



**Titre:** Modélisation d'un procédé d'injection sous paroi flexible  
Title:

**Auteur:** Benjamin Touraine  
Author:

**Date:** 2005

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Touraine, B. (2005). Modélisation d'un procédé d'injection sous paroi flexible  
Citation: [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/8403/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8403/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** François Trochu  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION D'UN PROCÉDÉ D'INJECTION SOUS PAROI FLEXIBLE

BENJAMIN TOURAINÉ  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
SEPTEMBRE 2005

© Benjamin Touraine, 2005



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-47689-5*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-47689-5*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODELISATION D'UN PROCÉDÉ D'INJECTION SOUS PAROI FLEXIBLE

présenté par : TOURAINÉ Benjamin

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. RUIZ Eduardo, Pf. D., président

M. TROCHU François, Pf.D., membre et directeur de recherche

M. SOUKANE Sofiane, Ph. D., membre

## REMERCIEMENTS

Parce que ce projet n'aurait pas pu avancer si vite si j'avais travaillé seul, je tiens à remercier mon directeur de recherche M François Trochu, pour m'avoir offert l'opportunité de travailler au sein de l'équipe du CCHP, pour sa disponibilité et pour m'avoir donné l'énergie d'accomplir ce projet complet.

Je tiens également à remercier tous les étudiants et membres du CCHP avec qui les discussions et les questionnements ont toujours été fructueux. Mais plus particulièrement messieurs Vincent Achim, Richard Fournier et Sofiane Soukane pour leur aide au niveau numérique et pour l'utilisation de la librairie ProFlot. Et aussi messieurs Louis Laberge Lebel, Eric Allard et Julien Renoux pour toutes les questions d'ordre pratique ou sur le procédé Polyflex.

Mes remerciements vont aussi à L.Briones dont les travaux expérimentaux sur le procédé Polyflex m'ont été fort utiles.

Je tiens aussi à remercier messieurs Eduardo Ruiz et Sofiane Soukane pour avoir accepté d'être mon jury.

## RÉSUMÉ

L'objectif du projet de recherche présenté à travers ce mémoire est de modéliser et simuler un nouveau procédé de fabrication de pièce en composite baptisé Polyflex. La particularité de ce procédé est qu'il fait intervenir deux écoulements. En effet, en plus de l'écoulement de résine, un deuxième fluide (fluide de compaction) est injecté dans le moule pour accélérer l'imprégnation de la résine. Ces deux écoulements sont séparés par une membrane élastique et imperméable placée par-dessus le renfort.

Dans ce projet, chacun des deux écoulements a été modélisé et résolu numériquement par la méthode des éléments finis. L'écoulement du fluide de compaction a été modélisé par les équations de Stokes qui ont été résolues par une méthode originale reposant sur l'utilisation d'un élément particulier : l'élément bulle. L'infusion de la résine à travers le renfort a été modélisée comme l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux déformable. Ce type d'écoulement est régi par la loi de Darcy couplée à l'équation générale de la consolidation.

La façon dont ces deux écoulements sont couplés dans le procédé Polyflex est ensuite détaillée et modélisée. Cette modélisation a permis d'aboutir à un code programmé en C++ simulant le procédé Polyflex. Les résultats de ce code coïncident avec les essais réalisés en laboratoires et les écarts entre résultats numériques et expérimentaux sont du même ordre de grandeur que les imprécisions des modèles de compaction et de perméabilité du renfort.

Enfin, une étude paramétrique succincte réalisée à partir du code a permis de montrer l'effet de la viscosité du fluide de compaction sur le temps d'injection et surtout a démontrée le potentiel des simulations pour l'amélioration du procédé Polyflex.

## ABSTRACT

The aim of the research project described by this paper is to model and simulate a novel technique of liquid composite moulding named Polyflex. The improvement of this new technique is that it involves two flows. Indeed, in addition to the resin infusion, a second fluid (named compaction fluid) is injected into the mould to accelerate the flow of the resin through the reinforcement. Those two flows are separated within the mould by an elastic film laid over the reinforcement.

For this project, a model for each flow has been established and numerically solved by finite elements. The compaction fluid flow was simulated by solving the Stokes equations with an original method relying on a special element: the bubble element. And the resin infusion was considered as a flow through a deformable porous medium. This kind of flow can be solved by coupling the Darcy law with the consolidation equation.

Then a model and an algorithm for the coupling of the two flows in the Polyflex process was set up. Then this algorithm was implemented in a C++ code. Its results match experimental injections within the uncertainty and irregularity of the reinforcement parameters.

Eventually a short parametrical study was done using the C++ code. Its aim was to study the effect of the compaction fluid viscosity on the injection time. And by the way it showed the code potential for understanding and improving the Polyflex process.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS.....	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT.....	VI
TABLE DES MATIÈRES.....	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	XIII
LISTE DES FIGURES.....	XVI
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS.....	XVIII
LISTE DES ANNEXES.....	XXI
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 : ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	3
1.1 Introduction.....	3
1.2 Les matériaux composites – composants.....	3
1.2.1 Les renforts.....	3
1.2.2 Les résines.....	6
1.2.3 Fabrication des pièces en composite.....	6
1.3 Les procédés LCM .....	7
1.3.1 Le procédé RTM.....	8
1.3.2 Le procédé CRTM.....	9
1.3.3 Le procédé VARI.....	9
1.4 Modélisation des procédés LCM.....	10

1.4.1	Écoulement dans un milieu poreux fixe.....	11
1.4.2	Perméabilité d'un milieu poreux.....	12
1.4.3	Écoulement dans un milieu poreux déformable.....	14
1.4.4	Compaction d'un renfort.....	15
1.5	La simulation des procédés LCM.....	16
1.5	Conclusion.....	18
CHAPITRE 2 : LE PROCÉDÉ POLYFLEX, PRÉSENTATION.....		19
2.1	Introduction.....	19
2.2	Le procédé Polyflex.....	19
2.2.1	Description.....	19
2.2.2	Les différents modes d'écoulement.....	23
2.3	Modélisation des différents modes d'écoulement.....	27
2.4	Conclusion.....	28
CHAPITRE 3 : RÉOLUTION DU PROBLEME DE STOKES EN 2D PAR LA MÉTHODE DE L'ÉLÉMENT BULLE.....		29
3.1	Introduction.....	29
3.2	Le problème de Stokes.....	29
3.2.1	Équations.....	29
3.2.2	Formulation faible.....	30
3.2.3	Conditions aux limites.....	31
3.3	Discrétisation – résolution numérique.....	33

3.3.1	Critère de convergence.....	33
3.3.2	Méthodes éléments finis.....	34
3.3.3	Méthode de l'élément bulle.....	36
3.4	Validation.....	40
3.4.1	Programmation sous ProFlot.....	40
3.4.2	Écoulement de Poiseuille.....	41
3.4.3	Étude de convergence.....	43
3.4.5	Stabilité.....	45
3.5	Conclusion.....	46

#### CHAPITRE 4 : SIMULATION BIDIMENSIONNELLE DU PROCÉDÉ

	D'INJECTION SOUS PAROI FLEXIBLE VARI.....	47
4.1	Introduction.....	47
4.2	Présentation de procédé VARI.....	47
4.2.1	Principe.....	47
4.2.2	Modes d'écoulement possibles.....	49
4.3	Modèle et équations.....	49
4.3.1	L'écoulement de résine dans le renfort.....	49
4.3.2	La déformation du renfort fibreux.....	50
4.3.3	Simplification pour une injection 2D et un renfort orthotrope.....	52
4.3.4	Caractérisation des matériaux – modèles retenus.....	53
4.3.4.1	Caractérisation du renfort : modèle de perméabilité.....	53
4.3.4.2	Caractérisation du renfort : modèle de compaction.....	55

4.4	Synthèse.....	62
4.5	Schéma numérique.....	63
4.5.1	Discrétisation spatiale.....	64
4.5.1.1	Formulation faible.....	64
4.5.1.2	Expression matricielle pour l'élément de référence.....	65
4.5.2	Discrétisation temporelle.....	67
4.6	Implémentation.....	68
4.6.1	Maillage fixe et maillage déformé.....	68
4.6.2	Conservation de la résine.....	69
4.6.3	Algorithme.....	70
4.7	Résultats.....	72
4.7.1	Exemple d'infusion d'une plaque rectangulaire.....	72
4.7.1.1	Géométrie et paramètres de simulation.....	72
4.7.1.2	Remplissage et champ de pression.....	73
4.7.1.3	Conservation de la résine.....	75
4.7.1.4	Déformation du renfort.....	77
4.7.2	Influence des coefficients mécaniques indéterminés.....	78
4.8	Conclusion.....	81
CHAPITRE 5 : SIMULATION BIDIMENSIONNELLE DU PROCÉDÉ		
POLYFLEX.....		
5.1	Introduction.....	82

5.2	Rappels, modélisation des deux écoulements.....	82
5.3	Couplage des deux écoulements, conditions limites.....	83
5.4	Synthèse.....	85
5.5	Programmation.....	86
5.5.1	Maillages fixes, maillages déformés et pas de temps.....	86
5.5.2	Déformation du maillage de la chambre de compaction.....	88
5.5.3	Algorithme.....	88
5.6	Résultats.....	90
5.6.1	Géométrie et paramètres constants.....	90
5.6.2	Un exemple : l'essai #49.....	91
5.6.3	Conservation des masses.....	94
5.6.4	Modèle de compaction et instabilité.....	96
5.6.5	Comparaison avec l'expérience.....	97
5.6.5.1	Cas de l'essai #49.....	97
5.6.5.2	Étude exhaustive.....	99
5.6.6	Synthèse.....	104
5.7	Étude paramétrique.....	104
5.7.1	Problématique.....	104
5.7.2	Plan d'expérience.....	106
5.7.3	Résultats et analyse.....	107
5.8	Conclusion.....	111
	CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	112

RÉFÉRENCES..... 114  
ANNEXES..... 119

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 3.1</b> Erreur, $h$ , temps CPU et nombre de nœuds pour les essais de l'étude de convergence .....	44
<b>Tableau 3.2</b> Erreur en fonction du nombre de Reynolds .....	45
<b>Tableau 4.1</b> Paramètres utilisés pour obtenir les résultats des figures 3.5 à 3.12 .....	73
<b>Tableau 4.2</b> Coefficients mécaniques testés et résultats .....	79
<b>Tableau 5.1</b> Conditions aux limites pour les ports d'injection et les événements .....	85
<b>Tableau 5.2</b> Paramètres fixes pour l'ensemble des simulations.....	91
<b>Tableau 5.3</b> Paramètres particuliers de l'essai #49 .....	91
<b>Tableau 5.4</b> Paramètres des essais servant pour la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux .....	100
<b>Tableau 5.5</b> Valeurs numériques et expérimentales des cinq critères pour les 16 runs et écarts relatifs .....	103
<b>Tableau 5.6</b> Paramètres constants pour l'ensemble des simulations.....	107
<b>Tableau 5.7</b> Valeurs des critères de comparaison pour les vingt simulations de l'étude paramétrique .....	107
<b>Tableau B.1</b> Résultats des simulations. Tous les temps sont en secondes .....	122
<b>Tableau B.2</b> Résultats des simulations avec le critère d'arrêt de l'injection portant sur la quantité de résine injectée. Tous les temps sont en secondes .....	124

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 1.1</b> Module d'Young d'un composite verre/époxy en fonction de son taux de fibres .....	4
<b>Figure 1.2</b> Exemples de renfort utilisés pour les matériaux composites.....	5
<b>Figure 1.3</b> Étapes du RTM.....	8
<b>Figure 1.4</b> Étapes du CRTM .....	9
<b>Figure 1.5</b> Étapes du VARI.....	10
<b>Figure 2.1</b> Les éléments du procédé Polyflex .....	20
<b>Figure 2.2</b> Le renfort dans le moule après fermeture.....	20
<b>Figure 2.3</b> Renfort compressé sous l'action du vide.....	21
<b>Figure 2.4</b> Étape d'injection.....	21
<b>Figure 2.5</b> Étape de compaction.....	22
<b>Figure 2.6</b> Fin de l'imprégnation de la résine .....	22
<b>Figure 2.7</b> Polymérisation de la résine.....	23
<b>Figure 2.8</b> Démoulage de la pièce finie .....	23
<b>Figure 2.9</b> Écoulement de type VARI.....	24
<b>Figure 2.10</b> Écoulement hybride VARI - RTM .....	25
<b>Figure 2.11</b> Écoulement de type CRTM avant fermeture de l'évent de compaction.....	25
<b>Figure 2.12</b> Écoulement de type CRTM après fermeture de l'évent de compaction.....	26
<b>Figure 2.13</b> Écoulement de type consolidation .....	26
<b>Figure 3.1</b> Le Domaine de calcul et la partition de sa frontière.....	32

<b>Figure 3.2</b> Nœuds de calcul de l'élément P2/P1 .....	35
<b>Figure 3.3</b> Nœuds de calculs de l'élément P1+ / P1 .....	36
<b>Figure 3.4</b> Conditions limites pour l'écoulement de poiseuille .....	41
<b>Figure 3.5</b> Résultats numériques : pression (haut), vitesse $V_x$ (bas).....	42
<b>Figure 3.6</b> Profils de vitesse analytique et numérique .....	43
<b>Figure 3.7</b> Erreur en fonction du paramètre $h$ .....	48
<b>Figure 4.1</b> Principe et schéma du procédé VARI .....	44
<b>Figure 4.2</b> Définition de la hauteur du renfort .....	57
<b>Figure 4.3</b> Courbe contrainte - taux de déformation pour l'OCF 8610 .....	58
<b>Figure 4.4</b> Erreur engendrée par la linéarisation.....	60
<b>Figure 4.5</b> Erreur relative due à la linéarisation pour le taux de déformation a) et le taux de contrainte b) .....	62
<b>Figure 4.6</b> Schéma de la modélisation du VARI .....	63
<b>Figure 4.7</b> Algorithme numérique pour la simulation du VARI.....	71
<b>Figure 4.8</b> Géométrie choisie pour la simulation.....	72
<b>Figure 4.9</b> Remplissage et pression 2 s après le début de l'injection .....	73
<b>Figure 4.10</b> Remplissage et pression 15 s après le début de l'injection.....	74
<b>Figure 4.11</b> Remplissage et pression juste après la fermeture du port d'injection ( $t = 38$ s).....	74
<b>Figure 4.12</b> Remplissage et pression 40 s après la fermeture du port d'injection ( $t = 78$ s).....	74
<b>Figure 4.13</b> Remplissage et pression à la fin de l'injection ( $t = 168$ s).....	74
<b>Figure 4.14</b> Remplissage et pression à l'équilibre ( $t = 256$ s).....	75
<b>Figure 4.15</b> Évolution du volume de résine dans le renfort, et du volume de résine injecté par le port d'injection en fonction du temps .....	76

<b>Figure 4.16 a)</b> Évolution de l'épaisseur du renfort aux positions L0, L1/4, L1/2 et L3/4.....	77
<b>Figure 4.16 b)</b> Évolution de la pression aux positions L0, L1/4, L1/2 et L3/4.....	77
<b>Figure 4.17</b> Déformation du renfort et avancement de la résine pour différents modules de cisaillement au temps $t = 2s$ .....	80
<b>Figure 5.1</b> Conditions aux limites pour les différents modes d'écoulement.....	84
<b>Figure 5.2</b> Division et déformation des maillages .....	87
<b>Figure 5.3</b> Algorithme du code simulant le procédé Polyflex .....	89
<b>Figure 5.4</b> Géométrie de la cavité pour l'ensemble des simulations .....	90
<b>Figure 5.5</b> Remplissage et pression 0,4 s après le début de l'injection de résine .....	92
<b>Figure 5.6</b> Remplissage et pression juste avant la fermeture du port d'injection de résin ( $t = 10,6 s$ ).....	92
<b>Figure 5.7</b> Remplissage et pression après l'ouverture du port d'injection du fluide de compaction ( $t = 16,4 s$ ).....	92
<b>Figure 5.8</b> Remplissage et pression lors du croisement du front de résine et du front du fluide de compaction ( $t = 25,2 s$ ).....	92
<b>Figure 5.9</b> Remplissage et pression à l'instant où le fluide de compaction atteint l'évent ( $t = 30,2 s$ ).....	93
<b>Figure 5.10</b> Remplissage et pression après la fermeture de l'évent du fluide de compaction ( $t = 34 s$ ).....	93
<b>Figure 5.11</b> Remplissage et pression à l'instant où la résine atteint l'évent ( $t = 39,2 s$ ).....	93
<b>Figure 5.12</b> Remplissage et pression lorsque l'équilibre est atteint dans la cavité ( $t = 57,3 s$ ).....	93
<b>Figure 5.13</b> Quantités de résine et de fluide de compaction injectés dans la cavité en fonction du temps.....	95

<b>Figure 5.14</b> Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à $t = 5$ s .....	97
<b>Figure 5.15</b> Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à $t = 10$ s .....	97
<b>Figure 5.16</b> Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à $t = 12$ s .....	98
<b>Figure 5.17</b> Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à $t = 15$ s .....	98
<b>Figure 5.18</b> Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à $t = 18$ s .....	98
<b>Figure 5.19</b> Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à $t = 21$ s.....	98
<b>Figure 5.20</b> Position des fronts de résine et du fluide de compaction pour l'essai #49 ....	105
<b>Figure 5.21</b> Position du front de résine lors du croisement des deux fluides pour plusieurs valeurs de la pression de compaction .....	108
<b>Figure 5.22</b> $T_{compaction\_évent\_ouvert}$ en fonction de $\mu_c$ pour plusieurs valeurs de la pression de compaction.....	109
<b>Figure 5.23</b> $T_{compaction\_évent\_ouvert}$ et $T_{compaction\_évent\_fermé}$ en fonction de $\mu_c$ pour plusieurs valeurs de la pression de compaction .....	110
<b>Figure A.1</b> Les différentes zones de l'algorithme de remplissage .....	120

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### SIGLES ET SYMBOLES

$A$	Coefficient pour le modèle de compaction de fibres
$B$	Coefficient pour le modèle de compaction de fibres
$B_i$	Fonctions tests et fonctions de forme pour les nœuds bulle
$C$	Constante de Kozeny
$h$	Épaisseur de la cavité du moule
$h_0$	Épaisseur initiale du renfort avant l'injection de résine
$h_c$	Épaisseur finale du renfort (après l'injection)
$I$	Matrice identité
$E_1$	Module d'Young dans le sens des fibres
$E_2$	Module d'Young dans le sens de l'épaisseur du renfort
$\nu_{12}, \nu_{21}$	Coefficients de poisson
$G$	Module de cisaillement
$Re$	Nombre de Reynolds
$K$	Élément du maillage
$[K]$	Tenseur de perméabilité du renfort
$L$	Longueur de la plaque pour l'injection
$L_{\text{croisement}}$	Position de la résine au moment du croisement des deux fluides
$L_r$	Position finale du front de la résine à l'étape 1 d'injection (critère d'arrêt pour l'injection)
$N_i$	Fonctions tests et fonctions de forme
$N_{dl}$	Nombre de degré de liberté
$N_{\text{élément}}$	Nombre d'élément dans le maillage

$N_{noeud}$	Nombre de noeuds dans le maillage
$p$	Pression hydrostatique
$p_{atm}$	Pression atmosphérique
$p_{compaction}$	Pression du fluide de compaction
$p_{injection}$	Pression d'injection de la résine
$p_{vide}$	Pression de vide
$T_{injection}$	Temps entre le début de l'injection et l'atteinte du critère d'arrêt
$T_{croisement}$	Temps entre le début de la compaction et l'instant où les deux fluides se croisent
$T_{compaction\_event\_ouvert}$	Temps entre le début de la compaction et l'instant où le fluide de compaction atteint l'évent
$T_{compaction\_event\_fermé}$	Temps entre la fermeture de l'évent du fluide de compaction et la fin de l'injection de résine
$\vec{u}$	Déplacement du renfort
$\hat{v}, \hat{p}, \hat{u}$	Fonction tests
$\vec{v}$	Vitesse
$V_f$	Taux volumique de fibres
$V_{f0}$	Taux volumique de fibres initial avant l'injection de résine
$\vec{v}_r$	Vitesse interstitielle
$\vec{v}_D$	Vitesse de Darcy
$V, Q$	Espaces fonctionnels
$V_{élément}$	Volume ou air d'un élément du maillage
$\alpha$	Coefficient de pénalisation
$\phi$	Porosité du renfort
$\eta$	Viscosité cinématique d'un fluide
$\mu$	Viscosité dynamique d'un fluide

$\mu_c$	Viscosité du fluide de compaction
$\mu_r$	Viscosité de la résine
$\sigma$	Tenseur des contraintes
$\sigma'$	Tenseur des contraintes pour les squelette d'un milieu poreux
$\varepsilon$	Tenseur des taux de déformations
$\rho_s$	Densité surfacique d'un renfort
$\rho_v$	Masse volumique du verre
$\Omega$	Domaine de calcul
$\Gamma$	Frontière du domaine d'étude
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker

#### **ABRÉVIATIONS**

<i>LCM</i>	Liquid Composite Molding
<i>RTM</i>	Moulage par transfert de résine (Resin Transfert Infusion)
<i>CRTM</i>	Moulage par injection – compression (Compression Resin Transfert Molding)
<i>VARI</i>	Injection sous film plastique (Vacuum Assisted Resin Infusion)

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A : Notions sur l'algorithme de remplissage.....	119
Annexe B : Influence de l'épaisseur de la cavité.....	122

## INTRODUCTION

De nos jours, l'utilisation des matériaux composites est de plus en plus courante et ce dans des domaines très divers. A travers les différents choix de renfort et de matrice qui les composent, les matériaux composites présentent des propriétés diverses avec un minimum de compromis.

Parallèlement, une grande variété de procédés de fabrication ont été mis en œuvre au niveau industriel. Parmi toutes ces méthodes, les techniques à moule fermé (LCM) ont connu un fort développement depuis les deux dernières décennies pour des raisons économiques, techniques et environnementales. Les apports du numérique et de la simulation ont énormément bénéficié à ces techniques en diminuant considérablement les coûts et le temps nécessaire pour les optimiser. Cependant, ils présentent toujours l'inconvénient d'être mal adaptés à la production en moyenne et grande série.

De nouvelles techniques à moule fermé ont alors été inventées dans le but d'être économiquement rentable pour des moyennes et grandes séries. Parmi ces inventions il y a le procédé en instance de brevet baptisé Polyflex sur lequel porte cette étude. Plus précisément l'objectif de cette étude est la modélisation et la simulation de ce nouveau procédé.

Ce mémoire de maîtrise présente le travail et les résultats obtenus sur ce sujet et est organisé comme suit.

Le premier chapitre est une revue bibliographique servant d'introduction au domaine des composites et dans laquelle est résumé de manière non exhaustive l'état de l'art sur la modélisation des écoulements en milieu poreux et sur la simulation des techniques d'injection à moule fermé.

Le procédé Polyflex est ensuite détaillé dans le chapitre 2 et une première modélisation montrera que pour espérer simuler ce procédé il faut être en mesure de simuler un écoulement de Stokes et l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux déformable.

Chacun de ces deux écoulements sera ensuite modélisé et résolu numériquement individuellement. Pour la simulation de l'écoulement de Stokes, on utilisera une méthode éléments finis originale reposant sur l'utilisation de l'élément bulle (chapitre 3). Et l'écoulement dans un milieu poreux déformable sera aussi résolu par éléments finis et il sera appliqué à la simulation du VARI (chapitre 4).

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, un algorithme permettant de simuler le procédé Polyflex sera présenté et ses résultats seront analysés et comparés avec l'expérience.

# CHAPITRE 1

## REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

### 1.1 Introduction

Les matériaux composites à matrice polymère sont de plus en plus connus de la part des industriels et du grand public. Leurs diverses propriétés les rendent utilisables dans des domaines allant des technologies de pointe (aviation, formule 1,...) à la fabrication de pièces beaucoup plus simples (baignoires, sièges ou strapontins de métro,...). Un composite à matrice polymère peut être défini comme l'association d'un renfort fibreux et d'une matrice en résine polymère qui relie les fibres en une masse compacte. Au niveau industriel, les procédés de fabrication des composites sont presque aussi divers que les caractéristiques qu'ils peuvent présenter.

Dans un premier temps, le rôle de ce chapitre est de présenter les matériaux composites en introduisant leurs différents constituants et leurs procédés de fabrication. Dans un deuxième temps, on verra les théories permettant de modéliser une grande famille de procédés de fabrication de composites : les procédés à moule fermé. Finalement, on fera le point sur l'état de l'art en matière de simulation numérique de ces procédés.

### 1.2 Les matériaux composites – composants

#### 1.2.1 Les renforts

Les fibres constituent l'un des deux principaux éléments d'un matériau composite. Leur rôle est d'assurer la performance mécanique de la pièce en composite. Dans les applications industrielles, trois types de fibres sont utilisées :

- les fibres de verre.
- les fibres de carbone.
- les fibres d'aramide (plus connues par leur nom de commerce de kevlar).

Ces fibres possèdent des propriétés différentes. Les fibres de verre sont les plus utilisées en raison de leur faible prix, mais en contrepartie elles présentent des propriétés mécaniques inférieures aux autres fibres. Les fibres de carbone quant à elles, présentent une très bonne résistance à la compression et à la fatigue, mais elles sont sensibles aux chocs et réagissent avec les métaux, ce qui entraîne des problèmes de corrosion. A l'inverse, le kevlar est très résistant aux chocs, ce qui en fait une fibre utilisée principalement pour des pièces de blindage. Pour plus de détails sur les propriétés des fibres, le livre de Mallick [1] constitue une très bonne source d'information. Indépendamment du type de fibre, une pièce en composite est d'autant plus résistante mécaniquement qu'elle contient plus de fibres comme le montre le graphe de la figure 1.1.

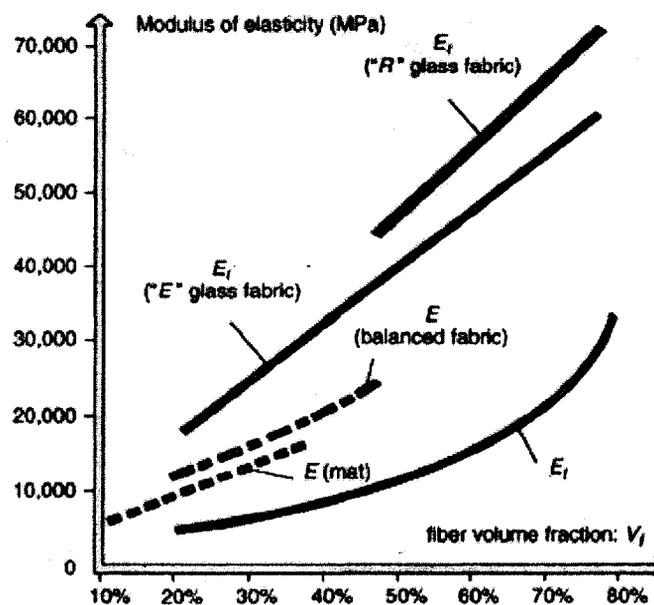
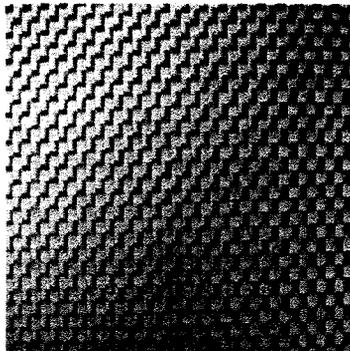


Figure 1.1 Module d'Young d'un composite verre/époxy en fonction du taux de fibres. Les indices  $l$  et  $t$  correspondent respectivement aux directions longitudinale et transversale.

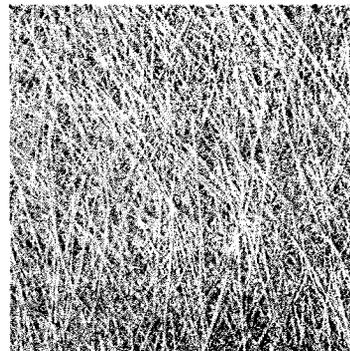
Les fibres ne sont pas utilisées de manière individuelle dans les matériaux composites. En effet, tout d'abord elles sont regroupées en brins ou rovings, qui peuvent contenir 100 à 1000 fibres. Ces brins sont ensuite assemblés pour former ce qu'on appelle un renfort. Il en existe quatre principaux types de renforts:

- les renforts à fibres unidirectionnelles,
- les renforts à fibres bidirectionnelles,
- les mats (orientation aléatoires des fibres) à fibres courtes,
- les mats à fibres longues.

Le choix du type de renfort dépend de beaucoup de paramètres : taux de fibres visé, aspect de surface, coût de production,... etc. Néanmoins, le critère prépondérant est en général la performance mécanique de la pièce. Il faut savoir que les fibres sont très résistantes selon leur longueur et beaucoup moins dans les directions transverses. Par conséquent un renfort unidirectionnel sera résistant dans le sens des fibres, un renfort bidirectionnel sera résistant dans les deux directions du plan de la pièce, tandis qu'un mat aura des propriétés isotropes dans le plan des fibres.



a) Renfort bidirectionnel



b) Mat à fibres longues

**Figure 1.2 Exemples de renfort utilisés pour les matériaux composites.**

Au final, le choix du type de fibre et de renfort offre un large éventail de propriétés possibles pour les pièces en composite. Il convient de faire les bons choix pour que la pièce présente les caractéristiques souhaitées.

### 1.2.2 Les résines

La résine est le deuxième constituant principal d'un matériau composite. Elle constitue le liant entre les fibres du renfort et permet de répartir les charges entre elles. Deux grandes familles de résines sont couramment utilisées dans la fabrication de pièces en composites :

- les résines thermoplastiques qui fondent à haute température,
- les résines thermodurcissables qui se solidifient à haute température.

Pour les procédés de fabrication par injection sur renfort, souvent appelés "*Liquid Composite Molding*" (LCM), ce sont les résines thermodurcissables qui sont le plus souvent utilisées. Ce type de résine, comme son nom l'indique, durcit à température élevée. Le phénomène sous-jacent est une réaction chimique fortement exothermique de polymérisation. Dans cette famille, il y a trois types de résines présentant des propriétés différentes :

- le polyester insaturé,
- le vinylester,
- Les époxydes.

La résine la plus utilisée dans les procédés LCM est la résine polyester insaturé, cela étant dû en grande partie à son faible coût. A l'opposé les résines époxydes ont des propriétés mécaniques bien supérieures à celles des polyester, mais leur prix est beaucoup plus élevé, ce qui en fait une résine utilisée principalement pour des pièces composites de haute performance [2]. Entre les deux, les résines vinyl-esters ont des propriétés mécaniques et un coût intermédiaire.

Il faut aussi savoir que toutes ces résines sont nocives et fortement cancérigènes. Le recyclage et les mesures de prévention pendant leur utilisation sont des facteurs à prendre en compte dans la fabrication d'une pièce en composite.

### 1.2.3 Fabrication des pièces en composites

Les choix du type de fibres, du renfort, de l'orientation des fibres et du taux de fibres de résine offrent une multitude de combinaisons possibles pour la conception d'une pièce en composite. Chacun de ces choix présente des avantages et des inconvénients au

niveau fabrication, ce qui explique la grande diversité des techniques de production. Mais au delà des problèmes liés au choix des constituants d'un composite, les principaux facteurs qui peuvent influencer le choix d'une technique au dépens d'une autre sont les suivants [3] :

- la quantité de pièces à produire,
- la taille et la géométrie de la pièce,
- le taux de fibres visé,
- les performances mécaniques souhaitées.

Pour une revue complète des méthodes de fabrication des composites, on peut se référer au livre de Gay [4]. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer le moulage contact, qui est une méthode manuelle destinée principalement aux faibles séries, le moulage sous vide pour la fabrication de pièces à haute performance ou encore l'enroulement filamentaire pour les pièces présentant une symétrie de révolution. Ces trois méthodes ne représentent qu'une partie des procédés de fabrication, on peut également citer la pultrusion, qui est un procédé permettant de produire en grande quantité des pièces à géométrie profilée ou encore les procédés d'injection sur renfort regroupés sous le sigle LCM, qui sont décrits plus particulièrement dans le paragraphe suivant.

### 1.3 Les procédés LCM

Parmi toutes les techniques possibles pour la fabrication de matériaux composites, il existe une famille de procédés regroupés sous le terme générique en anglais "*Liquid Composite Molding*" (LCM). Le point commun entre les méthodes de cette famille est que la pièce est fabriquée par injection de la résine sur un renfort sec préalablement placé dans un moule. Le moule peut être complètement rigide (RTM), en partie mobile (CRTM) pour accélérer l'injection de résine ou bien avoir une paroi flexible (VARI). L'optimisation de ces procédés peut bénéficier considérablement des apports du numérique. La plupart des travaux de recherche en modélisation et en simulation numérique reliés au LCM portent sur l'un de ces trois procédés.

### 1.3.1 Le procédé RTM

Le RTM est probablement le procédé de la famille LCM le plus utilisé dans l'industrie en raison de sa relative simplicité et parce qu'il est actuellement mieux maîtrisé. Les étapes du procédé RTM sont les suivantes :

1. Le renfort est préformé selon la forme du moule (Figure 1.3 a)).
2. Le renfort préformé est placé dans le moule. Ce dernier est ensuite fermé et scellé (Figure 1.3 b)).
3. La résine est injectée (Figure 1.3 c)).
4. Une fois le moule rempli de résine, celui-ci est chauffé afin de déclencher la réaction de polymérisation, qui entraîne un durcissement de la résine (Figure 1.3 d)).
5. Le moule est finalement ouvert et la pièce peut être démoulée (Figure 1.3e)).

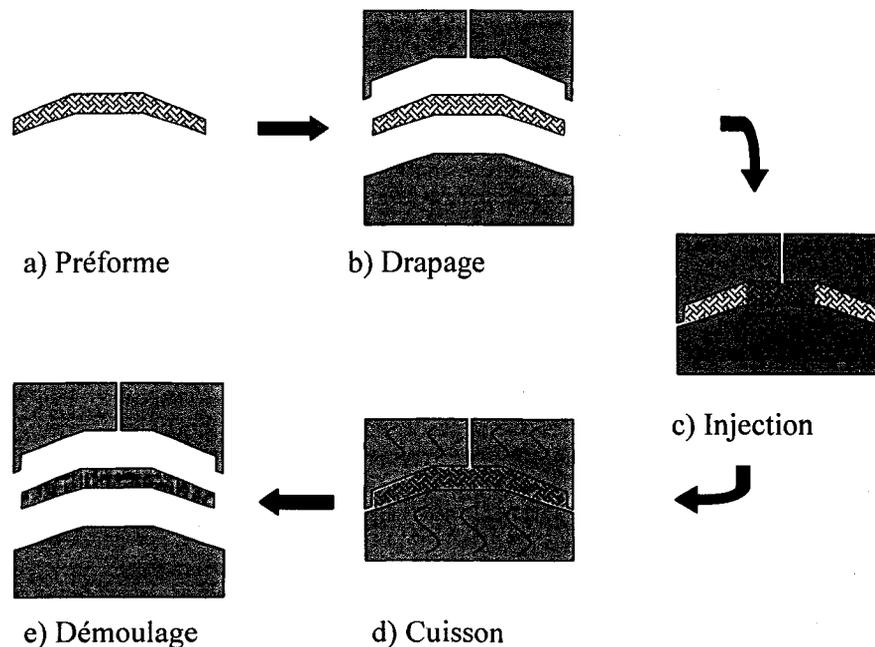


Figure 1.3 Étapes du RTM.

La littérature sur ce procédé est assez importante, on peut par exemple se référer à Cauchois [5] pour des informations sur la technique de fabrication par RTM et au livre de Parnas [6] pour une étude théorique du procédé.

### 1.3.2 Le procédé CRTM

Un inconvénient du RTM est son coût en termes d'outillage. En effet, le prix du moule est plus élevé que dans le cas du procédé VARI et par conséquent, sa rentabilité est conditionnée par une production d'un nombre minimum de pièces par heure. Ceci présente un inconvénient majeur pour la fabrication de composites avec un taux de fibres élevé. En effet, plus le taux de fibres est faible, plus la vitesse d'imprégnation de la résine est grande. Une alternative au procédé RTM permettant de surmonter cette difficulté consiste à utiliser un moule dont une des parois est mobile. Cette technique porte le nom de CRTM. Les étapes initiales de ce procédé sont similaires au RTM. Par contre, une fois qu'une certaine quantité de résine est injectée, l'écoulement se poursuit grâce au déplacement de la paroi mobile du moule qui comprime le renfort et la résine jusqu'à ce que le renfort soit totalement imprégné.

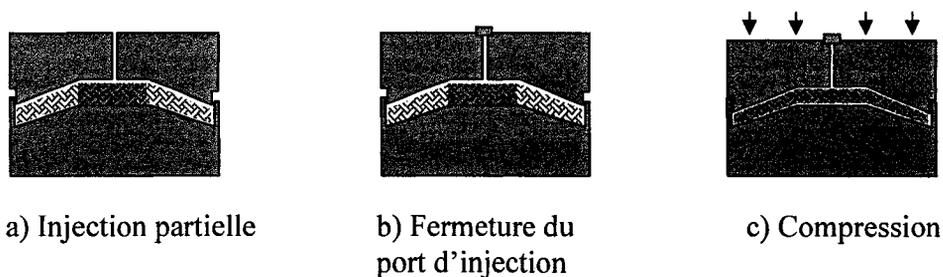
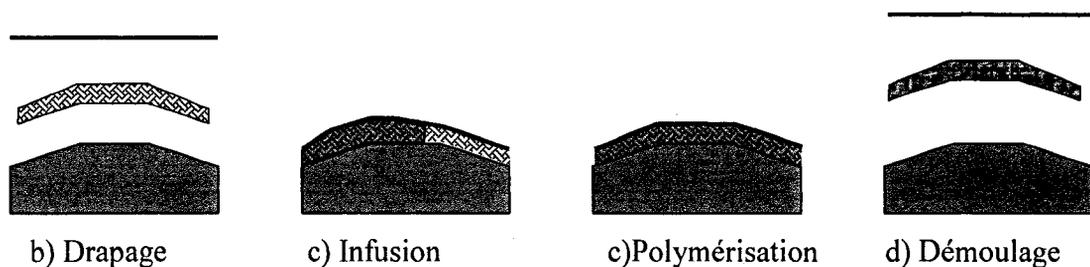


Figure 1.4 Étapes du CRTM.

