

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DE SENSIBILITÉ DANS LES ÉCOULEMENTS INSTABLES
COMPLEXES

JEAN-SERGE GIGUÈRE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE MÉCANIQUE)
OCTOBRE 2008



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence
ISBN: 978-0-494-47666-6
Our file Notre référence
ISBN: 978-0-494-47666-6

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE DE SENSIBILITÉ DANS LES ÉCOULEMENTS INSTABLES
COMPLEXES

présenté par: GIGUÈRE Jean-Serge

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GARON André, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ILINCA Florin, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. LAFOREST Marc, Ph.D., membre

Fais de ta vie un rêve, et d'un rêve, une réalité. - Antoine de Saint-Exupéry

REMERCIEMENTS

Je désire exprimer ma gratitude envers mon directeur de recherche, Monsieur Dominique Pelletier et mon codirecteur de recherche, Monsieur Florin Ilinca pour leur soutien, la qualité de leur encadrement, leur présence ainsi que pour leur aide financière qui m'ont permis d'entreprendre et de compléter ce travail de maîtrise.

Je remercie Stéphane Étienne pour son expertise, son aide et son humour parfois déroutant qui fait régner la bonne humeur dans ce laboratoire de recherche. Je tiens également à remercier Alexander Hay pour ses conseils judicieux lorsque j'ai débuté ce travail. Je veux également remercier toutes les personnes que j'ai cotôquées au cours de mon passage au labo C-306 pour avoir su créer une atmosphère de travail agréable et détendue.

J'adresse finalement des remerciements particuliers à ma douce Karine pour ses encouragements, son soutien et sa patience.

RÉSUMÉ

Ce projet, suggéré par l'IMI du CNRC, porte sur la simulation d'instabilités thermo-hydrodynamiques causant des défauts de fabrication lors du moulage par injection de poudres métalliques. À l'heure actuelle 30% des pièces fabriquées sont défectueuses. On retrouve des inhomogénéités ou des vides affaiblissant les pièces lorsque les conditions d'opération sont mal contrôlées ou peu connues. Une compréhension du phénomène permettra aux manufacturiers de réduire ou même d'éliminer les défauts et donc d'améliorer leur compétitivité. L'élimination de ces effets passe par une étude et une analyse fondamentale rigoureuse basée sur la CFD (« *Computational Fluid Dynamics* ») et l'analyse de sensibilité. On utilise une géométrie en forme de T typique des injecteurs que l'on retrouve dans les systèmes de moulage de disques en poudres métalliques. La poudre métallique est injectée par la base du T et ressort par les extrémités de la barre du T.

On modélise ce problème à l'aide de l'équation du mouvement (Navier-Stokes), couplée à celle du transfert de chaleur et à un modèle de viscosité Newtonien généralisé. On résout nos équations par une méthode d'éléments finis, ce qui fournit la vitesse (u et v), la pression et la température en fonction de l'espace et du temps. Le calcul des sensibilités permettra d'établir une relation de cause à effet entre les plages de valeurs des paramètres qui causent les instabilités. La stabilité ou l'instabilité dépendent de la valeur de deux paramètres adimensionnels, le nombre de Graetz (ratio entre l'échelle temps de conduction thermique et le temps de remplissage) et B , un ratio adimensionnel mesurant l'importance des effets de température sur la viscosité. Pour une famille de valeur des nombres de Graetz et B , l'écoulement devient instable, puis asymétrique. Or, dans certains cas, cette asymétrie s'amplifie au point où le fluide est forcé de quitter le canal d'injection par une seule sortie. Ceci conduit finalement à un arrêt complet de l'écoulement

dans une branche du T, comme si elle était obstruée. Les instabilités sont dues à la variation de la viscosité, elle-même induite par des gradients thermiques que l'on retrouve à l'entrée de l'injecteur. On observe une croissance exponentielle de la différence de température entre les deux sorties (des points symétriques aux sorties de l'injecteur). L'analyse de sensibilité permettra d'établir de manière rigoureuse lequel des deux paramètres déclenche l'instabilité. De plus, cette analyse nous indiquera dans quelles régions et à quels moments les paramètres sont critiques à la stabilité.

Après s'être assuré que l'implantation dans le code de calcul a été vérifiée par la méthode des solutions manufacturées, on construit à l'aide des solutions numériques obtenues, la carte de stabilité de l'écoulement en terme des nombres adimensionnels Gz et B . Cette carte permet de définir la frontière séparant la région où l'écoulement est stable de celle où l'écoulement est instable. Finalement, dans le cadre du calcul des solutions voisines, l'analyse des sensibilités montre qu'il est possible d'anticiper et de prédire le comportement du fluide lorsque l'on perturbe les paramètres de l'écoulement (i.e. Gz et B). Ces résultats incitent à croire que l'on peut contrôler et même éliminer les défauts de fabrication liés aux procédés de moulage par injection de poudres métalliques.

ABSTRACT

This project, suggested by the IMI of NRC focuses on the simulation of thermohydrodynamic instabilities causing manufacturing defects during metal powders injection molding processes. At present time, 30% of the manufactured parts are defective. We can find inhomogeneities, empty spaces or debilitating parts when operating conditions are poorly controlled or poorly known. An understanding of the phenomenon will enable manufacturers to reduce or even eliminate defects and improve their competitiveness. The elimination of these effects involves a study and a rigorous fundamental analysis based on CFD (« *Computational Fluid Dynamics* ») and sensitivity analysis. We use a T-shape geometry, typical of injectors that are found in systems of metallic powders casting. The metallic powders is injected at the basis of the T, and then leave by the two ends of the T.

We modeled this problem by using the equations of motion (Navier-Stokes) coupled with the heat transfer equation and a generalized Newtonian viscosity model. Our equations are then solved by the finite elements method which provides the velocity (u and v), pressure and temperature as functions of space and time. The calculation of sensitivities will establish a causal relationship between the different ranges of parameter values that cause instability. The stability or instability depends on the value of two rheological parameters, the Graetz number (ratio of thermal conduction time to fill time) and B , a dimensionless ratio measuring the importance of the effects of temperature on the viscosity. For some values of Graetz and B numbers, the flow becomes unstable and asymmetrical. However, in some cases, this asymmetry is growing to the point where the fluid is forced to leave the injection channel by a single exit. This eventually lead to a complete cessation of the flow in one branch of the T, as if it was obstructed. The instabilities are due to changes in viscosity, itself driven by temperature gradients which can be found at

the entrance to the injector. We can see an exponential growth in the temperature difference between the two exits (symmetrical point at the injectors exits). The sensitivity analysis will establish rigorously which of the two parameters trigger instability. Moreover, this analysis will indicate in what regions and at what times the parameters are critical to stability.

After assuring ourself that the implementation in the computer code has been verified by the method of manufactured solutions, we built with the help of numerical solutions the stability chart of the flow in terms of the dimensionless number Gz and B . The chart allows to define the border separating the region where the flow is stable from the one where the flow is unstable. Finally, in connection with the calculation of neighbouring solutions, sensitivity analysis shows that it is possible to anticipate and predict the behaviour of fluid when parameters of the flow (i.e. Gz et B) are disrupts. These results suggest that it is possible to control and even eliminate manufacturing defects in processes related to metal powders injection molding.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	viii
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xviii
LISTE DES ANNEXES	xxv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	4
1.1 Introduction	4
1.2 Contexte industriel	5
1.2.1 Problématique	6
1.2.2 Méthode des sensibilités	9
1.2.3 Travaux antérieurs	10
1.3 Buts et objectifs	11
CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS	13
2.1 Formulation du problème	13
2.2 Techniques d'optimisation	14

2.2.1	Méthode de l'équation des sensibilités (MES)	15
2.2.2	Le calcul des sensibilités	15
2.3	Équations des sensibilités pour les équations de Navier-Stokes . . .	18
2.4	Conditions aux frontières pour les sensibilités	20
2.5	Problèmes transitoires	21
2.6	Les usages des sensibilités	22
CHAPITRE 3 MODÉLISATION DU PROBLÈME		23
3.1	Nature du fluide	23
3.1.1	Fluide Newtonien et non-Newtonien	23
3.1.2	Fluide Newtonien généralisé	24
3.2	Équations de Navier-Stokes	25
3.3	Relation empirique de la viscosité	27
3.4	Géométrie du domaine de calcul	28
3.5	Forme adimensionnelle des équations	30
3.6	Équations de Stokes	34
3.6.1	Profil de vitesse à l'entrée	35
3.6.2	Définition et interprétation des nombres de Graetz et B . .	38
3.7	Équations des sensibilités	40
3.8	Le maillage du domaine de calcul	42
3.8.1	Généralités	42
3.8.2	Le choix du maillage	42
CHAPITRE 4 MÉTHODE DE RÉOLUTION		45
4.1	Méthode des éléments finis	45
4.1.1	Formulation variationnelle	46
4.1.1.1	Forme faible des équations de Navier-Stokes	46
4.1.1.2	Forme faible des équations de sensibilités	47
4.2	Conditions aux frontières pour l'écoulement et les sensibilités . . .	48

4.3	Discrétisation éléments finis	50
4.3.1	Fonctions d'interpolation	51
4.3.2	Le choix des éléments	51
4.3.3	Discrétisation en temps	52
4.3.4	Résidus des équations et linéarisation de Newton	52
4.3.5	Jacobien numérique	55
4.3.6	Méthode de Newton-Raphson	55
4.3.7	Factorisation conditionnelle	55
CHAPITRE 5	VÉRIFICATIONS	57
5.1	Introduction	57
5.2	Solution Manufacturée	58
5.2.1	Utilité pour la vérification d'un code	59
5.2.2	Applications	63
5.2.3	Domaine de calcul et conditions limites	64
5.2.4	Termes sources en écoulement	65
5.2.5	Termes sources en sensibilités	66
5.3	Analyse de convergence	67
5.3.1	Normes d'erreurs	68
5.3.2	Cas stationnaire	70
5.3.3	Cas transitoire	74
CHAPITRE 6	APPLICATION ET RÉSULTATS	78
6.1	Description du problème	78
6.1.1	Régularisation de la viscosité	82
6.2	Résultats numériques	82
6.2.1	Caractérisation de l'asymétrie en température et en vitesse	83
6.2.2	Comportement du fluide pour les divers régimes d'écoulement	90
6.2.2.1	Régime d'écoulement stable, $B = 2$ et $Gz = 0.5$	91

6.2.2.2	Régime d'écoulement instable, $B = 4$ et $Gz = 10$	92
6.2.2.3	Régime d'écoulement en transition, $B = 4$ et $Gz = 20$	94
6.2.3	Comportement de l'écoulement lorsque $m=0$	95
6.2.4	Carte de stabilité	104
6.3	Analyse de sensibilité	108
6.3.1	Développement en série de Taylor et sensibilités	109
6.3.2	Vérification du calcul des sensibilités par différence finie	110
6.3.3	Courbes de sensibilité et vecteur de stabilité	112
6.3.4	Carte des vecteurs de stabilité	116
6.3.5	Norme des vecteurs de stabilité	120
6.3.6	Calcul de solutions voisines	122
6.3.7	Les effets de la discrétisation en espace sur la stabilité.	125
CONCLUSION		130
RÉFÉRENCES		134
ANNEXES		140

LISTE DES FIGURES

FIG. 1.1	Schéma de l'injecteur (a) et défauts de fabrication engendrés par des instabilités de l'écoulement (b).	7
FIG. 1.2	Défauts de fabrication observés sur des boîtiers de montres.	8
FIG. 2.1	Deux voies possibles pour l'obtention de la forme discrète des équations de sensibilités.	17
FIG. 3.1	Schéma d'un injecteur et domaine de calcul.	29
FIG. 3.2	Conditions limites imposées sur les frontières du domaine de calcul.	29
FIG. 3.3	Dimensions du domaine de calcul, $L=5.0$, $R=3.5$, $r=0.5$ et $H=1.0$	30
FIG. 3.4	Profil de vitesse à l'entrée pour différentes valeurs de m . À noter que lorsque $m = 0$, $v(x)$ est Newtonien.	36
FIG. 3.5	Courbe de $ \partial v(x)/\partial x $ et de $\eta(x)$ pour trois valeurs de m . À noter que lorsque $m = 0$, $\eta(x)$ est constant.	37
FIG. 3.6	Exemple de maillage utilisé lors des simulations : (a) présente un maillage irrégulier de 13601 noeuds, (b) un maillage régulier et symétrique de 1257 noeuds.	43
FIG. 4.1	Élément fini de type Taylor-Hood $P_2 - P_1$ ($O(h^2)$).	51
FIG. 4.2	Illustration de la factorisation conditionnelle.	56
FIG. 5.1	Surfaces représentant les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, $T(x, y)$ et $p(x, y)$. Le domaine en x et y est défini comme : $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$	64
FIG. 5.2	Géométrie du domaine calcul et définition des conditions aux frontières.	65

FIG. 5.3	Exemple de maillages utilisés pour le calcul de la solution analytique. (a) maillage de 8×8 éléments et (b) montre un maillage de 32×32 éléments.	67
FIG. 5.4	Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme énergie, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$	71
FIG. 5.5	Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme thermique, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$	72
FIG. 5.6	Trajectoires de l'efficacité en fonction du raffinement (i.e. : du nombre de noeuds). La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$	73
FIG. 5.7	Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme énergie, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$	75

FIG. 5.8	Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme thermique, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$	76
FIG. 5.9	Trajectoires de l'efficacité en fonction du raffinement (i.e. : du nombre de noeuds). La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$	77
FIG. 6.1	Dimensions du domaine de calcul, $L=5.0$, $R=3.5$, $r=0.5$ et $H=1.0$	79
FIG. 6.2	Géométrie du domaine de calcul.	81
FIG. 6.3	Points de contrôle servant à mesurer $\Delta T(t)$	83
FIG. 6.4	Évolution de $\Delta T(t)$, $B=1, 2, 3, 4$	88
FIG. 6.5	Évolution de $\Delta T(t)$, $B=5, 6, 8, 10$	88
FIG. 6.6	Évolution de u_d et u_g , $B=1, 2, 3, 4$	89
FIG. 6.7	Évolution de u_d et u_g , $B=5, 6, 8, 10$	89
FIG. 6.8	Isolignes de vitesse u lorsque $m = 0$ ($t=87.5$).	97
FIG. 6.9	Isolignes de température pour $B = 2$ et $Gz = 0.5$	98
FIG. 6.10	Isolignes de vitesse u pour $B = 2$ et $Gz = 0.5$	99
FIG. 6.11	Isolignes de température pour $B = 4$ et $Gz = 10$	100
FIG. 6.12	Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 10$	101
FIG. 6.13	Isolignes de température pour $B = 4$ et $Gz = 20$	102
FIG. 6.14	Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 20$	103
FIG. 6.15	Carte de stabilité décrivant le comportement du fluide en fonction des paramètres, (a) Gz et B , (b) Gz et B^*	105

FIG. 6.16	Comparaison entre les sensibilités calculées par la méthode des sensibilités et les sensibilités obtenues par différence finie. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$	111
FIG. 6.17	Évolution temporelle de $s_{\Delta T(t)}$, $Gz = 5$	113
FIG. 6.18	Évolution temporelle de $s_{\Delta T(t)}$, $Gz = 10$	114
FIG. 6.19	Valeur de $s_{\Delta T}^B$ au point $B=3$ et $B=8$	115
FIG. 6.20	Carte des vecteurs de stabilité de $s_{\Delta T}$ (valeur max.).	117
FIG. 6.21	Schéma de la carte de stabilité.	118
FIG. 6.22	Vecteur de stabilité v_s et vecteur de perturbation δ	118
FIG. 6.23	Carte de la norme des vecteurs de stabilité.	121
FIG. 6.24	Petite région de la figure 6.23.	121
FIG. 6.25	Courbes de ΔT initiales, recalculées et extrapolées avec une perturbation de 5%.	124
FIG. 6.26	Courbes de ΔT initiales, recalculées et extrapolées avec une perturbation de 25%.	124
FIG. 6.27	Isolignes de vitesse u pour $B = 2$ et $Gz = 0.5$ (stable).	127
FIG. 6.28	Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 1$ (instable).	128
FIG. 6.29	Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 1$ (en transition).	129
FIG. I.1	Schéma de l'entrée du canal d'injection.	140

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

ABS	Acrylonitrile Butadiene Styrene $(C_8H_8 \cdot C_4H_6 \cdot C_3H_3N)_n$
CFD	Computational Fluid Dynamics
EDP	Équations aux dérivées partielles
ESC	Équations de Sensibilité continues
MSD	Méthode des Sensibilités Discrètes
MEF	Méthode des Éléments Finis
MES	Méthode de l'Équation des Sensibilités
MSM	Methode des Solutions Manufacturées

Caractères usuels

a	paramètre de design, constante
$\mathbf{a}$	vecteur des paramètres de design
B	nombre adimensionnel
C	constante de proportionnalité
c_p	chaleur massique à pression constante
E	erreur, norme énergie
$\mathbf{f}$	forces volumiques
h	taille d'un élément du maillage
K	$K^{ème}$ élément du maillage
$\mathbb{H}$	opérateur différentiel
$\mathbf{I}$	matrice identité,

	premier invariant du tenseur taux de déformation
II	second invariant du tenseur taux de déformation
III	troisième invariant du tenseur taux de déformation
$\mathbf{J}_{ij}$	jacobien numérique
H	demi-hauteur de la partie horizontale du canal d'injection
H^1	semi-norme en pression
k	conductivité thermique (équation de la chaleur)
L	hauteur du canal d'injection
m	constante
m_1	maillage 1
m_2	maillage 2
n	exposant
n_d^K	nombre de noeuds de calcul
N	norme du vecteur de stabilité
p	pression, taux de convergence en espace
Q	terme source (solution manufacturée), débit
Q_0	échelle caractéristique
q	flux thermique, variable, taux de convergence en temps
$\tilde{q}$	variable ou paramètre adimensionnel
q_s	source de chaleur dans l'équation d'énergie
u^K	solution éléments finis
u_j^K	valeur nodale

u_s	vitesse de référence à la sortie du canal
v_s	vecteur de stabilité
$\mathbf{R}$	résidu des équations éléments finis
R	rayon du canal d'injection
r	demi-largeur de la partie verticale du canal d'injection
r	ratio de raffinement en espace
Br	nombre de Brinkman
Gz	nombre de Graetz
Re	nombre de Reynolds
Pr	nombre de Prandtl
Pe	nombre de Péclet
s	ratio de raffinement temporel
s_x	sensibilité de la variable x
$s_{\eta,x}, s_{\eta,u}$	dérivées de la sensibilité de la viscosité par rapport à x et y
s_u^K	solution éléments finis pour la sensibilité
$s_{u_j}^K$	valeur nodale en sensibilité
$sup.$	supérieur
T	température
T_a	température du fluide au seuil d'injection
t	temps
t_{fill}	temps de remplissage
Tr	trace d'un tenseur
$\mathbf{t} = (t_x, t_y)$	vecteur unitaire tangent
$\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y)$	vecteur unitaire normal
$\mathbf{u} = (u, v)$	vecteur vitesse

u	solution analytique
$\mathbf{X}$	vecteur des variables d'état (inconnues)
$\mathbf{x} = (x, y)$	coordonnées cartésiennes

Lettres calligraphiques

$\mathcal{F}$	fonctionnelle (optimisation)
$\mathcal{C}^1$	ensemble des fonctions continûment différentiables
$\mathcal{O}$	terme d'ordre supérieure

Lettres grecques

α	constante, expression mathématique intervenant dans la sensibilité de la viscosité
β	constante, expression mathématique intervenant dans la sensibilité de la viscosité
δ_i^j	delta de kronecker
δ	fonction test, perturbation
$\boldsymbol{\delta}$	vecteur de perturbation
$\delta_{u_j}^K$	fonction test associée au noeud j
$\delta_{s_{u_j}^K}$	fonction test associée au noeud j pour les sensibilités
λ	constante

ω	paramètre ajustable
Ω	domaine de calcul
$\partial\Omega$	frontière du domaine de calcul
$\partial\Omega_1$	élément de la frontière du domaine de calcul
$\partial\Omega_2$	élément de la frontière du domaine de calcul
Γ_N	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Neumann
Γ_D	frontière du domaine où sont imposées des conditions de Dirichlet
μ	viscosité dynamique du fluide (constante)
μ_0	constante
η	viscosité dynamique du fluide (variable)
$\eta_{,x}, \eta_{,y}$	dérivées de la viscosité par rapport à x et y
ρ	masse volumique
ϵ	terme de correction (régularisation de la viscosité)
$\dot{\epsilon}$	tenseur des contraintes visqueuses
σ	tenseur des contraintes
τ	tenseur des contraintes de cisaillement
$\dot{\gamma}$	tenseur taux de déformation
$\dot{\gamma}$	« grandeur » du tenseur taux de déformation
θ	θ -schéma : schémas de différence finie
$\Psi_{u_j}^K$	fonction d'interpolation
$\Psi_{s_{u_j}}^K$	fonction d'interpolation pour la sensibilité
Φ	dissipation visqueuse

Indices et exposants

x_0	qui se rapporte aux variables d'échelle
'	sensibilité, dérivée
$\sim$	qui se rapporte aux variables adimensionnels
	qui se rapporte aux solutions reconstruites
-	valeur imposée par les conditions aux frontières
exa	solution exacte
h	solution éléments finis
i, j	composante d'un vecteur,
n, k	iteration sur n ou sur k
$n+1, k+1$	iteration n+1 ou k+1
ij	composante d'un tenseur d'ordre 2
r	valeur de référence
x	indique la dérivée d'une variable. Par exemple : u_x, η_x ou $s_{v,x}$
m	exposant
NS	Navier-Stokes
$rhéol$	rhéologique
$sens$	sensibilité
T	transposée

Symboles

∇	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence

∂_x, ∂_y	dérivées partielles par rapport à x et y
$\frac{\partial}{\partial}$	dérivée partielle
$\frac{d}{d}$	dérivée totale
Δ	variation d'une quantité ou d'une variable
$\ \cdot\ , \cdot $	norme, grandeur ou valeur absolue

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	DÉMONSTRATIONS	140
I.1	Dérivation du profil de vitesse en entrée	140
I.2	Équivalence entre deux approches dans la dérivation de s_η	144
ANNEXE II	SOLUTION MANUFACTURÉE ET TERMES SOURCES	147
II.1	Termes sources pour les équations de Navier-Stokes et celle de l'énergie	147
II.2	Solution manufacturée	150
II.3	Notation utilisée pour désigner les dérivées	154
II.4	Invariants du tenseur des taux de déformations $\dot{\gamma}$	155

INTRODUCTION

Pendant des siècles, les liquides et les gaz qui nous entourent ont été le sujet d'observations méticuleuses. L'objectif était de saisir et de définir les lois physiques permettant de comprendre leurs comportements. Mais ce n'est qu'au cours des trois derniers siècles et grâce à de grandes percées en physique et en mathématique que l'on a été en mesure de formuler correctement un ensemble de lois pouvant décrire adéquatement le comportement des fluides. Supportée par le développement technologique, la mécanique des fluides a pris de plus en plus d'importance. Aujourd'hui, elle trouve des applications presque partout. La complexité grandissante des écoulements que l'on désire résoudre fait en sorte que les méthodes analytiques s'avèrent rapidement inefficaces. En effet, les équations différentielles qui modélisent la plupart des écoulements ne possèdent aucune solution analytique, à l'exception de quelques écoulements simples, qualifiés de problèmes académiques. Avec l'émergence des méthodes numériques, une nouvelle voie s'est ouverte permettant d'aborder des problèmes plus complexes. Enfin, la possibilité de s'attaquer à des problèmes difficiles s'est largement amplifiée avec l'arrivée et la croissance rapide de la puissance de calcul des ordinateurs. La mécanique des fluides assistée par ordinateur ou CFD, acronyme anglais pour *Computational Fluid Dynamics*, permet une analyse fondamentale et rigoureuse des écoulements complexes comme celui traité dans ce mémoire.

La mécanique des fluides assistée par ordinateur portait à ses débuts surtout sur l'analyse. Les progrès et une évolution constante des performances ont permis à la recherche de s'orienter vers des problèmes où l'optimisation prend une place grandissante. En particulier dans ce projet, l'optimisation des paramètres d'opération et de design par la méthode des sensibilités sera privilégiée. Les *sensibilités* qui désignent le taux de variation d'une solution par rapport à un paramètre arbi-

traire sont une source d'informations importantes pour l'analyse, le calcul rapide de solutions voisines, l'analyse de sensibilité, etc.

Dans ce projet, on propose d'utiliser la *Méthode de l'Équation des Sensibilités* (MES) pour analyser la réponse d'un écoulement Newtonien généralisé lorsque l'on perturbe les paramètres adimensionnels du système. Cette réponse est interprétée dans un cadre prédictif. En effet, on montre que les sensibilités sont capables de prédire le comportement d'un écoulement lorsque l'on perturbe les paramètres adimensionnels du problème.

Ce mémoire comporte 6 chapitres. Au chapitre 1, une brève revue bibliographique permet de placer le présent travail dans son contexte. Une courte introduction introduit le type d'écoulement étudié dans ce mémoire. On discute par la suite de la problématique associée à ce type d'écoulement en milieu industriel, et une brève revue de la méthode des sensibilités permet d'entrevoir les possibilités que cette méthode peut apporter à l'analyse du problème. Finalement, on fixe les objectifs et les buts de cette étude. Le chapitre 2 présente dans les détails la méthode des équations de sensibilités. La formulation mathématique de la méthode est présentée, suivie de son application aux équations de Navier-Stokes. En terminant, ce chapitre présente les diverses applications de la méthode des équations de sensibilités. Le chapitre 3 discute de la modélisation mathématique du problème, en commençant par définir à quel type de fluide appartient l'écoulement étudié dans ce travail. On introduit ensuite les équations de Navier-Stokes et la géométrie du domaine de calcul. Une discussion sur le rôle des paramètres adimensionnels dérivée de la forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes suivra. En terminant, on expose les équations de sensibilités découlant des équations de Navier-Stokes. Au chapitre 4, on présente la méthode de résolution par éléments finis. Le chapitre 5 confronte le code de simulation numérique à un processus de vérification. On présente la méthode des solutions manufacturées comme méthode de vérification du code. Le

code vérifié, le chapitre 6 s'attarde aux applications et aux résultats obtenus à l'aide des équations de sensibilités. Pour terminer, on expose les conclusions et les travaux futurs qui découlent de ce travail.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Ce chapitre présente une revue bibliographique permettant de situer le présent travail dans le cadre actuel des recherches et dans son contexte industriel. On débute par un bref résumé du sujet traité dans ce mémoire. On présente par la suite quelques applications industrielles découlant de ce sujet de recherche. Suivant cet exposé, on illustre et on discute des difficultés opérationnelles rencontrées dans le cadre de ces applications industrielles. On introduit ensuite la méthode des sensibilités qui sera utilisée comme outil d'analyse permettant de prévenir ces difficultés. Par la suite, on fournira un résumé des travaux de recherche antérieurs. Enfin, on termine ce chapitre en donnant le but de ce travail et les objectifs pour l'atteindre.

1.1 Introduction

Le sujet de ce mémoire se concentre sur l'étude et l'analyse des solutions obtenues par la résolution numérique des équations du mouvement (Navier-Stokes), couplées à celle du transfert de chaleur et à un modèle de viscosité Newtonien généralisé. L'expression mathématique de la viscosité est une fonction particulière qui dépend à la fois de la température et du cisaillement. La viscosité est directement proportionnelle à la température et inversement proportionnelle à $|\dot{\gamma}|$, où $\dot{\gamma}$ désigne le tenseur des taux de déformation. Les solutions sont calculées sur une géométrie en forme de T typique des injecteurs que l'on retrouve dans les systèmes de moulage de disques à base de poudre métallique. Ce type de fluide a la particularité d'engendrer, sous certaines conditions, des instabilités qui peuvent

grandement perturber l'écoulement normal du fluide. En effet, la stabilité ou l'instabilité dépend de la valeur de deux paramètres adimensionnels, le nombre de Graetz (Gz) et le nombre B . Pour une famille de valeurs des nombres de Graetz et B , l'écoulement devient instable, puis asymétrique. Cette situation peut dégénérer au point où l'écoulement cesse complètement dans l'une des branches du T. L'origine de ces instabilités sont attribuables aux variations de la viscosité, elle-même induite par des déséquilibres thermiques et des variations du cisaillement présents dans l'écoulement. Par exemple, si la température augmente, alors la viscosité diminue, entraînant une augmentation de la vitesse. Cette augmentation de vitesse amplifie le cisaillement et accroît la température, provoquant à nouveau une diminution de la viscosité et ainsi de suite. La caractérisation de l'asymétrie en température permettra d'élaborer une carte de stabilité de l'écoulement. Il faut se souvenir qu'un fluide qui s'écoule tout en se refroidissant, a le potentiel d'engendrer des instabilités provoquées par la présence de déséquilibres thermiques.

1.2 Contexte industriel

De nombreux procédés industriels font intervenir des fluides non-Newtonien. On inclut dans cette catégorie, de nombreux matériaux ayant des structures internes complexes : les verres inorganiques, les cristaux liquides, les solvants, les liquides diphasés, les fluides polymériques et les poudres métalliques. Ces quelques exemples illustrent la grande variété de matériaux associée à ce type de fluide et qui ont des applications industrielles. Tous ces matériaux ont la particularité de contenir des sous-structures qui interagissent entre elles et qui font en sorte que le comportement de ces matériaux dévie de celui décrit par une loi de comportement Newtonienne. Dans cette étude, on s'intéressera à un type particulier de procédé industriel faisant intervenir des fluides non-Newtonien : le moulage par injection. Le moulage par in-

jection est un procédé de fabrication que l'on retrouve dans une gamme étendue d'industries (métallurgique, biomédicale, automobile, des plastiques, pharmaceutique, électronique, etc). Dans cette panoplie d'applications, on portera notre attention sur la fabrication de disques métalliques par injection de poudre métallique. Les disques métalliques obtenus par ce type de procédé entrent, par exemple, dans la composition des disques-compacts et vidéo-disques. En général, les manufacturiers rencontrent de nombreux problèmes liés à l'utilisation du moulage par injection. Dans cette perspective, la prochaine section illustre les difficultés rencontrées par les industriels.

1.2.1 Problématique

À l'heure actuelle 30% des pièces fabriquées sont défectueuses. On retrouve des inhomogénéités ou des vides affaiblissant les pièces lorsque les conditions d'opération sont mal contrôlées ou peu connues. De plus, la probabilité d'être confronté à des défauts de fabrication dans ce type de procédé augmente lorsque des poudres métalliques sont utilisées. Malgré les similitudes que partagent les procédés par injection à base de polymère et ceux à base de poudres métalliques, ces derniers utilisent des matériaux qui possèdent une diffusivité thermique plus élevée. Ceci implique qu'ils sont plus susceptibles de ressentir les instabilités associées aux gradients thermiques qui se développent lors du refroidissement. Les perturbations à l'origine des inhomogénéités observées sur les pièces issues du processus de moulage prennent naissance dans l'injecteur de poudre métallique. Cette pièce située en amont de la cavité du moule, permet normalement de guider et de distribuer l'écoulement de façon homogène dans le moule. On comprend que si l'écoulement est perturbé lors de son passage dans l'injecteur, ceci risque alors d'avoir des conséquences sur la distribution homogène du fluide dans la cavité de moule au moment du remplissage. Pour cette raison, ce projet portera une attention parti-

culière au comportement de l'écoulement à l'intérieur de l'injecteur.

Le fluide qui pénètre dans l'injecteur possède une température plus élevée à l'entrée qu'à la sortie. Ainsi, l'écoulement qui se refroidit lors de son passage dans l'injecteur a le potentiel d'engendrer des instabilités associées aux variations de température. Par exemple, une petite diminution locale de température entraînera une augmentation de la viscosité qui à son tour ralentira l'écoulement du fluide. Dans certains cas, ces perturbations seront amorties et elles n'auront aucun effet sur l'écoulement normal du fluide. Par contre, sous certaines conditions, ces changements s'amplifient et deviennent assez importants pour provoquer localement un ralentissement, voire même un arrêt complet de l'écoulement. La figure 1.1 illustre les conséquences de ces instabilités sur un écoulement qui passe par un injecteur en forme de disque [43]. La figure 1.1(a) montre la géométrie de l'injecteur employée pour guider le

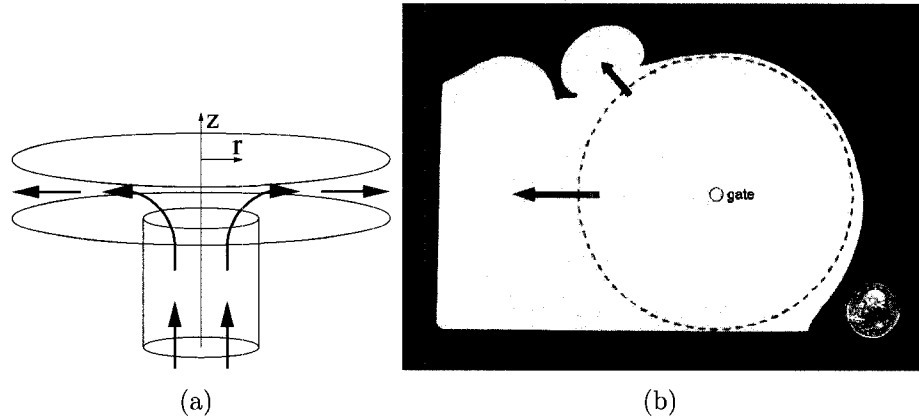


FIG. 1.1 Schéma de l'injecteur (a) et défauts de fabrication engendrés par des instabilités de l'écoulement (b).

fluide, tandis que la figure 1.1(b) présente un exemple d'écoulement asymétrique pour un polymère (thermoplastique ABS). Le polymère forme d'abord un disque (délimité par la ligne pointillée) dont la température diminue graduellement en allant vers la périphérie de ce disque. Puis, on remarque un débordement du fluide et l'apparition d'une excroissance à la périphérie du disque initial. Idéalement, on

s'attend à ce que le fluide qui s'écoule entre les deux plaques circulaires de l'injecteur acquiert une distribution de vitesse et de température isotrope. En réalité, les plaques et le fluide n'ont pas une distribution de température totalement isotrope. La viscosité du fluide étant sensible à ces variations de température, la vitesse de l'écoulement n'est plus homogène, ce qui a pour effet d'amplifier ces variations de température et d'augmenter les gradients de viscosité. Par conséquent, l'écoulement ralentit ou cesse totalement à certains endroits et s'accélère et poursuit son chemin à d'autres endroits. La figure 1.2 présente deux autres exemples de défauts de fabrication rattachés aux écoulements instables et asymétriques. Les figures 1.2(a) et 1.2(b) montrent les résultats obtenus suite à des moulages par injection de poudre métallique servant à la fabrication des boîtiers de montres ^[43]. On voit clairement sur la figure 1.2(a) les conséquences d'un écoulement instable lors du processus de fabrication.

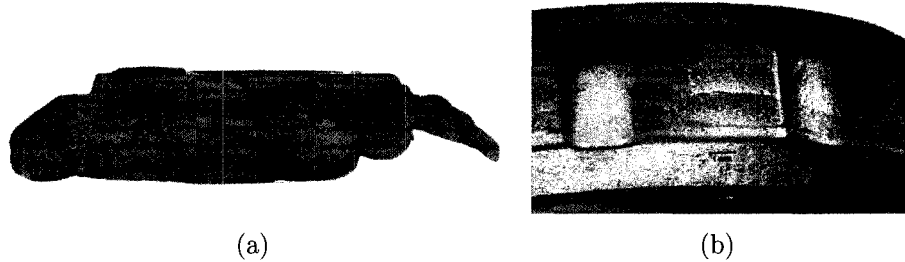


FIG. 1.2 Défauts de fabrication observés sur des boîtiers de montres.

Dans ce cas, les instabilités entraînent la formation de jets de fluide au moment où celui-ci arrive dans la cavité du moule. Ceci a pour effet de créer des excroissances et des espaces vides à l'intérieur de la pièce issue du moulage. La figure 1.2(b) illustre les défauts observés à la surface d'un boîtier de montre et causés également par la présence de jets non contrôlés. On note que les défauts sont plus discrets que ceux montrés sur la figure 1.2(a). Ces exemples indiquent que l'on doit acquérir une meilleure compréhension des phénomènes en jeux afin de permettre aux manufacturiers de réduire ou même d'éliminer les défauts et donc d'améliorer leur

compétitivité. En conséquence, en entreprenant une étude et une analyse rigoureuse basée sur la CFD et l’analyse des sensibilités, ce travail propose des solutions permettant de contrôler les conditions d’opération dans les procédés de moulage par injection.

1.2.2 Méthode des sensibilités

Ce projet s’appuie en bonne partie sur l’analyse des sensibilités découlant des travaux de Pelletier et Turgeon [31, 45, 46, 47, 48]. Un exposé détaillé de cette méthode est donné au chapitre 2 de ce mémoire. L’analyse des sensibilités est issue des techniques d’optimisation et procure à l’utilisateur une gamme d’applications très étendue, dont l’optimisation de paramètres géométriques ou le calcul de solutions voisines. Le terme *sensibilité* désigne simplement le taux de variation d’une variable d’intérêt par rapport à un paramètre de design a . Par définition, la sensibilité s’écrit :

$$s_{\alpha}^a = \frac{\partial \alpha(x_i; a)}{\partial a}. \quad (1.1)$$

où α désigne une variable d’intérêt et où x_i représente les dépendances de la variable α . La *sensibilité* de α par rapport à a exprime la façon dont la variable α répond à une perturbation du paramètre a autour de sa valeur nominale. Il existe plusieurs méthodes pour calculer les sensibilités. Pour ce travail, on préconise l’approche fournie par la *Méthode de l’Équation des Sensibilités*, ou MES. La différentiation par rapport à un paramètre a des équations aux dérivées partielles permet l’obtention des équations de sensibilités continues. La discrétisation de ces équations conduit à la construction d’un système algébrique qui sera par la suite résolu numériquement.

1.2.3 Travaux antérieurs

La méthode des sensibilités a d'abord été développée en mécanique des structures [17]. Par la suite, la méthode s'est appliquée dans de nombreux domaines : conduction de chaleur [8, 9], design aérodynamique [2, 28], éléments finis stochastiques [13], interaction fluide-structure [11, 26], calcul d'incertitude [35], etc. Il existe de nombreuses applications plus spécifiques et on peut trouver une bonne source de référence dans Turgeon [45]. L'utilisation des sensibilités pour l'analyse du problème traité dans ce projet est récente et une première approche se trouve dans *Ilinca, Hétu et Pelletier* [23].

En ce qui concerne le moulage par injection, les recherches et les travaux antérieurs sont nombreux et on ne peut pas tous les répertorier. On se contentera de citer ici les quelques articles et ouvrages qui ont été consultés. Une série d'études faites par *Ilinca* et *Hétu* traite de la modélisation tridimensionnelle du moulage par injection de polymère [22] ou de composés métalliques [21, 24]. Selon le problème étudié, différents modèles mathématiques sont proposés allant d'une formulation simplifiée, incluant certaines approximations [25, 27] (i.e approximation de Hele-Shaw par exemple), jusqu'aux modèles plus complexes tenant compte des phénomènes de compressibilité [44]. D'autres travaux [40] se concentrent sur la modélisation des écoulements de polymère à l'intérieur d'un espace restreint comme un canal ou l'espace compris entre deux plaques planes, se rapprochant ainsi du problème étudié dans ce mémoire. Finalement, le lecteur qui désire approfondir ses connaissances sur les procédés de moulage impliquant des polymères ou des composés métalliques, peut consulter les ouvrages suivants : [7, 36, 50].

Les travaux sur la stabilité des fluides non-Newtoniens remontent à la fin des années soixante et au début des années soixante-dix. *Shaw* et *Pearson* [29, 38, 39] présentent une série de trois articles sur l'étude de la stabilité d'un écoulement de polymère

dans une géométrie radiale. Le dernier article de la série ^[39] s'attarde en particulier sur un modèle de viscosité en loi de puissance, tout en incluant dans leur modèle le phénomène d'échauffement visqueux. Cette étude est la première à analyser et à caractériser l'instabilité d'un écoulement thermovisqueux en terme du nombre adimensionnel de Graetz (Gz) et du nombre adimensionnel B . Inspiré par ces travaux, *Stevenson* et *Ilinca* ^[43] présentent une analyse des résultats numériques et expérimentaux sur la stabilité d'un écoulement radial de poudre métallique dans les procédés de moulage par injection. D'autres auteurs, tels que *Costa* ^[6], utilise une analyse similaire dans l'étude des écoulements magmatiques dans les cheminées volcaniques. En terminant, les articles et ouvrages suivants ^[16, 41, 42] peuvent être également consultés.

1.3 Buts et objectifs

Les sections précédentes ont permis de poser le sujet dans son contexte. Le but de ce projet est de contribuer à la compréhension des phénomènes d'instabilités thermo-hydrodynamiques causant des défauts de fabrication lors du moulage par injection de poudres métalliques, permettant ainsi aux manufacturiers de réduire ou même d'éliminer ces défauts.

Pour atteindre ce but, on s'est fixé les objectifs suivants :

- Modifier un algorithme d'éléments finis pour obtenir efficacement des solutions réalistes et fiables.
- Appliquer cet algorithme à un système simple pour observer les divers comportements de l'écoulement en fonction des paramètres du problème.
- Reproduire à l'aide de nos simulations ce qui est observé dans les injecteurs réels de poudre métallique et pour comprendre le mécanisme causant l'instabilité.
- Caractériser l'asymétrie en température afin de déterminer la topologie de la

carte d'instabilité dans le plan des paramètres adimensionnels du problème (i.e. nombre de Graetz et nombre B).

- Résoudre les équations de sensibilité pour déterminer la géométrie optimale de l'injecteur et permettre d'anticiper le comportement de l'écoulement en fonction du nombre de Graetz et du nombre B.

CHAPITRE 2

PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS

Les méthodes numériques en mécanique des fluides ont pris un envol et un essor sans précédent depuis que l'ordinateur permet de faire des simulations numériques de plus en plus complexes et précises. La mécanique des fluides assistée par ordinateur portait à ses débuts surtout sur l'analyse. S'appuyant sur les progrès informatiques et une évolution constante des performances de calcul, la recherche s'est orientée vers des problèmes où l'optimisation prend une place grandissante. En particulier dans ce projet, l'optimisation des paramètres d'opération et de design par la méthode des sensibilités sera privilégiée.

2.1 Formulation du problème

La formulation classique d'un problème d'optimisation se présente de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{a} \text{ qui minimise ou maximise } F(\mathbf{X}; \mathbf{a}) \\ &\text{sujet à} \quad \mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a}) = 0 \\ &\quad \mathbf{b}_i \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{b}_s \end{aligned}$$

où $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{a})$ représente le vecteur des variables dépendantes ou variables d'états. $\mathbf{a}$ désigne le vecteur des paramètres de design borné par les limites $\mathbf{b}_i$ et $\mathbf{b}_s$. F est la fonctionnelle que l'on cherche à optimiser et finalement $\mathbf{G}$ donne les contraintes liées au problème, comme par exemple les équations de Navier-Stokes. On note que

pour chaque paramètre de design, les états $\mathbf{X}$ sont donnés par la résolution des contraintes $\mathbf{G}$.

