POLYPUBLIE
Polytechnique Montréal

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

Titre: Title:	Évaluation du couplage inductif pour la modélisation des câbles et lignes électriques de transmission dans EMTP
Auteur: Author:	Chuma Francis Mugombozi
Date:	2007
Type:	Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis
Référence: Citation:	Mugombozi, C. F. (2007). Évaluation du couplage inductif pour la modélisation des câbles et lignes électriques de transmission dans EMTP [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. https://publications.polymtl.ca/8518/

Document en libre accès dans PolyPublie
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: PolyPublie URL:	https://publications.polymtl.ca/8518/
Directeurs de recherche: Advisors:	Jean Mahseredjian
Programme: Program:	Unspecified

Ce fichier a été téléchargé à partir de PolyPublie, le dépôt institutionnel de Polytechnique Montréal
This file has been downloaded from PolyPublie, the institutional repository of Polytechnique Montréal

https://publications.polymtl.ca

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉVALUATION DU COUPLAGE INDUCTIF POUR LA MODÉLISATION DES CÂBLES ET LIGNES ÉLECTRIQUES DE TRANSMISSION DANS EMTP

CHUMA FRANCIS MUGOMBOZI
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)
AVRIL 2007

© Chuma Francis Mugombozi, 2007.

Library and Archives Canada

Published Heritage Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et Archives Canada

Direction du Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-29245-7
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-29245-7

NOTICE:
The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:
L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

ÉVALUATION DU COUPLAGE INDUCTIF POUR LA MODÉLISATION DES CÂBLES ET LIGNES ÉLECTRIQUES DE TRANSMISSION DANS EMTP

présenté par : MUGOMBOZI Chuma Francis
en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. ROY Gilles, M.Sc.A., président
M. MAHSEREDJIAN Jean, Ph.D., membre et directeur de recherche
M. SAAD Omar, M.Sc.A., membre

DÉDICACE

À mes sœurs Da Espée et Da Josée, mon oncle Prof. Etienne Kasole NGANGURA et à toutes les victimes directes et indirectes des guerres et graves atrocités, spécialement en RD CONGO,

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

Je remercie avant tout mon directeur de recherche, le professeur Jean MAHSEREDJIAN pour la rigueur scientifique et la motivation et la passion qu'il m'a communiquées. Ces trois éléments ont été essentiels pour l'aboutissement de ce travail et m'accompagneront dans ma carrière.

Je remercie Messieurs Omar SAAD et Gilles ROY pour m'avoir lu et examiné. Grâce à vos critiques et remarques, ce travail s'est amélioré pour le bien des lecteurs et de toute la communauté scientifique.

Pour leurs conseils et échange scientifiques, je remercie :

- Xavier Legrand pour l'échange sur la méthode d'intégration quasi-Monte Carlo ;
- Le docteur W. Gander pour la méthode quadrature Lobatto dans Matlab ;
- Jean Gabriel Roumy pour l'échange durant la conversion en Matlab des modules de calcul des paramètres des lignes ;
- Uribe Alejandro qui a mis à notre disposition sa méthode d'intégration ;

Mes remerciements s'adressent aussi à mes collègues aux cycles supérieurs avec qui nous nous sommes mutuellement soutenus dans nos projets respectifs. Spécialement par le «voyage » des tasses de cafés et des gâteaux à travers les couloirs de l'école…

Je remercie de tout cœur mes amis et amies de différents groupes, bénévoles des associations et comités d'étudiants. Grâce à vous, j'ai pu me rappeler à maintenir une vie socialement équilibrée et engagée. Merci aux membres du mouvement de Focolari, des bâtisseurs des Ponts pour la Paix, du Projet FEÉ, de l'IEEE Poly et de l'AECSP.

Enfin, un grand Merci à toute ma famille pour m'avoir supporté et pour avoir recollé les morceaux cassés quand il le fallait : «Shukrani !»(en swahili : Je vous rends grâce et Merci de tout cœur).

RÉSUMÉ

Les considérations environnementales et le manque d'espace dans les villes surpeuplées peuvent imposer un rapprochement des lignes électriques, des ouvrages de télécommunication, des rails de train et des pipelines de gaz ; ou imposer l'utilisation d'un même corridor de transport. Les ouvrages sont alors rapprochés tel qu'il peut apparaître des tensions et courants induits perturbateurs dus au couplage inductif et capacitif entre les ouvrages. La problématique que ces perturbations posent entre ouvrages, définie comme Compatibilité Électromagnétique (CEM), est un aspect important de la conception des ouvrages depuis bien des années.

Pour analyser les effets de la CEM dans un réseau électrique, les partenaires associés au développement de EMTP-RV (Electromagnetic Transients Program- Restructured Version), ont initié le projet CRINOLINE qui sera composé d'une boîte à outils utilisable dans EMTP-RV et dédiée à l'analyse de la CEM.

Ce nouveau projet exige des modifications dans les modules de calcul des paramètres des câbles et des lignes dans EMTP-RV. Une des principales modifications est la prise en compte de l'impédance mutuelle de retour par la terre entre deux ouvrages de types différents, par exemple, une ligne aérienne et un câble souterrain, pour modéliser le couplage inductif.

L'objectif principal de cette recherche est d'évaluer cette impédance mutuelle de retour par la terre et analyser son incorporation dans les modèles des lignes et câbles dans EMTP-RV pour le cas des ouvrages de différents types.

Cette impédance mutuelle est directement associée au champ électrique dû à la présence de la terre. En considérant les hypothèses quasi-TEM (Transverse Électromagnétique) prises par Pollaczek pour résoudre les équations de Maxwell pour ce champ, nous avons montré que pour les configurations usuellement rencontrées, ces hypothèses sont respectées. Cependant, au-delà des distances de l'ordre de quelques centaines de mètres,

des profondeurs de quelques dizaines de mètres ou pour les fréquences de quelques MHz, les hypothèses ne sont plus valides et les résultats de l'évaluation de l'intégrale de Pollaczek sont discutables.

En corrigeant la localisation des zéros de la fonction intégrante de l'intégrale de Pollaczek, dans une des plus récentes méthodes d'évaluation numérique, et en introduisant une procédure pour borner l'erreur relative commise, nous avons proposé une nouvelle méthode d'évaluation numérique de l'intégrale de Pollaczek. Celle-ci a été validée en comparaison avec les résultats de la méthode Quasi-Monte Carlo sans troncature de l'intégrale. Cette nouvelle méthode numérique proposée a des limites dans son application. Celles-ci sont liées à celles de la quadrature Lobatto dans Matlab quand les pas exigés pour la tolérance absolue sont très petits, de l'ordre de 10^{-15}.
Par ailleurs, le temps d'exécution pour certaines configurations est relativement élevé. L'estimation des bornes des erreurs est conservative et rallonge le temps d'exécution. La nouvelle méthode numérique que nous proposons sera avant tout un outil pour établir les limites de précision des formules et autres approximations analytiques.

Par analyse des développements en série des champs électriques introduits par Pollaczek, nous avons introduit deux nouvelles formules approximatives : une pour le couplage ligne-câble, et une autre pour le couplage entre câbles souterrains. Par ailleurs, cette dernière découle d'une observation plus générale que l'impédance entre les câbles peut être déduite d'une évaluation de l'expression de l'impédance entre un élément aérien et souterrain avec ajout des deux fonctions de Bessel.

Les nouvelles formules approximatives ainsi que celles anciennement connues (Lucca, CCITT et Saad) ont été, pour chacun de cas correspondants, comparées à la nouvelle méthode numérique. Il ressort que pour le cas aérien –souterrain, la nouvelle formule approximative est plus précise que celle de Lucca et celle du CCITT pour les fréquences inférieures à environ 1 kHz et pour des distances courtes (hauteur < 10m et distance

horizontale < 3m). Cependant, toutes ces formules approximatives pour l'impédance mutuelle entre ligne aérienne et câble souterrain sont inadéquates pour les fréquences de plus 10kHz. Nous proposons une méthode hybride combinant les formules approximatives que nous avons nouvellement introduites, celle de Lucca et une méthode numérique utilisant la quadrature. Cette formule hybride donne des erreurs relatives de moins de 1% par rapport à la méthode numérique complète. Le temps requis pour un cas type de 10000 évaluations de l'impédance est de moins de 60 secondes alors qu'il est de plus de 160 secondes pour les autres méthodes numériques. La méthode hybride peut être améliorée en optimisant l'utilisation des formules approximatives et la quadrature Lobatto dans Matlab. La nouvelle formule approximative pour le couplage entre câbles semble être tout aussi performante que celle de Saad pour une fréquence inférieure à 100 kHz.

Comme principales recommandations et retombées de cette recherche, on peut souligner que :

- La bonne performance de la nouvelle formule analytique introduite suggère son utilisation pour l'étude de la CEM dans un même corridor pour les ouvrages à moins de 10m de hauteur et à moins de 3m de profondeur, par exemple, rail vs câbles.
- L'augmentation de la gamme de fréquences pour la synthèse des matrices utilisées dans les modèles de ligne et câbles ouvrirait la possibilité de traiter formellement la CEM entre portions des lignes dans l'étude du régime transitoire.
- Enfin, la bonne connaissance de l'impédance mutuelle, et son incorporation dans les modèles les plus performants, permettrait de fixer d'une manière optimale les distances entre les ouvrages suivant les seuils d'induction permis pour le bon fonctionnement de chacun. Ou, à l'inverse, évaluer le niveau d'induction voulue quand on approche une structure sur la ligne de transmission. Par exemple, dans le cas de la mesure des hautes tensions par couplage inductif ou capacitif.

ABSTRACT

Environmental concerns and the lack of space in overpopulated cities can impose a cluttering of powerlines, telecommunication facilities, railway systems and gas pipelines, or the use of a common right-of-way. Equipments that are brought in close proximity to each other can generate mutually induced currents and voltage. This problem is well known as Electromagnetic Compatibility (EMC), an important aspect in equipment design.

To perform EMC studies in the corridors of power networks, a group of partners associated to the improvement of the EMTP-RV (Electromagnetic Transients Program-Restructured Version), have launched the development of CRINOLINE, an EMTP-RV software toolbox. This new project requires modifications in line and cable parameter calculation modules in the EMTP-RV such as taking into account mutual earth return impedance between two equipments of different types. Such a case is the inductive coupling between an overhead line and an underground cable.

The principal objective of this research is to evaluate the mutual earth return impedance and to analyze its incorporation in line and cable EMTP-RV models for structures of different types.

The mutual earth return impedance derives from the electrical field due to the presence of the ground. By considering the quasi-TEM assumptions (Transverse Electromagnetic) taken by Pollaczek to solve Maxwell's equations for this field, we show that for the configurations usually met, these assumptions are respected. However, for distances beyond the order of a hundred meters, depth about a tens meters or for frequencies of a few MHz, assumptions are not valid any more and the results of the evaluation of Pollaczek's integral are questionable.

By correcting the localization of the roots of Pollaczek's integral function for one of the most recent numerical evaluation methods and by bounding the relative error, we propose a new numerical evaluation method of the Pollaczek's integral. This is validated in comparison with the results of the Quasi-Monte Carlo method without truncation.

The limits of the new numerical method are related to those of Lobatto quadrature in Matlab when the steps required for the absolute tolerance needed are extremely small.
In addition, the CPU time for certain configurations is relatively high. The estimate of error bounds is conservative and lengthens the execution time. The new numerical method that we propose will be a whole tool to establish the limits of precision of closed-form approximations.
By analysing series expansions of the electric field expressions introduced by Pollaczek, we derive two new approximate formulas: one for overhead line and buried cable coupling; and another for the buried cables. Moreover, the latter is deduced from a general observation that impedance between buried cables can be deduced from the expression of the impedance between an overhead and underground elements adding two Bessel functions.
New approximate formulas as those of Lucca, CCITT, Saad and the Uribe method, were compared with the new numerical method. It turns out that for the case overhead-underground, the new approximate formula is more precise than others for frequencies lower than approximately 1 kHz, and for short distances (height < 10m and horizontal distance < 3m). However, all these approximate formulas for mutual earth return impedance between overhead line and buried cable are inadequate for frequencies over 10kHz. We propose a hybrid method combining the approximate formulas we recently introduced with Lucca's formula and Lobatto quadrature. This hybrid formula gives relative errors of less than 1% compared to the complete numerical method. Time costs for a typical case of 10000 evaluations of impedance is less than 60 seconds. This hybrid method may be improved by optimizing the use of the approximate formulas and

Lobatto quadrature in Matlab. The new approximate formula we propose for cables appears to be as precise as Saad's for frequency lower than 100 kHz.

The principal applications of this research and future works can be summarized as following:

- Considering good results of the new analytical formula for overhead and underground coupling, it can be used for EMC study in a common corridor for equipment located at 10m height or less and 3m depth or less, such as the case of railway– cable coupling;
- The increase of the frequency band for the synthesis of the matrices used in the line and cable models would open the possibility of formally treating the EMC between portions of the lines in the transient analysis;
- Lastly, good knowledge of mutual earth return impedance would make it possible to optimize distances between equipment according to the thresholds of induction allowed for correct operation of each. Or, on the contrary, in evaluation of desired induction intensity when one approaches a structure on the transmission lines; as in the case of measuring of high voltages by inductive or capacitive coupling.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE iv
REMERCIEMENTS v
RÉSUMÉ vi
ABSTRACT ix
TABLE DES MATIÈRES xii
LISTE DES TABLEAUX xvi
LISTE DES FIGURES xvii
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS xxii

INTRODUCTION 1

Contexte de développement du projet et objectif principal 1

Défis de l'évaluation de l'impédance mutuelle, objectifs et méthodologie 2

Organisation du mémoire 5

CHAPITRE 1 GÉNÉRALITÉS ET PRINCIPES DE LA MODÉLISATION DES LIGNES DANS EMTP 7

1.1 Rappels sur la notion de ligne de transmission bifilaire simple 7

1.2 Lignes à multiconducteur avec interactions mutuelles et/ou extérieures 9

1.3 Hypothèses de modélisation des impédances et liens avec les champs 12

1.4 Représentation du système des lignes et câbles par les équations de boucles 22

1.5 Applications pour un système avec lignes aériennes et câbles 26

1.6 Changements dans les modèles EMTP-RV : ouvrages des types différents 36

CHAPITRE 2 IMPÉDANCE DE RETOUR PAR LA TERRE.....41

2.1 Développement des intégrales de Pollaczek avec les équations de Maxwell.....41

2.1.2 Champ électromagnétique et expression de l'intégrale de Pollaczek.....44

2.1.3 Expressions des champs dans le système international (S.I.) 49

2.2 Expressions et paramètres pour l'impédance mutuelle de retour par la terre..51

2.3 Nouvelles approximations de l'impédance mutuelle.....54

2.3.1 Développements en série des expressions des champs par Pollaczek en CGS.....54

2.3.2 Expressions des champs et impédances mutuelles approximées en MKSA.....58

2.4 Liens entre la formule de Pollaczek, Carson et Formules de CCITT 60

2.4.1 Reformulation de l'intégrale de Pollaczek.....60

2.4.2 Pollaczek vs CCITT 62

2.4.3 Pollaczek vs Formule de Carson.....62

2.4.4 Pollaczek vs Sunde.....63

2.5 Limitations dues aux hypothèses dans les expressions des impédances.....64

2.6 Valeurs des paramètres pour géométries et conditions d'opération pratiques..66

2.6.1 Valeurs pratiques des paramètres f , ρ_{sol} , h_1 , h_2 , x 66

2.6.2 Variations des paramètres vs hypothèses de modélisation 69

2.7 Conclusion.....78

CHAPITRE 3 ÉVALUATION DE L'IMPÉDANCE MUTUELLE DE RETOUR PAR LA TERRE 80

3.1 Critiques des formules existantes -Revue de la littérature.....81

3.1.1 Formules analytiques approximatives.....81

3.1.2 Méthodes numériques pour évaluer l'impédance mutuelle de retour de la terre 84

3.1.3 Autres méthodes – méthodes numériques électromagnétiques : FEM 93

3.2 Nouvelle méthode numérique : Améliorations à la méthode de [12] 94

3.2.1 Critère de troncature.....94

3.2.2 Localisation des zéros 99

3.2.3 Borne de l'erreur relative et intégration par quadrature.....103

3.2.4 Algorithme de la méthode proposée : synthèse récapitulative.....110

3.3 Méthode d'intégration Quasi-Monte Carlo (QMC) 111

3.3.1 Introduction sur la méthode de Quasi-Monte Carlo.....111

3.3.2 Application de la méthode QMC pour l'impédance mutuelle 119

3.4 Conclusion.....126

CHAPITRE 4 VALIDATION DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE 127

4.1 Validation de la Troncature 127

4.2 Validation de l'effet de la diminution de l'erreur : NM vs QMC.....130

4.3 Limites d'applicabilité de la nouvelle méthode. 133

4.4 Conclusion.....134

CHAPITRE 5 ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE LES MÉTHODES.....136

5.1 Les méthodes analytiques approximatives 136

5.1.1 Nouvelle formule approximative (NM-approx) vs Lucca et CCITT.....136

5.1.2 Formule approximative pour un des conducteurs sur la surface du sol 139

5.1.3 Limites des formules approximatives pour fréquences élevées.....141

5.2 Les méthodes numériques : Nouvelle méthode vs la méthode Uribe 142

5.3 Méthode hybride : Lucca, NM-approx et quadl combinés pour EMTP-RV ...143

5.3.1 Principe et application de la nouvelle méthode hybride 143

5.3.2 Temps CPU pour un balayage en fréquence en évaluant l'impédance. 145

5.4 Conclusion 146

CHAPITRE 6 APPLICATION POUR DEUX CÂBLES SOUTERRAINS 148

6.1 Expression de l'impédance mutuelle avec retour par la terre pour câbles 148

6.2 Nouvelle méthode numérique d'évaluation et formules approximatives 149

6.3 Lien entre formule pour câbles et celle entre ligne et câble 150

6.3.1 Lien entre la formule pour ligne-câble et la formule pour câbles 150

6.3.2 Performance de la nouvelle formule approximative pour câble 153

6.4 Conclusion 156

CONCLUSION 157

A. Contributions du mémoire, limites et contraintes des méthodes proposées 157

B. Recommandations et travaux futurs 159

C. Retombées possibles 160

BIBLIOGRAPHIE 161

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1 Équations de Maxwell en CGS et MKSA **49**

Tableau 2.2 Valeurs des résistivités selon le type du sol. Adapté de [30] et [29]..... **67**

Tableau 2.3 Récapitulatif du respect des hypothèses pour deux éléments souterrains.... **77**

Tableau 2.4 Récapitulatif du respect des hypothèses pour deux éléments aériens. **77**

Tableau 2.5 Récapitulatif du respect des hypothèses pour élément aérien et souterrain . **77**

Tableau 3.1 Formules analytiques approximatives pour fil aérien et câble souterrain.... **82**

Tableau 3.2 Formules analytiques approximatives pour câbles souterrains **83**

LISTE DES FIGURES

Figure 1. 1 Portion d'une ligne de transmission bifilaire. **7**

Figure 1. 2 Modèle pour système à N conducteurs exposées à un champ extérieur ($\vec{E}^{ext}, \vec{H}^{ext}$), adapté de [5] **10**

Figure 1. 3 Illustration de la circulation du courant dans les différents milieux pour les paramètres propres. Adapté de [5] **15**

Figure 1. 4. Illustration de la surface élémentaire entre le conducteur de référence et un des conducteurs exposé au champ externe ($\vec{E}^{ext}, \vec{H}^{ext}$) **20**

Figure 1. 5.Représentation en boucle de type–standard pour une portion dz de la ligne. **23**

Figure 1. 6.Représentation en boucle de type–coaxial pour deux câbles (2 conducteurs)... ..... **24**

Figure 1. 7 Schéma en boucle type–coaxial pour le câble souterrain et une ligne aérienne. **27**

Figure 1. 8 Représentation en boucle : type–coaxial **28**

Figure 1. 9 Détails des tensions (coupe AA), courants et impédances dans le type-coaxial, inspiré de [5] **29**

Figure 1. 10.Rayon interne et externe pour un conducteur : la référence au centre du câble **31**

Figure 2. 1 Configuration typique pour deux éléments couplés (2) : sol et (1) : Air **42**

Figure 2. 2 Configuration pour perturbateur dans le sol **48**

Figure 2. 3 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, pour les résistivités $\rho_{sol} \leq 10\Omega m$ avec : $f = 2MHz$, $\rho_{sol} = [1,100]\Omega m$, $x = 7m$, $h_1 = 0m$ et $h_2 = [0,3]m$ (profondeurs). Avec EXCELL : Excellent, ACCEPT : Acceptable et H.-LIM. : Hors limite **70**

Figure 2. 4 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, pour les pairs avec : $f = [0,2]MHz$, $\rho_{sol} = [1,100]\Omega m$, $x = 10m$, $h_1 = 0m$ et $h_2 = [0,3]m$ **71**

Figure 2. 5 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, autour de la résistivité d'un sol usuel , avec : $f = [0,2.5]MHz$, $\rho_{sol} = [90,110]\Omega m$, $x = 20m$, $h_1 = 0m$ et $h_2 = [0,3]m$ **71**

Figure 2. 6 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de, propagation dans l'air, avec $f = 2.5MHz$, $\rho_{sol} = 100\Omega m$, $x = 80m$, $h_1 = [0,100]m$ et $h_2 = [0,100]m$ **72**

Figure 2. 7 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, pour certaines pairs des distances verticales avec : $f = 2MHz$, $\rho_{sol} = 100\Omega m$, $h_1 = [0,100]m$ et $h_2 = [0,10]m$ **72**

Figure 2. 8 Illustration de la limitation due de l'hypothèse, propagation dans le sol, pour : $f = [0,2.5]MHz$, $h_1 = 70m$ (hauteur), $h_2 = [0,4]m$ (profondeur). (a) : $\rho_{sol} = 10\Omega m$, (b) : $\rho_{sol} = 1000\Omega m$ **73**

Figure 2. 9 Illustration de la limitation due de l'hypothèse, propagation dans le sol, pour : $f = [0,2]MHz$, $h_2 = 2m$ (profondeur), $h_1 = [0,100]m$ (hauteur). (a) $\rho_{sol} = 10\Omega m$, (b) $\rho_{sol} = 100\Omega m$ **74**

Figure 2. 10 Illustration de la limitation due à l'hypothèse $\left[\sqrt{(h_1 - h_2)^2 + x^2}\right]\frac{\sqrt{\omega\mu_{sol}\sigma_{sol}}}{\pi\sqrt{8}} < 1$, propagation dans le sol, pour la profondeur $h_2 \geq 3m$ dans le cas de: $f = [0,2]MHz$, $\rho_{sol} = 10\Omega m$, $h_1 = [0,100]m$ et $h_2 = 3m$ **75**

Figure 2. 11 Illustration de la limitation due à l'hypothèse pour propagation dans le sol, pour : $f = 2.5\,MHz$, $\rho_{sol} = [1,1000]\Omega m$, $h_2 = [0,14]m$ et $h_2 = 80m$ **76**

Figure 2. 12 Illustration de la limitation due à l'hypothèse pour la propagation dans l'air, pour : $f = 1.5\,MHz$, $\rho_{sol} = 100\Omega m$, $h_1 = [0,100]m$ et $h_2 = [0,2]m$ (hauteurs). **76**

Figure 3. 1 Différences de placements des zéros entre l'intégrant $C(u) = A(u) + jB(u)$ et les termes $\sin(\xi \cdot G(u))$ et $\cos(\xi \cdot G(u))$. **89**

Figure 3. 2 Comparaison entre les zéros effectifs et ceux de l'algorithme proposé par Uribe [10] **90**

Figure 3. 3 Non concordance entre les zéros de : [a]: $B(u)$ et $\cos(\xi \cdot G(u))$ et [b]: $A(u)$ et $\sin(-\xi G(u))$ **91**

Figure 3. 4 Erreurs relatives découlant de la mauvaise localisation des zéros pour $\sin(\xi \cdot G(u))$ et $\cos(\xi \cdot G(u))$ en comparaison avec les zéros effectifs de $A(u) + jB(u)$ **92**

Figure 3. 5 Illustration d'une fonction bornant $|I(u)|$: [a]: les facteurs exponentiels et [b]: les fonctions $I(u)$ et $Ib(u) = \exp[-\xi(\zeta + P_1)u]$ **97**

Figure 3. 6 Cartographie des zéros en fonction de ξ et des constantes $k\pi$ pour la partie oscillatoire irrégulière de l'intégrale de Pollaczek **101**

Figure 3. 7 Illustration de fonction qui minimise l'intégrale : $I_{\min}(u)$ **108**

Figure 3. 8 Résultats d'intégration par la méthode Quasi Monte Carlo (QMC) en comparaison avec la nouvelle méthode numérique (NM) : différents nombres des points dans la méthode QMC. **125**

Figure 4. 1 Validation de la troncature avec une erreur de troncature de 1×10^{-10} : comparaison entre les valeurs avec troncature et sans troncature : $Z^{\min} \leq \tilde{Z}^{Tronc} \leq Z^{\max}$ **129**

Figure 4. 2 Validation de la troncature avec une erreur de troncature de 1×10^{-07} : cas d'une estimation conservative des bornes des erreurs pour la méthode direct. **130**

Figure 4. 3 Validation de l'effet du raffinement de l'erreur relative : Concordance entre NM : Nouvelle méthode et QMC (Quasi-monte Carlo) pour petites erreurs relatives **132**

Figure 4. 4 Comparaison des temps d'exécution CPU entre NM (Nouvelle méthode) et QMC (Quasi-monte Carlo) : NM est 10 fois plus rapide pour la même erreur relative. **133**

Figure 5. 1 Bonne performance de la nouvelle formule approximative (NM-approx.) pour ligne et câble, pour les éléments proches, en comparaison aux formules de Lucca et du CCITT : Comparaison des erreurs relatives maximales (partie réelle et imaginaire) en rapport avec la nouvelle méthode numérique (NM) **137**

Figure 5. 2 Mauvaises performances pour formules approximatives : *[a]* : Lucca, quand la distance horizontale entre éléments est négligeable; *[b]* : NM-approx : $x \geq 4m$ et $h_1 \geq 11m$ **138**

Figure 5. 3 Illustration de la bonne performance pour la nouvelle formule approximative NM-approx dans le cas d'un conducteur sur la surface du sol et l'autre enfui à moins de 2.5 m de profondeur. Pour la fréquence $f = 0.1\,MHz$ **140**

Figure 5. 4 Illustration de la limite des formules approximatives pour fréquences élevées. **141**

Figure 5. 5 Performance de la nouvelle méthode numérique à base de quadl en comparaison avec le méthode de Uribe : Même ordre de grandeur des erreurs relatives **142**

Figure 5. 6 Temps CPU réduit pour la nouvelle méthode numérique NM quadl avec troncature en comparaison avec le méthode de Uribe **143**

Figure 5. 7 Performance de la nouvelle méthode Hybride utilisant NM-approx, Lucca et NM-quadl avec troncature **144**

Figure 5. 8 Utilisation de la méthode numérique dans la méthode hybride pour Lucca et NM-approx défaillants. **145**

Figure 5. 9 Comparaison des temps CPU consommé pour l'évaluation de l'impédance avec toutes les méthodes pour un balayage en fréquence de 10Hz à 1MHz : 1K et 10K évaluations **146**

Figure 6. 1 Concordance entre l'impédance entre câbles souterrains (NM) et celle découlant de la relation impédance ligne aérienne et câble souterrain et les fonctions de Bessel. (« Lien aér.-sout. »). **151**

Figure 6. 2 Performance de la nouvelle formule vs formule de Saad : Impédance par unité de longueur. **153**

Figure 6. 3 Performance de la nouvelle formule vs formule de Saad : erreurs relatives en % en comparaison avec la méthode numérique (NM) **154**

Figure 6. 4 Comparaison de nouvelle formule approximative pour câble (NM-câb-approx) et la formule de Saad : contourmap pour les erreurs relatives pour une profondeur de 0 à 1.1m et la fréquence de 10 à 100kHz. Autre profondeur = 1.1m et distance horizontale de 3m. **155**

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

a_i	:	Rayon du conducteur i
Λ_I	:	Matrice diagonale modale des constantes de propagation pour le courant
Λ_V	:	Matrice diagonale modale des constantes de propagation pour la tension
B	:	Induction magnétique
C	:	Capacité par unité de longueur
c		Célérité.
c.a	:	Courant alternatif
CCITT	:	Comité Consultatif International Télégraphique et Téléphonique
CEM	:	Compatibilité Électromagnétique
CP	:	Modèle à paramètres constants (Constants Parameters)
D	:	Courant de déplacement
δ	:	Profondeur de peau
dI	:	Courant shunt sur portion de la ligne
$D^*_N\left(x_0,\cdots x_N\right)$	:	Discrépance à l'origine de la suite déterministe $\left(x_0,\cdots x_N\right)$
dV	:	Chute de tension
dz	:	Élément de longueur dans le sens de la ligne
E		Champ électrique
$E_{ext/int}\left(r_{ext/int}\right)$	:	Champ électrique sur la surface à la position du rayon r extérieur (intérieur)
$E^{ext}_{\parallel,j}$	:	Composante du champ extérieur total, E^{ext}-total, perpendiculaire au conducteur et parallèle à la surface élémentaire entre le conducteur i et j

$E^{Inductif}$	:	Partie inductive du champ électrique (découlant du potentiel vecteur). Elle est produite par le courant du conducteur lui-même dans le cas de l'impédance propre ou par un autre conducteur pour le cas de l'impédance mutuelle. Elle est évaluée à la position (x_i, y_terre, z).
EMC	:	Electromagnetic Compatibility
E_{-+}	:	Champ créé par un conducteur dans l'air : Point d'observation dans le sol
EMTP	:	Electromagnetic Transients Program
EMTP-RV	:	Electromagnetic Transients Program- Restructured Version
$\vec{e}_{\varphi}$	:	Vecteur unitaire selon la tangente à la surface.
E_{++}	:	Champ créé par un conducteur dans l'air : Point d'observation dans l'air.
ε	:	Permittivité
$\mathrm{E}(f)$	:	Espérance mathématique de la fonction f
η	:	Distance normalisée $= \dfrac{x}{h_2}$
f	:	Fréquence en Hz
FD	:	Modèle à dépendance en fréquence (Frequency Dependent)
FDQ	:	Variante du modèle à dépendance en fréquence (Frequency Dependent) pour les câbles
f_i^{Σ}	:	Tension induite sur le conducteur *i*, somme des influences des courants de tous les autres conducteurs *j* à travers Z_{ij}

f_i^{ext}	:	Force électromotrice par unité de longueur induite sur le conducteur i suite au couplage longitudinal avec le champ magnétique extérieur H^{ext}.
f_i^{ext}	:	Force électromotrice par unité de longueur due aux champs extérieurs
f_i^{ext}	:	Force électromotrice par unité de longueur induite sur le conducteur i suite au couplage longitudinal avec le champ électromagnétique extérieur $H_{\perp,i}^{ext}$.
${}^{terre}f_i^{ext}$	:	Force électromotrice injectée suite aux champs extérieurs et la présence de la terre.
G	:	Conductance par unité de longueur
γ	:	Constante de propagation
$H_{\perp,i}^{ext}$	:	Champ électromagnétique extérieur perpendiculaire à la surface
H		Champ magnétique
$H_0^{(1)}(x+iy)$	:	Fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0
H^{ext}	:	Champ magnétique extérieur.
$\vec{H}_i^{ext}(x,y,z)$	:	Champ magnétique extérieur créant le flux extérieur entre le conducteur i et celui supposé être la référence de tension (le retour lointain par la terre).
h_m	:	Profondeur moyenne $= \dfrac{h_1+h_2}{2}$
H_φ	:	Composante tangentielle du champ selon $\vec{e}_\varphi$
H	:	Matrice de propagation
$\vec{H}$	:	Vecteur champ magnétique
$H_{x,j}(x_i,y,z)$	:	Champ magnétique selon l'axe x, horizontal, produit par le conducteur j
I	:	Courant

I^{+}	:	Onde de courant de propagation positive
$I_0(x)$	:	Fonction de Bessel de x de premier espèce et d'ordre zéro
$I_1(x)$	:	Fonction de Bessel de x de premier espèce d'ordre un
$I_{Am1-Terre}$	:	Courant entre l'âme du conducteur 1 et la terre
$I_{ext/int}$	:	Courant du conducteur retournant par l'extérieur (intérieur) du conducteur.
$\boldsymbol{I}$	:	Matrice des courants
$\boldsymbol{I}_{coax}$	:	Matrice des courants pour une analyse de type coaxial
$\boldsymbol{I}_{sta}$	:	Matrice des courants pour une analyse de type standard
J_i^{Σ}	:	Courant shunt induit sur le conducteur i, somme de l'influence des tensions des tous les autres conducteurs j à travers Y_{ij}
J_i^{ext}	:	Courant par l'unité de longueur induit sur le conducteur i suite au couplage transversal avec le champ électromagnétique extérieur.
J_i^{ext}	:	Courant shunt dû aux champs extérieurs
J_i^{ext}	:	Courant par l'unité de longueur induit sur le conducteur i suite au couplage transversal avec le champ électromagnétique extérieur $E_{\parallel,j}^{ext}$.
${}^{terre}J_i^{ext}$	:	Courant injecté suite aux champs extérieurs et dû à la présence de la terre.
$K_0(x)$	:	Fonction de Bessel de x de deuxième espèce d'ordre zéro
$K_1(x)$	:	Fonction de Bessel de x de deuxième espèce d'ordre un.
L	:	Inductance par unité de longueur

Lien aér.-sout.	:	Méthode numérique pour câbles utilisant la relation entre lignes aériennes et câbles
L_{ij}	:	Inductance due au diélectrique entre les conducteurs i et j
ℓ^{ref-i}	:	Distance délimitant la surface élémentaire rectangulaire $\ell^{ref-i} \times dz$ entre l'élément du conducteur i et la portion du conducteur de retour sur une longueur dz
m	:	$= \sqrt{\omega\mu_0 / \rho}$
μ	:	Perméabilité
N	:	Nombre des sous intervalles pour l'intégration
NM	:	Nouvelle méthode d'évaluation numérique
NM-approx	:	Nouvelle formule approximative
NM-câb.approx	:	Nouvelle formule approximative pour câbles
NM-gen	:	Nouvelle méthode numérique complète
NM-Hybride	:	Méthode hybride combinant la nouvelle formule approximative, celle de Lucca et NM-quadl
NM-quadl	:	nouvelle méthode numérique utilisant *quadl*
QMC	:	Quasi Monte Carlo
quadl	:	Fonction quadrature Lobatto de Matlab
quasi-TEM	:	Quasi-Transverse Électromagnétique)
R	:	Résistance par unité de longueur
$\vec{r}$	:	Vecteur position d'où on mesure le champ
ρ		Résistivité
$\vec{r}'$	:	Vecteur position d'où le champ est produit
S_{air}	:	Surface homogène composé uniquement d'air entre deux milieux
$S_b = x_0, \cdots, x_N$	:	Suite de Van der Corput $S_b = x_0, \cdots, x_N$ de base b :

σ	:	Conductivité (S/m)
$S_{isolant}$	:	Surface homogène composée uniquement d'un seul type d'isolant.
$\boldsymbol{T}_I$	:	Matrice de transformation modale pour le courant
$\boldsymbol{TI}_s^c$	:	Matrice de transformation pour les courants d'une boucle de type coaxial à une boucle de type standard
$\boldsymbol{TU}_s^c$	:	Matrice de transformation pour les tensions d'une boucle coaxiale à une boucle standard
$\boldsymbol{T}_V$	:	Matrice de transformation modale pour la tension
$U_{Am1-Terre}$	:	Tension entre l'âme du conducteur 1 et la terre
$U_{Ar1-Terre}$	:	Tension entre l'armature du conducteur 1 et la terre
$\boldsymbol{U}_{coax}$	:	Matrice des tensions pour une analyse de type coaxial
$\boldsymbol{U}_{sta}$	:	Matrice des tensions pour une analyse de type standard
$u_{\max}$	:	Variable d'intégration pour la troncature
V	:	Tension
$\tilde{V}(f)$	:	Valeur approchée de la variation de la fonction $V(f)$:
V^+	:	Onde de Tension de propagation positive
$V(f)$	:	Variation totale de la fonction f
$\boldsymbol{V}$	:	Matrice des tensions
$V_V(f)$	:	Variation totale de $\tilde{V}(f)$
WB	:	Modèle à large Bande (Wide Band)
x	:	$=\lvert x_2 - x_1 \rvert$
x_i	:	Abscisse de l'élément du conducteur par unité de longueur i
ξ	:	$= m \times h_2$

X_{ij}	:	Réactance du diélectrique entre les conducteurs tubulaires i et j, dont l'épaisseur est la différence entre les rayons qui la délimitent : $r_i^{ext} - r_j^{int}$ (où $r_i^{ext} \leq r_j^{int}$)
Y	:	Admittance par unité de longueur
$y_1 \geq 0$	:	Hauteur dans l'air (équivalent à h_1)
$y_2 \leq 0$	:	Distance, profondeur dans le sol (équivalent à h_2 positif)
y_i	:	Ordonnée de la surface extérieure du conducteur i
y_rDiel	:	Ordonnée de la surface extérieure du diélectrique
y_terre	:	Ordonnée (la hauteur) de la surface en dessous du conducteur et qui se trouve dans le sol. Pour un conducteur aérien et un conducteur nu sur l'interface sol-air, on a $y_terre = 0$.
$\boldsymbol{Y}_{coax}$	:	Matrice d'admittances l'analyse de type coaxial.
y_i	:	Ordonnée de l'élément du conducteur par unité de longueur i
Y_{ii} :	:	Admittance propre par unité de longueur pour le conducteur i.
Y_{ij}	:	Admittance mutuelle par unité de longueur entre les conducteurs i et j
$\hat{\boldsymbol{Y}}$	:	Matrice diagonale d'admittances modales
$\boldsymbol{Y}_{sta}$	:	Matrice d'admittance pour l'analyse type standard
Z	:	Impédance par unité de longueur
z	:	Position selon la longueur de la ligne de transmission
Z_0	:	Impédance caractéristique
$\hat{Z}_C$	:	Impédance caractéristique modale
$\boldsymbol{Z}_{coax}$	:	Matrice d'impédances pour de type coaxial

$Z_{diélectriue_ij}$: Impédance due à l'énergie emmagasinée dans le diélectrique entre les conducteurs *i* et *j*

ζ : $= h_1 / h_2$, hauteur normalisée

Z_{ii} : Impédance propre par unité de longueur pour le conducteur *i*

Z_{ij} : Impédance mutuelle par unité de longueur entre les conducteurs *i* et *j*.

$Z_{i-j}^{ext/int} = f\left(I_j\left(ext/int\right)_i\right)$: Impédance de surface du conducteur *i* (*j*) rencontrée par le courant venant du conducteur *j* (*i*) pour les configurations où il y a chevauchement des courants entre les deux boucles. Cette impédance dépend de la localisation du courant. À l'intérieur ou à l'extérieur. Aucun des conducteurs n'étant le retour par la terre.

$Z_{isolant}$: Impédance découlant de l'énergie électromagnétique emmagasinée dans l'isolant.

$\hat{\boldsymbol{Z}}$: Matrice diagonale d'impédances modales

$Z_k^{ext-int}$: Impédance mutuelle entre les boucles *k* et *k-1*

$Z_k^{int-ext}$: Impédance mutuelle entre les boucles *k* et *k+1*

$\boldsymbol{Z}_{sta}$: Matrice d'impédances pour l'analyse de type standard

$\boldsymbol{Z}_{sta}$: Matrice d'impédances pour l'analyse type standard

$Z_{surface}$: Impédance découlant de la circulation du champ sur la surface du conducteur.

$Z_{surface}^{(ext/int)_I-(ext/int)_r}$: Impédance découlant de la circulation du champ sur la surface du conducteur. Le sens du courant et le type de surface défini par l'exposant.

Z_{terre_ij} : Impédance mutuelle de retour par la terre due au champ électrique dans la position où est localisé le conducteur *i*

suite à la présence de la terre.

$\tilde{\tilde{Z}}$: Évaluation numérique de $\tilde{Z}$

$\tilde{Z}$: Évaluation de l'impédance Z tronquée

INTRODUCTION

Contexte de développement du projet et objectif principal

Les considérations environnementales et le manque d'espace dans les villes surpeuplées peuvent imposer un rapprochement des lignes électriques, des ouvrages de télécommunication, des rails de train et des pipelines de gaz, ou imposer l'utilisation d'un même corridor de transport. Les ouvrages sont alors rapprochés tel qu'il peut apparaître des tensions et courants induits perturbateurs dus au couplage inductif et capacitif entre les ouvrages. La problématique que ces perturbations posent entre ouvrages, définie comme Compatibilité Électromagnétique (CEM), est un aspect important de la conception des ouvrages depuis bien des années.

Pour analyser et étudier les effets de la CEM dans un réseau électrique, Électricité de France (EDF), Hydro-Québec et d'autres partenaires associés au développement de EMTP-RV (Electromagnetic Transients Program- Restructured Version) [1] [2], ont initié le projet CRINOLINE. Ce dernier vise à créer une boîte à outils utilisable dans EMTP-RV et dédiée à l'évaluation des courants et tensions induits sur les lignes électriques, les lignes de télécommunication, les rails de train, les pipelines de gaz et d'autres structures métalliques à proximité des lignes et câbles sous tension [3].

Le choix d'analyser la CEM dans EMTP-RV, à travers CRINOLINE, est motivé par le fait que les tensions et courants induits varient avec les conditions d'opération dues aux perturbations sur la ligne qui en est la source. Les cas les plus sévères de ces inductions surgissent pendant les phénomènes transitoires : défaut de court-circuit, la foudre ou les manœuvres des interrupteurs. Il faut donc en plus d'assurer des seuils acceptables pendant le fonctionnement normal, s'assurer surtout d'être en deçà des seuils limites de ces inductions pendant les phénomènes transitoires. Comme ces derniers sont justement

adéquatement analysés dans les programmes de type EMTP [4], on prendrait en compte les pires cas de la CEM dus aux transitoires électromagnétiques ainsi que les cas pour les situations normales d'opération.

Comme finalité, ces nouveaux outils de CRINOLINE serviront aux concepteurs d'ouvrages et aux analystes d'assurer les seuils requis des perturbations sur les ouvrages en se conformant aux recommandations et directives de différents organismes tels la CEI, IEEE, CIGRÉ et le CCITT de UIT (Union Internationale des Télécommunications). Ce dernier donne plusieurs directives spécifiquement liées à la CEM et fournit beaucoup de détails sur les mécanismes de ces inductions mutuelles entre conducteurs [5].

Ce nouveau projet CRINOLINE exige des modifications dans les modules de calcul des paramètres des câbles et des lignes dans EMTP-RV. Une des principales modifications est la prise en compte de l'impédance mutuelle entre une ligne aérienne et un câble souterrain, ou entre ouvrages de types différents. Or, l'évaluation de cette impédance mutuelle pose différents défis quant à sa précision, sa robustesse, son temps de calcul et, de plus, sa validité doit être garantie pour toutes les distances pratiquement rencontrées.
C'est dans ce contexte que ce travail de maîtrise a été mené. Son objectif principal est d'évaluer cette impédance mutuelle de retour par la terre et analyser son incorporation dans les modèles des lignes et câbles dans EMTP-RV pour le cas des ouvrages de différents types.

Défis de l'évaluation de l'impédance mutuelle, objectifs et méthodologie

Les défis posés par la modification du module de calcul des paramètres des lignes et câbles pour accommoder EMTP-RV à CRINOLINE sont de deux ordres. Le premier est au niveau informatique : passage de FORTRAN à MATLAB [6]. Et le deuxième est lié au calcul des paramètres des lignes et des câbles, spécialement l'impédance mutuelle de

retour par la terre entre les éléments aériens et souterrains. C'est ce deuxième aspect qui sera traité dans ce travail. Plus spécifiquement, il faudra :

- Analyser l'effet de l'ajout du couplage inductif entre lignes et câbles (de type «pipe» ou «single core») dans les matrices des paramètres modélisant la ligne de transmission. Ceci en tenant compte de l'analyse par boucle adoptée dans la version antérieure de EMTP [4].
- Fixer approximativement les limites des distances, de la résistivité du sol et la fréquence en deçà desquelles les hypothèses de formulation des expressions d'impédance mutuelle sont respectées. Ceci pour s' assurer de la validité du modèle du champ électromagnétique dans le sol en accord avec les hypothèses de Pollaczek [7] ou d'autres formulations par le CCITT [5] ou Carson [8] [9].
- Enfin, la validité du modèle du sol assuré, nous allons proposer une méthode efficiente d'évaluation de l'impédance mutuelle de retour par la terre. En effet, pour les configurations de deux éléments souterrains ou de type mixte, aérien–souterrain, et pour les fréquences de plus de 100 kilohertz, les méthodes d'évaluation de l'impédance mutuelle de retour par la terre comportent des limites quant à leur précision [10]. Ce n'est pas le cas pour les autres types de couplage, capacitif et conductif intervenant dans la CEM. Car ces derniers sont adéquatement évalués [5] [11]. Nous nous concentrerons sur l'impédance mutuelle de retour par la terre.

L'expression intégrale de cette dernière, découlant de l'expression du champ électrique établie par Pollaczek [7], est infinie et très irrégulièrement oscillatoire et, par ailleurs, elle n'a pas, à ce jour, une forme analytique connue [12], [13]. Son évaluation numérique pose des difficultés à minimiser l'erreur tout en assurant un temps de calcul réduit et une bonne robustesse dans la méthode employée. Il a ainsi été proposé certaines approximations analytiques de cette impédance mutuelle pour différentes configurations. Mais celles-ci comportent des limites quant au domaine d'applicabilité : la distance horizontale inférieure à 5 m et la fréquence inférieure à environ 100 kHz [12].

Par ailleurs, très récemment (2002 et 2005), un algorithme pour l'évaluation numérique de l'intégrale de Pollaczek pour les câbles souterrains a été développé dans [10] et pour une ligne et un câble dans [12]. Cette méthode a le mérite de quantifier approximativement l'erreur des approximations faites précédemment dans [4], [14], [13] et [5].

Cependant, certaines lacunes de cette récente méthode dans [12], [15] et [10], telles la mauvaise localisation des zéros de la fonction intégrante de Pollaczek, la non adaptabilité, le temps de calcul élevé et la non estimation des bornes des erreurs font non seulement que l'on ne peut l'utiliser en simulation mais qu'en plus, il subsiste un doute de son utilisation comme méthode de référence pour valider les approximations faites.

Pour faire progresser la connaissance sur le sujet, nous nous donnons l'objectif d'établir une méthode d'évaluation de l'impédance mutuelle modélisant le couplage inductif pour toutes les configurations pratiques avec contrôle de la borne de l'erreur (intervalle de confiance). De plus nous allons identifier la meilleure méthode utilisable en simulation par ordinateur à incorporer aux modèles des lignes et des câbles dans le logiciel EMTP-RV. À terme, on augmenterait la gamme des fréquences pour la synthèse des matrices utilisées dans le modèle des lignes et des câbles.

Pour répondre à la problématique que ces défis posent et rencontrer les objectifs de la recherche, nous avons analysé et étudié la définition des impédances, qui sont les paramètres pour la modélisation des lignes, en établissant le lien entre ceux-ci avec les champs électromagnétiques. L'étude de l'établissement des expressions des champs, et donc de l'impédance mutuelle, a été menée pour identifier les termes impliqués, leurs variations et les limitations qui s'y rattachent. Ce qui a permis, par ailleurs, de proposer des nouvelles approximations de l'impédance mutuelle. Ensuite, l'état de l'art a été effectué pour identifier la meilleure méthode utilisable en simulation. Les lacunes dans les méthodes existantes ont été identifiées et levées. De ceci, nous avons proposé une méthode numérique plus efficiente, et une méthode additionnelle, Quasi-Monte Carlo, pour la validation. Finalement, la validation de la méthode numérique proposée a été

menée, suivie par l'analyse des performances à partir de laquelle nous avons proposé une méthode hybride et des approximations utilisables pour la simulation.

Organisation du mémoire

Ce mémoire comporte outre la présente introduction et la conclusion finale, six chapitres se terminant chacun par un bref résumé des éléments importants.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions fondamentales de la modélisation des lignes de transmission bifilaires et à multiconducteurs. Nous soulignons les défis à surmonter pour les différents modèles des lignes dans EMTP-RV pour incorporer les paramètres du couplage inductif.

Dans le chapitre deux, nous analysons l'impédance mutuelle de retour par la terre. Sa dérivation de la résolution des équations de Maxwell pour le champ électrique. À partir des hypothèses de cette formulation faite par Pollaczek, et identiques à celle du CCITT [5], nous établissons les valeurs limites des paramètres respectant ses hypothèses. Nous y analysons le développement en série des expressions des champs pour déduire des nouvelles formules approximatives. Et nous terminons par comparer les formules de Carson, Sunde et celles du CCITT par rapport à celle de Pollaczek.

Dans le chapitre trois, nous passons en revue les différentes techniques utilisées pour l'évaluation de l'impédance mutuelle de retour par la terre. Nous montrons les limites et lacunes des méthodes existantes. Nous y établissons une méthode efficiente pour évaluer l'intégrale de Pollaczek de l'impédance mutuelle de retour par la terre. Et en prévision de sa validation nous appliquons une méthode d'intégration Quasi-Monte Carlo (QMC). Nous y développons une procédure pour la détermination de l'intervalle de confiance en fonction du nombre d'échantillons utilisé dans la méthode QMC.

