

**Titre:** Modélisation numérique du transfert radiatif par la méthode des volumes finis dans les disjoncteurs à SF6  
**Title:** volumes finis dans les disjoncteurs à SF6

**Auteur:** Matthieu Melot  
**Author:**

**Date:** 2009

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Melot, M. (2009). Modélisation numérique du transfert radiatif par la méthode des volumes finis dans les disjoncteurs à SF6 [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8417/>  
**Citation:**

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8417/>  
**PolyPublie URL:**

**Directeurs de recherche:** Ricardo Camarero, & Jean-Yves Trépanier  
**Advisors:**

**Programme:** Non spécifié  
**Program:**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU TRANSFERT RADIATIF PAR LA MÉTHODE  
DES VOLUMES FINIS DANS LES DISJONCTEURS À SF<sub>6</sub>

MATTHIEU MELOT  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
JUN 2009



Library and Archives  
Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*  
ISBN: 978-0-494-53914-9  
*Our file Notre référence*  
ISBN: 978-0-494-53914-9

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÉLISATION NUMÉRIQUE DU TRANSFERT RADIATIF PAR LA MÉTHODE  
DES VOLUMES FINIS DANS LES DISJONCTEURS À SF<sub>6</sub>

présenté par : MELOT Matthieu

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. CAMARERO Ricardo, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. MARLEAU Guy, Ph.D., membre

A Karla, à mes parents.

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord je souhaite remercier très chaleureusement mes directeur et codirecteur de recherche : les professeurs Jean-Yves Trépanier et Ricardo Camarero. Ils m'ont offert une très grande liberté pour laisser ma curiosité s'exprimer dans ce projet, tout en assurant un suivi des plus pertinents et ce, grâce à leurs qualités tant humaines que scientifiques. Ce fût pour moi deux années particulièrement fructueuses et mémorables.

Je suis très reconnaissant pour l'appui financier de la part du professeur Ricardo Camarero et du CRSNG. Par ailleurs je tiens à saluer Philippe Robin-Jouan d'AREVA T&D pour le partenariat avec le groupe de recherche et la visite de l'usine AREVA de Laprairie.

Je remercie aussi l'École d'Arts et Métiers Paritech de m'avoir offert l'occasion d'étudier à l'étranger dans des conditions particulièrement agréables. Et je remercie naturellement l'École Polytechnique de Montréal de m'avoir accueilli d'aussi belle manière.

Mes remerciements les plus sincères vont à la fine équipe LUMINOS: Christophe (honneur aux compatriotes !) pour sa disponibilité, ses conseils et sa bonne humeur, Martin pour la très bonne ambiance qu'il sait mettre dans le bureau et pour m'avoir aidé dans la compréhension des tenseurs (mais bon finalement ça n'a pas servi. C'était quand même très gentil de ta part ...), Benoît pour son club café et ses blagues, Sébastien pour sa générosité et son souci des autres et enfin Abderrahim pour sa gentillesse et sa bonne humeur.

Je remercie en outre le docteur Tassos Dionisopoulos de m'avoir cloué (et sauvé) la main gauche. Au passage je ne remercie pas le mont Sutton d'avoir laissé des arbres traîner autour des pistes.

Finalement je remercie mes parents, mes frères et soeur pour m'avoir appuyé et encouragé dans cette grande aventure malgré l'éloignement. Et évidemment je remercie Karla d'avoir été à mes côtés et que j'aime tellement.

## RÉSUMÉ

Les disjoncteur à  $\text{SF}_6$  sont des dispositifs indispensables pour opérer et assurer la sécurité d'un réseau électrique à haute intensité et haute tension. Ils ont fait l'objet d'un grand nombre d'analyses pour déterminer leurs différentes caractéristiques, notamment leur capacité à couper le courant, en cas de court-circuit, dans la ligne électrique sur laquelle ils sont installés. C'est pour cela que, depuis une vingtaine d'année environ, des outils de simulations ont été développés, tels que MC<sup>3</sup> à l'École Polytechnique de Montréal. De nombreux phénomènes physiques sont modélisés. On retrouve les champs électriques et magnétiques causés par la circulation du courant dans l'arc électrique, la mécanique des fluides, le  $\text{SF}_6$  soufflé sur l'arc, et le rayonnement qui provient de la chaleur extrême régnant au cœur de l'arc. En effet, l'essentiel de l'énergie produite par l'arc est évacué par ce mode de transfert de chaleur. Une partie de ce rayonnement atteint les parois, ce qui cause leur ablation. Cette ablation génère du gaz qui augmente d'autant plus la pression dans l'enceinte, fermée, du disjoncteur. Cette surpression favorise la coupure. Il s'agit donc d'un effet recherché par les concepteurs. Mais pour le capturer correctement il faut que la modélisation du rayonnement, qui génère l'ablation, soit suffisamment fidèle à la réalité.

Or le modèle P1 actuellement implanté, souffre de lacunes dans la prédiction de ce flux de chaleur aux parois. Le présent mémoire cherche un nouveau modèle pour le remplacer. Ce nouveau modèle doit être à la fois plus fidèle que le modèle P1 et rester raisonnable en temps de calcul. Il doit par ailleurs être compatible avec l'hypothèse d'axisymétrie. Après une revue de la littérature qui présente différentes possibilités, le choix est finalement porté sur la méthode des volumes finis (FVM *Finite Volume Method*). En effet elle peut s'adapter aux différentes hypothèses requises dans le cadre des disjoncteurs. Notamment celle d'axisymétrie. Cette hypothèse réduit le nombre d'inconnues mais au prix d'un plus long développement mathématique. Une implémentation efficace est réalisée, qui est rendue possible grâce à l'utilisation d'une méthode directe de résolution

des équations fournies par la méthode FVM.

Un certain nombre de cas tests sont définis. Plusieurs d'entre eux ont une solution analytique. Ils ont pour but de reproduire les difficultés qui sont rencontrées lors de l'utilisation du modèle P1 dans le cadre des disjoncteurs. L'implémentation du modèle P1 de FLUENT ainsi que trois implantations de la méthode FVM sont comparées. La première implémentation de la méthode FVM est celle de FLUENT. Il s'agit d'un schéma du premier ordre. Le deuxième est l'implémentation, réalisée dans le cadre de ce travail, du même schéma que FLUENT. Ces deux implémentations donnent rigoureusement les mêmes résultats. La dernière implémentation a aussi été réalisée pour ce mémoire. Il s'agit d'une variation du schéma précédent qui aboutit à la discrétisation de l'un des termes de l'équation modélisée avec un schéma du deuxième ordre.

Les résultats des cas tests montrent que pour 100 directions discrètes, la méthode FVM (schéma du premier ordre) est toujours supérieure au modèle P1 en terme de précision et de fidélité. De plus le modèle P1 a montré, dans certaines situations en deux dimensions, avec des longueurs optiques faibles, des résultats éloignés d'un ordre de grandeur et/ou qui ne capturaient pas la tendance du flux aux parois. La méthode FVM du second ordre produit de très bons résultats dans certaines situations mais dans d'autres cas, des résultats non physiques, difficiles à identifier comme tel, sont obtenus. Cette implémentation (schéma du deuxième ordre) n'est donc pas assez robuste pour une utilisation industrielle. Par ailleurs, les effets néfastes que peuvent produire la méthode FVM tels que la diffusion ou l'effet de rayon sont présentés et analysés.

Enfin, on effectue une étude du temps de calcul de nos implémentations afin d'évaluer son applicabilité à une simulation transitoire complète de la coupure du courant dans un disjoncteur. La taille des simulations typiques telles que pratiquées dans l'industrie, en terme de nombre d'inconnues, se révèle être compatible avec l'utilisation des méthodes directes de résolution. De plus, les temps obtenus avec un ordinateur personnel actuel tendent à prouver la pertinence de l'utilisation de cette méthode dans un contexte industriel.



## ABSTRACT

SF<sub>6</sub> circuit breakers are essential devices for the operation and the safety of high voltage electrical networks. Many analysis are carried on to characterize their properties. One of the major characteristic is their ability to cut the current off when a short circuit happens. To perform the analysis, there are simulation tools that exist for approximately twenty years. For instance, MC<sup>3</sup> that has been developed at L'École Polytechnique de Montréal is one of them. Several physical phenomena are accounted for and simulated. There are, among others, electrical and magnetical fields due to the current circulation within the electrical arc. Fluid dynamics is also computed because a gas (SF<sub>6</sub>) serves to blow the arc. Moreover the radiative heat transfer caused by the arc extreme temperature is computed. A part of the radiation is absorbed by the walls and causes ablation, which releases additional gases that increase the pressure in the chamber and facilitates the extinction of the arc. But in order to correctly capture this behaviour, radiation must be accurately modeled.

The current P1 model, suffers from miscalculation of the radiative heat flux at the walls. In the present work, a new model that could replace P1 model is thoroughly investigated. The new model must be accurate and allow reasonable computation time. After a literature review the Finite Volume Method (FVM) was selected as a promising candidate. The restriction to axisymmetric geometry allows to reduce the number of unknowns, but the on the other hand it involves a more complex mathematical development. An efficient implementation is achieved by solving implicitly the equations given by the FVM. Several test cases are defined, some of which having an analytical solution. The test cases intend to represent the same level of complexity found by the P1 model in an actual circuit-breaker simulation. For all cases, the results of the P1 model are compared with three FVM implementations. The first implementation is the first order scheme of FLUENT. The second one is an in-house implementation of the same scheme. These two implementations give strictly the same results. The last one is also an in-house im-

plementation. The difference with the previous ones is in the discretisation of one of the term of the equation carried out with a second order scheme.

The results of the test-cases show that for 100 discrete directions, the FVM (first order scheme) is always better than the P1 model in terms of accuracy and fidelity. That being said, the P1 model has shown, in some two dimensional situations, with low optical length, poor results that miss the axial dependency of the flux or, even worst, that do not capture the general trend of the solution. The second order FVM shows good results in some situations but in some other cases, results are not physical and are difficult to detect. Hence this second order scheme implementation is not suitable for an industrial use. Furthermore, the bad effects of the FVM, such as the *ray effect* or *false scattering* are shown and studied.

Finally, a study regarding the CPU time consumption of the in-house implementation was carried out. The goal is to determine the ability of the implementation to handle a transient simulation of the electrical cut. The number of unknowns of a typical simulation in an industrial context is compatible with the use of direct solving method. Moreover, the CPU time obtained with a modern personal computer proves the possibility of using such a method in the industry.

## TABLE DES MATIÈRES

|  |       |
|--|-------|
| DÉDICACE . . . . .   | iv    |
| REMERCIEMENTS . . . . .  | v     |
| RÉSUMÉ . . . . .   | vi    |
| ABSTRACT . . . . .   | viii  |
| TABLE DES MATIÈRES . . . . .   | x     |
| LISTE DES FIGURES . . . . .  | xiii  |
| LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .  | xv    |
| LISTE DES TABLEAUX . . . . .   | xvii  |
| LISTE DES ANNEXES . . . . .  | xviii |
| INTRODUCTION . . . . .   | 1     |
| CHAPITRE 1      PRÉSENTATION DES DISJONCTEURS . . . . .  | 3     |
| 1.1    Les fonctions remplies . . . . .  | 3     |
| 1.2    Le principe de fonctionnement . . . . .   | 4     |
| 1.3    Les phénomènes physiques en jeu . . . . .   | 5     |
| 1.4    Modélisation . . . . .  | 6     |
| CHAPITRE 2      REVUE DE LA LITTÉRATURE . . . . .  | 7     |
| 2.1    Introduction . . . . .  | 7     |
| 2.2    Modélisation numérique du rayonnement dans les disjoncteurs à SF <sub>6</sub> . . . . . | 7     |
| 2.3    Méthode des volumes finis . . . . .   | 9     |

|  |  |    |
|--|--|----|
| 2.4  | Méthode $Q_l$ . . . . .  | 10 |
| 2.5  | Conclusion . . . . .   | 10 |
| CHAPITRE 3 RAYONNEMENT DANS UN MILIEU PARTICIPATIF . . . |  | 12 |
| 3.1  | Nature du rayonnement . . . . .  | 12 |
| 3.2  | Spectre électromagnétique . . . . .  | 13 |
| 3.3  | Rappels sur les définitions et grandeurs caractéristiques liées au rayonnement . . . . . | 14 |
| 3.3.1  | L'intensité radiative . . . . .  | 14 |
| 3.3.2  | Le flux radiatif . . . . .   | 14 |
| 3.3.3  | Le rayonnement incident . . . . .  | 15 |
| 3.3.4  | Les coefficients aux parois . . . . .  | 15 |
| 3.4  | Plasma thermique . . . . .   | 16 |
| 3.5  | Équation du transfert radiatif . . . . .   | 18 |
| 3.5.1  | Bilan et expression générale . . . . .   | 18 |
| 3.5.2  | Expression de la RTE dans un repère cylindrique . . . . .                                | 21 |
| 3.5.3  | Condition d'axisymétrie . . . . .  | 24 |
| CHAPITRE 4 MÉTHODE DES VOLUMES FINIS . . . . .           |  | 26 |
| 4.1  | Dérivation du schéma numérique en trois dimensions . . . . .                             | 27 |
| 4.1.1  | Dépendance spectrale . . . . .   | 27 |
| 4.1.2  | Discretisations spatiale et angulaire . . . . .  | 27 |
| 4.1.3  | Intégration de l'équation de transfert radiatif . . . . .                                | 29 |
| 4.1.4  | Traitement de l'intensité des faces . . . . .  | 31 |
| 4.1.5  | Conditions limites . . . . .   | 32 |
| 4.2  | Schéma en coordonnées cylindriques avec l'hypothèse d'axisymétrie . .                    | 33 |
| 4.2.1  | Discretisation spatiale . . . . .  | 33 |
| 4.2.2  | Discretisation angulaire . . . . .   | 34 |
| 4.2.3  | Intégration de l'équation de transfert . . . . .   | 34 |

|            |   |    |
|------------|---|----|
| 4.2.4      | Correspondance entre la discrétisation spatiale et la discrétisation angulaire (1 <sup>er</sup> ordre) . . . . .  | 35 |
| 4.2.5      | Correspondance entre la discrétisation spatiale et la discrétisation angulaire (2 <sup>ème</sup> ordre) . . . . . | 38 |
| 4.2.6      | Remarques sur le terme de redistribution angulaire . . . . .  | 40 |
| 4.3        | Implémentation de la méthode des volumes finis . . . . .  | 40 |
| CHAPITRE 5 | RÉSULTATS OBTENUS . . . . .   | 42 |
| 5.1        | Résultats pour les cas tests analytiques . . . . .  | 43 |
| 5.1.1      | Cas test A . . . . .  | 43 |
| 5.1.2      | Cas test B . . . . .  | 44 |
| 5.1.3      | Cas test C . . . . .  | 52 |
| 5.1.4      | Résumé des cas tests analytiques . . . . .  | 54 |
| 5.2        | Cas test semi-industriel . . . . .  | 57 |
| 5.2.1      | Analyse de convergence en maillage . . . . .  | 57 |
| 5.2.2      | Comparaison entre FVM et le modèle P1 . . . . .   | 62 |
| 5.3        | Analyse du temps de calcul . . . . .  | 67 |
| 5.4        | Conclusion des résultats . . . . .  | 69 |
| CONCLUSION | . . . . .   | 70 |
| RÉFÉRENCES | . . . . .   | 71 |
| ANNEXES    | . . . . .   | 75 |

## LISTE DES FIGURES

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| FIG. 1.1  | Géométrie de disjoncteur typique (inspiré de Wikipedia (3 janvier 2009)) . . . . .       | 4  |
| FIG. 3.1  | Spectre électromagnétique en fonction de la longueur d'onde . .                          | 13 |
| FIG. 3.2  | Coefficient d'absorption pour le SF <sub>6</sub> (Nordborg & Iordanidis, 2008) . . . . . | 17 |
| FIG. 3.3  | Définition des repères . . . . .   | 22 |
| FIG. 3.4  | Illustration de l'hypothèse d'axisymétrie . . . . .                                      | 25 |
| FIG. 4.1  | Discrétisation de la direction . . . . .   | 29 |
| FIG. 4.2  | Bilan sur un volume de contrôle . . . . .  | 30 |
| FIG. 4.3  | Volume de contrôle dans un repère cylindrique . . . . .                                  | 33 |
| FIG. 4.4  | Distribution des angles et des volumes de contrôle sur l'angle polaire . . . . .         | 35 |
| FIG. 5.1  | Géométrie du cas test A . . . . .  | 44 |
| FIG. 5.2  | Maillage de 8192 triangles pour le cas test A . . . . .                                  | 45 |
| FIG. 5.3  | Résultats du cas test A . . . . .  | 46 |
| FIG. 5.4  | Géométrie du cas test B . . . . .  | 46 |
| FIG. 5.5  | Maillage de 8074 triangles pour le cas test B . . . . .                                  | 47 |
| FIG. 5.6  | Résultats du cas test B - $\tau = 0, 1$ . . . . .  | 48 |
| FIG. 5.7  | Résultats du cas test B - $\tau = 1$ . . . . .   | 49 |
| FIG. 5.8  | Résultats du cas test B - $\tau = 5$ . . . . .   | 50 |
| FIG. 5.9  | Flux radiatif dans le domaine du cas test B . . . . .                                    | 51 |
| FIG. 5.10 | Géométrie du cas test C . . . . .  | 53 |
| FIG. 5.11 | Maillage de 8132 triangles pour le cas test C . . . . .                                  | 54 |
| FIG. 5.12 | Résultats du cas test C . . . . .  | 55 |
| FIG. 5.13 | Géométrie du cas test semi-industriel . . . . .  | 58 |
| FIG. 5.14 | Raffinement de la discrétisation angulaire - Flux sur l'électrode                        | 59 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| FIG. 5.15 | Raffinement de la discrétisation angulaire - Flux sur la paroi radiale | 60 |
| FIG. 5.16 | Flux radiatif dans le domaine du cas test semi-industriel . . . .      | 61 |
| FIG. 5.17 | Raffinement de la discrétisation spatiale - Flux sur la paroi radiale  | 62 |
| FIG. 5.18 | Flux à la paroi radial - $\tau = 0, 1$ . . . . .                       | 64 |
| FIG. 5.19 | Flux à la paroi radial - $\tau = 1$ . . . . .                          | 65 |
| FIG. 5.20 | Flux à la paroi radial - $\tau = 5$ . . . . .                          | 66 |
| FIG. 5.21 | Temps CPU en fonction du nombre d'inconnues . . . . .                  | 68 |

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

|  |   |
|--|---|
| $A_{2d}$ :                             | Aire du triangle en deux dimensions qui génère le volume en trois dimensions. ( $m^2$ ) |
| $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ :    | Vecteurs directeurs unitaires du repère cartésien (m)                                   |
| $\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$ : | Vecteurs directeurs unitaires du repère cylindrique (m)                                 |
| $G(\mathbf{r})$ :                      | Rayonnement incident ( $W/m^2$ )  |
| $I(\mathbf{r}, \hat{s})$ :             | Intensité radiative ( $W/m^2/sr$ )  |
| $J_f$ :                                | Facteur géométrique définit dans l'équation 4.5   |
| $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ :             | Flux de chaleur radiative ( $W/m^2$ )   |
| $\hat{s}$ :                            | Vecteur direction unitaire (m)  |
| $\mathbf{S}$ :                         | Vecteur défini dans l'équation 4.7  |
| $\mathbf{r}$ :                         | Vecteur position (m)  |
| $\Delta V$ :                           | Volume ( $m^3$ )  |

### SYMBOLES GRECS

|              |  |
|--------------|--|
| $\alpha$ :   | Coefficient d'absorptivité d'une paroi                                 |
| $\epsilon$ : | Coefficient d'émissivité d'une paroi                                   |
| $\kappa$ :   | Coefficient d'absorption ( $m^{-1}$ )                                  |
| $\Gamma$ :   | Contour du volume de contrôle (m)                                      |
| $\omega$ :   | Angle solide (sr)  |
| $\varphi$ :  | Angle polaire du repère sphérique défini de manière absolue (rad)      |
| $\Phi$ :     | Angle polaire du repère cylindrique (rad)                              |
| $\psi$ :     | Angle polaire du repère sphérique défini de manière relative (rad)     |
| $\tau$ :     | Longueur optique   |
| $\theta$ :   | Angle Azimutal du repère sphérique. Défini à partir de l'axe $z$ (rad) |

### INDICES

|     |                                 |
|-----|---------------------------------|
| 0 : | Relatif au volume de contrôle 0 |
|-----|---------------------------------|



|         |                                 |
|---------|---------------------------------|
| $1 :$   | Relatif au volume de contrôle 1 |
| $\nu :$ | spectral                        |
| $b :$   | Corps Noir (black body)         |
| $b :$   | Face du dessous (bottom)        |
| $i :$   | Direction i                     |
| $t :$   | Face du dessus (top)            |

**EXPOSANTS**

|       |                         |
|-------|-------------------------|
| $l :$ | angle $\varphi$ discret |
| $m :$ | angle $\theta$ discret  |

**LISTE DES TABLEAUX**

|          |  |    |
|----------|--|----|
| TAB. 5.1 | Étude paramétrique sur le nombre de directions . . . . . | 56 |
|----------|--|----|

**LISTE DES ANNEXES**

|          |   |    |
|----------|---|----|
| ANNEXE I | RAPPELS SUCCINTS SUR LE MODÈLE P1 . . . . . | 75 |
|----------|---|----|

## INTRODUCTION

Ce travail s'inscrit dans la continuité d'un projet entrepris depuis plus de vingt ans, en partenariat avec le monde industriel, portant sur la problématique des disjoncteurs à  $\text{SF}_6$ . Le but est de développer une méthodologie de modélisation de la physique des phénomènes en jeu lors de la coupure de courant, avec une résolution numérique des équations résultantes. Plus spécifiquement, on traite du rayonnement au niveau de l'arc dans un disjoncteur, le mécanisme responsable d'une grande partie des échanges thermiques. L'objectif de notre démarche est de compléter l'expérimentation nécessaire et de guider le concepteur dans le développement et la certification de ces dispositifs. On envisage même à terme, dans le milieu industriel, de valider uniquement par la modélisation numérique certaines caractéristiques requises par les normes. Le défi proposé est d'autant plus intéressant qu'il est ambitieux.

Actuellement, le rayonnement est pris en compte de façon simplifiée dans les logiciels de simulation de disjoncteurs, en particulier MC<sup>3</sup>, développé à l'École Polytechnique de Montréal. La méthode implantée dans MC<sup>3</sup> est le modèle P1 et résout numériquement une approximation de l'équation qui pilote le rayonnement. Bien qu'au moment où ce modèle a commencé à être utilisé, dans le cadre des disjoncteurs, il répondait aux attentes de la part du monde industriel (en terme de temps de calcul et de précision), il souffre de lacunes qui se révèlent, aujourd'hui, être un frein à une meilleure pratique de conception des disjoncteurs.

En effet, ce modèle échoue à simuler précisément certaines situations qui intéressent au plus haut point les concepteurs de disjoncteurs afin d'améliorer la tenue en service. Par exemple, l'estimation de la durée de vie d'un disjoncteur nécessite de connaître avec précision le flux de chaleur rayonnante qui arrive aux parois pour savoir à quelle vitesse cette dernière s'érode, par ablation, sous cette chaleur intense. Il y a donc un besoin,

exprimé par l'industrie, d'avoir une modélisation du rayonnement qui soit plus fidèle à la réalité.

