UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

GESTION DES AVIONS ET DES ÉQUIPAGES DURANT LE JOUR D'OPÉRATION

GORAN STOJKOVIĆ
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
DÉCEMBRE 1998

© Goran Stojković, 1999.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-48895-0

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE PLOYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

GESTION DES AVIONS ET DES ÉQUIPAGES
DURANT LE JOUR D'OPÉRATION

présentée par : STOJKOVIĆ Goran
en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor
a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. SAVARD Gilles, Ph.D., président
M. SOUMIS François, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. DESROSIERS Jacques, Ph.D., membre et codirecteur de recherche
M. LANGEVIN André, Ph.D., membre
M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., membre externe

RÉSUMÉ

La planification des itinéraires d'avion et des horaires d'équipage se fait à l'avance. Lorsque des irrégularités surviennent en cours d'opérations, le plan peut devenir non réalisable et doit ainsi être modifié. De plus ces modifications doivent être effectuées très rapidement. Ce type de problème, *Day of Operation Scheduling (DAYOPS)*, est très important parce qu'il a un impact direct sur les opérations des compagnies aériennes : ce sont ces décisions finales qui sont effectivement appliquées.

Dans cette thèse, nous proposons trois approches pour traiter ce problème. La première approche propose une formulation qui modifie l'horaire des vols de façon à respecter la planification pour les itinéraires d'avions, les maintenances, les rotations d'équipage et les connexions des passagers. Cette approche peut être utilisée quand les irrégularités sont relativement mineures et qu'il est possible de conserver les itinéraires planifiés. En utilisant un processus de dualisation adapté à notre contexte, nous montrons que malgré le caractère multiflot (avions, équipages et passagers) de ce modèle, celui-ci peut être reformulé comme un pur problème de flot à coût minimum. Avec cette approche, on peut donc facilement résoudre, en temps réel, ce type de problème pour les plus grosses compagnies aériennes. Il est également possible d'utiliser ce modèle dans des systèmes de planification plus complexes, permettant ainsi une interaction entre les itinéraires d'avion et les horaires d'équipage.

Les irrégularités majeures qui causent de graves perturbations à l'horaire peuvent être traitées sur une plus longue période de temps. Dans la deuxième approche, nous modifions à la fois les horaires et les itinéraires des avions et les rotations des équipages. Les problèmes de gestion des avions, des pilotes et des agents de bord sont traditionnellement résolus de façon séquentielle, l'entrée de l'un servant de sortie à l'autre. Dans la troisième approche, nous étudions un modèle très général intégrant à la fois les avions et les pilotes et permettant des ré-affectations complètes. Nous présentons deux modèles (complet et incomplet) basés sur la décomposition de Benders, méthode qui exploite la structure de la formulation intégrée proposée. Dans les cas les plus complexes, le sous-problème et le problème maître de Benders sont tous les deux résolus par une méthode de génération de colonnes incorporée dans un processus optimal de séparation et d'évaluation.

Les contributions principales de cette thèse sont : l'identification et la définition de trois approches pour résoudre le problème DAYOPS ; la résolution très efficace d'un cas spécial de problème DAYOPS ; la formulation de relations liantes entre les principaux acteurs pendant les opérations d'une compagnie aérienne ; la proposition d'un modèle optimal intégré et d'une méthode sophistiquée de résolution. Nous croyons que les approches proposées sont originales et qu'elles ont un potentiel considérable pour les applications pratiques en réduisant les coûts opérationnels, un facteur décisif dans le marché aérien extrêmement compétitif.

ABSTRACT

Airlines are faced with the problem of producing aircraft flight itineraries and crew rotations to provide scheduled service, while maximizing profits. This type of problem is referred as *Planning problem* and it is solved in advance, i.e., few days, weeks or months before the day of operation. Another type of problem arrives when perturbations occur on the day of operation. In such a case the flight schedule may become infeasible and must be updated. The problem must be solved in real-time while the airline operations are in progress.

For this type of problem, which we refer to as the *Day of Operation Scheduling (DAYOPS) problem*, we suggest three approaches that solve aircraft and crew assignment simultaneously. The first approach proposes a formulation designed to determine a new flight schedule that fits with the existing aircraft assignment, maintenance schedule, crew schedule and passenger connections. The dual model can be formulated as a network flow model. Using this approach, it is possible to solve in real time a special case of DAYOPS problems at the largest airlines. The proposed model considers relatively small irregularities that permit no changes in aircraft itineraries and crew rotations. In addition, it may be possible to embed the proposed model in more sophisticated operational or planning systems, such as a two-level optimisation model for aircraft and crew schedules.

The second approach is more general and permits changing aircraft itineraries, crew rotations and the planned schedule. Each part of the optimisation process, as aircraft, pilots and flight attendants, is separately solved. We propose mathematical formulations that relate models in this sequential approach. Finally, in the third approach, the Benders decomposition is used to separate integral multi-commodity flow formulation in two parts where the aircraft assignment problem is the master problem and the crew assignment problem is the sub-problem. Each of these parts is solved separately by Dantzig-Wolfe decomposition where we define one network for every commodity. In each part we use a Branch and Bound technique to find an integer solution. The last two approaches have bigger responding time during an airline operation but they are able to solve bigger irregularities problem. Usually, the bigger irregularities do not need short responding time because they could be known longer in advance.

The principal contributions of this dissertation are: identifying and defining three approaches for solving a DAYOPS problem ; solving efficiently a special case of a DAYOPS problem ; finding the linking relations between the principal actors in an operational problem ; formulating an integrated optimisation model ; developing a sophisticated solution method to solve those integrated model. We believe that the proposed ideas are promising and that further research could produce an operational schedule that considerably reduces the cost to the airline, a potentially decisive factor in an extremely competitive airline market.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ ..... **iv**

ABSTRACT ..... **vi**

TABLE DES MATIÈRES ..... **viii**

LISTE DES TABLEAUX ..... **xiii**

LISTE DES FIGURES ..... **xv**

CHAPITRE 1 Introduction **1**

1.1 Vocabulaire 4

1.2 La planification de l'affectation des avions et des équipages 6

1.3 Les types et les sources d'irrégularités 11

1.4 La gestion des horaires durant le jour d'opération 15

1.5 Revue de la littérature 21

1.5.1 Méthodes d'optimisation utilisées dans la littérature 23

1.5.2 Modèles de planification 30

1.5.3 Les systèmes DAYOPS 38

CHAPITRE 2 Mise à jour de la planification en conservant les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage 43

2.1 An Optimization Model For a Real-Time Flight Scheduling Problem 46

2.1.1 Introduction 48

2.1.2 Problem Description 49

2.1.3 Review of the Literature for Dayops Problems 51

2.1.4 Proposed Model 56

2.1.5 Computational Experience 71

2.1.6 Conclusion and Extensions 75

CHAPITRE 3 Mise à jour de la planification en modifiant séquentiellement les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage 81

3.1 Introduction 81

3.2 Structure des réseaux 85

3.3 Formulations mathématiques 89

3.3.1 Domaine réalisable pour les avions 90

3.3.2 Domaine réalisable pour les pilotes 92

3.3.3 Domaine réalisable pour les agents de bord 94

3.3.4 Formulation intégrée 95

3.4 Approche de résolution séquentielle 99

3.4.1 Formulation séquentielle 99

3.4.2 Résolution séquentielle 103

3.5 Études numériques 109

3.5.1 Construction des jeux de données 110

3.5.2 Gestion des avions 114

3.5.3 Gestion des pilotes 123

3.5.4 Gestion des avions et des pilotes pour plusieurs jours 126

3.6 Conclusion et recherches futures 128

CHAPITRE 4 Mise à jour de la planification en modifiant simultanément les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage 132

4.1 Introduction 132

4.2 Formulation mathématique 135

4.2.1 Affectation simultanée des avions et des pilotes 136

4.3 Décomposition de Benders 137

4.3.1 Sous - problème 139

4.3.2 Problème maître 142

4.3.3 Algorithme de résolution 144

4.4 Décomposition de Benders avec horaires fixes 146

4.5 Décomposition de Benders incomplète avec horaires fixes 150

4.6 Expériences numériques avec horaires fixes 153

4.6.1 Génération de coupes complètes 154

4.6.2 Génération de coupes incomplètes 162

4.6.3 Génération de coupes complètes pour le problème avec un seul type d'avion 166

4.7 Extensions 170

4.7.1 Accélération de la méthode de Benders 170

4.7.2 Généralisation du modèle intégré pour les agents de bord 174

4.7.3 Décomposition de Benders avec fenêtres de temps : nouvelle approche ... 177

4.7.4 L'approche inversée de décomposition de Benders 179

4.8 Conclusion et recherches futures 180

CHAPITRE 5 Conclusion 183

RÉFÉRENCES 187

LISTE DES TABLEAUX

2.1 : Cost types associated with arc and node sets 62

2.2 : Dimensions of test problems 72

2.3 : Primal and dual problem sizes and CPU times (in seconds) 73

3.1 : Dimensions et temps de calcul présentés par Stojković (1998) 106

3.2 : Dimensions et temps de calcul présentés par Stojković (1998) 108

3.3 : Problèmes - test 112

3.4 : Résultats et temps de calcul pour le problème F1A5C7 115

3.5 : Itinéraires d'avion obtenus pour le problème F1A5C7 116

3.6 : Résultats et temps de calcul pour le problème F8A103 121

3.7 : Distribution des vols couverts pour le problème F8A103 122

3.8 : Problèmes – test de grandes tailles 127

4.1 : Résultats par itération avec les coupes complètes pour le problème F1A2C2 155

4.2 : Résultats par itération avec les coupes complètes pour le problème F2A2C2 160

4.3 : Résultats par itération avec les coupes incomplètes pour le problème F1A2C2 163

4.4 : Performance de la méthode de Benders 167

4.5 : Comparaison entre l'approche de Benders et l'approche séquentielle 168

LISTE DES FIGURES

1.1 : Segment de la grille horaire d'avion 8

1.2 : Les sources d'irrégularités 12

1.3 : L'environnement de travail dans une compagnie aérienne 17

2.1 : The network T with two aircraft itineraries 58

2.2 : Comparison of CPU times for original primal and reformulated dual models 74

3.1 : Réseaux G_x^f des avions et G_y^f des pilotes pour une flotte de type f 86

3.2 : Itinéraires planifiés pour le problème F1A5C7 (scénario 0) 117

3.3 : Itinéraires d'avions pour le scénario 1 du problème F1A5C7 118

3.4 : Itinéraires d'avions pour le scénario 2 du problème F1A5C7 120

3.5 : Itinéraires des avions pour le problème F1A5C7 124

3.6 : Itinéraires des pilotes pour le problème F1A5C7 125

4.1 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 1 du problème F1A2C2 156

4.2 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 2 du problème F1A2C2 157

4.3 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 3 du problème F1A2C2..... 158

4.4 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 4 du problème F1A2C2..... 159

4.5 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 5 du problème F1A2C2..... 160

4.6 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour le problème F2A2C2..... 161

4.7 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour le problème F1A5C7..... 165

CHAPITRE 1

Introduction

La gestion d'horaire des vols est un problème important pour une compagnie aérienne. Celle-ci doit en effet fabriquer les horaires, les itinéraires des avions et les rotations des équipages d'une flotte hétérogène de façon à maximiser ses profits. La décision doit être prise en tenant compte des coûts de financement, d'entretien, de carburant et d'équipage. Afin d'obtenir un bon ratio revenu / coût, la compagnie doit viser des taux d'occupation élevés de même qu'une utilisation intensive de ses avions. Dans une compagnie aérienne, les décisions se prennent en deux temps : les décisions de planification sont prises à l'avance et les décisions d'opération sont prises durant le jour d'opération.

La planification des itinéraires d'avion et des rotations d'équipage se fait à l'avance. Lorsque des irrégularités surviennent en cours d'opération, l'horaire des vols peut devenir non réalisable pour les avions ou les équipages. Le gestionnaire des vols doit alors mettre à jour l'horaire planifié et trouver une solution réalisable, i.e., des horaires d'avion et des horaires d'équipage réalisables. Nous limiterons notre champ d'intérêt à ce sous-problème où le processus de prise de décisions est de type

opérationnel. Ce problème est en effet très complexe. Le problème opérationnel doit être résolu dans un environnement très difficile à prévoir à cause de plusieurs facteurs tels que : la fluctuation de la demande de passagers ; les changements des conditions météorologiques, l'absence d'équipages et la défaillance des équipements. Ce problème se complique davantage en tenant compte d'une restriction additionnelle : le temps de solution doit être suffisamment court pour que le gestionnaire des vols puisse réagir en temps réel à une irrégularité. Quoiqu'il n'existe que peu de recherches sur le sujet, une solution optimale ou même une "bonne" solution peut mener à la réalisation d'importants profits et procurer à la compagnie aérienne une position favorable dans un marché très compétitif. Malgré tout, les gestionnaires des vols prennent actuellement des décisions surtout à partir de leur intuition et de leur expérience sans le support des méthodes de la recherche opérationnelle.

Dans la littérature, ce type de problèmes apparaît sous différents noms, tels que la fabrication d'horaires au jour le jour (day-to-day scheduling), la fabrication dynamique d'horaires (dynamic scheduling), la fabrication d'horaires pour le jour des opérations (day-of-operations scheduling) ou la fabrication quotidienne et opérationnelle d'horaires (operational daily scheduling). Nous appelons ce problème "DAYOPS" (Ce terme qui est consacré dans l'industrie aerienne, où l'anglais domine, provient de DAY of OPerations Schedule) et les systèmes utilisés pour résoudre ce type de problèmes : "systèmes DAYOPS". Nous utilisons le terme système afin de mettre en évidence le fait qu'il contient un ensemble de modules intégrés. DAYOPS est en quelque sorte un

système d'aide à la décision (SAD). Tel qu'observé par Bannister (1984), un SAD peut être défini comme un ensemble d'instruments informatiques utilisés pour assister le responsable des décisions dans sa tâche. Le SAD permet donc d'évaluer différents scénarios et également de suggérer des solutions en utilisant des modules d'optimisation exacte ou des méthodes heuristiques. Toutefois, il est à noter que la décision finale appartient toujours en dernière instance à l'utilisateur.

La nature de notre problème est dynamique et stochastique. Afin de réduire les dimensions du problème et le temps de résolution, le problème est traité par tranches ; on traitera en effet souvent une seule perturbation à la fois. De plus, pour diminuer sa difficulté, nous négligerons l'aspect stochastique en prenant pour acquis que nous avons toutes les données en main lors de la confection des itinéraires.

La première section de ce chapitre définit le vocabulaire utilisé. Ensuite, la deuxième section donne une description du problème de planification qui comprend l'utilisation des avions et la gestion des équipages. La troisième section expose les irrégularités en cours d'opération. La dernière section se concentre sur le problème opérationnel de gestion des avions en présence des irrégularités, ce dernier problème faisant l'objet principal de cette thèse.

1.1 Vocabulaire

Définissons d'abord le vocabulaire utilisé en transport aérien. Cette liste de termes est tirée de Lavoie *et al.* (1993) et Stojković (1990).

Station : Aéroport dans une ville donnée.

Segment de vol : Déplacement sans atterrissage intermédiaire d'un appareil d'une station à une autre.

Vol : Suite de segments de vols consécutifs effectués par un même appareil et désignés par un même numéro de vol. Les passagers peuvent alors parcourir plusieurs segments de vols sans quitter l'avion.

Mise en place : Segment de vol où l'avion est déplacé sans passagers.

Itinéraire d'avion : Une séquence de segments de vols et d'entretiens, ordonnés chronologiquement, qui sont effectués par un appareil spécifique.

Service de vol : Une séquence de vols effectués par un équipage durant une journée de travail.

Rotation d'équipage : Une séquence de services de vols et de périodes de repos, ordonnés chronologiquement, qui sont effectués par un équipage.

Entretien : Ensemble d'opérations de vérification et de réparation qui sont effectuées régulièrement sur un appareil. Chaque appareil doit subir plusieurs types d'entretiens et la fréquence de chaque type d'entretien est déterminée par des règles nationales et internationales. Chaque entretien nécessite une immobilisation de l'appareil pour une période dont la durée varie selon le type d'entretien et l'endroit où il est effectué. On utilise des symboles (A, B, C, ...) pour désigner les différents types d'entretiens. Les entretiens pour un même appareil sont reliés par une relation d'inclusion ($A \subset B \subset C$...). Un entretien B est réputé inclure un entretien A : lorsque l'entretien B est effectué, l'entretien A est fait par la même occasion, c'est-à-dire que les opérations de maintenance que comporte l'entretien B comprennent les opérations que comporte l'entretien A.

Maintenance : Séquence d'entretiens, i.e., d'opérations d'inspections et de réparations qui doivent être effectuées régulièrement sur un appareil pour le maintenir en état d'opération. Une série d'entretiens doit être effectuée à des fréquences variables.

Base technique : Station où peut être effectué un type d'entretien.

Grille horaire : Ensemble des segments de vols avec leurs horaires.

Durée de bloc : Période de temps pour un vol entre le démarrage et l'arrêt des moteurs.

Connexion : Période entre 2 segments de vols où l'appareil est au sol (mais pas en entretien).

Flotte : Ensemble des appareils d'une compagnie.

Gestionnaire des vols : Responsable de la régulation des vols en charge de la gestion de la circulation pendant la journée d'opération, i.e., d'exécution de la grille horaire planifiée.

1.2 La planification de l'affectation des avions et des équipages

Naturellement, différents horaires de vols produisent différents coûts et revenus pour une compagnie aérienne. Un même horaire de vols utilisant différents itinéraires d'avion pourrait aussi produire différents coûts pour la compagnie aérienne. Ainsi, la planification optimale des avions et des équipages, avec des objectifs soigneusement choisis et en considérant toutes les contraintes pertinentes, pourrait engendrer une importante réduction des coûts, i.e., une augmentation des bénéfices pour la compagnie aérienne. La planification implique cinq types de décisions :

- Construire une grille horaire de vols en prenant en considération des facteurs tels la demande prévue, la concurrence, les heures de départ possibles, etc. Généralement, ce travail est confié au département commercial de la compagnie.
- Affecter un type d'avion à chaque vol en tenant compte du revenu, de la disponibilité de la flotte, de la capacité et la vitesse des avions, de leur coûts d'opération, etc.
- Construire les itinéraires d'avion en déterminant les vols effectués par chaque appareil.
- Créer des rotations d'équipage couvrant, à coût minimum, les vols offerts par un ou plusieurs types d'avion.
- Fabriquer des horaires mensuels personnalisés, en affectant les rotations aux membres d'équipage.

Donc, une compagnie prépare un plan d'utilisation des avions précisant le type d'avion utilisé pour chaque vol et l'itinéraire que parcourra chaque avion. Elle prépare également un horaire de travail pour chaque membre d'équipage en précisant les vols, les périodes de repos et les entraînements. Dans cette thèse nous traiterons les horaires des pilotes et des agents de bord. Le pilote représente tous les membres d'équipage qui restent ensemble durant toute la rotation. C'est le cas des pilotes, copilotes et ingénieurs de vols dans la plupart des compagnies. Des informations sur les passagers peuvent s'ajouter à ce plan. Le lecteur trouvera ci-dessous le contenu du plan d'utilisation des avions de même que l'information associée tels qu'ils apparaissent au gestionnaire des vols. La Figure 1.1 présente un segment d'une grille horaire caractéristique d'une

compagnie aérienne.

	08/04 MERCREDI/WEDNESDAY					08/05 JEUDI/THURSDAY					08/06 VENDREDI/FRIDAY				
B757	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0700	1020	0000	0000	0700	1120	1515	1650	1830
GTSF	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0920	1800	0000	0000	1020	1430	1530	1730	0800
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	YUL	YVR	0000	0000	YUL	FLL	YUL	YMX	YQB
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	YVR	YUL	0000	0000	FLL	YUL	YMX	YQB	NCE
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	2342	2343	0000	0000	2050	2051	F051	2610	2610
	0900	1240	1355	1730	2135	2315	1315	1600	1740	0000	0000	0000	0000	0000	2210
GTSN	1115	1255	1640	1830	2215	1015	1515	1640	1850	0000	0000	0000	0000	0000	1015
	BHX	CDG	BHX	YYZ	YMX	YQB	LGW	YQB	YMX	0000	0000	0000	0000	0000	YYZ
	CDG	BHX	YYZ	YMX	YQB	LGW	YQB	YMX	YYZ	0000	0000	0000	0000	0000	LGW
	3316	3317	3317	F032	2410	2410	2411	2411	F045	0000	0000	0000	0000	0000	266
	0000	0000	0000	1805	2045	0000	0905	1145	0000	2245	0045	0000	1545	1825	2305
GTSE	0000	0000	0000	2100	0805	0000	0945	1400	0000	2345	1345	0000	1745	1930	1220
	0000	0000	0000	LGW	YYZ	0000	DUB	SNN	0000	YYZ	YMX	0000	CDG	YMX	YYZ
	0000	0000	0000	YYZ	DUB	0000	SNN	YYZ	0000	YMX	CDG	0000	YMX	YYZ	FRA
	0000	0000	0000	237	244	0000	245	245	0000	2150	2150	0000	2151	2151	262
	0300	0950	1225	1430	1620*	0000	1100	1330	0000	2330	0000	0000	1420	0000	2100
GTSJ	0810	1105	1330	1540	1645	0000	1230	2030	0000	1230	0000	0000	1620	0000	0900
	KEF	AMS	FRA	AMS	KEF	0000	YYZ	LAS	0000	YYZ	0000	0000	AMS	0000	YYZ
	AMS	FRA	AMS	KEF	YVR	0000	LAS	YYZ	0000	AMS	0000	0000	YYZ	0000	STN
	4220	4220	4221	4221	4221	0000	648	649	0000	252	0000	0000	253	0000	3708
	0000	1330	1650	1830	0000	0930	1230	1400	1740	2045	0000	0000	0940	0000	0000
GTSK	0000	1535	1730	0800	0000	1140	1320	1440	1850	0810	0000	0000	1155	0000	0000
	0000	LYS	YMX	YQB	0000	NCE	YQX	YQB	YMX	YYZ	0000	0000	GLA	0000	0000
	0000	YMX	YQB	NCE	0000	YQX	YQB	YMX	YYZ	GLA	0000	0000	YYZ	0000	0000
	0000	135	2412	2412	0000	2413	2413	2413	F041	3514	0000	0000	3515	0000	0000
B727	0000	0659	1030	0000	0000	0000	0700	1030	1830	1930	0700	1115	1400	0000	0000
GAAG	0000	0900	1745	0000	0000	0000	0900	1745	1930	****	1030	1225	1805	0000	0000
	0000	YYZ	YVR	0000	0000	0000	YYZ	YVR	YYZ	MTCE	YMX	HOG	POP	0000	0000
	0000	YVR	YYZ	0000	0000	0000	YVR	YYZ	YMX	A	HOG	POP	YMX	0000	0000
	0000	430	431	0000	0000	0000	440	441	F043	****	352	353	353	0000	0000
	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
GAAD	****	****	****	****	****	****	****	****	****	****	0000	0000	0000	0000	0000
	MTCE	MTCE	MTCE	MTCE	MTCE	MTCE	MTCE	MTCE	MTCE	MTCE	0000	0000	0000	0000	0000
	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	0000	0000	0000	0000	0000
	****	****	****	****	****	****	****	****	****	****	0000	0000	0000	0000	0000

Figure 1.1 : Segment de la grille horaire d'avion

Une telle grille contient les informations suivantes :

- type d'appareil,
- identificateur de l'appareil,

- numéro de vol, code de l'entretien ou code de mise en place,
- aéroports d'origine et de destination pour chaque segment,
- heure de décollage et d'atterrissage pour chaque segment, etc.

Pour trouver une solution concernant l'étape de planification, il faut définir les objectifs adéquats et respecter les contraintes obligatoires. Les objectifs les plus importants pour une compagnie aérienne sont :

- minimiser les coûts d'opération ;
- maximiser les profits d'opération ;
- maximiser le nombre total de segments de vols réalisés ;
- minimiser les pertes de temps totales des passagers ;
- maximiser le nombre total d'heures de vol entre les séances d'entretien ;
- maximiser le nombre des passagers transportés ;
- optimiser le nombre d'appareils en service ;
- minimiser la différence entre les grilles horaires opérationnelle et planifiée ;
- équilibrer les temps de vol entre les appareils d'une même flotte.

Basé sur les informations fournies par les compagnies aériennes et les articles publiés, nous avons l'impression qu'il existe deux objectifs principaux pour les problèmes opérationnels :

- maximiser les profits d'opération en tenant compte des inconvénients pour les passagers ;

- retourner à la solution planifiée le plus tôt possible, i.e., minimiser la différence entre la solution planifiée et la solution opérationnelle.

Notons que le retour à la solution planifiée sera plus rapide pour les services domestiques et plus lent pour les services internationaux. Les autres objectifs mentionnés ci-dessus varient d'une compagnie à l'autre et selon le type de problème. Par exemple, les passagers sont plus flexibles pour accepter un retard pendant une tempête de neige que lors de problèmes techniques.

Évidemment, un conflit existe entre ces objectifs. D'une part, l'intérêt de la compagnie est de retarder les vols pour les couvrir avec le moins de ressources possible. D'autre part, l'intérêt des passagers est de ne pas avoir de retard. Pour résoudre ce conflit, il faut mettre des poids sur les attributs en conflit. Chaque compagnie aérienne a ses propres poids selon ses intérêts et sa stratégie. De même, chaque compagnie a ses propres contraintes selon les règlements gouvernementaux, les règlements internes et la convention collective.

Voici les contraintes habituelles relatives à la construction des horaires, des itinéraires des avions et des rotations des équipages :

- le nombre d'avions disponibles pour chaque type d'appareil est défini en fonction de la flotte et des demandes de contrôle technique relatives à certaines périodes et stations ;

- la durée d'une rotation et le nombre maximum de décollages et d'atterrissages quotidiens sont limités par les règlements gouvernementaux, par les règlements de la compagnie et par des exigences techniques ;
- les heures de travail des équipages sont limitées par les règlements gouvernementaux et par les règlements de la compagnie ;
- les heures de travail à un aéroport sont limitées par les conditions techniques des équipements, les heures d'opération et les conditions météorologiques ;
- la capacité, i.e., le nombre de passagers dans les avions ;
- le temps minimum requis pour le passage d'un avion ou d'un équipage au vol suivant dépend du type d'avion, du type de service et/ou de l'aéroport.

1.3 Les types et les sources d'irrégularités

Il existe plusieurs facteurs à l'origine des perturbations dans les grilles horaires des compagnies aériennes. Ces facteurs pourraient être classifiés par types d'irrégularités définis selon leurs origines tels que montrés à la Figure 1.2.

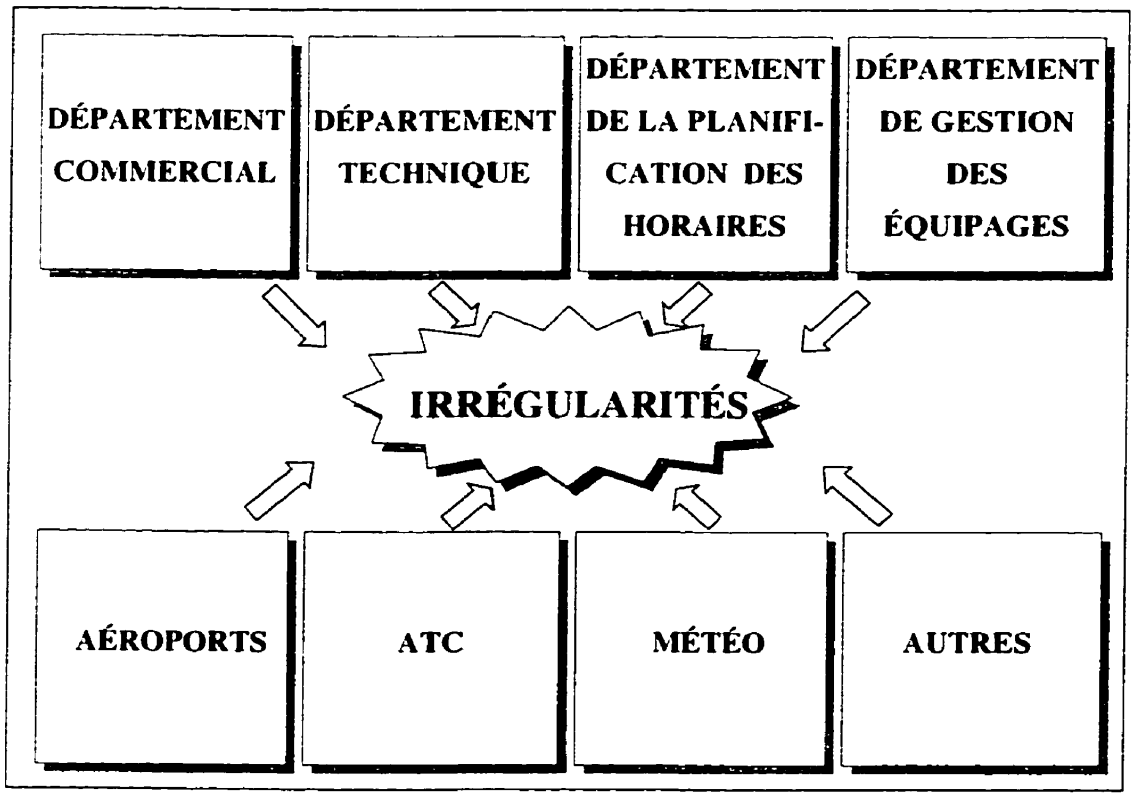

Figure 1.2 : Les sources d'irrégularités

Voici une liste réunissant quelquesunes des irrégularités les plus fréquentes.

Problèmes commerciaux : Annoncés généralement par le département commercial dans les cas suivants :

- passagers retardataires en correspondance ;
- vols nolisés ou additionnels ;
- problèmes de restauration (traiteur) ;
- problèmes de réservation d'hôtel.

Problèmes techniques : Annoncés par le département technique de la compagnie aérienne et qui, généralement, signifient que :

- un avion a une petite difficulté technique telle une composante électrique ou hydraulique qui ne fonctionne plus ;
- un avion est maintenu hors service pour une longue période de temps en raison de problèmes de moteur ou de problèmes structurels ;
- des contrôles techniques non prévus exigés par le fabricant.

Problèmes provenant de la planification et des opérations des journées précédentes : Les opérations des journées précédentes peuvent avoir été différentes du plan annoncés par le département de planification des horaires de la compagnie aérienne et qui signifient, généralement, que :

- la durée du bloc peut dépasser le maximum permis ;
- il y a des vols qui ne peuvent pas être couverts.

Problèmes d'équipage : Annoncés par le département de gestion des équipages et qui signifient, généralement, qu'il y a :

- un équipage en retard ;
- des absences non planifiées ;
- un entraînement d'équipage non planifié.

Problèmes d'aéroport : Annoncés par les représentants de l'aéroport et qui signifient, généralement, qu'il y a :

- certains équipements de l'aéroport hors service ;
- un retard dans le service d'un avion ;
- une heure de pointe, i.e., saturation de l'aéroport.

Problèmes de l'ATC : Annoncés par les représentants de l'ATC (Air Traffic Control) et qui signifient, généralement, qu'il y a :

- saturation de l'espace aérien ;
- fermeture d'une partie de l'espace aérien en raison d'un problème dans l'équipement de radionavigation.

Problèmes météorologiques : Annoncés par les agences de météorologie et qui signifient, généralement, qu'il y a :

- des mauvaises conditions météorologiques temporaires ;
- des mauvaises conditions météorologiques à long terme ;
- des vents qui allongent la durée de vol.

Autres types de problèmes : Problèmes qui ne peuvent être inclus dans les catégories énumérées ci-dessus (grèves, actes criminels) ou qui font à la fois partie de deux ou de plusieurs de ces catégories.

1.4 La gestion des horaires durant le jour d'opération

Même si la planification de l'utilisation des avions et des équipages et la gestion des avions et des équipages durant le jour d'opération portent sur les mêmes décisions, il y a des différences importantes entre ces deux problèmes. Par exemple, la fonction objectif ainsi que les contraintes peuvent être différentes. De plus, la dimension des problèmes est plus petite pour les problèmes opérationnels. Cependant, la différence fondamentale réside dans le fait que les problèmes DAYOPS doivent être résolus durant une très brève période de temps. Cet état de fait nous force constamment à devoir choisir entre une solution optimale et une solution obtenue rapidement puisque, dans un problème opérationnel, il arrive souvent qu'une solution non-optimale obtenue rapidement soit plus valable qu'une solution optimale qui requiert trop de temps de calcul.

Pour la gestion des horaires durant le jour d'opération, nous supposerons que la grille horaire, les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage existent déjà. Cette hypothèse est réaliste car elle correspond au mode de fonctionnement des compagnies. Les décisions d'opération impliquent deux types de processus. Le premier, appelé la *gestion des avions*, comprend la mise à jour de l'affectation du type d'avions aux vols et la mise à jour des itinéraires d'avion. Le deuxième, appelé la *gestion des équipages*, comprend la mise à jour des rotations d'équipage et de leurs affectations aux employés. Ces deux types de problèmes sont extrêmement complexes à cause de leur nature

combinatoire. Les horaires d'équipages doivent être choisis parmi un très grand nombre de possibilités qui satisfont à la fois les contraintes opérationnelles et les intérêts tant de la compagnie aérienne que du public.

Lorsqu'une annulation d'un ou de plusieurs vols, des changements des heures de départ, ou n'importe quel autre type de changements d'horaire planifié surviennent, de nouveaux itinéraires d'avion et de nouvelles rotations d'équipage doivent être conçus pour satisfaire toutes les contraintes opérationnelles. Cette exigence indique clairement la nécessité de développer un système de soutien à la correction des irrégularités. Un tel système peut contenir plusieurs stratégies dépendant du niveau des irrégularités rencontrées. Les stratégies possibles sont définies à partir de l'expérience, les données historiques, les caractéristiques spécifiques de l'horaire et à partir de l'image de la compagnie. Les stratégies possibles peuvent être :

- l'annulation d'un ou de plusieurs vols ;
- la modification de l'horaire des vols ;
- la modification des itinéraires d'avion ;
- la modification des rotations d'équipage ;
- les changements au niveau des règles opérationnelles (extension des temps permis, augmentation des vitesses, etc.).

L'environnement de travail typique d'une compagnie aérienne durant la correction des irrégularités est représenté à la Figure 1.3. Le centre de régulation des

vols constitue la partie centrale du processus consistant à minimiser les effets négatifs créés par les perturbations. Il est entouré de deux sous-systèmes indépendants (quelquefois en conflit) qui représentent en fait les sources des irrégularités possibles. Le premier sous-système, présenté du côté gauche de la figure, contient les différents éléments situés à l'intérieur de la compagnie, tels le département commercial, le service technique et le service de gestion des équipages, de même que les avions se trouvant aux différents aéroports ou dans l'espace aérien. Le deuxième sous-système, du côté droit de la figure, contient les différents éléments situés à l'extérieur de la compagnie, tels les aéroports, l'ATC et les agences météorologiques.

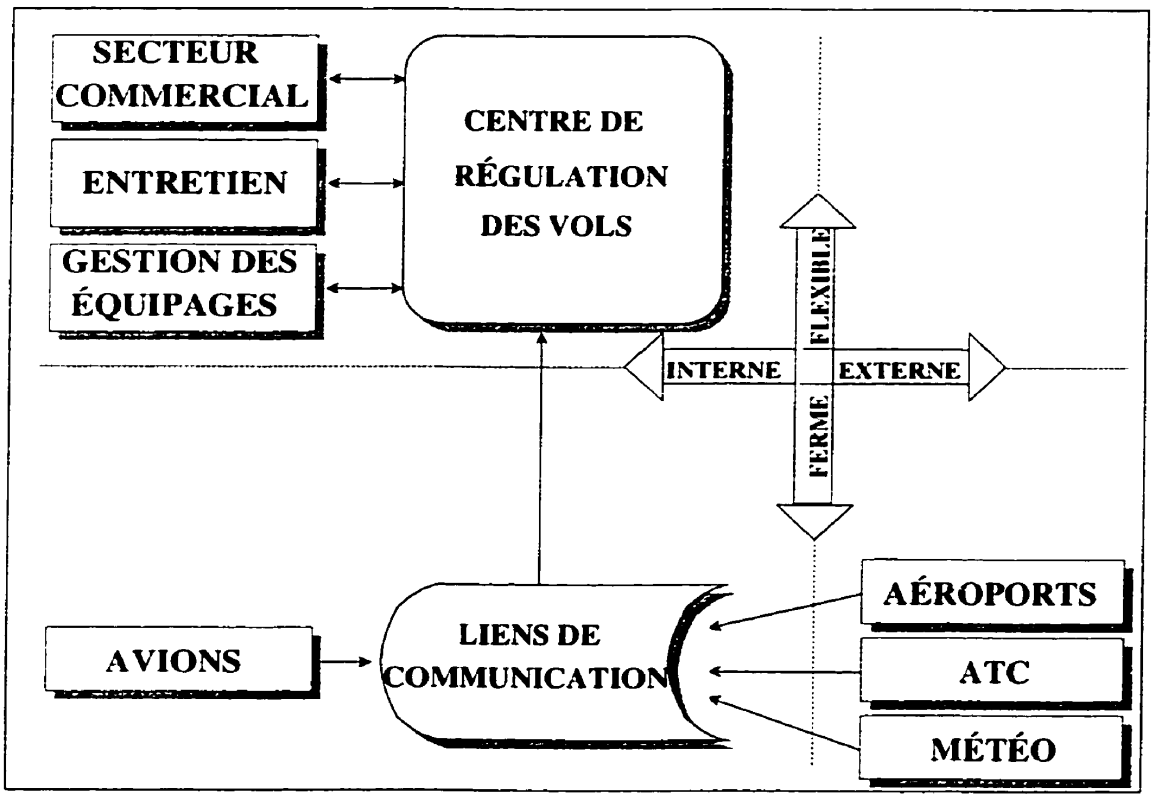

Figure 1.3 : L'environnement de travail dans une compagnie aérienne

Lors de l'exécution d'un horaire planifié d'une compagnie aérienne, le gestionnaire des vols reçoit des informations sur les perturbations de toutes les sources énumérées ci-dessus. Les informations émanant des avions, des aéroports, de l'ATC et des agences météorologiques parviennent au gestionnaire par le biais d'un lien de communication qui n'est en quelque sorte qu'un appareil facilitant le transfert d'informations des éléments les plus éloignés dans le système jusqu'au gestionnaire des vols. D'un côté, cette manière de communiquer procure au gestionnaire des informations d'entrée avec lesquelles il doit vivre sans qu'il y ait possibilité de changements. Nous appellerons cette sorte d'information "information ferme". D'un autre côté, le gestionnaire a à sa disposition un lien de communication directe à double sens avec les départements situés à l'intérieur de la compagnie et, généralement, dans le même édifice. Aussi, il peut ainsi négocier avec les représentants de ces départements : il reçoit l'information, il la traite, puis il leur demande s'ils sont satisfaits. Ces derniers l'informent du coût afférent à sa décision pour les différents départements et ainsi, ils tentent ensemble de trouver une solution qui satisfera tous les participants. L'information qui circule entre le gestionnaire des vols et les différents départements de la compagnie pourrait s'appeler "information flexible".

La qualité de cette information flexible est déterminée par plusieurs facteurs. Les départements dans une compagnie aérienne ont leur façon traditionnelle de gestion de l'information. Souvent la communication entre les départements n'est pas assez consistante et les départements n'adaptent pas leurs informations les uns par rapport aux

autres. Par conséquent, les informations normalement partagées entre les départements n'ont pas de liens communs. Par exemple, il n'est pas évident de trouver combien d'avions d'un certain type et combien d'équipages compatibles avec ce type d'avions sont disponibles à un moment donné dans une station. Dans ce "déluge" d'informations qui entre par les liens de communication, il est difficile d'avoir une connaissance complète de la situation réelle au moment d'une irrégularité. En plus, certains facteurs ne sont pas quantifiés de façon précise, ce qui exclut toute possibilité d'un calcul exact du coût d'opération.

La majorité des systèmes DAYOPS développés à ce jour sont très simples du point de vue de la recherche opérationnelle. Les modèles en vigueur permettent habituellement une visualisation améliorée du statut réel de la compagnie aérienne. Il est à l'occasion possible d'entrer des informations sur une base temporaire pour vérifier si un changement donné est acceptable. On peut même aller jusqu'à calculer certains aspects du coût de ce changement. Dés que l'utilisateur est satisfait du travail effectué, les informations peuvent être enregistrées. À l'occasion, quoique rarement, une approche heuristique simple peut suggérer certaines solutions. Dans tous les cas, le gestionnaire des vols constitue une figure centrale dans ces modèles.

