sans composante de la variable manipulée.

#### 6.4.5 Validation

Pour cette section, les résultats précédents seront validés avec une simulation Monte-Carlo. Ceux-ci sont présentés à la figure 6.8. Contrairement au système avec un contrôleur symétrique, les résultats pour le contrôleur commutant ne sont pas validés. Plusieurs tests ont été faits pour expliquer pourquoi, seuls les plus pertinents seront présentés.

Premièrement, si la variance du bruit de procédé augmente, la solution analytique s'améliore. À la figure 6.9, le contrôleur commutant optimal est simulé pour deux cas : le premier est le cas original, où la valeur du gain de la variance minimale est 0.3162, l'autre cas est un

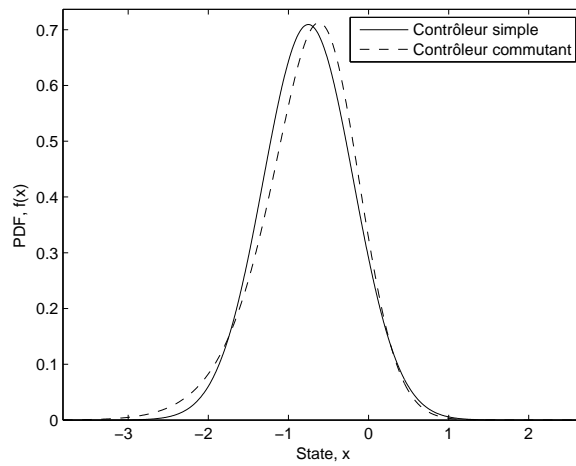


Figure 6.7 FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant et à gain simple, cas sans composante de la variable manipulée

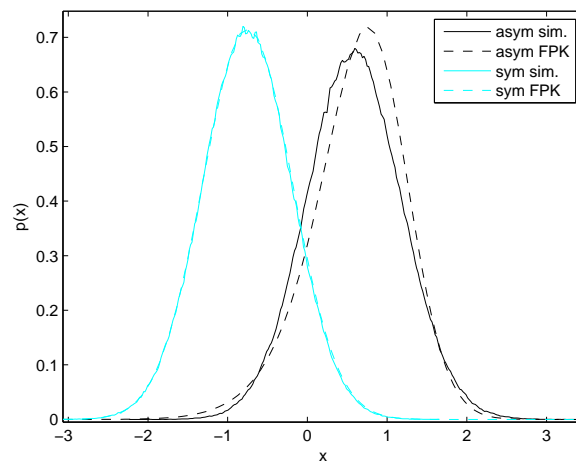


Figure 6.8 Validation des contrôleurs optimaux du tableau (CC Contrôleur commutant et CS contrôleur simple)

6.7

cas où la valeur du gain de la variance minimale est plus élevée, 3.162. Les performances de ce dernier sont meilleures, les queues sont bien décrites et il n'y a qu'une erreur minime au milieu. Il semble que la variance minimale joue un rôle clé pour l'explication de l'erreur. C'est-à-dire quand les gains sont en-dessous du gain de la variance minimale, la solution analytique donne de bons résultats. C'est seulement quand un des deux gains est au-dessus de la variance minimale que la solution analytique développée donne de mauvais résultats.

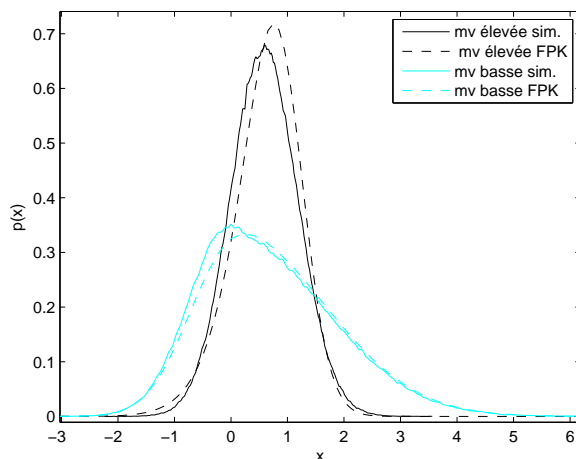


Figure 6.9 FDP de la variable d'état pour les contrôleurs optimaux commutant pour deux valeurs de gains à variance minimale

Deuxièmement, il semble que la pente de la FDP de la variance minimale ne puisse être dépassée. Pour vérifier cette affirmation 4 simulations Monte-Carlo ont été faites à la figure 6.10. La première est faite avec un contrôleur simple avec le gain de la variance minimale. Les autres sont des contrôleurs commutants dont le gain le plus petit est celui de la variance minimale divisé en deux. L'autre gain est plus grand que le gain de la variance minimale et est indiqué dans la légende de la figure. Comme il est possible de le voir la pente maximale n'est jamais dépassée. Il est possible que le problème soit que les paramètres de simulation ne peuvent pas simuler une dynamique plus rapide que le gain à variance minimale. Pour y remédier, il faudrait augmenter la fréquence d'échantillonnage du système. Ce faisant, la variance diminue, car le bruit de mesure a moins d'impact, il aurait une plus grande fréquence et sera filtré. Donc, il est fort probable que le contrôleur commutant ne dépasse pas la performance économique de cette nouvelle variance. Cette dernière affirmation n'a pas

été testée par manque de temps.

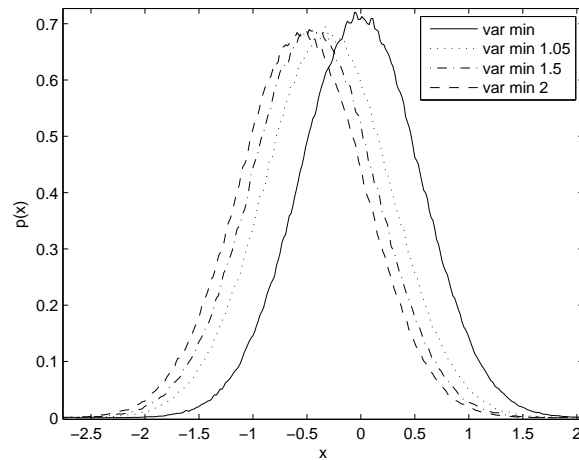


Figure 6.10 FDP pour le contrôleur à variance minimale et contrôleur commutants avec gains supérieurs au gain à variance minimale

## 6.5 Conclusion

Ce chapitre a étendu les conditions d'optimalité au problème avec du bruit de mesure. Il a été démontré que la présence de bruit de mesure diminuait le gain économique d'un contrôleur asymétrique mais que celui-ci demeurerait optimal face au contrôleur symétrique quand il y avait une fonction coût asymétrique qui tient compte de la variance de la variable manipulée. Ensuite, le même problème a été analysé sans composante touchant la variable manipulée. Il en résulte que le contrôleur asymétrique reste quand même optimal. C'est parce qu'un des deux gains est supérieur au gain à variance minimale. Cependant, il est probable que ce système requiert une fréquence d'échantillonnage plus élevée, ce faisant diminuant la variance minimale.