C'est pourquoi ce travail vise à étudier les possibilités d'utiliser une nouvelle approche de modélisation du rayonnement. En plus d'obtenir des résultats plus fidèles que ceux fournis par le modèle P1, et, comme on envisage à terme une utilisation industrielle, il faut s'assurer que la méthode étudiée pour remplacer le modèle P1 reste raisonnable en temps de calcul. Après une étude des différentes alternatives au modèle P1 qui sont présentées dans la littérature, le choix s'est porté sur la méthode des volumes finis. Il s'agit là d'un candidat prometteur comme alternative au modèle P1. Afin de déterminer les performances que cette méthode pourrait obtenir dans le cadre des disjoncteurs, une implémentation la plus efficace possible a été développée. Cette dernière a été adaptée pour respecter spécifiquement les hypothèses nécessaires à son application dans le cadre des disjoncteurs. Puis, différents cas tests, dont certains avec une solution analytique, ont été mis en place pour juger des forces et des faiblesses de la méthode. Ces cas tests permettent par ailleurs de démontrer les lacunes du modèle P1. Enfin la performance de l'implémentation est analysée.

Le présent mémoire comporte cinq chapitres qui suivent la démarche évoquée précédemment. Après une rapide présentation des disjoncteurs pour établir plus en détail le contexte d'application de ce mémoire, un chapitre est consacré à la revue de la littérature sur les aspects physiques du rayonnement, notamment à l'intérieur des plasmas thermiques que l'on retrouve dans les disjoncteurs, et sur les méthodes numériques de modélisation du rayonnement. Par la suite les aspects physiques et théoriques du rayonnement sont abordés au chapitre trois qui contient les aspects nécessaires à la compréhension du phénomène à modéliser. Ensuite, la modélisation numérique du rayonnement par la FVM (*Finite Volume Method*) fait l'objet du chapitre suivant. Enfin la dernière partie présente les résultats sur les cas tests qui ont été définis pour évaluer les capacités de la méthode FVM et montrer qu'elles surpassent celles du modèle P1.

## CHAPITRE 1

### PRÉSENTATION DES DISJONCTEURS

#### 1.1 Les fonctions remplies

Un disjoncteur à haute tension est un dispositif de coupure de courant que l'on retrouve dans les réseaux électriques où les puissances (tensions et intensités) sont élevées, de l'ordre de quelques dizaines de kV et jusqu'aux plus hautes tensions existantes. Il s'agit d'un appareil de forme cylindrique qui peut atteindre des dimensions de un mètre de diamètre et plusieurs mètres de long. Essentiellement un disjoncteur assure deux fonctions :

- déconnecter la ligne sur laquelle est branchée le disjoncteur quand elle est en fonctionnement normal (pour des travaux d'entretien, pour réguler le réseau, etc.)
- couper le courant quand un défaut est détecté sur la ligne électrique (foudre, court-circuit, etc.)

Le disjoncteur joue donc à la fois le rôle d'interrupteur ainsi que de dispositif de protection et de sécurité. Seuls ces appareils sont capables de couper le courant à ces niveaux de puissance car dès que l'on sépare des contacts, il se forme un arc électrique très intense qu'il faut pouvoir éteindre de manière contrôlée. Une fois le courant coupé, on veut aussi garantir un très bon degré d'isolation électrique afin qu'un arc ne s'allume pas inopinément ce qui aurait des conséquences dramatiques sur l'intégrité du disjoncteur et des installations autour, sans parler de la sécurité du personnel qui pourrait être amené à travailler à proximité.

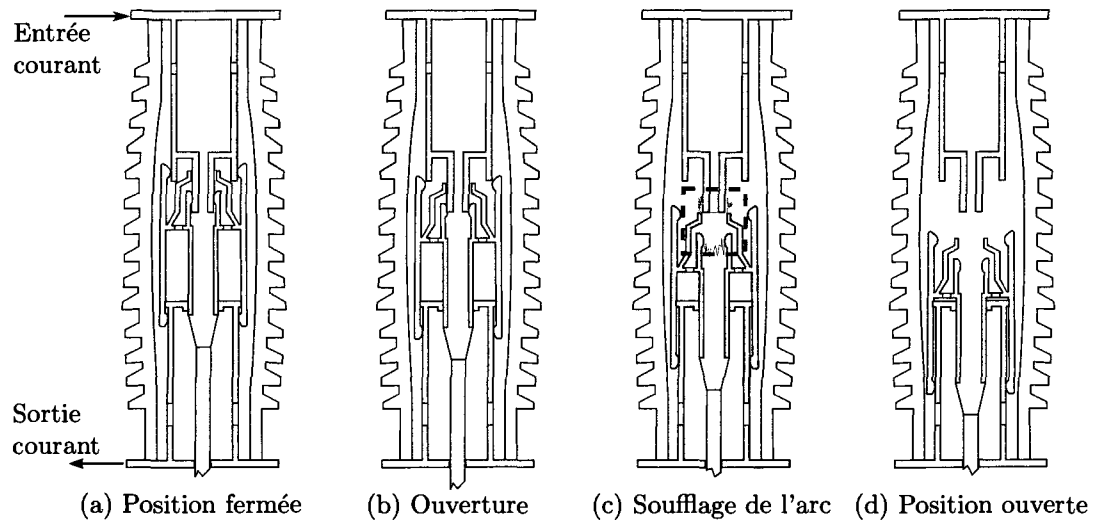


FIG. 1.1 Géométrie de disjoncteur typique (inspiré de Wikipedia (3 janvier 2009))

## 1.2 Le principe de fonctionnement

Afin d'assurer une bonne isolation électrique, le disjoncteur est rempli d'hexafluorure de soufre ( $\text{SF}_6$ ). Ce gaz a la particularité d'avoir un pouvoir isolant supérieur à celui de l'air. La figure 1.1 montre la séquence d'ouverture. Dans la position fermée, le courant entre par l'électrode du haut et sort par l'électrode du bas en passant par les contacts extérieurs.

Quand l'ordre d'ouverture est donné (figure 1.1b), la partie mobile est tirée vers le bas par un dispositif de commande à l'extérieur du disjoncteur. Le courant est alors dévié par les "contacts d'arc" qui sont les contacts internes. Du fait du mouvement relatif entre la partie mobile et l'électrode du bas, le  $\text{SF}_6$  est comprimé à l'intérieur du cylindre.

Une fois que la séparation est effective (figure 1.1c) un arc électrique, un plasma, se forme. Ce dernier est très chaud, jusqu'à  $20\,000^\circ\text{C}$ . Ionisé, il conduit le courant tout en offrant une certaine résistance électrique. Cela permet "d'amortir" le choc électrique dû à la coupure brutale, et de protéger ainsi le réseau électrique. Pendant ce temps, le  $\text{SF}_6$

comprimé dans les cylindres est soufflé via un convergent qui produit un jet à haute vitesse, dirigé sur les contacts d'arc afin de refroidir et d'éteindre le plasma au moment du passage du courant alternatif au zéro. La principale zone d'intérêt pour la simulation du rayonnement est la partie encadrée en pointillés, où se forme le plasma. C'est dans cette zone que l'on retrouve les régions les plus chaudes ainsi que le phénomène d'ablation des parois de l'électrode mobile.

Finalement, quand l'électrode a fini sa course, l'arc est éteint, et l'isolation électrique est assurée (figure 1.1d). Il faut pouvoir effectuer ce cycle de fonctionnement plusieurs centaines de fois en mode normal d'opération (c'est-à-dire quand il n'y a pas de défaut sur la ligne comme un court-circuit par exemple) dans la vie d'un disjoncteur. Cette dernière peut être de 25 ans. Les industriels tentent d'accroître ce temps tout en essayant de limiter l'entretien. Il faut par ailleurs éviter les fuites de  $SF_6$  car il s'agit d'un gaz nocif pour l'environnement et il est nécessaire pour la capacité d'isolation électrique et donc du fonctionnement sûr du disjoncteur.

### 1.3 Les phénomènes physiques en jeu

Le défi pour les concepteurs de disjoncteurs est l'aspect multiphysique des phénomènes. Il y a tout d'abord les phénomènes d'origine électrique. Cela signifie la présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique induit par le courant dans le plasma lorsque l'arc électrique est formé. Ces champs causent un effet Joule intense et induisent des forces magnétiques sur l'arc. On assiste aussi à un écoulement supersonique de  $SF_6$  et la formation d'une onde choc qui favorise le soufflage de l'arc. Il y a évidemment la présence du rayonnement qui sera développé tout au long de ce document. Ce rayonnement est une des causes principales de l'ablation des parois du disjoncteur. Celle-ci a deux conséquences différentes. Premièrement l'ablation des parois causé par l'usage normal des disjoncteurs est un facteur limitant de leur durée de vie, d'où le besoin d'une bonne



simulation des phénomènes ablatifs et radiatifs. Deuxièmement, en cas de défaut sur la ligne (un court-circuit par exemple), le rayonnement et l'ablation sont beaucoup plus intenses et produisent un excédant de gaz, qui augmentent la pression dans le disjoncteur et favorise la coupure de l'arc. Dans ce dernier cas l'ablation est donc un phénomène recherché. Mais pour bien le maîtriser, il faut à nouveau un modèle de rayonnement suffisamment fidèle.

## 1.4 Modélisation

Pour modéliser tous ces phénomènes, le logiciel de simulation MC<sup>3</sup> propose plusieurs caractéristiques originales par rapport à un code CFD traditionnel. La première est la prise en compte du mouvement des parois ce qui nécessite un maillage mobile et une formulation ALE pour la résolution des équations de la dynamique des gaz. De plus, à cause des grandes disparités d'échelles des phénomènes (onde de choc, plasmas) il est nécessaire d'adapter dynamiquement le maillage. Cette caractéristique permet de distribuer les mailles en fonction des gradients des variables, ce qui résulte en une économie de mémoire et de temps de calcul. Ensuite, la majorité des phénomènes physiques sont calculés et couplés entre eux. Par exemple la CFD est prise en compte par la résolution des équations d'Euler et le rayonnement, avec la méthode P1, permet de fournir un terme source à l'équation de l'énergie. L'ablation, le champ électrique et magnétique sont aussi modélisés et intégrés au calcul.

Dans ce contexte, l'objectif de notre travail consiste à améliorer la prédiction effectuée par les calculs de rayonnement. Plus spécifiquement on souhaite :

- Démontrer les lacunes du modèle P1 pour certaines situations en deux dimensions que l'on retrouve dans les disjoncteurs.
- Implémenter la méthode des volumes finis de manière efficace à l'aide d'une méthode directe.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

#### 2.1 Introduction

Le rayonnement est un phénomène physique complexe à modéliser. Tout d'abord, l'équation de transfert par rayonnement qui établit la conservation de l'énergie de rayonnement comporte six dimensions: trois pour la position dans l'espace, deux pour la direction de l'intensité radiative, et enfin une pour la longueur d'onde. De plus, il faut déterminer les coefficients caractérisant la nature des gaz et des parois. Il existe donc deux défis pour modéliser correctement le rayonnement. Le premier concerne la caractérisation théorique du milieu. Il faut pouvoir mesurer les propriétés d'absorption et d'émission du gaz ionisé et établir des modèles sur ces propriétés afin d'y effectuer une moyenne et obtenir ainsi des coefficients qui permettent de réduire la quantité d'information. Boulos et al. (1994) ou Gleizes et al. (2005) ont travaillé sur ces problématiques et ont réalisé une très bonne synthèse de l'état de l'art. Le deuxième défi est centré sur la mise en place de schémas numériques pour approcher le plus fidèlement possible le comportement physique donné par l'équation de transfert radiatif tout en contrôlant le besoin de puissance informatique nécessaire.

#### 2.2 Modélisation numérique du rayonnement dans les disjoncteurs à SF<sub>6</sub>

Modest (2003) a effectué une revue de la littérature très complète sur le rayonnement et notamment sur les différentes méthodes numériques. Nous aborderons seulement celles qui s'appliquent spécifiquement dans le cadre des disjoncteurs à SF<sub>6</sub>. Une des premières

méthodes utilisée a été celle dite des coefficients d'émission nette, proposée initialement par Libermann & Lowke (1976). Ce modèle ne s'applique qu'au contexte des arcs électriques. Il est basé essentiellement sur le champ de température, l'arc est supposé cylindrique et isotherme. Bien que cette méthode permette d'évaluer la perte d'énergie de l'arc par le rayonnement, et donne une précision satisfaisante au centre de l'arc, il n'est pas possible de déterminer le flux de rayonnement qui atteint les parois. Or ce flux est la principale cause de l'ablation au niveau de ces parois et est la donnée principale recherchée dans ce travail. Cette méthode ne permet donc pas de combiner le phénomène de rayonnement et l'ablation dans le cadre d'une modélisation du couplage de ces deux phénomènes.

C'est pourquoi des méthodes plus générales permettant de calculer le rayonnement dans n'importe quel type de milieu (pas seulement un arc électrique) ont été explorées. Ainsi, Eby et al. (1998) ont appliqué le modèle P1 proposé initialement par Jeans (1917), qui consiste à résoudre une approximation de l'équation du transfert radiatif qui pilote le comportement du rayonnement. Dans la mesure où ce modèle permet effectivement un meilleur calcul de l'ablation des parois (Godin et al., 2000), il présente une avancée par rapport à la méthode des coefficients d'émission nette. Cependant, bien que le temps de calcul soit raisonnable, cette méthode ne donne pas de résultats satisfaisants pour les faibles épaisseurs optiques dans un cas à deux dimensions.

Une autre méthode a donc été testée par Nordborg & Iordanidis (2008) pour contourner ce problème. Il s'agit de la méthode des ordonnées discrètes ou DOM (*Discrete Ordinates Method*). L'équation du transfert radiatif est discrétisée dans l'espace selon la méthode, maintenant classique, des volumes finis. L'intégration de cette équation selon l'angle solide se fait par une quadrature choisie arbitrairement. Originellement, cette méthode a été présentée par Chandrasekhar (1960), et reprise, entre autres auteurs par Lathrop (1966), afin d'étudier le transport des neutrons. Cependant, elle était inapplicable, en pratique, à l'époque à cause du manque de puissance informatique. Ce n'est qu'à

partir des années 1980 que la méthode a été adoptée par des pionniers comme Fiveland (1982) pour le calcul du transfert radiatif. Nordborg & Iordanidis (2008) affirment que cette méthode n'apporte pas beaucoup plus de précision que le modèle P1, en plus d'être beaucoup plus exigeante en temps de calcul. Cependant, seul un cas 1D a été testé pour arriver à cette conclusion. L'usage intensif de la méthode proposée par Eby et al. (1998) tend à montrer que les problèmes apparaissent plutôt dans les cas à deux dimensions.

### 2.3 Méthode des volumes finis

L'analyse de cette problématique indique que la méthode des volumes finis semble être un bon candidat pour, si ce n'est remplacer le modèle P1, au moins partager le travail avec cette méthode dans le cadre des disjoncteurs à SF<sub>6</sub>. Dans une stratégie mixte, il serait envisageable de traiter certaines bandes du spectre par le modèle P1 pour lesquelles il donne de bons résultats, et traiter les autres bandes avec la méthode des volumes finis, plus chère mais plus appropriée pour le traitement de ces bandes. La méthode des volumes finis est une amélioration importante à la méthode des ordonnées discrètes introduite au début des années 1990 par Raithby & Chui (1990) ou encore Chai et al. (1994) afin d'assurer la conservation de l'énergie par l'utilisation de volumes de contrôle, autant dans le domaine spatial que dans le domaine directionnel. Elle permet une compréhension beaucoup plus immédiate pour celui qui est habitué à la CFD (Computational Fluid Dynamics), étant donné que la méthodologie de la dérivation de cette méthode est la même que celle utilisée pour discrétiser les équations de la mécanique des fluides. La méthode FVM (*Finite Volume Method*) a été rapidement raffinée pour traiter des géométries irrégulières (Chai et al., 1994), des maillages non structurés (Murthy & Mathur, 1998a) ou bien encore des problèmes axisymétriques (Chui et al., 1992, Murthy & Mathur, 1998b, Tian & Chiu, 2005). A cause de cette grande versatilité, on la retrouve dans plusieurs logiciels de simulation commerciaux tels que FLUENT. Cependant il semble

qu'aucun auteur n'ait utilisé une méthode directe de résolution des équations de la méthode FVM. De la même manière que FLUENT tous semblent avoir utilisé des méthodes itératives.

## 2.4 Méthode $Q_t$

Une dernière méthode a très récemment fait son apparition au sein de la communauté scientifique (Hassanzadeh et al., 2008). Il s'agit de la méthode  $Q_t$  qui prétend obtenir le meilleur des deux mondes, à savoir la précision de la méthode des volumes finis à un coût à peine supérieur à celui du modèle P1. L'idée de cette méthode est de résoudre une équation similaire à celle du modèle P1 mais avec des coefficients de correction générés par la méthode FVM à des intervalles de pas de temps réguliers. Cette méthode peut être vue comme un complément de la méthode FVM. Cependant, elle n'a pas encore été testée ni validée dans une situation de couplage avec la CFD. Il reste aussi à la dériver pour les maillages non structurés et les géométries axisymétriques. Mais les premiers résultats sont encourageants et semblent surmonter les difficultés de convergence lente de la méthode des volumes finis pour les milieux optiquement épais.

## 2.5 Conclusion

Après ce survol de la littérature, la méthode FVM semble être la plus apte à répondre aux attentes du traitement du rayonnement au sein des disjoncteurs. C'est un modèle qui discrétise formellement l'équation de transfert radiatif. On peut donc obtenir une précision donnée avec discrétisation suffisamment fine. Des difficultés de convergence sous certaines conditions (milieux optiquement épais) ont été évoquées par les différents auteurs. Cela se produit quand on utilise une méthode de résolution itérative. Dans le présent travail, le choix a été fait d'utiliser au contraire les méthodes directes bien plus perfor-

mantes en temps de calcul. Leurs défaut est qu'elles sont exigeantes du point de vue de la mémoire requise. Un des objectifs de ce mémoire étant d'avoir une très grande performance en temps de calcul, il faudra s'assurer que le nombre d'inconnues qui peuvent être traitées par les méthodes directes est suffisant pour modéliser à la précision requise le rayonnement au sein des disjoncteurs. Par ailleurs ces méthodes contournent les problèmes de convergence.

## CHAPITRE 3

### RAYONNEMENT DANS UN MILIEU PARTICIPATIF

Avant de développer la méthode des volumes finis pour le rayonnement, nous faisons un rappel des aspects physiques de ce phénomène relativement complexe. Et cela, d'autant plus que, dans le cadre des disjoncteurs, le rayonnement a lieu dans un milieu participatif. Au contraire d'un milieu transparent (donc qui ne participe pas au phénomène) le milieu participatif est un milieu qui, en tout point, absorbe et réémet le rayonnement à un autre niveau d'énergie.

#### 3.1 Nature du rayonnement

Le rayonnement peut être vu comme un transfert d'énergie par ondes électromagnétiques ou bien, en adoptant l'approche de la mécanique quantique, comme le transport de particules sans masse appelées photons. Aucune de ces théories ne permet de décrire complètement et de manière satisfaisante le rayonnement. C'est pourquoi ces deux théories sont interchangeables - et interchangées - en fonction du phénomène que l'on veut étudier.

Ce transfert d'énergie par rayonnement se distingue des autres modes que sont la conduction et la convection par deux caractéristiques. Premièrement, le transport peut s'effectuer dans le vide et sur de très longues distances, et deuxièmement, il est proportionnel à la puissance quatre de la température alors que les deux autres modes sont proportionnels à la puissance un. C'est pourquoi le rayonnement devient le mode de transfert de chaleur dominant à hautes températures.

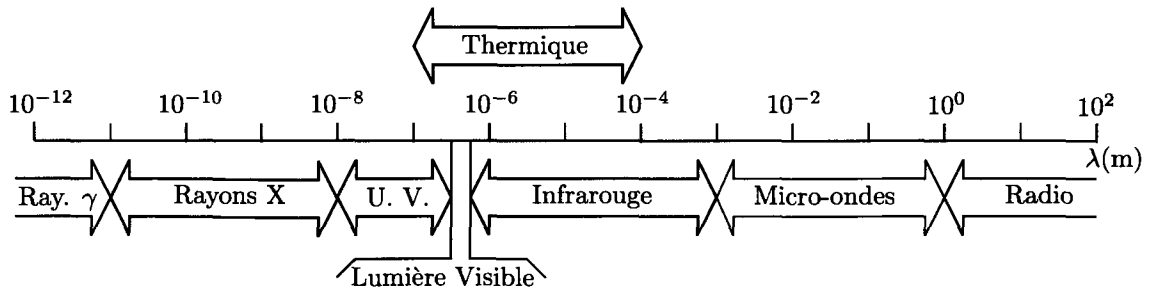


FIG. 3.1 Spectre électromagnétique en fonction de la longueur d'onde

On peut noter par ailleurs que tout corps dont la température est différente du zéro absolu émet et absorbe de manière continue le rayonnement. De plus, le rayonnement se propage dans toutes les directions en même temps et pas nécessairement de manière isotrope suivant les propriétés du milieu traversé.

### 3.2 Spectre électromagnétique

Le spectre électromagnétique est présenté dans la figure 3.1, et illustre deux points intéressants. Premièrement, le spectre couvert par le rayonnement visible est très étroit. Sa longueur d'onde est comprise entre  $0,390 \mu\text{m}$  et  $0,780 \mu\text{m}$ . Deuxièmement, le transfert de chaleur ne recouvre pas tout le spectre mais une partie seulement. Sa longueur d'onde varie de  $0,1 \mu\text{m}$  à  $100 \mu\text{m}$  c'est-à-dire de l'ultraviolet à l'infrarouge en passant par le visible.

Par ailleurs, la longueur d'onde est reliée à la fréquence du rayonnement par la relation :

$$c = \lambda\nu = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad (3.1)$$

avec  $c$  la vitesse de propagation du rayonnement électromagnétique,  $\lambda$  la longueur d'onde et  $\nu$  la fréquence du rayonnement.



### 3.3 Rappels sur les définitions et grandeurs caractéristiques liées au rayonnement

#### 3.3.1 L'intensité radiative

La notion de base du rayonnement, qui tient à la fois compte de l'endroit observé (dans l'espace) et de la direction dans laquelle on l'observe, est l'intensité radiative notée  $I$ . Cette grandeur est un flux d'énergie radiative par unité de temps, de surface (normale à la direction du rayon considéré) et d'angle solide. Dans ce cas l'intensité radiative est dite "totale" car elle ne dépend pas de la longueur d'onde. Si l'intensité dépend en plus de la longueur d'onde, elle est dite alors "spectrale" ou "monochromatique" et notée  $I_\nu$ .

#### 3.3.2 Le flux radiatif

Le flux radiatif, dans un milieu participatif est relié à l'intensité radiative par la relation:

$$\mathbf{q} = \int_{4\pi} I(\hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} d\Omega \quad (3.2)$$

On peut aussi définir le flux radiatif sur une paroi composé du flux arrivant sur cette paroi  $q_{in}$  ( $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$ ) et celui qui en part  $q_{out}$  ( $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$ ). On obtient donc:

$$\mathbf{q}_{paroi} = \mathbf{q}_{in} + \mathbf{q}_{out} = \int_{4\pi} I(\hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} d\Omega \quad (3.3)$$

Le flux radiatif qui s'échappe de la paroi peut lui-même être divisé en deux parties. La première est l'émission de corps noir de la paroi due à sa propre température. La deuxième est la fraction de rayonnement qui arrive sur la paroi et qui est réfléchie.

