

**Titre:** Nouveau modèle adimensionnel pour l'étude des assemblages  
boulonnés précontraints soumis à un chargement externe

**Auteur:** Francis Turgeon

**Date:** 2008

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Turgeon, F. (2008). Nouveau modèle adimensionnel pour l'étude des assemblages  
boulonnés précontraints soumis à un chargement externe [Master's thesis, École  
Citation: Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8369/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8369/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Aurelian Vadean  
Advisors:

**Programme:** Unspecified  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

NOUVEAU MODÈLE ADIMENSIONNEL POUR L'ÉTUDE DES ASSEMBLAGES  
BOULONNÉS PRÉCONTRAINS SOUMIS À UN CHARGEMENT EXTERNE

FRANCIS TURGEON  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
AOÛT 2008



Library and  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file* *Votre référence*  
*ISBN: 978-0-494-46085-6*  
*Our file* *Notre référence*  
*ISBN: 978-0-494-46085-6*

**NOTICE:**

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

**AVIS:**

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

  
**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

NOUVEAU MODÈLE ADIMENSIONNEL POUR L'ÉTUDE DES ASSEMBLAGES  
BOULONNÉS PRÉCONTRAINS SOUMIS À UN CHARGEMENT EXTERNE

présenté par : TURGEON Francis

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. MARCHAND Luc, Ph.D., président

M. VADEAN Aurelian, Doct., membre et directeur de recherche

M. BOUHKILI Rachid, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je dois en premier lieu remercier le professeur Aurelian Vadean pour son continuel support en tant que directeur de recherche. Les encouragements ainsi que l'encadrement hors pair ont été des plus appréciés pendant les périodes plus difficiles. Merci d'avoir été un directeur de recherche aussi professionnel qu'amical, permettant ainsi de prendre autant de plaisir à se côtoyer tant lors de réunions officielles, que lors d'activités hors-Polytechnique!

Je tiens à remercier également le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) du Canada pour son soutien financier des plus appréciés, ainsi que la fondation de l'École Polytechnique pour les suppléments de bourses reçus. Sans tout ce support financier, je n'aurais probablement rien accompli de tout ceci.

Je dois remercier ma famille pour son continuel support et son encouragement, ainsi que pour m'avoir appris à aller au bout de mes projets et à ne jamais baisser les bras devant les difficultés.

Merci à mes amis et collègues pour leur soutien, leur aide et leur amitié. Merci à Alexandra Oryschuk pour ses encouragements et son aide lors de la rédaction et de la correction.

Je tiens aussi à remercier les professeurs Luc Marchand et Rachid Boukhili d'avoir accepté d'être membre de mon jury.

## RÉSUMÉ

Les assemblages boulonnés sont très répandus dans de nombreux domaines de l'industrie et ceci depuis de nombreuses années. Ils procurent entre autres l'avantage d'être facilement démontables, ce qui permet d'accélérer l'entretien des structures composées de ceux-ci. L'application d'un chargement externe induit donc un supplément de force dans le boulon auquel peut s'ajouter un supplément de moment dans les cas où le chargement est excentré par rapport à l'axe du boulon. La résistance en fatigue des boulons sera donc influencée par l'introduction de ces suppléments d'effort. Ceux-ci demeurent relativement complexes à évaluer malgré la simplicité des pièces composant les assemblages boulonnés précontraints. D'ailleurs, les modèles analytiques actuellement utilisés pour évaluer les suppléments de force et de moment dans les boulons ne sont pas infallibles, ce qui rend incertaine la prédiction de la résistance en fatigue des boulons. Ceci montre qu'il y a donc encore place à l'amélioration.

Pour regrouper les assemblages ayant un comportement comparable, il faut d'abord établir comment définir leurs géométries ainsi que les paramètres les entourant. Ainsi, les dimensions ont été représentées par des multiples du diamètre nominal du boulon plutôt que par des dimensions discrètes. L'accent est donc mis sur les proportions des assemblages à la place de leurs dimensions. Dans le même ordre d'idées, plutôt que de tracer des courbes de suppléments, l'utilisation de nouveaux paramètres de suppléments adimensionnels a été privilégiée. Ce sont donc des courbes de supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) et de supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ) en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) qui ont été tracées.

Cette définition des assemblages boulonnés permet d'éliminer l'influence que certains paramètres auraient normalement eue sur leur comportement. Ainsi, le diamètre nominal

du boulon, de même que la précontrainte et les matériaux ne sont pas des paramètres qu'il est nécessaire de définir pour prévoir le comportement adimensionnel des assemblages boulonnés précontraints soumis à des chargements extérieurs. En fait, ce sont les ratios entre les dimensions et le diamètre nominal du boulon, les ratios entre les forces et la précontrainte, ainsi que le ratio entre le module d'élasticité du boulon et des pièces qui importent réellement.

L'indépendance du comportement adimensionnel par rapport à la précontrainte a été prouvée par des résultats expérimentaux repris des travaux antérieurs effectués par Massol [1] et Bahkiet [2]. De plus, les résultats issus de modèles analytiques et numériques ont été comparés avec les résultats expérimentaux afin de montrer la bonne concordance de ces deux modèles avec la réalité.

Un exemple d'application de la nouvelle approche développée montre concrètement ses implications, c'est-à-dire une grande diminution du nombre d'analyses ou d'expériences nécessaires à la prédiction des suppléments de force et de moment dans le boulon. Ceci permettra la réduction du temps de recherche d'une combinaison optimale des paramètres géométriques de la liaison boulonnée pour une mission donnée de conception.

Les nouveaux paramètres adimensionnels issus de cette nouvelle approche ont été implantés dans les modèles analytiques existants, desquels un nouveau modèle a ensuite été proposé. Celui-ci prend mieux en compte la position de la force équivalente de contact, tout en conservant une bonne évaluation des suppléments de force et de moment.

## ABSTRACT

Bolted joints have been widely used in various domains of the industry for many years. A great advantage of this type of fasteners consists in the ability to easily assemble and disassemble them, resulting in a faster maintenance operation. The application of an external force induces a force supplement in the bolt at which a moment supplement can be added in the case of an eccentric loading. Therefore, these supplements seen by the bolt will influence the bolt fatigue life. In spite of the simplicity of the parts in a preloaded bolted assembly, these supplements are much more complex to evaluate than it seems. The actual analytical models are not infallible when it comes to evaluate the force and moment supplements in the bolt, which results in an uncertain bolt fatigue life prediction. This shows that the actual models can still be improved.

In order to regroup assemblies which have similar response behaviours, their geometry definition with their related parameters first need to be established. Thus, the dimensions of an assembly have been expressed in terms of its bolt nominal diameter instead of discrete dimensions. Then, the assembly proportions have a greater importance than its dimensions. Similarly, instead of plotting the supplements with respect to the external forces, the new dimensionless parameters have been favoured. This means that it is the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) and the moment supplement to bolt nominal diameter times preload ratio ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ) that have been plotted with respect to the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ).

This definition of bolted assemblies eliminates the influence that some parameters would have had on the response behaviour. Therefore, it is not necessary to define the bolt nominal diameter, the preload and the materials of the bolt and the parts to predict the dimensionless response behaviour of preloaded bolted joints submitted to an external loading. Indeed, it is the ratios between the dimensions and the bolt nominal diameter,



the ratios between the forces and the preload and the ratio between the modulus of elasticity of the bolt and the parts that are the most important.

The independence of the dimensionless response behaviour over the preload has been proven with experimental results from Massol's [1] and Bahkiet's [2] work. The results from analytical and numerical models have been compared with the experimental results to show that the two models adequately represent the reality.

An example of application of the new approach demonstrates which advantages it brings up, i.e. a significant diminution of the number of analyses or experiments needed to predict the force and the moment supplements in the bolt. This will reduce the time spent on the search of the optimal combination of the geometric parameters of a bolted joint for a given design objective.

The new dimensionless parameters from this new approach have been implemented in the actual analytical models, from which a new one has been proposed. This new model better evaluates the position of the equivalent contact force than the actual models while keeping an adequate evaluation of the force and moment supplements.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ .....	V
ABSTRACT .....	VII
TABLE DES MATIÈRES .....	IX
LISTE DES TABLEAUX.....	XV
LISTE DES FIGURES.....	XVII
LISTE DES ANNEXES.....	XXVIII
LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS .....	XXXI
INTRODUCTION .....	1
Mise en contexte des assemblages boulonnés dans l'industrie.....	1
Lacunes observées.....	1
Buts et objectifs abordés dans les différents chapitres.....	2
CHAPITRE 1 .....	5
1. REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	5
1.1. Généralités .....	5
1.2. Modèle conventionnel.....	5
1.2.1. Chargement axial : linéarité des suppléments d'effort dans le boulon .....	6
1.2.2. Chargement excentré : non-linéarité des suppléments d'effort.....	7
1.2.3. Influence de la hauteur d'application de la charge.....	9
1.3. Force de contact .....	11
1.4. Souplesse du boulon.....	12
1.4.1. Souplesse conformément à la norme VDI 2230 .....	12

1.4.2.	Souplesse proposée par « Techniques de l'ingénieur » .....	13
1.4.3.	Souplesse avec le modèle de Alkatan .....	14
1.5.	Souplesse en compression des membrures du joint boulonné .....	14
1.5.1.	Diamètre de pièce.....	14
1.5.2.	Calcul de rigidité : méthode de Shigley & Al.....	18
1.5.3.	Calcul de rigidité : méthode de Wileman & Al.....	18
1.5.4.	Souplesse des pièces par la méthode VDI 2230.....	19
1.5.5.	Souplesse des pièces par la méthode de Rasmussen.....	20
1.5.6.	Souplesse des pièces par la méthode de Massol .....	21
1.5.7.	Souplesse des pièces par la méthode de Rasmussen modifiée.....	21
1.6.	Calcul des suppléments d'effort avec chargement excentré .....	22
1.6.1.	Modèle VDI 2230, solide en flexion circulaire.....	22
1.6.2.	Modèle en poutre fléchie.....	23
1.6.3.	Modèle de poutre sur appui élastique.....	25
1.6.4.	Modèle de Ouqi Zhang .....	28
CHAPITRE 2	.....	30
2.	ARTICLE I: NEW MODELING APPROACH FOR PRELOADED BOLTED JOINTS SUBMITTED TO CYCLIC LOADING – PART I: NEW DIMENSIONLESS PARAMETERS STUDY .....	30
2.1.	Présentation du chapitre .....	30
2.2.	Abstract .....	31
2.3.	Introduction.....	32
2.3.1.	Weaknesses in Existing Analytical Models .....	32
2.3.2.	Objectives in Part I.....	33
2.3.3.	Content of the article.....	33
2.4.	Theoretical Background.....	35
2.4.1.	Conventional Theory.....	35

2.4.2.	Stiffness Calculation .....	36
2.4.3.	Non-Linear Behaviour Due to Eccentric Loading .....	37
2.4.4.	Load Factor .....	38
2.5.	Geometry Definitions.....	40
2.5.1.	The Bolt.....	40
2.5.2.	First Configuration: Two Rectangular Plates Assembly.....	41
2.5.3.	Second Configuration: Two Cylindrical Flanges Assembly.....	42
2.5.4.	Statements .....	44
2.6.	The Finite Element Models.....	44
2.6.1.	First model: Two Rectangular Plates Assembly .....	45
2.6.2.	Second model: Two Cylindrical Flanges Assembly .....	46
2.6.3.	Force Supplement Evaluation from FEA Results .....	47
2.6.4.	Equivalent Contact Force Position from FEA Results.....	47
2.6.5.	Types of Analyses Performed .....	48
2.7.	Results and Analyses .....	50
2.7.1.	Results from the Finite Element Analyses.....	50
2.7.2.	Discussion .....	55
2.8.	Conclusion .....	58
2.9.	References.....	60
CHAPITRE 3 .....		62
3.	ARTICLE II: NEW MODELING APPROACH FOR PRELOADED BOLTED JOINTS SUBMITTED TO CYCLIC LOADING – PART II: ANALYTICAL, NUMERICAL AND EXPERIMENTAL VALIDATION.....	62
3.1.	Présentation du chapitre.....	62
3.2.	Abstract .....	63
3.3.	Introduction.....	64

3.3.1.	Previously in Part I.....	64
3.3.2.	Objectives in Part II .....	64
3.3.3.	Content of the article.....	65
3.4.	Theoretical Background.....	67
3.4.1.	Conventional Theory.....	67
3.4.2.	Stiffness Calculation .....	67
3.4.3.	Non-Linear Behaviour Due to Eccentric Loading .....	69
3.4.4.	Load Factor .....	70
3.4.5.	Beam Model.....	70
3.5.	Geometry Definitions.....	73
3.5.1.	The Bolt.....	73
3.5.2.	Prismatic Flange Assembly.....	74
3.5.3.	Statements and conditions.....	75
3.6.	The Finite Element Models.....	76
3.6.1.	Prismatic Flanges Assembly .....	76
3.6.2.	Types of Analyses Performed .....	77
3.7.	Results and Analyses .....	78
3.7.1.	Results from finite element, analytical and experimental results .....	78
3.7.2.	Discussion .....	81
3.8.	Conclusion .....	83
3.9.	References.....	84
CHAPITRE 4.....		86
4.	DISCUSSION GÉNÉRALE .....	86
4.1.	Définition de la géométrie des modèles .....	86
4.2.	Définition des paramètres adimensionnels.....	86
4.3.	Analyse des résultats conduisant aux trois conditions .....	87

