

**Titre:** Une formulation monolithique des modèles de turbulence à deux équations : calcul éléments finis d'écoulements et de sensibilités

**Auteur:** Farshad Navah

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Navah, F. (2008). Une formulation monolithique des modèles de turbulence à deux équations : calcul éléments finis d'écoulements et de sensibilités [Master's thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
Citation: <https://publications.polymtl.ca/8394/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8394/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de recherche:** Dominique Pelletier, & Stéphane Étienne  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

UNE FORMULATION MONOLITHIQUE DES MODÈLES DE TURBULENCE  
À DEUX ÉQUATIONS: CALCUL ÉLÉMENTS FINIS D'ÉCOULEMENTS ET  
DE SENSIBILITÉS

FARSHAD NAVAH  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
SEPTEMBRE 2008

© Farshad Navah, 2008.



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-47678-9*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-47678-9*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

UNE FORMULATION MONOLITHIQUE DES MODÈLES DE TURBULENCE  
À DEUX ÉQUATIONS: CALCUL ÉLÉMENTS FINIS D'ÉCOULEMENTS ET  
DE SENSIBILITÉS

présenté par: NAVAH Farshad

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GUIBAULT François, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ÉTIENNE Stéphane, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. TRÉPANIÉRIE Jean-Yves, Ph.D., membre

À mes parents,

Leyli et Mansour.

À Réza Moïni.

Accuracy is robustness's enemy.

Robustness is accuracy's enemy.

Good luck!

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de recherche, Dominique Pelletier, pour son enseignement passionné, son encadrement exceptionnel, ses conseils judicieux et la confiance qu'il m'a témoignée.

Je remercie également mon codirecteur, Stéphane Étienne, ainsi qu'Alexander Hay dont l'appui a grandement contribué au bon déroulement du projet.

Je suis aussi cordialement reconnaissant envers mes parents et ma famille pour leur soutien inconditionnel.

J'aimerais finalement remercier mes collègues de travail et les amis de l'École en général pour ce que j'ai pu apprendre d'eux et les moments que nous avons partagés.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire présente une formulation monolithique et implicite pour les modèles de turbulence à deux équations et leurs sensibilités. La méthode des équations de sensibilités est un outil d'analyse d'écoulements complexes et également une technique servant au design optimal. L'algorithme de résolution classique des modèles de turbulence à deux équations est économique en espace mémoire mais très coûteux en temps de calcul. Cette approche découplée, par sa lenteur, rend l'étude des sensibilités inefficace surtout en régime instationnaire. L'augmentation des ressources informatiques permet d'envisager un algorithme de résolution couplé nécessitant légèrement plus de mémoire mais d'une grande rapidité. Un code d'éléments finis adaptatif comprenant une formulation découplée a servi de base au développement de la formulation monolithique. Le solveur linéaire Skyline déjà implémenté s'est avéré incapable de traiter efficacement la taille des grands systèmes générés par l'approche couplée. Le solveur linéaire UMFPACK a donc été intégré au code de calcul. La turbulence est régie par le modèle à deux équations de  $k - \epsilon$  qui sert de fermeture aux équations de Navier-Stokes moyennées. L'implémentation de l'algorithme couplé a été vérifiée par la méthode des solutions manufacturées. des applications variées ont permis de dresser un bilan comparatif de la performance des formulations en termes de mémoire et de temps de calcul. On a observé que l'approche couplée est, selon les cas, de 2.5 à 20.0 fois plus efficace en temps de calcul et nécessite de 2.4 à 3 fois plus d'espace mémoire que l'approche découplée. La comparaison des solveurs linéaires a mis en évidence le coût du solveur Skyline qui est proportionnel au carré du nombre de nœuds du domaine. Cette relation est linéaire dans le cas d'UMFPACK. En conclusion, la formulation monolithique implicite présente donc un outil performant pour l'étude efficace des écoulements turbulents et leurs sensibilités.



## ABSTRACT

This thesis presents an implicit monolithic formulation for two-equation turbulence models and their sensitivities. The Sensitivity Equations Method is a tool for analysis and optimal design of complex flows. The classic solution algorithm for two-equation turbulence models is efficient in terms of memory but expensive with regards to the calculation time. The sensitivity analysis suffers from the time inefficiency of this decoupled approach, particularly in the unsteady regime. The sustained increase in the computer speed and memory opens the door to the development of monolithic, fully coupled formulations which are slightly more expensive in memory requirements but considerably faster. An adaptative Finite Elements code served as the basis for the development of the coupled approach. The large size of matrix systems generated by the coupled approach motivated the use of the more efficient UMFPACK linear solver over the existing Skyline solver. The  $k - \epsilon$  two-equation model is used for closure of the Reynolds Averaged Navier Stokes equations. The correctness of the implementation is verified by the Method of the Manufactured Solution. The performances of the algorithms in terms of required memory and calculation time are then assessed through different applications. Depending on the case, the coupled technique is from 2.5 to 20.0 times faster but necessitates 2.4 to 3 times the memory required by its decoupled counterpart. Also, the comparison of results from linear solvers showed that the dependence of the resources (time and memory) on the size of the problem (nodes number) is quadratic for Skyline but linear for UMFPACK. We conclude that the aim of the thesis is thus achieved : an implicit monolithic formulation is developed serving as a performant tool for the efficient study of the turbulent flows and of their sensitivities.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
APHORISME . . . . .	v
REMERCIEMENTS . . . . .	vi
RÉSUMÉ . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE ET MISE EN CONTEXTE	3
1.1 But et objectifs . . . . .	7
CHAPITRE 2 MODÉLISATION MATHÉMATIQUE . . . . .	9
2.1 Équations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	10
2.2 Modèle de turbulence $k - \epsilon$ . . . . .	13
2.2.1 Forme finale des équations de Navier-Stokes moyennées . . . . .	15
2.2.2 Variables logarithmiques . . . . .	16
2.3 Sensibilités . . . . .	18

2.3.1	Qu'est-ce qu'une sensibilité? . . . . .	18
2.3.2	Équations des sensibilités . . . . .	19
2.4	Conditions aux limites . . . . .	21
2.4.1	Conditions aux limites classiques . . . . .	22
2.4.1.1	Écoulement . . . . .	22
2.4.1.2	Sensibilités . . . . .	24
2.4.2	Conditions aux limites pour les parois solides . . . . .	26
2.4.2.1	Loi de paroi pour la vitesse . . . . .	27
2.4.2.2	Loi de paroi thermique . . . . .	32
2.4.2.3	Loi de paroi pour les sensibilités . . . . .	33
CHAPITRE 3 MÉTHODE DE RÉOLUTION . . . . .		34
3.1	Méthode des éléments finis . . . . .	34
3.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	34
3.1.2	Discrétisation . . . . .	37
3.2	Algorithmes de résolution . . . . .	39
3.2.1	Jacobien Numérique . . . . .	39
3.2.2	Approche Découplée . . . . .	40
3.2.3	Approche Couplée . . . . .	42
3.2.4	Approche Semi-couplée . . . . .	43
3.2.5	Remarque sur la résolution des sensibilités . . . . .	45
3.3	Résolution du système linéaire $Ax = b$ . . . . .	46
3.3.1	Matrices creuses . . . . .	46
3.3.2	Solveurs linéaires : Skyline - UMFPACK - PARDISO . . . . .	48
3.3.3	Factorisation conditionnelle . . . . .	51
3.4	Contrôle d'erreur . . . . .	52
3.5	Stabilisation numérique . . . . .	53

CHAPITRE 4	VÉRIFICATION . . . . .	54
4.1	Solution manufacturée pour l'écoulement . . . . .	55
4.2	Solution manufacturée pour les sensibilités . . . . .	57
4.3	Condition aux limites . . . . .	58
4.3.1	Écoulement . . . . .	58
4.3.2	Sensibilités . . . . .	60
4.4	Résultats . . . . .	62
CHAPITRE 5	APPLICATIONS . . . . .	71
5.1	Comparaison des algorithmes couplé, découplé et semi-couplé . . . . .	71
5.1.1	Le cas de l'obstacle carré . . . . .	72
5.2	Comparaison des algorithmes couplé et découplé . . . . .	77
5.2.1	Le cas de plaque thermique . . . . .	78
5.2.2	Le cas de la marche descendante . . . . .	83
5.3	Comparaison des solveurs Skyline, UMFPACK et PARDISO . . . . .	89
5.3.1	Le cas de plaque plane . . . . .	89
CONCLUSION	. . . . .	95
RÉFÉRENCES	. . . . .	99
ANNEXES	. . . . .	104

## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 2.1	Constantes du modèle $k - \epsilon$ de Launder et Spalding . . . . .	15
TAB. 4.1	État de la convergence de l'écoulement au 6 <sup>ième</sup> cycle : solution manufacturée . . . . .	64
TAB. 4.2	Taux de convergence théoriques et observés de l'écoulement : solution manufacturée . . . . .	64
TAB. 4.3	État de la convergence des sensibilités au 6 <sup>ième</sup> cycle : solution manufacturée . . . . .	65
TAB. 4.4	Taux de convergence théoriques et observés des sensibilités : solution manufacturée . . . . .	65
TAB. 5.1	Nombre d'inconnues des systèmes résolus : cas de l'obstacle carré . . . . .	73
TAB. 5.2	Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de l'obstacle carré . . . . .	74
TAB. 5.3	Comparaison du temps de calcul (s) : cas de l'obstacle carré	74
TAB. 5.4	Nombre d'inconnues des systèmes résolus : cas de la plaque thermique . . . . .	79
TAB. 5.5	Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de la plaque thermique . . . . .	80
TAB. 5.6	Comparaison du temps de calcul (s) : cas de la plaque thermique	80
TAB. 5.7	Nombre d'inconnues des systèmes résolus : cas de la marche descendante . . . . .	84
TAB. 5.8	Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de la marche descendante - écoulement . . . . .	85
TAB. 5.9	Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de la marche descendante - sensibilités . . . . .	85

TAB. 5.10	Comparaison du temps de calcul (s) : cas de la marche descendante - écoulement . . . . .	87
TAB. 5.11	Comparaison du temps de calcul (s) : cas de la marche descendante - sensibilités . . . . .	87
TAB. 5.12	Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) - phase de décomposition : cas de plaque plane . . . . .	90
TAB. 5.13	Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) - phase de factorisation : cas de plaque plane . . . . .	91
TAB. 5.14	Comparaison du temps de calcul (s) : cas de plaque plane . . . . .	92
TAB. VI.1	Performances observées en mémoire totale requise (Mo) / Nombre de nœuds . . . . .	128
TAB. VI.2	Performances observées en mémoire relativement à l'approche découplée . . . . .	128
TAB. VI.3	Performances observées en temps de calcul total (s) / Nombre de nœuds . . . . .	129
TAB. VI.4	Performances observées en temps de calcul relativement à l'approche couplée . . . . .	129
TAB. VI.5	Performances des solveurs en mémoire : plaque plane cycle 8 . . . . .	130
TAB. VI.6	Performances des solveurs en temps de calcul : plaque plane cycle 6 . . . . .	130

## LISTE DES FIGURES

FIG. 2.1	Moyenne temporelle des fluctuations turbulentes . . . . .	9
FIG. 2.2	Conduction thermique dans une barre . . . . .	18
FIG. 2.3	Le concept de loi de paroi et les composantes de la couche limite . . . . .	27
FIG. 2.4	La représentation par loi de paroi du profil de vitesse dans la couche limite . . . . .	28
FIG. 3.1	Élément fini de type Taylor-Hood . . . . .	38
FIG. 3.2	Strucutre de la matrice A . . . . .	47
FIG. 3.3	Algorithme de stockage du solveur linéaire Skyline . . . . .	49
FIG. 4.1	Domaine de calcul : solution manufacturée . . . . .	55
FIG. 4.2	Domaine de calcul et conditions frontières : solution manufacturée . . . . .	58
FIG. 4.3	Maillage final : solution manufacturée . . . . .	63
FIG. 4.4	Convergence de $p$ vers la solution manufacturée . . . . .	67
FIG. 4.5	Convergence de $\mathbf{u}$ vers la solution manufacturée . . . . .	67
FIG. 4.6	Convergence de $\mathcal{K}$ vers la solution manufacturée . . . . .	67
FIG. 4.7	Convergence de $\mathcal{E}$ vers la solution manufacturée . . . . .	68
FIG. 4.8	Convergence de $\mu_t$ vers la solution manufacturée . . . . .	68
FIG. 4.9	Convergence de $S_p$ vers la solution manufacturée . . . . .	69
FIG. 4.10	Convergence de $S_{\mathbf{u}}$ vers la solution manufacturée . . . . .	69
FIG. 4.11	Convergence de $S_{\mathcal{K}}$ vers la solution manufacturée . . . . .	69
FIG. 4.12	Convergence de $S_{\mathcal{E}}$ vers la solution manufacturée . . . . .	70
FIG. 4.13	Convergence de $S_{\mu_t}$ vers la solution manufacturée . . . . .	70
FIG. 5.1	Domaine de calcul et conditions limites : cas de l'obstacle carré	72
FIG. 5.2	Maillage final de 251, 521 nœuds : cas de l'obstacle carré . .	72
FIG. 5.3	Ressources informatiques : cas de l'obstacle carré . . . . .	76

FIG. 5.4	Historique de convergence : cas de l'obstacle carré . . . . .	77
FIG. 5.5	Domaine de calcul et conditions limites : cas de la plaque thermique . . . . .	78
FIG. 5.6	Maillage final de 147,871 nœuds : cas de la plaque thermique	78
FIG. 5.7	Ressources informatiques : cas de la plaque thermique . . .	81
FIG. 5.8	Historique de convergence : cas de la plaque thermique . . .	82
FIG. 5.9	Domaine de calcul et conditions limites : cas de la marche descendante . . . . .	83
FIG. 5.10	Maillage final de 205,508 nœuds : cas de la marche descendante	83
FIG. 5.11	Ressources informatiques : cas de la marche descendante . .	88
FIG. 5.12	Maillage final de 181,869 nœuds : cas de la plaque plane . .	89
FIG. 5.13	Ressources informatiques : cas de la plaque plane . . . . .	94



## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

### Caractères usuels

$a$	paramètre de sensibilité
$A$	matrice creuse
$A_p$	vecteur de pointage de la décomposition de $A$
$A_i$	vecteur d'indexage de la décomposition de $A$
$A_x$	vecteur des valeurs d'entrées de la décomposition de $A$
$c_p$	capacité thermique
$C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$	constantes de fermeture du modèle $k - \epsilon$
$d$	distance entre la paroi physique et la frontière de calcul
$e$	erreur
$E$	paramètre de rugosité
$\text{eq}H^1$	semi-norme équivalente de la norme $H^1$
$\mathbf{f}(f_x, f_y)$	terme source pour l'équation de mouvement
$f$	multiplicateur de Lagrange
$I_e$	Indice d'efficacité
$k$	énergie cinétique de la turbulence
$m$	mémoire
$n$	nombre de nœuds
$\hat{\mathbf{n}}(n_x, n_y)$	vecteur unitaire normal extérieur à la frontière
$ne$	nombre d'entrées de $A$
$neq$	nombre d'équations
$nx$	taille de $A_x$ de Skyline
$N_u, N_{\mathcal{K}}, \dots$	nombre de noeuds par éléments (pour $u, \mathcal{K}, \dots$ )
$N_i^u, N_i^{\mathcal{K}}, \dots$	fonctions d'interpolations (pour $u, \mathcal{K}, \dots$ )

$p$	pression
$P$	production de turbulence
$Pr$	nombre de Prandtl
$Pr_t$	nombre de Prandtl turbulent
$q$	terme source pour l'équation d'énergie
$\hat{q}$	flux de chaleur à la frontière
$q_k, q_\epsilon$	termes sources pour les équations de transport du modèle de turbulence
$q_\kappa, q_\epsilon$	termes sources pour les équations de transport du modèle de turbulence en variables logarithmiques
$\mathbf{R}$	tenseur des contraintes de Reynolds
$R_i$	résidu de la $i^{\text{ème}}$ équation algébrique
$R_{\mathbf{u}}, R_{\mathcal{K}}, \dots$	résidu (pour $\mathbf{u}, \mathcal{K}, \dots$ )
$Re$	nombre de Reynolds
$TS$	terme source
$S_\phi^a$	sensibilité de la variable dépendante $\phi$ par rapport à $a$
$S_\phi$	sensibilité de la variable dépendante $\phi$
$t$	temps
$\hat{\mathbf{t}}(\hat{t}_x, \hat{t}_y)$	traction sur les frontières
$\hat{\mathbf{t}}(t_x, t_y)$	vecteur unitaire tangent
$T$	température
$T_*$	échelle de température de la loi de paroi
$u, v, w$	projections du champ de vitesse selon les axes $x, y$ et $z$
$u_k$	échelle de vitesse de la loi de paroi
$u_t$	vitesse tangentielle

$u_{**}$	échelle de vitesse de la loi de paroi
$\mathbf{u}$	champ de vitesse
$\mathbf{u}$	vecteur des valeurs nodales des variables dépendantes
$U_1$	vitesse de référence pour la solution analytique
$x, y$	abscisse, ordonnée
$y_0$	ordonnée de la plaque de la solution manufacturée

### Lettres calligraphiques

$\mathcal{E}$	logarithme néperien de $\epsilon$
$\mathcal{K}$	logarithme néperien de $k$

### Lettres grecques

$\alpha$	petite perturbation
$\dot{\gamma}$	tenseur du taux de déformation
$\Gamma$	frontière du domaine de calcul $\Omega$
$\delta\mathbf{u}$	vecteur de correction des valeurs nodales des variables dépendantes
$\Delta t$	période ou durée de temps
$\Delta t_f$	période maximale des fluctuations
$\epsilon$	taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence
$\eta$	variable de similitude pour la couche limite analytique turbulente
$\kappa$	constante de Kármán
$\lambda$	conductivité thermique

$\lambda_t$	conductivité thermique turbulente
$\mu$	viscosité dynamique
$\mu_t$	viscosité dynamique turbulente
$\nu$	viscosité cinématique
$\vartheta u, \vartheta v, \dots$	variation (fonction test)
$\Omega$	domaine de calcul
$\rho$	masse volumique
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	constantes de fermeture du modèle $k - \epsilon$
$\hat{\phi}_{\mathcal{K}}$	flux de $\mathcal{K}$ à la frontière
$\hat{\phi}_{\mathcal{E}}$	flux de $\mathcal{E}$ à la frontière
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses

### Indices

$c$	quantité évaluée à la frontière de calcul (loi de paroi)
$D$	condition de Dirichlet
$exa$	solution exacte
$h$	solution éléments finis
$i, 1, 2, \dots$	valeur nodale en $i, 1, 2, \dots$
$K$	élémentaire
$N$	condition de Neumann
$p$	quantité évaluée à la paroi physique (loi de paroi)
$R$	condition de Robin
$SM$	quantité obtenue à l'aide de la solution analytique

**Exposants**

$n$	solution obtenue à la $n^{\text{ième}}$ itération
$n-1$	solution obtenue à une itération antérieure à $n$
$T$	transposée
$+$	valeur adimensionnelle du modèle de loi de paroi
$'$	sensibilité des quantités autres que les variables dépendantes, valeur fluctuante
$\circ$	valeur moyenne
$\wedge$	valeur imposée d'une condition de Dirichlet ou de Neumann

**Opérateur**

$erf$	fonction erreur
$ln$	logarithme népérien
$\nabla$	gradient
$\nabla \cdot$	divergence
$     $	norme
$   $	semi-norme
$-$	moyenne dans le temps

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	LOIS DE PAROIS POUR LES SENSIBILITÉS . . . . .	104
I.1	Loi de paroi en vitesse . . . . .	104
ANNEXE II	LA FORMULATION VARIATIONNELLE DES ÉQUATIONS DE SENSIBILITÉS . . . . .	107
ANNEXE III	NORMES D'ERREUR . . . . .	109
ANNEXE IV	MÉTHODES DE STABILISATION . . . . .	111
IV.1	Mouvement . . . . .	112
IV.1.1	Galerkin . . . . .	112
IV.1.2	SUPG . . . . .	112
IV.1.3	GLS . . . . .	112
IV.2	Energie . . . . .	113
IV.2.1	Galerkin . . . . .	113
IV.2.2	SUPG . . . . .	113
IV.2.3	GLS . . . . .	114
IV.3	Equation de $\mathcal{K}$ . . . . .	114
IV.3.1	Galerkin . . . . .	114
IV.3.2	SUPG . . . . .	115
IV.3.3	GLS . . . . .	115
IV.4	Equation de $\mathcal{E}$ . . . . .	116
IV.4.1	Galerkin . . . . .	116
IV.4.2	SUPG . . . . .	116
IV.4.3	GLS . . . . .	117

ANNEXE V	SOLUTION MANUFACTURÉE . . . . .	118
V.1	Ecoulement : . . . . .	118
V.1.1	Solution analytique des champs de l'écoulement . . . . .	118
V.1.2	Les dérivées premières et secondes des variables de l'écoulement	120
V.2	Sensibilités des variables de l'écoulement par rapport au paramètre	
$y_0$ :	. . . . .	122
V.3	Termes sources . . . . .	124
V.3.1	Écoulement . . . . .	124
V.3.2	Sensibilités . . . . .	125
V.3.3	Variables logarithmiques . . . . .	126
V.3.3.1	Écoulement . . . . .	126
V.3.3.2	Sensibilités . . . . .	126
ANNEXE VI	RÉCAPITULATION DES PERFORMANCES . . . . .	128
VI.1	Comparaison des algorithmes . . . . .	128
VI.2	Comparaison des solveurs linéaires . . . . .	130

## INTRODUCTION

La turbulence est l'état irrégulier et constamment perturbé de l'écoulement d'un fluide qui s'observe dans la plupart des écoulements d'intérêt pratique. Jusqu'à récemment, l'étude du phénomène turbulent n'était possible que par l'expérimentation, une approche coûteuse et lourde. L'ère informatique a ouvert la porte à l'étude numérique de la turbulence grâce à des techniques comme *les éléments finis*. Les méthodes numériques combinées à des techniques d'optimisation comme *les variables adjointes* ou *l'analyse des sensibilités* constituent désormais l'outil incontournable de l'ingénieur en conception assistée par ordinateur.

Le calcul des sensibilités en turbulence souffre de l'inefficacité des techniques classiques de résolution des modèles de turbulence à deux équations. Ces modèles, populaires en raison de leur bon réalisme, sont généralement résolus par un algorithme classique qui en découple les équations regroupées en plusieurs systèmes matriciels distincts. La résolution successive de ces systèmes dans une boucle itérative de type point-fixe permet alors la convergence de l'ensemble. Cette formulation découplée est économique en termes d'espace mémoire mais elle présente le désavantage d'être souvent lente. Le mandat de ce mémoire est donc de présenter une formulation monolithique couplée pour l'écoulement et les sensibilités et d'en comparer les performances par rapport à celles de l'approche découplée. Nous implémentons la formulation couplée dans le code d'éléments finis adaptatif qui incorpore déjà un algorithme découplé pour résoudre les écoulements turbulents<sup>[1]</sup> et pour en calculer les sensibilités<sup>[2, 3]</sup>.

La structure du mémoire est la suivante. Au chapitre 1, le contexte du développement de la formulation couplée est introduit en référant aux travaux précédents. La modélisation mathématique est abordée au chapitre 2. Les équations



de Navier-Stokes moyennées, celles du modèle  $k - \epsilon$ , celles des sensibilités et les conditions aux limites y sont présentées. Les méthodes utilisées pour résoudre les équations aux dérivées partielles du modèle constituent le sujet du chapitre 3. Ce chapitre débute en présentant d'abord la formulation variationnelle des équations et leur discrétisation par la suite. On enchaîne avec les algorithmes de résolution découplé, couplé et semi-couplé. Les techniques de résolution des systèmes linéaires générés par différents algorithmes sont également abordées. À ce sujet, les matrices creuses, les solveurs linéaires Skyline, UMFPACK et PARDISO et la factorisation conditionnelle sont discutés. L'approche adaptative employée pour le contrôle de l'erreur de discrétisation est aussi décrite dans ce chapitre qui prend fin sur les techniques de stabilisation numérique utilisées pour compenser les faiblesses de la méthode de Galerkin. Le chapitre 4 traite de la vérification de l'implémentation des équations par la méthode des solutions manufacturée. Une solution manufacturée imitant le comportement d'une couche limite turbulente est présentée pour l'écoulement et pour les sensibilités. Les résultats permettent d'apprécier la performance de la stratégie adaptative et de confirmer l'implémentation correcte des équations aux dérivées partielles du modèle. Il a alors été possible de passer aux applications dont les résultats permettent de dresser, au chapitre 5, les bilans comparatifs des algorithmes de résolution et des solveurs linéaires. Finalement, on récapitule l'évolution du mémoire et conclut sur les forces et faiblesses des algorithmes couplé, découplé et semi-couplé.

## CHAPITRE 1

### REVUE BIBLIOGRAPHIQUE ET MISE EN CONTEXTE

L'analyse de sensibilités a été un sujet de recherche active pendant les dernières années. En optimisation de design, les sensibilités correspondent aux gradients des fonctions coût par rapport aux paramètres de design qui peuvent également être efficacement obtenus par *la méthode des variables adjointes*. Plus généralement, les sensibilités sont les dérivées des variables dépendantes par rapport à un paramètre qui peut être géométrique (de forme) ou non (de valeur). Elles ont un sens plus large puisque les dérivées des fonctions coût peuvent être déduites des sensibilités, l'inverse étant faux. Les travaux sur les sensibilités ont démontré leur utilité comme outil d'analyse permettant une meilleure compréhension des écoulements complexes. Quelques exemples d'applications sont :

- design optimal<sup>[4]</sup>,
- analyse d'incertitude<sup>[5]</sup>,
- calcul rapide de solutions voisines<sup>[6]</sup>.

Il existe plusieurs approches pour le calcul des sensibilités dont *les différences finies*, *la méthode des variables complexes*<sup>[7]</sup> et *la méthode des équations de sensibilités*<sup>[8]</sup>. Les deux premières sont coûteuses. En outre, les différences finies sont plutôt sensibles aux erreurs numériques.

La méthode des équations de sensibilités (MÉS) consiste à obtenir et résoudre une série d'équations pour les sensibilités des variables dépendantes. Ces équations s'obtiennent en dérivant les équations (discrètes ou continues) d'état des variables dépendantes par rapport au paramètre d'intérêt. Selon l'ordre d'application des étapes de différenciation et de discrétisation, deux approches sont possibles. En

*équations de sensibilités continues* (MÉSC)<sup>[9]</sup>, on dérive d'abord et discrétise par la suite. L'inverse est vrai en *équations de sensibilités discrètes* (MÉSD)<sup>[4]</sup>. Les avantages et les inconvénients de chaque méthode ainsi que leurs différences ont été détaillés dans la littérature<sup>[10, 11]</sup>. On peut par exemple mentionner les besoins en interventions d'utilisateur lors de la résolution des équations discrètes ou encore pour cette approche, la difficulté de la différenciation des termes non-différentiables provenant des schémas de discrétisation comme les limiteurs, les termes de stabilisation, etc. On poursuit en présentant l'approche des équations continues.

Les sensibilités des variables dépendantes se calculent soit par rapport à un paramètre de valeur tel une condition limite, un coefficient d'une loi de comportement, etc., soit par rapport à un paramètre de forme tel l'épaisseur d'une plaque ou le diamètre d'un cylindre. Lorsqu'il s'agit d'un paramètre de forme,  $a$ , les variables indépendantes,  $\mathbf{x}$ , dépendent seulement de  $a$ , tandis que les variables dépendantes dépendent à la fois de  $\mathbf{x}$  et de  $a$  :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, a)$ . Or, pour les paramètres de forme, on peut considérer les sensibilités d'un point de vue eulérien ou lagrangien. Le premier, impliquant les dérivées partielles de  $\mathbf{u}$ ,  $\partial\mathbf{u}/\partial a$ , consiste à se concentrer sur un point fixe du domaine. Le deuxième, référant aux dérivées totales de  $\mathbf{u}$ ,  $D\mathbf{u}/Da$ , consiste à suivre le domaine dans sa déformation. La formulation eulérienne des sensibilités est avantageuse par sa simplicité de mise en œuvre numérique. Par contre, elle rencontre des difficultés lors de l'imposition des conditions aux limites qui nécessite le calcul des transformations des frontières sous l'effet des variations du paramètre de forme. Une formulation lagrangienne en éléments finis a été développée par Charlot<sup>[12]</sup> qui présente l'avantage de ne pas avoir à se préoccuper des conditions aux limites pourvu que la vitesse de déformation soit calculé sur tout le domaine.

La MÉSC a été appliquée en une multitude de régimes. En turbulence, Di Caro<sup>[3, 13]</sup> a employé une formulation eulérienne (paramètres de forme) pour effectuer l'analyse d'incertitude et le calcul des solutions voisines des coefficients de traînée

et de portance d'un obstacle en proximité d'une plaque plane. Hristova *et al*<sup>[14]</sup> ont effectué une étude détaillée en régime laminaire instationnaire. Les applications aux problèmes de l'interaction fluide-structure sont également rapportées dans la littérature<sup>[15, 16]</sup>. Malgré les différentes études répertoriées, les potentiels de la MÉSC sont loin d'être complètement explorés et exploités. Par exemple, à la connaissance de l'auteur, les sensibilités de forme en régime turbulent instationnaire restent toujours à développer malgré leur grande utilité pour une multitude d'applications notamment en optimisation aérodynamique. Outre les difficultés d'implémentation, un obstacle majeur réside dans le coût de calcul des écoulements turbulents.

