

**Titre:** Une méthode heuristique pour l'affectation des avions aux vols  
Title: avec contraintes d'entretien

**Auteur:** Toufik Hammouche  
Author:

**Date:** 2009

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Hammouche, T. (2009). Une méthode heuristique pour l'affectation des avions aux vols avec contraintes d'entretien [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8481/>  
Citation:

## Document en libre accès dans PolyPublie Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8481/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Guy Desaulniers  
Advisors:

**Programme:** Mathématiques appliquées  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UNE MÉTHODE HEURISTIQUE POUR L'AFFECTATION DES AVIONS AUX  
VOLS AVEC CONTRAINTES D'ENTRETIEN

TOUFIK HAMMOUCHE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES)

JUIN 2009



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-57249-8  
*Our file Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-57249-8

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des theses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

\*\*  
Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

UNE MÉTHODE HEURISTIQUE POUR L'AFFECTATION DES AVIONS AUX  
VOLS AVEC CONTRAINTES D'ENTRETIEN

présenté par : HAMMOUCHE Toufik

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées  
a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. SOUMIS François, Ph.D., président

M. DESAULNIERS Guy, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. FRAYRET Jean-Marc, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement M. Guy Desaulniers, mon directeur de recherche. Il a été à la fois présent et patient pour répondre à mes nombreuses questions, et surtout corriger mes erreurs durant la durée de mes études. Je le remercie aussi pour la clarté de ses directives, ainsi que pour la pertinence de ses conseils et suggestions. Enfin, je tiens à le remercier pour l'aide financière qu'il m'a fournie tout au long de ce projet.

Je remercie également M. François Lessard qui m'a énormément aidé dans la partie informatique de mon projet. Sa disponibilité et son dévouement ont été très appréciés.

Je tiens aussi à remercier Mme Ève Lacasse-Guay qui était disponible depuis le début. Merci aussi à M. Issmail El Hallaoui pour son aide sur la génération de colonnes.

Finalement, je dédie ce travail à ma famille qui, de loin, m'a beaucoup encouragé pour mener ce projet à terme.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur le problème d'affectation des types d'avion et de construction de rotations d'avion hebdomadaires (ATRAH). Ce problème consiste à affecter, à moindre coût, un ensemble de vols à des types d'avion et construire pour chaque avion une rotation. Les contraintes d'entretien doivent être prise en considération. Celles-ci stipulent que chaque avion doit subir un entretien dans une station d'entretien admissible selon une fréquence minimale. Le but de ce mémoire est de trouver, pour ce problème, une solution réalisable de bonne qualité en des temps de calcul acceptables.

Le problème d'ATRAH peut se formuler, dans un premier temps, comme un problème multiflots avec contraintes additionnelles. Une décomposition de Dantzig-Wolfe est, par la suite, utilisée afin de faciliter la résolution. Cette dernière est basée sur une approche heuristique de génération de colonnes imbriquée dans une procédure de séparation et évaluation progressive. Cette méthode a été testée sur une instance de grande taille, provenant d'une compagnie nord américaine, et la solution a été obtenue après plus de 32 heures de calcul.

Le but de ce mémoire est de développer une approche heuristique pour réduire considérablement les temps de calcul. Nous proposons une approche qui s'appuie sur cette méthode de génération de colonnes mais appliquée à des modèles de taille plus réduite. En effet, une étude statistique a été menée sur les données des vols et des flottes afin de réduire le nombre de choix d'affectation pour chaque vol. Deux stratégies d'accélération, basées sur les résultats de l'étude statistique, sont alors utilisées pour résoudre le problème d'ATRAH en des temps de calcul nettement inférieurs à ceux obtenus par la génération de colonnes.

La première stratégie d'accélération, nommée stratégie gloutonne suivant plusieurs ordres, consiste à trouver une liste restreinte de choix d'affectation en effectuant

plusieurs résolutions séquentielles basées sur l'approche de génération de colonnes. Les temps de calcul de chaque résolution séquentielle sont très réduits car une seule flotte est traitée à la fois lors de chaque résolution séquentielle. La liste restreinte d'affectations possibles, construite à la fin des résolutions séquentielles, sera utilisée pour la résolution du problème en considérant toutes les flottes ensemble.

La deuxième stratégie d'accélération, nommée stratégie d'enrichissement des voisinages des vols non couverts, consiste à trouver, dans ce cas aussi, une liste restreinte de choix d'affectation en effectuant une seule résolution séquentielle basée sur l'approche de génération de colonnes. On commence alors un processus itératif, qui consiste à trouver, à chaque itération, l'ensemble des vols qui constituent le voisinage des vols non couverts lors de la résolution par génération de colonnes. Ce voisinage permet de construire la liste d'affectations possibles qui est utilisée lors de la résolution globale du problème. On élargit, à chaque itération, le voisinage des vols non couverts jusqu'à ce qu'on trouve une solution réalisable.

Afin d'améliorer les coûts des solutions obtenues par les deux stratégies, on procède à une réoptimisation en se basant sur une approche de recherche à grand voisinage. Cette dernière permet d'améliorer, d'une itération à l'autre, le coût de la solution obtenue par chaque stratégie d'accélération.

Les temps de calcul obtenus par les deux stratégies d'accélération sont très intéressants. En effet, nous avons pu résoudre le problème d'ATRAH (résolu en 32 heures par la génération de colonnes) en moins de 2 heures avec les deux approches. Notons que le coût de la solution fournie par la première stratégie est meilleur que celui obtenu par la deuxième. Par la suite, la réoptimisation permet d'obtenir une solution presqu'aussi bonne que la solution obtenue initialement par génération de colonnes.

## ABSTRACT

This master thesis considers the fleet assignment and weekly rotation aircraft problem (FAWRP). This problem consists of determining, at the lowest cost, the aircraft type to assign to each flight leg and the sequence of flight legs to be done by each individual aircraft. The resulting rotations must respect the maintenance constraints. These constraints require each aircraft to be regularly checked at the appropriate maintenance station. Note that the purpose of this work is to find a good quality solution for this problem in acceptable computational times.

At first, the FAWRP can be formulated as an integer multi-commodity flow problem with additionnal constraints. A Dantzig-Wolfe decomposition is then used in order to reformulate the problem. The solution of the problem is based on a heuristic column generation approach which is embedded into a branch-and-bound method. This approach is tested on a data set provided by a North American company and a solution is obtained after 32 hours of calculation. In this thesis, we develop a heuristic approach in which a column generation method will be partially used. This will significantly reduce the computational times.

To reach our objective, statistical methods are applied on the data concerning the fleets and the flights in order to reduce the number of possible aircraft type assignments for each flight. Hence, the problem becomes smaller and thus faster to solve. After that, two accelerating strategies, based on the results provided by the statistical methods, are developed.

The first accelerating strategy, named greedy strategy with multiple orders, consists of

finding a restricted list of possible assignments. In order to construct this list, several runs of column generation are executed. Note that a certain order must be respected during each run. The computational time of each run is extremely low, since one fleet is treated at a time. At the end of the loop, the restricted list is constructed and then used to solve the whole problem considering all the fleets.

The second accelerating strategy, named strategy of enriching the neighborhood of the uncovered flights, consists of finding, here too, a restricted list of possible assignments. In this case, only one order is taken into account to execute the sequential resolution which represents an iteration. After each iteration, the neighborhood of the uncovered flights is found and added to the restricted list. Then, the entire problem is solved using the restricted list. If no solution is found, the neighborhood is enlarged step by step until a feasible solution is found.

Finally, in order to improve the costs of the solutions provided by the two strategies, a large neighborhood search method is applied. The cost of the solution is reduced at each iteration and the process is stopped after several iterations.

The computational times obtained using the two accelerating strategies are very interesting. In fact, we were able to solve the FAWRP in less than 2 hours with both heuristics. At the end, the solution produced by the large neighborhood search method is almost as good as the one produced by the column generation approach. The improvement of the solution was done in around 30 minutes.

**TABLE DES MATIÈRES**

|  |     |
|--|-----|
| REMERCIEMENTS . . . . .  | iv  |
| RÉSUMÉ . . . . .   | v   |
| ABSTRACT . . . . .   | vii |
| TABLE DES MATIÈRES . . . . .   | ix  |
| LISTE DES TABLEAUX . . . . .   | xi  |
| LISTE DES FIGURES . . . . .  | xii |
| INTRODUCTION . . . . .   | 1   |
| CHAPITRE 1 PROPBLÉMATIQUE ET REVUE DE LITTÉRATURE . . . . .                        | 8   |
| 1.1 Vocabulaire . . . . .  | 8   |
| 1.2 Description du problème . . . . .  | 11  |
| 1.3 Revue de littérature . . . . .   | 13  |
| 1.3.1 Affectation des types d'avion aux vols . . . . .                             | 13  |
| 1.3.2 Conception des rotations d'avion . . . . .                                   | 20  |
| 1.3.3 Affectation des types d'avion et conception de rotations . . . . .           | 24  |
| 1.4 Contributions du mémoire . . . . .   | 26  |
| CHAPITRE 2 FORMULATION MATHÉMATIQUE ET APPROCHE DE<br>RÉSOLUTION DE BASE . . . . . | 27  |
| 2.1 Mise en contexte et notations . . . . .  | 27  |
| 2.2 Modélisation des réseaux . . . . .   | 28  |
| 2.3 Formulations mathématiques . . . . .   | 31  |
| 2.3.1 Formulation multiflots . . . . .   | 32  |

|  |   |    |
|--|---|----|
| 2.3.2  | Décomposition de Dantzig-Wolfe . . . . .                                  | 33 |
| 2.3.2.1  | Problème maître . . . . .   | 34 |
| 2.3.2.2  | Sous-problème . . . . .   | 35 |
| 2.4  | Résolution par génération de colonnes . . . . .                           | 37 |
| 2.4.1  | Description de la méthode de génération de colonnes . . . . .             | 37 |
| 2.4.2  | Recherche d'une solution entière . . . . .                                | 39 |
| 2.5  | Résultats numériques . . . . .  | 41 |
| 2.5.1  | Spécification du jeu de données . . . . .                                 | 41 |
| 2.5.2  | Résultats et analyse . . . . .  | 42 |
| CHAPITRE 3 STRATÉGIES D'ACCÉLÉRATION . . . . . |   | 44 |
| 3.1  | Étude statistique sur les données des flottes . . . . .                   | 45 |
| 3.2  | Stratégie gloutonne suivant plusieurs ordres . . . . .                    | 50 |
| 3.2.1  | Description de la stratégie . . . . .                                     | 50 |
| 3.2.2  | Ordre de traitement des flottes . . . . .                                 | 53 |
| 3.2.3  | Résultats numériques . . . . .  | 55 |
| 3.3  | Stratégie d'enrichissement des voisinages des vols non couverts . . . . . | 56 |
| 3.3.1  | Définitions . . . . .   | 58 |
| 3.3.2  | Description de la stratégie . . . . .                                     | 59 |
| 3.3.3  | Résultats numériques . . . . .  | 60 |
| 3.4  | Réoptimisation . . . . .  | 62 |
| 3.4.1  | Description de la recherche à grand voisinage . . . . .                   | 63 |
| 3.4.2  | Choix des flottes et de la fenêtre de temps à réoptimiser . . . . .       | 64 |
| 3.4.3  | Résultats numériques . . . . .  | 65 |
| 3.4.4  | Tests supplémentaires . . . . .   | 67 |
| CONCLUSION . . . . .                           |   | 68 |
| BIBLIOGRAPHIE . . . . .                        |   | 71 |

## LISTE DES TABLEAUX

|              |  |    |
|--------------|--|----|
| Tableau 2.1  | Caractéristiques des flottes . . . . .                       | 42 |
| Tableau 2.2  | Répartition des vols sur les sept jours . . . . .            | 42 |
| Tableau 2.3  | Informations concernant le processus de résolution . . . . . | 43 |
| Tableau 2.4  | Résultats obtenus par la méthode de génération de colonnes . | 43 |
| Tableau 3.1  | Matrice d'interaction entre les flottes . . . . .            | 46 |
| Tableau 3.2  | Probabilités d'entretien à chaque station . . . . .          | 49 |
| Tableau 3.3  | Matrice des probabilités conditionnelles . . . . .           | 49 |
| Tableau 3.4  | Probabilités d'entretien des flottes . . . . .               | 50 |
| Tableau 3.5  | Ordre pour chaque résolution séquentielle . . . . .          | 55 |
| Tableau 3.6  | Résultats de chaque résolution séquentielle . . . . .        | 57 |
| Tableau 3.7  | Résultats de la première stratégie d'accélération . . . . .  | 57 |
| Tableau 3.8  | Résultats de la deuxième stratégie . . . . .                 | 61 |
| Tableau 3.9  | Comparaison entre les trois stratégies . . . . .             | 62 |
| Tableau 3.10 | Groupes de flottes pour la réoptimisation . . . . .          | 65 |
| Tableau 3.11 | Résultats de la réoptimisation . . . . .                     | 66 |

## LISTE DES FIGURES

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Figure 1   | Processus de planification tactique pour une compagnie aérienne   | 2  |
| Figure 1.1 | Exemples de routes et rotation . . . . .  | 12 |
| Figure 2.1 | Réseau utilisé pour la construction des routes d'avion . . . . .  | 29 |
| Figure 2.2 | Imbrication de la méthode de génération de colonnes dans une approche de séparation et évaluation progressive . . . . . | 38 |
| Figure 3.1 | Schéma d'interaction entre les flottes . . . . .  | 47 |
| Figure 3.2 | Les flottes candidates à couvrir les vols prioritaires . . . . .  | 48 |
| Figure 3.3 | Variation des temps de calcul en fonction du nombre de flottes permises par vol . . . . .                               | 51 |
| Figure 3.4 | Stratégie des résolutions séquentielles . . . . .   | 52 |
| Figure 3.5 | Exemples de voisinages d'un vol . . . . .   | 59 |
| Figure 3.6 | Évolution de la fenêtre de réoptimisation . . . . .   | 66 |

## INTRODUCTION

De nos jours, les compagnies aériennes évoluent dans un marché très compétitif et se disputent ardemment la clientèle. Par conséquent, bien que les chiffres d'affaire soient considérables, les marges de profit restent relativement faibles. Dès lors, il est essentiel pour chaque compagnie de procéder à l'optimisation de ses processus de décision pour réduire ses prix de revient et maximiser ses revenus dans le but de rester compétitive et éviter la faillite.

Dans la littérature, le terme planification est utilisé pour désigner le travail à long terme consistant en l'élaboration des horaires de vol, l'affectation des types d'avion aux vols, la construction des rotations d'avion et d'équipage et la confection des horaires mensuels pour le personnel. Vu sa complexité, une telle planification débute longtemps avant la mise en application et peut être divisée en trois niveaux. Il y a d'abord la planification stratégique, suivie de la planification tactique qui constitue le cœur du processus d'optimisation et, enfin, la planification opérationnelle.

Au niveau de la planification stratégique, des décisions sont prises concernant la compagnie dans son ensemble ; par exemple, les décisions portent sur la mission de la compagnie, le type de marché à desservir, le nombre d'avions que doit posséder la compagnie, etc. Vient ensuite la planification tactique qui consiste à déterminer les horaires de vols, les rotations d'avions ainsi que la gestion du personnel. Enfin, la planification opérationnelle consiste à faire des ajustements mineurs à l'horaire afin de l'adapter aux imprévus tels que les conditions climatiques difficiles, les pannes subites, la congestion de certaines stations et le manque de personnel.

La plus importante étape étant la planification tactique, elle constitue un travail très complexe pour être traité dans son ensemble. Généralement, on divise ce processus

en 5 étapes traitées séquentiellement. La figure 1 illustre la séquence des problèmes à

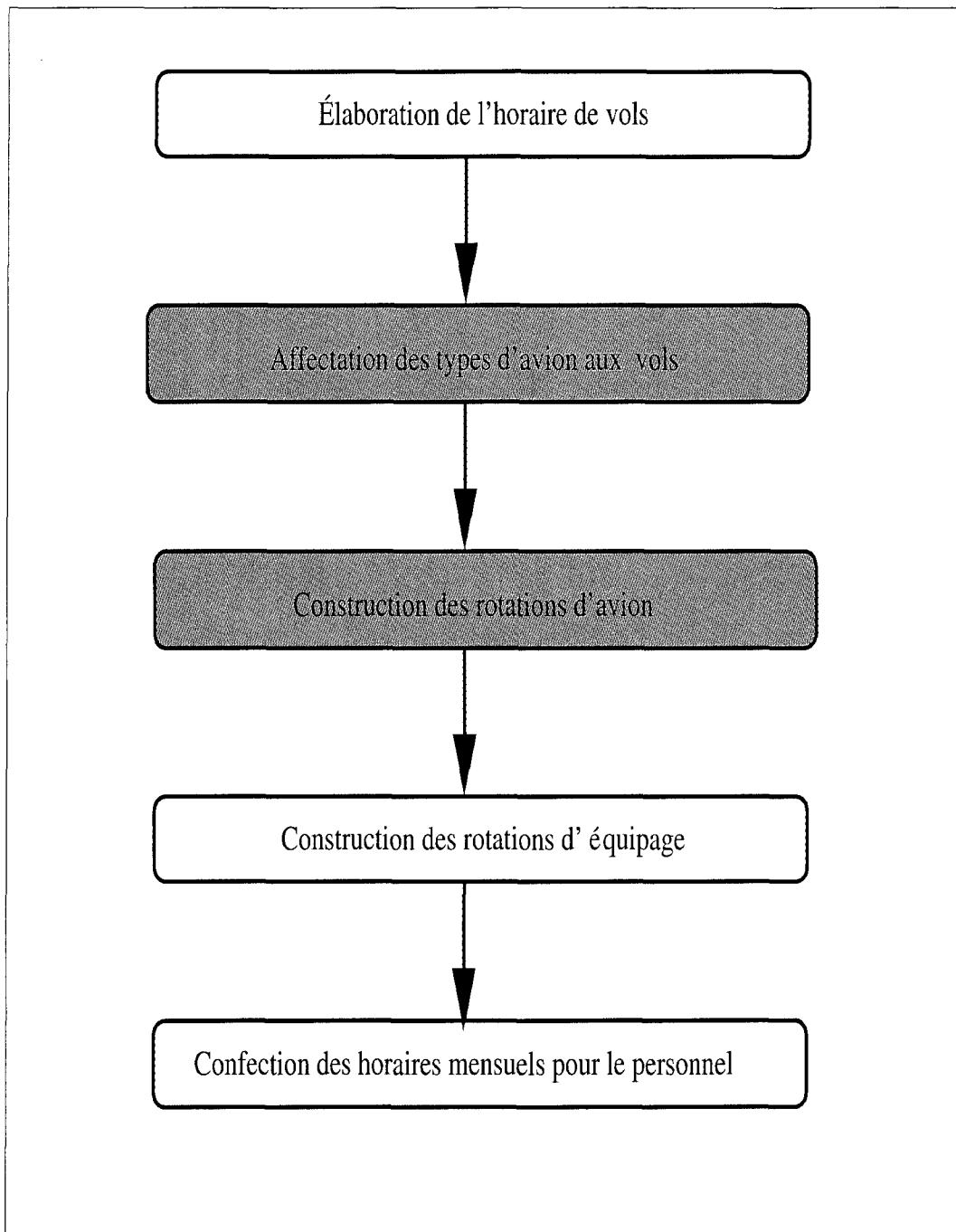


Figure 1 Processus de planification tactique pour une compagnie aérienne

résoudre durant la phase de planification tactique.

La première étape de la planification tactique est *l'élaboration de l'horaire de vols*, ce dernier contient la liste des vols devant être effectués durant l'horizon considéré, chaque vol étant possiblement constitué de plusieurs segments (vols avec escales). Chaque segment de vol assure le transport entre deux stations à un moment précis de l'horizon. L'horaire de vols est le fruit d'une étude de marché auprès des voyageurs et doit s'ajuster régulièrement à la demande de ces derniers. L'élaboration de l'horaire de vols doit tenir en compte certaines contraintes reflétant la capacité de la flotte à effectuer tous les vols programmés. Par exemple, le nombre d'avions disponibles doit toujours être supérieur au nombre de vols simultanés. Ce problème a été peu étudié dans la littérature.

La deuxième étape est *l'affectation des types d'avion aux vols* programmés qui consiste à déterminer par quel type d'avion sera effectué chacun des vols. Le profit associé à un vol étant déterminé par le type utilisé pour le couvrir, il importe donc de déterminer optimalement quel type d'avion est le plus approprié pour chacun des vols. Une contrainte importante de ce problème est qu'il doit exister des rotations pour les avions de la flotte qui permettent de respecter l'affectation choisie. Les autres contraintes du problème sont les contraintes concernant la disponibilité des avions et les contraintes opérationnelle. Ce problème a été étudié dans plusieurs articles parmi lesquels on cite Hane et al. (1995), Clarke et al. (1996), Barnhart et al. (1998), et Bélanger et al. (2002).

