UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PRÉDICTION DE LA TRANSITION SUR DES CONFIGURATIONS TRIDIMENSIONNELLES EN RÉGIME TRANSSONIQUE

MARC LANGLOIS

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION

DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR

(GÉNIE MÉCANIQUE)

FÉVRIER 2000

© Marc Langlois, 2000.

National Library of Canada
Bibliothèque nationale du Canada

Acquisitions and Bibliographic Services
Acquisitions et services bibliographiques

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-53537-1

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

PRÉDICTION DE LA TRANSITION SUR DES CONFIGURATIONS TRIDIMENSIONNELLES EN RÉGIME TRANSSONIQUE

présentée par: LANGLOIS Marc

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. ROBILLARD Luc, D.Sc., président

M. PARASCHIVOIU Ion, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MASSON Christian, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. ARNAL Daniel, D.Ing., membre

M. VASSEUR Patrick, Ph.D., membre

À Marie-Claude et Isabel

REMERCIEMENTS

Cette thèse n'aurait pas été possible sans la contribution de nombreuses personnes que je désire ici remercier.

Je remercie d'abord mon directeur de thèse, Dr Ion Paraschivoiu, titulaire de la Chaire en aéronautique J.-A. Bombardier à l'École Polytechnique, pour m'avoir invité au sein de son groupe de recherche et avoir assuré une partie de mon support financier tout au long du projet.

Un grand merci à mon codirecteur de recherche, Dr Christian Masson, de l'École de technologie supérieure de Montréal, qui a su appuyer et diriger mes travaux de façon efficace et soutenue, et dont les conseils pertinents et l'amitié sont grandement appréciés.

Je désire également remercier Dr Fassi Kafyeke et tout le personnel de la section Aérodynamique avancée de Bombardier Aéronautique, aujourd'hui mes collègues, ainsi que Drs Jean Cousteix, Daniel Arnal et Grégoire Casalis, de l'ONERA/CERT pour leur support lors de stages effectués dans leur établissement.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers le fonds FCAR, qui m'a assuré un support financier durant deux ans, sous la forme de bourses d'études et de stage.

Je tiens aussi à remercier pour leur aide et leur amitié tous les étudiants que j'ai cotoyés au cours de mon doctorat, que ce soit à l'École Polytechnique ou au CERT, et que je ne nommerai pas, de peur d'en oublier.

Pour leur soutien constant et leurs encouragements, je dois enfin une très grande reconnaissance à mes parents, Léo et Nicole, ma soeur Chantal et encore plus à mon épouse, Marie-Claude, qui a certainement dû faire preuve de beaucoup de patience durant toutes ces années.

RÉSUMÉ

L'objectif premier de cette thèse est de développer un outil de prédiction de la transition laminaire-turbulent fiable, efficace et d'utilisation aisée dans le cadre d'applications dans l'industrie aéronautique. En conjonction avec cet objectif, on désire également étudier l'influence sur la stabilité d'écoulements transsoniques des phénomènes physiques suivants: prise en compte totale de la nature tridimensionnelle de l'écoulement moyen (gradients transversaux), courbure de la surface sur laquelle se développe la couche limite et effets non parallèles.

La méthode proposée de prédiction de la transition fait appel à une base de données de caractéristiques de stabilité établie pour une couche limite compressible tridimensionnelle modèle. Une méthode de couplage impliquant les paramètres physiques de l'écoulement moyen, comme le nombre de Mach local, le nombre de Reynolds et le facteur de forme de la couche limite, permet d'extraire de la base de données des informations telles que le taux d'amplification à une fréquence donnée ou la fréquence d'amplification maximale de la couche limite étudiée. Les caractéristiques de stabilité de la couche limite modèle sont obtenues au préalable par la résolution des équations linéaires de stabilité dans leur forme compressible, avec l'hypothèse classique d'écoulement parallèle et sans effets de courbure.

La comparaison des caractéristiques de stabilité et des facteurs n calculés à partir d'un écoulement moyen obtenu par une approche tridimensionnelle complète avec ceux provenant d'un écoulement moyen quasi-tridimensionnel (hypothèse d'écoulement conique) a permis de démontrer que les gradients transversaux de pression peuvent avoir une influence significative sur la stabilité d'un écoulement tridimensionnel. De la même façon, on démontre que les effets de courbure et non parallèles

(calculés par l'approche PSE) ont une importante influence, respectivement stabilisatrice et déstabilisatrice, sur le niveau d'amplification des instabilités transversales dans la couche limite. Cependant, on constate également que l'inclusion de ces effets ne permet pas d'obtenir une valeur du facteur n à la transition plus uniforme que celle obtenue par la théorie classique. On a atteint cette conclusion en corrélant les valeurs calculées de n avec la position de transition observée en soufflerie sur des ailes en flèche d'envergure infinie avec profils ONERA D et AFVD 82 ainsi que sur des ailes d'avions d'affaire de Bombardier.

Les résultats obtenus par la méthode automatisée de calcul de la stabilité proposée permettent d'établir que celle-ci procure une représentation qualitative adéquate de l'évolution des caractéristiques de stabilité d'un écoulement transsonique tridimensionnel: type dominant d'instabilité, fréquence d'amplification maximale, taux d'amplification. Pour les cas étudiés, soit l'aile conique AS409 et deux ailes d'avions d'affaires de Bombardier, les facteurs n prédits par la méthode automatisée sont supérieurs à ceux prédits par le calcul complet du problème aux valeurs propres. Cet écart est probablement dû en grande partie à ce que la couche limite modèle utilisée ne permet pas de reproduire fidèlement le profil de vitesse transversale dans la couche limite. Il n'est cependant pas plus grand que ce qui est observé pour la valeur de n à la transition par le calcul complet d'un cas à un autre. La comparaison des facteurs n calculés et de la position de transition visualisée en soufflerie sur les ailes de Bombardier permet d'observer une variation en envergure du facteur n critique, aussi bien avec le calcul complet qu'avec la méthode automatisée. Afin d'améliorer la prédiction de la transition, une relation entre le facteur n à la transition et un nombre de Reynolds local (variable selon l'envergure) est proposée.

ABSTRACT

The first objective of this thesis is to propose a tool for the prediction of the laminar-turbulent that will be reliable, efficient and easy to use in aerospace industry applications. Together with this objective, a study will also be conducted of how the stability of transonic flows is affected by the following physical aspects: full account of the three-dimensional nature of the mean flow, curvature of the surface along which the flow develops and non-parallel effects.

The proposed transition prediction method relies on the use of a database of stability characteristics of a model three-dimensional compressible boundary layer. A coupling method based on the physical parameters of the mean flow, such as local Mach number, Reynolds number and boundary layer shape factor, allows the extraction from the database of quantities such as the amplification rate for a given frequency or the maximum amplification frequency of the boundary layer studied. The stability characteristics of the model boundary are precomputed, using the compressible linear stability equations with the classical parallel flow assumption and without curvature effects.

Comparing the stability characteristics and n factors obtained from a mean flow calculated by a fully-three-dimensional approach with those that result from the use of a quasi-three-dimensional mean flow (conical flow assumption) shows the significative influence of transverse (or spanwise) pressure gradients on the stability of a three-dimensional flow. In the same way, the potentially strong influence of curvature and non-parallel effects (the latter calculated using the PSE approach), respectively stabilising and destabilising, on the amplification rate of streamwise instabilities was demonstrated. However, the inclusion of these effects does not lead to a more consistent value of the n factor at transition than is obtained by the

classical theory, as demonstrated by correlating the calculated values of n with the location of transition determined in windtunnel tests on infinite swept wings with ONERA D and AFVD 82 profiles and Bombardier business aircraft wings.

The results obtained with the proposed automated stability analysis method have shown that it provides a qualitatively adequate representation of a transonic three-dimensional flow stability characteristics: dominant instability type, frequency of maximum amplification, amplification rate. Computation of the n factor was performed for the AS409 conical wing and two Bombardier business aircraft wings. For these cases, the automated method n factors are higher than those obtained by a complete eigenvalue calculation. This difference is probably largely due to the fact the model boundary layer used does not provide a completely appropriate representation of the crossflow velocity profiles. It is however within the range of variation of the n factor from one case to the other, when the full eigenvalue solution is used. Comparison of the calculated n factors and the experimentally observed location of transition on the Bombardier wings has revealed a spanwise variation of the critical n factor, with both the complete and automated calculation methods. To improve the prediction of transition, a relation between the n factor at transition and a local Reynolds number (varying along the span) is proposed.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv
REMERCIEMENTS v
RÉSUMÉ vi
ABSTRACT viii
TABLE DES MATIÈRES x
LISTE DES FIGURES xiv
LISTE DES TABLEAUX xviii
LISTE DES ANNEXES xix
LISTE DES SYMBOLES xx

INTRODUCTION 1
0.1 Objectifs 2
0.2 Considérations physiques 6
0.2.1 Processus de transition 6
0.2.2 Types d'instabilités 7
0.3 Contenu de la thèse 8

CHAPITRE I: REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 11
1.1 Introduction 11
1.2 Travaux en transition avant 1980 12
1.3 Travaux en transition depuis 1980 16
1.3.1 Développement et application des méthodes parallèles 17
1.3.2 Équations parabolisées de la stabilité 21
1.4 Méthodes "accélérées" d'analyse de la stabilité 22

1.5 Codes d'analyse de la stabilité existants 23

CHAPITRE II: THÉORIE LINÉAIRE DE LA STABILITÉ . . . 26

2.1 Équations de la stabilité 27

2.1.1 Équations non parallèles compressibles 27

2.1.1.1 Écoulement moyen 27

2.1.1.2 Forme des fluctuations 28

2.1.1.3 Équations 28

2.1.2 Équations non parallèles incompressibles 32

2.1.3 Équations parallèles compressibles 33

2.1.4 Équations parallèles compressibles avec effets de courbure . . . 35

2.2 Systèmes d'équations 40

2.2.1 Conditions aux frontières 40

2.2.2 Nature des systèmes 40

2.2.2.1 Équations non parallèles 40

2.2.2.2 Équations parallèles 41

2.3 Formulations temporelle et spatiale 42

2.4 Prédiction de la transition 44

CHAPITRE III: MÉTHODES PROPOSÉES 47

3.1 Calcul de l'écoulement moyen tridimensionnel 47

3.1.1 Calcul de l'écoulement non visqueux 48

3.1.2 Calcul de la couche limite 49

3.2 Résolution des équations non parallèles de stabilité 50

3.2.1 Amplitudes 50

3.2.2 Normalisation 51

3.2.3 Implantation numérique 52

3.2.3.1 Discrétisation 52
3.2.3.2 Conditions initiales 52
3.2.3.3 Procédure de calcul 53
3.3 Résolution des équations parallèles de stabilité 53
3.3.1 Discrétisation 53
3.3.1.1 Calcul des coefficients de courbure 55
3.3.2 Résolution du problème aux valeurs propres 55
3.3.3 Procédures de suivi d'instabilités 56
3.3.3.1 Maximisation non contrainte du taux d'amplification . 57
3.3.3.2 Optimisation du taux d'amplification à fréquence fixée 57
3.3.4 Détermination de la trajectoire d'intégration 59
3.4 Calculs de stabilité automatisés 59
3.4.1 Couche limite modèle 61
3.4.2 Procédure de couplage 63
3.4.3 Base de données des caractéristiques de stabilité 66

CHAPITRE IV: RÉSULTATS 75
4.1 Calculs de stabilité sur des géométries arbitraires en transsonique . . . 76
4.1.1 Écoulement non visqueux 76
4.1.2 Couche limite 77
4.1.3 Caractéristiques locales de stabilité 78
4.1.4 Sélection des fréquences 80
4.1.5 Prédiction de la transition 81
4.2 Effets non parallèles 85
4.3 Effets de courbure 90
4.3.1 Validation 90

4.3.2 Application à des écoulements compressibles 93
4.4 Calculs de stabilité automatisés 96
4.4.1 Validation du modèle de couche limite 98
4.4.1.1 Écoulement accéléré 98
4.4.1.2 Écoulement modérément décéléré 102
4.4.1.3 Écoulement fortement décéléré 106
4.4.1.4 Conclusions préliminaires 108
4.4.2 Prédiction de la transition: facteurs n sur l'aile AS409 109
4.5 Comparaisons des prédictions aux résultats en soufflerie sur des ailes 3-D 119
4.5.1 Aile expérimentale Bombardier W40 119
4.5.2 Aile du Bombardier BD-700 Global Express 123
4.5.3 Détermination du facteur n critique 125

CONCLUSION 131
Résumé de la thèse 131
Réalisations et contributions 135
Apport à l'industrie 138
Suggestions de travaux futurs 138

BIBLIOGRAPHIE 141

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 Systèmes de coordonnées pour l'étude des effets de courbure . 36

Figure 3.1 Algorithme PSE 54

Figure 3.2 Algorithme d'optimisation de ω_i à ω_r fixé 58

Figure 3.3 Trajectoire d'intégration du facteur n 60

Figure 3.4 Couche limite modèle sur aile d'envergure infinie 61

Figure 3.5 Valeurs de H_{x_t} et $w_{\max}$ sur les ailes NASA AMES et ONERA M6 70

Figure 3.6 Valeurs de M_e et Re_δ sur les ailes NASA AMES et ONERA M6 70

Figure 3.7a Valeurs de H_{x_t} et $w_{\max}$ — CL modèle, $\mathrm{M}_e = 0.6$ 71

Figure 3.7b Valeurs de H_{x_t} et $w_{\max}$ — CL modèle, $\mathrm{M}_e = 1.4$ 71

Figure 3.8a Influence de M_e sur k^{opt} et ψ^{opt} 72

Figure 3.8b Influence de M_e sur γ_i^{opt} 72

Figure 3.9a Influence de H_{x_t} sur k^{opt} et ψ^{opt} 72

Figure 3.9b Influence de H_{x_t} sur γ_i^{opt} 72

Figure 3.10a Influence de $w_{\max}$ sur k^{opt} et ψ^{opt} 73

Figure 3.10b Influence de $w_{\max}$ sur γ_i^{opt} 73

Figure 3.11a Influence de Re_δ sur k^{opt} et ψ^{opt} 73

Figure 3.11b Influence de Re_δ sur γ_i^{opt} 73

Figure 3.12 Évolution spectrale du taux d'amplification maximale 74

Figure 4.1 Aile NASA AMES: Distribution de pression à la surface 77

Figure 4.2 Aile NASA AMES: Profils de couche limite, z/b=17.2% 78

Figure 4.3 Aile NASA AMES: Distribution de vitesse en surface, z/b=17.2% 79

Figure 4.4a Aile NASA AMES: Diagramme de stabilité, $x/c = 2\%$ 80

Figure 4.4b Aile NASA AMES: Diagramme de stabilité, $x/c = 20\%$ 80

Figure 4.5a Aile NASA AMES: Fréquences les plus instables 81

Figure 4.5b Aile NASA AMES: Taux d'amplification maximal 81

Figure 4.6 Aile NASA AMES: Facteur n – Solution tridimensionnelle . . 82

Figure 4.7 Aile NASA AMES: Facteur n – Solution conique locale 82

Figure 4.8a Aile NASA AMES: Front de transition (n=15, f=5,0 kHz) . . 84

Figure 4.8b Aile NASA AMES: Position de la transition (n=15, f=5,0 kHz) 84

Figure 4.9 Aile ONERA D (60,-4): Distribution de vitesse 85

Figure 4.10 Aile AFVD 82 (49,-2): Distribution de vitesse 85

Figure 4.11 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=65 m/s: OS enveloppe 89

Figure 4.14 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=80 m/s: f=3000 Hz, OS 89

Figure 4.12 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=65 m/s: OS β_r^* constant 89

Figure 4.15 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=80 m/s: f=3000 Hz, PSE 89

Figure 4.13 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=65 m/s: PSE 89

Figure 4.16 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=80 m/s: f=1000 Hz, PSE 89

Figure 4.17 Aile infinie avec profil NACA 0012: Distribution de vitesse . . 91

Figure 4.18 Aile infinie avec profil NACA 0012: Facteur n, Re = $10 \cdot 10^6$ . . 92

Figure 4.19 Aile infinie avec profil NACA 0012: Facteur n, Re = $20 \cdot 10^6$ . . 92

Figure 4.20a Aile infinie #1: Coefficient de pression 94

Figure 4.20b Aile infinie #2: Coefficient de pression 94

Figure 4.21 Aile infinie #1: Facteur n 95

Figure 4.22 Aile infinie #2: Facteur n 95

Figure 4.23 Aile infinie #1: Diagrammes de stabilité, $x/c = 20\%$ 97

Figure 4.24 Cas #1: Profils de couche limite 100

Figure 4.25 Cas #1: Diagramme de stabilité — CL exacte 101

Figure 4.26 Cas #1: Diagrammes de stabilité — CL modèles 101

Figure 4.27a Cas #1: Évolution de ω_i^{max} 102
Figure 4.27b Cas #1: Évolution de k^{opt} et ψ^{opt} 102
Figure 4.28 Cas #2: Profils de couche limite 104
Figure 4.29 Cas #2: Diagramme de stabilité — CL exacte 105
Figure 4.30 Cas #2: Diagrammes de stabilité — CL modèles 105
Figure 4.31a Cas #2: Évolution de ω_i^{max} 106
Figure 4.31b Cas #2: Évolution de k^{opt} et ψ^{opt} 106
Figure 4.32 Cas #3: Profils de couche limite 108
Figure 4.33 Cas #3: Diagramme de stabilité — CL exacte 113
Figure 4.34 Cas #3: Diagrammes de stabilité — CL modèles 113
Figure 4.35a Cas #3: Évolution de ω_i^{max} 114
Figure 4.35b Cas #3: Évolution de k^{opt} et ψ^{opt} 114
Figure 4.36 Aile AS409, Test 42: Paramètres de couplage 114
Figure 4.37 Aile AS409, Test 42: Longueur d'onde optimale 115
Figure 4.38 Aile AS409, Test 42: Orientation optimale 115
Figure 4.39 Aile AS409, Test 42: Fréquence optimale 115
Figure 4.40 Aile AS409, Test 42: Amplification optimale 115
Figure 4.41 Aile AS409, Test 42: Amplification maximale, f=20 kHz . . . 116
Figure 4.42 Aile AS409, Test 42: Facteur n, f=20 kHz 116
Figure 4.43 Aile AS409, Test 42: Facteur n, f=0–30 kHz 116
Figure 4.44 Aile AS409, Test 79: Paramètres de couplage 116
Figure 4.45 Aile AS409, Test 79: Longueur d'onde optimale 117
Figure 4.46 Aile AS409, Test 79: Orientation optimale 117
Figure 4.47 Aile AS409, Test 79: Fréquence optimale 117
Figure 4.48 Aile AS409, Test 79: Amplification optimale 117
Figure 4.49 Aile AS409, Test 79: Amplification maximale, f=30 kHz . . . 118

Figure 4.50 Aile AS409, Test 79: Facteur n, f=30 kHz 118
Figure 4.51 Aile AS409, Test 79: Facteur n, f=0–50 kHz 118
Figure 4.52 Aile expérimentale Bombardier W40: Facteur n sur l'extrados, calcul complet 121
Figure 4.53 Aile expérimentale Bombardier W40: Facteur n sur l'extrados, calcul automatisé 121
Figure 4.54 Aile expérimentale Bombardier W40: Facteur n à la transition 122
Figure 4.55 Aile expérimentale Bombardier W40: Taux d'amplification, f = 50 kHz 122
Figure 4.56 Aile du Global Express à Re = $5{,}6 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul complet 124
Figure 4.57 Aile du Global Express à Re = $5.6 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul automatisé 124
Figure 4.58 Aile du Bombardier Global Express à Re = $5.6 \cdot 10^6$: Facteur n à la transition 125
Figure 4.59 Aile du Global Express à Re = $3{,}2 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul complet sans courbure 126
Figure 4.60 Aile du Global Express à Re = $3.2 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul complet avec courbure 127
Figure 4.61 Aile du Global Express à Re = $3{,}2 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul automatisé 127
Figure 4.62 Aile du Global Express à Re = $3{,}2 \cdot 10^6$: Facteur n à la transition 128
Figure 4.63 Facteur n à la transition – Calcul complet 129
Figure 4.64 Facteur n à la transition – Calcul automatisé 129
Figure 4.65 Corrélation du facteur n à la transition, calcul complet 130
Figure 4.66 Corrélation du facteur n à la transition, calcul automatisé . . 130

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1 Facteur n à la transition 87

Tableau 4.2 Fréquence critique (Hz) 87

Tableau 4.3 Orientation à la transition (°) 87

Tableau 4.4 Cas #1: Paramètres de couplage 98

Tableau 4.5 Cas #2: Paramètres de couplage 103

Tableau 4.6 Cas #3: Paramètres de couplage 107

Tableau 4.7 Cas AS409: validation 110

LISTE DES ANNEXES

Annexe I — Équations PSE discrétisées 154

Annexe II — Équations de stabilité parallèles discrétisées 159

Annexe III — Liste de publications 163

Annexe IV — Autorisation d'utiliser des données de Bombardier Inc. . . 166

LISTE DES SYMBOLES

$\hat{A}$	amplitude globale de la fluctuation
b	envergure
c	corde
c_p	chaleur spécifique à pression constante
C_p	coefficient de pression
f	fréquence dimensionnelle [Hz]
f, g	profils de vitesse transformés (CL similaire)
h_1, h_2, h_3	coefficients métriques du système ξ, y, ζ
H	enthalpie totale
H_{x_i}	facteur de forme incompressible longitudinal
H_{z_i}	facteur de forme incompressible transversal
i	$\sqrt{-1}$
k	nombre d'onde (magnitude du vecteur d'onde)
L_P	opérateur du système d'équations parallèles
L_{NP}, M	opérateurs additionnels du système d'équations non parallèles
M	nombre de Mach
$m_{12}, m_{32}, m_{13}, m_{31}$	coefficients de courbure
N	nombre de points du maillage en y
$\mathcal{N}_e$	norme
N	facteur d'amplification à fréquence fixée
n	enveloppe en fréquence de N
p	pression instantanée
$\tilde{p}$	fluctuation de pression
$\hat{p}$	fonction d'amplitude de la fluctuation de pression
P	pression moyenne

$\hat{q}$	vecteur des fonctions d'amplitude
Q	vitesse moyenne totale
R	constante des gaz parfaits ($287\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}$)
R	rayon de courbure de la surface
Pr	nombre de Prandtl (0.72)
Re	nombre de Reynolds
t	temps
T	température instantanée
$\bar{T}$	température moyenne
$\tilde{T}$	fluctuation de température
$\hat{T}$	fonction d'amplitude de la fluctuation de température
t_s	paramètre de similitude
t_w	paramètre de similitude
u, v, w	composantes de la vitesse instantanée selon x, y, z
U, V, W	composantes de la vitesse moyenne selon x, y, z
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	fluctuations de vitesse selon x, y, z
$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$	fonctions d'amplitude des fluctuations de vitesse
$\vec{V}_{gr}$	vitesse de groupe
$w_{\max}$	vitesse transversale maximale
w'_w	dérivée à la paroi de la vitesse transversale
X, Z, y	système de coordonnées global
x, z, y	système de coordonnées cartésien local
α	angle d'incidence, ou nombre d'onde complexe dans la direction x
β	nombre d'onde complexe dans la direction z

γ_i	amplification spatiale totale
δ_{x_i}	épaisseur de déplacement longitudinale incompressible
δ_{z_i}	épaisseur de déplacement transversale incompressible
ε	angle entre ξ et X
κ	rapport des chaleurs spécifiques (1.4)
λ	second coefficient de viscosité dynamique, ou longueur d'onde, ou variable transformée (densité-viscosité, CL similaire)
Λ	paramètre de similitude, ou angle de flèche
μ	viscosité dynamique moyenne
ν	viscosité cinématique moyenne
ξ, ζ, y	système de coordonnées curviligne orthogonal
ξ, η	coordonnées transformées (CL similaire)
ρ	densité moyenne
ϕ	quantité instantanée quelconque
Φ	quantité moyenne quelconque
ψ	orientation du vecteur d'onde par rapport à la ligne de courant extérieure
ψ_e	orientation de la ligne de courant potentielle par rapport à x
ψ_i	direction d'amplification par rapport à x
ω	fréquence complexe (pulsation)
$\hat{\mathbf{\Psi}}$	vecteur des fonctions d'amplitude, système PSE semi-discrétisé
θ	profil de température (enthalpie) transformée (CL similaire)
θ_{x_i}	épaisseur de quantité de mouvement longitudinale incompressible
θ_{z_i}	épaisseur de quantité de mouvement transversale incompressible

χ	paramètre de similitude
σ	paramètre de similitude

Indices inférieurs

e	valeur à la frontière supérieure de la couche limite
i	partie imaginaire
j	indice du maillage en x
k	indice du maillage en y
r	partie réelle
r	valeur de référence
s	formulation spatiale
t	formulation temporelle
w	valeur à la paroi
0	valeur de stagnation
∞	valeur dans l'écoulement amont

Indices supérieurs

max	valeur correspondant à l'amplification maximale à fréquence fixée
opt	valeur correspondant à l'amplification maximale absolue
$*$	valeur dimensionnelle

INTRODUCTION

La transition d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent constitue l'un des plus importants aspects de la mécanique des fluides, mais demeure encore l'un des moins bien compris. Les variations importantes que subissent les propriétés d'un écoulement lors du passage du régime laminaire au régime turbulent, en particulier au niveau de la friction de paroi et du transfert de chaleur, sont bien connues. Cette transition est observée pour la vaste majorité des écoulements présentant un intérêt pratique, comme celui sur l'aile d'un avion de ligne. On peut donc comprendre qu'une attention particulière doit être apportée à la détermination de la position de transition, si on veut pouvoir prédire avec une bonne précision les caractéristiques de ces écoulements. L'influence de la position de transition est particulièrement significative dans la détermination de la traînée d'une aile ou d'un avion donné. Ceci provient du fait que la friction de paroi, qui contribue pour près de la moitié de la traînée totale sur un avion commercial de type Airbus et pour environ les deux-tiers sur un avion d'affaires[1], est beaucoup plus élevée pour un écoulement turbulent que pour un écoulement laminaire. Une légère erreur dans l'estimation de la position de transition peut ainsi induire des différences importantes au niveau du coefficient de traînée global. Les manufacturiers ont un grand intérêt à prédire correctement la traînée d'un nouvel avion avant même son premier vol, puisqu'ils devront encourir des pénalités financières s'ils ne peuvent atteindre les niveaux de consommation de carburant garantis à leurs clients. On constate donc que la prédiction de la transition peut être reliée à la réduction de la consommation des avions. Derrière cette recherche d'une consommation en carburant réduite se trouvent bien entendu d'abord des raisons économiques, mais on peut aussi y trouver des avantages additionnels dans la réduction inhérente des émissions polluantes. Ceci pourrait même

à l'avenir passer au premier plan, alors que des normes environnementales de plus en plus sévères sont imposées partout dans le monde. La réduction de la consommation de carburant peut être réalisée soit en améliorant l'efficacité des moteurs, soit en modifiant la conception de l'avion de façon à en réduire la traînée. Le présent ouvrage s'incrit dans cette seconde perspective, puisqu'il est établi qu'elle constitue l'une des avenues les plus prometteuses pour réduire la traînée. Le maintien d'un écoulement laminaire peut être réalisé par l'utilisation de profils d'aile à écoulement laminaire naturel ("Natural Laminar Flow", NLF). Sur une aile en flèche, il est cependant reconnu que des technologies de contrôle actif de la laminarité ("Laminar Flow Control", LFC), comme l'aspiration de la couche limite, sont requises, possiblement en conjonction avec des profils laminaires. Un programme d'essais en vol destiné à évaluer les mérites de l'aspiration de la couche limite doit être prochainement entrepris par Airbus Industrie [2]. L'état actuel de la technologie permet d'envisager des réductions de traînée de l'ordre de 10% sur les ailes et de près de 5% sur les empennages et nacelles. Sur des vols long-courrier, ceci pourrait représenter une diminution de la consommation de 13%. Une compagnie possédant une flotte de 12 appareils opérant environ 400 vols de 5000 milles nautiques par année économiserait ainsi quelques 40 000 tonnes de carburant annuellement, ou environ 14 millions de dollars (à 0,28 $ Can. le litre).

0.1 Objectifs

On constate d'après ce qui précède que la capacité de prédire de façon fiable et précise la position de transition est essentielle pour la conception de nouvelles ailes. La théorie linéaire de la stabilité, en conjonction avec la méthode empirique du facteur n, demeure à ce jour l'outil le plus utilisé et probablement le plus approprié d'un point de vue pratique pour la prédiction de la transition sur des ailes en régime

de croisière. Mack [3], Malik et Orszag [4], ainsi que Cebeci et Stewartson [5], entre autres, ont développé des méthodes numériques pour la résolution des équations linéaires de la stabilité. Ces méthodes ont d'abord été appliquées à des ailes en flèche d'envergure infinie ou à géométrie conique. Des applications à des géométries tridimensionnelles arbitraires ne sont apparues que récemment dans la littérature. Spall et Wie [6] ont ainsi étudié la stabilité de la couche limite sur le nez d'un avion léger dans un écoulement incompressible. Iyer et al. [7] quant à eux ont considéré le problème de la stabilité le long de la ligne de partage sur le bord d'attaque d'une aile en flèche dans le régime transsonique.

Le groupe de recherche de la Chaire en aéronautique J.-A. Bombardier, en collaboration avec la section d'aérodynamique avancée de Bombardier Aéronautique, s'intéresse depuis quelques années à la prédiction de la transition. Un code d'analyse de la stabilité a ainsi été développé [8, 9]. La version originale de ce code était aussi basée sur l'hypothèse d'aile conique et n'était donc pas strictement applicable au calcul de la transition sur des géométries complexes telles que celles que l'on rencontre en pratique sur des avions comme le Challenger ou le Regional Jet de Bombardier.

Le présent projet s'inscrit dans la continuité de cet effort de recherche. Son objectif global est la conception et réalisation d'un nouvel outil de prédiction de la transition qui soit fiable et efficace et qui puisse être appliqué aux géométries et conditions de vol présentant un intérêt pratique pour l'industrie aéronautique. Pour ce faire, un certain nombre d'objectifs spécifiques ont été fixés, que l'on détaille ci-dessous.

1. Le développement de procédures de calcul applicables à des géométries tridimensionnelles arbitraires.

La réussite d'une analyse de stabilité exige que l'écoulement moyen soit connu avec une très grande précision. Or, la plupart des études publiées jusqu'à ce jour

utilisent un écoulement moyen basé sur la résolution d'une forme simplifiée des équations de couche limite (hypothèse d'envergure infinie ou d'écoulement conique par exemple). En appliquant ces méthodes à des géométries arbitraires, on néglige l'influence des gradients transversaux. On se propose donc de quantifier cette influence en comparant les résultats de stabilité obtenus par de telles approches et ceux provenant de simulations dans lesquelles on a tenu pleinement compte des effets tridimensionnels.

2. L'étude des effets de courbure.

La méthode du e^n a été développée à l'origine pour des écoulements bidimensionnels pour lesquels des corrélations expérimentales ont permis d'établir que la transition se produisait à des valeurs de n de l'ordre de 9 ou 10. Dans des écoulements tridimensionnels, par contre, on a observé des valeurs de n à la transition allant de 7 jusqu'à 20 [10]. Il a été suggéré [10] que l'inclusion des effets de courbure, jusque là négligés, pourrait produire des valeurs du facteur n critique plus uniformes. On étudiera donc l'influence de ces effets sur la stabilité d'un écoulement tridimensionnel compressible.

3. L'étude des effets non parallèles.

Une des hypothèses fondamentales de la théorie linéaire classique de la stabilité est celle d'un écoulement parallèle. Cette hypothèse n'est strictement valide que pour une classe très restreinte d'écoulements (écoulement établi en conduite par exemple). Dans la région du bord d'attaque d'une aile, où naissent généralement les instabilités transversales, la courbure des lignes de courant est forte et les effets non parallèles peuvent être importants. Ces effets seront étudiés à l'aide des équations parabolisées de la stabilité (PSE) dans leur forme linéaire. Ce choix a été fait afin de permettre, ultérieurement, l'étude des effets non linéaires.

4. L'automatisation des calculs de stabilité.

Les méthodes d'analyse basées sur la théorie linéaire de la stabilité ont jusqu'à maintenant été confinées presque exclusivement à des tâches de diagnostic, c'est-à-dire afin d'expliquer le comportement de la transition sur une configuration donnée dans un écoulement donné, et ne sont pas encore vraiment utilisées dans le calcul des écoulements (méthodes interactives fluide parfait-couche limite, codes Navier-Stokes). Ceci est dû en grande partie au fait qu'elles requièrent beaucoup d'information et d'interaction de la part de l'usager ainsi que des temps de calcul considérables. Le niveau d'implication de l'usager est en fait tel que pour le même écoulement des usagers différents peuvent très bien obtenir des résultats radicalement différents. Les principales tâches qui exigent cette interaction et dont les résultats dépendent fortement de l'usager sont:

- la localisation et l'identification des instabilités présentes (l'endroit où des instabilités vont apparaître et leur nature);
- la détermination de la plage de fréquences critiques pour le calcul du facteur n;
- le suivi adéquat des instabilités dans le calcul du facteur n.

Ces problèmes doivent être abordés de façon systématique si l'on veut disposer d'un outil de prédiction de la transition qui soit fiable et efficace et qui puisse être incorporé dans une procédure globale de calcul des performances d'un nouveau design.

Il est donc proposé de développer une méthode efficace de prédiction de la transition qui incorpore les aspects suivants:

- le développement d'une procédure systématique de localisation et d'identification des instabilités présentes sur une aile;

- la définition d'une procédure de sélection des fréquences critiques;
- la sélection d'une stratégie d'intégration du facteur n.

Cette automatisation sera réalisée grâce à l'utilisation d'une base de données de caractéristiques de stabilité, tirant avantage du caractère local des équations de stabilité parallèles. On ne peut dans une telle approche tenir compte des effets non parallèles et l'inclusion des effets de courbure serait très coûteuse en termes de stockage. Il était donc primordial d'étudier au préalable leur influence sur le stabilité et la prédiction de la transition.

0.2 Considérations physiques

0.2.1 Processus de transition

La transition de la couche limite du régime laminaire au régime turbulent est, ultimement, la conséquence de perturbations forcées existant dans l'environnement (turbulence, bruit) ou générées par le corps même sur lequel se développe la couche limite (vibrations, rugosité). Les mécanismes par lesquels ces perturbations pénètrent dans la couche limite et leur signature sur l'écoulement constituent la première étape du processus de transition, que l'on dénomme réceptivité [11, 12].

Selon l'amplitude des perturbations, deux chemins s'offrent à la transition. Si cette amplitude est faible, on observe une croissance exponentielle d'instabilités, qui peut être décrite par la théorie linéaire de la stabilité [13]. Dans une couche limite bidimensionnelle, cette croissance linéaire est relativement lente et peut s'étendre sur une portion considérable de l'écoulement avant que n'apparaissent des instabilités secondaires [14], indiquant le début d'interactions non linéaires. Après cela, la croissance des instabilités est très rapide et l'écoulement devient vite turbulent. Il est alors question de transition naturelle. Au-dessus d'une certaine amplitude,

par contre, la croissance initiale des instabilités est non linéaire et la transition se produit à une courte distance en aval du bord d'attaque. On parle alors de transition brutale ou "bypass" [15]. Ce type de transition ne sera pas considéré dans cette étude. Dans une couche limite tridimensionnelle, l'étendue de la zone où les instabilités croissent de façon linéaire est généralement plus faible que dans le cas bidimensionnel.

0.2.2 Types d'instabilités

Dans un écoulement bidimensionnel incompressible, on observe la croissance d'instabilités dont le front d'onde est perpendiculaire à la direction de l'écoulement moyen (vecteur d'onde parallèle à l'écoulement moyen). Ce sont les ondes de Tollmien-Schlichting (ondes TS). La compressibilité a une influence stabilisatrice sur ces instabilités. Aux nombres de Mach transsoniques, on observe de plus un déplacement de l'orientation la plus instable (ondes obliques). Ainsi, pour une plaque plane sans gradient de pression, l'amplification maximale correspond à une orientation du vecteur d'onde de 0° jusqu'à M_e=0.9 mais se retrouve autour de 50° pour M_e=1.3 [13]. L'influence du gradient de pression sur ces ondes est également significative, le taux d'amplification augmentant avec le gradient de pression. La conception de profils d'aile laminaires s'appuie sur cette propriété en modifiant la géométrie de manière à obtenir un gradient de pression favorable (écoulement accéléré) sur une grande distance en aval du bord d'attaque.

La situation est plus complexe pour un écoulement tridimensionnel. Pour le comprendre, on considère la décomposition du profil de vitesse en une composante u dans la direction de la ligne de courant potentielle et une composante w normale à celle-ci. La présence du profil w est reliée à la courbure des lignes de courant qui est très prononcée dans les régions de fort gradient de pression. Le profil longitudinal u

étant très semblable à un profil bidimensionnel, l'instabilité longitudinale présentera les mêmes caractéristiques que l'instabilité TS, notamment vis-à-vis l'influence de la compressibilité et du gradient de pression. D'autre part, le profil transversal w présentant toujours au moins un point d'inflexion, une forte instabilité transversale existera dans les régions où il est important, entre autres dans le fort gradient de pression négatif près du bord d'attaque. La direction la plus instable pour les ondes transversales se situe dans une bande étroite près de la normale à la ligne de courant potentielle. La compressibilité n'a que peu d'influence sur ce type d'instabilité. On notera également que les longueurs d'onde des instabilités transversales sont de 2 à 3 fois plus petites que celles des instabilités longitudinales. La fréquence la plus instable est aussi généralement plus faible pour une instabilité transversale. La présence de ces deux mécanismes d'instabilité fait qu'il est beaucoup plus difficile de concevoir une aile laminaire qu'un profil laminaire. En effet, un gradient de pression négatif inhibe la croissance des instabilités longitudinales mais favorise les instabilités transversales. Les efforts actuels semblent s'orienter vers des systèmes de laminarité mixtes dans lesquels on a recours à l'aspiration de la couche limite pour réduire la croissance des ondes transversales près du bord d'attaque puis à un gradient de pression favorable modéré pour limiter les instabilités longitudinales. L'efficacité de l'aspiration à retarder la transition a notamment été démontrée par des essais en soufflerie à l'ONERA [16] sur la dérive de l'Airbus A320.

0.3 Contenu de la thèse

Le Chapitre I consiste en une revue bibliographique des principaux travaux numériques touchant à la stabilité de la couche limite et la transition laminaire- turbulent. Une emphase particulière étant accordée aux méthodes applicables dans un contexte d'ingénierie, on se limite surtout à la théorie linéaire de la stabilité, dont on

considère les formulations parallèle et non parallèle (PSE). Les travaux récents concernant des méthodes accélélérées, ou automatisées, de prédiction de la transition sont également présentés. Ce chapitre se conclut par une description des principaux codes de prédiction de la transition connus dans la littérature.

Les principes mathématiques de la théorie linéaire de la stabilité sont ensuite présentés au Chapitre II. Les équations de la stabilité sont développées sous leur forme non parallèle compressible et incompressible ainsi que parallèle compressible avec et sans effets de courbure. On discute également de la nature des systèmes d'équations ainsi formés ainsi que des conditions aux frontières qui s'y appliquent. On décrit ensuite les formulations temporelle et spatiale des équations de la stabilité avant de terminer par la présentation de la méthode du facteur n utilisée pour la prédiction de la transition.

Au Chapitre III, on présente les outils numériques développés afin de résoudre les équations mathématiques présentées au Chapitre II. On y aborde le calcul de l'écoulement tridimensionnel moyen à l'aide d'un code d'Euler et d'un code de couche limite basé sur la méthode des caractéristiques, la résolution des équations non parallèles de stabilité par l'approche PSE ainsi que la solution du problème aux valeurs propres résultant de la théorie parallèle de la stabilité. Enfin, on propose une méthode automatisée de calcul des caractéristiques de stabilité d'une couche limite tridimensionnelle compressible. Cette méthode est basée sur le couplage de la couche limite réelle avec une couche limite modèle dont les caractéristiques de stabilité ont été précalculées et tabulées.

Les résultats obtenus sont ensuite présentés et analysés au Chapitre IV. On présente d'abord un exemple complet d'application des outils de calcul de l'écoulement moyen et de la stabilité sur une géométrie tridimensionnelle en écoulement transsonique, l'aile en flèche NASA AMES. Ces résultats sont comparés avec

ceux provenant d'une formulation conique (quasi-tridimensionnelle) afin d'illustrer l'influence des gradients transversaux de l'écoulement moyen sur la stabilité. L'influence des effets non parallèles sur la valeur critique du facteur n est ensuite étudiée pour les cas des ailes en flèche d'envergure infinie au profil ONERA D et AFVD 82, en écoulement incompressible. L'influence des effets de courbure sur les caractéristiques de stabilité est aussi étudiée, en écoulement incompressible et compressible, incluant des comparaisons avec des essais en soufflerie sur l'aile du Bombardier Global Express.

La seconde moitié du Chapitre IV est consacrée aux résultats obtenus par la méthode automatisée de calcul de la stabilité. On y présente des comparaisons entre les résultats du calcul automatisé et ceux provenant de la résolution complète des équations de stabilité, aussi bien au niveau des caractéristiques de stabilité locales que des facteurs n prédits. La corrélation de ces facteurs n avec la position de transition en soufflerie pour l'aile conique AS409 ainsi que pour des ailes d' avions d'affaires de Bombardier permet d'établir l'uniformité relative des méthodes quant au facteur n critique. On observe ainsi une variation selon l'envergure du facteur n à la transition. Afin d'améliorer la prédiction de la transition, une corrélation du facteur n critique avec un nombre de Reynolds local est proposée.

Finalement, on résume les conclusions de cet ouvrage et les contributions apportées, en plus de suggérer des améliorations possibles et d'autres avenues pour des investigations futures.

CHAPITRE I

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Introduction

Un grand intérêt pour l'analyse des caractéristiques de stabilité des couches limites laminaires et la prédiction de la transition laminaire/turbulent s'est développé au cours des dernières décennies et s'est maintenu jusqu'à aujourd'hui. Du point de vue des bureaux de conception et d'ingénierie, cet effort est motivé principalement par la nécessité de prédire convenablement les performances d'un nouveau design et, additionnellement, de réduire la traînée des avions et donc leur consommation spécifique. Étant donné les changements significatifs des propriétés qui accompagnent le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent, le premier de ces objectifs ne peut être atteint que si la position de la transition est correctement prédite. En ce qui a trait à la réduction de la traînée, on sait depuis longtemps déjà qu'un moyen efficace de l'obtenir consiste à maintenir un écoulement laminaire sur la plus grande partie possible des ailes et autres surfaces d'un avion. Une capacité fiable de prédiction de la transition est aussi requise si l'on veut concevoir avec succès et de façon optimale et efficace des ailes à écoulement laminaire naturel (Natural Laminar Flow, NLF) ou des dispositifs actifs de maintien de la laminarité (Laminar Flow Control, LFC). De nombreux groupes de recherche ont ainsi été établis en vue d'étudier les divers aspects de la stabilité et de la transition des couches limites. Au cours des ans, des rencontres de spécialistes ont permis d'échanger et de générer une quantité impressionnante d'information sur ce sujet. Parmi ces rencontres, on peut particulièrement mentionner les cours spéciaux de l'AGARD qui

ont eu lieu à l'Institut von Karman (Belgique) en 1984 [17], 1992 [18] et 1993 [19], le colloque organisé à l'École Polytechnique de Montréal en 1993 [20] ainsi qu'un récent symposium de l'IUTAM à Manchester (Royaume-Uni) en 1995 [21].

La suite de ce chapitre se veut une revue de la littérature concernant la stabilité et la transition de la couche limite. Le présent ouvrage étant lié principalement à la prédiction de la transition dans un contexte d'ingénierie, on se concentrera sur les travaux utilisant la théorie linéaire de la stabilité (Linear Stability Theory, LST) dans sa forme dite parallèle (ou théorie de Orr-Sommerfeld, OS) ou non parallèle basée sur les équations parabolisées de la stabilité (Parabolised Stability Equations, PSE). Plus spécifiquement, on ne fera pas une présentation détaillée des travaux expérimentaux ou des simulations numériques directes (DNS). Sur ces points, le lecteur est encouragé à consulter les articles récapitulatifs de Saric [22] sur l'observation expérimentale des phénomènes de transition ainsi que de Reed [23] sur les DNS. On présentera d'abord un survol des plus importantes étapes de l'avancement des connaissances et théories en stabilité et transition depuis la fin du 19ième siècle jusqu'à 1980. On analysera ensuite en plus de détails la recherche contemporaine, avant de présenter un sommaire des principaux outils de prédiction de la transition existants à ce jour.