HINZE (1975) propose la définition suivante de la turbulence : «Le mouvement turbulent des fluides est un état irrégulier d'écoulement dans lequel différentes quantités éprouvent une variation aléatoire par rapport aux coordonnées de temps et d'espace de telle sorte que des valeurs moyennes statistiquement distinctes peuvent en être repérées.» À partir de cette définition, on peut avoir une idée de la difficulté d'une représentation numérique précise du phénomène turbulent. En effet, différentes échelles très variées de temps, de longueurs et de vitesses y interviennent. Par conséquent, la résolution numérique fidèle des équations de Navier-Stokes (ÉNS) qui régissent l'état des fluides visqueux demande d'énormes capacités informatiques.

Trois approches principales de modélisation en turbulence peuvent être distinguées en ordre décroissant de précision et de coût : «Direct Numerical Simulation» (DNS), «Large Eddy Simulation» (LES) et «Reynolds Averaged Navier-Stokes» (RANS). Les différences entre elles proviennent des simplifications et des hypothèses permettant de restreindre les échelles de résolution. Quoique les méthodes DNS et LES représentent d'excellents outils pour étudier et caractériser le phénomène turbulent d'un point de vue fondamental, le coût de leur déploiement pour les problèmes in-

dustriels d'intérêt dépasse les capacités informatiques actuelles. C'est pourquoi la méthode RANS demeure une option populaire et pratique.

Les modèles de turbulence de type RANS sont basés sur l'approximation introduite par Reynolds (1895) qui consiste à considérer chaque variable dépendante comme la somme d'une partie moyenne, constante, et d'une partie fluctuante dans le temps. Les modèles RANS sont classifiés selon 4 catégories : 1. *les modèles algébriques*, 2. *les modèles à une équation*, 3. *les modèles à deux équations* et 4. *les modèles de transport des contraintes de Reynolds*. Les avantages et inconvénients de chaque catégorie ont été exhaustivement discutés par Wilcox<sup>[17]</sup>. Le modèle à deux équations de  $k - \epsilon$  est l'un des plus largement utilisés en raison de sa simplicité et de son exactitude relatives.

Depuis les débuts de l'intégration du modèle  $k - \epsilon$  dans les schémas numériques, les restrictions des ressources informatiques surtout au niveau de la mémoire ne permettaient pas la résolution implicite et simultanée des équations du modèle de turbulence avec celles de Navier-Stokes. Les méthodes de résolution classiques<sup>[18, 19]</sup> consistent alors à regrouper les équations en trois systèmes distincts : ÉNS -  $k$  -  $\epsilon$ . Les systèmes sont résolus successivement dans une boucle d'itérations de type point-fixe jusqu'à la convergence de l'ensemble. Cette formulation découplée offre une économie de mémoire au prix d'une résolution lente. La résolution en souffre surtout au niveau des sensibilités : la méthode itérative point-fixe est appliquée aux équations linéaires de la MÉSC pouvant être résolues directement. L'inefficacité en temps de calcul représente dans ce cas un obstacle, surtout en régime instationnaire.

La croissance des capacités informatiques et le développement des nouvelles techniques de résolution des systèmes matriciels linéaires<sup>[20, 21]</sup> ouvrent la porte à une formulation légèrement plus exigeante en mémoire mais nettement plus efficace en temps de calcul. Il s'agit de réunir toutes les équations ÉNS $k\epsilon$  en un grand

système monolithique et de les résoudre implicitement. Il est alors possible d'appliquer la méthode itérative de Newton fournissant une convergence quadratique. À la connaissance de l'auteur, aucune formulation monolithique pour modèles à deux équations n'est présentée dans la littérature concernant la méthode des éléments finis. Elle a par contre été abordée en volumes finis pour les écoulements transitoires<sup>[22]</sup>. Deux formulations couplée et semi-couplée ont été développées et comparées dans ce cas. Les auteurs ont conclu qu'elles produisent des résultats similaires en termes de stabilité mais que l'approche couplée est moins efficace en termes de ressources informatiques (temps et mémoire).

Le code éléments finis qui servira de base à l'implémentation de la formulation monolithique utilise la structure de données Skyline pour stocker le système matriciel qu'il résout par une factorisation  $LU$  et une forme d'élimination gaussienne. Cette approche est particulièrement coûteuse en ressources numériques et limite les applications de la formulation couplée qui nécessite déjà une importante quantité de mémoire. Il faut donc utiliser une approche différente pour stocker et résoudre les systèmes matriciels générés.

## 1.1 But et objectifs

Le but de ce mémoire est de mettre au point et d'étudier une méthode implicite pour résoudre les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) couplées aux équations du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  standard en écoulement et en sensibilités.

Pour atteindre ce but, fixons les objectifs suivants :

- Développer l'algorithme de résolution couplé,
- Assurer la stabilité de l'algorithme couplé : développer l'algorithme semi-couplé produisant une estimation initiale adéquate lorsque la solution de départ est trop imprécise,

- Implémenter une alternative plus efficace au solveur linéaire Skyline,
- Vérifier l'implémentation du code par une solution manufacturée,
- Évaluer et comparer les performances des algorithmes couplé et semi-couplé versus celles de l'algorithme découplé,
- Évaluer et comparer les performances des différents solveurs linéaires déjà ou nouvellement implémentés.

## CHAPITRE 2

### MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

La turbulence est un phénomène de nature instationnaire, tridimensionnelle et irrégulière dans lequel intervient un grand nombre d'échelles de temps et de longueur très variées. Ces propriétés se traduisent par des fluctuations aléatoires des grandeurs caractéristiques de l'écoulement autour d'une valeur moyenne dans le temps. Ce concept est illustré au schéma 2.1.

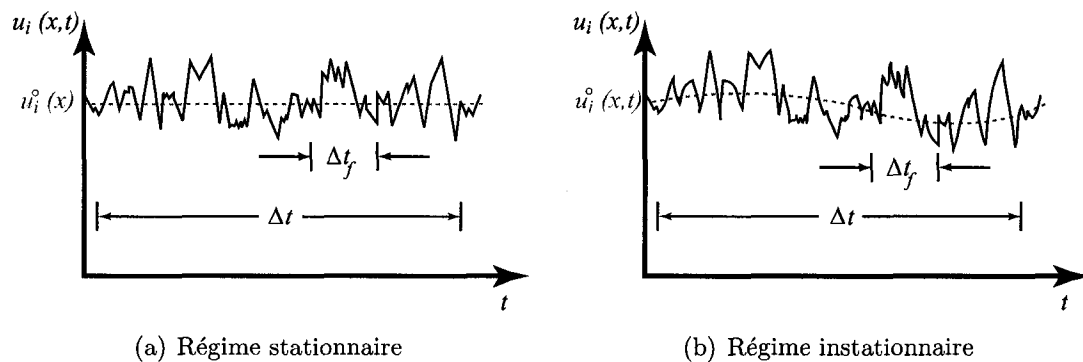


FIG. 2.1 Moyenne temporelle des fluctuations turbulentes

Pour que l'étude numérique des écoulements turbulents soit abordable, il faut donc effectuer une approximation, qui, suivant l'approche de Reynolds, prend la forme d'une moyenne. La moyenne est considérée sur  $\Delta t$ , une durée de temps en régime stationnaire ou la période de la valeur moyenne en régime instationnaire.  $\Delta t$  doit être beaucoup plus long que la période maximale des fluctuations,  $\Delta t_f$ .

Cette section porte sur l'application de cette approche aux équations régissant l'écoulement et à la présentation d'un modèle de turbulence permettant l'estimation des corrélations statistiques qui en résultent. Les équations de sensibilités sont



également introduites.

## 2.1 Équations de Navier-Stokes moyennées

Les équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes sont celles qui décrivent la physique de la plupart des écoulements visqueux. Dans le cadre de la présente étude, leur version stationnaire et incompressible est suffisante. Il s'agit du système d'équations suivant :

– Équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

– Équations de quantité de mouvement

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (2.2)$$

– Équation d'énergie

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse,  $\rho$  la densité,  $p$  la pression,  $c_p$  la capacité thermique à pression constante,  $T$  la température et  $\lambda$  la conductivité thermique.  $\mathbf{f}$  et  $q$  sont les *termes source* et représentent respectivement le vecteur des forces volumiques et une source de chaleur. Les termes source, tel que discuté au chapitre 4, servent à la vérification du code par *la méthode des solutions manufacturées*.

Le tenseur des contraintes visqueuses est défini comme :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (2.4)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique.

Afin de déduire les équations de Navier-Stokes moyennées dites de Reynolds, communément connues par l'acronyme «RANS»<sup>1</sup> dans la littérature anglaise, on explicite d'abord la fluctuation des variables et on évalue par la suite la moyenne des équations.

Chaque variable dépendante est exprimée comme la somme d'une composante constante représentant la moyenne temporelle sur une période et d'une partie fluctuante représentant les variations instantanées et aléatoires de la grandeur en question autour de la valeur moyenne :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \mathbf{u}'$$

$$p = p^\circ + p'$$

$$T = T^\circ + T'$$

La composante constante est désignée par un cercle et la fluctuation par une prime.

Définissons l'opérateur de moyenne :

$$\bar{F} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} F(t) dt \quad (2.5)$$

où  $\Delta t$  est une période de temps.

La moyenne de la variable  $\mathbf{u}$  est par exemple :

$$\bar{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}^\circ + \mathbf{u}'} = \bar{\mathbf{u}^\circ} + \bar{\mathbf{u}'} = \mathbf{u}^\circ \quad (2.6)$$

puisque la moyenne des fluctuations est nulle.

---

<sup>1</sup>Reynolds Averaged Navier-Stokes

L'application de l'opérateur linéaire de moyenne aux équations de Navier-Stokes (2.1), (2.2) et (2.3) n'engendre pas de difficulté particulière sauf au niveau des termes non-linéaires de convection où les fluctuations se corrélerent<sup>2</sup> :

$$\overline{\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}} = \rho \mathbf{u}^\circ \cdot \nabla \mathbf{u}^\circ - \nabla \cdot \mathbf{R} \quad (2.7)$$

$$\overline{\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T} = \rho c_p \mathbf{u}^\circ \cdot \nabla T^\circ + \rho c_p \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' T'}) \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{R}$  est le tenseur de Reynolds défini comme suit :

$$R_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} \quad (2.9)$$

Par inspection, on remarque que le tenseur est en fait symétrique et a donc, en 2D, 3 composantes indépendantes. Les équations moyennées résultantes sont :

– Équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^\circ = 0 \quad (2.10)$$

– Équations de quantité de mouvement

$$\rho \mathbf{u}^\circ \cdot \nabla \mathbf{u}^\circ = -\nabla p^\circ + \nabla \cdot \left[ \mu \left( \nabla \mathbf{u}^\circ + (\nabla \mathbf{u}^\circ)^T \right) + \mathbf{R} \right] + \mathbf{f} \quad (2.11)$$

– Équation d'énergie

$$\rho c_p \mathbf{u}^\circ \cdot \nabla T^\circ = \nabla \cdot (\lambda \nabla T^\circ) - \rho c_p \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}' T'}) + q \quad (2.12)$$

On remarque que les équations originales, (2.1) à (2.3), ne diffèrent des équations moyennées, (2.10) à (2.12), que par les termes de corrélation. En fait, dans ces termes repose le défi fondamental de la modélisation de la turbulence pour l'ingénieur, car leur apparition vient d'entraver la fermeture du problème dans le

---

<sup>2</sup> $\overline{\phi \psi} = \overline{(\phi^\circ + \phi')(\psi^\circ + \psi')} = \phi^\circ \psi^\circ + \phi^\circ \overline{\psi'} + \overline{\phi'} \psi^\circ + \overline{\phi' \psi'}$  puisque  $\overline{\phi'} = \overline{\psi'} = 0$  ; Les quantités  $\phi'$  et  $\psi'$  sont dites corrélées si  $\overline{\phi' \psi'} \neq 0$

sens que l'on a désormais plus d'inconnues que d'équations (en 2D, 9 inconnues contre 4 équations). Il faut donc des modèles de turbulence qui en fournissant plus d'équations permettent la fermeture du système.

Notons que nous omettons désormais de spécifier la partie constante par un cercle.

## 2.2 Modèle de turbulence $k - \epsilon$

Il existe quatre catégories de modèles de turbulence de type RANS<sup>[17]</sup> : *les modèles algébriques* faisant intervenir la notion de la longueur de mélange,  $l_m$ , *les modèles à une équation* et *les modèles à deux équations* impliquant la notion de l'énergie de turbulence et *les modèles de transport de contraintes de Reynolds*. Les modèles à une ou à deux équations sont conçus à partir du postulat de Prandtl (1945) qui a proposé une échelle de vitesse caractéristique de turbulence  $v_m$  basée non pas sur la longueur de mélange mais calculée plutôt à partir de l'énergie cinétique (par unité de masse) des fluctuations turbulentes,  $k$  :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (2.13)$$

On peut expliciter le lien existant entre cette nouvelle variable dépendante et le tenseur des contraintes de Reynolds en prenant la trace de ce dernier :

$$R_{ii} = -\rho \overline{u'_i u'_i} = -2\rho k \quad (2.14)$$

Pour calculer le tenseur des contraintes de Reynolds, on a recours à l'approximation de Boussinesq (1877) qui suivant les observations expérimentales reflétant une augmentation de la viscosité efficace en régime turbulent, a proposé la relation

suivante entre le tenseur de Reynolds et une viscosité turbulente,  $\mu_t$  :

$$R_{ij} = \mu_t (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (2.15)$$

où  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker.

Par analogie, on peut suggérer une relation entre les termes de corrélation de l'équation d'énergie et une conductivité turbulente,  $\lambda_t$  :

$$-\rho c_p \overline{\mathbf{u}'T'} = \lambda_t \nabla T \quad (2.16)$$

Notons qu'en prenant la trace de l'équation (2.15) en mode incompressible, on retrouve l'équation (2.14).

La viscosité et la conductivité turbulentes, bien qu'ayant un rôle similaire à leurs équivalents moléculaires, ne sont pas les propriétés du fluide mais plutôt les caractéristiques de l'écoulement. Différents modèles ont été proposés pour le calcul de ces nouvelles variables dépendantes parmi lesquels nous optons pour le modèle largement utilisé de  $k - \epsilon$  standard qui permet les définitions suivantes :

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad ; \quad \lambda_t = \mu_t \frac{c_p}{\text{Pr}_t} \quad (2.17)$$

où  $C_\mu$  est une constante du modèle,  $\text{Pr}_t$  le nombre de Prandtl turbulent fixé à  $\text{Pr}_t = 1$  et  $\epsilon$  désigne le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence se définissant comme :

$$\epsilon = \frac{\mu}{\rho} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (2.18)$$

La fermeture du système est finalement possible en utilisant les deux équations  $k - \epsilon$  du modèle standard de Launder et Spalding<sup>[23]</sup> :

– Équation de  $k$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \mu_t P - \rho^2 C_\mu \frac{k^2}{\mu_t} + q_k \quad (2.19)$$

– Équation de  $\epsilon$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \epsilon = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + \rho C_{\epsilon 1} C_\mu k P - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + q_\epsilon \quad (2.20)$$

où la production de turbulence se définit comme :

$$P = \nabla \mathbf{u} : \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right)$$

$q_k$  et  $q_\epsilon$  sont des termes sources du modèle. Les constantes de fermeture du modèle,  $C_{\epsilon 1}$ ,  $C_{\epsilon 2}$ ,  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$  et  $\sigma_\epsilon$ , servent à calibrer les équations à partir de l'expérimentation. On adopte les valeurs suggérées par Launder et Spalding se trouvant au tableau 2.1 pour toutes les applications futures puisqu'il s'agit d'un modèle de turbulence dit *complet* dans le sens qu'une fois le modèle conçu et calibré, il n'y a plus besoin d'ajustements supplémentaires selon le problème étudié.

TAB. 2.1 Constantes du modèle  $k - \epsilon$  de Launder et Spalding

$C_\mu$	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

### 2.2.1 Forme finale des équations de Navier-Stokes moyennées

En intégrant les approximations (2.15) et (2.16) dans les équations (??) et (2.12), on retrouve la forme finale des équations moyennées de Navier-Stokes :

– Équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.21)$$

– Équations de quantité de mouvement

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (2.22)$$

où le tenseur des contraintes visqueuses en régime turbulent est :

$$\boldsymbol{\tau} = (\mu + \mu_t) \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad (2.23)$$

– Équation d'énergie

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla T] + q \quad (2.24)$$

On omet désormais les barres supérieures exprimant la moyenne pour alléger l'écriture. Notons finalement que le terme  $\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$  de l'équation (2.15) est une contrainte normale que l'on incorpore à la pression et n'apparaît donc pas explicitement dans les équations.

### 2.2.2 Variables logarithmiques

L'énergie cinétique de la turbulence et son taux de dissipation prennent des valeurs strictement positives typiquement de quelques ordres de grandeur plus petites que l'unité. Cette caractéristique cause des difficultés numériques puisque l'effet relativement grand des erreurs numériques sur les variables de turbulence engendre des instabilités et conduit à des valeurs négatives de  $k$  et  $\epsilon$ . Une façon de remédier à ce problème est d'utiliser un changement de variables approprié permettant de modifier l'ordre de grandeur des quantités turbulentes. Nous adoptons l'approche

d'Ilinca *et al.*<sup>[1]</sup> proposant le changement en variables logarithmiques suivant :

$$\mathcal{K} = \ln(k) \quad ; \quad \mathcal{E} = \ln(\epsilon) \quad (2.25)$$

Les équations régissant  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  s'obtiennent par substitution des relations (2.25) dans les équations (2.19-2.20) qui prennent la forme logarithmique suivante :

– Équation de  $\mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \\ + \mu_t e^{-\mathcal{K}} P - \rho^2 C_\mu \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} + q_{\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

– Équation de  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \\ + \rho C_{\epsilon 1} C_\mu e^{\mathcal{K} - \mathcal{E}} P - C_{\epsilon 2} \rho e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} + q_{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

La viscosité turbulente des variables logarithmiques se calcule comme suit :

$$\mu_t = \rho C_\mu \exp(2\mathcal{K} - \mathcal{E}) \quad (2.28)$$

Remarquons que les équations en variables logarithmiques sont équivalentes aux équations originales et que le modèle de turbulence est donc inchangé. En plus de préserver la positivité des variables turbulentes, les propriétés du logarithme<sup>3</sup> permettent de diminuer l'effet des non-linéarités. Ce résultat est fort intéressant dans le contexte des algorithmes couplés où la convergence des méthodes itératives traitant les non-linéarités peut être compromise par la résolution simultanée de

---

<sup>3</sup> $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$ , etc.



plusieurs équations dominées par les termes non-linéaires.

## 2.3 Sensibilités

Nous présentons dans cette section, les équations de sensibilités continues pour les paramètres de valeur (voir le chapitre 1).

### 2.3.1 Qu'est-ce qu'une sensibilité ?

Par sensibilité on désigne la dérivée des variables dépendantes, par exemple  $\phi(x, y; a)$ , par rapport à un paramètre d'intérêt,  $a$  :

$$S_{\phi}^a = \frac{\partial \phi}{\partial a}(x, y; a) \quad (2.29)$$

Pour alléger l'écriture, on omettra d'inclure le paramètre dans la notation lorsque le contexte est suffisamment explicite et indiquera alors la sensibilité de  $\phi$  simplement par  $S_{\phi}$ .

Pour mieux illustrer le concept de la sensibilité, considérons l'exemple de la conduction dans une barre composée de deux matériaux avec l'interface à  $x_i$  et des conductivités  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et soumise à deux températures,  $T_1$  et  $T_2$ , à ses extrémités,  $x_1$  et  $x_2$ .

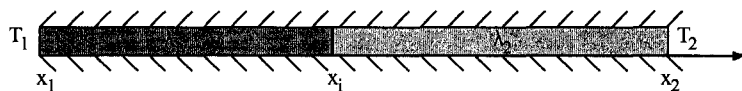


FIG. 2.2 Conduction thermique dans une barre

La distribution de la température dans la barre dépend évidemment de tous les

paramètres mentionnés :

$$T = T(x; T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_i, x_2)$$

Le calcul de la sensibilité de la température permet alors d'estimer l'effet de la variation de chacun des paramètres d'influence sur la distribution de la température :

$$S_T^a = \frac{\partial T}{\partial a}$$

$$a \in \{T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_i, x_2\}$$

### 2.3.2 Équations des sensibilités

Pour obtenir les équations des sensibilités, on dérive simplement les équations de Navier-stokes moyennées et celle du modèle de turbulence par rapport au paramètre  $a$ . Prenons le cas de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

On dérive les deux côtés et on intervertit l'ordre des dérivées par rapport à  $a$  et  $(x, y)$  :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right) = 0$$

En utilisant la notation vue précédemment, on obtient l'équation de sensibilité de la continuité :

$$\frac{\partial S_u}{\partial x} + \frac{\partial S_v}{\partial y} = 0$$

La procédure est identique pour toutes les autres équations et par conséquent, on présente les équations finales sans entrer dans les détails du développement. Notre étude se limitant aux sensibilités isothermes, les sensibilités de l'équation d'énergie ne sont pas abordées :

– Équation de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_u = 0 \quad (2.30)$$

– Équations de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_u &= -\nabla S_p + \mathbf{f}' \\ &+ \nabla \cdot \left[ (\mu' + \mu'_t) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \right. \\ &\quad \left. + (\mu + \mu_t) (\nabla \mathbf{S}_u + (\nabla \mathbf{S}_u)^T) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

– Équation de  $S_{\mathcal{K}}$

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}} &= \\ \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \\ + \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}} \\ + e^{-\mathcal{K}} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P S_{\mathcal{K}}) - \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \left( 2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) + q'_{\mathcal{K}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

– Équation de  $S_{\mathcal{E}}$

$$\begin{aligned} \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} &= \\ \nabla \cdot \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla S_{\mathcal{E}} \right] \\ + \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla S_{\mathcal{E}} \\ + \rho C_{\epsilon 1} C_\mu e^{\mathcal{K}-\mathcal{E}} P \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 1}} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_{\mathcal{K}} - S_{\mathcal{E}} + \frac{P'}{P} \right) \\ - C_{\epsilon 2} \rho e^{\mathcal{E}-\mathcal{K}} \left( \frac{C'_{\epsilon 2}}{C_{\epsilon 2}} + \frac{\rho'}{\rho} + S_{\mathcal{E}} - S_{\mathcal{K}} \right) + q'_{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{K}} &= \frac{S_k}{k} \\ S_{\mathcal{E}} &= \frac{S_{\epsilon}}{\epsilon} \\ P' &= 2\nabla\mathbf{S}_u : \left( \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \right) \end{aligned}$$

Dans ces équations, on utilise une prime pour démarquer la dérivée par rapport à  $a$  de toute entité autre que les variables dépendantes ( $\rho'$ ,  $\mu'$ ,  $q'$ ,  $\sigma'_{\epsilon}$ , etc. ).

La sensibilité de la viscosité turbulente s'écrit comme suit :

$$\mu'_t = \mu_t \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\mu}}{C_{\mu}} + 2S_{\mathcal{K}} - S_{\mathcal{E}} \right) \quad (2.34)$$

On peut apprécier la linéarité des équations des sensibilités permettant une résolution *a priori* directe de leur système. On verra pourtant que des algorithmes de résolution classiques en turbulence compromettent l'avantage potentiel de cette propriété par des itérations de type point fixe, d'où entre autres, une raison pour le développement des algorithmes alternatifs plutôt directs ou couplés.

## 2.4 Conditions aux limites

Cette section porte sur les conditions aux frontières pour l'écoulement et les sensibilités. On introduit en premier lieu les conditions aux limites classiques. Les conditions aux limites pour les parois solides requérant un traitement particulier en régime turbulent sont discutées par la suite.

### 2.4.1 Conditions aux limites classiques

On appelle ces conditions classiques car elles sont directement tirées des équations du modèle, en l'occurrence, des équations de Navier-Stokes moyennées, celles du modèle de turbulence et de leurs équations de sensibilités qui régissent le comportement de l'écoulement et la distribution de ses sensibilités sur un domaine de calcul  $\Omega$  borné par la frontière fermée  $\Gamma$ . Pour chaque variable dépendante, les conditions aux limites de Dirichlet (essentiels), de Neumann (naturelles) et de Robin (mixtes) peuvent être appliquées sur trois parties distinctes de la frontière respectivement désignées par  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_R$ . Notons que nous n'imposons aucune condition pour la pression et on laisse la résolution de l'équation de continuité ajuster la valeur de la pression partout dans le domaine et à ses frontières.

#### 2.4.1.1 Écoulement

Pour l'écoulement, les trois conditions classiques prennent les formes suivantes :

– Condition de Dirichlet

Cette condition permet de déterminer directement la valeur de la variable dépendante sur les frontières :

$$u = \hat{u} \quad \text{sur } \Gamma_{D^u} \quad (2.35)$$

$$v = \hat{v} \quad \text{sur } \Gamma_{D^v} \quad (2.36)$$

$$T = \hat{T} \quad \text{sur } \Gamma_{D^T} \quad (2.37)$$

$$\mathcal{K} = \ln(\hat{k}) \quad \text{sur } \Gamma_{D^{\mathcal{K}}} \quad (2.38)$$

$$\mathcal{E} = \ln(\hat{\epsilon}) \quad \text{sur } \Gamma_{D^{\mathcal{E}}} \quad (2.39)$$

où  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{k}$  et  $\hat{\epsilon}$  sont les valeurs connues de chacune des variables dépendantes

sur la partie de la frontière où la condition est imposée.

– Condition de Neumann

Cette condition impose le flux de la variable dépendante à travers la frontière :

$$(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})_x \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{t}_x \quad \text{sur } \Gamma_{Nu} \quad (2.40)$$

$$(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})_y \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{t}_y \quad \text{sur } \Gamma_{Nv} \quad (2.41)$$

$$(\lambda + \lambda_t)\nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{q} \quad \text{sur } \Gamma_{NT} \quad (2.42)$$

$$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\phi}_{\mathcal{K}} \quad \text{sur } \Gamma_{N\mathcal{K}} \quad (2.43)$$

$$\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)\nabla \mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\phi}_{\mathcal{E}} \quad \text{sur } \Gamma_{N\mathcal{E}} \quad (2.44)$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est la normale unitaire extérieure au domaine. Également,  $\hat{t}_x, \hat{t}_y, \hat{q}, \hat{\phi}_{\mathcal{K}}$  et  $\hat{\phi}_{\mathcal{E}}$  sont respectivement les valeurs connues des tractions horizontale et verticale sur la frontière, du flux de chaleur et de celui des variables turbulentes à la frontière. La condition de Neumann pour les variables turbulentes est normalement homogène sauf pour des applications particulières comme *la vérification* par des solutions manufacturées.

– Condition de Robin

Cette condition établit une relation entre le flux et la valeur de la variable dépendante aux frontières :

$$(\lambda + \lambda_t)\nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} = h(T - T_\infty) \quad \text{sur } \Gamma_{RT} \quad (2.45)$$

où  $h$  est le coefficient de la convection et  $T_\infty$  est la valeur nominale et connue de la température loin de la frontière. Dans le cadre de la présente étude, seulement des formes particulières de la condition de Robin sont utilisées aux parois solides pour relier la vitesse tangentielle à la contrainte de cisaillement et la température au flux de chaleur. Elles seront discutées à la section 2.4.2.

### 2.4.1.2 Sensibilités

Les conditions aux limites classiques des sensibilités s'obtiennent tout simplement en différenciant les conditions aux limites de l'écoulement. Dans ce qui suit, nous introduisons seulement les conditions pour les paramètres de valeur. Les conditions aux limites pour les paramètres de forme sont plus complexes puisqu'elles font intervenir le déplacement des frontières et requièrent donc une attention particulière. Le lecteur intéressé peut trouver plus de détails à ce sujet dans les travaux de Dicaro *et al*<sup>[3]</sup>.

#### – Condition de Dirichlet

Pour  $u$ , on dérive l'équation (2.35) :

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} \quad \text{sur } \Gamma_{D^u} \\ \frac{\partial u}{\partial a} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial a} \\ S_u &= \hat{S}_u \quad \text{sur } \Gamma_{D^u} \end{aligned} \tag{2.46}$$

$\hat{S}_u$  étant la valeur connue de la sensibilité de la composante horizontale de la vitesse à la frontière. On obtient de la même façon :

$$S_v = \hat{S}_v \quad \text{sur } \Gamma_{D^v} \tag{2.47}$$

$$S_{\mathcal{K}} = \frac{\hat{S}_k}{\hat{k}} \quad \text{sur } \Gamma_{D^{\mathcal{K}}} \tag{2.48}$$

$$S_{\mathcal{E}} = \frac{\hat{S}_\epsilon}{\hat{\epsilon}} \quad \text{sur } \Gamma_{D^{\mathcal{E}}} \tag{2.49}$$

Remarquons que la dérivation implique que pour chaque segment de la frontière, le type de la condition limite en sensibilité à appliquer est dicté par la condition limite en écoulement établie pour ce segment de frontière.

– Condition de Neumann

En dérivant l'équation (2.40) on obtient :

$$(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})_x \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{t}_x \quad \text{sur } \Gamma_{N^u}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} [(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})_x \cdot \hat{\mathbf{n}}] = \frac{\partial \hat{t}_x}{\partial a}$$

$$\begin{aligned} & \left[ -s_p \mathbf{I} + 2(\mu' + \mu'_t) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) \right. \\ & \left. + 2(\mu + \mu_t) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{S}_u) \right]_x \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{t}'_x \quad \text{sur } \Gamma_{N^u} \end{aligned} \quad (2.50)$$

où  $\hat{t}'_x$  est la dérivée de la traction horizontale et le tenseur du taux de déformation est défini comme :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.51)$$

Pour les autres variables on trouve :

$$\left[ -s_p \mathbf{I} + 2(\mu' + \mu'_t) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{S}_u) \right]_y \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{t}'_y \quad \text{sur } \Gamma_{N^v} \quad (2.52)$$

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\phi}'_{\mathcal{K}} \quad \text{sur } \Gamma_{N^{\mathcal{K}}} \quad (2.53)$$

$$\left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} - \frac{\mu_t \sigma'_\epsilon}{\sigma_\epsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla S_{\mathcal{E}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\phi}'_{\mathcal{E}} \quad \text{sur } \Gamma_{N^{\mathcal{E}}} \quad (2.54)$$

– Condition de Robin

Les conditions de Robin interviennent dans les loi de paroi dont les expressions pour les sensibilités sont présentées à l'annexe I.