Par la suite, il s'agit de construire *une rotation pour chaque avion*. Une rotation est une succession de segments de vol et d'attentes au sol accomplis par un avion donné au cours de l'horizon. Ces rotations sont choisies de manière à minimiser les coûts et doivent, en premier lieu, respecter l'affectation choisie à l'étape précédente et, en second lieu, satisfaire un certain nombre de contraintes relatives aux entretiens périodiques des avions. L'organisme régissant la sécurité aérienne aux États-Unis (*Federal*

*Aviation Administration*) divise les travaux d'entretien en quatre grandes catégories (Sriram et Haghani, 2003). Par exemple, pour certains avions, les entretiens de type A sont effectués au plus à toutes les 65 heures de vol ; cet entretien a une durée de trois à dix heures et est habituellement réalisé durant la nuit. Les entretiens de type B sont effectués aux quelques semaines et ont une durée de plus de dix heures. Finalement, les entretiens de type C et D ont une durée d'environ un mois et sont effectués à une fréquence d'un à quatre ans. En général, dans un problème hebdomadaire comme celui traité dans ce mémoire, on ne considère que les entretiens de type A étant donné que les entretiens de types B, C et D ne reviennent pas à chaque semaine pour chaque avion. Il est à noter aussi que certaines compagnies exigent que tous les avions d'un même type soient utilisés de façon égale (*Big Cycle Constraint*). Plusieurs travaux ont été menés pour résoudre ce problème, on peut citer Clarke et al. (1997), Gopallan et Talluri (1998).

Une fois que l'on connaît le type d'avion effectuant chaque vol ainsi que les rotations, il faut construire les rotations d'équipage pour s'assurer qu'un équipage soit disponible pour chacun des vols. Dans le domaine du transport aérien, une rotation d'équipage est une suite d'activités (couverture de segments de vol, de mises en place, de pauses, de temps de repos nocturne, etc.) accomplies par un équipage, qui débute et se termine à une même station. L'expression "mise en place" est utilisée pour désigner un segment de vol où le personnel navigant voyage à titre de passager, ceci dans le but de transférer un équipage dans une station où le personnel est insuffisant ou simplement de retourner l'équipage à sa base une fois que la rotation est terminée. Ce problème de construction de rotations d'avion est séparable par type d'avion pour le personnel navigant (pilotes, co-pilotes) et par famille de types d'avion semblables pour le personnel de cabine (agents de bord, directeurs de bord, etc). La difficulté de ce problème est de construire des rotations respectant les différents règlements des conventions collectives et des organismes gouvernementaux. Des distinctions impor-

tantes sont aussi observées dans la conception des rotations d'équipage selon le type de personnel. Nous trouvons dans Desaulniers et al. (1997) et Barnhart et al. (1998) des travaux portant sur ce problème.

Finalement, la dernière étape de la planification tactique conçoit les horaires mensuels du personnel (pilotes, co-pilotes, chefs de cabine, agents de bord). Cette étape consiste à assigner à chacun des membres un bloc horaire constitué d'une séquence de rotations, de périodes d'entraînement, de vacances et d'examens médicaux : il s'agit du problème de confection des horaires mensuels pour le personnel. Ces derniers doivent être préféablement construits de façon à minimiser les coûts pour la compagnie tout en tenant compte de la satisfaction du personnel de leurs conditions de travail. Ces horaires peuvent être déterminés de façon anonyme (en anglais *bidline*) ou personnalisée (en anglais *rosetring*). Dans le premier cas, les horaires sont fabriqués *a priori* et les employés doivent ensuite indiquer leurs préférences pour ces horaires. Ceux-ci leur sont attribués selon un système de priorité (par exemple l'ancienneté). Donc il est important que les horaires soient tous aussi attrayants. Dans le cas des horaires personnalisés, les horaires sont confectionnés en tenant compte des activités préassignées et des intérêts particuliers de chaque employé (destinations préférées, congés, heures de travail, etc.). Très souvent, les intérêts des employés les plus anciens sont pris en compte aux dépens des employés les plus jeunes. Ce problème fait l'objet de plusieurs travaux de recherche parmi lesquels nous citons Gamache et al. (1998a, 1998b).

Malgré le fait que plusieurs bons modèles et algorithmes existent pour la résolution des problèmes considérés individuellement, le résultat final pourrait être loin d'une solution globalement optimale. Cependant, la résolution séquentielle apporte une nette amélioration par rapport aux résultats obtenus jadis en résolvant le problème manuellement ou avec des méthodes heuristiques. Ayant à l'esprit qu'une compagnie de taille significative dépense plusieurs milliards de dollars par année pour l'achat et l'entretien de sa flotte, l'essence ainsi que les salaires et les dépenses des équipages, nous

réalisons que chaque 1% d'amélioration apporté par l'optimisation de la planification signifie donc des économies de plusieurs dizaines de millions de dollars. Voici donc ce qui incite les chercheurs de nos jours à pousser plus loin leurs travaux et à développer de nouvelles méthodes d'optimisation afin de résoudre au mieux ces problèmes.

Dans ce mémoire, on traite deux problèmes de la planification tactique simultanément, soit le problème d'affectation des types d'avion aux vols ainsi que le problème cyclique de construction de rotations d'avion sur un horizon d'une semaine. Les rotations recherchées doivent satisfaire les contraintes d'entretien qui obligent chaque avion à subir une maintenance au plus à tous les  $x$  jours, où  $x$  varie d'une flotte à l'autre. Ce problème a déjà été traité par une approche heuristique de génération de colonnes conçue par Lacasse-Guay (2009). Le problème avec cette approche est que les temps de calcul sont très élevés pour des instances de grande taille. Pour accélérer cette approche, une méthode d'agrégation dynamique des contraintes (El Hallaoui et al. (2005)) pourrait être utilisée. Cette approche nécessite toutefois une bonne solution initiale pour être performante. L'objectif de notre travail est donc de développer une méthode heuristique pour ce problème, qui permettra d'obtenir une solution de qualité suffisante en des temps de calcul très raisonnables. Cette méthode est composée de deux phases : la première consiste à utiliser un algorithme glouton où la méthode de génération de colonnes sera utilisée pour trouver une première solution ; la deuxième étape consiste à améliorer la solution à l'aide d'une recherche à grand voisinage.

Le mémoire est organisé comme suit. Dans le premier chapitre, nous décrivons le problème d'affectation des types d'avion aux vols, et celui de la construction des rotations d'avion hebdomadaires. On signale au passage les difficultés liées à la résolution de ce genre de problèmes, et on présente une revue de littérature sur les travaux importants menés dans ce sens. Dans le chapitre 2, nous présentons une formulation mathématique du problème ainsi que la méthode de génération de colonnes utilisée pour la résolution du problème. On testera par la suite le modèle sur un

jeu de données réelles provenant d'une compagnie aérienne nord-américaine. Au chapitre 3, nous allons présenter les différentes stratégies d'accélération qui permettent d'améliorer considérablement les temps de calcul tout en générant des solutions de qualité assez suffisante pour être utilisées par la méthode d'agrégation dynamique des contraintes. Ce mémoire se termine par une brève conclusion ainsi que certaines perspectives de recherches futures.

## CHAPITRE 1

### PROBLÉMATIQUE ET REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre est consacré à la définition du problème d'affectation des types d'avion aux vols et du problème cyclique de construction de rotations d'avion. Nous définissons d'abord, dans la section 1.1, le vocabulaire utilisé dans ce mémoire, et nous décrivons ensuite, dans la section 1.2, le problème à résoudre ainsi que les difficultés liées à la résolution. Dans la section 1.3, nous présentons une revue de littérature portant sur les diverses méthodes de résolution proposées pour résoudre le problème en question.

#### 1.1 Vocabulaire

Introduisons tout d'abord le vocabulaire nécessaire pour énoncer le problème.

- ***Flotte homogène*** : Ensemble d'avions possédant les mêmes caractéristiques, entre autres, la capacité en passagers, l'autonomie de vol, les coûts (d'achat, d'entretien et d'opération), la consommation d'essence, la qualification requise de l'équipage pour les piloter. Chaque flotte possède un nombre connu d'avions.
- ***Station*** : Endroit où les avions peuvent décoller ou atterrir pour laisser embarquer ou débarquer les passagers.
- ***Entretien*** : Ensemble d'opérations, de vérifications et de réparations qu'il est nécessaire d'effectuer régulièrement sur les avions de façon à s'assurer du bon fonctionnement de tout l'équipement. Ces opérations ne peuvent être effectuées qu'en un nombre limité de stations et se classent en différents types.

- **Base d'entretien** : Station où peuvent s'effectuer les maintenances de certains types d'avion. Chaque base se caractérise par le type d'entretien qu'elle offre et les intervalles de temps valides pour accomplir une maintenance.
- **Type de maintenance** : Les types de maintenance varient en fonction des opérations et des vérifications effectuées sur l'avion. En pratique, il existe quatre types de maintenance A, B, C et D qui se caractérisent par des durées différentes. Elle ne peuvent pas être toutes accomplies dans les mêmes bases d'entretien. À mentionner aussi que les différentes flottes d'avion ne nécessitent pas tous les mêmes types de d'entretien et que la durée de chaque type d'entretien peut varier d'un type d'avion à l'autre. Dans ce mémoire, seul le type A est pris en compte.
- **Délai d'entretien** : Il s'agit de la durée maximale qui peut être tolérée entre deux entretiens consécutifs d'un avion. Cette durée est exigée par la règle de sécurité aérienne et peut varier d'une flotte à l'autre et d'un type d'entretien à l'autre.
- **Segment de vol** : Déplacement sans escale d'un avion entre deux stations commençant à une heure connue. L'ensemble des flottes pouvant couvrir ce segment est connu, et selon chaque flotte, on connaît aussi la durée ainsi que le profit anticipé du segment de vol. On signale enfin qu'on utilise souvent le mot "*vol*" pour désigner un segment de vol.
- **Horizon** : Chaque problème d'affectation de types d'avion aux vols et de construction de rotations cycliques d'avion se traite sur une période de temps bien déterminée appelée horizon. En général, l'horizon correspond exactement à une semaine (c'est notre cas). Il est à noter que l'horaire utilisé sur cet horizon est équilibré, autrement dit : le nombre de vols partant d'une ville est égal au nombre de vols arrivant à cette ville.
- **Connexion** : Une connexion a lieu entre deux segments de vol lorsqu'ils sont

effectués consécutivement par un même avion. Chaque compagnie aérienne possède une liste de connexions qui sont imposées par les planificateurs pour des raisons de marketing.

- ***Durée de connexion minimum*** : Période de temps minimal pouvant s'écouler entre le moment où un avion atterrit et celui où il est prêt à décoller. Cette durée tient en compte les temps de débarquement et d'embarquement des passagers, le temps de changement des équipages aériens (s'il y a lieu), le temps de manutention des bagages, le temps de faire le plein de carburant, etc. Notons que la durée de connexion minimum dépend du type d'avion, et de la station en question.
- ***Cout d'un vol*** : Le montant total versé par la compagnie pour couvrir tous les frais du vol. C'est donc la somme des coûts du carburant, de l'entretien de l'avion et du salaire de l'équipage. Pour un même vol, le coût diffère d'une flotte à une autre.
- ***Revenu anticipé d'un vol*** : Il s'agit de la recette engendrée par un vol et qui est essentiellement due aux billets payés par les passagers ainsi que le revenu relatif au transport de fret. Bien que les revenus soient définis par les itinéraires complets des passagers (de leur origine à leur destination), ils sont souvent séparés d'une façon heuristique par segments de vol.
- ***Route d'avion*** : C'est une succession de segments de vol et d'attentes au sol effectuée par un avion. Dans notre cas, cette séquence d'événements commence après un entretien et se termine par un entretien. Comme une route est comprise entre deux entretiens, il est important que la durée de la route ne dépasse pas le délai d'entretien pour la flotte à laquelle l'avion appartient.
- ***Rotation d'avion*** : Il s'agit d'une séquence de routes d'avion où la station de départ de la première route est aussi la dernière station de la dernière route. La

figure 1.1 montre un exemple de routes et de rotation d'avion. On peut voir sur cet exemple que les stations d'entretien sont basées à Montréal (YUL), Toronto (YYZ) et Vancouver (YVR). Il est à noter qu'une rotation n'est pas nécessairement construite sur une semaine mais sur un multiple de semaines.

## 1.2 Description du problème

Comme mentionné ci-haut, nous cherchons à résoudre, simultanément, deux problèmes de la planification tactique.

- *1er problème* : Ayant la liste des vols à couvrir, le nombre d'avions disponibles pour chaque flotte ainsi que toutes les flottes candidates pour couvrir chacun des vols, le problème d'affectation des types d'avion aux vols consiste à déterminer, pour chaque vol, le type d'avion qui lui sera affecté de sorte à minimiser le coût total de la couverture des vols. Le coût total d'un vol est calculé en déduisant du coût du vol, le revenu anticipé pour ce vol selon le type d'avion affecté. La solution obtenue doit garantir la couverture de tous les vols et satisfaire les contraintes de disponibilité des avions pour chaque flotte. En plus, l'affectation engendrée doit permettre la résolution du problème suivant.
- *2ème problème* : Ayant la liste des stations d'entretien, le délai d'entretien  $x$  pour chaque flotte, nous cherchons à construire des rotations cycliques sur un horizon d'une semaine pour chaque avion. Chaque route de chaque rotation doit être d'une longueur au plus égale au délai d'entretien  $x$ . Enfin, dans une route, la durée qui sépare le temps d'arrivée d'un vol du temps de départ du vol suivant doit être supérieure ou égale à la durée de connexion minimum correspondante additionnée au temps minimum d'entretien entre deux routes.

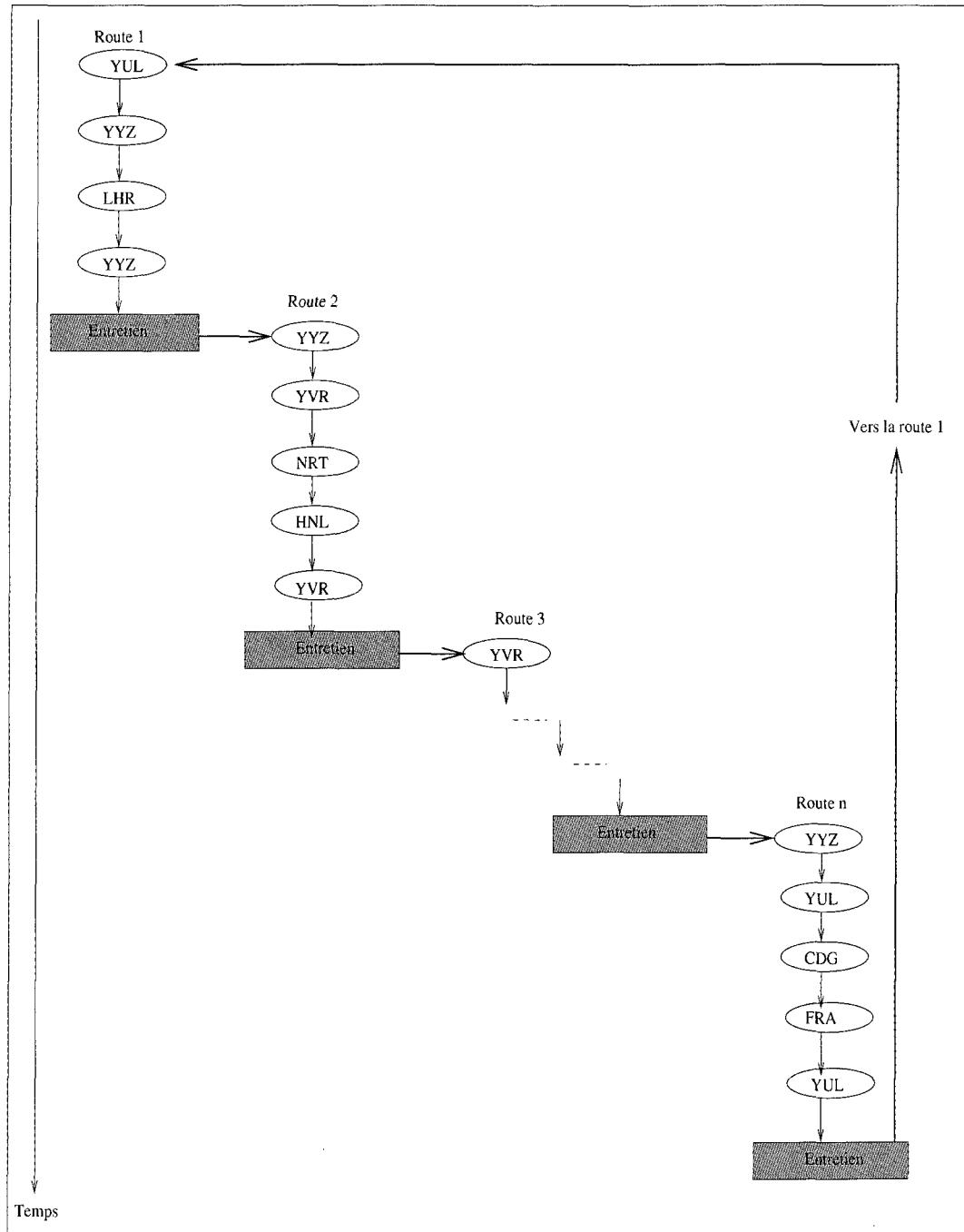


Figure 1.1 Exemples de routes et rotation

Dans ce mémoire, ces deux problèmes seront traités simultanément. Nous allons désigner, dans tout ce qui suit, le problème résultant par **ATRAH** : Affectation des Types et Rotations d'Avion Hebdomadaires. Il est donc évident qu'on obtient un problème plus volumineux vu le nombre important de variables et de contraintes qui y sont impliquées. Ceci a un effet direct sur les temps de calcul qui vont être beaucoup plus grands que ceux obtenus en résolvant les problèmes séparément. Cependant, le fait de traiter le tout en un seul problème permet, en général, de garantir la construction de rotations d'avion, qui satisfont toutes les contraintes, pour tous les avions. La plupart des travaux effectués jusqu'à présent ont permis la résolution séparée des problèmes, mais, comme on va le voir dans la revue de littérature qui va suivre, certains travaux ont porté sur la résolution simultanée.

### 1.3 Revue de littérature

Cette section présente un aperçu des diverses approches proposées pour la résolution du problème d'affectation des types d'avion et celui de la construction de rotations cycliques pour les avions.

#### 1.3.1 Affectation des types d'avion aux vols

Ce type de problème a été résolu, en général, en se servant d'une représentation basée sur un réseau espace-temps. Ce réseau est construit pour assurer la faisabilité des connexions entre les vols ainsi que la conservation de flot des avions ; il est composé de lignes de temps parallèles, une pour chaque station. La ligne de temps est composée d'arcs au sol reliant les noeuds-événement. Un noeud-événement représente un départ ou une arrivée, à une station, à une heure donnée. Les lignes de temps parallèles sont reliées par des arcs de vol définis par leurs noeuds de départ et d'arrivée. Un arc de retour relie le dernier événement au premier événement de chacune des lignes de

temps ; cela garantit la conservation de flot des avions. Il est à noter que pour garantir la faisabilité des connexions, les noeuds représentant les arrivées ne sont pas placés à l'heure d'arrivée du vol mais à l'heure où l'avion est prêt à effectuer un autre vol.

Avant de passer aux travaux réalisés dans ce sens, il est important de souligner que Gu et al. (1994) ont montré que le problème d'affectation des types d'avion est NP-difficile lorsque deux types d'avions ou plus sont considérés. De plus, les auteurs font la démonstration que le saut d'intégrité (i.e., la différence entre la valeur de la solution fractionnaire et celle de la solution entière, en pourcentage de la valeur de la solution entière) peut être arbitrairement grand lorsque le nombre de types d'avion considérés augmente. Malgré ces conclusions, plusieurs modèles et techniques de résolution efficaces ont été développés.

Daskin et Panayotopoulos (1989) présentent un modèle de programmation linéaire adapté au cas où le trafic est concentré autour d'une seule plaque tournante (*hub, en anglais*) d'où partent et reviennent toutes les routes d'avion, les autres étant des stations périphériques (*spokes, en anglais*). Les contraintes de couverture de segments de vol sont données sous forme d'inégalités pour garantir la réalisabilité du problème lorsque le nombre d'avions nécessaires pour couvrir tous les vols est supérieur au nombre d'avions disponibles. Une relaxation lagrangienne est calculée afin de trouver une borne supérieure. Par la suite, une heuristique est développée afin de rendre réalisable la solution de la relaxation lagrangienne. Les résultats montrent que l'heuristique développée fournit de bonnes solutions lorsque le nombre d'avions nécessaires pour couvrir tous les vols est inférieur ou égal au nombre d'avions disponibles.