### 1.3.3 Le procédé VARI

Pour des petites séries ou des pièces de grande taille, le procédé RTM est mal adapté à cause du prix du moule. Une alternative populaire consiste à fabriquer le

composite par des méthodes d'injection sous paroi flexible, pour lesquelles la partie supérieure du moule est remplacée par une membrane. Le principe d'un tel procédé est illustré sur la figure 1.5. Initialement le renfort est déposé entre le moule et une membrane flexible. Un vide relatif est alors créé dans la cavité du moule pour permettre à la résine d'infuser et d'imprégner le renfort. L'apparition de ce procédé remonte aux années 50, mais son utilisation et son développement industriel ne s'est fait que dans les deux dernières décennies. A ce sujet, on peut consulter avec intérêt l'article de Williams & al [7] sur l'évolution des procédés d'infusion sous paroi flexible. Même si le procédé VARI est couramment utilisé par certaines industries, les phénomènes physiques sous-jacents sont encore mal compris et commencent à peine à être étudiés.



**Figure 1.5 Étapes du VARI.**

#### 1.4 Modélisation des procédés LCM

Cette section décrit la modélisation de l'imprégnation de résine dans les procédés LCM et présente les principaux résultats à ce sujet. Il est maintenant largement admis que l'écoulement de résine à travers un renfort fibreux peut se modéliser comme un écoulement dans un milieu poreux. En examinant les différents procédés LCM, on peut s'apercevoir en fait qu'il existe deux principaux modes d'écoulement pour la résine :

- écoulement dans un milieu poreux fixe (RTM et CRTM),
- écoulement dans un milieu poreux déformable (CRTM et VARI).

Dans la suite de cette section ces deux cas seront traités successivement.

### 1.4.1 Écoulement dans un milieu poreux fixe

L'étude de l'écoulement dans un milieu poreux est un sujet amplement traité dans plusieurs domaines comme la mécanique des sols, l'hydrologie ou encore le génie pétrolier. Les résultats de ces études ont été naturellement repris pour modéliser l'imprégnation de résine à travers un renfort fibreux. La plupart de ces travaux sont fondés sur la loi de Darcy [10] qui régit l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux. Celle-ci s'écrit :

$$\vec{v}_r = -\frac{K}{\phi\mu} \nabla P \quad (1.1)$$

où  $K$  est la perméabilité du milieu poreux,  $\mu$  la viscosité dynamique de la résine et  $\phi$  la porosité du milieu poreux. Dans l'équation (1.1),  $v_r$  est la vitesse réelle du fluide, souvent appelée vitesse interstitielle. Dans bien des cas il est plus intéressant d'exprimer la loi de Darcy en faisant apparaître la vitesse de Darcy  $v_D$  ou vitesse d'imprégnation qui est la vitesse à laquelle un observateur voit le fluide imprégner le milieu poreux :

$$\vec{v}_D = -\frac{K}{\mu} \nabla P \quad (1.2)$$

$$\text{avec} \quad \vec{v}_D = \phi \vec{v}_r \quad (1.3)$$

Lors de l'injection, l'écoulement de résine doit vérifier la loi de conservation de la masse de résine ou équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho \vec{v}_D) = 0 \quad (1.4)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible cette équation se simplifie comme suit :

$$\text{div}(\vec{v}_D) = 0 \quad (1.5)$$

Finalement, l'écoulement dans un milieu poreux fixe est régi par les équations (1.2) et (1.5).

La loi de Darcy est une loi empirique, qui a été établie par l'expérience. Au niveau microscopique, l'écoulement du fluide à travers les pores est régi par l'équation de Navier-Stokes. Par contre l'imprégnation d'un milieu poreux au niveau macroscopique est gouvernée par la loi de Darcy. Aussi, on peut noter que les termes d'inertie ou de

dissipation visqueuse sont négligés dans la loi de Darcy, si bien que cette loi n'est valable que dans certaines conditions. Plusieurs auteurs se sont penchés sur le problème de la validité de la loi de Darcy et leurs travaux sont résumés dans la revue de Bear [8]. Ces études ont permis de définir un nombre de Reynolds pour l'écoulement dans un milieu poreux défini comme suit :

$$\text{Re} = \frac{v_D K^{1/2}}{\nu} \quad (1.6)$$

Ce nombre a ensuite permis aux auteurs de définir trois types d'écoulements :

- $\text{Re} < 1$  : régime laminaire pour lequel la loi de Darcy est valide.
- $1 < \text{Re} < 100$  : régime laminaire non gouverné par la loi de Darcy pour lequel les forces d'inertie ne peuvent plus être négligées.
- $\text{Re} > 100$  : régime turbulent.

Les écoulements de résine lors des injections dans les procédés LCM présentent tous des nombres de Reynolds inférieur à 1, ce qui justifie l'utilisation de la loi de Darcy. Une évaluation numérique simple permet de le vérifier. En effet, généralement les perméabilités des renforts fibreux sont inférieures à  $10^{-8} \text{ m}^2$ , la viscosité cinématique d'une résine utilisée pour une injection est de l'ordre de  $10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}$  et la vitesse d'imprégnation dépasse rarement la valeur de  $20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ces valeurs numériques donnent un Reynolds de 0,2. Au-delà de ces études théoriques sur la validité de la loi de Darcy, plusieurs auteurs ont validé expérimentalement l'utilisation de la loi de Darcy pour modéliser l'écoulement d'une résine polymère à travers un renfort fibreux [11,12].

#### 1.4.2 Perméabilité d'un milieu poreux

L'écoulement de résine dans un milieu poreux (équations (1.2) et (1.4)), dépend principalement de deux paramètres, à savoir :

- la viscosité dynamique de la résine  $\mu$ ,
- la perméabilité du renfort  $K$ .

Dans les procédés LCM, les injections sont en général isothermes, la viscosité de la résine reste donc constante. De plus il s'agit d'un paramètre bien connu d'un fluide. Par contre la perméabilité reste un paramètre difficile à estimer. Schématiquement, la perméabilité

quantifie la facilité avec laquelle un fluide réussit à imprégner un milieu poreux. En toute généralité, la perméabilité est un tenseur d'ordre 2. Mais dans les milieux poreux orthotropes (possédant au moins trois plans de symétrie) comme les renforts fibreux, ce tenseur se réduit à trois composantes : les perméabilités dans chacune des directions principales du renfort.

L'idéal pour évaluer la valeur de ce coefficient serait de disposer d'un modèle analytique donnant la perméabilité du renfort en fonction de paramètres lui étant intrinsèques. Dans le domaine des matériaux composites, le modèle le plus utilisé est celui de Carman - Kozeny [13] :

$$K = \frac{d}{C} \frac{\phi^3}{(1-\phi)^2} \quad (1.7)$$

où  $d$  est le diamètre moyen de la section des pores,  $\phi$  la porosité du milieu et  $C$  la constante de Kozeny. Malheureusement, la constante  $C$  doit être déterminée expérimentalement. De plus, cette loi n'est valable que pour une faible gamme de porosité. Elle doit donc être utilisée avec prudence [13].

En parallèle, plusieurs études ont été menées pour prédire numériquement la perméabilité en résolvant par éléments finis l'écoulement microscopique de la résine entre les fibres du renfort, comme celle de Phelan *et al* [14] dans le cas d'un renfort unidirectionnel. Là encore, les résultats diffèrent de l'expérience. Pour expliquer cette différence, les auteurs ont mis en cause la trop grande simplicité du modèle de la géométrie du renfort qu'ils ont utilisé dans leurs simulations.

Finalement pour obtenir un modèle convenable de la perméabilité d'un renfort, il est nécessaire de recourir à l'expérience. Le principe de ce type de mesure est simple. Il s'agit de découper un échantillon rectangulaire du renfort dont on veut mesurer la perméabilité, puis d'y injecter une résine dont la viscosité est étalonnée. En mesurant la vitesse de la résine et en connaissant le pression d'injection, on peut évaluer grâce à la loi de Darcy la valeur de la perméabilité du renfort dans le sens de l'écoulement. Pour de plus amples détails, on peut se référer à l'article de Gauvin *et al* [15] sur les mesures de perméabilité.

### 1.4.3 Écoulement dans un milieu poreux déformable

Lors de l'injection de résine, il se peut que le renfort ne soit pas retenu par les parois du moule et qu'il ait la possibilité de se déformer, comme dans le cas du VARI ou lors de la phase de compression du CRTM. Lorsque le milieu poreux est déformable, les deux phases fluide (résine) et solide (renfort) doivent satisfaire l'équation de continuité, ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \phi) + \text{div}(\phi \rho_l \vec{v}_l) = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1-\phi)\rho_s) + \text{div}((1-\phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0 \quad (1.9)$$

où  $\phi$  est la perméabilité du milieu et les indices 'l' et 's' correspondent respectivement aux phases liquide et solide. Ces deux équations peuvent être additionnées afin d'obtenir l'équation de conservation de la masse d'un milieu poreux déformable saturé:

$$\text{div}(\vec{v}_D) + \text{div}(\vec{v}_s) = 0 \quad (1.10)$$

Finalement en injectant la loi de Darcy (1.2) dans l'équation (1.10), on obtient l'équation d'imprégnation d'une résine dans un milieu poreux déformable :

$$\text{div}\left(-\frac{K}{\mu} \nabla P\right) + \text{div}(\partial_t \vec{u}) = 0 \quad (1.11)$$

où  $u$  est le déplacement du renfort.

Cependant, l'équation (1.11) n'est pas suffisante pour rendre compte de l'écoulement dans un milieu poreux déformable. En effet, le milieu poreux pouvant se déformer, il est nécessaire de calculer ses déformations. La théorie traitant de la déformation d'un milieu poreux saturé s'appelle la consolidation. L'origine de cette théorie est due à Biot [18], qui fut le premier à constater que lorsque qu'on applique une charge à un milieu poreux saturé, il se déforme après un certain laps de temps et du liquide est extrait du milieu poreux. Toutefois, les équations générales de la consolidation sont dues à Terzaghi [19] qui fut le premier à décomposer le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  d'un milieu en deux termes correspondant respectivement aux efforts repris par le

squelette solide du milieu poreux, modélisés par le tenseur des contraintes effectives  $\sigma'_{ij}$  et à la pression hydrostatique  $p$  du fluide interstitiel, soit :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} p \quad (1.12)$$

En faisant l'hypothèse que le squelette du milieu poreux se déforme de manière élastique, on obtient l'équation générale de la consolidation en écrivant l'équilibre du milieu poreux:

$$\text{div} \left( \frac{1}{2} E : (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) + p I \right) = 0 \quad (1.13)$$

où  $E$  est un tenseur d'ordre 4 et  $I$  le matrice identité d'ordre 3.

En toute généralité ce sont les équations (1.11) et (1.13) qui régissent l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux déformable. Historiquement ces deux équations ont été résolues de manière couplée grâce aux méthodes de l'analyse numérique. Dans les premières études sur la consolidation, seule l'équation (1.11) était résolue grâce à une modélisation du terme source lié au déplacement du milieu poreux. Par exemple, en formulant l'hypothèse que la quantité d'eau extraite d'un volume de contrôle infinitésimal est égale à sa variation de volume, Biot [18] a abouti à l'équation suivante :

$$\nabla^2 P = \frac{1}{C} \left( \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{oct}}{\partial t} \right) \quad (1.14)$$

$$\text{avec } C = -\frac{KE}{3(1-2\nu)} \quad (1.15)$$

$$\text{et } \sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (1.16)$$

Therzaghi [19], de son coté, a ramené l'équation sous la forme de l'équation de la chaleur en considérant que la consolidation était unidirectionnelle, et la charge appliquée au milieu poreux verticale et constante.

#### 1.4.4 Compaction d'un renfort

Pour résoudre les équations de la consolidation (1.11) et (1.13), il faut pouvoir déterminer les coefficients d'élasticité du milieu poreux (sec). Dans le cas où le milieu

poreux est un renfort fibreux, les symétries réduisent à neuf le nombre de paramètres à déterminer dans le cas 3D et à cinq dans le cas 2D. De plus, ces coefficients ne sont pas constants afin de refléter la difficulté croissante rencontrée expérimentalement dans la compression d'un renfort [20]. L'étude de la compression des renforts fibreux s'appelle la compaction, et est née avec la nécessité de prendre en compte le changement du taux de fibres d'un renfort lorsqu'il est comprimé. Plusieurs auteurs ont proposé des modèles de compaction en établissant une relation entre la charge appliquée au renfort et son taux de fibres. Ces travaux sont bien résumés dans la revue bibliographique sur la compaction de Robitaille *et al.* [21]. Cette revue montre que dans la plupart des cas, la relation entre contrainte et taux de fibres peut se mettre sous la forme d'une loi exponentielle :

$$\sigma = A(V_f)^B \quad (1.17)$$

De plus, la compression des renforts fibreux est un phénomène qui présente une hystérésis. En effet, comme l'ont montré Robitaille *et al.* [22], les fibres d'un renfort soumis à une charge se réorganisent et l'épaisseur du renfort au repos après compression est inférieure à l'épaisseur initiale. Les jeux de coefficients A et B de l'équation (1.17) ne sont donc pas les mêmes pour la compression et pour la relaxation du renfort. Ces paramètres diffèrent aussi entre la première compression et les compressions suivantes.

### 1.5 La simulation des procédés LCM

La simulation de l'écoulement de la résine pour les procédés LCM représente un enjeu important car elle permet une réduction des coûts et du temps d'étude pour l'optimisation et la conception des moules. En effet, la simulation de l'injection de résine a été développée initialement pour le RTM afin de déterminer de manière optimale la position des ports d'injection et des événements.

La simulation du procédé RTM est utilisée depuis plus d'une décennie. On peut considérer qu'elle est maintenant parfaitement maîtrisée. Les aspects importants de ce type de simulation ont été résumés par Gauvin et Trochu [22]. Dans cet article, les points suivants ont été soulignés comme importants à prendre en compte dans les simulations du procédé RTM:

- détermination de la perméabilité du renfort,

- injection non isotherme,
- cas de renforts multicouches,
- effets de bord.

Chacun de ces aspects a été étudié et traité dans la littérature. Pour la perméabilité, l'article de Gauvin *et al.* [15] rassemble les techniques de mesure les plus courantes. Lebrun *et al.* [24,25] ont étudié le cas du remplissage non isotherme. Luce & al. [26] se sont intéressés à la perméabilité des renforts multicouches. Quant aux effets de bord, ils proviennent du fait qu'il est difficile de découper le renfort selon la forme exacte du moule, si bien qu'en pratique il existe un espace entre le renfort et les parois du moule. Cet espace modifie l'écoulement de la résine, car il cause un écoulement préférentiel le long de la paroi du moule. Cet écoulement peut être modélisé avec les équations de Stokes. Une manière plus simple de prendre en compte les effets de bord a été établie par Hamammi *et al.* [27], qui ont proposé de les modéliser par un écoulement dans un milieu poreux de perméabilité équivalente.

Un aspect important est à noter sur les simulations du procédé RTM : celles-ci sont réalisées sur des maillages 2D ½ qui sont des maillages surfaciques tridimensionnels. En général, les pièces en composites produites par les procédés LCM ont une épaisseur mince comparée à leur longueur. Il est alors justifié de considérer que l'écoulement dans le sens de l'épaisseur de la pièce est négligeable. Effectuer la simulation des injections RTM sur un maillage 2D ½ permet de réduire considérablement le temps de calcul sans pour autant affecter la précision de la simulation.

Les simulations des deux autres variantes des procédés LCM sont beaucoup plus récentes. Elles reposent sur la résolution de l'équation (1.11) dans laquelle le terme source est modélisé. Pour le cas du procédé CRTM, Pham [28], a réussi à simuler l'étape de compression dans une section verticale 2D d'une plaque rectangulaire, en résolvant l'équation suivante :

$$\operatorname{div}\left(-\frac{K}{\mu}\nabla P\right)=-\frac{U}{h(t)} \quad (1.18)$$

où  $U$  est la vitesse de la paroi mobile du moule et  $h(t)$  l'épaisseur de la cavité du moule à l'instant  $t$ . Dans une étude ultérieure [29], il a adapté son travail pour simuler l'étape de compression sur des maillages 2D ½.

Les premières simulations sur le procédé VARI sont dues à Joubaud *et al.* [29,30]. Dans une première étude, les auteurs ont défini et utilisé une perméabilité équivalente permettant de simuler l'injection sous paroi flexible en ne résolvant que l'équation de Darcy. Une deuxième étude leur a permis de définir un modèle plus complet pouvant simuler l'étape de consolidation en résolvant numériquement les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{K(x,t)}{\mu} \operatorname{div}(\nabla P(x,t) + \rho g z(x)) &= \frac{1}{h(x,t)} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) \\
 h(x,t) &= F(\sigma(x,t) + P(x,t) - P_{ext}) + h_0(x) \\
 K(x,t) &= \hat{K}(x,t) \\
 \sigma(x,t) &= \hat{\sigma}(x,t)
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

où  $F$ ,  $\hat{K}$  et  $\hat{\sigma}$  sont des fonctions caractéristiques du renfort et de la membrane. Plus récemment, une autre étude a été menée sur la simulation du VARI par Achim [30], qui a amélioré l'algorithme de Joubaud en introduisant la résolution d'une équation de membrane pour déterminer l'épaisseur du renfort saturé lors de la simulation.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a présenté les matériaux composites et les procédés de fabrication par injection. La modélisation et la simulation de ces procédés ont également été discutées. Plusieurs nouvelles techniques d'injection ont été développées récemment ou sont en développement, afin de combiner les avantages respectifs des procédés RTM, CRTM et VARI ou d'améliorer ces procédés. Les publications sur ces nouvelles techniques sont rares car bien souvent leur intérêt industriel et économique est important. Le travail présenté dans la suite de ce mémoire porte justement sur la simulation d'une de ces nouvelles techniques développée à l'École Polytechnique de Montréal et baptisée Polyflex.

## CHAPITRE 2

### LE PROCÉDÉ POLYFLEX, PRÉSENTATION

#### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter le procédé Polyflex et de dégager de cette présentation une première modélisation. Comme il a été mentionné précédemment, Polyflex peut être vu comme un mélange des procédés VARI, RTM et CRTM. Mais à la différence de ces trois techniques, Polyflex est singulier car il fait intervenir deux écoulements distincts à l'intérieur du moule.

A travers ce chapitre, le procédé sera présenté dans sa globalité (section 2). Puis les différents modes d'écoulement apparaissant lors d'une injection seront détaillés de façon précise (section 3) ce qui permettra de dégager un modèle théorique pour chacun des deux écoulements.

#### 2.2 Le procédé Polyflex

##### 2.2.1 Description

De manière très schématique, le procédé Polyflex consiste à injecter une résine thermodurcissable sur un renfort fibreux placé dans un moule composé de deux chambres séparées par une membrane élastique et imperméable. Le renfort est situé dans la chambre inférieure appelée chambre d'injection. La chambre supérieure, appelée chambre de compaction, sert à injecter un fluide dont le rôle est d'accélérer l'imprégnation du renfort par la résine et de compacter uniformément le renfort saturé lorsque l'imprégnation de la résine est terminée.

Pour mieux comprendre le procédé, il convient de décrire pas à pas chacune de ces étapes :

- 1) Initialement, le renfort est placé dans la partie inférieure du moule. Puis il est recouvert par la membrane servant à délimiter les deux chambres et le moule est refermé (figures 2.1 et 2.2).

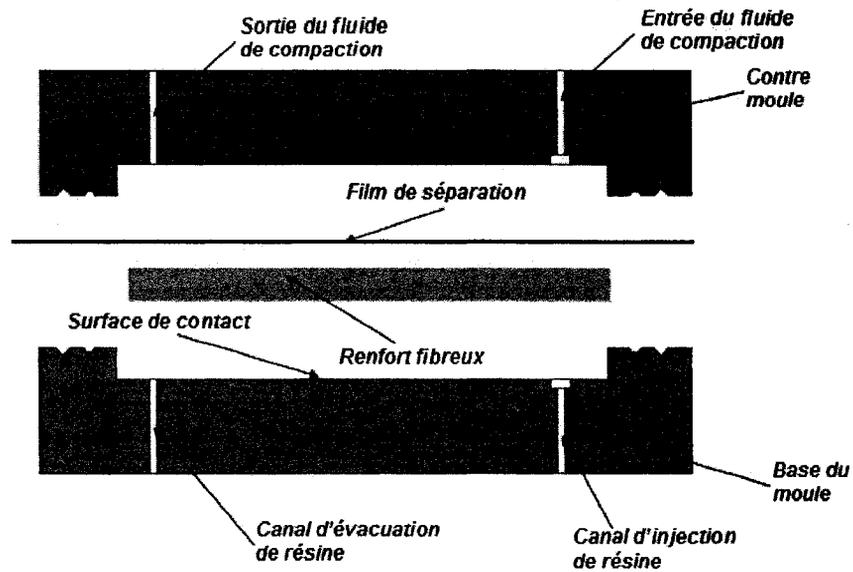


Figure 2.1 Éléments du procédé Polyflex.

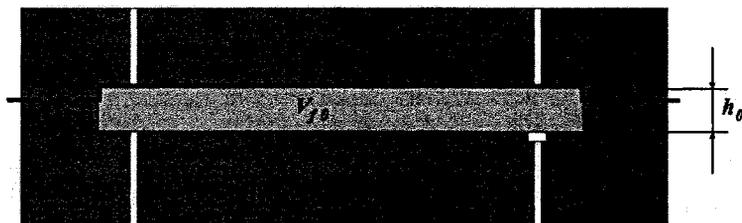


Figure 2.2 Le renfort dans le moule après fermeture.

- 2) La deuxième étape consiste à faire le vide dans la chambre d'injection ce qui a pour effet de compacter le renfort qui n'occupe plus qu'une partie de la cavité du moule (figure 2.3).



Figure 2.3 Renfort comprimé sous l'action du vide.

- 3) Ensuite commence l'injection de résine. L'imprégnation du renfort par la résine a pour effet de le déformer. Au fur et à mesure que l'injection progresse, la membrane vient coller la paroi supérieure du moule (figure 2.4).

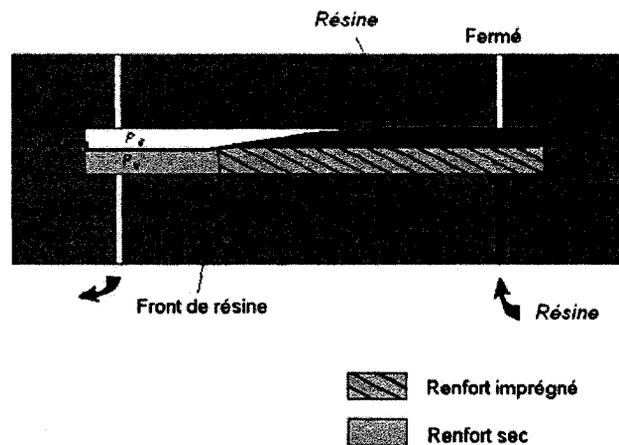


Figure 2.4 Étape d'injection.

- 4) Une fois que la quantité requise de résine a été injectée, on ferme le port d'injection de la résine et on ouvre celui du fluide de compaction. Commence alors l'étape de compaction. Le fluide dans la chambre de compaction vient comprimer la résine à travers la membrane, ce qui a pour effet d'accélérer l'imprégnation du renfort (figure 2.5).

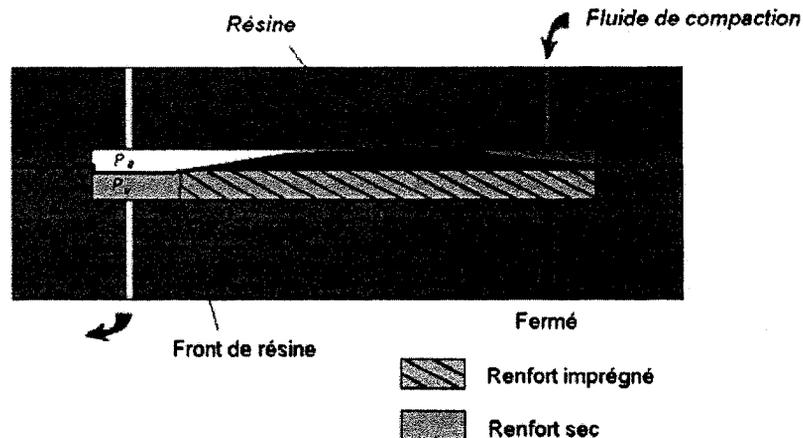


Figure 2.5 Étape de compaction.

- 5) Cette étape se termine lorsque le fluide de compaction atteint l'évent de sortie. Ce dernier est alors fermé et la pression dans la chambre de compaction s'uniformise pour atteindre la valeur imposée au port d'injection. Pendant ce temps la résine imprègne toujours le renfort jusqu'à ce qu'il soit entièrement saturé (figure 2.6).

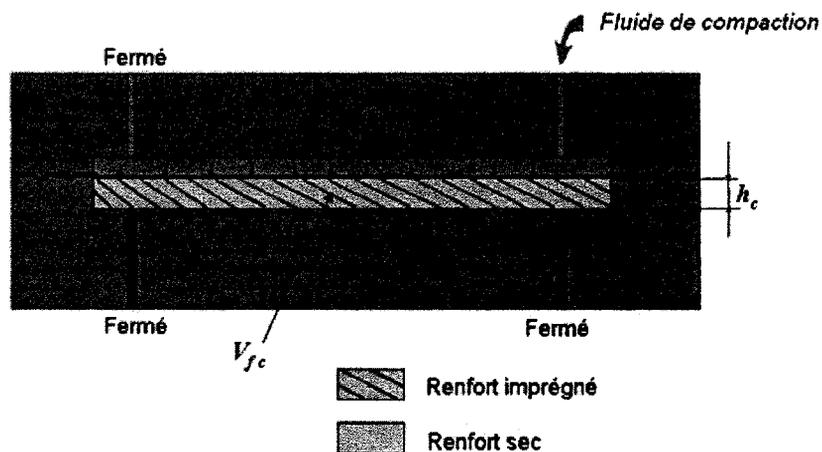


Figure 2.6 Fin de l'imprégnation de la résine.

- 6) Une fois que la résine a atteint l'évent de sortie, celui-ci est fermé. Commence alors l'étape de consolidation pendant laquelle l'épaisseur du renfort saturé s'uniformise. Simultanément, le moule peut être chauffé pour permettre la polymérisation de la résine (figure 2.7).

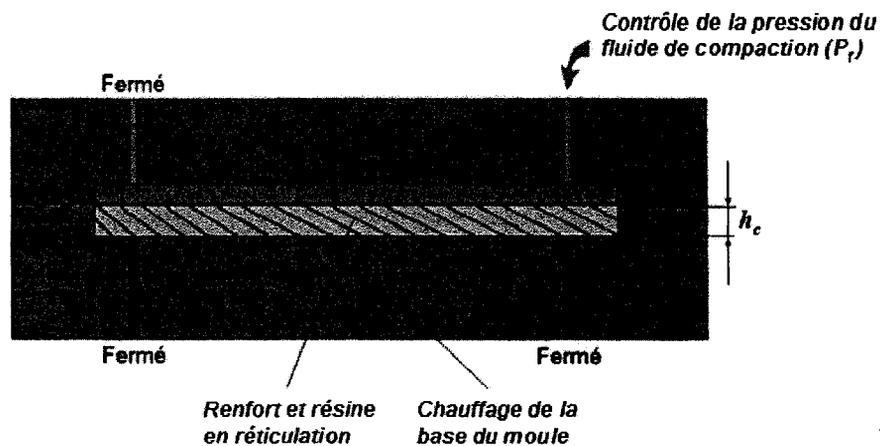


Figure 2.7 Polymérisation de la résine.

- 7) Enfin, lorsque la résine a complètement polymérisé, le fluide de compaction est retiré de la chambre de compaction, le moule est ouvert et la pièce composite peut être démoulée (figure 2.8).

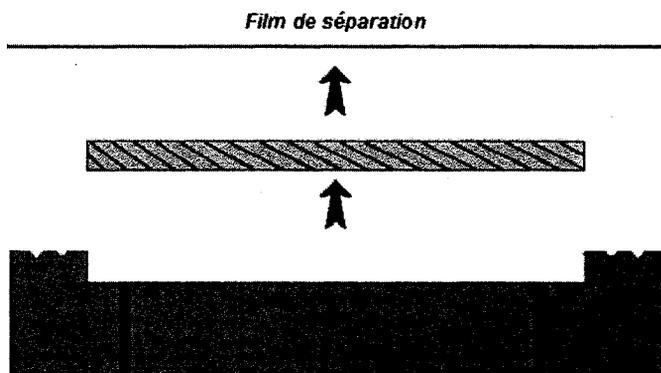


Figure 2.8 Démoulage de la pièce finie.

### 2.2.2 Les différents modes d'écoulement

L'objectif de l'étude présentée ici est de simuler le procédé Polyflex dans le cas d'un remplissage isotherme 2D. Comprendre le procédé dans sa globalité ne suffit pas ici. En effet pour simuler correctement le procédé, il faut être en mesure d'identifier

précisément les différents modes d'écoulement apparaissant lors de l'injection. C'est l'objet de cette section.

Pour une modélisation en vue d'une simulation numérique, il est judicieux de différencier quatre modes d'écoulement dans le procédé Polyflex. Le premier a lieu au tout début de l'injection et est analogue en tous points à un écoulement de type VARI. En effet, l'injection de résine déforme le renfort et a pour effet de faire apparaître une bulle près du point d'injection qui va grossir au fur et à mesure de l'injection (figure 2.9).

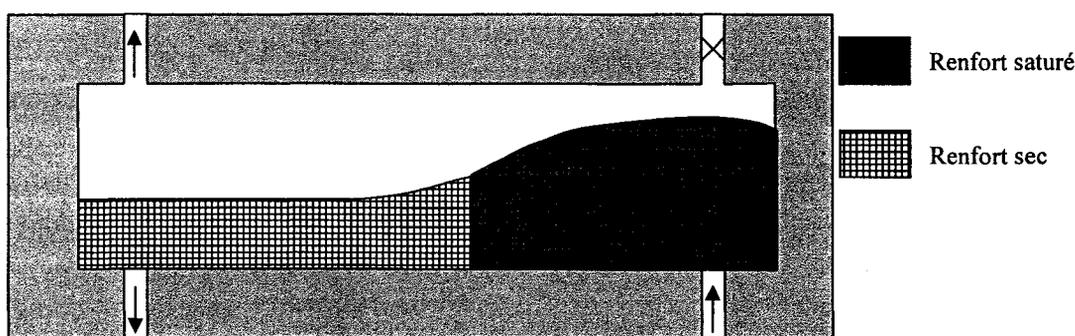


Figure 2.9 Écoulement de type VARI.

Cependant, cette bulle ne peut se développer librement car rapidement elle atteint la hauteur de la cavité du moule. Apparaît alors le deuxième mode d'écoulement présentant des aspects à la fois du VARI et du RTM (figure 2.10). En effet, bien en amont du front de résine, le renfort saturé occupe toute l'épaisseur de la cavité et ne peut plus se déformer dans le sens de la hauteur. Hors comme la déformation d'un renfort est infime dans le sens des fibres lors d'une injection, le renfort peut être considéré comme fixe dans cette région. L'imprégnation de la résine dans cette région est donc comparable à l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux rigide comme dans le procédé RTM. Par contre, en aval du front de résine, le renfort sec est toujours compacté par la pression de vide et n'occupe qu'une partie de la cavité. Entre les deux, la résine imprègne un renfort libre de se déformer, ce qui en un sens est analogue au procédé VARI.

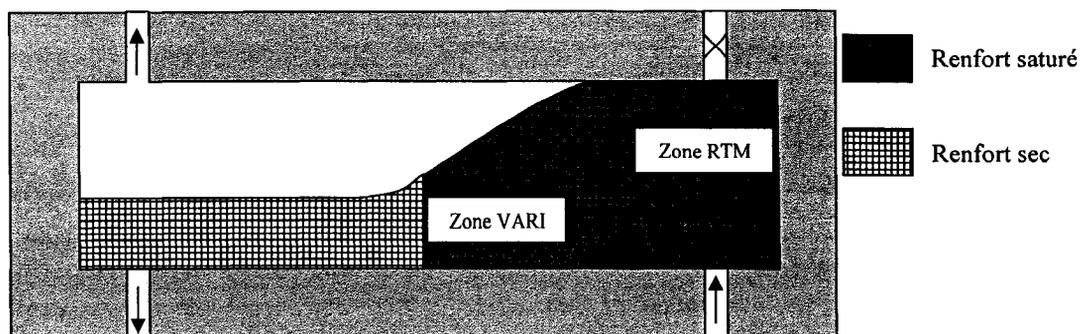


Figure 2.10 Écoulement hybride VARI – RTM.

Ce mode d'écoulement a lieu jusqu'au début de l'étape de compaction. Le début de cette étape coïncide avec la fermeture du port d'injection pour la résine. Simultanément, le port d'injection du fluide de compaction est ouvert et le fluide de compaction vient presser le renfort à travers la membrane. L'effet recherché ici est celui du CRTM, c'est-à-dire l'accélération de l'injection de résine, mais le mode d'écoulement qui en résulte ici est plutôt comparable à celui du VARI, sauf que la contrainte appliquée sur la résine et le renfort n'est plus due à la pression atmosphérique mais à celle du fluide de compaction (figure 2.11). Le fluide de compaction s'écoule beaucoup plus vite que la résine et atteint l'évent bien avant la résine. À ce moment là, l'évent du fluide de compaction est fermé, mais son port d'injection reste toujours ouvert (figure 2.12), si bien que dans la chambre de compaction la pression du fluide s'uniformise rapidement et prend la valeur de la pression d'injection, ce qui accentue d'avantage l'effet de compression du fluide de compaction.

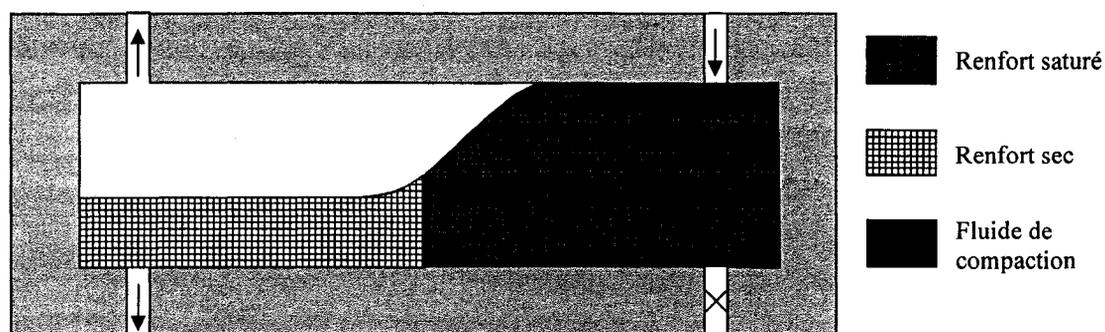
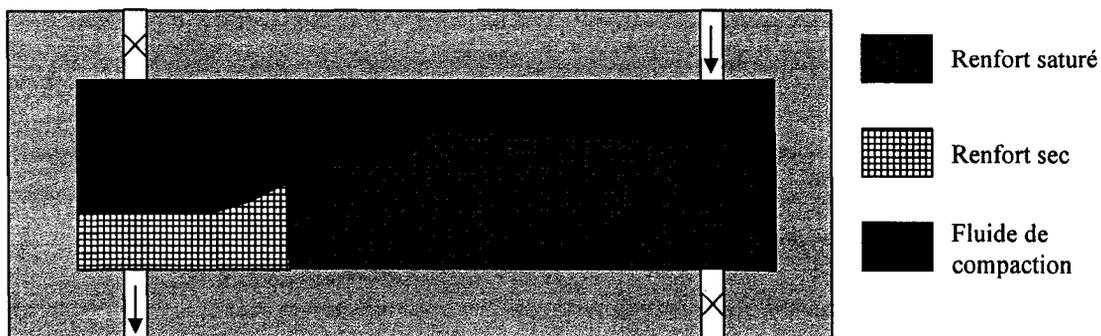
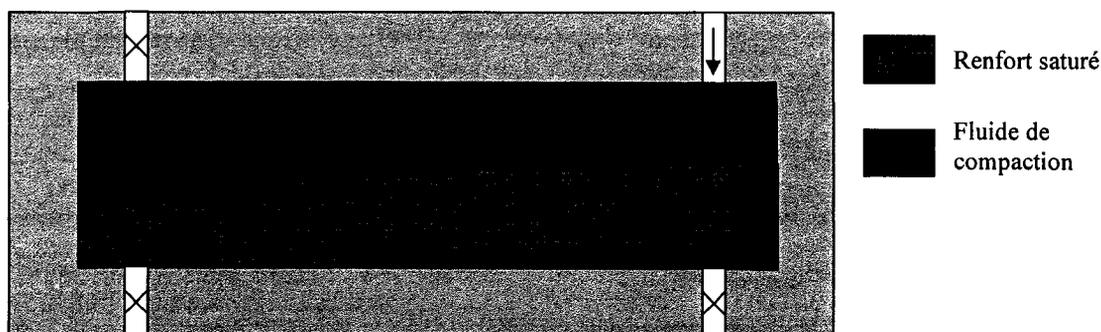


Figure 2.11 Écoulement de type CRTM avant fermeture de l'évent de compaction.



