

**Titre:** Optimisation de trajectoires et de manœuvres appliquée à un  
Title: VTOL-UAV (vertical take-off and landing unmanned air vehicle)

**Auteur:** Richard Giroux  
Author:

**Date:** 1999

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Giroux, R. (1999). Optimisation de trajectoires et de manœuvres appliquée à un  
VTOL-UAV (vertical take-off and landing unmanned air vehicle) [Mémoire de  
maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/8529/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8529/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Richard Hurteau  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION DE TRAJECTOIRES ET DE MANOEUVRES APPLIQUÉE À  
UN VTOL-UAV (VERTICAL TAKE-OFF AND LANDING UNMANNED AIR  
VEHICLE)

RICHARD GIROUX

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)  
NOVEMBRE 1999



National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services  
  
395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques  
  
395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-53576-2

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

OPTIMISATION DE TRAJECTOIRES ET DE MANOEUVRES APPLIQUÉE À  
UN VTOL-UAV (VERTICAL TAKE-OFF AND LANDING UNMANNED AIR  
VEHICLE)

présenté par: GIROUX Richard

en vue de l'obtention du diplôme de: Maitre ès science appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. O'SHEA Jules, Ph.D., président

M. HURTEAU Richard, D.Eng., membre et directeur de recherche

M. GOURDEAU Richard, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. PELLETIER Michel, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. SAINTONGE Gilles, Ph.D., membre

*Chaque personne doit avoir un questionnement moral sur ses réalisations, de façon à espérer qu'un jour, l'avancement des technologies ne mette pas en péril l'humanité...*

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais remercier mon directeur et mes co-directeurs de recherche, qui ont été une source d'inspiration et de conseils judicieux tout au long de mes études de maîtrise : M. Michel Pelletier, co-directeur, par qui le projet fut possible et qui a apporté une vision industrielle au projet, par l'intermédiaire de multiples visites au complexe industriel de Bombardier à Mirabel ; M. Richard Hurteau, directeur, pour avoir accepté la direction du projet et avoir alimenté ma recherche par de multiples questions et demandes de précisions ; et M. Richard Gourdeau, co-directeur, avec qui des discussions théoriques enflammées ont permis de résoudre bien des problèmes. J'en profite par le fait même pour remercier la compagnie Bombardier aéronautique et spécialement M. Gilles Saintonge, anciennement gestionnaire du groupe ingénierie de la section UAV des Services à la Défense, pour avoir permis l'utilisation de données nécessaires au développement du projet.

Les études supérieures demandent beaucoup d'efforts et l'étudiant, pour consacrer la majeure partie de ses énergies à son projet, doit bénéficier d'une aide financière. La bourse CRSNG que j'ai reçue pour mes études de maîtrise a grandement contribué à l'avancement rapide de mes travaux et à finir dans les délais prescrits. Également, je désire remercier M. Michel Pelletier, professeur associé et co-directeur, pour avoir subvenu partiellement à mes besoins financiers par le biais d'un supplément à ma bourse de recherche, et en mettant à ma disposition du matériel informatique de première gamme.

Également, je remercie le personnel du Département de Génie électrique et de Génie informatique, et plus spécialement les gens de la section Automation et Systèmes. Entre autres, je salue Mme Marie-Claude Nadeau, dont la disponibilité et la jovialité ensoleillent les rudes journées d'hiver, et M. Yves Léonard, qui prête une oreille attentive à nos besoins informatiques.

Je ne pourrais passer sous silence la patience et la compréhension de mes pa-

rents, qui ont toujours cru en moi et qui m'encouragent dans toutes les aventures que j'entreprends. Merci à mes ami(e)s de longue date de l'Abitibi-Témiscamingue, aux nouvelles connaissances faites à Montréal et aux collègues de la section, pour leur soutien moral et pour les heures joyeuses passées ensemble qui font oublier l'instant d'un moment les dédales de l'École Polytechnique.

Finalement, je lève mon chapeau à l'équipe de l'Association des étudiants des cycles supérieurs de Polytechnique avec laquelle j'ai travaillé au mieux-être de la communauté polytechnicienne. Ensemble, tout est possible...

## RÉSUMÉ

Le projet de maîtrise porte sur un véhicule aérien sans pilote à décollage et à atterrissage vertical (VTOL-UAV), le CL-327 de Bombardier.

Le premier aspect de la recherche porte sur la conception d'un contrôleur de suivi de trajectoire représentée par des consignes sur la position et la vitesse. Une des problématiques entourant la commande du véhicule est la contrainte sur l'angle de tangage et sur la vitesse de tangage, qui limite les performances du véhicule. En plus du suivi de trajectoire classique, le contrôleur doit être en mesure de stabiliser le véhicule autour d'un point donné, pour effectuer un vol stationnaire. Finalement, les perturbations atmosphériques doivent être contrées le mieux possible.

L'étude des contrôleurs porte sur deux modes d'opération du véhicule : l'utilisation d'un générateur de trajectoire pour obtenir la référence, et le mode manuel où un opérateur donne les commandes de vitesse par l'entremise d'une interface de contrôle. Après une revue exhaustive de la littérature sur le sujet, les contrôleurs optimaux ont été choisis pour accomplir la tâche. Pour ce qui est du suivi de trajectoire avec le générateur, le suiveur optimal (LQT : linear quadratic tracker) est choisi car sa synthèse est appropriée lorsque les références peuvent être connues sur un horizon donné. Pour ce qui est du mode manuel, le régulateur optimal (LQR : linear quadratic regulator) est utilisé à cause de ses caractéristiques de retour d'état et d'optimalité, et il n'utilise que la référence au temps présent. Ces deux contrôleurs sont comparés à un contrôleur de position et de vitesse à retour de sortie. En faisant abstraction des saturations, les contrôleurs optimaux suivent relativement mieux la référence que le contrôleur à retour de sortie.

Les fortes contraintes imposées par les capacités physiques du véhicule forcent la saturation de la commande lorsque celle-ci dépasse les limites imposées. La saturation de la commande introduit une non-linéarité dans le système et la convergence obtenue lors de la synthèse de base n'est plus assurée. Le type de prise en compte

des contraintes est souvent une simple saturation de la commande. Une deuxième approche fut entreprise dans cette étude. Il s'agit de faire varier la référence qui induit la saturation telle qu'elle est la plus proche possible de la référence voulue tout en n'introduisant pas de violations de contraintes.

Un tel algorithme de prise en compte des contraintes est implanté et les résultats sont très encourageants. L'algorithme est utilisé avec les contrôleurs optimaux car ils se prêtent mieux aux calculs nécessaires. Lorsque la référence voulue implique un dépassement de la limite de la commande, l'algorithme calcule la référence faisable la plus proche de celle voulue en minimisant la distance géométrique entre ces deux références (voulue et faisable), et qui respecte les contraintes sur le système. Ainsi, la référence donnée aux contrôleurs assure que ce dernier opère dans le domaine linéaire et les propriétés de base du contrôleur sont conservées. L'algorithme conçu dans ce projet est applicable à tous les types de contrôleur qui doivent assurer un suivi de référence. Puisque les contraintes ne font plus diverger le système, les gains peuvent être augmentés de sorte que les perturbations atmosphériques sont bien atténuées.

Dans un deuxième temps, il est question de l'optimisation des missions de surveillance. Les missions de surveillance du véhicule peuvent se dérouler à quelques centaines de kilomètres du point de départ et les trajectoires empruntées par le véhicule sont déterminantes dans la consommation de carburant. Il est question de maximiser le temps de surveillance dans une zone déterminée par la mission. Ce problème est transposé en un problème de minimisation de consommation de carburant pour le vol d'allée et le vol de retour. Ainsi, la quantité de carburant disponible pour surveiller est maximale.

De façon à résoudre le problème, plusieurs hypothèses sont faites. La dynamique du véhicule est négligeable sur l'ensemble de la trajectoire. Effectivement, la trajectoire optimale est très peu tributaire de la dynamique de vol, car les changements de vitesse sont relativement faibles. Également, dans la détermination de la trajectoire optimale, la masse au cours d'un trajet est supposée constante. Après vérification,

cette hypothèse s'est avérée juste.

Contrairement aux chercheurs ayant travaillé sur des problèmes semblables, notre trajectoire de montée n'est pas identique à la trajectoire de descente pour le vol d'allée ou de retour, car le véhicule part du sol pour aller surveiller à une altitude donnée. Cette particularité implique la résolution de deux problèmes de commande optimale, reliés entre eux par une contrainte sur la valeurs finales de leurs variables d'état respectives.

Des économies de carburant significatives sont obtenues dans des situations où les conditions climatiques sont défavorables au véhicule, impliquant que les trajectoires optimales sont très différentes des trajectoires usuellement admises. Ainsi, dans un cas, l'utilisation des trajectoires optimales permettent d'augmenter le temps de surveillance de 12 % par rapport à la trajectoire généralement prise par le véhicule.

## ABSTRACT

Unmanned air vehicles (UAV) are now part of several military forces and many projects have been conducted to build different types of UAVs. The vehicle under study is Bombardier's CL-327, a VTOL-UAV. It is the new model based on the previous CL-227. The new vehicle can handle more payload, has a longer time on mission and is quite faster.

The project is divided in two parts. First, a path following controller is developed using the position and the speed as references. In addition to tracking the reference, the controller must be well suited for controlling the vehicle when hovering. One of the problems that arises when controlling the vehicle is the hard constraints on the input and its rate. Since the aerodynamic model of the vehicle is given in the two main axis of the NED frame, the constraints are quadratic functions of the commands and the command rates. Disturbance rejection must also be addressed.

The controllers developed are optimal controllers. The optimal linear quadratic tracker (LQT) is well suited for our problem because the trajectory is given by a path generator, which means the reference is known in advance. A manual mode is available for controlling the vehicle. In this case, the linear quadratic regulator (LQR) is used to obtain a similar behavior. The controllers are compared to an output feedback controller, similar to a PID. The optimal controllers have given better performance.

To take into account the hard constraints, one may use a saturator, which limits the command to a maximum. By doing so, non-linearities are introduced in the system and stability is no longer assured. A quadratic programming algorithm is proposed to take into account the hard constraints on the input and the input rate. It works like this : if a reference makes the input violate the constraints, the algorithm will search for a feasible reference, the closest to the real one, which does not violate the constraints. We are then assuring that the properties founded in the initial design are kept when saturating, and we assure that the algorithm will converge to the

real reference once the saturation is over. The algorithm is applied to the optimal controllers because it is easier to calculate the new control based on the new reference. The algorithm exhibits good responses to references with high acceleration.

The second part of the project is the optimisation of observation missions. A mission is separated in three different phases : the displacement to the observation zone, the observation itself and the cruise back. The observation time has to be maximized. Thus, one must have the maximum amount of fuel available during the observation phase. The problem is then transferred to a problem of minimising the consumption of fuel during the two other phases.

Among the hypotheses made to solve the problem, the transients of the aerodynamics of the vehicle are neglected. This can be done because the trajectory is over a long time and the change in speed is small. The variation of the mass is neglected along the path to go to the observation zone, and to come back.

Since the climbing segment and the descending segment are not the same, one must solve two optimal control problems, which are related together by the final value of their state variables. The fuel consumption is significantly reduced when using the optimal path in the presence of bad atmospheric conditions because the optimal path is quite different from the typical missions used so far. In one of the worst cases, the use of an optimal path makes the observation time 12 % longer than following the normal path.

**TABLE DES MATIÈRES**

<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	v
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	vii
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	x
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	xii
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	xv
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	xvi
<b>LISTE DES SIGLES ET DES SYMBOLES</b> . . . . .	xxi
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	xxvii
<b>INTRODUCTION</b> . . . . .	1
<b>CHAPITRE I : CONCEPTION DES CONTRÔLEURS</b> . . . . .	4
1.1 Revue de littérature et piste de solution . . . . .	4
1.1.1 État de l'art . . . . .	4
1.1.2 Solution envisagée . . . . .	10
1.2 Conception d'un contrôleur optimal de suivi de trajectoire . . . . .	12
1.2.1 Modèle aérodynamique du véhicule . . . . .	12
1.2.2 Élaboration théorique du contrôleur LQT à horizon fini . . . . .	14
1.2.3 Élaboration théorique du contrôleur LQR . . . . .	20
1.2.4 Synthèse des contrôleurs optimaux . . . . .	21
1.2.5 Implantation logicielle des contrôleurs LQT et LQR . . . . .	27
1.2.6 Analyse des contrôleurs optimaux . . . . .	29
1.3 Conception d'un contrôleur de position et de vitesse à retour de sortie	40

1.3.1	Synthèse du contrôleur . . . . .	40
1.3.2	Analyse du contrôleur . . . . .	42
1.3.3	Déférence entre le contrôleur à retour de sortie et le contrôleur LQR . . . . .	46
<b>CHAPITRE II : PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES SUR LA COMMANDE . . . . .</b>		<b>49</b>
2.1	Interprétation physique des contraintes . . . . .	49
2.2	Saturation de la commande . . . . .	50
2.3	Algorithme de modification de la référence . . . . .	53
2.3.1	Élaboration théorique . . . . .	53
2.3.2	Synthèse de l'algorithme . . . . .	55
2.3.3	Analyse de l'algorithme : contrôleur LQR . . . . .	57
2.3.4	Extension de l'algorithme au contrôleur LQT . . . . .	66
<b>CHAPITRE III : COMPARAISON DES CONTRÔLEURS : NAVIGATION EN DEUX DIMENSIONS . . . . .</b>		<b>70</b>
3.1	Cas d'un générateur de trajectoire : contrôleur LQT vs contrôleur à retour de sortie . . . . .	72
3.2	Cas d'un générateur de trajectoire : contrôleur LQT vs contrôleur LQR . . . . .	76
3.3	Cas avec opérateur : contrôleur LQR vs contrôleur à retour de sortie . . . . .	78
3.4	Discussion des résultats . . . . .	82
<b>CHAPITRE IV : OPTIMISATION DE MISSIONS . . . . .</b>		<b>84</b>
4.1	Revue de littérature et piste de solution . . . . .	84
4.1.1	Etat de l'art . . . . .	84
4.1.2	Solution envisagée . . . . .	85
4.2	Modélisation de la performance et de la consommation du véhicule . . . . .	86
4.2.1	Modèle du véhicule . . . . .	86
4.2.2	Modèle de puissance . . . . .	86

4.2.3	Modèle de consommation de carburant . . . . .	91
4.3	Élaboration théorique et implantation de l'algorithme de recherche des trajectoires optimales . . . . .	95
4.3.1	Formulation du problème . . . . .	95
4.3.2	Application de la théorie de la commande optimale . . . . .	104
4.3.3	Résolution numérique . . . . .	109
4.4	Analyse des trajectoires optimales . . . . .	113
4.4.1	Analyse de l'algorithme . . . . .	113
4.4.2	Simulation d'une mission . . . . .	119
4.4.3	Discussion . . . . .	125
	<b>CONCLUSION . . . . .</b>	<b>126</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE . . . . .</b>	<b>128</b>

**LISTE DES TABLEAUX**

4.1	Variation de la consommation VS masse . . . . .	118
4.2	Comparaison des missions . . . . .	121
4.3	Variation de la vitesse du vent . . . . .	122
4.4	Variation du temps de surveillance avec la variation de la vitesse du vent	122
4.5	Variation de l'altitude de croisière avec la variation de la vitesse du vent	123
4.6	Variation de la distance parcourue . . . . .	124
4.7	Variation de l'altitude de croisière avec la distance parcourue . . . . .	124
4.8	Variation du temps de surveillance . . . . .	124

## LISTE DES FIGURES

0.1 Photo du véhicule CL-327 . . . . .	2
1.1 Diagramme des forces . . . . .	13
1.2 Modèle de navigation . . . . .	14
1.3 Évolution des gains en fonction du nombre d'échantillons et de la pondération sur la commande . . . . .	23
1.4 Pôles en BF dans l'espace complexe Z, contrôleur LQT, variation de R	24
1.5 Pôles en BF, contrôleur LQT, variation de $Q_{x_v}$	25
1.6 Pôles en BF dans l'espace complexe Z, contrôleur LQT, variation de $Q_{x_x}$	25
1.7 Pôles en BF dans l'espace complexe Z, contrôleur LQT, variation de $Q_\zeta$	26
1.8 Temps de calcul des matrices pour différents nombre d'échantillons .	28
1.9 Trajectoire de référence . . . . .	29
1.10 Réponse temporelle avec pondération sur l'erreur de vitesse . . . . .	30
1.11 Réponse temporelle avec pondération sur l'erreur de position . . . . .	31
1.12 Réponse du système à une perturbation échelon . . . . .	33
1.13 Représentation temporelle de la perturbation (vent + bourrasques) .	34
1.14 Atténuation des perturbations : $Q_\zeta = 0$ (....); $Q_\zeta = 0.1$ (---); $Q_\zeta = 0.8$ (—) . . . . .	35
1.15 Vol stationnaire avec perturbations : suivi de trajectoire . . . . .	35
1.16 Vol stationnaire avec perturbations : commandes . . . . .	36
1.17 Erreur de suivi : comparaison des pondérations du contrôleur LQR ; (pondérations faibles — ); (pondérations élevées ---) . . . . .	38
1.18 Commande : comparaison des pondérations du contrôleur LQR ; (pondérations faibles — ); (pondérations élevées ---) . . . . .	38
1.19 Atténuation des perturbations : comparaison des pondérations du contrôleur LQR ; (pondérations faibles — ); (pondérations élevées ---) . .	39
1.20 Structure de la commande PI . . . . .	40

1.21 Lieu des racines de la boucle externe . . . . .	42
1.22 Erreur de suivi avec contrôleur PI; (gains faibles — ); (gains élevés - - -) . . . . .	43
1.23 Commande avec contrôleur PI; (gains faibles — ); (gains élevés - - -) . . . . .	44
1.24 Erreur de suivi en vol stationnaire avec perturbation échelon : contrôleur PI; (gains faibles — ); (gains élevés - - -) . . . . .	44
1.25 Atténuation des perturbations : contrôleur PI; (gains faibles — ); (gains élevés - - -) . . . . .	45
2.1 Contraintes cartésiennes (découplées) . . . . .	51
2.2 Contraintes polaires (couplées) . . . . .	51
2.3 Schéma bloc du système . . . . .	53
2.4 Schéma bloc de l'application des contraintes . . . . .	53
2.5 Schéma bloc de commande . . . . .	56
2.6 Bloc de contrôle de la commande . . . . .	56
2.7 Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (- - -) . . . . .	59
2.8 Commande : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (- - -) . . . . .	59
2.9 Erreur entre la référence faisable et la référence voulue . . . . .	60
2.10 Vol stationnaire avec perturbation : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (- - -) . . . . .	62
2.11 Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (- - -) . . . . .	62
2.12 Commande : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (- - -) . . . . .	63
2.13 Erreur entre la référence faisable et la référence voulue . . . . .	63
2.14 Suivi de trajectoire : contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique ; $a_{max} = 6m/s^2$ . . . . .	64

2.15 Commande : contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique ; $a_{max} = 6m/s^2$ . . . . .	65
2.16 Erreur de la référence faisable vs la référence voulue ; $a_{max} = 6m/s^2$ . . . . .	65
2.17 Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation quadratique ( — ) ou saturation ( - - - ) . . . . .	67
2.18 Commande : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation quadratique ( — ) ou saturation ( - - - ) . . . . .	67
2.19 Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation $N_{ech} = 1$ ( - - - ) et $N_{ech} = 10$ ( — ) . . . . .	68
2.20 Commande : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation $N_{ech} = 1$ ( - - - ) et $N_{ech} = 10$ ( — ) . . . . .	69
2.21 Erreur de la référence faisable vs la référence voulue : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation $N_{ech} = 1$ ( - - - ) et $N_{ech} = 10$ ( — ) . . . . .	69
 3.1 Trajectoire à suivre en deux dimensions . . . . .	70
3.2 Trajectoire à suivre : position et vitesse . . . . .	71
3.3 Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	72
3.4 Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	73
3.5 Comparaison des commandes $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	73
3.6 Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions $a_{max} = 6m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	74
3.7 Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire $a_{max} = 6m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	75
3.8 Comparaison des commandes $a_{max} = 6m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	75

3.9 Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur LQR ( - - - ) . . . . .	76
3.10 Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur LQR ( - - - ) . . . . .	77
3.11 Comparaison des commandes $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur LQR ( - - - ) . . . . .	77
3.12 Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQR ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	78
3.13 Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQR ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	79
3.14 Comparaison des commandes $a_{max} = 2m/s^2$ : contrôleur LQR ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	79
3.15 Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions $a_{max} = 6m/s^2$ : contrôleur LQR ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	80
3.16 Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire $a_{max} = 6m/s^2$ : contrôleur LQR ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	81
3.17 Comparaison des commandes $a_{max} = 6m/s^2$ : contrôleur LQR ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - ) . . . . .	81
4.1 Courbes de puissance du CL-327 . . . . .	89
4.2 Détermination de la vitesse optimale pour une endurance maximale . . . . .	93
4.3 Détermination de la vitesse optimale pour une portée maximale . . . . .	94
4.4 Hypothèse de trajectoire optimale . . . . .	97
4.5 Illustration des variables du problème . . . . .	102
4.6 Algorithme de résolution . . . . .	112
4.7 Variation de la trajectoire en fonction du rapport $c_t/c_w$ sans contrainte sur la vitesse horizontale . . . . .	114
4.8 Variation de la vitesse horizontale en montée en fonction du rapport $c_t/c_w$ avec contrainte sur la vitesse horizontale . . . . .	115

4.9 Variation de la vitesse horizontale en montée en fonction du rapport $c_t/c_w$ sans contrainte sur la vitesse horizontale . . . . .	115
4.10 Comparaison entre les situations avec et sans contrainte pour le vol d'allée . . . . .	116
4.11 Comparaison entre les situations avec et sans contrainte pour le vol d'allée . . . . .	116
4.12 Comparaison de la consommation entre les situations avec et sans contrainte sur les valeurs finales des variables d'état . . . . .	117
4.13 Comparaison du temps de parcours entre les situations avec et sans contrainte sur les valeurs finales des variables d'état . . . . .	118
4.14 trajectoire de référence . . . . .	119
4.15 trajectoire optimale . . . . .	120

## LISTE DES SIGLES ET DES SYMBOLES

### Sigles

- AROD : Airborne Remotely Operated Device
- BF : Boucle fermée
- CRSNG : Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada
- ISA : International standard atmosphere
- LQG/LTR : Linear quadratic gaussian / Loop transfert recovery
- LQR : Linear quadratic regulator
- LQT : Linear quadratic tracker
- NASA : National Aeronautical and Space Administration
- NED : North-East-Down
- PI : Proportionnel-intégral
- PID : Proportionnel-intégral-dérivée
- RAM : Random access memory
- TBPVP : Two points boundary value problem
- UAV : Unmanned air vehicle
- VTOL-UAV : Vertical take-off and landing unmanned air vehicle

### Symboles

- $a_{voulue}$  : vecteur d'accélération voulue sur l'horizon
- $a_{fais}$  : vecteur d'accélération faisable sur l'horizon
- $a_{max}$  : accélération maximale imposée au véhicule par le génératoire de trajectoire

- $a_i$  : coefficients de régression linéaire
  - $A$  : matrice d'état du système continu non augmenté
  - $B$  : matrice de sortie du système continu non augmenté
  - $b(i)$  : vecteur anticipatif calculé à partir des références sur l'horizon et par la résolution de l'équation de Riccati discrète
  - $b_i$  : coefficients de régression linéaire
  - $c_d$  : coefficient de friction de l'air
  - $c_t$  : coefficient de pondération du temps
  - $c_w$  : coefficient de pondération de la consommation de carburant
  - $clb$  : indique que cette variable appartient au segment de montée
  - $cr$  : indique que cette variable appartient au segment de croisière
  - $dst$  : indique que cette variable appartient au segment de descente
  - $d_f$  : distance totale à parcourir
  - $d_{clb}$  : distance entre le départ et l'intersection entre la monté et le plateau
  - $d_{dst}$  : distance entre la fin et l'intersection entre le plateau et la descente
  - $E$  : énergie
  - $F$  : matrice d'état du système discret augmenté
  - $F_d$  : force aérodynamique agissant sur le véhicule dans l'axe du déplacement
  - $F(\cdot)$  : intégrande de la fonction de coût du problème de minimisation de consommation
  - $fp$  : facteur de proportionnalité pour saturer la commande en conservant l'orientation du contrôle
  - $\tilde{F}$  : matrice d'état augmentée couvrant l'horizon
  - $g$  : accélération gravitationnelle
- $G$  : matrice de sortie du système discret augmenté

- $\tilde{G}$  : matrice de sortie augmentée couvrant l'horizon
- $h$  : altitude
- $h_{sta}$  : altitude de départ
- $h_{cr}$  : altitude du vol de croisière
- $h_{loit}$  : altitude de surveillance
- $H$  : Hamiltonien
- $J$  : fonction de coût dans la définition du problème du contrôleur LQT
- $J_{quad}$  : fonction de coût dans l'algorithme de programmation quadratique
- $J_{clb}$  : fonction de coût pour le segment de montée
- $J_{dst}$  : fonction de coût pour le segment de descente
- $k_x(i)$  : gain optimal appliqué aux variables d'état, variable sur l'horizon, déterminé par la résolution de l'équation de Riccati discrète
- $k_b(i)$  : gain optimal appliqué au vecteur anticipatif  $b$ , variable sur l'horizon, déterminé par la résolution de l'équation de Riccati discrète
- $K_1$  : matrice augmentée de gains regroupant l'ensemble des gains de Riccati, et la résolution des équations d'état sur l'horizon
- $K_2$  : matrice augmentée de gains prenant en compte toutes les références sur l'horizon
- $K_{i_v}$  : gain de la partie intégrale du contrôleur de vitesse à retour de sortie
- $K_{p_v}$  : gain affectant la partie proportionnelle du contrôleur de vitesse à retour de sortie
- $K_{p_x}$  : gain affectant la partie proportionnelle du contrôleur de position à retour de sortie
- $k$  : facteur d'efficacité en montée et en descente
- $\tilde{M}$  : matrice augmentée du vecteur  $b$  couvrant l'horizon

- $M_{tot}$  : la masse du véhicule
- $N$  : nombre d'échantillons de l'horizon de contrôle
- $N_{ech}$  : nombre d'échantillons contrôler dans l'algorithme de programmation quadratique
- $P_{cr}$  : la puissance nécessaire en vol de croisière
- $P_{monte}$  : la puissance nécessaire en vol de montée
- $Q$  : matrice de pondération regroupant  $Q_x$  et  $Q_\zeta$
- $Q_{algo}$  : matrice de pondération sur l'erreur entre la référence voulue et la référence faisable
- $Q_{acc}$  : pondération sur l'erreur entre l'accélération voulue et l'accélération faisable
- $Q_x$  : matrice de pondérations sur l'erreur de suivi de la position et de la vitesse
- $Q_\zeta$  : pondération sur l'erreur de suivi de l'intégrale de la position
- $Q_{transv}$  : fonction de coût du problème de minimisation de l'erreur des conditions de transversalité
- $Q_{penal_{etats}}$  : fonction de pénalité sur la valeur finale des variables d'état
- $q$  : vitesse de tangage =  $\dot{\theta}$
- $r$  : vecteur de référence sur les variables d'état du système
- $r_{voulue}$  : vecteur de référence désirée dans l'algorithme de programmation quadratique
- $r_{fais}$  : vecteur de référence désirée dans l'algorithme de programmation quadratique
- $R$  : pondération sur l'effort de la commande
- $R_{db}$  : variable d'état de distance pour le segment de montée
- $R_{dst}$  : variable d'état de distance pour le segment de descente

- $s(i)$  : matrice représentant la solution de l'équation de Riccati discrète à chaque instant de l'horizon
- $s$  : variable de Laplace
- $t_{clb}$  : temps à l'intersection entre la monté et le plateau
- $t_{dst}$  : temps à l'intersection entre le plateau et la descente
- $t_f$  : temps final
- $T$  : transposée d'une matrice
- $T_{ech}$  : temps d'échantillonnage
- $T_{monte}$  : force nécessaire en vol de montée
- $u$  : variable d'état de vitesse du modèle dans la direction NORD du repère NED
- $v$  : vitesse de déplacement
- $w$  : vitesse verticale
- $W_f$  : taux de consommation de carburant
- $x$  : variable d'état de position du modèle dans la direction NORD du repère NED
- $\delta$  : la pression relative de l'air
- $\xi$  : énergie par unité de poids
- $\zeta$  : variable d'état de l'intégrale de la position
- $\chi$  : vecteur des variables d'état du système augmenté
- $\lambda$  : variable adjointe
- $\sigma$  : la densité relative de l'air
- $\sigma$  : vecteur des variables d'état du système non augmenté
- $\theta$  : la température relative de l'air
- $\theta_x$  : angle de tangage (commande) dans la direction NORD du repère NED
- $\theta_y$  : angle de tangage (commande) dans la direction EST du repère NED

- $\dot{\theta}_x$  : vitesse de tangage (dérivée de la commande) dans la direction NORD du repère NED
- $\dot{\theta}_y$  : vitesse de tangage (dérivée de la commande) dans la direction EST du repère NED

## LISTE DES ANNEXES

Annexe I :	Développement mathématique du suiveur linéaire quadratique (LQT) . . . . .	132
------------	---	-----

## INTRODUCTION

Les véhicules aériens de reconnaissance sans pilote sont apparus dans les années 1950-1960 [HK95]. Des petits appareils télécommandés, ils sont devenus des appareils complexes, utilisés surtout dans l'industrie militaire moderne. Ces appareils minimisent le risque de pertes humaines dans les zones hostiles et permettent, entre autres, d'effectuer de la surveillance, de la reconnaissance et d'établir des ponts de communication entre des zones de conflits. Malgré le grand intérêt militaire pour ces systèmes, le domaine civil n'est pas en reste. Que ce soit pour l'inspection de barrages, la détection d'incendies forestiers ou la collecte de données météorologiques et océanographiques, ces appareils sont appropriés dans toutes les situations critiques où la santé des pilotes pourrait être mise en danger.

L'industrie aéronautique canadienne présente un intérêt relatif à la construction de ce type d'engin. Bombardier aéronautique oeuvre dans ce domaine depuis plus de deux décennies. Le CL-289, un véhicule ayant la forme d'un missile, fut le premier du genre dans l'industrie. Cet engin recueille de l'information et est récupérable. Il est toujours en service aujourd'hui.

Par la suite, le groupe innove avec un véhicule aérien sans pilote à décollage et à atterrissage vertical (VTOL-UAV : vertical take-off and landing unmanned air vehicle), le CL-227 [BF95]. Ce véhicule, à l'allure d'une arachide, possède deux rotors contre-rotatifs coaxiaux (dans l'axe vertical). Quelques véhicules semblables existent : le Cypher de Sikorski et le AROD du corps des Marines de l'armée américaine [HK95] [WP91].

Le projet de maîtrise porte sur la deuxième génération du CL-227, le CL-327. Ce nouveau véhicule, de forme identique au premier, possède une plus grande portée et permet le transport d'une plus grande charge utile [PSTS97]. Le véhicule a la forme d'une arachide, avec deux rotors contre-rotatifs au milieu. La figure 0.1 montre une photo du véhicule. De par sa forme spéciale, le véhicule possède trois axes de symétrie.

Le problème proposé par Bombardier portait sur plusieurs aspects.

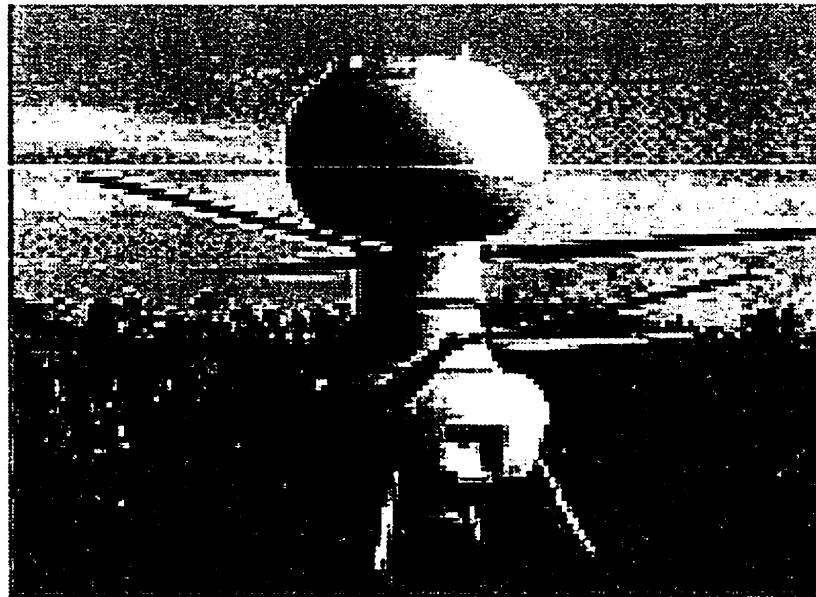


FIG. 0.1: Photo du véhicule CL-327

Premièrement, le véhicule doit suivre certaines trajectoires prédéterminées par un générateur de trajectoire. Il faut alors s'assurer que le véhicule suive correctement cette trajectoire désirée sachant que le véhicule possède des contraintes sur la vitesse de croisière et sur l'accélération, qui résultent des contraintes sur l'angle de tangage et sur la vitesse de tangage. Également, les perturbations atmosphériques sont présentes et le véhicule doit pouvoir effectuer des vols stationnaires au-dessus d'un point déterminé. Le contrôleur devra donc être en mesure d'assurer un suivi de vitesse et de position, le tout dans le respect des contraintes physiques du véhicule.

Également, le véhicule possède un second mode où un opérateur peut contrôler directement le déplacement du véhicule. Il faut alors s'assurer que les commandes données par l'opérateur respectent l'intégrité du véhicule. Le contrôleur devra donc prendre en considération une référence fuyante (la position) et une référence classique (la vitesse), dans le cas du suivi de trajectoire. Pour ce qui est du vol stationnaire, la position devient une référence classique.

Tel que stipulé, le véhicule est assujetti à des contraintes sur l'angle de tangage et sur la vitesse de tangage. Les contraintes détériorent la performance des contrôleurs usuels car leur synthèse ne prend pas en considération ces non-linéarités. La conception d'un contrôleur assurant la stabilité du véhicule en présence de contraintes devra donc être envisagée.

Dans un deuxième temps, il sera question de l'optimisation des missions de surveillance. Que doit-on faire pour assurer un temps maximum de surveillance dans la zone déterminée sachant que le véhicule part d'une position donnée et doit y revenir à la fin de sa mission ? Dans l'optique que le propriétaire d'un tel véhicule veut maximiser ses performances et minimiser ses coûts d'opération, il serait opportun de déterminer quelles trajectoires dans l'atmosphère le véhicule doit emprunter pour économiser du carburant et ainsi maximiser le temps de surveillance.

Le mémoire est divisé en deux parties pour faciliter la compréhension des divers aspects qui y seront traités. Tout d'abord, il sera question du suivi de trajectoire par le véhicule. Le premier chapitre couvre la conception des contrôleurs de suivi de trajectoire. Après une revue de la littérature sur le vaste sujet du suivi et de la prise en compte des contraintes dans le contrôle, le modèle de navigation du véhicule sera établi. Les contrôleurs à l'étude seront élaborés, implantés, analysés et finalement comparés à un autre type de contrôleur s'apparentant à celui utilisé actuellement sur le véhicule.

Dans un deuxième temps, le chapitre 4 abordera le problèmes des trajectoires optimales du véhicule dans l'atmosphères. Après une revue de la littérature, la méthode théorique sera exposée et appliquée au système qui nous intéresse. Finalement, une analyse des résultats obtenus sera faite en comparant avec les trajectoires actuellement prises pour les missions de surveillance.

## CHAPITRE I

### CONCEPTION DES CONTRÔLEURS

#### 1.1 Revue de littérature et piste de solution

Dans cette section, une revue de la littérature exposera les différentes approches prises par les chercheurs pour résoudre le problème de suivi de trajectoire. Également, l'aspect de la prise en compte des contraintes est traité. Une abondance d'articles traite de différents contrôleurs de suivi de trajectoire. La majorité des conclusions optent pour les contrôleurs dits modernes. Ils offrent plus de flexibilité et sont plus adaptés aux systèmes multivariables. Également, la plupart des articles appliquent leur contrôleur sur le contrôle de l'attitude du véhicule (angle de tangage), mais la dynamique de translation y est quand même abordée. Finalement, la solution envisagée sera abordée.