2.2 Techniques d'optimisation

Il existe deux manières d'exprimer un problème d'optimisation. Dans la première, on considère le problème dans son ensemble en résolvant simultanément les variables dépendantes $\mathbf{X}$ et les paramètres de design $\mathbf{a}$. Dans la seconde, on opère en résolvant dans un premier temps l'équation des contraintes $\mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a})=0$ afin de déterminer la dépendance implicite de $\mathbf{X}$ par rapport à $\mathbf{a}$. Le problème d'optimisation porte ensuite seulement sur le vecteur $\mathbf{X}=\mathbf{X}(\mathbf{a})$ puisque les contraintes ont déjà été vérifiées. On choisit la dernière approche où optimisation et analyse sont découplées puisque que l'on possède un code d'analyse performant.

Il existe diverses techniques d'optimisation qui sont décrites dans l'ouvrage de Vanderplaats ^[49]. Cet ouvrage contient une liste exhaustive des techniques existantes. Un algorithme à gradient ou d'ordre un s'impose, puisqu'il évite la complexité des techniques d'ordre supérieur, tout en fournissant au minimum l'évaluation du gradient de la fonction à optimiser. Ce gradient est plus complexe, mais globalement on obtient un algorithme plus efficace et surtout moins coûteux en temps de calcul que pour d'autres techniques. L'ingrédient central du processus d'optimisation repose donc sur l'estimation du gradient de F . Pour ce faire, on doit utiliser des méthodes de calculs robustes et efficaces. Trois méthodes principales s'offrent à nous : les différences finies, la méthode des variables adjointes et la méthode des sensibilités. Le lecteur souhaitant approfondir ces diverses méthodes peut consulter la référence suivante ^[45]. En s'appuyant en particulier sur les travaux de Pelletier et Turgeon, la *Méthode de l'Équation des Sensibilités (MES)* a été retenue pour ce projet.

2.2.1 Méthode de l'équation des sensibilités (MES)

La méthode de l'équation des sensibilités fournit l'information requise pour calculer le gradient de la fonctionnelle F par rapport aux paramètres $\mathbf{a}$. Pour simplifier la notation, on exprime la fonctionnelle F ainsi que ses dépendances de la manière suivante,

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = F(\mathbf{X}(\mathbf{a}); \mathbf{a}). \quad (2.1)$$

Le gradient de $\mathcal{F}(\mathbf{a})$, parfois appelé sensibilité de $\mathcal{F}(\mathbf{a})$, s'obtient en différentiant la fonctionnelle et en utilisant le théorème des fonctions implicites. Supposons que $\mathbf{a}$ ne contient qu'un seul paramètre que l'on désigne par a , on obtient alors,

$$\nabla \mathcal{F}(a) = \frac{d\mathcal{F}(a)}{da} = \frac{\partial F(a)}{\partial a} + \frac{\partial F(a)}{\partial \mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{da}. \quad (2.2)$$

La généralisation pour un vecteur $\mathbf{a}$ se fait naturellement. Les dérivées explicites $\partial F(a)/\partial a$ et $\partial F(a)/\partial \mathbf{X}$, peuvent se calculer sans trop de difficultés si on connaît l'expression de F en fonction de $\mathbf{X}$ et de a . Par contre, une inconnue subsiste, le terme $d\mathbf{X}/da$ que l'on nomme *sensibilité* des états $\mathbf{X}$ par rapport au paramètre a . Ce terme exprime la réaction de la solution (les états $\mathbf{X}$), lorsque le paramètre a subit une légère perturbation autour de sa valeur courante. Comme nous le verrons plus loin, le calcul et l'analyse des sensibilités occupe une partie importante de ce projet.

2.2.2 Le calcul des sensibilités

La sensibilité est définie comme la dérivée de $\mathbf{X}$, une variable d'état, par rapport à un paramètre arbitraire a . À titre d'exemple, supposons que $\mathbf{X}$ représente la vitesse

u d'un champ de vitesse quelconque, où $u=u(x, y, t)$. Supposons également que ce champ de vitesse soit sensible aux variations d'un paramètre a . Par exemple, a pourrait désigner une viscosité constante μ . Alors la sensibilité de u par rapport à μ s'écrira de la façon suivante :

$$s_u^a = \frac{\partial u(x, y, t; a)}{\partial a} = \frac{\partial u(x, y, t; \mu)}{\partial \mu} = s_u^\mu, \quad (2.3)$$

que l'on note généralement simplement par s_u . La sensibilité de u traduit donc la réponse du champ de vitesse u à des perturbations de la viscosité μ . Le calcul des sensibilités se fait en deux temps. D'abord on obtient les équations de sensibilités en différentiant les équations d'états $\mathbf{G}(\mathbf{X}; \mathbf{a})=0$ par rapport à un paramètre a , et puis résoudre les équations ainsi obtenues. Généralement, on travaille dans un espace continu où la dimension des états $\mathbf{X}$ est infinie. De plus, l'obtention d'une expression analytique de la solution est impossible à définir, sauf pour de rares exceptions. Pour vaincre cette difficulté, on utilise les méthodes numériques de discrétisation. Le prix à payer est l'introduction d'un degré d'approximation. Dans ce contexte, deux voies s'offrent à nous pour l'obtention de la forme discrète des équations de sensibilités. La Méthode des Sensibilités Discrètes (*MSD*) ou bien la Méthode de l'Équation des Sensibilités (*MES*). La figure 2.1 illustre les deux avenues possibles.

Partant des équations aux dérivées partielles (*EDP*), la différentiation par rapport à un paramètre a permet l'obtention des équations de sensibilités continues (*ESC*). Ensuite, une discrétisation permet la construction d'un système algébrique qui sera résolu numériquement. Ce parcours désigne la *MES*. Si l'ordre des opérations *différentiation* et *discrétisation* est inversé, on parle alors de la Méthode des Sensibilités Discrètes ou *MSD*. Des deux choix qui s'offrent à nous, la *MES* est privilégiée. En effet, la différentiation des équations par rapport à un paramètre a est beaucoup plus simple dans le cas de la *MES*. Il suffit de dériver directement

les équations différentielles par rapport au paramètre a . Dans le cas discret, cette opération peut s'avérer être difficile en plus d'avoir un code peu performant.

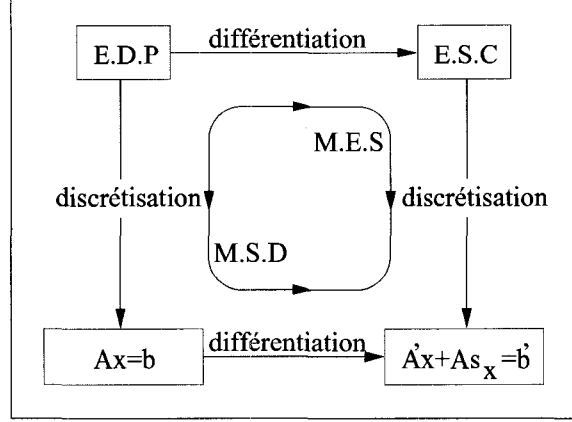


FIG. 2.1 Deux voies possibles pour l'obtention de la forme discrète des équations de sensibilités.

La *Méthode de l'Équation des Sensibilités* ou (MES), définit le parcours où l'on choisit de *différencier* les équations aux dérivées partielles avant de les *discrétiser*. Afin d'illustrer la méthode, considérons l'équation de l'énergie pour un écoulement transitoire, incompressible et laminaire :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_s \quad (2.4)$$

Les variables d'états de l'écoulement sont le vecteur vitesse $\mathbf{u}$ et la température T . Les propriétés physiques du fluide sont la masse volumique ρ , la chaleur massique à pression constante c_p et le coefficient de conductivité thermique k . Finalement, q_s désigne une source de chaleur. Les sensibilités des variables de l'écoulement par rapport à un paramètre a s'écrivent

$$s_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}(x, y, t; a)}{\partial a} \quad (2.5)$$

$$s_T = \frac{\partial T(x, y, t; a)}{\partial a}. \quad (2.6)$$

L'équation des sensibilités s'obtient en prenant la dérivée de l'équation (2.4) par rapport au paramètre. Dans une approche générale, on suppose que toutes les variables et que l'ensemble des coefficients peuvent dépendre de a . On obtient alors,

$$\begin{aligned} (\rho' c_p + \rho c'_p) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) + \rho c_p \left(\frac{\partial s_T}{\partial t} + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T \right) \\ = \nabla \cdot (k' \nabla T + k \nabla s_T) + q'_s \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $(')$ dénote la dérivée totale des propriétés physiques et donc leurs sensibilités. Il nous reste à discrétiser l'équation (2.7) par la méthode des éléments finis afin d'obtenir un système algébrique. Ensuite, on linéarise le système et on le résout numériquement par une décomposition LU par exemple.

2.3 Équations des sensibilités pour les équations de Navier-Stokes

Considérons un écoulement transitoire, laminaire et incompressible avec transfert de chaleur. Les équations qui gouvernent un tel écoulement sont les équations de continuité, de la quantité de mouvement (Navier-Stokes) et d'énergie.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] + \mathbf{f} \quad (2.9)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_s \quad (2.10)$$

Ici p est la pression, μ la viscosité et $\mathbf{f}$ les forces volumiques. La définition des propriétés physiques est la même que celle donnée pour l'équation (2.4). En analyse de sensibilité, on considère que les états dépendent non seulement des coordonnées spatiales x et y et du temps t , mais également d'un paramètre a .

Cette dépendance s'écrit,

$$\mathbf{u} = (u(\mathbf{x}, t; a), v(\mathbf{x}, t; a)), \quad p = p(\mathbf{x}, t; a) \text{ et } T = T(\mathbf{x}, t; a). \quad (2.11)$$

On définit alors les sensibilités de ces variables par :

$$s_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}, \quad s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \text{ et } s_T = \frac{\partial T}{\partial a} \quad (2.12)$$

où $s_{\mathbf{u}}$, s_p et s_T représentent le taux de variation de la solution par rapport au paramètre a . Il reste à différentier les équations (2.8), (2.9) et (2.10) par rapport à a pour obtenir les équations des sensibilités. La sensibilité de l'équation de l'énergie a déjà été donnée par l'équation (2.7). La sensibilité de l'équation de continuité s'écrit

$$\nabla \cdot s_{\mathbf{u}} = 0. \quad (2.13)$$

De la même manière, l'équation de la quantité de mouvement prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho' \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \rho \left(\frac{\partial s_{\mathbf{u}}}{\partial t} + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathbf{u}} \right) \\ = -\nabla s_p + \nabla \cdot \left[\mu' \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \mu \left(\nabla s_{\mathbf{u}} + (\nabla s_{\mathbf{u}})^T \right) \right] + \mathbf{f}' \end{aligned} \quad (2.14)$$

où $(\prime)$ désigne la dérivée totale des propriétés physiques et donc leurs sensibilités. Dans le cas où la viscosité dépend de la vitesse $\mathbf{u}$, de la température T ainsi que d'un paramètre arbitraire a .

$$\mu = \mu(\mathbf{u}(a), T(a); a), \quad (2.15)$$

la dérivée de μ par rapport à ce paramètre s'écrit :

$$\begin{aligned}\mu' = \frac{d\mu}{da} &= \frac{D\mu}{Da} = \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{u}} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial a} + \frac{\partial\mu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial a} + \frac{\partial\mu}{\partial a} \\ &= \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{u}} s_{\mathbf{u}} + \frac{\partial\mu}{\partial T} s_T + \frac{\partial\mu}{\partial a}\end{aligned}\quad (2.16)$$

où μ' représente alors la sensibilité de la viscosité par rapport à a . À présent, abordons brièvement la nature des conditions aux frontières pour les variables de l'écoulement et leurs sensibilités.

2.4 Conditions aux frontières pour les sensibilités

Pour qu'un problème d'écoulement soit mathématiquement bien posé, on doit nécessairement définir un ensemble de conditions aux frontières associées au domaine de calcul. La résolution des équations (2.8), (2.9) et (2.10) se fait dans un domaine de calcul Ω , borné par une frontière $\partial\Omega$. Les conditions aux frontières de Dirichlet sur la portion de la frontière Γ_D (*essentielles*) et de Neumann sur Γ_N (*naturelles*) sont imposées sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_D^{\mathbf{u}} \quad (2.17)$$

$$(-p\mathbf{I} + 2\mu\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{t} \quad \text{sur } \Gamma_N^t \quad (2.18)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_D^T \quad (2.19)$$

$$k\nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_N^q \quad (2.20)$$

où les frontières pour l'écoulement $\partial\Omega_1$ et la température $\partial\Omega_2$ sont données respectivement par : $\partial\Omega_1 = \Gamma_D^{\mathbf{u}} \cup \Gamma_N^t$ avec $\Gamma_D^{\mathbf{u}} \cap \Gamma_N^t = \emptyset$ et $\partial\Omega_2 = \Gamma_D^T \cup \Gamma_N^q$ avec $\Gamma_D^T \cap \Gamma_N^q = \emptyset$ et où $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$ représente le tenseur des taux de déformation. Le calcul de la sensibilité des conditions limites découle de la même règle que pour les

équations de l'écoulement : on différentie les conditions aux frontières par rapport au paramètre a . On obtient ainsi,

$$s_{\mathbf{u}} = s_{\bar{\mathbf{u}}} \quad \text{sur } \Gamma_D^{\mathbf{u}} \quad (2.21)$$

$$(-s_p \mathbf{I} + 2\mu' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\mu \dot{\gamma}(s_{\mathbf{u}})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{t}' \quad \text{sur } \Gamma_N^t \quad (2.22)$$

$$s_T = s_{\bar{T}} \quad \text{sur } \Gamma_D^T \quad (2.23)$$

$$(k' \nabla T + k \nabla s_T) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{q}' \quad \text{sur } \Gamma_N^q \quad (2.24)$$

Les frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ demeurent inchangées. Rappelons que notre développement fait l'hypothèse que le paramètre a n'affecte pas la géométrie du domaine. Dans le contexte, nous traitons le paramètre comme un paramètre de *valeur*. Un paramètre a qui influence la géométrie du domaine ou bien sa frontière porte le nom de paramètre de *forme*. Pour un exposé détaillé du sujet, le lecteur peut consulter les travaux de Turgeon [31, 45, 46, 47, 48].

2.5 Problèmes transitoires

Sans entrer dans les détails, on se contente de souligner que la méthode des sensibilités possède un net avantage sur l'approche des variables adjointes lorsque vient le temps de considérer des problèmes transitoires, comme celui traité dans ce mémoire. En effet, la flèche du temps dans la méthode des variables adjointes est inversée, on doit résoudre le problème adjoint en remontant le temps, ce qui implique que l'on doit fournir une condition initiale de l'adjoint au temps final de l'écoulement. Il est donc nécessaire de connaître et de conserver en mémoire la solution des états à tous les pas de temps pour utiliser cette méthode de résolution. L'espace mémoire utilisé peut poser un réel problème. En revanche, le sens temporel de la méthode des sensibilités est le même que pour celui des équations d'état. Ceci permet une

résolution simultanée des deux systèmes à chaque pas de temps, évitant du même coup un stockage important d'information.

2.6 Les usages des sensibilités

La méthode des sensibilités procure à l'utilisateur une gamme d'applications très étendue par rapport à la méthode des variables adjointes. Ce net avantage vient du fait que les sensibilités sont indépendantes de l'existence d'une fonctionnelle associée à un problème donné. En d'autres mots, même si dans certains cas déterminer une fonctionnelle s'avère être impossible, les sensibilités existent de façon intrinsèque et peuvent toujours être évaluées. En revanche, les variables adjointes existent seulement s'il est possible de définir une fonctionnelle associée à un problème d'optimisation. Parmi les applications des sensibilités, on mentionne,

- Analyse de sensibilité de système ;
- Analyse d'incertitude ;
- Identification de paramètres dominants et de zones sensibles ;
- Calcul rapide de solution voisine ;

Alors que les variables adjointes n'ont de sens que dans le cadre d'un problème d'optimisation, les sensibilités se définissent de façon intrinsèque et ont un sens propre. En plus de servir pour l'optimisation, on leur trouve d'autres usages qui ne se retrouvent pas dans la liste ci-dessus.

CHAPITRE 3

MODÉLISATION DU PROBLÈME

Dans ce chapitre, on expose la modélisation mathématique et géométrique utilisée dans nos simulations. On décrit dans un premier volet le cadre où se situe le modèle. Ensuite on décline les équations qui gouvernent l'écoulement ainsi que la géométrie définissant le domaine de calcul. Finalement, on présente et discute du maillage préconisé.

3.1 Nature du fluide

Un fluide peut être défini comme une substance qui se déforme (qui s'écoule) continuellement sous l'effet des forces de cisaillement, ceci étant vrai peu importe l'intensité de ces forces. On caractérise en général un fluide par la nature de la relation qui existe entre le tenseur des contraintes et celui du taux de déformation du fluide. Selon que cette relation est linéaire ou non, on obtient ainsi deux grandes classes de fluide : on parle de fluides *Newtoniens* et de fluides *non Newtoniens*.

3.1.1 Fluide Newtonien et non-Newtonien

Un fluide Newtonien est un fluide pour lequel le tenseur des contraintes de cisaillement $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ est une expression linéaire du taux de déformation (les gradients de vitesse) $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})$. En d'autres mots, un fluide Newtonien se déforme proportionnellement à la force qu'on lui applique. L'eau en est un bon exemple. La *loi de*

comportement ¹ s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = 2C\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

La constante de proportionnalité C porte le nom de *coefficient de viscosité* μ et représente la pente de cette relation linéaire. La viscosité ne dépend que des propriétés thermodynamiques locales et est indépendante du cisaillement. Par contre, un fluide est dit non-Newtonien lorsque le tenseur des contraintes de cisaillement n'est plus une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation. Autrement dit, lorsque la déformation n'est pas directement proportionnelle à la force qu'on lui applique. Dans ce cas-ci, la viscosité n'est plus une constante et peut dépendre des contraintes appliquées au fluide en plus des propriétés thermodynamiques locales.

3.1.2 Fluide Newtonien généralisé

Pour généraliser un fluide Newtonien, on remplace la viscosité constante μ par une viscosité variable η . La viscosité non Newtonienne η doit dépendre du tenseur taux de déformation $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$. L'hypothèse la plus simple est que η soit uniquement une fonction des invariants de $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, c'est-à-dire : $\mathbf{I} = \text{Tr}(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$, $\mathbf{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^2 - \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \dot{\boldsymbol{\gamma}})$ et $\mathbf{III} = \det(\dot{\boldsymbol{\gamma}})$ ^[36]. Comme nous étudions un fluide incompressible, $\mathbf{I}$ est identiquement nul. Pour un écoulement ayant du cisaillement $\mathbf{III}$ s'annule et donc η dépend uniquement de $\mathbf{II}$. Un fluide Newtonien généralisé aura alors une loi de comportement de la forme

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) = 2\eta(\dot{\boldsymbol{\gamma}})\dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (3.2)$$

¹Appelée également *équation d'état rhéologique*. Navier fut le premier à démontrer que cette relation était une bonne approximation.

où $\dot{\gamma}$ représente la « grandeur » de $\dot{\gamma}$. Nous discuterons de la forme spécifique de la viscosité $\eta(\dot{\gamma})$ à la section 3.3. La prochaine section présente les équations qui régissent la dynamique de l'écoulement.

3.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations qui gouvernent l'écoulement d'un fluide incompressible sont respectivement l'équation de la continuité et l'équation du mouvement. Elles se présentent sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (3.4)$$

où $\mathbf{f}$ désigne les forces volumiques. Dans notre modèle elles sont nulles. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ représente le tenseur des contraintes. Il s'écrit sous les formes équivalentes suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}) \quad (3.5)$$

$$= -p\mathbf{I} + 2\eta\dot{\gamma}(\mathbf{u}) \quad (3.6)$$

$$= -p\mathbf{I} + \eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (3.7)$$

Deux nouveaux tenseurs découlent de cette écriture, soient $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u})$ appelé le déviateur des contraintes ou tenseur des contraintes visqueuses et $\dot{\gamma}(\mathbf{u})$ le tenseur des taux de déformation. Le transfert de chaleur quant à lui est modélisé par l'équation de l'énergie, qui s'écrit de la façon suivante :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_s + \Phi \quad (3.8)$$

Les variables d'état de l'écoulement sont le vecteur vitesse $\mathbf{u}$, la pression p et la température T . Toutes les variables présentent les dépendances suivantes dans le cas bidimensionnel :

$$\mathbf{u} = (u(x, y, t), v(x, y, t)) \quad (3.9)$$

$$T = T(x, y, t) \quad (3.10)$$

$$p = p(x, y, t) \quad (3.11)$$

où t désigne le temps. Les propriétés physiques du fluide sont la masse volumique ρ , la viscosité dynamique η , la chaleur massique à pression constante c_p et k , le coefficient de conductivité thermique. En général, les propriétés physiques du fluide peuvent dépendre des variables de l'écoulement, notamment de la température. Finalement, le symbole Φ représente le terme de dissipation visqueuse. Φ quantifie l'échauffement produit par le frottement des couches de fluide les unes sur les autres. Ce terme est important si la viscosité joue un rôle dominant ou bien si l'espace d'écoulement est très petit. Le nombre de *Brinkman* qui donne une indication de la hausse de température due à la dissipation visqueuse apparaît comme négligeable, puisque $\eta u^2 \ll k\Delta T$. Rappelons que le nombre de Brinkman s'écrit

$$\text{Br} = \frac{\eta u^2}{k\Delta T}. \quad (3.12)$$

Pour cette raison, conserver Φ aurait été une complication inutile. La dissipation visqueuse est donc négligée. Le terme q_s désigne une source de chaleur qui est nulle dans notre cas.

3.3 Relation empirique de la viscosité

Les relations empiriques entre la viscosité η et le tenseur de déformation $\dot{\gamma}$ sont très variées, à l'image du type d'écoulement que l'on veut étudier. Parmi les modèles rhéologiques de viscosité les plus connus, on mentionne la loi de puissance d'Ostwald, les modèles de Carreau, de Bingham, de Cross, la fonction d'Arrhenius, etc. Le tableau 3.1 donne les expressions mathématiques pour chacun des modèles les plus utilisés. Rapellons brièvement que le fluide peut être soit un polymère où une poudre métallique adjoint d'un liant polymérique, où le transfert de chaleur joue un rôle déterminant dans la dynamique du fluide. Lors de simulations antérieures [3, 22, 43], différents modèles ont été utilisés pour décrire la viscosité. Pour sa simplicité et sa gamme d'applications dans les problèmes de transfert de chaleur, nous avons opté pour un modèle en loi de puissance où le paramètre β sera une fonction de la température T en degré Celsius. La viscosité choisie prend la forme suivante :

$$\eta(\dot{\gamma}) = C\dot{\gamma}^m e^{-bT} \quad (3.13)$$

où C , m ² et b sont des constantes du modèle. $\dot{\gamma}$ s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\text{Tr}(\dot{\gamma}^2)} \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{2(\dot{\gamma} : \dot{\gamma})} = \sqrt{2(\dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ji})} = \sqrt{2(\dot{\gamma}_{11}^2 + \dot{\gamma}_{22}^2) + (2\dot{\gamma}_{12})^2 + (2\dot{\gamma}_{21})^2} \quad (3.15)$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} \quad (3.16)$$

L'expression finale pour la viscosité η est alors,

² m :~ caractérise les types de matériaux.

modèles	relations
Loi de puissance	$\eta(\dot{\gamma}) = \beta \dot{\gamma}^{n-1}$
modèle de Carreau	$\eta(\dot{\gamma}) = \mu_0(1 + (\lambda \dot{\gamma})^2)^{\frac{n-1}{2}}$
modèle d'Arrhenius	$\eta(\dot{\gamma}) = b \dot{\gamma}^{1-n} e^{-\alpha T}$

TAB. 3.1 Exemple de modèle de viscosité.

$$\eta = C \left[\sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2} \right]^m e^{-bT} \quad (3.17)$$

3.4 Géométrie du domaine de calcul

La géométrie s'inspire d'une pièce qui se retrouve dans l'équipement de fabrication de disques-compacts et de vidéo-disques. Cette pièce est l'injecteur qui permet d'introduire un polymère sous pression dans la chambre de moulage. C'est sur cet élément que l'on effectuera les simulations numériques permettant de comprendre le comportement du fluide et d'évaluer la stabilité de l'écoulement. Comme le montre la figure 3.1, le schéma de l'injecteur présente une symétrie radiale. Cette symétrie permet de concevoir un domaine de calcul simplifié, correspondant à une projection bidimensionnelle de l'injecteur, et ce sans perdre l'essence de la physique. Le fluide qui s'écoule dans ce canal passe donc par trois régions : l'entrée, le seuil d'injection et la sortie. Le fluide est introduit par le bas de la branche verticale du canal. On suppose que le profil de vitesse est pleinement développé en entrée. Par la suite il pénètre dans le seuil d'injection, où l'écoulement se sépare en deux directions pour s'écouler vers les sorties. Finalement, le fluide entre dans la chambre de moulage. Les parois verticales du canal sont isolées, c'est-à-dire que $q=0$. Par contre, toutes les parois horizontales, sauf une, sont maintenues à une température constante. La température de la paroi inférieure droite subit une perturbation de sa valeur constante de l'ordre de 10^{-5} . Elle cause une légère asymétrie en température. Cette perturbation n'influence pas la stabilité ou l'instabilité du système, son rôle est

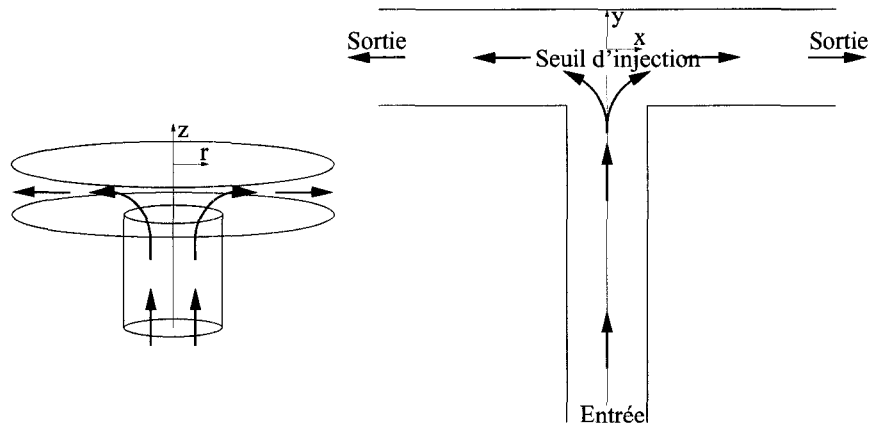


FIG. 3.1 Schéma d'un injecteur et domaine de calcul.

de contrôler la direction vers laquelle ira l'écoulement instable. Finalement, les conditions limites imposées en sortie sont : u =libre, $v=0$ et T =libre. La figure 3.2 présente le domaine de calcul ainsi que l'ensemble des conditions limites imposées sur la frontière.

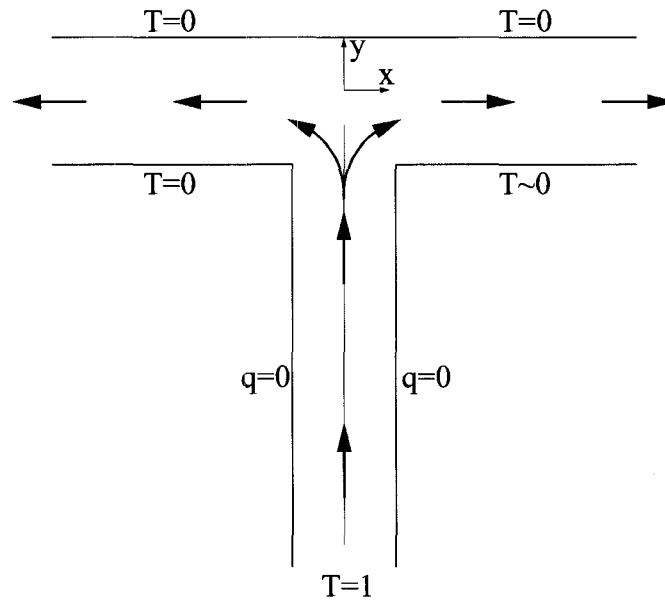


FIG. 3.2 Conditions limites imposées sur les frontières du domaine de calcul.

3.5 Forme adimensionnelle des équations

Le choix de travailler avec la forme adimensionnelle des équations et d'effectuer en parallèle une analyse adimensionnelle est motivé principalement par les observations suivantes :

- Elles permettent d'obtenir des variables adimensionnelles de l'ordre de l'unité.
- Elles réduisent le nombre de paramètres indépendants du problème et établissent des règles de similitude entre deux systèmes physiques.
- Elles identifient les nombres sans dimensions caractéristiques de l'écoulement.
- Elles nous renseignent sur l'importance relative des termes apparaissant dans les équations. Dépendant du régime d'écoulement, certains termes qui apparaissent dans les équations peuvent être négligés.

Les équations (3.3), (3.4) et (3.8) peuvent s'écrire sous forme adimensionnelle en introduisant la notation et la convention suivante, $q=Q_0\tilde{q}$, où $\tilde{q}$ désigne la variable ou le paramètre adimensionnel et où la valeur de Q_0 désigne l'échelle caractéristique pour le problème. Inspiré par la géométrie de la figure 6.1, on peut choisir deux longueurs caractéristiques, le rayon R ou la demi-hauteur H . Le rayon R s'oriente

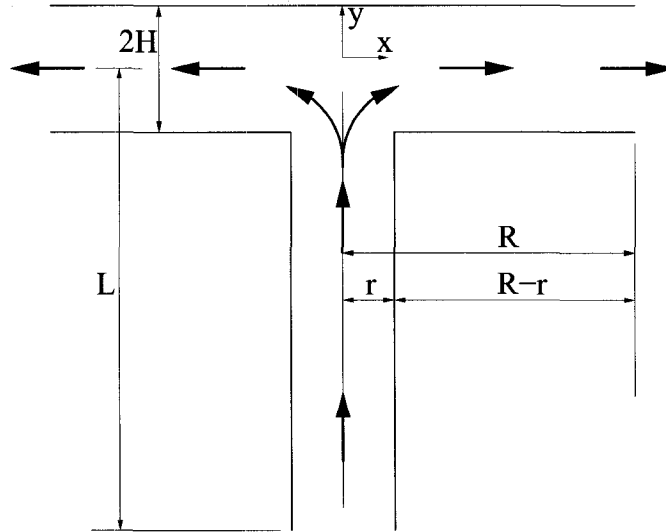


FIG. 3.3 Dimensions du domaine de calcul, $L=5.0$, $R=3.5$, $r=0.5$ et $H=1.0$.

dans la direction de l'écoulement à l'intérieur de la partie horizontale de l'injecteur (direction des x) et H est pris dans la direction normale (direction des y). Ce qui conduit aux relations suivantes :

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_0} = \frac{x}{R}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{y_0} = \frac{y}{H}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \quad (3.18)$$

Pour les vitesses, on choisit u_0 selon x et v_0 dans la direction des y tel que

$$\frac{u_0}{R} = \frac{v_0}{H} \quad (3.19)$$

Cette égalité permet de simplifier la forme adimensionnelle de l'équation de continuité. Pour l'échelle de pression p_0 , on doit choisir celle qui correspond au régime dynamique du fluide. L'écoulement étant visqueux, le choix de l'échelle de pression visqueuse sera judicieux. La pression adimensionnelle s'écrit alors

$$\tilde{p} = \frac{p}{p_0} \quad (3.20)$$

où p_0 au seuil d'injection est donnée en terme de H et R par

$$p_0 = \frac{\eta_0 u_0}{L_0} = \frac{\eta_0 u_0 R}{H^2} \quad (3.21)$$

La température adimensionnelle est donnée par

$$\tilde{T} = \frac{T - T_r}{T_0} \quad (3.22)$$

où T_r est une température de référence égale à la température des parois horizontales, tandis que T_0 représente l'échelle de température donnée par $T_a - T_r$, où T_a est la température du fluide au seuil d'injection. Les propriétés physiques adimensio-

nelles du fluide s'écrivent :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{c}_p = \frac{c_p}{c_{p0}}, \quad \tilde{k} = \frac{k}{k_0} \quad \text{et} \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad (3.23)$$

On considère la masse volumique ρ , la chaleur massique c_p et la conductivité thermique k comme constantes dont les valeurs sont déterminées par l'adimensionnalisation des équations. Dans le cas présent $\tilde{\rho}$, $\tilde{c}_p$ et $\tilde{k}$ sont unitaires. L'échelle de viscosité η_0 s'écrit

$$\eta_0 = C\dot{\gamma}_0^m e^{-bT_0}, \quad \text{où} \quad \dot{\gamma}_0 = \frac{u_0}{H} \quad \text{et} \quad \Delta T_{rhéol} = \frac{1}{b} \quad (3.24)$$

où $\Delta T_{rhéol}$ est une température caractéristique qui donne l'accroissement ou la diminution de la température nécessaire pour une diminution ou une augmentation de la viscosité par un facteur e , où e est la base du logarithme népérien. Finalement, pour le temps nous avons

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \text{où} \quad t_0 = \left(\frac{u_0}{R}\right)^{-1} = \left(\frac{v_0}{H}\right)^{-1} \quad (3.25)$$

Le problème avec le choix d'utiliser deux échelles de grandeur (relations (3.17) à (3.24)), est que l'équation du mouvement et celle de l'énergie n'apparaissent pas sous leur forme simple habituelle. Sans en faire la démonstration ici, sous certaines conditions ce choix permet de mesurer l'importance de certains termes dans les équations et de les négliger. Toutefois, pour l'obtention de solutions numériques, ce n'est généralement pas une bonne idée ^[7], compliquant inutilement l'implantation des équations dans le code de calcul et rendant la correspondance avec le problème d'origine plus difficile. Un second choix possible et acceptable est de considérer une seule grandeur caractéristique (*échelle isotrope*) pour obtenir une forme adimensionnelle à une échelle de nos équations. Nous allons choisir $y_0=x_0=H$ comme

longueur caractéristique avec $v_0=u_0$. De ce choix, on obtient les relations suivantes :

$$\tilde{x} = \frac{x}{H}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{H}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{u_0}, \quad t_0 = \left(\frac{u_0}{H}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad p_0 = \frac{\eta_0 u_0}{H} \quad (3.26)$$

Avec ces nouvelles relations on obtient une forme adimensionnelle simple pour l'équation de continuité, l'équation du mouvement et celle de l'énergie.

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.27)$$

$$\text{Re} \left(\text{St} \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} \right) = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \left[\tilde{\eta} \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} \right)^T \right) \right] \quad (3.28)$$

$$\text{RePr} \left(\text{St} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \right) = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \quad (3.29)$$

Rappelons que $\tilde{\rho} = \tilde{c}_p = \tilde{k} = 1$. La mise à l'échelle de la variable adimensionnelle $\tilde{x}$ n'est plus appropriée car elle varie de 0 à (H/R) , au lieu de 0 à 1. Par contre, les équations (3.28) et (3.29) conservent la même forme que les équations originales (3.4) et (3.8). Ce choix fait apparaître le nombre adimensionnel de *Strouhal* (St) et le produit de deux nombres adimensionnels, soient le nombre de *Reynolds* (Re) et le nombre de *Prandtl* (Pr) dans l'équation d'énergie. On peut réécrire ce produit de la manière suivante en multipliant par (H/R) l'équation (3.29) :

$$\text{RePr} \left(\frac{H}{R} \right) = \text{Pe} \left(\frac{H}{R} \right) = \left(\frac{\rho_0 c_{p0} u_0 H}{k_0} \right) \left(\frac{H}{R} \right) = \text{Gz} \quad (3.30)$$

où Gz dénote le nombre de *Graetz* et Pe désigne le nombre de *Péclet* (i.e. $\text{Pe} = u_0 \rho_0 c_{p0} H / k_0$). En terme de ce nombre adimensionnel, l'équation d'énergie devient

$$\left(\text{St} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \right) = \tilde{\nabla} \cdot \left[\frac{1}{\text{Gz}} \left(\frac{H}{R} \right) \tilde{\nabla} \tilde{T} \right]. \quad (3.31)$$

Cette manipulation introduit un nombre adimensionnel plus adapté à notre problème. Le produit de Pe avec (H/R) intervient dans les cas où une longueur

caractéristique peut devenir petite par rapport à une autre. De plus, cette manipulation permet de réintroduire la grandeur caractéristique R dans les équations. Finalement, la forme adimensionnelle de la viscosité s'écrit

$$\tilde{\eta} = \tilde{\gamma}^m e^{-B\tilde{T}} \text{ où } B = \frac{T_0}{\Delta T_{rheol}} = bT_0 \quad (3.32)$$

3.6 Équations de Stokes

On remarque que dans l'équation du mouvement (équation (3.28)) la dérivée temporelle de la vitesse est multipliée par le nombre de Strouhal. Physiquement, ce nombre exprime le rapport du temps caractéristique de convection et du temps caractéristique de l'instationnarité. Si $St \ll 1$, alors l'écoulement est dit quasi-stationnaire. Par contre, lorsque le régime d'écoulement est instationnaire, on montre que St est de l'ordre de l'unité. Dans le contexte de notre application, une analyse de grandeur permet de négliger le terme d'inertie contenu dans le membre de gauche de l'équation du mouvement (3.28). Les polymères sont des fluides dont la viscosité est en général élevée. Les forces visqueuses dominent alors les forces d'inertie. Or, le nombre de Reynolds exprime le ratio entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, c'est-à-dire

$$Re = \frac{\left(\frac{\rho u^2}{L}\right)}{\left(\frac{\mu u}{L^2}\right)} = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (3.33)$$

Le nombre de Reynolds devient donc petit comparé à l'unité, ce qui permet de négliger le terme d'inertie dans l'équation du mouvement (3.28).

$$0 = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla} \cdot \left[\tilde{\eta} \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + \left(\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} \right)^T \right) \right] \quad (3.34)$$

Le système formé par les équations (3.27) et (3.34) s'appellent les équations de Stokes. En ce qui a trait aux poudres métalliques, éliminer le terme d'inertie en le comparant aux forces visqueuses peut s'avérer une mauvaise approximation. En effet, les composés métalliques ont une densité de l'ordre de 4 g/cm^3 à 5 g/cm^3 par rapport à $\sim 1 \text{ g/cm}^3$ pour les polymères, ce qui implique que le terme d'inertie n'est plus négligeable. Cela étant dit, selon les conditions d'opération rencontrées, certains auteurs ^[1, 43, 51] choisissent d'annuler le terme d'inertie, d'autres non ^[21]. En pratique, on a fait un compromis raisonnable en imposant dans le code de calcul numérique un nombre de Reynolds non nul, mais petit par rapport à l'unité ($\text{Re}=0.001$). De cette façon, on conserve le terme d'inertie compris dans l'équation (3.28). Finalement, on remarque que la forme adimensionnelle de nos équations dépend uniquement de deux nombres adimensionnels, Gz et B . Pour alléger la notation, on laisse tomber le symbole $\sim$ sur les variables adimensionnelles pour obtenir :

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.35)$$

$$0 = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot \left[\frac{1}{Gz} \left(\frac{H}{R} \right) \nabla T \right] \quad (3.37)$$

$$\text{avec } \eta = \dot{\gamma}^m e^{-BT}$$

3.6.1 Profil de vitesse à l'entrée

On suppose que l'écoulement est pleinement développé à l'entrée du canal vertical. Comme le fluide est non-Newtonien et qu'il obéit à un modèle en loi de puissance, le profil de vitesse ne sera pas décrit par la parabole habituelle associée au cas Newtonien. Il est plutôt obtenu en solutionnant l'équation (3.36) pour v dans la partie verticale du canal. Or, on a $v=v(x)$, $u=0$ et $\partial_y p < 0$. De plus, $v(x=r)=v(x=-r)=0$,

$v_x(x=0)=0$ et $T=1$ à l'entrée. L'équation à résoudre pour $v(x)$ devient

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right), \text{ où } \eta = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \right]^m e^{-B} = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^m e^{-B} \quad (3.38)$$

Sans en faire la démonstration, on arrive au résultat suivant pour $v(x)$

$$v(x) = \begin{cases} 4 \left(\frac{2m+3}{m+2} \right) \left[1 - (2x)^{\frac{m+2}{m+1}} \right] & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 4 \left(\frac{2m+3}{m+2} \right) \left[1 - (-2x)^{\frac{m+2}{m+1}} \right] & \text{si } -1/2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

La figure 3.4 présente l'allure de ce profil de vitesse à l'entrée pour différentes valeurs du paramètre m . On remarque que la courbe où $m=0$ décrit la parabole typique

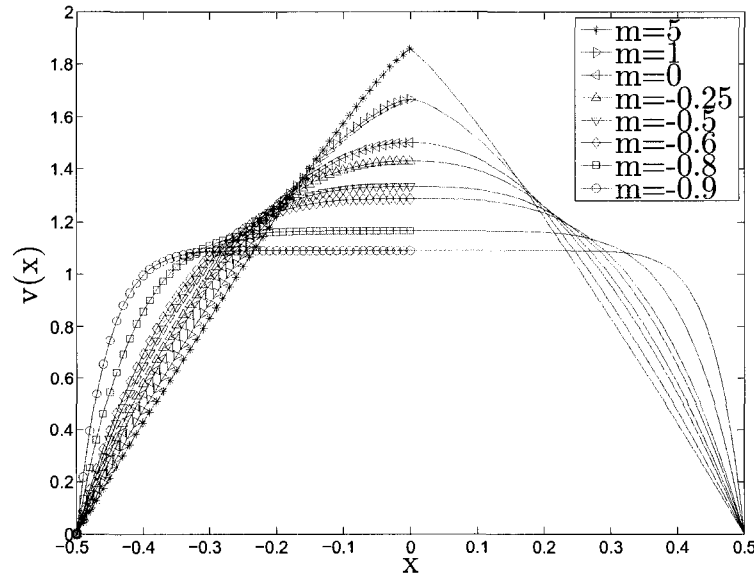


FIG. 3.4 Profil de vitesse à l'entrée pour différentes valeurs de m . À noter que lorsque $m = 0$, $v(x)$ est Newtonien.

du comportement d'un fluide Newtonien. Lorsque $m < 0$, la force de cisaillement près de la paroi est plus élevée, ce qui entraîne une diminution de la viscosité, et il en résulte une augmentation du taux de cisaillement pour maintenir ce niveau

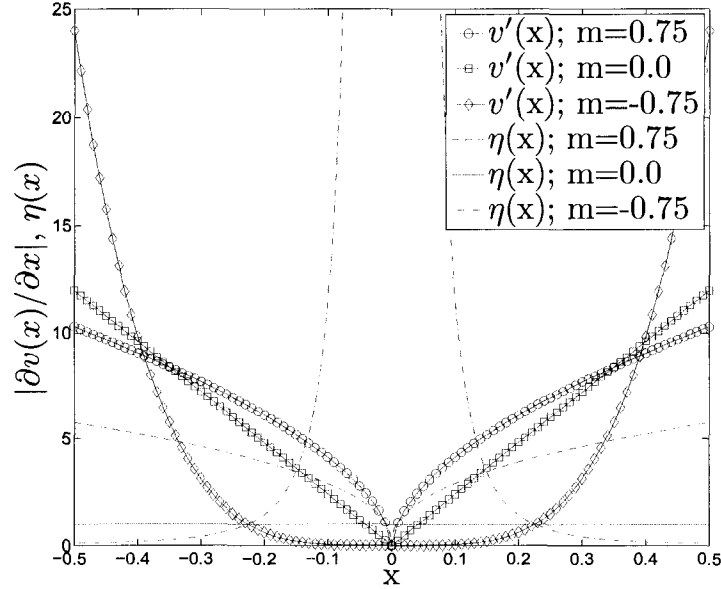


FIG. 3.5 Courbe de $|\partial v(x)/\partial x|$ et de $\eta(x)$ pour trois valeurs de m . À noter que lorsque $m = 0$, $\eta(x)$ est constant.