Étant donné que nous croyons qu'une bonne visualisation de la grille horaire est très importante, nous suggérons donc non seulement une meilleure visualisation de cette grille, mais une meilleure visualisation de l'information supplémentaire requise dans le

processus de décision, de même que quelques outils du type menu d'options à l'écran. D'ailleurs, le but fondamental est de développer des outils d'optimisation, exacts ou heuristiques, qui aideront le gestionnaire des vols à produire des décisions valables. Donc, le rôle du gestionnaire sera plutôt renforcé que diminué.

Cette thèse présente deux modèles de gestion des horaires, les premiers de ce type dans la littérature. Dans le deuxième chapitre nous présentons un modèle d'optimisation pour une situation restreinte lorsque les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage ne sont pas modifiés. Ce qui signifie qu'on cherche l'horaire optimal de vols. Aux troisième et quatrième chapitres, nous exposons un nouveau modèle intégré où les horaires, les itinéraires et les rotations sont optimisés simultanément. Les deux chapitres proposent deux méthodes de résolution différentes. Dans le troisième chapitre, nous utilisons une résolution séquentielle : la sortie d'un problème servant d'entrée au problème suivant. Ainsi on assigne d'abord les avions aux vols sans considérer les pilotes. Puis, on résout le problème des rotations des pilotes étant donné l'affectation des avions. Au quatrième chapitre, nous utilisons la décomposition de Benders en choisissant le problème maître et le sous-problème suivant l'ordre habituel de planification. Ce qui signifie que le problème maître représente le problème de gestion des avions et le sous-problème correspond au problème de gestion des équipages. Dans le même chapitre nous présentons une idée originale où le problème maître et le sous-problème sont intervertis, i.e., le problème maître devient le problème de gestion des équipages et le sous-problème représente le problème de gestion des avions. Cette

dernière approche est très intéressante car le sous-problème devient très simple à résoudre.

1.5 Revue de la littérature

La publication de travaux de recherche sur la construction d'itinéraires et d'horaires d'avions remonte au début des années 60. La plupart des articles parus sur le sujet durant cette décennie traitaient surtout de petits problèmes. Parfois ce sont de petites parties de problèmes généraux. Les problèmes habituels sont, par exemple, de déterminer les vols à exécuter, de déterminer leurs fréquences et de planifier l'horaire des avions selon des itinéraires prédéterminés. De plus, dans la plupart de ces articles, on ne prenait pas en considération l'existence de plusieurs types d'avion, les fenêtres de temps de départ et les contraintes additionnelles. Les chercheurs utilisaient des approches optimales pour résoudre des modèles très simplifiés. L'article synthèse de Simpson (1969) constitue une bonne revue de ces travaux.

La plupart des articles parus entre la fin des années 60 et le début des années 80 portent sur des modèles plus grands et plus sophistiqués qui incluent un plus grand nombre de contraintes réelles. Toutefois, les ordinateurs de l'époque étant beaucoup moins puissants que ceux d'aujourd'hui, il n'était pas possible d'utiliser des méthodes exactes d'optimisation et les chercheurs devaient avoir recours aux approches

heuristiques. Le lecteur trouvera une bonne revue de ces contributions dans Etschmaier et Mathaisel (1985).

Finalement, les recherches de la dernière période de 10 ans portent sur des modèles d'optimisation pour traiter des problèmes plus réalistes, soit des modèles qui incluent plusieurs types d'avion, les contraintes additionnelles, les fenêtres de temps sur l'heure de départ, etc. Même si dans le passé l'optimisation ne permettait pas de résoudre des problèmes réels, il existe aujourd'hui plusieurs raisons pour amender ce point de vue : des ordinateurs plus performants, des méthodes nouvelles et améliorées telles les méthodes de décomposition, de relaxation, d'évaluation et de séparation, etc., n'en constituent que quelquesunes. Même si les méthodes d'optimisation ne sont pas utilisées jusqu'à la pleine optimalité, donc comme des heuristiques, elles offrent la possibilité d'obtenir de meilleures solutions que celles résultant des approches heuristiques. Elles offrent aussi une plus grande robustesse et la qualité des solutions est moins dépendante des données du problème. Desrosiers *et al.* (1995) présentent une excellente revue des algorithmes développés jusqu'à ce jour ; ces auteurs se concentrent particulièrement sur les méthodes d'optimisation.

Dans les articles de recherche de pointe mentionnés ci-dessus, on trouve plusieurs méthodes de résolution de problèmes d'itinéraires et de planification d'horaires d'avion. La première section de notre revue de littérature présente quelquesunes des méthodes pertinentes pour notre recherche. La deuxième section est consacrée aux

modèles d'optimisation utilisés pour la planification d'itinéraires et d'horaires d'avion. La dernière section présente quelquesuns des systèmes DAYOPS décrits dans l'ensemble des ouvrages publiés sur le sujet.

1.5.1 Méthodes d'optimisation utilisées dans la littérature

Nous présentons ici une revue des méthodes d'optimisation utilisées dans les modèles proposés dans cette thèse.

La théorie des graphes et réseaux s'est avérée fort efficace dans plusieurs champs d'application. Comme Evans et Minieka (1994) l'ont mentionné, on doit la première contribution à ce sujet au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783). Par ailleurs, Dantzig et Fulkerson (1954) ont été les premiers à formuler un problème d'itinéraires de véhicules pour effectuer des tâches avec horaires fixes en tant que problème de flot à coût minimum. Depuis la parution du travail des pionniers Ford et Fulkerson (1962), la théorie des flots dans les réseaux a rapidement profité d'une réception très favorable de la part des chercheurs. Le lecteur trouvera une revue des modèles et des méthodes de réseau utilisés dans la résolution des problèmes d'itinéraires de véhicules et d'équipages dans Carraresi et Gallo (1984). Ces derniers ont élaboré une structure générale à même d'inclure quelquesuns des modèles les plus pertinents utilisés dans les ouvrages parus sur le sujet. La plupart des travaux discutés dans ce chapitre utilisent une forme ou une autre des modèles de réseau dans leur modélisation. Jusqu'à

ce jour, un nombre considérable d'algorithmes d'optimisation applicables aux réseaux et aux graphes, plus ou moins complexes selon les cas, ont été développés. Une revue de ces algorithmes a été effectuée par Gondran et Minoux (1984) et Evans et Minieka (1994).

La *programmation dynamique* (PD) est utilisée dans divers articles pour l'optimisation de certains modèles ou, plus fréquemment, pour l'optimisation de sous-problèmes de certains modèles. Son utilisation est limitée aux problèmes séquentiels qui peuvent être résolus par étapes. Les fondements théoriques de la PD ont été élaborés par Bellman (1957). Un nombre considérable de livres et d'articles traitant de la PD sont parus à ce jour. Un des premiers articles traitant des horaires des compagnies aériennes à partir de la PD a été écrit par Hyman et Gordon (1968). Le modèle proposé assigne les avions aux segments de vols de manière à ce que le nombre de passagers transportés soit maximal tout en prenant en considération la préférence de ces derniers pour le temps du départ. Simpson (1969) a présenté le modèle AR-1 qui permet d'établir l'itinéraire qui maximise le revenu d'un seul avion pour un horaire donné. L'auteur observe que l'inefficacité de la PD est dûe aux grandes tailles des modèles correspondants. Par contre, la possibilité d'incorporer différentes sortes de contraintes rend tout de même cette approche intéressante. Les rotations d'avions sont obtenues séquentiellement, i.e., avion par avion. Toutefois les solutions optimales locales pour chaque appareil ne forment pas une solution optimale globale pour toute la flotte. L'approche PD est fréquemment utilisée pour résoudre les sous-problèmes engendrés par la méthode de

décomposition de Dantzig-Wolfe, comme c'est le cas dans Lavoie *et al.* (1988), Desrochers *et al.* (1992), Barnhart *et al.* (1994), Desrosiers *et al.* (1995), Desaulniers *et al.* (1997), etc. Dans tous ces cas, le sous-problème est un problème de plus court chemin avec contraintes de temps. Dans la décomposition de Dantzig-Wolfe, la PD est utilisée pour générer des itinéraires d'avions ou des rotation d'équipages, selon le problème considéré.

Finalement, une approche plus complète utilise *la partition ou le recouvrement d'ensemble* pour représenter plusieurs problèmes d'itinéraires de véhicules. Il s'agit de partitionner les nœuds à visiter en chemins de véhicules. Levin (1971) a été un des premiers à proposer cette approche. Certaines relaxations et décompositions sont généralement utilisées pour résoudre ce problème. Desrosiers *et al.* (1995) offrent une bonne revue des méthodes utilisées, lesquelles seront traitées de façon plus détaillée dans la prochaine section.

Nous nous intéressons dans cette thèse à la résolution de programmes mathématiques de grandes tailles en variables entières et avec certaines contraintes non linéaires. Pour résoudre ce genre de problème, l'utilisation des méthodes de décomposition est inévitable. En effet, la décomposition permet de ramener la résolution d'un problème difficile (de grande taille) à la résolution d'une suite de problèmes plus faciles (de dimensions plus petites). Nous étudierons les principales méthodes de décomposition comme la décomposition de Dantzig-Wolfe et la décomposition de

Benders.

Habituellement, les problèmes de gestion d'avions ou d'équipages ont une structure de contraintes diagonale par blocs. Il y a également deux types de structures, une avec des contraintes couplantes et l'autre avec des variables couplantes. La première structure se résout avec la décomposition de Dantzig-Wolfe et la deuxième avec la décomposition de Benders. En fait, Lasdon (1970) établit la correspondance entre les deux approches : l'algorithme de Benders correspond à l'algorithme de Dantzig-Wolfe appliqué au dual du même problème. Cependant, l'intérêt de l'algorithme de Benders réside essentiellement dans le fait qu'il s'applique, non seulement aux grands programmes linéaires décomposables, mais également à beaucoup d'autres problèmes, par exemple les programmes linéaires mixtes et les programmes partiellement non linéaires.

Pour l'étude détaillée de la décomposition de Dantzig-Wolfe, on peut voir Dantzig (1960) et Dantzig et Wolfe (1961). Récemment, Stojković *et al.* (1998) ont utilisé cette méthode de décomposition pour résoudre un problème de gestion des équipages aériens durant les opérations quotidiennes. Un développement général de la décomposition de Benders est présenté dans Benders (1962) et Lasdon (1970). Récemment, Cordeau *et al.* (1998) ont utilisé la décomposition de Benders pour l'affectation simultanée des locomotives et des wagons aux trains de passagers.

Étant une méthode très importante pour notre thèse, nous allons présenter ici un développement détaillé de la décomposition de Benders donné par Salkin (1975) à cause de sa présentation compacte. Considérons le programme mixte :

$$\text{Minimum} \quad cx + dy \tag{1.1}$$

sujet à :

$$Ax + Dy \geq b \tag{1.2}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \tag{1.3}$$

$$x \textit{ entier} \tag{1.4}$$

où A est une matrice $m \times n$, D est une matrice $m \times n'$, b, c et d sont des vecteurs de dimension m, n et n' respectivement. Pour une solution x donnée, ce problème devient :

$$v_{SP}(x) = \text{Minimum} \quad dy \tag{1.5}$$

sujet à :

$$Dy \geq b - Ax \tag{1.6}$$

$$y \geq 0 \tag{1.7}$$

et son dual est :

$$v_{SP}(x) = \text{Maximum} \quad u(b - Ax) \tag{1.8}$$

sujet à :

$$uD \leq d \tag{1.9}$$

$$u \geq 0. \tag{1.10}$$

Notons que, par le théorème de la dualité en programmation linéaire, si le problème dual pour un certain x n'a pas de solution réalisable, alors le problème primal pour ce x particulier n'a pas de solution réalisable ou bien il est non borné ; dans ce cas, le problème mixte initial n'a pas de solution optimale bornée. Si le problème dual pour un certain x est non borné alors le problème primal pour ce x particulier n'a pas de solution réalisable et par suite, le programme mixte (1.1) - (1.4) n'a pas de solution pour ce x.

Notons par u^p $(p= 1, \ldots, P)$ les points extrêmes du polyèdre convexe $U= \{u\geq 0 \mid uD\leq d\}$ et par λ^s $(s= 1, \ldots, S)$ les directions des rayons extrêmes. Si pour un x, il existe un λ^s, tel que $\lambda^s(b\text{-}Ax)> 0$, alors le maximum de $u(b\text{-}Ax)$, pour $u\in U$, est non borné. Également, si $u(b\text{-}Ax)$, pour $u\in U$, est non borné, alors il existe une direction λ^s pour ce x tel que $\lambda^s(b\text{-}Ax)> 0$. Donc, si le problème original est réalisable et borné, les relations

$$\lambda^s(b - Ax) \leq 0, \quad s = 1,\ldots,S \tag{1.11}$$

représentent les conditions nécessaires et suffisantes sur x qui permettent d'avoir une solution réalisable en y. Comme nous nous intéressons seulement à ce cas, nous pouvons réécrire le programme (1.1) - (1.4) comme suit :

$$\underset{x}{\text{Minimum}} \quad \left(cx + \underset{p=1,\ldots,P}{\text{maximum}}\, u^p (b - Ax) \right) \tag{1.12}$$

sujet à :

$$\lambda^s (b - Ax) \leq 0\,, \quad s = 1,\ldots,S \tag{1.13}$$

$$x \geq 0 \textit{ et entier}\,. \tag{1.14}$$

En posant

$$z = \underset{p=1,\ldots,P}{\text{maximum}}\, u^p (b - Ax) \tag{1.15}$$

nous avons $z \geq u^p (b - Ax)$ pour $p = 1, \ldots, P$, et le programme (1.1) - (1.4) devient équivalent au programme mixte :

$$v_{MP} = \underset{x,z}{\text{Minimiser}} \quad cx + z \tag{1.16}$$

sujet à :

$$z \geq u^p (b - Ax)\,, \quad p = 1,\ldots,P \tag{1.17}$$

$$0 \geq \lambda^s (b - Ax)\,, \quad s = 1,\ldots,S \tag{1.18}$$

$$x \geq 0 \textit{ et entier}\,. \tag{1.19}$$

Le critère d'arrêt est déterminé de la façon suivante. On sait que v_{MP} est une borne inférieure sur la solution optimale et que pour $\bar{x}$ donné, $c\bar{x} + v_{SP}(\bar{x})$ est une borne

supérieure lorsque le sous-problème SP est réalisable. On arrête donc la procédure itérative lorsque $v_{MP} = c\bar{x} + v_{SP}(\bar{x})$. Si on interprète la variable z comme la contribution du sous-problème à la valeur de v_{MP}, alors le critère d'arrêt $z = v_{SP}(x)$ s'explique comme le moment où la valeur du sous-problème est entièrement transférée par z au problème maître. Il suffit ensuite de calculer la valeur optimale du vecteur $y = \bar{y}$ dans le sous-problème pour la valeur $\bar{x}$ donnée.

1.5.2 Modèles de planification

Les modèles de planification d'itinéraires et d'horaires d'avion constituent un des domaines de recherche les plus dynamiques dans l'industrie aérienne. Tel que mentionné ci-dessus, les horaires de vols sont généralement déterminés à partir des prévisions de la demande, des initiatives tactiques et stratégiques et des variations saisonnières de la demande. Les méthodes de prévision, qui ne sont pas l'objet de notre recherche, ne sont pas discutées ici. De plus, le problème de l'horaire des vols sera discuté dans cette thèse de façon sommaire. Nous avons choisi, pour la première partie de cette section, de décrire seulement deux articles sur le sujet ; le deuxième article représente la base pour le modèle présenté dans le Chapitre 2. La partie suivante, qui est la partie principale de cette revue de littérature, portera sur les modèles d'itinéraires d'avion et sur leur développement historique. La plupart de ces modèles sont basés sur un horaire fixe. Seulement quelquesuns des derniers modèles discutés dans cette section considèrent la

flexibilité de l'horaire. L'un d'entre eux sera décrit plus en détail puisqu'il constitue le point de départ pour les modèles présentés dans les Chapitres 3 et 4. Enfin, dans la dernière partie, nous décrivons un modèle qui incorpore les contraintes d'équipage durant la création des itinéraires d'avion.

Horaires des vols

Les modèles d'optimisation d'horaire des vols selon les prévisions de demande sur le marché de transport aérien, ses variations saisonnières et les initiatives tactiques et stratégiques ne sont pas très utilisés dans les compagnies aériennes. En général, les compagnies utilisent des heuristiques élémentaires pour la construction d'horaire des vols. Comme nous avons mentionné auparavant, nous ne traitons pas ici les modèles de construction d'horaire des vols car ce n'est pas dans l'orientation de cette thèse.

Il revient à Soumis *et al.* (1980) d'avoir développé un premier modèle pour déterminer les grilles horaires des compagnies aériennes qui maximisent à la fois les profits de la compagnie et la satisfaction des passagers. La méthode proposée est une adaptation heuristique de l'algorithme de Frank-Wolfe pour la résolution d'un problème en nombres entiers avec une structure spécifique. Cette technique consiste à résoudre alternativement le problème d'itinéraires d'avions pour sélectionner les vols qui améliorent les profits et le problème d'affectation des passagers à ces vols pour évaluer les revenus. Une méthode exacte optimisant simultanément la flotte et les passagers peut

être développée avec la décomposition de Benders. Cette approche ne fait pas partie de notre thèse. Nous utilisons cette idée plutôt pour optimiser simultanément l'utilisation de la flotte et des équipages. Le problème incorporant les passagers, comme troisième élément important de résolution simultanée, sera laissé pour la recherche future.

L'optimisation des horaires pour un chemin fixé a été traité par Dumas *et al.* (1990) en considérant une fonction de coût convexe. Ils ont utilisé des fenêtres de temps pour le début des services avec une fonction de coût convexe pour prendre en considération la satisfaction des passagers. Ils ont aussi proposé une extension qui inclut des coûts linéaires sur les temps d'attente. Une approche semblable mais plus générale sera présentée dans le Chapitre 2.

Itinéraires des avions

Agin et Cullen (1975) ont traité des problèmes d'itinéraires de transport et de chargements de véhicules. Ils ont présenté un modèle de programmation en nombres entiers semblable au modèle de réseau multiflots. Ces problèmes sont résolus au moyen d'une approche heuristique basée sur la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe qui fonctionne comme suit : pour chaque avion, il existe un sous-problème qui génère des itinéraires prometteurs ; lorsqu'un de ces itinéraires est ajouté au problème maître, l'itinéraire précédent de l'avion en question est éliminé. Ainsi, l'exigence d'intégralité qui veut qu'un seul itinéraire soit assigné à chaque avion est toujours satisfaite.

Mathaisel (1983) se penche sur le problème d'affectation de flottes en considérant une demande élastique. Il inclut dans le modèle des variables telles le prix du marché et le niveau du service. La fonction objectif proposée est non-linéaire et la non-linéarité est traitée en séparant les objectifs de revenu selon deux critères : la maximisation du transport effectué et la maximisation du revenu relatif ou coût du billet. Un troisième critère est inclus pour minimiser les coûts d'opération. Une approche "Goal Programming" est utilisée pour réaliser ces multiples objectifs. La théorie des cellules élaborée par Mathaisel (1983a) est une application de la classification en transport aérien. Dans ses travaux, Mathaisel (1983a) a agrégé les vols en agrégats qu'il appelle cellules. En groupant les vols en cellules homogènes, le nombre d'éléments à considérer est réduit. Au lieu de faire des analyses de planification de flottes à partir des vols, le modèle développé prend en compte un plus petit nombre de cellules, lesquelles représentent des groupes de vols possédant des caractéristiques similaires.

Depuis les années 80, plusieurs articles portant sur la représentation graphique des horaires des compagnies aériennes ont vu le jour. Cette recherche est particulièrement importante pour les systèmes interactifs où les responsables de la prise de décisions doivent reconnaître les problèmes et pouvoir intervenir rapidement et facilement. Deckwitz (1984) a proposé ce type de systèmes de soutien pour la planification d'horaires dans l'armée de l'air américaine. En plus de recherches semblables sur la représentation graphique et les systèmes interactifs, De Lamotte (1985) a suggéré quelques algorithmes heuristiques simples pour créer les itinéraires

initiaux et pour incorporer des demandes de vols additionnels.

Nakazawa (1986) a proposé un algorithme heuristique pour les itinéraires d'avions basé sur une méthode de planification d'horaires au jour le jour appliquant la règle FIFO. Cet algorithme heuristique est fondé sur l'expérience opérationnelle dans le développement de grilles horaires domestiques pour Japan Airlines. Il tente de couvrir tous les vols avec la flotte à sa disposition en retardant les temps de départ et en accélérant le temps de vol.

Abara (1989) a proposé un modèle de programmation linéaire en nombres entiers pour le problème incluant des temps fixes de départ. Ce modèle de réseau multiflots incorpore des contraintes additionnelles telles le nombre maximum d'avions dans une station donnée pendant la nuit, le nombre maximum d'intervalles utilisés dans une station donnée (time slot), etc. L'auteur ne spécifie pas la technique utilisée pour résoudre ce grand problème en nombres entiers mais il rapporte des résultats satisfaisants obtenus avec des problèmes réels de la compagnie American Airlines.

Hane *et al.* (1993) ont aussi proposé un modèle de réseau multiflots pour le problème incluant des temps fixes de départ. Leur modèle utilise certaines agrégations des variables de flot du modèle d'Abara. Les auteurs ont résolu des problèmes de grandes dimensions en fixant a priori plusieurs connexions, ce qui permet de réduire substantiellement la dimension du problème. Ils ont comparé l'algorithme primal du

simplexe, l'algorithme dual du simplexe et un algorithme de points intérieurs. Ils ont ainsi découvert qu'un algorithme de points intérieurs arrive à une solution optimale plus rapidement que les autres pour un petit nombre de types d'équipement. En ce qui concerne les problèmes avec un plus grand nombre de types d'équipements, l'algorithme dual du simplexe était plus rapide. La stratégie de perturbation du coût au sol utilisée pour éviter la dégénérescence a réduit le temps d'exécution du simplexe primal. Toutefois, cette réduction n'était pas suffisante pour dépasser les performances des deux autres algorithmes. Ils ont aussi utilisé différentes règles de branchement dans le schéma de séparation et d'évaluation pour obtenir une solution en nombres entiers.

Levin (1971) a été le premier à proposer un modèle incluant des temps de départ variables pour les segments de vols, i.e., des fenêtres de temps. Son modèle considère un nombre fini de valeurs, en discrétisant les heures de départ possibles. Le problème est formulé comme un programme linéaire en nombres entiers avec des contraintes de bornes supérieures généralisées. Le fait que la relaxation linéaire fournisse la plupart du temps une solution en nombres entiers constitue un aspect intéressant de cette formulation. Cependant, ce modèle ne prend pas en considération plusieurs types d'avions, ni les contraintes additionnelles. Des formulations plus complètes ont été proposées par Agin (1972) et Chan (1974).

Le problème des itinéraires avec fenêtres de temps est une généralisation du problème des itinéraires de véhicules. Lorsque se présente le cas particulier où les capacités des véhicules ne sont pas contraignantes, cette situation est désignée sous le

nom de problème de multi-voyageurs de commerce avec fenêtres de temps. Nous devons à Desrosiers *et al.* (1984) une approche optimale pour ce cas. Mais, ce n'est que plus tard que Desrochers *et al.* (1992) ont proposé une méthode pour déterminer une solution optimale de problème des itinéraires de véhicules avec fenêtres de temps basée sur la génération de colonnes et où le problème maître est un problème de recouvrement et les sous-problème sont des problèmes de plus courts chemins. Desaulniers *et al.* (1997) ont présenté deux formulations qui correspondent à des modèles de programmation en nombres entiers pour le problème d'horaires et d'itinéraires de véhicules avec fenêtres de temps. Ils ont appliqué ces formulations à des problèmes spécifiques d'horaires et d'itinéraires d'avions périodiques. Dans la première formulation, ils ont défini une variable binaire pour chaque itinéraire possible pour un type d'avions donnant ainsi lieu à un grand problème de type partitionement d'ensemble. Dans la deuxième formulation, ils ont défini une variable binaire qui représente une connexion possible entre deux segments de vols exécutés par un avion particulier. Pour chaque type d'avions, ils ont défini ces variables sur un réseau espace-temps identique à celui utilisé dans la méthode de génération de colonnes du premier modèle. Cette deuxième formulation engendre un modèle de réseau multiflots avec des variables de flot et des variables de temps additionnelles. Ce modèle constitue la généralisation des modèles développés par Abara (1989) et Hane *et al.* (1993) si l'on considère les contraintes additionnelles de fenêtres de temps de départ. Ils ont aussi prouvé que ces deux formulations sont équivalentes. Finalement, les auteurs concluent, selon les tests obtenus sur des problèmes réels, que la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, i.e., la technique de génération de

colonnes, peut être utilisée pour résoudre des problèmes réels en des temps raisonnables.

D'autre part, Desaulniers *et al.* (1998) ont présenté différentes stratégies de séparation et d'évaluation compatibles avec l'approche de génération de colonnes. Les auteurs présentent un modèle général qui intègre les différents problèmes d'itinéraires de véhicules avec contraintes de temps et les différents problèmes d'horaires d'équipages. On trouve aussi dans cet article une méthodologie de décomposition pour des problèmes multiflots qui fait en sorte que chaque module dérivé de la décomposition peut être résolu en utilisant une variété de stratégies et d'algorithmes. Les auteurs se sont concentrés sur une extension du principe de décomposition de Dantzig-Wolfe. Cette méthode de décomposition est même valide pour les contraintes et les fonctions objectif non-linéaires.

Horaires d'avion et d'équipage

Sklar *et al.* (1990) ont traité à la fois des horaires d'avions et d'équipages durant les opérations de pont aérien de l'armée de l'air américaine. Il existe quelques différences fondamentales entre la planification d'horaires pour une opération de pont aérien et la planification d'horaires pour une compagnie aérienne commerciale, comme l'absence des horaires fixés pour les avions utilisés dans le pont aérien, les différentes restrictions d'avions et d'équipages, etc. L'approche heuristique proposée commence avec un horaire réalisable (prédéfini ou engendré automatiquement). Puis, à partir de cet horaire, on

procède à l'affectation des équipages aux segments de vols. Le problème de planification d'horaires d'avion est alors considéré à nouveau, etc. Cette approche "flip-flop" entre les assignations d'équipages et les horaires d'avion se poursuit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de progrès réalisé dans l'amélioration de l'horaire.

1.5.3 Les systèmes DAYOPS

Nous avons aussi recensé quelques articles traitant du problème DAYOPS. Comme nous l'avons mentionné, ce genre de problème doit être résolu en temps réel. Il est difficile de préciser quel temps de résolution correspond au temps réel car cela dépend de la compagnie et du type de problème. Cependant, il est généralement accepté que pour les problèmes de quelques dizaines de vols, le temps de calcul acceptable soit de l'ordre d'une minute. Pour les problèmes de quelques centaines de vols, le temps de calcul acceptable reste en dessous de dix minutes.

Teodorović et Guberinić (1984) ont indiqué l'importance du problème DAYOPS et ont proposé un modèle basé sur la méthode de séparation et d'évaluation. La fonction objectif de leur modèle minimise les pertes totales de temps des passagers sans annuler aucun des vols planifiés. Ce modèle n'inclut pas les exigences de planification d'équipages, les exigences du département de l'entretien ou les heures auxquelles l'aéroport est en opération. De plus, le modèle n'a pas été implanté ni expérimenté. Il n'existe donc aucune information sur les possibilités d'application du modèle.

Holst et Sorensen (1984) ont décrit un SAD pour la planification combinée des horaires et de l'entretien d'une flotte d'avions. L'algorithme utilise la règle LIFO pour générer les itinéraires initiaux, puis applique la méthode heuristique de couplage pour améliorer ces mêmes itinéraires. La règle LIFO est utilisée dans le but de garder les avions au sol pour de longues périodes, ce qui facilite le placement des entretiens. Les nœuds représentant les itinéraires sont assignés aux nœuds représentant les avions. L'algorithme d'assignation utilisé minimise le nombre total des heures de vols non utilisées entre les contrôles d'entretien. La deuxième partie du système permet au gestionnaire des vols d'intervenir manuellement et d'ajuster la solution proposée. Le logiciel, développé sur un ordinateur IBM 3033 et programmé en Pascal, est testé pour SAS sur un exemple réel de 32 avions DC-9 impliquant 559 tronçons de vols entre 46 aéroports. On a choisi de planifier sur un horizon de 3 jours. Les auteurs ont rapporté des temps CPU satisfaisants.

Gray (1985) de CP Air a proposé un SAD interactif semblable avec une interface graphique. L'algorithme FIFO établit l'itinéraire d'un avion et il procède en tenant compte du type d'avion et des sièges disponibles, ces deux caractéristiques étant définies par les exigences d'horaires. Les itinéraires des avions peuvent être modifiés par le gestionnaire des vols au moyen de quelques fonctions telles qu'échanger les itinéraires aux points communs, réassigner une occurrence de vol à un autre avion, supprimer des segments de vols, etc. Le système a été développé sur un ordinateur IBM 3279. Les expériences des utilisateurs ne sont pas rapportées.

L'algorithme heuristique développé par Teodorović et Stojković (1990) est basé sur la programmation dynamique. Le modèle a deux objectifs : minimiser le nombre total de vols annulés et minimiser les pertes totales de temps de tous les passagers sur le réseau aérien. Lorsque placés devant plusieurs solutions correspondant au même nombre de vols annulés, les auteurs choisissent la solution finale qui entraîne le moins de retards totaux pour tous les passagers sur les vols non-annulés. Le modèle proposé n'inclut pas les exigences de planification des équipages et les exigences d'entretien, mais inclut les heures durant lesquelles l'aéroport est en opération. Le plus grand problème testé a 80 segments de vols et les temps CPU obtenus sur un compatible PC se sont avérés acceptables.

Une approche semblable a été développée par Stojković (1990). Son approche inclut les heures pendant lesquelles l'aéroport est en opération, les exigences de planification des équipages et les exigences d'entretien. Le SAD proposé contient trois modules. Dans le premier, les rotations d'équipage sont créées au moyen des règles FIFO ou séquentiellement, au moyen d'une approche heuristique basée sur la programmation dynamique, i.e., des itinéraires localement optimaux. Puis, dans le deuxième module, des rotations d'avions sont créées d'une manière semblable, i.e., les mêmes méthodes sont utilisées pour résoudre les deux problèmes. Finalement, dans le troisième module, la faisabilité de l'exécution de l'entretien est vérifiée au moyen de quelques règles qui permettent l'échange entre les segments de vols si une rotation particulière n'est pas réalisable. Généralement, les exigences d'entretien constituent des problèmes à la fois de

très grandes dimensions et fort complexes. Afin de simplifier, l'auteur a divisé la flotte en deux groupes selon des critères d'entretien : les avions critiques et les avions en règle. Les avions dits critiques sont ceux dont les ressources expirent le jour des opérations courantes (les ressources représentent le nombre d'heures de vols pendant lesquelles un avion peut rester en opération avant d'avoir à subir un contrôle technique). Les temps CPU obtenus sur un ordinateur PC sont acceptables pour les problèmes de petites dimensions (maximum de 80 tronçons). La dimension des problèmes était limitée par les capacités de mémoire imposées par l'ordinateur utilisé.

Rakshit (1990) et Krishnamurthy (1991) ont présenté un système modulaire pour traiter le problème des opérations irrégulières chez United Airlines. Les auteurs ont développé deux modules dans ce système : "Aviseur Retard et Échange" (Delay and Swap Advisor) et "Aviseur Annulation" (Cancellation Advisor). Ces deux modules sont conçus pour recommander spécifiquement des retards d'avion optimaux, des échanges et des annulations. Ces recommandations s'adressent aux responsables du Système de contrôle des opérations lorsque surviennent des pénuries temporaires d'avions. Les deux modules sont présentés comme un modèle de réseau de flot à coût minimum. Le réseau est construit en tenant compte des contraintes opérationnelles et des contraintes d'équipages et d'entretiens d'avions. Une capacité unitaire est assignée à tous les arcs dans le réseau. Le flot total requis dans le réseau est égal au nombre de pénuries. Pour résoudre le problème de flot à coût minimum, un algorithme dual est implanté. Les chemins les plus courts sont générés successivement en utilisant un algorithme de

chemin le plus court enchâssé de l'origine aux destinations jusqu'à ce que les exigences de flot soient satisfaites. Les auteurs précisent que la première solution réalisable trouvée est optimale. L'utilisateur définit l'endroit d'échange possible et les pénuries multiples peuvent alors être utilisées simultanément. Les deux modules fonctionnent en temps réel en utilisant des données relatives à l'état courant de la compagnie aérienne, alors que les coûts assignés aux arcs du réseau sont basés sur une combinaison de données courantes et historiques. Les éléments de coût du réseau sont donnés pour les deux systèmes mais on n'offre aucune information relative à la formulation mathématique et aux processus de résolution.

Notre revue de la littérature nous permet d'affirmer que le problème DAYOPS mérite l'attention des chercheurs. Le lecteur a pu constater que le problème DAYOPS n'a pas reçu à ce jour de solution satisfaisante. Le projet « Operations Control Automation System » préparé à Air Canada (1993) illustre clairement notre constatation. Dans sa forme actuelle, ce projet ne représente qu'un système de suivi des avions (avec quelques options additionnelles). En bref, il permet une meilleure visualisation du statut réel de la compagnie aérienne. Ce système ne constitue en fait qu'une première étape dans le développement d'un système complet et compétitif pour les problèmes DAYOPS.

CHAPITRE 2

Mise à jour de la planification en conservant les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage

Lorsque les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage planifiés sont non réalisables en raison des irrégularités, nous cherchons alors une mise à jour qui minimisera les inconvénients résultant des changements. Nous proposons dans ce chapitre un modèle qui garde intacts les itinéraires d'avion et d'équipage en retardant certains vols. Ce type de problème, Day of Operation Scheduling – Time assignment (DAYOPS-T), représente un problème qui, actuellement, est traité manuellement dans les compagnies aériennes. Ce problème apparaît lorsque des irrégularités mineures surviennent pendant le jour d'opération. Ce modèle doit être essayé avant de faire une mise à jour plus profonde. Il devrait être suffisant pour beaucoup de cas de perturbations mineures. Pour des irrégularités plus importantes, nous proposons d'autres modèles qui seront discutés dans les chapitres suivants.

Le modèle proposé est présenté dans l'article décrit dans les sections suivantes. L'approche de résolution nous permet de modifier simultanément plusieurs éléments du réseau de transport d'une compagnie aérienne. Autrement dit, le nouvel horaire de vols rend simultanément réalisables les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage. La méthode de résolution utilisée est très efficace et permet de traiter rapidement des problèmes de grandes tailles mais avec des irrégularités mineures. Ce modèle pourrait être utilisé dans le centre de régulation des vols comme un premier outil pour tenter de réaliser une mise à jour. S'il existe une solution réalisable, le modèle trouve la solution optimale. S'il n'existe pas de solution, il faut utiliser d'autres outils pour modifier les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage. L'utilisation d'une méthode optimale est importante même si elle ne permet pas de résoudre tous les problèmes car les décisions d'opérations ont un impact direct sur le revenu d'une compagnie aérienne : ce sont ces décisions finales qui sont appliquées.

Dans ce chapitre nous proposons une formulation originale afin de modifier l'horaire des vols de façon à respecter simultanément l'affectation des avions, des équipages, la maintenance prévue et les connexions des passagers. Au départ, nous avons une structure de multiflots (avions, équipages, passagers). Nous montrons toutefois qu'on peut ramener le problème d'optimisation à un modèle de réseau classique. Notre réseau contient des nœuds associés au début et à la fin de chaque vol et des arcs correspondant aux vols et aux déplacements des avions, des équipages et des passagers entre les vols. Le temps pendant lequel chaque nœud peut être visité est limité

par une fenêtre de temps. En utilisant un processus de dualisation adapté à notre contexte, nous montrons que ce modèle peut être reformulé comme un problème de flot à coût minimum. Avec ce type d'approche, on peut donc facilement résoudre, en temps réel, ce type de problème pour les plus grosses compagnies aériennes.

Ce modèle peut être utilisé également comme module dans un modèle DAYOPS plus complexe. Par exemple, on peut réaliser une optimisation à deux niveaux : l'utilisateur qui n'est pas satisfait de la solution obtenue au premier niveau peut relaxer certaines contraintes d'équipages, annuler ou changer l'affectation de flotte pour certains vols; au second niveau, il peut utiliser le modèle proposé pour trouver un nouvel horaire de vols optimal par rapport aux changements effectués. Il est également possible d'intégrer ce modèle à un système de planification plus complexe permettant ainsi une interaction entre les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage. Ainsi, lorsque les phases de planification sont terminées dans une approche séquentielle, nous pouvons utiliser ce modèle et réoptimiser l'horaire de vols avec les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage déjà définis. Finalement, les petites compagnies aériennes peuvent utiliser le modèle proposé pour établir le meilleur horaire de vols pour ses itinéraires d'avion et rotations d'équipage planifiés, en tenant compte des connexions de passagers. Cet article est soumis pour publication dans *Transportation Science*.

2.1 An Optimization Model For a Real-Time Flight Scheduling Problem

Goran Stojković

François Soumis

GERAD and École Polytechnique, Montréal, Canada

Jacques Desrosiers

GERAD and École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada

Abstract

Airlines plan aircraft assignment and crew schedules in advance. When perturbations occur on the day of operation, the flight schedule may become infeasible and must be updated. This type of problem, which we refer to as the Day of Operation Scheduling problem (DAYOPS), is very important because of its impact on the entire system operated by an airline. DAYOPS decisions are the final ones that are enforced by the company. We propose an original formulation designed to determine a new flight schedule that fits with the existing aircraft assignment, maintenance schedule, crew schedule and passenger connections. The dual model can be formulated as a network flow model. Using this approach, it is possible to solve in real time a special case of DAYOPS problems at the largest airlines where there is no change to aircraft itineraries and the crew rotations. The proposed model produces an operational schedule that could considerably reduce the cost to the airline, a potentially decisive factor in an extremely competitive airline market. In addition, it may be possible to embed the proposed model in more sophisticated operational or planning systems, such as a two-level optimization model for aircraft and crew schedules.

Key Words: *Airline Operations, Real-time Scheduling, Aircraft Schedule, Crew Scheduling, Network Flow Model.*

2.1.1 Introduction

Airlines are faced with the problem of producing aircraft flight itineraries and crew rotations to provide scheduled service, while minimizing profits. This objective must be achieved in an environment that is difficult to predict because of such factors as fluctuating passenger demand, changing meteorological conditions, crew absenteeism and equipment reliability problems. Generally, two types of decisions must be made: planning decisions, which are taken in advance, and operational decisions, which are taken on the day of operation. The latter type of decision, which we refer to as the Day of Operation Scheduling (DAYOPS) problem, is the focus of this paper. The ability to find good solutions to this highly complex problem could have a significant impact on an airline's profitability and could enhance its competitive position.

Few researches have been conducted in this field. Most existing DAYOPS solutions focus on management information systems and graphical user interfaces but incorporate very primitive technology to support the decision process. Mathematical problem formulations and global optimization approaches are rare in this field. This paper proposes an optimal approach to solving a specific case in which planned service is modified through changes in the flight schedule, but where planned aircraft itineraries and crew rotations are not changed. After the problem description and the review of the literature we propose an original formulation designed to determine a new schedule that fits with the existing aircraft itineraries, maintenance schedule, crew schedule and

passenger connections. The model includes all these operational elements as constraints, which is a major contribution of this paper. To improve the computing time a dual of the initial formulation is solved. Although the number of variables is larger in the dual formulation, there are fewer constraints. Finally, after presenting the computational experience, we propose some further extensions of the model.

2.1.2 Problem Description

An airline creates a schedule, i.e., a list of flight legs that must be flown. Planned aircraft routes and crew schedules are then constructed to cover these flight legs. Reserve crew and passenger reservation information is on hand as well. Operational perturbations, which could make the flight schedule infeasible and require that it be adjusted, can arise for many reasons: bad weather conditions, headwinds on route, technical problems with aircraft, crew delays, passenger delays, peak-hour congestion at airports, over-saturated airways, technical problems with radio navigation equipment, problems at airport facilities, poorly calculated block and service times, catering difficulties, strikes, criminal acts, etc.

A flight dispatcher must adjust the planned schedule when perturbation occurs. He could delay or cancel some flights, swap aircraft among flights or request spare aircraft (if any exist). It may occasionally be possible to fix the schedule simply by delaying some flights without changing existing aircraft itineraries and crew rotations.