Subramanian et al. (1994) implantent un modèle d'affectation de types d'avion aux vols pour la compagnie Delta Air Lines. Les auteurs prennent en considération les différents éléments dont doit tenir compte le modèle mathématique permettant la résolution. Il est entre autres question des contraintes d'entretien, des contraintes de repos des pilotes et des contraintes sur le nombre maximal d'heures de vol qu'un pi-

lote peut effectuer. Vu la taille du modèle de programmation en nombres entiers, les auteurs résolvent d'abord la relaxation linéaire du modèle pour ensuite fixer définitivement à 1 les variables binaires prenant la valeur 1 dans la solution de la relaxation linéaire afin de réduire la taille du problème. Finalement, le problème mixte résultant est résolu par un algorithme de séparation et évaluation progressive.

Hane et al. (1995) présentent une formulation mathématique de base du problème d'affectation journalier. Cette méthode, reproduite par plusieurs auteurs depuis, considèrent le problème sur une journée et fait appel à un modèle représenté sur un réseau espace-temps. Les noeuds-événements sont notés  $\{f, o, t\}$  et représentent le fait qu'un avion de type  $f$  décolle ou arrive à la station  $o$  au temps  $t$ . Les temps des événements à chaque station sont dénotés  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Afin de respecter le nombre d'avions disponibles pour chaque flotte, les avions sont comptés à une heure précise de la journée, heure choisie dans une période avec peu d'activités (entre  $t_n$  et  $t_1$ ) ; ainsi pour savoir le nombre d'avions utilisés, il faut les compter durant l'intervalle  $[t_n, t_1]$ . Malgré que l'intervalle  $[t_n, t_1]$  n'est pas le même pour toutes les stations, tous les avions sont comptés en même temps. Donc, l'heure de comptage doit être choisie de sorte qu'elle soit à l'intérieur de tous les intervalles  $[t_n, t_1]$ . Les auteurs utilisent les notations suivantes :

$L$  : Ensemble des segments de vol, notés  $i$  ou  $oat$ . Ici,  $o$  représente la station de départ,  $a$  représente la station d'arrivée et  $t$  représente l'heure de départ du segment de vol  $i$ .

$F$  : Ensemble des types d'avion.

$N(f)$  : Nombre d'avions de type  $f$ .

$S$  : Ensemble des stations.

$O(f)$  : Ensemble des vols pouvant être effectués par un avion de type  $f$  durant l'heure de comptage.

$N$  : Ensemble des noeuds du réseau.

$T_{f_{oat}}$  : Heure d'arrivée du vol (incluant le temps minimum de connexion) entre  $o$  et  $a$  partant à l'heure  $t$  si un avion de type  $f$  est utilisé.

$t^-$  : Temps précédent le temps  $t$  à une station donnée. Notons que  $t_1^- = t_n$ .

$t^+$  : Temps suivant le temps  $t$  à une station donnée. Notons que  $t_n^+ = t_1$ .

$c_{fi}$  : coût d'opération du vol  $i$  pour un avion de type  $f$ .

Les variables de décision sont :

$X_{f_{oat}}$  = 1 si un avion de type  $f$  décolle de l'origine  $o$  pour la destination  $a$  au temps  $t$ , 0 sinon (aussi noté  $X_{fi}$ ).

$Y_{f_{ott+}}$  : Nombre d'avions de type  $f$  au sol durant l'intervalle  $[t, t^+]$ .

Le modèle mathématique est alors comme suit :

$$\min \sum_{i \in L} \sum_{f \in F} c_{fi} X_{fi} \quad (1.1)$$

sujet à :

$$\sum_{f \in F} X_{fi} = 1 \quad \forall i \in L \quad (1.2)$$

$$\sum_{a \in S} \sum_{t' : T_{f_{oat'}} = t} X_{f_{oat'}} + Y_{f_{ott-t}} - \sum_{a \in S} X_{f_{oat}} - Y_{f_{ott+}} = 0 \quad \forall \{f, o, t\} \in N \quad (1.3)$$

$$\sum_{i \in O(f)} X_{fi} + \sum_{o \in S} Y_{f_{ot_n} t_1} \leq N(f) \quad \forall f \in F \quad (1.4)$$

$$X_{fi} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in L, f \in F \quad (1.5)$$

$$Y_{f_{ott+}} \geq 0 \quad \forall \{f, o, t\} \in N \quad (1.6)$$

L'objectif consiste à trouver l'affectation de coût minimal ; le coût de chaque affectation vol-avion ( $c_{fi}$ ) dans cette étude tient compte des revenus perdus, entre autres, par une capacité d'avion inférieure à la demande. Les auteurs supposent aussi que tous

les vols peuvent être exécutés par n'importe quelle flotte ; pour interdire une affectation d'une flotte à un vol, il suffit de mettre un coût très élevé pour cette affectation afin de forcer le programme à ne pas la choisir. Les contraintes (1.2) garantissent la couverture de chaque vol par une et une seule flotte. La conservation de flot des avions est assurée par les contraintes (1.3) alors que les contraintes (1.4) permettent de ne pas dépasser la limite en terme de nombre d'avions disponibles pour chaque flotte. La résolution de la relaxation linéaire du modèle (1.1)-(1.6) est précédée par un traitement qui se résume en : une agrégation des noeuds, la construction d'îlots et l'élimination des connexions impossibles. L'objectif de ce prétraitement est la réduction de la taille du problème ce qui impliquerait de meilleurs temps de calcul. Les auteurs ont développé un algorithme de programmation en nombres entiers faisant appel à des stratégies de perturbation et de fixation heuristique de variables. Il est à noter enfin que Hane et al. (1995) ont ajouté des contraintes permettant d'exiger que certains vols soient effectués par le même type d'avion. Le modèle résultant est testé sur un problème journalier composé de 150 stations, 2500 vols et 11 types d'avion. La solution entière est trouvée en moins d'une heure avec un écart d'au plus, 0.02% de la valeur optimale. Le désavantage de cette méthode est la nécessité de fixer la valeur de plusieurs variables avant de commencer la résolution par séparation et évaluation progressive. De plus, le modèle ne construit pas de rotations d'avion.

Clarke et al. (1996) traitent du problème journalier d'affectation des types d'avion aux vols dans lequel des aspects des contraintes d'entretien et de la conception des horaires d'équipage sont étudiés. Ce modèle est une généralisation du modèle de Hane et al. (1995) et son objectif principal est de démontrer qu'il est possible d'ajouter au modèle d'affectation de base des contraintes permettant de gérer les entretiens sans détruire la structure du problème. Seuls les entretiens de type A et B sont inclus dans le modèle puisque leur temps d'exécution est inférieur à 24 heures. Chaque avion est

donc contraint à subir un entretien. Cette restriction est exprimée sous la forme :

$$\sum_{o \in CM(f)} Y_{fot_n t_1} \geq NM(f) \forall f \in F \quad (1.7)$$

$NM(f)$  : Nombre d'avions de type  $f$  qui, en moyenne, nécessitent un entretien sur une base régulière.

$CM(f)$  : Ensemble des stations qui peuvent exécuter des travaux d'entretien sur les avions de type  $f$ .

Une opportunité d'entretien est présente lorsqu'un avion reste suffisamment longtemps à une station d'entretien pour qu'un entretien puisse y être réalisé. Ces opportunités sont exprimées dans le réseau par l'ajout d'arcs d'entretien ayant une durée correspondant au temps minimum pour réaliser les travaux de ce type. Concernant la gestion des horaires d'équipage, l'objectif principal consiste à éviter les nuits passées à l'extérieur par un équipage qui arrive tard à une station qui n'est pas sa base, car ce genre de situation peut entraîner des coûts considérables. Le modèle ainsi conçu est testé sur des données contenant jusqu'à 2572 vols et 11 types d'avion. Les résultats démontrent que l'ajout des contraintes d'entretien et de gestion des équipages rend le problème plus difficile à résoudre. Par contre, il est possible d'obtenir une solution de bonne qualité en deux à cinq heures de temps de calcul.

Des fenêtres de temps sont ajoutées par Rexing et al. (2000) à la formulation de base du problème d'affectation journalier des types d'avion aux vols (PAJAV). Les auteurs indiquent l'heure de départ de chaque vol par une fenêtre de temps, cette dernière est discrétisée et, dans le réseau, une copie de l'arc de vol concerné est placée à chaque unité de la fenêtre de temps. Ainsi, le modèle choisit un seul arc parmi toutes les copies créées, ce qui donnera l'heure exacte de départ de chaque vol. En pratique, il est impossible de discrétiser autant une fenêtre de temps car la taille du réseau devient trop grande, mais les divers tests montrent qu'il est possible de choisir une unité de

discrétisation de longueur raisonnable sans détériorer significativement les temps de calcul, comparés à ceux du modèle de base (1.1)-(1.6). La taille de l'ensemble des solutions réalisables ayant été augmentée par l'ajout de fenêtres de temps, la solution optimale du modèle de Rexing et al. est assurément moins coûteuse ou de coût égal à la valeur optimale du modèle de base. Les auteurs proposent deux techniques de résolution : une approche directe et une approche itérative. Dans les deux cas, la résolution commence par un prétraitement en trois étapes tel que décrit par Hane et al. (1995), ce dernier permet de réduire la taille du modèle de 40 à 60% tout dépendant des données initiales. La relaxation linéaire peut être résolue par l'une des deux approches. L'approche directe utilise les techniques connues de la programmation linéaire : cette technique est simple et rapide. Par contre, l'approche itérative permet une utilisation efficace de la mémoire. On résout d'abord le modèle avec un arc pour chaque vol et on ajoute une copie d'arc à chaque itération jusqu'à ce que l'ajout d'une copie d'arc ne permette pas de diminuer le coût de la solution actuelle. Les tests ont été effectués sur deux jeux de données et les résultats montrent que l'ajout de fenêtres de temps peut contribuer à diminuer le nombre d'avions nécessaires pour couvrir tous les vols et à réduire les coûts d'opération.

Dans les travaux de Bélanger et al. (2003), on reprend l'idée des fenêtres de temps proposée par Rexing et al. (2000). La nouveauté est qu'une pénalité est imposée lorsqu'il y a un délai trop court entre deux vols consécutifs desservant la même paire origine-destination. De plus, les auteurs considèrent les avions individuellement au lieu de les considérer par flotte. Un réseau espace-temps, décrivant les mouvements possibles des avions, est construit pour chaque avion. Pour modéliser la flexibilité sur les heures de départ des avions, des fenêtres de temps sur les noeuds et des durées sur les arcs sont nécessaires. L'objectif du modèle est de maximiser les profits espérés. Ces profits varient selon le type d'avion utilisé, le vol ainsi que l'heure de départ. Un modèle non linéaire de flot multi-commodité en nombres entiers est proposé. La résolution se fait par une approche de séparation et évaluation progressive où à chaque

noeud de l'arbre de recherche, une méthode de génération de colonnes est utilisée pour calculer une bonne supérieure. Bélanger et al. ont développé trois nouvelles stratégies de branchement spécifiques à ce problème afin de détecter la non faisabilité d'un sous-arbre due aux besoins de périodicité. Les tests ont été effectués sur des données réelles et les résultats montrent que la flexibilité sur les heures de départ contribue considérablement à la réduction du nombre d'avions nécessaires pour la couverture de tous les vols ; cependant, une augmentation de la flexibilité sur les heures de départ des vols et un resserrement des contraintes d'espacement entre deux vols consécutifs rendent le problème plus difficile à résoudre.

### 1.3.2 Conception des rotations d'avion

La résolution de ce problème est basée sur les résultats de l'affectation de l'étape précédente. Chaque rotation doit satisfaire les contraintes de conservation de flot entre les routes et, surtout dans les travaux récents, les contraintes d'entretien.

Feo et Bard (1989) mettent en œuvre l'un des premiers modèles permettant la conception des rotations d'avion. Il s'agit d'un problème stratégique qui combine la localisation des bases d'entretien et la construction des rotations d'avion. Les auteurs supposent que les entretiens s'effectuent seulement la nuit à raison d'au moins un entretien à tous les quatre jours pour chaque avion. Un horizon de sept jours est étudié, et plutôt que de considérer individuellement les segments de vol, les auteurs travaillent à partir de routes d'une durée d'une journée. Ainsi, la position de chaque avion le matin et le soir et la liste des stations sont les seules informations nécessaires. Le modèle considère une flotte homogène et traite individuellement les avions. Afin de pouvoir traiter les contraintes d'entretien, Feo et Bard modifient légèrement la configuration du réseau espace-temps. Les arcs représentent des journées de vol et chaque station est représentée par deux noeuds reliés par deux arcs. Le premier arc représente

la situation où aucun entretien n'y est réalisé alors que le second arc est réservé pour le cas contraire. La situation est formulée avec un modèle de flot multi-commodités en nombres entiers où chaque commodité représente un avion. L'objectif est la minimisation des coûts fixes d'ouverture des stations d'entretien additionnés aux coûts unitaires d'entretien, alors que les contraintes garantissent le respect de la capacité de chacune des stations d'entretien ainsi que le respect d'un espacement maximal de quatre jours entre les entretiens. Le modèle est résolu avec une heuristique en deux phases. Dans la première phase, on génère un ensemble de rotations d'avion en ignorant les contraintes d'entretien, ensuite, en minimisant les coûts, des sites d'entretien sont sélectionnés dans la deuxième phase qui est basée sur l'heuristique de Chvátal (voir Chvátal (1979)). À l'aide de cette heuristique, on arrive à résoudre des instances allant jusqu'à 154 vols et 76 villes en un temps de 11 minutes. L'un des inconvénients majeurs de ce modèle est qu'il ne considère pas l'aspect cyclique du problème ce qui empêche la mise en application des résultats obtenus.

Un autre travail important mené dans ce sens a été réalisé par Clarke et al. (1997). En fait, plusieurs aspects pratiques ont été pris en considération pour concevoir des rotations d'avion journalières. Les auteurs supposent que les vols se répètent chaque jour et l'objectif de l'étude est de maximiser la somme des valeurs ajoutées (*through value, en anglais*) des connexions. La valeur ajoutée d'une connexion entre deux vols correspond au revenu supplémentaire espéré pouvant être généré par des passagers additionnels attirés par un vol avec escale plutôt que par un vol avec connexion. Deux types de contraintes sont pris en compte : les contraintes opérationnelles qui exigent que les avions de même de type doivent effectuer la même route afin que le vieillissement des appareils soit le même au sein de chaque flotte ; ensuite les contraintes d'entretien qui exigent que chaque avion doit visiter une station d'entretien à un intervalle régulier durant un temps suffisamment long. Ce modèle essaie de répondre aux exigences générales des compagnies qui visent l'utilisation uniforme des avions et l'espacement uniforme des entretiens pour chaque avion. Les auteurs formulent

le problème de conception de rotations d'avion comme un problème de voyageur de commerce asymétrique où une rotation d'avion correspond à un circuit eulérien qui maximise la valeur ajoutée et qui satisfait les contraintes d'entretien. Ce circuit eulérien est construit sur un graphe eulérien où les vols sont représentés par des arcs et tout chemin dont la longueur est supérieure à l'intervalle maximum entre deux entretiens est supprimé pour être certain de vérifier les contraintes d'entretien. L'approche de résolution consiste à utiliser une relaxation lagrangienne en dualisant les deux types de contraintes, ensuite on résout le problème dual lagrangien de ce problème par une méthode de sous-gradients. Le modèle est testé sur onze instances de différentes tailles et les résultats montrent que la relaxation lagrangienne fonctionne bien mais qu'elle n'est pas en mesure de résoudre des problèmes très complexes.

Gopalan et Talluri (1998) utilisent une approche différente pour inclure les contraintes d'entretien dans la conception des rotations d'avion. Plutôt que de considérer les segments de vol individuellement, les auteurs regroupent ces segments en séquence (*line of flying, en anglais*) : une séquence représente les activités d'une journée pour un avion et des rotations d'entretien sont alors construites à partir de ces séquences. Une *rotation d'entretien* est une suite de séquences respectant le fait qu'un avion doit passer la nuit au maximum à tous les trois jours dans une station d'entretien. On note ce genre de rotation 3-MET. Deux formulations mathématiques sont présentées. La première suppose que les séquences sont les mêmes jour après jour, alors que la deuxième permet une variation selon la journée. Les auteurs se sont concentrés sur la première formulation où un graphe appelé *LEO-graphe* sert à représenter le problème sur un horizon infini. Dans ce graphe, les noeuds représentent les stations (d'entretien ou non) alors que les arcs représentent les séquences. Une rotation 3-MET est donc un cycle eulérien formé d'au plus deux noeuds successifs représentant une station où aucun entretien n'est effectué. Les auteurs ont développé un algorithme polynomial permettant de ramener la recherche d'une rotation d'entretien à la recherche d'un cycle eulérien dans un *LEO-graphe* ayant subi quelques transformations. Il est à noter

que Gopalan et Talluri se concentrent sur la recherche d'une solution réalisable, donc il n'y a pas d'objectif.

Sriram et Haghani (2003) améliorent le modèle de Feo et Bard (1989) afin de le rendre plus pratique et conforme aux besoins des compagnies. Les auteurs portent une attention particulière aux exigences entourant les entretiens et la cyclicité de la solution. L'horizon considéré est de sept jours et plusieurs types d'avion sont utilisés. Les auteurs supposent que les entretiens se font la nuit à une station. Ainsi, seules la station initiale et la station terminale d'une journée sont importantes. Ils utilisent alors l'affectation des types d'avion à une route d'une journée plutôt qu'à un segment de vol. Trois éléments principaux distinguent leur modèle de celui de Feo et Bard. Premièrement, ils imposent une pénalité lorsque l'affectation déterminée par la solution du problème d'affectation des types d'avion aux vols n'est pas respectée. Deuxièmement, les entretiens de type B sont pris en compte, ces derniers doivent se produire, en moyenne, une fois par deux mois. Finalement, ils reformulent les contraintes obligeant chacun des avions à subir un entretien à tous les quatre jours. Pour la modélisation, Sriram et Haghani présentent une formulation de type multi-commodités en nombres entiers. L'objectif consiste à minimiser les coûts d'entretien ainsi que les pénalités imposées au non respect des résultats de l'affectation des types d'avion aux vols. Comme la résolution d'un tel problème par CPLEX nécessite de grands temps de calcul vu la taille du problème, les auteurs proposent une heuristique faisant appel à une recherche en profondeur et une recherche aléatoire. Les tests ont été effectués sur des données générées aléatoirement comprenant de 8 à 75 stations. Les résultats ont été concluants puisque la solution obtenue avec l'heuristique est à au plus 5% de la valeur optimale obtenue par CPLEX en des temps de calcul beaucoup plus rapides (de 5 heures avec CPLEX à quelques secondes avec l'heuristique).

### 1.3.3 Affectation des types d'avion et conception de rotations

Certains auteurs ont traités les deux problèmes simultanément, à savoir l'affectation des types d'avion aux vols et la construction de rotations pour les avions. En fait, la qualité de la solution serait meilleure en jumelant les deux problèmes mais les temps de calcul peuvent être un inconvénient dans ce genre de situations.

Desaulniers et al. (1997) résolvent simultanément le problème journalier d'affectation des types d'avion aux vols et de conception de rotations d'avion. Ainsi, le problème consiste à trouver, pour chaque avion, la rotation journalière permettant de maximiser les profits. Les contraintes de base exigent que chaque vol soit inclus dans une rotation, garantissent que le nombre d'avions utilisés soit inférieur ou égal au nombre d'avions disponibles pour chaque type d'avion. La liste des vols à effectuer, la fenêtre de temps de l'heure du départ de chaque vol ainsi que les profits/coûts générés par l'affectation de chaque type d'avion à chacun des vols constituent les données du problème. Les auteurs supposent que l'étendue de la fenêtre de temps de l'heure du départ est la même pour tous les vols, et de plus, la demande d'un vol ne varie pas en fonction de son heure de départ lorsque celle-ci est comprise dans une fenêtre. Deux modèles équivalents sont présentés. Le premier est de type multi-commodités, le deuxième est de type partitionnement d'ensemble. Le second s'obtient du premier en appliquant une décomposition de Dantzig-Wolfe. Dans le premier modèle, une variable binaire est associée à chacun des horaires de vols possibles pour chaque type d'avions ; on obtient alors une formulation de type partitionnement d'ensemble. La résolution dans ce cas se fait par séparation et évaluation progressive dans laquelle la relaxation linéaire à chacun des noeuds de l'arbre de branchement est résolue à l'optimalité par une méthode de génération de colonnes. Les sous-problèmes, un pour chaque type d'avion, génèrent alors des horaires possibles en résolvant un problème de plus long chemin avec fenêtres de temps. Dans la seconde formulation, une variable binaire est associée à chacune des connexions possibles entre deux vols effectués par un même type d'avion.