1.2 Travaux en transition avant 1980

L'origine de la recherche en transition peut être retracée jusqu'aux expériences de Reynolds qui, à la fin du 19ième siècle, ont démontré l'existence de la turbulence. Reynolds lui-même a posé l'hypothèse que la transition était le résultat de l'instabilité de l'écoulement laminaire. L'hypothèse de Reynolds affirme que l'écoulement laminaire, constituant une solution des équations différentielles de la mécanique des fluides, représente toujours un type possible d'écoulement, mais qu'il

est affecté par certaines petites perturbations, et devient très instable au-dessus d'une certaine limite (le nombre de Reynolds critique). Rayleigh a mené cette hypothèse un peu plus loin, et a obtenu plusieurs résultats utiles concernant la stabilité des écoulements non visqueux (i.e. à des nombres de Reynolds élevés). Il a notamment découvert l'instabilité inflexionnelle des écoulements non visqueux: les profils de vitesse possédant un point d'inflexion sont instables alors que ceux qui n'en ont pas sont stables. Dans la première décennie du 20ième siècle, Orr et Sommerfeld menèrent la première étude complète de stabilité pour un écoulement de Couette. On croyait à l'époque que la viscosité pouvait seulement avoir un effet stabilisateur. Il a fallu attendre les années 1920 pour que l'influence déstabilisatrice de la viscosité soit établie par Prandtl et qu'une théorie visqueuse de la stabilité de la couche limite soit développée par Tollmien et Schlichting [24, 25, 26]. La présence d'ondes de perturbation dans l'écoulement laminaire constitue la base de cette théorie: ces ondes initialement infinitésimales s'amplifient linéairement jusqu'à éventuellement causer l'apparition de la turbulence. En 1933, Schlichting a réussi à calculer le rapport d'amplitude (par rapport à l'amplitude au passage de la courbe neutre) de la fréquence la plus amplifiée en fonction du nombre de Reynolds pour une couche limite de Blasius, et a observé que cette quantité évoluait dans une plage de valeurs comprises entre 5 et 9 à la transition. Ceci peut être considéré comme la première application de la théorie linéaire de la stabilité à la prédiction de la transition. L'accueil réservé à la nouvelle théorie a d'abord été plutôt froid, en partie parce qu'on ne pouvait pas croire qu'une théorie linéaire pouvait décrire adéquatement les phénomènes non linéaires liés à la transition, et parce que les expériences menées à l'époque ne révélaient pas la présence d'ondes d'amplification dans l'écoulement en amont de la transition. On a pu constater par la suite que ceci était causé par le haut niveau de turbulence dans les souffleries de l'époque, qui faisait en sorte que la

transition était déclenchée sans amplification linéaire des perturbations ("bypass").

L'expérience cruciale de Schubauer et Skramstad [27] a provoqué un revirement de l'opinion dominante vis-à-vis de la théorie linéaire de la stabilité. Ce programme expérimental avait débuté en 1940, après que l'on eût reconnu l'influence de la turbulence externe sur la transition. Une soufflerie spéciale, présentant un très faible taux de turbulence, a donc été conçue pour ce programme durant lequel des perturbations naturelles et artificielles (i.e. produites par un ruban vibrant) ont été étudiées. On a ainsi pu démontrer clairement l'existence d'oscillations sinusoïdales qui s'amplifiaient, et ce même dans des conditions naturelles. Au point de transition, on a observé que ces oscillations dégénèrent et l'on voit apparaître les variations irrégulières à haute fréquence caractéristiques de la turbulence. Le ruban vibrant a permis l'étude de perturbations bidimensionnelles d'une fréquence spécifiée. Les courbes neutres ainsi obtenues étaient en très bon accord avec celles prédites par la théorie linéaire de la stabilité (résultats de Tollmien [24]), ainsi que l'étaient les mesures de fluctuations de vitesse dans la couche limite. Plus récemment, des mesures similaires ont été réalisées par Ross et al. [28] avec des niveaux de turbulence externe encore plus faibles. Ces résultats expérimentaux sont encore une fois venus conforter la théorie linéaire de la stabilité.

On peut donc considérer que la théorie linéaire de la stabilité a été généralement acceptée à partir des années 1950. Malgré cela, il aura encore fallu attendre une dizaine d'années avant que des calculs puissent être effectués avec succès, en raison de la faible puissance des ordinateurs d'alors. La première solution numérique couronnée de succès de l'équation d'Orr-Sommerfeld a été obtenue par Kurtz et Crandall [29] en 1962. Les résultats d'une étude détaillée des caractéristiques de stabilité de couches limites bidimensionnelles incompressibles furent publiés en 1969 par Obremski et al. [30]. Les résultats présentés ont été obtenus pour des profils

de vitesse de Falkner-Skan ainsi que pour des profils non similaires, en utilisant les formulations temporelle et spatiale de la théorie linéaire de la stabilité.

Lees et Lin [31] ont utilisé une approche asymptotique pour étudier analytiquement la stabilité de la couche limite compressible. Cette étude a conduit à l'établissement de résultats fondamentaux reliés à l'existence d'un point d'inflexion généralisé, ce qui a permis de définir un critère pour la stabilité non visqueuse d'un écoulement compressible. La solution numérique des équations différentielles compressibles a été obtenue pour la première fois en 1965 par Mack [32] et a révélé des différences significatives entre les théories incompressible et compressible que n'avait pas identifiées l'analyse asymptotique. Par la suite, Mack a effectué une étude approfondie de la stabilité de la couche limite compressible [33, 34, 35, 36], sa contribution la plus importante étant sans doute la découverte des modes secondaires d'instabilité aux vitesses supersoniques. On trouvera dans la référence [36] une présentation détaillée des progrès de la théorie linéaire de la stabilité jusqu'en 1984.

Une des premières applications de l'analyse de stabilité à des ailes tridimensionnelles a été conduite en 1977 par Srokowski et Orszag [37] qui ont conçu le code de stabilité incompressible SALLY et l'ont utilisé pour étudier la stabilité de la couche limite compressible sur une aile en flèche d'envergure infinie. Ils ont proposé pour le calcul du taux d'amplification une stratégie basée sur la vitesse de groupe et la maximisation du taux de croissance temporelle à une fréquence spécifiée (méthode enveloppe). Cette méthode a par la suite été étendue aux écoulements compressibles par Mack [3]. Ce dernier a observé que l'effet de la compressibilité était plus important pour les instabilités longitudinales que transversales.

Bien que la validité de la théorie linéaire de la stabilité ait été établie avec succès, la théorie en elle-même ne permet pas de répondre au but initial que l'on

s'était fixé, soit de prédire la transition. Un critère empirique reliant les caractéristiques de stabilité et la position de transition a été proposé en 1956 par van Ingen [38] ainsi que, indépendamment, par Smith et Gamberoni [39]. L'hypothèse de base qui est faite est que la transition se produit lorsque l'amplitude d'une perturbation initialement infinitésimale a atteint un certain facteur de son amplitude initiale (inconnue). Ce critère a été d'abord développé pour des écoulements bidimensionnels et incompressibles, mais il a été depuis appliqué à des écoulements tridimensionnels et compressibles. Malgré ses limites inhérentes, il demeure la méthode la plus couramment utilisée pour prédire la transition aujourd'hui, et on y réfère généralement comme étant la méthode du e^n, ou du facteur n.

1.3 Travaux en transition depuis 1980

Au début des années 1980, la plupart des éléments nécessaires au développement de méthodes de prédiction de la transition basées sur la théorie linéaire de la stabilité avaient été établis. De nombreux codes allaient donc apparaître et être l'objet de multiples améliorations au cours des années qui allaient suivre. Durant la même période, des efforts en recherche plus fondamentale ont continué, concernant des phénomènes physiques liés à la transition dont la théorie classique linéaire et parallèle ne tient pas compte: influence de la courbure ainsi que de la nature non parallèle de l'écoulement, instabilités secondaires, interactions non linéaires, mécanismes de réceptivité, ... Certains de ces aspects ont maintenant été inclus dans des codes de prédiction de la transition. La section 1.3.1 présente les développements apportés aux méthodes de calcul basées sur la théorie linéaire "classique" de la stabilité (approche locale) par les plus importants groupes de recherche à l'échelle mondiale, tandis que la section 1.3.2 consiste en un résumé de la littérature sur une méthode relativement nouvelle qui permet d'éviter certaines

des limitations de la théorie classique, les équations parabolisées de la stabilité (PSE).

1.3.1 Développement et application des méthodes parallèles

Le groupe dirigé par le Prof. Cebeci à California State University (Long Beach) est actif dans le domaine de la transition depuis la fin des années 1970 [40]. En 1979, Cebeci et Stewartson [41] ont investigué la stabilité de l'écoulement incompressible sur un disque en rotation. Les calculs ont été conduits en utilisant la formulation spatiale des équations de stabilité, la relation entre les composantes du vecteur d'amplification étant définie grâce à la vitesse de groupe. Des comparaisons avec des mesures expérimentales de la position de transition ont montré des valeurs du facteur n à la transition plus élevées que celles généralement acceptées. On a par la suite établi que ceci était dû à ce qu'on avait négligé les forces de Coriolis et les effets de courbure, qui sont significatifs pour l'écoulement sur un disque. La même procédure de calcul a été appliquée à l'écoulement de Blasius [42] et, plus récemment, à une aile en flèche d'envergure infinie (profil ONERA D) et à un ellipsoïde en incidence [43, 5]. Ces derniers résultats ont également été comparés à des mesures expérimentales, avec un très bon accord. L'influence des effets de courbure sur la stabilité de l'écoulement tridimensionnel incompressible sur un cylindre en flèche a été étudiée [44] en utilisant aussi bien l'approche spatiale que l'approche temporelle. Il a été conclu de cette étude que la courbure avait un effet stabilisateur, plus faible cependant que ce qui avait été observé plus tôt par Malik et Poll [45] (voir la discussion de leurs résultats ci-dessous). En relation à la même étude, il est également intéressant de noter que les résultats obtenus par la formulation spatiale diffèrent très peu de ceux obtenus en formulation temporelle. Une autre étude des

effets de courbure de surface a été conduite, concernant cette fois l'écoulement incompressible sur une aile en flèche d'envergure infinie avec profil NACA 0012 [46]. Celle-ci a démontré que l'influence de la courbure pouvait être plus ou moins forte, selon l'angle de flèche et le nombre de Reynolds. La méthode du point de selle de Cebeci et Stewartson a aussi été étendue à des écoulements compressibles [47]. Un très bon accord avec des résultats expérimentaux a été démontré pour le cas d'une aile en flèche d'envergure infinie avec profil AS409.

Toujours aux États-Unis, High Technology Corporation (autrefois Systems and Applied Sciences Corporation) a apporté de nombreuses et significatives contributions au domaine. En 1980, Malik et Orszag [48] ont utilisé le code SALLY dans une étude comparative des diverses stratégies d'intégration du facteur n pour des écoulements tridimensionnels incompressibles. Ils arrivèrent à la conclusion que les méthodes enveloppes constituaient le meilleur choix pour des applications en ingénierie, puisqu'elles produisent des résultats aussi cohérents que ceux des méthodes basées sur la théorie des paquets d'ondes, qui se conforment plus à la physique du problème mais sont beaucoup plus coûteuses à implanter. Dans la référence [4], les mêmes auteurs présentent le code d'analyse de la stabilité pour écoulements tridimensionnels compressibles COSAL, qui allait, au moins pour un certain temps, s'établir comme une référence en la matière. Contrairement aux méthodes précédentes qui utilisaient une approche à valeur initiale, COSAL introduisit une formulation en termes de valeurs aux frontières, qui permet d'obtenir une solution du problème aux valeurs propres sans avoir recours à un estimé initial. L'écoulement sur le disque en rotation, étudié plus tôt par Cebeci et Stewartson a été ré-examiné par Malik et al. [49], cette fois en tenant compte des forces de Coriolis ainsi que de la courbure des lignes de courant et de l'écoulement. On a ainsi obtenu des valeurs du facteur n à la transition qui étaient en meilleur accord

avec celles communément acceptées (près de 11), ce qui indiquait la forte influence stabilisatrice des forces de Coriolis et de la courbure. En se basant sur cette observation, Malik et Poll [45] ont également étudié les effets de courbure pour l'écoulement incompressible sur un cylindre en flèche en utilisant une version modifiée de COSAL. Dans ce cas aussi, ils arrivèrent à la conclusion que la courbure avait une forte influence stabilisatrice, et que les mesures expérimentales de transition pouvaient être raisonnablement corrélées avec un facteur n de 11. Tel que mentionné précédemment, les résultats de Cebeci et al. indiquaient une influence beaucoup moins prononcée. Malik et Balakumar [50] ont par la suite attribué cette différence à une erreur de signe dans l'implantation d'un des termes de courbure des lignes de courant. Collier et Malik [51] ont étendu cette approche aux écoulements compressibles, et ont démontré qu'un amortissement considérable des instabilités transversales résultait de l'inclusion des termes de courbure dans l'analyse de stabilité. Collier et al. [52] ont comparé les facteurs n obtenus avec et sans courbure aux mesures de transition recueillies en vol sur l'aile d'un F-14. Ils trouvèrent que les résultats avec courbure corrélaient beaucoup mieux les mesures que ceux sans courbure, obtenant une valeur de n à la transition de l'ordre de 8. On doit mentionner que les résultats de Collier et al. présentaient la même erreur de signe que ceux de Malik et Poll [50]. Cependant, en raison d'une erreur supplémentaire dont l'effet était de réduire d'un ordre de grandeur la valeur des termes de courbure des lignes de courant, ces résultats peuvent être interprétés comme représentant l'influence de la courbure de surface seulement. Malik et Balakumar [50] ainsi que Masad et Malik [53] ont également étudié l'influence des effets non parallèles en utilisant une méthode de perturbations (échelles multiples) tenant compte de la variation longitudinale de l'écoulement moyen et des fluctuations. Une analyse de l'écoulement incompressible autour du cylindre de Poll permit de démontrer une forte influence

déstabilisatrice des effets non parallèles. On notera que la même méthode de perturbations a également été utilisée pour considérer l'influence des effets de courbure. Comme la majorité des codes d'analyse de la stabilité dits tridimensionnels, COSAL utilisait en fait un écoulement moyen tridimensionnel simplifié (disque en rotation, aile en flèche d'envergure infinie, aile conique). Spall et Malik [54] ont modifié COSAL afin de l'appliquer à des écoulements tridimensionnels quelconques. Cette nouvelle version a été utilisée pour étudier la stabilité de la couche limite sur un ellipsoïde de révolution dans un écoulement à basse vitesse. Le front de transition ainsi prédit était en bon accord avec des résultats expérimentaux.

Hors des États-Unis, le principal groupe de recherche en stabilité et transition est probablement celui dirigé par Arnal à l'ONERA/CERT en France. Une méthode applicable aux écoulements incompressibles [55] a d'abord été développée, et a été par la suite étendue aux écoulements compressibles [56]. Les formulations temporelle et spatiale ont toutes deux été utilisées, et les géométries considérées vont des profils bidimensionnels aux ailes en flèche d'envergure infinie. Dans la référence [55], on présente une comparaison de certains calculs avec des mesures conduites à l'ONERA sur un cylindre avec un nez ogival, à basse vitesse. La relation de Mack [34] a été utilisée pour déterminer le facteur n critique. La position prédite de la transition est très proche de celle mesurée expérimentalement. On mentionne également que les résultats présentés par Habiballah en 1981 [57] démontrent que les profils de déformation, ainsi que les plages de fréquences instables et les coefficients d'amplification, sont bien prédits. Niethammer [58] a utilisé le code de stabilité compressible de l'ONERA pour prédire la position de transition sur une aile en flèche avec profil AS409, pour laquelle des résultats expérimentaux étaient disponibles. La position de transition expérimentale a été corrélée par des valeurs du facteur n plus basses que celles correspondant au critère de Mack. Pour déterminer

l'influence de l'hypothèse de paroi adiabatique, on a utilisé la température mesurée à la paroi plutôt que la température adiabatique, ce qui a résulté en des facteurs n seulement légérement supérieurs. On a également conduit des calculs dans lesquels les relations de gaz parfait ont été remplacées par des expressions pour un gaz réel. Ceci a démontré que les effets de gaz réel sont négligeables à des nombres de Mach transsoniques. Le code CASTET est le résultat de nombreuses améliorations apportées par Laburthe [59] au code de stabilité compressible existant. Ces additions incluent le choix de différentes stratégies d'intégration pour le facteur n ainsi que la considération des effets de courbure. Il en a été conclu que la méthode enveloppe constituait la méthode d'intégration de préférence. En ce qui concerne les effets de courbure, leur inclusion semble résulter en une plus grande uniformité du facteur n à la transition, mais on n'a pas pu obtenir de conclusion satisfaisante quant à savoir s'il est ou non approprié d'inclure les effets de courbure des lignes de courant, que Laburthe associe à la courbure des fronts d'onde et aux effets non parallèles.

1.3.2 Équations parabolisées de la stabilité

La théorie linéaire classique de la stabilité (Orr-Sommerfeld) présente des limitations intrinsèques. On peut questionner la validité de la méthode e^n, puisque la croissance d'une fluctuation ne constitue pas une condition suffisante pour établir le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent. Les phénomènes menant à la transition sont dominés par des interactions non linéaires qui sont négligées dans la théorie classique. Le début de la turbulence est aussi affecté par la présence de fluctuations dans l'écoulement extérieur, la rugosité de surface, et d'autres perturbations localisées. On ne peut tenir compte de ces phénomènes dans la théorie linéaire. De plus, l'hypothèse d'un écoulement moyen parallèle ne peut vraiment s'appliquer aux écoulements d'intérêt pratique.

La théorie basée sur les équations parabolisées de la stabilité (PSE) vise à remédier à certaines des limitations de la théorie classique. Cette théorie a d'abord été proposée par Herbert et Bertolotti [60, 61, 62]. Elle a depuis été l'objet de travaux par Casalis et Arnal [13, 63], Malik et Li [64] ainsi que Stuckert et al. [65], pour n'en nommer que quelques uns. Dans les PSE, les gradients dans la direction principale de l'écoulement (typiquement, la direction de la corde) des quantités moyennes et des fluctuations ne sont plus négligés, ce qui permet de conserver et de convecter l'historique de la fluctuation. Cette approche conduit à un problème à valeur initiale que l'on résout par une méthode de marche en espace. L'homogéneité du problème n'est alors plus requise ce qui permet l'imposition de conditions aux frontières non homogènes et l'incorporation de termes non linéaires. L'analyse non linéaire constitue l'un des aspects les plus intéressants des PSE, puisqu'on peut ainsi entrevoir le remplacement de la méthode empirique du e^n par une analyse des interactions non linéaires.

1.4 Méthodes "accélérées" d'analyse de la stabilité

La théorie linéaire de la stabilité, couplée à la méthode du e^n, permet d'améliorer la prédiction de la transition de la couche limite par rapport à l'emploi de critères empiriques. Cependant, les calculs de stabilité demandent beaucoup de temps, et ce autant de l'ordinateur que de l'usager. Pour cette raison, des méthodes simplifiées de calcul du facteur n ont été développées. Ces méthodes sont basées sur l'utilisation de solutions tabulées des équations de stabilité et ont été jusqu'à maintenant limitées à des écoulements bidimensionnels et incompressibles. Stock et Degenhart [66] ont ainsi utilisé des profils de couche limite de Falkner-Skan pour générer une base de données de caractéristiques de stabilité. Le facteur de forme H_x et le nombre de Reynolds sont utilisés comme paramètres de couplage entre la couche limite réelle

dont on analyse la stabilité et l'information tabulée. Les facteurs n obtenus avec cette méthode sont en très bon accord avec ceux provenant d'une analyse de stabilité complète. Dini et al. [67] ont développé une méthode similaire, mais dans laquelle il est également possible d'analyser des écoulements détachés, grâce à l'utilisation de profils de Green. Cette méthode a également produit de bonnes prédictions, entre autres en ce qui a trait à la longueur du bulbe de séparation. Plutôt que de tabuler directement les caractéristiques de stabilité, Gaster et Jiang [68] ont quant à eux représenté la relation de dispersion de couches limites de Falkner-Skan par des approximants de Padé, et ont utilisé la dérivée seconde de la vitesse à la paroi comme paramètre de couplage, en plus du facteur de forme. Plus récemment enfin, Fuller et al. [69] ont appliqué avec succès la technique des réseaux de neurones au calcul du taux d'amplification des instabilités dans un jet

1.5 Codes d'analyse de la stabilité existants

Pour tenter de résumer l'état actuel des méthodes d'analyse linéaire de la stabilité et de prédiction de la transition, nous présentons ci-dessous une liste des codes les plus utilisés ou les mieux connus, avec les principales caractéristiques et limitations publiées. Il est entendu que cette liste ne saurait en aucun cas se prétendre exhaustive.

- SALLY (NASA - MIT, États-Unis) [37]
  - écoulement incompressible
  - formulation temporelle
  - quasi 3-D (aile conique)
  - effets de courbure négligés
  - écoulement parallèle

- COSAL (High Technology Corporation, États-Unis) [4]
  - écoulement compressible
  - formulation temporelle
  - quasi 3-D (aile conique)
  - effets de courbure négligés
  - écoulement parallèle
- COAST (Daimler-Benz Aerospace, Allemagne) [70]
  - écoulement compressible
  - effets de courbure inclus
  - écoulement parallèle
- LISA (DynaFlow Inc, États-Unis) [70]
  - écoulement compressible
  - effets de courbure inclus
  - écoulement parallèle
- CASTET (ONERA/CERT, France) [59]
  - écoulement compressible
  - formulation temporelle ou spatiale
  - quasi 3-D (aile en flèche d'envergure infinie)
  - effets de courbure inclus
  - écoulement parallèle
- CSC (California State U., États-Unis) [47]

- écoulement compressible
- formulation spatiale
- quasi 3-D (aile en flèche d'envergure infinie)
- effets de courbure négligés
- écoulement parallèle

• SCOLIC (Chaire J.-A. Bombardier. Canada) [71]

- écoulement compressible
- formulation temporelle ou hybride temporelle/spatiale
- géométries 3-D quelconques
- effets de courbure inclus
- écoulement parallèle

CHAPITRE II

THÉORIE LINÉAIRE DE LA STABILITÉ

On présentera dans ce chapitre les équations de base de la théorie linéaire de la stabilité ainsi que les hypothèses faites dans leur développement. Dans un premier temps, les équations non parallèles compressibles seront présentées à la section 2.1.1. Ces équations ne seront cependant pas résolues dans le cadre de ce projet, on se contentera plutôt, pour l'étude des effets non parallèles, de solutionner les équations parabolisées incompressibles présentées à la section 2.1.2. Les équations parallèles compressibles (équations "classiques" de la stabilité linéaire) seront quant à elles présentées à la section 2.1.3. La présentation des équations parallèles avec effets de courbure suivra à la section 2.1.4. On abordera ensuite la nature des systèmes d'équations obtenus ainsi que leurs conditions aux frontières avant de terminer ce chapitre par une discussion des formulations temporelle et spatiale des équations de stabilité et une présentation de la méthode e^n pour la prédiction de la transition.

Que l'on fasse ou non l'hypothèse d'un écoulement parallèle, le développement des équations linéaires de la stabilité débute par la décomposition de chacune des variables instantanées de l'écoulement (vitesse, pression, densité, température) en une quantité moyenne, invariante dans le temps, et une fluctuation, qui varie à la fois dans le temps et dans l'espace. Ainsi, toute quantité ϕ peut s'exprimer de façon générale comme:

$$\phi(x, y, z, t) = \Phi(x, y, z) + \tilde{\phi}(x, y, z, t) \tag{2.1}$$

À ce stade, l'écoulement moyen est supposé connu. Il peut avoir été obtenu par la résolution des équations de Navier-Stokes ou de couche limite, auquel cas le champ d'écoulement non visqueux peut provenir de mesures expérimentales ou de calculs

en fluide parfait (équations d'Euler par exemple).

Les théories parallèles et non parallèles différent au premier abord quant aux hypothèses faites sur la nature de l'écoulement moyen et des fluctuations. On choisit de débuter par la théorie non parallèle puisque ses hypothèses sont moins restrictives.

2.1 Équations de la stabilité

2.1.1 Équations non parallèles compressibles

2.1.1.1 Écoulement moyen

On considère un système de coordonnées x, z, y: x et z sont les coordonnées dans le plan de la surface, y est dans la direction normale à la surface. De plus, on suppose que x est la direction principale d'évolution de l'écoulement et que les dérivées par rapport à z des quantités moyennes sont négligeables. Cette hypothèse d'invariance en z n'est strictement valide que pour une aile d'envergure infinie où z est dans la direction de l'envergure. On se contentera d'appliquer l'approche non parallèle à de tels cas, tout en notant qu'en utilisant un système local de coordonnées dont l'orientation serait judicieusement choisie, elle serait également applicable à des ailes de géométrie arbitraire. La méthode des échelles multiples nous permet d'établir la hiérarchie suivante pour les quantités moyennes:

ordre 0: $U, W, P, \bar{T}$ et leurs dérivées par rapport à y;

ordre 1: $V, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$ et leurs dérivées par rapport à y;

ordre 2: dérivées par rapport à x de termes d'ordre 1 et produits de ces termes.

2.1.1.2 Forme des fluctuations

On adopte pour les fluctuations une forme quasi-sinusoïdale généralement similaire à celle de la théorie parallèle. Cependant, on admet une variation en x des fonctions d'amplitude ainsi que du nombre d'onde α dans la direction x, de telle sorte que l'on obtient, pour toute fluctuation $\tilde{\phi}$:

$$\tilde{\phi}(x,y,z,t) = \Re\left(\hat{\phi}(x,y)e^{i(\int_{x_0}^{x}\alpha(\xi)\,d\xi+\beta z-\omega t)}\right) \tag{2.2}$$

On notera que selon l'équation 2.2, on a implicitement posé:

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{d\omega}{dx} = 0$$

Comme pour l'écoulement moyen, on suppose que la dépendance en x des fonctions d'amplitude ($\hat{\phi}$) est beaucoup plus faible que leur dépendance en y, ce qui permet d'obtenir la hiérarchie suivante:

ordre 0: $\alpha, \hat{\phi}$ et leurs dérivées par rapport à y;

ordre 1: $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}$ et leurs dérivées par rapport à y;

ordre 2: dérivées par rapport à x de termes d'ordre 1 et produits de ces termes.

2.1.1.3 Équations

En combinant le champ moyen et les fluctuations, on obtient pour les variables instantanées de l'écoulement:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x,y) \\ V(y) \\ W(x,y) \\ P(x,y) \\ \overline{T}(x,y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}(x,y) \\ \hat{v}(x,y) \\ \hat{w}(x,y) \\ \hat{p}(x,y) \\ \hat{T}(x,y) \end{bmatrix} e^{i(\int_{x_0}^{x}\alpha(\xi)\,d\xi+\beta z-\omega t)} \tag{2.3}$$

Après substitution des expressions ci-haut dans les équations de Navier-Stokes, soustraction des équations moyennes et élimination des termes d'ordre 2 et supérieur ainsi que des termes non linéaires, on obtient le système d'équations adimensionnelles suivant:

- continuité:

$$
\begin{aligned}
i\alpha\hat{u} - \left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{v} + i\beta\hat{w} + i\frac{\kappa \mathrm{M_r}^2}{\rho_e T_e}(\alpha U + \beta W - \omega)\hat{p} - \frac{i}{T}(\alpha U + \beta W - \omega)\hat{T} \\
+ \left(\frac{\kappa \mathrm{M_r}^2}{\rho_e T_e}\frac{d'P}{dx'} - \frac{1}{T}\frac{\partial' T}{\partial x'} - \delta' y\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{u} \\
+ \left(\frac{\partial' U}{\partial x'} + \frac{dV}{dy} - \frac{U}{T}\frac{\partial' T}{\partial x'} - \frac{V}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\kappa \mathrm{M_r}^2 V}{\rho_e T_e}\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{p} \\
-\frac{1}{T}\left\{\frac{\partial' U}{\partial x'} + \frac{dV}{dy} + \frac{\kappa \mathrm{M_r}^2 U}{\rho_e T_e}\frac{d'P}{dx'} - \frac{2}{T}\left(U\frac{\partial' T}{\partial x'} + V\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\delta' y U - V}{T}\frac{\partial}{\partial y}\right\}\hat{T} \\
+(1 - \delta' x)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

- quantité de mouvement en x:

$$
\begin{aligned}
\left\{\alpha^2\Gamma + \beta^2 + i\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha U + \beta W - \omega) - \Omega\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\hat{u} \\
+ \left(\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{\partial U}{\partial y} - i\alpha\Omega\frac{\partial T}{\partial y} - i\alpha(\Gamma - 1)\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{v} + \alpha\beta(\Gamma - 1)\hat{w} \\
+i\alpha\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\hat{p} - \left(\Upsilon\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \Omega\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \Omega\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{T} \\
+ \left[\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{\partial' U}{\partial x'} - i\alpha\Omega\Gamma\frac{\partial' T}{\partial x'} - i\Gamma\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \delta'\alpha\right)\right. \\
\left. -\left\{\left(\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re}\,U}{\mu T} - 2i\alpha\Gamma\right)\delta' y - \rho_e T_e\frac{\mathrm{Re}V}{\mu T}\right\}\frac{\partial}{\partial y}\right]\hat{u} \\
+ \left[\left\{(\Gamma - 1)\delta' - \Omega\chi\frac{\partial' T}{\partial x'} + \delta' y\frac{\partial T}{\partial y}\right\}\frac{\partial}{\partial y} + (\Gamma - 1)\delta' y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\hat{v} \\
-i\beta\left(\Omega\chi\frac{\partial' T}{\partial x'} - (\Gamma - 1)\delta' y\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{w} + \frac{\kappa \mathrm{Re}\,\mathrm{M_r}^2}{\mu T}\left(U\frac{\partial' U}{\partial x'} + V\frac{\partial U}{\partial y}\right)\hat{p}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}\, U}{\mu T^2} + i\alpha\Omega\Gamma\right)\frac{\partial' U}{\partial x'} + \rho_e T_e \frac{\mathrm{Re} V}{\mu T^2}\frac{\partial U}{\partial y} + i\alpha\Omega\chi\frac{\partial V}{\partial y} + i\beta\Omega\frac{\partial' W}{\partial x'}\right\}\hat{T} \\
&+(1-\delta' x)\left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}\, U}{\mu T} - 2i\alpha\Gamma\right)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - (1-\delta' x)\left(\Omega\frac{\partial T}{\partial y} + (\Gamma-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \\
&-i\beta(\Gamma-1)(1-\delta' x)\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = 0
\end{aligned}
$$

- quantité de mouvement en z:

$$
\begin{aligned}
&-\alpha\beta(\Gamma-1)\hat{u} + \left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{\partial W}{\partial y} - i\beta\Omega\frac{\partial T}{\partial y} - i\beta(\Gamma-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{v} \\
&+\left(\alpha^2 + \Gamma\beta^2 + i\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha U + \beta W - \omega) - \Omega\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{w} \\
&+i\beta\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\hat{p} - \left(\Upsilon\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \Omega\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \Omega\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{T} \\
&+\left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{\partial' W}{\partial x'} + i\beta\Omega\frac{\partial' T}{\partial x'} + i\beta(\Gamma-1)\delta' y\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{u} \\
&-\left[i\alpha\Omega\frac{\partial' T}{\partial x'} + i\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \alpha\delta'\right) + \left\{\left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}\, U}{\mu T} - 2i\alpha\right)\delta' y - \rho_e T_e \frac{\mathrm{Re} V}{\mu T}\right\}\frac{\partial}{\partial y}\right]\hat{w} \\
&+\frac{\kappa \mathrm{Re}\, \mathrm{M_r}^2}{\mu T}\left(U\frac{\partial' W}{\partial x'} + V\frac{\partial W}{\partial y}\right)\hat{p} \\
&-\left\{i\beta\Omega\chi\left(\frac{\partial' U}{\partial x'} + \frac{dV}{dy}\right) + i\alpha\Omega\frac{\partial' W}{\partial x'} + \rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}\, U}{\mu T^2}\left(U\frac{\partial' W}{\partial x'} + V\frac{\partial W}{\partial y}\right)\right\}\hat{T} \\
&-i\beta(\Gamma-1)(1-\delta' x)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}\, U}{\mu T} - 2i\alpha\right)(1-\delta' x)\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

- quantité de mouvement en y:

$$
\begin{aligned}
&-i\alpha\left(\Omega\chi\frac{\partial T}{\partial y} + (\Gamma-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{u} \\
&+\left(\alpha^2 + \beta^2 + i\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha U + \beta W - \omega) - \Omega\Gamma\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} - \Gamma\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{v} \\
&-i\beta\left(\Omega\chi\frac{\partial T}{\partial y} + (\Gamma-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)\hat{w} + \frac{\mathrm{Re}}{\mu}\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} - i\Omega\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial y} + \beta\frac{\partial W}{\partial y}\right)\hat{T} \\
&+\left[\left\{(\Gamma-1)\delta' - \Omega\left(\frac{\partial' T}{\partial x'} - \chi\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial y} + (\Gamma-1)\delta' y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\hat{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}V}{\mu T}\frac{dV}{dy} - i\alpha\Omega\frac{\partial' T}{\partial x'} - i\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \alpha\delta'\right)\right.\\
&\left.-\left\{\left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}U}{\mu T} - 2i\alpha\right)\delta' y - \rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}V}{\mu T}\right\}\frac{\partial}{\partial y}\right]\hat{v}\\
&-\left\{\Upsilon\left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial' T}{\partial x'} + \chi\frac{\partial' U}{\partial x'}\frac{\partial T}{\partial y} + \Gamma\frac{dV}{dy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \Omega\Gamma\frac{d^2 V}{dy^2} + \Omega(\Gamma-1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial'}{\partial x'} - \delta'\right)U\right.\\
&\left.+\Omega\left(\chi\frac{\partial' U}{\partial x'} - \delta' y\frac{\partial U}{\partial y} + \Gamma\frac{dV}{dy}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right\}\hat{T} - (1-\delta' x)\left(\Omega\chi\frac{\partial T}{\partial y} + (\Gamma-1)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\\
&+\left(\rho_e T_e \frac{\mathrm{Re}U}{\mu T} - 2i\alpha\right)(1-\delta' x)\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} - \Omega\frac{\partial U}{\partial y}(1-\delta' x)\frac{\partial\hat{T}}{\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

- énergie:

$$
\begin{aligned}
&-2(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\hat{u}}{\partial y} - \left\{2i(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial y} + \beta\frac{\partial W}{\partial y}\right) - \rho_e T_e\frac{\mathrm{Re\,Pr}}{\mu T}\frac{\partial T}{\partial y}\right\}\hat{v}\\
&-2(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial\hat{w}}{\partial y} - i(\kappa-1)\frac{\mathrm{Re\,M_r}^2\mathrm{Pr}}{\mu}(\alpha U + \beta W - \omega)\hat{p}\\
&+\left[\alpha^2 + \beta^2 + i\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re\,Pr}}{\mu T}(\alpha U + \beta W - \omega) - \Omega\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \Upsilon\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right.\\
&\left.-(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\,\Omega\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right\} - 2\Omega\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\hat{T}\\
&-\left[2i(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\left\{\alpha\left(\Gamma\frac{\partial' U}{\partial x'} + \chi\frac{dV}{dy}\right) + \beta\frac{\partial' W}{\partial x'}\right\} - (\kappa-1)\frac{\mathrm{Re\,M_r}^2\mathrm{Pr}}{\mu}\frac{d'P}{dx'}\right.\\
&\left.+\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re\,Pr}}{\mu T}\frac{\partial' T}{\partial x'}\right]\hat{u} - 2(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\left(\chi\frac{\partial' U}{\partial x'} - \delta' y\frac{\partial U}{\partial y} + \Gamma\frac{dV}{dy}\right)\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}\\
&-2i(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\left\{\beta\chi\left(\frac{\partial' U}{\partial x'} + \frac{dV}{dy}\right) + \alpha\frac{\partial' W}{\partial x'}\right\}\hat{w}\\
&+\frac{\mathrm{Re\,M_r}^2\mathrm{Pr}}{\mu}\left\{\frac{\kappa}{T}\left(U\frac{\partial' T}{\partial x'} + V\frac{\partial T}{\partial y}\right) - (\kappa-1)V\frac{\partial}{\partial y}\right\}\hat{p}\\
&-\left\{\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re\,Pr}}{\mu T^2}\left(U\frac{\partial' T}{\partial x'} + V\frac{\partial T}{\partial y}\right) + i\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \alpha\delta'\right) + 2i\alpha\Omega\frac{\partial' T}{\partial x'}\right.\\
&\left.+\left(\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re\,Pr}}{\mu T}(\delta' y U - V) - 2i\alpha\delta' y\right)\frac{\partial}{\partial y}\right\}\hat{T}\\
&-2(\kappa-1)\mathrm{M_r}^2\mathrm{Pr}\frac{\partial U}{\partial y}(1-\delta' x)\frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + \left(\rho_e T_e\frac{\mathrm{Re\,Pr}\,U}{\mu T} - 2i\alpha\right)(1-\delta' x)\frac{\partial\hat{T}}{\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Pour adimensionner les équations ci-dessus, on a utilisé pour la vitesse, la température, la viscosité et la densité des valeurs de référence constantes, que l'on dénote U_r, T_r, μ_r et ρ_r. Comme échelle de longueur, on a par contre utilisé l'épaisseur de déplacement incompressible dans la direction x, δ_{x_i}. On tient compte dans les équations de la variation de cette quantité. On obtient ainsi les définitions suivantes pour les nombres de Reynolds et de Mach locaux:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_r U_r \delta_{x_i}}{\mu_r} \qquad \mathrm{M}_r = \frac{U_r}{\sqrt{\kappa \mathrm{R} T_r}}$$

On a de plus utilisé les notations suivantes:

$$\delta' = \frac{d\delta_{x_i}}{dx} \qquad \chi = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \Gamma = \chi + 2$$

$$\Omega = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dT} \qquad \Upsilon = \frac{1}{\mu}\frac{d^2\mu}{dT^2}$$

$$\frac{\partial'}{\partial x'} = (1 - \delta' x)\frac{\partial}{\partial x} - \delta' y \frac{\partial}{\partial y} \qquad \frac{d'}{dx'} = (1 - \delta' x)\frac{d}{dx}$$

Il faut noter qu'avec la formulation en variables primitives adoptée, le terme $\partial \hat{p}^* / \partial x^*$ doit être négligé si l'on veut obtenir des équations de nature parabolique. Airiau [72] a vérifié numériquement, en comparant les résultats obtenus par différentes formulations, que cette influence est effectivement négligeable.

2.1.2 Équations non parallèles incompressibles

L'hypothèse d'un écoulement incompressible à viscosité constante permet de simplifier grandement les équations (2.4) à (2.8) qui deviennent:

- continuité:

$$i\alpha\hat{u} + i\beta\hat{w} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - \delta' y \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + (1 - \delta' x)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = 0 \tag{2.9}$$

- quantité de mouvement en x:

$$\left(\alpha^2+\beta^2+i\mathrm{Re}\,(\alpha U+\beta W-\omega)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{u}+\mathrm{Re}\frac{\partial U}{\partial y}\hat{v}+i\mathrm{Re}\,\alpha\hat{p}$$
$$-\left[\mathrm{Re}\frac{\partial V}{\partial y}+i\left(\frac{d'\alpha}{dx'}-\alpha\delta'\right)+\{(\mathrm{Re}\,U-2i\alpha)\delta' y-\mathrm{Re}V\}\frac{\partial}{\partial y}\right]\hat{u} \tag{2.10}$$
$$+(\mathrm{Re}\,U-2i\alpha)(1-\delta' x)\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}=0$$

- quantité de mouvement en z:

$$\mathrm{Re}\frac{\partial W}{\partial y}\hat{v}+\left(\alpha^2+\beta^2+i\mathrm{Re}\,(\alpha U+\beta W-\omega)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\hat{w}+i\mathrm{Re}\,\beta\hat{p}$$
$$-\frac{1}{U}\left(\mathrm{Re}V-\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial W}{\partial y}\hat{u}-\left[i\left(\frac{d'\alpha}{dx'}-\alpha\delta'\right)+\{(\mathrm{Re}\,U-2i\alpha)\delta' y-\mathrm{Re}V\}\frac{\partial}{\partial y}\right]\hat{w}$$
$$+(\mathrm{Re}\,U-2i\alpha)(1-\delta' x)\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}=0 \tag{2.11}$$

- quantité de mouvement en y:

$$i\alpha\frac{\partial\hat{u}}{\partial y}+\left\{\alpha^2+\beta^2+i\mathrm{Re}\,(\alpha U+\beta W-\omega)\right\}\hat{v}+i\beta\frac{\partial\hat{w}}{\partial y}+\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{p}}{\partial y}$$
$$-\left[i\mathrm{Re}\,\alpha V+\left\{\alpha^2+\beta^2+i\mathrm{Re}\,(\alpha U+\beta W-\omega)-\mathrm{Re}\frac{\partial V}{\partial y}-i\alpha(\mathrm{Re}\,U-2i\alpha)\right.\right.$$
$$\left.\left.-i\left(\frac{d'\alpha}{dx'}-\alpha\delta'\right)\right\}\delta' y+(1+\mathrm{Re}Vy)\delta'\frac{\partial}{\partial y}\right]\hat{u}+\left\{\mathrm{Re}\left(\frac{\partial V}{\partial y}-\delta' y\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.-i\left(\frac{d'\alpha}{dx'}-\alpha\delta'\right)\right\}\hat{v}+i\beta\{(\mathrm{Re}\,U-2i\alpha)\delta' y-\mathrm{Re}V\}\hat{w}$$
$$-i\mathrm{Re}\,\alpha\delta' y\hat{p}+\left((1-\delta' x)\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}+(\mathrm{Re}\,U-2i\alpha)(1-\delta' x)\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}=0 \tag{2.12}$$

2.1.3 Équations parallèles compressibles

Dans l'approche parallèle classique de la stabilité linéaire (que l'on dénommera parfois approche Orr-Sommerfeld (OS), bien que cette appellation ne s'applique vraiment qu'en incompressible), on ne retient que les termes d'ordre 0 pour le

champ moyen et les fluctuations. On obtient ainsi pour les quantités instantanées la décomposition suivante:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(y) \\ 0 \\ W(y) \\ P(y) \\ \bar{T}(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}(y) \\ \hat{v}(y) \\ \hat{w}(y) \\ \hat{p}(y) \\ \hat{T}(y) \end{bmatrix} e^{i(\alpha x+\beta z-\omega t)} \tag{2.13}$$

et les équations de stabilité s'expriment comme suit:

- continuité:

$$i\alpha\hat{u}-\left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dy}-\frac{d}{dy}\right)\hat{v}+i\beta\hat{w}+i\kappa \mathrm{M}_e^2(\alpha U+\beta W-\omega)\hat{p}-\frac{i}{T}(\alpha U+\beta W-\omega)\hat{T}=0 \tag{2.14}$$

- quantité de mouvement en x:

$$\begin{aligned}&\left(\Gamma\alpha^2+\beta^2+i\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha U+\beta W-\omega)-\Omega\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy}-\frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{u}\\&+\left(\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{dU}{dy}-i\alpha\Omega\frac{dT}{dy}-i\alpha(\Gamma-1)\frac{d}{dy}\right)\hat{v}+\alpha\beta(\Gamma-1)\hat{w}\\&+i\alpha\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\hat{p}-\left(\Upsilon\frac{dT}{dy}\frac{dU}{dy}+\Omega\frac{d^2U}{dy^2}+\Omega\frac{dU}{dy}\frac{d}{dy}\right)\hat{T}=0\end{aligned} \tag{2.15}$$

- quantité de mouvement en z:

$$\begin{aligned}&\alpha\beta(\Gamma-1)\hat{u}+\left(\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{dW}{dy}-i\beta\Omega\frac{dT}{dy}-i\beta(\Gamma-1)\frac{d}{dy}\right)\hat{v}\\&+\left(\alpha^2+\Gamma\beta^2+i\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha U+\beta W-\omega)-\Omega\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy}-\frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{w}\\&+i\beta\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\hat{p}-\left(\Upsilon\frac{dT}{dy}\frac{dW}{dy}+\Omega\frac{d^2W}{dy^2}+\Omega\frac{dW}{dy}\frac{d}{dy}\right)\hat{T}=0\end{aligned} \tag{2.16}$$

• quantité de mouvement en y:

$$
\begin{aligned}
&-i\alpha\left(\Omega\chi\frac{dT}{dy}+(\Gamma-1)\frac{d}{dy}\right)\hat{u}\\
&+\left(\alpha^2+\beta^2+i\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha U+\beta W-\omega)-\Omega\Gamma\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy}-\Gamma\frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{v}\\
&-i\beta\left(\Omega\chi\frac{dT}{dy}+(\Gamma-1)\frac{d}{dy}\right)\hat{w}+\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\frac{d\hat{p}}{dy}-i\Omega\left(\alpha\frac{dU}{dy}+\beta\frac{dW}{dy}\right)\hat{T}=0
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

• énergie:

$$
\begin{aligned}
&-2(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\frac{dU}{dy}\frac{d\hat{u}}{dy}-\left\{2i(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\left(\alpha\frac{dU}{dy}+\beta\frac{dW}{dy}\right)-\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{\mu T}\frac{dT}{dy}\right\}\hat{v}\\
&-2(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\frac{dW}{dy}\frac{d\hat{w}}{dy}-i(\kappa-1)\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}}{\mu}(\alpha U+\beta W-\omega)\hat{p}\\
&+\left[\alpha^2+\beta^2+i\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{\mu T}(\alpha U+\beta W-\omega)-(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\,\Omega\left\{\left(\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\frac{dW}{dy}\right)^2\right\}\right.\\
&\left.-\Upsilon\left(\frac{dT}{dy}\right)^2-\Omega\frac{d^2T}{dy^2}-2\Omega\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy}-\frac{d^2}{dy^2}\right]\hat{T}=0
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Comme il s'agit maintenant d'un problème purement local, on a choisi d'adimensionner les équations ci-haut à l'aide des valeurs locales à l'extérieur de la couche limite, U_e, T_e, μ_e et ρ_e. Les nombres de Reynolds et de Mach locaux sont donc:

$$
\mathrm{Re}=\frac{\rho_e U_e \delta_{x_i}}{\mu_e} \qquad\qquad \mathrm{M}_e=\frac{U_e}{\sqrt{\kappa \mathrm{R} T_e}}
$$

Toutes les autres notations apparaissant dans les équations ci-haut sont telles que définies à la section 2.1.1. On retrouve bien dans ces équations les termes parallèles des équations (2.4) à (2.8) (en raison de l'adimensionnement choisi, $\rho_e T_e = 1$ dans les équations ci-dessus).