### 3.3.3 Le rayonnement incident

Une autre grandeur est reliée aux intensités radiatives. Il s'agit du rayonnement incident. Il correspond à l'intégration de l'intensité radiative sur les  $4\pi$  stéradians du domaine angulaire. On a donc:

$$G = \int_{4\pi} I(\hat{s}) d\Omega \quad (3.4)$$

### 3.3.4 Les coefficients aux parois

Une paroi qui reçoit un rayonnement à sa surface peut se comporter de trois manières:

**la réflexion**  $\rho$ =fraction du rayonnement incident qui est réfléchi par la paroi réfléchi,

**l'absorption**  $\alpha$ =fraction du rayonnement incident qui est absorbé par la paroi absorbé,

**la transmission**  $\tau$ =fraction du rayonnement incident qui est transmis par la paroi trans-mis.

On peut définir le coefficient d'émissivité  $\epsilon$  qui est le rapport du rayonnement réel quittant une surface sur le rayonnement de corps noir qui quitterait cette surface à la même température. La loi de Kirchoff indique que  $\epsilon_\nu = \alpha_\nu$  et si l'on considère un milieu gris, alors  $\epsilon = \alpha$ .

Étant donné que le rayonnement est un phénomène à longue distance, pour déterminer l'équilibre d'un système, ce dernier doit être entouré par des parois opaques qui isolent du rayonnement l'extérieur du système. En effet le rayonnement reçu peut très bien venir de la particule voisine ou bien de beaucoup plus loin. C'est pourquoi les parois qui entourent le système (et donc les parois du disjoncteur) sont supposées opaques. Dans ce cas  $\tau = 0$ .

La réflexion quant à elle est fortement dépendante de l'état de surface de la paroi sur laquelle elle a lieu. Dans le cadre des disjoncteurs, ces parois subissent de l'ablation. L'état de surface est donc difficilement prévisible. De plus la réflexion peut être diffuse (le rayonnement arrivant à la paroi est renvoyé de manière isotrope), spéculaire, à la manière d'un miroir, (le rayon arrivant sur la paroi est réfléchi de manière symétrique par rapport à la normale de cette paroi) ou encore un mélange de ces deux types. Cela dépend du matériau, de la longueur d'onde considérée et à nouveau de son état de surface. Néanmoins, les parois sont beaucoup plus froides que le plasma. En conséquence, on retiendra pour le moment l'hypothèse de parois noires, froides (à 0 K) et sans réflexion, c'est-à-dire  $\rho = 0$  et  $\alpha = 1$ . Cette hypothèse est imprécise, mais l'erreur introduite reste faible (on rappelle que l'énergie transmise par rayonnement est proportionnelle à l'ordre quatre de la température) et il est beaucoup plus aisé numériquement de traiter les parois avec cette hypothèse.

### 3.4 Plasma thermique

La source principale du rayonnement au sein d'un disjoncteur est naturellement l'arc électrique qui s'établit entre les électrodes lors de la coupure. Dans cet arc, la matière est sous forme de plasma, un milieu très chaud pouvant atteindre 20 000 K. A ces températures, toutes les molécules sont dissociées et les atomes ionisés en ions et en électrons.

Ce plasma est dit thermique car la fonction de distribution de vitesse des particules est Maxwellienne. De plus, du fait de la grande concentration de particules, notamment des électrons, les niveaux d'énergie entre les particules lourdes (les ions) et les électrons sont sensiblement les mêmes car les fréquences de collisions élastiques sont élevées. Cela permet de définir une température qui a un sens pour toutes les particules dans un voisinage donné, ce qui n'est pas possible par exemple pour les plasmas hors équilibre où l'on ne peut pas définir de température car des particules voisines peuvent avoir

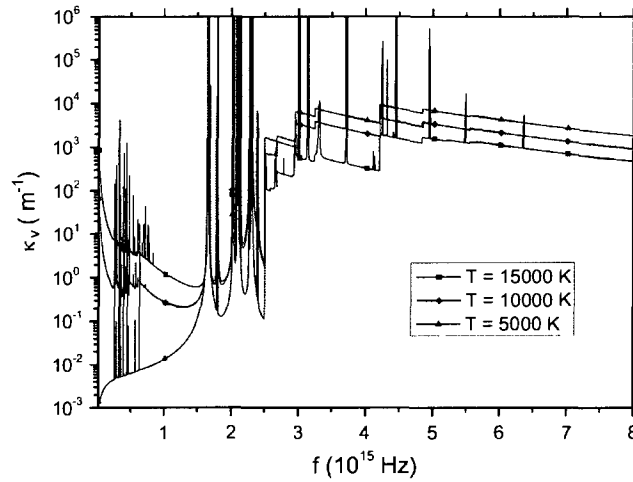


FIG. 3.2 Coefficient d'absorption pour le  $\text{SF}_6$  (Nordborg & Iordanidis, 2008)

des niveaux d'énergie très différents. On peut donc établir l'hypothèse dite d'équilibre thermodynamique locale ou Local Thermodynamic Equilibrium (LTE).

Par ailleurs, la diffusion (scattering) du rayonnement à l'intérieur du plasma thermique peut être négligée car elle est essentiellement le fait des électrons libres. Compte tenu de la densité des particules, des distances mises en jeu et des longueurs d'ondes considérées, la diffusion est tout à fait négligeable.

Enfin, les coefficients d'absorption, notés  $\kappa$  du rayonnement (qui seront présentés plus en détail dans la section suivante) dépendent à la fois de la température et de la pression mais aussi - et surtout - de la longueur d'onde considérée. Un exemple pour le  $\text{SF}_6$  est donné dans la figure 3.2. Les pics que l'on observe sont dus aux différents phénomènes d'absorption et d'émission du rayonnement qui peuvent être continus ou discrets.

Comme cela a déjà été souligné dans la littérature (Nordborg & Iordanidis, 2008), on peut approcher ce comportement en discrétisant le spectre électromagnétique en quelques bandes pour lesquelles le coefficient d'absorption ne dépend plus de la longueur d'onde mais uniquement de la pression et de la température. On modélise donc le

plasma par un corps gris par bande de fréquence.

Pour de plus amples informations sur le sujet des plasmas thermiques le lecteur est référé à Boulos et al. (1994) ou encore Gleizes et al. (2005) qui ont fait une revue de l'état de l'art dans le domaine de la modélisation des plasmas thermiques.

### 3.5 Équation du transfert radiatif

#### 3.5.1 Bilan et expression générale

L'équation du transfert radiatif exprime la conservation de l'énergie radiative. Comme on cherche à l'établir dans un milieu participatif, la grandeur la plus appropriée est l'intensité radiative monochromatique  $I_\nu$ . Dans ce type de milieu, le rayonnement est absorbé et réémis en chaque point. Le milieu n'est pas neutre du point de vue du rayonnement, il l'influence.

On identifie quatre mécanismes qui peuvent faire varier l'intensité du rayonnement dans une direction donnée :

1. La diminution par absorption. Elle est proportionnelle à la fois à la distance parcourue et à la valeur de l'intensité qui arrive dans cette direction. On note  $\kappa_\nu$ , le coefficient de proportionnalité, appelé coefficient d'absorption et qui traduit la capacité du milieu participatif à absorber l'énergie radiative selon la longueur d'onde qui arrive, le niveau d'énergie des particules qui compose le milieu et leur densité.

On peut donc écrire:

$$(dI_\nu) = -\kappa_\nu I_\nu ds \quad (3.5)$$

2. La diminution par diffusion. Une partie de l'intensité qui arrive dans la direction  $\hat{s}$  est déviée dans d'autres directions. Cependant, on a vu que l'on néglige ce phé-

nomène dans le cadre des plasmas thermiques.

3. L'augmentation par émission. Elle est proportionnelle à la fois à la distance parcourue et à la valeur de l'émission de corps noir. La loi de Kirchoff affirme que le coefficient monochromatique de proportionnalité est le même que pour l'absorption. On obtient alors:

$$(dI_\nu) = \kappa_\nu I_b ds \quad (3.6)$$

4. L'augmentation par diffusion. L'intensité qui ne voyage pas le long de la direction  $\hat{s}$  peut être diffusée dans cette direction et augmenter ainsi l'intensité. De la même manière que pour la diminution par diffusion, ce phénomène est négligé.

Pour assurer la conservation de l'énergie, on fait un bilan sur un rayon (c'est-à-dire le rayonnement dans une direction  $\hat{s}$ ) :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \kappa_\nu I_{b\nu} - \kappa_\nu I_\nu \quad (3.7)$$

Bien que cette équation soit écrite de manière compacte, il n'en demeure pas moins que sa résolution est une tâche relativement complexe. En effet l'intensité radiative est une fonction à 6 variables: trois pour l'espace, deux pour la direction, et une pour la fréquence. De plus le rayonnement est, fondamentalement, un phénomène en trois dimensions car il fait intervenir la notion de directions. Pour traiter la dépendance spectrale de l'équation 3.7, on utilise des coefficients  $\kappa$  moyens valides pour une certaine bande de fréquences. A l'intérieur de cette bande toute les grandeurs sont supposées être grises. Cela veut dire que les grandeurs sont constantes sur toute la plage de fréquence de la bande. On remplace donc  $\kappa_\nu$  par  $\kappa$

L'équation 3.7 peut être développée un peu plus afin d'obtenir son expression générale dans un repère cartésien en trois dimensions. Tout d'abord, le membre de gauche de

cette équation signifie qu'il faut dériver l'intensité radiative  $I$  le long d'une direction  $\hat{s}$  constante pendant le processus de dérivation. Par définition elle est égale à:

$$\left. \frac{dI}{ds} \right|_{\hat{s}} = \nabla I|_{\hat{s}} \cdot \hat{s} \quad (3.8)$$

Comme la direction  $\hat{s}$  est constante, on peut réécrire cette relation sous la forme d'une divergence:

$$\left. \frac{dI}{ds} \right|_{\hat{s}} = (\nabla \cdot (I\hat{s}))|_{\hat{s}} \quad (3.9)$$

Pour l'instant aucune hypothèse n'est faite quant au système de coordonnées et l'équation précédente reste une relation générale. Ensuite, il est possible de développer cette relation en écrivant l'opération de divergence dans un repère cartésien de coordonnées  $(x, y, z)$  et exprimer le vecteur direction  $\hat{s}$  avec des coordonnées sphériques  $(\theta, \varphi)$ :

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial y} + \xi \frac{\partial I}{\partial z} = \kappa I_b - \kappa I \quad (3.10)$$

avec:

$$\hat{s}(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z = \mu \hat{e}_x + \eta \hat{e}_y + \xi \hat{e}_z \quad (3.11)$$

### 3.5.2 Expression de la RTE dans un repère cylindrique

Pour exprimer l'équation du transfert radiatif dans un repère cylindrique, Moder et al. (1996) ont effectué un développement rigoureux d'un point de vue mathématique. C'est essentiellement ce raisonnement que nous allons suivre ici.

L'intérêt d'utiliser un repère cylindrique, malgré le plus grand travail mathématique à fournir, est qu'il est le plus adapté pour les géométries cylindriques et qu'il facilite ensuite la condition d'axisymétrie, fréquemment rencontrée dans les dispositifs réels en général et pour les disjoncteurs en particulier. Cette condition apporte un gain non négligeable sur la résolution numérique de cette équation.

De la même manière, le vecteur direction de longueur unitaire est paramétré dans le repère sphérique (il s'agit donc d'un vecteur en trois dimensions mais deux coordonnées seulement suffisent à le définir car il est de longueur unitaire) très adapté pour la représentation de directions dans l'espace. On fait correspondre l'axe polaire  $z$  du repère cylindrique avec l'axe polaire  $z$  du repère sphérique, tel que montré à la figure 3.3. Ensuite on a le choix pour définir complètement le repère sphérique:

- On procède comme dans la figure 3.3(a): l'angle polaire  $\varphi$  du repère sphérique est défini à partir du même repère cartésien, fixe, qui sert à la définition du repère cylindrique. On parle alors de définition absolue du repère sphérique.
- On utilise la définition de la figure 3.3(b): dans ce cas l'angle polaire  $\psi$  est défini à partir de l'axe  $\hat{e}_r$  du repère cylindrique. En utilisant cette définition, on peut noter que l'on introduit une dépendance entre la direction et le positionnement dans l'espace. En effet, pour déterminer la direction, il faut d'abord connaître les coordonnées de l'espace. Ce n'est pas le cas sur l'autre définition où les deux repères sont indépendants l'un de l'autre. On parlera donc de définition relative du repère sphérique.

$\theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées associées au vecteur direction  $\hat{s}(\theta, \varphi)$  dans la définition de la figure 3.3(a), tandis que  $\theta$ , et  $\psi$  sont les coordonnées associées au vecteur direction



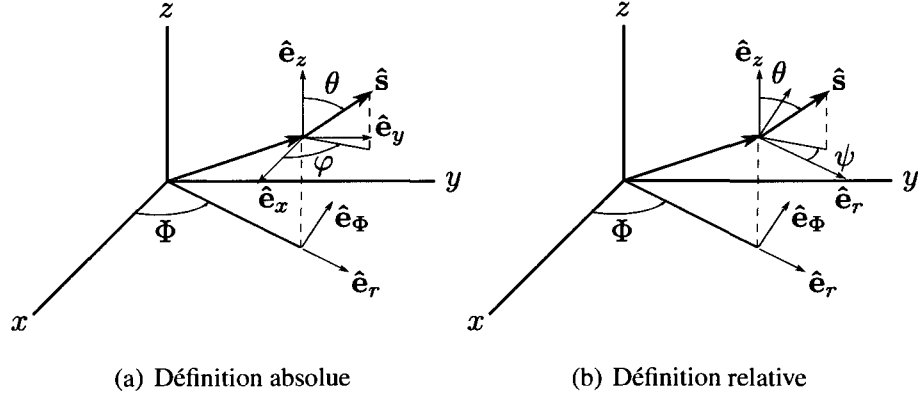


FIG. 3.3 Définition des repères

$\hat{s}(\theta, \psi)$  dans la définition de la figure 3.3(b). On a donc:

$$\hat{s}(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \quad (3.12a)$$

$$\hat{s}(\theta, \psi) = \sin \theta \cos \psi \hat{e}_r + \sin \theta \sin \psi \hat{e}_\Phi + \cos \theta \hat{e}_z \quad (3.12b)$$

Pour obtenir l'équation du transfert radiatif dans un repère cylindrique, on repart de l'équation 3.9 en appliquant la relation de la divergence pour un repère cylindrique. On obtient alors:

$$\left. \frac{dI}{ds} \right|_{\hat{s}} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mu I)}{\partial r} \right|_{\Phi, z, \hat{s}} + \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta I)}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \hat{s}} + \left. \frac{\partial(r\xi I)}{\partial z} \right|_{r, \Phi, \hat{s}} \quad (3.13)$$

avec  $\mu = \hat{e}_r \cdot \hat{s}$ ,  $\eta = \hat{e}_\Phi \cdot \hat{s}$  et  $\xi = \hat{e}_z \cdot \hat{s}$ . Cette relation est donc valable pour un repère cylindrique de l'espace. Le repère de la direction reste indéterminé. Cependant si l'on se considère dans le cas de la figure 3.3(a), on peut remplacer  $\hat{s}$  constant par  $\theta$  et  $\varphi$  constant puisque les deux repères (cylindriques pour la localisation et sphérique pour la direction) sont indépendants. La dérivation selon  $r$ ,  $\Phi$  et  $z$  n'influe donc pas sur la direction choisie.

On obtient alors,

$$\left. \frac{dI}{ds} \right|_{\hat{s}} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mu I)}{\partial r} \right|_{\Phi, z, \theta, \varphi} + \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta I)}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \theta, \varphi} + \left. \frac{\partial(r\xi I)}{\partial z} \right|_{r, \Phi, \theta, \varphi} \quad (3.14)$$

Cependant, dans la littérature ( Murthy & Mathur (1998b), Menart (2000), Modest (2003) par exemple), on trouve la définition de la figure 3.3(a). Comme il a été dit plus haut, dans cette situation, on introduit une dépendance entre la localisation dans l'espace et la direction. Ainsi, quand on reprend l'équation 3.13, prendre  $\hat{s}$  constant quand on dérive par rapport à  $r$ ,  $\Phi$  et  $z$  n'est pas équivalent à prendre  $\theta$  et  $\psi$  constant. Dans ce cas,  $\hat{s}$  varierait avec la dérivation suivant  $\Phi$  dans la mesure où l'orientation de  $\hat{e}_r$  change et par conséquence  $\hat{s}$ .

Pour "s'en sortir", il faut simplement remarquer que l'on a la relation algébrique  $\psi = \varphi - \Phi$  et que la loi de composition des dérivées nous donne :

$$\left. \frac{\partial(\eta I)}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \hat{s}} = \left. \frac{\partial(\eta I)}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \theta, \psi} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \hat{s}} + \left. \frac{\partial(\eta I)}{\partial \psi} \right|_{r, \Phi, z, \theta} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \hat{s}} \quad (3.15)$$

où

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \hat{s}} = 1 \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \hat{s}} = -1 \quad (3.16)$$

Quand on substitue dans l'équation 3.13, on obtient alors:

$$\left. \frac{dI}{ds} \right|_{\hat{s}} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mu I)}{\partial r} \right|_{\Phi, z, \theta, \psi} + \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta I)}{\partial \Phi} \right|_{r, z, \theta, \psi} - \left. \frac{1}{r} \frac{\partial(\eta I)}{\partial \psi} \right|_{r, \Phi, z, \theta} + \left. \frac{\partial(r\xi I)}{\partial z} \right|_{r, \Phi, \theta, \psi} \quad (3.17)$$

En analysant cette équation, on retrouve la dépendance de la direction avec le repère de la position. En effet, l'expression de la divergence de l'intensité radiative fait apparaître une dérivée par rapport à la coordonnée  $\psi$  qui est reliée à la direction. On appelle ce terme le terme de la redistribution angulaire. Fondamentalement, il provient du fait que la radiation est un phénomène qui suit des lignes droites, alors que l'on essaye de

l'exprimer dans un repère cylindrique.

### 3.5.3 Condition d'axisymétrie

La question que l'on peut se poser est: quel est l'intérêt de définir les repères à la manière de la figure 3.3(a) (absolue) et de ne pas tout simplement utiliser la définition de la figure 3.3(b) (relative) ? La réponse est simple. L'intérêt de la définition relative du repère sphérique est qu'elle permet d'exprimer naturellement la condition d'axisymétrie.

La figure 3.4 permet d'illustrer ce propos. Dans cette figure, on considère une répartition axisymétrique des différentes propriétés (champs de température, conditions frontières, etc.). On s'attend à ce que la valeur de l'intensité radiative au point  $A$  dans la direction  $\hat{s}_a$  soit la même que celle au point  $B$  dans la direction  $\hat{s}_b$ . Il faut bien voir que les directions  $\hat{s}_a$  et  $\hat{s}_b$  sont, de manière absolue, différentes bien que ce soient toutes les deux, localement, des directions radiales. Le problème avec la définition "absolue" du repère sphérique (cas de la figure 3.3(b)), vu que les deux directions, dans l'absolu sont différentes, le couple  $(\theta_a, \varphi_a)$  est différent du couple  $(\theta_b, \varphi_b)$ . Si on dérive  $I$  par rapport à  $\Phi$  autour du point  $A$  par exemple, en gardant la direction  $\hat{s}_a$  constante, on voit que cette dérivée n'est pas nulle, puisque plus on s'éloigne du point  $A$  en faisant varier  $\Phi$  moins la direction pointée par  $\hat{s}_a$  est radiale. Malgré la condition d'axisymétrie, aucun des termes de l'équation 3.14 ne s'annule. Pour calculer le rayonnement dans le cylindre, il faudrait virtuellement le déterminer dans tout l'espace physique et pas seulement dans un plan en deux dimensions.

Par contre, ce problème ne se pose pas avec l'équation 3.17 associée à la définition "relative" du repère sphérique. Dans ce cas, la dérivée de  $I$  par rapport à  $\Phi$  autour du point  $A$ , en gardant  $\theta$  et  $\psi$  constants, fait, que pendant le processus de dérivation, la direction reste radiale, et donc la valeur de l'intensité radiative demeure constante, la

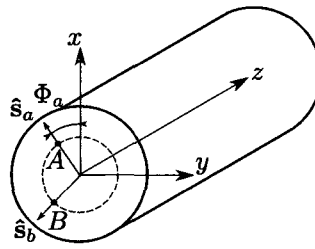


FIG. 3.4 Illustration de l'hypothèse d'axisymétrie

dérivée est par conséquent égale à zéro. On retrouve la simplification classique  $\frac{\partial}{\partial \Phi} = 0$  pour l'hypothèse d'axisymétrie.

## CHAPITRE 4

### MÉTHODE DES VOLUMES FINIS

Il existe plusieurs méthodes numériques pour modéliser le rayonnement. Cependant pour établir ces méthodes on emploie des arguments souvent éloignés de ceux que l'on utilise pour discrétiser les équations de la CFD. Or il arrive que l'on ait besoin d'un terme source dû au rayonnement dans l'équation de l'énergie (cela est le cas pour le présent travail). La compréhension des différentes méthodes pour les spécialistes de la CFD nécessite donc une assez grande quantité de travail pour se familiariser avec des concepts souvent éloignés du domaine de la mécanique des fluides. Par exemple la méthode des coefficients d'émission nette, a été développée par des spécialistes de la physique des plasmas. Le modèle P1, qui est utilisé actuellement dans la modélisation du rayonnement dans les disjoncteurs, quant à elle, fait partie de la classe dite des harmoniques sphériques. Par ailleurs les méthodes P1 et des coefficients d'émission nette résolvent des approximations de l'équation de transfert radiatif et ne permettent pas d'obtenir des résultats entièrement satisfaisants pour des cas industriels car les conditions de validité des approximations ne sont pas entièrement respectées.

C'est pourquoi la méthode des volumes finis, pour le rayonnement, a été proposée par Raithby & Chui (1990). Cette méthode emploie les techniques classiques, dans le domaine de la CFD, de discrétisation des équations. Plus précisément la méthode des volumes finis permet de transformer des systèmes d'équations aux dérivées partielles en un système algébrique équivalent. Cette approche comprend deux étapes. D'abord on discrétise l'espace en un ensemble de volumes discrets qui constitue un recouvrement du domaine de calcul. Ensuite, on réalise un bilan sur chacun de ces éléments en discrétisant les équations constitutives du problème. Le problème résolu est donc réellement la

discrétisation de l'équation de transfert radiatif et non une approximation comme ce qui est fait dans le modèle P1 par exemple. Il est donc possible d'obtenir un résultat à une précision donnée avec une discrétisation suffisamment fine.

#### **4.1 Dérivation du schéma numérique en trois dimensions**

On reproduit ici les schémas dérivés par Murthy & Mathur (1998b) et Tian & Chiu (2005). La stratégie adoptée pour obtenir les différents schémas numériques est de poser le problème en dimension trois dans un repère cartésien et donc de discrétiser l'équation 3.10. On cherchera ensuite à simplifier les équations en invoquant des conditions de symétrie pour obtenir un schéma numérique qui discrétise l'équation 3.17, c'est-à-dire une équation exprimée dans un repère cylindrique avec la condition d'axisymétrie imposée.

##### **4.1.1 Dépendance spectrale**

L'équation de transfert radiatif 3.7 présente une forte dépendance spectrale. Le spectre est divisé en bandes de fréquences (typiquement cinq bandes sont utilisées par les industriels). Pour chacune de ces bandes, des coefficients d'absorption moyens sont établis. Pour chaque bande on peut considérer le milieu comme étant gris. Il suffit alors d'appliquer la méthode FVM présentée ci après autant de fois qu'il y a de bandes pour obtenir le flux radiatif pour chacune d'elles. Il reste ensuite à faire la somme des flux obtenus pour chacune des bandes et ainsi obtenir le flux total.