4.4.	Validation avec des résultats expérimentaux .....	88
4.5.	Conclusion .....	89
CHAPITRE 5 .....		91
5. APPLICATION DE LA NOUVELLE APPROCHE POUR LA CONCEPTION OPTIMALE DES ASSEMBLAGES BOULONNÉS.....		91
5.1.	Énoncé du problème : .....	91
5.1.1.	Données : .....	91
5.1.2.	Objectifs : .....	92
5.2.	Solution du problème .....	92
5.2.1.	Suppléments adimensionnels issus de la simulation initiale.....	92
5.2.2.	Suppléments adimensionnels évalués à partir de la situation initiale .....	94
5.2.3.	Contraintes maximales et alternées dans le boulon.....	95
5.2.4.	Analyse des résultats .....	101
CHAPITRE 6 .....		103
6. NOUVELLE FORMULATION DE LA POSITION (s) DE LA FORCE DE CONTACT APPLIQUÉE AU MODÈLE DE POUTRE FLÉCHIE .....		103
6.1.	Assemblage de plaques rectangulaires.....	103
6.1.1.	Modèle de poutre sur appui élastique (P.A.E.) .....	103
6.1.2.	Nouveau modèle de poutre non linéaire (N.M.) .....	104
6.2.	Assemblage de brides en chape.....	113
6.2.1.	Modèle de poutre sur appui élastique (P.A.E.) .....	113
6.2.2.	Modèle de poutre non linéaire modifié .....	113
6.3.	Brides cylindriques .....	118
CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....		119
RÉFÉRENCES.....		122

ANNEXES ..... 124

## LISTE DES TABLEAUX

### Chapitre 2

Table 2.1 – Preload corresponding to each bolt nominal diameter.....	48
Table 2.2 – Proportions for rectangular plates assemblies A & B.....	48
Table 2.3 – Proportions for cylindrical flanges assemblies A & B.....	49
Table 2.4 – Preload applied for a 16mm bolt nominal diameter.....	49
Table 2.5 – Proportions for rectangular plates assembly C.....	49
Table 2.6 – Proportions for cylindrical flanges assembly C.....	49
Table 2.7 – Materials used for bolt and parts.....	50
Table 2.8 – Finite element results for rectangular plates assembly A.....	50
Table 2.9 – Finite element results for rectangular plates assembly B.....	52
Table 2.10 – Finite element results for cylindrical flanges assembly A.....	53
Table 2.11 – Finite element results for cylindrical flanges assembly B.....	54
Table 2.12 – Finite element results for rectangular plates assembly C.....	56
Table 2.13 – Finite element results for cylindrical flanges assembly C.....	56

### Chapitre 3

Table 3.1 – Preload applied on a 24mm bolt nominal diameter.....	77
Table 3.2 – Proportions of prismatic flanges assemblies.....	77
Table 3.3 – Force supplement evaluated with the dimensionless parameters.....	82

### Chapitre 5

Tableau 5.1 – Proportions de l'assemblage.....	91
Tableau 5.2 – Suppléments relatifs à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte.....	93



Tableau 5.3 – Suppléments relatifs à la précontrainte en fonction de la précontrainte ...	95
Tableau 5.4 – Limites de précontrainte pour différents diamètres nominaux de boulon afin d'assurer la tenue en statique et en fatigue du boulon .....	99

## **Chapitre 6**

Tableau 6.1 – Proportions des assemblages analysés .....	107
Tableau 6.2 – Proportions des brides en chape No.2 et 7 .....	114

## **Annexe B**

Tableau B.1 – Force de contact équivalente à l'interface des deux brides .....	162
Tableau B.2 – Contraintes dans le boulon servant à l'évaluation du supplément de force et de moment .....	163
Tableau B.3 – Supplément de force et de moment dans le boulon .....	163

## **Annexe C**

Tableau C.1 – Tableau des points de Gauss en 2D .....	169
Tableau C.2 – Coordonnées et pression de contact nodales .....	170
Tableau C.3 – Numéros de noeuds formant les éléments .....	171
Tableau C.4 – Données utiles pour chaque élément .....	172

## **Annexe E**

Tableau E.1 – Proportions des assemblages de plaques rectangulaires testés .....	186
--	-----

## LISTE DES FIGURES

### Chapitre 1

Figure 1.1 – Graphique des forces dans le boulon et dans l'assemblage .....	6
Figure 1.2 – Force dans le boulon pour un cas de chargement centré et excentré.....	8
Figure 1.3 – Charge extérieure excentrée .....	8
Figure 1.4 – Influence de l'excentration sur le supplément d'effort dans le boulon.....	8
Figure 1.5 – Hauteur d'application de la charge extérieure.....	9
Figure 1.6 – Impact de la hauteur d'application de la charge sur la force dans le boulon	10
Figure 1.7 – Influence de la position d'application de la charge sur le supplément d'effort dans le boulon .....	11
Figure 1.8 – Équilibre des forces sur les brides de l'assemblage boulonné .....	12
Figure 1.9 – Souplesse du boulon .....	13
Figure 1.10 – Dimensions à considérer pour le calcul de souplesse en compression.....	15
Figure 1.11 – Cône de compression sous la tête du boulon dans un assemblage de plaques rectangulaires .....	16
Figure 1.12 – Interaction des cônes de compression.....	17
Figure 1.13 – Cylindres équivalents pour le calcul de souplesse.....	22
Figure 1.14 – Modélisation en poutre fléchie .....	23
Figure 1.15 – Position (s) de la force équivalente de contact .....	27
Figure 1.16 – Force dans le boulon pour le modèle de poutre sur appui élastique.....	27

### Chapitre 2

Figure 2.1 – Compression cone.....	37
Figure 2.2 – Total bolt working force for axial and eccentric load.....	38
Figure 2.3 – Load factor.....	38
Figure 2.4 – Assembly submitted to eccentric loading .....	39

Figure 2.5 – Bolt geometry .....	41
Figure 2.6 – First model: Geometry of two rectangular plates assembly .....	42
Figure 2.7 – Second model: Geometry of two cylindrical flanges assembly.....	43
Figure 2.8 – First model: Finite element model for a two rectangular plates assembly ..	45
Figure 2.9 – Second model: Finite element model for a two cylindrical flanges assembly .....	46
Figure 2.10 – Rectangular plates assembly A: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio .....	51
Figure 2.11 – Rectangular plates assembly A: moment supplement to preload and bolt nominal diameter ratio vs external force to preload ratio .....	51
Figure 2.12 – Rectangular plates assembly A: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio .....	51
Figure 2.13 – Rectangular plates assembly A: position (s) to contact length (X) ratio vs external force to preload ratio .....	51
Figure 2.14 – Rectangular plates assembly B: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio .....	52
Figure 2.15 – Rectangular plates assembly B: moment supplement to preload and bolt nominal diameter ratio vs external force to preload ratio .....	52
Figure 2.16 – Rectangular plates assembly B: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio .....	53
Figure 2.17 – Rectangular plates assembly B: position (s) to contact length (X) ratio vs external force to preload ratio .....	53
Figure 2.18 – Cylindrical flanges assembly A: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio .....	54
Figure 2.19 – Cylindrical flanges assembly A: moment supplement to preload and bolt nominal diameter ratio vs external force to preload ratio .....	54
Figure 2.20 – Cylindrical flanges assembly A: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio.....	55

Figure 2.21 – Cylindrical flanges assembly B: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio .....	55
Figure 2.22 – Cylindrical flanges assembly B: moment supplement to preload and eccentricity ratio vs external force to preload ratio.....	55
Figure 2.23 – Cylindrical flanges assembly B: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio.....	55
Figure 2.24 – Rectangular plates assembly C: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio .....	57
Figure 2.25 – Cylindrical flanges assembly C: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio .....	57
Figure 2.26 – Rectangular plates assembly C: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for different materials .....	58
Figure 2.27 – Cylindrical flanges assembly C: Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for different materials .....	58

### Chapitre 3

Figure 3.1 – Bolt stiffness model .....	68
Figure 3.2 – Total bolt working force for axial and eccentric load.....	69
Figure 3.3 – Beam model by Agatonovic .....	71
Figure 3.4 – Assembly submitted to eccentric loading .....	71
Figure 3.5 – Geometry of the bolt.....	74
Figure 3.6 – Geometry of prismatic flanges assembly.....	75
Figure 3.7 – Finite element model of prismatic flanges assembly.....	76
Figure 3.8 – Force supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.2 ..	79
Figure 3.9 – Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.2.....	79
Figure 3.10 – Bending moment supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.2.....	79

Figure 3.11 – Bending moment supplement to bolt nominal diameter and preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.2.....	79
Figure 3.12 – Force supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.7	80
Figure 3.13 – Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.7.....	80
Figure 3.14 – Bending moment supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.7.....	80
Figure 3.15 – Bending moment supplement to bolt nominal diameter and preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.7.....	80
Figure 3.16 – Force supplement vs external force.....	82
Figure 3.17 – Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio.....	82

## Chapitre 5

Figure 5.1 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte.....	93
Figure 5.2 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte.....	94
Figure 5.3 – Contrainte alternée et maximale dans le boulon en fonction du diamètre nominal et de la précontrainte.....	97
Figure 5.4 – Contrainte alternée et maximale dans le boulon en fonction du diamètre nominal et de la précontrainte (agrandissement).....	98
Figure 5.5 – Limites de précontrainte pour différents diamètres nominaux de boulon ...	99
Figure 5.6 – Limites de précontrainte pour un diamètre nominal de boulon de 12 mm	100
Figure 5.7 – Limites de précontrainte pour un diamètre nominal de boulon de 14 mm	100
Figure 5.8 – Limites de précontrainte pour un diamètre nominal de boulon de 16 mm	101

## Chapitre 6

Figure 6.1 – Dimensions géométriques.....	105
Figure 6.2 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 1) .....	108
Figure 6.3 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 1) .....	108
Figure 6.4 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 1)	109
Figure 6.5 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 2) .....	109
Figure 6.6 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 2) .....	110
Figure 6.7 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 2)	110
Figure 6.8 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 4) .....	111
Figure 6.9 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 4) .....	111
Figure 6.10 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 4)	112
Figure 6.11 – Supplément de force relative à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.2).....	114
Figure 6.12 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.2) .....	115

Figure 6.13 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.2)...	115
Figure 6.14 – Supplément de force relative à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.7).....	116
Figure 6.15 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.7) .....	116
Figure 6.16 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.7)...	117

## **Annexe A**

Figure A.1 – Dimensions du boulon .....	127
Figure A.2 – Options de l'analyse dans Workbench .....	128
Figure A.3 – Application de la force de précontrainte.....	129
Figure A.4 – Géométrie de l'assemblage de plaques rectangulaires .....	130
Figure A.5 – Contrôles du maillage des membrures.....	131
Figure A.6 – Contrôles du maillage du boulon.....	131
Figure A.7 – Maillage complet de l'assemblage de plaques rectangulaires.....	131
Figure A.8 – Sélections nommées utilisées dans les blocs de commandes APDL .....	132
Figure A.9 – Conditions limites de symétrie et de déplacement .....	133
Figure A.10 – Application du contact sans frottement à l'interface des membrures .....	134
Figure A.11 – Application des contacts complètement liés entre les membrures et le boulon.....	135
Figure A.12 – Application du chargement extérieur.....	136
Figure A.13 – Géométrie de l'assemblage de brides en chape .....	138
Figure A.14 – Contrôles du maillage des brides.....	139
Figure A.15 – Contrôles du maillage du boulon.....	139
Figure A.16 – Maillage du modèle de brides en chape.....	140

Figure A.17 – Sélections nommées du boulon .....	141
Figure A.18 – Sélections nommées des brides en chape .....	142
Figure A.19 – Conditions de symétrie .....	143
Figure A.20 – Supports sans frottement.....	143
Figure A.21 – Condition limite de déplacement .....	144
Figure A.22 – Contact entre les brides en chape.....	144
Figure A.23 – Contact entre les brides et le boulon.....	145
Figure A.24 – Application du chargement extérieur.....	146
Figure A.25 – Géométrie de l'assemblage de brides cylindriques .....	147
Figure A.26 – Contrôle du maillage des brides .....	148
Figure A.27 – Contrôle du maillage du boulon .....	148
Figure A.28 – Maillage du modèle de brides cylindriques .....	149
Figure A.29 – Sélections nommées du boulon .....	150
Figure A.30 – Sélections nommées des brides cylindriques.....	150
Figure A.31 – Supports sans frottement.....	151
Figure A.32 – Condition limite de déplacement .....	151
Figure A.33 – Application du chargement extérieur.....	152
Figure A.34 – Contraintes minimale et maximale dans le boulon.....	153
Figure A.35 – Calcul des suppléments de force et de moment dans le boulon.....	154

## **Annexe B**

Figure B.1 – Maillage du modèle initial .....	156
Figure B.2 – Maillage du raffinement 1 .....	156
Figure B.3 – Maillage du raffinement 2.....	157
Figure B.4 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le modèle initial (précontrainte seulement).....	157
Figure B.5 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 1 (précontrainte seulement).....	158



Figure B.6 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 2 (précontrainte seulement) .....	158
Figure B.7 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le modèle initial (précontrainte et force extérieure).....	159
Figure B.8 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 1 (précontrainte et force extérieure) .....	159
Figure B.9 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 2 (précontrainte et force extérieure) .....	159
Figure B.10 – Cône de compression des brides sous l'effet de la précontrainte seulement (modèle initial).....	160
Figure B.11 – Cône de compression des brides sous l'effet de la précontrainte seulement (raffinement 1) .....	161
Figure B.12 – Cône de compression des brides sous l'effet de la précontrainte seulement (raffinement 2) .....	161

### **Annexe C**

Figure C.1 – Élément fini quadratique linéaire .....	165
Figure C.2 – Numérotation des noeuds et des éléments au contact .....	169
Figure C.3 – Pression de contact pour $F_e = 22306\text{N}$ sur un demi assemblage .....	170
Figure C.4 – Système d'axes local d'un élément .....	171

### **Annexe E**

Figure E.1 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 1).....	187
Figure E.2 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 1).....	187
Figure E.3 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 2).....	187

Figure E.4 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 1).....	187
Figure E.5 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 3).....	187
Figure E.6 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 1).....	187
Figure E.7 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 4).....	188
Figure E.8 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 4).....	188
Figure E.9 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 5).....	188
Figure E.10 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 5).....	188
Figure E.11 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 6).....	188
Figure E.12 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 6).....	188
Figure E.13 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 7).....	189
Figure E.14 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 7).....	189
Figure E.15 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 8).....	189
Figure E.16 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 8).....	189
Figure E.17 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 9).....	189
Figure E.18 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 9).....	189
Figure E.19 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 10).....	190
Figure E.20 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 10).....	190
Figure E.21 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 11).....	190
Figure E.22 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 11).....	190