2.1.4 Équations parallèles compressibles avec effets de courbure

Finalement, on considère l'inclusion des effets de courbure dans les équations parallèles compressibles. Pour ce faire, on écrit les équations de Navier-Stokes non plus

dans un repère cartésien local mais plutôt dans un repère curviligne orthogonal ξ, ζ, y, dans lequel ξ et ζ sont conformes à la surface et y lui est normal. Ce système de coordonnées est représenté, pour une aile en flèche d'envergure infinie, à la figure 2.1. On définit également un système X, Z, Y pour lequel X est dans la direction principale de courbure de la surface (c'est-à-dire que la courbure est nulle selon Z). Pour l'aile d'envergure infinie considérée ici, X est normal au bord d'attaque et Z est selon l'envergure. On appelle ε l'angle entre X et ξ. La forme des fluctuations est telle que décrite à la section précédente, en remplaçant x et z par ξ et ζ, respectivement. On obtient finalement le système d'équations ci-dessous, que l'on peut considérer comme étant exprimé dans le repère cartésien local x, z, y mais incluant des termes de correction reliés aux variations dans l'espace du système.

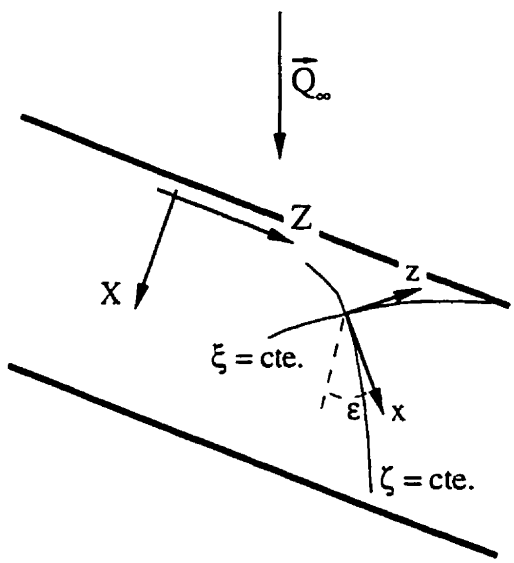

Figure 2.1 Systèmes de coordonnées pour l'étude des effets de courbure

- continuité:

$$
\begin{aligned}
& i\alpha_o\hat{u} - \left(\frac{1}{T}\frac{dT}{dy} - \frac{d}{dy}\right)\hat{v} + i\beta_o\hat{w} \\
& +i\kappa \mathrm{M}_e^2(\alpha_o U + \beta_o W - \omega)\hat{p} - \frac{i}{T}(\alpha_o U + \beta_o W - \omega)\hat{T} \\
& +m_{31}\hat{u} + (m_{12} + m_{32})\hat{v} + m_{13}\hat{w} + (m_{31}U + m_{13}W)\kappa \mathrm{M}_e^2\hat{p} - \frac{m_{31}U + m_{13}W}{T}\hat{T} = 0
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

- quantité de mouvement en x:

$$
\begin{aligned}
& \left(\Gamma\alpha_o^2 + \beta_o^2 + i\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha_o U + \beta_o W - \omega) - \Omega\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy} - \frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{u} \\
& + \left(\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{dU}{dy} - i\alpha_o\Omega\frac{dT}{dy} - i\alpha_o(\Gamma - 1)\frac{d}{dy}\right)\hat{v} + \alpha_o\beta_o(\Gamma - 1)\hat{w} \\
& +i\alpha_o\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\hat{p} - \left(\Upsilon\frac{dU}{dy}\frac{dT}{dy} + \Omega\frac{d^2U}{dy^2} + \Omega\frac{dU}{dy}\frac{d}{dy}\right)\hat{T} \\
& +m_{13}\frac{\mathrm{Re}\,W}{\mu T}\hat{u} + m_{12}\frac{\mathrm{Re}\,U}{\mu T}\hat{v} - (m_{13}U - 2m_{31}W)\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\hat{w} \\
& +(m_{13}U - m_{31}W)\frac{\kappa \mathrm{Re}\,\mathrm{M}_e^2 W}{\mu T}\hat{p} + (m_{13}U - m_{31}W)\frac{\mathrm{Re}W}{\mu T^2}\hat{T} = 0
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

- quantité de mouvement en z:

$$
\begin{aligned}
& \alpha_o\beta_o(\Gamma - 1)\hat{u} + \left(\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\frac{dW}{dy} - i\beta_o\Omega\frac{dT}{dy} - i\beta_o(\Gamma - 1)\frac{d}{dy}\right\}\hat{v} \\
& + \left(\alpha_o^2 + \Gamma\beta_o^2 + i\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha_o U + \beta_o W - \omega) - \Omega\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy} - \frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{w} \\
& +i\beta_o\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\hat{p} - \left(\Upsilon\frac{dT}{dy}\frac{dW}{dy} + \Omega\frac{d^2W}{dy^2} + \Omega\frac{dW}{dy}\frac{d}{dy}\right)\hat{T} \\
& +(m_{31}W - 2m_{13}U)\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}\hat{u} + m_{32}\frac{\mathrm{Re}W}{\mu T}\hat{v} + m_{31}\frac{\mathrm{Re}\,U}{\mu T}\hat{w} \\
& +(m_{31}W - m_{13}U)\frac{\kappa \mathrm{Re}\,\mathrm{M}_e^2 U}{\mu T}\hat{p} - (m_{31}W - m_{13}U)\frac{\mathrm{Re}\,U}{\mu T^2}\hat{T} = 0
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

- quantité de mouvement en y:

$$
\begin{aligned}
&-i\alpha_o\left(\Omega\chi\frac{dT}{dy}+(\Gamma-1)\frac{d}{dy}\right)\hat{u}\\
&+\left(\alpha_o^2+\beta_o^2+i\frac{\mathrm{Re}}{\mu T}(\alpha_o U+\beta_o W-\omega)-\Omega\Gamma\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy}-\Gamma\frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{v}\\
&-i\beta_o\left(\Omega\chi\frac{dT}{dy}+(\Gamma-1)\frac{d}{dy}\right)\hat{w}+\frac{\mathrm{Re}}{\mu}\frac{d\hat{p}}{dy}-i\Omega\left(\alpha_o\frac{dU}{dy}+\beta_o\frac{dW}{dy}\right)\hat{T}\\
&-2m_{12}\frac{\mathrm{Re}\,U}{\mu T}\hat{u}-2m_{32}\frac{\mathrm{Re}W}{\mu T}\hat{w}-(m_{12}U^2+m_{32}W^2)\frac{\kappa\mathrm{Re}\,\mathrm{M}_e^2}{\mu T}\hat{p}\\
&+(m_{12}U^2+m_{32}W^2)\frac{\mathrm{Re}}{\mu T^2}\hat{T}=0
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

- énergie:

$$
\begin{aligned}
&-2(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\frac{dU}{dy}\frac{d\hat{u}}{dy}-\left\{2i(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\left(\alpha_o\frac{dU}{dy}+\beta_o\frac{dW}{dy}\right)-\frac{\mathrm{RePr}}{\mu T}\frac{dT}{dy}\right\}\hat{v}\\
&-2(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\frac{dW}{dy}\frac{d\hat{w}}{dy}-i(\kappa-1)\frac{\mathrm{ReM}_e^2\mathrm{Pr}}{\mu}(\alpha_o U+\beta_o W-\omega)\hat{p}\\
&+\left[\alpha_o^2+\beta_o^2+i\frac{\mathrm{RePr}}{\mu T}(\alpha_o U+\beta_o W-\omega)-(\kappa-1)\mathrm{M}_e^2\mathrm{Pr}\,\Omega\left\{\left(\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\frac{dW}{dy}\right)^2\right\}\right.\\
&\left.-\Upsilon\left(\frac{dT}{dy}\right)^2-\Omega\frac{d^2T}{dy^2}-2\Omega\frac{dT}{dy}\frac{d}{dy}-\frac{d^2}{dy^2}\right]\hat{T}=0
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

où on a défini:

$$\alpha_o=\frac{\alpha}{h_1}\qquad\beta_o=\frac{\beta}{h_3}.$$

Les coefficients m_{12}, m_{32}, m_{13} et m_{31} expriment l'influence de la courbure. Ils sont définis en fonction des coefficients métriques h_1 et h_3 du système de coordonnées curvilignes orthogonales:

$$m_{12}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y}\qquad m_{32}=\frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial y}\tag{2.24}$$

$$m_{13}=\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \zeta}\qquad m_{31}=\frac{1}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \xi}\tag{2.25}$$

On notera que dans le cadre de l'approximation de couche limite, on est amené à poser h_2=cte. = 1 et que les termes d'ordre 2 ou supérieur quant aux coefficients de courbure (par exemple m_{12}^2) ont été négligés dans les équations ci-haut. On constate aisément qu'en négligeant les termes de courbure, on retrouve les équations (2.14) à (2.18).

Les coefficients m_{12} et m_{32} sont reliés à la courbure de la surface dans les directions ξ et ζ, respectivement. La signification des deux autres coefficients n'est pas aussi évidente: plusieurs interprétations ont été proposées dont certaines amenaient une certaine confusion entre effets de courbure et effets non parallèles. Selon Laburthe [59], ces termes peuvent être reliés à la forme des fronts d'onde: si on les néglige, on admet implicitement des fronts d'onde plans définis par $\alpha x + \beta z$ = cte., tandis que des fronts d'onde courbes ($\alpha\xi + \beta\zeta$ = cte.) sont définis dans le système de coordonnées curvilignes. Il n'existe cependant pas d'indication physique claire quant à l'orientation à donner au système de coordonnées. Malik et Poll [45] proposent l'utilisation d'un système dont l'axe ξ est aligné avec le vecteur d'onde, ce qui requiert une procédure itérative. Laburthe [59], quant à lui, utilise un système de coordonnées orienté selon la ligne de courant à la frontière extérieure de la couche limite ($\varepsilon = \psi_e$). Ce dernier choix semble être le plus pratique et sera adopté par la suite. Quoiqu'il en soit, les résultats obtenus par Cebeci et al. [5] ont démontré la faible importance de ces termes de courbure dans des écoulements incompressibles, et les résultats obtenus dans le cadre de cette étude nous amèment à la même conclusion en compressible.

2.2 Systèmes d'équations

2.2.1 Conditions aux frontières

Les mêmes conditions aux frontières s'appliquent à tous les systèmes d'équations qui ont été présentés. Ce sont les conditions usuelles d'adhérence à la surface et d'amortissement des fluctuations loin de la surface. Pour les écoulements compressibles, on considère une paroi adiabatique et on peut donc supposer de plus que les fluctuations de température sont nulles à la surface. Les conditions aux frontières s'expriment donc comme:

$$\begin{array}{llll} \hat{u}(x,0) = 0 & \hat{v}(x,0) = 0 & \hat{w}(x,0) = 0 & \hat{T}(x,0) = 0 \\ \lim\limits_{y\to\infty} \hat{u} = 0 & \lim\limits_{y\to\infty} \hat{v} = 0 & \lim\limits_{y\to\infty} \hat{w} = 0 & \lim\limits_{y\to\infty} \hat{T} = 0 \end{array} \tag{2.26}$$

On constate qu'il s'agit de conditions homogènes.

2.2.2 Nature des systèmes

2.2.2.1 Équations non parallèles

Les équations non parallèles de la stabilité (équations (2.4) à (2.8) ou (2.9) à (2.12)) peuvent être exprimées sous la forme suivante:

$$(L_P + L_{NP})\hat{q} + M\frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0 \tag{2.27}$$

où L_P, L_{NP} et M sont des opérateurs en y dont les coefficients dépendent de x et y par l'entremise des profils de vitesse et température de l'écoulement moyen et $\hat{q}$ est le vecteur contenant les fonctions d'amplitude inconnues, $\hat{q} = \left[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{T}\right]^T$. L'opérateur L_P regroupe tous les termes parallèles tandis que L_{NP} contient des termes non parallèles reliés à l'écoulement moyen (dérivées en x et profil V) ainsi qu'au terme $d\alpha/dx$. Sans le dernier terme, l'équation (2.27) constituerait un problème homogène. La présence de ce terme indique que l'on a plutôt un problème d'évolution

spatiale de $\hat{q}$, et la dépendance en x de $\hat{q}$ est de nature parabolique, tel que démontré par Airiau [72].

On constate de plus que la dépendance en x de la fluctuation 2.2 est partagée entre la fonction d'amplitude et le terme exponentiel, par l'entremise de $\alpha(x)$, ce qui crée une ambiguité. Une relation scalaire supplémentaire est donc nécessaire afin de fermer le système d'équations. Herbert [73] a proposé pour ce faire l'emploi d'une condition de normalisation imposant la variation lente en x des fonctions d'amplitude ($\partial\hat{q}/\partial x \ll i\alpha\hat{q}$) qui constitue une des hypothèses de base de l'approche PSE, tel que mentionné à la section 2.1.1.2. Plusieurs formulations différentes de cette relation de normalisation sont possibles [72]. Les taux d'amplification et nombre d'onde physiques sont cependant indépendants de la relation de normalisation adoptée [74].

2.2.2.2 Équations parallèles

Que l'on considère ou non les effets de courbure, les équations parallèles de la stabilité s'expriment sous la forme:

$$L_P\,\hat{q} = 0 \tag{2.28}$$

où l'opérateur L_P est le même que celui qui apparaît dans l'équation (2.27). Il s'agit d'un problème homogène dont les conditions aux frontières sont également homogènes. La solution triviale de ce système est $\hat{q} = 0$. Des solutions non triviales existeront seulement pour certaines valeurs des paramètres α, β et ω et l'équation (2.28) constitue donc un problème aux valeurs propres.

2.3 Formulations temporelle et spatiale

À prime abord, les quantités α, β et ω sont des nombres complexes, correspondant donc à six paramètres réels. Que l'on considère le problème parallèle ou non parallèle, on a ainsi plus d'inconnues que d'équations et le système d'équations n'est pas mathématiquement fermé. Afin de réduire le nombre des inconnues, on fera d'abord certaines hypothèses quant à la nature de α, β et ω, qui nous amènent à deux théories ou formulations distinctes, que l'on présente ci-dessous dans le cadre de l'approche parallèle.

Théorie temporelle

Dans la théorie temporelle de la stabilité, on suppose que α et β sont des quantités réelles pures et on étudie l'évolution des fluctuations dans le temps. Le système (2.28) peut alors être exprimé comme un problème aux valeurs propres linéaire pour ω:

$$T_1\hat{q} = \omega T_2\hat{q} \tag{2.29}$$

où T_1 et T_2 sont des opérateurs en y issus de L_P. La partie réelle de ω, ω_r, représente la fréquence de la fluctuation et sa partie imaginaire, ω_i, son taux d'amplification temporelle. Le vecteur d'onde est défini par ses deux composantes α et β dans les directions x et z, respectivement. Sa grandeur (nombre d'onde) et son orientation sont donc donnés par:

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{2.30}$$

$$\psi = \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} - \psi_e \tag{2.31}$$

où ψ_e est l'angle entre la direction x et la direction de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite. Selon le signe du taux d'amplification temporelle, une fluctuation sera amortie ($\omega_i < 0$), amplifiée ($\omega_i > 0$) ou neutre ($\omega_i = 0$). Le taux d'amplification

spatiale peut être obtenu à l'aide de la relation de Gaster [75]:

$$\gamma_{i_t} = \frac{\omega_i}{|\vec{V}_{gr}|} \tag{2.32}$$

et la vitesse de groupe est donnée par:

$$\vec{V}_{gr} = \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha}, \frac{\partial \omega_r}{\partial \beta}\right) \tag{2.33}$$

L'équation (2.32) implique que l'amplification spatiale totale est dans la même direction que la vitesse de groupe.

Théorie spatiale

Lorsque la théorie spatiale est utilisée, ω est supposé réel tandis que α et β sont complexes. On obtient alors un problème aux valeurs propres non linéaire pour α (et/ou β):

$$S_1\hat{\boldsymbol{q}} = \alpha(S_2 + \alpha S_3)\hat{\boldsymbol{q}} \tag{2.34}$$

On définit un vecteur d'onde de composantes α_r et β_r et un vecteur d'amplification dont les composantes sont α_i et β_i. L'amplification spatiale totale et la direction d'amplification sont donc:

$$|\gamma_{i_s}| = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \tag{2.35}$$

$$\psi_i = \tan^{-1}\frac{\beta_i}{\alpha_i} \tag{2.36}$$

Les fluctuations sont amorties dans la direction x lorsque $\alpha_i > 0$. Elles sont amplifiées lorsque $\alpha_i < 0$ et neutres quand $\alpha_i = 0$. Le signe de β_i détermine de façon similaire l'amplification dans la direction z. En règle générale, on établira *a priori* une relation entre β_i et α_i de façon à éliminer une inconnue de plus. Il est ainsi courant de poser simplement $\beta_i = 0$ ou de supposer connue a priori la direction de l'amplification totale, ψ_i.

L'instabilité dans une couche limite étant de type convectif [76], c'est-à-dire présentant des directions privilégiées d'évolution, la formulation spatiale semble à première vue la plus appropriée à son étude. La formulation temporelle a cependant l'avantage de résulter en un problème aux valeurs propres linéaire, tel que mentionné ci-haut, et a pour ce faire été longtemps la plus utilisée. Plusieurs études ont démontré le très bon accord des résultats obtenus par les deux formulations lorsque la théorie parallèle est utilisée. On doit préciser qu'avec les hypothèses à la base de la théorie non parallèle, seule la théorie spatiale est applicable.

2.4 Prédiction de la transition

Grâce à la théorie linéaire de la stabilité, on peut connaître les caractéristiques de stabilité d'un écoulement laminaire (taux d'amplification, fréquences instables, orientation des ondes instables, ...). Ces informations ne permettent cependant pas à elles seules de prédire la position de la transition. Tel que mentionné en introduction, le couplage nécessaire entre les études de réceptivité et de stabilité est généralement effectué avec la méthode du e^n, développée par van Ingen [38] et Smith et Gamberoni [39]. Le facteur n représente le rapport entre l'amplitude d'une fluctuation et son amplitude initiale, au premier passage par la courbe neutre. Si on se place en théorie parallèle, ce rapport d'amplitude s'exprime de la façon suivante pour des valeurs de ω_r et β_r fixées:

$$N(\omega_r, \beta_r, s) = \ln \frac{A(\omega_r, \beta_r, s)}{A_0} = \int_{s_0}^{s} \gamma_i(\omega_r, \beta_r, s) ds \tag{2.37}$$

Selon qu'on utilise la formulation temporelle ou spatiale, γ_i sera défini par l'équation (2.32) ou (2.35). Le parcours d'intégration, s, est tangent à la direction d'amplification. On effectuera toujours le calcul du facteur n pour une fréquence dimensionnelle f fixée. Avec ω_r ainsi déterminé, on a tout de même le choix de plusieurs stratégies d'intégration (du moins en écoulements tridimensionnels) puisque l'on doit aussi

déterminer β_r (en supposant que l'on ait établi une relation entre β_i et α_i en formulation spatiale). Arnal [13] présente les options les plus couramment utilisées. Deux stratégies ont été utilisées pour les résultats présentés dans cet ouvrage: la méthode enveloppe, dans laquelle β_r est choisi de façon à maximiser le taux d'amplification à chaque station:

$$N(\mathrm{f}, s) = \int_{s_0}^{s} \max_{\beta_r} \{\gamma_i(\mathrm{f}, \beta_r, s)\}\, ds \tag{2.38}$$

et la méthode à β_r^* (dimensionnel) constant:

$$N(\mathrm{f}, s) = \max_{\beta_r^*} \left\{ \int_{s_0}^{s} \gamma_i(\mathrm{f}, \beta_r^*, s)\, ds \right\} \tag{2.39}$$

dans laquelle le nombre d'onde dimensionnel β_r^* joue le même rôle que la fréquence. Quelque soit la stratégie d'intégration choisie, on définit ensuite le facteur n comme étant l'enveloppe en fréquence de N, soit:

$$n(s) = \max_{\mathrm{f}} N(\mathrm{f}, s) \tag{2.40}$$

Dans le cas d'écoulements bidimensionnels incompressibles, pour lesquels la méthode e^n a originalement été développée, les premières observations indiquaient une valeur de n à la transition variant entre 7 et 10. Cette valeur critique dépend entre autres du niveau de turbulence dans l'écoulement amont (T_u), pour lequel Mack [34] a proposé la corrélation empirique suivante:

$$n_{crit} = -8,43 - 2,4 \ln T_u \tag{2.41}$$

valable pour $10^{-3} \leq T_u \leq 10^{-2}$ [13]. À la limite inférieure, les fluctuations de pression (acoustiques) deviennent le mécanisme dominant de réceptivité, tandis que la limite supérieure correspond à une transition brutale ("bypass") sans amplification linéaire. La valeur critique du facteur n est plus difficile à établir en écoulement tridimensionnel compressible, en raison des différents mécanismes d'instabilité qui peuvent exister. Les études réalisées en Europe dans le cadre des programmes

ATTAS et ELFIN [77, 78] permettent cependant de dégager certaines tendances générales, selon le type d'instabilité dominante.

On notera finalement que seule la stratégie à β_r^* constant sera utilisée dans le cadre de l'approche non parallèle, puisque les hypothèses de base de la théorie non parallèle impliquent $d\beta^*/ds=0$.

CHAPITRE III

MÉTHODES PROPOSÉES

On présentera dans ce chapitre les approches choisies pour répondre aux objectifs formulés en Introduction. La section 3.1 traite des méthodes numériques utilisées pour obtenir le champ moyen d'écoulement dont on désire étudier la stabilité. Les méthodes de résolution des équations non parallèles et parallèles de la stabilité présentées au chapitre précédent sont ensuite décrites aux sections 3.2 et 3.3, respectivement. Enfin, une nouvelle méthode automatisée de calcul de la stabilité de couches limites tridimensionnelles compressibles est présentée à la section 3.4.

3.1 Calcul de l'écoulement moyen tridimensionnel

La théorie linéaire de la stabilité permet l'analyse des caractéristiques de stabilité de la couche limite laminaire près d'une surface. Pour une géométrie donnée, la procédure menant à la prédiction de la transition se compose donc généralement de trois étapes principales:

- la détermination du champ d'écoulement non visqueux à l'aide d'une méthode de calcul appropriée, ou à partir de données expérimentales;
- le calcul précis de l'écoulement visqueux près de la surface à l'aide d'une méthode de couche limite;
- la résolution des équations linéaires de stabilité.

On présentera dans cette section les méthodes numériques utilisées pour réaliser les deux premières de ces tâches.

3.1.1 Calcul de l'écoulement non visqueux

Le champ d'écoulement non visqueux est obtenu par la solution des équations d'Euler tridimensionnelles et instationnaires. La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations est basée sur la formulation de Jameson et al. [79]. Il s'agit d'une formulation en volumes finis. Les variables de l'écoulement (composantes de vitesse et pression) sont calculées au centre des volumes de contrôle et les équations sont discrétisées par des différences centrées. On utilise une hypothèse d'écoulement homoénergétique (h_0 = cte) afin de remplacer l'équation d'énergie par une relation algébrique entre la pression, la densité et la vitesse. Il reste donc à résoudre l'équation de continuité et les trois équations de quantité de mouvement. Ces équations sont intégrées dans le temps en utilisant un algorithme de Runge-Kutta à trois étapes. En raison de l'utilisation de différences centrées dans l'évalution des dérivées spatiales, on doit ajouter de la viscosité artificielle pour assurer la convergence de la méthode et empêcher l'apparition d'oscillations spatiales dans la solution. Puisque l'information est conservée au centre des cellules, on n'obtient pas directement les valeurs des variables de l'écoulement à la surface. La procédure de calcul elle-même ne requiert que la pression à la surface. Celle-ci est obtenue par extrapolation linéaire des valeurs dans les deux premières cellules au-dessus de la surface. De plus, puisqu'on ne recherche que la solution stationnaire, on pourra utiliser le pas en temps local maximum dans chaque cellule, de façon à accélérer la convergence.

Cette formulation a été implantée [80] dans un code développé il y a quelques années à l'École Polytechnique. Comme on ne s'intéresse pour le moment qu'à des ailes isolées, de géométrie relativement simple, on se contentera d'utiliser un maillage structuré à topologie O-H. Le maillage tridimensionnel est obtenu par interpolation de maillages bidimensionnels dans les sections de définition de l'aile

(c'est-à-dire l'emplanture, le bout de l'aile et toute autre section où le profil de l'aile change). Ceux-ci sont produits par un mailleur elliptique, avec des fonctions de contrôle pour assurer un espacement approprié du maillage près de la surface.

Pour pouvoir par la suite effectuer le calcul de la couche limite, la distribution de vitesse à la surface de l'aile est requise. On l'obtient après convergence, de la façon suivante:

1. la grandeur du vecteur vitesse est obtenue à partir des valeurs de la pression et de la densité, en utilisant l'hypothèse d'écoulement homoénergétique et en extrapolant la densité à la surface de la même manière que la pression;

2. on donne au vecteur vitesse la même orientation que la composante de vitesse parallèle à la surface dans la première cellule au-dessus de la surface.

3.1.2 Calcul de la couche limite

Les principales difficultés rencontrées dans la résolution numérique des équations tridimensionnelles de la couche limite sont reliées au traitement des changements de direction de l'écoulement transversal et au calcul des coefficients métriques et de Christoffel associés à l'emploi d'un système de coordonnées conforme à la paroi. Pour remédier à ces inconvénients, on utilisera une procédure de calcul par différences finies basée sur la méthode de caractéristiques de Houdeville et al. [81].

La méthode de caractéristiques prend en compte le fait que les lignes de courant constituent des directions caractéristiques des équations gouvernant l'écoulement. La discrétisation des équations de couche limite le long de ces lignes permet d'obtenir une meilleure représentation des domaines de dépendance, tout en assurant l'application avec succès d'une méthode de marche en espace dans la direction de l'écoulement. Les termes de diffusion sont discrétisés par des différences amont

tandis que des différences centrées sont utilisées pour représenter les termes de diffusion. Les équations sont résolues en chaque point de la surface dans un système de coordonnées cartésien local, éliminant ainsi les contraintes associées à un maillage conforme à la surface. Ce système local est associé au plan tangent à la surface et est construit par projection orthogonale de la surface de l'aile. Afin d'améliorer la précision de ce schéma implicite lors de la procédure de marche en espace, un sous-maillage de calcul dans la direction de la marche est construit à partir de la discrétisation de surface fournie en entrée, ce qui permet d'utiliser directement le maillage de surface et le champ de vitesse provenant du calcul non visqueux et donc de réduire le pré-traitement des données à un minimum.

3.2 Résolution des équations non parallèles de stabilité

3.2.1 Amplitudes

En résolvant les équations parallèles de la stabilité, on obtient une valeur non équivoque du taux d'amplification spatiale, $\gamma_i = -\alpha_i$ (en formulation spatiale). Ce n'est pas le cas dans l'approche non parallèle en raison de la dépendance en x des fonctions d'amplitude ($\hat{q}$). En effet, en substituant la forme des fluctuations, équation (2.2), dans la définition du taux d'amplification, on obtient:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \Re\left(\frac{1}{\hat{q}}\frac{\partial \hat{q}}{\partial x}\right) \\ &= -\alpha_i + \Re\left(\frac{1}{\hat{q}}\frac{\partial \hat{q}}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le dernier terme de l'équation (3.1) dépend de y. Pour éliminer cette dépendance, on définit une amplitude globale qui ne dépend que de x. Par exemple, on peut considérer les définitions ci-dessous, basées sur les valeurs maximales des fluctuations de vitesse en x et z ainsi que sur l'intégrale dans la couche limite de l'énergie

cinétique de fluctuation:

$$\hat{A}_u(x) = \max_y |\hat{u}(x,y)| \qquad \hat{A}_w(x) = \max_y |\hat{w}(x,y)|$$
$$\hat{A}_e(x) = \sqrt{\int_0^\infty (|\hat{u}(x,y)|^2 + |\hat{v}(x,y)|^2 + |\hat{w}(x,y)|^2)\, dy} \tag{3.2}$$

À chacune de ces amplitudes correspond donc un taux d'amplification spatiale donné par

$$\gamma_{i_m} = -\alpha_i + \frac{1}{\hat{A}_m}\frac{d\hat{A}_m}{dx} \tag{3.3}$$

de même qu'un nombre d'onde et une orientation. On obtiendra également un facteur n_m différent selon l'amplitude considérée dans la définition du taux d'amplification.

3.2.2 Normalisation

Tel que mentionné à la section 2.2.2.1, une condition de normalisation est nécessaire afin de lever l'ambiguïté résultant de la double dépendance en x des fonctions d'amplitude et du terme exponentiel contenant $\alpha(x)$ et déterminer α de façon non équivoque. La relation de normalisation adoptée pour les calculs présentés dans cette thèse consiste à imposer $\hat{A}_e$=cte., ce qui résulte en:

$$\mathcal{N}_e(x) = \int_0^\infty \left(\bar{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \hat{w}}{\partial x}\right) dy = 0 \tag{3.4}$$

où $\bar{q}$ désigne le conjugué complexe de $\hat{q}$.

3.2.3 Implantation numérique

3.2.3.1 Discrétisation

Les dérivées en x des équations (2.9) à (2.12) sont évaluées à l'aide de différences finies amont de premier ordre:

$$\left.\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}\right|_j^k = \frac{\hat{\phi}_j^k - \hat{\phi}_{j-1}^k}{x_j - x_{j-1}} \tag{3.5}$$

j et k étant les indices du maillage en x et y, respectivement. Avec cette discrétisation et l'introduction des dérivées en y de $\hat{u}$ et $\hat{w}$ comme nouvelles variables dépendantes, le système exprimé par l'équation (2.27) devient le système semi-discrétisé de premier ordre suivant:

$$\left.\frac{\partial \hat{\mathbf{\Psi}}}{\partial y}\right|_j^k = M_{1j}^k \hat{\mathbf{\Psi}}_j^k + M_{2j}^k \tag{3.6}$$

dans lequel

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \left[\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}, \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}\right]^T \tag{3.7}$$

et M_{2j}^k contient les termes reliés à $\hat{\mathbf{\Psi}}_{j-1}^k$. Le schéma compact de quatrième ordre de Hirsch [82] est ensuite utilisé pour exprimer les dérivées en y. Après réarrangement des équations, on obtient un système tridiagonal par blocs:

$$N_{1j}^k \hat{\mathbf{\Psi}}^{k+1} + N_{2j}^k \hat{\mathbf{\Psi}}^k + N_{3j}^k \hat{\mathbf{\Psi}}^{k-1} = P_j^k \tag{3.8}$$

que l'on résout par une méthode de décomposition LU. Des détails supplémentaires concernant la discrétisation des équations PSE sont fournis en Annexe I.

3.2.3.2 Conditions initiales

Le système d'équations à résoudre étant parabolique en x, des valeurs initiales de α et $\hat{q}$ doivent être prescrites. Dans l'approche actuelle, celles-ci sont fournies par une solution parallèle locale, ce qui induit une phase transitoire dans les quelques

premières stations de calcul en x. Afin de minimiser l'importance de cette phase, il est important de démarrer les calculs suffisamment en amont de la courbe neutre non parallèle (a priori inconnue). Langlois et al. [83] illustrent la sensitivité des résultats PSE à la solution parallèle initiale, et démontrent qu'il est également possible de démarrer le calcul trop loin en amont de la courbe neutre non parallèle. Cette difficulté pourrait être évitée en utilisant pour le démarrage une solution non parallèle locale, telle que celle proposée par Boivin [84].

3.2.3.3 Procédure de calcul

Les équations PSE sont résolues par une procédure de marche en espace dans la direction x, de manière similaire à la résolution de la couche limite elle-même. À chaque station en x, l'équation (3.8) sujette à la normalisation (3.4) est résolue de façon itérative. Ceci est illustré par l'algorithme présenté à la figure 3.1. Un estimé initial de α, $\alpha_j^{(1)}$, est obtenu soit des conditions initiales (à $j = j_0$) soit de la valeur de α aux stations précédentes. Avec $\alpha_j^{(p)}$ fixé, la solution de l'équation (3.8) fournit de nouvelles valeurs des fonctions d'amplitude, $\hat{q}_j^{(p+1)}$. La norme est alors calculée et sert à définir un nouvel estimé de α:

$$\alpha_j^{(p+1)} = \alpha_j^{(p)} - i\frac{\mathcal{N}_e(\hat{q}_j^{(p+1)})}{\hat{A}_e^2(\hat{q}_j^{(p+1)})} \tag{3.9}$$

Cette procédure est répétée jusqu'à convergence de α_j, qui implique $\mathcal{N}_e = 0$, après quoi on passe à la station suivante en x.

3.3 Résolution des équations parallèles de stabilité

3.3.1 Discrétisation

Les équations de stabilité parallèles constituant un problème local, leur résolution nécessite seulement la discrétisation en y de la couche limite au point de calcul.

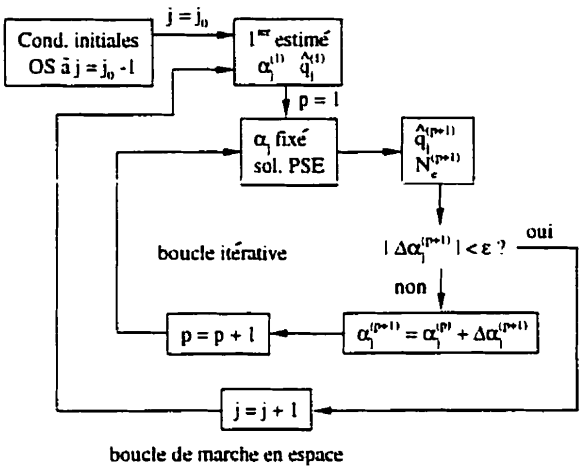

Figure 3.1 Algorithme PSE

Dans le cas présent, cette résolution est effectuée par une méthode de différences finies. Le maillage utilisé est défini par la relation

$$y_k = \frac{2L(\eta - 1)y_{\max}}{(\mathrm{N} - \eta)y_{\max} + 2L(\mathrm{N} - 1)} \tag{3.10}$$

$$k = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}$$

$$\eta = k$$

où L est la valeur de y telle que $U(L) = U_e/2$, N est le nombre de points utilisés dans le maillage et $y_{\max}$ est la valeur de y à laquelle on impose les conditions aux limites extérieures (on utilise $y_{\max}$=100, ce qui implique $y^*_{\max} = 100\delta_{x_1} \simeq 30\delta_{0,99}$). Cette relation permet d'obtenir un raffinement du maillage près de la surface et dans l'épaisseur de la couche limite, là où les gradients sont les plus importants. De plus, le maillage du domaine de calcul ainsi formé est uniforme, ce qui permet de calculer les dérivées en y au second ordre en utilisant des schémas centrés simples:

$$\left.\frac{d\hat{\phi}}{dy}\right|_k = \frac{\hat{\phi}_{k+1} - \hat{\phi}_{k-1}}{2} \left.\frac{d\eta}{dy}\right|_k$$

$$\left.\frac{d^2\hat{\phi}}{dy^2}\right|_k = (\hat{\phi}_{k+1} - 2\hat{\phi}_k + \hat{\phi}_{k-1}) \left(\left.\frac{d\eta}{dy}\right|_k\right)^2 + \frac{\hat{\phi}_{k+1} - \hat{\phi}_{k-1}}{2} \left.\frac{d^2\eta}{dy^2}\right|_k \tag{3.11}$$

les dérivées de η par rapport à y étant évaluées exactement grâce à l'équation (3.10). Des schémas décentrés de second ordre sont utilisés pour évaluer les dérivées à la paroi. Un maillage décalé est utilisé pour la fluctuation de pression (évaluée à $j+\frac{1}{2}$), ce qui permet d'éviter de devoir en évaluer la valeur à la paroi. L'Annexe II présente les équations discrétisées résultant de la substitution des expressions ci-dessus dans le système d'équations parallèles de la stabilité.

3.3.1.1 Calcul des coefficients de courbure

Les coefficients de courbure adimensionnels sont obtenus à l'aide des expressions suivantes:

$$\begin{aligned} m_{12} &= \frac{\delta_{x_1}}{R}\cos^2\varepsilon & m_{32} &= \frac{\delta_{x_1}}{R}\sin^2\varepsilon \\ m_{13} &= -\delta_{x_1}\cos\varepsilon\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} & m_{31} &= -\delta_{x_1}\sin\varepsilon\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} \end{aligned} \tag{3.12}$$

où R est le rayon de courbure dans la direction normale au bord d'attaque et s est la distance tangente au profil dans cette direction. La dérivée $\partial\varepsilon/\partial s$ est évaluée par un schéma amont de premier ordre. On doit préciser que ces relations ont été développées pour une aile en flèche d'envergure infinie et ne sont donc pas strictement valides pour une aile de forme quelconque. On considère cependant qu'elles sont applicables si l'on définit le rayon de courbure et la distance s dans la direction conique locale, c'est-à-dire la direction normale à une ligne x/c=constante. On suppose également que α_o et β_o ne diffèrent pas de façon significative de α et β, puisque h_1 et h_2 ont des valeurs près de l'unité dans la couche limite. Laburthe [59] fournit la dérivation détaillée de ces termes de courbure.

3.3.2 Résolution du problème aux valeurs propres

Les méthodes de résolution globale des problèmes aux valeurs propres permettent d'obtenir le spectre complet des valeurs propres sans nécessiter d'estimés initiaux. Ceci constitue un avantage par rapport aux méthodes de résolution locale

qui quant à elles requièrent un estimé initial et ne permettent d'obtenir qu'une valeur propre à la fois. Cependant, pour les fins d'analyse de la stabilité, on ne retiendra généralement du spectre des valeurs propres que la valeur la plus instable. L'avantage d'une méthode de résolution locale réside alors, lorsqu'un estimé initial de la valeur propre est disponible, en un temps de calcul considérablement réduit par rapport à une méthode globale. De plus, la résolution du problème aux valeurs propres en formulation spatiale est beaucoup plus complexe par une méthode globale que par une méthode locale. Enfin, alors que la résolution du problème aux valeurs propres dans une zone stable ne pose aucun problème particulier avec une méthode de résolution locale, les méthodes globales ne donnent pas toujours des résultats fiables dans une telle situation.

La stratégie adoptée dans ce travail consiste à n'utiliser la méthode globale, en formulation temporelle, que pour le démarrage du calcul, à la station initiale en x. Cette résolution globale est faite à l'aide de l'algorithme QZ [85]. Les calculs subséquents, qu'il s'agisse de l'optimisation de la valeur propre à une station donnée ou du passage d'une station à une autre, se font par une méthode locale utilisant la méthode inverse de Rayleigh [4]. En formulation spatiale, une méthode hybride [86] est utilisée pour passer de la valeur propre temporelle obtenue par la méthode globale à une valeur propre spatiale.

3.3.3 Procédures de suivi d'instabilités

Deux procédures principales de suivi d'instabilités sont implantées, soit la maximisation non contrainte du taux d'amplification, permettant d'évaluer la plage de fréquences critiques, et l'optimisation du taux d'amplification à fréquence fixée, permettant le calcul du facteur n par la méthode enveloppe. Chacune de ces procédures doit, à partir d'un estimé initial, déterminer le couple α, β répondant à

l'optimisation désirée.

3.3.3.1 Maximisation non contrainte du taux d'amplification

Cette procédure est basée sur la méthode du gradient maximal. Les incréments à apporter au couple α, β afin d'atteindre les valeurs pour lesquelles l'amplification temporelle est maximale sont déterminés à l'aide des relations suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha}}{\|\vec{V}_{gi}\|} \\ \Delta\beta &= \frac{\frac{\partial\omega_i}{\partial\beta}}{\|\vec{V}_{gi}\|} \\ \|\vec{V}_{gi}\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\beta}\right)^2} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Comme la partie imaginaire de la vitesse de groupe varie avec α et β, il s'agit d'une procédure itérative. De plus, $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ doivent être limités, c'est-à-dire que l'on impose

$$\max\left(\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right|, \left|\frac{\Delta\beta}{\beta}\right|\right) \leq \epsilon \tag{3.14}$$

3.3.3.2 Optimisation du taux d'amplification à fréquence fixée

Cette procédure comprend deux étapes: on doit d'abord converger sur la fréquence spécifiée, ω_r^{spec}, puis maximiser le taux d'amplification temporelle le long d'un contour de fréquence constante.

La recherche de la fréquence spécifiée s'effectue dans la direction du gradient de ω_r selon:

$$\begin{aligned} \Delta\omega_r &= \omega_r^{\text{spec}} - \omega_r \\ \Delta\alpha &= \frac{\Delta\omega_r}{\|\vec{V}_{gr}\|^2}\frac{\partial\omega_r}{\partial\alpha} \\ \Delta\beta &= \frac{\Delta\omega_r}{\|\vec{V}_{gr}\|^2}\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta} \end{aligned} \tag{3.15}$$

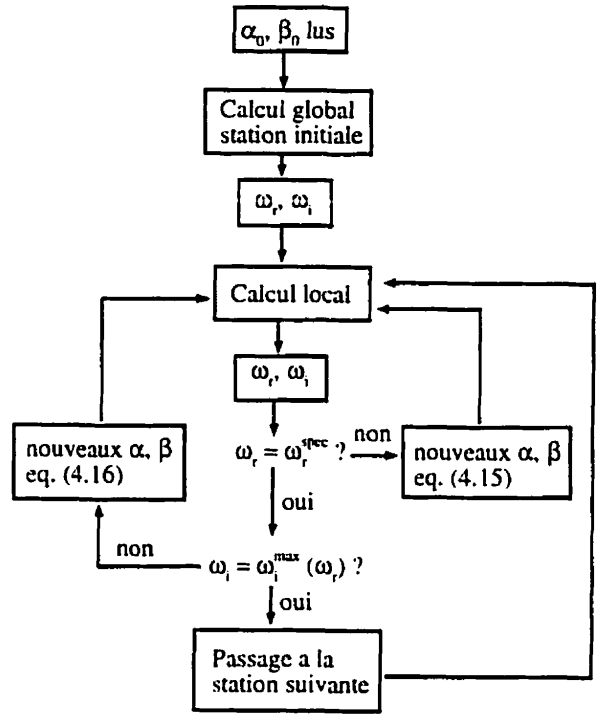

Figure 3.2 Algorithme d'optimisation de ω_i à ω_r fixé

Une fois la fréquence spécifiée atteinte, la recherche du taux d'amplification maximal procède par les incréments suivants:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{1}{\|\vec{V}_{gi}\|}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha} - \frac{\partial\omega_i}{\partial\beta}\frac{\frac{\partial\omega_r}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}}\right) \\ \Delta\beta &= -\Delta\alpha\frac{\frac{\partial\omega_r}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Les incréments $\Delta\alpha$ et $\Delta\beta$ de cette procédure sont également limités de la façon définie par l'équation (3.14). L'algorithme correspondant est présenté à la figure 3.2.

On doit également noter que les procédures qui viennent d'être définies sont de nature locale, en ce sens qu'elles dépendent de l'estimé initial de α et β. Si celui-ci correspond par exemple à une instabilité transversale, les deux procédures convergeront fort probablement sur une instabilité transversale, même si une fluctuation

longitudinale ayant un taux d'amplification plus élevé existe.

3.3.4 Détermination de la trajectoire d'intégration

C'est à ce niveau que réside la principale différence entre une méthode quasi-tridimensionnelle de prédiction de la transition et une méthode pleinement tridimensionnelle. Sur une aile d'envergure infinie ou conique, la similitude de la couche limite dans la direction transversale permet l'utilisation d'une seule section en envergure, et le calcul peut procéder une station à la fois dans la direction de l'écoulement. Sur une aile quelconque, cette similitude n'existe cependant pas, et il devient donc nécessaire de définir une procédure de sélection des profils de couche limite à utiliser, laquelle est basée sur la vitesse de groupe. La figure 3.3 illustre la procédure implantée: à partir d'une station de calcul, le point suivant d'intégration du facteur n est déterminé en suivant la direction de la vitesse de groupe jusqu'à l'intersection avec une ligne du maillage de surface. À cet endroit, de nouveaux calculs de stabilité sont effectués, en utilisant les profils de couche limite provenant du point le plus rapproché dans le maillage. Étant donné que la couche limite varie seulement lentement d'une section en x ou en z à une autre, l'interpolation des profils au point exact le long de la trajectoire peut être évitée.