##### **4.1.2 Discrétisations spatiale et angulaire**

L'équation de transfert radiatif comporte deux notions distinctes: celle d'espace et celle de direction. La méthode des volumes finis requiert le recouvrement du domaine de

calcul. Dans le cas du rayonnement, cela signifie un maillage pour l'espace et un autre pour les directions.

La discrétisation spatiale est effectuée par un maillage de volumes de contrôles polyédriques et non structurés. Le domaine sur lequel on applique ce maillage correspond à la géométrie du problème où le rayonnement a lieu. Chacun des volumes présente un certain nombre de faces et de sommets. L'algorithme qui va être mis en place est donc applicable à n'importe quel type de volume de contrôle, aucune hypothèse supplémentaire n'est nécessaire.

Cette discrétisation de l'espace sert de support à la discrétisation des équations. C'est pourquoi on représente les champs des différentes variables (température, coefficient d'absorption, intensités radiatives, etc.) par des approximations par morceau, avec les valeurs au centre du volume comme étant des valeurs moyennes sur l'élément.

De la même manière qu'il existe une discrétisation spatiale, il faut une discrétisation liée à la direction. Le domaine englobant toutes les directions possibles correspond à  $4\pi$  stéradians. Ce domaine peut être visualisé comme la surface d'une sphère unitaire. Sur ce domaine, c'est-à-dire la surface de la sphère, on choisit un certain nombre de points qui sont autant de directions  $i$ . À chaque direction, on associe une fraction d'angle solide  $\omega_i$  (une fraction de la surface de la sphère) et un vecteur de longueur unitaire  $\hat{s}_i = \hat{s}(\theta_i, \varphi_i)$  qui est dirigé vers le centroïde de la fraction d'angle solide. Les coordonnées sphériques ( $\theta$  et  $\varphi$ ) sont indiquées sur la Figure 4.1. De la même manière que pour la discrétisation spatiale, on pourrait très bien choisir un fractionnement du domaine angulaire quelconque. Il devrait tout de même couvrir l'intégralité des  $4\pi$  stéradians. Cependant pour le développement du schéma axisymétrique qui sera fait dans un deuxième temps, la partition doit se faire de la manière la plus simple qui soit, c'est-à-dire de manière structurée et uniforme. On définit donc un nombre de longitudes et de latitudes espacées d'un pas constant,  $\Delta\varphi$  et  $\Delta\theta$  respectivement.

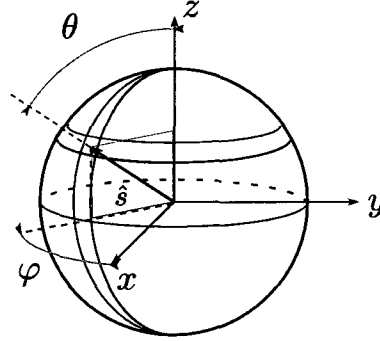


FIG. 4.1 Discrétisation de la direction

#### 4.1.3 Intégration de l'équation de transfert radiatif

L'équation de départ, dans le cas tridimensionnel cartésien est l'équation 3.10:

$$(\nabla \cdot (I\hat{s}))|_{\hat{s}} = \mu \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial y} + \xi \frac{\partial I}{\partial z} = \kappa I_b - \kappa I \quad (4.1)$$

Pour chaque direction, on intègre l'équation précédente sur le volume de contrôle  $c_0$  de la figure 4.2 et l'angle solide  $\omega_i$ , pour obtenir, en appliquant le théorème de la divergence:

$$\int_{\omega_i} \int_{\Gamma_0} I \hat{s} \cdot \hat{n} d\Gamma d\omega = (\kappa I_b - \kappa I) \Delta V_0 \omega_i \quad (4.2)$$

avec  $\Gamma$  le contour du volume et  $\hat{n}$  le vecteur normal unitaire à ce contour dirigé vers l'extérieur du volume. Pour le cas 3D, le contour est composé des faces du volume de contrôle. On discrétise l'équation précédente par:

$$\sum_f J_f I_{if} = (\kappa I_{b0} - \kappa I_{i0}) \Delta V_0 \omega_i \quad (4.3)$$

avec

–  $I_{if}$  l'intensité radiative dans la direction  $i$  au centre des faces du volume de contrôle.



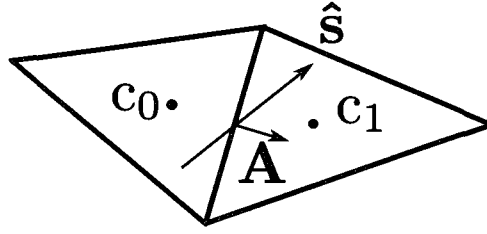


FIG. 4.2 Bilan sur un volume de contrôle

- $I_{i0}$  l'intensité radiative dans la direction  $i$  au centre  $c_0$  du volume de contrôle.
- $I_{b0}$  l'intensité de corps noir au centre du volume de contrôle et à la température de ce dernier.
- $\Delta V_0$ , le volume du volume de contrôle.

De plus l'angle solide  $\omega_i$  est donné par:

$$\omega_i = \int_{\Delta\varphi} \int_{\Delta\theta} \sin\theta d\theta d\varphi = 2 \sin\theta_i \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \Delta\varphi \quad (4.4)$$

Enfin  $J_f$  est un facteur géométrique qui est donné par:

$$J_f = \mathbf{A} \cdot \int_{\Delta\varphi} \int_{\Delta\theta} \hat{\mathbf{s}} \sin\theta d\theta d\varphi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_i \quad (4.5)$$

où le vecteur normal à la face  $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{n}}$  et les coordonnées du vecteur direction sont:

$$\hat{\mathbf{s}} = \sin\theta \cos\varphi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta \sin\varphi \hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.6)$$

On peut par ailleurs exprimer  $\mathbf{S}$  aisément quand on adopte la discrétisation directionnelle

structurée (cf. section 4.1.2)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_i = & \cos \varphi_i \sin(0,5\Delta\varphi)(\Delta\theta - \cos 2\theta_i \sin \Delta\theta) \hat{\mathbf{e}}_x \\
 & + \sin \varphi_i \sin(0,5\Delta\varphi)(\Delta\theta - \cos 2\theta_i \sin \Delta\theta) \hat{\mathbf{e}}_y \\
 & + 0,5\Delta\varphi \sin 2\theta_i \sin \Delta\theta \hat{\mathbf{e}}_z
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

On note que cette intégration est exacte.

#### 4.1.4 Traitement de l'intensité des faces

Pour déterminer la valeur de l'intensité aux faces dans l'équation 4.3, il existe plusieurs possibilités. La plus simple est d'utiliser la valeur de l'intensité en amont. Cela signifie que si  $\mathbf{A}_f \cdot \hat{\mathbf{s}} < 0$ , comme c'est le cas dans la figure 4.2, la direction est "entrante" par cette face  $\mathbf{f}$ . Dans ce cas on utilise l'intensité du volume voisin  $I_f = I_{i0}$ . Si par contre la direction sort du volume par la face considérée,  $\mathbf{A}_f \cdot \hat{\mathbf{s}} > 0$ , on utilise la valeur au centre de ce volume  $I_f = I_{i1}$ . On appelle ce schéma, le schéma amont, dans la mesure où pour une face et une direction donnée, on cherche l'intensité radiative au centre du volume en amont, par rapport à la direction de propagation.

Dans la mesure où le vecteur direction  $\hat{\mathbf{s}}$  est un vecteur moyen qui couvre une fraction d'angle solide, il se peut qu'une partie des directions couvertes par cet angle solide soient "entrantes" et que l'autre partie soit "sortante". On appelle ce phénomène "overhang". Il a été soulevé par des auteurs comme Chai et al. (1994) ou Murthy & Mathur (1998a). Il existe deux manières de traiter le problème. Le premier est de ne rien faire. La deuxième est de "pixeliser" l'angle solide. Cela signifie, pour les couples faces/directions qui posent problème, de raffiner la discrétisation sur cet angle solide. La conclusion des auteurs précédents est que les gains ne sont obtenus que lorsque les maillages spatial et angulaire sont grossiers et donc peu exploitables en pratique. Par contre cela ajoute du

temps de calcul, surtout si le maillage est fin. C'est pourquoi dans le présent travail nous nous sommes cantonnés à la première approche, à savoir de ne rien faire.

#### 4.1.5 Conditions limites

Comme mentionné à la section 3.3.4, on considère, dans le cadre d'application aux disjoncteurs, comme condition limites des parois froides et sans réflexions. Cependant, puisque la méthode des volumes finis est capable de traiter les réflexions qu'elles soient diffuses ou spéculaires, on se propose de développer les réflexions diffuses. Ceci permettra peut-être d'améliorer plus tard le traitement des frontières dans l'éventualité où l'on trouve un modèle satisfaisant pour prédire les coefficients de réflexion.

Un bilan sur la paroi de surface  $A$  et de vecteur normal unitaire  $\hat{\mathbf{n}}$  dirigé vers l'intérieur du domaine donne:

$$I_w(\mathbf{r}_w, \hat{\mathbf{s}}) = \epsilon I_b(\mathbf{r}_w, \hat{\mathbf{s}}) + \frac{1 - \epsilon}{\pi} \int_{\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0} I_w(\mathbf{r}_w, \hat{\mathbf{s}}') |\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}}| d\omega' \quad (4.8)$$

que l'on discrétise en multipliant par  $\hat{\mathbf{s}}' \cdot \hat{\mathbf{n}}$  et que l'on intègre dans toutes les directions  $i$  sortantes:

$$I_{w,out} \sum_{i,out} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} = \epsilon I_{bw} \sum_{i,out} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}} + (1 - \epsilon) \sum_{i,in} I_{w,i} |\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}| \quad (4.9)$$

Ou encore

$$I_{w,out} = \epsilon I_{bw} + \frac{(1 - \epsilon) \sum_{i,in} I_{w,i} |\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}|}{\sum_{i,out} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (4.10)$$

avec  $I_{w,out}$  l'intensité radiative diffuse qui ne dépend pas de la direction. Dans le schéma amont, pour une direction provenant d'une paroi du domaine, on prend  $I_{w,out} = I_f$ .

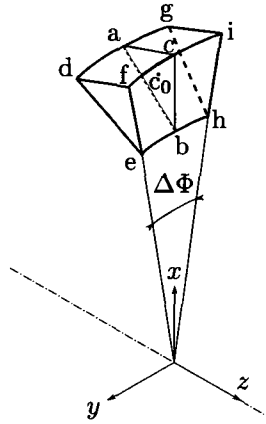


FIG. 4.3 Volume de contrôle dans un repère cylindrique

Cependant, dans le cas le plus courant pour les disjoncteur, avec les hypothèses mentionnées dans la section 3.3.4, on prend  $I_{w,out} = 0$ .

## 4.2 Schéma en coordonnées cylindriques avec l'hypothèse d'axisymétrie

### 4.2.1 Discrétisation spatiale

Dans cette section on dérive le schéma numérique de telle manière à calculer le rayonnement dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$  en utilisant un maillage en deux dimensions et en invoquant les conditions de symétrie. Dans ce plan on a  $\Phi = 0$ . La figure 4.3 montre un volume de contrôle en trois dimensions engendré à partir d'une cellule du maillage en deux dimensions, ici le triangle **abc**. Les triangles **def** et **ghi** sont respectivement dans les plans à  $\frac{\Delta\Phi}{2}$  et  $-\frac{\Delta\Phi}{2}$ . Ces deux faces sont appelées respectivement face du dessus et face du dessous. En tournant le maillage en dimension 2, autour de l'axe  $z$ , on peut générer le maillage 3D complet, de la géométrie axisymétrique en reproduisant le même volume de contrôle espacé régulièrement de  $\Delta\Phi$  pour obtenir un partage de  $\Phi$  entre 0 et  $2\pi$  radians.

### 4.2.2 Discrétisation angulaire

On procède de la même manière que pour la discrétisation directionnelle utilisée dans le cas en trois dimensions, nous divisons les  $4\pi$  de l'angle solide en un nombre donné de longitudes  $N_\psi$  et de latitudes  $N_\theta$  espacées régulièrement des angles  $\Delta\psi$  et  $\Delta\theta$ . Il faut bien noter la distinction entre l'angle polaire  $\Phi$  lié au maillage spatial mesuré à partir de l'axe  $x$  et l'angle  $\psi$  qui est aussi un angle polaire, défini à partir de l'axe  $e_r$  mais pour le maillage directionnel (cf. figure 3.3(b)).

### 4.2.3 Intégration de l'équation de transfert

La discrétisation est la même que pour le cas tridimensionnel pour les faces latérales de la figure 4.3, c'est-à-dire les faces *fcihbe*, *daghbe* et *dagicf*. Ces faces, dans le cas d'un volume de contrôle centré autour du plan  $\Phi = 0$  impliquent uniquement des quantités dans ce plan (vecteur normal à la surface, intensité aux faces, etc.).

Par contre pour les faces du dessus et du dessous, un traitement spécifique, développé dans la section suivante, doit être mené. Le schéma pour le cas cylindrique se ramène donc à:

$$\left( \sum_{\text{faces latérales}} J_f I_f \right) + J_t I_{it} + J_b I_{ib} = (-\kappa I_{i0} + \kappa I_{b0}) \omega_i \Delta V_0 \quad (4.11)$$

Dans le membre de gauche, les quantités avec les indices  $t$  (top) et  $b$  (bottom) réfèrent respectivement à la face du dessus et la face du dessous. De plus le volume  $\Delta V_0$  est donné par la relation:

$$\Delta V_0 = A_{2d} \Delta \Phi r_0 \quad (4.12)$$

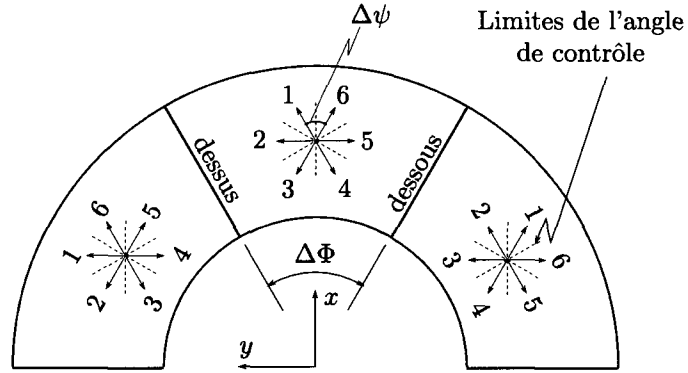


FIG. 4.4 Distribution des angles et des volumes de contrôle sur l'angle polaire

avec  $r_0$  la coordonnée radiale du centre du volume de contrôle et  $A_{2d}$  l'aire du triangle  $abc$ .

#### 4.2.4 Correspondance entre la discrétisation spatiale et la discrétisation angulaire (1<sup>er</sup> ordre)

Dans cette section nous allons suivre la discrétisation proposée par Murthy & Mathur (1998b). Afin de bénéficier des simplifications que peuvent apporter l'hypothèse d'axi-symétrie, il faut établir une correspondance entre la discrétisation spatiale et la discrétisation directionnelle. Pour ce faire on impose  $\Delta\Phi = \Delta\psi$ , c'est-à-dire que pour les discrétisations angulaires et spatiales, il y a le même nombre d'angles polaires discrets. Le résultat est présenté à la figure 4.4.

De cette figure on peut tirer plusieurs observations. Par exemple la direction 1 du volume de contrôle à  $\Phi = 0$  est parallèle à la direction 2 pour le volume à  $\Phi = -\Delta\Phi$  et la direction 6 du volume à  $\Phi = \Delta\Phi$ . Cela est dû à la définition de l'angle  $\psi$  choisie (figure 3.3(b)), et de l'hypothèse  $\Delta\Phi = \Delta\psi$ .

Ensuite l'hypothèse d'axisymétrie permet d'établir, pour n'importe quelle direction  $i$ :

$$I_i|_{\Phi=0} = I_i|_{\Phi=\Delta\Phi} = I_i|_{\Phi=-\Delta\Phi} \quad (4.13)$$

Cela permet d'exprimer n'importe quelle intensité radiative du domaine en fonction des intensités dans le plan  $\Phi = 0$ .

Enfin, il y a une symétrie par rapport au plan  $(e_x, e_z)$  et donc pour le volume de contrôle central (centré par rapport à  $\Phi = 0$ ):

$$I_1|_{\Phi=0} = I_6|_{\Phi=0} \quad I_2|_{\Phi=0} = I_5|_{\Phi=0} \quad I_3|_{\Phi=0} = I_4|_{\Phi=0} \quad (4.14)$$

Toutes les intensités dans le volume central ainsi exprimées, il ne reste à traiter que les trois premières directions et les compter en double lors du calcul du flux radiatif (equation 3.2). En d'autres mots et de manière plus générale, on ramène la plage de  $\psi$  à  $[0, \pi]$ .

Il reste encore à déterminer l'intensité radiative aux faces du dessous et du dessus du volume de contrôle central de la figure 4.4 afin d'appliquer la relation 4.11.

Par exemple la direction 1 du volume de contrôle central est entrante par la face du dessous. L'intensité de la face du dessous selon le schéma en amont correspond donc à  $I_2|_{\Phi=-\Delta\Phi}$ . Cette intensité, d'après l'équation 4.13, est égale à  $I_2|_{\Phi=0}$ . Au final, pour la direction 1 du volume de contrôle central, l'intensité de la face du dessous est égale à l'intensité de la direction 2 de ce même volume de contrôle.

En appliquant exactement le même raisonnement pour la direction 2 du volume de contrôle central et la face du dessous, on obtient que l'intensité sera égale à l'intensité 3 de ce même volume. Quant à la direction 3 du volume de contrôle central, on constate qu'elle est parallèle à la face du dessous. Exactement la moitié des directions couvertes

par l'angle solide sont entrantes, et sortantes pour l'autre moitié. Par ailleurs du fait de la symétrie par rapport au plan  $\Phi = 0$ , on a que  $I_3|_{\Phi=0} = I_4|_{\Phi=0}$ . En appliquant le schéma amont on peut diviser cet angle solide en deux et traiter différemment la partie entrante et la partie sortante. On obtient donc:

$$\begin{aligned}
 J_b I_{3b} &= J_b \left( -\frac{1}{2} I_3|_{\Phi=0} + \frac{1}{2} I_4|_{\Phi=-\Delta\Phi} \right) \\
 &= J_b \left( -\frac{1}{2} I_3|_{\Phi=0} + \frac{1}{2} I_4|_{\Phi=0} \right) \\
 &= J_b \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) I_3|_{\Phi=0} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Cette face, pour cette direction  $n$  intervient donc pas dans le bilan d'énergie de l'équation 4.11.

Suivant des raisonnements similaires et en respectant le schéma amont, on trouve pour la face du dessus:

$$\begin{aligned}
 J_t I_{1t} &= J_t \left( \frac{1}{2} I_1|_{\Phi=0} - \frac{1}{2} I_6|_{\Phi=\Delta\Phi} \right) \\
 &= J_t \left( \frac{1}{2} I_1|_{\Phi=0} - \frac{1}{2} I_6|_{\Phi=0} \right) \\
 &= J_t \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) I_1|_{\Phi=0} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$J_t I_{2t}|_{\Phi=0} = J_t I_2|_{\Phi=0} \tag{4.17}$$



$$J_t I_{3t}|_{\Phi=0} = J_t I_3|_{\Phi=0} \quad (4.18)$$

Finalement, la contribution des faces du dessus et du dessous du volume de contrôle aboutit à un couplage entre les directions. En effet, pour établir le schéma axisymétrique dans une direction donnée ( $\theta$  et  $\psi$  fixé), et en l'absence de diffusion du rayonnement, des intensités où  $\theta$  est similaire mais  $\psi$  est différent de  $\Delta\psi$  apparaissent.

Seules les intensités dans le plan où  $\Phi = 0$  interviennent dans le schéma car, du fait de l'hypothèse d'axisymétrie, on peut obtenir toutes les autres intensités. Pour être consistant en terme d'unité avec les équations classiques de la CFD pour l'axisymétrie (les grandeurs s'expriment par unité d'angle), l'équation 4.11 est divisée par  $\Delta\Phi$ . Du fait que les variables du problème soient stockées au centre des volumes de contrôle, et qu'elles soient supposées constante à l'intérieur de ce volume, le schéma tel que proposé par Murthy & Mathur (1998b) est un schéma du premier ordre.

#### 4.2.5 Correspondance entre la discrétisation spatiale et la discrétisation angulaire (2<sup>ème</sup> ordre)

Une modification au schéma précédent a été proposé par Tian & Chiu (2005) concernant le traitement des faces du volume de contrôle. Premièrement, la définition des angles présentés dans la figure 3.3(b) a été utilisée (la discrétisation directionnelle reste néanmoins la même). Ensuite une relation d'interpolation est établie entre l'intensité au centre du volume de contrôle et celles aux faces du dessus et du dessous en faisant intervenir l'angle  $\Phi$  (spatial) et  $\varphi$  (directionnel). Ainsi la seule condition qui est imposée pour que la relation soit valide est que  $\Delta\Phi < 2\Delta\varphi$ :

$$\begin{aligned}
I_b^{l,m} &= \frac{\Delta\Phi}{2\Delta\varphi} I_0^{l,m+1} + \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{2\Delta\varphi}\right) I_0^{l,m} \\
I_t^{l,m} &= \frac{\Delta\Phi}{2\Delta\varphi} I_0^{l,m-1} + \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{2\Delta\varphi}\right) I_0^{l,m}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Les exposants  $l$  et  $m$  sont relatifs à la direction et remplacent la notation indicelle  $i$ . Ils indiquent respectivement les valeurs discrètes de  $\theta$  et  $\varphi$ .

Enfin l'idée principale est de tendre vers un  $\Delta\Phi$  infinitésimal, une ouverture angulaire du volume de contrôle très faible. Cela permet de modifier l'expression des vecteurs normaux aux parois du dessus et du dessous. En effet, on remplace:

$$\mathbf{A}_t = A_{2d} \left( -\sin \frac{\Delta\Phi}{2} \hat{\mathbf{e}}_r + \cos \frac{\Delta\Phi}{2} \hat{\mathbf{e}}_\psi \right) \tag{4.20}$$

par

$$\mathbf{A}_t = A_{2d} \left( \frac{\Delta\Phi}{2} \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{\mathbf{e}}_\psi \right) \tag{4.21}$$

Finalement après avoir utilisé 4.19 et 4.21 dans l'équation 4.11 puis divisé par  $\Delta\Phi$  on obtient,

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{\text{faces latérales}} J_f I_f \right) + A_{2d} \mathbf{S}^{l,m} \cdot \left( \frac{I_0^{l,m-1} - I_0^{l,m+1}}{2\Delta\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x - I_0^{l,m} \hat{\mathbf{e}}_y \right) \\
= (-\kappa I_{i0} + \kappa I_{b0}) \omega_i \Delta V_0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

avec l'indice 0 qui vaut pour l'intensité au centre du volume de contrôle et le vecteur  $\mathbf{S}^{l,m}$  qui a été défini dans l'équation 4.7.

A nouveau ce schéma est consistant avec les équations axisymétriques de la CFD, car le schéma implique des grandeurs par unité d'angle. Comme les hypothèses d'axisymétrie ont été appliquées, il permet de calculer la radiation dans tous le domaine à partir du

maillage spatial en deux dimensions. De la même manière, du fait de la symétrie selon le plan  $\Phi = 0$ ,  $\varphi \in [0 \pi]$ .