Figure E.23 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 12).....	190
Figure E.24 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 12).....	190
Figure E.25 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 13).....	191
Figure E.26 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 13).....	191
Figure E.27 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 14).....	191
Figure E.28 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 14).....	191
Figure E.29 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 15).....	191
Figure E.30 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 15).....	191
Figure E.31 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 16).....	192
Figure E.32 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 16).....	192
Figure E.33 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 17).....	192
Figure E.34 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 17).....	192
Figure E.35 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 18).....	192
Figure E.36 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 18).....	192
Figure E.37 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 19).....	193
Figure E.38 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 19).....	193
Figure E.39 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 20).....	193
Figure E.40 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 20).....	193
Figure E.41 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 21).....	193

Figure E.42 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la  
précontrainte (géométrie 21).....193

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A .....	125
A. MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS .....	126
A.1. Méthode de modélisation du boulon .....	126
A.1.1. Définition de la géométrie du boulon.....	126
A.1.2. Application de la précontrainte .....	127
A.2. Configuration de plaques rectangulaires .....	129
A.2.1. Définition de la géométrie.....	129
A.2.2. Maillage .....	131
A.2.3. Sélections nommées .....	132
A.2.4. Conditions limites .....	132
A.2.5. Contacts.....	134
A.2.6. Application du chargement extérieur .....	135
A.3. Configuration de brides en chape (ou rectangulaires).....	137
A.3.1. Définition de la géométrie.....	137
A.3.2. Maillage .....	138
A.3.3. Sélections nommées .....	140
A.3.4. Conditions limites .....	142
A.3.5. Contacts.....	144
A.3.6. Application du chargement extérieur .....	145
A.4. Configuration de brides cylindriques .....	146
A.4.1. Définition de la géométrie.....	146
A.4.2. Maillage .....	148
A.4.3. Sélections nommées .....	149
A.4.4. Conditions limites .....	150
A.4.5. Contacts.....	151

A.4.6.	Conditions de chargement.....	151
A.4.7.	Bloc de commandes APDL de calcul des suppléments de force et de moment dans le boulon .....	152
ANNEXE B.....		155
B.	ANALYSE DE CONVERGENCE DE L'ASSEMBLAGE DE PLAQUES RECTANGULAIRES .....	156
B.1.	Comparaison du maillage.....	156
B.2.	Comparaison du contact.....	157
B.2.1.	Précontrainte seulement .....	157
B.2.2.	Précontrainte et force extérieure .....	158
B.3.	Comparaison des contraintes de compression du joint .....	160
B.3.1.	Précontrainte seulement .....	160
B.4.	Forces de contact à l'interface des brides lors de l'application de la charge extérieure.....	162
B.5.	Supplément de force et de moment dans le boulon.....	162
ANNEXE C.....		164
C.	CALCUL DE LA POSITION (s) DE LA FORCE ÉQUIVALENTE DE CONTACT ( $F_c$ ).....	165
C.1.	Détermination des interpolations linéaires.....	165
C.2.	Aire infinitésimal .....	167
C.3.	Calcul de la position (s) .....	167
C.4.	Exemple d'application .....	169
ANNEXE D .....		174
D.	BLOCS DE COMMANDES APDL .....	175
D.1.	Macro de distribution de chargement sur les nœuds d'une arête .....	175

D.2.	Macro d'application de chargement sur une surface rectangulaire.....	179
D.3.	Macro d'application de chargement sur une surface cylindrique .....	181
D.4.	Macro de calcul des suppléments de force et de moment dans le boulon.....	183
ANNEXE E.....		185
E. RÉSULTATS POUR LA VALIDATION DU NOUVEAU MODÈLE DE POUTRE FLÉCHIE.....		186
E.1.	Assemblages de deux plaques rectangulaires .....	186

**LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS**

- $A$  : coefficient de l'équation de Wileman & Al.
- $A_1$  : aire de la portion non filetée de la tige du boulon
- $A_p$  : section réduite équivalente
- $A_p^*$  : rapport entre la section réduite équivalente et le carré du diamètre de la tête du boulon
- $A_s$  : aire de la section résistance du boulon
- $B$  : coefficient de l'équation de Wileman & Al.
- $C_1$  : coefficient de l'équation de la position de la force équivalente de contact
- $C_2$  : coefficient de l'équation de la position de la force équivalente de contact
- $C_3$  : coefficient de l'équation de la position de la force équivalente de contact
- $C_4$  : coefficient de l'équation de la position de la force équivalente de contact
- $D_a$  : diamètre de la tête du boulon
- $D_h$  : diamètre du trou de passage du boulon dans la bride
- $D_h^*$  : rapport entre le diamètre du trou de passage du boulon et le diamètre de la tête du boulon
- $D_p$  : diamètre de pièce équivalent
- $D_p^*$  : rapport entre le diamètre de pièce équivalent et le diamètre de la tête du boulon
- $E_b$  : module d'Young du boulon
- $E_p$  : module d'Young des brides
- $F_b$  : force dans le boulon
- $F_{bc}$  : force dans le boulon à la position critique
- $\Delta F_b$  : supplément de force dans le boulon
- $F_c$  : force équivalente de contact
- $F_{cC}$  : force équivalente de contact à la position critique
- $F_e$  : force extérieure sur un boulon
- $F_{eC}$  : force extérieure sur un boulon à la position critique
- $\Delta F_p$  : supplément de force dans les brides



- $H$  : hauteur de la partie tubulaire de la bride  
 $H_{\text{frac}}$  : rapport entre la hauteur de la partie tubulaire de la bride et le diamètre nominal du boulon  
 $I_b$  : moment d'inertie en flexion du boulon  
 $I_p$  : moment d'inertie en flexion des brides  
 $K_0$  : rigidité par unité de surface  
 $K_b$  : rigidité en tension du boulon  
 $K_m$  : Rigidité due à la précontrainte (où  $F_e = 0$ )  
 $K_m(F_e)$  : Rigidité due à la force extérieure (où  $F_e \neq 0$ )  
 $K_p$  : rigidité en compression de l'assemblage  
 $K_\theta$  : Rigidité en rotation de la membrure  
 $L$  : longueur totale de la bride  
 $L_{b1}$  : longueur de la portion non filetée de la tige du boulon  
 $L_{b2}$  : longueur de la portion filetée de la tige du boulon  
 $L_p$  : épaisseur totale de l'assemblage boulonné  
 $L_p^*$  : rapport entre l'épaisseur totale de l'assemblage et le diamètre de la tête du boulon  
 $L_{\text{head}}$  : hauteur de la tête de boulon  
 $M_b$  : moment de flexion dans le boulon  
 $\Delta M_b$  : supplément de moment de flexion dans le boulon  
 $\Delta M_{bc}$  : supplément de moment de flexion dans le boulon à la position critique  
 $Q$  : force de précontrainte dans le boulon  
 $S$  : souplesse totale en compression  
 $S_b$  : souplesse en tension du boulon  
 $S_c$  : souplesse de l'assemblage modifiée par la variation de surface de contact  
 $S_p$  : souplesse en compression de l'assemblage  
 $S_p^*$  : souplesse de l'assemblage sous la tête du boulon  
 $W$  : paramètre lié au type de serrage (trou borgne ou écrou)  
 $X$  : distance entre le trou et le rebord extérieur de la bride au niveau du contact  
 $X_{\text{frac}}$  : rapport entre la distance  $X$  et le diamètre nominal du boulon

- $Y$  : distance entre le trou et le rebord intérieur de la bride au niveau du contact  
 $Y_{\text{frac}}$  : rapport entre la distance  $Y$  et le diamètre nominal du boulon  
 $Z$  : nombre total de boulons
- $a_1$  : coefficient de la portion hyperbolique du modèle sur appui élastique  
 $a_2$  : coefficient de la portion hyperbolique du modèle sur appui élastique  
 $b$  : largeur de la bride au niveau du trou de boulon  
 $b_{\text{frac}}$  : rapport entre la largeur de la bride et le diamètre nominal du boulon  
 $d_{\text{nom}}$  : diamètre nominal du boulon  
 $d_{\text{shank}}$  : diamètre de la section résistante de la partie filetée du boulon  
 $h$  : hauteur d'application de la force extérieure  
 $h_p$  : épaisseur d'une bride  
 $h_{p \text{ frac}}$  : rapport entre l'épaisseur d'une bride et le diamètre nominal du boulon  
 $h_t$  : épaisseur de la partie tubulaire de la bride cylindrique ou en chape  
 $h_{t \text{ frac}}$  : rapport entre l'épaisseur de la partie tubulaire et le diamètre nominal du boulon  
 $m$  : distance entre l'axe du boulon et la position de la force extérieure  
 $m_{\text{frac}}$  : rapport entre la distance ( $m$ ) et le diamètre du boulon  
 $q_1$  : facteur géométrique  
 $q_2$  : facteur géométrique  
 $r_1$  : rayon interne d'une bride cylindrique  
 $r_2$  : rayon externe d'une bride cylindrique  
 $r_b$  : rayon sur lequel les boulons sont positionnés  
 $s$  : position de la force équivalente de contact  
 $s_c$  : position critique de la force équivalente de contact  
 $x$  : longueur équivalente pour une bride cylindrique  
 $y$  : largeur équivalente pour une bride cylindrique
- $\alpha$  : facteur de proportionnalité du modèle de Ouqi Zhang  
 $\beta$  : pente de l'asymptote du modèle sur appui élastique

- $\Phi$  : coefficient de l'équation de la position de la force équivalente de contact
- $\gamma$  : hauteur d'application du chargement extérieure et facteur de correction
- $\sigma_a$  : contrainte alternée dans le boulon
- $\sigma_{ini}$  : contrainte initiale dans le boulon due à la force de précontrainte
- $\sigma_m$  : contrainte moyenne dans le boulon
- $\sigma_{max}$  : contrainte maximale dans la tige du boulon
- $\sigma_{min}$  : contrainte minimale dans la tige du boulon
- $\varphi$  : angle du cône de compression

## INTRODUCTION

### **Mise en contexte des assemblages boulonnés dans l'industrie**

Il existe plusieurs solutions pour assembler des pièces entre elles, les plus courantes étant l'utilisation de rivets, de vis ou de boulons. L'un des avantages de choisir d'utiliser des boulons s'avère d'aider au montage et démontage des assemblages, facilitant ainsi leur entretien. Ces assemblages boulonnés se retrouvent d'ailleurs dans différents domaines de l'industrie, que ce soit au niveau de la tuyauterie d'une centrale pétrochimique, dans les moteurs de voitures, dans les arbres de transmission de turbines d'avions, etc. Les assemblages boulonnés sont donc omniprésents dans notre quotidien et ceci, depuis de nombreuses années. Les modèles de calcul se sont améliorés au fil du temps, permettant ainsi une meilleure prévision des suppléments d'effort dans les assemblages boulonnés précontraints soumis à des chargements extérieurs. L'utilisation de modèles d'éléments finis a d'ailleurs fortement contribué à acquérir une meilleure compréhension du comportement de ces assemblages.

### **Lacunes observées**

Malgré les nombreux travaux effectués concernant l'étude des assemblages boulonnés précontraints, les modèles de calcul actuels comportent encore d'importantes lacunes dans les prévisions de supplément de force et de moment dans les boulons. Ceci est dû à la complexité de représenter adéquatement le comportement des assemblages précontraints à l'aide de modèles mathématiques. La variation de quelques paramètres géométriques des brides d'un assemblage peut changer complètement la rigidité de celui-ci, nécessitant l'exécution de nouvelles analyses par éléments finis par exemple. En ce qui concerne les modèles de calcul analytique actuels, ils permettent généralement de représenter fidèlement des situations simples. Le cas d'un chargement statique sur un assemblage boulonné en est un bon exemple. Si le chargement est dynamique, il devient plus difficile d'avoir des modèles analytiques fiables, sauf s'il s'agit d'un assemblage de deux plaques rectangulaires fixées par le serrage d'un boulon qui demeure assez simple.

Toutefois, si les assemblages deviennent deux brides en chape, ou encore deux brides cylindriques, soumises à un chargement dynamique, il devient plus difficile de prévoir adéquatement les suppléments de force et de moment dans le boulon avec les modèles de calcul existants. Par ailleurs, bien qu'il existe quelques paramètres adimensionnels servant à l'évaluation de la souplesse des assemblages boulonnés, il n'en existe pas vraiment qui permettent de regrouper des assemblages ayant des comportements similaires en termes de suppléments d'effort dans les boulons. Ainsi, en regard de ces lacunes observées, certains buts et objectifs ont été définis.

### **Buts et objectifs abordés dans les différents chapitres**

Le Chapitre 1 présente une revue de la littérature, afin de bien saisir le contexte théorique entourant les assemblages boulonnés. Dans ce chapitre, les différents modèles analytiques de calcul de souplesse et de suppléments de force et de moment y sont présentés.

Le Chapitre 2 présente l'intégralité de la première partie de l'article intitulée *"New Modeling Approach for Preloaded Bolted Joints Submitted to Cyclic Loading – Part I : New Dimensionless Parameter Study"*. Trois objectifs forment les thèmes abordés dans cette première partie d'article :

- Dimensionner les assemblages en termes de multiples du diamètre nominal du boulon, afin de conserver les proportions.
- Définir de nouveaux paramètres adimensionnels permettant de comparer les comportements des boulons de différents assemblages boulonnés.
- Vérifier les nouveaux paramètres adimensionnels pour deux modèles d'éléments finis, soit un cas simple de deux plaques rectangulaires boulonnées et un cas complexe de deux brides cylindriques boulonnées.

Cette première partie de l'article a été soumise à la revue *"International Journal of Pressure Vessels and Piping"* (en cours d'évaluation).

Le Chapitre 3 se compose de la suite de l'article présenté au précédent chapitre. Cette deuxième partie de l'article s'intitulant *"New Modeling Approach for Preloaded Bolted Joints Submitted to Cyclic Loading – Part II : Analytical, Numerical and Experimental Validation"* a pour objectif principal de :

- Valider la deuxième condition issue de la Partie I de l'article et basée sur les nouveaux paramètres adimensionnels à partir de résultats numériques, expérimentaux et analytiques.

Cette partie a donc été également soumise à la revue *"International Journal of Pressure Vessels and Piping"* (en cours d'évaluation) afin de compléter la partie précédente.