## CHAPITRE 7

### CONCLUSION

#### 7.1 Introduction

Le but de ce projet de recherche était d'étudier les effets des contrôleurs non linéaires sur les systèmes bruités. À l'aide de l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov, il a été possible de créer des outils permettant de calculer la forme de la FDP de la variable d'état et manipulée d'un système scalaire bruité. Plus précisément, le projet est axé sur les systèmes avec contrôleurs non linéaires. C'est ainsi, qu'il a été possible d'analyser les capacités d'un contrôleur commutant à former la fonction de densité de probabilité d'un système de façon à émuler la forme d'une FDP cible. Par la suite, une nouvelle forme de linéarisation stochastique a été développée. Cette démarche était nécessaire parce que le bruit de mesure entre de façon non linéaire dans le système si celui-ci est régulé par un contrôleur non linéaire. C'est ainsi qu'il a été possible de montrer les effets des contrôleurs non linéaires sur la FDP de la variable d'état. L'effet principal est une translation de la FDP vers le côté le moins agressif du contrôleur non linéaire. Finalement, il a été prouvé qu'un contrôleur symétrique ne donne pas la FDP optimale quand la fonction coût est asymétrique et que la variable manipulée est pénalisée. Ce qui donne des conditions où il est avantageux d'avoir une FDP asymétrique nécessitant un contrôleur non linéaire.

#### 7.2 Contributions

##### 7.2.1 Outils

*Solutions analytiques de l'équations de Fokker-Planck-Kolmogorov*

Afin de faire les analyses requérant la solution analytique de la FDP, il a fallu développer



l'équation de FPK pour certains systèmes. La solution la plus importante est celle pour le contrôleur commutant pour un système avec bruit de procédé seulement. Premièrement, parce que sa structure est simple, le contrôleur peut être installé facilement dans un milieu industriel. De plus, la solution analytique a une structure simple qui peut être intégrée. C'est ainsi que cette solution a pu prouver la faisabilité mathématique pour faire du formage de FDP du contrôleur commutant. De plus, c'est cette solution qui a permis de prouver la non optimalité d'un contrôleur symétrique au chapitre .

### *Linéarisation stochastique*

La linéarisation stochastique développée durant le cadre de ce projet de recherche a permis de trouver une solution numérique pour un système avec un contrôleur non linéaire avec bruit de procédé et bruit de mesure. Elle a permis aussi de trouver une solution analytique de la FDP d'un système avec un contrôleur quadratique avec bruit de procédé et bruit de mesure. Ensemble, ces solutions ont permis d'analyser les effets du bruit de mesure sur un procédé contrôlé par un contrôleur non linéaire.

## **7.2.2 Analyses**

### *Utilisation du contrôleur commutant pour faire du formage de FDP*

Dans la littérature scientifique, plusieurs méthodes de formage de FDP ont été développées. Cependant, aucune n'utilisait le contrôleur commutant, la difficulté étant au point de commutation. Une solution a été développée, et avec elle, il a été possible d'étudier le contrôleur commutant dans un cadre de formage de FDP. C'est ainsi qu'il a été possible de déduire que le contrôleur commutant permet de créer de grandes asymétries, mais aussi qu'il est plus stable que la plupart des autres contrôleurs utilisés qui ont une forme polynomiale.

### *Étude des effets du bruit de mesure sur un système avec un contrôleur non linéaire*

Avec la nouvelle linéarisation stochastique développée, il a été possible d'avoir la solution numérique de la FDP d'un système avec un contrôleur non linéaire, bruit de procédé et

bruit de mesure. C'est ainsi, qu'il a été possible de voir que le bruit de mesure induisait une translation de la FDP, comme si la FDP était poussée du côté où le contrôleur était le moins agressif. D'autres phénomènes plus prévisibles ont été aussi observés. La diminution de l'asymétrie est due à l'erreur de contrôle induite par le bruit de mesure et l'augmentation de la variance due au bruit de mesure.

*Non optimalité d'un FDP symétrique face à une fonction coût asymétrique pénalisant la variable manipulée*

Finalement, avec la solution analytique de la FDP de la variable d'état d'un système avec contrôleur commutant et bruit de mesure, il a été démontré qu'une FDP symétrique n'est pas optimale pour le cas où la fonction coût est asymétrique et la variable manipulée est pénalisée. Ce qui revient à dire qu'une FDP asymétrique est optimale pour ce cas, donnant ainsi aussi une justification mathématique au formage de FDP. Ce qui n'avait pas été fait auparavant. En fait, hormis la preuve mathématique, on peut expliquer l'optimalité de la FDP par le fait que le contrôleur commutant peut avoir un gain plus élevé que le contrôleur symétrique (donnant à sa FDP une pente plus abrupte que la solution symétrique) et un autre gain plus faible pour ne pas trop pénaliser la variable manipulée.

### 7.3 Travaux futurs

Le projet de recherche a permis le développement de plusieurs outils menant à une multitude d'applications. Cette section décrira quelques autres applications qui n'ont pu être développées dans le cadre de ce projet de recherche :

*Analyse de la limite de la variance minimale*

Il semble que les équations développées pour le système avec bruit de mesure ne fonctionnent plus quand le gain dépasse le gain de la variance minimale. Cela devrait être investigué plus en profondeur.

### *Applications pratiques du formage de FDP*

À la connaissance de l'auteur, il n'y a aucune application du formage de FDP n'a été réalisée sur un montage de laboratoire. C'est ainsi qu'il serait intéressant de tester un contrôleur commutant dans la réalité et de comparer avec la théorie. Ainsi, on pourra mieux comprendre les obstacles et difficultés liés à l'installation du formage de FDP en milieu industriel.

### *Étude des fonctions coûts dans un contexte d'amélioration de procédé*

Les diverses expériences numériques ont montré l'importance de plusieurs facteurs reliés aux fonctions coûts : coûts fixes, coûts d'opération et coûts de dépassement de contrainte. Le gain dû à l'optimisation dépend de ces 3 facteurs. Une étude plus approfondie permettrait de développer une méthodologie pour rendre l'optimisation d'un procédé industriel plus efficace.

### *Étude des effets du bruit de mesure sur les chaînes d'approvisionnement*

La gestion des stocks et des taux de production de divers procédés est souvent décidée par un opérateur. Dépendant de l'état du système, il peut réagir plus ou moins agressivement, de façon analogue à un contrôleur non linéaire. Les informations servant à ces décisions sont quelques fois bruitées. Donc, il serait possible de faire une analogie avec un système avec bruit de mesure et contrôleur non linéaire. Le résultat de cette étude calculerait la capacité de stockage non utilisée ou la capacité de production demandée en trop causée par des informations qui sont bruitées et des politiques d'opérations non linéaires.

