

**Titre:** Analyse de sensibilité d'écoulements turbulents instationnaires  
Title:

**Auteur:** Éric Gammacurta  
Author:

**Date:** 2009

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Gammacurta, É. (2009). Analyse de sensibilité d'écoulements turbulents instationnaires [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8419/>

## Document en libre accès dans PolyPublie

Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8419/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Dominique Pelletier  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DE SENSIBILITÉ D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS  
INSTATIONNAIRES

ERIC GAMMACURTA  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

JUILLET 2009



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-53903-3  
*Our file Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-53903-3

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

\*\*  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE DE SENSIBILITÉ D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS  
INSTATIONNAIRES

présenté par: GAMMACURTA Eric

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. LAFOREST Marc, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph.D., membre

À la mémoire de mes grand-parents,  
À mes parents et mon frère,  
À Sonia et ma future belle-famille.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu Dominique Pelletier, mon directeur de recherche, pour sa gentillesse, sa patience, ses conseils et la confiance qu'il a su me donner au cours de ces trois années. Je le remercie aussi pour son expérience qu'il tente de transmettre au fil du temps.

Un merci particulier à Florin Ilinca qui a suivi et soutenu mon projet tout au long.

Je n'oublierai bien sûr pas Alexander Hay qui m'a été d'une aide précieuse malgré son départ. Il s'est toujours montré très disponible, patient et encourageant à distance. Je remercie aussi Stéphane Étienne pour sa disponibilité, son aide et ses conseils.

Je tiens à remercier aussi le service des relations internationales de SUPMECA, mon école d'origine et plus particulièrement Linda Allal, Marie-Laure Mora-Mercui et Jean-Claude Arditti qui ne m'ont pas oublié et sans qui cet échange bilatéral n'aurait pu avoir lieu.

Je n'oublierai bien sûr jamais tous mes collègues et amis de lab, qui ont su tout au long de ce séjour donner vie et gaieté dans notre bunker. Bravo à eux, d'avoir ainsi préservé la très bonne ambiance qui me manquera assurément. Je pense bien sûr à (sans ordre de préférence) : Lise, Jean-François, Jérôme, Fernando, Jean-Serge, Farshad et Romain. Sans oublier nos deux stagiaires : Mounir et Dima.

Enfin je terminerai en remerciant Sonia, ma fiancée, qui a su me supporter, m'encourager et m'attendre durant ce long et beau séjour à Montréal

## RÉSUMÉ

L'objectif premier de ce projet est d'appliquer aux écoulements turbulents transitoires la Méthodes des Équations de Sensibilités (M.E.S) pour paramètres de valeur. La M.E.S permet d'évaluer l'influence de paramètres clefs sur la solution. Ce mémoire présente en premier lieu les équations moyennées de Navier-Stokes et leurs conditions aux frontières. Puis il s'attarde aux équations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  et ses variantes (Kato-Launder et RNG) développées en formulation logarithmique et utilisant des lois de paroi sur les frontières solides. La M.E.S est enfin appliquée sur chacune de ces équations.

La seconde partie est axée sur les outils de résolution : la Méthode des Éléments Finis et l'évolution de la stratégie d'adaptation de maillages appliquées au cas turbulents instationnaires sont présentées.

Le troisième axe est consacré aux étapes de vérification et de validation du code d'éléments finis utilisé. La première étape s'assure que le code résout correctement les équations pour l'écoulement et ses sensibilités en confrontant les résultats et la convergence des solutions calculées à ceux d'une solution analytique proposée pour la décroissance de la turbulence de grille. La seconde étape valide les résultats en régime turbulent transatoire en les comparant à ceux préalablement obtenus en régime stationnaire. Cette dernière étape est appliquée sur les cas de la marche de Kim et du cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane.

Enfin, le projet se termine sur des applications démontrant l'efficacité de la M.E.S pour prédire l'évolution en temps d'écoulements turbulents influencés par des paramètres de valeur. Les applications concernent les cas de l'allée de Von Karman derrière un cylindre en milieu infini et deux nouvelles configurations du cylindre carré à proximité du sol. De surcroît, la stratégie d'adaptation du maillage appliquée aux écoulements transitoires s'est révélée être très performante.

Enfin nous donnerons des conclusions et recommandations pour de futurs travaux.

## ABSTRACT

In this thesis, we present a continuous sensitivity equation method (SEM) for Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes (URANS) simulations with an adaptative Finite Element Method. The development is performed for value parameters that do not affect the geometry of the computational domain.

We first present the URANS equations and the standard  $k - \epsilon$  model of turbulence with wall functions and some of its common variants such as the Kato-Launder modification and the RNG model. The logarithmic form of transport equations for  $k$  and  $\epsilon$  is used. The SEM is described along with the Continuous Sensitivity Equations (CSE).

Secondly, a brief presentation of the Finite Element Method is given. Also, an existing adaptative remeshing algorithm for steady state flows is extended to treat the URANS equations.

Thirdly, the formulation and implementation are verified on the analytical solution for the decay of grid turbulence. This is followed by applications to two transient flows reaching a steady state for large time values : backward facing step and flow over a square cylinder close to the ground. Results are compared with previous steady computations.

Finally, the methodology is applied to the Von Karman street behind a circular cylinder and to vortex shedding behind the square cylinder for two values of the ground clearance. The adaptive strategy is applied every few time step and proves very effective for tracking complex flow features with uniformly high resolution. Several uses of sensitivity information are successfully demonstrated : identification of key parameters controlling the flow, assessing the influence of closure coefficients, and fast evaluation of nearby solutions.

Finally, the paper ends with conclusions and recommandations for future works.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	vii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xxiii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxiv
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1    CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES . . . . .	4
1.1    Introduction à l'optimisation . . . . .	5
1.2    Méthode des sensibilités . . . . .	6
1.2.1    Méthode des Équations des Sensibilités : exemple . . . . .	7
1.3    La méthode des variables adjointes . . . . .	8
1.4    Comparaison de la M.E.S et de la méthode des variables adjointes	10
1.5    Applications et travaux antérieurs . . . . .	11
1.6    Mode de fonctionnement du code de calcul utilisé . . . . .	12
1.7    Les objectifs . . . . .	13
CHAPITRE 2    MODÉLISATION ET MÉTHODE DES SENSIBILITÉS . . . . .	15
2.1    Modélisation de l'écoulement . . . . .	15

2.1.1	Équations de Navier-Stokes . . . . .	15
2.1.1.1	Moyenne de Reynolds . . . . .	16
2.1.1.2	Équations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	17
2.1.1.3	Les conditions limites . . . . .	18
2.1.2	Le modèle standard de turbulence $k - \epsilon$ . . . . .	18
2.1.2.1	La viscosité turbulente . . . . .	18
2.1.2.2	Les équations de transport du modèle de turbulence $k - \epsilon$ . . . . .	19
2.1.2.3	Variables logarithmiques . . . . .	21
2.1.2.4	Les conditions aux frontières . . . . .	23
2.1.2.4.1	Les conditions sur les frontières libres . .	23
2.1.2.4.2	Loi de paroi . . . . .	24
2.2	Méthode des équations de sensibilités . . . . .	28
2.2.1	Équations de sensibilités pour les URANS . . . . .	28
2.2.1.1	Conditions limites pour les sensibilités avec paramètres de valeur . . . . .	30
2.2.2	Les équations des sensibilités pour le modèle de turbulence $k - \epsilon$ . . . . .	31
2.2.2.1	Loi de paroi pour les sensibilités avec paramètre de valeur . . . . .	32
CHAPITRE 3 MÉTHODE DE RÉSOLUTION . . . . .		35
3.1	Algorithme de résolution . . . . .	35
3.2	Schéma de discrétisation en temps. . . . .	37
3.3	Méthode des éléments finis . . . . .	38
3.3.1	La formulation variationnelle . . . . .	38
3.3.1.1	Forme faible des équations URANS et du modèle $k - \epsilon$ . . . . .	38

3.3.1.2	Forme faible des équations de sensibilités . . . . .	39
3.3.2	Discrétisation . . . . .	40
3.3.3	Équations des résidus . . . . .	42
3.3.4	Jacobien numérique . . . . .	43
3.3.5	Factorisation conditionnelle . . . . .	44
3.3.6	Les méthodes de stabilisation . . . . .	46
3.4	Maillage adaptatif . . . . .	47
3.4.1	Estimation d'erreur . . . . .	48
3.4.2	Normes d'erreur . . . . .	49
3.4.3	Calcul de la taille optimale d'un élément . . . . .	51
3.5	Évolution du maillage adaptatif . . . . .	53
CHAPITRE 4 VÉRIFICATION ET VALIDATION . . . . .		58
4.1	Vérification : décroissance de la turbulence de grille . . . . .	59
4.1.1	Définition du problème . . . . .	59
4.1.2	Domaine de calcul et conditions limites . . . . .	60
4.1.3	Résultats . . . . .	61
4.1.3.1	Analyse de convergence . . . . .	63
4.1.3.2	Indice d'efficacité . . . . .	68
4.2	Vérification de simulations : marche de Kim et cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane . . . . .	69
4.2.1	Vérification de simulations 1 : marche de Kim . . . . .	70
4.2.1.1	Domaine et conditions limites . . . . .	70
4.2.1.2	Cycles adaptatifs . . . . .	71
4.2.1.3	Résultats pour les sensibilités . . . . .	74
4.2.2	Vérification de simulations 2 : cylindre à section carrée placé à $0.25D$ d'une plaque plane . . . . .	79
4.2.2.1	Domaine de calcul et conditions limites . . . . .	79

4.2.2.2	Cycles adaptatifs . . . . .	81
4.2.2.3	Résultats . . . . .	81
4.3	Conclusion . . . . .	84
<b>CHAPITRE 5 APPLICATIONS DE LA M.E.S POUR DES RÉGIMES</b>		
<b>TURBULENTS INSTATIONNAIRES . . . . .</b>		<b>86</b>
5.1	Première application : cylindre en milieu infini . . . . .	86
5.1.1	Conditions limites et domaine de calcul . . . . .	87
5.1.2	Choix du pas de temps . . . . .	88
5.1.3	Choix de la distance à la paroi . . . . .	89
5.1.4	Modifications apportées au modèle $k - \epsilon$ de turbulence . . . . .	91
5.1.4.1	Modification de Kato-Launder (K-L) . . . . .	91
5.1.4.2	Modification de Younis-Przulj (Y-P) . . . . .	92
5.1.4.3	Le modèle de Yahkot (RNG) . . . . .	92
5.1.5	Résultats . . . . .	93
5.1.5.1	Résultats pour l'écoulement . . . . .	93
5.1.5.1.1	Modification de la valeur du terme de rugosité . . . . .	95
5.1.5.2	Résultats pour les sensibilités . . . . .	97
5.1.5.2.1	Sensibilités par rapport à $U_0$ . . . . .	98
5.1.5.2.2	Sensibilités par rapport à $E$ . . . . .	102
5.1.6	Conclusion sur le cas du cylindre en milieu infini . . . . .	104
5.2	Seconde application : cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane . . . . .	105
5.2.1	Cylindre à section carrée à $G_s = 0.75$ . . . . .	106
5.2.1.1	Choix du pas de temps . . . . .	106
5.2.1.2	Résultats . . . . .	107
5.2.2	Cylindre à section carrée à $G_s = 0.50$ . . . . .	109

5.2.2.1	Domaine et conditions limites . . . . .	109
5.2.2.2	Résultats pour l'écoulement . . . . .	110
5.2.2.3	Résultats pour les sensibilités . . . . .	113
5.2.2.3.1	Sensibilités par rapport à $U_0$ . . . . .	113
5.2.2.3.2	Sensibilités par rapport à $k_0$ . . . . .	115
5.2.2.3.3	Sensibilités par rapport à $d$ . . . . .	116
5.2.3	Conclusion sur le cas du cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane . . . . .	118
5.3	Conclusion du chapitre . . . . .	119
	CONCLUSION . . . . .	121
	RÉFÉRENCES . . . . .	124
	ANNEXES . . . . .	131

## LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Mode de fonctionnement du code d'éléments finis utilisé . . . . .	12
FIG. 3.1	Algorithme global de résolution . . . . .	36
FIG. 3.2	Élément fini de type Taylor-Hood . . . . .	41
FIG. 3.3	Illustration de la factorisation conditionnelle. . . . .	45
FIG. 3.4	Comparaison de maillages obtenus à partir de solutions non stabilisées et stabilisées . . . . .	47
FIG. 3.5	Sous-domaine $\Omega_p$ utilisé pour la projections locales . . . . .	49
FIG. 3.6	Comparaison de maillages de 300 000 noeuds environ, obtenus pour les deux régimes : stationnaire (a) et instationnaire (b) . . . . .	57
FIG. 4.1	Solutions numériques et analytiques pour $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ . . . . .	61
FIG. 4.2	Solutions numériques et analytiques pour les sensibilités de $S_{\mathcal{K}}$ et $S_{\mathcal{E}}$ par rapport au paramètre $C_2$ . . . . .	62
FIG. 4.3	Normes d'erreur pour $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ pour des maillages adaptés exclusivement à l'écoulement . . . . .	63
FIG. 4.4	Normes d'erreur pour $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}$ pour des maillages adaptés à l'écoulement et aux sensibilités . . . . .	64
FIG. 4.5	Comparaison de maillages adaptés aux sensibilités et à l'écoulement (10000 noeuds environ) . . . . .	66
FIG. 4.6	Normes d'erreur pour $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$ et $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$ ainsi que $S_{\mathcal{K}}^{k_0}$ et $S_{\mathcal{E}}^{k_0}$ . . . . .	67
FIG. 4.7	Indices d'efficacité de $\mathcal{K}$ , $\mathcal{E}$ , $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$ , $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$ , $S_{\mathcal{K}}^{k_0}$ et $S_{\mathcal{E}}^{k_0}$ . . . . .	70
FIG. 4.8	Domaine de calcul . . . . .	71
FIG. 4.9	Maillage final présenté dans Turgeon <i>et al.</i> [55] . . . . .	72
FIG. 4.10	Cycles de remaillage adaptatif pour la marche de Kim en fonction du temps . . . . .	73
FIG. 4.11	Isolignes de $S_{ukinf}$ et $\Omega(S_{ukinf}, S_{vkinf})$ à $t_f$ . . . . .	75

FIG. 4.12	Profils de $u$ et des solutions voisines pour les 7 paramètres étudiés . . . . .	75
FIG. 4.13	Profils des sensibilités de la vorticité $\Omega(S_u, S_v)$ par rapport aux paramètres $kinf$ et $einf$ au temps final $t_f$ et aux sections $x/L = -0.5$ et $x/L = 18$ . . . . .	77
FIG. 4.14	Domaine de calcul . . . . .	80
FIG. 4.15	Maillage initial et maillage final . . . . .	82
FIG. 4.16	Vorticité à deux instants distincts . . . . .	83
FIG. 4.17	Coefficients de forces calculés sur le cylindre . . . . .	84
FIG. 5.1	Coefficients de forces calculés sur le cylindre avec 2 discréétisations temporelles distinctes . . . . .	89
FIG. 5.2	Coefficients de forces calculés sur le cylindre avec 2 distances à la parois considérées . . . . .	90
FIG. 5.3	Convergence du nombre de Strouhal en fonction de la taille du maillage et pour les 3 modifications du modèle $k - \epsilon$ . . . . .	94
FIG. 5.4	Coefficients de traînée calculés avec la modification de Kato-Launder . . . . .	97
FIG. 5.5	Maillage généré après plusieurs cycles adaptatifs . . . . .	98
FIG. 5.6	De bas en haut : vorticité de l'écoulement, vorticité des sensibilités, vorticité de la solution voisine . . . . .	100
FIG. 5.7	Nappes de vorticité pour l'écoulement et les sensibilités par rapport à $U_0$ . . . . .	100
FIG. 5.8	Le coefficient de traînée et sa sensibilité par rapport à $U_0$ . . . . .	101
FIG. 5.9	De bas en haut : La vorticité de l'écoulement et sa sensibilité par rapport au paramètre E . . . . .	102
FIG. 5.10	Sensibilité de $C_d$ par rapport au paramètre $E$ en fonction du temps . . . . .	103

FIG. 5.11	Sensibilité de $C_d$ par rapport au paramètre $E$ en fonction du temps . . . . .	105
FIG. 5.12	Convergence en temps de la solution . . . . .	107
FIG. 5.13	Maillage de 57260 noeuds obtenu après 3 cycles adaptatifs .	108
FIG. 5.14	Comparaison des coefficients de forces obtenus par le modèle $k - \epsilon$ standard et par la modification de K-L . . . . .	109
FIG. 5.15	Convergence en maillage des coefficients de forces obtenus par la modification de K-L . . . . .	111
FIG. 5.16	Comparaison des coefficients de forces obtenus par le modèle $k - \epsilon$ ainsi que par les 2 modifications K-L et Y-P . . . . .	111
FIG. 5.17	Contours de viscosité turbulente pour le modèle $k - \epsilon$ et sa modification K-L . . . . .	112
FIG. 5.18	De bas en haut : vorticité de l'écoulement, solutions voisines pour $\Delta U_0 = 10\%$ et $\Delta U_0 = 20\%$ , sensibilité de la vorticité pour le modèle $k - \epsilon$ . . . . .	114
FIG. 5.19	De bas en haut : vorticité de l'écoulement et sensibilité de la vorticité par rapport à $U_0$ pour la modification K-L . . . . .	115
FIG. 5.20	Coefficients de forces et leurs sensibilités par rapport à $U_0$ .	116
FIG. 5.21	De bas en haut : vorticité de l'écoulement, solutions voisines pour $\Delta k_0 = 10\%$ et $\Delta k_0 = 20\%$ , pour le modèle $k - \epsilon$ . . . . .	117
FIG. 5.22	Sensibilité de la vorticité pour le modèle $k - \epsilon$ par rapport au paramètre $k_0$ . . . . .	118
FIG. 5.23	De bas en haut : vorticité de l'écoulement et sa sensibilité par rapport à $d$ pour la modification K-L . . . . .	119
FIG. 5.24	De bas en haut : vorticité de l'écoulement, solutions voisines pour $\Delta d = 10\%$ , $\Delta d = 20\%$ et $\Delta d = 100\%$ pour le modèle $k - \epsilon$ . . . . .	120

FIG. III.1	Marche de Kim : Profils des sensibilités de la vorticité $\Omega(Su, Sv)$ pour les paramètres $C_1$ et $\sigma_k$ aux sections $x/L = -0.5$ et $x/L = 18$ . . . . .	138
FIG. III.2	Marche de Kim : Profils des sensibilités de la vorticité $\Omega(Su, Sv)$ pour les paramètres $C_\mu$ et $\sigma_\epsilon$ aux sections $x/L = -0.5$ et $x/L = 18$ . . . . .	139
FIG. III.3	Marche de Kim : Profils des sensibilités de la vorticité $\Omega(Su, Sv)$ pour le paramètre $C_2$ aux sections $x/L = -0.5$ et $x/L = 18$ . . . . .	140

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

CFD	Computational Fluid Dynamics
K-L	Kato-Launder
M.E.F	Méthode des Eléments Finis
M.E.S	Méthode de l'Equation des Sensibilités
RNG	ReNormalization Group
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes

### Caractères usuels

$a$	paramètre de design,
$\mathbf{a}$	vecteur des paramètres de design
$C_d$	coefficient de traînée
$C_l$	coefficient de portance
$C_\mu, C_1$	constantes de fermeture,
$C_2$	
$d$	distance à la paroi
$d_t$	pas de temps
$D$	diamètre
$e$	erreur
$e_{cible}$	erreur cible
$e_{courante}$	erreur courante
$e_{exa}$	erreur exacte
$E$	paramètre de rugosité
$\mathbf{f} = (f_x, f_y)$	vecteur des forces volumiques
$F$	fonction coût

<b>G</b>	vecteur des contraintes
$G_s$	garde au sol (cas du cylindre à section carrée près du sol)
$h$	taille d'un élément du maillage,
$I_t$	intensité turbulente
<b>I</b>	tenseur identité
$\bar{\bar{\mathbf{J}}}$	matrice jacobienne du tenseur,jacobien numérique
$k$	énergie cinétique de turbulence
$k_{bc}$	énergie cinétique de turbulence sur frontière libre
$K$	élément courant
$l$	multiplicateur de Lagrange
$\hat{\mathbf{n}}=(n_x, n_y)$	vecteur unitaire normal
$N$	nombre d'éléments
$N_u, N_{s_u}$	nombre de noeuds par éléments (pour $\mathbf{u}, s_u$ )
$N_i^u, N_i^{s_u}$	fonction d'interpolation (pour $\mathbf{u}, s_u$ )
$p$	pression
$P$	production de turbulence
$R_{ij}$	tenseur de Reynolds
$R_i$	résidu à la $i^{\text{ème}}$ équation algébrique
$R_{\mathbf{u}}, R_{\mathcal{K}} \dots$	résidu (pour $\mathbf{u}, \mathcal{K}$ )
$r_\mu$	rapport des viscosités $r_\mu = \frac{\mu_t}{\mu}$
$Re$	nombre de Reynolds
$Re_t$	nombre de Reynolds turbulent
$S_t$	nombre de Strouhal
$s_x$ ou $S_x$	sensibilité de la variable scalaire $x$
$s_x^a$ ou $S_x^a$	sensibilité de la variable scalaire $x$ par rapport à $a$
$\mathbf{s}_x$ ou $\mathbf{S}_x$	sensibilité de la variable vectorielle $\mathbf{x}$

$T$	période de temps
$\bar{\mathbf{t}}$	traction sur les frontières
$\mathbf{u} = (U, V)$	vecteur vitesse
$U, V$	respectivement composante horizontal et vertical de $\mathbf{u}$
$U_0$	composante horizontale de la vitesse à l'entrée du domaine
$u_k$	vitesse de turbulence du modèle à deux échelles de vitesse
$u_t$	vitesse tangentielle
$u_{**}$	vitesse de frottement du modèle à deux échelles de vitesse
$\mathbf{X}$	vecteur des variables d'état (inconnues)
$(x, y)$	coordonnées cartésiennes
$y^+$	distance adimensionnelle à la paroi solide
$y_c^+$	limite de la loi logarithmique

### Lettres calligraphiques

$\mathcal{E}$	logarithme népérien d' $\epsilon$
$\mathcal{F}$	fonction coût
$\mathcal{K}$	logarithme népérien de $k$

### Lettres grecques

$\alpha$	propriété physique quelconque
	taux de convergence de l'élément finie
$\dot{\gamma}(\delta\mathbf{u})$	tenseur du taux de déformation
$\Gamma$	frontière du domaine
$\Gamma_D$	frontière du domaine où on impose des conditions

	de Dirichlet
$\Gamma_N$	frontière du domaine où on impose des conditions de Neumann
$\delta$	petite perturbation, incertitude
$\delta_K$	taille élémentaire cible
$\delta_u, \delta_p, \dots$	fonctions test (pour la vitesse, la pression, ...)
$\Delta$	variation
$\epsilon$	taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence
$\epsilon_{bc}$	taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence sur frontière libre
$\Theta$	indice d'efficacité
$\kappa$	constante de Karman
$\lambda^*$	variable adjointe (multiplicateur de Lagrange)
$\mu_t$	viscosité turbulente
$\mu$	viscosité dynamique du fluide
$\xi$	facteur de réduction de l'erreur
$\rho$	masse volumique
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	constantes de fermeture
$\tau(\mathbf{u})$	tenseur des contraintes visqueuses
$\tau_w$	cisaillement à la frontière du domaine de calcul (loi de paroi)
$\phi$	variable quelconque
$\Omega$	domaine de calcul
$\Omega_p$	sous-domaine de calcul

## Indices et exposants

$'$	sensibilité (dérivée)
$_{exa}$	solution exacte
$_K$	élémentaire
$_h$	solution éléments finis
$_i$	composante d'un vecteur, valeur nodale,
$_{ij}$	composante d'un tenseur d'ordre 2
$_n$	solution obtenue à la $n^{\text{ième}}$
$_w$	à la paroi
$T$	transposée
$+$	valeur adimensionnelle du modèle de loi de paroi
$*$	projection de la solution éléments finis
$'$	dérivée matérielle de propriétés physiques, valeur fluctuante
$\hat{\phantom{x}}$	condition de Dirichlet imposée
$\bar{\phantom{x}}$	valeur moyenne
$\sim$	récupération de la projection de la solution éléments finis, estimation de la solution exacte

## Symboles

$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence

$\frac{\partial \cdot}{\partial t}$  dérivée partielle (ou eulérienne)

$\|\cdot\|$  norme

**LISTE DES TABLEAUX**

TAB. 4.1	Conditions limites imposées à l'entrée et la sortie du domaine	71
TAB. 4.2	Distance $d$ à la paroi pour toutes les frontières solides . . .	71
TAB. 4.3	Conditions limites imposées à l'entrée et la sortie du domaine	80
TAB. 4.4	Distance $d$ à la paroi pour toutes les frontières solides . . .	80

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	FORMULATION VARIATIONNELLE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS DE $K$ ET $E$ . . . . .	131
I.1	Forme faible de l'équation de transport en $S_K$ : . . . . .	131
I.2	Forme faible de l'équation de transport en $S_\epsilon$ : . . . . .	132
ANNEXE II	CALCULS DES SENSIBILITÉS DE $K$ ET $\epsilon$ PAR RAP- PORT AUX PARAMÈTRES $K_0$ , $\epsilon_0$ ET $C_2$ . . . . .	133
II.1	Équations des sensibilités pour $k$ . . . . .	133
II.1.1	Équations des sensibilités pour $k$ par rapport à $k_0$ . . . . .	133
II.1.2	Équations des sensibilités pour $k$ par rapport à $\epsilon_0$ . . . . .	134
II.1.3	Équations des sensibilités pour $k$ par rapport à $C_2$ . . . . .	134
II.2	Équations des sensibilités pour $\epsilon$ . . . . .	135
II.2.1	Équations des sensibilités pour $\epsilon$ par rapport à $k_0$ . . . . .	136
II.2.2	Équations des sensibilités pour $\epsilon$ par rapport à $\epsilon_0$ . . . . .	136
II.2.3	Équations des sensibilités pour $\epsilon$ par rapport à $C_2$ . . . . .	137
ANNEXE III	MARCHE DE KIM : SENSIBILITÉS DE LA VORTICITÉ	138
III.1	Sensibilités par rapport à $C_1$ et $\sigma_k$ au section $x/L = -0.5$ et $x/L =$ 18 . . . . .	138
III.2	Sensibilités par rapport à $C_2$ , $C_\mu$ et $\sigma_\epsilon$ au section $x/L = -0.5$ et $x/L = 18$ . . . . .	139

## INTRODUCTION

“On ne devrait pas chercher à savoir pourquoi les écoulements sont turbulents, mais plutôt pourquoi ils peuvent encore être laminaires ; la science vise à interpréter l’ordre dans la nature, pas le désordre. Cette remarque en ajoute certainement à notre connaissance de la nature de la turbulence.”

Cette citation de David J.Tritton met particulièrement bien en exergue l’omniprésence des écoulements turbulents dans notre environnement. En effet, que ce soit dans les domaines de l’aéronautique, de l’éolien, de l’astro-physique ou encore de la biologie, l’étude de la turbulence est souvent essentielle à la compréhension des phénomènes mis en jeu. Certains cas d’étude célèbres comme l’accident du pont de Tacoma Narrows aux États-Unis en 1940 laissent encore place à la controverse tant les causes avancées pour comprendre cet effondrement sont complexes et soutenues par des experts de la turbulence<sup>1</sup> et des phénomènes instationnaires<sup>2</sup>. Depuis les années soixante, alors que jusqu’ici les écoulements turbulents étaient traités au cas par cas avec notamment un recours quasi systématique à l’expérience, l’utilisation de la modélisation numérique a pris une place de plus en plus importante dans l’arsenal mis à la disposition des ingénieurs pour résoudre de tels écoulements. Ainsi, l’apparition des modèles de turbulence à deux équations, comme le modèle  $k - \epsilon$ , a donné le jour à une nouvelle ère de la **CFD** (**Computational Fluid Dynamics**). Le nombre d’applications traitant de turbulence a considérablement augmenté et ces modèles se sont rapidement révélés être de puissants outils de résolution de problèmes turbulents complexes,

---

<sup>1</sup> *La Turbulence*, Marcel Lesieur, edp sciences, 1994

<sup>2</sup> *Computation of Unsteady Internal Flows - Fundamental Methods with Case Studies*, Paul G. Tucker, Springer, 2001

outils à faible coût calculatoire de surcroît. Seulement la "démocratisation" de ces méthodes de prédiction de l'écoulement turbulent a certes repoussé les barrières de l'empirisme, sans toutefois les effacer, mais a par la même occasion, estompé les frontières circonscrivant la validité de ces modèles. Combien d'utilisateurs du modèle  $k - \epsilon$  seraient aujourd'hui à même de citer quelques unes de ses faiblesses ? Ce mémoire vise en partie à présenter l'intérêt de ce modèle pour la résolution de problèmes turbulents instationnaires, sans toutefois omettre d'indiquer quelques unes de ses limitations.

Cependant l'ambition première de l'étude entreprise ici, est de prouver avant tout, l'efficacité de la Méthode des Équations de Sensibilités (**M.E.S**) appliquée aux écoulements turbulents transitoires. L'analyse des sensibilités permet entre autres d'évaluer l'influence de paramètres dits de valeur et de forme sur les champs de variables caractérisant l'écoulement. Ces premiers touchent exclusivement les propriétés physiques du fluide, les conditions limites appliquées au domaine de calcul, ou encore les constantes de fermeture du modèle de turbulence. L'autre catégorie de paramètres, affecte quant à elle, la géométrie du domaine et pose de nombreuses difficultés au niveau des frontières solides. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons uniquement aux paramètres de valeur.

Le premier chapitre sera une introduction à la **M.E.S**, présentant ses avantages et ses inconvénients, par rapport notamment à la méthode des variables adjointes. Il se conclura sur un rappel des travaux antérieurs et sur les objectifs de la présente étude.

Le chapitre suivant aura pour ambition d'apporter au lecteur les bases théoriques minimales mais nécessaires à la modélisation des phénomènes en mécanique des fluides. Nous présenterons avant tout les équations moyennées de Navier-Stokes et leurs conditions limites, nous introduirons alors le modèle de turbulence  $k - \epsilon$  et le

traitement particulier des parois solides. Le chapitre finira sur la mise en équations de la **M.E.S.**

Dans un troisième temps, nous expliquerons comment les équations introduites au chapitre précédent, sont implémentées dans le code de calcul et comment la méthode des éléments finis nous permettra de les résoudre. Ce chapitre se refermera sur l'évolution de la stratégie de remaillages adaptatifs mise en oeuvre pour les problèmes turbulents transitoires.

Le quatrième chapitre nous mènera de l'étape de vérification du code par une solution analytique, à la vérification des simulations par comparaison de résultats obtenus à partir de simulations en régime turbulent stationnaire. La vérification, essentielle dans le processus de modélisation numérique, sera effectuée sur le cas simple mais réaliste de la décroissance de la turbulence de grille. Nous comparerons alors nos résultats sur des cas présentant une période de transition d'un état transitoire à un état stationnaire, comme les cas de la marche de Kim ou encore du cylindre à section carrée situé à proximité d'une plaque plane à l'aide de précédents résultats obtenus en régime stationnaire.

Enfin, le dernier chapitre sera consacré aux applications purement instationnaires telles que le cylindre en milieu infini ou deux nouvelles configurations du cas pré-cité du cylindre à section carrée. Nous verrons notamment à quel point la **M.E.S** peut s'avérer être un outil indispensable à la pré-détermination des écoulements.

Finalement, le mémoire s'achèvera sur une conclusion générale visant à ouvrir de nouveaux horizons pour de futures améliorations.

## CHAPITRE 1

### CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Au lieu de s'attaquer directement au calcul des sensibilités des équations de Navier-Stokes et du modèle de turbulence  $k - \epsilon$ , privilégiions plutôt une mise en contexte générale, permettant d'aborder la **M.E.S** avec un certain recul.

La **CFD** a très vite été confrontée aux problèmes de design notamment dans le domaine de l'aérodynamique. Il fallait alors mettre en place des techniques d'optimisation permettant, avec la puissance de calcul disponible, d'améliorer la géométrie de profils par exemple, en considérant un certain nombre de paramètres de design et de contraintes. La **M.E.S**, au même titre que la méthode des variables adjointes, est une de ces techniques. Nous commencerons donc ce chapitre par une introduction au problème d'optimisation, puis nous aborderons dans l'ordre la **M.E.S** et la méthode des variables adjointes. Une comparaison des inconvénients et avantages que présentent ces méthodes a été entreprise afin notamment de guider notre choix. Avant de conclure le chapitre sur les objectifs que vise à atteindre cette étude, nous ferons un état des lieux des travaux réalisés auparavant et tâcherons d'expliquer le mode de fonctionnement de notre outil de travail, le code d'éléments finis **CADYF**.

## 1.1 Introduction à l'optimisation

Un problème classique de design optimal avec un nombre défini de paramètres et de contraintes s'écrirait ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{a} \text{ qui minimise } & F(\mathbf{X}; \mathbf{a}) \\ \text{sujet à } & \mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur des variables dépendantes (ou variables d'état),  $\mathbf{a}$  est le vecteur des paramètres de design,  $F$  est une fonction objectif (ou fonction coût) à optimiser et enfin  $\mathbf{G}$  représente les contraintes. Ces dernières sont souvent aussi nombreuses que les variables de sorte que, pour des paramètres de design donnés, leur résolution donne les états  $\mathbf{X}$ . Les dépendances de  $\mathbf{X}$  et  $F$  par rapport aux paramètres de design s'écrivent :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{a}) \quad (1.2)$$

et

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{a}); \mathbf{a}) \quad (1.3)$$

L'objectif est alors de calculer le gradient de cette fonction coût sujet aux contraintes  $\mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = 0$ . Il s'obtient par différentiation de  $\mathcal{F}$  en utilisant le théorème des fonctions implicites :

$$\nabla \mathcal{F} = \frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} \quad (1.4)$$

Le terme inconnu est  $d\mathbf{X}/d\mathbf{a}$ , il s'agit de la *sensibilité*. Il exprime la variation de  $\mathbf{X}$  en fonction d'une perturbation des paramètres de design  $\mathbf{a}$  autour de leurs valeurs nominales. Ceci nous conduit directement vers la définition de *sensibilité*.

## 1.2 Méthode des sensibilités

La sensibilité est définie comme étant le taux de variation d'une variable dépendante  $\phi(x, y; a)$  par rapport à un paramètre arbitraire  $a$ . Elle s'écrira ainsi :

$$S_\phi^a = \frac{\partial \phi}{\partial a}(x, y; a) \quad (1.5)$$

Rappelons que l'inconnue de notre équation 1.4 est la sensibilité. Pour mener ce calcul, il faut donc générer et résoudre des équations de sensibilités qu'on obtient simplement en différentiant les équations d'états  $\mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = 0$ , par rapport au paramètre considéré  $a$ . Toutefois, comme les équations ne sont pas discrètes mais continues et qu'il est habituellement impossible de trouver des solutions analytiques pour les états et pour leurs sensibilités, on fait appel à des méthodes numériques qui introduisent une discrétisation et donc fatalement une certaine approximation. Il existe deux possibilités :

1. **discréteriser** les équations aux dérivées partielles **puis** les **differentier**
2. **differentier** les équations aux dérivées partielles **puis** les **discretiser**

La première nous donne les sensibilités exactes d'un problème discret, la seconde nous donne quant à elle une approximation des sensibilités exactes. Cependant, c'est cette deuxième option appelée **Méthode des Équations des Sensibilités** que l'on retiendra. En effet, une comparaison de ces deux méthodes proposée par Turgeon [54] indique que la seconde présente plus d'avantages que la première malgré tout.

### 1.2.1 Méthode des Équations des Sensibilités : exemple

Avant d'introduire la méthode des variables adjointes, considérons l'exemple suivant :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (1.7)$$

Il s'agit des équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible, stationnaire, isotherme et laminaire. Les variables (d'états) de l'écoulement sont le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$ .  $\rho$ ,  $\tau$  et  $\mathbf{f}$  sont respectivement, la masse volumique, le tenseur des contraintes visqueuses et les forces volumiques.