### 2.4.2 Conditions aux limites pour les parois solides

Aux parois solides, la condition physique à imposer est de type Dirichlet homogène pour la vitesse et les variables turbulentes :  $u = v = k = \epsilon = 0$ . Il s'agit de la condition de non-glissement. Ces conditions ne peuvent toutefois pas être appliquées au modèle de  $k - \epsilon$  standard. Ce dernier suppose en fait un écoulement complètement turbulent, à haut nombre de Reynolds, où l'effet relatif de la viscosité turbulente,  $\mu_t$ , domine celui de la viscosité moléculaire,  $\mu$ . Ce qui n'est pas le cas à la proximité des parois solides puisque la turbulence y est amortie et que son effet devient négligeable devant les composantes laminaires de l'écoulement. Cette région est nommée la sous-couche laminaire. Afin de pallier la faiblesse du modèle dans les zones laminares, on a recours à des lois de paroi.

Une loi de paroi est un modèle approximatif du profil de vitesse (ou de température) dans la couche limite. Elle permet de déplacer la frontière du domaine de calcul de la paroi physique,  $\Gamma_p$ , à une distance  $d$  de celle-ci située dans la zone logarithmique de la couche limite. La sous-couche laminaire est ainsi retirée du domaine de calcul,  $\Omega_c$ . Connaissant la solution de vitesse dans la région régie par la loi de paroi et éliminée du domaine de calcul, on peut imposer des conditions aux limites réalistes à la frontière de calcul,  $\Gamma_c$ . Cette idée est schématisée à la figure 2.3 où l'on voit également les différentes zones d'une couche limite turbulente complètement développée.

Cette technique présente les avantages suivants :

- Il n'est pas nécessaire de recourir à un modèle de turbulence dit à *bas Reynolds* qui serait requis si l'on voulait résoudre les équations aux dérivées partielles jusqu'à la paroi.
- On réduit très sensiblement le nombre de nœuds de calcul car c'est dans les zones

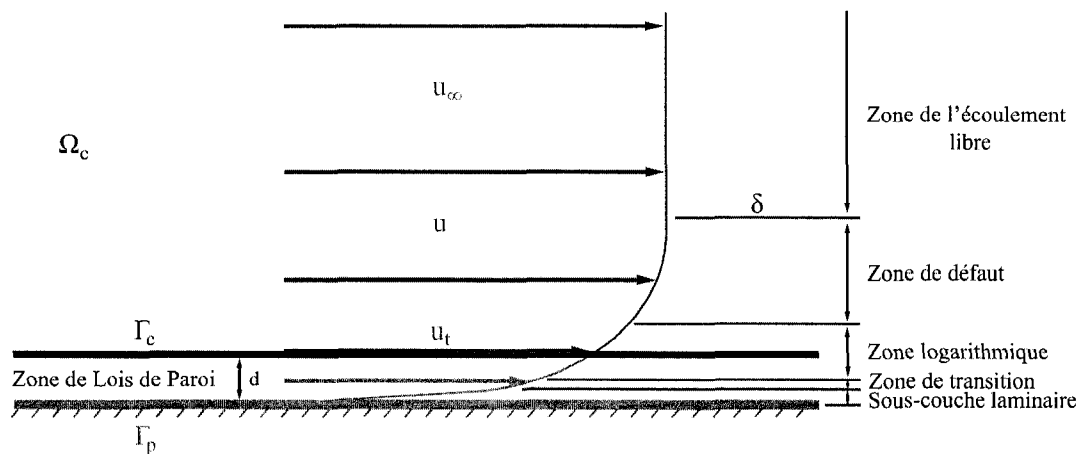


FIG. 2.3 Le concept de loi de paroi et les composantes de la couche limite

de proche parois que l'on retrouve les gradients les plus forts.

Dans ce qui suit, on présente les lois de paroi pour la vitesse et la température et la loi de paroi isotherme en sensibilités.

#### 2.4.2.1 Loi de paroi pour la vitesse

La loi de paroi modélise l'écoulement à l'intérieur de la couche limite en la divisant en deux régions distinctes. La première, soit la sous-couche laminaire, correspond à une évolution linéaire du profil de vitesse ( $u^+ = y^+$ ). La deuxième zone suppose une relation logarithmique entre la vitesse adimensionnelle,  $u^+$ , et la distance adimensionnelle de la paroi,  $y^+$ , qui est une mesure du nombre de Reynolds local. Les lois de paroi ne tiennent typiquement pas compte des zones de transition et de défaut. La figure 2.4 illustre ce concept.

Nous utilisons la loi de paroi à deux échelles de vitesse de Chabard<sup>[24]</sup> et Ignat *et al*<sup>[25]</sup>. Ce modèle fait l'hypothèse d'un cisaillement tangentiel constant dans la direction normale à la paroi à la proximité de celle-ci. Le cisaillement à la frontière

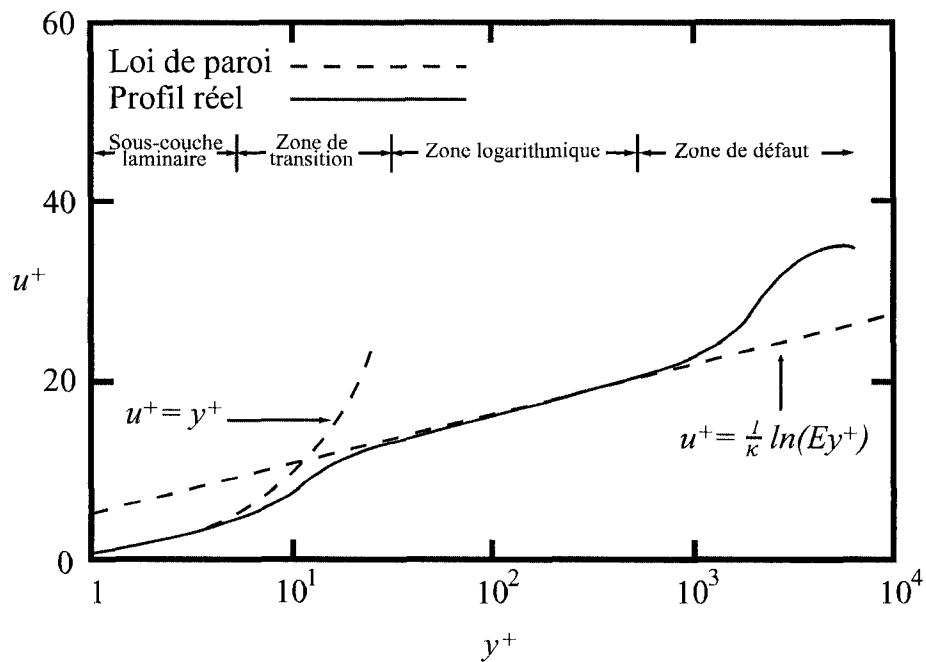


FIG. 2.4 La représentation par loi de paroi du profil de vitesse dans la couche limite de calcul,  $\tau_c$ , est donc égal à celui à la paroi,  $\tau_p$ . Par exemple, pour une paroi horizontale on a :

$$\tau_c = [(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{t}}]_{\Gamma_c} \simeq (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial y} \simeq \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_p \quad (2.55)$$

Le modèle propose l'approximation suivante pour évaluer le cisaillement :

$$\tau_c = \rho u_{**} u_k \quad (2.56)$$

où  $u_k$  et  $u_{**}$  sont les échelles de vitesse permettant de calibrer la loi de paroi en fonction de la physique du problème. L'échelle de vitesse  $u_k$  permet de tenir compte de l'intensité de la turbulence :

$$u_k = C_\mu^{1/4} k^{1/2} = C_\mu^{1/4} \exp(\mathcal{K}/2) \quad (2.57)$$

où  $C_\mu$  est la constante de fermeture du modèle  $k - \epsilon$  et l'énergie cinétique de la turbulence est considérée à la frontière de calcul,  $\Gamma_c$ .

L'échelle de vitesse  $u_{**}$  est associée à la vitesse tangente à la paroi et s'évalue par le biais du profil de vitesse adimensionnelle :

$$u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (2.58)$$

où  $\kappa$  est la constante de Kármán et  $E$  un paramètre de rugosité qui, pour une paroi lisse, prennent respectivement les valeurs de 0.42 et 9.0<sup>[3]</sup>. Les deux équations se recourent à  $y_c^+ \simeq 11$ . Les variables adimensionnelles sont définies comme :

$$y^+ = \frac{\rho d u_t}{\mu} \quad (2.59)$$

$$u^+ = \frac{u_t}{u_{**}} \quad (2.60)$$

où  $u_t = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}}$  désigne la vitesse tangentielle à la distance  $d$  de la paroi.

La valeur de la distance doit être spécifiée avant la résolution du problème. Il faut la choisir de telle sorte que la valeur de la solution de  $y^+$  reste à la fois dans les limites de validité du modèle de turbulence, c'est-à-dire dans la zone logarithmique, et dans celles de la loi de paroi. Les bornes suggérées sont  $30 \leq y^+ \leq 300$ <sup>[26]</sup>. Il faut donc procéder par quelques essais et erreurs pour trouver une valeur appropriée de la distance à imposer.

À l'aide des relations précédentes, on peut formuler les conditions aux limites pour les parois solides :

– Condition sur la vitesse tangentielle

Le cisaillement se calcule par une condition de type mixte (de Robin) :

$$[(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{t}}]_{\Gamma_c} = \tau_c = \rho u_k u_{**} = \frac{\rho u_k}{\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{E \rho u_k}{\mu}\right)} u_t \quad (2.61)$$

Remarquons que cette relation fait également intervenir l'énergie cinétique de la turbulence par le biais de  $u_k$ .

– Condition sur la vitesse normale

La loi de paroi suppose également que la vitesse est tangente à la paroi à la proximité de celle-ci. On impose alors une condition de Dirichlet homogène sur la vitesse normale, appelée la condition de non-pénétration :

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.62)$$

Sur les parois horizontales ou verticales, la non-pénétration se traduit par une condition de Dirichlet homogène sur la composante de vitesse normale à la paroi que l'on impose alors au sens fort ( $u = 0$  ou  $v = 0$ ). Sur une paroi quelconque, on impose la condition de non-pénétration au sens faible, soit en annulant le débit à travers la frontière. Pour imposer cette contrainte on utilise un multiplicateur de Lagrange<sup>[18]</sup>,  $f$ , qui agit comme la réaction de la paroi aux forces de pénétration exercées par le fluide. L'équation (2.62) prend alors la forme de la fonctionnelle suivante :

$$I = \int_{\Gamma_c} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} f d\Gamma = 0 \quad (2.63)$$

Dans le contexte des éléments finis (voir la section 3.1) et dans le but de minimiser la fonctionnelle (2.63), on évalue sa première variation :

$$\vartheta I = \int_{\Gamma_c} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \vartheta f d\Gamma + \int_{\Gamma_c} f \vartheta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (2.64)$$

On a ainsi obtenu l'équation supplémentaire permettant d'évaluer la valeur de  $f$  de façon à annuler l'effet des forces de fluide et d'ajuster par conséquent le débit :

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \vartheta f d\Gamma = 0 \quad (2.65)$$

Cette équation est traitée par *la méthode de lagrangien augmentée*<sup>[18]</sup>. L'effet de la réaction de la paroi s'ajoute à la forme faible de l'équation de quantité de mouvement (3.2) :

$$\int_{\Gamma_c} [(\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) \cdot \hat{\mathbf{n}}] \cdot \vartheta \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma_c} f \vartheta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.66)$$

– Condition sur  $\mathcal{K}$

On applique une condition de Neumann homogène sur l'énergie cinétique de la turbulence à la frontière du domaine de calcul régie par la loi de paroi :

$$\left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (2.67)$$

On laisse ainsi  $k$ , et par conséquent  $u_k$ , varier le long de la frontière et pendant les calculs. C'est en fait l'équilibre entre les équations du modèle et les autres conditions aux limites qui ajustera leurs niveaux finals.

– Condition sur  $\mathcal{E}$

Cette condition est implémentée différemment selon les algorithmes de résolution qui seront abordés à la section 3.2. Pour l'algorithme découplé, la valeur de  $\epsilon$  est reliée à l'intensité de la turbulence par une condition de Dirichlet dont l'expression en variable logarithmique est la suivante :

$$\mathcal{E} = \ln \left( \frac{u_k^3}{\kappa d} \right) \quad (2.68)$$

Pour les algorithmes couplé et semi-couplé, cette relation ne peut pas être im-

posée par le biais d'une condition de Dirichlet. En fait, à la différence de l'algorithme découplé, la solution de  $\mathcal{K}$  n'est pas connue lors de la résolution de l'équation de  $\mathcal{E}$ . La relation (2.68) devient alors une contrainte entre les valeurs de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$  à la limite du domaine de calcul qui s'exprime sous la forme résiduelle suivante :

$$R_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - \ln \left( \frac{C_{\mu}^{\frac{3}{4}}}{\kappa d} \right) - \frac{3}{2} \mathcal{K} \quad (2.69)$$

Pour ces algorithmes, la forme faible de l'équation (2.69) est résolue implicitement sur les éléments 1-D de la frontière régie par la loi de paroi.

#### 2.4.2.2 Loi de paroi thermique

Puisque l'on réduit le domaine de calcul pour éliminer les zones laminaires, il faut également modéliser le comportement de la température dans la région éliminée de la résolution. On utilise alors une loi de paroi thermique<sup>[25]</sup> qui suppose le flux de chaleur à la frontière de calcul,  $q_c$ , égal au flux de chaleur à la paroi,  $q_p$  :

$$q_c = (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial n} \simeq \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_p \quad (2.70)$$

La loi de paroi propose également l'approximation suivante pour calculer ce flux de chaleur :

$$q_c = \rho c_p u_k T_{\star} \quad (2.71)$$

où  $T_{\star}$  est une température normalisée :

$$T_{\star} = \frac{T - T_p}{T^+} \quad (2.72)$$

$T_p$  est la température à la paroi. Notons que l'équation (2.71) est en fait une condition mixte.

On évalue  $T^+$  selon le profil de température adimensionnelle proposé par Arpaci et Larsen<sup>[27]</sup> :

$$T^+ = \begin{cases} \text{Pr}y^+ & \text{for } y^+ < y_1^+ \\ a_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2a_1(y^+)^2} & \text{for } y_1^+ \leq y^+ \leq y_2^+ \\ \frac{\text{Pr}_t}{\kappa} \ln(y^+) + \beta & \text{for } y_2^+ < y^+ \end{cases} \quad (2.73)$$

Les constantes du modèle s'évaluent selon les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} y_1^+ &= \frac{10}{\text{Pr}^{1/3}} & y_2^+ &= \left(\frac{\kappa}{a_1}\right)^{1/2} \\ a_1 &= 10^{-3}\text{Pr}_t & a_2 &= 15\text{Pr}^{2/3} \\ \beta &= a_2 - \frac{\text{Pr}_t}{2\kappa} \left[1 + \ln\left(\frac{\kappa}{a_1}\right)\right] \end{aligned}$$

L'échelle de vitesse  $u_k$  et la distance adimensionnelle,  $y^+$ , sont les mêmes que pour la loi de paroi de vitesse. Pour l'air, les nombres de Prandtl sont fixés à :  $\text{Pr} = 0.7$  et  $\text{Pr}_t = 1$ <sup>[28]</sup>.

#### 2.4.2.3 Loi de paroi pour les sensibilités

Les sensibilités des lois de paroi s'obtiennent en dérivant les lois de paroi pour l'écoulement. Les sensibilités isothermes étant suffisantes dans notre cas, nous présentons en annexe I leur expression pour les paramètres de valeur.



## CHAPITRE 3

### MÉTHODE DE RÉOLUTION

Une fois que le modèle mathématique du problème physique est déterminé, il reste à résoudre les équations aux dérivées partielles par des méthodes appropriées que nous aborderons dans ce qui suit.

#### 3.1 Méthode des éléments finis

Sauf pour des géométries triviales ou en présence des hypothèses simplificatrices, il n'existe pas de solution analytique pour les équations qui nous intéressent. Il faut donc recourir à une méthode numérique. Nous optons pour la méthode des éléments finis, une technique abondamment documentée<sup>[29, 30]</sup>. Sans nous étaler sur la présentation de la méthode, passons directement à la formulation variationnelle des équations du modèle.

##### 3.1.1 Formulation variationnelle

On applique une procédure classique aux équations du modèle (2.21-2.24) et (2.26-2.27), dont l'expression est appelée *forme forte*, pour obtenir leur formulation variationnelle (dite *forme faible*). Le terme «faible» fait référence à la réduction de l'ordre des dérivées aboutissant à des équations équivalentes à celles de départ mais exigeant moins de régularité. La procédure est la suivante : on multiplie les équations par une fonction test appropriée, on les intègre sur le domaine et on applique le théorème de la divergence pour obtenir les équations suivantes sous forme

de résidus :

– Équation de continuité

$$R_p = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \vartheta p d\Omega \quad (3.1)$$

– Équations de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} R_{uv} = & \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \vartheta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\vartheta \mathbf{u}) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vartheta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \vartheta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_{Nuv}} [(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) \cdot \hat{\mathbf{n}}] \cdot \vartheta \mathbf{u} d\Gamma_{Nuv} \end{aligned} \quad (3.2)$$

dont les composantes spatiales suivantes s'extraient :

$$\begin{aligned} R_u = & \int_{\Omega} \left( \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vartheta u d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\mu + \mu_t) \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \vartheta u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \vartheta u}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} p \frac{\partial \vartheta u}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} f_x \vartheta u d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{Nu}} \left[ \left( -p + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) n_x + 2(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] \vartheta u d\Gamma_{Nu} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} R_v = & \int_{\Omega} \left( \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \vartheta v d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\mu + \mu_t) \left[ 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \vartheta v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \vartheta v}{\partial x} \right) \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} p \frac{\partial \vartheta v}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} f_y \vartheta v d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_{Nv}} \left[ 2(\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left( -p + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) n_y \right] \vartheta v d\Gamma_{Nv} \end{aligned} \quad (3.4)$$

– Équation d'énergie

$$\begin{aligned}
R_T = & \int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \vartheta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \vartheta T d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q \vartheta T d\Omega - \int_{\Gamma_{NT}} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} \vartheta T d\Gamma_{NT}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

– Équation de  $\mathcal{K}$

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{K}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \right. \\
& \left. - \mu_t e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} \right] \vartheta \mathcal{K} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \vartheta \mathcal{K} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q_{\mathcal{K}} \vartheta \mathcal{K} d\Omega - \int_{\Gamma_{N\mathcal{K}}} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} \vartheta \mathcal{K} d\Gamma_{N\mathcal{K}}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

– Équation de  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned}
R_{\mathcal{E}} = & \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \right. \\
& \left. - \rho C_{\epsilon 1} C_{\mu} e^{\mathcal{K} - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_{\epsilon 2} e^{\mathcal{E} - \mathcal{K}} \right] \vartheta \mathcal{E} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \vartheta \mathcal{E} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} q_{\mathcal{E}} \vartheta \mathcal{E} d\Omega - \int_{\Gamma_{N\mathcal{E}}} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_{\epsilon}} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \vartheta \mathcal{E} d\Gamma_{N\mathcal{E}}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

où  $\vartheta p$ ,  $\vartheta u$ ,  $\vartheta v$ ,  $\vartheta T$ ,  $\vartheta \mathcal{K}$  et  $\vartheta \mathcal{E}$  désignent les variations (fonctions test) ayant la même régularité que la solution et s'annulant aux frontières du domaine  $\Gamma_D$  où des conditions de Dirichlet sont appliquées. On remarque que les conditions aux limites  $\Gamma_N$  de Neumann (section 2.4.1.1) apparaissent explicitement dans les équations variationnelles.

Les équations variationnelles pour les sensibilités s'obtiennent de façon similaire. Leurs expressions se trouvent à l'annexe II.

La méthode des éléments finis résout ces équations variationnelles en faisant tendre leur résidu discrétisé vers zéro. Poursuivons en présentant la façon de discrétiser les équations variationnelles.

### 3.1.2 Discrétisation

La discrétisation consiste à subdiviser le domaine continu du problème en un nombre fini de sous-domaines inter-reliés appelés *éléments*. Les inconnues sont associées à des points géométriques de ces éléments, appelés *nœuds de calcul*. On représente la solution de l'écoulement sur l'ensemble du domaine par l'interpolation des valeurs nodales des variables dépendantes sur chacun des éléments :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_u} N_i^u u_i, \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_v} N_i^v v_i, \quad p_h = \sum_{i=1}^{N_p} N_i^p p_i, \quad (3.8)$$

$$T_h = \sum_{i=1}^{N_T} N_i^T T_i, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{K}_h = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{K}}} N_i^{\mathcal{K}} \mathcal{K}_i, \quad \mathcal{E}_h = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{E}}} N_i^{\mathcal{E}} \mathcal{E}_i \quad (3.10)$$

où, par exemple pour la variable dépendante  $u$ ,  $u_h$  représente la solution éléments finis,  $u_i$  ses valeurs nodales et  $N_u$  désigne le nombre élémentaire de fonctions d'interpolation et de nœuds de calcul (chaque nœud est associé à une fonction différente).

Pour les sensibilités on a :

$$S_{u_h} = \sum_{i=1}^{N_{S_u}} N_i^{S_u} S_{u_i}, \quad S_{v_h} = \sum_{i=1}^{N_{S_v}} N_i^{S_v} S_{v_i}, \quad S_{p_h} = \sum_{i=1}^{N_{S_p}} N_i^{S_p} S_{p_i}, \quad (3.11)$$

$$S_{\mathcal{K}_h} = \sum_{i=1}^{N_{S_{\mathcal{K}}}} N_i^{S_{\mathcal{K}}} S_{\mathcal{K}_i}, \quad S_{\mathcal{E}_h} = \sum_{i=1}^{N_{S_{\mathcal{E}}}} N_i^{S_{\mathcal{E}}} S_{\mathcal{E}_i} \quad (3.12)$$

Nous utilisons la méthode de *Galerkin*, qui prend les fonctions test comme fonctions d'interpolation :

$$N_i^u = \vartheta u_i, \quad N_i^v = \vartheta v_i, \quad N_i^w = \vartheta w_i, \quad (3.13)$$

$$N_i^T = \vartheta T_i, \quad (3.14)$$

$$N_i^{\mathcal{K}} = \vartheta \mathcal{K}_i, \quad N_i^{\mathcal{E}} = \vartheta \mathcal{E}_i \quad (3.15)$$

et de la même façon en sensibilités :

$$N_i^{S^u} = \vartheta S_{u_i}, \quad N_i^{S^v} = \vartheta S_{v_i}, \quad N_i^{S^p} = \vartheta S_{p_i}, \quad (3.16)$$

$$N_i^{S^{\mathcal{K}}} = \vartheta S_{\mathcal{K}_i}, \quad N_i^{S^{\mathcal{E}}} = \vartheta S_{\mathcal{E}_i} \quad (3.17)$$

Chaque fonction d'interpolation a la propriété de prendre une valeur unitaire à son nœud de calcul correspondant et de s'annuler aux autres nœuds.

L'élément utilisé est celui de *Taylor-Hood* ( $P_2$ - $P_1$ ) comportant 6 degrés de liberté par composante de vitesse, 6 degrés par variable turbulente, 6 en température et 3 en pression (figure 3.1). Cet élément incorpore des interpolants linéaires pour la pression et quadratiques pour toutes les autres variables.

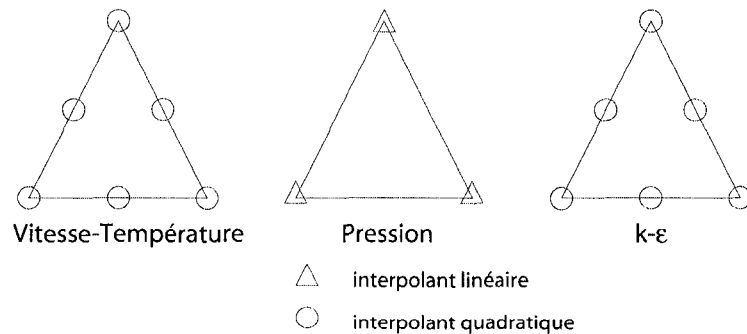


FIG. 3.1 Élément fini de type Taylor-Hood

En injectant les variables dépendantes discrètes dans les équations variationnelles,

on obtient les équations variationnelles discrètes que l'on intègre sur un élément de référence par une quadrature de Gauss adéquate. On note alors par  $R_i$  l'équation résiduelle du  $i^{\text{ième}}$  degré de liberté. Sur l'élément, les degrés de libertés sont par exemple numérotés comme suit :  $i_u \in (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ;  $i_v \in (7, 8, 9, 10, 11, 12)$ ;  $i_T \in (13, 14, 15, 16, 17, 18)$ ;  $i_p \in (19, 20, 21)$ ; etc. Pour alléger l'écriture, on utilisera désormais, par exemple pour  $v$ , la notation  $R_v$  afin de désigner les résidus discrets des degrés de libertés 7 à 12. Il en est de même pour les autres résidus.

La discrétisation des équations variationnelles permet de passer d'un problème continu à problème discret formulé par un système d'équations algébriques dont les inconnues sont les pondérations (poids) des fonctions d'interpolation. En traitant les non-linéarités par une méthode itérative appropriée, un système matriciel de type  $Ax = b$  peut être constitué à partir de la formulation discrète. On poursuit par la présentation des différents systèmes obtenus en fonction de l'algorithme de résolution.

### 3.2 Algorithmes de résolution

Cette section porte sur la présentation des trois algorithmes de résolution découplé, couplé et semi-couplé et les systèmes matriciels qui en découlent.

#### 3.2.1 Jacobien Numérique

Considérons l'équation résiduelle du  $i^{\text{ième}}$  degré de liberté du domaine comme une fonction de  $\mathbf{u}^n$ , le vecteur des valeurs nodales des variables dépendantes obtenues à la  $n^{\text{ième}}$  itération. On cherche à obtenir :

$$R_i(\mathbf{u}^n) = 0 \quad (3.18)$$

Toutefois,  $\mathbf{u}^n$  ne satisfait *a priori* pas l'équation non-linéaire (3.18). On cherche un vecteur de correction,  $\delta\mathbf{u}$ , tel que :  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta\mathbf{u}^{n+1}$  et  $R_i(\mathbf{u}^{n+1}) = 0$ . Le système non-linéaire est approché par une approximation d'ordre 1 en séries de Taylor (méthode de Newton) :

$$R_i(\mathbf{u}^n + \delta\mathbf{u}^{n+1}) = R_i(\mathbf{u}^n) + \sum_j \frac{\partial R_i}{\partial u_j}(\mathbf{u}^n) \delta u_j = 0 \quad (3.19)$$

Ou après réarrangement :

$$\left[ \frac{\partial R_i}{\partial u_j} \right] \{ \delta u_j \} = \{ -R_i \} \quad (3.20)$$

où  $u_j$  représente les valeurs nodales et  $\delta u_j$  leurs corrections. Les entrées de la matrice jacobienne,  $\frac{\partial R_i}{\partial u_j}$ , sont évaluées par une approximation de type différence finie :

$$\frac{\partial R_i}{\partial u_j} = \frac{R_i(u_1, u_2, \dots, u_j + \alpha, \dots) - R_i(u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)}{\alpha} \quad (3.21)$$

où  $\alpha$  est une petite perturbation. Remarquons que le système (3.20) est un système matriciel linéaire de type  $Ax = b$ .

### 3.2.2 Approche Découplée

Il s'agit d'une méthode découplée ou «segregated» en anglais regroupant les équations discrètes en trois systèmes : continuité-mouvement-énergie,  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ . Cette approche expliquée en détails par Ilinca<sup>[1]</sup> procède comme suit :

- 0. Fournir une solution initiale
- 1. Calculer  $\mu_t$  et  $\lambda_t$

- 2. Résoudre le système continuité-mouvement-énergie avec  $\mu_t^{n-1}$  et  $\lambda_t^{n-1}$  fixes :

$$R_p(\mathbf{u}^n) = 0$$

$$R_u(\mathbf{u}^n, \mathcal{K}^{n-1}, \mathcal{E}^{n-1}, p^n) = 0$$

$$R_T(\mathbf{u}^n, T^n, \mathcal{K}^{n-1}, \mathcal{E}^{n-1}) = 0$$

- 3. Résoudre les équations de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$ 
  - 3.1. Résoudre le système  $\mathcal{K}$  avec  $\mu_t^{n-1}$  fixe :

$$R_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}^{n-1}, \mathcal{K}^n, \mathcal{E}^{n-1}) = 0$$

- 3.2. Résoudre le système  $\mathcal{E}$  avec  $\mu_t^{n-1}$  fixe :

$$R_{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{n-1}, \mathcal{K}^{n-1}, \mathcal{E}^n) = 0$$

- 3.3. Mettre à jour  $\mu_t$  avec les nouveaux champs de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{E}$
    - 3.4. Selon le test du critère de convergence, retourner à l'étape 3. ou aller à l'étape 4.
  - 4. Selon le test du critère de convergence globale, retourner à l'étape 1. ou arrêter.
- L'exposant « $n$ » réfère aux valeurs implicites provenant de l'itération en cours tandis que « $n-1$ » désigne les valeurs obtenues lors d'une itération antérieure. La différence est que les premières se font perturber pour calculer la dérivée par différence finie tandis que les dernières sont fixes pendant la résolution en question.