3.4 Calculs de stabilité automatisés

L'automatisation des calculs de stabilité est réalisée à l'aide de solutions pré-calculées et tabulées d'une couche limite modèle (similaire). De tels schémas pour l'évaluation rapide des caractéristiques de stabilité d'une couche limite bidimensionnelle incompressible ont déjà été proposés par Stock et Degenhart [66], Dini et al. [67], ainsi que Gaster et Jiang [68], entre autres. Ces méthodes supposent que la couche limite sur un profil d'aile peut être bien représentée par des profils similaires de la famille

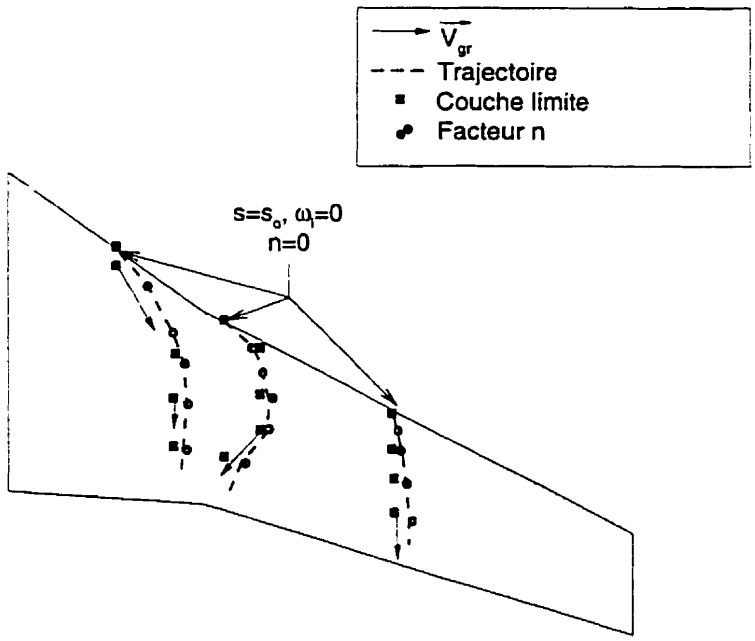

Figure 3.3 Trajectoire d'intégration du facteur n

Falkner-Skan (la méthode de Dini et al. utilise aussi des profils de Green modifiés pour des écoulements séparés). Une procédure de couplage est utilisée pour évaluer les caractéristiques de stabilité de la couche limite non similaire d'intérêt à partir de celles des couches limites modèles. Le calcul des facteurs n est conduit directement à partir des caractéristiques de stabilité ainsi obtenues. La présente méthode est une extension tridimensionnelle compressible de la méthode de Gaster et Jiang. Une telle méthode exploite le caractère local du problème aux valeurs propres de la théorie classique de la stabilité. Cela implique cependant que l'on ne peut tenir compte des effets non parallèles, qui constituent un problème non local. Il serait théoriquement possible d'inclure dans le modèle l'influence de la courbure de surface, en ajoutant les coefficients de courbure m_{12} et m_{32} aux paramètres de la base de données. Ceci augmenterait cependant considérablement la taille de la base de données, et c'est pourquoi on a choisi de ne pas considérer les effets de courbure.

La section suivante présente la couche limite modèle qui est utilisée pour générer les solutions de stabilité.

3.4.1 Couche limite modèle

Afin d'obtenir les caractéristiques de stabilité d'une couche limite tridimensionnelle compressible, on a choisi d'utiliser une variante du modèle de Dewey et Gross [87], qui consiste essentiellement en une extension compressible de la famille de profils de Falkner-Skan-Cooke. La figure 3.4 représente l'écoulement modèle considéré ainsi que les systèmes de coordonnées utilisés.

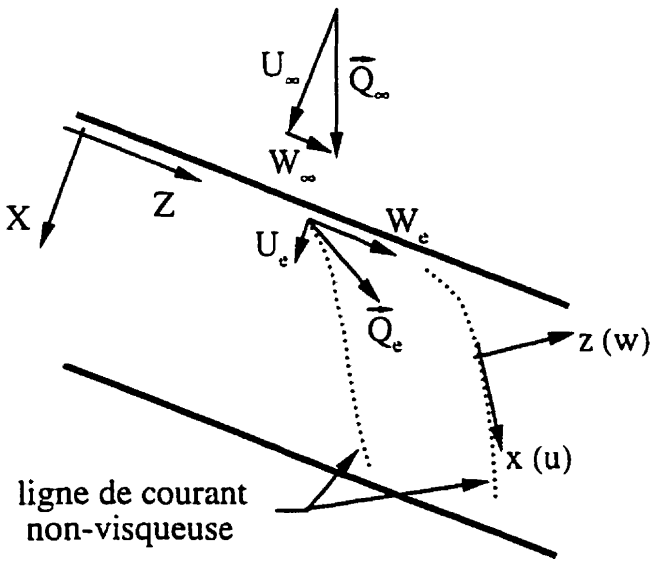

Figure 3.4 Couche limite modèle sur aile d'envergure infinie

Deux systèmes de coordonnées sont utilisés: un système global (X, Z, y) et un système local (x, z, y). La direction y est toujours normale à la paroi, tandis que X et Z (x et z) sont tangents à la paroi. Dans le système global, X est normal au bord d'attaque tandis que dans le système local x est orienté selon la ligne de courant à

la frontière extérieure de la couche limite. Les équations modèles, exprimées dans le système global, sont:

- quantité de mouvement en X:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\lambda\frac{d^2 f}{d\eta^2}\right) + f\frac{d^2 f}{d\eta^2} = \Lambda\left[\left(\frac{df}{d\eta}\right)^2 - \frac{1}{t_s}\left\{(1-t_w)\theta - (1-t_s)g^2 + t_w\right\}\right] \tag{3.17}$$

- quantité de mouvement en Z:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\lambda\frac{dg}{d\eta}\right) + f\frac{dg}{d\eta} = 0 \tag{3.18}$$

- énergie:

$$\frac{d}{d\eta}\left(\lambda\frac{d\theta}{d\eta}\right) + \Pr f\frac{d\theta}{d\eta} = 2\sigma\frac{1-\Pr}{1-t_w}\frac{d}{d\eta}\left[\lambda\left(\chi(\sigma+t_s-1)\frac{df}{d\eta}\frac{d^2 f}{d\eta^2} + (1-t_s)g\frac{dg}{d\eta}\right)\right] \tag{3.19}$$

Les variables transformées f, g, θ et λ sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} f = f(\eta) &= \int \frac{U}{U_e}d\eta \qquad & g = g(\eta) &= \frac{W}{W_e} \\ \theta = \theta(\eta) &= \frac{H-H_w}{H-H_e} \qquad & H = H(\eta) &= c_p T + \frac{U^2+W^2}{2} \\ \lambda = \lambda(\eta) &= \frac{\rho\mu}{\rho_w\mu_w} = \frac{T_w\mu}{T\mu_w} \end{aligned} \tag{3.20}$$

tandis que les coordonnées transformées ξ et η sont:

$$\xi(x) = \int_0^x \rho_w\mu_w U_e\, dx \qquad \eta(x,y) = \frac{U_e}{\sqrt{2\xi}}\int_0^y \rho\, dy \tag{3.21}$$

Les conditions limites, en supposant que la paroi est adiabatique, sont données par:

$$\begin{aligned} &\text{à la paroi} && f(0) = \frac{df}{d\eta}(0) = g(0) = \frac{d\theta}{d\eta}(0) = 0 \\ &\text{à la frontière extérieure} && \frac{df}{d\eta}(\eta_e) = g(\eta_e) = \theta(\eta_e) = 1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

On suppose de plus que l'écoulement extérieur à la couche limite est isentropique et donc

$$H_e = \text{constante} = H_0 = c_p T_0 \tag{3.23}$$

où T_0 représente la température de stagnation.

On retrouve dans les équations (3.17) à (3.19) cinq paramètres de similitude qui sont:

$$\begin{aligned} \chi \qquad t_s \\ \Lambda &= \frac{2\xi}{U_e}\frac{dU_e}{d\xi}\frac{T_0}{T_e}t_s \\ \sigma &= \frac{U_\infty^2}{2H_e} = \frac{U_\infty^2}{2c_pT_0} \\ t_w &= \frac{H_w}{H_e} = \frac{T_w}{T_0} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le paramètre Λ est associé au gradient de pression, il s'agit en quelque sorte d'une forme compressible du paramètre de Hartree que l'on retrouve dans la couche limite de Falkner-Skan. Les effets de compressibilité sont principalement représentés par σ ($\sigma = 0$ pour un écoulement incompressible) tandis que t_s est relié à l'aspect tridimensionnel de l'écoulement ($t_s = 1$ pour un écoulement bidimensionnel). On note que pour un écoulement incompressible avec viscosité constante, les équations (3.17) et (3.18) prennent la forme des équations de Falkner-Skan-Cooke.

3.4.2 Procédure de couplage

Les paramètres physiques de la couche limite modèle peuvent être obtenus à partir des précédentes définitions des paramètres de similitude (équations (3.24)):

$$\mathrm{M}_\infty^2 = \frac{2\sigma}{(\gamma-1)(1-\sigma)} \tag{3.25}$$

$$U_e^2 = 2\,c_pT_0\,(\sigma + t_s - 1)\chi \tag{3.26}$$

$$W_e^2 = 2\,c_pT_0\,(1 - t_s) \tag{3.27}$$

$$T_e = T_0\,(t_s - (\sigma + t_s - 1)\chi) \tag{3.28}$$

$$\mathrm{M}_e^2 = \frac{2}{\gamma-1}\frac{1 - t_s + (\sigma + t_s - 1)\chi}{t_s - (\sigma + t_s - 1)\chi} \tag{3.29}$$

Dans ces relations, M_∞ et M_e représentent les nombres de Mach reliés à Q_∞ et Q_e ($= \sqrt{U_e^2 + W_e^2}$), respectivement. Puisque U_e^2, W_e^2 et T_e sont des quantités toujours

positives, les équations (3.26) à (3.28) impliquent certaines restrictions quant aux valeurs possibles des paramètres de similitude:

$$\begin{aligned} t_s &< 1 \\ (\sigma + t_s - 1)\,\chi &> 0 \\ t_s - (\sigma + t_s - 1)\,\chi &> 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Pour effectuer le couplage entre la couche limite modèle et la couche limite dont on veut connaître les caractéristiques de stabilité, on utilise le système de coordonnées local (x, z, y) défini précédemment. Les composantes de vitesse u, w dans ce système s'expriment comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{u}{Q_e} &= \frac{1}{U_e^2 + W_e^2}\left(U_e^2 \frac{df}{d\eta} + W_e^2 g\right) \\ \frac{w}{Q_e} &= \frac{U_e W_e}{U_e^2 + W_e^2}\left(g - \frac{df}{d\eta}\right) \end{aligned}$$

Tel que mentionné précédemment, une couche limite modèle donnée est définie par cinq paramètres de similitude adimensionnels: σ, t_s, t_w, Λ et χ. Le but de la procédure de couplage est de déterminer la combinaison de ces paramètres qui produira une couche limite modèle dont les caractéristiques de stabilité sont similaires à celles de la couche limite réelle d'intérêt. On ne considère dans cette étude que des couches limites adiabatiques: dans ce cas, il n'existe qu'une seule valeur possible de t_w pour une combinaison donnée des quatre autres paramètres. Les paramètres σ et χ sont obtenus directement des conditions physiques de l'écoulement en inversant les équations (3.25) et (3.29):

$$\sigma = \frac{\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2} \tag{3.31}$$

$$\chi = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_e^2\right) t_s - 1}{(\sigma + t_s - 1)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_e^2\right)} \tag{3.32}$$

La détermination des deux derniers paramètres (t_s et Λ) doit se faire de manière indirecte. On exige que certaines propriétés "mesurables" de la couche limite modèle aient la même valeur que ces propriétés évaluées sur la couche limite d'intérêt. Suivant l'approche adoptée pour des écoulements bidimensionnels incompressibles [68], on choisit comme première propriété à reproduire le facteur de forme longitudinal incompressible, H_{x_i}. Ceci doit assurer une bonne reproduction du profil de vitesse longitudinale. La seconde propriété devrait alors être reliée au profil de vitesse transversale. Trois quantités ont été considérées, soit le facteur de forme incompressible transversal, H_{z_i}, la vitesse transversale maximale, $w_{\max}$ et la dérivée à la paroi de la vitesse transversale, w'_w. Les définitions mathématiques de ces divers paramètres sont:

$$
\begin{aligned}
H_{x_i} &= \frac{\delta_{x_i}}{\theta_{x_i}} \\
H_{z_i} &= \frac{\delta_{z_i}}{\theta_{z_i}} \\
w_{\max} &= \max_{\eta} \left| \frac{w}{Q_e} \right| \\
w'_w &= \frac{\delta_{x_i}}{Q_e} \left. \frac{dw}{d\eta} \right|_w
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\delta_{x_i} &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{Q_e}\right) d\eta \\
\delta_{z_i} &= \int_0^\infty -\frac{w}{Q_e} d\eta \\
\theta_{x_i} &= \int_0^\infty \frac{u}{Q_e}\left(1 - \frac{u}{Q_e}\right) d\eta \\
\theta_{z_i} &= \int_0^\infty -\left(\frac{w}{Q_e}\right)^2 d\eta
\end{aligned}
$$

L'évaluation des différents critères liés au profil de vitesse transversale, dont les résultats sont présentés à la section 4.4.1, a conduit à la sélection de $w_{\max}$ comme

étant la propriété qui permettait de mieux reproduire les caractéristiques de stabilité de la couche limite d'intérêt.

3.4.3 Base de données des caractéristiques de stabilité

Les tâches que l'on veut effectuer avec la base de données sont:

- l'identification du type d'instabilité dominant;
- l'évaluation de la plage de fréquences critique;
- la localisation du point d'inception des instabilités;
- l'évaluation du facteur n.

Pour mener ces tâches à bien, on a besoin de l'information suivante:

- le nombre d'onde et l'orientation de la fluctuation la plus amplifiée, que l'on note k^{opt} et ψ^{opt}, respectivement;
- la distribution du taux d'amplification spatiale maximal en fonction de la fréquence, $\gamma_i^{\mathrm{max}}(\omega_r)$.

Dans le cadre de la couche limite modèle choisie, ces caractéristiques de stabilité sont des fonctions des quatre paramètres de similitude σ, χ, Λ et t_s ainsi que du nombre de Reynolds Re_δ de la couche limite sur l'aile, basé sur la vitesse locale à l'extérieur de la couche limite, Q_e, et l'épaisseur de déplacement incompressible longitudinale, δ_{x_i}. D'après la discussion à la section précédente, ces paramètres de similitude peuvent être remplacés par quatre paramètres ayant une plus grande signification physique, soit M_∞, M_e, H_{x_i} et w_{max}. Symboliquement, on peut donc écrire la dépendance des caractéristiques de stabilité k^{opt}, ψ^{opt} et γ_i^{max} envers les

paramètres indépendants de la façon suivante:

$$\begin{aligned} k^{\text{opt}} &= k^{\text{opt}}(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \\ \psi^{\text{opt}} &= \psi^{\text{opt}}(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \\ \gamma_i^{\text{max}} &= \gamma_i^{\text{max}}(\omega_r, \mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Afin de limiter la taille de la base de données, la distribution spectrale de γ_i^{max} est approximée par une fonction cubique de ω_r:

$$\gamma_i^{\text{max}}(\omega_r) = a\,\omega_r^3 + b\,\omega_r^2 + c\,\omega_r + d \tag{3.34}$$

La fréquence à laquelle l'amplification est maximale, ω_r^{opt}, peut facilement être obtenue de la relation ci-dessus:

$$\begin{aligned} \omega_r^{\text{opt}} &= \omega_r \quad \text{à} \quad \frac{d\gamma_i^{\text{max}}}{d\omega_r} = 0 \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \\ &\qquad \text{tel que} \quad \left.\frac{d^2\gamma_i^{\text{max}}}{d\omega_r^2}\right|_{\omega_r^{\text{opt}}} = 6a\,\omega_r^{\text{opt}} + 2b < 0 \end{aligned} \tag{3.35}$$

d'où on obtient le taux d'amplification spatiale maximale.

La base de données de caractéristiques de stabilité consiste donc simplement en une table des valeurs de k^{opt}, ψ^{opt} et γ_i^{max} (ce dernier représenté par les coefficients a, b, c et d) pour un certain nombre de valeurs de M_∞, M_e, H_{x_i}, w_{max} et Re_δ. Elle peut être représentée de manière compacte comme suit:

$$\begin{aligned} & k^{\text{opt}}(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \\ & \psi^{\text{opt}}(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \\ & a(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \\ & b(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \\ & c(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \\ & d(\mathrm{M}_\infty, \mathrm{M}_e, H_{x_i}, w_{\text{max}}, \mathrm{Re}_\delta) \end{aligned} \tag{3.36}$$

La température à l'infini amont, T_∞ , (ou la température de stagnation, T_0) devrait également apparaître dans les équations (3.36) puisqu'elle est utilisée pour calculer la viscosité via la relation de Sutherland. Afin de réduire le nombre des paramètres indépendants, il a cependant été décidé de construire la base de données pour une seule valeur donnée de T_∞. Ceci ne constitue pas une limitation sérieuse, puisqu'on s'intéresse surtout à prédire la transition en vol de croisière, à des altitudes où la température, telle que donnée par l'atmosphère standard, est essentiellement constante. Pour les résultats qui seront présentés à la section 4.4, on a utilié la valeur $T_\infty = 215$ K. Pour prédire la transition en soufflerie, il suffirait de construire une base de données différente avec T_∞ correspondant aux conditions d'essai désirées.

Afin de déterminer les plages de valeurs à utiliser pour les paramètres indépendants de la base de données (M_∞, M_e, H_{x_i}, $w_{\max}$ et Re_δ), on examine les valeurs prises par ceux-ci sur deux ailes dans des conditions de vol correspondant à celles auxquelles on s'intéresse, les ailes ONERA M6 et NASA AMES. La figure 3.5 présente la répartition de H_{x_i} et $w_{\max}$ tandis que les plages de M_e et Re_δ sont présentées à la figure 3.6. À partir de ces données, on a sélectionné les plages suivantes:

$$\begin{aligned} 0.7 &\leq \mathrm{M}_\infty \leq 0.9 \\ 0.2 &\leq \mathrm{M}_e \leq 2.0 \\ 2.0 &\leq H_{x_i} \leq 3.0 \\ 0 &\leq w_{\max} \leq 0.25 \\ 500 &\leq \mathrm{Re}_\delta \leq 10\,000 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Les plages de M_e et M_∞ correspondent aux conditions de vol typiques d'un avion à réaction commercial. Il est évident que des plages plus étendues sont nécessaires si l'on veut également prédire la transition sur des avions supersoniques ou encore sur des appareils à turbopropulseurs. Les valeurs limites de H_{x_i} et $w_{\max}$ ont également

été dictées par les limites mêmes de la couche limite modèle. On constate en effet, à la figure 3.7, que pour des nombres de Mach M_∞ et M_e donnés, la couche limite modèle n'admet pas de solution pour toutes les combinaisons possibles de H_{x_i} et w_{max}. En particulier, on observe que deux groupes de solutions existent, correspondant à des écoulements accélérés (H_{x_i} <2,6) ou décélérés (H_{x_i} >2,6), et que la seule solution admissible pour un gradient de pression nul est un écoulement sans composante transversale (w_{max}=0 pour H_{x_i}=2,6). Les valeurs observées sur les ailes NASA AMES et ONERA M6 démontrent cependant que des écoulements à gradient de pression longitudinal nul avec composante de vitesse transversale non nulle sont physiquement possibles. Pour combler ce manque de données, il a été décidé, après avoir étudié diverses alternatives, de simplement interpoler les résultats entre les deux zones, comme si la solution était continue. On a limité le nombre de Reynolds à 10 000 même si des valeurs plus élevées sont atteintes sur l'aile NASA AMES. En effet, ces valeurs élevées correspondent à des régions où l'écoulement est sur le point de décoller et où la solution de couche limite n'est plus aussi fiable.

Afin de vérifier que l'évolution des caractéristiques de stabilité par rapport aux paramètres de couplage qui est prédite par la couche limite modèle correspond bien à la réalité physique, on a conduit une étude paramétrique. Celle-ci nous a également permis d'évaluer l'influence relative de chacun des paramètres et d'établir la discrétisation appropriée des plages de valeurs définies ci-dessus.

Les figures 3.8 à 3.11 présentent les résultats de cette étude. Pour chacun des paramètres M_e, H_{x_i}, w_{max} et Re, on a représenté la variation du taux d'amplification maximal γ_i^{opt} ainsi que de l'orientation et du nombre d'onde correspondants, ψ^{opt} et k^{opt}. La figure 3.8 montre l'influence de la compressibilité, par l'entremise du nombre de Mach M_e. Tel qu'observé expérimentalement, les effets compressibles

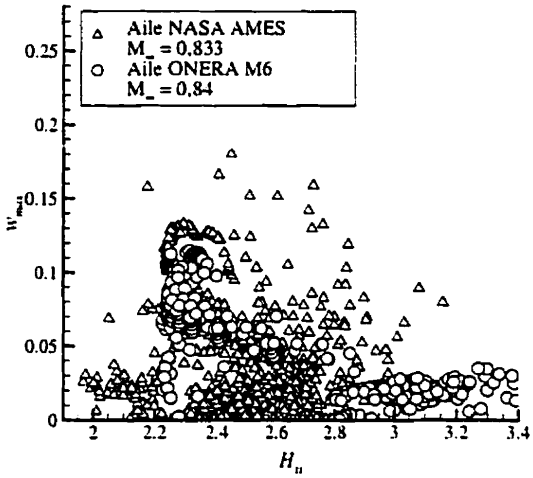

Figure 3.5 Valeurs de H_{x_t} et $w_{\max}$ sur les ailes NASA AMES et ONERA M6

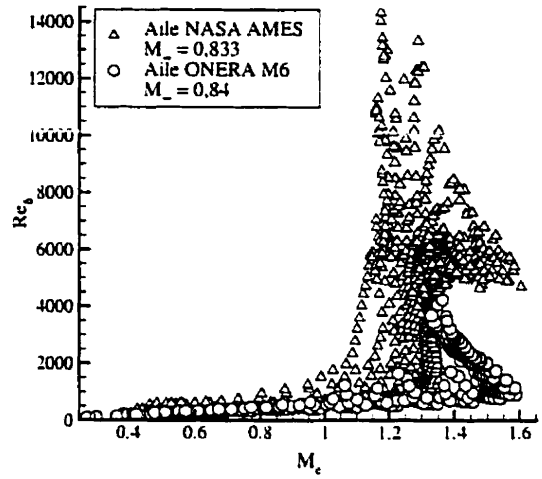

Figure 3.6 Valeurs de M_e et Re_δ sur les ailes NASA AMES et ONERA M6

sont pratiquement négligeables sur une instabilité transversale (gradient de pression favorable, H_{x_t}=2.3), tandis que pour une instabilité longitudinale (gradient adverse, H_{x_t}=2.8), le taux d'amplification diminue avec l'augmentation du nombre de Mach pendant que l'orientation la plus instable augmente. À la figure 3.9, on constate bien que l'instabilité dominante change de nature, de transversale à longitudinale, lorsque le gradient de pression passe de favorable à adverse. Les pointillés indiquent les zones où la couche limite modèle ne possède pas de solution, ce qui permet de constater que l'interpolation proposée respecte les comportements de la solution dans chacune des régions. L'évolution des caractéristiques de stabilité en fonction de la vitesse transversale maximale (fig. 3.10) et du nombre de Reynolds (fig. 3.11) est également conforme aux observations physiques.

Finalement, la figure 3.12 compare, pour trois couches limites similaires avec gradient de pression favorable, nul et adverse, la distribution spectrale calculée du taux d'amplification maximale à son approximation par un polynôme du troisième

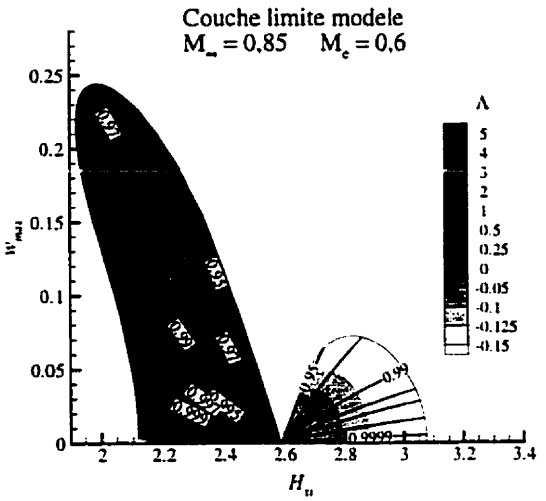

Figure 3.7a Valeurs de H_{x_t} et $w_{\max}$ — CL modèle, $M_e = 0.6$

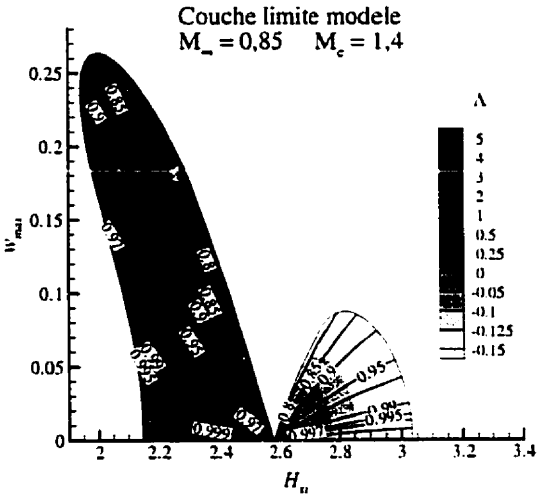

Figure 3.7b Valeurs de H_{x_t} et $w_{\max}$ — CL modèle, $M_e = 1.4$

ordre obtenu par la méthode des moindres carrés. On constate que la courbe d'ordre trois produit une représentation adéquate des résultats calculés.

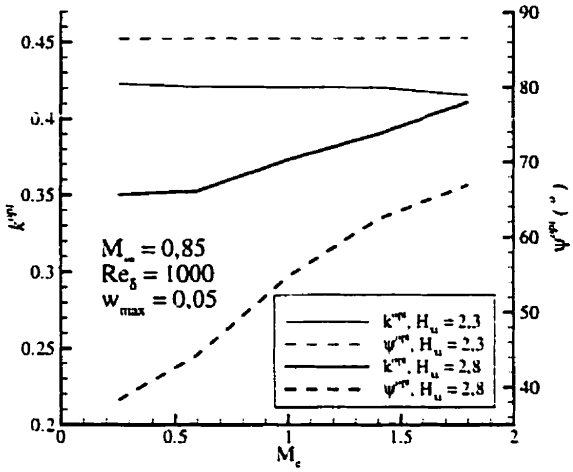

Figure 3.8a Influence de M_e sur k^{opt} et ψ^{opt}

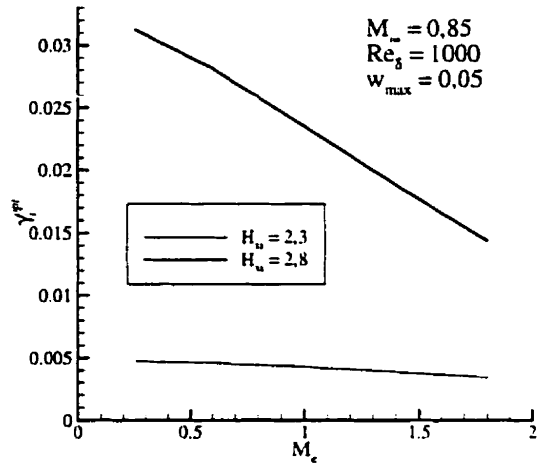

Figure 3.8b Influence de M_e sur γ_i^{opt}

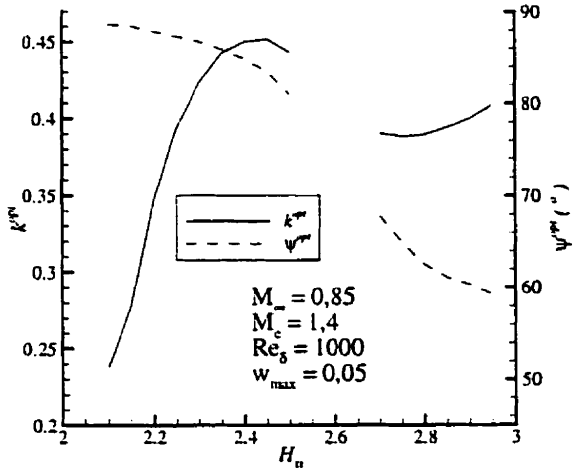

Figure 3.9a Influence de H_{x_i} sur k^{opt} et ψ^{opt}

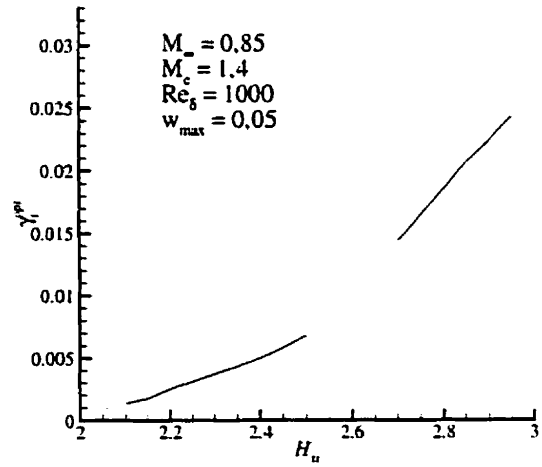

Figure 3.9b Influence de H_{x_i} sur γ_i^{opt}

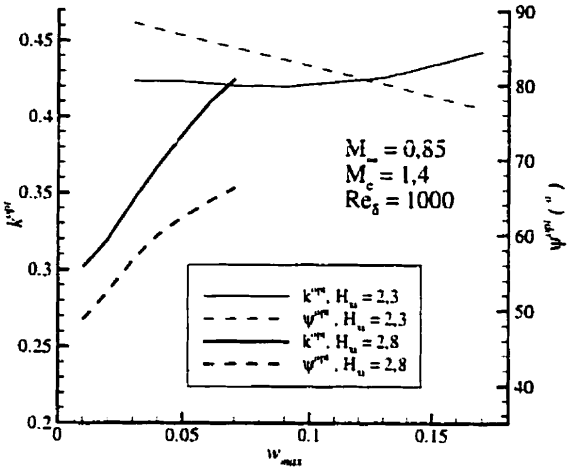

Figure 3.10a Influence de $w_{\max}$ sur k^{opt} et ψ^{opt}

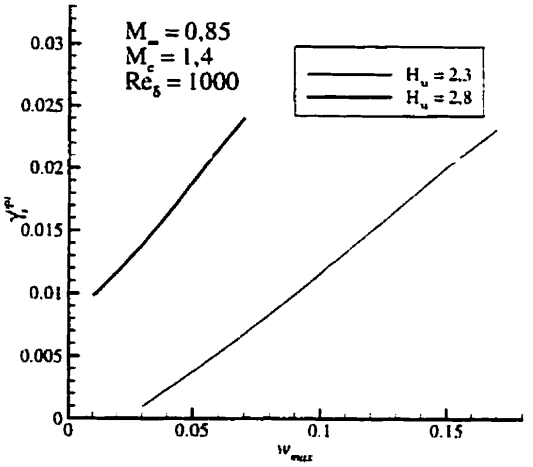

Figure 3.10b Influence de $w_{\max}$ sur γ_i^{opt}

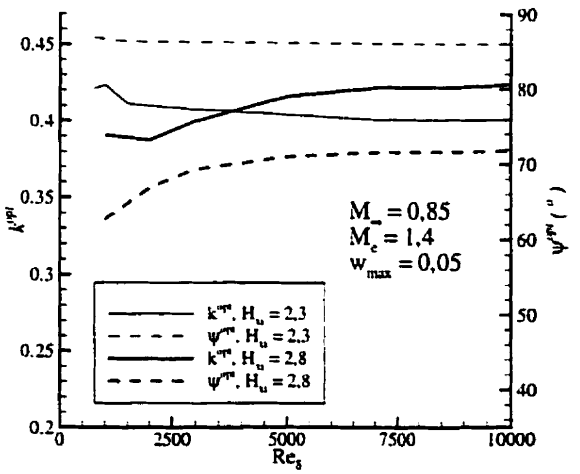

Figure 3.11a Influence de Re_δ sur k^{opt} et ψ^{opt}

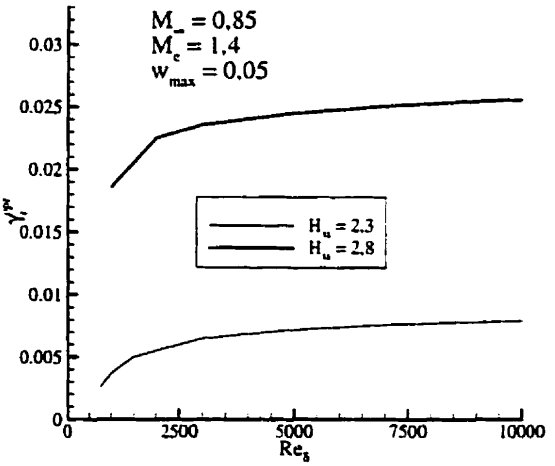

Figure 3.11b Influence de Re_δ sur γ_i^{opt}

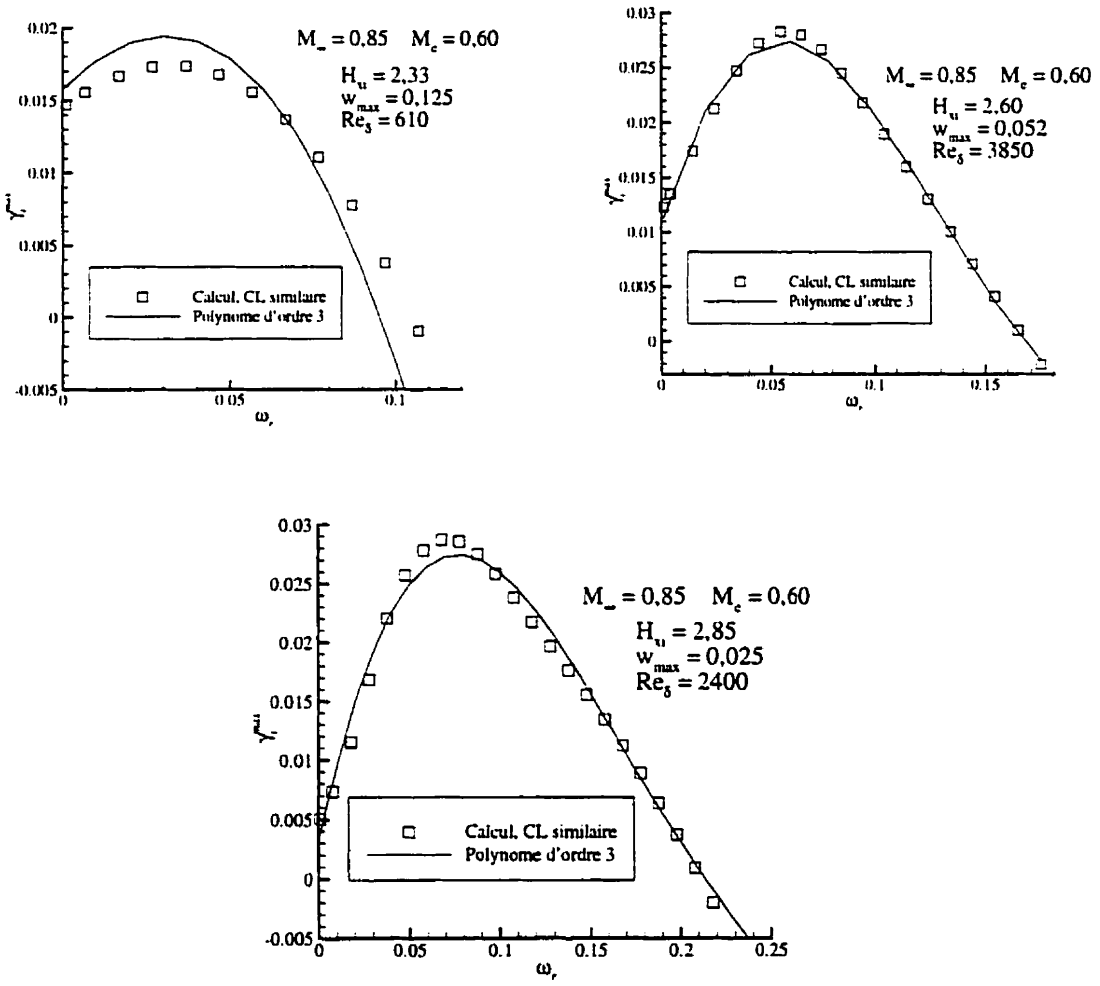

Figure 3.12 Évolution spectrale du taux d'amplification maximale

CHAPITRE IV

RÉSULTATS

La première moitié de ce chapitre consiste en une étude de l'influence de divers facteurs physiques sur la stabilité d'un écoulement. À la section 4.1, on présente d'abord une application complète des outils de calcul de l'écoulement moyen et des caractéristiques de stabilité sur l'aile en flèche NASA AMES, en régime d'écoulement transsonique. Ces résultats sont comparés à ceux provenant d'une approche quasi-tridimensionnelle, afin d'illustrer l'influence sur la stabilité des gradients transversaux de l'écoulement moyen. L'influence des effets non parallèles sur la valeur critique du facteur n est ensuite étudiée à la section 4.2, en considérant deux ailes en flèche d'envergure infinie de l'ONERA. Les équations PSE incompressibles sont utilisées pour cette étude. Enfin, la section 4.3 présente les résultats d'une étude des effets de courbure sur les caractéristiques de stabilité d'écoulements compressibles et incompressibles.

La seconde moitié du chapitre présente les résultats de la méthode automatisée de calcul des caractéristiques de stabilité et de prédiction de la transition. Les caractéristiques de stabilité ainsi que les facteurs n prédits par la méthode automatisée sont comparés avec les résultats du calcul complet, ainsi qu'avec des mesures expérimentales de transition sur des ailes d'avions d'affaires de Bombardier, à la section 4.5. Ceci permet d'établir la variation du facteur n à la transition et de proposer une corrélation basée sur un nombre de Reynolds local.

4.1 Calculs de stabilité sur des géométries arbitraires en transsonique

La méthode d'analyse de la stabilité décrite aux sections 3.1 et 3.3 a été utilisée pour prédire la transition sur l'intrados et l'extrados de l'aile en flèche NASA AMES [88]. Afin d'illustrer l'influence des gradients de pression en envergure, ces résultats sont comparés à ceux provenant d'une analyse où l'on a assumé que l'écoulement était localement conique dans chaque section en envergure. L'aile NASA AMES est représentative de géométries réelles que l'on peut retrouver sur des avions commerciaux. Elle est composée de deux sections: la section interne a une flèche au bord d'attaque de 36° et de 3,6° au bord de fuite, tandis que les angles de flèche de la section externe sont de 27° et 17° respectivement, au bord d'attaque et au bord de fuite. Le profil d'aile ainsi que l'angle de gauchissement varient en envergure. Les calculs ont été conduits pour les conditions suivantes: M_∞=0,833, α=1,75° et Re_c=14,3·10^6. Le nombre de Reynolds est basé sur une corde moyenne de 2,42 m (correspondant à un avion de type Challenger ou Regional Jet) et les conditions atmosphériques standard à une altitude de croisière de 11 000 m.

4.1.1 Écoulement non visqueux

La distribution de pression à la surface de l'aile a été obtenue en utilisant la méthode de résolution des équations d'Euler décrite en section 3.1.1 sur un maillage de 121 × 31 × 48 points. La distribution du coefficient de pression à l'intrados et à l'extrados de l'aile est présentée à la figure 4.1. On peut remarquer que le champ de pression sur cette aile n'est pas du tout conique: on observe en effet des gradients de pression en envergure significatifs sur la section interne. On remarquera également la présence d'un choc fort sur l'extrados, à une courte distance en amont du bord de fuite.

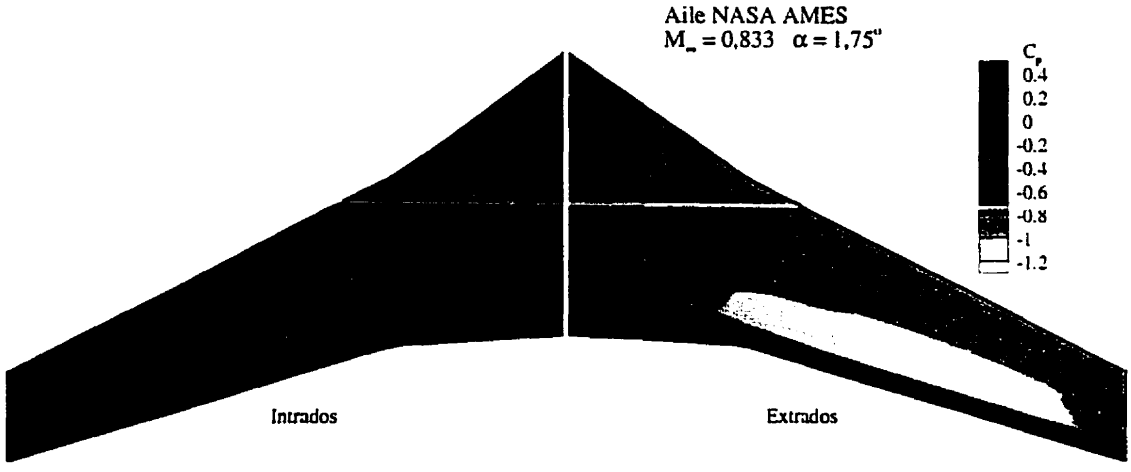

Figure 4.1 Aile NASA AMES: Distribution de pression à la surface

4.1.2 Couche limite

La figure 4.2 présente les profils longitudinaux et transversaux de vitesse dans la couche limite à trois positions en x (direction de l'écoulement à l'infini amont) dans la section à 17.2% de l'envergure. Afin d'apprécier l'importance des gradients de pression en envergure, les résultats tridimensionnels sont comparés à des solutions basées sur l'hypothèse d'écoulement conique telles qu'utilisées précédemment [89, 86]. Pour obtenir celles-ci, on calcule d'abord le champ de vitesse à la surface par intégration des équations d'Euler à la surface, simplifiées par l'hypothèse d'écoulement conique. Ces vitesses sont ensuite utilisées comme conditions aux limites dans la résolution des équations coniques de la couche limite. La figure 4.2 permet de constater qu'il existe des différences significatives entre les deux solutions, et que ces différences deviennent de plus en plus importantes lorsqu'on se déplace vers l'aval. On peut clairement voir, figure 4.3, que les vitesses à la frontière de la couche limite calculées à l'aide des équations d'Euler coniques de surface diffèrent, principalement en orientation, de celles provenant de la solution non visqueuse tridimensionnelle.

Les différences au niveau des profils de couche limite sont surtout reliées au calcul du champ de vitesse à la surface plutôt qu'à celui de la couche limite elle-même. Cette conclusion a été vérifiée en conduisant un calcul de couche limite tridimensionnel avec en entrée le champ de vitesse obtenu à partir des équations d'Euler de surface coniques: les profils ainsi obtenus étaient essentiellement identiques aux solutions purement coniques de la figure 4.2.

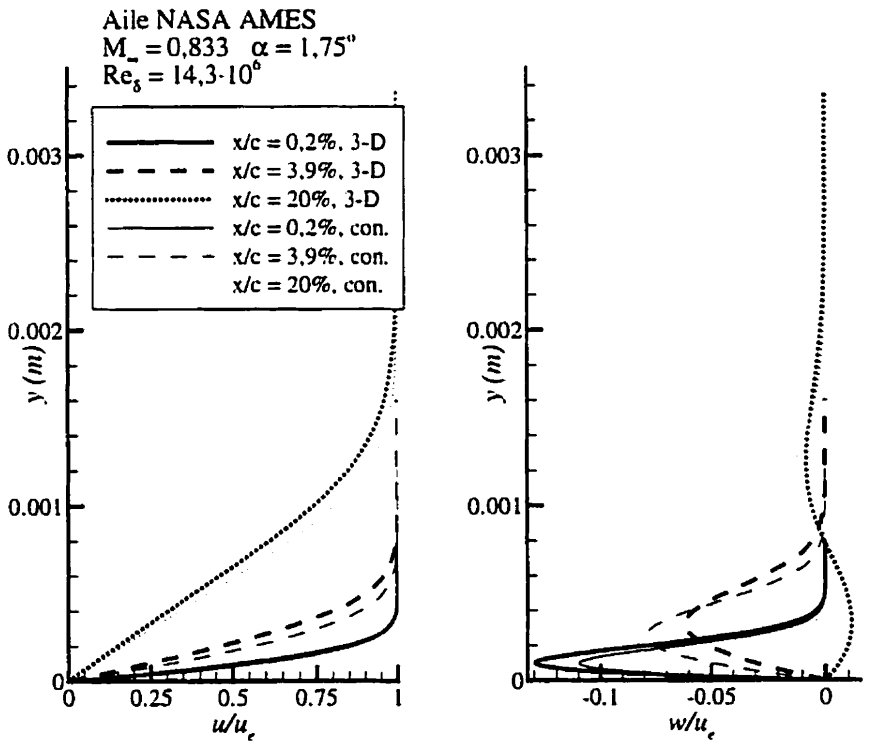

Figure 4.2 Aile NASA AMES: Profils de couche limite, z/b=17.2%

4.1.3 Caractéristiques locales de stabilité

La détermination des caractéristiques locales de stabilité en un certain nombre de points sur l'aile constitue la première étape du processus de prédiction de la transition. La figure 4.4 illustre ainsi la plage d'ondes instables sur l'aile NASA

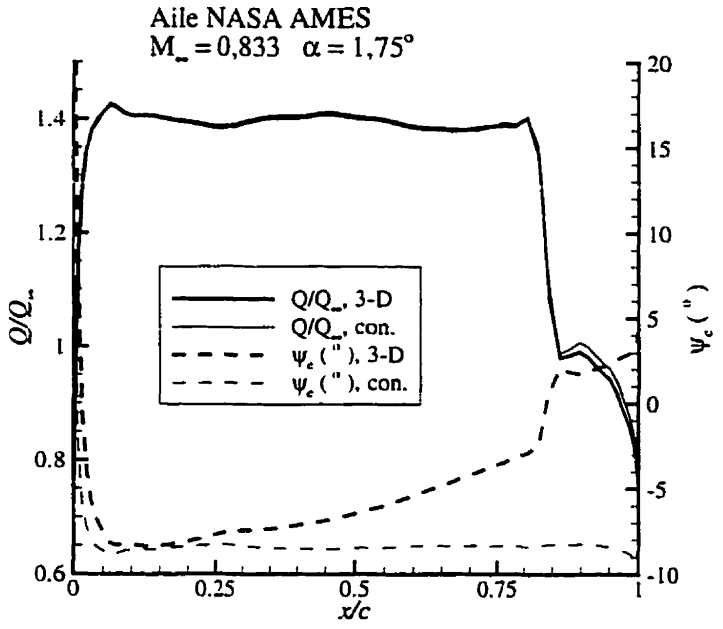

Figure 4.3 Aile NASA AMES: Distribution de vitesse en surface, z/b=17,2%

AMES à x/c = 2% et 20% dans la section à 17,2% en envergure. Dans cette figure, et les semblables qui seront présentées par la suite, les différents tons de gris correspondent au taux d'amplification temporelle adimensionnel (ω_i) de l'onde ayant une orientation ψ (abscisse) et un nombre d'onde adimensionnel k (ordonnée) tandis que les lignes numérotées indiquent sa fréquence adimensionnelle (ω_r). Cette représentation graphique permet de visualiser les mécanismes physiques d'instabilité existants et est utile dans la sélection des fréquences à analyser. Ainsi, près du bord d'attaque de l'aile, la figure 4.4a indique que les seules les ondes transversales seront amplifiées: les orientations instables sont comprises entre 50° et 95° et un seul maximum d'amplification est observé, à $\psi = 80°, k$=0,45.