Dans le chapitre quatre, nous validons la troncature et l'accroissement de la précision de la nouvelle méthode en comparaison avec une méthode pour laquelle il n'y a pas de troncature (avec changement de variable) et en comparaison avec la méthode Quasi-Monte Carlo. Nous identifions aussi les limites de la nouvelle méthode et les contraintes qui y sont imposées.

Dans le chapitre cinq, nous comparons les différentes formules approximatives pour l'impédance mutuelle de retour par la terre pour une ligne aérienne et un câble souterrain. Une nouvelle formule approximative que nous proposons est comparée à la formule de Lucca et à celle de CCITT. Sur base des performances de chacune des méthodes nous y formulons une nouvelle méthode hybride dont la performance en précision et en temps sont évaluées pour qu'elle soit incorporée dans un logiciel de simulation.

Dans le dernier chapitre, le sixième, nous avons appliqué la méthode d'évaluation numérique du couplage entre ligne aérienne et câble souterrain au cas du couplage entre deux câbles souterrains. Nous y montrons le lien, comme préconisé par Pollaczek avec les champs électriques, entre l'impédance mutuelle de retour par la terre pour câbles souterrains et celle entre une ligne à la surface du sol et un câble souterrain. Nous analysons une nouvelle formule pour câble basée sur cette dernière. Nous indiquons une possibilité de déduire dorénavant les impédances entre câbles de toutes les formules efficientes pour câble aérien et souterrain.

Enfin, en conclusion, nous évoquons les contributions de cette recherche à l'avancement des connaissances sur le sujet, nous notons les différentes limites et contraintes des méthodes proposées. Et pour terminer, les retombées possibles et les travaux futurs sont annoncés

CHAPITRE 1 GÉNÉRALITÉS ET PRINCIPES DE LA MODÉLISATION DES LIGNES DANS EMTP

1.1 Rappels sur la notion de ligne de transmission bifilaire simple

Une ligne de transmission peut être représentée en considérant la chute de tension dV et le courant shunt dI à chaque unité incrémentale de longueur de la ligne dz ; et en utilisant les concepts d'analyse de circuit : La résistance (R), l'inductance (L), la capacité (C), et la conductance (G) ;

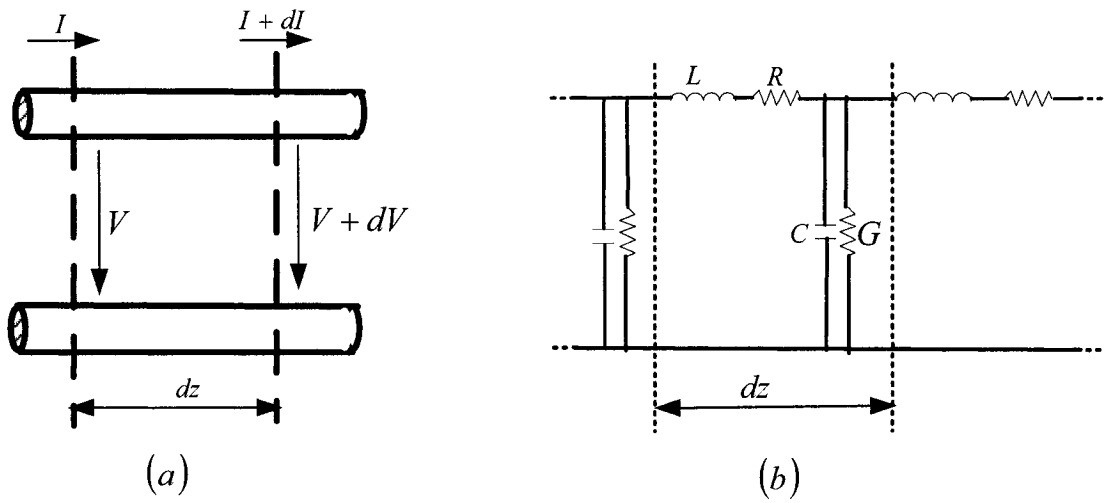


Figure 1. 1 Portion d'une ligne de transmission bifilaire.

En effet, de part la définition de l'impédance par unité de longueur, notée Z (à la place de Z' usuellement rencontré), dans la théorie des circuits, liant la chute de tension et le courant, on a :

$$dV = -IZdz \tag{1.1}$$

Et par ailleurs, avec l'admittance par unité de longueur Y, le courant shunt et la tension sont liées :

$$dI = -YVdz \tag{1.2}$$

Le signe négatif est introduit comme une anticipation de la diminution des quantités I et V.

Pour une ligne à deux conducteurs (aller et retour), tel que montré à la Figure 1.1, il faut remarquer qu'il n'y a pas de couplage avec aucun autre élément. Considérant ce cas, et en admettant que le courant circule dans les plans transversaux à l'axe z, le long de la ligne ; on a, en divisant (1.1) et (1.2) par dz, les équations de la ligne de transmission pour le courant alternatif (c.a) :

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dz} = -ZI \\ \dfrac{dI}{dz} = -YV \end{cases} \tag{1.3}$$

Les manipulations de ces deux équations nous donnent une deuxième formulation compatible avec la théorie de propagation des ondes [16], page 61.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2V}{dz^2} - ZYV = 0 \\ \dfrac{d^2I}{dz^2} - ZYI = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

En (1.4) on a les équations d'Helmholtz à une dimension dont la solution générale est une somme de deux ondes, une se propageant dans le sens positif (selon $+z$) et une autre dans le sens négatif (selon $-z$), pour le courant et pour la tension.

La constante de propagation γ, l'onde de propagation positive (V^+ ou I^+) et l'impédance caractéristique Z_0 de la ligne de transmission sont alors définies respectivement comme :

$$\gamma = \sqrt{ZY} \tag{1.5}$$

$$\begin{cases} V^+ = V_0 \exp(-\gamma z) \\ I^+ = I_0 \exp(-\gamma z) \end{cases} \tag{1.6}$$

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \tag{1.7}$$

L'impédance et l'admittance sont en fonction de R, L, C, G. Et ces derniers sont en général des fonctions de la fréquence :

$$\begin{cases} Z = R + jL\omega \\ Y = G + jC\omega \end{cases} \tag{1.8}$$

Où $R = f(\omega)$, $L = f(\omega)$, $C = f(\omega)$ et $G = f(\omega)$.

Avec les paramètres ci haut définis, l'analyse de la ligne dans les conditions de régime permanent, du transfert de puissance, etc. peut être menée. On se rappelle qu'on a considéré une seule paire de conducteurs (aller et retour) ou encore un conducteur (une phase) avec son retour par la terre.

S'il n'y a aucun couplage, un système multiconducteur peut aussi être analysé par les équations ci haut. Les impédances et admittances, etc., sont, dans ce cas, des matrices diagonales, dont les éléments sont normalement dépendants de la fréquence.

Pour le système couplé, les matrices ne sont plus diagonales. La définition des paramètres γ, Z_0, etc., est plus complexe. Dans le paragraphe qui suit nous généralisons les équations de transmission pour deux systèmes à celui à multiconducteur où il y a des interactions mutuelles entre conducteurs.

1.2 Lignes à multiconducteur avec interactions mutuelles et/ou extérieures

Le cas de la ligne bifilaire traité ci haut n'est pas réaliste car pour un réseau électrique en courant alternatif il y a naturellement au moins 3 conducteurs de phase et parfois plus d'une ligne par corridor (et parfois d'autres ouvrages : pipelines en métal, lignes de télécommunications, etc.). Du coup, il faut tenir compte des interactions entre les conducteurs de chacune des phases (ou l'ouvrage modélisé) et/ou entre ceux d'une même phase. Par ailleurs, un cas idéal est de considérer l'exposition de la ligne à un champ électromagnétique extérieur, par exemple, généré par la foudre.

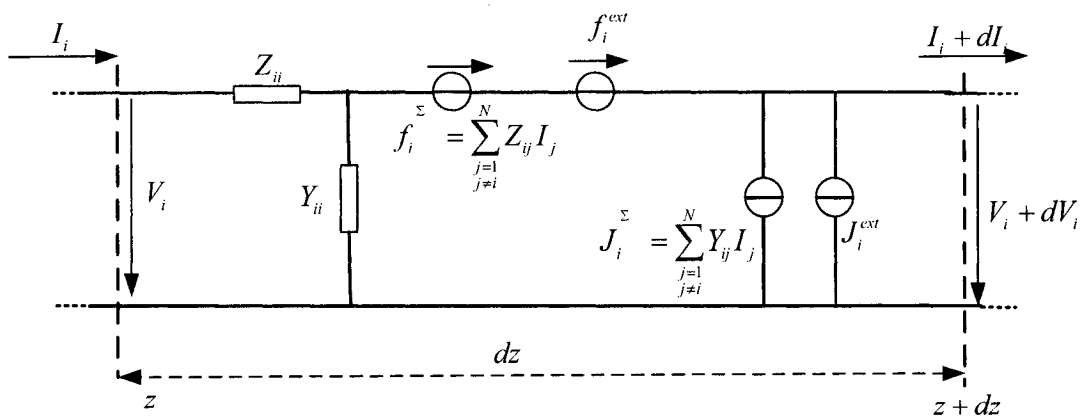


Figure 1. 2 Modèle pour système à *N* conducteurs exposées à un champ extérieur ($\vec{E}^{ext}, \vec{H}^{ext}$), adapté de [5]

Pour ce cas idéal, chaque conducteur *i* du système peut être représenté par le schéma équivalent de la Figure 1.2. En considérant que le retour commun des tous les conducteurs est la terre, les équations de transmission du courant et de la tension, homologues à (1.3), sont alors, voir page 80, 69 et 72 dans [5] :

$$\begin{cases} -\dfrac{dV_i}{dz} = Z_{ii} I_i - f_i^{\Sigma} - f_i^{ext} = Z_{ii} I_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} Z_{ij} I_j - f_i^{ext} \\ -\dfrac{dI_i}{dz} = Y_{ii} V_i - J_i^{\Sigma} - J_i^{ext} = Y_{ii} V_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} Y_{ij} V_j - J_i^{ext} \end{cases}, \tag{1.9}$$

Et où on a défini :

- Z_{ii}, Y_{ii} : impédance et admittance propres par unité de longueur pour le conducteur *i*.
- f_i^{Σ} : tension induite sur le conducteur *i*, somme de l'influence des courants des tous les autres conducteurs *j* à travers Z_{ij}.
- J_i^{Σ} : courant shunt induit sur le conducteur *i*, somme de l'influence des tensions des tous les autres conducteurs *j* à travers Y_{ij}.

- Z_{ij}, Y_{ij} : impédance et admittance mutuelles par unité de longueur entre les conducteurs i et j.
- f_i^{ext} : force électromotrice (tension) par unité de longueur induite sur le conducteur i suite au couplage longitudinal avec le champ magnétique extérieur H^{ext}.
- J_i^{ext} : courant par l'unité de longueur induit sur le conducteur i suite au couplage transversal avec le champ électromagnétique extérieur.

Les expressions de ces différents paramètres seront présentées dans la sous-section qui suit.

Par ailleurs, on pourrait toujours modéliser le champ extérieur indépendamment des lignes en considérant qu'ils sont localisés (sur les pylônes par exemple). De plus, pour la majorité des cas, en fonctionnent normal, les champs extérieurs sont négligeables et quasiment inexistants, à toute fin pratique. Par champ extérieur, on entend ici le champ des autres systèmes non liés aux lignes mais à proximité de celles-ci. Leur valeur est faible par rapport au champ d'un des conducteurs du corridor porté à plusieurs milliers de volts. En les omettant dans (1.9), on a les équations matricielles de la même forme que (1.3) :

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{V}}{dz} = -\boldsymbol{ZI} \\ \dfrac{d\boldsymbol{I}}{dz} = -\boldsymbol{YV} \end{cases}, \tag{1.10}$$

Après combinaison et transformation, comme pour (1.4), on a :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\boldsymbol{V}}{dz^2} - \boldsymbol{ZYV} = 0 \\ \dfrac{d^2\boldsymbol{I}}{dz^2} - \boldsymbol{ZYI} = 0 \end{cases}. \tag{1.11}$$

Les différences d'approche dans le traitement des matrices $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ et $\boldsymbol{ZY}$, quant à leurs transformations (modale, sous forme de séquence, etc.) et simplifications, ont mené à la variété de modèles de lignes de transmissions dans EMTP : Modèle Π nominal, ligne

avec paramètres constants (CP : Constants Parameters), ligne avec dépendance en fréquence (FD : Frequency Dependent), ligne (valable pour câble) à large bande (Wide Band : WB) et d'autres variantes.
Une des tâches importantes de la modélisation des lignes de transmission sera donc, avant tout, d'évaluer les paramètres des matrices $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$. Pour illustrer la manière générale des les évaluer, nous rappelons, dans la sous-section qui suit, leur dérivation à partir du champ électromagnétique dû à un conducteur seul, entre conducteurs et celui extérieur aux conducteurs (foudre ou autre).

1.3 Hypothèses de modélisation des impédances et liens avec les champs

Nous avons représenté un système multiconducteur sous forme de schéma équivalent en modélisant les interactions mutuelles entre chacun des conducteurs. Ces influences mutuelles se font par la propagation des champs électromagnétiques au travers les différents milieux entre conducteurs (l'air, les isolants et la terre). Mais pour rester cohérent avec le type modélisation EMTP, nous devons trouver un équivalent de l'influence des champs électromagnétiques en terme d'impédances, admittances, et la source des champs induits (courant et tension). Ci-dessous le lien entre les paramètres de la matrice et les champs électromagnétiques des conducteurs $\boldsymbol{Z}$ (pour $\boldsymbol{Y}$ on peut consulter [5]). Il faut noter que même pour le cas d'un champ extérieur, une forme équivalente représentant la force électromotrice induite et courant shunt induit, dus aux champs extérieurs, est possible, mais bien ardu [5]. Nous n'y ferons pas plus état dans le cadre de ce travail. Mais mentionnons qu'il s'apparente aussi bien à la méthode de RUSCK appliquée dans EMTP pour la simulation de la foudre et rapportée dans [17] qu'à celui de AGRAWAL [18].

À ce stade, nous nous concentrons sur les lignes électriques et ouvrages habituellement rencontrés en pratique. Ceci pour introduire certaines simplifications et hypothèses. Ainsi, nous considérons dans cette sous-section et pour la suite, que :

i. Le retour commun du courant de tous les conducteurs et ouvrages est la terre ;

ii. Le conducteur exposé au champ induit des autres (la victime) n'influence pas la source ;

iii. Par hypothèse, les lignes sont de longueur infinie et uniforme. Et donc, le modèle n'est pas précis quant aux influences réelles aux bouts de la ligne. Des analyses et études de distribution de champ seraient donc requises pour des études spécifiques aux bouts de ligne ;

iv. Suite à l'hypothèse **iii**, il n'y a pas de charge ou discontinuité sur la ligne. Ces dernières seront placées au début et en fin de ligne ;

v. Au niveau du conducteur de référence des tensions et au-delà de celle-ci, tous les champs électromagnétiques sont négligeables (y compris celui dû aux sources extérieures). Cette référence est considérée comme le retour lointain par la terre. Il se trouve virtuellement à plusieurs profondeurs de peau δ («skin depth», en anglais). Cette dernière (δ) est la largeur (profondeur) d'où se concentrent les filaments de courant dans le conducteur :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{f \pi \mu \sigma}}, \tag{1.12}$$

Où f, σ et μ sont respectivement la fréquence du signal, la conductivité et la perméabilité du sol.

vi. On considère que les champs transversaux sont statiques (ne varient pas dans le temps dans le plan (x, y)). Ceci, grâce aux hypothèses quasi statiques et l'existence du seul mode quasi-transverse électromagnétique (quasi-TEM) dans les milieux diélectriques (air et isolant). Pour cela, on doit satisfaire pour les points de vecteurs positions $\vec{r}$ et $\vec{r}'$:

$$\left|\vec{r} - \vec{r}'\right| \ll \left(f\sqrt{\mu\varepsilon}\right)^{-1}, \tag{1.13}$$

Une condition similaire donne pour les milieux conducteurs,

$$\left|\vec{r} - \vec{r}'\right| \ll 2\pi\delta; \tag{1.14}$$

Le terme $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$ est la distance entre deux points source et victime ou deux positions successives selon la propagation de l'onde du champ. Typiquement, on suggère dans [5], page 33 et 34, de prendre ce terme en fonction des dimensions transversales de la structure sous étude (rayon des conducteurs, épaisseur de l'isolant, profondeur d'un conducteur ou distance entre deux conducteurs enfouis).

vii. On admet que même si la condition (1.14) n'est pas respectée dans certaines régions éloignées dans le sol on fait quand même l'approximation que les autres modes (autre que quasi-TEM) sont négligeables. Ceci introduit une limite du modèle quand les distances sont de même ordre de grandeur que la profondeur de peau δ. Et enfin ;

viii. Tous les matériaux (ou milieux) ont des propriétés linéaires et homogènes, et que nous pouvons appliquer le principe de la superposition en traitant les effets de chaque source de champ séparément.

Tenant compte de ces hypothèses, la configuration d'un conducteur avec retour par la terre est présentée dans la Figure 1.3 ci-dessous.

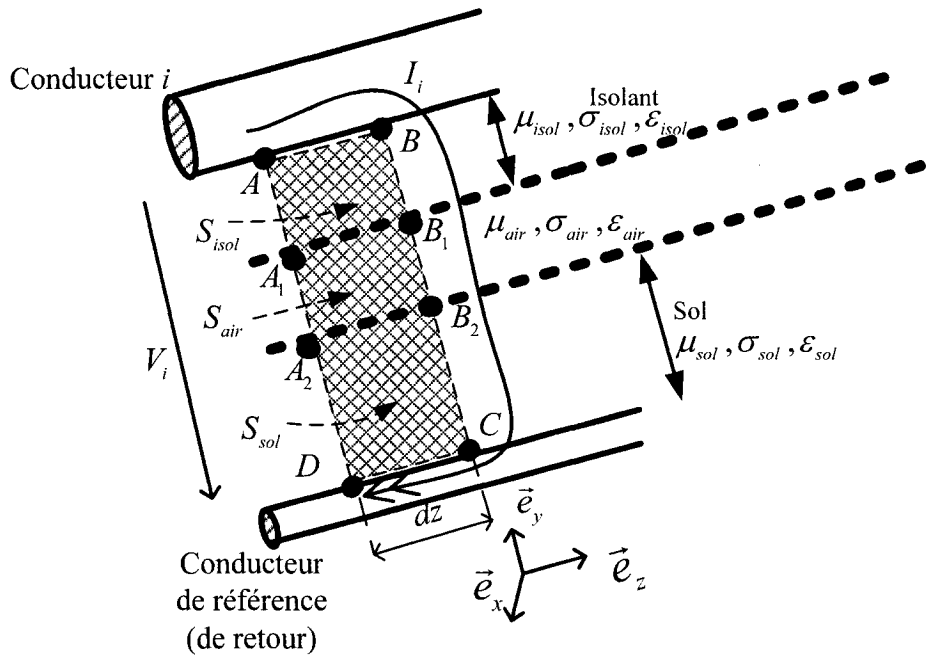


Figure 1. 3 Illustration de la circulation du courant dans les différents milieux pour les paramètres propres. Adapté de [5]

En appliquant sur cette portion de la ligne la première équation de Maxwell,

$$\mathbf{rot}\,\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}\,, \tag{1.15}$$

On a pour la surface $ABCDA$:

$$\int_{S_{ABCDA}} \mathbf{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S}_{ABCDA} = \int_{S_{ABCDA}} -j\omega\mu\vec{H}\cdot d\vec{S}_{ABCDA}\,, \tag{1.16}$$

En appliquant le théorème de Stokes sur (1.16) et en considérant le flux total $\underline{\phi}^{total}(z)$ produit par le champ $\vec{H}$ dans chacune des surfaces S_{sol}, S_{air} et $S_{isolant}$, on a [5]:

$$\oint_{ABCDA} \vec{E}\cdot d\vec{l}_{ABCDA} = -j\omega\left[\underline{\phi}^{sol}(z) + \underline{\phi}^{air}(z) + \underline{\phi}^{isolant}(z)\right] \tag{1.17}$$

Le terme de gauche dans (1.17) nous donne les potentiels sur la ligne $ABCDA$. On en déduit aisément les différences de potentiel en considérant la référence comme retour lointain par la terre (CD) et l'impédance de surface sur AB. En liant le terme de droite aux différences de potentiels et en considérant la tension V_i de la boucle, on exprime les

champs électromagnétiques, créant les flux, en fonction des impédances qui sont les paramètres dans les matrices des équations de transmission en (1.9) (une dérivation similaire est possible pour les admittances en considérant le courant). De [5] on a les expressions suivantes :

A. *Impédance propre d'un conducteur i,* Z_{ii} *en considérant une circulation du courant* I_i *le long d'une boucle fermée et une tension V entre les deux bouts de la boucle* (voir Figure 1.3) :

$$Z_{ii} = Z_{surface} + Z_{isolant} + Z_{air} + Z_{terre} \tag{1.18}$$

Où :

$Z_{surface}$: Impédance découlant de la circulation du champ sur la surface du conducteur. Il faut y distinguer les cas de la surface intérieure ou extérieure et ceux du retour du courant par l'intérieur (ou par l'extérieur) de la boucle. Le premier indice, dans (1.19) ci-dessous, réfère à la position de la surface (ou rayon) et le deuxième, réfère au sens du courant. Par exemple, $Z_{surface}^{ext-int}$ est l'impédance sur la surface extérieure face au courant circulant plus à l'intérieur que celui de la boucle impliquée (relativement au centre du câble pris comme origine). Et son expression est :

$$Z_{surface}^{ext-int} = \frac{E(r_{ext})}{I_{int}} \tag{1.19}$$

Les termes $E(r_{ext})$ et I_{int} sont respectivement le champ électrique en fonction du rayon r et de sa position sur la surface extérieure et le courant du conducteur dont le retour est situé plus à l'intérieur de la boucle que forme le conducteur. Il y a une définition analogue pour $Z_{surface}^{int-ext}$ utilisant $E(r_{int})$ et I_{ext}. Plus de détails sont disponibles dans la Figure 1.10 et l'explication subséquente.

$Z_{isolant}$: Impédance découlant de l'énergie électromagnétique emmagasinée dans l'isolant.

$$Z_{isolant} = j\omega\mu \frac{1}{|I_i|^2} \int_{Visolant} |\vec{H}|^2 dv, \tag{1.20}$$

Notons que, pour un conducteur avec un isolant cylindrique (situation souvent rencontrée), on a le champ magnétique $\vec{H}$ tangentiel (selon $\vec{e}_\varphi$), dans le diélectrique, à la surface de rayon r tel que :

$$\vec{H} = H_\varphi(r)\vec{e}_\varphi = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \tag{1.21}$$

Z_{air} : Impédance découlant de l'énergie emmagasinée dans l'air.

$$Z_{air} = -\frac{j\omega}{I_i}\left[\int_0^{y_i} \mu H_x(x_i, y, z)dy\right], \tag{1.22}$$

Où $H_x(x_i, y, z)$ est le champ magnétique produit suite au courant du conducteur dans l'espace. On l'évalue entre la surface du sol et la surface extérieure du conducteur i d'ordonnée y_i. Dans la Figure 1.3, on aurait $y_i = \overline{A_1 A_2}$.

Z_{terre} : Impédance due au champ électromagnétique dans le sol :

$$Z_{terre} = \frac{j\omega}{I_i}\left[\int_{-\infty}^{y_terre} \mu H_x(x_i, y, z)dy\right], \tag{1.23}$$

Où :

$H_x(x_i, y, z)$: Le champ électromagnétique selon x (normal à la surface élémentaire S_{sol}).dans la Figure 1.3 ;

y_terre : L'ordonnée (la hauteur) de la surface en dessous du conducteur qui se trouve dans le sol. Pour un conducteur aérien et un conducteur nu sur l'interface sol-air, on a $y_terre = 0$.

En considérant la circulation du champ électrique produit par le conducteur le long de la ligne A_2B_2CD dans la Figure 1.3 on peut faire l'approximation suivante pour avoir une forme usuelle de Z_{terre} (impédance due à la terre) :

$$\int_{DA_2} \vec{E}^{ind} \bullet d\vec{l} \cong 0 \text{ et } \int_{B_2C} \vec{E}^{ind} \bullet d\vec{l} \cong 0,$$

$$-Z_{terre} I_i = -j\omega \int_{-\infty}^{y_terre} \mu H_x\left(x_i, y, z\right) dy = E^{ind}\left(x, y_terre, z\right)$$

$$Z_{terre} = -\frac{E^{ind}\left(x_i, y_terre, z\right)}{I_i}; \tag{1.24}$$

Où E^{Ind} est la partie inductive du champ électrique (découlant du potentiel vecteur) produit par le courant du conducteur et évalué à la position $\left(x_i, y_terre, z\right)$.

Il faut noter que si le retour ne se fait pas par la terre, l'impédance de surface du conducteur de retour est à prendre en compte à la place de Z_{terre}.

Par ailleurs, la définition de l'impédance propre de retour par la terre usuellement utilisée comporte aussi bien Z_{air} que Z_{terre}. Le champ impliqué est résultant de celui dans le sol et dans l'air. C'est le propre champ produit par le conducteur, évalué à la position qu'il occupe lui-même, suite à la présence de la terre et de l'air. Cette impédance sera dérivée par les expressions de Pollaczek dans le chapitre 2. Son expression a une forme analogue à (1.24).

B. *Impédance mutuelle Z_{ij} entre conducteurs i et j, en considérant le courant I_i et la tension V relativement à un des conducteurs :*

$$Z_{ij} = \begin{cases} Z^{ext-int}_{surface_ij} + jX_{ij} & \text{cas de non-couplage par la terre} \\ Z_{terre_ij} & \text{cas du couplage par la terre} \end{cases}, \tag{1.25}$$

Où :

$Z^{ext-int}_{surface_ij}$: Impédance de surface du conducteur *i* (*j*) rencontrée par le courant venant du conducteur *j* (*i*) pour les configurations où il y a chevauchement des courants entre les deux boucles. Cette impédance dépend de la localisation du courant : À l'intérieur ou à l'extérieur. Aucun des conducteurs n'étant le retour par la terre.

$$Z_{surface_ij} = \frac{E^{ext}\left(r_{int}\right)}{I_j} = Z_{surface_ji} = \frac{E^{int}\left(r_{ext}\right)}{I_i} \tag{1.26}$$

jX_{ij} : Impédance due au flux entre l'isolant des conducteurs *j* et *i*. Pour un isolant tubulaire, son expression est (1.39).

Z_{terre_ij} : Impédance mutuelle de retour par la terre. Elle est due au champ électrique créé par le conducteur *j*, suite à la présence de la terre, dans la position où est localisé le conducteur *i*.

$$Z_{terre_ij} = -\frac{E^{ind}_j\left(x_i, y_terre, z\right)}{I_j} \tag{1.27}$$

Où E^{ind}_j est la partie inductive du champ électrique (découlant du potentiel vecteur) due à la présence du sol, produit par le courant du conducteur *j* et évalué à la position $\left(x_i, y_terre, z\right)$ impliquant l'autre conducteur (*i*). Notez qu'elle est la forme mutuelle de l'impédance propre dans (1.24) mais dans lequel le conducteur *j* remplace *i*.

C. *Force électromotrice par unité de longueur* f^{ext}_i *et Courant shunt* J^{ext}_i *dus au champ extérieur* $\vec{E}^{ext}, \vec{H}^{ext}$:

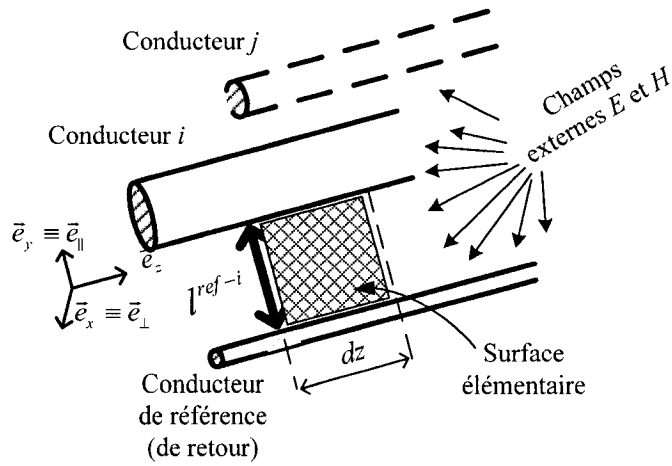


Figure 1. 4. Illustration de la surface élémentaire entre le conducteur de référence et un des conducteurs exposé au champ externe ($\vec{E}^{ext}, \vec{H}^{ext}$)

$$f_i^{ext} = -j\omega \int_{\ell^{ref-i}} \mu\left(\vec{H}_i^{ext}(x,y,z)\cdot\vec{e}_{\perp}\right)dr, \tag{1.28}$$

$$J_i^{ext} = -\sum_{j=1}^{N} Y_{ij} \int_{\ell^{ref-j}} \left(\vec{E}_j^{ext}(x,y,z)\cdot\vec{e}_{\parallel}\right)dr, \tag{1.29}$$

Où on a défini :

- f_i^{ext} : force électromotrice par unité de longueur induite sur le conducteur i suite au couplage longitudinal avec le champ électromagnétique extérieur.
- $\vec{H}_i^{ext}(x,y,z)$: champ magnétique extérieur créant le flux extérieur entre le conducteur i et celui supposé être la référence de tension (le retour lointain par la terre). On considère $\vec{H}_i^{ext}(x,y,z)$ constant entre z et $z+dz$, voir [5], page 69.
- $\vec{e}_{\perp}$ et $\vec{e}_{\parallel}$: les axes, disponibles dans la Figure 1.4.
- ℓ^{ref-i} : distance délimitant la surface élémentaire rectangulaire $\ell^{ref-i} \times dz$ entre l'élément du conducteur i et la portion du conducteur de retour sur une longueur dz (voir Figure 1.4). Pour le cas de retour par la terre,

$$\ell^{ref-i} = \left]-\infty, y_i - a_i\right[, \tag{1.30}$$

Où :

a_i : Rayon du conducteur i

x_i, y_i : Abscisse et ordonnée de l'élément du conducteur i par unité de longueur

- J_i^{ext} : Le courant par l'unité de longueur induit sur le conducteur i suite au couplage transversal avec le champ électromagnétique extérieur E^{ext} On tient compte de la composante de ce dernier qui perpendiculaire au conducteur et parallèle à la surface élémentaire entre le conducteur i et la référence (figure 1.3) [5], Page 72.
- $\vec{E}_j^{ext}(x,y,z)$: Champ électrique extérieur exposé sur chacun des conducteurs dans le système considéré.

Ces champs extérieurs $\vec{E}_j^{ext}(x,y,z)$ et $\vec{H}_i^{ext}(x,y,z)$ sont évalués au point (x,y,z) en l'absence des conducteurs. Ils ne sont pas à confondre avec les champs à l'intérieur des conducteurs. Il en est de même de la définition de l'impédance mutuelle : on les évalue en supposant qu'un des conducteurs induit un champ à la position occupée par un autre conducteur, en l'absence de ce dernier.

Bien que les impédances soient exprimées en terme de champ magnétique et électrique dans les relations (1.18) à (1.29), la tâche n'est pas encore finie. Loin de là, car la détermination du champ est le plus ardue. Les méthodes pour les déterminer sont multiples. Mais, en se conformant aux définitions de cette sous-section et les hypothèses formulées, on arrive aux mêmes expressions des impédances pour la plupart des méthodes. Les méthodes les plus connues sont disponibles dans [7] pour l'impédance de retour par la terre (mutuelle et propre). Pour les fils aériens et les câbles nous référons à [8] et [5]. Rappelons que c'est dans [5] d'où est tiré la quasi-majorité des relations (1.18) à (1.29) applicables à la majorité des configurations et géométries. Pour souligner les champs d'où sont dérivées les impédances mutuelles nous reviendrons sur les résultats du travail de Pollaczek [7] dans le chapitre 2.

Enfin, il faut noter que le fait de considérer le trajet du courant vers le conducteur de retour de la terre n'est pas toujours intuitif. Ceci dans les câbles coaxiaux par exemple ou les câbles dit de type pipe. Dans ces configurations, il devient difficile d'exprimer directement tous les champs dans les régions où passe le courant de la boucle jusque dans le conducteur de retour. Car il arrive par exemple que le retour du courant des conducteurs intérieurs se font par le truchement d'un conducteur commun (celui qui est le plus extérieur : tube en métal, etc.). Il est alors pratique d'avoir des boucles pour lequel on peut aisément définir les champs impliqués. Cette boucle pouvant ne pas comporter le conducteur de retour par la terre. Par ailleurs, d'une part, il faut savoir trouver l'équivalent de cette configuration des boucles (type coaxial) par rapport au type standard (avec les grandeurs de Phase), et d'autre part, quand on a deux systèmes couplés à travers le sol, le moyen le plus pratique de définir l'impédance mutuelle de retour par la terre est d'avoir des boucles qui se terminent dans le sol. On peut utiliser l'analyse standard ou coaxiale en prenant en compte la référence de la terre comme un conducteur additionnel. En pratique on utilise les deux types d'analyse. Mais avec la possibilité de passer d'une configuration à l'autre. Dans la sous-section qui suit, nous rappelons la représentation des systèmes en boucle et le rapport d'équivalence entre les deux.

1.4 Représentation du système des lignes et câbles par les équations de boucles

La nécessité de varier la représentation du système à multiconducteur pour rendre plus aisé la détermination des champs a été montrée précédemment. Dans cette sous-section nous exposons deux variantes de représentation en boucle qui sont spécialement d'un bon intérêt pour l'impédance mutuelle avec retour par la terre et impliquant les câbles coaxiaux : l'analyse par boucle dit de type–standard et celui dit de type–coaxial.
L'analyse type–standard est conforme à la définition des grandeurs de phase dans la théorie classique des circuits. La Figure 1.5 suivante illustre le sens de circulation des courants de phase (y compris leur retour par la terre) et les tensions Phase–Terre de chaque élément.

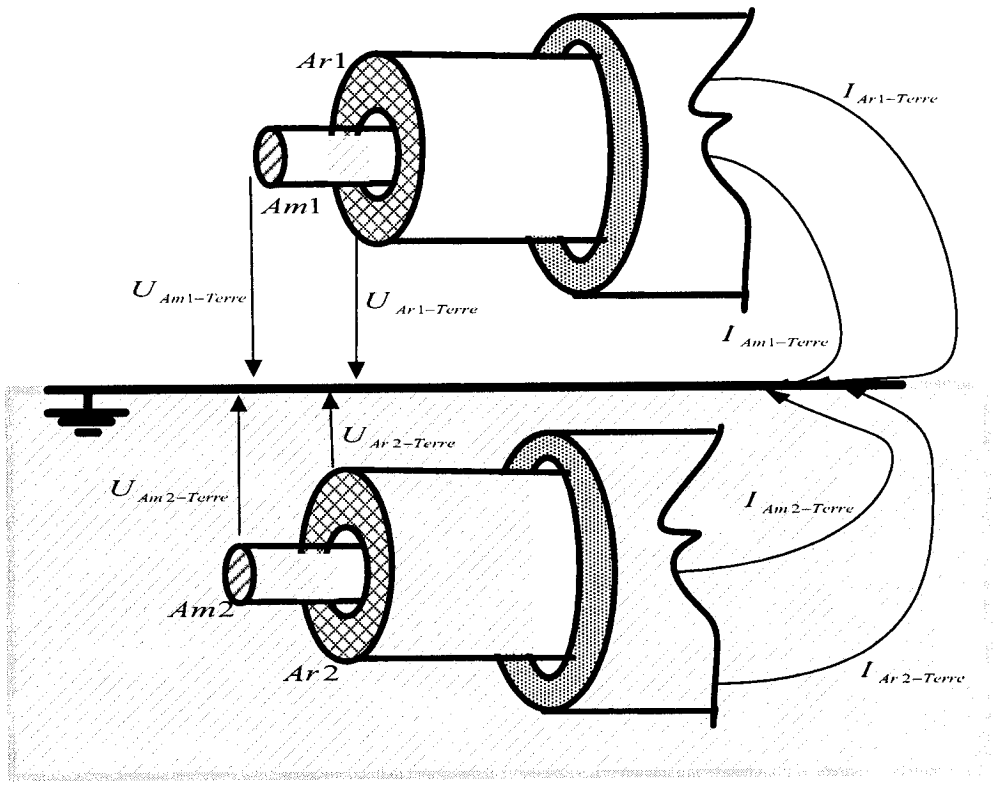


Figure 1. 5.Représentation en boucle de type–standard pour une portion *dz* de la ligne

Le type–coaxial (voir [5], page 89, pour plus de détails) offre une bonne facilité pour les câbles coaxiaux et fait ressortir mieux les champs électromagnétiques entre conducteurs cylindriques (Figure 1.6). Il est notamment utilisé pour l'analyse de câbles coaxiaux dans le livre de référence de EMTP [4].

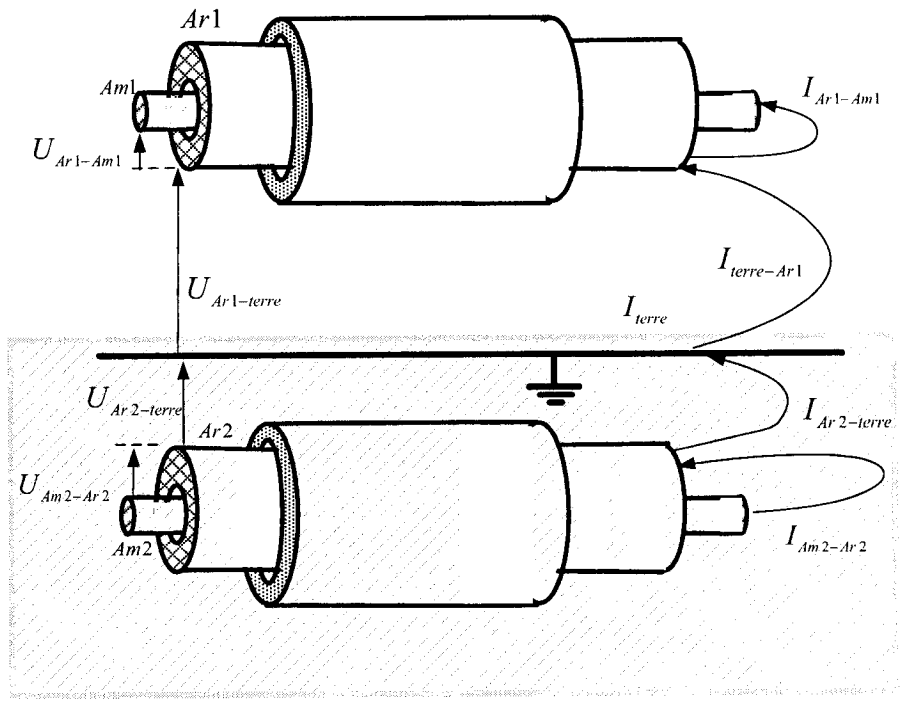


Figure 1. 6.Représentation en boucle de type–coaxial pour deux câbles (2 conducteurs)

Pour chacun des types d'analyse choisis, il faut exprimer l'équation de transmission (1.3) en considérant les impédances rencontrées le long de la boucle. On note que les boucles impliquant les conducteurs à travers lesquels il y a couplage (Ar2 et Ar1 dans la Figure 1.6) sont liées par le conducteur fictif de la terre.

Le nombre des conducteurs, la géométrie, etc., donneront l'indication sur le choix du type d'analyse par boucle. Le passage de l'un à l'autre étant possible. En effet, il existe un lien entre les deux types d'analyse par boucle (le système représenté étant le même pour les deux). Ce lien peut être représenté par deux matrices de transformations $\boldsymbol{TI}_s^c$ et $\boldsymbol{TU}_s^c$ permettant de passer d'une variante à l'autre pour respectivement les courants et les tensions. On a :

$$\boldsymbol{U}_{sta} = \boldsymbol{TU}_s^c \times \boldsymbol{U}_{coax} \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{I}_{sta} = \boldsymbol{TI}_s^c \times \boldsymbol{I}_{coax} \tag{1.32}$$

Par exemple, le passage de la configuration standard à coaxiale pour les Figures 1.5 et 1.6 donne :

$$\begin{pmatrix} U_{am1-terre} \\ U_{ar1-terre} \\ U_{ar2-terre} \\ U_{am2-terre} \end{pmatrix}_{sta} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_{am1-ar1} \\ U_{ar1-terre} \\ U_{ar2-terre} \\ U_{am2-ar2} \end{pmatrix}_{coax}$$

$$\begin{pmatrix} I_{am1} \\ I_{ar1} \\ I_{ar2} \\ I_{am2} \end{pmatrix}_{sta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{ar1_am1} \\ I_{terre_ar1} \\ I_{ar2_terre} \\ I_{ar2_am2} \end{pmatrix}_{coax}$$

$$\boldsymbol{TI}_s^c = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{TU}_s^c = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Au niveau des impédances on aura :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\boldsymbol{V}_{sta} = \dfrac{d}{dz}\boldsymbol{TU}_s^c\boldsymbol{V}_{coax} = -\boldsymbol{Z}_{sta}\boldsymbol{I}_{sta} = -\boldsymbol{Z}_{sta}\left(\boldsymbol{TI}_s^c\boldsymbol{I}_{coax}\right) \\ \dfrac{d}{dz}\boldsymbol{I}_{sta} = \dfrac{d}{dz}\boldsymbol{TI}_s^c\boldsymbol{I}_{coax} = -\boldsymbol{Y}_{sta}\boldsymbol{V}_{sta} = -\boldsymbol{Y}_{sta}\left(\boldsymbol{TU}_s^c\boldsymbol{U}_{coax}\right) \end{cases}$$

Et après substitution et regroupement, on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z}_{sta} = \boldsymbol{TU}_s^c\boldsymbol{Z}_{coax} \bullet \left(\boldsymbol{TI}_s^c\right)^{-1} \\ \boldsymbol{Y}_{sta} = \boldsymbol{TI}_s^c\boldsymbol{Y}_{coax} \bullet \left(\boldsymbol{TU}_s^c\right)^{-1} \end{cases} \tag{1.33}$$

Où :

- $\boldsymbol{Z}_{sta}$ et $\boldsymbol{Z}_{coax}$ sont les matrices d'impédances pour respectivement l'analyse type–standard et type–coaxial;
- $\boldsymbol{Y}_{sta}$ et $\boldsymbol{Y}_{coax}$ sont les matrices d'admittance pour respectivement l'analyse type–standard et type–coaxial ;

Il faut remarquer que :

$$\boldsymbol{TU}_s^c = \left[\left(\boldsymbol{TI}_s^c\right)^{-1}\right]^{transposé}$$

$$\boldsymbol{TU}_s^{c-1} = \left[\boldsymbol{TI}_s^c\right]^{transposé}$$

$$\boldsymbol{TI}_s^{c-1} = \left[\boldsymbol{TU}_s^c\right]^{transposé}$$

Les relations en (1.33) deviennent :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Z}_{sta} = \boldsymbol{TU}_s^c \times \boldsymbol{Z}_{coax} \times \left(\boldsymbol{TU}_s^c\right)^{transposé} \\ \boldsymbol{Y}_{sta} = \boldsymbol{TI}_s^c \times \boldsymbol{Y}_{coax} \times \left(\boldsymbol{TI}_s^c\right)^{transposé} \end{cases} \tag{1.34}$$

Avec (1.34), on peut définir les matrices d'impédance en utilisant le type–coaxial et par après revenir au type–standard (avec les grandeurs de phase classique). Ceci est utile quand on a à manipuler les impédances mutuelles et les coefficients de potentiel.

Comme exemple d'application nous appliquerons, dans la sous-section qui suit, ces transformations des types d'analyse par boucle en faisant un lien avec les définitions des paramètres vues précédemment.

1.5 Applications pour un système avec lignes aériennes et câbles

Comme exemple d'application, nous allons exprimer les paramètres d'un système à câbles souterrains et une ligne aérienne. Pour raison de simplicité, et sans perte de la généralité, nous considérons un des câbles constitué de 3 conducteurs et un des conducteurs de la ligne aérienne. Les courants dans les boucles et les tensions associées sont illustrés dans la Figure 1.7.

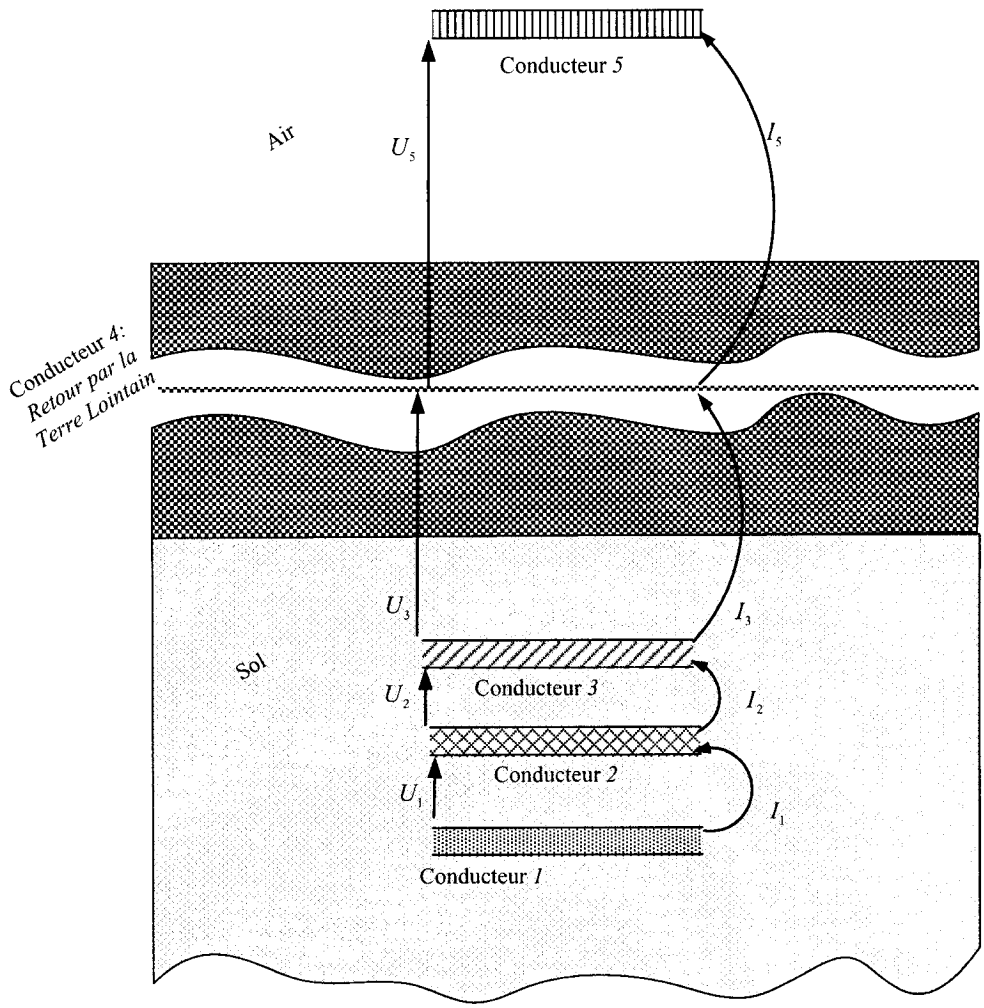


Figure 1. 7 Schéma en boucle type–coaxial pour le câble souterrain et une ligne aérienne.

Nous traitons séparément le câble car, actuellement dans EMTP, les câbles et lignes aériennes sont modélisés séparément. Nous identifierons ainsi les transformations nécessaires pour ajouter un ouvrage couplé au premier (initialement modélisé).

En général, il est mieux d'utiliser le type–coaxial quand il y a couplage entre les éléments de l'ouvrage, comme pour la plupart des câbles (pipe, « single core », câbles

coaxiaux, etc.). Considérons un câble de la configuration ci-dessus avec 3 conducteurs. On aura la représentation en perspective comme à la Figure 1. 4 où la terre est représentée par le conducteur 4.

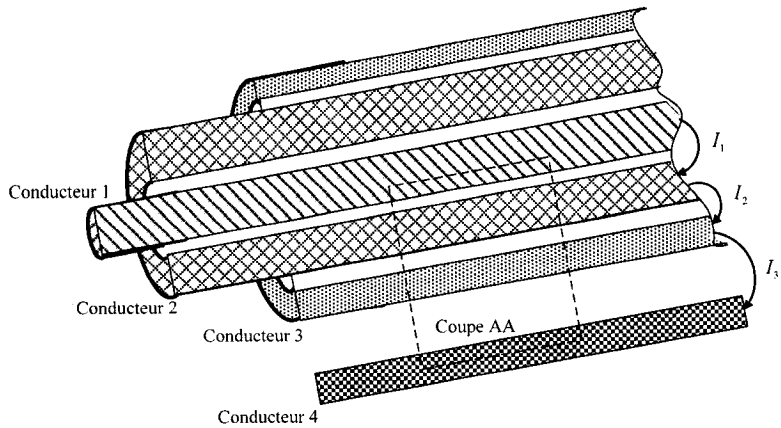


Figure 1. 8 Représentation en boucle : type–coaxial

L'étude détaillée de la coupe AA dans la Figure 1. 8 est présentée à la Figure 1. 9. Il devient plus clair d'y identifier les termes nécessaires à l'expression de l'impédance propre et mutuelle entre les boucles.