### *Étude des effets du bruit dans un cadre de sélection de la précision de l'instrumentation*

L'instrumentation d'un procédé est souvent onéreuse, et souvent un instrument avec plus de précision et moins de bruit de mesure est beaucoup plus cher qu'un instrument moins précis. Avec les outils développés, il serait facile de voir dans quel contexte il serait préférable d'investir dans une instrumentation plus précise.

### *Étude des systèmes multivariables*

C'est l'application des outils et analyses faites pour ce projet de recherche mais dans un

cadre multivariable. Cette analyse n'a pas été faite principalement parce que l'effet du bruit de mesure n'avait pas été prévu au début du projet. Les bases de la solution de FPK sont dans Aström (1970), mais elles n'ont pas été utilisées dans le cadre de ce projet de recherche. La solution de ce problème pourrait faire en sorte qu'il serait possible de voir la variabilité se propager dans un procédé ou de faire du formage de FDP sur un procédé au complet.

#### *Cas bruit non gaussien*

Pour plusieurs procédés, le bruit entrant dans le système n'est pas gaussien. Par conséquent, l'équation de FPK, ne peut pas être appliquée. Il faudrait développer des algorithmes afin d'analyser ce cas.

#### *Analyse de stabilité dans un cadre stochastique*

C'est l'analyse des contrôleurs non linéaires dans un cadre stochastique pour voir dans quelles conditions la stabilité est assurée. Une nouvelle approche pourrait être développée en tenant compte des zones d'instabilité du contrôleurs polynomial.

**BIBLIOGRAPHIE**

- Akella, R. et Kumar, P. R. (1986). Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-31**(2), 116–126.
- Aksikas, I., Fuxman, A., Forbes, J. F., et Winkin, J. J. (2009). LQ control design of a class of hyperbolic PDE systems : Application to fixed-bed reactor. *Automatica*, **45**(6), 1542–1548.
- Ando, B., Baglio, S., Graziani, S., et Pitrone, N. (2000). Measurements of parameters influencing the optimal noise level in stochastic systems. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, **49**(5), 1137–1143.
- Apostolakou, A. A., Kookos, I. K., Marazioti, C., et Angelopoulos, K. C. (2009). Techno-economic analysis of a biodiesel production process from vegetable oils. *Fuel Processing Technology*, **90**(7-8), 1023–1031.
- Aström, K. J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*, volume 70 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New-York.
- Baillieul, J., Brockett, R. W., et Washburn, R. B. (1980). Chaotic motion in nonlinear feedback systems. *Ieee transactions on circuits and systems*, **CAS-27**(11), 990–997.
- Balasubramanian, J. et Grossmann, I. E. (2003). Scheduling optimization under uncertainty - an alternative approach. *Computers and Chemical Engineering*, **27**(4), 469–490.
- Barolo, M. et Berto, F. (1998). Composition control in batch distillation : Binary and multi-component mixtures. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **37**(12), 4689–4698.
- Batina, I., Stoorvogel, A. A., et Weiland, S. (2002). Optimal control of linear, stochastic systems with state and input constraints. In *41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, Las Vegas, NV, United states, pages 1564–1569. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Bauer, M. et Craig, I. K. (2008). Economic assessment of advanced process control - a survey and framework. *Journal of Process Control*, **18**(1), 2–18.

- Bieler, P. S., Fischer, U., et Hungerbühler, K. (2003). Modeling the energy consumption of chemical batch plants - top-down approach. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **42**(24), 6135–6144.
- Boccelli, D. L., Small, M. J., et Diwekar, U. M. (2007). Drinking water treatment plant design incorporating variability and uncertainty. *Journal of Environmental Engineering*, **133**(3), 303–312.
- Booton, J. R. C. (1954). Measurement and representation of nonlinear systems. *Institute of Radio Engineers Transactions of Professional Group on Circuit Theory*, **CT-1**(4), 32–34.
- Borrie, J. A. (1992). *Stochastic System for Engineers*. Prentice Hall International, Hemel Hempstead, UK.
- Boucard, D. et Ollivrin, G. (2010). Developments in vibrator control. *Geophysical Prospecting*, **58**(1), 33–40.
- Boyd, S. et Chua, L. O. (1984). Structures for nonlinear systems. In *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, NV, pages 407–408. IEEE New York NY USA.
- Brewsters, D. B. (1970). Economic gains from improved quality control. *Pulp And Paper Magazine of Canada*, **71**(6), 55–58.
- Brockett, R. et Liberzon, D. (1998). On explicit steady-state solutions of Fokker-Planck equations for a class of nonlinear feedback systems. In Ieee Control Systems Soc, N. Y. N. Y. U. S. A., editor, *American Control Conference*, volume 1, Philadelphia, PA , USA, pages 264–268. IEEE.
- Cao, Y., Hussaini, M. Y., et Zang, T. A. (2003). An efficient monte carlo method for optimal control problems with uncertainty. *Computational Optimization and Applications*, **26**(3), 219–230.
- Caughey, T. K. (1963). Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, **35**(11), 1683–1692.

- Chakravorty, S. (2006). A homotopic galerkin approach to the solution of the Fokker-Planck-Kolmogorov equation. In *2006 American Control Conference*, Proceedings of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, MN, United states, pages 1613–1618. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 445 Hoes Lane / P.O. Box 1331 Piscataway NJ 08855-1331 United States.
- Chèbre, M., Creff, Y., et Petit, N. (2010). Feedback control and optimization for the production of commercial fuels by blending. *Journal of Process Control*, **20**(4), 441–451.
- Choudhury, M. A. A. S., Shah, S. L., Thornhill, N. F., et Shook, D. S. (2006). Automatic detection and quantification of stiction in control valves. *Control Engineering Practice*, **14**(12), 1395–1412.
- Conrad, C. J. et McClamroch, N. H. (1987). The drilling problem : a stochastic modeling and control example in manufacturing. *IEEE Trans. Autom. Control (USA)*, **AC-32**(11), 947–58.
- Contreras-Dordelly, J. L. et Marlin, T. E. (2000). Control design for increased profit. *Computers and Chemical Engineering*, **24**(2), 267–272.
- Costello, P. (2007). The case for solid-state switching. *Computing & Control Engineering Journal*, **18**(2), 14–15.
- Craig, I. K. et Henning, R. G. D. (2000). Evaluation of advanced industrial control projects : A framework for determining economic benefits. *Control Engineering Practice*, **8**(7), 769–780.
- Crespo, L. G. et Sun, J. Q. (2002a). Effects of the control bounds in the stochastic optimal control problem. In *2002 American Control Conference*, volume 5 of *Proceedings of the American Control Conference*, Anchorage, AK, United states, pages 4238–4243. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Crespo, L. G. et Sun, J. Q. (2002b). Nonlinear stochastic control via stationary probability density functions. In *2002 American Control Conference*, volume 3 of *Proceedings of the*