En aval du bord d'attaque, le gradient de pression devient défavorable et des ondes longitudinales (ou mixtes) peuvent également être amplifiées, tel que démontré par la figure 4.4b. On observe alors la présence de plusieurs maxima

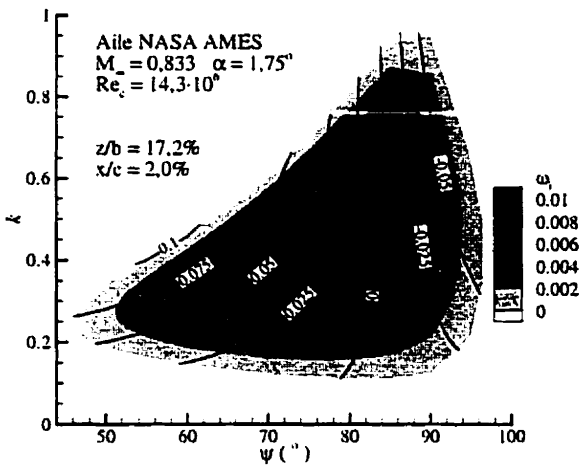

Figure 4.4a Aile NASA AMES: Diagramme de stabilité, $x/c = 2\%$

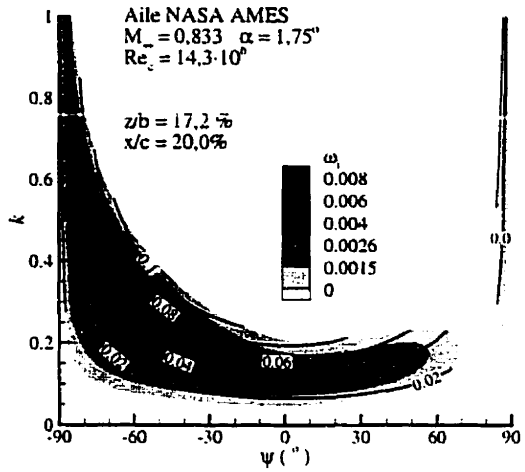

Figure 4.4b Aile NASA AMES: Diagramme de stabilité, $x/c = 20\%$

d'amplification. Dans le cas présent, un de ces maxima, à $\psi = 87°, k = 0.55$, est relié à l'instabilité transversale, tandis que les deux autres, à $\psi = 35°, k = 0.15$ et $\psi = -65°, k = 0.25$, sont de nature longitudinale (ondes obliques).

4.1.4 Sélection des fréquences

La sélection des fréquences à analyser est basée sur l'évolution des maxima locaux d'amplification. Une procédure de maximisation de ω_i dans l'espace $\alpha - \beta$, telle que décrite à la section 3.3.3.1, est utilisée pour suivre chacun des maxima depuis son apparition jusqu'à son éventuelle disparition. On obtient ainsi l'évolution de la fréquence associée à l'amplification maximale ainsi que d'autres quantités d'intérêt comme son orientation et sa longueur d'onde. La figure 4.5 présente les résultats d'un tel suivi dans la section à z/b=17,2% de l'aile NASA AMES. On constate que les fréquences les plus amplifiées se retrouvent entre 2 et 8 kHz. En répétant cette procédure pour quelques autres sections en envergure, on trouve que cette plage de

fréquences critique est la même partout sur l'aile.

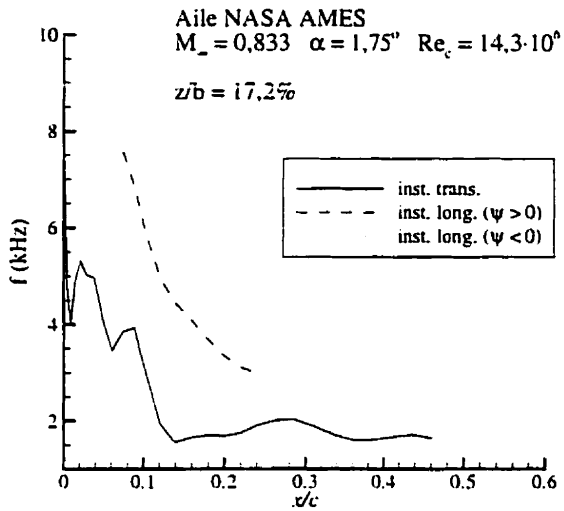

Figure 4.5a Aile NASA AMES: Fréquences les plus instables

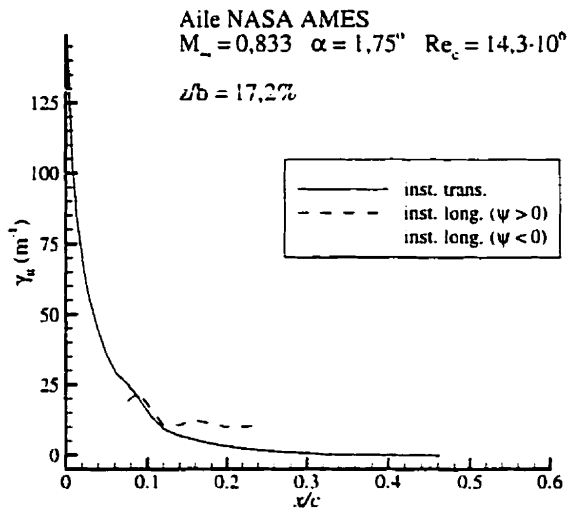

Figure 4.5b Aile NASA AMES: Taux d'amplification maximal

4.1.5 Prédiction de la transition

En calculant le facteur n pour quelques valeurs de fréquence à l'intérieur de la plage critique déterminée ci-dessus, on peut déterminer quelle fréquence atteint le plus rapidement le facteur n critique. Aux niveaux de faible turbulence atmosphérique correspondant aux conditions de vol, une valeur typique du facteur n à la transition, n_{cr}, de 15 a été observée [13], ce qui, à z/b=0,172, correspond à une fréquence critique de 5 kHz. Pour les fins de l'exercice présent, où l'on veut comparer les résultats coniques aux résultats tridimensionnels complets, on pourra se contenter de n'utiliser que cette fréquence pour toutes les sections en envergure de l'aile. Pour une analyse complète de la transition et une corrélation du facteur n critique avec des résultats expérimentaux, il est cependant nécessaire de calculer le facteur n pour une gamme de fréquences à l'intérieur de la plage critique pour chaque section en

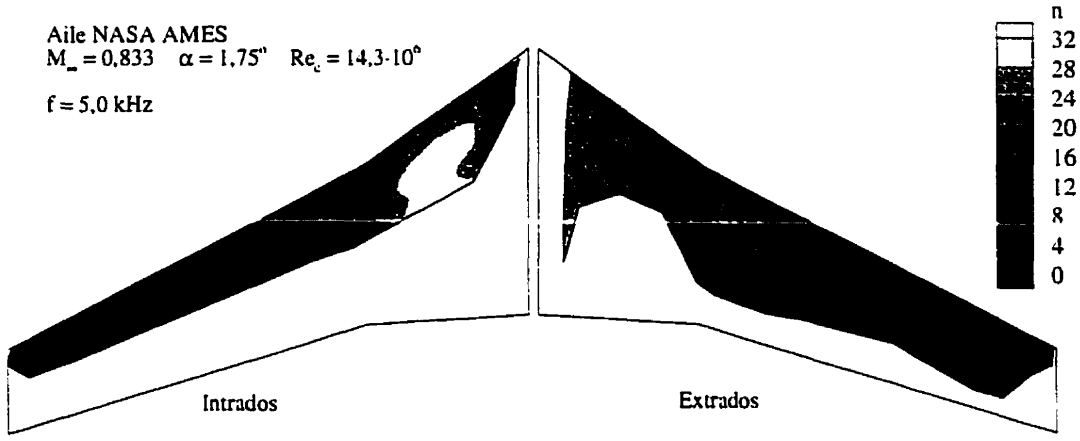

Figure 4.6 Aile NASA AMES: Facteur n – Solution tridimensionnelle

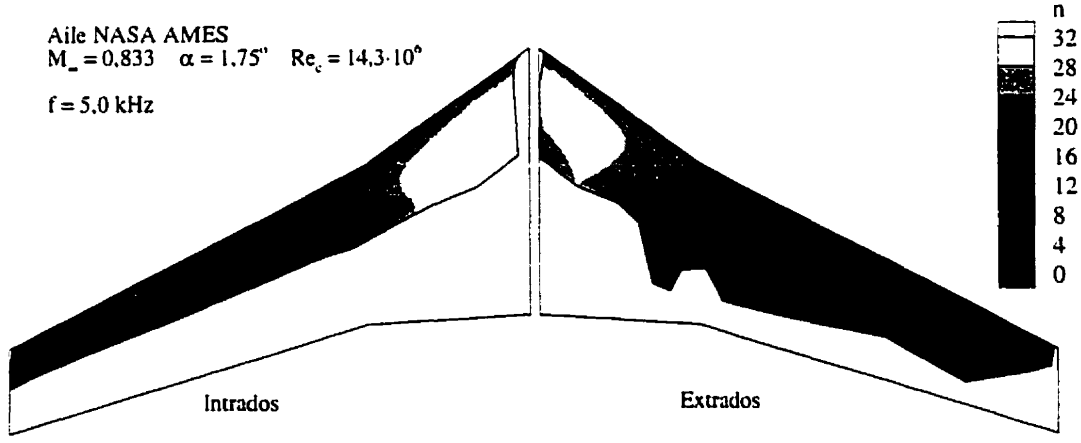

Figure 4.7 Aile NASA AMES: Facteur n – Solution conique locale

envergure, tel qu'il est fait à la section 4.5.

Les contours du facteur n pour une fréquence de 5 kHz sont présentés à la figure 4.6. La majeure partie de la croissance du facteur n depuis le bord d'attaque est causée par des instabilités transversales, bien que des instabilités de nature mixte transversale/longitudinale jouent également un rôle important sur la section externe de l'aile, devenant dominantes à environ 10% de la corde. Il est intéressant de noter l'influence de la jonction entre les deux sections de l'aile, où un maximum local du facteur n peut être observé à l'extrados. Ce maximum n'est pas présent dans les résultats obtenus par la méthode conique locale, comme on peut le constater

sur la figure 4.7. Les niveaux d'amplification prédits par la méthode conique sont également considérablement différents de ceux prédits par la solution tridimensionnelle, celle-ci produisant des facteurs n plus bas sur la section interne de l'aile et plus élevés sur sa section externe.

La figure 4.8a présente le front de transition basé sur $n_{cr} = 15$, pour les calculs tridimensionnels et coniques. En se basant sur les résultats de l'analyse conique locale, on pourrait conclure que l'écoulement va demeurer laminaire, à tout le moins jusqu'au choc, sur la majeure partie de la section externe de l'extrados de l'aile, puisque le facteur n dans cette région demeure inférieur à 15. C'est ce qui explique le soudain recul du front de transition à la jonction. Les résultats tridimensionnels prédisent aussi un facteur n au choc inférieur à 15 sur une certaine partie de la section externe, mais ils indiquent tout de même un front de transition continu de l'emplanture au bout de l'aile, ce qui correspond plus à ce à quoi on peut s'attendre physiquement. Le déplacement vers l'aval du front de transition le long de l'envergure est une conséquence de la diminution du nombre de Reynolds local, et se produit quelle que soit la valeur considérée pour n_{cr}. La figure 4.8b montre que les différences entre les deux solutions sont les plus importantes à l'extrados de l'aile, là où les gradients de pression transversaux sont également les plus importants. Même si ces gradients sont plus élevés sur la section interne de l'aile, les prédictions de transitions diffèrent le plus sur la section externe. On peut donc conclure que l'approche conique traite les deux sections de l'aile comme s'il s'agissait de deux ailes différentes, sans aucun lien, alors que l'approche tridimensionnelle permet à l'influence de l'écoulement sur la partie interne de l'aile d'être ressentie sur la stabilité de l'écoulement sur la partie externe.

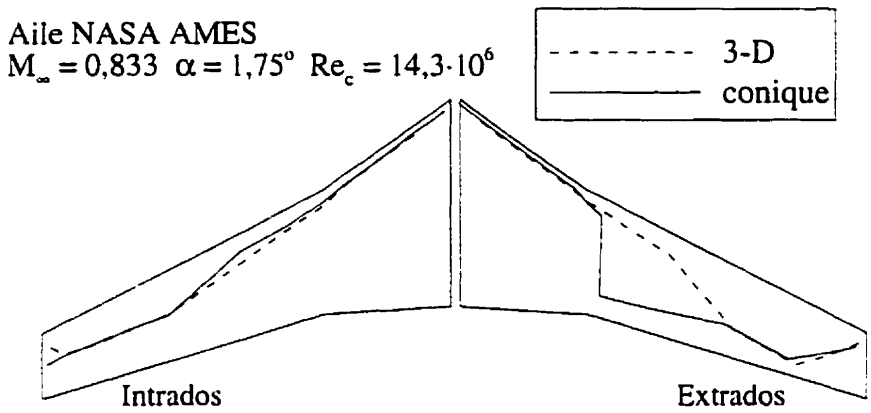

Figure 4.8a Aile NASA AMES: Front de transition (n=15, f=5.0 kHz)

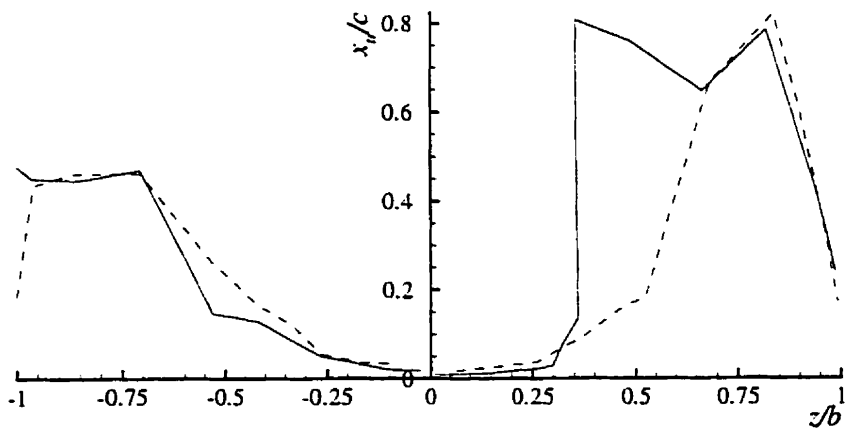

Figure 4.8b Aile NASA AMES: Position de la transition (n=15, f=5,0 kHz)

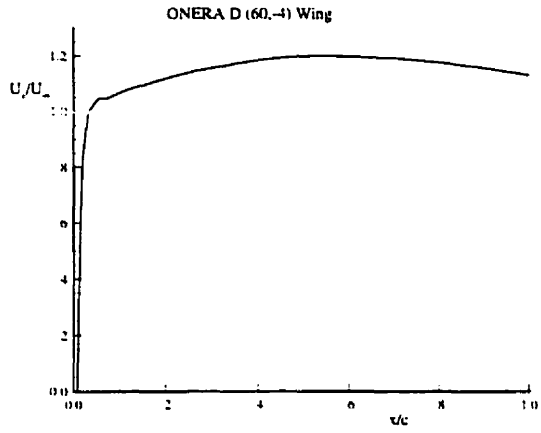

Figure 4.9 Aile ONERA D (60,-4): Distribution de vitesse

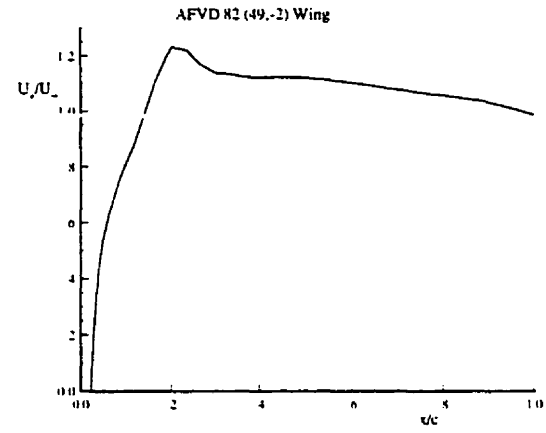

Figure 4.10 Aile AFVD 82 (49,-2): Distribution de vitesse

4.2 Effets non parallèles

Afin d'illustrer l'influence des effets non parallèles sur la prédiction de la transition, des calculs ont été effectué sur deux ailes en flèche d'envergure infinie. La première a un profil ONERA D, un angle de flèche de 60° et une incidence de -4° tandis que la seconde a un profil AFVD 82, une flèche de 49° et une incidence de -2°. On présente aux figures 4.9 et 4.10 la distribution de vitesse (composante normale au bord d'attaque) à l'extrados de chacune de ces ailes. On peut en déduire que les instabilités les plus importantes seront de nature longitudinale pour des faibles vitesses de l'écoulement amont, mais que des instabilités transversales deviendront de plus en plus importantes au fur et à mesure que la vitesse augmentera.

La stabilité de l'écoulement sur ces ailes a été étudiée expérimentalement à l'ONERA par Arnal et Juillen [90]. Les résultats de cette étude incluent des mesures de la position de la transition. Ceci nous a permis de corréler les résultats obtenus en théorie parallèle (en utilisant à la fois les stratégies enveloppe et β_r^* constant) et

non parallèle. Pour obtenir les résultats parallèles, on a utilisé le code COCIP [91] développé à l'ONERA. Les résultats de cette corrélation sont présentés dans les tableaux 4.1 à 4.3. Le tableau 4.1 présente les valeurs du facteur n à la position expérimentale de transition tandis que les tableaux 4.2 et 4.3 indiquent respectivement la fréquence critique et l'orientation de la fluctuation (ψ) à la transition. Les figures 4.11 à 4.13 présentent des exemples typiques de résultats à partir desquels le tableau 4.1 a été construit. Pour la méthode parallèle (OS) avec stratégie enveloppe (figure 4.11), chaque courbe correspond à une fréquence différente, tandis qu'avec la stratégie à β_r^* constant, en théorie parallèle ou non parallèle, chaque courbe des figures 4.12 et 4.13 représente une fréquence et un nombre d'onde selon l'envergure spécifiques. On trouvera dans la référence [92] une présentation plus détaillée de ces résultats.

Le tableau 4.3 indique que les instabilités longitudinales sont les plus importantes sur l'aile ONERA D lorsque la vitesse de l'écoulement amont est de 50 m/s. Les valeurs du facteur n à la position expérimentale de transition, tableau 4.1, montrent clairement que les effets non parallèles sont négligeables dans ce cas: la valeur de n_{tr} déterminée par l'approche OS à β_r^* constant se trouve à l'intérieur de la plage de valeurs que l'on obtient par les PSE en considérant différentes amplitudes. On note également que l'approche OS enveloppe produit une valeur de n_{tr} considérablement plus élevée que celle obtenue par les deux approches à β_r^* constant. Que l'on inclue ou non les effets non parallèles et quelle que soit la stratégie d'intégration, la fréquence critique est toujours la même pour ce cas, soit 1000 Hz (tableau 4.2).

À $Q_\infty = 65$ et 80 m/s, la fluctuation la plus instable n'est ni purement longitudinale ni transversale, et les effets non parallèles sont plus importants et du même ordre de grandeur pour les deux vitesses. Il est intéressant de noter au

Tableau 4.1 Facteur n à la transition

	ONERA D (60,-4)			AFVD 82 (49,-2)
	Q_∞=50 m/s x_{tr}/c=0,95	Q_∞=65 m/s x_{tr}/c=0,62	Q_∞=80 m/s x_{tr}/c=0,35	Q_∞=85 m/s x_{tr}/c=0.22
OS enveloppe	12,8	8,4	5,8	9,4
OS β_r^* constant	8.5	5,4	4,0	9.2
PSE — A_e	9.0	6.9	5,7	11.9
PSE — A_u	8.8	6.9	5,3	12.0
PSE — A_w	8,2	6.6	5,1	11.0

Tableau 4.2 Fréquence critique (Hz)

	ONERA D (60,-4)			AFVD 82 (49,-2)
	Q_∞=50 m/s x_{tr}/c=0.95	Q_∞=65 m/s x_{tr}/c=0.62	Q_∞=80 m/s x_{tr}/c=0.35	Q_∞=85 m/s x_{tr}/c=0.22
OS enveloppe	1000	1400	3250	5000
OS β_r^* constant	1000	1750	3000	4000
PSE — A_e	1000	1750	1000	5000
PSE — A_u	1000	1750	1000	5000
PSE — A_w	1000	1500	1000	5000

Tableau 4.3 Orientation à la transition (°)

	ONERA D (60,-4)			AFVD 82 (49,-2)
	Q_∞=50 m/s x_{tr}/c=0,95	Q_∞=65 m/s x_{tr}/c=0,62	Q_∞=80 m/s x_{tr}/c=0,35	Q_∞=85 m/s x_{tr}/c=0.22
OS enveloppe	25	25	31	72
OS β_r^* constant	16	44	49	82
PSE — A_e	14	53	84	78
PSE — A_u	11	53	84	78
PSE — A_w	13	61	84	78

tableau 4.3 que pour $Q_\infty = 80$ m/s l'inclusion des effets non parallèles provoque un changement de l'orientation de l'instabilité dominante, d'une instabilité mixte à une instabilité purement transversale. Ce changement est accompagné d'une diminution de la fréquence critique de 3000 à 1000 Hz, tel qu'indiqué au tableau 4.2. La figure 4.14 montre que des instabilités transversales sont présentes dans les résultats parallèles (elles produisent le maximum de n à $x/c \simeq 0{,}05$), mais celles-ci sont rapidement amorties et ne jouent plus aucun rôle en aval, quand intervient la transition. L'inclusion des effets non parallèles résulte en un renforcement de ces instabilités transversales pour toutes les fréquences, tel que démontré par les figures 4.15 et 4.16. Aux fréquences élevées, cependant, les instabilités transversales sont toujours amorties et masquées par les instabilités longitudinales à la position de transition. Aux fréquences plus basses, par contre, elles maintiennent des taux élevés d'amplification et deviennent dominantes. Dans un cas comme celui-ci, deux maxima peuvent être observés dans le spectre de fluctuations à une position donnée, l'un correspondant à une instabilité longitudinale (f=3000 Hz) et l'autre à une instabilité transversale (f=1000 Hz).

Pour ce qui est de l'aile AFVD 82, le tableau 4.3 indique que la transition est causée par une instabilité transversale que l'on considère ou non les effets non parallèles. Ces effets sont très forts: le tableau 4.1 montre qu'ils provoquent une augmentation du facteur n à la transition approximativement égale à 2.5. Contrairement aux résultats précédents, et à ce qui est généralement observé, la méthode enveloppe produit un facteur n à la transition très près de celui obtenu par la méthode OS avec la stratégie β_r^* constant.

Les résultats présentés dans cette section indiquent que si les effets non parallèles sont négligeables sur des instabilités longitudinales ils sont par contre significatifs sur des instabilités mixtes longitudinales/transversales et peuvent même être

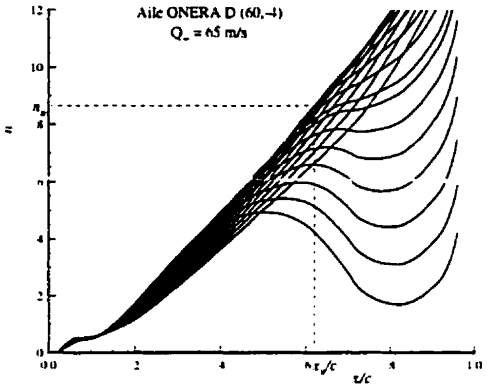

Figure 4.11 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=65 m/s: OS enveloppe

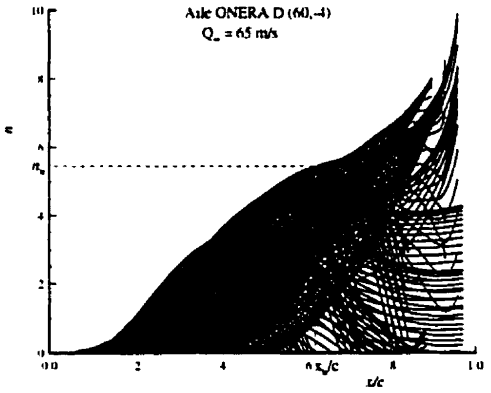

Figure 4.12 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=65 m/s: OS β_r^* constant

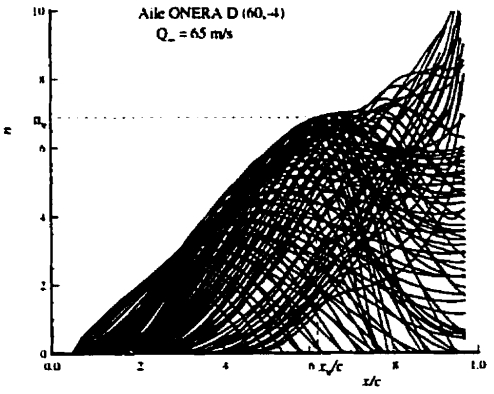

Figure 4.13 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=65 m/s: PSE

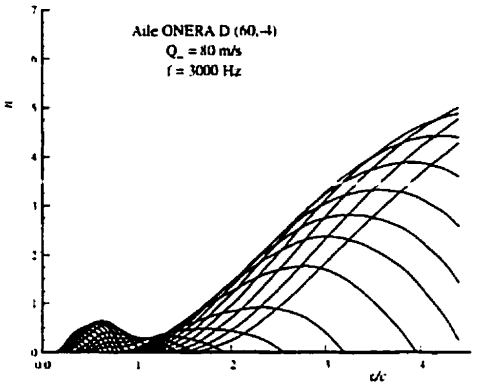

Figure 4.14 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=80 m/s: f=3000 Hz, OS

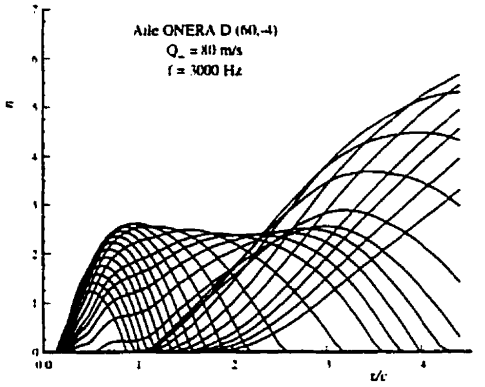

Figure 4.15 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=80 m/s: f=3000 Hz, PSE

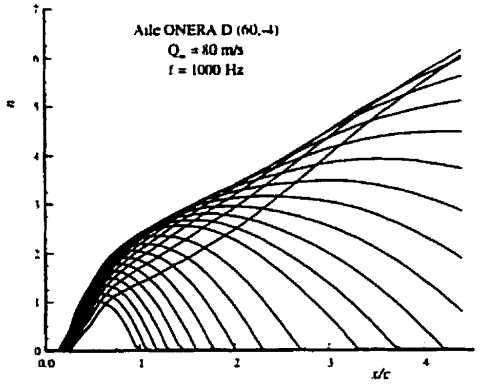

Figure 4.16 Aile ONERA D (60,-4), Q_∞=80 m/s: f=1000 Hz, PSE

très forts sur des instabilités transversales pures. Contrairement aux effets de courbure (voir section suivante), l'influence des effets non parallèles est déstabilisatrice. L'inclusion des effets non parallèles peut parfois résulter en un changement de nature de l'instabilité dominante (longitudinale ou mixte à transversale) et en une diminution de la fréquence critique. On doit cependant noter que l'inclusion des effets non parallèles n'amène pas d'amélioration en ce qui concerne l'uniformité du facteur n critique.

4.3 Effets de courbure

4.3.1 Validation

Afin de valider l'implantation des termes de courbure de surface dans le code de calcul de la stabilité, des calculs de transition ont été effectués sur une aile d'envergure infinie ayant une flèche de 30° et un profil NACA 0012. L'angle d'attaque est de 2°, et deux nombres de Reynolds sont considérés, $10 \cdot 10^6$ et $20 \cdot 10^6$. On considère que l'écoulement est incompressible. Ces conditions ont été sélectionnées afin de pouvoir effectuer une comparaison avec des résultats publiés par Cebeci et al. [46]. La distribution de vitesse à la surface, figure 4.17, a été obtenue en utilisant une méthode de panneaux [93] tandis que le code MAIN [94] a servi à produire les profils de couche limite. En raison du gradient de pression favorable, on s'attend à ne trouver que des instabilités transversales pour $s/c \leq 0{,}05$. Là où le gradient de pression est défavorable, par contre, ($s/c > 0{,}05$), les instabilités longitudinales devraient être dominantes.

La croissance du facteur n pour $\mathrm{Re} = 10 \cdot 10^6$ est présentée à la figure 4.18. Le trait plein représente les résultats sans courbure tandis que les résultats avec courbure de surface sont représentés par la ligne en traits interrompus. Sans effets de courbure, une fluctuation transversale devient instable peu après la ligne d'arrêt

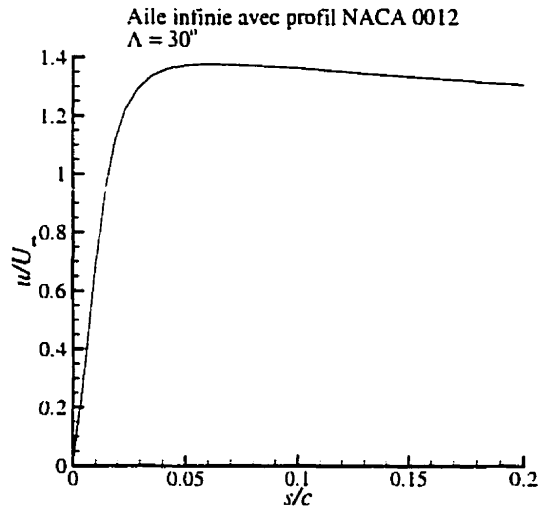

Figure 4.17 Aile infinie avec profil NACA 0012: Distribution de vitesse

($s/c \approx 0.01$) et continue à croître jusqu'à $s/c \approx 0.06$. À cet endroit, une instabilité longitudinale est plus instable, et la croissance subséquente du facteur n est donc associée à des ondes longitudinales. Lorsqu'on inclut les effets de courbure de surface, les fluctuations transversales sont complètement amorties. La croissance du facteur n débute seulement à $s/c \approx 0{,}06$, où l'amplification provient d'instabilités longitudinales. On constate également que le taux de croissance des ondes longitudinales n'est pas affecté par l'inclusion des effets de courbure. La figure 4.18 présente également (symboles) les résultats des calculs effectués par Cebeci et al. [46]. Les résultats de SCOLIC sont en très bon accord avec ceux de Cebeci et al. en ce qui concerne l'origine et le taux d'amplification des instabilités transversales. Cebeci et al. prédisent également un amortissement total de l'instabilité transversale dû aux effets de courbure, d'où un bon accord avec les résultats présents au niveau de l'origine de l'instabilité longitudinale. Cependant, des différences significatives sont observées en ce qui concerne le taux de croissance des instabilités longitudinales, avec et sans effets de courbure. On remarquera que les résultats de Cebeci et al.

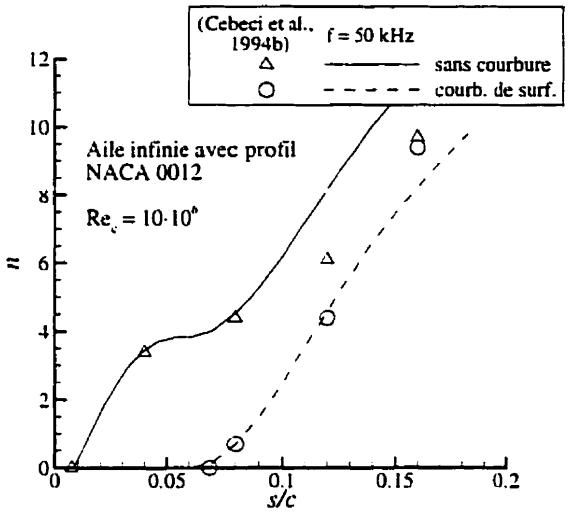

Figure 4.18 Aile infinie avec profil NACA 0012: Facteur n, Re = $10 \cdot 10^6$

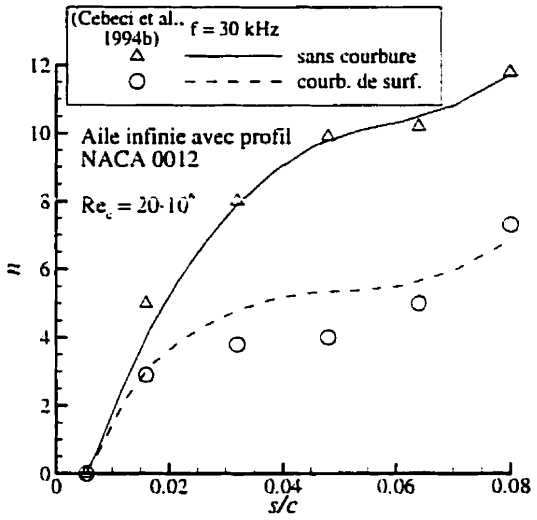

Figure 4.19 Aile infinie avec profil NACA 0012: Facteur n, Re = $20 \cdot 10^6$

semblent indiquer une certaine influence des effets de courbure sur l'instabilité longitudinale. Les mêmes comparaisons sont présentées à la figure 4.19 pour le nombre de Reynolds plus élevé. Pour ce cas, l'accord est très bon, même en ce qui concerne le taux de croissance des instabilités longitudinales. Pour ce nombre de Reynolds élevé, les fluctuations transversales sont stabilisées mais pas complètement amorties. En conséquence, le point d'origine est le même que l'on inclue ou non les effets de courbure.

Globalement, l'accord entre les résultats présents et ceux de Cebeci et al. est plutôt bon, considérant que la référence [46] ne précisait pas les fréquences utilisées dans le calcul du facteur n. Pour les calculs avec SCOLIC, on a utilisé la procédure de détermination des fréquences critiques déjà mentionnée, en effectuant les calculs avec les termes de courbure. La même fréquence a été utilisée pour les calculs sans courbure, puisqu'il semble que ce soit la procédure adoptée par Cebeci et al.

4.3.2 Application à des écoulements compressibles

Les résultats présentés dans cette section servent à illustrer l'influence de la courbure sur la prédiction de la transition dans des écoulements compressibles. Tel que mentionné précédemment (section 2.1.4, page 39), il n'existe pas de justification physique évidente pour l'inclusion des termes de courbure des lignes de courant. On désire ici présenter l'importance relative de ces termes par rapport aux termes de courbure de surface pour des écoulements compressibles. Une analyse similaire, mais pour des écoulements incompressibles, a déjà été présentée par Cebeci et al. [44].

On utilisera pour cette analyse deux ailes en flèche d'envergure infinie, différant seulement quant au profil supercritique utilisé, et pour lesquelles des résultats sans courbure ont déjà été obtenus. L'angle de flèche est de 25° et les conditions d'opération sont comme suit: $M_\infty = 0{,}855$, $Re_c = 11 \cdot 10^6$ et $C_L = 0{,}40$. Les distributions de pression à l'extrados de chacune de ces ailes sont présentées à la figure 4.20. Sur l'aile #1, le gradient de pression favorable s'étend jusqu'à x/c =0,60. Ceci devrait empêcher une amplification importante des instabilités longitudinales. Cependant, la combinaison du fort gradient de pression près du bord d'attaque et de l'angle de flèche produira un écoulement transversal important dans la couche limite, ce qui devrait conduire à une croissance importante d'instabilités transversales. L'aile #2 présente elle aussi un fort gradient de pression favorable près du bord d'attaque, mais celui-ci est rapidement suivi d'un gradient de pression adverse. On peut donc s'attendre à ce que les instabilités longitudinales et transversales soient également importantes.

Contrairement à la procédure adoptée pour les cas de validation, on a maintenant déterminé la fréquence critique de façon indépendante pour les calculs avec et sans courbure. Sur l'aile #1, il s'avère que la fréquence critique ne varie pas

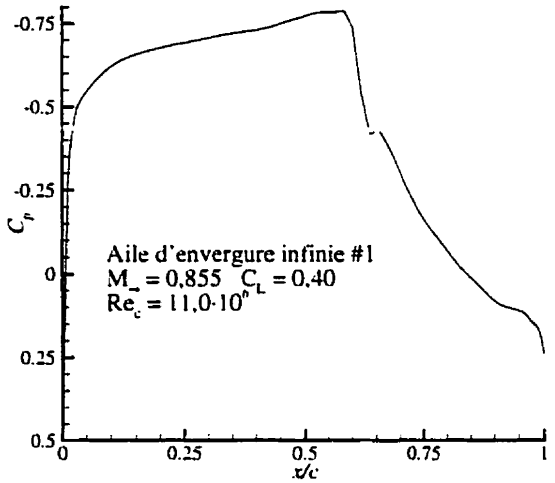

Figure 4.20a Aile infinie #1: Coefficient de pression

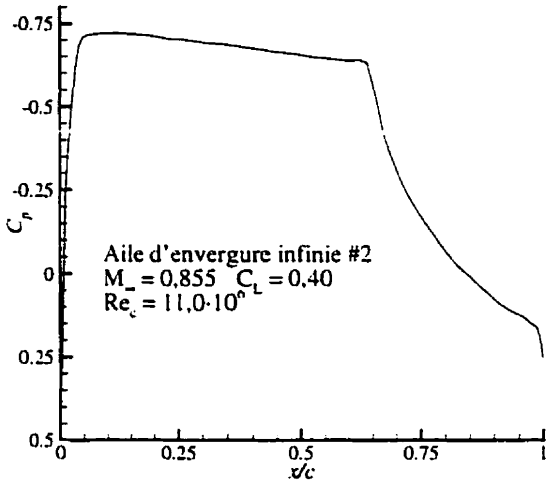

Figure 4.20b Aile infinie #2: Coefficient de pression

selon que l'on inclue ou non les effets de courbure, et est égale à 3.0 kHz. Pour ce qui est de l'aile #2, la fréquence critique pour les calculs avec courbure est de 20% inférieure à celle obtenue lorsque la courbure est négligée (4,0 kHz vs. 5.0 kHz).

La figure 4.21 présente quatre résultats de calcul du facteur n sur l'aile #1. La ligne pleine épaisse correspond à la solution sans effets de courbure [89]. Les lignes minces en trait plein et en traits interrompus représentent les résultats obtenus en introduisant seulement la courbure de la surface (les termes comprenant m_{12} et m_{32}) en utilisant, respectivement, $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \psi_e$. On a voulu ainsi démontrer que lorsque les effets de courbure des lignes de courant étaient négligés, la solution était essentiellement indépendante du repère choisi. Les légères différences observées sont dues à la rotation de l'écoulement laminaire moyen dans la direction appropriée (c'est-à-dire $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = \psi_e$). Enfin, la ligne pointillée représente les résultats obtenus lorsque tous les termes de courbure sont inclus. On constate clairement que

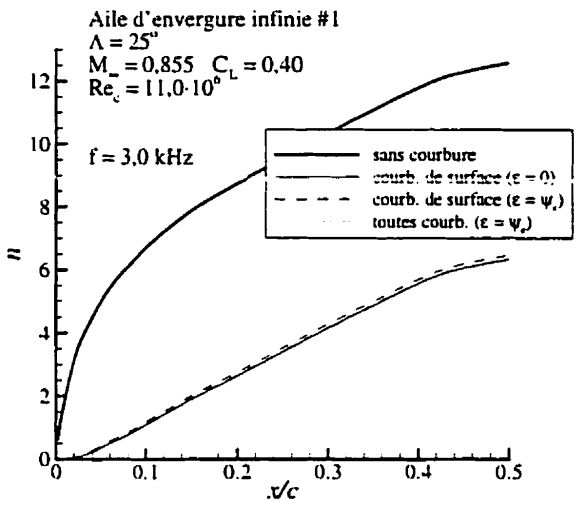

Figure 4.21 Aile infinie #1: Facteur n

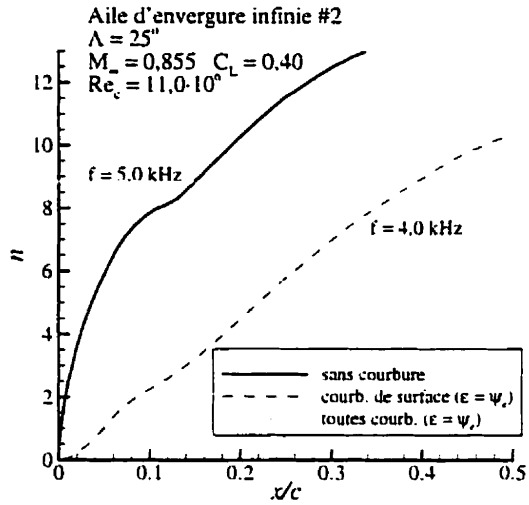

Figure 4.22 Aile infinie #2: Facteur n

la courbure de surface a une influence stabilisatrice sur les fluctuations transversales. Pour $x/c > 0.20$, le rayon de courbure du profil est beaucoup plus grand que l'épaisseur de la couche limite, et l'influence de la courbure sur le taux de croissance des instabilités longitudinales est très faible dans cette région. Les termes de courbure des lignes de courant n'ont qu'une faible influence déstabilisatrice, qui est négligeable par rapport à la forte influence stabilisatrice de la courbure de surface. Ce comportement est identique à celui observé par Cebeci et al. [44] pour des écoulements incompressibles.

La figure 4.22 présente les mêmes résultats pour l'aile #2. Les tendances sont les mêmes que celles observées sur l'aile #1: l'effet stabilisateur de la courbure de surface est très prononcé tandis la courbure des lignes de courant a un effet déstabilisateur relativement négligeable.

Tel que mentionné ci-haut, l'influence plus forte des termes de courbure sur les instabilités transversales est liée en partie à ce que celles-ci apparaissent près

du bord d'attaque, où le rayon de courbure est le plus faible, tandis que les instabilités longitudinales apparaissent généralement dans des régions où le profil est relativement plat. Cependant, les diagrammes de stabilité à x/c=0.20 sur l'aile #1, figure 4.23, permettent de constater qu'il s'agit bien également d'une influence sélective. Lorsqu'on néglige les termes de courbure, trois maxima locaux d'instabilité sont présents. L'inclusion des effets de courbure de surface résulte en la disparition totale du maximum correspondant à une fluctuation transversale, tandis que les maxima liés à des fluctuations longitudinales ne sont pas du tout affectés.

4.4 Calculs de stabilité automatisés

Les résultats présentés aux sections précédentes ont permis de dégager certaines conclusions quant aux influences sur la stabilité de certaines propriétés physiques des écoulements, lesquelles ont influencé les choix faits dans la conception de la méthode automatisée de calcul de la stabilité. On a d'abord démontré l'importance des gradients transversaux de l'écoulement moyen, et donc la nécessité d'utiliser des méthodes de calcul pleinement tridimensionnelles, particulièrement en ce qui a trait au calcul du fluide parfait et de la couche limite. L'étude des effets non parallèles et de courbure a permis de constater que ceux-ci avaient une influence respectivement déstabilistrice ou stabilisatrice plus ou moins forte selon l'écoulement. Cependant, on a également pu observer que l'inclusion des effets non parallèles dans l'analyse de stabilité ne résultait pas en une diminution de la variation du facteur n à la transition. Les mêmes conclusions peuvent être tirées pour les effets de courbure, selon les résultats qui seront présentés à la section 4.5 (voir également [95]). Ces observations justifient la non-inclusion des effets non parallèles et de courbure dans la base de données de caractéristiques de stabilité utilisée pour les calculs automatisés.