Cette seconde formulation produit un modèle de flot multi-commodités avec fenêtres de temps qui est enfin résolu par une décomposition de Dantzig-Wolfe imbriquée dans une approche de séparation et évaluation progressive. Les tests sont effectués sur deux jeux de données, l'un provenant d'une compagnie américaine (383 vols, 91 avions) et l'autre provenant d'une compagnie européenne (252 vols, 51 avions). Les auteurs montrent que les profits augmentent et le nombre d'avions utilisés diminue lorsque l'étendue des fenêtres augmente. Donc, il est profitable de résoudre simultanément les deux problèmes surtout que les temps de calcul sont très raisonnables.

Barnhart et al. (1998a) résolvent aussi simultanément les deux problèmes d'affectation des types d'avion aux vols et de conception des rotations d'avion avec contraintes d'entretien. La durée de l'horizon doit être plus grande que l'intervalle maximum entre deux entretiens consécutifs. Leur modèle est basé sur le concept des chaînes. Une chaîne est une suite de vols consécutifs commençant et se terminant à une station d'entretien ; cette suite satisfait les contraintes de conservation de flot des avions et les contraintes d'entretien. Une chaîne est dite *augmentée* si le temps minimum d'un entretien est ajouté à la fin de la chaîne. Le coût de la chaîne est constitué des coûts d'opération et du coût d'entretien auxquels sont soustraits les revenus associés à l'affectation de types d'avion aux vols ainsi que les revenus cachés associés aux connexions incluses dans la chaîne. Le modèle vise à sélectionner l'ensemble des chaînes augmentées minimisant les coûts, ces dernières doivent être telles que chaque vol est couvert exactement par une seule chaîne. Ensuite, pour chaque type d'avion, les vols affectés sont partitionnés en un ensemble de rotations formées de chaînes augmentées et d'attentes au sol. Le modèle est résolu par une approche de séparation et évaluation progressive combinée à une méthode de génération de colonnes. Le sous-problème est alors un problème de plus court chemin avec contraintes sur un réseau où les noeuds représentent les vols et les arcs correspondent aux connexions possibles entre ces vols. Le modèle est testé sur un jeu de données comprenant 1000 vols et les résultats montrent que l'approche est très efficace ; le nombre de noeuds à explorer

demeure petit. Par contre, si le nombre de vols est important, alors le nombre de chaînes devient très grand, ce qui impliquerait de grands temps de calcul.

#### 1.4 Contributions du mémoire

Les travaux que nous avons trouvés sur la résolution simultanée des problèmes d'affectation des types d'avion aux vols et de construction de rotations d'avion présentent une méthode de séparation et évaluation progressive combinées à une méthode de génération de colonnes. L'application de telles approches sur des instances de grande taille, où les contraintes d'entretien doivent être prises en considération, s'avèrent peu efficaces à cause des grands temps de calcul. Ces derniers croient très vite avec la taille du problème.

Dans ce mémoire, nous proposons des méthodes heuristiques qui permettent de réduire la taille du problème d'ATRAH. Nous allons, par la suite, résoudre ce problème réduit par une méthode de séparation et évaluation progressive où la relaxation linéaire à chaque noeud de branchement est résolue par une méthode de génération de colonnes. Les heuristiques en question, nous allons en présenter deux, sont basées sur des études statistiques menées sur les données concernant les flottes et les vols. Avec un problème de taille réduite, les temps de calcul seront considérablement améliorés. Afin d'améliorer les solutions obtenues, une réoptimisation basée sur la méthode de recherche à grand voisinage (RGV) sera effectuée. Ainsi, nous serons en mesure de produire des solutions d'une qualité suffisante en des temps de calcul très intéressants.

## CHAPITRE 2

### FORMULATION MATHÉMATIQUE ET APPROCHE DE RÉSOLUTION DE BASE

Dans ce chapitre, nous allons présenter la formulation du problème d'ATRAH telle que proposée par Lacasse-Guay (2009). Les sections 2.2 et 2.3 sont dédiées respectivement à la modélisation des réseaux utilisés et à la présentation de la formulation mathématique. La méthode de génération de colonnes utilisée pour la résolution du problème est décrite dans la section 2.4. Enfin, des tests sur une instance de grande taille provenant d'une compagnie aérienne nord-américaine ont été effectués et les résultats obtenus sont analysés dans la section 2.5. Commençons d'abord par une brève mise en contexte et la présentation de notations.

#### 2.1 Mise en contexte et notations

Nous disposons, d'une part, de la liste des vols à couvrir durant un horizon d'une semaine, de la liste des flottes disponibles où chaque flotte est caractérisée par le nombre d'avions disponibles, la fréquence d'entretien ainsi que les stations d'entretien de ses avions. D'autre part, toutes les flottes candidates à couvrir chacun des vols sont connues, et pour chaque affectation possible, on connaît la durée, les revenus et le coût de chaque vol. On note aussi qu'on dispose d'une liste de connexions exigées par la compagnie aérienne où chaque connexion est constituée de deux vols ainsi que de la flotte qui peut effectuer cette connexion. Pour décrire le modèle mathématique, nous adoptons les notations suivantes : soit  $K$  l'ensemble des flottes d'une compagnie aérienne où chaque flotte  $k \in K$  est composée d'un nombre d'avions  $N(k)$ . L'ensemble des vols à couvrir est noté  $L$ . Chaque vol  $l \in L$  peut être exécuté par un-sous ensemble

de flottes noté  $K^l$ . L'ensemble des stations est noté  $S$ . Parmi celles-ci, certaines servent de stations d'entretien ; notons par  $S^k$  le sous-ensemble des stations d'entretien des avions de la flotte  $k$ . Chaque flotte  $k$  est caractérisée par sa fréquence d'entretien notée  $x^k$ . Enfin, soit  $D$  l'ensemble des jours de l'horizon considéré. Dans notre cas,  $D = \{1, 2, \dots, 7\}$ . En d'autres termes, l'horizon correspond à une semaine.

## 2.2 Modélisation des réseaux

La formulation proposée pour le problème ATRAH sera décrite dans la section 2.3. Elle repose toutefois sur des réseaux qui sont décrits dans cette section.

Le problème étudié peut être représenté sur un ensemble de réseaux  $G^{kd}$ . On construit un réseau  $G^{kd} = (N^{kd}, A^{kd})$  pour chaque couple de flotte  $k \in K$  et de jour  $d \in D$ . Donc, un total de  $|D|^*|K|=7^*|K|$  réseaux sont construits.

Chaque réseau  $G^{kd}$  représente l'ensemble des vols des avions de la flotte  $k$  sur un horizon débutant le jour  $d$  et se terminant, au plus tard, le jour  $d+x^k$ . On signale que la fonction modulo est nécessaire pour des raisons de cyclicité. Toutefois pour simplifier la notation, nous écrirons tout simplement  $d+x^k$  au lieu de  $((d-1+x^k)mod7)+1$  et  $d-x^k$  au lieu de  $((d-1-x^k)mod7)+1$ . Dans un tel réseau, un chemin représente une route d'avion débutant après un entretien et se terminant par un entretien.

La figure 2.1 illustre la représentation d'un réseau  $G^{kd}$  qui est composé de six types de noeud :

$o^{kd}$  : ce noeud représente le début de l'horizon du réseau  $G^{kd}$ . Il s'agit du noeud *source* ;

$p^{ky}$  : ce type de noeud représente un puits du réseau  $G^{kd}$ , ce qui veut dire que l'avion de type  $k$  subit un entretien le jour  $y$ . Il y a un tel noeud pour chaque  $y \in \{d, d+1, \dots, d+x^k\}$  ;

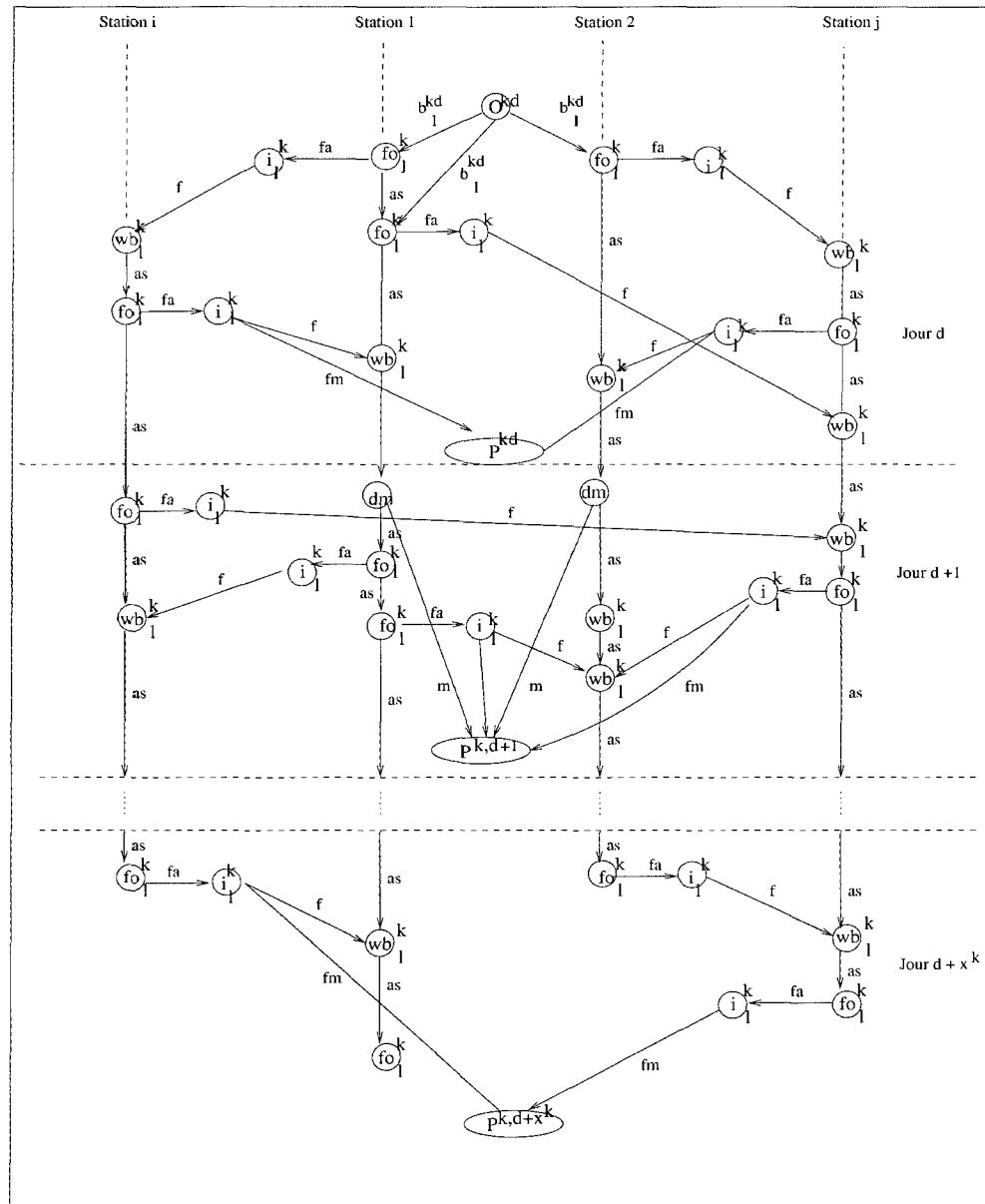


Figure 2.1 Réseau utilisé pour la construction des routes d'avion

$fo_l^k$  : ce noeud représente une opportunité d'affectation au vol  $l$  pour un avion de type  $k$  ;

$i_l^k$  : c'est une réplique du noeud  $fo_l^k$ . Il représente le début du vol  $l$  et il est essentiel pour la représentation des connexions entre deux vols ;

$wb_l^k$  : ce noeud représente la fin du vol  $l$  lorsqu'affecté à un avion de type  $k$  et le début d'une période d'attente ;

$dm$  : ce noeud représente le début d'un entretien. Il y a un noeud de ce type à chaque début de journée.

Les arcs du réseaux sont aussi de six types :

$m$  : cet arc représente une opportunité d'entretien. Il relie un noeud  $dm$  associé à un jour  $y$  au noeud  $p^{ky}$  ;

$as$  : arc d'attente liant deux événements successifs à une même station ;

$f$  : arc liant un noeud intermédiaire  $i_l^k$  au noeud  $wb_l^k$  correspondant. Il représente le vol  $l$  suivi d'une période d'attente. Sa durée correspond à la durée du vol lorsqu'il est effectué par la flotte  $k$  à laquelle est additionné le temps minimal de connexion ;

$fm$  : arc liant un noeud intermédiaire  $i_l^k$  au noeud  $p^{ky}$ . Il représente le vol  $l$  suivi d'un entretien. Cet arc marque la fin d'une route construite pour un avion de type  $k$  ;

$fa$  : arc liant un noeud  $fo_l^k$  au noeud intermédiaire  $i_l^k$ . Il représente la fin d'une période d'attente, l'avion étant prêt à exécuter le vol  $l$  ;

$b_l^{kd}$  : arc liant l'origine  $o^{kd}$  au noeud  $fo_l^k$  représentant le début du vol  $l$ . Il représente le premier vol de la route d'un avion de type  $k$  ;

$fc$  : cet arc sert à représenter une connexion forcée entre deux vols. Il relie deux noeuds  $i_l^k$ .

Voici quelques remarques concernant la conception des réseaux :

- Les arcs  $m$  représentant une opportunité d'entretien sont placés à chaque début de journée de l'horizon sauf pour la première journée. Ainsi, pour un réseau  $G^{kd}$ , il y aura un arc  $m$  au début de la journée  $(d+1), (d+2), \dots, (d+x^k)$  et ce, à chacune des stations d'entretien. On rappelle qu'une route d'avion commence après un entretien, ce qui explique le fait de ne pas placer un arc  $m$  au début de la journée  $d$ . Ces arcs offrent la possibilité à un avion arrivant le minuit d'un jour  $y$  de débuter un entretien au jour suivant, soit le jour  $y+1$ .
- Les arcs  $b_l^{kd}$  relient la source  $o^{kd}$  aux premiers vols (d'un avion de type  $k$ ) pouvant être exécutés à la suite d'un entretien ayant eu lieu le jour  $d$ . Ainsi, il se peut qu'il y ait plusieurs arcs  $b_l^{kd}$  reliant la source à la même station dans un réseau.

En ce qui concerne les coûts  $c_{ij}^{kd}$  sur les arcs  $(i, j)$  appartenant au réseau  $G^{kd}$ , ils sont définis comme suit :

- arc de type  $f$  ou  $fm$  :  $c_{ij}^{kd}$  est le coût d'affectation d'un avion de type  $k$  au vol représenté par l'arc en question moins le revenu engendré par cette affectation ;
- les autres arcs :  $c_{ij}^{kd}$  est nul.

### 2.3 Formulations mathématiques

Nous présentons dans cette section deux formulations mathématiques. En premier lieu, une formulation de type multiflots est décrite. Par la suite, une décomposition de Dantzig-Wolfe est utilisée pour reformuler le problème afin de le résoudre par une approche de génération de colonnes.

### 2.3.1 Formulation multiflots

Introduisons d'abord certains paramètres binaires nécessaires pour la formulation mathématique :

$v_{ij}^l = 1$  si l'arc  $(i,j)$  représente le vol  $l \in L$ ;

$a_{ij}^{hs} = 1$  si l'arc  $(i,j)$  contient un entretien à la station  $s$  et que le prochain départ à cette station après l'entretien, est au temps  $h$ ;

$t_{ij} = 1$  si l'arc  $(i,j)$ , représentant un vol, traverse le temps de comptage  $T$ .

Pour les arcs  $b_i^{kd}$ , les arcs reliant la source  $o^{kd}$  d'un réseau  $G^{kd}$  à chaque premier départ suivant un entretien aux stations d'entretien, nous considérons que le temps de ces arcs correspond à l'heure de début du vol  $l$ . Pour les arcs  $f_m$  et  $m$ , le temps de ces arcs se termine au temps de début du prochain départ d'un vol  $l$ .

Nous posons enfin :

$H^{sk}$  : Ensemble des heures correspondant aux premiers départs, à une station d'entretien  $s$ , après un entretien ;

$P^{kd}$  : Ensemble des noeuds puits d'un réseau  $G^{kd}$

Ainsi, nous obtenons la formulation suivante :

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{d \in D} \sum_{(i,j) \in A^{kd}} c_{ij}^{kd} X_{ij}^{kd} \quad (2.1)$$

sujet à :

$$\sum_{k \in K^l} \sum_{d \in D} \sum_{(i,j) \in A^{kd}} v_{ij}^l X_{ij}^{kd} = 1 \quad \forall l \in L \quad (2.2)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{(i,j) \in A^{kd}} t_{ij} X_{ij}^{kd} \leq N(k) \quad \forall k \in K \quad (2.3)$$

$$\sum_{j:(j,i) \in A^{kd}} X_{ji}^{kd} - \sum_{j:(i,j) \in A^{kd}} X_{ij}^{kd} = 0 \quad \forall k \in K, d \in D,$$

$$i \in N^{kd} \setminus (\{o^{kd}\} \cup P^{kd}) \quad (2.4)$$

$$X_{o^{kd(h)}, j(h)}^{kd(h)} - \sum_{d=d(h)-x^k}^{d(h)} \sum_{(i,j) \in A^{kd}} a_{ij}^{sh} X_{ij}^{kd} = 0 \quad \forall k \in K, s \in S^k, h \in H^{sk} \quad (2.5)$$

$$X_{ij}^{kd} \geq 0 : \text{entiers} \quad \forall k \in K, d \in D, (i, j) \in A^{kd} \quad (2.6)$$

L'objectif du problème est de minimiser les coûts d'affectation des types d'avion aux vols. Les contraintes (2.2) assurent la couverture de tous les vols. Elles forcent, en même temps, le modèle à affecter exactement un type d'avion à chaque vol  $l \in L$ . Le nombre d'avions disponibles pour chaque flotte est imposé par les contraintes (2.3). En effet, au temps de comptage  $T$ , les avions en vol, au sol et à l'entretien sont comptés et ce nombre ne doit pas dépasser le nombre d'avions disponibles. La conservation de flot aux noeuds d'un même réseau  $G^{kd}$  est assurée par les contraintes (2.4), alors que la conservation de flot entre tous les réseaux de la même flotte est assurée par les contraintes (2.5). Il y a une telle contrainte pour chaque type d'avion  $k \in K$ , chaque station d'entretien  $s \in S^k$  et chaque temps  $h \in H^{sk}$ . Le temps  $h$  correspond à l'heure du premier départ, à la station d'entretien, qui suit un entretien et qui peut être fait par un avion de type  $k$ . Dans ces contraintes, on suppose que  $d(h)$  est une fonction qui retourne le jour associé à l'heure  $h$ , alors que la fonction  $j(h)$  retourne le noeud associé au départ du vol ayant lieu à l'heure  $h$ , donc c'est le noeud représentant l'opportunité de vol  $fo_l^k$ . Enfin, les contraintes (2.6) assurent l'intégrité des flots sur les arcs.

### 2.3.2 Décomposition de Dantzig-Wolfe

Tel que formulé, une résolution directe du problème impliquerait de grands temps de calcul étant donné le nombre important de variables  $X_{ij}^{kd}$  qui, rappelons le, sont entières. Cependant, on remarque dans la formulation ci-dessus, que les contraintes (2.4) et (2.6) ont une structure bloc angulaire séparable pour chaque  $k \in K$  et

$d \in D$ . En effet, pour un couple  $(k, d)$  fixé, les contraintes (2.4) et (2.6) définissent en ensemble de chemins entre le noeud source  $o^{kd}$  et les noeuds puits  $P^{kd}$ . Dès lors, une décomposition de Dantzig-Wolfe (Dantzig et Wolfe (1960)) semble appropriée pour la résolution du problème. Soit  $\Omega^{kd}$ , l'ensemble des chemins du réseau  $G^{kd}$ . Pour un chemin  $p \in \Omega^{kd}$ , on définit une variable binaire  $\Theta_p^{kd}$  telle que  $\Theta_p^{kd} = 1$  si le chemin  $p \in \Omega^{kd}$  est retenu pour la solution et 0 sinon. On pose alors :  $X_a^{kd} = \sum_{p \in \Omega^{kd}} X_{ap}^{kd} \Theta_p^{kd}$  où  $X_{ap}^{kd}$  correspond au flot sur l'arc  $a$  dans le réseau  $G^{kd}$ .