Comme cela a été proposé ci-dessus, nous écrirons les sensibilités des variables de l'écoulement ainsi :

$$\text{Pour } \mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, a) \quad \mathbf{S}_u = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (1.8)$$

$$\text{Pour } p = p(x, y, a) \quad S_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (1.9)$$

L'équation différentielle des sensibilités s'obtient alors en différentiant (1.6) et (1.7) par rapport au paramètre  $a$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_u = 0 \quad (1.10)$$

$$\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho (\mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_u) = -\nabla S_p + \nabla \cdot \tau(\mathbf{S}_u) + \nabla \cdot \mathbf{S}_\tau(\mathbf{u}) + \mathbf{f}' \quad (1.11)$$

Les dérivées des propriétés de l'écoulement sont dénotées par un ('') et  $\mathbf{f}'$  représente la sensibilité des forces volumiques. Il s'agit ici de dérivées totales par rapport à  $a$ .

Comme nous le verrons au chapitre suivant il faut adjoindre des conditions limites aux sensibilités des équations (1.10) et (1.11) qui seront ensuite discrétisées par la méthode des éléments finis afin d'être résolues. Avant cela, introduisons la méthode des variables adjointes afin de comprendre notamment ce qui nous a amené à privilégier la M.E.S.

### 1.3 La méthode des variables adjointes

Cette méthode est la principale concurrente de la M.E.S pour la résolution de problèmes de design optimal. Nous ne présenterons ici que les étapes clefs de cette méthode. Pour de plus amples détails, le lecteur intéressé pourra consulter Turgeon [54].

La méthode des variables adjointes est une approche utilisant les multiplicateurs de Lagrange et s'applique aux problèmes d'optimisation avec contraintes. On introduit la variable adjointe  $\lambda^*$  puis on définit le lagrangien :

$$L(\mathbf{X}; \mathbf{a}; \lambda^*) = F(\mathbf{X}; \mathbf{a}) - \langle \lambda^*, \mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) \rangle \quad (1.12)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente un produit scalaire. Afin d'alléger la notation, nous utiliserons de préférence :

$$L = F - \lambda * \mathbf{G} \quad (1.13)$$

La solution (1.4) est obtenue à l'extremum de (1.12). On obtient donc ces derniers en annulant la dérivée première de  $L$  par rapport à  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\lambda^*$ , ce qui revient à

poser les trois équations suivantes :

$$\lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.14)$$

$$\lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.15)$$

$$\mathbf{G} = 0 \quad (1.16)$$

Pour résoudre ce système, on utilise un algorithme d'optimisation efficace qu'on pourra trouver dans Gunzburger [21].

La prochaine étape consiste à calculer le gradient de la fonction coût définie en 1.1 :

$$\nabla \mathcal{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} \quad (1.17)$$

En combinant cette équation à (1.14) on obtient :

$$\nabla \mathcal{F} = \lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.18)$$

On aboutit alors à l'aide de (1.15) à :

$$\nabla \mathcal{F} = -\lambda^* \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} \quad (1.19)$$

Ainsi le gradient de la fonction objectif est obtenu. Il est maintenant intéressant de comparer cette méthode à la **M.E.S** et c'est ce qui fait l'objet de notre prochain paragraphe.

#### 1.4 Comparaison de la M.E.S et de la méthode des variables adjointes

Les deux approches permettant de résoudre des problèmes de design optimal ont été présentées ci-dessus. Pourquoi préférer l'une à l'autre dans certains cas :

- La méthode des variables adjointes présente l'avantage de ne considérer qu'un problème adjoint peu importe le nombre de paramètres de design, alors que pour les sensibilités, il y aura autant de systèmes d'équations que de paramètre de contrôle. Cela dit, comme nous le verrons au 3.3.5, il est possible de contourner en partie cet inconvénient. De surcroît, les sensibilités ont par contre l'avantage de considérer un unique problème de sensibilités dans le cas où l'on cherche à calculer plusieurs gradients de fonction coût. Tandis que pour la méthode de variables adjointes il y aura autant de problèmes à résoudre que de fonctionnelles à calculer.
- Le second point à considérer est de savoir quels sont les domaines d'applications de ces deux méthodes. Contrairement à la méthode des variables adjointes, la **M.E.S** présente l'avantage de pouvoir être utilisée dans d'autres domaines que les problèmes d'optimisation et de calcul de gradients. En effet, sa signification physique lui permet d'exister indépendamment de toute fonction objectif.
- Enfin la **M.E.S** est facile à utiliser car une simple différenciation que l'on peut faire à la main, est requise.

C'est trois points de comparaison nous ont ainsi amenés à choisir la **M.E.S**. Voyons maintenant quelles peuvent être ses applications en faisant notamment un récapitulatif des travaux antérieurs.

## 1.5 Applications et travaux antérieurs

La **M.E.S** a prouvé son efficacité pour de nombreuses applications. Elle peut être appliquée pour des paramètres de valeur et de forme. Parmi ses applications retenons notamment :

- en mécanique des solides [19; ?]
- pour l'**analyse de sensibilités de systèmes** [16]
- pour l'**identification de paramètres dominants** et des zones dans lesquels ils exercent leurs influences [57]
- pour les paramètres de valeur en régime stationnaire turbulent [36]
- pour le design optimal en aérodynamique [13], en interactions fluide-structure [14; 17]
- pour l'**analyse d'incertitude** [55]
- pour les paramètres de forme [56], en formulation **Eulérienne** et pour des cas turbulents stationnaires [10]
- pour les paramètres de forme, en formulation **Lagrangienne** et pour des cas laminaires [7]
- pour les paramètres de valeur, en régime laminaire transitoire [24]
- enfin pour le **calcul rapide de solutions voisines** [23]

Bien entendu, cette liste n'est pas exhaustive et tend à se rallonger d'année en année. Avant d'établir la liste de nos objectifs, présentons brièvement notre outil de travail, le code **CADYF**.

## 1.6 Mode de fonctionnement du code de calcul utilisé

Il s'agit d'un code éléments finis à maillage adaptatif créé à la base par Dominique Pelletier [43; 41]. Son mode de fonctionnement s'articule autour de trois axes décrits dans la figure ci-dessous :

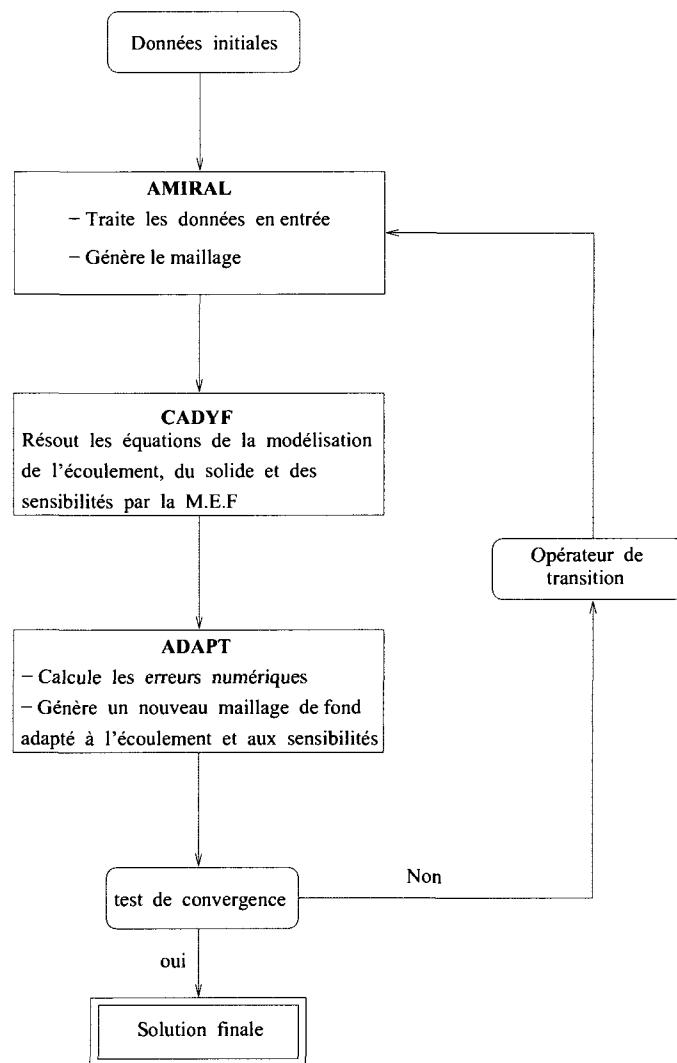


FIG. 1.1 Mode de fonctionnement du code d'éléments finis utilisé

- **AMIRAL** : lit le fichier de commandes (géométrie, conditions limites et initiales...) de l'opérateur et crée le nouveau maillage à partir d'un maillage de fond. Il se charge aussi de l'interpolation sur le nouveau maillage des solutions calculées au cycle adaptatif précédent.
- **CADYF** : résout par la Méthode des Éléments Finis (**MEF**) les équations de l'écoulement et des sensibilités.
- **ADAPT** : calcule les normes d'erreur des variables et éventuellement des sensibilités et adapte le maillage afin de réduire ces normes d'erreur au prochain cycle.

Il faut noter qu'**ADAPT** génère un fichier de sortie contenant les normes d'erreur des variables et éventuellement de leurs sensibilités. Si l'utilisateur estime que les critères de convergence sont rencontrés, la simulation s'arrête là. Si par contre ses critères ne sont pas satisfait l'utilisateur relance un cycle de calcul à partir du maillage de fond créé par l'intermédiaire de l'opérateur de transition qui sera présenté au paragraphe 3.4.3.

## 1.7 Les objectifs

Pour conclure ce chapitre consacré à l'introduction des méthodes de résolution de problèmes d'optimisation et plus particulièrement à la Méthode des Équations des Sensibilités ainsi qu'à ses applications, nous allons présenter les objectifs fixés pour mener à bien notre étude.

- Le premier objectif était de mettre à jour pour l'écoulement et les sensibilités la formulation **Reynolds Averaged Navier-Stokes** pour la résolution de problèmes à moyenne temporelle variable (**UnsteadyRANS**).

- Dans un second temps, il a fallu **réorganiser** une partie de la structure du code d'éléments finis pour optimiser le traitement des cas turbulents instationnaires.
- Après l'**implantation** des modifications, une **vérification** au sens de Roache<sup>[47]</sup> a été réalisée à partir d'une solution analytique.
- Aussi il convenait de **vérifier** le code d'éléments finis et sa nouvelle stratégie d'adaptation de maillage sur des cas turbulents stationnaires mais présentant une **période de transition**. Les solutions obtenues ont été confrontées à des résultats issus de précédentes simulations en régime stationnaire et ont permis aussi la validation d'une nouvelle implémentation du calcul des coefficients de forces pour l'écoulement et ses sensibilités.
- Enfin, une série d'applications **purement instationnaires** ont été traitées et les **solutions numériques** obtenues, dans la mesure du possible, ont été comparées aux **résultats expérimentaux**.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION ET MÉTHODE DES SENSIBILITÉS

Ce chapitre présente les équations qui modélisent le mouvement turbulent d'un fluide visqueux incompressible, ainsi que les équations des sensibilités qui y sont associées. Dans un premier temps, on fait un rappel des équations moyennes de Reynolds (URANS) et de leurs conditions aux limites. Puis nous traiterons des équations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  avec une loi de paroi à deux échelles de vitesse. Enfin, les équations de sensibilités appliquées aux équations de Navier-Stokes ainsi que celles du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  seront présentées en fin de chapitre.

#### 2.1 Modélisation de l'écoulement

##### 2.1.1 Équations de Navier-Stokes

Les équations de continuité et de Navier-Stokes pour l'écoulement instationnaire de fluides visqueux incompressibles s'écrivent ainsi :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (2.2)$$

Les variables dépendant du temps  $t$  sont le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  de composantes ( $U, V$ ) et la pression  $p$ . Les propriétés physiques sont la masse volumique  $\rho$  et la viscosité dynamique  $\mu$ . Il convient de remarquer la présence des termes  $\mathbf{f}$  et  $\tau(\mathbf{u})$  qui sont

respectivement les forces volumiques et le tenseur des contraintes visqueuses, qui s'écrit comme suit :

$$\tau(\mathbf{u}) = \mu \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad (2.3)$$

Le calcul d'écoulements turbulents par résolution directe des équations de Navier-Stokes (D.N.S) ne peut se faire que pour des cas simples et des nombres de Reynolds relativement faibles. De plus, il nécessite une importante puissance de calcul. Une alternative très utilisée consiste à s'intéresser seulement aux quantités moyennes des variables dépendantes  $\mathbf{u}$  et  $p$ . Pour cela on utilise une approche statistique.

### 2.1.1.1 Moyenne de Reynolds

La décomposition de Reynolds consiste à considérer l'écoulement comme la somme d'une partie moyennée et d'une partie fluctuante. Ainsi les variables dépendantes sont décomposées en quantité moyenne et des fluctuations :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (2.4)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (2.5)$$

où la barre désigne une valeur moyenne et le prime une fluctuation. Pour obtenir les équations de Navier-Stokes moyennées, il suffit alors d'appliquer l'opérateur de moyenne d'ensemble. Il est important de noter qu'il existe plusieurs formes de moyennes suivant l'application faite :

- moyenne temporelle : pour les écoulements dits statistiquement stationnaires (turbulence qui ne varie pas en moyenne dans un interval de temps donné)
- moyenne spatiale : pour les écoulements statistiquement homogène (turbulence en moyenne uniforme dans toutes les directions)
- moyenne d'ensemble : moyenne spatiale et temporelle

Pour ce mémoire, on utilisera la moyenne d'ensemble, longtemps considérée à tort comme la moyenne de Reynolds. De façon générale, la turbulence est souvent non homogène, donc la moyenne temporelle est plus adaptée. Mais cette dernière n'a de sens que si la turbulence est statistiquement stationnaire. Cela dit, comme le notent Mohammadi et Puigt [38], si le signal comporte deux fréquences très distinctes (ce qui est le cas des lâchers de tourbillons) alors les moyennes d'ensemble et temporelle sont équivalentes. Pour une variable  $f(x,t)$  donnée, la moyenne d'ensemble se calcule de la manière suivante :

$$F_E(x,t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n(x,t) \quad (2.6)$$

### 2.1.1.2 Équations de Navier-Stokes moyennées

Les équations de Navier-Stokes moyennées s'écrivent :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.7)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} \right) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\bar{\tau(\mathbf{u})}) + R_{ij} + \mathbf{f} \quad (2.8)$$

Elles diffèrent des équations 2.1 et 2.2 dites équations instantanées, uniquement par l'apparition du tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  qui traduit l'influence du champ fluctuant sur le champ moyen. Le tenseur de Reynolds apparaît lorsqu'on applique l'opérateur moyenne d'ensemble au terme de convection  $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ . Il est défini ainsi :

$$R_{ij} = -\rho \bar{u'_i u'_j} \quad (2.9)$$

En 2 dimensions le tenseur de Reynolds introduit donc 3 nouvelles inconnues. Ce qui pose le problème de fermeture des équations et conduit au développement de modèles de turbulence.

### 2.1.1.3 Les conditions limites

Les équations de Navier-Stokes sont résolues sur un domaine de calcul  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . Les conditions frontières de Dirichlet et Neumann sont imposées respectivement sur des parties  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  de  $\Gamma$  :

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (\Gamma_D) \quad (2.10)$$

$$[-p\mathbf{I} + \tau] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}} \quad (\Gamma_N) \quad (2.11)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}$  est une vitesse imposée sur la frontière  $\Gamma_D$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  la normale unitaire sortante à la frontière,  $\bar{\mathbf{t}}$  une force imposée sur  $\Gamma_N$  et enfin  $\mathbf{I}$  le tenseur unité.

## 2.1.2 Le modèle standard de turbulence $k - \epsilon$

### 2.1.2.1 La viscosité turbulente

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1.1.2 le tenseur de Reynolds fait apparaître de nouvelles inconnues dans le système qui est alors ouvert. L'hypothèse de Boussinesq, sur laquelle sont basés les modèles du premier ordre dits à viscosité turbulente, permet de modéliser les contraintes de Reynolds à l'aide de la viscosité turbulente,  $\mu_t$ . Par analogie à la loi de comportement reliant le tenseur des contraintes visqueuses au champ de vitesse, Boussinesq a proposé en 1875 de relier le tenseur de Reynolds au champ moyen :

$$R_{ij} = \mu_t \left( \nabla \bar{\mathbf{u}} + (\nabla \bar{\mathbf{u}})^T \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.12)$$

Le terme  $\frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$  est une contrainte normale qui sera incluse dans le terme de pression. Les équations URANS s'écrivent alors :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.13)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ (\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right] + \mathbf{f} \quad (2.14)$$

Il est important de noter que pour alléger l'écriture, la barre sur les quantités moyennes a été retirée. Les équations (2.13) et (2.14) ne suffisent pas à fermer le modèle mathématique, tant que la variable  $\mu_t$  n'est pas modéliser mathématiquement. C'est justement la qualité de cette modélisation qui influencera directement la qualité du calcul de l'écoulement moyen. La viscosité turbulente  $\mu_t$  fait donc le lien entre les équations URANS et les équations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  qui nous permettent de calculer respectivement l'énergie cinétique de turbulence  $k$  et son taux de dissipation  $\epsilon$ . On remarquera que la viscosité turbulente n'est nullement une propriété physique du fluide au même titre que la viscosité dynamique, mais plutôt une propriété d'écoulement que l'on doit évaluer au cours du processus de résolution numérique.

### 2.1.2.2 Les équations de transport du modèle de turbulence $k - \epsilon$

Pour le cas de modèle de turbulence avec équations de transport, la viscosité turbulente n'est plus construite avec des paramètres extérieurs semi-empiriques (longueur de mélange) mais à partir des variables supplémentaires dont la distribution est régie par de nouvelles équations différentielles pour fermer le problème mathématique. Généralement l'utilisation d'équations de transport dépend de la complexité du problème à traiter. Les modèles à 1 ou 2 équations de transport sont plus adaptés aux géométries complexes et à des nombres de Reynolds plus élevés. L'introduction d'équations de transport permet ainsi de suivre l'évolution de cer-

taines grandeurs caractéristiques de la turbulence. Dans le cas du modèle  $k - \epsilon$ , il s'agit de l'énergie cinétique de turbulence,  $k$ , et son taux de dissipation  $\epsilon$  reliés à la viscosité turbulente par l'expression suivante :

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.15)$$

où  $C_\mu$  est une constante de fermeture du modèle trouvée empiriquement. L'énergie cinétique  $k$  et son taux de dissipation  $\epsilon$  sont définis ainsi :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (2.16)$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

Les équations de transport de  $k$  et  $\epsilon$  sont obtenues par manipulation des équations de Navier-Stokes. Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration dans Comte-Bellot [12] ou Chassaing [8]. Elles s'écrivent ainsi :

$$\rho \left( \frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla k \right) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P - \rho \epsilon \quad (2.18)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon \right) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_1 \frac{\epsilon}{k} \mu_t P - C_2 \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (2.19)$$

où  $P$  désigne la production de turbulence et s'écrit :

$$P = \nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\text{T}) \quad (2.20)$$

Le système est maintenant fermé. Les valeurs des cinq constantes de fermeture ( $C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$ ) sont déterminées à partir de données expérimentales pour les écoulements stationnaires simples (turbulence en décroissance libre, écoulement en canal ...). Ces valeurs sont obtenues directement ou par une procédure d'optimisation. De plus les résultats numériques sont confrontés à des calculs analytiques pour

des configurations simples (couche limite ou gradient adverse sur plaque plane...). Pour le modèle standard, les valeurs de ces constantes telles que recommandées par Launder et Spalding [37] sont :

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

Pour certaines des applications traitées dans ce mémoire, des **modifications** apportées aux constantes ou au terme de production de turbulence seront présentées. Ces modifications, parues dans la littérature scientifique, et leurs répercussions sur les résultats obtenus seront présentées au chapitre 5. Elles ne remettent pas en cause, la validité du modèle  $k - \epsilon$  mais tentent d'améliorer la capacité du modèle à prédire des phénomènes instationnaires, comme des lâchers de tourbillons.

### 2.1.2.3 Variables logarithmiques

La résolution des équations de transports pour  $k$  et  $\epsilon$  cause parfois des difficultés numériques. Par exemple, la viscosité turbulente peut devenir localement négative si les valeurs de  $k$  ou  $\epsilon$  le sont. En plus d'un non sens physique, cela peut occasionner de graves ennuis au solveur. En effet, une valeur négative de  $\mu_t$  conduirait à une valeur négative ou nulle des coefficients des termes de diffusion dans l'équation (2.14), ce qui rendrait le système d'équations non elliptique et donc non résolvable par le solveur. Afin d'éviter de tels problèmes, F. Ilinca [29], F. Ilinca et D. Pelletier [30] ont suggéré l'utilisation des variables logarithmiques :

$$\mathcal{K} = \ln(k), \quad \mathcal{E} = \ln(\epsilon)$$

Ainsi les variables de calcul deviennent  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  et les équations de transport de  $k$  et  $\epsilon$  sont réécrites sous la forme :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} \right) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + \mu_t e^{-\kappa} P - \rho e^{\mathcal{E}-\kappa} \quad (2.21)$$

et

$$\rho \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} \right) = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + C_1 \mu_t e^{-\kappa} P - C_2 \rho e^{\mathcal{E}-\kappa} \quad (2.22)$$

Cette approche, à la fois efficace et élégante permet de préserver en tout temps la positivité des variables de turbulence et de la viscosité turbulente. Cette dernière prend alors la forme suivante :

$$\mu_t = \rho C_\mu e^{2\mathcal{K}-\mathcal{E}} \quad (2.23)$$

Les variables d'origine,  $k$  et  $\epsilon$  sont récupérées simplement en appliquant la fonction *exponentielle* sur les nouvelles variables de calcul  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ .

Il est important de noter que les équations de transport pour les variables logarithmiques (2.21) et (2.22) sont tout à fait équivalentes aux équations d'origine (2.18) et (2.19). Le modèle de turbulence reste donc inchangé.

En plus de la positivité des variables de turbulence, la formulation logarithmique présente les avantages suivant :

- Lissage des variations parfois très importantes de  $k$  et de  $\epsilon$  grâce aux propriétés de la fonction logarithmique.
- Solutions numériques pour les variables de turbulence plus précises : des solutions convergées de précision raisonnable sont obtenues sur des maillages plus grossiers.
- Comme conséquence du point précédent, la solution pour l'écoulement moyen est plus précise par l'intermédiaire de la viscosité turbulente.

Enfin, malgré l'ajout de termes non linéaires (exponentielles et produits de gradient de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ ) dans les équations (2.21) et (2.22), la formulation en variables logarithmiques se comporte très bien [29]. Pour conclure, l'expérience a montré que le solveur gagnait en robustesse dans la mesure où notamment, les divisions parfois problématiques par  $k$  et  $\epsilon$  disparaissent pour la résolution des équations de transport (2.18 et 2.19) ou l'évaluation de la viscosité turbulente (2.15).

#### 2.1.2.4 Les conditions aux frontières

##### 2.1.2.4.1 Les conditions sur les frontières libres

Seules les frontières sans paroi sont considérées dans ce paragraphe. Par analogie, aux équations de Navier-Stokes, les équations de transport des variables dépendantes de turbulence, nécessitent l'imposition de conditions aux frontières. Ces conditions, de type Dirichlet ou Neumann, appliquées respectivement sur les segments de frontières  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  s'écrivent :

$$\mathcal{K} = \ln(k_{bc}) \quad ; \quad \mathcal{E} = \ln(\epsilon_{bc}) \quad (2.24)$$

pour les conditions de Dirichlet, et

$$\left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad ; \quad \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.25)$$

pour les conditions de Neumann.

Il convient de rappeler que  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire sortante à la frontière. Les valeurs de  $k$  et  $\epsilon$  sur les frontières libres sont notées  $k_{bc}$  et  $\epsilon_{bc}$ . Ces conditions limites seront utilisées généralement en entrée et sortie du domaine de calcul. D'ailleurs, il convient d'introduire la notion de taux de turbulence (ou intensité turbulente)

souvent utilisée pour imposer une condition sur  $k_0$  et donné par la relation :

$$I_t = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}u_i'^2}}{\sqrt{\frac{1}{3}U_i^2}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k_0}}{U_0} \quad (2.26)$$

avec  $k_0$  et  $U_0$  respectivement les valeurs de  $k$  et de la vitesse moyenne à l'entrée du domaine. Pour toutes nos applications  $U_0$  sera la vitesse moyenne longitudinale appliquée comme condition limite à l'entrée.  $I_t$  est exprimée en pourcentage et donne une idée de l'état de turbulence de l'écoulement à l'entrée du domaine. Quant à  $\epsilon_0$ , on impose une valeur à partir du rapport des viscosités  $r_\mu$  défini par :

$$r_\mu = \frac{\mu_t}{\mu} = \frac{Re}{Re_t} = Re \times \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (2.27)$$

Soit

$$\epsilon_0 = \frac{Re}{r_\mu} \times \rho C_\mu k_0^2 \quad (2.28)$$

avec  $Re$  et  $Re_t$  respectivement les nombres de Reynolds et de Reynolds turbulent. Pour nos applications,  $r_\mu = 10$  en entrée sera généralement utilisée mais nous verrons qu'à proximité des parois solides,  $r_\mu$  prend de fortes valeurs qui reflètent une des principales limitations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  : il n'est pas valide près des parois.

#### 2.1.2.4.2 Loi de paroi

Les parois solides posent de véritables problèmes car on ne peut pas imposer au même titre que la vitesse une valeur nulle de  $k$  pour respecter la condition d'adhérence. Le modèle  $k - \epsilon$  standard est valide pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés, ce qui n'est pas le cas près des parois solides. En écoulement libre, la viscosité turbulente est prépondérante par rapport à la viscosité moléculaire. Par contre dans la couche limite proche de la paroi, ce ratio de grandeurs est inversé.

Pour éviter d'utiliser le modèle  $k - \epsilon$  à proximité des parois, on utilise alors une loi de paroi valide de la frontière solide jusqu'à une certaine distance  $d$  de la paroi. À partir de cette distance  $d$  et dans tout le champ libre, le modèle de turbulence est appliqué normalement. Sur cette nouvelle frontière située à une distance  $d$  de la frontière solide d'origine, la condition aux limites appliquée n'est pas celle d'origine, soit la condition d'adhérence. On utilise plutôt une condition aux limites appropriée et en adéquation avec les modèles décrivant la distribution de vitesse dans les couches limites turbulentes. Dans notre cas, nous utilisons la loi de paroi à deux échelles de vitesse décrite par Chabard [6] et Ignat *et al.* [28] et les conditions aux limites qui en découlent. Elle décrit le profil de vitesse adimensionnelle  $u^+$  tangent à la paroi en fonction de la distance adimensionnelle  $y^+$  normale à la paroi :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $\kappa$  est la constante de Karman et  $E$  le paramètre de rugosité. Généralement, on utilise  $\kappa = 0.42$  et  $E = 9.0$  pour une paroi lisse. Dans ce modèle, il apparaît deux zones bien distinctes :

- la sous-couche laminaire pour  $y^+ < y_c^+$
- la zone logarithmique pour  $y^+ \geq y_c^+$

Le point critique  $y_c^+$  est évalué par l'intersection des deux courbes représentant (2.29), soit  $y_c^+ \approx 11$ . Les variables adimensionnelles  $u^+$  et  $y^+$  sont définies par :

$$y^+ = \frac{\rho du_k}{\mu} \quad (2.30)$$

$$u^+ = \frac{u_t}{u_{**}} \quad (2.31)$$

où  $u_t = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}$  est la vitesse tangentielle et  $d$  la distance normale à la paroi. La distance  $d$  est généralement choisie de telle sorte que  $30 \leq y^+ \leq 300$  [50] pour respecter la

validité de la loi de paroi. Par expérience, la plage inférieure donne de meilleurs résultats. Deux échelles de vitesse interviennent, soit  $u_{**}$  la vitesse de frottement et  $u_k$  une vitesse caractéristique basée sur l'énergie cinétique de turbulence évaluée à la nouvelle frontière de calcul. Elles sont définies comme suit :

$$u_{**} = \sqrt{\tau_w / \rho} \quad (2.32)$$

$$u_k = C_\mu^{1/4} \exp(\mathcal{K}_w / 2) \quad (2.33)$$

où  $\mathcal{K}_w$  est  $\mathcal{K}$  évalué à la frontière du domaine de calcul et  $\tau_w$  le cisaillement à cette même frontière.

Finalement les conditions aux limites résultantes sont :

– Condition dans la direction tangentielle :

Il s'agit d'une condition mixte reliant le cisaillement à la vitesse tangentielle  $u_t$  telle que :

$$\tau_w = \rho u_k u_{**} = \frac{\rho u_k}{\frac{1}{\kappa} \ln \left( E \frac{\rho u_k}{\mu} \right)} u_t \quad (2.34)$$

Pour arriver à cette relation, il suffit de combiner (2.30 et 2.31) et tenir compte de l'expression (2.29) de la loi de paroi.

– Condition dans la direction normale :

A la paroi solide on impose une condition de non pénétration. Il est coutume d'admettre qu'à une faible distance  $d$  de la paroi, l'écoulement dans la couche limite est principalement tangent à la paroi. On impose donc une vitesse normale nulle, empêchant tout transfert de masse au travers de la frontière :

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.35)$$

- Condition sur  $\mathcal{K}$  :

Cette condition impose un flux nul sur la frontière et permet de résoudre l'équation de transport sur  $\mathcal{K}$ . Elle découle du fait que  $\tau_w$  soit constant dans les régions où l'on utilise la loi de paroi.

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0 \quad \text{ou} \quad \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.36)$$

Cette condition permet aussi de calculer la distribution du profil de vitesse  $u_k$  à la paroi.

- Condition sur  $\mathcal{E}$  :

Il s'agit d'une condition de Dirichlet classique qui permet d'obtenir  $\mathcal{E}$  à la frontière :

$$\mathcal{E} = \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \quad (2.37)$$

En plus de suppléer au modèle  $k - \epsilon$  non valide près de la frontière solide, la loi de paroi permet d'éviter la résolution numérique d'une région à forts gradients. Ce qui nous permet de faire l'économie d'un maillage très raffiné et donc d'épargner puissance et temps de calcul. Bien sûr, il faut garder à l'esprit que malgré tous les avantages qu'offre la loi de paroi, elle introduit une autre approximation au niveau de la modélisation.

Sachant que les constantes de fermeture sont calibrées sur des mesures expérimentales pour des cas d'écoulements particuliers, que la distance à la paroi est un paramètre important pour la loi de paroi, il peut-être intéressant d'évaluer la répercussion qu'aurait un changement de valeur de ces quelques paramètres sur la solution finale. La résolution des sensibilités présentée ci-dessous nous permet entre autres d'y répondre.

## 2.2 Méthode des équations de sensibilités

### 2.2.1 Équations de sensibilités pour les URANS

En analyse de sensibilités, au lieu de ne dépendre que des coordonnées spatiales  $(x, y)$  et du paramètre de temps  $t$ , les variables de l'écoulement dépendent aussi d'un paramètre  $a$ ; paramètre dont l'influence sur le comportement de l'écoulement sera étudié. On écrit donc  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y; a)$ . On note la sensibilité des variables dépendantes :

$$\mathbf{S}_u = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (2.38)$$

$$S_p = \frac{\partial p}{\partial a} \quad (2.39)$$

Les sensibilités représentent le taux de variation des variables dépendantes par rapport au paramètre de contrôle étudié. Les équations des sensibilités URANS s'obtiennent en différentiant les équations aux dérivées partielles d'origine (2.13-2.14) par rapport au paramètre  $a$ . Pour chaque paramètre  $a$  il faudra résoudre un système d'équations de la forme suivante :

Pour l'équation de la continuité :

$$\frac{\partial}{\partial a} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \right) = \nabla \cdot \mathbf{S}_u = 0 \quad (2.40)$$

Pour l'équation du mouvement :

$$\rho' \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{S}_u}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_u \right) = -\nabla S_p + \nabla \cdot [\tau(\mathbf{S}_u) + S_{\tau(\mathbf{u})}] + \mathbf{f}' \quad (2.41)$$

Les sensibilités des variables dépendantes sont notées avec un  $S$ .  $\mathbf{f}'$  est la sensibilité des forces volumiques. Les dérivées totales des propriétés physiques sont notées avec

un prime '. Dans le cas d'écoulement où les propriétés physiques varient en espace, leurs sensibilités varieront aussi. Prenons l'exemple de la viscosité qui dépend des paramètres spatiaux-temporel et de la vitesse :

$$\mu = \mu(x, y, t, \mathbf{u}(a); a) \quad (2.42)$$

On écrit alors sa sensibilité par rapport au paramètre  $a$  :

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a} \quad (2.43)$$

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial a} + \mathbf{S}_u \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.44)$$

La sensibilité du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial \tau_{\mathbf{u}}}{\partial a} = S_{\tau(\mathbf{u})} + \tau(\mathbf{S}_u) = (\mu' + \mu'_t) \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + (\mu + \mu_t) \left( \nabla \mathbf{S}_u + (\nabla \mathbf{S}_u)^T \right) \quad (2.45)$$

En plus d'appliquer la M.E.S aux URANS, il faut aussi différentier ces conditions limites. Il est important de remarquer d'ores et déjà que l'analyse de sensibilités sera rendue difficile pour les cas périodiques transitoires, car si l'on se souvient de la définition d'une sensibilité (1.5), on s'aperçoit qu'intrinsèquement sa valeur croît avec le temps. En effet, pour tel régime les variables sont fonction de sinusoïdes de la forme :

$$\phi(x, y, t; \omega, B) = B \sin(\omega t) \quad (2.46)$$

La sensibilité de  $\phi$  par rapport au paramètre  $B$  est obtenue par :

$$S_{\phi}^B = \frac{\partial \phi}{\partial B} = \sin(\omega t) \quad (2.47)$$

Cette sensibilité ne posera aucun problème car le terme temporel reste dans la fonction sin. Elle gardera donc des valeurs bornées. Par contre, la sensibilité de  $\phi$  par rapport au paramètre  $\omega$  sera de la forme :

$$S_\phi^\omega = \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = Bt \cos(\omega t) \quad (2.48)$$

Par conséquent,  $S_\phi^\omega$  n'est pas bornée en temps. Cela dit nous verrons qu'on ne perd rien de leur efficacité et que l'analyse reste très faisable.

### 2.2.1.1 Conditions limites pour les sensibilités avec paramètres de valeur

Dans le cadre de ce mémoire nous nous intéressons uniquement aux paramètres de valeur. Le cas des paramètres de forme pour les écoulements laminaires est traité notamment par Turgeon *et al.* [56]. De la même manière qu'au paragraphe 2.1.1.3 on impose aux frontières libres du domaine de calcul  $\Omega$  des conditions aux limites essentielles (Dirichlet) sur  $\Gamma_d$  et naturelles (Neumann) sur  $\Gamma_n$ .

$$\mathbf{S}_u = \mathbf{u}'_{bc} \quad \text{sur} \quad \Gamma_d \quad (2.49)$$

$$-S_p + \hat{\mathbf{n}} \cdot \tau'(\mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_n \quad (2.50)$$

Il est important de noter que pour tous les paramètres, les équations des sensibilités ont la même structure et les mêmes types de conditions limites que celles de l'écoulement. Cela vient du fait que les structures des systèmes pour la forme variationnelle de l'écoulement et des sensibilités sont identiques ; ce qui suppose d'ailleurs une organisation similaire du code pour l'écoulement et les sensibilités.