##### 1.1.1 État de l'art

###### 1.1.1.1 Contrôleurs à retour de sorties

Le contrôleur le plus simple à implanter et qui donne de bons résultats est du type PID, appliqué sur chacun des modes. Ainsi, avec le modèle dynamique découplé, on peut contrôler assez efficacement les variables (position et vitesse). Merrick et Gerdes [MG78] "Design and piloted simulation of a VTOL Flight-Control system" utilisent cette approche. Il va sans dire que cette approche a fait ses preuves, et était très utilisée lorsque les capacités de calcul des ordinateurs embarqués étaient limitées. C'est le type de contrôleur adopté pour le suivi de trajectoire développé par Bombardier pour le CL-327. Cette méthode ne prend pas en considération les contraintes et il est de type linéaire. Il faut donc écrire les commandes avec des modules non-linéaires. Afin de rendre similaire les performances du véhicule pour toutes les différentes conditions

de vol, une modification des gains est nécessaire, et elle fait appel à des tableaux de données reliant les gains aux conditions.

### 1.1.1.2 Contrôleurs à retour d'état

#### Structure modale (eigenstructure assignment)

Cette méthode place les valeurs propres du système multivariable selon des performances désirées. Elle s'apparente très fortement au placement de pôles dans les systèmes monovariables. Cette méthode permet également de "placer" un certain nombre de vecteurs propres associés aux valeurs propres tel que les variables d'état correspondantes soient en partie découplées par rapport aux autres. Plus les vecteurs sont orthogonaux entre eux, plus les modes seront découplées. Cette méthode est présentée par Manness et Murray-Smith, [MD92], "Aspect of multivariable flight control law design for helicopters using eigenstructure assignment". L'avantage de cette méthode est la facilité de compréhension des différentes composantes du contrôleur, et de la façon dont il est construit. Par contre, tout comme le précédent, ce contrôleur ne prend pas en ligne de compte les contraintes sur la commande. C'est également un contrôleur linéaire. Il doit être construit sur un modèle linéaire du système à contrôler, et ainsi requiert une modification des gains pour couvrir toute l'enveloppe de vol. Principalement, ce type de contrôleur est utile lorsque les variables d'état du système sont fortement couplées.

#### Contrôleurs non-linéaires

Ce type de contrôleur se base tout d'abord sur une réalisation linéaire d'un contrôle. Par la suite, la commande trouvée est transformée de l'espace linéaire vers l'espace non-linéaire du système, à l'aide d'une fonction de correspondance. Le retour d'état ou de sortie se fait par le chemin inverse des espaces. Meyer, Su et Hunt [MGL84] ont appliqué cette méthode pour tester un contrôleur de vol sur un hélicoptère UH-1H. Les résultats sont intéressants, mais les trajectoires à suivre n'étaient

pas très exigeantes. Cette méthode semble donner tout de même de bon résultats et elle est valide pour toute l'enveloppe de vol. Par contre, elle est relativement compliquée à mettre en pratique et le temps de calcul pour les transformations pourrait être problématique. En effet, les modèles non-linéaires représentant l'aérodynamique des véhicules aériens sont relativement complexes et pourraient nécessiter de lourds calculs numériques.

Dans un même ordre d'idées, Heiges, Menon et Schrage [HS92] ont travaillé sur cette méthode pour créer un contrôleur de vol pour un véhicule aérien autonome. Les résultats disponibles semblent montrer un bon suivi de trajectoire.

Plus récemment, Lee et Kim [LK97] se sont attardés à trouver une nouvelle méthode pour déterminer la transformation inverse, par le biais d'un problème d'optimisation avec des contraintes d'égalités qui sont fonction des variables d'état. Cette méthode donne de très bons résultats avec les systèmes à contrôle redondant, selon l'auteur.

La méthode de transformation inverse résout en quelque sorte le problème de la non-linéarité des systèmes aériens, autant pour les équations dynamiques que pour les contraintes. En effet, dans la transformation, on pourrait toujours prendre en considération les contraintes. Par contre, les transformations ne seraient probablement plus bilatérales. L'application de cette méthode enlève le besoin de faire varier les gains selon la condition de vol, mais semble accaparer beaucoup de temps de calcul pour les transformations.

### Contrôleur robuste

Rozak et Ray [RR97] ont fait une comparaison entre différentes techniques de réalisation de contrôleur robuste (synthèse  $H_2$ , synthèse  $H_\infty$  et synthèse  $\mu$ ). Plusieurs études montrent que le meilleur contrôleur pour obtenir une bonne performance en qualité de vol est celui construit autour de la synthèse  $H_\infty$ . Cette méthode crée un contrôleur stabilisant qui minimise la valeur maximale de la réponse en fréquence d'un système multivariable en boucle fermée. Puisque la synthèse de ces contrôleurs

utilise le modèle du système dans la conception, les gains peuvent être calculés au fur et à mesure que les conditions de vol changent.

### Contrôleur linéaire quadratique

Les contrôleurs optimaux sont très bien documentés dans la littérature. Plusieurs algorithmes de commande se basent sur leur structure. Athans [Ath71] utilise la théorie des régulateurs optimaux pour concevoir un régulateur PID. L'introduction de variables d'état supplémentaires au système de base permet d'obtenir l'effet intégrale, avec comme compromis d'augmenter l'ordre du système.

Dans "Autonomous Maneuver Tracking for Self-Piloted Vehicles" [BC98], Boyle et Chamitoff utilisent un contrôleur LQT (linear quadratic tracking) pour faire suivre à leur véhicule la trajectoire désirée. La trajectoire désirée est tout d'abord injectée dans un module qui détermine la commande optimale et faisable pour suivre cette trajectoire. Par la suite, le contrôleur LQT fait en sorte de suivre cette commande.

Weilenmann et Geering [WG94] ont déterminé, avec un banc d'essai développé à l'École Polytechnique Fédérale de Zurich, que les concepts multivariables modernes sont supérieurs à l'analyse classique pour le contrôle en position d'un hélicoptère en vol stationnaire. Ils ont comparé les contrôleurs suivants : PD sur chaque mode, LQG/LTR et la structure modale (assignation des valeurs propres). Le contrôleur basé sur le placement des valeurs propres n'assure pas une robustesse donnée. Les valeurs propres ont tout de même été placées le plus près possible de celles obtenues avec la méthode LQR pour conserver le degré de robustesse. Dans la théorie et dans la simulation, ce type de contrôleur (à structure modale) décuple bien les modes. Par contre, avec les mesures sur le système réel, le découplage n'est pas mieux qu'avec le contrôleur basé sur la méthode LQG/LTR. Cette différence entre les simulations et le système réel fait ressortir le degré d'inexactitude du modèle linéaire par rapport au système réel non-linéaire.

Dans le même ordre d'idée, White et Phelan [WP91] ont travaillé sur un contrôleur

de vol pour un véhicule semblable à celui développé par Bombardier. Ils ont également déterminé que la nature multivariable du contrôleur LQR produit un meilleur découplage entre les modes que la synthèse de deux boucles scalaires indépendantes, et connectées entre elles par un découplage dynamique .

D'ailleurs, Speyer et ses collègues [SH84] ont appliqué la technique LQG pour concevoir un contrôleur de suivi de trajectoire pour un avion AFTI/F-16. Le système multivariable a été augmenté pour contrer les erreurs en régimes permanents. Par contre, l'ajout d'intégrateurs peut donner un système non-commandable dans l'espace d'état. Ce problème est contourné par une combinaison linéaire des variables. La robustesse envers la dynamique non-modélisée a été vérifiée avec la théorie des valeurs singulières.

De nouvelles recherches se font dans le domaine des régulateurs linéaires quadratiques. Juge et Bryson [JB98] ont présenté un contrôleur linéaire quadratique au pire cas (Linear-Quadratic Worst-Case Control). Ce type de contrôleur est une variante du LQG. L'application qu'ils en font est le positionnement d'un hélicoptère en vol stationnaire. Les principales différences entre ces deux synthèses sont les suivantes : les pires perturbations et les pires déviations des conditions initiales sont prises en considération dans la synthèse du contrôleur, l'algorithme est une généralisation de l'algorithme du "LQG smoothing" et l'apparition de points conjugués dans la solution des équations de Riccati indique la présence de perturbations donnant un coût infini. On doit alors augmenter la pénalité associée aux perturbations, et refaire le processus.

#### 1.1.1.3 Synthèse de contrôleurs prenant en compte les contraintes

Un des problèmes rencontrés par les contrôleurs linéaires est leur faiblesse à prendre en considération les non-linéarités du système, dont notamment les contraintes sur l'excursion des actuateurs. Une approche simple est de déterminer les gains du contrôleur tel que dans un cas extrême donné, les contraintes ne sont pas violées. Cette méthode, souvent employée, demeure néanmoins coûteuse sur les performances. Plu-

sieurs chercheurs se sont attardées à ce problème, et essayer de le résoudre en altérant la commande lorsque celle-ci fait en sorte que la variable contrainte dépasse une valeur limite.

À cet effet, Miller et Pachter [MP97] présentent une méthode basée sur la synthèse de suiveur LQT. Le principe est que si la référence voulue nécessite une commande tel que les contraintes sont violées, il faut trouver une référence faisable qui respecte ces contraintes. Le contrôleur LQT demande de connaître le signal de référence pour l'horizon désigné. C'est la raison pour laquelle ils utilisent un contrôleur LQT sur un horizon fini, de manière à être en mesure d'extrapoler la référence du pilote au temps présent pour calculer la commande sur l'horizon. Dans cet article, la référence faisable est déterminée à partir de la commande au temps suivant seulement, permettant ainsi d'obtenir une série de relation scalaire. Par contre, Chandler et Mears [CM94] propose de vérifier les contraintes sur tout l'horizon, avec un algorithme de programmation linéaire, de manière à déterminer la meilleure référence faisable s'approchant de la référence voulue, tout en respectant les contraintes. De très bons résultats ont été obtenus dans le cas où de fortes contraintes étaient présentes. Également, dans le cas où les contraintes sont respectées, le contrôleur agit comme un LQT normal, fournissant ainsi un très bon contrôle de suivi de trajectoire.

Gyugyi et Franklin [GF93] optent pour une approche plus classique, mais également efficace. Le contrôleur de base est un LQG, et les contraintes sont gérées de la manière suivante : avenant le cas où les contraintes sont violées, il faut diminuer les commandes mais tout en respectant la direction du contrôle. Cette technique est bien sûr applicable pour les systèmes avec un espace de commande d'ordre 2 et supérieur. Ainsi, au lieu de pénaliser seulement la commande qui ne respecte pas la contrainte, on diminue toutes les commandes par un même facteur de pondération. Les conditions suffisantes de stabilité sont également démontrées par les équations de Lyapunov.

Kapasouris, Athans et Stein [KAS88] ont introduit un module "error governer". Se basant sur l'approche précédente, il s'agit d'altérer l'erreur tout en gardant la même

direction de contrôle . Le bénéfice d'une telle approche est, entre autres, que le signal en provenance du contrôleur modifié ne cause jamais de saturations de la commande. Ainsi, il est possible d'avoir des composantes intégrales dans la loi de commande sans que celles-ci n'accumulent un trop gros poids à cause des saturations qui ont normalement lieu. En effet, c'est souvent cette accumulation dans l'intégrateur qui fait diverger le système en présence de saturation de la commande.

Gilbert et ses collègues [GT94] se sont basés sur les travaux de Kapasouris pour introduire un "reference governer", qui diminue la référence tout en gardant la même direction de contrôle dans les systèmes multivariables, et qui évite que la sortie du système ne viole le domaine permis. Le principe est le même, sauf qu'au lieu de travailler sur l'erreur, ils modifient la référence pour déterminer la commande à la limite de saturation, tout en gardant la même orientation du vecteur de contrôle.

### 1.1.2 Solution envisagée

Le contrôleur de vol à réaliser en est un de suivi de trajectoire. Cette trajectoire sera déterminée par un générateur ou un opérateur. Le générateur donnera la position désirée, la vitesse désirée et l'accélération désirée à chaque temps d'échantillonnage. Le problème se pose donc relativement bien pour synthétiser un contrôleur LQT. Ce type de contrôleur nécessite la connaissance de la référence pour un horizon donné. Étant donnée que le contrôleur devra être utilisé pour une application en temps réel, l'horizon sera fini. De plus, les gains associés à ce type de contrôleur peuvent être recalculés après un certain temps, permettant ainsi de faire évoluer les gains avec l'enveloppe de vol. Ainsi, la variation des gains à l'aide de tableaux n'est plus nécessaire, et seulement une analyse est requise pour synthétiser le contrôleur. Le contrôleur LQT est un contrôleur linéaire quadratique. Les précédentes recherches citées dans la revue de la littérature semblent démontrer que ce type de synthèse se prête très bien au suivi de trajectoire de vol et en vol stationnaire. Pour ce qui est du mode où l'opérateur commande les accélérations, certains chercheurs ont proposé

d'extrapoler la référence sur un certain horizon, de manière à prévoir les prochaines références et appliquer la théorie des suiveurs optimaux (LQT). Dans notre cas, il sera plus facile d'utiliser un contrôleur LQR, qui utilise seulement la référence au temps présent pour calculer la commande.

En ce qui concerne les contraintes sur l'angle de tangage et sur la vitesse de tangage, un algorithme se basant sur ce que Miller [MP97] et Chandler [CM94] ont fait sera envisagé. Ainsi, on déterminera la meilleure référence faisable qui minimise l'écart entre cette référence et celle voulue, tout en respectant les contraintes. On assurera ainsi que le système convergera en tout temps, contrairement à la simple saturation de la commande.

## 1.2 Conception d'un contrôleur optimal de suivi de trajectoire

Dans cette section, la conception d'un contrôleur optimal pour faire le suivi d'une trajectoire sera développé. Une première partie supposera que la trajectoire est connue d'avance, telle que donnée par le générateur de trajectoire. Le contrôleur associé à ce mode est le suiveur optimal (LQT). Le suiveur optimal nécessite la connaissance à priori des références futures. Cette caractéristique en fait un contrôleur non-causal. De plus, la synthèse normale de ce contrôleur ne prend pas en considération les perturbations possibles sur la trajectoire. Il utilise seulement le modèle du véhicule. Pour contrer les perturbations, une modification au concept de base sera faite. Les commandes seront calculées pour un horizon fini, et seulement la première commande de cet horizon sera appliquée au système. Ainsi, une structure en boucle fermée assurera une robustesse face aux perturbations.

Pour ce qui est du mode où un opérateur donne les commandes, un régulateur optimal (LQR) sera conçu. Le régulateur optimal utilise les mêmes notions que le suiveur optimal, mais en ne prenant que la référence au temps présent.

Uniquement le développement du contrôleur pour la dynamique dans l'axe du déplacement sera fait. Étant donnée la symétrie du véhicule, la dynamique est identique pour tout déplacement, peu importe l'orientation du véhicule.

La section est scindée en plusieurs parties. Premièrement, le modèle de navigation du véhicule est exposé. Par la suite, l'élaboration théorique des contrôleurs optimaux sera présentée, et sera suivie de leur synthèses et de leur analyses.

### 1.2.1 Modèle aérodynamique du véhicule

Puisque le véhicule possède trois axes de symétrie, la dynamique de translation et de rotation est indépendante de l'orientation du véhicule. Cette particularité fait de ce véhicule un cas assez exceptionnel. Le modèle utilisé pour la conception du contrôleur sera le modèle de navigation simple, représenté par une masse ponctuelle dans l'air, sous l'influence d'une force de friction.

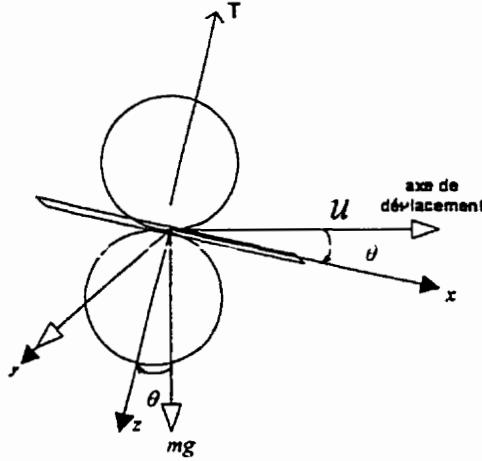


FIG. 1.1: Diagramme des forces

En appliquant la loi de Newton à la figure 1.1, selon l'axe du déplacement, l'équation différentielle décrivant la dynamique du corps peut être déterminnée.

$$\begin{aligned}\sum F_d = m\dot{u}(t) &= c_d(u(t) + W_x(t)) - T \sin\theta_x(t) \\ &= c_d(u(t) + W_x(t)) - mg \frac{\sin\theta_x(t)}{\cos\theta_x(t)}\end{aligned}\quad (1.1)$$

où  $F_d$  représente la somme des forces aérodynamiques dans l'axe du déplacement,  $c_d$  est le coefficient de viscosité de l'air (négatif),  $T$  est la force résultante du rotor,  $u(t)$  est la vitesse horizontale de déplacement par rapport au sol,  $W_x(t)$  est la vitesse du vent par rapport à ce même axe,  $m$  est la masse,  $g$  est l'accélération gravitationnelle et  $\theta_x(t)$  est l'angle de tangage. Selon la convention des signes, l'angle est négatif. En supposant que l'angle de tangage est faible,  $\tan\theta_x(t) \approx \theta_x(t)$ , la fonction de transfert entre la vitesse de déplacement et l'angle de tangage du véhicule peut être trouvée.

De façon à simplifier le modèle de navigation, un modèle à deux degrés de liberté est choisi. Ce modèle représente le déplacement selon les deux axes principaux du repère NED. Ainsi, les contraintes sur les angles de tangage ( $\theta_x$  et  $\theta_y$ ) et les vitesses de tangage ( $\dot{\theta}_x$  et  $\dot{\theta}_y$ ) sont couplées de manière circulaire.

$$\theta_x^2 + \dot{\theta}_y^2 \leq \theta_{max}^2 \quad (1.2)$$

$$\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2 \leq \dot{\theta}_{max}^2 \quad (1.3)$$

Le schéma de la figure 1.2 montre le modèle utilisé, où  $W_{(.)}$  représente la perturbation dans l'axe de déplacement respectif.

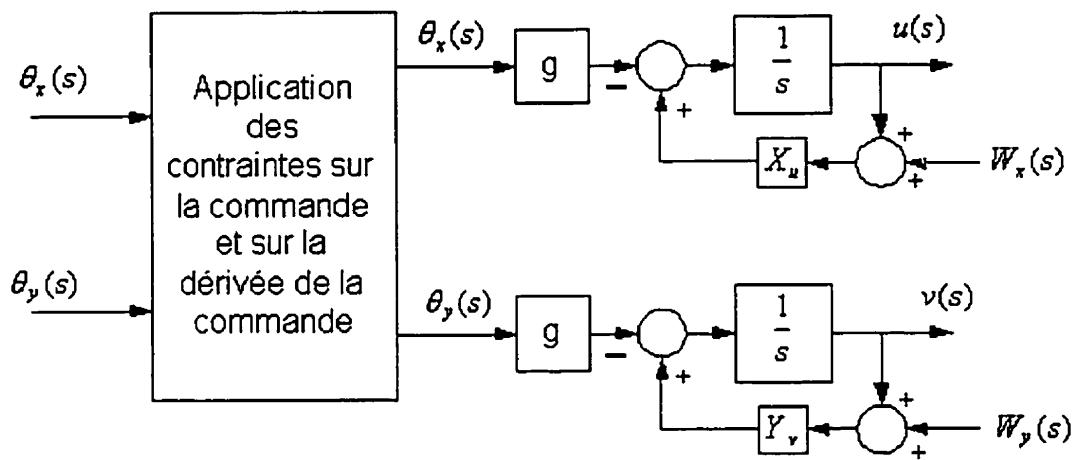


FIG. 1.2: Modèle de navigation

### 1.2.2 Élaboration théorique du contrôleur LQT à horizon fini

#### 1.2.2.1 Modèle d'état discret du système

Comme il a été montré à l'annexe I, le modèle simplifié du véhicule peut être mis sous forme de modèle d'état. Ce modèle est représenté par les équations suivantes, où les variables d'états représentent la position et la vitesse selon l'axe longitudinal.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & c_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \theta_x(t)$$

Où sous une forme plus compacte,

$$\dot{\sigma}(t) = A\sigma(t) + B\theta_x(t) \quad (1.4)$$

De manière à contrer les erreurs en régime permanent, une variable d'état de type intégrale sera ajoutée. Seulement la position sera intégrée, car nous avons un effet d'intégrale sur la vitesse par l'entremise de la position.

$$\zeta(t) = \int x(t)dt$$

En combinant cette dernière équation avec le modèle d'état (équation 1.4, un modèle d'état augmenté est obtenu :

$$\begin{pmatrix} \dot{\sigma}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \\ 1 & 0_{1 \times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{2 \times 1} \\ 0 \end{pmatrix} \theta_x(t)$$

Puisque le contrôleur en développement est un contrôleur avec un horizon fini dans le temps, nous devons transformer le modèle continu en un modèle discret, échantillonné avec une période égale à  $T_{ech}$ . En discrétilisant selon l'approximation du premier ordre du bloqueur d'ordre zéro, nous retrouvons le modèle discret du système qui sera utilisé comme base de développement pour le contrôleur LQT à horizon fini.

$$\chi(i+1) = F\chi(i) + G\theta_x(i) \quad (1.5)$$

avec

$$\chi(0) = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix} ; \quad \chi(i) = \begin{bmatrix} \sigma(i) \\ \zeta(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(i) \\ u(i) \\ \zeta(i) \end{bmatrix}$$

et

$$F = \begin{bmatrix} 1 & T_{ech} & 0 \\ 0 & 1 + c_d * T_{ech} & 0 \\ T_{ech} & 0 & 1 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ -g * T_{ech} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 1.2.2.2 Développement mathématique du contrôleur

Le concept de base d'un contrôleur optimal est de déterminer un ensemble de commandes qui, appliquée au système, minimise une fonction de coût sur l'horizon donné. La première étape dans l'élaboration du contrôleur est donc de déterminer ce que l'on veut minimiser dans notre problème. Puisque la raison d'être du contrôleur est le suivi de la trajectoire, il faut minimiser l'erreur entre les variables d'état du véhicule et la référence voulue, ainsi que l'effort de la commande. Le problème se pose comme suit, à minimiser :

$$\min_{\theta_x} J = \sum_{i=1}^N \left[ (\chi(i) - r(i))^T Q(i) (\chi(i) - r(i)) + \theta_x^T(i-1) R \theta_x(i-1) \right]$$

où  $r(i)$  est la référence calculée à partir des données fournies par le générateur de trajectoire.

$$r(i) = \begin{pmatrix} x_{ref}(i) \\ u_{ref}(i) \\ \zeta_{ref}(i) \end{pmatrix} ; \quad Q(i) = \begin{pmatrix} Q_x(i) & 0 \\ 0 & Q_\zeta(i) \end{pmatrix}$$

La résolution de ce problème est traitée abondamment dans la littérature [AM90]. La démonstration de la solution serait superflue et alourdirait l'explication des points essentiels. Par soucis de concision, seulement la solution sera présentée. Les équations 1.7 et 1.11 représentent la solution de l'équation de Riccati discrète. Ces équations proviennent de l'hypothèse de la résolution du problème de commande optimale avec un critère quadratique, où on suppose que la solution des équations adjointes est

linéaire en fonction des variables d'état.

La solution au problème est la suivante :

$$\theta^*(i) = k_x^T(i)\chi^*(i) + k_b^T(i)b(i+1) \quad (1.6)$$

où

$$D(i) = [G^T(i)s(i+1)G(i) + R(i+1)]^{-1} \quad (1.7)$$

$$k_b^T(i) = -D(i)G^T(i) \quad (1.8)$$

$$k_x^T(i) = -D(i)G^T(i)s(i+1)F(i) \quad (1.9)$$

$$b(i) = [F^T(i) + k_x(i)G^T(i)]b(i+1) - Q(i)r(i) \quad (1.10)$$

$$s(i) = F^T(i)[s(i+1) - s(i+1)G(i)D(i)G^T(i)s(i+1)]F(i) + Q(i) \quad (1.11)$$

avec

$$b(N) = 0 \quad (1.12)$$

$$s(N) = Q(N) \quad (1.13)$$

et  $i = 0 \dots N-1$ .

La solution présentée est valide pour les systèmes variant dans le temps. Dans le cas à l'étude, l'hypothèse que le modèle ne variera pas à l'intérieur de l'horizon sera faite. De plus, les pondérations sont constantes pour tout le trajet. Nous aurons donc les matrices constantes suivantes :

$$F(i) = F$$

$$\begin{aligned}
G(i) &= G \\
Q(i) &= Q \\
R(i) &= R
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Les commandes données par l'équation 1.6 couvrent tout l'horizon, déterminé par le nombre d'échantillons N. Le calcul des commandes nécessite la connaissance des références par l'entremise du vecteur b, comme il peut être remarqué à l'équation 1.10. En plus, les variables d'état du système doivent être calculées par résolution des équations d'état. Pour faire ressortir le fait que le contrôleur LQT peut être implanté en boucle fermée, une adaptation de la solution peut être faite. L'annexe I relate en détail le développement mathématique sous-jacent à la nouvelle formulation donnée. Il y est démontré que la solution est également égale à :

$$\theta_x^* = K_1 \chi(0) + K_2 r \tag{1.15}$$

où

$$\theta_x^* = \begin{pmatrix} \theta_x^*(0) \\ \theta_x^*(1) \\ \vdots \\ \theta_x^*(N-2) \\ \theta_x^*(N-1) \end{pmatrix}; r = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(N-1) \\ r(N) \end{pmatrix}; r(i) = \begin{pmatrix} x_{ref}(i) \\ u_{ref}(i) \\ \zeta_{ref}(i) \end{pmatrix}$$

et

$$K_1 = [(I - K_x \tilde{G})^{-1} K_x \tilde{F}]_{Nn \times n}$$

$$K_2 = [(I - K_x \tilde{G})^{-1} (K_b \tilde{M})]_{Nn \times Nn}$$

avec  $N$  le nombre d'échantillon de l'horizon, et  $n = 3$  le nombre de variables d'état du système augmenté.

$$K_b = \begin{pmatrix} k_b^T(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_b^T(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_b^T(N-2) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_b^T(N-1) \end{pmatrix}$$

$$K_x = \begin{pmatrix} k_x^T(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_x^T(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_x^T(N-2) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_x^T(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} I \\ F \\ \vdots \\ F^{N-2} \\ F^{N-1} \end{pmatrix}; \tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ G & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F^{N-3}G & F^{N-4}G & \dots & 0 & 0 \\ F^{N-2}G & F^{N-3}G & \dots & G & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{M} = \begin{pmatrix} -Q & -M(1)Q & \dots & -M(1) * \dots * M(N-2)Q & 0 \\ 0 & -Q & \dots & -M(2) * \dots * M(N-2)Q & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -Q & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation 1.15 donne la commande pour tout l'horizon, calculée à partir de l'état du système au moment du calcul, et de la référence à venir pour tout l'horizon. De manière à implanter la structure de commande en boucle fermée, et ainsi pouvoir contrer les perturbations externes, seule la commande au temps suivant sera appliquée au système à partir de celles calculées pour tout l'horizon. Ainsi, la commande pourra être implantée en boucle fermée et prendra l'allure suivante :

$$\theta_x^*(i) = K_1(1,:) \chi(i) + K_2(1,:) r(i+1 : i+N) \quad (1.16)$$

où  $(1,:)$  représente la première ligne des matrices associées, et  $(i+1 : i+N)$  représente les  $N$  échantillons de la référence suivant le temps courant. Ainsi, à chaque itération, une nouvelle série de commande pour l'horizon sera calculée, et seulement la première sera appliquée au système.

### 1.2.3 Élaboration théorique du contrôleur LQR

Le régulateur quadratique se base sur les mêmes concepts que ceux élaborés pour le suiveur quadratique LQT. Par contre, contrairement au suiveur optimal, le régulateur optimal (LQR) n'utilise pas la connaissance à priori des références pour calculer la commande. Soit la résolution de l'équation de Riccati discrète présentée aux équations 1.7 et 1.11, la commande associée au régulateur optimal est calculé comme suit :

$$\theta_x^*(i) = k_\chi(i)^T (\chi^*(i) - r(i+1)) \quad (1.17)$$

où  $k_\chi$  est le gain en régime permanent de la solution de l'équation de Riccati discrète, qui est égal à la première ligne de la matrice de gain  $K_1$  calculée précédemment pour le contrôleur LQT.

#### 1.2.4 Synthèse des contrôleurs optimaux

La synthèse des contrôleurs LQT et LQR, pour obtenir les gains de la loi de commande, est faite par le biais des pondérations dans le critère du coût quadratique. De manière générale, il n'existe pas de façon rigoureuse pour calibrer ces types de contrôleurs. Étant donné que les références sur tout l'horizon est nécessaire pour le contrôleur LQT, il est difficile de conceptualiser une fonction de transfert entre une variable d'état du système et la référence. Par contre, les valeurs propres du système sont calculables à partir de la matrice d'état en boucle fermée. Par abus de langage, on peut affirmer que les valeurs propres de la matrice d'état sont les pôles des fonctions de transfert des sous-systèmes entre les variables d'état et les références. Le modèle d'état du système en boucle fermée avec le contrôleur LQT est donné par :

$$\begin{aligned} \chi(i+1) &= F\chi(i) + G\theta_x^*(i) \\ &= F\chi(i) + G[K_1(1,:) \chi(i) + K_2(1,:) r(i+1 : i+N)] \\ &= [F + GK_1(1,:)]\chi(i) + GK_2(1,:)r(i+1 : i+N) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Avec le contrôleur LQR, la matrice d'état en boucle fermée est la même que celle avec le contrôleur LQT. Ce n'est que la matrice de sortie qui est différente. Les valeurs propres (ou pôles) en boucle fermée pour les contrôleurs LQR et LQT seront donc les mêmes.

Le système tel que représenté précédemment est un système discret. Les pôles de ses sous-systèmes devront être représentés dans le plan complexe  $Z$ .

À partir de ce système en boucle fermée, il sera possible de déterminer les pôles du système et ainsi les voir évoluer dans le plan complexe en fonction de la variation des paramètres de conception des contrôleurs optimaux. De plus, étant donnée la nature finie du contrôleur, le nombre d'échantillons  $N$  sera également un paramètre de design. Les différents paramètres de conception sont :

- $N$  : C'est le nombre d'échantillons contenu dans l'horizon fini de la méthode LQT. Ce nombre d'échantillons est également l'horizon sur lequel la solution de l'équation de Riccati discrète sera calculée. Plus ce nombre sera grand, plus les gains calculés tendront vers la solution en régime permanent de l'équation de Riccati discrète. Évidemment, le temps de calcul des gains est fortement influencé par ce nombre.
- $Q_x$  : C'est la pondération sur l'erreur entre les variables d'état et la référence à suivre, dans la fonction de coût quadratique.
- $Q_\zeta$  : C'est la pondération sur l'erreur entre la variable d'état intégrale du système, représentant l'intégrale de la position, et l'intégrale de la position de référence. Cette composante est essentielle pour contrer les erreurs en régime permanent, ainsi que les perturbations.
- $R$  : C'est la pondération sur l'effort de la commande.

Le rapport entre les pondérations  $Q_x$  et  $Q_\zeta$ , et la pondération  $R$  nécessite un compromis entre un très bon suivi de la référence et une commande ne dépassant pas une limite donnée.

### **Nombre d'échantillons de l'horizon : N**

Le nombre d'échantillons de l'horizon détermine en quelque sorte le nombre d'itérations dans la résolution de l'équation de Riccati discrète. Puisque la commande appliquée au système correspond à la première commande de l'horizon, et que celle-ci est

calculée de manière rétrograde à partir de la solution de l'équation de Riccati, le gain appliqué au système sera fonction du nombre d'échantillons. Par contre, au-delà d'un certain nombre d'échantillons, la solution de l'équation de Riccati discrète atteindra un régime permanent et aucun changement pourra être obtenu par une augmentation du nombre des échantillons. On voit donc que pour obtenir les gains en régime permanent, un nombre minimum d'échantillons est nécessaire. Comme le montre la figure 1.3, le nombre d'échantillons requis pour atteindre le régime permanent est fonction des pondérations sur les erreurs des variables d'état et de la pondération sur la commande. Cette figure montre l'évolution du gain sur la variable d'état vitesse en fonction du nombre d'échantillons et de la pondération sur la commande. Il faudra donc s'assurer que le nombre d'échantillons de l'horizon est suffisamment grand pour avoir le gain en régime permanent au premier échantillon de l'horizon, car c'est avec ce gain (au temps 0) que la commande à appliquer au système est calculée.

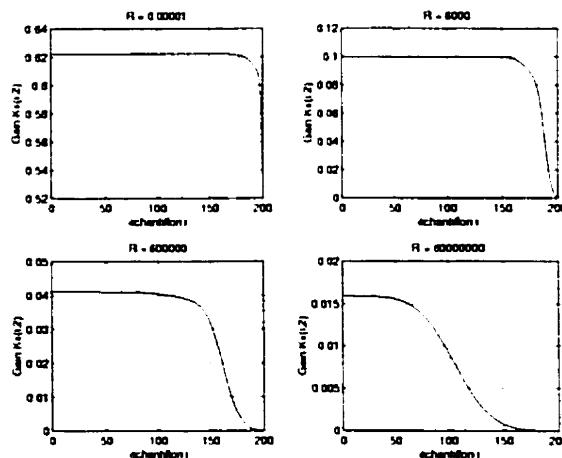


FIG. 1.3: Évolution des gains en fonction du nombre d'échantillons et de la pondération sur la commande

### La pondération de la commande : $R$

Dans l'algorithme de résolution de l'équation de Riccati, l'augmentation de la pondération  $R$  diminue la valeur en régime permanent des gains pour un nombre

d'échantillons donné (voir les équations 1.7 et 1.11). La figure 1.4 montre la migration des pôles en fonction de la pondération sur la commande. Plus la pondération est faible, plus la dynamique sera rapide, et la commande sera importante.

- nombre d'échantillon sur l'horizon  $N = 100$ ;
- pondération sur la commande  $R = 1@2000$ ;
- pondération sur l'erreur de la vitesse  $Q_{x_v} = 10$ ;
- pondération sur l'erreur de la position  $Q_{x_z} = 35$ ;
- pondération sur l'erreur de l'intégrale de la position  $Q_\zeta = 1000$ .

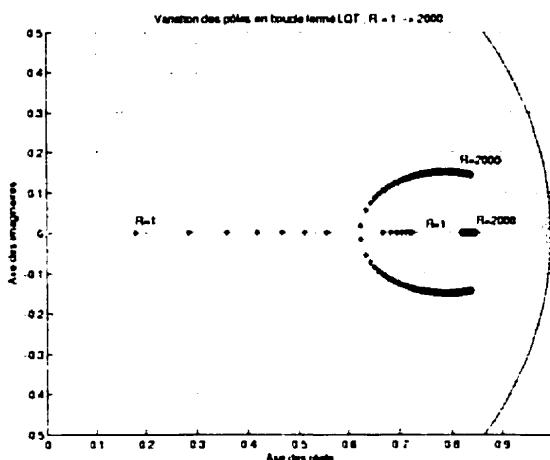


FIG. 1.4: Pôles en BF dans l'espace complexe Z, contrôleur LQT, variation de R

#### La pondération sur l'erreur de la vitesse $Q_{x_v}$

La figure 1.5 montre que la pondération sur l'erreur de la vitesse fait bouger les pôles sur l'axe réel du plan complexe. Les autres pondérations sont nulles. En augmentant cette pondération, les pôles se dirigent vers l'origine du plan Z, faisant en sorte que la dynamique devient plus rapide. Cette pondération seule ne fait déplacer qu'un pôle vers la gauche, tandis que deux autres demeurent au point (1,0).

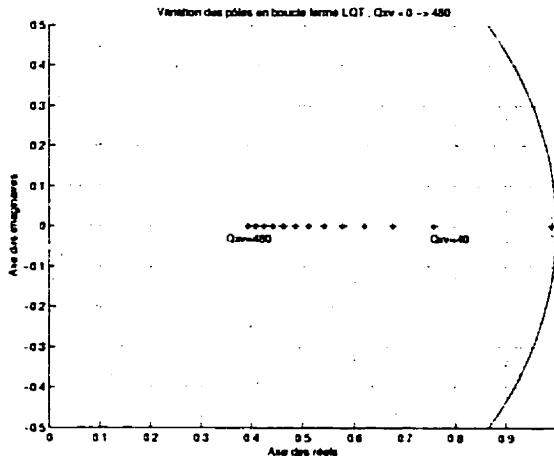


FIG. 1.5: Pôles en BF, contrôleur LQT, variation de  $Q_{xx}$

#### La pondération sur l'erreur de la position $Q_{xz}$

Cette simulation est faite avec une pondération sur l'erreur de position, et les autres pondérations nulles. Comme en témoigne la figure 1.6, les pôles adoptent un tracé suivant le même taux d'amortissement. Ce taux d'amortissement est de  $\xi \approx 0.7$ , tel qu'il est de mise avec les contrôleurs optimaux. La fréquence naturelle du système en boucle fermée augmente avec la pondération sur l'erreur de position. On remarque que seulement cette pondération permet de générer des pôles complexes conjugués.