Le Chapitre 4 présente une discussion générale sur le contenu de la Partie I et II de l'article soumis pour fin de publication. Il reprend donc les thèmes principaux abordés dans les deux chapitres précédents.

Le Chapitre 5 démontre une partie du potentiel de la nouvelle approche proposée pour l'étude des assemblages boulonnés par un exemple d'application.

Le Chapitre 6 aborde le développement d'un nouveau modèle analytique basé sur les modèles de poutre fléchie et de poutre sur appui élastique et visant les trois objectifs suivants :

- Améliorer un modèle existant pour une géométrie simple, soit un assemblage de deux plaques rectangulaires.
- Utiliser les nouveaux paramètres adimensionnels dans le nouveau modèle.
- Vérifier l'applicabilité de ce nouveau modèle sur des assemblages de brides en chape.

Les différents résultats issus du nouveau modèle sont comparés à ceux qui proviennent du modèle de poutre sur appui élastique afin d'en souligner les améliorations.

Une conclusion présentant un sommaire du travail effectué dans le cadre de ce projet de maîtrise rappellera les points importants à retenir. La bibliographie ainsi que les annexes suivront la conclusion.

## CHAPITRE 1

### 1. REVUE DE LA LITTÉRATURE

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est important d'expliquer les concepts théoriques utilisés concernant les assemblages boulonnés. Beaucoup de travaux ont été effectués sur le sujet et en voici un résumé.

#### 1.1. Généralités

La présence d'une précontrainte dans un boulon possède plusieurs utilités dans un assemblage. D'abord, elle permet de maintenir un contact entre deux brides lors de l'application d'un effort extérieur sur l'assemblage, ce qui permet d'assurer une bonne étanchéité. De plus, la précontrainte dans le boulon permet de filtrer la force extérieure qui sera transmise au boulon, de telle sorte que seule une fraction de la charge extérieure s'ajoute à la force de précontrainte du boulon. Ainsi, on peut obtenir une très bonne tenue en fatigue du boulon si ce dernier ne reçoit qu'un minime chargement supplémentaire.

#### 1.2. Modèle conventionnel

Lorsque la précontrainte est appliquée au boulon, un premier état d'équilibre est atteint. On a alors des forces en compression sur les membrures et en tension dans le boulon qui sont égales. Lors de l'application d'une charge extérieure ( $F_e$ ) en tension sur l'assemblage, le point d'équilibre se déplace ( $\Delta L$ ) et une partie de la force est transmise au boulon ( $\Delta F_b$ ), alors que l'autre partie est transmise à l'assemblage ( $\Delta F_p$ ). Le graphique présenté à la Figure 1.1 permet d'illustrer la relation entre la force dans le boulon et celle dans l'assemblage en fonction de l'effort extérieur.



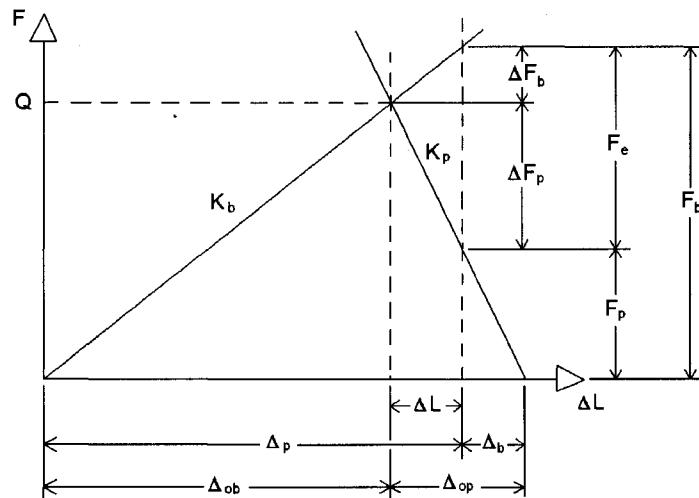


Figure 1.1 – Graphique des forces dans le boulon et dans l'assemblage

Source : figure adaptée de [3]

À partir du graphique, on peut donc trouver les équations (1.1) et (1.2) que l'on retrouve entre autres dans les travaux de Jean Guillot [3] et de Ouqi Zhang [4, 5] :

$$F_b = Q + \Delta F_b = Q + F_e \frac{K_b}{K_b + K_p} \quad (1.1)$$

$$F_p = Q - \Delta F_p = Q - F_e \frac{K_p}{K_b + K_p} \quad (1.2)$$

Ainsi, on remarque qu'à partir du moment où la force dans l'assemblage ( $F_p$ ) devient nulle, il y a décollement entre les deux brides et la force extérieure est alors entièrement reprise par le boulon.

### 1.2.1. Chargement axial : linéarité des suppléments d'effort dans le boulon

À partir de ces deux équations précédentes, on peut tracer le graphique de la force dans le boulon en fonction de la charge extérieure appliquée. Pour un cas de chargement axial, on obtient un graphique composé de deux droites (Figure 1.2). La première droite du chargement axial (II) représente le supplément de force lorsque les deux brides sont

encore en contact. Ainsi, tant que la force extérieure est suffisamment faible, il n'y a aucun décollement et la force dans le boulon augmente seulement d'une fraction de la charge extérieure. Cette fraction dépend des rigidités des pièces tel que montré avec les deux équations précédentes. Cependant, lorsque la charge provoquant le décollement est atteinte, le boulon reprend entièrement la charge appliquée (deuxième droite), ce qui risque de provoquer la défaillance du boulon, en plus de ne plus assurer le contact entre les brides. Ceci peut-être inacceptable pour les déformations d'un joint structural ou si l'étanchéité du joint est recherchée.

### **1.2.2. Chargement excentré : non-linéarité des suppléments d'effort**

Dans le cas d'un assemblage boulonné soumis à un chargement excentré (Figure 1.3), le décollement se fera pour une charge inférieure à celle nécessaire pour un assemblage avec chargement centré ou axial (Figure 1.2). En effet, puisque la charge n'est pas appliquée dans l'axe du boulon, les brides auront tendance à fléchir et à décoller graduellement, entraînant ainsi une augmentation non linéaire de la force dans le boulon, de même que l'apparition d'un supplément de moment dû à la flexion du boulon. Ce type de chargement amène à une prédiction plus difficile des suppléments à mesure que la géométrie se complexifie.

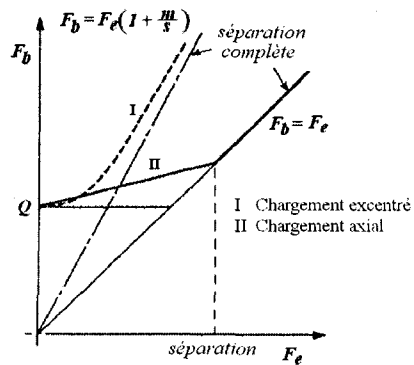


Figure 1.2 – Force dans le boulon pour un cas de chargement centré et excentré  
(Source : figure adaptée de [3])

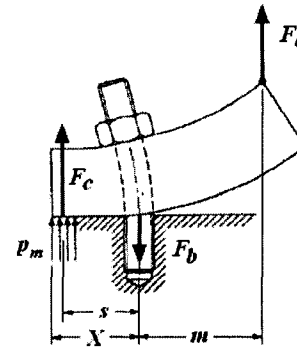


Figure 1.3 – Charge extérieure excentrée  
(Source : figure adaptée de [3])

Donc, plus l'excentration de l'effort extérieur sera grande, plus le décollement se fera tôt (Figure 1.4). En effet, lorsque l'excentration augmente, la souplesse de la bride augmente et il devient plus facile de la faire fléchir, ce qui tend à initier un décollement plus tôt de même qu'à transmettre davantage de supplément de force. On retrouve plusieurs informations liées à l'influence de l'excentration sur le comportement non linéaire du supplément d'effort dans les travaux de Guillot [3], de Bakhiet [2, 6], de Massol [1], de Agatonovic [7, 8] ainsi que dans ceux de Vadean [9].

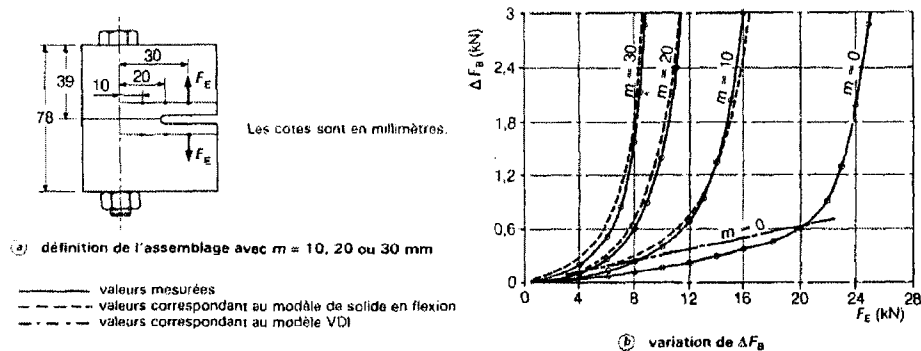


Figure 1.4 – Influence de l'excentration sur le supplément d'effort dans le boulon  
(Source : figure adaptée de [3])

La position de la force extérieure occupe donc un rôle important en ce qui concerne la non-linéarité du supplément d'effort dans le boulon. À noter que la norme VDI 2230 [10] est utilisée pour des calculs sur des assemblages boulonnés faiblement excentrés, alors que le modèle de poutre fléchie [3, 6-8] est utilisable pour des assemblages avec une plus grande excentration de la charge extérieure. Ces deux modèles de calcul seront expliqués subséquemment.

### 1.2.3. Influence de la hauteur d'application de la charge

Un autre facteur lié à la charge et influençant le supplément d'effort transmis au boulon s'avère la hauteur d'application de la charge (Figure 1.5).

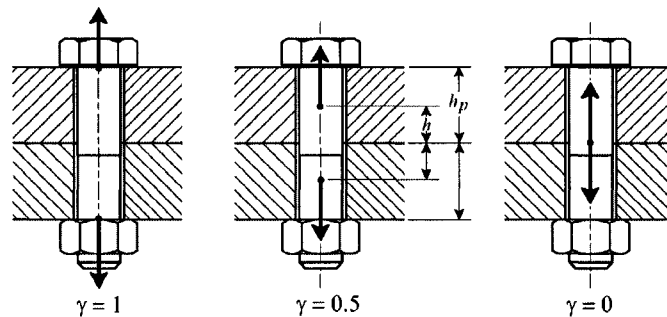


Figure 1.5 – Hauteur d'application de la charge extérieure

Ce facteur est pris en compte à l'aide d'un facteur adimensionnel appelé ( $\gamma$ ) [3, 8] et communément évalué avec l'équation (1.3) ci-dessous.

$$\gamma = \frac{h}{h_p} \quad (1.3)$$

Pour un assemblage avec une charge axiale, on peut voir sur le graphique représenté à la Figure 1.6 l'influence du facteur ( $\gamma$ ) sur l'augmentation du supplément d'effort dans le boulon alors que les brides sont encore en contact. En effet, plus la charge est appliquée près de la tête du boulon ( $\gamma$  tend vers 1), plus le boulon reprendra une partie importante de la charge extérieure. À noter que les valeurs 0 et 1 de la Figure 1.5 et Figure 1.6 sont

d'avantage théoriques que réalistes. En pratique, ces valeurs devraient se situer entre 0.3 et 0.7.

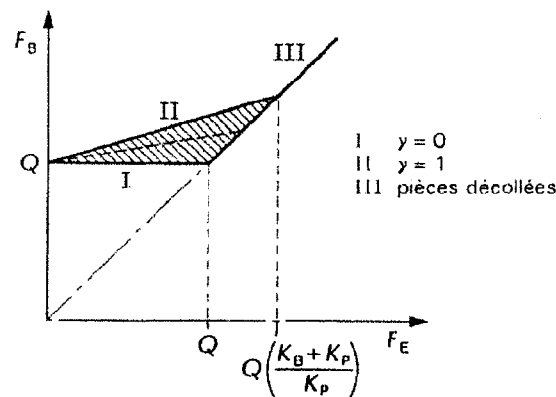


Figure 1.6 – Impact de la hauteur d'application de la charge sur la force dans le boulon

(Source : [3])

Plutôt que d'avoir une valeur constante de  $(\gamma)$ , Guillot [3] et Bakhiet [2, 6] ont étudié la variation de  $(\gamma)$  en fonction de la position  $(s)$  de la force de contact équivalente  $(F_c)$ . Ceci leur a permis d'obtenir une relation approximative liant la position  $(s)$  (voir Figure 1.8) et l'épaisseur des brides  $(h_p)$  à  $(\gamma)$ , relation présentée sous l'équation (1.4).

$$\gamma = 2.2\left(\frac{s}{h_p}\right) - 0.6 \quad (1.4)$$

$$\text{où } 0 \leq \gamma \leq 1$$

À partir de cette relation, Bakhiet [6] a généralement été en mesure d'obtenir une bonne correspondance entre son modèle d'éléments finis et son modèle analytique de poutre fléchie.

Par ailleurs, une étude sur l'influence entre l'excentration  $(m)$  (voir Figure 1.7) et la hauteur d'application de la charge  $(\gamma)$  a été réalisée par Vadean [9], lui permettant ainsi de formuler deux principales conclusions concernant l'influence de ces deux paramètres sur le supplément d'effort dans le boulon.

- 1) Si le facteur ( $\gamma$ ) augmente, la courbe se linéarise et la pente initiale augmentera dans la zone I.
- 2) Si l'excentration ( $m$ ) augmente, le décollement s'effectuera plus tôt et le facteur ( $\gamma$ ) aura une influence moindre sur le supplément d'effort dans la zone II.

La Figure 1.7 illustre bien l'influence des deux paramètres ( $m$ ) et ( $\gamma$ ) sur le supplément d'effort dans le boulon.