élevé de cisaillement. Par contre, au centre du canal le cisaillement est faible et la viscosité est élevée, ce qui aplatit le profil de vitesse. Lorsque $m > 0$, l'inverse est vrai et le profil de vitesse devient plus pointu que le profil Newtonien. Pour ce travail, le paramètre rhéologique m vaut -0.8 , une valeur telle que l'écoulement puisse être instable sur une plage de valeur de Gz et B ^[38]. L'équation pour $v(x)$ devient alors

$$v(x) = \left(\frac{14}{3}\right) [1 - (2x)^6] \quad (3.39)$$

Une fois $v(x)$ obtenu, on peut tracer la courbe de la viscosité $\eta(x)$ en entrée en fonction de x et du paramètre m . Rappelons que la viscosité à l'entrée du canal

vertical s'écrit :

$$\eta = \left[\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \right]^m e^{-BT} = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^m e^{-BT} \quad (3.40)$$

La figure 3.5 montre l'allure de $|\partial v(x)/\partial x|$ et $\eta(x)$ pour trois valeurs de m (0.75, 0 et -0.75) avec $T=1$ en entrée et $B=0$. On remarque que pour $m=0$ la viscosité est constante, ce qui correspond à un fluide Newtonien avec un profil de vitesse parabolique. Lorsque $m > 0$ on constate que près des parois, la valeur de la viscosité est élevée et décroît régulièrement en s'approchant de $x=0$, puis chute rapidement vers zéro en $x=0$ (i.e. le centre du canal). En conséquence, le cisaillement est moins important près des parois et est plus élevé dans la partie centrale du canal comparé à $m=0$, ce qui se traduit par un profil de vitesse plus pointu que le profil de vitesse Newtonien. Par contre, lorsque $m < 0$, la viscosité est faible près des parois et croît constamment et rapidement en allant vers le centre du canal. On retrouve donc un cisaillement important près des parois et qui diminue rapidement dans la région centrale du canal. Dans ce cas, le profil de vitesse est aplati par rapport au profil de vitesse Newtonien. La valeur fixée pour m dans nos simulations est de -0.8 [38]. Ce choix fait apparaître une discontinuité en $x=0$ pour la viscosité. En effet, la valeur de $\eta(x)$ devient infinie en $x=0$ car la dérivée du profil de vitesse $v(x)$ est nulle à ce point. Pour remédier à ce problème, on impose une régularisation dans l'expression de la viscosité (voir chapitre 6).

3.6.2 Définition et interprétation des nombres de Graetz et B

Les équations (3.36) et (3.37) font apparaître deux nombres adimensionnels, le nombre de Gz et B . Le nombre de Graetz peut s'exprimer sous la forme $Gz=(H/R)Pe$. Le nombre de Péclet est le ratio du transfert de chaleur par

convection et du transfert de chaleur par conduction. Le nombre de Gz représente alors le ratio entre le transfert de chaleur par convection dans la direction ayant une longueur caractéristique R , et le transfert de chaleur par conduction dans la direction donnée par la longueur caractéristique H [7]. Une autre manière de présenter le nombre de Gz est de dire qu'il fournit le ratio entre un temps caractéristique où le transfert de chaleur se fait par conduction (i.e. $t_{cond}=H^2\rho c_p/k$) et un temps caractéristique où le transfert de chaleur se produit par convection (i.e. $t_{conv}=R/u$). Une faible valeur de Gz indique qu'il y a suffisamment de temps pour un abaissement substantiel de la température du fluide. Par contre, une valeur élevée de Gz indique un temps de refroidissement trop court pour observer un abaissement substantiel de la température. Une variation du nombre de Gz peut être interprétée aussi comme un changement de géométrie. Une petite valeur Gz peut être associée à une géométrie où le canal horizontal est long et étroit (H faible et R grand).

Le nombre adimensionnel B représente le ratio entre le changement de température à l'intérieur de l'écoulement $T_0 = (T_a - T_r)$ et l'accroissement de température $\Delta T_{rhéol}$. La température caractéristique $\Delta T_{rhéol}$ donne l'accroissement ou la diminution de la température nécessaire pour une diminution ou une augmentation de viscosité par un facteur e , où e est la base du logarithme népérien. Une faible valeur de $\Delta T_{rhéol}$ implique que la viscosité dépend fortement de T . Le nombre B reflète donc la sensibilité de la viscosité aux changements de température. Par exemple, une valeur élevée de B indique que la combinaison de la sensibilité en température de la viscosité et la différence de température $(T_a - T_r)$, entraîne un changement élevé de la viscosité si le fluide a le temps nécessaire pour se refroidir.

3.7 Équations des sensibilités

Les équations des sensibilités s'obtiennent en dérivant implicitement les équations (3.35), (3.36) et (3.37) par rapport à un paramètre a . En plus de leurs dépendances sur l'espace et le temps, les variables d'état peuvent également dépendre du paramètre a . Cette dépendance se note

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t; a), \quad p = p(\mathbf{x}, t; a) \text{ et } T = T(\mathbf{x}, t; a). \quad (3.41)$$

En utilisant les définitions suivantes pour les sensibilités des variables dépendantes

$$s_{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}, \quad s_p = \frac{\partial p}{\partial a} \text{ et } s_T = \frac{\partial T}{\partial a}, \quad (3.42)$$

on obtient le système d'équations des sensibilités suivant :

$$0 = \nabla \cdot s_{\mathbf{u}} \quad (3.43)$$

$$0 = -\nabla s_p + \nabla \cdot \left[\eta \left(\nabla s_{\mathbf{u}} + (\nabla s_{\mathbf{u}})^T \right) \right] + \nabla \cdot \left[\frac{d\eta}{da} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial s_T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left[\frac{1}{Gz} \frac{H}{R} \nabla s_T \right] - \nabla \cdot \left[\frac{1}{Gz^2} \frac{H}{R} \left(\frac{dGz}{da} \right) \nabla T \right] \quad (3.45)$$

Sachant que la viscosité dépend du taux de cisaillement et de la température,

$$\eta = \eta \left(\dot{\gamma}(\mathbf{u}(a)), T(a); a \right). \quad (3.46)$$

On obtient l'équation suivante pour sa dérivée totale (i.e. sa sensibilité)

$$\frac{d\eta}{da} = \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{u}} s_{\mathbf{u}} + \frac{\partial \eta}{\partial T} s_T + \frac{\partial \eta}{\partial a}. \quad (3.47)$$

Or, l'expression de η s'écrit

$$\eta = \left[\sqrt{2(\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2(\partial_y v)^2} \right]^m e^{-BT} \quad (3.48)$$

En dérivant directement la relation (3.48) par rapport au paramètre a et à l'aide de l'identité suivante

$$\frac{d}{da} (\sqrt{u})^m = \frac{d}{da} e^{(\frac{m}{2}) \ln u}, \quad (3.49)$$

on aboutit à l'expression suivante de la sensibilité de la viscosité.

$$\frac{d\eta}{da} = s_\eta = \eta \left[\left(\frac{1}{2} \alpha \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \beta \right) - \left(Bs_T + T \frac{dB}{da} \right) \right] \quad (3.50)$$

où α et β sont donnés par

$$\alpha = \ln [2(\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2(\partial_y v)^2] \quad (3.51)$$

$$\beta = \left[\frac{4(\partial_x u)(\partial_x s_u) + 2(\partial_y u + \partial_x v)(\partial_y s_u + \partial_x s_v) + 4(\partial_y v)(\partial_y s_v)}{2(\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2(\partial_y v)^2} \right] \quad (3.52)$$

Le système d'équations des sensibilités comporte trois paramètres : Gz , B et m . Il y a donc trois sensibilités possibles pour la viscosité η : la sensibilité de η par rapport à Gz , B où encore par rapport à m . L'expression 3.50 s'écrit donc de la manière suivante pour chacun des trois cas.

$$a = Gz; \quad \frac{dm}{da} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dB}{da} = 0 \Rightarrow \frac{d\eta}{dGz} = \eta \left[\left(\frac{m}{2} \beta \right) - (Bs_T) \right] \quad (3.53)$$

$$a = B; \quad \frac{dm}{da} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dB}{da} = 1 \Rightarrow \frac{d\eta}{dB} = \eta \left[\left(\frac{m}{2} \beta \right) - (Bs_T + T) \right] \quad (3.54)$$

$$a = m; \quad \frac{dm}{da} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dB}{da} = 0 \Rightarrow \frac{d\eta}{dm} = \eta \left[\left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{m}{2} \beta \right) - (Bs_T) \right] \quad (3.55)$$

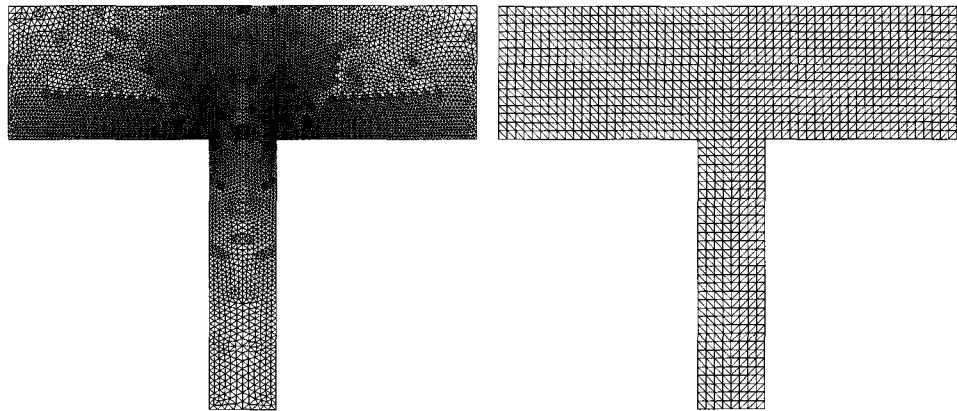
3.8 Le maillage du domaine de calcul

3.8.1 Généralités

Le maillage est une partition de l'espace physique en entités géométriques simples sur lesquelles on discrétise les EDP décrivant la physique d'intérêt. La simulation numérique des phénomènes physiques est réalisée soit par éléments finis, volume finis ou différences finies. Ce support géométrique doit rencontrer un certain nombre d'exigences, telles que d'avoir une structure et une densité de point qui permettent de représenter adéquatement les forts gradients de la solution. Le maillage est déterminant dans le comportement et la précision de la solution numérique recherchée.

3.8.2 Le choix du maillage

On s'intéresse ici à la stabilité d'un écoulement symétrique à l'intérieur d'une géométrie symétrique (voir la figure 3.1). Ce type d'écoulement devient asymétrique lorsqu'il est soumis aux effets combinés du cisaillement et de la température, lorsqu'il se trouve dans une certaine plage de Gz et B . Parfois cette asymétrie s'amplifie au point de forcer tout le fluide à sortir d'un seul côté du canal d'amenée. Le résultat est la fabrication de pièces défectueuses. En pratique, la simulation peut présenter des instabilités en réponse à des perturbations d'origines physiques et/ou numériques. De toute évidence, seul les déterminants physiques ont une signification réelle pour le manufacturier. Il importe donc que les techniques numériques retenues minimisent l'apparition d'artéfacts numériques. Le maillage est l'un des ingrédients qui cause le plus d'oscillations et d'instabilités artificielles qui n'ont rien à voir avec la réalité.



(a) Maillage conventionnel

(b) Maillage symétrique

FIG. 3.6 Exemple de maillage utilisé lors des simulations : (a) présente un maillage irrégulier de 13601 noeuds, (b) un maillage régulier et symétrique de 1257 noeuds.

Considérons par exemple un écoulement parfaitement symétrique en équilibre instable à l'intérieur du canal. Imaginons ensuite l'apparition d'une faible perturbation due à une asymétrie du champ de température, elle-même provoquée par une asymétrie du maillage. Si cette perturbation devient supérieure à la perturbation des conditions limites (voir figure 3.2), elle peut alors faire basculer l'écoulement dans un régime instable, entraînant le fluide à s'écouler uniquement vers l'une des deux sorties. En effet, un écoulement en équilibre instable devient non-symétrique (hors équilibre), lorsqu'il est perturbé. L'asymétrie du maillage est une perturbation comme une autre. L'inconvénient est qu'on ne peut pas contrôler les erreurs de discrétisation. Dans de telles circonstances, un maillage symétrique et régulier permettra d'éliminer et de prévenir de tels phénomènes indésirables. La figure 3.6(a) montre un maillage irrégulier pourtant très fin, mais présentant une faible symétrie et ayant servi à une première série de calculs. Ce maillage a posé quelques difficultés, notamment pour les cas instables en forçant l'écoulement à sortir du mauvais côté. Les perturbations numériques liées au maillage, que l'on ne peut pas contrôler, étaient plus importantes que les perturbations physiques imposées. On rappelle

que la perturbation de température imposée sur la paroi inférieure droite du canal horizontal (voir figure 3.2) contrôle la direction de l'écoulement dans les régimes instables. L'utilisation d'un maillage tel que celui présenté sur la figure 3.3(a) nous a fait perdre ce contrôle. En effet, il arrive parfois que le fluide s'écoule vers la sortie de gauche au lieu de celle de droite. Ce problème a été surmonté en effectuant les calculs subséquents sur un maillage symétrique et régulier comme celui montré sur la figure 3.6(b). Le maillage utilisé pour les calculs numériques est identique à celui montré sur la figure 3.6(b), sauf qu'il contient 18849 noeuds.

CHAPITRE 4

MÉTHODE DE RÉOLUTION

Dans ce chapitre nous dressons un rapide portrait de la méthode numérique retenue pour résoudre le système d'équations différentielles qui décrit notre modèle

4.1 Méthode des éléments finis

La résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), occupe une place importante en science et en génie. Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes numériques à notre disposition. Toutes font appel à une discrétisation qui transforme les équations aux dérivées partielles en système algébrique. On pense entre autres aux méthodes de différences finies, de volumes finis, spectrales (basée sur les séries de Fourier) et finalement aux méthodes d'éléments finis qui reposent sur la formulation variationnelle des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est probablement l'approche la plus générale. Elle repose sur une base mathématique solide et rigoureuse, qui permet de prévoir la précision de l'approximation et même de l'améliorer. La méthode des éléments finis se décrit en quelques étapes. On établit d'abord la forme faible du système d'équations aux dérivées partielles. Ensuite on discrétise la forme faible pour obtenir un système d'équations algébriques que l'on peut résoudre par factorisation LU ou bien par une méthode itérative.

$$EDP \xrightarrow{\text{intégration}} \text{forme faible} \xrightarrow{\text{discrétisation}} Ax = b \xrightarrow{\text{résolution}} \text{solution}$$

4.1.1 Formulation variationnelle

La *formulation variationnelle* ou *forme faible* d'une EDP s'obtient en la multipliant par une fonction *test* δ (*méthode de Ritz* ¹) et en intégrant le tout sur le domaine de calcul Ω . Une intégration par parties des termes du second ordre (*Théorème de Gauss*) permet de faire ressortir naturellement les conditions aux frontières naturelles ou de Neumann.

4.1.1.1 Forme faible des équations de Navier-Stokes

Rappelons que les équations de continuité, de Navier-Stokes et de l'énergie en régime instationnaire s'écrivent comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] + \mathbf{f} \quad (4.2)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + q_s + \Phi \quad (4.3)$$

où $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p = p(\mathbf{x}, t)$ et $T = T(\mathbf{x}, t)$. Dans le cas présent, il n'y a aucune force volumique $\mathbf{f}$, ni de source de chaleur q_s et la dissipation visqueuse Φ est nulle.

¹Si les fonctions test δ sont égales aux fonctions d'interpolation, on parle alors de la *méthode de Galerkin*.

En appliquant la méthode décrite ci-dessus on arrive au système suivant :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p d\Omega = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} (\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} - p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} + 2\eta \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} \delta T d\Omega + \rho c_p \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} k (\nabla T \cdot \nabla \delta T) d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega} k \nabla T \cdot \mathbf{n} \delta T d\Gamma \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $\delta \mathbf{u}$, δp et δT sont les fonctions test en $\mathbf{u}$, p et T respectivement.

4.1.1.2 Forme faible des équations de sensibilités

Rappelons également les équations de sensibilités correspondant aux équations de continuité, de Navier-Stokes et d'énergie,

$$\nabla \cdot s_{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \rho' \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \rho \left(\frac{\partial s_{\mathbf{u}}}{\partial t} + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathbf{u}} \right) \\ = -\nabla s_p + \nabla \cdot \left[\eta' \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \eta \left(\nabla s_{\mathbf{u}} + (\nabla s_{\mathbf{u}})^T \right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} (\rho' c_p + \rho c'_p) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) + \rho c_p \left(\frac{\partial s_T}{\partial t} + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T \right) \\ = \nabla \cdot (k' \nabla T + k \nabla s_T) \end{aligned} \quad (4.9)$$

où $s_{\mathbf{u}}$, s_p et s_T , sont les sensibilités en $\mathbf{u}$, p et T respectivement.

On obtient le système suivant pour la forme faible des équations de sensibilités :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot s_{\mathbf{u}} \delta s_p d\Omega = 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \rho' \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) \delta s_{\mathbf{u}} d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left(\frac{\partial s_{\mathbf{u}}}{\partial t} + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla s_{\mathbf{u}} \right) \delta s_{\mathbf{u}} d\Omega + \\ & \int_{\Omega} [2\eta' \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2\eta \dot{\gamma}(s_{\mathbf{u}})] : \dot{\gamma}(\delta s_{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Omega} s_p \nabla \cdot \delta s_{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \cdot \delta s_{\mathbf{u}} d\Gamma \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & (\rho' c_p + \rho c'_p) \int_{\Omega} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) \delta s_T d\Omega + \\ & \rho c_p \int_{\Omega} \left(\frac{\partial s_T}{\partial t} + s_{\mathbf{u}} \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T \right) \delta s_T d\Omega + \\ & \int_{\Omega} (k' \nabla T + k \nabla s_T) \cdot \nabla \delta s_T d\Omega = \int_{\partial\Omega} (k' \nabla T + k \nabla s_T) \cdot \mathbf{n} \delta s_T d\Gamma \end{aligned} \quad (4.12)$$

où $\delta s_{\mathbf{u}}$, δs_p et δs_T sont les fonctions test en $s_{\mathbf{u}}$, s_p et s_T respectivement. Dans la prochaine section, on rappelle les conditions aux frontières pour l'écoulement et les sensibilités

4.2 Conditions aux frontières pour l'écoulement et les sensibilités

Pour qu'un problème d'écoulement soit mathématiquement bien posé, on doit nécessairement définir un ensemble de conditions aux frontières du calcul. La résolution des équations (4.1), (4.2) et (4.3) se fait dans un domaine de calcul Ω , borné par une frontière $\partial\Omega$. Les conditions aux frontières de Dirichlet Γ_D (es-

sentielles) et de Neumann Γ_N (*naturelles*) sont imposées sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{sur } \Gamma_D^{\mathbf{u}} \quad (4.13)$$

$$(-p\mathbf{I} + \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{t} \quad \text{sur } \Gamma_N^t \quad (4.14)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_D^T \quad (4.15)$$

$$k\nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_N^q \quad (4.16)$$

où les frontières pour l'écoulement $\partial\Omega_1$ et la température $\partial\Omega_2$ sont données respectivement par : $\partial\Omega_1 = \Gamma_D^{\mathbf{u}} \cup \Gamma_N^t$ avec $\Gamma_D^{\mathbf{u}} \cap \Gamma_N^t = \emptyset$ et $\partial\Omega_2 = \Gamma_D^T \cup \Gamma_N^q$ avec $\Gamma_D^T \cap \Gamma_N^q = \emptyset$. Le calcul de la sensibilité des conditions limites découle de la même règle que pour les équations de l'écoulement : on différentie les conditions aux frontières par rapport à un paramètre d'intérêt a . On obtient ainsi,

$$s_{\mathbf{u}} = s_{\bar{\mathbf{u}}} \quad \text{sur } \Gamma_D^{\mathbf{u}} \quad (4.17)$$

$$(-s_p\mathbf{I} + \mu'\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) + \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s_{\mathbf{u}})) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{t}' \quad \text{sur } \Gamma_N^t \quad (4.18)$$

$$s_T = s_{\bar{T}} \quad \text{sur } \Gamma_D^T \quad (4.19)$$

$$(k'\nabla T + k\nabla s_T) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{q}' \quad \text{sur } \Gamma_N^q \quad (4.20)$$

Les frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ demeurent inchangées. Nous supposons que le paramètre a n'affecte pas la géométrie du domaine. Dans le contexte, nous traitons le paramètre comme un paramètre de *valeur*. Un paramètre a qui influence la géométrie du domaine ou bien sa frontière porte le nom de paramètre de *forme*.

4.3 Discrétisation éléments finis

La forme variationnelle ² ayant été obtenue, il reste à la discrétiser à l'aide de la méthode de Galerkin, qui consiste à prendre les fonctions d'interpolation de la solution discrète comme fonction test. Pour la composante horizontale de la vitesse $\mathbf{u}$ nous avons :

$$u^K(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_d^K} u_j^K(t) \Psi_{u_j}^K(\mathbf{x}) \quad (4.21)$$

$$\delta_{u_j}^K(\mathbf{x}) = \Psi_{u_j}^K(\mathbf{x}) \quad (4.22)$$

où u^K est la solution éléments finis pour l'écoulement sur l'élément K. u_j^K représente les valeurs nodales, $\Psi_{u_j}^K$ sont les fonctions d'interpolation et finalement, n_d^K est le nombre de noeuds de calcul sur le $K^{ième}$ élément et $\delta_{u_j}^K$ sont les fonctions test associées aux noeuds j. On procède de la même façon pour v , la composante verticale de $\mathbf{u}$, la température T et la pression p . La solution éléments finis pour la sensibilité s_u^K s'écrit alors :

$$s_u^K(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n_d^K} s_{u_j}^K(t) \Psi_{s_{u_j}}^K(\mathbf{x}) \quad (4.23)$$

$$\delta_{s_{u_j}}^K(\mathbf{x}) = \Psi_{s_{u_j}}^K(\mathbf{x}) \quad (4.24)$$

où $s_{u_j}^K$ représente les valeurs nodales, $\Psi_{s_{u_j}}^K$ sont les fonctions d'interpolation. Enfin, $\delta_{s_{u_j}}^K$ sont les fonctions test associées aux noeuds j. Encore une fois, on procède de la même façon pour s_v^K , s_T^K et s_p^K .

²On dira quasi-variationnelle, car la dérivée temporelle n'a pas encore été discrétisée.

4.3.1 Fonctions d'interpolation

Les fonctions d'interpolation $\Psi_{u_j}^K$ et $\Psi_{s_{u_j}}^K$ présentent la propriétés dites de collocation sur un élément de référence R :

$$\Psi_j^R(x_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.25)$$

Ceci nous indique que les fonctions d'interpolation prennent chacune une valeur égale à un sur un des noeuds de l'élément et zéro sur tous les autres. On remarquera que seuls les degrés de liberté dépendent du temps. De plus, les fonctions d'interpolations Ψ_j^K demeurent les mêmes que l'on soit en régime stationnaire ou instationnaire.

4.3.2 Le choix des éléments

Nous utilisons l'élément de Taylor-Hood ($P_2 - P_1$). Il est quadratique en vitesse et en température et linéaire en pression.

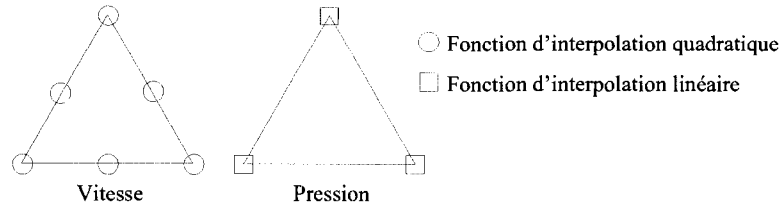


FIG. 4.1 Élément fini de type Taylor-Hood $P_2 - P_1$ ($O(h^2)$).

$$u : \Psi_{u_j}^K = a_j^u + b_j^u x + c_j^u y + d_j^u xy + e_j^u x^2 + f_j^u y^2 \quad (4.26)$$

$$p : \Psi_{p_j}^K = a_j^p + b_j^p x + c_j^p y \quad (4.27)$$

Par simplicité, on discrétise les équations de sensibilités de la même manière.

4.3.3 Discrétisation en temps

Une fois l'espace discrétisé, il reste à discrétiser la dérivée temporelle. La méthode la plus simple consiste à approcher la dérivée temporelle par une différence finie. Parmi les variantes possibles, on retient le schéma- θ pour sa simplicité. Le choix d'un schéma particulier doit être motivé avant tout par sa stabilité. Le schéma- θ s'écrit comme suit,

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1} \left[\theta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{n+1} + (1 - \theta) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_n \right] \quad (4.28)$$

Selon la valeur de θ , on retrouve plusieurs schémas classiques :

- $\theta = 0 \Rightarrow$ le schéma d'Euler explicite d'ordre 1.
- $\theta = 1 \Rightarrow$ le schéma d'Euler implicite d'ordre 1.
- $\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$ le schéma de Crank-Nicholson d'ordre 2.

Toutes les simulations présentées dans ce mémoire ont été faites avec la méthode d'Euler implicite.

4.3.4 Résidus des équations et linéarisation de Newton

Les équations de Navier-Stokes sont *non linéaires* à cause du terme de convection et de la loi de comportement. Il en découle que la formulation variationnelle associée ne respecte plus le *Théorème de Lax-Milgram*. Pour résoudre un tel système on procède par linéarisation, c'est-à-dire ramener la solution d'un problème non linéaire à la solution d'une séquence de problèmes linéaires convergeant vers la solution du problème non linéaire initial. Pour ce faire, nous avons retenu la méthode de Newton, pour résoudre un système de la forme $\mathbf{R}(\mathbf{u}, p) = 0$. Par exemple, les résidus

associés à l'équation de continuité et aux équations du mouvement s'écriront :

$$\mathbf{R}_p(u, v, p) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta p d\Omega = 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(u, v, p) = & \rho \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t_n} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \\ & \int_{\Omega} [\rho (\mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n) \cdot \delta \mathbf{u} - p_n \nabla \cdot \delta \mathbf{u}] d\Omega + \\ & 2 \int_{\Omega} \mu \dot{\gamma}(\mathbf{u}_n) : \nabla \delta \mathbf{u} d\Omega - \\ & \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$.

En dénotant par u_n^k , v_n^k et p_n^k une approximation de la solution $\mathbf{R}_u(u_n, v_n, p_n) = 0$ et $\mathbf{R}_p(u_n, v_n, p_n) = 0$, on cherche les corrections Δu_n^{k+1} , Δv_n^{k+1} et Δp_n^{k+1} telles que

$$\mathbf{R}_p(u_n^k + \Delta u_n^{k+1}, v_n^k + \Delta v_n^{k+1}, p_n^k + \Delta p_n^{k+1}) = 0 \quad (4.31)$$

$$\mathbf{R}_u(u_n^k + \Delta u_n^{k+1}, v_n^k + \Delta v_n^{k+1}, p_n^k + \Delta p_n^{k+1}) = 0 \quad (4.32)$$

Pour linéariser les équations (4.31) et (4.32), on utilise un développement en série de Taylor. Rappelons que si une fonction $\mathbf{F}$ dépend des variables $x_1, x_2, \dots, x_i$, c'est-à-dire que $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_i)$, alors le développement en série de Taylor de $\mathbf{F}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_i + \Delta x_i) = & \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_i) + \frac{\partial \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_i)}{\partial x_1} \Delta x_1 \\ & + \frac{\partial \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_i)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_i)}{\partial x_i} \Delta x_i \\ & + \mathcal{O}^2(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i). \end{aligned} \quad (4.33)$$

En appliquant un développement similaire à l'équation (4.32) pour le résidu de la composante u de la vitesse, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_u(u_n^k + \Delta u_n^{k+1}, v_n^k + \Delta v_n^{k+1}, p_n^k + \Delta p_n^{k+1}) &= \mathbf{R}_u(u_n^k, v_n^k, p_n^k) \\ &+ \frac{\partial \mathbf{R}_u(u_n^k, v_n^k, p_n^k)}{\partial u_n} \Big|_k \Delta u_n^{k+1} + \frac{\partial \mathbf{R}_u(u_n^k, v_n^k, p_n^k)}{\partial v_n} \Big|_k \Delta v_n^{k+1} + \frac{\partial \mathbf{R}_u(u_n^k, v_n^k, p_n^k)}{\partial p_n} \Big|_k \Delta p_n^{k+1} \\ &+ \mathcal{O}^2(\Delta u_n^{k+1}, \Delta v_n^{k+1}, \Delta p_n^{k+1}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

où k dénote l'itération courante de la méthode de Newton. On effectue le même développement pour la composante v de la vitesse et l'équation de continuité. En négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_u(x_{n,j}^k)}{\partial u_n} \Big|_k & \frac{\partial \mathbf{R}_u(x_{n,j}^k)}{\partial v_n} \Big|_k & \frac{\partial \mathbf{R}_u(x_{n,j}^k)}{\partial p_n} \Big|_k \\ \frac{\partial \mathbf{R}_v(x_{n,j}^k)}{\partial u_n} \Big|_k & \frac{\partial \mathbf{R}_v(x_{n,j}^k)}{\partial v_n} \Big|_k & \frac{\partial \mathbf{R}_v(x_{n,j}^k)}{\partial p_n} \Big|_k \\ \frac{\partial \mathbf{R}_p(x_{n,j}^k)}{\partial u_n} \Big|_k & \frac{\partial \mathbf{R}_p(x_{n,j}^k)}{\partial v_n} \Big|_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_n^{k+1} \\ \Delta v_n^{k+1} \\ \Delta p_n^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_u(x_{n,j}^k) \\ -\mathbf{R}_v(x_{n,j}^k) \\ -\mathbf{R}_p(x_{n,j}^k) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

où $x_{n,j}^k$ représente les valeurs nodales des variables indépendantes, par exemple $x_{n,1}^k = u_n^k$. Si la méthode de Newton converge lorsque k devient grand, on aura :

$$\mathbf{R}_i(x_{n,j}^k) \rightarrow 0, \quad \Delta x_{n,j}^{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad x_{n,j}^k \rightarrow x_{n,j}, \quad \text{la solution.} \quad (4.36)$$

Une fois $x_{n,j}^k$ trouvé, on boucle sur le temps pour obtenir la solution $x_{n+1,j}^k$ au pas de temps suivant.

4.3.5 Jacobien numérique

L'évaluation des différentes dérivées contenues dans la matrice jacobienne se fait en approchant chacune des dérivées par une différence finie

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{R}_i(x_{n,j}^k)}{\partial x_{n,j}} = \frac{\mathbf{R}_i(x_{n,j}^k + \Delta) - \mathbf{R}_i(x_{n,j}^k)}{\Delta}. \quad (4.37)$$

où la valeur de Δ est petite.

4.3.6 Méthode de Newton-Raphson

Pour trouver la solution du système algébrique $\mathbf{R}_i(x_{n,j}^k)=0$ par la méthode de Newton-Raphson, on initialise les variables d'état à zéro puis on applique quelques cycles successifs de substitution. Cette dernière a l'avantage d'avoir un rayon de convergence assez vaste, permettant d'obtenir une estimation de la solution à l'intérieur du rayon de convergence plus petit de la méthode de Newton, assurant ainsi une convergence vers la solution recherchée. Il est souhaitable d'exploiter au maximum la méthode de Newton étant donné son taux de convergence quadratique par opposition à la convergence linéaire de la méthode de substitution. Le processus itératif de Newton s'écrit simplement comme suit :

$$\mathbf{J}_{ij} \Delta x_{n,j}^{k+1} = -\mathbf{R}_i(x_{n,j}^k) \quad (4.38)$$

$$x_{n,j}^{k+1} = x_{n,j}^k + \Delta x_{n,j}^{k+1} \quad (4.39)$$

4.3.7 Factorisation conditionnelle

On introduit ici brièvement la notion de *factorisation conditionnelle* qui permet un gain notable de temps de calcul. Normalement pour calculer le vecteur de correc-

tion $\Delta x_{n,j}^{k+1}$ à chaque itération k , on doit inverser la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{ij}$ par une factorisation LU . Or, on sait qu'une telle opération est en général très coûteuse en temps de calcul. L'astuce pour éviter une nouvelle factorisation est d'approcher $\mathbf{J}_{ij}(x_{n,j}^k)$ par $\mathbf{J}_{ij}(x_{n,j}^{k-1})$ lorsque $\Delta x_{n,j}^{k+1} \ll 1$. La convergence est toujours assurée sauf que le nombre d'itérations nécessaire pour y arriver est plus élevé. En revanche, le temps gagné en ne factorisant pas une matrice jacobienne de grande taille surpasse de loin celui attribué à un nombre plus grand d'itération. Cette astuce est donc très efficace. La figure 4.2 illustre ce qui se passe dans le cas unidimensionnel. Concernant les sensibilités, on observe qu'une formulation de type Galerkin sans stabilisation mène à une matrice jacobienne indépendante du paramètre a considéré. En effet, la matrice jacobienne $\mathbf{J}$ utilisée dans le processus itératif de Newton est identique à la matrice jacobienne des sensibilités.

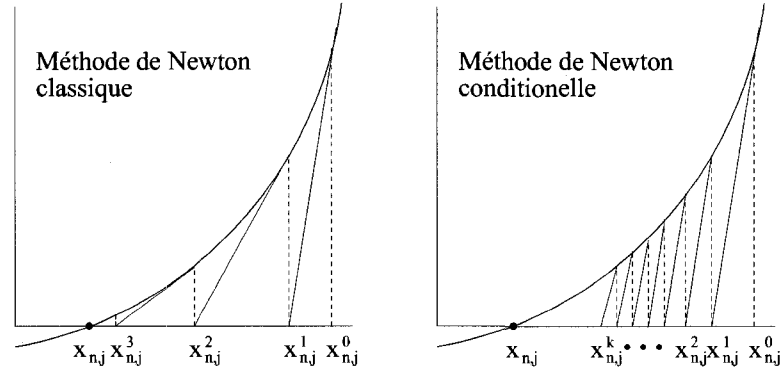


FIG. 4.2 Illustration de la factorisation conditionnelle.

CHAPITRE 5

VÉRIFICATIONS

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons discuté de la méthode de résolution du système d'équations différentielles. En général, nous devons nous assurer que l'implémentation dans le code de calcul soit adéquate et que le résolveur nous fournit des résultats robustes et précis. C'est ce que l'on appelle l'opération de *vérification* du code.

En adoptant la philosophie de Boehm, Blotter et Roache, on distingue trois idées : La *vérification du code*, la *vérification des calculs* et la *validation*. On peut les résumer de la manière suivante,

« *Vérification* » $\sim$ résoudre les équations de la *bonne* manière.

« *Validation* » $\sim$ résoudre les *bonnes* équations.

La vérification est donc un processus purement mathématique, qui n'a rien à voir avec le réalisme physique de nos équations qui lui est sujet au processus de validation. La vérification porte son attention sur les sources d'erreurs numériques, tandis que la validation s'intéresse aux erreurs conceptuelles du modèle. Plus précisément, la vérification du code implique *l'évaluation* de l'erreur à l'aide d'une solution connue afin d'établir le bon fonctionnement du code. La vérification des calculs porte plutôt sur *l'estimation* de l'erreur, (car en pratique la solution exacte est inconnue) assurant ainsi que le code nous donne la résolution attendue. Roache [33, 34] propose la *Méthode des Solutions Manufacturées* qui permet une vérification simple et efficace d'un code de CFD.

5.2 Solution Manufacturée

La Méthode des Solutions Manufacturées (MSM) est une démarche générale pour obtenir des solutions analytiques qui serviront à vérifier la précision du code. Premièrement, on détermine arbitrairement une solution analytique $U(\mathbf{x}, t)$ qui n'est pas *a priori* une solution des équations différentielles que l'on cherche à résoudre. On n'exige pas de cette solution d'être physiquement réaliste ^[34], puisque la démarche est purement mathématique. On demande par contre, que cette solution soit non-triviale. Elle doit être assez complexe pour que toutes les dérivées apparaissent dans les équations différentielles soient activées. Ensuite, on substitue $U(\mathbf{x}, t)$ dans les EDP pour déterminer un terme source $Q(\mathbf{x}, t)$ qui annule les termes supplémentaires engendrés par la solution choisie. La solution numérique des équations différentielles modifiées par l'addition des termes sources devrait être $U(\mathbf{x}, t)$, notre choix initial. L'exemple suivant illustre le concept. Posons une solution analytique quelconque ayant la forme suivante :

$$U(x, t) = (1 + \cos^2(x))e^{-\alpha t} \quad (5.1)$$

Définissons $\mathbb{H}$, un opérateur différentiel construit à partir d'une équation différentielle connue, comme par exemple l'équation d'onde à une dimension.

$$\mathbb{H}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (5.2)$$

Si on applique $\mathbb{H}$ à $U(x, t)$, on obtient le terme source $Q(x, t)$, c'est-à-dire,

$$Q = \mathbb{H}(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5.3)$$

$$\Rightarrow Q = [\alpha^2(1 + \cos^2(x)) - 2a^2(\sin^2(x) - \cos^2(x))] e^{-\alpha t} \quad (5.4)$$

Si on résoud l'équation différentielle (5.2) modifiée par l'addition du terme source Q

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Q(x, t) = 0, \quad (5.5)$$

avec les conditions limites et initiales appropriées, on obtient forcément la solution $U(x, t)$ donnée par l'expression (5.1). Le choix de la solution $U(x, t)$ doit être guidé par la simplicité sans être triviale. On évite les fonctions contenant des discontinuités et les séries infinies qui sont en général difficiles à évaluer avec précision. Cette méthode est générale et s'applique à une variété de systèmes d'équations différentielles, qu'ils soient simples ou complexes. Ainsi, les équations complètes de Navier-Stokes couplées à l'équation de l'énergie peuvent être abordées.

5.2.1 Utilité pour la vérification d'un code

La solution analytique exacte $U(x, t)$ obtenue par le biais de la MSM, sert à vérifier la performance du code de calcul de la manière suivante. En effet, on peut calculer l'erreur exacte et observer son comportement lorsqu'on raffine le maillage. On procède généralement en raffinant la discrétisation en espace et en temps, c'est-à-dire $h_x = \Delta x$ et $h_t = \Delta t$ respectivement. Pour vérifier d'une part que la solution discrète converge bien vers la solution exacte lorsque $(h_x, h_t) \rightarrow 0$ et d'autre part à quel taux elle converge vers cette solution exacte, on utilise un théorème qui découle de la théorie des éléments finis. Sans entrer dans les détails et sans en donner une démonstration, le théorème s'énonce comme suit :

$$\|u_h - u\|_{m, \Omega} \leq Ch^{k+1-m} \|u\|_{k+1, \Omega} \quad (5.6)$$

où u_h et u représente respectivement la solution discrète et la solution analytique. k désigne le degré des polynômes d'interpolation, tandis que m désigne le degré de l'espace fonctionnel. Le taux de convergence du schéma numérique sera $p=k+1-m$. Pour les équations aux dérivées partielles d'ordre deux, l'espace de base est $H^1(\Omega)$, de sorte que $m=1$. De plus, on utilise des éléments quadratiques, alors $k=2$, ce qui implique que $p=2$. Nous avons donc une convergence d'ordre deux en espace pour les vitesses. L'utilisation d'éléments linéaires pour la pression impose $k=1$ et implique que le taux de convergence est linéaire en pression. De plus, le schéma numérique d'Euler d'ordre un employé pour la variable temporelle limite le taux de convergence q à un.

$$E_{exa} = u_h - u = C_x h_x^p + C_t h_t^q + \mathcal{O}(sup.) = C_x h_x^2 + C_t h_t + \mathcal{O}(sup.) \quad (5.7)$$

L'erreur exacte comporte une composante spatiale et une composante temporelle, c'est-à-dire :

$$E_{exa}^{espace} = C_x h_x^p + \mathcal{O}(sup.) \quad (5.8)$$

$$E_{exa}^{temps} = C_t h_t^q + \mathcal{O}(sup.) \quad (5.9)$$

Pour estimer l'ordre de précision du code, on suppose que si h tend vers zéro, le premier terme de l'équation (5.8) et (5.9) est dominant. Les erreurs globales en espace $E_{m_1}^{espace}$ et $E_{m_2}^{espace}$ sont calculées respectivement sur un maillage m_1 de taille h_x et sur un maillage m_2 de taille h_x/r , où r représente le ratio de raffinement appliqué au maillage. L'équations (5.8) prend alors la forme suivante :

$$E_{m_1}^{espace} \approx C_x h_x^p \quad (5.10)$$

$$E_{m_2}^{espace} \approx C_x \left(\frac{h_x}{r} \right)^p \quad (5.11)$$

Le rapport de ces erreurs s'écrit :

$$\frac{E_{m_1}^{espace}}{E_{m_2}^{espace}} \approx \left(\frac{Ch_x^p}{Ch_x^p} \right) r^p = r^p \quad (5.12)$$

d'où l'on tire le taux de convergence p observé.

$$p = \frac{1}{\ln(r)} \ln \left(\frac{E_{m_1}^{espace}}{E_{m_2}^{espace}} \right) \quad (5.13)$$

Partant de l'équation (5.9) et en suivant le même raisonnement, on arrive aux deux résultats suivants :

$$\frac{E_{t_1}^{temps}}{E_{t_2}^{temps}} \approx \left(\frac{Ch_t^q}{Ch_t^q} \right) s^q = s^q \quad (5.14)$$

$$q = \frac{1}{\ln(s)} \ln \left(\frac{E_{t_1}^{temps}}{E_{t_2}^{temps}} \right) \quad (5.15)$$

où s désigne le ratio de raffinement temporel et q représente le taux de convergence en temps observé. En utilisant un ratio de raffinement spatial r constant, on peut ensuite comparer la suite de valeurs de p obtenue par un raffinement de maillage systématique avec le taux de convergence théorique de la méthode de discrétisation employée. La même comparaison peut être faite si l'on observe le taux de convergence en temps. On s'attend donc à observer une valeur de $p=2$ en espace et de $q=1$ en temps. Si on raffine simultanément l'espace et le temps, on désire que l'égalité suivante soit respectée,

$$\frac{E_{m_1}^{espace}}{E_{m_2}^{espace}} = \frac{E_{t_1}^{temps}}{E_{t_2}^{temps}} \Rightarrow r^p = s^q \quad (5.16)$$

En divisant h_x par deux et h_t par quatre, on s'assure que E_{exa} diminue d'un facteur quatre à chaque étape de raffinement spatio-temporel. En terminant, la Méthode des Solutions Manufacturées ne détectera pas toutes les fautes de codage possibles.