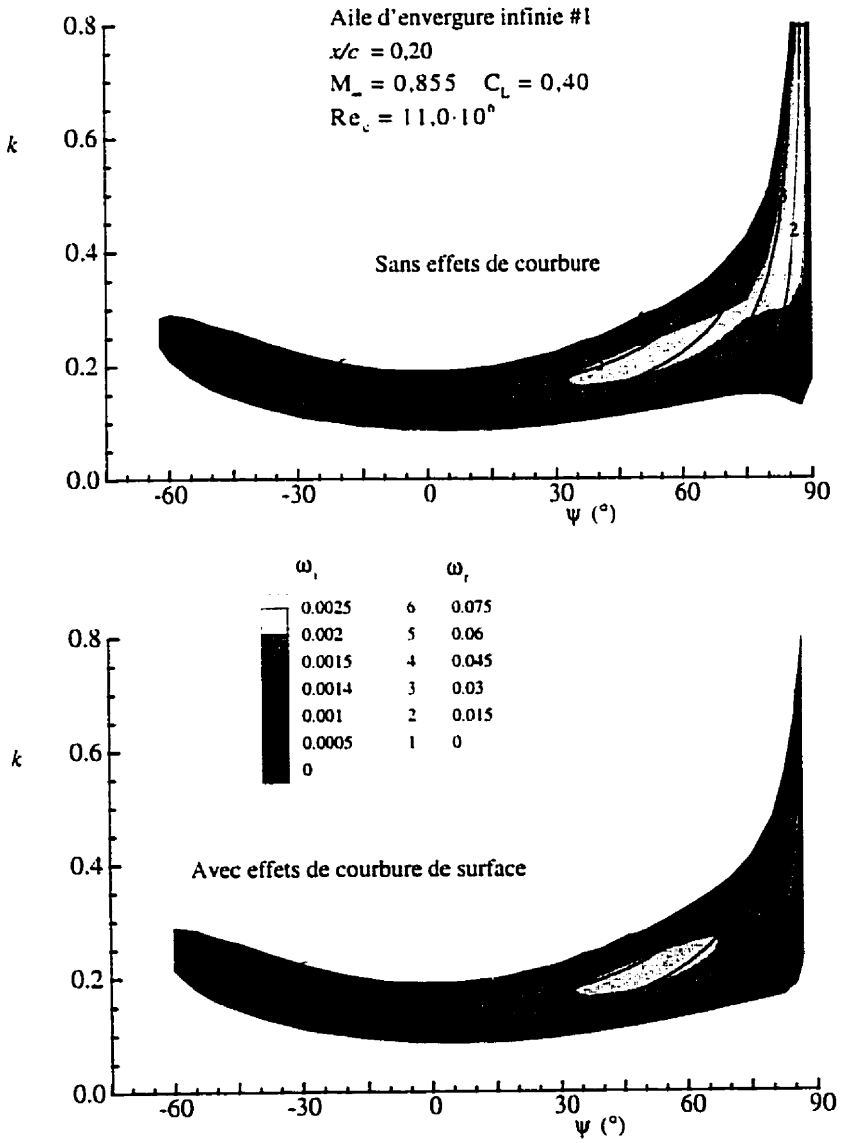

Figure 4.23 Aile infinie #1: Diagrammes de stabilité, $x/c = 20\%$

Tableau 4.4 Cas #1: Paramètres de couplage

	CL exacte	couplage		
		$w_{\max}$	H_{z_i}	w'_w
t_s	—	0,927	0,927	0,978
Λ	—	0,310	0,310	0,310
H_{x_i}	2,410	2,410	2,410	2,381
H_{z_i}	-22,73	-22,73	-22,73	-28,57
$w_{\max}$	-0,060	-0,060	-0,060	-0,045
w'_w	-0,102	-0,131	-0,131	-0,102
$\frac{T_w}{T_e}$	1,188	1,190	1,190	1,190

4.4.1 Validation du modèle de couche limite

On veut d'abord démontrer la capacité de la couche limite modèle décrite à la section 3.4.1 d'estimer adéquatement les caractéristiques de stabilité de la couche limite réelle sur une aile. Pour ce faire, trois cas test sont considérés pour lesquels on comparera les caractéristiques de stabilité calculées sur la couche limite réelle à celles obtenues avec les profils de couche limite modèle qui auront été sélectionnés à l'aide des différents paramètres de couplage présentés. Les profils réels sur l'aile ont été obtenus par la méthode de caractéristiques de Houdeville et al. [81]. Dans la discussion qui suit, on référera à ces profils comme étant les profils "exacts".

4.4.1.1 Écoulement accéléré

Pour le premier cas, on utilise l'aile en flèche d'envergure infinie #2 présentée à la section 4.3.2, avec M_∞=0,855. La figure 4.24 montre les profils de couche limite exacts sur l'aile dans une région où existe un fort gradient de pression favorable. On présente aussi sur la même figure les profils de couche limite modèles obtenus en couplant H_{x_i} et l'une des quantités suivantes: H_{z_i}, $w_{\max}$ ou w'_w. Le tableau 4.4 résume les valeurs de ces paramètres.

Afin de vérifier la pertinence d'utiliser l'équation (3.32) pour déterminer le paramètre χ directement à partir du nombre de Mach local exact, on a calculé les couches limites modèles correspondant à plusieurs valeurs de χ. On a ainsi constaté que la solution modèle pour laquelle la valeur exacte de T_w est reproduite est bien celle pour laquelle M_e correspond à la valeur exacte.

La reproduction des profils exacts est excellente pour la vitesse longitudinale et la température, mais on observe des différences plus significatives pour le profil de vitesse transversale, principalement en ce qui concerne la position en y du maximum de vitesse. Cette distance semble être indépendante du paramètre de couplage utilisé. En fait, des tests ont indiqué qu'elle dépend surtout de Λ, lequel est relié au facteur de forme longitudinal H_{x_1}.

Les caractéristiques de stabilité calculées avec la couche limite exacte sont présentées à la figure 4.25. Sur cette figure, les tons de gris représentent le taux d'amplification temporelle (ω_i) de la fluctuation, tandis que les lignes numérotées indiquent sa fréquence (ω_r). On note la présence d'un seul maximum local d'amplification correspondant à une instabilité transversale, caractéristique d'un profil longitudinal sans point d'inflexion. La figure 4.26 présente les caractéristiques de stabilité des couches limites modèles de la figure 4.24.

On observe un accord global assez bon entre les caractéristiques de stabilité exactes et modèles. La position de l'instabilité transversale maximum (i.e. son nombre d'onde et son orientation) est bien reproduite par les couches limites modèles, avec cependant des taux d'amplification plus bas, particulièrement pour le couplage utilisant w'_w.

Pour être utilisée dans le calcul du facteur n, la couche limite modèle doit

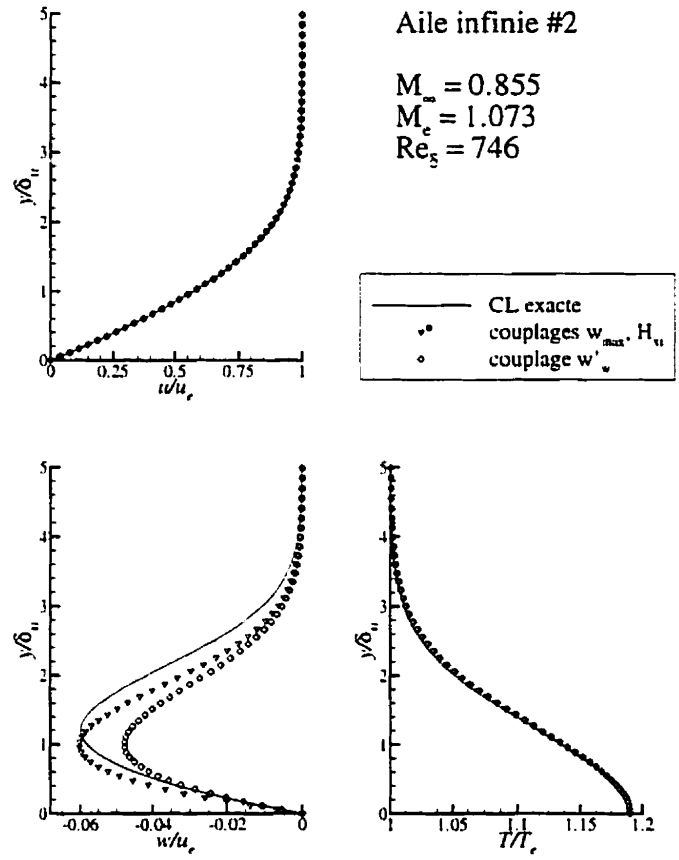

Figure 4.24 Cas #1: Profils de couche limite

pouvoir offrir une bonne représentation de la variation du taux d'amplification maximum, ainsi que de l'orientation et du nombre d'onde qui lui sont associés, en fonction de la fréquence. La figure 4.27 présente ces évolutions pour les couches limites exactes et modèles à l'étude. On constate (figure 4.27a) que la couche limite modèle obtenue par couplage de $w_{\max}$ possède un taux d'amplification inférieur à celui de la solution exacte pour les fréquences inférieurs à 0,03. Son taux d'amplification maximum est $\omega_i^{\max}$=0.0037 à une fréquence ω_r=0,02, en comparaison d'une amplification maximum de 0,0042 à ω_r=0,015 pour la couche limite exacte. Au-dessus de ω_r=0,03, le taux d'amplification de la couche limite modèle devient supérieur

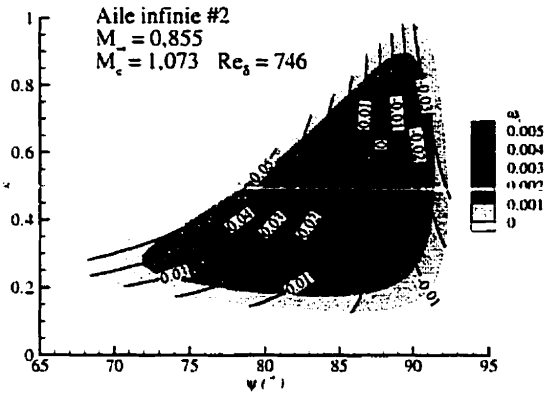

Figure 4.25 Cas #1: Diagramme de stabilité — CL exacte

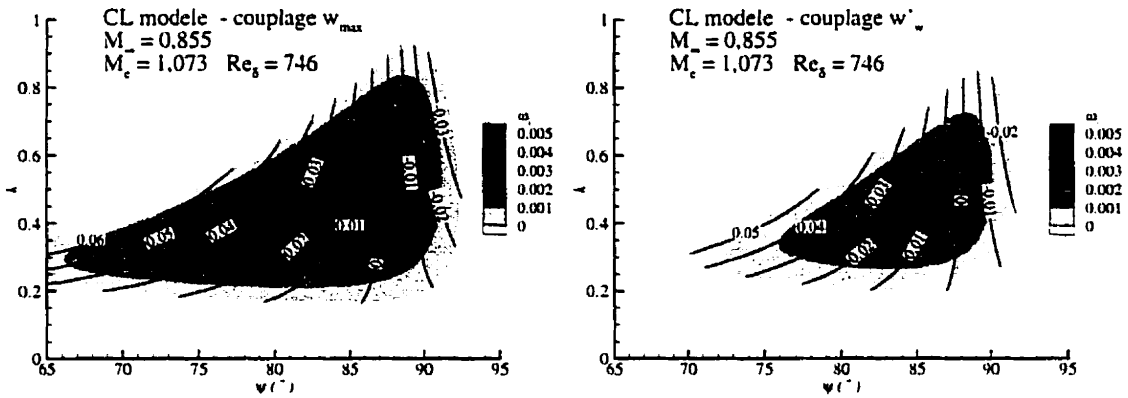

Figure 4.26 Cas #1: Diagrammes de stabilité — CL modèles

au taux exact. L'amplification neutre est atteinte à $\omega_r \simeq 0{,}073$ pour la couche limite modèle comparativement à environ 0,059 pour la couche limite exacte. Les taux d'amplification de la couche limite obtenue par couplage de w'_w sont significativement plus bas que ceux de la couche limite exacte pour tout le domaine des fréquences instables (ω_i^{max}=0,0022 à ω_r=0,02, ω_i=0 à ω_r=0,055). La figure 4.27b montre que l'orientation de l'instabilité la plus instable de même que son nombre d'onde sont bien prédits par les deux solutions modèles considérées.

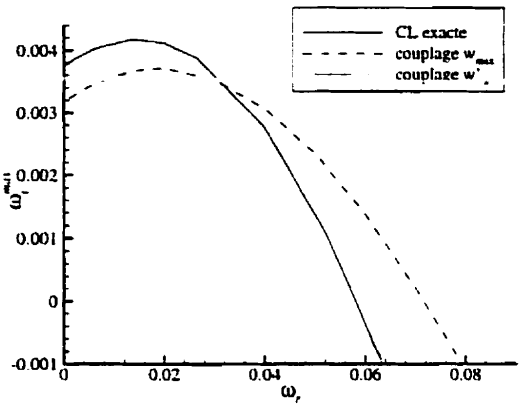

Figure 4.27a Cas #1: Évolution de ω_i^{max}

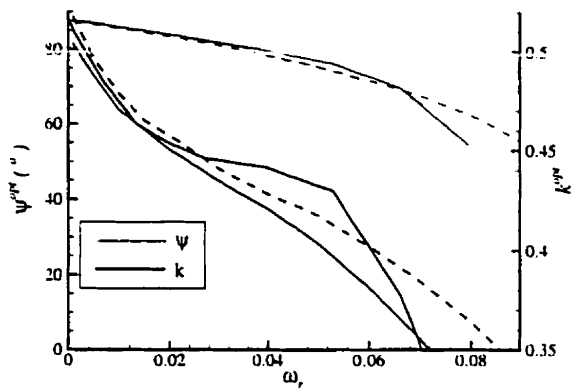

Figure 4.27b Cas #1: Évolution de k^{opt} et ψ^{opt}

4.4.1.2 Écoulement modérément décéléré

Pour le second cas test, on considère une couche limite dans une région de gradient de pression adverse modéré sur l'aile NASA AMES à M_∞=0,833. La figure 4.28 présente la couche limite exacte sur l'aile ainsi que les solutions modèles obtenues par les trois méthodes de couplage. Les paramètres de couplage sont présentés dans le tableau 4.5. Comme pour le cas précédent, on constate que les profils de température et de vitesse longitudinale, qui cette fois possède un point d'inflexion, sont en accord presque parfait mais que des différences significatives existent pour le profil de vitesse transversale. Le couplage utilisant la dérivée à la paroi produit une vitesse transversale maximum environ 4 fois plus petite que la solution exacte. Les résultats basés sur le facteur de forme et la vitesse transversale maximum sont très près l'un de l'autre, mais leur maximum est beaucoup plus près de la paroi que celui du profil exact. On note que la couche limite exacte possède deux points d'inflexion dans son profil transversal tandis que les couches limites modèles n'en

Tableau 4.5 Cas #2: Paramètres de couplage

	CL exacte	couplage		
		$w_{\max}$	H_{z_i}	w'_w
t_s	—	0,940	0,944	0,996
Λ	—	-0,057	-0,057	-0,057
H_{x_i}	2,660	2,660	2,660	2,674
H_{z_i}	-90,91	-83,33	-90,91	-333,3
$w_{\max}$	-0,016	-0,016	-0,015	-0,004
w'_w	-0,010	-0,036	-0,035	-0,010
$\frac{T_w}{T_e}$	1,286	1,287	1,287	1,287

ont toutes qu'un.

On présente ensuite, figures 4.29 et 4.30, les diagrammes de stabilité obtenus pour la couche limite exacte et les solutions modèles avec couplage de $w_{\max}$ et w'_w. Les résultats pour le couplage avec H_{z_i} devraient être similaires à ceux du couplage utilisant la vitesse maximum. La figure 4.29 montre que trois maxima locaux d'amplification sont présents, ce qui est typique d'une région de gradient de pression adverse modéré. Les niveaux d'amplification les plus élevés se retrouvent aux environs de $\psi = -50°$. On s'attend cependant à ce que la portion la plus significative du diagramme, pour fins de prédiction de la transition, soit celle autour de $\psi = 50°$. En effet, la croissance des instabilités sur une aile débute normalement près du bord d'attaque avec des ondes transversales ($\psi \simeq 90°$). Lorsque les ondes se propagent vers l'amont et que l'instabilité transversale est progressivement amortie, il semble logique d'utiliser dans le calcul du facteur n le maximum longitudinal dont l'orientation est la plus proche de l'orientation originale de la fluctuation. Les solutions modèles présentent seulement deux maxima, le maximum transversal étant absent.

L'évolution du taux d'amplification maximum ainsi que de l'orientation et du

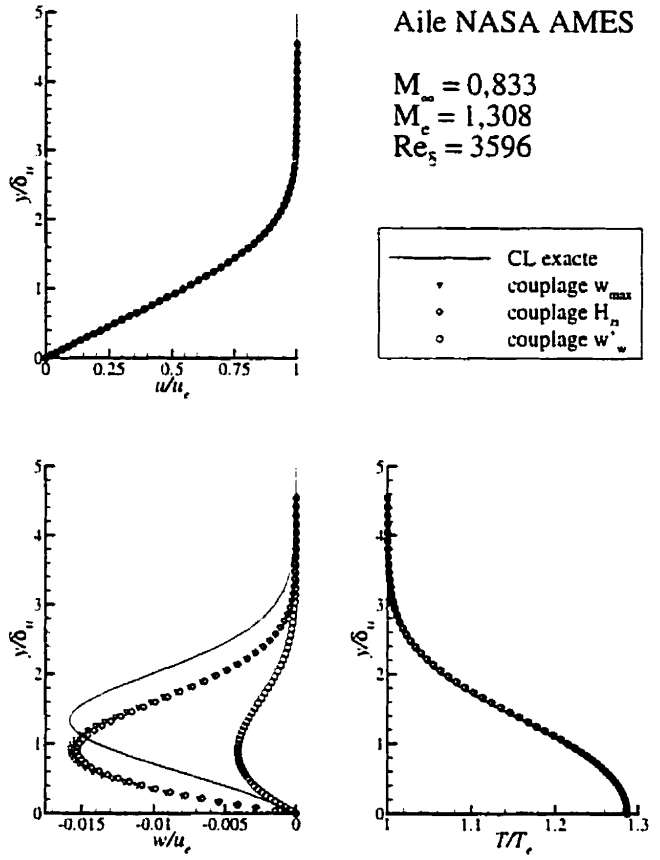

Figure 4.28 Cas #2: Profils de couche limite

nombre d'onde associés est présentée à la figure 4.31. On ne considère ici que les instabilités transversale (branche (1)) et longitudinale avec $\psi > 0$ (branche (2)). Pour les fréquences inférieures à 0,025, l'amplification maximum pour la couche limite exacte est causée par une fluctuation transversale. La figure 4.31b montre qu'aux basses fréquences la direction la plus instable prédite par les solutions modèles tend vers 90°, mais cette instabilité est toujours reliée au maximum local longitudinal et l'équivalent de la branche (1) de la solution exacte n'est pas présent dans les solutions modèles. Le maximum d'amplification se produit à $\omega_r \simeq 0{,}05$ pour la couche limite exacte et les deux solutions modèles (figure 4.31a). La valeur

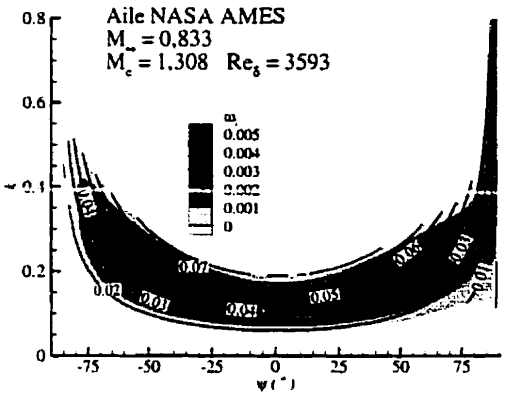

Figure 4.29 Cas #2: Diagramme de stabilité — CL exacte

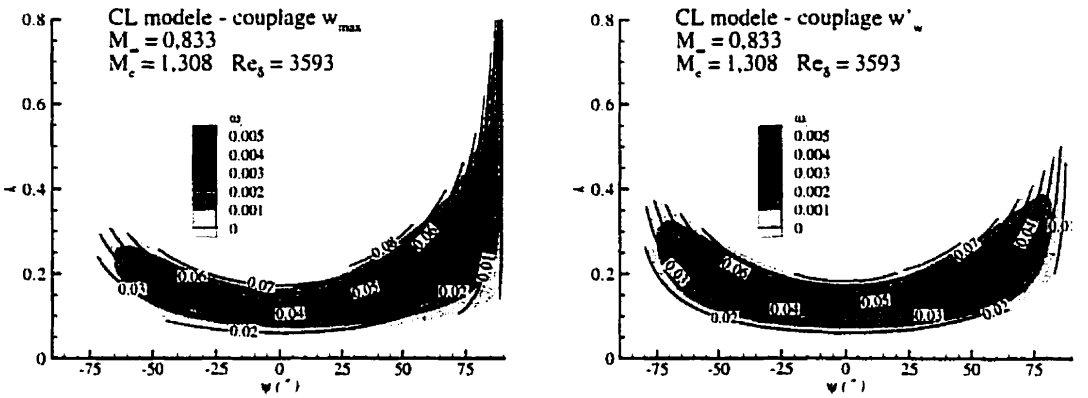

Figure 4.30 Cas #2: Diagrammes de stabilité — CL modèles

de ce maximum prédite par les solutions modèles est en excès de sa valeur exacte d'environ 20% pour le couplage utilisant $w_{\max}$ et d'environ 6% pour celui basé sur w'_w. Les niveaux d'amplification prédits par la couche limite modèle avec couplage de $w_{\max}$ sont supérieurs à la solution exacte sur toute la plage de fréquences instables. La solution obtenue par couplage de w'_w produit un meilleur accord général dans ce cas. Ces différences sont attribuables à la valeur de la vitesse transversale maximum ainsi qu'à sa distance de la surface. La figure 4.31b montre aussi que le nombre d'onde et l'orientation de la fluctuation la plus instables sont légèrement

mieux prédits par la solution basée sur la dérivée à la paroi que par celle utilisant la vitesse maximum, si l'on se réfère à la branche (2) de la solution exacte.

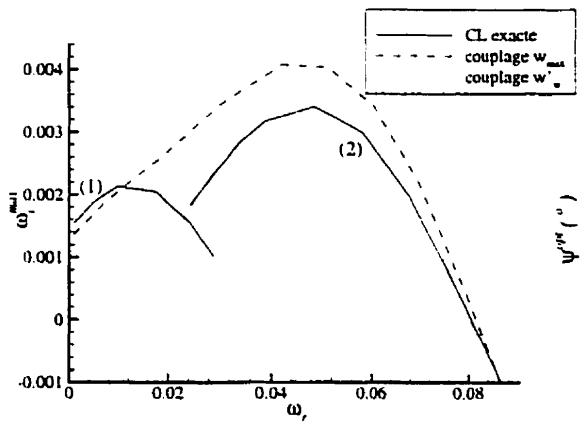

Figure 4.31a Cas #2: Évolution de ω_i^{max}

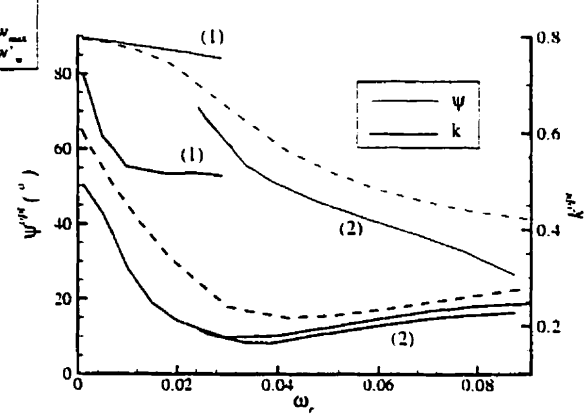

Figure 4.31b Cas #2: Évolution de k^{opt} et ψ^{opt}

4.4.1.3 Écoulement fortement décéléré

Pour le dernier cas test, on considère une couche limite dans un fort gradient de pression adverse sur l'aile ONERA M6 à $M_\infty = 0{,}84$. Les paramètres de couplage sont donnés dans le tableau 4.6 et les couches limites correspondantes sont présentées à la figure 4.32. Le profil de vitesse transversale possède deux maxima (en valeur absolue) et il est clair qu'aucune des solutions modèles ne peut prétendre le représenter. On notera que le couplage de w_{max} a été appliqué pour chacun de ces maxima, d'où les indices "bas" et "haut". On observe que la distance du maximum transversal à la surface est la même pour toutes les couches limites modèles, ce qui résulte en un maximum positif plus éloigné de la paroi (couplage de $w_{max_{bas}}$ et w'_w) ou un maximum négatif plus près de la paroi (couplage de $w_{max_{haut}}$ et H_{z_i}).

Tableau 4.6 Cas #3: Paramètres de couplage

	CL exacte	couplage			
		$w_{\max_{bas}}$	$w_{\max_{haut}}$	H_{z_i}	w'_w
t_s	—	0,997	0,993	0,975	0,986
Λ	—	-0,180	-0,180	-0,180	-0,180
H_{x_i}	3,175	3,185	3,185	3,165	3,175
H_{z_i}	-27,78	83,33	-55,56	-27,78	37,04
$w_{\max}$	58,82 -41,67	58,82	 -40,00	 -20,83	27,78
w'_w	0,094	0,044	-0,064	-0,125	0,095
$\frac{T_w}{T_r}$	1,348	1,361	1,361	1,360	1,360

Le diagramme de stabilité de la couche limite exacte est présenté à la figure 4.33. Trois maxima locaux peuvent être observés. Le plus important est à $\psi \simeq -60°$ mais on s'attend à ce que les instabilités ayant une orientation positive aient plus d'influence sur la transition, pour les raisons exposées précédemment. Les diagrammes de stabilité des couches limites obtenues par couplage de chacun des maxima de vitesse transversale et de la dérivée à la paroi de la vitesse transversale sont reproduits à la figure 4.34. Le maximum local correspondant à une instabilité tranversale pure est absent de toutes les solutions modèles. Le nombre d'onde et l'orientation auxquels se produisent les deux maxima londitudinaux sont bien prédits. Comme pour le cas précédent, le meilleur accord général avec la solution exacte semble être obtenu par la solution modèle résultant du couplage de w'_w, ce que confirme la figure 4.35. Les taux d'amplification prédits pour les couches limites modèles obtenues par couplage de $w_{max_{bas}}$ et w'_w sont en très bon accord avec la portion de la solution exacte correspondant à une instabilité longitudinale (branche (2)). Les résultats du couplage de w'_w sont légèrement plus près de la solution exacte jusqu'à $\omega_r \simeq 0{,}18$. La couche limite modèle résultant du couplage de $w_{max_{haut}}$ possède des taux d'amplification beaucoup plus élevés que la couche

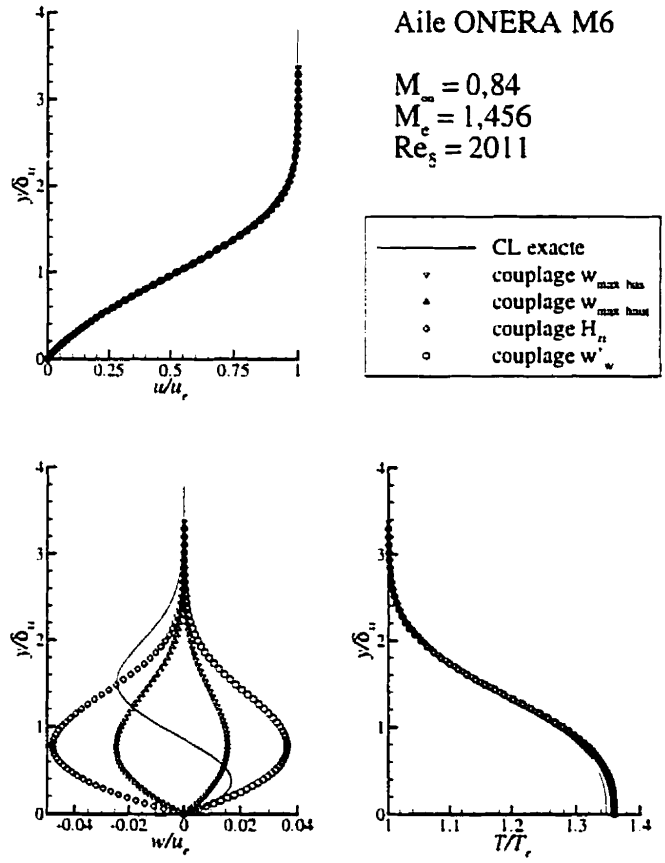

Figure 4.32 Cas #3: Profils de couche limite

limite exacte, ce qui s'explique par le fait que son maximum de vitesse transversale se produit beaucoup plus près de la surface que le maximum négatif de la couche limite exacte.

4.4.1.4 Conclusions préliminaires

À la lumière de ce qui précède, on constate que le facteur de forme incompressible dans la direction longitudinale (H_{x_i}) permet d'obtenir une très bonne représentation du profil de vitesse longitudinale, et ce même dans des écoulements fortement décélérés. On observe également que la valeur du paramètre de gradient de pression

(Λ) dépend presque exclusivement de ce facteur de forme. Le choix d'un paramètre lié au profil de vitesse transversale n'est pas aussi évident. La distance à la paroi du maximum de vitesse et la présence de plusieurs maxima transversaux sont des facteurs qui ont une forte influence sur les caractéristiques de stabilité. Pour des écoulements accélérés ($\Lambda > 0$), où l'importance du profil de vitesse transversale est la plus grande, le critère $w_{\max}$ semble produire le meilleur accord avec la solution exacte pour la couche limite elle-même et ses caractéristiques de stabilité. Dans ces conditions, le critère H_{z_t} produit des résultats presque aussi bons. Pour des écoulements décélérés ($\Lambda < 0$), où les instabilités longitudinales deviennent dominantes, le couplage basé sur w'_w semble produire une meilleure représentation des caractéristiques de stabilité des fluctuations longitudinales, même si la couche limite modèle résultante présente un maximum de vitesse transversale qui peut être plusieurs fois plus grand ou plus petit que celui de la couche limite exacte. Le couplage avec le maximum de vitesse transversale le plus près de la paroi produit cependant également des résultats acceptables. Ce paramètre de couplage est celui qui a été retenu pour les applications subséquentes, puisqu'il produit aussi le meilleur accord pour des écoulements à gradient de pression favorable.

4.4.2 Prédiction de la transition: facteurs n sur l'aile AS409

On présente finalement dans cette section les premières applications de la méthode automatisée au calcul du facteur n sur l'aile AS409. Ce cas a été choisi en raison de la disponibilité de mesures expérimentales de la position de transition [96], ce qui permettra de comparer les valeurs de n_{cr} obtenues par un calcul complet et un calcul automatisé. Bien que l'aile AS409 soit une aile conique, les calculs de stabilité effectués précédemment [47] ont utilisé l'hypothèse d'aile d'envergure infinie avec comme angle de flèche la valeur à mi-corde sur l'aile conique. Pour fins

Tableau 4.7 Cas AS409: validation

T_∞	M_∞	T_e	ω_i^{opt}	ω_r^{opt}
215	0,85	205	$1{,}74 \cdot 10^{-3}$	$4{,}45 \cdot 10^{-2}$
131	0,85	125	$1{,}79 \cdot 10^{-3}$	$4{,}49 \cdot 10^{-2}$
215	0,74	199	$1{,}74 \cdot 10^{-3}$	$4{,}45 \cdot 10^{-2}$

de comparaisons, cette approche a également été retenue dans le cas présent. On présentera des résultats pour deux essais, dénotés test 42 et test 79 dans [96]. Ces deux essais ont été effectués au même nombre de Mach (0,74) mais à des pressions et températures de stagnation différentes et donc des nombres de Reynolds légèrement différents, soit $12.8 \cdot 10^6$ pour le test 42 et $13.4 \cdot 10^6$ pour le test 79. Les températures auxquelles ces essais ont été effectués sont différentes de celle utilisée dans la construction de la base de données (T_∞=215K). De même, au moment d'effectuer les calculs, la base de données ne comprend qu'une seule valeur de M_∞, soit 0,85. Il importe de donc de vérifier l'influence de ces écarts sur les caractéristiques de stabilité. Pour des valeurs identiques de M_∞ (0,85), M_e (1.0), Re_δ (3500), H_{x_t} (2,53) et w_{max} (0.0093), on a d'abord comparé les profils de couche limite pour des valeurs de T_∞ de 215K et 131K (test 42). Avec T_∞=215K, les mêmes comparaisons ont été effectuées en faisant varier M_∞. On constate que les profils de vitesse et de température ainsi obtenus sont identiques. Les valeurs de T_e sont par contre différentes, ce qui signifie que les profils de viscosité seront différents. L'influence de cette différence sur les caractéristiques de stabilité a été évaluée en considérant l'onde d'amplification maximale. Les résultats obtenus (en formulation temporelle) sont résumés au tableau 4.7. On observe que les différences sur le taux d'amplification et la fréquence sont à toutes fins pratiques négligeables, ce qui indique que l'utilisation de la base de données est appropriée même si les valeurs de T_∞ et M_∞ du cas présent sont différentes des valeurs nominales.

La figure 4.36 présente l'évolution en x des paramètres du couplage pour le test 42. On constate que ceux-ci sont bien compris à l'intérieur des limites de la base de données (equation 3.37). De plus, les valeurs observées de H_{x_t} et $w_{\max}$ permettent d'établir que peu de points de calculs se trouvent dans la zone "sans données" et que ceux qui s'y trouvent ayant des $w_{\max}$ faibles ne nécessiteront pas d'interpolations entre des H_{x_t} très éloignés l'un de l'autre (voir figures 3.7a et 3.7b).

Les résultats du suivi de l'onde la plus instable sont présentés aux figures 4.37 à 4.40. La longueur d'onde et l'orientation de l'onde la plus instable sont représentées par les figures 4.37 et 4.38. Les résultats du calcul complet indiquent un passage plus tardif d'une instabilité transversale à une instabilité longitudinale que ceux de la base de données. Les points où l'instabilité dominante change de nouveau de nature par la suite sont bien prédits, bien que les orientations elle-mêmes soient différentes. Le calcul complet indique en fait qu'il y a passage abrupt d'une instabilité transversale pure à une instabilité longitudinale pure. En raison des interpolations effectuées, la méthode de base de données tend à produire des instabilités mixtes. L'évolution de la longueur d'onde optimale est qualitativement bien prédite.

La figure 4.39 présente l'évolution de la fréquence correspondant à l'amplification maximale. L'accord entre les résultats du calcul complet et de la méthode automatisée est généralement bon, sauf dans la région où le calcul complet indique une instabilité tranversale (et donc une fréquence basse) alors que le calcul automatisé indique qu'une onde longitudinale est dominante (ce qui s'accompagne d'une fréquence élevée). L'amplification maximale elle-même, figure 4.40, est qualitativement bien prédite, la plupart des variations présentes étant bien représentées par la méthode de base de données, bien qu'avec des niveaux généralement supérieurs à la solution exacte.

Les résultats de Boivin [84] indiquent que la fréquence critique pour le test 42

est de 20 kHz. La figure 4.41 présente la variation selon x du taux d'amplification maximal pour cette fréquence, obtenu par le calcul complet et à l'aide de la base de données. Bien qu'ils surestiment ou sous-estiment parfois de façon importante la solution exacte, on constate que les résultats obtenus à partir de la base de données représentent bien qualitativement le comportement de cette dernière. Les facteurs n correspondants sont présentés à la figure 4.42. À la position de transition déterminée expérimentalement, la différence entre les deux solutions est d'environ 0.6. Un des avantages de la méthode automatisée est de permettre le calcul simultané et rapide des facteurs n pour une grande plage de fréquences. La figure 4.43 présente les résultats ainsi obtenus pour des fréquences variant de 0 à 30 kHz. Le facteur n maximal à la transition est produit par l'instabilité dont la fréquence est de 25 kHz. L'écart entre ce facteur n et celui résultant du calcul complet à 20 kHz est de moins de 1, ce qui se situe en fait en deça de la marge d'incertitude de la méthode e^n pour des écoulements tridimensionnels compressibles.

Les résultats pour le test 79 sont présentés de façon similaire aux figures 4.44 à 4.51. Les conclusions sont les mêmes que précédemment, soit que la procédure automatisée représente qualitativement bien les caractéristiques de stabilité exactes, bien que l'accord quantitatif ne soit pas parfait. Comme pour le test 42, la différence entre les facteurs n exact et "automatique" à la transition est de moins de 1.

