UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION THERMOÉLASTIQUE DES TISSUS MOUS PAR ÉLÉMENTS FINIS

HICHAM JELLAB

INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES

(GÉNIE BIOMÉDICAL)

AVRIL 1999

© Hicham Jellab, 1999.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-53583-5

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION THERMOÉLASTIQUE DES TISSUS MOUS PAR ÉLÉMENTS FINIS

Présenté par : Jellab Hicham

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

SAVARD Pierre, Ph.D., président

BERTRAND Michel, Ph.D., membre et directeur de recherche

BERTRAND Lionel, Docteur d'État, membre

À mon très cher Papa.

À ma très chère Maman.

À Aziz, Mounir et Najat.

À Sara.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier, avant tout, mon directeur de recherche, le professeur Michel Bertrand, pour ses précieux conseils et critiques quant à ce projet. Je dois le remercier de m'avoir permis de participer à des conférences internationales pour élargir mes horizons et de m'avoir offert l'opportunité de rencontrer les groupes de recherche avec lesquels nous continuons à collaborer. En outre, je ne peux oublier l'aide financière qu'il m'a accordée au cours de ma maîtrise.

Je veux remercier mes amis les docteurs Lahbib Soualmi et Roch Listz Maurice pour les nombreuses réunions et discussions qui m'ont éclairé et aidé à mieux me former au sein de l'IGB.

J'exprime ma reconnaissance à Johane Raymond qui a corrigé le présent rapport de mémoire.

Également, je voudrais remercier Claude Turcotte d'avoir assuré le bon fonctionnement des ressources informatiques du laboratoire.

Enfin, je remercie tous mes amis de l'IGB avec qui j'ai pu passer des moments agréables.

RÉSUMÉ

De nos jours, l'utilisation de l'échographie a envahi les milieux cliniques à des fins de diagnostic. L'ultrasonographie séduit par son caractère non invasif, son faible coût, mais surtout sa capacité à fournir, en temps réel, des informations statiques et dynamiques relatives aux structures anatomiques. Un autre avantage de cette modalité d'imagerie réside dans la portabilité des appareils.

Actuellement, on développe des techniques de diagnostic fondées sur les images ultrasonores. Notre groupe de recherche se concentre essentiellement sur la technique d'élastographie. Il s'agit d'une nouvelle technique d'imagerie qui vise à produire des images de la distribution du module de Young des tissus mous. En pratique, on comprime les tissus mous et on observe leur champ de déformation qui traduit, en général, une distribution de rigidité. On peut ainsi caractériser ces tissus d'après leur module de Young. Une des applications de cette technique est la détection des cancers du sein, chez la femme, et de la prostate, chez l'homme. On se base sur le principe qu'un changement de rigidité peut constituer un indice de présence d'une tumeur.

Une autre application de l'élastographie est l'évaluation des traitements du cancer par les ultrasons focalisés de haute intensité, ou HIFU (*High Intensity Focused Ultrasound*). En effet, lorsqu'on traite des tumeurs de la prostate par HIFU, on produit des lésions (où le tissu est nécrosé) qui s'avèrent avoir une rigidité différente des tissus

autour. Cette application est le sujet de collaboration de notre groupe de recherche avec l'unité 281 de l'INSERM à Lyon. Bien que ce groupe ait mis au point une technique de diagnostic des effets du HIFU en estimant le coefficient d'atténuation des faisceaux ultrasonores, il s'intéresse à l'élastographie comme une technique supplémentaire qui permettrait de visualiser les région nécrosées.

C'est précisément de cette combinaison de l'élastographie et du traitement par hyperthermie que nous est venue l'idée de ce projet. L'élastographie fait appel aux notions d'élasticité, tandis que le traitement par HIFU induit la résolution de l'équation de la chaleur. Dans l'optique de modéliser le comportement mécanique des tissus mous suite à un échauffement, nous avons entrepris de résoudre le problème élastique en tenant compte de l'équation de la chaleur. C'est ainsi que nous avons naturellement eu recours à la théorie de la thermoélasticité. On y apprend que dans certains cas, le fait de changer la température des matériaux, donc des tissus mous, induit des forces de volume ou des contraintes capables de produire des déformations. Cela rejoint le principe de l'élastographie, à savoir qu'on impose des contraintes et on étudie les déplacements qui en résultent pour avoir une image des déformations, connue sous le nom de *elastogram*. Ainsi, si on chauffe un tissu, on induit des déformations. La question qui se pose est: serons-nous capables de mesurer de tels déplacements ou déformations? Quels sont les facteurs majeurs pour produire des déformations détectables avec notre outil d'imagerie privilégié, l'ultrasonographie?

Dans la première partie de ce mémoire, nous exposons le formalisme mathématique de la théorie de la thermoélasticité. Cette dernière constitue la source de notre modèle numérique par éléments finis. Ensuite, nous présentons les derniers développements en matière de modélisation thermique des tissus biologiques. Parmi les différentes équations de la chaleur, nous en appliquons une, celle de Pennes, pour prédire le profil de température. Cela va nous servir dans nos simulations du modèle thermoélastique. Les principaux résultats sont regroupés dans le quatrième chapitre.

Finalement, nous discutons des hypothèses simplificatrices avancées, puis de la possibilité d'application de notre modèle dans la détection et le traitement des tumeurs cancéreuses. Également, nous proposons les prochaines étapes de nos travaux dans le cadre de ce projet qui se veut intégrateur de deux grands domaines dans la recherche médicale.

ABSTRACT

Today, ultrasonic imaging is wide spread in health care places for diagnosis purpose. This imaging modality is attractive due to its several advantages, say its low costs, its non invasive property, and over all, its capacity to reveal, in real time, static and dynamic information related to anatomical structures. Another advantage consists of the easiness to carry the ultrasonic instrumentation.

Presently, diagnosis techniques, based on ultrasound images, are being developed all around the world. Our research group focuses on elastography. It is a new ultrasonic imaging method for soft tissue characterization. With this technique, the tissue elastic properties are revealed trough the estimation of tissue displacements induced by small external quasi-static compression. It has been proposed for breast cancer and prostate cancer detection as well, implied that tissue hardness is indicative of a tumor presence (just like the principle of palpation).

Another application of elastography is the assessment of cancer tumor treatment and ablation using HIFU (*High Intensity Focused Ultrasound*) techniques. In deed, when prostate tumors are cured by HIFU, necrotic lesions are formed and the hardness of these regions are different from tissues around. Hence, elastography could help us delineate such necrotic regions. This project is lead by our team in collaboration with the INSERM, unit 281 in Lyons, France. The latter has developed new diagnosis techniques for HIFU

effects assessment, based on ultrasound beam attenuation coefficient. Though, we are highly interested in elastography as a complementary diagnosis modality that would enable us to visualize the necrotic areas.

More precisely, this combination of elastography and hyperthermia treatment has lead to this project. Elastography deals with elasticity notions, whereas HIFU treatment introduces the bioheat equation in living tissues. Within the perspective of modeling the mechanical behavior of soft tissues subjected to temperature changes, we have undertaken the elastic problem resolution, taking into account the bioheat transfer (BHT) equation. As a result, we naturally introduced the theory of thermoelasticity. In this theory, it is postulated that, in many cases, by changing material or tissue temperature, we are able to induce volume forces or, in other words, stresses that produce deformations and displacements. This joins the elastography principle as explained earlier. Therefore, if we heat a tissue up, we produce deformations. The main question is: will we be able to measure such deformations or displacements? What are the major parameters to produce observable deformations with our favorite imaging tool, ultrasonography?

In the first part of this dissertation, we review the core mathematical structure of the theory of thermoelasticity. This will be the backbone of our numerical model. Then, we present some recent developments in biological tissues thermal modeling. Amongst these models, we choose the Pennes's bioheat transfer equation to predict the temperature distribution that will be injected in the numerical simulations. The main results are grouped in the fourth chapter.

Eventually, we discuss our simplifying hypotheses and the applicability of our model in cancer detection and treatment. Also, we highlight the next steps of future work in the scope of this project which is to bring together two major medical research fields.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACES ..... **IV**

REMERCIEMENTS ..... **V**

RÉSUMÉ ..... **VI**

ABSTRACT ..... **IX**

TABLE DES MATIÈRES ..... **XII**

LISTE DES FIGURES ..... **XIV**

LISTE DES SYMBOLES ..... **XVI**

LISTE DES ANNEXES ..... **XIX**

CHAPITRE I - INTRODUCTION **1**

I.1 PRINCIPES DE L'ÉCHOGRAPHIE 2

I.2 CARACTÉRISATION ULTRASONORE DES TISSUS MOUS ET ÉLASTOGRAPHIE 5

I.3 LE MODÈLE DE FORMATION D'IMAGE. 12

I.4 LES ULTRASONS FOCALISÉS DE HAUTE INTENSITÉ 15

I.5 OBJECTIFS DE LA RECHERCHE 20

CHAPITRE II - NOTIONS DE BASE DE LA THERMOÉLASTICITÉ **21**

II.1 GÉNÉRALITÉS 21

II.2 LE SOLIDE THERMOÉLASTIQUE LINÉAIRE 25

II.3 DU COUPLAGE THERMOÉLASTIQUE 29

II.4 LES CHAMPS DE CONTRAINTES ET DE DÉFORMATIONS QUASI STATIQUES 32

II.5 LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE THERMOÉLASTIQUE-ÉLASTIQUE 36

II.6 CAS DES DÉFORMATIONS PLANES EN 2D 38

CHAPITRE III - MODÉLISATION THERMIQUE DES TISSUS BIOLOGIQUES **42**

III.1 LE MODÈLE DE PENNES 43

III.2 LES PREMIERS MODÈLES DE PERFUSION SANGUINE 44

III.3 LONGUEUR CARACTÉRISTIQUE D'ÉQUILIBRE THERMIQUE 46

III.4 LE MODÈLE DE CHEN ET HOLMES (CH) 48

III.5 LE MODÈLE DE WEINBAUM, JIJI ET LEMONS (WJL) 52

III.6 COMPARAISON DES DIFFÉRENTS MODÈLES 55

III.7 CAS DE SIMULATION DU MODÈLE DE PENNES 58

III.7.1. Champ à symétrie radiale *60*

III.7.2. Champ gaussien (focalisation) *63*

III.8 UNE BRÈVE DISCUSSION. 65

CHAPITRE IV - MODÉLISATION THERMOÉLASTIQUE ET RÉSULTATS **67**

IV.1 LES HYPOTHÈSES DE TRAVAIL 67

IV.2 LES PRINCIPAUX RÉSULTATS DE SIMULATION 69

IV.2.1. Corps homogène avec profil radial linéaire de température *70*

IV.2.2. Corps homogène soumis à un profil gaussien de température *72*

IV.2.2.1 Parois fixes 73

IV.2.2.2 Paroi interne sous pression 76

IV.2.3. Cas d'une inclusion circulaire rigide *79*

IV.2.3.1 Inclusion «centrée» 80

IV.2.3.2 Inclusion proche de la paroi interne 83

IV.2.3.3 Inclusion proche de la paroi externe 86

CHAPITRE V – DISCUSSION ET CONCLUSION **94**

RÉFÉRENCES **102**

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Échographie d'une section du sein et élastogramme 9

Figure 1.2 : Protocole expérimental d'élastographie et résultats..... 10

Figure 1.3 : Anatomie de la prostate. 12

Figure 1.4 : Échographie d'une section de la prostate..... 15

Figure 1.5 : Dommages produits par HIFU. 17

Figure 1.6 : Procédure transrectale de traitement de la prostate. 19

Figure 2.1 : Une inhomogéneité discontinue. 23

Figure 2.2 : État de déformations planes. 38

Figure 3.1 : Volumes de contrôle du modèle de Chen & Holmes. 49

Figure 3.2 : Configuration du modèle Wienbaum de Jiji & Lemons..... 52

Figure 3.3 : Géométrie du problème thermique. 60

Figure 3.4 : Distribution de la température avec le modèle de Pennes..... 62

Figure 3.5 : Profil de température en forme de cloche (Pennes). 64

Figure 4.1 : Géométrie et maillage du problème thermoélastique..... 70

Figure 4.2 : Profil radial de déplacement pour une température à symétrie radiale. 71

Figure 4.3 : Champs de déplacement radial et angulaire avec parois fixes. 74

Figure 4.4 : Champ de déformation radiale pour un tissu homogène aux parois fixes. 75

Figure 4.5 : Champs de déplacement radial et angulaire pour paroi interne sous pression et paroi externe à déplacement contrôlé. 77

Figure 4.6 : Champ de déformation radiale pour paroi interne sous pression et paroi externe à déplacement contrôlé. 78

Figure 4.7 : Champs de déplacement et de déformation radiaux pour inclusion centrée trois fois plus rigide. 81

Figure 4.8 : Profil du champ de déplacement pour inclusion centrée trois fois plus rigide. 82

Figure 4.9 : Champs de déplacement et de déformation radiaux pour inclusion trois fois plus rigide et proche de la paroi interne.. 84

Figure 4.10 : Profil du champ de déplacement pour inclusion centrée trois fois plus rigide et proche de la paroi interne. 85

Figure 4.11 : Champs de déplacement et de déformation radiaux pour inclusion trois fois plus rigide et proche de la paroi externe. 86

Figure 4.12 : Profil du champ de déplacement pour inclusion centrée trois fois plus rigide et proche de la paroi externe 87

Figure 4.13 : Courbes de déformation radiale pour inclusion circulaire de 2 mm de rayon placée à différentes positions radiales. 88

Figure 4.14 : Comparaison des différentes courbes de déformation en fonction de la position de l'inclusion. 89

Figure 4.15 : Courbes de déformation radiale pour inclusion circulaire de 4 mm de rayon placée à différentes positions radiales. 90

Figure 4.16 : Comparaison des différentes courbes de déformation en fonction de la position de l'inclusion. 91

Figure 4.17 : Comparaison des différentes courbes de déformation en fonction de la position de l'inclusion. 93

LISTE DES SYMBOLES

OPÉRATEURS

∇	Gradient.
∇^2	Laplacien.
$\varphi_{,i}$	Gradient de la fonction φ selon la direction i ($=\partial\varphi/\partial x_i$).
$\varphi_{,ii}$	Laplacien de la fonction φ ($= \partial^2\varphi/\partial x^2_1+\partial^2\varphi/\partial x^2_2+\partial^2\varphi/\partial x^2_3$).
$A_{i,j}$	Dérivation de la composante de A selon la direction *i* par rapport à la direction *j* et sommation (convention d'Einstein).
$A_{i,i}$	Divergence du vecteur A ($= \partial A_1/\partial x_1+ \partial A_2/\partial x_2+ \partial A_3/\partial x_3$).

SCALAIRES, MATRICES ET TENSEURS

α	Coefficient d'expansion thermique.
ε_{kl}	Tenseur de déformation.
ε_{xx}	Déformation normale au plan x dans la direction des x.
ε_{yy}	Déformation normale au plan y dans la direction des y.
ε_{xy}	Déformation en cisaillement dans le plan xy.
λ	Constante de Lamé.
μ	Module de cisaillement du tissu (deuxième constante de Lamé).
ν	Coefficient de Poisson.
ρ	Densité du tissu.

σ_{ij}	Contrainte dans le plan i et la direction j.
σ_{xx}	Contrainte normale au plan x dans la direction x.
σ_{yy}	Contrainte normale au plan y dans la direction y.
σ_{xy}	Contrainte de cisaillement dans le plan xy.
σ_{zz}	Contrainte normale au plan z dans la direction des z.
τ_{xy}	Contrainte de cisaillement dans le plan xy.
θ	Changement de température par rapport à une température de référence.
ω	Perfusion sanguine.
$h(x,y)$	Réponse à l'impulsion ou PSF.
$i(x, y)$	Image RF du tissu.
$i_c(x, y)$	Image RF du tissu après compression.
(x, y)	Coordonnées cartésiennes d'un point.
(r, θ)	Coordonnées polaires d'un point.
A	Section du vaisseau sanguin.
c	Capacité calorifique du milieu.
d	Diamètre du vaisseau sanguin.
C_{ijkl}	Tenseur d'élasticité.
E	Module de Young.
F_x	Force volumique dans la direction des x.
F_y	Force volumique dans la direction des y.
g	Flux massique capillaire (artério-veineux).
k	Conductivité thermique.
l	Longueur.

L	Longueur totale du vaisseau.
n	Nombre de vaisseaux par unité de surface.
P	Périmètre.
q	Chaleur par unité de volume.
r	Rayon d'un vaisseau sanguin.
s	Abscisse curviligne le long d'un vaisseau sanguin.
t	Temps.
T	Température.
u	Vitesse moyenne du sang.
U	Coefficient global de transfert conducto-convectif.
V	Vitesse du sang.

INDICES ET EXPOSANTS

a	artériel.
b	sanguin.
c	convection (mode de).
e	équilibre.
m	métabolique.
p	perfusion (mode de).
v	veineux.

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A - LES ÉLÉMENTS FINIS. 110

ANNEXE B - UN EXEMPLE DE RÉSOLUTION ANALYTIQUE 119

ANNEXE C - REPRÉSENTATION 3D DES DÉFORMATIONS. 122

CHAPITRE I - INTRODUCTION

Aujourd'hui, le cancer de la prostate est le cancer le plus diagnostiqué chez l'homme après le cancer des poumons. Pratiquement, un homme sur neuf risque d'avoir ce type de cancer et les spécialistes prévoient que cette proportion va augmenter à un sur cinq dans les deux prochaines décennies. Cela constitue une raison supplémentaire pour consacrer des efforts à la conception et à la réalisation de méthodes de diagnostic et de traitement du cancer de la prostate. Parmi les méthodes de diagnostic courantes, on trouve le test de PSA (*Prostate Specific Antigen*), dont le taux augmente en cas de cancer, et la biopsie qui consiste à prélever des échantillons de la glande de la prostate (ce qui est très invasif) pour les analyser. Actuellement, plusieurs groupes de recherche expérimentent une nouvelle technique d'imagerie, l'élastographie, qui permet de caractériser les tissus d'après leur rigidité. L'idée sous-jacente est que des tissus pathologiques ont une rigidité autre que celle des tissus sains (Fung 1981). Dans le présent chapitre, nous décrirons davantage cette méthode et ses principes.

En ce qui concerne le traitement du cancer de la prostate, on dénombre plusieurs méthodes. Les plus utilisées sont la prostatectomie et la radiothérapie. Cependant, ces traitements ne sont pas toujours possibles, spécialement chez les patients de plus de 70 ans. Une possibilité se trouve dans les ultrasons focalisés de haute intensité ou HIFU

(*High Intensity Focused Ultrasound*). Ils offrent une approche de chirurgie quasi non invasive qui a été couronnée de succès dans différents domaines médicaux. Nous reviendrons sur quelques aspects de cette technique de chirurgie.

I.1 Principes de l'échographie

L'expression «ondes ultrasonores» désigne les ondes acoustiques dont la fréquence est supérieure aux fréquences audibles par l'humain (20 kHz). Généralement, les appareils à ultrasons destinés à l'imagerie médicale fonctionnent à des fréquences comprises entre 1 MHz et 20 MHz (Christensen, 1988); les fréquences les plus élevées offrent la meilleure résolution au prix d'une faible profondeur de pénétration (entre 1 cm et 20 cm typiquement). Les ondes ultrasonores sont générées par des transducteurs acoustiques placés, généralement, en contact avec la peau. Ces ondes se propagent dans les tissus où elles sont diffractées, atténuées, puis partiellement réfléchies par les inhomogénéités acoustiques, c.-à-d. les fluctuations locales de la densité et de la compressibilité.

Les réflexions peuvent être spéculaires ou rétrodiffusées selon la nature des inhomogénéités (Thieme, 1993). Les réflexions spéculaires sont produites lorsque l'interface entre deux régions de propriétés acoustiques différentes est bien définie à

l'échelle de la longueur d'onde utilisée. De telles réflexions spéculaires sont observées, par exemple, aux interfaces fluide/tissu, os/tissu, etc.

Les réflexions de type rétrodiffusion se produisent lorsque le signal ultrasonore rencontre une structure composée d'inhomogénéités dont les dimensions sont inférieures à la longueur d'onde (comme les fibres musculaires). Ces inhomogénéités agissent donc comme des diffuseurs de l'onde acoustique.

En échographie, l'émission de l'onde est effectuée en mode pulsé. Ainsi, pour une série d'interfaces distribuées le long du faisceau, les ondes réfléchies arrivent au capteur sous forme d'une série d'ondelettes dont l'amplitude est fonction de la réflectivité de l'interface et dont le temps d'arrivée est proportionnel à sa position axiale. Lorsqu'il y a plus d'un diffuseur acoustique dans le volume qu'occupe le signal émis, les ondelettes reçues par le capteur interfèrent de manière constructive ou destructive selon les différences de phase en jeu. Le signal fréquence radio (RF) résultant est capté par le transducteur qui le transforme en un signal électrique appelé ligne d'échos mode-A (mode Amplitude).

On construit une image d'échographie en procédant à un balayage, mécanique ou électronique, du faisceau ultrasonore dans un plan. On enregistre la ligne d'échos mode-A obtenue à chacune des positions latérales du faisceau, puis on en extrait l'enveloppe. Cette enveloppe sert à encoder la brillance de l'image échographique, d'où le nom,

échographie mode-B, donné à cette modalité. Pour des applications de recherche, on peut aussi faire appel à l'image construite à partir de l'ensemble des échos mode-A. Par analogie avec l'image mode-B, on l'appelle image RF.

Les images d'échographie se caractérisent par une texture granulaire. Les rétrodiffusions aléatoires des ondes ultrasonores sont à l'origine de ces granules qui sont connues, dans la littérature, sous le nom de *speckle*. L'étude de cette texture granulaire a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs dont les travaux ont permis de démontrer qu'il est possible d'en extraire des informations relatives à la géométrie des diffuseurs (forme, taille, densité) et à leur dynamique (Shung, 1993; Trahey, 1987; Meunier, 1989).

L'échographie Doppler est une autre application clinique des ultrasons (Kremkau, 1990). Le principe de cette méthode repose sur le fait que lorsque des diffuseurs (p. ex. globules rouges dans un vaisseau) sont en mouvement, alors les ondes ultrasonores réfléchies par ceux-ci seront décalées en fréquence proportionnellement à leur vitesse. Ainsi, suite à une analyse du contenu fréquentiel du signal mode-A obtenu aux diverses positions du faisceau ultrasonore, on peut construire une image paramétrique montrant la vitesse locale des diffuseurs. Notons, toutefois, que seule la composante axiale du vecteur vitesse est mesurée.

I.2 Caractérisation ultrasonore des tissus mous et élastographie

On utilise l'échographie pour le diagnostic de plusieurs pathologies des tissus mous. Traditionnellement, la détection de ces pathologies se fait par l'identification visuelle de certains attributs du signal mode-A (p. ex. espacement entre les ondelettes d'échos) ou de l'image mode-B (p. ex. texture de l'image). Cette méthode est efficace lorsqu'elle est utilisée par un clinicien expert en la matière. Elle demeure, toutefois, subjective, dépend de l'instrument et est loin d'utiliser toute l'information véhiculée par le signal ultrasonore.

Au cours des dernières années, beaucoup de travaux de recherche fondamentale ont été effectués afin de comprendre l'interaction complexe entre les tissus biologiques et les ondes ultrasonores, pour ensuite identifier des paramètres pour fins de diagnostic (Parker, 1984). Une revue complète de la plupart de ces travaux se trouve dans Shung, 1993 et Greenleaf, 1986. Ainsi, plusieurs travaux ont porté sur la compréhension de la propagation des ultrasons en évaluant la vitesse des ultrasons (Ophir, 1986; Robinson, 1982; Ophir, 1990; Chen, 1987) et le coefficient d'atténuation (Insana, 1983; Ophir, 1985; Parker, 1988). D'autres travaux ont visé à modéliser et à mesurer la rétrodiffusion des ultrasons.

Malgré le pouvoir séparateur de ces paramètres acoustiques, la caractérisation ultrasonore quantitative n'a pas eu d'impacts majeurs sur les techniques conventionnelles de diagnostic qui, pour l'essentiel, demeurent souvent qualitatives (Garra, 1993). En effet, compte tenu de la grande variabilité de tissus et des états pathologiques, il demeure très difficile de reproduire, en situation clinique, les conditions expérimentales nécessaires pour mesurer et utiliser ces paramètres pour un diagnostic.