Les systèmes matriciels résolus par cet algorithme sont les suivants :



– Continuité-mouvement-énergie

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_u}{\partial p} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_v}{\partial p} \\ \frac{\partial R_T}{\partial u} & \frac{\partial R_T}{\partial v} & \frac{\partial R_T}{\partial T} & 0 \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta T \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_u \\ -R_v \\ -R_T \\ -R_p \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

– Énergie cinétique de la turbulence,  $\mathcal{K}$

$$\left[ \frac{\partial R_{\mathcal{K}}}{\partial \mathcal{K}} \right] \left[ \delta \mathcal{K} \right] = \left[ -R_{\mathcal{K}} \right] \quad (3.23)$$

– Taux de dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence,  $\mathcal{E}$

$$\left[ \frac{\partial R_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} \right] \left[ \delta \mathcal{E} \right] = \left[ -R_{\mathcal{E}} \right] \quad (3.24)$$

Les non-linéarités de chaque système sont traitées par la méthode de Newton sauf pour les premières résolutions du système continuité-mouvement-énergie et sur les maillages grossiers où l'imprécision de la solution initiale rend la convergence de la méthode de Newton difficile, voire impossible si l'estimé initial est trop loin de la solution finale. On utilise alors la méthode de Picard (point-fixe). Elle est également utilisée au cours des itérations globales (étapes 1.-4.) puisque lors de la résolution de chaque système, les informations provenant d'un autre système sont fixées.

### 3.2.3 Approche Couplée

Cette approche consiste en une résolution simultanée et implicite de toutes les équations :

$$R_i(\mathbf{u}^n, T^n, \mathcal{K}^n, \mathcal{E}^n, p^n) = 0 \quad (3.25)$$

pour tous les  $i$ , les degrés de liberté du domaine. Il en résulte un grand système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_u}{\partial \mathcal{K}} & \frac{\partial R_u}{\partial \mathcal{E}} & \frac{\partial R_u}{\partial p} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_v}{\partial \mathcal{K}} & \frac{\partial R_v}{\partial \mathcal{E}} & \frac{\partial R_v}{\partial p} \\ \frac{\partial R_T}{\partial u} & \frac{\partial R_T}{\partial v} & \frac{\partial R_T}{\partial T} & \frac{\partial R_T}{\partial \mathcal{K}} & \frac{\partial R_T}{\partial \mathcal{E}} & 0 \\ \frac{\partial R_{\mathcal{K}}}{\partial u} & \frac{\partial R_{\mathcal{K}}}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_{\mathcal{K}}}{\partial \mathcal{K}} & \frac{\partial R_{\mathcal{K}}}{\partial \mathcal{E}} & 0 \\ \frac{\partial R_{\mathcal{E}}}{\partial u} & \frac{\partial R_{\mathcal{E}}}{\partial v} & 0 & \frac{\partial R_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{K}} & \frac{\partial R_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} & 0 \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta T \\ \delta \mathcal{K} \\ \delta \mathcal{E} \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_u \\ -R_v \\ -R_T \\ -R_{\mathcal{K}} \\ -R_{\mathcal{E}} \\ -R_p \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Cette formulation permet une application directe de la méthode de Newton à tous les termes non-linéaires de toutes les équations. On peut donc théoriquement s'attendre à un taux de convergence quadratique au cours des itérations et par conséquent à une économie importante du temps de calcul. Par contre, la taille de la matrice de l'algorithme couplé étant plus importante que celle de son équivalent en découplé (un rapport approximatif de 2.5 pour les problèmes thermiques<sup>1</sup> et un autre de 3.2 pour les problèmes isothermes<sup>2</sup>), l'approche couplée sera plus gourmande en termes de mémoire.

### 3.2.4 Approche Semi-couplée

L'approche couplée éprouve occasionnellement des difficultés de convergence lorsque la solution initiale n'est pas suffisamment proche de la solution finale. C'est surtout le cas sur des maillages grossiers. On a alors recours à l'approche semi-couplée pour générer un estimé initial de la solution, fourni à l'algorithme couplé,

<sup>1</sup>Il s'agit d'une matrice élémentaire de  $33 * 33$  (degrés de liberté)<sup>2</sup> en couplé contre  $21 * 21$  (degrés de liberté)<sup>2</sup> pour le système continuité-mouvement-énergie en découplé sans tenir compte des conditions aux limites et des zéros.

<sup>2</sup>Matrice élémentaire de  $27 * 27$  (degrés de liberté)<sup>2</sup> en couplé contre  $15 * 15$  (degrés de liberté)<sup>2</sup> en découplé

assurant ainsi la convergence de la méthode de Newton. Cette approche découple partiellement les équations en appliquant la méthode de point-fixe à la plupart des termes convectifs et en fixant la viscosité et la conductivité turbulentes pendant chaque itération. Autrement dit, il s'agit de la résolution simultanée des équations résiduelles de la manière suivante :

$$R_p(\mathbf{u}^n) = 0 \quad (3.27)$$

$$R_u(\mathbf{u}^n, \mathcal{K}^{n-1}, \mathcal{E}^{n-1}, p^n) = 0 \text{ avec } \mathbf{u}^{n-1} \text{ aux termes convectifs (et } \mu_t^{n-1}) \quad (3.28)$$

$$R_T(\mathbf{u}^n, T^n, \mathcal{K}^{n-1}, \mathcal{E}^{n-1}) = 0 \text{ avec } \mathbf{u}^{n-1} \text{ aux termes convectifs (et } \lambda_t^{n-1}) \quad (3.29)$$

$$R_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}^{n-1}, \mathcal{K}^n, \mathcal{E}^n) = 0 \text{ avec } \mu_t^{n-1} \quad (3.30)$$

$$R_{\mathcal{E}}(\mathbf{u}^{n-1}, \mathcal{K}^n, \mathcal{E}^n) = 0 \text{ avec } \mu_t^{n-1} \quad (3.31)$$

Ces équations forment le grand système suivant :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_u}{\partial u} & \frac{\partial R_u}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_u}{\partial p} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_v}{\partial p} \\ \frac{\partial R_T}{\partial u} & \frac{\partial R_T}{\partial v} & \frac{\partial R_T}{\partial T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_{\mathcal{K}}}{\partial \mathcal{K}} & \frac{\partial R_{\mathcal{K}}}{\partial \mathcal{E}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial R_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{K}} & \frac{\partial R_{\mathcal{E}}}{\partial \mathcal{E}} & 0 \\ \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial v} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta T \\ \delta \mathcal{K} \\ \delta \mathcal{E} \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_u \\ -R_v \\ -R_T \\ -R_{\mathcal{K}} \\ -R_{\mathcal{E}} \\ -R_p \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

La façon naturelle d'implémenter cet algorithme consiste à créer 2 systèmes matriciels distincts : un pour les équations de continuité-mouvement-énergie et un autre pour  $\mathcal{K} - \mathcal{E}$ . On effectuerait alors des itérations de type point-fixe entre les deux systèmes tout en résolvant chaque système par la méthode de Newton. Pourtant, pour des raisons pratiques, on utilise un système similaire à celui de la méthode couplée. On laisse ainsi le solveur linéaire gérer les blocs de zéros dans la matrice semi-couplée et on applique directement la méthode de Newton à l'ensemble du

système tout en opérant un point-fixe à certains termes non-linéaires.

Nous notons que l'encombrement mémoire des deux approches semi-couplée et couplée est du même ordre de grandeur. Par contre, la convergence de l'algorithme semi-couplé sera plus lente puisqu'il traite les non-linéarités par une méthode de point-fixe. Toutefois, cette inefficacité n'est pas critique puisque cette approche n'est utilisée que pour démarrer les calculs sur les maillages grossiers pour lesquels les systèmes sont de petite taille.

Ayant exploré les algorithmes de résolution du modèle de turbulence et après avoir introduit les systèmes matriciels à résoudre, attardons-nous aux outils permettant leur résolution.

### 3.2.5 Remarque sur la résolution des sensibilités

Notons que les systèmes matriciels et les algorithmes de résolution pour les sensibilités sont les mêmes que pour l'écoulement et nous ne les présentons donc pas. D'ailleurs, les équations de sensibilités sont linéaires et donc leur résolution ne nécessite pas de méthode itérative. Toutefois, puisque la structure du système créé lors de la résolution de l'écoulement est reprise pour résoudre les sensibilités, l'approche itérative employée pour l'écoulement s'applique de façon superflue aux sensibilités. C'est le cas de l'algorithme découplé. L'approche couplée résout les sensibilités directement et l'approche semi-couplée étant par conséquent inutile n'est pas implémentée en sensibilités.

### 3.3 Résolution du système linéaire $Ax = b$

En éléments finis en général et surtout pour les problèmes turbulents résolus par des algorithmes couplés, l'étude des cas pratiques avec une précision acceptable nécessite la résolution de systèmes matriciels de grande taille. Par exemple, un maillage de 30,000 nœuds seulement, pour un problème turbulent isotherme et l'algorithme couplé, se traduit par le traitement d'un système de quelque 120,000 inconnues. Le stockage de la matrice  $A$  d'un tel système au complet exige à lui seul 109,863 Mo en double précision. Cette difficulté peut être contournée en tirant profit de la structure particulière de la matrice  $A$ .

#### 3.3.1 Matrices creuses

Les matrices éléments finis sont de type *creuses* («sparse» en anglais). Cette appellation fait référence au nombre important de blocs de zéros dans la structure de la matrice.

La figure 3.2 montre la structure de la matrice  $A$  pour la discrétisation éléments finis des équations Navier-Stokes 2D dans le cas de l'écoulement autour d'un carré. Les valeurs non-nulles sont démarquées par des points et les valeurs nulles par les espaces vides. Le nombre d'entrées (valeurs non-nulles) est de  $ne = 84,723$  pour ce système de  $neq = 3,175$  équations. Dans ce cas précis, les valeurs non-nulles représentent 0.84% des coefficients de la matrice. On voit donc l'énorme économie possible à réaliser en évitant le stockage des zéros.

Différentes stratégies<sup>[31]</sup> ont été développées pour le traitement et la résolution de ces matrices de façon à optimiser le temps de calcul et à réduire significativement les besoins en capacités de stockage. Leur point de départ commun réside dans

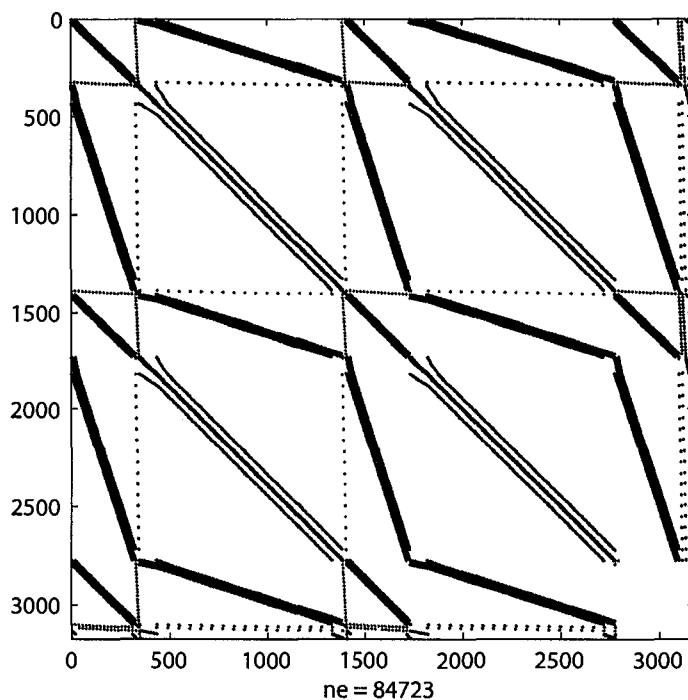


FIG. 3.2 Structure de la matrice A

l'élimination des valeurs nulles du processus de mise en mémoire. Remarquons que pour des raisons pratiques, toutes les valeurs nulles ne sont pas nécessairement éliminées. On désigne alors par *entrée* les coefficients stockés (conservés lors de la décomposition) de la matrice qui peuvent être nuls ou non.

Notons également la symétrie de la structure de la matrice de la figure 3.2. Même si cela n'est pas le cas de toutes les matrices produites en éléments finis, on adopte une stratégie générale en supposant leur structure symétrique. Ainsi, le traitement de la matrice en devient simple et générique au prix du stockage de quelques coefficients nuls.

### 3.3.2 Solveurs linéaires : Skyline - UMFPACK - PARDISO

Parmi les multiples outils et méthodes existants, nous avons opté, dans l'ordre chronologique d'implémentation, pour les solveurs directs (non-itératif) suivants :

#### – Skyline

L'appellation de cette méthode, *Lignes de ciel* en français, fait allusion à l'allure de la partie stockée découpée dans la matrice de départ. La convention utilisée par cette méthode pour la décomposition et le stockage de la matrice est comme suit : on localise d'abord, pour toutes les lignes, le premier élément non-nul de la ligne  $i$  qui est également le premier élément non-nul de la colonne  $j = i$ . Par la suite, on copie dans le vecteur  $A_x$ , tous les coefficients de la ligne  $i$  et puis de la colonne  $j = i$ , à partir du premier coefficient non-nul jusqu'à la diagonale (coefficient diagonal exclus). On stocke finalement le coefficient diagonal,  $d_i$ . Dans le vecteur  $A_p$ , on indexe la position des entrées diagonales parmi les entrées du vecteur  $A_x$ . Poursuivons en appliquant la procédure à la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

On obtient le résultat de la figure 3.3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

FIG. 3.3 Algorithme de stockage du solveur linéaire Skyline

Les vecteurs de décomposition sont :

$$A_p = \{1, 2, 7, 12, 21, 28\}$$

$$A_x = \{0, -1, 5, 0, 7, 0, 0, 4, 0, 12, 0, 9, -2, 0, \\ 0, 6, 10, 0, 0, 8, 0, 1, 0, -11, 3, 0, 14, 1\}$$

Le vecteur  $A_p$  est d'une longueur de  $neq$ , le nombre d'équations.

La convention de décomposition utilisée par cette méthode pour éliminer les zéros n'est évidemment pas optimale compte tenu du nombre important de valeurs nulles transmises de la matrice au vecteur  $A_x$ . Par contre, elle présente l'avantage de ne pas avoir à se préoccuper du remplissage dû à la factorisation (entrée nulles devenant non-nulles) puisque le remplissage se produit au niveau des fragments déjà stockés des lignes et des colonnes.

Une fois la matrice creuse décomposée en vecteurs, la méthode effectue d'abord une factorisation  $LU$  et puis une descente gaussienne pour résoudre le système. La résolution nécessite donc un grand nombre de calculs et elle est dans ce sens sous-optimale. Il a donc fallu trouver des techniques plus performantes.



– UMFPACK

«Unsymmetric-pattern MultiFrontal Package<sup>[20, 32, 33]</sup>» est un ensemble d'outils de traitement de matrices creuses utilisant des techniques multifrontales, qui offre une meilleure performance par rapport à la méthode Skyline. La technique multifrontale consiste en un traitement simultané de la matrice sur plusieurs fronts de calcul constitués de sous-matrices souvent contiguës.

Pour stocker la matrice selon la convention UMFPACK, on utilise 3 vecteurs : un vecteur de pointage,  $A_p$ , un vecteur d'indexage,  $A_i$ , et un vecteur contenant les valeurs des entrées,  $A_x$ . Ce schéma de décomposition s'appelle «Compressed Sparse Columns».

Le vecteur  $A_p$ , dont le premier élément est toujours un 0, répertorie la dernière entrée de chaque colonne en indiquant sa position parmi toutes les entrées de la matrice. Il sert comme pointeur pour repérer les colonnes de la matrice  $A$  dans le vecteur  $A_i$ . Sa taille est de  $neq + 1$ .

Le vecteur  $A_i$  indexe le numéro de ligne de chaque entrée de chacune des colonnes. Sa taille est égale à celle de  $A_x$  et correspond au nombre total d'entrées. Notons que les lignes et colonnes sont indexées à partir de 0. Par exemple, pour la matrice (3.33) on obtient :

$$A_p = \{0, 2, 4, 6, 9, 12, 15\}$$

$$A_i = \{2, 4, 1, 3, 0, 5, 1, 3, 4, 0, 3, 5, 2, 4, 5\}$$

$$A_x = \{5, -2, -1, 4, 7, 1, 12, 9, 6, 10, 8, -11, 3, 14, 1\}$$

On remarque qu'à la différence de la méthode Skyline, l'élimination des zéros est complète au prix de la création d'un vecteur supplémentaire de taille  $ne$ , le nombre d'entrées.

UMFPACK débute son traitement par une analyse préliminaire, il s'agit de la *factorisation symbolique*. Le but de cette étape est de pré-ordonner les colonnes de

$A$  de façon à réduire le remplissage et aussi de dresser le profil des sous-matrices frontales. La mémoire requise à ce stade est d'ordre  $O(ne)$  et ne dépasse pas  $13neq$  pour une matrice de  $neq * neq$ <sup>[34]</sup>. UMFPACK enchaîne par la *factorisation numérique* des sous-matrices frontales qui résulte en une décomposition de  $A$  en  $LU$ . La mémoire nécessaire à la factorisation numérique est aussi de  $O(ne)$ . La dernière étape est la résolution du système factorisé.

Nous verrons plus loin que cette méthode permet d'énormes économies de temps d'exécution et de capacité de stockage.

Il faut noter que l'on crée la structure (vecteurs  $A_p$  et  $A_i$ ) de la matrice  $A$  *a priori*, avant même de commencer le calcul, en utilisant les informations sur le maillage et le type de problème à résoudre. Finalement, l'interfaçage d'UMFPACK avec le code éléments finis élaboré sur la plate-forme Fortran a fait partie du présent projet.

#### – PARDISO

PARDISO<sup>[21, 35]</sup> est un autre solveur direct utilisant une convention de stockage et des techniques semblables à celles d'UMFPACK mais offrant en outre, la possibilité de calculs parallèles sur des systèmes multiprocesseurs. Par conséquent, ces deux outils présentent des performances similaires en termes de mémoire requise. Par contre, PARDISO est susceptible d'être plus rapide sur les machines à processeurs multiples.

### 3.3.3 Factorisation conditionnelle

Lorsque la méthode de Newton est suffisamment proche de la solution finale, on peut réutiliser la factorisation de la matrice jacobienne au prix de quelques itérations supplémentaires beaucoup moins coûteuses que l'évaluation d'une nouvelle jacobienne. On fait dans ce cas une économie substantielle du temps de calcul

dès que les critères sur les normes de résidus détectent l'approche de la convergence.

La combinaison de l'algorithme couplé, des solveurs linéaires multifrontaux et multiprocesseurs ainsi que l'application de la factorisation conditionnelle améliorent grandement l'efficacité en termes de l'usage des ressources informatiques. Ces aspects interviennent au niveau de la résolution sur un maillage donné. Puisqu'il importe de vérifier l'indépendance de la solution par rapport au maillage, on effectue une étude de convergence des solutions sur différents maillages. Pour produire des maillages optimaux, on a recours au contrôle d'erreur par l'adaptation de maillage.

### 3.4 Contrôle d'erreur

Nous utilisons *la méthode de l'adaptation de maillage* qui consiste en le post-traitement (à la suite de la résolution) suivant :

- Construire une solution enrichie par la projection locale des gradients suivant l'approche de Zhu et Zienkiewicz<sup>[36]</sup>,
- Estimer l'erreur selon une norme d'erreur appropriée<sup>3</sup>,
- Calculer une distribution de la taille des éléments dans le domaine de façon à réduire l'erreur par un facteur fixe d'un maillage à l'autre : la densité des éléments est augmentée dans les régions de forte erreur et diminuée dans les zones où l'erreur est faible.

On désignera par *cycle adaptatif* la suite des trois procédures de maillage–résolution–post-traitement. Remarquons finalement que l'on interpole souvent la solution d'un cycle adaptatif sur le maillage du cycle subséquent afin de produire une solution initiale de qualité facilitant la convergence de la méthode itérative.

---

<sup>3</sup>Voir l'annexe III pour les expressions des normes d'erreur.

### 3.5 Stabilisation numérique

En calcul d'écoulement comme de sensibilités, la méthode de Galerkin conduit à des solutions entachées d'oscillations lorsque les termes convectifs sont prépondérants. La convergence en souffre et devient dans certains cas impossible. Puisque, notre étude porte sur les écoulement turbulents (forces convectives dominant les forces visqueuses), il est primordial de recourir à des techniques de stabilisation permettant de pallier ces lacunes. On peut nommer, entre autres, les méthodes *upwind*, SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*)<sup>[37]</sup> et GLS (*Galerkin Least-Squares*)<sup>[38]</sup>. L'idée de base de toutes ces techniques est de modifier les fonctions test des équations variationnelles de façon à introduire une viscosité artificielle ou à favoriser l'intégration vers l'amont du courant. Ces méthodes ont été détaillées par Turgeon<sup>[39]</sup> et leurs expressions sont présentées à l'annexe IV.

## CHAPITRE 4

### VÉRIFICATION

Nous avons exploré la modélisation mathématique du problème et les méthodes numériques implémentées pour en résoudre les équations différentielles. Avant de passer à l'application il faut nous assurer de la qualité de notre démarche. Il s'agit d'examiner la modélisation et l'implémentation par la méthode de *vérification et validation*<sup>[40, 41]</sup>.

Lors de la vérification, on tente de répondre à la question «Résout-on les équations correctement?». La modélisation est à ce stade supposée correcte et mise de côté pour se concentrer sur son implémentation. Pour ce faire, on adopte la *méthode des solutions manufacturées*<sup>[42, 43, 44]</sup>. Une solution manufacturée est une solution analytique qui n'est pas nécessairement réaliste car elle sert uniquement pour des fins de vérification. Elle fournit les champs de distributions des variables dépendantes sur un domaine donné. La solution est injectée dans les équations aux dérivées partielles. Les termes sources sont alors déduits de façon à assurer l'équilibre. La résolution de ces équations enrichies de termes sources devra nécessairement produire la solution manufacturée. Si c'est le cas, le code est dit vérifié, sinon il faut retourner à l'étape de l'implémentation pour trouver et corriger les erreurs. La convergence vers la solution manufacturée est quantifiée par le calcul de l'erreur de discrétisation et contrôlée par le raffinement de maillage en plusieurs cycles adaptatifs. Nous vérifions l'algorithme couplé seulement puisque l'algorithme découplé a déjà fait l'objet d'une vérification<sup>[13]</sup>.

Lors de la validation, on tente de répondre à la question «Les équations que l'on résout sont-elles correctes?». C'est seulement une fois que l'implémentation du

modèle a été vérifiée qu'il devient légitime de s'interroger quant à la capacité du modèle à représenter la physique du problème avec précision. Pour ce faire, on compare les résultats numériques avec les données expérimentales.

Appliquons maintenant la méthode en vérifiant le code par une solution manufacturée pour un écoulement isotherme et ses sensibilités. La validation a déjà été effectuée<sup>[28, 13]</sup> et il n'est pas nécessaire de la refaire.

#### 4.1 Solution manufacturée pour l'écoulement

La solution manufacturée par Eça *et al*<sup>[45, 46, 3]</sup> imite le comportement proche-paroi d'une couche limite bidimensionnelle, stationnaire, isotherme et incompressible. Le nombre de Reynolds est défini comme  $Re = \frac{U_1 L}{\nu} = 10^6$  où  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $U_1 = 1$  et  $L = 1$  sont respectivement la vitesse de l'écoulement libre et la longueur de la plaque considérées comme références. Toutes les quantités sont adimensionnalisées par ces dernières.

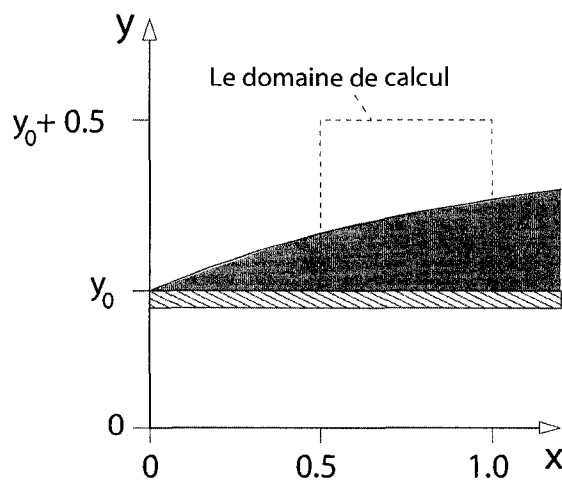


FIG. 4.1 Domaine de calcul : solution manufacturée

Le domaine de calcul, tel que montré à la figure 4.1, est un carré de  $0.5L$  de côté

dont les coordonnées varient entre  $0.5 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y - y_0 \leq 0.5$ . Remarquons que la frontière de calcul est posée à une distance  $d = 0.006$  de la paroi située à  $y = y_0 = 0.006$ . Cette valeur de distance est choisie de façon à garantir que la valeur de  $y^+$  se trouve dans les limites de validité de la loi de paroi (section 2.4.2.1).

Les variables de l'écoulement sont définies en fonction des variables de similarité suivantes :

$$\eta = \frac{\sigma(y - y_0)}{x} \quad ; \quad \eta_\nu = \frac{\sigma_\nu(y - y_0)}{x} \quad (4.1)$$

où  $\sigma = 4$  et  $\sigma_\nu = 2.5\sigma$ . Les expressions analytiques des variables dépendantes sont :

$$u = \operatorname{erf}(\eta) \quad (4.2)$$

$$v = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\eta^2}\right) \quad (4.3)$$

$$p = 0.5 \left[ \ln(2x - x^2 + 0.25) \ln(4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25) \right] \quad (4.4)$$

$$\mathcal{K} = \ln(k) = \ln\left(k_{max}\eta_\nu^2 e^{-\eta_\nu^2} + \alpha_k\right) \quad (4.5)$$

$$\mathcal{E} = \ln(\epsilon) = \ln\left(0.36 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} e^{-\eta_\nu^2} + \alpha_\epsilon\right) \quad (4.6)$$

Les constantes et propriétés physiques apparaissant dans la solution sont définies comme suit :

$$U_1 = 1.0 \quad L = 1.0 \quad \rho = 1.0 \quad \nu = 10^{-6} \quad \mu = \rho\nu = 10^{-6} \quad (4.7)$$

$$\nu_{max} = 10^3\nu \quad k_{max} = 0.01 \quad (4.8)$$

$$\alpha_k = 10^{-5} \quad \alpha_\epsilon = 10^{-3} \quad (4.9)$$

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\epsilon 1} = 1.44 \quad C_{\epsilon 2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\epsilon = 1.3 \quad (4.10)$$

La viscosité turbulente,  $\mu_t$ , s'évalue à partir de sa définition (2.28). Les constantes,  $\alpha_k$  et  $\alpha_\epsilon$ , ont été ajoutées aux variables turbulentes pour éviter les valeurs proches

de zéros lors de passage en variables logarithmiques.

À partir de la solution manufacturée, les termes sources,  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $q\kappa$  et  $q\epsilon$  sont évalués et ajoutés aux équations de quantité de mouvement (2.22), de  $\mathcal{K}$  (2.26) et de  $\mathcal{E}$  (2.27). Leurs expressions se trouvent à l'annexe V. Notons que l'équation de continuité ne nécessite pas de terme source puisque le champ de vitesse est conçu pour être à divergence nulle.

#### 4.2 Solution manufacturée pour les sensibilités

Le paramètre d'intérêt est la position verticale de la plaque,  $y_0$ . Il s'agit en fait d'un paramètre de forme. Mais puisque la solution est connue, on le considère légitimement comme un paramètre de valeur. La solution manufacturée pour les sensibilités s'obtient en dérivant celle pour l'écoulement par rapport à  $y_0$  :

$$S_u = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \quad (4.11)$$

$$S_v = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x} e^{-\eta^2} \quad (4.12)$$

$$S_p = \frac{3(y-y_0)(1-2(y-y_0))}{4(y-y_0)^3 - 3(y-y_0)^2 + 1.25} \ln(2x - x^2 + 0.25) \quad (4.13)$$

$$S_k = 2k_{max} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(1-\eta_\nu^2)} (\eta_\nu^2 - 1) \quad (4.14)$$

$$S_\epsilon = 0.72 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(-\eta_\nu^2)} \quad (4.15)$$

La sensibilité de la viscosité turbulente est définie comme suit :

$$\mu_t' = \mu_t \left( \frac{2S_k}{k} - \frac{S_\epsilon}{\epsilon} \right) \quad (4.16)$$

À partir de ces définitions, on calcule les termes sources,  $f_x'$ ,  $f_y'$ ,  $q\kappa'$  et  $q\epsilon'$  qui permettent d'injecter la solution analytique dans les équations ( 2.31 - 2.33 ). Les



expressions des termes source en sensibilités sont présentées à l'annexe V.

### 4.3 Condition aux limites

Tel que montré à la figure 4.2, des conditions aux limites classiques de Dirichlet et de Neumann (section 2.4.1) sont appliquées sur les courbes *entrée*, *haut* et *sortie*. Les conditions à la *plaque* sont régies par la loi de paroi. Dans tous les cas, les valeurs imposées proviennent de la solution manufacturée.