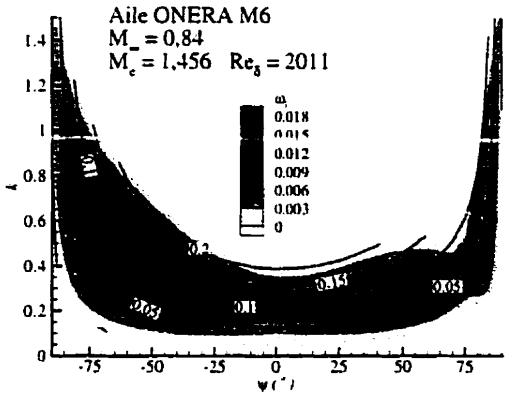

Figure 4.33 Cas #3: Diagramme de stabilité — CL exacte

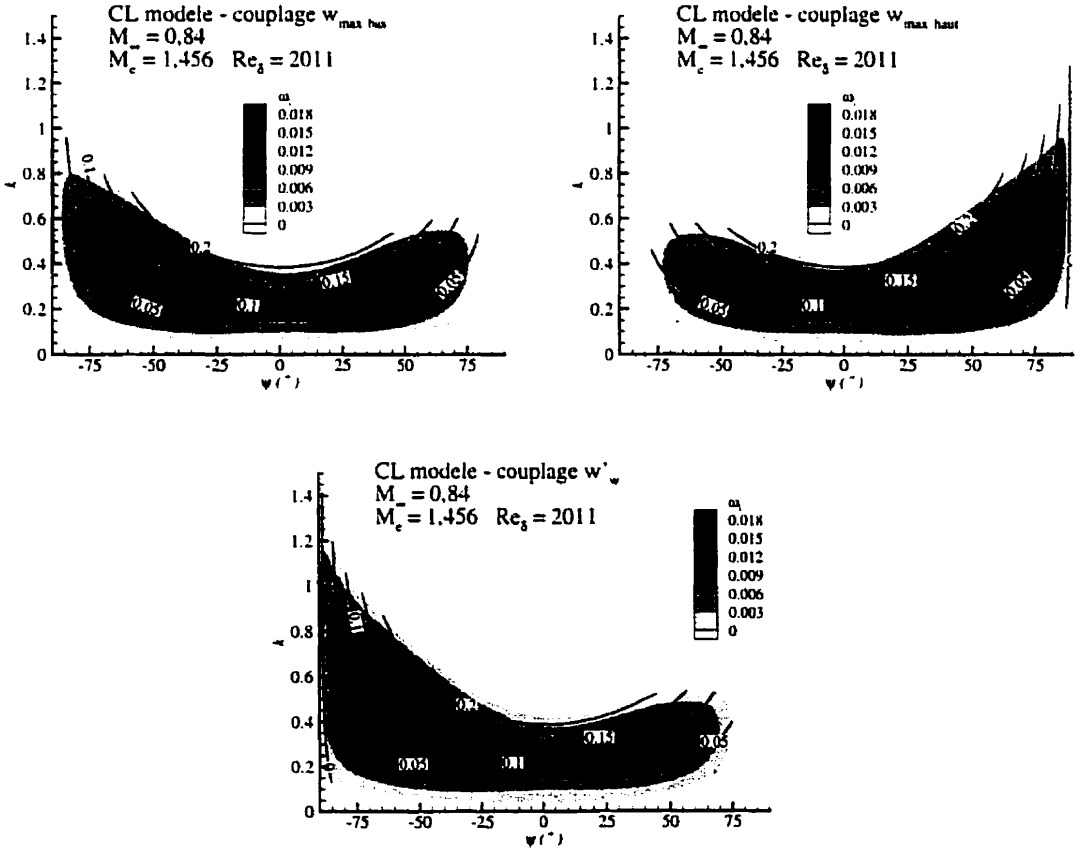

Figure 4.34 Cas #3: Diagrammes de stabilité — CL modèles

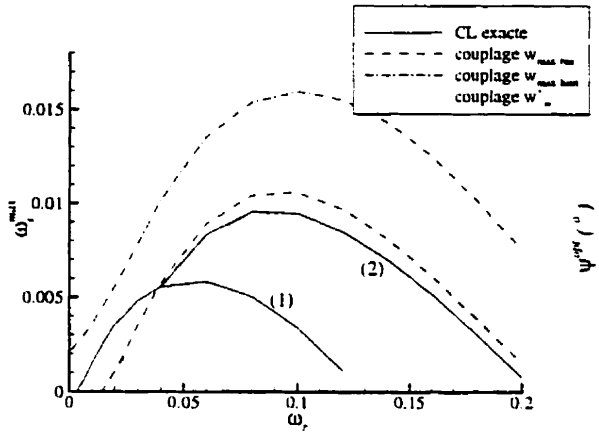

Figure 4.35a Cas #3: Évolution de ω_i^{max}

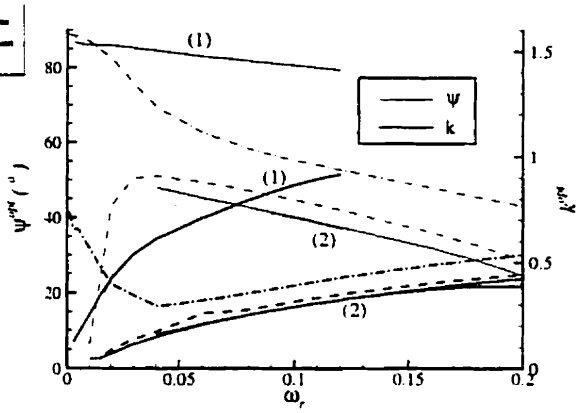

Figure 4.35b Cas #3: Évolution de k^{opt} et ψ^{opt}

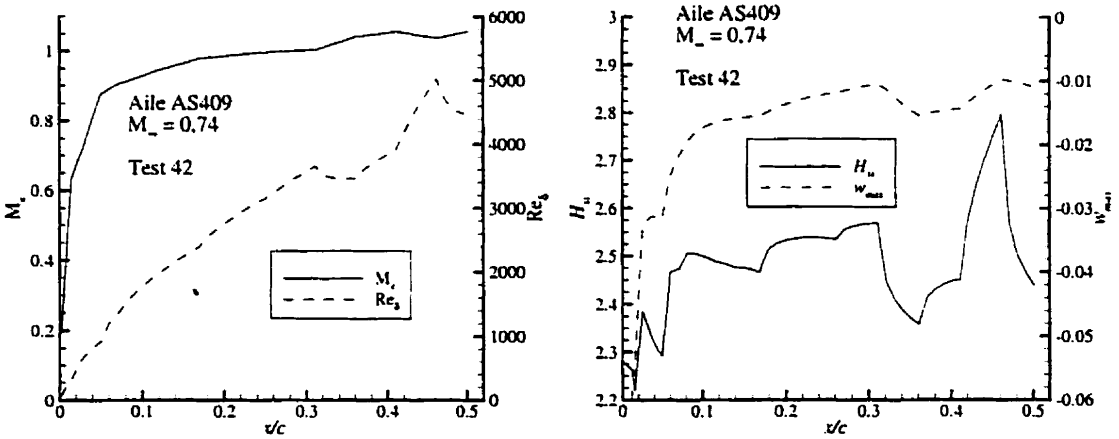

Figure 4.36 Aile AS409, Test 42: Paramètres de couplage

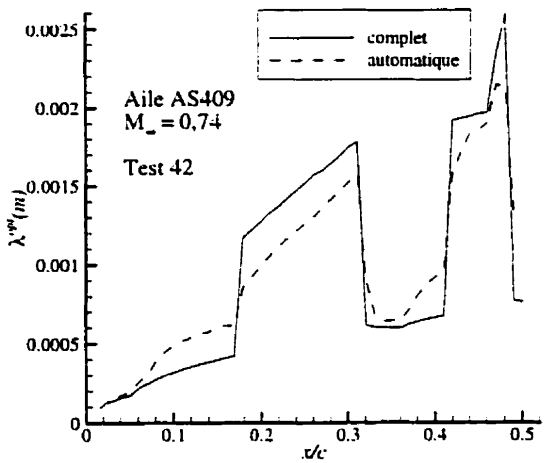

Figure 4.37 Aile AS409, Test 42: Longueur d'onde optimale

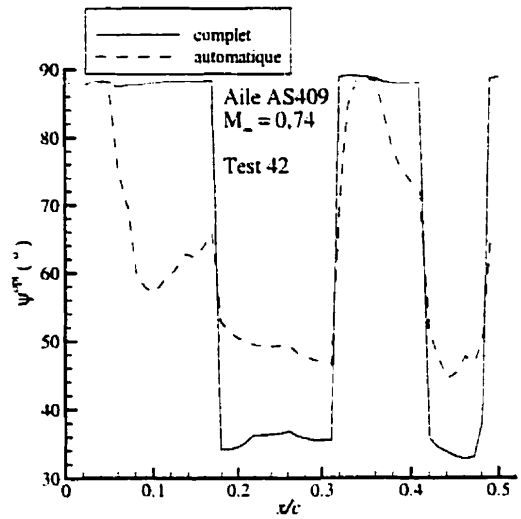

Figure 4.38 Aile AS409, Test 42: Orientation optimale

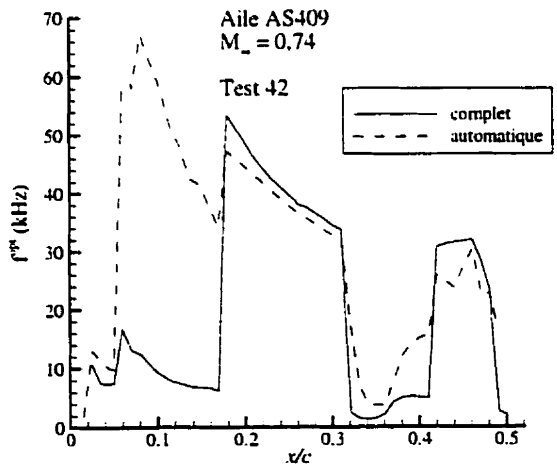

Figure 4.39 Aile AS409, Test 42: Fréquence optimale

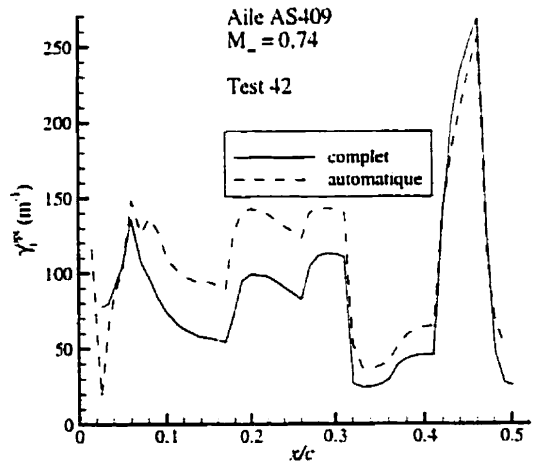

Figure 4.40 Aile AS409, Test 42: Amplification optimale

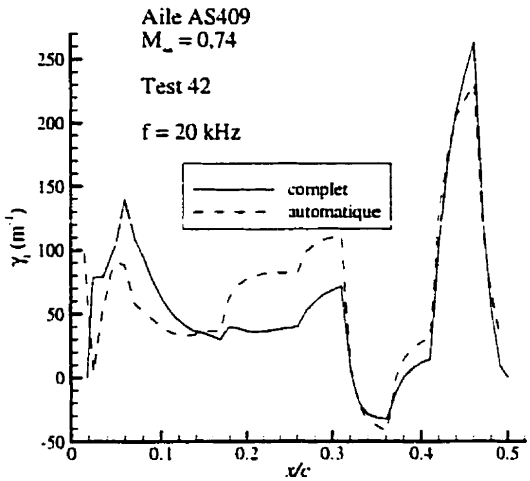

Figure 4.41 Aile AS409, Test 42: Amplification maximale, f=20 kHz

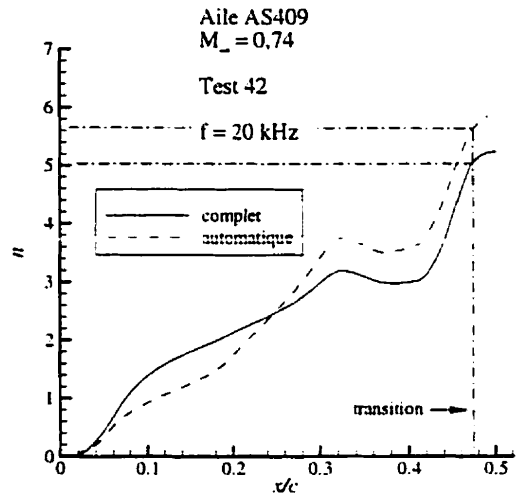

Figure 4.42 Aile AS409, Test 42: Facteur n, f=20 kHz

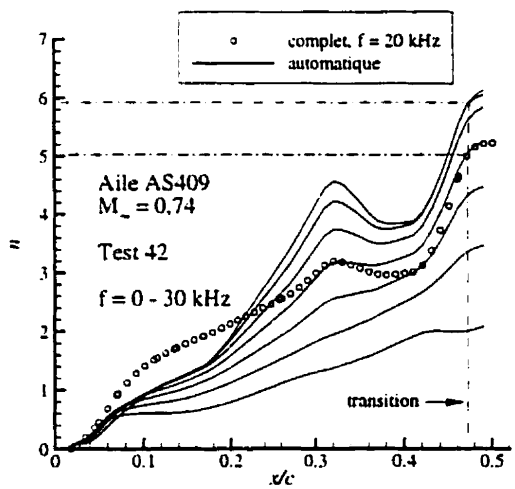

Figure 4.43 Aile AS409, Test 42: Facteur n, f=0–30 kHz

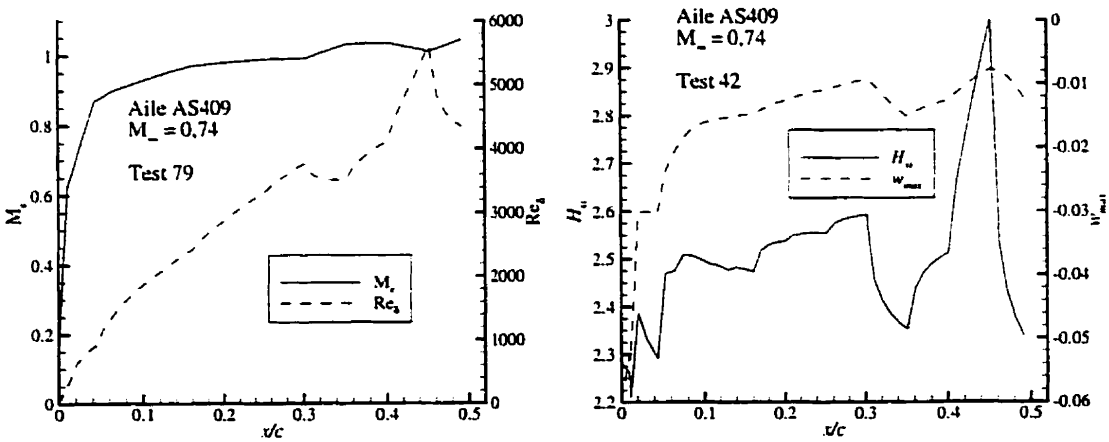

Figure 4.44 Aile AS409, Test 79: Paramètres de couplage

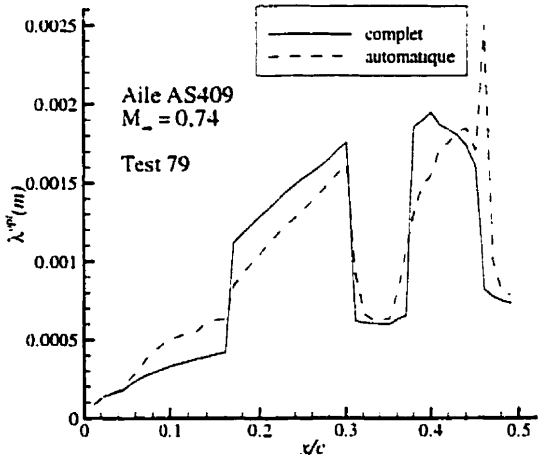

Figure 4.45 Aile AS409, Test 79: Longueur d'onde optimale

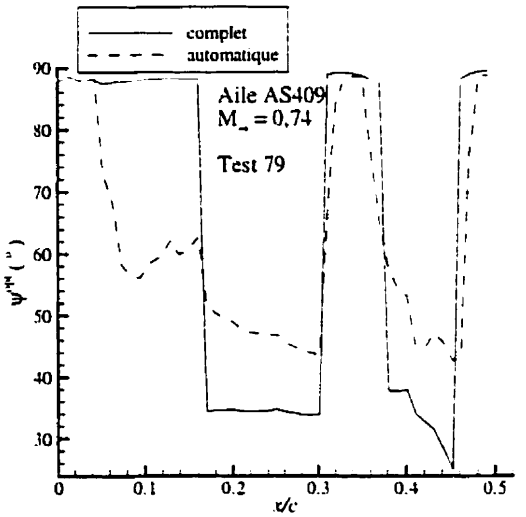

Figure 4.46 Aile AS409, Test 79: Orientation optimale

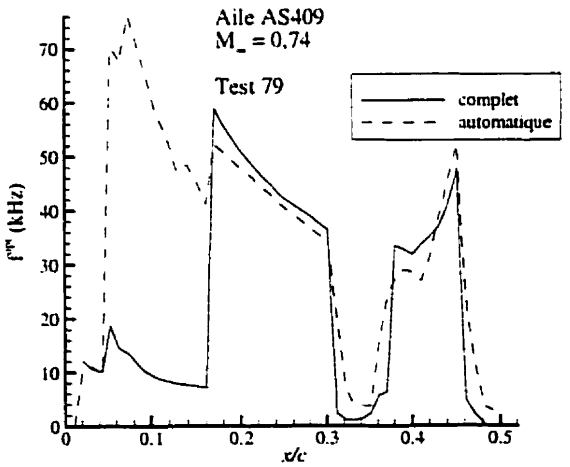

Figure 4.47 Aile AS409, Test 79: Fréquence optimale

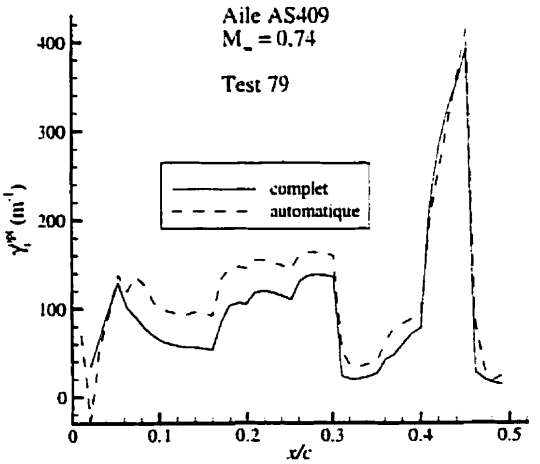

Figure 4.48 Aile AS409, Test 79: Amplification optimale

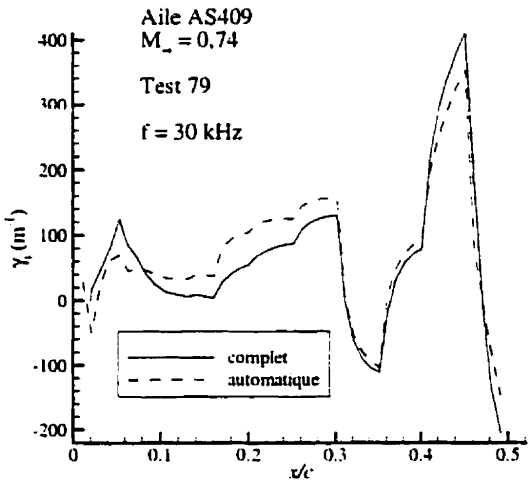

Figure 4.49 Aile AS409, Test 79: Amplification maximale, f=30 kHz

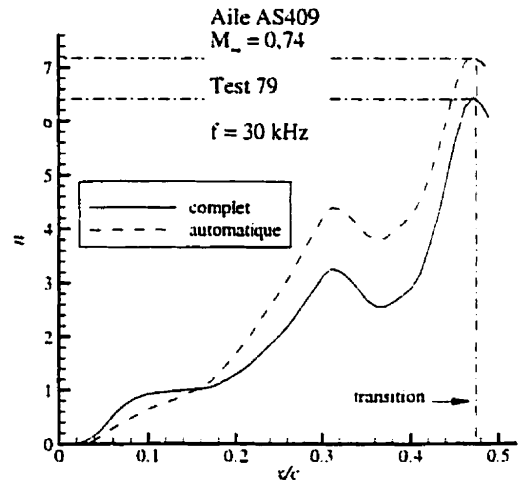

Figure 4.50 Aile AS409, Test 79: Facteur n, f=30 kHz

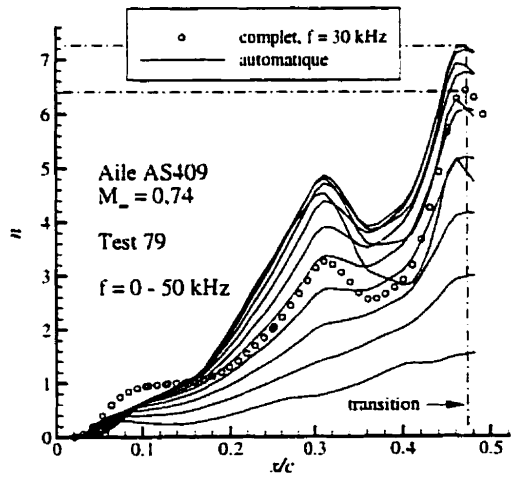

Figure 4.51 Aile AS409, Test 79: Facteur n, f=0–50 kHz

4.5 Comparaisons des prédictions aux résultats en soufflerie sur des ailes 3-D

Des essais en soufflerie réalisés récemment sur des ailes de Bombardier ont permis d'évaluer expérimentalement la position de la transition. Ces données fournissent une base de comparaison à partir de laquelle on a pu évaluer différents aspects des méthodes de prédiction de la transition présentées précédemment.

4.5.1 Aile expérimentale Bombardier W40

La première série de résultats a été obtenue pour une aile expérimentale développée par Bombardier Aéronautique, que l'on dénommera l'aile W40. Il s'agit d'une aile dont la forme en plan est relativement simple, avec des angles de flèche modérés et constants au bord d'attaque comme au bord de fuite. Les essais ont été réalisés dans la soufflerie de MicroCraft, en Californie [97]. Les conditions expérimentales sont M_∞=0.80 (vitesse de croisière), Re_c=5.95·10^6 et C_L=0.45. Pour des raisons de confidentialité, on ne présentera pas les distributions de pression pour ce cas, ni aucun des autres cas étudiés dans cette section. On notera également que les résultats expérimentaux ont été obtenus pour des configurations complètes (i.e. aile, fuselage, empennages et moteurs), tandis que les calculs de couche limite ont été effectués sur l'aile isolée. On peut donc s'attendre à ce que les résultats près de l'emplanture de l'aile ne soient pas tout à fait réalistes. Cette limitation est due au code de couche limite utilisé, et non à la méthode de calcul de la stabilité et de prédiction de la transition.

Les figures 4.52 et 4.53 présentent les contours du facteur n à l'extrados résultant respectivement du calcul complet (résolution du problème aux valeurs propres) et du calcul automatique (méthode de la base de données). Ces figures représentent l'enveloppe des résultats obtenus pour plusieurs fréquences à l'intérieur

de la plage critique. La position du front de transition est également illustrée. On notera que celle-ci a été obtenue par visualisation (mesures "à la main" sur des photographies) de l'écoulement d'huile sur la surface de l'aile. Les isolignes de n produites par les deux méthodes présentent des comportements similaires, par exemple un mouvement vers l'aval de l'emplanture au bout de l'aile, avec toutefois des niveaux différents. Sauf près de l'emplanture, le calcul automatique produit des facteurs n plus élevés que ceux résultant du calcul complet. Ceci avait déjà été observé sur l'aile AS409. On reporte à la figure 4.54 la variation selon l'envergure du facteur n à la position expérimentale de transition, par les deux méthodes. Deux observations peuvent en être dégagées. Premièrement, à l'exception de la région près de l'emplanture de l'aile ($z/b \leq 0.15$), le facteur n critique prédit par la méthode de base de données est supérieur à celui prédit par le calcul complet, avec un écart à peu près constant de 4. Deuxièmement, que l'on considère le calcul automatique ou complet, la variation selon l'envergure du facteur n critique est très importante, l'écart entre n_{tr} à l'emplanture et n_{tr} au bout de l'aile étant en fait de beaucoup supérieur à la différence entre le calcul complet et le calcul automatique. On notera que pour obtenir la courbe complète du facteur n pour une seule fréquence, le calcul complet demande 2 exécutions, une démarrant près du bord d'attaque pour les instabilités de nature transversale et l'autre plus en aval pour l'instabilité longitudinale, tandis que la méthode automatisée permet de passer de l'instabilité transversale à l'instabilité longitudinale au cours d'une seule exécution, tel qu'illustré à la figure 4.55. Les temps de calcul sur un CRAY J932 pour une seule fréquence sont de 57 minutes pour le calcul complet et de 32 secondes pour le calcul automatisé. Ceci illustre l'utilité de la méthode automatisée dans le contexte d'applications industrielles.

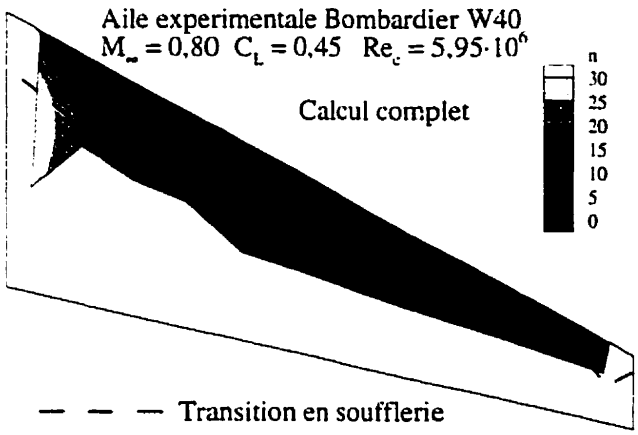

Figure 4.52 Aile expérimentale Bombardier W40: Facteur n sur l'extrados, calcul complet (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

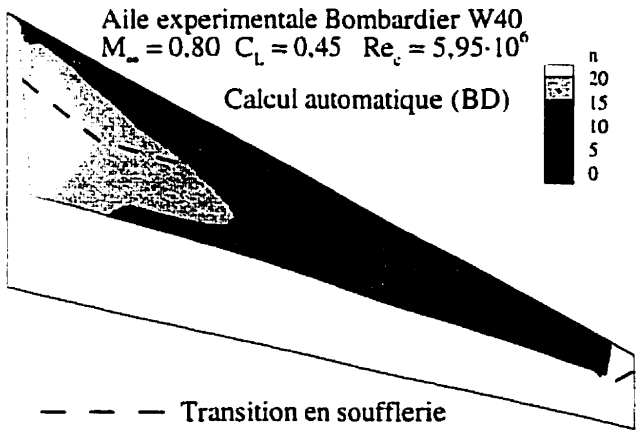

Figure 4.53 Aile expérimentale Bombardier W40: Facteur n sur l'extrados, calcul automatisé (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

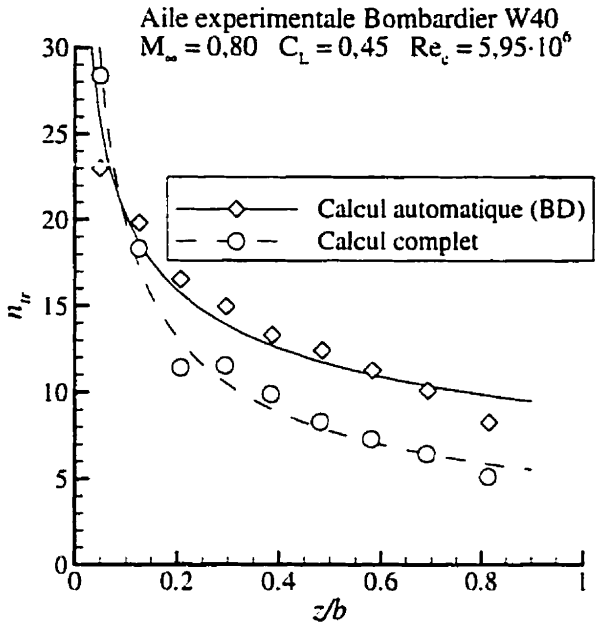

Figure 4.54 Aile expérimentale Bombardier W40: Facteur n à la transition (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

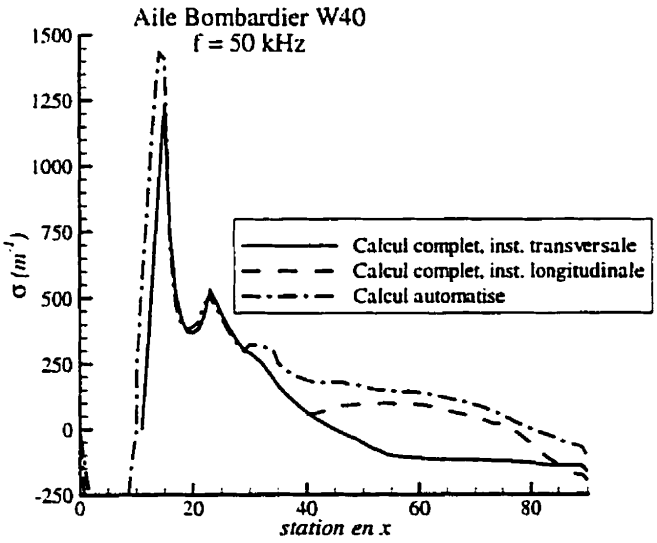

Figure 4.55 Aile expérimentale Bombardier W40: Taux d'amplification, f = 50 kHz (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

4.5.2 Aile du Bombardier BD-700 Global Express

Des visualisations de la transition ont également été effectuées sur l'aile de l'avion d'affaires à très long rayon d'action Bombardier Global Express, dans la soufflerie HST (High Speed Tunnel) du NLR à Amsterdam. Le fluide utilisé dans ce cas pour la visualisation était de l'acénaphtène et la détermination de la position de transition a également été effectuée de façon approximative à partir de photographies. On notera que contrairement au cas précédent, la position des caméras ne permettait pas d'obtenir une vue en plan de l'aile. L'estimation de la position de transition est donc possiblement moins précise. Les essais ont été réalisés pour un nombre de Mach et un coefficient de portance de 0,85 et 0,45, respectivement (conditions de croisière), et pour deux nombres de Reynolds, soit Re_c=5,60·10^6 et 3,20·10^6.

Les résultats pour le nombre de Reynolds le plus élevé sont d'abord présentés aux figures 4.56 (contours du facteur n, calcul complet), 4.57 (contours du facteur n, calcul automatisé) et 4.58 (évolution du facteur n à la transition selon l'envergure). Ces résultats sont très similaires à ceux obtenus sur l'aile W40: comme précédemment, on note une diminution très importante du facteur n critique selon l'envergure, prédite à la fois par le calcul complet et la méthode automatisée et avec une différence à peu près constante (de l'ordre de 3) entre les deux méthodes.

Les figures 4.59 à 4.62 présentent de façon similaire les résultats obtenus pour l'essai à bas nombre de Reynolds. Dans ce cas-ci, on a également effectué le calcul complet en tenant compte des effets de courbure. On doit cependant souligner que pour une bonne partie de l'envergure, la transition déterminée expérimentalement se situe au-delà de la position où le calcul de couche limite laminaire a dû être abandonné en raison du fort gradient de pression adverse, tel qu'illustré à la figure 4.61. La figure 4.62 permet cependant toujours de constater un écart à peu près constant entre les calculs automatique et complet (sans effets de courbure). On y observe

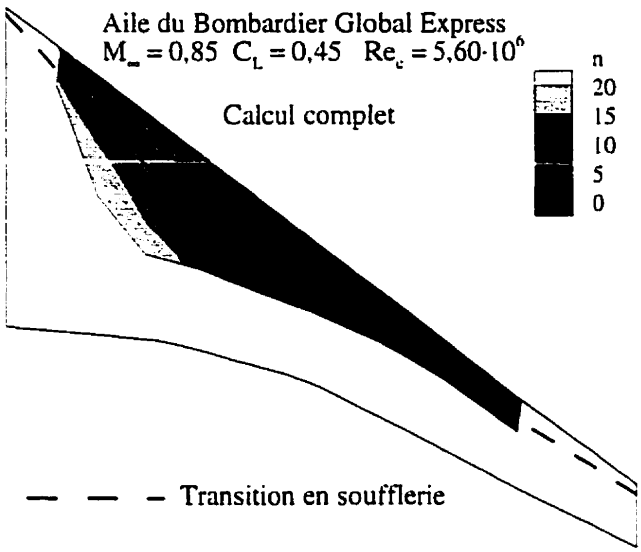

Figure 4.56 Aile du Global Express à Re = $5{,}6 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul complet (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

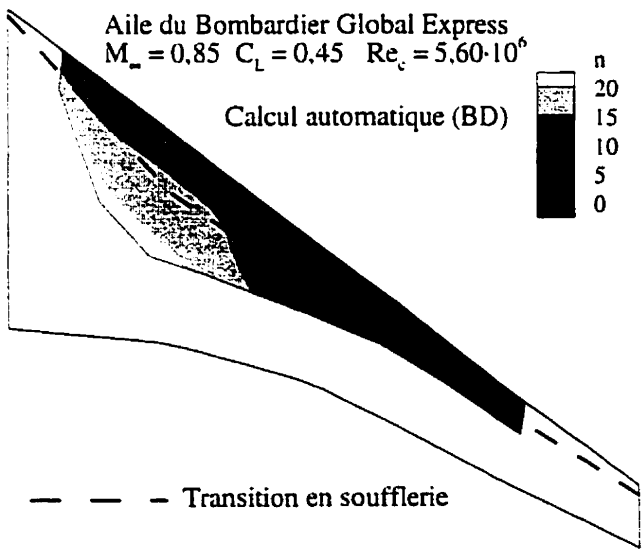

Figure 4.57 Aile du Global Express à Re = $5{,}6 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul automatisé (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

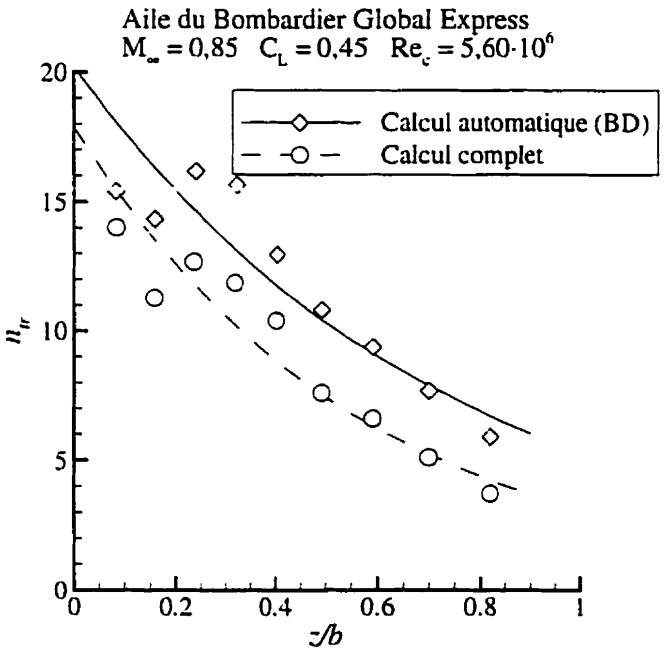

Figure 4.58 Aile du Bombardier Global Express à Re = $5.6 \cdot 10^6$: Facteur n à la transition (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

également que les effets de courbure sont significatifs, mais que leur inclusion ne produit pas un facteur n à la transition plus constant. Ceci justifie, a posteriori, le fait qu'ils ne soient pas pris en compte dans la méthode automatisée.

4.5.3 Détermination du facteur n critique

Les résultats présentés ci-haut démontrent qu'il n'est pas possible d'établir une valeur unique du facteur n à la transition pour les géométries considérées. Les variations du facteur n critique peuvent être reliées, à tout le moins en partie, à la force relative des instabilités longitudinales et transversales: d'après les mesures de transition réalisées en vol sur le VFW-614 et le Fokker 100 [77, 78], on constate que le facteur n critique est plus élevé lorsque la transition est principalement affectée par des instabilités transversales que lorsqu'elle due à des instabilités longitudinales.

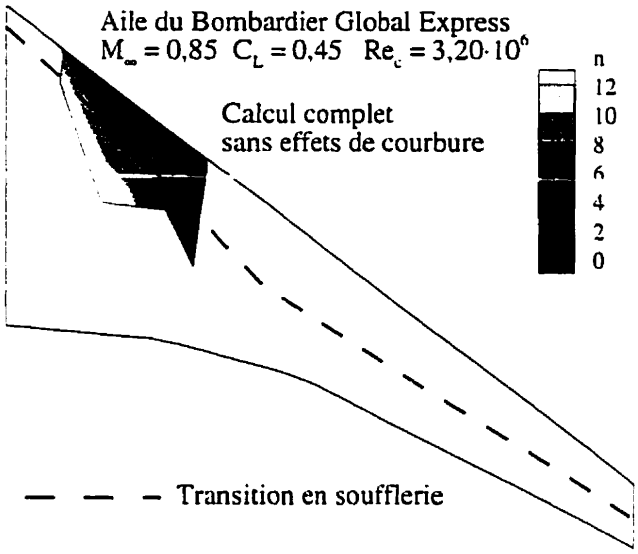

Figure 4.59 Aile du Global Express à Re = $3{,}2 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul complet sans courbure (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

D'un point de vue de prédiction de la transition, on doit pouvoir établir une valeur critique de n à partir des paramètres de l'écoulement moyen. Les résultats présentés à la section précédente et repris aux figures 4.63 et 4.64 nous amènent à supposer qu'un paramètre de corrélation approprié devrait avoir la forme d'un nombre de Reynolds basé sur la corde locale (c'), afin de représenter la variation de n selon l'envergure. Il devrait également faire intervenir l'angle de flèche au bord d'attaque (Λ, aussi variable selon l'envergure), qui affecte de façon déterminante la nature de l'instabilité dominante. Le paramètre proposé est donc défini comme

$$\mathrm{Re}_{c'U} = \frac{Q_\infty c' \cos \Lambda}{\nu_\infty} \tag{4.1}$$

Le facteur n à la transition est représenté en fonction de ce paramètre aux figures 4.65 (calcul complet) et 4.66 (calcul automatisé). Les corrélations établies par régression linéaire sont également présentées sur ces figures. La ligne solide

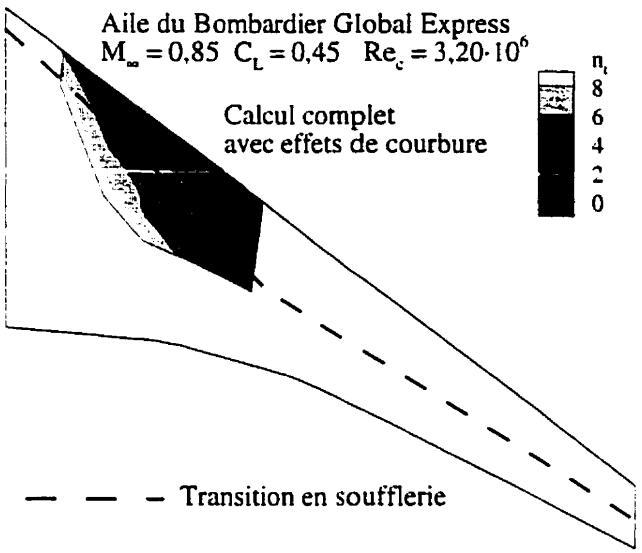

Figure 4.60 Aile du Global Express à Re = $3{,}2 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul complet avec courbure (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

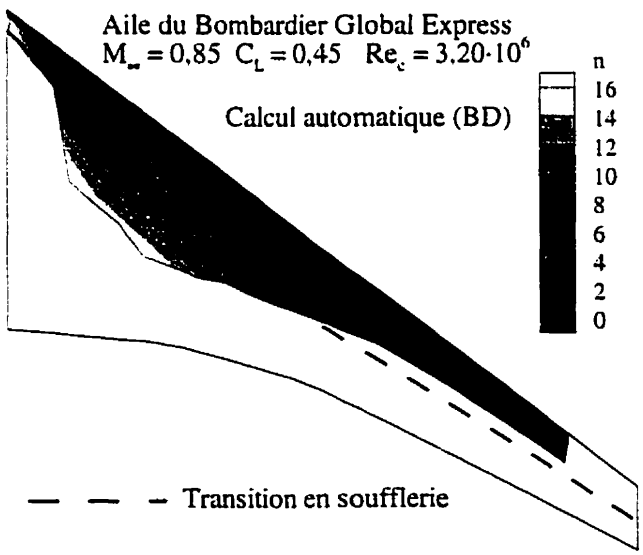

Figure 4.61 Aile du Global Express à Re = $3{,}2 \cdot 10^6$: Facteur n sur l'extrados, calcul automatisé (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

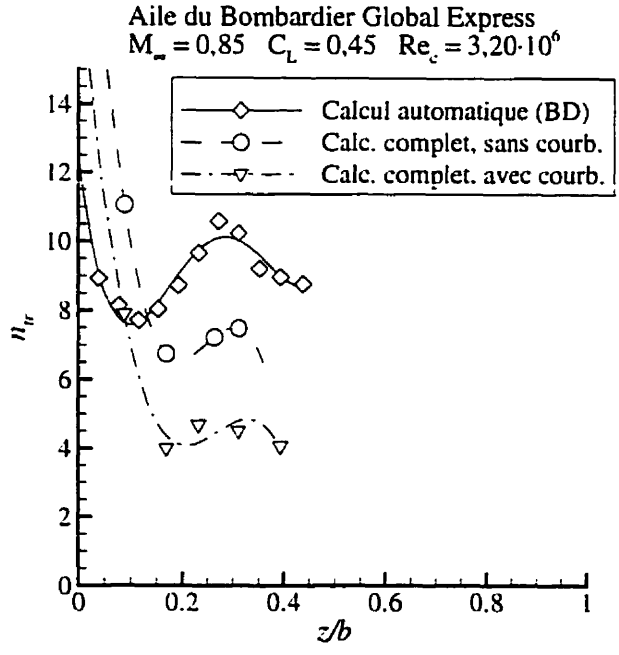

Figure 4.62 Aile du Global Express à Re = $3{,}2 \cdot 10^6$: Facteur n à la transition (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

représente la corrélation obtenue lorsque tous les points sont inclus, alors que le point correspondant au nombre de Reynolds maximum (i.e. près de l'emplanture) est omis dans le calcul de la corrélation représentée en traits interrompus. Les corrélations basées sur des régressions d'ordre supérieur ne présentent pas d'améliorations significatives par rapport aux régressions linéaires, tandis que le fait d'omettre le point le plus près de l'emplanture permet de diminuer l'écart moyen d'environ 10% pour le calcul automatisé et 30% pour le calcul complet.

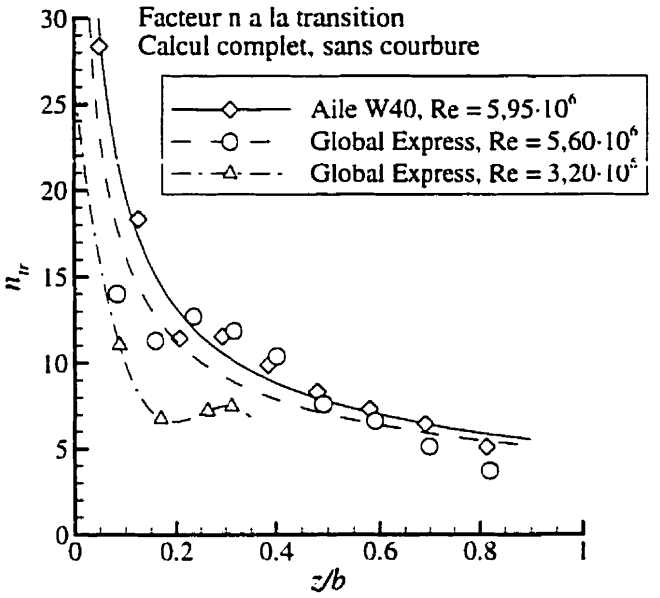

Figure 4.63 Facteur n à la transition – Calcul complet (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

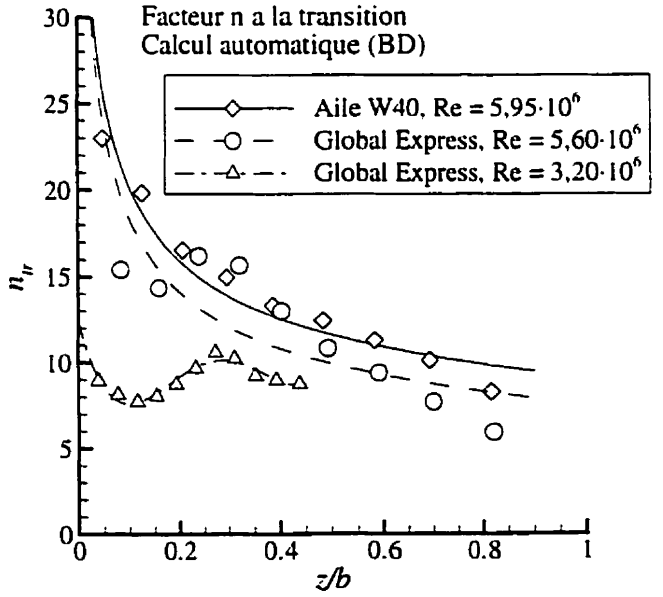

Figure 4.64 Facteur n à la transition – Calcul automatisé (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

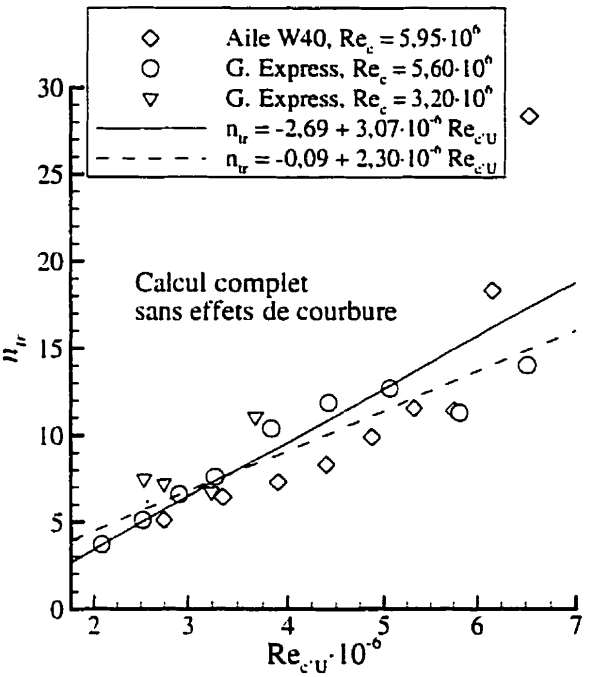

Figure 4.65 Corrélation du facteur n à la transition avec $Re_{c \cdot U}$, calcul complet (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

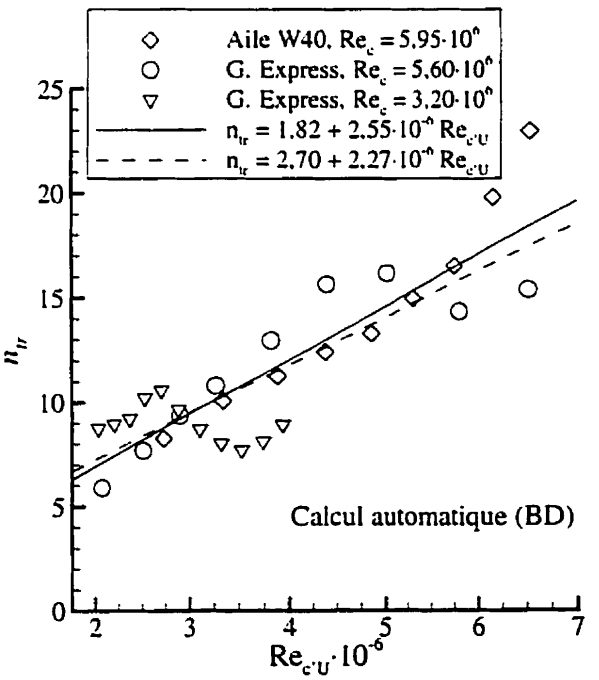

Figure 4.66 Corrélation du facteur n à la transition avec $Re_{c \cdot U}$, calcul automatisé (Ces données demeurent la propriété de Bombardier Inc.)

CONCLUSION

Résumé de la thèse

Tel que mentionné en introduction, l'objectif premier de cette thèse était la conception d'un nouvel outil de prédiction de la transition applicable aux géométries et conditions de vol d'intérêt pratique pour l'industrie aéronautique, soit typiquement des ailes d'assez forte flèche, avec un profil variant selon l'envergure et opérant à des nombres de Mach transsoniques. Au vu de son utilisation dans un contexte industriel, cet outil se devait également d'être fiable et efficace, c'est-à-dire avoir la capacité de reproduire fidèlement et systématiquement les observations expérimentales, et ce avec un temps de calcul aussi court que possible et avec une intervention minimale de l'usager.

L'approche retenue pour atteindre cet objectif consiste en une méthode automatisée de calcul faisant appel à une banque de données de caractéristiques de stabilité pour des écoulements tridimensionnels compressibles. En parallèle au développement de cette méthode, l'influence de certaines propriétés physiques des écoulements sur la stabilité a également été étudiée, afin d'en déterminer l'importance.

- Les objectifs général et spécifiques de la thèse ont été présentés au Chapitre . On y a également décrit le processus physique de la transition laminaire/turbulent ainsi que les différents types d'instabilités qui affectent un écoulement laminaire et leur importance selon que l'écoulement est bi ou tridimensionnel, incompressible ou compressible.

- Au Chapitre I, on a présenté une revue de la littérature concernant la stabilité

et la transition de la couche limite, centrée principalement sur les développements et applications de la théorie linéaire de la stabilité, dans sa formulations parallèle ou non parallèle. Cette emphase a été justifiée du fait que l'outil de calcul proposé devait être utilisable dans un contexte industriel, ce qui, dans l'état actuel de la technologie, éliminait d'emblée les méthodes non linéaires (PSE non linéaires ou simulations numériques directes).

- La théorie linéaire de la stabilité a ensuite été décrite au Chapitre II. On y a d'abord présenté les équations non parallèles de la stabilité, compressibles et incompressibles, puis les équations parallèles, sans et avec effets de courbure. Pour chaque formulation, on a discuté des hypothèses de base quant à la nature de l'écoulement moyen et la forme des fluctuations. La nature différente des équations non parallèles et parallèles (problème de marche en espace vs. problème aux valeurs propres) a également été abordée. On a ensuite présenté les différences entre les formulations temporelle et spatiale applicables au problème aux valeurs propres de l'approche parallèle, avant de conclure le chapitre par la présentation de la méthode de prédiction de la transition basée sur le facteur n.

- Les méthodes numériques proposées ont été présentées au Chapitre III. On a d'abord présenté la méthode employée pour la résolution de l'écoulement moyen, laquelle consiste en un code Euler pour le fluide parfait et un code de calcul de la couche limite tridimensionnelle compressible.

  La résolution des équations non parallèles de stabilité a ensuite été abordée. On a défini l'amplitude globale (physique) d'une perturbation ainsi que les taux d'amplification et nombre d'onde correspondants, de même que la condition de normalisation nécessaire à la fermeture du système PSE. La procédure itérative de marche en espace a ensuite été présentée.

La méthode de résolution des équations parallèles de stabilité a aussi été discutée. Ceci a compris la discrétisation des équations, le calcul des termes de courbure, la stratégie de solution du problème aux valeurs propres combinant une méthode globale et une méthode locale, la définition des procédures de suivi d'instabilités et enfin la détermination de la trajectoire d'intégration du facteur n.

On a finalement présenté la méthode proposée de calcul automatisé des caractéristiques de stabilité. Les équations de la couche limite tridimensionnelle compressible modèle ont été développées, puis la procédure de couplage entre celle-ci et la couche limite physique étudiée a été décrite. On a terminé par une description de la structure de la base de données de caractéristiques de stabilité et une étude de l'influence relative des divers paramètres de celle-ci.

- Les résultats obtenus ont ensuite été présentés et analysés au Chapitre IV. On a d'abord présenté un exemple complet d'application des outils de calcul de l'écoulement moyen et de la stabilité sur l'aile en flèche NASA AMES en écoulement transsonique. La comparaison de ces résultats avec ceux provenant d'une formulation conique (quasi-tridimensionnelle) a permis d'illustrer l'influence non négligeable des gradients transversaux de l'écoulement moyen sur la stabilité.

  L'influence des effets non parallèles a ensuite été étudiée pour les cas des ailes en flèche d'envergure infinie au profil ONERA D et AFVD 82, en écoulement incompressible. Cette étude a permis d'établir que les effets non parallèles influençaient particulièment les instabilités transversales, en augmentant leurs taux d'amplification, résultant en des facteurs n plus élevés. L'inclusion des effets non parallèles n'a cependant pas permis de réduire appréciablement la variation du facteur n critique observée dans les résultats parallèles.

L'influence des effets de courbure sur les caractéristiques de stabilité d'écoulements incompressible et compressible sur des ailes en flèche d'envergure infinie a ensuite été considérée. Ceci a confirmé la forte influence stabilisatrice de la courbure de surface sur les ondes transversales et son effet à peu près nul sur les instabilités longitudinales. On a également démontré l'influence négligeable de la courbure des lignes de courant en écoulement compressible. Comme pour les effets non parallèles, des comparaisons avec des essais en soufflerie sur l'aile du Bombardier Global Express ont cependant démontré que l'inclusion des termes de courbure dans les équations de stabilité ne permettait pas vraiment d'améliorer la prédiction de la transition avec le facteur n.

La seconde moitié du Chapitre IV a été consacrée aux résultats obtenus par la méthode automatisée de calcul de la stabilité. Des comparaisons entre les résultats du calcul automatisé et ceux provenant de la résolution complète des équations de stabilité, ont permis d'établir que la méthode automatisée prédisait correctement l'évolution des caractéristiques de stabilité ainsi que les facteurs n. Les facteurs n prédits ont été corrélés avec la position de transition déterminée expérimentalement en soufflerie pour l'aile conique AS409 ainsi que pour des ailes d'avions d'affaires de Bombardier. On a constaté que la méthode automatisée prédisait des facteurs n généralement supérieurs à ceux provenant de la résolution complète du problème aux valeurs propres. On a cependant aussi observé une variation selon l'envergure du facteur n à la transition sur les ailes vraiment tridimensionnelles qui est plus importante que la différence entre les deux méthodes. Afin d'améliorer la prédiction de la transition, une relation entre le facteur n critique et un nombre de Reynolds basé sur la corde et la flèche locales et donc variant selon l'envergure a été proposée.

Réalisations et contributions

1. Formulation tridimensionnelle complète

L'approche "classique" de la stabilité linéaire et parallèle a ici été développée et appliquée pour des écoulements sur des ailes tridimensionnelles quelconques en régime transsonique. Par géométrie quelconque, on entend que l'aile est d'envergure finie et peut présenter des profils, angles de flèche et cambrures différents d'une section à l'autre selon l'envergure. On n'a donc pas fait appel aux hypothèses d'aile en flèche d'envergure infinie ou d'aile conique généralement employées dans la littérature concernant la stabilité d'écoulements tridimensionnels. Ceci se reflète surtout au niveau des calculs de fluide parfait et de couche limite où l'on ne peut assumer l'invariance selon la direction transversale de l'écoulement moyen, mais aussi dans les calculs de stabilité mêmes, par la détermination de la trajectoire d'intégration du facteur n et le choix des profils de couche limite à utiliser dans ces calculs.