### 2.2.2 Les équations des sensibilités pour le modèle de turbulence $k - \epsilon$

La méthode des sensibilités est maintenant appliquée aux équations de transport de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ . Il suffit pour cela de différentier les équations (2.21 et 2.22) par rapport à un paramètre de contrôle  $a$ . On obtient ainsi pour l'équation de transport de  $S_{\mathcal{K}}$  :

$$\begin{aligned} \rho' \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} \right) + \rho \left( \frac{\partial S_{\mathcal{K}}}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}} \right) = \\ \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \\ + \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \\ + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}} \\ + (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P S_{\mathcal{K}}) e^{-\mathcal{K}} \\ - \rho \left( 2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

et de  $S_{\mathcal{E}}$  :

$$\begin{aligned} \rho' \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} \right) + \rho \left( \frac{\partial S_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} \right) = \\ \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla S_{\mathcal{E}} \right] \\ + \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \\ + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} \\ + \rho C_1 C_\mu P \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_{\mathcal{K}} - S_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) e^{\mathcal{K}-\mathcal{E}} \\ - \rho C_2 \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_2}{C_2} + S_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{K}} \right) e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Avec  $S_K$  et  $S_\varepsilon$  les sensibilités de  $K$  et  $\varepsilon$  qui s'écrivent :

$$S_K = \frac{\partial K}{\partial a} \quad ; \quad S_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} \quad (2.53)$$

Les dérivées totales des propriétés physiques sont notées avec un prime ' . La sensibilité du terme de production de turbulence se note :

$$P' = 2\nabla \mathbf{S}_u : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.54)$$

Quant à la viscosité turbulente, sa sensibilité par rapport au paramètre  $a$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mu'_t &= (\rho' C_\mu + \rho C'_\mu) e^{2K-\varepsilon} + \rho C_\mu (2S_K - S_\varepsilon) e^{2K-\varepsilon} \\ &= \mu_t \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + 2S_K - S_\varepsilon \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Il est possible de revenir aux sensibilités des variables de turbulence sous leur forme d'origine par la relation :

$$S_k = k S_K$$

$$S_\epsilon = \epsilon S_\varepsilon$$

### 2.2.2.1 Loi de paroi pour les sensibilités avec paramètre de valeur

La loi de paroi pour les équations de sensibilités est obtenue en différentiant les équations présentées au paragraphe 2.1.2.4.2 par rapport au paramètre  $a$ . Pour les paramètres de valeur, les vecteurs normal et tangent ne dépendent pas des variations de  $a$ , ce qui allège les équations. Ainsi la condition de non-pénétration

(2.35) pour  $S_u$  s'écritra :

$$\mathbf{S}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.56)$$

La sensibilité du cisaillement à la paroi est obtenue en différentiant (2.34)

$$\tau'_w = \rho' u_k u_{**} + \rho u'_k u_{**} + \rho u_k u'_{**} \quad (2.57)$$

où  $u'_{**}$  et  $u'_k$ , les sensibilités de la vitesse de frottement et de l'échelle de vitesse basée sur  $k$ , sont obtenues respectivement par dérivation des équations (2.32) et (2.33) :

$$u'_{**} = \frac{u'_t}{u^+} - \frac{u_t u^{+'}}{u^{+2}} \quad (2.58)$$

$$u'_k = u_k \left( \frac{1}{4} \frac{C'_\mu}{C_\mu} + \frac{1}{2} S_K \right) \quad (2.59)$$

Les sensibilités de la vitesse et de la distance adimensionnelles sont quant à elles obtenues à partir des équations (2.30) :

$$u^{+'} = \begin{cases} y^{+'} & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \left( -u^+ \kappa' + \frac{E'}{E} + \frac{y^{+'}}{y^+} \right) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (2.60)$$

et (2.31) :

$$y^{+'} = y^+ \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{d'}{d} + \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\mu'}{\mu} \right). \quad (2.61)$$

Finalement pour les composantes de la vitesse tangentielle

$$u_t = u t_x + v t_y \quad (2.62)$$

nous obtenons

$$u'_t = S_u t_x + S_v t_y \quad (2.63)$$

où les sensibilités de  $t_x$  et  $t_y$  sont supposés nulles car seuls les paramètres de valeur sont considérés ici. Il faut noter aussi que même si la frontière de calcul est fixe,

la distance à la paroi  $d$  peut varier alors que le domaine de calcul reste inchangé. Ainsi,  $d$  est alors considéré comme un paramètre de valeur.

Les conditions aux limites de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  données par les équations (2.36) et (2.37) ont respectivement pour sensibilités :

$$\frac{\partial S_{\mathcal{K}}}{\partial n} = 0 \quad (2.64)$$

que l'on écrira de façon plus appropriée pour la formulation en éléments finis :

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.65)$$

et

$$S_{\mathcal{E}} = 3 \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{d'}{d} \quad (2.66)$$

pour la condition limite de  $\mathcal{E}$ .

Certes la dérivation des expressions présentées ci-dessus peut paraître laborieuse, mais elle n'est réalisée qu'une fois pour toutes.

Ce paragraphe conclut le chapitre de théorie sur la modélisation de l'écoulement et de ses sensibilités. Il est important de savoir maintenant comment ces équations seront résolues, quel algorithme de résolution le code suit-il et quelle stratégie d'adaptativité du maillage sera utilisée. C'est ce qu'on se propose d'apprendre au chapitre suivant.

## CHAPITRE 3

### MÉTHODE DE RÉSOLUTION

#### 3.1 Algorithme de résolution

En guise d'introduction pour ce chapitre présentant la méthode de résolution suivie pour calculer l'écoulement et ses sensibilités, la figure (3.1) présente l'algorithme global de résolution utilisé par le code d'éléments finis. On y voit les différentes étapes de calcul présentées sous forme d'équations au chapitre précédent.

Notons toutefois que la résolution des équations de l'écoulement et des sensibilités se fait dans la même boucle temporelle. Les algorithmes appliqués pour l'écoulement et les sensibilités sont identiques. Pour ces dernières, l'algorithme est répété pour chaque paramètre  $a$  étudié. Les équations du mouvement sont découplées des équations de transports des variables de turbulence et afin d'améliorer significativement la convergence globale du processus, ces dernières sont résolues dans une boucle de sous-itérations avec un critère de convergence locale ( $CrConv1$ ) fixé à  $10^{-5}$ . Quant au critère de convergence globale ( $CrConv2$ ), basé sur le quotient de la norme de la correction par la norme de la solution, il est fixé à  $10^{-6}$ .

Les équations de continuité et de mouvement sont linéarisées par la méthode de Newton-Rhapson en moins de 4 itérations pour la plupart des cas. Les équations du modèle de turbulence requièrent généralement 3 sous-itérations.

En ce qui concerne les équations des sensibilités, du fait de leur linéarité, souvent qu'une itération de Newton-Rhapson est nécessaire.

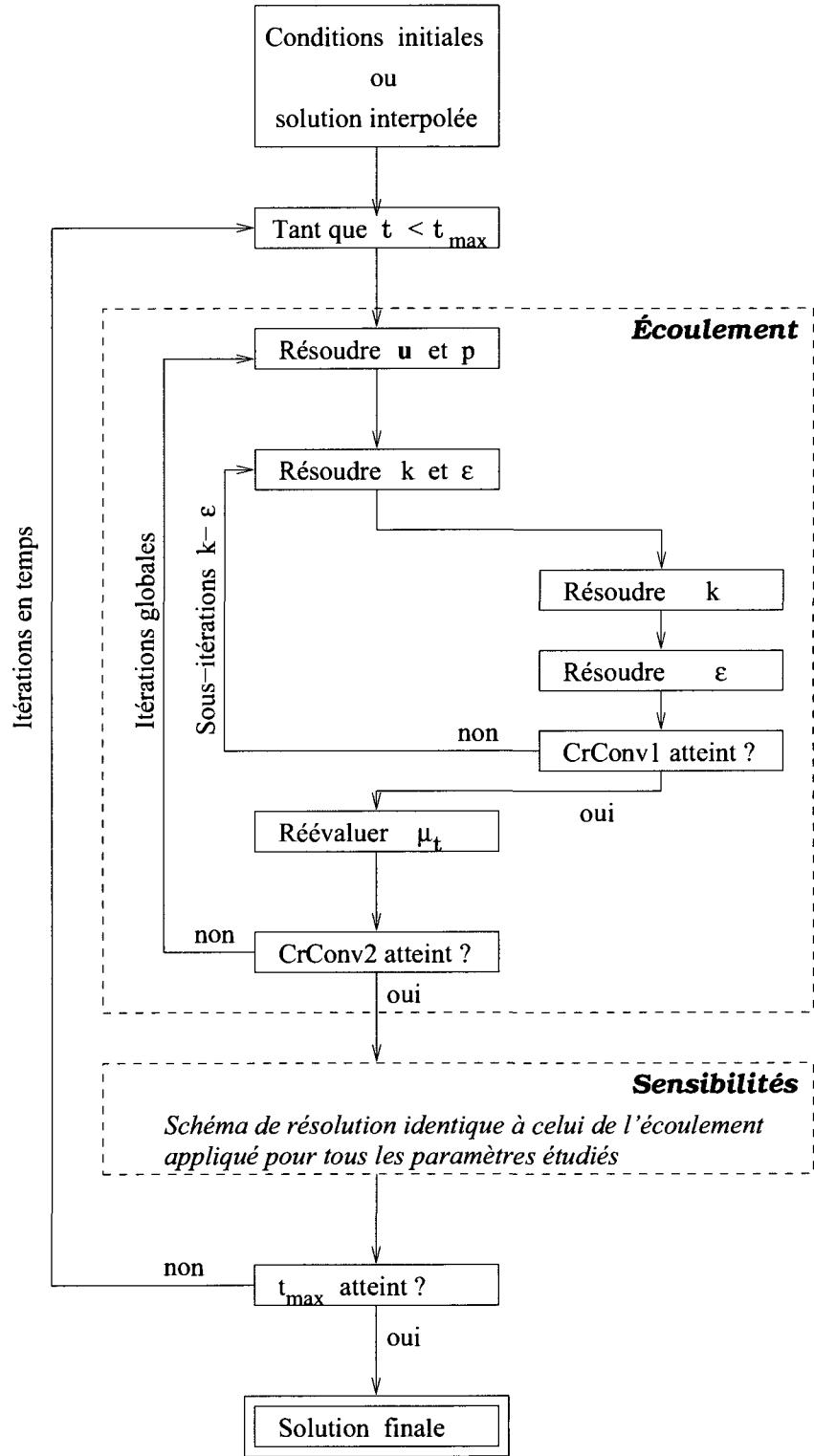


FIG. 3.1 Algorithme global de résolution

Au même titre que les méthodes de volumes finis, différences finies ou spectrales, pour ne citer qu'elles, la méthode des éléments finis est une technique mathématique couramment utilisée pour la résolution de systèmes équations aux dérivées partielles. Nous verrons brièvement en quoi consiste cette méthode en développant notamment les formulations variationnelles des équations de l'écoulement et des sensibilités. Un court paragraphe sera ensuite dédié aux méthodes de stabilisation. Enfin, nous présenterons le processus de maillage adaptatif et son évolution pour les problèmes instationnaires.

### 3.2 Schéma de discrétisation en temps.

Comme nous le verrons à la section suivante, une discrétisation spatiale est essentielle pour résoudre notre problème numériquement. En effet, si en réalité les intervalles spatio-temporels sont continus, pour des raisons évidentes, une résolution par méthodes numériques impose des discrétisations dans l'espace comme dans le temps. Pour ce dernier, un schéma de discrétisation implicite, donc inconditionnellement stable de type Backward (rétrograde) Euler a été choisi. Pour une variable  $\phi$  quelconque, il s'écrit :

$$\phi^{n+1} = \Delta_t f(\phi^{n+1}, t^{n+1}) + \phi^n \quad (3.1)$$

avec  $\Delta_t$  le pas de temps, et  $f$  une fonction donnée. Ce schéma n'est certes que d'ordre un mais présente l'avantage d'être très stable et robuste notamment lorsque les simulations sont effectuées sur des problèmes où l'écoulement est impulsivement démarré (cf 4.2.1).

### 3.3 Méthode des éléments finis

#### 3.3.1 La formulation variationnelle

##### 3.3.1.1 Forme faible des équations URANS et du modèle $k - \epsilon$

La première étape pour résoudre par la Méthode des Éléments Finis (MEF) les équations de Navier-Stokes et de transport de  $k$  et  $\epsilon$  consiste à calculer la forme faible de ces équations. Pour y parvenir, il suffit de multiplier les équations (2.13), (2.14), (2.21) et (2.22) par des fonctions test, puis à les intégrer par parties sur le domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . Ainsi on obtient pour :

– l'équation de continuité :

$$\int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

– l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\ - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

où

$$\dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (3.4)$$

$$\bar{\mathbf{t}} = [-p\mathbf{I} + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (3.5)$$

$\dot{\gamma}(\delta \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{I}$  et  $\bar{\mathbf{t}}$  représentent respectivement le tenseur du taux de déformation, le

tenseur identité d'ordre deux et les tractions à la frontière.

– l'équation de  $\mathcal{K}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} \right) - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P + \rho e^{\mathcal{E}-\kappa} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \quad (3.6) \end{aligned}$$

– l'équation de  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} \right) - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - C_1 \mu_t e^{-\kappa} P + C_2 \rho e^{\mathcal{E}-\kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \quad (3.7) \end{aligned}$$

On remarque dans les équations (3.3), (3.6) et (3.7) l'apparition d'une intégrale sur  $\Gamma$ , la frontière du domaine  $\Omega$ , résultant de l'application du théorème de la divergence. Elle joue le rôle de conditions aux limites naturelles dites conditions de Neumann.

### 3.3.1.2 Forme faible des équations de sensibilités

Après avoir affaibli les équations URANS et celles du modèle  $k - \epsilon$ , la même procédure est appliquée aux équations de sensibilités. Pour des raisons de clarté, seules les sensibilités des équations URANS seront présentées ici. Pour celles des équations de transport de  $S_{\mathcal{K}}$  et  $S_{\mathcal{E}}$ , le lecteur peut consulter l'annexe I. Ainsi on obtient pour :

– l'équation de continuité :

$$\int_{\Omega} \delta S_p \nabla \cdot \mathbf{S}_u d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

– l'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \rho' \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{S}_u}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_u \right) \right] \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{S}_u)] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{S}_u) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} S_p \nabla \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}}' \cdot \delta \mathbf{S}_u d\Gamma \end{aligned} \quad (3.9)$$

Les conditions de Neumann pour les sensibilités sont représentées par l'intégrale sur la frontière  $\Gamma$ .

### 3.3.2 Discrétisation

Le paragraphe précédent présenter les formes faibles des équations de l'écoulement et des sensibilités. Maintenant intéressons nous à leur discrétisation, ce qui constitue la seconde étape dans la MEF. La méthode de Galerkin permet une telle discrétisation en considérant notamment les fonctions test comme étant les fonctions d'interpolation de la solution. Ainsi, on obtient les égalités suivantes :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_u} N_i^u u_i \quad \text{et} \quad \delta u_i = N_i^u \quad (3.10)$$

$$s_{u_h} = \sum_{i=1}^{N_{s_u}} N_i^{s_u} s_{u_i} \quad \text{et} \quad \delta s_{u_i} = N_i^{s_u} \quad (3.11)$$

Elles sont données à titre d'exemple car il faut considérer aussi,  $v_h$  la composante verticale de la vitesse,  $p_h$  la pression et  $\mathcal{K}_h$  et  $\mathcal{E}_h$  pour les variables du modèle de turbulence  $k-\epsilon$ . Notons que  $u_h$ ,  $N_u$ ,  $N_i^u$ ,  $u_i$  et enfin  $\delta u_i$  représentent respectivement la solution éléments finis, le nombre de fonctions d'interpolation, les fonctions d'interpolation elles-mêmes, les valeurs nodales et enfin les fonctions test. Le choix des fonctions d'interpolation se fait de telle manière qu'elles valent 1 sur un noeud de référence et 0 sur tous les autres noeuds. Le lecteur peut se référer à Fortin [11]. Dans le cadre des calculs réalisés pour ce mémoire, le type d'élément choisi est le Taylor-Hood( $P2 - P1$ ). Il présente :

- 6 degrés de liberté (ddl) en vitesse
- 6 ddl en  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$
- 3 ddl en pression

Il s'agit d'un élément quadratique en vitesse, ainsi qu'en  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ , et linéaire continue

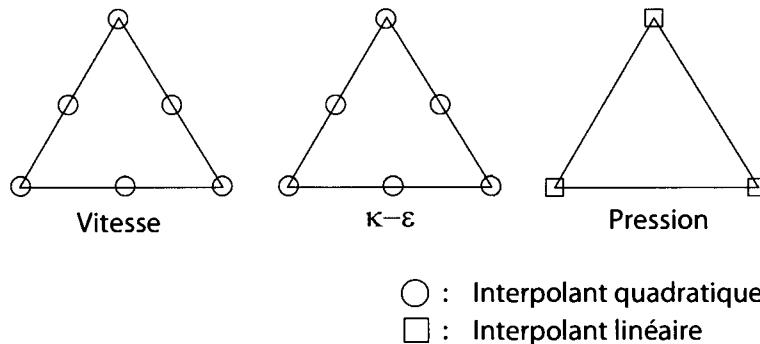


FIG. 3.2 Élément fini de type Taylor-Hood

par morceaux en pression.

### 3.3.3 Équations des résidus

Dans l'optique de résoudre les équations algébriques présentées dans le paragraphe précédent, il convient de réarranger les formes faibles en équations des résidus. Pour ce faire, on déplace tous les termes du même côté du signe d'égalité. Ce qui donne pour les équations URANS :

$$R_p = \int_{\Omega} \delta p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (3.12)$$

et

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{u}} = & \int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pour les équations de transport de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{K}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} \right) - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\mathcal{K}} P + \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \right] \\ & \times \delta \mathcal{K} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega - \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{E}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} \right) - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - C_1 \mu_t e^{-\mathcal{K}} P + C_2 \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \right] \\ & \times \delta \mathcal{E} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega - \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

On procède de la même manière pour les formes faibles des équations de sensibilités. Les inconnues du système matriciel ainsi obtenu sont les valeurs nodales des éléments composant le domaine  $\Omega$ . La solution éléments finis est calculée par un processus itératif, le but étant de faire tendre les résidus vers zéro.

### 3.3.4 Jacobien numérique

La méthode utilisée pour faire tendre les résidus vers 0 est celle de Newton-Raphson. Il s'avère très rarement utile pour les problèmes traités en instationnaire de faire précéder la méthode de Newton-Raphson par la méthode de substitution afin d'obtenir une bonne estimation initiale. Les variables de l'écoulement, à l'exception de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  sont mises à zéro dans le domaine pour le premier cycle de calcul. Pour les cycles adaptatifs suivant la solution est généralement interpolée sur le nouveau maillage, sauf pour le cas de la marche de Kim qui sera présenté au chapitre suivant.

Pour expliquer la méthode, prenons comme exemple la  $i^{\text{ème}}$  équation des résidus dont le vecteur d'inconnue serait  $\mathbf{u}^n$ . Idéalement, on obtiendrait la relation suivante :

$$R_i(\mathbf{u}^n) = 0 \quad (3.16)$$

Cependant si le vecteur  $\mathbf{u}^n$  ne satisfait pas la relation 3.16, il faut trouver le vecteur  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta\mathbf{u}$  tel que 3.16 soit rencontrée. En linéarisant par une série de Taylor, on obtient :

$$R_i(\mathbf{u}^{n+1}) = R_i(\mathbf{u}^n + \delta\mathbf{u}) = R_i(\mathbf{u}^n) + \sum_i \frac{\partial R_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}^n) \delta u_j = 0 \quad (3.17)$$

Le système matriciel à résoudre est alors :

$$\left[ \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \right] \{\delta u_j\} = \{-R_i\} \quad (3.18)$$

que l'on peut écrire :

$$\bar{\bar{\mathbf{J}}}(\mathbf{u}^n) \delta \mathbf{u}^n = -\mathbf{R}(\mathbf{u}^n) \quad (3.19)$$

où  $R_i$  sont les équations algébriques des résidus,  $u_j$  et  $\delta u_j$  désignent respectivement les valeurs nodales et les corrections.

On utilise alors l'approche du *jacobien numérique* qui approxime les dérivées par différences finies décentrées en perturbant la solution d'une petite quantité  $\delta$  :

$$J_{ij} = \frac{\partial R_i(\mathbf{u}^n)}{\partial u_j} = \frac{R_i(u_1^n, u_2^n, \dots, u_j^n + \delta, \dots, u_N^n) - R_i(\mathbf{u}^n)}{\delta} \quad (3.20)$$

Une fois assemblé, le système est résolu par le solveur de matrices creuses PARDISO (Parallel Sparse Direct Solver) [48; 49] qui permet en plus d'effectuer les calculs en parallèle sur des machines multi-processeurs. Pour les équations de sensibilités, étant donné leur linéarité, on utilise la même méthode mais généralement qu'une seule itération est nécessaire.

### 3.3.5 Factorisation conditionnelle

Afin d'augmenter la rapidité de la méthode de Newton-Raphson on utilise la *factorisation conditionnelle*. Pour calculer le vecteur de correction selon la relation (3.19), on inverse la matrice du jacobienne  $\bar{\bar{\mathbf{J}}}(\mathbf{u}^n)$  grâce à une factorisation *LU*. Or, cette factorisation est très coûteuse en temps de calcul. Le but de la *factorisation conditionnelle* est d'éviter ces opérations lorsque cela est possible. Quand  $\delta \mathbf{u}^n$  devient petit, on peut alors approximer  $\bar{\bar{\mathbf{J}}}(\mathbf{u}^n)$  par  $\bar{\bar{\mathbf{J}}}(\mathbf{u}^{n-1})$  de manière à éviter une nouvelle factorisation. Pour un problème unidimensionnel, on conserve ainsi la même pente  $J(u_0)$  pour les tangentes successives à la courbe  $R(u)$ . Comme l'illustre

la figure 3.3 le calcul converge alors bien vers la solution  $\alpha$  mais un nombre plus important d'itérations. Quel est donc l'avantage de la *factorisation conditionnelle* ?

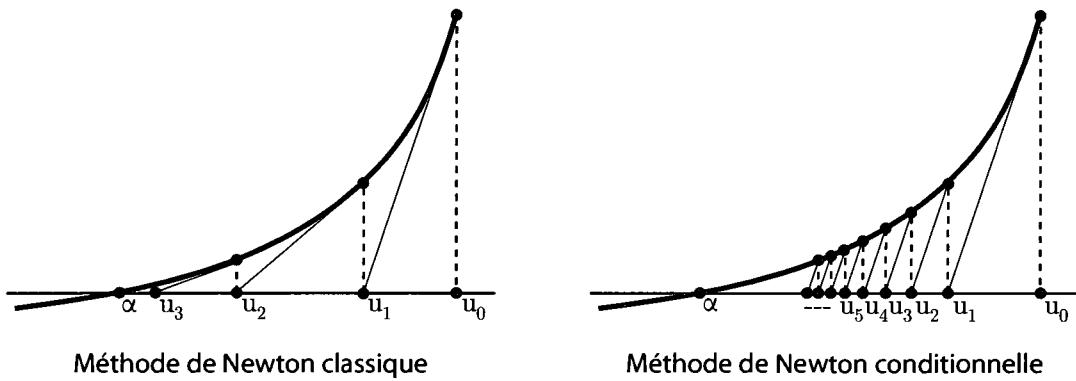


FIG. 3.3 Illustration de la factorisation conditionnelle.

Pour des maillages fins ,  $\bar{\bar{J}}$  est de grande taille; ainsi le temps gagné en ne factorisant pas la matrice jacobienne est bien supérieur à celui perdu pour l'execution d'un plus grand nombre d'itérations. L'expérience montre que cette méthode est très efficace.

Concernant les sensibilités, on observe qu'une formulation de type Galerkin sans stabilisation mène à une matrice jacobienne indépendante du paramètre  $a$  considéré [21]. De ce fait, même si le membre de droite de l'équation (3.19) dépend du paramètre  $a$ , la même matrice jacobienne  $\bar{\bar{J}}$ , factorisée une fois seulement peut être utilisée pour tous les paramètres.

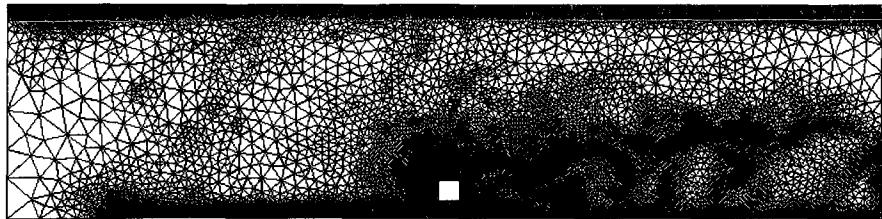
Comparées à la MES, les méthodes adjointes offrent habituellement un avantage indéniable lorsqu'on traite plusieurs paramètres. En effet, il suffit de résoudre un seul problème d'analyse, peu importe le nombre de paramètres mis en jeu. La

MES quant à elle nécessite une résolution du système des sensibilités pour chaque paramètre. Ainsi en ne factorisant qu'une seule fois  $\bar{\bar{\mathbf{J}}}$ , on contourne partiellement cet inconvénient majeur.

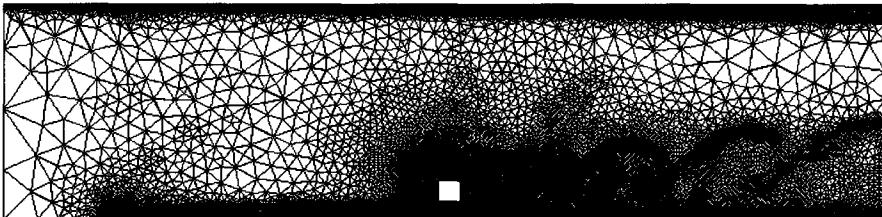
### 3.3.6 Les méthodes de stabilisation

Pour les calculs effectués en régime instationnaire, la méthode de Galerkin suffit pour assurer la convergence de la solution. Ce qui n'est pas toujours le cas pour le régime stationnaire turbulent. Pour palier à ce problème, des méthodes de stabilisation sont utilisées. Elles introduisent des termes de diffusion artificielle dans les équations URANS et du modèle  $k_\epsilon$  pour compenser les termes de convection qui deviennent parfois trop importants. Ils existent plusieurs méthodes : *SU* (Streamline Upwind) [26], *SUPG* (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) [5] ou encore *GLS* (Galerkin Least-Squares) [27]. Le lecteur intéressé pourra se référer à Turgeon cite pour de plus amples détails.

Pour les simulations présentées dans ce mémoire, la stabilisation n'était pas requise pour que la solution converge. Cela dit, la méthode *SUPG*, l'une des moins diffusives, a été quelques fois utilisée pour les gros maillages afin d'obtenir notamment des maillages plus "lisses" en éliminant les "poches" de noeuds locales. En effet la stabilisation appliquée aux écoulements fortement convectifs permet de compenser les effets de diffusion négative induits par la discrétisation de Galerkin. La figure (3.4) illustre ce phénomène sur un maillage de 60000 noeuds environ. En gardant la stabilisation *SUPG*, après un cycle adaptatif additionnel le maillage sera encore plus lisse. On voit bien ici que la stabilisation permet de réduire tout de même les oscillations numériques qui auraient pu conduire encore une fois à une divergence de la solution en régime stationnaire.



(a) Maillage obtenu à partir d'une solution non stabilisée



(b) Maillage obtenu à partir d'une solution stabilisée avec du SUPG

FIG. 3.4 Comparaison de maillages obtenus à partir de solutions non stabilisées et stabilisées

### 3.4 Maillage adaptatif

Le code utilisé présente l'avantage d'adapter le maillage à l'écoulement et/ou aux sensibilités. Ce qui permet entre autres de raffiner le maillage dans les zones critiques du domaine, où les plus fortes variations des variables sont localisées. Ainsi la qualité de la solution sur les cycles de calcul suivant sera améliorée et le temps de calcul nécessaire largement diminué par rapport à un maillage non adaptatif. Nous présenterons dans cette section le fonctionnement de ce processus adaptatif et son évolution pour les simulations en régime instationnaire. Pour de plus amples détails sur le maillage adaptatif, se référer à J. Peraire [44] ou F. Ilinca [29; 41] et pour ses applications [31; 32].

### 3.4.1 Estimation d'erreur

Considérons  $\phi$  et  $\phi_h$  les solutions exactes et éléments finis d'un problème quelconque. L'erreur exacte  $e_{exa}^\phi$  due à la résolution numérique sera donc :

$$e_{exa}^\phi = \phi_h - \phi \quad (3.21)$$

Étant donné que nous ne connaissons pas, dans la majorité des cas, la solution exacte, l'erreur exacte n'est donc pas à notre portée. Pour remédier à ce problème, la méthode de projection locale de Zhu et Zienkiewicz [62; 63] nous permet de calculer une estimation de l'erreur exacte.

Cette méthode est utilisée notamment pour avoir une approximation plus précise des gradients qui nous permettra de définir les normes d'erreur. En effet, si la solution éléments finis d'une variable quelconque est quadratique, alors sa dérivée est linéaire par morceaux. Afin d'obtenir un gradient enrichi, autrement dit représenté par une fonction quadratique, on utilise les données locales récupérées autour d'un noeud  $P$  sur un patch d'éléments, c'est-à-dire une couche d'éléments situés autour du noeud  $P$ .

La figure (3.5) illustre le patch d'éléments autour du noeud considéré ; il forme le sous-domaine  $\Omega_p$ . La méthode de projection locale nous permet donc d'obtenir une solution locale enrichie  $\phi_p^*$  au point  $P$ . Pour plus de détails sur l'obtention de  $\phi_p^*$  le lecteur pourra consulter Zhu et Zienkiewicz [62; 63].

Il s'agit ensuite de calculer une solution enrichie sur tous les noeuds du maillage. Enfin, il suffit de construire un champ global unique  $\tilde{\phi}$  en utilisant la base d'interpolation du maillage. Ainsi pour les noeuds des sommets, on prend directement la valeur nodale calculée, mais pour les noeuds entre les sommets, une moyenne des solutions enrichies des sommets est effectuée. On calcule donc  $\tilde{\phi}$  par une interpo-

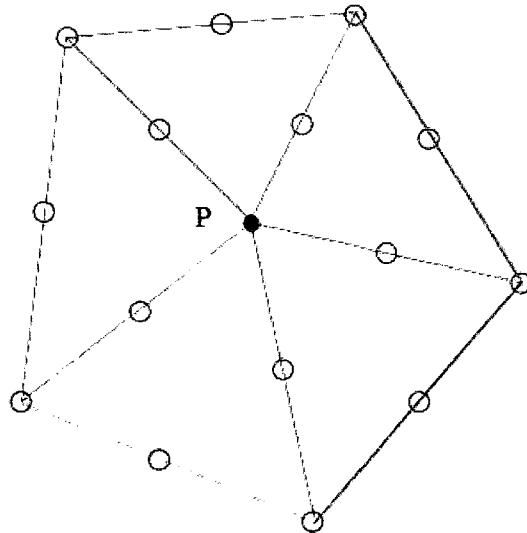


FIG. 3.5 Sous-domaine  $\Omega_p$  utilisé pour la projections locales

lation des valeurs nodales :

$$\tilde{\phi} = \sum_i^n N_i \tilde{\phi}_i \quad (3.22)$$

où  $N_i$  représente les fonctions d'interpolation.  $\tilde{\phi}$  étant calculée, il est désormais possible d'obtenir une estimation de l'erreur exacte, essentielle pour le processus d'adaptation de maillage, c'est ce que le paragraphe suivant détaille.

### 3.4.2 Normes d'erreur

Plutôt que de calculer une estimation d'erreur nodale, il est préférable de la calculer directement sur les éléments. La somme des estimations d'erreur ainsi calculée donnera l'erreur globale sur le domaine de calcul  $\Omega$ . On introduit alors la définition de normes d'erreur. Cinq normes, calculées à partir des variables suivantes, sont nécessaires :  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mu_t$ .

Pour le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ , nous utilisons la **norme énergie**, basée sur la double contraction du tenseur des contraintes visqueuses. Sa norme est définie ainsi :

$$\| \mathbf{e}^u \| ^2 = \int_{\Omega} (\tau_h - \tilde{\tau}) : (\tau_h - \tilde{\tau}) d\Omega \quad (3.23)$$

Pour les sensibilités, la norme d'erreur s'obtient en remplaçant  $\tau$  par  $\mathbf{s}_\tau$  :

$$\| \mathbf{e}_u^s \| ^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{s}_{\tau_h} - \tilde{\mathbf{s}}_\tau) : (\mathbf{s}_{\tau_h} - \tilde{\mathbf{s}}_\tau) d\Omega \quad (3.24)$$

Pour les variables  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mu_t$ , on préfère la **semi-norme**  $H^1(\Omega)$ . Un tel choix est justifié par le fait que nous souhaitons obtenir une erreur basée uniquement sur les gradients qui sont des quantités sensibles et entachées d'erreurs.

$$\| \mathbf{e}^{\mathcal{K}} \| ^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{K}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{K}}) : (\nabla \mathcal{K}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{K}}) d\Omega \quad (3.25)$$

$$\| \mathbf{e}^{\mathcal{E}} \| ^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{E}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{E}}) : (\nabla \mathcal{E}_h - \widetilde{\nabla \mathcal{E}}) d\Omega \quad (3.26)$$

$$\| \mathbf{e}_t^\mu \| ^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mu_{t_h} - \widetilde{\nabla \mu_t}) : (\nabla \mu_{t_h} - \widetilde{\nabla \mu_t}) d\Omega \quad (3.27)$$

Enfin pour la pression, nous avons choisi la **norme**  $H^1(\Omega)$  :

$$\| \mathbf{e}^p \| ^2 = \int_{\Omega} (\nabla p_h - \widetilde{\nabla p}) : (\nabla p_h - \widetilde{\nabla p}) d\Omega \quad (3.28)$$

### 3.4.3 Calcul de la taille optimale d'un élément

La dernière étape pour le remaillage adaptatif, après le calcul des normes d'erreur, est le calcul d'une taille optimale pour chaque élément. En effet, à la fin d'un cycle adaptatif, les différents champs de la solution sont utilisés pour le calcul des normes d'erreur estimées, ces dernières étant utilisées à leur tour pour la détermination de la taille optimale des éléments qui constitueront le nouveau maillage au cycle suivant, ce qui permettra ainsi de diminuer les erreurs dans les régions du domaine qui le nécessitent.

Le paragraphe précédent, présentait le calcul des normes d'erreur élémentaires. Pour connaître la norme d'erreur sur l'ensemble du domaine, il suffit alors de sommer les normes élémentaires :

$$\| \mathbf{e} \|_{\Omega}^2 = \sum_{K=1}^N \| \mathbf{e} \|_K^2 \quad (3.29)$$

où  $K$  correspond à l'élément courant et  $N$  au nombre d'éléments dans le domaine.

Dans la partie du code correspondant à l'adaptation de maillage, l'utilisateur choisit une valeur  $\xi$  correspondant au facteur de réduction de l'erreur courante :

$$\| \mathbf{e}_{cible} \|_{\Omega}^2 = \xi \| \mathbf{e}_{courante} \|_{\Omega}^2 \quad (3.30)$$

où  $0 < \xi \leq 1$ .

On utilise alors l'erreur cible pour déterminer la taille optimale de l'élément :

$$\delta_K = \left( \frac{\xi \| \mathbf{e} \|_{\Omega}^2}{\| \mathbf{e} \|_K^2 \sqrt{N}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} h_K \quad (3.31)$$

De plus amples détails sur l'obtention de cette égalité sont donnés dans Turgeon [54]. Cette relation lie la taille optimale de l'élément,  $\delta_K$ , à la taille de l'élément courant,  $h_K$ .  $\alpha$  représente le taux de convergence.

Cette taille optimale est calculée pour tous les éléments et à partir de toutes les normes d'erreur présentées au paragraphe précédent, que ce soit pour l'écoulement ou les sensibilités. Un maillage adapté uniquement à partir des normes d'erreurs de l'écoulement ne serait pas nécessairement le même, si le calcul de la taille optimale des éléments se faisait aussi à partir des normes d'erreur des sensibilités.

La distribution de l'erreur sur le domaine diffère selon la norme d'erreur utilisée. Par exemple, les zones où la norme d'erreur pour la pression est la plus importante, ne seront pas nécessairement identiques à celles où les normes d'erreur pour la vitesse ou les variables du modèle  $k - \epsilon$  sont les plus grandes. Donc, pour chaque élément la norme d'erreur la plus coercitive quant à la taille optimale sera privilégiée. Autrement exprimé :

$$\delta_K = \min\{\delta_K^u, \delta_K^p, \delta_K^k, \delta_K^\epsilon, \delta_K^{\mu_t}, \delta_K^{s_u}, \dots\} \quad (3.32)$$

### 3.5 Évolution du maillage adaptatif

Dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire, une évolution significative a été apportées à la stratégie de remaillage adaptatif afin de permettre une prise en compte du paramètre temps. En effet, pour les phénomènes instationnaires, le champs des variables au temps  $t^n$  étant différent de celui calculé au temps  $t^{n+1}$ , les maillages obtenus à partir du calcul de la taille optimale de chaque élément devraient ainsi être différents à ces deux instants distincts.