Par contre, celles qui affectent p et q deviendront apparentes. Ce ne sont pas toutes les erreurs qui affectent la précision, certaines peuvent limiter l'efficacité du code. Pour un exposé plus détaillé, on peut consulter l'ouvrage de Roache ^[34].

5.2.2 Applications

Dans cette section nous présentons la solution manufacturée utilisée pour vérifier le bon fonctionnement de notre code de calcul. Elle s'inspire d'une solution exacte des équations de Navier-stokes en deux dimensions obtenue dans un article de Taylor [12] :

$$u(x, y) = Gz^2 m^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{(-B\omega t)} \quad (5.17)$$

$$v(x, y) = -Gz^2 m^2 \sin(\pi y) \cos(\pi x) e^{(-B\omega t)} \quad (5.18)$$

$$T(x, y) = \frac{Gz^2 m^2}{4} (1 + \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi y)) e^{(-B\omega t)} \quad (5.19)$$

$$p(x, y) = Gz^2 m^2 (\cos(\pi x) + \sin(\pi y)) e^{(-B\omega t)} \quad (5.20)$$

où Gz , B et m sont les paramètres usuels du modèle, t dénote le temps et ω est un paramètre ajustable. La figure 5.1 montre l'allure de u , v , T et p . À la solution exacte en écoulement s'ajoute la solution exacte en sensibilités. Elle est obtenue en différentiant les équations (5.17) à (5.20) par rapport aux paramètres Gz , B et m . On trouve ainsi pour s_u :

$$s_u^{Gz} = 2Gzm^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{(-B\omega t)} \quad (5.21)$$

$$s_u^m = 2Gz^2 m \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{(-B\omega t)} \quad (5.22)$$

$$s_u^B = -Gz^2 m^2 \omega t \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{(-B\omega t)} \quad (5.23)$$

Les autres sensibilités se dérivent de la même manière. Pour un exposé complet, on consultera l'annexe II.

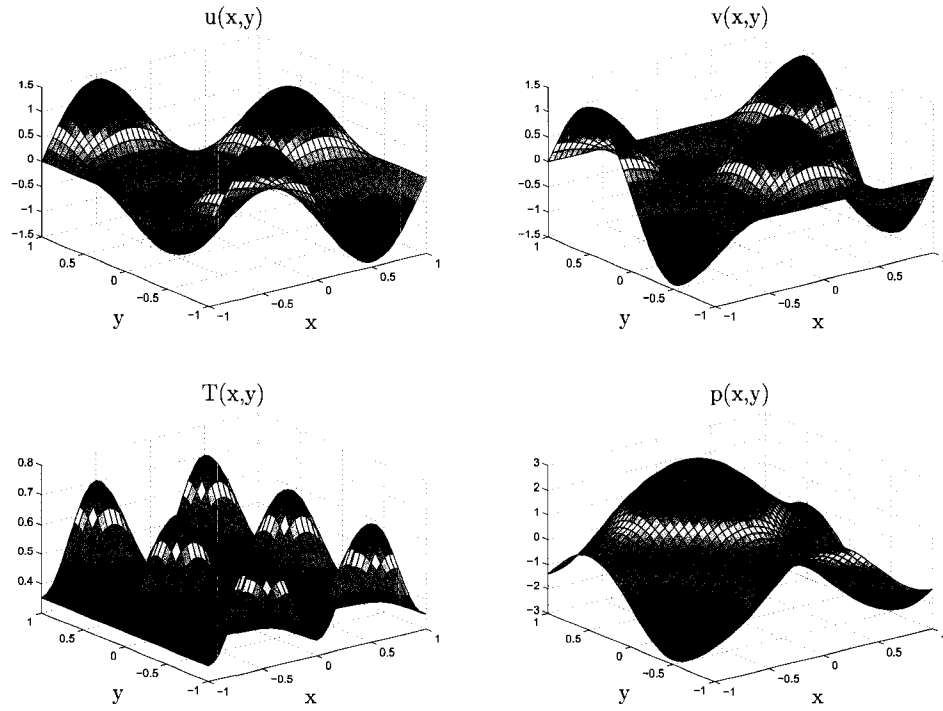


FIG. 5.1 Surfaces représentant les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, $T(x, y)$ et $p(x, y)$. Le domaine en x et y est défini comme : $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 1$.

5.2.3 Domaine de calcul et conditions limites

Le domaine de calcul est un simple rectangle de dimension L par H . Sur les frontières verticales et inférieures, on impose des conditions de Dirichlet pour les variables u , v et T en utilisant les expressions analytiques issues de la solution manufacturée. Sur la frontière supérieure on applique une condition de Neumann pour v , pour de définir le niveau de pression. Sur la même frontière, la solution exacte est appliquée comme conditions de Dirichlet en u et T . La figure 5.2 montre le domaine de calcul ainsi que les conditions limites imposées pour l'écoulement et les sensibilités. Les dimensions du carré sont : $H=L=2$.

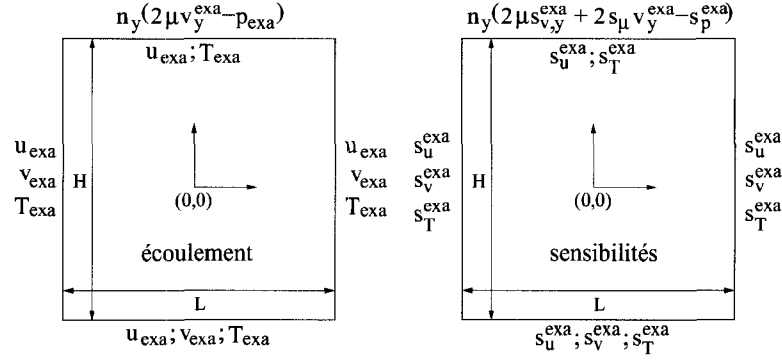


FIG. 5.2 Géométrie du domaine calcul et définition des conditions aux frontières.

5.2.4 Termes sources en écoulement

Les relations (5.17) à (5.20) satisferont les équations (3.4) et (3.8) à condition que l'on ajoute les termes sources appropriés $Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_u$ pour Navier-Stokes et $Q_q(\mathbf{x}, t)$ pour l'équation de l'énergie. La solution analytique respecte naturellement l'équation de continuité (3.3). Les termes sources sont obtenus par l'application de la MSM. On obtient donc pour $Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_u$ et $Q_q(\mathbf{x}, t)$,

$$Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_u = \text{Re}(u_t + uu_x + vu_y) + p_x - 2(\eta_x u_x + \eta u_{xx}) - [\eta_y(u_y + v_x) + \eta(u_{yy} + v_{yx})] \quad (5.24)$$

$$Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_v = \text{Re}(v_t + uv_x + vv_y) + p_y - 2(\eta_y v_y + \eta v_{yy}) - [\eta_x(v_x + u_y) + \eta(v_{xx} + u_{xy})] \quad (5.25)$$

$$Q_q(\mathbf{x}, t) = (T_t + uT_x + vT_y) - \left(\frac{H}{R}\right) \frac{1}{Gz} (T_{xx} + T_{yy}) \quad (5.26)$$

où η_x et η_y représentent les dérivées de la viscosité par rapport à x et y . La notation utilisée pour les dérivées est détaillée dans l'annexe II. Rappelons que η est définie par l'équation (3.48) et que par exemple, on obtient la relation suivante pour η_x ,

$$\eta_x = \eta \frac{m}{2} \left[\frac{4u_x u_{xx} + 2(u_y + v_x)(u_{xy} + v_{xx}) + 4v_y v_{xy}}{2u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2v_y^2} \right] - \eta B T_x. \quad (5.27)$$

5.2.5 Termes sources en sensibilités

De la même manière, les sensibilités données par (5.21) à (5.23) plus toutes celles qui ne sont pas explicitées ici, doivent satisfaire les équations (3.44) et (3.45) à condition une fois de plus, que l'on ajoute les termes sources obtenus par la MSM.

$$\begin{aligned}
 Q_{NS}^{sens}(\mathbf{x}, t)_u &= \text{Re}(s_{u,t} + s_u u_x + u s_{u,x} + s_v u_y + v s_{u,y}) + s_{p,x} \\
 &\quad - 2(s_{\eta,x} u_x + \eta_x s_{u,x} + s_\eta u_{xx} + \eta s_{u,xx}) \\
 &\quad - [s_{\eta,y}(u_y + v_x) + \eta_y(s_{u,y} + s_{v,x}) + s_\eta(u_{yy} + v_{yx}) + \eta(s_{u,yy} + s_{v,yx})]
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{NS}^{sens}(\mathbf{x}, t)_v &= \text{Re}(s_{v,t} + s_v v_x + v s_{v,x} + s_u v_y + u s_{v,y}) + s_{p,y} \\
 &\quad - 2(s_{\eta,y} v_y + \eta_y s_{v,y} + s_\eta v_{yy} + \eta s_{v,yy}) \\
 &\quad - [s_{\eta,x}(v_x + u_y) + \eta_x(s_{v,x} + s_{u,y}) + s_\eta(v_{xx} + u_{xy}) + \eta(s_{v,xx} + s_{u,xy})]
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
 Q_q^{sens}(\mathbf{x}, t) &= (s_{T,t} + s_u T_x + u s_{T,x} + s_v T_y + v s_{T,y}) \\
 &\quad - \left(\frac{H}{R}\right) \left[\frac{1}{Gz} (s_{T,xx} + s_{T,yy}) - \frac{1}{Gz^2} \left(\frac{dGz}{da} \right) (T_{xx} + T_{yy}) \right]
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Les termes $s_{\eta,x}$ et $s_{\eta,y}$ désignent respectivement les dérivées de la sensibilité de la viscosité par rapport à x et y . À titre d'exemple, $s_{\eta,x}$ s'écrit,

$$\begin{aligned}
 s_{\eta,x} &= \eta_x \left[\left(\frac{1}{2} \alpha \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \beta \right) - \left(B s_T + T \frac{dB}{da} \right) \right] \\
 &\quad + \eta \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - \left(B \frac{\partial s_T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dB}{da} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

où α et β sont donnés par :

$$\alpha = \ln [2(u_x)^2 + (u_y + v_x)^2 + 2(v_y)^2] \tag{5.32}$$

$$\beta = \left[\frac{4(u_x)(s_{u,x}) + 2(u_y + v_x)(s_{u,y} + s_{v,x}) + 4(v_y)(s_{v,y})}{2(u_x)^2 + (u_y + v_x)^2 + 2(v_y)^2} \right] \tag{5.33}$$

Notons que l'équation (3.43) est respectée naturellement sans terme source. Dans la section suivante, on présente les résultats obtenus d'une étude de convergence, ce qui permet de *vérifier* le bon fonctionnement et *l'efficacité* du code de calcul utilisé pour ce travail.

5.3 Analyse de convergence

On effectue un raffinement de la discrétisation en espace et en temps et on observe le comportement de l'erreur exacte. On s'attend à ce que l'erreur estimée et l'erreur exacte diminuent de façon régulière à chaque étape de raffinement. Idéalement, les calculs sont faits sur un maillage régulier et structuré pour contrôler précisément la taille h_x des éléments. Le raffinement spatial se fait manuellement, en divisant par deux la taille des éléments pour chaque calcul. La figure 5.3 montre l'apparence de deux maillages employés pour l'étude de convergence.

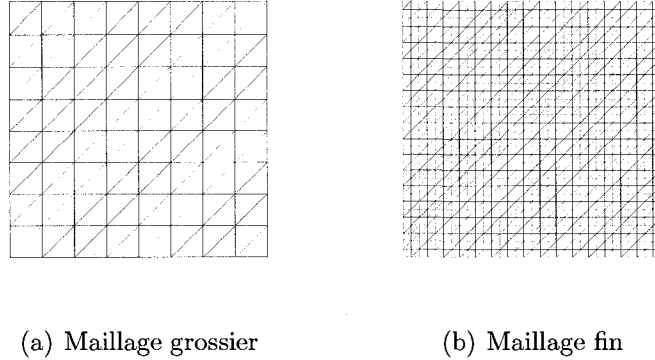


FIG. 5.3 Exemple de maillages utilisés pour le calcul de la solution analytique. (a) maillage de 8×8 éléments et (b) montre un maillage de 32×32 éléments.

Avant de présenter les résultats obtenus lors de l'analyse de convergence, on introduit quelques définitions utiles sur les normes d'erreurs.

5.3.1 Normes d'erreurs

On commence par définir les normes usuelles des solutions $\mathbf{u}$, T et p . Les équations (5.34) à (5.36) donnent les expressions des normes de la solution : norme énergie (i.e. : les vitesses), norme thermique et finalement, semi-norme H_1 de la pression ¹.

$$\|\mathbf{u}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}) d\Omega \quad (5.34)$$

$$\|T\|^2 = \int_{\Omega} (k \nabla T \cdot k \nabla T) d\Omega \quad (5.35)$$

$$\|p\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla p) d\Omega \quad (5.36)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 2\eta(\frac{\partial u}{\partial x}) & \eta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \eta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & 2\eta(\frac{\partial v}{\partial y}) \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

La norme de la solution pour la sensibilité de la vitesse s'obtient en dérivant les composantes du tenseur $\boldsymbol{\tau}$ par rapport à un paramètre d'intérêt a ,

$$s_{\boldsymbol{\tau}} = \begin{pmatrix} 2\eta(\frac{\partial s_u}{\partial x}) + 2s_{\eta}(\frac{\partial u}{\partial x}) & \eta(\frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x}) + s_{\eta}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \\ \eta(\frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x}) + s_{\eta}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & 2\eta(\frac{\partial s_v}{\partial y}) + 2s_{\eta}(\frac{\partial v}{\partial y}) \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

où s_{η} dénote la sensibilité de la viscosité par rapport au paramètre a . La norme thermique de la solution et la norme de la solution en pression pour les sensibilités se dérivent simplement en différentiant les équations (5.35) et (5.36) par rapport à

¹Si on fait la projection des dérivées au lieu des flux, la forme des équations sera différente.

a. Les relations suivantes sont l'analogie de (5.34) à (5.36) pour les sensibilités :

$$\|s_{\mathbf{u}}\|_E^2 = \int_{\Omega} (s_{\boldsymbol{\tau}} : s_{\boldsymbol{\tau}}) d\Omega \quad (5.39)$$

$$\|s_T\|^2 = \int_{\Omega} (k \nabla s_T \cdot \nabla s_T + k' \nabla T \cdot \nabla T) d\Omega \quad (5.40)$$

$$\|s_p\|_{H^1}^2 = \int_{\Omega} (\nabla s_p \cdot \nabla s_p) d\Omega \quad (5.41)$$

L'erreur exacte se calcule en prenant la norme de la différence entre la solution éléments finis u_h et la solution exacte u_{exa} . Par exemple, l'erreur exacte liée à la norme énergie s'écrit comme suit :

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_{exa}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}_h - \boldsymbol{\tau}_{exa}) : (\boldsymbol{\tau}_h - \boldsymbol{\tau}_{exa}) d\Omega \quad (5.42)$$

De la même façon, on obtient l'erreur exacte de la sensibilité en norme énergie.

$$\|s_{\mathbf{u}_h} - s_{\mathbf{u}_{exa}}\|_E^2 = \int_{\Omega} (s_{\boldsymbol{\tau},h} - s_{\boldsymbol{\tau},exa}) : (s_{\boldsymbol{\tau},h} - s_{\boldsymbol{\tau},exa}) d\Omega \quad (5.43)$$

où $s_{\mathbf{u}_h}$ et $s_{\mathbf{u}_{exa}}$ représentent respectivement la sensibilité des solutions éléments finis et exacte. La norme de l'erreur estimée s'écrit de la même façon, sauf que l'on remplace la solution exacte par une solution reconstruite $\tilde{u}$ [52, 53], qui est une estimation de la solution exacte. Ainsi, l'erreur estimée pour l'écoulement et pour les sensibilités en norme énergie s'écrit :

$$\|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}\|_E^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}) : (\boldsymbol{\tau}_h - \tilde{\boldsymbol{\tau}}) d\Omega \quad (5.44)$$

$$\|s_{\mathbf{u}_h} - \tilde{s}_{\mathbf{u}}\|_E^2 = \int_{\Omega} (s_{\boldsymbol{\tau},h} - \tilde{s}_{\boldsymbol{\tau}}) : (s_{\boldsymbol{\tau},h} - \tilde{s}_{\boldsymbol{\tau}}) d\Omega \quad (5.45)$$

L'erreur exacte et l'erreur estimée pour la température (en norme thermique) et la pression (en norme H^1) s'obtiennent en suivant le même raisonnement. Les deux sections suivantes montrent les résultats de l'analyse de convergence pour le régime

stationnaire et le régime instationnaire.

5.3.2 Cas stationnaire

Pour le régime stationnaire, on pose $t=0$ dans la solution manufacturée. Donc les équations (5.17) à (5.20) deviennent :

$$u(x, y) = \text{Gz}^2 m^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) \quad (5.46)$$

$$v(x, y) = -\text{Gz}^2 m^2 \sin(\pi y) \cos(\pi x) \quad (5.47)$$

$$T(x, y) = \frac{\text{Gz}^2 m^2}{4} (1 + \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi y)) \quad (5.48)$$

$$p(x, y) = \text{Gz}^2 m^2 (\cos(\pi x) + \sin(\pi y)). \quad (5.49)$$

On remarque en particulier que les sensibilités par rapport au paramètre B sont nulles, c'est-à-dire que $s_u^B = s_v^B = s_p^B = s_T^B = 0$. Après six étapes de raffinement, le maillage final contient 128×128 éléments avec 66049 noeuds. La figure 5.4 montre les trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme énergie en fonction du raffinement de maillage (i.e. : du nombre de noeuds). On observe que les erreurs diminuent d'un cycle de raffinement à l'autre tant pour l'écoulement que pour les sensibilités, et que les estimateurs d'erreurs convergent de la même manière que l'erreur exacte. Pour mesurer la performance de l'estimateur d'erreur, on trace le ratio de l'erreur estimée sur l'erreur exacte, que l'on nomme indice *d'efficacité*. La figure 5.6 présente les courbes de l'indice d'efficacité des estimateurs d'erreurs pour l'écoulement et les sensibilités. On remarque que l'efficacité tend vers 1.0 (i.e. : 100%) lorsque le nombre de noeuds augmente. Cette propriété asymptotique indique que les estimateurs d'erreurs deviennent plus précis et plus fiables avec le raffinement du maillage. Notons que l'adaptation de maillage aurait sans doute permis aux estimateurs d'erreurs de converger directement sur l'erreur exacte, en-

traînant ainsi une amélioration de l'efficacité.

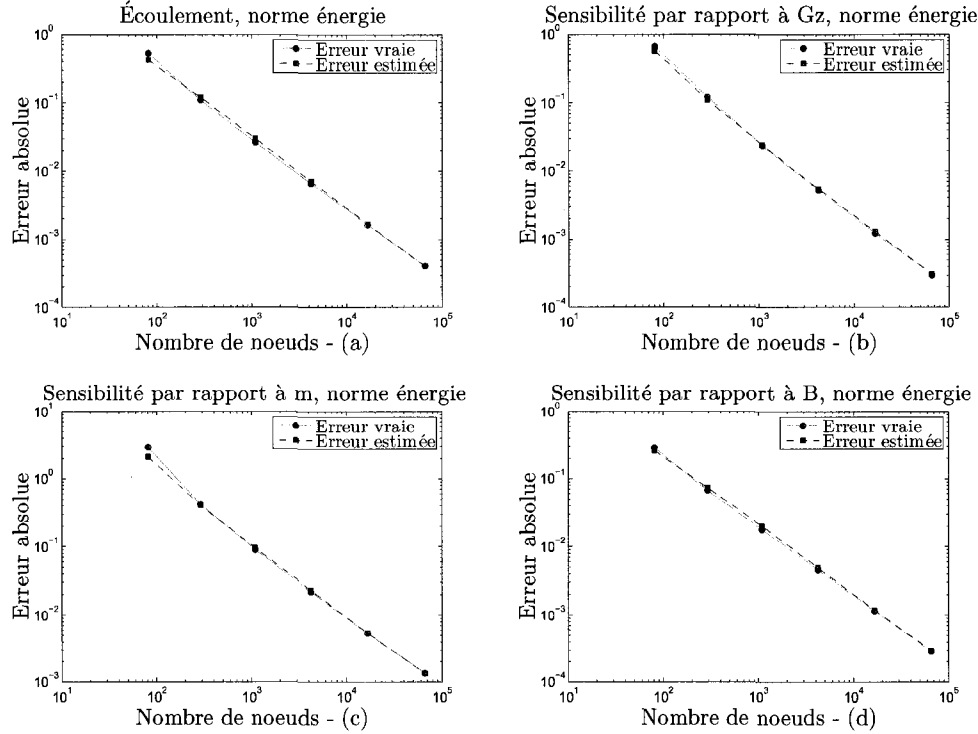


FIG. 5.4 Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme énergie, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$.

Enfin, l'ordre de convergence p de l'erreur exacte et de l'erreur estimée est quasi-optimal puisqu'il s'approche de la valeur théorique attendue à la fois pour l'écoulement et pour les sensibilités (voir le tableau 5.1). En effet, on se rappelle que la décroissance de l'erreur est d'ordre $\mathcal{O}(h_x^2)$ en norme énergie et en norme thermique lorsque l'on utilise des éléments quadratiques. Or, le nombre de noeuds N est proportionnel à $1/h_x^2$. On prévoit donc une erreur inversement proportionnelle au nombre de noeuds, tel qu'observé. De plus, on constate que les courbes de convergence obtenues obéissent à l'équation d'une droite (équation (5.50)), où

p représente le double de la pente de cette droite.

$$E_{exa} = Ch^p = C \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)^p \xrightarrow{\log} \log(E_{exa}) = \log(C) - \frac{p}{2} \log(N) \quad (5.50)$$

La figure 5.5 montre l'évolution des trajectoires de l'erreur exacte et de l'erreur estimée en norme thermique en fonction du nombre de noeuds N .

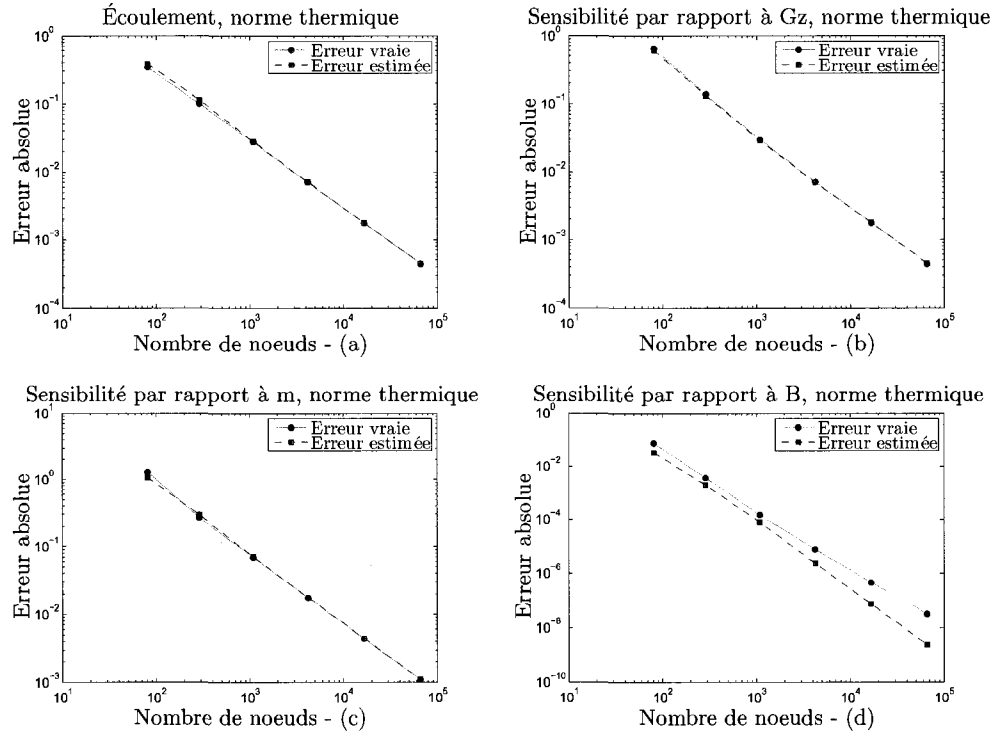


FIG. 5.5 Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme thermique, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$.

La figure 5.6(d) présente un résultat décevant, puisque l'indice d'efficacité pour la sensibilité de la température et de la pression par rapport au paramètre B sont bien en-dessous de leur valeur optimale. Comme les sensibilités $s_u^B = s_v^B = s_p^B = s_T^B = 0$ ($t=0$ en régime stationnaire), les normes données par les équations (5.34) à (5.36)

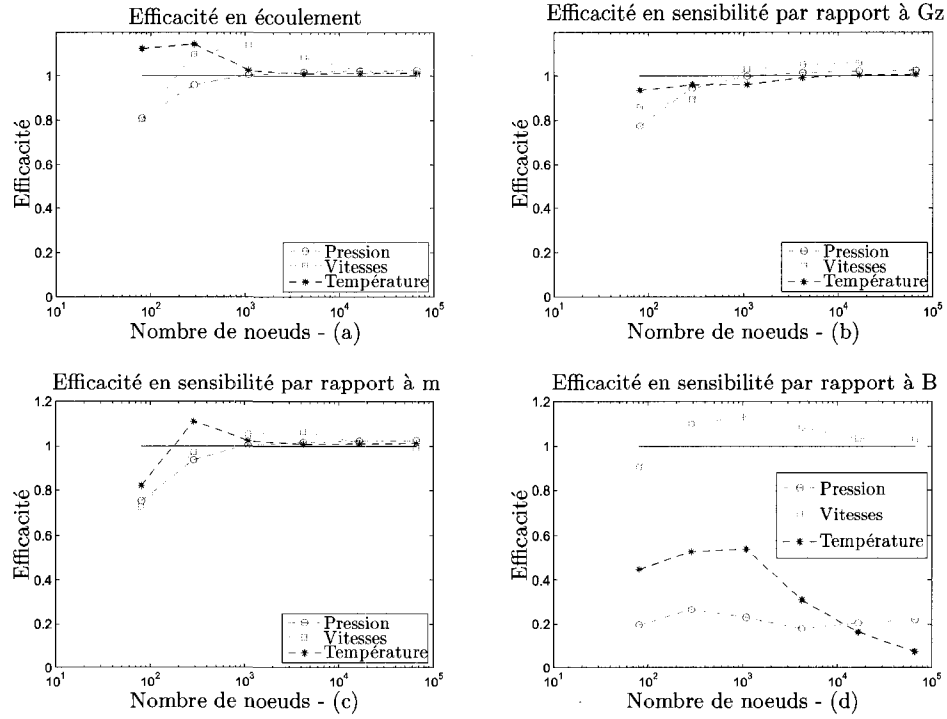


FIG. 5.6 Trajectoires de l'efficacité en fonction du raffinement (i.e. : du nombre de noeuds). La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$.

seront également nulles, ce qui fait que les normes des erreurs exactes et estimées tendront elles aussi vers zéro avec le raffinement de maillage. En d'autres termes,

$$\lim_{h_x \rightarrow 0} E_{est} = 0 \quad (5.51)$$

$$\lim_{h_x \rightarrow 0} E_{exa} = 0 \quad (5.52)$$

L'indice d'efficacité est défini comme le ratio entre l'erreur estimée et l'erreur exacte,

$$\lim_{h_x \rightarrow 0} \left(\frac{E_{est}}{E_{exa}} \right) = \frac{0}{0} \quad (5.53)$$

On constate alors que le ratio donné par l'équation (5.63) est une forme

Norme	Écoulement	Sensibilité paramètre Gz	Sensibilité paramètre m	Sensibilité paramètre B
Énergie	2.0041	2.0914	2.0234	1.9854
Thermique	1.9848	2.0208	1.9921	4.0504

TAB. 5.1 Taux de convergence obtenus pour l'écoulement et les sensibilités.

indéterminée. Donc plus on raffine le maillage, plus l'efficacité perd de son sens, car à la limite, zéro divisé par zéro ne veut rien dire.

5.3.3 Cas transitoire

En plus de considérer la discrétisation en espace h_x , le régime transitoire nécessite une discrétisation du temps $h_t = \Delta t$. On rappelle qu'on utilise le schéma d'Euler implicite d'ordre 1. Or, pour préserver une diminution de l'erreur exacte observé d'un facteur quatre en divisant h_x par deux, il faut diviser par quatre la taille du pas de temps pour chaque cycle de raffinement du maillage.

$$h_{x,2} = \frac{h_{x,1}}{2}, h_{x,3} = \frac{h_{x,2}}{2} = \frac{h_{x,1}}{4}, \dots, h_{x,n} = \frac{h_{x,1}}{2^{n-1}}. \quad (5.54)$$

$$h_{t,2} = \frac{h_{t,1}}{4}, h_{t,3} = \frac{h_{t,2}}{4} = \frac{h_{t,1}}{16}, \dots, h_{t,n} = \frac{h_{t,1}}{4^{n-1}}. \quad (5.55)$$

La séquence des maillages est la même que celle utilisé du cas stationnaire. Le nombre de pas de temps varie de 6 pour le maillage de 4×4 éléments à 6144 pour le maillage ayant 128×128 éléments. Les figures 5.7 et 5.8 montrent les trajectoires des erreurs exactes et des estimateurs en norme énergie et thermique en fonction du nombre de noeuds.

Finalement, la figure 5.9 présente l'efficacité des estimateurs d'erreurs et le tableau 5.2 répertorie les taux de convergence observés pour écoulement et pour les sensibilités.

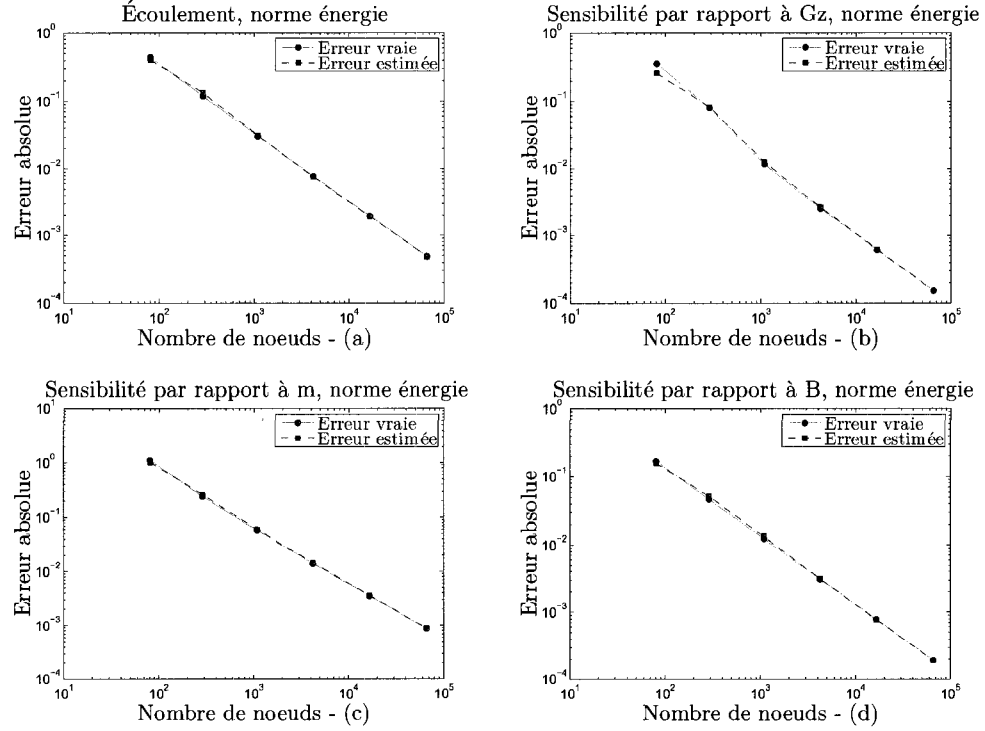


FIG. 5.7 Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme énergie, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$.

Une fois de plus, on observe que les erreurs diminuent d'un cycle de raffinement à l'autre. La convergence des estimateurs d'erreurs suit celle des erreurs exactes. Les courbes respectent la décroissance quadratique attendue, ce qui veut dire que le taux de convergence est près de sa valeur théorique de deux. La convergence des estimateurs d'erreurs vers l'erreur exacte indique un comportement optimal des estimateurs.

Norme	Écoulement	Sensibilité paramètre Gz	Sensibilité paramètre m	Sensibilité paramètre B
Énergie	1.9914	2.0896	2.0102	1.9898
Thermique	1.9837	2.0017	1.9862	1.9856

TAB. 5.2 Taux de convergence obtenus pour l'écoulement et les sensibilités.

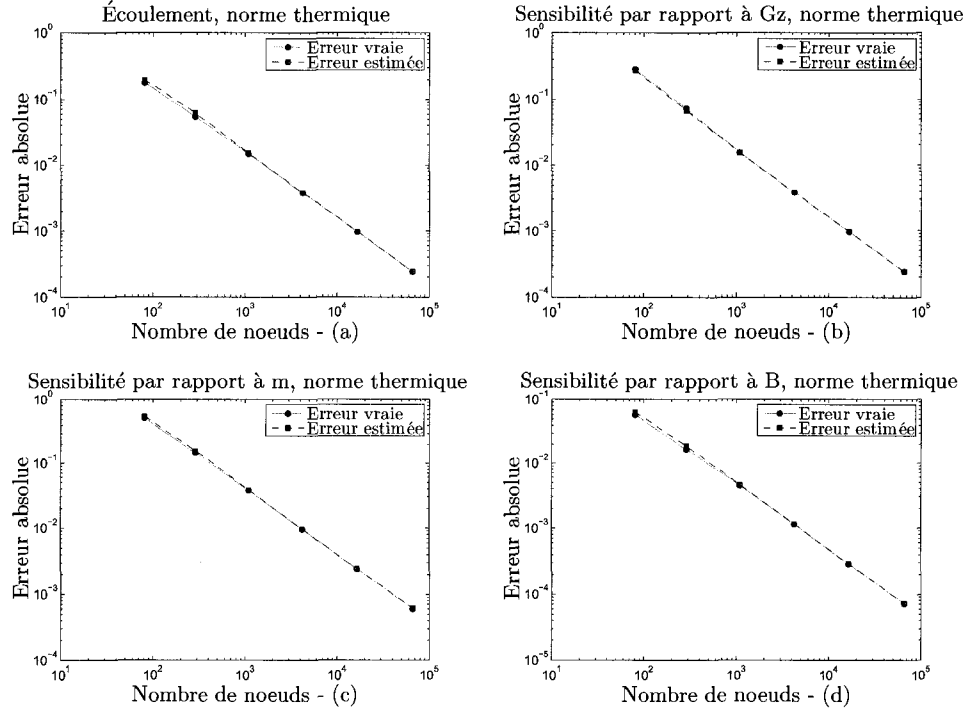


FIG. 5.8 Trajectoires des erreurs exactes et estimées en norme thermique, en fonction du nombre de noeuds. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$.

On peut donc conclure que l'implantation et le solveur sont vérifiés au sens de Roache, c'est-à-dire que le solveur résout les équations de la *bonne* manière.

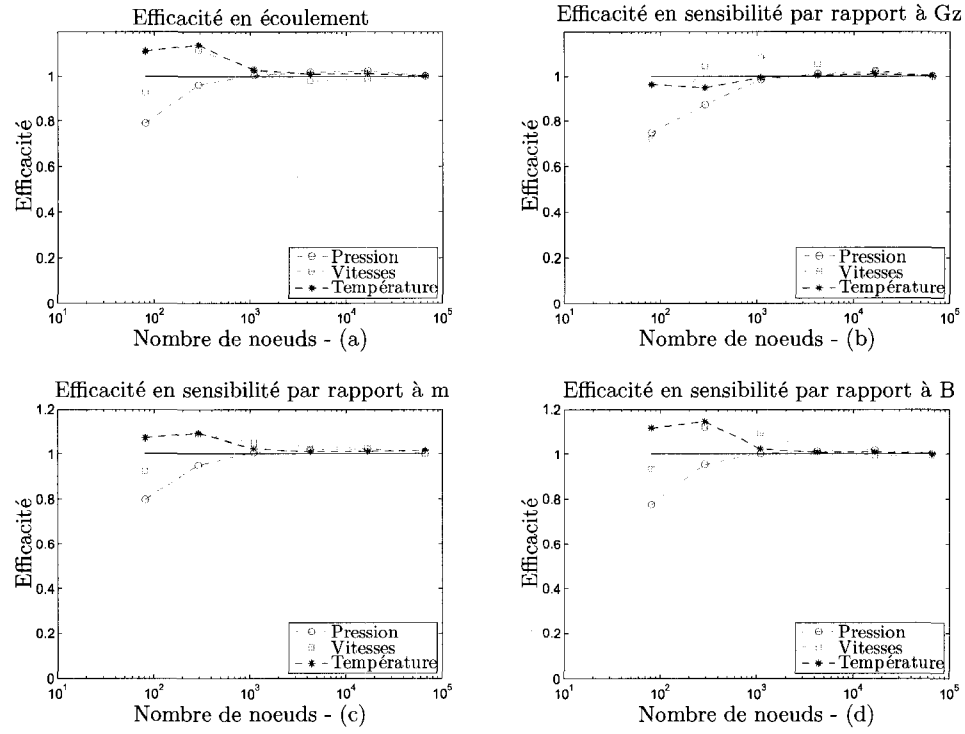


FIG. 5.9 Trajectoires de l'efficacité en fonction du raffinement (i.e. : du nombre de noeuds). La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$ et $\omega = 0.1$.

De plus, le calcul des sensibilités a été confronté à une vérification par différence finie, ce qui sera le sujet de la section 6.3.2.

CHAPITRE 6

APPLICATION ET RÉSULTATS

Dans ce chapitre nous présentons les résultats des simulations d'un écoulement non-Newtonien à l'intérieur d'un canal d'injection symétrique, un sujet étroitement lié aux développements théoriques présentés précédemment. Pour certaines combinaisons des nombres adimensionnels Gz et B , l'écoulement du fluide est stable et symétrique. Par contre, d'autres combinaisons induisent une asymétrie de l'écoulement et un comportement instable. On observe alors une croissance exponentielle de la différence de température entre deux points symétriques aux sorties du canal d'injection. En s'appuyant sur les résultats numériques obtenus, une frontière séparant la région où l'écoulement est stable de celle où celui-ci est instable a pu être définie. Pour prédire les divers comportements observés du fluide (i.e. stable ou instable), le calcul des sensibilités fournit une indication sur la condition vers laquelle tend l'écoulement pour un ensemble de valeur de Gz et B .

6.1 Description du problème

On cherche à déterminer le comportement d'un écoulement complexe en solutionnant numériquement les équations de Navier-Stokes couplées à celle de l'énergie (équations (3.35) à (3.37)). La géométrie d'intérêt est un canal d'injection en forme de T présenté à la figure 6.1. Les dimensions du canal sont : $R=3.5$, $H=1.0$, $r=0.5$ et $L=5.0$. Pour commencer, on donne une description de ce qui arrive dans la situation idéale lorsque le fluide entre dans le canal d'injection. Le fluide débute son parcours par le bas du canal. En pénétrant dans le canal, l'écoulement est pleinement

développé et adopte le profil de vitesse décrit dans la section 3.6.1. À ce moment, la température du fluide est constante et uniforme. Ensuite, le fluide monte dans la partie verticale du canal et atteint le seuil d'injection, c'est-à-dire l'endroit où le canal se sépare en deux branches horizontales. À cet endroit, l'écoulement se sépare et se dirige vers les deux sorties opposées. Dans la situation idéale, on souhaite que le comportement du fluide ne soit ni influencé, ni perturbé par la température. Dans ce cas, si on imagine le fluide comme étant isotherme et contenu dans un canal où l'ensemble des parois sont adiabatiques, on observera alors que l'écoulement est parfaitement symétrique. Donc, le fluide se sépare au seuil d'injection de manière symétrique, ce qui implique que la même quantité de fluide quitte le canal d'injection par chacune des sorties et avec la même vitesse.

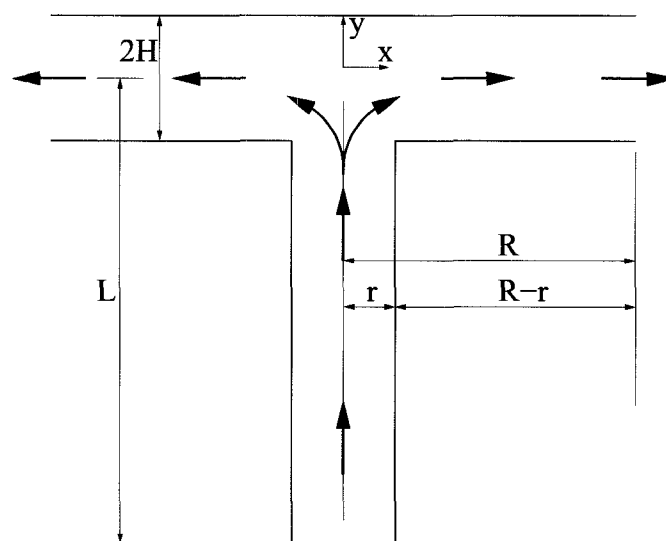


FIG. 6.1 Dimensions du domaine de calcul, $L=5.0$, $R=3.5$, $r=0.5$ et $H=1.0$.

En pratique, la température des parois n'est pas parfaitement uniforme sur l'ensemble du canal. Or, on sait que dans la réalité, la viscosité dépend explicitement de la température, ce qui aura une influence sur le comportement du fluide dans le canal d'injection. Pour reproduire cette influence, on introduit une faible perturbation de la température sur l'une des parois horizontale du canal. On peut

ainsi s'attendre à observer une déviation plus ou moins grande du comportement de l'écoulement par rapport à la situation idéale. Comme nous le verrons plus loin, le fluide adopte en effet sous certaines conditions, un régime d'écoulement non symétrique. Parfois cette asymétrie s'amplifie au point de forcer tout le fluide à quitter le canal que par la sortie de droite. La conséquence de cette asymétrie est la création de défauts importants sur les pièces moulées.

Pour reproduire ce comportement, on impose sur le domaine de calcul les conditions limites données sur la figure 6.2. La température T en entrée est égale à 1. Les parois verticales du canal d'injection sont isolées ($q=0$), tandis que l'on maintient une température nulle ($T=0$) sur les parois horizontales, sauf sur la paroi inférieure droite où l'on perturbe la température par un facteur ε qui est de l'ordre de 10^{-5} . Cette perturbation permet de créer une très faible asymétrie de température dans l'injecteur. En pratique, elle contrôle la direction vers laquelle ira le fluide lors de l'apparition d'une asymétrie dans l'écoulement. Ceci évite que l'instabilité ne soit déclenchée par une erreur numérique, telle qu'une erreur d'arrondi sur laquelle nous n'avons aucun contrôle. Des valeurs de ε inférieures à 10^{-5} ne permettent pas de contrôler la direction de l'écoulement, tandis que des valeurs supérieures à 10^{-5} ont une trop grande influence sur le comportement et la stabilité de l'écoulement. Finalement, aucune condition limite n'est imposée sur la température aux sorties de l'injecteur. En entrée, la vitesse u est nulle et la vitesse v adopte le profil de vitesse complètement développé calculé à la section 3.6.1. Sur les deux parois verticales et sur toutes les parois horizontales, on impose une condition de non glissement ($u=v=0$). Les conditions initiales imposées sur le domaine sont : $u=v=0$ pour les vitesses et $T=1$ pour la température.