As airline costs and revenues vary from schedule to schedule, the new schedule must maximize economic benefits while taking account of the inconvenience brought about by schedule changes. To be valid, the new flight schedule must satisfy many constraints, over the period it covers, such as:

- number of available aircraft for every aircraft type in the fleet;
- aircraft seat capacity;
- restrictions on aircraft itineraries and maintenance considerations;
- crew availability;
- restrictions on crew rotations;
- precedence constraints between flights considering the aircraft routing, crew transfer and passenger connections;
- time window constraints imposed on departure and arrival times by market demands, landing time slots and airport operations (may be affected by out-of-operation periods, operating condition of ground equipment or weather).

DAYOPS problems must be solved quickly so that a flight dispatcher can react in real time to an actual perturbation. Most of the time a dispatcher prefers non-optimal but good solutions obtained quickly rather than optimal solutions that require large amounts of calculation. The heart of these problems, therefore, is to strike a balance between the optimality of the solutions and the speed with which they are obtained.

DAYOPS problems are very important because they have an impact on the entire system operated by an airline. The only way to solve these complex problems is to

develop effective decision support tools to assist flight dispatchers. This paper proposes an optimal tool to address the specific situation in which aircraft itineraries and crew rotations are fixed. However, time variables related to arrival and departure, flight duration, ground service, maintenance, connection and rest period may change. This specific situation we refer to as the DAYOPS-T problem. The letter *T* emphasizes that we are concerned with the special case of the DAYOPS problem where only time variables, and not binary variables such as ferry and cancelled flights, are permitted to change. If the schedule becomes infeasible because of a perturbation, the model developed here determines new aircraft departure times to re-establish an optimal schedule. The magnitude of a perturbation depends on the form of the network operated by an airline. For an airline with a hub and spoke network, the proposed model could be useful only for small perturbations. Even in these cases a flight dispatcher can first manually change some aircraft itineraries and crew rotations and after that use the proposed model to reoptimize the departure times.

2.1.3 Review of the Literature for Dayops Problems

The first articles concerning aircraft routing and scheduling appeared in the early 1960s. Most of these models were concerned with fixed schedules. Levin (1971) was the first to propose a model with variable departure times. His model used several departure times for every flight segment, obtained by discretizing the time interval in which departures were possible. The problem was formulated as a linear integer programming

model. More complete formulations of this problem were published by Agin (1972) and Chan (1974). Desaulniers *et al.* (1997) studied the daily aircraft routing and scheduling problem with time windows using integer linear programming. Their solution approach used the Dantzig-Wolfe decomposition method, i.e., column generation. The above authors did not consider aircraft maintenance, crew planning and passenger connections. We now discuss a number of approaches that consider some of these elements.

Teodorović and Guberinić (1984) stressed the importance of the DAYOPS problems and proposed a model based on branch and bound. The objective function minimized the passenger waiting time. The model does not allow for flight cancellations and does not consider crew and maintenance planning, airport operation times, and so on. Experimental results are not reported.

Holst and Sorensen (1984) proposed a decision support system (SAD) to plan aircraft itineraries for a given schedule and fleet, using a LIFO algorithm to generate initial aircraft itineraries. The purpose of applying this rule is to keep aircraft on the ground for longer periods of time so that maintenance can be carried out. A matching heuristic is used to improve the initial itineraries. An assignment algorithm is used to minimize idle hours between two successive maintenance periods. Nodes on one side of the graph represent aircraft itineraries; those on the other side represent aircraft. In addition, the flight dispatcher may intervene to manually change some proposed solutions. The developed software was tested on problems furnished by the SAS airline,

using 32 DC-9 aircraft flying 559 flight legs between 46 airports. Plans were constructed over a three-day time horizon. Satisfactory execution times were reported.

A similar interactive SAD system, but with a better graphic interface, is proposed by Gray (1985) from CP Air. A FIFO algorithm is used to create aircraft itineraries. The procedure then goes on to verify whether the aircraft type could satisfy a given schedule, based on seats available. Software tools are provided to assist flight dispatchers in manually adjusting aircraft itineraries to match aircraft at intermediate airports, assign flight legs to the other aircraft, delete flight legs, and so on. Experimental results are not provided.

Rakshit (1990), Krishnamurthy (1991) and Jarrah *et al.* (1993) describe a two-module system designed to address the DAYOPS problems for United Airlines. The system yields optimal solutions in cases of aircraft delays, aircraft exchanges and cancelled flights. The problem is modeled using general minimum-cost networks with multiple sources and sinks. Experimental results for the delay model were later presented by Rakshit *et al.* (1996).

Teodorović and Stojković (1990) developed a heuristic procedure based on dynamic programming to find optimal itineraries sequentially for every aircraft. The resulting local optima do not necessarily produce a global optimum for the entire fleet. There are two objectives: the first minimizes the number of cancelled flights while the

second minimizes lost passenger time on the flight network. If there are multiple solutions with the same number of cancelled flights, the second objective function is used to choose the solution involving the least lost passenger time. This model considers airport operating hours but does not consider crew planning and maintenance requirements. Teodorović and Stojković (1995) developed a similar but more complex approach. The authors developed a SAD containing three modules. The first creates crew rotations; the second creates aircraft itineraries using the crew rotations defined by the first module; and the third verifies the maintenance feasibility of the aircraft itineraries defined by the second module. The first two modules use a pair of algorithms to create crew rotations and aircraft itineraries: a FIFO heuristic and a sequential heuristic based on dynamic programming explained above. The third module contains a set of rules that allow exchanges between flight legs if some itineraries are not feasible because of maintenance demands. There are generally many highly complex maintenance constraints. In the interest of simplicity, the authors assume that the aircraft can be in only two states: critical aircraft and regular aircraft, where resources of critical aircraft expire on the current day of operations. Resources represent the number of hours and the number of flight legs during which an aircraft may be in operation, i.e., before an aircraft must go for a maintenance check. The developed software was tested on different examples where the biggest example has seven DC-9 aircraft flying 80 flight legs between 17 airports. The dimension of the problem was restricted by the use of an Intel 286 compatible computer with limited memory. Acceptable CPU times were reported.

Yan and Yang (1996) proposed four models to assist carriers in handling schedule perturbations caused by aircraft malfunction. These models consider four different strategic decisions: flight cancellations; flight cancellations with ferrying of spare aircraft; flight cancellations with delayed flights; and flight cancellations with ferrying of spare aircraft and delayed flights. The first two models are formulated as pure network flow problems and are solved using the network simplex method. The last two models are formulated as network flow problems with side constraints and are solved using Lagrangian relaxation and subgradient methods. These models do not consider crew planning, maintenance requirements and passenger connections. A total of 534 test problems, involving up to 2761 nodes and 42262 arcs, were tested on a VAX9320 workstation. Acceptable CPU times were reported.

Recently, Stojković *et al.* (1998) studied the operational crew scheduling problem where, due to schedule modifications, the classical crew pairing problem and the problem of constructing personalized monthly assignments are treated simultaneously. The problem is formulated as a Set Partitioning type model. Acceptable CPU times obtained by using a column generation approach were reported.

This review of the literature demonstrates that DAYOPS problems have not yet been adequately solved and deserve further attention. There is still no scheduling model which allows to formulate all practical constraints for a DAYOPS problem. This research proposes a model which allows to respect a lot of operational constraints. The

proposed model can be used in a specific, but the most frequent situation when minor perturbations occur and dispatchers try to re-time flights while preserving the predetermined aircraft itineraries, maintenance schedule, crew schedule and passenger connections.

2.1.4 Proposed Model

In this section we define the network, select costs and present a mathematical formulation for the proposed model. The decision variables in the model are flight departure times and activity durations. We also reformulate the model to make it more efficient. Computational results are reported in the next section.

A special case of the optimization problem discussed in this paper is presented by Sexton and Bodin (1985), Sexton and Choi (1986) and Dumas *et al.* (1990). These authors use a convex cost function to compute an optimal schedule for a single vehicle path. They impose time windows on the start of service, and apply a convex inconvenience function based on service times. These authors exploited a network structure in their models. More analogous to the problem discussed in this article is the problem of schedule compression in CPM/PERT project management studied by Foldes and Soumis (1993). If the time planned for a project is too long, it can be shortened to some lower bound by compressing some project elements. These authors reformulated a linear programming model as a minimum cost flow problem, and a nonlinear

programming model as a nonlinear minimum cost flow problem. They described cases in which the cost function is strictly convex and differentiable or non-differentiable, and reported that reformulation improves computational time and makes larger problems tractable. These authors used time windows on arc decision variables representing the duration of the project activities. We used ideas introduced in this simplified context as a basis for developing a more complex network suitable for our DAYOPS-T problem.

The network

The node set N contains a node for each flight departure and each flight arrival. Let C represent the set of arrival nodes and D the set of departure nodes ($N = C \cup D$). The arc set A contains arcs representing aircraft, crew and passenger movements. The arc subsets F (flight legs), G (ground service) and M (maintenance) represent aircraft movements. The arc subsets E (crew transfer between two aircrafts) and U (crew rest) represent crew movements. The arc subset P represents passenger movements. Note that flight legs involve both crew members and passengers. These arcs are used to describe the precedence constraints in the proposed model. There is also an arc subset R of return arcs representing the maximum duration constraints imposed on the aircraft itineraries and crew rotations. Therefore, the total arc set $A = E \cup F \cup G \cup M \cup P \cup R \cup U$. Then $T = (N, A)$ defines a network in which the arcs represent activity durations and the nodes represent schedule times.

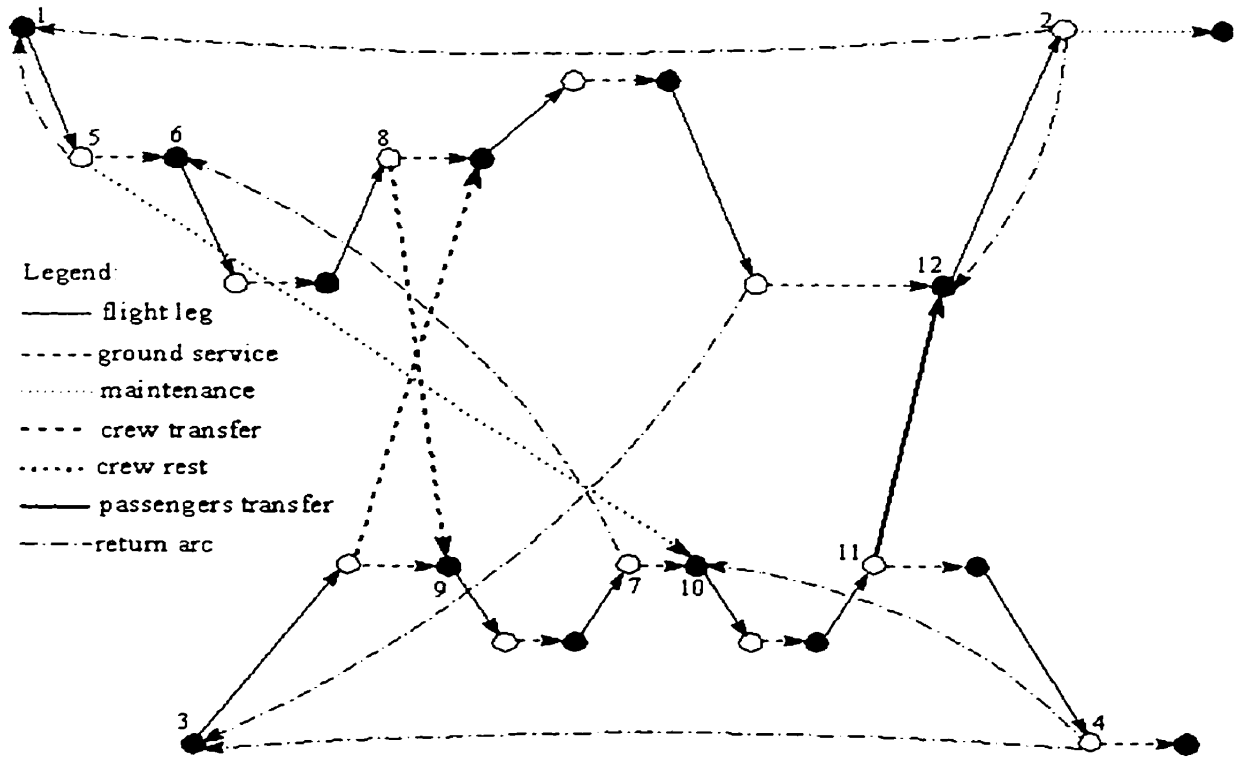

Figure 2.1 : The network T with two aircraft itineraries

An example of a network covering two aircraft itineraries is shown in Figure 2.1. One aircraft itinerary (from node 1 to node 2) is represented by arcs designating the flight itself (solid thin line) and ground services (dashed thin line). The other aircraft itinerary begins at node 3 and terminates at node 4. Each itinerary includes a return arc represented by thin dotted line, from node 2 to node 1 for the first itinerary and from node 4 to node 3 for the second. Five crew rotations are also included in this network. One of them is a short crew rotation between nodes 1 and 5. The next crew rotation begins on the same aircraft at node 6 but terminates at node 7, which belongs to the other aircraft itinerary. This crew rotation includes a crew transfer arc from node 8 to

node 9 (thick dashed line), representing a crew switch from one aircraft to another. After this crew rotation there is another one starting at node 10 and terminating at node 4. This crew rotation actually belongs to the same crew as the first (from node 1 to node 5) but is separated from it by a crew rest period (represented by thick dotted arc from node 5 to node 10). All crew rotations have corresponding return arcs. The thick solid line between nodes 11 and 12 also represents an aircraft change, this time for passengers transferring to connecting flights. There is also a maintenance arc (thin dotted line) after node 2. A maintenance arc could also be placed in the middle of an aircraft itinerary, in a similar fashion to the crew rest arc described above. In such a case, the itinerary is divided into two pieces and bounded by two return arcs, one before and the other after the maintenance arc.

There is a variable t_{ij} associated with every arc (i, j) from the subsets F, G and M, representing the duration of the activity between the two nodes i and j. On the arcs from the subset P the variable t_{ij} represents the time available for the passenger transfer. There is also a variable t_i associated with every node i in set N, representing the start of the following activity on arc (i, j). All variables are constrained by time windows. In the context of arcs, time windows mean that activity durations are constrained by lower and upper bounds. With respect to nodes, they indicate that the start of the corresponding activity is constrained by a lower and upper bound. This situation gives rise, therefore, to a mathematical programming problem on the network T with cost functions and linear constraints on arcs and nodes.

Cost functions

In this model, all variables represent times. The cost function must be such that desirable times are preferred and undesirable times are penalized. The form of the cost function heavily influences the quality of obtained solutions, i.e., the realism of the proposed model. Unfortunately, it also bears on the complexity of the problem, i.e., the time required to find optimal solutions. Possible functional forms vary from simple linear to general nonlinear functions. The domain of cost functions is limited by time windows (note that a time window could also be infinite). Functions could have break points within time windows, and could be linear or convex between break points. For example, for some specialized cases Sexton and Choi (1986) considered a three-part linear cost function without time windows; Dumas *et al.* (1990) considered a convex cost function within time windows.

Here are a number of cost components that could be included in the cost function of a general DAYOPS problem:

- Aircraft costs, such as: active leg costs (fixed or proportional to flying time); passive leg costs (fixed or proportional to deadheading time); capital costs attempting to use available resources more effectively; accelerated flight costs (fuel over-consumption, mechanical stress);
- Crew costs, such as: active and passive leg costs; penalty on pilot credit surplus over planned block time; accelerated flight costs (psychological stress); accommodation

costs; penalty for waiting for the beginning of service on delayed flights;

- Passenger costs, such as: revenue from sold tickets; penalty for non-carried passengers (negative effect on company image); accommodation and inconvenience costs; costs of reducing passenger transfer times (when there are more transfer types at the airport);
- Maintenance costs, such as: accelerated, postponed and premature maintenance costs;
- Ground service costs, such as: delayed and accelerated service costs arising from additional working hours, workers or facilities;
- Air Traffic Control (ATC) costs (requiring new time slots);
- Catering costs (for additional food).

Not all these costs are required for the model described here, as aircraft itineraries and crew rotations are predefined. For example, the capital cost is constant because the number of aircraft is fixed. Therefore, we selected costs for one practical application of the proposed model. Each airline company will choose appropriate costs in keeping with cost policy, strategic interest, market environment, competitors' behavior and so on. The distribution of cost types on arcs from the set S ($S = F \cup G \cup M \cup P$) and on nodes from the set N ($N = C \cup D$) is shown in Table 2.1.

Table 2.1 : Cost types associated with arc and node sets

Cost Types	Arc Set				Node Set	
	F	G	M	P	C	D
Accelerated flight aircraft costs	✓					
Accelerated flight crew costs	✓					
Crew waiting penalty on delayed flights						✓
Costs of reducing passenger transfer time				✓		
Passenger inconvenience costs						✓
Accelerated maintenance costs			✓			
Delayed ground service costs					✓	
Accelerated ground service costs		✓				
ATC costs						✓
Catering costs						✓

We assume that the objective function is the sum of cost functions that are linear on defined regions within corresponding time windows. When all cost functions are increasing the problem becomes trivial, because only the shortest time durations and earliest scheduled times will be selected. The consequences are similar when all cost functions are decreasing. In the proposed problem, however, this is not the case. Cost functions for arcs from sets F, G and M are decreasing and penalize acceleration of flight, ground service and maintenance times. The upper bound of each time window represents planned flight, ground service and maintenance times. Cost functions for the arcs from the set P and nodes from the sets C and D are increasing and penalize the reduction of passenger transfer time on the P arcs and delays on the nodes. It is also possible to have piecewise linear convex cost functions on the arcs and nodes. A break

point in such a cost function represents a change of some kind, such as the start of overtime or the beginning of a new work shift (on arcs from sets G and M and on nodes from set C), or the use of a different passenger transfer mode (on arcs from set P). A break point could also represent a threshold on passenger inconvenience, which is incorporated into the cost function on nodes from set D.

Mathematical formulation

Let us define a mathematical program with a general convex objective function:

$$\text{Minimize} \sum_{i \in N} f_i(t_i) + \sum_{(i,j) \in S} f_{ij}(t_{ij}) \tag{2.1}$$

subject to:

$$t_j \geq t_i + t_{ij}, \quad \forall (i,j) \in F \cup G \cup M \qquad [X] \tag{2.2}$$

$$t_j \geq t_i + d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E \cup U \qquad [Y] \tag{2.3}$$

$$t_j \geq t_i - d_{ij}, \quad \forall (i,j) \in R \qquad [Z] \tag{2.4}$$

$$t_j \geq t_i + d_{ij} - t_{ij}, \quad \forall (i,j) \in P \qquad [W] \tag{2.5}$$

$$a_i \leq t_i \leq b_i, \quad \forall i \in N \qquad [\alpha, \beta] \tag{2.6}$$

$$a_{ij} \leq t_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall (i,j) \in F \cup G \cup M \qquad [\alpha', \beta'] \tag{2.7}$$

$$a_{ij} \leq t_{ij} \leq b_{ij}, \quad \forall (i,j) \in P \qquad [\alpha'', \beta''] \tag{2.8}$$

where:

d_{ij} - fixed duration of activity (i, j), $d_{ij} \geq 0$;

a_{ij}, b_{ij} - lower/upper bounds of the time window on arc (i, j);

a_i, b_i - lower/upper bounds of the time window on node i.

Relation (2.1) represents an objective function that minimizes total inconvenience. The objective function can be reformulated to maximize revenue and quality of service. Relations (2.2), (2.3) and (2.5) represent precedence constraints describing the compatibility of the schedule with aircraft, crew and passenger routes. Note that while variable t_{ij} in (2.2) represents duration of an activity, variable t_{ij} in (2.5) represents acceleration, i.e., reduction of passenger connection time. Relation (2.4) represents maximum duration constraints imposed on the aircraft itineraries and crew rotations. Relations (2.6) - (2.8) define time windows on nodes and arcs. For constraint sets (2.2) through (2.8), we also present, in square brackets, non negative dual variable vectors that are used in the following reformulated model. Note that all constraints are considered as $\geq$ constraints.

Dual formulation

Solving the above model is computationally expensive, even if (2.1) is replaced by a linear objective function. The reason for this is the large number of constraints involving two types of variables, namely, arc variables and node variables. When (2.1) is linear, we show next that the dual becomes a network flow model in which the arcs correspond to the constraints in the above primal formulation (2.1) - (2.8). This result

also holds if (2.1) is piecewise linear convex. Dualizing a similar model, Foldes and Soumis (1993) showed that a piecewise convex linear cost function with k break points and $k+1$ linear parts will be replaced by a corresponding piecewise concave cost function with $k+1$ break points and k linear parts. To solve a dual formulation, each arc with piecewise cost function containing k linear parts will be replaced by k copies of that arc with linear cost function on them. Therefore, the use of a piecewise convex linear objective function in the primal formulation increases dimensions of the dual formulation for k_l additional dual variables multiplied by the number of piecewise cost functions in the model, where l stands for l^{th} piecewise cost function and k_l is the number of its break points in the primal formulation. Consequently, it is sufficient to present a dualization process for a model involving a linear objective function. Let c_i, $i \in N$ and c_{ij}, $(i, j) \in S$ be nonnegative node and arc costs, respectively, and define (2.1) as:

$$\text{Minimize}\left\{\sum_{i\in N} c_i t_i - \sum_{(i,j)\in F\cup G\cup M} c_{ij} t_{ij} + \sum_{(i,j)\in P} c_{ij} t_{ij}\right\} \tag{2.9}$$

It is well known that any system of difference constraints, that is, a linear program for which the constraint matrix contains a single +1 and a single -1 in each row (all other entries being zero), can be transformed by dualization into a network flow problem. More generally, this is true for any linear program that contains at most one +1 and at most one -1 in each row (see Ahuja, Magnanti and Orlin (1993)). The above formulation does not fulfill these requirements. Time variables t_{ij} interfere with

variables t_i and t_j for $(i, j) \in S$. However, the above model (2.2) - (2.9) can also be transformed into a network flow problem. The dualization could be done after the transformation of some variables or directly on the program presented above. Each approach has its network representation; the first produces a network without arc capacities while the other gives a capacitated network. For the network without arc capacities, it is sufficient to apply simple variable transformations such as:

$$s_{ij} = t_i + t_{ij}, \quad \forall (i, j) \in F \cup G \cup M \tag{2.10}$$

$$s'_{ij} = t_i - t_{ij}, \quad \forall (i, j) \in P. \tag{2.11}$$

Replacing transformations (2.10) in (2.2) and (2.11) in (2.5) and replacing the variables t_{ij} in (2.7) and (2.8), the resulting constraint matrix contains a single +1 and a single -1 in each row. Therefore the dual is a pure network flow problem without arc capacities.

For our computational experiments, we have used a smaller capacitated network that can be obtained as follows. Define $\Gamma(i) = \{ j \mid (i, j) \in A \}$ and $\Gamma^{-1}(i) = \{ j \mid (j, i) \in A \}$. Given the dual vectors introduced earlier, the dual formulation is as follows:

$$\text{Maximize} \left\{ \sum_{i \in N} (a_i \alpha_i - b_i \beta_i) + \sum_{(i,j) \in E \cup U} d_{ij} y_{ij} - \sum_{(i,j) \in R} d_{ij} z_{ij} + \sum_{(i,j) \in F \cup G \cup M} (a_{ij} \alpha'_{ij} - b_{ij} \beta'_{ij}) \right.$$

$$+ \sum_{(i,j)\in P} (d_{ij} w_{ij} + a_{ij}\alpha''_{ij} - b_{ij}\beta''_{ij}) \Bigg\} \quad (2.12)$$

subject to:

$$\alpha_i - \beta_i + \sum_{j\in\Gamma^{-1}(i)} (x_{ji} + y_{ji} + z_{ji} + w_{ji}) - \sum_{j\in\Gamma(i)} (x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} + w_{ij}) = c_i, \quad \forall i \in N \quad (2.13)$$

$$x_{ij} - \alpha'_{ij} + \beta'_{ij} = c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in F \cup G \cup M \quad (2.14)$$

$$w_{ij} + \alpha''_{ij} - \beta''_{ij} = c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in P \quad (2.15)$$

$$X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, W \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha' \geq 0, \beta' \geq 0, \alpha'' \geq 0, \beta'' \geq 0. \quad (2.16)$$

To obtain a network flow problem with arc capacities we consider β'_{ij} and α''_{ij} as slack variables so that (2.14) and (2.15) become:

$$x_{ij} - \alpha'_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in F \cup G \cup M \quad (2.17)$$

and

$$w_{ij} - \beta''_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in P, \quad (2.18)$$

respectively, and (2.12) is modified by substituting into it the equations defining β'_{ij} and α''_{ij}. The second step is to define the new variables:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \alpha'_{ij}, \quad \forall (i,j) \in F \cup G \cup M \quad (2.19)$$

and

$$w'_{ij} = w_{ij} - \beta''_{ij}, \quad \forall (i,j) \in P, \tag{2.20}$$

making the substitutions in (2.12) and (2.13) at the same time. Finally, although X' and W' seem to be free sign vectors, the coefficients of these in the objective function imply that:

$$x'_{ij} \geq \alpha'_{ij}, \quad \forall (i,j) \in F \cup G \cup M \tag{2.21}$$

and

$$w'_{ij} \geq \beta''_{i}, \quad \forall (i,j) \in P. \tag{2.22}$$

Hence, the resulting dual model, given as a pure network flow model with arc capacities is as follows:

$$\text{Maximize}\left\{\sum_{i \in N}(a_i\alpha_i - b_i\beta_i) + \sum_{(i,j)\in E\cup U} d_{ij}y_{ij} - \sum_{(i,j)\in R} d_{ij}z_{ij} + \sum_{(i,j)\in F\cup G\cup M}(a_{ij}\alpha'_{ij} - b_{ij}x'_{ij} - b_{ij}c_{ij})\right.$$
$$\left. + \sum_{(i,j)\in P}\left[(d_{ij} - a_{ij})w'_{ij} + (d_{ij} - b_{ij})\beta''_{ij} + a_{ij}c_{ij}\right]\right\} \tag{2.23}$$

subject to:

$$\alpha_i - \beta_i + \sum_{j\in\Gamma^{-1}(i)}(x'_{ji} + \alpha'_{ji} + y_{ji} + z_{ji} + w'_{ji} + \beta''_{ji}) - \sum_{j\in\Gamma(i)}(x'_{ij} + \alpha'_{ij} + y_{ij} + z_{ij} + w'_{ij} + \beta''_{ij}) = c_i,$$
$$\forall i \in N \tag{2.24}$$

$$0 \le x'_{ij} \le c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in F \cup G \cup M \qquad (2.25)$$

$$0 \le w'_{ij} \le c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in P \qquad (2.26)$$

$$Y \ge 0, Z \ge 0, \alpha \ge 0, \beta \ge 0, \alpha' \ge 0, \beta'' \ge 0. \qquad (2.27)$$

Comparing the two dual formulations, one without arc capacities and the other with arc capacities we can say that the advantage of the second formulation is that it has $|F \cup G \cup M \cup P|$ fewer nodes and arcs. Variables α_i and β_i can be explained as variables on arcs connecting an artificial zero-node with the other nodes in the network. The solution to the dual formulation indicates which of the arcs are active (corresponding variable > 0) and which are not. The complementary slackness conditions imply, in the case of active arcs, that no free space exists between the time when some activity is completed and the time at which the subsequent activity is supposed to start. It means that any further change in activity duration results in additional cost. If one or more arcs emanating from the zero-node are active, then there is no delay in the node at the arrow end of the arc. An active arc pointing into the zero-node indicates that delay exists in the node at the non-arrow end of the arc and that further delay is not possible because the specified limit on the time window has been reached. The new schedule can be determined exactly by reading the value of the dual variables in the obtained solution, because the dual variables represent arrival/departure times in the nodes.

Apparently, the proposed model will not produce any solution when the problem is infeasible. To overcome this obstacle it is sufficient to add a non-negative slack variable in constraints (2.2) - (2.5). The slack variable must be penalized in the primal objective function to assure that this variable will be included in the LP basis only if necessary. This extension does not significantly change the dual formulation. The only difference is that dual variables assigned to constraints with slack variables become bounded by the value of the penalty parameter imposed in the primal formulation. The advantage of the use of the slack variables is that there is always an optimal solution of the problem. Unfortunately, the problem is not necessarily feasible, i.e., the constraints with positive slack variables are violated. In that case the user (dispatcher or planner) can cancel all flights following the violated constraint, or make some changes in aircraft itineraries and crew rotations manually, or use a supplementary heuristic or optimization method.

An interesting mechanical analogue was provided by Clarke (1961), who interpreted activities on the arcs as springs and the events on the nodes as plates that are free to move left and right within a defined region. One can imagine the model proposed here as a giant shock absorber gently pushed to one side. Springs and plates move to a new equilibrium position so that the reaction, i.e., movement to the other side of the shock absorber, is as small as possible. Instead of equilibrium of force on plates we have in our model flow conservation constraints (2.24) on nodes.

As discussed above, this dualization procedure is the same for a piecewise convex linear objective function. The only difference is that piecewise cost functions increase the dimension of the problem. The dualization of a similar model, where the objective function is convex, is also discussed in Foldes and Soumis (1993).

2.1.5 Computational Experience

This section presents results demonstrating that both the primal and dual formulations of the proposed model are efficient. To test and compare alternative formulations, we constructed ten (A to J) hypothetical networks of different sizes, operated by an airline. All examples are constructed with a small network obtained from a Canadian carrier. This network was replicated a different number of times, by changing departure times and by adding connection arcs on randomly chosen nodes. All sample problems include linear cost functions on arcs and nodes, which are hypothetical and designed for experimentation purpose. Once the network is defined, we generated schedule perturbations by delaying some departure flights randomly. A testing scenario can include one or more delayed flight simultaneously. The goal of this testing is to show the performance of the proposed formulations, rather then to quantify the real-world benefit. The evaluation of the model application to actual operations is left for a future work. In any case, proposed model is simple and efficient, especially its dual formulation. So, the quality of input data and the authenticity of tested scenarios do not affect the obtained computational times. The runtime analysis has been carried out using

the CPLEX Linear Optimizer 3.0 on a HP9000/715 workstation (115.1 specint92, 138.7 specfp92). The testing used a number of hypothetical examples, whose dimensions are given in Table 2.2. All ten test problems, from A to J, include linear cost functions on arcs and nodes.

Table 2.2 : Dimensions of test problems

	Aircraft	Crew	Nodes		Legs			Connections	
	Itineraries	Rotations	Arrival	Departure	Flight	Ground service	Maintenance	Crew	Passengers
A	2	5	12	14	12	11	1	3	1
B	100	250	600	700	600	550	50	150	50
C	200	500	1200	1400	1200	1100	100	300	100
D	300	750	1800	2100	1800	1650	150	450	150
E	400	1000	2400	2800	2400	2200	200	600	200
F	500	1250	3000	3500	3000	2750	250	750	250
G	600	1500	3600	4200	3600	3300	300	900	300
H	700	1750	4200	4900	4200	3850	350	1050	350
I	800	2000	4800	5600	4800	4400	400	1200	400
J	900	2250	5400	6300	5400	4950	450	1350	450

Execution times for the primal and dual mathematical formulations were compared. The simplex algorithm was used to solve the primal formulation. A network simplex algorithm was used to solve the dual formulation. Dimensions and runtimes for both formulations are presented in Table 2.3.

Table 2.3 : Primal and dual problem sizes and CPU times (in seconds)

	PRIMAL				DUAL			
	Variables	Constraints	Bounds	CPU times	Variables	Constraints	Bounds	CPU times
A	51	35	51	0.02	112	26	25	0.02
B	2550	1750	2550	0.60	5600	1300	1250	0.58
C	5100	3500	5100	1.60	11200	2600	2500	1.33
D	7650	5250	7650	3.51	16800	3900	3750	2.14
E	10200	7000	10200	5.50	22400	5200	5000	2.84
F	12750	8750	12750	9.04	28000	6500	6250	3.64
G	15300	10500	15300	12.35	33600	7800	7500	4.49
H	17850	12250	17850	16.70	39200	9100	8750	5.18
I	20400	14000	20400	21.40	44800	10400	10000	5.79
J	22950	15750	22950	29.60	50400	11700	11250	6.71

The largest examples exceed the dimension of a one-day flight plan at the largest airline. These large test problems could also represent a flight plan extending over a few days at a mid-sized airline, or a one-day flight plan at a mid-sized airline with linear piecewise convex cost functions on arcs and nodes. To understand the relationship between the number of variables and the number of constraints in the primal and in the dual formulations, bear in mind that the original formulation places constraints on the arcs and that each such constraint involves two types of variables: schedule variables on the nodes and duration variables on the arcs. All variables in that formulation are subject to time window constraints. On the other hand, the dual formulation uses one or two variables for each arc and one constraint for each node. In that case, only two types of variables are subject to time window constraints.

The execution times, measured in seconds, are shown in Figure 2.2.

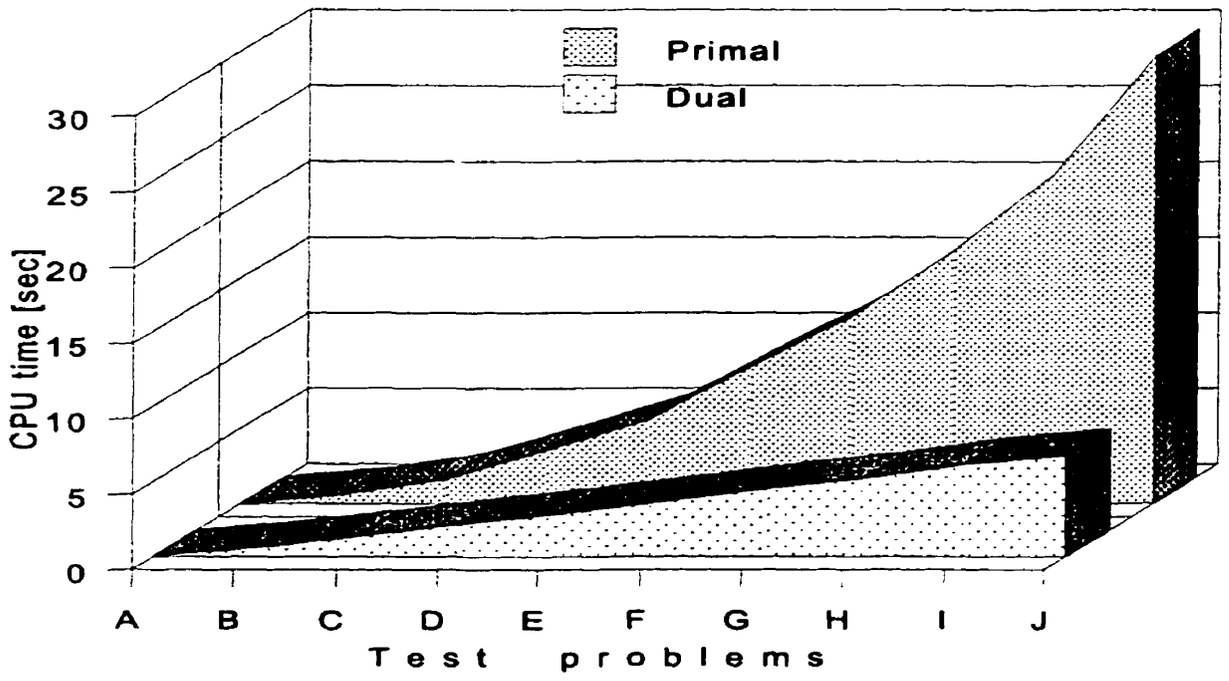

Figure 2.2 : Comparison of CPU times for original primal and reformulated dual models

As this figure shows, execution times for both formulations are quite small for problems of realistic size. The major difference between the two formulations is that execution times for the primal formulation increase rapidly in problem size (as measured by any column of Table 2.2), while those for the dual formulation increase linearly. Recall that the presented problem belongs to class *P* (as opposed to *NP*). Because of this linear behavior, it becomes realistic to solve problems in real time for the largest airlines in the presence of linear piecewise convex cost functions and over a multi-day time horizon.

We also tested modified test problem *I* with 2000 passenger connections. In this case the execution times are 24.15 seconds for the primal formulation and 5.94 seconds for the dual formulation.

2.1.6 Conclusion and Extensions

This paper has presented a model that reinstates planned airline service following an unexpected perturbation in airline operations, if possible with no changes to aircraft itineraries and the crew rotations. Departure times are reoptimized to take account of the sequences of activities that have to be carried out within all aircraft routes and crew rotations. The new schedule is obtained by reducing flying time, ground service time, maintenance time and passenger transfer time. The costs of time reductions, elements of the crew costs and the passenger inconvenience are included in the objective function of the model. This model attempts to adjust operations while retaining the essential aspects of the plan. This phase is useful before considering more complex and expensive changes, such as new fleet assignments, new aircraft routes or flight cancellations. The proposed model produces an operational schedule that results in important profits.

The major contribution of this paper is an original optimization model designed to solve a specific DAYOPS problem. This model is the first to optimize flight departure time, flight schedules and ground activity duration considering a number of tactical elements, such as passenger connections, aircraft routing, maintenance scheduling and

crew rotations. Fixed rotations allow that complicated resource constraints become simple backward arcs in the proposed network. The model is simple, realistic and rich in information relevant to this kind of problem. The primal formulation is capable of meeting rigorous execution time requirements. The paper has also presented a dual formulation that is even faster, making execution time even more competitive. The proposed reformulation makes it possible to solve specific DAYOPS-T problems at the largest airlines in real time. With this approach, it may be efficient to solve models in which the objective function is linear, piecewise convex or smooth convex. It is also possible to cover several consecutive days. Good execution time allows to this model to work on-line and to react to any small perturbation during the airline operations. If satisfactory results are not obtained it is necessary to use a more general DAYOPS model.

There are other ways to use the proposed model. For example, it could be used as a module, i.e., a subroutine in a more sophisticated DAYOPS model. This would occur, for example, when there are two levels of optimization. A user not satisfied with the best feasible flight schedule for a given set of aircraft routes and crew rotations may relax some crew constraints, cancel some flights and change the fleet assignment at the higher level, and then return to the lower level to find a new best feasible flight schedule. The proposed model could be also used in planning problems. The planning process at large airlines consists of four independent phases of planning: flight scheduling, fleet assignment, aircraft routing and crew scheduling. This model could be used as a fifth

phase to reoptimize the flight schedule when the previous four phases are completed, so that the aircraft rotations and crew schedule are given. Smaller airlines occasionally plan flights by considering aircraft and crew rotations simultaneously. The proposed model would establish the best flight schedule by retaining existing aircraft routes and crew rotations and imposing one or more passenger connection constraints.

REFERENCES

Agin N. (1972), "An Algorithm for Optimal Aircraft Scheduling", *Proceedings NATO Conference*, Sanderfjord, Norway.

Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. (1993), *Network Flows*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Chan Y.P. (1974), "Route Network Improvement in Air Transportation Schedule Planning", Ph.D.Thesis, Flight Transportation Laboratory, MIT.

Clarke E.C. (1961), "The Optimum Allocation of Resources Among the Activities of a Network", *Journal of Industrial Engineering* 12, 11-17.

Desaulniers G., Desrosiers J., Solomon M.M., Soumis F. (1997), "Daily Aircraft Routing and Scheduling", *Management Science* 43, 245-259.

Dumas Y., Desrosiers J., Soumis F. (1990), "Optimizing the Schedule for a Fixed Vehicle Path with Convex Inconvenience Costs", *Transportation Science* 24, 145-151.

Foldes S., Soumis F. (1993), "PERT and Crashing Revisited: Mathematical Generalizations", *European Journal of Operational Research* 64, 286-294.

Gray P. (1985), "System Tool for Aircraft Routing", *AGIFORS Proceedings* 25.

Holst O., Sorensen B. (1984), "Combined Scheduling and Maintenance Planning for an Aircraft Fleet", *Operational Research '84*, Elsevier Science Publishers B.V., 735-747.

Jarrah A.I.Z., Yu G., Krishnamurthy N., Rakshit A. (1993), "A Decision Support Framework for Airline Flight Cancellations and Delays", *Transportation Science* 27, 266-280.

Krishnamurthy N. (1991), "Models for Irregular Operations at United Airlines", *AGIFORS Proceedings* 31, 81-95.

Levin A. (1971), "Scheduling and Fleet Routing Models for Transportation Systems", *Transportation Science* 5, 232-255.