**Figure 2.12** Écoulement de type CRTM après fermeture de l'évent de compaction.

L'écoulement de type CRTM se produit jusqu'à ce que la résine atteigne l'évent de sortie. A ce moment là se termine l'injection à proprement parler. Notamment le temps d'injection correspond au laps de temps entre l'ouverture du port d'injection de la résine et le moment où cette dernière atteint l'évent de sortie. Cependant, lorsque la résine atteint l'évent, l'équilibre n'est pas atteint dans le moule, car l'épaisseur du renfort n'est pas uniforme dans la cavité. Il se produit alors un écoulement de consolidation pure qui ne se termine que lorsque l'équilibre est atteint dans la cavité (figure 2.13).



**Figure 2.13** Écoulement de type consolidation.

En fait, en étant rigoureux, tout ce qui vient d'être dit sur les différents modes d'écoulement n'est valable que dans le cas où le renfort comprimé sous l'action du vide n'occupe pas toute la cavité du moule. Dans le cas contraire, les deux premiers modes d'écoulement sont complètement analogues à celui du RTM. Cependant, La modélisation qui sera présentée au chapitre 5 permet de traiter ces deux cas de figures.

### 2.3 Modélisation des différents modes d'écoulement

L'étude du paragraphe 2.4 a permis de dégager quatre modes d'écoulement pour le procédé Polyflex. Si on ne considère que l'injection de résine, dans les quatre cas, il s'agit de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux déformable, dont on a vu au chapitre 1 qu'il était solution de l'équation générale de la consolidation et de la loi de Darcy (équations (1.11) et (1.13)).

Pour ce qui est de l'écoulement du fluide de compaction, dans les expériences réalisées par Briones [41], il s'agit d'huile de silicone ayant une viscosité comparable à celle d'une résine en ordre de grandeur (0,1 à 1 Pa.s). De plus l'écoulement a lieu à travers une section assez étroite et la largeur du port d'injection est de 6mm. Par ailleurs, la vitesse maximale mesurée expérimentalement pour ce fluide est de  $10\text{cm.s}^{-1}$ . De telles valeurs caractéristiques donnent un nombre de Reynolds de l'ordre de 0.5 pour l'écoulement du fluide de compaction. Pour de tels nombres de Reynolds il est possible de simplifier les équations de Navier – Stokes en négligeant les termes d'inertie. Ce qui revient à considérer que l'écoulement du fluide de compaction est régi par les équations de Stokes :

$$\begin{cases} 2\mu\nabla.\varepsilon(\vec{v}) - \nabla P = 0 \\ \text{div}(\vec{v}) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Les quatre modes d'écoulement sont régis par les mêmes jeux d'équations. Pourtant le paragraphe précédent a souligné des différences notables entre ces modes. Ces différences sont dues aux conditions limites qui changent d'un mode à l'autre. La détermination des conditions limites est un point crucial pour la simulation du procédé Polyflex, car ces conditions changent au cours de l'injection. De plus, elles sont couplées dans le sens où les résultats des équations de Stokes (2.1) servent de conditions limites pour les équations régissant l'écoulement de résine et réciproquement. Ces conditions limites seront revues en détails dans le chapitre 5 traitant de la simulation du procédé Polyflex.

## 2.4 Conclusion

Finalemment, on vient de voir un premier model du procédé Polyflex dans lequel chacun des deux écoulements à été détaillé et modélisé par un système d'équations. La conclusion de cette modélisation est que pour être en mesure de simuler Polyflex il faut pouvoir simuler chacun de ces deux écoulements individuellement. C'est ce qui est fait dans les deux prochains chapitres. La résolution des équations de Stokes est présentée dans le chapitre 3 et le chapitre 4 traite de la simulation d'un écoulement dans un milieu poreux déformable.

## CHAPITRE 3

# RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE STOKES EN 2D PAR LA MÉTHODE DE L'ÉLÉMENT BULLE

### 3.1 Introduction

La résolution de l'équation de Stokes par éléments finis est un problème classique, à tel point qu'il constitue le premier exemple d'application non trivial des éléments finis dans bien des cours sur la théorie des éléments finis [31,32]. Généralement, pour des raisons de convergence, la discrétisation de l'équation de Stokes est réalisée avec des polynômes quadratiques pour la vitesse et linéaires pour la pression, ce qui est coûteux en temps de calcul. Afin de réduire ce coût, nous avons résolu l'équation de Stokes en utilisant une méthode originale reposant sur l'utilisation d'un élément fini particulier : l'élément bulle [33]. Ce chapitre, qui a pour objectif de présenter cette méthode est organisé comme suit. La section 1 présente l'équation de Stokes et sa formulation variationnelle. Dans la section 2, après avoir exposé rapidement les méthodes habituelles de résolution par éléments finis de l'équation de Stokes, on verra la méthode de l'élément bulle ainsi que sa mise en œuvre. Enfin la section 3 traite de la programmation de cette méthode en C++ ainsi que de sa validation sur un écoulement de référence : l'écoulement de Poiseuille plan.

### 3.2 Le problème de Stokes

#### 3.2.1 Équations

L'équation de Stokes est un cas particulier de l'équation de Navier-Stokes pour les fluides fortement visqueux. Lorsqu'on considère l'écoulement d'un tel fluide, on peut

négliger les termes d'inertie dans l'équation de Navier – Stokes. La conservation de la quantité de mouvement se réduit alors à l'équation suivante:

$$\operatorname{div}(\sigma) = 0 \quad (3.1)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. Dans le cas d'un fluide newtonien, ce tenseur se décompose en deux parties :

$$\sigma = -pI + 2\mu\varepsilon(\vec{v}) \quad (3.2)$$

faisant intervenir la pression  $p$  et le tenseur taux de déformation :

$$\varepsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{v} + {}^t\nabla\vec{v}) \quad (3.3)$$

A cette équation, il convient d'adjoindre l'équation de conservation de la masse, qui dans le cas d'un fluide non compressible prend la forme suivante :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (3.4)$$

Finalement, en rassemblant ces deux équations, on obtient le système de Stokes que l'on cherche ici à résoudre numériquement :

$$\begin{cases} 2\mu \operatorname{div}(\varepsilon(\vec{v})) - \nabla p = 0 \\ \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Formulation faible

Afin de résoudre ces équations par éléments finis, il faut premièrement obtenir leur formulation faible. La méthode est classique : on multiplie la première équation par une fonction test vectorielle  $\hat{v}$  et la deuxième équation par une fonction test scalaire  $\hat{p}$ . Ensuite, en intégrant sur le domaine d'étude et en effectuant des intégrations par parties pour symétriser les équations, on aboutit à la formulation faible recherchée, à savoir :

Trouver  $v \in V$  et  $p \in Q$ , tels que pour toutes fonctions tests  $\hat{v} \in V$  et  $\hat{p} \in Q$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(v) : \varepsilon(\hat{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\hat{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} ((-pI + 2\mu\varepsilon(v)) \cdot n) \cdot \hat{v} dS = \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n) \cdot \hat{v} dS \\ - \int_{\Omega} \hat{p} \operatorname{div}(v) d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

où  $V$  et  $Q$  sont deux espaces fonctionnels qui seront définis dans la suite.

Dans la première ligne de la formulation faible (3.6) l'apparition du terme  $\varepsilon(\hat{v})$  peut demander quelques explications car l'application stricte du théorème de la divergence fait plutôt apparaître un terme suivant  $\nabla \hat{v}$ . En effet, en multipliant la première ligne du système (3.5) par une fonction vectorielle, en intégrant et en appliquant le théorème de la divergence sur le premier terme et en effectuant une intégration par parties sur le deuxième on obtient :

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(v) : \nabla \hat{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\hat{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} ((-pI + 2\mu\varepsilon(v)) \cdot n) \cdot \hat{v} dS \quad (3.7)$$

La transposée de cette ligne est :

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(v)^T \nabla \hat{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\hat{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} ((-pI + 2\mu\varepsilon(v)) \cdot n) \cdot \hat{v} dS \quad (3.8)$$

Et en prenant la moitié de ces deux lignes on obtient bien la première ligne de la formulation faible (3.6).

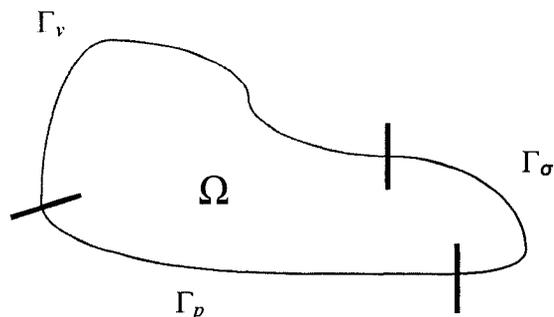
### 3.2.3 Conditions aux limites

Afin de résoudre le système (3.5), on doit se donner des conditions aux limites. Pour le problème de Stokes, il y a deux conditions essentielles qu'on peut imposer (voir figure 3.1):

- imposition d'une vitesse sur une partie  $\Gamma_v$  de la frontière du domaine,
- imposition d'une pression sur une partie  $\Gamma_p$  de la frontière du domaine,

Et au vu de la formulation faible du problème de Stokes (3.6), il existe aussi une condition naturelle :

- imposition d'une contrainte normale sur une partie  $\Gamma_\sigma$  de la frontière du domaine.



**Figure 3.1 : Le domaine de calcul et la partition de sa frontière**

En général, ces conditions sont incompatibles. Par exemple, on ne peut pas imposer au même endroit une condition essentielle et une condition naturelle. Par contre, il est possible d'imposer des conditions mixtes pour la vitesse et la contrainte normale, c'est-à-dire qu'en un même endroit de la frontière, on pourra par exemple imposer la vitesse pour une composante et la contrainte normale pour les autres.

Pour ce qui est de la formulation faible, les conditions aux limites sont prises en compte dans le terme de droite du système (3-6) (i.e., intégrales sur  $\partial\Omega$ ) ainsi qu'à travers le choix des espaces fonctionnels  $V$  et  $Q$ . Si bien que la formulation faible du système d'équations de Stokes avec conditions limites s'écrit :

Trouver  $v \in V$  et  $p \in Q$ , tels que pour toutes fonctions tests  $\hat{v} \in V$  et  $\hat{p} \in Q$ :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(v) : \varepsilon(\hat{v}) d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\hat{v}) d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} (t \cdot n) \cdot \hat{v} dS \\ - \int_{\Omega} \hat{p} \operatorname{div}(v) d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

avec  $V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3 / v = v_0 \text{ sur } \Gamma_v \right\}$

$Q = \left\{ p \in (Q^1(\Omega)) / p = p_0 \text{ sur } \Gamma_p \right\}$

$H^1(\Omega)$  désignant ici l'espace de Sobolev sur  $\Omega$ , et  $\Gamma_\sigma, \Gamma_v$  et  $\Gamma_p$  correspondent aux parties de la frontière sur lesquelles on impose respectivement la contrainte normale, la vitesse et la pression.

### 3.3 Discrétisation – résolution numérique

#### 3.3.1 Critère de convergence

Préalablement à toute simulation, il faut s'assurer que le problème faible soit bien posé tant au niveau continu qu'au niveau discret, c'est-à-dire qu'il faut pouvoir démontrer que la formulation faible admet une solution et qu'elle est unique. Il faut vérifier aussi que le problème discrétisé (i.e., formulation faible dans laquelle les espaces  $V$  et  $Q$  ont été remplacés par des sous-espaces de dimension finie  $V_h$  et  $Q_h$ ) admet une solution unique. Sans ces précautions, on n'a aucune assurance que la solution obtenue par le calcul soit bien la solution recherchée. Le problème de Stokes est classique et cette question sur la convergence a déjà été traitée. Les résultats sur la convergence sont présentés dans la suite de ce paragraphe à titre d'information sans être démontrés. Tout d'abord, on peut réécrire la formulation faible (3.9) sous la forme suivante :

Trouver  $v \in V$  et  $p \in Q$ , tels que pour toutes fonctions tests  $\hat{v} \in V$  et  $\hat{p} \in Q$  :

$$\begin{aligned} a(v, \hat{v}) + b(p, \hat{v}) &= l(\hat{v}) \\ b(\hat{p}, v) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $a(.,.)$  et  $b(.,.)$  sont des formes bilinéaires définies respectivement sur  $V \times V$  et  $V \times Q$  et  $l(.)$  est une forme linéaire sur  $V$ .

Les conditions pour que la formulation faible (3.10) ait une solution unique sont alors :

- $a(.,.)$  et  $b(.,.)$  continues respectivement sur  $V \times V$  et  $V \times Q$ .
- $a(.,.)$  coercive sur  $\text{Ker } b$  :

$$\text{ie} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \text{Ker } b, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad (3.11)$$

$$\text{avec} \quad \text{Ker } b = \left\{ b \in Q / \int_{\Omega} \nabla q \cdot v \, d\Omega = 0 \quad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3 \right\}$$

- il existe une constante  $\beta$  positive telle que la forme bilinéaire  $b(.,.)$  vérifie :

$$\inf_{q \in Q} \sup_{v \in V} \frac{b(v, q)}{\|q\|_0 \|v\|_1} \geq \beta \quad (3.12)$$

où  $\|\cdot\|_0$  est la norme de  $L^2(\Omega)$  et  $\|\cdot\|_1$  celle de  $H^1(\Omega)$

La dernière condition porte le nom de condition inf-sup. Cette condition est la plus exigeante notamment pour le problème discrétisé, car elle limite le choix des espaces discrets possibles. Lorsqu'on passe à l'étude du problème discret, les conditions pour l'existence d'une unique solution sont exactement les mêmes. Cependant la constante  $\beta$  dépend de l'espace choisi. De plus elle se retrouve dans la borne d'erreur de la discrétisation si bien que l'on peut perdre la convergence de la solution discrète vers la solution continue. Pour éviter un tel problème et s'assurer de la convergence du problème discrétisé, il faut montrer que :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall V_h \text{ sous espace de } V \text{ et } \forall Q_h \text{ sous espace de } Q$$

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v \in V_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|q_h\|_0 \|v_h\|_1} \geq \beta \quad (3.13)$$

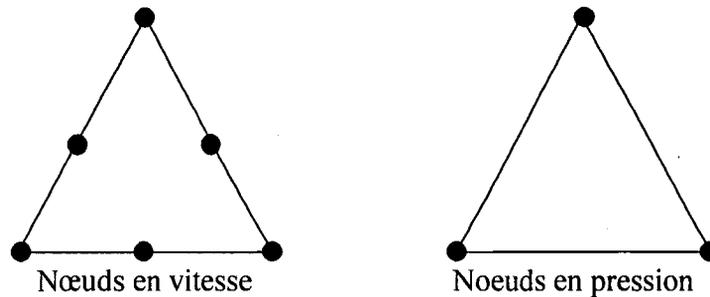
Dans la suite nous allons décrire brièvement plusieurs applications de la méthode des éléments finis donnant lieu à la vérification de cette condition, appelée condition de Brezzi - Babuška.

### 3.3.2 Méthodes éléments finis

Pour des questions de temps de calcul, les approximations de bas degré sont les plus performantes. En conséquence, on va prendre comme espaces discrets  $V_h$  et  $Q_h$  les espaces polynomiaux du plus bas degré possible. Malheureusement la condition de Brezzi- Babuška limite le choix des espaces polynomiaux possibles à des espaces de degré deux pour la vitesse et de degré un pour la pression. Cependant il existe des solutions permettant de résoudre l'équation de Stokes avec des espaces d'interpolation plus réduits. Au final, il y a trois méthodes classiques de discrétisation pour le problème de Stokes :

#### Méthode P2/P1

Il s'agit de la discrétisation la plus simple qui vérifie le critère de Brezzi- Babuška [31]. Les vitesses sont interpolées par des polynômes de degré deux et les pressions par des polynômes de degré un. Pour un élément, les noeuds de calculs sont représentés sur la figure 3.2 :



**Figure 3.2 : Nœuds de calcul de l'élément P2/P1**

### Pénalisation de la pression

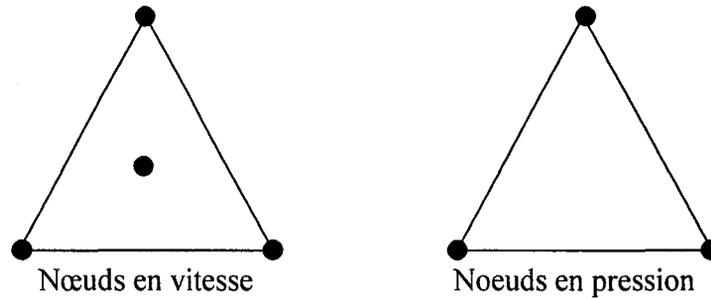
Pour cette méthode les vitesses et les pressions sont interpolées par des polynômes de degré un. Une telle discrétisation ne vérifie pas le critère de Brezzi – Babūška, mais pour contourner cette difficulté, on rajoute dans la formulation variationnelle un terme de diffusion en pression du type :

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla p^* d\Omega \quad (3.14)$$

L'ajout de ce terme permet de retrouver la convergence, mais introduit un nouveau paramètre  $\alpha$  dont dépend la solution [32]. Ce dernier étant choisi très faible de manière à ce que l'ajout du terme de diffusion assure la convergence sans modifier la solution.

### L'élément bulle où la méthode P1+/P1

Les vitesses et les pressions sont interpolées par des polynômes de degré 1. Avec une telle discrétisation, la condition de Brezzi - Babūška n'est pas respectée, mais peut l'être en rajoutant un nœud de calcul pour la vitesse au centre de l'élément (figure 3.3). Cet élément est dû à Fortin *et al.* [33] qui furent les premiers à l'introduire en 1984 et à démontrer qu'il vérifie la condition de Brezzi - Babūška. La vitesse obtenue au noeud situé au centre de l'élément est nommée vitesse bulle et toute la subtilité de cette approche réside dans son traitement.



**Figure 3.3 : Nœuds de calculs de l'élément P1+ / P1**

Un survol de la bibliographie à ce sujet permet de vite se rendre compte que le traitement de la bulle est différent pour bien des auteurs [34, 35, 36]. Certains conservent lors de la résolution du système global l'inconnue bulle alors que d'autres "condensent" sa contribution. La taille du système linéaire à résoudre est alors la même que pour des éléments P1/P1. Aussi il existe deux conditions sur la fonction de forme liée à la bulle :

- elle doit s'annuler sur le bord de l'élément.
- elle doit être de plus bas degré pour réduire le temps de calcul lié aux intégrations numériques.

Ces deux conditions font qu'en général, la fonction de forme pour la vitesse bulle sera la suivante :

$$B(\xi, \eta) = \min(N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), N_3(\xi, \eta)) \quad (3.15)$$

où  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont les fonctions de forme pour les trois autres nœuds de l'élément.

### 3.3.3 Méthode de l'élément bulle

Dans ce paragraphe nous allons décrire comment l'ajout de la vitesse bulle est mis en œuvre dans le cadre d'un calcul par éléments finis. Autrement dit, nous allons voir comment on passe de la formulation faible (3.9) à un système linéaire en utilisant la discrétisation par élément bulle. La première étape de la discrétisation consiste à se donner maillage du domaine  $\Omega$ , soit ici une triangulation  $T_h(\Omega)$  de  $\Omega$ . Ensuite, la discrétisation se fait en remplaçant les espaces fonctionnels  $V$  et  $Q$  par des sous-espaces de dimensions finies  $V_h$  et  $Q_h$  qui pour la cas d'une discrétisation P1+/P1 sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} V_h &= \tilde{V}_h \oplus B_h \\ Q_h &= \left\{ p_h \in C^0(\Omega) / p|_{\Gamma_p} = p_0 \quad \text{et} \quad \forall K \in T_h(\Omega) \quad p_h|_K \in P_1(K) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \tilde{V}_h &= \left\{ v_h \in C^0(\Omega) / v|_{\Gamma_v} = v_0 \quad \text{et} \quad \forall K \in T_h(\Omega) \quad v_h|_K \in P_1(K) \right\} \\ B_h &= \left\{ b_h \in C^0(\Omega) / \forall K \in T_h(\Omega) \quad b_h|_K \in P_1(K) \quad \text{et} \quad b|_{\partial K} = 0 \right\} \end{aligned}$$

où  $P_n(K)$  est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  sur l'élément  $K$ .

Les fonctions de forme associées aux nœuds du maillages P1+/P1 forment une base pour les espaces  $V_h$  et  $Q_h$ . Une autre façon de voir cette discrétisation revient à considérer que l'on va chercher  $(u, p)$  solution de la formulation faible (3.9) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{N_{\text{nœuds}}} u_i^x(N_i, 0) + u_i^y(0, N_i) + \sum_{i=1}^{N_{\text{éléments}}} b_i^x(B_i, 0) + b_i^y(0, B_i) \\ p &= \sum_{i=1}^{N_{\text{nœuds}}} p_i N_i \end{aligned} \quad (3.17)$$

où les  $N_i$  correspondent aux fonctions de forme pour les nœuds situés aux sommets des triangles et les  $B_i$  aux fonctions de forme pour les nœuds bulle.

Maintenant, à partir des espaces discrets qui viennent d'être définis, on peut établir la version discrétisée de la formulation faible (3.9). Cependant, la discrétisation (3.16) a pour effet d'introduire une nouvelle classe de fonctions tests : les fonctions appartenant à l'espace  $B_h$ . Ainsi, la formulation faible (3.9) qui se résumait à deux équations en compte maintenant trois dans sa forme discrétisée:

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (v_h, b_h, p_h) \in V_h \times B_h \times Q_h \text{ tel que } \forall (\hat{v}_h, \hat{b}_h, \hat{p}_h) \in V_h \times B_h \times Q_h \\ &\left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(v_h) : \varepsilon(\hat{v}_h) d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(b_h) : \varepsilon(\hat{v}_h) d\Omega - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div}(\hat{v}_h) d\Omega &= \int_{\Gamma_o} (t \cdot n) \cdot \hat{v} dS \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(v_h) : \varepsilon(\hat{b}_h) d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon(b_h) : \varepsilon(\hat{b}_h) d\Omega - \int_{\Omega} p_h \operatorname{div}(\hat{b}_h) d\Omega &= 0 \\ - \int_{\Omega} \hat{p}_h \operatorname{div}(v_h) d\Omega - \int_{\Omega} \hat{p}_h \operatorname{div}(b_h) d\Omega &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ce système est compliqué, mais il est possible de le simplifier en partie car dans les deux premières lignes de la formulation discrétisée (3.18), les termes croisés  $\int_{\Omega} 2\bar{\eta}\varepsilon(v_h) : \varepsilon(b_h^*) d\Omega$  et  $\int_{\Omega} 2\bar{\eta}\varepsilon(b_h) : \varepsilon(v_h^*) d\Omega$  s'annulent. En effet, par intégration par parties

on a :

$$\int_{\Omega} 2\mu\varepsilon(v_h) : \varepsilon(\hat{b}_h) d\Omega = - \int_{\Omega} 2\mu \operatorname{div}(\varepsilon(v_h)) \cdot \hat{b}_h d\Omega + \int_{\partial\Omega} (2\mu\varepsilon(v_h) \cdot n) \cdot \hat{b}_h dS \quad (3.19)$$

Mais  $b_h$  est nul sur  $\partial\Omega$  et  $v_h$  est un polynôme de degré 1, donc  $\operatorname{div}(\varepsilon(v_h)) = 0$ . D'où la nullité des termes croisés vitesse - vitesse bulle.

Ensuite, en prenant successivement chacune des fonctions de forme du maillage comme fonction test et en écrivant  $u$  et  $p$  sous la forme (3.17), on peut exprimer le problème (3.18) sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A_{bb} & B_{bb} \\ {}^t B & {}^t B_{bb} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ b \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

avec  $u = (u_1^x, \dots, u_{N_{\text{noeuds}}}^x, u_1^y, \dots, u_{N_{\text{noeuds}}}^y)$

$b = (b_1^x, \dots, b_{N_{\text{éléments}}}^x, b_1^y, \dots, b_{N_{\text{éléments}}}^y)$

$p = (p_1, \dots, p_{N_{\text{noeuds}}})$

$$A_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((N_i, 0)) : \varepsilon((N_j, 0)) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} 1 \leq i \leq N_{\text{noeuds}} \\ 1 \leq j \leq N_{\text{noeuds}} \end{cases} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((N_i, 0)) : \varepsilon((0, N_{j-N_{\text{noeuds}}})) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} 1 \leq i \leq N_{\text{noeuds}} \\ N_{\text{noeuds}} < j \leq 2N_{\text{noeuds}} \end{cases} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((0, N_{i-N_{\text{noeuds}}})) : \varepsilon((N_j, 0)) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} N_{\text{noeuds}} < i \leq 2N_{\text{noeuds}} \\ 1 \leq j \leq N_{\text{noeuds}} \end{cases} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((0, N_{i-N_{\text{noeuds}}})) : \varepsilon((0, N_{j-N_{\text{noeuds}}})) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} N_{\text{noeuds}} < i \leq 2N_{\text{noeuds}} \\ N_{\text{noeuds}} < j \leq 2N_{\text{noeuds}} \end{cases} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$(A_{bb})_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((B_i, 0)) : \varepsilon((B_j, 0)) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} 1 \leq i \leq N_{\text{éléments}} \\ 1 \leq j \leq N_{\text{éléments}} \end{cases} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((B_i, 0)) : \varepsilon((0, B_{j-N_{\text{éléments}}})) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} 1 \leq i \leq N_{\text{éléments}} \\ N_{\text{éléments}} < j \leq 2N_{\text{éléments}} \end{cases} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((0, B_{i-N_{\text{éléments}}})) : \varepsilon((B_j, 0)) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} N_{\text{éléments}} < i \leq 2N_{\text{éléments}} \\ 1 \leq j \leq N_{\text{éléments}} \end{cases} \\ \int_{\Omega} 2\mu \varepsilon((0, B_{i-N_{\text{éléments}}})) : \varepsilon((0, B_{j-N_{\text{éléments}}})) d\Omega & \text{pour } \begin{cases} N_{\text{éléments}} < i \leq 2N_{\text{éléments}} \\ N_{\text{éléments}} < j \leq 2N_{\text{éléments}} \end{cases} \end{cases} \quad (3.22)$$

$$B_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} N_j \operatorname{div}((N_i, 0)) d\Omega & \text{pour } 1 \leq i \leq N_{\text{nœuds}} \\ \int_{\Omega} N_j \operatorname{div}((0, N_{i-N_{\text{nœuds}}})) d\Omega & \text{pour } N_{\text{nœuds}} < i \leq 2N_{\text{nœuds}} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$(B_{bb})_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} N_j \operatorname{div}((B_i, 0)) d\Omega & \text{pour } 1 \leq i \leq N_{\text{éléments}} \\ \int_{\Omega} N_j \operatorname{div}((0, B_{i-N_{\text{éléments}}})) d\Omega & \text{pour } N_{\text{éléments}} < i \leq 2N_{\text{éléments}} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$(f_u)_i = \begin{cases} \int_{\Gamma_{\sigma}} (t \cdot n) \cdot (N_i, 0) dS & \text{pour } 1 \leq i \leq N_{\text{nœuds}} \\ \int_{\Gamma_{\sigma}} (t \cdot n) \cdot (0, N_{i-N_{\text{nœuds}}}) dS & \text{pour } N_{\text{nœuds}} < i \leq 2N_{\text{nœuds}} \end{cases} \quad (3.25)$$

En fait dans le système (3.20), une partie des composantes du vecteur  $(u, b, p)$  sont connues. En effet, au niveau des frontières  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_v$ , la vitesse et respectivement la pression sont fixées, si bien que dans l'expression (3.17) les coefficients des fonctions de forme pour les nœuds situés sur ces frontières sont connus et valent respectivement  $v_0$  et  $p_0$ . Au niveau du système matriciel (3.20), les lignes correspondant à ces coefficients peuvent être enlevées et la contribution de ces coefficients sur les autres lignes doit être passée dans le membre de droite. Au final, en ne conservant que les coefficients inconnus dans le vecteur  $(u, b, p)$ , le système (3.20) prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A_{bb} & B_b \\ {}^tB & {}^tB_b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ b \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_b \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Le système linéaire (3.26) peut être vu comme un système linéaire à trois inconnues : les vecteurs  $\{v\}$ ,  $\{b\}$  et  $\{p\}$ . Mais la connaissance du vecteur  $\{b\}$  n'est pas essentielle, si bien qu'on ne résout ces équations que pour les vecteurs  $\{v\}$  et  $\{p\}$ . Le vecteur  $\{b\}$  est alors éliminé par une simple manipulation algébrique à partir de la ligne du milieu qui permet d'exprimer la vitesse bulle en fonction des autres termes :

$$\{b\} = -A_{bb}^{-1} B_b \{p\} + A_{bb}^{-1} F_b \quad (3.27)$$

En injectant cette expression dans le système (3.24), et en effectuant quelques manipulations algébriques rudimentaires, on obtient une équation matricielle dans laquelle les coefficients des vitesses bulles ne figurent plus parmi les inconnues :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 + F' \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\text{avec} \quad C = {}^tB_b A_{bb}^{-1} B_b \quad \text{et} \quad F' = -{}^tB_b A_{bb}^{-1} F_b \quad (3.29)$$

On peut maintenant voir tout l'intérêt de la méthode de l'élément bulle qui combine la rapidité de la méthode de pénalisation car la taille du système à résoudre est  $3 \times N_{\text{noeuds}}$  (soit l'analogue d'un calcul avec des éléments P1/P1) et l'assurance de la convergence vu que l'élément bulle vérifie le critère de Brezzi – Babūška sans approximation autre que celle due à la discrétisation.

### 3.4 Validation

#### 3.4.1 Programmation sous Proflot

Proflot est un logiciel de calcul par éléments finis développé en C++. Sa principale application est la résolution de l'équation de Darcy pour simuler et optimiser le processus d'injection de résine dans la fabrication de pièces en composite par RTM. Il n'en reste pas moins qu'il s'agit d'un outil de calcul rapide, compact, facile à utiliser et à étendre, qui de plus possède de nombreuses fonctions déjà programmées et facilement réutilisables. Sans

entrer dans les détails, nous avons utilisé ce logiciel pour importer un maillage au format .unv, assembler le système (3.28) lié à ce maillage, le résoudre, puis exporter les résultats sous forme de fichiers au format .unv. Un avantage non négligeable de Proflot est qu'il contient des fonctions déjà programmées permettant d'assembler les termes  $A$ ,  $B$ ,  $'B$ ,  $F_1$  et  $F_2$  du système (2.28). Si bien que pour coder la méthode de résolution par élément bulle seul les fonctions pour assembler et calculer les termes  $C$  et  $F'$  ont du être programmées.

### 3.4.2 Écoulement de Poiseuille

Afin de valider la méthode de l'élément bulle présentée ici, nous avons testé notre code sur le cas simple de l'écoulement de Poiseuille plan, dont on connaît une solution analytique. On considère ici l'écoulement d'un fluide de viscosité  $\mu$  entre deux plaques soumis à un gradient de pression homogène (Figure 3.4).

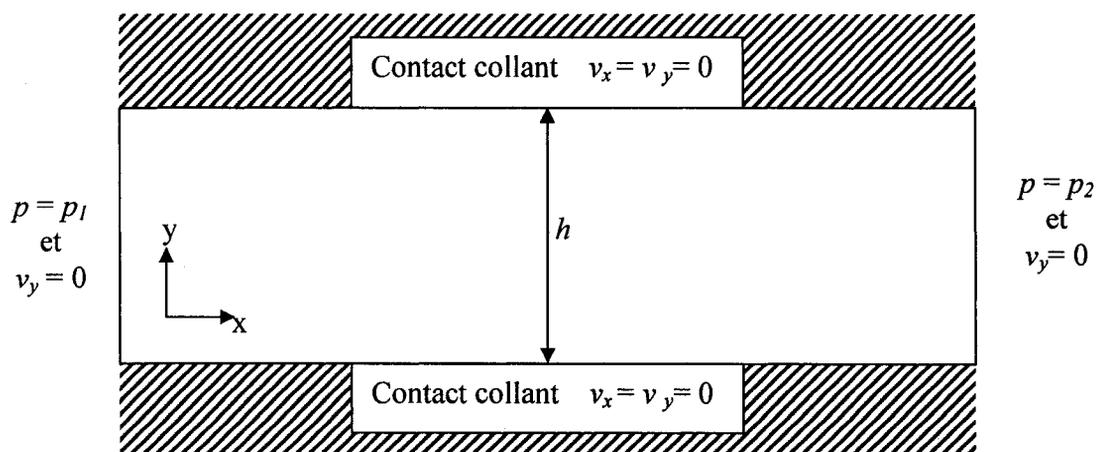
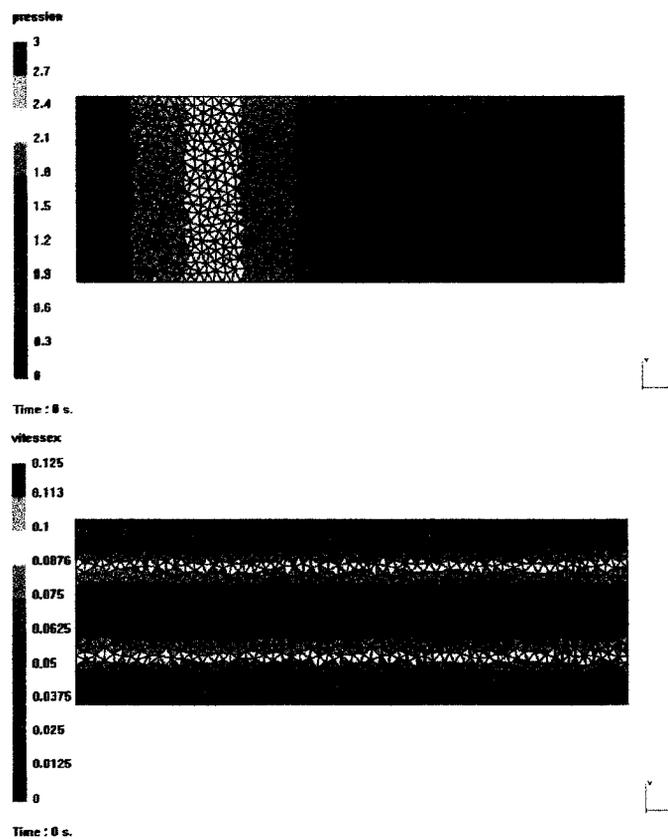


Figure 3.4 : Conditions limites pour l'écoulement de poiseuille

Dans la figure 3.4, on peut remarquer qu'on impose une vitesse nulle sur  $y$  en entrée et en sortie. La raison de cette condition est d'empêcher l'apparition d'un effet fontaine qui entraîne une convergence de l'écoulement à l'entrée du rectangle et une divergence à sa sortie. De cette manière, on peut supposer sans problème que la composante de la vitesse  $v_y$  est nulle et que  $v_x$  ne dépend que de  $y$ . Avec ces hypothèses, les équations de Stokes (3.5) ont une solution analytique, de la forme :

$$V_x(y) = \frac{P_2 - P_1}{2\eta} h^2 \left( \frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) \quad (3.30)$$

Les résultats obtenus avec l'élément bulle sont présentés dans les figures 3.5 et 3.6. On retrouve bien le gradient de pression uniforme et il y a coïncidence parfaite entre les profils de vitesse calculés analytiquement et numériquement.



**Figure 3.5 Résultats numériques : pression (haut), vitesse  $V_x$  (bas).**

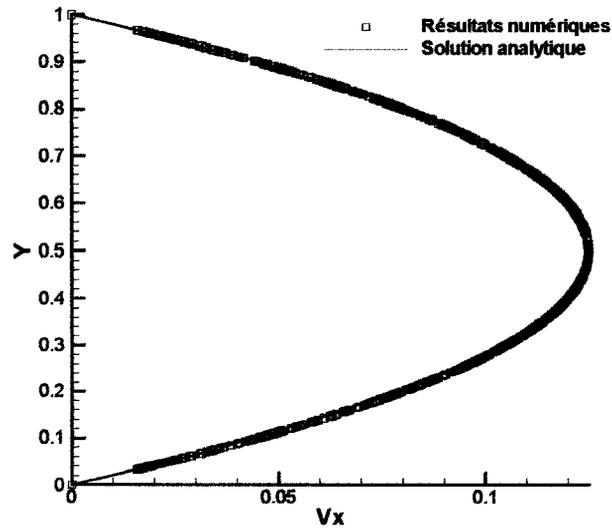


Figure 3.6 Profils de vitesse analytique et numérique en cm/s.

### 3.4.3 Étude de convergence

Les résultats des figures 3.5 et 3.6 montrent que les résultats analytiques et numériques coïncident pour l'écoulement de Poiseuille. Néanmoins, pour être rigoureux il faut quantifier cette concordance, ce qui passe par une étude de la convergence de la solution numérique vers la solution analytique (3.30) quand le maillage est de plus en plus fin, ceci toujours pour l'écoulement de Poiseuille. Pour ce faire il faut se donner une définition mathématique de l'erreur et un paramètre caractérisant de la finesse du maillage :

$$\varepsilon(u_n - u_a) = \frac{1}{N_{\text{noeuds}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{noeuds}}} \sqrt{(v_{n,i}^x - v_{a,i}^x)^2 + (v_{n,i}^y - v_{a,i}^y)^2 + (p_{n,i} - p_{a,i})^2} \quad (3.31)$$

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}} (\text{diam}(K)) \quad (3.32)$$

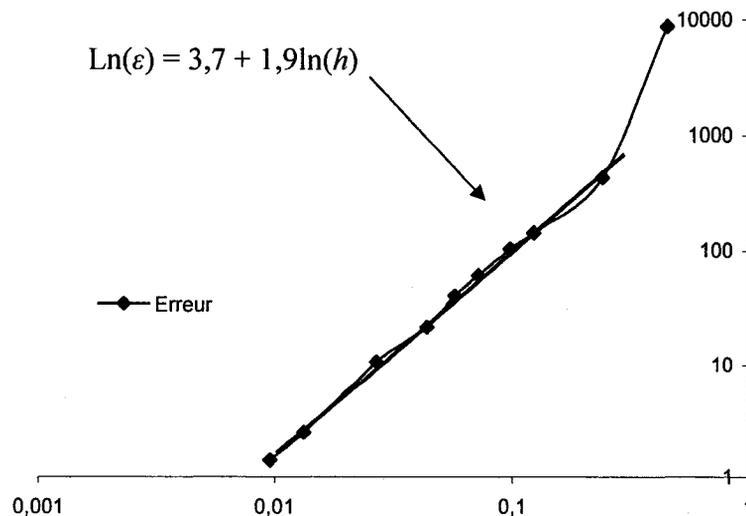
Où  $\text{diam}(K)$  est le diamètre du cercle circonscris au triangle  $K$ , et  $v_{n,i}^x$  et  $v_{a,i}^x$  sont les valeurs respectivement numériques et analytiques au  $i$ ème noeuds de la vitesse selon l'axe  $x$ .