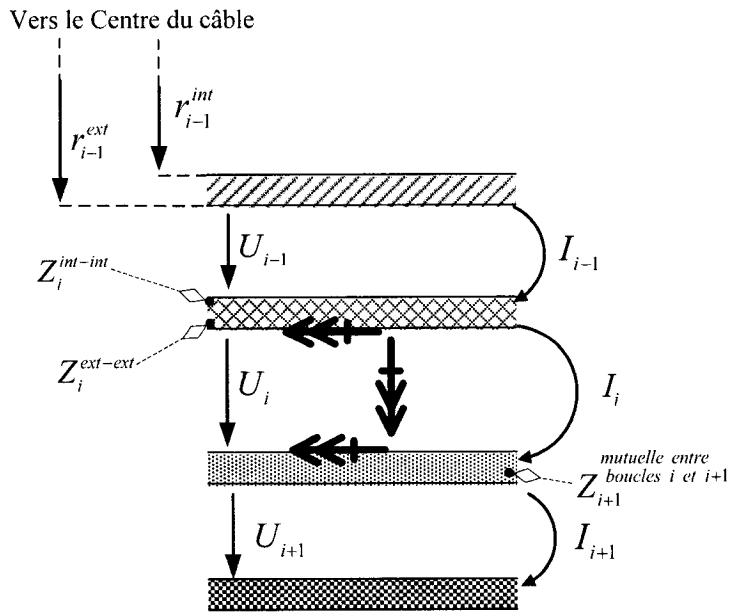


Figure 1. 9 Détails des tensions (coupe AA), courants et impédances dans le type–coaxial, inspiré de [5]

Le principe général à appliquer est de trouver la somme des chutes des tensions dont la somme est la tension $\vec{U}_i$:

- Pour une boucle *i* comportant deux conducteurs centraux comme à la Figure 1.9, on aura, sous forme générale :

$$-\frac{d\vec{U}_i}{dz} = Z_{boucle\ i} \times \vec{I}_i - Z_i^{ext-int}\vec{I}_{i-1} - Z_i^{int-ext}\vec{I}_{i+1} \tag{1.35}$$

- Pour une boucle *j* dont un de deux conducteurs n'intervient dans aucune autre boucle et aucun n'est le retour par la terre :

$$-\frac{d\vec{U}_j}{dz} = Z_{boucle\ j} \times \vec{I}_j - Z_j^{int-ext}\vec{I}_{j+1} \tag{1.36}$$

- Pour une boucle *k* avec un conducteur à la fin (pouvant être le retour par la terre) :

$$-\frac{d\vec{U}_k}{dz} = Z_{boucle\ k} \times \vec{I}_k - Z_k^{ext-int}\vec{I}_{k-1} \tag{1.37}$$

$Z_k^{ext-int}$ et $Z_k^{int-ext}$: Impédance mutuelle entre, respectivement, les boucles *k* et *k-1*; et *k* et *k+1*.

Dans (1.35), (1.36) et (1.37), l'impédance propre de la boucle $Z_{boucle\ i}$ est :

$$Z_{boucle\ i} = Z_{i+1}^{int-int} + Z_i^{ext-ext} + jX_{i\ i+1} \tag{1.38}$$

La réactance X_{ij} du diélectrique entre les conducteurs tubulaires *i* et *j*, dont l'épaisseur est la différence entre les rayons qui la délimitent : $r_i^{ext} - r_j^{int}$ (où $r_i^{ext} \leq r_j^{int}$), est :

$$X_{ij} = \omega L_{ij} \tag{1.39}$$

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_j^{int}}{r_i^{ext}} \tag{1.40}$$

Pour le câble, on aura, sans représenter le conducteur fictif de la terre :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz}\vec{U}_1 = \left(Z_1^{ext-ext} + jX_{12} + Z_2^{int-int}\right)\vec{I}_1 - Z_2^{int-ext}\vec{I}_2 + 0\times\left[\vec{I}_3\right] \\ -\frac{d}{dz}\vec{U}_2 = -Z_2^{ext-int}\vec{I}_1 + \left(Z_2^{ext-ext} + jX_{32} + Z_3^{int-int}\right)\vec{I}_2 - Z_3^{int-ext}\vec{I}_3 \\ -\frac{d}{dz}\vec{U}_3 = 0\vec{I}_1 - Z_3^{ext-int}\vec{I}_2 + \left(Z_3^{ext-ext} + Z_{3-prop}^{retTerre}\right)\vec{I}_3 \end{cases} \tag{1.41}$$

Les impédances externe et interne sont définies suivant la position de la surface (sur rayon extérieur ou intérieur pour un conducteur tubulaire ou solide cylindrique) et aussi selon le sens de retour du courant (interne ou externe, en considérant le centre du câble comme origine).

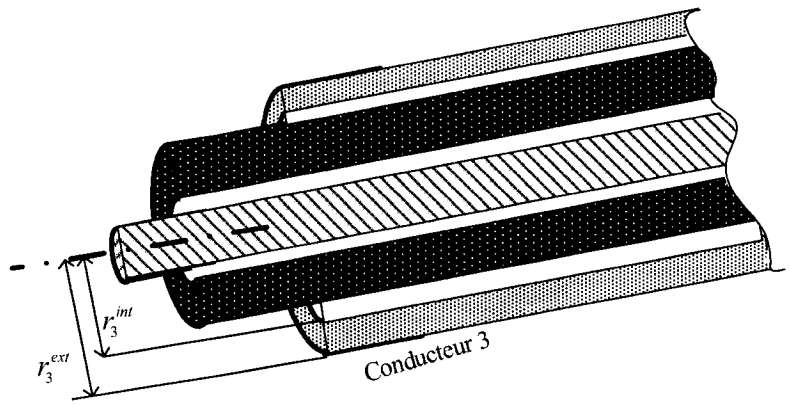


Figure 1. 10. Rayon interne et externe pour un conducteur : la référence au centre du câble.

En considérant le conducteur 3 du câble de la Figure 1.10, les impédances de surface des conducteurs tubulaires et solides cylindriques sont explicitées ci-dessous. On y différencie le rayon impliqué :

$$\begin{cases} r_3^{ext} \rightarrow \begin{cases} \text{Le courant } \vec{I} \text{ sur la surface externe du conducteur} \\ \text{retourne par l'interieur du cercle formé par } r_3^{ext} \\ \text{du conducteur tubulaire } \Rightarrow Z_3^{ext-int} \\ \\ \text{Le courant } \vec{I} \text{ sur la surface externe du conducteur} \\ \text{retourne par l'extérieur du cercle formé par } r_3^{ext} \\ \text{du conducteur tubulaire (}\underline{\text{ou une barre}}\text{)} \Rightarrow Z_3^{ext-ext} \end{cases} \\ \\ r_3^{int} \rightarrow \begin{cases} \text{Le courant } \vec{I} \text{ sur la surface interne du conducteur} \\ \text{retourne par l'intérieur du cercle formé par } r_3^{int} \\ \text{du conducteur tubulaire} \Rightarrow Z_3^{int-int} \\ \\ \text{Le courant } \vec{I} \text{ sur la surface interne du conducteur} \\ \text{retourne par l'extérieur du cercle formé par } r_3^{int} \\ \text{du conducteur tubulaire} \Rightarrow Z_3^{int-ext} \end{cases} \end{cases}$$

Les formules de ces impédances sont disponibles dans [5] pour divers cas. Pour un cas spécifique des câbles utilisés pour les réseaux électriques de distribution et de transport, on réduit ces formules à celles équivalentes et disponibles dans EMTP Theory book [4] et regroupés dans le système (1.42)

$$\begin{cases} Z_i^{int-int} = \dfrac{\rho_i \chi_i}{2\pi r^{int} F_i}\left[I_0\left(\chi_i r_i^{int}\right)K_1\left(\chi_i r_i^{ext}\right)+I_1\left(\chi_i r_i^{ext}\right)K_0\left(\chi_i r_i^{int}\right)\right] \\ Z_i^{ext-ext} = \dfrac{\rho_i \chi_i}{2\pi r^{int} F_i}\left[I_0\left(\chi_i r_i^{ext}\right)K_1\left(\chi_i r_i^{int}\right)+I_1\left(\chi_i r_i^{int}\right)K_0\left(\chi_i r_i^{ext}\right)\right] \\ Z_i^{int-ext} = \dfrac{\rho_i}{2\pi r_i^{int} r_i^{ext} F_i} \\ Z_i^{ext-int} = Z_i^{int-ext} \\ F_i = I_1\left(\chi_i r_i^{ext}\right)K_1\left(\chi_i r_i^{int}\right)-I_1\left(\chi_i r_i^{int}\right)K_1\left(\chi_i r_i^{ext}\right) \\ \chi_i = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu_i}{\rho_i}} \end{cases} \tag{1.42}$$

Où $I_0(x)$ et $I_1(x)$ sont les fonctions de Bessel de premier espèce respectivement d'ordre zéro et d'ordre un, et $K_0(x)$ et $K_1(x)$ sont les fonctions de Bessel de deuxième espèce respectivement d'ordre zéro et d'ordre un.

Les paramètres pour l'impédance de ce câble sont alors :

$$\boldsymbol{Z}_{coax}^{cab} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{cab} & -Z_{21}^{cab} & 0 \\ -Z_{12}^{cab} & Z_{22}^{cab} & -Z_{32}^{cab} \\ 0 & -Z_{23}^{cab} & Z_{33}^{cab} \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

$$\begin{cases} Z_{11}^{cab} = Z_1^{ext-ext} + jX_{12} + Z_2^{int-int} \\ Z_{22}^{cab} = Z_2^{ext-ext} + jX_{32} + Z_3^{int-int} \\ Z_{33}^{cab} = Z_3^{ext-ext} + Z_{3-prop}^{retTerre} \\ Z_{12}^{cab} = Z_2^{ext-int} = Z_2^{int-ext} = Z_{21}^{cab} \\ Z_{32}^{cab} = Z_3^{int-ext} = Z_3^{ext-int} = Z_{23}^{cab} \end{cases} . \tag{1.44}$$

En ajoutant le conducteur aérien, on a une quatrième équation de tension et certains changements dans les impédances. Mais il faut remarquer que les changements sont seulement pour les boucles couplées. C'est-à-dire celles pour lesquelles les liens se font par la terre, entre deux éléments, de part et d'autre de l'interface Air –Terre. Soient le conducteur en l'air et l'armure ou le pipe pour les câbles.

Pour le cas du seul couplage par la terre comme le cas câble –fil aérien, le lien de couplage est le conducteur fictif de retour par la Terre dit conducteur lointain (virtuel). Pour rappel, il s'agit d'un plan parallèle à l'interface air –terre placé à plusieurs profondeurs de peau δ, définie en (1.12) en fonction de la distance normalisée (caractéristiques du sol et fréquence). On y considère que le champ électromagnétique provenant des conducteurs est négligeable.

Le système d'équation devient alors, avec la quatrième équation due au conducteur aérien ajouté (conducteur 5) :

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz}\vec{U}_1 = \left(Z_1^{ext-ext} + jX_{12} + Z_2^{int-int}\right)\vec{I}_1 - Z_2^{int-ext}\vec{I}_2 + 0.\left[\vec{I}_3 + \vec{I}_5\right] \\ -\frac{d}{dz}\vec{U}_2 = -Z_2^{ext-int}\vec{I}_1 + \left(Z_2^{ext-ext} + jX_{32} + Z_3^{int-int}\right)\vec{I}_2 - Z_3^{int-ext}\vec{I}_3 + 0.\vec{I}_5 \\ -\frac{d}{dz}\vec{U}_3 = 0\vec{I}_1 - Z_3^{ext-int}\vec{I}_2 + \left(Z_3^{ext-ext} + Z_{3-prop}^{retTerre}\right)\vec{I}_3 - Z_{3-5}^{retTerre-mut} I_5 \\ -\frac{d}{dz}\vec{U}_5 = 0\vec{I}_1 + 0\vec{I}_2 - Z_{5-3}^{retTerre-mut}\vec{I}_3 + \left(Z_5^{solide} + jX_{5-Terre} + Z_{5-prop}^{retTerre}\right)\vec{I}_5 \end{cases} \tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{Z}_{coax}^{tot} = \begin{pmatrix} Z_{11}^{cab} & -Z_{21}^{cab} & 0 & 0 \\ -Z_{12}^{cab} & Z_{22}^{cab} & -Z_{32}^{cab} & 0 \\ 0 & -Z_{23}^{cab} & Z_{33}^{cab} & -Z_{53}^{aer-cab} \\ 0 & 0 & -Z_{35}^{cab-aer} & Z_{55}^{aer} \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

$$\boldsymbol{Z}_{coax}^{tot} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \boldsymbol{Z}_{coax}^{cab} & & 0 \\ & & & Z_{53}^{aer-cab} \\ 0 & 0 & Z_{35}^{cab-aer} & Z_{55}^{aer} \end{pmatrix} \tag{1.47}$$

Où, en plus des éléments de la sous matrice $\boldsymbol{Z}_{coax}^{cab}$ définis en (1.44), on a :

$$\begin{cases} Z_{55}^{aer} = Z_{5}^{solide} + jX_{5-Terre} + Z_{5-prop}^{retTerre} \\ Z_{35}^{cab-aer} = Z_{3-5}^{retTerre-mut} = Z_{5-3}^{retTerre-mut} = Z_{53}^{aer-cab} \end{cases} \tag{1.48}$$

Dans le cas d'une ligne aérienne avec plus d'un conducteur, on traite chacune des paires formées par le conducteur aérien et un câble souterrain ; et puis les paires des lignes aériennes et enfin les paires de câbles souterrains sont pris en compte. Car il faut tenir compte pour chaque cas du couplage par la terre entre les paires.

Tous les paramètres ont été définis (voir (1.42)) sauf deux : L'impédance propre de retour par la terre $Z_{i-prop}^{retTerre}$ et l'impédance mutuelle de retour par terre $Z_{i-j}^{retTerre-mut}$ pour le conducteur i et j. Elles découlent, comme montré dans (1.27), du champ électrique produit, par le conducteur lui-même (propre) ou par celui qui lui est couplé (mutuelle), suite à la présence de la terre. Ce champ étant évalué à la position où est localisé le conducteur perturbé (la victime).

La détermination des expressions de ces impédances sera rappelée au chapitre 2. Et leurs évaluations avec précision constituent l'apport majeur du présent travail.

Les tensions et les courants obtenus avec les matrices d'impédances ci haut ne sont pas utilisables en simulation car on doit exprimer les grandeurs de phase, il faut donc passer à la formulation boucle type–standard.

La matrice d'équivalence et sa transposée, $\boldsymbol{TU}_s^c$ et $\boldsymbol{TU}_s^{cTR}$ pour les courants entre le type–coaxial et standard seront :

$$\boldsymbol{TU}_s^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{TU}_s^{cTR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant (1.34), nous avons :

$$\boldsymbol{Z}_{sta} = \boldsymbol{TU}_s^c \bullet \boldsymbol{Z}_{coax} \bullet \boldsymbol{TU}_s^{cTR} \tag{1.49}$$

$$\boldsymbol{Z}_{sta} = \begin{pmatrix} z_{11}-2z_{21}+z_{22}-2z_{32}+z_{33} & \cdots & \cdots & \cdots \\ -z_{12}+z_{22}-2z_{32}+z_{33} & z_{22}-2z_{32}+z_{33} & SYMÉT. & \cdots \\ -z_{23}+z_{33} & -z_{23}+z_{33} & z_{33} & \cdots \\ z_{35} & z_{35} & z_{35} & z_{55} \end{pmatrix}$$

Où on a laissé tomber les indices *cab*, *aer-cab* et *aer*. On peut identifier les transformations à introduire à partir de deux matrices des ouvrages, $\boldsymbol{Z}_{sta}^{cab}$ et $\boldsymbol{Z}_{55}$ initialement sans couplage avec l'extérieur.

$$\boldsymbol{Z}_{sta}\Big|_{avant} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_{sta}^{cab} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{Z}_{55} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \tag{1.50}$$

$$\boldsymbol{Z}_{sta}\Big|_{après} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Z}_{sta}^{cab} & \begin{bmatrix} z_{35} \\ z_{35} \\ z_{35} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_{35} & z_{35} & z_{35} \end{bmatrix} & \boldsymbol{Z}_{55} \end{pmatrix}$$

Pour introduire le couplage entre ouvrages, on ajoutera l'impédance mutuelle z_{35} entre les conducteurs. Celle-ci est évaluée entre les conducteurs impliqués dans le couplage (les plus extérieurs).

Le système est ainsi complètement défini avec la matrice d'impédance. Notons qu'un travail similaire peut se faire pour les admittances.

1.6. Changements dans les modèles EMTP-RV : ouvrages des types différents

Les modules de calcul des paramètres des lignes et câbles dans EMTP-RV (*Line Data* et *Cable Data*) prennent en compte, dans leurs formes actuelles, les impédances mutuelles de retour par la terre pour les structures de même type quand on peut les regrouper en un système équivalent. Pour deux lignes ou plus, par exemple, on peut faire un regroupement adéquat en fixant une référence commune des distances. Le système résultant peut alors être aisément évalué par le module *Line Data*. Pour les câbles, la même procédure est possible. Les câbles de type «single core» peuvent être aisément regroupés. Par contre, pour ceux de type «pipe» et/ou combinés aux «single core», il est parfois impossible de les regrouper. Car il y a une difficulté à définir deux pipes différents (résistivité, géométrie, etc. différentes) dans un même module Cable data et/ou y lier les câbles «single core». En effet, ces derniers ne possèdent pas de revêtement sous forme de pipe.

Pour ces derniers cas et pour les structures complètement indépendantes et/ou de natures différentes, ligne aérienne vs câble souterrain, ligne aérienne vs pipeline enfouis, etc. ; on ne pourra pas toujours faire le regroupement ci haut évoqué.
En général, il faudra modéliser les paramètres propres (admittances et impédances) pour chaque ouvrage et ajouter, comme identifié dans (1.50), les termes des impédances mutuelles (et admittances) entre les ouvrages. On note que l'impédance mutuelle, entre le dernier conducteur (le plus extérieur) et autres structures, se rajoute sur tous les paramètres des conducteurs qui ont le même chemin de retour par la terre. Ceci est concordant avec le rapport sur la conversion en Matlab du module pour les calculs des paramètres des lignes et câbles dans le cadre du projet CRINOLINE [6].

Par ailleurs, cet ajout d'éléments non diagonaux, et dépendants de la fréquence, aura des implications dans la modélisation des lignes. Il influe, en effet, sur les matrices des transformations modales $\boldsymbol{T}$ ($\boldsymbol{T}_V$ et $\boldsymbol{T}_I$) à appliquer sur $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{YZ}$ et $\boldsymbol{ZY}$ de (1.11). Et influe aussi sur l'admittance et l'impédance caractéristiques $\boldsymbol{Y}_c$ et $\boldsymbol{Z}_c$, et la matrice des fonctions de propagation $\mathbf{H}$. En effet, plus il y a couplage entre structures, plus il y a d'éléments non diagonaux dans les matrices ci haut.

Pour illustrer, seulement à titre introductif, les défis que cet ajout d'éléments non diagonaux pose dans les matrices de paramètres des lignes et des câbles, nous rappelons les expressions fondamentales pour chacun des modèles de lignes disponibles dans EMTP-RV en soulignant la forme matricielle finale pour chacun.

A. Modèle à paramètres constants (CP) :

Pour le modèle CP, les matrices diagonales modales $\boldsymbol{\Lambda}_V$ et $\boldsymbol{\Lambda}_I$ des constantes de propagation pour la tension et le courant respectivement ; et l'impédance caractéristique modale $\hat{\boldsymbol{Z}}_C$ sont :

$$\boldsymbol{\Lambda}_V = \boldsymbol{T}_V^{-1}\boldsymbol{ZYT}_V, \tag{1.51}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_I = \boldsymbol{T}_I^{-1}\boldsymbol{YZT}_I. \tag{1.52}$$

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_C = \sqrt{\frac{\hat{\boldsymbol{Z}}}{\hat{\boldsymbol{Y}}}} \tag{1.53}$$

Où les matrices diagonales d'impédance et admittance modales sont respectivement :

$$\hat{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{T}_I^{-1}\boldsymbol{ZT}_I \tag{1.54}$$

$$\hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{T}_V^{-1}\boldsymbol{YT}_V, \tag{1.55}$$

Pour ce modèle, on néglige la dépendance en fréquence des paramètres pour éviter les difficultés liées à la convolution [19]. Par ailleurs, on assume d'abord une ligne sans perte puis on rajoute les parties résistives exprimant les pertes en bout des lignes. La

matrice de transformation est réelle est constante. Ce modèle est donc pour une fréquence donnée.

B. Modèle dépendant de la fréquence (FD et FDQ) :

Les mêmes équations du modèle CP sont applicables mais on tient compte de la dépendance en fréquence des paramètres $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$ et celle des matrices de transformation ($\boldsymbol{T}$ ou l'autre variante **Q**) [20].

C. Modèle à large bande (WB) :

À l'aide des matrices de propagation $\mathbf{H}$ et l'admittance caractéristique $\boldsymbol{Y}_C$, on exprime le courant (ou la tension) aux bouts de la ligne par [21] :

$$\boldsymbol{Y}_C\boldsymbol{V} - \boldsymbol{I}_{debut} = 2\mathbf{H}\boldsymbol{I}_{fin}, \tag{1.56}$$

Où toutes les quantités sont dans le domaine de fréquence :

Les grandeurs $\boldsymbol{I}_{debut}$ et $\boldsymbol{I}_{fin}$ sont respectivement l'onde de courant incidente et réfléchie.

$$\mathbf{H} = \exp\left(-l\sqrt{\boldsymbol{YZ}}\right), \tag{1.57}$$

l est la longueur de la ligne. L'impédance caractéristique est :

$$\boldsymbol{Y}_C = \boldsymbol{Z}^{-1}\left(\sqrt{\boldsymbol{ZY}}\right) \tag{1.58}$$

Dans le domaine temporel, après convolution, on a pour un conducteur :

$$Y_C * V - i_{debut} = 2\sum_{k=1}^{n} \mathrm{H}'_k\left(t-\tau_k\right) * i_{fin}, \tag{1.59}$$

Où :

Les constantes de propagation $\mathrm{H}'_k\left(t-\tau_k\right)$ pour le mode k et un délais τ_k sont trouvées après transformation modale de $\mathbf{H}(\omega)$ et une approximation par lissage avec les fonctions rationnelles, tout comme pour $\boldsymbol{Y}_C$ [22].

De l'observation de ces relations exprimant les modèles des lignes de transmission, il en découle que :

1. Les valeurs non nulles (et relativement grandes) des impédances mutuelles rendront plus difficile les simplifications pour le calcul des modes de propagation.
2. Compte tenu des couplages sur certaines portions de lignes, il faudra faire le découpage et traiter ces portions séparément. Il en découlera un nombre de modes de propagation plus élevé car chacun des conducteurs peut potentiellement occasionner un mode de plus. Le nombre des modes à prendre en compte pour l'étude de la ligne devient théoriquement égal au nombre des conducteurs.

3. Les autres simplifications ne sont plus admissibles. La transposition des lignes, par exemple, n'est plus toujours possible car il n'y a aucun lien entre les conducteurs des deux ouvrages différents (Pipeline et câbles, par exemple).

4. Pour la méthode Wideband, Il faudra prévoir une méthode de lissage efficace pour n'est pas augmenter le temps –espace mémoire en simulation. En effet, les approximations des éléments de **H** requièrent plus de pôles pouvant entraîner des instabilités numériques. Et compte tenu de l'astuce à évaluer **H** pour une fréquence élevée, parfois 1MHz [21], il faudra s'assurer que les calculs des impédances mutuelles restent précis dans l'ordre de grandeurs de fréquence exigée pour l'étude transitoire du phénomène à étudier et cela pour toutes les configurations.

Tous les points évoqués ci haut, et d'autres, doivent être pris en compte en incorporant les couplages pour une étude transitoire complète dans EMTP-RV pour n'importe quelle combinaison des structures et ouvrages. Cependant, comme évoqué au point 4 ci haut,

nous devons d'abord trouver une façon efficiente d'évaluer les expressions d'impédances mutuelles de retour par la terre.

Dans les deux chapitres qui suivent nous rappelons ces expressions puis nous donnons l'état des lieux (critique) quant à son évaluation et enfin nous formulons une méthode pour l'évaluer efficacement dans les chapitres subséquents.

CHAPITRE 2 IMPÉDANCE DE RETOUR PAR LA TERRE

Dans le chapitre précédent, il a été montré, entre autre, que l'impédance mutuelle de retour par la terre est utilisée dans les matrices modélisant les équations de la ligne de transmission (1.11). Les difficultés à établir son expression ont motivé les recherches de Sommerfeld, Pollaczek et Carson, et beaucoup d'autres.

Dans ce chapitre, nous revisitons les résultats du travail fait par Pollaczek en étudiant le champ électrique produit par un fil fin infiniment long traversé par le courant électrique supposé uniforme [7]. Afin d'en dériver l'expression de l'impédance mutuelle de retour par la terre entre éléments, ainsi que les expressions analytiques approximatives. Pour rappel, le lien entre le champ et l'impédance a été établi dans (1.24) et (1.27). On notera que les hypothèses prises par Pollaczek sont aussi celles présentées dans le chapitre précédent, tirées de [5]. Nous terminons en faisant le lien entre cette formulation de Pollaczek et les formules de Carson [4], [8] et [9], celles établies par le CCITT [5]. Ceci nous sera utile pour cerner les différentes approximations analytiques (et autres) et de les comparer avec les méthodes d'évaluation que nous nous proposons d'établir.

2.1 Développement des intégrales de Pollaczek avec les équations de Maxwell.

2.1.1 Description du système et hypothèses

Considérons un câble, pouvant contenir âme, enveloppes isolantes et écran, placé à une distance $y_2 \leq 0$, dans le sol, et un autre élément, une ligne non isolée ou un câble coaxial de télécommunication, placé dans l'air à une hauteur $y_1 \geq 0$. Les deux éléments étant respectivement à une distance horizontale x_2 et x_1 d'un axe pris comme origine. Les caractéristiques du sol étant :

- Conductivité : $\sigma_{sol} = \sigma_2$

- Permittivité : $\varepsilon_{sol} = \varepsilon_1$
- Perméabilité : $\mu_{sol} = \mu_2$;

Et celles de l'air étant respectivement σ_1, ε_1 et μ_1. La configuration décrite ci haut est simplifiée pour le calcul de l'impédance mutuelle de retour par la terre, voir les hypothèses ci-dessous, et peut être représentée par la Figure 2.1 ci-dessous

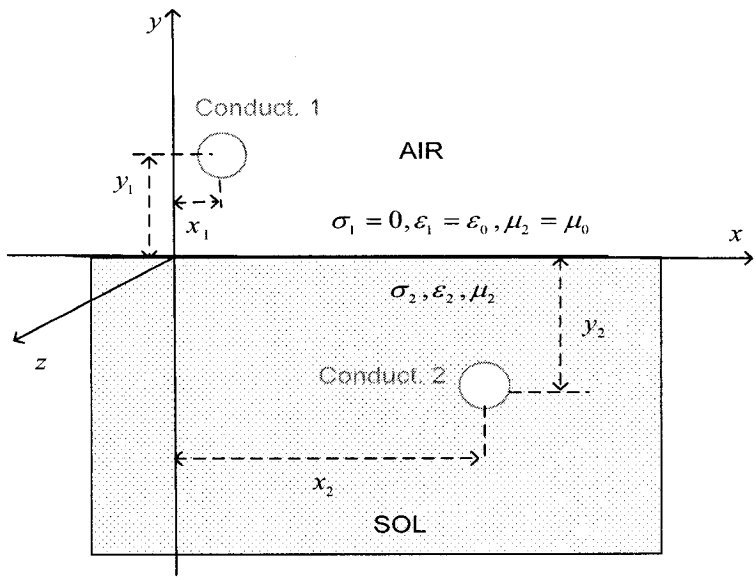


Figure 2. 1 Configuration typique pour deux éléments couplés (2) : sol et (1) : Air

On note que dans la Figure 2.1 tout élément est réduit à l'équivalent d'un conducteur plein et que le sol y est présenté comme homogène avec une seule couche. De plus, les isolants sont ignorés car ils n'interviennent pas dans la formulation de l'impédance mutuelle de retour par la terre entre éléments aérien et souterrain. Les hypothèses prises pour ces simplifications sont concordantes à celles de CCITT [5], montrées précédemment. Nous n'y reviendrons pas en détail mais nous en soulignons deux qui ont une implication sur les lignes et câbles en réseau électrique.

A. On néglige la section droite du fil. C'est-à-dire on rend le fil infiniment fin en maintenant l'intensité primitive du courant. Deux conséquences sont à retenir :

- Pour le câble (coaxial ou de type pipe ou «single core»), on négligera l'influence de tous les autres conducteurs (et diélectriques) à l'intérieur du conducteur le plus extérieur (le pipe ou l'armure). C'est au travers ce dernier qu'il y a influence avec les autres éléments extérieurs, et, pour rappel, il assure le retour par la terre.
- Pour les lignes aériennes, pour lesquelles on a fait une mise en paquet (bundle en anglais), on considèrera, pour le calcul de l'impédance mutuelle par la formule de Pollaczek, le centre du conducteur équivalent. Par exemple, dans le cas de 4 conducteurs pour lesquels on utilise un rayon géométrique moyen (GMR).

La conséquence de ces simplifications et que la distance entre ouvrages, pour lesquels on calcule l'impédance mutuelle, devra être très grande par rapport au rayon géométrique moyen ou encore par rapport au diamètre du pipe des câbles (ou l'armure) ;

B. L'isolant de câble (ou ligne aérien) n'influence pas la valeur de l'impédance mutuelle de retour par la terre. On considère que le champ électrique évalué à la position du conducteur impliqué n'est pas modifié par la présence de ce dernier (incluant son isolant). Il faut cependant se rappeler que pour le cas des conducteurs d'un même câble, l'impédance due à l'isolant est pris en compte dans l'impédance mutuelle entre deux boucles adjacentes dans l'analyse de type coaxial, voir dans (1.41). Sa valeur a été évaluée dans (1.40) pour un isolant tubulaire entre conducteur, ici on aura : $X_{isolant} = \omega L_{isolant} = \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_{isolant}^{int}}{r_{conducteur}^{ext}}$

Tenant compte de ces hypothèses, et d'autres exprimées précédemment, les résultats de calcul de champ par Pollaczek est donné ci-dessous. Nous y avons résumé le fondement.

2.1.2 Champ électromagnétique et expression de l'intégrale de Pollaczek

Pour évaluer le champ électrique, Pollaczek a résolu, pour le sol et l'air homogènes, les équations de Maxwell suivantes en système d'unité gaussien, CGS,

$$\begin{cases} \nabla.D = 4\pi\rho \\ \nabla.B = 0 \\ \nabla \times H = \dfrac{4\pi}{c}J + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial D}{\partial t} \\ \nabla \times E + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Où :

D : le courant de déplacement, B : induction magnétique, E : champ électrique, H : champ magnétique, J : courant de conduction, et c : vitesse de la lumière (célérité).

En tenant compte des hypothèses longuement évoquées, on considère une propagation dans la direction z pour les champs transversaux H et E :

$$H = f(x,y)e^{-jk_z + j\omega t} \tag{2.2}$$

Le cas quasi TEM, avec une seule composante de E selon z (E_z), nous donne les relations suivantes entre les champs :

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_x}{\partial t} = -j\dfrac{\omega}{c}H_x \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial y} = \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H_y}{\partial t} = j\dfrac{\omega}{c}H_y \end{cases} . \tag{2.4}$$

Par ailleurs, ce champ E peut être décrite par l'équation de Helmholtz, dans chacune des régions et à l'interface entre les deux. On a les indices pour les constantes physiques 1 et

2 respectivement pour le sol et l'air. Comme on considère uniquement le champ E_z, suite aux hypothèses quasi-TEM, on laissera ainsi tomber l'indice z :

Pour tout x_2 et $y_2 > 0$:

$$\Delta E + k_1^{\,2} E = 0, \tag{2.5}$$

Pour tout x_2 et pour $y_2 < 0$:

$$\Delta E + k_2^{\,2} E = 0, \tag{2.6}$$

Où :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.7}$$

$$k^2 = -\frac{4\pi j\,\omega\sigma\mu}{c^2} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} \tag{2.8}$$

Où k_i, dans (2.8), est défini dans chaque région *i*.

À la limite entre les deux régions, à l'interface air-sol, on doit avoir, pour tout x_2 et $y_2 = 0$:

$$\lim_{y=0^+} E = \lim_{y=0^-} E. \tag{2.9}$$

$$\lim_{y=0^+} H_x \Big|_{Tangentielle} = \lim_{y=0^-} H_x \Big|_{Tangentielle} \tag{2.10}$$

Sur base de ces relations et de propriétés du champ (sur le conducteur et à l'infini, en changeant le perturbateur et la victime, notamment), Pollaczek identifie que le champ recherché est une fonction de Green et introduit la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro. Cette dernière existe dans tout le plan *x-y* et possède les mêmes singularités que la fonction *E*. Il a pu alors exprimer le champ pour 4 cas en tenant compte des hypothèses introduites.

1. *Champ créé par un conducteur dans l'air : Point d'observation dans l'air :* E_{++} *et dans le sol :* E_{-+}

Nous adoptons la notation suivante : l'indice '–' réfère au sol tandis que l'indice '+' réfère à l'air. Le premier indice étant le point d'où l'on l'observe le champ et le second étant d'où est créé ce dernier. Par exemple, E_{-+} dénote le champ créé par un conducteur se trouvant dans l'air et mesuré (observé) dans le sol.

1.1 Champ dans l'air produit par un fil aérien : E_{++}

$$\begin{cases} E_{++} = A\left[H_0^{(1)}\left(k_2 r\right) - H_0^{(1)}\left(k_2 r'\right)\right] + \ldots \\ 2\dfrac{A}{j\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) - \left(y_2 + y_1\right)\sqrt{s^2 - k_2^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds \ , \\ \mathrm{y}_2 \geq 0 \ , y_1 \geq 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Avec r défini par :

$$r = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2} \tag{2.12}$$

$$r' = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 + y_1\right)^2} \tag{2.13}$$

et A, $H_0^{(1)}\left(k_2 r\right)$ définis par :

$$A = \frac{\omega \pi J}{c^2} \tag{2.14}$$

$$H_0^{(1)}\left(k_2 r\right) = \frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) - \left|y_2 - y_1\right|\sqrt{s^2 - k_2^2}\right)\frac{ds}{\sqrt{s^2 - k_2^2}} \tag{2.15}$$

Cette relation (2.15) est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 0. Elle peut s'écrire comme étant une somme des fonctions J_0 et Y_0 de Bessel, respectivement de type 1 et 2 :

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + jY_0(z), \tag{2.16}$$

L'expression (2.11) est le champ électrique dans l'air créé par un conducteur dans l'air. Donc on a : $y_1>0$ et $y_2>0$. Par ailleurs il faut se rappeler que les constantes sont en système CGS comme spécifié en (2.1).

1.2 <u>Champ dans le sol produit par un fil aérien</u> : E_{-+}

On note, comme montré par Pollaczek [7], que dans ce cas-ci, le champ secondaire créé dans l'air par les filaments de courant du sol, c'est-à-dire le champ réfléchi, n'influence pas le champ incident qui traverse l'interface sol-air. Ainsi les termes sous forme de fonction de Hankel n'apparaîtront pas.

$$E_{-+} = \frac{2A}{j\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(js(x_2 - x_1) + y_2\sqrt{s^2 - k_1^2} - y_1\sqrt{s^2 - k_2^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds, \; y_2 \le 0 \, , y_1 \ge 0 \tag{2.17}$$

La relation (2.17) est l'expression du champ électrique dans le sol créé par un conducteur dans l'air. Donc on a : $y_1>0$ et $y_2 < 0$.

2. *Champ créé par un conducteur dans le sol : dans l'air E_{+-} ou dans le sol : E_{--}*

L'analyse effectuée précédemment pour la source de champ dans l'air, s'applique aussi pour une source souterraine. En effet il suffit de regarder l'air comme le sol, et vice versa, avec les changements qui s'imposent pour k et y. Ainsi, on effectue les modifications quant aux variables x_i, y_i et k_i. Le système des coordonnées est alors tourné de 180 degrés. Comme montré à la figure 2.2.

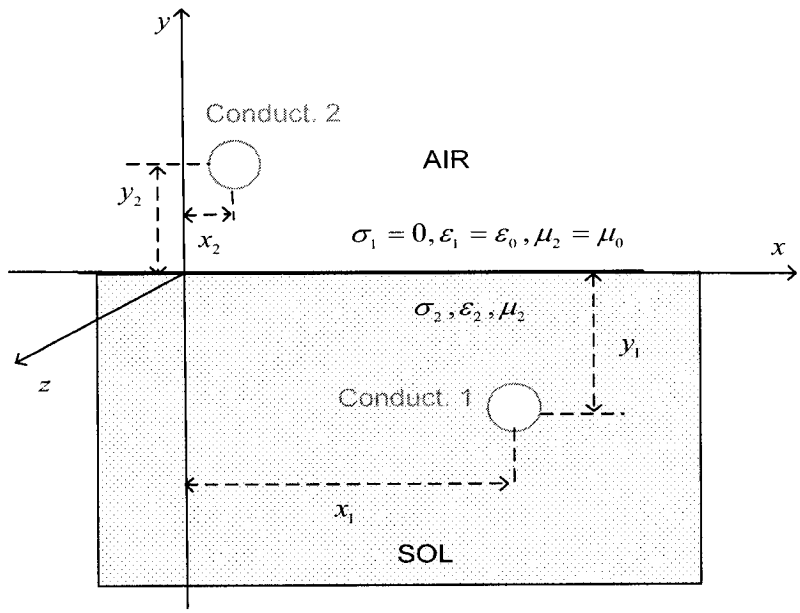


Figure 2. 2 Configuration pour perturbateur dans le sol

On achève en changeant la variable d'intégration de s à $-s$. les relations obtenues suite à ces modifications sont ci dessous :

2.1 <u>Champ dans l'air produit par un fil souterrain</u> : E_{+-}

$$\begin{cases} E_{+-} = \dfrac{2A}{j\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) - y_2\sqrt{s^2 - k_2^2} + y_1\sqrt{s^2 - k_1^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds, \\ \mathrm{y}_2 \geq 0 \ , y_1 \leq 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

2.2 <u>Champ dans le sol produit par un fil souterrain</u> : E_{--}

$$\begin{cases} E_{--} = A\left[H_0^{(1)}\left(k_1 r\right) - H_0^{(1)}\left(k_1 r'\right)\right] + \cdots \\ 2\dfrac{A}{j\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) + \left(y_2 + y_1\right)\sqrt{s^2 - k_1^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds \quad , \mathrm{y}_2 \leq 0 \ , y_1 \leq 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

On se rappelle, encore une fois, que toutes ces relations sont en système d'unité gaussien. Nous passons au système international dans le paragraphe qui suit.

2.1.3 Expressions des champs dans le système international (S.I.)

Pollaczek ayant dérivé les expressions (2.11) à (2.19) en CGS, nous changeons en S.I car il est le plus usuel en réseaux électriques. Ceci nous sera aussi utile pour la comparaison de la formule d'impédance mutuelle dérivée du champ et celle utilisée dans la littérature.

Les équations de Maxwell pour un milieu non dispersif et isotrope, pour les deux systèmes (CGS et SI) sont présentées dans le tableau 2.1 ci-dessous. Ce dernier est une adaptation à partir du chapitre 3, section sur les unités dans [23].

Tableau 2. 1 Équations de Maxwell en CGS et MKSA

	S.I	**C.G.S**
Dérivé	$\nabla \cdot \varepsilon E = \rho$ $\nabla \cdot \mu H = 0$ $\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$ $\nabla \times H = \frac{J}{A} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$	$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$ $\nabla \cdot \mu H = 0$ $\nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mu H}{\partial t}$ $\nabla \times H = \frac{4\pi J}{cA} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$
Intégral	$\oint_s Dds = \int_V \rho dV$ $\oint Bds = 0$ $\oint Edl = -\frac{d}{dt}\int_s Bds$ $\oint_s Hdl = \int_s \frac{J}{s} ds + \frac{d}{dt}\int_s Dds$	$\oint_s Eds = \int_V 4\pi\rho dV$ $\oint Bds = 0$ $\oint Edl = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s Bds$ $\oint_s Hdl = \frac{4\pi}{c}\int_s \frac{J}{s} ds + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s Dds$
Dans ces relations S : La surface, V : le volume découlant de la surface fermée S, c : la célérité.		

Le passage au système MKSA, implique le changement de la constante A défini en (2.14) et une réévaluation des constantes k_2 et k_1. Nous considérons, dès cet instant que la perméabilité relative μ dans les deux milieux est 1, selon l'une des hypothèses.

En S.I, (2.3) change, selon le tableau ci-dessus. Il en découle des changements qui ont comme effet de modifier la constante A dans (2.14). Le résultat est :

$$A\big|_{S.I} = \frac{\omega\mu J}{4} \tag{2.20}$$

Avec J : le courant dans l'axe z dans le conducteur qui crée le champ.

En portant (2.20) en lieu et place de A dans (2.11) à (2.19), on trouve les champs pour le système international d'unité. Pour les quatre cas sous analyse :

$$\begin{cases} E_{++} = \dfrac{\omega\mu J}{4}\left[H_0^{(1)}\left(k_2 r\right) - H_0^{(1)}\left(k_2 r'\right)\right] + \ldots \\ \dfrac{\omega\mu J}{j2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) - \left(y_2 + y_1\right)\sqrt{s^2 - k_2^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds \ , \\ \mathrm{y}_2 \geq 0 \ , y_1 \geq 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

$$\begin{cases} E_{-+} = \dfrac{\omega\mu J}{j2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) + y_2\sqrt{s^2 - k_1^2} - y_1\sqrt{s^2 - k_2^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds, \\ \mathrm{y}_2 \leq 0 \ , y_1 \geq 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{cases} E_{+-} = \dfrac{\omega\mu J}{j2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) - y_2\sqrt{s^2 - k_2^2} + y_1\sqrt{s^2 - k_1^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds, \\ \mathrm{y}_2 \geq 0 \ , y_1 \leq 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} E_{--} = \dfrac{\omega\mu J}{4}\left[H_0^{(1)}\left(k_1 r\right) - H_0^{(1)}\left(k_1 r'\right)\right] + \ldots \\ \dfrac{\omega\mu J}{j2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left(js\left(x_2 - x_1\right) + \left(y_2 + y_1\right)\sqrt{s^2 - k_1^2}\right)}{\sqrt{s^2 - k_1^2} + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds \ , \\ \mathrm{y}_2 \leq 0 \ , y_1 \leq 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

2.2 Expressions et paramètres pour l'impédance mutuelle de retour par la terre

Le champ électrique et le potentiel scalaire sont en relation :

$$E = -gradV \tag{2.25}$$

En définissant l'impédance par unité de longueur par :

$$Z = \frac{Z_{total}}{l}, \tag{2.26}$$

Avec , l , la longueur selon l'axe des conducteurs, donc l'axe z. Et se rappelant par ailleurs que E et J sont suivant z (E_z, J_Z), on a :

$$E = -\frac{\partial}{\partial z}V; \tag{2.27}$$

On a pour l'impédance par unité de longueur :

$$Z = -\frac{E}{J} \tag{2.28}$$

En portant (2.21) à (2.24) dans (2.28) on a les expressions complètes des impédances mutuelles de retour par la terre entre les éléments en jeu. Par exemple l'impédance entre un fil aérien et souterrain est donné en portant (2.22) dans (2.28) :

$$\begin{cases} Z_{-+} = +j\dfrac{\omega\mu}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\exp\left(js\left(x_2-x_1\right)+y_2\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}-y_1\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}\right)}{\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}+\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}}ds, \\ \mathrm{y}_2 \le 0\ ,\ y_1 \ge 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

L'expression (2.29) est l'impédance mutuelle de retour par la terre entre un fil aérien et souterrain. On note qu'en faisant les substitutions entre (2.23) et (2.28) on aboutit à la même expression. La position du conducteur source de champ (perturbateur) ou victime, importe peu. Ce qui est conforme avec les propriétés de la fonction de Green.

Les autres impédances (air-air, sol-sol) peuvent être aisément dérivées par analogie, on introduit les indices du chapitre 1.

- Deux conducteurs dans le sol :

$$\begin{cases} Z_{i-j}^{retTerre-mut} = \dfrac{\omega\mu}{4}\left[H_0^{(1)}\left(k_1 r'\right)-H_0^{(1)}\left(k_1 r\right)\right]+\ldots \\ j\dfrac{\omega\mu}{2\pi}\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty}\dfrac{\exp\left(js\left(x_2-x_1\right)+\left(y_2+y_1\right)\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}\right)}{\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}+\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}}ds\ , \\ \mathrm{y}_2 \le 0\ ,\ y_1 \le 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

- Deux conducteurs dans l'air :

$$\begin{cases} Z_{12}^{retTerre-mut} = \dfrac{\omega\mu}{4}\left[H_0^{(1)}\left(k_2 r'\right)-H_0^{(1)}\left(k_2 r\right)\right]+\ldots \\ j\dfrac{\omega\mu}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\exp\left(js\left(x_2-x_1\right)-\left(y_2+y_1\right)\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}\right)}{\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}+\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}}ds\ , \\ \mathrm{y}_2 \ge 0\ ,\ y_1 \ge 0 \end{cases} \tag{2.31}$$

- Un conducteur dans le sol et un autre dans l'air :

$$\begin{cases} Z_{i-j}^{retTerre-mut} = +j\dfrac{\omega\mu}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\exp\left(js\left(x_2-x_1\right)+y_2\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}-y_1\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}\right)}{\sqrt{s^2-k_1^{\,2}}+\sqrt{s^2-k_2^{\,2}}}ds, \\ \left\{\mathrm{y}_2 \le 0\ , y_1 \ge 0, k_1 = k_{sol}\right\} ou \left\{\mathrm{y}_1 \le 0\ , y_2 \ge 0, k_2 = k_{sol}\right\} \end{cases} \tag{2.32}$$

Pour les impédances propres de retour par la terre, on remplace dans (2.31) et (2.30), selon le cas :

$$\begin{aligned} &\left|x_2 - x_1\right| = rayon \\ &y_1 = y_2, \end{aligned} \tag{2.33}$$

Il faut se rappeler que dans (2.30) à (2.32) :

- La fonction de Hankel est liée à celle de Bessel par :

$$H_0^{(1)}\left(kr\right) = -j\frac{2}{\pi}K_0\left(jkr\right); \tag{2.34}$$

- Le paramètre k est :

$$k = \sqrt{-\frac{j\omega\mu}{\rho}}; \tag{2.35}$$

- Une relation entre k et χ, évoqué dans (1.42) et parfois noté m, voir [4], est telle que :

$$k^2 = -\chi^2; \tag{2.36}$$

- Pour l'air, on admet que le paramètre k_{air} est très négligeable (très mauvais conducteur) [5]:

$$\begin{cases} \sqrt{s^2 - k_{air}^{\,2}} \approx s & s \ge 0 \\ \sqrt{s^2 - k_{air}^{\,2}} \approx -s & s < 0 \end{cases}; \tag{2.37}$$

- En fin, on peut appliquer les relations suivantes [7]:

$$\begin{cases} \sqrt{s^2-k^2} \approx s & \text{Pour } s \to \infty \\ \sqrt{s^2-k^2} \approx -s & \text{Pour } s \to -\infty \\ \sqrt{s^2-k^2} \approx -jk & \text{Pour } s = 0 \end{cases} . \tag{2.38}$$

En appliquant les relations (2.34) à (2.38), on retrouve les formules des impédances dans les formes couramment connues dans la littérature comme étant les fameuses intégrales de Pollaczek : [4], [15], [24], etc.

2.3 Nouvelles approximations de l'impédance mutuelle

Quelques résultats de Pollaczek, non encore suffisamment exploités, à ce jour, sont les développements en série des champs électriques trouvés ci haut. En effet, beaucoup de travaux pour trouver les formules analytiques ont été menés, aussi bien pour les conducteurs dans l'air que pour les conducteurs dans le sol [14], dans le sol et dans l'air [13]. Mais il n'a pas été exploité, à notre connaissance, les formules des développements en série de Pollaczek. Le but de ce paragraphe est alors d'extraire les formules analytiques des impédances mutuelles de retour par la terre à partir des développements en série des champs électriques par Pollaczek. Comme toute approximation, ces derniers comprendront les limitations que nous allons cernées en évaluant leur performance par rapport aux formules approximatives connues et par rapport à la valeur la plus précise possible de l'impédance que nous trouverons par les méthodes numériques exposées dans ce travail.