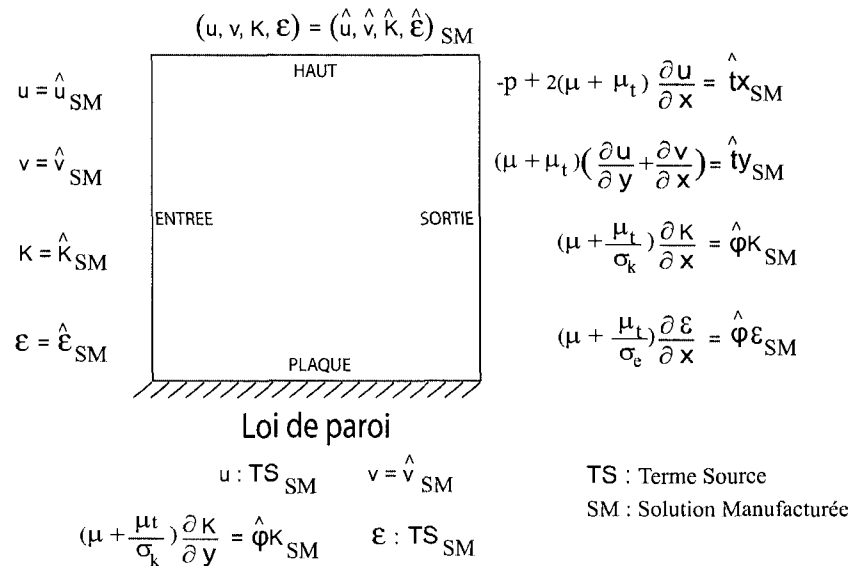


FIG. 4.2 Domaine de calcul et conditions frontières : solution manufacturée

#### 4.3.1 Écoulement

##### – Conditions de Dirichlet

Les valeurs des conditions de Dirichlet sont évaluées à partir de la solution manufacturée et les coordonnées  $(x, y)$  des courbes. Par exemple :

$$\hat{u}_{SM} = erf(\eta) \quad (4.17)$$

– Conditions de Neumann

Sur la courbe *sortie* ( $\hat{\mathbf{n}} = [1, 0]^T$ ), on a les expressions suivantes :

$$\hat{t}_{xSM} = \left\{ -p + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (4.18)$$

$$\hat{t}_{ySM} = \left\{ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}_{SM} \quad (4.19)$$

$$\hat{\phi}_{\mathcal{K}SM} = \left\{ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (4.20)$$

$$\hat{\phi}_{\mathcal{E}SM} = \left\{ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

Les termes  $SM$  sont évalués à partir des expressions analytiques de l'annexe V.

– Conditions à la paroi

Il faut injecter les expressions analytiques dans la loi de paroi de façon à ce que la résolution délivre la solution manufacturée plutôt que la solution régie par le modèle de la loi de paroi. Les conditions sont les suivantes :

Condition sur la vitesse tangentielle : il s'agit de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \tau_c &= \{-\rho u_k u_{**}\}_h - \{TS_{\tau_c}\}_{SM} \\ &= \underbrace{\{-\rho u_k u_{**}\}_h}_1 - \underbrace{\{-\rho u_k u_{**}\}_{SM}}_2 - \underbrace{\left\{ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}_{SM}}_3 \end{aligned} \quad (4.23)$$

où le terme 1 est le taux de cisaillement calculé par le code éléments finis en vertu de la loi de paroi, le terme 2 est son équivalent calculé à partir de la solution manufacturée qui a pour rôle d'annuler le premier terme. Le terme 3 est la valeur que l'on veut appliquer comme condition et correspond au taux de cisaillement analytique à la frontière de calcul. L'ensemble des termes 2 et 3 constitue le terme source (TS) pour  $\tau_c$ . Le lecteur intéressé peut consulter le

travail de Di Caro<sup>[13]</sup> pour se renseigner au sujet des conventions de signe utilisées.

Condition sur la vitesse normale : au lieu d'une condition de non-pénétration utilisée dans le cas général, on applique la valeur analytique de la vitesse normale :

$$\hat{v}_{SM} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\eta^2}\right) \quad (4.24)$$

Condition sur  $\mathcal{K}$  : on applique la valeur analytique du flux de l'énergie cinétique de turbulence à travers la frontière de calcul ( $\hat{\mathbf{n}} = [0, 1]^T$ ) :

$$\hat{\phi}_{\mathcal{K}_{SM}} = \left\{ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \right\}_{SM} \quad (4.25)$$

Condition sur  $\mathcal{E}$  : on impose la valeur analytique du taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence en modifiant l'équation (2.69) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{E}} &= \left\{ \mathcal{E} - \ln \left( \frac{C_{\mu}^{\frac{3}{4}}}{\kappa d} \right) - \frac{3}{2} \mathcal{K} \right\}_h - \{TS_{\mathcal{E}}\}_{SM} \\ &= \left\{ \mathcal{E} - \ln \left( \frac{C_{\mu}^{\frac{3}{4}}}{\kappa d} \right) - \frac{3}{2} \mathcal{K} \right\}_h - \left\{ \mathcal{E} - \ln \left( \frac{C_{\mu}^{\frac{3}{4}}}{\kappa d} \right) - \frac{3}{2} \mathcal{K} \right\}_{SM} \end{aligned} \quad (4.26)$$

### 4.3.2 Sensibilités

Les conditions en sensibilités s'obtiennent en différenciant celles de l'écoulement et donc pour chaque courbe, le type de la condition en sensibilités est le même qu'en écoulement (figure 4.2).

#### – Conditions de Dirichlet

La valeur à imposer est fournie par la solution manufacturée. Par exemple, pour

$S_u$  :

$$\hat{S}_{uSM} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \quad (4.27)$$

– **Conditions de Neumann**

Les flux à imposer sur la courbe *sortie* se calculent analytiquement selon :

$$\hat{t}'_{xSM} = \left\{ -S_p + \mu'_t \frac{\partial u}{\partial x} + 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial S_u}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (4.28)$$

$$\hat{t}'_{ySM} = \left\{ \mu'_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x} \right) \right\}_{SM} \quad (4.29)$$

$$\hat{\phi}'_{\mathcal{K}SM} = \left\{ \frac{\mu'_t}{\sigma_k} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial S_{\mathcal{K}}}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (4.30)$$

$$\hat{\phi}'_{\mathcal{E}SM} = \left\{ \frac{\mu'_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial S_{\mathcal{E}}}{\partial x} \right\}_{SM} \quad (4.31)$$

$$(4.32)$$

Notons que les propriétés physiques ne dépendent pas de  $y_0$  et donc leur sensibilité est nulle.

– **Conditions à la paroi**

La dérivation des conditions de l'écoulement délivre les conditions suivantes :

Condition sur la vitesse tangentielle : elle se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_c &= \{-\rho' u_k u_{**} - \rho u'_k u_{**} - \rho u_k u'_{**}\}_h - \{TS_{\tau_c}\}_{SM} \\ &= \{-\rho' u_k u_{**} - \rho u'_k u_{**} - \rho u_k u'_{**}\}_h - \{-\rho' u_k u_{**} - \rho u'_k u_{**} - \rho u_k u'_{**}\}_{SM} \\ &\quad - \left\{ \mu'_t \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial S_u}{\partial y} + \frac{\partial S_v}{\partial x} \right) \right\}_{SM} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Condition sur la vitesse normale : la valeur analytique est appliquée à la frontière de calcul :

$$\hat{S}_{vSM} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x} e^{-\eta^2} \quad (4.34)$$

Condition sur  $\mathcal{K}$  : on impose la valeur analytique de la sensibilité du flux :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \hat{\phi}'_{\mathcal{K}_{SM}} \\ &= \left\{ \frac{\mu'_t}{\sigma_k} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial S_{\mathcal{K}}}{\partial y} \right\}_{SM} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Condition sur  $\mathcal{E}$  : on modifie l'équation (I.10) pour y injecter la valeur analytique par le biais d'un terme source :

$$\begin{aligned} R_{S_{\mathcal{E}}} &= \left\{ S_{\mathcal{E}} - \frac{3}{4} \frac{C'_\mu}{C_\mu} + \frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{d'}{d} - \frac{3}{2} S_{\mathcal{K}} \right\}_h - \{TS_{\mathcal{E}}\}_{SM} \\ &= \left\{ S_{\mathcal{E}} - \frac{3}{2} S_{\mathcal{K}} \right\}_h - \left\{ S_{\mathcal{E}} - \frac{3}{2} S_{\mathcal{K}} \right\}_{SM} \end{aligned} \quad (4.36)$$

#### 4.4 Résultats

À la suite de 6 cycles adaptatifs, on obtient les résultats suivants. La figure 4.3 montre le maillage final de 161,025 nœuds et 80,040 éléments. On peut apprécier la performance du remaillage adaptatif en observant les traces de la couche limite dans le maillage. Les zones de raffinement correspondent aux régions de variations rapides des variables dépendantes et de la viscosité turbulente (forts gradients).

Le maillage a été adapté par rapport aux distributions d'erreur de  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mu_t$  et de leurs sensibilités. Les trajectoires de la norme équivalente de  $H^1$  des erreurs exacte et estimée (voir l'annexe III pour l'expression des normes) sont montrées aux figures 4.4 à 4.8 pour l'écoulement et aux figures 4.9 à 4.13 pour les sensibilités. L'évolution de l'indice d'efficacité  $y$  est aussi présentée. Il se calcule comme suit :

$$I_e = \frac{\|e^\phi\|_{\text{estimée}}}{\|e^\phi\|_{\text{exacte}}} \quad (4.37)$$

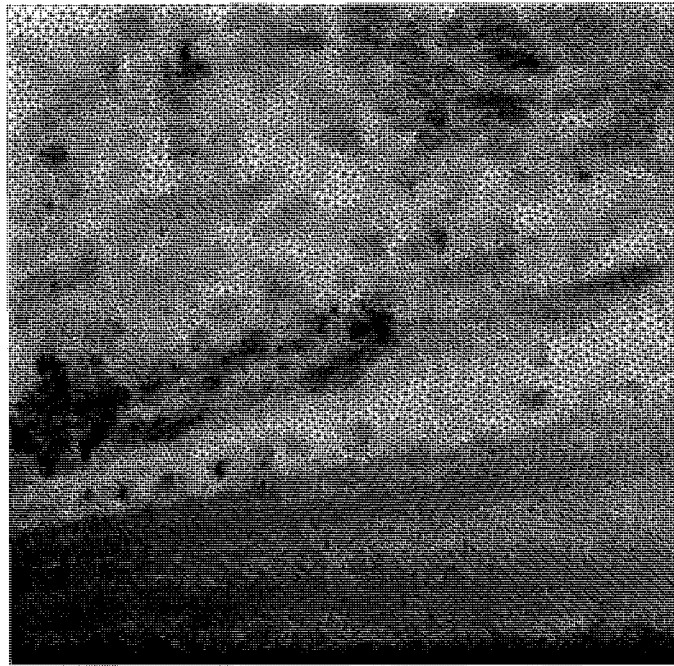


FIG. 4.3 Maillage final : solution manufacturée

où  $\|e^\phi\|$  est la norme d'erreur de la variable  $\phi$ .

On observe que l'erreur diminue systématiquement avec le raffinement adaptatif des maillages. Également, les erreurs estimées convergent vers les erreurs exactes témoignant de la convergence vers la solution manufacturée.

Les tableaux 4.1 et 4.3 récapitulent et précisent les valeurs des erreurs estimée et exacte ainsi que celles de l'indice d'efficacité pour le dernier cycle adaptatif. Remarquons que l'estimateur d'erreur atteint une efficacité de 0.70% et plus au dernier cycle témoignant du succès de la technique de l'estimation et de la stratégie d'adaptation. Nous notons également que l'erreur absolue est plutôt grande pour  $S_K$  et  $S_E$ . Pour s'assurer de la convergence, examinons les valeurs relatives des erreurs qui, étant respectivement de  $2.958 \cdot 10^{-03}$  et  $3.172 \cdot 10^{-02}$ , témoignent d'une précision acceptable et de la convergence de la solution. Les variables turbulentes

Norme (variable)	Erreur exacte	Erreur estimée	Indice d'efficacité
$\acute{e}qH^1 : p$	$2.120 \cdot 10^{-4}$	$1.707 \cdot 10^{-4}$	0.80
$\acute{e}qH^1 : \mathbf{u}$	$7.780 \cdot 10^{-4}$	$8.962 \cdot 10^{-4}$	0.86
$\acute{e}qH^1 : \mathcal{K}$	$9.595 \cdot 10^{-3}$	$8.683 \cdot 10^{-3}$	0.90
$\acute{e}qH^1 : \mathcal{E}$	$4.418 \cdot 10^{-3}$	$3.379 \cdot 10^{-3}$	0.76
$\acute{e}qH^1 : \mu_t$	$4.446 \cdot 10^{-7}$	$4.520 \cdot 10^{-7}$	1.02

TAB. 4.1 État de la convergence de l'écoulement au 6<sup>ième</sup> cycle : solution manufacturée

$\acute{e}qH^1 :$	$\mathbf{u}$	$p$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{E}$	$\mu_t$
Théorique	2	1	2	2	2
Observé	1.2	1.2	2.4	2.9	2.1

TAB. 4.2 Taux de convergence théoriques et observés de l'écoulement : solution manufacturée

sont en effet particulièrement sensibles aux variations de la position verticale de la plaque,  $y_0$ , de telle sorte que les normes de leurs sensibilités sont de  $1.640 \cdot 10^{+03}$  pour  $S_{\mathcal{K}}$  et de  $1.182 \cdot 10^{+02}$  pour  $S_{\mathcal{E}}$ .

Les taux de convergence théoriques et observés sont affichés aux tableaux 4.2 et 4.4 respectivement pour l'écoulement et les sensibilités. Le taux théorique a été calculé selon l'équation suivante :

$$\|u_h - u_{ex}\|_{m,\Omega} \leq Ch^{k+1-m} \|u_{ex}\|_{k+1,\Omega} \quad (4.38)$$

où  $u_h$  et  $u_{ex}$  sont les solutions respectives des problèmes discret et continu,  $m$  l'ordre de la norme de l'erreur,  $h$  la taille caractéristique des éléments,  $k$  le degré de l'interpolant de  $u$  et  $C$  une constante. Notons que si la solution continue est suffisamment régulière,  $\|u_{ex}\|_{k+1,\Omega}$  est bornée et s'intègre à la constante  $C$ .

Norme - variable	Erreur exacte	Erreur estimée	Indice d'efficacité
$\acute{e}qH^1 : S_p$	$2.288 \cdot 10^{-3}$	$1.593 \cdot 10^{-3}$	0.89
$\acute{e}qH^1 : S_u$	$2.044 \cdot 10^{-2}$	$1.819 \cdot 10^{-2}$	0.70
$\acute{e}qH^1 : S_{\mathcal{K}}$	$4.851 \cdot 10^0$	$4.516 \cdot 10^0$	0.93
$\acute{e}qH^1 : S_{\mathcal{E}}$	$3.755 \cdot 10^0$	$3.444 \cdot 10^0$	0.92
$\acute{e}qH^1 : S_{\mu_t}$	$2.638 \cdot 10^{-5}$	$2.589 \cdot 10^{-5}$	0.98

TAB. 4.3 État de la convergence des sensibilités au 6<sup>ième</sup> cycle : solution manufacturée

$\acute{e}qH^1 :$	$S_u$	$S_p$	$S_{\mathcal{K}}$	$S_{\mathcal{E}}$	$\mu_t'$
Théorique	2	1	2	2	2
Observé	1.7	1.2	2.3	2.6	2.3

TAB. 4.4 Taux de convergence théoriques et observés des sensibilités : solution manufacturée

Le taux observé s'évalue selon :

$$\|u_h - u_{ex}\|_{m,\Omega} \leq Ch^\theta = Cn^{-0.5\theta} \quad (4.39)$$

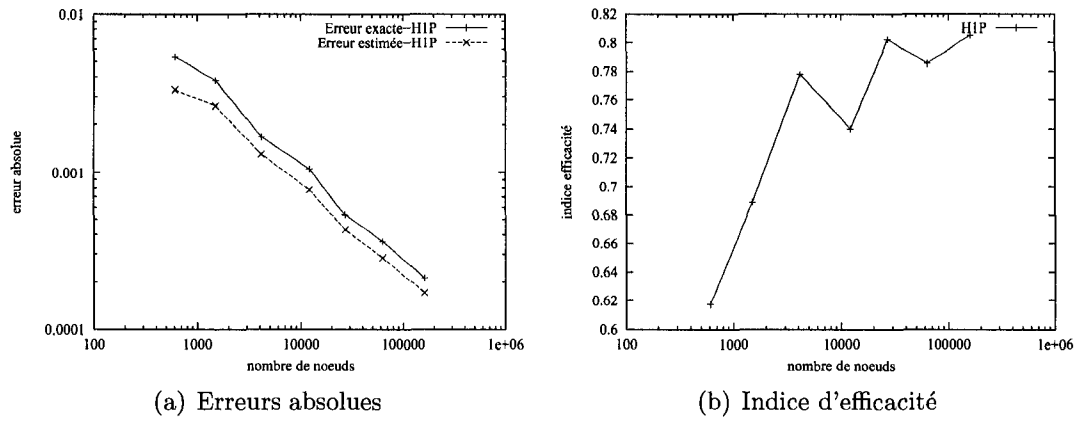
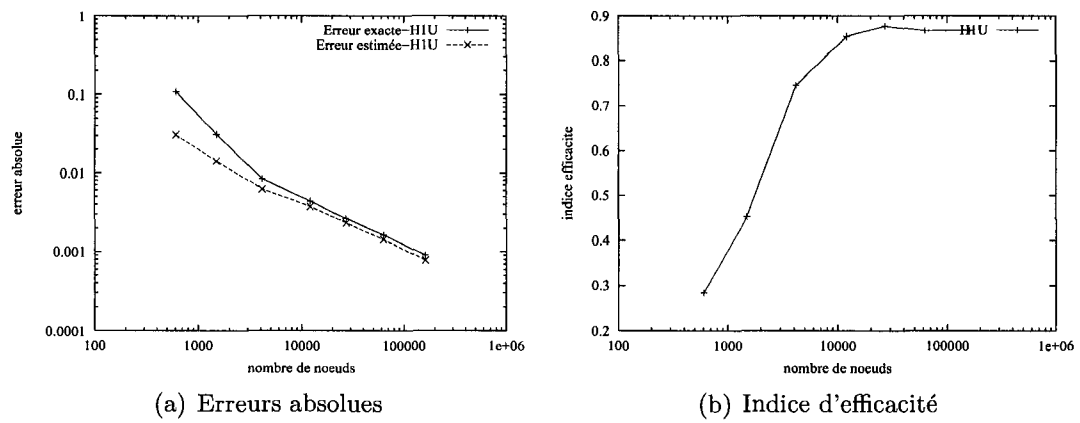
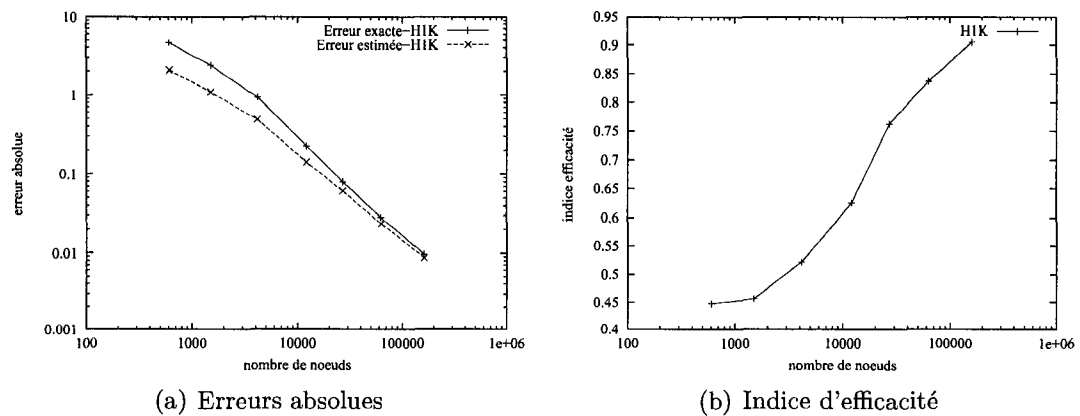
où  $\theta$  est le taux observé et  $n$  le nombre de nœuds total qui est inversement proportionnel au carré de la taille des éléments.

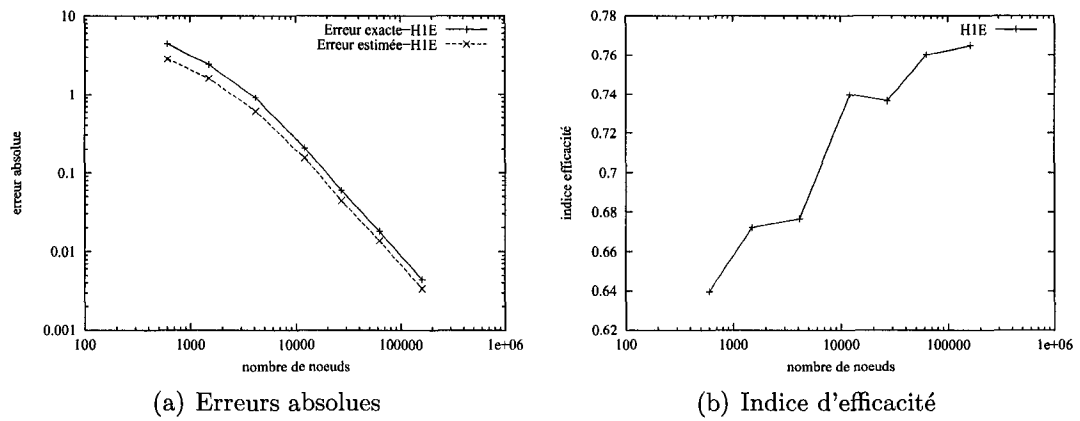
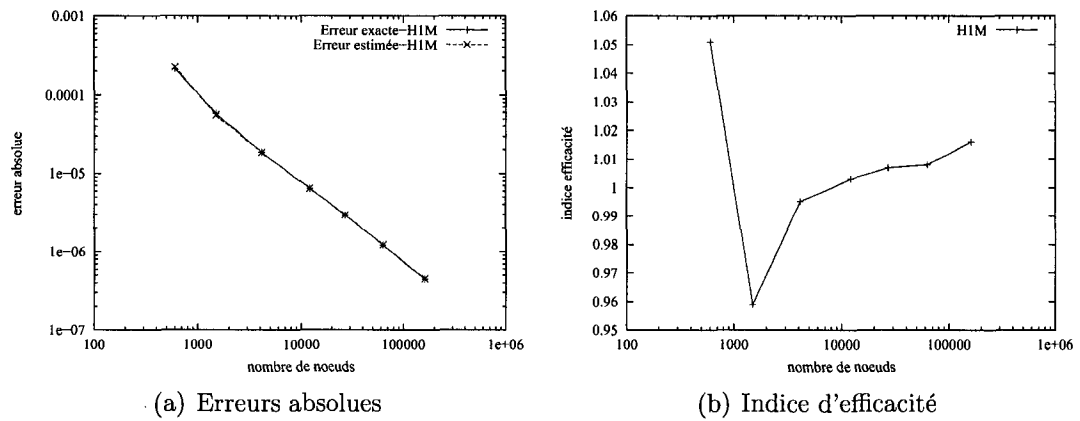
Comme indiqué aux tableaux 4.2 et 4.4, les taux de convergence observés sont en accord avec les taux théoriques sauf pour  $u$ ,  $\mathcal{E}$  et  $S_{\mathcal{E}}$ . Les écarts sont attribués aux effets des méthodes de stabilisation (section 3.5) qui altèrent la précision de la méthode de Galerkin en introduisant une diffusion artificielle dans les équations variationnelles<sup>[47]</sup>. On remarque que la pression est la variable la moins affectée par l'erreur de stabilisation. Ceci était prévisible puisque les termes de diffusion numérique sont de l'ordre 2 et par conséquent affectent moins la pression discrétisée

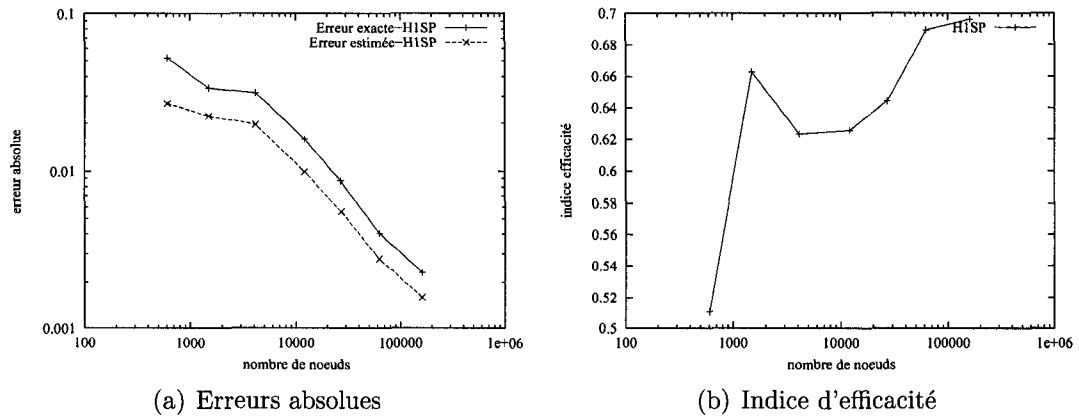


à l'ordre 1 que les autres variables discrétisées à l'ordre 2.

L'étude de l'évolution des erreurs estimée et exacte pour les variables de l'écoulement et des sensibilités montre une diminution systématique de l'erreur avec l'adaptation. On conclut que la solution obtenue par le code converge vers la solution manufacturée et donc on peut statuer que le code est vérifié pour les écoulements turbulents isothermes et leurs sensibilités.

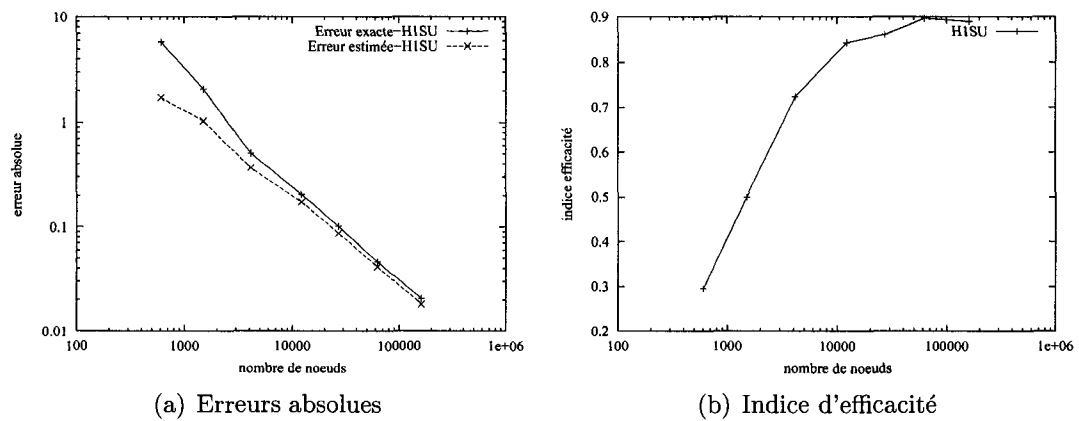
FIG. 4.4 Convergence de  $p$  vers la solution manufacturéeFIG. 4.5 Convergence de  $u$  vers la solution manufacturéeFIG. 4.6 Convergence de  $\mathcal{K}$  vers la solution manufacturée

FIG. 4.7 Convergence de  $\mathcal{E}$  vers la solution manufacturéeFIG. 4.8 Convergence de  $\mu_t$  vers la solution manufacturée



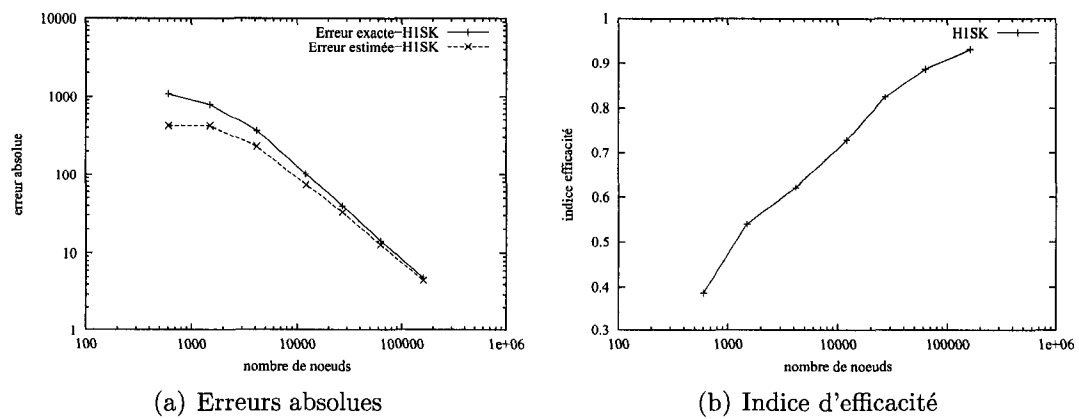
(a) Erreurs absolues

(b) Indice d'efficacité

FIG. 4.9 Convergence de  $S_p$  vers la solution manufacturée

(a) Erreurs absolues

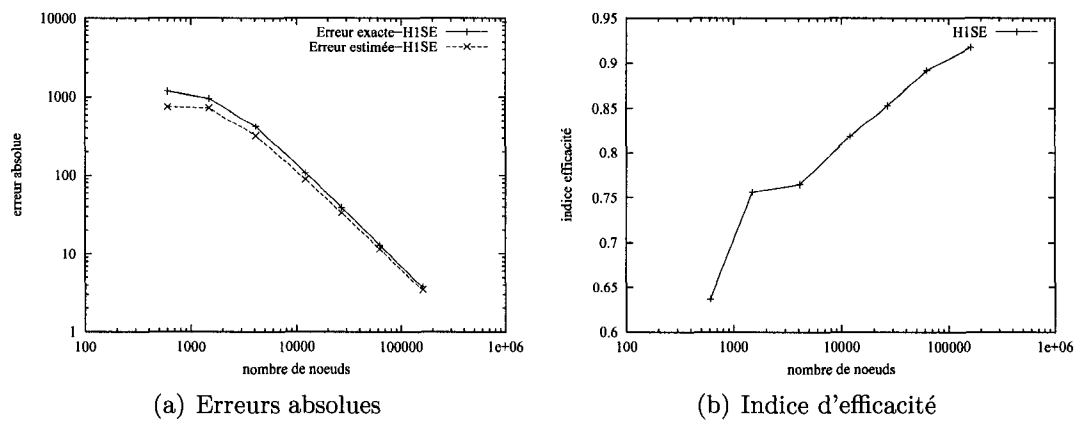
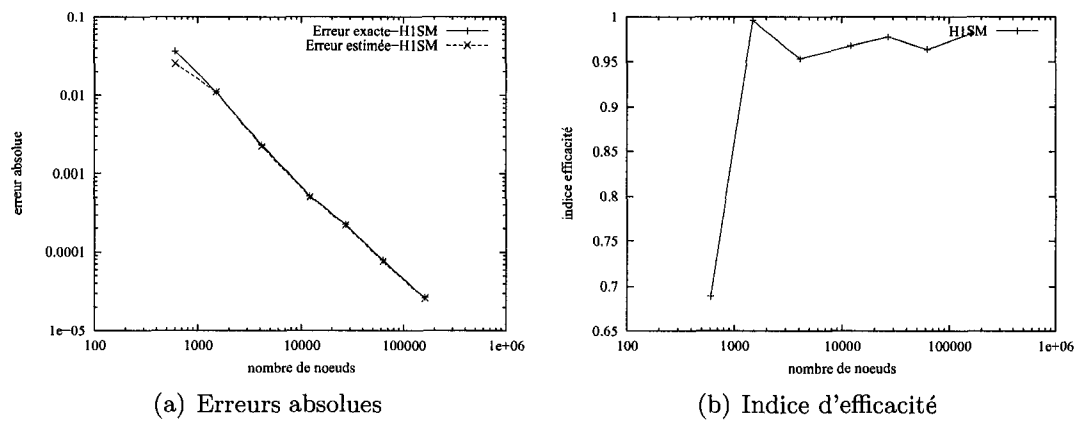
(b) Indice d'efficacité

FIG. 4.10 Convergence de  $S_u$  vers la solution manufacturée

(a) Erreurs absolues

(b) Indice d'efficacité

FIG. 4.11 Convergence de  $S_\kappa$  vers la solution manufacturée

FIG. 4.12 Convergence de  $S_E$  vers la solution manufacturéeFIG. 4.13 Convergence de  $S_{\mu_t}$  vers la solution manufacturée

## CHAPITRE 5

### APPLICATIONS

Cette section porte en premier lieu sur la présentation des résultats produits par les algorithmes découplé, semi-couplé et tout couplé. Les algorithmes sont comparés selon leurs performances en termes de l'usage des ressources informatiques. La méthodologie employée consiste à résoudre un problème de taille et de complexité contrôlées par tous les algorithmes successivement. À ce stade, le solveur linéaire UMFPACK est utilisé pour toutes les résolutions. En deuxième lieu, l'efficacité des solveurs linéaires, Skyline, UMFPACK et PARDISO est également évaluée et comparée. Le serveur accueillant les calculs possède la configuration suivante :

IBM RS/6000 pSeries 630 Model 6C4

Processeur : 4x1.0 GHz POWER4, 8MB ECC L3

Disque interne : 2x73.4 Go SCSI-3

Mémoire : 8 Go DDR ECC "Chipkill"

SO : AIX 5.1

#### 5.1 Comparaison des algorithmes couplé, découplé et semi-couplé

Dans un premier temps, procédons à l'évaluation des trois algorithmes. On retiendra les plus intéressants pour la suite de l'étude.