Jusqu'ici les simulations faites en instationnaire<sup>[24]</sup> pour le régime laminaire étaient réalisées à partir d'une solution obtenue initialement en régime stationnaire et aussi utilisée pour le maillage du cycle adaptatif suivant.

Les travaux réalisés aux cours de cette maîtrise ont permis ainsi de partir d'un champs de variables initialement nul (sauf pour les variables du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  pour lesquelles une valeur aléatoire mais réaliste doit être imposée dans tout le domaine) et de lancer l'ensemble des cycles adaptatifs en régime instationnaire directement. Cette première remarque est importante car même pour des phénomènes tendant vers un état stationnaire, la **transition** vers cet état peut-être intéressante à étudier. Les cas présentés au chapitre suivant en sont des exemples. Ainsi un maillage qui s'adapte aux instants  $t^i$  discrétilisant cette période de transition permettra de **diminuer** le nombre d'itérations de Newton-Raphson nécessaires pour la convergence de la solution aux instants  $t^{i+1}$  suivants et surtout de **s'affranchir** de l'utilisation *d'une méthode de stabilisation très diffusive*, comme la méthode *SU* (cf 3.3.6), mais parfois nécessaire pour assurer la convergence en régime stationnaire.

De plus, et c'est là le point essentiel de cette évolution, pour les simulations modélisant des **phénomènes complètement instationnaires** avec notamment

le déplacement organisé de structures tourbillonnaires au cours du temps, le maillage peut désormais "suivre" l'évolution, c-a-d s'adapter au déplacement de ces structures. Ce qui permet, par exemple dans le cas d'**allée de Von Karman** derrière un cylindre, de ne pas raffiner **tout le sillage** indépendamment de la localisation des **tourbillons**, mais de concentrer les éléments du maillage dans les zones critiques du domaine qui évoluent dans le temps. Cette **stratégie adaptative et évolutive** permet d'améliorer la qualité de la solution finale et de gagner du temps sur la convergence des solutions aux temps intermédiaires. Enfin, dans les cas où l'on a besoin de "lisser" le maillage, et donc d'utiliser de la stabilisation peu diffuse comme la méthode *SUPG*, l'utilisation de la stratégie présentée ci-dessus, permet de diminuer le nombre de noeuds nécessaires pour qu'une telle stabilisation donne les résultats escomptés.

La même stratégie est suivie pour le calcul des sensibilités. Il a fallu pour ce faire prévoir l'interpolation des champs de valeurs des sensibilités d'un cycle adaptatif à l'autre. Cela dit comme nous l'avons expliqué à la section 2.2.1, les valeurs des sensibilités n'étant pas bornées en temps, une adaptation de maillages basée sur les normes d'erreurs des variables de sensibilités peut s'avérer non pertinente dans la mesure où l'écoulement serait alors "lésé" : car le traitement des sensibilités serait alors prioritaire pour réduire leurs normes d'erreur.

Aussi, il faut être conscient que toute interpolation des variables d'un cycle d'adaptation à l'autre apporte une erreur dans la conservation de la masse ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) qui ne se corrige qu'au pas de temps suivant.

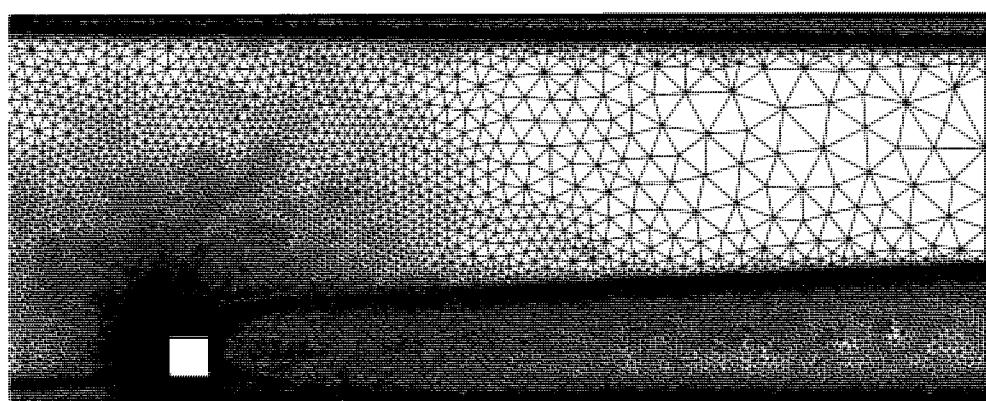
De plus, cette stratégie d'adaptation étant tout de même gourmande en ressource, il est essentielle d'estimer avant le lancement de la simulation sur quelle période temporelle les cycles d'adaptation seront exécutés :

- Pour des problèmes présentant des périodes de transition comme le cas de la marche de Kim, les cycles d'adaptation se feront sur des périodes plus ou moins longues. Par exemple, au passage du fluide au niveau de la marche il est important de capter le phénomène complexe et très dépendant du temps. Donc une adaptation de maillage tous les  $n_1$  pas de temps sera nécessaire. Tandis qu'à partir d'un certain temps, la zone de recirculation étant quasiment formée, et l'écoulement s'établissant peu à peu de façon définitive, une adaptation de maillage tous les  $n_2 > n_1$  suffira amplement.
- Pour les cas à motifs périodiques de tourbillons, il faut connaître approximativement la période du phénomène (période d'un lâcher de tourbillon) pour déterminer le nombre de cycles d'adaptation nécessaires. Dans le cas du cylindre en milieu infini pour  $Re = 10000$ , le lâcher d'un tourbillon s'effectue tous les  $t * U_0/D = 5$  donc une vingtaine de cycles d'adaptation seront nécessaire. Bien sûr plus le nombre de cycles sera important meilleure sera la précision de la solution, mais là encore un compromis qualité/coût de simulation est à prendre en compte. Sachant que plus le tourbillon est décalé par rapport au maillage plus la solution se dégrade. En effet, si le maillage est adapté à  $t^n$  et qu'on ne l'adapte à nouveau à l'écoulement qu'au temps  $t^{n+1} = t^n + 2$ , la zone critique de forts gradients (localiser à la périphérie des tourbillons) se sera déplacée de  $(x(t^n)/D < x < x(t^{n+1})/D)$  sans que le maillage n'ait suivi l'évolution. Donc sur cette distance de parcours d'un tourbillon donné le maillage n'aura pas été raffiné de façon optimale ce qui dégradera la solution.

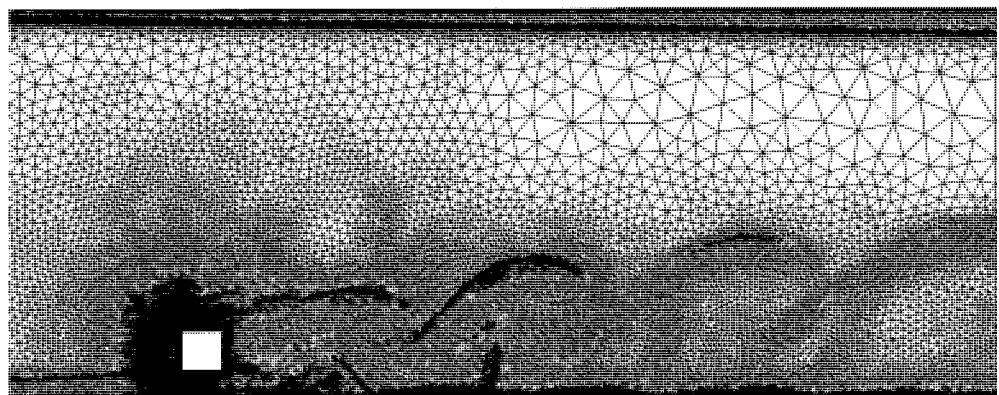
Enfin, pour conclure, la figure (3.6) illustrent les maillages obtenus à la suite de simulations effectuées en régime stationnaire et instationnaire. Sur la figure (3.6 (b)) l'adaptation du maillage est clairement effectué sur les structures tourbillonnaires.

Cette section conclut ce chapitre qui a permis notamment de présenter l'algorithme global de résolution implémenté dans le code de calcul, d'aborder la méthode des éléments finis et de détailler enfin le processus de maillage adaptatif et son évolution pour les simulations instationnaires.

Les chapitres suivants sont consacrés premièrement, à la vérification du code par une solution analytique calculée sur un cas simple, puis à une vérification de simulations sur des cas calculés précédemment en régime stationnaire, et enfin à son application sur des cas présentant des sillages de tourbillons symétriques et asymétriques.



(a) Maillage obtenu au cycle adaptatif suivant une simulation en régime stationnaire



(b) Maillage obtenu au cycle adaptatif suivant une simulation en régime instationnaire

FIG. 3.6 Comparaison de maillages de 300 000 noeuds environ, obtenus pour les deux régimes : stationnaire (a) et instationnaire (b)

## CHAPITRE 4

### VÉRIFICATION ET VALIDATION

Le chapitre 2 a permis de poser les bases de la théorie, en présentant notamment les équations mises en jeu (URANS et modèle  $k-\epsilon$ ), le traitement particulier requis au niveau des parois solides et enfin la méthode des sensibilités. Le chapitre suivant a permis quant à lui de détailler l'algorithme de résolution suivi et d'introduire la méthode des éléments finis permettant de résoudre les équations citées ci-dessus. Le chapitre s'est refermé sur les avantages de la stratégie de maillages adaptatifs qui a été mise à jour pour les problèmes instationnaires. Au travers de ce nouveau chapitre, nous allons maintenant nous assurer que l'implémentation des équations dans notre code d'éléments finis est vérifiée au sens de Roache [47] sur un problème ayant une solution analytique. Il s'agira de montrer alors que la solution numérique tend vers la solution exacte et que leurs normes d'erreurs convergent de la même façon en fonction de la taille du maillage. La solution analytique considérée est celle de la décroissance de la turbulence de grille.

Le code sera enfin validé avec deux cas déjà traités en régime stationnaire afin, notamment, de s'assurer de la reproductibilité des résultats. Les cas choisis présentent tous deux une période de transition avant que l'écoulement ne s'établisse de façon définitive. Il s'agit de la marche de Kim [29; 57; 36] et d'un cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane (garde au sol de 0.25) étudié par Wu et Martinuzzi [59]. A la suite de ce chapitre, nous présenterons des applications aux écoulements purement instationnaires et turbulents.

## 4.1 Vérification : décroissance de la turbulence de grille

Le code ayant été préalablement vérifié en régime turbulent stationnaire grâce à la Méthode des Solutions Manufacturées [47] par Turgeon [55] et en régime laminaire instationnaire par H.Hristova [24], un problème simple mais réaliste a été choisi pour parfaire la vérification en régime turbulent instationnaire.

### 4.1.1 Définition du problème

Pour ce problème, le fluide est uniforme ( $U_0 = 1, V_0 = 0$ ) et les termes de production et de diffusion sont négligés en fixant des valeurs extrêmement faibles aux viscosités  $\mu = 1.10^{-6}$  et  $\mu_t = 1.10^{-7}$ . Les équations de transport pour les variables  $k$  et  $\epsilon$  sont ainsi réduites à :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right) &= -\rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \\ \rho \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right) &= -C_2 \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

La solution analytique est alors donnée par :

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ \mathcal{K} &= \ln \left( \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \left[ (C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{1}{C_2-1}} \right) \\ \mathcal{E} &= \ln \left( \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \left[ (C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \right) \end{aligned}$$

où  $k_0 = 1.10^{-4}$ ,  $\epsilon_0 = 9.10^{-3}$  et  $C_2 = 1.92$ . Il faut noter aussi que les solutions analytiques ne dépendent pas du temps. Les simulations seront donc faites pour des périodes de temps suffisamment grandes pour que l'écoulement soit établi.

#### 4.1.2 Domaine de calcul et conditions limites

$k_0$  et  $\epsilon_0$  sont les valeurs de l'énergie cinétique de turbulence et de sa dissipation en entrée du domaine à  $x = 0$ . Le domaine de calcul est de forme rectangulaire, de dimension 1 en longueur et 0.2 en hauteur. Les conditions limites sur toutes les frontières du domaine sont données dans le tableau ci-dessous :

Entrée	frontières supérieure et inférieure	sortie
$U_0 = 1$	$p = 0$	$p = 0$
$V_0 = 0$	$V = 0$	$p = 0$
$\mathcal{K}_0 = \ln(1.10^{-4})$	$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} = 0$
$\mathcal{E}_0 = \ln(9.10^{-3})$	$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 0$

Les calculs sont faits pour l'écoulement et ses sensibilités par rapport aux paramètres  $k_0$ ,  $\epsilon_0$  et  $C_2$ . Le détail des calculs pour l'obtention des sensibilités de la solution analytique est donnée à l'annexe II. Nous ne présenterons ici que les résultats pour les sensibilités par rapport à  $k_0$  et  $C_2$ .

### 4.1.3 Résultats

On se place à  $y = 0.1$  pour observer la décroissance des variables de la turbulence. Les figures (4.1) et (4.2) comparent les résultats numériques et analytiques obtenus pour l'écoulement et les sensibilités par rapport au paramètre  $C_2$ . Solutions numériques et analytiques sont si proches qu'elle se confondent.

On remarque que sur la figure (4.2) le paramètre  $C_2$  diminue la décroissance de  $\mathcal{K}$  de l'entrée jusqu'à la sortie du domaine, tandis qu'il augmente la décroissance de  $\mathcal{E}$  jusqu'à  $x = 0.04$  environ pour ensuite la faire diminuer au même titre que celle de  $\mathcal{K}$ . Ces remarques nous servirons à la sous-section suivante 4.1.3.1.

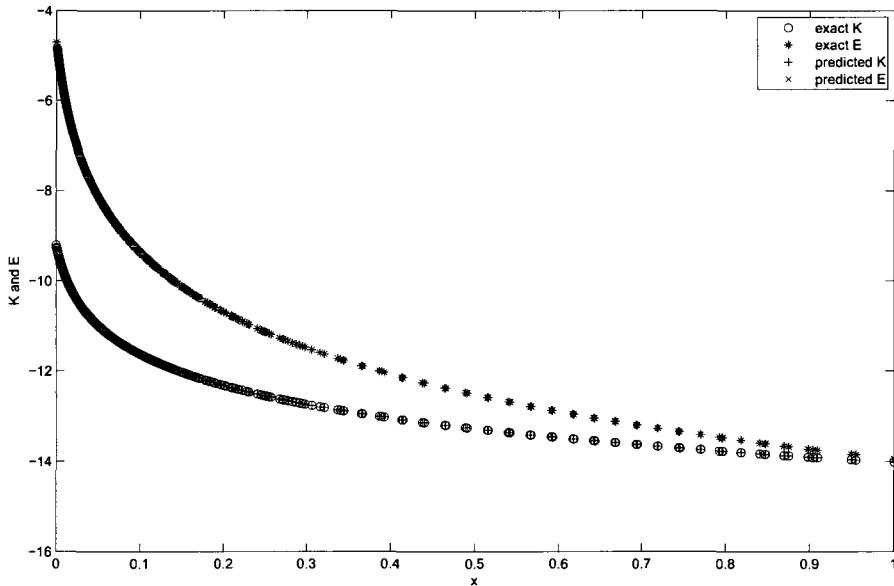


FIG. 4.1 Solutions numériques et analytiques pour  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$

Comme on peut l'imaginer à partir de la concentration des points sur les courbes, les éléments du maillage final sont concentrés en entrée du domaine. En effet, les gradients des variables de turbulence étant très forts en entrée, le maillage

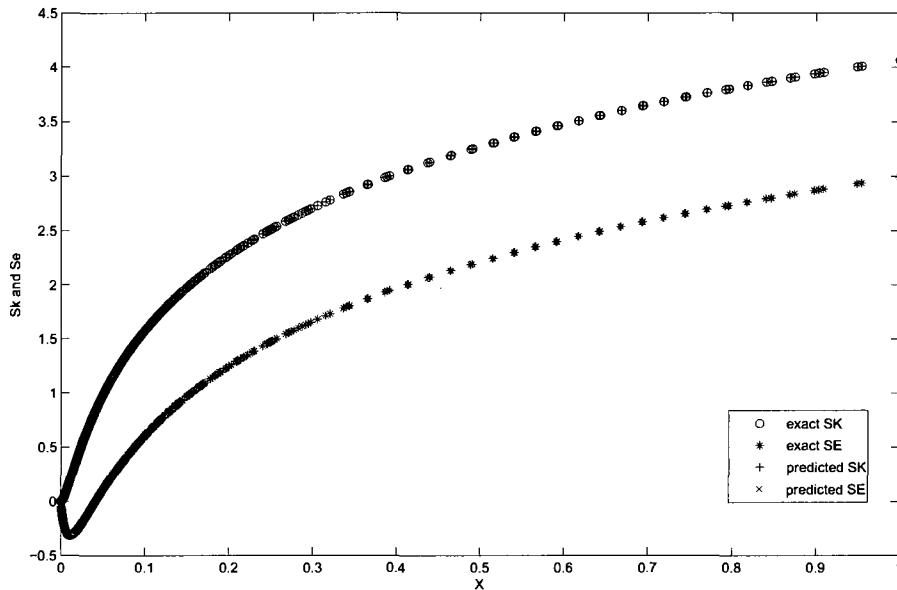


FIG. 4.2 Solutions numériques et analytiques pour les sensibilités de  $S_K$  et  $S_E$  par rapport au paramètre  $C_2$

se concentre dans cette zone. On voit d'ailleurs l'un des avantages de la forme logarithmique des équations du modèle de turbulence telle que présentée à la section 2.1.2.3 : les valeurs de  $k$  et  $\epsilon$  sont lissées. D'ailleurs, comme le rapporte F.Ilinca [33], sans l'utilisation des variables logarithmiques, la solution ne converge pas.

Il est de plus essentiel dans le cadre de la vérification d'étudier les taux de convergence des solutions présentées. Le calcul des normes d'erreur présenté au 3.4.2 joue ici un rôle important.

#### 4.1.3.1 Analyse de convergence

Les normes d'erreur présentées à la figure (4.3) sont calculées pour les variables  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ . Le maillage initial est de 74 noeuds ; le maillage final en compte 331111.

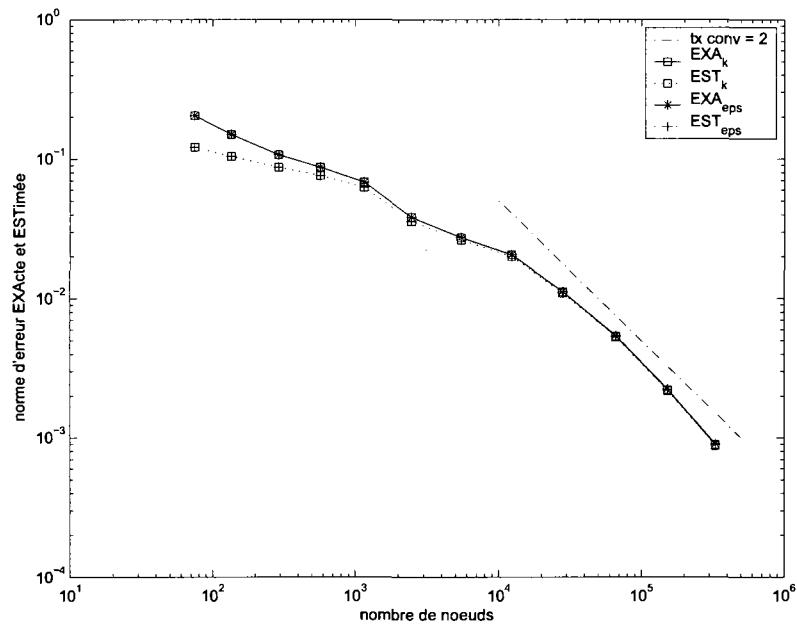


FIG. 4.3 Normes d'erreur pour  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  pour des maillages adaptés exclusivement à l'écoulement

Les normes d'erreur exactes et estimées convergent à l'identique. La norme de l'erreur exacte est réduite d'un facteur cent entre le maillage initial et le maillage final. Il est important de noté qu'ici le maillage a été adapté exclusivement pour l'écoulement. A titre de comparaison, la figure (4.4) présente les mêmes normes d'erreurs calculées sur des maillages adaptés à l'écoulement **et aux sensibilités**. Pour les sensibilités, le paramètre  $C_2$  est étudié. Les maillages seront donc adaptés sur les normes d'erreur des variables  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  de l'écoulement, **plus** celles des variables  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$  et  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$  des sensibilités.

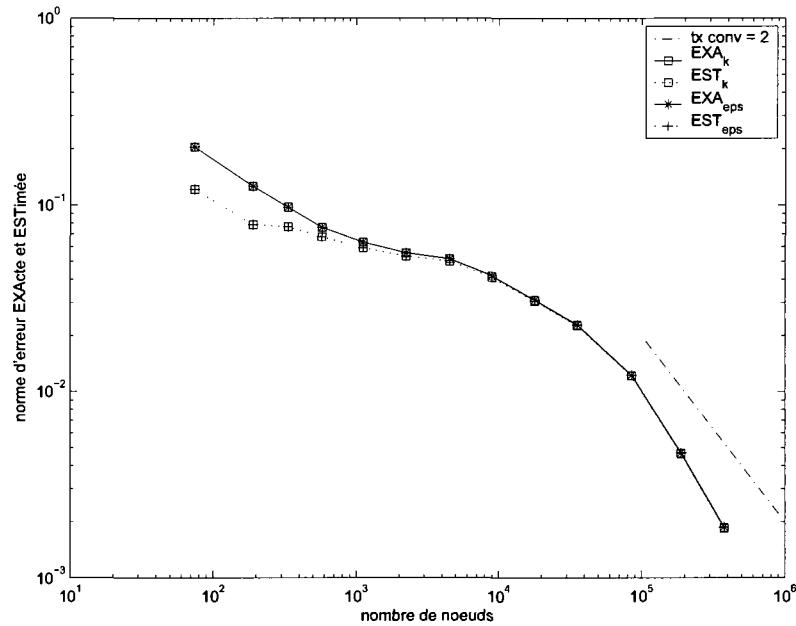


FIG. 4.4 Normes d'erreur pour  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  pour des maillages adaptés à l'écoulement et aux sensibilités

Il y a quatre points importants à noter sur la figure (4.4) :

1. Les normes d'erreur exactes et numériques convergent toujours de la même façon.
2. Pour des maillages de moins de 2000 les taux de convergence des normes d'erreur sont plus grands que ceux présentés à la figure (4.3).
3. Pour des maillages plus fins les normes d'erreur de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  calculées sur les maillages adaptés aux sensibilités et l'écoulement (figure 4.4) prennent de plus grandes valeurs que celles calculées sur des maillages adaptés exclusivement à l'écoulement (figure 4.3)
4. Enfin, pour les maillages compris entre 1119 et 4547 noeuds, les normes d'erreur de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  semblent stagner autour de 0.045.

Les remarques 2 et 4 mettent en exergue un point essentiel de la stratégie de maillages adaptatifs présentée au 3.4 : **un maillage adapté pour les sensibilités ne l'est pas forcément pour l'écoulement** [42].

Plus concrètement, le paramètre  $C_2$  augmente la convection d' $\mathcal{E}$  et donc diminue le transport de l'énergie turbulente  $\mathcal{K}$ , ce qui se voit d'ailleurs très bien sur la figure (4.2) présentée ci-dessus et a fait l'objet d'une de nos remarques. Donc l'influence de  $C_2$  sur l'adaptation du maillage sera de privilégier encore plus l'entrée du domaine, en ce qui concerne la concentration des mailles, car le gradient d' $\mathcal{E}$  augmente jusqu'à  $x = 0.02$  environ. Ainsi **à nombre de noeuds équivalents**, un maillage adapté sur les sensibilités pour le paramètre  $C_2$  sera **plus concentré à l'entrée** du domaine qu'un maillage exclusivement adapté pour l'écoulement. La figure (4.5) illustre très bien cette dernière remarque. Cette influence est très positive pour les premiers maillages car l'entrée du domaine constitue la zone la plus critique. C'est pour cela d'ailleurs, que les valeurs des normes d'erreur sur la figure(4.4) convergent plus rapidement vers 0.06. Cependant, comme le suggère la remarque 3 faite ci-dessus, les normes d'erreur sur des maillages exclusivement adaptés à l'écoulement, finissent par prendre des valeurs plus faibles à partir de 2000 noeuds, environ. On peut donc en conclure qu'à partir de ce nombre de noeuds, les maillages adaptés pour les sensibilités et l'écoulement sont moins "performants" que ceux adaptés exclusivement sur l'écoulement. De plus amples explications sont données au paragraphe suivant.

Enfin la figure (4.6) présente les courbes d'erreurs pour les sensibilités. Là encore, solutions numériques et analytiques convergent ensemble. Cela dit il faut remarquer que la courbe des normes d'erreur de  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$  remonte légèrement sur les deux derniers maillages pour atteindre la courbe des normes d'erreur de  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$ . Cela va dans le sens de la remarque 4 faite ci-dessus et peut s'expliquer ainsi : comme nous l'avons dit précédemment, une augmentation du paramètre

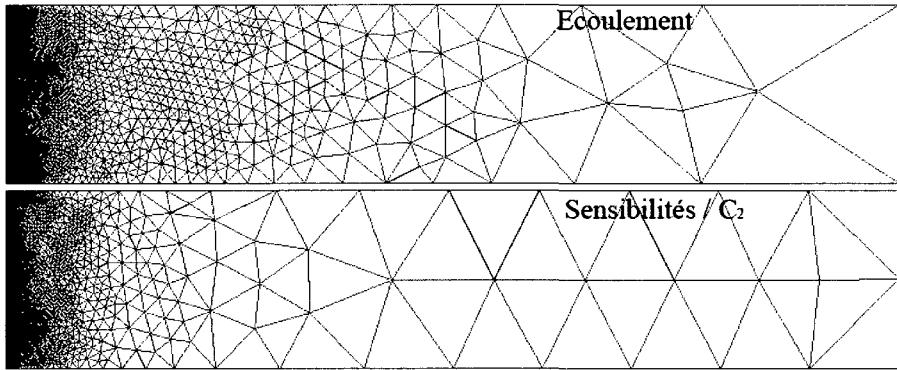


FIG. 4.5 Comparaison de maillages adaptés aux sensibilités et à l’écoulement (10000 noeuds environ)

$C_2$  s’oppose à la décroissance de  $\mathcal{K}$ , mais renforce par contre la décroissance d’ $\mathcal{E}$ . Donc sur un élément donné du maillage, la norme d’erreur la plus contraignante quant au calcul de la taille optimal de l’élément au prochain cycle adaptatif, sera celle de  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$ . Par conséquent le maillage suivant sera principalement adapté pour  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$ , et ainsi de suite, jusqu’à ce que normes d’erreur de  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$  et  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$  soient aussi contraignantes. Une manière probablement moins absconse de le dire serait de revenir très brièvement sur le fonctionnement du remaillage adaptatif : le remaillage adaptatif marche suivant le principe d'**équi-répartition** de l’erreur. La norme d’erreur cible (cf Eq 3.30) sur le prochain maillage est fixé par l’utilisateur (avec le paramètre  $\xi$ ) et par la norme d’erreur de l’élément présentant la valeur la plus élevée parmi tous les autres éléments. Forts de cette explication, nous comprenons, maintenant que les éléments compris entre  $x = 0$  et  $x = 0.02$  et qui présentent les normes d’erreur les plus élevées ( $\| \mathbf{e}^{S_{\mathcal{E}}^{C_2}} \|$ ) imposeront l’erreur cible pour le prochain cycle adaptatif. Or comme le montre les figures (4.4) et (4.6(a)) les normes d’erreurs de  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$  sont bien moins importantes que celles de  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$ . Donc les zones où  $\| \mathbf{e}^{\mathcal{K}} \|$ ,  $\| \mathbf{e}^{\mathcal{E}} \|$  et  $\| \mathbf{e}^{S_{\mathcal{K}}^{C_2}} \|$  sont les plus fortes, qui ne sont pas encore une fois les mêmes zones où  $\| \mathbf{e}^{S_{\mathcal{E}}^{C_2}} \|$  est maximale ”devront attendre” que

la norme d'erreur globale atteigne leur normes pour que le mailleur vienne raffiner chez elles. Pour conclure avec le paramètre  $C_2$ , pour les premiers maillages son influence est positive, car c'est à l'entrée que toutes les normes sont maximales, par contre pour les maillages suivant toutes les variables sauf  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$  requièrent plus d'éléments dans la zone  $x > 0.02$  mais leur traitement n'est pas prioritaire car dans la zone  $x < 0.02$ ,  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$  présente une norme d'erreur nettement plus importante.

Par contre une augmentation du paramètre  $k_0$ , diminuera simultanément la décroissance d' $\mathcal{E}$  et de  $\mathcal{K}$ , ce qui explique que leurs normes d'erreur numériques ou analytiques soient identiques sur la figure (4.6b).

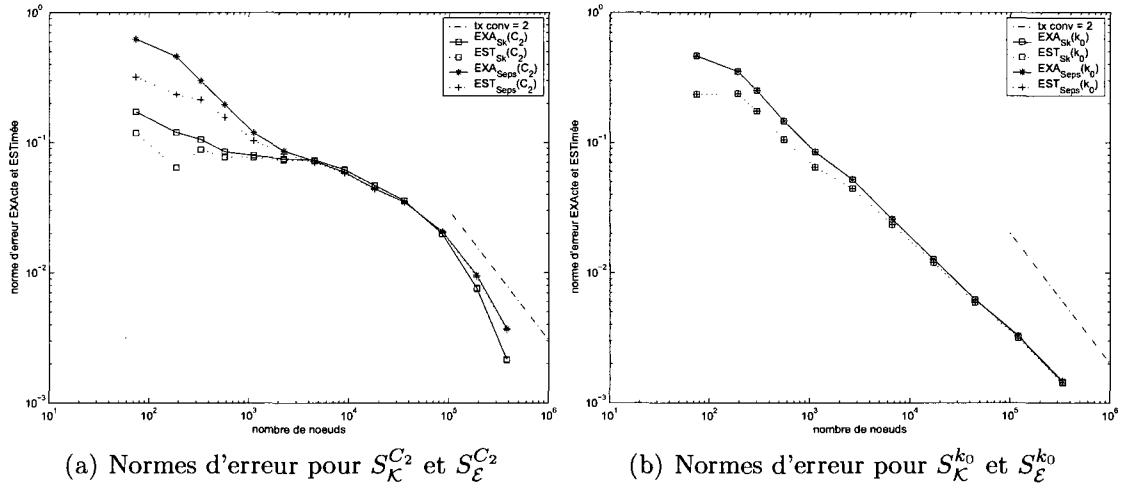


FIG. 4.6 Normes d'erreur pour  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$  et  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$  ainsi que  $S_{\mathcal{K}}^{k_0}$  et  $S_{\mathcal{E}}^{k_0}$

Enfin on ne pourrait conclure cette analyse de convergence sans un bref rappel du taux de convergence. Dans la zone asymptotique du schéma éléments finis, le taux de convergence théorique d'un élément est donné par :

$$\| \mathbf{e} \| = ch^\alpha \quad (4.2)$$

où  $h$  et  $\alpha$  sont respectivement la taille de l'élément et le taux de convergence.  $c$  est une constante. Or comme le nombre de noeuds  $N$  est inversement proportionnel au carré de la taille de l'élément, on trouve :

$$\| \mathbf{e} \| = \left( \frac{c}{\sqrt{N}} \right)^\alpha \quad (4.3)$$

Pour un élément de type Taylor-Hood (cf 3.3.2) le taux de convergence est égal à deux. Par conséquent la norme d'erreur est inversement proportionnelle au nombre de noeuds. A partir des figures (4.3) et (4.6) nous avons pu constater les taux de convergence suivant :

$\mathcal{K}$	$\mathcal{E}$	$S_{\mathcal{K}}^{k_0}$	$S_{\mathcal{E}}^{k_0}$	$S_{\mathcal{K}}^{C_2}$	$S_{\mathcal{E}}^{C_2}$
2.05	2.05	1.60	1.60	2.95	2.35

Il en ressort que :

- pour l'écoulement, les taux de convergence sont proches de la théorie
- pour les sensibilités par rapport à  $k_0$  les taux de convergence restent raisonnables
- pour les sensibilités par rapport à  $C_2$ ,  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$  "profite" d'un taux de convergence très correct, tandis que  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$  présente une hyper-convergence. L'explication a été donnée plus haut dans cette sous section.

Il faut toutefois rappeler que cette théorie est nettement plus appropriée aux maillages structurés, où la taille des éléments est unique.

#### 4.1.3.2 Indice d'efficacité

Pour conclure l'étude faite sur le cas de la décroissance de grille, intéressons nous à l'indice d'efficacité de l'ensemble des variables. Cet indice permet d'évaluer le

rapport de la norme de l'erreur estimée sur celle de l'erreur exacte :

$$\Theta_\phi = \frac{\|\mathbf{e}^\phi\|_{\text{estimée}}}{\|\mathbf{e}^\phi\|_{\text{vraie}}} \quad (4.4)$$

où  $\phi$  est une variable quelconque.

La figure (4.7) illustre les indices d'efficacité des variables de turbulence et de leurs sensibilités par rapport aux paramètres  $C_2$  et  $k_0$ . Plus le maillage est important plus l'indice d'efficacité tend vers un. On remarque aussi que d'un côté, pour l'écoulement, les indices d'efficacité de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  sont identiques, et pour les sensibilités par rapport à  $k_0$ , ceux de  $S_{\mathcal{K}}^{k_0}$  et  $S_{\mathcal{E}}^{k_0}$  le sont aussi. Tandis que pour les sensibilités par rapport à  $C_2$ , les indices d'efficacité de  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$  et  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$  sont bien distincts. Cela s'expliquerait toujours par la remarque faite au paragraphe précédent :  $C_2$  a des influences antagoniques sur  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ .

En conclusion, l'étape de vérification de code est concluante, puisque les solutions exactes et numériques sont identiques, elles convergent de la même façon avec des taux proches du taux de convergence optimal. Enfin les indices d'efficacité se situent entre 0.97 et 0.99, ce qui est proche de un.

## 4.2 Vérification de simulations : marche de Kim et cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane

La section précédente a permis de vérifier le code d'éléments finis par une solution analytique. Nous allons maintenant confronter les résultats obtenus par nos simulations en instationnaire avec des résultats issus de précédentes versions du code, où les calculs en régime turbulent ne pouvaient être faits en transitoire. Le premier cas choisi est celui de la marche de Kim étudié notamment par Turgeon [55] et Ilinca [29]. Le second cas est le cylindre à section carrée placé dans un conduit à

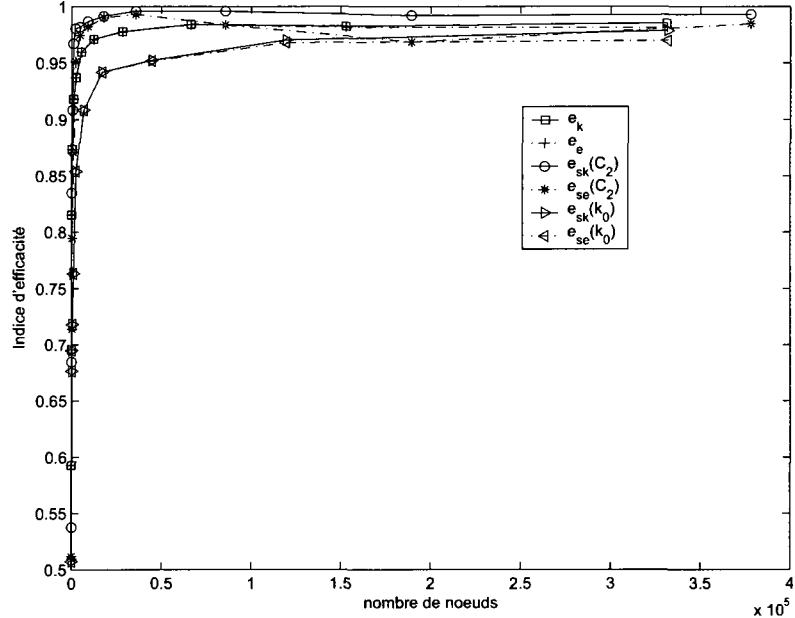


FIG. 4.7 Indices d'efficacité de  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $S_{\mathcal{K}}^{C_2}$ ,  $S_{\mathcal{E}}^{C_2}$ ,  $S_{\mathcal{K}}^{k_0}$  et  $S_{\mathcal{E}}^{k_0}$

$0.25D$  d'une plaque plane. Il a été étudié par Di Caro [10].