2.3.1 Développements en série des expressions des champs par Pollaczek en CGS

Les développements en série des expressions des champs électriques dans toutes les régions de l'espace sont définis comme suit par Pollaczek [7] :

- *Champ dans l'air dû à un conducteur aérien :*

En définissant les termes ;

$$\alpha = k\left[x - j\left(y_1 + y_2\right)\right]$$

$$\beta = k\left[-x - j\left(y_1 + y_2\right)\right]$$

$$x = \left|x_1 - x_2\right|$$

Pour les très grandes valeurs de α et β, on a :

$$\left|\beta\right| = \left|\alpha\right|,$$

Et le développement asymptotique introduit par Pollaczek est [7] :

$$\begin{cases} E_{++} \cong \dfrac{\omega J}{jc^2} 2 \left\{ \begin{array}{l} \ln\sqrt{\dfrac{x^2 + \left(y_1 + y_2\right)^2}{x^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}} - \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} - \ldots \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{2^{-2r+1}(2r-2)!2r!}{r!(r-1)!}\left(\frac{1}{\alpha^{2r+1}} + \frac{1}{\beta^{2r+1}}\right) \end{array} \right\} \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, k^2\sqrt{x^2 + \left(y_1 + y_2\right)^2} \gg 1 \end{cases} \tag{2.39}$$

En ne retenant que le premier terme de la sommation dans (2.39), on a une approximation du champ dans l'air dû à un conducteur aérien :

$$\begin{cases} E_{++} \approx \dfrac{\omega J}{jc^2} 2 \left\{ \begin{array}{l} \ln\left(\sqrt{\dfrac{x^2 + \left(y_1 + y_2\right)^2}{x^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}}\right) - \dfrac{2}{k^2} \dfrac{x^2 - \left(y_1 + y_2\right)^2}{\left[x^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2\right]^2} + \ldots \\ 2jk\left(y_1 + y_2\right)\left(\dfrac{1}{k^2\left[x^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2\right]} + \dfrac{3x^2 - \left(y_1 + y_2\right)^2}{k^2\left[x^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2\right]}\right) \end{array} \right\} \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, k^2\sqrt{x^2 + \left(y_1 + y_2\right)^2} \gg 1 \end{cases} \tag{2.40}$$

D'autres formules qu'on peut noter sont :

- Pour les petites valeurs de $|\beta| = |\alpha| <<<$:

$$\begin{cases} E_{++} \approx \dfrac{\omega J}{jc^2}\left\{2\ln\left(\dfrac{2}{\gamma|k|\sqrt{x^2+(y_1-y_2)^2}}\right)-\dfrac{j\pi 2}{2}+1-\dfrac{4jk(y_1+y_2)}{3}\right\} \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}. \tag{2.41}$$

- Pour

$$\begin{cases} \left|\dfrac{y_1+y_2}{x}\right| < 0.05 \\ |kx| < 3 \end{cases}, \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} E_{++} \approx \dfrac{\omega J}{jc^2}\left\{-\dfrac{4}{k^2x^2}+4\dfrac{\mathrm{kei}'(|kx|)-j\,\mathrm{ker}'(|kx|)}{|kx|}\right\} \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, |k(y_1+y_2)| \ll 1 \end{cases}. \tag{2.43}$$

En introduisant les fonctions de Bessel :

$$\begin{cases} j\mathrm{kei}'(|kx|)+\mathrm{ker}'(|kx|) = -\sqrt{j}K_1\left(|kx|\sqrt{j}\right) \\ \mathrm{kei}'(|kx|)-j\,\mathrm{ker}'(|kx|) = -\sqrt{-j}K_1\left(|kx|\sqrt{j}\right) \end{cases},$$

(2.43) devient alors :

$$\begin{cases} E_{++} \approx -\dfrac{4\omega J}{jc^2}\left\{\dfrac{1}{k^2x^2}+\dfrac{\sqrt{-j}K_1\left(|kx|\sqrt{j}\right)}{|kx|}\right\} \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, |k(y_1+y_2)| \ll 1 \end{cases} \tag{2.44}$$

- *Champ dans le sol (l'air) dû à un conducteur aérien (souterrain)* :

Le développement en série du champ dans le sol dû à un conducteur aérien en (2.17), donne en deuxième approximation [7] :

$$\begin{cases} E_{-+} \approx \dfrac{A}{j\pi}\left\{F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5\right\} \\ F_1 = -\left(1 - \dfrac{k^2\left(x - j\left(h_2 + h_1\right)\right)^2}{8} - \dfrac{k^2 h_2^2}{2}\right)\ln\left(\dfrac{\Upsilon k}{2}\left(x + j\left(h_2 - h_1\right)\right)\right) \\ F_2 = -\left(1 - \dfrac{k^2\left(x + j\left(h_2 + h_1\right)\right)^2}{8} - \dfrac{k^2 h_2^2}{2}\right)\ln\left(\dfrac{\Upsilon k}{2}\left(-x + j\left(h_2 - h_1\right)\right)\right) \\ F_3 = 1 - \dfrac{4jk\left(h_2 + h_1\right)}{3} \\ F_4 = -\dfrac{5}{16}k^2 x^2 \\ F_5 = -\dfrac{1}{16}k^2\left(19h_2^2 - 2h_1 h_2 - 5h_1^2\right) \\ h_2 \le 0\ ,\ h_1 \ge 0, \\ A = \dfrac{J\pi\omega}{c^2} \\ \Upsilon = \exp\left(\gamma_{Euler}\right) = \exp\left(0.577215664901532\right) = 1.78107241799020 \end{cases} \tag{2.45}$$

Où Υ est une constante liée au nombre d'Euler: γ_{Euler} =0.5772156649015328

Pour le champ dans l'air dû à un conducteur souterrain, il suffit d'inter changer h_1 et h_2 dans (2.45).

- *Champ dans le sol dû à un conducteur souterrain*

Une observation importante relevée par Pollaczek est que le champ secondaire produit au point $(0,h_1)$, dans le sol (l'air) par un fil conducteur situé dans le sol (l'air) au point (x,h_2) coïncide avec le champ secondaire, provoqué au point (x,h_2+h_1) dans le sol (l'air) par un conducteur situé en $(x,0)$ dans le plan de la surface de la terre. Pour rappel le champ secondaire est celui qui est dû à la présence du sol.

$$E_{--}(x;h_2,h_1)=E_{-+}(x;h_2+h_1,0)+A\left[\mathrm{H}_0^{(1)}(kr)-\mathrm{H}_0^{(1)}(kr')\right] \qquad (2.46)$$

2.3.2 Expressions des champs et impédances mutuelles approximées en MKSA

Comme précédemment, nous passons en système MKSA, en changeant la constante $A=\dfrac{\omega\pi J}{c^2}$ par $A\big|_{MKSA}=\dfrac{\omega\mu J}{4}$ dans les expressions d'intérêt de (2.39) à (2.46), puis en utilisant les relations (2.34) à (2.38), on a des nouvelles formules approximatives des impédances ci dessous. Leurs performances seront évaluées après établissement d'une méthode numérique performante qui sera établie dans le chapitre suivant :

Nouvelle formule analytique approximative de l'impédance mutuelle de retour par la terre entres conducteurs aérien et souterrain.

$$
\begin{cases}
Z_{-+}\left(x,h_2,h_1,\rho_{sol},f\right) \approx j\dfrac{\mu\omega}{4\pi}\left\{G_1+G_2+G_3+G_4+G_5\right\} \\
G_1 = -\left(1+\dfrac{\chi^2\left(x-j\left(h_2+h_1\right)\right)^2}{8}+\dfrac{\chi^2 h_2^2}{2}\right)\ln\left(-\dfrac{\Upsilon\chi}{2}\left(x+j\left(h_2-h_1\right)\right)\right) \\
G_2 = -\left(1+\dfrac{\chi^2\left(x+j\left(h_2+h_1\right)\right)^2}{8}+\dfrac{\chi^2 h_2^2}{2}\right)\ln\left(-\dfrac{\Upsilon\chi}{2}\left(-x+j\left(h_2-h_1\right)\right)\right) \\
G_3 = 1+\dfrac{4j\chi\left(h_2+h_1\right)}{3} \\
G_4 = +\dfrac{5}{16}\chi^2 x^2 \\
G_5 = +\dfrac{1}{16}\chi^2\left(19h_2^2-2h_1h_2-5h_1^2\right) \\
h_2 \le 0\ ,\ h_1 \ge 0, \\
\Upsilon = \exp\left(\gamma_{Euler}\right) = 1.78107241799020 \\
\chi^2 = -j\dfrac{\omega\mu_0}{\rho_{sol}} \\
\chi = \sqrt{-j\dfrac{\omega\mu_0}{\rho_{sol}}}
\end{cases}
\tag{2.47}
$$

Où Υ est une constante liée au nombre d'Euler définie dans (2.45). Pour le champ dans l'air dû à un conducteur souterrain, il suffit encore une fois d'inter changer h_1 et h_2 comme dans (2.45).

Nouvelle formule approximative de l'impédance mutuelle de retour par la terre entres conducteurs souterrains

$$Z_{--}\left(x;h_2,h_1,\rho_{sol},f\right)=\begin{cases} Z_{-+}\left(x,h_2+h_1,0,\rho_{sol},f\right)+\cdots \\ j\dfrac{\omega\mu_0}{2\pi}\left[K_0\left(-j\chi r\right)-K_0\left(-j\chi r'\right)\right] \end{cases} \tag{2.48}$$

Dans lequel $Z_{-+}\left(x,h_2+h_1,0,\rho_{sol},f\right)$ est évaluée par une formule appropriée (analytique, (2.47), ou autre).

2.4 Liens entre la formule de Pollaczek, Carson et Formules de CCITT

2.4.1 Reformulation de l'intégrale de Pollaczek

La forme de l'intégrale de Pollaczek usuellement reconnue qui a été obtenue en portant (2.34) à (2.38) dans (2.32), exprime l'intégrale de l'impédance mutuelle Z_{-+} par unité de longueur entre ligne et câble :

$$Z_{-+}=+j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)ds \tag{2.49}$$

Où on a défini :

$$f(s)=\frac{\exp\left(-y_1|s|+y_2\sqrt{s^2+\chi^2}\right)}{|s|+\sqrt{s^2+\chi^2}}\exp\left(jsx\right)ds \tag{2.50}$$

En divisant en deux intervalles on a :

$$Z_{-+}=+j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}f^-(s)ds+\int_{0}^{\infty}f^+(s)ds\right] \tag{2.51}$$

Où l'on a défini :

$$f^{-}(s)=\frac{\exp\left(+h_1 s-h_2\sqrt{s^2+\chi^2}\right)}{-s+\sqrt{s^2+\chi^2}}\exp(jsx)\,ds$$

$$f^{+}(s)=\frac{\exp\left(-h_1 s-h_2\sqrt{s^2+\chi^2}\right)}{s+\sqrt{s^2+\chi^2}}\exp(jsx)\,ds$$

Par ailleurs on a l'identité :

$$\cos(sx)=\frac{1}{2}\left[\exp(jsx)+\exp(-jsx)\right] \tag{2.52}$$

En posant, la partie imaginaire de χ^2 :

$$m^2=\mathrm{Im}\left(\chi^2\right) \tag{2.53}$$

En portant (2.53) et (2.52) dans (2.51) puis en le combinant (en changeant le signe d'intégration pour le premier terme $f^{-}(s)$), on a :

$$Z_{-+}=+j\frac{\omega\mu_0}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-h_1 s-h_2\sqrt{s^2+jm^2}\right)}{s+\sqrt{s^2+jm^2}}\cos(sx)ds\\ h_1\leq 0\ (\mathrm{sol}),\ h_1\geq 0(l'air)\end{array}\right\} \tag{2.54}$$

En faisant le changement de variable

$$\begin{cases}s=m\cdot u\\ ds=m\cdot du\end{cases}$$

Et considérant l'identité suivante :

$$s+\sqrt{s^2+j}=\frac{j}{-s+\sqrt{s^2+j}}$$

On a :

$$Z_{-+} = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\left\{\int_0^\infty \begin{matrix}\left[-s+\sqrt{s^2+j}\right]\exp\left[-h_1 ms\right]\times\cdots \\ \exp\left[-h_2 m\sqrt{s^2+j}\right]\cos\left(mxs\right)\end{matrix} ds\right\} \tag{2.55}$$

Avec :

$$x = \left|x_2 - x_1\right| \tag{2.56}$$

$$m = \sqrt{\omega\mu_0 / \rho} \tag{2.57}$$

Cette expression est appropriée pour une évaluation numérique. On note la similitude avec celle de Nguyen [25] pour les câbles souterrains et la parfaite concordance avec celle de Uribe [12] pour le câble et la ligne. Elle est très oscillante et cela d'une manière irrégulière suivant les valeurs m, x, la hauteur h_1 et la profondeur h_2

2.4.2 Pollaczek vs CCITT

L'expression de l'impédance mutuelle de retour par la terre établie par le CCITT [5] est identique à celle de Pollaczek transformée en (2.54). Notons que les transformations menant à (2.54) n'ont nécessité aucune approximation. On considèrera alors que les hypothèses prises par CCITT et Pollaczek s'appliquent pour cette expression de l'impédance mutuelle. Ceci est vrai pour les conducteurs dans l'air, dans le sol ou les deux.

2.4.3 Pollaczek vs Formule de Carson

Comme reconnu par Ametani [4], la formule de Carson pour l'impédance mutuelle entre élément aérien et souterrain ($h_2 \leq 0$), est un cas particulier de celle de Pollaczek quand on fait l'approximation :

$$\sqrt{s^2 + jm^2} \approx |s|, \tag{2.58}$$

Ceci est valide pour :

$$|s| \gg |m| \tag{2.59}$$

Cette approximation limite l'expression de l'impédance mutuelle de retour par la terre aux cas de basse fréquence ou sol très rocheux ou sec. (Voir tableau 2.2). En effet, la formule n'est pas précise car les erreurs de cette approximation pour les câbles souterrains évaluées dans [4] et [10] peuvent atteindre 25%.

Finalement, alors que Pollaczek considère le sol comme semi-conducteur, il faut noter que dans la formule de Carson pour les lignes aériennes on considère le sol comme bon conducteur [4], i.e. :

$$\frac{1}{\rho_{sol}} \gg \omega\varepsilon_{sol}, \tag{2.60}$$

La fréquence critique f_{crit} qui découle de cette approximation dans la formule de Carson serait :

$$f_{crit} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_{sol}\rho_{sol}}, \tag{2.61}$$

Où $\varepsilon_{sol} = \varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$

$$f_{crit}\left(MHz\right) = 1.7975 \times \sigma\left(\Omega^{-1}m^{-1}\right) \times 10^4\ MHz \tag{2.62}$$

2.4.4 Pollaczek vs Sunde

Dans toutes les expressions présentées jusqu'ici, on considère que le courant de déplacement dans le sol est négligeable. Pour certains types de sol, ayant une permittivité relative élevée, ce courant ne devrait pas être négligé.

Ceci impliquerait des modifications qui mènent à la formule de Sunde rapporté dans [26] et [27] :

$$\sqrt{s^2 + jm^2} \rightarrow \sqrt{s^2 + jm^2 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{r,sol}} \tag{2.63}$$

2.5 Limitations dues aux hypothèses dans les expressions des impédances

Les expressions des paramètres étant bien connues et analysées, nous pouvons passer à leurs évaluations. Mais auparavant nous devons rappeler les limitations et en tirer les plages de variation de paramètres pour mieux apprécier la performance des méthodes d'évaluation.

Comme pour toute modélisation, il s'impose de définir les limites de son applicabilité. Le premier type de limitation vient de la formulation des équations (Maxwell) décrivant le phénomène lui-même ; et elles sont dues aux hypothèses tant physiques (électromagnétiques) que mathématiques (approximations diverses). Nous ne pouvons rien y faire car les paramètres des câbles découlent directement de ces équations-là. Ces hypothèses vont directement limiter la plage d'utilisation du modèle de ligne utilisant les paramètres de câbles sous étude.

Le second type de limitation découle des imperfections de calcul pour l'évaluation numérique. Il sera donc rechercher la précision la meilleure, et raisonnable, pour minimiser l'impact des ces imperfections. Cependant il faut se rappeler qu'un modèle est utilisé :

- Pour une application donnée (ici, une étude transitoire, transfert de puissance, etc.). On aura, par exemple, un plafond des valeurs des fréquences ;
- Dans un contexte donné : avec d'autres modèles ayant déjà certaines limites ; il ne servirait en rien de pousser plus loin la précision d'un modèle de ligne si celles des transformateurs ou des disjoncteurs ne peuvent être améliorées ;
- Et enfin, les géométries à considérer sont limitées pour des applications pratiques et réalistes. Les distances entre conducteurs, par exemple, ne peuvent pas s'étendre indéfiniment.

De ce qui précède, on ne cherchera pas la précision de l'évaluation numérique au-delà de ce qui peut pratiquement être rencontré.

On rappelle d'abord la plage des paramètres due aux hypothèses et suivra après un survol de limites supérieures et inférieurs des certains paramètres.

Nous considérons les distances transversales des structures sous étude. C'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à la longueur de la ligne. Dans la Figure 2.2, c'est le plan(x, y). La définition des distances impliquées n'est pas simple quand on considère l'interaction entre plusieurs structures [5], ainsi l'analyse faite ici sera approximative et qualitative. Cependant, en considérant quelques ordres de grandeur de plus que la valeur des hypothèses (10 à 100 fois et plus) nous pouvons évaluer qualitativement si les hypothèses de modélisation sont respectées.

Les équations suivantes traduisent qualitativement les limitations dues aux hypothèses :

- Hypothèses Quasi-statique et quasi-TEM :

  Les distances dans le plan transversal entre les conducteurs doivent être inférieures à la longueur d'onde associée à la fréquence sous considération [5] (Hypothèse B, page 65 dans [5]). On doit donc satisfaire (1.13) dans l'isolant et d'une manière analogue, (1.14) dans le sol. Les expressions sont :

  - Pour deux conducteurs dans l'air :

$$\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \ll f\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \tag{2.64}$$

  - Pour deux conducteurs dans le sol :

  En considérant le sol avec une conductibilité finie comme préconisé par Pollaczek [7] on aura :

$$\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \ll \frac{\pi\sqrt{8}}{\sqrt{\omega \mu_{sol} \sigma_{sol}}} \tag{2.65}$$

  - Cas de deux conducteurs dans le sol et dans l'air :

  Pour ce cas, la définition n'est pas simple. Pour une estimation qualitative du respect des hypothèses, nous retenons comme suggéré dans [5] les distances transversales impliquées : une première distance de la hauteur dans l'air au point d'impact sur le sol et une deuxième dans le sol, du même point d'impact à la profondeur dans le sol :

$$\begin{cases} \left[\left(\dfrac{h_1}{h_1+h_2}\right)\sqrt{\left(h_1+h_2\right)^2+\left(x_2-x_1\right)^2}\right] \ll \left(f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\right)^{-1} \\ \left[\left(\dfrac{h_2}{h_1+h_2}\right)\sqrt{\left(h_1+h_2\right)^2+\left(x_2-x_1\right)^2}\right] \ll \dfrac{2\pi}{\sqrt{f\mu_{sol}\sigma_{sol}}} = \dfrac{\pi\sqrt{8}}{\sqrt{\omega\mu_{sol}\sigma_{sol}}} \end{cases} \tag{2.66}$$

- Approximation consistant à négliger le champ électrique dans le sol à certaines profondeurs :

  De [5] on déduit que la fréquence maximale doit assurer tout de même une profondeur de pénétration minimale assez élevée pour qu'on puisse négliger le champ même si (2.65) ou (2.66) ne sont pas satisfaites pour des distances le plus profondes dans le sol . On a donc :

$$\delta\min = \frac{1}{\sqrt{f\pi\mu\sigma}} >> h_{\max} \tag{2.67}$$

  Où $h_{\max}$ est la profondeur la plus grande dans le sol pour tous les éléments des structures impliquées.

2.6 Valeurs des paramètres pour les géométries et conditions d'opération pratiques

2.6.1 Valeurs pratiques des paramètres f , ρ_{sol} , h_1 , h_2 , x

- Fréquence pour étude transitoire : f

La fréquence maximale à laquelle il faut calculer les paramètres dépend de la composante fréquentielle la plus élevée dans l'étude transitoire. Cette dernière doit être augmentée dans le cas du modèle à large bande (Wide band) pour une bonne approximation des éléments des matrices $\mathbf{H}$ et $\boldsymbol{Y}_c$, comme souligné auparavant. Le facteur d'augmentation pouvant être environ de 1.5 :

$f_{eval\ Param} = K \times f_{\max -Transitoire} \qquad K \approx 1.5$

En considérant les transitoires dues aux courants induits de la foudre, classées comme transitoires à montées rapides (« Fast Front Transients ») [28] $f_{\max -Transitoire} = 1MHz$.

On aura, à assurer une évaluation des paramètres à une fréquence $f_{eval\ Param}$ d'environ : $f_{eval\ Param} = 1.5MHz$

- Résistivité du sol : ρ_{sol}

Selon le type de sol, la valeur de résistivité est représentée dans le tableau 2.2 formé à partir de la norme CSA C22.1-98 [29] et du chapitre 4 de Glover et Sarma [30]. On note que, pour le sol usuellement rencontré, la résistivité moyenne ρ_{moyen} est $100\Omega m$. Une plage à considérer pour des cas souvent rencontrés serait :

$\rho \approx [10,1000]\Omega m$

Tableau 2. 2 Valeurs des résistivités selon le type du sol. Adapté de [30] et [29].

Type de sol	**Résistivité : ρ (Ωm)**
Eau de mer	*0.01-1.0*
Sol organique mouillé	*10*
Sol marécageux	*10-100*
Sol humide	*100*
Sol usuel (moyen)	*100*
Sol sec	*1000*
Sol en Pierre concassée	3000
Sol rocheux	10^4
Sol gréseux	10^9

- Les hauteurs maximales de pylônes et profondeur des câbles : h_1 et h_2
  - Ligne aérienne :

Pour les hauteurs, on se base sur les données d'une configuration typique pour une ligne de 880 kV. [31] : $h_1 = 31m$.

La hauteur maximale que nous retenons est alors $h_{1,\max} = 70\,\text{m}$. La hauteur minimale dépend de la tension. En lien avec l'Art. 36-110 de la norme CSA C22.1-98 [29], on peut noter pour moins de 15kV : $h_{1,\min} = 2.9m$. La plage pour la hauteur serait : $h_1 \approx [2,70]m$

  - Câble souterrain :

Pour les câbles, il faut noter que la majorité des normes imposent une profondeur minimale dépendant des conditions à la surface du sol et de la canalisation utilisée : [29], [32] et [33], pour ne citer que ceux-là. De ces 3 normes, la profondeur minimale retenue est de $h_2 = 0.45m$.

Les valeurs limites que nous retenons sont celles en lien avec l'article Art. 12-012 de la norme CSA C22.1-98 [29]. Une plage de valeur de profondeur qu'il faut minimalement assurées est alors environ :

$h_2 \approx [0.3, 2.5]m$.

- Distance horizontale à considérer : x

La distance horizontale maximale dépend du niveau de la tension. Il faut assurer un seuil maximal de niveau de champ au bout de l'emprise de droit de passage (ROW : « Right-Of-Way », qui inclut le corridor). Rusch suggère [31] pour une tension de 880kV : $x = 138m$ pour un niveau de champ de $0.5\,{}^{kV}\!/_{m}$. Et il considère que la ligne est au centre du corridor. Un ouvrage à la limite de l'emprise de droit de passage sera donc à une distance de $x_{\max} = {}^{138}\!/_{2} \approx 70m$.

La valeur minimale de la distance horizontale dépend de la configuration et peut être très petite ou nulle. La plage serait alors : $x \approx [0,80]m$.

2.6.2 Variations des paramètres vs hypothèses de modélisation

Les variations des paramètres étant connus, il est pertinent de vérifier si les hypothèses de modélisation (liées au mode quasi-TEM) dans (2.64) à (2.67) restent valides pour ces dernières. Nous utilisons pour cela la fonction « contour map » de MATLAB [34].

En récapitulant, les variations (approximativement) des paramètres pour des cas pratiques sont :

$$\begin{cases} f_{eval\ Param} = 1.5\,MHz \\ \rho = [10,1000]\,\Omega m \\ h_1 = [2,70]\,m \\ h_2 = [0.3,2.5]\,m \\ x = [0,80]\,m \end{cases} \tag{2.68}$$

Et les conditions imposées par les limitations dues aux hypothèses sont approximativement :

- Pour deux conducteurs, un dans le sol et un dans l'air, on doit avoir :

$$\begin{cases} \left[\left(\dfrac{h_1}{h_1+h_2}\right)\sqrt{(h_1+h_2)^2+x^2}\right]\left(f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\right) < 1 \\ \left[\left(\dfrac{h_2}{h_1+h_2}\right)\sqrt{(h_1+h_2)^2+x^2}\right]\dfrac{\sqrt{\omega\mu_{sol}\sigma_{sol}}}{\pi\sqrt{8}} < 1 \end{cases} \tag{2.69}$$

- Pour deux conducteurs dans le sol :

$$\frac{\sqrt{\omega\mu_{sol}\sigma_{sol}}}{\pi\sqrt{8}}\sqrt{(h_2-h_1)^2+x^2} < 1 \tag{2.70}$$

- Pour deux conducteurs dans l'air :

$$f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{(h_2-h_1)^2+x^2} < 1 \tag{2.71}$$

En combinant (2.68), et respectivement (2.69), (2.70) et (2.71), pour chaque cas, on a les Figures 2.3 à 2.11 dans lesquelles on dénote le niveau d'observance des hypothèses par

EXCELL : Excellent , ACCEPT : Acceptable et H.-LIM. : Hors limite (voir la barre à droite de chaque figure). Sur chaque zone on associe un ton de gris particulier comme montré dans la Figure 2.3. Chaque paire des points définie par l'abscisse et l'ordonnée, par exemple $\left(\rho(\Omega m), h_2(m)\right)$ dans la Figure 2.3, est classée dans une zone dont le degré d'observance d'hypothèse est déterminé par le ton de gris associé à la zone. La valeur limite est 1. Les valeurs acceptables sont < 1.

- Pour deux conducteurs dans le sol :

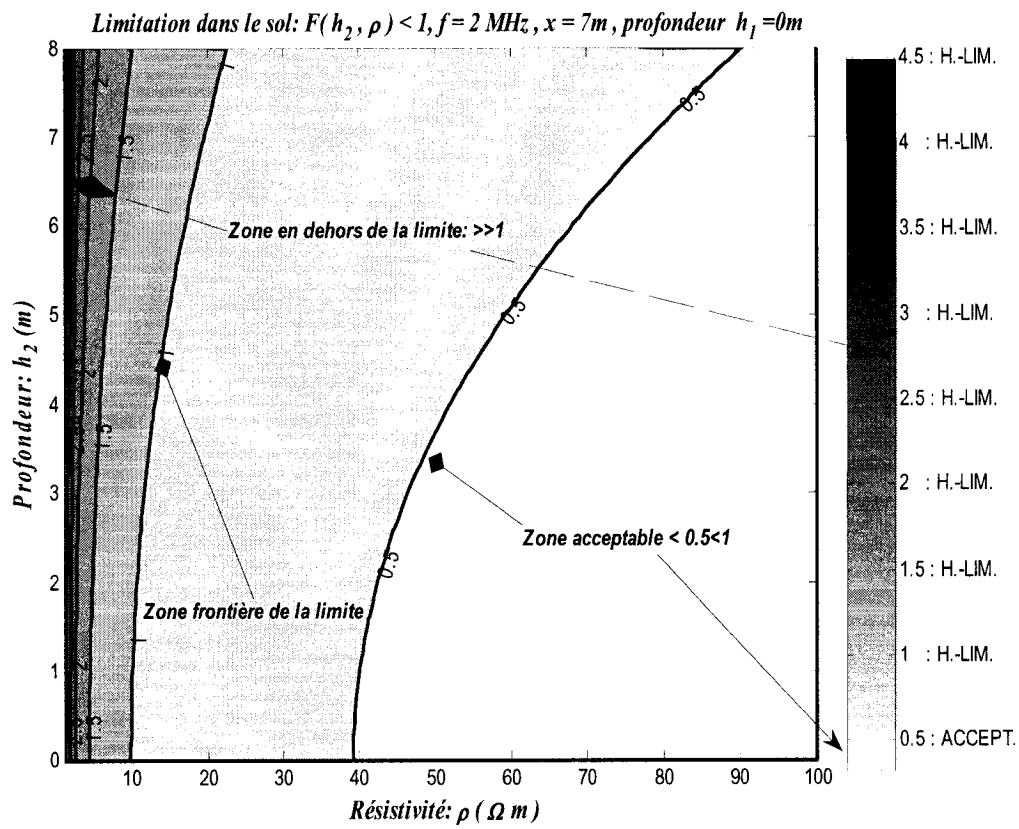


Figure 2. 3 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, pour les résistivités $\rho_{sol} \leq 10\Omega m$ avec : $f = 2MHz$, $\rho_{sol} = [1,100]\Omega m$, $x = 7m$, $h_1 = 0m$ et $h_2 = [0,3]m$ (profondeurs). Avec EXCELL : Excellent, ACCEPT : Acceptable et H.-LIM. : Hors limite

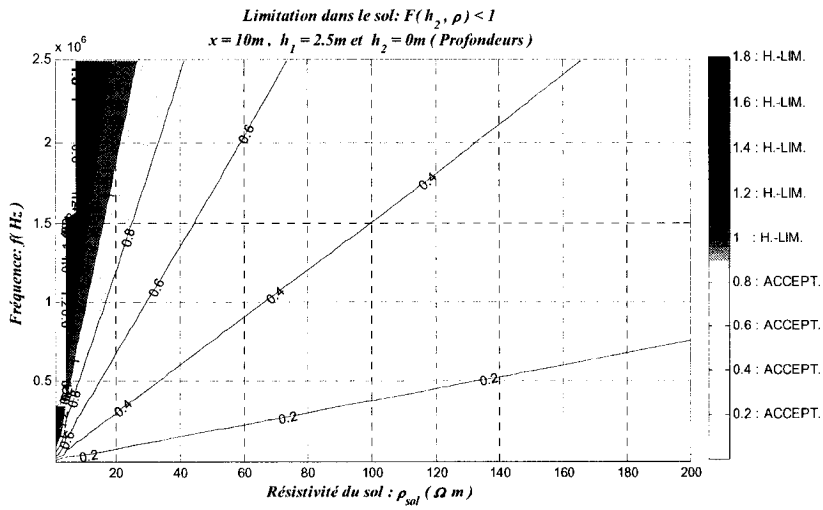


Figure 2. 4 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, pour les pairs avec : $f = [0,2]\,MHz$, $\rho_{sol} = [1,100]\,\Omega m$, $x = 10m$, $h_1 = 0m$ **et** $h_2 = [0,3]\,m$

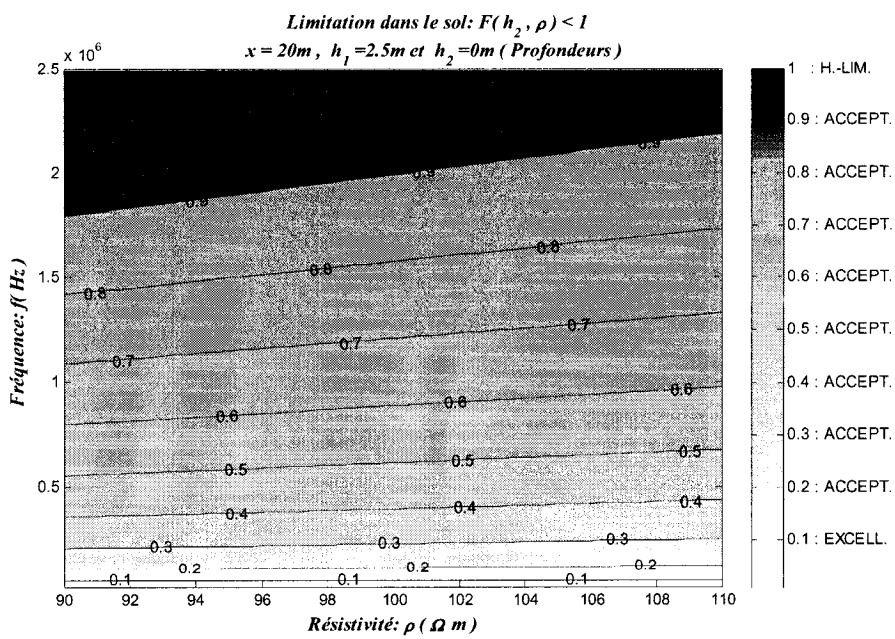


Figure 2. 5 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, autour de la résistivité d'un sol usuel,

avec : $f = [0,2.5]\,MHz$, $\rho_{sol} = [90,110]\,\Omega m$, $x = 20m$, $h_1 = 0m$ **et** $h_2 = [0,3]\,m$

- Pour deux conducteurs dans l'air :

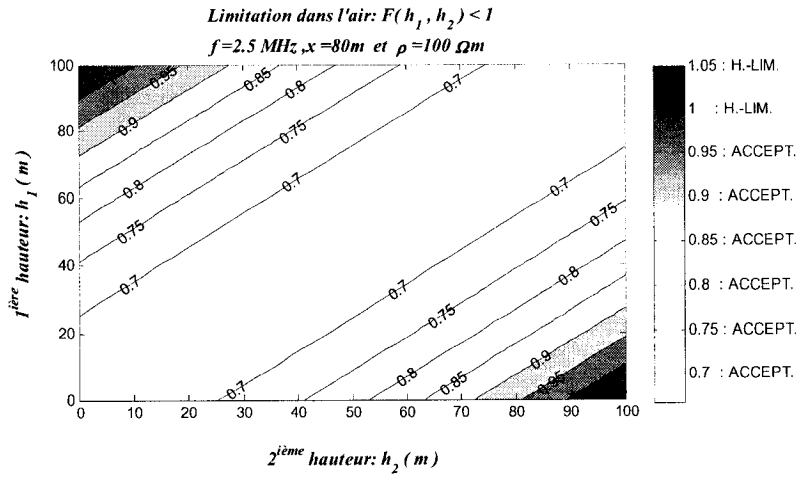


Figure 2. 6 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de, propagation dans l'air, avec $f = 2.5MHz$, $\rho_{sol} = 100\Omega m$, $x = 80m$, $h_1 = [0,100]m$ **et** $h_2 = [0,100]m$

- Pour deux conducteurs, un dans le sol et un dans l'air :

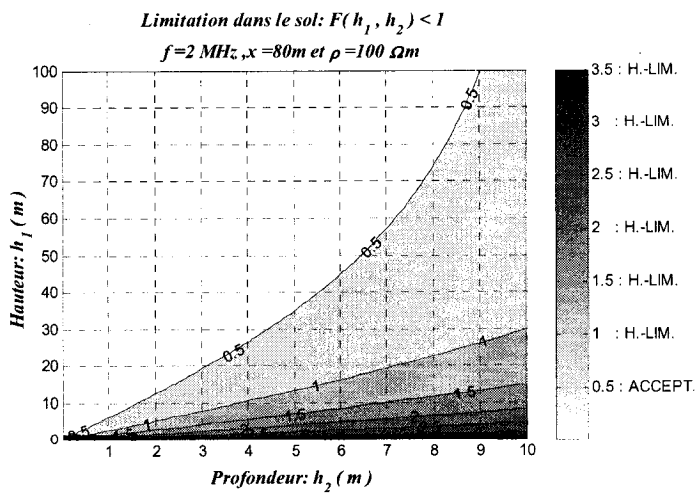
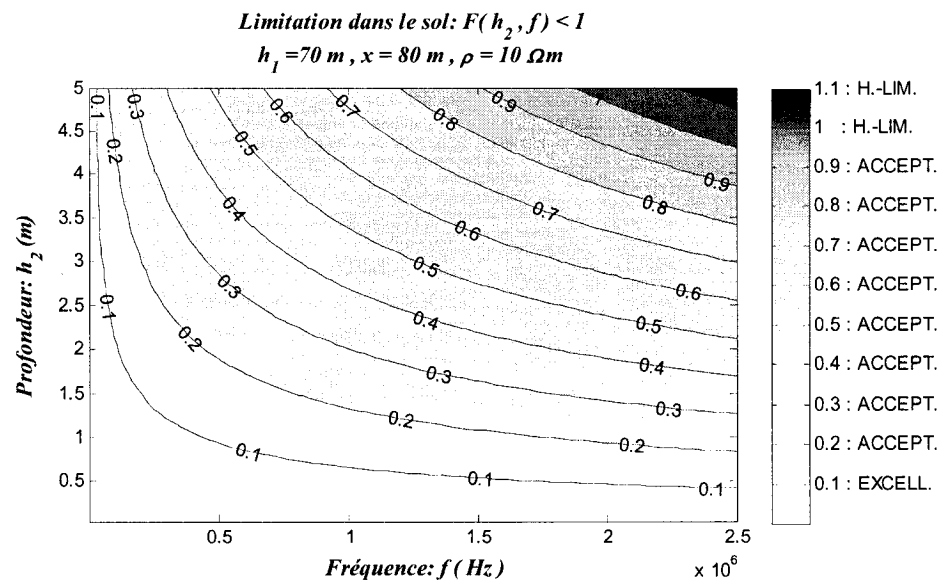
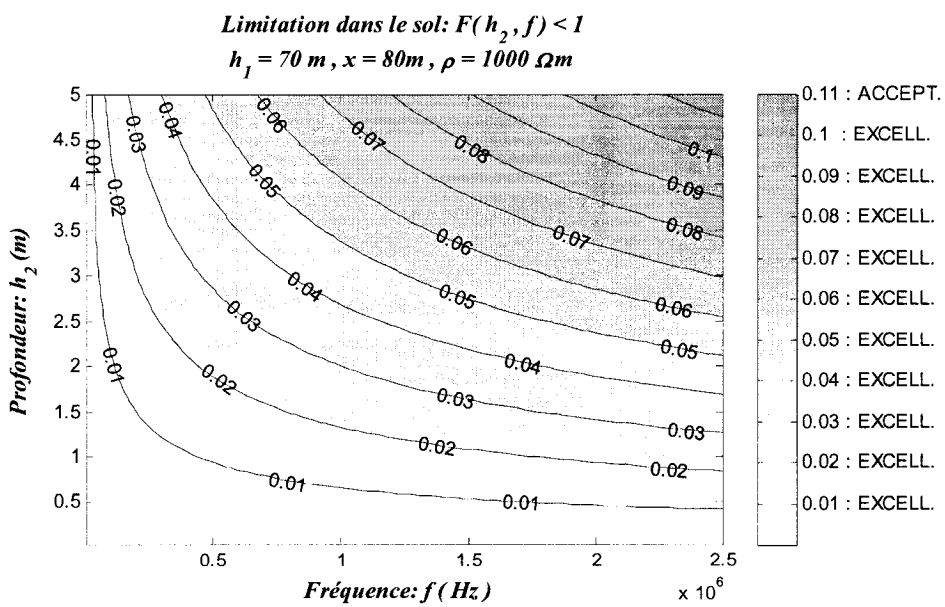


Figure 2. 7 Illustration de la limitation due à l'hypothèse de propagation dans le sol, pour certaines pairs des distances verticales avec : $f = 2MHz$, $\rho_{sol} = 100\Omega m$, $h_1 = [0,100]m$ **et** $h_2 = [0,10]m$

- **Variation de la fréquence et de la résistivité du sol**

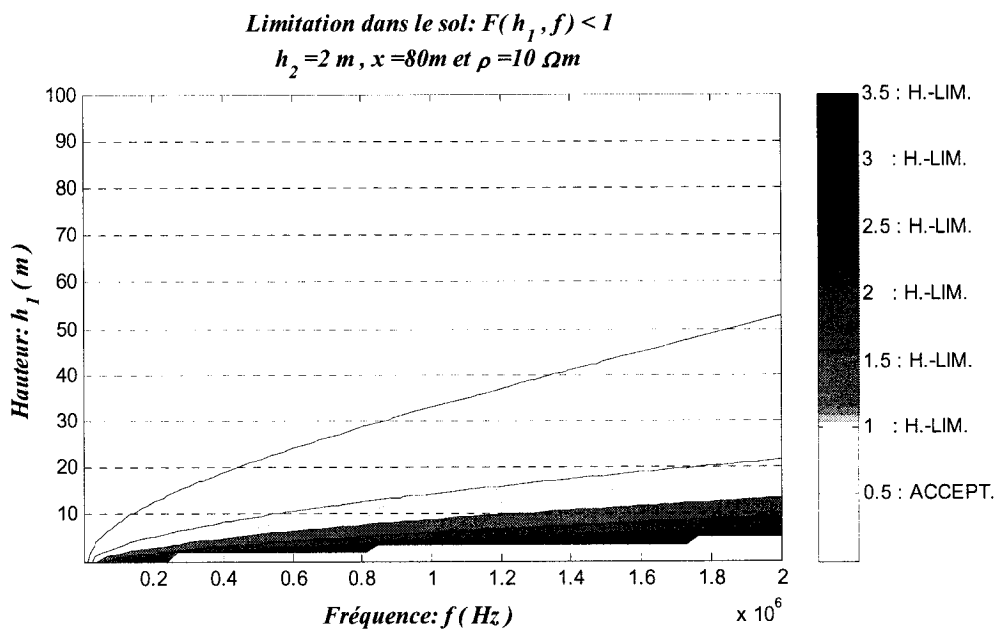


(a)

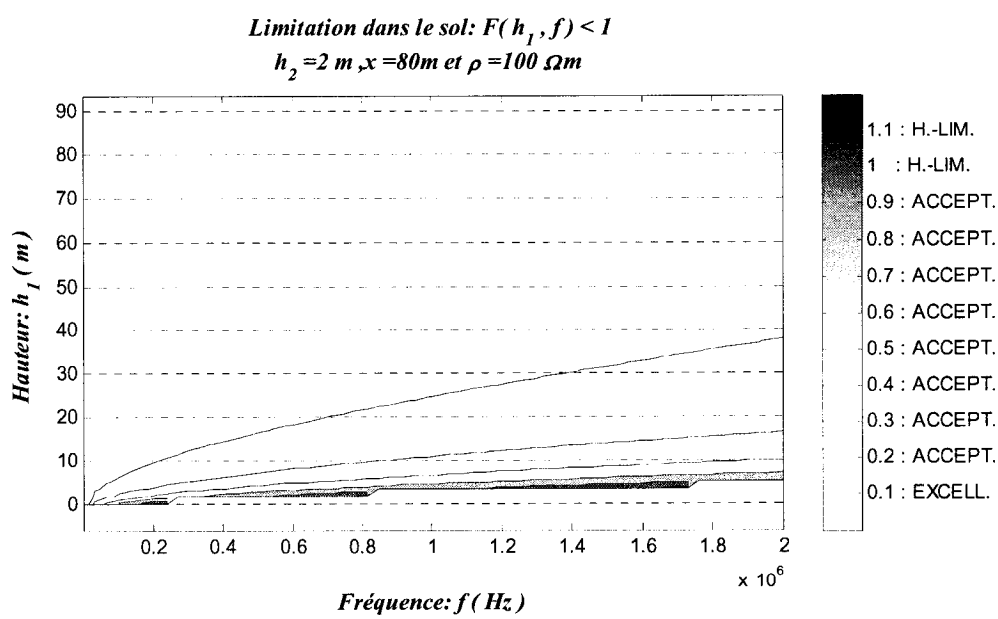


(b)

Figure 2. 8 Illustration de la limitation due de l'hypothèse, propagation dans le sol, pour : $f = [0, 2.5]\,MHz$, $h_1 = 70m$ **(hauteur),** $h_2 = [0, 4]\,m$ **(profondeur). (a) :** $\rho_{sol} = 10\Omega m$, **(b) :** $\rho_{sol} = 1000\Omega m$



(a)



(b)

Figure 2. 9 Illustration de la limitation due de l'hypothèse, propagation dans le sol, pour : $f = [0,2]\,MHz$, $h_2 = 2m$ **(profondeur),** $h_1 = [0,100]\,m$ **(hauteur). (a)** $\rho_{sol} = 10\Omega m$, **(b)** $\rho_{sol} = 100\Omega m$

Il faut noter que pour la plupart des fréquences, il y a un niveau de profondeur en dessous duquel l'hypothèse de propagation dans le sol n'est pas satisfaite. C'est le cas pour une profondeur de 3m et une résistivité de 10 Ωm dans la Figure 2.10. Notez que les valeurs des hauteurs et des fréquences à problème sont approximativement $\left[0,10\right]m$ et $\left[0,2.5\right]MHz$ respectivement. Ces dernières sont pourtant des valeurs pratiques, voir (2.68).

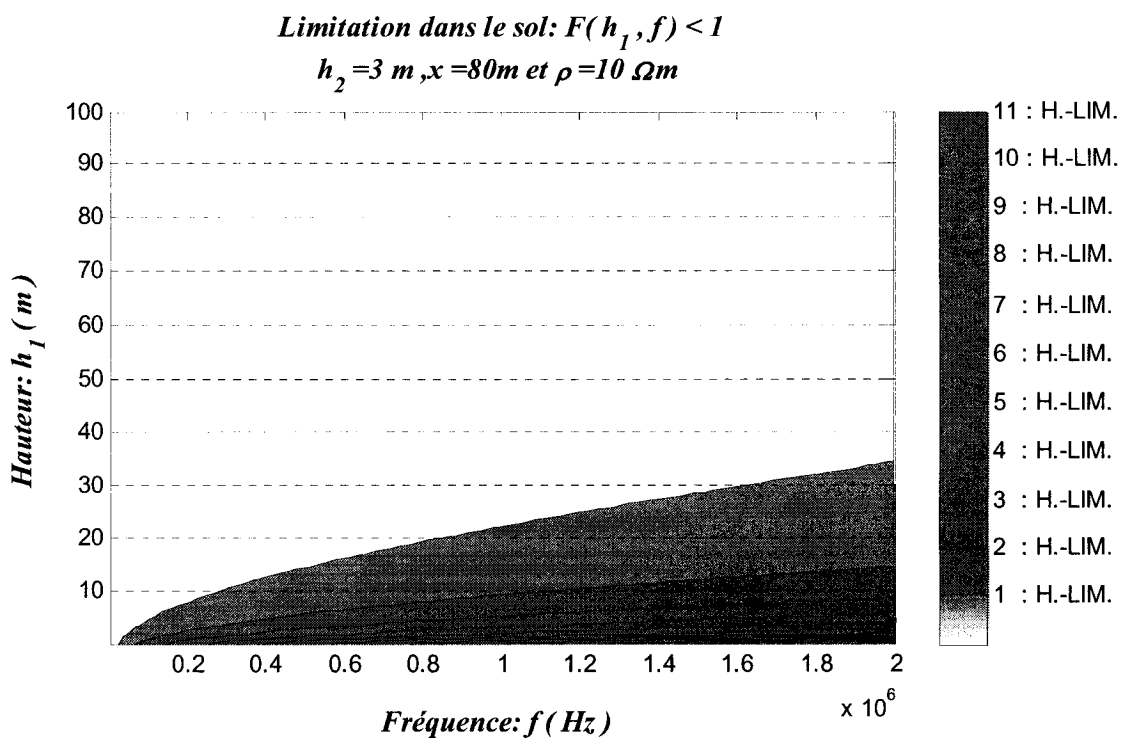


Figure 2. 10 Illustration de la limitation due à l'hypothèse $\left[\sqrt{(h_1-h_2)^2+x^2}\right]\frac{\sqrt{\omega\mu_{sol}\sigma_{sol}}}{\pi\sqrt{8}}<1$, **propagation dans le sol, pour la profondeur** $h_2 \geq 3m$ **dans le cas de:** $f=\left[0,2\right]MHz$, $\rho_{sol}=10\Omega m$, $h_1=\left[0,100\right]m$ **et** $h_2=3m$

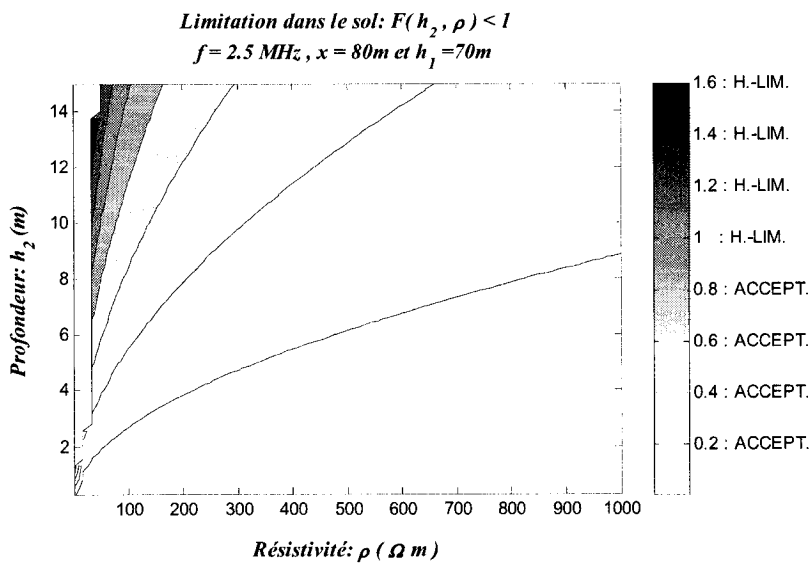


Figure 2. 11 Illustration de la limitation due à l'hypothèse pour propagation dans le sol, pour : $f = 2.5MHz$, $\rho_{sol} = [1,1000]\Omega m$, $h_2 = [0,14]m$ **et** $h_2 = 80m$

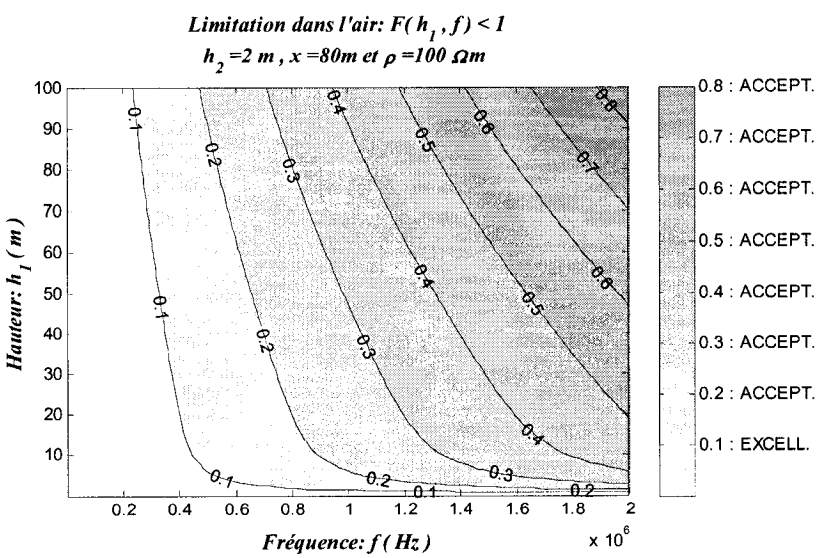


Figure 2. 12 Illustration de la limitation due à l'hypothèse pour la propagation dans l'air, pour : $f = 1.5MHz$, $\rho_{sol} = 100\Omega m$, $h_1 = [0,100]m$ **et** $h_2 = [0,2]m$ **(hauteurs).**

Les tableaux récapitulatifs suivants résument les cas usuellement rencontrés :

Tableau 2. 3 Récapitulatif du respect des hypothèses pour deux éléments souterrains.

h_1 (m)	h_2 (m)	x (m)	ρ (Ωm)	f (MHz)	Respect des hypothèses : **deux câbles souterrains**
<5	0	0	< 5	> 3.5	NON
<5	0	10	< 50	> 3.5	NON
<5	**0**	**10**	**100**	**< 8**	**OUI**
<5	0	30	< 50	> 0.5	NON
<5	0	30	100	< 1.5	OUI
<5	**0**	**20**	**<100**	**>2.5**	**NON**

Tableau 2. 4 Récapitulatif du respect des hypothèses pour deux éléments aériens.

h_1 (m)	h_2 (m)	x (m)	ρ (Ωm)	f (MHz)	Respect des hypothèses : **deux lignes aériennes**
> 100	**<20**	**0**	**100**	**> 3.5**	**NON**
<50	<50	100	**100**	3.5	OUI
150	**150**	**100**	**100**	**1.5**	**OUI**
-	-	200	100	>1.5	OUI
-	**-**	**200**	**100**	**<1.8**	**NON**
100	<10	80	100	<2.5	OUI
<60	<60	40	100	5.5	OUI

Tableau 2. 5 Récapitulatif du respect des hypothèses pour un élément aérien et souterrain.

h_1 (m)	h_2 (m)	x (m)	ρ (Ωm)	f (MHz)	Respect des hypothèses : **ligne et câble**
70	-	80	<10	2.5	NON
70	**<6**	**<40**	**-**	**4.5**	**OUI**
10	**5**	**120**	**>500**	**<3.5**	**OUI**
80	5	120	>10	<2.5	OUI
120	**5**	**120**	**>10**	**<1.8**	**OUI**

2.7 Conclusion

1. L'expression de l'impédance mutuelle de retour par la terre a été dérivée de la solution du champ électrique dans les équations de Maxwell. Ceci en considérant les hypothèses du mode quasi-TEM de propagation. La première hypothèse est celle liée à la longueur d'onde dans le diélectrique (l'air, les divers isolants) et la seconde, pour les conducteurs, est liée à la profondeur de pénétration.