Le fluide est caractérisé par une viscosité variable qui dépend à la fois du taux de déformation $\dot{\gamma}$ et de la température. On fixe les valeurs des propriétés physiques du fluide dans le code de calcul : La densité ρ est égale au nombre de Reynolds,

6.1.1 Régularisation de la viscosité

Le fait que la valeur de m soit égale à -0.8 pose un problème de discontinuité de la viscosité et de ses différentes sensibilités. En effet, si tous les termes contenus sous le radical de l'équation (3.48) sont simultanément nuls en un point du domaine de calcul, c'est-à-dire que si $\partial_x u = (\partial_y u + \partial_x v) = \partial_y v = 0$, alors on se retrouve avec une forme indéterminée. Ces termes causeront des problèmes numériques dès qu'ils auront une valeur près de l'erreur machine. Pour pallier à cette difficulté, on régularise l'expression (3.48) en lui ajoutant un terme de correction supplémentaire $\epsilon \ll 1$. L'équation pour la viscosité s'écrit alors,

$$\eta = \left[\sqrt{2 (\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2 (\partial_y v)^2 + \epsilon} \right]^m e^{-BT} \quad (6.1)$$

La valeur de ϵ est fixé à 10^{-8} .

6.2 Résultats numériques

Cette section présente les résultats numériques obtenus pour différentes combinaisons de valeurs des nombres adimensionnels Gz et B . On commence par introduire la méthode de mesure employée pour déterminer si l'écoulement est stable ou instable. Par la suite, on montre et décrit le comportement du fluide pour les différents régimes d'écoulement rencontrés : régimes stables, instables et en transition. On discute également des conditions physiques qui influencent la stabilité du fluide. On verra ensuite comment ces mesures nous permettent d'obtenir une carte de stabilité de l'écoulement dans l'espace de phase Gz - B .

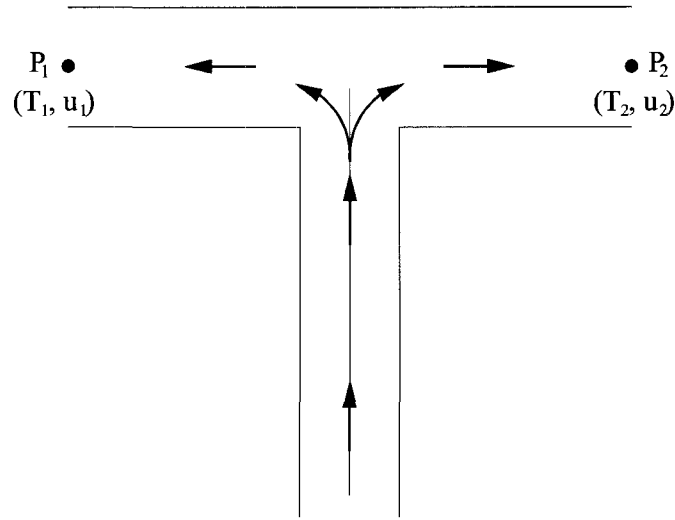


FIG. 6.3 Points de contrôle servant à mesurer $\Delta T(t)$.

6.2.1 Caractérisation de l'asymétrie en température et en vitesse

L'écoulement que l'on étudie peut évoluer vers trois états distincts : stable, instable ou en transition. Deux états se manifestent par une asymétrie partielle ou complète de l'écoulement dans le canal, ce sont les écoulements instables et en transitions. La méthode qui consiste à mesurer l'évolution d'une asymétrie en température ou en vitesse entre les sorties opposées du canal d'injection fournit une bonne indication sur le comportement du fluide. On mesure l'asymétrie en enregistrant la température et la vitesse pour chaque pas de temps, à deux noeuds distincts du maillage (i.e P_1 et P_2). Ces points de mesure sont illustrés sur la figure 6.3 et ils se situent au milieu des sorties du canal d'injection. On ne s'intéresse pas directement à la température, mais plutôt à sa différence. On veut donc mesurer $\Delta T(t) = T_2(t) - T_1(t)$. L'évolution temporelle de cette différence nous renseignera sur l'état de stabilité de l'écoulement. Notons que l'utilisation d'un maillage régulier et symétrique nous procure un net avantage par rapport à un maillage conventionnel. Les deux noeuds choisis sur le maillage sont symétriques, augmentant la précision des mesures. Ceci est particulièrement important, surtout lorsque les variations de

température sont très faibles.

La méthode de mesure des vitesses aux sorties de l'injecteur est identique à celle utilisée pour la température, sauf que l'on s'intéresse directement à leurs valeurs plutôt qu'à leurs différences. Les figures 6.4 et 6.5 présentent l'évolution de la différence de température $\Delta T(t)$ en fonction du temps t/t_{fill} pour diverses valeurs de Gz et B . Les figures 6.6 et 6.7 montrent les différentes mesures de vitesse en fonction du temps t/t_{fill} . Les diagrammes de vitesse servent essentiellement à confirmer ou clarifier la classification de l'écoulement dans l'un des trois régimes possibles.

Pour interpréter les figures 6.4 et 6.5, on commence par introduire le critère qui nous permet de classer les divers régimes d'écoulement en trois catégories : stable, instable et en transition. Ce critère est basé sur l'échelle de température T_0 . On rappelle que l'échelle de température T_0 est égale à la différence entre la température du fluide au seuil d'injection et la température des parois horizontales (i.e : $T_0 = T_a - T_r$). Or, $T_r \sim 0$ donc $T_0 = T_a$ et T_a est de l'ordre de un. Une différence de température qui demeure assez faible par rapport à l'échelle de température au cours de la simulation indique un écoulement stable. Par contre, si cette différence croît rapidement vers une valeur proche de l'échelle de température, alors on dira de cet écoulement qu'il est instable. Finalement, si la différence de température augmente au-dessus de 10^{-3} degré Celsius, mais n'atteint pas un plateau avant la fin de la simulation, on en conclut que l'écoulement se trouve en régime de transition.

Sur l'ensemble des figures, on observe initialement (au temps zéro) une différence de température $\Delta T(t)$ presque nulle (i.e. 10^{-8} à 10^{-15}). Le fluide vient de remplir la cavité du canal et n'a pas encore eu le temps d'être perturbé par l'asymétrie de température du canal. Celui-ci maintient la distribution de température uniforme qu'il avait à son entrée et s'écoule donc de manière symétrique. On remarque ensuite qu'au cours du temps, cette différence augmente rapidement et adopte par la suite

différents comportements que l'on peut associer aux trois régimes selon le critère que nous avons défini plutôt. On observe que pour certaines paires de valeurs de Gz et B , comme par exemple $B=4$ et $Gz=2$ ou bien $B=3$ et $Gz=5$ (figures 6.4(c)-(d)), la différence de température atteint rapidement des valeurs près de l'unité qui sont maintenues tout au long de la simulation. Ces mesures indiquent que la température du fluide est devenue supérieure au point de contrôle P_2 par rapport au point de contrôle P_1 . En réalité, la température ne s'élève pas au point P_2 , elle diminue plus ou moins rapidement dû au refroidissement causé par les conditions imposées le long des parois horizontales du canal sur la température. C'est plutôt la diminution rapide de la température du fluide au point de contrôle P_1 qui est responsable de cette élévation de la différence de température. Le régime d'écoulement étant instable, le fluide cesse progressivement de s'écouler par la sortie de gauche, il transporte donc moins de chaleur, ce qui entraîne une diminution rapide de la température en P_1 . Ceci caractérise un écoulement asymétrique.

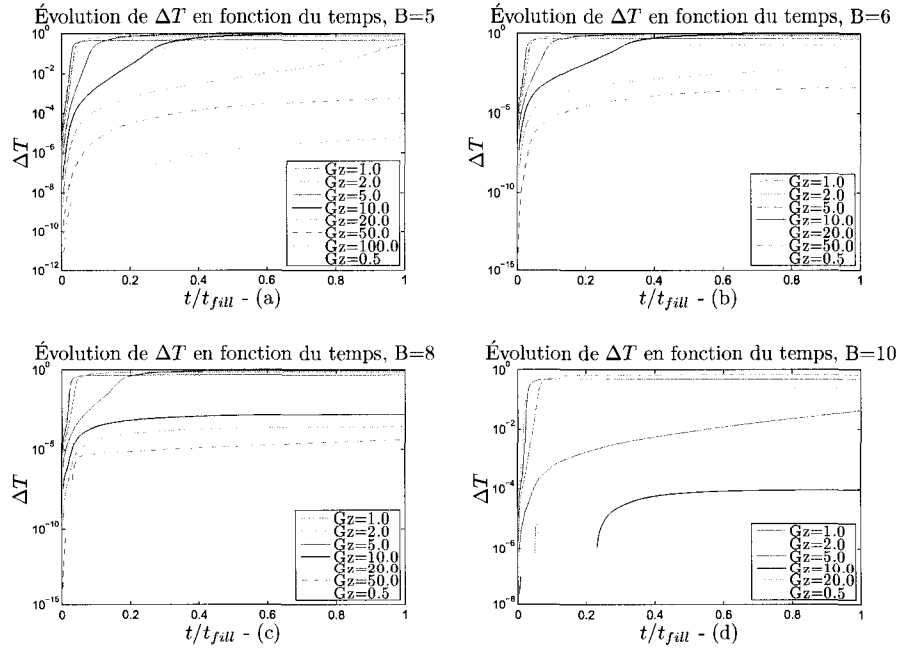
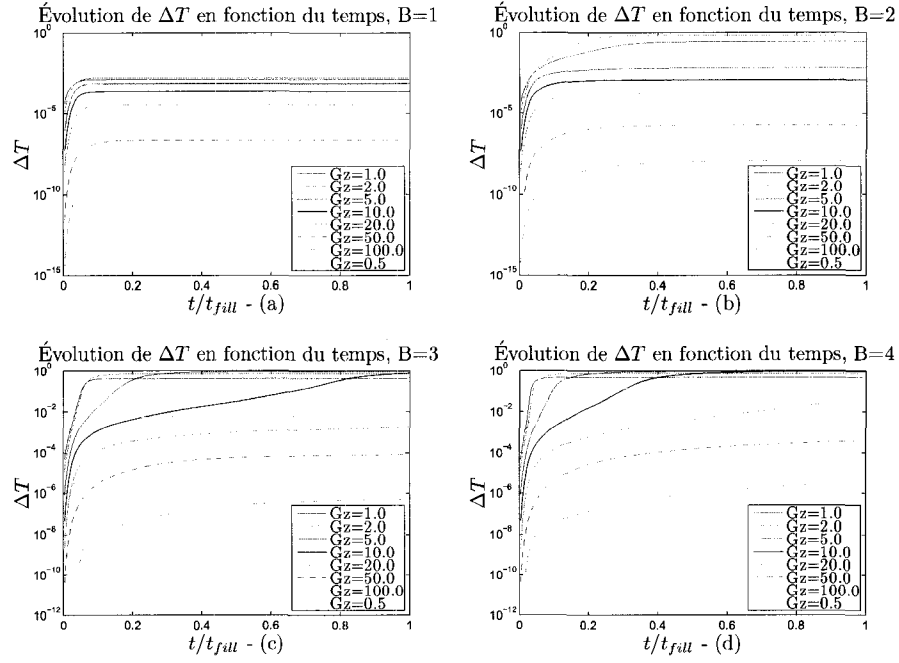
Pour d'autres paires de valeurs de Gz et B , la différence de température demeure faible tout au long de la simulation. On peut le constater sur la figure 6.4(a). Dans ces conditions, la température aux points de contrôle P_1 et P_2 est sensiblement la même. On en déduit que le transport de chaleur se fait de manière symétrique vers les deux sorties. Donc le fluide s'écoule de manière symétrique et nous sommes alors en régime stable. La dernière situation qui peut se présenter est celle où la différence de température $\Delta T(t)$ augmente constamment au cours du temps, mais ne parvient pas à former un plateau avant la fin de la simulation. Ainsi, la température au point P_1 diminue continuellement. Ceci implique une augmentation graduelle de l'écoulement du fluide par la sortie de droite au détriment de celle de gauche. Toutefois, cette asymétrie n'entraîne aucune amplification qui pourrait conduire le fluide à s'écouler uniquement vers la sortie de droite, du moins pas dans la limite de temps que dure la simulation. On associe ce comportement à un régime

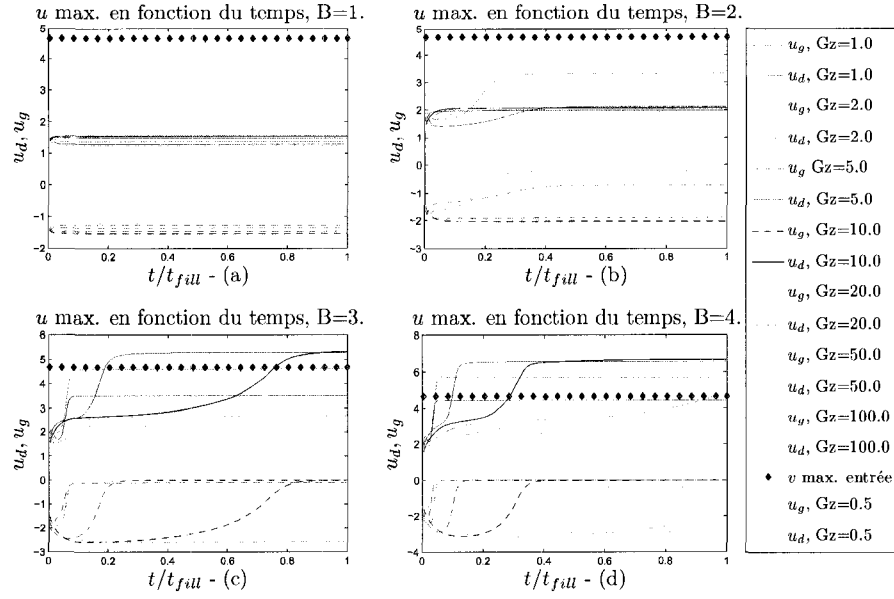
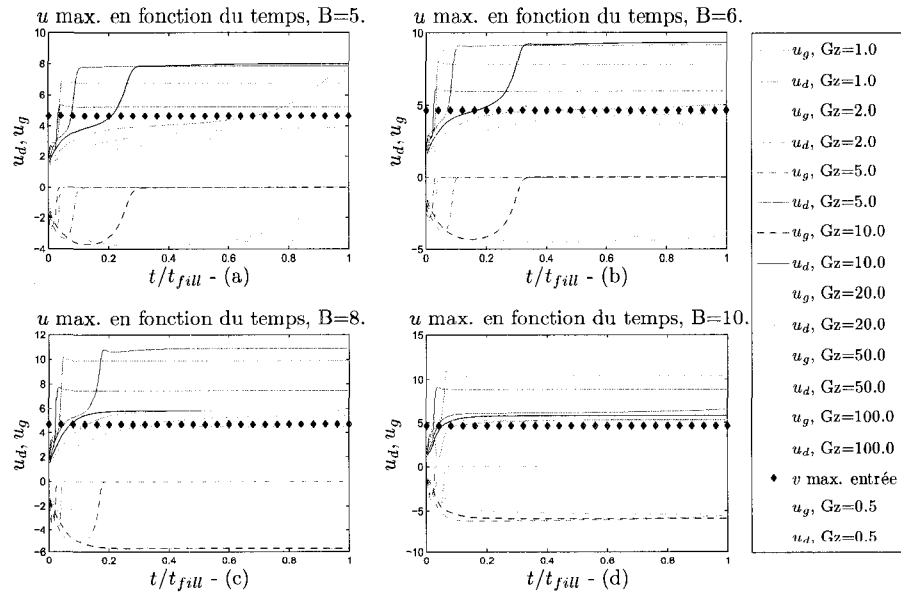
en transition, c'est-à-dire que l'instabilité n'est pas totalement développée avant la fin de la simulation. On observe ce genre de comportement sur les figures 6.4(d) et 6.5(a) pour $B=4$ et $Gz=20$ ou bien $B=5$ et $Gz=20$.

Pour quelques combinaisons de Gz et B (notamment $B=2$ et $Gz=1$), certaines mesures de $\Delta T(t)$ ne permettent pas à elles seules de tirer des conclusions évidentes lorsque vient le temps de classer le comportement final de l'écoulement et donc dans quel régime il se trouve. En effet, dans le cas précis où $B=2$ et $Gz=1$, la courbe de $\Delta T(t)$ forme rapidement un plateau avec une valeur de $\Delta T(t)$ proche de un. Dans ce cas, la courbe de $\Delta T(t)$ caractérise normalement un écoulement instable. Or, lorsque que l'on visualise l'écoulement, on s'aperçoit que la vitesse à la sortie de gauche est loin d'être nulle ou même faible par rapport à celle que l'on retrouve à la sortie de droite. On peut conclure que l'instabilité n'a pas eu le temps de se développer avant la fin de la simulation. La frontière semble parfois floue entre écoulement stable ou instable et écoulement en transition. Il faut donc de l'information supplémentaire pour tenter de clarifier ce genre de situation. Pour cette raison, la mesure des vitesses aux sorties de l'injecteur procure un autre point de vue. Elle permet en effet de clarifier les cas ambigus et de confirmer la classification de ceux donnés par la mesure de $\Delta T(t)$.

Les figures 6.6 et 6.7 présentent les mesures de la vitesse u en fonction du temps t/t_{fill} aux points de contrôle P_1 et P_2 . Contrairement à la température, on ne fait pas la différence entre la vitesse mesurée au point P_2 et celle prise au point P_1 . On s'intéresse à l'évolution des deux vitesses séparément. Les valeurs de vitesse négatives correspondent au fluide s'écoulant vers la gauche et les valeurs positives sont associées au fluide qui s'écoule vers la droite du canal. L'allure des courbes nous renseigne sur le comportement général de l'écoulement. Si les courbes de vitesse mesurées aux points P_1 et P_2 conservent au cours du temps une symétrie par rapport à zéro, on en déduit que l'écoulement est symétrique et donc stable. Par

contre, si l'écoulement est instable, la vitesse au point P_2 augmente rapidement alors que la vitesse mesurée au point P_1 chute vers zéro. Ce comportement des vitesses est identifié à un écoulement asymétrique. Lorsque la vitesse mesurée au point P_1 augmente constamment au cours du temps sans atteindre un plateau avant la fin de la simulation, l'écoulement se trouve alors en transition. On observe ce comportement sur les figures 6.6(d) et 6.7(a)-(b) pour $B=4, 5, 6$ et $Gz=20$. On observe également un autre comportement pour les vitesses. Si on examine la figure 6.6(b) pour $B=2$ et $Gz=1$ et 2, on remarque que la vitesse mesurée au point P_2 augmente pour ensuite atteindre un plateau qui sera maintenu tout au long de la simulation. De façon similaire, la vitesse mesurée au point P_1 diminue et forme un plateau ayant une valeur non nulle, contrairement aux écoulements en régime instable dont le plateau atteint la valeur zéro. Dans le cas précis où $B=2$ et $Gz=1$, les vitesses aux sorties indiquent que l'écoulement est asymétrique, mais que cette asymétrie n'est pas totale, malgré la mesure de $\Delta T(t)$. Les plateaux révèlent également que l'écoulement est figé dans cette configuration et donc qu'il n'y a plus d'évolution. Étant donné que la valeur du plateau pour la vitesse mesurée au point P_2 est non négligeable par rapport à la vitesse en P_1 , on considère que l'écoulement est dans un régime de transition. Sur la même figure, lorsque $B=2$ et $Gz=2$, les vitesses adoptent un comportement similaire à celui observé pour $B=2$ et $Gz=1$. La différence provient essentiellement de la valeur du plateau pour la vitesse mesurée au point P_1 . On voit que cette valeur est petite comparée à la vitesse mesurée au point P_2 . Dans ce cas on choisit de dire que l'écoulement est instable. La mesure des vitesses est donc complémentaire aux mesures de $\Delta T(t)$, au sens où l'analyse d'une seule mesure n'est pas suffisante pour permettre un classement définitif des différents écoulements que l'on peut observer.



FIG. 6.6 Évolution de u_d et u_g , $B=1, 2, 3, 4$.FIG. 6.7 Évolution de u_d et u_g , $B=5, 6, 8, 10$.

6.2.2 Comportement du fluide pour les divers régimes d'écoulement

Nous avons vu que le comportement de l'écoulement se déduit essentiellement en observant localement l'évolution de la différence de température et de la vitesse u aux sorties du canal (aux points P_1 et P_2 du domaine de calcul). Ici on propose de regarder l'écoulement dans son ensemble. On désire voir comment se comporte la distribution de la vitesse u et la température T sur tout le domaine de calcul au cours du temps (son évolution durant la simulation). On s'intéresse également aux conditions physiques qui forcent le fluide à adopter un certain régime d'écoulement plutôt qu'un autre. Les figures 6.9, 6.11 et 6.13 montrent respectivement le comportement de la température à différents temps durant la simulation pour le régime stable, en transitions et instable. Le nombre entre parenthèse indique le nombre de pas de temps correspondant au temps de calcul. 250 est le nombre total de pas de temps pour une simulation. De la même façon, les figures 6.10, 6.12 et 6.14 montrent l'évolution de la vitesse u en fonction du temps.

Avant de poursuivre, nous allons donner un bref rappel de la signification physique des nombres adimensionnels Gz et B . Le rôle des différentes combinaisons de valeurs de Gz et B est déterminant, puisqu'elles fixent le comportement de l'écoulement. Rappelons que selon l'équation (3.30), le nombre de Graetz (Gz) s'écrit comme le produit entre le ratio (H / R) et le nombre de Péclet Pe . Explicitement, le nombre de Gz peut s'écrire de la façon suivante :

$$Gz = Pe \left(\frac{H}{R} \right) = \left(\frac{\rho_0 c_{p0} u_0 H}{k_0} \right) \left(\frac{H}{R} \right) \quad (6.2)$$

Le nombre de Gz fournit le ratio entre le transfert de chaleur par convection dans la direction ayant une longueur caractéristique R , et le transfert de chaleur par conduction dans la direction donnée par la longueur caractéristique H . Une faible

valeur de Gz indique qu'il y a suffisamment de temps pour un abaissement substantiel de la température du fluide, car le fluide passe plus de temps dans l'injecteur. Par contre, une valeur plus grande de Gz indique un temps de refroidissement trop court pour observer un abaissement marqué de la température du fluide.

Quant au nombre adimensionnel B , il représente le ratio entre le changement de température à l'intérieur de l'écoulement $T_0=(T_a-T_r)$ et l'accroissement ou la diminution de température $\Delta T_{rhéol}$. Une faible valeur de $\Delta T_{rhéol}$ implique que la viscosité dépend fortement de T_0 . Le nombre B reflète donc la sensibilité de la viscosité aux changements de température à l'intérieur de l'écoulement. Par exemple, une augmentation de la valeur de B a pour effet d'entraîner une augmentation de la variation de la viscosité pour un écart donné de la température à l'intérieur du canal. La chose importante que l'on doit se rappeler est qu'un fluide qui se refroidit lorsqu'il s'écoule, a le potentiel de déclencher des instabilités induites par les écarts dans la température du fluide. Par exemple, une petite baisse locale de la température entraîne une augmentation de la viscosité qui à son tour ralentit le fluide, permettant un refroidissement local accru. Pour certaines combinaisons de Gz et B , ces changements peuvent faire basculer l'écoulement dans un régime instable. L'écoulement du fluide peut alors cesser dans une région et accélérer dans une autre. À présent, à l'aide de trois exemples, on examine ce qui se passe pour chaque régime d'écoulement.

6.2.2.1 Régime d'écoulement stable, $B = 2$ et $Gz = 0.5$

On rappelle que dans le contexte des mesures ponctuelles de température, si $\Delta T(t)$ forme rapidement un plateau dont la valeur est inférieure à 10^{-3} degré Celsius, alors l'écoulement possède une symétrie en température. En regardant la figure 6.9 on constate clairement que les isolignes de température sont symétriques sur

tout le domaine de calcul du début jusqu'à la fin de la simulation. Ce type de comportement caractérise un écoulement stable. On s'attend également à ce que la distribution des isolignes pour la vitesse u soit également symétrique. Si on regarde la figure 6.10, c'est exactement ce que l'on observe. La valeur de Gz est petite (0.5), ce qui implique que le fluide a suffisamment de temps pour se refroidir avant d'avoir franchit le seuil d'injection. Puisque la vitesse du fluide est faible, le transfert de chaleur vers les parois se fait principalement par conduction et non pas par un transport de chaleur lié au mouvement. La conduction thermique est élevée et la perte de chaleur est rapide. En effet, on observe une forte chute de température à l'embranchement de la partie verticale et horizontale de l'injecteur. Malgré cette variation rapide de température à l'intérieur du canal, la viscosité est peu sensible à ce changement étant donné que la valeur de B est petite. Il n'y a donc pas de variations importantes de la viscosité à l'intérieure du fluide. La viscosité étant relativement uniforme, l'écoulement a peu de chance d'être affecté par une perturbation qui pourrait l'entraîner vers une instabilité. Le fluide maintient donc son état de stabilité et l'écoulement demeure symétrique.

La figure 6.10 présente les isolignes de vitesse u pour les mêmes valeurs de Gz et B . On constate aisément que les isolignes de vitesse demeurent symétriques, ce qui est compatible avec nos mesures ponctuelles de vitesse et le fait que le fluide est dans un régime d'écoulement stable. Regardons maintenant ce qui se passe lorsque le fluide entre dans un régime instable.

6.2.2.2 Régime d'écoulement instable, $B = 4$ et $Gz = 10$

Encore une fois, on se place dans le contexte des mesures ponctuelles de température. Si $\Delta T(t)$ forme rapidement un plateau dont la valeur est cette fois supérieure à 10^{-3} , alors l'écoulement affiche clairement une asymétrie en

température. On peut faire ce constat sur la figure 6.11. Les isolignes de température montrent qu'initialement le fluide s'écoule symétriquement, mais que rapidement il évolue vers un état où l'écoulement devient instable et asymétrique. De plus, dans ce cas précis, la figure 6.12 montre que la vitesse u devient nulle dans la partie gauche du canal. Ce phénomène témoigne que l'instabilité s'est amplifiée au point de faire basculer l'ensemble de l'écoulement vers la droite du canal. La valeur de Gz qui est ici 20 fois plus élevée que dans le cas précédent (i.e. stable), indique que la convection est le mécanisme principal dans le transfert de chaleur. En effet, le fluide transporte assez de chaleur par convection vers les sorties pour que l'on puisse observer dans la partie horizontale du canal, une zone étroite où la température du fluide est maintenue égale à celle qu'il avait à son entrée. On remarque également que la conduction de chaleur joue un rôle seulement près des parois horizontales du canal. La valeur de B , plus élevée ici que dans le cas où l'écoulement est stable, implique que la viscosité est plus sensible aux changements de température à l'intérieur du fluide.

Il suffit maintenant qu'une petite perturbation locale de température (causée par le refroidissement du fluide près des parois) soit présente pour affecter localement la valeur de la viscosité et ainsi provoquer un changement dans le comportement de l'écoulement. Si une perturbation causée par le refroidissement du fluide fait en sorte qu'une asymétrie dans la distribution de la température se développe, alors on peut s'attendre à ce que l'écoulement soit entraîné vers un état instable. On rappelle que la température de la paroi inférieure horizontale droite est perturbée d'une valeur $\varepsilon=10^{-5}$, permettant de maintenir une faible asymétrie de température dans le canal. Cette paroi ayant une température légèrement supérieure, elle entraîne une diminution de la viscosité. Si la viscosité diminue, le fluide s'écoule avec plus de facilité entraînant une légère augmentation du débit dans la partie droite du canal au détriment de la partie gauche. Le fluide transporte alors plus de chaleur vers la

droite ce qui entraîne à nouveau une diminution de la viscosité. Le développement de cette asymétrie thermique réduit le transport de chaleur à l'intérieur de la partie gauche du canal. La conséquence directe est une augmentation de la viscosité et un refroidissement plus important. Un gradient élevé de la viscosité s'établit alors dans l'écoulement. Ces événements se déroulent en cascade et s'amplifient au point où l'écoulement cesse complètement dans une région (i.e. partie gauche du canal d'injection) et accélère dans l'autre (i.e. partie droite du canal d'injection). L'évolution de cette asymétrie est donc une conséquence directe de l'instabilité de l'écoulement. Comme nous le verrons dans la prochaine section, certaines combinaisons de valeur des paramètres Gz et B placent l'écoulement dans un état intermédiaire, c'est-à-dire entre écoulement stable et instable. C'est ce que l'on désigne par régime en transition.

6.2.2.3 Régime d'écoulement en transition, $B = 4$ et $Gz = 20$

La courbe de $\Delta T(t)$ et les courbes de vitesse u (figures 6.4(d) et 6.6(d)) montrent que l'écoulement du fluide dans l'injecteur évolue de manière asymétrique. Contrairement au régime instable, le régime en transition affiche une asymétrie en température et en vitesse qui se développe lentement au cours du temps et qui n'atteint pas avant la fin de la simulation, les critères nécessaires pour qu'il soit qualifié d'instable. Les figures 6.13 et 6.14 présentent les résultats numériques de l'évolution de la distribution de température et de la vitesse u sur l'ensemble du domaine de calcul lorsque $B=4$ et $Gz=20$. On constate aisément en comparant avec le régime instable, que l'évolution de l'asymétrie se fait plus lentement. Rappelons qu'une valeur élevée de Gz indique un refroidissement réduit du fluide qui circule dans le canal. Plus la valeur de Gz est grande, moins le fluide a le temps et la capacité de se refroidir avant de quitter l'injecteur. Si le fluide a moins de temps pour se refroidir, alors son potentiel d'engendrer des instabilités liées à des variations de

température est affaibli. L'efficacité de ces instabilités à perturber le fluide est donc moindre. L'écoulement n'a donc pas le temps ou est dans l'incapacité d'atteindre le régime instable. Si on permet à la valeur de Gz d'augmenter, on peut s'attendre à ce que l'écoulement retrouve sa stabilité puisque les instabilités dans le fluide n'auront plus d'effets sur le comportement de l'écoulement. En effet, puisque la vitesse du fluide augmente, la convection devient beaucoup plus importante que la conduction, ce qui fait en sorte que le fluide est plus stable. On remarque ce retour à la stabilité sur les figures 6.4(d) et 6.6(d) lorsque Gz vaut 50 et plus.

6.2.3 Comportement de l'écoulement lorsque $m=0$

Le mécanisme à la source des instabilités est l'apparition et l'évolution d'un écart de température à l'intérieur de l'écoulement. Ces variations de température influencent la viscosité, ce qui a pour effet de modifier les propriétés et le comportement du fluide. L'expression mathématique de la viscosité (équation (6.1)) montre qu'elle dépend de la température et du cisaillement. Cette double dépendance laisse penser qu'il existe un couplage entre la température et le cisaillement. On a vérifié l'existence de ce couplage en effectuant quelques simulations pour les trois régimes d'écoulements, et en posant la valeur de m égale à 0 dans l'équation de la viscosité. De cette façon, on voit si la température est capable à elle seule, d'engendrer les instabilités nécessaires pour entraîner l'écoulement vers un déséquilibre. Si on pose $m=0$ dans l'équation 6.1, alors la viscosité dépend uniquement de la température et le fluide redevient Newtonien. La figure 6.8 montre les résultats des simulations numériques pour un B constant ($B=6$) et quatre valeurs de Gz . Les isolignes de vitesse u permettent de constater que l'écoulement demeure symétrique pour les quatre valeurs choisies de Gz . On rappelle que lorsque $m=-0.8$, l'écoulement est stable pour $Gz=0.1$, instable pour $Gz=1, 5$ et en transition pour $Gz=20$ (voir la figure 6.5(b)). On conclut que la présence du terme $\dot{\gamma}^m$ dans l'expression de la

viscosité est essentielle, puisque l'influence unique de la température est incapable de créer un déséquilibre dans l'écoulement. L'influence de la température et du cisaillement sur le comportement de la viscosité et du fluide peut se résumer par une chaîne d'événements qui se produisent en cascade :

- Si $T \uparrow \Rightarrow \eta \downarrow \Rightarrow u \uparrow \Rightarrow \dot{\gamma} \uparrow$ et $T \uparrow \Rightarrow \eta \downarrow \dots$
- Si $T \downarrow \Rightarrow \eta \uparrow \Rightarrow u \downarrow \Rightarrow \dot{\gamma} \downarrow$ et $T \downarrow \Rightarrow \eta \uparrow \dots$

Sous certaines conditions (imposées par le choix des valeurs de Gz et B), cette chaîne d'événements forcera le fluide vers un régime d'écoulement instable et asymétrique.

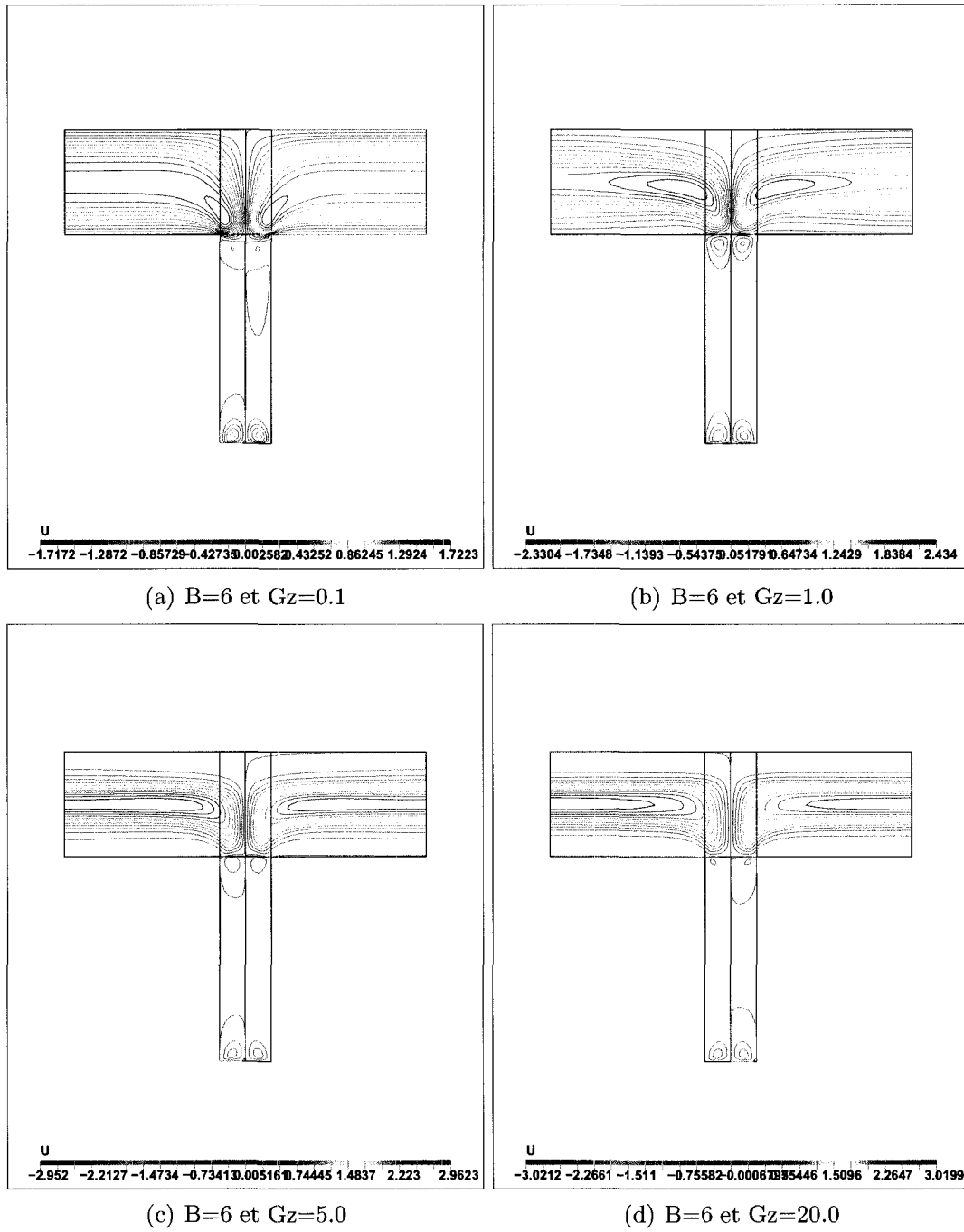


FIG. 6.8 Isolignes de vitesse u lorsque $m = 0$ ($t=87.5$).

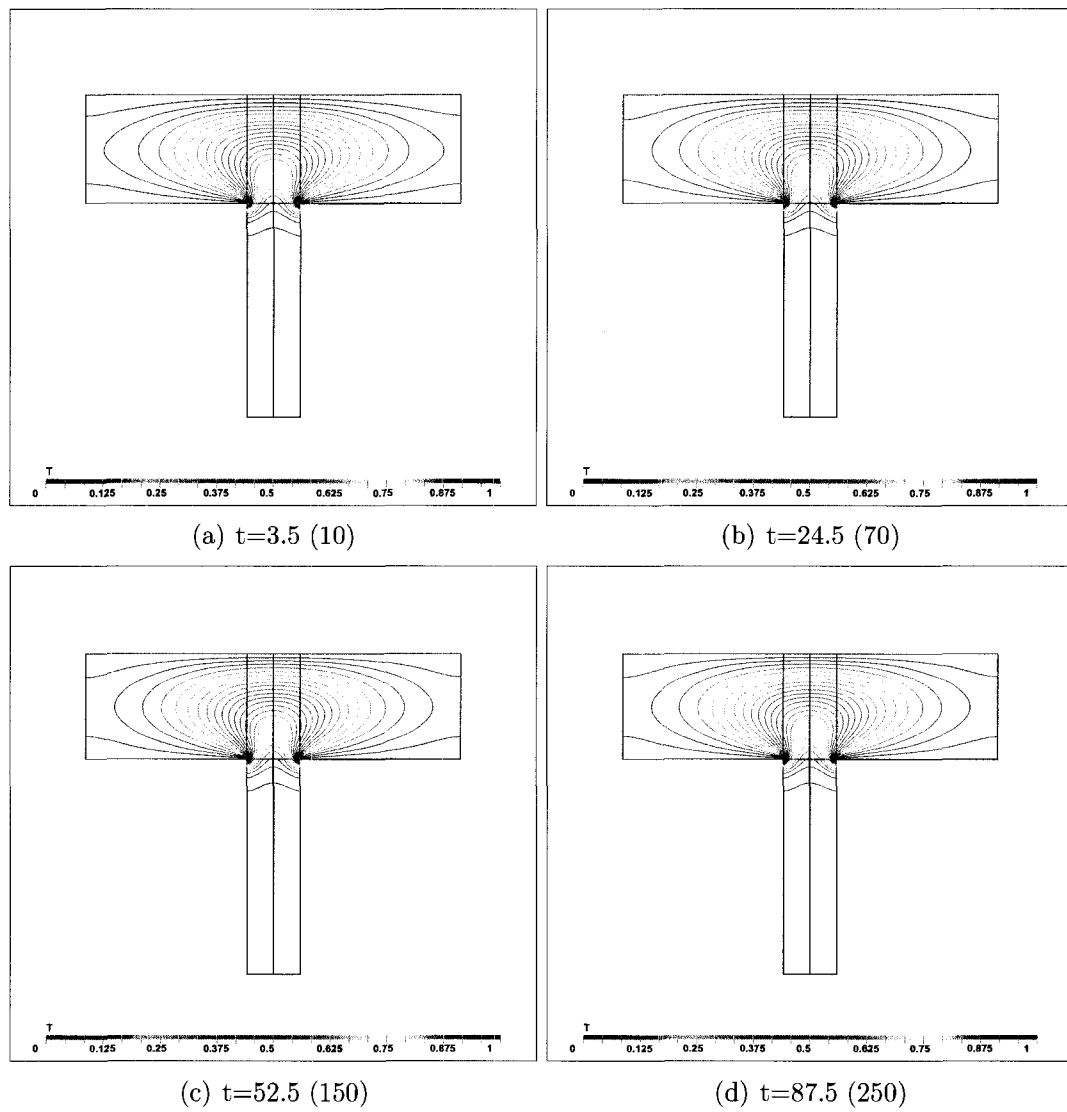


FIG. 6.9 Isolignes de température pour $B = 2$ et $Gz = 0.5$.

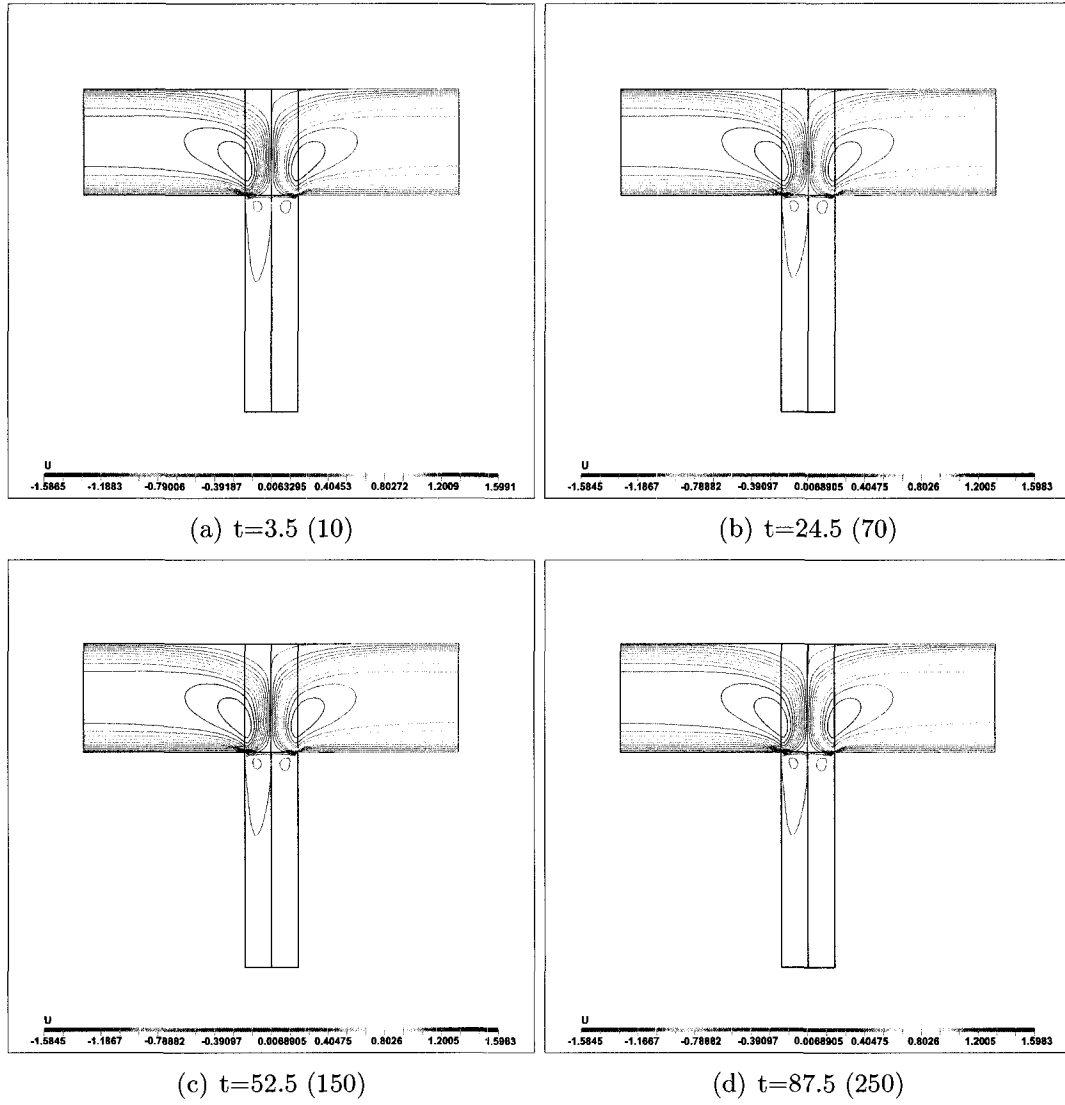


FIG. 6.10 Isolignes de vitesse u pour $B = 2$ et $Gz = 0.5$.