#### 4.2.1 Vérification de simulations 1 : marche de Kim

##### 4.2.1.1 Domaine et conditions limites

Cette marche a été étudiée expérimentalement par Kim en 1978. Le nombre de Reynolds est fixé à  $Re = 47625$ . Le domaine de calcul est présenté dans la figure ci-dessous : On impose à l'entrée et à la sortie du domaine les conditions limites suivantes : La distance à la paroi  $d$  est choisie de telle sorte que  $y^+$  soit dans l'intervalle de validité ( $30 \leq y^+ \leq 300$ ) pour la loi de paroi. Les distances retenues pour chaque paroi sont données dans le tableau (4.2).

L'écoulement est démarré impulsivement dans le domaine, et le schéma de

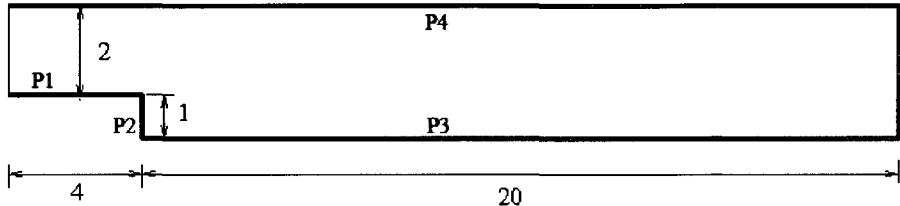


FIG. 4.8 Domaine de calcul

Entrée	Sortie
$U_0 = 1$	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$
$V_0 = 0$	$V = 0$
$k = 0.005$	$\left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$
$\epsilon = 0.01$	$\left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$

TAB. 4.1 Conditions limites imposées à l'entrée et la sortie du domaine

Paroi	Distance $d$
1	0.04
2	0.05
3	0.025
4	0.05

TAB. 4.2 Distance  $d$  à la paroi pour toutes les frontières solides

discrétisation temporelle Euler rétrograde (cf 3.2) assure l'équation de continuité ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) dès le second pas de temps avec un débit à l'entrée constant.

#### 4.2.1.2 Cycles adaptatifs

Nous présentons ici l'un des avantages de la nouvelle stratégie adaptative présentée au chapitre précédent. Pour des problèmes présentant des périodes de transition comme ce cas-ci, adapter le maillage à l'évolution de l'écoulement présente plusieurs avantages. En effet, le maillage final est parfaitement adapté à l'écoulement : le mailleur raffine et délaisse au fur et à mesure les zones temporairement critiques, ce qui fait qu'à la fin de la simulation la norme d'erreur globale constatée est inférieure à celle obtenue sans ce processus. A titre de comparaison, le maillage final de Turgeon *et al.* [55] montré à la figure (4.9) délaisse complètement les parois à l'amont de la marche, ainsi que la paroi supérieure.

La figure (4.10) présente les maillages et les isolignes de  $U$  obtenus à trois instants

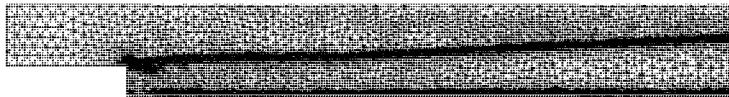


FIG. 4.9 Maillage final présenté dans Turgeon *et al.* [55]

distincts,  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_f$ . Le maillage initial compte 41496 noeuds et le final 78503. Le cycle adaptatif a été répété trente fois.

Les cycles adaptatifs où l'écoulement arrive sur la marche sont faits sur des périodes de temps plus petites afin de capter au mieux le phénomène instationnaire. Par contre au fur et à mesure que le fluide avance vers la sortie du domaine, les cycles adaptatifs se font sur des périodes plus longues car l'écoulement est quasiment établi et donc sa dépendance par rapport au temps est nettement moins marquée.

A  $t = 0$ , les conditions limites sont imposées, le fluide alors au repos commence à se mettre en mouvement.

A  $t = 1$ , le fluide passe la marche : on remarque d'ailleurs que le maillage est très raffiné au niveau de la marche, et que la zone de recirculation commence à s'établir. A  $t = 2$  le fluide se situe environ au 2/3 du domaine de calcul : le maillage n'est raffiné que dans les zones les plus critiques autour de la marche et dans la couche de cisaillement qui s'établit. On remarque aussi que la couche limite de la paroi supérieure n'est pas délaissée.

A  $t_f$ , le fluide est entièrement établi dans le conduit ; le maillage final est raffiné dans les zones où les gradients des variables sont les plus forts : près des parois au niveau des couches limites, autour de la marche et dans la couche de cisaillement. On remarque aussi que le maillage ne présente pas de "poches" de noeuds. En effet, c'est là un autre avantage de la stratégie évolutive du remaillage adaptatif : on peut utiliser une méthode de stabilisation peu diffusive comme *SUPG* pour des maillages bien moins gros. Sans cette stratégie, le calcul aurait dû être effectué par

la méthode de Galerkin, le maillage au cycle adaptatif suivant ne serait donc pas lissé et il aurait fallu attendre le cycle adaptatif suivant (avec un maillage de plus de 120000 noeuds) pour voir les effets de la stabilisation *SUPG*.

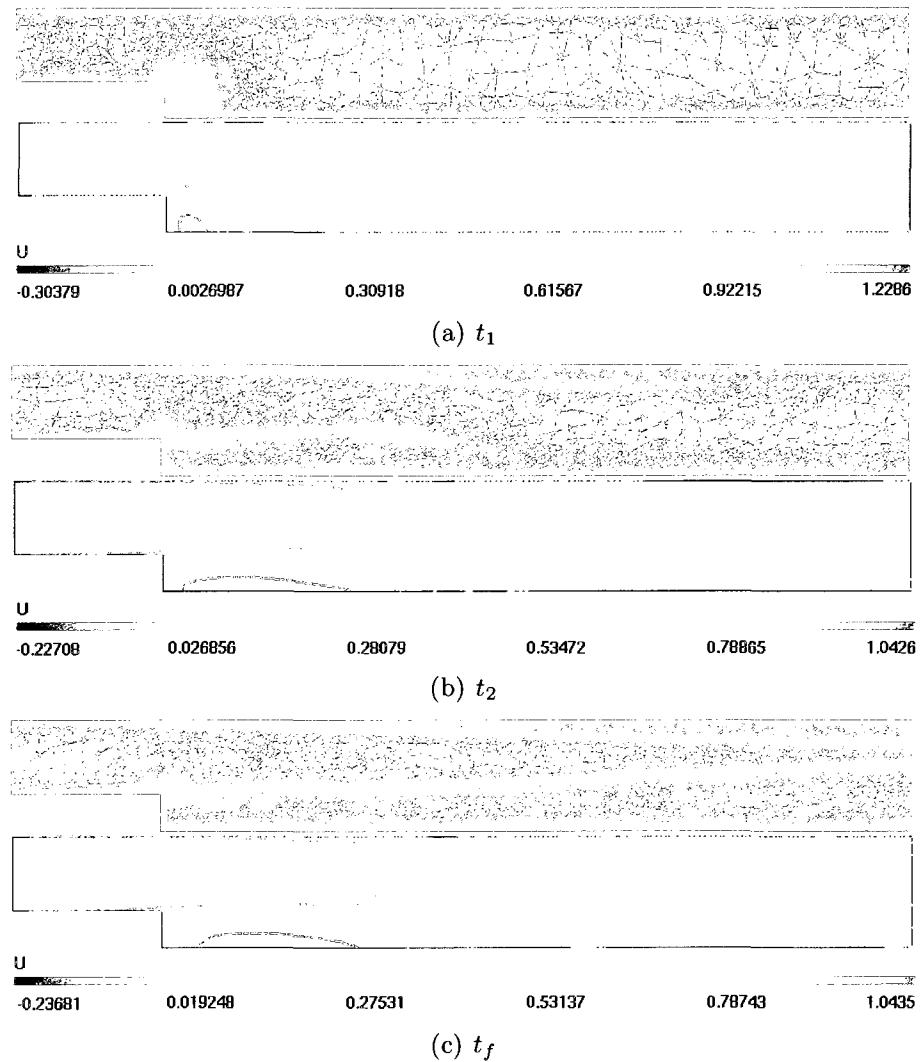


FIG. 4.10 Cycles de remaillage adaptatif pour la marche de Kim en fonction du temps

#### 4.2.1.3 Résultats pour les sensibilités

Les solutions obtenues pour l'écoulement étant très similaires à celles obtenues par Turgeon *et al.* [55] et Ilinca [29], il ne sera présenté ici que des résultats complémentaires pour les sensibilités. Ces dernières ont été calculées pour les sept paramètres suivants :

- $k_{inf}$  et  $e_{inf}$ , les valeurs à l'entrée du domaine de  $k$  et  $\epsilon$ ,
- $C_\mu$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_k$  and  $\sigma_\epsilon$ , les cinq constantes de fermeture du modèle  $k - \epsilon$ .

La figure (4.11) donne un aperçu des isolignes de  $S_u^{kinf}$ , la sensibilité de  $U$  par rapport au paramètre  $k_{inf}$ , et de  $\Omega(S_u^{kinf}, S_v^{kinf})$  la sensibilité de la vorticité. Une première observation de  $S_u^{kinf}$ , montre que le paramètre  $k_{inf}$  influencera les couches limites, la couche de cisaillement et la fin de la zone de recirculation. L'observation de  $\Omega(S_u^{kinf}, S_v^{kinf})$  indique quant à elle que les couches limites sont dynamisées, ainsi que la couche de cisaillement : en effet la superposition du rouge (vorticité positive) et du bleu (vorticité négative) se traduit par une réévaluation de l'épaisseur de la couche limite. Ces premières observations nous donnent donc quelques informations sur l'influence du paramètre  $k_{inf}$  sur les variables de l'écoulement.

Les figures suivantes nous permettrons de conduire une analyse plus fine. Mais arrêtons nous tout d'abord sur l'un des avantages du calcul des sensibilités : le calcul de solutions voisines. En effet, les sensibilités nous permettent de calculer rapidement des solutions dites voisines, c'est-à-dire, des solutions obtenues après une modification d'un paramètre étudié. Cela permet donc de ne pas devoir relancer de coûteuses simulations qui pourraient s'avérer inutiles dans la mesure où par exemple, on cherche à évaluer lequel des paramètres aura la plus forte influence sur un phénomène étudié (lâchers de tourbillons, zone de recirculation...).

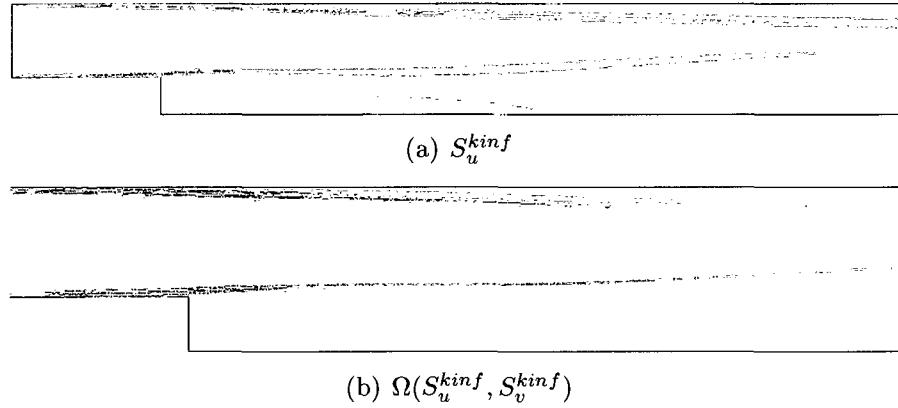


FIG. 4.11 Isolines de  $S_{u\text{kinf}}$  et  $\Omega(S_{u\text{kinf}}, S_{v\text{kinf}})$  à  $t_f$

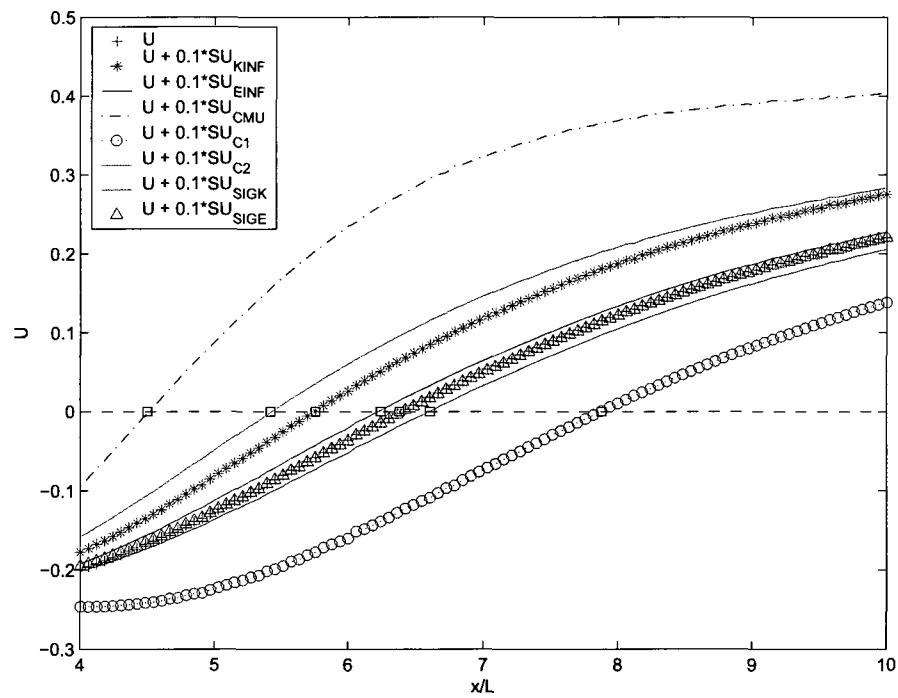


FIG. 4.12 Profils de  $u$  et des solutions voisines pour les 7 paramètres étudiés

Calculer une solution voisine revient à évaluer :

$$\phi(x, y; a + \Delta a) = \phi(x, y; a) + \frac{\partial \phi}{\partial a} \Delta a \quad (4.5)$$

avec  $S_\phi^a = \frac{\partial \phi}{\partial a}$  la sensibilité de la variable  $\phi$  par rapport au paramètre  $a$  étudié et  $\Delta a$ , une variation de ce paramètre. Dans notre cas,  $a$  est l'un des sept paramètres étudiés, et  $\Delta a = 10\%$ , ce qui signifie qu'on évalue notre nouvelle solution avec une augmentation de 10% du paramètre  $a$ .

La figure (4.12) montre le profil de  $U$ , la composante horizontale de la vitesse, ainsi que les sept solutions voisines au niveau de la fin de la zone de recirculation ( $U = 0$ ) à  $x/L = 6.4$ , localisation en parfait accord avec Turgeon *et al.* [55] et Ilinca [29].

Il faut noter que parmi les paramètres les plus influents on trouve  $C_1$  et  $C_\mu$  qui ont des effets antagonistes sur  $U$ . En effet,  $C_\mu$ , et à moindre importance  $C_2$ ,  $kinf$  et  $\sigma_k$ , diminuent la longueur de la zone de recirculation. Tandis qu'une augmentation de  $C_1$  agrandit cette zone. Le paramètre  $einf$  a le même impact sur la zone de recirculation que  $C_1$  mais à moindre importance. Par contre,  $\sigma_\epsilon$  n'a aucune influence sur le phénomène étudié. Des explications en accord avec la théorie seront données en conclusion de cette section. On peut tout de même d'ores et déjà valider notre observation faite sur la figure (4.11 (a)) : la zone de recirculation est bien influencée par le paramètre  $kinf$ .

La figure (4.13) présente des coupes verticales des sensibilités de la vorticité par rapport aux paramètres  $kinf$  et  $einf$  faites aux sections  $x/L = -0.5$  et  $x/L = 18$ . La première section est située peu avant la marche, la seconde se situe quant à elle juste avant la sortie du domaine. Seules les sensibilités par rapport aux paramètres  $kinf$  et  $einf$  sont montrées car là encore, les autres paramètres ont des effets similaires mais de moindre importance. Les résultats pour les autres

paramètres sont à l'Annexe III. Ainsi  $C_2$ ,  $C_\mu$ , et  $\sigma_\epsilon$  auront les mêmes effets que  $kinf$ . Par contre,  $C_1$  et  $\sigma_k$  affecteront la vorticité de la même manière que  $einf$ . Voyons maintenant quels sont les impacts de ces paramètres sur les couches limites et la couche de cisaillement.

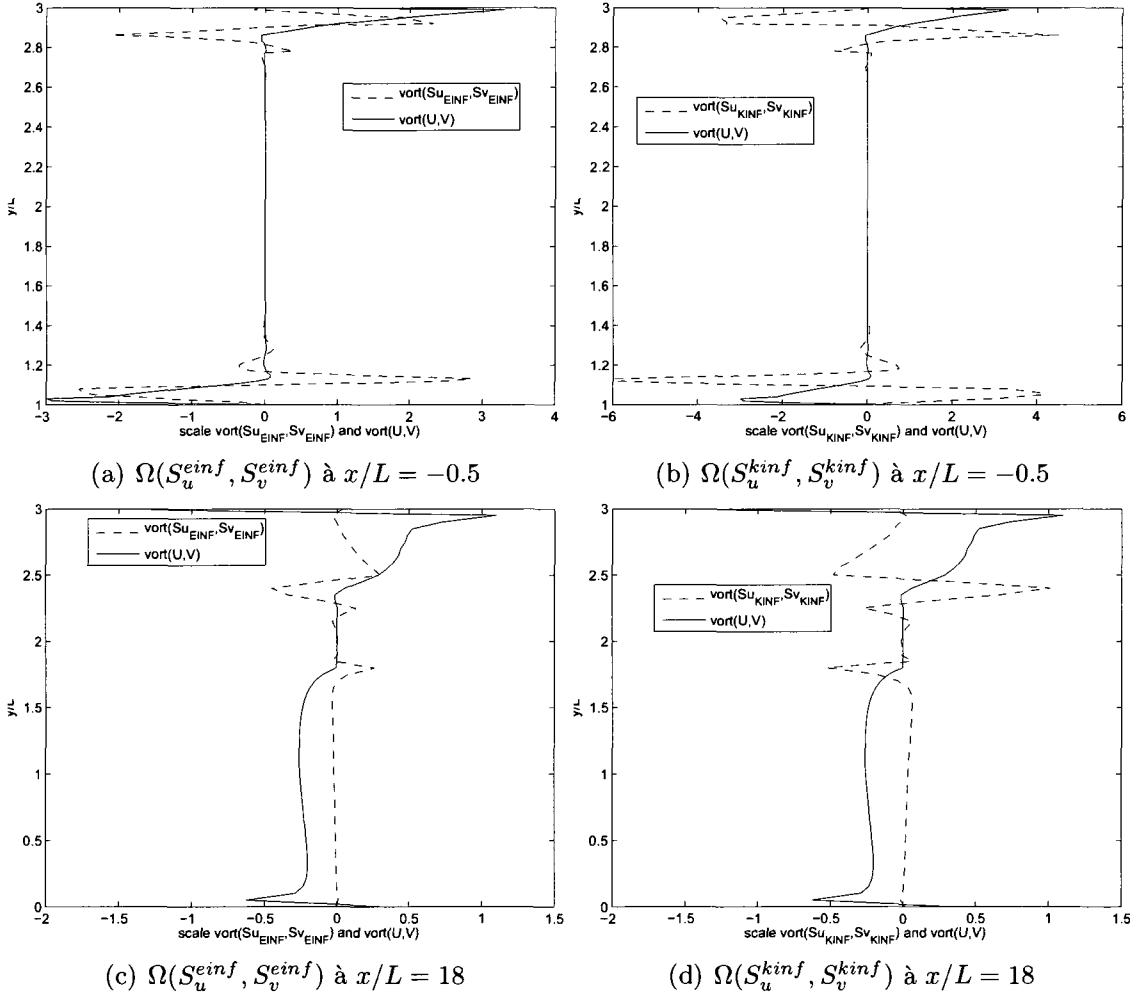


FIG. 4.13 Profils des sensibilités de la vorticité  $\Omega(S_u, S_v)$  par rapport aux paramètres  $kinf$  et  $einf$  au temps final  $t_f$  et aux sections  $x/L = -0.5$  et  $x/L = 18$

Une augmentation d'un des paramètres du "groupe d'influence" de  $einf$  intensifie le cisaillement des couches limites et diminue leur épaisseur. Par contre, ces mêmes

paramètres diminuent le cisaillement dans la couche de cisaillement.

Au contraire, les paramètres du groupe d'influence de *kinf* augmentent les épaisseurs des couches limites. En effet, à  $x = -0.5$  la sensibilité de la vorticité compense la vorticité elle-même par des valeurs opposées, mais déplace le maximum local, pour la paroi du haut par exemple, de  $y = 2.97$  à  $y = 2.82$ . Enfin, ces mêmes paramètres intensifient la couche de cisaillement.

Avant de conclure essayons de trouver un lien entre nos observations et la théorie. Au vu des équations de transport des variables du modèle de turbulence  $k - \epsilon$ , équations 2.21 et 2.22, nous pouvons dire :

- une augmentation de  $k$  à l'entrée du domaine et de  $C_\mu$  intensifie le niveau d'énergie cinétique turbulente et donc dynamise les couches limites et la couche de cisaillement
- une augmentation de  $C_2$  et  $\sigma_\epsilon$  diminue le niveau de la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence et donc aura les mêmes conséquences qu'une augmentation de  $k$  et  $C_\mu$  sur les couches limites et la couche de cisaillement.
- Par contre, une augmentation d' $\epsilon$  à l'entrée du domaine et de  $C_1$  intensifie le transport de la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence. Ainsi  $k$  se dissipe davantage, la couche limite diminue d'épaisseur et le cisaillement augmente.
- Enfin une augmentation de  $\sigma_k$  diminue le transport de  $k$  et tend donc à avoir les mêmes effets qu' $\epsilon$  et  $C_1$ .

Pour conclure, nous avons vu que les sensibilités utilisées telles qu'elles ou au travers des solutions voisines nous donnent de précieuses informations sur l'influence de paramètres clefs sur des caractéristiques de l'écoulement : couches limites, couche de cisaillement derrière la marche, zone de recirculation... Une analyse plus théorique permet même d'appuyer les résultats obtenus. Mais une telle analyse n'est pas

toujours facile à conduire surtout pour des paramètres comme la rugosité de paroi, ou la distance à la paroi.

#### **4.2.2 Vérification de simulations 2 : cylindre à section carrée placé à $0.25D$ d'une plaque plane**

Ce cas a été étudié expérimentalement par Wu et Martinuzzi [59] puis par G. Bosch *et al.* [3]. Il existe sur ce problème de nombreuses publications. En effet, en fonction de la distance à laquelle le cylindre est situé par rapport à la plaque du bas, on observe des régimes d'écoulement bien différents. Par exemple, pour une garde au sol  $G_s = 0.25D$ ,  $D$  étant le diamètre du cylindre, l'écoulement est stationnaire après une période de transition. Pour une garde au sol de  $G_s = 0.50D$  l'écoulement est instationnaire, mais le modèle  $k - \epsilon$  ne capte pas le sillage asymétrique de tourbillons. Une modification du modèle de turbulence s'impose alors. Pour une garde au sol  $G_s = 0.75D$ , le modèle  $k - \epsilon$  capte le phénomène instationnaire, cette fois, mais les valeurs des coefficients de traînée et de portance sont loin des valeurs expérimentales. Nous présenterons ici le premier cas, afin notamment de comparer nos résultats à ceux obtenus par Di Caro [10] en régime stationnaire. Les deux autres cas seront présentés au chapitre suivant avec celui du cylindre en milieu infini.

##### **4.2.2.1 Domaine de calcul et conditions limites**

La figure (4.14(a)) illustre le domaine de calcul choisi. Le diamètre du cylindre est égal à un. Rappelons que pour cette configuration, la garde au sol est de  $G_s = 0.25$ . Enfin le nombre de Reynolds est de  $Re = \frac{U_0 D}{\nu} = 22000$ .

Les conditions limites imposées aux frontières sont données dans le tableau 4.3.

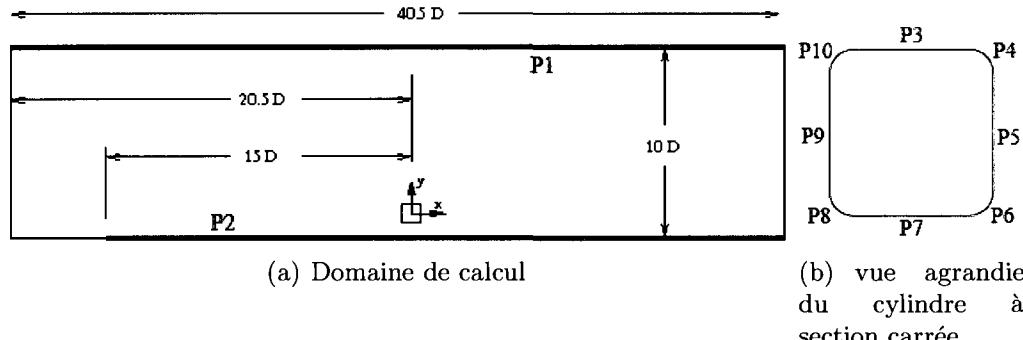


FIG. 4.14 Domaine de calcul

Entrée	Sortie
$U_0 = 1$	$-p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$
$V_0 = 0$	$(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0$
$k = 5e - 05$	$\frac{\partial k}{\partial x} = 0$
$\epsilon = 5e - 07$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = 0$

TAB. 4.3 Conditions limites imposées à l'entrée et la sortie du domaine

Paroi	Distance $d$
1	0.05
2	0.045
3	0.02
4	0.025
5	0.035
6	0.025
7	0.015
8	0.017
9	0.02
10	0.02

TAB. 4.4 Distance  $d$  à la paroi pour toutes les frontières solides

Le tableau 4.4 indique les différentes distances  $d$  choisies pour la loi de paroi. Il faut noter que le cylindre a des coins arrondis. Ce choix est imposé pour que sa géométrie soit identique à celle présentée dans Di Caro [10]. Les distances à la paroi sont choisies de façon à rester dans l'intervalle de validité  $30 \leq y^+ \leq 300$ . L'ajout de coin arrondi permet d'éviter de trop fortes discontinuités de distances à la paroi entre les arêtes.

#### 4.2.2.2 Cycles adaptatifs

Le maillage initial est présenté à la figure (4.15(a)). Il compte un peu plus de 16000 noeuds et n'est pas du tout adapté à l'écoulement, si ce n'est la concentration de noeuds au début de la plaque inférieure. Le maillage final, obtenu après 4 cycles adaptatifs, compte quant à lui près 126000 noeuds. Il est entièrement adapté à l'écoulement :

- les parois inférieure et supérieure sur lesquelles se développent une couche limite présentent une grande concentration de noeuds. On remarque aussi que le bout amont de la plaque inférieure est maillé avec finesse,
- le maillage est aussi très concentré dans la zone entourant le cylindre, c'est en effet la zone présentant les plus forts gradients.
- enfin le sillage stationnaire se distingue parfaitement tant le maillage y est raffiné à l'aval du cylindre.

#### 4.2.2.3 Résultats

Pour ce cas aussi, les résultats étant identiques à ceux obtenus en stationnaire [10], seule une étude de convergence avec le maillage des coefficients de traînée et de portance sera présentée. Ainsi, une nouvelle implémentation du calcul de

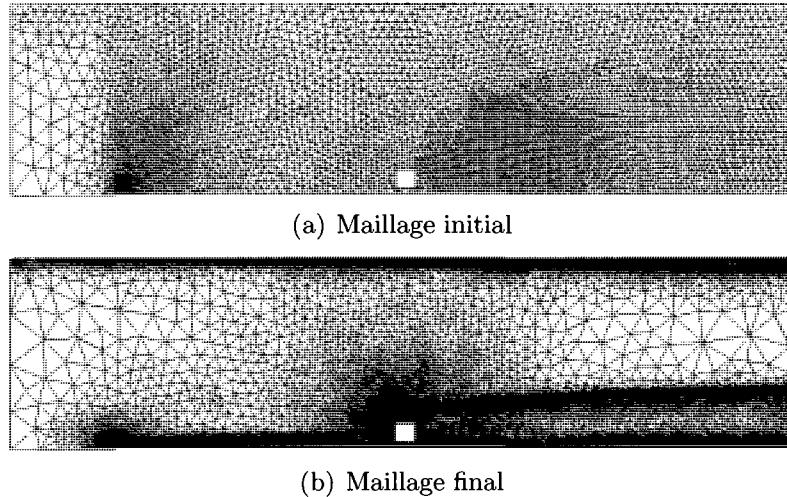
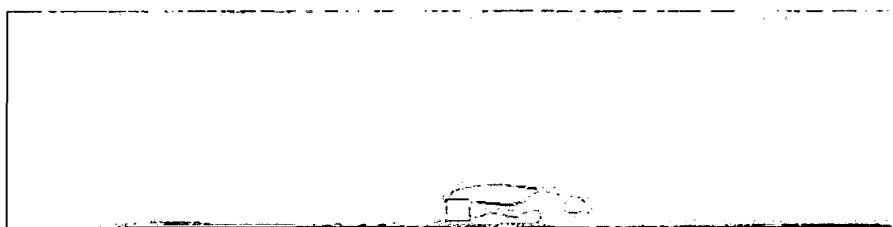


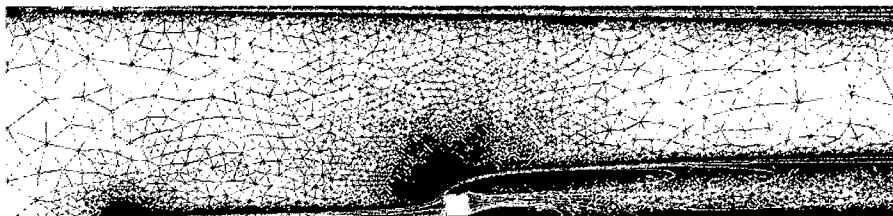
FIG. 4.15 Maillage initial et maillage final

ces coefficients pour les cas instationnaires et turbulents a été testée. Avant de présenter les résultats sur le calcul de ces coefficients, profitons tout de même de l'implémentation instationnaire pour visualiser l'écoulement en période de transition. La figure (4.16) présente les isolignes de la vorticité pour deux instants différents. Le premier est capturé quelques temps après que l'écoulement ait dépassé le cylindre. On remarque très clairement les lâchers de tourbillons qui vont en s'affaiblissant. En effet avec une garde au sol si petite, la couche limite de la plaque inférieure a une épaisseur suffisante pour que le fluide passant entre elle et le cylindre, soit déjà bien ralenti. Ainsi, les tourbillons lâchés avec peu d'inertie depuis le coin aval inférieur du cylindre viennent s'amortir complètement sur la plaque du bas. Ils entravent alors l'évolution des tourbillons issus du décollement du fluide au coin aval supérieur du cylindre. Le sillage tourbillonnaire n'étant plus entretenu, il se dissipe complètement pour ne former qu'un sillage dit stationnaire. Enfin le second instant est pris après la période de transition. On voit d'ailleurs très bien à quel point le maillage est adapté à l'écoulement.

Pour conclure, la figure (4.17) présente l'évolution des coefficients de traînée,  $C_d$  et de portance,  $C_l$ , calculés sur le cylindre, en fonction du temps et de la taille des maillages. Les maillages 1 et 4 étant ceux présentés à la sous-section précédente. Les coefficient de traînée et de portance tendent respectivement vers 0.768 et 0.030. Ces valeurs sont en parfait accord avec celles trouvées par Di Caro [10]. Enfin, il faut remarquer que sur les courbes du maillage 1, de fortes variations des coefficients de forces ont été calculées à partir de  $T = 15$  environ. Le coefficient de portance chute brutalement, celui de traînée augmente tout aussi brutalement : le premier tourbillon est lâché.



(a) Lâchers de tourbillons durant la période de transition



(b) Vorticité au temps final

FIG. 4.16 Vorticité à deux instants distincts

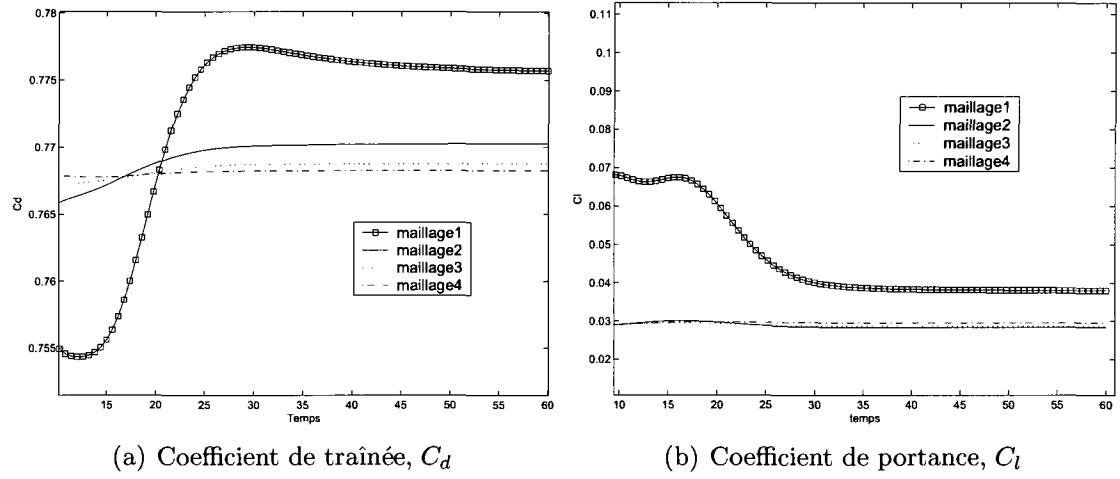


FIG. 4.17 Coefficients de forces calculés sur le cylindre

### 4.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de vérifier notre code en l'appliquant notamment au cas de la décroissance de la turbulence de grille. Ce cas propose en effet une solution analytique qui nous a servi de référence pour confronter nos résultats numériques. Cette première comparaison a été très convaincante, puisque solutions exactes et numériques convergeaient vers les mêmes valeurs. Ensuite, une analyse de convergence aux résultats très probants nous a permis de conclure que le code passait avec succès le test de vérification. La seconde étape a été de nous assurer de retrouver les solutions obtenues préalablement en régime stationnaire sur des cas présentant une période de transition. Cette étape de vérification de simulations, passée elle aussi avec succès, nous a permis notamment d'appliquer au cas de la marche de Kim la nouvelle stratégie de maillages adaptatifs et d'obtenir des résultats complémentaires sur le calcul des sensibilités. Ces dernières nous ont permis notamment de prédire l'évolution de zones clefs de l'écoulement, comme la zone de recirculation ou les couches limites aux parois, suite à la variation d'un paramètre d'influence. Les

résultats obtenus ont été confrontés ensuite à la théorie. Enfin, nous nous sommes intéressés au cas du cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane. Avec la configuration géométrique choisie, nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus précédemment pour des simulations en régime stationnaire turbulent. La comparaison, très concluante, nous a permis notamment de valider une nouvelle implémentation pour le calcul des coefficients de forces et d'observer la période de transition au cours de laquelle le sillage tourbillonnaire s'effondre pour donner lieu à un sillage stationnaire.

Le prochain chapitre vise quant à lui, à présenter des cas purement instationnaires très étudiés expérimentalement. Nous nous intéresserons notamment à deux nouvelles configurations du dernier cas présenté ici, ainsi qu'à l'allée de Von Karman derrière un cylindre en milieu infini.