Une autre branche de la caractérisation quantitative des tissus biologiques, fondée sur la mesure de paramètres physiques non acoustiques, s'est aussi développée. En effet, les ultrasons ont été utilisés pour déterminer les propriétés élastiques des tissus à partir de leur mouvement interne, induit soit par une source physiologique (pulsations artérielles, battements cardiaques, respiration), soit par une source externe (vibrations mécaniques ou compressions statiques). Ces techniques sont fondées sur l'hypothèse que les tissus anormaux ont souvent des propriétés élastiques différentes de celles des tissus sains. Ainsi, en réponse à une force mécanique, les mouvements seront aussi différents. C'est l'idée maîtresse de l'élastographie, une technique, récemment proposée par Ophir et al. (1991). Cette technique a été proposée pour faciliter la détection de cancer du sein chez la femme, sachant que le changement de la rigidité des tissus, tel qu'indiqué par la palpation lors d'un examen, est un indice de présence de tumeur (Céspedes, 1993).

L'élastographie consiste à analyser le mouvement d'un tissu à partir des signaux ultrasonores RF réfléchis par une cible (tissu), avant et après l'application d'une petite compression quasi statique le long de l'axe de propagation des ultrasons. Généralement, on utilise une technique d'intercorrélation locale pour estimer les déplacements axiaux[1] de divers point à l'intérieur de la cible. Le calcul de la dérivée du déplacement permet d'évaluer les déformations axiales internes correspondantes. Celles-ci sont normalisées et affichées, sur une échelle de niveaux de gris, sous la forme d'une image appelée *élastogramme*. En supposant que la distribution de contrainte est uniforme, l'image des déformations internes du tissu, l'élastogramme, peut être interprétée comme une mesure relative de la distribution de l'inverse de son module d'élasticité, car, en effet, un tissu mou se déforme plus qu'un tissu rigide.

Généralement, le champ de contrainte n'est pas uniforme, dépend des conditions aux frontières (dimensions finies du compresseur) et de la distribution de l'élasticité du tissu (Ponnekanti, 1994). Cette non-uniformité du champ de contrainte est à l'origine d'un certain nombre de problèmes d'interprétation des résultats. Ainsi, en pratique, étant donné que le compresseur est de taille finie, la contrainte longitudinale (et donc la déformation) dépend de la position axiale; elle est élevée à proximité des frontières du compresseur et décroît en s'éloignant de celles-ci (Ophir, 1991). Cela peut donner l'impression que le voisinage immédiat du compresseur est occupé par un matériau

[1] Les directions axiale (longitudinale), latérale et transversale sont définies, respectivement, selon l'axe de propagation des ultrasons, selon la direction perpendiculaire dans le plan de balayage et selon la direction perpendiculaire au plan de balayage.

souple, ou encore que la région distale est celle d'un matériau plus rigide. C'est pour cette raison que l'effet de cette variation de la contrainte avec la position axiale sur l'élastogramme est connu sous le nom de *target hardening artifact*. Ici, la notion d'artefact découle de l'interprétation simpliste de l'image de déformation comme étant une mesure relative de la distribution d'élasticité. En outre, les inclusions rigides, par exemple, donnent lieu à des concentrations de contrainte près des inhomogénéités d'élasticité (Goodier, 1933). Sur un élastogramme, ces concentrations de contrainte donnent l'impression que l'inclusion est adjacente à des régions souples, disposées axialement de part et d'autre de ses frontières. Cet artefact est connu sous le nom de *target shadowing artifact*. Dans certains cas, la présence de ces ombres peut être bénéfique, étant donné qu'elles aident à démarquer les frontières de l'inclusion (Ophir, 1995). Cependant, dans des situations plus complexes comportant plusieurs inclusions, ces ombres peuvent induire une mauvaise interprétation de l'élastogramme correspondant; il est difficile de décider s'il s'agit d'ombres ou d'inclusions additionnelles! À titre d'illustration de ce problème, considérons la figure 1.1 qui montre un exemple clinique de l'élastographie. D'après l'élastogramme de la figure 1.1b, nous pouvons noter la présence de trois inclusions rigides (inclusions numéros **1**, **3** et **4** dans la figure 1.1c). Il est intéressant de noter que l'inclusion **1** apparaît, sur l'image d'échographie mode-B, comme une région de faible échogénéité, alors que l'inclusion **3** est très échogène (figure 1.1a); l'information véhiculée par l'élastogramme est donc très différente de celle véhiculée par l'échogramme (ou sonogramme). Entre les inclusions rigides **1** et **3**, l'élastogramme suggère soit la présence d'une inclusion molle

(inclusion numéro 2 de la figure 1.1c) ou, plus simplement, d'une région de concentration de contrainte induite entre deux inclusions rigides!

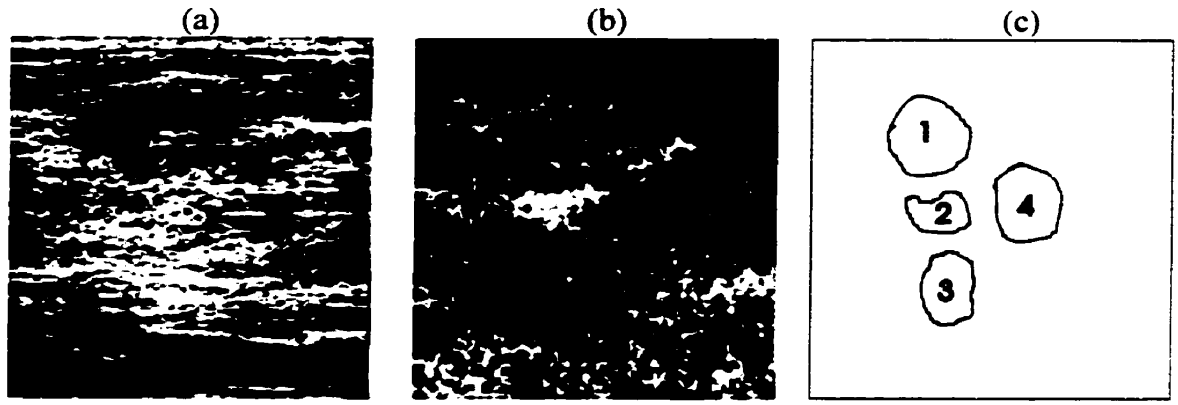

Figure 1.1 : *Image d'échographie d'une section du sein et l'élastogramme correspondant. (a) Image d'échographie mode-B. (b) Élastogramme qui montre la distribution des déformations dans la région d'intérêt. Le niveau de gris noir indique une faible déformation (tissu rigide), alors que le niveau de gris blanc indique que la déformation est élevée (tissu mou). (c) Contours des inclusions que nous pouvons identifier dans l'élastogramme.*

Récemment, notre groupe de recherche a développé un modèle d'estimation du mouvement qui est très robuste (Maurice 1998). Il s'agit d'un modèle Lagrangien pour décrire les mouvements de tissus. Dans la figure 1.2, nous représentons le protocole expérimental (*in vitro*) ainsi que les résultats. Il y a une concordance satisfaisante entre les caractéristiques du fantôme et l'image des déformations axiales.

Même si ce nouveau modèle donne de très bon résultats *in vitro*, parfois il faut résoudre un problème inverse pour réduire ou éliminer les artefacts. Le problème inverse consiste à trouver la distribution du module de Young qui minimise, au sens des moindres carrés, l'erreur quadratique entre le champ de déplacement observé et celui prédit par la théorie de l'élasticité. D'autres problèmes d'interprétation surgissent dans le cas de l'élastographie endovasculaire (Soualmi, 1998).

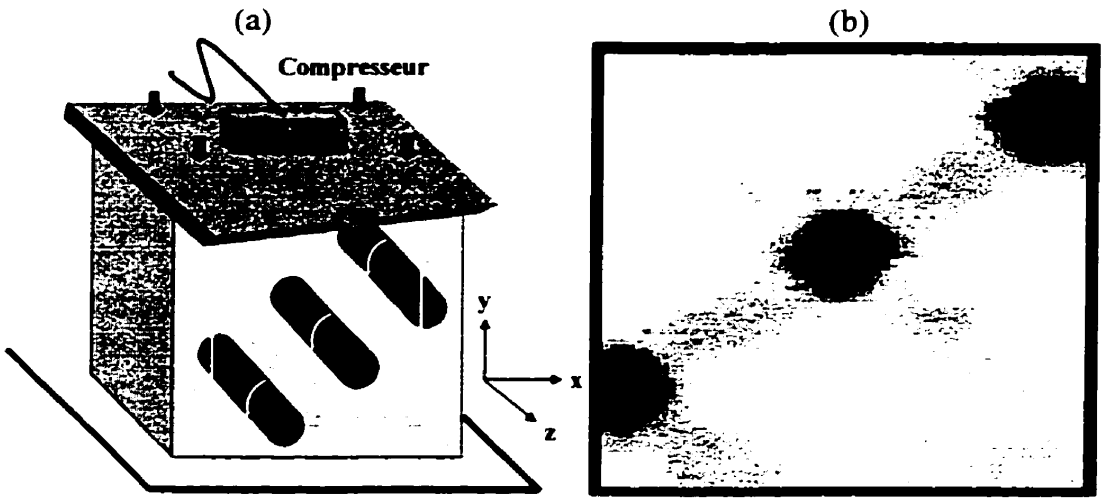

Figure 1.2 : *Protocole et résultats expérimentaux d'élastographie. (a) Schéma du fantôme utilisé pour l'application du modèle Lagrangien. Le faisceau ultrasonore se propage selon y; un balayage latéral (selon x) du faisceau produit l'image RF 2D . (b) Élastogramme dérivé par le modèle de Maurice pour une compression induite de 2.4 %.*

Présentement, nous nous intéressons à l'application de l'élastographie au diagnostic du cancer de la prostate. La géométrie traitée est différente de celle du sein et

cela induit d'autres considérations relatives à l'imagerie et à l'induction des contraintes dans le tissu. En ce qui concerne l'imagerie, il existe des sondes endorectales qui permettent de visualiser la prostate. Généralement, elles sont équipées de ballonnets qu'on remplit de liquide à des fins d'adaptation d'impédance. Mais, ces mêmes ballonnets, en les gonflant, peuvent imposer une pression à la paroi rectale, ce qui induit des déformations dans la prostate. Nous envisageons de résoudre le problème inverse associé. Cela comporte des difficultés en pratique. La première est la décroissance de la contrainte en fonction du rayon du tissu, et on sait aujourd'hui, qu'en deçà d'une certaine déformation, le rapport signal sur bruit est faible. Une autre difficulté à surmonter est l'artefact produit par la position du centre du transducteur par rapport à l'axe du tube rectal. L'expérience prouve qu'entre l'acquisition des images de pré-compression et post-compression, ce centre se décale, ce qui produit inévitablement des erreurs d'estimation de mouvement, sauf si on restaure les images à cet effet. L'application de l'élastographie à la prostate ne se limiterait pas à la détection des tumeurs, mais pourrait s'étendre à l'évaluation des traitements par HIFU. La chirurgie par ultrasons focalisés de haute intensité induit une nécrose de coagulation irréversible, ce qui change les propriété élastiques des tissus insonifiés, d'où l'idée d'exploiter l'élastographie pour délimiter les régions qui ont subi des changements par HIFU.

En résumé, l'élastographie, qui se veut une modalité d'imagerie de l'élasticité, souffre de limites fondamentales du fait qu'elle est en réalité une modalité d'imagerie de déformation. Pour repousser ces limites, l'élastographie ne doit pas être basée sur une

simple visualisation de la distribution des déformations internes du tissu et nécessite l'utilisation d'une autre approche, celle du problème inverse.

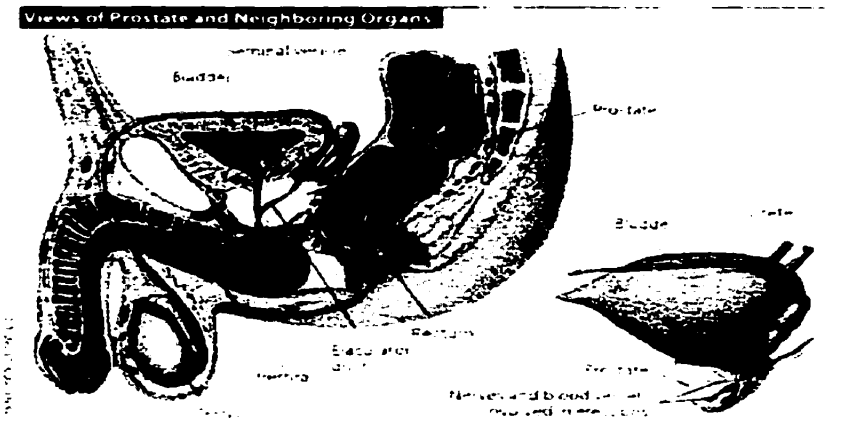

Figure 1.3 : *Anatomie de la prostate ainsi que des structures principales avoisinantes. L'accès à cette glande se fait le plus souvent par le rectum, pour le diagnostic comme pour le traitement. Référence: Scientific American 1999.*

1.3 Le modèle de formation d'image.

Appuyé sur les travaux de Bamber et al. (1980) et Dickinson (1980), un modèle de formation d'images échographiques a été proposé par Meunier (1989) dans le but d'étudier la dynamique de la texture durant le mouvement des tissus mous. Ce modèle

correspond à un système linéaire et spatialement invariant, caractérisé par une réponse impulsionnelle ou PSF (*Point Spread Function*). Dans ce modèle, l'image RF $i(x,y)$, avant la compression du tissu, est donnée par l'intégrale de convolution suivante :

$$i(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} h(x,y) * z(x,y) \qquad [1.1]$$

Dans l'équation 1.1, $h(x,y)$ est la PSF, modélisée par une fonction modulée en amplitude par une gaussienne :

$$h(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)\cos 4\pi\, y/\lambda_u \qquad [1.2]$$

où σ_x est un paramètre de largeur latérale du faisceau ultrasonore, σ_y est un paramètre de durée du pulse et λ_u est la longueur d'onde ($\lambda_u = c_u/f_0$, où c_u est la vitesse des ultrasons dans le milieu et f_0 est la fréquence centrale du transducteur); $z(x,y)$ est la distribution de l'impédance acoustique du tissu. Généralement, on modélise cette impédance par un bruit aléatoire 2D, de nature gaussienne. Dans le cas où la PSF est à largeur de bande réduite, la dérivée seconde dans l'expression 1.1 peut être négligée et la formation d'image se réduit à une simple convolution entre $h(x,y)$ et $z(x,y)$ (Kallel, 1994).

En ce qui concerne le tissu post-compression, l'image RF est exprimée de la manière suivante:

$$i_c(x,y) = h(x,y) * z_c(x,y) \qquad [1.3]$$

Ici, $z_c(x,y)$ est la distribution de l'impédance acoustique du tissu après la compression. Elle est obtenue en échantillonnant $z(x,y)$ aux nouvelles coordonnées spatiales en 2D et qui sont données par:

$$\begin{cases} x' = x + u(x,y) \\ y' = y + v(x,y) \end{cases} \qquad [1.4]$$

où u et v représentent, respectivement, les composantes latérale et axiale du champ de déplacement solution des équations d'élasticité.

C'est dans le cadre de ce modèle qu'on peut appliquer des algorithmes puissants pour l'estimation du mouvement et la résolution du problème inverse en élastographie.

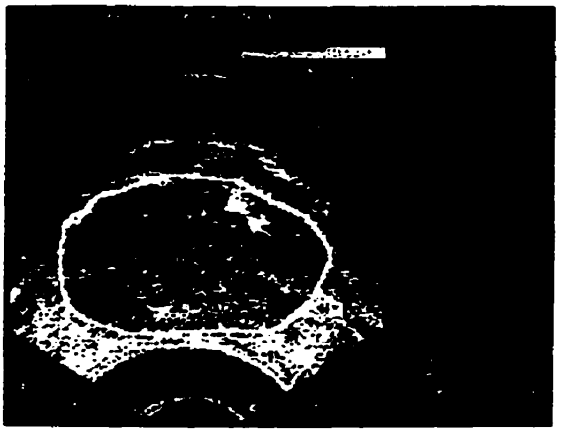

Figure 1.4 : *Image échographique de la glande de la prostate. Dans ce cas-ci, cet organe a un diamètre d'environ 4 cm. D'après la texture, on peut déceler la présence d'une inclusion, indiquée par la flèche blanche.*

1.4 Les ultrasons focalisés de haute intensité

L'idée d'avoir une chirurgie non invasive existe depuis longtemps au sein des différents corps médicaux. La chirurgie ultrasonore est une approche thérapeutique non invasive qui a été proposée pour la première fois en 1942 (Lynn) comme un outil pour des traitements neurochirurgicaux. Un champ ultrasonore de haute intensité produit par des cristaux de quartz plans associés à des lentilles concaves fut la première technique utilisée. Malgré des résultats encourageants, ce type de chirurgie n'est pas devenu très

populaire à l'époque, car le HIFU nécessitait une large craniotectomie avant le traitement. De plus, les difficultés à visualiser les dommages produits a provoqué une période de pessimisme jusqu'au début des années 70. Heureusement, l'évolution des techniques d'imagerie a encouragé la reprise des travaux dans la thérapie ultrasonore. Les applications du HIFU ont touché différents domaines comme l'ophtalmologie, la neurochirurgie, l'oncologie, l'urologie et, plus particulièrement, la thérapie contre le cancer localisé de la prostate humaine.

Fondamentalement, les interactions mécaniques des ultrasons avec le milieu induisent dans celui-ci un échauffement. L'effet thermique est dû à l'absorption de l'onde acoustique par les tissus qui sont traversés. L'augmentation de la température dans les tissus biologiques dépend du coefficient d'absorption du tissu, de la géométrie de la région traversée par les ultrasons, et aussi de la perfusion sanguine. Il est important de signaler qu'une élévation de la température dans les tissus n'entraîne pas nécessairement un dommage irréversible. Il faut respecter un certain temps d'exposition (figure 1.5).

Grosso modo, l'élévation de température qui provoque un dommage est inversement proportionnelle au logarithme de la durée d'exposition, comme il est montré dans la figure 1.5 (Ribault, 1998). Avec des intensités élevées, les effets biologiques sont souvent liés à la formation ou à l'oscillation des bulles de gaz dans les tissus. Ce phénomène est appelé cavitation (Hynynen, 1989). Il est défini comme

l'activité acoustique des cavités de gaz souvent produites dans des conditions de haute intensité (> 5W/cm^2).

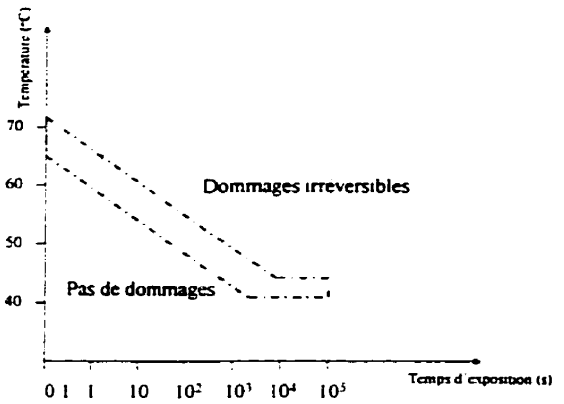

Figure 1.5 : *Dommages produits par le HIFU dans les tissus du rein canin en fonction de la température atteinte et du temps d'exposition (référence : M. Ribault, 1998).*

Les principales applications des effets biologiques des ultrasons sont l'hyperthermie et l'ablathermie.

L'hyperthermie s'appuie sur les effet thermiques des ultrasons. Il est connu que les tissus cancéreux sont plus sensibles à la chaleur que les tissus normaux. Avec l'hyperthermie, on cherche à détruire les cellules cancéreuses en maintenant la température des tissus entre 42 °C et 45 °C typiquement, et ce, pour une durée d'une demi-heure à une heure. Sur la figure 1.5, la zone hachurée est celle de l'hyperthermie. Dans cette zone, ce sont les tissus cancéreux qui seront endommagés en premier. Le problème principal rencontré en hyperthermie est la difficulté d'obtenir une distribution

de température uniforme. Il est préférable d'atteindre une distribution de température constante dans toute la région chauffée. En raison de la perfusion et des mécanismes de régulation de la température de l'organisme, il est très difficile de maintenir cette distribution.

L'ablathermie, quant à elle, combine et les effets thermiques des ultrasons et la cavitation. Elle a pour but de détruire les tumeurs en provoquant des lésions de nécrose irréversibles en élevant brusquement la température au-dessus de 60 °C pendant quelques secondes. Sur la figure 1.5, l'ablathermie se situe dans la zone au-dessus de la région hachurée. En 1955, les frères Fry ont été les premiers à utiliser les ultrasons focalisés de haute intensité cliniquement. Ils ont obtenu des lésions bien localisées de forme ellipsoïdale, plus larges dans la direction de l'axe du transducteur que dans la direction latérale. Ils ont dû superposer les lésions pour avoir la forme de nécrose désirée. Plusieurs groupes de recherche ont travaillé sur ce sujet pour établir des paramètres permettant de contrôler la formation des ces lésions (Chapelon 1992). On a établi (pour le rein du rat et du chien) des constantes de temps et d'intensité ultrasonore qui permettent d'obtenir de façon reproductible des lésions tissulaires irréversibles. La procédure de traitement de la prostate par HIFU chez l'homme est représentée sur la figure 1.6. Cette technique a récemment obtenu les autorisations pour être introduite en Amérique du nord.

Le HIFU va certainement pouvoir se développer davantage et s'étendre à d'autres applications dans un futur proche. Nous voyons cette technique comme une modalité de traitement mais aussi comme une possibilité d'étendre l'élastographie, dans ses principes comme dans ses applications.

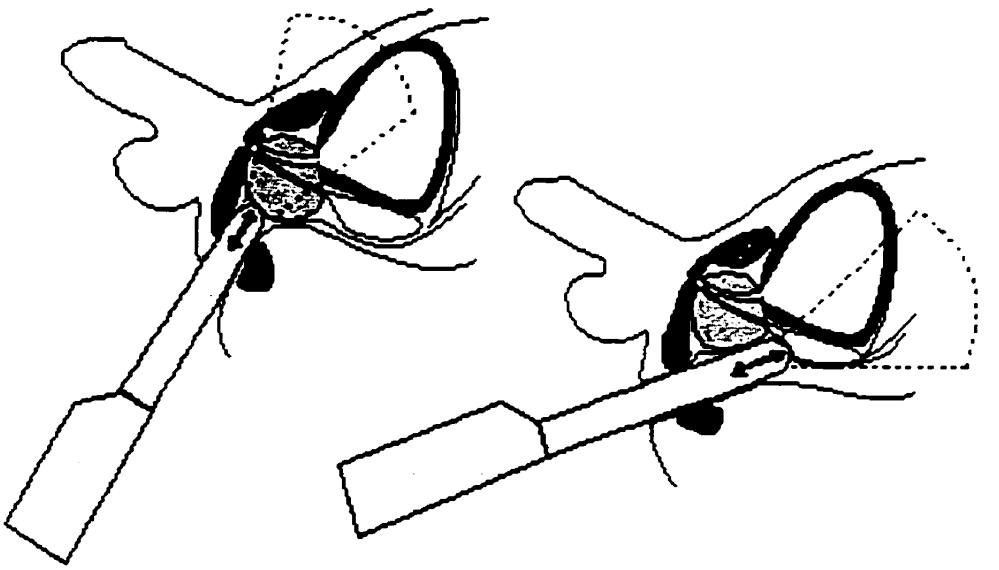

Figure 1. 6: *Procédure transrectale d'imagerie et de traitement de la prostate chez l'homme. On vient appliquer la sonde thérapeutique contre la paroi rectale, le plus proche possible de la glande. La sonde thérapeutique consiste en un transducteur de haute puissance pour le HIFU et d'une sonde d'imagerie. La procédure se fait par rachianesthésie.*

1.5 Objectifs de la recherche

Dans ce projet, nous allons élaborer un modèle de comportement mécanique des tissus mous suite à un dépôt de chaleur par ultrasons ou toute autre modalité d'hyperthermie. Dans un premier temps, nous présentons les grandes lignes de la théorie de thermoélasticité ainsi que son formalisme mathématique (chapitre 2). Dans un deuxième temps, nous illustrons, à l'aide d'une revue de la littérature et des simulations, l'état des connaissances sur la modélisation thermique des tissus biologiques (chapitre 3). Dans un troisième temps, nous présentons notre formulation du problème thermoélastique ainsi que les premiers résultats des simulations à l'aide des éléments finis (chapitre 4). Ceci nous amène, enfin, à étudier les performances de notre modèle, dans un contexte de simulation toujours, et à entrevoir des implications dans le domaine pratique médical ainsi que les avenues possibles pour des développements futurs (chapitre 5).