Pour étudier la convergence, nous avons simulé le même écoulement que celui présenté dans le paragraphe 3.4.2 mais sur des maillages plus ou moins fins. Les résultats de ces simulations sont présentés dans le tableau 3.1.

Nombre de Noeuds	$h$ (m)	Erreur	temps CPU (s)
20	0,454934	8728,59	0,005
51	0,241971	430,447	0,016
116	0,123292	143,11	0,031
176	0,0980858	103,284	0,047
346	0,0719795	60,8469	0,093
532	0,0571331	40,3904	0,188
941	0,0437324	21,3926	0,516
2059	0,0267397	10,556	1,766
7983	0,0132121	2,46081	28,109
13913	0,00959142	1,4093	117,187

**Tableau 3.1 : Erreur,  $h$ , temps CPU et nombre de nœuds pour les essais de l'étude de convergence.**

Les résultats du tableau 3.1 étaient assez prévisibles : l'erreur et  $h$  diminuent avec le nombre de nœuds alors que le temps de calcul croît exponentiellement avec le nombre de nœuds. Mais le résultat le plus intéressant de cette étude provient de l'évolution de l'erreur en fonction du paramètre  $h$  (Figure 3.7). En effet, la pente de la droite tangente à la courbe est de 1,9, ce qui traduit une convergence de l'algorithme presque aussi rapide que ce qu'assure la théorie (convergence d'ordre 2) [33]. Il est possible d'attribuer cette différence aux erreurs de calcul et d'arrondis qui ne sont pas pris en compte dans l'erreur théorique.



**Figure 3.7 : Erreur en fonction du paramètre  $h$ .**

### 3.4.4 Stabilité

La dernière étape de validation du code consiste à réaliser une étude de stabilité. C'est-à-dire qu'il faut regarder dans quelle mesure la convergence de la solution numérique dépend des paramètres de la simulation. Pour ce faire nous avons choisi d'effectuer cette étude de stabilité en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement de Poiseuille défini comme suit :

$$Re = \frac{v_m h}{\mu} \quad (3.33)$$

Où  $v_m$  est la vitesse analytique au centre de l'écoulement ( $y = h/2$ ).

Nous avons réalisé 10 simulations avec des nombres de Reynolds très divers sur un maillage de 512 nœuds. L'erreur pour chacune de ces simulations est reportée dans le tableau 3.2, cependant ici, nous avons calculé l'erreur relative et non l'erreur absolue :

$$\text{i.e} \quad \varepsilon(u_n - u_a) = \frac{1}{N_{\text{noeuds}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{noeuds}}} \sqrt{\left(\frac{v_{n,i}^x - v_{a,i}^x}{v_{a,i}^x}\right)^2 + \left(\frac{v_{n,i}^y - v_{a,i}^y}{v_{a,i}^y}\right)^2 + \left(\frac{P_{n,i} - P_{a,i}}{P_{a,i}}\right)^2} \quad (3.34)$$

<i>Re</i>	<i>Erreur</i>
1,00E-04	0,00118388
1,00E-03	0,00118388
1,00E-02	0,00118388
1,00E-01	0,00118388
1,00E+00	0,00118417
1,00E+01	0,0012127
1,00E+02	0,00288251
1,00E+03	0,0263084
1,00E+04	0,26282
1,00E+05	2,62817

**Tableau 3.2 : Erreur en fonction du nombre de Reynolds.**

Les résultats du tableau 3.7 montrent que le schéma est légèrement instable pour de grands Reynolds. Mais pour de tels Reynolds, les équations de Stokes ne sont plus valables. Dans la plage de Reynolds pour laquelle les équations de Stokes sont valables  $Re < 1$ , ces résultats montrent que le schéma numérique décrit dans ce chapitre est parfaitement stable.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous venons de voir comment nous avons résolu numériquement le système d'équations de Stokes. Le résultat est un algorithme utilisant l'élément bulle qui permet de réduire le temps de calcul grâce à une méthode élégante. Les résultats des simulations coïncident parfaitement avec la solution analytique dans le cas test de l'écoulement de Poiseuille plan. D'autres travaux utilisant l'élément bulle ont été réalisés dans le cadre de cette maîtrise, mais ne sont pas présentés ici. Notamment, une version 3D du code a été programmée et validée pour l'écoulement de Poiseuille dans un cylindre. Le code 2D a aussi été couplé à un algorithme de remplissage (Annexe A). La version couplée du code sera réutilisée par la suite pour la simulation du procédé Polyflex.

## CHAPITRE 4

# SIMULATION BIDIMENSIONNELLE DU PROCÉDÉ VARI D'INJECTION SOUS PAROI FLEXIBLE

### 4.1 Introduction

Ce chapitre constitue la deuxième étape préliminaire en vue de la simulation du procédé Polyflex. En effet, nous allons décrire ici comment le procédé VARI d'injection sous paroi flexible a été simulé. Plus généralement, le travail qui est présenté ici, est la résolution numérique de l'équation générale de la consolidation en 2D couplée à la loi de Darcy pour un milieu poreux orthotrope. Cette résolution est ensuite appliquée au cas du VARI.

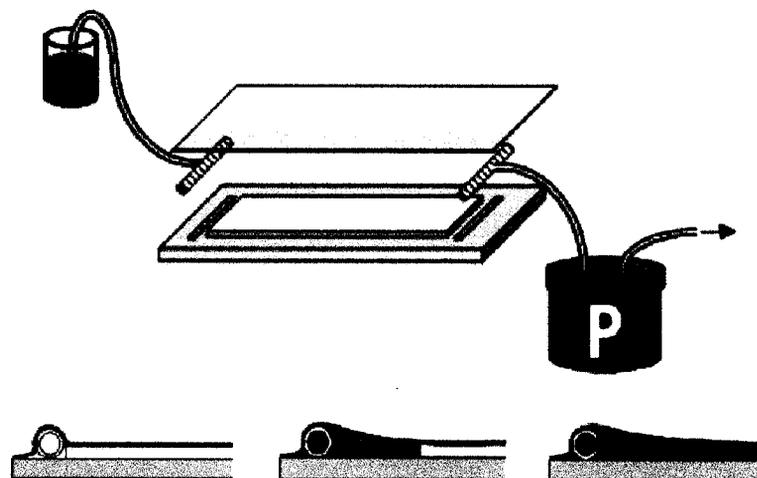
Dans ce chapitre, dans un premier temps le principe du procédé VARI sera rappelé. L'équation générale de la consolidation sera ensuite présentée et on verra comment les équations du problème se simplifient pour un cas 2D orthotrope. Puis nous verrons le schéma numérique, spatial et temporel, qui a été retenu ici pour résoudre ces équations. Ensuite certains aspects sur l'implémentation seront discutés et finalement les résultats des simulations seront présentés et analysés.

### 4.2 Présentation du procédé VARI

#### 4.2.1 Principe

La particularité du procédé VARI (figure 4.1) est de n'avoir qu'un seul coté du moule rigide, l'autre face étant constituée par une membrane flexible. Initialement le

renfort sec est placé dans le moule, puis il est soumis à un vide relatif, ce qui le compresse. L'injection se fait ensuite à basse pression ou le plus souvent simplement à pression atmosphérique et la résine est aussi bien poussée par la pression d'injection que tirée par le vide. Contrairement au procédé RTM, la membrane ne bloque pas les déplacements du renfort comme le ferait une paroi rigide. L'écoulement de résine dans le procédé VARI est donc un écoulement dans un milieu poreux déformable. Aussi en général pour obtenir une pièce d'épaisseur la plus uniforme possible, il y a deux étapes lors d'une injection VARI. La première phase correspond à l'étape d'injection : la résine imprègne peu à peu le renfort et le déforme. Lors de cette étape, l'épaisseur du composite est plus grande près du port d'injection qu'au voisinage du front de résine. Puis, lorsqu'une quantité donnée de résine a été injectée, le port d'injection est fermé et la résine continue d'imprégner les parties sèches du renfort jusqu'à ce que l'épaisseur du renfort soit devenue homogène. C'est ce qu'on appelle l'étape de consolidation.



**Figure 4.1 Principe et schéma du procédé VARI.**

### 4.2.2 Modes d'écoulement possibles

Dans la revue bibliographique, il a été mentionné que dans le procédé RTM, comme il est difficile de couper le renfort exactement selon les dimensions du moule, il pouvait se créer un écoulement de Stokes dans le canal libre de fibres entre le renfort et les parois du moule. Dans le procédé VARI, un phénomène similaire peut apparaître mais son importance est beaucoup plus importante que celle des effets de bords pour le RTM. En effet, il est possible que pendant l'injection un écoulement de résine apparaisse entre le renfort et la membrane. Ce phénomène est appelé effet de peau et a pour effet d'accélérer l'imprégnation de la résine, c'est pourquoi il est souvent recherché dans bien des applications. L'inconvénient de cet écoulement est qu'il est responsable de l'apparition de micro-bulles d'air dans le composite, ce qui réduit sa qualité et ses propriétés mécaniques.

Au niveau numérique, la prédiction de l'apparition d'un tel écoulement et sa simulation constituent un problème difficile. Ici, nous nous placerons dans le cas où ce type d'écoulement n'a pas lieu, ce qui malheureusement réduit quelque peu la généralité de la modélisation et de la simulation du VARI présentée dans ce chapitre. Par contre, émettre l'hypothèse qu'il n'y a pas d'écoulement de peau sous entend que lors de l'injection à tout instant la membrane est plaquée sur le renfort. Et donc si on connaît la position du renfort, on connaît la position de la membrane. Par conséquent, le procédé VARI peut être complètement simulé à partir de l'équation de la consolidation couplée à la loi de Darcy.

## 4.3 Modèle et équations

### 4.3.1 L'écoulement de résine dans le renfort

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment la déformation du renfort est prise en compte au niveau de l'écoulement de résine. Bien que le renfort soit déformable l'injection de résine constitue toujours un écoulement dans un milieu poreux pour lequel s'applique la loi de Darcy :

$$\vec{v}_D = -\frac{K}{\mu} \nabla P \quad (4.1)$$

Par contre la déformation du renfort modifie l'équation de continuité. En effet, l'équation de conservation de la masse doit traduire la conservation locale de la masse de résine et de la masse du renfort ce qui donne les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l \phi) + \text{div}(\phi \rho_l \vec{v}_l) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \phi) \rho_s) + \text{div}((1 - \phi) \rho_s \vec{v}_s) = 0 \quad (3.3)$$

où  $\phi$  est la perméabilité du milieu et les indices 'l' et 's' correspondent respectivement aux phases liquide et solide. Cela ne change pas pour autant le caractère incompressible de la résine et du renfort. On peut alors sortir la masse volumique des deux équations précédentes et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi) + \text{div}(\phi \vec{v}_l) = 0 \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(1 - \phi) + \text{div}((1 - \phi) \vec{v}_s) = 0 \quad (4.5)$$

L'équation de conservation de la masse pour un milieu poreux saturé et déformable est obtenue en sommant les deux équations précédentes :

$$\text{div}(\vec{v}_D) + \text{div}(\vec{v}_S) = 0 \quad (4.6)$$

Finalement, en injectant la loi de Darcy dans l'équation (4.6), on aboutit à l'équation qui régit l'imprégnation d'une résine dans un milieu poreux déformable :

$$\text{div}\left(-\frac{K}{\mu} \nabla p\right) + \text{div}(\partial_t \vec{u}) = 0 \quad (4.7)$$

#### 4.3.2 La déformation du renfort fibreux

Étant donné qu'il est largement admis que l'injection de résine peut être modélisée comme un écoulement dans un milieu poreux, il est naturel de concevoir l'équilibre mécanique du système résine - renfort comme l'équilibre d'un milieu poreux saturé. Le premier à avoir étudié un tel équilibre est Biot [18] en 1941 lorsqu'il s'est intéressé au

drainage des sols. Son étude mettait en avant qu'un sol saturé d'eau soumis à une force extérieure se tasse en un temps plus long qu'un sol sec. Ce temps additionnel correspond au délai nécessaire pour que l'eau s'évacue du sol. Ce phénomène liant déformation mécanique et écoulement fluide est appelé consolidation.

La modélisation générale de la consolidation provient des travaux de Terzaghi [19] (1943), qui fut le premier à considérer que la contrainte  $\sigma$  du sol saturé se décompose en deux termes : un provenant de la pression hydrostatique  $p$  du fluide qui remplit les vides du milieu poreux, la deuxième ( $\sigma'$ ) étant dû à la contrainte interne du squelette solide du milieu poreux sec :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} p \quad (4.8)$$

Les phénomènes de consolidation sont en général lents et on peut considérer l'équilibre d'un milieu poreux saturé comme quasi-statique, ce qui donne l'équation d'équilibre suivante :

$$\text{div}(\sigma'_{ij} + \delta_{ij} p) = 0 \quad (4.9)$$

Aussi pour résoudre une telle équation, il faut faire une hypothèse sur le comportement mécanique du milieu poreux (sec). Le plus simple dans ce cas là est de formuler l'hypothèse que le squelette du sol est un matériau élastique dont les déformations sont petites et qui, par conséquent, obéit à la loi de Hooke :

$$\sigma'_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.10)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) \quad (4.11)$$

où  $u$  est le vecteur déplacement d'une particule du squelette. Finalement, l'équation d'équilibre du milieu poreux saturé se traduit encore par une équation couplant la pression hydrostatique de la résine et le déplacement du renfort, à savoir :

$$\text{div} \left( \frac{1}{2} E : (\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T) + pI \right) = 0 \quad (4.12)$$

où  $E$  est le tenseur d'élasticité et  $I$  la matrice unité.

### 4.3.3 Simplification pour une injection 2D et un renfort orthotrope

Pour le cas que l'on traite ici (simulation du VARI en 2D), la simplification du modèle mécanique du squelette du milieu poreux peut être poussée un peu plus loin. En effet, le fait qu'un renfort fibreux soit un matériaux orthotrope (possédant au moins trois plans de symétrie) et qu'on restreigne l'étude au cas 2D permet de simplifier l'équation (4.12). Tout d'abord, le tenseur de rigidité de la loi d'Hooke est alors entièrement défini par cinq coefficients. Et cette dernière loi s'exprime sous forme condensée de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{pmatrix} E_1 & \nu_{12}E_2 & 0 \\ \nu_{21}E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

De plus, en 2D le tenseur des taux de déformation  $\varepsilon$  ne possède que trois composantes  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  et  $\varepsilon_{xy}$ . Il est alors possible d'écrire la relation entre les déplacement du squelette et le tenseur des taux de déformation également sous forme condensée :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad (4.14) \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Finalement, les équations qu'on doit résoudre peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$m \cdot S \left( -\frac{K}{\mu} \nabla p \right) + m \cdot S(\partial, \vec{u}) = 0 \quad (4.15)$$

$$S^T (D : S\vec{u} + mp) = 0 \quad \text{où} \quad m = (1 \ 1 \ 0) \quad (4.16)$$

#### 4.3.4 Caractérisation des matériaux - modèles retenus

Dans la modélisation précédente, rien n'a été dit sur les paramètres caractéristiques de la résine et du renfort. Cependant ces paramètres sont cruciaux et conditionnent grandement le résultat de l'injection. On peut même considérer que l'erreur entre les résultats numériques et expérimentaux provient plus d'un manque de connaissance assez de ces paramètres que de l'erreur numérique liée au calcul par éléments finis. D'où l'intérêt de bien caractériser ces paramètres.

Pour la résine, seulement un paramètre intervient dans les équations (4.15) et (4.16) : sa viscosité. Une hypothèse qui n'a pas été mentionnée jusqu'ici est que l'injection est isotherme, ce qui permet de considérer la viscosité de la résine comme constante au cours de l'injection.

Les paramètres qui demandent une modélisation particulière sont ceux du renfort, soit sa perméabilité et ses coefficients mécaniques (modules d'Young, coefficients de Poisson et module de cisaillement) qui dépendent de la déformation du renfort ou de la fraction volumique de fibres, les deux étant liées. Cette dépendance par rapport à la déformation du renfort rend les équations (4.15) et (4.16) non linéaires, ce qui complique ces équations déjà suffisamment complexes à cause du couplage pression – déplacement. Mais une des hypothèses du modèle décrit ici est que l'équilibre du milieu poreux saturé est quasi-statique, si bien qu'on peut linéariser ces équations en imposant à chaque pas de temps une valeur calculée à partir de la déformation obtenue au pas de temps précédent. Reste que pour espérer obtenir une simulation coïncidant avec l'expérience, il faut pouvoir calculer précisément ces paramètres en fonction d'une déformation donnée. La façon dont nous avons procédé est décrite dans les deux paragraphes qui suivent.

##### 4.3.4.1 Caractérisation du renfort : modèle de perméabilité

La perméabilité du renfort quantifie la plus ou moins grande facilité d'imprégnation par un fluide. Intuitivement, on peut aisément concevoir qu'un fluide imprègne plus facilement un milieu poreux dont les pores sont plus grands qu'un milieu poreux à pores étroits. Or, lors d'une injection VARI, le renfort est initialement compressé sous l'action du

vide puis se détend au fur et à mesure qu'il est imprégné par la résine. En conséquent, la perméabilité du renfort va varier localement au cours de l'injection. Donc pour que le temps final d'injection coïncide avec l'expérience, il faudra prendre en compte cette évolution de la perméabilité au cours de l'injection.

A peu près tous les modèles de perméabilité sont fondés sur une dépendance de la perméabilité par rapport à la porosité ou à la fraction volumique de fibres, c'est-à-dire qu'ils fournissent une fonction de la forme :

$$K = f(V_f) \quad (4.17)$$

Modifier localement la perméabilité après chaque pas de temps sera donc facile avec un tel modèle dès lors qu'on peut évaluer localement la fraction volumique de fibres. Or ici la simulation étant 2D, on va pouvoir calculer facilement  $V_f$ , donc la perméabilité. Pour décrire comment on calcule localement le taux de fibres, il faut anticiper sur la discrétisation spatiale décrite dans la suite et supposer que le domaine occupé par le renfort est découpé par un maillage triangulaire. A chaque pas de temps, ce maillage est déformé à partir des valeurs de la déformation obtenue en résolvant les équations (4.15) et (4.16). Cela étant dit, on peut supposer qu'initialement (quand le renfort est compressé sous l'effet du vide), le taux de fibres est uniforme et vaut  $V_f^0$ . Dans chaque triangle du maillage, initialement il y a donc une quantité de fibres dont la masse  $m_f^{elt}$  est reliée au volume de l'élément et à  $V_f^0$  par la relation suivante :

$$V_f^0 = \frac{m_f^{elt}}{\rho_f V_{elt}^0} \quad (4.18)$$

où  $V_{elt}^0$  est l'aire initiale de l'élément.

Ensuite au cours de la simulation les éléments vont se déformer et donc changer de volume. En formulant l'hypothèse que la quantité de fibres reste constante dans chaque élément, on peut calculer le taux de fibres de cet élément à l'instant  $t$  à partir du volume de l'élément au même instant :

$$V_f^t = \frac{m_f^{elt}}{\rho_f V_{elt}^t} \quad (4.19)$$

donc

$$V_f^t = V_f^0 \frac{V_{elt}^0}{V_{elt}^t} \quad (4.20)$$

où  $V_{elt}^t$  est l'aire de l'élément à l'instant  $t$ .

La relation (4.20) amène une remarque car elle permet à priori des valeurs supérieures à 1 pour la fraction en fibre. Ceci se produirait dans le cas où :

$$\frac{m_f^{elt}}{\rho_f} = V_f^0 V_{elt}^0 > V_{elt}^t \quad (4.21)$$

Mais une telle inégalité n'est pas possible pour un matériau incompressible comme le sont les fibres du renfort. Donc même si la formule (4.21) autorise en principe des valeurs supérieures à 1 pour le taux de fibres cela ne devrait jamais ce produire en pratique.

Il reste maintenant à choisir un modèle de perméabilité qui donnera une relation du type (4.16) pour exprimer la perméabilité en fonction du taux de fibres. A l'heure actuelle les modèles analytiques (Carman-Kozeny) ou numériques ne sont pas assez précis et ne coïncident avec l'expérience que pour gamme étroite de taux de fibres. Heureusement, il est possible expérimentalement de mesurer la perméabilité d'un renfort donné. Dans les simulations menées sur le VARI, nous avons utilisé le renfort OCF 8610 et nous avons donc tout naturellement retenu dans les simulations le modèle expérimental dû à Trochu *et al.* [38] pour ce renfort :

$$K(V_f) = \left[ 200 + 11e^{16.8(0.5-V_f)} \right] 9.87 \times 10^{-13} \quad (4.22)$$

#### 4.3.4.2 Caractérisation du renfort : modèle de compaction

Au niveau des paramètres mécaniques, il y a cinq coefficients qui entrent en jeu dans les équations (4.15) et (4.16) :  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  et  $G$ , mais seulement quatre sont indépendants. Pour un matériau ces coefficients sont en général constants, ce qui traduit le fait que la contrainte interne au matériau croît linéairement avec le taux de déformation. Or pour un renfort fibreux ce n'est pas le cas, ceci n'est pas vraiment surprenant, car un renfort n'est pas un matériau homogène mais une structure formée de fibres pour laquelle la

relation entre contrainte et taux de déformation n'est pas aussi simple. Pour décrire le comportement mécanique du renfort par la loi de Hooke (4.10), il faut adapter celle-ci en ajoutant une dépendance du tenseur de rigidité par rapport au taux de déformation :

$$\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon \quad (4.23)$$

En fait une telle modélisation n'est vraiment nécessaire que pour un des cinq paramètres mécaniques, à savoir le module d'Young transverse  $E_2$ . En effet, un renfort fibreux est extrêmement rigide dans le sens des fibres et peu rigide dans le sens transverse. Si bien que lors de l'injection la plus grande déformation aura lieu selon l'épaisseur du renfort soit dans le sens transverse des fibres, alors que la déformation dans le sens des fibres pourra être considérée comme négligeable. Considérer les quatre autres coefficients comme constant n'est donc pas une mauvaise approximation.

Ainsi, il n'y a donc qu'un seul paramètre mécanique à adapter au cours de l'injection. A cette fin on applique la même méthode que pour la perméabilité : à chaque pas de temps donné, connaissant les déplacements du renfort au pas de temps précédent, on peut calculer le taux de déformation moyen pour chaque élément et en déduire une valeur du module d'Young transverse à l'aide d'un modèle du type suivant :

$$E_2 = f(\varepsilon) \quad (4.24)$$

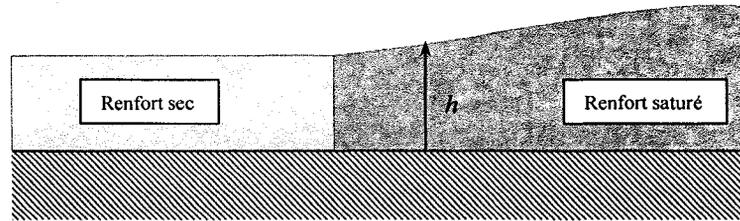
Un tel modèle s'obtient par l'étude de la compaction des renforts. Dans une revue sur la compaction et la relaxation des renforts, Robitaille *et al.* [20] ont montré que les courbes de compaction pouvaient se modéliser par une fonction de la forme :

$$\sigma = A(V_f)^B \quad (4.25)$$

Dans le cas de l'OCF 8610 l'expérience donne  $A = 5,6^{E6}$  et  $B = 2,5$ . Pour se ramener à une relation de la forme (4.23), on peut utiliser les relations suivantes qui sont obtenues en négligeant la déformation dans le sens des fibres :

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0} \quad (4.26) \quad \text{et} \quad h = \frac{h_0 V_f^0}{V_f} \quad (4.27)$$

où  $h_0$  est l'épaisseur naturelle du renfort et  $h$  l'épaisseur du renfort déformé.

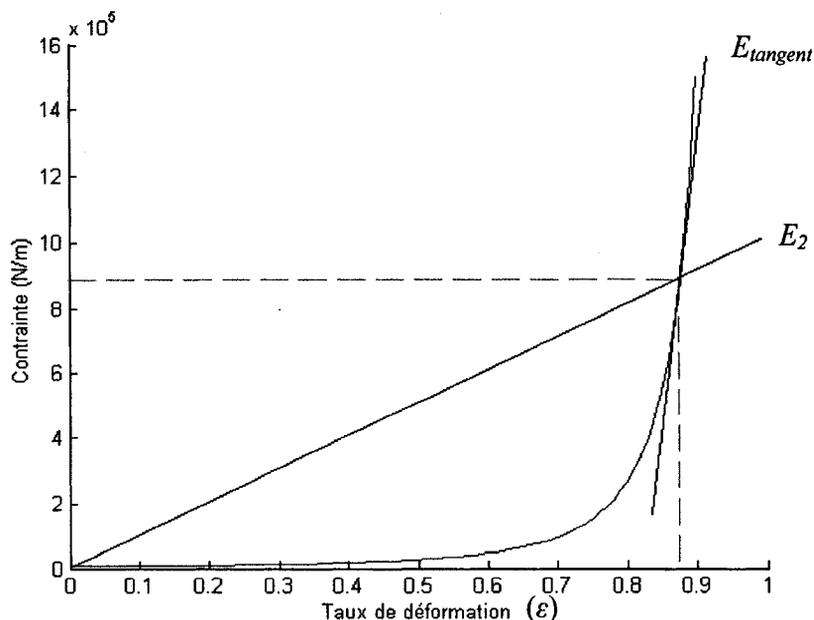


**Figure 4.2 : Définition de la hauteur du renfort.**

En utilisant ces deux relations et la formule (4.25), on obtient alors la relation cherchée :

$$\sigma = A \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon} \right)^B \quad (4.28) \quad \text{d'où} \quad E_2 = \frac{A}{\varepsilon} \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon} \right)^B \quad (4.29)$$

Cependant, la modélisation présentée ici n'est pas idéale et limite l'application de ce code à la simulation du AVRI comme on le verra par la suite. Il est utile dans cette section de discuter des motivations qui ont poussées à choisir ce modèle et de ses défauts. Tout d'abord l'hypothèse essentielle de ce modèle est l'évolution quasi-statique lente, qui assure que la variation du taux de déformation d'un pas de temps à l'autre est faible. Partant d'un taux de déformation  $\varepsilon$ , l'évolution quasi-statique assure que le taux de déformation calculé au pas de temps suivant est proche de  $\varepsilon$ . Il semble alors naturel de linéariser la relation contrainte – taux de déformation autour de  $\varepsilon$  en l'approximant par une droite tangente (voir Figure 4.2). Le module d'Young résultant correspond à la pente de cette droite, ou alors ce qui est équivalent à la dérivée de la formule (4.28). Cependant si on choisit ce module d'Young ( $E_{tangent}$ ), on est sûr d'obtenir des résultats qui ne correspondent pas à la réalité. En effet, la résolution des équations (4.15) et (4.16) donne l'état d'équilibre d'un matériau élastique soumis à une charge  $\sigma$ . Or pour une contrainte donnée  $\sigma$ , la déformation d'un matériau élastique de module d'Young  $E_{tangent}$  est différente de la déformation de l'OCF 8610 pour cette même contrainte, comme l'on peut s'en persuader sur la figure 4.2.



**Figure 4.3 : Courbe contrainte - taux de déformation pour l'OCF 8610.**

En fait, le module d'Young que l'on doit imposer localement à chaque itération est celui d'un matériau fictif qui pour une contrainte donnée présente la même déformation que l'OCF 8610. La relation contrainte – déformation d'un tel matériau correspond à la droite  $E_2$  de la figure 4.2, dont la pente correspond au module d'Young cherché et qui est exactement le module du modèle présenté précédemment et donné par la formule (4.29).

L'approche présentée ici, permet de prendre en compte facilement le comportement non linéaire de l'OCF 8610. Cependant, l'allure de la courbe contrainte - déformation est un facteur critique pour ce modèle et ce pour plusieurs raisons. En effet, par exemple si cette courbe présente une asymptote verticale comme c'est le cas pour l'OCF 8610, pour de grande déformation, un petit changement du taux de déformation entraîne une grande variation de  $E_2$ . De grandes variations du module d'Young entraînent en général une instabilité de la solution numérique comme ce sera parfois le cas pour la simulation de Polyflex. Ce point sera rediscuté dans le chapitre sur Polyflex, pour la simulation du VARI ce problème n'apparaît pas car les déformations, donc les variations de  $E_2$ , sont plus faibles. Malheureusement il existe un autre problème. En pratique la pression d'injection pour le procédé VARI est égale à la pression atmosphérique, si bien que près du port

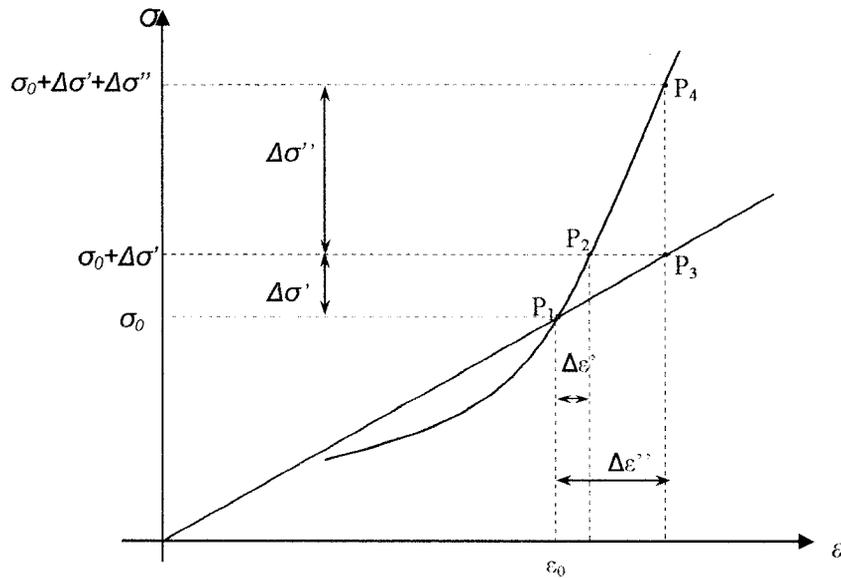
d'injection le renfort va retrouver son épaisseur naturelle. Or quand  $\varepsilon$  tend vers 0, le module  $E_2$  calculé par la formule (4.29) tend vers l'infini, ce qui en plus d'être non représentatif de la réalité est une source d'instabilité numérique. Ce problème est dû au modèle de compaction (4.25) pour lequel la contrainte correspondant au taux de fibre au repos est non nulle ( $\sigma = A(V_f^0)^B \neq 0$ ). Par conséquent, il ne sera pas possible de réaliser des simulations avec ce schéma pour des pressions d'injection proches de la pression atmosphérique. Heureusement, ce problème disparaît dans la simulation du procédé Polyflex car le renfort est enformé dans la cavité du moule et ne peut donc pas se déformer jusqu'à l'épaisseur naturelle.

Au delà des problèmes d'instabilité créés par ce modèle, la linéarisation présentée précédemment est une source d'erreur qu'il est possible d'évaluer. En effet, si on considère un état d'équilibre correspondant à un couple contrainte - déformation  $\sigma_0, \varepsilon_0$  (point P1 sur la figure 4.3) donnant un module d'Young  $E_0$  par la formule (4.29). L'état d'équilibre suivant donné par la résolution des équations (4.15) et (4.16) à lieu pour un couple contrainte - déformation  $\sigma_0 + \Delta\sigma', \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon''$  (point P3) avec :

$$\sigma_0 + \Delta\sigma' = E_0 (\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon'') \quad (4.30)$$

donc

$$\Delta\varepsilon'' = \frac{\Delta\sigma'}{E_0} = \varepsilon_0 \frac{\Delta\sigma'}{\sigma_0} \quad (4.31)$$



**Figure 4.4 : Erreur engendrée par la linéarisation.**

Sans cette linéarisation, l'équilibre du renfort saturé devrait être donné par le point P2 sur la figure 4.3, c'est-à-dire pour un couple contrainte - déformation  $\sigma_0 + \Delta\sigma'$ ,  $\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon'$  avec

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon' &= 1 - V_f^0 \left( \frac{A}{\sigma_0 + \Delta\sigma'} \right)^{\frac{1}{B}} \\
 &= 1 - V_f^0 \left( \frac{A}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{B}} \left( 1 + \frac{\Delta\sigma'}{\sigma_0} \right)^{-\frac{1}{B}} \\
 &\approx 1 - V_f^0 \left( \frac{A}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{B}} \left( 1 - \frac{1}{B} \frac{\Delta\sigma'}{\sigma_0} \right) \quad \text{car } \frac{\Delta\sigma'}{\sigma_0} \ll 1 \\
 &= \varepsilon_0 + \frac{V_f^0}{B} \left( \frac{A}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{B}} \frac{\Delta\sigma'}{\sigma_0}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

ce qui donne :

$$\Delta\varepsilon' = \frac{V_f^0}{B} \left( \frac{A}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{B}} \frac{\Delta\sigma'}{\sigma_0} = (1 - \varepsilon_0) \frac{1}{B} \frac{\Delta\sigma'}{\sigma_0} \tag{4.33}$$

L'erreur qui est donc commise au niveau du taux déformation est donc :

$$\frac{\Delta\varepsilon'' - \Delta\varepsilon'}{\Delta\varepsilon'} = B \left( \frac{\varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} - \frac{1}{B} \right) \tag{4.34}$$

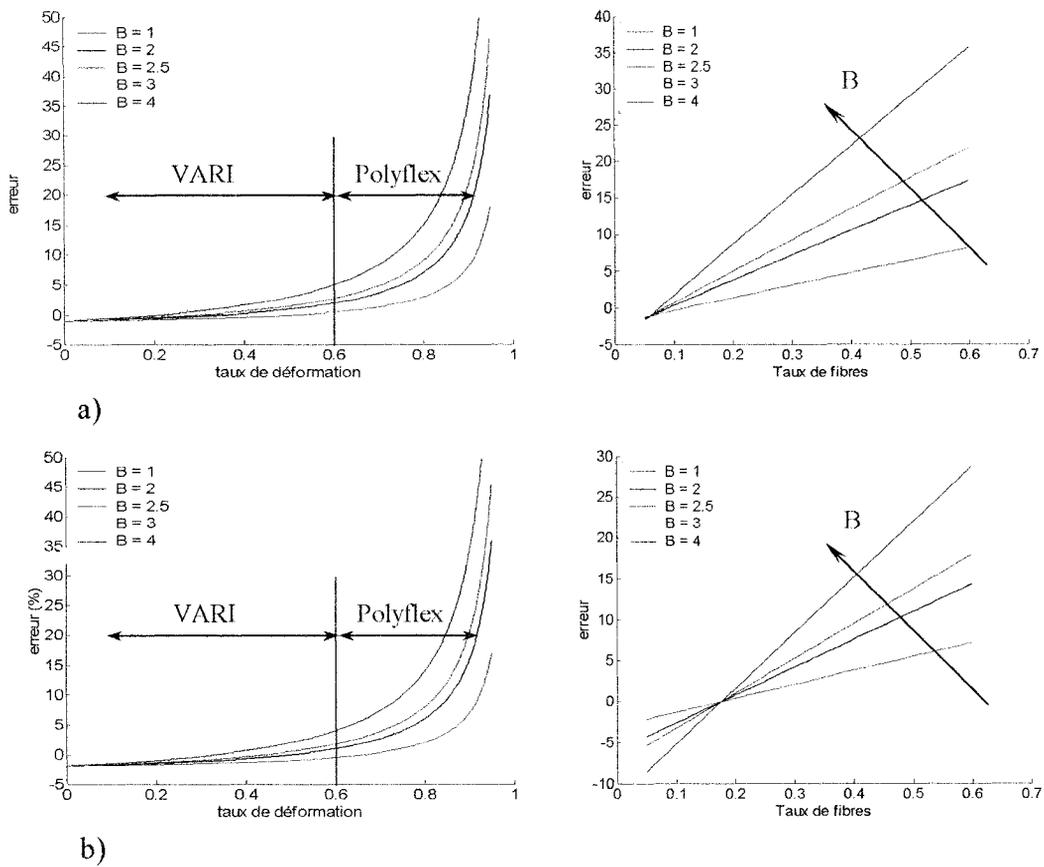
Aussi, l'équilibre calculé avec le modèle linéarisé engendre une erreur à l'équilibre également sur la contrainte. En effet, le nouveau point d'équilibre après résolution des équations (4.15) et (4.16) qui servira de point de départ pour l'itération suivante n'est pas le point P3, mais le point P4. L'erreur de contrainte entre ce point et le point réel d'équilibre (point P2) est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma'' &= A \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon_0-\varepsilon''} \right)^B - (\sigma_0 + \Delta\sigma') \\
&= A \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon_0-\varepsilon''} \right)^B - A \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon_0} \right)^B - \Delta\sigma' \\
&= A \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon_0} \right)^B \left( \left( 1 - \frac{\varepsilon''}{1-\varepsilon_0} \right)^{-B} - 1 \right) - \Delta\sigma' \\
&\approx BA \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon_0} \right)^B \frac{\varepsilon''}{1-\varepsilon_0} - \Delta\sigma' \quad \text{car} \quad \left( 1 - \frac{\varepsilon''}{1-\varepsilon_0} \right)^{-B} \underset{\frac{\varepsilon''}{1-\varepsilon_0} \rightarrow 0}{\approx} \left( 1 - B \frac{\varepsilon''}{1-\varepsilon_0} \right) \\
&= \Delta\sigma' \left( BA \left( \frac{V_f^0}{1-\varepsilon_0} \right)^B \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0(1-\varepsilon_0)} - 1 \right) \quad \text{car} \quad \varepsilon'' = \frac{\varepsilon_0 \Delta\sigma'}{\sigma_0} \\
&= \Delta\sigma' \left( B \frac{\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0)} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Ce qui donne l'erreur relative suivante :

$$\frac{\Delta\sigma'' - \Delta\sigma'}{\Delta\sigma'} = B \left( \frac{\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0} - 2 \right) \tag{4.36}$$

Ces deux résultats d'erreur (équations (4.34) et (4.36)) montre que l'erreur dû à la linéarisation est de l'ordre de  $\Delta\sigma$ . En conclusion, le fait de considérer le renfort comme un matériaux linéaire engendre une erreur sur l'état d'équilibre ce qui est à peu près évident. Mais l'intérêt de la démonstration précédente est qu'elle confirme que cette erreur peut être contrôlée est réduisant suffisamment le pas de temps. Sur la figure 4.5 est reporté la courbe d'erreur pour  $\varepsilon$  et  $\sigma$  en fonction de la déformation à l'équilibre  $\varepsilon_0$  et ce pour différente valeur de la constante B du modèle de compaction (4.25).