### 2.3.2.1 Problème maître

Avec ces nouvelles variables, nous formons le problème maître suivant :

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{d \in D} \sum_{p \in \Omega^{kd}} c_p^{kd} \Theta_p^{kd} \quad (2.7)$$

sujet à :

$$\sum_{k \in K^l} \sum_{d \in D} \sum_{p \in \Omega^{kd}} v_{lp}^{kd} \Theta_p^{kd} = 1 \quad \forall l \in L \quad (2.8)$$

$$\sum_{d \in D} \sum_{p \in \Omega^{kd}} t_p^{kd} \Theta_p^{kd} \leq N(k) \quad \forall k \in K \quad (2.9)$$

$$\sum_{p \in \Omega^{kd(h)}} b_{hsp}^{kd(h)} \Theta_p^{kd(h)} - \sum_{d=d(h)-x^k}^{d(h)} \sum_{p \in \Omega^{kd}} a_{hsp}^{kd} \Theta_p^{kd} = 0 \quad \forall k \in K, \quad s \in S^k, h \in H^{sk} \quad (2.10)$$

$$\Theta_p^{kd} \geq 0 : \text{entiers} \quad \forall k \in K, \quad d \in D, p \in \Omega^{kd} \quad (2.11)$$

où :

$c_p^{kd} = \sum_{a \in A^{kd}} c_a^{kd} X_{ap}^{kd}$  est le coût du chemin  $p$  ;  
 $v_{lp}^{kd} = \sum_{a \in A^{kd}} v_a^l X_{ap}^{kd}$  vaut 1 si le chemin  $p$  couvre le vol  $l$  et 0 sinon ;  
 $t_p^{kd} = \sum_{a \in A^{kd}} t_a X_{ap}^{kd}$  vaut 1 si le chemin  $p$  traverse le temps de comptage  $T$  et 0 sinon ;  
 $b_{hsp}^{kd(h)} = X_{(o^{kd(h)}, j(h))p}^{kd(h)}$  vaut 1 si le chemin  $p$  débute à l'heure  $h$  associée à la station  $s$  et 0 sinon ;  
 $a_{hsp}^{kd} = \sum_{(i,j) \in A^{kd(h)}} a_{ij}^{hs} X_{(i,j)p}^{kd(h)}$  vaut 1 si le chemin  $p$  se termine par un entretien à la station  $s$  et que le prochain départ suite à cet entretien débute à l'heure  $h$  et 0 sinon.

L'objectif du problème maître est de chercher l'ensemble des chemins  $p \in \Omega^{kd}$  qui minimisent le coût total de la solution. Les contraintes (2.8) garantissent l'insertion de chaque vol dans un et un seul chemin, alors que les contraintes (2.9) imposent la limite en nombre d'avions disponibles pour chaque flotte. Les contraintes (2.10) servent à garantir la conservation de flot entre les réseaux construits pour les avions de même type. Finalement, les contraintes (2.11) sont pour assurer l'intégrité des variables de décision  $\Theta_p^{kd}$ . Le modèle (2.7)-(2.11) est équivalent au modèle (2.1)-(2.6).

### 2.3.2.2 Sous-problème

Étant donné le très grand nombre de variables que compte le modèle (2.7)-(2.11), ce dernier sera résolu par une méthode de génération de colonnes. Dans une telle méthode, les variables sont générées au besoin en utilisant des sous-problèmes. Dans notre cas, il y a un sous-problème pour chaque type d'avion et pour chaque jour de l'horizon considéré. Chacun de ces sous-problèmes permet de générer des chemins, sur le réseau  $G^{kd}$ , entre deux entretiens. Étant donné une solution duale de la relaxation linéaire de (2.7)-(2.11), l'objectif d'un tel sous-problème est de trouver le chemin de coût réduit minimum. En affectant les variables duales  $\alpha^l$ ,  $\beta^k$  et  $\gamma_h^{ks}$  respectivement aux contraintes (2.8)- (2.10), le coût réduit du chemin  $p$  est donné par :

$$c_p^{kd} - \sum_{l \in L} v_{lp}^{kd} \alpha^l - t_p^{kd} \beta^k - \sum_{s \in S^k} \sum_{h \in H^s} (b_{hsp}^{kd(h)} - a_{hsp}^{kd}) \gamma_h^{ks}$$

Le sous-problème  $SP^{kd}$  se formule alors comme suit :

$$\min \sum_{(i,j) \in A^{kd}} \bar{c}_{ij}^k X_{ij}^{kd} \quad (2.12)$$

sujet à :

$$\sum_{j:(j,i) \in A^{kd}} X_{ji}^{kd} - \sum_{j:(i,j) \in A^{kd}} X_{ij}^{kd} = 0 \quad \forall i \in N^{kd} \setminus (\{o^{kd}\} \cup P^{kd}) \quad (2.13)$$

$$X_{ij}^{kd} \geq 0 : \text{entiers} \quad \forall (i,j) \in A^{kd} \quad (2.14)$$

où  $\bar{c}_{ij}^k$  = est le coût réduit de l'arc  $(i, j)$ . Il est calculé en fonction du vrai coût de l'arc ainsi que des valeurs des variables duales selon la nature de l'arc. La somme des coûts réduits des arcs constituant un chemin  $p$  doit être égale au coût réduit du chemin  $p$  en question.

Le sous-problème  $SP^{kd}$  consiste donc à résoudre un problème de plus court chemin dans le réseau  $G^{kd}$ . Les contraintes (2.13) assurent la conservation de flot à chacun des noeuds *internes* du réseau. Le flot passant par les arcs doit être entier, ceci étant garanti par les contraintes (2.14).

Dans la section suivante, nous allons expliquer le but de cette décomposition et voir l'interaction entre le problème maître et les sous-problèmes.

## 2.4 Résolution par génération de colonnes

Comme mentionné ci-dessus, afin de résoudre le problème (2.7)-(2.11), nous allons utiliser une méthode de génération de colonnes. En fait, cette méthode permet de résoudre la relaxation linéaire du problème (2.7)-(2.11). Afin d'obtenir une solution entière, elle est imbriquée dans une procédure de séparation et évaluation progressive. En anglais, cette méthode est appelée branch-and-price (BP). La figure 2.2 résume le fonctionnement de l'algorithme BP. Dans ce qui suit, nous allons présenter la méthode de génération de colonnes et expliquer au passage comment cette méthode est appliquée dans notre cas. Ensuite, nous procéderons à la description des stratégies utilisées pour la recherche d'une solution entière.

### 2.4.1 Description de la méthode de génération de colonnes

La méthode de génération de colonnes a été introduite par Dantzig et Wolfe (1960) et Gilmore et Gomory (1961). C'est une méthode utilisée le plus souvent pour résoudre des problèmes de partitionnement d'ensemble tels que les problèmes de tournées de véhicules et d'avions ou les problèmes de confection d'horaires d'équipages (Desaulniers et al. (1998), Barnhart et al. (1998b)). Chacune des contraintes de partitionnement d'ensemble est associée à une tâche devant être exécutée par une commodité. Dans notre cas, une commodité correspond à un couple (type d'avion :  $k$ , jour :  $d$ ), alors qu'une tâche correspond à un vol  $l$ . Les contraintes liant les différentes commodités sont traitées dans le problème maître alors que les contraintes séparables par commodité sont traitées par le sous-problème. Les variables du problème maître sont associées à des chemins constitués de tâches. Ces chemins, générés par les sous-problèmes, respectent un ensemble de règles prédéfinies. Ainsi, d'après la décomposition de Dantzig-Wolfe présentée ci-haut, l'ensemble des chemins  $p$  réalisables pour la

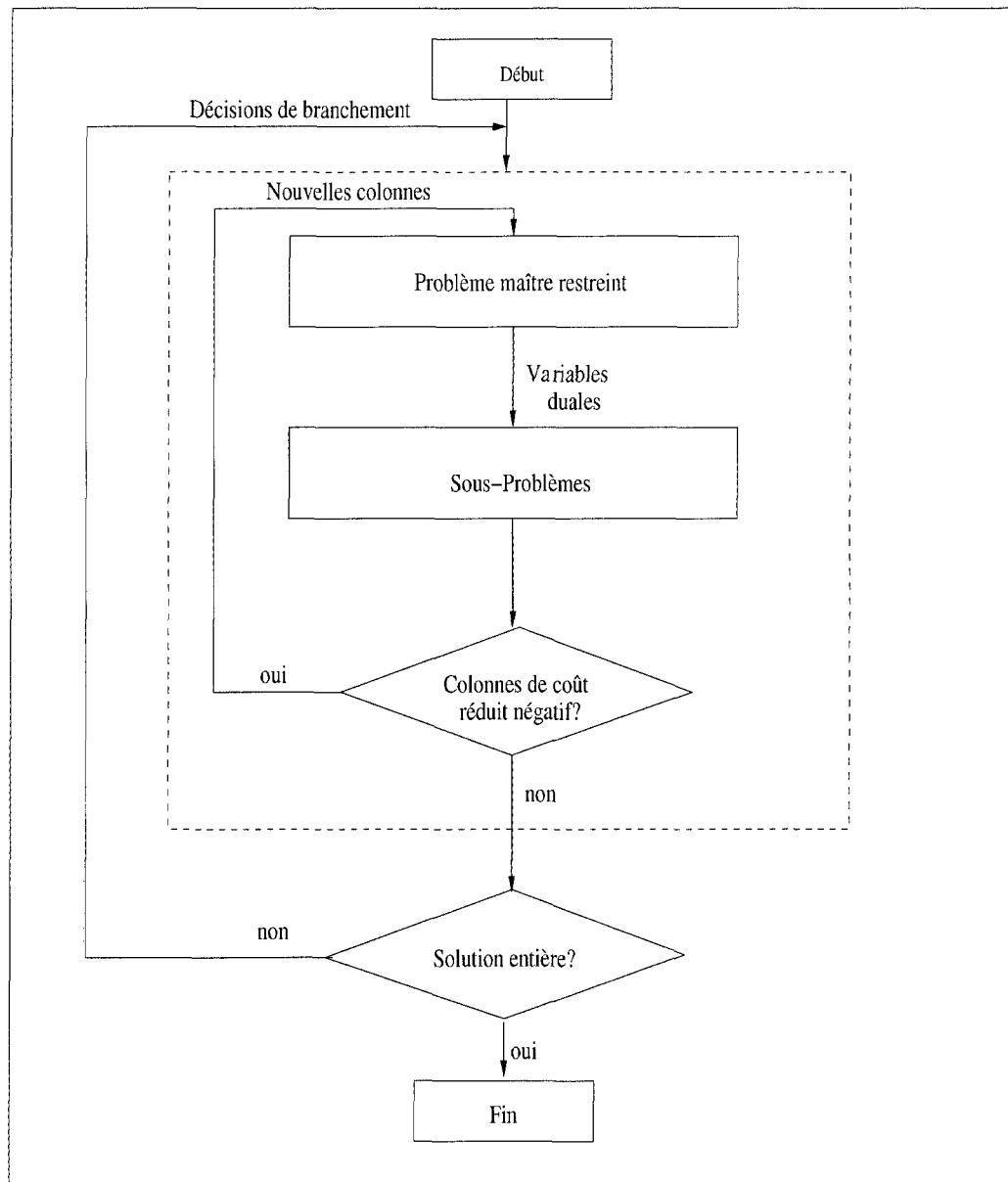


Figure 2.2 Imbrication de la méthode de génération de colonnes dans une approche de séparation et évaluation progressive

commodité  $(k, d)$  est noté  $\Omega^{kd}$ .

Comme le montre la figure 2.2, la méthode de génération de colonnes est un processus itératif. Elle commence par la résolution de la relaxation linéaire d'un problème maître restreint initial  $PMR_0$ , c'est-à-dire un problème maître contenant un nombre restreint de variables  $\Theta_p^{kd}$ . Les autres variables  $\Theta_p^{kd}$ , aussi appelées colonnes, seront générées si nécessaire, par les sous-problèmes. À chaque itération  $i$ , le problème maître restreint  $PMR_i$  est résolu et les valeurs des variables duales associées aux contraintes de  $PMR_i$  sont transmises aux sous-problèmes. Ces derniers permettent de trouver des variables de coût réduit négatif. Il est à rappeler qu'une variable  $\Theta_p^{kd}$  correspond à un chemin  $p \in \Omega^{kd}$  et le coût réduit de cette variable n'est rien d'autre que la somme des coûts des arcs formant le chemin  $p$ . Si la valeur optimale des sous-problèmes est non négative, alors il n'existe aucune variable de coût réduit négatif. La solution optimale courante du  $PMR_i$  est donc aussi optimale pour la relaxation linéaire. Dans ce cas, le processus de génération de colonnes s'arrête et on passe à la recherche d'une solution entière. Par contre, si la valeur optimale des sous-problèmes est négative, alors il existe une variable non considérée dans  $PMR_i$  qui a un coût réduit négatif. Cette variable est ajoutée au problème maître restreint courant et on obtient ainsi le nouveau problème maître  $PMR_{i+1}$  et l'algorithme se poursuit.

#### 2.4.2 Recherche d'une solution entière

Une fois qu'une solution optimale de la relaxation linéaire, qui fournit une borne inférieure sur la valeur optimale du problème, est trouvée (à la sortie du carré pointillé de la figure 2.2), on procède à la recherche d'une solution entière en utilisant une méthode de séparation et évaluation progressive (SEP). À chaque noeud de l'arbre de branchement, le processus itératif entre le problème maître restreint et les sous-problèmes est appliqué pour calculer une borne inférieure sur la valeur optimale

entière pour le sous-arbre engendré à ce noeud de branchement. Il est important de bien choisir la stratégie d'exploration de l'arbre de branchement et les variables sur lesquelles on effectue des branchements car les temps de calcul en dépendent. Pour limiter les temps de calcul, nous proposons d'utiliser une méthode SEP heuristique qui s'appuie sur trois types de décision. Ces types sont les suivants.

#### **Type 1 : Fixation d'une colonne**

Il s'agit de fixer la valeur d'une seule variable  $\Theta_p^{kd}$  à 1. La variable choisie est celle qui prend la plus grande valeur fractionnaire dans la solution de la relaxation linéaire au noeud courant. Dans ce cas, un seul noeud-fils est créé.

#### **Type 2 : Fixation de plusieurs colonnes**

Dans ce cas, plusieurs variables  $\Theta_p^{kd}$ , dont les valeurs sont supérieures à un seuil prédéfini, sont choisies. Un noeud-fils est alors créé pour chaque variable et, dans ce noeud, la variable associée est fixée à 1. Ce type de décision est retenu lorsque la décision de type 1 propose de fixer une variable ayant une petite valeur ( $\leq 0.5$ ), ce qui serait très risqué. Par conséquent, la décision de type 2 permet de réduire le risque en créant plusieurs noeuds-fils

#### **Type 3 : Imposition ou interdiction d'inter-tâches**

Dans cette méthode, des séquences de deux tâches (vols), appelées inter-tâches, sont fixées en modifiant les sous-problèmes. En effet, pour une telle séquence de vols  $i$  et  $j$ , lors de la construction des routes d'avion dans un sous-problème, si le vol  $i$  est ajouté à une route, il doit être nécessairement suivi du vol  $j$ . Cette restriction requiert une modification des règles de dominance employées par l'algorithme de programmation dynamique résolvant les sous-problèmes. Les inter-tâches imposées sont celles ayant des valeurs fractionnaires les plus proches de 1. Dans notre cas, il s'agit d'imposer ou d'interdire des séquences de vols lors de la construction des routes d'avion.

À chaque noeud nécessitant un branchement, les trois types de décision sont évalués pour déterminer lequel sera retenu. Le type 1 est prioritaire. Par contre, s'il n'existe pas de variable  $\Theta_p^{kd}$  ayant une assez grande valeur fractionnaire, le type 3 devient prioritaire. Finalement, si aucune inter-tâche prend une valeur assez grande, on a recours à une décision de type 2. Les décisions de type 2 permettent de réduire le risque de prendre une mauvaise décision en proposant des alternatives. Toutefois, l'exploration de ces alternatives peut s'avérer coûteuse en temps de calcul. C'est pour cette raison que de telles décisions sont imposées en dernier recours. Quant à elles, les décisions de types 1 et 3 permettent de réduire la taille du problème rapidement pour ainsi accélérer le processus de résolution.

## 2.5 Résultats numériques

Cette section présente d'abord une description détaillée du problème fourni par une compagnie aérienne nord-américaine. Par la suite, nous présentons et analysons les résultats obtenus en appliquant la méthode présentée en 2.4.

### 2.5.1 Spécification du jeu de données

Nos expérimentations ont été faites à partir d'un jeu de données fourni par une compagnie aérienne nord-américaine. Ces données portent sur 9 différentes flottes qui sont décrites dans le tableau 2.1 par ordre croissant de leur nombre d'avions disponibles. Pour chaque flotte, ce tableau indique le nombre d'avions disponibles, le nombre de vols candidats pouvant être couverts par cette flotte, la fréquence d'entretien exigée ainsi que le nombre de stations où ce type d'avion peut subir des opérations de maintenance. Le tableau 2.2 donne la répartition des 1216 vols à couvrir sur les sept jours de l'horizon. Notons que certaines données sont mises en caractère gras : ce sont les données qui ont un impact direct sur la taille des réseaux et, par conséquent, sur les

temps de calcul. Il est à souligner qu'il s'agit d'une instance de taille moyenne, les grandes instances peuvent contenir quelques dizaines de milliers de vols.

Tableau 2.1 Caractéristiques des flottes

| Flotte | Nb Avions dispo | Nb Vols candidats | Fréq Entretien | Nb Stat Entretien |
|--------|-----------------|-------------------|----------------|-------------------|
| 74E    | 3               | 449               | 4              | 6                 |
| 744    | 4               | 449               | 4              | 6                 |
| 76B    | 4               | 1146              | 4              | 6                 |
| 76P    | 5               | 527               | 4              | 6                 |
| 763    | 6               | 1118              | 4              | 6                 |
| 333    | 8               | 383               | 4              | 6                 |
| 343    | 9               | 671               | 4              | 6                 |
| 767    | 16              | 622               | 4              | 6                 |
| 76C    | 18              | 1080              | 4              | 6                 |
| Total  | <b>73</b>       | <b>6445</b>       | -              | -                 |

Tableau 2.2 Répartition des vols sur les sept jours

| Jour                            | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | Total       |
|---------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------------|
| Nombre de vols                  | 175 | 171 | 174 | 177 | 177 | 172 | 170 | <b>1216</b> |
| Nombre d'affectations possibles | 918 | 910 | 920 | 943 | 949 | 908 | 897 | <b>6445</b> |

### 2.5.2 Résultats et analyse

Les tests ont été effectués sur une machine 64 bits. Le logiciel GENCOL 4.5 jumelé à CPLEX 9.0.1, qui s'occupe de la résolution des problèmes maîtres restreints, a été utilisé pour la résolution du problème. Nous avons jugé utile de présenter, dans le tableau 2.3, les statistiques ayant trait au processus de résolution. On peut constater du tableau que le nombre de branchements effectué est grand, ceci est dû à la solution linéaire qui est très fractionnaire. En plus, la majorité des décisions lors des branche-

ments sont de type 1. Enfin, pour ce qui est des résultats numériques et des temps de calcul, ils sont résumés dans le tableau 2.4.

Tableau 2.3 Informations concernant le processus de résolution

| Nb itérations<br>gén colonnes | Nb colonnes<br>générées | Nb noeuds<br>branchements | profondeur<br>atteinte | Nb<br>type 1 | Nb<br>type 2 | Nb<br>type3 |
|-------------------------------|-------------------------|---------------------------|------------------------|--------------|--------------|-------------|
| 39,257                        | 7,156,615               | 324                       | 168                    | 277          | 27           | 20          |

Tableau 2.4 Résultats obtenus par la méthode de génération de colonnes

| Temps (sec)<br>total | Temps (sec)<br>PMR | Temps (sec)<br>s-problème | Coût solution<br>rel linéaire | Coût solution<br>entière |
|----------------------|--------------------|---------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| 117,515              | 110,662            | 6641                      | -24,166,679                   | -24,125,770              |

On peut constater de ce tableau que la solution a été trouvée après un temps total dépassant les 32 heures de calcul. Ceci étant dû à l'importante taille du problème qui, on peut le voir sur le tableau précédent, conduit à la génération d'un très grand nombre de variables (39,257). Le négligeable saut d'intégrité (-0,169%) montre que la méthode utilisée a généré une solution de bonne qualité car la différence entre le coût de la solution de la relaxation linéaire et celui de la solution entière est petite. Enfin il est à souligner que des tentatives de résolutions séquentielles, en traitant une seule flotte à la fois, ont été effectuées afin de réduire les temps de calcul. On n'a cependant pas pu obtenir une solution réalisable même en relaxant les contraintes d'entretien.

Comme notre objectif dans ce mémoire est de résoudre le problème d'ATRAH en des temps de calcul raisonnables, il est clair que le temps de calcul ci-haut est trop élevé pour être accepté. Dans le prochain chapitre, nous allons essayer de réduire ce temps de calcul en adoptant différentes stratégies. Ces dernières vont permettre d'obtenir des solutions en des temps courts sans déteriorer la qualité de la solution.