CHAPITRE II - NOTIONS DE BASE DE LA THERMOÉLASTICITÉ

II.1 Généralités

La thermoélasticité est une branche de la mécanique appliquée. Comme son nom l'indique, elle s'intéresse aux effets de la chaleur sur les contraintes et déformations dans les corps solides élastiques et vice-versa. Ainsi, c'est une extension de la théorie conventionnelle d'élasticité isotherme. Cette extension prend en compte les processus où les contraintes et les déformations proviennent non seulement des forces mécaniques, mais également des variations de la température.

Les processus thermoélastiques ne sont pas totalement réversibles. Si la partie élastique peut être récupérée, attendu que les déformations causées par la chaleur sont réversibles théoriquement (par refroidissement), la partie thermique peut être perdue à jamais. Ce phénomène doit sont existence à la dissipation d'énergie durant les transferts thermiques : la chaleur diffuse spontanément des zones les plus chaudes aux zones les plus froides, de sorte qu'il faut une intervention externe pour ramener le système à ses conditions thermiques initiales.

L'effet du champ de température sur le champ de déformation n'est pas un phénomène à sens unique. Il est connu, expérimentalement, que la déformation d'un corps produit un changement de sa température. En d'autres termes, la déformation agit comme une source ou un puits de chaleur. Il suffit de citer l'exemple du test de traction rapide d'une éprouvette de caoutchouc. Au moment de la rupture, l'échantillon est si chaud qu'on ne peut pas le toucher.

En toute rigueur, *les aspects mécanique et thermique sont couplés et inséparables*, ce qui peut vite compliquer la résolution des problèmes thermoélastiques. Cependant, en pratique, il est souvent possible de réduire ce couplage et d'évaluer les champs de température et de déformation, dans cet ordre, séparément. Nous aurons l'occasion d'examiner ces questions plus loin.

Malgré le couplage entre la température et les déformations, le chauffage ou le refroidissement d'un corps n'est pas toujours accompagné de contraintes. Prenons l'exemple d'un corps homogène et libre de s'étendre à ses frontières. Si on élève sa température uniformément, on n'y verra pas apparaître de contraintes. Par contre, dès qu'on confine les extrémités de ce corps entre deux obstacles immobiles (murs,...), des contraintes vont s'y développer. Un cas intéressant est celui d'un corps non homogène soumis à une augmentation uniforme de température (Figure 2.1). Supposons que les matériaux I et II aient des coefficients d'expansion thermique linéaire différents. Si les éléments de I et II étaient disjoints le long du segment AB, ce dernier aurait tendance à

occuper deux positions $A'B'$ et $A''B''$. Mais si ces deux éléments restent solidaires, il est nécessaire que des contraintes apparaissent le long du segment AB, ce qui impose aux segments $A'B'$ et $A''B''$ de rester soudés. Étant donné que la source de telles contraintes est la chaleur, on parle de *contraintes thermiques*. De plus, si le matériaux est élastique, les contraintes sont dites *thermoélastiques*. Les contraintes thermiques qui apparaissent dans des matériaux non élastiques sont le sujet de disciplines telles que la thermoplasticité et la thermovisco-élasticité.

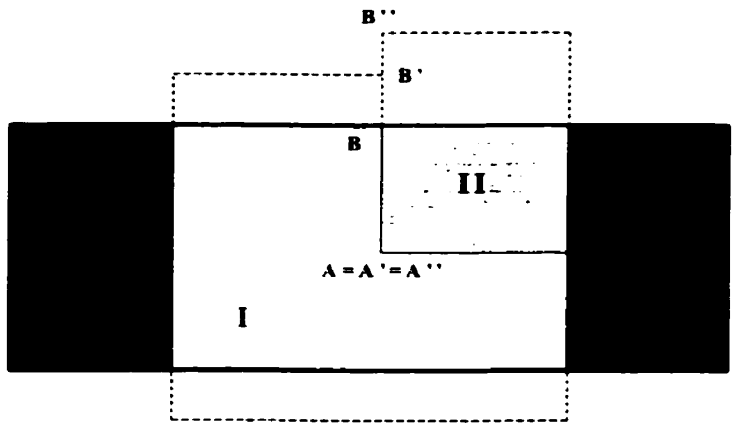

Figure 2.1 : *Une inhomogénéité discontinue. Des contraintes mécaniques peuvent naître à l'interface.*

Les propriétés mécaniques et thermiques des matériaux varient avec la température, ce qui complique davantage la résolution des problèmes thermoélastiques. Il existe des modèles pour décrire les variations des ces caractéristiques en fonction de la

température. Par exemple, on peut modéliser les variations du coefficient d'expansion thermique (α) ainsi que la conductivité thermique (k) des matériaux par une fonction affine de la variation de température $\theta = T-T_0$, où T et T_0 représentent, respectivement, les distributions de température finale et initiale du corps en question. De même, on modélise souvent les variations du module de Young par une loi parabolique en θ. Dans les développements qui suivent, nous allons supposer que les variations de température sont assez faibles pour considérer que ces propriétés thermo-mécaniques (module de Young, coefficient d'expansion thermique, conductivité thermique...) restent constantes.

Dans le cadre de notre étude, nous allons particulièrement nous intéresser à la **thermoélasticité dans des cas où les problèmes thermique et mécanique sont découplés**. Cela simplifie substantiellement la solution. De plus, nous supposerons que les déformations sont faibles, que les propriétés du matériau sont insensibles aux variations de température et que le corps est homogène et isotrope. Ces hypothèses imposent des limitations quant à l'intervalle admissible des variations de température θ. Il n'y a pas de formulation exacte pour décrire cet intervalle. Cependant, il apparaît raisonnable d'avoir des déformations thermiques pures, $\alpha\theta$, de l'ordre de grandeur des déformations mécaniques admissibles pour que le matériau reste dans un état élastique.

Avant d'aller plus loin, insistons sur le fait que si la résolution du problème thermoélastique, dans son aspect couplé, requiert l'analyse simultanée de la température et des déformations, la résolution dans un cas découplé se fait en deux étapes distinctes :

(1) déterminer le champ de température indépendamment des conditions mécaniques, ensuite (2) évaluer les déformations produites par ce champ de température.

II.2 Le solide thermoélastique linéaire

Les équations constitutives de la théorie linéaire de thermoélasticité des matériaux ont été établies par deux scientifiques, Duhamel et Neumann (Nowinski, 1978). Elles traduisent des relations linéaires entre les tenseurs de contrainte et de déformation dans le matériau :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\, e_{kl} + \beta_{ij}\, \theta \qquad [2.1]$$

ou, de manière équivalente pour les déformations

$$e_{ij} = s_{ijkl}\, \sigma_{kl} + \alpha_{ij}\, \theta \qquad [2.2]$$

avec

σ_{ij} : tenseur de contraintes.

e_{ij} : tenseur de déformations.

θ : incrément de température par rapport à la température de référence T_0, i.e $\theta = T - T_0$.

α_{ij} : coefficients d'expansion thermique linéaire.

β_{ij} : modules thermiques.

Les coefficients C_{ijkl} sont connus sous les noms de raideurs ou *modules élastiques*. Les coefficients S_{ijkl} sont dits *compliances* tandis que les coefficients β_{ij} sont des *modules thermiques*.

En combinant les relations [2.1] et [2.2]. on montre que

$$\begin{aligned} c_{ijkl}\, s_{klmn} &= \delta_{im}\, \delta_{jn} \\ s_{ijkl}\, c_{klmn} &= \delta_{im}\, \delta_{jn} \end{aligned} \qquad [2.3]$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= -\, s_{ijkl}\, \beta_{kl} \\ \beta_{ij} &= -\, c_{ijkl}\, \alpha_{kl} \end{aligned} \qquad [2.4]$$

Il est intéressant de remarquer que les relations [2.3] entre les coefficients élastiques ne font pas intervenir les coefficients thermiques, alors que ces derniers font appel aux premiers dans [2.4]. On peut exprimer les relations de Duhamel-Neumann sous forme matricielle explicite :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ \cdot & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ \cdot & \cdot & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1313} & c_{1312} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} + \theta * \begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{22} \\ \beta_{33} \\ \beta_{23} \\ \beta_{13} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} \qquad [2.5]$$

Dans la relation [2.5], nous n'avons fait figurer que la partie triangulaire supérieure du tenseur des modules élastiques C_{ijkl}. La partie inférieure peut aisément être déduite par symétrie de ce tenseur.

Pour des corps isotropes, ce tenseur se simplifie beaucoup pour ne garder que quelques termes non nuls. L'expression [2.5] devient alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & 2\mu+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & . & 2\mu+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & \mu & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \mu & 0 \\ . & . & . & . & . & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} + \theta^* \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [2.6]$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé qu'on peut exprimer en termes de module de Young **E** et de coefficient de Poisson **v** :

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)} ; \lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \qquad [2.7]$$

Dans la formulation de [2.6], on n'a explicité que les termes du triangle supérieur du tenseur des modules élastiques car ce tenseur est symétrique. Donc, en adoptant la convention d'Einstein, les équations constitutives de Duhamel-Neumann pour des corps isotropes s'écrivent :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, e_{ij} + \lambda\, e_{kk}\, \delta_{ij} + \beta\theta\, \delta_{ij} \qquad [2.8]$$

ou, en termes de déformations :

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) + \alpha\theta\,\delta_{ij} \qquad [2.9]$$

où $\lambda/(2\mu+3\lambda)=\nu/(1+\nu)$ et α représente le coefficient d'expansion thermique linéaire du matériau isotrope considéré. On peut relier β et α en combinant les relations [2.8] et [2.9]. On trouve la relation :

$$\beta = -\frac{E\alpha}{(1-2\nu)} = -(3\lambda + 2\mu)\alpha \qquad [2.10]$$

II.3 Du couplage thermoélastique

Dans nos développements, nous avons porté notre attention sur les matériaux homogènes et isotropes dont les propriétés élastiques et thermiques sont indépendantes de la température. Pour de tels matériaux, l'équation de la chaleur générale, incluant le couplage thermoélastique, s'écrit :

$$\boxed{\theta_{,ii} - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\rho}{k}h - \frac{E\alpha T_0}{(1-2\nu)k}\frac{\partial e_{ii}}{\partial t} = 0} \qquad [2.11]$$

avec

k : la conductivité thermique du matériaux.

κ : la diffusivité thermique du matériaux.

h : la quantité de chaleur déposée par unité de temps et de masse du corps.

$\theta_{,ii}$: Laplacien de θ, comme la convention d'Einstein l'impose.

Par ailleurs, les déplacements u_i sont régis par l'équation suivante :

$$\boxed{u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji} + \frac{\rho}{\mu}b_i - \frac{2(1+\nu)\alpha}{(1-2\nu)}\theta_{,i} = \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}} \qquad [2.12]$$

avec b_i la composante dans la direction i des forces de volume par unité de masse et de volume du matériau.

Les relations [2.11] et [2.12] constituent les quatre équations centrales de la thermoélasticité. Associées aux conditions initiales et aux limites appropriées, elles forment le noyau principal de toute la structure mathématique de cette discipline.

En particulier, on peut voir dans [2.11] le terme de dérivation $\partial e_{ii}/\partial t$ qui traduit le couplage qui existe entre les champs de température et de déformation. Un autre signe de ce couplage apparaît dans [2.12] à travers le gradient de température $\theta_{,i}$.

D'un point de vue formel, l'existence du couplage implique que le système formé de [2.11] et [2.12] est un système d'équations interdépendantes dont la résolution doit procéder simultanément. Cela explique la complexité de tels problèmes. Il n'est pas trivial d'en trouver une solution analytique générale.

Certains auteurs parlent de coefficient de couplage qui a comme expression:

$$\varepsilon = -\frac{E\alpha^2 T_0(1+\nu)}{\rho c_\varepsilon(1-2\nu)(1-\nu)} \qquad [2.13]$$

En effet, si ce coefficient est assez petit, on peut négliger le dernier terme dans [2.11] et l'équation de la chaleur devient simplement :

$$\theta_{,ii} - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\rho}{k}h = 0 \qquad [2.14]$$

On peut classer les problèmes thermoélastiques en six catégories (Nowinski, 1978). Les deux plus intéressantes du point de vue ingénierie, et qui sont bien exploitées, sont:

1. Les problèmes quasi statiques découplés. Dans ces conditions, on néglige le terme d'inertie $\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ dans [2.12]. Ensuite, on ne tient pas compte du terme mécanique de déformation dans [2.11] pour éliminer l'influence des déformations dans la détermination de la température.

2. Les problèmes stationnaires ou d'état permanent. Toutes les dérivées temporelles s'annulent dans [2.11] et [2.12], ce qui découple automatiquement les analyses de température et d'élasticité.

II.4 Les champs de contraintes et de déformations quasi statiques

Dans ce paragraphe, nous allons nous pencher sur la détermination des contraintes et des déformations dans le cas où les variations de température et les déformations se font de manière quasi statique. Afin de simplifier la discussion, nous supposerons le matériau libre des forces de volume classiques (poids,...).

Dans ce cas, l'équation qui régit les déplacements se déduit de [2.12]:

$$u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}=\frac{2(1+\nu)\alpha}{(1-2\nu)}\theta_{,i} \qquad [2.15]$$

Le terme de droite de [2.15] est supposé connu car il peut être déterminé, séparément (hypothèse de découplage), selon les lois des transferts thermiques.

La forme de cette équation suggère de décomposer le déplacement en deux parties, $u = u_1+u_2$. Le premier constituant, u_1, représente une solution particulière de [2.15]; le second, u_2, est la solution du problème homogène ou, en termes physiques, la solution du problème classique isotherme. Trouver u_2 est plus simple à faire car la solution peut être empruntée à la grande littérature de l'élasticité classique. La question essentielle devient celle de la méthode pour déterminer le premier constituant u_1.

Une réponse se trouve dans la méthode puissante de **Goodier**. Selon Goodier, les déplacements peuvent être représentés par les dérivées partielles d'une fonction de la position, du temps et de la température $\varphi=\varphi(P,\theta,t)$. En d'autres termes,

$$u1_{,i}=\varphi_{,i}$$

En substituant ce potentiel thermoélastique dans la relation [2.15], on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\varphi_{,ii} - \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)}\theta = \varphi^{0}(\theta,t)$$

où $\varphi^{0}(\theta,t)$ représente une fonction d'intégration. Comme on cherche une solution particulière, on peut prendre $\varphi^{0}(\theta,t) = 0$, et réduire la formulation précédente à l'expression :

$$\varphi_{,ii} = \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)}\theta \qquad [2.16]$$

Donc, dans un premier temps, il faut résoudre [2.15] en supposant le terme de droite connu (transferts thermiques). Le tenseur des déformations d'origine thermique devient, de toute évidence,

$$e1_{ij} = \varphi_{,ij} = \frac{1}{2}(u1_{i,j} + u1_{j,i})$$

et, dans le même élan, on peut exprimer les relations de Duhamel-Neumann en termes de potentiel de Goodier comme il suit :

$$\sigma 1_{ij} = 2\mu \varphi_{,ij} + \lambda \varphi_{,kk} \delta_{ij} + \beta\theta \, \delta_{ij} \qquad [2.17]$$

Mais, en utilisant [2.15], on se ramène à une formulation plus simple,

$$\sigma 1_{ij} = 2\mu(\varphi_{,ij} + \varphi_{,kk} \delta_{ij}) \qquad [2.18]$$

À moins d'une coïncidence fortuite, la solution particulière $u1$ ne peut satisfaire à toutes les conditions du problème posé. Par conséquent, on doit trouver la solution homogène et l'ajuster de sorte que les conditions aux limites soient remplies. Nous illustrons la démarche de résolution analytique à l'aide d'un exemple donné en annexe. Dans cet exemple, nous utilisons le potentiel de Goodier pour trouver les contraintes dans un cylindre infiniment long où la distribution de température présente une symétrie radiale.

II.5 Le principe de correspondance thermoélastique-élastique

Le principe de correspondance entre thermoélasticité et élasticité dans des conditions isothermiques repose sur la similarité formelle entre les équations de ces deux disciplines. Regardons de plus près la relation [2.15], que l'on réécrit sous une autre forme :

$$\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu} e_{jj,i} - \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} \theta_{,i} = 0. \qquad [2.19]$$

Le dernier terme peut être interprété comme une force de volume additionnelle. Le déplacement produit par la variation de température θ est, d'un point de vue formel, ***identique à celui produit par la force de volume*** $F_i = -E\alpha\theta_{,i}/(1-2\nu)$.

Afin de compléter l'analyse des correspondances, il faut examiner les relations entre les équations constitutives et les conditions aux limites dans les cas de thermoélasticité et d'élasticité isotherme. D'abord, si on revient sur la relation [2.8], on peut voir deux composantes dans le terme de droite. Les deux premiers termes correspondent au cas isotherme. C'est la première composante. La deuxième composante est représentée par le dernier terme; elle est la même pour les trois

contraintes normales, mais n'influence pas les contraintes de cisaillement. Par conséquent, ce terme peut être vu comme une pression hydrostatique P_i agissant en chacun des points d'un corps isotrope supposé être dans un état isotherme, avec $P_i = -E\alpha\theta/(1-2\nu)$.

En ce qui concerne les conditions aux limites, on peut les écrire sous la forme suivante :

$$t_{(n)i} + \frac{E\alpha\theta}{1-2\nu} n_i = (2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk}\delta_{ij}) n_j \qquad [2.20]$$

ce qui traduit l'équilibre entre les contraintes dans un état hypothétique isotherme (terme de droite) et les charges de surface dans ce même état hypothétique augmentées de la charge de surface $T_{(n)i} = E\alpha\theta\, n_i /(1-2\nu)$. Cette charge de surface est dirigée selon la normale à la surface du corps.

Si on récapitule, on peut énoncer le principe de correspondance en question. La solution d'un problème thermoélastique peut être remplacée par la solution d'un problème isotherme correspondant pourvu que (1) le corps soit soumis à l'action de forces de volume hypothétiques $F_i = -E\alpha\theta_{,i}/(1-2\nu)$ en plus des vraies forces de volume, (2) que les vraies forces de surface soient augmentées de forces normales $T_{(n)i} = E\alpha\theta\, n_i /(1-2\nu)$ et (3) que les contraintes normales internes soient augmentées de la pression hydrostatique $P_i = -E\alpha\theta/(1-2\nu)$. Il est possible de vérifier que, dans le

cas de déformations planes, les trois forces hypothétiques (F_i, P_i et $T_{(n)i}$) préservent la même forme que dans les cas en 3D décrit ci-dessus. Par contre, dans le cas de contraintes planes, il faut remplacer le dénominateur (1-2ν) par (1-ν) dans les trois expressions des forces additionnelles.

II.6 Cas des déformations planes en 2D

Jusqu'à présent, nous avons traité le cas général en trois dimensions (3D). Néanmoins, en pratique, on va traiter les problèmes en 3D comme s'ils se déroulaient en deux dimensions (2D).

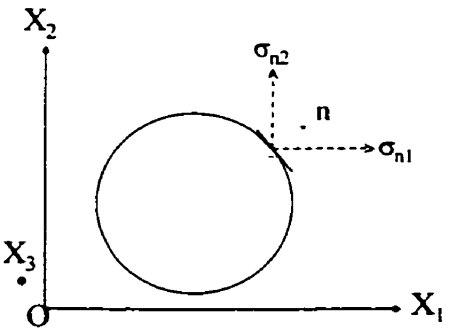

Figure 2.2 : *État de déformations planes. Représentation des contraintes.*

Il est bien connu que les problèmes en 2D s'insèrent dans deux catégories, à savoir la classe des déformations planes et la classe des contraintes planes. Nous allons, dans ce paragraphe, développer le formalisme dans le cas des déformations planes.

Ce cas examine les déformations d'un corps en forme de cylindre long. Le corps est soumis à des forces externes perpendiculaires à son axe de révolution et uniformément distribuées selon la direction longitudinale. En parallèle à ces forces mécaniques, un champ de température agit également avec une distribution uniforme selon les génératrices. Dans ces conditions, les déplacements se font dans un plan normal à l'axe du cylindre.

Afin de fixer les idées, prenons un solide en déformation élastique. Considérons l'axe OX_3 par exemple (Figure 2.2). Si tous les plans initialement normaux à OX_3 restent normaux à celui-ci après déformation, et si toutes les génératrices initialement parallèles à OX_3 restent également parallèles à cet axe, alors on peut dire qu'on se trouve dans un état de déformations planes. Analytiquement, cela s'exprime par :

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1(x_1, x_2), \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2(x_1, x_2), \qquad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_3(x_3).$$

Si $u_3 = 0$, le corps est dans un état de déformations planes dans le plan (OX_1,OX_2). On déduit les relations contraintes-déformations en 2D à partir des relations générales en 3D en considérant que $e_{13} = e_{23} = e_{33} = 0$.

Il s'ensuit que :

$$\begin{bmatrix} \sigma 11 \\ \sigma 22 \\ \sigma 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c1 & c2 & 0 \\ c2 & c1 & 0 \\ 0 & 0 & c3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e11 \\ e22 \\ e12 \end{bmatrix} - \theta * \begin{bmatrix} d \\ d \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [2.21]$$

où

$$\begin{cases} c1 = \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c2 = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c3 = \dfrac{E}{(1+\nu)} \\ d = \dfrac{\alpha E}{(1-2\nu)} \end{cases} \qquad [2.22a,b,c,d]$$

La contrainte principale selon l'axe OX_3 s'écrit, avec les notations précédentes :

$$\sigma_{33} = c2(e_{11} + e_{22}) - d\theta \qquad [2.23]$$

Rappelons que ces formules s'appliquent à des corps homogènes, isotropes, élastiques en déformations planes dans le plan (OX_1,OX_2). Ces formules vont être appliquées dans le modèle en éléments finis que nous développons dans ce mémoire.

Mais avant de se pencher sur le problème thermoélastique, nous allons porter notre attention sur quelques modèles de distribution de température dans les tissus mous ou biologiques. Comme nous l'avons signalé auparavant, nous allons travailler dans l'hypothèse de régime stationnaire. Dans ce cadre, on peut dissocier la résolution de l'équation de la chaleur des déformations mécaniques dans le corps étudié (voir section 2.3). Dans le prochain chapitre, nous abordons la modélisation de l'équation de la chaleur dans les tissus biologiques.

CHAPITRE III - MODÉLISATION THERMIQUE DES TISSUS BIOLOGIQUES

Pour des applications médicales, la modélisation thermique des tissus biologiques a été fortement motivée par la cryogénie, l'hypothermie, l'analyse des brûlures ainsi que la mesure des propriétés thermiques des tissus et du débit sanguin. Mais par dessus tout, beaucoup de travaux ont été consacrés à la modélisation de la réponse thermique du corps quant à la détection et au traitement du cancer par l'hyperthermie. Le mode d'application de la chaleur au tissu dépend du type de tumeur, de sa localisation et de sa taille. Dans le présent chapitre, nous allons décrire les modèles thermiques actuels, qui font encore l'objet de recherches poussées, avant de présenter quelques cas de simulation du modèle le plus utilisé (Pennes).

Lors des séances de traitement par hyperthermie, on doit pouvoir prédire ou estimer la distribution de température avec une bonne précision, d'où la nécessité de disposer d'un modèle complet. Le problème crucial dans la modélisation se rapporte au rôle que joue la circulation sanguine dans l'équation de la chaleur. Précisément, nous allons présenter les principaux modèles qui mettent l'accent sur la perfusion sanguine et les phénomènes d'échanges thermiques qui lui sont associés.

III.1 Le modèle de Pennes

À la fin des années quarante, certains chercheurs se sont penchés sur l'élaboration d'un modèle de distribution de la chaleur dans les tissus humains. Pennes (1948) fut le premier à proposer un modèle convenable en 1948. Aujourd'hui, ce modèle est encore largement utilisé, en dépit de ses limitations. À l'origine, le modèle de Pennes était fait pour prédire le champ de température dans l'avant-bras. L'équation de la chaleur est exprimée, avec les notations habituelles (voir liste des symboles) ainsi :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (k.\nabla T) + (\rho c)_b \omega_b (T_a - T) + q_m \qquad [3.1]$$

Cette équation est très semblable à l'équation d'un solide homogène telle que dans [2.15]. Néanmoins, pour des tissus biologiques, on prend en compte la perfusion sanguine, s'il y a lieu. Ainsi, le terme de droite de cette équation comporte une expression (la deuxième) qui représente la contribution du débit sanguin dans l'équilibre global de l'énergie.

Pennes considère que l'échange d'énergie entre les vaisseaux sanguins et le tissu environnant se produit essentiellement à travers les parois des capillaires (vaisseaux de diamètre entre 5 et 15 µm) où la vitesse du sang est très faible. Il avance que la contribution thermique du sang peut être modélisée comme si le fluide entrait dans un

bassin imaginaire (le lit capillaire) à la température des vaisseaux majeurs, T_a, et s'équilibrait immédiatement avec le tissu environnant. Ensuite, le sang sort du bassin et rejoint la circulation veineuse à la température du tissu, soit T.