- American Control Conference*, Anchorage, AK, United states, pages 2029–2034. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Crespo, L. G. et Sun, J. Q. (2002c). Stochastic optimal control of nonlinear systems via short-time gaussian approximation and cell mapping. *Nonlinear Dynamics*, **28**(3-4), 323–342.
- Crespo, L. G. et Sun, J. Q. (2003). Non-linear stochastic control via stationary response design. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **18**(1), 79–86.
- Daafouz, J., Riedinger, P., et Iung, C. (2001). Static output feedback control for switched systems. In *40th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, FL, United states. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Dallagi, A., Forbes, J., Forbes, M. G., et Guay, M. (2008). Stochastic feedforward-feedback control design in a discrete-time case. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, **222**(7), 655–660.
- Das, T. et Mukherjee, R. (2008). Optimally switched linear systems. *Automatica*, **44**(5), 1437–1441.
- Das, T. et Mukherjee, R. (2009). Authors' reply to comments on "optimally switched linear systems". *Automatica*, **45**(6), 1591.
- Datskov, I., Ostrovsky, G. M., Achenie, L. E. K., et Volin, Y. M. (2006a). Process optimization under uncertainty when there is not enough process data at the operation stage. *Optimization and Engineering*, **7**(3), 249–276.
- Datskov, I. V., Ostrovsky, G. M., Achenie, L. E. K., et Volin, Y. M. (2006b). An approach to multicriteria optimization under uncertainty. *Chemical Engineering Science*, **61**(8), 2379–2393.
- de Vaal, P. et Sandrock, C. (2007). Control of a batch pulp digester using a simplified mechanistic model to predict degree of polymerisation. *Computers and Chemical Engineering*, **31**(10), 1222–1230.



- Del Pozo Gomez, M. T., Repke, J.-U., Kim, D.-Y., Yang, D. R., et Wozny, G. (2009). Reduction of energy consumption in the process industry using a heat-integrated hybrid distillation pervaporation process. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **48**(9), 4484–4494.
- Demiray, H. (2008). Non-linear waves in a fluid-filled inhomogeneous elastic tube with variable radius. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **43**(4), 241–245.
- Dhanda, A. et Franklin, G. F. (2010). Optimal control formulations of vibration reduction problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55**(2), 378–394 Article number 5353673.
- Di Mascio, R. (2002). An economic measure for comparing dynamic robustness. *Journal of Process Control*, **12**(6), 745–751.
- Doucet, J., Hudon, N., Bertrand, F., et Chaouki, J. (2008). Modeling of the mixing of monodisperse particles using a stationary dem-based Markov process. *Computers and Chemical Engineering*, **32**(6), 1342–1349.
- Drews, A., Arellano-Garcia, H., Schöneberger, J., Schaller, J., Wozny, G., et Kraume, M. (2009). Model-based recognition of fouling mechanisms in membrane bioreactors. *Desalination*, **236**(1-3), 224–233.
- Eder, H. H. (2003). Advanced process control : Opportunities, benefits, and barriers. *I. E. E. Computing and Control Engineering*, **14**(5), 10–15.
- Edgar, T. F. (2004). Control and operations : When does controllability equal profitability ? *Computers & Chemical Engineering*, **29**(1), 41–49.
- Elbeyli, O., Hong, L., et Sun, J. Q. (2005). On the feedback control of stochastic systems tracking prespecified probability density functions. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **27**(5), 319–329.
- Elbeyli, O. et Sun, J. Q. (2006). Feedback control optimization of nonlinear systems under random excitations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **11**(1), 125–136.

- Er, G.-K. (1998a). Improved closure method for analysis of nonlinear stochastic systems. *Nonlinear Dynamics*, **17**(3), 285–297.
- Er, G.-K. (1998b). A method for multi-parameter PDF estimation of random variables. *Structural Safety*, **20**(1), 25–36.
- Er, G.-K. (1998c). Multi-gaussian closure method for randomly excited non-linear systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **33**(2), 201–214.
- Er, G.-K. (1999a). Consistent method for pdf solutions of random oscillators. *Journal of Engineering Mechanics*, **125**(4), 443–447.
- Er, G.-K. (1999b). Consistent method for the solution to reduced FPK equation in statistical mechanics. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, **262**(1-2), 118–128.
- Er, G.-K. (2000). Exponential closure method for some randomly excited non-linear systems. *Journal of Non-Linear Mechanics*, **35**(1), 69–78.
- Fabien, B. C. (1993). Controller gain selection for an electromagnetic suspension under random excitation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, **115**(1), 156–165.
- Filatova, D., Grzywaczewski, M., et Osmolovskii, N. (2010). Optimal control problem with an integral equation as the control object. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **72**(3-4), 1235–1246.
- Filatova, D. V. et Grzywaczewski, M. (2008). Necessary optimality conditions for fractional bioeconomic systems. In *2008 Conference on Human System Interaction, HSI 2008*, 2008 Conference on Human System Interaction, HSI 2008, Krakow, Poland. Inst. of Elec. and Elec. Eng. Computer Society.
- Fischer, T. R. (1982). Optimal quantized control. *Transactions on Automatic Control*, **AC-27**(4), 996–998.

- Flemming, T., Bartl, M., et Li, P. (2007). Set-point optimization for closed-loop control systems under uncertainty. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **46**(14), 4930–4942.
- Forbes, M. G. (2003). *Performance characterization and regulatory feedback control desing for time-invariant discrete-time stochastic processes*. Dissertation, University of Alberta.
- Forbes, M. G., Forbes, J. F., et Guay, M. (2003a). Control design for discrete-time stochastic nonlinear processes with a nonquadratic performance objective. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4 of *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, HI, United states, pages 4243–4248. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Forbes, M. G., Forbes, J. F., et Guay, M. (2003b). Regulatory control design for stochastic processes : Shaping the probability density function. In *2003 American Control Conference*, Denver, CO, United states. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Forbes, M. G., Forbes, J. F., et Guay, M. (2006). Controller design for discrete-time stochastic processes with nonquadratic loss. *Technometrics*, **48**(3), 361–372.
- Forbes, M. G., Fraser Forbes, J., et Guay, M. (2005). Control design to shape the stationary probability density function. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, **27**(5), 331–346.
- Forbes, M. G., Guay, M., et Forbes, J. F. (2004). Control design for first-order processes : Shaping the probability density of the process state. *Journal of Process Control*, **14**(4), 399–410.
- Fukushima, M. et Yamamoto, Y. (1986). Second-order algorithm for continuous-time nonlinear optimal control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-31**(7), 673–676.
- Garone, E., Naldi, R., et Frazzoli, E. (2010). Switching control laws in the presence of measurement noise. *Systems and Control Letters*, **59**(6), 353–364.