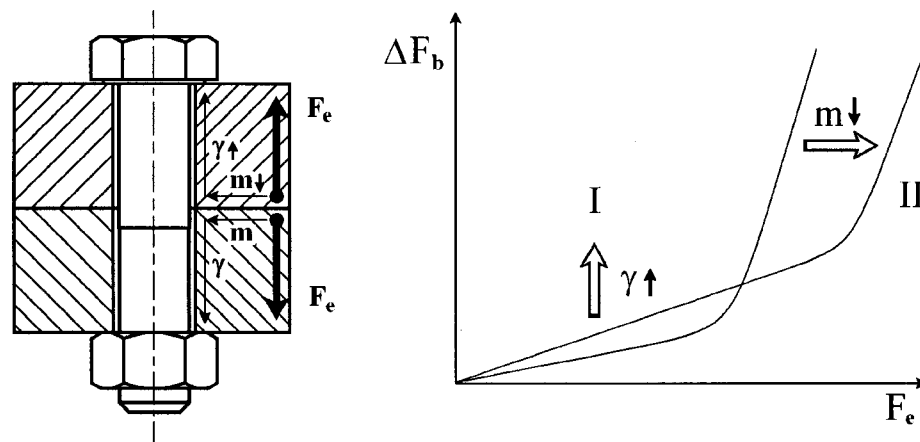


Figure 1.7 – Influence de la position d'application de la charge sur le supplément d'effort dans le boulon

(Source : figure adaptée de [9])

Il est donc essentiel de bien connaître l'endroit d'application de la charge afin de prévoir adéquatement le supplément d'effort qui sera transmis au boulon. Cependant, dans le cas de géométries plus complexes où la force n'est pas appliquée directement sur la bride comme à la Figure 1.7, il devient plus difficile de déterminer la bonne valeur de ( $\gamma$ ).

### 1.3. Force de contact

L'ensemble des forces présentes dans l'assemblage boulonné est montré à la Figure 1.8.

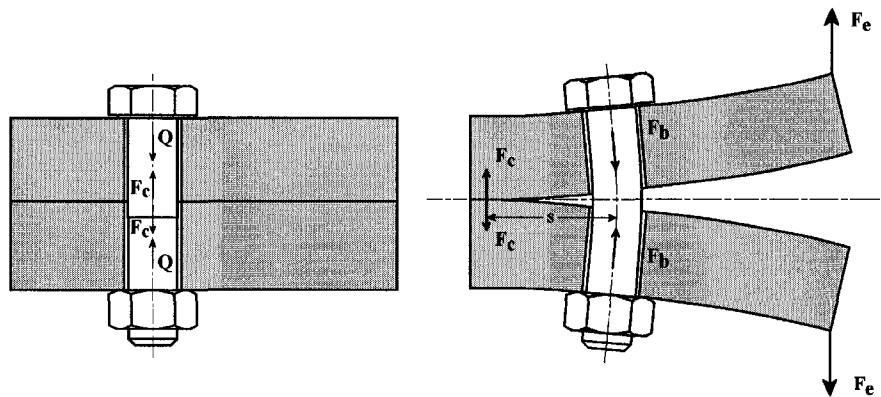


Figure 1.8 – Équilibre des forces sur les brides de l'assemblage boulonné

Sur la figure précédente, on retrouve d'abord la force de précontrainte ( $Q$ ) qui s'équilibre avec la force de contact ( $F_c$ ) à l'interface des deux brides. Ensuite, lors de l'application de la charge extérieure ( $F_e$ ), il y a déplacement ( $s$ ) de la force de contact ( $F_c$ ) vers le rebord de la bride pour atteindre une valeur limite, alors que la force dans le boulon ( $F_b$ ) croît de manière non linéaire [3-5]. On a ainsi l'équilibre des forces présentées sous l'équation (1.5).

$$F_b = Q + \Delta F_b = F_c + F_e \quad (1.5)$$

Cette équation nous permet de lier les différentes forces en cause entre elles.

## 1.4. Souplesse du boulon

### 1.4.1. Souplesse conformément à la norme VDI 2230

La souplesse de la vis calculée par la norme VDI 2230 [10] se fait pour chaque longueur de vis ayant un diamètre différent. Par exemple, pour une vis serrant une pièce par le biais d'un trou borgne plutôt qu'un écrou, le calcul de souplesse serait séparé en quatre parties, soit la souplesse de la tête, la souplesse de la portion cylindrique non filetée sous la tête, la portion cylindrique filetée non engagée et la portion filetée engagée dans le trou borgne. De plus, il faudrait effectuer deux calculs de souplesse, soit un calcul de

souplesse en tension et un calcul de souplesse en flexion. Le détail complet de ce calcul se trouve dans la norme VDI 2230 [10].

#### 1.4.2. Souplesse proposée par « Techniques de l'ingénieur »

Dans le recueil Techniques de l'Ingénieur de Guillot [3], Guillot utilise une formule très simple pour calculer la souplesse du boulon. En effet, elle consiste à associer la souplesse de la tête de la vis ainsi que l'écrou à une longueur équivalente supplémentaire telle que montrée sur la Figure 1.9.

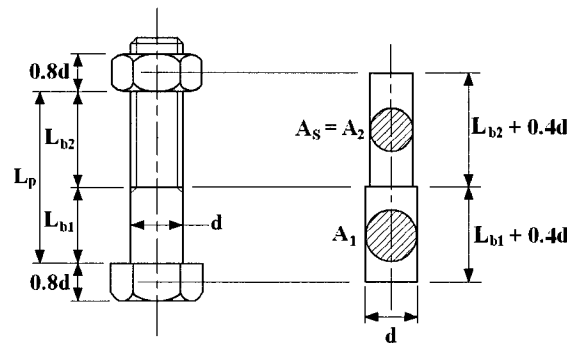


Figure 1.9 – Souplesse du boulon

(Source : figure adaptée de [3])

L'équation (1.6) est celle utilisée pour calculer la souplesse du boulon. Elle a l'avantage d'être très facile à utiliser et de donner des résultats satisfaisants.

$$\frac{1}{K_b} = \frac{1}{E_b} \left[ \frac{L_{b1} + 0.4d}{A_1} + \frac{L_{b2} + 0.4d}{A_s} \right] \quad (1.6)$$

Dans ce calcul, il n'y a toutefois aucune prise en compte des dimensions différentes que pourraient avoir les têtes de boulons et écrou. Le frottement entre le boulon et les pièces n'est pas non plus considéré. Pourtant celui-ci augmenterait la rigidité du boulon, puisqu'une partie de l'énergie apportée au système par l'application d'une force en tension sur le boulon serait dissipée par le frottement plutôt que d'être entièrement



transformée en déformation élastique du boulon. Cependant, la précision de cette équation est jugée comme étant suffisante pour la suite du travail.

### 1.4.3. Souplesse avec le modèle de Alkatan

Suite aux travaux de Guillot [3] sur le calcul de souplesse du boulon, une nouvelle modélisation plus complète a été proposée par Alkatan [11, 12]. Cette modélisation tient compte cette fois-ci de nombreux paramètres négligés soit la souplesse en compression de la tête de la vis, la souplesse en tension de la partie filetée engagée dans l'écrou de même que celle de la partie filetée non engagée, tout en considérant l'existence d'un coefficient de friction entre le boulon et les pièces ainsi qu'entre la vis et l'écrou. Puisque la méthode proposée par Guillot [3] est plus simple à appliquer et que l'amélioration du modèle par Alkatan [11, 12] reste relativement faible, la méthode de Guillot [3] a été privilégiée dans le cadre de ce travail.

## 1.5. Souplesse en compression des membrures du joint boulonné

### 1.5.1. Diamètre de pièce

Avant d'effectuer le calcul de souplesse des brides, il faut évaluer le diamètre des pièces. Ce calcul diffère d'un auteur à l'autre puisqu'il existe plusieurs façons de l'évaluer. La norme VDI 2230 [10] stipule que le diamètre de pièce pour former le cône de compression se calcule avec l'équation (1.7), où  $(D_p)$  représente le diamètre de pièce équivalent,  $(D_a)$  représente le diamètre de la tête de la vis,  $(h_p)$  représente l'épaisseur des pièces et  $(\varphi)$  représente l'angle du cône de compression.

$$D_p = D_a + 2h_p \tan(\varphi) \quad (1.7)$$

Toutefois, si ce diamètre théorique dépasse la largeur de la pièce, on remplace ce  $(D_p)$  par la valeur de la dimension de la pièce qui limite la formation du cône de compression. Pour des pièces suffisamment grandes, la formulation de VDI 2230 prend donc en compte la formation du cône de compression qui se retrouve sous la tête du boulon pour évaluer le diamètre théorique et qui dépend entre autres de l'épaisseur des pièces.

Dans Techniques de l'Ingénieur de Guillot [3], ce dernier reprend la formulation de Rasmussen [13] où pour un assemblage quelconque, si la pièce est inscrite à l'intérieur d'un cercle de diamètre égale à trois fois le diamètre de la tête du boulon, alors on considère le diamètre calculé avec l'équation (1.8).

$$D_p = 3 * D_a \quad (1.8)$$

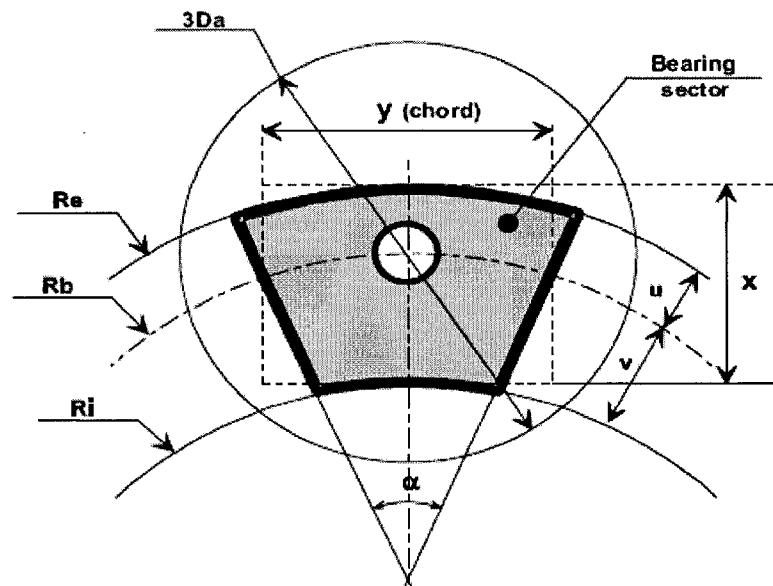


Figure 1.10 – Dimensions à considérer pour le calcul de souplesse en compression

(Source : figure adaptée de [14])

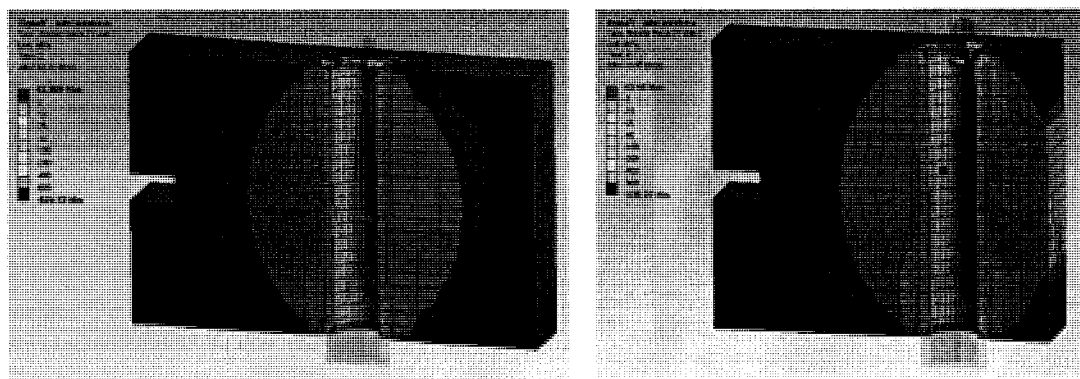
Toutefois, si la pièce n'y est pas inscrite (comme dans le cas de la bride cylindrique de la Figure 1.10), on prend pour ( $D_p$ ) la valeur moyenne des deux dimensions de la pièce tel que présenté à l'équation (1.9).

$$D_p = \frac{(x + y)}{2} \quad (1.9)$$

Cette méthode de calcul de ( $D_p$ ) est d'ailleurs celle utilisée pour calculer la souplesse des brides cylindriques dans les travaux de Vadean [14]. Cependant, contrairement à la

méthode de VDI 2230, celle-ci ne tient pas compte de l'épaisseur de la pièce, ni de l'angle du cône de compression.

Les captures d'écran issues du modèle d'éléments finis d'un assemblage de plaques rectangulaires montrent bien la formation du cône de compression. Sur la Figure 1.11, on peut voir sur l'assemblage de gauche qu'il y a assez de matière autour du trou pour que le cône de compression se forme complètement, alors que sur l'assemblage de droite le trou se situe trop à proximité du bord de la pièce pour que le cône puisse se former complètement. Il y a donc interruption et c'est cette interruption qui est prévue par la norme VDI 2230 [10] de même que par l'équation utilisée par Guillot [3] et Vadean [14].



**Figure 1.11 – Cône de compression sous la tête du boulon dans un assemblage de plaques rectangulaires**

Il existe une différence majeure entre les deux calculs du diamètre de pièce ( $D_p$ ) développés par VDI 2230 [10] et Guillot [3]. En effet, dans le cas de la norme VDI 2230 [10], le diamètre de pièce varie en fonction des épaisseurs ( $h_p$ ) et de l'angle du cône ( $\varphi$ ), alors que pour Guillot [3] et Vadean [14], le diamètre équivalent varie seulement en fonction du diamètre de la tête du boulon ( $D_a$ ), et non de la géométrie de l'assemblage boulonné. Le calcul du supplément de force et de moment dans le boulon ne devrait toutefois pas beaucoup varier en fonction de l'équation utilisée pour évaluer le

diamètre équivalent ( $D_p$ ), puisque les deux équations donnent des valeurs de ( $D_p$ ) généralement près l'une de l'autre.

Lorsque les boulons sont rapprochés les uns des autres ou que la précontrainte est suffisamment élevée, il peut se produire un chevauchement des cônes de compression dans l'assemblage (voir Figure 1.12). Dans ce cas-ci, lorsque la méthode de calcul de souplesse et de diamètre équivalent ( $D_p$ ) de la norme VDI 2230 [10] est utilisé, on doit considérer la largeur de la pièce permettant d'obtenir un cône de compression complet (*Largeur Cône Compression* sur la Figure 1.12) à titre de ( $D_p$ ), ce qui ne correspondra pas à l'axe de symétrie entre deux boulons subséquents (*Largeur Répétition* sur la Figure 1.12). Sinon, le calcul analytique de souplesse s'en trouvera faussé puisqu'il n'y a pas d'interruption réelle de matière entre deux boulons. Le cône de compression ne subit donc qu'un chevauchement et non une interruption.