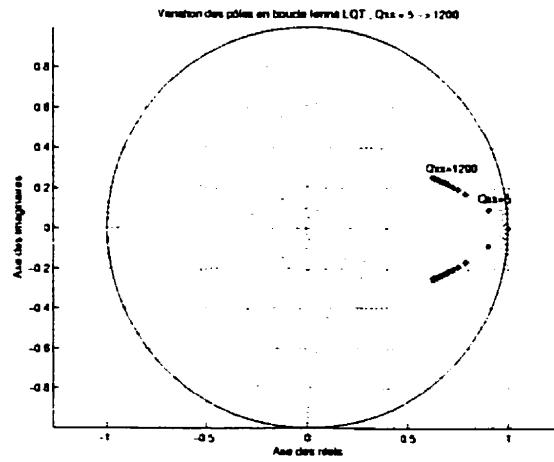


FIG. 1.6: Pôles en BF dans l'espace complexe Z, contrôleur LQT, variation de  $Q_{xz}$

### La pondération sur l'erreur de l'intégrale de la position : $Q_\zeta$

La pondération sur l'erreur de l'intégrale de position augmente la rapidité du système en ajoutant un pôle sur l'axe des réels, et près de l'origine. La figure 1.7 montre le déplacement des pôles. On voit que le pôle réel se déplace vers l'origine avec une augmentation de la pondération associée. Également, avec de faibles valeurs de pondération sur les erreurs de position et de vitesse (pondération dominante sur l'erreur de l'intégrale de position), le coefficient d'amortissement du système diminue avec l'augmentation de la pondération sur l'erreur de l'intégrale de position. Ainsi, une grande pondération sur cette erreur engendre une oscillation de la réponse.

- nombre d'échantillon sur l'horizon  $N = 100$  ;
- pondération sur la commande  $R = 2000$  ;
- pondération sur l'erreur de la vitesse  $Q_{x_v} = 10$  ;
- pondération sur l'erreur de la position  $Q_{x_z} = 35$  ;
- pondération sur l'erreur de l'intégrale de la position  $Q_\zeta = 10@5000$ .

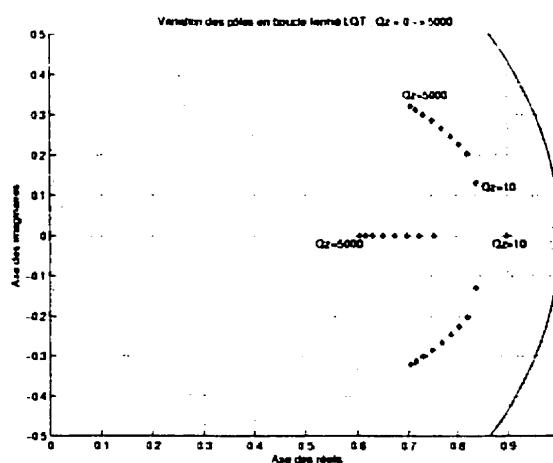


FIG. 1.7: Pôles en BF dans l'espace complexe Z, contrôleur LQT, variation de  $Q_\zeta$

Ainsi, la pondération sur l'erreur de la position doit être supérieure à la pondération sur l'erreur de la vitesse, de manière à avoir une bonne dynamique de suivi (pôles

complexes conjugués). Également, la pondération sur l'erreur de l'intégrale de position est nécessaire pour faire agir le système plus rapidement, surtout en présence de perturbations, mais doit être significativement inférieure à la pondération sur l'erreur de la position.

### 1.2.5 Implantation logicielle des contrôleurs LQT et LQR

Cette section donne les opérations que le programme devra accomplir pour simuler le système avec les contrôleurs. La structure du programme se présente comme suit :

1. Sélectionner les pondérations de la fonction de coût, et le nombre d'échantillons de l'horizon ;
2. Pour toute la simulation ;
  - (a) Pour les temps de rafraîchissement du modèle ;
    - i. Calculer les gains du contrôleur optimal à partir des dérivées de stabilité ;
  - (b) Calculer la commande à appliquer à partir des références de l'horizon (ou de la référence dans le cas du contrôleur LQR) ;
  - (c) Vérifier la validité de la commande en fonction des contraintes ;
  - (d) Appliquer la commande au système

#### 1.2.5.1 Calcul des gains du contrôleur

Les matrices à calculer sont  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{M}$ , ainsi que les matrices de gains  $K_x$  et  $K_b$  (section 1.2.2.2). Puisque ces matrices sont indépendantes de la référence, elles peuvent être calculées à des périodes d'échantillonnage plus grandes que la période d'échantillonnage du système. De cette façon, le contrôleur aura toujours les gains optimaux peu importe les conditions de vol présentes. Le temps de calcul pour différents nombres d'échantillons de l'horizon fini a été calculé et est présenté à la figure

1.8. Les calculs ont été fait avec un programme interprété par MATLAB et exécuté sur un ordinateur Pentium 350 MHz, 64 Mo RAM.

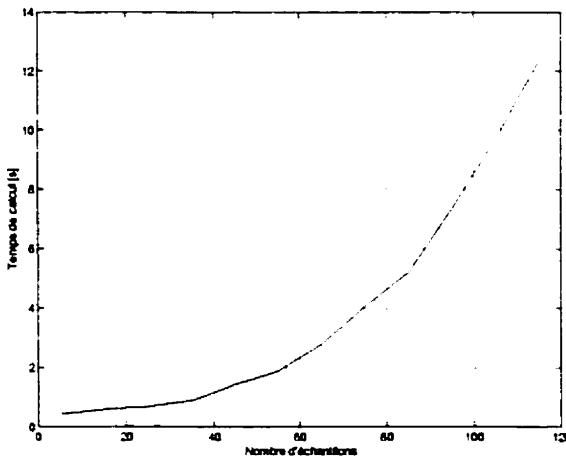


FIG. 1.8: Temps de calcul des matrices pour différents nombres d'échantillons

On voit que cette façon de calculer les constantes, quoique compacte, demande une bonne quantité de calcul. Dans l'implantation réelle, il s'avérerait plus efficace de résoudre simplement les équations de Riccati discrètes et de résoudre les équations d'état sur l'horizon pour déterminer les commandes.

#### 1.2.5.2 Calcul de la commande

Le calcul de la commande se fait à partir de l'équation 1.16. Seulement la commande à l'instant présent est physiquement appliquée au système.

Comme discuté dans la sous-section précédente, les multiplications de matrices prennent un grand temps de calcul numérique. À partir de la solution de l'équation de Riccati et des gains associés, la commande pour l'horizon peut être calculée à partir de la résolution des équations d'état pour l'horizon complet. Cette méthode est plus avantageuse d'un point de vue implantation en temps réel. De plus, dans l'éventualité où seulement la première commande est calculée et validée, on gagne rien à calculer toutes les autres commandes sur l'horizon.

### 1.2.6 Analyse des contrôleurs optimaux

#### 1.2.6.1 Référence sur l'horizon connue : contrôleur LQT

Avec une trajectoire simple en une dimension, une première analyse du comportement du contrôleur sera faite. La solution de Riccati discrète nécessite environ une centaine d'itérations avant d'être en régime permanent. De manière à avoir une structure optimale en boucle fermée (application du premier gain calculé à chaque période d'échantillonnage), on utilisera une trajectoire fictive plus longue (d'une centaine d'échantillons) pour permettre d'appliquer les gains optimaux à chaque période d'échantillonnage. La figure 1.9 montre la trajectoire de référence.

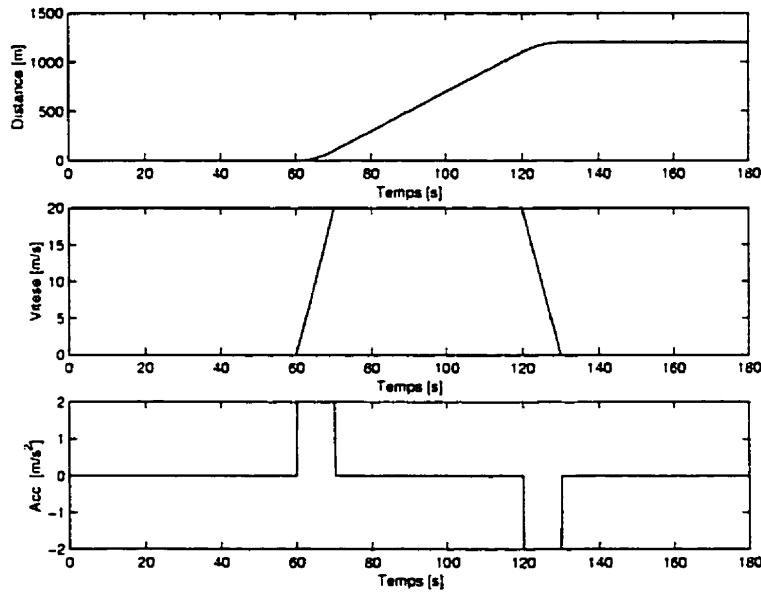


FIG. 1.9: Trajectoire de référence

La première simulation (figure 1.10) utilise seulement une pondération sur l'erreur en vitesse. On voit très bien l'aspect anticipateur du contrôleur. Plus la pondération est forte, mieux est le suivi de la vitesse (variation de la pondération  $Q_{x_v} = 1, 10$  et  $40$ ). Conséquemment, la commande est plus forte. On remarque également qu'il n'est pas optimal d'avoir une erreur nulle sur le plateau supérieur (avec une pondération sur la vitesse seulement) car le contrôleur prévoit qu'il devra réduire sa vitesse sur

l'horizon approchant. Comme le laisse entrevoir cette réponse, l'unique pondération sur la vitesse n'est pas appropriée pour faire un suivi de trajectoire en position et vitesse. La réponse est du type représentée par la figure 1.5, où un seul pôle sur l'axe réel ne crée pas de dépassement de la référence.

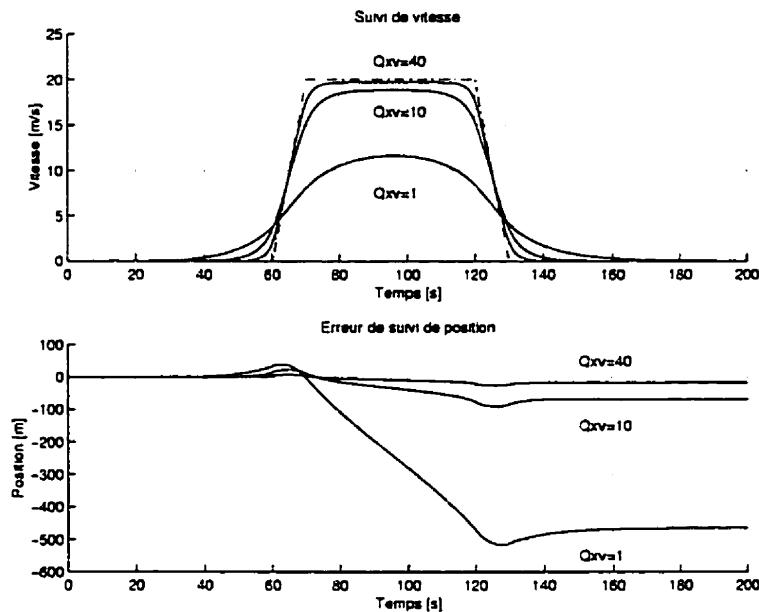


FIG. 1.10: Réponse temporelle avec pondération sur l'erreur de vitesse

La deuxième simulation, à la figure 1.11, utilise une pondération sur l'erreur de la position avec une pondération sur l'erreur de vitesse (variation de la pondération  $Q_{x_z} = 0.01, 1$  et  $10$  et  $Q_{x_v} = 1$ ). On voit alors que l'erreur de la vitesse sur le plateau supérieur est nulle. Mais également, le contrôleur donne une vitesse de départ dans le mauvais sens de la trajectoire lorsque la pondération sur l'erreur de position est égale ou dominante à la pondération sur l'erreur de la vitesse. L'explication est simple. Le contrôleur minimise principalement l'erreur quadratique de la position. La réponse de la vitesse de la figure 1.10 induit une erreur constante au niveau de la position, et le contrôleur, avec une pondération sur l'erreur de position, tend à combattre cette erreur. Pour ce faire, sachant qu'il aura une erreur en position due à l'anticipation de la vitesse, il induit une erreur de vitesse dans le sens contraire pour annuler l'erreur

de position qui aurait été accumulée. On peut aussi interpréter ce résultat en sachant que l'erreur de position est similaire à l'intégrale de l'erreur de vitesse. Le contrôleur tend par le fait même à annuler tout dépassement par un autre dépassement dans la direction opposée, de manière à obtenir une intégrale nulle. Ainsi, la somme des erreurs quadratiques de la position et de la vitesse est minimisée. On peut ajouter une pondération sur l'erreur de la vitesse, mais comme on a vu à la section précédente (figure 1.6), cette pondération influence peu le positionnement des pôles en présence d'une pondération dominante sur l'erreur de position.

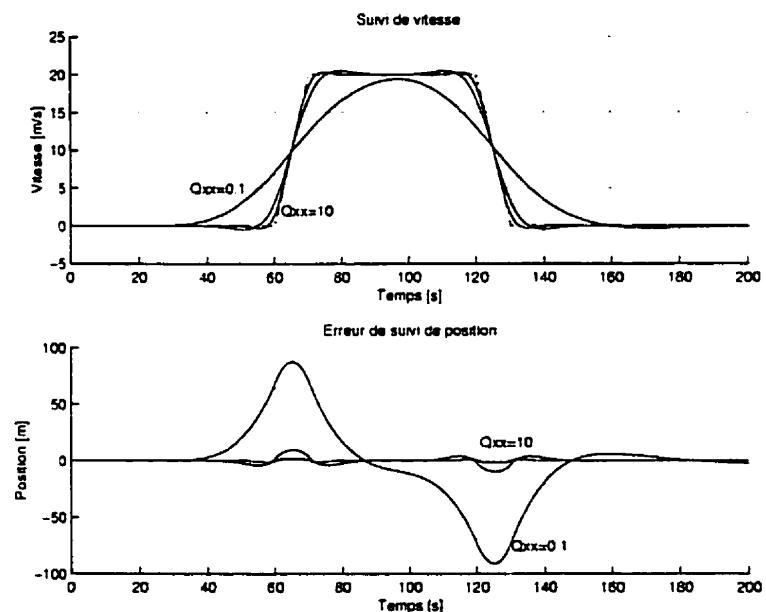


FIG. 1.11: Réponse temporelle avec pondération sur l'erreur de position

Pour ce qui est de la pondération sur l'erreur de l'intégrale de position, elle influence peu le suivi de trajectoire car cette pondération est relativement petite et l'erreur de position est maintenue à un niveau faible à cause de l'action des autres pondérations. L'ajout de cette pondération perturbe la résolution de l'équation de Riccati discrète. Avec une très faible pondération, le nombre d'échantillon est relativement grand (de l'ordre de 200 à 300). Par contre, avec l'augmentation de cette pondération, l'atteinte du régime permanent s'effectue plus rapidement. On ne peut pas augmenter indéfiniment cette pondération car elle influence directement la grandeur de la commande pour contrer les perturbations. Il faut donc augmenter le nombre d'échantillons de l'horizon pour obtenir les gains en régime permanent et garder les propriétés trouvées dans les simulations précédentes. La pondération sur l'erreur de l'intégrale de position est nécessaire pour faire face aux perturbations extérieures. La figure 1.12 montre la réponse du système à une perturbation constante (vent constant de 10m/s) avec différentes pondérations ( $Q_\zeta = 0, 0.1$  et  $0.8$ ). Évidemment, l'amplitude de la commande associée à la contre-réaction de la perturbation est d'autant plus grande que la pondération l'est. En effet, comme on l'a vu à la figure 1.7, le pôle associé à cette pondération se dirige vers l'origine du plan complexe Z, augmentant la puissance de la commande.

Puisque les perturbations ne sont généralement pas constantes, le contrôleur devra filtrer, en quelque sorte, les bourrasques de vent, de manière à ne pas répondre instantanément à la perturbation, mais bien dans une globalité. Cet aspect est important de manière à ne pas induire des fréquences trop élevées dans la commande. Les bourrasques peuvent être généralement modélisées par une distribution gaussienne, contenant donc en théorie tout le spectre des fréquences. La figure 1.13 montre une représentation temporelle du vent avec bourrasques.

La figure 1.14 montre la réponse en fréquence du système avec comme entrée les perturbations. La réponse en fréquence est périodique car le système est échantillonné. C'est la raison pour laquelle le graphe de la réponse en fréquence se termine à la

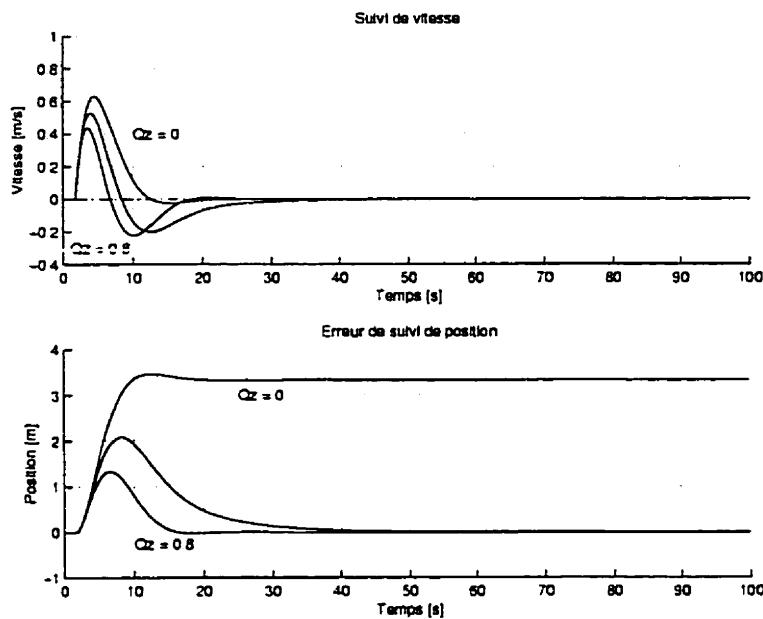


FIG. 1.12: Réponse du système à une perturbation échelon

fréquence de Nyquist, située à  $f_{nyquist} = \frac{1}{2T_{ech}}$ . On voit qu'un vent constant sera très bien contré, à cause de la forte atténuation (inférieure à -50 db) à basse fréquence. Par contre, le système possède une zone de faible atténuation qui se situe entre 0,02 Hz et 0,1 Hz pour la position et entre 0,045 Hz et 0,15 Hz pour la vitesse.

Donc, un vent oscillant avec une période d'environ 15 secondes sera moins bien contré et induira une perturbation sur la vitesse et la position du véhicule, forçant ainsi le contrôleur à faire osciller la commande. On peut augmenter le taux d'atténuation à ces fréquences en augmentant la pondération sur l'erreur de position, la pondération sur l'erreur de l'intégrale de position ou en diminuant la pondération sur la commande. La pondération sur l'erreur de la vitesse a très peu d'effet sur le rejet d'une perturbation. Ainsi, un compromis doit être fait car la commande est limitée en amplitude.

Les figures 1.15 et 1.16 représentent les états et la commande du système en réponse à la perturbation atmosphérique présentée à la figure 1.13. Comme on le voit, les réponses oscillent autour de leur fréquence de moindre atténuation. En ce

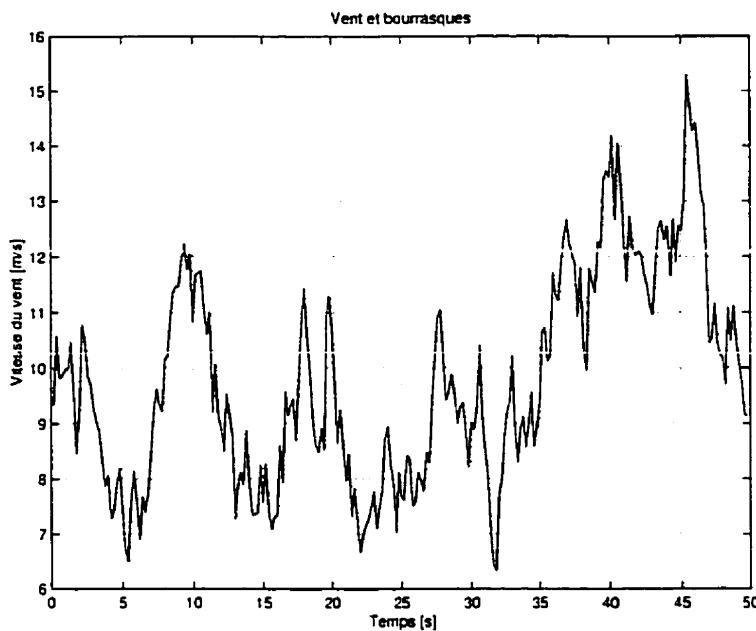


FIG. 1.13: Représentation temporelle de la perturbation (vent + bourrasques)

qui concerne la commande, l'amplitude des oscillations est d'environ un degré, ce qui est relativement raisonnable.

Voici la valeur des pondérations prises pour obtenir un contrôleur qui ne dépasse pas les contraintes sur la commande pour le contrôleur LQT :

- pondération sur la commande  $R = 19000$ ;
- pondération sur l'erreur de la vitesse  $Q_{x_v} = 1$ ;
- pondération sur l'erreur de la position  $Q_{x_z} = 6$ ;
- pondération sur l'erreur de l'intégrale de la position  $Q_\zeta = 0.8$ .

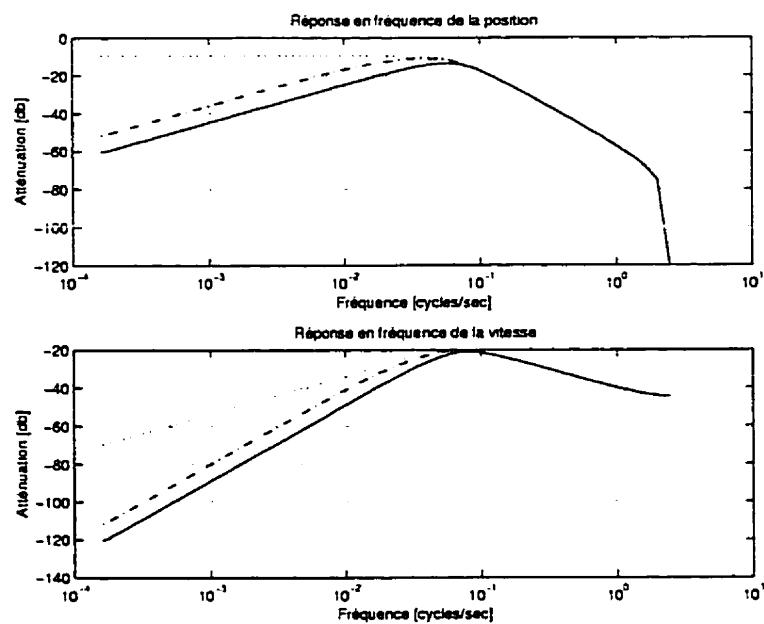


FIG. 1.14: Atténuation des perturbations :  $Q_\zeta = 0$  (....);  $Q_\zeta = 0.1$  (---);  $Q_\zeta = 0.8$  (—)

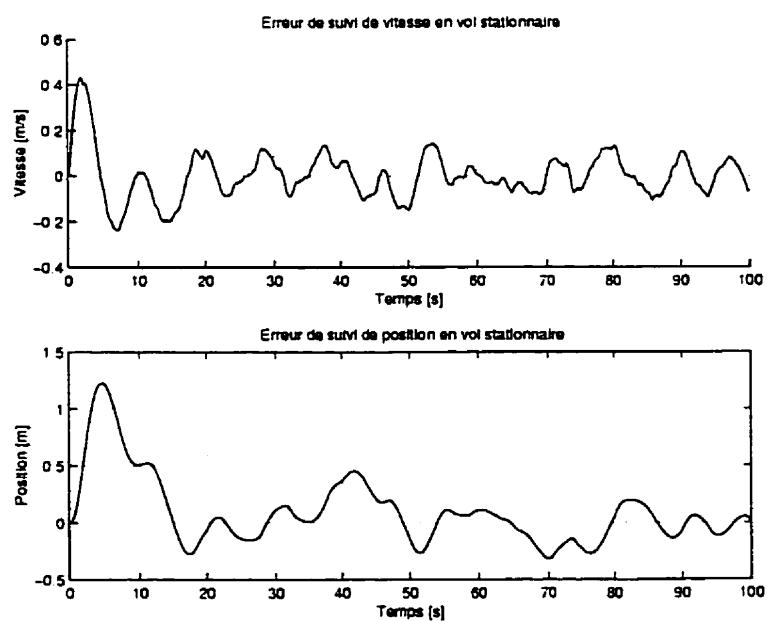


FIG. 1.15: Vol stationnaire avec perturbations : suivi de trajectoire

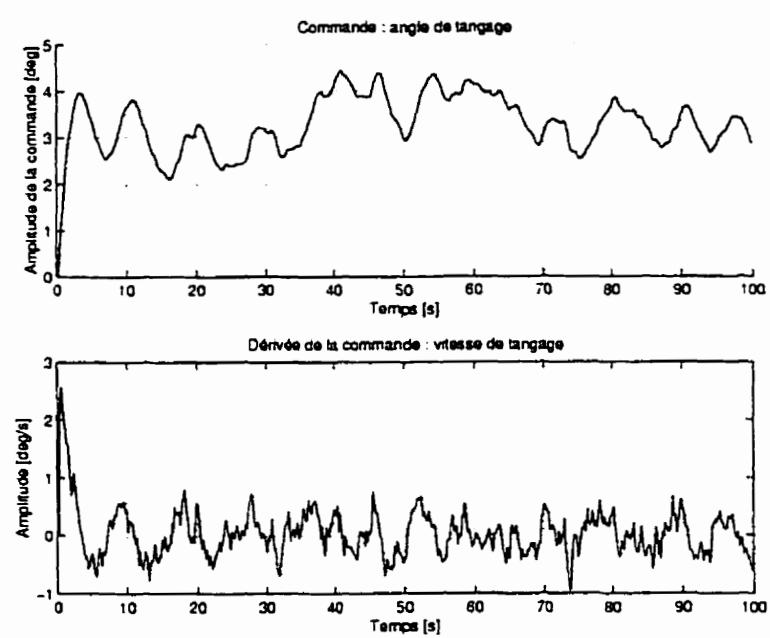


FIG. 1.16: Vol stationnaire avec perturbations : commandes

### 1.2.6.2 Référence sur l'horizon inconnue : contrôleur LQR

Avec les mêmes pondérations que celles prises précédemment pour le contrôleur LQT, les commandes calculées avec le contrôleur LQR dépassent largement les limites physiques du véhicule. Ainsi, les pondérations assurant une linéarité de la commande pour le contrôleur LQR sont de l'ordre de grandeur suivant :

- pondération sur la commande  $R = 190000$ ;
- pondération sur l'erreur de la vitesse  $Q_{x_v} = 0$ ;
- pondération sur l'erreur de la position  $Q_{x_r} = 0.7$ ;
- pondération sur l'erreur de l'intégrale de la position  $Q_\zeta = 0.01$ .

Une deuxième série de pondérations est simulée. Celles-ci, par contre, induisent une saturation de la commande. Les pondérations sont :

- pondération sur la commande  $R = 190000$ ;
- pondération sur l'erreur de la vitesse  $Q_{x_v} = 0$ ;
- pondération sur l'erreur de la position  $Q_{x_r} = 2$ ;
- pondération sur l'erreur de l'intégrale de la position  $Q_\zeta = 0.08$ .

Les figures suivantes (1.17 et 1.18) montrent une comparaison de la réponse temporelle entre la première série de pondération (trait plein) et la deuxième série (trait hachuré).

On voit que les plus fortes pondérations donnent un meilleur suivi. Par contre, les contraintes sont violées et il a fallu saturer les commandes. L'augmentation de la pondération de l'erreur de l'intégrale de la position engendre une meilleure atténuation des perturbations, comme on le voit à la figure 1.19. Comme dans les précédentes figures, le trait plein représente les pondérations faibles, tandis que le trait hachuré fait référence aux pondérations plus élevées.

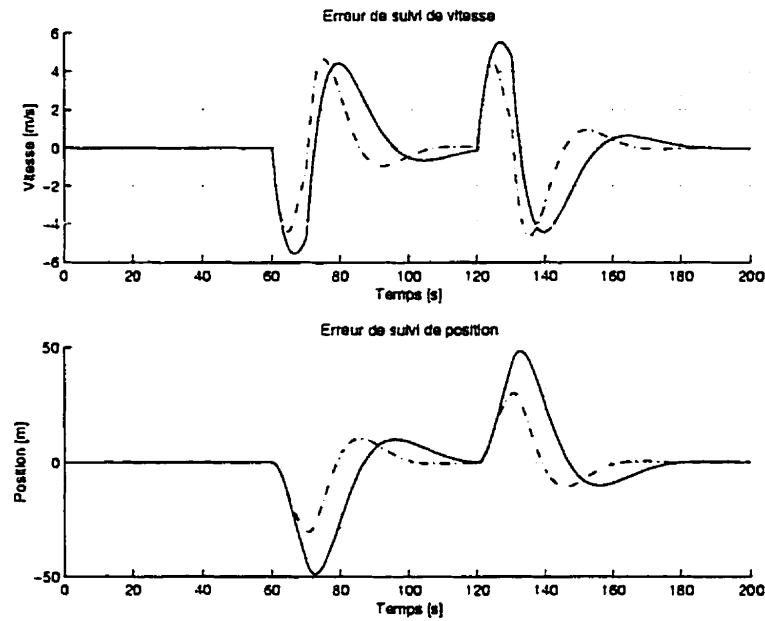


FIG. 1.17: Erreur de suivi : comparaison des pondérations du contrôleur LQR ; (pondérations faibles — ) ; (pondérations élevées - - - )

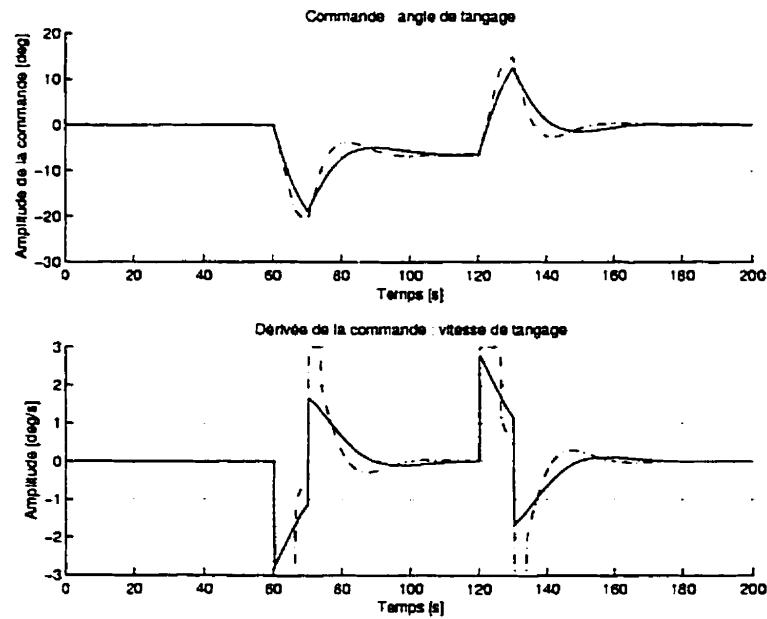


FIG. 1.18: Commande : comparaison des pondérations du contrôleur LQR ; (pondérations faibles — ) ; (pondérations élevées - - - )

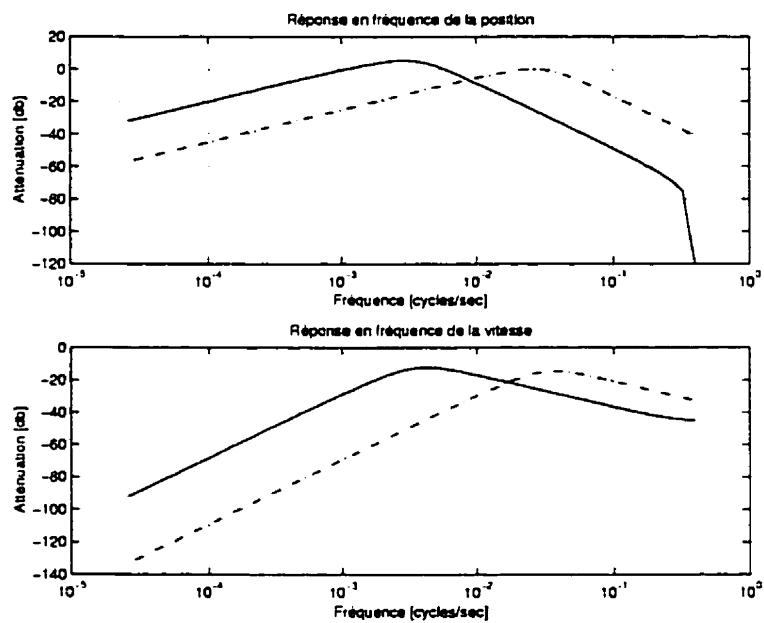


FIG. 1.19: Atténuation des perturbations : comparaison des pondérations du contrôleur LQR ; (pondérations faibles — ) ; (pondérations élevées - - - )

### 1.3 Conception d'un contrôleur de position et de vitesse à retour de sortie

Pour fin de comparaison, un contrôleur de suivi de trajectoire à retour de sortie est conçu. La structure est montré à la figure 1.20.

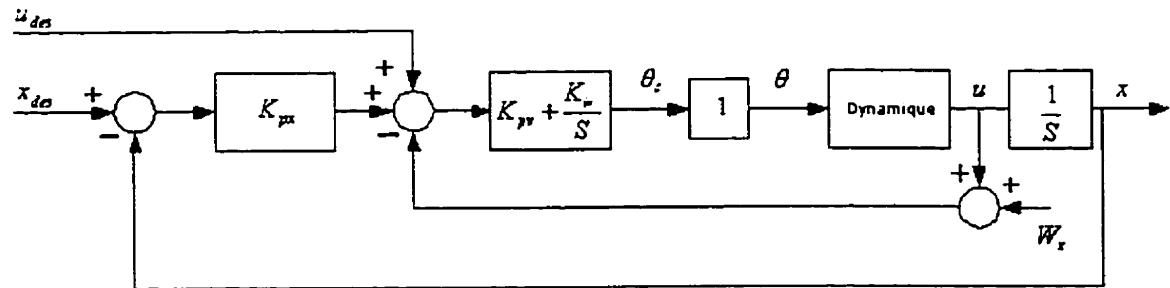


FIG. 1.20: Structure de la commande PI

Comme on le voit, la structure proposée comporte une boucle interne pour le suivi de la vitesse, ainsi qu'une boucle externe pour contrer les erreurs de position en vol stationnaire et en régime permanent. La boucle interne est composée d'un contrôleur de type proportionnel-intégrale. La boucle externe utilise les mêmes gains internes, mais affectés d'un gain  $K_{px}$ .

#### 1.3.1 Synthèse du contrôleur

Une première analyse sera faite avec le contrôleur de vitesse (boucle interne). Cette composante est essentielle au contrôleur de suivi de trajectoire, car en l'absence de perturbation, uniquement cette portion du contrôleur est nécessaire.

De manière à simplifier la synthèse du contrôleur, le zéro introduit par le contrôleur PI sera positionné tel qu'il annulera le pôle de la fonction de transfert du système en boucle ouverte. Ainsi, le rapport des coefficients du contrôleur est connu et égal à :

$$\frac{K_{iv}}{K_{pv}} = -c_d \quad (1.19)$$

En effet, en boucle ouverte,

$$\begin{aligned}
 \frac{u(s)}{\theta_{x_c}(s)} &= (K_{p_v} + \frac{K_{i_v}}{s})(\frac{-g}{s - c_d}) \\
 &= \frac{K_{p_v}}{s}(s + \frac{K_{i_v}}{K_{p_v}})(\frac{-g}{s - c_d}) \\
 &= \frac{-K_{p_v}g}{s}
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Donc, en boucle fermée, et avec la gain  $K_{p_x} = 0$ , la réponse du système sera du premier ordre.

$$\frac{u(s)}{u_{des}(s)} = \frac{-gK_{p_v}}{s - gK_{p_v}} \tag{1.21}$$

Le choix de  $K_{p_v}$  est maintenant fait avec le lieu des racines de l'équation caractéristique en boucle fermée. Étant seulement du premier ordre, le lieu des racines du système se résume à un pôle qui se dirige vers la gauche du plan complexe de Laplace avec une augmentation de ce gain. Ce gain est limité à cause de la saturation de la commande.