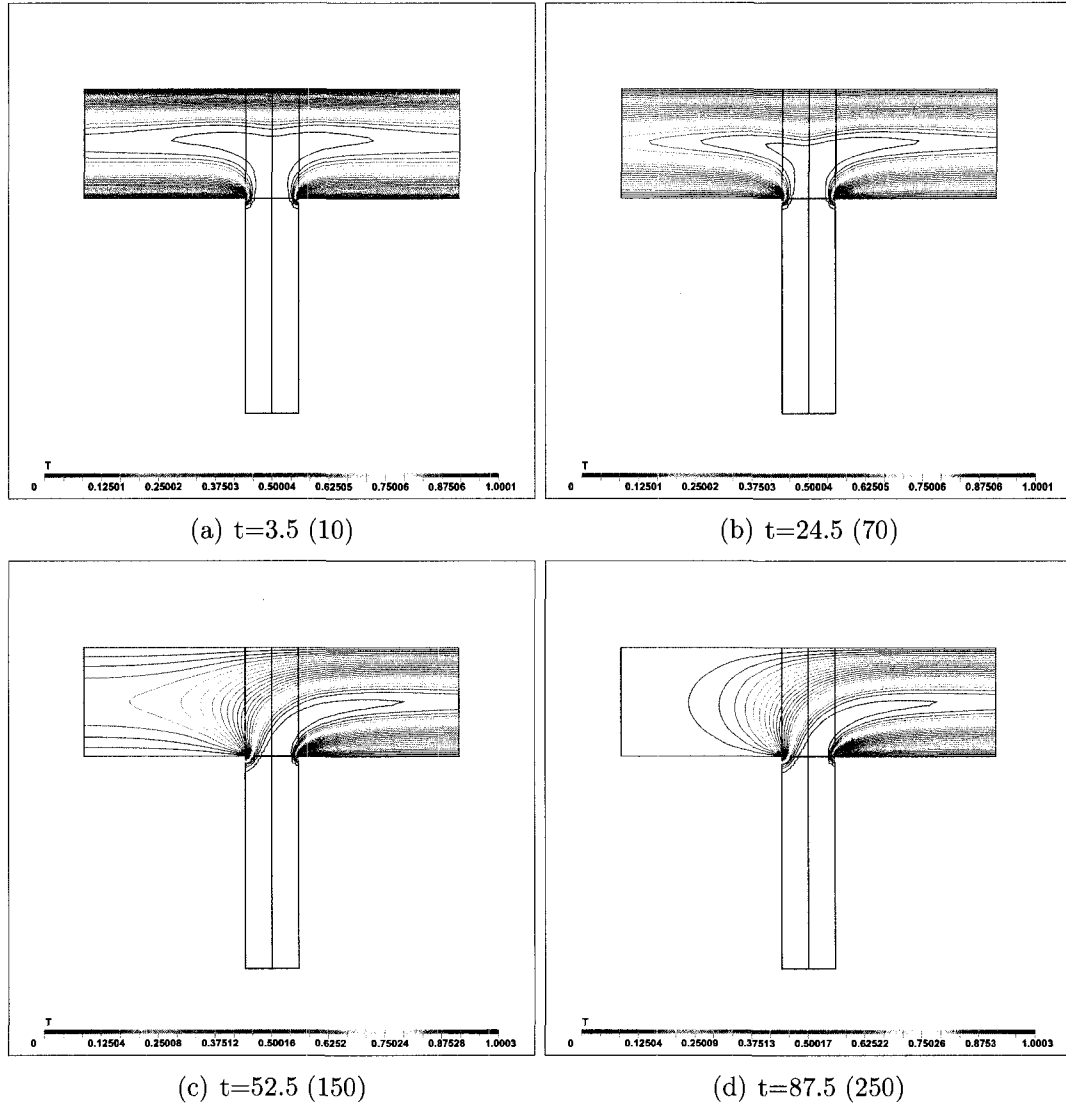


FIG. 6.11 Isolignes de température pour $B = 4$ et $Gz = 10$.

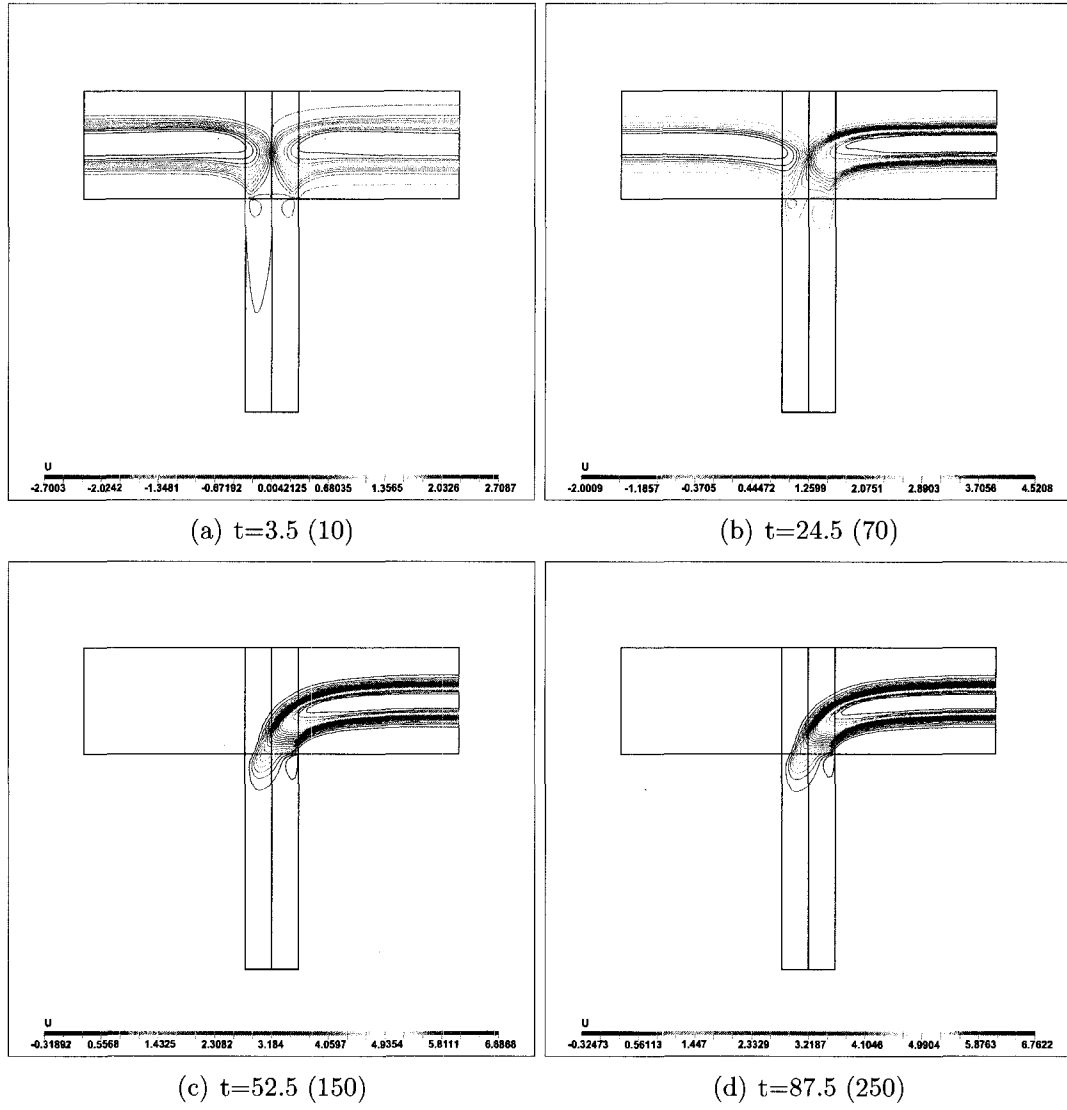


FIG. 6.12 Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 10$.

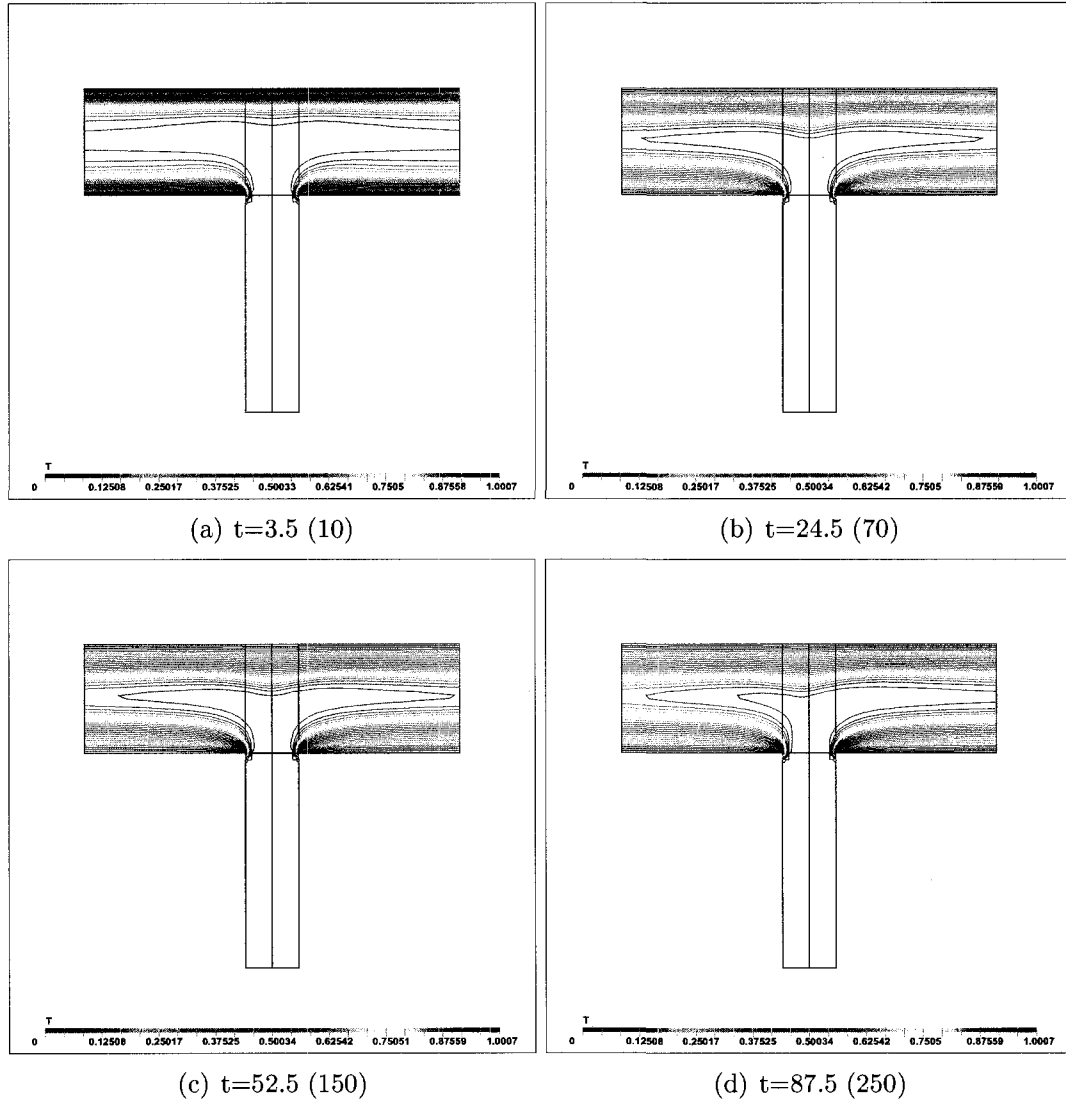


FIG. 6.13 Isolignes de température pour $B = 4$ et $Gz = 20$.

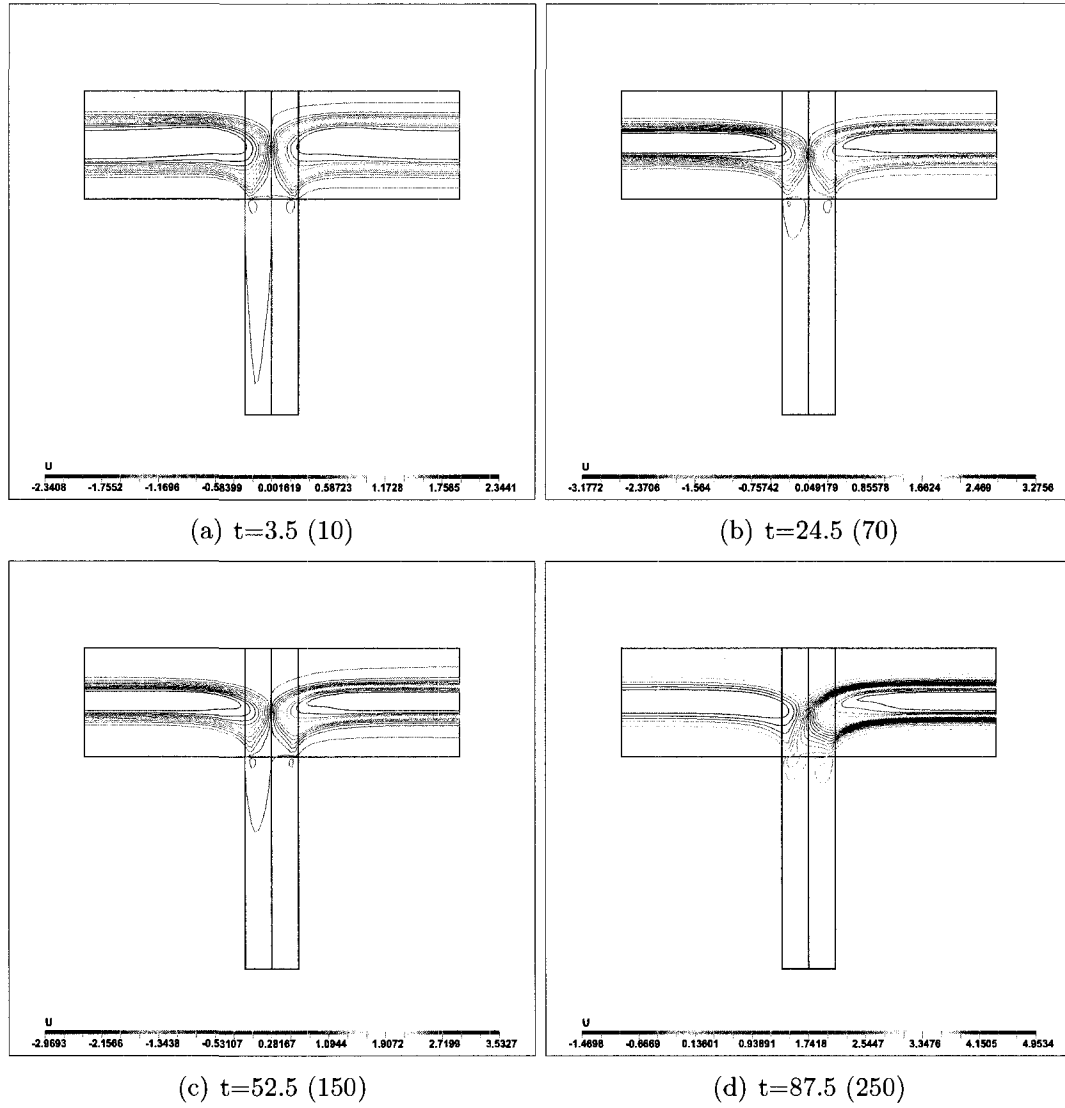


FIG. 6.14 Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 20$.

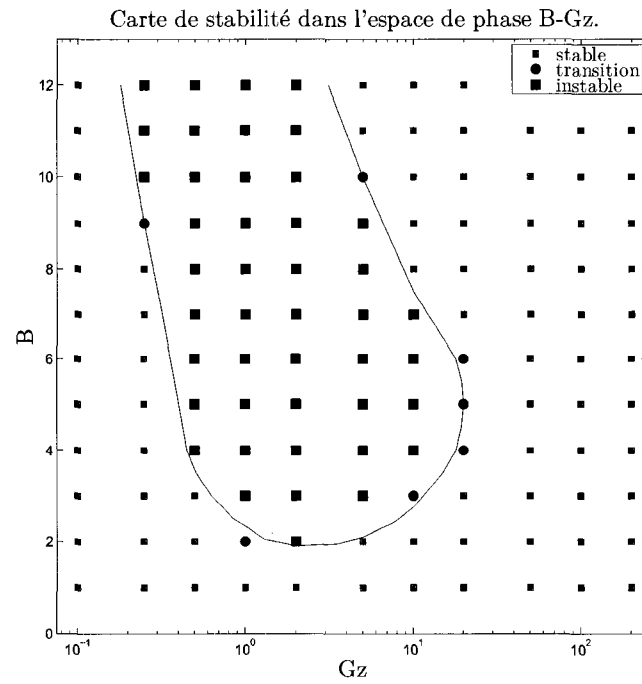
En s'appuyant sur ce que l'on vient de voir, on présente dans la prochaine section un classement des 132 simulations numériques qui ont été faites dans le but d'établir une carte de stabilité de l'écoulement dans l'espace de phase Gz - B .

6.2.4 Carte de stabilité

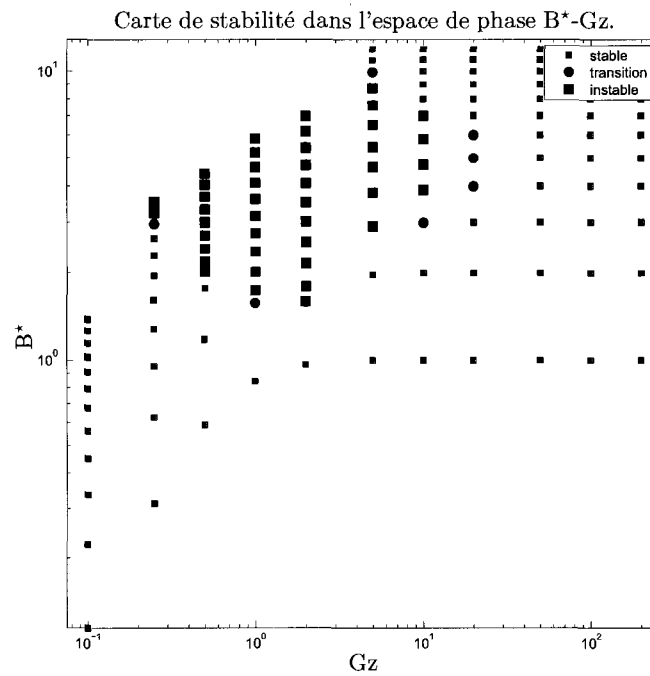
La mesure de $\Delta T(t)$ (figures 6.4 et 6.5) fournit un critère de classement basé sur l'échelle de température T_0 , tandis que la mesure des vitesses (figures 6.6 et 6.7) vient corroborer ou éclaircir le régime d'écoulement dans lequel il se trouve pour une paire de valeur de Gz et B . Cette méthode a permis de classer les trois exemples de la section précédente. En employant la même méthode pour les 132 simulations numériques on arrive à créer une carte, où chaque point contenu sur cette carte correspond à un couple de valeur de Gz et B et sur lequel une étiquette de stabilité est donnée selon son classement. La figure 6.15(a) montre le résultat de ce classement. Un point vert représente un écoulement stable, un point bleu désigne un écoulement en transition et un point rouge est attribué à un écoulement instable. On a également tracé sur la carte la courbe qui délimite approximativement le bassin d'instabilité de l'écoulement. Le diagramme de stabilité indique que seules certaines combinaisons spécifiques de Gz et B entraînent une asymétrie de l'écoulement. En terme du nombre de Gz , on peut définir trois grandes zones :

- 1) $0.1 \leq Gz \leq 0.25$.
- 2) $0.25 < Gz < 20$.
- 3) $20 \leq Gz \leq 200$.

La première zone montre que tous les points sont stables, sauf ceux dont la valeur de B est supérieure ou égale à 10 ($Gz=0.25$). Dans la première zone, la valeur de Gz est faible, le fluide se refroidit très rapidement par conduction avant d'atteindre le seuil d'injection. Dans la partie horizontale du canal, le fluide a essentiellement



(a)



(b)

FIG. 6.15 Carte de stabilité décrivant le comportement du fluide en fonction des paramètres, (a) Gz et B , (b) Gz et B^* .

la même température que les parois. La température du fluide étant très uniforme, aucun déséquilibre thermique n'est présent et la stabilité du fluide est maintenue, même lorsque la valeur de B est grande. On remarque que l'écoulement perd de sa stabilité seulement si B est supérieur ou égal à 9 et si $Gz=0.25$. Lorsque Gz est faible, le fluide est déjà en grande partie refroidit à l'entrée de la partie horizontale du canal. En effet, une faible valeur de Gz indique qu'il y a suffisamment de temps pour un abaissement substantiel de la température du fluide. Dans ce cas, l'échelle de température T_0 utilisée dans la définition du nombre B (équation 3.32) n'est plus valable. On rappelle que l'échelle de température T_0 est égale à la différence entre la température du fluide T_a au seuil d'injection et la température T_r des parois horizontales (i.e : $T_0=T_a-T_r$), où $T_r \sim 0$ et $T_a \sim 1$, donc $T_0=T_a$. Pour tenir compte du refroidissement rapide du fluide, on définit une nouvelle échelle de température $T_0^*=T_a^*-T_r$, où T_a^* est mesurée dans la partie horizontale du canal. Cette échelle de température modifiée permet de définir un B effectif, que l'on nomme B^* . La figure 6.15(b) montre la carte de stabilité dans l'espace de phase $Gz-B^*$. On constate que lorsque la valeur de Gz est faible, B^* est beaucoup plus petit que B . Si B^* est petit lorsque Gz est faible, alors la viscosité est peu sensible aux changements de température présents à l'intérieur de l'écoulement. Par conséquent, l'écoulement demeure stable et symétrique. On remarquera que B^* et B ont presque les mêmes valeurs lorsque Gz est élevé, car dans ces conditions, $T_a^* \sim T_a$.

La deuxième zone présente un intérêt particulier, puisqu'elle contient le bassin d'instabilité. Dans cette région, Gz varie entre 0.5 et 10. Dans cette intervalle de valeur, la vitesse du fluide et le transfert de chaleur par convection deviennent plus importants, ce qui a pour effet d'étendre et d'accroître le gradient thermique à l'intérieur de la partie horizontale du canal d'injection. Par contre, le transfert de chaleur par conduction est réduit par rapport à ce que l'on avait pour les valeurs inférieures de Gz (i.e. $Gz=0.1$ et 0.25). Toutefois, il demeure assez important pour permettre un

refroidissement marqué du fluide par les parois. Or, ce refroidissement du fluide a le potentiel de produire une asymétrie sur la distribution de la température dans l'injecteur et d'influencer la viscosité. La carte de stabilité montre que si la valeur de B est inférieure ou égale à 2, l'écoulement est stable. En effet, lorsque B est petit, la viscosité est peu susceptible d'être sensible aux variations du gradient de température présentes dans le canal. Par contre, pour une valeur de B supérieure à 2, de larges gradients de viscosité apparaissent et l'écoulement devient instable. On remarque qu'il existe une petite région où l'écoulement est stable malgré les valeurs élevées du paramètre B . Dans cette région, les vitesses élevées du fluide permettent à l'écoulement d'atteindre à nouveau la stabilité. En d'autres mots, l'importance de la convection induit un amortissement sur les perturbations.

Finalement, la dernière zone de la carte de stabilité montre que l'écoulement est stable pour toutes les valeurs de Gz et B . On sait que les instabilités sont causées par un déséquilibre de la température dans le canal d'injection et que c'est le refroidissement en provenance de la paroi qui détermine ce déséquilibre. Lorsque Gz est grand, la vitesse du fluide dans la partie horizontale du canal est grande et le transport de chaleur par convection est très élevé. La conduction devient alors beaucoup plus petite que la convection, ce qui fait en sorte de stabiliser l'écoulement. La vitesse élevée du fluide joue le rôle de stabilisateur, en entraînant rapidement avec lui les instabilités ayant le potentiel de perturber l'écoulement.

En plus de définir les régions où l'écoulement est stable ou instable, la carte de stabilité permet de répondre à l'un des objectifs que l'on s'était fixé. On rappelle qu'une variation du nombre de Gz peut être interprétée comme un changement de géométrie. En effet, le nombre de Graetz fait intervenir le ratio de deux grandeurs, la demi-hauteur H de la branche horizontale de l'injecteur et son rayon R (voir l'équation (3.30) et la figure 6.1). Par exemple, une petite valeur Gz peut être associée à une géométrie où le canal horizontal est long et étroit (H faible et R

grand). Sachant que l'écoulement est stable pour des valeurs précises de Gz , il devient possible de définir une famille de paramètres géométriques (et donc une famille de géométries pour l'injecteur) permettant de minimiser ou même d'éliminer les problèmes de moulage causés par les instabilités de l'écoulement dans l'injecteur.

6.3 Analyse de sensibilité

L'analyse de l'écoulement et les mesures de $\Delta T(t)$ ont permis de définir la carte de stabilité en fonction des nombres adimensionnels Gz et B . Cette carte a également permis de déterminer et de tracer la frontière entre les zones stables et instables. Dans cette section, on montre que les sensibilités obtenues par la Méthode de l'Équation des Sensibilités (*MES*) permettent d'anticiper la réponse du système à des perturbations des paramètres Gz et B . En d'autres mots, on montre que lorsque les paramètres sont perturbés autour de leurs valeurs courantes, les équations de sensibilité sont capables de prédire correctement la tendance et le comportement de l'écoulement. Par exemple, lorsque l'on choisit un point sur la carte de stabilité, on voudrait être en mesure de déterminer en fonction de Gz et B , la direction vers laquelle on doit se déplacer pour aller vers un écoulement plus stable ou moins stable. Une fois cette direction trouvée, on sera en mesure de dire si un point voisin est stable ou instable par rapport au point de départ. Dans ce contexte, le calcul des sensibilités est utilisé pour déterminer la nature d'une solution voisine. On montre également que les sensibilités procurent de l'information sur le passage de la zone stable à la zone instable, c'est-à-dire que l'on peut anticiper le passage à l'instabilité (i.e. lorsque l'on franchit la frontière de la zone de transition).

6.3.1 Développement en série de Taylor et sensibilités

Le calcul d'une solution voisine se comprend aisément en terme de série de Taylor. Par exemple, si on considère une fonction F de deux variables x et y , alors le développement en série de Taylor de F s'écrit :

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{F(x, y)}{m!n!} \Delta x^m \Delta y^n \quad (6.3)$$

Au premier ordre, on obtient,

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx F(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \Delta y \quad (6.4)$$

Les termes $\partial_x F(x, y)$ et $\partial_y F(x, y)$ expriment le changement de F lorsque x et y varient. Ils traduisent la réponse de F à des perturbations des variables x et y . Vue sous cet angle, $\partial_x F(x, y)$ et $\partial_y F(x, y)$ expriment la sensibilité de F par rapport à x et à y respectivement. On rappelle que la sensibilité est définie comme la dérivée de $\mathbf{X}$, une variable d'état, par rapport à un paramètre arbitraire a . Supposons que $\mathbf{X}$ représente la vitesse u d'un champ de vitesse quelconque, où $u = u(x, y, t; a)$ et supposons également que u soit sensible aux variations de a . Alors la sensibilité de u par rapport à a s'écrit de la façon suivante :

$$s_u^a = \frac{\partial u(x, y, t; a)}{\partial a}, \quad (6.5)$$

que l'on note simplement par s_u . Pour montrer que les équations de sensibilités sont capables d'anticiper la réponse du système à des perturbations des paramètres Gz et B , on s'intéressera particulièrement à la sensibilité de $\Delta T(t)$ par rapport à Gz et à B , car la mesure $\Delta T(t)$ reflète le comportement et l'évolution de l'écoulement. En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $\Delta T(t, Gz, B)$

on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) \approx \Delta T(t, Gz, B) + \frac{\partial}{\partial Gz} \Delta T(t, Gz, B) \delta Gz \\ + \frac{\partial}{\partial B} \Delta T(t, Gz, B) \delta B, \quad (6.6)\end{aligned}$$

Si on note les sensibilités $\partial_{Gz} \Delta T(t, Gz, B)$ et $\partial_B \Delta T(t, Gz, B)$ simplement par $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$, alors l'équation (6.6) s'écrit,

$$\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) \approx \Delta T(t, Gz, B) + s_{\Delta T}^{Gz} \delta Gz + s_{\Delta T}^B \delta B. \quad (6.7)$$

La sensibilité $s_{\Delta T(t)}$ se calcule simplement en prenant la différence entre la sensibilité de la température mesurée au point P_2 et la sensibilité de la température mesurée au point P_1 (voir la figure 6.3). On a donc,

$$s_{\Delta T}^{Gz} = s_{T_2}^{Gz} - s_{T_1}^{Gz} \quad (6.8)$$

$$s_{\Delta T}^B = s_{T_2}^B - s_{T_1}^B. \quad (6.9)$$

Les valeurs des sensibilités de la température par rapport aux paramètres Gz et B s'obtiennent en solutionnant numériquement le système d'équations des sensibilités (3.43-3.45).

6.3.2 Vérification du calcul des sensibilités par différence finie

Avant de poursuivre notre analyse, on confronte le calcul des sensibilités à une vérification par différence finie. On rappelle que la sensibilité est définie comme la dérivée d'une variable d'état $\mathbf{X}$ par rapport à un paramètre d'intérêt a . Supposons que $\mathbf{X}$ représente la vitesse $u=u(x, y, t)$ et supposons également que cette vitesse soit sensible aux variations d'un paramètre a , telle que la viscosité μ par exemple.

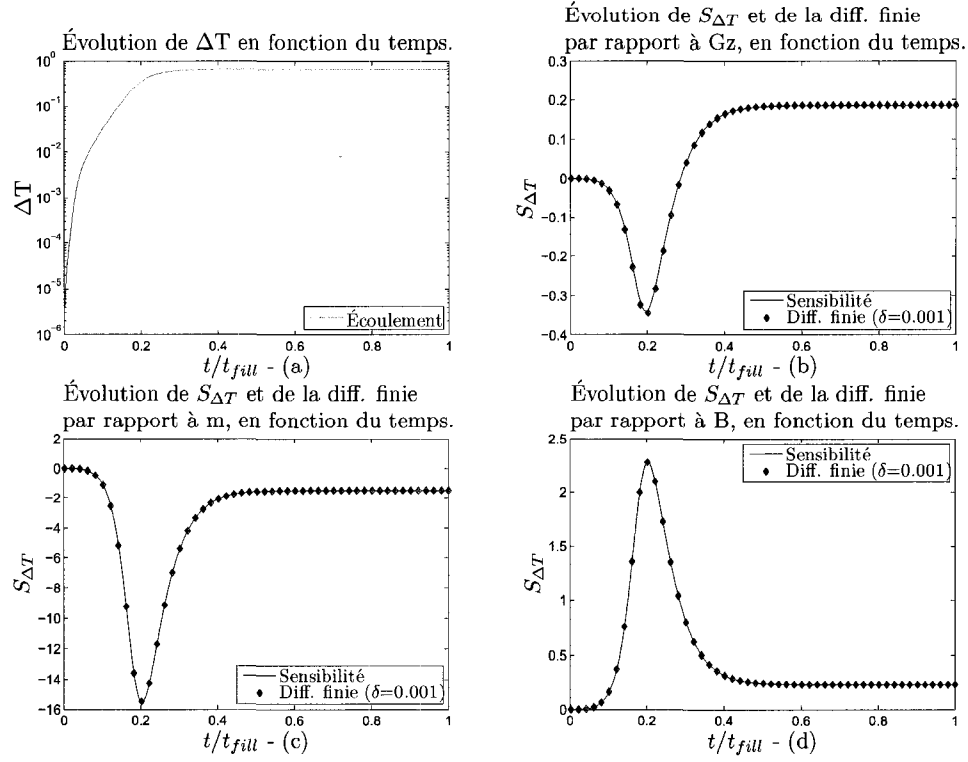


FIG. 6.16 Comparaison entre les sensibilités calculées par la méthode des sensibilités et les sensibilités obtenues par différence finie. La figure (a) présente l'écoulement, tandis que les figures (b), (c) et (d) montrent les sensibilités par rapport aux paramètres Gz , m et B respectivement. Les calculs ont été fait avec $B = 2$, $Gz = 2$.

Alors la sensibilité de u par rapport à μ s'écrira de la façon suivante :

$$s_u^\mu = \frac{\partial u(x, y, t; \mu)}{\partial \mu}, \quad (6.10)$$

que l'on note généralement par s_u . On peut approcher l'équation (6.10) par une différence finie de la forme,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t; a)}{\partial a} \approx \frac{f(\mathbf{x}, t; a_0 + \delta a) - f(\mathbf{x}, t; a_0 - \delta a)}{2\delta a}. \quad (6.11)$$

où a_0 dénote la valeur du paramètre a et δa représente une petite perturbation de ce paramètre. Ce calcul est simple et permet de vérifier aisément si les équations

de sensibilités sont justes. La figure 6.16 compare les résultats des deux méthodes d'approximation et indique que la concordance parfaite confirme et vérifie le calcul des sensibilités par la méthode des équations de sensibilités.

6.3.3 Courbes de sensibilité et vecteur de stabilité

Les figures 6.17 et 6.18 montrent l'évolution temporelle de $\Delta T(t)$ et de $s_{\Delta T}(t)$ par rapport à Gz , m et B pour deux valeurs du paramètre Gz (5 et 10). Les différentes courbes de $\Delta T(t)$ servent uniquement de point de référence. Seules les courbes de $s_{\Delta T}(t)$ par rapport à Gz et B présentent un intérêt ici, puisque que la carte de stabilité est exprimée dans l'espace des paramètres Gz - B . Pour comprendre le comportement des différentes courbes de sensibilité, on doit imaginer les courbes de $\Delta T(t)$ comme étant le résultat de la projection d'une surface sur le plan $\Delta T(t)$ - t/t_{fill} . Cette surface est formée des différentes courbes de $\Delta T(t)$ que l'on répartit le long d'un troisième axe pour chaque valeur de B . Les variations de cette surface dans la direction de la coordonnée B sont mesurées par $s_{\Delta T}^B(t)$.

Le schéma 6.19 montre une coupe de cette surface pour $Gz=5$ au temps $t/t_{fill}=0.2$ (voir la figure 6.17). On observe que $s_{\Delta T}^B$ en $B=3$ est positif, tandis que pour $B=8$, $s_{\Delta T}^B$ est négatif. On constate que les courbes de sensibilité de $\Delta T(t)$ par rapport à B au temps $t/t_{fill}=0.2$ ont le bon signe. De plus, pour cette valeur particulière du temps, $s_{\Delta T}^B$ atteint son maximum lorsque $B=3$, contrairement à $B=8$ où $s_{\Delta T}^B$ atteint pratiquement son minimum. Si on laisse évoluer le temps, on peut alors suivre l'évolution de $s_{\Delta T}^B$ pour chacune des valeurs de B . Le même raisonnement s'applique pour comprendre et suivre l'évolution de $s_{\Delta T}^{Gz}$ au cours du temps. On rappelle que l'un des objectifs du calcul des sensibilités, est de donner la direction vers laquelle on doit se déplacer sur la carte de stabilité pour aller vers un écoulement plus stable ou moins stable, à partir d'un point donné de cette carte.

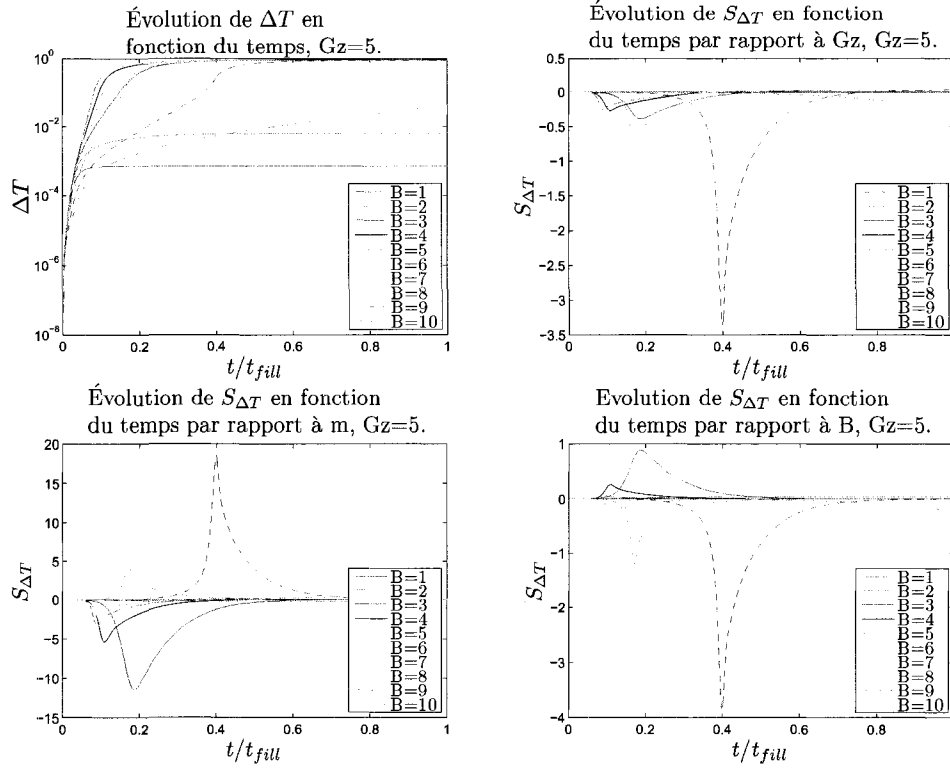


FIG. 6.17 Évolution temporelle de $s_{\Delta T}(t)$, $Gz = 5$.

Pour déterminer cette direction, on commence par réécrire l'équation (6.7) de la façon suivante,

$$\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) \approx \Delta T(t, Gz, B) + \nabla(\Delta T(t, Gz, B)) \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (6.12)$$

où $\nabla = (\partial_{Gz}, \partial_B)$ et $\boldsymbol{\delta} = (\delta Gz, \delta B)^T$. Cette réécriture fait apparaître le gradient de $\Delta T(t)$. Cette notation permet de faire ressortir la nature vectorielle des sensibilités. Ainsi, on peut voir les termes $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$ comme les composantes d'un vecteur (i.e. le gradient) dans l'espace de phase Gz - B . On peut donc construire sur chacun des points de la carte de stabilité, un vecteur qui indiquera la direction à suivre pour aller vers un écoulement plus stable ou moins stable. On veut déterminer si ces vecteurs pointent vers la zone instable ou s'ils pointent dans le sens opposé. Cette

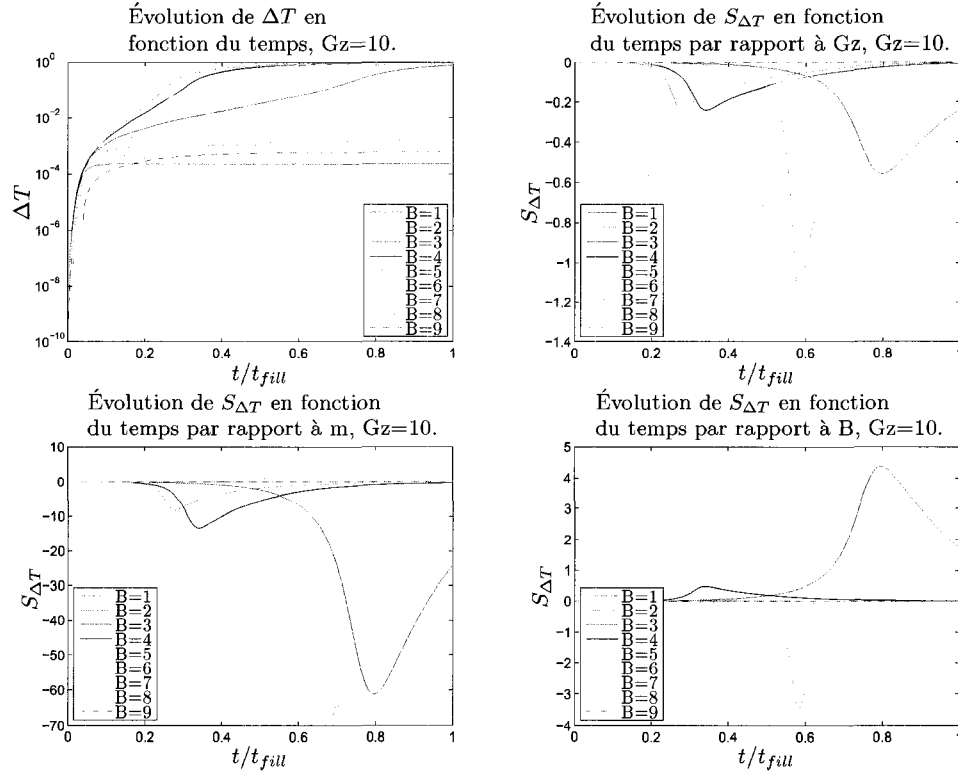


FIG. 6.18 Évolution temporelle de $s_{\Delta T}(t)$, $Gz = 10$.

direction est fixée par le signe de $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$. À titre d'exemple, regardons les courbes de sensibilité par rapport à Gz et à B pour $Gz=5$, $B=3$ et $B=9$. Lorsque $B=3$, on remarque qu'au cours du temps, le signe de la sensibilité par rapport à Gz est négatif et que le signe de la sensibilité par rapport à B est positif. On peut donc construire indépendamment de la grandeur de $s_{\Delta T}^{Gz}$ et de $s_{\Delta T}^B$, un vecteur ayant comme point d'origine les coordonnées $(Gz=5, B=3)$. De plus, on constate que ce vecteur s'oriente généralement vers la zone instable. En effet, si on se place au point $Gz=5$ et $B=3$ sur la carte de stabilité, on voit que la zone instable est globalement située en haut et à gauche par rapport à ce point. Les deux courbes de sensibilité pour $B=9$ permettent de construire un second vecteur de la même façon. Son point d'origine est donné par les coordonnées $Gz=5$ et $B=9$ et son orientation générale indique aussi la zone instable. En effet, les signes de $s_{\Delta T}^{Gz}$ et de $s_{\Delta T}^B$ sont

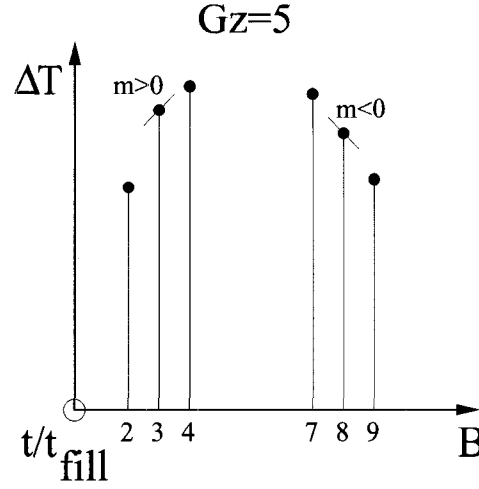


FIG. 6.19 Valeur de $s_{\Delta T}^B$ au point $B=3$ et $B=8$.

négatifs et la zone instable se trouve à gauche et légèrement sous le point d'origine de ce vecteur. Les deux exemples que l'on vient de voir permettent de conclure que le signe des composantes fournit par le calcul des sensibilités force les vecteurs à pointer vers la zone instable. À la section 6.3.4, on explique pourquoi les sensibilités attribuent un sens privilégié à ces vecteurs.