## CHAPITRE 3

### STRATÉGIES D'ACCÉLÉRATION

Nous présentons dans ce chapitre différentes stratégies implémentées dans le but de réduire les temps de calcul lors de la résolution d'une instance de taille moyenne du problème d'ATRAH. Ces stratégies sont basées sur deux principes, le premier "*diviser pour régner*" consiste à traiter les flottes séparément ou par groupes de flottes, et le deuxième principe "*vols à choix limités*" consiste à traiter les flottes ensemble tout en imposant une limite de choix de flottes pour chaque vol. Notre objectif, en s'inspirant de ces deux principes, est de réduire le nombre ainsi que la taille des réseaux utilisés car ces deux facteurs interviennent directement dans les temps de calcul.

Les sections 3.2 et 3.3 sont dédiées à la présentation de deux stratégies d'accélération. Une stratégie de réoptimisation se basant sur une recherche à grand voisinage sera ensuite présentée à la section 3.4. Mais avant, une étude statistique sur les données concernant les flottes et les vols sera menée dans la section 3.1. Dans cette étude, nous nous intéressons, entre autres, à l'interaction entre les flottes ainsi qu'aux statistiques concernant les opportunités d'entretien à chaque station d'entretien, et les opportunités d'entretien offertes pour chaque flotte. Les résultats de cette étude sont pris en considération lors de la détermination de l'ordre dans lequel les flottes ou les groupes de flotte seront traités en appliquant les différentes stratégies d'accélération.

Nous allons tester ces stratégies sur le même jeu de données utilisé lors de la résolution par génération de colonnes et nous allons voir que les résultats qui découlent de ces stratégies sont assez intéressants car, d'une part, les temps de calcul deviennent beaucoup plus petits que ceux obtenus avec la méthode de génération de colonnes, et

d'autre part, les coûts des solutions obtenues sont assez bons car ils ont proches du coût de la solution obtenue par génération de colonnes.

### 3.1 Étude statistique sur les données des flottes

Le tableau 3.1 présente la matrice  $(M_{ij})$  d'interaction entre les flottes. Cette matrice décrit la concurrence pour la couverture des vols entre tous les couples de flottes possibles. Chaque case  $M_{ij}$  contient deux informations :

- $M_{ij}^{sup}$  (en caractère gras) représente le nombre de vols pouvant être couverts par la flotte  $i$  et la flotte  $j$  ;
- $M_{ij}^{inf}$  (en caractère régulier) représente le nombre de vols pouvant être couverts par la flotte  $i$ , mais pas par la flotte  $j$ .

À la lumière des données inscrites dans le tableau ci-haut, on peut tirer certaines informations qui s'avèrent importantes par la suite :

- $744 \equiv 74E$ , autrement dit, les flottes 744 et 74E sont semblables, elles peuvent couvrir exactement les mêmes vols ;
- $76P \subset 767 \subset 76C \subset 763 \subset 76B$ , en d'autres termes, l'ensemble des vols pouvant être affectés à la flotte 76B englobe celui de la flotte 763, qui à son tour, englobe celui de la 76C, qui englobe celui de la 767, qui finalement contient tous les vols couvrables par la flotte 76P ;
- $333 \subset 343$ , donc tous les vols pouvant être couverts par la flotte 333 sont aussi candidats pour la flotte 343, mais pas le contraire.

La figure 3.1 illustre mieux la concurrence entre les flottes pour la couverture des vols.

Tableau 3.1 Matrice d'interaction entre les flottes

| Flotte | 74E        | 744        | 76B         | 76P        | 763         | 333        | 343        | 76C         | 767        |
|--------|------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|------------|-------------|------------|
| 74E    | -          | <b>449</b> | <b>407</b>  | <b>69</b>  | <b>407</b>  | <b>289</b> | <b>429</b> | <b>393</b>  | <b>87</b>  |
|        | -          | 0          | 42          | 380        | 42          | 160        | 20         | 56          | 362        |
| 744    | <b>449</b> | -          | <b>407</b>  | <b>69</b>  | <b>407</b>  | <b>289</b> | <b>429</b> | <b>393</b>  | <b>87</b>  |
|        | 0          | -          | 42          | 380        | 42          | 160        | 20         | 56          | 362        |
| 76B    | <b>407</b> | <b>407</b> | -           | <b>527</b> | <b>1118</b> | <b>369</b> | <b>601</b> | <b>1080</b> | <b>622</b> |
|        | 739        | 739        | -           | 619        | 28          | 777        | 545        | 66          | 524        |
| 76P    | <b>69</b>  | <b>69</b>  | <b>527</b>  | -          | <b>527</b>  | <b>107</b> | <b>107</b> | <b>527</b>  | <b>527</b> |
|        | 458        | 458        | 0           | -          | 0           | 420        | 420        | 0           | 0          |
| 763    | <b>407</b> | <b>407</b> | <b>1118</b> | <b>527</b> | -           | <b>369</b> | <b>573</b> | <b>1080</b> | <b>622</b> |
|        | 711        | 711        | 0           | 591        | -           | 749        | 545        | 38          | 496        |
| 333    | <b>289</b> | <b>289</b> | <b>369</b>  | <b>107</b> | <b>369</b>  | -          | <b>383</b> | <b>355</b>  | <b>125</b> |
|        | 94         | 94         | 14          | 276        | 14          | -          | 0          | 28          | 258        |
| 343    | <b>429</b> | <b>429</b> | <b>601</b>  | <b>107</b> | <b>573</b>  | <b>383</b> | -          | <b>535</b>  | <b>125</b> |
|        | 242        | 242        | 70          | 564        | 98          | 288        | -          | 136         | 54         |
| 76C    | <b>393</b> | <b>393</b> | <b>1080</b> | <b>527</b> | <b>1080</b> | <b>355</b> | <b>535</b> | -           | <b>622</b> |
|        | 687        | 687        | 0           | 553        | 0           | 725        | 545        | -           | 458        |
| 767    | <b>87</b>  | <b>87</b>  | <b>622</b>  | <b>527</b> | <b>622</b>  | <b>125</b> | <b>125</b> | <b>622</b>  | -          |
|        | 535        | 535        | 70          | 95         | 0           | 497        | 497        | 0           | -          |

Toujours dans notre étude statistique, on s'intéresse cette fois-ci aux vols "*prioritaires*". Il s'agit des vols dont le nombre de flottes candidates pouvant les couvrir est inférieur ou égal à 3. Par la suite, lors de la présentation de la première stratégie, on dresse, par ordre croissant, la liste des flottes pouvant couvrir ces vols. La figure 3.2 montre quelles sont les flottes qui peuvent couvrir les vols ayant 1, 2 ou 3 possibilités d'affectation (voir séries 1, 2 et 3, respectivement, sur l'histogramme). On considère qu'à partir de 4 possibilités, un vol n'est pas prioritaire car il a suffisamment de chances d'être couvert.

Comme on peut le constater, la flotte 343 doit assurer la couverture de tous les vols ayant un seul choix de flotte. Les vols ayant deux choix de flotte peuvent être affectés à la 343 ou à la 76B. Enfin, les vols à trois choix de flottes peuvent être affectés aux flottes 343, 76B, 74E, 744, 763 et 76C.

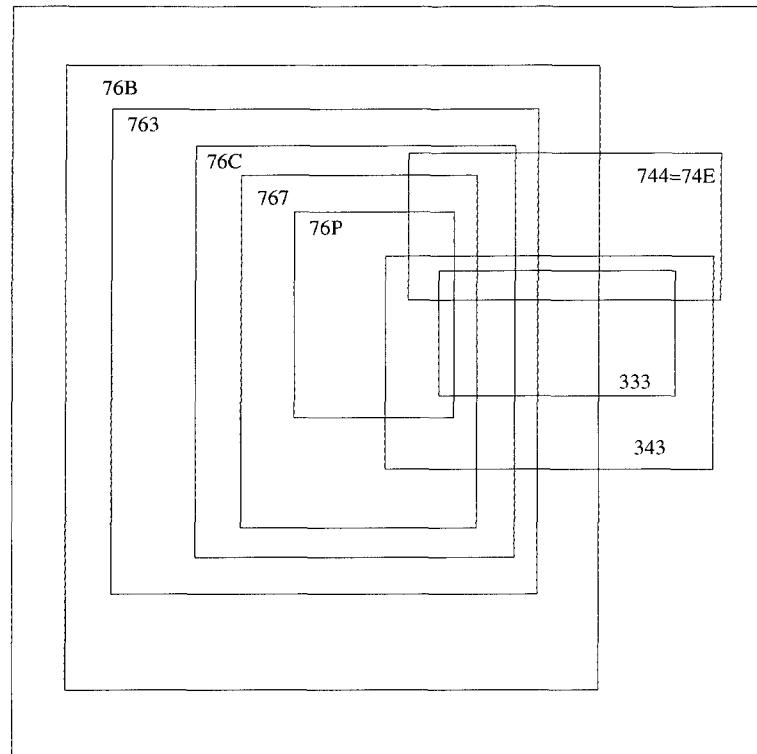


Figure 3.1 Schéma d'interaction entre les flottes

Enfin, comme le problème consiste à construire des routes d'avion où chaque route commence après un entretien et finit par un entretien, il serait intéressant de savoir quelles sont les flottes qui peuvent permettre plus de passages aux stations d'entretien. Afin de tirer des conclusions concernant les flottes qui offriront plus d'opportunités d'entretien, nous allons faire appel à certaines notions de probabilités. Pour cela, posons  $\Omega$  l'expérience aléatoire qui consiste à compter les possibilités d'entretien sur un horizon d'une semaine.  $S^e$  désigne l'ensemble des stations d'entretien. Soit les événements suivants :

- $k$  : "La flotte  $k \in K$  possède une opportunité d'entretien, peu importe où l'entretien va s'effectuer" ;
- $s$  : "La station  $s \in S^e$  offre une opportunité d'entretien" ;
- $k|s$  : "La flotte  $k$  possède une opportunité d'entretien à la station  $s$ ".

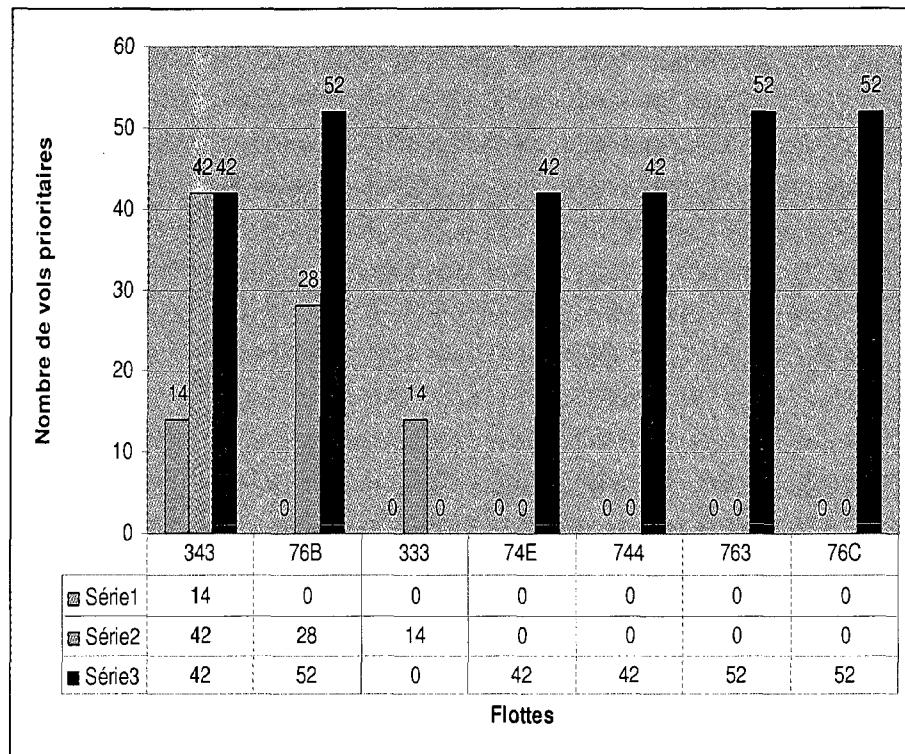


Figure 3.2 Les flottes candidates à couvrir les vols prioritaires

Le tableau 3.2 donne le pourcentage du nombre d'entretiens que chaque station  $s \in S^e$  pourrait permettre par rapport à tous les entretiens qui pourraient se faire. Donc, chaque élément de ce tableau, noté  $p(s)$ , représente la probabilité que l'on effectue un entretien à la station  $s$  pour n'importe quelle flotte  $k \in K$ . Cet élément est calculé comme suit :

$$p(s) = \frac{N(s)}{N(S^e)} \quad (3.1)$$

où :

$N(s)$  : nombre de vols programmés arrivant à la station  $s$  ;

$N(S^e)$  : nombre de vols arrivant à toutes les stations d'entretien  $S^e$ .

Pour ce qui est des probabilités conditionnelles d'entretien de chaque flotte  $k$  à chaque station  $s$ , elles sont résumées dans la matrice  $B$  du tableau 3.3. Ainsi, chaque élément

$B_{ks}$ , noté  $p(k|s)$ , représente la probabilité que la flotte  $k$  subisse un entretien sachant que l'entretien est effectué à la station  $s$ . Cet élément est calculé comme suit :

$$p(k|s) = \frac{N(sk)}{N(st)} \quad (3.2)$$

où :

$N(sk)$  : nombre de vols arrivant à la station  $s$  et pouvant être affectés à un avion de type  $k$  ;

$N(st)$  : nombre de vols arrivant à station  $s$ , en prenant en compte toutes les affectations possibles.

Tableau 3.2 Probabilités d'entretien à chaque station

| Station $s$ | Toronto  | Vancouver | Montréal | Calgary  | Edmonton | Halifax  |
|-------------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| $p(s)$      | 0.482121 | 0.276202  | 0.120838 | 0.078914 | 0.007398 | 0.034525 |

Tableau 3.3 Matrice des probabilités conditionnelles

| Station $s$ /<br>Flotte $k$ | Toronto | Vancouver | Montréal | Calgary | Edmonton | Halifax |
|-----------------------------|---------|-----------|----------|---------|----------|---------|
| 74E                         | 0.0847  | 0.0600    | 0.0942   | 0.0787  | 0        | 0       |
| 744                         | 0.0847  | 0.0600    | 0.0942   | 0.0787  | 0        | 0       |
| 763                         | 0.1343  | 0.1242    | 0.1198   | 0.1400  | 0.1428   | 0.1627  |
| 767                         | 0.0976  | 0.0931    | 0.01014  | 0.0940  | 0.1428   | 0.1453  |
| 76P                         | 0.0901  | 0.0480    | 0.0922   | 0.0940  | 0.1428   | 0.1220  |
| 76B                         | 0.1368  | 0.1286    | 0.1198   | 0.1400  | 0.1428   | 0.1627  |
| 76C                         | 0.1296  | 0.1242    | 0.1198   | 0.1400  | 0.1428   | 0.1627  |
| 333                         | 0.1138  | 0.0909    | 0.1291   | 0.0940  | 0.1428   | 0.1220  |
| 343                         | 0.1280  | 0.1397    | 0.1291   | 0.1400  | 0.1428   | 0.1220  |

Finalement, comme l'ensemble des événements  $\{s\}$  où  $s \in S^e$  forme une partition, on peut calculer la probabilité qu'une flotte possède une opportunité d'entretien, peu

importe l'endroit. On applique la loi des probabilités totales comme suit :

$$p(k) = \sum_{s \in S^e} p(k|s) * p(s) \quad (3.3)$$

On obtient alors le tableau 3.4 où sont inscrites les probabilités  $p(k)$  que chaque flotte  $k$  possède une opportunité d'entretien. Une comparaison rapide effectuée entre les tableaux 3.1 et 3.4 montre qu'une flotte ayant plus de choix de vols à couvrir ne possède pas nécessairement de plus grandes chances d'opportunités d'entretien.

Tableau 3.4 Probabilités d'entretien des flottes

| Flotte $k$ | 74E    | 744    | 763    | 767    | 76P    | 76B    | 76C    | 333    | 343    |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p(k)$     | 0.0750 | 0.0750 | 0.1313 | 0.0985 | 0.0805 | 0.1337 | 0.1290 | 0.1083 | 0.1322 |

## 3.2 Stratégie gloutonne suivant plusieurs ordres

### 3.2.1 Description de la stratégie

Afin d'étudier l'impact du nombre de flottes possibles par vol sur les temps de résolution du problème d'ATRAH, nous avons effectué plusieurs résolutions basées sur la méthode présentée au chapitre 2. On commence d'abord à résoudre le problème en ne considérant qu'un seul choix de flotte par vol. Pour garantir l'obtention d'une solution réalisable, on se sert de la solution obtenue au chapitre 2 : donc chaque vol aura pour seul choix de flotte, la flotte à laquelle il a été affecté dans cette solution. À la résolution suivante, on permet à chaque vol un choix de flotte supplémentaire, et arbitraire, si le vol permet d'autres choix. On effectue ainsi 9 résolutions du problème d'ATRAH et on note à chaque fois les temps de calcul. La figure 3.3 montre une variation linéaire (sauf aux extrimités) du temps de calcul en fonction du nombre de choix

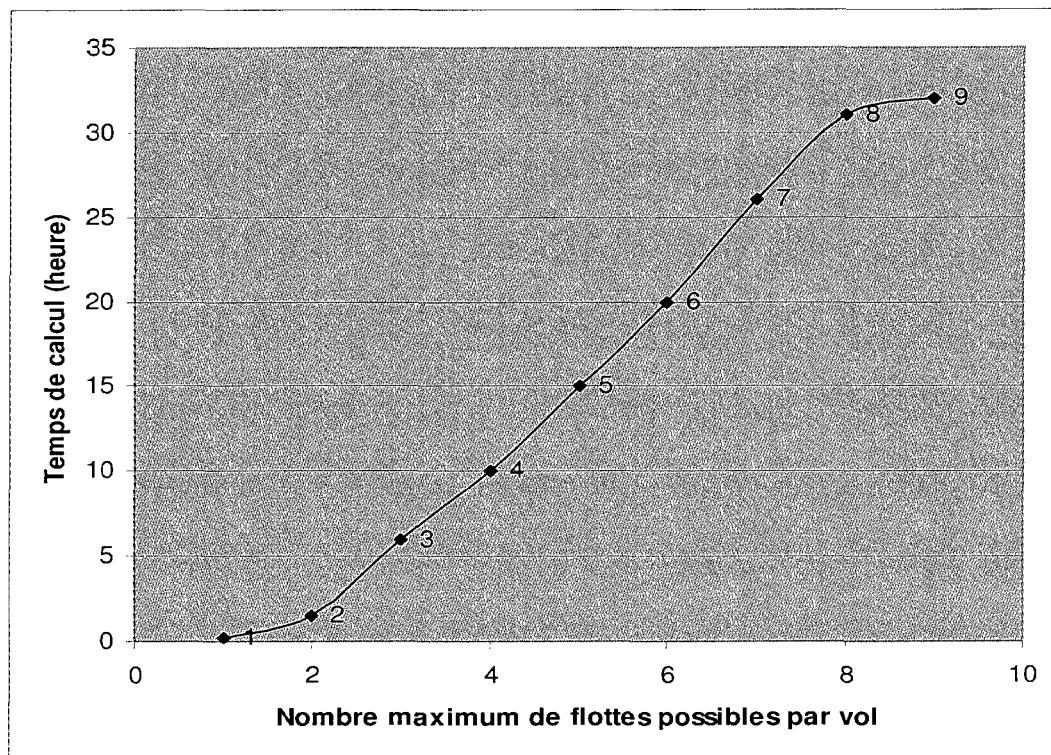


Figure 3.3 Variation des temps de calcul en fonction du nombre de flettes permises par vol

d'affectation pour chaque vol. Nous pouvons constater qu'à partir de 3 possibilités par vol, les temps de calcul dépassent les 5 heures. Donc, une petite de variation du nombre de choix d'affectation conduit à un temps de calcul additionnel important. Dès lors, notre objectif, à travers cette stratégie, est de produire une liste d'affectations dont la taille ne doit pas être élevée afin de garantir une solution en moins de 2 heures. La liste en question doit aussi garantir la réalisabilité du problème.

Comme mentionné ci-haut, la stratégie de résolution gloutonne consiste à résoudre le problème d'ATRAH en considérant une seule flotte à la fois. Trois résolutions glouttonnes, selon des ordres bien définis, seront effectuées. Le but ultime de cette stratégie est de produire la meilleure liste, la plus restreinte possible, des choix d'affectation qui permettrait une résolution globale du problème en des temps de calcul nettement inférieurs à ceux obtenus par la résolution directe. La figure 3.4 montre le fonctionne-

ment global de la stratégie des résolutions gloutonnes. Chaque résolution gloutonne consiste à résoudre le problème de façon gloutonne en considérant une seule flotte à la fois. Comme le nombre d'avions disponibles pour chaque flotte ne peut pas permettre la couverture de tous les vols, le modèle (2.7)-(2.11) est résolu en relaxant les contraintes de couverture de vols (2.8) et en ajoutant des variables d'écart. Des pénalités, imposées aux vols non couverts, sont ajoutées dans la fonction objectif.