Rakshit A. (1990), "Decision Support Systems for Systems Operations Control",

AGIFORS Proceedings 30, 117-126.

Rakshit A., Krishnamurthy N., Yu G., (1996), "System Operations Advisor: A Real-Time Decision Support System for Managing Airline Operations at United Airlines", *Interfaces* 26, 50-58.

Sexton T.R., Bodin L.D. (1985), "Optimizing Single Vehicle Many-to-Many Operations with Desired Delivery Time: I. Scheduling", *Transportation Science* 19, 378-410.

Sexton T.R., Choi Y. (1986), "Pick-up and Delivery of Partial Loads with Time Windows", *The American Journal of Mathematical and Management Sciences* 6, 369-398.

Stojković M., Soumis F., Desrosiers J. (1998), "The Operational Airline Crew Scheduling Problem", *Transportation Science*, 32(3), 232-245.

Teodorović D., Guberinić S. (1984), "Optimal Dispatching Strategy on an Airline Network After a Schedule Perturbation", *European Journal of Operational Research* 15, 178-182.

Teodorović D., Stojković G. (1990), "Model for Operational Daily Airline Scheduling", *Transportation Planning and Technology* 14, 273-285.

Teodorović D., Stojković G. (1995), "Model to Reduce Airline Schedule Disturbances", *Journal of Transportation Engineering* 121, 324-331.

Yan S., Yang D-H. (1996), "A Decision Support Framework for Handling Schedule Perturbation", *Transportation Research - B* 30, 405-419.

CHAPITRE 3

Mise à jour de la planification en modifiant séquentiellement les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage

3.1 Introduction

En cours d'opération, il y a des irrégularités qui perturbent l'horaire des vols, les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage planifiés. Au chapitre précédent, nous avons considéré le cas d'irrégularités mineures, ce qui nous a permis de supposer que les itinéraires des avions ainsi que les rotations des équipages n'étaient pas modifiés. Il en a résulté un modèle de gestion restreinte des avions et des équipages. La formulation duale du modèle proposé s'est avérée être un problème de réseau dont la solution optimale

s'obtient très rapidement. De façon plus générale, lorsque des irrégularités surviennent en cours d'opération, le gestionnaire des vols doit réagir rapidement pour que le service, plus ou moins modifié, reste en vigueur. Il faut donc trouver un moyen de répondre aux plus grandes perturbations. Cela peut être effectué avec des modèles de réoptimisation qui trouvent les nouvelles affectations d'avions et d'équipages aux vols planifiés.

Il y a plusieurs niveaux d'urgence et des irrégularités de différents degrés. Les irrégularités mineures requièrent une réaction plus rapide contrairement aux irrégularités majeures qui causent de graves perturbations à l'horaire et qui peuvent être traitées sur une plus longue période de temps. Dans ce cas, il faut utiliser un modèle plus puissant ayant un temps de résolution plus long afin de réaliser une réoptimisation majeure. Dans ce chapitre, nous étudions une approche plus générale permettant de modifier à la fois les horaires, les itinéraires des avions et les rotations des équipages. Nous analysons la faisabilité d'une approche dans laquelle les problèmes sont résolus de façon séquentielle, la sortie de l'un servant d'entrée au suivant. Ainsi on affecte d'abord les avions aux vols sans considérer les contraintes sur les pilotes. Puis, on résout le problème des rotations des pilotes étant donné l'affectation des avions. Vient ensuite l'affectation des agents de bord étant donné l'affectation préalable des avions et des pilotes. C'est l'approche utilisée en planification et pour laquelle il existe des logiciels commerciaux complexes pour chacune des étapes.

Dans le cas du jour d'opération où les problèmes sont beaucoup plus petits et sur un horizon de réoptimisation relativement court, nous voulons profiter de la structure très semblable des représentations réseaux pour les avions et les équipages. Ainsi, les trois réseaux utiliseront comme éléments de base les vols plutôt que les services de vol comme c'est généralement le cas pour le problème de la gestion des équipages en planification.

Les deux premiers problèmes ont en commun un ensemble de vols devant être couvert par un seul avion et un seul pilote. Pour chaque vol, nous disposons d'une paire origine – destination, d'une durée et d'un intervalle de temps sur l'heure de départ. Un coût et un revenu par type d'avions sont également disponibles, ainsi que des contraintes additionnelles portant sur le nombre d'avions de chaque type d'avions. En ce qui concerne les pilotes, il faut respecter les intervalles de temps sur les vols ainsi que les règles de la convention de travail. Ces règles régissent la construction des rotations ainsi que l'affectation mensuelle. On peut toutefois utiliser une version simplifiée de ces règles portant par exemple sur le temps total de vol et de travail. Deux types de connexions sont considérés, ceux nécessitant ou non un changement d'avion. Enfin, pour le troisième problème, il faut couvrir chaque vol avec un nombre suffisant d'agents de bord, selon le type d'avion utilisé. Les conditions sont semblables : fenêtres horaires sur les vols, convention de travail à respecter, autant pour les rotations que pour l'affectation mensuelle. Finalement, on considère connues, sur un horizon de temps donné, les localisations initiales des avions et des équipages. Les conditions finales

peuvent être imposées en tout ou en partie et alors déterminées par le processus d'optimisation. La connaissance des conditions initiales/finales pour chaque avion et membre d'équipage constitue une différence par rapport aux modèles de planification des avions et des équipages, ceux-ci étant résolus en agrégeant par type et par base les avions et les équipages. Dans notre cas, chaque avion et chaque membre d'équipage doivent être pris en compte séparément.

Dans la section suivante, nous décrivons les réseaux associés aux avions, aux pilotes et aux agents de bord de façon générale. Leurs similitudes y sont analysées. Viennent ensuite la formulation mathématique intégrée de ces trois problèmes. La formulation intégrée contient trois domaines, un pour chacun des problèmes, et des contraintes liantes entre ces problèmes. Il faut bien se rappeler que nous devons développer, pour le jour d'opération, des outils d'aide à la décision particulièrement rapide, tout en obtenant des solutions de bonne qualité. Pour cette raison nous présentons dans la section 3.4 une approche où les problèmes sont résolus séquentiellement, un après l'autre. Une approche directe de résolution de la formulation intégrée sera étudiée au prochain chapitre. La section 3.5 contient les exemples résolus par l'approche présentée dans la section précédente. Dans ces exemples nous avons traité les problèmes opérationnels d'avions et de pilotes. Le problème d'agents de bord n'est pas traité ici à cause de l'absence de données nécessaires. Ces exemples ont été développés principalement pour une étude académique : d'une part, pour présenter le processus complet de résolution séquentielle des problèmes opérationnels d'avions et de pilotes, et

d'autre part pour produire des solutions qui pourraient être comparées avec les solutions obtenues dans le chapitre suivant. La dernière section présente la conclusion et les directions de recherche futures.

3.2 Structure des réseaux

Les réseaux des avions et des pilotes ont une structure très semblable. Toutefois, le problème des pilotes est plus complexe à cause des contraintes d'opération (temps maximum de vol, temps maximum travaillé, etc.). La Figure 3.1 présente un exemple simple des réseaux pour les avions et les pilotes et la relation entre ces deux réseaux. Un pilote n'étant qualifié que pour un seul type d'avion, *le type d'avion détermine ainsi le type de pilote, et inversement.* Par contre, les agents de bord peuvent avoir accès à plusieurs types d'avions, selon leurs qualifications. Nous définissons dans la Figure 3.1 un réseau pour tous les avions de type $f \in F$ et un réseau pour tous les pilotes de type $f \in F$. Ce qui permet d'économiser de l'espace mémoire en évitant de répéter les parties communes. Pour différencier les trois réseaux, on indexera celui des avions par x, celui des pilotes par y et celui des agents de bord par z.

Réseaux des avions : Notons par F l'ensemble des types d'avions disponibles. Pour les avions de la flotte $f \in F$, nous définissons un réseau $G_x^f=(N_x^f, A_x^f)$, représenté dans la partie gauche de la Figure 3.1, où N_x^f représente l'ensemble des nœuds et A_x^f l'ensemble

des arcs : ces deux ensembles sont définis ci-après.

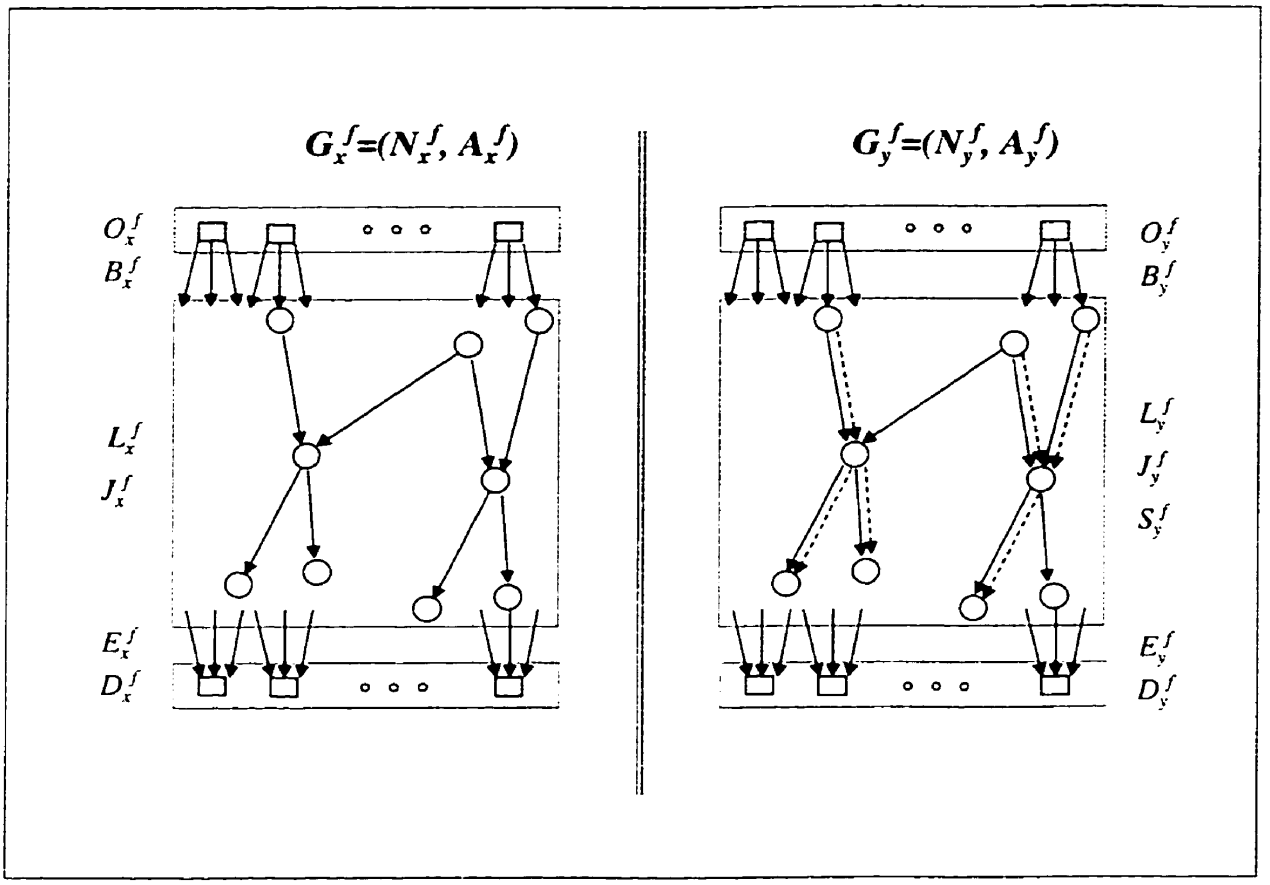

Figure 3.1: Réseaux G_x^f des avions et G_y^f des pilotes pour une flotte de type f

Soit L l'ensemble de tous les nœuds qui représentent des vols et qui doivent être couverts exactement une fois et $L_x^f \subset L$, l'ensemble des nœuds qui peuvent être couverts par les avions de type f. On a donc $L = \bigcup_{f \in F} L_x^f$. Évidemment, les L_x^f sont non disjoints et c'est là la difficulté du problème. Soient O_x^f et D_x^f les ensembles des nœuds origine et destination respectivement ; ces deux ensembles représentent les positions initiales et

finales des avions. Afin d'assurer une solution mathématique au problème de l'affectation des avions, ces deux ensembles peuvent contenir des éléments représentant des avions fictifs. Les vols couverts par de tels avions ne peuvent pas en fait être effectués. Ainsi, l'ensemble de nœuds du réseau G_x^f est donné par $N_x^f = L_x^f \cup O_x^f \cup D_x^f$. En ce qui a trait aux arcs de ce même réseau, il est constitué de l'union des arcs de connexion valide entre deux vols $J_x^f \subset L_x^f \times L_x^f$, des arcs de début $B_x^f \subset O_x^f \times L_x^f$, et des arcs de fin $E_x^f \subset L_x^f \times D_x^f$. Un arc de connexion est valide si les deux vols peuvent être desservis par la même flotte, si l'aéroport d'arrivée du premier est le même que celui du départ du second et si les contraintes d'horaire sont respectées. Un arc de début relie un nœud origine à un nœud vol si et seulement si un avion est disponible à l'aéroport de départ du vol. Un arc de fin relie un nœud vol avec un nœud destination si un avion doit (ou peut) terminer son itinéraire à cet aéroport. L'ensemble des arcs du réseau G_x^f est ainsi donné par $A_x^f = J_x^f \cup B_x^f \cup E_x^f$.

Réseaux des pilotes : Pour les pilotes de type $f \in F$, nous définissons un réseau $G_y^f = (N_y^f, A_y^f)$, illustré dans la partie droite de la Figure 3.1, où N_y^f représente l'ensemble des nœuds et A_y^f l'ensemble des arcs. Comme précédemment, définissons $L_y^f \subseteq L_x^f$ l'ensemble des nœuds (vols) qui peuvent être couverts par ce type de pilote et les ensembles O_y^f et D_y^f représentant respectivement les nœuds origine et destination pour les pilotes (fictifs ou réels), avec $|O_y^f| = |D_y^f|$. L'ensemble de nœuds du réseau G_y^f est ainsi donné par $N_y^f = L_y^f \cup O_y^f \cup D_y^f$. Pour ce qui est des arcs, nous avons l'ensemble des arcs de connexion entre deux vols $J_y^f \subset L_y^f \times L_y^f$ et l'ensemble des connexions courtes $S_y^f \subset$

J_y^f qui sont possibles seulement si le pilote suit un avion qui effectue la même connexion. L'ensemble des arcs est donc constitué des arcs de début $B_y^f \subset O_y^f \times L_y^f$, des arcs de fin $E_y^f \subset L_y^f \times D_y^f$, et des arcs de connexion J_y^f, soit $A_y^f = J_y^f \cup B_y^f \cup E_y^f$. Les conditions d'existence de ces arcs sont semblables à celles présentées précédemment. Notons qu'il faut considérer un seul nœud origine et un seul nœud destination correspondant respectivement à la localisation initiale et finale du pilote. Ce qui nous permet d'associer à chacun des pilotes ses conditions initiales et finales sur les ressources utilisées.

Réseaux des agents de bord : Notons par K l'ensemble des types d'agents de bord disponibles. Soit F^k l'ensemble de types d'avions disponibles qui peuvent être desservis par un agent de bord de type $k \in K$. Pour les agents de bord de type $k \in K$, il nous faut définir un réseau particulier $G_z^k = (N_z^k, A_z^k)$. Pour l'agent de bord k, l'ensemble des nœuds N_z^k est donné par l'union de O_z^k (qui contient un seul nœud origine correspondant à la localisation actuelle de chaque agent de bord de type k), de D_z^k (qui contient un seul nœud destination correspondant à la localisation finale de chaque agent de bord de type k), et de $L_z^k \subset L_z \subseteq L$ (qui contient l'ensemble de tous les nœuds admissibles pour les agents de bord de type k). Notons par L_z tous les nœuds admissibles pour l'ensemble K des agents de bord. Par extension, on pourra considérer que certains agents de bord sont fictifs de sorte qu'il existe toujours une solution réalisable au modèle mathématique présenté à la section suivante. En ce qui concerne les arcs, on a $A_z^k = J_z^k \cup B_z^k \cup E_z^k$, où chacun des sous-ensembles est défini comme précédemment. Ainsi, $J_z^k \subset L_z^k \times L_z^k$

représente les arcs de connexion entre les vols admissibles (pas nécessairement sur la même flotte) alors que $S_z^k \subset J_z^k$ contient les arcs de connexion courte. Les arcs de début et de fin sont dans B_z^k et E_z^k respectivement.

Structure de coût : Pour le réseau d'avion $G_x^f, f \in F$, on associe un profit c_{xi}^f au nœud $i \in L_x^f$. Celui-ci est calculé comme le revenu d'exploitation moins le coût de recouvrement du vol. Pour les nœuds origine $o \in O_x^f$, le coût fixe d'un avion est noté c_{xo}^f. Pour le réseau de pilote G_y^f, $f \in F$, on utilisera le coût fixe c_{yo}^f, $o \in O_y^f$, sur les nœuds origine, les coûts de connexion c_{yij}^f, $(i, j) \in S_y^f$, sur les arcs de connexion courte, les coûts de connexion longue c_{yij}^f tels que $(i, j) \in J_y^f - S_y^f$. Pour le réseau d'agents de bord G_z^k, $k \in K$, on a également les coûts fixes c_{zo}^k, $o \in O_z^k$, les coûts de connexion c_{zij}^k, $(i, j) \in S_z^k$ et les coûts de connexion longue c_{zij}^k tels que $(i, j) \in J_z^k - S_z^k$. Sur tous les types de réseau pour tous les éléments fictifs (avions, pilotes et agents de bord), des pénalités appropriées sont imposées sur les nœuds origine des ensembles O_x^f et O_y^f, $f \in F$ ainsi que O_z^k, $k \in K$.

3.3 Formulations mathématiques

Les solutions des problèmes de gestion des avions, des pilotes et des agents de bord peuvent être représentées par des ensembles de chemins sur les réseaux définis précédemment G_x^f et G_y^f, pour tout $f \in F$, et G_z^k, pour tout $k \in K$. Pour les représenter,

nous utilisons des variables de flot binaires sur les arcs : $\boldsymbol{X}^f = (X_{ij}^f, (i, j) \in A_x^f)$, pour $f \in F$, sur le premier type de réseau, $\boldsymbol{Y}^f = (Y_{ij}^f, (i, j) \in A_y^f)$, pour $f \in F$, sur le second et $\boldsymbol{Z}^k = (Z_{ij}^k, (i, j) \in A_z^f)$, pour $k \in K$, sur le troisième. Les formulations utilisent également des variables de ressource sur les nœuds : $\boldsymbol{T}_x^f = (T_{xi}^{fr}, i \in N_x^f, r \in R_x)$, pour $f \in F$, sur le premier type de réseau, $\boldsymbol{T}_y^f = (T_{yi}^{fr}, i \in N_y^f, r \in R_y)$, pour $f \in F$, sur le second et $\boldsymbol{T}_z^k = (T_{zi}^{kr}, i \in N_z^k, r \in R_z)$, pour $k \in K$, sur le troisième, où les ressources R_x sont les mêmes pour tous les types d'avions, celles de R_y sont les mêmes pour tous les types de pilotes et celles de R_z sont les mêmes pour tous les types d'agents de bord. Les ressources varient d'une compagnie à l'autre et d'un problème à l'autre. Les ressources que nous utilisons seront expliquées dans la section 3.5 où nous parlons de notre application de l'approche séquentielle.

Dans cette section, nous présentons trois domaines, un pour chacun des problèmes d'affectation : des avions, des pilotes et des agents de bord. Ensuite, nous donnons une formulation intégrée de ces trois domaines, incluant des contraintes liantes entre les trois problèmes et un objectif qui maximise le profit résultant de la couverture des vols par les avions, les pilotes et les agents de bord.

3.3.1 Domaine réalisable pour les avions

Soit n_{xi}^o le nombre d'avions de type f disponibles au nœud $i \in O_x^f$ et n_{xi}^d le

nombre d'avions de type f demandés au nœud $i \in D_x^f$. Pour $f \in F$, la variable binaire X_{ij}^f prend la valeur 1 si l'arc $(i, j) \in A_x^f$ est utilisé, et 0 sinon. On définit aussi $X_i^f = \sum_{j:(i,j)\in A_x^f} X_{ij}^f$, pour $i \in N_x^f$, une autre variable binaire qui indique si le nœud i est couvert par un avion de type $f \in F$ ou non. En utilisant la notation vectorielle, on a : $\boldsymbol{X}^f = (X_{ij}^f, (i, j) \in A_x^f ; X_i^f, i \in N_x^f)$ pour $f \in F$, et $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^f, f \in F)$. Afin de décrire le domaine réalisable des chemins admissibles, il nous faut utiliser les variables de ressources T_{xi}^{fr}, $r \in R_x$ et $i \in N_x^f$, permettant d'évaluer certaines quantités à chacun des nœuds (celles-ci sont les mêmes pour tous les types d'avions). Ces variables de ressources sont modifiées en empruntant les arcs $(i, j) \in A_x^f$, par des fonctions d'extension f_{xij}^r particulières à chaque ressource $r \in R_x$. Le temps de départ d'un vol, à déterminer dans un certain intervalle, est ainsi évalué par une variable de ressource dont la fonction d'extension cumule le temps écoulé. À l'aide de ces variables, le domaine $\mathbb{P}_x^f$ des chemins d'avions admissibles sur le réseau G_x^f de la flotte $f \in F$ est donné par les contraintes suivantes :

$$\sum_{j:(i,j)\in B_x^f} X_{ij}^f = n_{xi}^o, \quad \forall i \in O_x^f \tag{3.1}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A_x^f} X_{ij}^f - \sum_{j:(j,i)\in A_x^f} X_{ji}^f = 0, \quad \forall i \in N_x^f \tag{3.2}$$

$$\sum_{j:(j,i)\in E_x^f} X_{ji}^f = n_{xi}^d, \quad \forall i \in D_x^f \tag{3.3}$$

$$X_{ij}^f (f_{xij}^r(T_{xi}^{fr}) - T_{xj}^{fr}) \le 0, \quad \forall (i, j) \in A_x^f, \forall r \in R_x \tag{3.4}$$

$$(\sum_{j:(i,j)\in A_x^f} X_{ij}^f)a_{xi}^r \leq T_{xi}^{fr} \leq (\sum_{j:(j,i)\in A_x^f} X_{ji}^f)b_{xi}^r, \quad \forall i \in N_x^f, \forall r \in R_x \tag{3.5}$$

$$X_{ij}^f \quad binaire, \quad \forall (i,j) \in A_x^f \tag{3.6}$$

$$X_i^f = \sum_{j:(i,j)\in A_x^f} X_{ij}^f, \quad \forall i \in N_x^f. \tag{3.7}$$

Les relations (3.1) - (3.3) représentent les contraintes de conservation de flot sur le réseau G_x^f où un itinéraire d'un avion commence au nœud $i \in O_x^f$ (3.1) et se termine au nœud $i \in D_x^f$ (3.3). Les relations (3.4) représentent les contraintes de compatibilité (non linéaires) entre les variables de flot et les variables de ressource. Les contraintes d'intervalle sur les ressources sont représentées par les relations (3.5). Les conditions initiales sur les ressources sont imposées par les fonctions d'extension de chacune des ressources sur les nœuds de l'ensemble O_x^f. Les variables définies en (3.6) étant binaires, ces relations décrivent un ensemble d'itinéraires disjoints. En (3.7) apparaissent les définitions des variables de couverture des nœuds que l'on réutilisera dans le modèle de gestion des avions qui suit. Pour plus de détails au sujet de l'utilisation de ce type de formulation, on consultera Desrosiers *et al.* (1995) ainsi que Desaulniers *et al.* (1998).

3.3.2 Domaine réalisable pour les pilotes

La structure $\mathbb{P}_y^f$, $f \in F$, des chemins admissibles pour les pilotes est semblable à celle des avions. Les variables de flot sont notées par $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}^f, f \in F)$ avec $\boldsymbol{Y}^f = (Y_{ij}^f, (i,j)$

$\in A_y^f$; Y_i^f, $i \in N_y^f$) pour $f \in F$, et les variables de ressource sont notées par $\boldsymbol{T}_y^f = (T_{yi}^{fr}, i \in N_y^f, r \in R_y)$ pour $f \in F$, où R_y est l'ensemble de ressources. Ces ressources portent notamment sur l'heure de départ des vols, le temps de vol cumulé, le temps travaillé, etc. L'heure de départ n'est pas toujours fixée car plusieurs approches de résolution des problèmes d'avions, de pilotes et d'agents de bord seront considérées. Avec ces notations, $\mathbb{P}_y^f$ s'exprime comme :

$$\sum_{j:(i,j)\in B_y^f} Y_{ij}^f = 1, \quad \forall i \in O_y^f \tag{3.8}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A_y^f} Y_{ij}^f - \sum_{j:(j,i)\in A_y^f} Y_{ji}^f = 0, \quad \forall i \in N_y^f \tag{3.9}$$

$$\sum_{j:(j,i)\in E_y^f} Y_{ji}^f = 1, \quad \forall i \in D_y^f \tag{3.10}$$

$$Y_{ij}^f (f_{yij}^r(T_{yi}^{fr}) - T_{yj}^{fr}) \leq 0, \quad \forall (i,j) \in A_y^f, \forall r \in R_y \tag{3.11}$$

$$a_{yi}^r \leq T_{yi}^{fr} \leq b_{yi}^r, \quad \forall i \in N_y^f, \forall r \in R_y \tag{3.12}$$

$$Y_{ij}^f \quad binaire, \quad \forall (i,j) \in A_y^f \tag{3.13}$$

$$Y_i^f = \sum_{j:(i,j)\in A_y^f} Y_{ij}^f, \quad \forall i \in N_y^f. \tag{3.14}$$

L'interprétation des contraintes est la même que celle donnée pour la structure du problème des avions. En pratique, on retrouve cependant plus de variables de ressource dans le problème des pilotes que dans celui des avions.

3.3.3 Domaine réalisable pour les agents de bord

La structure des chemins admissibles P_k^f , $k \in K$, pour les agents de bord est aussi semblable aux deux structures décrites précédemment. Les variables de flot sont notées $Z = (Z^k, k \in K)$ avec $Z^k = (Z_{ij}^k, (i, j) \in A_z^k ; Z_i^k, i \in N_z^f)$ pour $k \in K$, alors que les variables de ressources sont notées par $T_z^k = (T_{zi}^{kr}, i \in N_z^k, r \in R_z)$ pour $k \in K$, où R_z est l'ensemble de ressources. Ces ressources décrivent les restrictions de la convention de travail des agents de bord et portent notamment sur l'heure de départ des vols, le temps de vol cumulé, le temps travaillé, etc. Notons encore une fois que l'heure de départ n'est toujours pas fixée car plusieurs approches de résolution des problèmes d'avions, de pilotes et d'agents de bord seront considérées. Avec ces notations, P_z^k s'exprime comme :

$$\sum_{j:(i,j)\in B_z^f} Z_{ij}^f = 1, \quad \forall i \in O_z^f \tag{3.15}$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A_z^k} Z_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in A_z^k} Z_{ji}^k = 0, \quad \forall i \in N_z^k \tag{3.16}$$

$$\sum_{j:(j,i)\in E_z^f} Z_{ji}^f = 1, \quad \forall i \in D_z^f \tag{3.17}$$

$$Z_{ij}^k (f_{zij}^r (T_{zi}^{kr}) - T_{zj}^{kr}) \leq 0, \quad \forall (i, j) \in A_z^k, \forall r \in R_z \tag{3.18}$$

$$a_{zi}^r \leq T_{zi}^{kr} \leq b_{zi}^r, \quad \forall i \in N_z^k, \forall r \in R_z \tag{3.19}$$

$$Z_{ij}^k \quad binaire, \quad \forall (i, j) \in A_z^k \tag{3.20}$$

$$Z_i^k = \sum_{j:(i,j)\in A_z^k} Z_{ij}^k, \quad \forall i \in N_z^k. \tag{3.21}$$

L'interprétation des contraintes est la même que celle donnée pour la structure du problème des avions et celui des pilotes. En pratique, on retrouve autant de variables de ressource dans le problème des agents de bord que dans celui des pilotes.

3.3.4 Formulation intégrée

Nous présentons maintenant un cas général d'affectation de flotte et des équipages. Un membre d'équipage peut desservir un seul (cas de pilote) ou plusieurs (cas d'agent de bord) types d'avions. Soit F^k l'ensemble des types d'avions qui peuvent être desservis par un agent de bord $k \in K$. Soit n_{zi} le nombre d'agents de bord nécessaires pour couvrir le vol $i \in L_z^k$. La formulation intégrée du problème de gestion simultanée des avions, des pilotes et des agents de bord comme un problème de multiflots non linéaire en nombres entiers, avec fenêtres de temps, contraintes de ressources, contraintes de compatibilité entre les avions et les agents de bord et contraintes de synchronisation entre les agents de bord s'écrit :

$$\text{Maximiser} \sum_{f\in F}\left[\sum_{i\in L_x^f} c_{xi}^f X_i^f - \sum_{o\in O_x^f} c_{xo}^f X_o^f - \sum_{o\in O_y^f} c_{yo}^f Y_o^f - \sum_{(i,j)\in J_y^f} c_{yij}^f Y_{ij}^f \right.$$

$$\left. - \sum_{k\in K}\left[\sum_{(i,j)\in J_z^k} c_{zij}^k Z_{ij}^k + \sum_{o\in O_z^k} c_{zo}^k Z_o^k\right]\right] \tag{3.22}$$

sujet à:

$$\sum_{f \in F} X_i^f = 1, \quad \forall i \in L \tag{3.23}$$

$$Y_i^f = X_i^f, \quad \forall f \in F, \forall i \in L_y^f \tag{3.24}$$

$$Y_{ij}^f \leq X_{ij}^f, \quad \forall f \in F, \forall (i,j) \in S_y^f \tag{3.25}$$

$$\sum_{k \in K} Z_i^k = n_{zi}, \quad \forall i \in L \tag{3.26}$$

$$Z_i^k \leq \sum_{f \in F^k} X_i^f, \quad \forall k \in K, \forall i \in L_z^k \tag{3.27}$$

$$Z_{ij}^k \leq \sum_{f \in F^k} X_{ij}^f, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in S_z^k \tag{3.28}$$

$$T_{yi}^{ft} = T_{xi}^{ft}, \quad \forall f \in F, \forall i \in L_y^f \tag{3.29}$$

$$T_{zi}^{kt} = \sum_{f \in F^k} T_{xi}^{ft}, \quad \forall k \in K, \forall i \in L_z^k \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{X}^f \in \mathbb{P}_x^f, \quad \forall f \in F \tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{Y}^f \in \mathbb{P}_y^f, \quad \forall f \in F \tag{3.32}$$

$$\boldsymbol{Z}^k \in \mathbb{P}_z^k, \quad \forall k \in K. \tag{3.33}$$

Dans cette formulation l'objectif (3.22) maximise le profit résultant de la couverture des vols par les avions et minimise les dépenses encourues pour les frais fixes d'utilisation des avions, les coûts de la couverture des vols par les équipages et les coûts de connexion pour les équipages. Les contraintes (3.23) imposent la couverture de tous les vols en considérant toutes les flottes, i.e., $L = \bigcup_{f \in F} L_x^f$; il se peut que certains vols

soient couverts par un avion fictif dans la solution. Les contraintes (3.24) imposent la couverture de tous les vols par les pilotes en considérant toutes les flottes. Un vol couvert par un avion réel mais ne pouvant être effectué dans la réalité faute de pilote sera couvert dans cette formulation par un pilote fictif. En réalité, ce vol doit être annulé parce qu'il n'existe pas assez de pilotes réels. En plus, d'une part, les contraintes (3.24) imposent la compatibilité avion – pilote, i.e., un vol i doit être couvert par un pilote de type f si et seulement s'il est effectué par un avion de ce type. D'autre part, les contraintes (3.25) imposent que les pilotes peuvent utiliser une connexion de l'ensemble S_y^f seulement si un avion utilise la même connexion ; sinon (d'où l'inégalité $\leq$) ils devront utiliser les arcs de connexion longue $(i, j) \in J_y^f - S_y^f$. Les contraintes (3.26) imposent la couverture de chaque vol par le nombre d'agents de bord requis. Les contraintes (3.27) imposent la compatibilité avion – agents de bord, i.e., un vol i peut être couvert par l'agent de bord k si et seulement s'il est effectué par un avion de type compatible. Un vol couvert par un pilote réel mais ne pouvant être effectué dans la réalité faute d'agents de bord sera couvert dans cette formulation par un ou plusieurs agents de bord fictifs. Ce vol doit être annulé en réalité parce qu'il n'y a pas d'agents de bord disponibles. Les contraintes (3.28) concernent les connexions admissibles pour les agents de bord : ceux-ci peuvent utiliser les mêmes connexions que les avions (arcs de l'ensemble S_z^k), mais ils ont aussi la possibilité de ne pas le faire. Dans ce dernier cas, ils devront utiliser les arcs de connexion longue $(i, j) \in J_z^k - S_z^k$. En fait, les contraintes (3.28) indiquent qu'une connexion directe entre les vols i et j pour un agent de bord de type k est possible seulement si ces deux vols sont couverts par un même avion. Les

contraintes de synchronisation entre les avions et les pilotes (3.29) imposent la compatibilité avion – pilote au niveau de l'heure de départ d'un vol et d'un pilote : ces contraintes font intervenir les variables de ressource T_{xi}^{ft} et T_{yi}^{ft} représentant, pour les avions sur G_x^f et pour les pilotes sur G_y^f, le temps de départ du vol $i \in L_y^f$ ($\equiv L_x^f$). En plus, nous avons ici les contraintes (3.30) qui représentent les contraintes de synchronisation entre les temps de départ des vols T_{xi}^{ft} et les temps de départ des agents de bord T_{zi}^{ft}. Notons que, comme il est défini dans le domaine P_x^f, $T_{xi}^{ft} = 0$ si $X_i^f = 0$. Donc, le somme dans les contraintes (3.30) aura toujours un seul terme $T_{xi}^{ft} \neq 0$. Enfin, les contraintes (3.31), (3.32) et (3.33) donnent respectivement les domaines de définition P_x^f des variables X^f, $f \in F$, les domaines de définition P_y^f des variables Y^f, $f \in F$, et les domaines de définition P_z^f des variables Z^k, $k \in K$. Une méthode de résolution d'un tel modèle est étudiée à la section suivante.

Notons que la formulation présentée considère que les pilotes ont des chemins disjoints dans la solution. Cette hypothèse est nécessaire pour que les variables de ressource associées à un vol soient uniquement définies. Notre formulation ne permet pas les mises en place. Nous avons choisi cette formulation pour deux raisons. D'abord, pour simplifier la formulation déjà très complexe et deuxièmement, parce que les compagnies nord-américaines généralement permettent les mises en place seulement dans les cas extrêmes. Si nous voulons insister sur l'introduction des mises en place dans le modèle, il faut avoir un réseau par pilote au lieu d'un réseau par type de pilote.

Conséquemment, dans la formulation proposée, nous aurons un indice supplémentaire pour identifier le pilote en plus de l'indice de type de pilote. Dans notre application développée pour le problème d'affectation des avions et des pilotes avec un seul type d'avion, nous avons ajouté des mises en place dans le modèle. Dans ce cas, la formulation présentée ici peut être directement utilisée en changeant seulement la définition de f et F. Pour le cas avec un seul type de pilote, l'indice $f \in F$ peut représenter un pilote particulier où F représente l'ensemble des pilotes disponibles.

3.4 Approche de résolution séquentielle

Il est pratiquement impossible de résoudre directement une formulation intégrée qui contient tous ces modèles, même pour des problèmes de taille restreinte. Une façon d'obtenir une solution approchée du modèle intégré est de résoudre séquentiellement le problème de la gestion des avions puis celui de la gestion des équipages. Une autre façon est d'utiliser la décomposition de Benders qui sera présentée dans le chapitre 4.

3.4.1 Formulation séquentielle

La formulation mathématique d'un modèle pour la gestion des avions comme un problème de multiflots non linéaire en nombres entiers, avec variables de ressources s'écrit :

$$\text{Maximiser} \sum_{f \in F} \left[\sum_{i \in L_i^f} c_{xi}^f X_i^f - \sum_{o \in O_i^f} c_{xo}^f X_o^f \right] \tag{3.34}$$

sujet à:

$$\sum_{f \in F} X_i^f = 1, \quad \forall i \in L \tag{3.35}$$

$$\boldsymbol{X}^f \in \boldsymbol{P}_x^f, \quad \forall f \in F. \tag{3.36}$$

Dans cette formulation, l'objectif (3.34) maximise le profit résultant de la couverture des vols par les avions moins les dépenses encourues pour les frais fixes d'utilisation des avions. Les contraintes (3.35) imposent la couverture de tous les vols en considérant toutes les flottes et les contraintes (3.36) donnent les domaines de définition des variables $\boldsymbol{X}^f$, $f \in F$.

Une fois le problème d'avions résolu, celui de pilotes devient plus simple et de dimension réduite. Une partie de l'information contenue dans la solution du problème des avions peut être directement utilisée dans la définition du domaine $\boldsymbol{P}_y^f$: notamment en ce qui a trait à l'existence de certains nœuds et arcs, ainsi que pour le réajustement des intervalles de temps admissibles pour l'horaire des vols. Le lecteur remarquera d'abord que, pour une solution fixée du problème d'avion $(\hat{\boldsymbol{X}}, \hat{\boldsymbol{T}}_x) = (\hat{X}^f, \hat{T}_x^{fr}) : f \in F, r \in R_x$, l'objectif tout comme les contraintes du problème de pilotes sont séparables par flotte et qu'en fait on se retrouve face à $|F|$ problèmes à résoudre, un par flotte. Après le réajustement de l'ensemble L_y^f noté par $\hat{L}_y^f = \left\{ i \in L_y^f : \hat{X}_i^f = 1 \right\}$, $f \in F$, et du domaine $\boldsymbol{P}_y^f$

par $\hat{\mathbb{P}}_y^f(\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{T}}_x)=\left\{(Y^f,T_y^f)\in \mathbb{P}_y^f : Y^f=\hat{X}^f, T_y^{ft}=\hat{T}_x^{ft} \text{ et } Y_{ij}^f \le \hat{X}_{ij}^f ; \forall (i,j)\in S_y^f\right\}$, $f\in F$, le problème résultant pour les pilotes de type f peut être défini comme un problème de multiflots non linéaire en nombres entiers avec variables de ressources, très semblable au précédent :

$$\text{Minimiser} \sum_{o\in O_y^f} c_{yo}^f Y_o^f + \sum_{(i,j)\in J_y^f} c_{yij}^f Y_{ij}^f \tag{3.37}$$

sujet à:

$$Y_i^f = 1, \quad \forall i \in \hat{L}_y^f \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{Y}^f \in \hat{\mathbb{P}}_y^f(\hat{\boldsymbol{X}},\hat{\boldsymbol{T}}_x). \tag{3.39}$$

Dans cette formulation, l'objectif (3.37) minimise les dépenses encourues résultant de la couverture des vols par les pilotes de type f ainsi que les coûts de connexion. Les contraintes (3.38) imposent la couverture de tous les vols admissibles pour les pilotes de type f et les contraintes (3.39) donnent le domaine de définition du vecteur des variables $\boldsymbol{Y}^f$. Notons que ces réajustements font disparaître les contraintes liantes dans la formulation. En fait, elles sont implicites dans le domaine redéfini.