La première application est le cas de l'écoulement turbulent proche-paroi autour d'un obstacle carré et à proximité d'une plaque plane étudié expérimentalement par Wu et Martinuzzi <sup>[48]</sup> et numériquement par Di Caro *et al*<sup>[3]</sup>.

### 5.1.1 Le cas de l'obstacle carré

Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse de l'écoulement libre et la longueur du côté de l'obstacle  $D$  et sa valeur est de  $Re = 22,000$ . Le domaine de calcul est illustré à la figure 5.1. L'espace entre la plaque et l'obstacle est de  $0.25D$ . Il faut noter que les coins du carré et le bord d'attaque de la plaque sont modélisés par des arcs de petits rayons.

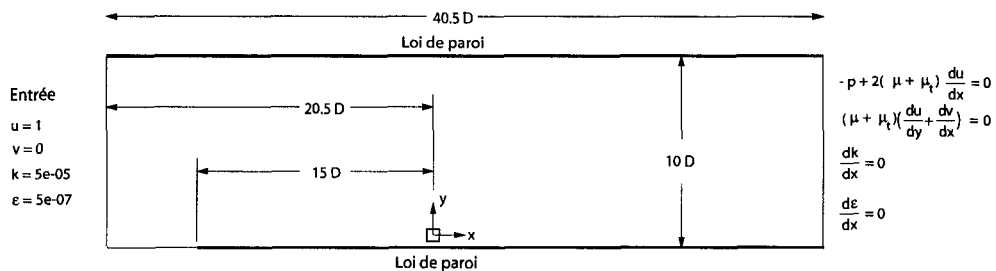


FIG. 5.1 Domaine de calcul et conditions limites : cas de l'obstacle carré

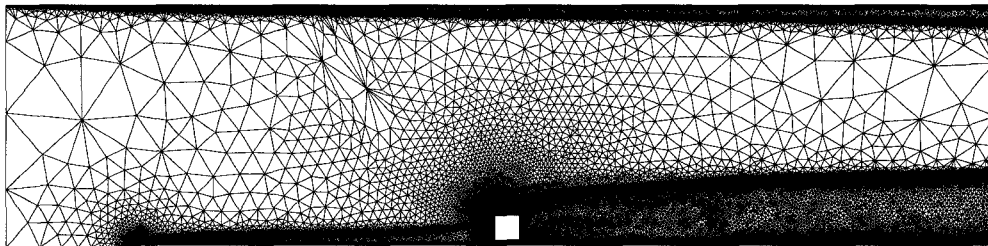


FIG. 5.2 Maillage final de 251,521 nœuds : cas de l'obstacle carré

Les algorithmes couplé, découplé et semi-couplé ont été appliqués à la même séquence de 10 maillages adaptatifs comportant de 1,106 à 251,521 nœuds. La figure 5.2 illustre le maillage final.

Le tableau 5.1 fait la correspondance entre le nombre de nœuds et la taille des systèmes de chaque algorithme. On remarque que pour chaque cycle, la somme des inconnues des trois systèmes de l'algorithme découplé est inférieure à la taille du système de l'algorithme couplé. Cet écart s'explique par la façon d'imposer la condition de la loi de paroi sur  $\mathcal{E}$  (section 2.4.2.1). En découplé, il s'agit d'une condition de Dirichlet mise à jour au cours des itérations. En couplé, une équation implicite est résolue aux parois solides et donc les valeurs nodales de  $\mathcal{E}$  font partie des degrés de liberté du problème.

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé = Semi-couplé $[u, v, p, \mathcal{K}, \mathcal{E}]$	Découplé $[u, v, p] - [\mathcal{K}] - [\mathcal{E}]$
0	1, 106	4, 556	2, 354 – 1, 101 – 958
1	1, 923	7, 974	4, 142 – 1, 916 – 1, 719
2	3, 833	16, 004	8, 356 – 3, 824 – 3, 523
3	8, 635	36, 273	19, 017 – 8, 628 – 8, 127
4	20, 192	85, 111	44, 745 – 20, 183 – 19, 324
5	47, 116	198, 948	104, 746 – 47, 101 – 45, 530
6	68, 300	288, 424	151, 854 – 68, 285 – 66, 046
7	113, 450	479, 605	252, 739 – 113, 433 – 110, 240
8	183, 835	777, 640	410, 016 – 183, 812 – 179, 239
9	251, 521	1, 064, 037	561, 061 – 251, 488 – 245, 375

TAB. 5.1 Nombre d'inconnues des systèmes résolus : cas de l'obstacle carré

Le tableau 5.2 affiche les performances observées en termes de mémoire maximale (pic de mémoire) requise par chacun des algorithmes pour les phases de factorisation et de résolution. Le tableau 5.3 dresse le temps de calcul (accès au processeur) nécessaire aux algorithmes.

La relation entre l'usage mémoire et le nombre de nœuds est linéaire tel que montré à la figure 5.3 (a). La courbe de chacun des algorithmes est approchée par une droite



Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé	Semi-couplé
0	1, 106	17	6	17
1	1, 923	30	10	30
2	3, 833	61	20	61
3	8, 635	141	46	141
4	20, 192	332	110	332
5	47, 116	814	263	784
6	68, 300	1, 273	401	1, 134
7	113, 450	2, 192	706	1, 922
8	183, 835	3, 597	1, 158	3, 121
9	251, 521	4, 285	1, 593	4, 285

TAB. 5.2 Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de l'obstacle carré

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé	Semi-couplé
0	1, 106	26	52	56
1	1, 923	35	78	84
2	3, 833	46	141	185
3	8, 635	71	334	492
4	20, 192	130	744	1, 131
5	47, 116	472	1, 787	2, 948
6	68, 300	601	2, 433	5, 526
7	113, 450	1, 195	3, 867	8, 967
8	183, 835	2, 407	5, 784	16, 308
9	251, 521	2, 719	7, 500	24, 395

TAB. 5.3 Comparaison du temps de calcul (s) : cas de l'obstacle carré

de moindres carrés dont l'équation est :

$$m = 0.018n + 15 \quad \text{Couplé} \quad (5.1)$$

$$m = 0.0064n - 13 \quad \text{Découplé} \quad (5.2)$$

$$m = 0.017n - 9.6 \quad \text{Semi-couplé} \quad (5.3)$$

où  $m$  est la mémoire requise en Méga octets (Mo) et  $n$  le nombre de nœuds.

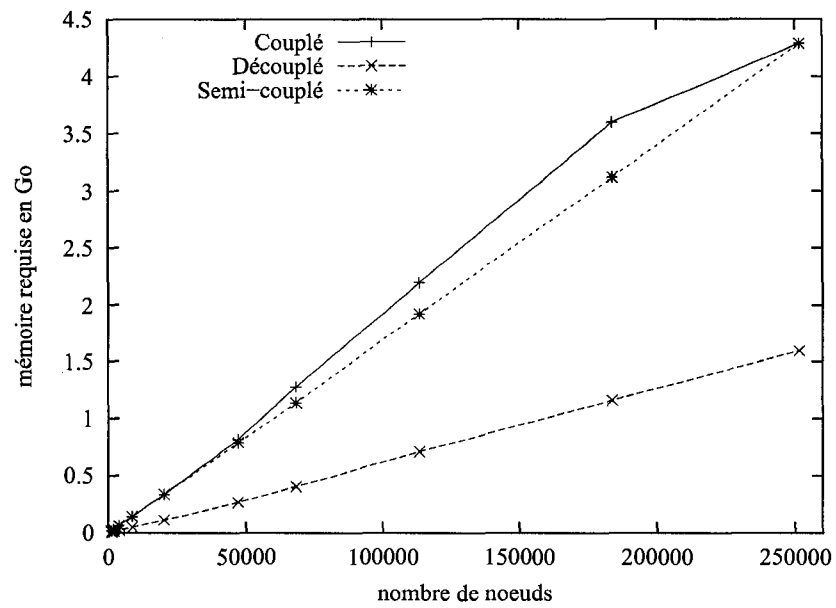
Pour ce cas, l'approche couplée nécessite 2.8 fois la mémoire requise par l'approche découplée (système continuité-mouvement) et presque autant de mémoire que l'approche semi-couplée. En fait, l'encombrement mémoire des algorithmes couplé et semi-couplé est le même aux 5 premiers cycles. À partir du cycle 5, la mémoire requise par l'algorithme couplé est supérieure à celle de son homologue semi-couplé et redevient comparable au dernier cycle. En fait, l'algorithme semi-couplé suit une évolution linéaire tandis que l'approche couplée subit une déviation temporaire en suivant une pente différente (figure 5.3 (a)). L'explication de ce comportement pourrait résider dans les processus internes d'UMFPACK. En fait, la matrice couplée nécessite un traitement plus gourmand en mémoire pour factoriser les structures matricielles des maillages intermédiaires.

Les performances en temps de calcul sont inscrites au tableau 5.3 pour les trois algorithmes. Le temps de calcul dépend linéairement du nombre de nœuds pour les trois algorithmes tel qu'observé à la figure 5.3 (b). L'approximation par moindres carrés des courbes de cette figure résulte aux équations suivantes :

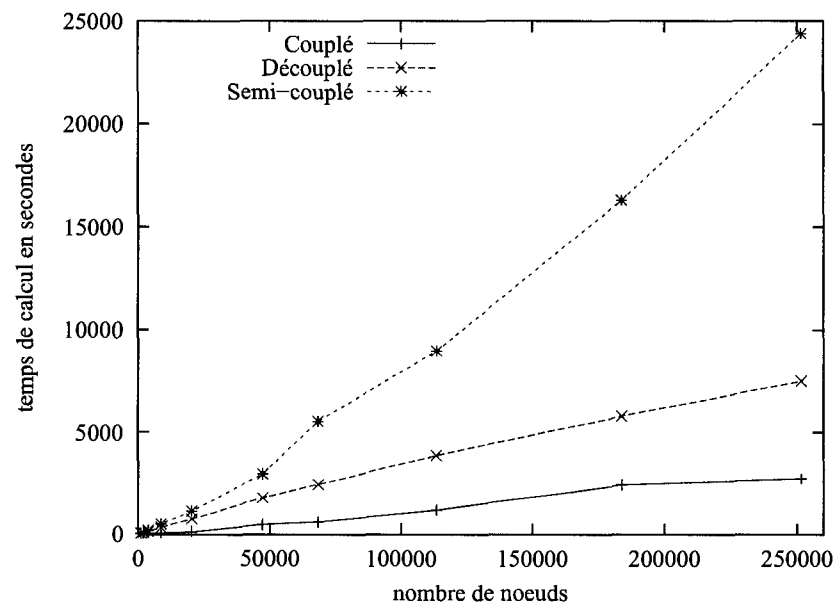
$$t = 0.012n - 39 \quad \text{Couplé} \quad (5.4)$$

$$t = 0.030n + 154 \quad \text{Découplé} \quad (5.5)$$

$$t = 0.095n - 638 \quad \text{Semi-couplé} \quad (5.6)$$



(a) Mémoire (Go)



(b) Temps de calcul (s)

FIG. 5.3 Ressources informatiques : cas de l'obstacle carré

où  $t$  est le temps de calcul en secondes et en  $n$  le nombre de noeuds.

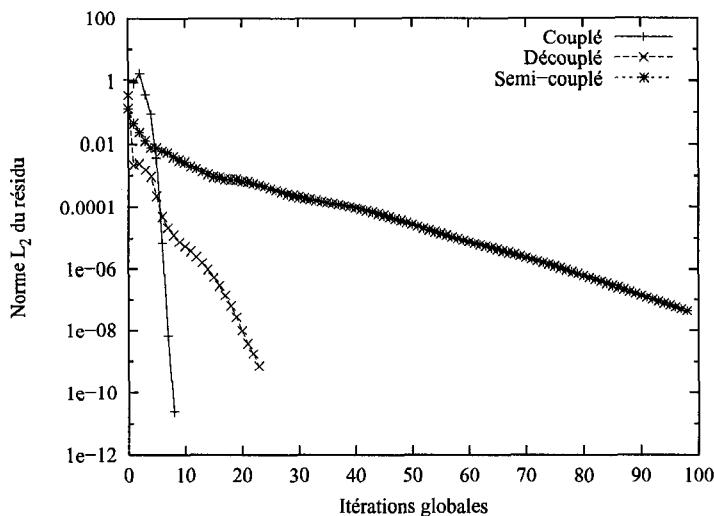


FIG. 5.4 Historique de convergence : cas de l'obstacle carré

On remarque donc que la méthode couplée est en moyenne 2.5 et 8 fois plus rapide que ses homologues découplée et semi-couplée respectivement. L'efficacité de la méthode couplée s'explique par l'application de la méthode de Newton aux non-linéarités permettant d'obtenir une convergence quadratique. La convergence des trois algorithmes est illustrée à la figure 5.4 pour la résolution au cycle adaptatif 5. On y note que la méthode de point-fixe employée à travers les algorithmes découplé et semi-couplé ralentit la convergence qui devient quasi-linéaire. La performance est surtout piètre dans le cas de la formulation semi-couplée puisqu'elle traite presque toutes les non-linéarités par point-fixe.

## 5.2 Comparaison des algorithmes couplé et découplé

Le cas précédent a montré que l'approche semi-couplée n'est pas suffisamment efficace à elle seule et ne s'avère utile que pour trouver un estimé de la solution

initiale. Dans le reste de l'étude, on mettra de côté cette approche pour ne comparer que les algorithmes couplé et découplé en les appliquant à un écoulement thermique et puis à un calcul de sensibilités.

### 5.2.1 Le cas de plaque thermique

Le problème consiste en l'écoulement turbulent sur une plaque plane chauffante étudié exhaustivement par Colin<sup>[28]</sup>. Les conditions aux limites et la géométrie du problème se trouvent à la figure 5.5. Le nombre de Reynolds est de 2,000,000. La distance de la paroi est de  $d = 0.00095$  et la température de la plaque est  $T_p = 1$ .

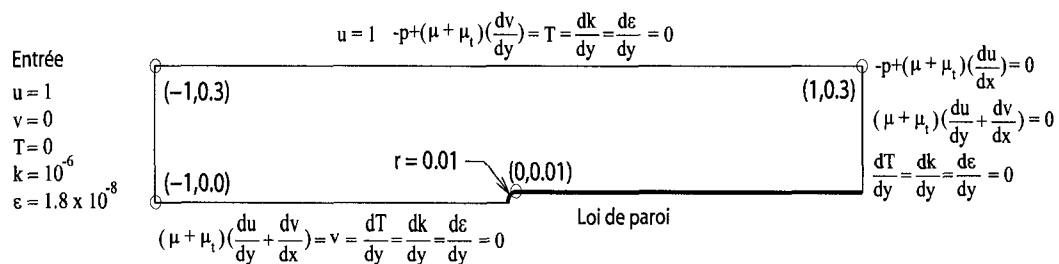


FIG. 5.5 Domaine de calcul et conditions limites : cas de la plaque thermique

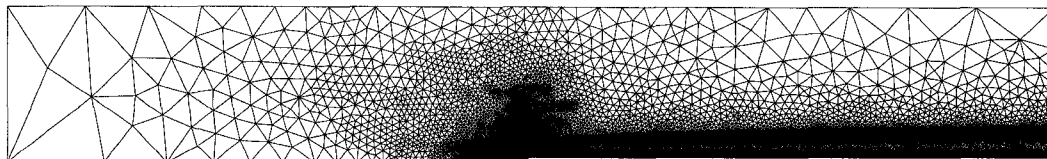


FIG. 5.6 Maillage final de 147,871 nœuds : cas de la plaque thermique

Le dernier maillage des 9 cycles adaptatifs effectués se trouve à la figure 5.6.

Le tableau 5.4 présente la taille des systèmes résolus.

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé $[u, v, p, T, \mathcal{K}, \mathcal{E}]$	Découplé $[u, v, p, T] - [\mathcal{K}] - [\mathcal{E}]$
0	1,052	5,331	3,241 – 1,045 – 988
1	1,756	9,085	5,579 – 1,753 – 1,642
2	3,885	20,201	12,437 – 3,882 – 3,687
3	8,169	42,570	26,238 – 8,166 – 7,835
4	15,344	80,017	49,335 – 15,341 – 14,756
5	28,869	150,587	92,855 – 28,866 – 27,789
6	61,165	319,301	196,977 – 61,162 – 59,143
7	116,410	608,008	375,194 – 116,407 – 112,892
8	147,871	772,123	476,387 – 147,868 – 143,167

TAB. 5.4 Nombre d'inconnues des systèmes résolus : cas de la plaque thermique

Les tableaux 5.5 et 5.6 fournissent respectivement la mémoire et le temps de calcul requis par chacun des algorithmes. Ces données sont également illustrées aux figures 5.7 (a) et (b). On remarque que la linéarité des courbes du temps de calcul est perturbée, surtout pour l'algorithme découplé. L'application de la factorisation conditionnelle (section 3.3.3) est susceptible d'expliquer ce comportement.

L'approximation des moindres carrés de la relation linéaire entre la mémoire nécessaire ( $M_0$ ) et le nombre de nœuds du maillage résulte aux équations suivantes :

$$m = 0.031n - 51 \quad \text{Couplé} \quad (5.7)$$

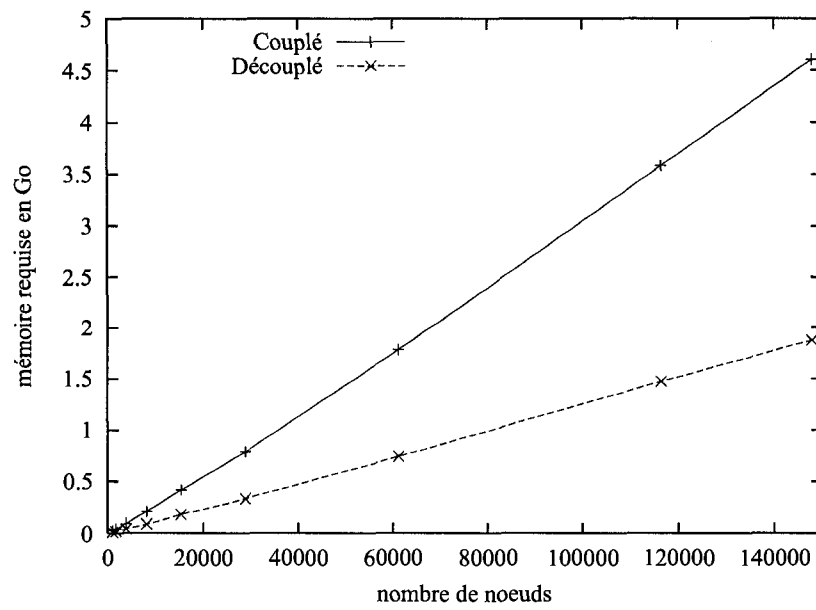
$$m = 0.013n - 16 \quad \text{Découplé} \quad (5.8)$$

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé
0	1,052	24	11
1	1,756	42	18
2	3,885	94	42
3	8,169	209	89
4	15,344	417	177
5	28,869	787	332
6	61,165	1,780	738
7	116,410	3,583	1,473
8	147,871	4,607	1,874

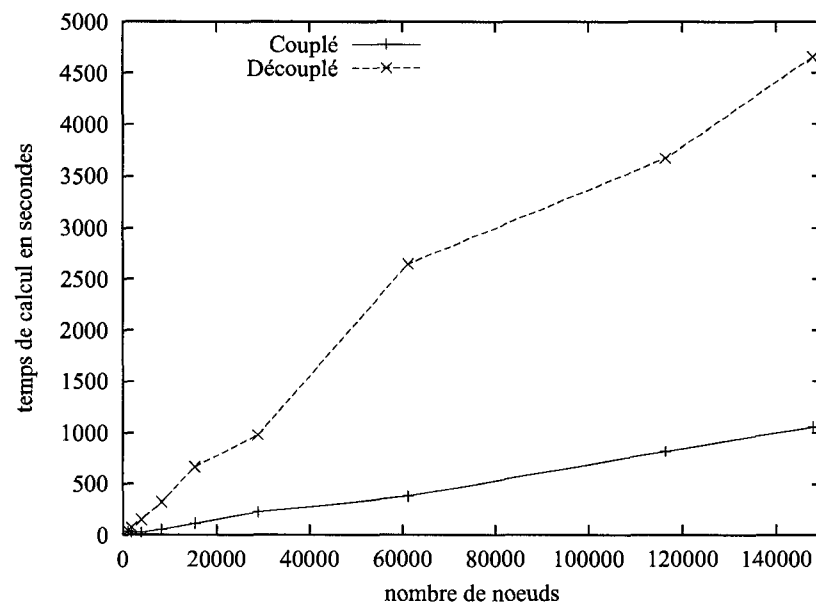
TAB. 5.5 Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de la plaque thermique

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé
0	1,052	38	46
1	1,756	24	78
2	3,885	25	148
3	8,169	57	321
4	15,344	116	665
5	28,869	224	977
6	61,165	378	2,646
7	116,410	817	3,669
8	147,871	1,057	4,655

TAB. 5.6 Comparaison du temps de calcul (s) : cas de la plaque thermique



(a) Mémoire (Go)



(b) Temps de calcul (s)

FIG. 5.7 Ressources informatiques : cas de la plaque thermique



De la même façon, on obtient les relations suivantes pour le temps de calcul (secondes) :

$$t = 0.0069n + 6.22 \quad \text{Couplé} \quad (5.9)$$

$$t = 0.032n + 117 \quad \text{Découplé} \quad (5.10)$$

À partir des relations (5.7) à (5.10) on conclut que pour ce cas, la formulation couplée est 4.6 fois plus rapide que l'algorithme découplé mais qu'elle nécessite par contre 2.4 fois plus de mémoire.

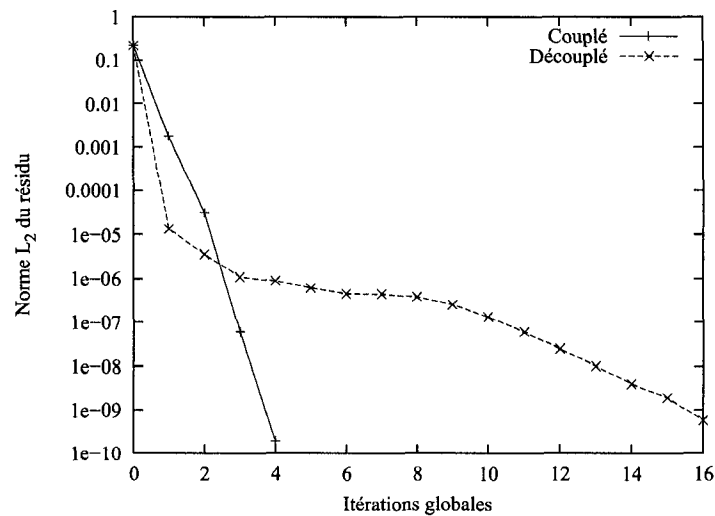


FIG. 5.8 Historique de convergence : cas de la plaque thermique

La rapidité de l'approche couplée s'explique par la convergence quadratique que l'application directe de la méthode de Newton lui procure contre la convergence linéaire de la formulation découplée qui utilise une méthode de point-fixe. Ce concept est vérifié par le tracé de l'historique de convergence des deux algorithmes lors de la résolution sur le maillage adaptatif du cycle 5 (figure 5.8).

### 5.2.2 Le cas de la marche descendante

Les algorithmes couplé et découplé sont également implémentés pour les sensibilités. Pour les évaluer, on les a appliqués au cas de la marche descendante de Vogel *et al*<sup>[49]</sup> analysé numériquement par Colin<sup>[28]</sup>.

La figure 5.9 montre la géométrie du domaine et les conditions aux limites. Le nombre de Reynolds est de  $Re = 28,000$ . Le dernier maillage généré par l'application de la méthode adaptative à l'écoulement et à ses sensibilités à travers 6 cycles est illustré à la figure 5.10.

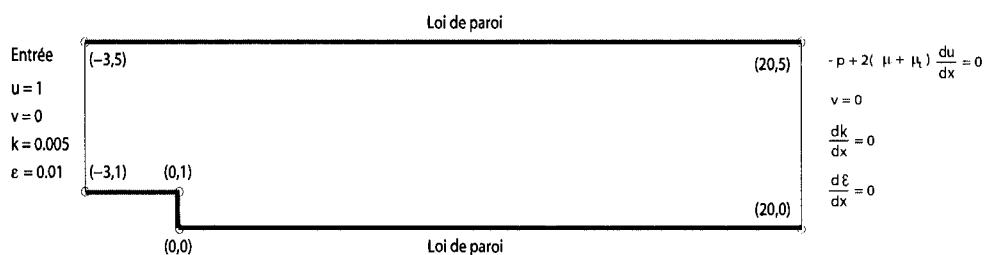


FIG. 5.9 Domaine de calcul et conditions limites : cas de la marche descendante

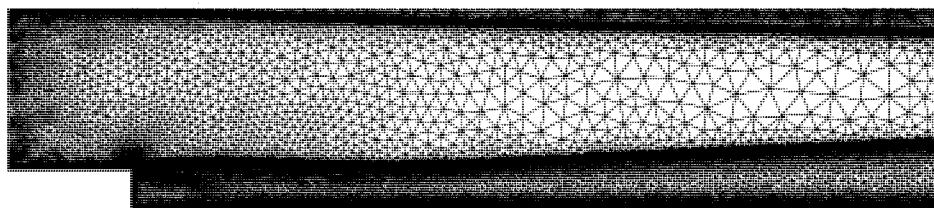


FIG. 5.10 Maillage final de 205,508 nœuds : cas de la marche descendante

Les sensibilités des variables de l'écoulement ont été calculées par rapport aux trois paramètres de valeur suivants :

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé $[u, v, p, \mathcal{K}, \mathcal{E}]$	Découplé $[u, v, p] - [\mathcal{K}] - [\mathcal{E}]$
0	3,367	13,997	7,305 – 3,346 – 3,108
1	11,594	48,710	25,600 – 11,555 – 11,107
2	25,064	105,800	55,722 – 25,039 – 24,371
3	67,720	286,642	151,288 – 67,677 – 66,601
4	117,936	451,259	238,299 – 106,480 – 105,062
5	187,898	796,156	420,586 – 187,785 – 185,695

TAB. 5.7 Nombre d'inconnues des systèmes résolus : cas de la marche descendante

- $\kappa$  : la constante de Kàrmàn
- $E$  : paramètre de rugosité
- $d$  : la distance entre la paroi de calcul et la paroi physique

Ces paramètres interviennent dans les lois de parois. Pour chaque paramètre, les conditions aux limites des sensibilités s'obtiennent en dérivant les conditions aux limites de l'écoulement. Puisque ces paramètres n'apparaissent à aucune limite sauf à la paroi, toutes les conditions à l'entrée et à la sortie sont homogènes. Aux parois, on impose une valeur unitaire pour la sensibilité du paramètre ( $\kappa' = 1$ , etc.). Notons que chaque cycle comprend 4 résolutions, soit une pour l'écoulement et une par paramètre de sensibilités.