**Figure 4.5 : Erreur relative due à la linéarisation pour le taux de déformation a) et le taux de contrainte b).**

#### 4.4 Synthèse

Afin de résumer et synthétiser tout ce qui vient d'être dit, cette section présente un schéma simplifié du procédé VARI, une liste indiquant les paramètres nécessaires à la simulation et enfin une liste non exhaustive des principales hypothèses concernant le modèle proposé.

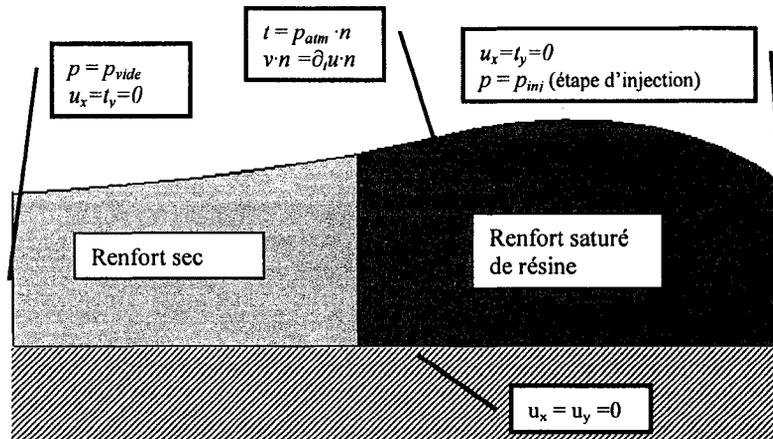


Figure 4.6 Schéma de la modélisation du VARI.

*Paramètres nécessaires pour la simulation :*

- pression d'injection  $p_{inj}$ , la pression de vide  $p_{vide}$  et pression extérieure  $p_{ext}$ ,
- la viscosité de la résine  $\mu$ ,
- un modèle de perméabilité  $K = f(V_f)$ ,
- les coefficients mécaniques constants du renfort :  $E_t$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  et  $G$ ,
- un modèle de compaction  $E_t = f(\epsilon)$ ,
- un critère d'arrêt pour l'injection de résine.

*Hypothèses de la modélisation :*

- pas d'écoulement de peau,
- renfort orthotrope élastique,
- déformation du renfort dans le sens des fibres négligeable.

#### 4.5 Schéma numérique

La modélisation du procédé VARI ayant été présentée, la suite de ce chapitre traite du traitement numérique des équations (4.15) et (4.16). Plus précisément nous allons voir comment on peut résoudre ces équations avec les conditions aux limites de la figure 4.2.

Ces équations sont complexes et non triviales du point de vue numérique pour deux raisons : d'une part elles présentent un couplage entre deux variables différentes (la pression hydrostatique et le déplacement du renfort) et d'autre part elles contiennent des dérivées en espace et en temps. En conséquence, pour chacune des deux variables il y aura deux discrétisations à réaliser : une discrétisation spatiale et une discrétisation temporelle.

#### 4.5.1 Discrétisation spatiale

##### 4.5.1.1 Formulation faible

La première étape de tout calcul par éléments finis est l'obtention d'une formulation faible des équations qu'on veut résoudre. La méthode pour cela est classique : on commence par multiplier chacune des équations par une fonction test et on intègre sur tout le domaine. Les équations (4.15) et (4.16) sont alors équivalentes au problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u \in (H^1(\Omega))^2 \text{ et } p \in H^1(\Omega) \text{ tels que } \forall \hat{u} \in (H^1(\Omega))^2 \text{ et } \forall \hat{p} \in H^1(\Omega) : \\ \int_{\Omega} m \cdot S \left( -\frac{K}{\mu} \nabla p \right) \hat{p} \, d\Omega + \int_{\Omega} m \cdot S(\partial_t u) \hat{p} \, d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} S^T (D : Su) \hat{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (S^T mp) \hat{u} \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Ensuite, la deuxième étape consiste à intégrer par parties certains termes pour symétriser les degrés de dérivation entre les fonctions de forme et les fonctions tests. Ceci donne :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \hat{u} \in (H^1(\Omega))^2 \text{ et } \hat{p} \in H^1(\Omega) \text{ tels que :} \\ \int_{\Omega} \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \hat{p} \, d\Omega + \int_{\Omega} m \cdot S(\partial_t u) \hat{p} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot n \hat{p} \, dA \\ \int_{\Omega} (S^T \hat{u}) D(Su) \, d\Omega - \int_{\Omega} (mp) \cdot (S\hat{u}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (t \cdot n) \hat{u} \, dA \end{aligned} \quad (4.38)$$

A ce niveau là, on peut préciser les conditions aux limites naturelles et essentielles, ce qui permet au passage de préciser également les espaces fonctionnels des fonctions tests. En se référant au schéma de la figure 4.2, la frontière du domaine peut se diviser en quatre sous-frontières avec des conditions aux limites différentes. Par simplicité nous les noterons  $\Gamma_d$ ,  $\Gamma_g$ ,  $\Gamma_s$  et  $\Gamma_i$  et elles correspondent respectivement aux coté droit, gauche, supérieur et

inférieur du domaine de calcul (voir figure 4.2). Les conditions limites sur chacune des sous-frontières sont alors les suivantes :

- Pour  $\Gamma_d$  : - 2 conditions naturelles  $p = p_{inj}$  et  $u_x = 0$   
- 1 condition essentielle  $t_x = 0$ .
- Pour  $\Gamma_g$  : - 2 conditions naturelles  $p = p_{vide}$  et  $u_x = 0$ .  
- 1 condition essentielle  $t_x = 0$ .
- Pour  $\Gamma_s$  : - 2 conditions essentielles  $t = P_{ext} \cdot n$  et  $\frac{\partial p}{\partial n} = (\partial_x u_x \bar{e}_x + \partial_y u_y \bar{e}_y) \cdot n$ .
- Pour  $\Gamma_i$  : - 2 conditions naturelles  $u_x = 0$  et  $u_y = 0$ .  
- 1 condition essentielle  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ .

Finalement, on obtient la formulation faible équivalente aux équations (4.15) et (4.16) avec conditions aux limites à partir de laquelle sera effectuée la discrétisation :

Trouver  $\hat{u} \in V$  et  $\hat{p} \in H$  tels que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{K}{\mu} \nabla p \cdot \nabla \hat{p} \, d\Omega + \int_{\Omega} m \cdot S(\partial_x u) \hat{p} \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{sup\,érieur}} (\partial_x u_x \bar{e}_x + \partial_y u_y \bar{e}_y) \cdot n \hat{p} \, dA \\ \int_{\Omega} (S\hat{u})^T D(Su) \, d\Omega - \int_{\Omega} pm \cdot (S\hat{u}) \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{sup\,érieur}} (p_{ext} \cdot n) \hat{u} \, dA \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} V &= \left\{ (H^1(\Omega))^2, u_x|_{\Gamma_{droite} \cup \Gamma_{gauche} \cup \Gamma_{inf\,érieur}} = 0 \text{ et } u_y|_{\Gamma_{inf\,érieur}} = 0 \right\} \\ H &= \left\{ H^1(\Omega), p|_{\Gamma_{droite}} = p_{inj} \text{ et } p|_{\Gamma_{gauche}} = p_{vide} \right\} \end{cases}$$

#### 4.5.1.2 Expression matricielle pour l'élément de référence

La formulation faible étant établie, on va pouvoir effectuer la discrétisation spatiale. Cela se fait en remplaçant dans la formulation faible (4.39) les espaces  $H$  et  $V$  par des sous-espaces de dimension finie. En anticipant sur la suite, les simulations ont été réalisées avec des éléments P1 (maillage triangulaire et polynôme de degré 1) pour la pression et pour les

déplacements. Ainsi les fonctions de forme sont les mêmes pour chacune des trois variables, ce qui permet de simplifier les notations. Au final, les expressions discrétisées du déplacement et de la pression de la résine prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^N u_i(N_i, 0) + v_i(0, N_i) \\ p &= \sum_{i=1}^N p_i N_i \end{aligned} \quad (4.40)$$

Les  $N_i$  étant bien sûr à la fois les fonctions de forme et les fonctions tests du calcul par éléments finis. En insérant ces expressions discrétisées dans la formulation faible (4.39) et en choisissant comme fonctions tests chacune des  $N_i$ , la formulation faible se transforme en un système linéaire qui s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Hp - Q^T \dot{u} &= f_p \\ Qp + Ku &= f_u \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } u &= (u_1, \dots, u_{Ndl}, v_1, \dots, v_{Ndl}) \\ p &= (p_1, \dots, p_{Ndl}) \end{aligned}$$

$$H_{ij} = \int_{\Omega} \frac{K}{\mu} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega \quad (4.42)$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} N_j m \cdot S(N_i, 0) \, d\Omega & \text{pour } 1 \leq i \leq Ndl \\ \int_{\Omega} N_j m \cdot S(0, N_{i-Ndl}) \, d\Omega & \text{pour } Ndl < i \leq 2Ndl \end{cases} \quad (4.43)$$

$$K_{ij} = \begin{cases} \int_{\Omega} S(N_i, 0)^T D S(N_j, 0) \, d\Omega & \text{pour } \begin{cases} 1 \leq i \leq Ndl \\ 1 \leq j \leq Ndl \end{cases} \\ \int_{\Omega} S(N_i, 0)^T D S(0, N_{j-Ndl}) \, d\Omega & \text{pour } \begin{cases} 1 \leq i \leq Ndl \\ Ndl < j \leq 2Ndl \end{cases} \\ \int_{\Omega} S(0, N_{i-Ndl})^T D S(N_j, 0) \, d\Omega & \text{pour } \begin{cases} Ndl < i \leq 2Ndl \\ 1 \leq j \leq Ndl \end{cases} \\ \int_{\Omega} S(0, N_{i-Ndl})^T D S(0, N_{j-Ndl}) \, d\Omega & \text{pour } \begin{cases} Ndl < i \leq 2Ndl \\ Ndl < j \leq 2Ndl \end{cases} \end{cases} \quad (4.44)$$

$$f_p^i = \int_{\Gamma_{\text{supérieur}}} (\partial_t u_x \vec{e}_x + \partial_t u_y \vec{e}_y) \cdot n N_i \, dA \quad (4.45)$$

$$f_u^i = \begin{cases} \int_{\Gamma_{\text{supérieur}}} (p_{\text{ext}} \cdot n)(N_i, 0) \, d\Gamma & \text{pour } 1 \leq i \leq Ndl \\ \int_{\Gamma_{\text{supérieur}}} (p_{\text{ext}} \cdot n)(0, N_{i-Ndl}) \, d\Gamma & \text{pour } 1 \leq i \leq Ndl \end{cases} \quad (4.46)$$

Dans un calcul par éléments finis, on n'évalue pas directement ces intégrales pour éviter d'avoir à évaluer tous les  $N_i$ . En fait, le système (4.35) est assemblé en passant par l'élément de référence. Cette méthode a été utilisée pour assembler le système (4.41) dans le code C++.

#### 4.5.2 Discrétisation temporelle

Le système (4.35) résultant de la discrétisation spatiale des équations (4.15) et (4.16) présente encore une difficulté : la présence de  $\dot{u}$ . Pour le résoudre, on doit effectuer une discrétisation temporelle. L'algorithme GN22 de Zienkiewicz [39,40] a été choisi à cette fin. Cet algorithme est fondé sur un développement de Taylor sur lequel est appliqué un schéma aux différences finies décentrées. Plus concrètement, on approxime  $u$ ,  $\dot{u}$  et  $p$  au temps  $t_{n+1}$  à partir du développement suivant :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \underbrace{u_n + \Delta t \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1}}_{u_{n+1}^p} = u_{n+1}^p + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \\ \dot{u}_{n+1} &= \underbrace{\dot{u}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1}}_{\dot{u}_{n+1}^p} = \dot{u}_{n+1}^p + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \\ p_{n+1} &= \underbrace{p_n + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \Delta t^2 \dot{p}_n + \theta \Delta t^2 \dot{p}_{n+1}}_{p_{n+1}^p} = p_{n+1}^p + \theta \Delta t^2 \dot{p}_{n+1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Dans les formules ci-dessus, les termes avec un exposant  $p$  rassemblent tous les termes qui peuvent être calculés à partir des résultats obtenus au temps  $n$ . En insérant ces expressions dans le système matriciel (4.41), on obtient après quelques opérations algébriques un nouveau système discrétisé en temps :

$$\begin{pmatrix} M + K\beta\Delta t^2 & -Q\theta\Delta t \\ Q^T\gamma\Delta t & H\theta\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_{n+1} \\ \dot{p}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u - Ku_{n+1}^p + Qp_{n+1}^p \\ f_p - Q^T\dot{u}_{n+1}^p - Hp_{n+1}^p \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

A présent, les variables qui sont calculées à chaque pas de temps ne sont plus  $u$  et  $p$  mais  $\ddot{u}$  et  $\dot{p}$ . Cela ne rend pas pour autant le système (4.48) inefficace vu que connaissant  $\ddot{u}_{n+1}$  et  $\dot{p}_{n+1}$ , les formules (4.47) permettent d'obtenir  $u_{n+1}$  et  $p_{n+1}$ . La façon de procéder pour calculer  $u_{n+1}$  et  $p_{n+1}$  à chaque pas de temps est la suivante :

- 1) On calcule  $u_{n+1}^p$ ,  $\dot{u}_{n+1}^p$  et  $p_{n+1}^p$  à partir des valeurs obtenues aux temps  $t_n$  et  $t_{n-1}$ .
- 2) On assemble le système (4.48) élément par élément.
- 3) On résout le système (4.48).
- 4) On calcule  $u_{n+1}$  et  $p_{n+1}$  à partir des résultats du système (4.48) et des formules (4.47).

Cette façon de procéder peut sembler quelque peu complexe, mais ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable pour  $\beta \geq \frac{1}{4}$ , et  $\gamma, \theta \geq \frac{1}{2}$ .

## 4.6 Implémentation

L'algorithme présenté dans la section précédente a été programmé en C++ en utilisant les bibliothèques d'éléments finis, de maillage et d'entrée-sortie du logiciel ProFlot. Aussi pour simuler complètement l'injection de résine pour le procédé VARI, la résolution par éléments finis des équations (4.15) et (4.16) a été couplée à un algorithme de remplissage (Annexe A). L'algorithme utilisé est également celui du logiciel ProFlot. Cet algorithme a été développé pour la simulation du RTM et son application ici demande quelques ajustements.

### 4.6.1 Maillage fixe et maillage déformé

Le premier ajustement porte sur l'utilisation de deux maillages : un fixe pour le calcul de  $u_n$  et  $p_n$  et un autre pour le remplissage qui se déforme selon les déformations du renfort calculées. Tout d'abord expliquons pourquoi le maillage pour le calcul par éléments

finis doit rester fixe. La résolution des équations du VARI se fait par une approche lagrangienne. En effet, si on considère un nœud  $N$  du maillage, pour chaque pas de temps on va calculer en ce nœud les déplacements  $u_x$  et  $u_y$  du renfort ainsi que la pression  $p$  de la résine. Mais la pression calculée n'est pas la pression à la position géométrique du nœud  $N$  mais la pression au nœud déplacé de  $(u_x, u_y)$ . Ainsi on calcule à chaque pas de temps la pression dans le domaine occupé par le renfort et non dans le domaine défini à partir de la géométrie du maillage initial, d'où le maillage fixe au cours de la simulation. Par contre, le remplissage par l'algorithme présenté dans l'annexe A est réalisé par une approche eulérienne, car il nécessite la connaissance à chaque pas de temps du champ de vitesse de la résine. Mais comme le renfort se déforme, le domaine de définition du champ de vitesse varie au cours de la simulation. Il faut donc que le maillage pour le remplissage et le calcul du champ de vitesse se déforme au cours de la simulation. Et pour le modifier, on utilise simplement les déplacements du renfort calculés sur le maillage fixe.

#### 4.6.2 Conservation de la résine

Dans l'algorithme de remplissage qui est présenté dans l'annexe A, le pas de temps est choisi à chaque itération de manière à obtenir le meilleur compromis entre précision sur la position du front et vitesse de calcul. Ici, le temps n'intervient pas que dans l'algorithme de remplissage, mais aussi dans le schéma numérique du calcul par éléments finis (équation (4.41)). La conséquence de cette interdépendance est que le choix du pas de temps  $dt$  peu entraîner une non conservation de la quantité de résine injectée quand le port d'injection est fermé. Ce qui est un inconvénient majeur vu que lorsque le port d'injection est fermé, la quantité de résine dans le renfort reste constante. Par ailleurs, à partir de la solution du système (4.41), il est possible d'évaluer le flux de résine à travers le front par unité de temps. Et par conservation de la quantité de résine injectée, il est aussi possible d'estimer la quantité de résine qui doit le traverser. Connaissant cela, il est possible d'évaluer le pas de temps qui assurera la conservation de la résine. Mais il n'y a aucune raison que ce pas de temps soit le même que celui calculé par l'algorithme de remplissage.

Pour dépasser ce problème, nous avons été obligé d'adapter l'algorithme de remplissage pour assurer la conservation de la résine injectée. A cette fin, nous avons utilisé le fait que l'augmentation de résine due au remplissage est proportionnelle au pas de temps du remplissage et qu'il est possible d'imposer le pas de temps. Reste qu'il faut déterminer le pas de temps qui assure la conservation de la quantité de résine injectée. Pour le déterminer nous avons procédé comme suit :

1. On calcule la quantité de résine injectée  $V_{ant}$ .
2. On déforme le maillage.
3. On calcule la quantité de résine injectée après déformation du maillage  $V_{post}$ . En soustrayant la quantité calculée au point 1. on obtient la quantité de résine perdue ou gagnée lors de la déformation du maillage.
4. On effectue le remplissage sans imposer le pas de temps. L'algorithme renvoie le pas de temps  $dt$  qu'il a déterminé comme optimal.
5. On calcule la quantité de résine injectée  $V_{inj}$ . Ceci permet d'évaluer la variation de la quantité de résine due à l'avancement du front en soustrayant  $V_{post}$ .
6. Par proportionnalité on obtient le nouveau pas de temps qui assure la conservation de la résine :

$$dt_{conservatif} = -dt \frac{V_{post} - V_{ant}}{V_{inj} - V_{post}} \quad (4.49)$$

7. On efface les résultats du remplissage et on effectue un nouveau remplissage en imposant le pas de temps de la formule (4.49).

### 4.6.3 Algorithme

Au final le couplage entre la résolution numérique des équations du VARI et le remplissage donne l'algorithme présenté sur la figure 4.4 et qui explique comment a été simulé le procédé VARI.

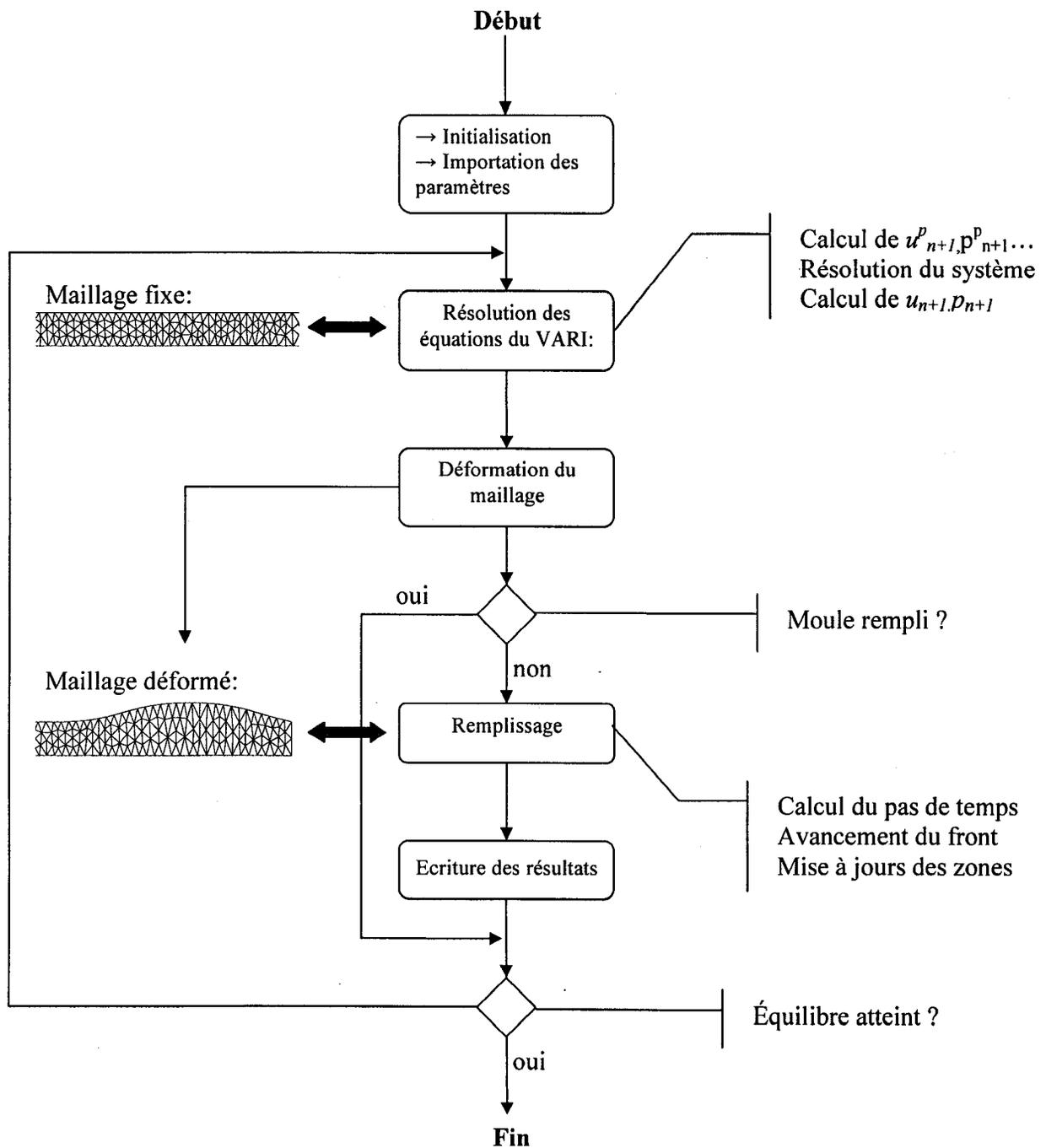


Figure 4.7 Algorithme numérique pour la simulation du VARI

## 4.7 Résultats

Maintenant que nous avons décrit comment il est possible de simuler l'écoulement d'un fluide newtonien dans un milieu poreux déformable, nous allons appliquer cette méthode de résolution au cas du VARI. A cette fin, nous examinerons tout d'abord sur un cas exemple les possibilités du code correspondant à l'algorithme de la figure 3.3. Dans un second temps l'influence de chacun des coefficients inconnus du renfort sera étudiée.

### 4.7.1 Exemple d'infusion d'une plaque rectangulaire

#### 4.7.1.1 Géométrie et paramètres de simulation

La géométrie utilisée comme exemple pour la simulation du VARI est présentée sur la figure 4.4. Il s'agit d'une plaque rectangulaire de 36,4cm de long, dont le port d'injection et l'évent sont situés à chacune de ses extrémités. L'épaisseur initiale du renfort est de 2 mm, ce qui correspond à deux couches d'OCF8610 comprimé par un vide relatif de 25000 Pa. Le reste des paramètres de la simulation sont donnés dans le tableau 4.1, au passage on pourra remarquer que la pression d'injection est inférieure à la pression atmosphérique pour que le renfort n'atteigne pas son épaisseur naturelle et ainsi éviter les instabilité numérique du au modèle de compaction.

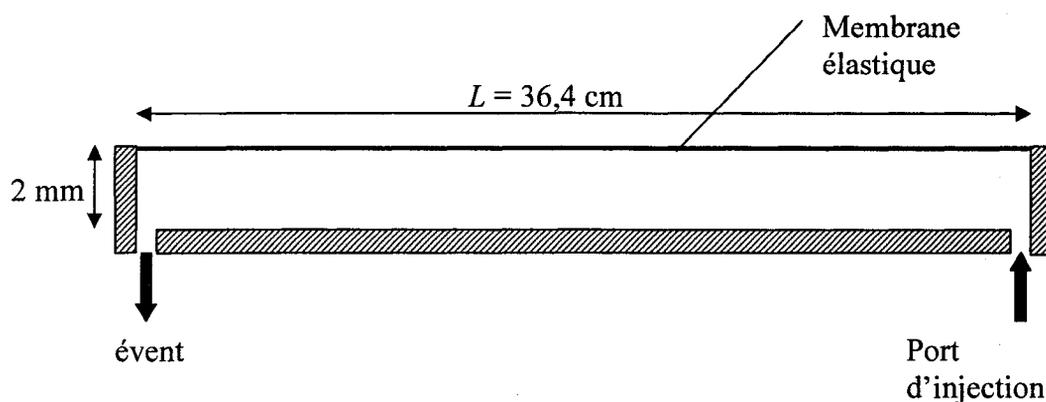


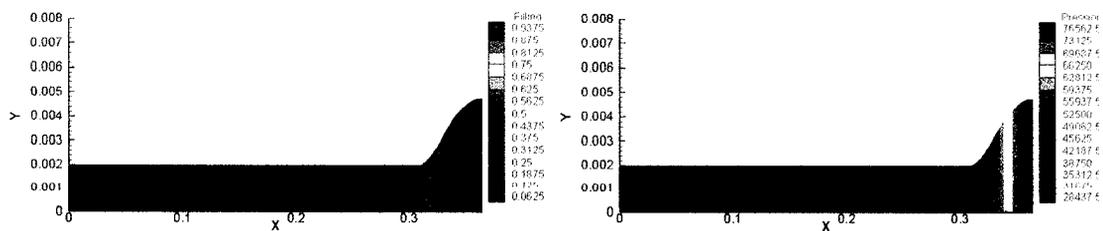
Figure 4.8 Géométrie choisie pour la simulation.

Paramètre	Symbol	Valeur
Pression d'injection	$P_{injection}$	80 000 Pa
Pression du vide	$P_{vide}$	25 000 Pa
Viscosité de la résine	$\mu_{résine}$	0,5 Pa.s
Critère d'arrêt	$L_r$	3/5 L
Modèle de perméabilité	$K(V_f)$	$K(V_f) = [200 + 11e^{16.8(0.5-V_f)}] 9.87 \times 10^{-13}$
Modèle de compaction	$\sigma(V_f)$	$\sigma = 5.6 \times 10^6 (V_f)^{2.5}$
Module d'Young longitudinal	$E_1$	1,00E+7
Coefficient de poisson	$\nu_{12}$	0,2
Module de cisaillement	$G$	1,00E+06

**Tableau 4.1 : Paramètres utilisés pour obtenir les résultats des figures 3.5 à 3.12.**

#### 4.7.1.2 Remplissage et champ de pression

Avec les paramètres définis dans le paragraphe précédent, nous avons réalisé un calcul sur un maillage formé de 4181 éléments correspondant à la géométrie de la figure 4.4. Les résultats de ce calcul sont deux champs scalaire, la pression de la résine et sa fonction caractéristique et un champ vectoriel, les déplacements du renfort. Ces résultats sont exposés dans les figures 4.5 à 4.10 qui montrent, sur un maillage déformé à partir des déplacements du renfort, le champ de pression et la fonction caractéristique de la résine à différents instants.



**Figure 4.9 Remplissage et pression 2 s après le début de l'injection.**

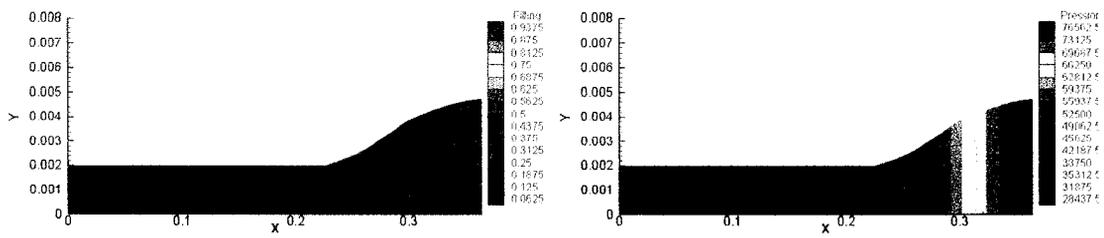


Figure 4.10 Remplissage et pression 15 s après le début de l'injection.

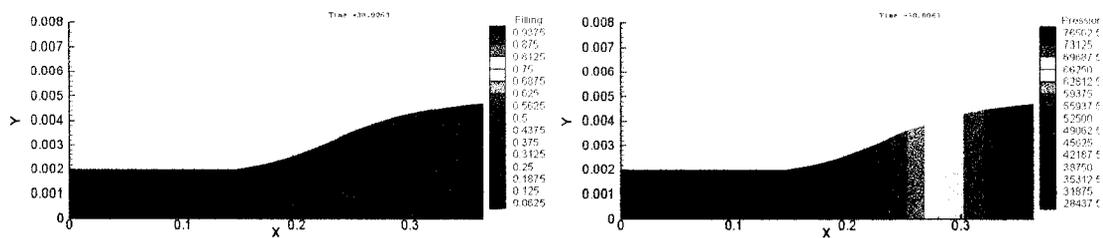


Figure 4.11 Remplissage et pression juste avant la fermeture du port d'injection ( $t = 38$  s).

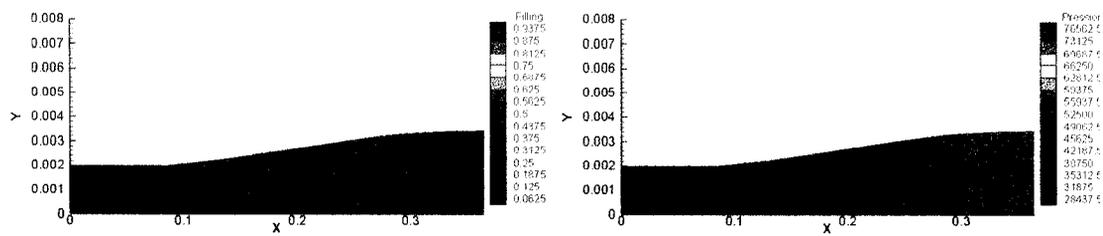


Figure 4.12 Remplissage et pression juste 40s après la fermeture du port d'injection ( $t = 78$  s).

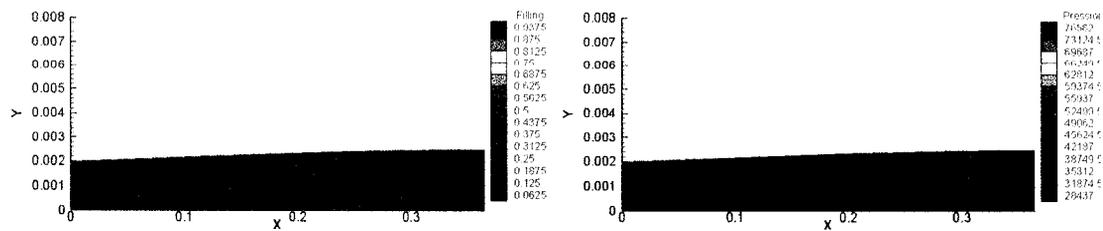
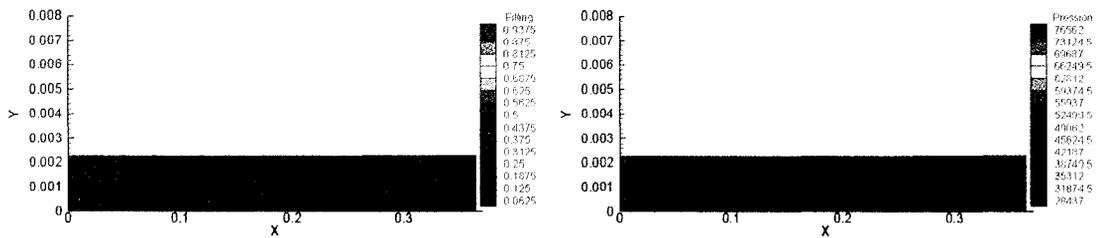


Figure 4.13 Remplissage et pression à la fin de l'injection ( $t = 168$  s).



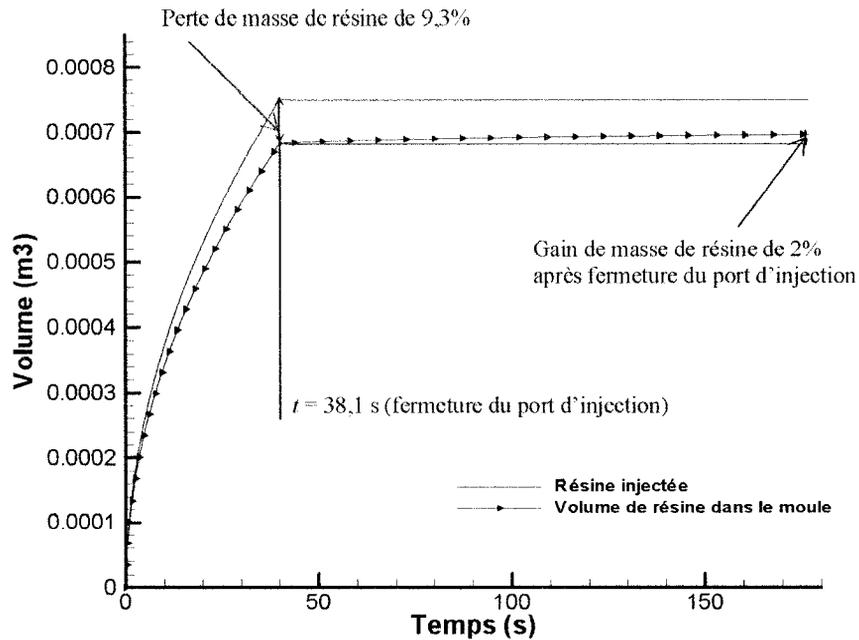
**Figure 4.14 Remplissage et pression à l'équilibre ( $t = 256$  s)**

Les figures 4.5 à 4.10 montrent trois régimes distincts. Le premier a lieu lorsque le port d'injection est ouvert (figures 4.5, 4.6 et 4.7). La résine imprègne le renfort qui se gonfle au fur et à mesure de l'avancée de résine. Simultanément, un champ de pression presque uniforme apparaît. Ensuite, quand le port d'injection est fermé (figure 4.7), la pression chute rapidement et la résine continue de s'écouler, mais beaucoup plus lentement. Enfin, lorsque la résine atteint l'évent de sortie (figure 4.9), un faible gradient de pression persiste. Ce dernier a pour effet de maintenir l'écoulement de résine jusqu'à un état d'équilibre pour lequel l'épaisseur du renfort saturé de résine est uniforme (figure 4.10).

#### 4.7.1.3 Conservation de la résine

Il a été exposé au paragraphe 4.6.1 que l'approche lagrangienne de la résolution des équations du VARI couplée avec l'approche eulérienne de l'algorithme de remplissage imposait l'utilisation de deux maillages : un fixe et un autre qui se déforme. Pour un maillage fixe l'algorithme de remplissage utilisé ici est conservatif, mais pour comme pour simuler le VARI nous avons utiliser un maillage qui se déforme avec l'algorithme de remplissage il convient de le vérifier. L'algorithme sera conservatif ici si lors de chaque itération la variation du volume de résine dans le moule est égale au flux de résine à travers le port d'injection. Pour évaluer ces deux grandeurs, nous avons représenté sur la figure 4.11 le volume de résine dans le moule d'une part (courbe rouge), et d'autre part la somme des flux de résine à travers le port d'injection calculés à chaque pas de temps (courbe verte). Ces résultats de la figure 4.11 montrent que le schéma n'est pas parfaitement conservatif car à la fin de l'injection le volume de résine dans le moule est 9,3% inférieur à

la quantité de résine qui est passée à travers le port d'injection. Curieusement, on observe ici une perte de masse alors qu'intuitivement qu'on s'attendrait plutôt à un gain vu que dans le cas du VARI, les déformations du maillage augmentent le volume déjà occupé par la résine.



**Figure 4.15** Évolution du volume de résine dans le renfort, et du volume de résine injecté par le port d'injection en fonction du temps.