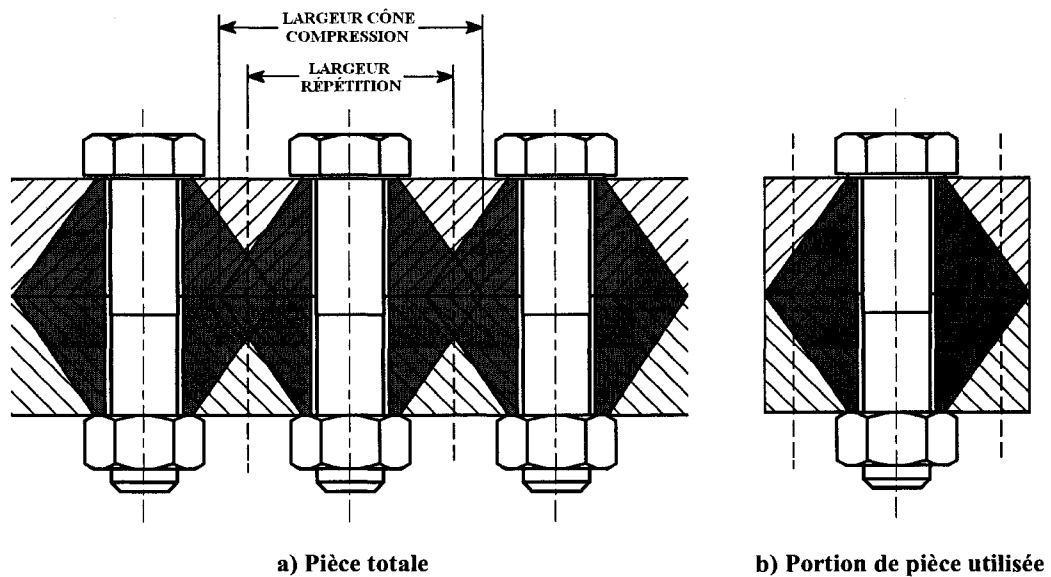


Figure 1.12 – Interaction des cônes de compression

Dans la norme VDI 2230 [10], il est toutefois mentionné que cette façon de faire est surtout utile lorsqu'il y a une grande interaction entre les cônes de compression. Sinon, elle n'aura qu'un impact réduit sur les résultats analytiques.

### 1.5.2. Calcul de rigidité : méthode de Shigley & Al.

La méthode développée par Shigley et ses associés [15] pour calculer la rigidité des brides a l'avantage d'être simple d'utilisation, car elle considère peu de paramètres. Celle-ci a deux hypothèses initiales, soit que le diamètre de la rondelle appuyée sous la tête de la vis a pour diamètre une fois et demi celui du trou pour le boulon et que l'angle du cône de compression formé dans les brides lors de l'application de la précontrainte vaut 30 degrés. On obtient alors l'équation (1.10).

$$K_p = \frac{0.577\pi E_p d_{nom}}{2 \ln \left( 5 \frac{0.577L_p + 0.5d_{nom}}{0.577L_p + 2.5d_{nom}} \right)} \quad (1.10)$$

Cependant, cette équation nécessite que le boulon ne soit pas à proximité d'un bord de pièce puisqu'elle ne tient pas compte de la baisse de rigidité de l'assemblage due à l'effet de bord. En pratique, il n'y a pas toujours suffisamment de matière entre le trou de passage du boulon et le rebord de la pièce pour éviter cette baisse de rigidité. Cette équation est donc peu utilisable. Par contre, un nouveau modèle tenant compte de l'effet de bord lors de l'évaluation de la souplesse des pièces a été développé par Alkatan et ses collègues [16]. Celui-ci se base sur une évaluation de la rigidité de plusieurs secteurs de matière autour du trou en utilisant l'énergie de déformation. Il ne sera toutefois que fait mention de ce modèle puisqu'il ne sera pas utilisé.

### 1.5.3. Calcul de rigidité : méthode de Wileman & Al.

La méthode développée par Wileman et ses associés [17] pour évaluer la rigidité des brides porte principalement sur l'impact du ratio entre le diamètre du trou et l'épaisseur des pièces ( $d_{nom}/L_p$ ). Ce calcul de rigidité est présenté sous l'équation (1.11).

$$K_p = E_p d_{nom} A e^{B(d_{nom}/L_p)} \quad (1.11)$$

Les paramètres  $A$  et  $B$  de l'équation dépendent des matériaux utilisés. Tout comme la méthode de Shigley & Al. [15], il est à noter que le boulon ne doit pas se situer près du bord de la pièce si on veut que le modèle donne des résultats valables. Cependant, comme on peut le remarquer avec ces deux méthodes, il y a peu de place faite aux paramètres géométriques de la pièce pour évaluer la rigidité. Les méthodes de VDI 2230 [10], Rasmussen [13] et Massol [1] prennent davantage en compte ces paramètres ce qui en fait leur force.

#### 1.5.4. Souplesse des pièces par la méthode VDI 2230

La norme VDI 2230 [10] sépare le calcul de section réduite équivalente en trois cas, dépendamment des dimensions des pièces, tel que présenté aux équations (1.12), (1.13) et (1.14).

1) Si  $D_p \leq D_h$  :

$$A_p = \frac{\pi}{4} (D_p^2 - D_h^2) \quad (1.12)$$

2) Si  $D_h < D_p < D_h + L_p$  :

$$A_p = \frac{\pi}{4} (D_a^2 - D_h^2) + \frac{\pi}{8} D_a (D_a - D_h) W (W + 2) \quad (1.13)$$

$$\text{où } W = \left( \frac{L_p D_a}{D_p^2} \right)^{1/3} \quad \text{serrage par écrou}$$

$$W = \left( \frac{L_p}{D_p} \right)^{1/5} \quad \text{serrage dans un trou borgne}$$

3)  $D_h + L_p \leq D_p$  :

$$A_p = \frac{\pi}{4} (D_a^2 - D_h^2) + \frac{\pi}{8} D_a L_p W (W + 2) \quad (1.14)$$

$$\text{où } W = \left( \frac{L_p D_a}{(L_p + D_a)^2} \right)^{1/3} \quad \text{serrage par écrou}$$

$$W = \left( \frac{L_p}{L_p + D_a} \right)^{1/5} \quad \text{serrage dans un trou borgne}$$

Une fois qu'on connaît la section réduite équivalente, on peut évaluer la souplesse de l'assemblage à l'aide de l'équation (1.15).

$$S_p = \frac{1}{A_p} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{L_{pi}}{E_{pi}} \quad (1.15)$$

L'inconvénient de cette méthode provient du fait qu'il ne s'agit pas d'une formule unique et applicable dans tous les cas, car il faut vérifier dans quel intervalle on se situe afin de choisir l'équation applicable. Le modèle de VDI 2230 développé en 1977 ne représentait pas très bien la réalité. Cependant, le modèle de calcul s'est amélioré avec les années pour devenir celui présenté précédemment, le rendant plus fiable.

### 1.5.5. Souplesse des pièces par la méthode de Rasmussen

Une autre méthode de calcul de souplesse a été développée par Rasmussen [13]. Construite à partir de résultats de simulations par éléments finis, celle-ci a l'avantage de reposer sur une formule unique peu importe le dimensionnement des pièces. Par ailleurs, elle utilise des paramètres adimensionnels, ce qui permet d'observer que ce qui importe pour l'évaluation de la souplesse d'un assemblage est en fait les proportions géométriques de celui-ci par rapport aux dimensions du boulon. Rasmussen [13] base ses paramètres adimensionnels sur le diamètre de la tête du boulon puisque c'est le diamètre de la surface de contact entre la tête du boulon et l'assemblage. Sa formulation présentée à l'équation (1.16) repose donc sur le cône de compression qui se forme sous la tête du boulon.

$$A_p^* = \frac{\pi}{4} (1 - D_h^{*2}) + \frac{1}{2} (D_p^{*2} - 1) \arctan \left[ \frac{0.35 \sqrt{L_p^*} + \sqrt{1 + 2L_p^{*2}} - 1}{2(D_p^{*2} - D_h^{*2})} \right] \quad (1.16)$$

Paramètres adimensionnels :

$$D_h^* = D_h / D_a \qquad L_p^* = L_p / D_a$$

$$D_p^* = D_p / D_a \qquad A_p^* = A_p / D_a^2$$

Une fois qu'on connaît la section réduite équivalente, on peut évaluer la souplesse de l'assemblage à l'aide de la même équation que pour la méthode VDI 2230, soit l'équation (1.15).

Comparativement aux résultats obtenus par la méthode de VDI 2230 [10], la méthode de Rasmussen [13] donne des résultats de souplesse plus près des éléments finis. Dans les travaux de Guillot [3] se trouve d'ailleurs une comparaison des résultats obtenus par ces méthodes et qui justifie l'emploi de Rasmussen [13] à l'instar de VDI 2230 [10].

#### 1.5.6. Souplesse des pièces par la méthode de Massol

Le modèle de calcul développé par Massol [1] est en réalité une modification du modèle de calcul développé par Rasmussen [13]. On retrouve donc les mêmes paramètres adimensionnels. Ce sont les coefficients de l'équation qui changent.

$$A_p^* = \frac{\pi}{4}(1 - D_h^{*2}) + 0.61(D_p^{*2} - 1) \arctan \left[ \frac{0.35\sqrt{L_p^*} + \sqrt{1 + 2L_p^{*2}} - 1}{2.04(D_p^{*2} - D_h^{*2})} \right] \quad (1.17)$$

À partir de la section réduite équivalente, on peut maintenant calculer la souplesse en compression des brides de la même façon qu'avec la méthode de Rasmussen [13].

#### 1.5.7. Souplesse des pièces par la méthode de Rasmussen modifiée

Afin de mieux évaluer la souplesse et dans le but de lier la hauteur d'application de la charge extérieure ( $y$ ) au calcul de souplesse, Vadean [14] utilise dans ses travaux une méthode de calcul de souplesse légèrement différente. En effet, afin de rendre le calcul plus près de la réalité, le cylindre équivalent est en fait une combinaison de trois cylindres délimités par la hauteur d'application de la charge extérieure comme on peut le voir à la Figure 1.13.



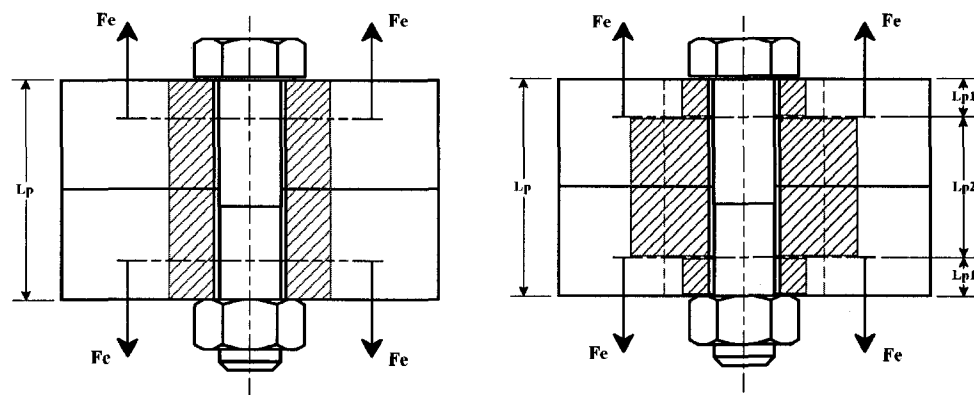


Figure 1.13 – Cylindres équivalents pour le calcul de souplesse

Cette façon de procéder a l'avantage de se rapprocher davantage du comportement réel des assemblages boulonnés puisque normalement, la souplesse varie en fonction de l'épaisseur des pièces. Donc, étant donné que la charge extérieure augmentera la compression de la partie supérieure à sa hauteur d'application produisant ainsi une diminution de la compression de la partie inférieure, la souplesse devrait prendre des valeurs différentes pour chacune de ces sections de l'assemblage.

Le désavantage de toutes ces méthodes est qu'on produit des formules de rigidité de pièces valables sous l'application de la précontrainte seule. La variation non linéaire de cette rigidité avec la variation du contact entre les pièces en appui lors de l'application d'une force extérieure rend la modélisation très complexe. C'est un des motifs qui jusqu'à présent empêche l'obtention de modèles représentant adéquatement la réalité.

## 1.6. Calcul des suppléments d'effort avec chargement excentré

### 1.6.1. Modèle VDI 2230, solide en flexion circulaire

Lorsqu'un assemblage boulonné est soumis à un chargement axial ou légèrement excentré, il convient d'utiliser la méthode VDI 2230 [10] qui donne de très bons résultats au niveau des suppléments de force et de moment dans le boulon. Par contre,

lorsqu'il s'agit d'un assemblage avec une forte excentration de l'effort extérieur comme dans les cas étudiés dans le cadre de cette maîtrise, il ne convient plus d'utiliser ce modèle de calcul. En effet, il est possible de voir dans les travaux de Bahkiet [2] et Massol [1] le très grand manque de précision de la méthode VDI 2230 dans les cas de chargements fortement excentrés. Donc, il convient mieux d'utiliser un modèle comme le modèle de poutre fléchie dans ces cas-là.

### 1.6.2. Modèle en poutre fléchie

Lorsqu'un assemblage boulonné est soumis à une charge extérieure de forte excentration, le modèle de poutre fléchie donne de meilleurs résultats. Toutefois, pour que le modèle donne des résultats près de la réalité, il faut que la longueur de la surface d'appui et l'excentration soient relativement grandes par rapport à l'épaisseur de la bride, faute de quoi la bride ne peut être approximée par une poutre en flexion [3].