En fait, Pennes suppose que l'échange total d'énergie thermique par la circulation sanguine est similaire à une source ou à un puits de chaleur dont l'amplitude est proportionnelle au débit volumétrique du sang et à la différence entre la température locale du tissu et celle des artères majeures du corps. Dans les paragraphes qui suivent, nous exposons des modèles dont le but était de mieux rendre compte de la contribution de la perfusion dans l'équilibre thermique global. Nous verrons comment le modèle de Pennes ne convient pas à toutes les situations.

III.2 Les premiers modèles de perfusion sanguine

Comme nous l'avons indiqué, certains chercheurs ont tenté de mieux cerner la contribution du sang dans l'équilibre thermique des tissus. Parmi eux, on trouve Mitchell et Myers (1968). Ils ont étudié l'effet d'un échange à contre-courant entre une artère et une veine. Dans leur modèle, ils ont incorporé des équations qui décrivent les échanges de chaleur entre les vaisseaux ainsi qu'entre chaque vaisseau et le tissu environnant.

Cependant, leur modèle ne tenait pas compte de la conduction dans les tissus eux-mêmes.

Toutefois, le traitement séparé des tissus et des vaisseaux a servi de point de départ aux plus récents développements dans l'étude des transferts thermiques dans les tissus en perfusion. Keller et Seiler (1971) ont repris le modèle de Mitchell et Myers et y ont ajouté une équation de conservation de l'énergie pour le tissu autour des artères et des veines, ce qui a couplé ces dernières sur le plan thermique. Comme ils adhéraient au concept de Pennes, les capillaires comptaient pour un puits de chaleur pour le tissu chauffé. Ensuite, il y eut Wissler (1970) pour qui les variations thermiques dans les grands vaisseaux devaient être séparées de celles des tissus. Son modèle consiste en trois équations couplées : la première est similaire à l'équation de Pennes [3.1], décrivant l'équilibre énergétique du tissu perfusé; les deux autres équations modélisent les transferts thermiques dans les grandes artères et veines (macro-circulation). Mais la véritable distinction entre «grands» et «petits» vaisseaux repose plus sur des aspects qualitatifs des dimensions que sur une véritable analyse thermique.

Durant la dernière décennie, d'autres experts en la matière ont remis en cause la validité physique et physiologique de l'équation de la chaleur de Pennes, en particulier la contribution du flux sanguin. La discussion a été amorcée par Wulff (1974) qui a avancé que l'effet de convection devait provenir du flux net du sang dans le tissus et que, par conséquent, la contribution du sang devrait être modélisée par un terme

directionnel de la forme $(\rho c)_b u.\nabla T$ (où u est la vitesse du sang) plutôt que par le terme scalaire de perfusion suggéré par Pennes.

III.3 Longueur caractéristique d'équilibre thermique

Un pas considérable dans la clarification des mécanismes des transferts thermiques dans les tissus vivants a été accompli par Chen et Holmes (1980). Ils ont évalué une longueur caractéristique d'équilibre thermique (l_e) qui est définie comme la longueur du vaisseau sanguin pour laquelle la différence entre la température du sang et celle du tissu adjacent est réduite à $1/e$ (e = 2.7183) de sa valeur initiale. En négligeant les variations temporelles de la température sanguine, T_b, devant ses variations spatiales le long d'une dimension caractéristique du vaisseau, T_b obéit à l'équation suivante:

$$A(\rho c)_b \bar{V} \frac{dT_b}{ds} = U.P(T - T_b) \qquad [3.2]$$

où $\bar{V}$ est la vitesse moyenne locale du sang, U est le coefficient local de transfert conducto-convectif et P est la circonférence du vaisseau sanguin.

On peut réécrire l'équation [3.2] de façon plus concise ainsi:

$$l_e \frac{dT_b}{ds} = (T - T_b) \qquad [3.3]$$

avec

$$l_e = \frac{A\,(\rho\, c)_b\, \bar{V}}{U\,.P} \qquad [3.4]$$

qui représente donc ***la longueur caractéristique d'équilibre thermique.***

Comme on peut le voir dans [3.4], l_e dépend des dimensions du vaisseau, de la vitesse moyenne locale du sang et du coefficient de transfert thermique. Chen et Holmes ont utilisé des estimés de U et calculé l_e pour une palette de vaisseaux aussi larges que l'aorte et aussi petits que des capillaires. La déduction la plus significative de ce modèle semi-quantitatif est que l'équilibre thermique des vaisseaux sanguins apparaîtrait non pas dans les capillaires mais dans les vaisseaux de diamètre entre 0.2 et 0.5 mm. Cette conclusion vient contredire l'hypothèse sous-jacente du modèle de Pennes.

Ensuite, Chato (1980) a effectué une analyse exhaustive de la relation entre tissus et vaisseaux pour diverses configurations géométriques et a conclu que l'amplitude des échanges thermiques entre vaisseaux et tissus dépendait surtout de la taille des vaisseaux sanguins : les grands vaisseaux échangent peu d'énergie avec le tissu environnant et leur température n'est pas affectée par le champ de température dans le tissu, tandis que les

petits vaisseaux (artérioles, veinules et capillaires) sont quasiment en équilibre thermique complet avec le tissu. Ses résultats concernant les vaisseaux de taille intermédiaire n'étaient cependant pas très concluants. Chen et Holmes soulignent que ces vaisseaux intermédiaires sont au centre de la critique du modèle de Pennes. Par ailleurs, Weinbaum et al. (1984) ont évalué l_c pour plusieurs configurations spécifiques. Ces modèles incluent un simple vaisseau au milieu du tissu, une paire à contre-courant et un vaisseau périphérique. Leurs analyses de la taille du vaisseau, à laquelle l'équilibre thermique est atteint, ont confirmé les résultats de Chen et Holmes. Maintenant, voyons plus en détail ce modèle.

III.4 Le modèle de Chen et Holmes (CH)

Dans le modèle CH, les vaisseaux sanguins sont groupés en deux catégories : les grands vaisseaux, chacun traité séparément, et les petits vaisseaux qui, de par leur taille réduite et leur grand nombre, sont traités comme s'ils faisaient partie du continuum qui inclut le tissu. Certains de ces petits vaisseaux ont une importance significative dans la mesure où leur température diffère de celle du tissu adjacent. La limite de séparation entre ces deux catégories de vaisseaux correspond à ce segment du réseau vasculaire où la longueur du vaisseau est proche de la longueur caractéristique d'équilibre thermique.

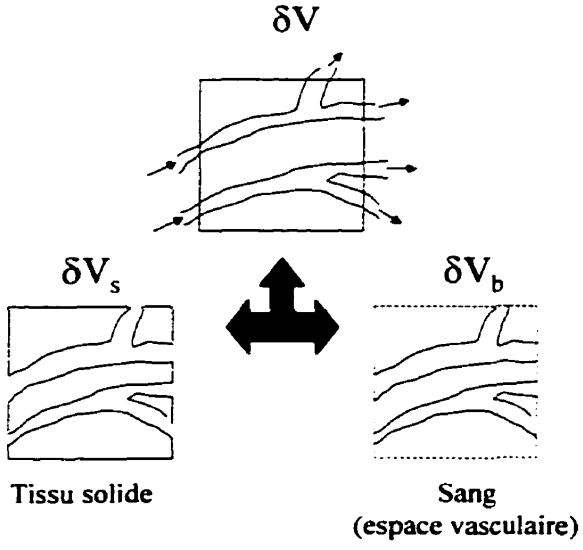

Figure 3.1 : *Représentation schématique du volume de contrôle V du tissu, avec les sous volumes du tissu V_s et du sang V_b.*

Prenons le volume de contrôle de la figure 3.1 qui représente le continuum mentionné ci-dessus. Le transfert thermique entre petits vaisseaux sanguins et tissus a été étudié et séparé en trois modes. Le **premier mode** reflète l'équilibration de la température sanguine, initialement à la température des grands vaisseaux, avec celle du tissu. Par conséquent, le sang ressort du volume de contrôle essentiellement à la température locale moyenne du tissu. Ainsi, la contribution thermique du sang entrant dans le volume de contrôle est similaire à celle décrite par le terme de perfusion de l'équation de Pennes :

$$q_p = (\rho c)_b \omega^* (T_a^* - T) \qquad [3.5]$$

Le paramètre de perfusion ω^* a trait uniquement au flux sanguin dans le volume de contrôle. De même, T_a^* se rapporte à la température des vaisseaux les plus grands dans le volume de contrôle. Cette température se situe typiquement entre les températures des vaisseaux majeurs et celle du tissu.

Le **second mode** de contribution vasculaire dans l'équilibre thermique des tissus concerne les vaisseaux déjà équilibrés. Ce mode se rapporte à la partie du transfert thermique qui a lieu quand la circulation sanguine impose une convection de chaleur contre un gradient de température.

La température du sang est égale à celle du tissu, T, et la contribution prend la forme :

$$q_c = (\rho c)_b \bar{u} . \nabla T \qquad [3.6]$$

Ici, $\bar{u}$ représente le flux volumique net du sang par unité de surface dans le volume de contrôle. Dans les tissus biologiques, toutefois, les artères et les veines

constituent souvent des paires à contre-courant et le flux net est pratiquement nul, ce qui annule finalement le terme décrit par l'expression [3.6].

Le **troisième mode** du modèle CH décrit la contribution thermique des petites fluctuations de température du sang, presque équilibré, le long du gradient de température dans le tissu. Ce mode est proportionnel au gradient de température dans le tissu et dépend de la structure micro-vasculaire locale. Cela fait intervenir un tenseur de «conductivité de perfusion» , $\boldsymbol{k}_p$, qui tient compte de la géométrie vasculaire. La contribution de ce mode s'écrit :

$$q_{pc} = -\nabla.(k_p \nabla T) \qquad [3.7]$$

Cependant, une définition claire des vaisseaux presque équilibrés et leur relative contribution par rapport aux modes 1 et 2 n'ont pas été abordés par Chen et Holmes. Ainsi, le modèle CH est obtenu en remplaçant le terme de perfusion de Pennes par les contributions des trois modes mentionnés plus haut :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (k.\nabla T) + (\rho c)_b \omega^{*} (T_a^{*} - T) - (\rho c)_b \bar{u}.\nabla T + \nabla.(k_p \nabla T) + q_m \qquad [3.8]$$

Comparée à l'équation de Pennes, l'application du modèle CH est plus difficile car elle requiert une certaine connaissance de la géométrie vasculaire locale. De récentes tentatives d'application de ce modèle dans l'évaluation de la distribution de température dans les reins de porc ont connu un certain succès (1991).

III.5 Le modèle de Weinbaum, Jiji et Lemons (WJL)

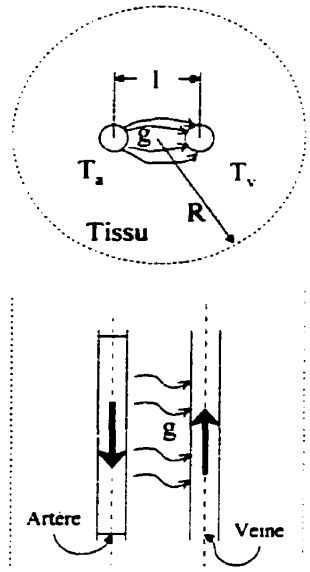

Figure 3.2 : *Configuration du modèle WJL pour les tissus perfusés, avec une paire artère-veine.*

Mathématiquement, l'approche de ce modèle ressemble à celle de Keller et Seiler. Néanmoins, le modèle WJL repose sur une manière différente de considérer les vaisseaux. En effet, les équations de ce modèle s'appliquent aux vaisseaux de petite taille mais qui ont une importance significative dans le bilan thermique. Les vaisseaux majeurs ne sont pas concernés. En développant leur modèle, ils ont d'abord procédé à une évaluation approfondie de l_c pour différentes configurations géométriques vasculaires qui peuvent exister dans les couches périphériques des tissus (ce qui a été à peine abordé par Chen et Holmes). La configuration de base du modèle, illustrée dans la figure 3.2, consiste en un volume de contrôle du tissu comprenant une paire de vaisseaux

sanguins, thermiquement significatifs, connectés par capillaires et anastomoses artério-veineuses. En se fondant sur des observations anatomiques et des mesures à haute résolution spatiale dans les tissus périphériques, Weinbaum et al. ont conclu que la contribution majeure de la perfusion locale aux transferts thermiques est associée à un mécanisme incomplet à contre-courant de transfert de chaleur entre paires d'artères et de veines et non pas aux échanges au niveau des capillaires. En négligeant la conduction axiale, la conservation d'énergie pour une artère ou une veine s'écrit :

$$\pi(\rho c)_b . \frac{d\left(nr_b^2 \bar{V} . T_a\right)}{ds} = -n.q_a - 2\pi(\rho c)_b nr_b g.T_a \qquad [3.9]$$

$$\pi(\rho c)_b . \frac{d\left(nr_b^2 \bar{V} . T_v\right)}{ds} = -n.q_v - 2\pi(\rho c)_b nr_b g.T_v \qquad [3.10]$$

Les termes de gauche dans les équations [3.9] et [3.10] représentent la chaleur échangée par convection le long des artères et veines, respectivement, dans le volume de contrôle. Ce mode de transfert de chaleur est déterminé par la densité du nombre des vaisseaux (n), de leur rayon (r_b) et de la vitesse du sang.

Dans la partie droite des relations [3.9] et [3.10], le premier terme représente la chaleur échangée à travers la paroi du vaisseau, tandis que le second terme représente

l'énergie apportée ou retirée du vaisseau via les capillaires de connexion (anastomoses artério-veineuses). On peut exprimer la loi de conservation de masse :

$$\frac{d\left(nr_b^2\bar{V}\right)}{ds} = -2nr_b g \qquad [3.11]$$

En substituant cette dernière équation dans [3.9] et [3.10], on aboutit aux trois équations couplées suivantes :

$$\begin{aligned}
&\pi(\rho c)_b . r_b^2 \bar{V} . \frac{dT_a}{ds} = -q_a \\
&\pi(\rho c)_b . r_b^2 \bar{V} . \frac{dT_v}{ds} = -q_v \\
&\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k.\nabla T) + ng(\rho c)_b.(T_a - T_v) \\
&\qquad - n\pi(\rho c)_b . r_b^2 \bar{V} . \frac{d(T_a - T_v)}{ds} + q_m
\end{aligned} \qquad [3.12a, b, c]$$

Dans [3.12c], le terme de gauche représente la variation de la chaleur dans le volume de contrôle au cours du temps. Dans la partie droite, les termes traduisent, respectivement, la chaleur de conduction dans le vaisseau, l'énergie échangée via les capillaires et l'échange net entre le tissu et la paire artère-veine.

Dans le modèle WJL, le second terme dans la partie droite de [3.12c] ressemble au terme de perfusion de l'équation de Pennes. Une validation précise de ce modèle

théorique n'est pas encore disponible. Cela est dû en partie à sa complexité et au besoin d'une description détaillée de l'architecture vasculaire associée. Cependant, Weinbaum et al. ont tenté de simplifier leur modèle à trois équations, en supposant que la température moyenne du tissu peut être approximée par une moyenne des températures des artères et veines adjacentes. Cela aboutit, toutefois, à une formulation très proche de celle de Pennes.

III.6 Comparaison des différents modèles

L'analyse thermique à travers la longueur caractéristique d'équilibre a conduit à la conclusion suivante : le processus majeur d'équilibration thermique n'a pas lieu dans les capillaires, comme supposé par Pennes, mais dans les vaisseaux pré ou post capillaires. Le modèle de Pennes ne prend en compte ni le mécanisme de convection directionnel du flux sanguin, ni la possibilité d'échange thermique entre paires de vaisseaux à contre-courant (artères et veines). Même si l'amplitude relative de ces contributions reste à évaluer, il est clair que l'interprétation de Pennes ne peut décrire le processus véritable d'équilibration thermique entre les conduits de sang et le tissu environnant. En dépit de cette faiblesse, le modèle de Pennes a prédit, de façon réaliste, la température dans le rein pour des tissus assez éloignés des grands vaisseaux, i.e. $d > 0.3$ mm (XU, 1991). Cela suggère que dans des tissus loin des grands vaisseaux, les

nouveaux termes qui distinguent les modèles CH et WJL de celui de Pennes contribuent peu au bilan total des transferts thermiques.

À première vue, les équations d'équilibre proposées par Chen et Holmes (CH) et Weinbaum et al. (WJL) montrent que le terme de perfusion dans CH est mathématiquement similaire au terme d'échanges entre artères et veines dans WJL via les capillaires. Néanmoins, le modèle WJL considère que l'échange à contre-courant est le processus majeur d'équilibration thermique, tandis que le modèle CH tient compte seulement des flux d'énergie qui traversent le volume de contrôle, sans se préoccuper de vérifier si les vaisseaux sont arrangés en paires ou non. Remarque pertinente, le flux sanguin local moyen dans le modèle CH diffère de celui de WJL. En fait, il a été démontré que ce flux moyen s'annule avec le flux net de masse à travers le volume de contrôle, même si le mouvement sanguin n'est pas nul. Ce mode de convection représente des vaisseaux déjà en équilibre avec le tissu adjacent dans CH, alors que la convection dans le modèle WJL est directement reliée au processus d'équilibration même.

Finalement, l'évaluation du modèle de Pennes a donné naissance à d'autres modèles qui interprètent mieux le rôle de la perfusion dans l'équation de la chaleur dans les tissus biologiques. La complexité ajoutée par ces modèles fait appel à une connaissance plus approfondie de la géométrie vasculaire dans les tissus et organes en question. Le tableau 1 (Arkin 1994) résume les domaines d'application de ces différents

formalismes. Les auteurs s'accordent à dire que les modèles WJL et Pennes peuvent bien s'appliquer aux régions avec des paires de vaisseaux (artères et veines) de grandes et petites tailles respectivement. En raison de sa simplicité, le modèle de Pennes resterait le plus pratique à employer pour prédire rapidement le régime transitoire de la température tel celui rencontré dans certaines conditions d'hyperthermie. Toutefois, dans ce mémoire, nous n'avons pas évalué les différences pratiques entre ces modèles et surtout leur influence quant au comportement thermoélastique des tissus biologiques.

Tableau 1 : *Modèles de transferts thermiques dans les tissus biologiques perfusés.*

MODÈLE	MÉCANISME VASCULAIRE	COMMENTAIRE	d(mm)	l/l_c	Tissu étudié
Pennes	Diffusion capillaire Perfusion apparentée à un terme source/puits de chaleur.	Décrit l'effet de collection thermique des tissus non adjacents aux vaisseaux .	< 0.3 0.5 – 1.0	< 0.6 >> 1	Cortex du rein de porc. Muscle profond
CH	Effets accumulés de chacun des vaisseaux (perfusion + convection +conduction).	Version de Pennes incluant les effets d'une convection locale.	< 0.3	< 0.25	Cortex du rein de porc.
WJL	Échanges thermiques à contre-courant (artères/veines).	Échanges entre artères et veines via capillaires et anastomoses artério-veineuses.	< 0.3	< 0.3	Tissus musculaires périphériques

III.7 Cas de simulation du modèle de Pennes

Dans ce paragraphe, nous allons simuler, à l'aide de la méthode des éléments finis (MEF), le comportement d'un tissu perfusé. Cette simulation a pour but de prédire la distribution de la température après un dépôt de chaleur déterminé. Dans les séances d'hyperthermie, on peut déposer de la chaleur dans les tissus à traiter en utilisant des modalités diverses. Parmi celles-ci, on retrouve les micro-ondes, les fréquences radio et les ultrasons focalisés. Dans notre cas, nous supposons que le vecteur d'application de la chaleur est une sonde à ultrasons similaire à celle qui a été développée dans un laboratoire californien spécialisé en hyperthermie (Diederich et Hynynen, 1991). Plaçons-nous dans le cas stationnaire. On peut écrire, à nouveau, l'équation de Pennes comme suit :

$$\nabla(k.\nabla T) + (\rho c)_b \omega_b (T_a - T) + \langle q \rangle = 0 \qquad [3.13]$$

où < q > représente l'énergie déposée ou absorbée par le tissu. Dans le cas d'un champ acoustique (ultrasonore), on a :

$$\langle q \rangle = \frac{\delta . I^2}{\rho v} \qquad [3.14]$$

avec δ le coefficient d'absorption acoustique, I la pression acoustique et v la célérité du son dans le milieu.

On peut résoudre l'équation [3.12] en 2 ou 3 dimensions. Nous allons le faire pour un cas 2D et pour une géométrie annulaire (figure 3.3). Cela incite à choisir des coordonnées polaires. Ce cas particulier de géométrie se rencontre dans les traitements endovasculaires, comme pour les grosses artères et veines. Nous allons appliquer deux champs acoustiques, le premier est de symétrie radiale, tandis que le deuxième représente un champ de nature gaussienne centré en un point déterminé avec une certaine largeur.

L'outil de simulation choisi (car à notre disposition) est le PDE Toolbox de MATLAB. Le terme de contribution sanguine a été assimilé à un échange conducto-convectif via un coefficient de transfert thermique. On a également supposé que les vaisseaux ont une densité uniforme dans la section du tissu. Cela permet de considérer que la distribution du coefficient de transfert conducto-convectif est homogène.

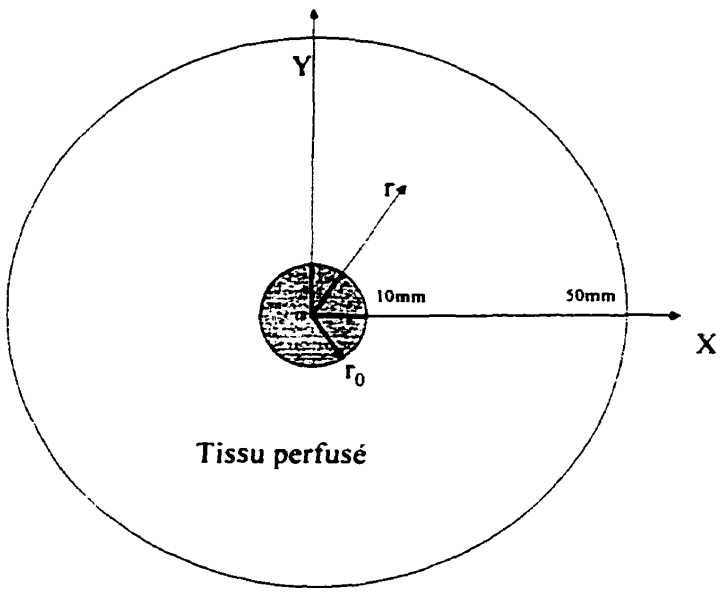

Figure 3.3 : *Géométrie du problème posé. Les propriétés thermiques sont supposées homogènes et isotropes. La perfusion est également considérée homogène et constante au cours du temps.*

III.7.1. Champ à symétrie radiale

L'intensité du champ acoustique, moyennée dans le temps, a la forme donnée par l'expression ci-dessous:

$$I = \frac{I_0}{r} e^{-2\delta(r - r_0)} \qquad [3.15]$$

avec les notations de la figure 3.3 et δ le coefficient d'absorption acoustique.

En appliquant ce champ acoustique, dans la portion de tissu représentée dans la figure 3.3, et en fixant des conditions aux limites de température, on aboutit à un profil de température stationnaire tel que celui illustré dans la figure 3.4.

Pour ce premier cas de simulation, nous avons pris un domaine plus grand en fixant le rayon externe à 10 mm. De plus, nous avons choisi les données physiques suivantes : k = 0.5 W/m.K, ρ_b=1000 kg/m^3, c_b = 4000 J/kg.K, ω_b= 5*10^{-3} m^3/m^3.s et T_a=37°C. Ces données sont proches des valeurs physiologiques observées dans la réalité. Comme conditions aux limites, on a imposé un flux thermique radial négligeable sur la paroi externe et une température de 30 °C à la paroi interne. La perfusion est supposée constante, bien que dans la réalité, des mécanismes physiologiques de régulation de température font augmenter le débit sanguin dans la région chauffée, au bout d'un certain temps.

On remarque le profil à symétrie radiale de la distribution de température, ce qui était prévisible d'après la géométrie et la répartition de la chaleur déposée.