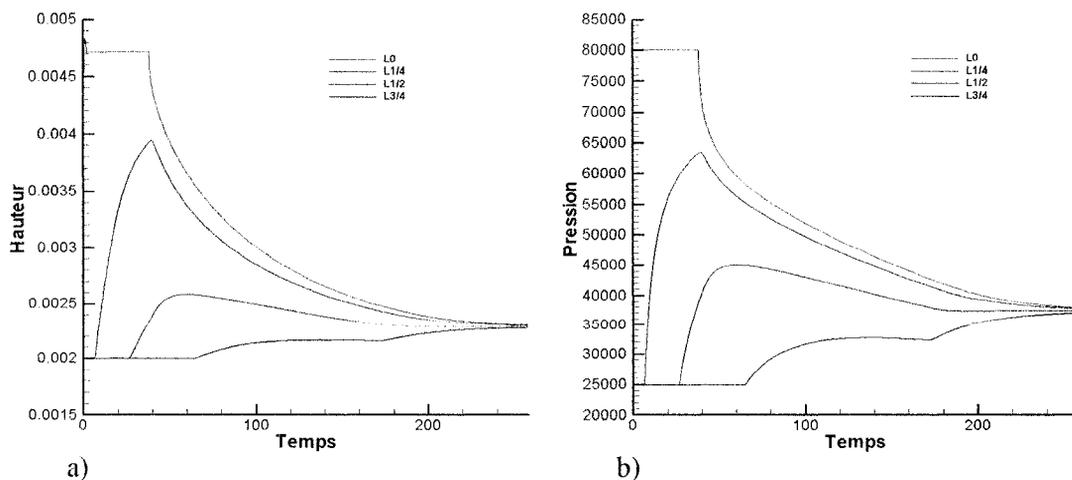
De plus, dans la simulation présentée précédemment, le port d'injection est fermé dès lors que la résine atteint 2/5 de la longueur de la plaque. A partir cet instant le volume de résine contenu dans la cavité reste constant. Dans le paragraphe 3.6.2 il a été exposé que la conservation de résine nécessitait une modification de l'algorithme de remplissage. Le code éléments finis permet de calculer à chaque pas de temps le volume de résine injecté. Le résultat de ce calcul est le graphe de la figure 4.11, qui montre l'évolution de la quantité de résine injectée en fonction du temps pour les paramètres du tableau 4.1. Cette figure montre l'efficacité de la modification du pas de temps décrite dans le paragraphe 3.6.2, vu que la différence entre la quantité de résine dans le moule lors de la fermeture du port d'injection et la fin de la simulation n'est que de 2%.

#### 4.7.1.4 Déformation du renfort

En plus de calculer les champs de déformation, de pression et la quantité de résine injectée il est aussi possible avec le code C++ de tracer l'évolution de l'épaisseur du renfort sec et saturé en différentes positions. Sur le graphe a) de la figure 4.12, nous avons reporté cette évolution pour les quatre positions suivantes :

- $L_0$  : point situé au niveau du port d'injection de résine.
- $L_{1/4}$  : point situé à  $L/4$  du port d'injection.
- $L_{1/2}$  : point situé à  $L/2$  du port d'injection.
- $L_{3/4}$  : point situé à  $3L/4$  du port d'injection.

Les trois régimes qui avaient été décrits lors de l'analyse des figures 4.5 à 4.10 sont aussi identifiables sur ce graphe. En effet, lorsque le port d'injection est ouvert, l'épaisseur au niveau du point  $L_0$  est constante, alors que l'épaisseur aux autres points augmente progressivement à partir du moment où la résine atteint ces points. Lorsque le port d'injection est fermé l'épaisseur chute brutalement près du port d'injection, mais augmente loin du port d'injection (point  $L_{3/4}$ ), car la résine commence à imprégner cette partie du renfort. Et finalement après que la résine atteint l'évent et que ce dernier soit fermé, on voit les quatre courbes converger, ce qui traduit l'uniformisation de l'épaisseur du renfort saturé et l'atteinte d'un état d'équilibre.



**Figure 4.16 a) Évolution de l'épaisseur du renfort aux positions  $L_0$ ,  $L_{1/4}$ ,  $L_{1/2}$  et  $L_{3/4}$ .  
b) Évolution de la pression au cours de l'injection aux positions  $L_0$ ,  $L_{1/4}$ ,  $L_{1/2}$  et  $L_{3/4}$ .**

Sur la figure 3.12 nous avons tenu à montrer simultanément l'épaisseur du renfort et la pression de la résine en fonction du temps aux quatre positions  $L_0$ ,  $L_{1/4}$ ,  $L_{1/2}$  et  $L_{3/4}$ . L'intérêt et le résultat d'une telle comparaison sont immédiats et il en ressort que l'épaisseur du renfort saturé de résine est directement liée à la pression de cette dernière.

#### 4.7.2 Influence des coefficients mécaniques indéterminés

Parmi les paramètres nécessaires aux simulations (tableau 4.1), les coefficients mécaniques inconnus du renfort ont été imposés de façon quelque peu arbitraire. La difficulté est que ces paramètres ( $E_I$ ,  $\nu_{I2}$  et  $G$ ) n'ont jamais été déterminés pour le renfort de référence utilisé ici, à savoir l'OCF 8610. De plus, leur mesure est délicate, car il est probable que leurs valeurs dépendent de l'état de compression du renfort. Cependant, dans la modélisation présentée dans ce chapitre, il a été mentionné que les déformations du renfort autres qu'à travers son épaisseur étaient négligeables, ce qui rend l'influence de ces paramètres également négligeable.

Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons réalisé une série de simulations en faisant varier ces paramètres. Pour cela nous avons choisi les quatre critères suivant pour comparer les simulations entre elles :

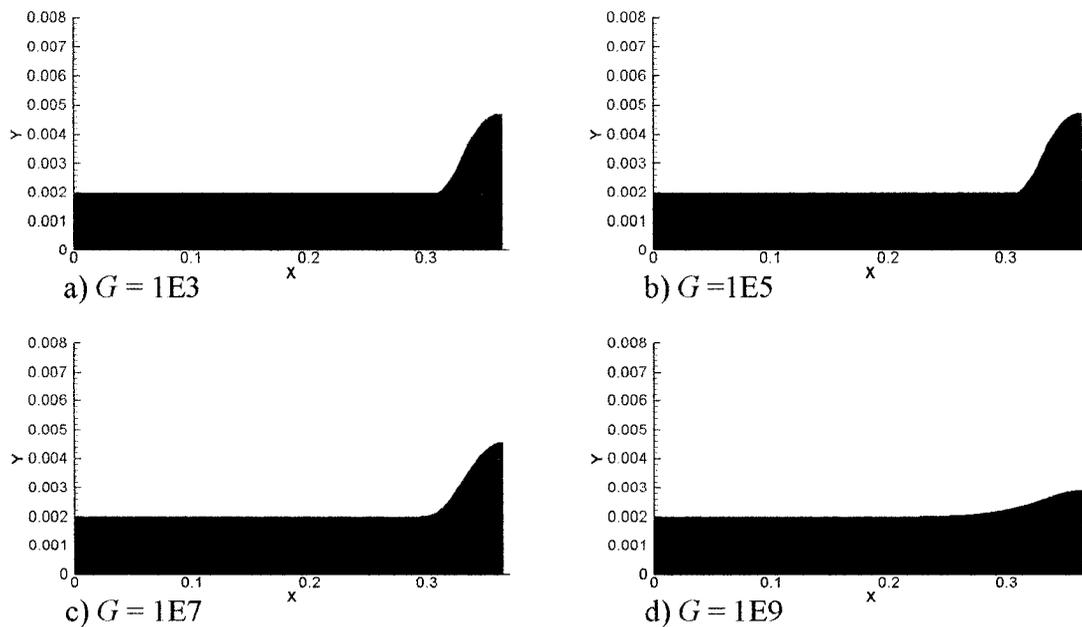
- $T_{injection}$  : temps entre le début de l'injection et la fermeture du port d'injection.
- $T_{compaction}$  : temps entre la fermeture du port d'injection et l'instant où la résine atteint l'évent.
- $T_{équilibre}$  : temps entre l'instant où la résine atteint l'évent et celui où l'épaisseur du renfort est uniforme à 5% près.
- $V_{résine}$  : volume de résine injecté.

Les différents jeux de coefficients mécaniques testés et les valeurs des critères de comparaison pour chacun des jeux de paramètres sont reportés dans le tableau 3.2 :

	Module longitudinal $E_l$	Module de cisaillement $G$	coefficient de poisson	$T_{injection}$	$T_{compaction}$	$T_{equilibre}$	$V_{résine}$
essai #1	1,00E+04	1,00E+05	0,2	38,2	130,6	33	7,01E-04
essai #2	1,00E+06	1,00E+05	0,2	38,2	130,9	33	7,00E-04
essai #3	1,00E+08	1,00E+05	0,2	38,1	132,1	32,8	7,00E-04
essai #4	1,00E+10	1,00E+05	0,2	38,1	131,7	33	7,00E-04
essai #5	1,00E+10	1,00E+03	0,2	38,2	131,4	33,2	7,00E-04
essai #6	1,00E+10	1,00E+05	0,2	38,1	131,7	33	7,00E-04
essai #7	1,00E+10	1,00E+07	0,2	37,5	130,7	33	7,00E-04
essai #8	1,00E+10	1,00E+09	0,2	37,4	****	****	6,60E-04
essai #9	1,00E+10	1,00E+05	0,1	38,1	130,4	33,1	7,00E-04
essai #10	1,00E+10	1,00E+05	0,2	38,1	131,7	33	7,00E-04
essai #11	1,00E+10	1,00E+05	0,3	38,1	132,5	33,1	7,00E-04
essai #12	1,00E+10	1,00E+05	0,4	38,1	131,8	33	7,00E-04

**Tableau 4.2 Coefficients mécaniques testés et résultats.**

Les résultats de cette étude paramétrique montrent que, hormis pour des valeurs extrêmes peu probable physiquement (module d'Young de 10 000 Pa, module de cisaillement de  $1^{E9}$  Pa), l'influence des coefficients mécaniques mentionnés plus haut est négligeable. Cependant, même si aucun des quatre critères ne présente une variation notable avec l'un des trois coefficients mécaniques, il est quand même possible d'observer leurs effets en étudiant des images du même genre que les figures 4.5 à 4.10. Le coefficient dont l'effet est le plus remarquable est le module de cisaillement. Sur la figure 4.13, nous avons reporté la déformation du renfort et la fonction caractéristique de la résine au temps  $t = 2$  s pour les quatre valeurs testées du module de cisaillement.



**Figure 4.17 Déformation du renfort et avancement de la résine pour différents modules de cisaillement au temps  $t = 2$  s.**

Comme il était prévisible, un module de cisaillement élevé ( $G = 1E9$ ) impose un cisaillement faible, ce qui limite la déformation du renfort. Néanmoins, cette limitation n'a lieu qu'au tout début de l'injection car après le cisaillement du renfort est faible. En effet, on a vu que la déformation du renfort est liée directement à la pression de la résine. Or, lors de l'injection, la pression de la résine décroît linéairement entre le port d'injection et le front, donc de la même manière l'épaisseur du renfort saturé décroît progressivement entre le port d'injection et le front de résine comme c'est le cas par exemple sur la figure 4.7. Pour une telle déformation le taux de cisaillement est relativement faible et l'effet d'un module de cisaillement élevé est donc limité, ce qui explique la faible importance de ce coefficient sur les critères de mesure décrits précédemment.

Finalement, les résultats de cette étude paramétrique justifient à posteriori l'hypothèse selon laquelle les coefficients mécaniques indéterminés ont une influence négligeable. Il sera possible dans la suite, notamment pour la simulation de Polyflex, d'imposer de façon arbitraire ces coefficients, car on sait maintenant que leur influence sur le résultat de la simulation est faible.

#### 4.8 Conclusion

En conclusion, dans ce chapitre un modèle théorique pour simuler un écoulement dans un milieu poreux déformable aura été présenté. Ce modèle repose sur le couplage de l'équation générale de la consolidation et de la loi de Darcy. Une façon de résoudre numériquement par élément finis ces équations aura également été présentée. Ces développements théoriques ont ensuite été appliqués au problème de la simulation du procédé VARI.

Malheureusement, le manque de données expérimentales a empêché de valider le code par comparaison avec l'expérience (cela sera fait ultérieurement dans le chapitre sur Polyflex). Mais néanmoins, les possibilités du codes ont été exposées et une courte étude paramétrique a montré l'influence nulle des coefficients mécaniques indéterminés du renfort.

Plus généralement, les équations qui ont été résolues numériquement dans ce chapitre ont un cadre d'application bien plus large que le simple procédé VARI. Il est possible à partir de ces équations de simuler n'importe quel écoulement de fluide dans un milieu poreux déformable. L'application de ce qui est décrit dans ce chapitre pour simuler l'écoulement de la résine dans le procédé Polyflex est donc naturel.

## CHAPITRE 5

# SIMULATION BIDIMENSIONNELLE DU PROCÉDÉ POLYFLEX

### 5.1 Introduction

Les deux chapitres précédents ont montré comment il est possible de simuler un écoulement de Stokes et un écoulement dans un milieu poreux déformable. La présentation du procédé Polyflex au chapitre 2 a montré que la simulation de ces types d'écoulement était un préambule nécessaire à la simulation de Polyflex. Maintenant que ce travail est fait, on va voir dans ce chapitre le couplage de ces deux écoulements dans le procédé Polyflex à travers les conditions limites (section 3). De ce couplage naîtra un algorithme et un code en C++ simulant le procédé Polyflex qui seront dans la section 5. Ce code sera ensuite validé (section 6) par comparaison avec les expériences de L.Briones. Enfin il sera mis en œuvre dans la section 7 pour déterminer l'influence de la viscosité du fluide de compaction.

### 5.2 Rappels, modélisation des deux écoulements.

On a vu au chapitre 2 que l'écoulement de résine dans le procédé Polyflex correspond à un écoulement dans un milieu poreux déformable. Ce type d'écoulement a été étudié et résolu numériquement dans le chapitre 4. De plus, on a vu que ces équations se simplifient dans le cas d'une étude 2D et quand le milieu poreux est orthotrope comme c'est le cas pour un renfort fibreux. Ici, on peut reprendre les mêmes hypothèses et les équations qui régissent l'écoulement de résine dans le procédé Polyflex sont donc exactement les mêmes que celles qui ont été résolues dans le chapitre 4, à savoir :

$$\begin{cases} m \cdot S \left( -\frac{K}{\mu} \nabla p \right) + m \cdot S(\partial_t \vec{u}) = 0 \\ S^T (D : S\vec{u} + mp) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Pour ce qui est de l'écoulement du fluide de compaction, au vu du faible nombre de Reynolds, il est possible de simuler cet écoulement en ne résolvant que les équations de Stokes :

$$\begin{cases} 2\mu \nabla \cdot \varepsilon(\vec{v}) - \nabla p = 0 \\ \text{div}(\vec{v}) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

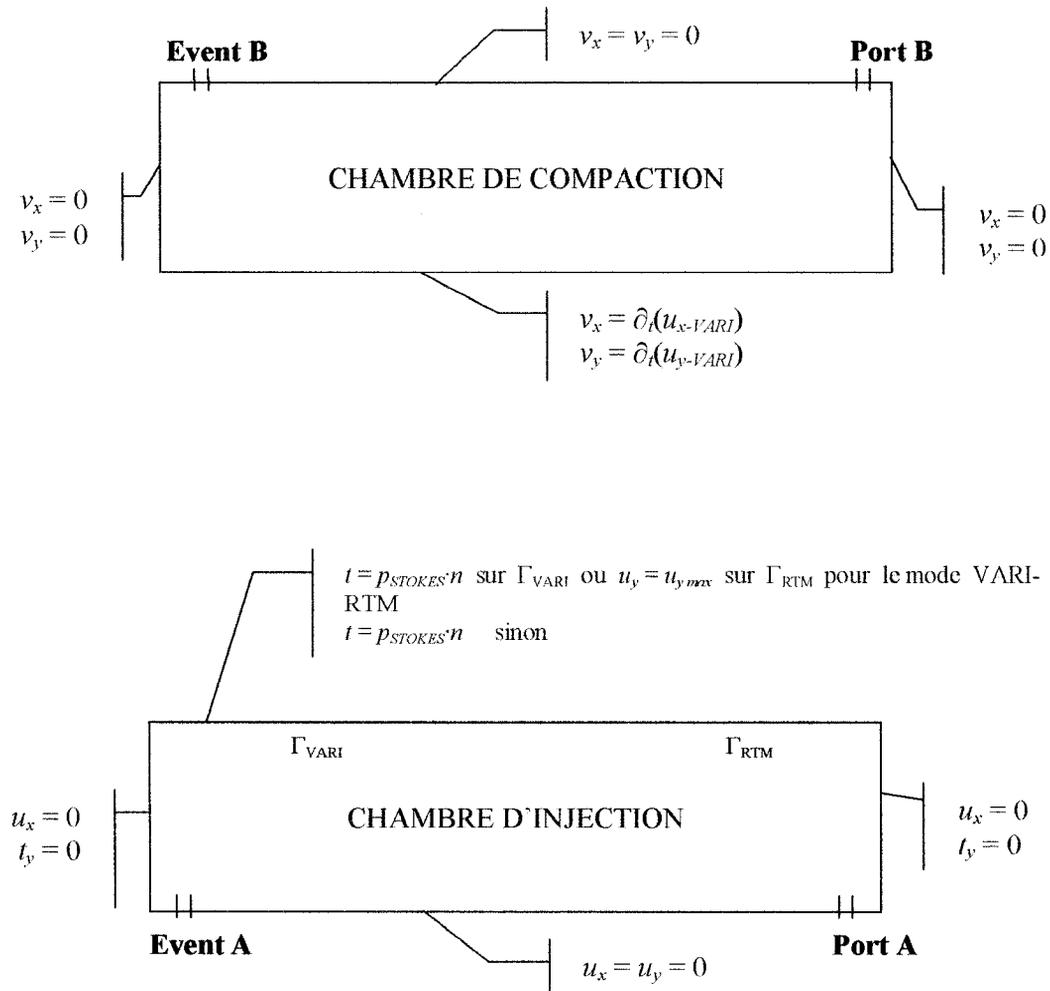
Reste maintenant que simuler le procédé Polyflex nécessite de coupler ces systèmes d'équations. Cela se fait à travers les conditions aux limites et les détails de ce couplage sont présentés dans le prochain paragraphe.

Aussi, une particularité non négligeable de ces deux écoulements est qu'ils ont lieu dans un domaine mobile et qu'il faudra en tenir compte lors du couplage avec l'algorithme de remplissage.

### 5.3 Couplage des deux écoulements, conditions limites

Dans une injection par le procédé Polyflex les deux écoulements sont séparés mais interagissent à travers la membrane placée par dessus le renfort. C'est donc à ce niveau que le couplage va s'effectuer. Tout d'abord commençons par les conditions limites pour l'écoulement de résine. Quand nous avons simulé le procédé VARI au chapitre 4, la condition limite au niveau de la membrane était due à la pression atmosphérique. Ici ce n'est plus l'air qui presse le renfort mais le fluide de compaction et donc la pression à prendre pour imposer la condition limite n'est plus la pression atmosphérique mais celle du fluide de compaction ce qui constitue un premier couplage. Ensuite, la condition limite au niveau de la membrane pour le fluide de compaction correspond à un contact collant. Or comme cette membrane est mobile, le contact collant impose que la vitesse du fluide de compaction à son niveau soit égale à la vitesse de déplacement de la membrane. Et cette vitesse de déplacement provient des déplacements du renfort calculés à partir des équations du VARI, ce qui constitue le deuxième couplage entre les deux écoulements.

Finalement l'ensemble des conditions limites est regroupé sur la figure 5.1 et le tableau 5.1



**Figure 5.1** Conditions aux limites pour les différents modes d'écoulement.

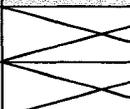
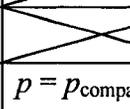
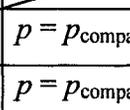
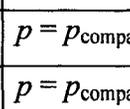
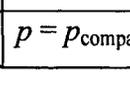
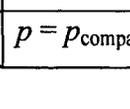
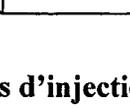
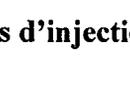
	Port A	Event A	Port B	Event B
Mode VARI	$p = p_{inj}$	$p = p_{vide}$		$p = p_{atm}$
Mode VARI - RTM	$p = p_{inj}$	$p = p_{vide}$		$p = p_{atm}$
Mode CRTM (1)		$p = p_{vide}$	$p = p_{compaction}$	$p = p_{atm}$
Mode CRTM (2)		$p = p_{vide}$	$p = p_{compaction}$	
Mode Consolidation			$p = p_{compaction}$	

Tableau 5.1 Conditions aux limites pour les ports d'injection et les événements.

#### 5.4 Synthèse

Avant de passer à l'aspect programmation et algorithmique de la simulation du procédé Polyflex, il est utile de résumer la modélisation retenue. Cette modélisation est le fruit des chapitres 2, 3, 4 et du début de ce chapitre. Tout d'abord elle repose sur cinq hypothèses :

- Pas d'écoulement de peau.
- Renfort orthotrope élastique.
- Déformation du renfort dans le sens des fibres négligeable.
- L'injection de résine correspond à un écoulement dans un milieu poreux déformable.
- L'écoulement du fluide de compaction est régi par les équations de Stokes.

Enfin il a été dégagé un certain nombre de paramètres dont dépend l'efficacité du procédé et qui seront nécessaires pour la simulation:

- La pression d'injection  $p_{inj}$  et la pression de vide  $p_{vide}$ .
- La pression de compaction  $p_{compaction}$  et la pression atmosphérique  $p_{atm}$ .
- La viscosité de la résine  $\mu_r$ .
- La viscosité du fluide de la compaction  $\mu_c$ .
- Un modèle de perméabilité pour le renfort  $K = f(V_f)$ .
- Les coefficients mécaniques constants du renfort :  $E_t$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{21}$  et  $G$ .
- Un modèle de compaction pour le renfort  $E_t = f(\epsilon)$ .
- Un critère d'arrêt pour l'injection de résine.

## 5.5 Programmation

Dans cette section, nous allons voir les principes du code simulant le procédé Polyflex. Tout comme aux chapitres 3 et 4, le code a été réalisé en C++ à partir des librairies du logiciel ProFlot. Il contient en partie les codes ayant permis de simuler l'écoulement de Stokes et le VARI. Cependant, tous les détails de la programmation ne sont pas exposés dans ce chapitre. Ce qui est décrit dans la suite relève plus de l'aspect algorithmique et numérique du code.

### 5.5.1 Maillages fixes, maillages déformés et pas de temps

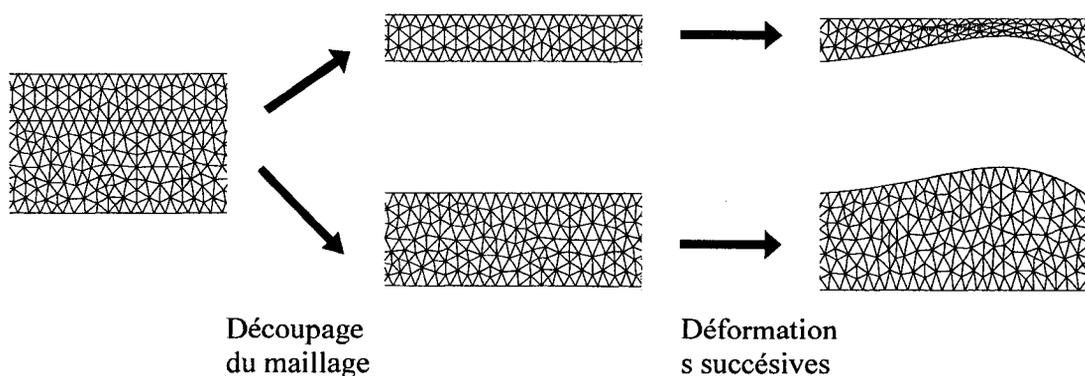
Pour fonctionner, le code a besoin de recevoir un maillage qui contient deux zones : la première correspond à la chambre d'injection sur laquelle seront résolues les équations du VARI (5.1) et la deuxième à la chambre de compaction sur laquelle seront résolues les équations de Stokes (5.2). Aussi nous avons choisi ici de résoudre séparément les systèmes d'équations (5.1) et (5.2). En conséquent, avant tout calcul, le code divise le maillage qui lui est fourni en deux maillages correspondant à chacune des zones (figure 5.2). Un tel découpage simplifie considérablement le calcul, mais oblige en quelque sorte à découpler les deux systèmes d'équations au niveau de la discrétisation temporelle. En effet, pour un pas de temps  $n$ , comme les systèmes (5.1) et (5.2) sont résolus successivement, il est impossible d'imposer à la fois la pression du fluide de compaction obtenue au temps  $n$  comme condition limite pour les équations du VARI et d'imposer le déplacement de la membrane au temps  $n$  comme condition limite pour le calcul de Stokes au même pas de temps. En anticipant sur les développements de la section 4.7.2, la pression de Stokes obtenue au pas de temps  $n$  sera utilisée pour le calcul des équations (5.1) au temps  $n$  et le déplacement de la membrane obtenue au temps  $n$  sera utilisé pour résoudre les équations (5.2) au temps  $n+1$ .

Par ailleurs, les chambres d'injection et de compaction se déforment dans le procédé Polyflex. Comme chacun des deux maillages correspond à une des chambres, il va falloir les déformer pour prendre en compte à chaque pas de temps la nouvelle géométrie de ces chambres (figure 5.2). La façon dont les maillages sont déformés est expliquée dans la section suivante. Les conséquences de cette déformation au niveau du

calcul numérique et du couplage avec un algorithme de remplissage sont examinées dans la suite.

Pour la déformation de la chambre d'injection le problème a déjà été traité au chapitre 4, lorsque s'est posée la question de la déformation du maillage pour la simulation du VARI. Donc tout comme pour le VARI, deux maillages sont utilisés pour la chambre d'injection : un fixe pour le calcul des déplacements du renfort et de la pression et un autre se déformant pour le calcul de l'avancement du front de résine. De plus, afin d'assurer la conservation de la quantité de résine injectée, il faut modifier le pas de temps tel qu'expliqué dans la section 4.6.2.

Pour la chambre de compaction, un seul maillage est utilisé : il s'agit du maillage déformé collant à la géométrie de la chambre de compaction. Il sert à la fois pour la résolution des équations (5.2) et pour l'algorithme de remplissage. Aussi, comme les deux calculs sont fait séparément dans chacune des zones, les remplissages le sont aussi. La conséquence de cela est que l'algorithme renvoie pour chacune des zones un pas de temps  $dt$  optimal du point de vue de l'efficacité numérique. Ces deux pas de temps n'ont aucune raison d'être égaux, mais pour assurer la concordance temporelle des calculs effectués en parallèle, il faut qu'ils le soient. Pour cela nous avons choisi comme pas de temps commun (avant modification pour conservation de la masse injectée) le minimum de ces deux pas de temps.



**Figure 5.2** Division et déformation des maillages.

### 5.5.2 Déformation du maillage de la chambre de compaction

Nous venons de voir qu'il est nécessaire de déformer les maillages à chaque itération pour qu'ils épousent la géométrie de la chambre à laquelle ils correspondent. Pour la chambre d'injection cette déformation est naturelle à partir des résultats des équations du VARI (5.1). Par contre, pour la chambre de compaction, la résolution des équations de Stokes n'aide absolument pas pour déformer le maillage correspondant à cette zone. Connaissant la géométrie de la cavité ainsi que celle de la chambre d'injection, la géométrie de la chambre de compaction est parfaitement connue. S'est alors posé la question suivante : comment déformer le maillage de la chambre de compaction de manière simple et rapide tout en s'assurant qu'il reste topologiquement correct ? La solution que nous avons retenue ici consiste à effectuer un calcul d'élasticité en considérant un matériau fictif qui occuperait la chambre de compaction. En effet, il est possible de calculer les déformations que subirait un matériau si on lui imposait les déformations de la chambre de compaction (déformations calculées à partir de celles de la chambre d'injection). Le résultat d'un tel calcul est un champ de déformation à partir duquel il est facile de déformer le maillage de la chambre de compaction de manière analogue à ce qui est fait pour la déformation du maillage de la chambre d'injection à partir des résultats des équations (5.1). En procédant ainsi, on est sûr que le maillage déformé sera topologiquement correct. Dans la pratique ce calcul d'élasticité est effectué avec une précision très faible, ce qui permet de réduire le temps de calcul, surtout que les résultats de ce calcul n'ont aucune signification et ne servent qu'à déformer le maillage.

### 5.5.3 Algorithme

Au final, le couplage entre la résolution de l'injection de résine sur le renfort et de l'écoulement du fluide de compaction est réalisé à partir de l'algorithme qui est présenté sur la figure 5.3.

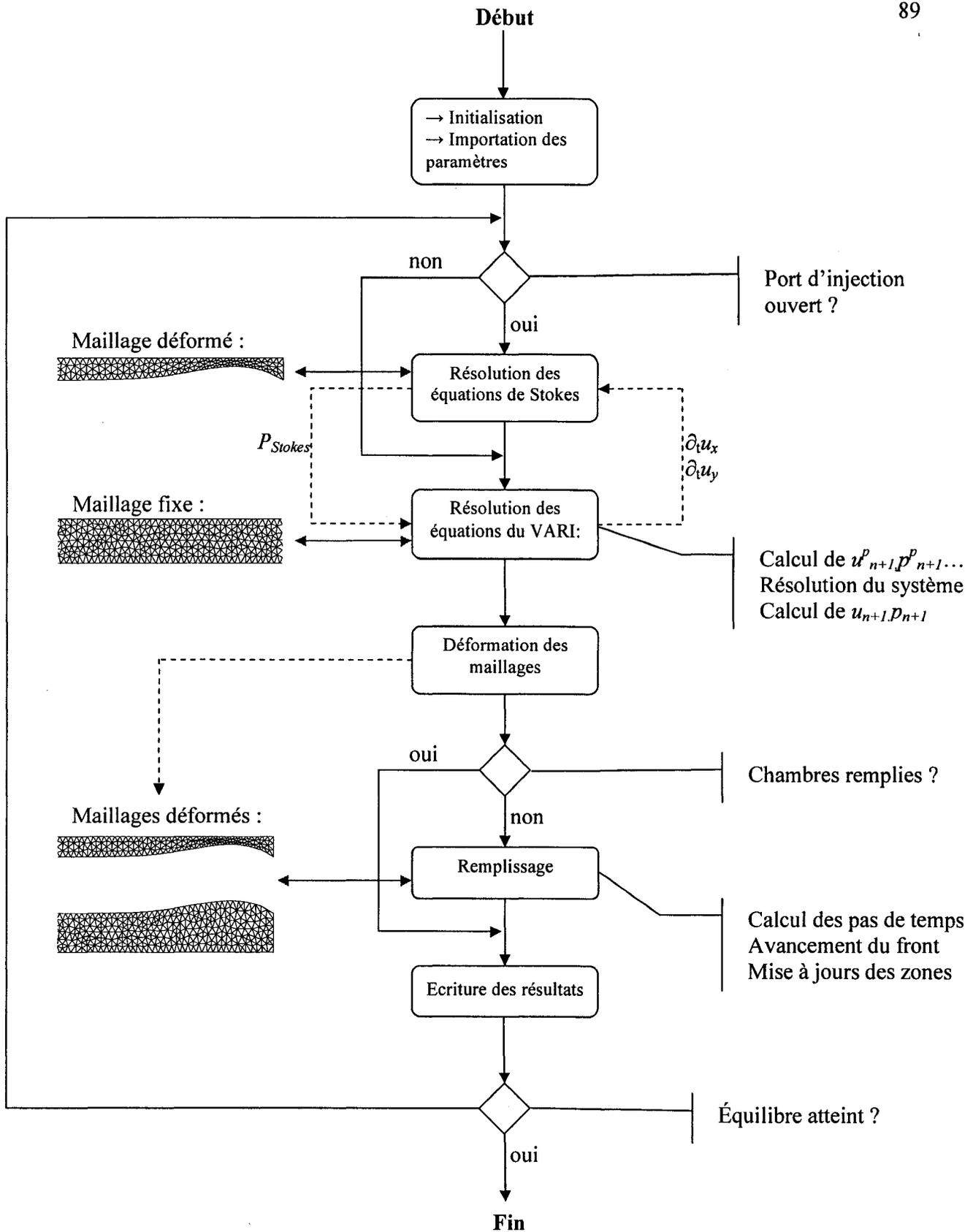


Figure 5.3 Algorithme du code simulant le procédé Polyflex.

## 5.6 Résultats

Dans cette section nous allons voir et analyser les résultats obtenus avec le code simulant le procédé Polyflex et dont l'algorithme est présenté sur la figure 5.3. Pour cela nous procéderons en deux étapes. Dans un premier temps, un cas particulier sera détaillé de manière à montrer les possibilités du code et son apport au niveau de la compréhension des phénomènes sous-jacents au procédé Polyflex. Dans un second temps, à partir d'une série de simulations couvrant la quasi-totalité des cas traités expérimentalement par Briones [41], on établira les limites de validité de l'algorithme.

### 5.6.1 Géométrie et paramètres constants

Un aspect particulier du procédé Polyflex réside dans sa grande modularité. Contrairement au RTM ou au VARI, les paramètres modifiables et ajustables sont plus nombreux (pression d'injection, pression de vide, pression de compaction, hauteur de la cavité, viscosité de la résine et du fluide de compaction, etc...). Cependant, les résultats sont présentés ici de manière à valider le code en comparant les résultats numériques aux expériences de Briones [41]. En conséquent, la géométrie de la cavité et certains paramètres seront identiques pour toutes les simulations présentées par la suite. La géométrie de la cavité et les paramètres fixés pour toutes les simulations sont présentés respectivement sur la figure 5.5 et le tableau 5.2.

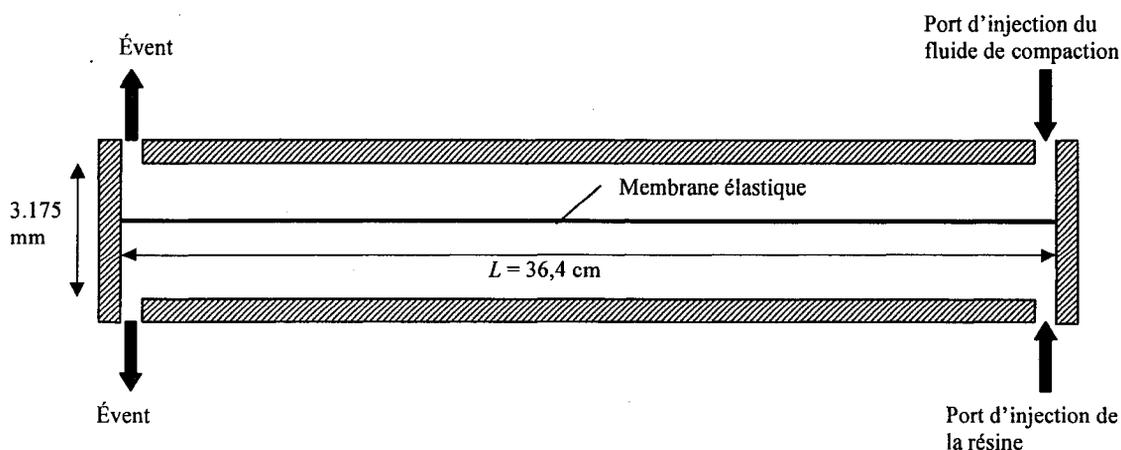


Figure 5.4 Géométrie de la cavité pour l'ensemble des simulations.

Paramètre	Symbole	Valeur
Pression d'injection	$P_{injection}$	105 000 Pa
Pression du vide	$P_{vide}$	25 000 Pa
Viscosité de la résine	$\mu_r$	0,5 Pa.s
Modèle de perméabilité	$K(V_f)$	$K(V_f) = [200 + 11e^{16.8(0.5-V_f)}] 9.87 \times 10^{-13}$
Modèle de compaction	$\sigma(V_f)$	$\sigma = 5.6 \times 10^6 (V_f)^{2.5}$
Module d'Young longitudinal	$E_1$	1,00E+7
Coefficient de poisson	$\nu_{12}$	0,2
Module de cisaillement	$G$	1,00E+06

**Tableau 5.2 Paramètres fixes pour l'ensemble des simulations.**

### 5.6.2 Un exemple : l'essai #49

Dans ce paragraphe nous allons présenter les possibilités du code simulant le procédé Polyflex à travers l'étude d'un cas particulier. Le cas retenu correspond à l'expérience nommé essai #49 par Briones [41] dans ses travaux et dont les paramètres caractéristiques sont regroupés dans le tableau 5.2. Le choix de l'essai #49 n'est pas le seul possible pour présenter les résultats, mais les premiers essais de simulations ont été réalisés avec les paramètres de cet essai, et c'est principalement pour cette raison que nous l'avons choisi cet essai pour présenter les résultats des simulations.

Paramètre	Symbole	Valeur
Nombres couches d'OCF 8610	$N$	2
Critère d'arrêt pour l'injection	$L_r$	$L/2$
Pression de compaction	$P_{compaction}$	4.04 bars
Viscosité du fluide de compaction	$\mu_c$	1 Pa.s

**Tableau 5.3 Paramètres particuliers de l'essai #49.**

De manière similaire aux simulations pour le VARI, les principaux résultats du code sont le champ vectoriel de déformation, le champ de pression et la fonction caractéristique du fluide. Par contre, ici ces champs sont doubles car le code calcule ces champs pour chacun des deux écoulements. Les figures 5.5 à 5.12 présentent ces différents champs pour une simulation réalisée avec les paramètres de l'essai #49. Dans

ces différentes figures, la résine est représentée en rouge et le fluide de compaction en bleu, le vert correspond aux parties sèches. De plus, les chambres d'injection et de compaction ont volontairement été espacées pour faciliter la visualisation.