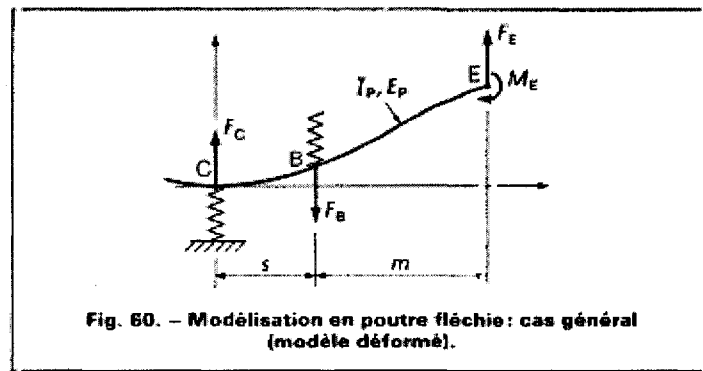


Figure 1.14 – Modélisation en poutre fléchie

(Source : [3])

D'abord, la souplesse totale de l'assemblage est définie par les deux termes suivants :

$S_b$  : Souplesse d'un demi boulon ( $1/2L_p$ )

$S_p$  : Souplesse d'une membrure ( $h_p$ )

Où :  $S = S_b + S_p$  et  $L_p = 2h_p$

La souplesse du boulon est définie par l'équation (1.6), alors que la souplesse des brides est calculée par l'équation (1.15) en utilisant la formule de Rasmussen présentée à l'équation (1.16) pour évaluer la section réduite équivalente ( $A_p$ ).

La modélisation en poutre fléchie [1-3, 6, 8] se base sur la sommation des forces et moments, montrés sur la Figure 1.14. Pour résoudre ce système d'équations, il faut connaître la valeur de la force équivalente de contact ( $F_c$ ) à l'interface des deux brides ainsi que sa position ( $s$ ). Ainsi, le modèle en poutre fléchie permet de nous donner l'équation (1.18) servant à calculer la position ( $s$ ) de la force de contact équivalente ( $F_c$ ).

$$C_1 s^3 + C_2 s^2 + C_3 s + C_4 = 0 \quad (1.18)$$

Les différents facteurs  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  sont définis à partir des équations qui suivent :

$$C_1 = \frac{m}{6E_p I_p S} \quad C_2 = \frac{\Phi}{m + 2E_p I_p \left( q_1 + \frac{q_2}{m} \right)}$$

$$C_3 = \frac{2m + 2E_p I_p q_1}{m + 2E_p I_p \left( q_1 + \frac{q_2}{m} \right)} \Phi \quad C_4 = -m$$

où  $\Phi = \left[ \frac{Q}{F_c} - \frac{S_b + S_p(1-\gamma)}{S} \right]$  et  $S = S_b + S_p$

Les facteurs précédents contiennent les paramètres ( $q_1$ ) et ( $q_2$ ) qui varient selon la géométrie utilisée. Le tableau regroupant la valeur de ces paramètres en fonction de la configuration géométrique est présenté dans les travaux de Guillot [3] et de Agatonovic [8].

À partir de la position ( $s$ ) de la force de contact équivalente ( $F_c$ ) trouvée avec l'équation précédente, on peut maintenant calculer avec l'équation (1.19) cette force de contact et déduire le supplément de force ( $\Delta F_b$ ) dans le boulon à partir de l'équation (1.5) d'équilibre des forces.

$$F_c = \frac{m}{s} \frac{m + 2E_p I_p \left( q_1 + \frac{q_2}{m} \right)}{s + 2m + 2E_p I_p q_1} F_e \quad (1.19)$$

On peut aussi déterminer le supplément de moment dans le boulon en supposant que la tête du boulon, qui demeure en contact avec la bride, prend l'angle d'inclinaison de la bride lors du décollement.

### 1.6.3. Modèle de poutre sur appui élastique

Il existe une variante du modèle de poutre fléchie pour laquelle le facteur ( $\gamma$ ) n'intervient plus. En effet, la souplesse est plutôt modifiée par le biais d'une variation de la surface de contact entre les deux brides lorsque le décollement survient sous l'action de la force extérieure. Ce modèle, présenté ci-dessous, est expliqué plus en détails dans les thèses de doctorat de Massol [1] et de Bahkiet [2].

D'abord, la souplesse totale de l'assemblage est définie par les trois termes suivants :

$S_b$  : Souplesse d'un demi boulon ( $1/2L_p$ )

$S_p^*$  : Souplesse de la partie sous tête du boulon (pour  $h_p/2$ )

$S_c$  : Souplesse de la partie comprimée de la pièce ( $S_c = 1/K_c$ )

Où :  $S = S_b + S_p^* + S_c$

La souplesse du boulon est définie de la même façon que dans les sections précédentes, alors que les deux composantes de souplesse des brides sont définies à partir de l'équation (1.20) et de l'équation (1.21) ci-dessous.

$$S_p^* = \frac{h_p/2}{E_p A_p} \quad (1.20)$$

$$S_c = \frac{1}{K_c} = \frac{1}{2K_0(X-s)b} \quad (1.21)$$

$$\text{où } K_0 = \frac{E_p}{h_p/2}$$

Pour obtenir la position ( $s$ ) de la force de contact équivalente ( $F_c$ ), on utilise encore l'équation (1.18), en utilisant par contre une définition différente du terme ( $\Phi$ ) présenté à l'équation (1.22).

$$\Phi = \left[ \frac{Q}{F_e} - \frac{S_b + S_p^*}{S} \right] \quad (1.22)$$

Donc, en appliquant ce terme à l'équation (1.18), celle-ci peut être utilisée pour déterminer la position ( $s$ ) de la force de contact équivalente ( $F_c$ ). Lorsque la force extérieure ( $F_e$ ) devient suffisamment grande, le décollement survient entre les deux membrures assemblées (voir Figure 1.8). Normalement, la position ( $s$ ) devrait tendre vers le rebord extérieur ( $X$ ) à mesure que la force extérieure augmente. Cependant, dans le cas de ce modèle analytique, lorsque le ratio ( $s/X$ ) atteint la valeur de 0.75, celui-ci devra plafonner à cette valeur (voir Figure 1.15). Ainsi, à partir du point A, l'équation permettant d'évaluer le supplément de force change pour devenir celle d'une hyperbole puisque le supplément tend vers une asymptote correspondant à une valeur de position ( $s$ ) où la force de contact équivalente ( $F_c$ ) atteindrait le rebord des membrures (donc  $s = X$ ) tel que montré à la Figure 1.16.

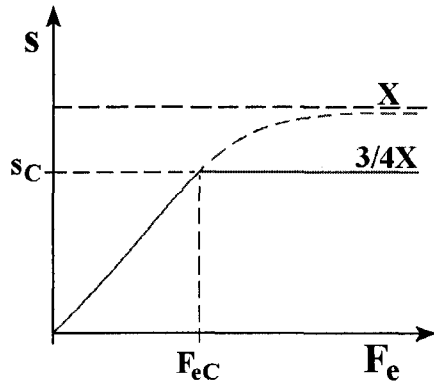


Figure 1.15 – Position (s) de la force équivalente de contact

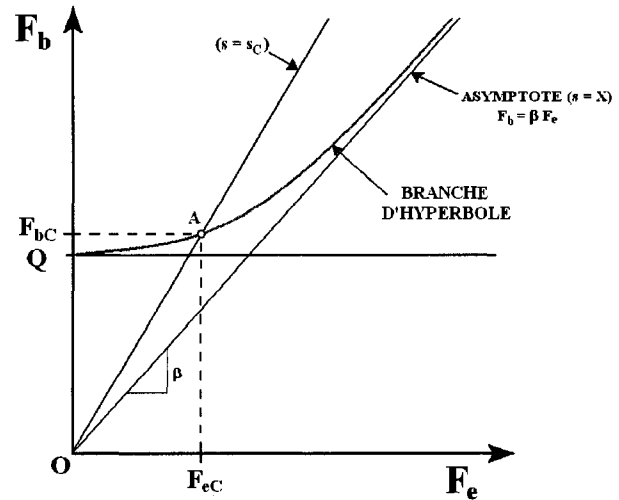


Figure 1.16 – Force dans le boulon pour le modèle de poutre sur appui élastique

(Source : figure adaptée de [2])

Donc, pour évaluer le supplément de force et de moment, deux cas sont possibles.

- Si  $(s/X) \leq 0.75$ , on évalue le supplément de force et de moment à l'aide des équations (1.23), (1.24) et (1.25).

$$F_c = \left(\frac{m}{s}\right) \left( \frac{m + 2 E_p I_p (q_1 + q_2/m)}{s + 2m + 2 E_p I_p q_1} \right) F_e \quad (1.23)$$

$$\Delta F_b = F_c + F_e - Q \quad (1.24)$$

$$\Delta M_b = \frac{s}{\left( \frac{2h_p E_p I_p}{s} + 2 \right)} F_c \quad (1.25)$$

- Si  $(s/X) > 0.75$ , on évalue le supplément de force et de moment à l'aide des équations (1.26) et (1.27).

$$\Delta F_b = \sqrt{\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}\right) (F_e^2 + a_2^2)} - Q \quad (1.26)$$

$$\text{Où : } a_1^2 = (F_{cC} + F_{eC})^2 - \beta^2 F_{eC}^2 \quad \text{et} \quad a_2^2 = \frac{(F_{cC} + F_{eC})^2}{\beta^2} - F_{eC}^2$$

$$\Delta M_b = \Delta M_{bC} + \left( \frac{F_b - F_{bC}}{(1/S_b) s_C} \right) \left( \frac{E_b I_b E_p I_p}{h_p E_p I_p + s_C E_b I_b} \right) \quad (1.27)$$

$F_{bC}$ ,  $F_{cC}$ ,  $F_{eC}$  et  $\Delta M_{bC}$  étant évalués à  $(s_C/X) = 0.75$  avec les équations (1.23), (1.24) et (1.25).

L'asymptote vers laquelle tend le supplément de force dans le boulon (voir Figure 1.16) est représentée par l'équation (1.28).

$$\Delta F_b = \beta F_e - Q \quad (1.28)$$

La pente de l'asymptote précédente est représentée par le paramètre ( $\beta$ ) calculé avec l'équation (1.29).

$$\beta = 1 + \left( \frac{m}{X} \right) \left( \frac{m + 2E_p I_p \left( q_1 + \frac{q_2}{m} \right)}{X + 2m + 2E_p I_p q_1} \right) \quad (1.29)$$

#### 1.6.4. Modèle de Ouqi Zhang

Le modèle développé par Zhang [4, 5] aborde le problème de l'excentration du chargement d'une autre façon. En effet, ce modèle aborde le problème en séparant d'abord la rigidité des différentes pièces en plusieurs composantes de rigidité.

$K_b$  : Rigidité du boulon

$K_\theta$  : Rigidité en rotation de la membrure

$K_m$  : Rigidité sous la précontrainte (où  $F_e = 0$ )

$K_m(F_e)$  : Rigidité sous la force extérieure

$\alpha$  : Facteur de proportionnalité

Ainsi, on obtient l'équation (1.30) qui permet de calculer la force ( $F_b$ ) dans le boulon. Les coefficients  $A(F_e)$  et  $B(F_e)$  sont quant à eux évalués à l'aide des équations (1.30) et (1.31).

$$F_b = A(F_e)Q + B(F_e)F_e \quad (1.30)$$

$$A(F_e) = \frac{(1 + K_m/K_b)}{(K_m/K_m(F_e) + K_m/K_b)} \quad (1.31)$$

$$B(F_e) = \frac{(1 - \alpha K_m(F_e)/K_c + K_m(F_e)/K_\theta)}{(1 + K_m(F_e)/K_b)} \quad (1.32)$$

Dans ses travaux, Zhang [4, 5] est parvenu à prouver que la rigidité du boulon ( $K_b$ ), la rigidité en rotation des membrures ( $K_\theta$ ), de même que le facteur de proportionnalité ( $\alpha$ ) ne dépendent pas du ratio entre le chargement extérieur et la force de précontrainte ( $F_e/Q$ ). Par contre, il a établi qu'il n'en était pas de même concernant la rigidité due à la force extérieure ( $K_m(F_e)$ ) qui elle, dépend du chargement extérieur ( $F_e$ ). Les déformations utilisées pour le calcul des différentes rigidités proviennent de mesures issues d'un modèle d'éléments finis. La prise de ces mesures semble encore incertaine et subjective. Ces mesures sont facilement influençables par des phénomènes locaux, tel que l'effet de bord du trou de passage du boulon.



## CHAPITRE 2

### 2. ARTICLE I: NEW MODELING APPROACH FOR PRELOADED BOLTED JOINTS SUBMITTED TO CYCLIC LOADING – PART I: NEW DIMENSIONLESS PARAMETERS

#### 2.1. Présentation du chapitre

Dans cette première partie d'un article présenté en deux parties, de nouveaux paramètres adimensionnels relatifs aux assemblages boulonnés précontraints sont présentés. Ces paramètres ont pour fonction de regrouper des assemblages ayant des comportements similaires au niveau du supplément d'effort dans leur boulon. Ainsi, pour démontrer l'existence de ces paramètres, ainsi que des éléments communs unissant les assemblages précontraints, deux modèles ont été utilisés. Le premier modèle est un cas simple de deux plaques rectangulaires soumises à un chargement excentré, alors que le second est un cas plus réel et par le fait même plus complexe d'un assemblage de deux brides cylindriques soumis à un chargement excentré. Ces deux modèles ont été définis en termes de proportions, c'est-à-dire en termes de dimensions relatives au diamètre nominal du boulon afin de faciliter la comparaison entre les différentes tailles d'assemblage. Dans un même souci de comparaison, les forces utilisées sont exprimées sous une forme adimensionnelle. Ainsi, le supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) remplace le supplément de force en fonction de la force extérieure. Cette paramétrisation de la géométrie de même que l'utilisation de forces relatives à la précontrainte ont permis d'élaborer trois importantes conditions de similitude sur les assemblages boulonnés précontraints, ayant pour principal avantage de réduire le nombre d'analyses ou d'essais expérimentaux nécessaires à la prédiction du supplément d'effort dans le boulon.