2. Cette expression est valide pour un intervalle limité des paramètres. Pour la plupart des situations géométriques et physiques pratiquement rencontrées, on vérifie que ces hypothèses sont respectées mais il faut s'assurer qu'on reste bien en deçà des limites. Pour certaines configurations, il a été clairement montré qu'on est proche des limites des hypothèses du mode quasi-TEM. Il s'agit par exemple des profondeurs dans le sol de plus de 3m et aussi pour les cas de résistivités du sol de moins de 10 Ωm. Comme mentionnait plus haut, cette analyse est qualitative. On considère approximativement qu'en diminuant la résistivité (<1 Ωm.) et en augmentant la profondeur (> 10m) on sera probablement en dehors des limites d'observance des hypothèses pour les hauteurs, les distances horizontales et les fréquences usuellement rencontrées, respectivement 60 m, 80 m et 1.5MHz. les Tableaux 2.3 à 2.5 récapitulent d'autres cas d'intérêt. D'autres méthodes d'établissement des expressions du champ électrique seraient nécessaires pour, par exemple les impédances pour les fréquences de 3 à 10MHz. Il faut se rappeler qu'une recommandation du CIGRE suggère plus qu'un MHz, soit environ $3MHz$ pour les transitoires à fronts rapides [35]. Il faut donc s'assurer de respecter les limites des hypothèses dans ce cas. Ces observations ont été formulées, mais pas d'une façon formelle telle que présentée ici. Voir entre autre, Rachidi, F. [26] et Theethayi, N. [27]. Ces derniers rappellent que les modèles des lignes basés sur les équations de Pollaczek ou Sunde sont discutables au-delà des quelques MHz. Pour les formules de Carson, le manuel de référence de EMTP [4], approxime la

fréquence critique à environ 1.8MHz, pour les lignes aériennes avec un sol de 10000 Ωm. Il faudra alors tenir compte de ses observations dans l'évaluation de l'impédance: inclure des messages d'avertissement pour l'utilisateur non familier avec ces limitations quand on calcule les impédances mutuelles de retour par la terre dans les études semblables à celles annoncées pour Crinoline [3]. Par ailleurs, on s'assurera d'une bonne précision pour les cas pratiques et ceux respectant les dites hypothèses quand on évaluera les impédances. Pour d'autres types d'expressions d'impédance moins contraignantes au niveau des hypothèses, les références 35 et 36 fournies dans [4] seraient utiles.

3. Les expressions approximatives du champ sous forme de séries, établies par Pollaczek, ont donné une nouvelle possibilité de dériver des formules analytiques approximatives pour l'impédance mutuelle entre éléments aérien et souterrain comparable à la formule de Lucca, et entre câbles souterrains comparables à la formule de Saad et d'autres.

   En outre, en se basant sur les observations de Pollaczek, nous avons établi le lien à l'aide d'une fonction de Hankel entre l'impédance mutuelle pour deux câbles souterrains et celle mixte aérien souterrain. Ce lien nous permettrait d'appliquer les formules approximatives de l'un des cas, selon la convenance, pour l'autre cas.

La validité des ces nouvelles approches analytiques sera établie en comparaison avec la solution de la méthode numérique que nous nous proposons d'établir au chapitre suivant. Mentionnons enfin qu'en transformant les intégrales de Pollaczek, on a montré qu'elles sont équivalentes à celles trouvées par le CCITT. Et les deux sont équivalentes aux formules de Carson avec certaines considérations montrées par Ametani. Et enfin la formule de Sunde prend en compte les courants de déplacement dans le sol.

CHAPITRE 3 ÉVALUATION DE L'IMPÉDANCE MUTUELLE DE RETOUR PAR LA TERRE

Dans les précédents chapitres, il a été largement examiné les expressions de l'impédance mutuelle de retour par la terre. Mais leurs évaluations ne sont pas aisées pour les câbles souterrains et entre conducteurs aérien et souterrain. Ceci, car d'une part, elles ne possèdent aucune forme analytique connue, et d'autre part, leur comportement est très oscillatoire et irrégulière, surtout pour les câbles et entre câble et ligne aérienne. [24], [12], [14], [13] et [11].

Récemment (Mai 2005), Il a été développé un algorithme pour l'évaluation numérique de l'intégrale de Pollaczek pour les câbles souterrains [10] et entre une ligne et un câble [12]. Cette méthode a le mérite de quantifier approximativement l'erreur des approximations faites précédemment dans [14], [13], [5] et [11].

Cependant, une lacune de cette méthode d'intégration numérique est que ses propres bornes de l'erreur relative ne sont pas établies. Une difficulté supplémentaire s'ajoute car une mauvaise localisation des zéros (de la fonction intégrante de l'intégrale de Pollaczek) dans la formulation de cette méthode rend difficile la possibilité d'établir les bornes de l'erreur relative ou absolue.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de lever les lacunes de la méthode d'Uribe dans [12], ensuite d'établir une méthode numérique, type quadrature, efficace pour évaluer l'impédance avec contrôle de l'erreur relative maximale commise. Et pour valider la méthode par une autre alternative, nous introduisons une méthode d'intégration quasi-monte Carlo.

3.1 Critiques des formules existantes -Revue de la littérature

À ce jour, les méthodes pour évaluer l'impédance mutuelle (ou directement les tensions et courants induits) entre lignes et câbles, entre câbles souterrains et entre lignes aériennes, peuvent être classées en trois familles: Les formules analytiques approximatives, applicables dans un domaine très restreint; les méthodes numériques d'intégration; et les méthodes numériques électromagnétiques (éléments finis et autres) qui peuvent être appliquées directement pour évaluer les tensions et courant induits. Pour les lignes aériennes, les formules de Carson et d'autres sont jugées satisfaisantes à ce jour [4]. Nous donnons ci-dessous quelques formules où interviennent les câbles en insistant sur la combinaison câble souterrain et ligne aérienne.

3.1.1 Formules analytiques approximatives

Les formules analytiques approximatives de l'intégrale de Pollaczek (de Carson, ou de Sommerfeld) sont recherchées par les développeurs de programme de simulation à cause du temps de calcul réduit.
Toutes ces formules analytiques ne sont valides que pour un certain intervalle des paramètres : hauteur, profondeur, distance latérale, résistivité du sol et, bien entendu, la composante en fréquence la plus grande de l'étude à effectuer. Leur utilisation impose une bonne connaissance des limites d'applications.

Les tableaux suivant présentent deux types de formules. Dans le tableau 3.1 on a les formules de l'impédance mutuelle de retour par la terre entre câbles souterrains et lignes aériennes tirées de [5] et dans le tableau 3.2, les formules pour les câbles disponibles dans [14] et dans [4].

- **<u>Formules analytiques de CCITT et de Lucca pour impédance mutuelle aérien-souterrain</u>**

Tableau 3.1 Formules analytiques approximatives pour fil aérien et câble souterrain

	Formules approximées	**Hypothèses d'approximation faites et constantes utilisées**
CCITT [5]	$Z_{-+} = +j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\left[\begin{array}{l}\ln\left(\frac{1.851}{j\theta r}\right)+\cdots \\ j\frac{2}{3}\theta\left(h_1+h_2\right)\end{array}\right]$	♦ $m=\sqrt{\omega\mu_0\sigma}$ ♦ $\theta = \sqrt{2}/2\, m(1-j)$ ♦ $h_1\sqrt{\mu_0\omega\sigma} \leq 0.5$ ♦ $\left(\sqrt{\mu_0\omega\sigma}\right)\lvert h_2\rvert \leq 0.1$ ♦ $r=\sqrt{x^2+\left(h_1-h_2\right)^2}$
Lucca [13]	$Z_{-+} = +j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\times\ldots$ $\left\{\ln\left(\frac{\bar{d}}{d}\right)+j\frac{2\bar{y}}{3\theta^3}\left[\frac{\bar{y}^2-3x^2}{\bar{d}^6}\right]\right\}$	♦ $\sqrt{s^2+jm^2}\approx s$. N.B : Cette simplification rend similaire cette formule à celle entre lignes aériennes. Il permet ainsi d'utiliser les transformations découlant de l'analyse faite dans [36] pour le champ électrique au dessus du sol. ♦ $\bar{y}=h_1-h_2+\frac{2}{j\theta}$ ♦ $\bar{d}=\bar{y}+x^2$

- **Formules analytiques de Saad, Ametani et Wedephol**

Tableau 3.2 Formules analytiques approximatives pour câbles souterrains

	Formules approximées	**Hypothèses d'approximation faites et constantes utilisées**
CCITT [5]	$Z_{__} = +j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{1.851}{j\theta r}\right)\right]$	♦ $\sqrt{\mu_0\omega\sigma y_1} \leq 0.5$ ♦ $\sqrt{\mu_0\omega\sigma}\lvert y_2\rvert \leq 0.1$ ♦ $r = \sqrt{x^2 + (h_1 - h_2)^2}$
Wedephol [4]	$Z_{__} = +j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\cdot \begin{bmatrix} -\ln\left(\frac{\gamma\theta^* r}{2}\right) + \ldots \\ 0.5 - \frac{2}{3}\theta^*(h_1 + h_2) \end{bmatrix}$	♦ $\theta^* = \sqrt{2}/2\, m(1+j)$ ♦ $\lvert\theta^* r\rvert \leq 0.25$ ♦ $\gamma = 0.5772156649$: La constante d'Euler
Carson & Ametani	Utilisation des séries de Carson [4] ou d'autres types de développement en série suivi de l'extrapolation de Romberg.	
Saad [14]	$Z_{__} = j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\cdot \left\{\begin{matrix} K_0(\theta^* r) + \ldots \\ \left[\begin{matrix} \frac{2}{4 + jm^2x^2} \times \cdots \\ \exp\left[-(h_2 - h_1)\right] \end{matrix}\right] \end{matrix}\right\}$	♦ $\frac{x}{\lvert h_2 - h_1\rvert} \leq 1$

3.1.2 Méthodes numériques pour évaluer l'impédance mutuelle de retour de la terre

Les méthodes numériques aident à fixer les limites d'application des méthodes analytiques évoquées ci haut [10]. Cependant avec l'avènement des outils informatiques plus perfectionnés, on peut les utiliser pour certaines applications quand la précision exigée est grande et le temps de calcul est acceptable pour l'application donnée. Ci-dessous, quelques méthodes connues pour les câbles et pour le couplage câbles—lignes.

3.1.2.1 Intégration numérique par la méthode de trapèze—Formulation de Nguyen, pour les câbles pouvant être étendue au couplage entre lignes et câbles

Pour deux câbles C_1 et C_2 respectivement enfouis à h_1 et h_2 mètres de la surface du sol, distante de x mètres, la formule de l'impédance mutuelle Z_{12}, exprimée par (2.30) :

$$Z_{12} = j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\left[K_0\left(mr\sqrt{j}\right) - K_0\left(mr'\sqrt{j}\right)\right] + I_{12} \quad ,$$

$$r = \sqrt{x^2 + (h_1 - h_2)^2}$$

$$r' = \sqrt{x^2 + (h_1 + h_2)^2}$$

Où le dernier terme est l'intégrale de Pollaczek transformée pour les câbles [25] :

$$I_{12} = \frac{\sqrt{\omega\mu_0\rho_s}}{\pi h_m} \cdot \int_0^{+\infty} h_m m\left[-u + \sqrt{u^2 + j}\right]\exp\left[-2h_m m\sqrt{u^2 + j}\right]\cos(xmu)\,du \tag{3.1}$$

Dans laquelle :

$$h_m = \frac{h_1 + h_2}{2} \text{ et } m = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\rho_{sol}}}$$

Pour évaluer $I_{__}$ dans (3.1), il est utilisé dans [25] la méthode de trapèze avec un pas d'intégration très réduit, et une troncature de l'intervalle de 0 à u_{max} (en lieu et place de 0 à + ∞). Notez que u_{max} est trouvé empriquement.

Pour deux cas de la valeur du facteur $h_m m$, on recommande :

- $h_m m \leq 0.5$

  Le pas d'intégration $\Delta u = 10^{-3}$ et la troncature à $u_{\max} = 10/h_m m$

- $h_m m \geq 0.5$

  $\Delta u = 10^{-3}/2h_m m$ et la troncature à $u_{\max} = 10/h_m m$

Cette méthode pour les câbles peut être appliquée au couplage câble—lignes, il y a, en effet, une similitude entre (3.1) et (2.55).

Les limites suivantes de cette méthode sont à considérer :

- Augmentation accrue du pas d'intégration avec la précision : pour augmenter la précision, il faut diminuer le pas d'intégration de plus en plus, surtout pour le cas ou la fonction intégrante est oscillatoire. Car, sinon, deux portions autour d'une des racines de la fonction seraient mal évaluées.
- Temps de calcul très élevé : cette augmentation du pas d'intégration entraînera une augmentation du temps de calcul.
- Erreur inconnue et incontrôlable : l'erreur introduite par la troncature à $u_{\max}$ n'est ni connue, ni contrôlable.

Il n'est donc pas propice d'utiliser cette méthode, telle que formulée, pour la détermination de l'impédance mutuelle entre câbles et pour câbles—lignes.

Dans le paragraphe qui suit, il est présenté, les améliorations apportées à cette dernière méthode.

3.1.2 2. Algorithme d'Uribe [10]

Pour, entre autre, améliorer la méthode de Nguyen présentée ci-dessus, Uribe a proposé un algorithme pour l'évaluation numérique de l'impédance mutuelle entre câbles [10] et l'a étendu au couplage entre une ligne et un câble [12]. Ce dernier consiste à évaluer les zéros de la fonction intégrante et, par la suite, de calculer l'intégrale par portion entre deux zéros contiguës. La sommation des intégrales de toutes les portions donne l'impédance cherchée. Comme il est impossible d'intégrer de 0 à ∞, il a introduit un critère de troncature qui dépend des constantes physiques mais aussi d'un facteur empirique. Cette formulation, bien qu'améliorée par rapport à celle de [25], possède quelques limitations et une erreur dont nous donnons les détails ci-dessous.

Erreurs de simplification dans la localisation des zéros de la fonction intégrante dans l'algorithme

Considérant le couplage entre ligne et câble, l'équation de l'impédance mutuelle câble—ligne (2.55) peut être réécrite comme [12] :

$$Z_{-+} = \frac{\omega\mu_0}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \left[F(u) - u + jG(u)\right] \exp\left[-\xi\left(\zeta u + F(u)\right)\right] \exp\left[-j\xi G(u)\right] \cos\left(\xi\eta u\right) du \tag{3.2}$$

Où les fonctions $F(u)$ et $G(u)$, sont définies comme étant :

$$\begin{cases} F(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^4+1}+u^2} \\ G(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^4+1}-u^2} \end{cases} . \tag{3.3}$$

Et les paramètres ξ, ζ et η sont :

$\xi = m \times h_2$, $\zeta = {h_1}/{h_2}$ et $\eta = {x}/{h_2}$.

Pour trouver les zéros réels et imaginaires dans (3.2), nous développons le facteur $\exp\left[-j\xi G(u)\right]$ sous forme complexe (sinus et cosinus) puis nous multiplions et regroupons la partie imaginaire et réelle. La fonction à intégrer $I(u)$, tel que $Z_{-+} = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\int_0^{+\infty} I(u)du$, prend la forme suivante :

$$I(u) = \left[A(u) + jB(u)\right]\left[\cos(\xi\eta u)\right]\exp\left[-\xi(\zeta u + F(u))\right] \tag{3.4}$$

Où les fonctions $A(u)$ et $B(u)$ sont définies comme étant :

$$A(u) = \left\{\cos(\xi G(u)) \times \left[-u + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(u^4+1)} + u^2}\right]\right\} + \left\{\sin(\xi G(u)) \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(u^4+1)} - u^2}\right]\right\}, \text{ et}$$

$$B(u) = \left\{-\sin(\xi G(u)) \times \left[-u + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(u^4+1)} + u^2}\right]\right\} + \left\{\cos(\xi G(u)) \times \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{(u^4+1)} - u^2}\right]\right\}.$$

En se conformant à la notation adoptée dans [10], on a :

$$A(u) = \left\{\left[-u + F(u)\right]\cos(\xi G(u))\right\} + \left[G(u)\sin(\xi G(u))\right] \tag{3.5}$$

$$B(u) = \left\{-\left[-u + F(u)\right]\sin(\xi G(u))\right\} + \left[G(u)\cos(\xi G(u))\right] \tag{3.6}$$

Nous montrons que pour que (3.4) soit zéro à partir du premier facteur $A(u) + jB(u) = C(u)$, il ne faut pas seulement que les termes $\sin(\xi \cdot G(u))$ et $\cos(\xi \cdot G(u))$ soient nuls dans (3.5) et (3.6) comme préconisés dans [12], [15] et [10].

En effet, étant donné que les fonctions sinus et cosinus ne peuvent pas être égales à zéro au même moment, on conclut que cette fonction intégrante (3.4) ne passe pas par zéro quand un de deux termes ($\sin(\xi \cdot G(u))$ ou $\cos(\xi \cdot G(u))$) est zéro dans $A(u) + jB(u)$.

Mais il faut noter que pour les grandes valeurs de u, les zéros de $\sin(\xi \cdot G(u))$ et de $\cos(\xi \cdot G(u))$ et ceux effectifs (du facteur $C(u) = A(u) + jB(u)$) sont de moins en moins éloignés. Ceci s'explique comme montré dans [10] que la partie réelle $F(u) - u$ du premier facteur de (3.2) tend vers $1/(8u^3)$ alors que la partie imaginaire $G(u)$ tend vers

$1/(2u)$. En faisant la simplification (non adéquate) de négliger $\dfrac{\cos(\xi G(u))}{(8u^3)}$ et $\dfrac{\sin(\xi G(u))}{(8u^3)}$ dans (3.5) et (3.6) respectivement, on obtient :

$$A^{appro}(u) \approx \left[G(u)\sin(\xi G(u)) \right] \tag{3.7}$$

$$B^{appro}(u) \approx \left[G(u)\cos(\xi G(u)) \right] \tag{3.8}$$

Avec ces valeurs approximées des termes $A^{appro}(u)$ et $B^{appro}(u)$, les zéros de $\sin(\xi \cdot G(u))$ et $\cos(\xi \cdot G(u))$ deviennent respectivement les zéros pour la partie réelle et la partie imaginaire (en se rappelant que $G(u) \neq 0$ pour toute valeur de u).

Cette simplification introduit une grande erreur surtout pour les petites valeurs de u (inférieures à 2). En utilisant les outils de calcul symbolique de Matlab, en occurrence la fonction *ezplot* [34], on varie ξ et u pour trouver les paires (u,ξ) pour lesquels la fonction étudiée est zéro. On peut voir dans les Figures 3.1 et 3.2 que les droites donnant les zéros pour $C(u) = A(u) + jB(u)$ et ceux pour $\sin(\xi \cdot G(u))$ et $\cos(\xi \cdot G(u))$ ne sont pas concordants tel que préconisées dans [12], [15] et [10]. De plus, la représentation de la fonction intégrante oscillatoire dans la Figure 3.3 montre clairement que pour les petites valeurs (≤ 2) de la variable d'intégration u, les valeurs de $A(u)$ et $B(u)$ ne sont pas zéros pour respectivement $\sin(\xi \cdot G(u)) = 0$ et. $\cos(\xi \cdot G(u)) = 0$.

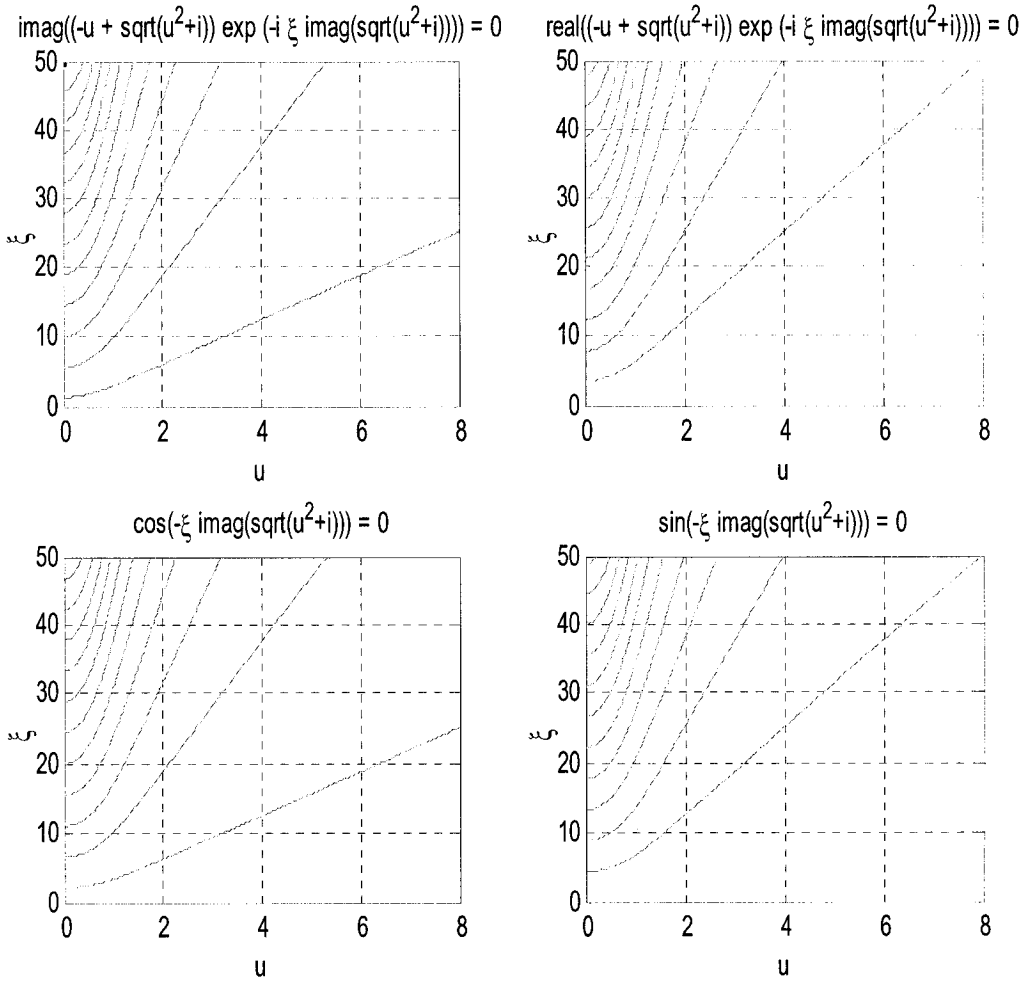
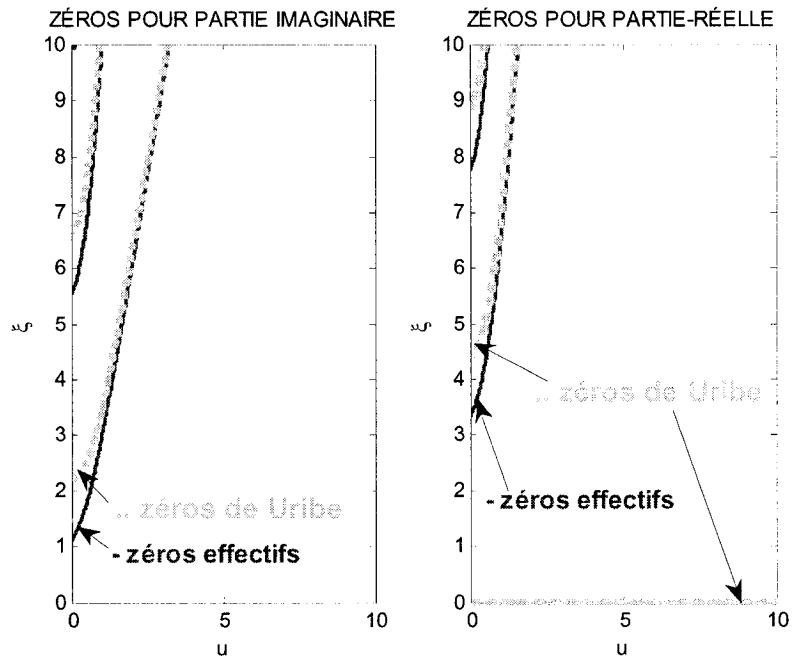
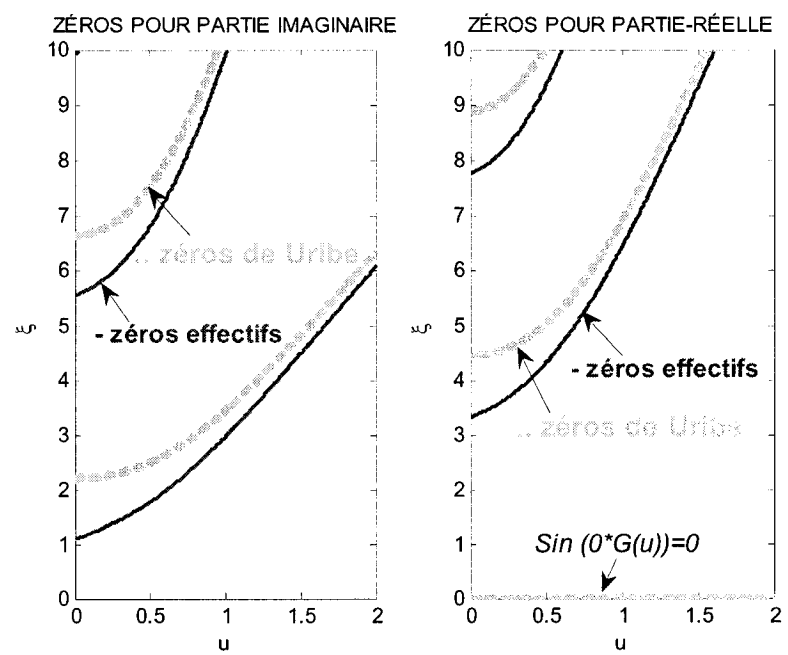


Figure 3. 1 Différences de placements des zéros entre l'intégrant $C(u) = A(u) + jB(u)$ et les termes $\sin(\xi \cdot G(u))$ et $\cos(\xi \cdot G(u))$.

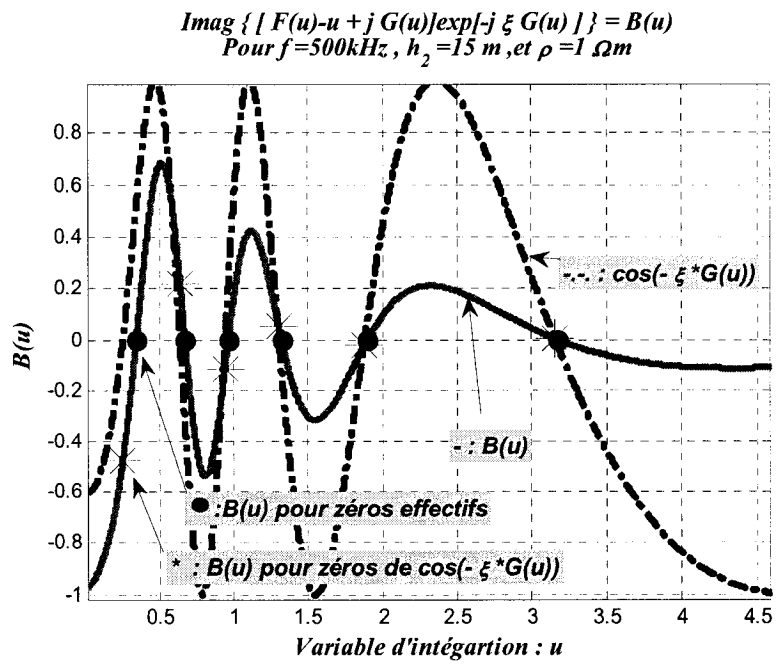


(a) : *u= [0 10]*

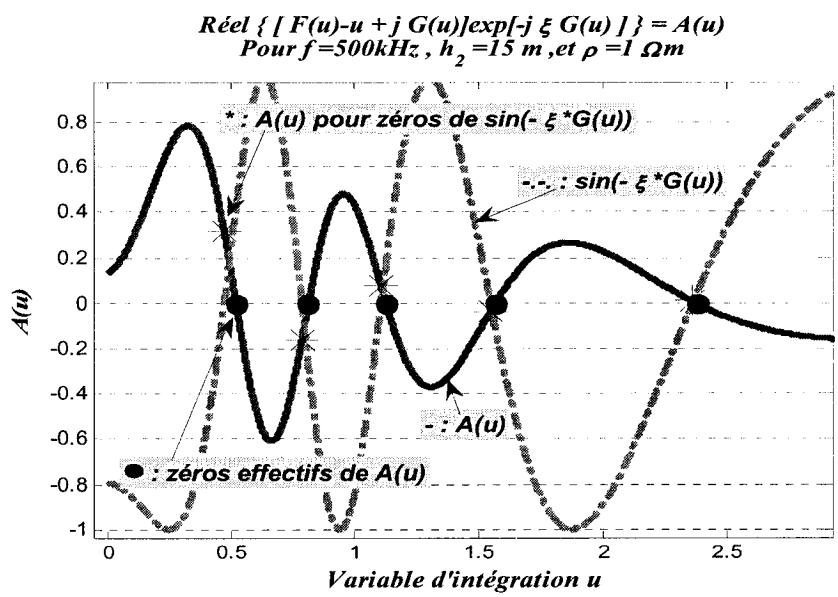


(b) : Agrandissement : *u = [0 2]*

Figure 3. 2 Comparaison entre les zéros effectifs et ceux de l'algorithme proposé par Uribe [10]



[a]



[b]

Figure 3. 3 Non concordance entre les zéros de : [a]: $B(u)$ **et** $\cos(\xi \cdot G(u))$ **et**

[b] : $A(u)$ **et** $\sin(-\xi G(u))$

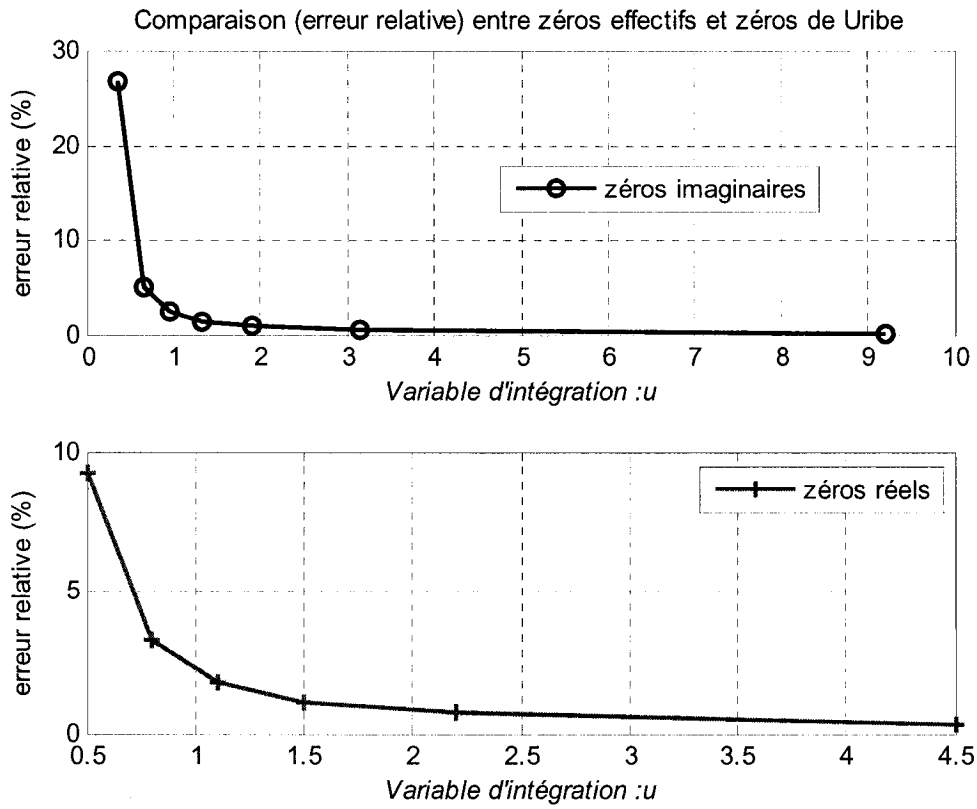


Figure 3. 4 Erreurs relatives découlant de la mauvaise localisation des zéros pour $\sin(\xi \cdot G(u))$ **et** $\cos(\xi \cdot G(u))$ **en comparaison avec les zéros effectifs de** $A(u) + jB(u)$

Dans la Figure 3.4, les erreurs relatives sont de plus de 30% en référence aux zéros effectifs, avec : $f = 500kHz$, $h_2 = 15m$ et Résistivité du sol $\rho_{sol} = 1\Omega m$.

Ces erreurs de localisation des zéros sont des limitations dans l'évaluation de la borne d'erreur, en plus d'être le fondement même et l'originalité de la méthode introduite dans [10]. Les autres limitations de la méthode sont les approximations des fonctions $F(u)$ et $G(u)$, et les manques d'évaluation et de contrôle de l'erreur relative commise. Ces dernières doivent être levées car d'une part, la troncature peut se faire pour des cas de très petites valeurs de u (combiné à des cas avec ξ élevés) pour lesquels les

approximations (3.7) et (3.8) ne sont pas valides; et d'autre part, le manque de contrôle de la borne de l'erreur relative rend moins robuste cette méthode.

Pour lever ces limitations et améliorer l'évaluation numérique nous proposerons une nouvelle méthode comportant notamment une méthode efficiente pour localiser les zéros de la fonction intégrante de Pollaczek. Mais terminons en mentionnant brièvement, ci-dessous, d'autres types des méthodes numériques utilisées.

3.1.3 Autres méthodes – méthodes numériques électromagnétiques : FEM

Beaucoup d'autres types d'évaluation de l'impédance mutuelle de retour par la terre ont été utilisés. On peut en citer la méthode avec les réseaux neuronaux par Nguyen [37], dont les avantages sont largement dilués par sa complexité.
Dans le registre des méthodes numériques électromagnétiques, mentionnons celle des éléments finis (FEM). Dans [38] et [39], il a été évalué le courant et la tension induits puis les paramètres de l'impédance mutuelle des câbles souterrains par la méthode des éléments finis. Celle-ci a été améliorée par une combinaison avec une technique basée sur le concept de perturbation pour optimiser les mailles. Un avantage de cette méthode est la prise en compte, à travers les mailles de FEM, de la géométrie des éléments. Les auteurs concluent que l'intégrale de Pollaczek donne des bons résultats malgré les hypothèses de négliger les formes de la section droite des câbles. Mais ils soulignent cependant la nécessité d'investiguer les effets de proximité à des fréquences élevées. Bien que précise, cette méthode est lente : le temps d'exécution est trop grand, plusieurs heures, rendant la méthode inutilisable pour un programme de simulation tel EMTP-RV. Notons que pour l'impédance mutuelle entre élément aérien et souterrain il n'y a pas eu à ce jour, à notre connaissance, une méthode électromagnétique pour la détermination des paramètres mutuels entre câbles et lignes. Une bonne méthode numérique serait alors nécessaire pour valider les méthodes approximatives. Nous en introduisons une dans la section qui suit.

3.2 Nouvelle méthode numérique : Améliorations à la méthode de [12]

Pour lever les limitations de la méthode de [15], présentées plus haut, nous établissons une méthode efficiente de localisation des zéros et nous évaluons et contrôlons la borne maximale de l'erreur absolue et relative commises à la troncature et à l'intégration. Nous pouvons ainsi appliquer une méthode de quadrature (Lobatto, Simpson ou la règle de Trapèze). Le critère de troncature, la localisation des zéros et la détermination de la borne de l'erreur sont présentés dans les sous-sections qui suivent.

3.2.1 Critère de troncature

La forme exponentielle de l'intégrale de Pollaczek (3.4) assure une décroissance quand la variable u tend vers ∞. Ceci nous suggère de tronquer l'intégrale à u_{max} pour lequel les valeurs supérieures contribuent très peu à l'intégrale. Ceci a été appliqué dans [10] et est recommandé pour les intégrales de ce type [40].

Le principe est de borner le plus exactement possible l'intégrale par une autre dont la primitive est connue ; et évaluer la borne de l'erreur absolue découlant de la troncature. Pour notre cas, on cherche la fonction $Ib(u)$ qui borne la fonction intégrante $I(u)$:

$$\left|I(u)\right| \leq Ib(u) \tag{3.9}$$

Considérant (3.4) on a :

$$\left|I(u)\right| = \left|\left[A(u)+jB(u)\right]\left[\cos(\xi xu)\right]\exp\left[-\xi\left(\zeta u+F(u)\right)\right]\right| \tag{3.10}$$

On sait par ailleurs que la fonction cosinus atteint sa valeur maximum à 1 :

$$\left|\left[\cos(\xi xu)\right]\right|_{\max} = 1.$$

Et sur les Figures 3.3 [a] et 3.3 [b], comme pour plusieurs cas non représentés, on peut voir que :

$$\left\|\left[A(u)+jB(u)\right]\right\|_{\max}=1+j1.$$

Les parties réelle et imaginaire peuvent donc être bornées et la fonction exponentielle est supérieure à 0 :

$$\left|I(u)\right|\leq\left|\exp\left[-\xi\left(\zeta u+F(u)\right)\right]\right|. \tag{3.11}$$

On peut alors trouver une constante K et une fonction $\varphi(u)$ facile à intégrer, tel que [40] :

$$\left|I(u)\right|\leq\exp\left[-\xi\left(\zeta u+F(u)\right)\right]\leq\exp\left[-K\varphi(u)\right]. \tag{3.12}$$

Une observation extensive de la variation de $F(u)$ dans $\exp\left[-\xi\left(\zeta u+F(u)\right)\right]$ incluant une série d'interpolation par des polynômes de divers degrés n (n = 3, 4,5...), coefficient P_i, et en variant les paramètres ξ et ζ, donne :

$$F(u)=\sum_{i}^{n}P_i u^i \tag{3.13}$$

$$\exp\left[-\xi\left(\zeta u+F(u)\right)\right]\leq\exp\left[-K\varphi(u)\right] \tag{3.14}$$

$$\exp\left[-\xi\left(\zeta u+\sum_{i}^{n}P_i u^i\right)\right]\leq\exp\left[-K\varphi(u)\right] \tag{3.15}$$

$$\xi\left(\zeta u+\sum_{i}^{n}P_i u^i\right)\geq K\varphi(u)$$

$$\xi\left(\zeta u+P_1 u^1+\sum_{i,i\neq 1}^{n}P_i u^i\right)\geq K\varphi(u) \tag{3.16}$$

$$\left[\xi\left(\zeta+P_1\right)u\right]+\left(\xi\sum_{i,i\neq 1}^{n}P_i u^i\right)\geq K\varphi(u) \tag{3.17}$$

Pour permettre une évaluation aisée de la primitive, on choisit $\varphi(u)=u$. On peut finalement identifier la partie de droite au premier terme de la partie de gauche à la puissance u^1 pour avoir :

$$K=\xi\cdot\left(\zeta+P_1\right) \tag{3.18}$$

Ceci assure que l'inégalité (3.14) et (3.15) sont satisfaites en considérant que

$$\left(\xi\sum_{i,i\neq 1}^{n}P_i u^i\right)\geq 0. \tag{3.19}$$

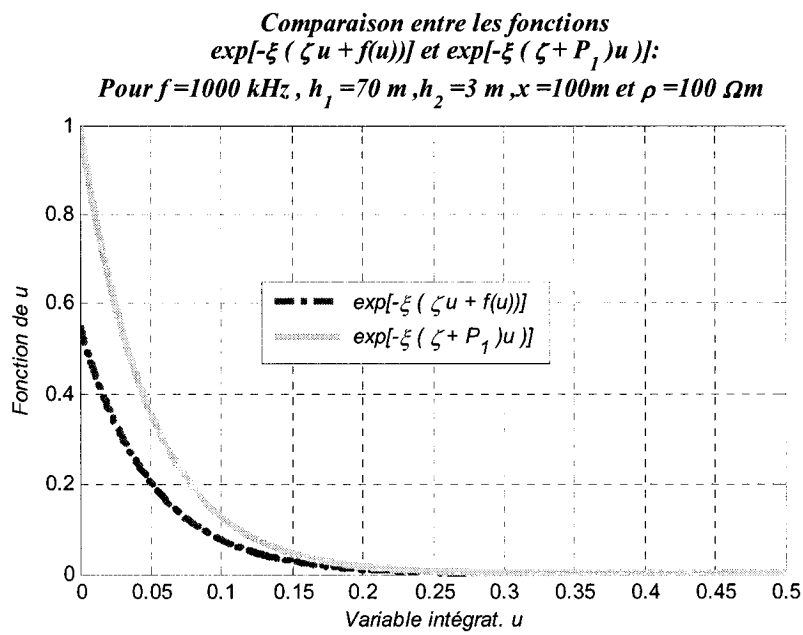
On a ainsi :

$$\exp\left[-\xi\left(\zeta u+F(u)\right)\right]\leq\exp\left[-\xi\left(\zeta+P_1\right)u\right] \tag{3.20}$$

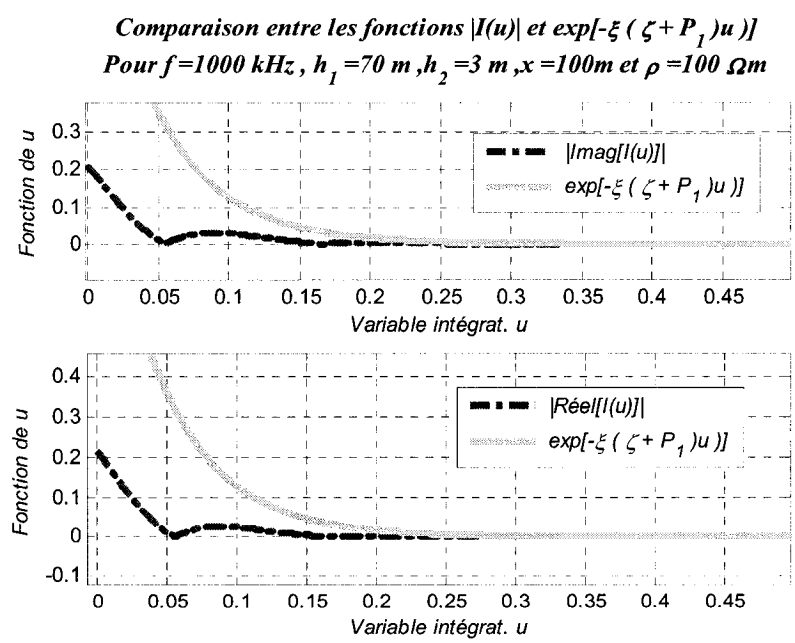
La constante P_1 est trouvée après interpolation à l'aide des nœuds de Tchebychev entre 0 et 10^7. Le polynôme retenu est de degré $n = 5$:

$$P_1=9.998827832333113\text{e-}001$$

Notons qu'un polynôme interpolant de degré plus élevé ne modifie que légèrement le paramètre P_1 (la limite est à $P_1=1.00000000$). Les variations des écarts par rapport à la fonction restent négligeables.



[a]



[b]

Figure 3. 5 Illustration d'une fonction bornant $\left|I(u)\right|$: [a]: les facteurs exponentiels et [b]: les fonctions $I(u)$ et $Ib(u)=\exp\left[-\xi\left(\zeta+P_1\right)u\right]$

On peut remarquer la similitude avec le critère de troncature trouvé dans [12]. Les Figure 3.5 [a] et [b] illustrent bien que l'inégalité (3.20) est satisfaite et que la fonction $\left|I(u)\right|$ est bornée par $Ib(u)=\exp\left[-\xi(\zeta+P_1)u\right]$. Il faut noter qu'on considère séparément la partie réelle et imaginaire.

Finalement, nous dérivons après cette analyse la relation entre la borne supérieure d'intégrale et la borne de l'erreur absolue due à la troncature :

Rappelant la fonction à intégrer $I(u)$:

$$I(u)=\left[A(u)+jB(u)\right]\left[\cos(u\eta\xi)\right]\exp\left[-\xi(\zeta u+F(u))\right]$$

On a, en laissant tomber le facteur devant l'intégrale $I(u)$,

$$Z=\frac{Z_{-+}}{\left(\omega\mu_0/\pi\right)}\ : \tag{3.21}$$

$$Z=\int_0^{+\infty} I(u)\cdot du=\int_0^{u_{\max}} I(u)\cdot du+\int_{u_{\max}}^{+\infty} I(u)\cdot du \tag{3.22}$$

La troncature à $u_{\max}$ donne une erreur absolue Era entre l'impédance Z et son estimée $\tilde{Z}$:

$$Era=\left|Z-\tilde{Z}\right|=\left|\int_0^{+\infty} I(u)\cdot du-\int_0^{u_{\max}} I(u)\cdot du\right|\leq\int_{u_{\max}}^{+\infty}\left|I(u)\right|\cdot du\leq\int_{u_{\max}}^{+\infty} I(u)du \tag{3.23}$$

$$Era\leq\int_{u_{\max}}^{+\infty}\left|I(u)\right|\cdot du\leq\int_{u_{\max}}^{+\infty}\exp(-K\cdot u)\cdot du \tag{3.24}$$

$$Era\leq\int_{u_{\max}}^{+\infty}\exp(-K\cdot u)\cdot du=\frac{1}{K}\exp(-K\cdot u_{\max}) \tag{3.25}$$

L'erreur découlant de la troncature est donc bornée par :

$$Era\leq\frac{1}{K}\exp(-K\cdot u_{\max}) \tag{3.26}$$

Pour une tolérance Era connue, la valeur $u_{\max}$ correspondante est :

$$u_{\max} = -\frac{1}{K}\ln\left(K \cdot Era\right) \tag{3.27}$$

Se rappelant que $K = \xi \cdot \left(\zeta + P_1\right)$, voir (3.18), on a :

$$u_{\max} = -\frac{1}{\xi \cdot \left(\zeta + P_1\right)}\ln\left(\xi \cdot \left(\zeta + P_1\right) \cdot Era\right) \tag{3.28}$$

Cette relation est appliquée pour tronquer l'intégrale de Pollaczek. On note la parfaite concordance avec la formulation dans [12] exprimée en terme d'erreur relative et pour laquelle $P_1 = 1$ (Valeur limite trouvée pour les polynômes interpolant de degré très supérieur).