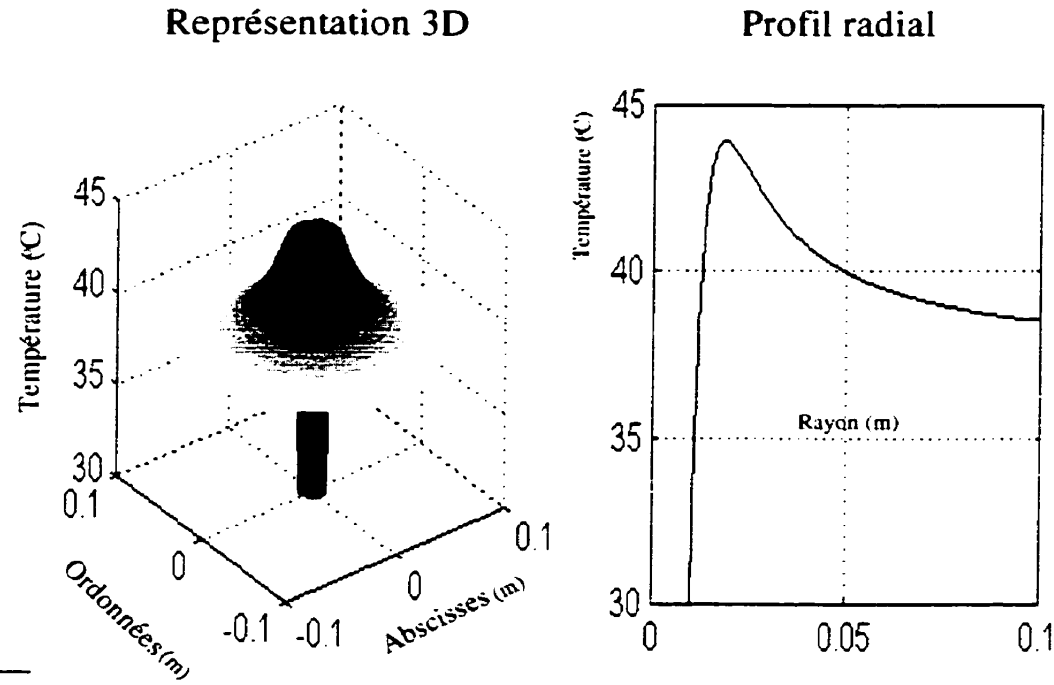

Figure 3. 1 : *Distribution de la température prédite par le modèle de Pennes. La paroi interne a été fixée à 30 °C.*

Pour ce cas, on a imposé une condition de température de 30 °C à la paroi interne. En abaissant davantage la température à la paroi, on peut déplacer légèrement la position du pic de température dans le tissu. Imposer une température de paroi plus basse que la température artérielle peut répondre simultanément à deux contraintes. La première est une condition de sécurité. En effet, la paroi est très fragile et elle serait la première à s'endommager si on ne prenait pas de précaution. La seconde contrainte est celle de chauffer uniquement les zones profondes et non celles proches de la paroi (si le tissu à traiter est localisé en profondeur).

III.7.2. Champ gaussien (focalisation)

Dans ce cas-ci, le champ acoustique est une gaussienne centrée en un point intérieur du tissu. Cela ressemble au cas où on focalise des ultrasons par retards de phase à l'émission, en un point donné (Christensen, 1988). Le dépôt de chaleur se fait essentiellement dans une région déterminée, comme pour les traitements des tissus cancéreux par hyperthermie. L'expérience montre que la région où le dépôt se fait a une forme ovale allongée dans la direction de propagation des ultrasons. Cela est essentiellement dû aux caractéristiques des ultrasons. C'est ce que nous choisissons de simuler.

Ainsi, le dépôt de chaleur prend la forme suivante:

$$I = I_0 e^{-2\delta\left(a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2\right)} \qquad [3.16]$$

Il s'agit d'un profil de pression proche de celui de la focalisation en un point de coordonnées (x_0, y_0). Il y a deux facteurs, a et b, qui tiennent compte de l'étalement de la gaussienne (forme de la zone focale du patron ultrasonore). Le facteur δ est, comme précédemment, le coefficient d'absorption acoustique. Ci-dessous, nous présentons un résultat de simulation en représentation 2D et 3D.

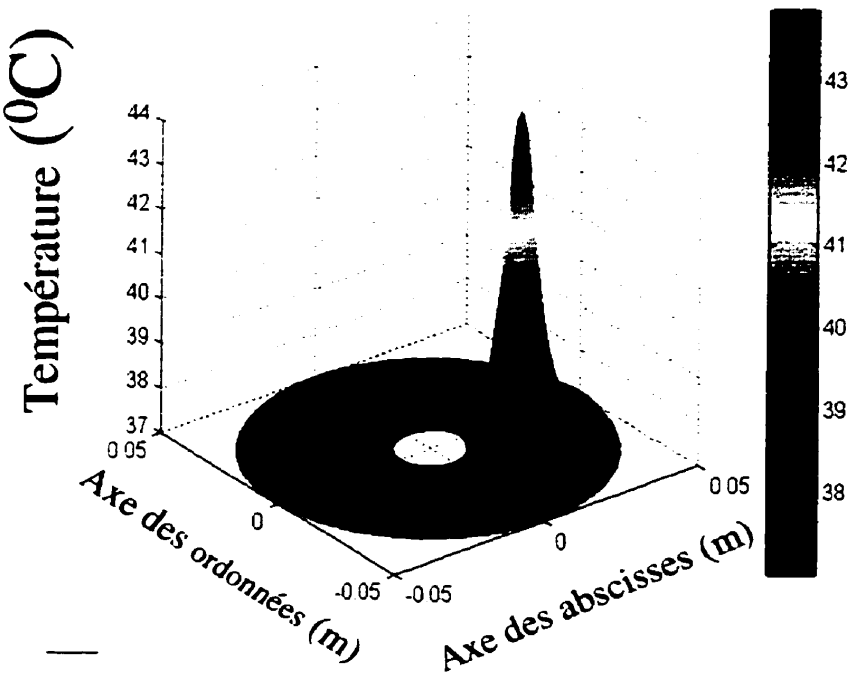

Figure 3. 2 : *Profil de température prédit par le modèle de Pennes dans le cas d'un dépôt de chaleur de type gaussien centré au milieu du tissu.*

La zone focale a été centrée en $M_0(x_0 = 0.3,\ y_0 = 0)$. Les grandeurs physiques restent les mêmes que dans le premier cas de simulation. En ce qui concerne les conditions aux limites, nous avons imposé un flux thermique nul aux parois.

On remarque l'élévation de température qui se produit dans une région préférentielle, soit celle où nous avons placé le point focal du patron ultrasonore. De cette façon, on est capable de chauffer uniquement une certaine région d'intérêt. La

majeure partie du tissu se trouve à la température artérielle (37 °C). La température maximale obtenue est de l'ordre de 45 °C. On pourrait aller plus haut en intensifiant la puissance du champ acoustique. Néanmoins, il ne faut pas perdre de vue que si on dépasse une certaine température et un temps d'exposition donné, on risque de produire des lésions. C'est ce qui arrive dans des séances d'hyperthermie. Il va de soi que lorsqu'on provoque des lésions, les propriété physiques du tissu changent. En général, le sang est chassé de la région insonifiée (Ribault, 1998).

Le profil de température résultant a l'allure d'une gaussienne. Cependant, ce n'est pas exactement une gaussienne. L'étalement de ce profil dépend de la forme du dépôt d'énergie, des caractéristiques thermiques du milieu et du taux de perfusion. Si ce dernier est faible, on a un étalement plus fort, tandis que s'il est fort, la zone d'élévation de température est plus restreinte.

III.8 Une brève discussion.

La modélisation thermique des tissus biologiques reste encore à améliorer. Nous nous sommes efforcé de présenter brièvement des modèles qui sont encore en cours de validation. D'autres modèles verront certainement le jour lorsqu'on aura une

connaissance plus approfondie des données physiques et physiologiques du corps humain.

La résolution des modèles actuels peut s'avérer fastidieuse, même si on dispose d'outils numériques puissants comme les éléments finis. Rares sont les problèmes qui admettent des solutions analytiques, car le plus souvent, on a une solution analytique pour une géométrie simple et fixe. Or, la constitution des tissus biologiques est tout sauf de géométrie simple et rigide.

Toujours est-il que, si aucun des modèles présentés dans ce chapitre ne peut s'appliquer à tous les tissus, leur combinaison, par contre, pourrait être utilisée pour des organes et tissus hétérogènes, avec un certain nombre de compromis.

CHAPITRE IV - MODÉLISATION THERMOÉLASTIQUE ET RÉSULTATS

Les deux chapitres précédents jettent les bases du travail dans ce mémoire. En effet, après avoir exposé les équations fondamentales de la théorie thermoélastique dans le chapitre 2, nous avons présenté quelques modèles de l'équation de la chaleur dans les tissus biologiques dans le chapitre 3. Dans le présent chapitre, nous allons préciser davantage les hypothèses de travail et présenter les principaux résultats des simulations. Ces dernières ont été réalisées à l'aide d'un logiciel d'éléments finis sous l'environnement Matlab. Dans le chapitre 5, nous discutons ces hypothèses et résultats.

IV.1 Les hypothèses de travail

Tout d'abord, nous allons considérer le tissu biologique comme étant linéaire, isotrope, incompressible et thermoélastique. En d'autres termes, cela signifie que les relations qui lient les contraintes aux déformations sont linéaires, que les distributions des grandeurs physiques (module de Young, coefficient de Poisson, coefficient

d'expansion thermique...) sont indépendantes des directions spatiales et que les déformations produites dans le tissu sont petites et quasiment instantanées.

Par ailleurs, les équations mathématiques qui régissent la théorie thermoélastique ([2.11] et [2.12]) sont généralement difficiles à résoudre. Non seulement elles comportent des équations de mécanique et de transferts thermiques qui n'admettent des solutions analytiques que dans des cas particuliers, mais en plus, ces deux équations fondamentales sont couplées. Cependant, comme nous l'avons signalé dans le chapitre 2 (paragraphe 2.3), à l'état stationnaire, ces équations se trouvent automatiquement découplées. Comme cela se fait dans bon nombre de problèmes d'ingénierie, nous allons opérer sous cette hypothèse.

Enfin, en raison des moyens disponibles, nous allons traiter le problème en deux dimensions (2D) au lieu de 3 (3D). En effet, le PDE (Partial Differential Equation) «toolbox» de Matlab, qui constitue notre outil de simulation, ne permet de traiter que des géométries bidimensionnelles. En particulier, nous allons considérer un état de déformations planes et dont les équations apparaissent dans la chapitre 2.

Pour des raisons de commodité, nous réécrivons ces équations ici :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{bmatrix} - \theta * \begin{bmatrix} d \\ d \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [4.1]$$

où

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_2 = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ c_3 = \dfrac{E}{(1+\nu)} \\ d = \dfrac{\alpha E}{(1-2\nu)} \end{cases} \qquad \textbf{[4. 2 a,b,c,d]}$$

En ce qui concerne la distribution de la température, nous avons choisi le modèle de Pennes, car il est encore le plus utilisé et pour des raisons de simplicité. Il est important de signaler que l'hypothèse de déformations planes impose que le gradient de la température soit nul dans la direction OX_3 et ce dans tout le plan (OX_1, OX_2). C'est ce que nous supposons pour l'instant.

IV.2 Les principaux résultats de simulation

Dans nos simulations, nous choisissons une géométrie annulaire. Ce choix est motivé par le désir d'application du modèle au traitement par hyperthermie de la prostate humaine. Nous allons voir l'influence des paramètres thermo-mécaniques dans les

déplacements prédits. Nous verrons également l'effet d'une inhomogénéité sur le champ des déplacements.

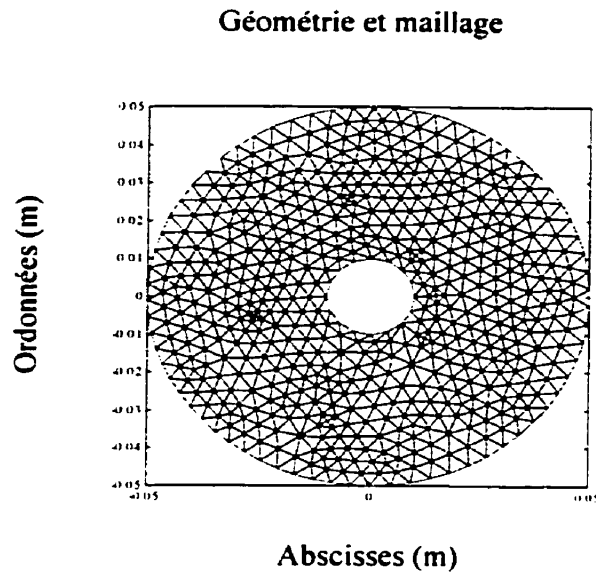

Figure 4.1 : *Description de la géométrie choisie et aperçu du maillage (MEF).*

IV.2.1. Corps homogène avec profil radial linéaire de température

Ce premier cas de simulation vise à valider la partie mécanique du modèle en tant que tel. Le profil de température appliqué est à symétrie radiale et linéaire. Dans la géométrie qui apparaît sur la figure 4.1, on a, avec les notation habituelles, $\theta(r) = 5 - 10^2 r$. Les paramètres physiques du corps sont fixés comme suit : module de Young

E=1kPa, coefficient de Poisson $\nu = 0.45$ et coefficient d'expansion thermique $\alpha = 5.10^{-4}$ /°C.

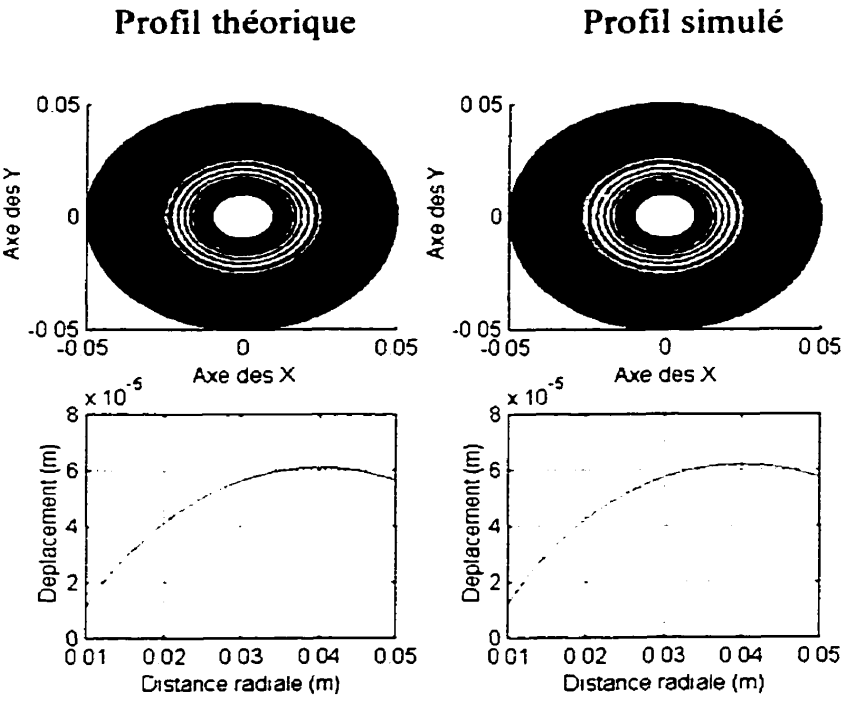

Figure 4.2 : *Profil radial de déplacement pour une température à symétrie radiale. Comparaison des résultats théorique et simulé.*

On compare le résultat obtenu par éléments finis (solution numérique) au résultat analytique du problème (Saada, 1993). Sur la figure 4.2, on montre le profil radial de

déplacement prédit par le modèle. On y voit une concordance satisfaisante. Il y a une différence négligeable avec la solution analytique. Cela peut être dû à la qualité du maillage, à la précision des conditions aux limites et au processus de discrétisation.

Ce cas de figure n'est pas facile à réaliser dans la pratique. Nous l'avons utilisé uniquement dans le but de comparer les résultats de simulation aux résultats prédits par la théorie thermoélastique. Nous constatons fort heureusement la correspondance entre les solutions analytique et numérique.

IV.2.2. Corps homogène soumis à un profil gaussien de température

Ce deuxième cas de simulation traite de la situation où on chauffe le tissu selon le patron qui apparaît dans le chapitre précédent (Chapitre 3.7.2). En effet, le profil de température de la figure 3.5 correspond au cas de focalisation des ultrasons autour d'une région donnée. Ce profil génère des forces de volume, donc des contraintes et des déformations dans les tissus. Les résultats qu'on présente sont relatifs à un corps homogène dont les grandeurs thermoélastiques sont celles de la section précédente ($E = 1$kPa, $\nu = 0.45$ et $\alpha = 5.10^{-4}$ /°C). Du point de vue mécanique, nous allons varier les conditions aux limites et constater l'effet sur les déplacements produits.

IV.2.2.1 Parois fixes

Dans ce cas-ci, nous fixons les parois interne et externe. Par conséquent, les déplacements doivent être nuls aux frontières du domaine. Nous représentons les déformations radiale et latérale (angulaire), car les coordonnées polaires sont les mieux adaptées à ce type de géométrie. Il est intéressant de regarder l'amplitude des déplacements produits par un tel profil de température (figure 4.3). Il sont de l'ordre des quelques micromètres. Il est possible de détecter ces faibles déplacements à l'aide de signaux RF des ultrasons. En utilisant des hautes fréquences (10 à 20 MHz), on arrive à détecter des déplacements de l'ordre du dixième de micron. Des techniques de corrélation le permettent. Mais si la résolution spectrale est insuffisante, il faut procéder avec des modèles auto-régressifs pour une estimation spectrale à haute résolution.

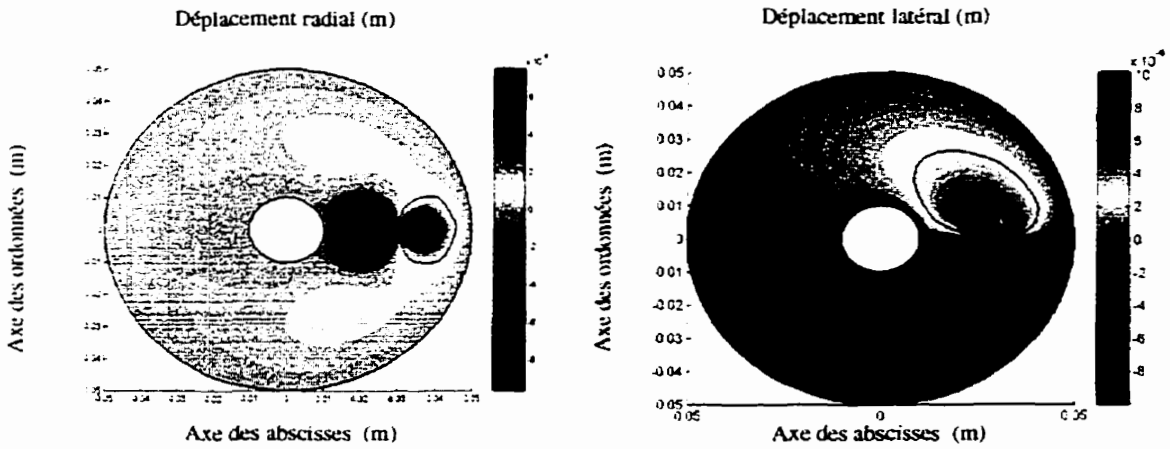

Figure 4.3 : *Champs de déplacement radial et latéral (angulaire) pour parois fixes.*

Sur la figure 4.4, on peut voir la déformation radiale produite dans ce cas de simulation. Tout d'abord, on peut remarquer la présence de zones de compression (déformation négative) en plus des zones de traction (déformation positive). Le maximum de traction se trouve au point de température maximale, i.e. le point de focalisation. En pourcentage, on a une déformation de 0.25 %, ce qui est faible par rapport aux compressions appliquées pour l'élastographie, même si certains auteurs préconisent une déformation de 0.5 % (Kallel, 1998). En outre, le profil des déformations radiales donne une idée de la distribution de la température. Cela était prévisible, car rappelons-nous que le produit $\alpha\theta$ est homogène à une déformation. Cependant, on ne peut se limiter juste à cela, il faut également prendre en compte la géométrie du problème, les conditions aux limites et l'inhomogénéité des caractéristiques thermoélastiques du tissu, comme nous le verrons plus loin.

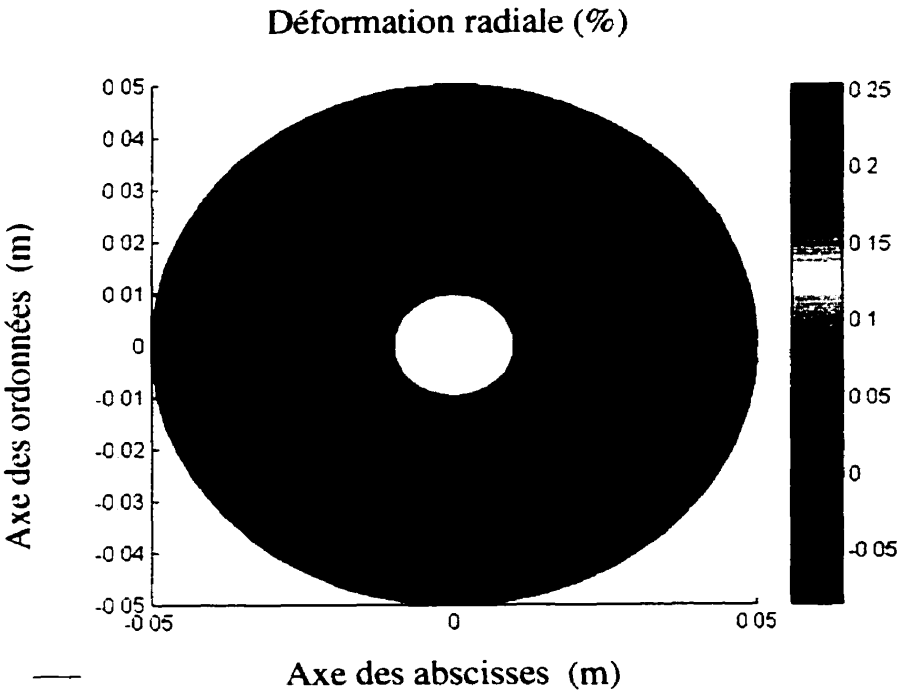

Figure 4. 4 : *Champ de déformation radiale pour un corps homogène à parois fixes.*

Nous pourrions avoir des déformations de plus grande amplitude en élevant le pic de température. Cependant, pour des tissus biologiques, on ne peut dépasser une certaine température et un certain temps d'exposition sans risquer de détruire les tissus (Ribault, 1998), comme nous l'avons indiqué sur la figure 1.5. Nous discuterons dans le dernier chapitre des facteurs clés pour obtenir des déformations consistantes. Mais d'ores et déjà, on peut intuitivement penser que le gradient de température a un rôle

primordial, ce qui amènerait à se pencher davantage sur l'équation de la chaleur. Cela est en dehors des objectifs de ce mémoire.

IV.2.2.2 Paroi interne sous pression

Le fait de fixer les parois en déplacement n'est pas une condition naturelle. Il s'agit d'une condition de Dirichlet. Une condition naturelle, ou condition de Neumann, serait d'imposer une force aux frontières. C'est ce que nous allons étudier dans le cas présent. En particulier, la paroi interne est soumise à une pression de 2 Pa (Neumann). En ce qui concerne la paroi externe, on suppose connu le déplacement radial (0.5 microns).