Les résultats présentés à la Section 4.1 indiquent le bien-fondé de l'approche tridimensionnelle complète en montrant que les résultats de celle-ci (profils de couche limite et facteur n) sur l'aile en flèche NASA AMES peuvent être considérablement différents de ceux obtenus en faisant l'hypothèse locale d'aile conique.

2. Procédures systématiques de localisation des instabilités

Des procédures d'identification et de suivi des instabilités ont été développées afin d'aider à la compréhension des phénomènes et au bon choix des paramètres des calculs de stabilité. Les diagrammes de stabilité, présentés entre autres à la figure 4.4 se sont avérés être une représentation graphique originale et extrêmement utile des caractéristiques locales de stabilité. Ils permettent d'identifier facilement les différents types d'instabilités présents en un point donné de l'écoulement.

Deux procédures de suivi d'instabilité en formulation temporelle ont également été présentées (section 3.3.3), pour la maximisation non contrainte ainsi qu'à fréquence spécifiée du taux d'amplification. La première permet d'identifier la variation de la fréquence la plus amplifiée et donc de déterminer la plage de fréquences critiques, tandis que la seconde est utilisée pour le calcul du facteur n. Toutes deux sont basées sur la relation de dispersion et permettent de converger rapidement et systématiquement vers l'optimum recherché.

3. Étude des effets de courbure en écoulements compressibles

L'étude des effets de courbure en écoulements compressibles a permis de confirmer l'influence potentiellement fortement stabilisatrice de la courbure de surface ainsi que l'influence relativement négligeable de la courbure des lignes de courant, tel que démontré précédemment en écoulements incompressibles [46]. On a également pu démontrer, grâce aux diagrammes de stabilité (voir figure 4.23), que l'influence beaucoup plus forte de la courbure sur les instabilités transversales que sur les instabilités longitudinales n'était pas liée uniquement au fait que les premières apparaissent typiquement dans des régions de plus grande courbure que les secondes, mais relevait bien d'un phénomène d'influence sélective. Les études réalisées mènent cependant à la conclusion que l'ajout des termes de courbure dans la formulation parallèle des équations de stabilité ne permet pas d'améliorer la prédiction de la transition par la méthode du facteur n.

4. PSE linéaires incompressibles

Le développement d'une méthode de prédiction de la transition basée sur les équations parabolisées linéaires de la stabilité constitue une réalisation importante de cette thèse. Bien que de telles méthodes existent déjà en France et aux États-Unis, il s'agit à notre connaissance de la première application des PSE dans un code

disponible pour l'industrie aéronautique canadienne, et une base de départ pour de futurs développements.

5. Étude des effets non parallèles

Une étude détaillée des effets non parallèles sur la stabilité d'écoulements incompressibles a permis d'établir la forte influence déstabilisatrice de ceux-ci sur les instabilités transversales et leur influence relativement négligeable sur les fluctuations longitudinales. Comme pour les effets de courbure, on doit cependant conclure que l'inclusion des effets non parallèles ne permet pas d'obtenir une meilleure corrélation du facteur n à la transition.

6. Méthode automatisée de prédiction de la transition

La contribution principale de cette thèse consiste en une méthode automatisée de prédiction de la transition, d'usage relativement facile et requérant un minimum d'intervention de la part de l'usager. Cette méthode fait appel à une base de données de caractéristiques de stabilité construite à partir d'une couche limite modèle tridimensionnelle compressible. Des comparaisons entre la solution complète du problème aux valeurs propres et la méthode automatisée ont permis d'établir que cette dernière prédisait correctement l'évolution générale des caractéristiques de stabilité, même si des différences existent quant aux valeurs absolues.

7. Corrélation des prédictions avec la position expérimentale de transition sur des ailes de Bombardier

Des visualisations de la position de transition sur des ailes de Bombardier ont permis de valider les prédictions faites par les méthodes automatisée et complète. La conclusion de cette étude est que quelle que soit la méthode employée, une valeur unique du facteur n ne permet pas de corréler la position expérimentale de la transition. On observe en effet avec les deux méthodes une variation du facteur

n critique selon l'envergure. On a donc proposé l'emploi d'un facteur n critique variable, fonction d'un nombre de Reynolds basé sur la corde et l'angle de flèche locaux.

8. Publications

Les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse ont fait l'objet de nombreuses publications. Trois articles ont été publiés dans les journaux *Aerospace Science and Technology*, *Journal of Aircraft* et *Journal aéronautique et spatial du Canada*. Onze articles sont également apparus dans les comptes-rendus de conférences de l'International Council of the Aeronautical Sciences, de l'American Institute of Aeronautics and Astronautics, de l'Institut aéronautique et spatial du Canada ainsi que de la Société de CFD du Canada, notamment. Une liste complète de ces publications figure à l'Annexe III.

Apport à l'industrie

Les codes de calcul de la stabilité et de prédiction de la transition développés dans le cadre de cette thèse (code LST avec solution complète et automatisée ainsi que code PSE linéaire incompressible) ont tous été implantés chez Bombardier Aéronautique, dans le département d'Aérodynamique avancée. La méthode automatisée de prédiction de la transition est particulièrement utilisée pour la préparation des essais en soufflerie.

Suggestions de travaux futurs

Les travaux à réaliser dans la continuité de cette thèse s'articulent principalement dans deux directions: le développement de l'approche PSE et l'amélioration de la méthode automatisée de prédiction de la transition.

- Développement de l'approche PSE

  La méthode développée devrait d'abord être étendue aux écoulements compressibles, afin de pouvoir être appliquée aux conditions de vol typiques de l'aviation commerciale. Dans le même ordre d'idées, la formulation PSE implique une direction privilégiée de l'écoulement dans laquelle les effets non parallèles se manifestent. S'il est facile d'identifier cette direction comme la normale au bord d'attaque pour une aile d'envergure infinie, il n'en est pas de même pour une aile réelle de géomtrie arbitraire. L'application des PSE à de telles géométries pourrait probablement se faire par l'utilisation, en chaque point de calcul, d'un système local de coordonnées orienté selon le gradient maximum de l'écoulement moyen. L'introduction des termes de courbure dans les équations PSE constitue une autre possibilité intéressante d'extension, puisque ceux-ci sont du même ordre que les termes non parallèles mais d'influence opposée.

  L'implantation des PSE non linéaires, compressibles ou incompressibles, constitue un autre champ très vaste d'applications, qui permettrait d'étudier des phénomènes comme la réceptivité des écoulements aux perturbations externes, l'influence de la rugosité de surface et les instabilités secondaires.

- Amélioration de la méthode automatisée

  Les résultats présentés à la section 4.4.1 ont démontré qu'une des principales faiblesses du modèle employé pour la couche limite tridimensionnelle compressible résidait dans son incapacité à prédure des profils transversaux avec point d'inflexion (profils en S). La recherche d'une couche limite modèle pouvant mieux reproduire le profil de vitesse transversale des couches limites réelles constitue donc une voie possible d'amélioration de la méthode. Une autre possibilité consisterait à utiliser un réseau de neurones dont l'apprentissage

serait fait sur des couches limites réelles sur des ailes d'intérêt pratique, ce qui permettrait d'éliminer la nécessité d'une couche limite modèle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] COUSTEIX, J. et SCHMITT, V. (1997) Réduction de la trainée aérodynamique. *Nouvelle revue d'aéronautique et d'astronautique*, no. 1997-1, 34–41.

[2] KINGSLEY-JONES, M. (1998) Airbus plans laminar flow tests in bid to bring down fuel costs. *Flight International magazine*, 153, no. 4627, 41.

[3] MACK, L. (1979) On the Stability of the Boundary Layer on a Transonic Swept Wing. AIAA Paper 79-0264.

[4] MALIK, M. et ORSZAG, S. (1981) Efficient Computation of the Stability of Three-Dimensional Compressible Boundary Layers. AIAA Paper 81-1277.

[5] CEBECI, T. et CHEN, H. (1992) Numerical Method for Predicting Transition in Three-Dimensional Flows by Spatial Amplification Theory. *AIAA Journal*, 30, no. 8, 1972–1979.

[6] SPALL, R. et WIE, Y.-S. (1993) Stability Theory and Transition Prediction Applied to a General Aviation Fuselage. *Journal of Aircraft*, 30, 161–167.

[7] IYER, V., SPALL, R. et DAGENHART, J. (1994) Computational Study of Transition Front on a Swept Wing Leading-Edge Model. *Journal of Aircraft*, 31, 72–78.

[8] MARTINUZZI, R., MIRSHAMS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1993) Transition for Three-Dimensional Boundary Layers on Wings in the Transonic Regime. AIAA Paper 93-3049.

[9] MASSON, C., MARTINUZZI, R., LANGLOIS, M., PARASCHIVOIU, I. et TEZOK, F. (1995) Transition Prediction Capabilities for Conical Wings in the Transonic Regime. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 41, no. 1, 28–39.

[10] VIKEN, J., COLLIER, F., WAGNER, R. et BARTLETT, D. (1989) On the Stability of Swept Wing Laminar Boundary Layers Including Curvature Effects. Dans *Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, 381–388.

[11] RESHOTKO, M. (1984) Environment and Receptivity. Dans *AGARD R-709*.

[12] HUSSAINI, M. et VOIGT, R., éds. (1990) *Instability and Transition*, 1, Springer-Verlag.

[13] ARNAL, D. (1993) Boundary Layer Transition: Predictions based on Linear Theory. Dans *AGARD AR-793*.

[14] HERBERT, T. (1988) Secondary instability of boundary layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 20, 487–526.

[15] MORKOVIN, M. (1993) Bypass-Transition Research: Issues and Philosophy. Dans *Instabilities and Turbulence in Engineering Flows* (ASHPIS, D. *et al.*, éds.), 3–30, Kluwer Academic Publishers.

[16] SCHMITT, V. et HINSINGER, R. (1996) Advanced transport aircraft aerodynamics in cooperation with Airbus Industrie. *La Recherche aérospatiale*, no. 1996-4, 265–277.

[17] (1984) *Special Course on Stability and Transition of Laminar Flow*. AGARD R-709.

[18] (1992) *Special Course on Skin Friction Drag Reduction*. AGARD AR-786.

[19] (1993) *Special Course on Progress in Transition Modelling*. AGARD AR-793.

[20] PARASCHIVOIU, I., éd. (1993) *Proceedings of the First Bombardier International Workshop on Aircraft Icing and Boundary-Layer Stability and Transition*.

[21] DUCK, P. et HALL, P., éds. (1995) *Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers*. Kluwer Academic Publishers.

[22] SARIC, W. (1993) Physical Description of Boundary-Layer Transition: Experimental Evidence. Dans *AGARD AR-793*.

[23] REED, H. (1993) Direct Numerical Simulation of Transition: The Spatial Approach. Dans *AGARD AR-793*.

[24] TOLLMIEN, W. (1929) Über die Entstehung der Turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 21–44.

[25] SCHLICHTING, H. (1933) Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 181–208.

[26] TOLLMIEN, W. (1935) Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindingkeitsverteilungen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, no. 50, 79–114.

[27] SCHUBAUER, G. et SKRAMSTAD, H. (1948) Laminar Boundary Layer Oscillations and Stability of Laminar Flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14, 69–79.

[28] ROSS, J., BARNES, F., BURNS, J. et ROSS, M. (1970) The Flat Plate Boundary Layer. Part 3. Comparison of Theory and Experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 43, 819–832.

[29] KURTZ, E. et CRANDALL, S. (1962) Computer-Aided Analysis of Hydrodynamic Stability. *Journal of Mathematics and Physics*, 44, 264–279.

[30] OBREMSKI, H., MORKOVIN, M. et LANDAHL, M. (1969) A Portfolio of Stability Characteristics of Incompressible Boundary Layers. AGARDograph 97 (1).

[31] LEES, L. et LIN, C. (1946) Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layer in a Compressible Fluid. Rapport NACA TN-1115.

[32] MACK, L. (1965) Stability of the Compressible Laminar Boundary Layer According to a Direct Numerical Solution. AGARDograph 97 (1).

[33] MACK, L. (1975) Linear Stability and the Problem of Supersonic Boundary Layer Transition. *AIAA Journal*, 13, no. 3, 278–289.

[34] MACK, L. (1977) Transition Prediction and Linear Stability Theory. Dans *AGARD CP-224*.

[35] MACK, L. (1981) Compressible Boundary Layer Stability Calculations for Sweptback Wings with Suction. *AIAA Journal*, 20, 363–369.

[36] MACK, L. (1984) Boundary Layer Linear Stability Theory. Dans *AGARD AR-709*.

[37] SROKOWSKI, A. et ORSZAG, S. (1977) Mass Flow Requirements for LFC Wing Design. AIAA Paper 77-1222.

[38] VAN INGEN, J. (1956) A Suggested Semi-Empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region. Rapport VTH-74. Dép. de génie mécanique, TU Delft.

[39] SMITH, A. et GAMBERONI, N. (1956) Transition, Pressure Gradient and Stability Theory. Rapport ES 26388, Douglas Aircraft Co.

[40] CEBECI, T. et KELLER, H. (1977) Stability Calculations for a Rotating Disk. Dans *AGARD CP-227*.

[41] CEBECI, T. et STEWARTSON, K. (1979) On Stability and Transition in Three-Dimensional Flows. *AIAA Journal*, 18, no. 4, 398–405.

[42] CEBECI, T. et STEWARTSON, K. (1980) On the Prediction of Transition in Three-Dimensional Flows. Dans *Proceedings of IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, 243–252, Springer-Verlag.

[43] CEBECI, T., CHEN, H., ARNAL, D. et HUANG, T. (1991) Three-Dimensional Linear Stability Approach to Transition on Wings and Bodies of Revolution at Incidence. *AIAA Journal*, 29, no. 12, 2077–2085.

[44] CEBECI, T., CHEN, H. et KAUPS, K. (1992) Further Consideration of the Effect of Curvature on the Stability of Three-Dimensional Flows. *Computers & Fluids*, 21, no. 4, 491–502.

[45] MALIK, M. et POLL, D. (1985) Effect of Curvature on Three-Dimensional Boundary-Layer Stability. *AIAA Journal*, 23, no. 9, 1362–1369.

[46] CEBECI, T., CHEN, H. et KAUPS, K. (1994) Linear Stability Analysis of Three-Dimensional Flows with Surface Curvature: Effects of Sweep Angle and Reynolds Number. AIAA Paper 94-0827.

[47] CEBECI, T., CHEN, H. et ARNAL, D. (1994) Natural Transition in Compressible Flows on Wings: Spatial Theory and Experiment. AIAA Paper 94-0824.

[48] MALIK, M. et ORSZAG, S. (1980) Comparison of Methods for Prediction of Transition by Stability Analysis. *AIAA Journal*, 18, no. 12, 1485–1489.

[49] MALIK, M., WILKINSON, S. et ORSZAG, S. (1981) Instability and Transition in Rotating Disk Flow. *AIAA Journal*, 19, no. 9, 1131–1138.

[50] MALIK, M. et BALAKUMAR, P. (1993) Linear Stability of Three-Dimensional Boundary Layers: Effect of Curvature and Non-Parallelism. AIAA Paper 93-0079.

[51] COLLIER, F. et MALIK, M. (1988) Curvature Effects on the Stability of Three-Dimensional Laminar Boundary Layers. Dans *AGARD CP-438*.

[52] COLLIER, F., BARTLETT, D., WAGNER, R., TAT, V. et ANDERSON, B. (1989) Correlation of Boundary Layer Stability Analysis with Flight Transition Data. Dans *Proceedings of the Third IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, 337–346.

[53] MASAD, J. et MALIK, M. (1994) Effects of body curvature and nonparallelism on the stability of flow over a swept cylinder. *Physics of Fluids*, 6, no. 7, 2363–2379.

[54] SPALL, R. et MALIK, M. (1992) Linear Stability of Three-Dimensional Boundary Layers over Axisymmetric Bodies at Incidence. *AIAA Journal*, 30, no. 4, 905–913.

[55] ARNAL, D., HABIBALLAH, M. et COUSTOLS, E. (1984) Théorie de l'instabilité laminaire et critères de transition en écoulement bi et tridimensionnel. *La Recherche Aérospatiale*, no. 1984-2, 125–143.

[56] ARNAL, D. (1986) Établissement et résolution des équations de stabilité en écoulement compressible. Exemples de résultats. Rapport OA 35/5018, ONERA/CERT.

[57] HABIBALLAH, M. (1981) *Analyse de l'instabilité des couches limites laminaires et prévision de la transition du régime laminaire au régime turbulent.* Thèse de doctorat, ENSAE, Toulouse.

[58] NIETHAMMER, R. (1991) Boundary layer stability computations related to laminar flow experiments at low temperatures. Rapport de stage, DERAT, ONERA/CERT.

[59] LABURTHE, F. (1992) *Problème de stabilité linéaire et prévision de la transition dans des configurations tridimensionnelles, incompressibles et compressibles.* Thèse de doctorat, ENSAE, Toulouse.

[60] HERBERT, T. (1991) Boundary-Layer Transition — Analysis and Prediction Revisited. AIAA Paper 91-0737.

[61] BERTOLOTTI, F. (1991) *Linear and Nonlinear Stability of Boundary Layers with Streamwise Varying Properties.* Thèse de doctorat, Ohio State University, Columbus.

[62] BERTOLOTTI, F., HERBERT, T. et SPALART, P. (1992) Linear and Nonlinear Stability of the Blasius Boundary Layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 242, 441–474.

[63] CASALIS, G. (1994) Transition de la couche limite — Extension de l'approche PSE aux écoulements tridimensionnels. Rapport DERAT no. 89/5118.03, ONERA/CERT.

[64] MALIK, M. et LI, F. (1993) Transition Studies for Swept Wing Flows Using PSE. AIAA Paper 93-0077.

[65] STUCKERT, G., HERBERT, T. et ESFAHANIAN, V. (1993) Stability and Transtion on Swept Wings. AIAA Paper 93-0078.

[66] STOCK, H. et DEGENHART, E. (1989) A simplified e^n method for transition prediction in two-dimensional, incompressible boundary layers. *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.*, 13, 16–30.

[67] DINI, P., SELIG, M. et MAUGHMER, M. (1992) Simplified Linear Stability Transition Prediction Method for Separated Boundary Layers. *AIAA Journal*, 30, no. 8, 1953–1961.

[68] GASTER, M. et JIANG, F. (1994) A Rapid Scheme for Estimating Transition on Wings by Linear Stability Theory. Dans *ICAS Proceedings 1994 (19th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, 1104–1113.

[69] FULLER, R., SAUNDERS, W. et VANDSBURGER, U. (1997) Neural Network Estimation of Disturbance Growth Using a Linear Stability Numerical Model. AIAA Paper 97-0559.

[70] SCHRAUF, G., HERBERT, T. et STUCKERT, G. (1995) Evaluation of Transition in Flight Tests using Non-Linear PSE Analysis. Dans *Proceedings of the AIAA 13th Applied Aerodynamics Conference*, 312–321.

[71] LANGLOIS, M., MASSON, C. et PARASCHIVOIU, I. (1995) Transition Prediction in Three-Dimensional Transonic Flows. Dans *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow (Proceedings of the Ninth Conference)*, 1, 193–504.

[72] AIRIAU, C. (1994) *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire incompressible par un système d'équations parabolisé (PSE).* Thèse de doctorat, ENSAE, Toulouse.

[73] HERBERT, T. et BERTOLOTTI, F. (1987) Stability Analysis of Nonparallel Boundary Layers. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 32.

[74] BERTOLOTTI, F. (1991) Compressible Boundary Layer Stability Analyzed with the PSE Equations. AIAA Paper 91-1637.

[75] GASTER, M. (1962) A note on a relation between temporally increasing and spatially increasing disturbances in hydrodynamic stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 14, 222–224.

[76] COPIE, M.-L. (1996) *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite pour un fluide incompressible avec l'approche PSE.* Thèse de doctorat, ENSAE, Toulouse.

[77] SCHRAUF, G. (1994) Transition prediction using different linear stability analysis strategies. Dans *Proceedings of the AIAA 12th Applied Aerodynamics Conference*, 367–375.

[78] SCHRAUF, G., PERRAUD, J., VITIELLO, D. et LAM, F. (1997) A comparison of linear stability theories using F100-flight tests. Dans *Proceedings of the AIAA 15th Applied Aerodynamics Conference*, 740–750.

[79] JAMESON, A., SCHMIDT, W. et TURKEL, E. (1981) Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. AIAA Paper 81-1259.

[80] MAJOR, S. (1992) Solution of the 3-D Equations using a Multigrid Method. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

[81] HOUDEVILLE, R., MAZIN, C. et CORJON, A. (1993) Méthode de caractéristiques pour le calcul des couches limites tridimensionnelles. *La Recherche Aérospatiale*, no. 1993-1, 37–49.

[82] MALIK, M., CHUANG, S. et HUSSAINI, M. (1982) Accurate numerical solution of compressible, linear stability equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 33, 189–201.

[83] LANGLOIS, M., CASALIS, G. et ARNAL, D. (1998) On the Practical Application of the PSE Approach to Linear Stability Analysis. *Aerospace Science and Technology*, 2, no. 3, 167–176.

[84] BOIVIN, S. (1997) Étude des effets non parallèles sur la stabilité d'un écoulement tridimensionnel compressible. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal.

[85] MOLER, C. et STEWART, W. (1973) An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems. *SIAM Journal for Numerical Analysis*, 10, no. 2, 241.

[86] MASSON, C., MARTINUZZI, R., MIRSHAMS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1995) Natural Transition in Transonic Flows using an Efficient Temporal/Spatial Formulation. AIAA Paper 95-0778.

[87] DEWEY, C. et GROSS, J. (1967) Exact Similar Solutions of the Laminar Boundary-Layer Equations. *Advances in Heat Transfer*, 4, 317–446.

[88] (1985) *Test Cases for Inviscid Flow Field Methods*. AGARD AR-211.

[89] MASSON, C., LANGLOIS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1995) Influence of Spanwise Pressure Gradients on Transition Prediction in Transonic Flows. Dans *Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary-Layers*, 157–166, IUTAM.

[90] ARNAL, D. et JUILLEN, J. (1987) Three-Dimensional Transition Studies at ONERA/CERT. AIAA Paper 87-1335.

[91] CASALIS, G. (1989) Résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld en tridimensionnel et en incompressible par une méthode de Galerkin avec les polynômes de Chebichev: le code COCIP. Rapport DERAT 46/5618, ONERA/CERT.

[92] LANGLOIS, M. et CASALIS, G. (1996) Étude détaillée des effets non parallèles sur la stabilité linéaire d'écoulements incompressibles sur une aile en flèche d'envergure infinie. Rapport DERAT 118/5618.24, ONERA/CERT.

[93] MASSON, C. et PARASCHIVOIU, I. (1990) Description et comparaison de cinq méthodes de panneaux en deux dimensions. Rapport EPM/RT-90/17, École Polytechnique de Montréal.

[94] KAUPS, K. et CEBECI, T. (1977) Compressible Laminar Boundary Layers with Suction on Swept and Tapered Wings. *Journal of Aircraft*, 14, 661–667.

[95] MASSON, C., BOIVIN, S., LANGLOIS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1997) Curvature and Nonparallel Effects in 3-D Compressible Transition Analysis. AIAA Paper 97-0824.

[96] ARCHAMBAUD, J., PAYRY, M. et SERAUDIE, A. (1989) Étude expérimentale de la laminarité sur l'aile AS409 jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 14 millions dans la soufflerie T2. Rapport 33/5006-19, ONERA.

[97] PÉPIN, F. (1998) Results of a High-Speed Wind Tunnel Test on a 0.07 Scale Model (TWT648). Rapport MAA-100-101, Bombardier Aéronautique.

ANNEXE I

ÉQUATIONS PSE DISCRÉTISÉES

Système semi-discrétisé

Les coefficients non nuls de l'équation (3.6) sont:

$$
\begin{aligned}
M_1^{(1,5)} &= 1 \\
M_1^{(2,1)} &= -i\alpha - \frac{1-\delta' x}{\Delta x} \\
M_1^{(2,3)} &= -i\beta \\
M_1^{(2,5)} &= \delta' \underset{\sim}{y} \\
M_2^{(2)} &= \frac{1-\delta' x}{\Delta x}\hat{u}_{j-1} \\
M_1^{(3,6)} &= 1 \\
M_1^{(4,1)} &= i\alpha V + \frac{\delta' \underset{\sim}{y}}{\mathrm{Re}}\left\{ i\mathrm{Re}\,(\alpha U + \beta W - \omega) - \mathrm{Re}\frac{dV}{d\underset{\sim}{y}} - i\alpha(\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha) \right. \\
&\quad \left. +\alpha^2 + \beta^2 - i\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \alpha\delta'\right)\right\} \\
M_1^{(4,2)} &= -i(\alpha U + \beta W - \omega) - \frac{dV}{d\underset{\sim}{y}} + \delta' \underset{\sim}{y}\frac{\partial U}{\partial \underset{\sim}{y}} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left\{\alpha^2 + \beta^2 - i\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \alpha\delta'\right)\right\} \\
&\quad -(1-\delta' x)\frac{\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha}{\mathrm{Re}\,\Delta x} \\
M_1^{(4,3)} &= i\beta V - \frac{i\beta\delta' \underset{\sim}{y}}{\mathrm{Re}}(\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha) \\
M_1^{(4,4)} &= i\alpha\delta' \underset{\sim}{y} \\
M_1^{(4,5)} &= \delta' \underset{\sim}{y} V + \frac{\delta' - i\alpha}{\mathrm{Re}} - \frac{1-\delta' x}{\mathrm{Re}\,\Delta x} \\
M_1^{(4,6)} &= -\frac{i\beta}{\mathrm{Re}} \\
M_2^{(4)} &= (1-\delta' x)\frac{(\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha)\hat{v}_{j-1} + \hat{u}'_{j-1}}{\mathrm{Re}\,\Delta x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_1^{(5,1)} &= i\mathrm{Re}\,(\alpha U + \beta W - \omega) - \mathrm{Re}\frac{dV}{d\mathfrak{y}} + \alpha^2 + \beta^2 - i\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \alpha\delta'\right) \\
&\quad +(1-\delta' x)\frac{\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha}{\Delta x} \\
M_1^{(5,2)} &= \mathrm{Re}\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{y}} \\
M_1^{(5,4)} &= i\mathrm{Re}\alpha \\
M_1^{(5,5)} &= (2i\alpha - \mathrm{Re}\,U)\delta'\mathfrak{y} + \mathrm{Re}V \\
M_2^{(5)} &= -(1-\delta' x)\frac{\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha}{\Delta x}\hat{u}_{j-1} \\
M_1^{(6,1)} &= \frac{1}{U}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \mathfrak{y}^2} - \mathrm{Re}V\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{y}}\right) \\
M_1^{(6,2)} &= \mathrm{Re}\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{y}} \\
M_1^{(6,3)} &= i\mathrm{Re}\,(\alpha U + \beta W - \omega) + \alpha^2 + \beta^2 - i\left(\frac{d'\alpha}{dx'} - \alpha\delta'\right) + (1-\delta' x)\frac{\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha}{\Delta x} \\
M_1^{(6,4)} &= i\beta\mathrm{Re} \\
M_1^{(6,6)} &= (2i\alpha - \mathrm{Re}\,U)\delta'\mathfrak{y} + \mathrm{Re}V \\
M_2^{(6)} &= -(1-\delta' x)\frac{\mathrm{Re}\,U - 2i\alpha}{\Delta x}\hat{w}_{j-1}
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= x_j - x_{j-1} \\
\hat{\phi}' &= \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \mathfrak{y}}
\end{aligned}
$$

Les indices supérieurs indiquent le numéro de l'équation et de la variable. et les équations sont:

1. $\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = \hat{u}'$

2. continuité

3. $\frac{\partial \hat{w}}{\partial y} = \hat{w}'$

4. quantité de mouvement en $\mathfrak{y}$

5. quantité de mouvement en x

6. quantité de mouvement en z

Discrétisation en y

Pour une variable ϕ quelconque, le schéma compact de Hirsch s'exprime comme suit:

$$\phi^k - \phi^{k-1} = \frac{\Delta y_k}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}{}^k + \frac{\partial \phi}{\partial y}{}^{k-1}\right) - \frac{\Delta y_k^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}{}^k - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}{}^{k-1}\right) + \mathcal{O}(\Delta y_k^4) \qquad (I.1)$$

où $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

En substituant d'abord la dérivée par rapport à y de l'équation (3.6) dans (I.1), puis (3.6) dans l'équation résultante, on obtient le système suivant:

$$E^k \hat{\mathbf{\Psi}}^k + G^k \hat{\mathbf{\Psi}}^{k-1} = F^k \qquad (I.2)$$

dans lequel

$$\begin{aligned}
E^k &= -I + \frac{\Delta y_k}{2} M_1^k - \frac{\Delta y_k^2}{12}\left(\frac{\partial M_1}{\partial y}{}^k + M_1^{k^2}\right) \\
G^k &= I + \frac{\Delta y_k}{2} M_1^{k-1} + \frac{\Delta y_k^2}{12}\left(\frac{\partial M_1}{\partial y}{}^{k-1} + M_1^{k-1^2}\right) \qquad (I.3) \\
F^k &= -\frac{\Delta y_k}{2}(M_2^k + M_2^{k-1}) + \frac{\Delta y_k^2}{12}\left(\frac{\partial M_2}{\partial y}{}^k + M_1^k M_2^k - \frac{\partial M_2}{\partial y}{}^{k-1} - M_1^{k-1} M_2^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

I représente la matrice identité. Les dérivées de M_1 et M_2 qui apparaissent dans les équations ci-dessus sont calculées numériquement à l'aide de schémas centrés d'ordre 2. On notera que l'indice j (maillage en x) a été omis afin d'alléger l'écriture.

Forme tridiagonale

On obtient la forme tridiagonale par blocs donnée par l'équation (3.8) en introduisant dans le système les conditions aux frontières (2.26). Les coefficients de (3.8) sont donnés par:

• $k = 1$:

$$N_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ E_{11}^2 & \cdots & E_{16}^2 \\ E_{21}^2 & \cdots & E_{26}^2 \\ E_{31}^2 & \cdots & E_{36}^2 \end{bmatrix} \quad N_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ G_{11}^2 & & \cdots & \cdots & & G_{16}^2 \\ G_{21}^2 & & \cdots & \cdots & & G_{26}^2 \\ G_{31}^2 & & \cdots & \cdots & & G_{36}^2 \end{bmatrix} \tag{I.4}$$

$$N_3^1 = [0] \qquad P^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \end{bmatrix}$$

• $2 \leq k \leq K - 1$:

$$N_1^k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ E_{11}^{k+1} & \cdots & E_{16}^{k+1} \\ E_{21}^{k+1} & \cdots & E_{26}^{k+1} \\ E_{31}^{k+1} & \cdots & E_{36}^{k+1} \end{bmatrix} \quad N_2^k = \begin{bmatrix} E_{41}^k & \cdots & E_{46}^k \\ E_{51}^k & \cdots & E_{56}^k \\ E_{61}^k & \cdots & E_{66}^k \\ G_{11}^{k+1} & \cdots & G_{16}^{k+1} \\ G_{21}^{k+1} & \cdots & G_{26}^{k+1} \\ G_{31}^{k+1} & \cdots & G_{36}^{k+1} \end{bmatrix} \tag{I.5}$$

$$N_3^k = \begin{bmatrix} G_{41}^k & \cdots & G_{46}^k \\ G_{51}^k & \cdots & G_{56}^k \\ G_{61}^k & \cdots & G_{66}^k \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad P^k = \begin{bmatrix} F_4^k \\ F_5^k \\ F_6^k \\ F_1^{k+1} \\ F_2^{k+1} \\ F_3^{k+1} \end{bmatrix}$$

• $k = K$:

$$N_1^K = [0] \qquad N_2^K = \begin{bmatrix} E_{41}^K & & \cdots & \cdots & & E_{46}^K \\ E_{51}^K & & \cdots & \cdots & & E_{56}^K \\ E_{61}^K & & \cdots & \cdots & & E_{66}^K \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_3^K = \begin{bmatrix} G_{41}^K & \cdots & G_{46}^K \\ G_{51}^K & \cdots & G_{56}^K \\ G_{61}^K & \cdots & G_{66}^K \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad P^K = \begin{bmatrix} F_4^K \\ F_5^K \\ F_6^K \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{I.6}$$

L'indice supérieur sur E, F et G représente l'emplacement dans la couche limite (maillage ayant K points en ξ) alors que les indices inférieurs représentent respectivement le numéro d'équation (ligne) et de variable (colonne).

ANNEXE II

ÉQUATIONS DE STABILITÉ PARALLÈLES DISCRÉTISÉES

Les équations de stabilité parallèles discrétisées peuvent s'exprimer de la façon suivante:

$$A^{(i,m)}\hat{\Psi}^m_{k-1} + B^{(i,m)}\hat{\Psi}^m_k + C^{(i,m)}\hat{\Psi}^m_{k+1} = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

où k est l'indice du maillage en y et i et m représentent respectivement le numéro de l'équation et de la variable. Les équations sont:

1. $\alpha\times$ quantité de mouvement en $x + \beta\times$ quantité de mouvement en z
2. quantité de mouvement en y
3. continuité (exprimée à $j + \frac{1}{2}$)
4. énergie
5. $\alpha\times$ quantité de mouvement en $z - \beta\times$ quantité de mouvement en x

et

$$\hat{\Psi} = \left[\alpha\hat{u} + \beta\hat{w}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{T}, \alpha\hat{w} - \beta\hat{u}\right]^T$$

Les coefficients non nuls de (II.1) sont:

$$\begin{aligned}
A^{(1,1)} &= \eta_k'^2 - \frac{\eta_k''}{2} - \frac{\eta_k'}{2}\Omega_k \left.\frac{dT}{dy}\right|_k \\
A^{(1,2)} &= -i\frac{\eta_k'}{2}(\Gamma - 1)(\alpha^2 + \beta^2) \\
A^{(1,3)} &= -\frac{i\mathrm{Re}}{2\mu_k}(\alpha^2 + \beta^2)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A^{(1,4)} &= -\frac{\eta_k'}{2}\Omega_k\left(\alpha\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k + \beta\left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k\right) \\
B^{(1,1)} &= -2\left(\eta_k'^2 + \frac{i\rho_e T_e \mathrm{Re}}{\mu_k T_k}(\alpha U_k + \beta W_k - \omega) + \Gamma(\alpha^2+\beta^2)\right) \\
B^{(1,2)} &= -\left[\frac{\rho_e T_e \mathrm{Re}}{\mu_k T_k}\left(\alpha\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k + \beta\left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k\right) - i\Omega_k\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k(\alpha^2+\beta^2)\right] \\
B^{(1,3)} &= -\frac{i\mathrm{Re}}{2\mu_k}(\alpha^2+\beta^2) \\
B^{(1,4)} &= \Upsilon_k\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k\left(\alpha\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k + \beta\left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k\right) + \Omega_k\left(\alpha\left.\frac{d^2U}{d\xi^2}\right|_k + \beta\left.\frac{d^2W}{d\xi^2}\right|_k\right) \\
C^{(1,1)} &= \eta_k'^2 + \frac{\eta_k''}{2} + \frac{\eta_k'}{2}\Omega_k\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \\
C^{(1,2)} &= i\frac{\eta_k'}{2}(\Gamma-1)(\alpha^2+\beta^2) \\
C^{(1,4)} &= \frac{\eta_k'}{2}\Omega_k\left(\alpha\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k + \beta\left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k\right) \\
A^{(2,1)} &= -i\frac{\eta_k'}{2}\frac{(\Gamma-1)}{\Gamma} \\
A^{(2,2)} &= \eta_k'^2 - \frac{\eta_k''}{2} - \frac{\eta_k'}{2}\Omega_k\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \\
A^{(2,3)} &= \eta_k'\frac{\mathrm{Re}}{\mu_k\Gamma} \\
B^{(2,1)} &= i\frac{\chi}{\Gamma}\Omega_k\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \\
B^{(2,2)} &= -\left(2\eta_k'^2 + \frac{i\rho_e T_e \mathrm{Re}}{\Gamma\mu_k T_k}(\alpha U_k + \beta W_k - \omega) + \frac{\alpha^2+\beta^2}{\Gamma}\right) \\
B^{(2,3)} &= -\eta_k'\frac{\mathrm{Re}}{\mu_k\Gamma} \\
C^{(2,1)} &= i\frac{\eta_k'}{2}\frac{(\Gamma-1)}{\Gamma} \\
C^{(2,2)} &= \eta_k'^2 + \frac{\eta_k''}{2} + \frac{\eta_k'}{2}\Omega_k\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \\
B^{(3,1)} &= \frac{i}{2} \\
B^{(3,2)} &= -\eta_{k+\frac{1}{2}}' - \frac{1}{2T_{k+\frac{1}{2}}}\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_{k+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{(3,3)} &= \frac{i\kappa \mathrm{M}_e^2(\alpha U_{k+\frac{1}{2}} + \beta W_{k+\frac{1}{2}} - \omega)}{\rho_e T_e} \\
B^{(3,4)} &= -\frac{i}{2T_{k+\frac{1}{2}}}(\alpha U_{k+\frac{1}{2}} + \beta W_{k+\frac{1}{2}} - \omega) \\
C^{(3,1)} &= \frac{i}{2} \\
C^{(3,2)} &= \eta'_{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2T_{k+\frac{1}{2}}} \left.\frac{dT}{d\xi}\right|_{k+\frac{1}{2}} \\
C^{(3,4)} &= -\frac{i}{2T_{k+\frac{1}{2}}}(\alpha U_{k+\frac{1}{2}} + \beta W_{k+\frac{1}{2}} - \omega) \\
A^{(4,1)} &= -\eta'_k (\kappa - 1) \frac{\mathrm{M}_e^2 \mathrm{Pr}}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\alpha \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k + \beta \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k \right) \\
A^{(4,3)} &= \frac{i\mathrm{RePr}}{2\mu_k} (\kappa - 1) \mathrm{M}_e^2 (\alpha U_k + \beta W_k - \omega) \\
A^{(4,4)} &= \eta_k'^2 - \frac{\eta''_k}{2} - \eta'_k \Omega_k \left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \\
A^{(4,5)} &= -\eta'_k (\kappa - 1) \frac{\mathrm{M}_e^2 \mathrm{Pr}}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\alpha \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k - \beta \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k \right) \\
B^{(4,2)} &= -\mathrm{Pr} \left[\frac{\rho_e T_e \mathrm{Re}}{\mu_k T_k} \left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k - 2i (\kappa - 1) \mathrm{M}_e^2 \left(\alpha \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k + \beta \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k \right) \right] \\
B^{(4,3)} &= \frac{i\mathrm{RePr}}{2\mu_k} (\kappa - 1) \mathrm{M}_e^2 (\alpha U_k + \beta W_k - \omega) \\
B^{(4,4)} &= -\left\{ 2\eta'_k + \frac{i\rho_e T_e \mathrm{RePr}}{\mu_k T_k} (\alpha U_k + \beta W_k - \omega) + \alpha^2 + \beta^2 - \right. \\
&\quad \left. (\kappa - 1) \mathrm{M}_e^2 \mathrm{Pr} \Omega_k \left[\left(\left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k \right)^2 + \left(\left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k \right)^2 \right] - \Upsilon_k \left(\left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \right)^2 - \Omega_k \left.\frac{d^2T}{d\xi^2}\right|_k \right\} \\
C^{(4,1)} &= \eta'_k (\kappa - 1) \frac{\mathrm{M}_e^2 \mathrm{Pr}}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\alpha \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k + \beta \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k \right) \\
C^{(4,4)} &= \eta_k'^2 + \frac{\eta''_k}{2} + \eta'_k \Omega_k \left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \\
A^{(5,4)} &= -\frac{\eta'_k}{2} \Omega_k \left(\alpha \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k - \beta \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k \right) \\
A^{(5,5)} &= \eta_k'^2 - \frac{\eta''_k}{2} - \frac{\eta'_k}{2} \Omega_k \left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{(5,2)} &= -\frac{\rho_e T_e \mathrm{Re}}{\mu_k T_k}\left(\alpha \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k - \beta \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k\right) \\
B^{(5,4)} &= \Upsilon_k \left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k \left(\alpha \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k - \beta \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k\right) + \Omega_k \left(\alpha \left.\frac{d^2W}{d\xi^2}\right|_k - \beta \left.\frac{d^2U}{d\xi^2}\right|_k\right) \\
B^{(5,5)} &= -\left(2\eta_k'^2 + \frac{i\rho_e T_e \mathrm{Re}}{\mu_k T_k}(\alpha U_k + \beta W_k - \omega) + \alpha^2 + \beta^2\right) \\
C^{(5,4)} &= \frac{\eta_k'}{2}\Omega_k \left(\alpha \left.\frac{dW}{d\xi}\right|_k - \beta \left.\frac{dU}{d\xi}\right|_k\right) \\
C^{(5,5)} &= \eta_k'^2 + \frac{\eta_k''}{2} + \frac{\eta_k'}{2}\Omega_k \left.\frac{dT}{d\xi}\right|_k
\end{aligned}
$$

η, Γ, Ω et Υ sont tels que définis à la section 2.1.1.3.

ANNEXE III

LISTE DE PUBLICATIONS

Articles publiés dans des revues avec comité de lecture

- LANGLOIS, M., CASALIS, G. et ARNAL, D. (1998). On the Practical Application of the PSE Approach to Linear Stability. *Aerospace Science and Technology*, 2, no. 3, 167-176
- LANGLOIS, M., MASSON, C. et PARASCHIVOIU, I. (1998). Fully-Three-Dimensional Transition Prediction on Swept Wings in Transonic Flows. *Journal of Aircraft*, 35, no. 2, 254-259.
- MASSON, C., MARTINUZZI, R., LANGLOIS, M., PARASCHIVOIU, I. et TEZOK, F. (1995). Transition Prediction Capabilities for Conical Wings in the Transonic Regime. *Journal aéronautique et spatial du Canada*, 41, no. 1, 28-39.

Articles dans des comptes-rendus de conférences avec comité de lecture

- MACDONALD, P., LANGLOIS, M. et KAFYEKE, F. (1999) Transition Prediction and Correlation on Bombardier Wings. Dans *Comptes-rendus du 7ième Symposium d'aérodynamique de l'Institut aéronautique et spatial du Canada*, 387-395.
- LANGLOIS, M., MACDONALD, P., MASSON, C., CASALIS, G. et PARASCHIVOIU, I. (1998) Stability Analysis by the OS and PSE Approaches:

Comparisons with Experiments. ICAS Paper 98-2,8,1. Dans *ICAS Proceedings 1998*, 21st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences.

- LANGLOIS, M., MACDONALD, P., MASSON, C., CASALIS, G. et PARASCHIVOIU, I. (1998) A Detailed Comparison of Non-Parallel Stability Results with Experimental Data. AIAA Paper 98-0335, 36th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.

- LANGLOIS, M., MASSON, C., TOUCHAUD, S. et PARASCHIVOIU, I. (1997). A Fast and Easy-to-Use Linear Stability Analyser for Wing Transition Predictions. AIAA Paper 97-2244, dans *Proceedings of the 15th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, 262-271.

- LANGLOIS, M., CASALIS, G., MASSON, C. et PARASCHIVOIU, I. (1997). Non-Parallel Effects in Stability Analysis by the PSE Approach. Dans *Comptes-rendus du 6ième Symposium d'aérodynamique de l'Institut aéronautique et spatial du Canada*, 45-54.

- MASSON, C., BOIVIN, S., LANGLOIS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1997). Curvature and Nonparallel Effects in 3-D Compressible Transition Analysis. AIAA Paper 97-0824, 35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit.

- MASSON, C., LANGLOIS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1996). A Linear Stability Analyser Suitable for Integration in Wing Performance Calculation Procedures. Dans *ICAS Proceedings 1996*, 20th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, 1, 472-482.

- MASSON, C., LANGLOIS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1995). Influence of Spanwise Pressure Gradients on Transition Prediction in Transonic Flows.

Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers. Kluwer Academic Publishers. 157-166.

- LANGLOIS, M., MASSON, C. et PARASCHIVOIU, I. (1995). Transition Prediction in Three-Dimensional Transonic Flows. *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, IX, 493-504.

- LANGLOIS, M., MASSON, C., PARASCHIVOIU, I. et TEZOK, F. (1995). Curvature Effects in 3-D Compressible Transition Analysis. Dans *Proceedings of the Third Annual Conference of the CFD Society of Canada (CFD95)*, 2, 315-322.

- MASSON, C., LANGLOIS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1994). Analysis of the Transition Characteristics of Three-Dimensional Transonic Flows. Dans *Proceedings of the Second Annual Conference of the CFD Society of Canada (CFD94)*, 535-542.

Rapports

- LANGLOIS, M. et CASALIS, G. (1996). Étude détaillée des effets non-parallèles sur la stabilité linéaire d'écoulements incompressibles sur une aile en flèche d'envergure infinie. Rapport DERAT no. 118/5618.24, ONERA/CERT.

- MASSON, C., MARTINUZZI, R., LANGLOIS, M., MIRSHAMS, M. et PARASCHIVOIU, I. (1994). Transition Prediction for Swept Wings in the Transonic Regime. Rapport final, convention de recherche CDT C158, École Polytechnique de Montréal.

ANNEXE IV

AUTORISATION D'UTILISER DES DONNÉES DE BOMBARDIER INC.

Je confirme par la présente que Marc Langlois est autorisé par Bombardier Inc. à utiliser les données concernant la transition sur l'aile expérimentale Bombardier W40 ainsi que sur l'aile du Global Express apparaissant à la section 4.5 de la présente thèse.

Fassi Kafyeke
Chef de service, Aérodynamique avancée
Bombardier Aéronautique