3.2.2 Localisation des zéros

Les zéros à localiser sont ceux des fonctions $A(u)$ et $B(u)$ exprimées respectivement en (3.5) (pour la partie réelle) et (3.6) (pour la partie imaginaire) ; auxquels on ajoute les zéros du troisième facteur oscillatoire en cosinus. Les trois équations donnant les zéros sont donc :

$$A(u) = \left\{\left[-u + F(u)\right]\cos\left(\xi G(u)\right)\right\} + \left[G(u)\sin\left(\xi G(u)\right)\right] = 0,$$

$$B(u) = \left\{-\left[-u + F(u)\right]\sin\left(\xi G(u)\right)\right\} + \left[G(u)\cos\left(\xi G(u)\right)\right] = 0, \text{ et}$$

$$\left[\cos\left(\xi\eta u\right)\right] = 0$$

Cette troisième équation, $\cos\left(\xi\eta u\right) = 0$, est régulièrement oscillatoire et l'ensemble de ses zéros U_c est bien connu :

$$U_c = \left\{u_c : u_c = \frac{1}{2} \times \frac{\pi\left(1 + 2k_c\right)}{\xi\eta}, k_c = 0,1,2\ldots\infty\right\} \tag{3.29}$$

Cependant, pour $A(u)=0$ et $B(u)=0$, il n'est pas facile d'avoir une forme explicite $u=f(\xi)$. Nous avons néanmoins les expressions des fréquences normalisées $\xi_A(u_i)$ et $\xi_B(u_j)$ pour lesquelles $A(u_i)=0$ et $B(u_j)=0$ respectivement. Elles sont trouvées en utilisant la boîte à outils de calcul symbolique de MATLAB :

$$\xi_A = \frac{\left\{\tan^{-1}\left[\dfrac{u-F(u)}{G(u)}\right]+k\pi\right\}}{G(u)}, \tag{3.30}$$

$$\xi_B = \frac{\left\{\tan^{-1}\left[u^2+\sqrt{(1+u^4)}+u\sqrt{2}F(u)\right]+k\pi\right\}}{G(u)}, \tag{3.31}$$

$k=0,1,2\ldots\infty$.

De plus, ils nous donne les variations de ξ (en fonction de u) pour $\xi_A(u_i)$ et $\xi_B(u_j)$ c'est-à-dire ξ pour avoir $A(u_i)=0$ et $B(u_j)=0$ respectivement. La cartographie des zéros est sur la Figure 3.6 qui suit.

De ξ_A et ξ_B, exprimées dans (3.30) et (3.31) ci dessus, on trouve l'ensemble $\mathrm{E}_{kA}=\left\{k_i:\xi_A\left(u_{\min}=0,k_i\right)\le\xi\le\xi_A\left(u_{\max},k_i\right)\right\}$, c'est-à-dire tous les rangs $k=0,1,2\ldots\infty$ (dans le terme $k\pi$) pour lesquels la fréquence normalisée ξ est comprise entre $\xi_A(u_{\min}=0)$ et $\xi_A(u_{\max})$, (idem pour E_{kB}). Concrètement, pour une fréquence normalisée donnée ξ_{eff}, on évalue $\xi_{A\min}=\xi_A(u=u_{\min}=0,k_x)$ et $\xi_{A\max}(u=u_{\max},k_x)$, commençant par $k=0$ dans (3.30) (idem pour (3.31)) ; on vérifie que $\xi_{A\min}\le\xi_{eff}\le\xi_{A\max}$ pour ce k_x. S'il en est ainsi alors il y a un zéro pour ξ_{eff} et on accumule ce k_x. On arrête dès que pour $k_{\max}$ on a $\xi_{eff}<\xi_{A\max}(u=u_{\max},k_{\max})$.

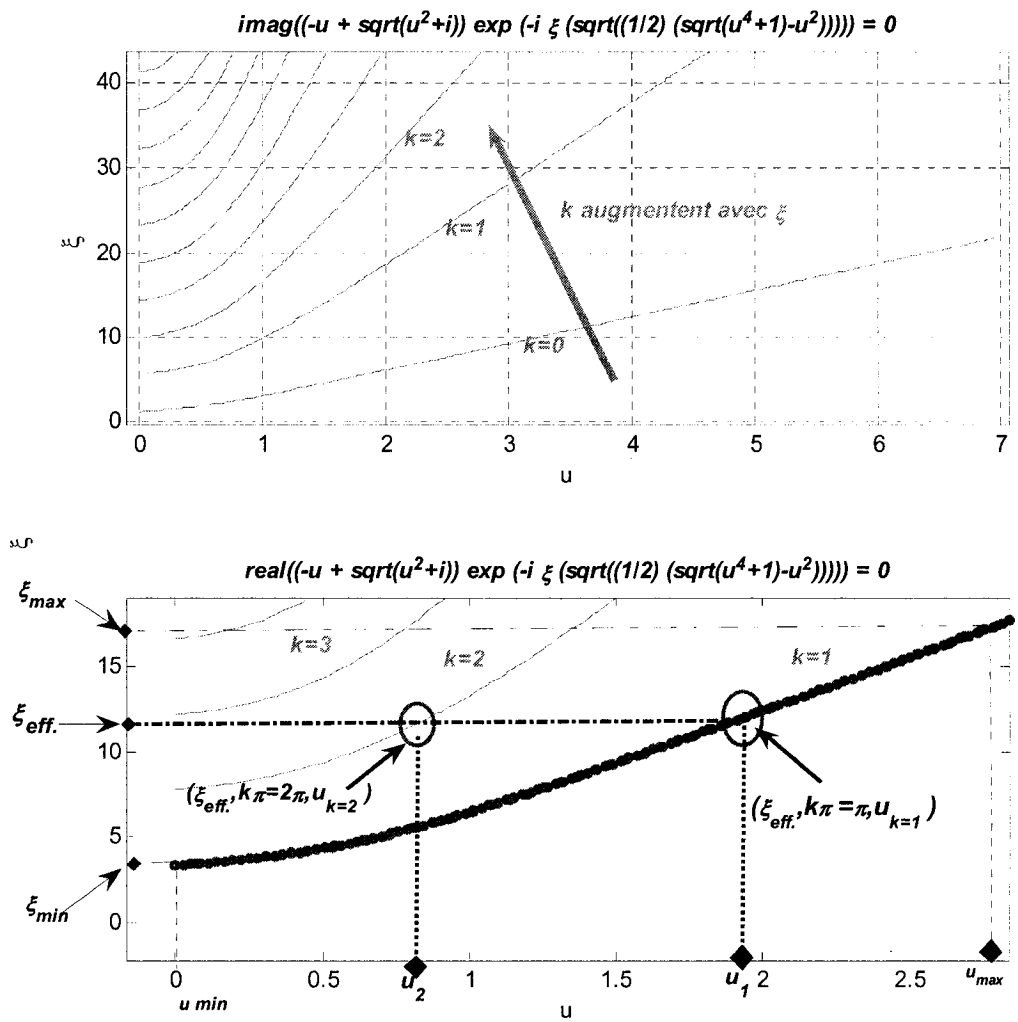


Figure 3. 6 Cartographie des zéros en fonction de ξ et des constantes $k\pi$ pour la partie oscillatoire irrégulière de l'intégrale de Pollaczek

Sur la Figure 3.6 ci-dessus, pour une fréquence normalisée donnée ξ_{eff}, on peut voir que ξ_{eff} est bornée comme : $\xi_{\min}\left(u = u_{\min} = 0, k_1\right) \leq \xi_{eff} \leq \xi_{\max}\left(u = u_{\max}, k_1\right)$. On sait qu'il y a donc, sans équivoque, une valeur u pour laquelle la fonction passe par zéro pour $k=1$ dans la relation $\xi_A(u_i)$. Soit u_1 très proche de 2. Sachant qu'il y a effectivement un zéro et qu'il se trouve entre $u = 0$ et $u_{\max}$, il devient possible d'utiliser un algorithme

efficace de recherche de zéro. Celui qui est disponible dans Matlab (utilisant la combinaison de la bissection, la sécante et une interpolation quadratique inverse : voir fonction *fzero* [34]) donne en quelques millisecondes tous les zéros. En effet la recherche des zéros est toujours simplifiée quand on sait qu'il y a un zéro et qu'on sait exactement dans quel intervalle il se trouve [41].

On résout alors les relations de ξ_A et ξ_B en fonction respectivement de u_i et u_j. Les ensembles de zéros pour la partie réelle $U_R = \{u_i\}$ et pour la partie imaginaire $U_I = \{u_j\}$ sont :

$$U_R = \left\{ u_i : \xi - \frac{\left\{ \tan^{-1}\left[\frac{u_i - F(u_i)}{G(u_i)} \right] + k_i \pi \right\}}{G(u_i)} = 0, k_i \in \mathrm{E}_{kA} \right\} \tag{3.32}$$

$$U_I = \left\{ \begin{array}{l} u_j : \xi - \dfrac{\left\{ \tan^{-1}\left[u_j^{\,2} + \sqrt{\left(1 + u_j^{\,4}\right)} + u_j \sqrt{2} F\left(u_j\right) \right] + k_j \pi \right\}}{G\left(u_j\right)} = 0 \\ k_j \in \mathrm{E}_{kB} \end{array} \right\} \tag{3.33}$$

Les zéros qui nous intéressent sont ceux qui sont inférieurs à la valeur maximale $u_{\max}$ de troncature, on les classe on ordre croissant dans les ensembles $U_{réels}$ et U_{imag} :

$$U_{réels} = \left\{ U_C \cup U_R : u_c \le u_{\max}, \left(u_i \in U_R\right) \le u_{\max} \right\} \tag{3.34}$$

$$U_{imag} = \left\{ U_C \cup U_I : u_c \le u_{\max}, \left(u_j \in U_I\right) \le u_{\max} \right\} \tag{3.35}$$

Cette procédure pour la détermination des zéros a été appliquée pour les Figures 3.3 et 3.4. Ayant trouvé les zéros, nous pouvons intégrer successivement la fonction entre les sous intervalles formés par les zéros contigus auxquels on ajoute 0 au début et $u_{\max}$ à la fin. Une bonne localisation de zéro nous permettra d'une part, d'augmenter la marge de

manœuvre pour le choix de la méthode d'intégration, emploi direct de la méthode de quadrature (par exemple quadrature Lobatto dans Matlab [34]) et, d'autre part, elle nous permettra d'évaluer d'une manière efficiente la borne de l'erreur. Les formules bien connues des erreurs de la méthode d'intégration de trapèze ou la règle de Simpson sont aussi applicables chaque sous-intervalle. Dans la section qui suit, il est présenté la détermination des bornes de l'erreur d'intégration.

3.2.3 Borne de l'erreur relative et intégration par quadrature

L'évaluation numérique de l'intégrale, comme toute méthode numérique d'ailleurs, ne peut pas être justement appréciée sans considération de l'erreur absolue commise et/ou le pourcentage de l'erreur relative.

Cependant, étant donné que l'on ne connaît pas la valeur exacte de l'impédance mutuelle, pour en extraire l'erreur ; on va estimer, au moins, l'intervalle de confiance qui contient la valeur exacte. On doit, en pratique, s'assurer que la valeur trouvée est exacte, à un nombre de décimales convenables près.

Notons que, bien que cette nécessité de l'évaluation de l'erreur soit très évidente sur le plan purement mathématique, la recherche des erreurs trop réduites peut être d'un intérêt moindre en génie. En effet, les impacts de ces erreurs sur l'impédance mutuelle dans une étude d'un phénomène transitoire peuvent être négligeables.

<u>Borne de l'erreur relative et méthode adaptive</u>

Lors de la troncature à $u_{\max}$, on introduit une erreur absolue Era entre l'impédance normalisée Z et son estimée $\widetilde{Z}$ (découlant de la troncature), Era est bornée comme, voir (3.26) :

$$Era \leq \frac{1}{K}\exp(-K \cdot u_{\max}), \tag{3.36}$$

Où on a défini :

$u_{\max}$: La valeur maximale de u, variable d'intégration, à partir de laquelle l'intégrale est tronquée. Et K, pour rappel, est tel que :

$$K \ : \ K = \xi \cdot (\zeta + P_1),$$

En appliquant une méthode numérique d'intégration pour évaluer $\tilde{Z}$ (=Z "tronquée") nous introduirons forcement une erreur absolue, écart entre $\tilde{Z}$ et $\tilde{\tilde{Z}}$ (= $\tilde{Z}$" numérique").

On a deux types d'erreur que nous baptisons :

Ea_{tronc} : L'erreur de troncature

Ea_{quad} : L'erreur due à l'intégration par la quadrature, cumulée sur tous les sous intervalles.

Les relations suivantes expriment les inégalités entre les erreurs, les valeurs approximées et les valeurs exactes :

$$\left|Z - \tilde{Z}\right| \leq Ea_{tronc} \tag{3.37}$$

$$\left|\tilde{Z} - \tilde{\tilde{Z}}\right| \leq Ea_{quad} \tag{3.38}$$

La somme donne :

$$\left|Z - \tilde{Z}\right| + \left|\tilde{Z} - \tilde{\tilde{Z}}\right| \leq Ea_{tronc} + Ea_{quad} \tag{3.39}$$

Il faut noter que pour être exact, l'erreur totale d'intégration numérique (par quadrature dans ce cas) comporte aussi une erreur d'arrondies que nous négligeons en assumant que l'outil de calcul est assez performant pour une valeur de tolérance et un pas de quadrature raisonnables.

L'application de l'inégalité triangulaire donne :

$$\left|Z - \tilde{Z} + \tilde{Z} - \tilde{\tilde{Z}}\right| \leq \left|Z - \tilde{Z}\right| + \left|\tilde{Z} - \tilde{\tilde{Z}}\right| \leq \cdot Ea_{tronc} + Ea_{quad} = Ea_{tot} \tag{3.40}$$

$$\left| Z - \tilde{\tilde{Z}} \right| \leq Ea_{tot} \tag{3.41}$$

À partir de cette relation nous pouvons trouver un intervalle qui contient avec confiance l'impédance cherchée, soit :

$$\tilde{\tilde{Z}} - Ea_{tot} \leq Z \leq \tilde{\tilde{Z}} + Ea_{tot} \tag{3.42}$$

Avec $\tilde{\tilde{Z}}$ et Ea_{tot} positifs.

L'erreur relative totale est alors :

$$Er_{tot} = \frac{\left| Z - \tilde{\tilde{Z}} \right|}{|Z|} \leq \frac{Ea_{tot}}{|Z|} \tag{3.43}$$

En utilisant la borne minimale de l'impédance, on a l'erreur relative maximale :

$$Er_{\max} \leq \frac{Ea_{tot}}{\tilde{\tilde{Z}} - Ea_{tot}} \tag{3.44}$$

Il est intéressant de noter que, dans cette relation, on peut évaluer tous les paramètres avec une bonne précision. Cependant, en pratique, cette erreur trouvée sera relativement plus grande que celle effectivement commise. Une étude d'«impacts» d'erreur peut être nécessaire pour optimiser l'algorithme de calcul.

Pour un algorithme non adaptif, où l'on évalue $Er_{\max}$ après l'intégration pour une erreur absolue donnée, la formule ci-dessus est suffisante. Elle peut être appliquée quand on connaît approximativement l'ordre de grandeur de l'impédance et l'on peut donc fixer Ea_{tot}, c'est-à-dire Ea_{tronc} (donnant $u_{\max}$) et Ea_{quad} (à appliquer dans la méthode d'intégration). Cependant pour des cas où la valeur de l'impédance peut varier de 10 à 0.0001 Ω/m en fonction de la fréquence, des distances et de la résistivité du sol, il est indiqué d'évaluer automatiquement l'erreur absolue admissible suivant l'ordre de grandeur «pressentie» de l'impédance. Mais justement «pressentir» cette impédance a un coût en temps de calcul et en ressources mémoires ; car cela implique un certain nombre

d'évaluations de la fonction à intégrer. Une analyse doit être faite entre l'augmentation du temps de calcul requis versus l'ordre de grandeur de l'erreur relative quand on fixe par défaut la tolérance Ea_{tot}.

Dans le cas d'une méthode adaptive, on borne l'erreur par :

$$Er_{\max} \leq \frac{Ea_{tot}}{\left|\tilde{\tilde{Z}} - Ea_{tot}\right|} \leq \frac{Ea_{tot}}{\left|Z_{\min} - Ea_{tot}\right|} \leq \frac{Ea_{tot}}{\left|Z_{\min}\right| - \left|Ea_{tot}\right|} \tag{3.45}$$

$Z_{\min}$: Valeur minimale «appréhendée» pour l'impédance.

L'erreur absolue maximale qu'il faut avoir pour satisfaire une erreur relative $Er_{\max}$ donnée est donc :

$$Ea_{tot}^{\max} = \frac{Er_{\max}\left|Z_{\min}\right|}{1 + Er_{\max}} \tag{3.46}$$

Si la fonction $I_{\min}(u)$ minimise la fonction $I(u)$ à intégrer tel que :

$$\int_0^{u_{\max}} \left|I(u)\right| du \geq \int_0^{u_{\max}} I_{\min}(u) du \tag{3.47}$$

Et que $\left|Z_{\min}\right| = \int_0^{u_{\max}} I_{\min}(u)$ est estimée par $\tilde{Z}_{\min}$ avec une erreur $Ea_{z\min}$, alors on a :

$$\left|\tilde{Z}_{\min}\right| - \left|Z_{\min}\right| \leq \left|\tilde{Z}_{\min} - Z_{\min}\right| \leq Ea_{z\min} \tag{3.48}$$

On a :

$$\left|\tilde{Z}_{\min}\right| - Ea_{z\min} \leq \left|Z_{\min}\right| \leq \left|\tilde{Z}_{\min}\right| + Ea_{z\min} \tag{3.49}$$

On trouve donc l'erreur absolue maximale qu'on ne doit pas dépasser dans l'évaluation de l'impédance en fonction de l'erreur relative :

$$Ea_{tot}^{\max} = \frac{Er_{\max}\left|Z_{\min}\right|}{1 + Er_{\max}} \leq \frac{Er_{\max}\left(\left|\tilde{Z}_{\min}\right| - Ea_{z\min}\right)}{1 + Er_{\max}} \tag{3.50}$$

Pour le cas de l'impédance mutuelle entre ligne aérienne et câbles souterrains, on déduit d'une manière simplifiée, pouvant être améliorée, quelques fonctions minimisant l'intégrale :

$$\left|Z_{\min}\right| = \int_0^{u_{\max}} \left[I^+(u) - D \cdot I^-(u)\right] du, \tag{3.51}$$

Avec la constante $D > 1$; $I^+(u)$ et $I^-(u)$, les fonctions $I(u)$ positive et négative respectivement.

Ou encore, en utilisant un rapport simple de $I(u)$:

$$Z_{\min} = \int_0^{u_{\max}} \left(1/D\right) I(u) du \leq \left|Z_{\min}\right|. \tag{3.52}$$

L'évaluation de la fonction $Z_{\min}$ requiert en principe la même procédure que celui pour l'évaluation de l'intégrale de l'impédance mutuelle. Cependant l'effort est considérablement diminué. Les zéros sont évalués une seule fois, il y a, en effet, les mêmes zéros pour l'intégrale de $Z_{\min}$ et de Z dans (3.52). Et il y n'a pas de grande contrainte pour la précision en évaluant $Z_{\min}$. Peu importe l'erreur absolue $Ea_{z\min}$ commise, elle sera incluse dans la formule donnant la tolérance absolue de la troncature et de l'intégration.

La figure suivante illustre le rapport entre $Z_{\min}$ et Z en utilisant (3.51) avec $D = 1.2$

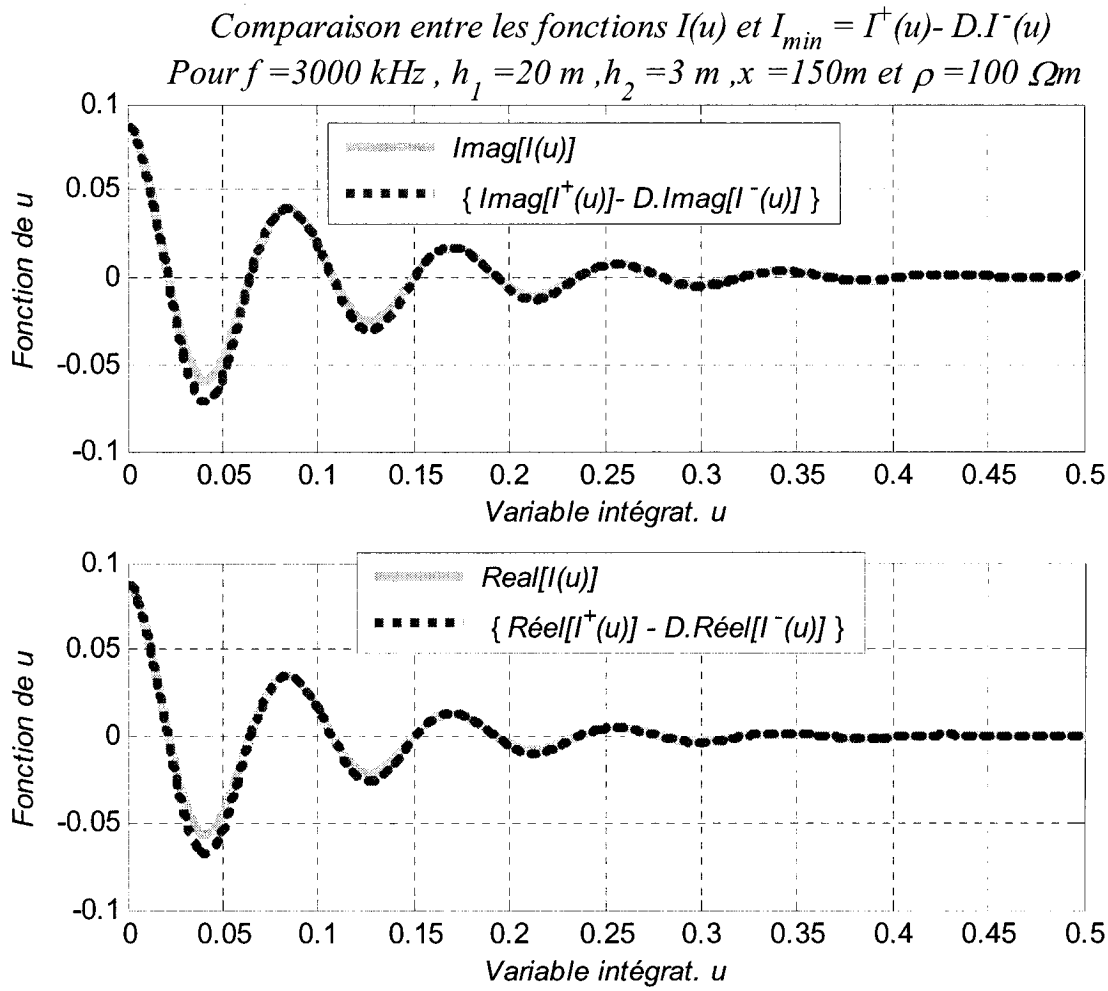


Figure 3. 7 Illustration de fonction qui minimise l'intégrale : $I_{\min}(u)$

Pour une tolérance Ea_{tronc} donnant la troncature fixée à la valeur la plus petite acceptable, sans occasionner des erreurs d'arrondies élevées, soit de l'ordre de la précision machine pour MATLAB, eps = 2.2204e - 016 = Ea_{tronc}, nous déduisons l'erreur absolue de la quadrature qui sera équitablement repartie pour chaque sous intervalle, entre deux zéros :

$$Ea_{subin} = \frac{Ea_{quad}}{\mathrm{N}_{quad-subin}} \tag{3.53}$$

En remplaçant Ea_{quad} par sa valeur trouvée précédemment dans (3.50), on a :

$$Ea_{subin}{}^{\max} \cong \frac{\dfrac{Er_{\max}\left[\left|\tilde{Z}_{\min}\right| - Ea_{z\min}\right]}{1+Er_{\max}} - Ea_{tronc}}{\mathrm{N}}, \tag{3.54}$$

Où N est le nombre des sous intervalles. Chacun de sous intervalles ne comporte aucun passage à zéro de la fonction $I(u)$, sauf aux bouts. Cela nous assure une bonne performance de la méthode de quadrature utilisée, surtout le choix du pas.
Nous optons pour la méthode de quadrature adaptive Lobatto implémenté dans MATLAB. Elle est brièvement présentée dans le paragraphe qui suit.

Quadrature adaptive pour l'intégration : Lobatto (*quadl*)

Cette méthode d'intégration développée par Gander, W. et W. Gautschi [42] est une des les plus performantes pour l'évaluation numérique des intégrales. Voir son application pour l'évaluation de l'intégrale de Carson dans [24].

Elle évalue l'intégrale en utilisant la quadrature adaptative récursive d'ordre supérieur. Le pas d'intégration change en fonction du comportement de la fonction, améliorant la performance.

La forme oscillatoire de l'intégrale de Pollaczek exige, pour certains paramètres, des pas de plus en plus petits, et un nombre excessif d'évaluations de la fonction qui dépasse 10000. En effet, la disparité dans les amplitudes de la fonction entre deux points successifs empêche la diminution de l'erreur. Ceci est une limite des méthodes de quadrature pour les fonctions hautement oscillatoires ; il constitue une limite à l'utilisation de la fonction *quadl* pour évaluer l'intégrale de Pollaczek. Cependant ces types de configuration problématique sont souvent non conformes aux hypothèses quasi-TEM de la formulation de l'intégrale Pollaczek et sont rarement rencontrés en pratique (distances de quelques centaines de mètres et des sols de moins 1 Ωm de résistivité).

3.2.4 Algorithme de la méthode proposée : synthèse récapitulative

1. Calculer la valeur de la variable maximale, $u_{\max}$ en s'assurant que l'erreur due à la troncature est dans les limites fixées (moins que $eps = 2.2204 \times 10^{-016}$), Voir (3.28). Notez que cette ci-petite valeur de l'erreur due à la troncature assure que les cas d'impédances mutuelles par unité de longueur très petites sont calculables avec la moindre erreur globale (troncature et intégration numérique).

2. Calculer les zéros des facteurs $A(u)$ et $B(u)$ par la procédure décrite au point 3.2.2 et $\cos(\xi\eta u) = 0$ par (3.29).

3. Évaluer la valeur minimale de l'impédance par la procédure au point 3.2.3

4. Évaluer l'erreur absolue maximale pour l'intégration par quadrature et distribuer celle-ci sur tous les intervalles, voir (3.54).

5. Évaluer l'intégrale par la méthode *quadl* dans chaque intervalle entre deux zéros avec l'erreur absolue évaluée ci-dessus.

6. Évaluer la borne de l'erreur absolue globale et de la borne de l'erreur relative (3.44).

3.3 Méthode d'intégration Quasi-Monte Carlo (QMC)

La méthode de quadrature Lobatto a exigé la troncature de l'intégrale (tout comme l'exigerait celle de Simpson ou de trapèze). Ceci a introduit des erreurs dont les bornes ont été estimées. Pour apprécier l'effet de cette troncature et vérifier le degré de précision de l'estimation des erreurs, nous allons comparer les valeurs trouvées à partir de ces méthodes avec celle de la méthode QMC. En effet, pour la méthode QMC il n'y a pas de troncature car nous transformerons l'intervalle d'intégration par le changement de variable. Ceci n'a pu se faire pour la méthode de quadrature à cause de l'augmentation du nombre de zéros et la difficulté de les localiser rapidement.

Dans les sous sections qui suivent nous présentons, sur base de travaux de Niederreiter [43], une introduction au principe de la méthode QMC, les moyens pratiques pour évaluer l'erreur commise et finalement nous l'appliquons au calcul de l'intégrale de Pollaczek pour l'impédance mutuelle.

3.3.1. Introduction sur la méthode de Quasi-Monte Carlo

Principe

L'intégration numérique dans le cas d'une seule variable ($s = 1$), entre 0 et 1, peut être exprimée d'une façon générique par une quadrature comme suit :

$$\int_0^1 f(u)du \approx \sum_{n=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{w}_n f\left(\frac{n}{\mathrm{m}}\right), \tag{3.55}$$

Où on a :

m : un entier positif,

w_n : le poids dont la valeur dépend du type de la quadrature. Dans le cas de la règle de trapèze, par exemple, on a [43]:

$$\mathrm{w}_0 = \mathrm{w}_\mathrm{m} = \frac{1}{2\mathrm{m}} \text{ et } \mathrm{w}_n = \frac{1}{\mathrm{m}} \text{ pour } 1 \le n \le \mathrm{m}-1 .$$

Pour le cas de plusieurs variables ($s \ge 2$), l'expression de l'intégrale se complexifie. On a pour l'habituelle simple règle de trapèze un produit cartésien des règles trouvées pour une seule variable :

$$\int_{I_S} f(u_1,..u_s)du \approx \sum_{n=0}^{\mathrm{m}} \cdots \sum_{ns=0}^{\mathrm{m}} \mathrm{w}_{n1} \cdots \mathrm{w}_{ns} f\left(\frac{n_1}{\mathrm{m}},\cdots,\frac{n_s}{\mathrm{m}}\right), \tag{3.56}$$

Où le domaine d'intégration est $I_S = [0\ldots1]^s$ appelé le cube unité (dimension $s \le 2$).

Cette complexité a motivé l'application de la Méthode Monte Carlo (MC) pour résoudre les intégrales de plus d'une dimension.

En effet, dans la méthode MC, cette intégrale est interprétée comme un modèle stochastique et par conséquent il peut être déterminé par un échantillon des nombres aléatoires. Il faut noter que nous l'utilisons dans ce travail comme outil de comparaison et de première validation.

Sur un domaine B de dimension quelconque $s(\mathrm{B} \subseteq \Re^S)$ qui satisfait la relation $0 \le \lambda_s(\mathrm{B}) \le \infty$, où $\lambda_s(\mathrm{B})$ est la mesure de Lebesgue de dimension s, on a l'intégrale :

$$\int_B f(u_1,..u_s)du_1 du_2 \cdots du_S = \lambda_S(\mathrm{B}) \int_B f(u_1,..u_s)d\mu = \lambda_S(\mathrm{B})\mathrm{E}(f)$$

Où on a exprimé B dans l'espace de probabilité et la variable $d\mu$ est la mesure de probabilité :

$$d\mu = {du_1....du_2}/{\lambda_s(\mathrm{B})} ;$$

Et pour lequel on a défini l'espérance $\mathrm{E}(f)$:valeur espérée de la variable aléatoire $f(u_1,\cdots,u_s)$ définie sur l'espace $L^1(\mu)$.

On a ainsi réduit l'ordre de complexité de l'intégrale à un calcul de probabilité.

L'estimation de Monte de Carlo de $\mathrm{E}(f)$ est obtenue par :

$$\mathrm{E}(f) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) \tag{3.57}$$

Où $f(a_n)$ est la valeur de f pour une séquence aléatoire de nombres $a_1, \cdots, a_N$ indépendants et distribués normalement. La fonction f est ainsi une variable aléatoire d'un espace de probabilité noté $(\mathrm{A}, \mathrm{A}, \lambda)$.

La théorie des grands nombres assure que cette expression de $\mathrm{E}(f)$ converge sûrement dans le sens que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \mathrm{E}(f) \tag{3.58}$$

L'analyse de l'erreur au sens de probabilité (intervalle de confiance) de cette espérance est la variance σ^2 :

$$\sigma^2(f) = \int_A \left(f - \mathrm{E}(f)\right)^2 d\lambda$$

L'estimation de Monte Carlo de l'intégrale et l'erreur associée sont déduites de l'analyse ci haut et on a [43] :

$$\int_B f(u_1, .., u_s) du_1 du_2 \cdots du_S = \frac{\lambda_S(\mathrm{B})}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) + \mathrm{O}\left(N^{-1/2}\right). \tag{3.59}$$

Un avantage direct est que la forme de la fonction intégrante n'intervient pas dans le calcul de l'intégrale. Mais une bonne précision exige, bien sur, un nombre d'échantillons N élevé. Cependant, il n'y a aucune garantie (au sens déterministe) des bornes de l'erreur et la détermination aléatoire de nombres x_i est difficile [43].

Pour mitiger ces limitations, il a été introduit la méthode Quasi-Monte Carlo pour laquelle les échantillons utilisés et les bornes d'erreurs sont déterministes.

En se limitant à une seule variable, pour laquelle la fonction a une variation totale $V(f)$ bornée (dont le calcul pratique est donné plus loin), on a la borne de l'erreur

d'intégration exprimée par la différence entre la valeur exacte et celle estimée par la méthode QMC :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(u)\,du\right| \leq V(f)\,D^*_N(x_0,\cdots x_N) \tag{3.60}$$

Où $D^*_N(x_0,\cdots x_N)$ est la discrépance à l'origine de la suite déterministe utilisée pour trouver les échantillons. Elle est la mesure de l'écart par rapport à une distribution uniforme. Ce qui est recherché sera donc une suite déterministe, dont on fixe préalablement le rapport entre les nombres mais qui reste proche d'une distribution uniforme. Le choix de cette suite est un élément important pour la méthode QMC. Quelques types de suite à faible discrépance sont présentés dans la sous section qui suit.

<u>Suites à faible discrépance : suite de Van der Corput et sa généralisation</u>

Beaucoup de recherches ont été menées pour trouver les suites à discrépance faible. On peut en citer : suite de Van der Corput, suite de Faure, suite de Sobol, suite de Niederreiter, etc [44].

Nous nous limitons aux suites de Van der Corput et leurs généralisations pour illustrer la réduction de la discrépance à l'origine.

Considérant un nombre b (base de nombre au sens d'arithmétique), on peut écrire tout entier positif comme étant une somme des produits de deux facteurs. Un premier facteur en puissance de b et un deuxième, un entier pris dans l'ensemble $Z_b = \{0,1,\cdots,b-1\}$.

On peut écrire le nombre n comme étant: $n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) \times b^i$, où $a_i(n) \in Z_b$.

Pour $n = 102$ et $b = 8$, par exemple, on a $(102)_{10} = 6\times 8^0 + 4\times 8^1 + 1\times 8^2 = (146)_8$ et les coefficients $a_i(102)$ sont: $\left\{a_0(102) = 6, a_1(102) = 4, a_2(102) = 1, \underset{i\geq 3}{a} = 0\right\}$

La suite de Van der Corput en base $b \geq 2$ est défini comme étant la séquence de nombres x_n tel que :

$$x_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n) \times b^{-i-1},\ n = 0,1,2\cdots, N \tag{3.61}$$

Il faut noter que cette sommation est finie car pour tout nombre n, il existe un entier $k \geq 1 + \log_b n$ pour lequel les coefficients de rang supérieur sont nuls ($\underset{i \geq k}{a}(n) = 0$).

L'ensemble de coefficients s'écrit donc comme: $\left\{a_0(n), a_1(n), a_2(n), \cdots, \underset{i \geq k}{a}(n) = 0\right\}$.

Pour une suite de Van der Corput $S_b = x_0, \cdots, x_N$ de base b, il a été rapporté dans [43] quelques relations, découlant de travaux de Béjian et Faure sur le comportement asymptotiquement de la discrépance à l'origine :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{ND^*_N(S_b)}{\log N} = \lim_{N \to \infty} \frac{ND_N(S_b)}{\log N} = \begin{cases} \dfrac{b^2}{4(b+1)\log b}, & \text{pour } b \text{ pair} \\ \dfrac{b-1}{4\log b}, & \text{pour } b \text{ impair} \end{cases} \tag{3.62}$$

En base 2 on a :

$$ND^*_N(S_2) = ND_N(S_2) \leq \frac{\log N}{\log 8} + 1 \tag{3.63}$$

La limite, pour N très grand, donne :

$$\lim_{N \to \infty} \left(ND_N(S_2) - \frac{\log N}{\log 8} \right) = \frac{4}{9} + \frac{\log 3}{\log 8} = 0.97276527801816 \tag{3.64}$$

Pour réduire la discrépance à l'origine $D^*_N(x_0, \cdots x_N)$, il a été introduit la suite de Van der Corput généralisée. Elle se construit de la même manière mais en remplaçant l'ensemble Z_b, composé des coefficients $a_i(n)$, par un autre ensemble $\sigma = \left\{a_i^P(n)\right\}$ qui est une permutation des éléments $a_i(n)$. Cette permutation est choisie pour minimiser la

discrépance à l'origine $D^*_N(x_0, \cdots x_N)$. Une des meilleures permutations qui minimise la discrépance à l'origine D^*_N est celle trouvée par Faure [43], elle est en base 12 [44]:

$$\sigma = Z_{12}^{permutée} = \{0,5,9,3,7,1,10,4,8,2,6,11\} \tag{3.65}$$

La suite S^{F12} construite sur base de cette permutation s'écrit donc :

$$S^{F12} = \{x_0 \cdots x_n\} \tag{3.66}$$

$$x_n = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(a_i(n)) \times b^{-i-1},\ n = 0,1,2\cdots, N \tag{3.67}$$

Sa discrépance à l'origine, D^*_N, a le comportement asymptotique :

$$\lim_{N\to\infty} Sup \frac{ND^*_N(S^{F12})}{\log N} = \frac{1919}{3454\log 12} = 0.22358494812066 \tag{3.68}$$

Ayant établi les bornes de la discrépance à l'origine, indépendante de la fonction à intégrer, il nous reste à évaluer la variation totale de la fonction $V(f)$ pour estimer l'erreur commise dans l'intégration par la méthode de Quasi-Monte Carlo. Le moyen pratique d'estimer $V(f)$, et donc l'erreur, est donné dans le paragraphe qui suit.

<u>Estimation pratique de l'erreur pour la méthode de Quasi-Monte Carlo</u>

L'erreur a été bornée grâce à (3.60) que nous rappelons ci bas :

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(u)du \right| \le V(f) D^*_N(x_0, \cdots x_N).$$

La discrépance à l'origine $D^*_N(x_0, \cdots, x_N)$, mesurant la qualité de répartition de la séquence, a été présentée plus haut. Pour la suite de Van der Corput en base 2, on a :

$$D^*_N(x_0, \cdots, x_N) \le \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{\log N}{\log 8} + 1\right); \tag{3.69}$$

Et pour la suite de Van der Corput généralisée en base 12 avec la permutation

$$\sigma = \{0,5,9,3,7,1,10,4,8,2,6,11\}, \tag{3.70}$$

On peut borner la discrépance à l'origine pour ce dernier par :

$$D_N^*\left(S^{F12}\right) \leq \left(\frac{\log N}{N}\right) \times \frac{1919}{3454 \log 12}. \tag{3.71}$$

Pour une intégration à une dimension, la variation totale de la fonction à intégrer peut être exprimée à l'aide de sa dérivée, à condition que celle-ci soit continue sur tout l'intervalle :

$$V(f) = \int_0^1 \left| \frac{d}{du} f(u) \right| \cdot du. \tag{3.72}$$

L'expression de $V(f)$ ci-dessus a rarement une forme analytique. Son évaluation est donc très difficile en pratique. Nous pouvons cependant y appliquer une méthode numérique en bien identifiant l'erreur commise et sa borne supérieure. Si on y applique encore la méthode Quasi-Monte Carlo (QMC) on aura $\tilde{V}(f)$ approchée de $V(f)$:

$$\tilde{V}(f) = \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{d}{du} f(x_n) \right| \right] \tag{3.73}$$

Et on peut exprimer sa variation totale par $V_V(f)$:

$$V_V(f) = \int_0^1 \left| \frac{d}{du} \left| \frac{d}{du} f(u) \right| \right| \cdot du = \int_0^1 \left| \frac{d^2}{du^2} f(u) \right| \cdot du \tag{3.74}$$

La borne d'erreur d'estimation de $V(f)$ est donc, au premier ordre,

$$\left| V(f) - \tilde{V}(f) \right| \leq V_V(f) D^*{}_N(x_0, \cdots x_N). \tag{3.75}$$

En appliquant la propriété de la valeur absolue d'une fonction et la propriété des inégalités [45] :

$$\left| V(f) \right| - \left| \tilde{V}(f) \right| \leq \left| V(f) - \tilde{V}(f) \right| \leq V_V(f) D^*{}_N(x_0, \cdots x_N)$$

$$\left| V(f) \right| \leq V_V(f) D^*{}_N(x_0, \cdots x_N) + \left| \tilde{V}(f) \right| \tag{3.76}$$

En portant cette inégalité dans l'estimation de l'erreur du premier ordre (3.60), on a :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(u)\,du\right| \le V(f)D^*_N(S) \le \left[V_V(f)D^*_N(S) + \left|\tilde{V}(f)\right|\right]\cdot D^*_N(S)$$

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(u)\,du\right| \le \left[V_V(f)\left(D^*_N(S)\right)^2 + D^*_N(S)\left|\tilde{V}(f)\right|\right]. \qquad (3.77)$$

Encore une fois, on a à évaluer $\tilde{V}_V(f)$, une estimation numérique de $V_V(f)$, avec la même procédure que l'estimée $\tilde{V}(f)$. On trouve alors une expression, sous forme de somme, contenant à chaque fois les estimées $\tilde{V}_{VV}(f)$, $\tilde{V}_{VVV}(f)$,... des variations totales des fonctions pour lesquelles on applique la méthode Quasi-Monte Carlo.
L'erreur est donc exprimée par :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(u)\,du\right| \le \lim_{M\to\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\sum_{j=1}^{M}\left(D^*_N(S)\right)^j\left|\tilde{V}_{(j-1)V}(f)\right|\right]+\cdots \\ \left(V_{MV}(f)\right)\left(D^*_N(S)\right)^{M+1}\end{array}\right\}, \qquad (3.78)$$

Où les variations totales de rang j et leurs estimées par la méthode QMC sont données par :

$$V_{(j-1)V}(f) = \int_0^1 \left|\frac{d^j}{du^j} f(u)\right|\cdot du \qquad (3.79)$$

$$\tilde{V}_{(j-1)V}(f) = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{d^j}{du^j} f(x_n)\right|\right] \qquad (3.80)$$

Notons que l'erreur est plus précise quand l'ordre M est élevé. Ce qui implique une évaluation des dérivées d'ordre élevé. La fonction doit donc être continûment dérivable pour réduire à souhait l'erreur dans l'estimation de la borne de l'erreur. La discrépance à l'origine étant inférieure à 1, les puissances $\left(D^*_N(S)\right)^{M+1}$ tendent vers zéro d'une part et d'autre part les variations de la fonction au sens de Vitali $V_V(f)$ étant bornées, [43], on aura à un rang M et une constante K pour lesquels :

$$Erreur_{\max} = \left[\sum_{j=1}^{M} \left(D^{*}{}_{N}(S) \right)^{j} \left| \tilde{V}_{(j-1)V}(f) \right| \right] + \mathrm{O}\left(K \cdot \left(D^{*}{}_{N}(S) \right)^{M+1} \right), \tag{3.81}$$

$$Erreur_{\max} \approx \left[\sum_{j=1}^{M} \left(D^{*}{}_{N}(S) \right)^{j} \left| \tilde{V}_{(j-1)V}(f) \right| \right]. \tag{3.82}$$

Finalement il faut se rappeler que ceci est un aspect classique lors de la détermination de l'erreur d'intégration numérique. En comparaison avec les quadratures de Simpson et du trapèze, on doit avoir respectivement les dérivées d'ordre 4 et d'ordre 2 de la fonction pour déterminer la borne de l'erreur. Et cette estimation elle-même est d'un certain ordre de précision : $\mathrm{O}(h^4)$ et $\mathrm{O}(h^2)$ respectivement (h étant le pas d'intégration).

Ayant évalué la borne d'estimation de l'erreur, nous pouvons maintenant appliquer la méthode de Quasi-Monte Carlo à l'évaluation de l'intégrale de Pollaczek pour l'impédance mutuelle entre lignes aériennes et câbles souterrains.

3.3.2. **Application de la méthode QMC pour l'impédance mutuelle**

Pour appliquer la méthode QMC avec estimation de la borne d'erreur telle que présentée ci-dessus, on doit s'assurer :

- Que l'intégrale est définie sur l'intervalle $\mathrm{I}_1 = [0 \ldots 1]^1$;
- Qu'elle est continûment dérivable, ou au moins à l'ordre M;
- Que la discrépance à l'origine soit la plus petite possible pour améliorer la convergence de l'expression de l'estimation de l'erreur.

Pour rencontrer ces conditions, on présente dans les sous sections qui suivent : la transformation de l'intégrale de Pollaczek, le choix de la suite à faible discrépance à l'origine, et l'évaluation de l'estimation de la borne de l'erreur.

3.3.2.1 Transformation des bornes d'intégration

La transformation de l'intégrale (3.2) se fait en deux étapes. Le partage en deux intervalles $[0,1]$ et $[1,+\infty]$ et le changement de variable pour l'intervalle $[1,+\infty]$ pour la transformer aussi en $[0,1]$; (3.2) devient :

$$Z = I_1 + I_2 \tag{3.83}$$

Avec :

$$I_1 = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\int_0^1 \left[-u+\sqrt{u^2+j}\right]\exp\left[-\zeta\cdot u\right]\exp\left[-\xi\sqrt{u^2+j}\right]\cos(\xi\eta u)du \tag{3.84}$$

$$I_2 = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\int_1^\infty \left[-u+\sqrt{u^2+j}\right]\exp\left[-\zeta\cdot u\right]\exp\left[-\xi\sqrt{u^2+j}\right]\cos(\xi\eta u)du \tag{3.85}$$

Pour rappel, on a adopté la notation normalisée pour la fréquence et les distances :

$h_2 m = \xi$

$h_1 m = \zeta$

$x/h_2 = \eta$

$m = \sqrt{\omega\mu_0/\rho}$

Pour transformer l'intervalle de (3.85) de $[1,+\infty]$ à $[0,1]$, on peut appliquer les changements suivants :

$$\begin{cases} s = \dfrac{1}{u} \\ ds = -\dfrac{1}{u^2}du \\ \displaystyle\int_1^\infty f(s)ds \rightarrow -\int_0^1 \frac{1}{u^2} f(u)du \end{cases} \tag{3.86}$$

Il est à noter que l'intégrale $I(u)$, définit en (3.10) prend globalement (au niveau de son enveloppe) une allure décroissante : $I(u) \propto K\frac{1}{u}$ (K étant un facteur de décroissance). Ceci suggère que les transformations définies ci haut seront efficientes, voir [40], page 201. En appliquant ce changement, (3.85) devient :

$$I_2 = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\int_1^0 \left[+\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\exp\left[-\frac{\zeta}{u}\right]\times\exp\left[-\xi\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\cos\left(\frac{\xi\eta}{u}\right)du$$

Et finalement en changeant de $[1,0]$ à $[0,1]$, on introduit un signe négatif pour avoir :

$$I_2 = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\int_0^1 \left[-\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\exp\left[-\frac{\zeta}{u}\right]\exp\left[-\xi\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\cos\left(\frac{\xi\eta}{u}\right)du \qquad (3.87)$$

Ce changement est valide car la fonction est continue sur tout l'intervalle $[0,1]$ et pour u tendant vers 0, on vérifie que le deuxième terme $I_2(u)$ dans (3.87) a une valeur limite de 0. Ceci à l'aide de la commande *limit* de Matlab [34], et pour tous les paramètres ξ (xi), ζ (zêta) et η (êta) couvrant les configurations pratiques :

```
limit(((1/u^2)*sqrt((1/u)^2+j)-(1/u)^3)*(exp(-zeta*(1/u)))*(exp(-xi*sqrt((1/u)^2+j)))*
(cos(xi*eta*1/u)),u,0)
```

$$\lim_{u\to 0}\left\{\left[-\frac{1}{u^3} + \frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\exp\left[-\frac{\zeta}{u}\right]\exp\left[-\xi\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\cos\left(\frac{\xi\eta}{u}\right)du\right\} = 0 \qquad (3.88)$$

En recombinant (3.87) et (3.84) dans (3.83), on trouve l'expression de l'intégrale à évaluer par la méthode Quasi-monte Carlo:

$$Z_{qmc} = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\int_0^1 I_{qmc}(u)du \qquad (3.89)$$

$$I_{qmc}(u)=\left\{\begin{array}{l}\left[-u+\sqrt{u^2+j}\right]\exp\left[-\zeta\cdot u\right]\times\ldots\\ \exp\left[-\xi\sqrt{u^2+j}\right]\cos(\xi\eta u)+\ldots\\ \left[-\frac{1}{u^3}+\frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\exp\left[-\frac{\zeta}{u}\right]\times\ldots\\ \exp\left[-\xi\sqrt{\frac{1}{u^2}+j}\right]\cos\left(\frac{\xi\eta}{u}\right)\end{array}\right\} \tag{3.90}$$

Il faut noter qu'on pourrait résoudre numériquement l'intégrale (3.89) par des méthodes de quadrature Lobatto, Simpson ou autre. La quadrature Lobatto est directement utilisable pour certaines valeurs des paramètres ξ, ζ, η et ρ, d'où les méthodes notées «NMquadl sans tronc» dans le chapitre 5. Cependant pour d'autres valeurs de ces paramètres, elle n'est pas utilisable car le nombre maximal d'évaluation de la fonction, soit 10000 est dépassé. Pour les autres méthodes nécessitant la localisation des zéros, cette forme de l'intégrale est difficile à manipuler. En effet, les oscillations deviennent très grandes rendant la localisation des zéros très difficile pour les valeurs de u tendant vers 0.

Notons enfin qu'au niveau implémentation, en considérant la limite (3.88), le programmeur doit spécifier comme suit la valeur de la fonction pour les valeurs $u = 0$ dans $I_{qmc}(u)$:

$$I_{qmc}(0)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right]\exp\left[-\xi\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}j\right]\right] \tag{3.91}$$

3.3.2.2 Calcul de l'intégrale et borne d'erreur

La séquence de Van der Corput de base 2 est satisfaisante pour évaluer l'intégrale de Pollaczek pour l'impédance mutuelle entre ligne et câble. Il y a une relative facilitée à la calculer et à évaluer sa discrépance à l'origine à partir de (3.69). La suite généralisée de

base 12 donne une discrépance à l'origine faible par rapport à celle en base 2. Cependant ses variations totales de la fonction $V_V(f)$ sont plus grandes atténuant l'effet de la diminution de la discrépance à l'origine $D^*{}_N(S)$ dans la relation (3.60) et (3.82).