Pour ce qui est du gain proportionnel de la boucle externe, il sera également choisi avec le lieu des racines du système avec la boucle interne (et avec les gains associés trouvés précédemment). La fonction de transfert en boucle fermée du système complet (avec les deux boucles) est donnée par :

$$\frac{u(s)}{u_{des}(s)} = \frac{-gK_{p_v}s}{s^2 - gK_{p_v}s - gK_{p_x}K_{p_v}} \tag{1.22}$$

La figure 1.21 montre l'évolution des pôles en fonction du paramètre  $K_{p_x}$ . On voit que l'augmentation de ce gain résulte en la séparation des pôles réels en deux pôles

complexes conjugués. Le gain sera choisi tel que le coefficient d'amortissement soit d'environ  $\xi \approx 0.7$ .

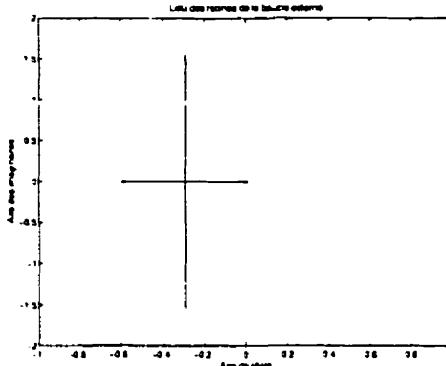


FIG. 1.21: Lieu des racines de la boucle externe

Pour ce qui est de la fonction de transfert de la position, nous obtenons :

$$\frac{x(s)}{x_{des}(s)} = \frac{-gK_{pv}K_{px}}{s^2 - gK_{pv}s - gK_{px}K_{pv}} \quad (1.23)$$

### 1.3.2 Analyse du contrôleur

De manière à vérifier le comportement du contrôleur, la même trajectoire utilisée précédemment (figure 1.9 sera appliquée au contrôleur. Une première simulation fera en sorte que le contrôleur ne dépasse pas les contraintes sur la commande. Par la suite, la réponse avec saturation sera simulée. Les figures 1.22 et 1.23 montrent la réponse de ces deux simulations. Le trait hachuré représente la réponse avec saturation, alors que le trait plein représente la simulation sans saturation de la commande. Évidemment, les gains plus élevés font en sorte que la commande sature et le suivi est mieux réalisé.

En ce qui concerne la robustesse face aux perturbation, la figure 1.24 montre la réaction face à une perturbation constante de  $10m/s$ . Le contrôleur avec les gains plus élevés atténue mieux la perturbation. La figure 1.25 montre la comparaison de la réponse en fréquence du contrôleur avec les différents gains. La fonction de transfert

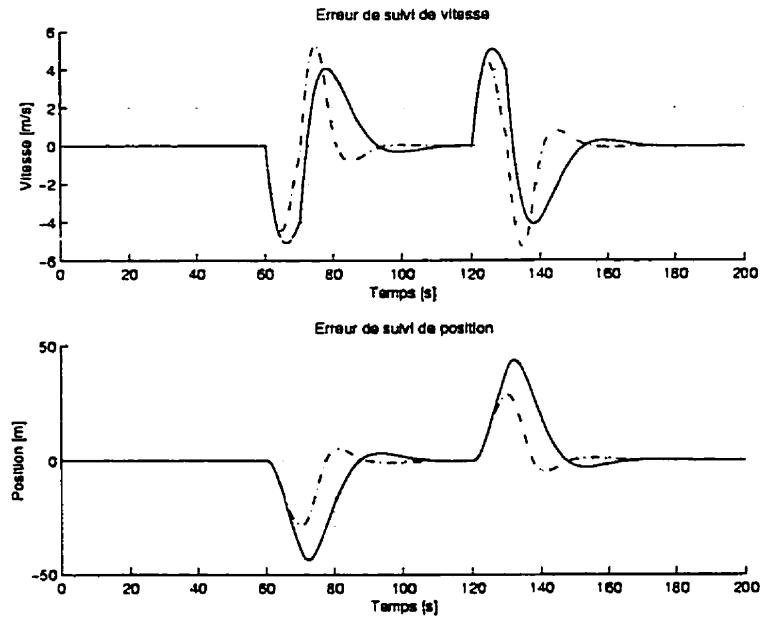


FIG. 1.22: Erreur de suivi avec contrôleur PI; (gains faibles — ) ; (gains élevés - - - )

calculée utilise comme entrée la perturbation  $w(s)$ , telle que représentée sur le schéma du système de la figure 1.20. Le trait plein représente le système sans saturation alors que le trait hachuré donne la réponse en fréquence du système avec les gains plus élevés, et saturant la commande.

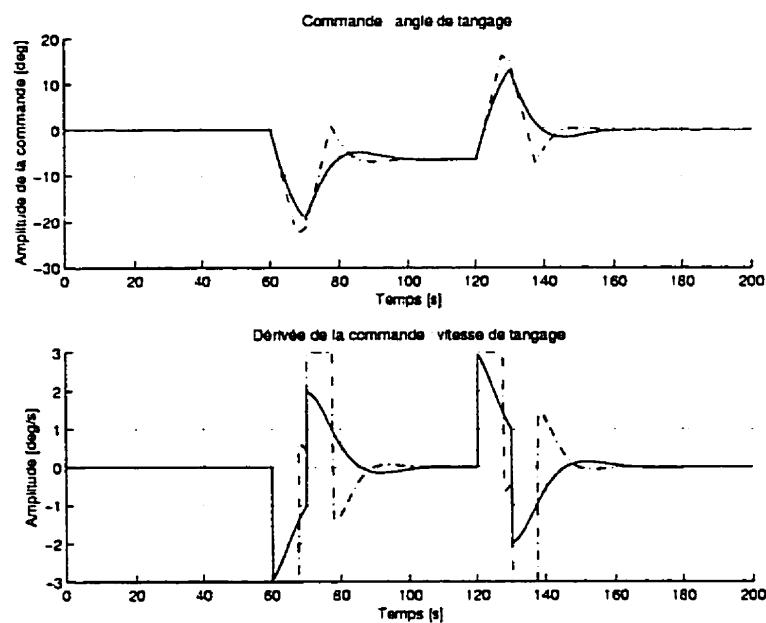


FIG. 1.23: Commande avec contrôleur PI; (gains faibles — ) ; (gains élevés - - - )

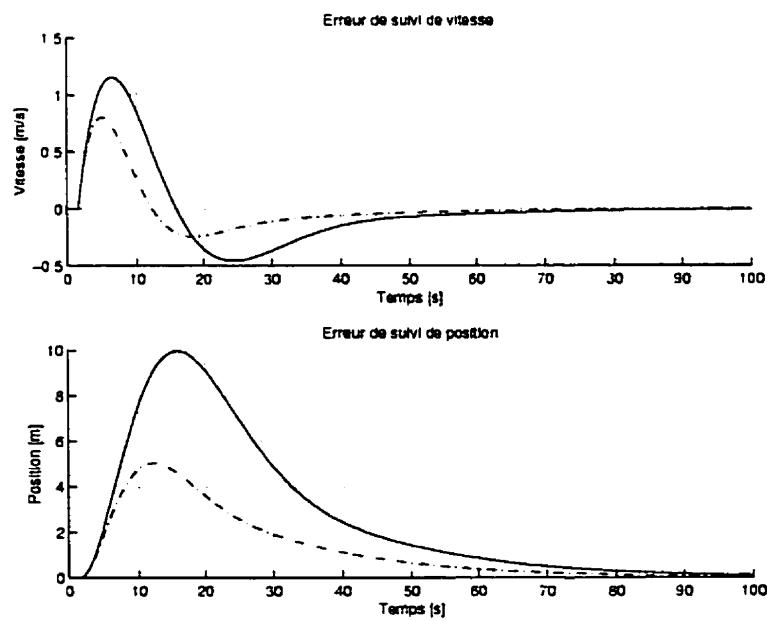


FIG. 1.24: Erreur de suivi en vol stationnaire avec perturbation échelon : contrôleur PI; (gains faibles — ) ; (gains élevés - - - )

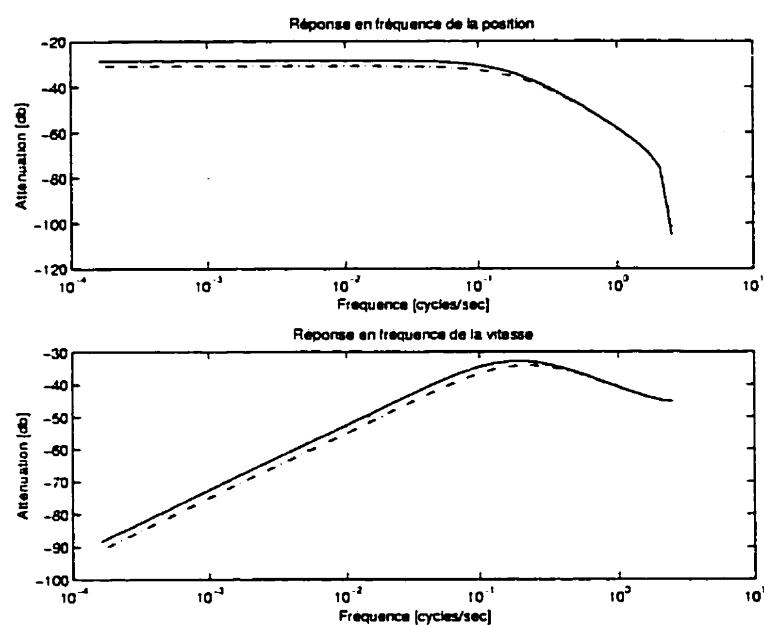


FIG. 1.25: Atténuation des perturbations : contrôleur PI; (gains faibles — ); (gains élevés - - - )

### 1.3.3 Différence entre le contrôleur à retour de sortie et le contrôleur LQR

On voit que les performances du contrôleur à retour de sortie sont moins bonnes que les performances du contrôleur LQR. A priori, les deux contrôleurs possèdent une structure de type PID. En effet, le contrôleur LQR peut être détaillé comme suit :

$$\begin{aligned}\theta_x &= k_x^T (\chi^*(i) - r(i+1)) \\ &= k_1 \epsilon_x + k_2 \epsilon_v + k_3 \epsilon_z\end{aligned}$$

où  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_v$  et  $\epsilon_z$  représentent les écarts entre la référence et les variables d'état associées. L'analyse dans le domaine de Laplace est effectuée de façon à simplifier les concepts. La précédente loi de commande appliquée au modèle d'état donne l'équation caractéristique suivante :

$$den(s) = s^3 - (c_d + gk_2)s^2 - gk_1s - gk_3 \quad (1.24)$$

Ainsi, les pôles du système peuvent être déterminés.

En ce qui concerne le contrôleur à retour de sortie, la démonstration se fait à partir du schéma bloc de la figure 1.20. La loi de commande est par :

$$\begin{aligned}\theta_x(s) &= \left( k_{pv} + \frac{k_{iv}}{s} \right) (\epsilon_v(s) + k_{px} \epsilon_x(s)) \\ &= k_{pv} \epsilon_v(s) + k_{pv} k_{px} \epsilon_x(s) + k_{iv} \frac{\epsilon_v(s)}{s} + k_{iv} k_{px} \frac{\epsilon_x(s)}{s} \\ &= k_{pv} s \epsilon_x(s) + k_{pv} k_{px} \epsilon_x(s) + k_{iv} \epsilon_x(s) + k_{iv} k_{px} \frac{\epsilon_x(s)}{s} \\ &= (k_{pv} k_{px} + k_{iv}) \epsilon_x(s) + k_{pv} s \epsilon_x(s) + k_{iv} k_{px} \frac{\epsilon_x(s)}{s} \quad (1.25)\end{aligned}$$

et la fonction de transfert entre la position et la position de référence est donnée par :

$$den\left\{ \frac{x(s)}{x_{ref}(s)} \right\} = s^3 - (c_d + gk_{pv})s^2 - g(k_{pv} k_{px} + k_{iv})s - gk_{iv} k_{px} \quad (1.26)$$

Par comparaison des structures 1.24 et 1.26, on peut obtenir une correspondance entre les gains optimaux du contrôleur LQR et les gains du contrôleur à retour de sortie pour obtenir un même positionnement de pôles. Les relations sont les suivantes :

$$\begin{aligned} k_{iv} &= \frac{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_2k_3}}{2} \\ k_{px} &= \frac{2k_3}{k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_2k_3}} \\ k_{pv} &= k_2 \end{aligned} \quad (1.27)$$

À cause de la racine carrée, il existe des configurations de contrôleur LQR qui ne pourront pas être réalisées par le contrôleur à retour de sortie. Par exemple, avec les pondérations suivantes :

$$Q_x = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad Q_\zeta = 0.01$$

on obtient le vecteur de gain optimal :

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.004081 \\ 0.02374 \\ 0.000224 \end{pmatrix}$$

Avec les transformations représentées par l'ensemble d'équation 1.27, on obtient les gains suivants pour le contrôleur à retour de sortie :

$$\begin{pmatrix} k_{iv} \\ k_{px} \\ k_{pv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00204 \pm 0.001j \\ 0.08595 \pm 0.0453j \\ 0.02374 \end{pmatrix}$$

ce qui rend évidemment sa réalisation impossible. Ainsi, le contrôleur LQR offre plus de possibilités que le contrôleur à retour de sortie. La structure de contrôleur à retour

de sortie tel que conçu possède une structure PID mais n'utilise pas à pleine efficacité son potentiel. En effet, il existe une partie du plan complexe où le contrôleur à retour de sortie ne peut pas placer les pôles du système en boucle fermée.

## CHAPITRE II

### PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES SUR LA COMMANDE

La saturation des contraintes pose un certain problème dans la théorie de la commande. La méthode de prise en compte des contraintes présentée dans l'analyse des contrôleurs avait comme caractéristique l'altération de la commande (saturation) dans le but de ne pas franchir les limites du système. Premièrement, la loi de commande n'est plus linéaire, ce qui enlève l'assurance que le système sera stable. De plus, lorsque la commande sature, la composante intégrale du contrôleur n'a plus d'effet, même si l'intégrale de l'erreur augmente. Par la suite, lorsque la référence est admissible et que les commandes ne devraient plus être en saturation, l'accumulation de l'intégrale vient toujours saturer la commande.

Une différente approche peut être prise pour contourner ce problème. Au lieu de saturer la commande à cause d'une référence donnée qui pousse le système à la limite, c'est cette référence qui pourrait être réduite de manière à respecter la contrainte sur la commande. Ainsi, par un algorithme quelconque, on peut toujours trouver une référence telle que le système ne sature pas les contraintes.

Dans ce chapitre, la question de la prise en compte des contraintes. Dans un premier temps, les techniques de saturation usuelles seront exposées. Par la suite, un nouvel algorithme de prise en compte des contraintes sera proposé.

#### 2.1 Interprétation physique des contraintes

Les contraintes imposées sur l'angle de tangage et sur la vitesse de tangage sont justifiées par les capacités physiques du véhicule. Au-delà d'un certain angle de tangage, le système de lubrification ne fonctionne plus normalement et des troubles mécaniques peuvent survenir. L'angle de tangage maximal dans la direction du mouvement est de  $\theta_{max} \approx 24^\circ$  pour des conditions normales d'opération. En ce qui concerne la vitesse de

tangage, la principale limite provient de la manœuvre de freinage (tilt-back). Lorsque le véhicule se dirige dans une direction, et qu'une commande pour aller dans le sens inverse est donnée, le véhicule change son angle de tangage tel que durant un moment, une masse d'air entre par la zone inférieure du rotor, et risque de créer un moment dynamique qui fera renverser le véhicule. Pour prévenir un tel phénomène, la vitesse de tangage est limitée à  $\dot{\theta}_{max} \approx 3^\circ/s$ .

Ces contraintes sont dans l'axe de déplacement du véhicule. Dans le problème d'un déplacement en deux dimensions, les contraintes sont plus complexes car la vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire à la vitesse air du véhicule doit être prise en considération. En utilisant un modèle à deux degrés de liberté (un pour chaque axe du référentiel NED), les contraintes peuvent être appliquées de manière circulaire, ce qui est beaucoup moins complexe que le calcul de la contrainte sur la vitesse de rotation.

## 2.2 Saturation de la commande

### Contraintes cartésiennes

Une première approche consiste à établir des contraintes cartésiennes, où les contraintes sont appliquées de manière indépendantes sur chaque mode (latéral et longitudinal). Cette manière de faire, en plus de fausser la direction de la commande dans l'espace des commandes, n'est pas adaptée à la signification physique du véhicule.

La commande sous contrainte est calculée de la manière suivante :

$$\bar{\theta}_{x_c} = sat(\theta_{x_c})$$

$$\bar{\theta}_{y_c} = sat(\theta_{y_c})$$

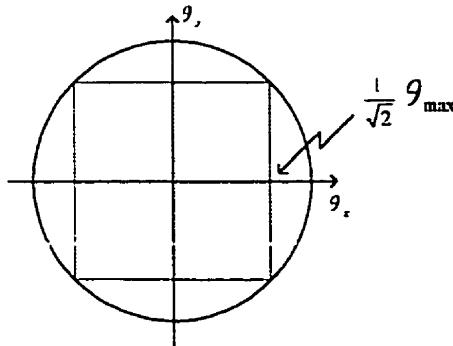


FIG. 2.1: Contraintes cartésiennes (découplées)

### Contrainte circulaire

Une deuxième approche consiste à appliquer des contraintes circulaires sur les commandes, et en réduisant celles-ci proportionnellement de manière à garder une direction de contrôle identique à celle en l'absence de contraintes.

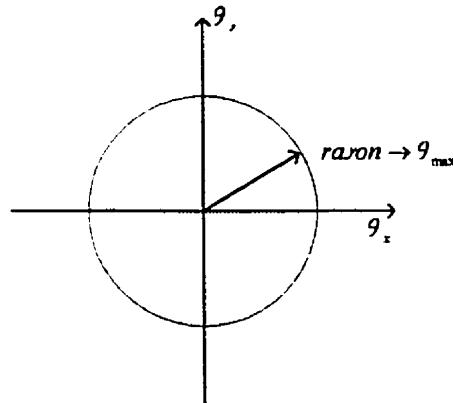


FIG. 2.2: Contraintes polaires (couplées)

Ainsi, dans le cas d'un dépassement de la contrainte circulaire sur l'angle de tangage, le facteur de proportionnalité est calculé par :

$$fp = \frac{\theta_{max}}{\sqrt{\theta_{x_c}^2(i) + \theta_{y_c}^2(i)}} \quad (2.1)$$

et la commande sujette aux contraintes est calculée de la manière suivante :

$$\bar{\theta}_{x_c}(i) = fp \cdot \theta_{x_c}(i)$$

$$\bar{\theta}_{y_c}(i) = fp \cdot \theta_{y_c}(i)$$

Par contre, si la contrainte sur l'angle de tangage est respectée, mais celle sur la vitesse de tangage ne l'est pas, le facteur de proportionnalité est calculée comme suit :

$$fp = \frac{q_{max}}{\sqrt{q_x^2(i) + q_y^2(i)}} \quad (2.2)$$

et la commande sur l'angle de tangage pour chaque axe est déterminée à partir de l'approximation du premier ordre de la vitesse de tangage :

$$\bar{\theta}_{x_c}(i) = \theta_{x_c}(i - 1) + fp \cdot Tech \cdot q_x(i)$$

$$\bar{\theta}_{y_c}(i) = \theta_{y_c}(i - 1) + fp \cdot Tech \cdot q_y(i)$$

Cette méthode d'application des contraintes est préférable à la première et c'est elle qui sera programmée dans le logiciel de contrôle en deux dimensions.

Les schémas blocs suivant (figures 2.3 et 2.4) représentent la structure de commande avec les contraintes de saturation sur la commande. L'algorithme de saturation présent dans le schéma bloc de la figure 2.4 est celui explicité précédemment, gardant l'orientation du contrôle intacte. Le retard d'une période d'échantillonnage sur la commande est nécessaire pour permettre le calcul de la dérivée numérique de la commande.

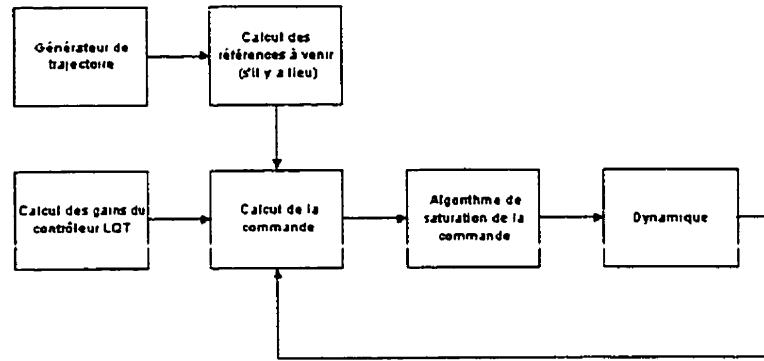


FIG. 2.3: Schéma bloc du système

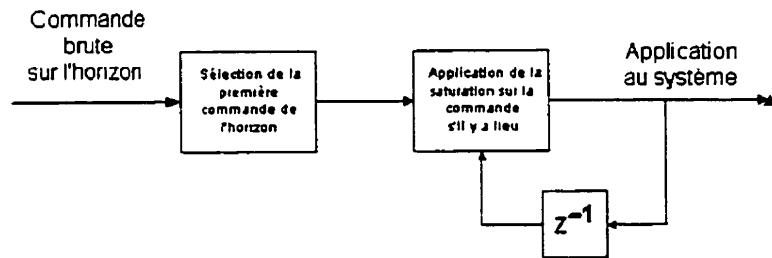


FIG. 2.4: Schéma bloc de l'application des contraintes

## 2.3 Algorithme de modification de la référence

### 2.3.1 Élaboration théorique

Comme cité dans le préambule du chapitre, la référence peut être altérée de façon à ce que les commandes ne violent pas les contraintes.

Les contraintes sur la commande pour l'horizon peuvent être interprétées comme suit :

$$\begin{aligned}
 \theta_{x_c}^2(0) + \theta_{y_c}^2(0) &\leq \theta_{max}^2 \\
 \theta_{x_c}^2(1) + \theta_{y_c}^2(1) &\leq \theta_{max}^2 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\theta_{x_c}^2(N-2) + \theta_{y_c}^2(N-2) &\leq \theta_{max}^2 \\ \theta_{x_c}^2(N-1) + \theta_{y_c}^2(N-1) &\leq \theta_{max}^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{\theta_{x_c}(0) - \theta_{x_c}(-1)}{T_{ech}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{y_c}(0) - \theta_{y_c}(-1)}{T_{ech}}\right)^2 &\leq q_{max}^2 \\ \left(\frac{\theta_{x_c}(1) - \theta_{x_c}(0)}{T_{ech}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{y_c}(1) - \theta_{y_c}(0)}{T_{ech}}\right)^2 &\leq q_{max}^2 \\ &\vdots \\ \left(\frac{\theta_{x_c}(N-2) - \theta_{x_c}(N-1)}{T_{ech}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{y_c}(N-2) - \theta_{y_c}(N-1)}{T_{ech}}\right)^2 &\leq q_{max}^2 \\ \left(\frac{\theta_{x_c}(N-1) - \theta_{x_c}(N-2)}{T_{ech}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{y_c}(N-1) - \theta_{y_c}(N-2)}{T_{ech}}\right)^2 &\leq q_{max}^2\end{aligned}\tag{2.4}$$

Le problème consiste donc à trouver les meilleures références sur l'horizon qui satisfont les  $2N$  inégalités. Les commandes contenues dans les inégalités sont calculées par l'équation suivante (qui provient de l'équation 1.15) :

$$\theta_{x_c}(i : N-1+i) = K_1 \chi(i) + K_2 r(i+1 : N+i)\tag{2.5}$$

La meilleure référence faisable est celle qui est la plus proche de la référence voulue. Pour ce faire, plusieurs mesures peuvent être prises. Le choix de minimiser la distance géométrique (la sommation des erreurs quadratiques) entre la référence faisable et celle voulue sera utilisé. Il s'agit donc de minimiser le critère quadratique suivant :

$$\min_{r_{fais}(1:N)} J_{quad} = \sum_{i=1}^N (r_{fais}(i) - r_{voulue}(i))^T Q_{algo} (r_{fais}(i) - r_{voulue}(i))\tag{2.6}$$

où  $r_{voulue}$  est la référence voulue et  $r_{fais}$  est la référence faisable.

La variable libre à déterminer est  $r_{fais}$ . La commande associée est calculée à l'aide de l'équation 2.5 et elle est soumise aux contraintes élaborées précédemment (équations 2.3 et 2.4).

### 2.3.2 Synthèse de l'algorithme

La référence est un vecteur composé de la position, de la vitesse et de l'intégrale de position. L'algorithme de minimisation doit donc déterminer un vecteur de références pour chaque échantillon de l'horizon. Puisque les composantes du vecteur de référence pour un échantillon sont reliées par une constante, l'accélération, la variable à déterminer par l'algorithme sera cette dernière. Cette manière de procéder assure que les références de vitesse, position et d'intégrale de position sont physiquement reliées entre elles. De plus, le critère de minimisation sera modifié pour inclure l'erreur sur l'accélération. Ainsi, la fonction de coût sera :

$$\begin{aligned} \min_{a_{fais}(1:N)} J_{quad} = & \sum_{i=1}^N (r_{fais}(i) - r_{voulue}(i))^T Q_{algo} (r_{fais}(i) - r_{voulue}(i)) \\ & + \sum_{i=1}^N (a_{fais}(i) - a_{voulue}(i))^T Q_{acc} (a_{fais}(i) - a_{voulue}(i)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'algorithme de résolution se présente comme suit :

1. Pour chacun des instants d'échantillonnage
  - (a) Calculer la commande pour l'horizon (équation 1.16)
  - (b) Déterminer des accélérations faisables sur l'horizon
  - (c) Avec les équations de cinématique et les accélérations, déterminer la vitesse, la position et l'intégrale de la position faisable
  - (d) Calculer la valeur de la fonction de coût quadratique (équation 2.7)
  - (e) Calculer la nouvelle commande à partir de cette référence faisable (équation 1.16)

(f) Vérifier les violations de contraintes (équations 2.3 et 2.4)

(g) Si une commande viole une contrainte

i. retourner en 1b

(h) Si les commandes respectent toutes les contraintes

i. Appliquer la commande associée au premier échantillon au système

Le diagramme suivant représente un schéma bloc de la structure de commande du système :

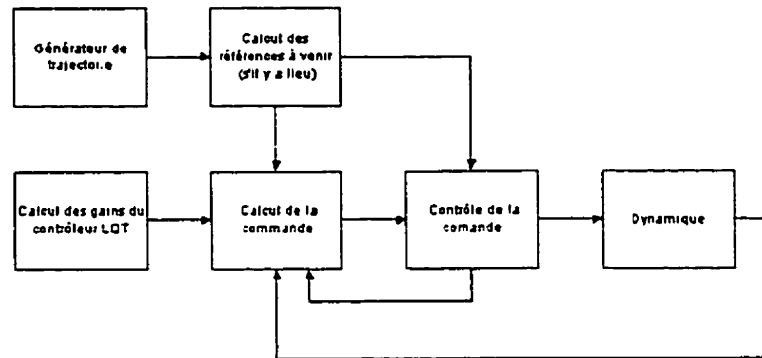


FIG. 2.5: Schéma bloc de commande

L'algorithme interne du bloc de contrôle de commande se présente comme suit, à la figure 2.6.

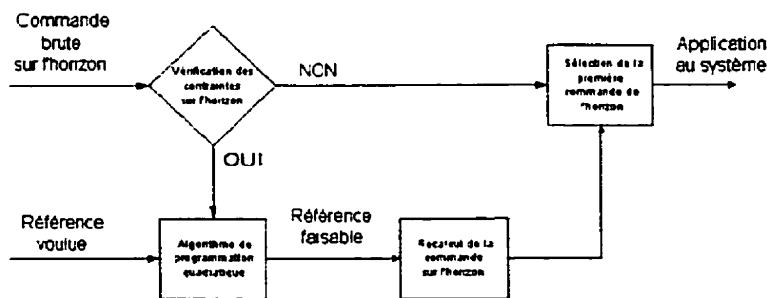


FIG. 2.6: Bloc de contrôle de la commande

Avec cet algorithme, les références qui sont envoyées au contrôleur linéaire quadratique sont toujours faisables, assurant ainsi la stabilité du système.

### 2.3.3 Analyse de l'algorithme : contrôleur LQR

Les simulations suivantes appliquent l'algorithme au contrôleur LQR. L'algorithme, tel que présenté à la section précédente, est valide pour un horizon donné. Le cas particulier du contrôleur LQR utilisera seulement la commande calculée pour l'instant présent. Ainsi, les contraintes peuvent se résumer à :

$$\begin{aligned}\theta_{x_c}^2(0) + \theta_{y_c}^2(0) &\leq \theta_{max}^2 \\ \left(\frac{\theta_{x_c}(0) - \theta_{x_c}(-1)}{T_{ech}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{y_c}(0) - \theta_{y_c}(-1)}{T_{ech}}\right)^2 &\leq q_{max}^2\end{aligned}$$

Le critère à minimiser est la distance géométrique entre la référence faisable et la référence voulue. Le critère peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\min_{a_{fais}(1)} J = & (r_{fais}(1) - r_{voulue}(1))^T Q_{algo} (r_{fais}(1) - r_{voulue}(1)) \\ & + (a_{fais}(1) - a_{voulue}(1))^T Q_{acc} (a_{fais}(1) - a_{voulue}(1))\end{aligned}$$

où  $r_{voulue}(1)$  est la référence voulue et  $r_{fais}(1)$  est la référence faisable.

et

$$r_{voulue}(1) = \begin{pmatrix} x_{ref}(1) \\ u_{ref}(1) \\ \zeta_{ref}(1) \end{pmatrix}$$

Le paramètre  $Q_{algo}$  représente le poids relatif des erreurs entre la référence voulue et la référence faisable. Ces poids peuvent être variés pour obtenir différentes réponses de la part de l'algorithme. Un aspect important est le poids sur l'erreur de la référence sur l'intégrale de la position. Lorsque le poids associé à l'erreur de la référence faisable sur l'intégrale de la position est relativement supérieur aux autres poids, l'algorithme

de programmation quadratique se comporte exactement comme une saturation. Ainsi, l'erreur de la référence sur l'intégrale de la position ne sera pas minimisée, d'autant plus que cette variable d'état est une variable fictive dont le seul but est de réduire les erreurs en régime permanent sur la position. Ainsi, seulement les poids sur l'erreur de la référence en position, vitesse et accélération seront utilisés. et le poids associé à l'erreur sur l'intégrale de position sera nul.

La simulation utilise les mêmes pondérations du contrôleur LQR que celles utilisées avec la saturation. La courbe pleine représente le contrôleur avec l'algorithme de programmation quadratique sur la référence tandis que la courbe hachurée est reliée au contrôleur avec saturation de la commande.

En ajoutant un poids sur l'erreur de l'accélération, la commande sature moins mais le suivi de la trajectoire semble moins bon. En effet, la dynamique de l'erreur des références est régie par le poids de l'erreur de l'accélération. Si le poids de l'accélération est largement supérieur aux autres poids, la commande ne saturera plus mais le suivi sera détérioré.

Le système utilise l'algorithme de minimisation à chaque instant, et avec un poids unitaire sur l'erreur de la référence en position, vitesse et accélération. Ainsi, comme le démontre les figures 2.7 et 2.8, la commande est moins saturée et le suivi de trajectoire se fait à peu près comme le système avec la saturation de la commande. La figure 2.9 montre la dynamique de l'erreur de la référence.

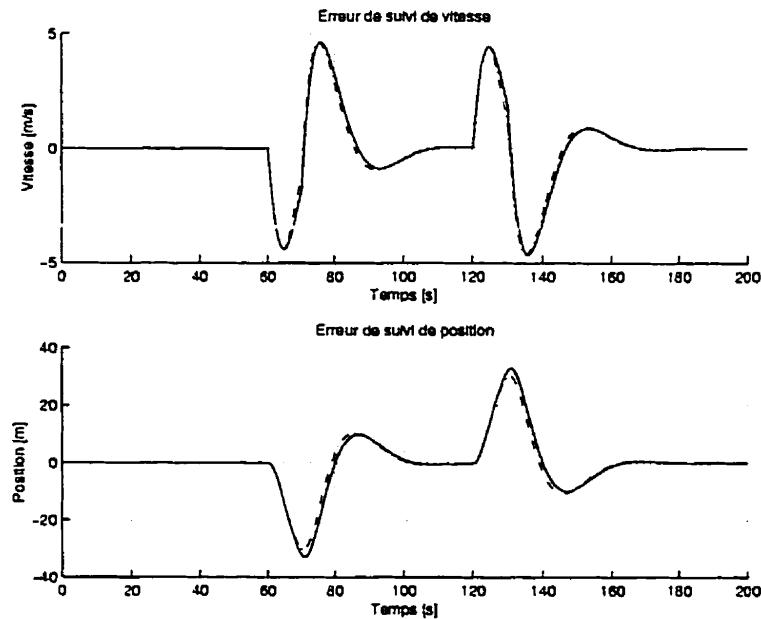


FIG. 2.7: Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (---)

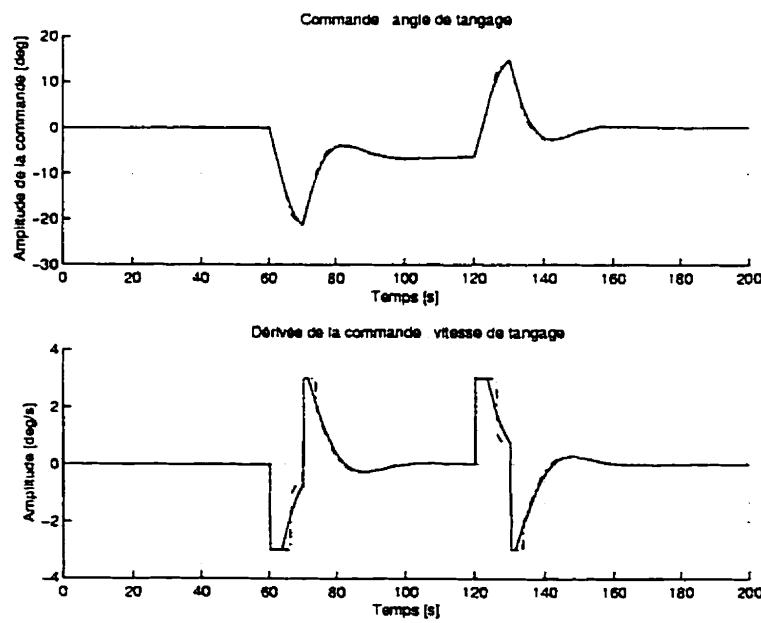


FIG. 2.8: Commande : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (---)

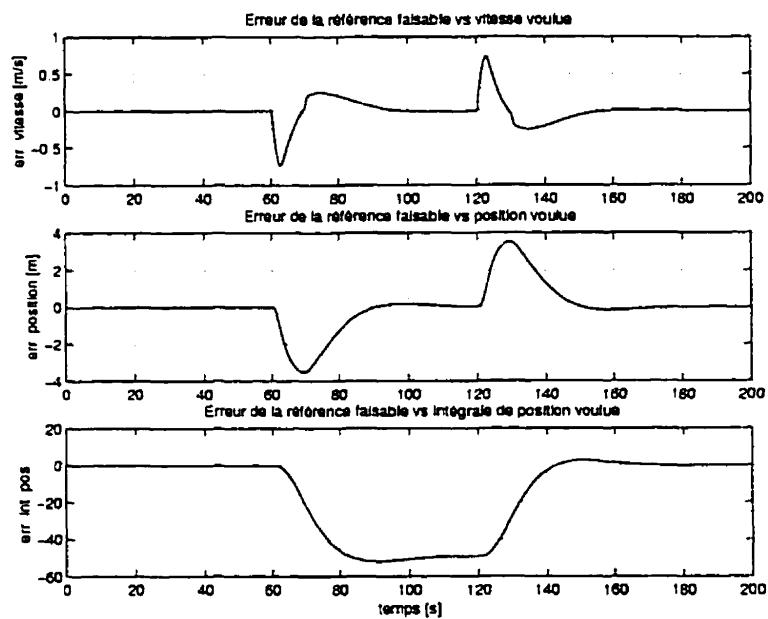


FIG. 2.9: Erreur entre la référence faisable et la référence voulue

Maintenant qu'il est montré que l'algorithme fonctionne correctement, les gains du contrôleur peuvent être augmentés pour contrer les perturbations atmosphériques, sans que le suivi de la trajectoire ne soit détérioré. En fait, les pondérations suivantes sont celles qui ont été prises pour le contrôleur LQT avec la connaissance de la trajectoire à venir.

- pondération sur la commande  $R = 19000$ ;
- pondération sur l'erreur de la vitesse  $Q_{x_v} = 1$ ;
- pondération sur l'erreur de la position  $Q_{x_x} = 6$ ;
- pondération sur l'erreur de l'intégral de la position  $Q_\zeta = 0.8$ .