## CHAPITRE 5

### APPLICATIONS DE LA M.E.S POUR DES RÉGIMES TURBULENTS INSTATIONNAIRES

Ce dernier chapitre vise à démontrer l'efficacité de la M.E.S pour la prédiction d'écoulements turbulents transitoires. Les deux applications que nous proposons de traiter sont le cas du cylindre en milieu infini pour un nombre de Reynolds égal à 10000 et deux configurations différentes du dernier cas ayant fait l'objet de la vérification au chapitre précédent. Comme nous le verrons ces deux cas présentent des phénomènes transitoires périodiques : allée de Von Karman et sillage tourbillonnaire asymétrique dû à la présence de la plaque. Le calcul des sensibilités a été effectué par rapport à plusieurs paramètres, en prenant soin notamment de choisir des paramètres ayant des influences antagoniques sur l'écoulement. Aussi plusieurs modifications apportées au modèle de turbulence  $k - \epsilon$  seront présentées afin notamment de palier au problème de surproduction de  $k$  au point de stagnation ou d'apporter une dimension temporelle au terme de production de l'équation de transport d' $\epsilon$ , la dissipation de l'énergie cinétique de turbulence.

#### 5.1 Première application : cylindre en milieu infini

Le cas du cylindre dans toute sa simplicité est pourtant un problème de mécanique des fluides encore difficile à résoudre. Il n'y a en effet rien sur sa géométrie qui force le décollement de la couche limite. Ce dernier est dû uniquement à un gradient de pression adverse qu'il est difficile de localiser. Autrement dit, l'une des principales difficultés est de savoir à quel endroit sur le cylindre le décollement

de la couche limite turbulente aura lieu. Nous ne nous sommes pas attaqués à ce problème mais avons préféré privilégier l'étude du nombre de Strouhal et des coefficients de forces. Comme nous le verrons cela a posé bien des difficultés. Enfin, avant de présenter en détails le domaine de calcul et les conditions limites appliquées, signalons que plusieurs simulations à des nombres de Reynolds différents ont été réalisées. En effet, avant de nous arrêter à  $Re = 10000$ , nous avons essayé  $Re = 22000$  et  $Re = 1.10^5$ . Les premiers résultats à Reynolds  $Re = 22000$  n'étant pas concluant en ce qui concerne le modèle standard  $k - \epsilon$  nous avons décidé de changer le régime d'écoulement et d'essayer à  $Re = 1.10^5$  afin d'être en régime pleinement turbulent avant d'arriver au niveau du cylindre. Malgré cela, le modèle standard  $k - \epsilon$  amortissait complètement le sillage tourbillonnaire et prédisait ainsi un phénomène stationnaire. Afin de pallier à ce problème plusieurs variantes du modèle standard vont être proposées. Intéressons-nous avant cela aux conditions limites et au domaine de calcul.

### 5.1.1 Conditions limites et domaine de calcul

Un nombre de Reynolds de 10000 a été choisi afin notamment de pouvoir confronter nos résultats à ceux proposés par Mohammadi et Pironneau <sup>[46]</sup> et Benim *et al.* <sup>[2]</sup>. Les dimensions du domaine et les conditions limites appliquées sont données dans le tableau ci-dessous :

Frontière	entrée	sortie	haut	bas
Distance	10 D	15 D	10 D	10 D
conditions	$U_0 = 1, V_0 = 0,$ $k_0 = 6.0d - 4, \epsilon_0 = 3.24d - 5$	Neumann	Neumann	Neumann

L'entrée est donc située à  $10D$  du cylindre, avec  $D = 1$  le diamètre du cylindre. Les conditions de type Neumann ont été imposées pour toutes les variables. Elles prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} -p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial x} &= 0 \\ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial k}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Les conditions limites en entrée ont été imposées de telle façon que l'intensité turbulente soit  $I_t = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}k_0}}{U_0} = 2\%$  et que  $r_\mu = \frac{\mu_t}{\mu} = 10$ .

### 5.1.2 Choix du pas de temps

Le choix du pas de temps est une phase délicate pour ces problèmes purement instationnaires. Le bon sens voudrait déjà que le pas de temps soit suffisamment petit pour capter la plus petite échelle de temps pour la turbulence. Bien sûr cela conduirait très rapidement à une discrétisation temporelle impensable pour la puissance de calcul disponible. De plus, comme nous ne traitons que des variables moyennées, cela ne servirait à rien dans notre cas. Ainsi on s'attarde plus sur les valeurs proposées par la littérature [61] et surtout par une évaluation de la convergence de la solution en fonction du pas de temps choisi. Certains conseillent aussi de prendre un pas de temps au moins plus petit que le rapport de la plus petite taille des éléments du maillage par la vitesse  $U_0$ , notamment quand on cherche à suivre l'évolution de particules.

Pour notre cas, un pas de temps compris entre  $0.005 \leq \Delta_t * U_0/D \leq 0.01$

est généralement choisi. Il faut garder en tête que les approximations dues à la discréétisation en temps doivent être du même ordre de grandeur que celles dues à la discréétisation spatiale. En d'autres termes, avoir une discréétisation temporelle très fine sur un maillage grossier n'apportera pas généralement de meilleures solutions qu'une discréétisation temporelle grossière sur un maillage très fin. Bien sûr il ne s'agit pas là d'une loi absolue, cela dépend aussi du type de problème traité. Pour le cas du cylindre à  $Re = 10000$ , des résultats très satisfaisant sont obtenus pour des pas de temps de l'ordre de 0.01. La figure (5.1) montre les coefficients de forces calculés sur une période  $T * U_0/D = 25$  pour un même maillage mais avec deux pas de temps distincts.

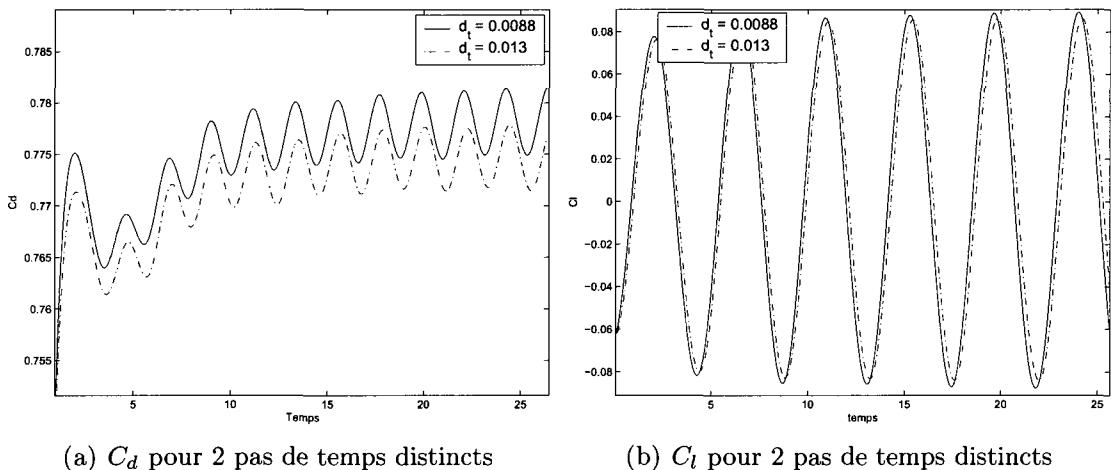


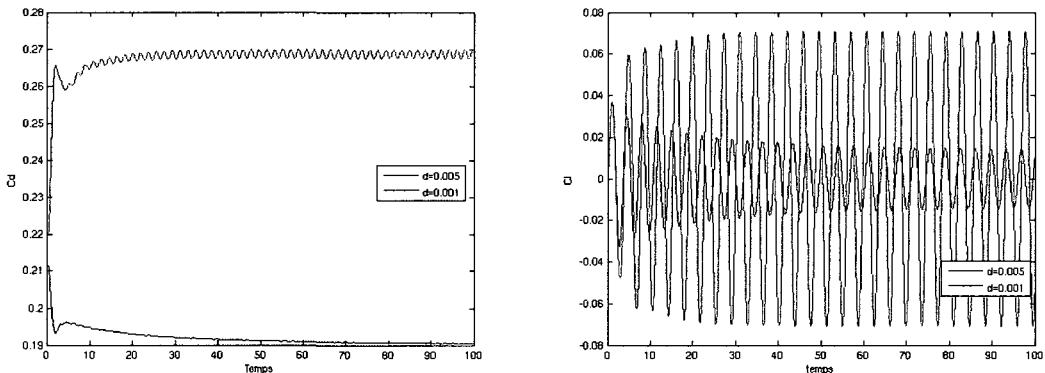
FIG. 5.1 Coefficients de forces calculés sur le cylindre avec 2 discréétisations temporelles distinctes

### 5.1.3 Choix de la distance à la paroi

Un autre facteur extrêmement important à considérer est la distance  $d$  à la paroi du cylindre à partir de laquelle le modèle  $k - \epsilon$  est remplacé par la loi de paroi à deux échelles de vitesse (cf 2.1.2.4.2). En effet, comme le rappelle B.Mohammadi [46],

il est essentiel d'avoir un maillage suffisamment fin dans la couche limite, mais aussi d'avoir une distance  $d$  à la paroi petite pour ne pas que le fluide ne garde toute son énergie et ne se sépare pas. En effet, et cela est vrai pour le modèle standard  $k - \epsilon$  et toutes ses modifications proposées, plus la distance à la paroi est petite, plus l'écoulement semble se comporter comme l'expérience le montrerait : les valeurs des coefficients de forces et le nombre de Strouhal se rapprochent des valeurs expérimentales à mesure que  $d$  diminue.

La figure (5.2) illustre très bien cela. En effet, pour une distance  $= 0.005$  à la paroi, les valeurs moyennes des coefficients de forces sont considérablement réduites et les oscillations sont amorties, ce qui traduit la disparition du sillage tourbillonnaire. Cela montre à quel point la solution est sensible au paramètre  $d$ .



(a) Influence de la distance à la paroi sur le  $C_d$  (b) Influence de la distance à la paroi sur le  $C_l$

FIG. 5.2 Coefficients de forces calculés sur le cylindre avec 2 distances à la parois considérées

Seulement, il reste bien sûr à prendre en compte que la loi de paroi n'est valide que pour une certaine plage  $30 \leq y^+ \leq 300$  [50]. Pour des valeurs de distance à la paroi inférieures à  $d = 0.001$ , le calcul ne converge pas. Pour des valeurs de  $d$  comprises entre 0.001 et 0.003, on obtient des  $y^+$  compris entre 2 et 20. On est bien sûr largement en dessous des valeurs minimales couramment acceptées, c-a-d,

30. Cela dit, c'est dans la plage  $0.001 \leq d \leq 0.003$  qu'on observe une allée de Von Karman à l'arrière du cylindre pour les modifications (sauf RNG) du modèle  $k - \epsilon$ . Ce qui nous laisse aussi à supposer que la loi de paroi actuellement utilisée pour nos calculs et validée pour un certains nombres de cas "classiques" tels que la couche limite turbulente sur plaque plane, n'est probablement pas adaptée à ce type d'écoulement présentant un point de décollement non induit par la géométrie. Enfin il faut rappeler que la version standard du modèle  $k - \epsilon$  ne mène pas à la prédiction d'un sillage tourbillonnaire. Nous présentons dans le paragraphe suivant 3 modifications proposées dans la littérature pour pallier en partie à ce problème.

#### 5.1.4 Modifications apportées au modèle $k - \epsilon$ de turbulence

Comme nous le verrons pour le cas d'application suivant, le modèle standard  $k - \epsilon$  a tendance à surévaluer le terme de production de l'énergie cinétique de turbulence [53; 15] au niveau des points de stagnation. Depuis ce constat plusieurs modifications ont été proposées. Nous présentons ici la plus connue, la modification de Kato-Launder [34] et deux autres modifications qui gagneraient à se faire connaître.

##### 5.1.4.1 Modification de Kato-Launder (K-L)

Cette modification réduit donc la tendance, qu'ont la plupart des modèles du turbulence à deux équations, de sur-prédire la production turbulente dans les zones à forts gradients de vitesse et au niveau des points de stagnation. Cette modification a été à l'origine introduite pour les cas de cylindre à section carrée [34], mais se comporte très bien pour notre cas aussi.

Elle consiste à modifier la production turbulente telle que donnée au 2.1.2.2 par :

$$P = [\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)]^{0.5} * [\nabla \mathbf{u} : (\nabla \mathbf{u}^T - \nabla \mathbf{u})]^{0.5} \quad (5.2)$$

On y introduit donc de la vorticité.

#### 5.1.4.2 Modification de Younis-Przulj (Y-P)

Cette seconde modification proposée par Younis et Przulj [61] vise à modifier uniquement le terme de production dans l'équation de transport de  $\mathcal{E}$ . La constante  $C_1$  est modifiée par :

$$C_1^* = C_1 \left( 1 + C_t e^{\kappa - \varepsilon} \frac{1}{Q/e^\kappa + 1} \left| \frac{\partial (Q + e^\kappa)}{\partial t} \right| \right) \quad (5.3)$$

où  $Q = 1/2 U_i U_i$  est l'énergie cinétique moyenne et  $C_t$  une nouvelle constante égale à 0.38. Cette modification prend en compte les interactions entre les grosses structures organisées de l'écoulement (grandes échelles spatio-temporelles) et les fluctuations caractéristiques de la turbulence.

#### 5.1.4.3 Le modèle de Yakhot (RNG)

Enfin la troisième alternative consiste à utiliser la variante de Yakhot *et al.* [60], connue sous le nom de *ReNormalizat ion Group* (RNG). Comme la précédente, elle vise à prendre en compte les interactions entre les différentes échelles spatiales de la turbulence :

$$C_1^* = C_1 - \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (5.4)$$

où  $\eta = \sqrt{P} * e^{(\kappa - \epsilon)}$ ,  $\eta_0$  et  $\beta$  sont deux nouvelles constantes. Pour cette variante, les constantes de fermeture du modèle  $k - \epsilon$  sont mises à jour :

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.0845, & C_1 &= 1.42, & C_2 &= 1.68, \\ \sigma_k &= 0.72, & \sigma_\epsilon &= 0.72, & \eta_0 &= 4.38, \\ \beta &= 0.012 \end{aligned}$$

La section suivante vise à comparer les résultats obtenus à l'aide de ces modifications en considérant le nombre de Strouhal.

### 5.1.5 Résultats

#### 5.1.5.1 Résultats pour l'écoulement

Avant d'entamer cette section consacrée aux résultats, définissons le nombre de Strouhal,  $S_t$  :

$$S_t = \frac{f \times D}{U_{ref}} \quad (5.5)$$

où  $f$  est la fréquence à laquelle les tourbillons sont convectés,  $D$  le diamètre du cylindre dans notre cas, et  $U_{ref}$ , une vitesse de référence, la vitesse à l'entrée par exemple. Le nombre de Strouhal varie en fonction du nombre de Reynolds [45], et prend la valeur de 0.20 pour le cas du cylindre circulaire à  $Re = 10000$ .

La figure (5.3) compare les valeurs du nombre de Strouhal observées pour les trois variantes du modèle  $k - \epsilon$  en fonction de la taille du maillage. Les solutions

convergent vers  $0.26 \leq S_t \leq 0.28$ , ce qui est tout à fait en adéquation avec les résultats de Mohammadi [46], Younis [61] ou encore Hu [25]. Cependant les valeurs de Strouhal restent éloignées de la valeur expérimentale [51] qui devrait être  $S_t = 0.20$  environ.

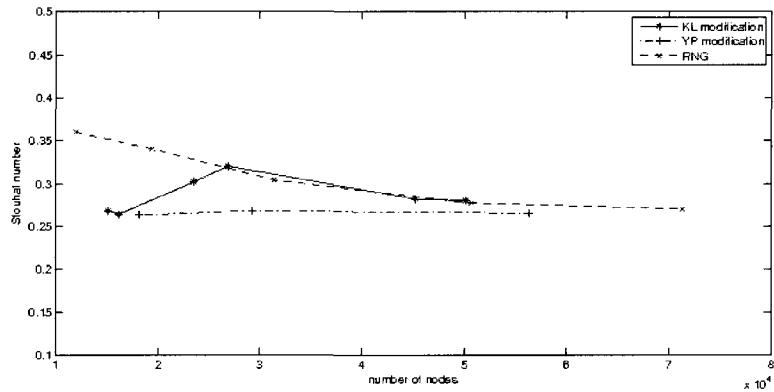


FIG. 5.3 Convergence du nombre de Strouhal en fonction de la taille du maillage et pour les 3 modifications du modèle  $k - \epsilon$

Les variations de la courbe représentant les valeurs de K-L sont dues au fait que pour les maillages dont le nombre de noeuds est compris entre 20000 et 30000, la distance à la paroi a dû être fixée à 0.002 au lieu 0.001, car sinon la solution ne convergeait pas. Ceci s'explique bien sûr par le fait qu'on est déjà en dehors de la plage de validité des  $y^+$ . Cela dit les autres publications [61; 4] font aussi états de leurs difficultés à rester dans la zone de validité de  $y^+$ .

Il faut bien sûr garder à l'esprit que ces modifications ne sont pas la panacée pour la prédiction de la turbulence, un regard critique sur ces modifications sera porté en fin de chapitre. Le paragraphe suivant nous fait part d'un moyen astucieux de régler le problème de plage de validité de  $y^+$ , en utilisant en plus le modèle  $k - \epsilon$  standard cette fois-ci.

### 5.1.5.1.1 Modification de la valeur du terme de rugosité

Rappelons tout d'abord la loi logarithmique de paroi :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln (E y^+) \quad (5.6)$$

Avec  $\kappa = 0.42$  et  $E = 9.0$  pour les surfaces planes. Il faut remarquer que  $\ln(E)/\kappa = 5.25$ , la constante habituellement utilisée. Or en diminuant la valeur de  $E$  cela revient à soustraire un  $\Delta u^+$  [9] qui pour des valeurs supérieures à 7 change le régime de rugosité de la paroi. Ainsi dans notre cas, passer de  $E = 9.0$  à  $E = 0.1$  revient à soustraire à  $u^+$ ,  $\Delta u^+ = 10$  ce qui augmente la rugosité. En d'autres termes, pour caricaturer nous avons "transformé" un cylindre à surface lisse en une section de balle de golf.

Les résultats observés alors pour le modèle standard  $k - \epsilon$  sont multiples :

- plage de validité de  $y^+$  respectée
- nombre de Strouhal proche des valeurs expérimentales 0.20 – 0.21
- coefficients de forces plus proches des valeurs expérimentales

Cela dit, il faut être conscient qu'il s'agit d'une astuce numérique pour générer un sillage tourbillonnaire qui consiste à changer la rugosité de la paroi pour nous permettre de rester en plus dans la plage de validité de  $y^+$  pour la loi de paroi. En effet, utiliser une valeur de  $E$  plus petite nous oblige aussi à augmenter la distance à la paroi  $d$ , ce qui se traduit donc par une augmentation de  $y^+$  et nous permet de respecter la plage de validité. Évidemment il serait plus prudent de vérifier plus en détails les impacts d'une telle modification de  $E$  sur la loi de paroi. Néanmoins, cela nous conforte plus dans l'idée que la loi de paroi n'est peut-être pas adaptée pour de tels écoulements.

Il faut aussi remarquer qu'une diminution de  $E$ , donc une augmentation de la

rugosité n'a pas le même impact sur les modifications pré-citées du modèle  $k - \epsilon$ . En effet, la figure (5.4) permet par exemple, d'évaluer l'impact du paramètre  $E$  sur la modification Kato-Launder. S'il on compare la courbe bleue ( $E = 1.0$ ) à la courbe jaune ( $E = 9.0$ ) on se rend compte que la valeur moyenne du coefficient de traînée a peu augmenté, et que la période des oscillations (indicatrice de la valeur du nombre de Strouhal) a peu variée. Une diminution de  $E$  ne se traduit pas ici par une nette amélioration du coefficient de traînée. Par contre, une augmentation de  $E$ ,  $E = 20.0$ , se traduit par une nette dégradation de la solution, comme l'indique la courbe rouge. Enfin, ce qui différencie la courbe bleue de la courbe noire ce n'est pas le terme de rugosité ( $E = 1.0$  pour les deux), mais la distance à paroi. En effet, pour obtenir la courbe noire, la distance à la paroi a été augmentée, ce qui se traduit par une diminution de la valeur moyenne, de la période et de l'amplitude des oscillations comme illustré précédemment à la figure (5.2). Ces comparaisons nous ont permis de vérifier trois points :

- même pour des valeurs de  $E$  plus petites, le paramètre  $d$  a toujours autant d'impact sur la solution
- **diminuer  $E$**  nous permet simplement d'**augmenter  $d$** , la distance à la paroi et par conséquent d'**augmenter  $y^+$**  de façon à **rencontrer**  $30 \leq y^+ \leq 300$ .
- par contre augmenter  $E$  nous oblige à diminuer  $d$  et donc  $y^+$  ce qui conduit à des valeurs de  $y^+$  largement en dessous de la plage de validité.

Nous ne présentons pas ici plus de résultats pour l'écoulement car cela sera fait dans la prochaine section qui est dédiée aux calculs des sensibilités. Cela dit la figure (5.5) permet d'évaluer encore une fois la qualité de la stratégie adaptative. Le maillage est entièrement adapté aux tourbillons et à la couche limite qui se développe sur le cylindre.

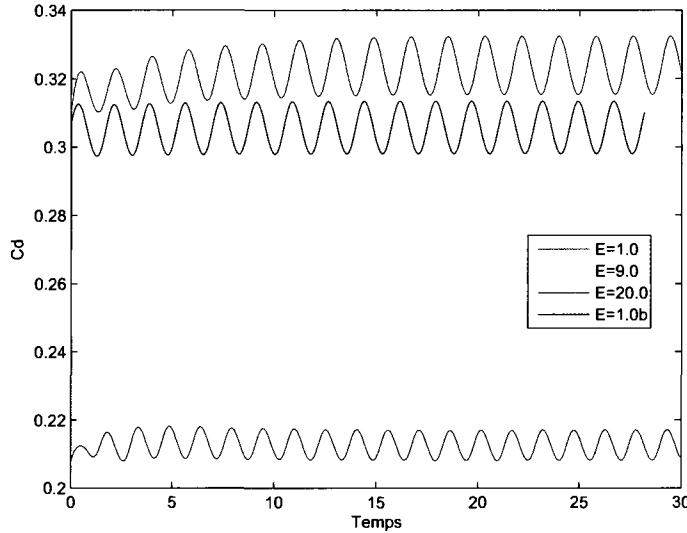


FIG. 5.4 Coefficients de traînée calculés avec la modification de Kato-Launder

### 5.1.5.2 Résultats pour les sensibilités

Nous avons donc utilisé la modification du terme de rugosité proposée ci-dessus pour lancer nos simulations avec le modèle  $k - \epsilon$  pour le calcul des sensibilités. Les paramètres considérés pour ce cas sont :

- $U_0$  la vitesse à l’entrée du domaine
- $E$  le terme de rugosité à la paroi
- $d$  la distance à la paroi

Là encore nous avons choisi des paramètres ayant des influences antagonistes sur l’écoulement.

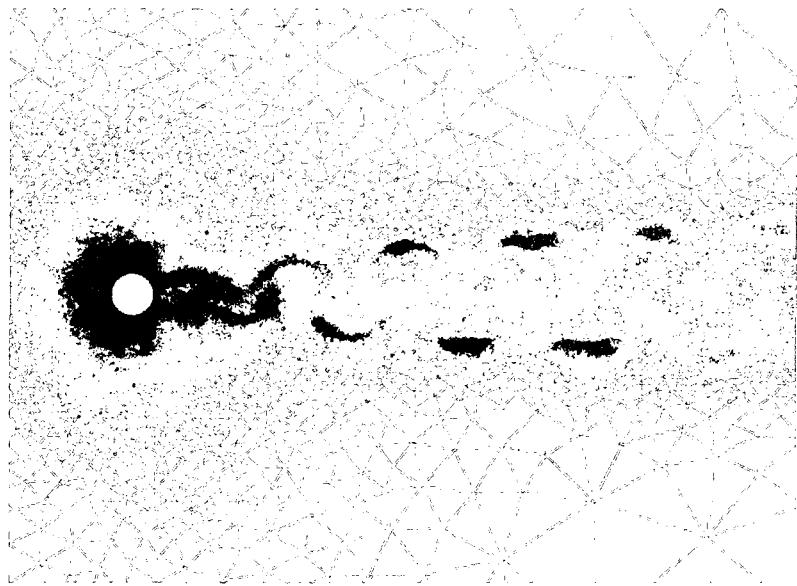


FIG. 5.5 Maillage généré après plusieurs cycles adaptatifs

#### 5.1.5.2.1 Sensibilités par rapport à $U_0$

La figure (5.6) présente les contours de vorticité pour l’écoulement, les sensibilités et une solution voisine ( $\Delta U_0 = 20\%$ ). Cette figure nous permet donc d’évaluer l’impact d’une augmentation du paramètre  $U_0$  sur l’écoulement. La ligne verticale grisée signifie simplement que l’échelle des sensibilités a été modifiée à partir de cette ligne pour des raisons de rendus graphiques. En effet, pour la raison évoquée au 2.48 les sensibilités prennent des valeurs de plus en plus élevées en fonction du temps, donc pour pouvoir visualiser dans une même plage les isolignes, une mise à l’échelle est nécessaire pour les sensibilités. Elle consiste à diviser les valeurs des sensibilités par une fonction linéaire dépendant de  $x$  et donc implicitement de  $t$ , le temps.

Les lignes noires ne sont là quant à elles que pour indiquer les abscisses des cœurs des tourbillons de l’écoulement non perturbé.

- S'il on considère en premier lieu la zone comprise entre 1D et 2D, on s'aperçoit que la zone d'eau morte (située juste avant la zone de convection des tourbillons) diminue et se rapproche du cylindre. Ceci se reflète très bien sur les contours de vorticité de l'écoulement et de la solution voisine : la zone identifiée par une ellipse noire est nettement plus compacte.
- Dans la zone  $1 < x/D < 3$  on remarque aussi que les couches cisaillées s'écartent plus de l'axe horizontal du cylindre : la vorticité se renforce (diminue (bleu) en haut et augmente (rouge) en bas), ce qui traduit un épaissement du sillage.
- Dans la zone  $2 < x/D < 3$ , pour le tourbillon du bas, on remarque que la vorticité diminue en amont et augmente en aval, ce qui signifie que le tourbillon devrait être plus éloigné du cylindre.
- Cela est confirmé par le tourbillon du haut dans la  $4 < x/D < 5$ .
- Pour les tourbillons en aval de  $x/D = 5$  on constate très nettement le déplacement des coeurs des tourbillons vers l'aval et laisse donc penser à une diminution du nombre de Strouhal.

Ces remarques vont tout à fait dans le sens de l'expérimental [45].

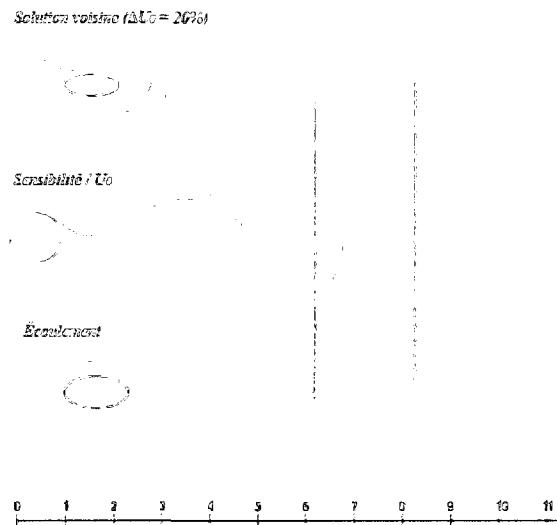


FIG. 5.6 bas en haut : vorticité de l'écoulement, vorticité des sensibilités, vorticité de la solution voisine

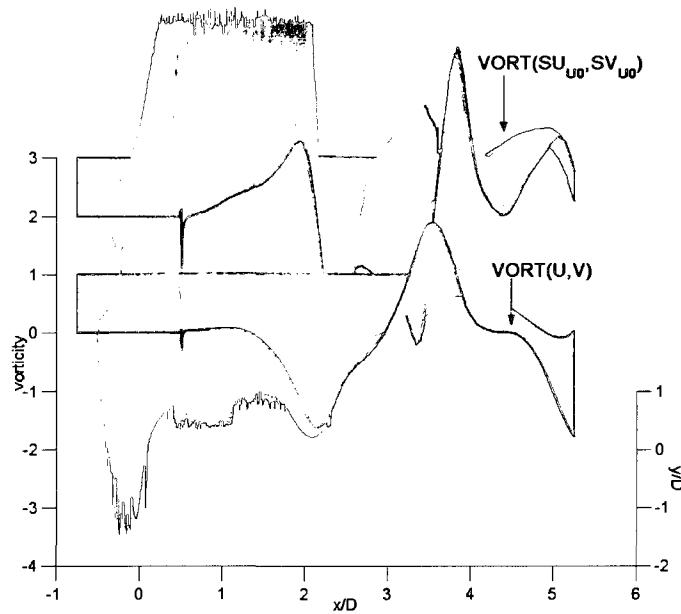


FIG. 5.7 Nappes de vorticité pour l'écoulement et les sensibilités par rapport à  $U_0$

La figure (5.7) permettra probablement de mieux visualiser le déplacement des tourbillons pour les sensibilités. Elle met en relief les nappes de la vorticité de l'écoulement (premier plan) et des sensibilités (second plan) suivant une coupe verticale coupant le cylindre en deux. En effet, on voit clairement qu'à  $x/D = 2.1$ , le puits de vorticité indiquant le cœur d'un tourbillon  $Tb1$  à vorticité négative (couleur bleue) est compensé par un pic de sensibilité de la vorticité (couleur rouge). Par contre la sensibilité de la vorticité chute brutalement juste après (au niveau de  $x/D = 2.3$ ) ce qui indique que le tourbillon  $Tb1$  observé sur l'écoulement est déplacé vers l'aval. Le même raisonnement peut-être conduit pour le pic de vorticité à  $x/D = 3.8$  indiquant la position d'un tourbillon  $Tb2$  : sur la nappe de la sensibilité il est précédé par un puits (à  $x/D = 3.6$ ) et suivi par un pic (à  $x/D = 4$ ), traduisant le déplacement vers l'aval du tourbillon  $Tb2$ .

Enfin la figure (5.8) présente le coefficient de traînée et sa sensibilité par rapport au paramètre  $U_0$ . Une augmentation de  $U_0$  induira une augmentation de la traînée, ce qui a du sens par rapport aux observations expérimentales [51]. En effet, pour  $1.10^3 < Re < 1.10^5$ , la traînée augmente avec le nombre de Reynolds. On remarque bien ici que la valeur moyenne de la sensibilité de  $C_d$  augmente avec le temps, mais qu'en plus elle prend de très grandes valeurs, ce qui illustre la remarque faite pour la relation 2.48.

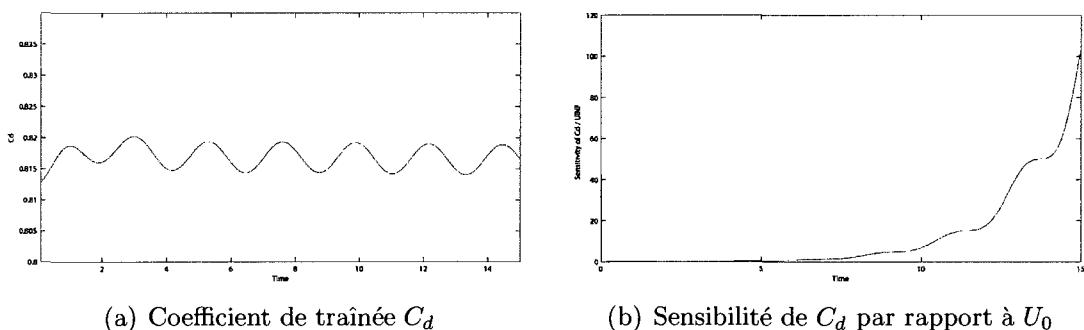


FIG. 5.8 Le coefficient de traînée et sa sensibilité par rapport à  $U_0$

### 5.1.5.2.2 Sensibilités par rapport à $E$

A priori une augmentation du paramètre de rugosité  $E$  (donc une **diminution de la rugosité**) ne devrait pas avoir le même impact sur l'écoulement qu'une augmentation de la vitesse en entrée. Est-ce le cas ?

$E$  ayant la même influence sur l'écoulement que le paramètre  $d$ , seules les sensibilités par rapport à  $E$  seront présentées.

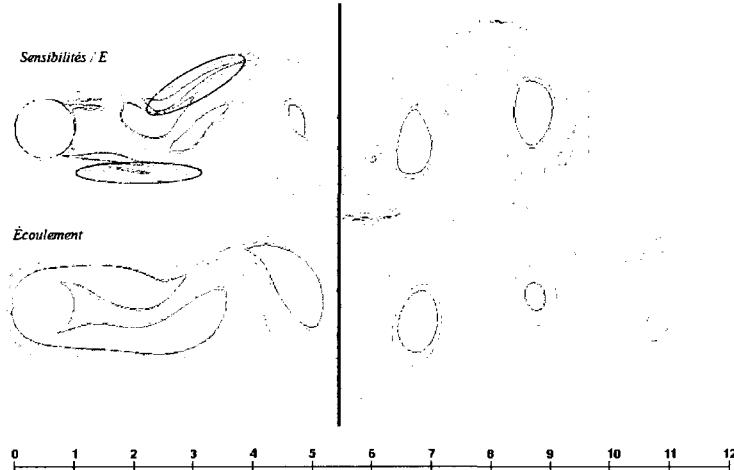


FIG. 5.9 De bas en haut : La vorticité de l'écoulement et sa sensibilité par rapport au paramètre  $E$

La figure (5.9) représente les contours de la vorticité et de sa sensibilité par rapport à  $E$ . En suivant la même logique que la description de la figure (5.6) :

- $0 < x/D < 1$ , on observe dans la zone un retrait vers l'amont du point de décollement. En effet sur la paroi supérieure du cylindre, la vorticité est négative (couleur bleue) mais sa sensibilité est fortement positive (couleur rouge).
- $1 < x/D < 3$ , la zone d'eau morte s'agrandit : les tourbillons sont formés plus en aval du cylindre. De plus le sillage diminue en largeur ; en effet on observe

des signes contraires entre vorticité et sensibilité sur les zones périphériques des vortex repérés par des ellipses noires.

- $4 < x/D$ , les valeurs de la sensibilité de vorticité qui entourent le cœur des tourbillons sont de signes opposées : par exemple le tourbillon à  $x/D = 7$  présente des valeurs de sensibilité négative (bleu) autour de son cœur de vorticité positive (rouge). Donc l'intensité des tourbillons décroît.

Pour récapituler, une diminution de la rugosité du cylindre, provoque un décollement prématué de la couche limite, une zone de formation de vortex plus étendue, un sillage dont la largeur rétrécit et des tourbillons amortis. Le sillage instationnaire perd de sa vigueur. Ce qui est tout à fait en accord avec la théorie, puisque la rugosité retarde le décollement, et avec nos remarques faites sur l'écoulement au 5.1.5.1.1, puisque pour des valeurs plus importantes du paramètre  $E$  (donc une rugosité moins importante) le modèle de turbulence  $k - \epsilon$  amortit le sillage tourbillonnaire pour le rendre stationnaire.

Enfin la figure (5.10) présente la sensibilité du coefficient de traînée par rapport au paramètre  $E$ . Une augmentation de  $E$  (donc une **diminution** de la rugosité) induira une diminution de la traînée, ce qui a du sens par rapport aux observations expérimentales.