En récapitulant, la procédure suivante est retenue pour évaluer l'intégrale de Pollaczek de l'impédance mutuelle de retour par la terre entre ligne et câbles par la méthode QMC :

- Calcul hors-ligne de la séquence de Van der Corput en base 2 pour $n = 0,1,2\cdots,2\times10^6$ par (3.61): $x_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n)\times 2^{-i-1}$. Avec la transformation de la base 10 en base 2 de n : $(n)_{10} = (a_0 a_1 \cdots a_k)_2$;
- Évaluation de la fonction (3.90) pour chaque point u_n ($u_n \equiv x_n$) de la suite en se rappelant que pour le point $u = 0$ on utilise (3.91) ;
- Calcul de l'estimée de l'intégrale pour le cas d'une seule dimension sur $[0,1]$:

$$Z \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} I_{qmc}(u_n) \tag{3.92}$$

- Évaluation par (3.73) et subséquente, pour la partie réelle (idem pour imaginaire), des variations totales de la fonction d'ordre 1, 2, et 3.

$$\tilde{V}(f) = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{d}{du} I_{qmc}(u_n)\right|\right] \tag{3.93}$$

$$\tilde{V}_V(f) = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{d^2}{du^2} I_{qmc}(u_n)\right|\right] \tag{3.94}$$

$$\tilde{V}_{VV}(f) = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{d^3}{du^3} I_{qmc}(u_n)\right|\right] \tag{3.95}$$

- Calcul de la borne de l'erreur absolue par (3.82), pour la partie réelle (idem pour imaginaire) :

$$Erabs_{\max} \approx \left[\sum_{j=1}^{3} \left(D^{*}{}_{N}\left(S\right)\right)^{j} \left| \tilde{V}_{(j-1)V}\left(f\right) \right| \right]$$

- Calcul de l'erreur relative maximale pour chaque partie (réelle et imaginaire)

$$Errel_{\max-\mathrm{Im}} = \frac{Erabs_{\max-\mathrm{Im}}}{\left|\mathrm{Im}\left(Z\right)\right| - Erabs_{\max-\mathrm{Im}}} \tag{3.96}$$

$$Errel_{\max-\mathrm{Re}} = \frac{Erabs_{\max-\mathrm{Re}}}{\left|\mathrm{Re}\left(Z\right)\right| - Erabs_{\max-\mathrm{Re}}} \tag{3.97}$$

Pour illustrer l'application de la méthode QMC pour l'évaluation de l'impédance mutuelle nous présentons dans la Figure 3.8 les résultats d'intégration pour différents nombres des points dans la suite de Van der Corput utilisée. On voit notamment que pour réduire l'erreur relative entre la valeur par QMC et celle de l'intégration par la méthode introduite plus haut, il faut augmenter le nombre des points au détriment du temps d'exécution par le processeur (Temps CPU). Pour avoir une erreur de 0.02% il faut dix fois plus de temps pour la méthode QMC par rapport à la nouvelle méthode numérique (NM).

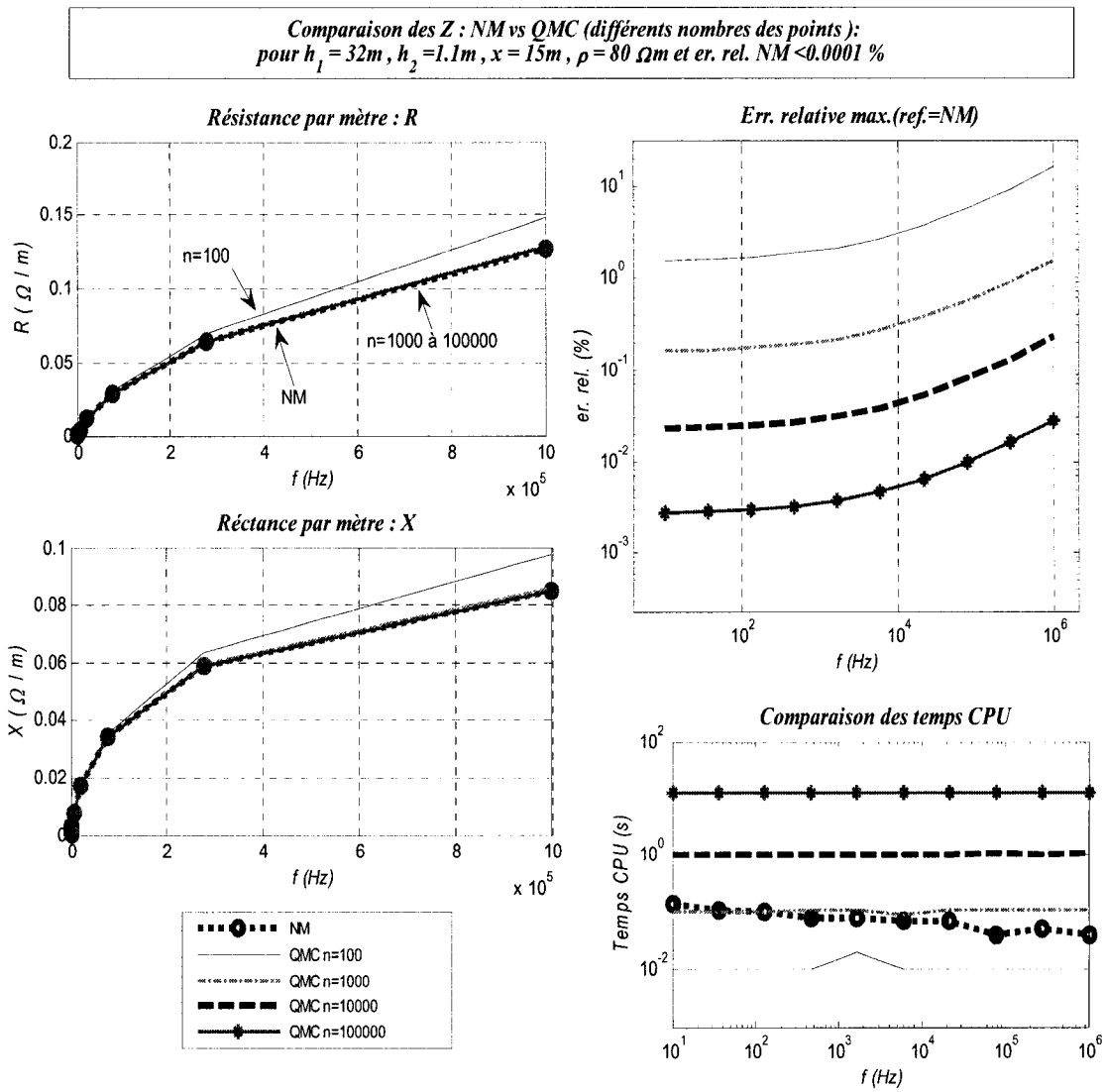


Figure 3. 8 Résultats d'intégration par la méthode Quasi Monte Carlo (QMC) en comparaison avec la nouvelle méthode numérique (NM) : différents nombres des points dans la méthode QMC.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre il a été passé en revue quelques techniques utilisées pour l'évaluation de l'impédance mutuelle. La plus récente méthode d'évaluation numérique de l'intégrale de Pollaczek dans [12], a été analysée et une insuffisance a été décelée au niveau de la localisation des zéros de la fonction intégrante. Cet algorithme ayant été basée sur cette localisation des zéros devrait être revue. L'utilisation des outils de calcul symbolique de Matlab nous a permis d'établir une bonne manière de borner les intervalles contenant les zéros de la fonction l'intégrante rendant aisé la détermination des ces derniers par une méthode disponible dans Matlab. Nous avons montré que la nouvelle méthode localise mieux les zéros que l'algorithme proposé dans [12].

Sur base de cette correction de localisation de zéros, et avec une estimation des bornes d'erreurs d'intégration, une nouvelle méthode a été introduite. Elle utilise les relations des inégalités de valeur absolue pour borner l'erreur commise dans les limites voulues par l'utilisateur.

Finalement, en prévision de la validation de cette nouvelle méthode numérique proposée, nous avons appliqué la méthode Quasi-Monte Carlo (QMC) sur l'intégrale de Pollaczek. Nous avons eu à établir une méthode de calcul pratique pour estimer la borne de l'erreur due à la méthode QMC. Ceci nous permettra de valider certaines étapes de l'algorithme que nous proposons, telle la vérification de la borne de l'erreur commise dans l'intégration. Le chapitre suivant sera justement dédié à la validation de la nouvelle méthode. Il faut enfin retenir que la méthode Quasi Monte Carlo est plus lente par rapport à la nouvelle méthode.

CHAPITRE 4 VALIDATION DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE

Dans le présent chapitre, la méthode établie au chapitre précédent est validée pour les étapes importantes. L'effet de l'erreur due à la troncature sera analysé en rapport avec la valeur de l'impédance découlant de l'intégrale non transformée. La précision dans la détermination des bornes de l'erreur sera analysée en comparant cette nouvelle méthode numérique avec celle de l'intégration de type Quasi Monte Carlo (QMC).

Enfin, les valeurs de l'impédance (parties réelle et imaginaire) seront comparées à celle de la méthode proposée dans [12] (et d'autres méthodes analytiques approximatives) dans le chapitre cinq, traitant de l'étude comparative entre les méthodes d'évaluation de l'impédance mutuelle.

4.1 Validation de la Troncature

Pour valider la troncature nous utilisons la comparaison entre les impédances obtenues avec et sans troncature dans les relations (3.22) et (3.89) respectivement :

- Avec troncature :

$$Z = \int_0^{u_{\max}} I(u) \cdot du \pm Er_{Tronc} = Z^{Tronc} \pm Er_{Tronc},$$

Où $I(u)$ était défini par (3.10).

- Sans troncature :

$$Z_{qmc} = \int_0^1 I_{qmc}(u) du,$$

Où on a défini $I_{qmc}(u)$ dans (3.90).

Considérant les erreurs d'intégration numérique, $Eabsn_{Tronc}$ et $Eabsn_{direct}$ pour la méthode avec et sans troncature respectivement ; la valeur exacte de l'intégrale serait :

$$Z = Z^{Tronc} \pm Er_{Tronc} = \left[\tilde{Z}^{Tronc} \pm Eabsn_{Tronc} \right] \pm Er_{Tronc}$$

Où : $Z = Z^{Direct} \pm Eabsn_{direct}$

Nous devons alors vérifier si la valeur de l'impédance par la méthode avec troncature en tenant compte des différentes erreurs, reste autour de la valeur exacte, c'est-à-dire :

$$Z^{\min} \leq \tilde{Z}^{Tronc} \leq Z^{\max}$$

$$\begin{cases} Z^{\min} = \tilde{Z}^{direct} - \left[Eabsn_{Tronc} + Eabsn_{direct} + Er_{Tronc} \right] \\ Z^{\max} = \tilde{Z}^{direct} + \left[Eabsn_{Tronc} + Eabsn_{direct} + Er_{Tronc} \right] \end{cases}$$

Quelques cas illustrés dans les Figures 4.1 et 4.2 ci-dessous montrent bien que l'impédance avec troncature est bornée par les valeurs minimale et maximale de l'impédance numérique évaluée sans troncature : L'impédance avec troncature est donc, à une erreur absolue près, égale à la valeur exacte de l'intégrale.

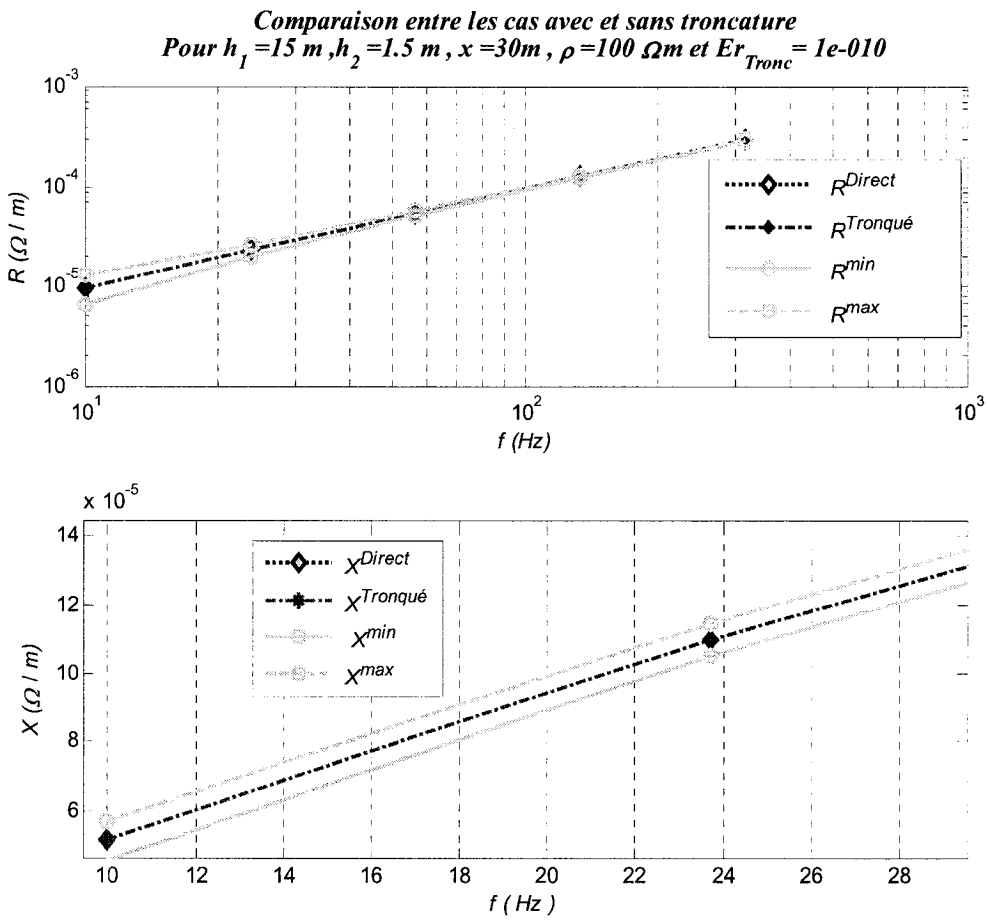


Figure 4. 1 Validation de la troncature avec une erreur de troncature de 1×10^{-10} : comparaison entre les valeurs avec troncature et sans troncature : $Z^{\min} \leq \tilde{Z}^{Tronc} \leq Z^{\max}$

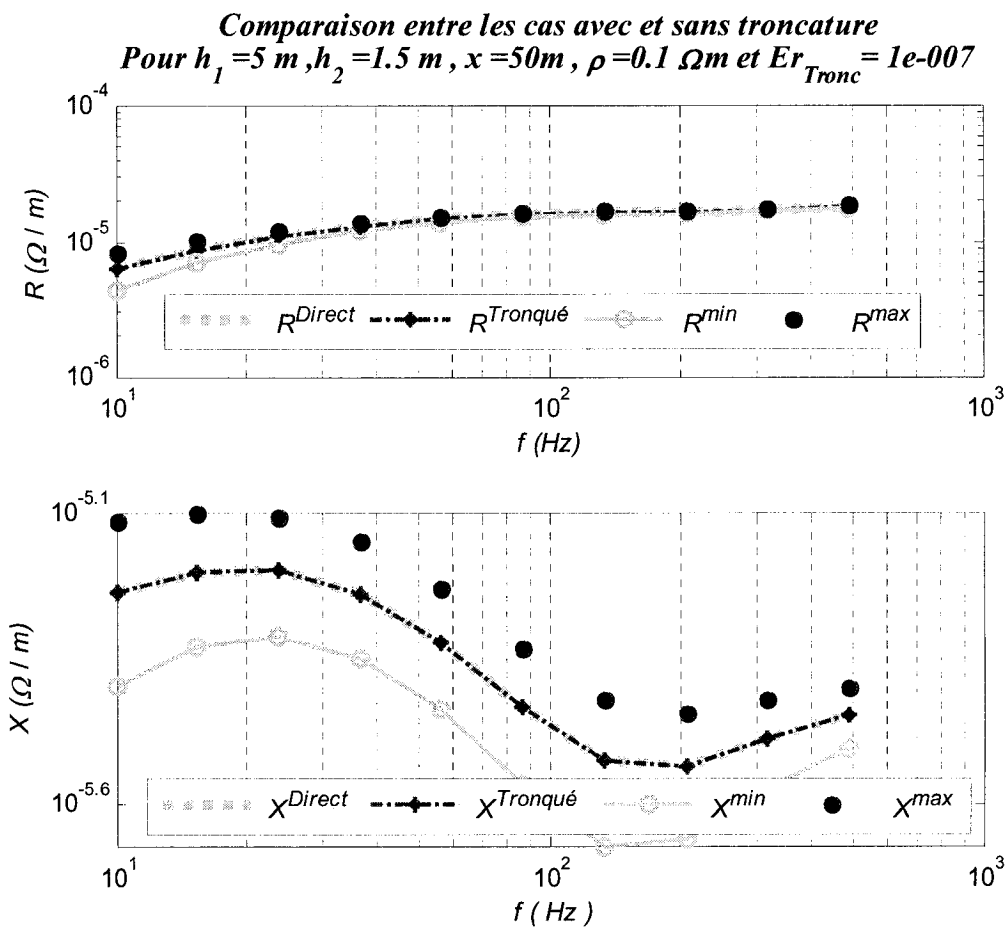


Figure 4. 2 Validation de la troncature avec une erreur de troncature de 1×10^{-07} : cas d'une estimation conservative des bornes des erreurs pour la méthode direct.

4.2 Validation de l'effet de la diminution de l'erreur : NM vs QMC

Pour vérifier l'effectivité de l'accroissement de la précision quand on diminue la borne de l'erreur relative, nous comparons dans la Figure 4.3 la méthode Quasi-Monte Carlo à la nouvelle méthode numérique. On constate que les valeurs d'impédance, pour la NM à

droite et le QMC à gauche, sont plus rapprochées quand l'erreur relative de chacune des méthodes diminue. En deçà de 0.005% et 0.01%, pour la NM et le QMC respectivement, les valeurs d'impédances sont quasiment identiques. Ceci indique par ailleurs que la formulation de l'estimation des erreurs pour QMC établie précédemment est acceptable. Notons qu'ayant considéré les bornes des erreurs, il est normal qu'il y ait différence entre les valeurs des erreurs relatives donnant la même impédance.

Enfin, mentionnons que la NM est plus rapide que le QMC car pour le même ordre de grandeur de l'erreur relative, son temps d'exécution CPU est de l'ordre de dix fois moins que le temps CPU du QMC, Voir la Figure 4.4.

Comparaison entre QMC et NM : différentes erreurs Relatives.
Pour h_1 =30 m , h_2 =1.3 m , x =5 m, ρ =100 Ωm et f = 10kHZ

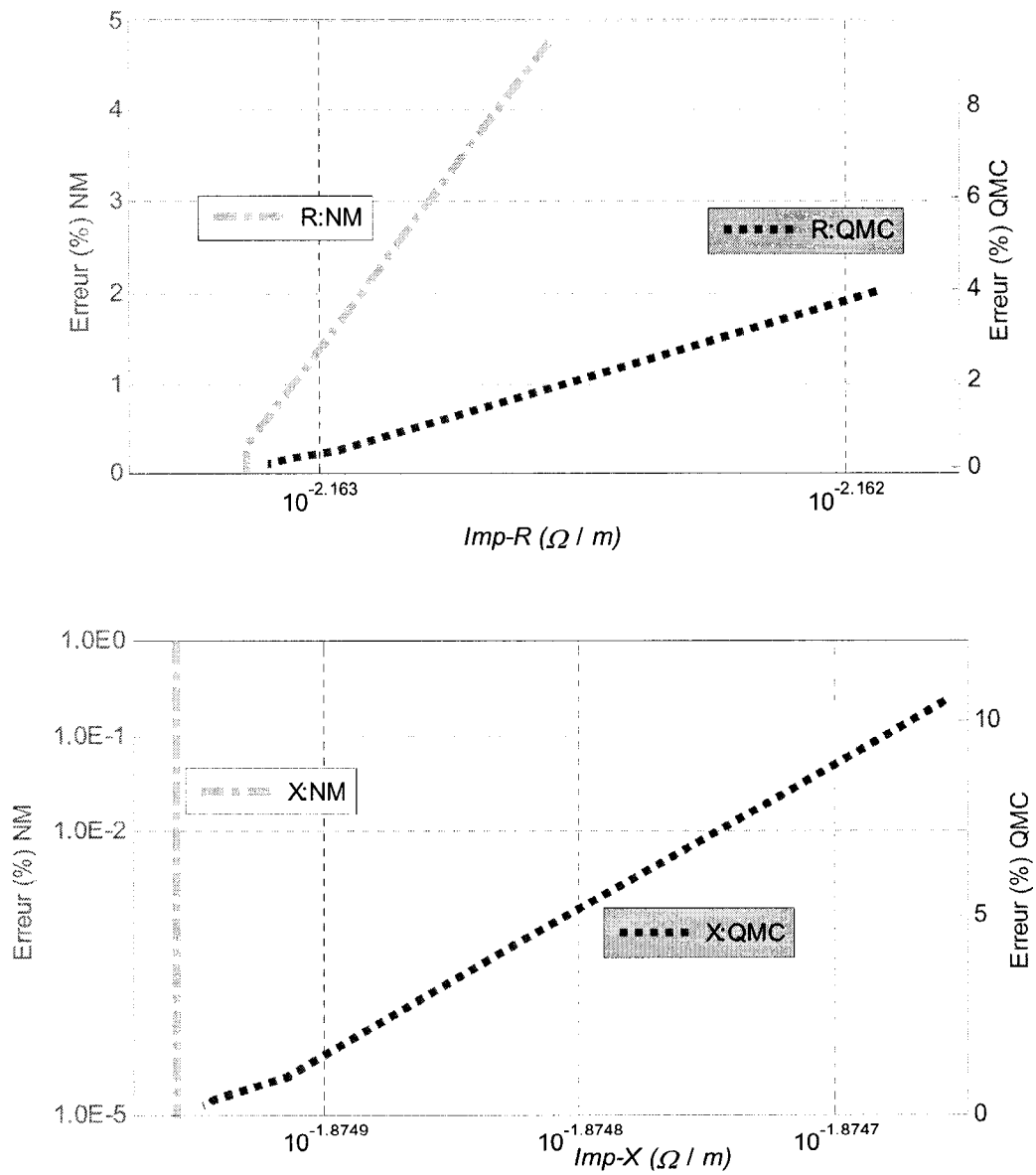


Figure 4. 3 Validation de l'effet du raffinement de l'erreur relative : Concordance entre NM : Nouvelle méthode et QMC (Quasi-monte Carlo) pour petites erreurs relatives

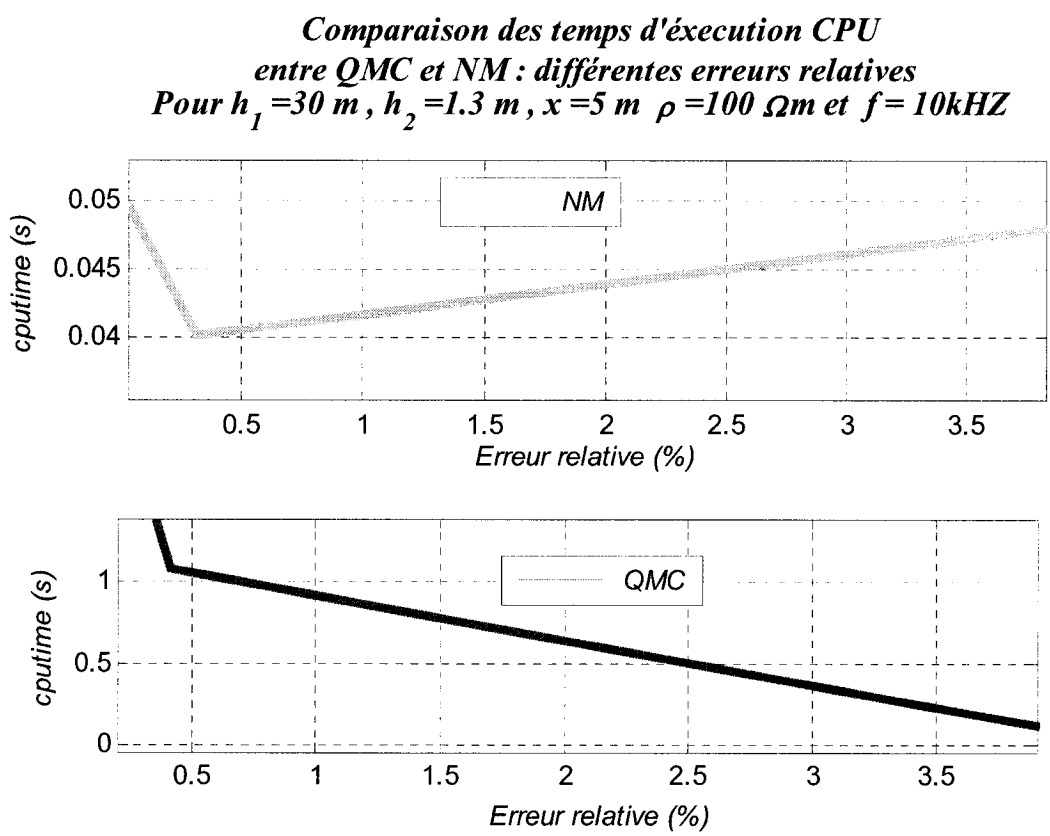


Figure 4. 4 Comparaison des temps d'exécution CPU entre NM (Nouvelle méthode) et QMC (Quasi-monte Carlo) : NM est 10 fois plus rapide pour la même erreur relative.

4.3 Limites d'applicabilité de la nouvelle méthode.

La limite d'utilisation de la nouvelle méthode est liée aux limites de la fonction de quadrature Lobatto (*quadl*) de Matlab. Pour la plupart des configurations, elle est efficace. Mais pour certaines configurations, souvent non pratiquement rencontrées pour un réseau électrique, on n'atteint pas les valeurs très réduites de la borne de l'erreur relative. Il s'agit des cas de résistivités du sol très basses, moins que 1 Ωm, et des distances très élevées de l'ordre de quelques centaines de mètres. Pour ces cas,

l'évaluation des valeurs de la fonction intégrante exige des pas très petits. Mais en se rappelant que pour certains cas de ce type, les hypothèses de formulation de Pollaczek ne sont plus valides, voir (2.69), on conclut de la bonne performance de la méthode pour une utilisation pratique.

Par ailleurs, le temps d'exécution s'accroît rapidement pour un grand nombre des zéros associés au cas moins amorti de l'intégrale. Ce dernier correspond à des distances horizontales x élevées associées à des basses hauteurs dans l'air. En effet, moins le conducteur est haut, plus grande sera la variable d'intégration maximale de troncature, pour la même borne de l'erreur relative. Par ailleurs, plus la distance horizontale x est grande, plus les zéros découlant du terme $\cos\left(\xi \, {}^{x}\!/_{h_2} \, u\right) = 0$ dans (3.4) seront nombreux entre 0 et $u_{\max}$, la valeur maximale de la variable d'intégration.

Malgré le temps d'exécution CPU élevé pour les erreurs relatives très faibles, cette méthode reste un très bon outil pour valider les autres méthodes approximatives ou numériques. Elle est très précise mais conservative dans l'estimation des bornes des erreurs notamment.

4.4 Conclusion

La méthode numérique développée au chapitre trois a été validée dans les deux principales étapes : la troncature et l'accroissement de la précision. Nous avons montré que la valeur de l'intégrale avec troncature est bornée entre les valeurs minimale et maximale de l'intégrale calculée sans troncature. Par ailleurs, pour s'assurer qu'en diminuant l'erreur relative exigée on augmente la précision, nous avons montré que la méthode de QMC et celle nouvellement introduite convergent vers la même valeur de l'impédance quand on diminue successivement la valeur des bornes de l'erreur relative de chacune des méthodes.

Enfin, la limite d'application de cette méthode est liée à celle de la fonction *quadl* pour des cas où les pas exigés sont très petits atteignant la limite de la précision de l'outil de calcul.

Cette méthode est précise mais est conservative pour la détermination de l'intervalle de confiance et son temps d'exécution est allongé. Nous nous proposons de l'utiliser pour comparer, dans le chapitre suivant, les différentes approximations pour l'évaluation de l'impédance mutuelle de retour par la terre.

CHAPITRE 5 ÉTUDE COMPARATIVE ENTRE LES MÉTHODES

La méthode numérique que nous proposons, validée dans le chapitre précédent, nous permet d'effectuer une étude comparative entre les méthodes et en dégager les performances. Nous établirons une méthode hybride efficiente pour un programme de simulation tel EMTP-RV. Son temps d'exécution est évalué par un cas type. Notons NMquadl réfère à l'utilisation directe de la fonction *quadl* de Matlab.

5.1 Les méthodes analytiques approximatives

5.1.1 Nouvelle formule approximative (NM-approx) vs Lucca et CCITT

La nouvelle formule approximative pour l'impédance mutuelle entre ligne aérienne et câble souterrain, voir (2.47), performe mieux que la formule de Lucca [13] et celle proposée par le CCITT [5], pour certaines configurations qui sont communément utilisées. Il s'agit de : hauteur au dessus du sol inférieur à environ $h_1 = 10m$, profondeur $h_2 \leq 2m$ dans le sol et distances horizontales $x < 5m$. Ces types de configuration correspondent au niveau de tension de l'ordre de 245-362kV pour certains États américains [31] et pour les quels il y aurait des pipe-lines dans les environs du tracé de la ligne. Ou encore, en rapport avec la hauteur et la profondeur, une ligne de télécommunication (souvent coaxiale) exposée au champ dû à un câble souterrain. Dans la Figure 5.1, l'erreur relative maximale est inférieure à 2% pour la nouvelle méthode approximative alors qu'elle atteint 10% pour la formule de Lucca et celle de CCITT. Il faut souligner que quand $x = 0m$ (conducteurs plus ou moins alignés horizontalement), la formule de Lucca donne une erreur inacceptable de plus de 30% dans certains cas, voir Figure 5.2.[a]. Enfin, la NM-approx devient, quant à elle, inutilisable quand la distance horizontale croît. Sa limite de bonne performance se situe aux environs de $x \leq 4m$ et $h_1 < 11m$, comme montré dans la figure 5.2.[b].

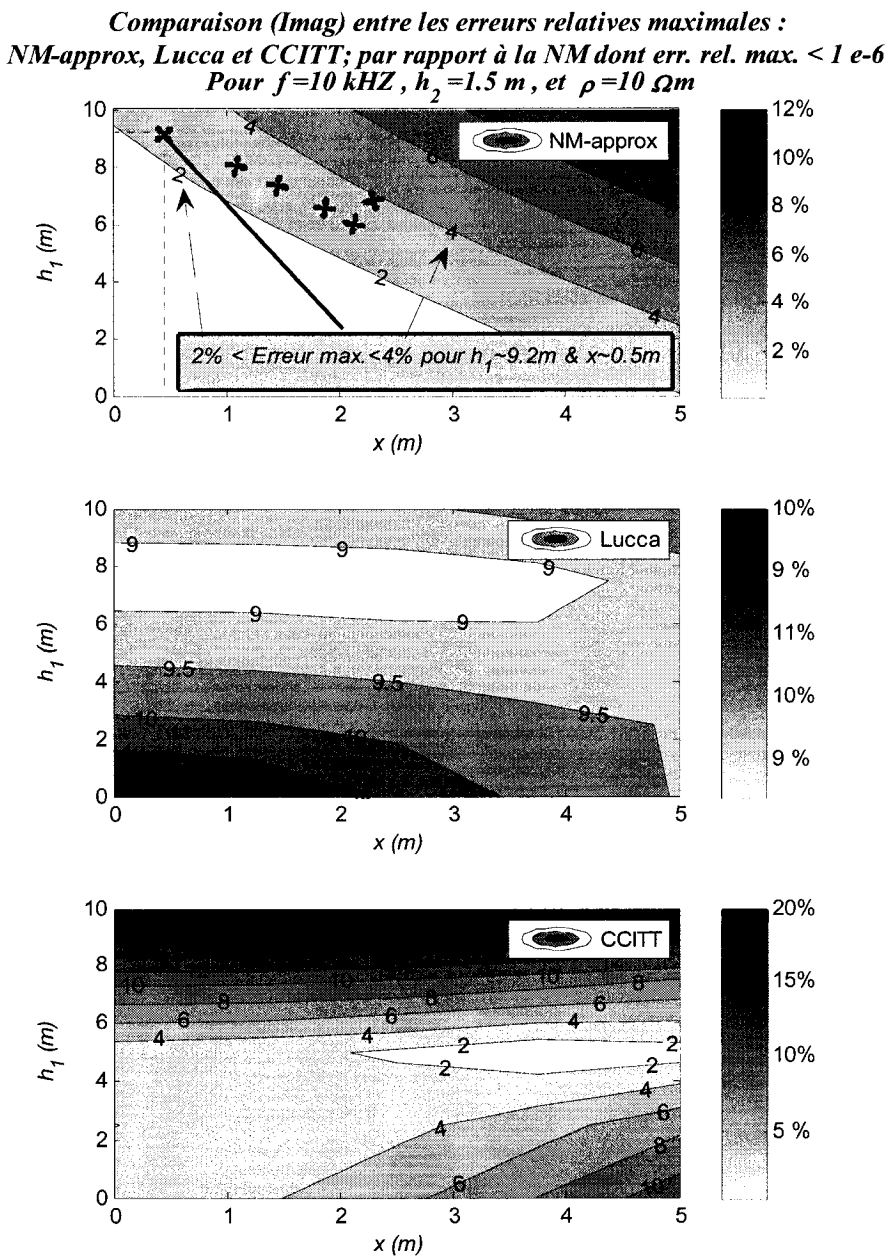
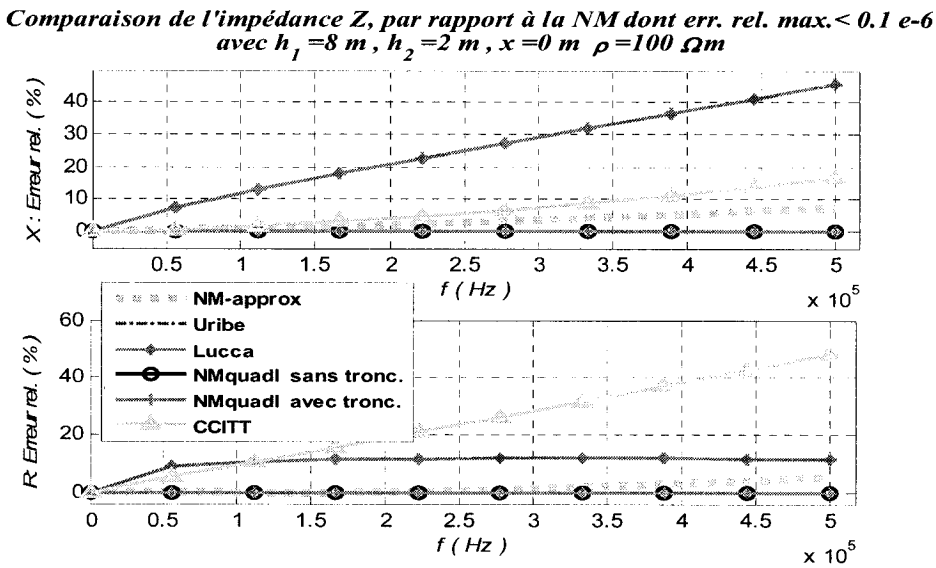
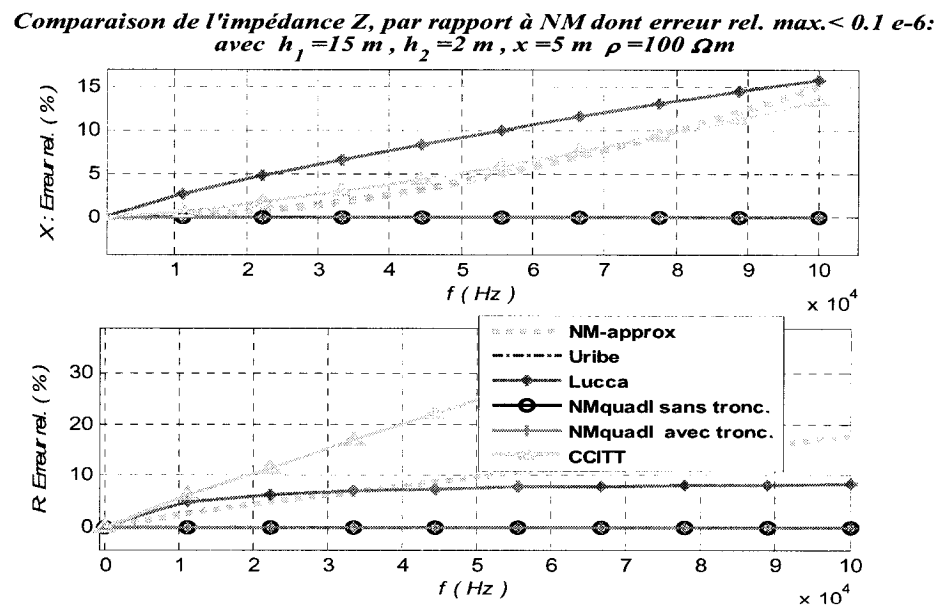


Figure 5. 1 Bonne performance de la nouvelle formule approximative (NM-approx.) pour ligne et câble, pour les éléments proches, en comparaison aux formules de Lucca et du CCITT : Comparaison des erreurs relatives maximales (partie réelle et imaginaire) en rapport avec la nouvelle méthode numérique (NM)



[a]



[b]

Figure 5. 2 Mauvaises performances pour formules approximatives : *[a]* : Lucca, quand la distance horizontale entre éléments est négligeable; *[b]* : NM-approx : $x \geq 4m$ et $h_1 \geq 11m$.

5.1.2 Formule approximative pour un des conducteurs sur la surface du sol

Deux aspects motivent l'étude de ce cas :

- Il arrive souvent qu'un des conducteurs soit à la surface, alors que le deuxième est enfui dans le sol. Il s'agirait du cas d'analyse de la compatibilité entre câbles et rails de trains ;
- Comme mentionné plus haut, une formule entre câbles souterrains peut être déduite de celle entre une ligne et un câble en considérant que la ligne est à la surface du sol. De cette formule nous dériverons une nouvelle formule approximative pour l'impédance entre câbles souterrains, voir (2.48), dont la performance sera évaluée dans le chapitre suivant.

Pour ce type de configuration, on constate, dans la Figure 5.3, que la nouvelle formule approximative donne les erreurs maximales d'environ 10% quand la hauteur h_1 est proche de zéro et $h_2 \approx 2m$, alors que les formules de Lucca [13] et CCITT [5] donnent respectivement 25% et 35%.

Notons que pour le cas symétrique à ce dernier; celui d'un conducteur sur la surface et l'autre dans l'air (ligne aérienne vs rail de train), l'impédance se déduit de la formule de Carson qui est équivalente à celle de l'intégrale de Pollaczek (2.55) où la profondeur devient zéro. On a alors (2.55) modifiée :

$$Z = \frac{\omega\mu_0}{\pi}\int_0^{u_{\max}} \left[-u + \sqrt{u^2 + j}\right] \exp\left[-h_1 m u\right] \times \cos\left(mxu\right) du + Era_{Tronc} \tag{5.1}$$

Avec, pour rappel :

$$x = \left|x_2 - x_1\right| \tag{5.2}$$

$$m = \sqrt{\omega\mu_0 / \rho} \tag{5.3}$$

Une des méthodes efficientes pour l'évaluer serait la double approximation logarithmique combinée à la quadrature Lobatto [24].

Comparaison entre les erreurs relatives maximales :
NM-approx, Lucca et CCITT, par rapport à la NM dont err. rel. max. < 1e-6
Pour f=100 kHZ , x =10 m , et ρ=100 Ωm

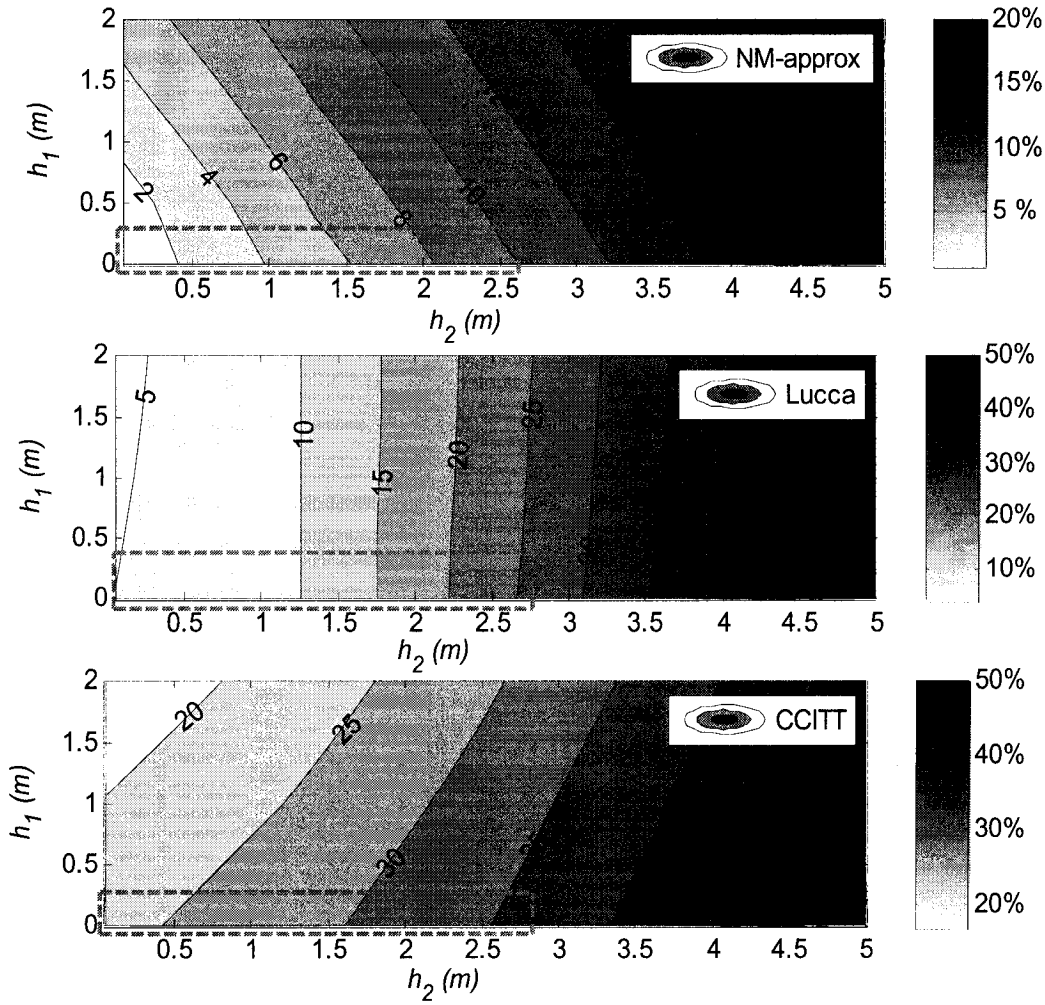


Figure 5. 3 Illustration de la bonne performance pour la nouvelle formule approximative NM-approx dans le cas d'un conducteur sur la surface du sol et l'autre enfui à moins de 2.5 m de profondeur. Pour la fréquence $f = 0.1 MHz$.

5.1.3 Limites des formules approximatives pour fréquences élevées.

Les formules approximatives sont inadéquates pour les fréquences élevées ou la conductivité élevée. Sur la Figure 5.4, on note que pour la conductivité de $\sigma = 0.1 S/m$, les erreurs sont exagérées à partir d'environ 100kHz. La formule de Lucca est celle dont les erreurs sont moins élevées par rapport aux formules du CCITT et la nouvelle formule approximative. Mais elle est aussi inadéquate. Pour ces cas, nous appliquerons les méthodes numériques présentées ci-dessous.

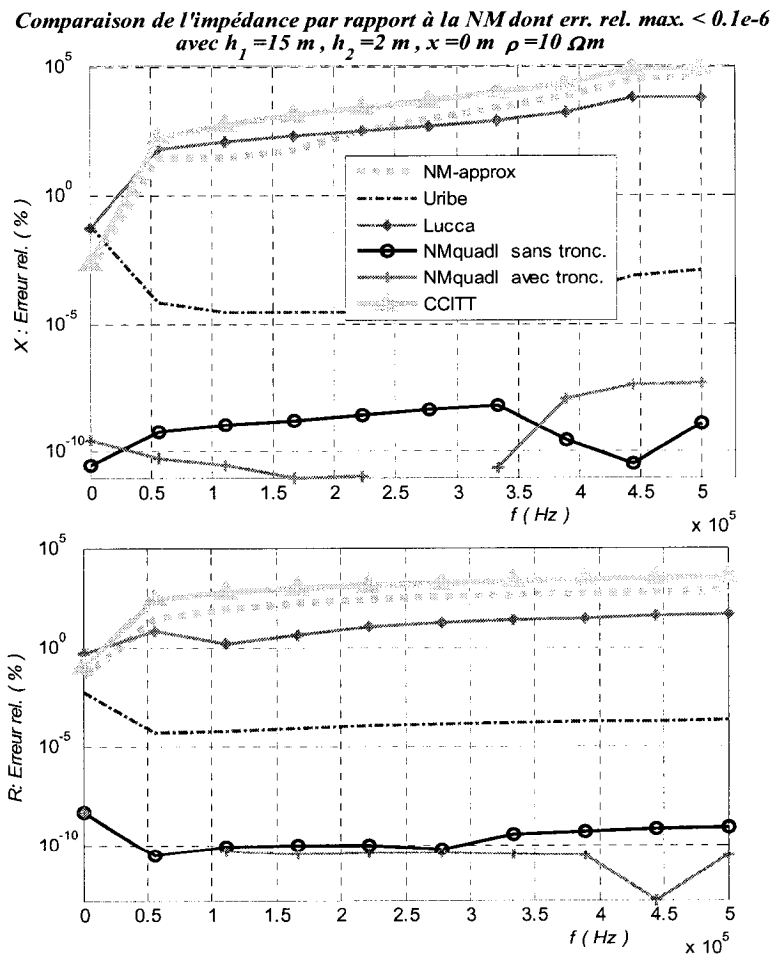


Figure 5. 4 Illustration de la limite des formules approximatives pour fréquences élevées.

5.2 Les méthodes numériques : Nouvelle méthode vs la méthode Uribe

La nouvelle méthode numérique NM-quadl, utilisant *quadl,* la fonction quadrature Lobatto de Matlab, avec une troncature préalable, performe mieux que la méthode de Uribe dans [12]. Pour les mêmes ordres de grandeur des erreurs relatives, environ 10^{-10}%, dans la Figure 5.5. Les valeurs de comparaison étant celles de la nouvelle méthode numérique complète NM-gen, c'est-à-dire pour laquelle on recherche d'abord les zéros. On note que le temps d'exécution CPU est réduit pour la NM-quadl dans la Figure 5.6. Ceci ouvre la possibilité de l'utiliser pour un programme de simulation tel EMTP-RV. Cependant il faut noter que pour les fréquences de moins de 10kHz, les formules approximatives peuvent encore être utilisées. Il y a donc lieu de combiner les méthodes pour couvrir tous les niveaux des fréquences. Pour ça, nous introduisons une méthode hybride dans la sous-section qui suit.

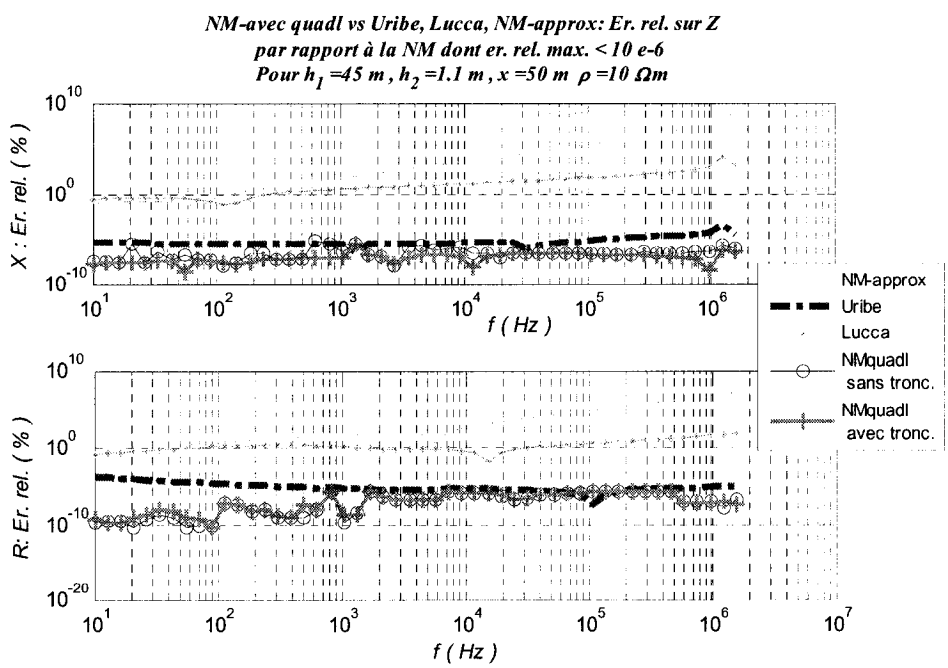


Figure 5. 5 Performance de la nouvelle méthode numérique à base de quadl en comparaison avec la méthode de Uribe : Même ordre de grandeur des erreurs relatives.