#### 4.2.6 Remarques sur le terme de redistribution angulaire

Les contribution du terme des faces du dessus et du dessous du volume de contrôle est une discrétisation du terme de redistribution angulaire dans l'équation 3.17:  $\frac{1}{r} \frac{\partial(\eta I)}{\partial \psi} \Big|_{r, \Phi, z, \theta}$ . Le premier schéma de Murthy & Mathur (1998b) qui applique strictement la règle de l'intensité en amont peut être vu comme un schéma du premier ordre où le terme de redistribution est:

$$\frac{J_t I_{it} - J_b I_{ib}}{r_0 A_{2d} \Delta \psi} \quad (4.23)$$

Le schéma proposé par Tian & Chiu (2005) quant à lui, utilise la règle de l'intensité en amont pour les faces latérales du volume de contrôle mais pour le terme de redistribution, une discrétisation du deuxième ordre est utilisée:

$$A_{2d} \mathbf{S}^{l,m} \cdot \left( \frac{I_0^{l,m-1} - I_0^{l,m+1}}{2\Delta\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x - I_0^{l,m} \hat{\mathbf{e}}_y \right) \quad (4.24)$$

### 4.3 Implémentation de la méthode des volumes finis

La mise en oeuvre de ces techniques de discrétisation, donne lieu à un système d'équations algébriques linéaires. Il y a deux approches pour la résolution de tels systèmes. Les méthodes itératives sont faciles à mettre en oeuvre mais peuvent être lentes à converger comme cela a été rapporté dans la littérature. L'avantage est que l'espace mémoire requis est faible. L'autre choix est d'assembler ces équations sous forme de système matriciel et d'utiliser une méthode directe avec un temps de calcul beaucoup plus faible. Par contre l'espace mémoire augmente très vite avec le nombre d'inconnues.

Comme la performance en terme de temps de calcul est importante pour l'application à laquelle cette méthode est destinée, plusieurs décisions ont été prises en conséquence. Tout d'abord la méthode a été programmées en FORTRAN 90, un langage compilé particulièrement bien adapté pour le calcul scientifique intensif. Ensuite la méthode de résolution par solveur direct a été choisie. La taille des systèmes matriciels est de l'ordre de plusieurs centaines de milliers d'équations. Le type d'équations donne lieu fort heureusement à des matrices creuses. Alors il est possible d'en profiter et seuls les termes non nuls sont sauvegardés en mémoire. Le solveur choisi s'appelle PARDISO et est le résultat du travail de Schenk & Gärtner (2004). Le grand intérêt du point de vue du programmeur est que ce solveur propose très simplement de paralléliser la résolution du système et ainsi de tirer le meilleur parti des architectures des ordinateurs modernes qui disposent de plusieurs processeurs.

Par ailleurs comme on modélise le rayonnement à partir d'un maillage en deux dimensions, le nombre d'inconnues reste limité. Par exemple les simulations les plus grandes telle que rapporté par les partenaires industriels, sont de l'ordre de 60 000 triangles. Et dans ces 60 000 triangles, seuls 10 000 triangles sont concernés par des zones où se produit le rayonnement. L'utilisation de méthodes directes de résolution de système matriciel peut donc se justifier.

## CHAPITRE 5

### RÉSULTATS OBTENUS

Dans le but d'étudier et de valider les capacités de la méthode des volumes finis pour la modélisation du rayonnement au sein des disjoncteurs à haute tension, plusieurs cas tests, où seul le phénomène de rayonnement est présent, ont été définis. Pour chacun de ces cas tests on compare :

- L'implémentation du schéma de Murthy & Mathur (1998b), appelé FVM ordre 1
- L'implémentation du même schéma dans le logiciel FLUENT, identifié par FVM Fluent.
- L'implémentation du schéma de Tian & Chiu (2005), appelé improprement FVM ordre 2 (en réalité seul le terme de redistribution angulaire est discrétisé selon un terme du 2<sup>ème</sup> ordre)
- L'implémentation du modèle P1 (qui est présentée brièvement en annexe) dans FLUENT. Il s'agit de la méthode de modélisation utilisée jusqu'à présent pour les disjoncteurs. Il est intéressant de voir les apports de la méthode des volumes finis en la comparant avec la méthode actuelle.
- Le résultat analytique pour les trois premiers cas tests. Le dernier cas test dont la géométrie s'inspire de cas industriels n'a pas ce type de résultats.

On pourra aussi signaler que l'implémentation de FVM ordre 1 et son équivalent dans FLUENT aboutissent rigoureusement aux mêmes résultats. C'est pourquoi dans les graphiques de résultats, la dénomination FVM Fluent est aussi valable pour FVM ordre 1.

## 5.1 Résultats pour les cas tests analytiques

Dans un premier temps, on cherche à vérifier les résultats donnés par l'implémentation des schémas numériques de la méthode des volumes finis. Pour cela les résultats de ces schémas sont comparés avec les solutions analytiques. Ces dernières sont obtenues en suivant la méthodologie proposée dans un premier temps par Dua & Cheng (1975) et de manière plus complète par Kim & Baek (2005). Trois cas test ont été définis. Ils ont tous en commun d'avoir un domaine spatial cylindrique, de 2 m de long et de 1 m de rayon. Un gaz qui est participatif du point de vue du rayonnement remplit le cylindre. Les parois sont froides, noires et n'offrent pas de réflexion à leur surface. Le résultat étudié est le flux radiatif arrivant à la paroi radiale (le  $q_{in}$  de l'équation 3.3).

Pour tous les cas le coefficient d'absorption  $\kappa$  est constant dans le domaine. Trois valeurs de  $\kappa$  sont testées pour chaque cas test. On définit l'épaisseur optique  $\tau$  comme étant le produit adimensionnel du coefficient d'absorption et d'une longueur caractéristique du problème, ici le rayon du cylindre (1 m). On a donc  $\tau = \kappa R$ . Les trois valeurs d'épaisseur optiques sont :

- $\tau = 0, 1$ . L'épaisseur est faible, le milieu est peu participatif et le rayonnement peut se propager à plus longue distance.
- $\tau = 1$ . L'épaisseur est moyenne
- $\tau = 5$ . L'épaisseur est importante, le rayonnement se fait rapidement absorbé par le milieu participatif.

### 5.1.1 Cas test A

Le premier cas test est celui que l'on retrouve dans la littérature quand il s'agit de valider un nouveau schéma axisymétrique. Il est présenté sur la figure 5.1. Le cylindre est rempli d'un gaz à température uniforme ( $T_g = 1000$  K). Le flux radiatif qui arrive à la paroi

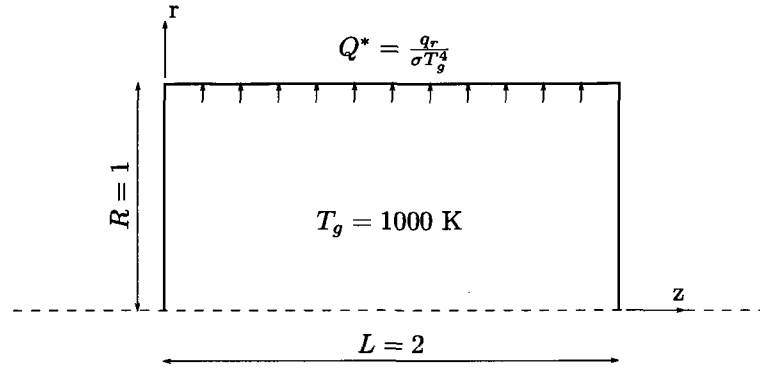


FIG. 5.1 Géométrie du cas test A

radiale est calculé avec la relation 3.3. On compare le flux adimensionnel  $Q^* = \frac{q_r}{\sigma T_g^4}$ . On utilise des maillages de 8000 triangles environ et  $10 \times 10$  directions. Le maillage utilisé est illustré sur la figure 5.2. Les résultats sont présentés sur la figure 5.3. On observe que les deux implémentations des volumes finis reproduisent quasi parfaitement les résultats analytiques, et ce pour les trois épaisseurs optiques. La méthode P1 quant à elle capture la tendance générale mais la précision est moins bonne. Des erreurs de l'ordre de 10% sont observés. Par ailleurs ce modèle ne prédit pas bien les effets en deux dimensions dus aux effets de bords du cylindre de longueur finie pour une épaisseur optique de 0,1.

### 5.1.2 Cas test B

Le défi représenté par ce cas test est plus important que le précédent. Sa géométrie est présentée sur la figure 5.4. Ce test s'inspire d'un arc électrique à l'intérieur d'un cylindre. L'arc est à  $T_g = 1000$  K et a un rayon de 10 cm. Le reste du cylindre est rempli d'un gaz froid à  $T = 0$  K. Cette partie absorbe donc l'énergie mais n'en émet pas. À nouveau, on teste les différents schémas numériques avec les trois épaisseurs optiques définies précédemment et le maillage utilisé est de 8000 triangles environ. Il est présenté sur la figure 5.5. Deux zones ont été définies pour générer ce maillage afin d'appliquer correctement la séparation entre les deux températures du domaine. Pour les deux schémas de volumes

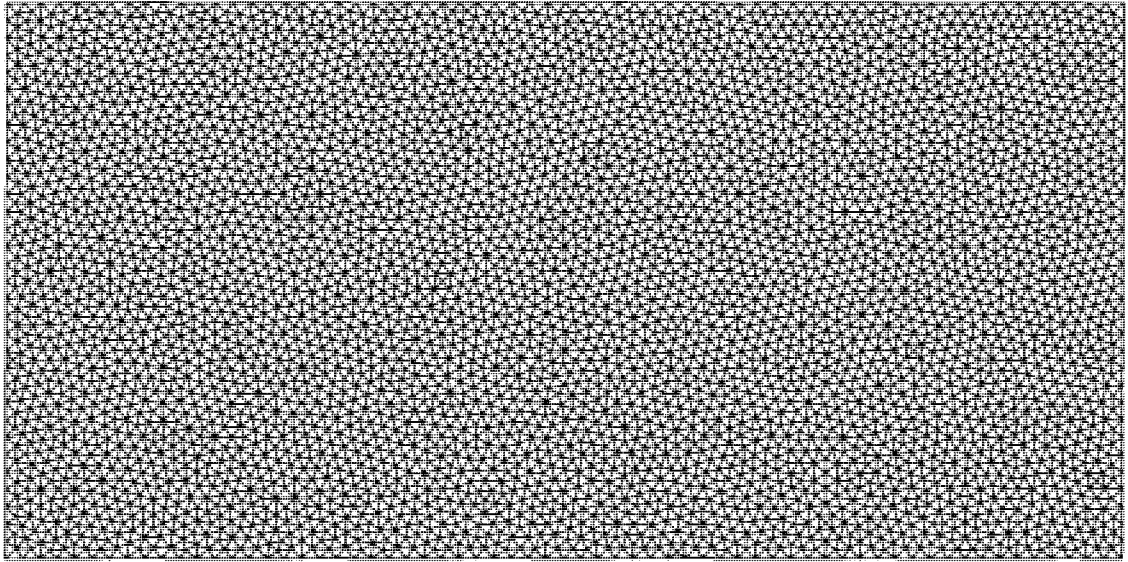


FIG. 5.2 Maillage de 8192 triangles pour le cas test A

finis, les mêmes  $10 \times 10$  directions sont imposées.

Les résultats sont présentés sur les figures 5.6, 5.7, 5.8 pour les trois valeurs d'épaisseur optique. Tout d'abord, contrairement au cas test A, on remarque que la valeur du flux  $Q^*$  ne varie pas de manière monotone avec la épaisseur optique  $\tau$ . On assiste à la présence de deux effets antagonistes. La génération d'énergie dans la partie chaude qui augmente proportionnellement avec l'épaisseur optique et l'absorption qui augmente aussi avec  $\tau$  mais de manière exponentielle. On observe donc une valeur plus élevée du flux arrivant à la paroi pour le cas où  $\tau = 1$ .

Sur la figure 5.6 où  $\tau = 0.1$ , comme pour le cas test A, le modèle P1 ne rend pas la dépendance axiale du flux radiatif. Cela n'est pas surprenant car le modèle P1 n'est pas sensé s'appliquer dans ces conditions. Pour le cas où  $\tau = 1$ , figure 5.7, le modèle P1 prédit la bonne tendance mais est légèrement supérieur à la valeur analytique. Par contre pour le cas où  $\tau = 5$ , figure 5.8, le modèle P1 n'obtient pas le bon résultat du tout ce qui est un peu surprenant car ce modèle est justement sensé être fiable dans ces épaisseurs



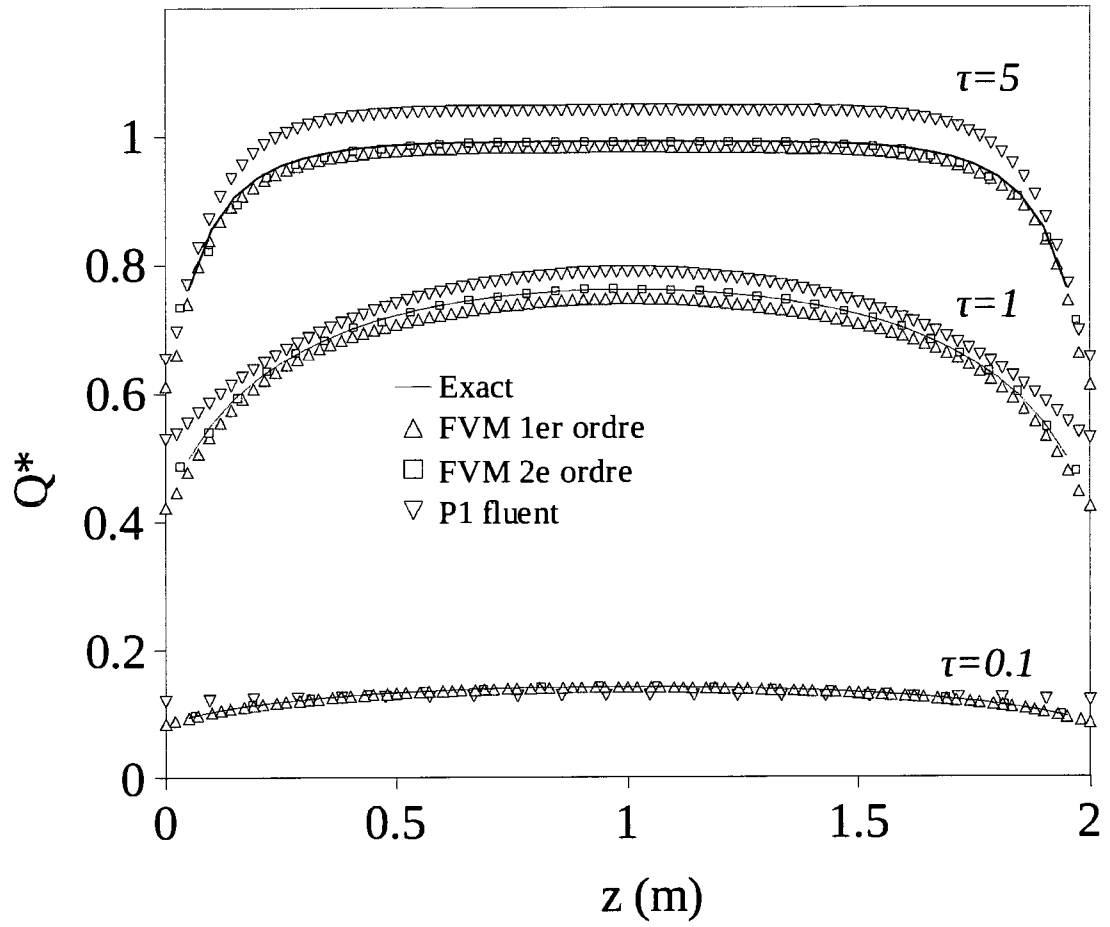


FIG. 5.3 Résultats du cas test A

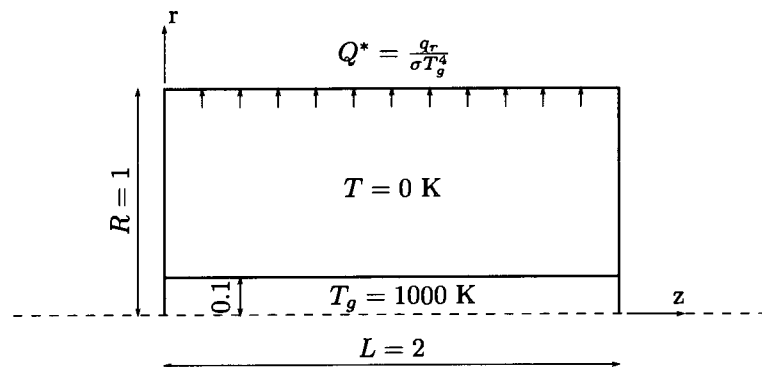


FIG. 5.4 Géométrie du cas test B

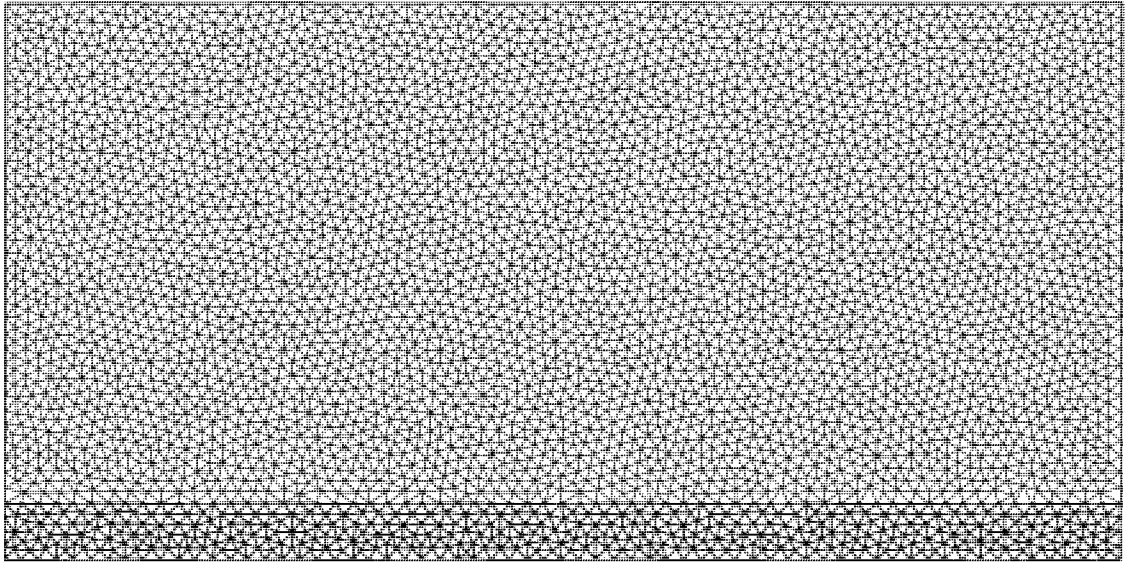
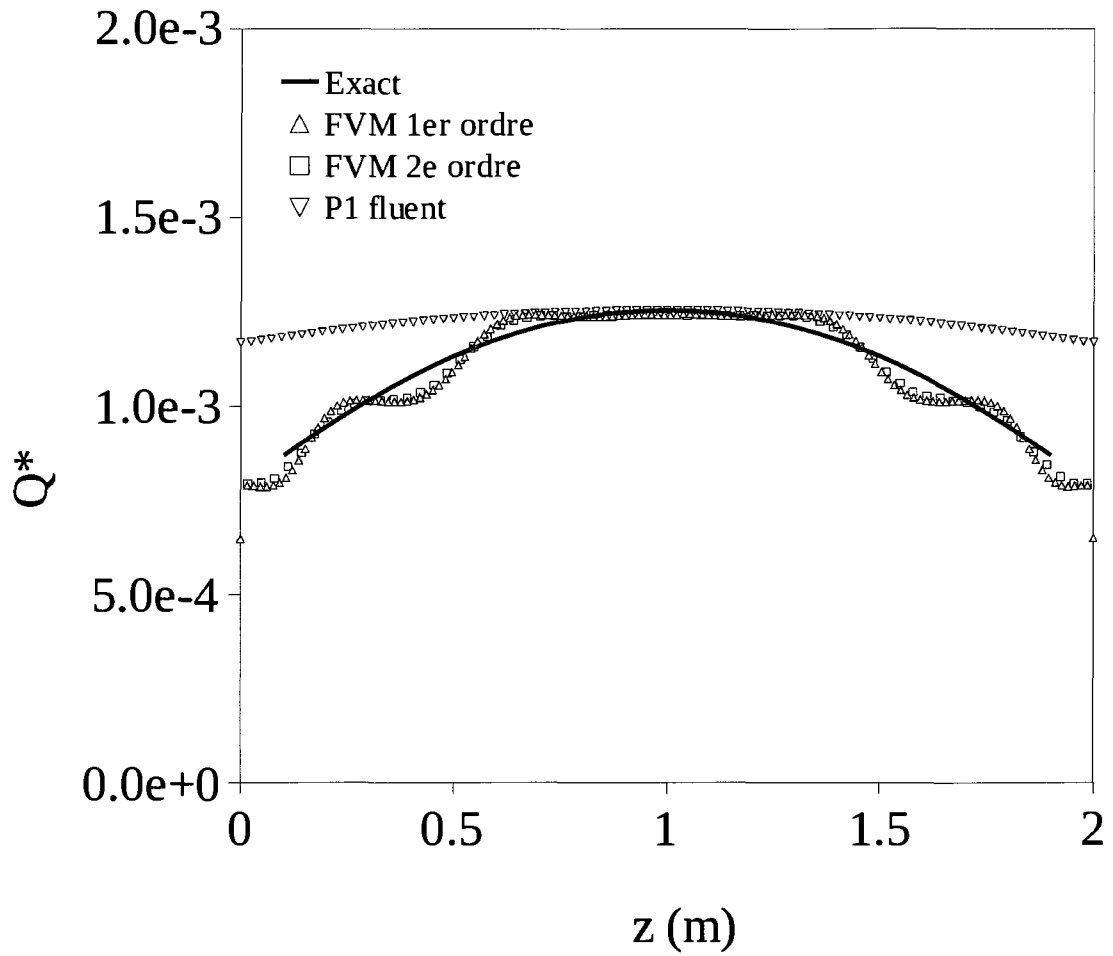
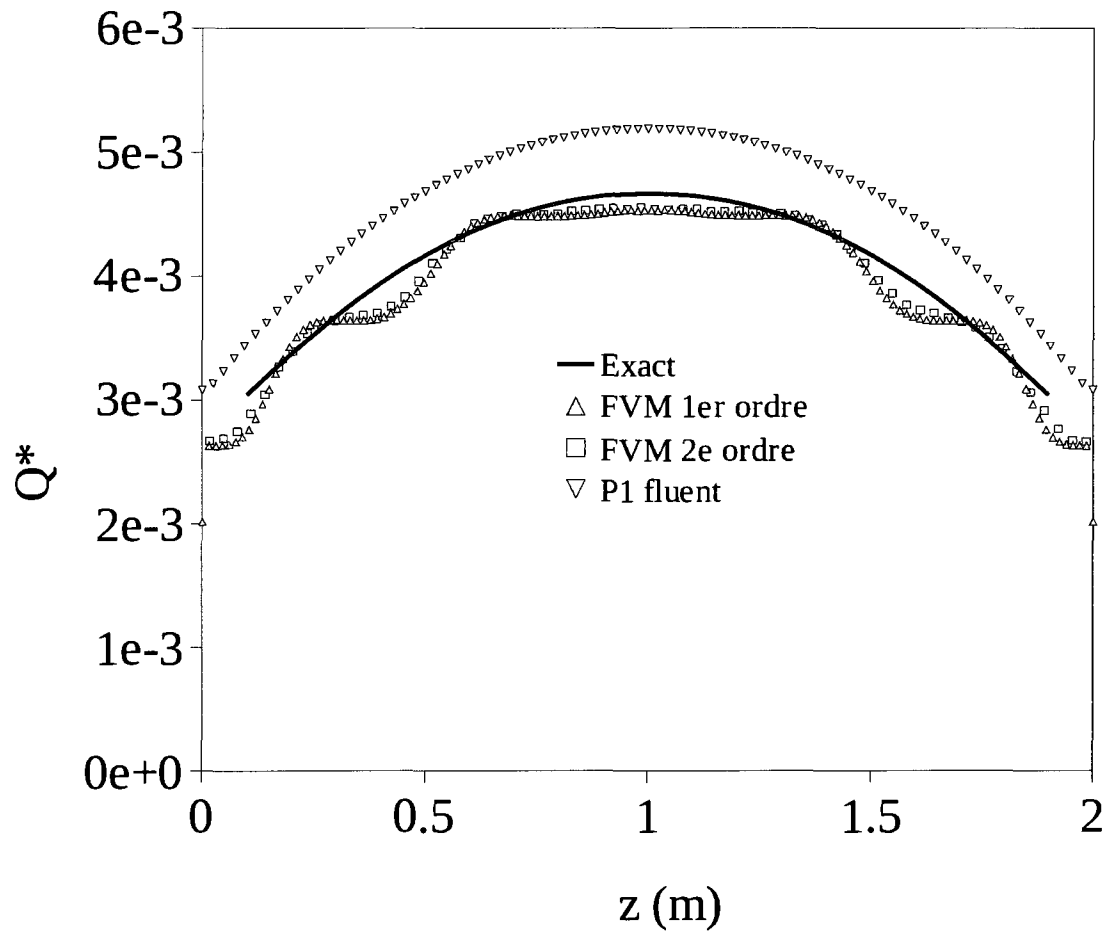