La figure 2.10 montre la réponse du système à une perturbation constante de  $10m/s$ . Tel qu'il est prévu, la hausse des pondérations donne une meilleure réponse à la perturbation. Pour ce qui est du suivi de trajectoire, le contrôleur donne également une bonne réponse, du moins comparativement au contrôleur LQR avec simple saturation, qui lui fait complètement diverger le système, comme en témoigne les figures 2.11 et 2.12. La figure 2.13, quant à elle, montre l'erreur entre les références voulue et faisable. Le trait plein représente l'utilisation de l'algorithme de programmation quadratique, tandis que le trait hachuré donne la réponse avec la saturation.

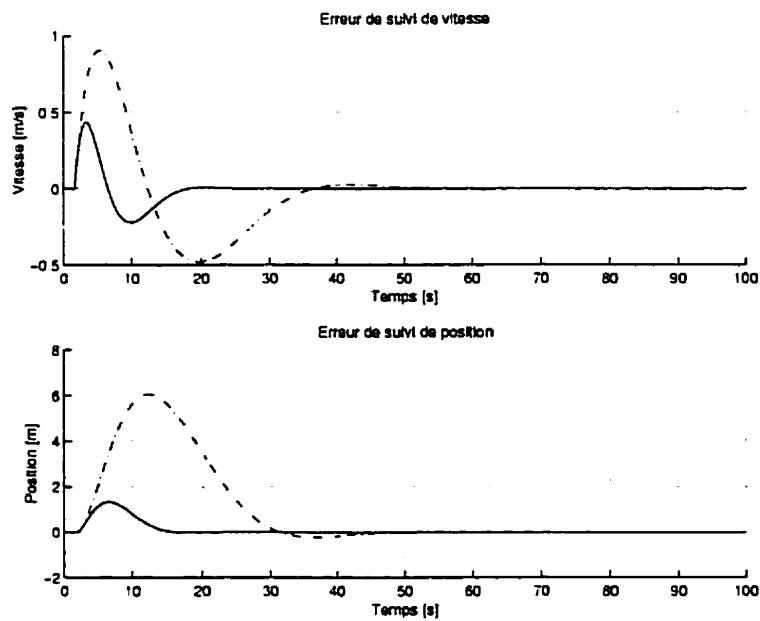


FIG. 2.10: Vol stationnaire avec perturbation : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (---)

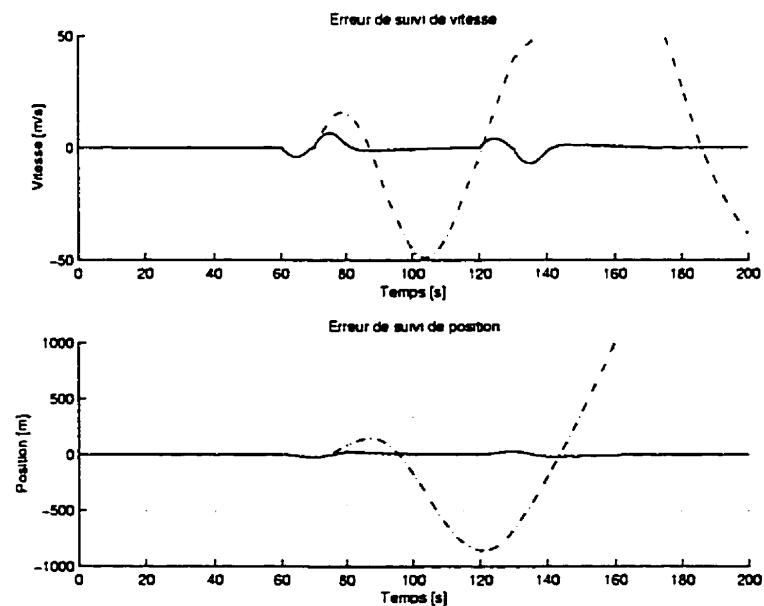


FIG. 2.11: Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (---)

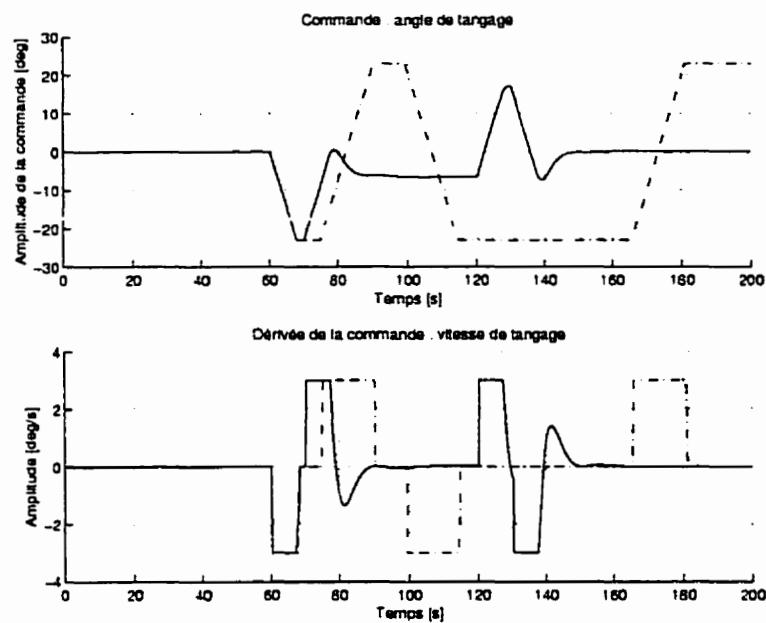


FIG. 2.12: Commande : comparaison contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (---)

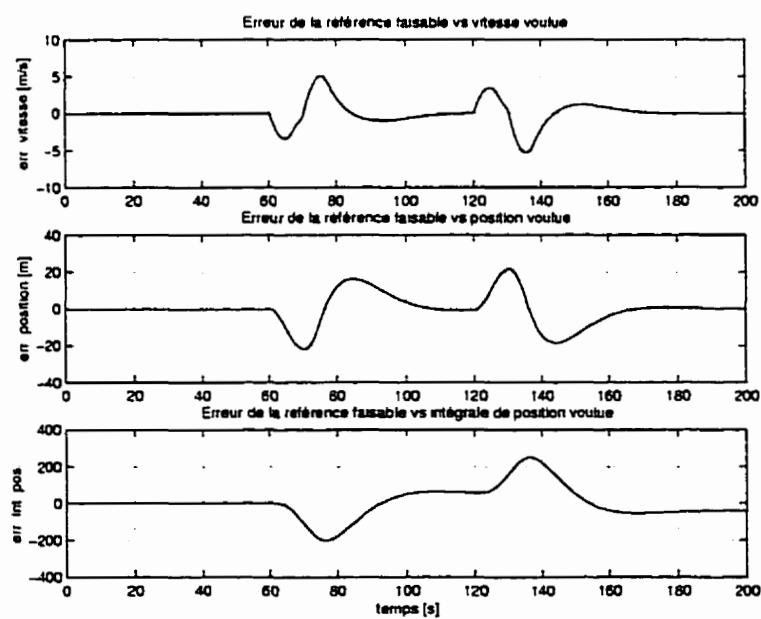


FIG. 2.13: Erreur entre la référence faisable et la référence voulue

En plus de pouvoir augmenter les pondérations, le contrôleur est en mesure de suivre une trajectoire qui demande de fortes accélérations. Toutes les simulations passées employaient des accélérations de  $2m/s^2$ . La prochaine simulation demande des accélérations de  $6m/s^2$ , qui nécessitent des commandes beaucoup plus fortes. L'intégrité du véhicule est conservée, le suivi de la trajectoire n'est pas tout à fait bien suivi (figure 2.14 et 2.15), ce qui est normal, mais le véhicule converge vers la référence voulue lorsque celle-ci est acceptable du point de vue des capacités du véhicule (figure 2.16).

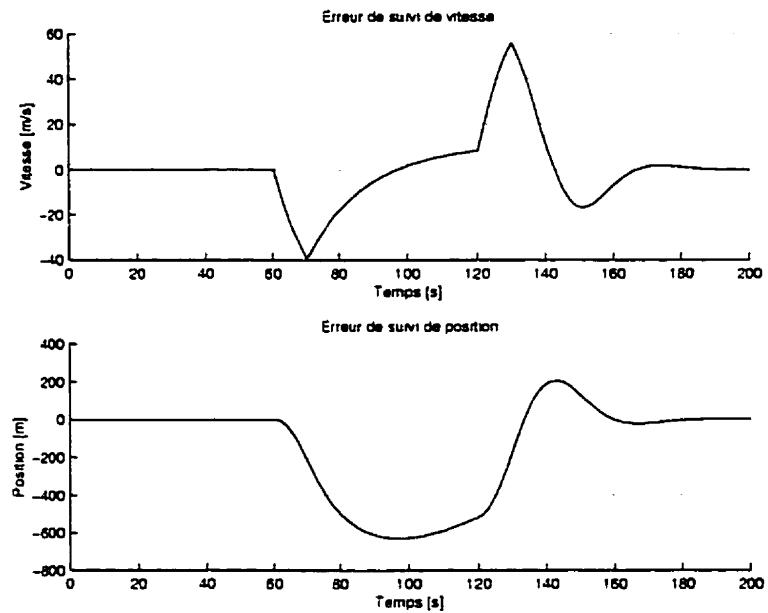


FIG. 2.14: Suivi de trajectoire : contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique;  $a_{max} = 6m/s^2$

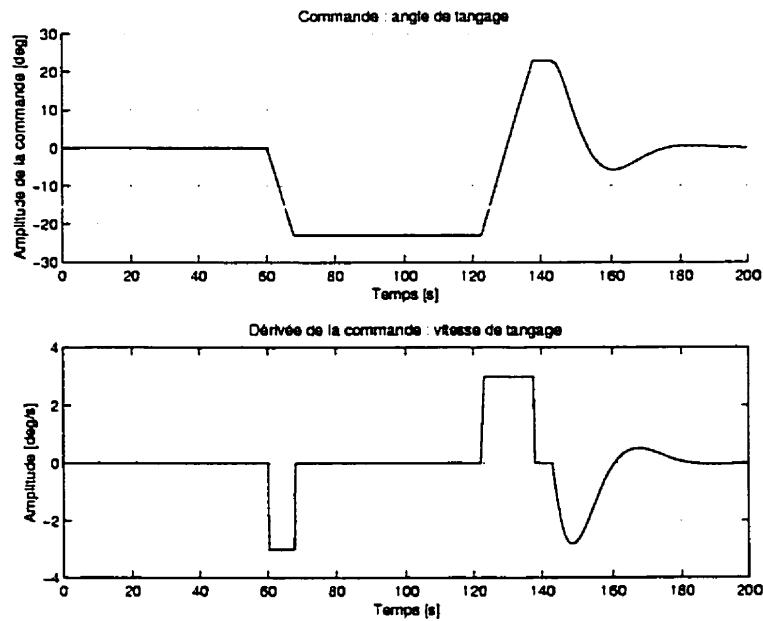


FIG. 2.15: Commande : contrôleur LQR avec algorithme de programmation quadratique ;  $a_{max} = 6m/s^2$

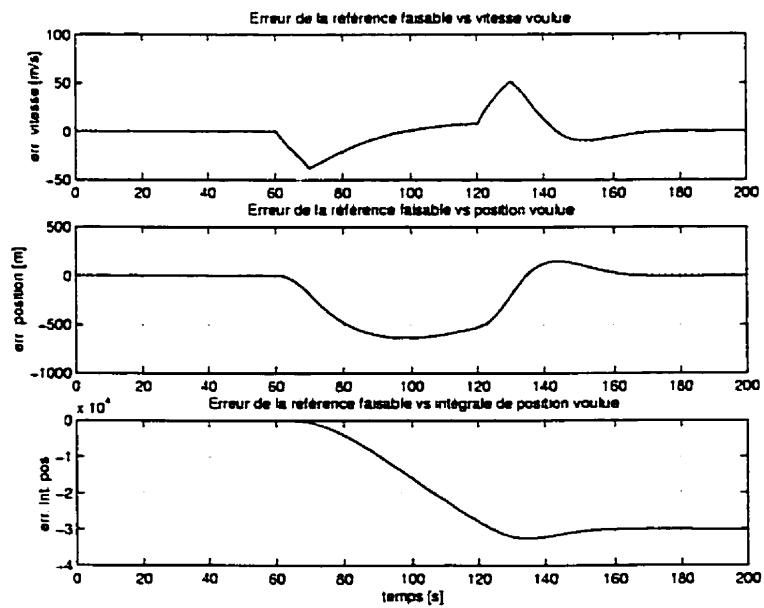


FIG. 2.16: Erreur de la référence faisable vs la référence voulue ;  $a_{max} = 6m/s^2$

### 2.3.4 Extension de l'algorithme au contrôleur LQT

Contrairement au contrôleur LQR, le contrôleur LQT utilise les références à venir pour calculer les commandes à appliquer sur l'horizon. Puisque le contrôleur calcule les commandes pour l'horizon à venir, l'algorithme pourra prévoir si le contrôleur sera en saturation dans la plage couverte par l'horizon de contrôle. Ainsi, l'algorithme aura un effet anticipateur sur la commande, de manière à ne pas saturer la commande au cours de l'horizon. Si l'algorithme détecte un dépassement des limites de la commande dans un avenir rapproché, et qu'au temps actuel, le système n'est pas saturé, l'algorithme fera accélérer tout de suite le véhicule pour contrer les saturations à venir. Puisque l'horizon établit précédemment est de l'ordre de la centaine d'échantillons, il est possible de contrôler qu'un certain nombre d'échantillons ( $N_{ech}$ ), de manière à accélérer la résolution de l'algorithme.

Les pondération suivantes sont données au contrôleur LQT, de manière à obtenir une saturation de la commande.

- pondération sur la commande  $R = 1500$  ;
- pondération sur l'erreur de la vitesse  $Q_{x_v} = 1$  ;
- pondération sur l'erreur de la position  $Q_{x_z} = 6$  ;
- pondération sur l'erreur de l'intégral de la position  $Q_\zeta = 0.8$ .

Une première simulation a été mené avec seulement une vérification de la première commande de l'horizon ( $N_{ech} = 1$ ), celle qui est appliquée physiquement. Comme on peut le voir sur les figures 2.17 et 2.18, le suivi de la trajectoire est relativement respecté pour les deux cas (trait plein = algorithme de programmation quadratique ; trait hachuré = simple saturation). Par contre, la commande est beaucoup mieux dans le cas de l'application de l'algorithme.

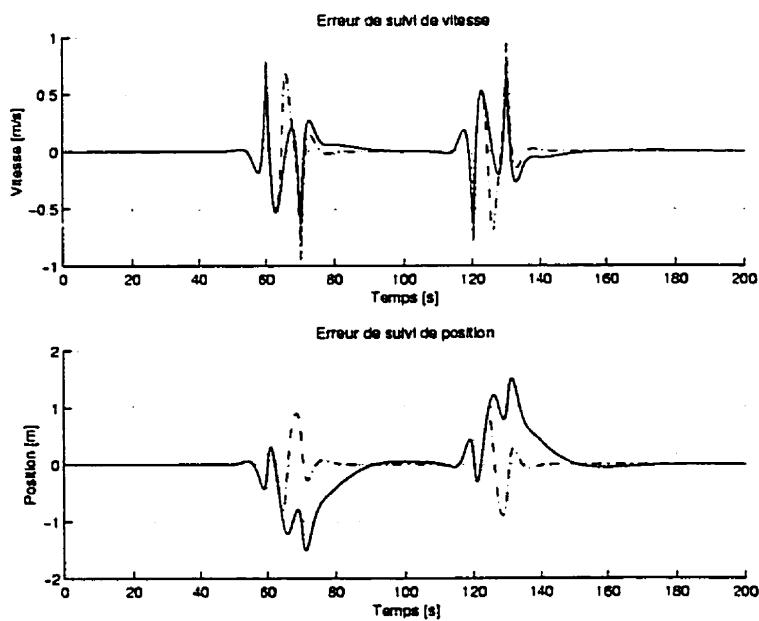


FIG. 2.17: Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (---)

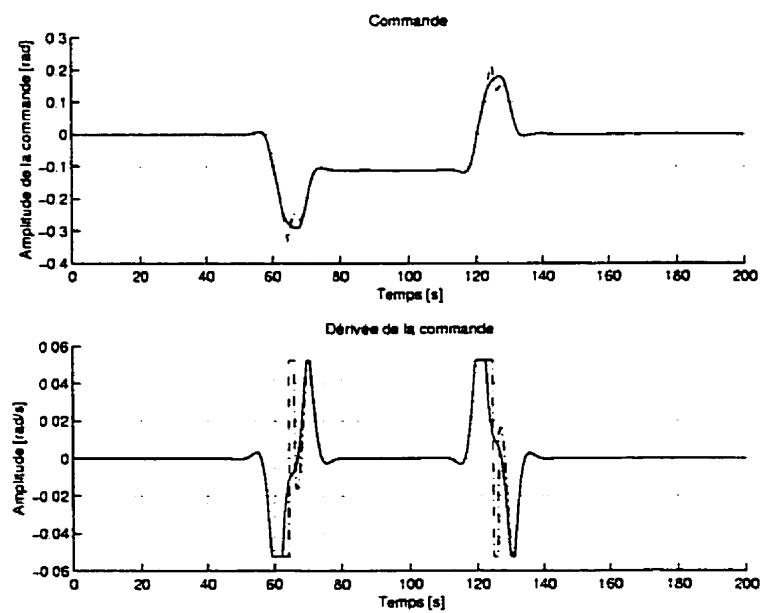


FIG. 2.18: Commande : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation quadratique (—) ou saturation (---)

Maintenant, voyons l'application de l'algorithme mais en vérifiant la conformité de la commande sur plusieurs échantillons à venir. Dans la prochaine simulation, l'horizon de vérification se limitera à  $N_{ech} = 10$ . Le trait plein représente la réponse avec l'algorithme et  $N_{ech} = 10$ , tandis que le trait hachuré représente le même algorithme, mais avec  $N_{ech} = 1$ . On voit à la figure 2.19 que le suivi est meilleur, car la commande (figure 2.20) sature beaucoup moins, comme en témoigne l'agrandissement. De plus, on remarque que la commande résultante de l'algorithme avec  $N_{ech} = 10$  est plus rapide (elle anticipe) par rapport à  $N_{ech} = 1$ . Également, l'algorithme converge plus vite vers la référence voulue (figure 2.21), ce qui améliore le suivi, évidemment. Par contre, la résolution de l'algorithme avec plusieurs échantillons nécessite beaucoup de temps, et ne serait pas à privilégier dans le cas d'une implantation en temps réel.

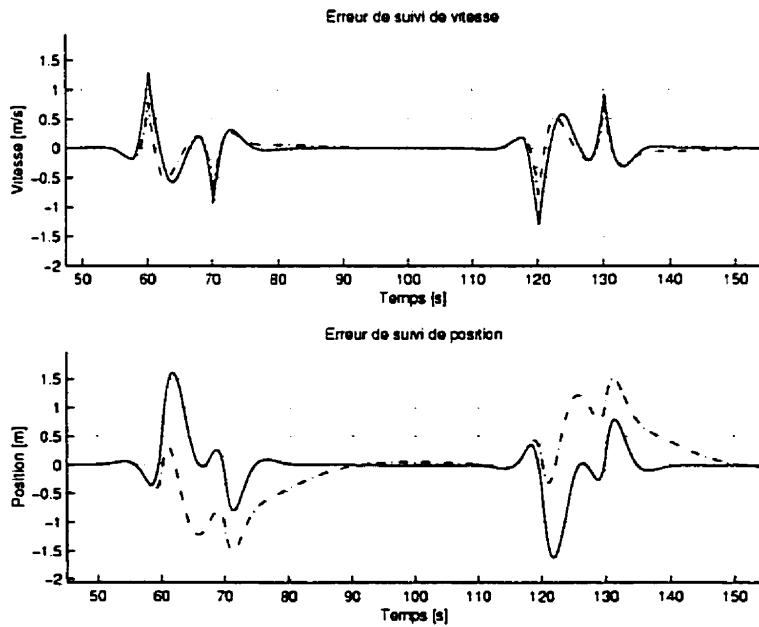


FIG. 2.19: Suivi de trajectoire : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation  $N_{ech} = 1$  (---) et  $N_{ech} = 10$  (—)

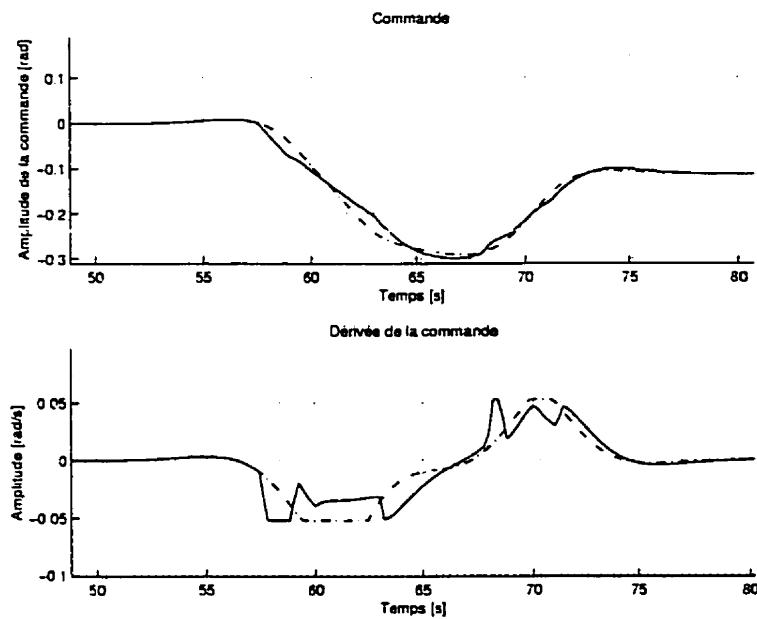


FIG. 2.20: Commande : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation  $N_{ech} = 1$  (---) et  $N_{ech} = 10$  (—)

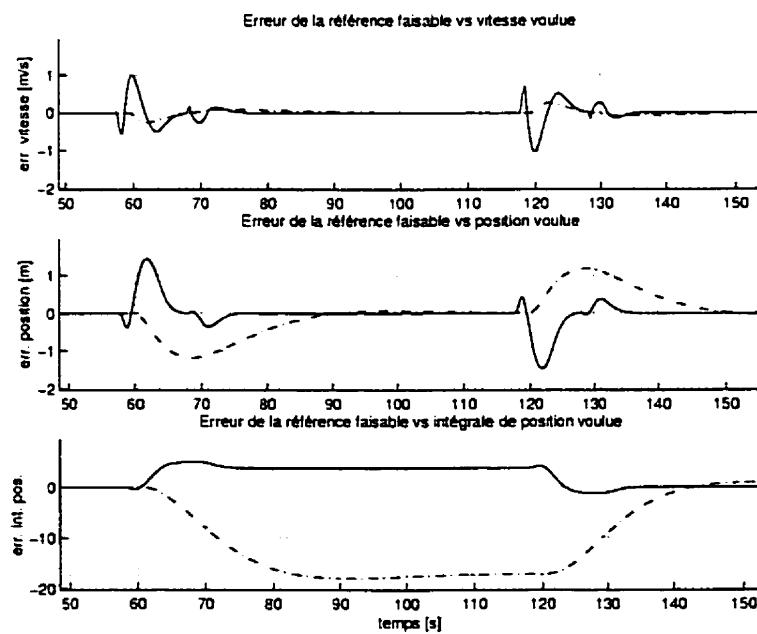


FIG. 2.21: Erreurs de la référence faisable vs la référence voulue : comparaison contrôleur LQT avec algorithme de programmation  $N_{ech} = 1$  (---) et  $N_{ech} = 10$  (—)

### CHAPITRE III

## COMPARAISON DES CONTRÔLEURS : NAVIGATION EN DEUX DIMENSIONS

De manière à comparer les contrôleurs dans un environnement qui est semblable au cas réel, les prochaines simulations utiliseront une trajectoire en deux dimensions. La trajectoire est présentée à la figure 3.1. La figure 3.2 montre les vitesses et positions demandées en fonction des deux axes de déplacement. Un vent constant de 10 m/s dans la direction des X et un vent constant de 5 m/s dans la direction des Y est appliqué. Le vent turbulent n'est pas simulé pour obtenir plus de clarté dans les réponses des contrôleurs. Les contrôleurs optimaux (LQR et LQT) utiliseront l'algorithme de programmation quadratique sur un échantillon ( $N_{ech} = 1$ ) pour prendre en compte les contraintes, tandis que le contrôleur de position et vitesse à retour de sortie utilisera les saturations conservant l'orientation de la commande.

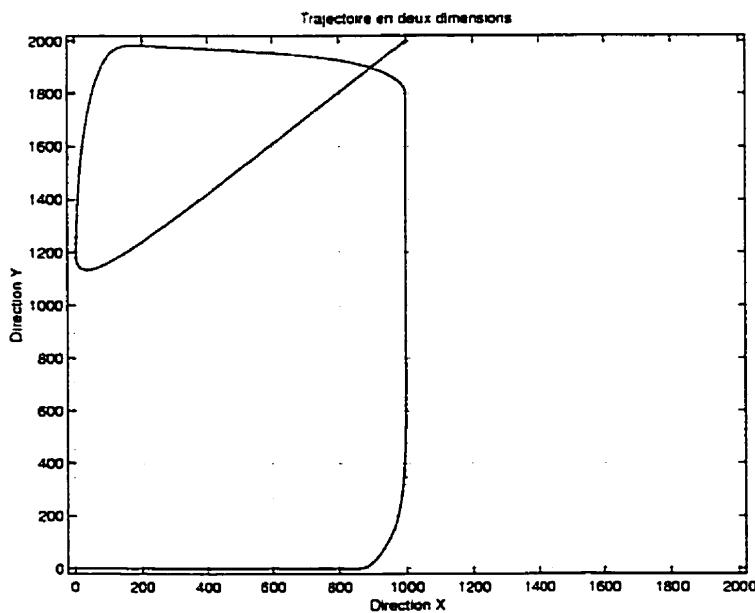


FIG. 3.1: Trajectoire à suivre en deux dimensions

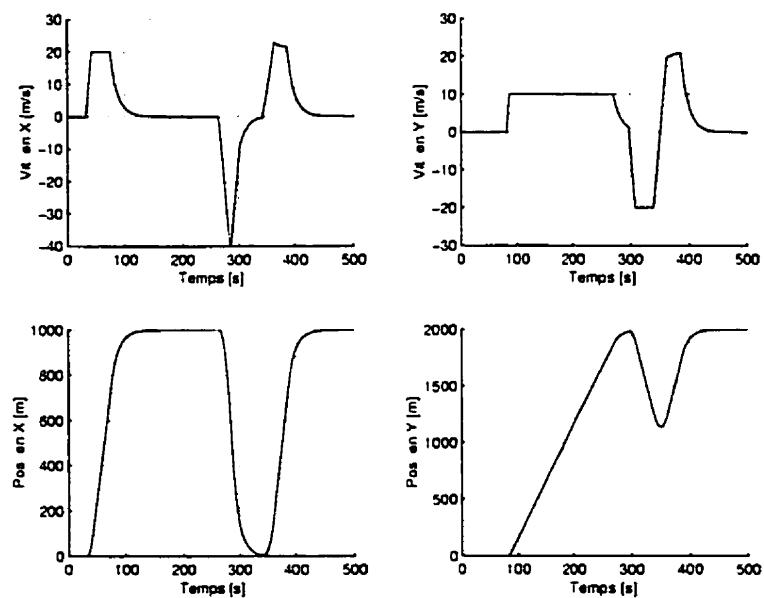


FIG. 3.2: Trajectoire à suivre : position et vitesse

### 3.1 Cas d'un générateur de trajectoire : contrôleur LQT vs contrôleur à retour de sortie

Dans cette section, il est supposé qu'un générateur de trajectoire fourni au contrôleur les références pour un certain horizon. Une première simulation est faite avec une accélération maximale de  $2m/s^2$ . Le trait hachuré représente le contrôleur à retour de sortie, le trait plein représente le contrôleur LQT et la ligne pointillée est la trajectoire à suivre (figure 3.3). On voit que le contrôleur LQT et l'algorithme de programmation quadratique suit beaucoup mieux la référence. Les prochaines figures montrent un agrandissement de la première partie de la trajetoire. À la figure de comparaison des erreurs (figure 3.4), on voit très bien que l'erreur de suivi est beaucoup moindre avec le contrôleur LQT. Pour ce qui est de la commande, on voit que le contrôleur LQT anticipe la référence et donne une commande avant celle donnée par le contrôleur à retour de sortie.

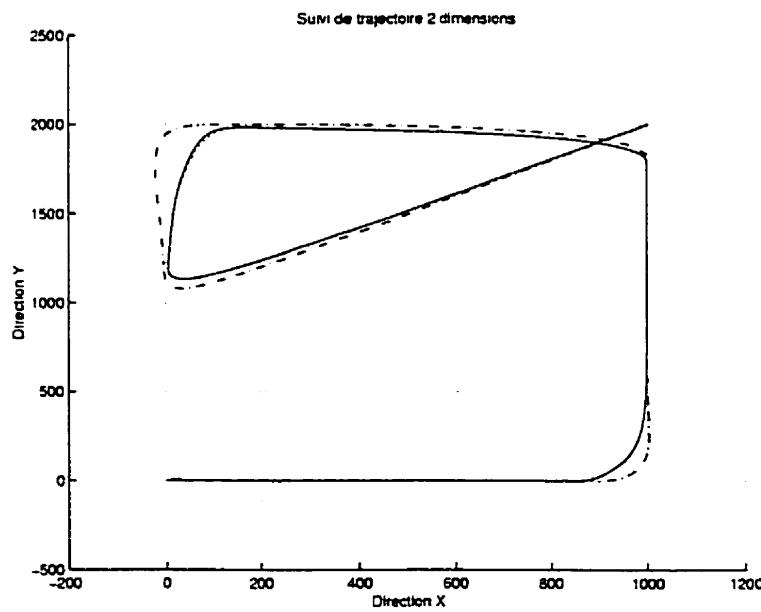


FIG. 3.3: Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions  $a_{max} = 2m/s^2$  : contrôleur LQT ( — ) vs contrôleur à retour de sortie ( - - - )

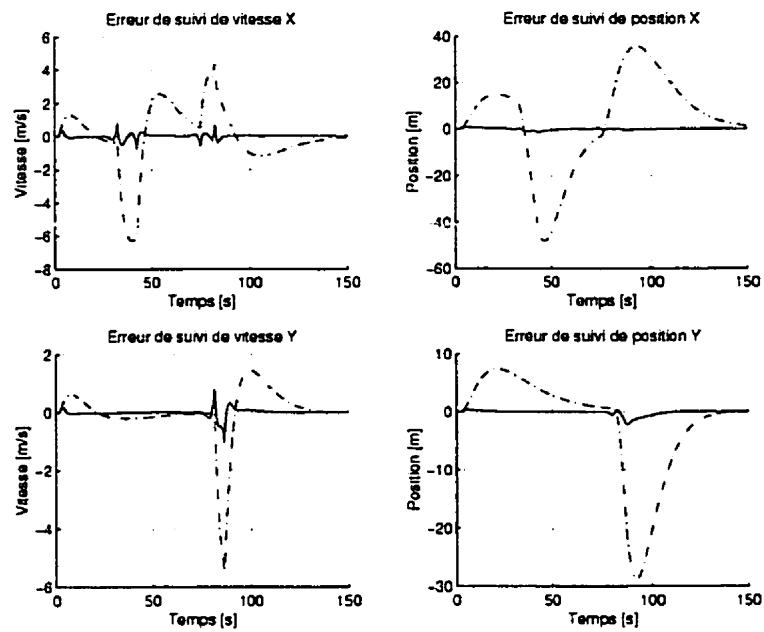


FIG. 3.4: Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire  $a_{max} = 2 \text{ m/s}^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

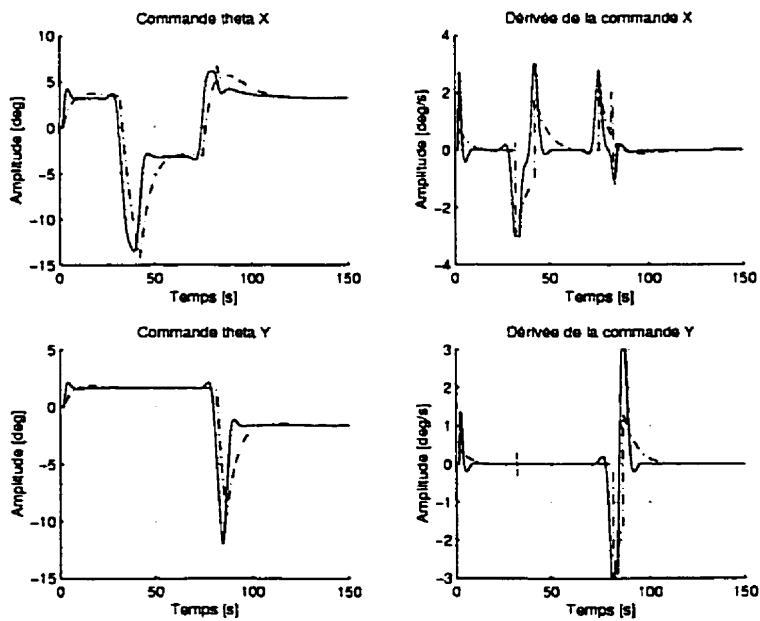


FIG. 3.5: Comparaison des commandes  $a_{max} = 2 \text{ m/s}^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

Pour ce qui est des fortes accélérations ( $6m/s^2$ ), le contrôleur LQT donne également de meilleurs résultats. Les gains du contrôleur à retour de sortie ont dû être diminués pour s'assurer que le système converge.

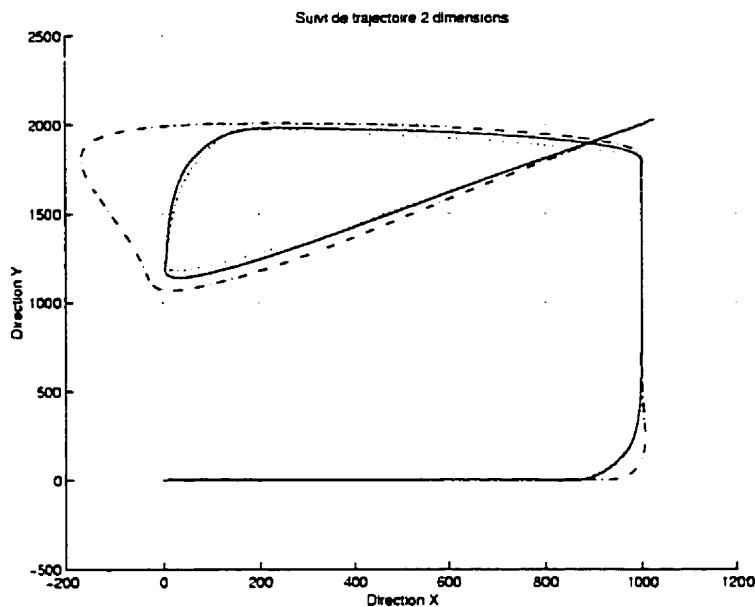


FIG. 3.6: Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions  $a_{max} = 6m/s^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

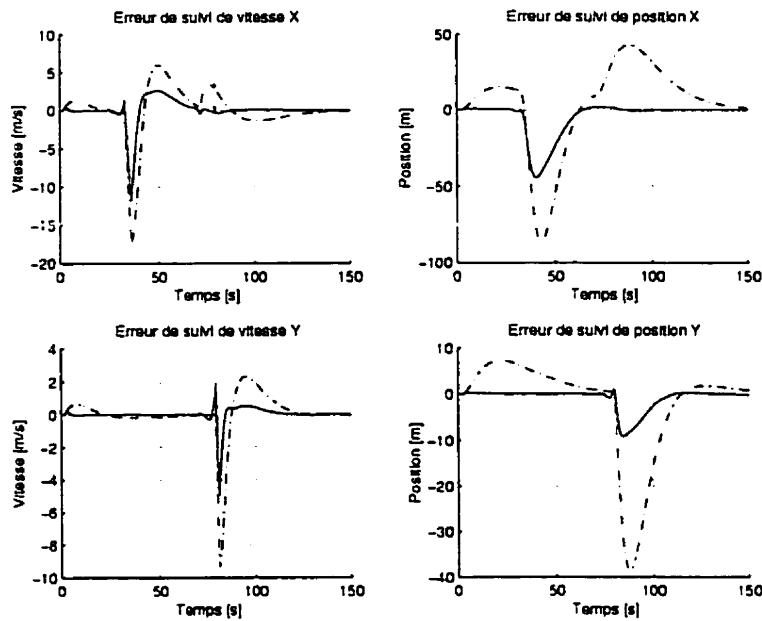


FIG. 3.7: Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire  $a_{max} = 6m/s^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

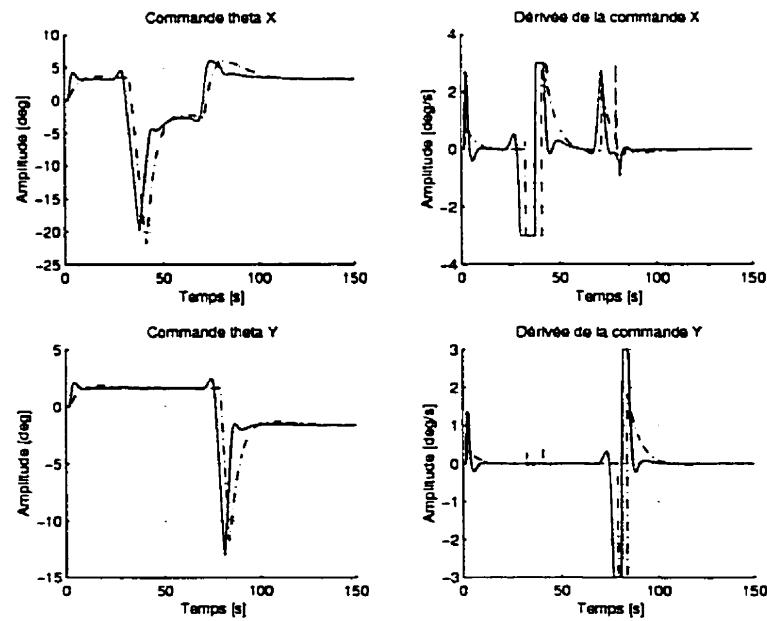


FIG. 3.8: Comparaison des commandes  $a_{max} = 6m/s^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

### 3.2 Cas d'un générateur de trajectoire : contrôleur LQT vs contrôleur LQR

Toujours en utilisant l'hypothèse du générateur de trajectoire, le contrôleur LQR est comparé au contrôleur LQT. La première série de simulation est pour des accélérations maximales de  $2m/s^2$ .