La connaissance du signe des sensibilités n'est pas suffisant, car elle ne permet pas la construction d'un vecteur unique. Il faut aussi connaître la grandeur des composantes du vecteur que l'on veut construire. On détermine cette grandeur à partir des valeurs que prennent les courbes de sensibilités. Deux possibilités s'offrent alors à nous. On peut soit observer l'évolution temporelle des composantes $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$ pour des valeurs successives de t/t_{fill} , ou bien choisir des valeurs particulières. Une fois que toutes les composantes ont été déterminées à partir des courbes de sensibilité, on définit un champ de vecteur qui sera superposé sur la carte de stabilité. On nomme vecteurs de stabilité, l'ensemble des vecteurs qui recouvrent la carte de stabilité. Cet ensemble de vecteurs forme dans l'espace $Gz-B$ un champ de vecteur de stabilité.

6.3.4 Carte des vecteurs de stabilité

Tous les vecteurs de stabilité, que l'on note v_s , s'obtiennent de la façon suivante :

$$v_s = \left(\frac{s_{\Delta T}^{Gz}}{N}, \frac{s_{\Delta T}^B}{N} \right), \quad (6.13)$$

où N désigne la normalisation des vecteurs et s'écrit comme suit,

$$N = \sqrt{(s_{\Delta T}^{Gz})^2 + (s_{\Delta T}^B)^2}. \quad (6.14)$$

On normalise les vecteurs de stabilité dans le but de rendre le champ de vecteur plus lisible. Les figures 6.17 et 6.18 montrent que les sensibilités évoluent dans le temps de façon similaire et qu'elles passent toutes par un maximum ou un minimum selon les valeurs de B . On prendra note que l'échelle des sensibilités ne permet pas de discerner tous les maximum ou minimum présents sur les figures. Si on reprend l'un des deux exemples précédents, on remarque que les courbes de sensibilité par rapport à Gz et à B ont toutes deux un minimum lorsque $Gz=5$ et $B=9$. On remarque que ce minimum a presque la même valeur pour les deux courbes. Le vecteur construit à partir de ces composantes pointe donc avec un angle de près de 45 degrés vers l'intérieur de la zone instable. Si on fait la même chose avec les courbes de sensibilité pour $Gz=5$ et $B=3$, on constate alors que le vecteur résultant pointe lui aussi en direction de la zone instable. Ces deux exemples permettent de croire que les sensibilités sont en mesure de prédire le comportement de l'écoulement. L'étape suivante consiste à prendre toutes les valeurs maximales et minimales des courbes de sensibilité et de construire l'ensemble des vecteurs de stabilité. On obtient de cette façon la carte des vecteurs de stabilité pour les valeurs maximales des sensibilités (figure 6.20).

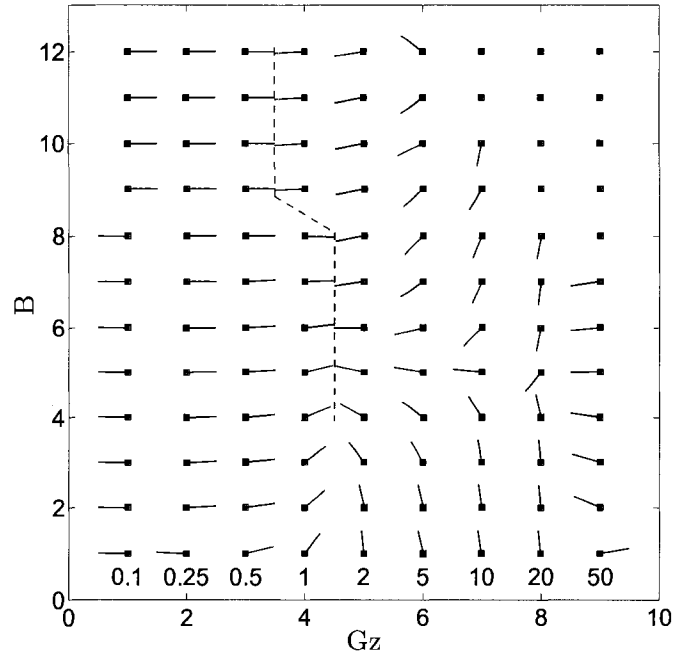


FIG. 6.20 Carte des vecteurs de stabilité de $s_{\Delta T}$ (valeur max.).

La figure 6.20 montre clairement l'orientation de tous les vecteurs de stabilité normalisés v_s . On constate globalement que l'ensemble des vecteurs qui se trouvent hors de la zone d'instabilité pointent en direction de la zone instable, tandis que ceux qui se trouvent à l'intérieur de la zone d'instabilité indiquent globalement la région où l'écoulement est le plus instable. En particulier, on remarque que les vecteurs de stabilité contenus dans la région bornée par $1 \leq Gz \leq 2$ et $4 \leq B \leq 8$ et celle bornée par $0.5 \leq Gz \leq 1$ et $9 \leq B \leq 12$, pointent les uns vers les autres. Ces deux régions sont traversées par une ligne pointillée. Si on fait référence aux courbes de $\Delta T(t)$ sur les figures 6.4 et 6.5, on observe en effet que les écoulements les plus instables se répartissent le long de cette ligne. Les vecteurs de stabilité sont donc en mesure de prédire le comportement du fluide en donnant la direction à suivre pour aller d'un écoulement plus stable vers un écoulement moins stable. Autrement dit, pour avoir un écoulement plus stable, il faut se déplacer dans la

direction opposée. Ceci implique que les sensibilités attribuent un sens privilégié aux vecteurs de stabilité. Ce qui suit montre pourquoi. La figure 6.21 présente un schéma de la carte de stabilité. On y retrouve le bassin d'instabilité et les régions où l'écoulement est stable. Les flèches en trait plein représentent les vecteurs de stabilité obtenus à partir des sensibilités. Par contre, celles en trait pointillés désignent les vecteurs de stabilité que l'on obtiendrait si le signe des sensibilités était inversé.

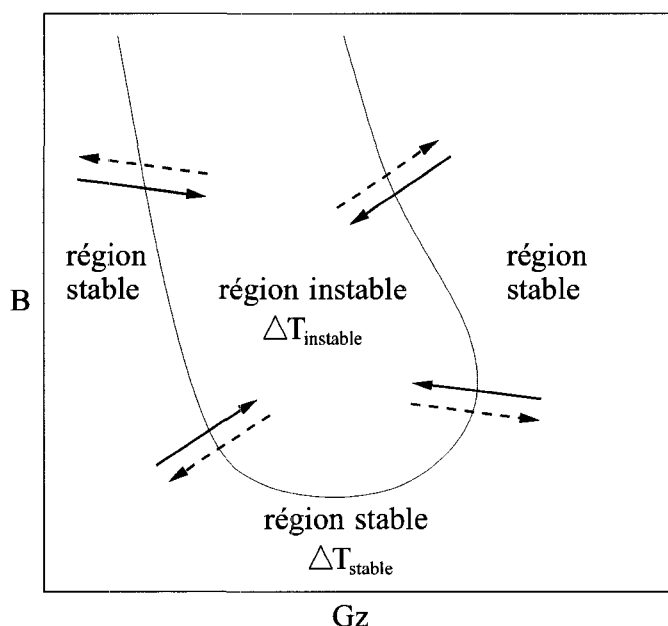


FIG. 6.21 Schéma de la carte de stabilité.

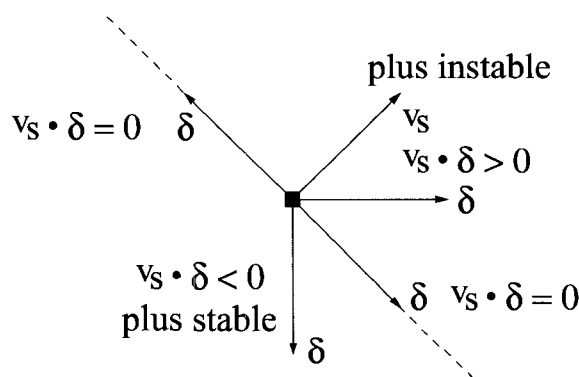


FIG. 6.22 Vecteur de stabilité v_s et vecteur de perturbation δ .

On sait que le découpage de la carte de stabilité est basée sur l'évaluation de $\Delta T(t)$.

Si on se déplace sur la carte de stabilité de façon à aller d'un écoulement plus stable vers un écoulement plus instable, alors $\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) > \Delta T(t, Gz, B)$. En effet, plus l'écoulement est instable, plus la différence de température $\Delta T(t)$ est élevée (voir les figures 6.4 et 6.5). Par contre, si on parcourt le chemin inverse, on aura $\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) < \Delta T(t, Gz, B)$.

On constate que $\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) > \Delta T(t, Gz, B)$ si le produit scalaire entre le vecteur de stabilité v_s et le vecteur de perturbation δ est positif. En d'autres mots, $\nabla(\Delta T(t, Gz, B)) \cdot \delta = (Nv_s \cdot \delta) = s_{\Delta T}^{Gz} \delta Gz + s_{\Delta T}^B \delta B > 0$ (voir figure 6.22). De plus, l'augmentation de la perturbation de $\Delta T(t)$ est maximale pour une valeur de $\|\delta\|$ donnée, si le produit scalaire $v_s \cdot \delta = \|v_s\| \|\delta\|$. Pour que cela arrive, il faut nécessairement que le vecteur de perturbation δ possède la même direction et le même sens que le vecteur de stabilité v_s . Or v_s pointe en direction de la zone instable. La figure 6.20 montre clairement que le calcul des sensibilités fonctionne bien. Pour s'en assurer, on suppose que le calcul des sensibilités nous donne un résultat différent. Par exemple, on imagine qu'il inverse le signe des composantes de v_s . Dans ce cas, les vecteurs de stabilité pointent tous dans la direction opposée de ceux contenus sur la figure 6.20. On sait que si on se déplace vers la zone instable, alors $\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) > \Delta T(t, Gz, B)$. Par contre, dans ce cas $v_s \cdot \delta < 0$, ce qui est incompatible. On peut donc conclure que la méthode des sensibilités permet d'anticiper et de prédire correctement le comportement de l'écoulement lorsqu'on perturbe les paramètres Gz et B .

6.3.5 Norme des vecteurs de stabilité

Jusqu'ici on s'est attardé à l'orientation des vecteurs de stabilité donnée par les sensibilités. On rappelle que cette orientation dépend de la valeur des composantes $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$. On peut se demander à présent s'il est possible de tirer de l'information de la norme des vecteurs de stabilité v_s . La norme de v_s se calcule aisément en utilisant l'équation (6.14). La figure 6.23 présente une carte tridimensionnelle où le plan $Gz-B$ contient la carte de stabilité et où l'axe z représente la norme de v_s . À la verticale de chaque point de la carte de stabilité, on retrouve la valeur correspondante de $\|v_s\|$. Tout comme les composantes de v_s , la norme de v_s est construite en prenant les valeurs maximales de $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$.

La première constatation que l'on fait en regardant la figure 6.23, c'est que la valeur de $\|v_s\|$ est pratiquement nulle partout où l'écoulement est stable. Cependant, $\|v_s\|$ est non-nulle dès que l'on se trouve à l'intérieur de la zone d'instabilité et sur la frontière qui la délimite (voir figure la 6.15). De plus, on remarque que les valeurs les plus élevées sont associées aux points de transition ou à des points voisins de ceux-ci. Ces points définissent la frontière entre les écoulements stables et les écoulements instables. La figure 6.24 se concentre sur une petite région de la figure 6.23 et permet de mieux observer les changements de la norme de v_s . Les valeurs élevées de $\|v_s\|$ apparaissent près de cette frontière entre les zones stables et instables, car le long de cette courbe les gradients de $\Delta T(t)$ sont importants. En effet, si on se réfère aux figures 6.17 et 6.18, on constate alors que les valeurs de $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$ sont maximales aux points de transition ou au voisinage de ces points.

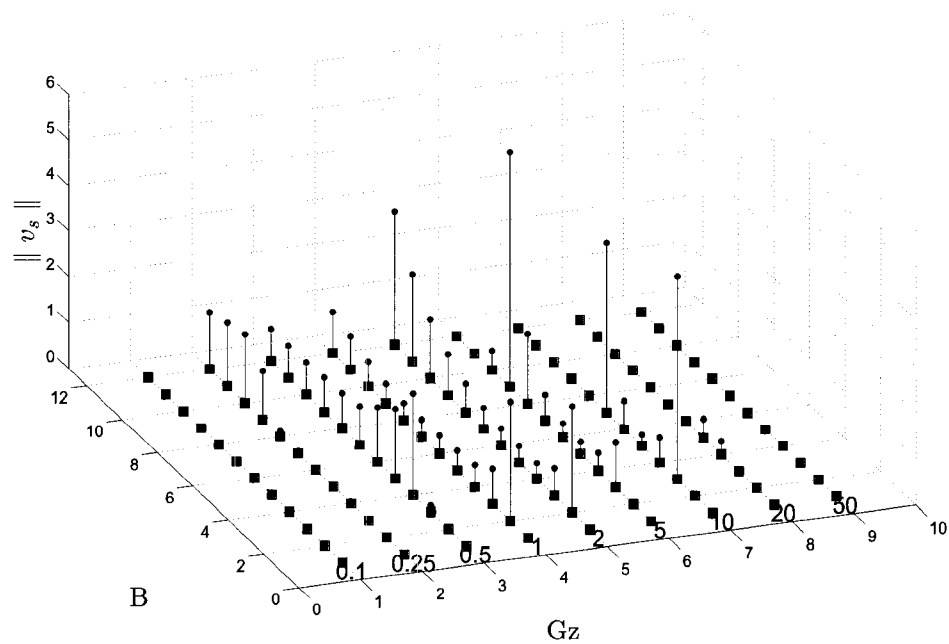


FIG. 6.23 Carte de la norme des vecteurs de stabilité.

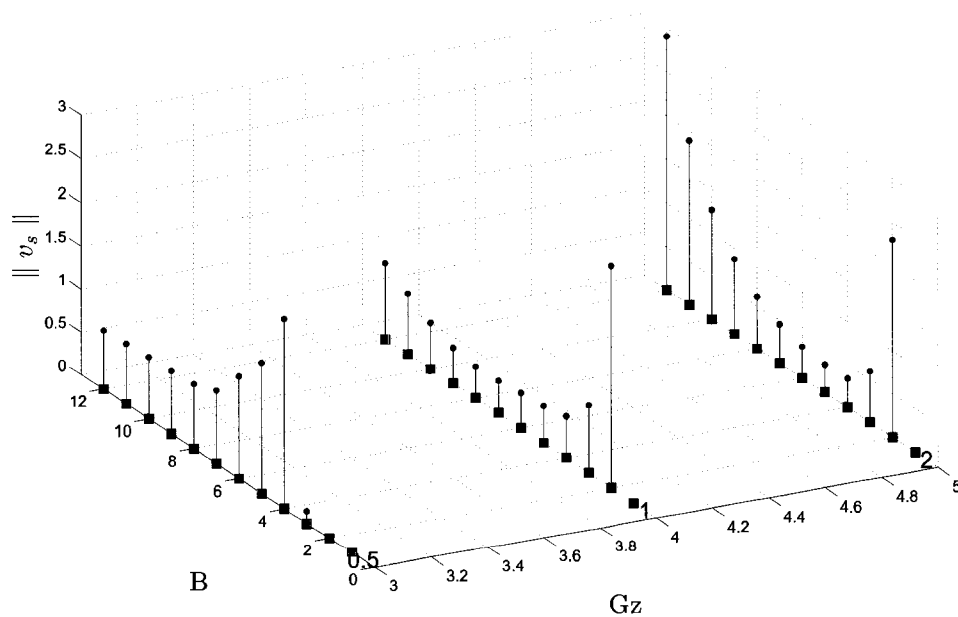


FIG. 6.24 Petite région de la figure 6.23.

On porte maintenant notre attention sur la figure 6.24. Cette figure permet de mieux observer le comportement de la norme de v_s lorsque Gz est fixe et que B varie. La norme de v_s est maximale près de la frontière de transition, puis décroît pour atteindre un minimum à mesure que B augmente. Par la suite, la norme de v_s augmente pour finalement atteindre un maximum lorsque l'on s'approche de nouveau de la frontière de transition. Ce comportement s'explique par le fait que les variations de $\Delta T(t)$ sont de moindre intensité entre les écoulements instables comparées aux variations de $\Delta T(t)$ présentes autour des points de transition. Ces variations se reflètent sur les valeurs de $s_{\Delta T}^{Gz}$ et $s_{\Delta T}^B$ et donc sur la valeur de la norme de v_s . Ce qu'il faut retenir de la carte des normes de v_s (figure 6.23), c'est qu'elle permet de délimiter le bassin d'instabilité sans faire référence directement à l'analyse des courbes de $\Delta T(t)$. On peut donc connaître le comportement de l'écoulement en fonction des valeurs Gz et B tout en faisant abstraction de la carte de stabilité représentée dans le plan Gz - B . Le calcul des sensibilités est donc en mesure de prédire correctement le comportement de l'écoulement. Pour terminer, la dernière section de ce chapitre présente une autre application des sensibilités, le calcul rapide de solutions voisines.

6.3.6 Calcul de solutions voisines

Le calcul d'une solution voisine se comprend aisément en terme de série de Taylor. L'idée derrière le calcul des solutions voisines est de calculer rapidement une nouvelle solution à partir d'une solution initiale déjà calculée. De cette façon, on évite de calculer explicitement la nouvelle solution. Le développement en série de Taylor donné par l'équation (6.4) montre que l'on peut approcher la valeur de F aux points $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$, à partir de la fonction F évaluée aux points x et y . Cette approximation est d'autant plus juste si les perturbations Δx et Δy sont petites et si la fonction F ne varie pas trop rapidement dans l'espace (x,y) .

Dans le contexte de notre application et du calcul des sensibilités, on veut montrer qu'il est possible de reconstruire une courbe de différence de température $\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B)$ à partir de $\Delta T(t, Gz, B)$. Le développement en série de Taylor au premier ordre de $\Delta T(t, Gz, B)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) \approx \Delta T(t, Gz, B) &+ \frac{\partial}{\partial Gz} \Delta T(t, Gz, B) \delta Gz \\ &+ \frac{\partial}{\partial B} \Delta T(t, Gz, B) \delta B \end{aligned} \quad (6.15)$$

En termes des sensibilités, cette équation se réécrit comme suit,

$$\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B) \approx \Delta T(t, Gz, B) + s_{\Delta T}^{Gz} \delta Gz + s_{\Delta T}^B \delta B. \quad (6.16)$$

Maintenant, pour une perturbation δGz et δB donnée, l'objectif est de comparer une courbe de différence de température $\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B)$ obtenue par un calcul direct, et celle que l'on obtiendrait en utilisant l'équation (6.16). Pour cela, on a fait deux calculs de solutions voisines. L'un avec $Gz=2$ et $B=0.25$, l'autre avec $Gz=2$ et $B=2$. L'écoulement associé à la première solution est stable tandis que celui associé à la seconde est instable. Ensuite, on a recalculé deux solutions perturbées de 5% et deux autres perturbées de 25%. Une fois les sensibilités extraites du calcul des solutions initiales, on a finalement déterminé les courbes de $\Delta T(t, Gz + \delta Gz, B + \delta B)$ extrapolées en utilisant l'équation (6.16). Les figures 6.25 et 6.26 montrent les résultats obtenus. À première vue, on remarque que les solutions extrapolées reproduisent bien le comportement des solutions recalculées. En effet, dans le cas où Gz et B sont perturbés de 5% (figure 6.25), l'accord entre l'approximation donnée par la série de Taylor et la solution recalculée est presque parfait. Par contre, lorsque la valeur de Gz et B est perturbée de 25% (figure 6.26), l'accord entre les deux courbes se dégrade.

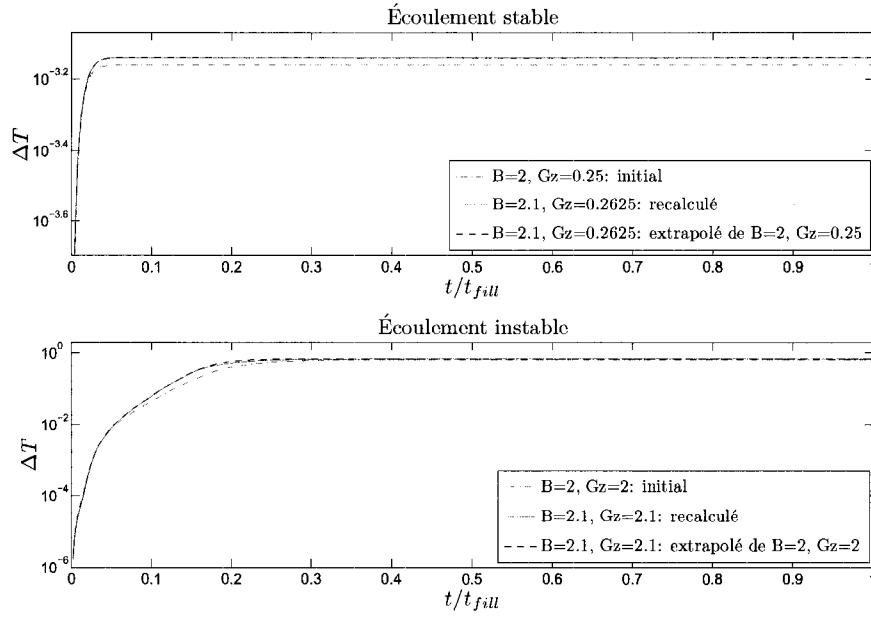


FIG. 6.25 Courbes de ΔT initiales, recalculées et extrapolées avec une perturbation de 5%.

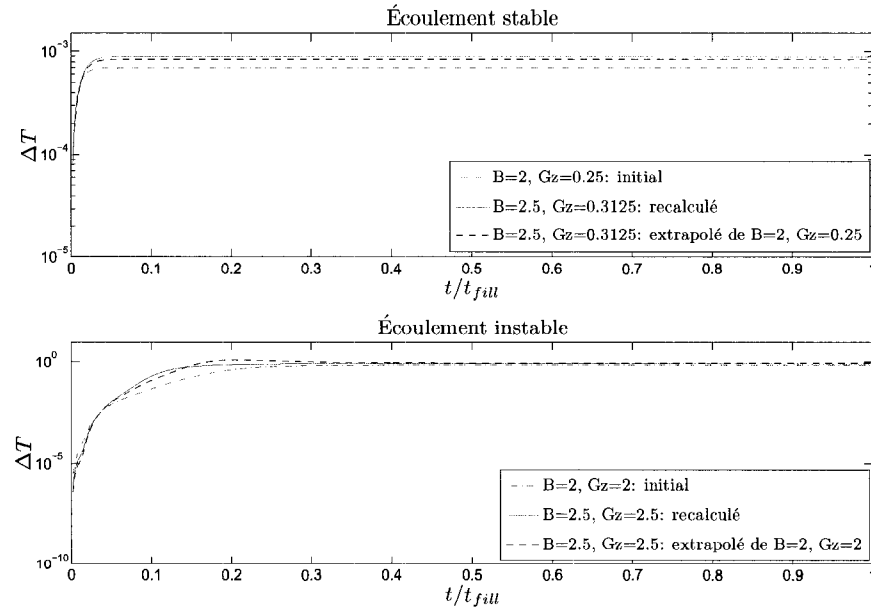


FIG. 6.26 Courbes de ΔT initiales, recalculées et extrapolées avec une perturbation de 25%.

Dans ce cas, la différence entre la solution approximée et la solution recalculée s'explique probablement par le fait que les termes d'ordre supérieur, négligés dans l'équation 6.16, deviennent importants.

6.3.7 Les effets de la discrétisation en espace sur la stabilité.

Un écoulement en équilibre instable devient non-symétrique (hors équilibre), lorsqu'il est perturbé. Le maillage induit des perturbations qui affectent la solution. L'inconvénient est qu'on ne peut pas contrôler les erreurs de discrétisation. Dans de telles circonstances, un maillage symétrique et régulier permet de contrôler et de réduire les perturbations indésirables. Par contre, si le maillage n'est pas assez fin, alors les erreurs de discrétisation deviennent importantes, ce qui risque d'influencer la stabilité et le comportement de l'écoulement.

En effet, on montre dans cette section que la discrétisation en espace $h_x = \Delta x$ influence la stabilité de l'écoulement. On a fait cinq simulations numériques sur des maillages réguliers et symétriques de 341, 1257, 4817, 18849 et 74561 noeuds ¹ pour les régimes stables, instables et en transitions. Les figures 6.27, 6.28 et 6.29 présentent les isolignes de vitesse u pour ces trois régimes d'écoulement. La figure 6.27 permet de constater que pour tous les maillages, un écoulement stable demeure stable. La solution est stationnaire du début à la fin de la simulation. Dans ces conditions, les perturbations liées au maillage n'ont aucune influence sur la stabilité de la solution. Pour les écoulements très instables, il se produit la même chose. L'écoulement atteint rapidement un état stationnaire et bascule immédiatement vers un côté du T. La figure 6.28 montre que le maillage n'influence pas le résultat final. Par contre, dans les cas où l'instabilité se développe sur une plus longue période de temps (i.e. écoulements en transitions ou peu instables), le maillage induit des

¹Lorsque $h_x/2 \Rightarrow$ nombre de noeuds est multipliés par ~ 4 .

effets indésirables sur le comportement de l'écoulement. La figure 6.29 présente le comportement de l'écoulement pour les différents maillages utilisés. Lorsque le maillage contient 341 noeuds, on remarque que le fluide quitte l'injecteur par la mauvaise sortie. De plus, avec des maillages de 1257 et 4817 noeuds, l'écoulement est entraîné vers un régime instable. Toutefois, lorsque le maillage contient 18849 noeuds et plus, on constate que le régime est en transition et demeure en transition avec peu de changement.

On conclut que pour obtenir des solutions fiables, le maillage doit contenir un nombre suffisant de noeuds, surtout lorsque le régime d'écoulement est transitoire, ou lorsqu'il n'atteint pas rapidement un état stationnaire. Dans le cas contraire, on expose l'évolution de la solution à des perturbations indésirables qui pourront influencer la stabilité de l'écoulement.

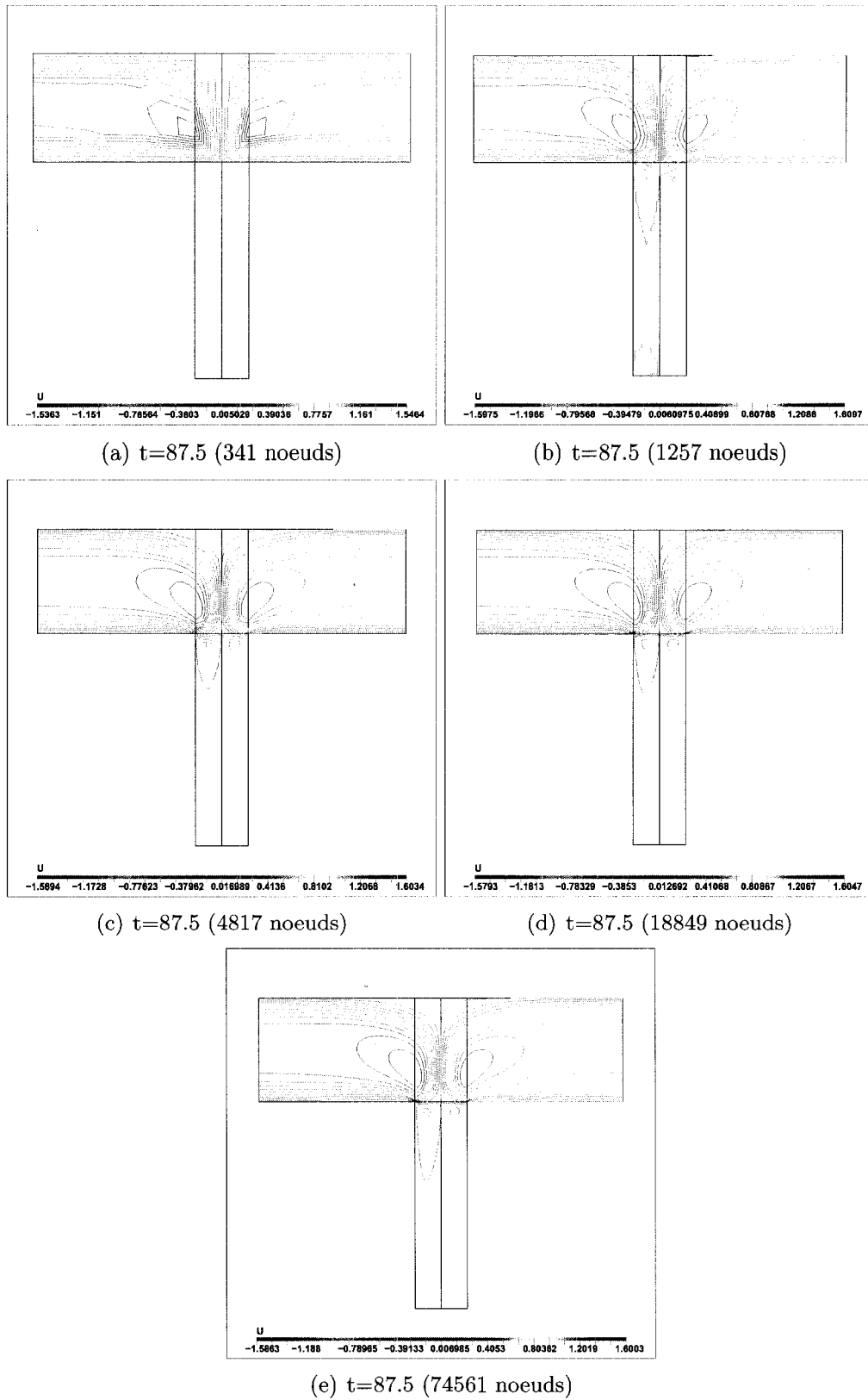


FIG. 6.27 Isolignes de vitesse u pour $B = 2$ et $Gz = 0.5$ (stable).

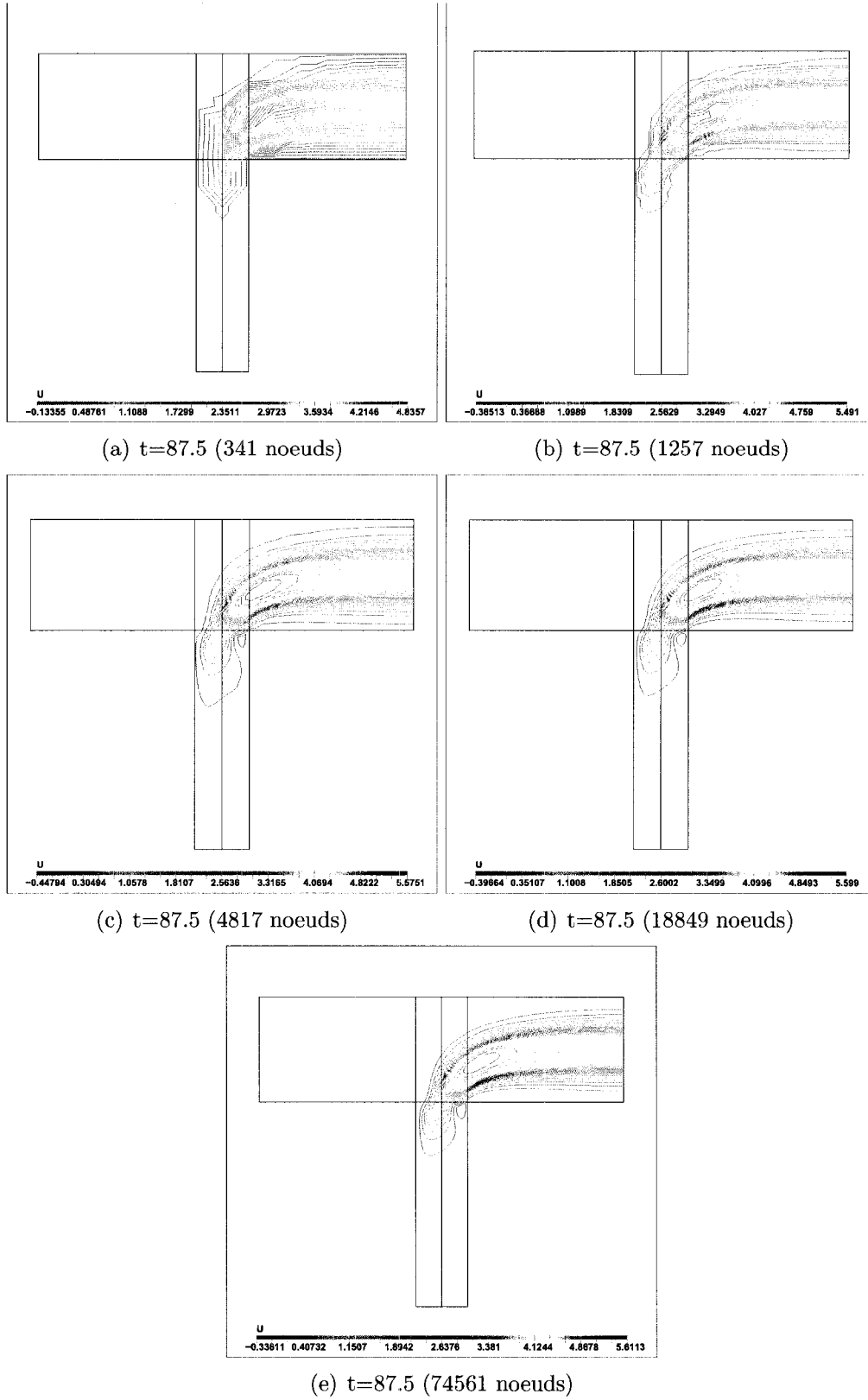


FIG. 6.28 Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 1$ (instable).

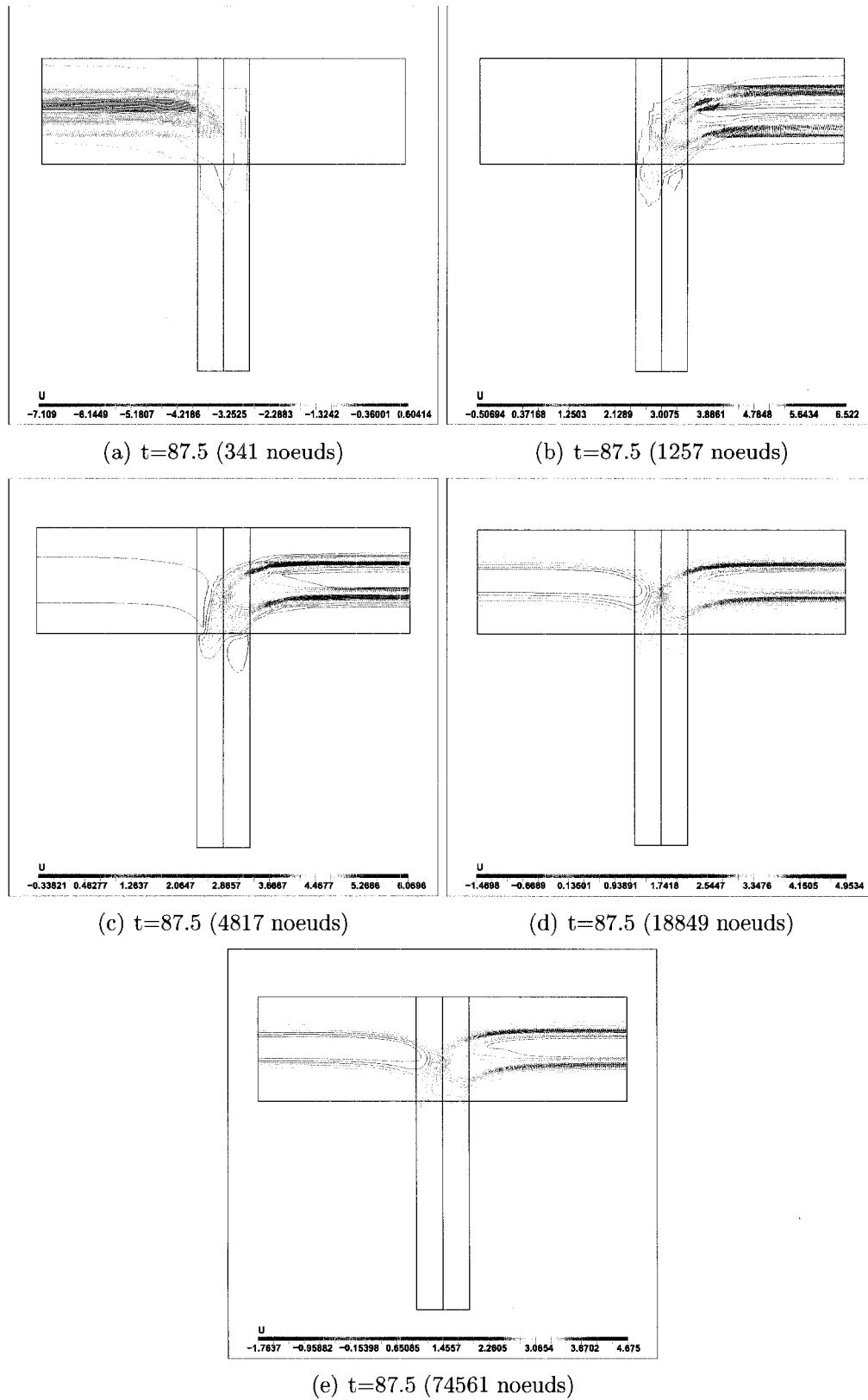


FIG. 6.29 Isolignes de vitesse u pour $B = 4$ et $Gz = 1$ (en transition).

CONCLUSION

Le but de ce mémoire était d'apporter une contribution à la compréhension des phénomènes d'instabilités hydrodynamiques causant des défauts de fabrication lors du moulage par injection de poudres métalliques. Pour atteindre ce but, on a tout d'abord modifié un algorithme d'éléments finis existant pour obtenir efficacement des solutions réalistes et fiables. Une fois notre modèle implanté dans le code de calcul, on a appliqué cet algorithme à un système simple pour observer les divers comportements de l'écoulement en fonction des paramètres importants du problème (i.e Gz et B). Par la suite, une série de simulations a été faite afin de reproduire ce qui est observé dans les injecteurs réels de poudres métalliques et pour comprendre le mécanisme causant l'instabilité. Une fois que l'on s'est assuré du bon comportement de l'écoulement en fonction des paramètres du problème, on a utilisé une méthode permettant de caractériser l'asymétrie en température afin de déterminer la carte de stabilité de l'écoulement dans l'espace de phase Gz - B .

Dans l'optique d'un processus d'optimisation, le choix de la méthode de l'équation des sensibilités s'est imposée. Les cartes qui découlent de l'analyse des sensibilités combinées avec la carte de stabilité offrent la possibilité de déterminer la géométrie optimale de l'injecteur. Dans le cadre du calcul des solutions voisines, l'analyse des sensibilités procure aussi un moyen d'anticiper le comportement de l'écoulement en fonction du nombre de Graetz et du nombre B . Pour y parvenir, il a fallu développer les équations des sensibilités pour notre modèle et les implanter correctement dans le code.

Pour s'assurer que le code fonctionne correctement, une procédure de vérification a été effectuée à l'aide de la méthode des solutions manufacturées. On a débuté par construire une solution analytique inspirée d'une solution exacte des équations de

Navier-Stokes en deux dimensions. On a ainsi vérifié la précision du solveur pour l'écoulement et ses sensibilités par rapport aux paramètres du problème grâce à une étude de convergence impliquant un raffinement systématique et uniforme du maillage. Le bon comportement affiché par l'indice d'efficacité et par la convergence de l'erreur estimée et de l'erreur exacte a permis d'aborder en toute confiance notre application.

Le code de calcul a ensuite été utilisé dans le cadre concret d'une application industrielle. Les solutions obtenues pour l'écoulement ont montré qu'on était en mesure de reproduire ce qui était observé dans les injecteurs réels de poudres métalliques. Pour éliminer les instabilités engendrées par le maillage, il a fallu construire un maillage symétrique et régulier. La méthode employée pour caractériser la différence de température présente dans l'injecteur, a permis de définir la carte de stabilité de l'écoulement en fonction des nombres adimensionnels Gz et B . Cette carte permet de déterminer rapidement les paires de valeurs de Gz et B pour lesquelles l'écoulement est stable ou instable, et permet également de tracer la courbe délimitant la frontière entre la région où l'écoulement est stable et celle où il est instable. En analysant cette carte, on peut extraire les conditions d'opérations nécessaires au bon fonctionnement des procédés de moulage par injection, ce qui permettra aux manufacturiers de contrôler et même d'éliminer les défauts de fabrications observés sur les pièces moulées.

Les simulations numériques ont permis de montrer qu'il existe un couplage entre la température et le cisaillement lorsque $m=0$ dans l'équation de la viscosité. En effet, on montre que les régimes d'écoulements instables ou en transitions demeurent stables et symétriques lorsque $m=0$. On conclut que la présence du terme de cisaillement (i.e. $\dot{\gamma}^m$) dans l'expression de la viscosité est essentielle, puisque l'influence unique de la température est incapable de créer un déséquilibre dans l'écoulement.

Parallèlement à l'étude des solutions obtenues pour l'écoulement, une analyse de sensibilité de l'écoulement a été faite. Avant tout, on a voulu s'assurer que les équations de sensibilité étaient justes. Pour ce faire, on a comparé les résultats d'un calcul de sensibilité fait par la méthode de l'équation des sensibilités et par différence finie. La parfaite correspondance a permis de conclure que les sensibilités ont été implantées correctement dans le solveur. Appliquée à notre problème, l'analyse des sensibilités, dans le cadre du calcul des solutions voisines, a montré qu'il est possible de prédire correctement les changements dans le comportement de l'écoulement lorsqu'on perturbe les paramètres de design. En effet, la carte des vecteurs de stabilité qui a été construite directement à partir des sensibilités indique correctement la tendance de l'écoulement à aller vers l'instabilité lorsqu'on perturbe les paramètres adimensionnels Gz et B . De plus, on a montré que la norme de ces vecteurs est en mesure de fournir de l'information sur les points de transition de l'écoulement. Le calcul des sensibilités a aussi permis de montrer que l'on pouvait calculer efficacement et rapidement une solution voisine de l'écoulement pour une paire de valeur donnée de Gz et B . La méthode des sensibilités a donc été appliquée avec succès à l'étude et à l'analyse de la stabilité d'un écoulement non-Newtonien.