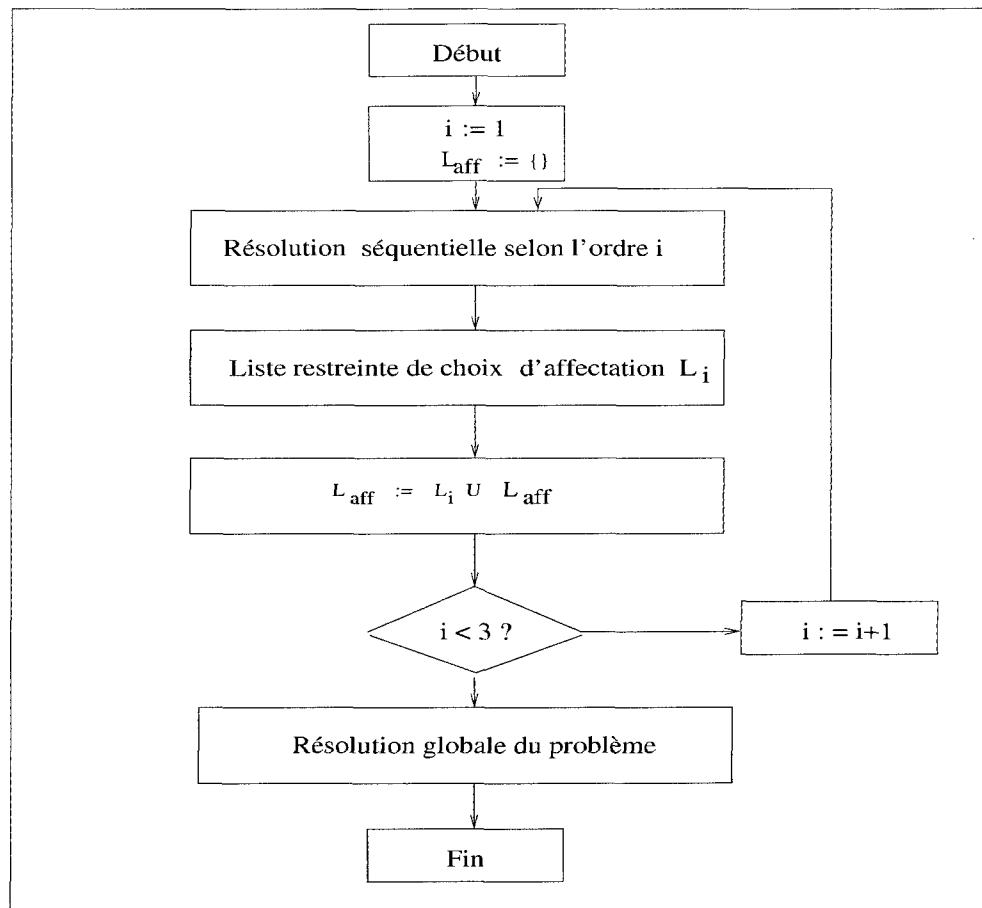


Figure 3.4 Stratégie des résolutions séquentielles

Trois résolutions séquentielles sont effectuées. Dans chaque résolution, un ordre des flottes est adopté. Ce dernier, différent d'une résolution gloutonne (appelée aussi résolution séquentielle) à une autre, est établi compte tenu de l'étude statistique effectuée dans la section précédente. À la fin de chaque résolution séquentielle (après avoir

affecté des vols et construit des rotations d'avion pour chaque flotte), certains vols restent non couverts à cause de la relaxation des contraintes (2.8). Les trois résolutions séquentielles permettent de construire trois listes,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ , de choix d'affectation. Ces trois listes sont fusionnées et les affectations apparaissant plusieurs fois seront réduites à une seule, pour construire la liste optimale des choix d'affectations  $L_{aff}$ . Cette dernière est utilisée pour la résolution du problème en considérant toutes les flottes ensemble et en obligeant la couverture de tous les vols (comme dans la résolution du chapitre 2). L'algorithme 3.1 montre comment une liste de choix d'affectation  $L_i$  est générée après chaque résolution séquentielle suivant l'ordre  $i$ . Dans cet algorithme, on désigne par problème courant le problème qui consiste à trouver des affectations et à construire des rotations pour les avions de la flotte courante  $j$ .

---

#### Algorithme 3.1 Construction d'une liste restreinte de choix d'affectation $L_i$

---

##### 1 Résolution

- **Pour** chaque flotte  $j$  **faire**  
 Résoudre le problème courant  
 Retirer du problème tous les vols couverts par la flotte  $j$

##### 2 Établissement de la liste d'affectations possibles $L_i$

- $L_i \leftarrow \emptyset$
  - Dresser les listes  $L_c$  des vols couverts et  $L_{nc}$  des vols non couverts
  - **Pour** tout vol  $l$  **faire**  
**Si**  $l \in L_c$ , alors mettre dans  $L_i$  l'affectation choisie pour couvrir  $l$  dans la solution  
**Si**  $l \in L_{nc}$ , alors mettre dans  $L_i$  toutes les affectations possibles initiales pour le vol  $l$
- 

### 3.2.2 Ordre de traitement des flottes

Il est important de bien choisir l'ordre de traitement des flottes lors de chaque résolution séquentielle car la construction d'une bonne liste de choix d'affectation en dépend. À l'issue de l'étude statistique effectuée sur les données des flottes et des vols, trois ordres sont établis. Les critères, présentés ci-dessous, sur lesquels les ordres en

question sont définis doivent être peu corrélés afin d'éviter la construction de trois listes de choix d'affectation redondantes. Les trois résolutions séquentielles sont effectuées selon les ordres suivants.

### **Ordre 1 : Priorité aux flottes ayant moins de choix d'affectation**

Le premier ordre est basé sur le schéma d'interaction entre les flottes. Les flottes sont ordonnées par ordre croissant du nombre de vols qu'elles peuvent couvrir. En particulier, si  $flotte_i \subset flotte_j$ , alors la flotte  $i$  est résolue avant la flotte  $j$ . Si deux flottes ont, à peu près, le même nombre de possibilités d'affectation, la flotte ayant le plus petit nombre d'avions disponibles est placée en premier. Lors de la résolution séquentielle selon cet ordre, les vols qui n'ont pas été couverts par la flotte courante, ont toujours une chance d'être couverts par les prochaines flottes puisque ces dernières peuvent couvrir un important nombre de vols. Par contre, si on devait placer les flottes à choix de vols limités en dernier, plusieurs vols qui n'ont pas été couverts au début n'auraient aucune flotte disponible. On pourrait alors se retrouver avec une liste de vols non couverts de taille importante.

### **Ordre 2 : Priorité aux flottes pouvant couvrir le moins de vols prioritaires**

Grâce à l'histogramme 3.2, on peut définir un deuxième ordre de résolution. Dans ce cas, l'objectif est toujours de couvrir le maximum de vols possibles à la fin d'une résolution gloutonne. Les flottes sont donc ordonnées selon le nombre croissant de vols prioritaires qu'elles peuvent couvrir. Lors de l'établissement de cet ordre, la flotte de rang  $i$  vient après la flotte de rang  $i + 1$ . De cette manière, les premières flottes vont couvrir un maximum de vols, et les "vols prioritaires" ne trouveront pas beaucoup de "vols concurrents" lorsqu'on résout les dernières flottes qui sont supposées pouvoir

couvrir les "vols prioritaires".

### Ordre 3 : Priorité aux flottes offrant moins d'opportunités d'entretien

L'une des difficultés du problème traité est d'assurer pour chaque avion de type  $k$ , un entretien, donc un passage à une station d'entretien, au plus à tous les  $x^k$  jours. Des tests ont montré que si un vol peut être couvert par plusieurs flottes mais que ces dernières n'offrent pas beaucoup d'opportunités d'entretien, il aura alors une forte chance de se retrouver non couvert à la fin d'une résolution séquentielle. Le troisième ordre établi est basé sur cette conclusion. On se sert alors du tableau 3.4 pour établir un ordre croissant des probabilités d'entretien de chaque flotte. Ainsi, on garantit aux vols traités par les dernières flottes, une meilleure chance d'insertion dans une route d'avion puisque les flottes restantes offrent plus d'opportunités d'entretien.

En résumé, le tableau 3.5 donne l'ordre établi pour chaque résolution.

Tableau 3.5 Ordre pour chaque résolution séquentielle

|         |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Ordre 1 | 76P | 767 | 74E | 744 | 333 | 76C | 763 | 343 | 76B |
| Ordre 2 | 767 | 76P | 744 | 74E | 763 | 76C | 333 | 76B | 343 |
| Ordre 3 | 74E | 744 | 76P | 767 | 333 | 76C | 763 | 343 | 76B |

### 3.2.3 Résultats numériques

Les résultats concernant chaque résolution séquentielle sont inscrits dans le tableau 3.6. Un des avantages de cette stratégie, est que chaque résolution fournit une solution (partielle) en un temps très court (entre 1 minute et 4 minutes).

Pour justifier les stratégies que nous avons développées pour déterminer les ordres utilisés, nous avons aussi fait des tests avec trois ordres générés aléatoirement. Les

résultats obtenus avec ces ordres indiquent 177, 145 et 142 vols non couverts respectivement, ce qui est nettement supérieur aux résultats affichés dans le tableau 3.6 (entre 48 et 60 vols non couverts).

Une fois que les trois résolutions séquentielles sont effectuées et que la liste restreinte de choix d'affectation est construite, on procède à la résolution globale en se servant du modèle (2.7)-(2.16) décrit dans le chapitre précédent. Les résultats numériques concernant la résolution globale sont inscrits dans le tableau 3.7. On observe qu'un total de 2394 choix d'affectation sont considérés au lieu des 6445 initiaux. Il s'agit d'une réduction d'environ 63% de la taille du problème.

Une brève comparaison avec les résultats obtenus lors de la résolution directe du problème permet de constater une énorme réduction des temps de calcul, accompagnée d'une légère détérioration du coût de la solution. En effet, le temps de calcul est 17 fois plus grand avec la résolution du chapitre 2 : on est passé d'un temps de calcul de 117,515 secondes à un temps de 6985 secondes avec cette stratégie. La valeur de l'objectif de la solution obtenue au chapitre 2, qui est de -24,125,770, est légèrement inférieure à celle obtenue par cette première stratégie d'accélération. Par ailleurs, on a constaté que le nombre de vols qui changent d'affectation par-rapport à la résolution effectuée au chapitre 2 est négligeable par rapport au nombre de vols couverts. Ce nombre est de 41, 37 et 40 pour les résolutions selon les ordres 1, 2 et 3, respectivement. Ceci signifie qu'à chaque résolution, on obtient des rotations assez similaires à celles obtenues par la génération de colonnes, ce qui nous encourage à continuer avec cette stratégie.

### 3.3 Stratégie d'enrichissement des voisinages des vols non couverts

Nous avons vu précédemment qu'à la fin d'une résolution séquentielle, certains vols se retrouvent sans affectation. Ceci a été imputé à la relaxation des contraintes de

Tableau 3.6 Résultats de chaque résolution séquentielle

| Numéro de la résolution | Temps de calcul (sec) | Nombre de vols non couverts | Taille de la liste d'affectations générée |
|-------------------------|-----------------------|-----------------------------|---|
| 1                       | 55                    | 48                          | 1393                                      |
| 2                       | 315                   | 60                          | 1441                                      |
| 3                       | 47                    | 52                          | 1419                                      |

Tableau 3.7 Résultats de la première stratégie d'accélération

| Nombre d'affectations possibles | Temps de calcul (sec) | Coût de la relaxation linéaire | Coût de la solution entière |
|---------------------------------|-----------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 2394                            | 6985                  | -24,166,578                    | -24,119,553                 |

couverture de vols car chaque flotte, considérée séparément, ne possède pas assez d'avions ni assez de choix pour pouvoir couvrir tous les vols. Or, des tests effectués ont montré que, même si la dernière flotte pouvait être affectée à tous les vols restants et même si elle disposait de suffisamment d'avions pour garantir les contraintes de couverture de vols, cela n'empêche pas le problème d'être non réalisable. En effet, le traitement séparé des flottes génère, au fur et à mesure qu'on avance dans la résolution séquentielle, des "*vols isolés*". Ces derniers sont les vols qui ne possèdent pas de vols voisins (successeurs ou prédécesseurs) pour pouvoir les insérer dans une rotation. Le terme "voisin" est utilisé pour désigner un vol successeur ou prédécesseur d'un vol donné dans une route d'avion, et non pas pour désigner un événement voisin à un autre événement à une station donnée. Une deuxième stratégie a donc été élaborée en se basant sur ce fait. Le but de cette stratégie est de s'assurer que chaque vol puisse être connecté à une station d'entretien. Comme la précédente, cette nouvelle stratégie consiste à trouver une liste restreinte de choix d'affectations possibles qui permettrait la résolution du problème d'ATRAH en des temps raisonnables. Les résultats obtenus en appliquant cette stratégie seront présentés et une comparaison avec la stratégie

précédente sera effectuée. La sous-section 3.3.2 décrit la deuxième stratégie d'accélération, nommée "*stratégie d'enrichissement des voisinages des vols non couverts*". Mais avant de s'enfoncer dans les détails de cette stratégie, quelques définitions sont nécessaires afin d'introduire certaines notations.

### 3.3.1 Définitions

Soit  $v$  un entier positif,  $l$  un vol quelconque de  $L$  et  $T$  une durée de temps assez longue pour permettre à un avion de réaliser une connexion ou de subir un entretien.

- On appelle  $v$ -voisinage-précédent de  $l$ , noté  $V_v^-(l)$ , l'ensemble des vols  $l' \in L$  tels qu'il existe une route d'avion du vol  $l'$  au vol  $l$  en passant par au plus  $v - 1$  vols intermédiaires, et cela suivant n'importe quelle flotte. Dans une telle route, la durée entre deux vols consécutifs ne doit pas dépasser  $T$  ;
- On appelle  $v$ -voisinage-suivant de  $l$ , noté  $V_v^+(l)$ , l'ensemble des vols  $l' \in L$  tels qu'il existe une route d'avion du vol  $l$  au vol  $l'$  en passant par au plus  $v - 1$  vols intermédiaires, et cela suivant n'importe quelle flotte. À nouveau, la durée qui sépare le temps d'arrivée d'un vol et le temps de départ du vol successeur immédiat ne doit pas dépasser  $T$  ;
- L'union des deux  $v$ -voisinages d'un vol  $l$  constitue le  $v$ -voisinage de  $l$ . Cette union est notée  $V_v(l) = V_v^-(l) \cup V_v^+(l)$  ;
- Le  $v$ -voisinage d'un ensemble de vols  $L$ , noté  $V_v(L)$  est constitué de l'union des  $v$ -voisinages des vols de cet ensemble, i.e.,  $V_v(L) = \cup_{l \in L} V_v(l)$ .

La figure 3.5 montre plusieurs exemples de voisinages d'un vol donné.

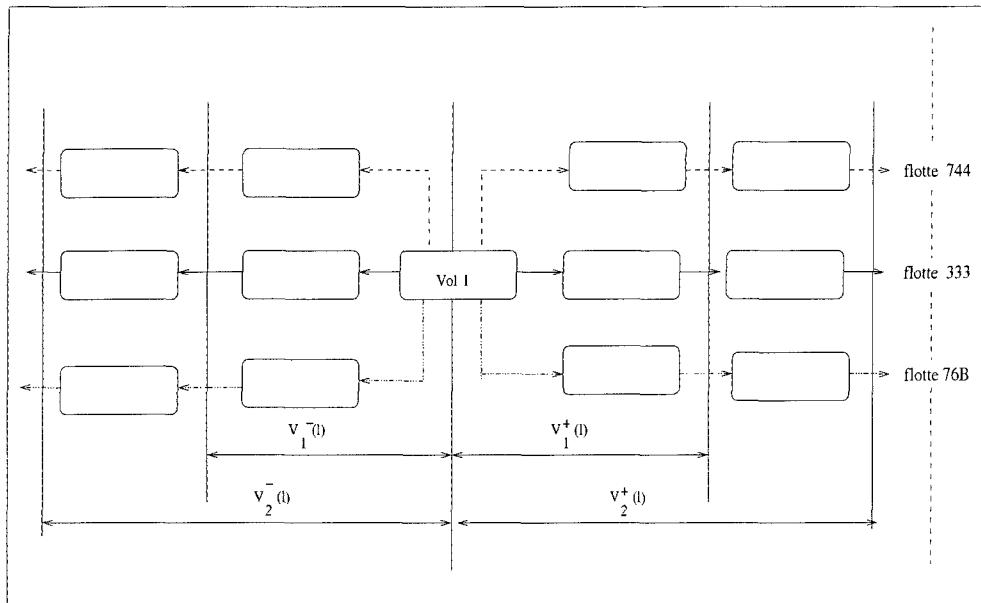


Figure 3.5 Exemples de voisinages d'un vol

### 3.3.2 Description de la stratégie

Afin de remédier au problème des "*vols isolés*" et de pouvoir ainsi les connecter à d'autres vols pour construire des rotations, nous leur réservons un traitement spécial. L'idée est la même que la stratégie précédente : nous procédons à la recherche d'une bonne liste de choix d'affectations qui permettrait une résolution du problème en des temps raisonnables. On effectue les trois résolutions gloutonnes vues dans la stratégie précédente et nous prenons une seule en considération : il s'agit de celle qui produit le moins de vols non couverts afin de réduire la taille de la liste d'affectations recherchée. Les vols qui n'ont pas été couverts seront avantagés lors de la résolution globale en permettant à ces vols ainsi qu'à tous les vols se retrouvant dans leurs  $v$ -voisinages toutes les affectations possibles figurant dans la liste totale des possibilités.

Comme le décrit l'algorithme 3.2, la stratégie d'enrichissement des voisinages des vols non couverts est un processus itératif. Une solution initiale non réalisable (elle viole les contraintes de couverture des vols) est utilisée afin de trouver une solution réalisable. À chaque itération, une liste d'affectations possibles est produite en utilisant

la liste des vols non couverts de la solution initiale et un entier  $v$  qui sert à délimiter les frontières du voisinage de ces vols. La liste produite est ensuite soumise à la résolution globale. Si on arrive à trouver une solution réalisable, le processus s'arrête. Sinon, on se retrouve avec une liste de vols non couverts, de taille inférieure et, en général, incluse dans la liste précédente des vols non couverts. On reprend alors la solution initiale, et on augmente la valeur du paramètre de voisinage  $v$  d'une unité afin de produire une autre liste d'affectations possibles qui pourrait permettre la couverture de tous les vols. Cette dernière serait plus en mesure de produire une solution réalisable car elle englobe toutes les listes précédentes.

Puisqu'on s'intéresse à la réduction des temps de calcul dans notre recherche, cette stratégie doit permettre la résolution du problème au bout de quelques itérations seulement car plus  $v$  augmente, plus la liste d'affectations restreinte converge rapidement vers la liste d'affectations initiale qui, on le sait, produit une solution en plus de 32 heures de calcul pour notre exemple.

### 3.3.3 Résultats numériques

Le tableau 3.8 résume les résultats des itérations de cette deuxième stratégie. À chaque itération, la taille de la liste d'affectations ainsi que l'issue de la résolution sont inscrites. Ici, la solution initiale considérée est celle qui découle de la première résolution vue dans la stratégie précédente car c'est elle qui génère le plus petit nombre de vols non couverts, qui est de 48. Les temps de calcul relatifs à la recherche de la solution initiale ainsi qu'à la recherche des voisinages des vols non couverts ne sont pas pris en considération dans le tableau car ils sont négligeables par rapport aux temps totaux de résolution. Comme on peut le constater, nous avons pu trouver une solution réalisable au problème à la quatrième itération.