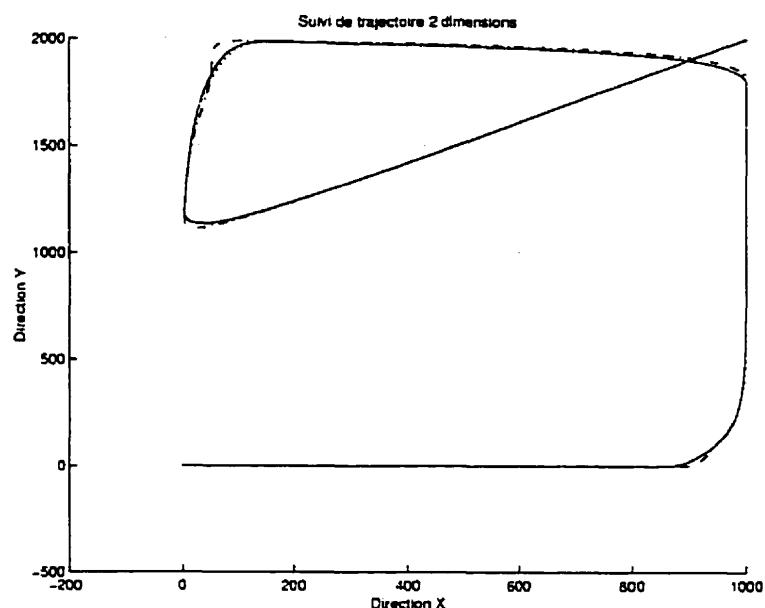


FIG. 3.9: Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions  $a_{max} = 2m/s^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur LQR (---)

Même si le contrôleur LQR suit relativement bien la référence, il est indéniable que le contrôleur LQT est de mise lorsque les références sont disponibles par le biais d'un générateur.

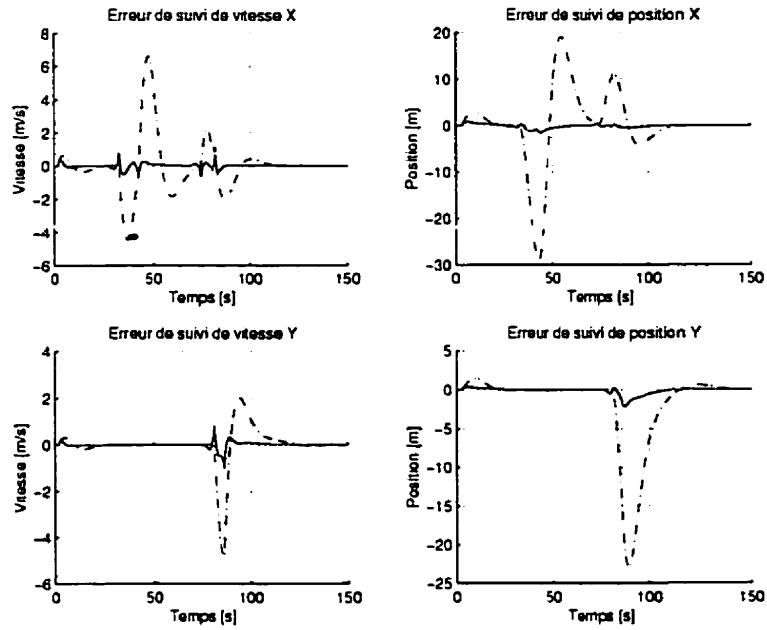


FIG. 3.10: Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire  $a_{max} = 2m/s^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur LQR (- - -)

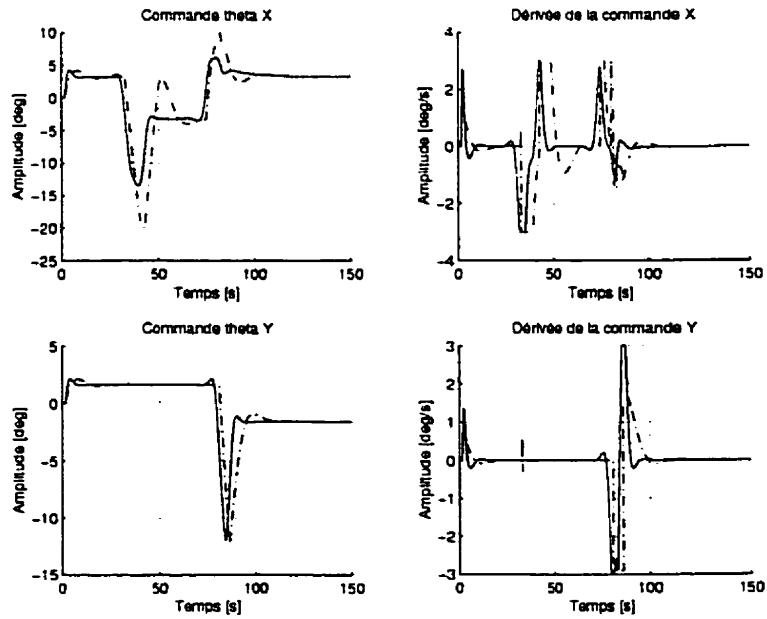


FIG. 3.11: Comparaison des commandes  $a_{max} = 2m/s^2$  : contrôleur LQT (—) vs contrôleur LQR (- - -)

### 3.3 Cas avec opérateur : contrôleur LQR vs contrôleur à retour de sortie

Dans cette section, le générateur de trajectoire est désactivé et un opérateur donne les commandes d'accélération avec l'aide d'un manche à balai. Une première simulation utilise des accélérations maximales de  $2m/s^2$ , qui est dans l'enveloppe physique du véhicule. La figure 3.12 donne l'aspect global du suivi de trajectoire en deux dimensions. La trajectoire désirée est en trait pointillé, la réponse du contrôleur à retour de sortie est en trait hachuré, tandis que la réponse du contrôleur LQR est en trait plein. On peut voir que le contrôleur LQR fait un meilleur suivi, quoique le contrôleur à retour de sortie fait tout de même un bon assez bon suivi. Les figures 3.13 et 3.14 montrent la comparaison des erreurs de suivi de trajectoire et la comparaison des commandes, respectivement.

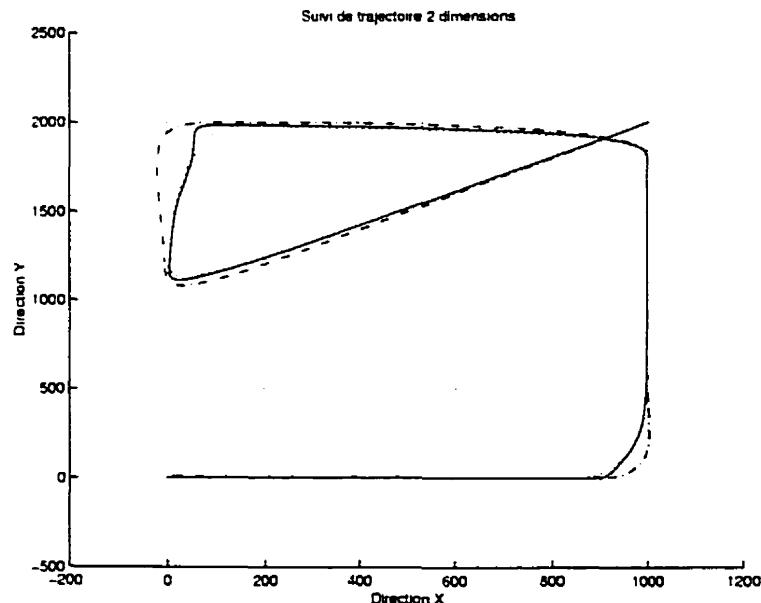


FIG. 3.12: Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions  $a_{max} = 2m/s^2$  : contrôleur LQR (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

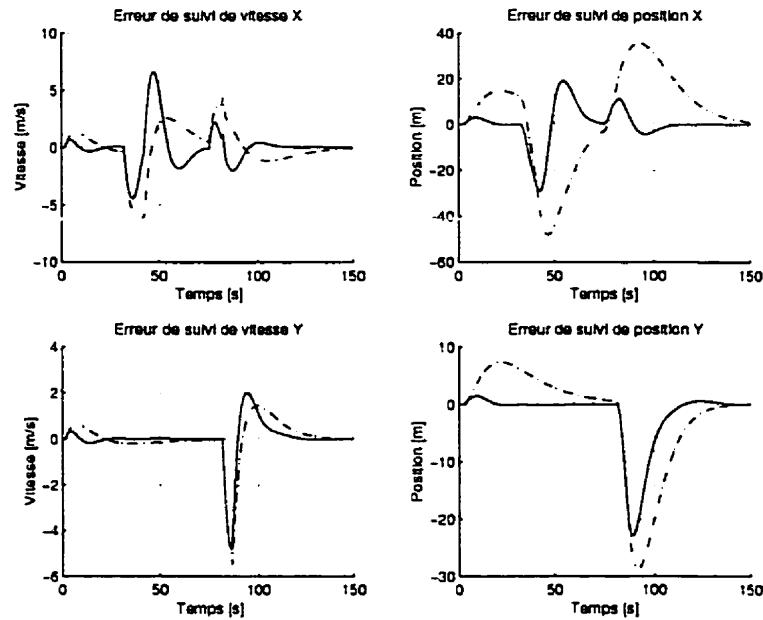


FIG. 3.13: Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire  $a_{max} = 2m/s^2$  : contrôleur LQR (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

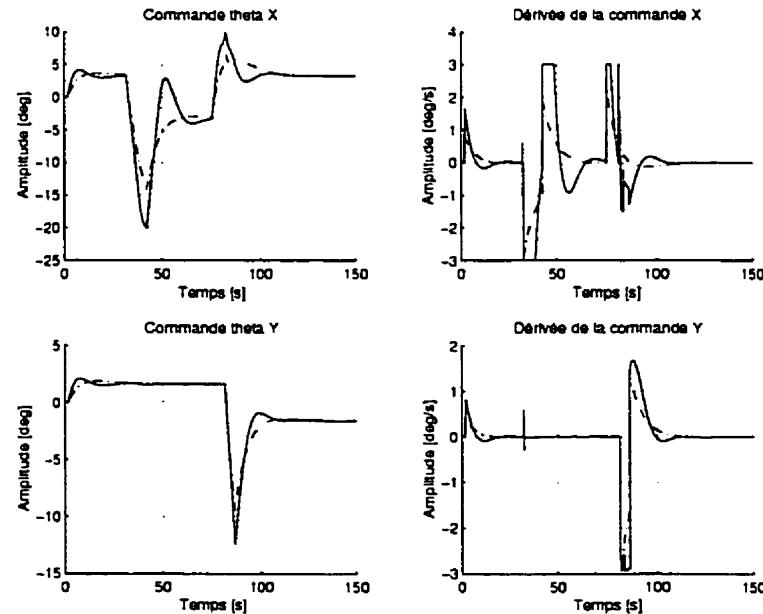


FIG. 3.14: Comparaison des commandes  $a_{max} = 2m/s^2$  : contrôleur LQR (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

Toujours en utilisant les mêmes contrôleurs, la prochaine simulation utilise des accélération de  $6m/s^2$ . Les figures suivantes montrent la comparaison des réponses. On voit que le contrôleur LQR avec l'algorithme de programmation quadratique est en mesure de garder le véhicule près de la référence, tandis que le contrôleur à retour de sortie avec simple saturation possède de plus grands écarts. Également, les gains du contrôleur à retour de sortie ont été diminués. En effet, en conservant les gains utilisés lors des simulations avec les accélérations de  $2m/s^2$ , le contrôleur à retour de sortie fait diverger le système à cause des trop fortes saturations.

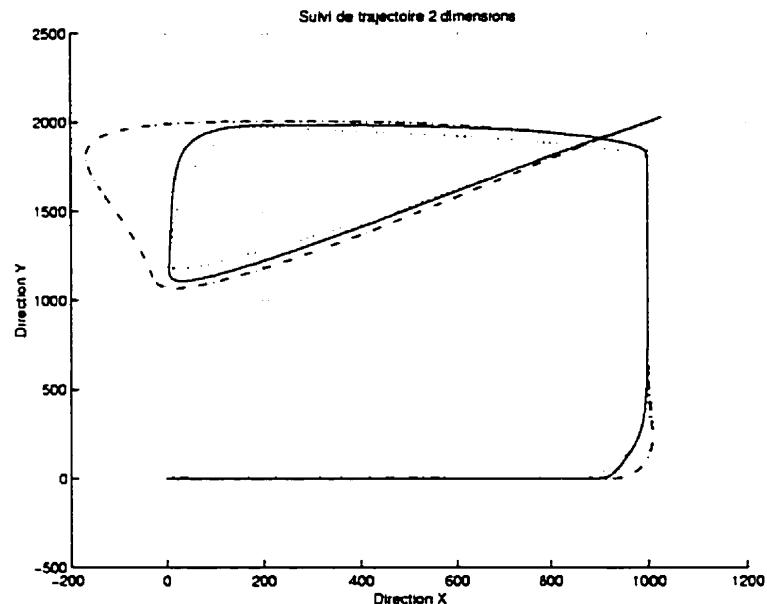


FIG. 3.15: Comparaison du suivi de trajectoire en deux dimensions  $a_{max} = 6m/s^2$  : contrôleur LQR (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

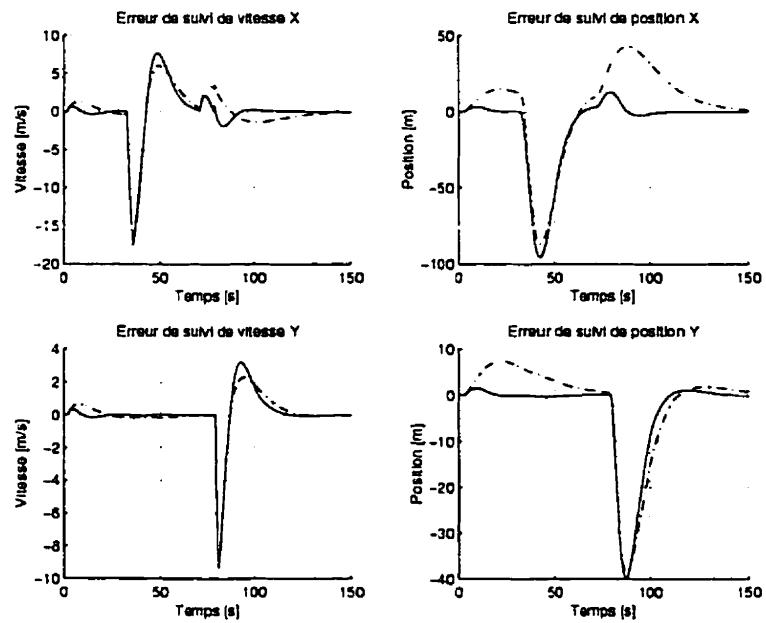


FIG. 3.16: Comparaison des erreurs de suivi de trajectoire  $a_{max} = 6 \text{ m/s}^2$  : contrôleur LQR (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

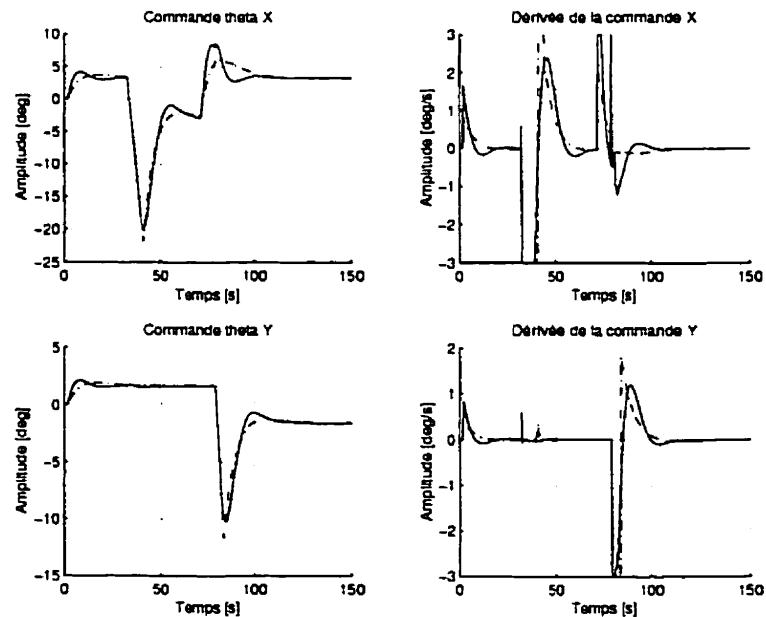


FIG. 3.17: Comparaison des commandes  $a_{max} = 6 \text{ m/s}^2$  : contrôleur LQR (—) vs contrôleur à retour de sortie (---)

### 3.4 Discussion des résultats

Comme on peut le voir à la lumière des résultats en une dimension, les contrôleurs optimaux sont relativement meilleurs pour faire un suivi de trajectoire qu'un contrôleur à retour de sortie, si on omet la prise en compte des contraintes. Les contrôleurs qui prennent en ligne de compte le modèle du système dans la synthèse sont en effet plus appropriés. Par contre, ils sont plus compliqués à planter, et nécessitent un peu plus de calcul que les contrôleurs à retour de sortie.

Pour ce qui est de la prise en compte des contraintes, une simple saturation sur la commande influence la dynamique du système, et peut le faire diverger dans certains cas. Pour la saturation, la commande fut altérée de façon à ce que le vecteur de commande saturé ait la même orientation que le vecteur de commande sans saturation. Cette manière de procéder est appropriée pour des systèmes ayant une dimension de l'espace de contrôle supérieur à 2. Néanmoins, la saturation augmente les oscillations et les composantes intégrales de la loi de contrôle peuvent être néfaste lorsque la commande sature.

Un algorithme de prise en compte des contraintes se basant sur la réduction de la référence (et non de la commande) fut proposé pour éviter les problèmes cités précédemment. L'algorithme a été appliqué sur les contrôleurs optimaux car il s'adapte mieux au calcul de la commande à retour d'état. L'algorithme permet de suivre une trajectoire du mieux possible, tout en gardant la loi de contrôle linéaire. En effet, au lieu de saturer la commande (aspect non-linéaire), l'algorithme détermine la référence faisable qui s'approche le plus de celle voulue. Ainsi, la référence demandée ne viole jamais les contraintes et on s'assure que le système convergera toujours vers la référence désirée, contrairement à la simple saturation. Également, les gains ne sont pas changés en cours de route comme il a fallu le faire pour le contrôleur à retour de sortie qui utilise la saturation. Ainsi, les gains des contrôleurs optimaux sont calculés en fonction de la performance désirée, et l'algorithme de programmation quadratique permet d'atteindre ces performances même en présence de violation des contraintes.

Grâce à cet algorithme, un meilleur contrôle en vol stationnaire est possible, sans perturber le suivi de trajectoire. De plus, de fortes accélérations peuvent être demandées, supérieures à la capacité physique du véhicule, sans que le véhicule diverge. Finalement, on s'assure qu'en présence de forts vents (perturbations inconnues), le système ne divergera pas.

## CHAPITRE IV

### OPTIMISATION DE MISSIONS

Cette deuxième partie traite de l'optimisation des missions de surveillance du véhicule aérien CL-327. Après une revue des articles couvrant la résolution de problèmes similaires à celui étudié, la théorie de la commande optimale sera abordée. Par la suite, l'application des résultats théoriques au problème de l'optimisation d'une mission de surveillance sera exposée.

#### 4.1 Revue de littérature et piste de solution

##### 4.1.1 État de l'art

Pour être en mesure d'interpréter correctement la consommation de carburant, les performances du véhicule doivent être modélisées. Le rapport de la NASA de Keys [Key79] "Rotary wings dynamics, Vol. 2" sera utilisé, avec la théorie du livre de Newman "The foundation of Helicopter flight" [New94] et "Helicopter performance, stability and control" de Prouty [Pro95]. Ces références dérivent les équations de performance à partir de la théorie de la quantité de mouvement (Momentum theory). Une deuxième théorie existe pour modéliser les performances des véhicules à voilure tournante : la méthode des éléments infinitésimaux des pales (Blade elements method). Cette deuxième méthode est explicité dans le livre de Prouty [Pro95].

Plusieurs chercheurs ont travaillé sur l'optimisation de trajectoires pour des véhicules aériens ou spatiaux. Ce domaine de recherche fut très prolifique dans les années 1970, lors de la conquête de l'espace. De manière plus spécifique, l'étude des trajectoires optimales pour les avions ou les hélicoptères portent sur la minimisation de la consommation de carburant, la minimisation du temps de parcours ou sur les problèmes de rendez-vous. L'analyse des trajectoires optimales des avions dans

l'atmosphère est présentée par Erzberger et Lee [EL80] dans "Constrained Optimum trajectories with specified range".

Également, Slater [SE84] ("Optimal short-range trajectories for helicopters") utilise l'article de Erzberger pour adapter la théorie aux hélicoptères. Un autre article de Slater [SS87] ("On-Line determination of optimal flight paths for helicopters") traite aussi de l'optimisation de trajectoires pour les hélicoptères, et s'apparente beaucoup à son premier. La seule différence vient dans le modèle de l'hélicoptère et des équations de performance. Plusieurs autres articles traitent de cas particuliers, comme le décollage optimal d'hélicoptères lourds [Sch71] "Optimal take-off trajectories of a heavily loaded helicopter". Comme on peut voir, le sujet est bien documenté.

La théorie de la commande optimale est traitée dans de multiples ouvrages, à savoir Bryson et Ho [BH75], Athans et Falb [AF66] ou Anderson et Moore [AM90].

#### 4.1.2 Solution envisagée

Pour ce qui est de la modélisation des performances du véhicule, des équations se basant sur la théorie de la quantité de mouvement seront utilisées. Au lieu d'utiliser des équations analytiques, une expression sera déterminée par la méthode des moindres carrés sur la base d'un modèle de puissance complet du véhicule. Quant à elle, la théorie des éléments infinitésimaux est relativement abstraite et n'est pas de mise pour les premières approximations.

La mission de surveillance est divisé en trois étapes : le vol d'allée, la surveillance à proprement dite et le vol de retour. La maximisation du temps de surveillance passe par la minimisation de la consommation de carburant pour le vol de l'allée et le vol du retour. Ainsi, le problème de l'optimisation des missions de surveillance passe par la minimisation de la consommation sur la trajectoire entre le point de départ et la zone de surveillance.

La théorie de la commande optimale sera donc appliquée au système pour déterminer la trajectoire optimale qui minimise la consommation.

## 4.2 Modélisation de la performance et de la consommation du véhicule

Dans cette section, les modèles de performance et de consommation seront déterminés pour être en mesure de calculer la consommation du système sur une trajectoire donnée. Après une simplification du modèle dynamique du véhicule, l'équation de puissance sera établie, pour ensuite déterminer le modèle de consommation.

### 4.2.1 Modèle du véhicule

Tel qu'il a été vu dans les précédents chapitres, le modèle aérodynamique du véhicule pour la navigation est relativement simple. Avec le contrôleur développé, le véhicule suit parfaitement la vitesse désirée lorsque l'accélération n'excède pas une certaine limite dictée par l'enveloppe d'opération du véhicule. Les simulations faites pour prouver que le suivi de vitesse était respecté se déroulaient sur une plage de temps de l'ordre de la dizaine de minutes. Les accélérations étaient généralement fortes. Dans le cas qui se présente, les trajectoires que devra suivre le véhicule sont des trajectoires très simples. Principalement, ce sont des trajectoires rectilignes où les accélérations demandées sont relativement faibles. Ainsi, il sera supposé que la fonction de transfert entre la vitesse désirée et la vitesse réelle est unitaire. De plus, sur une trajectoire typique, la variation de la masse du véhicule sera négligée.

### 4.2.2 Modèle de puissance

Maintenant que nous avons une représentation (simplifiée) du système, un modèle mathématique de la puissance développée par le système en fonction des vitesses horizontale et verticale peut être entrepris.

Un modèle analytique de l'écoulement de l'air à travers le rotor est très difficile à obtenir, et une approche strictement analytique du problème ne serait pas appropriée. La pratique se base plutôt sur une régression linéaire des données de vol reliant la puissance et les vitesses (horizontale et verticale) de l'hélicoptère ainsi que les

conditions atmosphériques présentes [SE84]. La puissance en vol de croisière sera donc préalablement abordée, pour ensuite extrapoler le modèle pour les trajectoires en montée et en descente.

#### 4.2.2.1 Puissance en vol de croisière

La puissance développée durant un vol de croisière peut être décomposée principalement en trois parties :

- la puissance induite ;
- la puissance parasite ;
- la puissance du profilé.

La puissance induite est la puissance nécessaire pour faire passer la quantité d'air à travers le rotor, qui contrebalance la poussée du rotor. La puissance parasite est la puissance requise pour contrer les effets de traînée du fuselage dans l'air. Quant à la puissance du profilé, c'est la puissance développée par le moteur pour contrer la traînée produite par la friction entre chacune des pales du rotor et l'air ambiant.

Ces puissances sont fonctions de plusieurs facteurs, dont les plus importants :

- $u(t)$  : la vitesse horizontale ;
- $M_{tot}$  : la masse du véhicule ;
- $\delta$  : la pression relative de l'air (p/r à ISA) ;
- $\theta$  : la température relative de l'air (p/r à ISA) ;
- $\sigma$  : la densité relative de l'air (p/r à ISA).

Le modèle utilisé pour effectuer la régression linéaire est le suivant :

$$P_{cr}(u(t), h(t)) = a_0 \frac{M_{tot}}{\delta/\theta} + a_1 \frac{\delta}{\theta} + a_2 \frac{\delta}{\theta} u(t) + a_3 \frac{u^2(t)}{\delta/\theta} + a_4 \sigma u^3(t) \quad (4.1)$$

Le dernier terme correspond à la puissance parasite. Il fait intervenir la densité de l'air ainsi que le cube de la vitesse horizontale. Les autres termes, sans discernement, constituent les puissances du profilé et induite. Le terme  $\delta/\theta$  donne l'influence de l'altitude, par l'entremise des conditions atmosphériques, sur le comportement en puissance attribué aux autres facteurs. Le livre de Newman [New94] donne un aperçu général de la relation précédente. Sachant que la puissance induite et celle du profilé sont fonction des conditions atmosphériques et de la vitesse, ces deux puissances sont représentées par un fonction quadratique de la vitesse, avec les coefficients variables selon les conditions de vol.

Les conditions relatives de l'atmosphère sont calculées comme suit [New94] :

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{T_0 - h\alpha}{T_0} \\ \delta &= \theta^{5.256} \\ \sigma &= \theta^{4.256}\end{aligned}$$

où  $T_0$  est la température au niveau de la mer,  $h$  est l'altitude du véhicule et  $\alpha = 6.5^\circ/km$  est le taux de variation de la température dans l'atmosphère

La régression a été effectuée à partir d'une analyse théorique détaillée des performances du véhicule CL-327. Les courbes de l'équation 4.1, pour différentes altitudes et différentes masses, sont présentées à la figure 4.1

On peut faire quelques remarques concernant les courbes. Lorsque la masse du véhicule est importante, une basse altitude favorisera l'économie de carburant pour certaines vitesses. En effet, le poids du véhicule contribue de manière plus significative à la puissance développée que la résistance à l'air. Puisque la densité de l'air est plus élevée à basse altitude qu'à haute altitude, les forces de traînée sont supérieures. Inversement, lorsque le véhicule a une masse relativement faible, on tire avantage de voler à haute altitude car la traînée est diminuée. Ces constatations se retrouvent

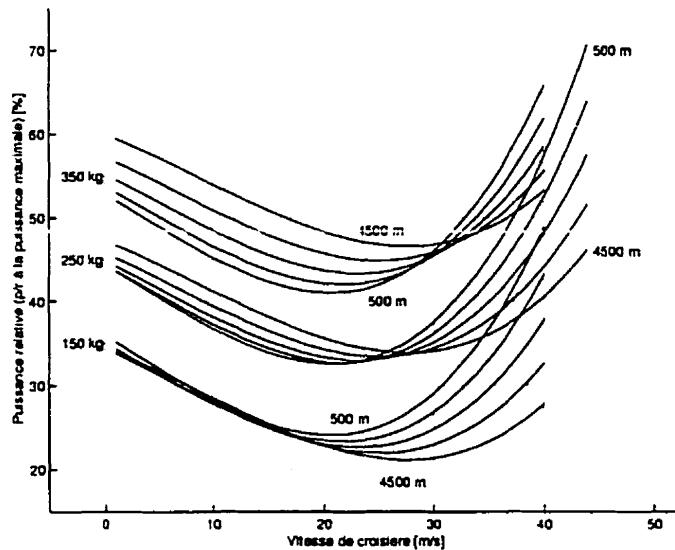


FIG. 4.1: Courbes de puissance du CL-327

clairement sur les courbes de la figure 4.1. Finalement, le type de courbe obtenu est similaire à celles que nous retrouvons dans la littérature [SE84] [New94].

Puisque le modèle représente bien le comportement du véhicule en vol de croisière, le problème de la puissance en montée et en descente est abordé.

#### 4.2.2.2 Puissance en montée et en descente

Contrairement aux véhicules aériens à ailes fixes, on ne peut pas utiliser le modèle de puissance de croisière pour calculer la puissance nécessaire lors des montées et descentes. En effet, on peut affirmer qu'une vitesse verticale affecte de manière significative le courant d'air entrant dans le rotor. De plus, l'air supplémentaire entrant est affecté par le fuselage, entraînant une force de traînée supplémentaire. La vitesse de l'air entrant dans le rotor est augmentée, augmentant ainsi la puissance induite. Le modèle de puissance doit donc être légèrement modifié pour inclure la puissance en montée.

La puissance développée pour déplacer le véhicule verticalement est donnée par :

$$\begin{aligned}
 P_{\text{monte}}(w(t)) &= T_{\text{monte}} w(t) \\
 &= mgw(t)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

où

- $w(t)$  : la vitesse verticale ;
- $P_{\text{monte}}$  : la puissance supplémentaire pour faire monter le véhicule ;
- $T_{\text{monte}}$  : la composante de la force de propulsion dans l'axe vertical de NED ;
- $mg$  : le poids du véhicule.

Sachant que la puissance est un scalaire et donc, la puissance totale est la somme des puissances pour les déplacements vertical et horizontal, nous obtenons un modèle du système pour la puissance totale délivrée :

$$\begin{aligned}
 P(u(t), h(t), w(t)) &= P_{\sigma}(u(t), h(t)) + P_{\text{monte}}(w(t)) \\
 &= P_{\sigma}(u(t), h(t)) + mgw(t)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Différentes puissances établies pour le vol de croisière sont perturbées par un déplacement vertical, entre autre la traînée et la portance du fuselage, ainsi que la puissance induite. Pour prendre en considération ces perturbations, un facteur d'efficacité de montée ou de descente ( $k_{clb}$  ou  $k_{dst}$ ) est introduit de manière à compenser ces effets. Cette façon de procéder est introduite par Keys [Key79] dans son rapport technique de la NASA. Toujours selon Keys [Key79],  $k_{(clb)}$  devrait se situer autour de  $k_{(clb)} \approx 0.80 - 0.90$  tandis que  $k_{(dst)}$  devrait se situer autour de l'unité.

À partir de l'équation 4.3, on ajoute le facteur d'efficacité de monté et en introduisant un paramètre libre pour effectuer une régression linéaire avec l'analyse

théorique détaillée des performances, le modèle de puissance pour le CL-327 devient assez représentatif de la réalité :

$$P(u(t), h(t), w(t)) = \frac{1}{k} (P_{cr}(u(t), h(t)) + a_5 M_{tot} w(t)) \quad (4.4)$$

où  $P_{cr}(u(t), h(t))$  est calculé à partir de l'équation 4.1, et avec

$$k = \begin{cases} 0.90 & \text{véhicule en montée} \\ 1 & \text{véhicule en descente} \\ 1 & \text{véhicule en vol de croisière} \end{cases} \quad (4.5)$$

#### 4.2.3 Modèle de consommation de carburant

De façon commune, la consommation d'un moteur à carburant est tablée en fonction de la consommation spécifique de carburant [ $kg/h/kw$ ] correspondant à une certaine puissance. Le débit de carburant [ $kg/h$ ] peut être facilement déterminé en multipliant la consommation spécifique de carburant par la puissance correspondante. Graphiquement, le résultat obtenu en fonction de la puissance est une fonction quasi-linéaire qui peut être aisément linéarisée par une régression linéaire.

Puisque chaque condition atmosphérique donne une droite distincte, le débit de carburant et la puissance doivent être normalisés pour généraliser le modèle. Le facteur de normalisation est  $\delta\sqrt{\theta}$ . En opérant de la sorte, les différentes courbes se fondent en une seule. Newman [New94] discute de cette approximation dans son livre. De plus, les articles exposant la problématique de l'optimisation des performances utilisent cette approximation [SE84] [SS87].

En ce qui concerne le modèle de consommation du véhicule, la même méthode employée pour la puissance a été utilisée. En se basant sur le modèle complexe de consommation de carburant, une régression linéaire a été effectuée pour déterminer

les coefficients  $b_0$  et  $b_1$  de la formule 4.6, modélisant la consommation de carburant du CL-327.

$$\frac{W_f(u(t), h(t), w(t))}{\delta \sqrt{\theta}} = b_0 + b_1 \frac{P(u(t), h(t), w(t))}{\delta \sqrt{\theta}} \quad (4.6)$$

Maintenant que le modèle de consommation est établi, on peut faire ressortir certaines tendances du comportement du véhicule pour deux aspects importants dans l'optimisation de mission : l'**endurance maximale** et la **portée maximale**.

#### 4.2.3.1 Endurance maximale

À partir du modèle de consommation, la vitesse de croisière donnant la plus grande autonomie de vol peut être déterminée en minimisant la fonction par rapport à la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_f(u(t), h(t), w(t))}{\partial u(t)} &= b_1 \frac{\partial P((u(t), h(t), w(t)))}{\partial u(t)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

La vitesse optimale qui fait en sorte que le véhicule restera en fonction le plus longtemps correspond à celle de la puissance minimale sur la courbe de puissance en vol de croisière, comme le montre la figure 4.2. Il est intéressant de noter que la vitesse optimale pour minimiser la consommation n'est pas fonction de la masse pour une altitude donnée.