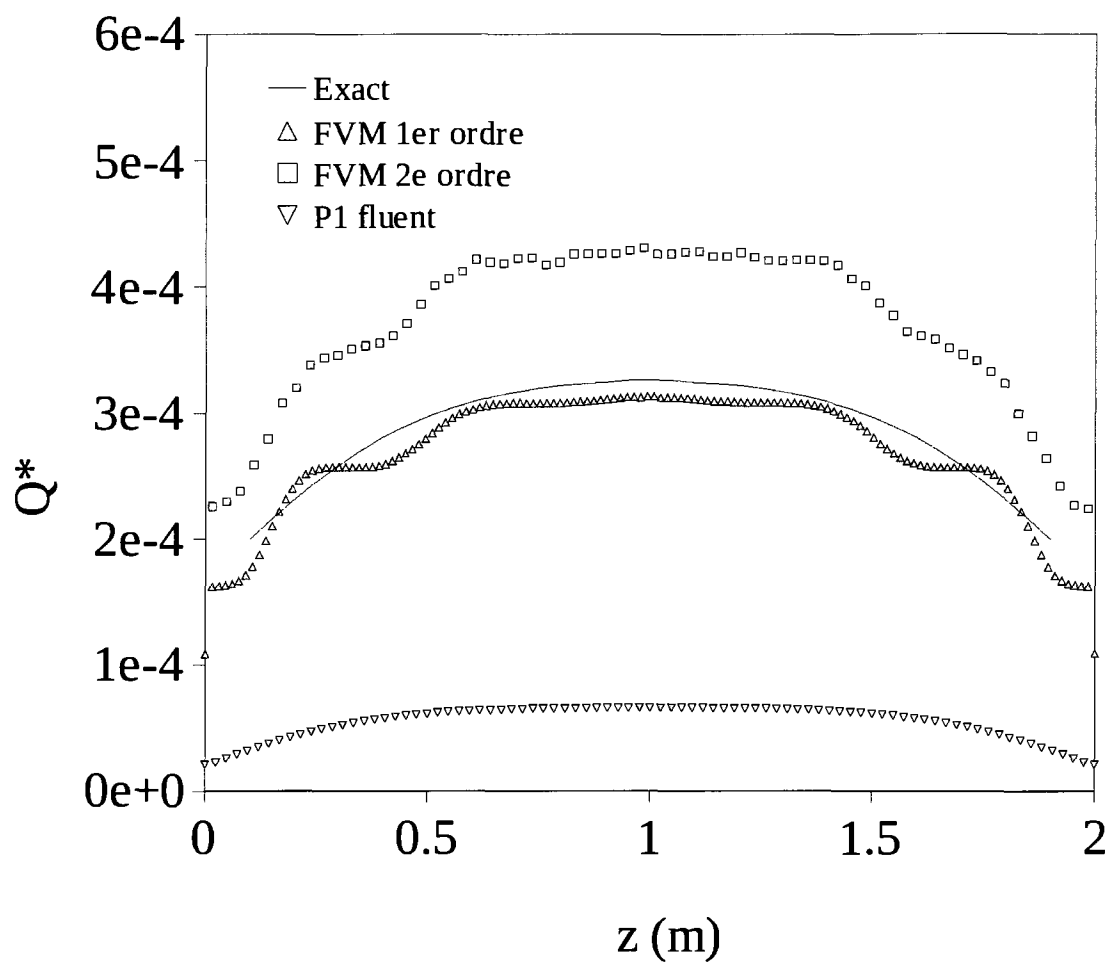
FIG. 5.5 Maillage de 8074 triangles pour le cas test B

optiques.

Quant aux deux schémas FVM (premier et deuxième ordre), ils montrent un comportement “oscillatoire” pour les trois épaisseurs optiques. Il s’agit d’un phénomène appelé effet de rayon (*ray effect*). Cet effet est une limitation des méthodes FVM. Chai & Patankar (2006) ou encore Coelho (2002), entre autres, l’ont étudié un peu plus précisément. Cet effet néfaste résulte de la discrétisation angulaire. La figure 5.9, qui montre le flux radiatif dans le domaine, fait apparaître des directions privilégiées vers les parois axiales qui ne sont pas très physiques au delà de  $r = 0,5$  environ. Dans cet exemple le nombre de directions choisies pour la discrétisation est insuffisant ( $2 \times 2$ ). Le flux se propage de triangle en triangle sur le maillage spatial en s’alignant sur les directions discrétisées. À la frontière entre la zone chaude (qui génère de l’énergie) et la zone froide, bien que la direction radiale ne fasse pas partie des directions discrètes, la “moyenne” qui résulte de l’intégration des intensités sur l’angle solide (cf. équation 3.2) montre un flux parfaitement radial. Au fur et à mesure que l’on s’éloigne de la source, la “moyenne” se déséquilibre vers l’une des deux directions, d’où un comportement “oscillatoire” à la

FIG. 5.6 Résultats du cas test B -  $\tau = 0,1$

FIG. 5.7 Résultats du cas test B -  $\tau = 1$

FIG. 5.8 Résultats du cas test B -  $\tau = 5$

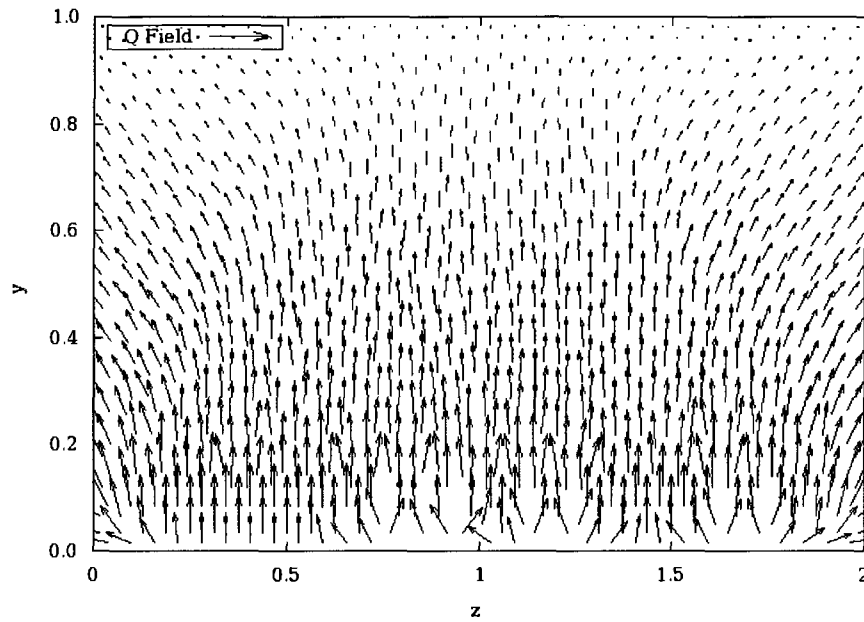


FIG. 5.9 Flux radiatif dans le domaine du cas test B

paroi. La variation du flux qui arrive ne se fait pas de manière parfaitement continue. On associe l'effet de rayon à la discrétisation angulaire car le nombre des "oscillations" observées à la paroi augmente tandis que leur intensité diminue quand on accroît le nombre de directions. En outre, Coelho (2002) a montré que la discrétisation spatiale et angulaire s'influencent l'une et l'autre. En effet une discrétisation spatiale trop grossière va produire de la diffusion radiative. Cela signifie que l'on va voir apparaître une diffusion (un "dégradé") des intensités radiatives dans des directions voisines. Mais si on raffine fortement l'une des deux discrétisation en laissant l'autre en l'état, la précision globale ne s'améliore pas nécessairement. En effet soit la diffusion, soit l'effet de rayon va devenir prépondérant. Dans un processus de raffinement, il est sain de raffiner à la fois le nombre de directions et le maillage spatial.

Les schémas FVM du premier et deuxième ordre présentent des résultats similaires pour les cas  $\tau = 0, 1$  et  $\tau = 1$ . À chaque fois, si l'on ne tient pas compte des oscillations, la solution analytique du flux à la paroi radiale est correctement prédite. Par contre,

pour l'épaisseur optique  $\tau = 5$ , le schéma du deuxième ordre s'éloigne de la solution analytique. Cela peut s'expliquer par le fait que ce schéma du deuxième ordre (même partiellement) fait une différenciation centrée pour certains termes de l'équation à résoudre, alors que le rayonnement est fondamentalement un phénomène de transport. On vient donc chercher de l'information en aval. Cela ne pose pas de problème quand les gradients (de température notamment) restent faibles (par exemple le cas test A). Par contre dans un cas comme celui-ci, il y a une discontinuité importante dans le domaine. On assiste alors à un comportement non physique. En effet, quand on analyse plus précisément le résultat de ce schéma du deuxième ordre, on remarque que les intensités radiatives au niveau de la paroi radiale et dirigées vers le centre du cylindre ne sont pas toutes nulles. De plus on observe que 30% des intensités sont négatives, ce qui n'est pas possible par définition de l'intensité radiative. Cependant la proportion d'intensités radiatives n'est pas une indication fiable de la qualité du résultat, car on obtient des proportions similaires pour les trois épaisseurs optiques, bien que le résultat, pour les deux premières épaisseurs, après intégration des intensités pour obtenir le flux, soit proche de la solution exacte. Ce comportement non physique ne s'observe pas du tout pour le schéma du premier ordre. En contrepartie, on obtient un schéma plus diffusif.

### 5.1.3 Cas test C

L'idée qui sous-tend la géométrie définie dans le cas test C (Voir la figure 5.10) est de faire apparaître une direction privilégiée dans le domaine. C'est pourquoi on définit deux zones dans le cylindre, une à 1000 K et l'autre à 0 K, à nouveau pour les trois mêmes épaisseurs optiques. Ces deux zones sont séparés le long de la diagonale du rectangle générateur. Un angle de  $26,5^\circ$  est donc présent dans la géométrie. L'angle le plus intéressant quand on étudie le flux à la paroi radiale est la direction  $116,5^\circ$  qui est orthogonal à la frontière des zones chaudes et froides. En effet c'est dans cette direction que le flux d'énergie va être maximal.

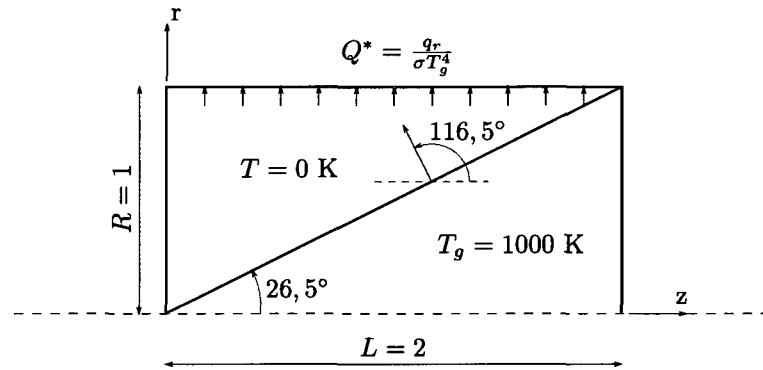


FIG. 5.10 Géométrie du cas test C

Les résultats sont présentés sur la figure 5.12. De nouveau un maillage de 8000 triangles environ a été utilisé. Il est présenté sur la figure 5.11, où l'on peut noter que les deux zones du domaines et la frontière sont bien délimitées. Pour les modèles FVM, 10x10 directions ont été définies. Les deux modèles FVM montrent un bon accord, avec le schéma deuxième ordre un tout petit peu meilleur. Pour le modèle P1 les conclusions sont les mêmes que pour le cas test A, à savoir que pour  $\tau = 1$  et  $\tau = 5$ , les résultats sont bons tout en étant un peu moins précis que les modèles FVM. Par contre pour  $\tau = 0, 1$ , le modèle P1 prédit un flux plat. Les effets de bords n'apparaissent pas.

Le tableau 5.1 présente en détail les résultats d'une étude de raffinement du maillage directionnel pour le cas test C. Le maillage de 8132 triangles a été utilisé. Comme les résultats entre les deux schémas FVM étaient similaires pour ce cas test, le schéma du deuxième ordre a été utilisé. Pour étudier le pourcentage d'écart entre le flux radiatif prédit et le flux analytique, on a fait la moyenne des écarts de chaque point prédit par la méthode numérique avec le résultat analytique. La valeur de  $\theta_i$  correspond à la valeur de l'angle  $\theta$  du vecteur direction associé à la fraction d'angle solide qui contient l'angle de  $116,5^\circ$ . La valeur de  $\Delta\theta$  quant à elle correspond à la plage d'angle  $\theta$  couverte par cet angle solide. Enfin la dernière colonne indique l'écart (en  $^\circ$ ) entre l'angle d'intérêt ( $116,5^\circ$ ) et le vecteur direction.



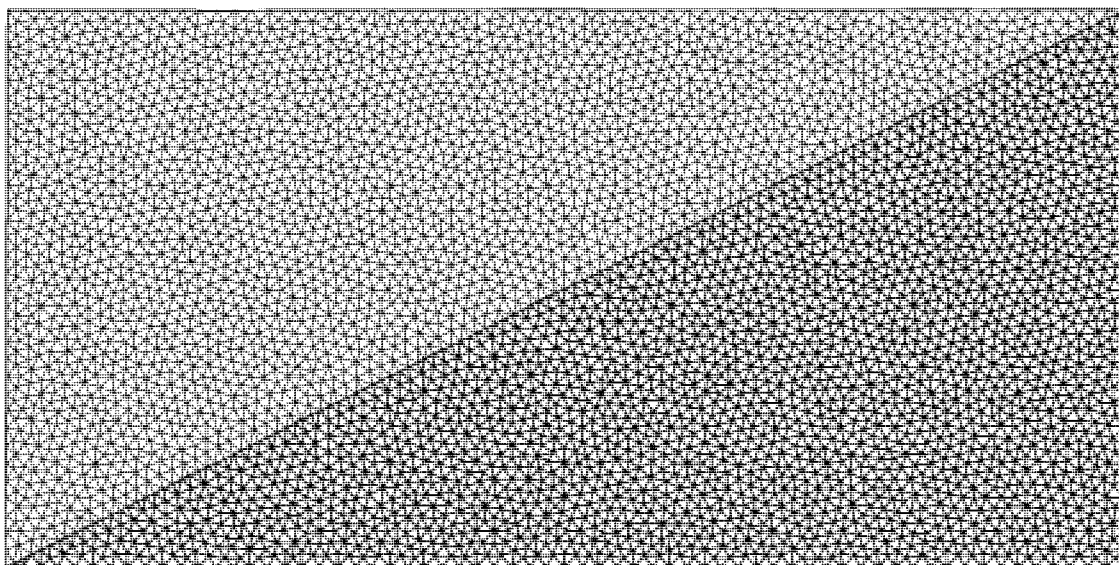


FIG. 5.11 Maillage de 8132 triangles pour le cas test C

Ce que l'on observe en premier lieu pour cette étude paramétrique sur le nombre de directions, ( $2 \times 2, 3 \times 3, \dots, 12 \times 12$  directions), c'est que l'on se rapproche à chaque fois un peu plus de la courbe analytique. Même si, par exemple, il existe, pour la discrétisation  $10 \times 10$ , un vecteur direction  $\hat{s}$  où  $\theta = 117^\circ$ , c'est-à-dire très proche de  $116,5^\circ$ , le résultat pour la discrétisation  $12 \times 12$  est meilleur, malgré l'absence d'un vecteur direction dans cette direction privilégiée. La conclusion est donc que quelque soit la géométrie, il faut un minimum de directions ( $6 \times 6$  semble être le strict minimum,  $8 \times 8$  est déjà plus raisonnable) pour que la méthode des volumes finis commence à être performante.

#### 5.1.4 Résumé des cas tests analytiques

On peut retenir certains points intéressants des cas tests qui étudient le flux arrivant à la paroi radiale :

- La méthode FVM a montré sa supériorité par rapport au modèle P1 sur tous les cas tests, et ce quelque soit l'épaisseur optique impliquée.

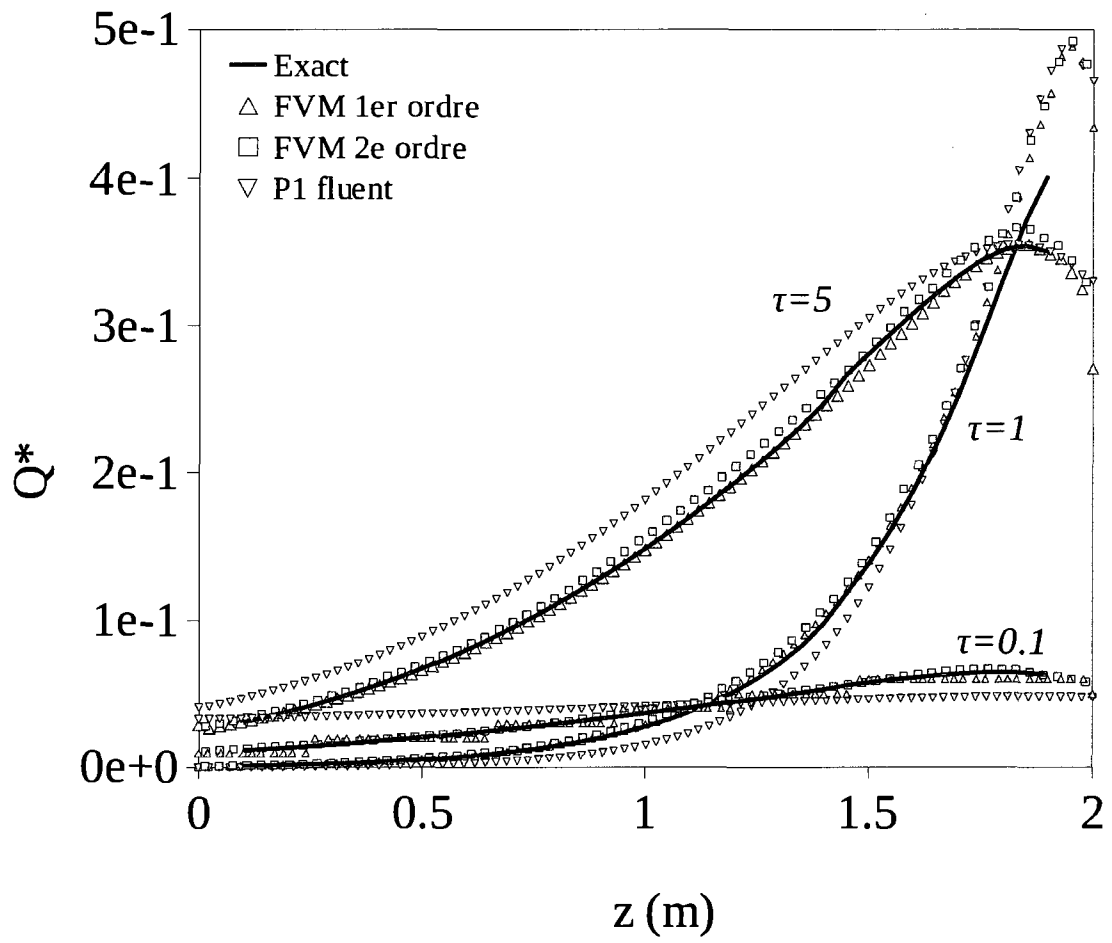


FIG. 5.12 Résultats du cas test C

TAB. 5.1 Étude paramétrique sur le nombre de directions

| $N_\theta \times N_\varphi$ | % erreur | $\theta_i$ | $\Delta\theta$ | $ \theta_i - 116,5 $ |
|-----------------------------|----------|------------|----------------|----------------------|
| 2x2                         | 295,52   | 135        | 90             | 18,5                 |
| 3x3                         | 75,42    | 90         | 60             | 26,5                 |
| 4x4                         | 40,18    | 112,5      | 45             | 4                    |
| 5x5                         | 32,77    | 126        | 36             | 9,5                  |
| 6x6                         | 34,71    | 105        | 30             | 11,5                 |
| 7x7                         | 18,84    | 115,7      | 25,7           | 0,8                  |
| 8x8                         | 10,01    | 123,75     | 22,5           | 7,25                 |
| 9x9                         | 10,36    | 110        | 20             | 6,5                  |
| 10x10                       | 9,41     | 117        | 18             | 0,5                  |
| 11x11                       | 7,07     | 122,7      | 16,3           | 6,2                  |
| 12x12                       | 4,77     | 112,5      | 15             | 4                    |

- Le modèle P1 est moins précis que la méthode FVM pour les épaisseurs optiques de 5 et 1, tout en fournissant des résultats acceptables sauf pour l'épaisseur optique de 5 dans le cas test B (un arc dans un cylindre). L'épaisseur de 0,1 n'est jamais simulée adéquatement, les effets 2D n'apparaissant pas.
- Le désavantage de la méthode FVM est qu'elle produit des comportements oscillatoires appelés effet de rayon (*ray effect*). Ce comportement est non physique et est relié à la discrétisation angulaire. Cependant son effet reste limité.
- L'autre désavantage la méthode FVM est qu'elle est beaucoup plus coûteuse que le modèle P1 en terme de temps de calcul car le nombre d'inconnues est égal au produit du nombre de triangles et du nombre de directions, alors que le modèle P1 se limite à résoudre un système avec un nombre d'inconnues égale au nombre de noeud dans le maillage. Ce problème est d'autant plus important qu'il faut un minimum vital de directions (8x8 par exemple) pour obtenir des résultats acceptables.
- Le schéma FVM du deuxième ordre est à déconseiller car il ne performe pas beaucoup mieux que celui du premier ordre. Il conduit aussi dans certaines situations, telles que le cas test B, à des solutions non physiques.