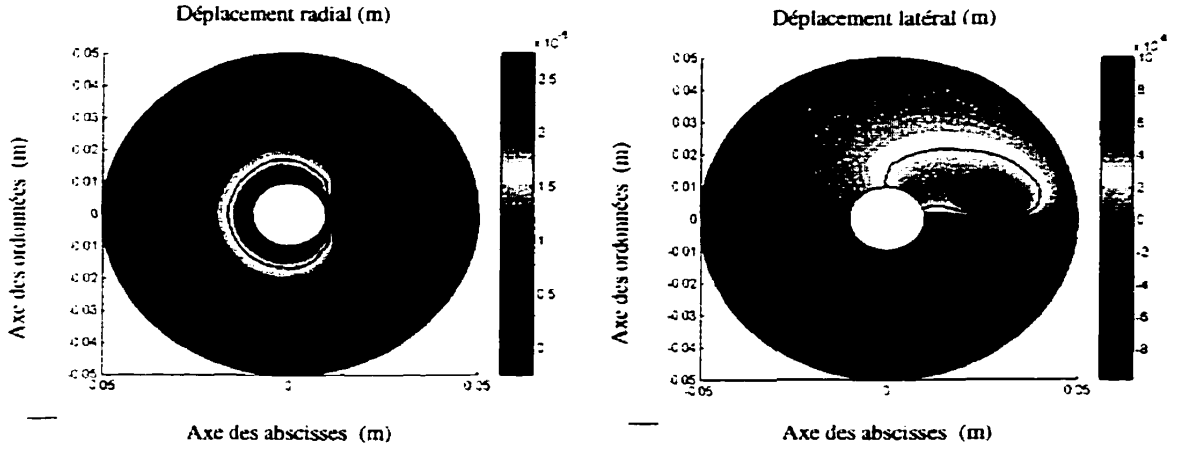

Figure 4.5 : *Champs de déplacement radial et latéral pour paroi interne sous pression et paroi externe à déplacement connu.*

Sur la figure 4.6, on peut voir l'allure du champ de déformation radiale. De nouveau, on a à la fois de la compression et de la traction. La compression se trouve à la paroi, ce qui est naturel étant donné qu'on a appliqué une pression de 2 Pa. Par contre, autour de la région de chauffage, on a une traction qui n'est autre que l'effet de la dilatation thermique. Il est intéressant de comparer ces déformations respectives. La compression de 2 Pa provoque une déformation de l'ordre du 0.2 %, ce qui est approximativement la traction au niveau du pic de température. Ainsi, on peut dire que le profil de température appliqué provoque une pression (négative) équivalente à 2 Pa au point de focalisation, avec les paramètres physiques choisis (E, ν, α). On retrouve cette notion que la température induit des forces de volume qui sont analogues à une pression.

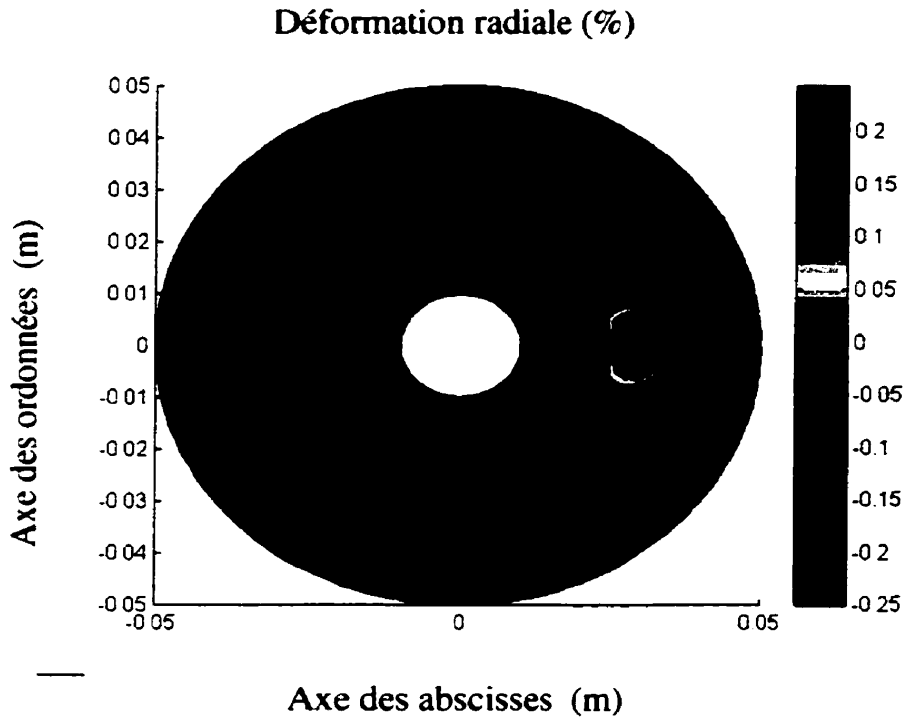

Figure 4.6 : *Champ de déformation radiale pour paroi interne sous pression et paroi externe à déplacement connu.*

En annexe, nous avons représenté le profil radial des déformations en 3D. Cela aide à mieux visualiser cette distribution. Il faut signaler qu'en élastographie endovasculaire classique, on a un problème de décroissance des déformations dû à la géométrie annulaire. On constate cela encore dans ce cas de simulation, du moins dans la partie où on n'applique pas d'élévation de température. Toutefois, là où on applique une élévation de température, on n'a pas seulement une décroissance de la déformation, mais aussi un changement de son signe!

IV.2.3. Cas d'une inclusion circulaire rigide

Dans cette section, nous allons porter notre attention sur le cas d'une inclusion circulaire plus rigide (de module de Young plus grand) que le milieu environnant. Le module de Young est quelquefois supérieur à celui du matériau autour. Par contre, on suppose que le coefficient d'expansion thermique, ainsi que le coefficient de Poisson sont les mêmes pour l'arrière plan que pour l'inclusion. Par ailleurs, on fait l'hypothèse que le profil de température reste le même.

Donc, en partant de ces hypothèses, nous avons simulé le comportement thermoélastique d'un tissu avec une inclusion. Nous avons placé cette inclusion à différents endroits, puis noté la distribution des déplacements et déformations qui résultent. Une premier cas concerne une inclusion à mi-chemin entre les parois interne et externe. On présentera aussi deux autres cas où l'inclusion est proche des parois interne et externe respectivement.

IV.2.3.1 Inclusion «centrée».

Ce qu'on entend par inclusion centrée c'est que cette inclusion se trouve à mi-chemin des deux parois interne et externe. Avec les dimensions géométriques choisies tout au long de ce mémoire, l'inclusion est constituée d'un disque de centre $C(x_0 = 0.3, y_0 = 0)$ et de rayon 5 mm. En fait, cette inclusion a un centre qui coïncide avec le pic du profil de température; elle est trois fois plus rigide que le milieu environnant. Pour les conditions aux limites, on a imposé une déplacement nul. Sur la figure 4.7, on peut voir les champs de déplacement et de déformation radiaux. On constate que l'inclusion influence, en grande partie, l'allure du mouvement.

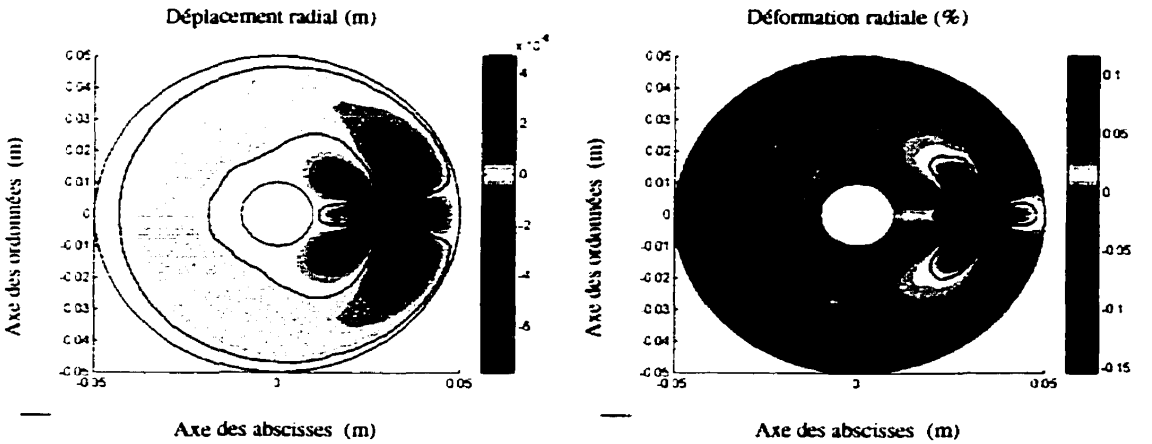

Figure 4.7 : *Champs de déplacement et déformation radiaux pour inclusion centrée trois (3) fois plus rigide que le milieu autour. Les parois sont fixées en déplacement.*

Il est intéressant de signaler les zones de plus forte traction (dilatation) à côté de zones de plus forte compression dans l'inclusion même. Ces zones sont proches des frontières de l'inclusion. Afin de mieux visualiser le phénomène, on peut afficher l'allure des déplacements dans l'inclusion et dans le milieu autour (figure 4.8). On peut expliquer ce champ de la façon suivante : dans l'inclusion, les forces de volume dans le sens latéral sont supérieures aux forces dans la direction radiale, car le gradient de température est de telle sorte. Étant donné que le milieu est supposé incompressible, l'inclusion circulaire a tendance à prendre une forme elliptique avec un grand axe dans

le sens latéral. Dans la direction radiale, le rayon de l'inclusion rétrécit, ce qui a tendance à «tirer» le milieu autour, d'où l'effet de compression à l'endroit où on pouvait s'attendre à une dilatation en se référant au cas du milieu homogène.

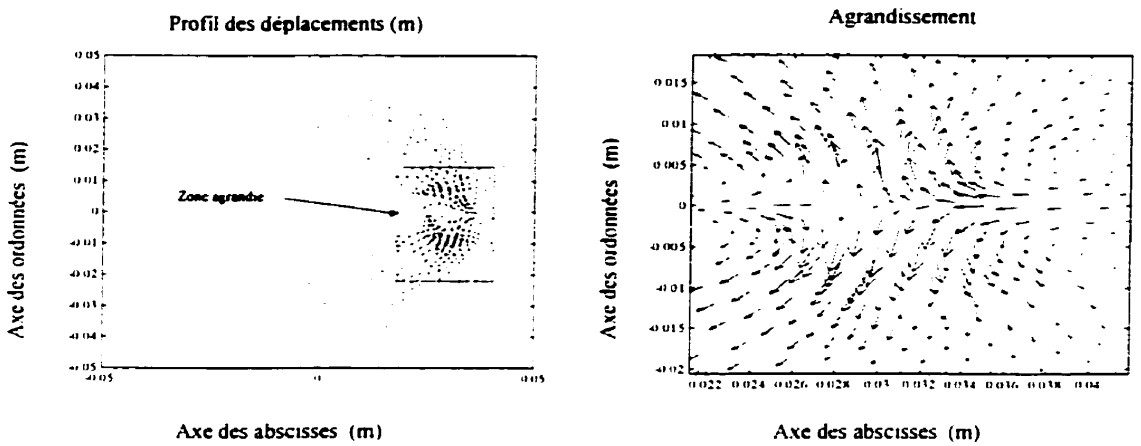

Figure 4.8 : *Allure des déplacements pour inclusion circulaire trois (3) fois plus rigide que le milieu environnant. Noter la prédominance du mouvement dans le sens latéral sur celui dans le sens radial.*

Nous avons simulé différentes rigidités de l'inclusion. Cet effet d'inversion du sens de déplacement dans la direction radiale apparaît pour des inclusions au moins deux fois plus dures que le milieu environnant. Pour une inclusion une fois et demie plus rigide, on constate une allure semblable au cas homogène (sans inclusion).

Il ne faut pas perdre de vue que ces résultats dépendent du profil de température qui a une pente plus forte dans le sens latéral que radial. Si on change ce profil, il n'est pas évident qu'on obtienne les mêmes effets. Il y a aussi le fait que le milieu est supposé incompressible (coefficient de Poisson = 0.45, ce qui est proche de 0.5), ce qui a pour conséquence qu'un déplacement dans une direction principale influence le déplacement dans l'autre d'une manière significative.

Nous allons, maintenant, présenter les résultats de simulation pour des cas où l'inclusion est désaxée par rapport au pic de température. Cela fait qu'une bonne partie de l'inclusion se trouve dans un gradient de température de même signe, donc un sens privilégié des forces de volume.

IV.2.3.2 Inclusion proche de la paroi interne

Cette fois-ci, l'inclusion a les mêmes caractéristiques thermoélastiques que la précédente, sauf que sa position est différente. En effet, elle se trouve proche de la paroi et son centre coïncide avec $C(x_0 = 0.2, y_0 = 0)$. Le profil de température appliqué reste inchangé, i.e. il correspond à celui de la figure 3.5.

Dans ces conditions, nous avons obtenu les résultats qui sont résumés dans les figures ci-dessous.

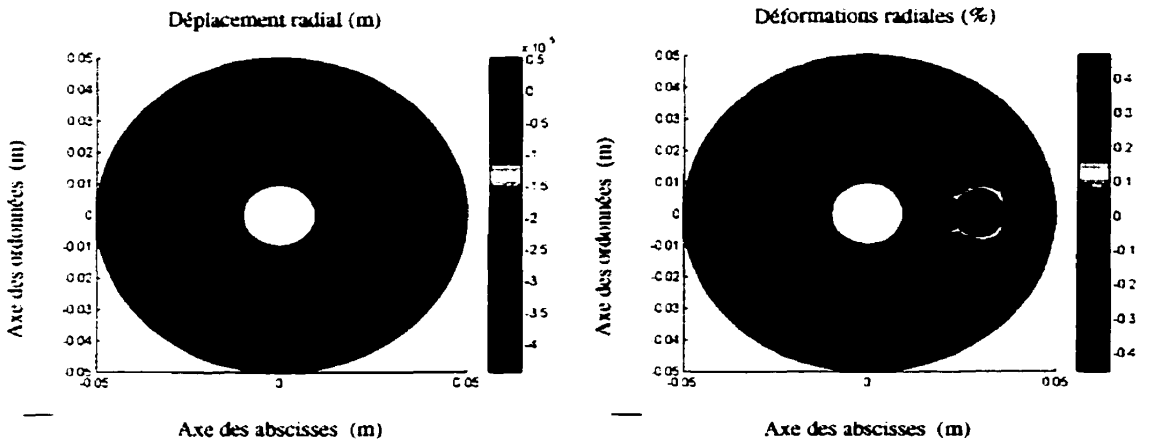

Figure 4.9 : *Champs de déplacement et déformation radiaux pour une inclusion circulaire proche de la paroi interne. Les parois interne et externe sont fixées en déplacement.*

Force est de constater que les déplacements produits, ainsi que les déformations qui les accompagnent, sont d'amplitude plus grande par comparaison avec ceux du cas de l'inclusion au centre. Cela vient du fait que l'inclusion se trouve entièrement dans une zone où le gradient de température est essentiellement vers la paroi interne. Par conséquent, l'inclusion a tendance à entraîner le milieu avoisinant qui est moins rigide. Dans le cas où on applique une profil de température centré sur l'inclusion, les forces de

volume ont tendance à s'équilibrer et à ne pas trop translater le centre de la masse rigide (inclusion). Par contre, si on chauffe à côté de l'inclusion, on devrait observer un effet d'amplification du mouvement.

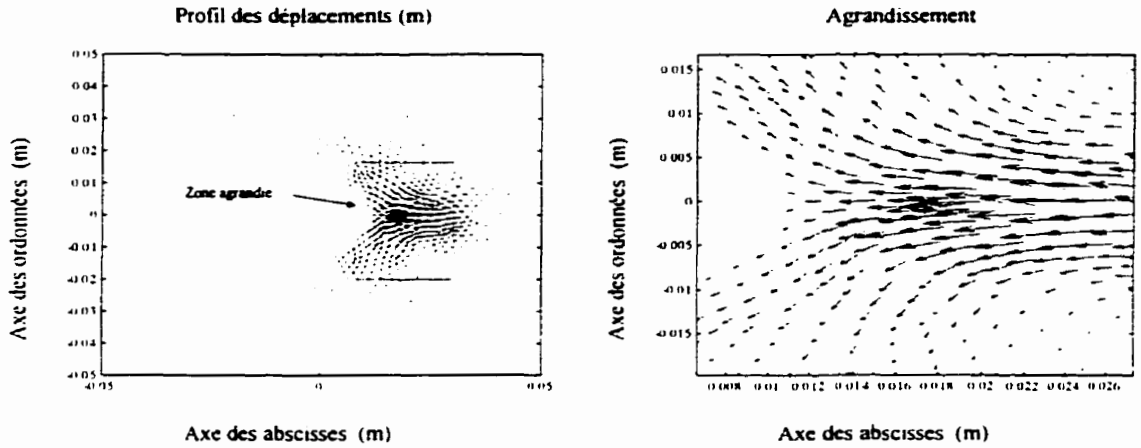

Figure 4.10 : *Allure des déplacements pour inclusion circulaire trois (3) fois plus rigide que le milieu environnant. L'inclusion est proche de la paroi interne; elles semble imposer le mouvement global.*

On peut également voir la situation comme il suit. La zone de l'inclusion se voit soumise à des forces de volume plus grandes et dans une direction prédominante. Donc, virtuellement, on a un corps homogène avec une zone où les forces de volume sont un certain nombre de fois (égal au contraste de rigidité) plus grandes que les forces qu'on aurait en l'absence de l'inclusion.

Sur la figure 4.10, nous avons mis en relief l'allure générale du déplacement dans la zone d'intérêt. La prédominance du mouvement de l'inclusion est évidente.

IV.2.3.3 Inclusion proche de la paroi externe

Par souci de symétrie, nous avons essayé le cas où l'inclusion serait proche de la paroi externe. Il va de soi que nous avons gardé les mêmes conditions de simulations qu'auparavant, avec le même profil de température et les mêmes caractéristiques physiques (E, ν, α, ...).

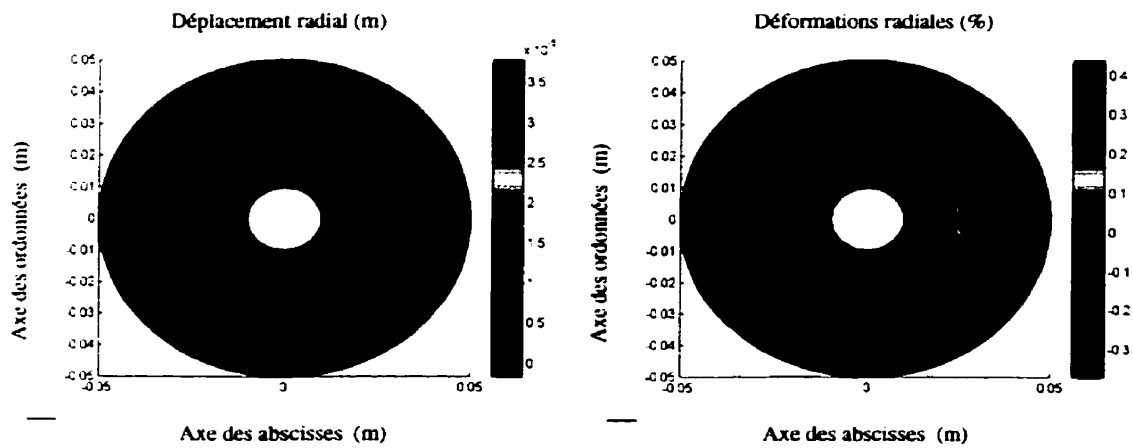

Figure 4.11 : *Champs de déplacement et de déformation radiaux pour une inclusion circulaire proche de la paroi externe. Les parois interne et externe sont fixées en déplacement.*

Les résultats confirment nos attentes, comme cela est illustré dans les figures de cette section. Il est clair que le mouvement de l'inclusion est prédominant. L'effet d'entraînement observé auparavant se reproduit dans cette situation. L'allure générale des déplacements ressemble à celle du cas d'inclusion proche de la paroi interne, à la différence près que le mouvement est essentiellement vers l'extérieur du domaine. L'amplitude des déplacements et des déformations est sensiblement du même ordre. L'effet amplificateur est confirmé.

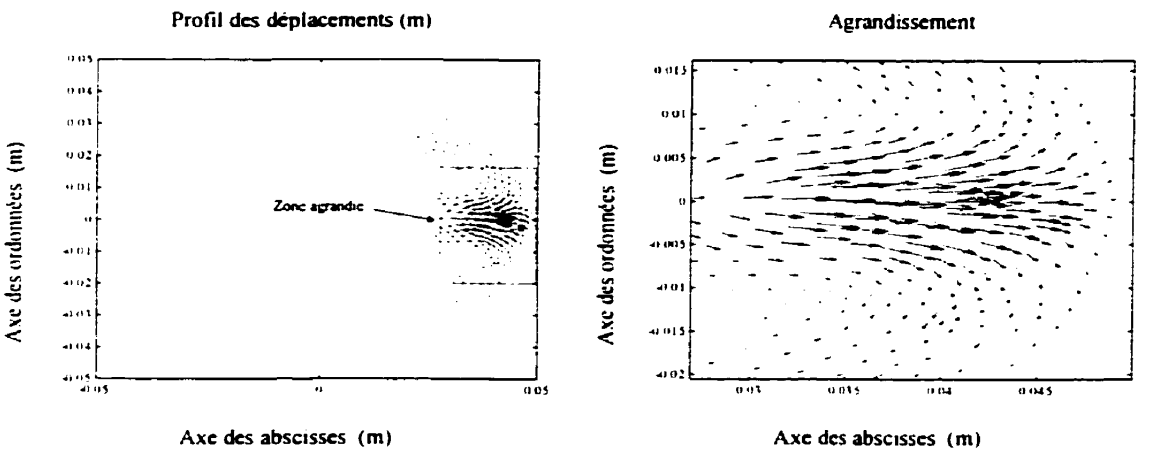

Figure 4.12 : *Allure des déplacements pour inclusion circulaire trois (3) fois plus rigide que le milieu environnant. L'inclusion est proche de la paroi externe; elle semble imposer le mouvement global.*

Dans ces deux derniers cas, la traction radiale maximale se produit encore au point du maximum de température. De plus, cette traction maximale a été amplifiée par la présence d'une inclusion décentrée par rapport au centre de chauffe.

Nous avons aussi simulé des inclusions de positions différentes par rapport à la paroi interne et de différentes tailles. Le contraste (rapport de rigidité de l'inclusion et du milieu environnant) a été fixé à 3. Nous avons reporté la déformation radiale sur l'axe des abscisses. Les résultats de ces simulations sont résumés dans les figures 4.13 à 4.17. Plus précisément, nous avons étudié deux cas d'inclusions circulaires, de rayons 2 mm et 4 mm.

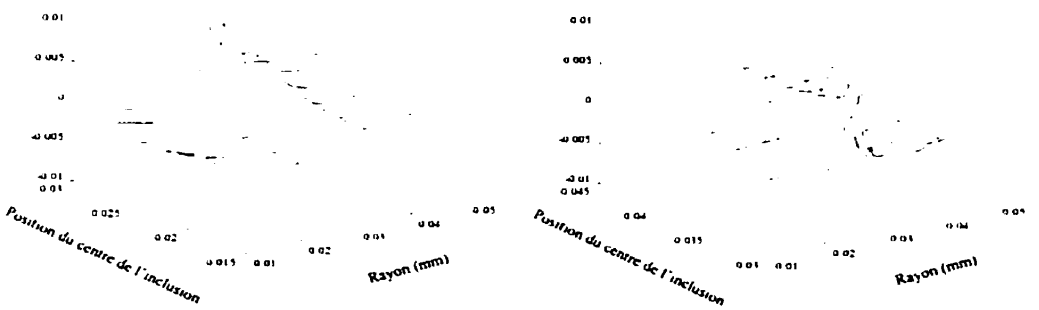

Figure 4.13: *Courbes de déformation radiale selon l'axe des abscisses dans le cas d'une inclusion circulaire de* ***rayon 2 mm****. La position du centre de cette inclusion varie entre 18 mm et 44 mm par rapport à l'origine du repère, tout en restant sur l'axe des abscisses. Les profils de déformation radiale ont été concaténés.*

Dans les deux cas de simulation, nous avons déplacé le centre de l'inclusion sur l'axe des abscisses ($y = 0$). Le profil de température a été maintenu comme auparavant. Sur la figure 4.14, on a isolé quelques courbes significatives. On remarque que, lorsque l'inclusion est assez loin du pic de température, on peut visualiser ses effets dans la déformation produite. On voit bien le plateau de déformation qui coïncide avec l'inclusion en question (figure 4.14, courbes 2 et 4).

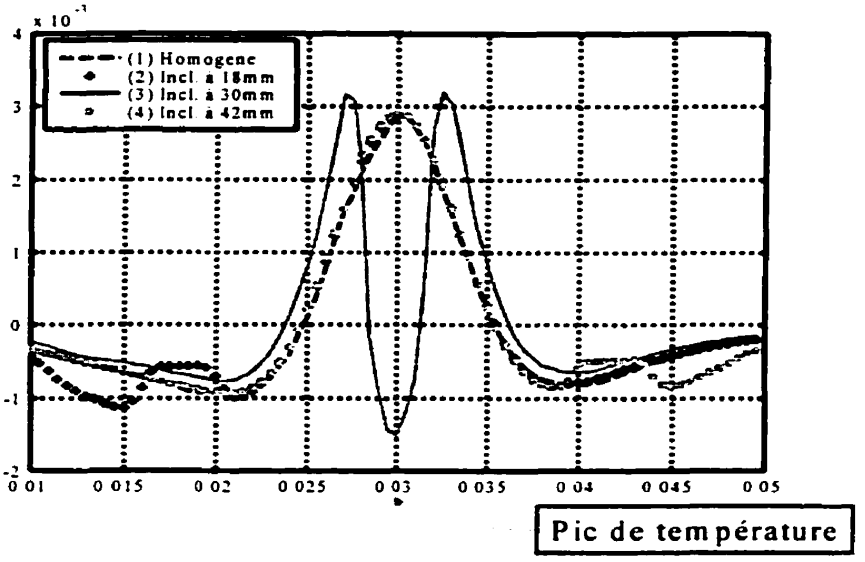

Figure 4.14 : *Comparaison des courbes de déformation radiale sur l'axe des abscisses, pour une* ***inclusion de 2 mm*** *de rayon, située à différentes distances de la paroi interne. Noter l'effet de cette inclusion lorsqu'elle est loin de pic de température. Dans ce cas de configuration, lorsque ce pic coïncide avec le centre de l'inclusion, on peut observer un effet de compression au lieu d'une traction.*

Un autre fait remarquable, qui a déjà été signalé, est la compression apparente qui se produit, dans le sens radial, quand l'inclusion est au centre de la région chauffée.