#### 4.2.3.2 Portée maximale

Dans ce cas, il s'agit de minimiser le rapport du taux de consommation sur la vitesse de croisière. La vitesse obtenue permettra au véhicule de parcourir la plus

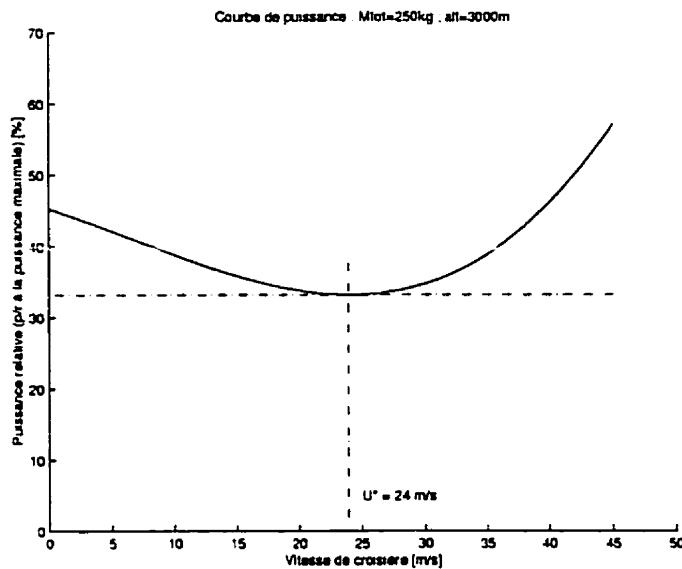


FIG. 4.2: Détermination de la vitesse optimale pour une endurance maximale

grande distance possible avec une quantité de carburant fixée. En utilisant à nouveau l'équation 4.6 :

$$\frac{\partial \left( \frac{W_f(u(t), h(t), w(t))}{u(t)} \right)}{\partial u(t)} = \frac{u(t) \frac{\partial W_f(u(t), h(t), w(t))}{\partial u(t)} - W_f(u(t), h(t), w(t))}{u^2(t)} = 0 \quad (4.8)$$

une droite (équation 4.9) représentant les solutions possibles de l'équation 4.8 est obtenue et seulement le point d'intersection avec la courbe de puissance est une solution physiquement valable.

$$P(u(t), h(t), w(t)) = \frac{1}{b_1} \frac{\partial P(u(t), h(t), w(t))}{\partial u(t)} - \frac{b_0 \delta \sqrt{\theta}}{b_1} \quad (4.9)$$

La figure 4.3 montre l'interprétation graphique de la solution. Contrairement au cas précédent, une variation de la masse à une altitude donnée influence la vitesse

optimale pour maximiser la distance parcourue.

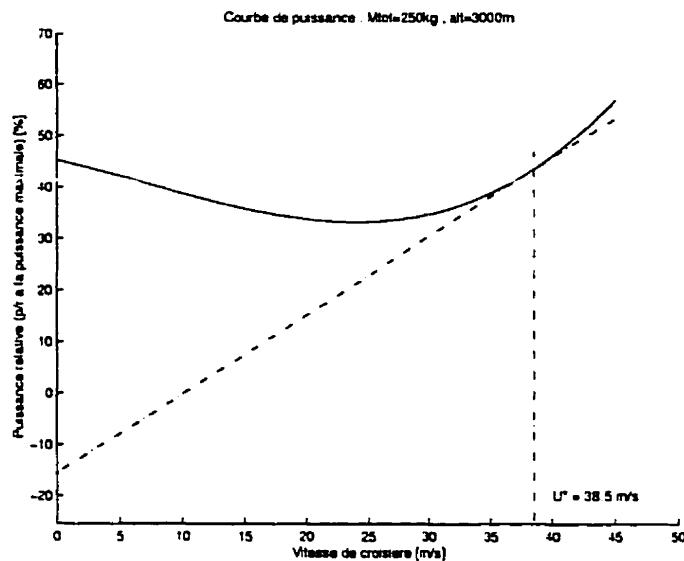


FIG. 4.3: Détermination de la vitesse optimale pour une portée maximale

### 4.3 Élaboration théorique et implantation de l'algorithme de recherche des trajectoires optimales

Cette section couvre la théorie de la commande optimale appliquée au problème d'optimisation de trajectoire de vol du véhicule CL-327. Après avoir posé le problème de commande optimale, il sera simplifié de façon à rendre possible sa résolution. Ensuite, les algorithmes d'optimisation seront présentés.

#### 4.3.1 Formulation du problème

Le problème à résoudre est de maximiser le temps de surveillance à une certaine distance du point de départ, et à une certaine altitude. Le problème de maximisation du temps de surveillance peut être transposé en un problème de minimisation de consommation de carburant sur la trajectoire du vol d'allée et de retour. La formulation du problème sera donc appliquée pour le trajet initial de voyage vers la zone de surveillance. La méthode pour déterminer le trajet de retour est identique à celle qui sera maintenant développée.

Le problème de commande optimale fait intervenir une fonction de coût associée à différents critères. La fonction de coût sera :

$$\min_{u(t), w(t)} J = \int_0^{t_f} [c_w W_f(u(t), h(t), w(t)) + c_t] dt \quad (4.10)$$

$$= \int_0^{t_f} F(u(t), h(t), w(t)) dt \quad (4.11)$$

où

- $W_f(u(t), h(t), w(t))$  : le taux de consommation de carburant ;
- $c_w$  : coefficient de pondération du carburant ;
- $c_t$  : coefficient de pondération du temps ;

- $F(u(t), h(t), w(t))$  : la fonctionnelle qui englobe la consommation de carburant et le temps ;
- $J$  : la fonction de coût.

avec

$$W_f(u(t), h(t), w(t)) = b_0 \delta \sqrt{\theta} + b_1 P(u(t), h(t), w(t)) \quad (4.12)$$

et

$$P(u(t), h(t), w(t)) = \frac{1}{k} (P_{\sigma}(u(t), h(t)) + a_5 M_{tot} w(t)) \quad (4.13)$$

$$P_{\sigma}(u(t), h(t)) = a_0 \frac{M_{tot}}{\delta/\theta} + a_1 \frac{\delta}{\theta} + a_2 \frac{\delta}{\theta} u(t) + a_3 \frac{u^2(t)}{\delta/\theta} + a_4 \sigma u^3(t) \quad (4.14)$$

Dans le but de simplifier le calcul de la trajectoire optimale, une structure de la trajectoire en trois segments sera imposée : montée, croisière et descente. La figure 4.4 montre le type de trajectoire utilisée. Cette trajectoire permettra de faire des simplifications dans la formulation du problème.

La fonction de coût peut être divisée en trois intégrales, chacune représentant un segment de la trajectoire.

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)(t), w(\cdot)(t)} J = & \int_0^{t_{clb}} F(u_{clb}(t), h(t), w_{clb}(t)) dt + \int_{t_{clb}}^{t_{dst}} F(u_{cr}(t), h_{cr}, w_{cr} = 0) dt \\ & + \int_{t_{dst}}^{t_f} F(u_{dst}(t), h(t), w_{dst}(t)) dt \end{aligned} \quad (4.15)$$

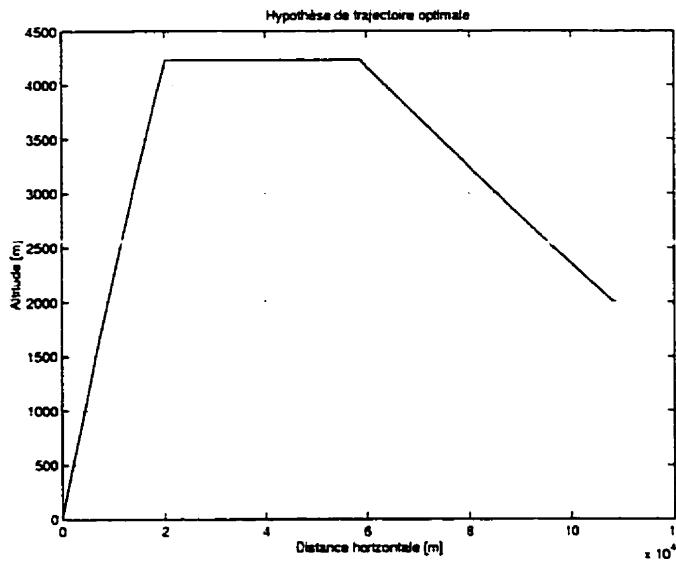


FIG. 4.4: Hypothèse de trajectoire optimale

où

- $t_{clb}$  : temps à l'intersection entre la monté et le plateau ;
- $t_{dst}$  : temps à l'intersection entre le plateau et la descente ;
- $t_f$  : temps final ;
- $F(u_{(.)}(t), h(t), w_{(.)}(t))$  : fonctionnelle de la fonction de coût.

#### 4.3.1.1 Changement de variable indépendante pour les intégrales en montée et en descente

De façon à simplifier la résolution du problème posé précédemment, un changement de variable indépendante s'impose.

En utilisant le concept d'énergie par unité de poids,

$$\begin{aligned}
 \xi(t) &= \frac{E(t)}{mg} \\
 &= h(t) + \frac{1}{2g}v^2(t)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

on peut dériver cette expression pour obtenir la variation de l'énergie en tout temps :

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \dot{h}(t) + \frac{1}{g}v(t)\dot{v}(t) \quad (4.17)$$

À l'équation 4.17 devrait s'ajouter des termes pour la variation de l'énergie emmagasinée dans le rotor. Par contre, puisque notre modèle de puissance se base uniquement sur une vitesse de rotation du rotor, il n'y a pas de variation d'énergie dans le rotor, et ces termes sont donc nuls.

L'hypothèse de départ impliquait que la dynamique du véhicule était négligeable. Ainsi,

$$\dot{v}(t) \approx 0$$

De plus, on a vu à la section 4.2.2.2 que la variation de l'énergie potentielle n'est pas la même selon que le véhicule monte ou qu'il descend. Donc, dans le bilan global d'énergie, on ne peut pas dire que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique sont interchangeables. Pour résoudre ce problème, on peut faire l'hypothèse suivante : puisque l'hélicoptère est un véhicule fonctionnant à basse vitesse, le terme d'énergie cinétique est généralement faible. De plus, puisque les changements dans les trajectoires arrivent sur des périodes relativement grandes, on peut négliger complètement le terme associé à l'énergie cinétique.

Avec ces hypothèses, nous voyons donc que l'état "énergie" est simplement l'altitude du véhicule et que :

$$\xi(t) = h(t) + \frac{1}{2g}v^2(t) \approx h(t) \quad (4.18)$$

En supposant que l'énergie telle que définie par l'équation 4.16 évolue de façon monotone, un changement de variable indépendante est possible, du temps vers l'énergie.

$$\dot{\xi}(t) = \frac{d\xi(t)}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\xi(t)}{\dot{\xi}(t)} = \frac{dh(t)}{w(t)} \quad (4.19)$$

car

$$\dot{h}(t) = w(t)$$

Ainsi, les termes de l'équation 4.15 associés à la montée et à la descente peuvent être écrits d'une façon simplifiée (équation 4.20 et 4.21).

$$\min_{u_{clb}(h), w_{clb}(h)} J_{clb} = \int_{h_{sta}}^{h_{cr}} \frac{F(u_{clb}(h), h, w_{clb}(h))}{w_{clb}(h)} dh \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \min_{u_{dst}(h), w_{dst}(h)} J_{dst} &= \int_{h_{cr}}^{h_{loit}} \frac{F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{w_{dst}(h)} dh \\ &= \int_{h_{loit}}^{h_{cr}} \frac{F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{-w_{dst}(h)} dh \end{aligned} \quad (4.21)$$

où

- $h_{sta}$  : altitude de départ ;
- $h_{cr}$  : altitude du vol de croisière ;
- $h_{loit}$  : altitude de surveillance.

Le signe de la fonction de coût en descente est inversé car les bornes de l'intégrale ont été permutées, de façon à ce que l'intégrale se fasse avec l'altitude croissante.

#### 4.3.1.2 Simplification de l'intégrale pour le vol de croisière

Puisque la variation de la masse est négligée et que le vol de croisière se déroule à altitude constante, la vitesse de croisière optimale ne variera pas au cours de ce segment et la fonction de coût associée sera constante. Donc :

$$\begin{aligned}
 \min_{u_{cr}} J_{cr} &= \int_{t_{clb}}^{t_{dst}} F(u_{cr}(t), h_{cr}, w_{cr} = 0) dt = F(u_{cr}, h_{cr}, w_{cr} = 0) \int_{t_{clb}}^{t_{dst}} dt \\
 &= F(u_{cr}, h_{cr}, w_{cr} = 0) \Delta t_{cr} \\
 &= F(u_{cr}, h_{cr}, w_{cr} = 0) \frac{d_f - d_{clb} - d_{dst}}{u_{cr}}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

où

- $\Delta t_{cr}$  : intervalle de temps en vol de croisière ;
- $d_f$  : distance totale à parcourir ;
- $d_{clb}$  : distance entre le départ et l'intersection entre la monté et le plateau ;
- $d_{dst}$  : distance entre la fin et l'intersection entre le plateau et la descente.

#### 4.3.1.3 Les contraintes associées à la formulation

La minimisation de la fonction de coût est soumise aux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
 d_{clb} &= \int_0^{t_{clb}} u_{clb}(t) dt \\
 &= \int_{h_{sta}}^{h_{cr}} \frac{u_{clb}(h)}{w_{db}(h)} dh \\
 d_{dst} &= \int_{t_{dst}}^{t_f} u_{dst}(t) dt \\
 &= \int_{h_{loit}}^{h_{cr}} \frac{u_{dst}(h)}{-w_{dst}(h)} dh
 \end{aligned}$$

Ces contraintes représentent la distance parcourue par le véhicule en montée ou en descente, et leur somme ne doit pas excéder la distance totale de parcours.

En introduisant deux variables de distance  $R_{clb}(h)$  et  $R_{dst}(h)$ , on peut interpréter les contraintes intégrales comme des contraintes différentielles :

$$\frac{dR_{clb}}{dh} = \frac{u_{clb}(h)}{w_{clb}(h)}$$

avec comme conditions aux limites :

$$R_{clb}(h_{sta}) = 0$$

$$R_{clb}(h_{cr}) = d_{clb}$$

et

$$\frac{dR_{dst}}{dh} = \frac{u_{dst}(h)}{-w_{dst}(h)}$$

avec comme conditions aux limites :

$$R_{dst}(h_{loit}) = 0$$

$$R_{dst}(h_{cr}) = d_{dst}$$

#### 4.3.1.4 Résumé de la formulation du problème

Soit la figure 4.5 représentant graphiquement la trajectoire divisée en trois segments,

le problème revient à minimiser la fonction de coût suivante :

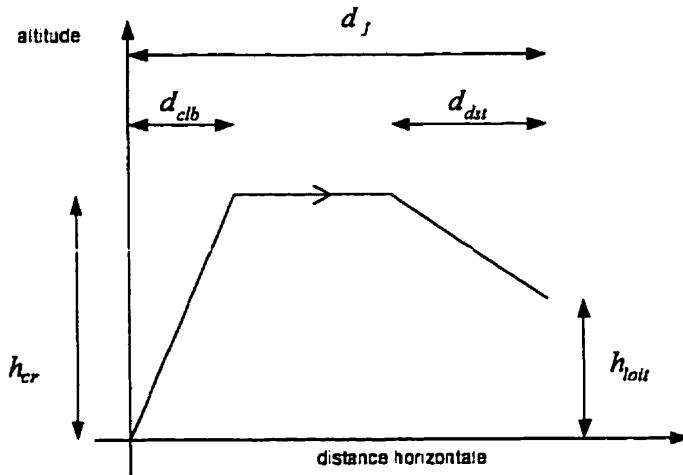


FIG. 4.5: Illustration des variables du problème

$$\min_{\Psi} J = \frac{F(u_{cr}, h_{cr}, w_{cr} = 0)}{u_{cr}} (d_f - d_{cib} - d_{dst}) + \int_{h_{sta}}^{h_{cr}} \frac{F(u_{cib}(h), h, w_{cib}(h))}{w_{cib}(h)} dh \\ + \int_{h_{loit}}^{h_{cr}} \frac{F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{-w_{dst}(h)} dh \quad (4.23)$$

où l'ensemble des variables qui minimisent cette fonction est :

$$\Psi = \{u_{cib}(h), w_{cib}(h), u_{dst}(h), w_{dst}(h), u_{cr}\} \quad (4.24)$$

soumise aux contraintes différentielles :

$$\frac{dR_{cib}}{dh} = \frac{u_{cib}(h)}{w_{cib}(h)} \quad (4.25)$$

$$\frac{dR_{dst}}{dh} = \frac{u_{dst}(h)}{-w_{dst}(h)} \quad (4.26)$$

et avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} R_{clb}(h_{sta}) &= 0 \\ R_{clb}(h_{cr}) &= d_{clb} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} R_{dst}(h_{loit}) &= 0 \\ R_{dst}(h_{cr}) &= d_{dst} \end{aligned} \quad (4.28)$$

où

$d_{clb}$  et  $d_{dst}$  sont les valeurs finales des variables d'état et soumises à la contrainte inégalité suivante :

$$d_{clb} + d_{dst} \leq d_f \quad (4.29)$$

Les variables à déterminer sont la vitesse horizontale  $u(h)$  et la vitesse verticale  $w(h)$ , pour toute la trajectoire. Ces vitesses sont soumises aux contraintes suivantes :

$$0m/s \leq u_{clb}(h) \leq 43.6m/s$$

$$0m/s \leq u_{dst}(h) \leq 43.6m/s$$

$$-1.5m/s \leq w_{dst}(h) \leq 0m/s$$

$$0m/s \leq w_{clb}(h) \leq 7.5m/s$$

Donc, les conditions initiales des variables de distance du problème sont fixes et nulles. Les conditions finales des variables de distance sont libres, en autant que leur somme ne dépasse pas la valeur physique de la distance totale. Avenant le cas où la solution du problème viole la contrainte physique, la somme des conditions finales sur

les variables seraient alors fixée. Finalement, la variable indépendante (altitude) est libre.

#### 4.3.2 Application de la théorie de la commande optimale

D'un point de vue de la théorie de la commande optimale, la formulation précédente implique que les vitesses sont les commandes du système, et les distances sont les variables d'état.

Puisque les commandes appliquées aux segments de montée et de descente sont indépendantes, et donc les commandes reliées aux deux intégrales de la fonction de coût également, la théorie de la commande optimale peut s'appliquer directement au problème posé précédemment. À chaque segment, on appliquera la méthode de résolution de la commande optimale [BH75]. Ainsi, on peut traiter les problèmes de montée et de descente séparément, mais tout en gardant à l'esprit qu'ils sont reliés par le terme sur la valeur finale de leur variable de distance respective.

#### L'hamiltonien

L'hamiltonien est la somme des hamiltoniens des sous-systèmes représentés par la montée et la descente.

$$H = H_{clb} + H_{dst}$$

où

$$H_{clb} = \frac{F(u_{clb}(h), h, w_{clb}(h))}{w_{clb}(h)} + \lambda_{clb} \frac{u_{clb}(h)}{w_{clb}(h)} \quad (4.30)$$

$$H_{dst} = \frac{F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{-w_{dst}(h)} + \lambda_{dst} \frac{u_{dst}(h)}{-w_{dst}(h)} \quad (4.31)$$

## Les équations adjointes

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_{clb}}{dh} &= -\frac{\partial H}{\partial R_{clb}} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_{dst}}{dh} &= -\frac{\partial H}{\partial R_{dst}} \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.32}$$

Ce qui implique que les variables adjointes seront des constantes.

## Les conditions de transversalité

Dans le cas où les valeurs finales des variables de distance sont telles que  $d_{clb} + d_{dst} < d_f$ , on peut interpréter les variables comme étant libres, et les variables adjointes auront une structure déterminée. Par contre, si la solution du problème est telle que cette contrainte n'est pas respectée, la contrainte suivante doit être appliquée  $d_{clb} + d_{dst} = d_f$ . En faisant de la sorte, les valeurs finales sont fixes et les variables adjointes seront libres.

**Si**  $d_{clb} + d_{dst} < d_f$

$$\begin{aligned}\lambda_{clb}(h_{cr}) &= \frac{\partial[\frac{F(u_{cr}, h_{cr})}{u_{cr}}(d_f - R_{clb} - R_{dst})]}{\partial R_{clb}} \\ &= -\frac{F(u_{cr}, h_{cr})}{u_{cr}} \\ \lambda_{dst}(h_{cr}) &= \frac{\partial[\frac{F(u_{cr}, h_{cr})}{u_{cr}}(d_f - R_{clb} - R_{dst})]}{\partial R_{dst}}\end{aligned}$$

$$= -\frac{F(u_{cr}, h_{cr})}{u_{cr}} \quad (4.33)$$

Donc, étant donné que les variables adjointes sont constantes, et que leur valeur finale est définie comme le coût en vol de croisière (qui est constant), les variables prendront cette même valeur sur l'ensemble de l'intervalle défini par la variable indépendante.

Si une solution est trouvée avec la somme des distances inférieure à  $d_f$ , la solution avec la contrainte  $d_{clb} + d_{dst} = d_f$  n'a pas à être vérifiée car le coût serait augmenté inévitablement.

Une autre condition de transversalité fait intervenir le fait que  $h_{cr}$  (la variable indépendante) est libre :

$$\begin{aligned} H + \frac{\partial}{\partial h} \left[ \frac{F(u_{cr}, h)}{u_{cr}} (d_f - d_{clb} - d_{dst}) \right] &= 0 \\ H + \left( \frac{\partial F(u_{cr}, h)}{\partial h} \right) \frac{d_f - d_{clb} - d_{dst}}{u_{cr}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

le tout évalué à  $h = h_{cr}$ .

Cette condition de transversalité nous donne l'équilibre entre l'augmentation du coût en montée et en descente résultant d'une augmentation de l'altitude de croisière, versus l'augmentation du coût en vol de croisière pour cette même altitude. Lorsque aucun gain ne peut être obtenu suite à la variation de l'altitude, cette altitude constitue l'altitude de croisière optimale.

**Si  $d_{clb} + d_{dst} = d_f$**

Si les valeurs finales des variables d'état sont fixes, les variables adjointes seront libres. Par contre, avec les équations 4.32, on voit qu'elles seront tout de même constante sur le parcours.

La troisième condition de transversalité sera affectée car le deuxième terme de

l'équation 4.34 devient nul. Donc, la condition de transversalité à respecter sera la suivante :

$$H(h_{cr}) = 0 \quad (4.35)$$

### Les conditions d'optimalité

Puisque les commandes sont limitées par des bornes inférieures et supérieures, le principe du minimum de Pontryagin [BH75] devrait remplacer les conditions d'optimalité. Le principe de Pontryagin stipule que la commande optimale est celle qui minimise l'hamiltonien respectif dans la mesure où cette commande respecte le domaine qu'il lui est assigné. Donc, advenant le cas où le minimum ne se trouve pas dans le domaine décrit par les contraintes, la commande optimale sera une borne du domaine.

Pour ce qui est des conditions d'optimalité relatives à la commande de vitesse horizontale, elles se présentent comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_{clb}(h)} &= \frac{1}{w_{clb}(h)} \frac{\partial F(u_{clb}(h), h, w_{clb}(h))}{\partial u_{clb}(h)} + \frac{\lambda_{clb}}{w_{clb}(h)} \\ &= \frac{1}{w_{clb}(h)} \left[ \frac{c_w b_1}{k} \left( a_2 \frac{\delta}{\theta} + \frac{2a_3}{\delta/\theta} u_{clb}(h) + 3a_4 \sigma u_{clb}^2(h) \right) \right] + \frac{\lambda_{clb}}{w_{clb}(h)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_{dst}(h)} &= -\frac{1}{w_{dst}(h)} \frac{\partial F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{\partial u_{dst}(h)} - \frac{\lambda_{dst}}{w_{dst}(h)} \\ &= -\frac{1}{w_{dst}(h)} \left[ \frac{c_w b_1}{k} \left( a_2 \frac{\delta}{\theta} + \frac{2a_3}{\delta/\theta} u_{dst}(h) + 3a_4 \sigma u_{dst}^2(h) \right) \right] - \frac{\lambda_{dst}}{w_{dst}(h)} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Donc, en ce qui concerne les équations 4.36 et 4.37, la valeur optimale de la vitesse

horizontale dépendra de la solution de ces équations, et advenant le cas où cette valeur dépasse le domaine permis, la vitesse horizontale sera une des bornes du domaine.

Pour ce qui est des conditions d'optimalité relatives à la commande de vitesse verticale, elles se présentent comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial w_{clb}(h)} &= \frac{\partial \left[ \frac{F(u_{clb}(h), h, w_{clb}(h))}{w_{clb}(h)} \right]}{\partial w_{clb}(h)} - \lambda_{clb} \frac{u_{clb}(h)}{w_{clb}^2(h)} \\
 &= \frac{w_{clb}(h) \frac{\partial F(u_{clb}(h), h, w_{clb}(h))}{\partial w_{clb}(h)} - F(u_{clb}(h), h, w_{clb}(h))}{w_{clb}^2(h)} - \lambda_{clb} \frac{u_{clb}(h)}{w_{clb}^2(h)} \\
 &= \frac{-c_t - c_w b_0 \delta \sqrt{\theta} - \frac{c_w b_1}{k} P_{cr}(u_{clb}(h), h)}{w_{clb}^2(h)} - \lambda_{clb} \frac{u_{clb}(h)}{w_{clb}^2(h)} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial w_{dst}(h)} &= \frac{\partial \left[ \frac{F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{w_{dst}(h)} \right]}{\partial w_{dst}(h)} - \lambda_{dst} \frac{u_{dst}(h)}{w_{dst}^2(h)} \\
 &= \frac{w_{dst}(h) \frac{\partial F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{\partial w_{dst}(h)} - F(u_{dst}(h), h, w_{dst}(h))}{w_{dst}^2(h)} - \lambda_{dst} \frac{u_{dst}(h)}{w_{dst}^2(h)} \\
 &= \frac{-c_t - c_w b_0 \delta \sqrt{\theta} - \frac{c_w b_1}{k} P_{cr}(u_{dst}(h), h)}{w_{dst}^2(h)} - \lambda_{dst} \frac{u_{dst}(h)}{w_{dst}^2(h)} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Par inspection des équations 4.38 et 4.39, on remarque l'absence de termes en  $w(h)$  au numérateur. Donc, le minimum des hamiltoniens sera lorsque  $w_{clb}(h) = 7.5$  pour la montée (équations 4.30) et  $w_{dst}(h) = -1.5$  pour la descente (équations 4.31).

### La vitesse optimale en vol de croisière

Pour ce qui est du segment de croisière, il s'agira de minimiser le terme  $\frac{F(u_{cr}, h_{cr})}{u_{cr}}$  pour obtenir une faible contribution du vol de croisière à la fonction de coût global. Cette minimisation revient à obtenir la vitesse à laquelle la distance parcourue est maximale pour une quantité fixe de carburant, telle que décrit à la section 4.2.3.2.

### 4.3.3 Résolution numérique

Deux problèmes avec conditions initiales fixes et conditions finales libres, avec valeur finale libre pour la variable indépendante sont à résoudre. Pour se faire, les valeurs finales des variables d'état (la distance) et la valeur finale de l'altitude ( $h_{cr}$ ) seront fixés, et un problème aux conditions frontières (TPBVP : two points boundary value problem) avec valeur finale de la variable indépendante fixée sera résolu. Une fois les deux problèmes résolus, les valeurs finales seront changées de manière à satisfaire les conditions de transversalité. La résolution de la vitesse optimale pour le segment de croisière se fait par simple minimisation d'une fonction à plusieurs variables.

D'une manière plus précise, l'altitude et les variables adjointes seront les variables itératives de l'algorithme. En effet, avec une valeur initiale pour l'altitude et les variables adjointes, une première résolution des trois problèmes de commande optimale sera effectuée (un pour chaque segment) pour obtenir une valeur des fonctions de transversalité 4.33 et 4.34, dont on cherchera à minimiser l'erreur.

#### 4.3.3.1 Algorithme de résolution des TPBVP

Pour ce qui est de la résolution des problèmes de commande optimale à valeurs frontières fixes (TPBVP), un algorithme du gradient conjugué est implanté. Cette méthode se prête bien aux problèmes où la fonction à minimiser est sous forme analytique et où ses dérivées première et seconde sont faciles à obtenir. Ainsi, ayant fixé la valeur de la variable adjointe et la valeur finale de la variable indépendante, et ayant une première commande comme valeur initiale, il est facile de trouver la commande optimale après seulement quelques itérations. Ainsi, la valeur de la commande optimale pour chaque segment peut être calculée.

#### Algorithme du gradient conjugué pour la montée et la descente

1. Discréteriser le segment de montée en N sous-segments
2. Établir la commande initiale de vitesse horizontale pour un sous-segment j

3. Pour le sous-segment, faire :

- (a) Calculer la dérivée première  $\frac{\partial H}{\partial u_{clb}(i,j)}$
- (b) Si  $\frac{\partial H}{\partial u_{clb}(i,j)} > \epsilon$ 
  - i. Calculer la dérivée deuxième  $\frac{\partial^2 H}{\partial u_{clb}^2(i,j)}$
  - ii. Calculer la commande suivante :
  - $u_{clb}(i+1, j) = u_{clb}(i, j) - (\frac{\partial^2 H}{\partial u_{clb}^2(i,j)})^{-1} \frac{\partial H}{\partial u_{clb}(i,j)}$
  - iii. incrémenter i et retour en 3(a)
- (c) Si  $\frac{\partial H}{\partial u_{clb}(i,j)} < \epsilon$  :
  - i. arrêt de la boucle
  - ii. Si  $u_{clb} > 43.6$ , alors  $u_{clb} = 43.6$
  - iii. changement de sous-segment ( $j = j + 1$ ) et retour en 2

L'algorithme pour déterminer les commandes dans la descente est le même que celui présenté.

#### 4.3.3.2 Algorithme de résolution global

Une fois la commande calculée pour les trois segments, les variables libres doivent être changées pour respecter les conditions de transversalité. Avec un algorithme de recherche par simplex de Nelder et Mead (méthode géométrique), les valeurs des variables libres sont changées de manière à minimiser le critère. Cet algorithme, malgré un taux de convergence assez lent, est très robuste et ce fut le seul algorithme en mesure d'effectuer une bonne minimisation pour tous les points de fonctionnement donnés.

#### Critère à minimiser

Le critère à minimiser doit contenir les conditions de transversalité :

$$Q_{transv} = [H(h_{cr}) + (\frac{\partial F(u_{cr}, h)}{\partial h}) \frac{d_f - d_{clb} - d_{dst}}{u_{cr}}]^2 + [\lambda_{clb} + \frac{F(u_{cr}, h_{cr})}{u_{cr}}]^2 + [\lambda_{dst} + \frac{F(u_{cr}, h_{cr})}{u_{cr}}]^2 \quad (4.40)$$

Par contre, ce critère prend seulement en compte le fait que  $d_{clb} + d_{dst} < d_f$ . Le critère doit donc inclure une fonction de pénalité pour la contrainte sur les variables d'états. Cette fonction se présente comme suit :

$$Q_{penal_{etats}} = \exp [-(d_f - d_{clb} - d_{dst})^3] \quad (4.41)$$

De cette manière, lorsque la solution se rapprochera de la contrainte, la fonction de pénalité aura une plus grande influence sur le critère que les fonctions de transversalité impliquant les variables adjointes. Ainsi, le système se comportera tout comme si les variables adjointes étaient libres, comme le laisse supposer une contrainte égalité sur les variables d'état. De plus, si la solution se rapproche de la contrainte sur les variables d'état, l'algorithme tendra à minimiser l'équation de transversalité 4.35. Une fonction de pénalité exponentielle fut choisie de façon à obtenir une variation douce de l'algorithme autour de la contrainte.

Finalement, le critère à minimiser sera :

$$Q = Q_{transv} + Q_{penal_{etats}} \quad (4.42)$$

### Approximation du gradient de la fonction de coût par rapport à l'altitude

Puisque dans l'équation 4.40 intervient la dérivée de la fonction de coût  $\frac{\partial F(u_{cr}, h(t))}{\partial h}$ , et que l'altitude n'intervient pas explicitement dans cette fonction, mais seulement par le biais de la température, la pression et la densité relative, la dérivée de cette fonction doit être approximée. La dérivée sera obtenue par interpolation entre l'altitude où la dérivée est désirée et le point arrière. Suite à l'évaluation de l'influence de l'incrément d'altitude sur le calcul de l'approximation de la dérivée, un incrément de  $0.1m$  a été retenu.

### Algorithme de recherche d'un minimum

1. Établir une condition initiale pour l'altitude et les variables adjointes ;
2. Solutionner le problème aux valeurs limites pour les trois segments (algorithme de la sous-section 4.3.3.1) ;
3. Avec les commandes de vitesse optimale obtenues, résoudre les équations d'état pour calculer la valeur finale des variables d'état de distance (résolution des équations 4.25 et 4.26) ;
4. Calculer la valeur du critère  $Q$  (équation 4.42) ;
  - (a) Si  $Q > \epsilon \Rightarrow$  varier les valeurs finales selon la méthode graphique de Nelder-Mead et retourner au point 2 ;
  - (b) Si  $Q < \epsilon \Rightarrow$  arrêter l'optimisation.

La figure 4.6 représente l'algorithme de résolution du problème de commande optimale.

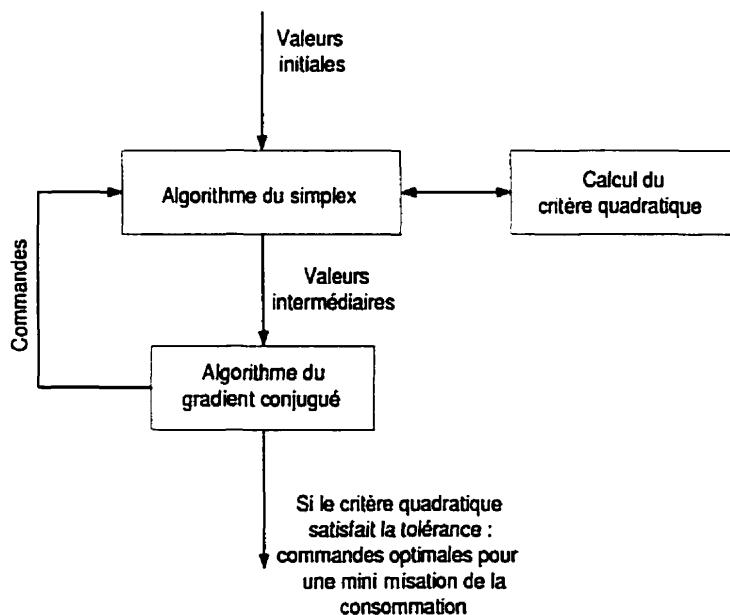


FIG. 4.6: Algorithme de résolution

## 4.4 Analyse des trajectoires optimales

Dans cette section, l'algorithme sera tout d'abord analysé pour vérifier son comportement dans plusieurs cas spécifiques. Ensuite, certains paramètres seront changés pour voir l'évolution de la trajectoire optimale en fonction de ces paramètres. Finalement, l'algorithme sera généralisé à une mission typique, et la trajectoire obtenue sera comparée à celle utilisée jusqu'à maintenant dans les missions du véhicule.

### 4.4.1 Analyse de l'algorithme

Une résolution du problème a été faite avec une masse constante de 338 kilogrammes. Cette masse correspond environ à la masse moyenne du véhicule lors d'un trajet de 100 kilomètres vers la zone de surveillance.

#### 4.4.1.1 Variation du rapport des coefficients de pondération

La fonction de coût peut être variée selon l'objectif visé par l'optimisation. En fixant  $c_t = 0$ , la meilleure économie de carburant est réalisée. Par contre, en augmentant la pondération sur le temps, le trajet pour se rendre au point de surveillance est plus court et la consommation de carburant augmente.

L'analyse de l'influence du rapport de pondération a été faite avec et sans la contrainte sur la vitesse horizontale. En effet, l'analyse de l'effet de la contrainte sur les trajectoires optimales présente un intérêt.

Avec l'augmentation du rapport de pondération  $c_t/c_w$ , l'altitude de croisière diminue, comme en témoigne la figure 4.7. Par contre, si la vitesse horizontale est limité en grandeur, l'altitude de croisière deviendra fixe environ à partir d'un rapport de pondération de 48, où la vitesse horizontale en monté sera saturée pour tout le segment. À cet effet, la figure 4.8 montre la variation de la vitesse horizontale dans le segment de montée. La figure 4.9, quant à elle, montre l'évolution des vitesses en l'absence de contraintes.

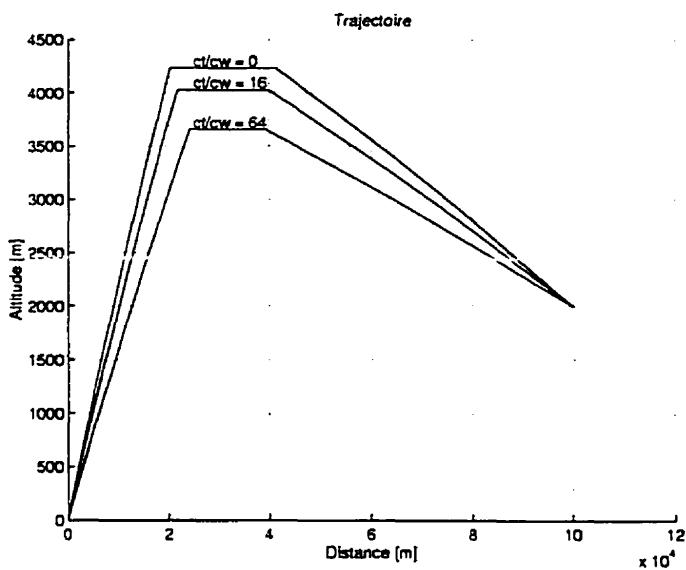


FIG. 4.7: Variation de la trajectoire en fonction du rapport  $c_t/c_w$  sans contrainte sur la vitesse horizontale

En ce qui concerne le temps de parcours et la consommation de carburant, la limite sur la vitesse influence également la solution du problème. La figure 4.10 compare la consommation de carburant entre la situation avec contrainte et la situation sans contrainte, pour différents rapport  $c_t/c_w$ . Également, la figure 4.11 compare le temps de parcours pour les situations avec et sans contrainte.