## 5.2 Cas test semi-industriel

Dans le but d'étudier les forces et les faiblesses des différents modèles, une géométrie qui s'inspire des cas industriels a été définie. Elle est présentée, avec un maillage de 1736 triangles, dans la figure 5.13, et elle s'inspire de la zone entourée de pointillés dans la figure 1.1c. Comme il n'y a pas de résultat analytique pour cette géométrie, avant de comparer les résultats entre les différentes méthodes, une étude de convergence en maillage (spatial et angulaire) est réalisée pour la méthode FVM. Le maillage présenté dans la figure 5.13 fait partie de ceux utilisés dans l'analyse de convergence en maillage de la solution.

Cette géométrie est composé d'une région chaude à 1000 K, et symbolise l'arc, et d'une autre froide à 0 K. Comme pour les cas tests analytiques, le coefficient d'absorption est supposé constant dans tout le domaine. Les vides de la géométrie sont des corps noirs, eux aussi à 0 K. Ils symbolisent les électrodes (en bas à gauche, le long de l'axe de symétrie et à droite) et la buse (le vide de gauche au mi-hauteur). Toutes les parois sont noires, froides et sans réflexion sauf la paroi de droite (à  $z = 2$ ) où une condition de symétrie est imposée. Toutes les dimensions de la figure 5.13 sont en mètres.

### 5.2.1 Analyse de convergence en maillage

L'analyse de convergence en maillage doit se faire suivant les deux grilles (spatiale et angulaire). Cette analyse doit nous permettre de déterminer le nombre de directions requises pour pouvoir capturer la physique correctement.

Comme pour les autres cas tests, afin de comparer les différentes configurations, le flux de chaleur radiatif, normalisé par  $\sigma T^4$  est mesuré sur la paroi de l'électrode de droite (notée A dans la figure 5.13) et sur la paroi radiale (notée B). La figure 5.14 présente le

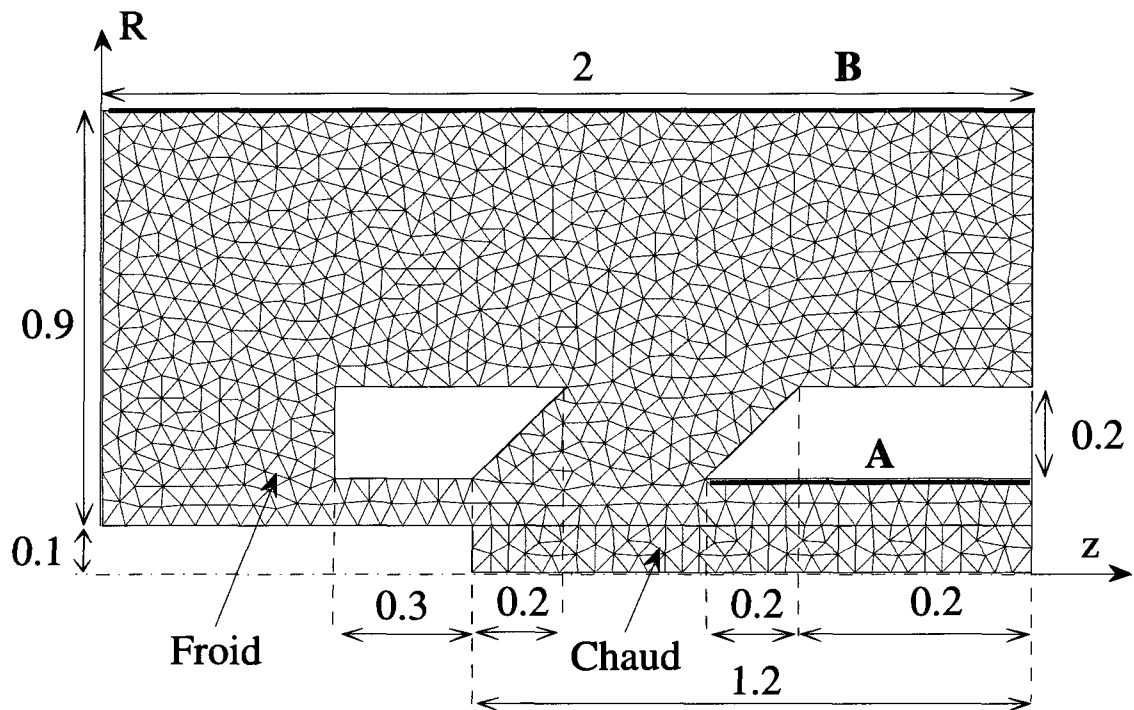


FIG. 5.13 Géométrie du cas test semi-industriel

flux sur l'électrode A, lorsque la discrétisation angulaire a été raffinée tout en gardant le même maillage spatial composé de 6982 triangles. L'épaisseur optique utilisée pour cette analyse est de 0,1. On peut noter que la simulation semble convergée dès la discrétisation de 6x6 directions, et n'évolue pratiquement plus ensuite.

Par contre pour la paroi radiale (figure 5.15), on peut voir qu'il faut un plus grand nombre de directions avant d'avoir un résultat convergé. Les résultats des premières discrétisations n'ont pas été tracés à cause des très fortes oscillations qui sont une manifestation de l'effet de rayon qui a été évoqué pour le cas test B. Pour le présent cas test cet effet de rayon est encore plus marqué : la figure 5.16 montre le flux à l'intérieur du domaine pour deux discrétisations angulaires. L'une très grossière (2x2) et l'autre très fine (12x12). Cet effet plus marqué que l'on voit dans la discrétisation grossière (voir figure 5.16(a)) provient de la combinaison de l'effet de rayon (phénomène numérique et artificiel) et des

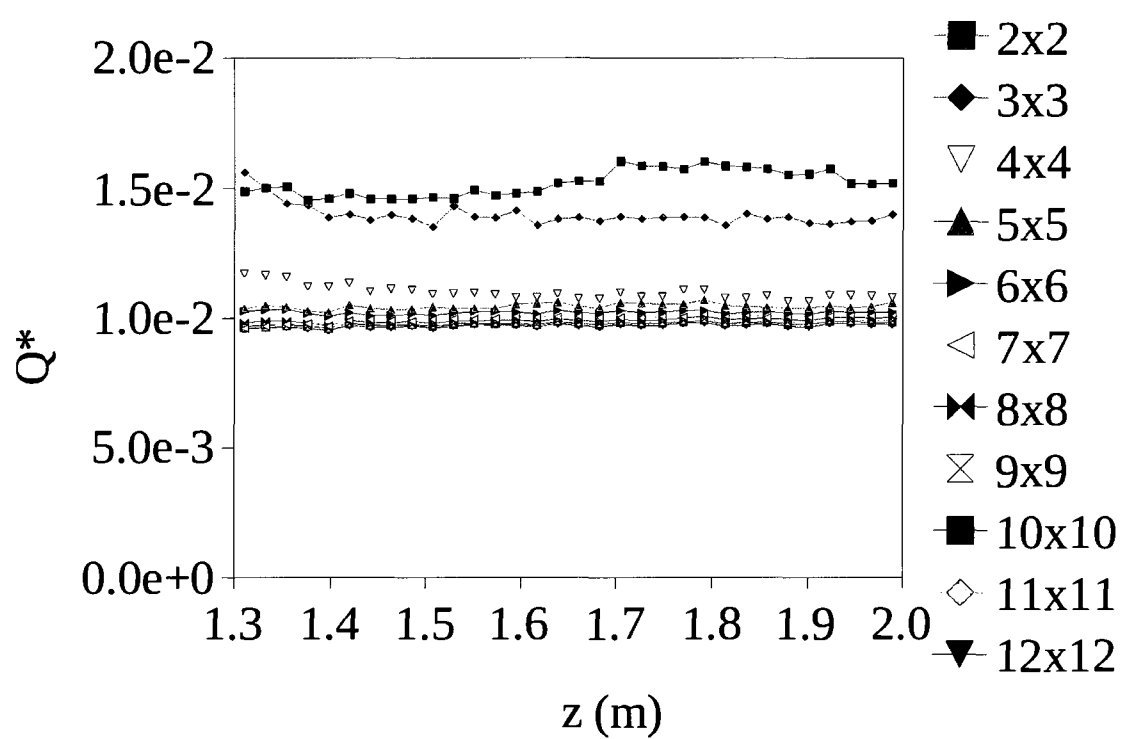


FIG. 5.14 Raffinement de la discrétisation angulaire - Flux sur l'électrode

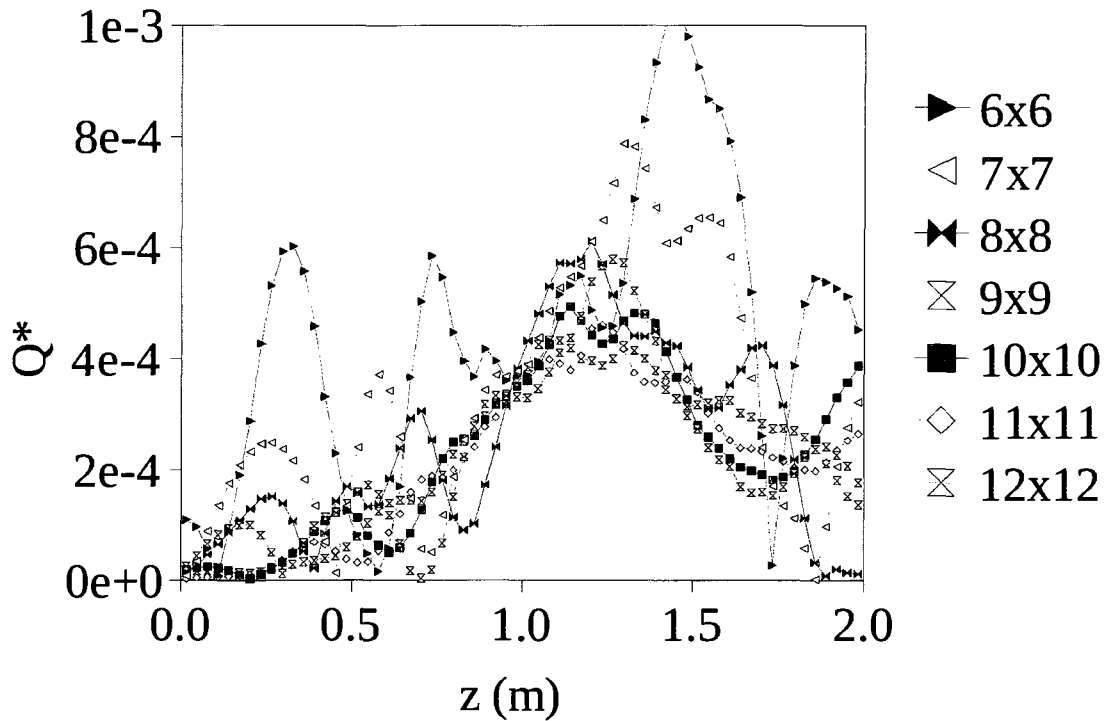


FIG. 5.15 Raffinement de la discrétisation angulaire - Flux sur la paroi radiale

zones “d’ombre” due à la présence des buses et des électrodes qui cachent la paroi radiale du cylindre de l’arc. Physiquement, le flux ne peut passer que dans certaines directions pour atteindre cette paroi, et le nombre de directions doit être suffisant pour capturer ce comportement. Il y a des directions privilégiées qui correspondent aux limites des cônes d’ombre engendrés par la présence de la buse et des électrodes. Ce cas test est donc une combinaison des cas tests B et C.

Si on revient à la figure 5.15, on peut noter que pour les discrétisations 10x10, 11x11 et 12x12, le flux prédit est semblable. Pour les discrétisations plus grossières ces oscillations, sont encore, d’un point de vue qualitatif, trop prononcées. Cela signifie que l’ordre de grandeur des amplitudes des oscillations est du même ordre que la variation naturelle de l’intensité le long de la paroi et empêche donc une bonne interprétation des résultats. De plus, les discrétisations avec des couples  $(N_\theta, N_\varphi)$  paires sont meilleures (les ampli-

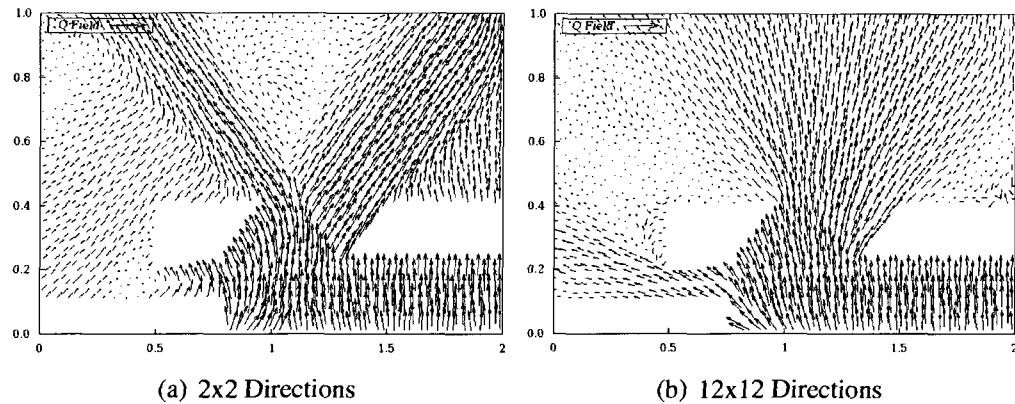


FIG. 5.16 Flux radiatif dans le domaine du cas test semi-industriel

tudes des oscillations sont plus faibles) que pour les discrétisations impaires précédentes et suivantes. Le fait de choisir un nombre paire de longitudes et de latitudes semble être une bonne pratique car on voit moins d'effet de rayon.

La convergence du maillage spatial, à nombre de directions fixes (10x10) est présenté dans la figure 5.17. On observe que plus le maillage est grossier et meilleur est le résultat. Par exemple, les oscillations qui apparaissent entre  $z = 1,0$  et  $z = 1,5$  pour les maillages de 3498 triangles et plus ne sont probablement pas physiques. Ces oscillations ne sont pas présentes pour les maillages plus grossiers. Cela s'explique probablement par le fait que, à part la ligne de discontinuité en température entre la zone chaude et la zone froide, toutes les propriétés sont constantes dans le domaine. De plus, si le nombre de directions est constant et que l'on raffine le maillage, le rayonnement atteignant la paroi sera plus aligné sur les directions discrètes car il aura traversé plus de volume de contrôle, c'est-à-dire les triangles du maillage, et les erreurs d'approximation de la direction se seront d'avantage accumulées. Le raffinement du maillage spatial tend donc à accroître l'effet de rayon. Il faudrait augmenter le nombre de directions pour le compenser. Il faut donc trouver un équilibre et déterminer ce qui est acceptable comme résultat afin de limiter le temps de calcul à des durées jugées raisonnables.

L'effet de diffusion est visible sur ce cas test et se manifeste entre  $z = 0$  et  $z = 0,7$ . Sur



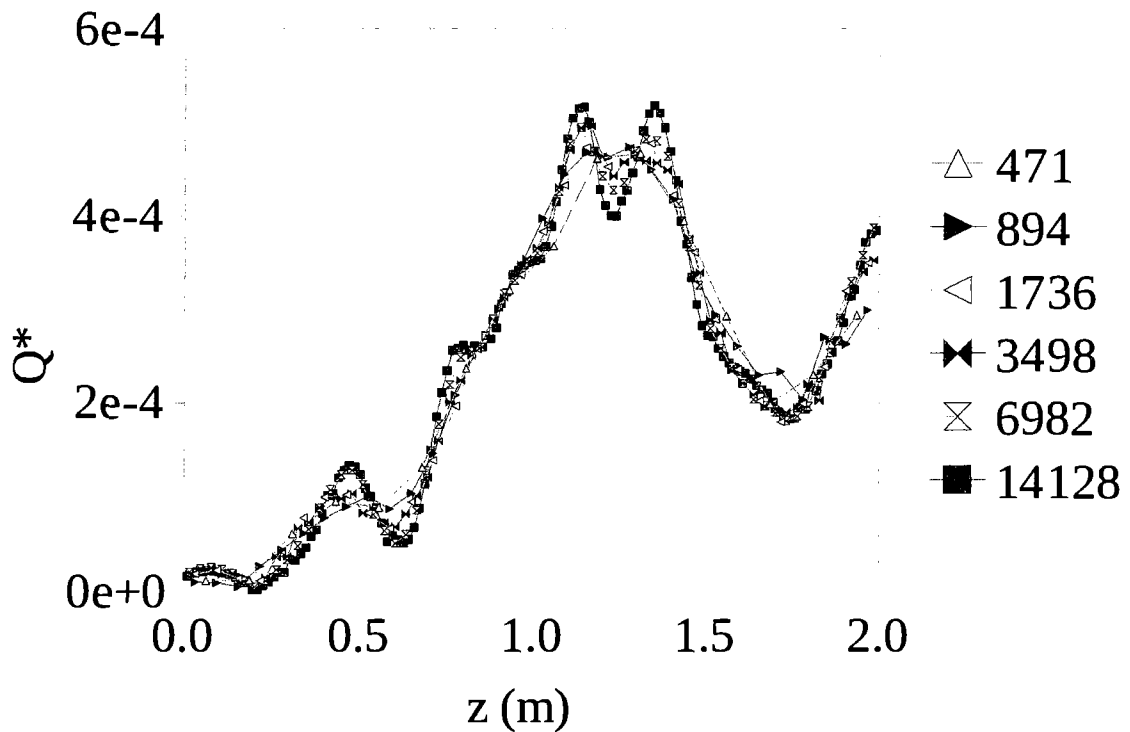


FIG. 5.17 Raffinement de la discrétisation spatiale - Flux sur la paroi radiale

cette partie, la paroi radiale est dans l'ombre de la buse. Puisqu'il n'y a pas de génération d'énergie dans la partie froide du domaine, on devrait obtenir un flux parfaitement nul. Bien que le flux soit faible, il n'est pas strictement nul. Il y a eu de la diffusion du rayonnement, qui est l'autre effet néfaste produit par la méthode FVM.

### 5.2.2 Comparaison entre FVM et le modèle P1

Pour comparer les deux schémas de FVM et le modèle P1, un maillage de 7000 triangles environ a été adopté et pour les schémas FVM la discrétisation angulaire  $10 \times 10$  a été choisie. On a vu dans la section précédente que ce nombre de direction montrait des résultats qui étaient pratiquement convergés en maillage directionnel. Comme pour tous les autres cas test, les trois épaisseurs optiques : 0,1 - 1 - 5 ont été utilisées. Ils sont

présentés respectivement sur les figures 5.18, 5.19 et 5.20.

Le modèle P1 peut être acceptable pour  $\tau = 0, 1$ , car il donne un bon ordre de grandeur et étonnement bon pour  $\tau = 1$  (figures 5.18 et 5.19). Les deux schémas FVM quant à eux, comme cela a été signalé dans la section précédente présentent un effet de rayon. Par exemple les oscillations autour de  $z = 1, 3$  en sont une manifestation. Elles sont plus fortes pour le schéma du deuxième ordre. Ce schéma présente à nouveau, comme pour le cas test B des intensités radiatives négatives. Bien que pour ces deux épaisseurs optiques, les schémas premier et deuxième ordre présentent des résultats similaires, la confiance que l'on peut avoir pour le schéma deuxième ordre est entamée.

Le schéma du deuxième ordre prédit des résultats non physique pour  $\tau = 5$  (voir la figure 5.20) car la partie de la paroi comprise entre  $z = 0$  et  $z = 0,6$  a un flux fortement différent de zéro. Et nous savons que cette partie de la paroi ne peut pas “voir” l’arc car il est masqué par la buse. Cela est correctement prédit par la méthode FVM du premier ordre ainsi que par le modèle P1. Par contre le modèle P1 échoue pour la partie centrale, en sous estimant le flux arrivant sur la paroi. Le schéma FVM du deuxième ordre quant à lui est relativement mauvais pour ce cas car la partie centrale de sa prédiction est beaucoup plus importante que le schéma du premier ordre et est en conséquence probablement fausse. De plus la proportion d’intensités radiatives négatives est la même que pour les deux autres épaisseurs optiques, là où les deux schémas FVM prédisaient des résultats similaires. Cela montre la difficulté de déterminer la qualité physique de la prédiction par le schéma du deuxième ordre. C’est pourquoi à nouveau on conseille de ne pas l’utiliser dans une situation industrielle.