La même logique peut être utilisée pour le problème d'agents de bord. Les informations contenues dans la solution du problème des avions peuvent être directement utilisées dans la définition du domaine d'agents de bord $\mathbb{P}_z^f$; notamment en ce qui a trait à l'existence de certains nœuds et arcs, ainsi que pour le réajustement des

intervalles de temps admissibles pour l'horaire des vols. Donc, pour une solution fixée du problème des avions $(\hat{X},\hat{T}_x) = (\hat{X}^f, \hat{T}_x^{fr}) : f \in F, r \in R_x$, et après le réajustement du domaine $\mathbb{P}_z^k$ par

$$\hat{\mathbb{P}}_z^k(\hat{X},\hat{T}_x) = \left\{ (Z^k, T_z^k) \in \mathbb{P}_z^k : Z^k = \sum_{f \in F^k} \hat{X}^f, T_z^k = \sum_{f \in F^k} \hat{T}_x^{fr} \text{ et } Y_{ij}^k \leq \sum_{f \in F^k} \hat{X}_{ij}^f, \forall (i,j) \in S_z^k \right\},$$

$k \in K$, le problème résultant pour les agents de bord peut encore une fois être définie comme un problème de multiflots non linéaire en nombres entiers, avec des variables de ressources :

$$\text{Minimiser} \sum_{k \in K} \left[\sum_{o \in O_z^f} c_o^k Z_o^k + \sum_{(i,j) \in J_z^k} c_{ij}^k Z_{ij}^k \right] \tag{3.40}$$

sujet à:

$$\sum_{k \in K} Z_i^k = \hat{n}_{ij}, \quad \forall i \in L \tag{3.41}$$

$$Z^k \in \hat{\mathbb{P}}_z^k(\hat{X},\hat{T}_x), \quad \forall k \in K \tag{3.42}$$

avec $\hat{n}_{ij} = \sum_{f \in F} n_{ij}^f \hat{Y}_i^f$, $\forall i \in L$, denotant le nombre d'agents de bord nécessaires selon le type d'avions utilisé pour le vol i. Dans cette formulation, l'objectif (3.40) minimise les dépenses encourues résultant de la couverture des vols par les agents de bord ainsi que les coûts de connexion. Les contraintes (3.41) imposent la couverture de chaque vol par le nombre requis d'agents de bord de type k. Remarquons qu'à cause de ces contraintes, la formulation (3.40) - (3.42) n'est pas séparable par type d'agent de bord. Les

contraintes (3.42) donnent les domaines de définition des variables Z^k, $k \in K$. Notons que ces réajustements font disparaître les contraintes liantes dans la formulation. Comme précédemment, elles sont implicites dans le domaine redéfini.

3.4.2 Résolution séquentielle

Il y a plusieurs façons de résoudre séquentiellement le problème de gestion des avions et des équipages. Une première approche consiste à résoudre d'abord le problème des itinéraires d'avions avec fenêtres de temps, puis celui des horaires des pilotes avec les temps de départs fixés par la solution obtenue pour les avions, et finalement le problème des horaires des agents de bord avec les temps de départ fixés toujours par la solution obtenue pour les avions. Une deuxième approche consiste à déduire des fenêtres sur les temps de départ des vols pour les pilotes à partir de la solution des avions. Ces fenêtres de temps sont déduites des itinéraires d'avion de telle sorte que ces derniers restent légaux pour tous les horaires des pilotes dans ces fenêtres de temps. La résolution de problèmes d'horaires d'agent bord est effectuée avec les temps de départ fixés par les pilotes. Une troisième approche comprend des fenêtres de temps pour les trois problèmes de gestion. Dans ce cas, les fenêtres de temps pour les pilotes sont déduites de la solution des avions. Les fenêtres de temps pour les agents de bord sont déduites des rotations des pilotes telles que ces dernières restent légales pour tous les horaires d'agents de bord dans ces fenêtres de temps. Dans ce dernier cas, il faut ajouter des contraintes de synchronisation pour que tous les agents de bord desservant le même vol

le fassent à la même heure. Nous avons mentionné ici trois approches de résolution séquentielles qui produisent des solutions de différentes qualités avec des temps de résolution différents. Avec de plus grandes fenêtres de temps, on obtient de meilleures solutions car le nombre de combinaisons augmente ; naturellement le temps de calcul augmente aussi.

Afin de modéliser les contraintes de maintenance, il est également possible d'ajouter des variables de ressources dans le problème d'avions. Dans ce cas, la modélisation par flotte du problème d'avions n'est plus possible, car chaque avion doit être représenté par une commodité. La complexité du problème augmente mais la solution obtenue sera plus réaliste. Par conséquent, le temps de calcul augmente aussi.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons diverses approches susceptibles de répondre adéquatement aux problèmes à résoudre dans une approche séquentielle. Plusieurs des travaux mentionnés pour chacune des parties constituent en fait les sujets de thèse de doctorat réalisés en parallèle par d'autres étudiants au centre de recherche *GERAD*. Dans la section suivante, nous présentons notre approche séquentielle simplifiée qui servira comme base comparative pour l'approche intégrée décrite au Chapitre 4.

En ce qui concerne le problème d'avions (3.6) - (3.8), nous avons deux applications de problèmes de planification qui montrent des résultats intéressants.

Desaulniers *et al.* (1997) ont proposé un modèle qui construit des itinéraires avec des horaires flexibles. Pour le modèle de type multiflots avec variables de temps, ils utilisent une méthode de génération de colonnes incorporée dans un processus optimal de séparation et d'évaluation. Les décisions de séparation (branchement) sont prises selon les valeurs des variables de flot. Le plus grand exemple testé, d'une compagnie aérienne nord-américaine, contient 383 vols, 9 types d'avions avec 91 avions et 33 aéroports. Le temps de calcul de 3508 secondes, avec des fenêtres de temps d'une heure, est obtenu sur une station de travail modeste HP9000/735 (52.0 Specint92, 86.7 Specfp92).

Le même type de problème, avec la contrainte qui impose le même nombre d'avions de chaque type au début et à la fin de la journée, a été traité par Bélanger (1998). Il a aussi ajouté des contraintes sur les stations permises et interdites pour certains types d'avions pendant une période de temps ainsi que sur les vols permis et interdits par type d'avions. Le problème est résolu avec la même méthode de base que dans l'application précédente. Avec une station plus puissante, Ultra-2/2300 (12.3 Specint95, 20.2 Specfp95), il a résolu un exemple de 350 vols et de 11 types d'avions avec 126 avions. Le temps de calcul, avec des fenêtres de temps de 20 minutes, est de 1500 secondes.

Pour le problème DAYOPS des horaires d'équipages, Stojković (1998) propose trois modèles qui montrent des résultats intéressants. Le premier modèle construit des rotations et des horaires mensuels d'équipage pour un horizon de temps prédéfini. Les

horaires de vols sont fixes. On peut utiliser ce modèle pour la gestion des pilotes (3.37) - (3.39), et des agents de bord (3.40) - (3.42) si on suppose qu'un agent de bord ne peut desservir qu'un seul type d'avions. Ce modèle inclut vingt ressources et modélise la convention collective d'une compagnie aérienne nord-américaine. L'horizon de l'optimisation est déterminé de telle sorte qu'on ne peut changer qu'une seule rotation par membre d'équipage. Stojković (1998) utilise aussi une méthode de génération de colonnes incorporée dans un processus optimal de séparation et d'évaluation. Les décisions de branchement sont prises selon les valeurs des variables de flot. Les plus grands exemples testés ainsi que les temps de calcul obtenus sur une station de travail HP 9000/715 (115.1 Specint92, 138.7 Specfp92) sont présentés dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Dimensions et temps de calcul présentés par Stojković (1998)

Nombre de tâches	Horizon de temps [jour]	Nombre d'équipages (+ réserve)	Membres par équipage	CPU [sec]
15	1	9	1 pilote	7
58	7	7 (+2)	1 pilote	242
28	1	14 (+2)	2 agents de bord	30
114	7	14 (+2)	2 agents de bord	102

Dans ce tableau, le nombre de tâches correspond, dans le cas des problèmes de pilotes, au nombre de vols à couvrir plus deux (les nœuds origine et destination). Dans le cas des agents de bord, un vol est dupliqué autant de fois qu'il faut le couvrir. On peut donc utiliser le même algorithme que pour les pilotes. Nous remarquons que les temps de calcul sont très petits pour les problèmes résolus sur un horizon d'un jour (au plus 30

secondes CPU) et qu'ils restent très acceptables même si l'optimisation a été effectuée sur un horizon de sept jours (moins de 5 minutes CPU).

Le deuxième modèle proposé par Stojković (1998) construit les rotations et les horaires de pilotes pour l'horizon d'un jour ; il est semblable au modèle (3.37) - (3.39). Des fenêtres de temps sont déduites des itinéraires d'avions telles que les itinéraires d'avions restent légaux pour tous les horaires des pilotes dans ces fenêtres de temps. Le modèle proposé n'a pas été appliqué au problème des agents de bord à cause des difficultés de synchronisation des horaires. Cet aspect est traité dans le troisième modèle. Par contre, les règles de la convention collective sont modélisées avec des ressources. Pour le résoudre, les mêmes méthodes de base sont utilisées comme dans le modèle précédent sauf que le branchement se fait sur les variables de temps et selon l'évaluation du flot entre les paires de vols. Le plus grand exemple testé contient 190 vols qui doivent être desservis par 79 avions et 59 pilotes. Les temps de résolution obtenus sur une station de travail HP 9000/735 (109.1 Specint92, 167.9 Specfp92) sont entre 30 et 70 secondes selon le nombre de vols avec fenêtres de temps.

Le troisième modèle proposé par Stojković (1998) construit les rotations et les horaires d'agents de bord pour un horizon d'un jour ; il corresponde au modèle (3.40) - (3.42) avec les contraintes de synchronisation. Des fenêtres de temps sont déduites des itinéraires d'avions de sorte que ces derniers restent légaux pour tous les horaires d'agents de bord dans ces mêmes fenêtres de temps. Par rapport au modèle précédent,

des contraintes de synchronisation des heures de départ pour les équipes avec plusieurs membres sont ajoutées et les mêmes méthodes de résolution sont utilisées. Deux exemples sont testés sur une station de travail plus puissante : Ultra-2/2300 (10.5 Specint95, 17.7 Specfp95). Pour chaque exemple, le temps de calcul d'une solution optimale est présenté dans l'avant dernière colonne du Tableau 3.2. Avec un branchement heuristique sur les variables de flot, les temps de résolution sont considérablement diminués et ils apparaissent dans la dernière colonne du Tableau 3.2.

Tableau 3.2 : Dimensions et temps de calcul présentés par Stojković (1998)

Nombre de vols	Nombre d'avions	Nombre d'équipages	Membres par équipages	CPU [sec] avec le branchement	
				optimal	heuristique
131	58	42	3	48805	8804
190	79	59	2	12437	2565

Dans ce tableau, nous avons des équipages avec deux et trois membres. Le temps de calcul est beaucoup plus sensible au nombre de membres dans un équipage qu'au nombre de vols à couvrir. Un membre additionnel dans un équipage augmente le temps de calcul entre trois à quatre fois. Le branchement heuristique proposé diminue le temps de calcul approximativement de cinq fois. Nous remarquerons que pour un problème DAYOPS pour les agents de bord de dimensions réelles, les temps de calcul sont encore élevés (jusqu'à 150 minutes avec le branchement heuristique).

3.5 Études numériques

Nous présentons maintenant, pour des raisons académiques, l'implantation que nous avons réalisée pour le problème opérationnel d'avions et un modèle pour le problème opérationnel des pilotes que nous avons développé. Notre implantation est basée sur la première approche parmi les trois approches de résolution séquentielle mentionnée dans la section précédente. Notons que nous n'avons pas implanté le modèle pour le problème d'agents de bord parce que ceci dépasse le cadre de cette thèse. Le modèle pour les avions construit les itinéraires et les horaires d'avions sur un horizon d'un jour. Pour notre application, il existe des contraintes sur les stations initiales et les stations finales de façon à prendre en compte les conditions courantes lors de la réoptimisation et de pouvoir également reprendre la planification prévue après ce processus d'optimisation. Pour chaque avion, nous fixons la station de départ selon sa position courante. Les contraintes concernant la maintenance des avions sont prises en considération implicitement en fixant la position et le retard maximal accepté pour les avions qui nécessitent un entretien durant la journée courante. Pour les autres avions, nous imposons les contraintes sur le nombre d'avions requis à la fin de la journée pour chaque station. Notre modèle est basé sur la formulation (3.6) - (3.8). Il possède une structure diagonale par blocs, où chaque bloc correspond à une flotte d'avions. Nous pouvons utiliser la décomposition de Dantzig-Wolfe pour bien profiter de cette structure spécifique. Pour obtenir une solution entière optimale du problème, cette méthode de génération de colonnes est incorporée dans un processus optimal de séparation et

d'évaluation. Les décisions de séparation sont prises selon les valeurs des variables de flot.

Pour le modèle qui construit les itinéraires des pilotes, les temps de départ sont fixes et ils sont déduits de la solution des avions. Nous avons des contraintes sur les stations initiales et des contraintes sur les stations finales. Notre modèle, basé sur la formulation (3.14) - (3.17), incorpore également trois ressources, cumulant respectivement, le temps de vol, le temps travaillé et le nombre d'atterrissages.

Dans cette section, nous présentons d'abord pourquoi et comment nous avons construit les jeux de données. Ensuite, nous montrons le processus d'optimisation et nous donnons les solutions pour chacun des problèmes d'affectation des avions et des pilotes, avec un horizon d'un jour. Des exemples plus complexes avec plusieurs jours sont présentés dans la dernière sous-section où nous traitons une flotte à la fois.

3.5.1 Construction des jeux de données

Il est malheureusement très difficile d'obtenir d'une compagnie aérienne un jeu de données où on a à la fois les informations pour les avions, les équipages et les perturbations survenues au cours d'une journée d'opération. D'une part, les informations concernant les perturbations ne sont pas toujours enregistrées. D'autre part, les avions et les équipages sont gérés par deux départements différents qui n'ont généralement pas la

même forme standard de présentation des données. Nous avons eu à notre disposition les données d'un problème journalier de planification des itinéraires d'avions provenant de la compagnie aérienne Air Canada. À ces données, nous avons ajouté les données hypothétiques suivantes nécessaires pour obtenir un problème opérationnel concernant les avions et les pilotes :

- la période considérée ;
- la fonction coût pour les pilotes ;
- les fenêtres de temps sur les temps de départ ;
- les positions des avions et des pilotes en service au début de la période considérée ;
- les positions des avions et des pilotes en réserve au début de la période considérée ;
- les positions des avions et des pilotes en service à la fin de la période considérée ;
- les positions des avions et des pilotes en réserve à la fin de la période considérée ;
- les valeurs initiales des ressources pour les avions et pour les pilotes, au début de la période considérée ;
- les valeurs maximales des ressources pour les avions et pour les pilotes, à la fin de la période considérée ;
- les temps de transfert des pilotes d'un avion à un autre.

La période considérée est définie comme l'horizon de temps entre le moment où une irrégularité survient et le moment prédéterminé qui représente le décollage du dernier avion considéré. Nous avons traité ici un horizon d'une journée qui commence à six heures du matin et qui finit à minuit. Bien sûr, un horizon plus grand peut être

considéré afin de produire de meilleurs résultats, mais la taille du problème à résoudre ainsi que le temps de calcul seront plus grands. Les tailles des problèmes considérés sont présentées au Tableau 3.3. Dans les noms des problèmes, le premier chiffre représente le nombre de types d'avions différents dans une flotte. Le deuxième chiffre représente le nombre d'avions disponibles dans une flotte. Le troisième chiffre représente le nombre de pilotes disponibles pour tous les types d'avions.

Tableau 3.3 : Problèmes - test

Problème	Flottes	Avions	Pilotes	Villes	Vols
X1A2C2	1	2	2	3	4
O1A2C2	1	2	2	3	4
F1A2C2	1	2	2	3	8
F2A2C2	2	2	2	3	8
F1A5C7	1	5	7	7	11
F1A19	1	19	-	24	102
F8A103	8	103	-	53	354

Les cinq premiers exemples ont été traités avec les modèles d'avions et de pilotes. Les deux derniers exemples n'ont pas été traités avec le modèle de pilotes à cause de leurs dimensions. En effet, il est très difficile d'ajouter correctement toutes les données qui manquent pour les exemples de grandes tailles. Pour les agents de bord, aucun exemple n'a été construit ni traité.

Les positions des avions et des pilotes en service au début de la période considérée sont fixées selon la station où ils se trouvent quand une irrégularité survient. Il est supposé qu'un avion ou un pilote se trouve dans une station s'il y est physiquement au sol ou s'il est en vol en direction de cette station. Dans ce dernier cas, il existe une borne inférieure sur le temps de sa disponibilité. Par contre, les avions et les pilotes en réserve sont toujours au sol. Cependant, ils ont une borne inférieure sur le temps de disponibilité selon des contraintes de maintenance et de convention collective exigées sur les vols précédents. Les positions des avions et des pilotes en service et en réserve à la fin de la période considérée sont déterminées selon les contraintes géographiques, de maintenance et de convention collective. Les contraintes géographiques obligent un avion à être à sa position planifiée à la fin de la période considérée, de sorte qu'il soit prêt à continuer son service planifié. Les contraintes de maintenance jouent le même rôle dans le modèle en permettant aux avions d'arriver à la base de service au moment prévu. Les contraintes de convention collective garantissent, entre autre, que l'équipage sera disponible après la période considérée. Si la période considérée est plus longue qu'une journée, la procédure est la même sauf qu'on ajoute des arcs supplémentaires dans le modèle comme les arcs de maintenance et les arcs de repos.

Les ressources initiales au début et les ressources maximales à la fin de la période considérée, pour les avions et pour les pilotes, sont représentées dans le modèle par des bornes inférieures et des bornes supérieures sur les variables de ressources. Pour la variable de ressource temps qui comptabilise la durée de vol effectuée, la borne

inférieure représente la durée de tous les vols effectués jusqu'au début de la période considérée. La borne supérieure représente la durée maximale prévue selon la planification, c'est-à-dire en tenant compte des contraintes de maintenance et de la convention collective.

3.5.2 Gestion des avions

Les résultats numériques pour les modèles présentés dans cette section ont été obtenus sur une station de travail de performance modeste : HP 9000/715 (115.1 Specint92, 138.7 Specfp92). Le modèle (3.6) - (3.8) a été appliqué et testé sur une série d'exemples présentés au Tableau 3.3. Les résultats obtenus pour l'exemple *F1A5C7* sont présentés dans le Tableau 3.4.

Cet exemple représente la flotte d'avions B-767-300 qui dessert sept villes avec onze vols pendant une période d'une journée. La première ligne du tableau représente le plan, i.e., la situation avant la perturbation. Les blocs suivants, séparés par une ligne grise, montrent les résultats obtenus pour chacun des scénarios développés. Pour chaque scénario, nous avons plusieurs variantes de solutions. Une variante représente une application de notre modèle d'optimisation avec les paramètres ajustés à certaines valeurs. Les paramètres ajustables sont le retard maximal permis et la pénalité sur les vols non couverts.

Tableau 3.4 : Résultats et temps de calcul pour le problème F1A5C7

Perturbation	Var	Retard max.	Pénalité non-couv.	Type d'avions	Avions utilisés	Vols couverts	Fonction objectif	CPU [sec]
Planification	-	-	-	B-763	5	11	129550	0.1
Scénario 1	(a)	0	10000	B-763	4	10	98501	0.0
1 avion	(b)	60	10000	B-763	4	10	98501	0.0
2 vols	(c)	120	10000	B-763	4	11	147924	0.0
Scénario 2	(a)	0	10000	B-763	3	8	72714	0.0
	(b)	60	10000	B-763	3	8	72714	0.0
2 avions	(c)	120	10000	B-763	3	9	98075	0.0
4 vols	(d)	240	10000	B-763	3	10	128360	0.0
	(e)	360	10000	B-763	3	10	134583	0.1

Dans le Tableau 3.4, il y a deux scénarios développés. Le premier scénario représente un avion hors service qui se trouve à la station YYZ et qui devrait terminer son itinéraire dans la même station mais plus tard. Il était prévu par le plan que cet avion fasse encore deux vols. L'autre scénario montre également deux avions hors service dans la station YYZ et qui devaient finir leurs itinéraires dans la même station. Ces avions, par rapport au plan, doivent encore effectuer quatre vols jusqu'à la fin de la journée. La première colonne dans le tableau explique les différents scénarios. Dans la deuxième colonne se trouve le retard maximal permis sur les vols planifiés. La pénalité pour un vol non couvert se trouve dans la troisième colonne. Les colonnes quatre et cinq montrent le type d'avions et le nombre d'avions utilisés. La colonne six montre le nombre de vols couverts obtenus par la variante correspondante. L'avant dernière colonne présente la valeur de la fonction objectif obtenue par la résolution d'un scénario

avec les paramètres correspondants. Le temps de résolution est présenté dans la dernière colonne du tableau.

Les résultats présentés dans cette sous-section sont obtenus en utilisant le logiciel *Gencol* pour résoudre le modèle de gestion d'avions. Dans le Tableau 3.5, nous présentons les solutions détaillées pour chacun des scénarios. Chaque ligne représente les itinéraires des avions de la flotte obtenus par les différentes variantes. Notons qu'une variante représente un scénario résolu par une instanciation donnée des paramètres. Chaque avion est représenté par un chiffre et une flèche qui sert en même temps de légende pour les figures suivantes. La dernière colonne donne les vols non couverts. La flèche correspondante sera utilisée dans les figures suivantes pour représenter les vols non couverts d'une solution.

Tableau 3.5 : Itinéraires d'avion obtenus pour le problème F1A5C7

Scénario	Avion 1 →	Avion 2 →	Avion 3 →	Avion 4 →	Avion 5 →	Annulés →
0	900-901-147	111-844-844	109	891-100	942-947	-
1(a)	900-901-147	111-844-844	891-100	-	942-947	109
1(c)	900-901-109	111-844-844	891-100	-	942-947-147	-
2(a)	900-901-147	111-844-844	891-100	-	-	109, 942, 947
2(c)	900-901-109	111-844-844	942-947-147	-	-	100, 891
2(d)	900-901-109-100	111-844-844	942-947-147	-	-	891
2(e)	900-901-891-844-844	111	942-947-109-100	-	-	147

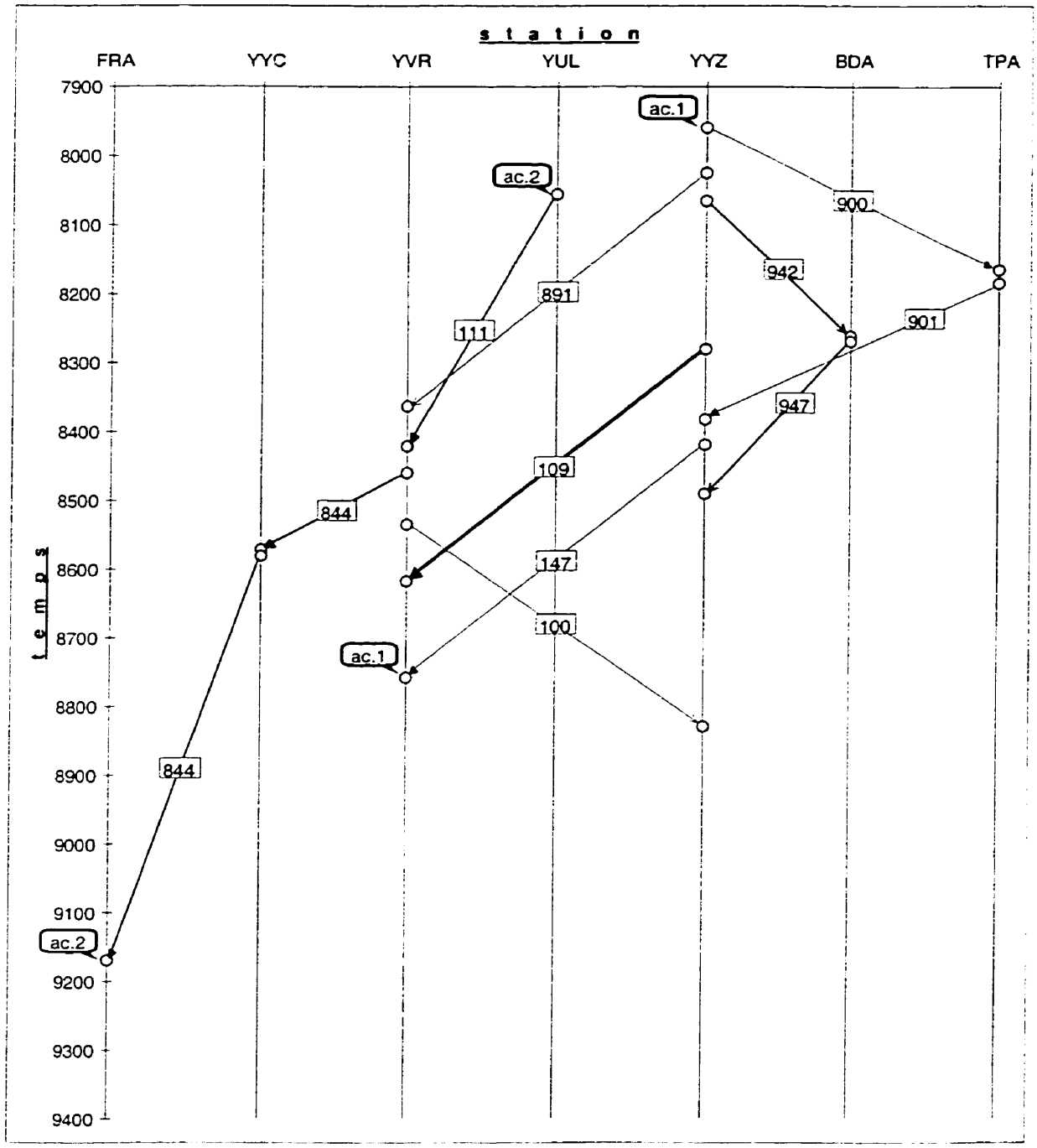

Figure 3.2 : Itinéraires planifiés pour le problème F1A5C7 (scénario 0)

Le diagramme espace-temps de la Figure 3.2 présente le scénario 0 du Tableau 3.5, i.e., les cinq itinéraires tels que planifiés. Le premier scénario, présenté dans les lignes 1(a) et 1(c) du Tableau 3.5, présente le cas où l'avion 4 est hors service. Les itinéraires obtenus avec deux ensembles différents de paramètres, sont représentés par deux diagrammes espace-temps à la Figure 3.3. La première solution (a) est obtenue quand on ne permet pas le retard sur les vols. La deuxième solution (b) permettant un retard de 60 minutes est identique à la solution (a) et elle n'est pas présentée. La troisième solution (c) est obtenue quand on permet un retard sur les vols de 120 minutes au maximum.

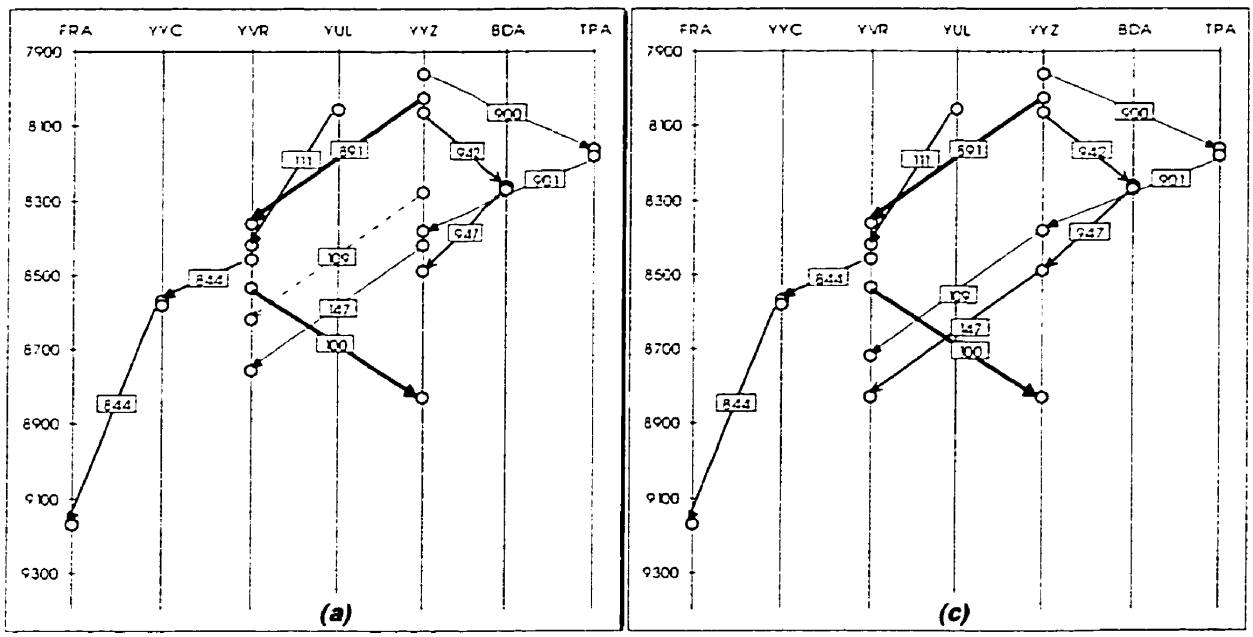

Figure 3.3 : Itinéraires d'avions pour le scénario 1 du problème F1A5C7

Le retard de 60 minutes ne produit pas la meilleure solution mais celui de 120 minutes permet à tous les vols d'être couverts. Pour les problèmes traités ici, le temps de calcul est négligeable. Notons que la valeur de la fonction objectif pour la variante (c) du scénario 1 dépasse la valeur initiale de la fonction objectif. Cela est possible parce que nous couvrons tous les vols en utilisant un avion de moins que ce qui a été planifié. Le prix à payer, qui n'entre pas dans la fonction objectif, est le retard important de certains vols (jusqu'à deux heures).

Le deuxième scénario, présenté dans les quatre dernières lignes du Tableau 3.5, représente le cas où les avions 4 et 5 sont hors service. Les itinéraires obtenus avec quatre ensembles différents de paramètres sont présentés à la Figure 3.4. La première solution (a) est obtenue quand on ne permet pas le retard sur les vols. La deuxième solution (b) permet un retard de 60 minutes et est identique à la solution (a) : elle n'est pas présentée. Les troisième (c), quatrième (d) et cinquième (e) solutions sont obtenues en permettant un retard sur les vols de deux, quatre et six heures, respectivement. Nous voyons que le nombre de vols annulés diminue avec l'agrandissement des fenêtres sur les temps de départ. Par conséquent, la valeur de la fonction objectif augmente aussi. Notons que les temps de calcul CPU sont négligeables à cause des petites dimensions des problèmes. C'est la raison pour laquelle le temps CPU n'augmente pas avec l'agrandissement des fenêtres de temps.

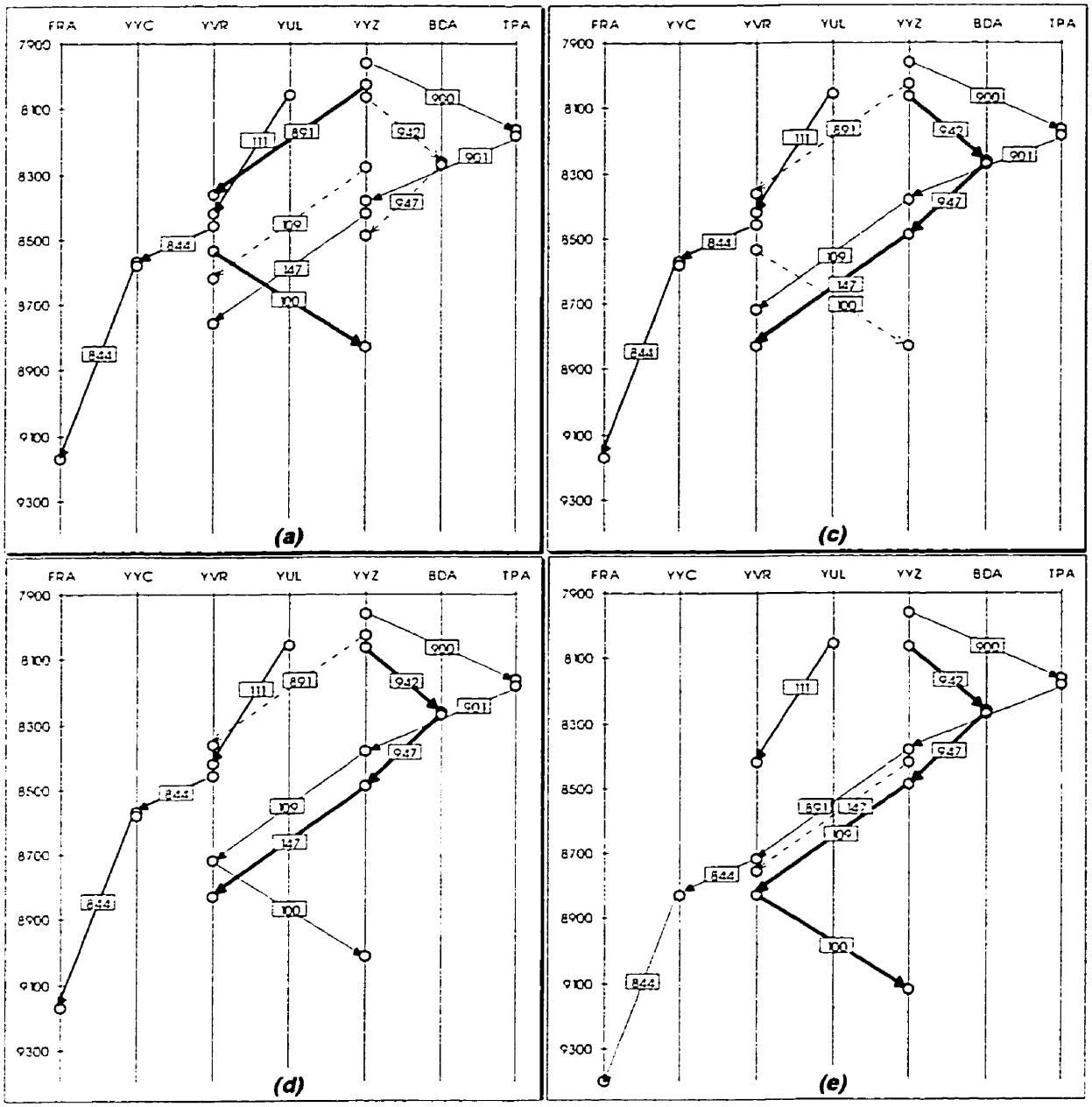

Figure 3.4 : Itinéraires d'avions pour le scénario 2 du problème F1A5C7

Nous avons testé un autre exemple avec la flotte CRJ de 19 avions qui dessert, par le plan, 24 villes avec 102 vols pendant la période d'une journée. Après une perturbation où deux avions sont restés hors de service, nous avons réussi à trouver en

43 secondes une solution qui couvre tous les vols planifiés avec 17 avions, en retardant des vols de 90 minutes au maximum. Le dernier et plus grand exemple que nous avons testé comprend une flotte composée de 8 types différents avec 103 avions et 354 segments de vols à couvrir (problème F8A103). Les résultats sont données au Tableau 3.6.

Tableau 3.6 : Résultats et temps de calcul pour le problème F8A103

Perturbation	Retard Max.	Pénalité non-couv.	Type de flotte	Avions utilisés	Vols couverts	Fonction objectif	CPU [sec]
Planification	-	-	MIX8	103	354	1170240	214.7
Scénario 1	30	-	MIX8	103	354	1192589	372.7
Scénario 2	30	10000	MIX8	102	352	1187240	658.4
Scénario 2+	30	100000	MIX8	102	353	1086726	407.4

Dans la planification initiale, nous couvrons 354 vols avec 103 avions de huit types différents. Considérons deux scénarios pour le jour d'opération. Le premier scénario permet un retard de 30 minutes maximum sur certains vols. Dans cette situation, nous pouvons encore couvrir tous les vols planifiés avec une flotte de 103 avions. Même le profit a légèrement augmenté par rapport à la situation précédente. La raison de ce profit supplémentaire est que les temps de départ sont maintenant mieux placés selon la fonction objectif et que nous n'avons pas pénalisé le retard. Cet aspect n'est pas introduit dans notre modèle mais son ajout, au besoin, n'est pas difficile. Dans le deuxième scénario, nous avons une nouvelle irrégularité où un avion de type 320 est hors service. Selon la planification, cet avion devait effectuer deux vols : YYZ-YMX et

YMX-MBJ. Pour ces deux scénarios, nous avons obtenu deux résultats différents en changeant les valeurs des paramètres qui représentent une pénalité sur les vols non-couverts. Nous voyons qu'avec des pénalités moins rigoureuses nous couvrons 352 vols avec 102 avions disponibles et avec un profit légèrement détérioré. Avec des pénalités plus rigoureuses (scénario 2+), nous couvrons un vol de plus mais le profit diminue. Dans le Tableau 3.7 nous montrons la partition des vols couverts entre les différents type d'avions.

Tableau 3.7 : Distribution des vols couverts pour le problème F8A103

	Types d'avion							
Perturbation	320	343	74M	74S	763	767	CRJ	D9S
Planification								
Avions utilisés	30	1	2	2	4	10	19	35
Vols couverts	89	3	4	3	9	26	104	116
Scénario 1								
Avions utilisés	30	1	2	2	4	10	19	35
Vols couverts	86	3	4	3	11	26	112	109
Scénario 2								
Avions utilisés	29	1	2	2	4	10	19	35
Vols couverts	84	3	4	3	11	26	112	109
Scénario 2+								
Avions utilisés	29	1	2	2	4	11	19	34
Vols couverts	84	3	4	3	11	27	112	109

3.5.3 Gestion des pilotes

Le modèle opérationnel de confection des rotations des pilotes est formulé comme un problème de multiflots à coût minimal, où chaque pilote est considéré comme une commodité distincte. Ce modèle considère le problème de recouvrir un ensemble donné de vols, défini par les itinéraires d'avions. L'objectif est de minimiser les coûts des opérations et les coûts fixes en associant à chaque vol le pilote le plus approprié, tout en tenant compte des mises en place, i.e., le transport des pilotes comme passagers. Les contraintes habituelles pour ce type de formulation sont les contraintes de recouvrement des vols, de conservation de flot, de bornes supérieures et inférieures et de compatibilité entre le flot et le temps pour effectuer un vol. Les contraintes supplémentaires sont la durée maximale de rotation et la durée maximale de temps travaillé. De plus, nous traitons ici les contraintes de repos et les contraintes sur le nombre et le type de pilotes qui peuvent se trouver en même temps au même aéroport.

Comme pour le modèle de gestion d'avions, nous avons testé les cinq premiers exemples présentés au Tableau 3.3. Pour résoudre le modèle de gestion de pilotes (3.14) - (3.17), nous utilisons encore une fois le logiciel *Gencol*. Les résultats numériques pour les modèles présentés dans cette section ont été obtenus sur une station de travail de performance modeste : HP 9000/715 (115.1 Specint92, 138.7 Specfp92).

À cause de modélisation similaire des problèmes des avions et des pilotes, nous présentons ici seulement le problème *F1A5C7*. La solution du problème des avions présenté à la Figure 3.5 est utilisée à l'entrée de l'optimisation du problème des pilotes. La solution du problème des pilotes est présentée à la Figure 3.6.