Les méthodes et les outils d'analyse développés dans ce mémoire ont permis d'atteindre notre but. Notre étude apporte une contribution à la compréhension des phénomènes d'instabilités hydrodynamiques par une analyse rigoureuse basée sur la CFD. On fournit également les moyens pour construire des outils d'analyse, tels que les différentes cartes présentées dans ce travail, ce qui permettra aux industriels et aux manufacturiers de contrôler efficacement les paramètres d'opération dans les procédés de moulage par injection. Les résultats obtenus dans le cadre précis de ce travail peuvent être étendus à une grande variété de matériaux impliqués dans les procédés de moulage par injection ou dans d'autres types d'écoulements,

car des phénomènes d'instabilités hydrodynamiques sont ou peuvent être observés. Par exemple, on peut penser à des applications dans le domaine biomédical, dans les sciences de la Terre ou dans toutes autres applications où l'on retrouve des écoulements thermosensibles confinés.

En terminant, voici ce qui peut être envisagé comme travaux futurs. Tout d'abord, extraire des résultats les dimensions optimales pour la construction d'un modèle d'injecteur sur lequel des expériences pourraient être réalisées afin de valider nos résultats et nos hypothèses. Ensuite, raffiner la carte de stabilité afin de préciser la courbe de transition et étendre celle-ci aux valeurs plus élevées de B pour tenter, si cela est possible, de circonscrire la zone d'instabilité. On pourrait également entreprendre des simulations en 3D sur une géométrie et des modèles physiques plus réalistes. De cette façon, on pourrait confirmer que la simplification utilisée pour définir notre géométrie en forme de T est justifiée et qu'on ne perd pas l'essence de la physique. Dans le cadre d'une analyse de sensibilité, on pourrait quantifier l'influence de la perturbation en température ε et du terme de correction ϵ sur le comportement de l'écoulement. On pourrait également étudier l'influence des conditions initiales sur la stabilité et le comportement de l'écoulement. Finalement, dans le cadre du calcul des solutions voisines, on pourrait tenter de déterminer jusqu'à quel point les sensibilités permettent d'anticiper le comportement de l'écoulement, fournissant ainsi une indication indirecte de la non-linéarité de l'instabilité.

RÉFÉRENCES

- [1] Arjeb, C. B., Bogaerds Martien, A., Hulsen, W. M., Peters, Frank P. T., Baaijens (2001). Stability Analysis of Injection Molding Flow. *Materials Technology, Departement of Mechanical Engineering, Dutch Polymer Institute, Eindhoven University of Technology*.
- [2] Borggaard, J. et Burns, J. (1997). A PDE Sensitivity Equation Method for Optimal Aerodynamics Design. *Journal of Computational Physics*, 136, pp.366–384
- [3] Chen, B. S. et Liu, W. H. (1994). Numerical Simulation of the Post-Filling Stage in Injection Molding With a Two-Phase Model. *Polymer Engineering and Science*, volume 34, No. 10
- [4] Chiang, H. S., Hieber, H. S., et Wang K. K. (1991). A Unified Simulation of the Filing and Postfiling Stages in Injection Molding. Part I : Formulation. *Polymer Engineering and Science*, volume 31, No. 2
- [5] Chiang, H. S., Hieber, H. S., et Wang K. K. (1991). A Unified Simulation of the Filing and Postfiling Stages in Injection Molding. Part II : Experimental Verification. *Polymer Engineering and Science*, volume 31, No. 2
- [6] Costa, A., Giovanni, M. (2002). Nonlinear Phenomena in Fluids with Temperature-dependent Viscosity : An Hysteresis Model for Magma Flow in Conduits. *Geophysical Research Letter*, volume 29, No. 10
- [7] Dantzig J. A. et TuckerIII C. L. (2006). *Modeling in Materials Processing*. Cambridge
- [8] Dems, K. (1986). Sensitivity Analysis in Thermal Problems-I : Variation of Material Parameter within a fixed domain. *Journal of Therm. Stresses*, 9, pp.303–324

- [9] Dowding, K. J. et Blackwell, B. F. (2001). Sensitivity Analysis for Non-linear Heat Conduction. *Journal of Heat Transfer*, 123
- [10] Etienne, S., Hay, A., Garon, A., et Pelletier, D. (2006). The Sensitivity Equation Method in Fluid Mechanics. *Collection of Technical Papers - 36th AIAA Fluid Dynamics Conference*, **2**, 867–881.
- [11] Etienne, S. et Pelletier, D. (2003). Adaptative Solution of Some Steady State Fluid-Structure Interaction Problems. *11th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, Vancouver, BC, Canada
- [12] Ethier R. C. et Steinman D. A. (1994). Exact Fully 3D Navier-Stokes Solution for Benchmarking. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, volume 19, 369–375
- [13] Fadale, T. D. (1993). Uncertainty Analysis using Stochastic Finite Elements. Thèse de doctorat, University of Washington.
- [14] Fortin, A. et Garon, A. (2000). *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC.
- [15] Fortin, A. (2004). *Analyse Numérique pour Ingénieurs, deuxième édition*. Presses Internationales Polytechnique, Montréal, QC.
- [16] Hatzikiriakos S. G. et Migler, K. B. (2005). *Polymer Processing Intabilities, Control and Understanding*. Marcel Dekker
- [17] Haug, E. J., Choi, K. K. et Komkov V. (1986). Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. *Academic Press*
- [18] Huilier D. et Terrisse J. (1988). Modeling the Packing Cooling Satge in Injection Molding of Amorphous Polymers. *International Polymer Processing III*, 4
- [19] Holloway K. E. et de Bruyn, J. R. (2005). Viscous Fingering with a Single Fluid. *Canadian Journal of Physics*, **83**, 551–564.

- [20] Hristova, H., Etienne, S., Pelletier, D., et Borggaard, J. (2005). A Continuous Sensitivity Equation Method for Time-dependent Incompressible Laminar Flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **50**, 817–844.
- [21] Ilinca, F., Hétu, J. F. et Derdouri, A., Stevenson, J. (2002). Metal Injection Molding : 3D Modeling of Nonisothermal Filing. *Polymer Engineering and Science*, volume 42, No. 4
- [22] Ilinca, F. et Hétu, J. F. (2001). Three-dimensional Filing and Post-filling Simulation of Polymer Injection Molding. *International Polymer Processing XVI*, 3
- [23] Ilinca, F., Hétu, J. F. et Pelletier D. Numerical Simulation and Sensitivity Analysis of Thermally Induced Flow Instabilities. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*
- [24] Ilinca, F., Hétu, J. F., Perrault, M., Derdouri, A., Stevenson, J. et Scott, C. 3D Simulation of Metal Injection Molding with Free-surface Boundary Condition : Jetting and Nonuniform flow.
- [25] Kondic, L., Palffy-Muhoray P. et Shelley M. J. (1996). Models of non-Newtonian Hele-Shaw flow. *Physical Review E*, volume 54, No. 5
- [26] Moller, H. et Lund E. (2000). Shape Sensitivity Analysis of Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction Problems. *8th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, Long Beach, CA., USA
- [27] Morris, S. J. S. (1996). Stability of thermoviscous Hele-Shaw flow. *Journal of Fluid Mechanics*, volume 308, pp.111–128
- [28] Newman, J. C., Taylor, A. C., Barnwell, R. W., Newman, P. A. et Hou G. J-W. (1999). Overview of Sensitivity Analysis and Shape Optimization for Complex Aerodynamics Configuration. *J. Aicr.*, 36(1), pp.87–96

- [29] Pearson, J. R. A., Shah, Y. T. et Viieira, E. S. A. (1973). Stability of non-isothermal flow in channels-I. Temperature-dependent Newtonian Fluid without heat generation. *Chemical Engineering Sciences*, volume 28, pp.2079–2088
- [30] Pelleteir, D. et Roache P. J. (2002). CFD Code Verification and The Method of Manufactured Solutions. *CFD 2002, 10th Annual Conference of the CDF Society of Canada*, June 9–11, 2002, Windsor, Ontario, Canada
- [31] Pelletier, D., Hay, A., Etienne, S., et Borggaard, J. (2008). The Sensitivity Equation Method in Fluid Mechanics. *European Journal of Computational Mechanics*, **17(2)**, 31–61.
- [32] Reddy J. N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method, third edition*. McGraw Hill
- [33] Roache, P. J. (2002). Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. *Journal of Fluid Engineering*, volume 124
- [34] Roache, P. J. (1998). *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers
- [35] Santos, J. T. L., Siemaszko, A., Gollwitzer, S. et Rackwitz R. (1995). Continuum Sensitivity Method for Reliability-based Structural Design and Optimization. *Mech. Struct. Mach.*, 23(4), pp.497–520
- [36] Schetz J. A. et Fuhs A. E. (1999). *Fundamentals of Fluids Mechanics*. Wiley-Interscience
- [37] Schwer, L. (2002). Method of Manufactured Solutions.
- [38] Shah, Y. T. et Pearson, J. R. A. (1974). Stability of Non-isothermal Flow in Channels-II. Temperature Dependent Power-law Fluids without Heat Generation. *Chemical Engineering Sciences*, volume 29, pp.737–746
- [39] Shah, Y. T. et Pearson, J. R. A. (1974). Stability of Non-isothermal Flow in Channels-III. Temperature dependent Power-law Fluids with Heat Generation. *Chemical Engineering Sciences*, volume 29, pp.1485–1493

- [40] Stevenson, J. F., Hieber, C. A., Galskoy A., Wang K. K. (1976). An Experimental Study Simulation of Disk Filling by Injection Molding. School of Mechanical and Aerospace Engineering, Cornell University, Ithaca, New-York.
- [41] Stevenson, J. F., Ilinca, F. et Holmes B. Thermally Induced Flow Instability in Metal Injection Molding.
- [42] Stevenson, J. F., Roser, R., Ilinca, F., Derdouri, A. et Kozlov, A. S. Metal Injection Molding : Mold Filling and Packing Dynamics.
- [43] Stevenson, J. F. et Ilinca, F. (2006). Termal Flow Instability in Metal Injection Molding : Experimentent and Simulation. *International Polymer Processing XXI*, 2
- [44] Tanguy, P. A. et Grygiel J. M. (1993). A Slightly Compressible Transient Finite Element Model of the Packing Phase in Injection Molding. *Polymer Engineering and Science*, volume 33, No. 19
- [45] Turgeon, E. (2001). *Méthode d'éléments finis adaptative pour la résolution des sensibilités d'écoulements*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- [46] Turgeon, E., Pelletier, D et Borggaard, J. (2000). A General Purpose Sensitivity Equation Formulation for Complex Flow. *Proceeding of the 8th Annual Conference of the Computational Fluid Dynamics Society of Canada*, volume 2, pp.697–704
- [47] Turgeon, E., Pelletier, D et Borggaard, J. (2001). Sensitivity and Uncertainty Analysis for Variable Property Flows. *33th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibits*, Reno, NV., AIAA Paper 2001–0139
- [48] Turgeon, E., Pelletier, D et Borggaard, J. (1999). A Continous Sensitivity Equation Approach to Optimal Design in Mixed Convection. *33rd AIAA Thermophysics Conference*, Norfolk, VA., AIAA Paper 99–3625

- [49] Vanderplaats, G. N. (1999). *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. Vanderplaats Research and Development, Colorado Springs, CO., third edition
- [50] Vlachopoulos, J. et Strutt, D. An Overview of Polymer Processing. Center for Advanced Polymer Processing and Design, Departement of Chemical Engineering, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada
- [51] Zhou, H., Seng, T. et Li, D. (2005). Numerical Filling Simulation of Injection Molding Based on 3D Finite Element Model. *Journal of Reinforced Plastics and Composite*, volume 24, No. 8
- [52] Zienkiewicz, O. C. et Zhu, J. Z. (1992a). The Superconvergent Patch Recovery and *a posteriori* Error Estimates. Part 1 : The Recovery Technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1331–1364.
- [53] Zienkiewicz, O. C. et Zhu, J. Z. (1992b). The Superconvergent Patch Recovery and *a posteriori* Error Estimates. Part 2 : Error Estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 1365–1382.

ANNEXE I

DÉMONSTRATIONS

I.1 Dérivation du profil de vitesse en entrée

Dans le cadre de l'application présentée dans ce travail, on présente dans ce qui suit les étapes nécessaires à l'obtention du profil de vitesse dans le cas d'un écoulement pleinement développé à l'entrée du canal d'injection. Pour débiter, on rappelle que les équations de Navier-Stokes sont données par l'expression suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \quad (\text{I.1})$$

À la vue de la figure I.1, on conclut que $u=0$, $v=v(x)$, $\partial_y p < 0$ et que $\partial_x p = 0$. L'équation (I.1) devient alors,

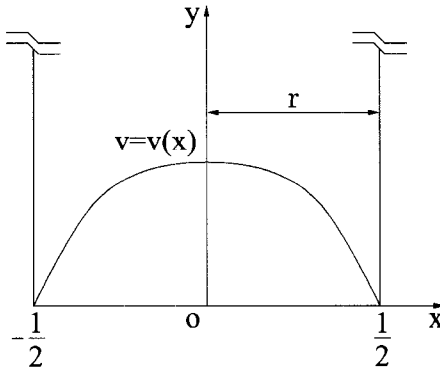


FIG. I.1 Schéma de l'entrée du canal d'injection.

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (\text{I.2})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{I.3})$$

Comme p est une fonction de y et que v est une fonction de x , on peut remplacer les dérivées partielles dans l'équation (I.3) par des dérivées totales. On obtient ainsi l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dx} \left(\eta \frac{dv}{dx} \right) \quad (\text{I.4})$$

où l'expression de la viscosité η est donnée par l'expression suivante, avec $T=1$ en entrée comme condition frontière en température.

$$\begin{aligned} \eta &= \left[\sqrt{2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2} \right]^m e^{-BT} \\ &= \left[\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \right]^m e^{-B} = \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^m e^{-B} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

On obtient finalement l'équation différentielle que l'on doit résoudre pour calculer $v(x)$.

$$\frac{dp}{dy} = \frac{d}{dx} \left(\left| \frac{dv}{dx} \right|^m \frac{dv}{dx} \right) e^{-B} \quad (\text{I.6})$$

Pour se défaire de la valeur absolue, on utilise la symétrie du profil de vitesse par rapport à l'axe y . De cette façon, on peut résoudre l'équation différentielle (I.6) pour $x \geq 0$ et $x \leq 0$. Lorsque $x > 0$,

$$\left| \frac{dv}{dx} \right|^m = \left(-\frac{dv}{dx} \right)^m \quad (\text{I.7})$$

De cette égalité on obtient,

$$-e^B \frac{dp}{dy} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{dv}{dx} \right)^{m+1}, \text{ car } \frac{dv}{dx} = - \left(-\frac{dv}{dx} \right) \quad (\text{I.8})$$

La forme de l'équation (I.8) implique la connaissance d'une condition limite sur $v(x)$ et sur sa dérivée. On impose alors $v(x = \frac{1}{2})=0$ et $dv(x)/dx=0$ en $x=0$. Suite à une première intégration, on arrive à l'équation différentielle suivante.

$$-e^B \frac{dp}{dy} x + c_1 = \left(-\frac{dv}{dx} \right)^{m+1} \quad (\text{I.9})$$

Or, $dv(x)/dx=0$ en $x=0$, ce qui implique que $c_1=0$. On réécrit l'équation (I.9) comme suit,

$$\frac{dv}{dx} = - \left(-e^B \frac{dp}{dy} \right)^{\frac{1}{m+1}} x^{\frac{1}{m+1}} \quad (\text{I.10})$$

Une seconde intégration donne l'équation pour $v(x)$.

$$v(x) = - \left(\frac{m+1}{m+2} \right) \left(-e^B \frac{dp}{dy} \right)^{\frac{1}{m+1}} x^{\frac{m+2}{m+1}} + c_2 \quad (\text{I.11})$$

En imposant la condition limite sur $v(x)$ au point $x=1/2$, on trouve pour c_2 ,

$$c_2 = \left(\frac{m+1}{m+2} \right) \left(-e^B \frac{dp}{dy} \right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{m+2}{m+1}} \quad (\text{I.12})$$

En substituant c_2 dans l'équation (I.12), on arrive au résultat recherché pour $v(x)$,

$$v(x) = - \left(\frac{m+1}{m+2} \right) \left(-e^B \frac{dp}{dy} \right)^{\frac{1}{m+1}} \left[x^{\frac{m+2}{m+1}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{m+2}{m+1}} \right], \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (\text{I.13})$$

Cependant, $v(x)$ est exprimé en terme du gradient de pression. Dans le but de déterminer la forme finale du profil de vitesse en entrée $v(x)$, il faut trouver la valeur du gradient de pression. Pour le calculer, on utilise le fait que la valeur moyenne de

la vitesse $\langle v(x) \rangle$ est égale au débit Q . $\langle v(x) \rangle$ se calcule de la manière suivante :

$$\langle v(x) \rangle = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} v(x) dx}{\int_0^{\frac{1}{2}} dx} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} v(x) dx = Q \quad (\text{I.14})$$

Après intégration, on obtient l'égalité suivante pour le débit,

$$Q = 2 \left(\frac{m+1}{2m+3} \right) \left(-e^B \frac{dp}{dy} \right)^{\frac{1}{m+1}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2m+3}{m+1}} \quad (\text{I.15})$$

On sait que le débit en sortie est égal au débit en entrée, c'est-à-dire que $Q_{\text{entrée}} = Q_{\text{sortie}}$. Le débit en sortie se calcule en multipliant la hauteur (i.e. $2H$) de la partie horizontale du canal par la vitesse moyenne de référence en sortie $\langle u_s \rangle$. Puisque $H=1$, $\langle u_s \rangle=1$ et que l'on doit tenir compte des deux sorties, le débit Q vaut 4 et on obtient ainsi la relation suivante :

$$\left(-e^B \frac{dp}{dy} \right)^{\frac{1}{m+1}} = 2 \left(\frac{2m+3}{m+1} \right) 2^{\frac{2m+3}{m+1}} = 4 \left(\frac{2m+3}{m+1} \right) 2^{\frac{m+2}{m+1}} \quad (\text{I.16})$$

En substituant cette expression dans l'équation (I.13), on arrive au résultat recherché. L'expression finale pour $v(x)$ s'écrit,

$$\begin{aligned} v(x) &= -4 \left(\frac{m+1}{m+2} \right) \left(\frac{2m+3}{m+1} \right) 2^{\frac{m+2}{m+1}} \left[x^{\frac{m+2}{m+1}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{m+2}{m+1}} \right] \\ &= 4 \left(\frac{2m+3}{m+2} \right) \left[1 - 2x^{\frac{m+2}{m+1}} \right] \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Si on applique la même méthode pour résoudre l'équation différentielle (I.6) lorsque $x < 0$, alors on obtient une seconde expression pour $v(x)$ valide sur le domaine $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$. L'expression générale pour $v(x)$ s'écrit finalement de la façon suivante :

$$v(x) = \begin{cases} 4 \left(\frac{2m+3}{m+2} \right) \left[1 - (2x)^{\frac{m+2}{m+1}} \right] & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 4 \left(\frac{2m+3}{m+2} \right) \left[1 - (-2x)^{\frac{m+2}{m+1}} \right] & \text{si } -1/2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Dans le cas précis de l'application présentée dans ce travail, la valeur de m est fixée à -0.8. L'équation pour $v(x)$ se simplifie et prend la forme suivante.

$$v(x) = \left(\frac{14}{3}\right) [1 - (2x)^6] \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (\text{I.18})$$

I.2 Équivalence entre deux approches dans la dérivation de s_η

On rappelle que la viscosité η dépend du taux de cisaillement, de la température et du paramètre a . Le paramètre a peut prendre l'une des trois valeurs suivantes : Gz, B et m . La dépendance de η s'écrit comme suit,

$$\eta = \eta(\dot{\gamma}(\mathbf{u}(a)), T(a); a). \quad (\text{I.19})$$

Sa dérivée totale (i.e. sa sensibilité) est donnée par l'expression suivante (équation (3.47)).

$$\frac{d\eta}{da} = \frac{\partial\eta}{\partial\dot{\gamma}} \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\mathbf{u}} s_{\mathbf{u}} + \frac{\partial\eta}{\partial T} s_T + \frac{\partial\eta}{\partial a} \quad (\text{I.20})$$

Or, l'expresion de η s'écrit

$$\eta = \left[\sqrt{2(\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2(\partial_y v)^2} \right]^m e^{-BT} = \dot{\gamma}^m e^{-BT} \quad (\text{I.21})$$

En dérivant directement la relation (I.21) par rapport au paramètre a et à l'aide de l'identité suivante

$$\frac{d}{da} (\sqrt{u})^m e^{-BT} = \frac{d}{da} e^{(\frac{m}{2}) \ln u} e^{-BT}, \quad (\text{I.22})$$

on obtient l'expression suivante pour sensibilité de la viscosité.

$$\frac{d\eta}{da} = s_\eta = \eta \left[\left(\frac{1}{2} \alpha \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \beta \right) - \left(B s_T + T \frac{dB}{da} \right) \right] \quad (\text{I.23})$$

où α et β sont donnés par

$$\alpha = \ln \left[2 (\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2 (\partial_y v)^2 \right] \quad (\text{I.24})$$

$$\beta = \left[\frac{4 (\partial_x u) (\partial_x s_u) + 2 (\partial_y u + \partial_x v) (\partial_y s_u + \partial_x s_v) + 4 (\partial_y v) (\partial_y s_v)}{2 (\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2 (\partial_y v)^2} \right] \quad (\text{I.25})$$

À présent, on désire démontrer que l'égalité (I.20) et (I.22) donne le même résultat pour la sensibilité de la viscosité. On débute par dériver l'expression de la sensibilité η en passant par l'équation (I.22). Si on pose $u = 2 (\partial_x u)^2 + (\partial_y u + \partial_x v)^2 + 2 (\partial_y v)^2$ dans l'équation (I.21), alors la dérivée totale de η s'écrit.

$$\frac{d}{da} (\sqrt{u})^m e^{-BT} = e^{-BT} \frac{d}{da} e^{(\frac{m}{2}) \ln u} + (\sqrt{u})^m \frac{d}{da} e^{-BT} \quad (\text{I.26})$$

$$= e^{-BT} \left[e^{(\frac{m}{2}) \ln u} \left(\frac{m}{2} \frac{d}{da} \ln u + \frac{1}{2} \ln u \frac{dm}{da} \right) \right] \quad (\text{I.27})$$

$$- (\sqrt{u})^m e^{-BT} \left(B \frac{dT}{da} + \frac{dB}{da} \right) \\ s_\eta = \eta \left[\left(\frac{1}{2} \alpha \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \beta \right) - \left(B s_T + T \frac{dB}{da} \right) \right] \quad (\text{I.28})$$

On retrouve bien l'équation (I.23). L'expression pour s_η est générale, puisqu'elle dépend explicitement de a . Si on remplace a par Gz , B ou m , on retrouve alors les équations (3.53-55). Maintenant, on désire retrouver ces trois équations à partir de l'expression (I.20).

$$\frac{d\eta}{da} = \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{u}} s_{\mathbf{u}} + \frac{\partial \eta}{\partial T} s_T + \frac{\partial \eta}{\partial a} \quad (\text{I.29})$$

$$= \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial u} s_u + \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v} s_v \right) + \frac{\partial \eta}{\partial T} s_T + \frac{\partial \eta}{\partial a} \quad (\text{I.30})$$

Les dérivées de $\dot{\gamma}$ par rapport à u et v s'écrivent de la façon suivante.

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial u} = \frac{1}{2\dot{\gamma}} [4\partial_x u \partial_u \partial_x u + 2(\partial_y u + \partial_x v)(\partial_u \partial_y u + \partial_u \partial_x v) + 4\partial_y v \partial_u \partial_y v] \quad (\text{I.31})$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v} = \frac{1}{2\dot{\gamma}} [4\partial_x u \partial_v \partial_x u + 2(\partial_y u + \partial_x v)(\partial_v \partial_y u + \partial_v \partial_x v) + 4\partial_y v \partial_v \partial_y v] \quad (\text{I.32})$$

Or, les termes $\partial_u \partial_x v$, $\partial_y v \partial_u \partial_y v$, $\partial_x u \partial_v \partial_x u$ et $\partial_v \partial_y u$ sont nuls. Ainsi,

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \mathbf{u}} s_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2\dot{\gamma}} [4(\partial_x u)(\partial_x s_u) + 2(\partial_y u + \partial_x v)(\partial_y s_u + \partial_x s_v) + 4(\partial_y v)(\partial_y s_v)] \quad (\text{I.33})$$

De plus,

$$\frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} = m\dot{\gamma}^{m-1} e^{-BT} \Rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial u} s_u + \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v} s_v \right) = \eta \frac{m}{2} \beta \quad (\text{I.34})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} = -\eta B \quad (\text{I.35})$$

En regroupant les termes (I.33-35), s_η prend la forme finale donnée ci-dessous :

$$s_\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \dot{\gamma}} \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial u} s_u + \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial v} s_v \right) + \frac{\partial \eta}{\partial T} s_T + \frac{\partial \eta}{\partial a} \quad (\text{I.36})$$

$$= \eta \left[\frac{m}{2} \beta - B s_T \right] + \frac{\partial \eta}{\partial a} \quad (\text{I.37})$$

Si on pose le paramètre a égal à Gz , B et m respectivement, on trouve alors pour le dernier terme de l'équation (I.37),

$$\frac{\partial \eta}{\partial Gz} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial B} = -\eta T, \quad \frac{\partial \eta}{\partial m} = \frac{\eta}{2} \ln u = \eta \frac{\alpha}{2} \quad (\text{I.38})$$

En remplaçant successivement ces termes dans (I.37), on obtient les équations (3.53-55). On conclut finalement que les expressions (I.20) et (I.22) sont équivalentes.

ANNEXE II

SOLUTION MANUFACTURÉE ET TERMES SOURCES

II.1 Termes sources pour les équations de Navier-Stokes et celle de l'énergie

Les termes sources obtenus en écoulement et en sensibilité s'écrivent de la façon suivante :

$$Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_u = \text{Re}(u_t + uu_x + vu_y) + p_x - 2(\eta_x u_x + \eta u_{xx}) - [\eta_y(u_y + v_x) + \eta(u_{yy} + v_{yx})] \quad (\text{II.1})$$

$$Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_v = \text{Re}(v_t + uv_x + vv_y) + p_y - 2(\eta_y v_y + \eta v_{yy}) - [\eta_x(v_x + u_y) + \eta(v_{xx} + u_{xy})] \quad (\text{II.2})$$

$$Q_q(\mathbf{x}, t) = (T_t + uT_x + vT_y) - \left(\frac{H}{R}\right) \frac{1}{Gz} (T_{xx} + T_{yy}) \quad (\text{II.3})$$

$$Q_{NS}^{sens}(\mathbf{x}, t)_u = \text{Re}(s_{u,t} + s_u u_x + u s_{u,x} + s_v u_y + v s_{u,y}) + s_{p,x} - 2(s_{\eta,x} u_x + \eta_x s_{u,x} + s_\eta u_{xx} + \eta s_{u,xx}) - [s_{\eta,y}(u_y + v_x) + \eta_y(s_{u,y} + s_{v,x}) + s_\eta(u_{yy} + v_{yx}) + \eta(s_{u,yy} + s_{v,yx})] \quad (\text{II.4})$$

$$Q_{NS}^{sens}(\mathbf{x}, t)_v = \text{Re}(s_{v,t} + s_u v_x + u s_{v,x} + s_v v_y + v s_{v,y}) + s_{p,y} - 2(s_{\eta,y} v_y + \eta_y s_{v,y} + s_\eta v_{yy} + \eta s_{v,yy}) - [s_{\eta,x}(v_x + u_y) + \eta_x(s_{v,x} + s_{u,y}) + s_\eta(v_{xx} + u_{xy}) + \eta(s_{v,xx} + s_{u,xy})] \quad (\text{II.5})$$

$$Q_q^{sens}(\mathbf{x}, t) = (s_{T,t} + s_u T_x + u s_{T,x} + s_v T_y + v s_{T,y}) - \left(\frac{H}{R}\right) \left[\frac{1}{Gz} (s_{T,xx} + s_{T,yy}) - \frac{1}{Gz^2} \left(\frac{dGz}{da} \right) (T_{xx} + T_{yy}) \right] \quad (\text{II.6})$$

On remarque que $Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_u$ et $Q_{NS}(\mathbf{x}, t)_v$ font intervenir respectivement la dérivée de la viscosité η par rapport à x et y . Les expressions pour η_x et η_y s'écrivent,

$$\eta_x = \eta \frac{m}{2} \left[\frac{4u_x u_{xx} + 2(u_y + v_x)(u_{xy} + v_{xx}) + 4v_y v_{xy}}{2u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2v_y^2} \right] - \eta B T_x \quad (\text{II.7})$$

$$\eta_y = \eta \frac{m}{2} \left[\frac{4u_x u_{yx} + 2(u_y + v_x)(u_{yy} + v_{yx}) + 4v_y v_{yy}}{2u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2v_y^2} \right] - \eta B T_y \quad (\text{II.8})$$

On remarque également que les termes sources en sensibilité font intervenir les dérivées de la sensibilité de la viscosité par rapport à x et y . Ainsi, $s_{\eta,x}$ et $s_{\eta,y}$ prennent la forme suivante.

$$s_{\eta,x} = \eta_x \left[\left(\frac{1}{2} \alpha \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \beta \right) - \left(B s_T + T \frac{dB}{da} \right) \right] \quad (\text{II.9})$$

$$+ \eta \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - \left(B \frac{\partial s_T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dB}{da} \right) \right]$$

$$s_{\eta,y} = \eta_y \left[\left(\frac{1}{2} \alpha \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \beta \right) - \left(B s_T + T \frac{dB}{da} \right) \right] \quad (\text{II.10})$$

$$+ \eta \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{dm}{da} + \frac{m}{2} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) - \left(B \frac{\partial s_T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dB}{da} \right) \right]$$

où a peut adopter l'une des trois valeurs suivantes : Gz , B ou m . Les équations (II.11) et (II.12) développent les termes $\partial_x \alpha$ et $\partial_y \alpha$ contenus dans l'expression (II.9) et (II.10), où α est donné par (I.24).

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \left[\frac{4u_x u_{xx} + 2(u_y + v_x)(u_{xy} + v_{xx}) + 4v_y v_{xy}}{2u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2v_y^2} \right] \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \left[\frac{4u_x u_{yx} + 2(u_y + v_x)(u_{yy} + v_{yx}) + 4v_y v_{yy}}{2u_x^2 + (u_y + v_x)^2 + 2v_y^2} \right] \quad (\text{II.12})$$

En posant $\beta = \omega_1/\omega_2$ (i.e. I.25), la règle de la dérivée d'un quotient permet d'écrire $\partial_x \beta$ et $\partial_y \beta$ de la façon suivante.

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\omega_2 \partial_x \omega_1 - \omega_1 \partial_x \omega_2}{\omega_2^2} \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\omega_2 \partial_y \omega_1 - \omega_1 \partial_y \omega_2}{\omega_2^2} \quad (\text{II.14})$$

où $\partial_x \omega_1$, $\partial_x \omega_2$, $\partial_y \omega_1$ et $\partial_y \omega_2$ s'expriment comme suit.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = & 4(u_x x s_{u,x} + u_x s_{u,xx}) + 2[(u_y + v_x)(s_{u,xy} + s_{v,xx}) + (u_x y + v_x x)(s_{u,y} + s_{v,x})] \\ & + 4(v_x y s_{v,y} + v_y s_{v,xy}) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = 4u_x u_{xx} + 2(u_y + v_x)(u_{xy} + v_{xx}) + 4v_y v_{xy} \quad (\text{II.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = & 4(u_y x s_{u,x} + u_x s_{u,yx}) + 2[(u_y + v_x)(s_{u,yy} + s_{v,yx}) + (u_y y + v_y x)(s_{u,y} + s_{v,x})] \\ & + 4(v_y y s_{v,y} + v_y s_{v,yy}) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 4u_x u_{yx} + 2(u_y + v_x)(u_{yy} + v_{yx}) + 4v_y v_{yy} \quad (\text{II.18})$$

On constate rapidement que le calcul des termes sources devient assez complexe...

La prochaine section fournit la liste de tous les termes contenus dans les équations de cette section.

II.2 Solution manufacturée

Dans cette section on présente la solution manufacturée qui a été utilisée pour vérifier le bon fonctionnement du code de calcul. Elle s'inspire d'une solution exacte des équations de Navier-Stokes en deux dimensions obtenue dans un article de Taylor (réf.) :

$$u(x, y) = Gz^2 m^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.19})$$

$$v(x, y) = -Gz^2 m^2 \sin(\pi y) \cos(\pi x) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.20})$$

$$p(x, y) = Gz^2 m^2 (\cos(\pi x) + \sin(\pi y)) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.21})$$

$$T(x, y) = \frac{Gz^2 m^2}{4} (1 + \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi y)) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.22})$$

où Gz , B et m sont les paramètres usuels du modèle, t dénote le temps et ω est un paramètre ajustable. On débute par le calcul des différentes dérivées des variables d'état, pour ensuite calculer leurs sensibilités par rapport aux paramètres Gz , B et m .

$$u_t = -B\omega u, \quad v_t = -B\omega v, \quad T_t = -B\omega T \quad (\text{II.23})$$

$$u_x = Gz^2 m^2 \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{(-B\omega t)}, \quad v_x = -u_y \quad (\text{II.24})$$

$$u_y = Gz^2 m^2 \pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{(-B\omega t)}, \quad v_y = -u_x \quad (\text{II.25})$$

$$u_{xy} = u_{yx} = -Gz^2 m^2 \pi^2 \cos(\pi x) \sin(\pi y) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.26})$$

$$u_{xx} = u_{yy} = -\pi^2 u, \quad v_{xx} = v_{yy} = -\pi^2 v \quad (\text{II.27})$$

$$v_{xy} = v_{yx} = Gz^2 m^2 \pi^2 \cos(\pi y) \sin(\pi x) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.28})$$

$$p_x = -Gz^2 m^2 \pi \sin(\pi x) e^{(-B\omega t)}, \quad p_y = Gz^2 m^2 \pi \cos(\pi y) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.29})$$

$$T_x = 2 \frac{G_z^2 m^2}{4} \pi (\sin(\pi x) \cos(\pi x) \cos^2(\pi y)) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.30})$$

$$T_y = -2 \frac{G_z^2 m^2}{4} \pi (\sin(\pi y) \cos(\pi y) \cos^2(\pi x)) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.31})$$

$$T_{xx} = 2 \frac{G_z^2 m^2}{4} \pi^2 \cos^2(\pi y) (\cos^2(\pi x) - \sin^2(\pi x)) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.32})$$

$$T_{yy} = -2 \frac{G_z^2 m^2}{4} \pi^2 \sin^2(\pi x) (\cos^2(\pi y) - \sin^2(\pi y)) e^{(-B\omega t)} \quad (\text{II.33})$$

Les sensibilités par rapport à G_z .

$$s_u^{G_z}(x, y) = \frac{2}{G_z} u, \quad s_v^{G_z}(x, y) = \frac{2}{G_z} v, \quad s_p^{G_z}(x, y) = \frac{2}{G_z} p, \quad s_T^{G_z}(x, y) = \frac{2}{G_z} T \quad (\text{II.34})$$

$$s_{u,t}^{G_z} = \frac{2}{G_z} u_t, \quad s_{v,t}^{G_z} = \frac{2}{G_z} v_t \quad (\text{II.35})$$

$$s_{u,x}^{G_z} = \frac{2}{G_z} u_x, \quad s_{v,x}^{G_z} = \frac{2}{G_z} v_x \quad (\text{II.36})$$

$$s_{u,y}^{G_z} = \frac{2}{G_z} u_y, \quad s_{v,y}^{G_z} = \frac{2}{G_z} v_y \quad (\text{II.37})$$

$$s_{u,xy}^{G_z} = s_{u,yx}^{G_z} = \frac{2}{G_z} u_{xy}, \quad s_{v,xy}^{G_z} = s_{v,yx}^{G_z} = \frac{2}{G_z} v_{xy} \quad (\text{II.38})$$

$$s_{u,xx}^{G_z} = s_{u,yy}^{G_z} = \frac{2}{G_z} u_{xx}, \quad s_{v,xx}^{G_z} = s_{v,yy}^{G_z} = \frac{2}{G_z} v_{xx} \quad (\text{II.39})$$

$$s_{p,x}^{G_z} = \frac{2}{G_z} p_x, \quad s_{p,y}^{G_z} = \frac{2}{G_z} p_y \quad (\text{II.40})$$

$$s_{T,t}^{G_z} = \frac{2}{G_z} T_t \quad (\text{II.41})$$

$$s_{T,x}^{G_z} = \frac{2}{G_z} T_x, \quad s_{T,y}^{G_z} = \frac{2}{G_z} T_y \quad (\text{II.42})$$

$$s_{T,xx}^{G_z} = \frac{2}{G_z} T_{xx}, \quad s_{T,yy}^{G_z} = \frac{2}{G_z} T_{yy} \quad (\text{II.43})$$

Les sensibilités par rapport à m .

$$s_u^m(x, y) = \frac{2}{m}u, \quad s_v^m(x, y) = \frac{2}{m}v, \quad s_p^m(x, y) = \frac{2}{m}p, \quad s_T^m(x, y) = \frac{2}{m}T \quad (\text{II.44})$$

$$s_{u,t}^m = \frac{2}{m}u_t, \quad s_{v,t}^m = \frac{2}{m}v_t \quad (\text{II.45})$$

$$s_{u,x}^m = \frac{2}{m}u_x, \quad s_{v,x}^m = \frac{2}{m}v_x \quad (\text{II.46})$$

$$s_{u,y}^m = \frac{2}{m}u_y, \quad s_{v,y}^m = \frac{2}{m}v_y \quad (\text{II.47})$$

$$s_{u,xy}^m = s_{u,yx}^m = \frac{2}{m}u_{xy}, \quad s_{v,xy}^m = s_{v,yx}^m = \frac{2}{m}v_{xy} \quad (\text{II.48})$$

$$s_{u,xx}^m = s_{u,yy}^m = \frac{2}{m}u_{xx}, \quad s_{v,xx}^m = s_{v,yy}^m = \frac{2}{m}v_{xx} \quad (\text{II.49})$$

$$s_{p,x}^m = \frac{2}{m}p_x, \quad s_{p,y}^m = \frac{2}{m}p_y \quad (\text{II.50})$$

$$s_{T,t}^m = \frac{2}{m}T_t \quad (\text{II.51})$$

$$s_{T,x}^m = \frac{2}{m}T_x, \quad s_{T,y}^m = \frac{2}{m}T_y \quad (\text{II.52})$$

$$s_{T,xx}^m = \frac{2}{m}T_{xx}, \quad s_{T,yy}^m = \frac{2}{m}T_{yy} \quad (\text{II.53})$$

Les sensibilités par rapport à B.

$$s_u^B(x, y) = -\omega t u, \quad s_v^B(x, y) = -\omega t v, \quad s_p^B(x, y) = -\omega t p, \quad s_T^B(x, y) = -\omega t T \quad (\text{II.54})$$

$$s_{u,t}^B = \omega(B\omega t - 1)u, \quad s_{v,t}^B = -\omega(B\omega t - 1)v \quad (\text{II.55})$$

$$s_{u,x}^B = -\omega t u_x, \quad s_{v,x}^B = -\omega t v_x \quad (\text{II.56})$$

$$s_{u,y}^B = -\omega t u_y, \quad s_{v,y}^B = -\omega t v_y \quad (\text{II.57})$$

$$s_{u,xy}^B = s_{u,yx}^B = -\omega t u_{xy}, \quad s_{v,xy}^B = s_{v,yx}^B = -\omega t v_{xy} \quad (\text{II.58})$$

$$s_{u,xx}^B = s_{u,yy}^B = -\omega t u_{xx}, \quad s_{v,xx}^B = s_{v,yy}^B = -\omega t v_{xx} \quad (\text{II.59})$$

$$s_{p,x}^B = -\omega t p_x, \quad s_{p,y}^B = -\omega t p_y \quad (\text{II.60})$$

$$s_{T,t}^B = -\omega t T_t \quad (\text{II.61})$$

$$s_{T,x}^B = -\omega t T_x, \quad s_{T,y}^B = -\omega t T_y \quad (\text{II.62})$$

$$s_{T,xx}^B = -\omega t T_{xx}, \quad s_{T,yy}^B = -\omega t T_{yy} \quad (\text{II.63})$$

II.3 Notation utilisée pour désigner les dérivées

On présente ici la notation utilisée pour écrire les différentes dérivées que l'on retrouve dans le texte (sections 5.2.4 et 5.2.5) et dans cette annexe. On considère d'abord une variable z . La variable z peut représenter par exemple, les composantes u et v de la vitesse $\mathbf{u}$, la viscosité η ou la température T . La dérivée temporelle et les dérivées spatiales de la variable z s'écrivent selon la notation adoptée :

$$z_t = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (\text{II.64})$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}, \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.65})$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}, \quad z_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (\text{II.66})$$

$$s_{z,t} = \frac{\partial s_z}{\partial t} \quad (\text{II.67})$$

$$s_{z,x} = \frac{\partial s_z}{\partial x}, \quad s_{z,xx} = \frac{\partial^2 s_z}{\partial^2 x}, \quad s_{z,xy} = \frac{\partial^2 s_z}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.68})$$

$$s_{z,y} = \frac{\partial s_z}{\partial y}, \quad s_{z,yy} = \frac{\partial^2 s_z}{\partial^2 y}, \quad s_{z,yx} = \frac{\partial^2 s_z}{\partial y \partial x} \quad (\text{II.69})$$

Les termes $s_{z,t}$, $s_{z,x}$,...etc représentent les dérivées de la sensibilité de la variable z (i.e. s_z).

II.4 Invariants du tenseur des taux de déformations $\dot{\gamma}$

Le tenseur des taux de déformation s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.70})$$

Ce tenseur est symétrique, ce qui lui confère certaines propriétés. Notamment, toutes ses valeurs propres sont réelles et l'on peut obtenir une base orthonormale de vecteurs propres même si une ou plusieurs de ses valeurs propres sont nulles. Les trois invariants principaux du tenseur des taux de déformation sont :

$$\mathbf{I} = \dot{\gamma}_{ij} \quad (\text{II.71})$$

$$\mathbf{II} = \frac{1}{2} (I^2 - \dot{\gamma} : \dot{\gamma}) = (\dot{\gamma}_{ij}^2 - \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ji}) \quad (\text{II.72})$$

$$\mathbf{III} = \det(\dot{\gamma}) \quad (\text{II.73})$$

L'interprétation physique de $\mathbf{I}$ est simple : il représente la divergence du vecteur vitesse. Le second invariant $\mathbf{II}$ représente, à un facteur près, le carré du taux de cisaillement et mesure donc l'intensité du taux de déformation.