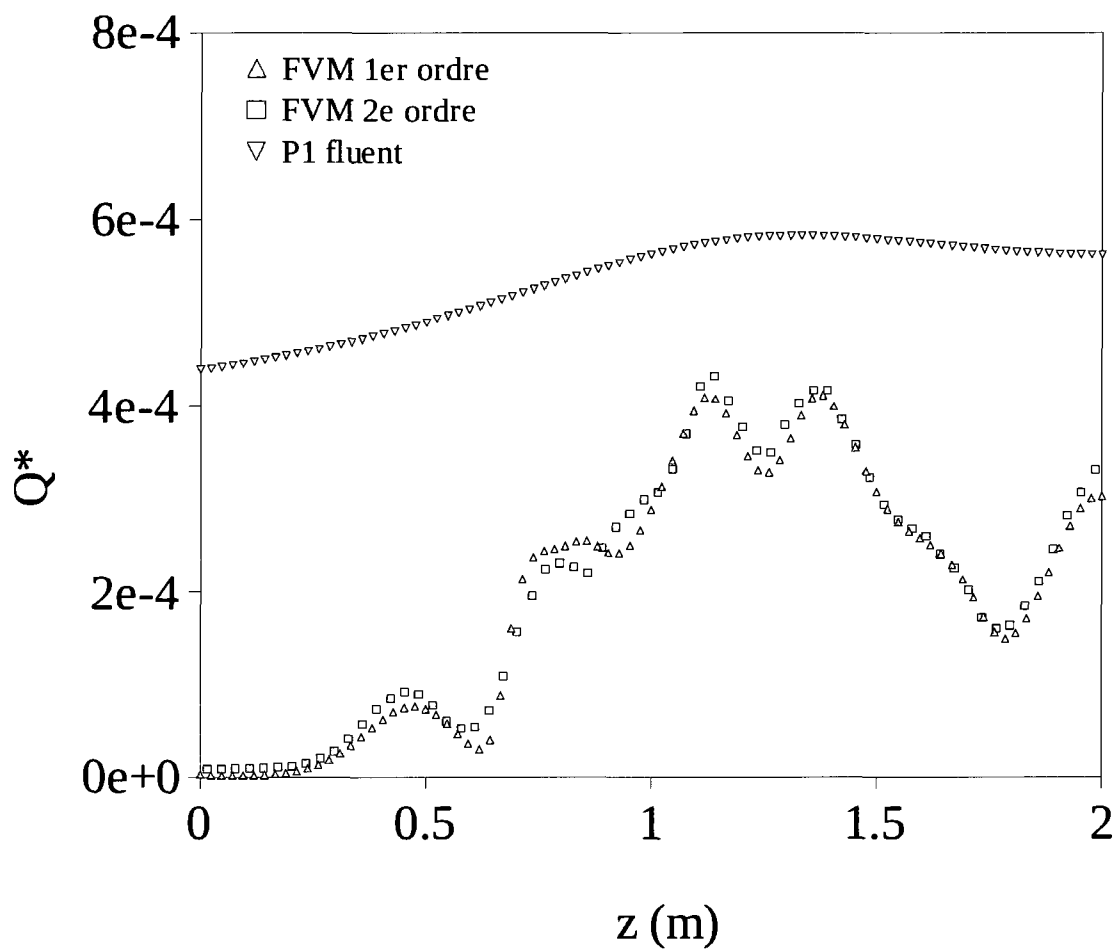
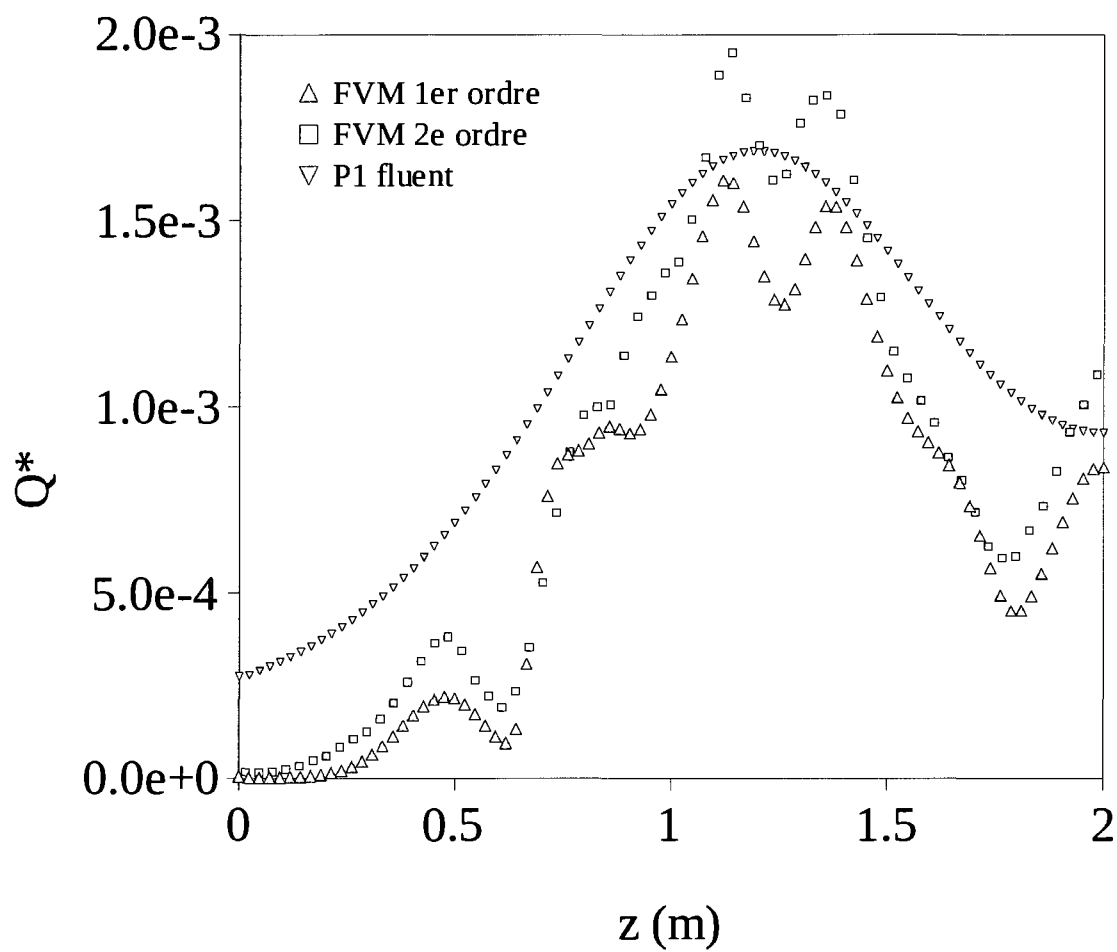
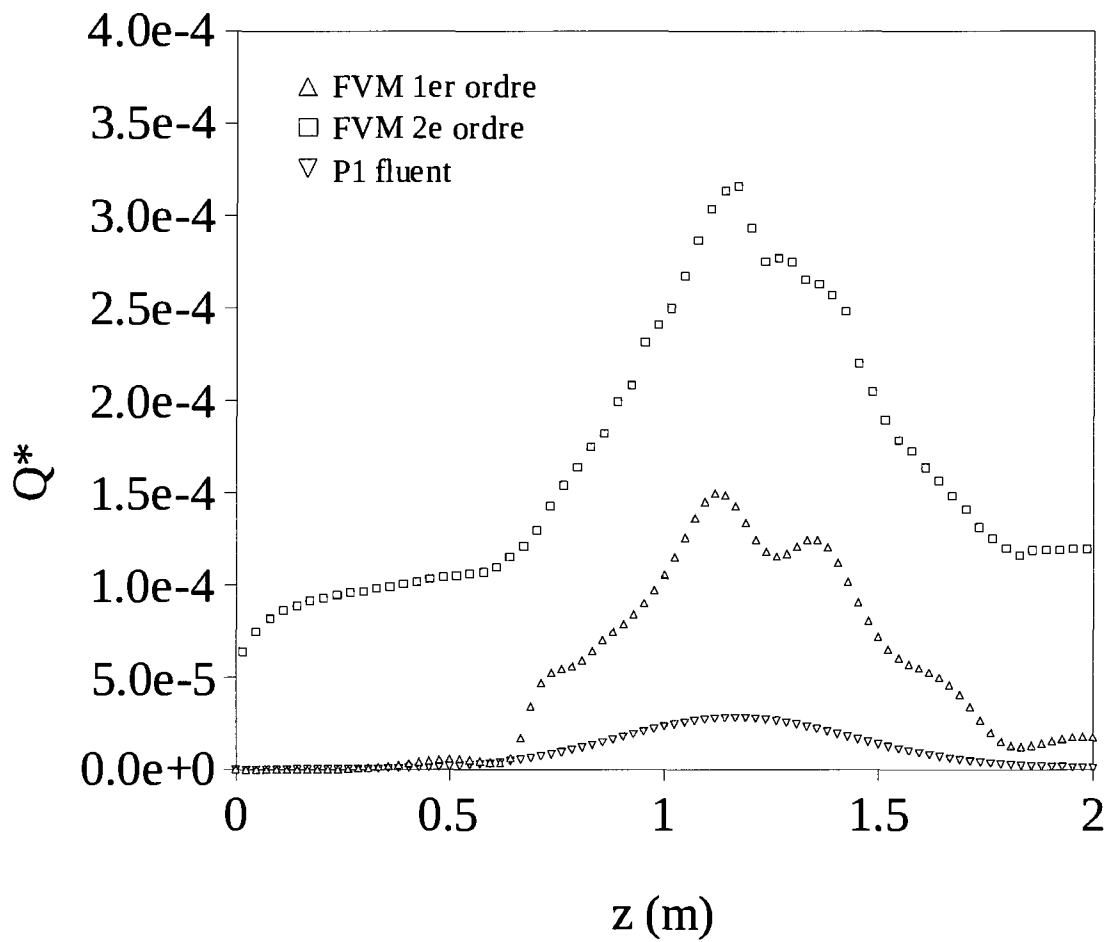


FIG. 5.18 Flux à la paroi radial -  $\tau = 0, 1$

FIG. 5.19 Flux à la paroi radial -  $\tau = 1$

FIG. 5.20 Flux à la paroi radial -  $\tau = 5$

### 5.3 Analyse du temps de calcul

Comme cela a déjà été signalé (section 4.3) le choix a été fait d'utiliser une méthode de solution directe. La tendance générale est plutôt d'utiliser des solveurs itératifs (Raithby & Chui, 1990, Chai et al., 1994, Murthy & Mathur, 1998b). Pour les disjoncteurs, comme la géométrie est axisymétrique et que le nombre de triangles utilisés pour les simulations industrielles reste relativement petit (de l'ordre de 60 000 triangles pour la géométrie complète et environ 10 000 triangle dans la portion où le rayonnement est significatif et calculé), le choix d'une méthode directe est pertinent. En effet environ  $10 \times 10$  directions devront être utilisées pour assurer une précision raisonnable, le nombre d'inconnues à résoudre pour le calcul de rayonnement est de un million. Ce nombre d'inconnues peut être traité, avec une méthode directe, sur les ordinateurs personnels modernes et permet d'obtenir des gains très importants en terme de performances. Les méthodes directes sont à peu près le seul moyen envisageable pour des simulations transitoires.

Afin d'étudier les performances de l'implémentation, une étude sur le temps de calcul a été menée. Les résultats sont présentés sur la figure 5.21. On étudie le temps CPU nécessaire pour remplir et résoudre le système. Comme la méthode de résolution est directe, et que le temps d'assemblage de la matrice est en pratique indépendant du problème, à nombre d'inconnues constant, le temps de calcul est relié quasi directement au nombre d'inconnues.

Pour mener cette étude, le nombre de triangles du maillage a été augmenté ainsi que le nombre d'angles azimutaux  $N_\theta$  et polaires  $N_\varphi$ . Le système qui sert de référence est composé de 512 triangles et  $2 \times 2$  directions soit 2048 inconnues. Il faut 0,539 s pour résoudre ce système sur un Pentium 4 3.6 GHz. On peut voir que le temps de calcul augmente pratiquement linéairement avec le nombre d'inconnues, ce qui prouve la très bonne efficacité de la librairie PARDISO utilisée pour résoudre le système. Sur un système quatre

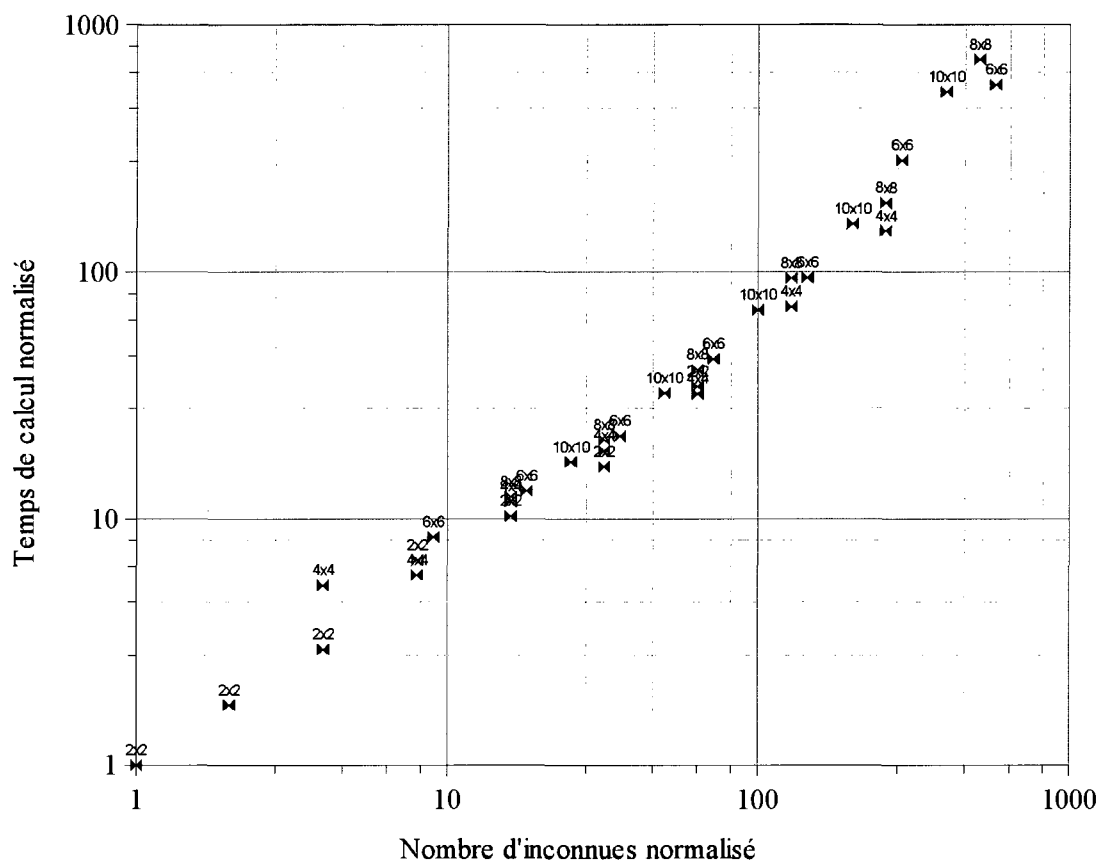


FIG. 5.21 Temps CPU en fonction du nombre d'inconnues

coeurs (Intel Core 2 Quad @ 2.66 GHz), un système de un million d'inconnues est assemblé et résolu en 25s environ. En outre, l'implémentation n'a pas été encore totalement optimisée et il reste très probablement des gains à obtenir. Considérant qu'un calcul instationnaire de simulation d'une coupure dans les disjoncteurs peut nécessiter environ 10 000 calculs de rayonnement, un temps de quelques jours de calcul sera requis, ce qui rend la méthode accessible aux ingénieurs.

Il existe un autre avantage à utiliser une méthode directe de résolution. Cela rend l'implémentation insensible aux problèmes de convergence lente soulevés par Modest (2003) ou Hassanzadeh et al. (2008) lorsque les coefficients d'absorption sont élevés.

## 5.4 Conclusion des résultats

Dans cette partie, on a analysé les performances du modèle P1 et de l'implémentation de deux schémas FVM. Ils ont été comparé à des résultats analytiques pour les cas tests simples. Le schéma FVM du premier ordre a toujours montré sa supériorité sur les deux autres méthodes. Le schéma FVM dit du second ordre, est capable d'obtenir aussi de très bons résultats. Le problème est qu'il conduit parfois à des résultats non physiques qui ne sont pas toujours évident à identifier. Le modèle P1 quant à lui, prédit correctement la tendance et l'ordre de grandeur à défaut d'être très précis, mais pour certains cas seulement. Cependant, pour les épaisseurs optiques de 0,1 les résultats ne montrent pas d'effet 2D et pour les épaisseurs optiques de 5 il lui arrive aussi d'être en erreur d'un ordre de grandeur. Il s'agit des cas où il y a une zone froide. Comme l'équation résolue par le modèle P1 est une équation de diffusion, les phénomènes de transport à longue distance sont mal prédit.

Les schémas FVM ne sont pas exempts d'effets néfastes. Il s'agit de la diffusion et de l'effet de rayon. Cet effet se manifeste par un alignement progressif du flux sur les directions discrètes, d'où la nécessité d'en avoir un nombre suffisant. Pour les tailles de maillage utilisées, 10x10 était généralement un bon choix. Il est intéressant de savoir reconnaître les effets néfastes pour interpréter correctement les résultats.

Enfin l'implémentation des schémas FVM avec leur résolution par des méthodes directes ont montré leur efficacité. Il est tout à fait envisageable de le coupler avec un code CFD. Les méthodes directes permettent d'éviter les problèmes de convergence, de systèmes mal conditionnés et de temps de calcul variable.



## CONCLUSION

Dans ce travail portant spécifiquement sur la simulation du rayonnement dans un disjoncteur à haute tension, une nouvelle méthode appelée FVM a été présentée, développée puis testée afin de montrer ce qu'elle pourrait apporter de plus par rapport à la méthode P1 précédemment utilisée.

Tout d'abord, deux variations (dites premier et deuxième ordre) du schéma FVM ont été dérivées dans un repère cylindrique, avec la condition d'axisymétrie imposée, afin de réduire le nombre d'inconnues et de rendre les schémas cohérents en unités avec les équations de la CFD afin de permettre un couplage futur. Comme le rayonnement est fondamentalement un phénomène en trois dimensions, il a fallu imposer des conditions restrictives sur la discrétisation angulaire afin de pouvoir appliquer les simplifications liées à l'axisymétrie du problème.

Bien que souffrant de deux effets néfastes (diffusion et effet de rayon) qui ont pu être mis en évidence lors des cas tests, la méthode FVM du premier ordre a prouvé sa supériorité sur le modèle P1 quant à la qualité de la modélisation physique. En effet ces effets peuvent être limités si l'on raffine en même temps la discrétisation angulaire et spatiale. On a pu observer que pour le nombre de triangles considérés (jusqu'à 10 000 environ) une discrétisation de 10x10 directions est adaptée. Avec ces conditions, les résultats fournis par le modèle P1 ne sont jamais supérieurs à ceux de la méthode FVM du premier ordre. Le modèle P1 a aussi été mis en échec dans plusieurs situations : quand la longueur optique était faible et quand le rayonnement devait se propager à longue distance. La version FVM du deuxième ordre quant à elle a montré des comportements non physiques dans certaines situations. Malheureusement il n'existe pas de moyen simple pour les détecter à coup sûr. Donc son usage est déconseillé pour une application industrielle.

L'implémentation du schéma avec des méthodes modernes et efficaces de résolution di-

rectes ont permis de maintenir le temps de calcul nécessaire à des valeurs raisonnables (25s sur un processeur Intel Quad Core 2 @ 2.66 GHz avant optimisation), bien que les systèmes d'équations générés par la méthode FVM soient plus grand qu'avec le modèle P1. La qualité de la modélisation physique du rayonnement est une demande de l'industrie et le besoin est là pour un remplaçant au modèle P1. La méthode FVM du premier ordre est donc très adapté pour répondre à ce besoin.

Afin de rendre cette méthode définitivement applicable à la modélisation des disjoncteurs, il faudra mener des tests sur des simulations complètes, avec tous les phénomènes physiques impliqués, afin de juger la qualité du couplage. Pour déterminer la qualité, une corrélation avec des résultats expérimentaux devra être effectuée. Plusieurs paramètres devront être étudiés. Par exemple il est possible d'envisager de traiter certaines bandes spectrales avec le modèle P1 et les autres avec la méthode FVM. Par ailleurs dans une simulation transitoire des gains peuvent être recherchés afin de ne pas recalculer ce qui l'a déjà été.

A plus long terme, les gains se situeront sans doute dans un traitement spectral plus fin, que ce soit en terme de largeur des bandes de fréquence ou que ce soit en raison de la meilleure prise en compte des divers éléments chimiques dans le plasma. Ils pourront aussi être obtenu dans la prise en compte du rayonnement au sein même des buses et des électrodes par exemple.

## RÉFÉRENCES

- Boulos, M. I., Fauchais, P., & Pfender, E. (1994). *Thermal Plasmas Fundamentals and Application Volume 1*. New York, USA: Plenum Publishing Corporation.
- Chai, J., Lee, H., & Patankar, S. (1994). Treatment of irregular geometries using a cartesian coordinates finite-volume radiation heat transfer procedure. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, 26(2), 225–235.
- Chai, J. & Patankar, S. (2006). Chapitre Discrete-ordinates and finite-volume methods for radiative heat transfer. *Handbook of numerical heat transfer*, (pp. 297–323). J. Wiley.
- Chandrasekhar, S. (1960). *Radiative transfer*. Courier Dover Publications.
- Chui, E., Raithby, G., & Hughes, P. (1992). Prediction of radiative transfer in cylindrical enclosures with the finite volume method. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 6(4), 605–611.
- Coelho, P. (2002). The role of ray effects and false scattering on the accuracy of the standard and modified discrete ordinates methods. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 73(2-5), 231–238.
- Dua, S. & Cheng, P. (1975). Multi-dimensional radiative transfer in non-isothermal cylindrical media with non-isothermal bounding walls. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18, 245–259.
- Eby, S., Trépanier, J., & Zhang, X. (1998). Modelling radiative transfer in sf6 circuit-breaker arcs with the p-1 approximation. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 31, 1578–1588.
- Fiveland, W. (1982). A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures. *ASME paper*, 82, 1–8.

- Gleizes, A., Gonzalez, J. J., & Freton, P. (2005). Thermal plasma modelling. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 38(31), R153–R183.
- Godin, D., Trépanier, J., Reggio, M., Zhang, X., & Camarero, R. (2000). Modelling and simulation of nozzle ablation in high-voltage circuit-breakers. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 33(20), 2583–2590.
- Hassanzadeh, P., Raithby, G., & Chui, E. (2008). Efficient calculation of radiation heat transfer in participating media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 22(2), 129.
- Jeans, J. (1917). The equations of radiative transfer of energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 78, 28–36.
- Kim, M. & Baek, S. (2005). Modeling of radiative heat transfer in an axisymmetric cylindrical enclosure with participating medium. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 90(3-4), 377–388.
- Lathrop, K. D. (1966). Use of discrete-ordinate methods for solution of photons transport problems. *Nuclear Science and Engineering*, 24, 381–388.
- Libermann, R. W. & Lowke, J. J. (1976). Radiation emission coefficients for sulfur hexafluoride. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 16, 253–264.
- Menart, J. (2000). Radiative transport in a two-dimensional axisymmetric thermal plasma using the s-n discrete ordinates method on a line-by-line basis. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 67, 273–291.
- Moder, J., Chai, J., Parthasarathy, G., Lee, H., & Patankar, S. (1996). Nonaxisymmetric radiative transfer in cylindrical enclosures. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 30(4), 437–452.
- Modest, M. (2003). *Radiative Heat Transfer*. Academic Press, 2<sup>e</sup> édition.

- Murthy, J. & Mathur, S. (1998a). Finite volume method for radiative heat transfer using unstructured meshes. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 12(3), 313–321.
- Murthy, J. & Mathur, S. (1998b). Radiative heat transfer in axisymmetric geometries using an unstructured finite-volume method. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, 33(4), 397–416.
- Nordborg, H. & Iordanidis, A. (2008). Self-consistent radiation based modelling of electric arcs: I. efficient radiation approximations. *Journal of Physics D-Applied Physics*, 41(13), 135205–135205.
- Raithby, G. & Chui, E. (1990). A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media. *Journal of Heat Transfer-transactions of the ASME*, 112, 415–23.
- Schenk, O. & Gärtner, K. (2004). Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Future Generation Computer Systems*, 20(3), 475–487.
- Tian, W. & Chiu, W. (2005). A two-dimensional scheme for axisymmetric radiative heat transfer using the finite-volume method. *Numerical heat transfer. Part B, fundamentals*, 47(3), 199–211.
- Wikipedia (3 janvier 2009). Disjoncteur à haute tension, Consulté en 26 mai 2009, tiré de [http://fr.wikipedia.org/wiki/Disjoncteur\\_%C3%A0\\_haute\\_tension](http://fr.wikipedia.org/wiki/Disjoncteur_%C3%A0_haute_tension).

## ANNEXE I

### RAPPELS SUCCINTS SUR LE MODÈLE P1

Cette méthode est le résultat d'une approximation de l'équation de transfert radiatif (cf. équation 3.7). L'inconnue du problème est le rayonnement incident  $G$ . Comme pour la méthode des volumes finis, les coefficients d'absorption moyens sont utilisés. En s'appuyant sur la théorie des harmoniques sphériques pour approximer la RTE, l'équation à résoudre est une équation de diffusion du type Helmholtz :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\kappa} \nabla G \right) = 3\kappa (G - 4\pi I_b) \quad (\text{I.1})$$

L'équation qui est résolue peut être vue comme l'intégration de l'équation de transfert radiatif sur les  $4\pi$  de l'angle solide, en supposant  $I$  constant. En d'autres mots, pour chaque point de l'espace,  $I$  est supposé isotrope.

Cette équation est ensuite intégrée dans l'espace en appliquant les techniques de volumes finis. L'intérêt de cette méthode est qu'elle reste raisonnable en terme de temps de calcul. En effet il y a une inconnue par volume de contrôle alors que pour le cas des ordonnées discrètes, on rajoute autant d'inconnues par volume de contrôle que de directions choisies au départ.

Cependant l'hypothèse d'isotropie du rayonnement est sous entendue quand on utilise le modèle P1. Elle est valable quand le coefficient d'absorption du milieu participatif est élevé (typiquement supérieur à  $3 \text{ m}^{-1}$ ). C'est le cas dans plusieurs bandes de fréquences. Cependant il y a aussi des bandes où les coefficients d'absorptions sont faibles, et dans ce cas le modèle P1 donne des résultats non physiques et peu précis. Dans ce travail, on a utilisé l'implémentation de FLUENT, dans un souci d'efficacité.