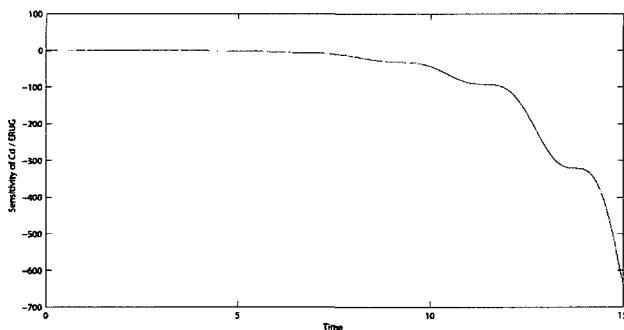


FIG. 5.10 Sensibilité de  $C_d$  par rapport au paramètre  $E$  en fonction du temps

### 5.1.6 Conclusion sur le cas du cylindre en milieu infini

Au cours de cette section réservée au cas du cylindre en milieu infini, nous avons vu que le modèle  $k - \epsilon$  au même titre que d'autres modèles à viscosité turbulente, a tendance à sur-évaluer la production de l'énergie cinétique de turbulence, ce qui entrave la séparation du fluide et crée un sillage stationnaire. Pour remédier à cela, il existe plusieurs variantes du modèle, notamment Kato-Launder et RNG, qui permettent en effet de capturer les phénomènes instationnaires dans le sillage du cylindre mais donnent des valeurs du nombre de Strouhal peu réalistes et nous obligent à être hors plage de validité d' $y^+$ . Nous avons alors proposé une modification du terme de rugosité, permettant d'augmenter la rugosité de la paroi, de rester dans la plage de validité d' $y^+$  tout en assurant au modèle  $k - \epsilon$  standard de capter le sillage instationnaire. Nous avons alors calculés les sensibilités de l'écoulement par rapport aux paramètres  $U_0$ , vitesse en entrée et  $E$ , terme de rugosité. Les résultats obtenus quant aux prédictions des sensibilités concordent parfaitement avec les observations expérimentales. La figure (5.11) est une visualisation faite en soufflerie de l'écoulement derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds. On note bien que plus le nombre de Reynolds est élevé plus la zone d'eau morte (repérée par une ellipse de couleur blanche) diminue et plus le sillage (largeur évaluée à partir des droites parallèles couleurs blanches) s'épaissit. Il serait donc attrayant maintenant d'appliquer la M.E.S à d'autres cas. C'est ce qui fait l'objet de notre section suivante.

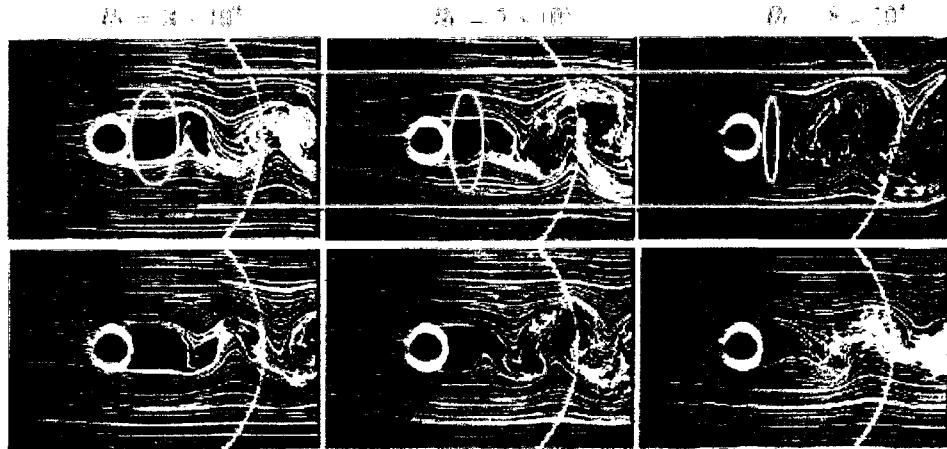


Fig. 5.11: Résultats de  $C_d$  en fonction de  $E$

FIG. 5.11 Sensibilité de  $C_d$  par rapport au paramètre  $E$  en fonction du temps

## 5.2 Seconde application : cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane

Ce qui différent les deux nouvelles configurations du cas présenté au 4.2.2 c'est la distance qui sépare le cylindre de la plaque du bas. Ainsi la garde au sol ( $G_s$ ) passe de 0.25 à 0.5, puis 0.75. Nous présenterons brièvement la configuration ( $G_s = 0.75$ ) mais concentrerons notre attention sur la seconde ( $G_s = 0.50$ ) avec laquelle les calculs de sensibilités seront effectués. Il faut aussi noter que pour la seconde configuration, la géométrie du cylindre à section carrée a changé (en un vrai carré) de façon à pouvoir confronter quantitativement nos résultats à ceux de l'expérience. Rappelons d'ailleurs que ce cas a fait l'objet de nombreuses publications dont notamment Bosch *et al.* [3], Wu et Martinuzzi [59] et Kim *et al.* [35] pour leurs études expérimentales. Des simulations en régime instationnaire pour des maillages structurés ont été publiés par Bosch et Rodi [4], et Straatman et Martinuzzi [52]. Nous essaierons dans la mesure du possible de confronter nos résultats à ceux des pu-

blications. Il faut tout de même garder à l'esprit que pour le cas  $G_s = 0.75$  notre cylindre à section carrée présente des coins arrondis. Donc pour cette configuration, nos comparaisons avec l'expérimental seront plus qualitatives que quantitatives.

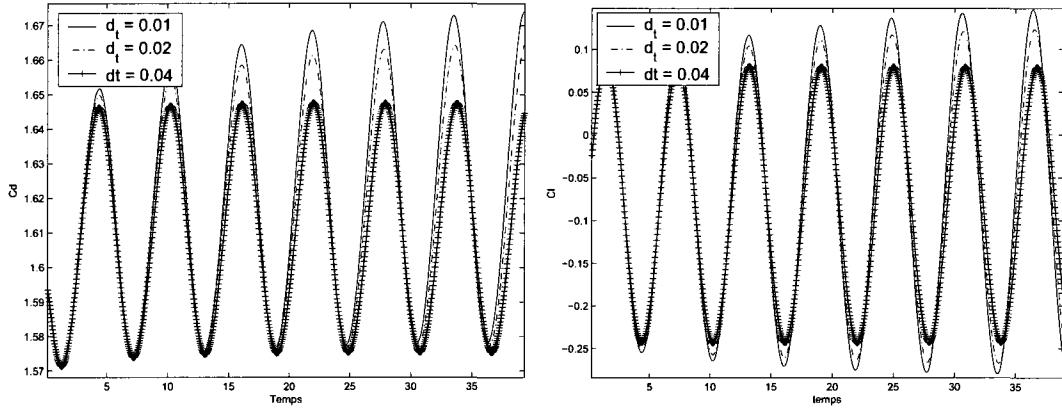
### 5.2.1 Cylindre à section carrée à $G_s = 0.75$

Le domaine de calcul étant identique, ainsi que les conditions aux limites, nous ne reviendrons pas sur ce point (cf 4.2.2). Pour cette garde au sol, le sillage est entièrement instationnaire, dans la mesure où les tourbillons du bas, ne sont pas complètement amortis par la plaque. Nous avons testés le modèle  $k - \epsilon$  et la modification de Kato-Launder afin de réduire la production de turbulence au point de stagnation.

#### 5.2.1.1 Choix du pas de temps

Ici aussi, une attention particulière doit être portée au choix du pas de temps. Le nombre de Strouhal observé dans les expériences en soufflerie<sup>[35]</sup> est de l'ordre de 0.14 soit bien moins important que pour le cas du cylindre en milieu infini. On peut donc s'attendre à ce qu'un pas de temps supérieur à celui fixé pour le cylindre en milieu infini (5.1.2), soit suffisant pour avoir une convergence en temps. Une valeur de 0.02 est très souvent utilisée<sup>[4]</sup>.

La figure (5.12) montre la convergence en temps des valeurs des coefficients de forces calculés avec le modèle  $k - \epsilon$ . Il semble en effet que  $\Delta_t * U_0/D = 0.02$  soit suffisant pour nos calculs. Certes une simulation avec un pas de temps plus petit aurait pu confirmer encore plus le fondement de ce choix, mais pour des raisons de temps de calcul, une telle vérification n'a pas été entrepris. Cela dit  $\Delta_t * U_0/D = 0.02$  est souvent retenue dans les publications.



(a) Convergence du coefficient de traînée  $C_d$  (b) Convergence du coefficient de portance  $C_l$   
en fonction du pas de temps en fonction du pas de temps

FIG. 5.12 Convergence en temps de la solution

### 5.2.1.2 Résultats

La figure (5.13) met en évidence la stratégie adaptative qui là encore marche très bien. Les isolignes de la vorticité sont en effet bien en phase avec le raffinement du maillage, aussi bien pour les tourbillons que pour les couches limites. Notons tout de même que le maillage au niveau du cylindre est raffiné sur une plus grande zone que dans le cas du cylindre en milieu infini. Cela semble logique car le cylindre à section carré créera un blocage plus important pour l'écoulement qu'un cylindre circulaire.

Enfin la figure (5.14) permet de comparer les coefficients de forces obtenus à partir du modèle  $k - \epsilon$  standard et de la modification de K-L. On constate que la modification de Kato-Launder présente des amplitudes dans ses coefficients plus importantes, et un nombre de Strouhal plus grand. Pour ce cas, le modèle  $k - \epsilon$  semble mieux prédire le nombre de Strouhal ( $S_t = 0.153$ ) ainsi que la

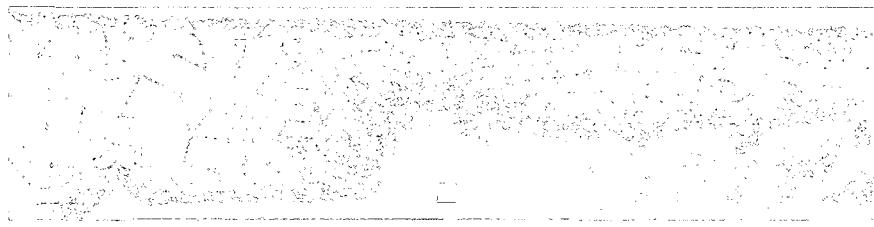


FIG. 5.13 Maillage de 57260 noeuds obtenu après 3 cycles adaptatifs

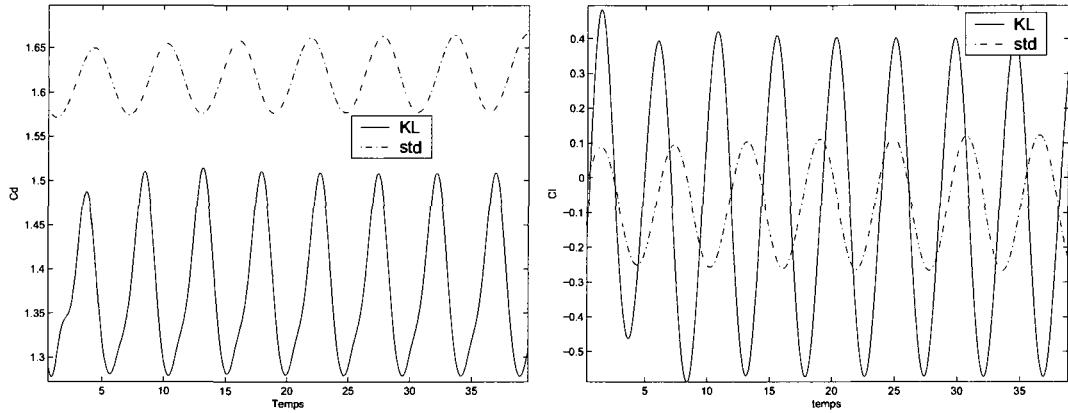
valeur moyenne du coefficient de traînée (1.61) qui est serait de l'ordre de 1.8<sup>[52]</sup>. Par contre le coefficient de portance est mieux prédit par la modification de Kato-Launder.

Encore une fois, on ne peut faire qu'une comparaison qualitative pour cette configuration avec l'expérimental car la géométrie du cylindre diffère au niveau des coins, qui sont arrondis dans notre cas. Par contre en ce qui concerne la comparaison entre le modèle  $k - \epsilon$  et la modification de K-L il faut considérer les points suivants :

- Pour le modèle  $k - \epsilon$  : il sur-prédit la production de  $k$  en amont du cylindre, ce qui crée un effet de blocage pour l'écoulement, donc les valeurs de  $C_d$  sont plus importantes comme on l'observe et le nombre de Strouhal plus petit car les tourbillons sont convectés moins rapidement et avec moins d'inertie. C'est ce qui explique que les amplitudes des coefficients de forces soient plus petites que celles prédites par K-L.
- Pour la modification K-L : le cylindre ayant des coins arrondis se comporte à la fois comme un carré et à la fois comme un cylindre, donc la traînée est moins forte par rapport à l'expérimental (c'est ce qui est observé), le nombre de Strouhal est plus grand (c'est aussi ce qui est observé), et le coefficient de portance plus faible. Ces remarques vont dans le sens des essais expérimentaux réalisés par Hu<sup>[25]</sup>

On ne peut donc pas clairement privilégier plus l'un que l'autre.

Mais comme nous le verrons pour la prochaine configuration (adaptée aux cas



(a) Comparaison du coefficient de traînée  $C_d$  (b) Comparaison du coefficient de portance  $C_l$

FIG. 5.14 Comparaison des coefficients de forces obtenus par le modèle  $k - \epsilon$  standard et par la modification de K-L

expérimentaux) la modification de Kato-Launder donne de très bons résultats.

### 5.2.2 Cylindre à section carrée à $G_s = 0.50$

Cette configuration est particulièrement intéressante dans la mesure où le modèle  $k - \epsilon$  amorti complètement le sillage tourbillonnaire, tandis que la modification de Kato-Launder, donne de très bons résultats. De plus nous appliquerons la M.E.S aux deux. Enfin, la méthode Younis-Przulj [61] (cf 5.1.4.2) a été testée pour la partie écoulement.

#### 5.2.2.1 Domaine et conditions limites

Comme dit précédemment, pour cette configuration, les coins arrondis du cylindre sont supprimés afin d'avoir un cylindre réellement à section carrée comme ceux utilisés pour les essais expérimentaux et numériques [4]. De plus, la valeur de  $k_0$  en

entrée est revue à la hausse afin d'avoir la même intensité turbulente, soit  $I_t = 4\%$ , que dans la publication de Bosch [4]. Enfin toujours pour satisfaire  $r_\mu = 10$  (cf Equation (2.27)), la valeur d' $\epsilon_0$  est elle aussi revue à la hausse. A part cela rien ne change par rapport aux configurations précédentes.

### 5.2.2.2 Résultats pour l'écoulement

La figure (5.15) montre la convergence en maillage pour la modification de Kato-Launder. Les résultats obtenus pour le troisième maillage sont déjà très bons :

- le Strouhal est de l'ordre de 0.15 à comparer à 0.14 pour l'expérimental [59] et 0.15 – 0.16 pour les résultats numériques [35]
  - les valeurs du coefficients de portance sont comprises entre –1.4 et 1.5, à comparer avec les valeurs expérimentales  $-1.8 < C_l < 1.7$  [52; 4]
  - la valeur moyenne du coefficient de traînée est de 1.52 à comparer avec 1.65 [59]
- Il semble tout de même que deux cycles d'adaptation supplémentaires auraient donnés des résultats encore plus en adéquation avec ceux obtenus par Bosch [4] et Straatman [52].

Cela dit, on se rend très vite compte que la modification de K-L prédit bien l'écoulement surtout en comparaison avec le modèle  $k - \epsilon$  et la modification Y-P. La figure (5.16) illustre justement cette comparaison. Le modèle  $k - \epsilon$  et la modification Y-P amortissent complètement le sillage tourbillonnaire ce qui est en accord avec Bosch [4] et Straatman [52].

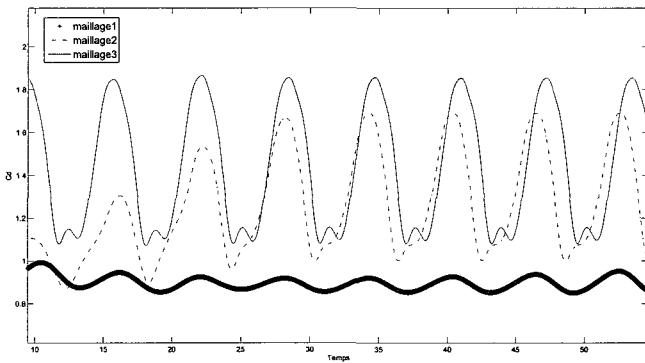
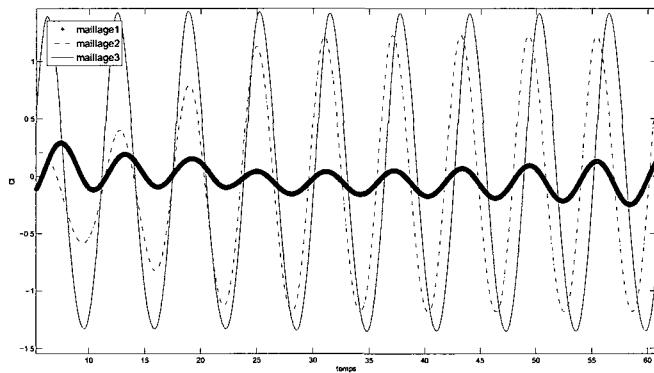
(a) Convergence en maillage du coefficient de traînée  $C_d$ (b) Convergence en maillage du coefficient de portance  $C_l$ 

FIG. 5.15 Convergence en maillage des coefficients de forces obtenus par la modification de K-L

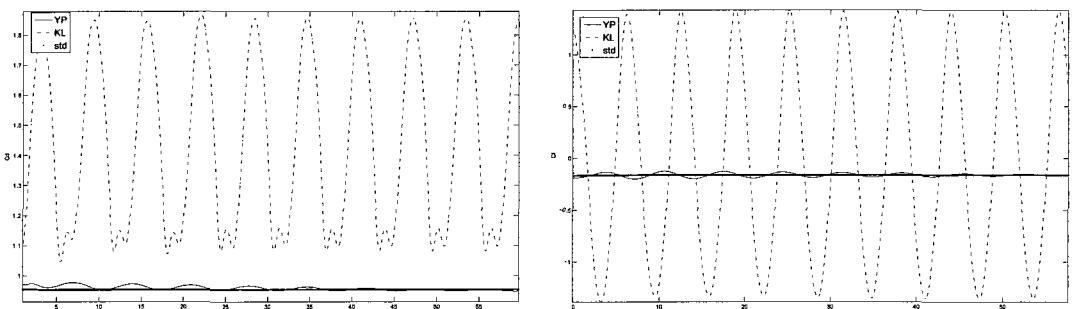
(a) Comparaison du coefficient de traînée  $C_d$  (b) Comparaison du coefficient de portance  $C_l$ 

FIG. 5.16 Comparaison des coefficients de forces obtenus par le modèle  $k - \epsilon$  ainsi que par les 2 modifications K-L et Y-P

La surproduction de  $k$  pour le modèle  $k-\epsilon$  en amont du cylindre fait effet de bouclier pour l'écoulement. La figure (5.17) permet justement d'observer cette surproduction. Elle compare pour une même plage de viscosité turbulente  $\mu_t$  les solutions du modèle  $k - \epsilon$  et celles de la modification de K-L.

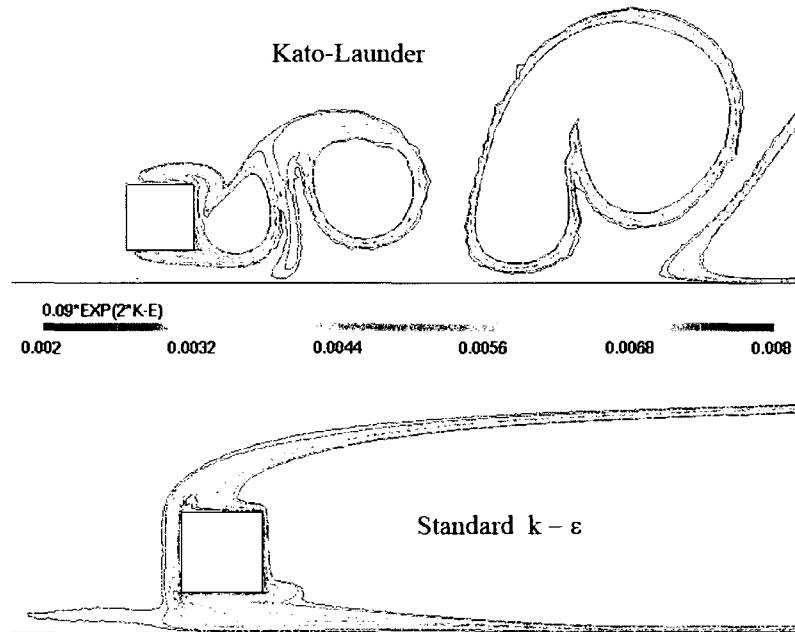


FIG. 5.17 Contours de viscosité turbulente pour le modèle  $k - \epsilon$  et sa modification K-L

Dans la sous-section suivante nous appliquerons la M.E.S au modèle  $k - \epsilon$  et à la modification de K-L.

### 5.2.2.3 Résultats pour les sensibilités

Nous présenterons ici les résultats du calcul des sensibilités pour les paramètres,  $U_0$ ,  $K_0$ ,  $d$  et  $C_\mu$ . Nous avons décidé appliquer la M.E.S sur la modification de K-L et sur le modèle  $k - \epsilon$  dans sa période de transition avant que la surproduction de  $k$  n'amortisse complètement le sillage instationnaire.

#### 5.2.2.3.1 Sensibilités par rapport à $U_0$

La figure (5.18) présente de bas en haut : la vorticité de l'écoulement, les solutions voisines calculées pour  $\Delta U_0 = 10\%$ ,  $20\%$ , et la sensibilité de la vorticité. Les résultats vont dans le sens de ceux observés 5.1.5.2 : une augmentation de la vitesse en entrée a pour influence de dynamiser les tourbillons et de les déplacer vers l'aval. On remarque d'ailleurs très bien que plus  $\Delta U_0$  est grand, plus la solution voisine est en avance de phase : en effet, en comparaison avec la vorticité de l'écoulement ( $\Delta U_0 = 0\%$ ), on remarque que la solution voisine avec  $\Delta U_0 = 10\%$ , présente un tourbillon près de la plaque du bas (localisé par un cercle noir) clairement plus détaché et un tourbillon en formation plus avancée (localisé par un cercle rose). Le phénomène est accentué pour une solution voisine calculée avec  $\Delta U_0 = 20\%$ .

La figure (5.19) confirme ces observations sur la modification de Kato-Launder, mais apporte en plus l'information suivante : la zone de formation des tourbillons est très légèrement déplacée vers l'aval.

Enfin la figure (5.20) apporte des détails supplémentaires sur les coefficients de forces et leur sensibilités. Ainsi on voit que les amplitudes de ces coefficients

sont augmentées ainsi que leur moyenne. Par conséquent, une augmentation de la vitesse en entrée entraîne bien une augmentation du coefficient de portance moyen et de ses amplitudes. On peut constater la même chose pour le coefficient  $C_d$ , ce qui semble être en adéquation avec l'expérimental.

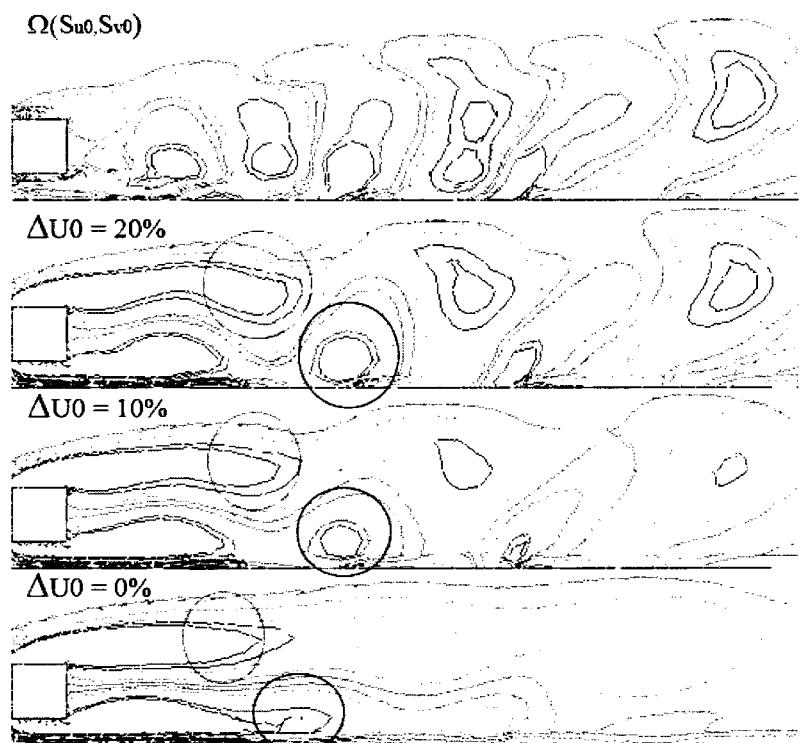


FIG. 5.18 De bas en haut : vorticité de l'écoulement, solutions voisines pour  $\Delta U_0 = 10\%$  et  $\Delta U_0 = 20\%$ , sensibilité de la vorticité pour le modèle  $k - \epsilon$

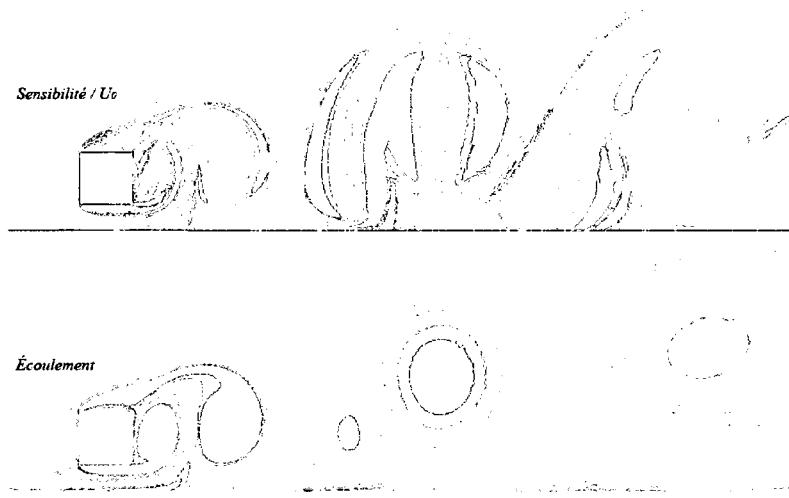


FIG. 5.19 De bas en haut : vorticité de l'écoulement et sensibilité de la vorticité par rapport à  $U_0$  pour la modification K-L

#### 5.2.2.3.2 Sensibilités par rapport à $k_0$

Quel sera l'impact d'une augmentation de l'énergie cinétique de turbulence en entrée sur le reste de l'écoulement ? A priori comme le modèle  $k - \epsilon$  produit "naturellement" trop de turbulence à l'amont du cylindre, on est en droit d'imaginer que ça ne ferait que détériorer la solution : le sillage tourbillonnaire disparaîtrait plus vite encore.

La figure (5.21) présente de bas en haut : la vorticité de l'écoulement et les solutions voisines calculées pour  $\Delta k_0 = 10\%, 20\%$ . La plage de valeurs des contours a été choisie de telle sorte qu'on puisse observer le tourbillon complètement à droite de la figure dont le cœur est localisé par la ligne noire verticale. Les résultats vont dans le sens de notre intuition : les tourbillons perdent de leur inertie et plus  $k_0$  est élevé plus le tourbillon se trouve à l'amont de la ligne noire, ce qui traduit une augmentation du nombre de Strouhal. Ces prédictions vont aussi dans le sens des observations faites par Wolochuk *et al.*<sup>[58]</sup> en 1996.

De plus comme le montre la figure (5.22), les valeurs des sensibilités dans la zone supérieure du sillage (repérées par une ellipse noire) sont de signe opposés à celles

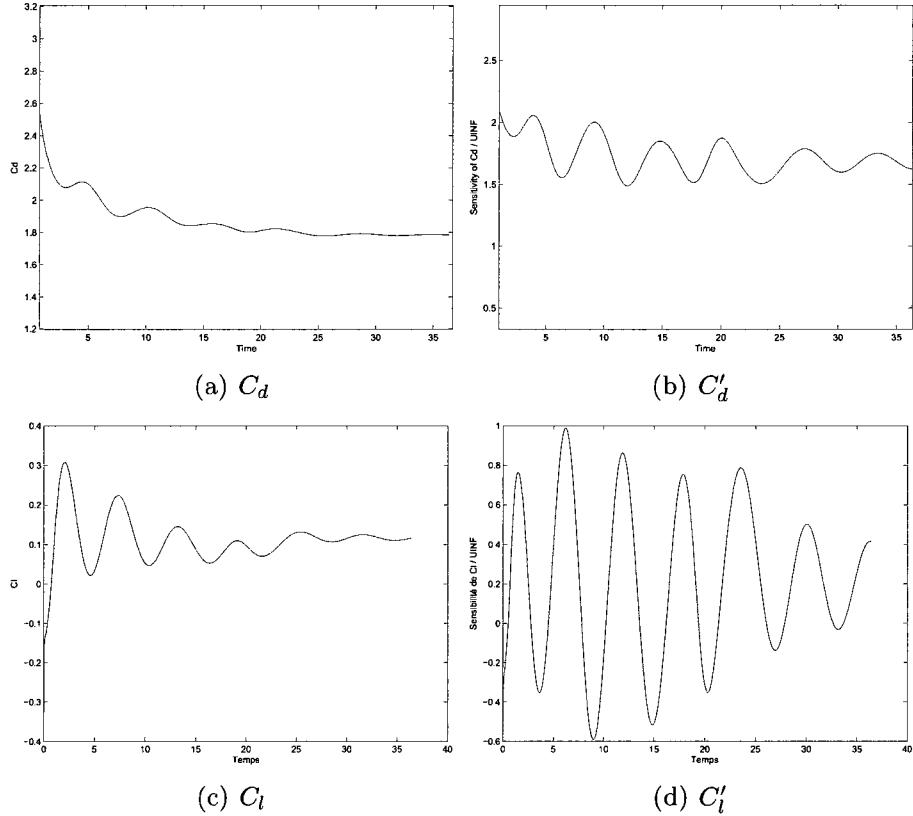


FIG. 5.20 Coefficients de forces et leurs sensibilités par rapport à  $U_0$

observées pour l'écoulement. La largeur du sillage tourbillonnaire rétrécit, ce qui s'explique par l'augmentation de l'énergie cinétique turbulente (en amont et au coin supérieur gauche du cylindre) qui vient perturber le sillage.

### 5.2.2.3.3 Sensibilités par rapport à $d$

Il s'agit donc de connaître l'influence sur l'écoulement de la distance à la paroi de la plaque du bas. La figure (5.23) compare pour la modification de K-L la vorticité à sa sensibilité par rapport à  $d$ . Comme nous le voyons, augmenter  $d$  sur la paroi du bas, épaisse la couche limite de cette dernière. Celle-ci va venir gêner l'écoulement notamment dans le passage entre le cylindre et la plaque ce

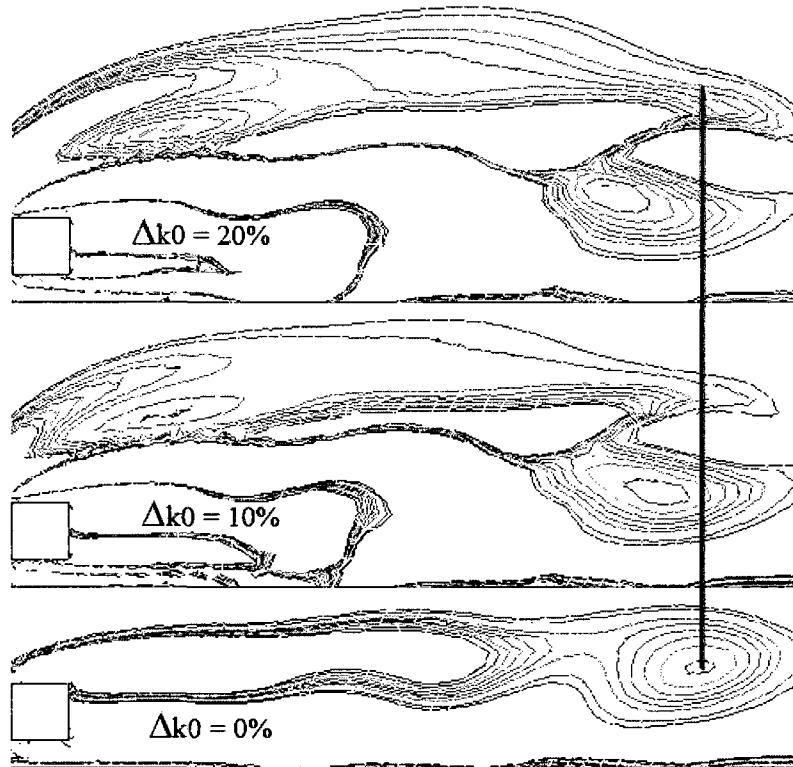


FIG. 5.21 De bas en haut : vorticité de l'écoulement, solutions voisines pour  $\Delta k_0 = 10\%$  et  $\Delta k_0 = 20\%$ , pour le modèle  $k - \epsilon$

qui amortit le sillage du bas qui viendra à son tour amortir le sillage supérieur. On voit très bien sur la figure que le tourbillon repéré par une ellipse noire est complètement amorti au niveau de la plaque et que le tourbillon repéré par un carré noir a largement perdu de son intensité et de son inertie car il est déplacé vers l'amont. Ces prédictions sont à corrélérer aux observations de Ianigushi et Miyakoshi [40] et Grass *et al.* [20] qui ont observé que l'épaisseur de couche limite de la plaque du bas influençait la garde au sol minimale à partir de laquelle un sillage tourbillonnaire apparaissait. Plus précisément, ils ont constaté que plus l'épaisseur de la couche limite de la plaque du bas est importante, plus il faut une garde au sol importante afin d'observer un sillage instationnaire.

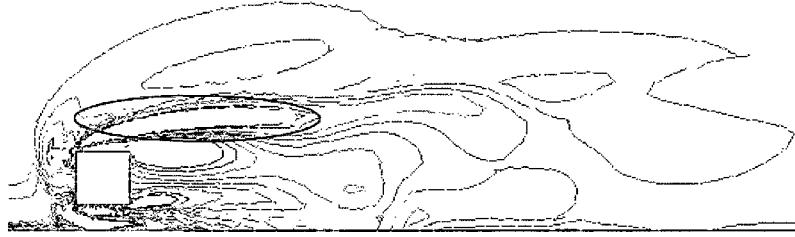


FIG. 5.22 Sensibilité de la vorticité pour le modèle  $k - \epsilon$  par rapport au paramètre  $k_0$

La figure (5.24) réalisée à partir des résultats du modèle standard  $k - \epsilon$ , confirme nos observations.

### 5.2.3 Conclusion sur le cas du cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane

Le cas du cylindre à section carrée à proximité d'une plaque plane est un cas très riche dans le sens, où il présente des régimes d'écoulement différents en fonction de la garde au sol du cylindre. Nous avons vu notamment que pour  $G_s = 0.25$  l'écoulement est stationnaire. Pour  $G_s = 0.50$ , le modèle standard  $k - \epsilon$  et sa modification selon Younis [61] détruisent peu à peu le sillage tourbillonnaire pour laisser place à un sillage stationnaire. Au contraire, la modification K-L prédit avec succès l'écoulement. Enfin pour une garde au sol de  $G_s = 0.75$ , nous sommes en régime instationnaire aussi, mais cette fois le modèle standard  $k - \epsilon$  ne détruit pas le sillage tourbillonnaire. Pour conclure cette section, nous pouvons souligner encore une fois l'efficacité de l'analyse des sensibilités qui nous a permis de prédire l'évolution de l'écoulement en fonction d'une variation d'un paramètre de contrôle.