La structure du système matriciel de l'écoulement est reprise pour la résolution des équations des sensibilités. Par conséquent, la mémoire requise pour la factorisation des matrices jacobiennes des sensibilités est du même ordre de grandeur que celle de l'écoulement. Les valeurs pour sensibilités présentées au tableau 5.9 sont effectivement similaires mais légèrement plus élevées que celles pour l'écoulement au tableau 5.8 en raison d'un remplissage plus important en sensibilités.

Les courbes de la mémoire requise à la factorisation en fonction du nombre de

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé
0	3,367	54	18
1	11,594	192	65
2	25,064	417	141
3	67,720	1,139	402
4	117,936	1,941	629
5	187,898	3,533	1,138

TAB. 5.8 Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de la marche descendante - écoulement

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé
0	3,367	55	18
1	11,594	205	68
2	25,064	458	152
3	67,720	1,323	431
4	117,936	2,075	682
5	187,898	3,758	1,251

TAB. 5.9 Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) : cas de la marche descendante - sensibilités

nœuds sont tracées à la figure 5.11 (a) pour l'écoulement. On observe des relations linéaires dont les équations approchées par moindres carrés sont :

$$m = 0.019n - 52 \quad \text{Couplé} \quad (5.11)$$

$$m = 0.0061n - 8 \quad \text{Découplé} \quad (5.12)$$

L'approche découplée est donc presque 3 fois plus efficace en mémoire que l'approche couplée. Par contre, en termes de temps de calcul, l'algorithme découplé est totalement inefficace par rapport à l'algorithme couplé.

Les valeurs du temps de calcul pour l'écoulement et pour l'ensemble des 3 sensibilités sont respectivement présentées aux tableaux 5.10 et 5.11. Notons que le temps de résolution de l'écoulement par l'algorithme couplé est plutôt proche entre les cycles 3 (627 s) et cycle 4 (663 s). En fait, les maillages des cycles 0 à 3 étant relativement grossiers, la méthode de Newton ne converge que si l'on enrichit la solution interpolée à partir du cycle précédent en faisant quelques itérations en semi-couplé avant de passer en couplé. Au cycle 4, le maillage est suffisamment bien adapté et la solution du cycle 3 suffisamment précise pour une application de l'algorithme couplé dès la première itération.

L'importance des économies faites par la formulation couplée en temps de calcul est clairement visible à la figure 5.11 (b) présentant le temps de calcul cumulatif (écoulement + les sensibilités). Les droites sont approchées par les relations suivantes :

$$t = 0.014n + 150 \quad \text{Couplé} \quad (5.13)$$

$$t = 0.287n - 1510 \quad \text{Découplé} \quad (5.14)$$

La formulation couplée fournit donc une efficacité 20 fois supérieure à celle de son

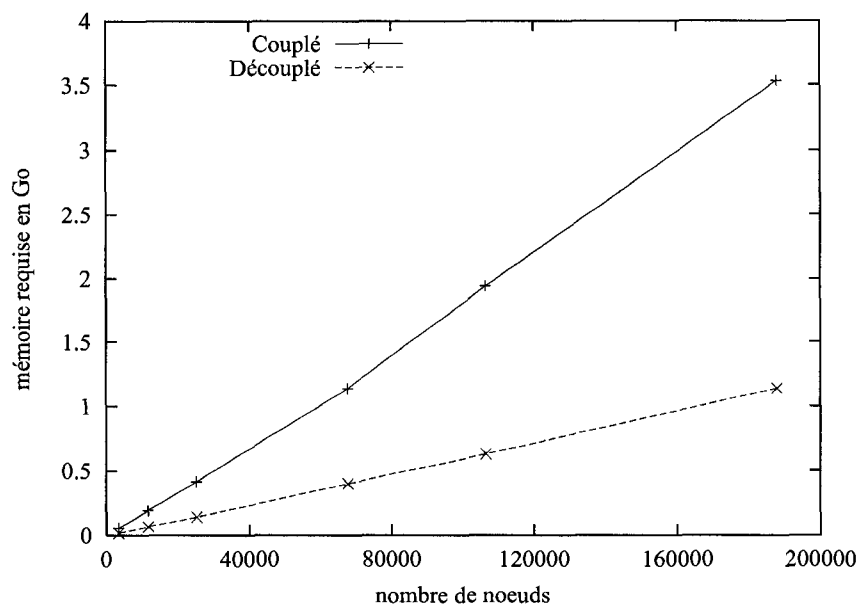
homologue découplé. En fait, puisque par simplicité on reprend la structure des systèmes matriciels de l'écoulement pour le calcul des sensibilités, on n'a de choix que d'appliquer l'algorithme employé en écoulement. Or, les équations des sensibilités sont linéaires et peuvent être résolues sans méthode itérative. L'application de la méthode de point-fixe (l'approche découplée) aux sensibilités ralentit inutilement les calculs tandis que la méthode de Newton (l'approche couplée) permet une résolution plutôt directe. En fait, 2 à 3 itérations en couplé suffisent généralement afin de réduire la norme  $L_2$  du résidu des équations de sensibilités à une valeur de  $10^{-14}$ .

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé
0	3,367	80	181
1	11,594	180	498
2	25,064	464	938
3	67,720	627	3,130
4	117,936	663	7,818
5	187,898	1,041	14,719

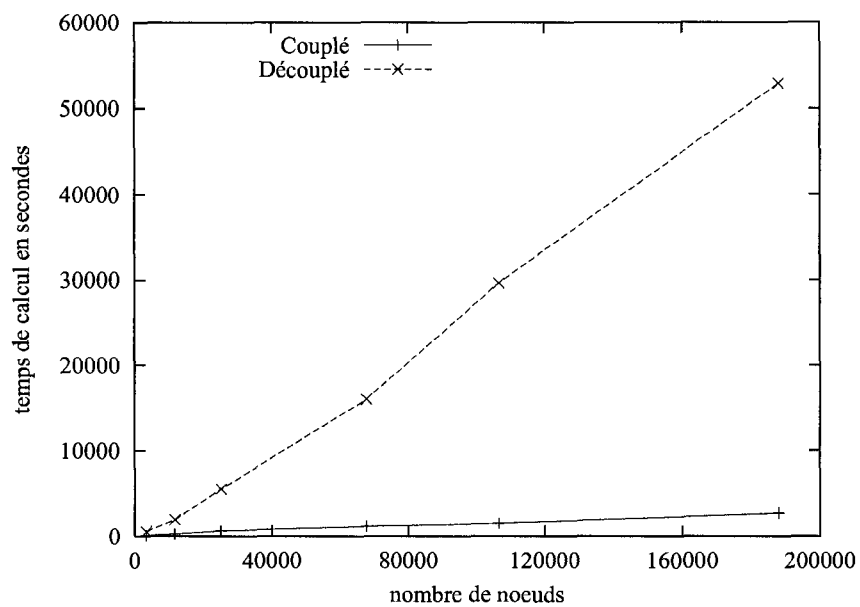
TAB. 5.10 Comparaison du temps de calcul (s) : cas de la marche descendante - écoulement

Cycle	Nombre de nœuds	Couplé	Découplé
0	3,367	21	359
1	11,594	78	1,459
2	25,064	178	4,566
3	67,720	532	12,822
4	117,936	844	21,826
5	187,898	1,695	38,167

TAB. 5.11 Comparaison du temps de calcul (s) : cas de la marche descendante - sensibilités



(a) Mémoire (Go) - écoulement



(b) Temps de calcul (s) cumulatif - écoulement + sensibilités

FIG. 5.11 Ressources informatiques : cas de la marche descendante

### 5.3 Comparaison des solveurs Skyline, UMFPACK et PARDISO

Notre étude portait jusqu'ici sur la comparaison des algorithmes de résolution des équations de RANS et  $k - \epsilon$  en termes de l'usage des ressources informatiques. Le solveur linéaire UMFPACK a alors servi pour toutes les résolutions. Le choix du solveur linéaire a également des effets significatifs sur les performances informatiques. Poursuivons donc en comparant l'efficacité des solveurs linéaires Skyline, UMFPACK et PARDISO. Pour cela, résolvons le problème d'un écoulement isotherme successivement par chacun des solveurs en utilisant l'algorithme couplé.

#### 5.3.1 Le cas de plaque plane

La géométrie du domaine est celle du cas de la plaque plane thermique (figure 5.5). Les conditions aux limites sont également les mêmes à la différence que l'on ne résout pas pour la température. Le processus adaptatif a produit une séquence de 9 maillages dont le dernier comporte 181,869 noeuds et est affichée à la figure 5.12.

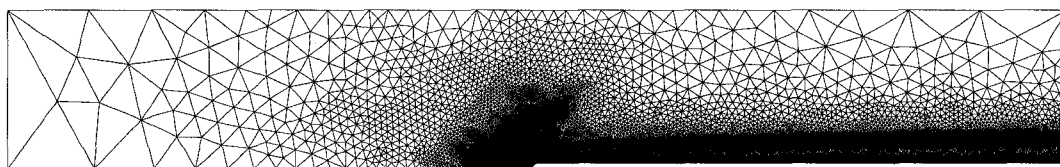


FIG. 5.12 Maillage final de 181,869 noeuds : cas de la plaque plane

Au tableau 5.12 se trouvent les données sur la mémoire nécessaire au stockage de la matrice jacobienne,  $A$ , selon la convention de chacun des solveurs (section 3.3.2). Les informations tabulées sont évaluées à partir de la taille des vecteurs de décomposition des solveurs pour un stockage en double précision (8 octets /



variable) :

$$\begin{aligned} \text{Skyline} & : A_p(neq) + A_x(nx) \\ \text{UMFPACK} & : A_p(neq + 1) + A_i(ne) + A_x(ne) \\ \text{PARDISO} & : A_p(neq + 1) + A_i(ne) + A_x(ne) \end{aligned}$$

où  $neq$  est le nombre d'équations,  $nx$  est la taille du vecteur  $A_x$  de Skyline et  $ne$  est le nombre d'entrées d'UMFPACK ou de PARDISO.

Cycle	Nombre de nœuds	Nombre d'équations [ $u, v, p, \mathcal{K}, \mathcal{E}$ ]	Skyline	UMFPACK PARDISO
0	1,052	4,326	12	3
1	1,471	6,145	17	5
2	2,752	11,544	66	9
3	5,467	23,012	195	18
4	10,615	44,755	611	35
5	20,313	85,707	1,626	68
6	38,939	164,335	5,600	130
7	80,427	339,691	(11,482)	269
8	181,869	769,036	(60,275)	610

TAB. 5.12 Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) - phase de décomposition : cas de plaque plane

On remarque au tableau 5.12 que les deux derniers cycles adaptatifs ne sont pas réalisables par Skyline puisque l'espace requis pour sa décomposition de la matrice  $A$  dépasse les capacités du serveur (8 Go). Les valeurs tabulées pour les deux derniers cycles en Skyline correspondent alors à l'estimation du solveur.

Le vecteur  $A_x$  de Skyline contient l'espace nécessaire pour stocker la factorisation  $LU$  puisque le remplissage (entrées nulles devenant non-nulles) dû à la factorisation

survient au niveau des entrées du vecteur  $A_x$ . Par conséquent, Skyline ne requiert pas de mémoire supplémentaire lors de la factorisation. Par contre, les solveurs UMFPACK et PARDISO nécessitent de la mémoire additionnelle pour stocker les factorisations  $LU$  symbolique et numérique en raison du remplissage dont l'espace n'a pas été prévu dans leurs vecteurs de décomposition.

Le tableau 5.13 résume les résultats observés en termes de mémoire vive requise lors de la factorisation. Ces informations sont tirées des rapports produits par les solveurs. Pour chaque cas, les pics de mémoire respectifs des factorisations symbolique et numérique ont été sommés. Constatons que les techniques de factorisation utilisées par PARDISO s'avèrent plus économiques que celles d'UMFPACK.

Cycle	Nombre de nœuds	Skyline	UMFPACK	PARDISO
0	1,052	0	17	17
1	1,471	0	24	24
2	2,752	0	45	46
3	5,467	0	93	93
4	10,615	0	198	182
5	20,313	0	376	349
6	38,939	0	766	670
7	80,427	(0)	1,621	1,390
8	181,869	(0)	4,172	3,158

TAB. 5.13 Comparaison de l'encombrement mémoire (Mo) - phase de factorisation : cas de plaque plane

La figure 5.13 (a) illustre la relation entre la mémoire totale (décomposition et factorisation) et la taille du problème ( $neq$ ). Cette relation est quadratique pour Skyline mais linéaire pour UMFPACK et PARDISO.

La performance en temps de calcul est présentée au tableau 5.14. Notons que la

résolution au cycle 0 est plus longue que celle au cycle 1. La raison est l'utilisation indispensable de l'algorithme semi-couplé pendant les 20 premières itérations du cycle 0. Elles sont suivies de 6 itérations de Newton (algorithme couplé). L'emploi direct de la méthode de Newton à partir du cycle 1 diminue grandement le temps de calcul.

Cycle	Nombre de nœuds	Skyline	UMFPACK	PARDISO
0	1,052	41	30	30
1	1,471	11	9	12
2	2,752	65	22	30
3	5,467	189	37	43
4	10,615	728	60	63
5	20,313	2,698	117	121
6	38,939	15,433	178	195
7	80,427	—	389	420
8	181,869	—	1,078	1,001

TAB. 5.14 Comparaison du temps de calcul (s) : cas de plaque plane

La figure 5.13 (b) montre que le temps de calcul de Skyline est fonction quadratique de la taille du problème. UMFPACK et PARDISO affichent cependant une dépendance linéaire.

À première vue et contre notre attente, la performance de PARDISO semble être similaire, voire moins bonne que celle d'UMFPACK en termes de temps de calcul. Il faut noter que le temps de calcul affiché dans ce mémoire est mesuré par la fonction CPU\_TIME de Fortran qui rapporte le cumulatif du temps passé sur chacun des CPU utilisés par le processus :

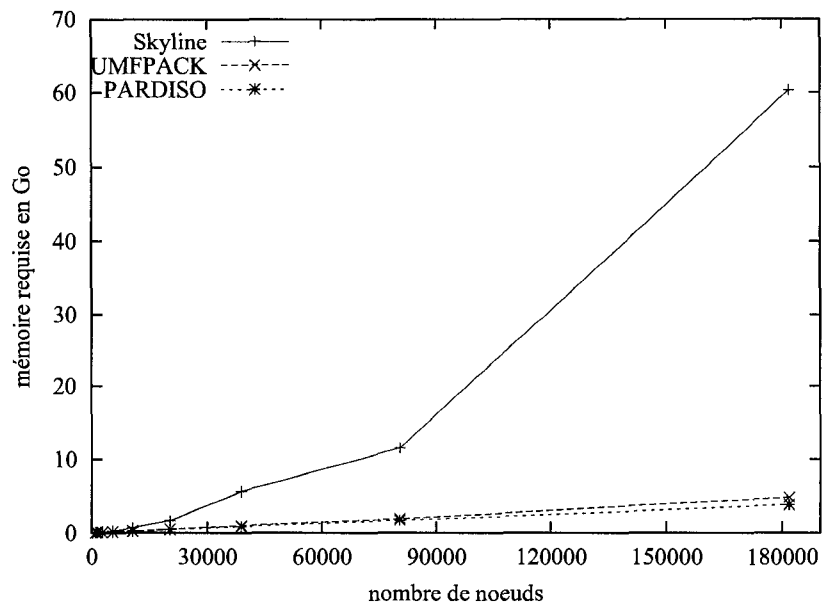
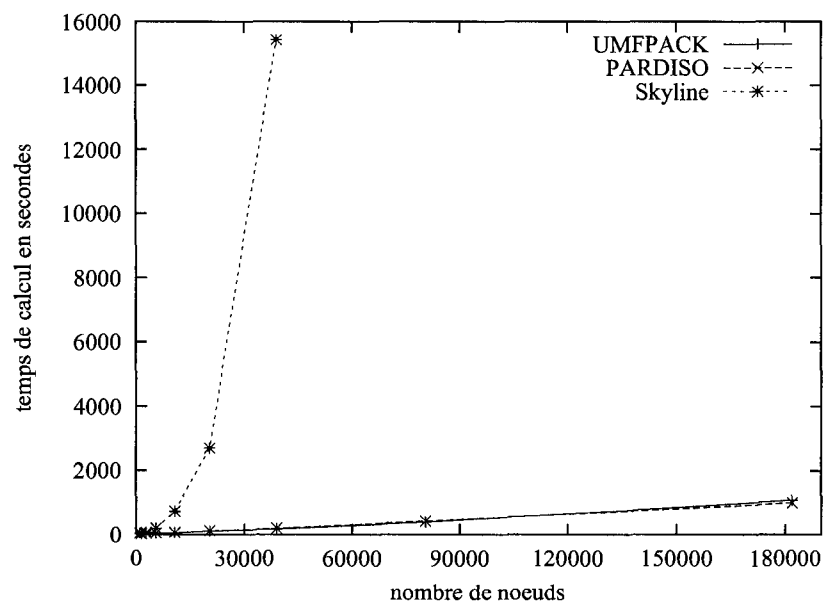
$$t_{tot} = t_{CPU1} + t_{CPU2} + \dots + t_{CPU_n}$$

où  $n$  est le nombre total des processeurs utilisés au cours du calcul qui varie le long du calcul et d'un calcul à l'autre<sup>1</sup>. Il est donc évident que PARDISO s'avère plus avantageux dans ce sens puisque :

$$t_{PARDISO} = \max(t_{CPU_1}, t_{CPU_2}, \dots, t_{CPU_n}) \leq t_{UMFPACK} = t_{CPU_x}$$

---

<sup>1</sup>Dans notre cas  $n$  ne dépasse pas 4 processeurs.

(a) Mémoire totale pour le stockage de  $A$  et sa factorisation (Go)

(b) Temps de calcul (s)

FIG. 5.13 Ressources informatiques : cas de la plaque plane

## CONCLUSION

Le but du présent travail était de développer et d'étudier une formulation monolithique implicite résolvant les équations de Navier-Stokes moyennées (RANS) couplées à celles du modèle de turbulence  $k - \epsilon$  standard. L'algorithme couplé résultant devait être valable tant pour l'écoulement que pour le calcul des sensibilités.

Nous avons débuté par la présentation des algorithmes découplé, semi-couplé et tout couplé. L'algorithme découplé est l'approche classique regroupant les équations en trois systèmes : un système de vitesse-pression-température, un système pour l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence et un autre pour son taux de dissipation. Les trois systèmes sont résolus par étapes, un système à la fois, et selon une méthode itérative de type point-fixe. La formulation couplée, permet une résolution implicite et simultanée par la méthode de Newton de toutes les équations regroupées en un grand système matriciel. L'approche semi-couplée constitue également un système unique mais découple les équations de Navier-Stokes de celle du modèle de turbulence et applique la méthode de point-fixe à la majorité des non-linéarités.

L'encombrement mémoire accru des formulations couplée et semi-couplée par rapport à l'approche découplée a motivé l'implémentation du solveur linéaire UMF-PACK beaucoup plus efficace que le solveur Skyline employé par le passé. UMF-PACK maximise l'économie d'espace mémoire en évitant le stockage des valeurs nulles et réduit substantiellement le temps de calcul par le biais des techniques multi-frontales.

L'implémentation des algorithmes et de la méthode de résolution a été vérifiée avant de procéder aux applications. Pour ce faire, une solution manufacturée a été injectée dans les équations du modèle, résolues selon un processus adaptatif. La

diminution systématique et la convergence de l'erreur exacte et de son estimation ont vérifié que les équations du modèle sont résolues correctement.

Les applications ont permis d'étudier et de comparer la performance des algorithmes et de dresser ainsi le bilan récapitulatif de l'annexe VI.

Une première application au cas de l'écoulement autour d'un obstacle carré et à la proximité d'une plaque plane a différencié les trois algorithmes selon leurs performances. Les résultats indiquent que la vitesse de résolution de l'approche couplée est 2.5 fois celle de l'algorithme découplé et 8 fois celle de la formulation semi-couplée. En mémoire vive requise pour la factorisation, les approches couplée et semi-couplée en nécessitent 2.8 fois celle de l'algorithme découplé. L'algorithme semi-couplé s'avère donc trop inefficace pour être utilisé comme méthode de résolution principale. Il est par contre utile pour alimenter l'algorithme couplé sur les maillages grossiers où la convergence de la méthode de Newton est compromise par l'imprécision de l'information de départ. L'approche semi-couplée a donc été écartée aux applications subséquentes.

La deuxième application, le problème de l'écoulement sur une plaque plane chauffante, a permis d'explorer les performances en transfert thermique turbulent. La formulation couplée s'est avérée 2.4 fois plus gourmande en mémoire mais 4.6 fois plus rapide que son homologue découplé.

La troisième application portait sur l'étude des sensibilités de l'écoulement isotherme dans un canal avec une marche descendante par rapport aux trois paramètres de valeur de la loi de paroi. On a observé que l'approche couplée requiert 3 fois la mémoire nécessaire à l'algorithme découplé. La résolution de l'ensemble de l'écoulement et de ses trois sensibilités a été 20.5 fois plus rapide en couplé qu'en découplé. En effet, l'algorithme découplé et sa méthode itérative de point-fixe sont

particulièrement inefficaces lorsqu'appliqués aux équations linéaires. La méthode de Newton de l'approche couplée permet une résolution plus directe et donc plus rapide des sensibilités.

Les performances relatives (couplé/découplé) en temps de calcul se sont améliorées d'une application à l'autre. L'inefficacité de la méthode de lagrangien augmenté (section 2.4.2.1), servant à imposer la contrainte de non-pénétration sur les parois courbes, est susceptible d'expliquer les différences. En effet, cette méthode est utilisée sur cinq courbes de la première application, une courbe de la deuxième et aucune courbe de la troisième. Il est donc souhaitable de remplacer cette méthode par une méthode mixte traitant les multiplicateurs de Lagrange implicitement.

Une dernière application a permis de comparer les performances des solveurs linéaires Skyline, UMFPACK et PARDISO. La simulation de l'écoulement sur une plaque plane isotherme a alors servi comme base de comparaison. Il a été déterminé que la mémoire totale requise par Skyline pour le stockage de la matrice  $A$  croît quadratiquement avec le nombre de nœuds. Skyline ne nécessite pas de mémoire supplémentaire lors de la factorisation puisque l'espace requis par le remplissage (entrées nulles devenant non-nulles) est fourni à travers la décomposition de  $A$  même. UMFPACK et PARDISO démontrent une relation linéaire entre la mémoire totale (décomposition et factorisation) et la taille du problème en termes de nœuds. PARDISO est cependant plus économique en factorisation. Le temps de calcul est également fonction quadratique de la taille du problème pour Skyline et linéaire pour UMFPACK et PARDISO.

La formulation monolithique développée au cours du présent travail est donc, selon les cas étudiés, de 2.5 à 20.0 fois plus rapide que la formulation découplée mais nécessite de 2.4 à 3 fois plus de mémoire vive. La méthode couplée est donc une formulation robuste qui, combinée avec les solveurs linéaires multi-frontaux



et multi-processeurs, permet d'importantes économies de temps de calcul surtout lors de la résolution des sensibilités. Elle constitue un outil puissant pour aborder une vaste panoplie d'applications en turbulence trop coûteuses auparavant, surtout en régime instationnaire, telles l'optimisation, l'analyse de propagation d'incertitude, l'étude de l'interaction fluide-structure, etc. La prochaine étape serait alors d'étendre la formulation monolithique obtenue au mode instationnaire. Également, pour contourner le désavantage de la méthode couplée en termes de l'encombrement mémoire, il serait utile d'explorer le potentiel des solveurs linéaires itératifs.

## RÉFÉRENCES

- [1] F. Ilinca and D. Pelletier. Positivity preservation and adaptive solution of the  $k - \epsilon$  model. *AIAA Journal*, 36(1) :44–50, 1998.
- [2] E. Turgeon, D. Pelletier, and J. Borggaard. A general continuous sensitivity equation formulation for the k-epsilon model of turbulence. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 18(1) :29–46, 2004.
- [3] R. Di Caro, A. Hay, S. Etienne, and D. Pelletier. Continuous shape sensitivity equation method for the  $k-\epsilon$  model of turbulence. In *45<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting*, volume 9, pages 6276–6292, Reno, NV, United States, Jan 2007. AIAA Collection of Technical Papers.
- [4] E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, Orlando, Florida, 1986.
- [5] D. Lacasse D. Pelletier, E. Turgeon and J. Borggaard. Adaptivity, sensitivity, and uncertainty : toward standards of good practice in computational fluid dynamics. *AIAA Journal*, 41(10) :1925–33, 2003.
- [6] É. Turgeon, D. Pelletier, and J. Borggaard. Sensitivity and uncertainty analysis for variable property flows. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, Jan. 2001. AIAA Paper 2001-0139.
- [7] S.-Y. Lu and P. Sagaut. Direct sensitivity analysis for smooth unsteady compressible flow using complex differentiation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(12) :1863–1886, 2007.
- [8] A. G. Godfrey and E. M. Cliff. Sensitivity equations for turbulent flows. In *39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, Jan. 2001. AIAA Paper 2001-1060.
- [9] J. Borggaard and J. Burns. A pde sensitivity equation method for optimal aerodynamic design. *Journal of Computational Physics*, 136 :366–384, 1997.

- [10] J. Borggaard and J. Burns. Asymptotically consistent gradients in optimal design. Hampton, VA, 13-16 March 1995. In MDO - State of the Art ; Proceedings of the ICASE/NASA Longley Workshop.
- [11] J. Borggaard and A. Verma. On efficient solutions to the continuous sensitivity equation using automatic differentiation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(1) :39–62, 2000.
- [12] L. Charlot. *Une Méthode de l'Équation de Sensibilités Lagrangienne pour les Écoulements*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2008.
- [13] R. Di Caro. *Analyse de Sensibilité de Forme pour le Modèle de Turbulence  $k - \epsilon$* . PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2007.
- [14] D. Pelletier H. Hristova, S. Etienne and J. Borggaard. A continuous sensitivity equation method for time-dependent incompressible laminar flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50 :817–844, 2005.
- [15] S. Etienne, D. Pelletier, and A. Garon. Adaptive solution of some sensitivity fluid-structure interaction problems. In *Flow Induced Vibrations 2004*, Paris, France, July 2004.
- [16] S. Etienne, D. Pelletier, and A. Garon. Sensitivity analysis of fluid-structure interaction problems. In *Computational Fluid Dynamics Society of Canada 2004*, Ottawa, ON, May 2004.
- [17] D. C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Canada, CA, 1993.
- [18] F. Ilinca. *Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements turbulents*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 1996.
- [19] F. Ilinca, D. Pelletier, and A. Garon. An adaptive finite element method for a two-equation turbulence model in wall-bounded flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24 :101–120, 1997.

- [20] T.A. Davis and I.S. Duff. An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse lu factorization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(1) :140–158, 1997.
- [21] O. Schenk and K. Gärtner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Journal of Future Generation Computer Systems*, 20(3) :475–487, 2004.
- [22] L. Seungsoo and D. Whan Choi. On coupling the reynolds-averaged navier-stokes equations with two-equation turbulence model equations. *International journal for numerical methods in fluids*, 50(2) :165–197, 2006.
- [23] B. E. Launder and J. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 269–289, 1974.
- [24] J. P. Chabard. Projet N3S de mécanique des fluides - manuel théorique de la version 3. Technical Report EDF HE-41/91.30B, Électricité de France, 1991.
- [25] L. Ignat, D. Pelletier, and F. Ilinca. Adaptive computation of turbulent forced convection. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 34 :847–871, 1998.
- [26] J. A. Schetz. *Boundary Layer Analysis*. Prentice Hall, 1993.
- [27] V. Arpaci and P. Larsen. *Convection heat transfer*. 1984.
- [28] E. Colin. *Analyse de sensibilités de transfert de chaleur turbulent*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal, 2003.
- [29] J.N. REDDY and D. GARTLING. *A The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. CRC Press, Inc, 1994.
- [30] A. FORTIN et A. GARON. *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*. Notes du cours MTH6207, École Polytechnique de Montréal, Canada, 2007.
- [31] A.M. Erisman I.S. Duff and J.K. Reid. *Direct Methods for Sparse Matrices*. Oxford Sciences Publications, 1990.
- [32] T.A. Davis and I.S. Duff. A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices. *ACM Trans. Math. Software*, 25(1) :1–19, 1999.

- [33] T.A. Davis. A column pre-ordering strategy for the unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. Math. Software*, 30(2) :165–195, 2004.
- [34] Timothy A. Davis. *UMFPACK Version 5.0 User Guide*. Dept. of Computer and Information Sciences and Engineering. Univ. of Florida, Gainesville, FL, 2006.
- [35] O. Schenk and K. Gärtner. On fast factorization pivoting methods for symmetric indefinite systems. *Elec. Trans. Numer. Anal.*, 23 :158–179, 2006.
- [36] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33 :1331–1364, 1992.
- [37] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 32 :199–259, 1982.
- [38] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73 :173–189, 1989.
- [39] É. Turgeon. Application d’une méthode d’éléments finis adaptative à des écoulements axisymétriques. Master’s thesis, École Polytechnique de Montréal, 1997.
- [40] P. J. Roache. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1998.
- [41] E. Turgeon and D. Pelletier. Verification and validation in CFD using an adaptive finite-element method. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 48(4) :219–231, 2002.