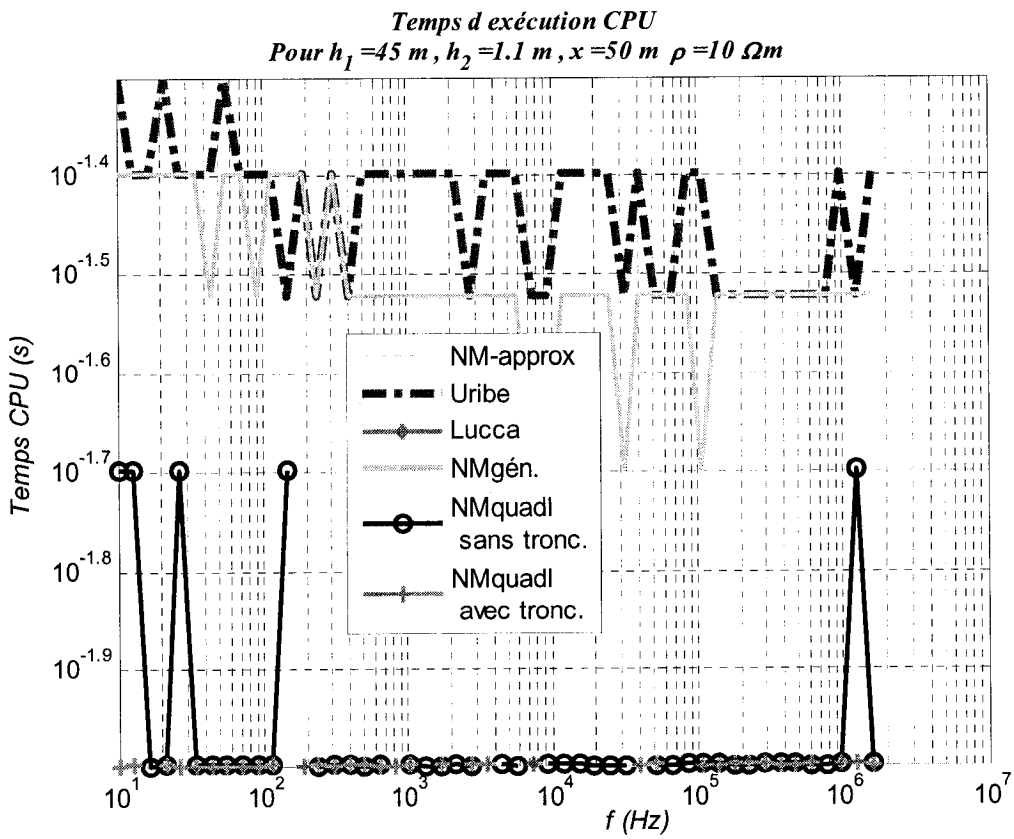


Figure 5. 6 Temps CPU réduit pour la nouvelle méthode numérique NM quadl avec troncature en comparaison avec le méthode de Uribe

5.3 Méthode hybride : Lucca, NM-approx et quadl combinés pour EMTP-RV

5.3.1 Principe et application de la nouvelle méthode hybride

Il vient d'être montré que les formules approximatives ont des limitations pour certaines fréquences pratiques, bien que leurs temps d'exécution soient très petits. Alors que les méthodes numériques consomment plus de temps d'exécution mais donnent des bons résultats pour toutes les fréquences et paramètres.

Pour tirer profit des avantages des toutes ces méthodes et en minimiser les inconvénients, nous formons une méthode hybride combinant trois méthodes en

s'assurant que l'erreur relative maximale commise est inférieure à 1%. Ainsi, on utilise la méthode numérique ou une les formules approximatives selon cas :

- Formules approximatives : $\{f \leq 5kHz, \rho \geq 50\Omega m, h_1 \leq 60m, h_2 \leq 6m\}$
  - Nouvelle formule approximative (NM-approx) : pour petites valeurs de $x \leq 3$;
  - Formule approximative de Lucca [13] pour les autres cas.
- Nouvelle méthode numérique utilisant la quadrature Lobatto, avec troncature (NM-quadl) : pour tous les cas restants

Les erreurs maximales commises pour chaque méthode sont évaluées dans la Figure 5.7 suivante :

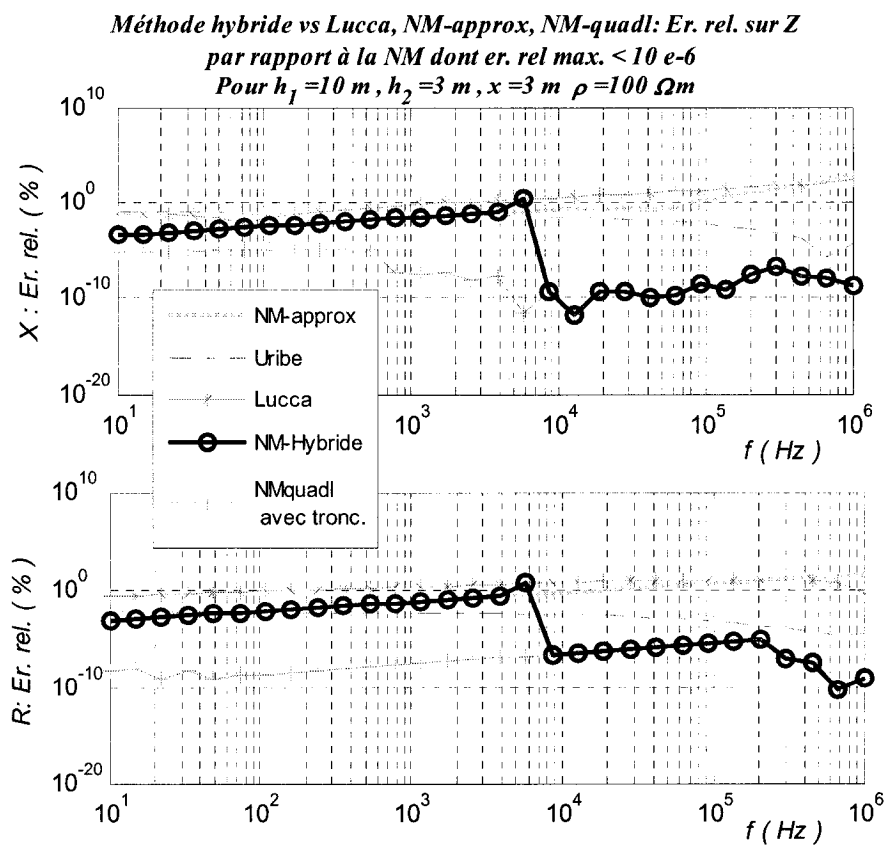


Figure 5. 7 Performance de la nouvelle méthode Hybride utilisant NM-approx, Lucca et NM-quadl avec troncature.

On note que quand les erreurs pour les formules de Lucca et la nouvelle formule approximative (NM-approx) dépasse 1%, Figure 5.7, on passe par la méthode NM-quadl qui performe le mieux pour les méthodes numériques. Si les paramètres sont non propices pour une formule approximative, la méthode utilisée est automatiquement numérique (NM-quadl), voir Figure 5.8

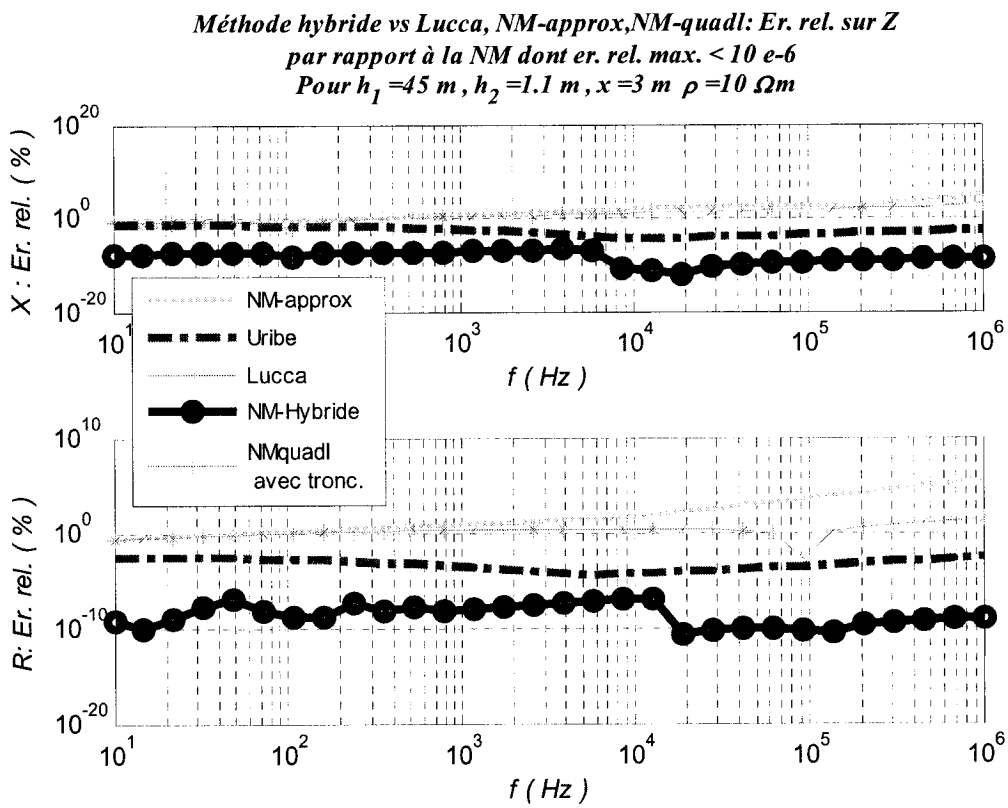


Figure 5. 8. Utilisation de la méthode numérique dans la méthode hybride pour Lucca et NM-approx défaillants.

5.3.2 Temps CPU pour un balayage en fréquence en évaluant l'impédance.

Le temps d'exécution CPU élevé des méthodes numériques est un frein pour leur utilisation en simulation. La méthode hybride que nous proposons requiert moins de 60

secondes pour 10000 évaluations de l'impédance sur un intervalle de fréquence de 10Hz à 1MHz. Alors que la méthode de Uribe requiert près de trois fois plus de temps, voir Figure 5.9. Ces calculs sont réalisés sur un ordinateur à processeur Pentium 4 (1300 MHz) et avec une mémoire RAM de 752 Mo.

L'utilisation de la méthode hybride à cette vitesse est à envisager par les développeurs moyennant des méthodes d'optimisation si nécessaire.

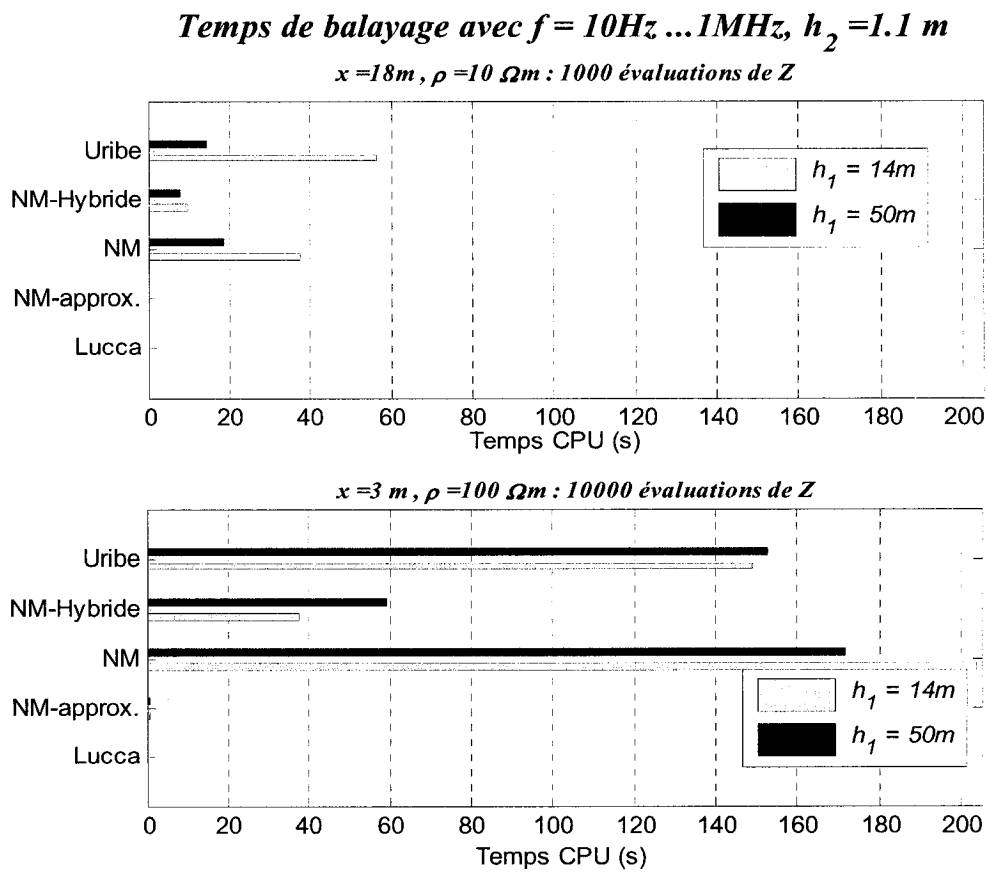


Figure 5. 9 Comparaison des temps CPU consommé pour l'évaluation de l'impédance avec toutes les méthodes pour un balayage en fréquence de 10Hz à 1MHz : 1K et 10K évaluations.

5.4 Conclusion

À l'issu de l'analyse entre les formules faites dans ce chapitre, on a montré que la nouvelle formule approximative issu des développements en série de l'expression des

champs électriques fait par Pollaczek, performe bien pour certaines configurations, notamment quand le fil en l'air s'approche de plus du sol et que la distance horizontale entre les conducteurs est petite.

Par contre, toutes les formules approximatives sont inutilisables pour les fréquences de plus d'une dizaine de kHz. Nous avons proposé une méthode hybride combinant la nouvelle formule approximative, celle de Lucca [13] et la méthode numérique la plus efficiente à base de la quadrature Lobatto avec troncature de l'intégrale. Le temps d'exécution de cette nouvelle méthode pour 10000 évaluations est moins de 60 secondes, donne une indication aux développeurs pour leur implantation dans un programme de simulation.

CHAPITRE 6 APPLICATION POUR DEUX CÂBLES SOUTERRAINS

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode étudiée pour le cas ligne aérienne et câble souterrains au cas des deux câbles souterrains. Une nouvelle méthode approximative est proposée et analysée. Sa comparaison avec les autres formules approximatives est aussi donnée. La méthode de référence étant la nouvelle méthode numérique que nous avons proposée avec des bornes d'erreurs relatives très petites.

6.1 Expression de l'impédance mutuelle avec retour par la terre pour câbles

À partir du champ produit dans le sol par un conducteur souterrain, défini en (2.24), on a l'expression de l'impédance mutuelle :

$$\begin{cases} Z_{--} = -\dfrac{\omega\mu}{4}\left[H_0^{(1)}\left(k_1 r\right) - H_0^{(1)}\left(k_1 r'\right)\right] + \ldots \\ + j\dfrac{\omega\mu}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\exp\left\{jsx + \left(h_2 + h_1\right)\sqrt{s^2 - k_1^2}\right\}}{|s| + \sqrt{s^2 - k_2^2}} ds \ , \\ y_2 \le 0 \ , y_1 \le 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

En y appliquant les transformations faites pour le cas aérien –souterrain, on aboutit à une forme semblable à (3.1), avec normalisation :

$$Z^{sout} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi}\left\{\begin{array}{l} \left[K_0\left(mr\right) - K_0\left(mr'\right)\right] + \cdots \\ -2j\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[-u + \sqrt{u^2 + j}\right]\exp\left[-\xi\sqrt{u^2 + j}\right] \times \cos\left(\xi\eta u\right) du \end{array}\right\} \tag{6.2}$$

Où on a défini :

$$\xi = (h_1 + h_2)m$$

$$\eta = x/(h_1 + h_2)$$

$$m = \sqrt{j\omega\mu_0/\rho_{sol}}$$

$$r = \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + x^2}$$

$$r' = \sqrt{(h_1 + h_2)^2 + x^2}$$

$K_0^{(1)}$ est la fonction de Bessel d'ordre zéro et de type 2.

$$Z^{sout} = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \times \left\{ \begin{array}{l} \left[K_0(mr) - K_0(mr')\right] + \cdots \\ -2j \displaystyle\int_0^{+\infty} \begin{array}{l} \left[F(u) - u + jG(u)\right] \times \cdots \\ \exp\left[-\xi(F(u)) - j\xi G(u)\right] \times \ldots \\ \cos(\xi\eta u)\,du \end{array} \end{array} \right\} \tag{6.3}$$

Où :

$$\begin{cases} F(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^4+1} + u^2} \\ G(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^4+1} - u^2} \end{cases} \tag{6.4}$$

6.2 Nouvelle méthode numérique d'évaluation et formules approximatives

Il faut remarquer que l'expression (6.3) pour les câbles souterrains est similaire à celui entre câble souterrain et ligne aérienne en (3.2) hormis un terme $\exp\left[-\xi(\zeta u)\right]$ qui est un amortissement supplémentaire dans le premier cas.

La détermination des zéros sera donc semblable. Le seul changement que nous apporterons sera la troncature.

La relation semblable à (3.28), exprimant la troncature, en se basant sur [15], est :

$$u_{\max} = -\frac{1}{\xi}\ln\left(\xi \cdot Era\right) \tag{6.5}$$

Où on a défini :

Era : erreur absolue commise suite à la troncature à $u_{\max}$.

En appliquant ces changements, on forme comme au chapitre 3 une méthode numérique pour les câbles souterrains.

6.3 Lien entre formule pour câbles et celle entre ligne et câble

6.3.1 Lien entre la formule pour ligne-câble et la formule pour câbles

À partir de l'analyse faite précédemment, nous avons établi un lien entre l'impédance de retour des câbles souterrains et celle entre un câble et un conducteur sur la surface de la terre. Ce dernier étant le cas du câble souterrain vs ligne aérienne pour laquelle la hauteur est nulle. On a eu ainsi, pour deux conducteurs enfouis à h_1 et h_2, la formule (2.48) comportant deux termes :

$$Z_{--}\left(x;h_2,h_1,\rho_{sol},f\right) = \begin{cases} Z_{-+}\left(x,h_2+h_1,0,\rho_{sol},f\right)+\cdots \\ j\dfrac{\omega\mu_0}{2\pi}\left[K_0\left(-j\chi r\right)-K_0\left(-j\chi r'\right)\right] \end{cases}$$

Le premier terme $Z_{-+}\left(x,h_2+h_1,0,\rho_{sol},f\right)$ est l'impédance mutuelle de retour par la terre entre un conducteur à une profondeur $h_{sol} = h_2 + h_1$ et un autre conducteur dans l'air, à la surface du sol $h_{air} = 0$, c'est un cas particulier de l'analyse qui a été largement traitée jusqu'ici. Le deuxième terme comporte les fonctions de Bessel dont l'évaluation est considérée précise pour les outils de calcul numérique.

Nous pouvons donc dorénavant appliquer toute méthode efficiente et précise entre ligne aérienne et câble pour évaluer l'impédance mutuelle de retour par la terre entre câbles.

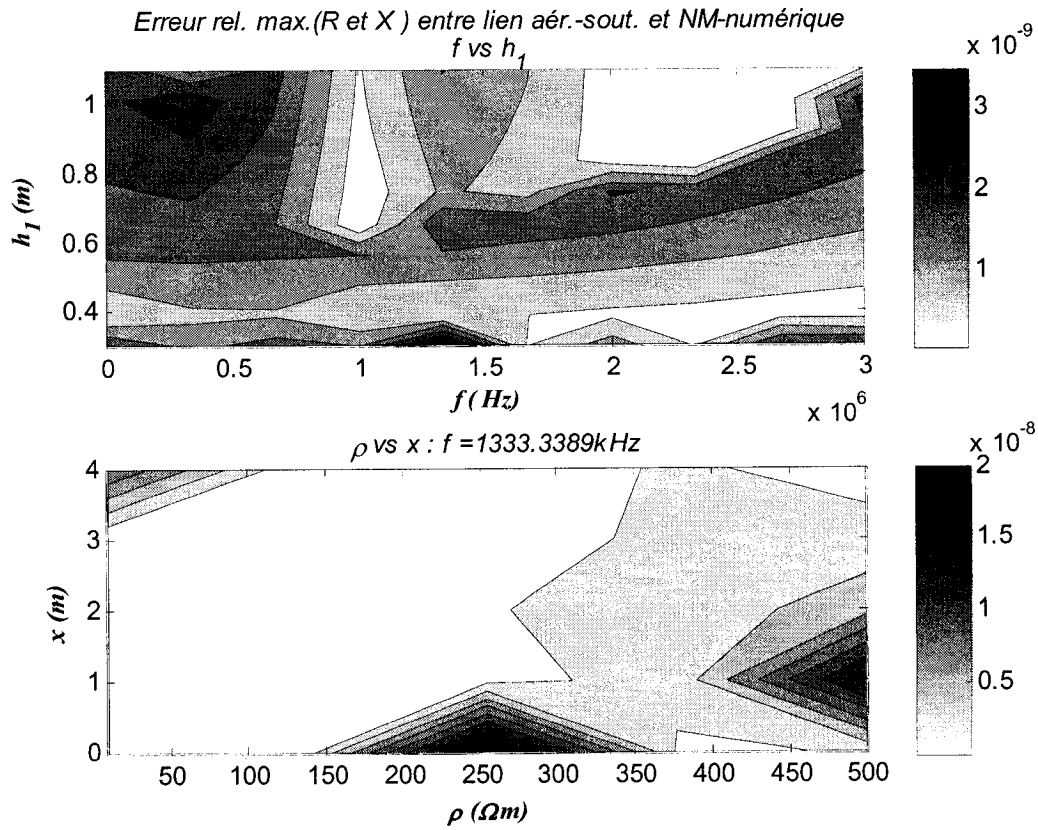


Figure 6. 1 Concordance entre l'impédance entre câbles souterrains (NM) et celle découlant de la relation impédance ligne aérienne et câble souterrain et les fonctions de Bessel. (« Lien aér.-sout. »).

Dans la Figure 6.1 ci-dessus, on note la nette concordance entre l'impédance calculée par évaluation de l'intégrale traditionnelle de Pollaczek pour les câbles souterrains et celle utilisant la formule de l'impédance entre ligne et câble pour une hauteur nulle. En effet, dans la Figure 6.1, les erreurs relatives maximales entre les deux méthodes est inférieure à $2\times10^{-8}\%$.

Les formules analytiques pour câbles souterrains sont alors dérivées des formules analytiques pour l'impédance mutuelle entre ligne aérienne et câble.

Un intérêt particulier est l'utilisation des formules approximatives de Lucca, CCITT et la nouvelle formule approximative que nous avons présentée dans ce travail. Cette dernière a été la plus performante pour les petites distances, fréquentes dans le cas des câbles souterrains. Nous l'utilisons pour proposer une nouvelle formule approximative pour l'impédance mutuelle entre câbles souterrains. Sa performance est analysée dans la section suivante :

$$\begin{aligned} Z_{-+}\left(x,h_2,h_1,\rho_{sol},f\right) &\approx j\frac{\mu\omega}{4\pi}\left\{G_1+G_2+G_3+G_4+G_5\right\}+\ldots \\ j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}&\left[K_0\left(-j\chi r\right)-K_0\left(-j\chi r'\right)\right] \end{aligned} \tag{6.6}$$

Où les constantes et les autres fonctions sont :

$$\begin{cases} G_1=-\left(1+\dfrac{\chi^2\left(x-j\left(h_2+h_1\right)\right)^2}{8}+\dfrac{\chi^2\left(h_2+h_1\right)^2}{2}\right)\ln\left(-\dfrac{\Upsilon\chi}{2}\left(x+j\left(h_2+h_1\right)\right)\right) \\ G_2=-\left(1+\dfrac{\chi^2\left(x+j\left(h_2+h_1\right)\right)^2}{8}+\dfrac{\chi^2\left(h_2+h_1\right)^2}{2}\right)\ln\left(-\dfrac{\Upsilon\chi}{2}\left(-x+j\left(h_2+h_1\right)\right)\right) \\ G_3=1+\dfrac{4j\chi\left(h_2+h_1\right)}{3} \\ G_4=+\dfrac{5}{16}\chi^2x^2 \\ G_5=+\dfrac{19}{16}\chi^2\left(h_2+h_1\right)^2 \\ h_2\le 0\ ,\ h_1\le 0, \\ \Upsilon=\exp\left(\gamma_{eul}\right)=1.78107241799020 \\ \chi=\sqrt{-j\dfrac{\omega\mu_0}{\rho_{sol}}} \\ r'=\sqrt{x^2+\left(h_1+h_2\right)^2} \\ r=\sqrt{x^2+\left(h_1-h_2\right)^2} \end{cases}$$

6.3.2 Performance de la nouvelle formule approximative pour câble

Pour évaluer la performance de la nouvelle formule approximative, nous la comparons avec la formule approximative établie par Saad et al. [14]. Une des configurations typiques rencontrée en réseau, voir section 6 du chapitre 2, est utilisée. Les résultats sont disponibles dans les Figures 6.2 et 6.3

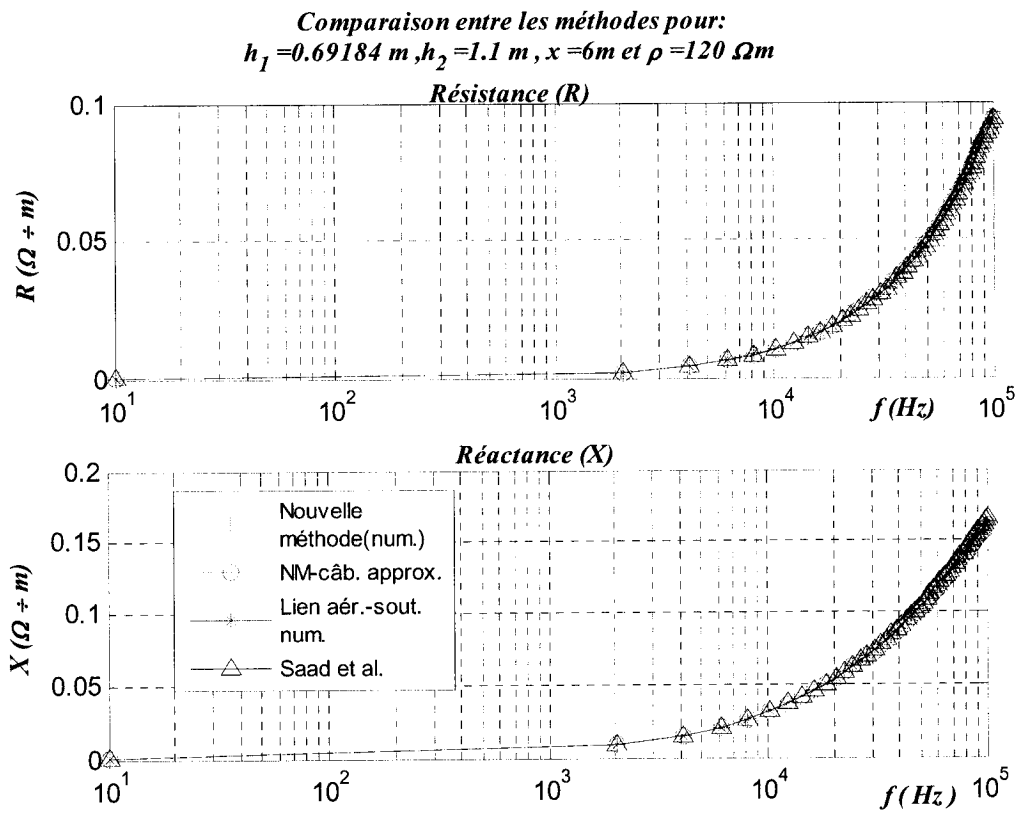


Figure 6. 2 Performance de la nouvelle formule vs formule de Saad : Impédance par unité de longueur.

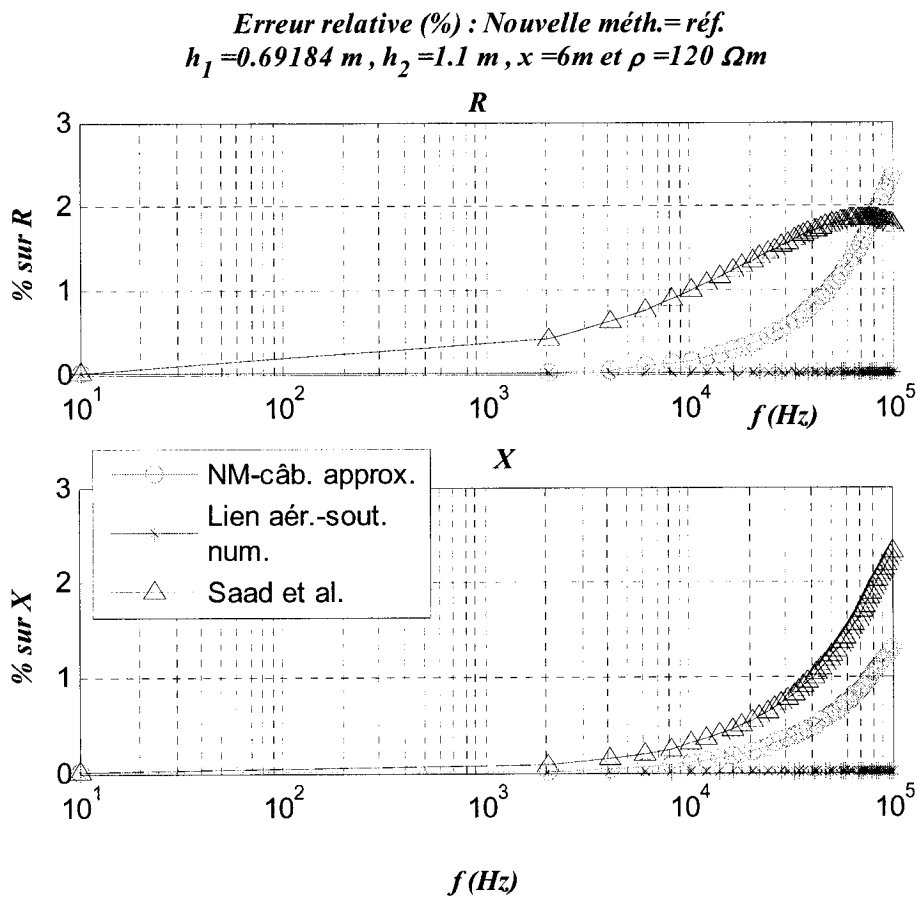


Figure 6. 3 Performance de la nouvelle formule vs formule de Saad : erreurs relatives en % en comparaison avec la méthode numérique (NM)

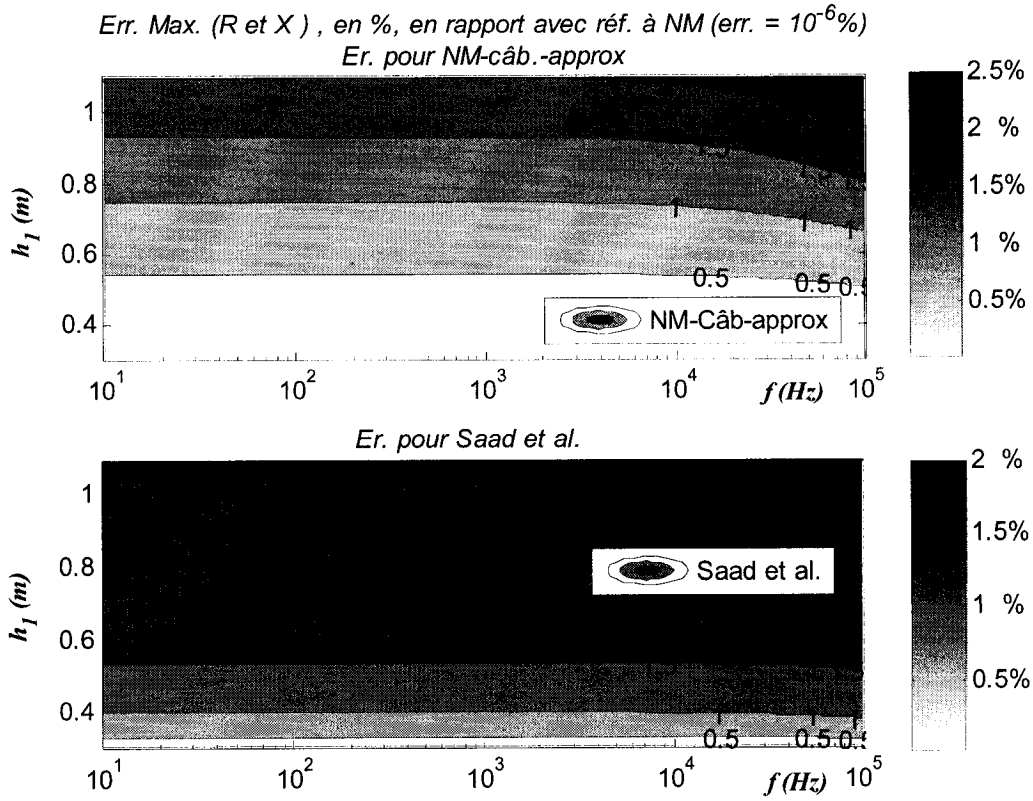


Figure 6. 4 Comparaison de nouvelle formule approximative pour câble (NM-câb-approx) et la formule de Saad : contourmap pour les erreurs relatives pour une profondeur de 0 à 1.1m et la fréquence de 10 à 100kHz. Autre profondeur = 1.1m et distance horizontale de 3m.

Par observation des Figures 6.2 à 6.4, on note une aussi bonne performance de la nouvelle formule approximative pour câbles souterrains (NM-câb-approx) que la performance de la formule approximative de Saad. En effet, on y observe une erreur relative maximale d'environ 2% pour les deux méthodes. La nouvelle méthode ayant parfois des erreurs légèrement inférieures à celles de la formule de Saad pour certaines configurations. Il faut noter que la référence pour les deux est la méthode numérique complète (NM-gen) pour l'impédance mutuelle de retour par la terre entre câbles souterrains.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode d'évaluation numérique pour le cas ligne aérienne et câble souterrain au cas de deux câbles souterrains. Nous avons montré, comme préconisé par Pollaczek avec les champs électriques, que l'impédance mutuelle de retour par la terre pour câbles souterrains peut être déduite de celle entre une ligne à 0m et un câble souterrain à laquelle on ajoute deux termes de la fonction de Bessel. Ceci a dorénavant donné une possibilité de déduire l'impédance de retour par la terre entre câbles (ou structures enfouies) à partir des toutes les formules efficientes pour câble aérien et souterrain. Nous avons ainsi proposé une nouvelle formule approximative pour câbles souterrains qui découle de celle entre ligne aérienne et câble. Cette dernière semble être tout aussi performante que celle de Saad mais pour une fréquence inférieure à 100kHz. Dans les autres cas, il faudra établir les limites de la formule de Saad pour juger de son utilisation. La méthode numérique efficiente proposée dans ce travail peut encore être utilisée.

CONCLUSION

Cette recherche avait pour principal objectif l'évaluation de l'impédance mutuelle de retour par la terre, un des paramètres du couplage inductif pour les modèles des lignes de transmission dans EMTP-RV. Les contributions, limites et contraintes ainsi les recommandations et travaux futurs en rapport avec cet objectif sont présentés ci-dessous.

A. Contributions du mémoire, limites et contraintes des méthodes proposées

Cette recherche a contribué à mieux cerner la marche à suivre pour la détermination des paramètres des lignes et câbles de transmission. Elle a ainsi mis en lumière les changements à apporter dans les modèles des lignes et câbles dans EMTP-RV quand deux structures différentes doivent être modélisées. Par ailleurs, il ressort de l'analyse de modèles des lignes, la nécessité d'évaluer efficacement et avec une bonne précision l'impédance mutuelle de retour par la terre pour le modèle de type large bande (WB) pour lequel les fréquences exigées dépassent le mégahertz.

Cette impédance est directement associée au champ électrique dû à la présence de la terre. En considérant les hypothèses quasi-TEM prises par Pollaczek pour résoudre les équations de Maxwell pour ce champ. Nous avons montré que, pour les configurations usuellement rencontrées, ces hypothèses sont respectées. Cependant au-delà des distances de l'ordre de quelques centaines de mètres, quelques dizaines de mètres sous terre ou pour les fréquences des quelques MHz, les hypothèses ne sont plus valides et les résultats de l'évaluation de l'intégrale de Pollaczek sont discutables.

En corrigeant une des plus récentes méthodes d'évaluation numérique de l'intégrale de Pollaczek pour l'impédance mutuelle de retour par la terre (2005) et en introduisant une

procédure pour borner l'erreur relative commise, nous avons proposé une nouvelle méthode d'évaluation numérique de l'intégrale de Pollaczek. Celle-ci a été validée en comparaison avec les résultats de la méthode Quasi-Monte Carlo et une autre méthode d'intégration sans troncature. Pour ces deux dernières méthodes, nous avons introduit une transformation de l'intégrale de Pollaczek sur un intervalle 0 à 1. Ceci, à notre connaissance n'a pu être fait auparavant.

La nouvelle méthode numérique proposée a des limites dans son application. Celles-ci sont liées à celles de la quadrature Lobatto dans Matlab, quand les pas exigés pour la tolérance absolue sont de l'ordre de la précision machine de Matlab.
Par ailleurs le temps d'exécution pour certaines configurations est relativement élevé. L'estimation des bornes des erreurs est conservative et rallonge le temps d'exécution. Car on répartit la tolérance, pour une erreur relative donnée, sur tous les sous intervalles entre les zéros. La nouvelle méthode numérique que nous proposons sera avant tout un outil pour établir les limites de précision des futures formules et approximations analytiques.

Nous avons contribué à introduire deux nouvelles formules approximatives de l'impédance mutuelle de retour par la terre. Ceci par analyse des développements en série des champs électriques introduits par Pollaczek : une nouvelle formule approximative pour l'impédance mutuelle de retour par la terre pour une ligne aérienne et un câble souterrain, et une formule approximative pour les câbles souterrains. Par ailleurs, cette dernière découle d'une observation plus générale que l'impédance entre les câbles peut être déduite d'une évaluation de l'expression de l'impédance entre un élément arien et souterrain. Le lien entre ces deux est une somme des deux fonctions de Hankel (ou de Bessel). Elle permet désormais d'appliquer les formules approximatives pour les éléments aériens –souterrains au cas souterrain.

Les nouvelles formules approximatives ainsi que celles de Lucca, CCITT et Saad et la méthode de Uribe ont été, pour chacun de cas correspondant, comparées à la nouvelle méthode numérique.
Il ressort que pour le cas aérien –souterrain, la nouvelle formule approximative est plus précise que celle de Lucca et de CCITT pour les fréquences inférieures à environ 1kHz et pour des distances courtes (hauteur < 10m et distance horizontale < 3m). Cependant, toutes ces formules approximatives sont inadéquates pour les fréquences de plus 10kHz. Nous avons proposé une méthode hybride combinant les formules approximatives que nous avons nouvellement introduites, celle de Lucca et une méthode numérique utilisant la quadrature. Cette formule hybride donne des erreurs relatives de moins de 1% par rapport à la méthode numérique complète. Le temps requis pour un cas type de 10000 évaluations de l'impédance est de moins de 60 secondes.

La nouvelle formule approximative que nous proposons pour les câbles semble être tout aussi performante que celle de Saad mais pour une fréquence inférieure à 100kHz. Dans les autres cas, il faudra déterminer les limites spécifiques selon l'application sous analyse.

B. Recommandations et travaux futurs

- En analysant la bonne performance de la nouvelle méthode, nous recommandons l'utilisation de la nouvelle formule approximative pour l'impédance mutuelle de retour par la terre (notée NM-approx.) pour les cas suivants d'étude de la compatibilité électromagnétique dans un même corridor :
    - Rails de train vs câbles souterrains ;
    - Câbles enfouis (ou à la surface) vs lignes de télécommunication à moins de 10 m ;
    - Et rails de train vs lignes de télécommunication.

- Compte tenu des limites dans la précision de l'impédance due aux hypothèses quasi-TEM, nous recommandons d'introduire une indication avisant du dépassement exagéré des hypothèses de Pollaczek. Ceci aidera les utilisateurs des programmes de simulation des réseaux de mieux faire l'analyse de leurs résultats.
- La méthode hybride que nous avons introduite peut être améliorée en optimisant l'utilisation des formules approximatives pour plus des configurations possibles où ces dernières sont adéquates. Et en incorporant les améliorations continuelles de la méthode de quadrature Lobatto suivant le développement continu de Matlab.

C. Retombées possibles

- L'évaluation efficiente de l'intégrale de Pollaczek, ouvre la possibilité d'incorporer dans tous les modèles de lignes de transmission, particulièrement celle à large bande, les paramètres de couplage inductif et autres, pour améliorer ces derniers.
- L'augmentation de la gamme de fréquence pour la synthèse des matrices utilisées dans les modèles de ligne et câbles ouvrirait la possibilité de traiter formellement la compatibilité électromagnétique entre portions des lignes, surtout en régime transitoire aussi bien qu'en régime permanent. Par exemple l'induction due à la propagation des ondes de courants de foudre peut être idéalement pris en compte sur les lignes environnantes de celle qui est directement frappée par la foudre. Et aussi dans le cas des manœuvres ou de court-circuit sur une ligne.
- Enfin, la bonne connaissance de l'impédance mutuelle permettrait de fixer d'une manière optimale les distances entre les ouvrages suivant les seuils d'induction permis pour le bon fonctionnement de chacun des ouvrages. Ou à l'inverse évaluer le niveau d'induction voulue quand on approche une structure sur la ligne de transmission ; comme c'est le cas de la mesure des hautes tensions par couplage inductif ou capacitif, par exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Mahseredjian, J., Dennetière, S., Dubé, L., Khodabakhchian, B., and Gérin-Lajoie, L., "On a new approach for the simulation of transients in power systems," *International Conference on Power Systems Transients (IPST'05),* Montreal, Canada, 2005.

[2] Mahseredjian, J., Dubé, L., and Gérin-Lajoie, L., "New Advances in the simulation of Transients with EMTP: Computation and visualization Techniques," *Proceedings of 7th International conference on Modeling and Simulation of Electric Machines, Converters and Systems,* Montreal, 2002.

[3] Xémard, A., Mahseredjian, J., and Coutu, A., New Project: Development of an Electromagnetic Compatibility Toolbox Based on EMTP-RV: CRINOLINE *EMTP News Letter*, vol. 1, no. 1, 1. pp. 16-17, 2005. TransÉnergie Technologies, Montréal, Canada. http://www.emtp.com/

[4] H.W. Dommel. *Electromagnetic Transients Program Manual (EMTP Theory Book),* Portland, OR: Bonneville Power Administration, 1986.

[5] CCITT Study Group V *Directives Concerning the Protection of Telecommunications Lines against Harmful Effects from Electric Power and Electrified Railway Lines.Volume III: Capacitive, Inductive and Conductive Coupling: Pysical Theory and Calculation Methods*, Geneva: International Telecommunication Union, 1989.

[6] Roumy, J.-G. , "Modeling of the capacitive and inductive coupling between conductive structures," Institut de recherche d'Hydro-Québec (IREQ),

Montréal, March 2006.

[7] Pollaczek, F., Sur le Champ produit par un conducteur simple infiniment long parcouru par un courant alternatif *Revue Générale de l'Électricité*, vol. 29, pp. 851-867, May 30, 1931.

[8] Carson, J. R., Wave propagation in Overhead Wires with Ground Return *Bell System Technical Journal (B.S.T.J)*, vol. 5, pp. 539-554, 1926.

[9] Carson, J. R., Ground Return Impedance: Underground Wire with Earth Return *Bell System Technical Journal (B. S. T. J.)*, vol. 8, pp. 94-98, 1929.

[10] Uribe, C. F. A., Evaluación Algorítmica de la Integral Pollaczek y sus Aplicaciones en el Análisis de Transitorios Electromagnético en Sistemas de Transmission Subterránea 2002.

[11] Ametani, A., A general formulation of impedance and admittance of cables *IEEE Transactions on Power Apparatus and system*, vol. PAS-99, pp. 902-910, May, 1980-Jun 30, 1980.

[12] Uribe, C. F. A., "Mutual Ground Impedances between Overhead and Underground Transmission Cables," *International Conference on Power Systems Transients (IPST'05),* Montreal, Canada, June 2005.

[13] Lucca, G., "Mutual impedance between an overhead and a buried line with earth return ," *Ninth International Conference on Electromagnetic Compatibility,* 1994.

[14] Saad, O., Gaba, G., and Giroux, M., A closed form approximation of the Ground Return Impedance for Underground Cables *IEEE Transactions on Power*

Delivery, vol. 11, 1996.

[15] Uribe, C. F. A., Naredo, J. L., Moreno, L., and Guradado, L., Algorithmic Evaluation of Underground Cable Earth Impedances *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 19, pp. 316-322, Jan, 2004.

[16] R.F. Harrigton. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, IEEE press series , 1996.

[17] Araujo, A. E. A., Paulino, J. O. S., Silva, J. P., and Dommel, H. W., Calculation of lightning-induced voltages with RUSCK's method in EMTP. Part I: Comparison with measurements and Agrawal's coupling model *Elsevier - Electric Power Systems Research* , vol. 60, pp. 49–542001.

[18] Rachidi, F., Nucci, C. A., Ianoz, M., and Mazzetti, C., Response of Multiconductor Power Lines To Nearby Lightning Return Stroke Electromagnetic Fields *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 12, pp. 1404-1411, Jul, 1997.

[19] EMTP-RV. Documentation Help Files. EMTPWorks\Documentation\Help Files\devices\lines\ . 2005.

[20] Marti, J., Accurate Modeling of Frequency Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations *IEEE Trans. On Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-101, pp. 147-157, 1982.

[21] Morched , A., Gustavsen, B., and Tartibi , M., A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 14, pp. 1032-1038 , Jul, 1999.

[22] Gustavsen, B. and Semlyen, A., Combined Phase and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients Based on Vector Fitting *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13, pp. 1032-1037, Apr, 1998.

[23] Green, Dan. The Pysics of Particle Detectors. 2001. Site Web consulté le 07 Novembre 2006. : http://uscms.fnal.gov/uscms/dgreen/Detect/ch3.doc

[24] Noda, T., A Double Logarithmic Approximation of Carson's Ground-Return Impedance *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 21, pp. 472-479, Jan, 2005.

[25] Nguyen, T. T., Earth-return path impedances of underground cables. part. 1: Numerical integration of infinite integrals *IEE Proc. - Generation Transmission and Distribution*, vol. 145, pp. 621-626, Nov, 1998.

[26] Rachidi, F. , Nucci, C. A., Ianoz, M., and Mazzetti, C., Influence of a Lossy Ground on Lightning-induced Voltages on Overhead Lines *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 38, pp. 250-264, Aug, 1996.

[27] Theethayi, N., Electromagnetic Interference in Distributed Outdoor Electrical Systems, with an Emphasis on Lightning Interaction with Electrified Railway Network 2005. UPPSALA University.http://www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn_nbn_se_uu_diva-5889-1__fulltext.pdf.

[28] IEEE Fast Front Transient Task Force of the IEEE Modelling and Analysis of System Transients Working Group, "Modeling guidelines for Fast Front Transients," Piscataway, NJ, USA, TP-1 33-O, Jan 1999.

[29] Association canadienne de normalisation. *Code Canadien de l'électricité. Première partie, Norme de sécurité relative aux installations électriques (CSA C22.1-98)* , Toronto (Ont.): Association canadienne de normalisation, 1998.

[30] Glover, J. D. and Sarma, M. S. *Power Systems Analysis and Design*, Brooks/Cole Thomson Learning, 2002.

[31] Rusch, R. J. Impact of regulatory Involvement (chap. 8). In: *The Electrostatic and Electromagnetic Effects of AC Transmission Lines*, ed. IEEE Tutorial Course. Piscataway, New York, USA: IEEE Service Center, 1979.

[32] Comité Électrotechnique Internationale (CEI), "Rapport Technique CEI TR 62095 :Câbles électriques: Calcul de la Capacité de Transport de Courant par la Méthode des Éléments Finis ," IEC, Geneva, Switzerland, 2003.

[33] Queensland Government-Department of Industrial Relations: Electrical Safety Office. Code of Practice Works (Protective Earthing, Underground Cable Systems and Maintenance of Supporting Structures for Powerlines) . 2002. Queensland Government-Department of Industrial Relations.

[34] MathWorks, MATLAB , ver. 7.1, rel. 2005. The MathWorks Inc.

[35] CIGRE Working Group 33.02 (internal overvotages), "Guidelines for representation of network element when calculating Transient,".

[36] Wait, J. R. and Spies, K., On the Image Representation of the Quasi-Static Fields of a Line Current Source Above the ground *Canadian Journal Of Physics*, vol. 47, pp. 2731-2733, 1969.

[37] Nguyen, T. T., Earth-return path impedances of underground cables. part. 2: Evaluations using Neural Networks *IEE Proc. - Generation Transmission and Distribution*, vol. 145, pp. 627-633, Nov, 1998.

[38] Yin, Y., Cable parameter calculation with FEM 1990. The University of British Columbia.

[39] Yin, Y. and Dommel, H. W., Calculation of Frequency-Dependent Impedances of Underground Power Cables with Finite Element Method *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 25, Jul, 1989.

[40] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*, Orlando : Academic Press, 1984.

[41] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. Root Finding and Nonlinear Sets of Equations . In: *Numerical recipes in C: The Art of Scientific Computing*, ed. Numerical Recipes Software. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[42] Gander, W. and Gautschi, W., Adaptive Quadrature - Revisited *BIT*, vol. 40, pp. 84-101, 2000.

[43] H. Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, Philadephia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[44] Thiémard, E., Sur le calcul et la majoration de la discrépance à l'origine 2000. École Polytechnique de Lausanne.

[45] Schechter, E. Absolute Values. In: *Handbook of Analysis and Its Foundations*,

ed. Schechter, E. Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, USA: Academic Press, 1997.pp. 259-263.