- Grimble, M. J. et Majecki, P. (2010). Polynomial approach to non-linear predictive generalised minimum variance control. *IET Control Theory and Applications*, **4**(3), 411–424.
- Guay, M. et Forbes, J. F. (2004). Effect of nonlinearity on linear quadratic regulator performance. In *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 3 of *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Nassau, Bahamas, pages 2267–2272. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Guo, F. et Zhou, Y.-r. (2009). Stochastic resonance in a stochastic bistable system subject to additive white noise and dichotomous noise. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, **388**(17), 3371–3376.
- Guo, L. et Wang, H. (2003). Pseudo-PID tracking control for a class of output PDFs of general non-gaussian stochastic systems. In *2003 American Control Conference*, volume 1 of *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, CO, United states. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Guo, L. et Wang, H. (2005a). Generalized discrete-time pi control of output PDFs using square root b-spline expansion. *Automatica*, **41**(1), 159–162.
- Guo, L. et Wang, H. (2005b). PID controller design for output PDFs of stochastic systems using linear matrix inequalities. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, **35**(1), 65–71.
- Harris, T. J. (1989). Assessment of control loop performance. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **67**(5), 856–861.
- Harris, T. J. (1992). Optimal controllers for nonsymmetric and nonquadratic loss functions. *Technometrics*, **34**(3), 298–306.
- Harris, T. J. (2004). Statistical properties of quadratic-type performance indices. *Journal of Process Control*, **14**(8), 899–914.
- Harris, T. J., Boudreau, F., et McGregor, J. F. (1996). Performance assessment of multivariable feedback controllers. *Automatica*, **32**(11), 1505–1518.

- Harris, T. J., MacGregor, J. F., et Wright, J. C. (1980). Self-tuning and adaptive controllers : An application to catalytic reactor control. *Technometrics*, **22**(2), 153–164.
- Harris, T. J., Seppala, C. T., et Desborough, L. D. (1999). Review of performance monitoring and assessment techniques for univariate and multivariate control systems. *Journal of Process Control*, **9**(1), 1–17.
- Harris, T. J. et Yu, W. (2007). Controller assessment for a class of non-linear systems. *Journal of Process Control*, **17**(7), 607–619.
- Harris, T. J. et Yu, W. (2010). Variance decompositions of nonlinear-dynamic stochastic systems. *Journal of Process Control*, **20**(2), 195–205.
- Hassan, R. et Crossley, W. (2007). Approach to discrete optimization under uncertainty : The population-based sampling genetic algorithm. *AIAA Journal*, **45**(11), 2799–2809.
- Hatonen, J., Daley, S., et Owens, D. H. (2005). Effect of measurement noise on a gradient based repetitive control algorithm. In *2005 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation CIRA 2005*, Proceedings of IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation, CIRA, Espoo, Finland, pages 385–390. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Hedrick, J. K. (1993). Analysis and control of nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, **115**(2 B), 351–361.
- Hodouin, D. (2011). Methods for automatic control, observation, and optimization in mineral processing plants. *Journal of Process Control*, **21**(2).
- Hong, W. et Jianhua, Z. (2002). Control of the output stochastic distributions via lyapunov function analysis. In *2002 IEEE International Conference on Control Applications*, volume 2 of *Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Control Applications*, Glasgow, UK, pages 927–931. IEEE.
- Hopkins Jr, W. E. (1986). Optimal control of linear systems with parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-31**(1), 72–74.

- Hu, Z., Chan, C. W., et Huang, G. H. (2007). Multi-objective optimization for process control of the in-situ bioremediation system under uncertainty. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **20**(2), 225–237.
- Huang, B., Shah, S. L., et Kwok, E. K. (1997). Good, bad or optimal? Performance assessment of multivariable processes. *Automatica*, **33**(6), 1175–1183.
- Huang, B., Shah, S. L., et Miller, R. (2000). Feedforward plus feedback controller performance assessment of mimo systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **8**(3), 580–587.
- Huey, J. R., Sorensen, K. L., et Singhose, W. E. (2008). Useful applications of closed-loop signal shaping controllers. *Control Engineering Practice*, **16**(7), 836–846.
- Idan, M. et Speyer, J. L. (2008). Cauchy estimation for linear scalar systems. In *47th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2008*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, pages 658–665. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. 445 Hoes Lane / P.O. Box 1331 Piscataway NJ 08855-1331 United States.
- Çimen, T. et Banks, S. P. (2004). Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria. *Systems and Control Letters*, **53**(5), 327–346.
- Ishii, H. et Tempo, R. (2009). Probabilistic sorting and stabilization of switched systems. *Automatica*, **45**(3), 776–782.
- Jacobson, D. H. (1973). Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic differential games. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-18**(2), 124–131.
- Janak, S. L., Floudas, C. A., Kallrath, J., et Vormbrock, N. (2006). Production scheduling of a large-scale industrial batch plant. II. reactive scheduling. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **45**(25), 8253–8269.

- Janak, S. L., Lin, X., et Floudas, C. A. (2007). A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty. II. uncertainty with known probability distribution. *Computers and Chemical Engineering*, **31**(3), 171–195.
- Jazwinski, A. H. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, volume 70 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New-York.
- Jensen, H. A. (2009). Tradeoff analysis of non-linear dynamical systems under stochastic excitation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **24**(4), 585–599.
- Julier, S., Uhlmann, J., et Durrant-Whyte, H. F. (2000). New method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(3), 477–482.
- Julier, S. J. et Uhlmann, J. K. (2004a). Corrections to "unscented filtering and nonlinear estimation". *Proceedings of the IEEE*, **92**(12), 1958.
- Julier, S. J. et Uhlmann, J. K. (2004b). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, **92**(3), 401–422.
- Kaczynski, P. et Socha, L. (2007). Iterative procedures in application of lqg approach to control problems for nonlinear stochastic systems. In *2007 American Control Conference, ACC*, Proceedings of the American Control Conference, New York, NY, United states, pages 1753–1758. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Kadam, J. V., Schlegel, M., Srinivasan, B., Bonvin, D., et Marquardt, W. (2007). Dynamic optimization in the presence of uncertainty : From off-line nominal solution to measurement-based implementation. *Journal of Process Control*, **17**(5 SPEC. ISS.), 389–398.
- Kaistha, N., Moore, C. F., et Leitnaker, M. G. (2004). A statistical process control framework for the characterization of variation in batch profiles. *Technometrics*, **46**(1), 53–68.
- Kalman, R. E. (1960). New approach to linear filtering and prediction problems. *American Society of Mechanical Engineers Transactions Journal of Basic Engineering Series D.*, **82**(1), 35–45.