Nous en avons avancé une explication possible. Néanmoins, d'autres simulations, avec des profils de température autres que celui utilisé ici, doivent être effectuées pour s'en assurer.

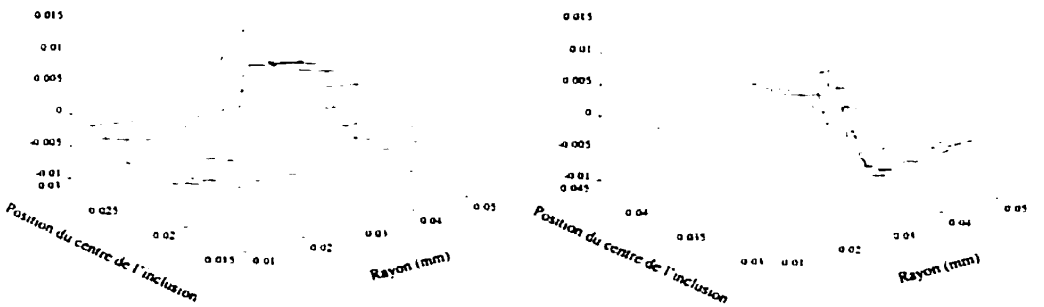

Figure 4.15 : *Courbes de déformation radiale selon l'axe des abscisses dans le cas d'une inclusion circulaire de* ***rayon 4 mm****. La position du centre de cette inclusion varie entre 16 mm et 44 mm par rapport à l'origine du repère, tout en restant sur l'axe des abscisses.*

Dans la figure 4.15, nous avons à nouveau représenté toutes les courbes de déformation dans l'axe des abscisses pour différentes positions de l'inclusion. Nous pouvons émettre les mêmes observations pour le cas d'inclusion de rayon 2 mm. Toutefois, une différence réside dans la distance à respecter par rapport au centre de chauffe pour être capable de distinguer l'inclusion : quand la taille est plus grande, il faut se placer un peu plus loin (figure 4.16). Dans la figure 4.17, nous montrons d'autres courbes remarquables. En l'occurrence, la courbe 3 montre l'effet de l'inclusion

lorsqu'elle est placée à 10 mm de la paroi interne. Non seulement on a une hausse globale des déformations radiales, mais aussi une forte distorsion locale de ce profil de déformation. Cela a lieu dans la région de l'inclusion, ce qui pourrait constituer une indication de la présence d'une inclusion.

Il est clair que nous ne pouvons pas essayer tous les cas de configuration, mais nous nous efforçons de repérer les plus intéressants et ceux qui se rapprochent des cas pathologiques connus de nos jours.

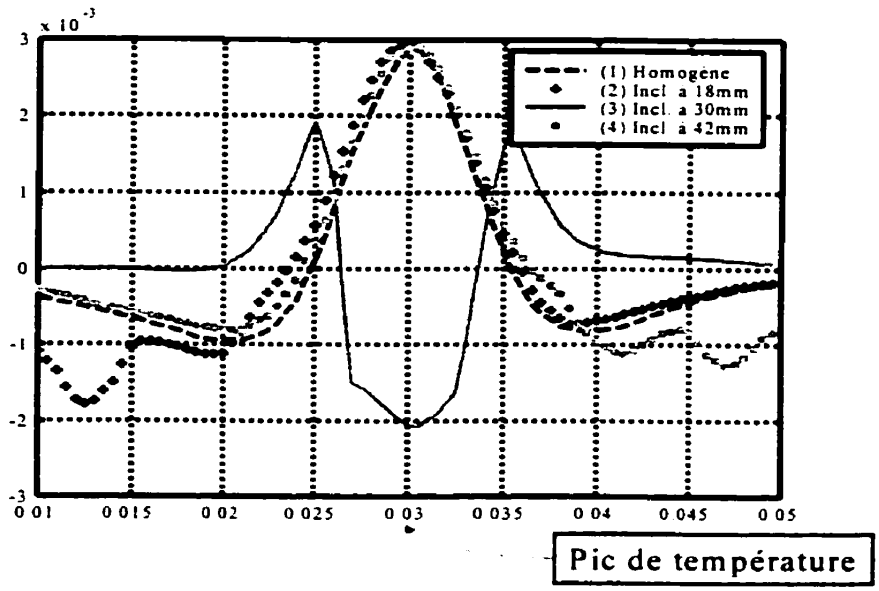

Figure 4.16 : *Comparaison des courbes de déformation radiale sur l'axe des abscisses, pour une* ***inclusion de 4 mm*** *de rayon, située à différentes distances de la paroi interne. Noter l'effet de cette inclusion lorsqu'elle est loin de pic de température. Dans ce cas de configuration, lorsque ce pic coïncide avec le centre de l'inclusion, on peut observer un effet de compression au lieu d'une traction.*

Jusqu'à présent, nous nous sommes penchés sur la résolution du problème direct, en utilisant les équations de l'élasticité en conjonction avec les éléments finis. Nous supposons que la distribution de température est connue. Cela serait possible avec de nouvelles techniques d'estimation de la température utilisant l'imagerie par résonance magnétique (IRM). Quelques auteurs (Ebbini 1994, VanBaren 1995) ont proposé une méthode basée sur les ultrasons. Ils ont établi une relation linéaire entre la température et le déplacement apparent des échos RF acquis par un échographe. La constante de proportionnalité dépendait de la vitesse locale des ultrasons et du coefficient d'expansion thermique du tissu. Bien que leurs travaux aient rencontré un certain succès, les essais qu'ils ont fait *in vitro* (caoutchouc et foie de bœuf) ne s'intéressaient qu'à des régions relativement homogènes. Or, nos simulations démontrent, qu'en cas de présence d'une inclusion, il y a des chances que le tissu manifeste un mouvement apparent de compression au lieu d'une dilatation. Si on ne peut mesurer que le déplacement radial dans la géométrie de notre problème (endorectale), on pourrait avoir l'impression de refroidir localement une région, alors qu'en réalité, elle s'échauffe!

Quoiqu'il en soit, avant d'aller plus loin, nous devons à la fois reconduire d'autres simulations en reconsidérant nos hypothèses et réaliser des expériences *in vitro* afin de raffiner notre modèle. Les tests *in vivo* seront pour plus tard. De plus, nous allons penser le modèle en termes de résolution d'un problème inverse comme en élastographie. Mais néanmoins, la difficulté consistera à délimiter le problème inverse. Dans l'état actuel du projet, nous entrevoyons trois problèmes inverses, associés aux

distributions des paramètres suivants : la température T, le module de Young E et le coefficient d'expansion thermique α.

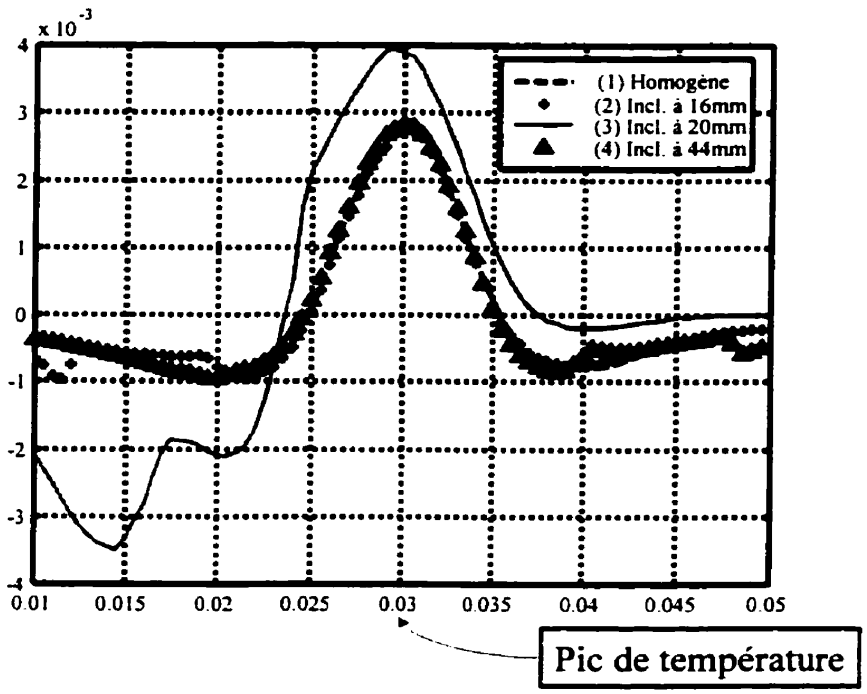

Figure 4.17: *Comparaison des courbes de déformation radiale sur l'axe des abscisses, pour une* ***inclusion de 4 mm*** *de rayon, située à différentes distances de la paroi interne. Noter l'effet de cette inclusion lorsqu'elle est désaxée par rapport au pic de température, sans être trop loin (courbe pleine). On a une élévation globale du niveau de déformation et une distorsion locale, au niveau de l'inclusion.*

CHAPITRE V – DISCUSSION ET CONCLUSION

Ce travail de modélisation des tissus biologiques, soumis à des forces mécaniques et thermiques, nous a amené à tirer parti de la théorie de la thermoélasticité dans son expression la plus simple. En nous plaçant dans le cas stationnaire et en deux dimensions, nous avons pu traiter le problème en deux temps : résoudre l'équation de la chaleur (chapitre 3), puis calculer les déplacements produits (chapitre 4). Nous voulions disposer d'un modèle numérique pour prédire les déplacements et les déformations des tissus suite à une élévation de température et dégager les paramètres clés qui vont permettre l'observation ou non des déplacements produits. Très tôt, nous avons vu que les déformations engendrées allaient dépendre des forces de volume qui naissent suite au changement de température. En d'autres termes, dans le cas homogène, les facteurs clés sont le coefficient d'expansion thermique et le gradient de température. Dans le cas d'un tissu avec une inclusion, le contraste (rapport des modules de Young) joue aussi un rôle important dans le profil des déformations et des déplacements obtenus.

Parmi les buts recherchés dans cette étude figure la faisabilité d'une élastographie dans laquelle les forces sont d'origine thermique plus que mécanique. Cela

permettrait d'accéder à des régions profondes chez les êtres vivants, par le biais du chauffage d'une région donnée, en focalisant des faisceaux ultrasonores. On parlerait de «thermo-élastographie» si cette technique se révélait faisable. Fondamentalement, pour l'élastographie telle que nous la connaissons actuellement, la force appliquée au tissu est externe (appliquée à la frontière). Cela induit ensuite des contraintes de compression en profondeur. Avec un chauffage centré en un point donné du tissu, on va provoquer des forces internes dont les effets se propagent vers la frontière. Les contraintes naturelles induites par la chaleur sont essentiellement des tractions en raison de la dilatation. En combinant les contraintes mécaniques à la frontière avec les contraintes d'origine thermique, on a pu enrichir les profils des contraintes, avec des compressions et des tractions à des endroits qu'on peut contrôler dans les simulations, et prochainement dans l'expérience.

D'après les résultats des simulations, il est clair que les déplacements produits par les contraintes thermiques (avec des profils de température extrêmement sécuritaires) sont des micro-déplacements, de l'ordre des quelques microns. Les déformations résultantes (de l'ordre de 1/1000) sont bien inférieures aux déformations appliquées en élastographie (de l'ordre de 1/100). En théorie, des déplacements de quelques microns sont observables par des techniques d'intercorrélation de signaux RF (radio fréquence), surtout pour des fréquences centrales de quelques dizaines de MHz. Quelquefois, lorsque les déplacements sont très faibles, on fait appel aux techniques d'estimation spectrale de haute résolution, avec des modèles auto-régressifs. Néanmoins,

si on a recours aux ultrasons, il sera difficile d'estimer ces déplacements à cause des variations de la vitesse du son avec la température. En effet, les tables des variations de la vitesse du son avec la température, dans les tissus biologiques, révèlent que les signaux RF d'un échographe ultrasonore subissent des distorsions dues à la température qui sont d'un ordre de grandeur supérieurs à celles produites par les déformations d'origine thermique (VanBaren 1995). Cela nous ramène au modèle de formation d'image en tant que tel. Si on ne procède pas à la correction des images ultrasonores, par l'intermédiaire d'un modèle de distorsion des images RF en fonction de la température, il sera difficile de détecter les déplacements produits par l'élévation de température. Actuellement, on dispose de telles données (vitesse du son en fonction de la température dans différents types de tissus) et la correction des images ultrasonores nous paraît faisable, quoique fastidieuse.

L'approche par les éléments finis est très puissante pour modéliser le comportement des tissus, à condition d'avoir un formalisme théorique solide. Or, la théorie thermoélastique a déjà fait ses preuves, notamment dans la caractérisation des matériaux qui subissent des variations de température et de structure, et dans l'imagerie par ondes thermiques dans les matériaux composites afin de déceler les grains et les dislocations (Rosencwaig 1986, Murphy 1986). Le désir d'étendre l'application de cette théorie à la caractérisation des tissus vivants sera davantage justifié par des expériences *in vitro* puis *in vivo*. Cela figure parmi les prochaines étapes à réaliser. On pourra

confronter l'expérience aux résultats de simulation et adapter le modèle numérique si besoin est.

Revenons un instant aux hypothèses simplificatrices avancées. En ce qui concerne les tissus, l'hypothèse d'élasticité n'est pas rigoureusement vérifiée car les déformations produites par un chauffage ne s'annulent pas instantanément après l'arrêt du dépôt de chaleur. En raison du phénomène de diffusion de la chaleur, les tissus mettent un certain temps à retrouver leur état initial. Par ailleurs, dans le cas d'une inclusion, nous avons supposé que le profil de température était le même en l'absence de l'inclusion. Cela est à reconsidérer : il est fort probable qu'en cas de présence d'une anomalie pathologique, les propriétés physiques des tissus changent, ce qui doit modifier le profil de température dans la région anormale par rapport au tissu sain. On pense aux tumeurs cancéreuses où on assiste à une hypervascularisation des tissus environnants, ce qui va modifier la température, car le transfert conducto-convectif est plus ample, d'où des forces de volume puis des déformations locales différentes. S'il s'agit d'une lésion de nécrose produite par HIFU, les propriétés thermiques elles-mêmes vont probablement changer. On risque d'avoir une autre conductivité thermique et une autre densité, pour ne citer que ces deux grandeurs.

Pour l'instant, notre étude suppose une bonne connaissance du profil de température. De là, on déduit les déplacements résultants. On pourrait penser à la formulation d'un problème inverse, où, partant des déplacements produits, on pourrait

déduire le gradient de température, puis la température par intégration. Cela supposerait la connaissance des propriétés mécaniques et thermiques de la région d'intérêt et des conditions aux limites, pour l'intégration. Toutefois, il faut rester prudent quant à cette possibilité de suivre les variations de température. On a bien vu, dans le cas d'une inclusion (donc non homogène), qu'on pouvait obtenir une contraction à un endroit qui est censé se dilater suite à une élévation de température.

Un autre problème inverse envisageable est celui de reconstruire le module de Young à partir des déformations observées. Cela supposerait la connaissance de la température et du coefficient d'expansion thermique. Admettant la possibilité d'avoir ces données avec une bonne précision, ou pourrait procéder à la caractérisation des tissus à travers des contrastes de rigidité, comme on le fait actuellement avec l'élastographie. Pour les simulations du cas d'inclusion, nous avons délibérément gardé le même coefficient d'expansion thermique pour tout le domaine, inclusion comprise. En toute rigueur, cela ne peut pas toujours se vérifier. Intuitivement, si le module de Young varie, suite à des changements pathologiques, il est fort probable que le coefficient d'expansion thermique varie également. On aurait à résoudre simultanément deux problèmes inverses, celui relié à la rigidité des tissus et celui relatif à la distribution du coefficient d'expansion thermique dans le domaine d'intérêt.

Tout au long de ces travaux, les conditions aux limites sont choisies et déterminées par l'auteur. Comme nous le savons tous, ces conditions influencent

grandement les résultats du problème direct. Avec la résolution du problème inverse, on s'est rendu compte que ces conditions aux limites avaient encore plus d'importance vis-à-vis de la solution obtenue. Dans la pratique, on commet des erreurs sur l'estimation de ces conditions aux frontières, ce qui a pour effet de fausser, dans une certaine mesure, la reconstruction de la distribution du module de Young dans le problème inverse (Chèverefils, 1998). Dans le cas où on appliquerait notre modèle thermoélastique à une géométrie endovasculaire ou endorectale, on pourra avoir une bonne estimation des conditions aux frontières à la paroi interne, mais on aura du mal à avoir celles en profondeur.

Nous avons traité le problème thermoélastique pour une géométrie particulière, celle qui s'adapte le mieux à l'anatomie de la prostate. D'un point de vue technique, cette géométrie est très exigeante car on doit travailler et représenter les résultats en coordonnées cylindriques. Maintenant, nous pensons faire des cas dont la géométrie est plus simple, pour lesquels il est facile de fabriquer un fantôme afin de faire l'expérience *in vitro*. Par exemple, on pourra simuler un fantôme numérique en forme rectangulaire, ce qui s'adapte bien au cas du sein.

En ce qui a trait à la modélisation, le cas de deux dimensions peut se généraliser assez facilement pour traiter les cas en trois dimensions. Techniquement, on ajoutera une force de volume selon la troisième dimension en introduisant le gradient de température dans cette direction. Traiter le cas en trois dimensions pourra nous renseigner sur la

validité de l'hypothèse de l'état de déformations planes. Il nous faudra exploiter un modèle de formation d'images en 3D en vue d'estimer les déplacements en trois dimensions. Pour le moment, nous disposons d'un bon modèle d'estimation du mouvement en 2D (Maurice 1998), mais déjà, nous sommes en train d'étudier de près un modèle de PSF (*point spread function*) en 3D pour généraliser le modèle exposé dans le chapitre 1. Une autre voie d'investigation serait d'élaborer un modèle de PSF où on tiendrait compte de la température. Dans l'expression de la PSF telle qu'on la représente dans notre groupe de recherche et dans d'autres, l'effet de la température se manifeste essentiellement à travers la vitesse de propagation du son dans le milieu. Une des grandes difficultés associées à cela est la complication du modèle de formation d'image. L'expression du signal RF sous forme de convolution de deux termes, l'une traduisant les caractéristiques du transducteur et l'autre l'impédance du tissu, risque de s'effacer pour revenir à une forme intégrale beaucoup moins souple à manipuler. Toutefois, si on considère que la PSF est la même pour une région d'intérêt donnée, ou pourrait recourir à la forme convolutionnelle par fenêtres dans l'image RF formée.

Donc, autant d'ouvertures et de chemins de recherche possibles dans les étapes à venir. Au delà de tous les problèmes reliés à la modalité d'imagerie, il nous fallait un modèle pour prédire les déplacements réels et non simplement apparents. Nous avons la conviction que c'est en proposant une solution à un problème fondamental qu'on se donne des outils pour mieux comprendre les futures observations. Certes, notre modèle numérique reste à vérifier et à étendre, avec d'autres outils à base d'éléments finis, mais,

tôt ou tard, nous le confronterons à l'expérience pour en tirer des conclusions. Nous restons optimistes à propos des possibilités d'application de ce modèle en milieu clinique. L'élastographie est en train de se bâtir une place de choix dans le répertoire des méthodes de diagnostic reconnues et utilisées. Sachant que ce projet propose une extension à cette nouvelle modalité d'imagerie, on peut prévoir des implications médicales du modèle thermoélastique des tissus mous tel que nous le proposons, comme la thermométrie et le traitement par HIFU.

Le présent projet se voulait intégrateur de deux grandes disciplines qui s'appuient sur les techniques d'ultrasonographie, l'élastographie et l'hyperthermie. Dans l'état actuel de nos travaux, cette tentative d'unification se présente relativement bien et nous restons optimistes quant aux ouvertures suggérées par cette modélisation.

RÉFÉRENCES

ANVARI B., RASTEGAR S., and MOTAMEDI M. "Modeling of intraluminal heating of biological tissue: implications for treatment of benignprostatic hyperplasia", IEEE Trans. Biomed. Eng., Vol. 41, no. 9, pp. 854-864, 1994.

ARKIN H., XU L. X. and HOLMES K. R., "Recent Developments in Modeling Heat Transfer in Blood Perfused Tissues," IEEE Trans. Biomed. Eng., vol. 41, No. 2, pp. 97-107, 1994.

BAMBER, J.C. and DICKINSON R. J., "Ultrasonic B-scanning: a computer simulation". Phys. Med. Biol., 25, 463-479, 1980

BENKESER P. J., FRIZZELL L. A., GOSS S. A. AND CAIN C. A., "Analysis of a Multielement Ultrasound Hyperthermia Applicator", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 36, no. 3, pp. 319-325, 1989.

CHAPELON JY, MARGONARI J, THEILLÈRE Y, GORRY F, VERNIER F, BLANC E, Gelet A. "Effects of High-energy Focused Ultrasound on Kidney Tissue in the Rat and the Dog". Europ. Urol, 1992, vol. 22, pp. 147-152.

CHATO J., "Heat Transfer to Blood Vessels," ASME Trans. Of Biomechanical Engineering, vol. 102, pp. 110-118, 1980.

CHEN M. M. and HOLMES K. R., "Microvascular Contribution in Tissue Heat Transfer," Annals of the New York Academy of Sciences, vol. 335, pp. 137-150, 1980.

CHEVREFILS C., "L'effet des conditions aux frontières dans la résolution du problème inverse en élastographie". Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, École Polytechnique Montréal, 1997.

CHRISTENSEN, D.A. , "Ultrasonic bioinstrumentation". John Wiley and Sons, New York, 1988.

CLINE H. E., SCHENCK J. F. and HYNYNEN K., "MR-Guided Focused Ultrasound Surgery", Journal of Computer Assisted Tomography, Vol. 16, no. 6, pp. 956-965, 1992.

DIEDERICH C. J. and HYNYNEN K., "Induction of hyperthermia using an intracavitary ultrasonic applicator", Ultrasonics Symp, pp. 871-874, 1987.

DIEDERICH C. J. and HYNYNEN K., "The feasibility of using electrically focused ultrasound arrays to induce hyperthermia via body cavities," IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 38, no. 3, pp. 207-218, 1991.

EBINNI S. E. and CAIN C. A., "Experimental Evaluation of a Prototype Cylindrical Section Ultrasound Hyperthermia Phased-Array Applicator", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 38, no. 5, pp. 510-520, 1991.

FRY WJ, BARNARD JW, FRY FV, KRUNIN RF, BRENNAN JF. "Ultrasonic Lesions In Mammalian Central Nervous System". Science, Vol 122, pp. 517-518, 1955.

FUNG, Y.C. "Biomechanical properties of living tissues", Ch. 7, Springer Verlag, NY, 1981.

GARRA, BRIAN S., "Ultrasonic Scattering in Biologic Tissue", ch-11, Shung, Kirk. K et Thieme, Gary A (ed), CRC Press, Ann Arbor, 347-391, 1993.

GELET A., CHAPELON J. Y., BOUVIER R., PANGAUD C. and LASNE Y., "Local Control of Prostate Cancer by Transrectal High Intensity Focused Ultrasound Therapy: Preliminary Results", Journal of Urology, Vol. 161, pp. 156-162, 1999.

GOODIER, J. N., "Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws". Trans. ASME, 55, 39-44, 1933.

HYNYNEN K, "Methods of external hyperthermic Heating". Ed. M. Gautmerie, Londres, 1989, pp 81-111.

HYNYNEN K., DENNIE J., ZIMMER J., "Cylindrical ultrasonic transducers for cardiac catheter ablation", IEEE Trans. Biomed. Eng., Vol. 44, no. 2, pp. 144-150, 1997.

IBBINI M. S. and CAIN C. A., "A Field Conjgation Method for Direct Synthesis of Hyperthermia Phased-Array Heating Patterns", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 36, no. 6, pp. 491-500, 1989.