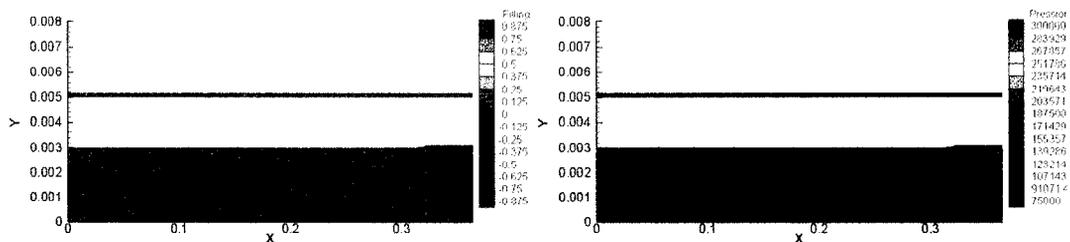


Figure 5.5 Remplissage et pression 0,4 s après le début de l'injection de résine.

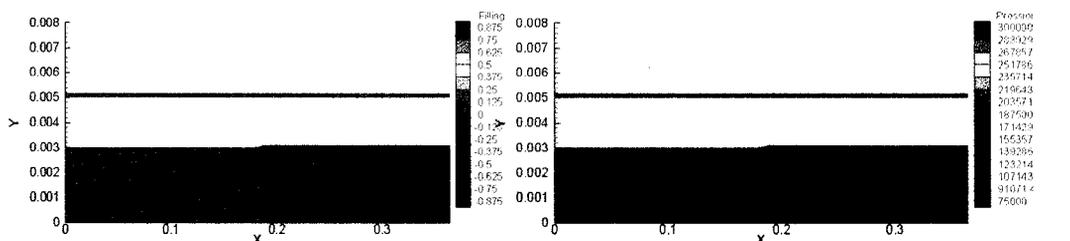


Figure 5.6 Remplissage et pression juste avant la fermeture du port d'injection de résine ( $t = 10,6$  s).

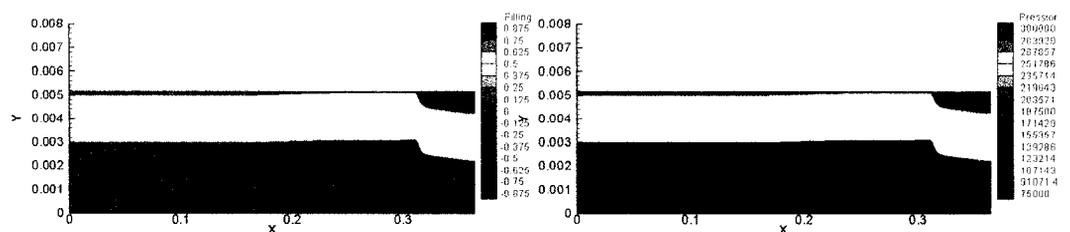


Figure 5.7 Remplissage et pression après l'ouverture du port d'injection du fluide de compaction ( $t = 11,4$  s).

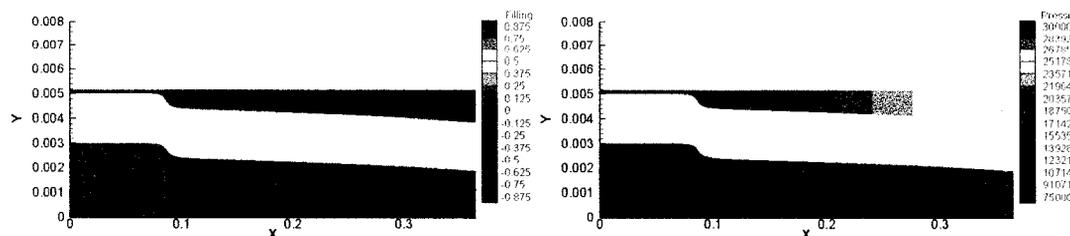
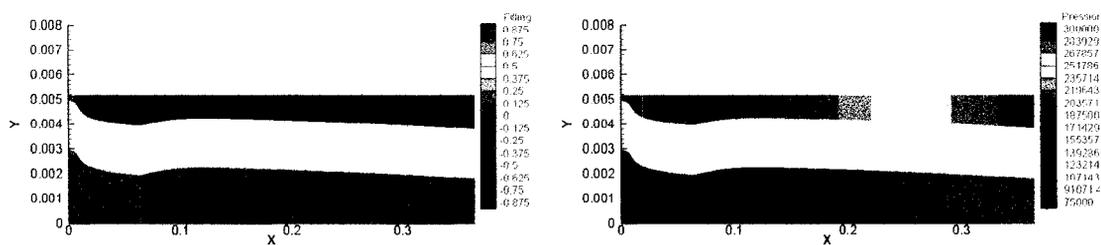
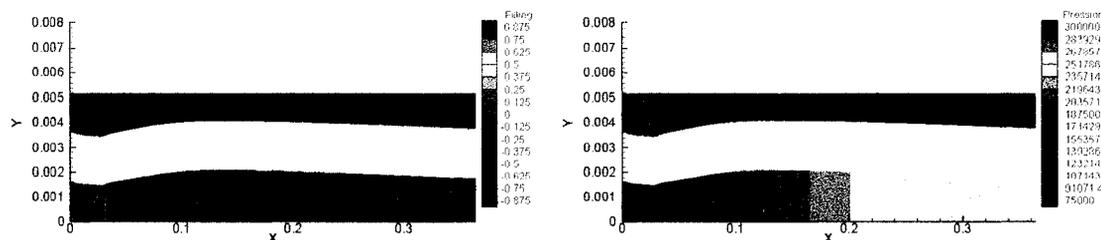


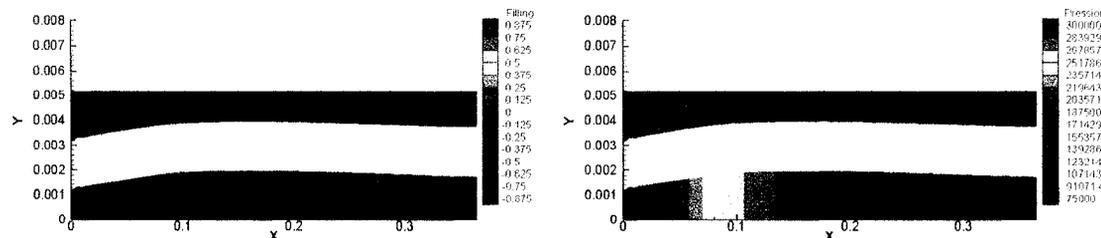
Figure 5.8 Remplissage et pression lors du croisement du front de résine et du front du fluide de compaction ( $t = 15,5$  s).



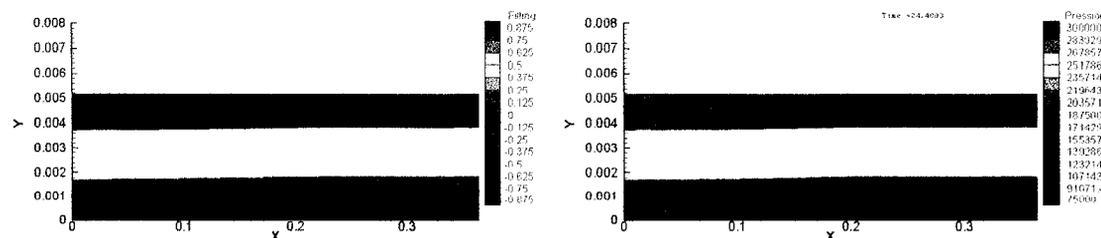
**Figure 5.9 Remplissage et pression à l'instant où le fluide de compaction atteint l'évent ( $t = 17,4$  s).**



**Figure 5.10 Remplissage et pression après la fermeture de l'évent du fluide de compaction ( $t = 18$  s).**



**Figure 5.11 Remplissage et pression à l'instant la résine atteint l'évent ( $t = 23,4$  s).**



**Figure 5.12 Remplissage et pression lorsque l'équilibre est atteint dans la cavité ( $t = 28,9$  s).**

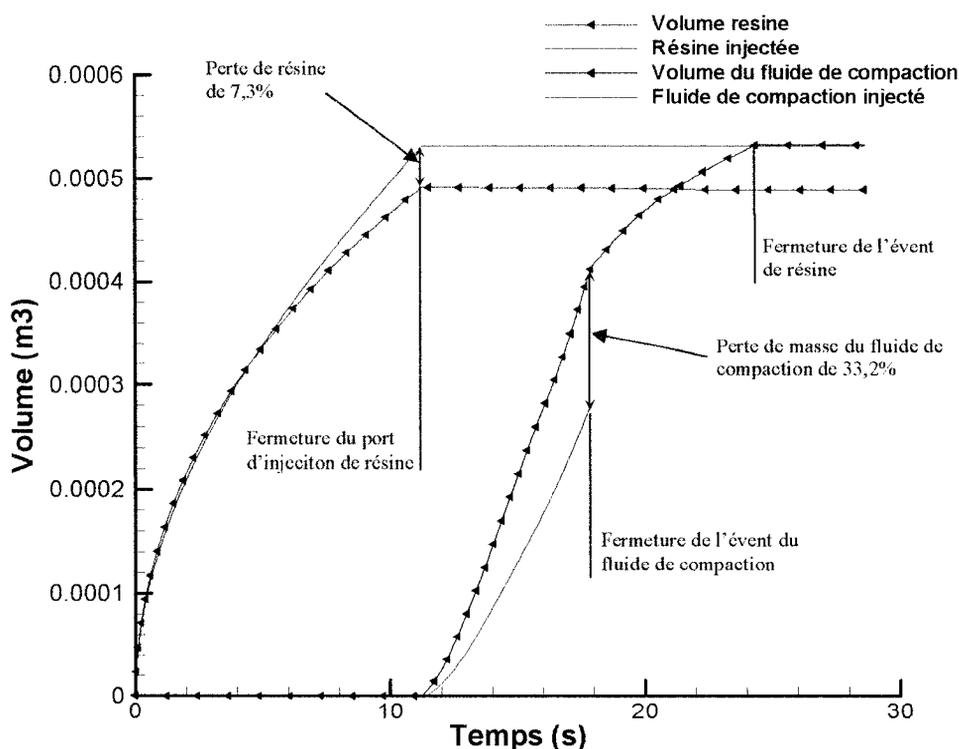
Sur ces différentes figures on retrouve les quatre modes d'écoulement décrits au paragraphe 2.2.2. En effet, au début de l'injection, quand le port d'injection de la résine

est ouvert (figures 5.5 et 5.6), on peut observer un écoulement de type VARI- RTM : la résine imprègne un renfort libre de se déformer près du front, alors que le renfort est fixe en amont du front car il occupe toute la cavité. Cependant ici, cette déformation est petite car la hauteur de la cavité est de 3,175 mm et l'épaisseur de deux couches d'OCF 8610 compressées par un vide relatif de 25 000 Pa est de 3 mm. Ensuite quand la résine atteint la distance correspondant au critère d'arrêt pour l'injection ( $L/2$  pour l'essai #49), le port d'injection de la résine est fermé et celui du fluide de compaction est ouvert. On remarquera sur les figures 5.7 à 5.10 que la compression par le fluide de compaction a pour effet de créer un gradient de pression dans la résine, ce qui se traduit par l'écoulement de cette dernière. Lorsque le fluide de compaction atteint son évent (figure 5.10) la pression augmente rapidement dans la chambre de compaction ce qui a encore pour effet d'accélérer l'imprégnation de la résine. Ceci peut être observé à travers le fort gradient de pression près du front de résine sur les figures 5.10 et 5.11. Enfin quand la résine atteint l'évent, le mode d'écoulement de type CRTM se termine et commence celui de type consolidation (figure 5.12). Le critère d'équilibre est ici le même que celui utilisé pour la simulation du VARI, soit l'uniformité de l'épaisseur du renfort saturé à 5% près.

### 5.6.3 Conservation des masses

D'une manière similaire à ce qui a déjà été expliqué dans le chapitre sur la simulation du VARI, l'utilisation de maillages qui se déforment au cours de la simulation rend délicate la conservation de la masse. Il convient alors de vérifier pour chacun des fluides qu'à chaque pas de temps la variation de volume du fluide dans le moule correspond au flux de ce même fluide à travers son port d'injection. Pour évaluer ces deux grandeurs, nous avons représenté sur la figure 5.13 les volumes de résine et de fluide de compaction dans le moule d'une part (courbe rouge pour la résine et bleu pour le fluide de compaction), et d'autre part la somme des flux à travers le port d'injection calculés à chaque pas de temps (courbe verte pour la résine et cyan pour le fluide de compaction). Tout d'abord, on peut observer que les courbes pour la résine sont semblables à celle observées lors de la simulation du VARI (Figure 4.2). Le schéma n'est donc pas parfaitement conservatif mais à moins de revoir entièrement l'algorithme de

remplissage il faut se contenter des 7,3% de perte de résine. Pour le fluide de compaction la perte est beaucoup plus importante (33,2%), mais il y a une raison à cela. En effet, pour l'écoulement du fluide de compaction, un seul maillage est utilisé : le maillage déformé. De plus la résolution des équations de Stokes ne prend pas en compte les déformations comme cela est le cas pour les équations du VARI, si bien que chaque déformation du domaine occupé par le fluide de compaction correspond à autant de masse créée. Aussi, on peut remarque sur la figure 5.13 que la courbe correspondant à la somme des flux du fluide de compaction s'arrête quand le l'évent du fluide de compaction est fermé. Cela est du au fait que l'on ne résout plus les équations de Stokes après que l'évent soit fermé, car cela est inutile. Cependant, le port d'injection est toujours ouvert et le volume de fluide de compaction dans le moule augment mais il est impossible d'évaluer avec les équations de Stokes le flux de ce fluide à travers le port d'injection.



**Figure 5.13 Quantités de résine et de fluide de compaction injectées dans la cavité en fonction du temps.**

Par ailleurs, sur cette figure on observe bien que la quantité de résine dans la cavité reste constante après que le port d'injection de la résine soit fermé. On peut aussi

remarquer sur cette figure que la quantité du fluide de compaction augmente encore après que son évent soit fermé. Or quand cet évent est fermé, l'imprégnation de la résine n'est pas terminée et il reste encore des parties du renfort sèches. Grâce à la compression du fluide de compaction, la résine avance toujours à travers le renfort et elle vient prendre la place de l'air qui s'échappe par l'évent. Mais comme la quantité de résine reste constante dans la cavité, le volume de résine nécessaire pour remplacer l'air correspond à autant d'espace libre dans la cavité. Ce vide sera rempli par le fluide de compaction puisque son port d'injection demeure ouvert.

#### 5.6.4 Modèle de compaction et instabilité

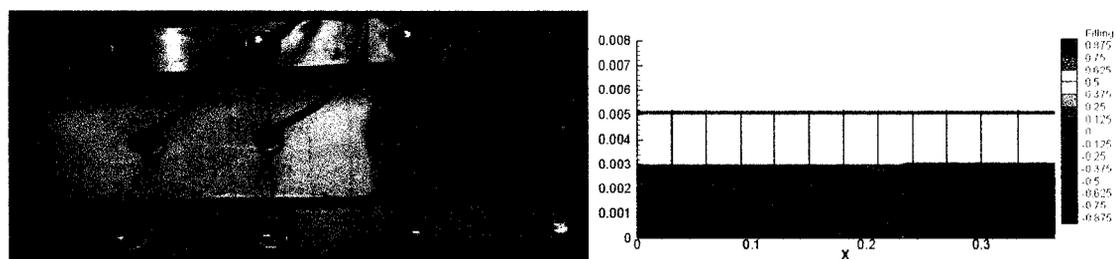
Dans le paragraphe 4.3.4.2 où est détaillé le modèle de compaction, il a été mentionné que le modèle retenu pouvait créer des instabilités numériques lorsque le renfort est fortement compressé. Nous avons observé de telles instabilités lorsque le fluide de compaction vient comprimer le renfort sec après avoir dépassé le front de résine. Ces instabilités apparaissent en générale lorsque la pression de compaction est forte ou lorsque la viscosité de résine est faible. Dans ces deux cas, l'effet responsable des instabilité est le même et est due à une trop grande variation du module d'Young d'un pas de temps à l'autre. La solution idéale à ce problème serait de résoudre les équations du VARI de manière non linéaire ce qui supprimerait ces instabilités provenant de la linéarisation du modèle de compaction. Cependant, il est possible de limiter en partie ces instabilités de manière plus simple sans remettre en cause l'algorithme décrit précédemment. En effet, si les contraintes imposées au renfort varient peu, le module d'Young donné par la formule (4.29) variera également peu. La solution ici consiste donc à lisser les variations de la pression du fluide de compaction. La plus grande variation de cette pression à lieu lorsque l'on ferme l'évent du fluide de compaction car la pression dans la chambre devient instantanément uniforme et égale à la pression de compaction. L'expérience à montrée qu'en lissant cette variation pour que la pression du fluide de compaction passe de sa valeur avant fermeture de l'évent à la pression de compaction en 100 itérations, les instabilité disparaissent pour toutes les jeux de paramètres présentés dans le tableau 5.4.

### 5.6.5 Comparaison avec l'expérience

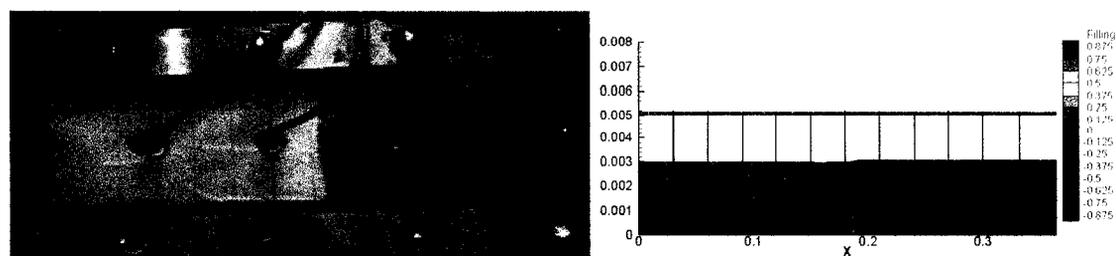
L'étape qui vient naturellement après la présentation des possibilités du code simulant le procédé Polyflex, est sa validation par comparaison avec l'expérience. A cette fin, nous avons utilisé les résultats expérimentaux de Briones [41].

#### 5.6.5.1 Cas de l'essai #49

Pour son étude, Briones [41] a conçu un moule transparent sur lequel il a réalisé des injections par le procédé Polyflex. Avec un tel moule, il lui a été possible de filmer les injections effectuées. Ces films sont maintenant très utiles pour la validation du code Polyflex, car ils permettent de comparer l'avancement des fronts entre les résultats expérimentaux et numériques. Pour l'essai #49, les figures 5.14 à 5.19 montrent de manière parallèle les fronts de résine et du fluide de compaction obtenus expérimentalement et numériquement à différents instants.



**Figure 5.14** Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à  $t = 5$  s.



**Figure 5.15** Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à  $t = 10$  s.

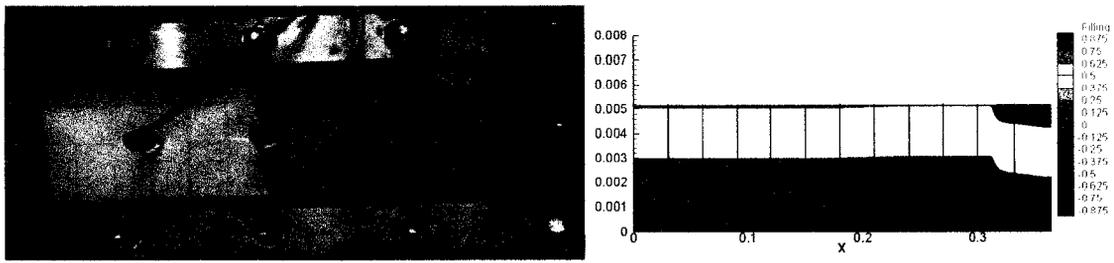


Figure 5.16 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à  $t = 12$  s.

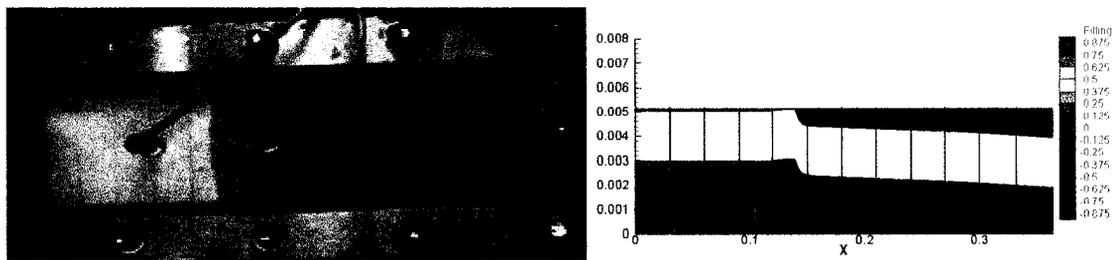


Figure 5.17 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à  $t = 15$  s.

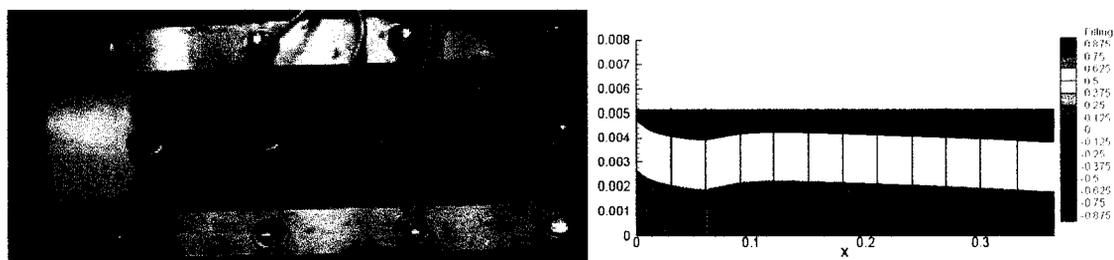


Figure 5.18 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à  $t = 18$  s.

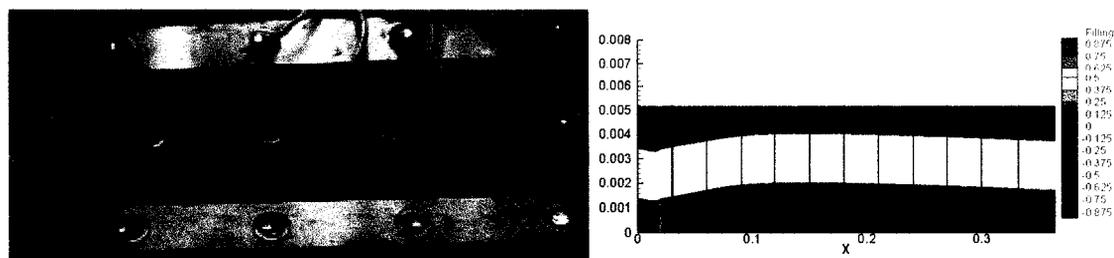


Figure 5.19 Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour l'essai #49 à  $t = 21$  s.

La comparaison sur les figures 5.14 à 5.19 entre les résultats numériques et expérimentaux montre que les résultats du code coïncident avec les essais en laboratoire, mais seulement de façon approximative, surtout après le croisement des deux fluides. Néanmoins, il faut savoir que l'OCF 8610 est un matériau dont les propriétés intrinsèques (densité surfacique, taux de fibres au repos, ...) peuvent varier de 20% d'un échantillon à l'autre. Par conséquent, les modèles de perméabilité et de compaction ne sont, eux aussi, précis qu'à 20% près. Avec de telles incertitudes sur les valeurs des paramètres et des modèles pour l'OCF 8610, les résultats pour l'essai #49 présentés sur les figures 5.14 à 5.19 coïncident avec l'expérience de façon satisfaisante.

Ainsi, il est illusoire d'espérer une coïncidence parfaite entre résultats expérimentaux et numériques pour le procédé Polyflex. Par contre pour affirmer que le code simule bien le procédé Polyflex, il faut que ses résultats coïncident avec les essais en laboratoire (aux incertitudes sur l'OCF 8610 près), pour une large gamme de paramètres différents.

#### **5.6.5.2 Étude exhaustive**

Pour mener à bien cette étude comparative, les résultats expérimentaux que nous avons utilisés sont ceux provenant des travaux de Briones [41]. Dans cette première étude sur Polyflex Briones a réalisé plus de 70 essais. Ici nous en avons choisi 16 pour effectuer la comparaison des résultats numériques expérimentaux. Les 16 essais sélectionnés ont des valeurs extrêmes, si bien qu'ils permettent de couvrir l'ensemble des 70 essais réalisés par L.Briones. Les paramètres particuliers de ces 16 essais sont compilés dans le tableau 5.4 (les autres paramètres pour les simulations étant ceux du tableau 5.2).

	Nombre de couches d'OCF 8610	$L_r$	$p_{compaction}$ (bars)	$\mu_c$ (Pa.s)
essai #6 10	3	1/2	5,88	1
essai #2 8	3	1/2	2,46	1
essai #14 15	3	1/2	5,88	0,1
essai #12 19	3	1/2	2,46	0,1
essai #26 30	3	2/3	4,8	1
essai #22 28	3	2/3	1,8	1
essai #34 35	3	2/3	4,8	0,1
essai #32 39	3	2/3	1,8	0,1
essai #49 50	2	1/2	4,04	1
essai #43 48	2	1/2	1,52	1
essai #55	2	1/2	4,04	0,1
essai #51	2	1/2	1,52	0,1
essai #63	2	2/3	1,96	1
essai #66	2	2/3	0,74	1
essai #71	2	2/3	1,96	0,1
essai #70	2	2/3	0,74	0,1

**Tableau 5.4 : Paramètres des essais servant pour la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux.**

Pour effectuer rigoureusement la comparaison, nous avons défini les cinq critères suivant, qui serviront à l'analyse des résultats :

- $T_{injection}$  : temps entre le début de l'injection et l'instant où la résine atteint la distance correspondant au critère d'arrêt pour l'injection ( $L_r, L$ ) où  $L$  est la longueur du moule et  $0 < L_r < 1$ .
- $T_{croisement}$  : temps entre le début de la compaction et l'instant où les deux fluides se croisent.
- $T_{compaction\_évent\_ouvert}$  : temps entre le début de la compaction et l'instant où le fluide de compaction atteint l'évent.
- $T_{compaction\_évent\_fermé}$  : temps entre la fermeture de l'évent du fluide de compaction et la fin de l'injection de résine.
- $L_{croisement}$  : position de la résine au moment du croisement des deux fluides.

Les valeurs de ces cinq critères sont présentées sur le tableau 5.5 pour les essais en laboratoire et pour les simulations. Dans les colonnes correspondant aux résultats expérimentaux sont reportés les écarts (en rouge) entre deux expériences similaires dans

les cas où plusieurs essais ont été réalisés avec les mêmes jeux de paramètres. Ces écarts montrent que le procédé n'est répétable qu'à environ 15 à 20% près. Cela se justifie par les variations des paramètres intrinsèques de l'OCF 8610. Et surtout ces écarts permettent de se rendre compte que les valeurs expérimentales ne doivent pas être considérées comme des grandeurs absolues, mais qu'en fait seul l'ordre de grandeur doit être pris pour vrai car la valeur précise mesurée n'a que peu de sens vu la mauvaise répétabilité du procédé.

Les résultats des simulations présentés toujours dans le tableau 5.5 coïncident en ordre de grandeur avec les essais expérimentaux pour quatre des cinq critères :  $T_{injection}$ ,  $T_{croisement}$ ,  $T_{compaction\_event\_ouvert}$  et  $L_{croisement}$ . Par contre, le dernier critère,  $T_{compaction\_event\_fermé}$ , présente des écarts considérables surtout dès que la valeur expérimentale est importante. Néanmoins, il est possible d'expliquer en partie de tels écarts. Tout d'abord il est envisageable que ces écarts soient dus au renfort utilisé dans les essais. En effet, il faut savoir que les simulations ont été établies pour un renfort OCF dont la densité surfacique est de  $300 \text{ g.m}^{-2}$ , alors que celui utilisé dans les essais réalisés par Briones [41] a une densité surfacique de  $450 \text{ g.m}^{-2}$ . Cette différence fait que le renfort utilisé dans les essais a une hauteur ou un taux de fibres une fois placé dans le moule supérieur à la valeur utilisée pour les simulations. Dans les deux cas, cela le rend plus difficile à compresser. Or dans le procédé Polyflex, la compression par le fluide de compaction est la plus forte quand l'évent de compaction est fermé. Et si le renfort est plus difficile à compresser, il supporte une part plus importante de la pression du fluide de compaction. Et par conséquent, la résine supporte une part plus faible de cette pression de compaction, ce qui se traduit nécessairement par une imprégnation moins rapide du renfort. Ceci explique pourquoi les temps expérimentaux sont tous plus élevés que ceux des simulations pour le critère  $T_{compaction\_event\_fermé}$ . On peut voir aussi cette insuffisance du modèle de compaction de l'OCF 8610 aux valeurs extrêmement élevées de  $T_{compaction\_event\_fermé}$  pour les essais #2 et #12, qui traduisent vraisemblablement un volume de résine injectée trop faible. En effet, la pression de compaction pour ces deux essais ( $p = 2,52 \text{ bars}$ ) a été calculée avec le modèle de compaction du tableau 5.2 (OCF 8610 de densité surfacique égale à  $300 \text{ kg.m}^{-2}$ ) afin que la hauteur du renfort compressé soit égale à la moitié de la hauteur du moule. Mais si le renfort est plus difficile à compresser que le prévoit le modèle, sa hauteur une fois compressé par une pression de 2.52 bars est supérieure à la moitié de la

cavité. Et il est alors possible que le volume de résine injecté jusqu'à l'atteinte du critère d'arrêt soit insuffisant pour imprégner un renfort dont l'épaisseur est supérieure à la moitié de la cavité. Ce n'est plus la compression du fluide de compaction, qui permet d'achever l'imprégnation de la résine, mais d'autres phénomènes physiques comme la gravité ou la capillarité. D'où les valeurs très élevées de  $T_{compaction\_\acute{e}vent\_ferm\acute{e}}$  mesurées pour ces essais.

Il existe également une autre raison justifiant des valeurs numériques de  $T_{compaction\_\acute{e}vent\_ferm\acute{e}}$  inférieures aux observations expérimentales. On a vu que l'écoulement du fluide de compaction était résolu à partir des équations de Stokes. Or dans ces équations, les termes d'inertie ont été négligés, si bien que numériquement dès que l'évent du fluide de compaction est fermé, la pression dans la chambre de compaction devient uniforme et prend la valeur  $p_{compaction}$ . En réalité, ce n'est pas le cas, il faut un petit laps de temps avant que la pression dans la chambre de compaction atteigne la valeur  $p_{compaction}$ . Dans les simulations, cette variation brusque est lissée de manière à éviter l'apparition de problèmes liés à la non linéarité des équations régissant l'écoulement de la résine. Plus précisément, la pression passe de sa valeur juste avant la fermeture de l'évent à sa valeur maximale ( $p_{compaction}$ ) en cent itérations. Suivant les cas cents itérations correspondent à un temps de 2s à 5s. Dans ses travaux Briones [41] a réalisé des mesures de pression dans la chambre de compaction et ses résultats montrent que la pression dans la chambre de compaction atteint la valeur  $p_{compaction}$  en moyenne 20s après la fermeture de l'évent de la chambre de compaction. Comme l'imprégnation du renfort par la résine est d'autant plus rapide que la pression de compaction est forte, il s'agit d'une autre raison expliquant les faibles valeurs numériques du critère  $T_{compaction\_\acute{e}vent\_ferm\acute{e}}$ .

	Résultats expérimentaux					Résultats simulations															
	$T_{injection}$	$T_{croisement}$	$T_{compaction\_avant\_cure}$	$T_{compaction\_avant\_finis}$	$L_{croisement}$	$T_{injection}$	$T_{croisement}$	$T_{compaction\_avant\_cure}$	$T_{compaction\_avant\_finis}$	$L_{croisement}$											
essai #6	10	22,4	19%	4,5	0,3%	7,8	2%	110,6	8%	0,62L	1%	23,8	+5,8%	5,9	+23,8%	9,1	+14,3%	7,2	-1440%	0,65L	+4,6%
essai #2	8	22,2	12%	18,3	19,6%	33,7	17,5%	505,1	61,7%	0,62L	2%	23,8	+6,7%	17,4	-5,1%	25,9	-30,1%	8,5	-59300%	0,62L	=0%
essai #14	15	19,9		0,6		1,5		67,5		0,57L		23,8	+16,4%	1,4	+57%	2,4	+37,5%	18,6	-262%	0,56L	-1,7%
essai #12	19	25,5		2,1		4,6		3062		0,56L		23,8	-7,1%	3,5	+0,4%	5,8	+20,7%	72,2	-4140%	0,56L	=0%
essai #26	30	40,9	15,9%	11	26%	13,8	30,1%	10,3	22,3%	0,85L	1%	42,9	+4,6%	9,9	-11,1%	11,8	-16,9%	2,8	-267%	0,86L	+1,2%
essai #22	28	47,4	25%	57,6	2%	72,5	1%	168,1	16%	0,8L	3%	42,9	-10,5%	31,3	-84%	37,4	-93,8%	14,8	-1035%	0,82L	+2,4%
essai #34	35	39,5		1,9		2,9		14,5		0,72L		42,9	+7,9%	2,5	+24%	3,4	+14,7%	6,6	-119%	0,75L	+4%
essai #32	39	28,7		8,8		13,6		78,5		0,76L		42,9	+33,1%	6,2	-41,9%	8,5	-60%	24,3	-223%	0,74L	-2,7%
essai #49	50	15,9		4,6		7,9		28,1		0,68L		10,7	-48,6%	4,8	+13,2%	6,7	-8,2%	4,3	-553%	0,76L	+10,5%
essai #43	48	13,3		17,4		32		248,9		0,67L		10,7	-24,2%	13,3	-30,8%	18,3	-74,9%	9,3	-2576%	0,72L	+6,9%
essai #55	12,5	12,5		0,8		1,4		26,6		0,58L		10,7	-16,8%	0,8	=0%	1,4	=0%	5,7	-366%	0,63L	+7,9%
essai #51	12,3	12,3		2,8		6,9		78,5		0,56L		10,7	-14,9%	2,5	-12%	4,2	-64,3%	17,9	-338%	0,60L	+6,9%
essai #63	19,6	19,6		15,4		23,8		20,6		0,92L		23,9	+17,9%	13,7	-12,4%	13,9	-71,2%	0,2	-1020%	0,99L	+7,1%
essai #66	20,6	20,6		43,4		52,8		26,3		0,88L		23,9	+13,8%	31,1	-39,5%	32,9	-60,4%	1,9	-1284%	0,95L	+7,4%
essai #71	19,1	19,1		3,3		4,2		8,7		0,79L		23,9	+20,1%	2,6	-26,9%	3,6	-16,7%	5,4	-61%	0,8L	+1,3%
essai #70	22,6	22,6		11,7		16,6		45,7		0,78L		23,9	+5,4%	5,7	-105%	7,2	-130%	10	-357%	0,8L	+2,5%
			18%		12%		12,60%		27%		2%		15,8%		32,9%		44,6%		5159%		4,1%

**Tableau 5.5 Valeurs numériques et expérimentales des cinq critères pour les 16 essais et écarts relatifs. (Tous les temps sont en secondes, les pourcentages en rouges dans la partie résultats expérimentaux sont les écarts relatifs entre deux expériences similaires dans les cas où plusieurs essais ont été réalisés avec les mêmes jeux de paramètres. Les pourcentages en bleu dans la partie résultats numériques sont les écarts relatifs entre les résultats numériques et expérimentaux; ce pourcentage est précédé du signe + (respectivement -) quand la valeur numérique est plus grande (respectivement plus petite) que la valeur expérimentale.)**

### 5.6.6 Synthèse

Pour conclure ce paragraphe sur les résultats et la validation des simulations, on a vu que le code simulait bien le procédé Polyflex aux incertitudes sur l'OCF 8610 près. Cependant comme le modèle de compaction utilisé ne correspond pas au renfort utilisé par Briones [41] dans ses essais expérimentaux, on observe une forte divergence entre les simulations et les expériences dès que le renfort est fortement comprimé. Des essais d'injection identiques à ceux réalisés par Briones [41], mais avec un renfort OCF 8610 de  $300 \text{ kg.m}^{-2}$  devraient donner des résultats plus proches de ceux des simulations. Néanmoins, les simulations semblent être déjà suffisamment voisines des essais expérimentaux pour que le code soit utilisable afin d'améliorer le procédé et de mieux comprendre les phénomènes physiques mis en jeu lors des injections.

## 5.7 Étude paramétrique

Pour conclure cette étude sur la simulation de Polyflex, le code C++ a été utilisé pour réaliser une étude paramétrique succincte. L'objectif de cette étude est de déterminer l'effet de la viscosité du fluide de compaction sur le temps de remplissage. Les simulations réalisées et les résultats de cette étude sont présentés dans cette dernière section.

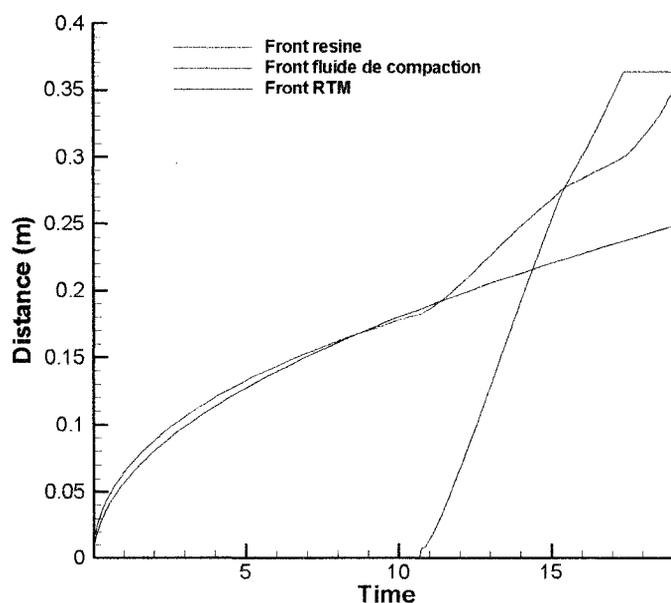
### 5.7.1 Problématique

L'étude des essais expérimentaux et des simulations montre que le fluide de compaction accélère l'imprégnation de la résine de deux manières différentes. En effet, d'une part au début de la compaction le fluide de compaction s'écoule au dessus de la résine et la presse, ce qui a pour effet de l'accélérer. Cette accélération est régulière jusqu'à ce que le fluide de compaction dépasse la résine et à partir de ce moment, il comprime le renfort sec en aval du front de résine, ce qui réduit sa perméabilité et ralentit l'imprégnation de la résine. Puis, quand le fluide de compaction arrive à l'évent, sa pression augmente rapidement et s'uniformise, ce qui a pour effet de comprimer une deuxième fois la résine et donc de l'accélérer à nouveau. Pour s'en persuader il est utile

de regarder le graphe de la figure 5.20 qui représente la position en fonction du temps des fronts de résine et du fluide de compaction obtenues numériquement pour l'essai #49. Sur ce graphe, la courbe bleue a été calculée pour le RTM à partir de la formule théorique suivante :

$$L = \sqrt{\frac{2K(-\Delta p)t}{\mu\phi}} \quad (5.3)$$

Les différents coefficients de la formule (5.3) sont pris égaux à ceux de l'essai #49.