- [42] P. J. Roache. Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. *J. Fluids Eng. - Trans. ASME*, 114(1) :4–10, 2002.
- [43] L. Eça, M. Hoekstra, A. Hay, and D. Pelletier. On the construction of manufactured solutions for one and two-equation eddy-viscosity models. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 54(2) :119–154, 2007.
- [44] L. Eça, M. Hoekstra, A. Hay, and D. Pelletier. Verification of RANS solvers with manufactured solutions. *Eng. Comput.*, 23 :253–270, 2007.
- [45] L. Eça, M. Hoekstra, and P. J. Roache. Verification of calculations : an overview of the second Lisbon workshop. In *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, Miami, Florida, 2007. AIAA Paper 2007-4089.
- [46] L. Eça, M. Hoekstra, A. Hay, and D. Pelletier. A manufactured solution for a two-dimensional steady wall-bounded incompressible turbulent flow. *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, 21(3-4) :175–188, 2007.
- [47] A. Hay and D. Pelletier. Second workshop on cfd uncertainty analysis : Results from the cadyf code. In *2<sup>nd</sup> Workshop on CFD Uncertainty Analysis*, Lison, Portugal, October 2006.
- [48] K. Wu and R. Martinuzzi. Experimental study of the turbulent wake flow behind a square cylinder near a wall. In *ASME Fluids Engineering Division*, Vancouver, B.C., June 22-26 1997. No. FEDSM97-3151.
- [49] J.C. Vogel and J.K. Eaton. Heat transfer and fluid mechanics measurements in the turbulent reattaching flow behind a backward-facing step. In *Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering*.

## ANNEXE I

## LOIS DE PAROIS POUR LES SENSIBILITÉS

## I.1 Loi de paroi en vitesse

La loi de paroi pour les sensibilités s'obtient en dérivant la loi de paroi pour l'écoulement.

On dérive le profil de vitesse :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ u^+ = \begin{cases} y^+ & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \right]$$

$$u^{+'} = \begin{cases} y^{+'} & \text{pour } y^+ < y_c^+ \\ \frac{1}{\kappa} \left( -u^+ \kappa' + \frac{E'}{E} + \frac{y^{+'}}{y^+} \right) & \text{pour } y^+ \geq y_c^+ \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

La distance adimensionnelle se dérive comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ y^+ = \frac{\rho d u_k}{\mu} \right]$$

$$y^{+'} = y^+ \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{d'}{d} + \frac{u_k'}{u_k} - \frac{\mu'}{\mu} \right) \quad (\text{I.2})$$

La dérivation des échelles de vitesse donne :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[ u_{**} = \frac{u_t}{u^+} \right]$$

$$u_{**}' = \frac{u_t'}{u^+} - \frac{u_t u^{+'}}{u^{+2}} \quad (\text{I.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} [u_k = C_\mu^{1/4} \exp(\mathcal{K}/2)] \\ u'_k = u_k \left( \frac{1}{4} \frac{C'_\mu}{C_\mu} + \frac{1}{2} S_\mathcal{K} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

où la sensibilité de la vitesse tangentielle se calcule selon :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} [u_t = ut_x + vt_y] \\ u'_t = S_u t_x + S_v t_y \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

La dérivation des conditions limites (2.61-2.69) résulte aux expressions suivantes :

– Condition sur la sensibilité de la vitesse tangentielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} [\tau_p = \rho u_k u_{**}] \\ \tau'_p = \rho' u_k u_{**} + \rho u'_k u_{**} + \rho u_k u'_{**} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

– Condition sur la sensibilité de la vitesse normale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} [\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0] \\ \mathbf{s}_u \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

– Condition sur la sensibilité de  $\mathcal{K}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \right] \\ \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_\mathcal{K} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$



– Condition sur la sensibilité de  $\mathcal{E}$

Pour l'algorithme découplé, elle prend la forme d'une condition de Dirichlet :

$$S_{\mathcal{E}} = \frac{S_{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{\frac{\partial}{\partial a} \left[ \epsilon = \frac{u_k^3}{\kappa d} \right]}{\frac{u_k^3}{\kappa d}}$$

$$S_{\mathcal{E}} = 3 \frac{u'_k}{u_k} - \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{d'}{d} \quad (\text{I.9})$$

En simplifiant l'équation (I.9) et en explicitant la relation entre  $S_{\mathcal{E}}$  et  $S_{\mathcal{K}}$ , on obtient l'équation résiduelle (I.10) pour les algorithmes couplé et semi-couplé dont on résout la forme faible sur les éléments 1D de la frontière :

$$R_{S_{\mathcal{E}}} = S_{\mathcal{E}} - \frac{3 C'_{\mu}}{4 C_{\mu}} + \frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{d'}{d} - \frac{3}{2} S_{\mathcal{K}} \quad (\text{I.10})$$

## ANNEXE II

LA FORMULATION VARIATIONNELLE DES ÉQUATIONS DE  
SENSIBILITÉS– Équation de continuité

$$R_{S_p} = \int_{\Omega} \vartheta S_p \nabla \cdot \mathbf{S}_u d\Omega \quad (\text{II.1})$$

– Équation de mouvement

$$\begin{aligned} R_{S_u} = & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S}_u) \cdot \vartheta \mathbf{S}_u d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [2(\mu' + \mu'_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) + 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{S}_u)] : \dot{\gamma}(\vartheta \mathbf{S}_u) d\Omega - \int_{\Omega} S_p \nabla \cdot \vartheta \mathbf{S}_u d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{f}' \cdot \vartheta \mathbf{S}_u d\Omega - \int_{\Gamma_{Nu}} \hat{\mathbf{t}}' \cdot \vartheta \mathbf{S}_u d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

– Équation de  $S_{\mathcal{K}}$ 

$$\begin{aligned} R_{S_{\mathcal{K}}} = & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{K} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}}) \vartheta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \cdot \nabla \vartheta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma_k} - \frac{\mu_t \sigma'_k}{\sigma_k^2} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla S_{\mathcal{K}} \right] \vartheta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} e^{-\mathcal{K}} (\mu'_t P + \mu_t P' - \mu_t P S_{\mathcal{K}}) \vartheta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho e^{\varepsilon - \mathcal{K}} \left( 2 \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_{\mathcal{K}} - \frac{\mu'_t}{\mu_t} \right) \vartheta S_{\mathcal{K}} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} q'_K \vartheta S_{\mathcal{K}} d\Omega - \int_{\Gamma_{N\mathcal{K}}} \hat{\phi}'_{\mathcal{K}} \vartheta S_{\mathcal{K}} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Équation de  $S_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
R_{S_\varepsilon} = & \int_{\Omega} (\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{S}_u \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho \mathbf{u} \nabla S_\varepsilon) \vartheta S_\varepsilon d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma} - \frac{\mu_t \sigma'_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} + \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla S_\varepsilon \right] \cdot \nabla \vartheta S_\varepsilon d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \left( \mu' + \frac{\mu'_t}{\sigma} - \frac{\mu_t \sigma'_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + 2 \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla S_\varepsilon \right] \vartheta S_\varepsilon d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \rho C_{\varepsilon 1} C_\mu e^{\mathcal{K} - \varepsilon} P \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 1}} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_{\mathcal{K}} - S_\varepsilon + \frac{P'}{P} \right) \right] \vartheta S_\varepsilon d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \rho C_{\varepsilon 2} e^{\varepsilon - \mathcal{K}} \left( \frac{\rho'}{\rho} + \frac{C'_{\varepsilon 2}}{C_{\varepsilon 2}} + \frac{C'_\mu}{C_\mu} + S_\varepsilon - S_{\mathcal{K}} \right) \right] \vartheta S_\varepsilon d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \hat{q}'_\varepsilon \vartheta S_\varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma_{N\varepsilon}} \hat{\phi}'_\varepsilon \vartheta S_\varepsilon d\Gamma
\end{aligned} \tag{II.4}$$

Les fonctions test des sensibilités sont égales à celles de l'écoulement :  $\vartheta S_p = \vartheta p$ , etc. Les termes,  $\hat{t}'$ ,  $\hat{q}'$ ,  $\hat{\phi}'_{\mathcal{K}}$  et  $\hat{\phi}'_\varepsilon$  désignent les valeurs des conditions de Neumann en sensibilités (section 2.4.1.2).

## ANNEXE III

## NORMES D'ERREUR

L'expression des semi-normes équivalentes de  $H^1$  pour  $p$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mu_t$  et celle de la norme *Énergie* sont données dans la présente annexe.

Notons que l'erreur est calculée soit de façon exacte, soit de façon estimée. Par exemple, considérons la norme  $L_2$  de  $p$  :

$$\|p_h\|_{0,\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} p_h^2 d\Omega} \quad (\text{III.1})$$

où  $p_h$  est la solution obtenue par la méthode des éléments finis. Selon la norme  $L_2$ , l'erreur exacte de  $p$  sur l'élément  $K$  se calcule comme suit :

$$\|E_{ex}^p\|_{0,K} = \|p_h - p_{ex}\|_{0,K} = \sqrt{\int_K (p_h - p_{ex})^2 d\Omega_K} \quad (\text{III.2})$$

où  $p_{ex}$  est la solution exacte de la pression. L'erreur estimée se calcule alors comme :

$$\|E_{est}^p\|_{0,K} = \|p_h - p_{est}\|_{0,K} = \sqrt{\int_K (p_h - p_{est})^2 d\Omega_K} \quad (\text{III.3})$$

où  $p_{est}$  est la valeur enrichie (par projection locale des gradients) de la solution éléments finis de la pression,  $p_h$ .

La norme de l'erreur globale est obtenue en additionnant les normes d'erreur élémentaires :

$$\|E^p\|_{0,\Omega} = \sqrt{\sum_K \|E^p\|_{0,K}^2} \quad (\text{III.4})$$

Cette procédure est appliquée aux normes suivantes :

$$éqH^1p : \quad |p|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla p) d\Omega \quad (\text{III.5})$$

$$éqH^1\mathbf{u} : \quad |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} [(\nabla u \cdot \nabla u) + (\nabla v \cdot \nabla v)] d\Omega \quad (\text{III.6})$$

$$éqH^1k : \quad |\mathcal{K}|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\nabla K \cdot \nabla K) d\Omega \quad (\text{III.7})$$

$$éqH^1\epsilon : \quad |\mathcal{E}|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E}) d\Omega \quad (\text{III.8})$$

$$éqH^1\mu_t : \quad |\mu_t|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\nabla \mu_t \cdot \nabla \mu_t) d\Omega \quad (\text{III.9})$$

## ANNEXE IV

## MÉTHODES DE STABILISATION

Dans les expressions des méthodes de stabilisation présentées, le paramètre de pondération est défini comme suit :

$$\chi = \frac{\delta h}{2V} \quad (\text{IV.1})$$

où  $V$  est la norme du vecteur vitesse et  $\delta$  est défini comme :

$$\delta = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad (\text{IV.2})$$

Le nombre de Péclet élémentaire,  $Pe$ , s'évalue différemment pour chaque équation :

$$\chi_p : Pe = \infty ; \delta = 1 \quad (\text{IV.3})$$

$$\chi_u : Pe = \frac{\rho h V}{2(\mu + \mu_t)} \quad (\text{IV.4})$$

$$\chi_T : Pe = \frac{\rho c_p h V}{(\lambda + \lambda_t)} \quad (\text{IV.5})$$

$$\chi_\kappa : Pe = \frac{\rho h V}{2\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)} \quad (\text{IV.6})$$

$$\chi_\varepsilon : Pe = \frac{\rho h V}{2\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)} \quad (\text{IV.7})$$

où  $h$  est la taille de l'élément évaluée comme suit :

$$h = \max_{ij} \frac{|(x_i - x_j)u + (y_i - y_j)v|}{V} \quad (\text{IV.8})$$

$i$  et  $j$  étant les sommets de l'élément.

## IV.1 Mouvement

## IV.1.1 Galerkin

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\ - \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

## IV.1.2 SUPG

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f}) \cdot (\chi_u \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega_e \\ = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

## IV.1.3 GLS

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} 2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_t) \dot{\gamma}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f}) \cdot \chi_u(\mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega_e \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \mathbf{u} \chi_p \nabla \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_e = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

et

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta p d\Omega \quad (\text{IV.12})$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot [2(\mu + \mu_t) \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})] - \rho \mathbf{f}) \cdot \chi_u \nabla \delta p d\Omega_e = 0$$

## IV.2 Energie

### IV.2.1 Galerkin

$$\int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega = \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma \quad (\text{IV.13})$$

### IV.2.2 SUPG

$$\int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega \quad (\text{IV.14})$$

$$+ \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla T]) (\chi_T \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T) d\Omega_e = \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma$$



## IV.2.3 GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\lambda + \lambda_t) \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega & (IV.15) \\
+ \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} & (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla T]) \chi_T (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla \delta T - \nabla \cdot [(\lambda + \lambda_t) \nabla \delta T]) d\Omega_e \\
& = \int_{\Gamma} \hat{q} \delta T d\Gamma
\end{aligned}$$

IV.3 Equation de  $\mathcal{K}$ 

## IV.3.1 Galerkin

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\mathcal{K}} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\mathcal{K}}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma & (IV.16)
\end{aligned}$$

## IV.3.2 SUPG

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} \right. \\
& \quad \left. - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right\} \chi_{\kappa} \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega_e \\
& = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \tag{IV.17}
\end{aligned}$$

## IV.3.3 GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right] \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{K} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \mathcal{K} \cdot \nabla \mathcal{K} - \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) \right. \\
& \quad \left. + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \right\} \chi_{\kappa} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{K} + \mu_t e^{-\kappa} P(\mathbf{u}) \delta \mathcal{K} + \rho^2 C_{\mu} \frac{e^{\kappa}}{\mu_t} \delta \mathcal{K} \right\} d\Omega_e \\
& = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial n} \delta \mathcal{K} d\Gamma \tag{IV.18}
\end{aligned}$$

IV.4 Equation de  $\mathcal{E}$ 

## IV.4.1 Galerkin

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

## IV.4.2 SUPG

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega \\ + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \right. \\ \left. - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right\} \chi_\epsilon \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega_e \\ = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

## IV.4.3 GLS

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right] \delta \mathcal{E} d\Omega \\
& \quad + \int_{\Omega} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} d\Omega \\
& + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \int_{\Omega_e} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathcal{E} - \nabla \cdot \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \right] - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \right. \\
& \quad \left. - \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) \right\} \chi_\epsilon \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathcal{E} + \rho C_1 C_\mu e^{\kappa - \mathcal{E}} P(\mathbf{u}) \delta \mathcal{E} + \rho C_2 e^{\mathcal{E} - \kappa} \delta \mathcal{E} \right\} d\Omega_e \\
& \quad = \int_{\Gamma} \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n} \delta \mathcal{E} d\Gamma \tag{IV.21}
\end{aligned}$$

## ANNEXE V

## SOLUTION MANUFACTURÉE

V.1 Ecoulement :

V.1.1 Solution analytique des champs de l'écoulement

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{erf}(\eta) \\ v &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\eta^2}\right) \\ p &= 0.5 \left[ \ln(2x - x^2 + 0.25) \ln(4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= k_{max} \eta_\nu^2 e^{-\eta_\nu^2} \\ \epsilon &= 0.36 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} e^{-\eta_\nu^2} \\ \mu_t &= \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_\eta^\infty e^{-x^2/2} dx \\ \eta &= \frac{\sigma(y - y_0)}{x} \\ \eta_\nu &= \frac{\sigma_\nu(y - y_0)}{x} \end{aligned}$$

avec les constantes suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma &= 4.0 & \rho &= 1.0 & \nu &= 10^{-6} & \mu &= 10^{-6} \\ \sigma_\nu &= 10.0 & C_\mu &= 0.09 & k_{max} &= 0.01 & \nu_{max} &= 10^3 \nu \end{aligned}$$

## V.1.2 Les dérivées premières et secondes des variables de l'écoulement

$$\begin{aligned}
u_{,x} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y}{x^2} e^{-\eta^2} \\
u_{,y} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \\
u_{,xx} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - \eta^2) \\
u_{,yy} &= -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sigma}{x}\right)^2 \eta e^{-\eta^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{,x} &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y^2}{x^3} e^{-\eta^2} \\
v_{,y} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y}{x^2} e^{-\eta^2} \\
v_{,xx} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma y^2}{x^4} e^{-\eta^2} (3 - 2\eta^2) \\
v_{,yy} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - 2\eta^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{,x} &= \frac{(1-x)}{2x-x^2+0.25} \ln(4(y-y_0)^3 - 3(y-y_0)^2 + 1.25) \\
p_{,y} &= \frac{3(y-y_0)(2(y-y_0)-1)}{4(y-y_0)^3 - 3(y-y_0)^2 + 1.25} \ln(2x-x^2+0.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{,x} &= 2cst_k \frac{\eta_\nu^2}{x} e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^2 - 1) \\
k_{,y} &= -2cst_k \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^2 - 1) \\
k_{,xx} &= 2cst_k \frac{\eta_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^4 - 7\eta_\nu^2 + 3) \\
k_{,yy} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^4 - 5\eta_\nu^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{,x} &= 2cst_{\epsilon} \frac{\eta_{\nu}^2}{x} e^{-\eta_{\nu}^2} \\
\epsilon_{,y} &= -2cst_{\epsilon} \frac{\sigma_{\nu}}{x} \eta_{\nu} e^{-\eta_{\nu}^2} \\
\epsilon_{,xx} &= 2cst_{\epsilon} \frac{\eta_{\nu}^2}{x^2} e^{-\eta_{\nu}^2} (2\eta_{\nu}^2 - 3) \\
\epsilon_{,yy} &= 2cst_{\epsilon} \frac{\sigma_{\nu}^2}{x^2} e^{-\eta_{\nu}^2} (2\eta_{\nu}^2 - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{t,x} &= \mu_t \left( \frac{2k_{,x}}{k} - \frac{\epsilon_{,x}}{\epsilon} \right) \\
\mu_{t,y} &= \mu_t \left( \frac{2k_{,y}}{k} - \frac{\epsilon_{,y}}{\epsilon} \right)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
cst_k &= k_{max} e^1 \\
cst_{\epsilon} &= 0.36 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}}
\end{aligned}$$



V.2 Sensibilités des variables de l'écoulement par rapport au paramètre  $y_0$  :

$$\begin{aligned}
 S_u &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x} e^{-\eta^2} \\
 S_{u,x} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - 2\eta^2) \\
 S_{u,y} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma^2}{x^2} \eta e^{-\eta^2} \\
 S_{u,xx} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^3} e^{-\eta^2} (-2\eta^4 + 5\eta^2 - 1) \\
 S_{u,yy} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma^3}{x^3} e^{-\eta^2} (1 - 2\eta^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_v &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x} e^{-\eta^2} \\
 S_{v,x} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x^2} e^{-\eta^2} (1 - \eta^2) \\
 S_{v,y} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma}{x^2} e^{-\eta^2} (2\eta^2 - 1) \\
 S_{v,xx} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\eta}{x^3} e^{-\eta^2} (-2\eta^4 + 7\eta^2 - 3) \\
 S_{v,yy} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma^2}{x^3} \eta e^{-\eta^2} (3 - 2\eta^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_p &= \frac{3(y - y_0)(1 - 2(y - y_0))}{4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25} \ln(2x - x^2 + 0.25) \\
 S_{p,x} &= \frac{(1 - x) \quad 6(y - y_0)(1 - 2(y - y_0))}{2x - x^2 + 0.25 \quad 4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25} \\
 S_{p,y} &= \left[ \frac{24(y - y_0)^4 - 24(y - y_0)^3 + 9(y - y_0)^2 - 15(y - y_0) + 3.75}{(4(y - y_0)^3 - 3(y - y_0)^2 + 1.25)^2} \right] \\
 &\times \ln(2x - x^2 + 0.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_k &= 2k_{max} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(1-\eta_\nu^2)} (\eta_\nu^2 - 1) \\
S_{k,x} &= 4cst_k \frac{\sigma_\nu}{x^2} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^4 - 3\eta_\nu^2 + 1) \\
S_{k,y} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (-2\eta_\nu^4 + 5\eta_\nu^2 - 1) \\
S_{k,xx} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (4\eta_\nu^6 - 26\eta_\nu^4 + 34\eta_\nu^2 - 6) \\
S_{k,yy} &= 2cst_k \frac{\sigma_\nu^3}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (4\eta_\nu^4 - 18\eta_\nu^2 + 12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_\epsilon &= 0.72 \frac{k_{max}^2}{\nu_{max}} \frac{\sigma_\nu}{x} \eta_\nu e^{(-\eta_\nu^2)} \\
S_{\epsilon,x} &= 4cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu}{x^2} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (\eta_\nu^2 - 1) \\
S_{\epsilon,y} &= 2cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu^2}{x^2} e^{-\eta_\nu^2} (1 - 2\eta_\nu^2) \\
S_{\epsilon,xx} &= 4cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^4 - 7\eta_\nu^2 + 3) \\
S_{\epsilon,yy} &= 4cst_\epsilon \frac{\sigma_\nu^3}{x^3} \eta_\nu e^{-\eta_\nu^2} (2\eta_\nu^2 - 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\mu t} &= \mu_t \left( \frac{2S_k}{k} - \frac{S_\epsilon}{\epsilon} \right) \\
S_{\mu t,x} &= \mu_{t,x} \left( \frac{2S_k}{k} - \frac{S_\epsilon}{\epsilon} \right) + \mu_t \left[ \frac{2}{k^2} (S_{k,x} k - S_k k_{,x}) - \frac{1}{\epsilon^2} (S_{\epsilon,x} \epsilon - S_\epsilon \epsilon_{,x}) \right] \\
S_{\mu t,y} &= \mu_{t,y} \left( \frac{2S_k}{k} - \frac{S_\epsilon}{\epsilon} \right) + \mu_t \left[ \frac{2}{k^2} (S_{k,y} k - S_k k_{,y}) - \frac{1}{\epsilon^2} (S_{\epsilon,y} \epsilon - S_\epsilon \epsilon_{,y}) \right]
\end{aligned}$$

### V.3 Termes sources

#### V.3.1 Écoulement

$$\begin{aligned}
 f_x &= p_{,x} + \rho(uu_{,x} + vu_{,y}) - (\mu + \mu_t)(u_{,xx} + u_{,yy}) - 2\mu_{t,x}u_{,x} - \mu_{t,y}(u_{,y} + v_{,x}) \\
 f_y &= p_{,y} + \rho(uv_{,x} + vv_{,y}) - (\mu + \mu_t)(v_{,xx} + v_{,yy}) - 2\mu_{t,y}v_{,y} - \mu_{t,x}(u_{,y} + v_{,x}) \\
 q_k &= \rho(uk_{,x} + vk_{,y}) - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)(k_{,xx} + k_{,yy}) - \frac{1}{\sigma_k}(\mu_{t,x}k_{,x} + \mu_{t,y}k_{,y}) + \rho\epsilon \\
 &\quad - \mu_t[(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
 q_\epsilon &= \rho(u\epsilon_{,x} + v\epsilon_{,y}) - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon}\right)(\epsilon_{,xx} + \epsilon_{,yy}) - \frac{1}{\sigma_\epsilon}(\mu_{t,x}\epsilon_{,x} + \mu_{t,y}\epsilon_{,y}) + \frac{\rho C_{\epsilon 2}\epsilon^2}{k} \\
 &\quad - \rho C_{\epsilon 1} C_\mu k [(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)]
 \end{aligned}$$

## V.3.2 Sensibilités

$$\begin{aligned}
f_x' &= S_{p,x} \rho (u_x S_u + u S_{u,x} + u_y S_v + v S_{u,y}) - (\mu' + \mu_t')(u_{,xx} + u_{,yy}) \\
&\quad - (\mu + \mu_t)(S_{u,xx} + S_{u,yy}) - 2\mu_t' u_{,x} - 2\mu_{t,x} S_{u,x} - \mu_t'(u_{,y} + v_{,x}) - \mu_{t,y}(S_{u,y} + S_{v,x}) \\
f_y' &= S_{p,y} \rho (v_x S_u + u S_{v,x} + v_y S_v + v S_{v,y}) - (\mu' + \mu_t')(v_{,xx} + v_{,yy}) \\
&\quad - (\mu + \mu_t)(S_{v,xx} + S_{v,yy}) - 2\mu_t' v_{,y} - 2\mu_{t,y} S_{v,y} - \mu_t'(u_{,y} + v_{,x}) - \mu_{t,y}(S_{u,y} + S_{v,x}) \\
q_k' &= \rho (k_x S_u + u S_{k,x} + k_y S_v + v S_{k,y}) - \frac{\mu_t'}{\sigma_k} (k_{,xx} + k_{,yy}) \\
&\quad - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) (S_{k,xx} + S_{k,yy}) - \frac{1}{\sigma_k} (\mu_t' k_{,x} + \mu_{t,x} S_{k,x} + \mu_t' k_{,y} + \mu_{t,y} S_{k,y}) \\
&\quad + \rho S_\epsilon - \mu_t' [(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
&\quad - \mu_t [2(u_{,y} + v_{,x})(S_{u,y} + S_{v,x}) + 4(u_{,x} S_{u,x} v_{,y} S_{v,y})] \\
q_\epsilon' &= \rho (\epsilon_x S_u + u S_{\epsilon,x} + \epsilon_y S_v + v S_{\epsilon,y}) - \frac{\mu_t'}{\sigma_\epsilon} (\epsilon_{,xx} + \epsilon_{,yy}) \\
&\quad - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) (S_{\epsilon,xx} + S_{\epsilon,yy}) - \frac{1}{\sigma_\epsilon} (\mu_t' \epsilon_{,x} + \mu_{t,x} S_{\epsilon,x} + \mu_t' \epsilon_{,y} + \mu_{t,y} S_{\epsilon,y}) \\
&\quad + \rho C_{\epsilon 2} \left( \frac{2\epsilon S_\epsilon}{k} - \frac{\epsilon^2 S_k}{k^2} \right) - C_{\epsilon 1} \left( \frac{S_\epsilon \mu_t}{k} + \frac{\epsilon \mu_t'}{k} - \frac{\epsilon \mu_t S_k}{k^2} \right) [(u_{,y} + v_{,x})^2 + 2(u_{,x}^2 + v_{,y}^2)] \\
&\quad - \mu_t' [(u_{,y} + v_{,x})^2 - \frac{C_{\epsilon 1} \epsilon \mu_t}{k} [2(u_{,y} + v_{,x})(S_{u,y} + S_{v,x}) + 4(u_{,x} S_{u,x} v_{,y} S_{v,y})]]
\end{aligned}$$

### V.3.3 Variables logarithmiques

#### V.3.3.1 Écoulement

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \ln(k) \\ \mathcal{K}_{,x} &= \frac{k_{,x}}{k} \\ \mathcal{K}_{,y} &= \frac{k_{,y}}{k} \\ q_{\mathcal{K}} &= \frac{q_k}{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \ln(\epsilon) \\ \mathcal{E}_{,x} &= \frac{\epsilon_{,x}}{\epsilon} \\ \mathcal{E}_{,y} &= \frac{\epsilon_{,y}}{\epsilon} \\ q_{\mathcal{E}} &= \frac{q_{\epsilon}}{\epsilon}\end{aligned}$$

#### V.3.3.2 Sensibilités

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{K}} &= \frac{S_k}{k} \\ S_{\mathcal{K},x} &= \frac{S_{k,x}}{k} - \frac{S_k k_{,x}}{k^2} \\ S_{\mathcal{K},y} &= \frac{S_{k,y}}{k} - \frac{S_k k_{,y}}{k^2} \\ q_{\mathcal{K}'} &= \frac{q_k'}{k} - q_k \frac{S_k}{k^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{E}} &= \frac{S_{\epsilon}}{\epsilon} \\S_{\mathcal{E},x} &= \frac{S_{\epsilon}\epsilon_{,x}}{\epsilon} - \frac{S_{\epsilon}\epsilon_{,x}}{\epsilon^2} \\S_{\mathcal{E},y} &= \frac{S_{\epsilon}\epsilon_{,y}}{\epsilon} - \frac{S_{\epsilon}\epsilon_{,y}}{\epsilon^2} \\q_{\mathcal{E}'} &= \frac{q_{\epsilon}'}{\epsilon} - q_{\epsilon}\frac{S_{\epsilon}}{\epsilon^2}\end{aligned}$$

## ANNEXE VI

## RÉCAPITULATION DES PERFORMANCES

## VI.1 Comparaison des algorithmes

Performance en mémoire

Cas	Couplé	Découplé	Semi-couplé
Obstacle carré	0.018	0.0064	0.017
Plaque thermique	0.031	0.013	—
Marche descendante	0.019	0.0061	—

TAB. VI.1 Performances observées en mémoire totale requise (Mo) / Nombre de nœuds

Cas	Couplé	Découplé	Semi-couplé
Obstacle carré	2.8	1.0	2.7
Plaque thermique	2.4	1.0	—
Marche descendante	3.1	1.0	—

TAB. VI.2 Performances observées en mémoire relativement à l'approche découplée

Performance en temps de calcul

Cas	Couplé	Découplé	Semi-couplé
Obstacle carré	0.012	0.030	0.095
Plaque thermique	0.0069	0.032	—
Marche descendante	0.014	0.287	—

TAB. VI.3 Performances observées en temps de calcul total (s) / Nombre de nœuds

Cas	Couplé	Découplé	Semi-couplé
Obstacle carré	1.0	2.5	7.9
Plaque thermique	1.0	4.6	—
Marche descendante	1.0	20.5	—

TAB. VI.4 Performances observées en temps de calcul relativement à l'approche couplée



## VI.2 Comparaison des solveurs linéaires

### Performance en mémoire

Phase	Skyline	UMFPACK	PARDISO
Décomposition (Mo)	60,275	610	610
Factorisation (Mo)	0	4,172	3,158
Total (Mo)	60,275	4,782	3,768
Total/PARDISO	16.0	1.3	1.0

TAB. VI.5 Performances des solveurs en mémoire : plaque plane cycle 8

### Performance en temps de calcul

Type	Skyline	UMFPACK	PARDISO
Absolue (s)	15,433	178	195
Relative (/PARDISO)	79.1	0.91	1.0

TAB. VI.6 Performances des solveurs en temps de calcul : plaque plane cycle 6