IBBINI M. S., EBINNI E. S. and CAIN C. A., "N*N Square-Element Ultrasound Phased-Array Applicator: Simulated Temperature Distributions Associated with Directly Synthetized Heating Patterns", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 37, no. 6, pp. 491-500, 1989.

INSANA, M.F., "Methods for measuring ultrasonic backscatter and attenuation coefficients for tissues and tissue-like media". Thèse de doctorat, University of Wisconsin, Madison, USA, 1983.

INSANA, M.F., Wagner, R.F., Brown, D.G., et Hall, T.J., "Describing small-scale structure in random media using pulse-echo ultrasound". J. Acoust. Soc. Am., 87, 179-192, 1990.

KALLEL, F. (1991). "Analyse des artefacts de mouvement des texture échographiques". Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, 1991.

KALLEL, F., BERTRAND, M., et MEUNIER, J., "Understanding speckle motion artifacts using an echographic image formation model". Ultrasonic Imaging, abstract, 11, 206-207, 1992.

KELLER K. H. and SEILER L., "An Analysis of Peripheral Heat Transfer in Man," Journal of Applied Physiology, vol. 30, pp. 779-786, 1971.

KREMKAU, F.W., "Doppler ultrasound: principles and instruments", W. B. Saunders, Philadelphia, 1990.

KUPRADZE V. D., "Three dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticty", North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics.

LYNN JG, PUTMAN TJ, "A new method for the generation and use of focused ultrasound in experimental biology". J. Gen Physiology, 1942, vol 26, pp 179-193.

MAURICE R. L. and BERTRAND M., "Tissue Strain Estimation Using a Lagrangian Speckle Model". Acoustical Imaging, Plenum Press, New York, pp. 113-117, 1997.

MAURICE, R.L. et BERTRAND, M., "Speckle motion artifact under tissue shearing". Abstract, Ultrasonic Imaging, 15, 1993.

MEUNIER J. et BERTRAND M., "Echographic image mean gray level changes with tissue dynamics: a system-based model study". IEEE Trans. on Biomed. Eng., 42, 403-410, 1995.

MEUNIER J. et BERTRAND M., "Ultrasonic texture motion analysis: theory and simulation". IEEE Trans. on Medical Imaging, 14, 293-300, 1995

MEUNIER J., "Analyse dynamique des textures d'echocardiographies bidimensionnelles du myocarde". Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 1989.

MITCHELL J. W. and MYERS G. E., "An Analytical Model of the Countercurrent Heat Exchange Phenomena," Biophysical Journal, vol. 8, pp. 897-911, 1968.

MOROS E. G., ROEMER R. B. and HYNYNEN K., "Simulations of Scanned Focused Ultrasound Hyperthermia: The Effects of Scanning Speed and Pattern on the Temperature Fluctuations at the Focal Depth", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 35, no. 5, pp. 552-560, 1988.

MURPHY J. C., MACLACHLAN J. W. and AAMODT L. C., "Image Contrast Processes in Thermal and Thermoacoustic Imaging", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 33, no. 5, pp. 529-541, 1986.

NOWINSKI J.L., "Theory of thermoelasticty with applications", 1978.

OPHIR, J. and YAZDI, Y., "A transaxial compression technique for localized pulse-echo estimation of sound speed in biological tissues", Ultras. Imag., 12, 35-46, 1990.

OPHIR, J., "A beam tracking method for estimation of ultrasound propagation speed in biological tissues", IEEE Trans. Ultras. Ferroel. Frequency Control, 33, 359-367, 1986.

OPHIR, J., CÉSPEDES, I., PONNEKANTI, H., YAZDI, Y. and Li, X., "Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues", Ultrasonic Imaging, vol. 14, pp. 111-134, 1991.

OPHIR, J., GHOUSE, M. A., and FERRARI, L.A., "Attenuation estimation with the zero crossing technique: phantom studies", Ultras. Imag., 7, 122-32, 1985.

OPHIR, J.; CÉSPEDES, I.; PONNEKANTI, H.; YAZDI, Y.; Li, X., "Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues". Ultrasonic Imaging 14: 111-134; 1991.

PARKER, K. J., LERNER, R.M., and WAAG, R.C., "Attenaution of ultrasound: magnitude and frequency dependence for tissue characterization", Radiology, 153, 785-788, 1984.

PARKER, K.J., ASZTELY, M.S. LERNER, R.M., SCHENK, E. A., and WAAG, R. C., "In vivo measurements of ultrasound attenuation in normal or diseased liver", Ultras. Med. Biol., 14, 127-136, 1988.

PENNES H.H., "Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm", J. Appl. Physiol., Vol. 1, no. 2, pp. 93-122, 1948.

RIBAULT M., "Caractérisation ultrasonore de lesions induites par ultrasons focalisés de haute intensité", Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, 1998.

ROSENCWAIG A. and OPSAL J., "Thermal Wave Imaging with Thermoacoustic Detection", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 33, no. 5, pp. 516-528, 1986.

SAADA A. S., "Elasticity theory and applications", second edition, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1993.

SEIP R. and EBBINI E., "Noninvasive estimation of tissue temperature response to heating fields using diagnostic ultrasound", IEEE Trans. Biomed. Eng., Vol. 42, no. 8, pp. 828-839, 1995.

SIBILLE A., PRAT F. and CHAPELON J. Y., "Characterization of Extracorporeal Ablation of Normal and Tumor-Bearing Liver Tissue by High Intensity Focused Ultrasound", Ultrasound in Med & Biol., Vol. 19, no. 9, pp. 803-813, 1993.

SOUALMI L., "Caractérisation des propriétés élastiques de la paroi artérielle par ultrasonographie endovasculaire". Thèse de doctorat, Université de Montréal, École Polytechnique Montréal, 1998.

THIEME, Garry A., "Clinical Relevance of Scattering", Chapitre (2) du livre, Ultrasonic Scattering in Biologic Tissue, Kirk Shung et Gary A. Thieme; CRC Press, Ann Arbor, 1993.

TIMOSHENKO S. and GOODIER J.N., "Theory of Elasticity". McGraw-Hill, New York, 1964.

TRAHEY, G.E., ALLISON, J.W. et VON RAMM, O.T., "Angle independent ultrasonic detection of blood flow", IEEE Trans. Biom. Eng., BME-34,965-967, 1987.

UMEMURA S., "The sector-vortex phased array: acoustic field synthesis for hyperthermia", IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr., Vol. 36, no. 2, pp. 249-257, 1989.

VANBAREN P. and EBBINI E., "Multipoint temperature control during hyperthermia treatments: theory and simulation", IEEE Trans. Biomed. Eng., Vol. 42, no. 8, pp. 818-827, 1995.

VANBAREN P., SIMON C., SEIP, R., CAIN C. A. and EBBINI E. S., "Image-Guided Phased Array System For Ultrasound Thermotherapy", IEEE Ultrasonics Symposium, pp. 1269-1272, 1996.

WEINBAUM S., JIJI L. M., LEMONS D. E., "Theory and Experiment for the Effect of Vascular Temperature on Surface Tissue Heat Transfer—Part I: Anatomical Foundation and Model Conceptualization," ASME Trans. Of Biomechanical Engineering, vol. 106, pp. 321-330, 1984.

WISSLER E. H., "Comparison of Results obtained from two Mathematical Models – A simple 14-node Model and a complex 250-node Model," Journal of Physiology(Paris), vol. 63, pp. 455-458, 1970.

WULFF W., "The Energy Conservation Equation for Living Tissue," IEEE Trans. Of Biomedical Engineering, vol. BME-21, pp. 494-495, 1974.

XU L. X., CHEN M. M., HOLMES K. R. and ARKIN H., "The Evaluation of the Pennes, the Chen-Holmes, the Weinbaum-Jiji Bioheat Transfer Models in the Pig Kidney Cortex," ASME WAM, HDT-vol. 189, pp. 15-21, 1991.

ANNEXE A - Les éléments finis.

La résolution par éléments finis peut être utilisée dans plusieurs types de problèmes régis par des équations aux dérivées partielles. D'ailleurs, il est possible de classer la plupart des équations aux dérivées partielles qui décrivent les phénomènes physique en trois grandes classes :

équation elliptique : $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

équation parabolique : $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$

équation hyperbolique : $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0$$

Des exemples typiques pour les équations paraboliques et hyperboliques sont respectivement l'étude de la diffusion de chaleur et l'évaluation de la propagation d'ondes mécaniques ou électromagnétiques. Dans le cas présent, le type d'équation qui nous intéresse est l'équation elliptique. En effet, ce type d'équation est représentatif entre autres des problèmes de déformation d'un solide.

La fonction elliptique qui s'applique à notre type de problème peut s'écrire sous forme compacte:

$$-\nabla \cdot (C \cdot \nabla U) = F$$

où C représente un tenseur d'ordre quatre, U les déplacements en deux dimensions (u, v) des éléments et F, les forces volumiques.

De façon générale, la solution d'un système mécanique par éléments finis nécessite la connaissance des conditions aux frontières. Ensuite, la division du domaine en un nombre fini d'éléments rend possible la détermination du déplacement de chaque nœud d'un élément. L'assemblage des éléments qui forment la structure établit alors les liens entre chacun de ces éléments. Enfin, l'application des conditions aux frontières nous permet de résoudre l'équation elliptique et d'obtenir le déplacement de tous les nœuds de la structure. Nous allons maintenant examiner un peu plus en détail la description de ces étapes nécessaires à la résolution par éléments finis.

A.1 Les conditions aux frontières en éléments finis

Il existe deux grandes catégories de conditions aux frontières en éléments finis: les conditions de déplacement et les conditions de force. Les conditions de force ou conditions de Neumann sont des conditions qui sont aussi appelées conditions naturelles puisque les termes nécessaires à l'application de ce type de condition apparaissent naturellement lors du développement de la forme variationnelle. Ces conditions ne sont toutefois pas pleinement satisfaites et sont formulées de la façon suivante:

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}$$

où n représente le vecteur normal à la surface et g les forces imposées.

En état plan de déformation, les équations de conditions de force peuvent s'écrire:

$$\sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y = g_x$$

$$\sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y = g_y$$

Les conditions de déplacement (aussi appelées conditions de Dirichlet) sont, pour leur part, des conditions essentielles pleinement satisfaites puisque les valeurs imposées sont appliquées directement dans le vecteur de déplacement.

A.2 Approximation de l'équation continue en équations discrètes

L'approximation d'une fonction continue par un modèle discret constitue un concept fondamental de la résolution par éléments finis. Le domaine (Ω) de la fonction continue est divisé en un nombre fini d'éléments. Pour chacun des nœuds d'un élément, une fonction d'interpolation (N_i) est définie afin de déterminer leur déplacement. Pour évaluer approximativement les déplacements d'un système à deux degrés de liberté (en permettant les déplacements dans le plan xy), nous utilisons une représentation polynomiale d'ordre 1 comme fonction d'essai.

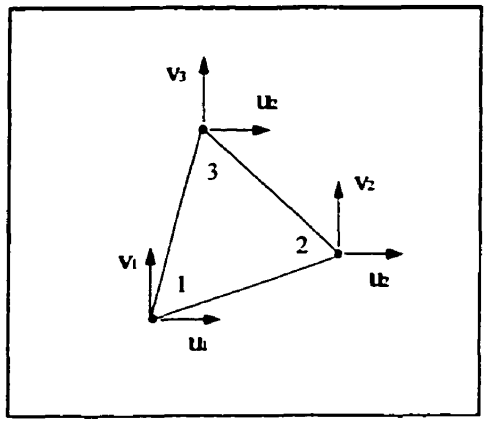

Figure A. 1 : *Description d'une unité de maillage constitué des triangles à deux degrés de liberté.*

Ces fonctions d'essai (N_i) doivent remplir des conditions de représentation constante et de continuité afin de s'assurer que la solution par éléments finis converge vers la solution exacte lorsque la dimension du maillage tend vers zéro (Gallagher, 1976). Pour ce qui est de la représentation constante, U et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m (ordre du système) doivent avoir une valeur constante. Pour la continuité dans le domaine d'un élément et à la frontière de deux éléments, U et toutes ses dérivée d'ordre m-1 doivent être continues. Ainsi, on peut exprimer les déplacements d'un élément en fonction des déplacements des nœuds à l'aide de polynômes d'ordre 1 capables de satisfaire ces conditions:

$$\begin{aligned} u(X,Y) &= \alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 Y \\ v(X,Y) &= \beta_1 + \beta_2 X + \beta_3 Y \end{aligned} \qquad [A.1]$$

où u(x, y) et v(x, y) représentent respectivement les déplacements dans la direction des x et dans la direction des y d'un élément. Les déplacements en x et y des nœuds d'un élément peuvent être exprimés sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{[A. 2]}$$

où n représente le nombre de nœuds utilisés. Dans le cas de ce projet, le maillage est constitué d'éléments triangulaires simples (n = 3) dans lesquels on suppose les propriétés physiques constantes.

Puisque les équations précédentes ([A.2]) peuvent s'écrire sous la forme:

$$\{u\} = [A]\{\alpha\}$$
$$\{v\} = [A]\{\beta\} \qquad \textbf{[A. 3]}$$

alors

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{u\}$$
$$\{\beta\} = [A]^{-1}\{v\} \qquad \textbf{[A. 4]}$$

Maintenant, en combinant ces équations, on obtient :

$$u(x,y) = [1 \quad x \quad y][A]^{-1}\{u\}$$
$$v(x,y) = [1 \quad x \quad y][A]^{-1}\{v\} \qquad \textbf{[A. 5]}$$

La multiplication des deux premières matrices du membre de droite produit une matrice, de dimension 1 × n, que l'on nomme matrice des fonctions de forme N_i. Dans le système, il y aura autant de fonctions de forme qu'il y a de nœuds. Pour un seul élément triangulaire, les trois termes de cette matrice peuvent être définis comme suit:

$$\begin{aligned} N_1 &= ((x_2y_3 - y_2x_3) + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2))/\det([A]) \\ N_2 &= ((x_3y_1 - y_3x_1) + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3))/\det([A]) \\ N_3 &= ((x_1y_2 - y_1x_2) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1))/\det([A]) \end{aligned} \qquad \textbf{[A. 6]}$$

où le déterminant de [A] est égal à deux fois l'aire de l'élément triangulaire. Ces fonctions de forme ont la propriété de valoir $N_i = 1$ au nœud i et zéro aux deux autres nœuds de l'élément.

En combinant les déplacements en x et en y sous forme matricielle on obtient donc:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{[A. 7]}$$

$$\{U\} = [N]\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad \textbf{[A. 8]}$$

En état plan de déformation, on permet la déformation en x et en y ainsi que le cisaillement dans le plan xy. Les équations de déformation se résument à:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \textbf{[A. 9]}$$
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)$$

Sous forme matricielle, les équations **[A.9]** peuvent s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [L]\{U\} \qquad \textbf{[A. 10]}$$

En insérant l'équation **[A.8]** dans l'équation précédente, on obtient :

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \qquad \textbf{[A. 11]}$$

En combinant les deux premiers termes de l'équation [A.11] sous forme de matrice [D] et en fixant le vecteur de déplacement des nœuds de l'élément sous forme de vecteur {d} on obtient :

$$\{\varepsilon\} = [D]\{d\} \qquad \textbf{[A. 12]}$$

où

$$[D] = \begin{bmatrix} N_{1x} & N_{2x} & N_{3x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{1y} & N_{2y} & N_{3y} \\ N_{1y} & N_{2y} & N_{3y} & N_{1x} & N_{2x} & N_{3x} \end{bmatrix} \qquad \textbf{[A. 13]}$$

Notons que les indices x et y, ajoutés aux symboles N_i, indiquent la dérivée partielle de N_i par rapport à x et y respectivement.

A.3 Assemblage de la matrice de rigidité

Le processus d'assemblage permet d'établir les liens entre les éléments de la structure. Chaque valeur d'une matrice locale est transférée et positionnée correctement dans la matrice globale de façon à additionner la contribution de tous les éléments qui partagent un nœud donné. Ainsi, suite à l'assemblage de la matrice de rigidité on obtient:

$$\{F\} = [K]\{U\} \qquad \textbf{[A. 14]}$$

ou

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ \vdots \\ f_{nx} \\ f_{1y} \\ \vdots \\ f_{ny} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{1,2n} \\ k_{2,1} & \vdots & & & & & k_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{n,2n} \\ k_{n+1,1} & k_{n+1,2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{n+1,2n} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ k_{2n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \qquad \textbf{[A. 15]}$$

La matrice de rigidité globale [K] est une matrice carrée de dimension $2n \times 2n$, où 2 représente le nombre de degrés de liberté et n le nombre de nœuds de la structure. Les vecteurs {F} et {U} représentent respectivement les forces et les déplacements présents aux nœuds. Maintenant, avec l'application des conditions aux frontières, la connaissance de la rigidité du matériau étudié et le calcul des forces de volume

provenant du gradient de température, il est possible de résoudre le problème direct et de déterminer le champ de déplacement associé à la perturbation (forces et déplacements imposés) appliquée au spécimen.

La méthode des éléments finis nous permet de déterminer les déplacements de toute la structure interne d'un spécimen, à condition de connaître le profil de température, les conditions aux frontières ainsi que les propriétés du matériau.

En thermoélasticité, comme en mécanique, il est possible d'effectuer une analyse structurelle, soit à l'aide d'une méthode analytique ou d'une méthode numérique. Une méthode numérique possible est la résolution par éléments finis. Cela permet une analyse assez précise de structures complexes et est reconnue pour être très flexible. Il est aussi possible de décrire le comportement mécanique du tissu mou qui subit un échauffement à l'aide d'un modèle analytique. Ces méthodes analytiques sont généralement réservées pour des cas de structures très simples mais que leur résultats peuvent être utilisés pour comparer les résultats obtenus à l'aide d'une méthode numérique (voir annexe B).

ANNEXE B - Un exemple de résolution analytique

L'exemple qui suit illustre la résolution analytique d'un problème thermoélastique par la méthode du potentiel de Goodier. La géométrie est assez simple pour espérer trouver une solution analytique. En effet, comme dans le cas d'élasticité classique, les solutions analytiques exactes sont rares et difficiles à trouver.

Nous voulons trouver les contraintes thermoélastiques dans un cylindre creux infiniment long et libre de toute charge externe. La paroi interne, de rayon a, est maintenue à un température θ_a, tandis que la paroi externe, de rayon b, est à la température θ_b.

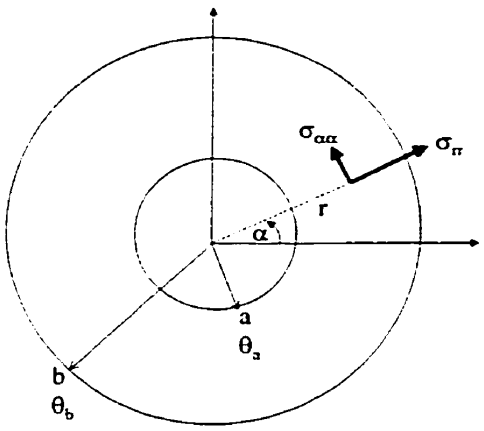

Figure B. 1: *Schéma de la géométrie du problème thermoélastique traité.*

Le problème présente une symétrie axiale. L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dr}{d\theta}\right) = 0. \qquad \textbf{[B. 1]}$$

Après intégration, et en tenant compte des conditions aux limites de température, on aboutit au champ de température suivant :

$$\theta(r) = \frac{1}{\ln(b/a)}\left(\theta_a \ln\frac{b}{r} + \theta_b \ln\frac{r}{a}\right). \qquad \textbf{[B. 2]}$$

D'un point de vue thermoélastique, on se trouve avec un problème d'état plan de déformation (voir chap.2.6). Supposons, pour simplifier, que $\theta_b = 0$. Une seconde intégration de l'équation [2.16] en coordonnées polaires donne le potentiel de Goodier:

$$\varphi = \frac{C}{4}r^2\left(\ln\frac{b}{r} + 1\right), \qquad \textbf{[B. 3]}$$

$$\text{avec } C = \frac{\alpha(1+\nu)\theta_a}{(1-\nu)}\ln(b/a).$$

Ainsi, on peut exprimer les contraintes d'origine thermique dans le cylindre et en coordonnées polaires :

$$\bar{\tau}_{rr} = -\frac{\mu C}{2}\left(2\ln\frac{b}{r} - 1\right), \qquad \textbf{[B. 4]}$$

$$\bar{\tau}_{\alpha\alpha} = -\frac{\mu C}{2}\left(2\ln\frac{b}{r} - 3\right). \qquad \textbf{[B. 5]}$$

Si on s'arrêtait là, on ne respecterait plus les conditions aux limites prescrites. En effet, au lieu d'avoir des contraintes nulles sur les parois, on aurait :

$$\bar{\tau}_{rr\,|\,r=a} = -\frac{\mu C}{2}\left(2\ln\frac{b}{a} - 1\right); \quad \bar{\tau}_{rr\,|\,r=b} = -\frac{3\mu C}{2}.$$

Ostensiblement, ces contraintes ne sont pas nulles. Afin de satisfaire les conditions aux limites, nous sommes obligés de superposer une autre solution, à savoir, celle du problème isotherme associé. Dans ce dernier, les faces du tube sont supposées soumises à des tractions P_a et P_b (pressions négatives) égales respectivement aux contraintes thermiques résultantes sur les parois interne et externe. Ainsi, la superposition des deux états sera compatible avec les conditions aux limites.

La solution du problème isotherme associé est la fameuse solution de Lamé :

$$\bar{\bar{\tau}}_{rr} = \frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{b^2 - a^2}\frac{1}{r^2} + \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2}, \qquad \textbf{[B. 6]}$$

$$\bar{\bar{\tau}}_{\alpha\alpha} = -\frac{a^2 b^2 (P_b - P_a)}{b^2 - a^2}\frac{1}{r^2} + \frac{a^2 P_a - b^2 P_b}{b^2 - a^2}. \qquad \textbf{[B. 7]}$$

La somme des contraintes données par [B.4] et [B.6] constitue la solution selon la direction radiale, alors que la somme des contraintes données par [B.5] et [B.7] donne la contrainte latérale.

ANNEXE C - Représentation 3D des déformations.

La figure ci-dessous représente les déformations calculées dans le cas d'un corps de rigidité homogène (E = 1kPa). La paroi interne subit une pression de 2 Pa et on lui impose un profil de température semblable à celui de la figure 3.4 (p. 74).

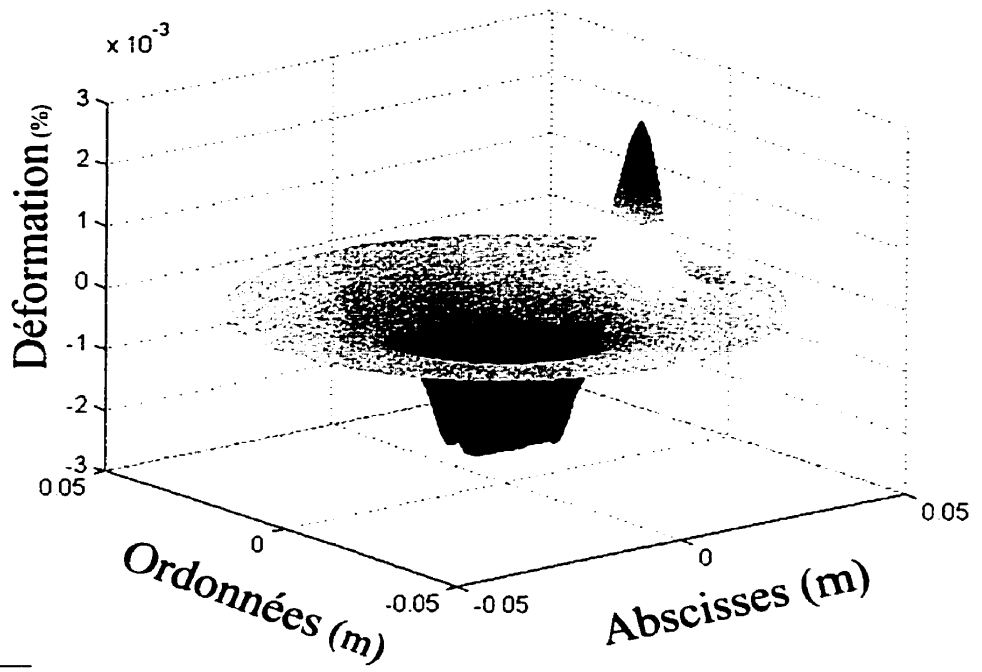

Figure C. 1: *Champ de déformation radiale pour paroi interne sous pression et paroi externe à déplacement connu.*