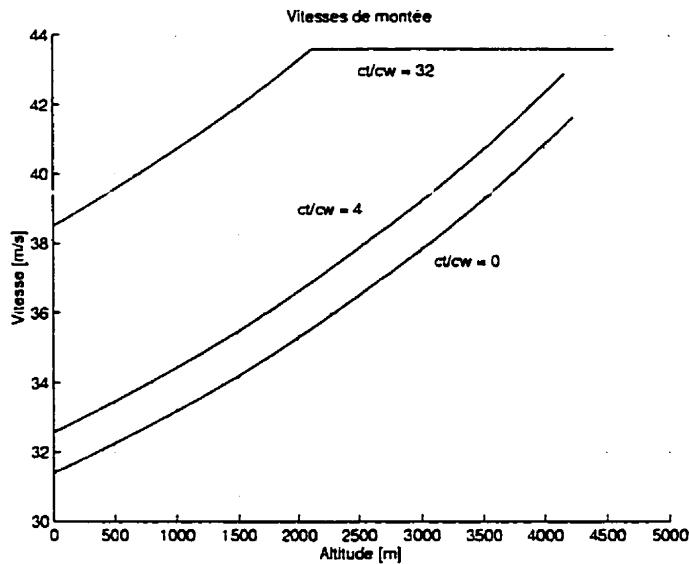


FIG. 4.8: Variation de la vitesse horizontale en montée en fonction du rapport  $c_t/c_w$  avec contrainte sur la vitesse horizontale

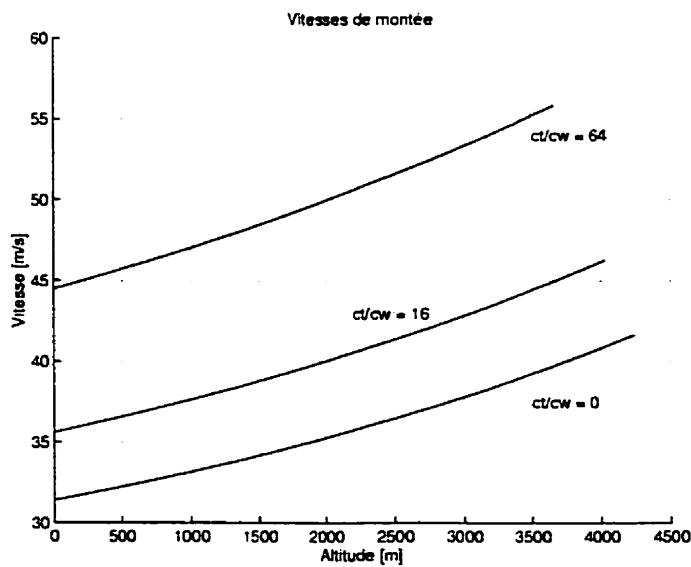


FIG. 4.9: Variation de la vitesse horizontale en montée en fonction du rapport  $c_t/c_w$  sans contrainte sur la vitesse horizontale

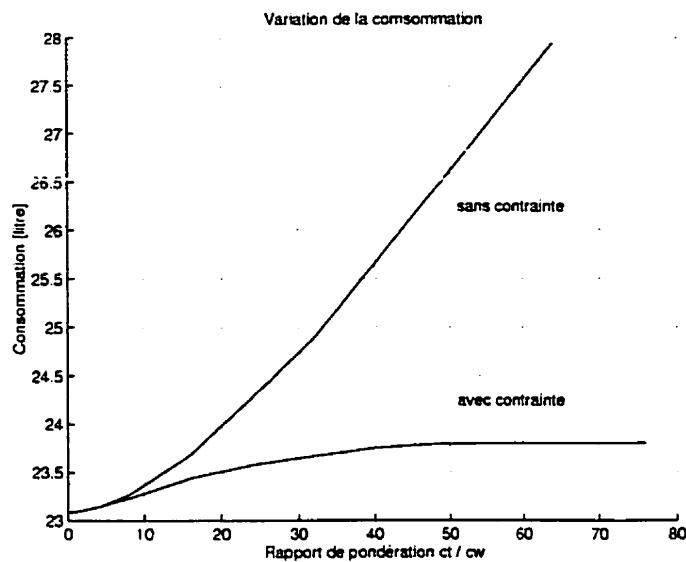


FIG. 4.10: Comparaison entre les situations avec et sans contrainte pour le vol d'allée

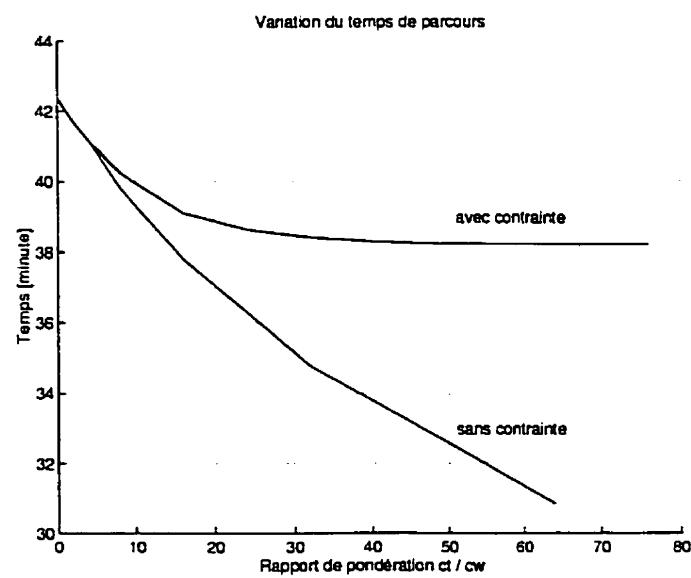


FIG. 4.11: Comparaison entre les situations avec et sans contrainte pour le vol d'allée

#### 4.4.1.2 Contrainte sur la valeur finale des variables de distance

Dans le chapitre de l'élaboration théorique, il a été mentionné que les valeurs finales des distances doivent être inférieures ou égales à la distance séparant le point de départ à la zone de surveillance. Les prochaines simulations montrent que l'hypothèse faite à l'effet que si une solution existait avec les valeurs finales libres, la solution avec les valeurs finales fixées était plus coûteuse que la première. Ainsi, pour un même rapport de pondération  $c_t/c_w$ , une simulation avec valeurs finales libres et une simulation avec valeurs finales contraintes ont été menées. La solution avec valeurs finales fixées ne possède pas de segment de croisière, puisque  $d_{db} + d_{dst} = d_f$ . Les simulations ont été faites avec la contrainte sur la vitesse horizontale.

Comme le laisse entrevoir les figures 4.12 et 4.13, le coût associé au problème d'optimisation avec les valeurs finales libres sur les variables d'état est moindre que celui où les valeurs sont fixées. On voit que les essais manquent de précision et que l'algorithme convergeait plus ou moins bien.

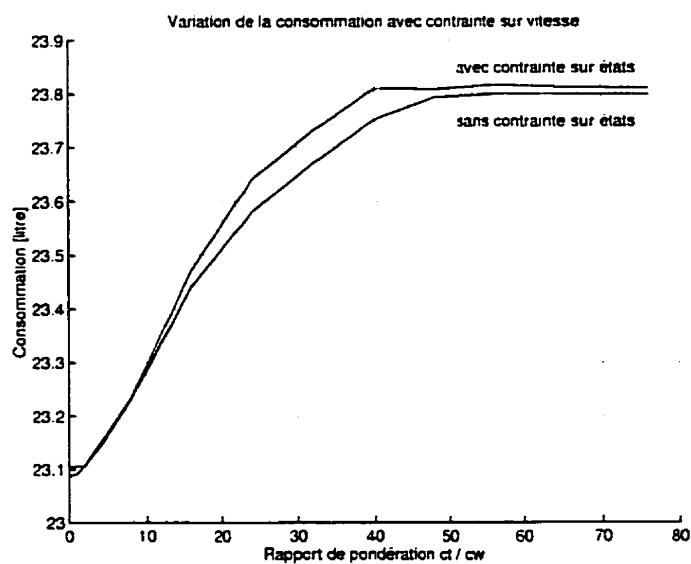


FIG. 4.12: Comparaison de la consommation entre les situations avec et sans contrainte sur les valeurs finales des variables d'état

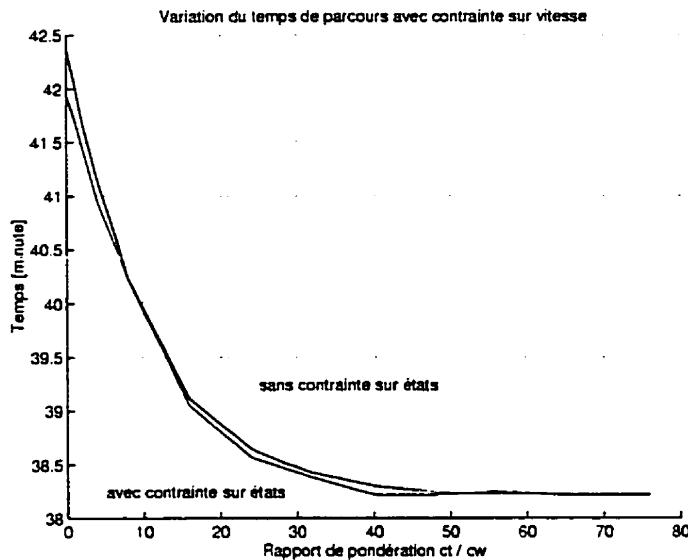


FIG. 4.13: Comparaison du temps de parcours entre les situations avec et sans contrainte sur les valeurs finales des variables d'état

masse (kg)	consommation (litre)	% d'erreur ( - )
350	23.1015	+ 0.068 %
338	23.0859	0.00 %
326	23.0900	+ 0.018 %

TAB. 4.1: Variation de la consommation VS masse

#### 4.4.1.3 Variation de la consommation en fonction de la masse

En solutionnant le problème des trajectoires optimales pour différentes masses couvrant le trajet, la pertinence de l'hypothèse que la masse du véhicule influence peu la commande optimale est prouvée. Trois essais ont été effectués avec des masses respectives de 350 kg, 338 kg et 326 kg. Le tableau 4.1 résume les résultats. Puisque la variation de la consommation en fonction de la masse du véhicule sur un trajet n'est pas significative, la commande optimale obtenue pour le trajet en fonction de la masse moyenne pourra être utilisée lors de la simulation de la mission complète, où la consommation de carburant fait diminuer la masse.

#### 4.4.2 Simulation d'une mission

Les simulations de mission seront comparées à une simulation de référence fournie par Bombardier. Les paramètres de vol, tels que décrits dans leur procédure, donnent une période de surveillance de 4.89 heures. La trajectoire empruntée par le véhicule est montrée à la figure 4.14.

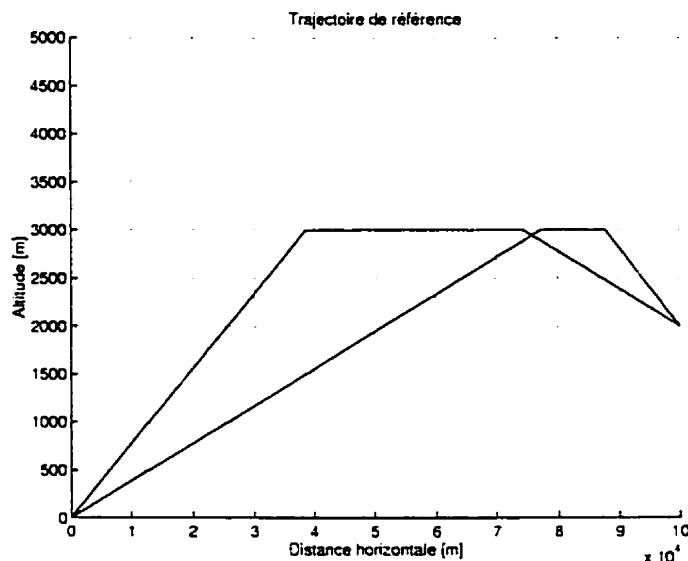


FIG. 4.14: trajectoire de référence

##### 4.4.2.1 Optimisation de la mission

Une simulation d'une mission complète a été effectuée avec les commandes optimales pour le trajet d'allée et de retour. La mission possède les caractéristiques suivantes :

- altitude de départ = 0 m ;
- altitude de surveillance = 2000 m ;
- distance à parcourir = 100 km ;
- masse moyenne pour le vol allée = 338 kg ;

- masse moyenne pour le vol retour = 219 kg;
- masse de carburant initiale = 150 kg;
- masse de carburant de réchauffement initial = 2 kg;
- masse de carburant en réserve = 11 kg;
- $c_t/c_w = 0$ .

Le temps de surveillance calculé par cette méthode donne exactement 4.98 heures, soit une amélioration de 1.84% par rapport à la mission de référence. La figure 4.15 montre la structure de la trajectoire optimale.

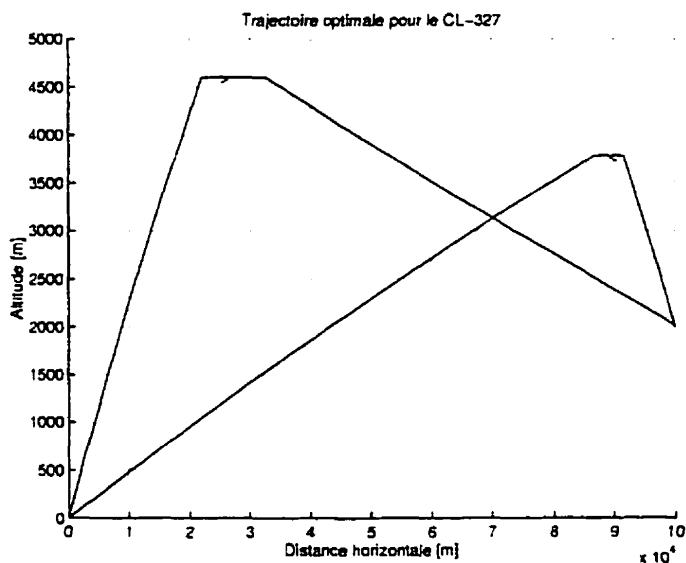


FIG. 4.15: trajectoire optimale

Le tableau 4.2 résume les différences entre les deux missions.

type mission	temps loiter (heure)	temps allée (heure)	carburant allée (litre)	temps retour (heure)	carburant retour (litre)	temps de vol (heure)
référence	4.8881	0.7196	24.8560	0.7234	20.5947	6.331
$c_t/c_w = 0$	4.9781	0.7064	23.0889	0.7455	20.1018	6.430

TAB. 4.2: Comparaison des missions

Vitesse du vent (noeud)	type mission	temps loiter (heure)	temps allée (heure)	carburant allée (litre)	temps retour (heure)	carburant retour (litre)	temps de vol (heure)
$V_w = 0$	référence	4.8881	0.7196	24.8560	0.7234	20.5947	6.331
	$c_t/c_w = 0$	4.9781	0.7064	23.0889	0.7455	20.1018	6.430
$V_w = 20$	référence	4.7575	0.5682	20.2351	0.9865	27.3739	6.312
	$c_t/c_w = 0$	4.8506	0.5667	18.8801	1.0003	26.4477	6.418
$V_w = 30$	référence	4.5658	0.5141	18.5749	1.2054	33.0701	6.285
	$c_t/c_w = 0$	4.6986	0.5150	17.3022	1.1943	31.1726	6.408

TAB. 4.3: Variation de la vitesse du vent

vitesse du vent (noeud)	temps surveillance référence (heure)	temps surveillance optimal (heure)	% d'augmentation
0	4.8881	4.9781	1.84 %
20	4.7575	4.8506	1.96 %
30	4.5658	4.6986	2.91 %

TAB. 4.4: Variation du temps de surveillance avec la variation de la vitesse du vent

#### 4.4.2.2 Variation des conditions de la mission

Les gains obtenus par la méthode optimale ne sont pas vraiment significatifs, et ils le seront encore moins si la mission se déroule sur de plus courtes distances. L'avantage de la méthode se situe au niveau de la détermination de la trajectoire pour de longues missions, ou bien lors de conditions atmosphériques non-idiéales.

##### Vitesse du vent

Toutes les précédentes missions supposaient l'absence de vent. Les prochaines simulations font intervenir la vitesse du vent dans la même direction que le trajet d'allée. Les simulations ont été faites avec un vent en provenance de l'ouest, avec des vitesses de 0, 20 et 30 noeuds. Les résultats sont présentés au tableau 4.3.

Le tableau 4.4 montre l'amélioration en pourcentage de la solution optimale en comparaison avec la trajectoire de référence.

Vitesse du vent (noeud)	type mission	alt. croisière vol allée (mètre)	alt. croisière vol retour (mètre)
$V_w = 0$	référence	3000	3000
	$c_t/c_w = 0$	4230	2968
$V_w = 20$	référence	3000	3000
	$c_t/c_w = 0$	3819	3583
$V_w = 30$	référence	3000	3000
	$c_t/c_w = 0$	3654	3981

TAB. 4.5: Variation de l'altitude de croisière avec la variation de la vitesse du vent

On voit qu'avec l'augmentation de la force du vent, la trajectoire optimale améliore le temps de surveillance par rapport à la trajectoire de référence. Une des raisons est l'altitude optimale de croisière qui est relativement près de celle de la référence pour le vol de retour avec le vent de  $V_w = 0$  noeud. Si on compare avec le vent de 30 noeuds, les deux altitudes optimales sont différentes des celles de référence. Les altitudes sont inscrites dans le tableau 4.5.

distance parcourue (km)	type mission	temps loiter (heure)	temps allée (heure)	carburant allée (litre)	temps retour (heure)	carburant retour (litre)	temps de vol (heure)
100	référence	4.8881	0.7196	24.8560	0.7234	20.5947	6.331
	$c_t/c_w = 0$	4.9781	0.7064	23.0889	0.7455	20.1018	6.430
200	référence	3.2214	1.4394	46.4415	1.4431	39.3152	6.1039
	$c_t/c_w = 0$	3.6203	1.3666	40.5947	1.4187	35.4417	6.4056

TAB. 4.6: Variation de la distance parcourue

distance parcourue (km)	type mission	alt. croisière vol allée (mètre)	alt. croisière vol retour (mètre)
100	référence	3000	3000
	$c_t/c_w = 0$	4230	2968
200	référence	3000	3000
	$c_t/c_w = 0$	6050	5010

TAB. 4.7: Variation de l'altitude de croisière avec la distance parcourue

### Distance à parcourir

Dans les simulations faites jusqu'à présent, une distance de 100 km à parcourir était utilisée. La prochaine simulation de mission fera parcourir une distance de 200 km au véhicule, pour vérifier l'hypothèse qu'une plus grande distance de parcours favorise l'utilisation de la commande optimale.

Le tableau 4.8 nous donne le pourcentage d'augmentation du temps de surveillance. On voit qu'avec une distance à parcourir plus grande, la solution donnée par la com-

distance parcourue (km)	temps surveillance référence (heure)	temps surveillance optimal (heure)	% d'augmentation
100	4.8881	4.9781	1.84 %
200	3.2214	3.6203	12.38 %

TAB. 4.8: Variation du temps de surveillance

mande optimale est nettement avantageuse. On peut expliquer ce résultat en regardant le tableau 4.7. Pour une distance de 100 km, les altitudes de croisière sont presque identiques. Par contre, avec une distance à parcourir de 200 km, les altitudes sont beaucoup plus éloignées que celle empruntées par la mission de référence. Malgré cela, le système a une limite quant à l'altitude à laquelle il peut fonctionner, tout dépendant de la température à ce niveau. Les altitudes supérieures à 5000 mètres ne sont pas toujours accessibles par le véhicule, dépendant de son poids et de la température ambiante.

#### 4.4.3 Discussion

La méthode optimale de détermination de trajectoires de vol peut être avantageuse lors de missions requérant un grande distance de vol. Par contre, sur de petites distances, le gain de cette méthode est très peu significatif. De plus, la génération des trajectoires optimales est fait hors-ligne, et ne prend pas en considération les variations climatiques en temps réel. Une table contenant les altitudes et les vitesses de croisière optimales pour certaines conditions de vol pourrait tout de même être calculée et utilisé lors de la navigation sur de grande distance.

## CONCLUSION

Le projet de maîtrise se partageait en deux temps. Une première partie concernait la conception d'un contrôleur de suivi de trajectoire, en position et en vitesse. Le type de contrôleur utilisé était un contrôleur optimal, soit sous la forme d'un suiveur ou d'un régulateur, dépendant si la référence provenait d'un générateur de trajectoire ou d'un opérateur. Le contrôleur faisait un meilleur suivi de trajectoire qu'un contrôleur à retour de sortie. La particularité du système à l'étude provient du fait que la commande (l'angle de tangage) et la dérivée de la commande (la vitesse de tangage) sont contraintes dans l'axe du déplacement. Puisque le modèle du véhicule représente la dynamique selon les deux axes principaux, des contraintes quadratiques sur la commande et la dérivée de la commande prenaient place dans la loi de contrôle. De façon à garder l'assurance de stabilité des contrôleurs optimaux, un algorithme de prise en compte des contraintes fut implanté. Cet algorithme détermine la valeur d'une référence faisable qui n'introduit pas de saturation dans la commande, et qui est la plus proche de la référence voulue. Cet algorithme est différent de ce que l'on retrouve dans la littérature à plusieurs égards. Les algorithmes présentés jusqu'à maintenant dans la littérature prenaient en ligne de compte des contraintes linéaires sur la commande. De plus, les systèmes étaient monovariables.

L'algorithme présenté dans ce mémoire est appliqué à un système multivariable, et dont les contraintes sont de type quadratique sur la commande et sur la dérivée de la commande. La solution du problème présente de très bons résultats. L'algorithme fut appliqué aux contrôleurs optimaux car ils facilitaient la mise en oeuvre. Par contre, cet algorithme de prise en compte des contraintes pourrait être appliqué à tout type de contrôleur de suivi de trajectoire. Ainsi, puisque les références appliquées au contrôleur sont toujours dans le domaine linéaire de ce dernier, les propriétés des contrôleurs se trouvent conservées.

Dans un deuxième temps, les trajectoires optimales dans l'atmosphère pour le

véhicule CL-327 fut déterminées de façon à optimiser les missions de surveillance. Contrairement aux autres problèmes présentés dans la littérature, la trajectoire du vol d'allée et de retour n'avait pas la même structure pour la montée et la descente. Ainsi, la résolution du problème de commande optimale fut plus compliquée par rapport à ce qui est fait dans la littérature. Deux problèmes de commande optimale ont dû être solutionnés itérativement par rapport à une contrainte reliant les deux valeurs finales des systèmes. Ainsi, des trajectoires quelconques peuvent être solutionnées, ce que les précédents algorithmes ne faisaient pas. Les économies de carburant sont significatives lorsque les conditions climatiques sont défavorables et que les trajectoires optimales sont très différentes des trajectoires normales d'opération.

Dans les travaux à venir, une étude extensive de l'algorithme de prise en compte des contraintes pourrait être menée. Dans quelles conditions l'algorithme converge ou diverge ? Quel est le taux de convergence de l'algorithme ? Également l'aspect de l'optimisation des algorithmes de minimisation dans le but de faire une implantation en temps réel et de faire des tests sur un contrôle de navigation serait très intéressant. Peu importe le système, cette méthode s'applique où de fortes saturations ou contraintes existent (véhicules terrestres, aériens et sous-marins, contrôle de procédés chimiques où les actuateurs possèdent de fortes saturations, etc.). Les contraintes peuvent être sur la commande ou sur les variables d'état du système, ou bien une combinaison de contraintes.

Pour ce qui est de l'optimisation des trajectoires, il pourrait être intéressant de voir l'application pour des trajectoires plus locales, comme l'optimisation des trajectoires de surveillance, quadrillage, etc. Ainsi, le modèle dynamique du véhicule ne serait plus négligé dans la formulation du problème de commande optimale. Finalement, le générateur de trajectoires pourrait utiliser un module d'optimisation pour la génération de trajectoire lorsque l'aspect global de la trajectoire est donné par un opérateur de mission avant le décollage.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AF66] Michael Athans and Peter L. Falb. *Optimal Control : An Introduction to the Theory and Its Applications*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [AM90] Brian D.O. Anderson and John B. Moore. *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, 1990.
- [Ath71] M. Athans. On the design of PID controllers using optimal linear regulator theory. *Automatica*, 7 :643 – 647, 1971.
- [BC98] David P. Boye and Gregory E. Chamitoff. Autonomous maneuver tracking for self-piloted vehicles. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 22(1) :58 – 67, January - February 1998.
- [BF95] Georges Bokos and Bernard Ferrier. Development, integration and test of an automatic UAV recovery system for the CL-227 VTOL-UAV. *51st Annual forum of the American Helicopter Society*, pages 812–819, May 1995.
- [BH75] Arthur E. Bryson, Jr. and Yu-Chi Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing Corp., New-York, 1975.
- [CM94] P.R. Chandler and M.J. Mears. A hybrid LQR / LP approach for addressing actuator saturation in feedback control. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pages 3860 – 3867, December 1994.
- [EL80] Heinz Erzberger and Homer Lee. Constrained optimum trajectories with specified range. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 3(1) :78–85, Jan.-Feb. 1980.
- [GF93] Paul Gyugyi and Gene Franklin. Multivariable integral control with input constraints. *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 2505 – 2510, December 1993.

- [GT94] Kolmanovsky Ilya Gilbert, Elmer and Kok Tin Tan. Nonlinear control of discrete-time linear systems with state and control constraints : A reference governer with global convergence properties. *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, pages 144 – 149, December 1994.
- [Han84] Raymond S. Hansen. Toward a better understanding of helicopter stability derivatives. *Journal of the American Helicopter Society*, pages 15–24, January 1984.
- [HK95] Richard M. Howard and Isaac Kaminer. Survey of unmanned air vehicles. *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2950–2953, June 1995.
- [HS92] Menon P.K.A. Heiges, M.W. and D.P. Schrage. Synthesis of a helicopter full-authority controller. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15(1) :222 – 227, January - February 1992.
- [Ish99] W. Ishak. MECH623 - helicopter flight dynamics. *Notes de cours*, 1999. Concordia University.
- [JB98] Matthew K. Juge and Arthur E. Bryson Jr. Linear-quadratic worst-case control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 21(5) :761 – 766, September - October 1998.
- [KAS88] Petros Kapasouris, Michael Athans, and Gunter Stein. Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators. *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, pages 469 – 479, December 1988.
- [Key79] C.N. Keys. Rotary wing aerodynamics, vol. II - performance predition of helicopters. *NASA CR 3083*, Jan. 1979.
- [LK97] Suchang Lee and Youdan Kim. Time-domain finite element method for inverse problem of aircraft maneuvers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 20(1) :97 – 103, January - February 1997.

- [MD92] M.A. Manness and Murray-Smith D.J. Aspects of multivariable flight control law design for helicopters using eigenstructure assignment. *Journal of the American Helicopter Society*, pages 18 – 32, July 1992.
- [MG78] Vernon K. Merrick and Ronald M. Gerdes. Design and piloted simulation of a VTOL flight-control system. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1(3) :209 – 216, May - June 1978.
- [MGL84] R. Meyer G, Su and Hunt L.R. Application of nonlinear transformations to automatic flight control. *Automatica*, 20(1) :103 – 107, 1984.
- [MP97] R.B. Miller and M. Pachter. Maneuvering flight control with actuator constraints. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 20(No.4) :729 – 734, July - August 1997.
- [New94] Simon Newman. *The Foundation of Helicopter Flight*. John Wiley and Sons, Great Britain, 1994.
- [O'S98] Jules O'Shea. AE340 - commande de vol. *Notes de cours*, 1998. École Polytechnique de Montréal.
- [Pro95] Raymond W. Prouty. *Helicopter Performance, Stability and Control*. Krieger, 1995.
- [PSTS97] M. Pelletier, A. Sakamoto, C. Tessier, and G. Saintonge. Autonomous navigation and control functions of the CL-327 VTOL-UAV. pages 18-1 – 18-10. AGARD/MSD 8th Symposium on System Design, October 1997.
- [RR97] James N. Rozak and Asok Ray. Robust multivariable control of rotorcraft in forward flight. *Journal of the American Helicopter Society*, pages 149 – 160, April 1997.
- [Sch71] F.H. Schmitz. Optimal takeoff trajectories of a heavily loaded helicopter. *Journal of Aircraft*, 8(9) :717–723, September 1971.

- [SE84] G.L. Slater and H. Erzberger. Optimal short-range trajectories for helicopters. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 7(4) :393–400, July-August 1984.
- [SH84] White J.E. Douglas R. Speyer, J.L. and D.G. Hull. Multi-input / multi-output controller design for longitudinal decoupled aircraft motion. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 7(6) :695 – 702, November - December 1984.
- [SS87] G.L. Slater and M. Stoughton. On-line determination of optimal flight paths for helicopters. *Journal of the American Helicopter Society*, pages 54–61, July 1987.
- [WG94] Martin F. Weilenmann and Hans P. Geering. Test bench for rotorcraft hover control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17(4) :729 – 736, July - August 1994.
- [WP91] John E. White and John R. Phelan. Stability augmentation and control decoupling for the airborne remotely operated device. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 14(1) :176 – 183, January - February 1991.

## Annexe I

### Développement mathématique du contrôleur LQT

En explicitant l'équation 1.6, la loi de commande peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \theta_x^*(0) \\ \theta_x^*(1) \\ \vdots \\ \theta_x^*(N-2) \\ \theta_x^*(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x^T(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_x^T(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_x^T(N-2) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_x^T(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^*(0) \\ x^*(1) \\ \vdots \\ x^*(N-2) \\ x^*(N-1) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k_b^T(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_b^T(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_b^T(N-2) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_b^T(N-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(N-1) \\ b(N) \end{pmatrix}$$

où de manière simplifiée,

$$\theta_x^* = K_x x^* + K_b b \quad (\text{I.1})$$

où  $K_x$  et  $K_b$  représentent les matrices précédentes, contenant les gains pour tous les instants de l'horizon, calculés en fonction de la solution de l'équation discrète de Riccati, variant sur l'horizon.

$$K_b = \begin{pmatrix} k_b^T(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_b^T(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_b^T(N-2) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_b^T(N-1) \end{pmatrix}$$

$$K_x = \begin{pmatrix} k_x^T(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_x^T(1) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_x^T(N-2) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_x^T(N-1) \end{pmatrix}$$

$$\theta_x^* = \begin{pmatrix} \theta_x^*(0) \\ \theta_x^*(1) \\ \vdots \\ \theta_x^*(N-2) \\ \theta_x^*(N-1) \end{pmatrix}; \chi^* = \begin{pmatrix} \chi^*(0) \\ \chi^*(1) \\ \vdots \\ \chi^*(N-2) \\ \chi^*(N-1) \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(N-1) \\ b(N) \end{pmatrix}$$

La solution I.1 donne toutes les commandes de l'horizon, en fonction de tous les états sur l'horizon et de la référence sur l'horizon, par l'entremise du vecteur  $b$ . Cette formulation est peu attrayante pour l'utilisation en boucle fermé. Les transformations suivantes permettront de formuler l'équation I.1 en fonction de l'état au temps présent. Il a été vu, à l'équation 1.5, que l'état suivant est relié au précédent :

$$\chi(i+1) = F\chi(i) + G\theta_x(i)$$

$$\chi(0) = \chi_0$$

Nous pouvons donc déduire les états suivants à partir de l'état courant (état 0), en supposant toujours que le modèle ne change pas à l'intérieur de l'horizon.

$$\chi^*(1) = F\chi^*(0) + G\theta_x^*(0)$$

$$\chi^*(2) = F\chi^*(1) + G\theta_x^*(1)$$

$$= F(F\chi^*(0) + G\theta_x^*(0)) + G\theta_x^*(1)$$

$$= F^2\chi^*(0) + FG\theta_x^*(0) + G\theta_x^*(1)$$

⋮

$$\chi^*(k) = F^k\chi^*(0) + F^{k-1}G\theta_x^*(0) + F^{k-2}G\theta_x^*(1) + \dots + FG\theta_x^*(k-2) + G\theta_x^*(k-1)$$

Ainsi, le vecteur des états peut se présenter comme suit :

$$\begin{pmatrix} \chi^*(0) \\ \chi^*(1) \\ \vdots \\ \chi^*(N-2) \\ \chi^*(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ F \\ \vdots \\ F^{N-2} \\ F^{N-1} \end{pmatrix} \chi(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ G & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F^{N-3}G & F^{N-4}G & \dots & 0 & 0 \\ F^{N-2}G & F^{N-3}G & \dots & G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_x^*(0) \\ \theta_x^*(1) \\ \vdots \\ \theta_x^*(N-2) \\ \theta_x^*(N-1) \end{pmatrix}$$

où plus simplement,

$$\chi^* = \tilde{F}\chi(0) + \tilde{G}\theta_x^* \quad (I.2)$$

En insérant cette dernière équation dans l'équation de la commande optimale (équation I.1), on obtient les commandes sur tout l'horizon en fonction de l'état

courant seulement, et de la référence sur l'horizon avec le vecteur  $b$ .

$$\begin{aligned}
 \theta_x^* &= K_x \chi^* + K_b b \\
 &= K_x (\tilde{F} \chi(0) + \tilde{G} \theta_x^*) + K_r b \\
 &= K_x \tilde{F} \chi(0) + K_x \tilde{G} \theta_x^* + K_b b \\
 &= [I - K_x \tilde{G}]^{-1} [K_x \tilde{F} \chi(0) + K_b b]
 \end{aligned}$$

La précédente équation pour la commande n'est pas facile d'usage encore, et le vecteur  $b$  pourrait être représenté par une suite linéaire des référence  $r$ , de par l'équation de Riccati discrète.

La fonction récurrente établie par la résolution de Riccati discrète est :

$$b(i) = M(i)b(i+1) - Qr(i) \quad (I.3)$$

avec  $b(N) = 0$  et  $M(i) = [F^T + k_x(i)G^T]$ .

$$\begin{aligned}
 b(N-1) &= M(N-1)b(N) - Qr(N-1) \\
 &= -Qr(N-1) \\
 b(N-2) &= M(N-2)b(N-1) - Qr(N-2) \\
 &= -M(N-2)Qr(N-1) - Qr(N-2) \\
 b(N-3) &= M(N-3)b(N-2) - Qr(N-3) \\
 &= M(N-3)[-M(N-2)Qr(N-1) - Qr(N-2)] - Qr(N-3) \\
 &= -M(n-3)m(n-2)Qr(N-1) - M(n-3)Qr(N-2) - Qr(N-3) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$b(k) = \sum_{i=1}^{N-k-1} \left[ \left[ \prod_{j=N-k}^{i+1} -M(N-j) \right] Qr(N-i) \right] - Qr(k) \quad (I.4)$$

En prenant la notation matricielle, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(1) \\ b(2) \\ \vdots \\ b(N-1) \\ b(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q & -M(1)Q & \dots & -M(1) * \dots * M(N-2)Q & 0 \\ 0 & -Q & \dots & -M(2) * \dots * M(N-2)Q & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -Q & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(N-1) \\ r(N) \end{pmatrix}$$

où sous une forme plus compacte,

$$b = \tilde{M}r \quad (I.5)$$

On insérant cette dernière équation dans l'expression de la commande, nous pouvons obtenir la commande sur l'horizon en fonction de l'état au temps courant et de la référence sur l'horizon.

$$\theta_x^* = [I - K_x \tilde{G}]^{-1} [K_x \tilde{F} \chi(0) + K_b \tilde{M}r] \quad (I.6)$$

D'une manière plus compacte,

$$\theta_x^* = K_1 \chi(0) + K_2 r \quad (I.7)$$

où

$$\theta_x^* = \begin{pmatrix} \theta_x^*(0) \\ \theta_x^*(1) \\ \vdots \\ \theta_x^*(N-2) \\ \theta_x^*(N-1) \end{pmatrix}; \tau = \begin{pmatrix} \tau(1) \\ \tau(2) \\ \vdots \\ \tau(N-1) \\ \tau(N) \end{pmatrix}; \tau(i) = \begin{pmatrix} x_{ref}(i) \\ u_{ref}(i) \\ \zeta_{ref}(i) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} K_1 &= [(I - K_x \tilde{G})^{-1} K_x \tilde{F}]_{Nn \times n} \\ K_2 &= [(I - K_x \tilde{G})^{-1} (K_r \tilde{M})]_{Nn \times Nn} \end{aligned}$$

avec  $N$  le nombre d'échantillon de l'horizon, et  $n = 3$  le nombre de variable d'état du système augmenté.