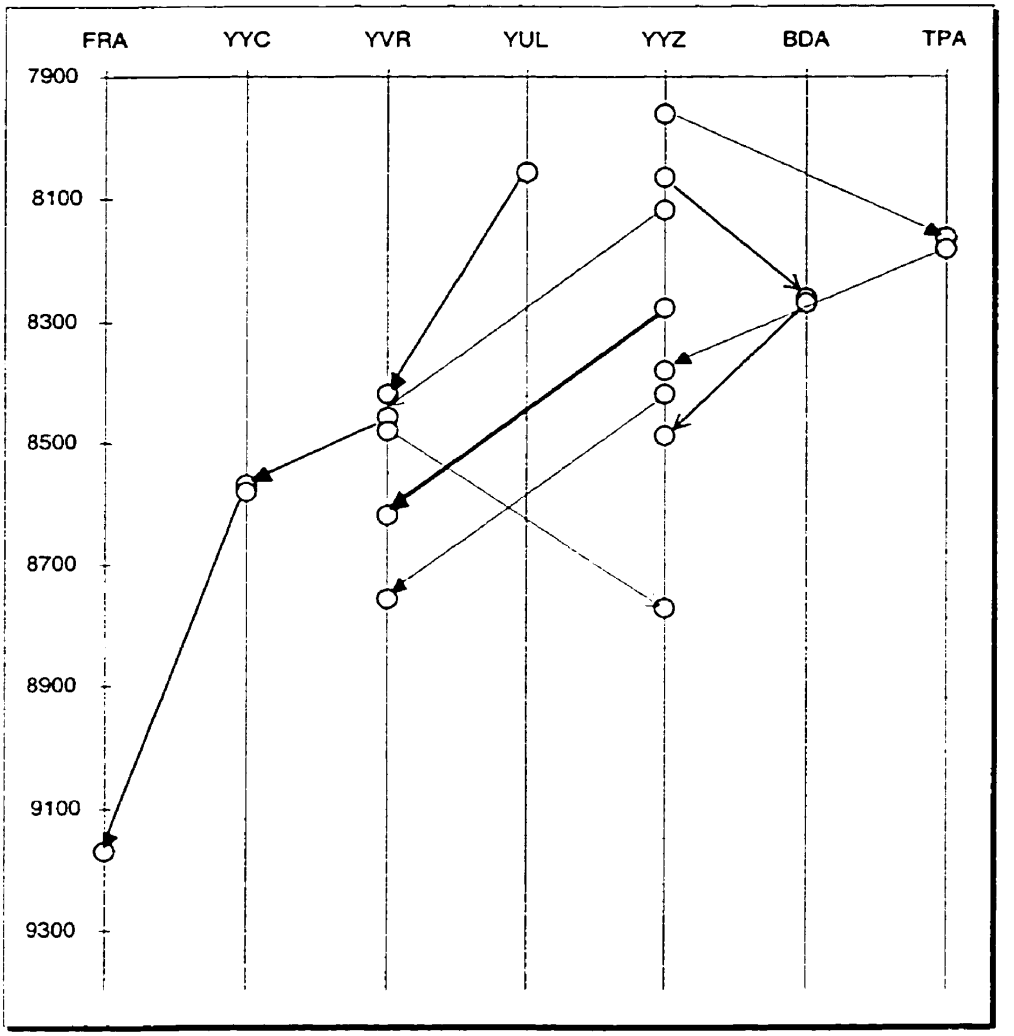

Figure 3.5 : Itinéraires des avions pour le problème F1A5C7

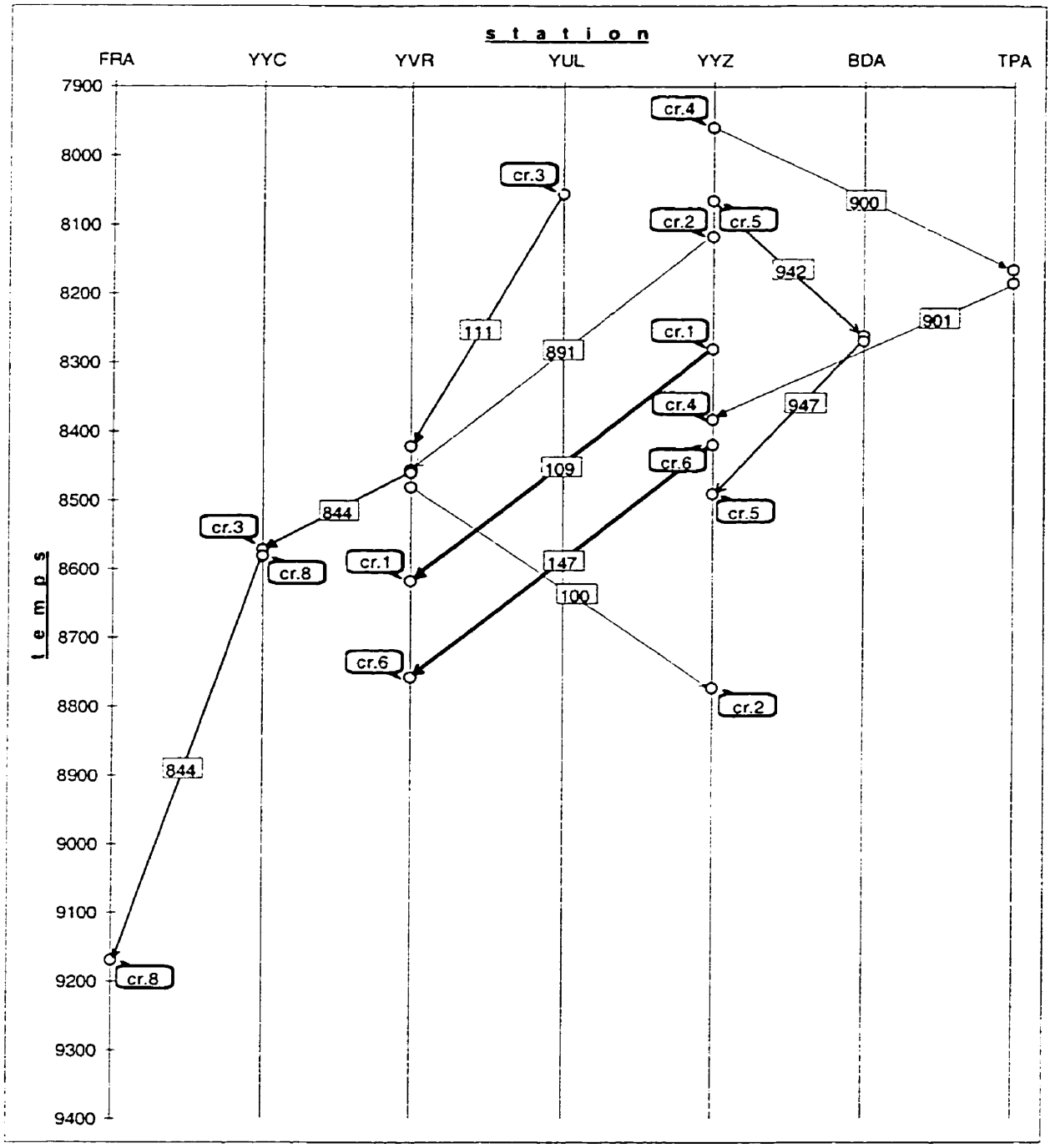

Figure 3.6 : Itinéraires des pilotes pour le problème F1A5C7

Le comportement du modèle développé, sur les exemples testés, est similaire au modèle de gestion des avions. Une certaine différence existe quant au temps de résolution qui est légèrement plus grand pour le modèle de gestion des pilotes. Ce dernier est plus complexe à résoudre et par suite son temps de résolution est beaucoup plus grand. Ici la différence est légère car nos exemples sont petits.

3.5.4 Gestion des avions et des pilotes pour plusieurs jours

Afin de comparer l'approche séquentielle avec la décomposition de Benders présentée dans le chapitre suivant, nous avons développé quelques exemples d'affectation des avions et des pilotes sur un horizon de plusieurs jours. Notons que chaque exemple considère un seul type d'avions et que les temps de départ sont prédéfinis. Le Tableau 3.8 contient pour chaque exemple les informations sur le nombre d'avions utilisés, le nombre de pilotes utilisés, le nombre de vols couverts, la valeur de la fonction objectif et le temps de résolution. Le nom d'un exemple décrit de quel type d'avions il s'agit et quel horizon de temps est considéré dans cet exemple. Les résultats numériques pour les modèles présentés dans cette section ont été obtenus sur une station de travail Ultra-60/2360 (16.1 Specint95, 29.5 Specfp95). Cette station a une performance supérieure à celle utilisée dans la section précédente. Notons que les temps CPU sont donnés en minutes.

Tableau 3.8 : Problèmes – test de grandes tailles

Exemple	Vols	Avions				Pilotes			
		Unités	Coûts	CPU_{min}	Gaps	Unités	Coûts	CPU_{min}	Gaps
320-1	139	33	1 827 564	0.08	0	53	35 200	0.75	450
320-2	271	34	3 129 142	0.47	0	58	41 200	10.19	1 221
320-3	404	34	4 364 198	3.79	0	59	43 000	24.43	403
320-4	532	34	5 609 157	22.29	0	64	48 300	51.53	625
D9S-1	165	35	1 001 706	0.14	0	49	30 400	1.95	0
D9S-2	349	35	1 978 976	3.10	0	62	44 600	17.13	750
D9S-3	524	35	2 936 199	37.96	0	63	46 600	93.00	1 247
CRJ-1	125	19	426 108	0.11	0	40	71 800	1.02	1 133
CRJ-2	256	20	801 599	3.14	0	42	81 800	8.64	3 867
CRJ-3	387	20	1 173 672	50.06	0	42	82 000	44.49	2 737
CRJ-4	519	21	1 559 205	325.89	2 954	45	87 300	251.02	4 288

Notons que les coûts des avions sont beaucoup plus grands que les coûts des pilotes. La fonction objectif du module de gestion des avions contient les coûts des pilotes durant les vols en plus des coûts fixes et variables des avions. Le module de gestion des pilotes ne contient que les coûts fixes sur le nombre de pilotes actifs et en réserve, les pénalités de mise en place des pilotes et les pénalités pour les connections d'une durée de 180 minutes et plus. Nos solutions ne sont pas nécessairement optimales car on arrête l'optimisation du problème maître relaxé pour les avions ou les pilotes quand la décroissance de la fonction objectif devient trop lente. En plus, la méthode de branchement utilisée explore l'arbre seulement jusqu'à l'obtention d'une première solution entière. Le temps moyen de résolution, qui comprend la lecture des données et

la résolution du problème maître et du sous-problème pour les deux modules, est en dessous de deux minutes pour les problèmes avec moins de 200 vols, entre 10 et 30 minutes pour les problèmes de 300 à 400 vols et entre une heure et dix heures pour les problèmes de plus de 500 vols. On peut remarquer que les temps de résolution obtenus sont satisfaisants étant donné l'horizon de temps considéré.

3.6 Conclusion et recherches futures

L'approche séquentielle est l'approche standard utilisée en planification. Nous constatons qu'il existe déjà plusieurs modèles développés et assurant des performances satisfaisantes pour cette approche. Nous avons ajoutée des conditions initiales et finales ainsi que la possibilité d'annuler des vols afin de modéliser les problèmes opérationnels. Pourtant, il y a encore des modifications qui peuvent être ajoutées à ces modèles dans les recherches futures. Nous proposons les modifications suivantes pour les modèles de gestion des avions :

- ajouter certains éléments du problème d'équipage (coûts, contraintes) ;
- prolonger l'horizon de temps sur plusieurs jours ;
- ajouter des arcs de maintenance (des boucles qui commencent et finissent à la même station) pour les avions qui doivent faire l'objet de certains entretiens durant le jour considéré; la longueur de ces arcs dépend du type d'entretien effectué ;
- modéliser la maintenance de façon exacte avec des contraintes de ressources sur la

durée totale de vols et le nombre total d'atterrissages pour chaque avion.

Nous proposons aussi, pour les recherches futures, les modifications suivantes pour les modèles de gestion des pilotes :

- enrichir les modèles en ajoutant des facteurs supplémentaires dans la fonction objectif ;
- développer des algorithmes de séparation et évaluation plus efficaces.

Il est également possible d'ajouter les bonus dans le modèle si on garde les itinéraires ou les rotations planifiés au complet ou en partie. Dans ce cas, nous pouvons ajouter les chemins planifiés dans les réseaux d'avions et de pilotes. Ces chemins ajoutés contiennent les nœuds qui représentent les vols initialement couverts par le plan avant les perturbations avec des bonus alloués aux arcs correspondants. Il faut aussi ajuster les contraintes de recouvrement dans les modèles à cause des vols dédoublés dans chacun des réseaux. Les modifications proposées vont enrichir les modèles existants. Cependant, elles entraîneront l'augmentation de la complexité des modèles et des temps de calcul. Dans ces conditions, trouver un équilibre entre la qualité des solutions et le temps de calcul est toujours difficile et joue un rôle très important pour les applications pratiques.

La contribution principale de ce chapitre est de proposer un modèle optimal intégré pour les problèmes opérationnels. Pour la première fois, nous avons mis dans un

même modèle les trois problèmes qui font partie du problème de gestion d'horaire des vols durant le jour d'opération et qui sont les problèmes d'affectation des vols aux avions, aux pilotes et aux agents de bord. Nous avons donné les contraintes liantes entre ces trois problèmes qui formalisent la dépendance entre les modèles des différents problèmes et qui nous permettent d'écrire une formulation intégrée. En plus, nous avons présenté une approche assez simple pour produire des solutions qui pourraient être comparées avec les solutions obtenues par l'approche de Benders dans le chapitre suivant. Pour cette approche, appelée séquentielle, nous avons présenté les trois réseaux et les trois formulations mathématiques séquentielles, pour chacun des problèmes d'avions, des pilotes et des agents de bord. Nous avons présenté cinq applications qui font partie de thèses de doctorat réalisés par d'autres étudiants et qui peuvent être utilisées pour résoudre un de ces trois problèmes d'affectation. Pour comparer l'approche séquentielle et intégrée, nous avons développé notre propre application d'approche séquentielle. Nous avons également construit les exemples qui traitent les problèmes opérationnels d'avions et de pilotes. Avec ces exemples nous avons montré le processus de résolution séquentielle en deux phases : les avions d'abord et les pilotes ensuite. La comparaison des résultats obtenus par l'approche séquentielle et l'approche de Benders est présentée dans le chapitre suivant.

On remarque que l'approche séquentielle ne résout qu'un seul problème incluant simultanément toutes les flottes pour la gestion des avions. Cependant, la gestion des pilotes nécessite la résolution d'un problème par type de flotte. Comme il a été

mentionné précédemment, cette approche donne des résultats très intéressants au niveau de la planification, même si la solution obtenue est sous optimale pour le problème intégré. Par contre, dans un processus de ré-optimisation sur un horizon très court, elle peut donner des résultats de moindre qualité. Dans le prochain chapitre, nous étudions une alternative basée sur la décomposition de Benders.

CHAPITRE 4

Mise à jour de la planification en modifiant simultanément les itinéraires d'avion et les rotations d'équipage

4.1 Introduction

Au chapitre précédent nous avons vu une approche séquentielle de résolution de trois problèmes, l'affectation des avions, la construction des rotations des pilotes et de celles des agents de bord. Même si chacun de ces trois problèmes est résolu de façon optimale, la solution obtenue n'est qu'un optimum local du problème intégré. Cette approche séquentielle n'est pas toujours en mesure de produire une solution efficace ou même réalisable dans le cas de perturbations majeures. Comme dans le chapitre

précédent, nous proposons un modèle qui peut répondre aux plus grandes perturbations lorsque des irrégularités surviennent en cours d'opération. Nous allons maintenant étudier un modèle général intégrant les deux premiers modules, c'est-à-dire à la fois les avions et les pilotes. Une réoptimisation simultanée des avions et des pilotes trouvera les nouvelles affectations d'avions et de pilotes aux vols planifiés. Ce modèle pourra être utilisé surtout en cours d'opération mais aussi en planification pour des problèmes de taille restreinte. Un cas plus général incluant l'affectation des agents de bord sera présenté à la fin de ce chapitre dans la section 4.7.

Dans la littérature en recherche opérationnelle, peu de publications considèrent la résolution simultanée des problèmes de véhicules et d'équipages, appelés VCSP (Vehicle and Crew Scheduling Problem). De plus, aucune n'a été consacrée au contexte aérien. Il y a toutefois quelques articles qui proposent une approche intégrée dans le contexte du transport urbain. Ainsi, Bodin *et al.* (1983) ont critiqué fortement l'approche séquentielle classique où les autobus sont affectés en premier suivis des chauffeurs. La raison est qu'en général, les coûts d'équipages dominent ceux des véhicules. Ils proposent une approche intégrée où les chauffeurs et les autobus sont traités en même temps ; une heuristique a été développée pour résoudre ce problème intégré. Dans le même domaine, Tosini et Vercellis (1988) et Patriakalakis et Xerocostas (1992) proposent des heuristiques pour traiter un VCSP. Freling *et al.* (1995) proposent une formulation exacte pour le VCSP et utilisent une heuristique pour le résoudre. Plus récemment, Freling (1997) propose un modèle intégré pour les chauffeurs et les autobus

en transport urbain. Il discute les bénéfices que présente l'utilisation d'une approche intégrée au lieu d'une approche séquentielle. En effet, ceux-ci peuvent dépendre considérablement de la structure des coûts considérée ainsi que de la politique de relève des chauffeurs. La première approche optimale pour résoudre un VCSP est proposée par Haase et Friberg (1999). Ils ont combiné des idées proposées dans Desrochers et Soumis (1989) et Ribeiro et Soumis (1994), i.e., le VCSP est formulé comme un problème de partitionement où une colonne représente un itinéraire pour un chauffeur ou pour un autobus. Des contraintes additionnelles sont ajoutées pour lier les deux types d'itinéraires. Ils ont utilisé un algorithme de 'branch-and-price-and-cut' dans lequel la méthode de génération de colonnes est utilisée pour produire les itinéraires pour les autobus et pour les chauffeurs. De plus, afin d'améliorer la relaxation linéaire de la formulation de partitionnement d'ensemble, ils ont utilisé les coupes de clique proposées par Hoffman et Padberg (1993). Malgré l'utilisation de méthodes très sophistiquées, ils n'ont réussi à trouver une solution optimale en un temps raisonnable que pour de petits exemples (20 tâches au maximum).

Dans ce chapitre, nous retiendrons la formulation unifiée de Desaulniers *et al.* (1998) qui peut être utilisée pour les problèmes de tournées de véhicules et d'horaires d'équipages. Ceci permet, grâce à des similarités structurelles, une connexion entre deux modèles : l'un d'affectation d'avions et l'autre d'affectation d'équipages. La connexion sera effectuée par une interface qui permet d'échanger les informations nécessaires entre les deux modèles.

Une approche directe de résolution de la formulation intégrée est utilisable en pratique pour les problèmes de petites tailles, notamment pour les problèmes en cours d'opération. Dans la section suivante, nous décrivons les réseaux associés aux avions et aux pilotes avec une formulation mathématique intégrée. La troisième section de ce chapitre décrit la méthode de résolution basée sur la décomposition de Benders, méthode qui exploite la structure de la formulation proposée. Deux cas spéciaux de décomposition de Benders sont présentés aux quatrième et cinquième sections : la décomposition complète (variables duales sur tous les arcs) avec les horaires fixes et la décomposition de Benders incomplète (variables duales seulement sur les arcs couverts par un avion) avec les horaires fixes. Des exemples d'applications sont présentés à la sixième section. Diverses extensions suivent ainsi qu'une conclusion.

4.2 Formulation mathématique

Les réseaux des avions et des pilotes ont une structure très semblable. Le problème des pilotes est toutefois plus complexe à cause des contraintes de la convention collective telles le temps maximum de vol, le temps maximum travaillé, etc. Pour décrire le modèle intégré d'avions et de pilotes, nous nous servons des mêmes réseaux, variables et domaines des chemins admissibles définis dans le chapitre précédent.

4.2.1 Affectation simultanée des avions et des pilotes

En considérant ces définitions, nous sommes en mesure d'écrire la formulation intégrée de gestion simultanée des avions et des pilotes comme un problème de multiflots non linéaire en nombres entiers, avec fenêtres de temps, variables de ressources et contraintes additionnelles de compatibilité entre les avions et les pilotes:

$$\text{Maximiser} \sum_{f \in F} \left[\sum_{i \in L_x^f} c_{xi}^f X_i^f - \sum_{o \in O_x^f} c_{xo}^f X_o^f - \sum_{o \in O_y^f} c_{yo}^f Y_o^f - \sum_{(i,j) \in J_y^f} c_{yij}^f Y_{ij}^f \right] \tag{4.1}$$

sujet à:

$$\sum_{f \in F} X_i^f = 1, \quad \forall i \in L \tag{4.2}$$

$$Y_i^f = X_i^f, \quad \forall f \in F, \forall i \in L_y^f \tag{4.3}$$

$$Y_{ij}^f \leq X_{ij}^f, \quad \forall f \in F, \forall (i,j) \in S_y^f \tag{4.4}$$

$$T_{yi}^{ft} = T_{xi}^{ft}, \quad \forall f \in F, \forall i \in L_y^f \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{X}^f \in \boldsymbol{P}_x^f, \quad \forall f \in F \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{Y}^f \in \boldsymbol{P}_y^f, \quad \forall f \in F. \tag{4.7}$$

Dans cette formulation l'objectif (4.1) maximise le profit résultant de la couverture des vols par les avions et minimise les dépenses encourues pour les frais fixes d'utilisation des avions, les coûts de la couverture des vols par les pilotes et les coûts de connexion pour les pilotes. Les contraintes (4.2) imposent la couverture de tous les vols en

considérant toutes les flottes, i.e., $L = \bigcup_{f \in F} L_x^f$; il se peut que certains vols soient couverts par un avion fictif dans la solution. Les contraintes (4.3) imposent la couverture de tous les vols par les pilotes en considérant toutes les flottes. Un vol couvert par un avion réel mais ne pouvant être effectué dans la réalité faute de pilote sera couvert dans cette formulation par un pilote fictif. D'une part, les relations (4.3) imposent la compatibilité avion – pilote, i.e., un vol i doit être couvert par un pilote de type f si et seulement si il est effectué par un avion de ce type. D'autre part, les contraintes (4.4) imposent que les pilotes peuvent utiliser une connexion de l'ensemble S_y^f seulement si un avion utilise la même connexion. Les contraintes de synchronisation entre les avions et les pilotes (4.5) imposent la compatibilité avion – pilote au niveau de l'heure de départ d'un vol et d'un pilote : ces contraintes font intervenir les variables de ressource T_{xi}^{ft} et T_{yi}^{ft} représentant, pour les avions sur G_x^f et les pilotes sur G_y^f, le temps de départ du vol $i \in L_y^f$ ($\equiv L_x^f$). Enfin, les contraintes (4.6) donnent les domaines de définition des variables X^f, $f \in F$, et les contraintes (4.7) donnent les domaines de définition P_y^f des variables Y^f, $f \in F$.

4.3 Décomposition de Benders

La décomposition de Benders sépare un problème difficile à résoudre en deux problèmes plus faciles, le problème maître et le sous-problème. Toutefois, avec cette approche, les deux problèmes doivent être résolus de façon répétitive. À chaque

itération, les coupes générées par le sous-problème sont ajoutées au problème maître jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait.

Habituellement dans l'industrie aérienne, on résout d'abord le problème d'avions et ensuite le problème de pilotes et c'est cette approche classique que nous allons utiliser ici. Ainsi, dans le cas du problème de gestion intégrée des avions et des pilotes, le problème des avions devient le problème maître alors que le sous-problème correspond à celui des pilotes. De façon plus précise, le sous-problème sera la relaxation linéaire de la décomposition de Dantzig-Wolfe du problème des pilotes. L'intégrité sera obtenue avec une méthode de séparation et évaluation externe à la décomposition de Benders.

La procédure débute avec une solution (entière) optimale du problème de gestion des avions. Ce problème est nommé le problème maître relâché car il ne contient pas toutes les coupes nécessaires à l'optimalité globale. Étant donné une solution d'affectation des avions, on doit résoudre le sous-problème de l'affectation des pilotes. Ce dernier est séparable par types de pilotes et peut retourner deux types de coupes. Les coupes de réalisabilité n'apparaissent pas dans notre cas car il est toujours possible de rendre le sous-problème réalisable en ajoutant suffisamment de personnel en réserve. Par contre, les coupes d'optimalité permettent d'améliorer la solution globale. Ces coupes sont générées à partir de la fonction objectif de la formulation duale du sous-problème. Elles transfèrent une partie de l'information contenue dans la solution des pilotes vers le problème des avions. Une description mathématique de cette approche a déjà été

présentée au chapitre 1.

4.3.1 Sous - problème

Tel que mentionné précédemment, pour une solution $\hat{X} = (\hat{X}^f, f \in F)$ du problème des avions et les temps de départ des vols $\hat{T}_{xi}^{ft}$, $i \in L_x^f$ et $f \in F$, le problème résultant pour les pilotes est séparable par type $f \in F$. Chacun s'exprime par les relations suivantes, pour $f \in F$:

$$\text{Minimiser}\left\{\sum_{o \in O_y^f} c_{yo}^f Y_o^f + \sum_{(i,j) \in J_y^f} c_{yij}^f Y_{ij}^f\right\} \tag{4.8}$$

sujet à:

$$Y_i^f = \hat{X}_i^f, \quad \forall i \in L_y^f \tag{4.9}$$

$$Y_{ij}^f \leq \hat{X}_{ij}^f, \quad \forall (i,j) \in S_y^f \tag{4.10}$$

$$T_{yi}^{ft} = \hat{T}_{xi}^{ft}, \quad \forall i \in L_y^f \tag{4.11}$$

$$Y^f \in P_y^f. \tag{4.12}$$

Compte tenu du fait que la relaxation linéaire de ce dernier problème est résolue par génération de colonnes, nous devons introduire ici la formulation de type chemin (qui correspond à la relaxation linéaire du problème maître de la décomposition de

Dantzig-Wolfe). Soit θ_p^o une variable binaire de chemin prenant la valeur 1 si le chemin $p \in \Omega^o$ est effectué par le pilote $o \in O_y^f$. Ce chemin p de coût c_p^o, correspond à une rotation admissible pour le pilote associé à une paire de nœuds de départ et d'arrivée. La constante t_{ip}^o (obtenue à l'aide de la variable de ressource T_{yi}^{ft}) représente le temps de départ du vol $i \in L_y^f$ couvert par le chemin $p \in \Omega^o$. Avec les constantes binaires a_{ip}^o et b_{ijp}^o prenant respectivement la valeur 1 si le vol $i \in L_y^f$ et l'arc $(i, j) \in J_y^f$ sont couverts par le chemin $p \in \Omega^o$, la relaxation linéaire de cette nouvelle formulation est donnée par :

$$v_{SP}(\hat{X}^f) = \text{Minimiser} \sum_{o \in O_y^f} \sum_{p \in \Omega^o} c_p^o \theta_p^o \tag{4.13}$$

sujet à:

$$\sum_{o \in O_y^f} \sum_{p \in \Omega^o} a_{ip}^o \theta_p^o = \hat{X}_i^f, \quad \forall i \in L_y^f \tag{4.14}$$

$$\sum_{o \in O_y^f} \sum_{p \in \Omega^o} b_{ijp}^o \theta_p^o \leq \hat{X}_{ij}^f, \quad \forall (i, j) \in S_y^f \tag{4.15}$$

$$\sum_{o \in O_y^f} \sum_{p \in \Omega^o} t_{ip}^o \theta_p^o = \hat{T}_{xi}^{ft}, \quad \forall i \in L_y^f \tag{4.16}$$

$$\sum_{p \in \Omega^o} \theta_p^o = 1, \quad \forall o \in O_y^f \tag{4.17}$$

$$\theta_p^o \geq 0, \quad \forall o \in O_y^f, \forall p \in \Omega^o. \tag{4.18}$$

Dans cette formulation, les contraintes (4.17) imposent qu'une rotation soit assignée à chaque pilote $o \in O_y^f$. Cette rotation peut cependant être vide puis que $Y^f = 0$ satisfait

toutes les contraintes de P_y^f.

Dans la formulation (4.8) - (4.12), on remarquera que le temps de départ d'un vol $\hat{T}_{xi}^{ft}$ est connu à partir de la solution du problème d'affectation des avions. L'information de la contrainte (4.11) pourrait donc être transférée directement dans P_y^f. Toutefois, on perdrait alors les contraintes correspondantes (4.16) nécessaires à la construction des coupes de Benders et permettant de modifier les heures de départ des vols. D'où la nécessité de les conserver à ce niveau. Pour résoudre le modèle (4.13) - (4.18), on peut faire appel à la méthode décrite dans le deuxième modèle proposé par Stojković (1998) qui utilise l'algorithme de plus court chemin avec contraintes de temps présenté par Ioachim *et al.* (1998). Celle-ci permet d'adapter aux pilotes l'approche classique de construction des rotations d'équipages à partir de plusieurs bases (et d'utiliser les mêmes logiciels) en considérant chaque pilote comme ayant une base spécifique (origine et destination spécifiques).

Afin de trouver les coupes de Benders il est nécessaire d'écrire la formulation duale de (4.13) - (4.18). Définissons les variables duales $\alpha^f = \{\alpha_i^f : i \in L_y^f\}$, $\beta^f = \{\beta_{ij}^f \leq 0 : (i,j) \in S_y^f\}$, $\gamma^f = \{\gamma_i^f : i \in L_y^f\}$ et $\delta^f = \{\delta_o^f : o \in O_y^f\}$ associées respectivement aux contraintes (4.14), (4.15), (4.16) et (4.17). La formulation duale de (4.13) - (4.18), pour le type $f \in F$ s'écrit donc :

$$\text{Maximiser}\left\{\sum_{i\in L_y^f}\hat{X}_i^f\alpha_i^f+\sum_{(i,j)\in S_y^f}\hat{X}_{ij}^f\beta_{ij}^f+\sum_{i\in L_y^f}\hat{T}_{xi}^{ft}\gamma_i^f+\sum_{o\in O_y^f}\delta_o^f\right\} \tag{4.19}$$

sujet à:

$$\sum_{i\in L_y^f}a_{ip}^o\alpha_i^f+\sum_{(i,j)\in S_y^f}b_{ijp}^o\beta_p^f+\sum_{i\in L_y^f}t_{ip}^o\gamma_i^f+\delta_o^f\le c_p^o,\quad \forall o\in O_y^f,\forall p\in\Omega^o \tag{4.20}$$

$$\beta_{ij}^f\le 0,\quad \forall(i,j)\in S_y^f. \tag{4.21}$$

4.3.2 Problème maître

À partir d'une solution $(\overline{\alpha}^f,\ \overline{\beta}^f,\ \overline{\gamma}^f,\ \overline{\delta}^f)$, $f\in F$, de la formulation duale du sous-problème des pilotes (4.19) - (4.21), nous pouvons construire une coupe d'optimalité de Benders. En introduisant une variable libre W^f, cette coupe s'exprime en fonction des variables X_i^f, X_{ij}^f et T_{xi}^{ft} du problème maître :

$$W^f\ge\sum_{i\in L_y^f}\overline{\alpha}_i^f X_i^f+\sum_{(i,j)\in S_y^f}\overline{\beta}_{ij}^f X_{ij}^f+\sum_{i\in L_y^f}\overline{\gamma}_i^f T_{xi}^{ft}+\sum_{o\in O_y^f}\overline{\delta}_o^f\ . \tag{4.22}$$

À chaque itération *problème maître / sous-problème*, de telles coupes sont générées, éventuellement pour chaque type $f\in F$. Notons par τ l'ensemble des itérations effectuées. Le problème maître de la procédure de décomposition de Benders prend alors la forme :

$$v_{MP} = \text{Maximiser} \sum_{f \in F} \left[\sum_{i \in L_s^f} c_{si}^f X_i^f - \sum_{o \in O_t^f} c_{to}^f X_o^f - W^f \right] \tag{4.23}$$

sujet à:

$$\sum_{f \in F} X_i^f = 1, \quad \forall i \in L \tag{4.24}$$

$$W^f - \sum_{i \in L_v^f} \overline{\alpha}_{i\tau}^f X_i^f - \sum_{(i,j) \in S_v^f} \overline{\beta}_{ij\tau}^f X_{ij}^f - \sum_{i \in L_v^f} \overline{\gamma}_{i\tau}^f T_{si}^{ft} - \sum_{o \in O_v^f} \overline{\delta}_{o\tau}^f \geq 0, \quad \forall f \in F, \forall \tau \in \mathcal{T} \tag{4.25}$$

$$\boldsymbol{X}^f \in \boldsymbol{P}_s^f, \quad \forall f \in F \tag{4.26}$$

où $\overline{\alpha}_{i\tau}^f, \overline{\beta}_{ij\tau}^f, \overline{\gamma}_{i\tau}^f, \overline{\delta}_{o\tau}^f$ dénote la solution duale obtenue à l'itération $\tau \in \mathcal{T}$.

Le problème d'avions (4.23) - (4.26) correspond à un problème multiflot avec les variables entières $\boldsymbol{X}$ et les variables de ressources $\boldsymbol{T_s}$. Celui-ci peut être résolu par un algorithme de génération de colonnes où la structure de chemin décrite en (4.26) est retenue dans le sous-problème générateur. Toutefois, puisque certaines variables de ressources apparaissent en (4.25), c'est-à-dire au niveau du problème maître de la procédure de génération de colonnes, il faut utiliser un générateur spécialisé, celui du récent article de Ioachim *et al.* (1998). Cet article décrit un problème de plus court chemin avec contraintes de temps où, en plus des coûts habituels sur les arcs, les nœuds portent un coût linéaire en fonction de temps.

4.3.3 Algorithme de résolution

Dans les sections précédentes, nous avons défini le problème maître et le sous-problème de la décomposition de Benders pour notre modèle d'affectation simultanée d'avions et de pilotes. Toutefois, les deux problèmes doivent être résolus de façon itérative. Cette procédure itérative d'optimisation de Benders se termine lorsque $v_W = v_{SP}$, i.e., lorsque $\sum_{f \in F} W^f = \sum_{f \in F} v_{SP}(X^f)$, où v_W représente la somme des variables W^f et v_{SP} représente la somme des fonctions objectifs $v_{SP}(X^f)$ pour chaque sous-problème $f \in F$. Le processus itératif de Benders se poursuit jusqu'à l'obtention d'une solution optimale en variables entières $\boldsymbol{X}$ et continues $\boldsymbol{Y}$.

Pour résoudre le problème (4.1) - (4.7), on relâche d'abord les conditions d'intégralité des variables $\boldsymbol{Y}$ et on résout le problème résultant par la décomposition de Benders. L'intégralité du problème est obtenue avec une méthode de séparation et évaluation externe à la décomposition de Benders. À chaque nœud de branchement, cette décomposition crée un problème maître (de Benders) en variables entières $\boldsymbol{X}$ portant sur l'ensemble des avions, ainsi qu'un sous-problème (de Benders) en variables continues $\boldsymbol{Y}$. Donc, avec la solution courante en $\hat{\boldsymbol{X}} = (\hat{\boldsymbol{X}}^f, f \in F)$, on détermine une solution continue pour $\boldsymbol{Y}^f$ en résolvant (4.13) - (4.18), pour chaque type $f \in F$. D'une part, le problème maître en variables entières $\boldsymbol{X}$ peut à son tour être résolu par la décomposition de Dantzig-Wolfe : la procédure utilise un arbre de branchement avec des

bornes calculées par génération de colonnes. Le générateur d'itinéraire résout cette fois-ci un problème de plus court chemin. D'autre part, étant donné une solution $\hat{X}$, le sous-problème en variables continues Y peut aussi être résolu par la décomposition de Dantzig-Wolfe en explicitant la séparabilité par pilote et en utilisant un algorithme de plus court chemin avec variables de ressources. La solution continue du sous-problème en Y, permet d'introduire une coupe d'optimalité dans le problème maître en terme des variables X dont la résolution donne une nouvelle solution entière $\hat{X}$. De cette façon, à la fin de la procédure itérative d'optimisation de Benders, nous avons une solution optimale en variables entières X et continues Y. Pour obtenir une solution entière du problème des pilotes et une borne supérieure on peut utiliser la méthode de séparation et évaluation en partant de la solution optimale entière des avions et de la solution continue Y des pilotes. Si cette solution entière pour les pilotes a le même coût que la solution continue, nous avons une solution optimale. Sinon, il faut poursuivre l'exploration de l'arbre de branchement sur les variables de pilotes Y en résolvant le problème de Benders à chaque nœud.

L'algorithme proposé peut se formuler brièvement de la façon suivante :

1. Résoudre le problème d'affectation de flotte initial ($\tau = 0$) ; formulation (4.23) - (4.26) sans (4.25) ;
2. Résoudre la $\tau^{\text{ième}}$ relaxation linéaire du problème d'affectation de pilotes ; formulation (4.8) - (4.12) ;
3. Si la condition d'arrêt est satisfaite alors passer à l'étape 6 ; sinon $\tau = \tau + 1$;

4. Créer des coupes de Benders dans le problème d'affectation de flotte avec les variables duales obtenues dans le problème d'affectation de pilotes ;
5. Résoudre le $\tau^{\text{ième}}$ problème d'affectation de flotte ; formulation (4.23) - (4.26) ; retourner à l'étape 2 ;
6. Pour une solution entière pour le problème d'affectation de flotte, trouver la solution entière (par la méthode de séparation et évaluation) pour le problème d'affectation des pilotes. La solution obtenue représente une solution réalisable du problème intégré et une borne supérieure pour le problème intégré ;
7. Si l'écart entre la borne inférieure et la borne supérieure est suffisamment petit ; arrêt. Sinon, créer un nouveau nœud dans un arbre de branchement choisissant une variable fractionnaire dans la solution des pilotes et aller à l'étape 2. Répéter la décomposition de Benders à chaque nœud dans l'arbre de branchement.

Plus des détails sur l'application de cet algorithme à un problème intégré d'affectation d'un seul type d'avion et de leurs pilotes sont présentés dans la section 4.6.3.

4.4 Décomposition de Benders avec horaires fixes

La gestion intégrée des avions et des pilotes est posée comme un problème en variables entières de flot $X = (X^f, f \in F)$ et $Y = (Y^f, f \in F)$ et en variables de ressources

$T_x^f = (T_{xi}^{fr},\ i \in N_x^f,\ r \in R_x)$ et $T_y^f = (T_{yi}^{fr},\ i \in N_y^f,\ r \in R_y)$, pour $f \in F$. Nous avons proposé dans la section précédente un cas général de décomposition de Benders où le problème maître inclut des fenêtres sur les temps de départ et où le sous-problème génère les coupes définies en (4.25), permettant de modifier les temps de départ sur les vols dans le problème maître. Si nous voulons simplifier le problème, nous pouvons éliminer complètement les variables de temps de départ des vols et les contraintes (4.5) de la formulation intégrée en supposant que l'horaire est fixe et donné a priori. Ceci entraîne l'élimination des contraintes (4.16) du sous-problème. Diverses procédures d'initialisation sont décrites à la section 4.7.1. Par conséquent, les coupes générées ne nécessitent plus l'information sur le temps de départ représentée par les variables γ^f et les relations (4.25) sont remplacées par :

$$W^f - \sum_{i \in L_x^f} \overline{\alpha}_{i\tau}^f X_i^f - \sum_{(i,j) \in S_y^f} \overline{\beta}_{ij\tau}^f X_{ij}^f - \sum_{o \in O_y^f} \overline{\delta}_{o\tau}^f \geq 0, \quad \forall f \in F, \forall \tau \in \boldsymbol{\tau}. \tag{4.27}$$

Ces nouvelles coupes jouent un rôle correctif seulement sur les variables de flot du problème maître.

Nous pouvons ainsi utiliser ce modèle simplifié où ni le problème maître ni le sous-problème ne contiennent de fenêtres de temps. Les coupes générées ne contiennent pas d'éléments correctifs pour les variables de temps. Le problème maître prend alors la forme suivante :

$$v_{MP} = \text{Maximiser} \sum_{f \in F} \left[\sum_{i \in L_x^f} c_{xi}^f X_i^f - \sum_{o \in O_x^f} c_{xo}^f X_o^f - W^f \right] \tag{4.28}$$

sujet à:

$$\sum_{f \in F} X_i^f = 1, \quad \forall i \in L \tag{4.29}$$

$$W^f - \sum_{i \in L_y^f} \overline{\alpha}_{i\tau}^f X_i^f - \sum_{(i,j) \in S_y^f} \overline{\beta}_{ij\tau}^f X_{ij}^f - \sum_{o \in O_y^f} \overline{\delta}_{o\tau}^f \geq 0, \quad \forall f \in F, \forall \tau \in \mathcal{T} \tag{4.30}$$

$$\boldsymbol{X}^f \in \boldsymbol{P}_x^f, \quad \forall f \in F. \tag{4.31}$$

D'autre part, les sous-problèmes deviennent, pour chaque $f \in F$:

$$v_{SP}(x^f) = \text{Minimiser} \left\{ \sum_{o \in O_y^f} c_{yo}^f Y_o^f + \sum_{(i,j) \in J_y^f} c_{yij}^f Y_{ij}^f \right\} \tag{4.32}$$

sujet à:

$$Y_i^f = \hat{X}_i^f, \quad \forall i \in L_y^f \tag{4.33}$$

$$Y_{ij}^f \leq \hat{X}_{ij}^f, \quad \forall (i,j) \in S_y^f \tag{4.34}$$

$$\boldsymbol{Y}^f \in \boldsymbol{P}_y^f(\hat{\boldsymbol{X}}). \tag{4.35}$$

Pour résoudre ces formulations, on relâche d'abord les conditions d'intégralité des variables $\boldsymbol{Y}$ et on résout le problème résultant par la décomposition de Benders. À chaque nœud de branchement, cette décomposition crée un problème maître (de

Benders) en variables entières X portant sur l'ensemble des flottes, i.e., simultanément sur toutes les variables X^f, $f \in F$, ainsi qu'un sous-problème (de Benders) séparable par type d'avions en variables continues Y^f. D'une part, le problème maître en variables entières X peut à son tour être résolu par la décomposition de Dantzig-Wolfe exploitant ainsi la séparabilité par type d'avions : la procédure utilise un arbre de branchement avec des bornes calculées par génération de colonnes. Le générateur d'itinéraires résout cette fois-ci un problème de plus court chemin avec variables de ressources. D'autre part, étant donné une solution $\hat{X}$, chacun des sous-problèmes en variables continues Y^f peut aussi être résolu par la décomposition de Dantzig-Wolfe en explicitant la séparabilité par pilote, en utilisant encore le même type de problème de plus court chemin avec variables de ressources. La solution continue Y^f, $f \in F$, de chaque sous-problème, permet d'introduire une coupe d'optimalité dans le problème maître (de Benders) en terme des variables X^f dont la résolution donne une nouvelle solution entière $\hat{X}$. Le processus itératif de Benders se poursuit jusqu'à l'obtention d'une solution optimale en variables entières X et continues Y.