- Kariwala, V., Skogestad, S., Forbes, J. F., et Meadows, E. S. (2004). Input performance limitations of feedback control. In *American Control Conference (AAC)*, volume 3 of *Proceedings of the 2004 American Control Conference (AAC)*, Boston, MA, United states, pages 2063–2068. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Kárný, M. (1996). Towards fully probabilistic control design. *Automatica*, **32**(12), 1719–1722.
- Kárný, M. et Guy, T. V. (2006). Fully probabilistic control design. *Systems and Control Letters*, **55**(4), 259–265.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Khalil, H. K. et Kokotovic, P. V. (1978). Control strategies for decision makers using different models of the same system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-23**(2), 289–298.
- Khodaparast, H. H., Mottershead, J. E., et Friswell, M. I. (2008). Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **22**(8), 1751–1773.
- Ko, S. et Bitmead, R. R. (2007). Optimal control for linear systems with state equality constraints. *Automatica*, **43**(9), 1573–1582.
- Kookos, I. K. (2003). Optimal operation of batch processes under uncertainty : A monte carlo simulation-deterministic optimization approach. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **42**(26), 6815–6822.
- Kookos, I. K. (2005). Real-time regulatory control structure selection based on economics. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **44**(11), 3993–4000.
- Koumboulis, F. N. et Tzamtzi, M. P. (2005). Multivariable step-wise safe switching controllers. In *International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, CIMCA 2005 and International Conference on Intelligent Agents, Web Technologies and Internet Commerce, IAWTIC 2005*, Proceedings - International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation, CIMCA 2005 and International Conference on Intelligent Agents, Web Technologies and Internet, Vienna,



- Austria, pages 624–630. Inst. of Elec. and Elec. Eng. Computer Society 445 Hoes Lane - P.O.Box 1331 Piscataway NJ 08855-1331 United States.
- Kouvaritakis, B., Cannon, M., Rakovic, S., et Cheng, Q. (2010). Explicit use of probabilistic distributions in linear predictive control. *Automatica*, **46**(10), 1719–1724.
- Kozak, P. et Wonham, W. M. (1995). Fully decentralized solutions of supervisory control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(12), 2094–2097.
- Kumar, M., Chakravorty, S., et Junkins, J. L. (2009a). A homotopic approach to domain determination and solution refinement for the stationary Fokker-Planck equation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **24**(3), 265–277.
- Kumar, M., Chakravorty, S., Singla, P., et Junkins, J. L. (2009b). The partition of unity finite element approach with hp-refinement for the stationary Fokker-Planck equation. *Journal of Sound and Vibration*, **327**(1-2), 144–162.
- Kuznetsov, P., Stratonovich, R., et Tikhonov, V. (1965). *Non-linear Transformations of Stochastic Processes*. Pergamon Press, New-York.
- Lang, Y.-D., Malacina, A., Biegler, L. T., Munteanu, S., Madsen, J. I., et Zitney, S. E. (2009). Reduced order model based on principal component analysis for process simulation and optimization. *Energy and Fuels*, **23**(3), 1695–1706.
- Latour, P. R. (1992). Quantify quality control's intangible benefits. *Hydrocarbon Processing*, **71**(5), 61–64,67–68.
- Latour, P. R. (1996). Process control : Clifftent shows it's more profitable than expected. *Hydrocarbon Processing*, **75**(12), 75–80.
- Lefebvre, T., Bruyninckx, H., De Schutter, J., Julier, S., et Uhlmann, J. (2002). Comment on "a new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators" (multiple letters). *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**(8), 1406–1409.

- Li, P., Arellano-Garcia, H., et Wozny, G. (2008). Chance constrained programming approach to process optimization under uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, **32**(1-2), 25–45.
- Li, P., Li, Y., et Seem, J. E. (2010). Efficient operation of air-side economizer using extremum seeking control. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **132**(3), 031009.
- Li, P., Wendt, M., Arellano-Garcia, H., et Wozny, G. (2002a). Optimal operation of distillation processes under uncertain inflows accumulated in a feed tank. *AIChE Journal*, **48**(6), 1198–1211.
- Li, P., Wendt, M., et Wozny, G. (2002b). A probabilistically constrained model predictive controller. *Automatica*, **38**(7), 1171–1176.
- Li, S. et Tao, G. (2009). Feedback based adaptive compensation of control system sensor uncertainties. *Automatica*, **45**(2), 393–404.
- Li, W.-C. et Biegler, L. T. (1990). Newton-type controllers for constrained nonlinear processes with uncertainty. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **29**(8), 1647–1657.
- Liberzon, D. (1998). *Asymptotic properties of nonlinear feedback control systems*. Dissertation, Brandeis University.
- Liberzon, D. et Brockett, R. W. (2000). Nonlinear feedback systems perturbed by noise : steady-state probability distributions and optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(6), 1116–1130.
- Lin, G., Balachandran, B., et Abed, E. H. (2008). Dynamics and control of supercavitating vehicles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, **130**(2), 0210031–02100311.
- Lin, X., Janak, S. L., et Floudas, C. A. (2004). A new robust optimization approach for scheduling under uncertainty : I. bounded uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, **28**(6-7), 1069–1085.

- Liu, A. R. et Bitmead, R. R. (2011). Stochastic observability in network state estimation and control. *Automatica*, **47**(1), 65–78.
- Lu, L., Liang, Y., et Guo, Y. (2010). Design and testing of a nanometer positioning system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **132**(2), 02101101–0210110106.
- MacDonald, J. A. et Small, M. J. (2009). Statistical analysis of metallic anomaly patterns at former air force bombing ranges. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **23**(2), 203–214.
- Madetoja, E. et Tarvainen, P. (2008). Multiobjective process line optimization under uncertainty applied to papermaking. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **35**(5), 461–472.
- Mahmoud, A. et Nagy, Z. K. (2009). Applying Kolb’s experiential learning cycle for laboratory education. *Journal of Engineering Education*, **98**(3), 283–293.
- Marchetti, G., Barolo, M., Jovanovic, L., Zisser, H., et Seborg, D. E. (2008). An improved PID switching control strategy for type 1 diabetes. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, **55**(3), 857–865.
- Marlin, T. E., Brisk, M. L., Barton, G. W., et Perkins, J. D. (2001). Experiences from an industry-university study on control benefits. *Pulp and Paper Canada*, **102**(4), 34–37.
- Martin, G. D., Turpin, L. E., et Cline, R. P. (1991). Estimating control function benefits. *Hydrocarbon Processing*, **70**(6), 68–73.
- McEneaney, W. M. (2008). A new fundamental solution for differential riccati equations arising in control. *Automatica*, **44**(4), 920–936.
- Mihajlovic, N., Van Veggel, A. A., Van De Wouw, N., et Nijmeijer, H. (2004). Analysis of friction-induced limit cycling in an experimental drill-string system. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, **126**(4), 709–720.