Le tableau 3.9 récapitule les résultats obtenus par les trois approches : la génération

---

**Algorithme 3.2** Enrichissement des voisinages des vols non couverts
 

---

**1 Initialisation**

- Construction de la solution initiale  $s$
- $L_c \leftarrow$  ensemble des vols couverts par la solution  $s$
- $L_{nc} \leftarrow$  ensemble des vols non-couverts par la solution  $s$
- $v \leftarrow 1$
- $L_{aff} \leftarrow \emptyset$

**2 Construction de la liste d'affectations possibles  $L_{aff}$** 

- pour tout vol  $l \in L$  faire

Si  $l \in L_c$

Mettre dans  $L_{aff}$  l'affectation correspondante à  $l$

Si  $l \in L_{nc}$

Chercher  $V_v(l)$

Ajouter à  $L_{aff}$  toutes les affectations possibles pour l'ensemble  $L_{nc}$

Ajouter à  $L_{aff}$  seulement les affectations possibles pour l'ensemble  $V_v(L_{nc})$  qui permettent des chemins entre  $L_{nc}$  et  $V_v(L_{nc})$

**3 Résolution**

- Résoudre le problème avec la liste  $L_{aff}$
- Si tous les vols sont couverts Stop
- Si il reste des vols non couverts

$v \leftarrow v + 1$

$L_{aff} \leftarrow \emptyset$

Aller à l'étape 2

---

Tableau 3.8 Résultats de la deuxième stratégie

| Valeur de $v$ :<br>indice de l'itération | Nombre d'affectations<br>possibles | Coût de<br>la solution | Temps de<br>calcul (sec) | Nb vols<br>non couverts |
|--|------------------------------------|------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1  | 1414                               | pas de solution        | 185                      | 17                      |
| 2  | 1730                               | pas de solution        | 453                      | 9                       |
| 3  | 2056                               | pas de solution        | 930                      | 4                       |
| 4  | <b>2327</b>                        | <b>-24,002,843</b>     | <b>5820</b>              | 0                       |
| Total                                    | -                                  | -                      | 7388                     | -                       |

de colonnes sur le problème complet, la première stratégie et la deuxième stratégie. En guise de comparaison entre les deux stratégies, on peut constater que la qualité de la

solution, en terme de coûts, est nettement meilleure en utilisant la première stratégie. En plus, la première stratégie fournit une solution légèrement plus rapidement que la deuxième vu l'aspect itératif de cette dernière. Somme toute, ces résultats montrent que ces stratégies sont les deux bonnes, avec une préférence pour la première, car elles permettent d'atteindre l'objectif fixé au départ, à savoir améliorer les temps de calcul sans trop détériorer la qualité de la solution.

Tableau 3.9 Comparaison entre les trois stratégies

| Stratégie de résolution | Sol linéaire | Sol entière | Temps de résolution (sec) |
|-------------------------|--------------|-------------|---------------------------|
| Génération de colonnes  | -24,166,679  | -24,125,770 | 117,515                   |
| Première stratégie      | -24,119,553  | -24,119,553 | 6985                      |
| Deuxième stratégie      | -24,002,843  | -24,002,843 | 7388                      |

### 3.4 Réoptimisation

Après avoir obtenu des solutions réalisables suivant les deux stratégies, il est intéressant de procéder à la réoptimisation de la solution courante afin d'obtenir une solution à moindre coût. Plusieurs métaheuristiques peuvent être utilisées afin d'améliorer la solution courante, telles que la méthode taboue et la recherche à grand voisinage. Dans notre cas, les solutions obtenues par les deux stratégies pourraient être améliorées puisque le résultat de la résolution globale (par génération de colonnes) n'est fourni par aucune des deux stratégies. En ce qui nous concerne, nous avons choisi d'appliquer une méthode de recherche à grand voisinage car elle permet des réoptimisations rapides.

### 3.4.1 Description de la recherche à grand voisinage

La recherche à grand voisinage (RGV) est une métaheuristique réoptimisant, à chaque itération, une partie de la solution courante. Le critère d'arrêt du processus est en général imposé par une durée de réoptimisation ou un nombre d'itérations à ne pas dépasser. L'algorithme 3.3 décrit le fonctionnement de la RGV appliquée à notre cas. En effet, le principe de la RGV consiste à choisir, à chaque itération, une flotte ou un groupe de flottes ainsi qu'une fenêtre de temps de durée identique d'une itération à l'autre. Durant l'itération en question, toutes les routes qui ne sont pas concernées par les flottes et la fenêtre de temps choisies sont "gelées", i.e., elles ne subissent aucune modification. Les routes concernées par les flottes et la fenêtre de temps choisies sont réoptimisées. Donc, le sous-ensemble des vols faisant partie des routes à réoptimiser forment un nouveau problème d'ATRAH qui est résolu par la méthode de génération de colonnes présentée dans le chapitre 2. On note que dans l'algorithme 3.3, les termes  $s$  et  $s^*$  correspondent respectivement à la solution courante et à la meilleure solution trouvée jusqu'à présent. Les termes  $c(s)$  et  $c^*$  correspondent respectivement au coût de la solution  $s$  et à celui de la solution  $s^*$ .

Le nombre de routes d'avions à réoptimiser doit être assez petit pour que la résolution par génération de colonnes fournisse rapidement des solutions. Pour cela, la fenêtre de temps doit être d'une durée assez petite. Le nombre de flottes impliquées dans la réoptimisation doit être de telle manière à permettre des échanges de vols entre les flottes. Donc, plus ce nombre est grand, plus les chances d'améliorer la solution sont considérables. Cependant, les temps de calcul peuvent aussi être grands. Donc des tests doivent être effectués afin de trouver un compromis entre les temps de calcul (que l'on veut petits) et la valeur de l'objectif (que l'on veut améliorer).

À part des temps de réoptimisation assez raisonnables, cette méthode garantit qu'on

---

**Algorithme 3.3** Recherche à grand voisinage (RGV)
 

---

**1 Initialisation**

- Construction de la solution initiale  $s$  de coût  $c$
- $s^* \leftarrow s$
- $c^* \leftarrow c$

**2 Réoptimisation**

- **tant que** aucun critère d'arrêt n'est satisfait **effectuer**
    - Fixer le groupe de flottes à réoptimiser
    - Fixer la fenêtre de temps à réoptimiser
    - Réoptimiser les routes concernées par la fenêtre et le groupe fixés
    - Mettre à jour la solution courante  $s$
    - Si**  $c(s) < c^*$
    - $s^* \leftarrow s$
    - $c^* \leftarrow c$
- 

aura une solution entière à chaque itération. En effet, la solution courante (initiale) est réalisable. De plus, dans tous les tests effectués, la méthode de génération de colonnes a toujours fourni des solutions réalisables pour chaque ensemble de routes réoptimisées.

### 3.4.2 Choix des flottes et de la fenêtre de temps à réoptimiser

Comme mentionné ci-dessus, les routes d'avions à réoptimiser dépendent du groupe de flottes ainsi que de la fenêtre de temps de réoptimisation. Un seul de ces deux paramètres doit changer d'une itération à l'autre. En ce qui concerne les groupes de flottes, des tests ont montré que la meilleure manière de garantir un compromis entre les temps de calcul et le coût de la solution est de réoptimiser par groupe de 3 flottes. Chaque groupe doit être choisi de façon à pouvoir effectuer des échanges de vols entre les flottes au sein du groupe. Autrement dit, deux flottes doivent appartenir au même groupe si elles ont en commun un nombre important de vols auxquels elles peuvent

être affectées. Nous nous sommes servis du schéma 3.1 d'interaction entre les flottes pour établir les groupes de réoptimisation inscrits dans le tableau 3.10.

Tableau 3.10 Groupes de flottes pour la réoptimisation

|          |               |
|----------|---------------|
| Groupe 1 | 74E, 744, 343 |
| Groupe 2 | 76P, 767, 343 |
| Groupe 3 | 76C, 763, 76B |

En ce qui concerne la fenêtre de temps de réoptimisation, quatre paramètres doivent être fixés. Le premier paramètre définit la longueur de la fenêtre alors que le deuxième définit l'intervalle de chevauchement entre deux fenêtres de deux itérations successives. Des tests effectués pour la fixation de ces paramètres ont montré que la meilleure combinaison, i.e., qui permet une amélioration de l'objectif en des temps courts, est de réoptimiser sur des fenêtres de temps de durée égale à 3 jours. L'intervalle de chevauchement est, quand à lui, fixé à 2. Les deux autres paramètres permettent de connaître le premier et le dernier jour considérés lors de la réoptimisation. Ces deux derniers sont respectivement fixés à 1 et 7. La figure 3.6 montre comment les fenêtres de temps évoluent d'une itération à l'autre.

En résumé, l'algorithme de RGV effectue 15 itérations, soit une pour chaque groupe et pour chacune des fenêtres de temps. Il est à noter que les réoptimisations sur des fenêtres impliquant les jours 1 et 7 auraient été souhaitables. Toutefois, l'implantation informatique de notre algorithme ne le permettait pas sans un effort considérable.

### 3.4.3 Résultats numériques

Les résultats de la réoptimisation appliquée aux solutions générées par les deux stratégies d'accélération sont inscrits dans le tableau 3.11. Il est à noter que lors de la réoptimisation, on choisit d'abord le groupe de flottes à réoptimiser, ensuite on réoptimise sur toutes les fenêtres de temps. Nous avons pu, dans les deux cas, améliorer

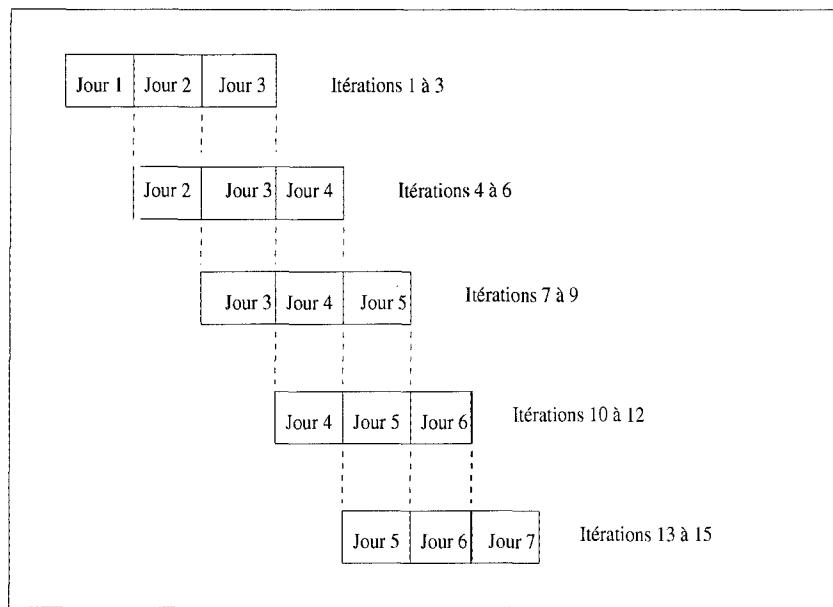


Figure 3.6 Évolution de la fenêtre de réoptimisation

le coût de la solution en des temps de calcul acceptables. En particulier, le coût de la solution générée à partir de la solution de la première stratégie (24,124,400) est extrêmement proche de celui de la solution obtenue par la méthode de génération de colonnes (-24,125,770). D'un autre côté, on peut se demander si le temps supplémentaire en vaut la peine dans un contexte d'utilisation de la solution obtenue comme solution de départ pour l'agrégation dynamique des contraintes. Des expérimentations subséquentes permettraient d'en juger.

Tableau 3.11 Résultats de la réoptimisation

| Stratégie      | Coût initial | Nouveau coût       | Temps de réoptimisation (sec) |
|----------------|--------------|--------------------|-------------------------------|
| 1ère stratégie | -24,119,553  | <b>-24,124,400</b> | <b>1952</b>                   |
| 2ème stratégie | -24,002,843  | -24,006,500        | 3710                          |

### 3.4.4 Tests supplémentaires

Il est important de signaler à la fin de ce chapitre que des tests supplémentaires ont été réalisés par Lacasse-Guay (2009) en se basant sur la solution générée par la première stratégie d'accélération. La solution en question a servi de solution initiale pour la méthode d'agrégation dynamique des contraintes dont l'objectif est d'améliorer les temps de calcul. Les résultats ont montré que cette méthode ne permet pas d'améliorer significativement les temps de calcul. Ceci est dû aux difficultés liées à la méthode elle-même. En effet, le nombre de contraintes de conservation de flot est important (1900), ce qui ne permet pas un bon traitement de ces contraintes par la méthode d'agrégation dynamique des contraintes.

Par ailleurs, la solution produite par la première stratégie d'accélération a permis d'améliorer les temps de calcul, en utilisant la méthode de génération de colonnes, comme suit.

- Dans la solution heuristique, on ne conserve que les arcs de vol, de maintenance ainsi que les arcs de maintenance débutant à minuit.
- Un arc de vol figure dans le réseau correspondant à une flotte si le vol en question a été couvert par la même flotte dans la solution heuristique.

Ainsi, le nombre de contraintes de conservation de flot est passé de 1900 à 488. Ceci a permis de réduire les temps de calcul de 117,515 secondes (obtenu en appliquant directement la méthode de génération de colonnes avant la réduction de la taille du problème) à 22,055 secondes. Le coût de la solution a été à son tour amélioré, il est passé de -24,125,770 à -24,126,754.

## CONCLUSION

Ce projet de maîtrise avait pour objectif de trouver une solution de bonne qualité pour le problème d'affectation des types d'avion aux vols et de construction de rotations d'avion hebdomadaires avec contraintes d'entretien (ATRAH). La solution produite doit servir de solution initiale pour la méthode d'agrégation dynamique des contraintes.

En premier lieu, nous avons utilisé une approche de génération de colonnes imbriquée dans une procédure de séparation et évaluation progressive. Cette dernière, lorsqu'appliquée à une instance de grande taille fournie par une compagnie aérienne nord-américaine, produit une solution après plus de 32 heures de calcul.

Différents tests portant sur des problèmes de tailles différentes ont montré que les temps de calcul augmentent de façon exponentielle lorsque le nombre maximum de choix de flottes par vol augmente d'une unité. Dès lors, nous avons procédé à la réduction de la taille du problème afin de diminuer les temps de calcul. Pour ce faire, nous avons d'abord effectué une étude statistique sur les données des vols et des flottes. Cette dernière a mis en évidence des faits importants concernant, entre autres, la concurrence des flottes pour la couverture des vols, les stations offrant plus d'opportunités d'entretien et les flottes permettant la couverture des vols prioritaires. Toutes ces conclusions nous ont permis de réduire de façon heuristique la taille du problème d'ATRAH, en utilisant deux heuristiques d'accélération.

Dans la première stratégie, nommée stratégie gloutonne suivant plusieurs ordres, trois processus de résolution séquentielle sont lancés indépendamment l'un de l'autre. Chaque processus consiste à résoudre séquentiellement le problème en considérant les données d'une seule flotte à la fois. L'ordre de passage des flottes est différent d'un

processus à l'autre et est établi selon l'étude statistique précédente. Après avoir effectué les trois résolutions, on construit une liste restreinte de choix d'affectation et on résout, à nouveau, le problème d'ATRAH réduit en se servant de l'approche de génération de colonnes.

Dans la deuxième heuristique, nommée stratégie d'enrichissement des voisinages des vols non couverts, on s'intéresse toujours à la construction d'une liste d'affectations restreinte avant de procéder à une résolution par génération de colonnes. Cette fois-ci, les trois résolutions séquentielles vues dans la première stratégie sont effectuées et une seule est retenue, il s'agit de celle qui produit le moins de vols non couverts. Une liste de choix d'affectation est construite en établissant d'abord le  $v$ -voisinage des vols non couverts. Comme dans la première stratégie, le problème, devenu de taille réduite, est résolu par génération de colonnes. Si on n'arrive pas à avoir une solution réalisable, la valeur du paramètre de voisinage  $v$  est augmentée d'une unité et une autre itération est effectuée. On reprend ce processus jusqu'à l'obtention d'une solution réalisable.

Les deux stratégies montrent qu'on peut obtenir des solutions réalisables, dont les coûts sont assez proches du coût de la solution obtenue en appliquant directement la méthode de génération de colonnes, en des temps de calcul extrêmement négligeables par rapport à ceux obtenus avec la génération de colonnes. En effet, les temps de calcul deviennent 16 fois plus petits alors que la valeur de l'objectif est légèrement détériorée.

Par la suite, on procède à une réoptimisation basée sur la méthode de recherche à grand voisinage (RGV). Dans cette dernière, on se sert d'une solution obtenue avec l'une des deux stratégies d'accélération comme solution initiale et on change la valeur d'un paramètre d'une itération à l'autre. Les résultats obtenus par cette réoptimisation sont concluants car nous avons pu améliorer la solution initiale en des temps raisonnables.

Enfin, les objectifs fixés au départ ont été atteints, en particulier la réduction significative des temps de calcul tout en générant une solution de bonne qualité. Par ailleurs, cette étude pourrait être approfondie afin de pouvoir trouver une solution qui serait adéquate pour la méthode d'agrégation dynamique des contraintes. D'autre part, les résultats obtenus ne sont pas nécessairement valides pour des instances de taille plus importante. Il serait donc intéressant de traiter d'autres problèmes de plus grande taille.

## BIBLIOGRAPHIE

- BARNHART C., BOLAND N., CLARKE L.W., JOHNSON E.L., NEUMHAUSER G.L., et SHENOI R.G. (1998a). Flight String Models for Aircraft Fleeting and Routing. *Transportation Science*, 32 : 208-220.
- BARNHART C., JOHNSON E.L., NEUMHAUSER G.L., SAVELSBERGH M.W.P. et VANCE P.H. (1998b). Branche-and-Price : Column Generation for Solving Huge Integer Programs. *Operation Research*, 46 : 316-329.
- BARNHART C., KNIKER T.S. et LOHATEPANONT M. (2002). Itinerary-Based Airline Fleet Assignment. *Transportation Science*, 36 : 199-217.
- BÉLANGER N., DESAULNIERS G., SOUMIS F., DESROSIERS J., et LAVIGNE J. (2002). Weekly Airline Fleet Assignment with Homogeneity. *Transportation research*, B 40(4) : 306-318.
- BÉLANGER N., DESAULNIERS G., SOUMIS F. et DEROSIERS J. (2006). Periodic Airline Fleet Assignment with Time Windows, Spacing Constraints, and Time Dependent Revenues. *European Journal of Operational Research*, 175(3) : 1754-1766.
- BRAHAM M.W. (2003). Construction des rotations hebdomadaires d'avion. *Mémoire de maîtrise*, École Polytechnique de Montréal, Montréal.
- CHVÁTAL V. (1979). A Greedy Heuristic for the Set-Covering Problem. *Mathematics of Operations Research*, 4 : 233-235.
- CLARKE L.W., HANE C.A., JOHNSON E.L. et NEUMHAUSER G.L. (1996). Maintenance and Crew Consideration in Fleet Assignment. *Transportation Science*, 30 : 249-260.

CLARKE L.W., JOHNSON E.L., NEUMHAUSER G.L. et ZHU Z. (1997). The Aircraft Rotation Problem. *Annals of Operations Research*, 69 : 33-46.

DANTZIG G.B. et WOLFE P. (1960). Decomposition Principle for Linear Programs. *Operations Research*, 8 : 101-111.

DASKIN M.S. et PANAYOTPOULOS D. (1989). A Lagrangian Relaxation Approach to Assigning Aircraft to Routes in Hub and Spoke Network. *Transportation Science*, 23 : 91-99.

DESAULNIERS G., DESROSIERS J., DUMAS Y., SOLOMON M. et SOUMIS F. (1997). Daily Aircraft Routing and Scheduling. *Management Science*, 43 : 841-855.

DESAULNIERS G., DESROSIERS J., IOACHIM I., SOLOMON M., SOUMIS F. et VILLENEUVE D. (1998). A Unified Framework for Deterministic Time Constrained Vehicle Routing and Crew Scheduling Problems. *Fleet Management and Logistics*, T.G. Crainic et G. Laporte (eds), Kluwer, Norwell MA, 57-93.

FEO T. et BARD J. (1989). Flight Scheduling and Maintenance Base Planning. *Management Science*, 35 : 1415-1432.

GOPALAN R. et TALLURI K. (1998). The Aircraft Maintenance Routing Problem. *Operations Research*, 46 : 260-271.

HANE C.A., BARNHART C., JOHNSON E.L., MARSTEN R.E., NEMHAUSER G.L. et SIGISMONDI G. (1995). The Fleet Assignment Problem : Solving a Large-Scale Integer Program. *Mathematical Programming*, 70 : 211-232.

IOACHIM I., DESROSIERS J., SOUMIS F. et BÉLANGER N. (1999). Fleet Assignment and Routing with Schedule Synchronization Constraints. *European Journal of Operational Research*, 119 : 75-90

- LACASSE-GUAY E. (2009). Problème d'Affectation des Types d'Avions aux Vols avec Contraintes d'Entretien. *Thèse de doctorat*, École Polytechnique de Montréal, Montréal. À paraître.
- REXING B., BARNHART C., KNIKER T., JARRAH A. et KRISHNAMURTHY N. (2000). Airline Fleet Assignment with Time Windows. *Transportation Science* 34 : 1-20.
- SRIRAM C. et HAGHANI A. (2003). An Optimization Model for Aircraft Maintenance Scheduling and Re-assignment. *Transportation Research Part A*, 37 : 29-48.
- SUBRAMANIAN R., SCHEFF R.P. JR, QUILLINAN J.D., WIPER D.S. et MASTEN R.E. (1994). Coldstart : Fleet Assignment at Delta Air Lines. *Interfaces*, 24 : 104-120.
- TALLURI K.T. (1998). The Four-Day Aircraft Maintenance Routing Problem. *Transportation Science*, 32 : 43-53.