**Figure 5.20 Position des fronts de résine et du fluide de compaction pour l'essai #49.**

Sur cette figure, on observe que jusqu'au temps  $t = 10,7$  s, c'est-à-dire jusqu'à la fermeture du port d'injection de résine, la courbe obtenue par la formule (5.3) coïncide avec celle du front de résine. Or pour l'essai #49 il y a deux couches d'OCF dans la cavité, qui ont une épaisseur de 3 mm une fois compressé par un vide relatif de 0.25 bars. Vu que la hauteur de la cavité est de 3,175 mm le renfort n'a que 0.175 mm pour se déformer. L'injection est donc proche d'une injection RTM et la similitude de ces deux courbes est donc rassurante. Aussi, on voit bien sur cette figure que le front de résine avance rapidement entre le début de l'injection du fluide de compaction et jusqu'au

croisement des deux fluides. Après le croisement le front avance moins rapidement comme cela a été expliqué précédemment. Enfin, dès que le fluide de compaction atteint l'évent, ce qui correspond au palier de la courbe verte, le front de résine avance à nouveau plus vite.

Les essais expérimentaux et les simulations montrent tous deux qu'un fluide de compaction ayant une forte viscosité pousse plus efficacement la résine pendant le début de la compaction, comme le prouvent les positions de croisement plus élevée pour les essais avec le fluide de compaction dont la viscosité est égale à 1 Pa.s. En même temps, intuitivement, il est évident qu'un fluide de faible viscosité va se rendre plus rapidement à l'évent et accélérer ainsi l'avancement de la résine. Même s'il pousse moins la résine avant de la dépasser il est possible que le temps d'injection final soit plus faible.

En résumé, un fluide de compaction de forte viscosité pousserait d'avantage la résine avant de la dépasser qu'un fluide de faible viscosité. En revanche, un fluide de faible viscosité, en se rendant plus rapidement à l'évent, pousserait d'avantage la résine après l'avoir dépassée qu'un fluide de forte viscosité. C'est pour vérifier ces hypothèses et déterminer la viscosité qui rendrait le temps d'injection minimal que nous avons réalisé cette étude paramétrique sur la viscosité du fluide de compaction.

### 5.7.2 Plan d'expérience

Pour cette étude nous avons réalisé vingt simulations différentes. Dans ces simulations, seule la viscosité du fluide de compaction ou la pression de compaction varient. Les autres paramètres restent constant. Les paramètres constants pour l'ensemble des simulations sont reportés dans le tableau 5.6. Pour étudier l'effet de la viscosité, nous avons choisi cinq valeurs pour la viscosité du fluide de compaction :  $\mu_c = 0.05$  Pa.s, 0.1 Pa.s, 0.5 Pa.s, 1 Pa.s et 5 Pa.s. Pour vérifier s'il existe aussi une influence de la pression de compaction, nous avons choisi quatre pressions de compaction :  $p_{compaction} = 1$  bar, 2 bars, 3 bars et 4 bars. Ceci donne bien vingt simulations à effectuer en tenant compte de toutes les combinaisons possibles.

Paramètre	Symbole	Valeur
Pression d'injection	$P_{injection}$	105 000 Pa
Pression du vide	$P_{vide}$	25 000 Pa
Viscosité de la résine	$\mu_r$	0,5 Pa.s
Modèle de perméabilité	$K(V_f)$	$K(V_f) = [200 + 11e^{16.8(0.5-V_f)}] 9.87 \times 10^{-13}$
Modèle de compaction	$\sigma(V_f)$	$\sigma = 5.6 \times 10^6 (V_f)^{2.5}$
Module d'Young longitudinal	$E_1$	1,00E+07
Coefficient de poisson	$\nu_{12}$	0,2
Module de cisaillement	$G$	1,00E+06
Nombres couches d'OCF 8610	$N$	2
Critère d'arrêt pour l'injection	$L_r$	L/2

Tableau 5.6 Paramètres constants pour l'ensemble des simulations.

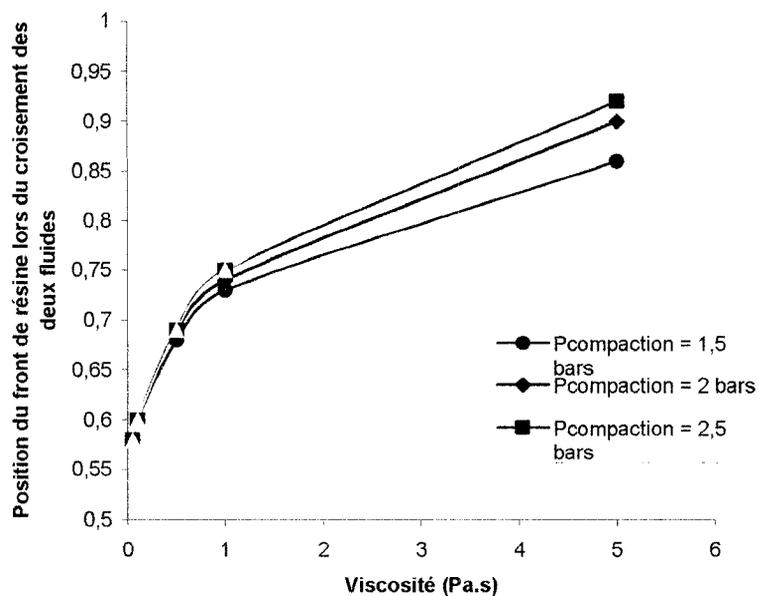
### 5.7.3 Résultats et analyse

Pour analyser les résultats des vingt simulations, nous allons réutiliser les cinq critères définis lors de la validation du code C++. Les valeurs de ces critères pour chacune des simulations sont reportées dans le tableau 5.7.

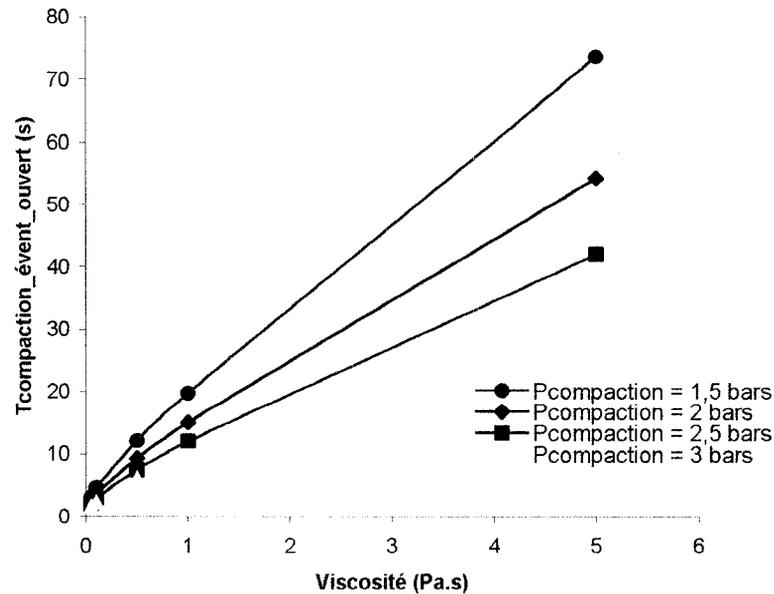
	$P_{compaction}$	$\mu_{compaction}$	$T_{injection}$	$T_{croisement}$	$T_{compaction\_event\_ouvert}$	$T_{compaction\_event\_fermé}$	$T_{total}$	$L_{croisement}$
essai #1	1,5	0,05	10,7	1,9	3,1	19,1	32,9	0,58L
essai #2	1,5	0,1	10,7	2,8	4,6	18,1	33,4	0,6L
essai #3	1,5	0,5	10,7	8,3	12,1	15,2	38	0,68L
essai #4	1,5	1	10,7	14,6	19,8	14,1	44,6	0,73L
essai #5	1,5	5	10,7	64,9	73,5	10,6	94,8	0,86L
essai #6	2	0,05	10,7	1,4	2,5	13,8	27	0,58L
essai #7	2	0,1	10,7	2,1	3,6	13,1	27,4	0,6L
essai #8	2	0,5	10,7	6,3	9,3	11,5	31,5	0,69L
essai #9	2	1	10,7	11	15	10,2	35,9	0,74L
essai #10	2	5	10,7	49,1	54,2	5,8	70,6	0,9L
essai #11	2,5	0,05	10,7	1,1	2	11,2	23,9	0,58L
essai #12	2,5	0,1	10,7	1,7	2,9	10,4	24	0,6L
essai #13	2,5	0,5	10,7	5	7,5	8,6	26,8	0,69L
essai #14	2,5	1	10,7	8,8	12	7,6	30,2	0,75L
essai #15	2,5	5	10,7	39,1	42	4,3	56	0,92L
essai #16	3	0,05	10,7	0,9	1,7	10,1	22,3	0,58L
essai #17	3	0,1	10,7	1,4	2,4	8,6	21,7	0,6L
essai #18	3	0,5	10,7	4,1	6,2	7,3	24,2	0,69L
essai #19	3	1	10,7	7,1	9	6,5	27,1	0,75L
essai #20	3	5	10,7	32,4	34	1,9	46,6	0,95L

Tableau 5.7 Valeur des critères de comparaison pour les vingt simulations de l'étude paramétrique. (Tous les temps sont en secondes et  $L$  représente la longueur de l'échantillon rectangulaire).

La première conclusion de cette étude confirme les deux hypothèses formulées précédemment. En effet, tout d'abord le graphe de la figure 5.21 montre qu'indépendamment de la pression de compaction, les deux fluides se croisent plus loin dans le moule pour des fluides de compaction de forte viscosité. Ceci confirme le fait qu'un fluide de compaction de forte viscosité pousse mieux la résine avant le croisement. D'autre part, le graphe de la figure 5.22 montre que le temps  $T_{compaction\_évent\_ouvert}$  est plus faible pour des fluides de compaction de faible viscosité, ce qui traduit bien le fait qu'un fluide de compaction de faible viscosité se rend bien plus rapidement à l'évent.

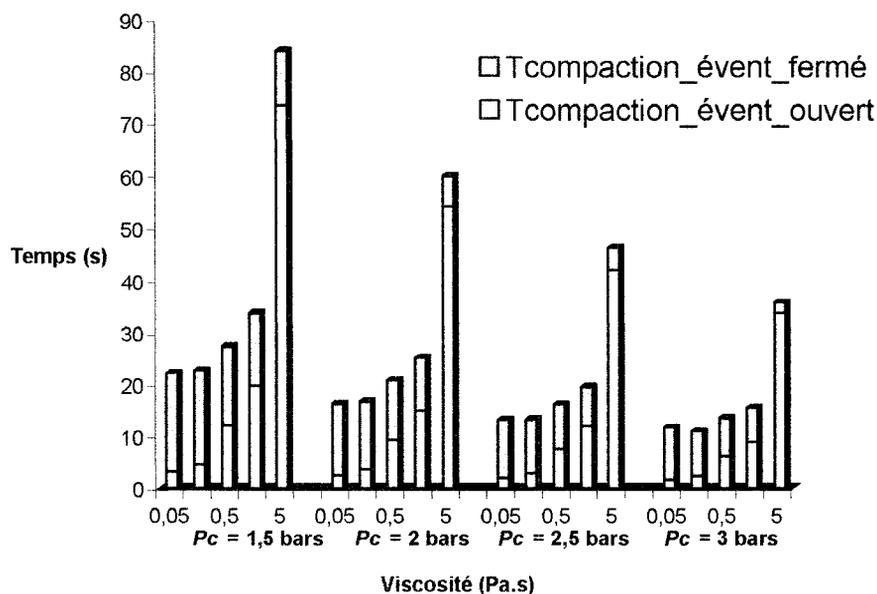


**Figure 5.21** Position du front de résine lors du croisement des deux fluides pour plusieurs valeurs de la pression de compaction.



**Figure 5.22**  $T_{compaction\_évent\_ouvert}$  en fonction de  $\mu_c$  pour plusieurs valeurs de la pression de compaction.

Un fluide de compaction de faible viscosité se rend plus vite à l'évent, mais lorsqu'il y arrive, la résine est plus loin de l'évent. On peut donc s'attendre à ce que le temps  $T_{compaction\_évent\_fermé}$  soit plus long pour une fluide de faible viscosité, puisque la résine a plus de chemin à parcourir pour arriver à l'évent. Le graphe de la figure 5.23 représente sous forme d'histogramme les temps  $T_{compaction\_évent\_ouvert}$  et  $T_{compaction\_évent\_fermé}$  en fonction de la viscosité (chaque groupe de colonnes correspond à une série de simulations à pression constante, la pression augmentant de gauche à droite). Sur ce graphique, on peut observer que le temps  $T_{compaction\_évent\_fermé}$  décroît quand la viscosité du fluide de compaction augmente comme l'on vient de le supposer. Ainsi un fluide de forte viscosité met plus de temps à arriver à l'évent. Cependant, une fois qu'il y est arrivé, le temps nécessaire pour que l'injection de résine se termine est plus court.



**Figure 5.23**  $T_{\text{compaction\_évent\_ouvert}}$  et  $T_{\text{compaction\_évent\_fermé}}$  en fonction de  $\mu_c$  pour plusieurs valeurs de la pression de compaction.

La question qu'il est naturel de se poser alors est de savoir quelle viscosité du fluide de compaction minimise le temps d'injection total. Ici le temps  $T_{\text{injection}}$  est le même pour toutes les simulation. Le temps total d'injection du procédé Polyflex est la somme des trois temps intermédiaires  $T_{\text{injection}}$ ,  $T_{\text{compaction\_évent\_ouvert}}$  et  $T_{\text{compaction\_évent\_fermé}}$ . La figure 5.23 permet de trouver le temps minimum. L'injection est plus rapide pour un fluide de compaction de faible viscosité et aussi que le temps d'injection diminue quand la pression de compaction augmente (ce dernier résultat avait déjà été montré expérimentalement par Briones [41]).

En conclusion, ce qu'il faut retenir de cette étude paramétrique sur la viscosité du fluide de compaction, c'est qu'un fluide visqueux pousse plus loin la résine avant de la dépasser mais comme cela ce fait beaucoup plus lentement, l'injection est en fait beaucoup plus rapide avec un fluide de compaction de faible viscosité.

## 5.8 Conclusion

Finalement, nous avons vu dans ce chapitre un modèle couplant les deux écoulements du procédé Polyflex. Ce modèle a conduit au développement d'un algorithme et d'un code programmé en C++ simulant Polyflex. Les résultats de ce code ont ensuite été présentés et comparés avec les expériences de Briones [41]. Enfin, une étude paramétrique réalisée à l'aide de ce code a montré que le temps d'injection diminue lorsque la viscosité du fluide de compaction diminue et que la pression de compaction augmente. Cependant, il ne faut pas oublier que la validation du code a souligné une divergence entre les résultats expérimentaux et numériques après que le fluide de compaction ait atteint l'évent. Il faut donc prendre avec précaution les résultats cette étude paramétrique.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif du projet de recherche présenté à travers ce mémoire était la simulation du procédé Polyflex. Même si les résultats des simulations ne coïncident qu'en partie avec les essais expérimentaux, cet objectif peut être considéré comme atteint. Un modèle théorique a été établi et présenté dans ce mémoire. Ce modèle a conduit à la résolution des deux écoulements apparaissant lors d'une injection Polyflex, soit un écoulement de Stokes et un écoulement dans un milieu poreux déformable. La résolution des équations de Stokes a été présentée au chapitre 3. Cette résolution est fondée sur l'utilisation de l'élément bulle, qui présente le meilleur compromis à notre connaissance entre précision numérique et temps de calcul.

L'écoulement dans un milieu poreux déformable a été simulé dans le chapitre 4 en résolvant de manière couplée la loi de Darcy et l'équation générale de la consolidation. Cette résolution a été appliquée à l'injection par le procédé VARI. Cependant, le code n'a pas été validé par comparaison avec l'expérience par manque de données expérimentales. Une telle validation permettrait de donner plus de crédit au travail présenté dans le chapitre 4. Par ailleurs, une multitude de petites améliorations du code sont possible. On peut penser notamment à l'ajout de matrices de rotation dans les équations pour traiter les cas où le renfort n'est pas orienté selon l'un des axes. Il serait possible également d'adapter les conditions limites pour simuler des injections à débit constant, etc.

Le couplage des deux écoulements a ensuite été détaillé au chapitre 5 dans lequel l'algorithme et le code simulant le procédé Polyflex ont été présentés. Les simulations de Polyflex ont ensuite été comparées aux expériences réalisées par Briones [41]. Les simulations et les expériences coïncident (aux incertitudes sur L'OCF8610 près) jusqu'à ce que le fluide de compaction atteigne l'évent. Les divergences après la fermeture de l'évent du fluide compaction peuvent être imputées au modèle de compaction de l'OCF 8610 utilisé dans les simulations. Sur ce point, des essais expérimentaux et des

simulations réalisées avec un renfort parfaitement caractérisé en perméabilité et en compaction seraient utiles et devraient permettre de valider entièrement le code Polyflex.

Pour conclure ce travail, une étude paramétrique menée avec le code C++ a montré que diminuer la viscosité du fluide de compaction réduit le temps d'injection. Mais au delà de ce simple résultat, cette étude illustre le potentiel du code pour la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents au procédé Polyflex, ce qui justifie et a motivé ce développement. Finalement, l'apport essentiel de cette maîtrise est un nouvel outil performant qui sera très utile pour les prochaines études en vue d'améliorer et d'optimiser le procédé Polyflex.

1. MALLICK P.K., 1993. *Fiber-reinforced composites: materials, manufacturing and design*. 2<sup>nd</sup> ed. New York: Marcel Dekker. 566p.
2. RUDD C.D., 1997. *Liquid moulding technologies resin transfer moulding, structural reaction injection moulding, and related processing techniques*. Cambridge, Woodhead Publ. xviii, 457 p.
3. COGNARD P., 1989. *Les applications industrielles des matériaux composites I & II*, Edition du Moniteur, Paris, 473p.
4. GAY D., 1989. *Matériaux composites*, Editions Hermes, Paris. 483p.
5. CAUCHOIS J.P., *R.T.M Process*, Edition Syntech, 1998, 228p.
6. PARNAS R.S., *Liquid Composite Molding*, Hanser Gardner, 2000, 180p.
7. WILLIAMS C., SUMMERSCALES J. & GROVE S., «Resin infusion under flexible tooling (RIFT): a review», *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, v 29, n 5-6, 1996, p 517 – 524.
8. BEAR J., *Dynamics of Fluids in Porous Media*. American Elsevier. Environmental Science Series, 764p.
9. COUSSY O., 1991. *Mécanique des Milieux Poreux*. Edition Technip, Paris, 437p.
10. DARCY H., 1856. *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Paris.
11. TROCHU F., GAUVIN R., et GAO D. M. 1993. «Numerical Analysis of the Resin Transfert Moulding Process by the Finite Element Method». *Advances in Polymer Technology*, vol 12, n4, pp329-342.

12. GAUVIN R., TROCHU F., LEMENN Y. & DIALLO L., 1996. Permeability Measurement and Flow Simulation Through Fibre Reinforcement. *Polymer Composites*, February, vol 17, n 1, pp 34-42.
13. DULLIEN F.A.L., 1979. *Porous Media-Fluid Transport and Pore Structure*. Academic Press, 396p.
14. PHELAN F. R., LEUNG Y. et PARNAS R. S., 1994. Modelling of Microscale Flow in Unidirectional Fibrous Porous Media. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, vol 7, July, pp208-218.
15. GAUVIN R., TROCHU F., LEMENN Y. & DIALLO L. «Permeability measurement and flow simulation trough fiber reinforcement », *Polymer composite*, vol 17, n 1, 1996, p 34 - 42.
16. ZIENKIEWICZ O. C., CHANG C. T. et BETTESS P, 1980. «Drained, Undrained, Consolidating and Dynamic behavior Assumptions in Sols; Limits of Validity», *Geotechnique*, vol 30, pp 385-395.
17. ZIENKIEWICZ O. C., 1982. *Basic Formulation of Static and Dynamic Behavior of Soil and other Porous Materials*. J.B. Martin ed, London.
18. BIOT M. A., 1941. «Theory General Theory of Three-Dimensional Consolidation», *Journal of Applied Physics*, February, vol 12, pp155-161.
19. TERZAGHI K., 1942. *Theoretical soil mechanics*. John Wiley And Sons, New York, 510p.
20. ROBITAILLE F. et GAUVIN R., 1998. «Compaction of Textile Reinforcements for Composites Manufacturing. I: Review of Experimental Results», *Polymer Composites*, vol 19, n 2, pp 198-216.

21. ROBITAILLE F. et GAUVIN R., 1998. «Compaction of Textile Reinforcements for Composites Manufacturing. II: Compaction and relaxation of dry and H<sub>2</sub>O-saturated woven reinforcements», *Polymer Composites*, vol 19, n 5, pp 543-557.
22. ROBITAILLE F. et GAUVIN R., 1999. «Compaction of Textile Reinforcements for Composites Manufacturing. III: Reorganization of the fiber network», *Polymer Composites*, vol 20, n 1, pp 48-61.
23. GAUVIN R. et TROCHU F., 1998. «Key issues in numerical simulation for Liquid Composite Molding Processes», *Polymer Composites*, v 19, n 3, June, p 233 - 240.
24. LEBRUN G., GAUVIN R. et KENDALL K.N., 1996. «Experimental investigation of resin temperature and pressure during filling and curing in a flat steel RTM mould», *Composites - Part A: Applied Science and Manufacturing*, v 27, n 5, p 347 - 355.
25. LEBRUN G. et GAUVIN R., 1995. «Heat transfer analysis in a heated mold during the impregnation phase of the resin transfer molding process», *Journal of Materials Processing and Manufacturing Science*, v 4, n 2, Oct, p 81 - 104.
26. LUCE T., ADVANI S. G., HOWARD J. et PARNAS R., 1995. «Permeability characterization. Part 2: flow behavior in multiple-layer preforms», *Polymer Composites*, v 16, n 6, Dec, p 446 – 458.
27. HAMMAMI A., GAUVIN R. et TROCHU F., 1998,. «Modeling the edge effect in liquid composites molding», *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, v 29, n 5-6, pp 603 – 609.

28. PHAM X. T., TROCHU F. et GAUVIN R., 1998. «Simulation of compression resin transfer molding with displacement control», *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, v 17, n 17, p 1525-1556.
29. PHAM X. T., et TROCHU F., 1999. «Simulation of compression resin transfer molding to manufacture thin composite shells», *Polymer Composites*, v 20, n 3, Jun, p 436-459.
30. AVHIM V., 2004. *Simulation Numérique du Procédé VARI et ses Dérivés*. Mémoire de maîtrise ès sciences Appliquées, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique de Montréal.
31. FORTIN A. et GAROB A., 2000. *Les éléments finis de la théorie à la pratique*. Polycopiés du cours, École Polytechnique de Montréal, 257p.
32. ALLAIRE G., 2003. *Analyse numérique et optimisation*. Polycopié du cours MAP 431. École Polytechnique, 437p.
33. FRANCA L. & FREY S., 1992. « Stabilized finite element methods. II. The incompressible Navier-Stokes equations», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v 99, n 2-3, Sep, pp 209 – 233
34. ARNOLD D., BREZZI N. & FORTIN M., 1984. «A stable finite element for the Stokes problem», *Calcolo*, vol XXI, fasc IV, pp 337 - 344.
35. FRANCA L. P. et OLIVEIRA S. P., 2003. «Pressure Bubbles Stabilization Features in the Stokes Problem», *Computing Methods in Applied Mechanic Engineering*, vol 192, pp 1929 – 1937.

36. PIERRE R., 1995. «Optimal Selection of the Bubble Function in the Stabilization of the P1-P1 Element for the Stokes Problem», *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol 32, n 4, pp1210 – 1224.
37. YONGDEOK K. et SUNGYUN L, 2000. «Modified Mini Element for the Stokes Problem», *Advances in Computational Mathematics*, vol 12, pp261-272.
38. TROCHU, F., RUIZ, E., DEMARÍA, C. 2000. *Numerical Simulation of the Filling of an RTM Composite Part. Final Report on the analysis and simulations performed using LCMFlot software for VEC*. Montréal (Québec), Canada.
39. MAOSONG H., ZHONG Q. Y. et ZIENKIEWICZ O. C., 2004. «On the Stable Finite Element Procedures for Dynamic Problem of Saturated Porous Media». *Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol 61, pp 1421 – 1450.
40. ZIENKIEWICZ O,C., 2000. *Finite Element Method (5th Edition) Volume 1 - The Basis*. Elsevier ed, 689p.
41. BRIONES L., 2005. *Injection flexible dans un moule isotherme : conception et analyse d'un nouveau procédé de fabrication de composites*. Mémoire de maîtrise, Département de génie mécanique, École Polytechnique de Montréal.

## ANNEXE A

### NOTIONS SUR L'ALGORITHME DE REMPLISSAGE

#### A.1 Introduction

La finalité des simulations des procédés LCM est de calculer l'avancement du front de résine. Les équations régissant l'écoulement de résine dans les fibres permettent de calculer le champ de vitesse de la résine mais pas la position de son front. Cependant, connaissant le champ de vitesse de la résine, il est possible d'évaluer l'avancement du front d'un pas de temps à l'autre. Pour cela il faut coupler le calcul éléments finis qui renvoie le champ de vitesse à un algorithme de remplissage qui utilise ces informations pour calculer l'avancement du front de résine.

Il existe plusieurs types d'algorithmes reposant sur des principes différents. Dans cette annexe nous ne traiterons que de celui utilisé dans cette étude et qui provient du logiciel ProFlot. Cet algorithme calcule l'avancement du front de résine en évaluant à chaque pas de temps la fonction caractéristique de la résine élément par élément. Plus précisément, à chaque itération chaque triangle du maillage se verra attribuer une valeur entre 0 et 1 établie à partir de la formule suivante :

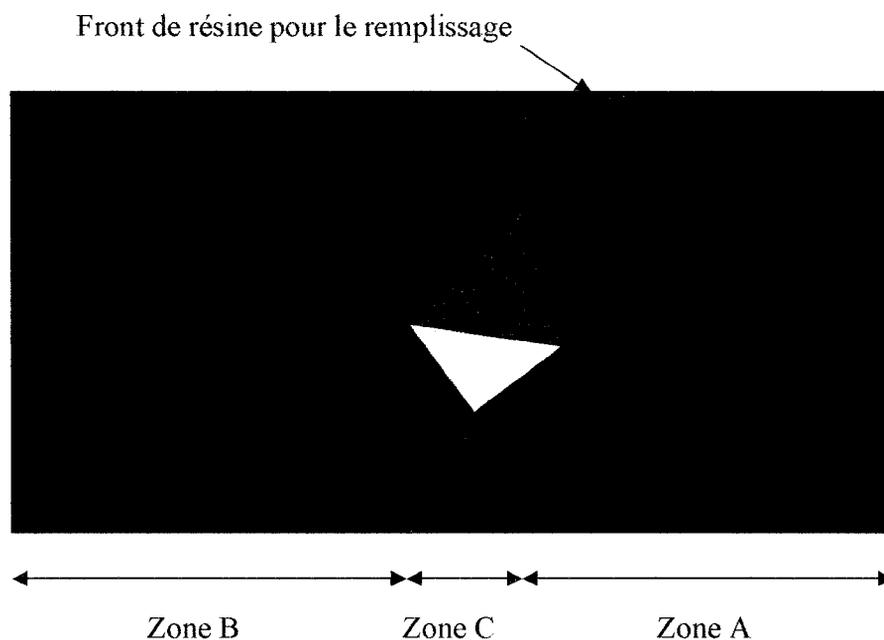
$$\xi_{\text{élément}} = \frac{V_{\text{élément}}^{r \sin e}}{V_{\text{élément}} \times \phi} \quad (\text{A.1})$$

La valeur 1 exprimant que le triangle est complètement rempli de résine, la valeur 0 exprimant qu'il n'y a aucune résine dans le triangle. Et les valeurs strictement comprises entre 0 et 1 expriment le fait que le triangle est partiellement rempli de résine, ou encore que le front de résine coupe ce triangle.

#### A.2 Principe

Le principe de l'algorithme de remplissage du logiciel ProFlot, repose sur la division du maillage en trois zones (Fig. A.1):

- Une zone A contenant les éléments remplis de résine et dont la fonction caractéristique vaut 1.
- Une zone B contenant les éléments vides de résine et dont la fonction caractéristique vaut 0.
- Une zone C contenant les éléments partiellement remplis de résine et dont la fonction caractéristique est comprise entre 0 et 1.



**Figure A.1** Les différentes zones de l'algorithme de remplissage.

La frontière entre les zones A et C est appelée front de résine et joue un rôle particulier dans le remplissage. En effet, à chaque pas de temps, le calcul par éléments finis fournit le champ de vitesse de la résine. À partir de cette information, il est possible de calculer le flux de résine par unité de temps à travers chacune des faces du front de résine. L'étape suivante consiste à déterminer le pas de temps optimal. Pour cela on se donne une valeur  $dt$ . À partir de  $dt$  et des flux calculés, il est possible d'estimer la quantité de résine qui entre dans chacun des éléments de la zone B. La fonction caractéristique des éléments de cette zone est alors mise à jour. Cependant en procédant ainsi, il est possible que les valeurs obtenues par la formule (A.1) dépassent la valeur 1, ce qui n'a pas de sens. Il faut

alors déterminer le plus petit pas de temps tel qu'au moins un des éléments de la zone B soit complètement remplie de résine ou ce qui est équivalent qu'au moins un des éléments de la zone B voit sa valeur de la fonction caractéristique passer à 1. Enfin, une fois le pas de temps déterminé, on recalcule les valeurs de la fonction caractéristique pour chaque élément et on met à jour les zones A, B et C.

En fait, afin d'améliorer l'efficacité de l'algorithme de remplissage, le pas de temps  $dt$  est calculé de manière à ce que au moins un élément de la zone B est une valeur égale à une constante supérieure à 1 (généralement 1,2). En procédant ainsi, un certain nombre d'éléments de la zone B présentent une valeur de la fonction caractéristique supérieure à 1 ce qui traduit qu'ils contiennent un volume de résine supérieur à leur volume. Cet excédant est alors "donné" à ses voisins dont la fonction caractéristique est inférieure à 1. En procédant ainsi, on perd en précision, au niveau de la position du front de résine, mais en contre partie, l'avancement du front à chaque itération est plus important, ce qui avantageux en temps de calcul car cela réduit le nombre d'itérations nécessaires pour compléter la simulation.

## ANNEXE B

### INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA CAVITÉ

#### B.1 Introduction

Le chapitre 5 de ce mémoire se termine par une étude paramétrique sur la viscosité du fluide de compaction. Au delà des résultats de cette étude, sa raison d'être est avant tout de démontrer les possibilités du code en tant qu'outil de travail pour comprendre et améliorer le procédé Polyflex. Il est naturel de vouloir utiliser ce code pour étudier l'effet d'autres paramètres. Dans cette annexe nous allons justement voir les résultats d'une étude portant sur l'effet de l'épaisseur de la cavité du moule.

#### B.2 Simulations et résultats

Pour étudier l'effet de l'épaisseur de la cavité, nous avons effectué trois simulations avec trois épaisseurs différentes  $H = 2$  mm,  $H = 3,175$  mm et  $H = 4,25$  mm. Pour les autres paramètres des simulations nous avons repris ceux de l'essai #49, qu'on peut trouver dans les tableaux 5.2 et 5.3. Les résultats de ces trois simulations sont reportés dans le tableau B.1.

	$H$	$T_{injection}$	$T_{croisement}$	$T_{compaction\_event\_ouvert}$	$T_{compaction\_event\_fermé}$	$T_{total}$	$L_{croisement}$	$V_f$
essai #1	2	35.3	17.6	24.3	45.8	105.4	0.67L	33,2%
essai #2	3,175	10.7	5.3	6.7	4.3	21.7	0.76L	19,6%
essai #3	4,250	17.8	3	4.8	3.8	26.4	0.72L	16,7%

**Tableau B.1 : Résultats des simulations. Tous les temps sont en secondes.**

Parmi ces trois essais, l'essai #2 est considéré comme essai de référence et est en tous points identique à l'essai #49. Dans la suite, les différents temps de cet essai seront

comparé à ceux des autres pour étudier l'effet d'une cavité plus épaisse (essai #3) ou moins épaisse (essai #1).

### B.3 Analyse

A partir des résultats présentés dans le tableau B.1 on peut dégager deux conclusions quant à l'effet de la hauteur de la cavité. Tout d'abord, les résultats de l'essai #1 montrent que l'utilisation d'un moule avec une cavité de faible épaisseur est à proscrire pour le procédé Polyflex. L'explication de ces temps longs pour l'essai #1 est simple et repose sur la variabilité de la perméabilité d'un renfort avec son taux de fibres. En effet, pour une pression de vide de 75000 Pa, deux couches d'OCF 8610 ont une épaisseur de 3 mm. Placées dans une cavité de 2 mm, ces deux couches présentent un taux de fibres plus élevé et par conséquent une perméabilité bien plus faible ce qui explique le temps d'injection beaucoup plus long pour l'essai #1 que pour l'essai #2.

D'autre part, d'après les résultats de l'essai #3, l'utilisation d'une cavité de grande épaisseur pourrait améliorer le procédé Polyflex. En effet, mis à part  $T_{injection}$ , tous les temps de cet essai sont inférieurs à ceux de l'essai #2, ce qui veut dire que la compaction par le fluide de compaction est plus efficace dans une cavité de grande épaisseur. Cependant, il faut faire attention au fait que les pièces fabriquées dans les essais #2 et #3 ne sont pas les mêmes car elles n'ont pas le même taux de fibres. Ici, le taux de fibres dépend de la quantité de résine injectée dans le moule, et il est intuitif que cette quantité est d'autant plus importante que la cavité est haute. Au passage c'est ce qui explique le temps  $T_{injection}$  plus grand pour l'essai #3, car plus l'on injecte de résine plus cela prend de temps.

Ainsi, l'utilisation d'une cavité de grande épaisseur est peut-être une solution améliorant le procédé Polyflex, mais pour en être sûr il faut se placer dans des conditions où la pièce finale (i.e. son taux de fibres) est indépendante de la hauteur de la cavité. Pour ce faire il faut modifier le critère de la fin d'injection de résine. La solution naturelle est alors d'arrêter l'injection de résine et commencer la compaction dès que la quantité de résine injectée dans le moule atteint une valeur choisie. Nous avons refait une simulation pour la cavité de 4,25 mm de hauteur avec ce critère (le taux de résine retenue pour le

passage injection – compaction correspond à la quantité de résine injecté pour  $L_r = L/2$  dans l'essai #2 ). Les résultats de cette simulation sont reportés dans le tableau B.2.

	$H$	$T_{injection}$	$T_{croisement}$	$T_{compaction\_event\_ouvert}$	$T_{compaction\_event\_fermé}$	$T_{total}$	$L_{croisement}$	$V_f$
essai #2	3,175	10.7	5.3	6.7	4.3	21.7	0.76L	19,6%
essai #3 bis	4,250	5.9	2.2	4,8	9.1	19.8	0.52L	19,8%

**Tableau B.2 : Résultats des simulations avec le critère d'arrêt de l'injection portant sur la quantité de résine injectée. Tous les temps sont en secondes.**

Les résultats du tableau B.2 confirment l'intérêt d'utiliser des cavités de grande épaisseur pour le procédé Polyflex. En effet, on peut noter que pour injecter la même quantité de résine dans la cavité, il est préférable que cette dernière soit haute (i.e.  $T_{injection}$  plus faible pour l'essai #3 bis que pour l'essai #2). De plus dans le cas #3 bis, le fluide de compaction se rend plus vite à son événement. Par contre, une fois que l'événement du fluide de compaction est fermé, l'injection se termine plus vite dans le cas #2. Mais cela s'explique facilement car à ce moment là le front de résine est plus avancé dans le cas #2 qu'il ne l'est dans le cas #3 bis (voir les valeurs de  $L_{croisement}$ ). Mais au final, le temps total minimum est celui de l'essai #3 bis et c'est ce que l'on doit retenir dans la perspective d'améliorer le procédé Polyflex.

#### B.4 Conclusion

Finalement, cette étude sur la hauteur de la cavité du moule permet de dégager une certitude, à savoir que les cavités de faible épaisseur sont à proscrire. De plus, cette étude a montrée que l'utilisation de cavités épaisses pouvait réduire le temps total de l'injection par le procédé Polyflex. Mais ici un seul cas a été testé (l'essai #49), il se peut que cet effet ne soit plus observé avec d'autres paramètres. Néanmoins, on vient de voir à travers cette étude très succincte que la hauteur de la cavité est un paramètre qui joue sur le temps d'injection totale, qu'il faudra prendre en compte pour optimiser de manière globale le procédé Polyflex.