On remarque enfin que le processus séquentiel décrit en 3.3.2 correspond à la première itération de la décomposition de Benders pour laquelle, étant donné $\hat{X}$ entier, on cherche à résoudre le problème de gestion de pilotes en nombres entiers pour les variables Y^f, $f \in F$.

4.5 Décomposition de Benders incomplète avec horaires fixes

Dans la résolution du problème d'avions et d'équipages par décomposition de Benders, remarquons que dans le sous-problème des pilotes (4.13) - (4.18) pour une flotte $f \in F$, il faut considérer la contrainte de recouvrement (4.14) même pour les vols qui sont couverts par d'autres types d'avions. Ceci est nécessaire afin d'obtenir les variables duales correspondantes qui font partie de la définition de la coupe. Cette exigence augmente considérablement la taille des problèmes de pilotes qu'il faut résoudre. Pour éviter ces difficultés, nous avons considéré pour le problème avec horaires fixes, une approximation appelé l'approche incomplète où nous supprimons dans les coupes, les variables duales sur les arcs non-couverts par ce type d'avions, i.e., où les membres de droite des contraintes (4.14) - (4.15) sont égaux à zéro. Ceci présente une analogie avec l'approche séquentielle où nous résolvons le problème des pilotes (4.32) - (4.35) seulement pour les vols qui sont couverts par ce type d'avions dans le problème maître (4.28) - (4.31).

La solution du problème d'avions donne une partition des nœuds de N_x^f et des arcs de A_x^f, pour une flotte $f \in F$ donnée. Les nœuds et les arcs du réseau des avions $G_x^f = (N_x^f, A_x^f)$ peuvent être couverts ou non. Définissons pour le réseau des pilotes $G_y^f = (N_y^f, A_y^f)$ l'ensemble des nœuds couverts par une solution avion, $N_y^f(1) = \{i \in N_y^f : X_i^f = 1\}$, et

l'ensemble de nœuds non-couverts par une solution avion, $N_y^f(0)= N_y^f \setminus N_y^f(1)$. La situation pour l'ensemble des arcs est semblable. Soit l'ensemble des arcs couverts par une solution avion, $A_y^f(1)= \{(i,j) \in A_y^f : X_{ij}^f= 1\}$, et l'ensemble des arcs non-couverts par une solution avion, $A_y^f(0)= A_y^f \setminus A_y^f(1)$. Les ensembles $L_y^f(1)$, $S_y^f(1)$, $J_y^f(1)$, $L_y^f(0)$, $S_y^f(0)$ et $J_y^f(0)$ se définissent de façon analogue.

Dans l'approche incomplète, nous définissons un problème réduit pour les pilotes de la flotte $f \in F$ qui contient le réseau réduit $G_y^f(1)= (N_y^f(1), A_y^f(1))$, où l'ensemble $L_y^f(1)$ figure dans la contrainte (4.33) et l'ensemble $S_y^f(1)$ figure dans la contrainte (4.34). Le problème réduit est un problème analogue au problème résolu avec l'approche séquentielle. Pour la première itération de Benders, la solution optimale primale du sous-problème réduit est aussi solution optimale du sous-problème complet (4.32) - (4.35). Toutefois, en résolvant le problème réduit nous n'obtiendrons pas les variables duales de (4.33) associées aux vols de $L_y^f(0)$ et celles de (4.34) associées aux connexions de $S_y^f(0)$. Ainsi, au lieu de les coupes (4.27), nous obtenons les coupes modifiées :

$$W^f - \sum_{i \in L_y^f(1)} \overline{\alpha}_{i\tau}^f X_i^f - \sum_{(i,j) \in S_y^f(1)} \overline{\beta}_{ij\tau}^f X_{ij}^f - \sum_{o \in O_y^f} \overline{\delta}_{o\tau}^f \geq 0, \quad \forall f \in F, \forall \tau \in \mathcal{T}. \tag{4.36}$$

Ceci, contrairement à l'approche de Benders où nous avons besoin de variables duales sur tous les nœuds et tous les arcs, même les nœuds et les arcs non-couverts par ce type d'avions. Il faut donc résoudre le programme (4.13) - (4.18) pour chaque flotte $f \in F$ sur

un réseau plus grand qui comprend les nœuds et les arcs couverts et non-couverts par ce type d'avion, i.e., le réseau $G_y^f = (N_y^f, A_y^f)$. Écrivons une coupe complète de Benders en séparant les variables duales pour les nœuds et les arcs couverts d'une part et pour les nœuds et les arcs non-couverts d'autre part (entre parenthèses) :

$$W^f - \sum_{i \in L_y^f(1)} \overline{\alpha}_i^f X_i^f - \sum_{(i,j) \in S_y^f(1)} \overline{\beta}_{ij}^f X_{ij}^f - \sum_{o \in O_y^f} \overline{\delta}_o^f - \left(\sum_{i \in L_y^f(0)} \overline{\alpha}_i^f X_i^f + \sum_{(i,j) \in S_y^f(0)} \overline{\beta}_{ij}^f X_{ij}^f \right) \geq 0. \qquad (4.37)$$

Nous voyons que la partie entre parenthèses dans la formulation (4.37) n'est pas nécessairement égale à zéro comme l'impose la définition des coupes (4.36) pour le problème réduit. Si par hasard, les valeurs des variables X_i^f et X_{ij}^f sont égales à zéro, la partie entre parenthèses sera égale à zéro aussi et, par conséquent, les coupes complètes et incomplètes deviennent identiques. En réalité, ce n'est pas toujours le cas et la partie entre parenthèses peut être positive ou négative. Si cette partie est négative, la coupe générée peut surestimer les coûts des équipages transmis au problème maître. Si cette partie est positive, la coupe générée sous-estime les coûts des équipages et elle peut rester inactive. En tout cas, rien ne garantit que les coupes générées par l'approche incomplète vont conduire vers la solution optimale dans les itérations de Benders suivantes.

Nous trouvons donc que l'approche incomplète ne donne pas toujours des résultats optimaux, ni même satisfaisants. Pour avoir les coupes de Benders complètes, nous avons besoin d'informations sur les variables duales pour les vols et les arcs de

connexion qui sont couverts et non-couverts. Le problème de pilotes devient alors trop gros. Le coût de trouver toutes les variables duales nécessaires pour créer une coupe complète est très élevé. Le temps de résolution d'un problème de si grande taille fait que, pour l'instant, l'approche complète de décomposition de Benders n'est pas efficace pour le cas multiflottes. Pour cette raison, nous avons développé une approche complète pour le cas particulier de l'affectation des avions et des pilotes pour une seule flotte. Des exemples pour ces trois approches seront présentés dans la section suivante.

4.6 Expériences numériques avec horaires fixes

Dans une situation opérationnelle, il faut simultanément résoudre deux problèmes : gestion des avions et gestion des équipages. Même si nous résolvons ce problème avec une approche séquentielle traditionnelle, il est nécessaire de développer un logiciel qui va mettre à jour les données du sous-problème selon les résultats obtenus avec le problème maître. Avec la décomposition de Benders proposée ici, nous avons besoin d'un échange d'informations dans l'autre sens également. Dans le sens problème maître – sous-problème, les informations sur les itinéraires des avions sont transférées au problème des pilotes en précisant leurs positions initiales et finales, les vols et les arcs de connexion couverts par les avions et, finalement, les points de transfert où un équipage peut changer d'appareil. Dans le sens contraire, sous-problème – problème maître, les informations sur les variables duales obtenues en résolvant le sous-problème sont

transmises aux coupes ajoutées au problème maître. Afin de maintenir une communication réciproque, nous avons développé un programme capable d'effectuer les échanges nécessaires d'information dans les deux sens. Celui-ci a été utilisé pour l'expérimentation numérique.

Avec les deux applications développées dans les sections précédentes, nous avons effectué quelques tests sur des exemples de petites tailles. Nous présentons d'abord l'expérimentation où les coupes complètes sont générées. Ensuite, nous présentons les expériences avec les coupes incomplètes. Nous montrons que cette dernière stratégie ne produit pas toujours un résultat optimal. Les temps de résolution ne sont pas présentés parce qu'ils sont négligeables à cause de la petite taille des exemples. Par contre, dans la section 4.6.3 nous présentons les temps de résolution pour les exemples de grande taille obtenus par l'application du modèle complet sur un cas restreint. Ces exemples couvrent plusieurs jours et ils considèrent un seul type d'avions à la fois.

4.6.1 Génération de coupes complètes

L'algorithme présenté dans la section 4.4 a été implanté et testé sur deux jeux de données, appelés *F1A2C2* et *F2A2C2*, présentés au Tableau 3.3. Pour les acronymes, le premier chiffre représente le nombre de types d'avions différents dans une flotte, le deuxième représente le nombre d'avions disponibles dans la flotte, et le troisième

représente le nombre d'équipages disponibles pour tous les types d'avions. Ces deux exemples ont donc un même nombre d'avions, d'équipages et de segments de vols. La seule différence est que dans le premier exemple, les avions et les pilotes sont de même type, ce qui n'est pas le cas dans le deuxième. Notons que ces deux types d'avions sont très semblables, i.e., les coûts d'exploitation et les revenus sont identiques. Nous les considérons comme des flottes différentes uniquement parce que les pilotes ne sont accrédités que sur un seul type d'avions. Ces deux exemples simples ont été utilisés afin de présenter le processus d'optimisation en utilisant notre modèle. Les itérations effectuées avec le problème *F1A2C2* sont présentées au Tableau 4.1.

Tableau 4.1 : Résultats par itération avec les coupes complètes pour le problème F1A2C2

Itération	v_{MP}	v_W	$v_{SP}(X)$	Profit total
1	187259	-	1293	185966
2	186266	993	1193	186066
3	186166	1093	1393	185866
4	186066	1193	1393	185866
5	186066	1193	1193	186066

Dans cet exemple, cinq itérations ont été effectuées avant que la condition d'arrêt soi satisfaite, i.e., $v_W = v_{SP}$. En fait, il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la fin du processus pour améliorer la solution initiale. Le profit total (le profit des avions moins le coût des pilotes donné par $v_{MP} + v_W - v_{SP}(X)$) change pendant le processus en améliorant

et en détériorant la solution initiale. Nous voyons que les itérations 2 et 5 donnent la même valeur optimale malgré les solutions différentes pour le problème maître. Par contre, la valeur v_{MP} du problème maître diminue toujours jusqu'à ce que sa valeur devienne égale au profit total pour les avions et les pilotes. Les cinq itérations avec le problème *F1A2C2* sont présentées sur les cinq prochaines figures (Figure 4.1 - Figure 4.5).

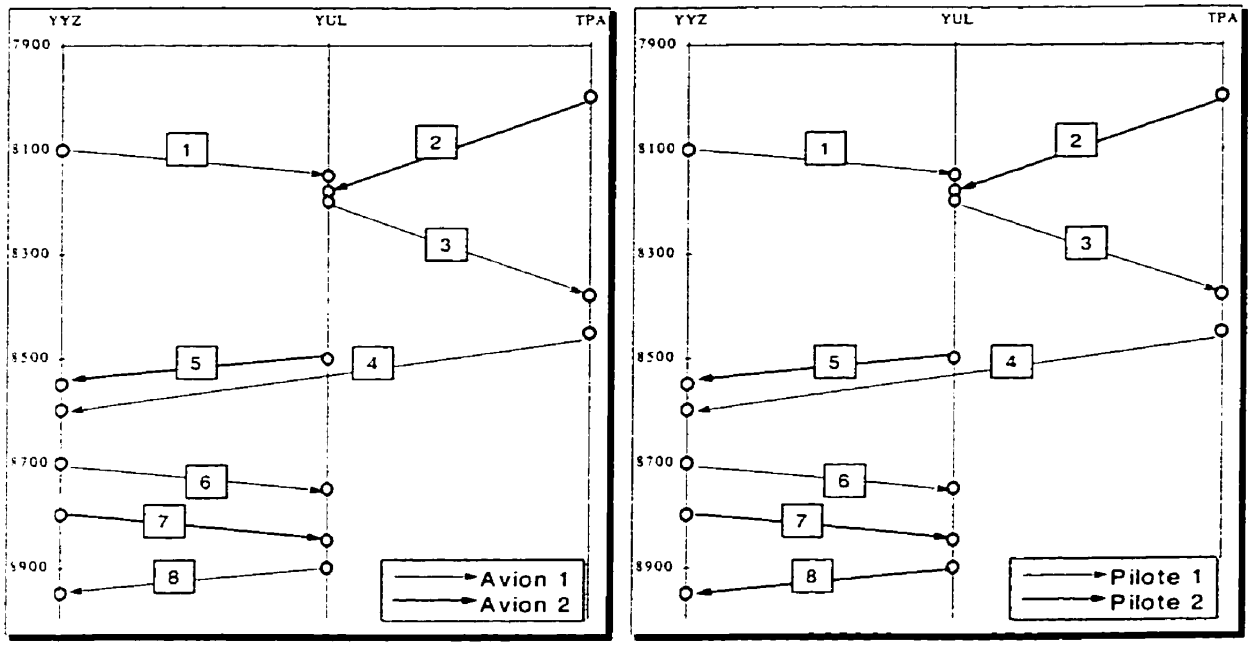

Figure 4.1 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 1 du problème F1A2C2

Nous voyons que l'avion 1 commence et termine son itinéraire à la ville YYZ. L'avion 2 commence son itinéraire à TPA et le finit à YUL. Le pilote 1 commence son itinéraire de YYZ et finit à YUL en restant toujours dans l'avion 1. Le pilote 2

commence de TPA avec l'avion 2 et finit à YYZ avec l'avion 1. Nous pouvons remarquer que le pilote 2 change de l'avion 2 à l'avion 1 après le vol 7. La solution pour les avions est optimale mais la solution pour les pilotes peut être améliorée en éliminant le coût de changement d'avion. Donc, la coupe d'optimalité sera générée par les variables duales du sous-problème et retournée au problème maître. La nouvelle solution pour les avions, présentée à la Figure 4.2, suggère un nouvel itinéraire pour l'avion 1 qui finira dans la même ville où le pilote 1 doit finir son jour de travail.

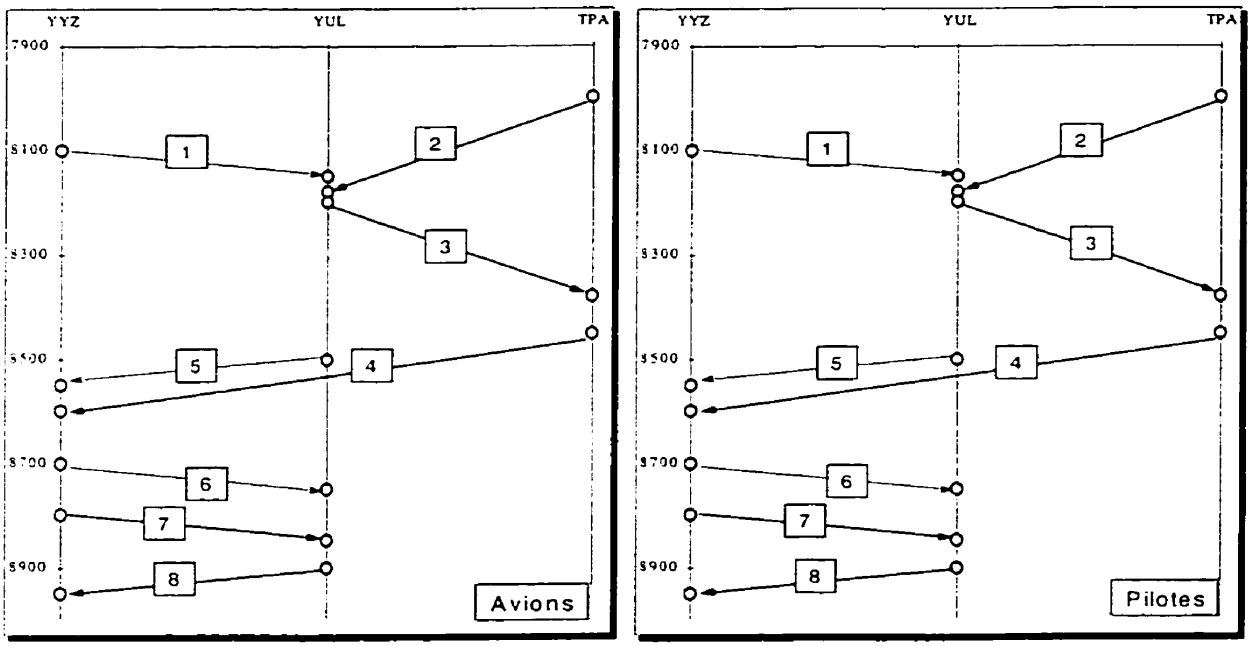

Figure 4.2 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 2 du problème F1A2C2

Malheureusement, cette solution n'est plus intéressante pour le pilote 1 parce qu'il doit attendre trop long temps à l'aéroport YUL entre les vols 1 et 5. Alors, nous

générons une nouvelle coupe et nous changeons encore une fois les rotations d'avions et de pilotes, celles-ci étant présentées à la Figure 4.3.

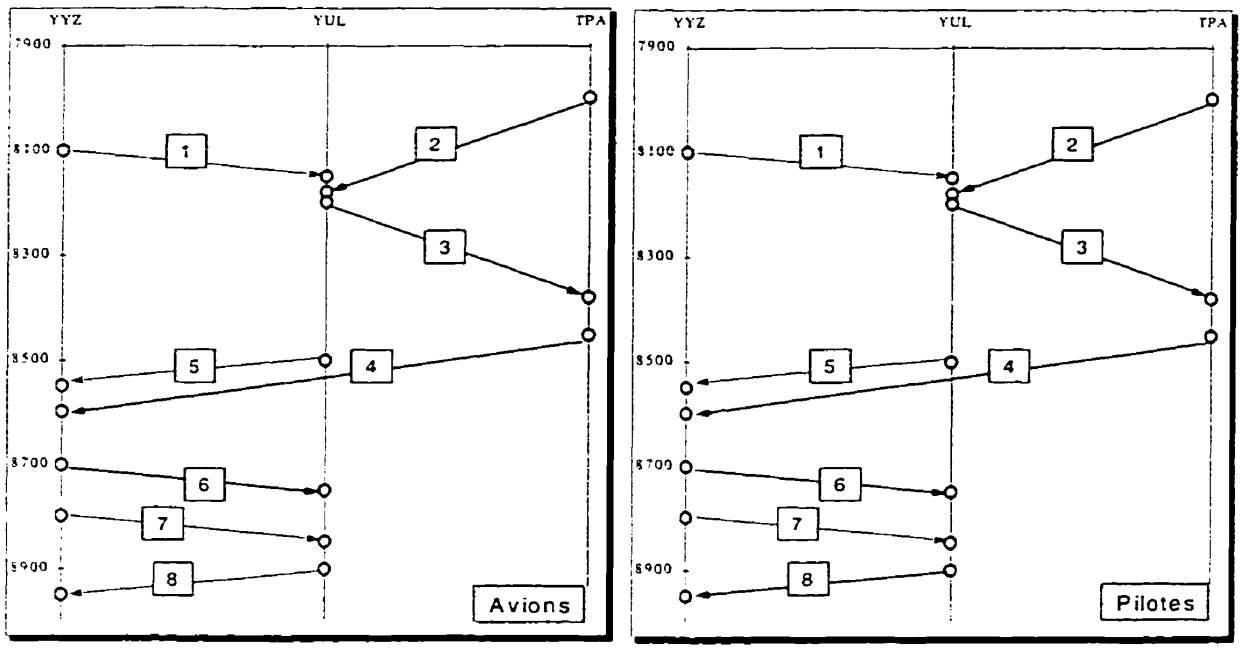

Figure 4.3 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 3 du problème F1A2C2

Encore une fois, la solution obtenue demande un changement d'avion pour le pilote 1 et l'algorithme proposé générera une nouvelle coupe ; la nouvelle solution est présentée à la Figure 4.4.

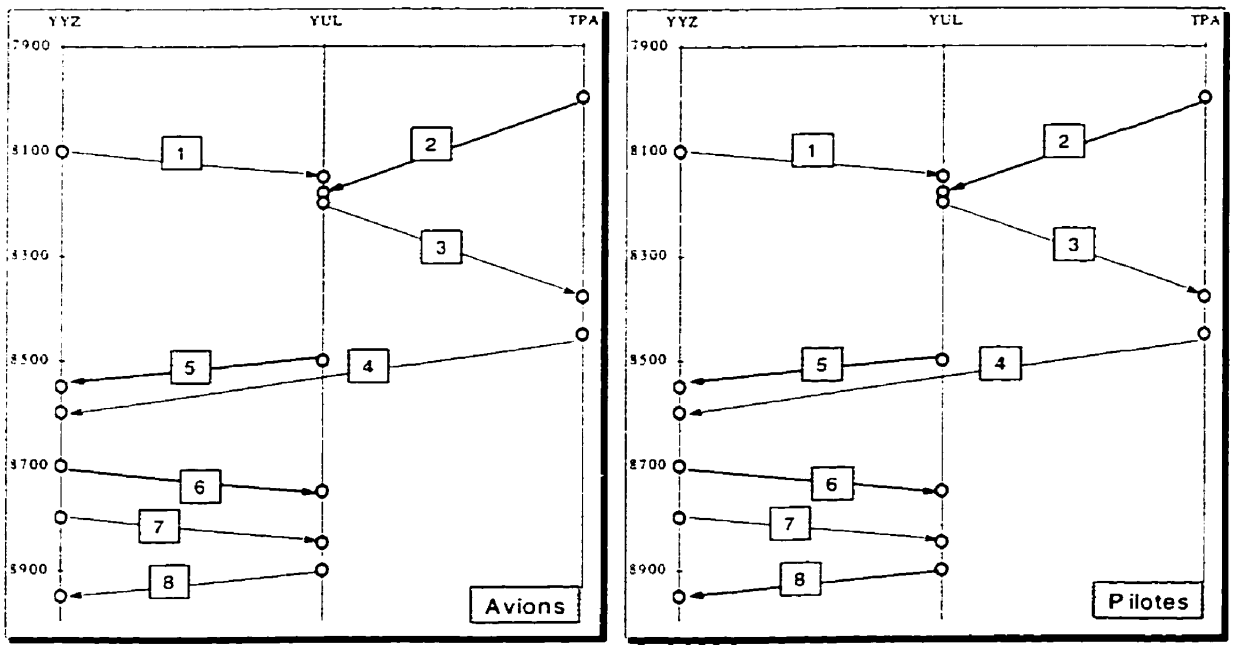

Figure 4.4 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 4 du problème F1A2C2

La solution obtenue n'est pas encore optimale pour les deux problèmes. Donc, il faut ajouter une nouvelle coupe. Cette coupe est également la dernière parce que la condition d'arrêts est satisfaite. La solution optimale globale, i.e., pour les avions et pour les pilotes à la fois, est présentée à la Figure 4.5.

La situation avec le problème *F2A2C2* est un peu différente. Cette fois, nous avons deux avions de types différents. Dans ce cas, le nombre d'itérations nécessaires est plus petit. Les itérations effectuées avec le problème *F2A2C2* sont présentées au Tableau 4.2.

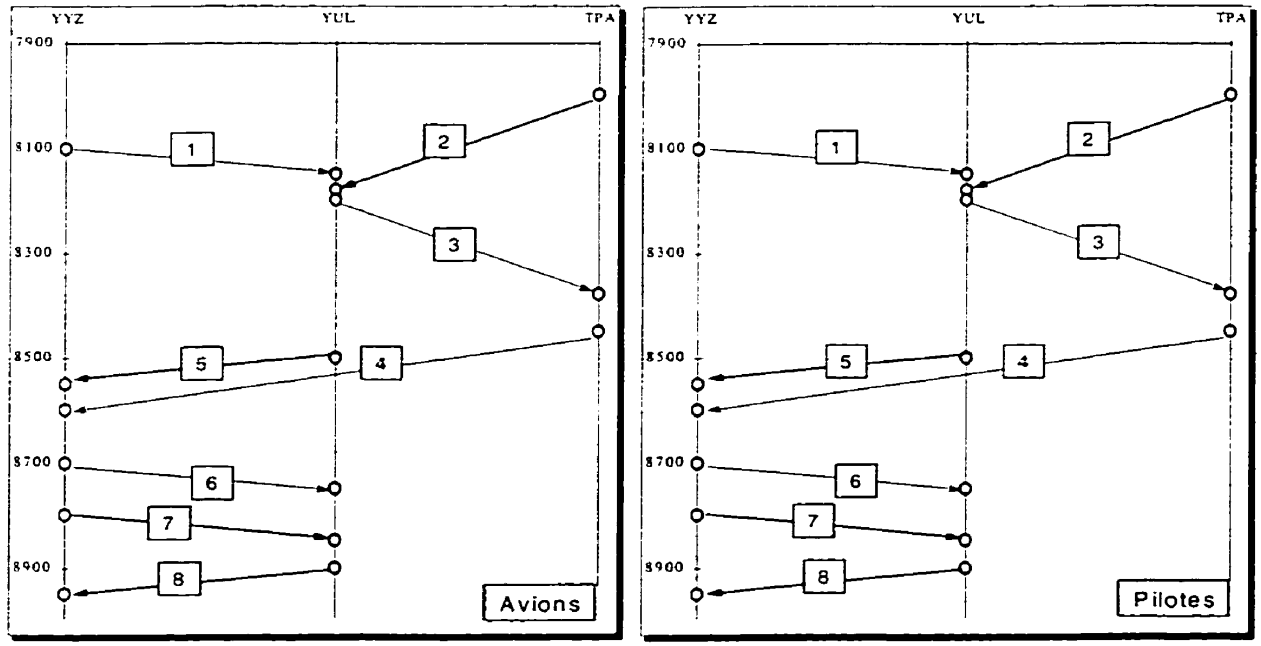

Figure 4.5 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour l'itération 5 du problème F1A2C2

Tableau 4.2 : Résultats par itération avec les coupes complètes pour le problème F2A2C2

Itération	v_{MP}	v_W	$v_{SP}(X)$	Profit total
1	187259	-	3293	183966
2	187259	0	1293	185966
3	186766	493	1193	186066
4	186066	1193	1193	186066

La représentation graphique de l'exemple F2A2C2 se trouve à la Figure 4.6. Les quatre itérations sont présentées dans une même figure. À cause de la non-compatibilité entre les deux types d'avions, chaque pilote doit suivre son avion. Par conséquent, les

itinéraires d'avions et de pilotes sont toujours pareils.

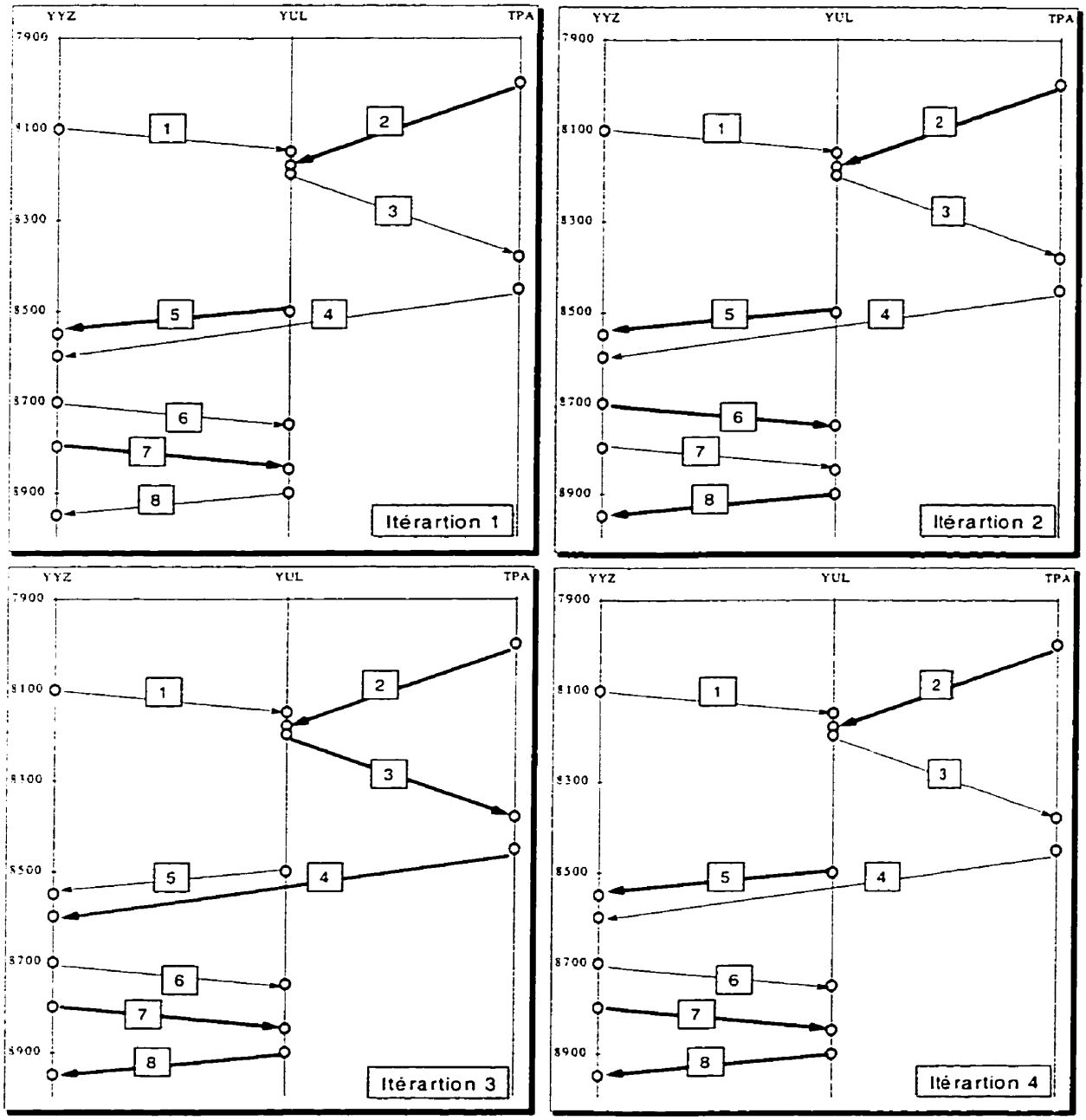

Figure 4.6 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour le problème F2A2C2

4.6.2 Génération de coupes incomplètes

La décomposition de Benders incomplète, présentée dans la section précédente, a été implantée et testée sur le problème *F1A2C2* qui a aussi été testé avec l'approche complète. À la première itération, nous avons des résultats identiques à ceux de l'approche complète. La seule différence est que les valeurs des variables duales obtenues dans le sous-problème sont différentes. Les valeurs des variables duales sont obtenues seulement pour les vols et connexions couvertes par les avions. Donc, à la deuxième itération, les coupes ne considèrent que ces arcs et connexions. Par conséquent, nous avons une information partielle qui produit une mauvaise coupe pour la prochaine itération.

Les résultats obtenus à la deuxième itération sont identiques à ceux de l'approche complète en ce qui concerne le profit total et les itinéraires d'avions. C'est d'ailleurs la solution optimale. Certains arcs de connexion qui entrent dans la nouvelle solution et qui n'étaient pas dans la solution précédente ne contribuent pas à la valeur de v_W avec ces valeurs des variables duales. Par conséquent, la valeur de v_W devient trop grande et dépasse même $v_{SP}(X)$. Une contradiction flagrante avec la théorie.

Au Tableau 4.3, nous voyons donc qu'on perd la possibilité de satisfaire le critère d'arrêt à l'itération 2 parce que la valeur de la variable W est plus grande que la valeur de la fonction objectif du sous-problème. C'est un indice que les variables duales

obtenues ne sont pas correctes. Si nous continuons avec les itérations malgré les difficultés rencontrées, nous allons voir qu'à l'itération 3, le critère d'arrêt est satisfait mais la solution a un profit total moins bon. En fait, cette détérioration de solution existe également dans l'approche complète sauf qu'ici les variables duales générées n'ont pas les valeurs correctes. De cela, il résulte deux conséquences pour l'approche incomplète : d'abord le critère d'arrêt n'est plus valide et ensuite, nous ne sommes plus certains que les itérations vont converger vers la solution optimale.

Tableau 4.3 : Résultats par itération avec les coupes incomplètes pour le problème F1A2C2

Itération	v_{MP}	v_W	$v_{SP}(X)$	Profit total
1	187259	-	1293	185966
2	185966	1293	1193	186066
3	185966	1293	1293	185966

Il faut noter qu'avec l'approche incomplète, il y a quelques exemples où nous n'avons pas réussi à améliorer la solution initiale. Cependant, il y a des exemples où nous avons réussi, comme avec l'exemple *F1A5C7*. Sa solution a été améliorée à la première itération. Même, par hasard, cette première et seule itération a produit la solution optimale. À la Figure 4.7 nous présentons pour cet exemple la solution initiale et la solution obtenue après une seule itération. Dans cette figure, nous voyons que l'itinéraire de l'avion *A* commence à la ville *YYZ* et finit à la ville *FRA* en couvrant les vols *1*, *2* et *3*. L'itinéraire de l'avion *B* commence à la ville *YUL* et finit à la ville *YYZ* en

couvrant les vols *4* et *5*. Pour ce scénario, la solution optimale pour les pilotes suggère que le pilote *X* commence sa rotation à la ville *YYZ* (comme l'avion *A*) et termine à la ville *YYZ* (comme l'avion *B*) en couvrant les vols *1* et *5*. Le pilote *Y* commence à la ville *YUL* (comme l'avion *B*) et finit à la ville *YYC* (où il débarque de l'avion *A*) en couvrant les vols *4* et *2* et en laissant le vol *3* à un autre pilote pour l'avion *A*. Cette solution n'est pas optimale globalement parce que les pilotes sont obligés de changer d'avions dans la ville *YVR*.

Comme nous l'avons présenté dans la formulation mathématique, le changement d'avion est pénalisé dans la fonction objectif des pilotes. Avec la coupe introduite dans le problème des avions et générée en fonction des variables duales provenant du problème des pilotes, nous avons obtenu les nouveaux itinéraires pour les avions *A* et *B*. Cette solution donne le même profit pour les avions comme la solution précédente. Les rotations des pilotes sont pareilles aussi. Par contre, la valeur de la fonction objectif pour les pilotes est meilleure parce que cette solution élimine les coûts de changement d'avion. Par hasard, cette solution est en même temps optimale, ce qui peut être vérifié dans l'approche complète.

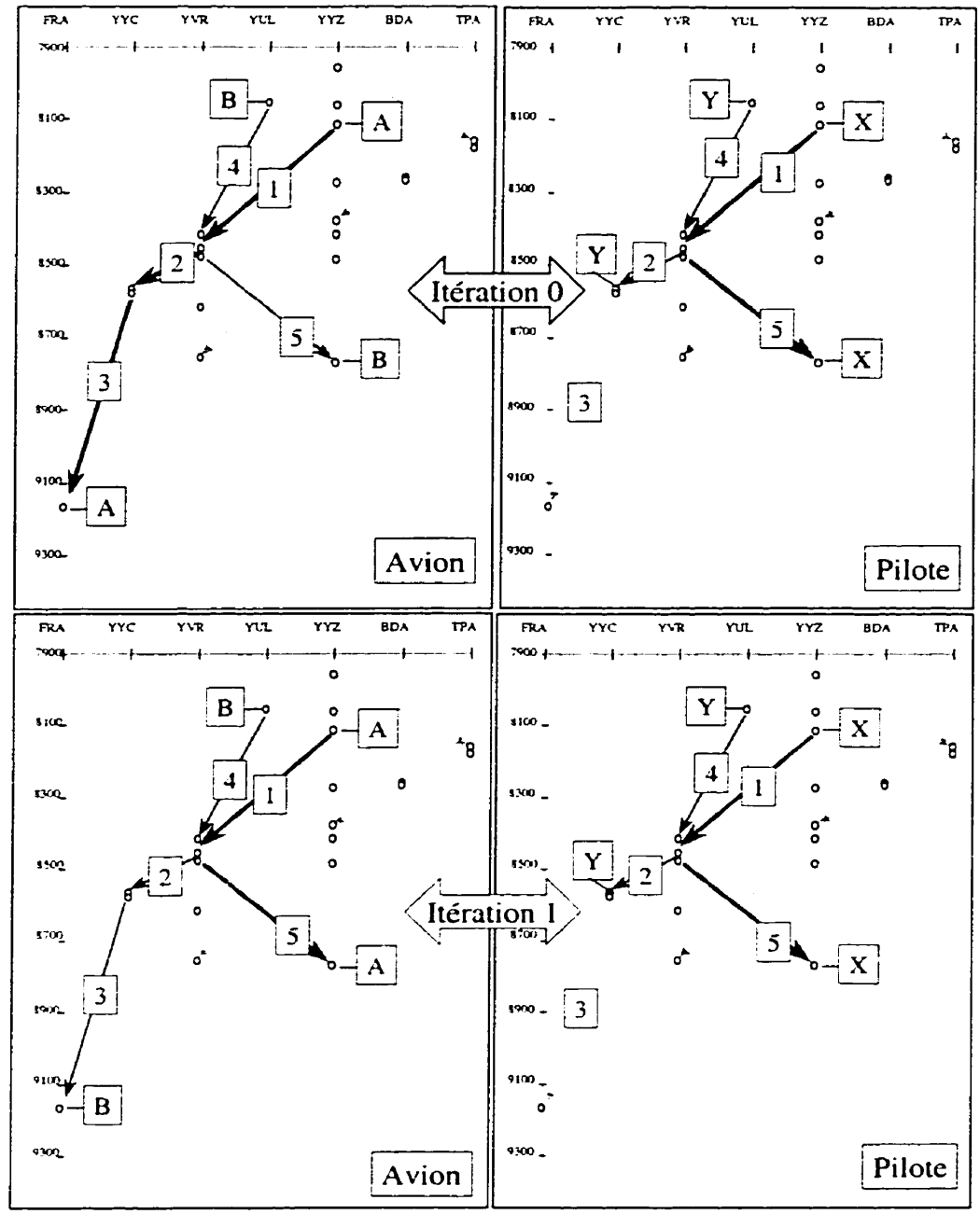

Figure 4.7 : Itinéraires d'avions et de pilotes pour le problème F1A5C7

4.6.3 Génération de coupes complètes pour le problème avec un seul type d'avion

Nous présentons ici la décomposition de Benders résolue en deux phases, la phase 1 résout le problème maître en nombres réels, la seconde le résout en nombres entiers. Le nombre d'itérations de Benders et le temps CPU pour les deux phases sont donnés dans le Tableau 4.4. Notons que le temps de calcul est donné en minutes. Dans la première phase, nous résolvons la relaxation linéaire du problème original. Les coupes générées permettent de trouver une solution optimale pour le problème relaxé et nous donnent une bonne approximation de l'ensemble des coupes nécessaires pour trouver une solution entière. Dans la seconde phase, il nous faut d'autres itérations, i.e., d'autres coupes pour arriver à une solution entière optimale. Le nombre d'itérations dans la deuxième phase dépend de la qualité des coupes générées dans la phase précédente. Notons également qu'à chaque itération nous ajoutons une coupe d'optimalité, i.e., le nombre d'itérations est égal au nombre de coupes générées. À la fin de ce processus, on trouve une solution entière du sous problème et le temps de calcul correspondant est présenté dans la colonne *SP* entier. Cette solution entière pour les pilotes additionnée au coût des avions donne une borne supérieure à la solution du problème intégré avion - pilote.

Pour obtenir la solution optimale du problème intégré il faudrait explorer un arbre de branchement dans la solution des pilotes avec une décomposition de Benders à

chaque nœud. Pour chaque nœud il faut choisir une variable fractionnaire dans la solution des pilotes. Nous nous sommes limités ici à explorer un seul nœud de cet arbre et la dernière colonne donne l'écart relatif qui reste à explorer. Dans la plupart des cas l'écart relatif est assez petit. Dans les autres cas, ou si nous voulons chercher la meilleure solution, il faut explorer les autres nœuds de l'arbre d'énumération du problème des pilotes. L'avant dernière colonne montre l'écart relatif entre la solution du problème maître relaxé au début de l'optimisation et la solution entière du problème maître. Cet écart relatif a été complètement exploré par la méthode de séparation et évaluation utilisée sur l'intégrité de la solution avion.