- Mosat, A., Cavin, L., Fischer, U., et Hungerbuhler, K. (2008). Multiobjective optimization of multipurpose batch plants using superequipment class concept. *Computers & Chemical Engineering*, **32**, 512–529.
- Mota, J. P. B., Araujo, J. M. M., et Rodrigues, R. C. R. (2007). Optimal design of simulated moving-bed processes under flow rate uncertainty. *AIChE Journal*, **53**(10), 2630–2642.
- Muske, K. R. (2003). Estimating the economic benefit from improved process control. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **42**(20), 4535–4544.
- Naprstek, J. et Kral, R. (2008). Some instances of the Fokker-Planck equation numerical analysis for systems with gaussian noises. *Engineering Mechanics*, **15**(6), 419–434.
- Nejjari, F., Roux, G., Dahhou, B., et Benhammou, A. (1999). Estimation and optimal control design of a biological wastewater treatment process. *Mathematics and Computers in Simulation*, **48**(3), 269–280.
- Ogunnaike, B. A. et Mukati, K. (2006). An alternative structure for next generation regulatory controllers : Part I : Basic theory for design, development and implementation. *Journal of Process Control*, **16**(5), 499–509.
- Ogunnaike, B. A. et Ray, W. H. (1994). *Process dynamics, modeling, and control*. Oxford University Press, New-York.
- Ostrovsky, G. M., Ziyatdinov, N. N., et Lapteva, T. V. (2010). One-stage optimization problem with chance constraints. *Chemical Engineering Science*, **65**(7), 2373–2381.
- Paiement, J. F., Grandvalet, Y., et Bengio, S. (2009). Predictive models for music. *Connection Science*, **21**(2-3), 253–72.
- Papadrakakis, M., Lagaros, N. D., et Plevris, V. (2005). Design optimization of steel structures considering uncertainties. *Engineering Structures*, **27**(9), 1408–1418.
- Pigeon, B., Perrier, M., et Srinivasan, B. (2011). Shaping probability density functions using a switching linear controller. *Journal of Process Control*, **21**(6), 901–908.

- Qin, S. J. et Li, W. (2001). Detection and identification of faulty sensors in dynamic processes. *AIChE Journal*, **47**(7), 1581–1593.
- Reis, M. S. et Saraiva, P. M. (2005). Integration of data uncertainty in linear regression and process optimization. *AIChE Journal*, **51**(11), 3007–3019.
- Ricardez-Sandoval, L. A. (2012). Optimal design and control of dynamic systems under uncertainty : A probabilistic approach. *Computers and Chemical Engineering*, **43**, 91–107.
- Rico-Ramirez, V. et Diwekar, U. M. (2004). Stochastic maximum principle for optimal control under uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, **28**(12), 2845–2849.
- Riedinger, P. (2009). Comments on "optimally switched linear systems". *Automatica*, **45**(6), 1588–1590.
- Ritala, R. (2009). Value of measurement frequency and accuracy in control of a stochastic bistable system. *IET Control Theory and Applications*, **3**(7), 789–798.
- Rooney, W. C. et Biegler, L. T. (2003). Optimal process design with model parameter uncertainty and process variability. *AIChE Journal*, **49**(2), 438–449.
- Salehi, S. V. et Ryan, E. P. (1982). On optimal nonlinear feedback regulation of linear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-27**(6), 1260–1266.
- Sankaran, S. (2009). Stochastic optimization using a sparse grid collocation scheme. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **24**(3), 382–396.
- Seidman, T. I. (1994). 'first come, first served' can be unstable. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(10), 2166–2171.
- Senyard Sr, C. P. et Senyard, T. J. (1983). Stalking the elusive control incentives. In *Proceedings of the 1983 American Control Conference.*, volume 3, San Francisco, CA, pages 1147–1152. IEEE New York NY USA.
- Shapiro, A. (2008). Stochastic programming approach to optimization under uncertainty. *Mathematical Programming*, **112**(1), 183–220.

- Shoukat Choudhury, M. A. A., Jain, M., et Shah, S. L. (2008). Stiction - definition, modelling, detection and quantification. *Journal of Process Control*, **18**(3-4), 232–243.
- Simon, L. L., Nagy, Z. K., et Hungerbuhler, K. (2009). Model based control of a liquid swelling constrained batch reactor subject to recipe uncertainties. *Chemical Engineering Journal*, **153**(1-3), 151–158.
- Skaf, J. et Boyd, S. (2009). Nonlinear Q-design for convex stochastic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54**(10), 2426–2430.
- Skogestad, S., Morari, M., et Doyle, J. C. (1988). Robust control of ill-conditioned plants : High-purity distillation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(12), 1092–1105.
- Socha, L. et Blachuta, M. (2000). Application of linearization methods with probability density criteria in control problems. In IEEE, editor, *2000 American Control Conference*, volume 4 of *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, IL, pages 2775–2779. IEEE Piscataway NJ United States.
- Sontag, E. D. (1981). Nonlinear regulation - the piecewise linear approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(2), 346–358.
- Soong, T. T. (1973). *Random Differential Equations in Science and Engineering*, volume 103 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New-York.
- Speyer, J. L. (1976). Nonlinear control law for a stochastic infinite time problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-21**(4), 560–564.
- Speyer, J. L. (1979). Computation and transmission requirements for a decentralized linear-quadratic-gaussian control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-24**(2), 266–269.
- Speyer, J. L., Deyst, J., et Jacobson, D. H. (1974). Optimization of stochastic linear systems with additive measurement and process noise using exponential performance criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-19**(4), 358–366.

- Srinivasan, B., Bonvin, D., Visser, E., et Palanki, S. (2003). Dynamic optimization of batch processes II. role of measurements in handling uncertainty. *Computers and Chemical Engineering*, **27**(1), 27–44.
- Stanton, B. D. (1990). Using historical data to justify controls. *Hydrocarbon Processing*, **69**(6), 57–60.
- Stratonovich, R. L. (1966). New representation for stochastic integrals and equations. *Journal on Control*, **4**(2), 362–371.
- Striebel, C. et Chapman, R. (1965). Control system study september progress report. Progress Report LMSC/HREC A712352, NASA.
- Sugiyama, H., Fischer, U., Antonijuan, E., Hoffmann, V. H., Hirao, M., et Hungerbuhler, K. (2009). How do different process options and evaluation settings affect economic and environmental assessments? A case study on methyl methacrylate (mma) production processes. *Process Safety and Environmental Protection*, **87**(6), 361–370.
- Sun, Z. et Ge, S. S. (2005). Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, **41**(2), 181–195.
- Swarup, A. et Speyer, J. L. (2004). Characterization of lqg differential games with different information patterns. In *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 4 of *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Nassau, Bahamas. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Tadmor, G. (1985). Optimal controls and their discontinuities in quadratic problems of delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-30**(7), 666–673.
- Tarhan, B. et Grossmann, I. E. (2008). A multistage stochastic programming approach with strategies for uncertainty reduction in the synthesis of process networks with uncertain yields. *Computers and Chemical Engineering*, **32**(4-5), 766–788.
- Terwiesch, P., Ravemark, D., Schenker, B., et Rippin, D. W. T. (1998). Semi-batch process optimization under uncertainty : Theory and experiments. *Computers & Chemical Engineering*, **22**(1-2), 201–213.