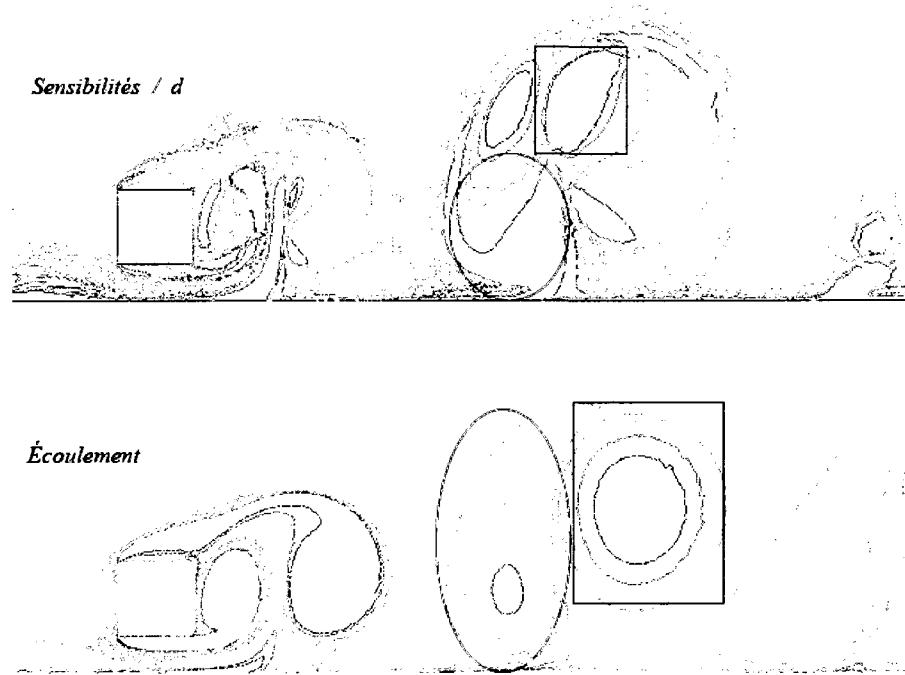


FIG. 5.23 De bas en haut : vorticité de l'écoulement et sa sensibilité par rapport à  $d$  pour la modification K-L

### 5.3 Conclusion du chapitre

En conclusion du chapitre, nous pouvons rappeler que le modèle  $k - \epsilon$  pose un réel problème de surproduction de la turbulence au niveau des points de stagnation. [53]. Il existe certes des variantes pour contourner ce problème, mais jusqu'à quel point ces variantes peuvent elles être dignes de confiance. Nous avons vu notamment que la modification proposée par Younis [61] marchait bien avec le cylindre en milieu infini, mais n'apportait rien par rapport au modèle  $k - \epsilon$  pour le cas du cylindre à section carrée. Enfin, nous terminerons le chapitre sur la modification de Kato-Launder. Elle a certes apporté des améliorations pour la plupart des cas traités, mais a toute même, sur le cas du cylindre à section carrés situé à  $G_s = 0.25$  de la plaque, prédit sur plusieurs cycles adaptatifs, un sillage instationnaire. Nous nous sommes rendus compte que cela venait de la distance à la paroi sur l'arête amont

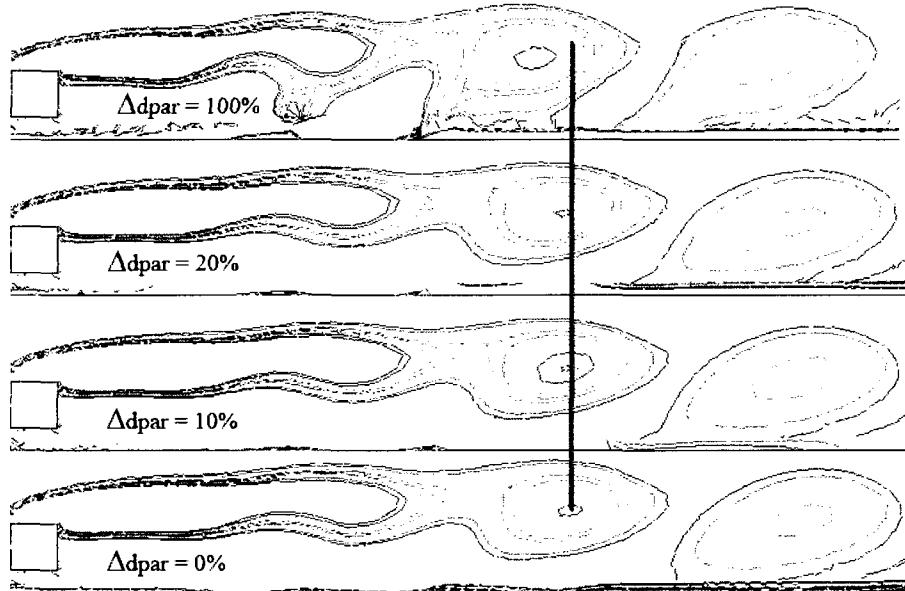


FIG. 5.24 De bas en haut : vorticité de l'écoulement, solutions voisines pour  $\Delta d = 10\%$ ,  $\Delta d = 20\%$  et  $\Delta d = 100\%$  pour le modèle  $k - \epsilon$

du cylindre, qui était trop faible pour assurer des valeurs de  $y^+$  comprises dans la plage de validité. Plus précisément, les valeurs de  $k$  dans la zone de stagnation et au niveau des 2 coins amont étaient largement sous-prédites, ainsi la couche limite sur l'arête inférieure s'est développée sans que les effets de la présence de la plaque ne soient pris en compte, ce qui a alimenté les lâchers de tourbillons au lieu de les amortir comme décrit au chapitre précédent. Mais la question mérite quand même d'être posée, est ce que dans certains cas la modification K-L ne réduirait-elle pas trop le terme de production de  $k$ ? Toutes ces questions pour conclure sur le fait qu'il faille rester prudent avec l'utilisation des variantes.

## CONCLUSION

Ce projet avait pour objectif de mettre à jour un code d'éléments finis afin qu'il puisse résoudre les équations des sensibilités avec paramètres de valeur, en régime **turbulent transitoire**.

Nous avons, en premier lieu, introduit le lecteur à la *modélisation* mathématique de phénomènes propres à la *mécanique des fluides*. Ainsi les équations *moyennées* de **Navier-Stokes** ont été développées et mises en relation avec les équations du **modèle de turbulence  $k - \epsilon$** . Nous avons alors vu qu'il était possible d'*améliorer la résolution* de ces dernières en introduisant des **variables logarithmiques**. Enfin, avant de conclure le second chapitre sur l'application de la *Méthode des Sensibilités (M.E.S)* aux équations pré-citées, nous avons rappelé qu'il était nécessaire d'implémenter une **loi de paroi** pour le traitement des frontières solides si l'on utilise le modèle  $k - \epsilon$  pour résoudre la turbulence.

Ensuite, nous avons présenté la **Méthode des Éléments finis** comme outil de résolution des systèmes d'équations établis au chapitre précédent. Nous avons alors abordé la **stratégie de maillages adaptatifs** et son **évolution** pour les problèmes instationnaires. Le point fort de cette stratégie est d'adapter le maillage au mouvement *transitoire du fluide*, afin d'améliorer la *qualité* de la solution et de *réduire* considérablement le *temps de calcul*. De surcroît, cette stratégie est appliquée pour les variables de l'écoulement ainsi que leurs sensibilités.

Les étapes de **vérifications** de code et de simulations ont fait l'objet de notre quatrième chapitre. Nous avons en effet, à l'aide d'une *solution analytique* proposée pour la *décroissance* de la *turbulence de grille*, vérifié l'implantation de nos équations dans le code d'éléments finis utilisé. Nous avons pu constater que nos solutions ainsi que leur taux de convergence étaient en *adéquation* avec la théorie. Pour clore ce chapitre, le code a été validé sur deux applications présentant une

période de transition, afin de s'assurer de la *reproductibilité* de nos résultats du régime stationnaire au régime instationnaire. La stratégie de maillages adaptatifs et la M.E.S ont été appliquées avec succès au cas de la *marche de Kim*. Ce chapitre nous a enfin donné l'occasion de confronter nos résultats sur le calcul des *coefficients de forces* appliqués à un *cylindre à section carrée à proximité du sol*, aux résultats précédemment obtenus en régime stationnaire.

Enfin, notre projet touchant à sa fin, nous avons exclusivement traité des cas purement instationnaires, comme celui du *cylindre en milieu infini* et *deux nouvelles configurations* du cas du cylindre à section carrée proche du sol. Nous avons pu encore une fois constater la grande efficacité de la stratégie de maillages adaptatifs pour ces applications : le maillage suit parfaitement l'évolution de l'allée de Von Karman. Enfin, la M.E.S, une fois encore, s'est révélée être un outil essentiel à la *prédition* d'écoulements transitoires influencés par des variations de paramètres, comme la vitesse en entrée du domaine de calcul, la rugosité et la distance à la paroi ; la M.E.S a prédéterminé avec succès l'*évolution* de l'écoulement sujet aux variations des paramètres pré-cités en exemple.

En conclusion de ce projet, nous pourrions éclairer quelques uns des nombreux horizons qui s'offrent désormais à lui. Nous avons vu qu'il existait un certain nombre de *modifications* pouvant être apportées au modèle standard  $k - \epsilon$  pour le traitement de zone de recirculation ou de *point de stagnation*. Mais peut-être plus essentiel encore que ces modifications, des *améliorations* de la *loi de paroi* seraient à envisager sérieusement [46; 38]. Aussi l'utilisation d'une formulation tout *couplée* entre les équations de Navier-Stokes et celles du modèle  $k - \epsilon$  s'est avérée performante pour les cas stationnaires [18] et pourrait donc être développée aux cas instationnaires à court terme. La formulation *lagrangienne* ayant fait ses preuves pour le traitement des paramètres de forme [7], elle pourrait en outre être appliquée aux cas transitoires turbulents. Le nombre de nouvelles applications

alors envisageables serait probablement décuplé.

À plus long terme, il serait concevable de doter notre code de méthodes de *discretisation temporelle* plus précises [39] afin d'améliorer encore la qualité de la solution et de réduire ses coûts de calcul.

Enfin, c'est sur ce point que nous laisserons ouvertes toutes ces voies d'améliorations : que penser d'un maillage qui ne s'adapterait plus uniquement *a posteriori* sur la solution, donc avec un temps de retard, mais qui *pré-déterminerait les zones d'évolution* de la solution et s'adapterait en conséquent [1], avec donc un temps d'avance ?

## RÉFÉRENCES

- Alauzet, F., Frey, P. J. et Mohammadi, B. (2002). Adaptation de maillages non structurés pour des problèmes instationnaires. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 335, 773–778.
- Benim, A. C., Pasqualotto, E. et Suh, S. H. (2008). Modellind turbulent flow past a circular cylinder by RANS, URANS, LES and DES. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 8(5), 299–307.
- Bosch, G., Kappler, M. et Rodi, W. (1996). Experiments on the flow past a square cylinder placed near a wall. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 13, 292–305.
- Bosch, G., et Rodi, W. (1996). Simulation of vortex shedding past a square cylinder near a wall. *Heat and Fluid Flow*, 17(3), 267–275.
- Brooks, A. et Hughes, T. J. R. (1999). Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 199–259.
- Chabard, J. P. (1991). Projet N3S de mécanique des fluides - manuel théorique de la version 3. Technical Report EDF HE-41/91.30B, Électricité de France.
- Charlot, L. (2008). Une méthode de l'équation des sensibilités lagrangiennes pour les écoulements. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal.
- Chassaing, P. (2000). *Turbulence en mécanique des fluides*. CEPADUES.
- Cousteix, J. (1989). *Turbulence et couche limite*. CEPADUES.
- DiCaro, R., Hay, A., Etienne, S. et Pelletier, D. (2007). Continuous shape sensitivity equation method for the k-epsilon model of turbulence. In *45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* AIAA, Reno, Nevada. AIAA Paper 2007-518.

- Fortin, A. et Garon, A. (2000). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. Montréal, QC.
- Comte-Bellot, G. et Baillay, C. (2003) *Turbulence*. CNRS editions.
- Borggaard, J. et Burns, J. (1997). A PDE sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *Journal of Computational Physics*, **136**(2), 366–384.
- Cori, J. F. (2007). Contribution à l'analyse et au design optimal de phénomènes d'interactions fluides-structures. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal.
- Durbin, P. A. (1996). On the k-3 stagnation point anomaly. *Heat and Fluid Flow*, **17**(1), 89–90.
- Edmond, P., Pelletier, D., Etienne, S., Hay, A. et Borggaard, J. (2006). Application of a sensitivity equation method to compressible subsonic impinging jets . In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* AIAA, Reno, Nevada. AIAA Paper 2006-0909.
- Etienne, S., Hay, A., Garon, A., et Pelletier, D. (2006). Shape sensitivity analysis of fluid-structure interaction problems. *Collection of Technical Papers - 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, **2**, 867 – 881.
- Lacasse, D. (2008). Une formulation monolithique des modèles de turbulence à deux équations : calcul éléments finis d'écoulements et de sensibilité . Master's thesis, École Polytechnique de Montréal.
- Gallagher, R. H. et Zienkiewicz, O. C. (1973). *Optimum structural design : theory and applications*. John Wiley & Sons.
- Grass, A. J., Raven, P. W. J., Stuart, R. J. et Bray, J. A. (1984). The influence of boundary layer velocity gradients and bed proximity on vortex shedding from free spanning pipelines. *ASME J.Energy Res. Tech*, **106**, 70–78.
- Gunzburger, M. D. (1999). Sensitivities, adjoints and flow optimization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **31**, 53–78.

- Haug, E. J., Choi, K. et Komkov, V. (1986). *Design sensitivity analysis of structural systems*, volume 177 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, Orlando.
- Hay, A., Etienne, S., Duvigneau, R. et Pelletier, D. (2006). Evaluation of flows on nearby geometries by a shape sensitivity equation method. In *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV. AIAA Paper 2006-1296.
- Hristova, H., Etienne, S., Pelletier, D. et Borggaard, J. (2006). A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**(7), 817 – 844.
- Hu, J. C., Zhou, Y. et Dalton, C. (2006). Effects of the corner radius on the wake of a square prism. *Experiments in Fluids*, **40**, 106 – 118.
- Hughes, T. J. R. et Brooks, A. (1999). A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, **73**, 19–35.
- Hughes, T. J. R., Franca, L. P. et Hulbert, G. M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. the Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations.. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **73**, 173–189.
- Ignat, L., Pelletier, D. et Ilinca, F. (1998). Adaptive computation of turbulent forced convection. *Numerical Heat Transfer, Part A*, **34**, 847–871.
- Ilinca, F. (1996). *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements turbulents*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.
- Ilinca, F. et Pelletier, D. (1998). Positivity preservation and adaptative solution for the  $k - \epsilon$  model of turbulence. *AIAA Journal*, **36**(1), 44–51.
- Ilinca, F., Pelletier, D., et Arnoux-Guisse, F. (1997). An adaptive finite element scheme for turbulent free shear flows. *International Journal for CFD*, **8**, 171–188.

- Ilinca, F., Pelletier, D. et Garon, A. (1997). An adaptive finite element method for a two-equation turbulence model in wall-bounded flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **24**, 101–120.
- Ilinca, F., Pelletier, D., et Ignat, L. (1998). Adaptive finite element solution of compressible turbulent flows. *AIAA*, **12**, 2187–2194.
- Kato, M. et Launder, B. (1993). The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders. In *Proc. 9th Symposium on Turbulent Shear Flows*, Kyoto, Japan. 10.4.1–10.4.6.
- Kim, T. Y., Lee, B. S., Park, Y. W., Lee, D. H. et Lee D. H. (2003). The study on a vortex shedding around square cylinders near a wall. In *41st AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NE. AIAA Paper 2002-2758.
- Lacasse, D. (2000). Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements turbulents. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal.
- Launder, B. et Spalding, J. (1974). The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**, pages 269–289.
- Mohammadi, B. et Puigt, G. (2006). Wall functions in computational fluid mechanics. *Computers and Fluids*(35), pages 1108–1115.
- Moryossef, Y. et Lévy, Y. (2007). Designing a positive second-order implicit time integration procedure for unsteady turbulent Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 4196–4206.
- Ianigushi, S. et Miyakoshi, K. (1990). Fluctuating fluid forces acting on a circular cylinder and interference with a plane wall, effects of boundary layer thickness. *Experiment in Fluids*(9), pages 197–204.
- Pelletier, D. et Ilinca, F. (1997). Adaptive remeshing for the  $k - \epsilon$  model of turbulence. *AIAA Journal*, **35**(4), 640–646.

- Pelletier, D., Turgeon, E., Etienne, S. et Borggaard, J. (2002). Reliable sensitivity analysis by an adaptative sensitivity equation method. In *3rd AIAA Theoretical fluid mechanics conference*, St-Louis, MO. AIAA Paper 2002-2758.
- Pelletier, D. (1999). Adaptive finite element computations of complex flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **31**, 189–202.
- Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. et Ziekiewicz, O. C. (1987). Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, **72**(2), 449–466.
- Perrin, R. (2005). Analyse physique et modélisation d'écoulements incompressibles instationnaires turbulents autour d'un cylindre circulaire à grand nombre de Reynolds. Master's thesis, INP Toulouse.
- Mohammadi, B. et Pironneau, O. (1997). Unsteady separated turbulent flows computation with wall-laws and  $k - \epsilon$  model. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **148**, 393–405.
- Roache, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa publishers, Albuquerque, New Mexico.
- Schenk, O. et Gärtner, K. (2004). Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Journal of Future Generation Computer Systems*, **20**(3), 475–487.
- Schenk, O. et Gärtner, K. (2006). On fast factorization pivoting methods for symmetric indefinite systems. *Elec. Trans. Numer. Anal.*, **23**, 158–179.
- Schetz, J. (1993). *Boundary layer analysis*. Prentice Hall.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary layer theory*. McGraw Hill.
- Straatman, A. et Martinuzzi, R. (2002). A comparison of second-moment closure models in the prediction of vortex shedding from a square cylinder near a wall. *Journal of Fluid Engineering*, **124**, 728–736.

- Taulbee, D. B., et Tran, L. (1988). Stagnation streamline turbulence. *AIAA Journal*, **26**(8), 1011–1013.
- Turgeon, É. (1997). Application d'une méthode d'éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques. Master's thesis, École Polytechnique de Montréal.
- Turgeon, É., Pelletier, D. et Borggaard, J. (2004). A general continuous sensitivity equation formulation for the  $k - \epsilon$  model of turbulence. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **18**(1), 29–46.
- Turgeon, É., Pelletier, D. et Borggaard, J. (2000). A general continuous sensitivity equation formulation for complex flows. In *8<sup>th</sup> AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Long Beach, CA. AIAA Paper 2000-4732.
- Turgeon, É., Pelletier, D. et Borggaard, J. (2001). Application of a sensitivity equation method to the  $k - \epsilon$  model of turbulence. In *15<sup>th</sup> AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Anaheim, CA. AIAA Paper 2001-2534.
- Wolochuk, M. C., et Plesniak, M. W. et Braun, J. E. (1996). The effects of turbulence and unsteadiness on vortex shedding from sharp-Edged Bluff body. In *ASME Fluids and Engineering*, **118**, 18-25.
- Wu, K. et Martinuzzi, R. (1997). Experimental study of the turbulent wake flow behind a square cylinder near a wall. In *ASME Fluids and Engineering Division*, Vancouver, BC. No.FEDSM 97-3151.
- Yakhot, V., Orszag, S., Thangam, S., Gatski, T., and Speziale, C. (1992). Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A*, **4**, 1510–1520.
- Younis, B. and Przulj, V. (2006). Computation of turbulent vortex shedding. *Computational Mechanics*, **37**, 408–425.

Zienkiewicz, O. C. et Zhu, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1331–1364.

Zienkiewicz, O. C. et Zhu, J. Z. (1992). The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 2 : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1365–1382.

## ANNEXE I

### FORMULATION VARIATIONNELLE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS DE $\mathcal{K}$ ET $\mathcal{E}$

I.1 Forme faible de l'équation de transport en  $S_{\mathcal{K}}$  :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ \rho' \left( \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} \right) + \rho \left( \frac{\partial S_{\mathcal{K}}}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}} \right) \right] \delta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \cdot \nabla \delta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \delta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & \quad - \int_{\Omega} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P S_{\mathcal{K}}) e^{-\mathcal{K}} \delta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Omega} \rho \left( 2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \delta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\
 & \qquad \qquad \qquad = \int_{\Gamma} \bar{f}'_{\mathcal{K}} \delta S_{\mathcal{K}} d\Gamma \quad (I.1)
 \end{aligned}$$

où

$$\bar{f}'_{\mathcal{K}} = \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (I.2)$$

sont les conditions de Neumann pour  $S_{\mathcal{K}}$  qui s'applique sur la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ .

I.2 Forme faible de l'équation de transport en  $S_{\mathcal{E}}$  :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ \rho' \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} \right) + \rho \left( \frac{\partial S_{\mathcal{E}}}{\partial t} + \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} \right) \right] \delta S_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla S_{\mathcal{E}} \right] \cdot \nabla \delta S_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} \right] \delta S_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[ \rho C_1 C_{\mu} P \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_1}{C_1} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + S_{\mathcal{K}} - S_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) e^{\mathcal{K}-\mathcal{E}} \right] \delta S_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & \quad + \int_{\Omega} \left[ \rho C_2 \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_2}{C_2} + S_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{K}} \right) e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \right] \delta S_{\mathcal{E}} d\Omega \\
 & \qquad \qquad \qquad = \int_{\Gamma} \bar{f}'_{\mathcal{E}} \delta S_{\mathcal{E}} d\Gamma \tag{I.3}
 \end{aligned}$$

où

$$\bar{f}'_{\mathcal{E}} = \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_{\epsilon}} - \frac{\mu_t \sigma'_{\epsilon}}{\sigma_{\epsilon}^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla S_{\mathcal{E}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{I.4}$$

sont les conditions de Neumann pour  $S_{\mathcal{E}}$  qui s'applique sur la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$ .

## ANNEXE II

### CALCULS DES SENSIBILITÉS DE $K$ ET $\epsilon$ PAR RAPPORT AUX PARAMÈTRES $K_0$ , $\epsilon_0$ ET $C_2$

#### II.1 Équations des sensibilités pour $k$

Rappel :

$$k = \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{1}{C_2-1}} \quad (\text{II.1})$$

##### II.1.1 Équations des sensibilités pour $k$ par rapport à $k_0$

$$\begin{aligned} Sk_{k_0} &= \frac{C_2}{C_2 - 1} \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^2 \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}-1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{1}{C_2-1}} \\ &\quad - \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \frac{1}{C_2 - 1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{1}{C_2-1}-1} \\ &= \frac{C_2}{C_2 - 1} \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}+1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{1}{C_2-1}} \\ &\quad - \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \frac{1}{C_2 - 1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{1}{C_2-1}-1} \quad (\text{II.2}) \end{aligned}$$

### II.1.2 Équations des sensibilités pour $k$ par rapport à $\epsilon_0$

$$Sk_{\epsilon_0} = \left(1 - \frac{C_2}{C_2-1}\right) \left(\frac{\epsilon_0}{k_0}\right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \left[(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}\right]^{-\frac{1}{C_2-1}} \\ + \frac{1}{C_2-1} \left(\frac{\epsilon_0}{k_0}\right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}-1} \left[(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}\right]^{-\frac{1}{C_2-1}-1} \quad (\text{II.3})$$

### II.1.3 Équations des sensibilités pour $k$ par rapport à $C_2$

Changement de variables :

$$Sk_{C_2} = S\mathcal{K}_{C_2}k \quad (\text{II.4})$$

avec

$$\mathcal{K} = \ln(k) \quad (\text{II.5})$$

$$\mathcal{K} = \ln(\epsilon_0) - \frac{C_2}{C_2-1} \ln\left(\frac{\epsilon_0}{k_0}\right) - \frac{1}{C_2-1} \ln\left[(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}\right] \quad (\text{II.6})$$

$$\begin{aligned}
S\mathcal{K}_{C_2} &= \frac{1}{(C_2 - 1)^2} \ln \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right) + \frac{1}{(C_2 - 1)^2} \ln \left[ (C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right] \\
&\quad - \frac{1}{C_2 - 1} \frac{x}{(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}} \\
&= \frac{1}{(C_2 - 1)^2} \ln \left[ \frac{\epsilon_0}{k_0} (C_2 - 1)x + 1 \right] - \frac{1}{C_2 - 1} \frac{x}{(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}} \quad (\text{II.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Sk_{C_2} &= \left[ \frac{1}{(C_2 - 1)^2} \ln \left[ \frac{\epsilon_0}{k_0} (C_2 - 1)x + 1 \right] - \frac{1}{C_2 - 1} \frac{x}{(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}} \right] \\
&\quad \times \left[ \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \times \left[ (C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{1}{C_2-1}} \right] \quad (\text{II.8})
\end{aligned}$$

## II.2 Équations des sensibilités pour $\epsilon$

Rappel :

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \left[ (C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \quad (\text{II.9})$$

### II.2.1 Équations des sensibilités pour $\epsilon$ par rapport à $k_0$

$$\begin{aligned}
 S\epsilon_{k_0} &= \frac{C_2}{C_2 - 1} \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^2 \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}-1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \\
 &\quad - \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \frac{C_2}{C_2 - 1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}-1} \\
 &= \frac{C_2}{C_2 - 1} \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}+1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \\
 &\quad - \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \frac{C_2}{C_2 - 1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}-1} \tag{II.10}
 \end{aligned}$$

### II.2.2 Équations des sensibilités pour $\epsilon$ par rapport à $\epsilon_0$

$$\begin{aligned}
 S\epsilon_{\epsilon_0} &= \left( 1 - \frac{C_2}{C_2 - 1} \right) \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}} \\
 &\quad + \frac{C_2}{C_2 - 1} \left( \frac{\epsilon_0}{k_0} \right)^{-\frac{C_2}{C_2-1}-1} \left[ (C_2 - 1) x + \frac{k_0}{\epsilon_0} \right]^{-\frac{C_2}{C_2-1}-1} \tag{II.11}
 \end{aligned}$$

### II.2.3 Équations des sensibilités pour $\epsilon$ par rapport à $C_2$

Changement de variables :

$$S\epsilon_{C_2} = S\mathcal{E}_{C_2}\epsilon \quad (\text{II.12})$$

avec

$$\mathcal{E} = \ln \epsilon \quad (\text{II.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \ln(\epsilon_0) - \frac{C_2}{C_2 - 1} \ln\left(\frac{\epsilon_0}{k_0}\right) - \frac{C_2}{C_2 - 1} \ln\left[(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}\right] \\ &= \ln(\epsilon_0) - \frac{C_2}{C_2 - 1} \ln\left[\frac{\epsilon_0}{k_0} (C_2 - 1)x + 1\right] \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

$$S\mathcal{E}_{C_2} = \frac{1}{(C_2 - 1)^2} \ln\left[\frac{\epsilon_0}{k_0} (C_2 - 1)x + 1\right] - \frac{C_2}{C_2 - 1} \frac{x}{(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} S\epsilon_{C_2} &= \left[ \frac{1}{(C_2 - 1)^2} \ln\left[\frac{\epsilon_0}{k_0} (C_2 - 1)x + 1\right] - \frac{C_2}{C_2 - 1} \frac{x}{(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}} \right] \\ &\quad \times \left[ \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_0}{k_0}\right)^{-\frac{C_2}{C_2 - 1}} \left[(C_2 - 1)x + \frac{k_0}{\epsilon_0}\right]^{-\frac{1}{C_2 - 1}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

### ANNEXE III

## MARCHE DE KIM : SENSIBILITÉS DE LA VORTICITÉ

### III.1 Sensibilités par rapport à $C_1$ et $\sigma_k$ au section $x/L = -0.5$ et $x/L = 18$

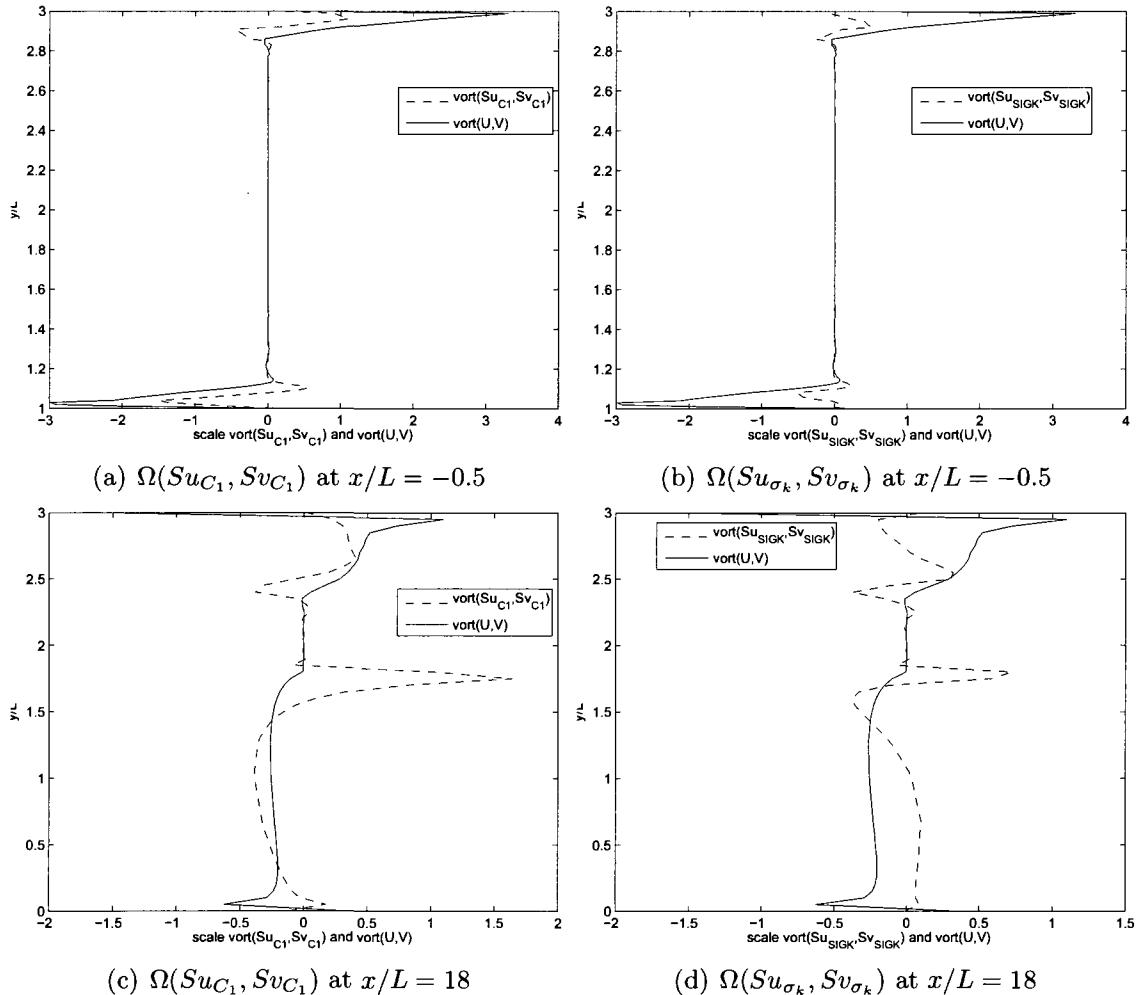


FIG. III.1 Marche de Kim : Profils des sensibilités de la vorticité  $\Omega(Su, Sv)$  pour les paramètres  $C_1$  et  $\sigma_k$  aux sections  $x/L = -0.5$  et  $x/L = 18$

### III.2 Sensibilités par rapport à $C_2$ , $C_\mu$ et $\sigma_\epsilon$ au section $x/L = -0.5$ et $x/L = 18$

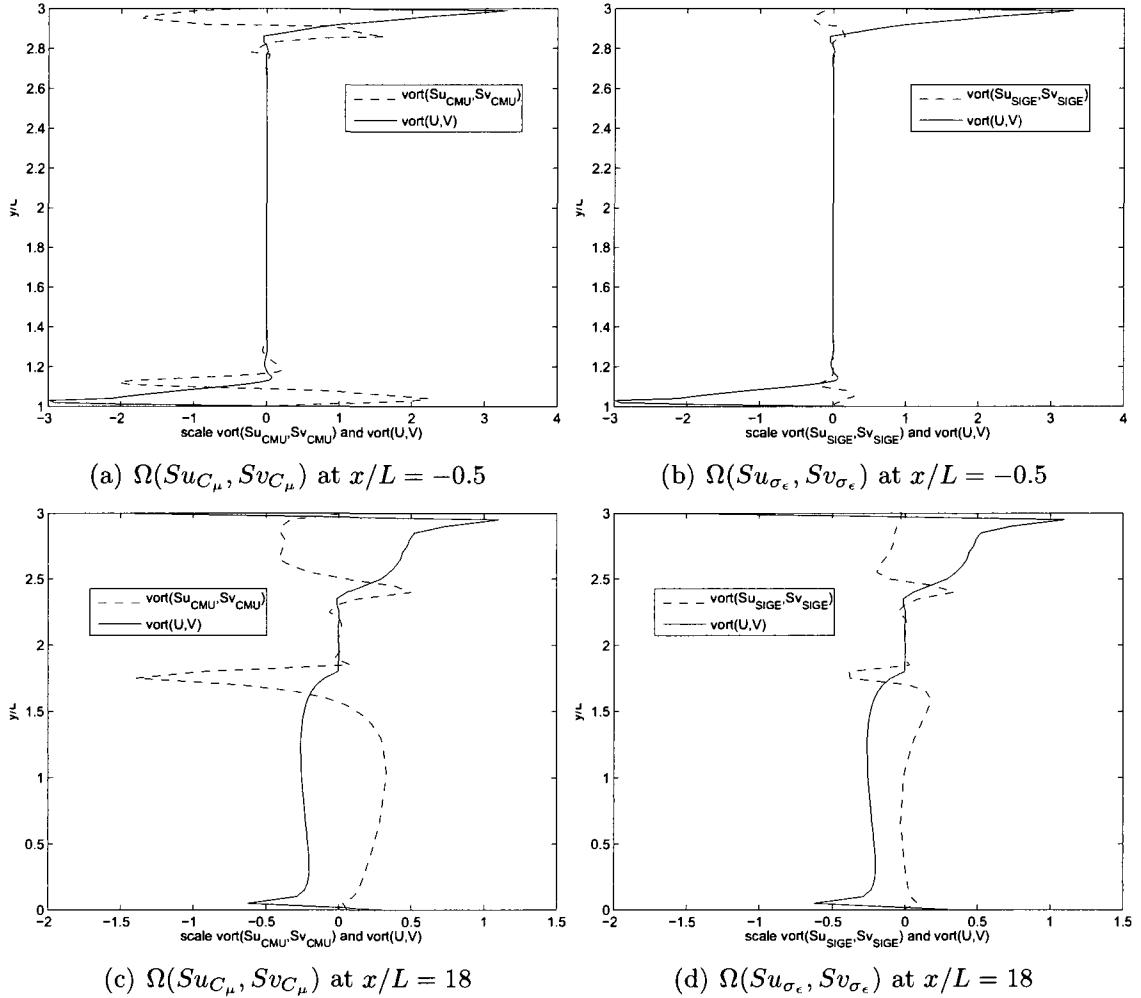


FIG. III.2 Marche de Kim : Profils des sensibilités de la vorticité  $\Omega(Su, Sv)$  pour les paramètres  $C_\mu$  et  $\sigma_\epsilon$  aux sections  $x/L = -0.5$  et  $x/L = 18$

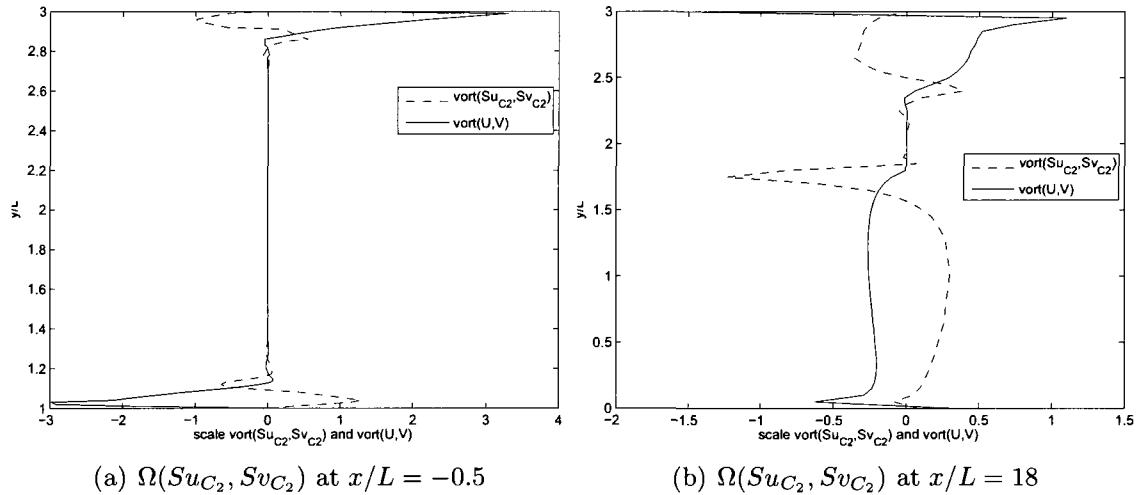


FIG. III.3 Marche de Kim : Profils des sensibilités de la vorticité  $\Omega(Su, Sv)$  pour le paramètre  $C_2$  aux sections  $x/L = -0.5$  et  $x/L = 18$