Tableau 4.4 : Performance de la méthode de Benders

	PM réel		PM entier		SP entier	Gap [$]	
Exemple	Itérations	CPU	Itérations	CPU	CPU	Avions	Pilotes
320OW-1	8	1.94	1	0.16	0.16	60.00	0.00
320OW-2	17	9.98	3	5.88	3.55	42.34	566.67
320OW-3	11	17.10	3	13.41	12.53	109.87	552.60
320OW-4	3	35.25	5	61.16	27.98	0.55	208.33
D9S-1	7	3.87	1	0.85	0.23	0.00	0.00
D9S-2	7	19.05	2	9.65	8.48	8.34	475.00
D9S-3	8	66.78	3	199.17	50.93	91.54	140.00
CRJ-1	10	2.18	3	0.66	0.81	42.86	3257.14
CRJ-2	38	49.82	4	18.13	3.77	191.69	276.52
CRJ-3	7	67.50	3	128.73	20.79	347.60	151.70
CRJ-4	8	365.71	4	1 156.89	395.82	105.97	4 298.69

Les résultats obtenus sur les jeux de données pour plusieurs jours et une seule flotte avec l'algorithme de Benders présentés dans la section 4.4 sont comparés avec ceux obtenus par l'approche séquentielle au Tableau 4.5.

Tableau 4.5 : Comparaison entre l'approche de Benders et l'approche séquentielle

	Approche séquentielle				Approche Benders			
Exemple	Avions	Pilotes	Coûts	CPU	Avions	Pilotes	Coûts	CPU
320OW-1	33	53	1 862 764	0.83	33	52	1 861 964	2.26
320OW-2	34	58	3 170 342	3.52	34	57	3 169 242	19.41
320OW-3	34	59	4 407 198	4.73	34	58	4 406 598	43.04
320OW-4	34	64	5 657 457	73.82	34	63	5 656 857	124.39
D9S-1	35	49	1 032 106	2.09	35	48	1 031 306	4.95
D9S-2	35	62	2 023 576	20.23	35	61	2 022 176	37.18
D9S-3	35	63	2 982 799	130.96	35	61	2 980 499	316.88
CRJ-1	19	40	497 908	1.13	19	40	497 708	3.65
CRJ-2	20	42	883 399	11.78	20	41	877 799	71.72
CRJ-3	20	42	1 255 672	94.55	20	41	1 250 272	217.02
CRJ-4	21	45	1 646 505	576.91	20	44	1 641 695	1 918.42

Nous voyons que les temps de calcul sont, en moyenne, deux fois plus élevés avec l'approche de Benders. Avec ce temps supplémentaire nous obtenons une réduction de coûts et nous épargnons, en moyenne, un pilote sur cinquante. Notons que les résultats pourraient encore être améliorés car l'écart sur l'intégrité de la solution des pilotes qui n'a pas été exploré est souvent petit mais dans certains cas il est non négligeable par rapport aux économies obtenues. Malgré cela, nous pouvons dire que la

méthode proposée a un potentiel considérable, même quand l'arbre d'énumération du problème des pilotes n'est pas exploré au complet. Pour montrer le potentiel de la méthode, notons que le gain est généralement plus grand quand on fait l'optimisation sur un horizon plus long. En moyenne, les gains par jour sont : 400$ pour la flotte 320OW, 800$ pour la flotte D9S et 1 500$ pour la flotte CRJ. Au total, ceci représente approximativement un gain supplémentaire pour la compagnie aérienne considéré de 1 000 000$ par année, seulement pour ces trois types d'avions. Le gain pourrait être encore plus grand si le sous-problème avait une fonction objectif plus sophistiquée. La modélisation actuelle du problème de pilotes considère, comme nous avons déjà mentionné dans le chapitre précédent, les coûts fixes et les pénalités sur les connexions très longues et les mises en place. Avec cette structure de coûts, nous pouvons changer seulement le coût supplémentaire qui est entre 1 et 3 percent du coût total d'opération de la compagnie aérienne. Normalement, ce coût supplémentaire, qui peut éventuellement être diminué, est entre 5 et 7 percent du coût total. À cette fin, il nous faut une structure de coûts plus riche contenant, par exemple, le coût de changement d'avion, le coût minimal pour les services de moins de quatre heures, le coût supplémentaire des rotations contenant trop peu de vols, les coûts d'hôtel et de transport local qui dépendent de la ville.

4.7 Extensions

Nous présentons maintenant quelques extensions pour lesquelles nous n'avons pas eu suffisamment de place dans cette thèse pour les analyser à fond. Elles nous permettent de tirer profit des modèles proposés précédemment, ce qui peut nous conduire à des solutions plus convenables au niveau de la qualité et du temps de calcul.

4.7.1 Accélération de la méthode de Benders

Nous présentons trois stratégies qui peuvent, à notre avis, accélérer la méthode de décomposition de Benders appliquée à la formulation intégrée d'affectation des avions et des pilotes.

Initialisation des temps de départ des vols : Dans le section 4.5, nous avons présenté un cas simplifié où les coupes générées ne contiennent pas les éléments correctifs sur les contraintes de synchronisation entre les avions et les pilotes. Même pour ce cas spécifique, où ni le problème maître ni le sous-problème n'ont de fenêtres de temps, il est possible de résoudre à l'itération initiale le problème des avions avec les fenêtres de temps. Cela nous donne une solution initiale qui fixe l'horaire des vols, forçant ainsi la synchronisation. Une meilleure solution initiale peut être obtenue si, après la résolution du problème d'avions avec des fenêtres de temps, nous résolvons le premier problème

de pilotes avec les fenêtres de temps déduites des itinéraires d'avions. En trouvant ensuite une solution entière à ce problème de pilotes, on fixe alors les temps de départ des vols. Avec ces deux approches, nous devrions avoir moins d'itérations de Benders parce que les temps de départ des vols sont mieux harmonisés entre les deux problèmes.

Introduction de coupes initiales dans le problème maître : Dans la décomposition de Benders, nous réduisons l'espace des solutions admissibles avec des coupes générées à chaque itération. Une idée souvent exploitée en recherche opérationnelle est de limiter cet espace avant de commencer les itérations. Dans l'approche décrite précédemment, nous n'avons fait appel qu'à des coupes d'optimalité, les coupes de réalisabilité n'étant pas nécessaires si on utilise du personnel de réserve en nombre suffisant. Si ce n'est pas le cas, on peut initialiser notre problème avec un certain nombre de coupes de réalisabilité.

Nous proposons ici deux types de coupes initiales basées sur l'approche utilisée en gestion des inventaires. À chaque moment, le nombre d'unités en stock doit être plus grand ou égal au nombre d'unités demandées. Si nous appliquons cette logique à notre problème de gestion des avions et des pilotes, nous aurons une coupe pour chaque départ d'un vol et une coupe pour chaque aéroport. Les coupes pour chaque départ de vol obligent que le nombre d'équipages de type $f \in F$ dans un aéroport au début de la journée plus le nombre d'équipages qui arrivent avant le départ du vol considéré doit être plus grand ou égal au nombre d'équipages partis avant ou au moment du départ considéré.

Les coupes pour chaque aéroport obligent que le nombre d'équipages de type $f \in F$ au début de la journée opérationnelle dans un aéroport plus tous les équipages arrivés pendant cette journée doit être égal au nombre d'équipages qui passent la nuit dans l'aéroport plus tous les équipages partis pendant cette journée.

Soit C^f l'ensemble des aéroports couverts par la flotte $f \in F$. Chaque aéroport $c \in C^f$, pour une flotte $f \in F$, a un ensemble de nœuds d'arrivée V_{cx}^{af} de tous les vols et un ensemble de nœuds de départ V_{cx}^{df} de tous les vols. Un vol $i \in L_x^f$ peut être représenté par une paire d'indices (i', i'') qui donnent le point de départ et le point d'arrivée de ce vol, respectivement. Pour chaque aéroport, nous pouvons définir un ensemble de vols $L_{cx}^{af} \subset L_x^f$: $c \in C^f$, $f \in F$, qui y arrivent ($L_{cx}^{af} = \bigcup_{i'' \in V_{cx}^{af}} (i', i'') : (i', i'') \in L_x^f$) et un ensemble de vols $L_{cx}^{df} \subset L_x^f$: $c \in C^f$, $f \in F$, qui le quittent ($L_{cx}^{df} = \bigcup_{i \in V_{cx}^{df}} (i', i'') : (i', i'') \in L_x^f$). Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la formulation d'une coupe initiale pour un vol :

$$b_c^f + \sum_{i \in L_{cx}^{af} : T_i \le T_v} X_i^f \ge \sum_{j \in L_{cx}^{df} : T_j \le T_v} X_j^f \ , \quad \forall f \in F, \forall c \in C^f, \forall v \in V_{cx}^{df} \ , \tag{4.38}$$

où b_c^f est le nombre d'équipages disponibles de type $f \in F$ dans l'aéroport $c \in C^f$ au début de la journée courante et v représente le nœud de départ courant pour lequel nous sommes en train de construire une coupe.

Une coupe initiale pour un aéroport est formulée comme suit :

$$b_c^f + \sum_{i \in L_{ci}^{af}} X_i^f \geq e_c^f + \sum_{j \in L_{cx}^{df}} X_j^f \,, \quad \forall f \in F, \forall c \in C^f \,, \tag{4.39}$$

où e_c^f est le nombre d'équipages nécessaires de type $f \in F$ dans l'aéroport $c \in C^f$ à la fin de la journée courante.

En ajoutant les éléments de coût d'équipage à la fonction objectif du problème d'avions, nous pourrons produire une solution optimale qui ne tient pas compte des ressources d'équipage. Pour vérifier la réalisabilité de la solution obtenue, il faut résoudre le modèle de gestion d'équipages et générer, éventuellement, les nouvelles coupes qui corrigeront la solution précédente.

Résolution heuristique du problème maître : Une des difficultés avec la décomposition de Benders vient de la résolution du problème maître. Il est très coûteux de résoudre un problème d'affectation des avions de grande taille avec des variables de temps, des variables de flot binaires et des contraintes de ressources, compliqué en plus avec les coupes de Benders générées. Le nombre total de coupes générées augmente à chaque itération. Heureusement, comme Cordeau *et al.* (1998) l'ont mentionné, il n'est pas nécessaire de résoudre ce problème à l'optimalité à chaque itération. On peut obtenir des coupes valables à partir d'une solution non optimale du problème maître. Dans ce cas, la convergence vers la solution optimale peut être plus lente et la condition d'arrêt

est temporairement mise de côté. Donc, une approche efficace peut utiliser une heuristique pour résoudre le problème maître au début de la décomposition de Benders afin de générer plus de coupes valides, et ensuite utiliser une méthode optimale. L'avantage est que le nombre d'itérations nécessaires à la fin de la décomposition de Benders se trouve réduit et, par conséquent, la résolution peut être considérablement accélérée.

4.7.2 Généralisation du modèle intégré pour les agents de bord

Nous présentons maintenant un cas plus général d'affectation des équipages où un membre d'équipage peut desservir les différents types de flottes. Soit K l'ensemble des agents de bord disponibles. Soit F^k l'ensemble des types d'avions qui peuvent être desservis par un agent de bord $k \in K$. Pour décrire le modèle intégré, nous nous servons des mêmes réseaux, variables et domaines de chemins admissibles définis pour les problèmes d'avions et d'agents de bord dans le chapitre précédent.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la formulation intégrée de gestion simultanée des avions et des agents de bord comme un problème de multiflots non linéaire en nombres entiers, avec fenêtres de temps, contraintes de ressources, contraintes de compatibilité entre les avions et les agents de bord et contraintes de synchronisation entre les agents de bord :

$$\text{Maximiser}\left\{\sum_{f\in F}\left[\sum_{i\in L_x^f} c_{xi}^f X_i^f - \sum_{o\in O_x^f} c_{xo}^f X_o^f\right] - \sum_{k\in K}\left[\sum_{(i,j)\in J_z^k} c_{zij}^k Z_{ij}^k + \sum_{o\in O_z^k} c_{zo}^k Z_o^k\right]\right\} \tag{4.40}$$

sujet à :

$$\sum_{f\in F} X_i^f = 1, \quad \forall i \in L \tag{4.41}$$

$$\sum_{k\in K} Z_i^k = n_{zi}, \quad \forall i \in L \tag{4.42}$$

$$Z_i^k \le \sum_{f\in F^k} X_i^f, \quad \forall k \in K, \forall i \in L_z^k$$

$$Z_{ij}^k \le \sum_{f\in F^k} X_{ij}^f, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in S_z^k \tag{4.43}$$

$$T_{zi}^{ki} = \sum_{f\in F^k} T_{xi}^{fi}, \quad \forall k \in K, \forall i \in L_z^k \tag{4.44}$$

$$X^f \in \mathbb{P}_x^f, \quad \forall f \in F \tag{4.45}$$

$$Z^k \in \mathbb{P}_z^k, \quad \forall k \in K. \tag{4.46}$$

L'interprétation des contraintes est la même que celle donnée dans le chapitre précédent pour le problème d'affectation des agents de bord. En plus, nous avons ici les contraintes (4.44) qui représentent les contraintes de synchronisation entre les temps de départ des vols T_{xi}^{fi} et les temps de départ des agents de bord T_{zi}^{fi}. Notons que, comme il est défini dans le domaine $\mathbb{P}_x^f$, $T_{xi}^{fi} = 0$ si $X_i^f = 0$. Donc, la somme dans les contraintes (4.44) aura toujours un seul terme $T_{xi}^{fi} \neq 0$.

Étant donné la solution en terme de variables de flot $\hat{X}^f$ et des variables de temps $\hat{T}_{xi}^{ft}$ sur les heures de départ des vols, le sous-problème de Benders peut être formulé comme suit :

$$\text{Minimiser} \sum_{k \in K} \left[\sum_{o \in O_z^k} c_{zo}^k Z_o^k + \sum_{(i,j) \in J_z^k} c_{zij}^k Z_{ij}^k \right] \tag{4.47}$$

sujet à:

$$\sum_{k \in K} Z_i^k = n_{zi}, \quad \forall i \in L \tag{4.48}$$

$$Z_i^k \leq \sum_{f \in F^k} \hat{X}_i^f, \quad \forall k \in K, \forall i \in L_z^k \tag{4.49}$$

$$Z_{ij}^k \leq \sum_{f \in F^k} \hat{X}_{ij}^f, \quad \forall k \in K, \forall (i,j) \in S_z^k \tag{4.50}$$

$$T_{zi}^{kt} = \sum_{f \in F^k} \hat{T}_{xi}^{ft}, \quad \forall k \in K, \forall i \in L_z^k \tag{4.51}$$

$$Z^k \in \mathbb{P}_z^k, \quad \forall k \in K. \tag{4.52}$$

Notons que ce problème avec la formulation générale n'est pas séparable par agent de bord à cause des contraintes (4.48).

En transformant la formulation précédente afin d'utiliser un modèle résolu par génération de colonnes (avec des variables de chemin, voir sous-section 4.3.1.) et en

utilisant les vecteurs des variables duales adéquats (α , β^k, γ^k, δ^k), le problème maître correspondant de Benders sera alors donné par :

$$\text{Maximiser} \sum_{f \in F} \left[\sum_{i \in L_x^f} c_{xi}^f X_i^f - \sum_{o \in O_x^f} c_{xo}^f X_o^f \right] - W \tag{4.53}$$

sujet à :

$$\sum_{f \in F} X_i^f = 1, \quad \forall i \in L \tag{4.54}$$

$$W - \sum_{i \in L} n_{zi} \overline{\alpha}_{i\tau} - \sum_{k \in K} \sum_{i \in L_z^k} \overline{\beta}_{i\tau}^k \sum_{f \in F^k} X_i^f - \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in S_z^f} \overline{\beta}_{ij\tau}^k \sum_{f \in F^k} X_{ij}^f - \sum_{k \in K} \sum_{i \in L_z^k} \overline{\gamma}_{i\tau}^k \sum_{f \in F^k} T_{xi}^{ft} -$$

$$- \sum_{k \in K} \sum_{o \in O_z^k} \overline{\delta}_{o\tau}^k \geq 0, \quad \forall \tau \in \mathcal{T} \tag{4.55}$$

$$X^f \in \mathbb{P}_x^f, \quad \forall f \in F. \tag{4.56}$$

4.7.3 Décomposition de Benders avec fenêtres de temps : nouvelle approche

Concernant les contraintes de synchronisation sur les temps de départ des vols entre les avions et les pilotes, nous avons imposé à l'équation (4.5) que, pour un même vol, l'avion et l'équipage doivent être prêt en même temps. Cette formulation est correcte. Il est toutefois possible de n'utiliser qu'un seul ensemble de variables de temps pour déterminer effectivement les heures de départ des vols dans le problème de l'affectation des pilotes. On doit procéder comme suit.

À chaque fois que l'on résout le problème maître (affectation des avions, compte tenu des coupes générées), on peut utiliser toute la flexibilité permise par les fenêtres de temps. Cependant, plutôt que d'utiliser l'horaire obtenu par cette solution, on détermine l'intervalle de validité sur l'heure de départ de chaque vol de façon à ce que les itinéraires des avions demeurent valides. Le calcul de ces intervalles se fait en utilisant d'une part, les données initiales du problème (fenêtre de temps sur les vols et durée des vols et des connexions), d'autre part, les itinéraires décrits par les variables de flot. Ces intervalles de validité ne sont donc fonction que des variables de flot de la solution du problème maître. Ces intervalles sont alors transférés au sous-problème qui doit alors déterminer l'heure effective du départ de chaque vol.

Dans la formulation intégrée (4.1) - (4.7), on doit remplacer (4.5) par :

$$\overline{a}_{yt}^{ft} \leq T_{yt}^{ft} \leq \overline{b}_{yt}^{ft}, \quad \forall f \in F, \forall i \in L_y^f \tag{4.57}$$

où $\overline{a}_{yt}^{ft} = a_t^f(X_t^f)$ et $\overline{b}_{yt}^{ft} = b_t^f(X_t^f)$ sont les bornes, inférieure et supérieure, maintenant variables en fonction des variables de flot d'avions de type f au nœud i. Avec ces bornes variables, nous transférons plus d'information au problème des pilotes (un intervalle plutôt qu'une seule valeur) et nous pensons que nous pouvons converger plus vite vers la solution optimale. Le désavantage de cette approche est que les contraintes liantes sont plus complexes et que leur nombre peut être très grand. Ce dernier aspect peut annuler l'avantage de la convergence rapide.

4.7.4 L'approche inversée de décomposition de Benders

Il est clair que le problème de gestion d'équipages est plus difficile à résoudre parce qu'il contient des contraintes de ressources plus complexes. Nous proposons ici de résoudre d'abord le problème d'équipages comme problème maître et ensuite le problème d'avions comme sous-problème. Dans les formulations, il s'agit d'échanger le rôle des variables X et Y. Le désavantage de cette approche est que le problème maître devient très grand et très complexe. Cette difficulté peut être partiellement réduite si nous ne résolvons pas le problème maître jusqu'à l'optimum à chaque itération, comme il a été proposé précédemment. Le grand avantage, par contre, est que le sous-problème devient très simple s'il n'y a aucune variable de ressource. Dans ce cas, il devient un problème de réseau et il est facile d'obtenir les variables duales avec lesquelles nous construisons les coupes de Benders, même en considérant les nœuds et les arcs non couverts. Ainsi, pour une flotte considérée, les variables duales pour les nœuds et les arcs non couverts par les équipages sont calculées automatiquement. De cette façon, la perte dans le problème maître sera largement compensée par le gain dans le sous-problème.

De plus, avec les coupes initiales qui peuvent introduire quelques aspects du problème d'avions dans le problème d'équipages, nous pouvons arriver au point où on n'a plus besoin de résoudre le sous-problème. Avec cet ensemble de coupes initiales, Haase *et al.* (1998) ont montré dans le contexte du transport urbain (pour le cas d'une flotte homogène où tous les véhicules partent de même base) que la décomposition de Benders

n'est plus nécessaire. Il suffit de résoudre le problème de gestion d'équipages avec les coupes initiales proposées pour garantir la réalisabilité de la solution d'avions.

Nous croyons que l'approche inversée de décomposition de Benders est extrêmement intéressante et encore plus prometteuse que les approches précédentes. À notre connaissance, c'est une approche originale et dans le domaine du transport aérien, seulement l'article de Teodorović et Stojković (1995) a mentionné une idée similaire où le problème de gestion des équipages est résolu d'abord et le problème de gestion des avions ensuite.

4.8 Conclusion et recherches futures

Les principales contributions de ce chapitre peuvent être résumées comme suit : implantation efficace de la décomposition de Benders ; présentation d'une méthode sophistiquée de résolution de ce modèle basée sur la décomposition de Benders où chaque composante est résolue avec la méthode de génération de colonnes incorporée dans un processus optimal de séparation et évaluation ; suggestion de plusieurs extensions intéressantes. Nous croyons que notre approche est originale et qu'elle a un potentiel considérable pour les applications pratiques dans les processus de planification et d'opérations.

L'approche de Benders peut considérablement améliorer les résultats obtenus par l'approche séquentielle, même quand l'arbre d'énumération du problème des pilotes n'est pas exploré au complet. Les gains peuvent représenter des millions de dollars annuellement. Cependant, de plus grands temps de calcul sont nécessaires pour obtenir ces résultats supérieurs, surtout pour les exemples de grandes tailles, i.e., de plusieurs jours. Cette augmentation du temps de calcul reste tout de même acceptable car l'optimisation sur un horizon plus large est nécessaire seulement quand les perturbations dans les horaires sont très grandes. Ces grandes perturbations sont prévisibles et par conséquent, le temps nécessaire pour répondre à une telle perturbation est aussi plus grand.

Pour les recherches futures, il faut avoir des données plus réalistes avec une structure de coûts plus riche. L'absence d'exemples plus réalistes est due aux compagnies aériennes qui ne traitent pas actuellement le problème intégré et n'ont pas dans leurs systèmes d'information toutes les données nécessaires pour ce type de problèmes. L'autre difficulté se retrouve au niveau de la dimension du problème maître et du sous-problème. Le nombre de contraintes liantes est trop grand pour nous permettre de résoudre un problème réel avec plusieurs types d'avions. Par conséquent, pour les exemples de grandes tailles nous n'avons traité qu'un seul type d'avions à la fois. Il sera important de continuer la recherche sur l'optimisation avec plusieurs types d'avions. Une direction de recherche intéressante serait de séparer le sous-problème par type d'avions et de le résoudre pour les pilotes correspondants sans considérer les vols

desservis par d'autres types d'avions qui ne concernent pas ces pilotes. Ensuite, il faudrait avoir une méthode permettant d'obtenir les variables duales pour les pilotes de ce type d'avions pour les vols qui sont desservis par d'autres types d'avions.

Par ailleurs, nous croyons que les priorités pour la recherche future seront d'enrichir la fonction objectif et de trouver une meilleure stratégie de branchement dans le problème des pilotes pour accélérer la résolution et améliorer la solution. Également, il serait intéressant de mettre ces deux phases dans un processus de séparation et évaluation ; ceci correspond à explorer tous les nœuds de l'arbre d'énumération du problème des pilotes avec une décomposition de Benders à chaque nœud.

Nous croyons que c'est un domaine complexe et intéressant où la recherche doit être encore approfondie. Ce chapitre n'offre pas un prototype complet qui peut immédiatement être utilisé dans une compagnie aérienne. Nous avons réalisé la recherche de base afin de maîtriser le problème opérationnel de gestion simultanée d'avions et d'équipages. Nous avons présenté des premiers résultats montrant que notre approche traite efficacement des problèmes de tailles intéressantes et que les gains potentiels sont importants.

CHAPITRE 5

Conclusion

Cette thèse traite du problème opérationnel de gestion globale des avions et des équipages appelé DAYOPS. Nous avons inclus dans notre analyse les avions. les pilotes et les agents de bord ; ce sont les acteurs principaux qui déterminent les revenus et les coûts d'opérations dans une compagnie aérienne. C'est une analyse de base qui nous a permis de proposer une approche globale pour le problème DAYOPS. En plus, elle nous a permis de développer des modèles intégrés capables de produire une solution meilleure que celle fournie par la méthode séquentielle.

Dans l'approche classique, les acteurs principaux (avions, pilotes et agents de bord) sont traités indépendamment ; c'est le gestionnaire des vols qui tient compte de la synchronisation entre les acteurs et qui possède une vue globale des opérations. Contrairement à l'approche classique, nous proposons des approches qui prennent en compte plusieurs acteurs avec leurs relations d'interdépendance de façon précise et bien définie. Elles sont capables de résoudre le problème de gestion des avions et des équipages et permettent de résoudre différentes variantes du problème DAYOPS. L'avantage de nos approches est que les informations sur tous les acteurs sont

considérées en même temps. Ainsi, l'optimisation se fait avec un seul modèle et la qualité des solutions obtenues est meilleure. Nous avons proposé également un environnement de travail où il y a plusieurs modules de complexités variables qui peuvent résoudre des problèmes ayant des irrégularités mineures ou majeures. L'efficacité de chacun de ces modèles a été testée sur plusieurs jeux de données.

Le premier modèle présenté au Chapitre 2 est très efficace mais il n'est capable de résoudre que les irrégularités mineures. Il réoptimise les temps de départ en gardant les itinéraires d'avions et les rotations d'équipages invariables. Ce modèle prend aussi en considération des éléments de maintenance et de connexion des passagers. Dans le troisième chapitre nous avons présenté une synthèse des modèles qui résolvent le problème global en le séparant en plusieurs parties indépendantes pour la planification ou l'opération. Nous résolvons d'abord le problème de gestion des avions, ensuite celui des pilotes et enfin celui des agents de bord. Nous donnons les relations qui lient ces éléments en produisant une séquence de processus d'optimisation. Chaque modèle dans cette séquence produit une solution optimale. Malheureusement, cette séquence de solutions optimales ne produit pas nécessairement un optimum global du problème DAYOPS. Pour avoir une solution optimale globale, nous proposons dans le quatrième chapitre une nouvelle formulation mathématique intégrée qui traite simultanément le problème de gestion des avions et le problème de gestion des pilotes. Une approche directe de résolution de la formulation intégrée est inutilisable en pratique, même pour les problèmes de petites tailles (temps de résolution trop grands). Nous présentons deux

variantes de cette approche (complète et incomplète) basées sur la décomposition de Benders, méthode qui exploite la structure de la formulation proposée. Le sous-problème et le problème maître de Benders sont résolus par une méthode de génération de colonnes intégrée dans un processus de séparation et évaluation.

Les contributions principales de cette thèse sont les suivantes. Nous avons identifié et défini trois approches pour résoudre le problème DAYOPS. Nous résolvons en temps réel les problèmes DAYOPS où les irrégularités sont relativement mineures. Pour les irrégularités majeures, nous avons proposé une approche permettant de faire le lien et la synthèse des modèles séparés, pour résoudre le problème intégré. Ces modèles séparés sont élaborés avec les acteurs principaux pendant les opérations d'une compagnie aérienne. De plus, nous avons proposé une façon correcte de définir des coupes de Benders pour le modèle intégré. Nous avons également identifié des difficultés pratiques et théoriques pendant notre recherche qui n'étaient pas bien cernées jusqu'à aujourd'hui.

Nous avons touché un domaine immense et complexe et nous ne prétendons pas avoir vidé la question. Cependant, dans chacun des chapitres précédents, nous avons proposé des perspectives et des directions de recherches futures qui nous semblent intéressantes. En voici un résumé. Pour les problèmes de planification ou d'opération, le premier modèle peut être intégré comme module dans un modèle plus complexe. Dans la deuxième approche, on peut enrichir les modèles existants et utiliser ces modules pour

résoudre le problème intégré. Pour la troisième approche, il est important d'enrichir la fonction objectif et de mettre les deux phases développés dans un processus de séparation et évaluation progressif. Il faut aussi continuer la recherche sur le problème avec plusieurs types d'avions. Une direction de recherche pourrait être de trouver une façon de calculer indirectement les variables duales sur les arcs non-couverts des sous-problèmes. Dans ce cas, on peut résoudre le SP qui contient seulement les arcs couverts avec les avions de type correspondant. Ensuite, les variables duales pour les arcs non couverts par les avions peuvent être déduites. Également, il serait intéressant d'améliorer la solution initiale. Pour cela, on pourrait utiliser une heuristique basée sur la décomposition de Benders. Évidemment, d'autres recherches seront nécessaires pour arriver à résoudre des problèmes de grandes tailles avec des irrégularités majeures.

RÉFÉRENCES

Air Canada, (1993). *Operations Control Automation Project (Functional Specifications I)*. Canada.

ABARA, J.A., (1989). Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem. *Interfaces*, 19(4), 20-28.

AGIN, N., (1972). An Algorithm for Optimal Aircraft Scheduling. *Proceedings NATO Conference*, Sanderfjord, Norway.

AGIN, N. et CULLEN D., (1975). An Algorithm for Transportation Routing and Vehicle Loading. *Logistics*, Édité par M.Geisler, North Holland, Amsterdam, 1-20.

AHUJA R.K., MAGNANTI T.L. et ORLIN J.B., (1993). *Network Flows*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

BANNISTER, F.E., (1984). Decision Support Systems-New Opportunities for O.R. *Operational Research*, J.P.Brans (edt.), Elsevier Science Publishers B.V., 103-111.

BARNHART, C., JOHNSON, E.L., ANBIL, R. et HATAY, L., (1994). A Column Generation Technique for the Long-Haul Crew Assignment Problem. *Optimization in Industry*, 2, Ciriano T. and Leachman R. (eds.), John Wiley and Sons.

BÉLANGER, N., (1998). *Planification d'une flotte*. Mémoire de maîtrise (non-publié), École Polytechnique de Montréal, Canada.

BELLMAN, R., (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.

BENDERS, J.F., (1962). Partitioning Procedures for Solving Mixed – Variables Programming Problems. *Numerische Mathematik*, 4, 238-252.

BODIN, L., GOLDEN, B., ASSAD, A. et BALL, M., (1983). Routing and Scheduling of Vehicles and Crew – the State of the Art. *Computers & Operations Research*, 10(2).

CARRARESI, P. et GALLO, G., (1984). Network Models for Vehicle and Crew Scheduling. *European Journal of Operational Research*, 16, 139-151.

CHAN, Y.P., (1974). *Route Network Improvement in Air Transportation Schedule Planning*. Thèse de doctorat, Flight Transportation Laboratory, MIT, U.S.A.

CLARKE E.C., (1961). The Optimum Allocation of Resources Among the Activities of a Network. *Journal of Industrial Engineering* 12, 11-17.

CORDEAU, J.-F., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J., (1998). A Benders Decomposition Approach for the Locomotive and Car Assignment Problem. *Les Cahiers du GERAD G-98-35*, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.

DANTZIG, G. et FULKERSON, D., (1954). Minimizing the Number of Tankers to Meet a Fixed Schedule. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1, 217-222.

DANTZIG, G., (1960). On the Shortest Route throught a Network. *Management Scienece*, 6(2), 187-190.

DANTZIG, G. et WOLFE, P., (1961). The Decomposition Algorithm for Linear Programming. *Econometrica*, 29(4).

DECKWITZ, T.A., (1984). *Interactive Dynamic Aircraft Scheduling*. Mémoire de maîtrise, Flight Transportation Laboratory, MIT, U.S.A.

De LAMOTTE, H.J.D., (1985). A.I.S.E. A Hybrid Scheduling System. *Report R85-4*, Flight Transportation Laboratory, MIT, U.S.A.

DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M.M. et SOUMIS, F., (1997). Daily Aircraft Routing and Scheduling. *Management Science*, 43(6), 245-259.

DESAULNIERS, G., DESROSIERS, J., IOACHIM, I., SOLOMON, M.M., SOUMIS, F. et VILLENEUVE, D., (1998). A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems. *Fleet Management and Logistics*, T.G.Crainic and G.Laporte (eds.), Kluwer, Norwell, MA, 57-93.

DESROCHERS, M. et SOUMIS, F., (1989). A Column Generation Approach to the Urban Transit Crew Scheduling Problem. *Transportation Science*, 23, 1-13.

DESROCHERS, M., DESROSIERS, J. et SOLOMON, M.M., (1992). A New Optimization Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Operations Research*, 40, 342-354.

DESROSIERS, J., SOUMIS, F. et DESROCHERS, M., (1984). Routing with Time Windows by Column Generation. *Networks*, 14, 545-565.

DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M.M. et SOUMIS, F., (1995). Time Constrained Routing and Scheduling. *Network Routing*, M.O. BALL et *al.* (eds), Handbooks in Operations Research and Management Science, 8, 35-139.

DUMAS, Y., DESROSIERS, J. et SOUMIS, F., (1990). Optimizing the Schedule for a Fixed Vehicle Path with Convex Inconvenience Costs. *Transportation Science*, 24, 145-151.

ETSCHMAIER, M.M. et MATHAISEL, D.F.X., (1985). Aircraft Scheduling: An Overview. *Transportation Science*, 19(2), 127-138.

EVANS, J.R. et MINIEKA, E., (1994). *Optimization Algorithms for Networks and Graphs*. Marcel Dekker Inc., New York.

FOLDES, S. et SOUMIS, F., (1993). PERT and Crashing Revisited: Mathematical Generalizations, *European Journal of Operational Research* , 64(2), 286-294.

FORD, L.R. et FULKERSON, D.R., (1962). *Flows in Networks*. Princeton University Press, NJ.

FRELING, R., BOENDER, G. et PAIXÃO, A., (1995). An Integrated Approach to Vehicle and Crew Scheduling. *Report 9503/A*, Erasmus University Rotterdam, Holland.

FRELING, R., (1997). *Models and Techniques for Integrating Vehicle and Crew Scheduling*. Tinbergen Institute Research Series 157, Thesis Publishers, Amsterdam.

GLOVER. F., (1986). Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence. *Computer and Operations Research*, 5, 533-549.

GONDRAN, M. et MINOUX, M., (1984). *Graphes et algorithmes*. Édition Eyrolles, Paris.

GRAY, P., (1985). System Tool for Aircraft Routing. *AGIFORS Proceedings*, 25.

HAASE, K., DESAULNIERS, G. et DESROSIERS, J., (1998), Simultaneous Vehicle and Crew Scheduling in Urban Mass Transit Systems. *Les cahiers du GERAD G-98-58*, Montreal, Canada.

HAASE, K. et FRIBERG, C., (1999). An Exact Algorithm for the Vehicle and Crew Scheduling Problem. *Dans N.H.M. Wilson (ed.) : Computer-Aided Transit Scheduling : Proceedings of the Seventh International Workshop on Computer-Aided Scheduling of Public Transport*, Springer Verlag, Berlin, 63-81.

HANE, C., BARNHART, C., JOHNSON, E.L., MARSTEN, R., NEMHAUSER, G.L. et SIGISMONDI. G., (1995). The Fleet Assignment Problem: Solving a Large-Scale Integer Program. *Mathematical Programming*, 70, 211-232.

HOFFMAN, K.L. et PADBERG, M., (1993), Solving Airline Crew Scheduling Problems by Branch-and-Cut. *Management Science*, 39, 657-682.

HOLST, O. et SORENSEN, B., (1984). Combined Scheduling and Maintenance Planning for an Aircraft Fleet. *Operational Research*, Elsevier Science Publishers B.V., 735-747.

HYMAN, W. et GORDON, L., (1968). Commercial Airline Scheduling Technique. *Transportation Research*, 2, 23-29, Pergamon Press.

IOACHIM, I., GÉLINAS, S., DESROSIERS, J. et SOUMIS, F., (1998). A Dynamic Programming Algorithm for the Shortest Path Problem with Time Windows and Linear Node Costs. *Networks*, 31, 193-204.

JARRAH A.I.Z., YU G., KRISHNAMURTHY N. et RAKSHIT A., (1993). A Decision Support Framework for Airline Flight Cancellations and Delays. *Transportation Science* 27, 266-280.

KRISHNAMURTHY, N., (1991). Models for Irregular Operations at United Airlines. *AGIFORS Proceedings*, 31, 81-95.

LASDON, L.S., (1970). *Optimization Theory for Large Systems*. Mac Millan, New York.

LAVOIE, S., MINOUX, M. et ODIER, E., (1988). A New Approach of Crew Pairing Problems by Column Generation and Application to Air Transport. *European Journal of Operational Research*, 35, 45-58.

LAVOIE, S., SAINTONGE, A., DESROSIERS, J., DUMAS, Y. et SOUMIS, F., (1993). Lexique pour le produit AIRCRAFT. *Les Cahiers du GERAD GC-93-16.V1*, École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Canada, H3T 1V6.

LEVIN, A., (1971). Scheduling and Fleet Routing Models for Transportation Systems. *Transportation Science*, 5(3), 232-255.

MATHAISEL, D.F.X., (1983). Fleet Assignment with Variable Demand: A Goal Programming Approach. *AGIFORS Proceedings*, 23, 283-308.

MATHAISEL, D.F.X., (1983a). Air Transport Network Aggregation and Fleet Planning. *AGIFORS Proceedings*, 23, 309-359.

NAKAZAWA, S., (1986). Study of a Heuristic Method for Developing a Domestic Timetable. *AGIFORS Proceedings*, 26, 34-50.

PATRIAKALAKIS, I. et XEROCOSTAS, D., (1992). A New Decomposition Scheme of the Urban Public Transport Scheduling Problem. *Dans M. Desrochers and J.M. Rousseau (eds.) : Computer-Aided Transit Scheduling : Proceedings of the Fifth International Workshop*, Springer Verlag, Berlin, 407-425.

RAKSHIT, A., (1990). Decision Support Systems for Systems Operations Control. *AGIFORS Proceedings*, 30, 117-126.

RAKSHIT A., KRISHNAMURTHY N. et YU G., (1996). System Operations Advisor: A Real-Time Decision Support System for Managing Airline Operations at United Airlines, *Interfaces*, 26, 50-58.

RIBEIRO, C.C. et SOUMIS, F., (1994). A Column Generation Approach to the Multiple-Depot Vehicle Scheduling Problem. *Operations Research*, 42, 41-52.

SALKIN, H.M., (1975). *Integer Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Philippines.

SEXTON, T. et BODIN, L., (1985). Optimizing Single Vehicle Many-to-Many Operations with Desired Delivery Times: I. Scheduling. *Transportation Science*, 19, 378-410.

SEXTON T.R. et CHOI Y., (1986). Pick-up and Delivery of Partial Loads with Time Windows, *The American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 6, 369-398.

SIMPSON, R.W., (1969). A Review of Scheduling and Routing Models for Airline Scheduling. *AGIFORS Proceedings*, 9.

SKLAR, M. G., ARMSTRONG, R.D. et SAMN, S., (1990). Heuristics for Scheduling Aircraft and Crew During Airlift Operations. *Transportation Science*, 24(1), 63-76.

SOUMIS, F., FERLAND, J. et ROUSSEAU, J.-M., (1980). A Model for Large-Scale Aircraft Routing and Scheduling Problems. *Transportation Research*, 14b(1-2), 191-201.

STOJKOVIĆ, G., (1990). *Models for Operational Daily Airline Scheduling*. Mémoire de maîtrise, Faculty of Transport and Traffic Engineering, University of Belgrade, Yugoslavia.

STOJKOVIĆ, M., (1998). Gestion des équipages aériens durant le jour d'opération. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Canada.

STOJKOVIĆ, M., SOUMIS, F. et DESROSIERS, J., (1998). The Operational Airline Crew Scheduling Problem. *Transportation Science*, 32(3), 232-245.

TEODOROVIĆ, D. et GUBERINIĆ, S., (1984). Optimal Dispatching Strategy on an Airline Network After a Schedule Perturbation. *European Journal of Operational Research*, 15(2), 178-182.

TEODOROVIĆ, D. et STOJKOVIĆ, G., (1990). Model for Operational Daily Airline Scheduling. *Transportation Planning and Technology*, 14, 273-285.

TEODOROVIĆ, D. et STOJKOVIĆ, G. (1995). Model to Reduce Airline Schedule Disturbances. *Journal of Transportation Engineering*, 121, 324-331.

TOSINI, E. et VERCELLIS, C., (1988). An Interactive System for Extra-Urban Vehicle and Crew Scheduling Problems. *Dans J.R. Daduna and A. Wren (eds.) : Computer-Aided Transit Scheduling : Proceedings of the Fourth International Workshop*, Springer Verlag, Berlin, 41-53.

YAN S. et YANG D.H. (1996), A Decision Support Framework for Handling Schedule Perturbation. *Transportation Research - B* , 30, 405-419.