- Theodorou, D. N. (2010). Progress and outlook in monte carlo simulations. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **49**(7), 3047–3058.
- Tolfo, F. (1983). Methodology to assess the economic returns of advanced control projects. In *Proceedings of the 1983 American Control Conference.*, volume 3 of *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, CA, pages 1141–1146. IEEE New York NY USA.
- Ulas, S. et Diwekar, U. M. (2004). Thermodynamic uncertainties in batch processing and optimal control. *Computers and Chemical Engineering*, **28**(11), 2245–2258.
- Ulas, S. et Diwekar, U. M. (2006). Integrating product and process design with optimal control : A case study of solvent recycling. *Chemical Engineering Science*, **61**(6), 2001–2009.
- Ulas, S., Diwekar, U. M., et Stadtherr, M. A. (2005). Uncertainties in parameter estimation and optimal control in batch distillation. *Computers and Chemical Engineering*, **29**(8), 1805–1814.
- Ulas Acikgoz, S. et Diwekar, U. M. (2010). Blood glucose regulation with stochastic optimal control for insulin-dependent diabetic patients. *Chemical Engineering Science*, **65**(3), 1227–1236.
- Vargas, A. N. et Do Val, Joao, B. R. (2010). Average cost and stability of time-varying linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **55**(3), 714–720.
- Vu, L. et Liberzon, D. (2008). Invertibility of switched linear systems. *Automatica*, **44**(4), 949–958.
- Walsh, D. C. I. et Raftery, A. E. (2002). Detecting mines in minefields with linear characteristics. *Technometrics*, **44**(1), 34–44.
- Wang, A., Guo, L., et Wang, H. (2008). Advances in stochastic distribution control. In Society, I. o. E. et Computer, E. E., editors, *2008 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2008*, 2008 10th International Conference



- on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2008, Hanoi, Viet nam, pages 1479–1483. Inst. of Elec. and Elec. Eng. Computer Society 445 Hoes Lane - P.O.Box 1331 Piscataway NJ 08855-1331 United States.
- Wang, H. (1998). Robust control of the output probability density functions for multivariable stochastic systems. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, **2**, 1305–1310.
- Wang, H. (1999). Robust control of the output probability density functions for multivariable stochastic systems with guaranteed stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(11), 2103–2107.
- Wang, H. (2002). Minimum entropy control of non-gaussian dynamic stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**(2), 398–403.
- Wang, H. et Jian Hua, Z. (2001). Bounded stochastic distributions control for pseudo-armax stochastic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**(3), Journal article (JA)486–490.
- Wang, Y. et Wang, H. (2002a). Output PDFs control for linear stochastic systems with arbitrarily bounded random parameters : A new application of the laplace transform. In *2002 American Control Conference*, Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK, United states. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Wang, Y. et Wang, H. (2002b). Suboptimal mean controllers for bounded and dynamic stochastic distributions. *Journal of Process Control*, **12**(3), 445–452.
- Wang, Y., Ying, Z. G., et Zhu, W. Q. (2009). Nonlinear stochastic optimal control of Preisach hysteretic systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **24**(3), 255–264.
- Wendt, M., Li, P., et Wozny, G. (2002). Nonlinear chance-constrained process optimization under uncertainty. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **41**(15), 3621–3629.
- White, W. D. (1954). Nonlinear filters. *Institute of Radio Engineers – Transactions of Professional Group on Circuit Theory*, **CT-1**(4), 2–5.

- Wissmann, P. J. et Grover, M. A. (2009). A new approach to batch process optimization using experimental design. *AIChE Journal*, **55**(2), 342–353.
- Wong, E. et Zakai, M. (1965). On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. *Annals of Mathematical Statistics*, **36**(5), 1560–1564.
- Xiang, C., Wang, Q. G., Lu, X., Nguyen, L. A., et Lee, T. H. (2007). Stabilization of second-order unstable delay processes by simple controllers. *Journal of Process Control*, **17**(8), 675–682.
- Yang, D. R., Seborg, D. E., et Mellichamp, D. A. (1991). Combined balance control structure for distillation columns. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, **30**(9), 2159–2168.
- Yang, Y. et Lee, J. M. (2010). Probabilistic modeling and dynamic optimization for performance improvement and risk management of plant-wide operation. *Computers and Chemical Engineering*, **34**(4), 567–579.
- Ye, X. (2005). Switching adaptive output-feedback control of nonlinearly parametrized systems. *Automatica*, **41**(6), 983–989.
- Yi, Y., Shen, H., et Guo, L. (2009). Constrained PID tracking control for output PDFs of non-gaussian stochastic system based on lmis. *Asian Journal of Control*, **11**(5), 571–577.
- Yildiz, S. K., Huang, B., et Fraser Forbes, J. (2008). Dynamics and variance control of hot mill loopers. *Control Engineering Practice*, **16**(1), 89–100.
- Yu, J. et Qin, S. J. (2008). Statistical mimo controller performance monitoring. part I : Data-driven covariance benchmark. *Journal of Process Control*, **18**(3-4), 277–296.
- Zang, X. et Howell, J. (2006). The propagation of whole plant oscillations through a chemical process plant. *Journal of Process Control*, **16**(9), 959–970.
- Zhou, J., Zhou, D., Wang, H., Guo, L., et Chai, T. (2010). Distribution function tracking filter design using hybrid characteristic functions. *Automatica*, **46**(1), 101–109.
- Zhou, Y. et Forbes, J. F. (2003). Determining controller benefits via probabilistic optimization. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, **17**(7-9), 553–568.

Zhu, H. T., Er, G. K., Iu, V. P., et Kou, K. P. (2009). EPC procedure for PDF solution of non-linear oscillators excited by poisson white noise. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **44**(3), 304–310.

Zhu, H. T., Er, G. K., Iu, V. P., et Kou, K. P. (2010). Probability density function solution of nonlinear oscillators subjected to multiplicative poisson pulse excitation on velocity. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, **77**(3), 0310011–0310017.

Zhu, W. et Ying, Z. (1999). Optimal nonlinear feedback control of quasi-hamiltonian systems. *Science in China, Series A : Mathematics, Physics, Astronomy*, **42**(11), 1213–1219.