**NEW MODELING APPROACH FOR PRELOADED BOLTED JOINTS**  
**SUBMITTED TO CYCLIC LOADING**  
**PART I: NEW DIMENSIONLESS PARAMETERS STUDY**

**Francis Turgeon, Aurelian Vadean \***

*École Polytechnique de Montréal, Department of Mechanical Engineering, P.O. Box  
6079, Station Centre-Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3A7*

**2.2. Abstract**

Many bolted joints fatigue calculation models presently used are based on linear formulations. In a bolted assembly, the force supplement in the bolt due to an external load is shown as being specific for each bolted joint configuration. This paper demonstrates that regrouping assemblies with similar characteristics may be a very efficient way to study this type of joints. In order to develop such a model, all dimensions of assemblies are expressed with respect to their bolt nominal diameter. Moreover, the force supplement in the bolt ( $\Delta F_b$ ) of each assembly as well as the external load ( $F_e$ ) is expressed in terms of preload ratio. Thus, the plots in this article representing the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) against the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) prove the independence of the response behaviour of bolted joints over their bolt nominal diameter and their preload. This study opens new ways for fast assessment methods of bolted joints under fatigue loading.

Keywords: Preloaded bolted joints; Dimensionless parameters; Cyclic loading; Finite element analyses.

---

\* Corresponding author. Tel.: 1-514-340-4711 ext.:4589; fax 1-514-340-5867.  
E-mail address: aurelian.vadean@polymtl.ca

## **2.3. Introduction**

In the industry, there are numerous ways of assembling parts together. One of them consists in using preloaded bolts. A significant advantage of this type of fasteners is that the prestressed assembly can be quickly assembled and disassembled, reducing maintenance time. For this reason and for others, bolted joints have been used in various domains of the industry for many years, such as in the petroleum industry, car engines, aircraft turbines and so on. The analytical models have been greatly improved over the years, resulting in a better accuracy in predicting the response behaviour of these prestressed assemblies. In fact, finite element analyses have significantly contributed to reach a better understanding of bolted joint behaviour because of their low cost compared to experimental research.

### **2.3.1. Weaknesses in Existing Analytical Models**

Despite all the work that has already been accomplished on preloaded bolted joints, there are still some weaknesses in the existing analytical models. In fact, the models are fairly satisfying for static loading, but not for high cyclic loading. For this second case, it is particularly important to address the axial force and bending moment supplements developed in the bolt shank by an external force after installing the preload. The bigger the variation of the bolt loading will be, the sooner the failure will occur. Moreover, finding an accurate model is particularly complex for assemblies submitted to eccentric loading, because of the non-linearity of their response behaviour. One of the most difficult and not yet solved problem is modeling the stiffness evolution of the parts according to the load and contact changing between parts. Although Rasmussen [1] developed dimensionless parameters relative to the bolt head diameter for the stiffness calculation of bolted parts, none exists for the force and moment supplements evaluation combined to configuration particularities. The force and moment supplements are quite accurately represented by the analytical models for simple eccentric loading cases such as two plates assembled with bolts. Unfortunately, it is not true in the case of more

usable assemblies such as two cylindrical flanges. This could be explained by the complexity of developing a model which adequately represents the reality.

### 2.3.2. Objectives in Part I

In order to address these weaknesses, the first objective is to find out a common basis for the prestressed assembly definition, allowing direct comparison of different sizes of assemblies. The second objective is to identify which dimensionless parameters should be used to group bolted joints that have similar behaviours. Finally, the third objective is to verify these dimensionless parameters for two cases: a simple theoretical assembly of two bolted plates and a more realistic assembly of two bolted cylindrical flanges both submitted to an eccentric external loading.

### 2.3.3. Content of the article

First of all, in order to have a better understanding of the basis on preloaded bolted joints and the existing dimensionless parameters, a literature review is presented. Next, the definitions of two models based on proportions with respect to their bolt nominal diameter instead of dimensions are given. From these definitions, three statements on the behaviour of bolted joints have been proposed and then validated by 3D finite element models. The results and analyses for two case studies are presented afterwards. To conclude this article, new dimensionless parameters which regroup preloaded bolted joints having similar behaviour have been proposed.

<b>Nomenclature</b>	
$A_p$ :	Equivalent cross-section of fastened parts (mm <sup>2</sup> )
$A_p^*$ :	Dimensionless equivalent cross-section of fastened parts (mm <sup>2</sup> /mm <sup>2</sup> )
$D_a$ :	Bolt head diameter (mm)
$D_h$ :	Bolt hole diameter (mm)
$D_h^*$ :	Bolt hole dimensionless diameter (mm/mm)
$D_p$ :	Fastened parts diameter (mm)

<b>Nomenclature</b>	
$D_p^*$ : Fastened parts dimensionless diameter (mm/mm)	$X_{frac}$ : Outer contact length to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$E_b$ : Bolt modulus of elasticity (MPa)	$Y$ : Inner contact length (mm)
$E_p$ : Fastened parts modulus of elasticity (MPa)	$Y_{frac}$ : Inner contact length to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$F_b$ : Total force in the bolt (N)	$b$ : Part width (mm)
$\Delta F_b$ : Force supplement in the bolt (N)	$b_{frac}$ : Part width to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$F_c$ : Equivalent contact force (N)	$d_{nom}$ : Bolt nominal diameter (mm)
$F_e$ : External load (N)	$d_{shank}$ : Diameter of bolt stress area (mm)
$H$ : Tubular height (mm)	$h$ : Height of external force application (mm)
$H_{frac}$ : Tubular height to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)	$h_p$ : Part thickness (mm)
$K_b$ : Bolt stiffness (N/mm)	$h_{p,frac}$ : Part thickness to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$K_p$ : Fastened parts stiffness (N/mm)	$h_i$ : Tubular part thickness (mm)
$L$ : Total length of parts (mm)	$h_{t,frac}$ : Tubular part thickness to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$L_p$ : Total height of fastened parts (mm)	$m$ : Eccentricity of the external force (mm)
$L_p^*$ : Dimensionless total height of fastened parts (mm/mm)	$m_{frac}$ : Eccentricity to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$L_{head}$ : Bolt head height (mm)	$r_1$ : Inner tube radius (mm)
$M_b$ : Bending moment in the bolt (Nm)	$r_{1,frac}$ : Inner tube radius to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$\Delta M_b$ : Moment supplement in the bolt (Nm)	$r_2$ : Outer flange radius (mm)
$Q$ : Bolt preload	
$S_p$ : Fastened parts softness (mm/N)	
$X$ : Outer contact length (mm)	

### Nomenclature

$r_{2\text{frac}}$ :	Outer flange radius to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)	$\sigma_{force}$ :	Mean stress in the bolt (MPa)
$r_b$ :	Bolt position radius (mm)	$\sigma_{moment}$ :	Alternate stress in the bolt (MPa)
$s$ :	Position of the equivalent contact force (mm)	$\sigma_{max}$ :	Maximal stress in the bolt shank (MPa)
$\gamma$ :	Load factor	$\sigma_{min}$ :	Minimal stress in the bolt shank (MPa)

## 2.4. Theoretical Background

### 2.4.1. Conventional Theory

The conventional theory on bolted joints assumes an axial loading on the bolted assembly. Even if this supposition helps to understand the basis of the behaviour of bolted joints, it does not represent adequately most of the real cases. Equation (2.1) represents the bolt working load of the joint submitted to an external loading [2]:

$$F_b = Q + \Delta F_b = Q + F_e \frac{K_b}{K_b + K_p} \quad (2.1)$$

The usefulness to apply a preload on a bolt is to preserve its fatigue life. In fact, for a given external load, the force supplement seen by the bolt will decrease as the preload increases. This will result in a higher fatigue life for the bolt and a higher tension needed to separate flanges.

Equation (2.1) could also be reformulated to take into account dimensionless parameters and be expressed as follow Equation (2.2):

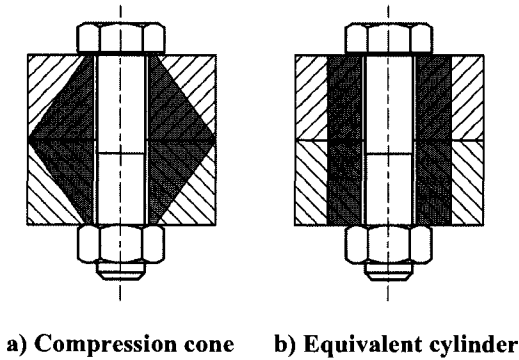
$$\left( \frac{\Delta F_b}{Q} \right) = \frac{K_b}{K_b + K_p} \left( \frac{F_e}{Q} \right) \quad (2.2)$$

The purpose of taking into account dimensionless parameters is to generalize and regroup assemblies which are different in terms of dimensions, preloads or materials as well as to provide a rapid method of behaviour assessment.

#### **2.4.2. Stiffness Calculation**

There are different methods to evaluate the stiffness of assembled parts, most known being the German norm VDI 2230, the Rasmussen method, the Shigley & al. method and the Wileman method [1, 3-6]. The last two methods stopped being used mostly when the VDI 2230 norm and the Rasmussen method were developed. The first difference between the German norm and the Rasmussen method is that the calculation method for the VDI 2230 norm is separated in three different cases which depend on the size of the assembly. For the Rasmussen method, all the assemblies are represented under a unique Equation (2.3). The second difference is that the Rasmussen method, based on finite elements results, is known to give stiffness closer to experimental results than the German norm. Therefore, the Rasmussen method shall be used instead of the VDI 2230 norm [1, 2, 5] for eccentric loading.

In the Rasmussen method, each parameter has been created by dividing each dimension by the bolt head diameter ( $D_a$ ). When the preload is applied, a compression cone is induced in the assembly as shown in Figure 2.1a). Because the size of this compression cone is influenced by the size of the bolt head in contact with the assembly [2, 7], Rasmussen based his dimensionless parameters on the bolt head diameter instead of the nominal diameter.



**Figure 2.1 – Compression cone**

The Rasmussen equation consists in finding an equivalent section ( $A_p$ ) of a cylinder which will have the same stiffness as the part with a compression cone as shown in Figure 2.1b). Equation (2.3) presents the dimensionless parameters and the stiffness equation.

$$A_p^* = \frac{\pi}{4}(1 - D_h^{*2}) + \frac{1}{2}(D_p^{*2} - 1) \arctan \left[ \frac{0.35\sqrt{L_p^*} + \sqrt{1 + 2L_p^{*2} - 1}}{2(D_p^{*2} - D_h^{*2})} \right] \quad (2.3)$$

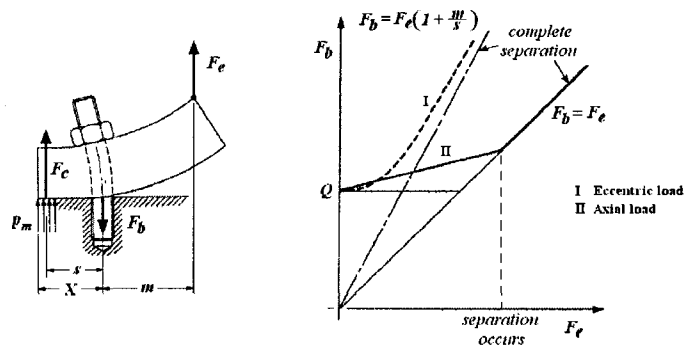
$$D_h^* = D_h / D_a \quad L_p^* = L_p / D_a \quad D_p^* = D_p / D_a$$

$$A_p^* = A_p / D_a^2 \quad S_p = \frac{1}{A_p} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{L_{pi}}{E_{pi}}$$

### 2.4.3. Non-Linear Behaviour Due to Eccentric Loading

The external load will affect the force supplement differently depending if it is an axial or an eccentric load as shown in Figure 2.2. As seen on the chart, the separation between the flanges occurs for a smaller external load for the eccentric loading than for an axial loading. In fact, the more the eccentricity of the external load increases, the more the flexion of the flange will increase. Thus, the flange bending will induce a bending moment in the bolt, which will result in an increase in the working load seen by the bolt and in an earlier separation between the flanges.





**Figure 2.2 – Total bolt working force for axial and eccentric load**  
(adapted from [3])

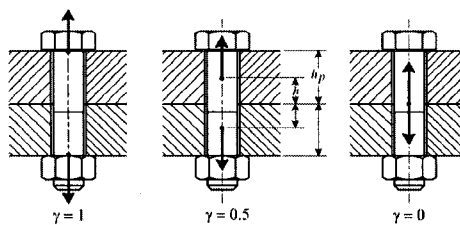
The position where the external load is applied will influence the force supplement in the bolt as described in [2, 7-12].

**2.4.4. Load Factor**

The load factor is another parameter which influences the force supplement, but mostly before the separation occurs. Initially, the load factor was associated to the height at which the external load was applied on an assembly as shown in Figure 2.3. Thus, the load factor, which depends on the assembly geometry, has a constant value and can be evaluated with Equation (2.4).

$$\gamma = (h/h_p) \tag{2.4}$$

Where  $0 \leq \gamma \leq 1$



**Figure 2.3 – Load factor**

Instead of determining a constant load factor for the analytical model, Bahkiet [10, 11] found an empirical Equation (2.5) which evaluates the load factor from the ratio between the position ( $s$ ) of the equivalent contact force ( $F_c$ ) and the flange thickness ( $h_p$ ). The load factor is limited to values from 0 to 1.

$$\gamma = 2.2\left(\frac{s}{h_p}\right) - 0.6 \quad (2.5)$$

Where  $0 \leq \gamma \leq 1$

With the purpose of introducing dimensionless parameters which allow easy behaviour comparison, Equation (2.5) can be reformulated by taking into account two different ratios. First of all, instead of using the position ( $s$ ) of the equivalent contact force ( $F_c$ ), the ratio between the position ( $s$ ) and the outer contact length ( $X$ ) would be more representative for comparison between two assemblies. Moreover, to get an equivalent equation to Equation (2.5), another ratio need to be introduced, which is a geometrical ratio between the outer contact length ( $X$ ) and the plate thickness ( $h_p$ ). Then, Equation (2.5) can be reformulated as Equation (2.6). The definition of each parameter is shown in Figure 2.4.

$$\gamma = 2.2\left(\frac{X}{h_p}\right)\left(\frac{s}{X}\right) - 0.6 \quad (2.6)$$

Where  $0 \leq \gamma \leq 1$

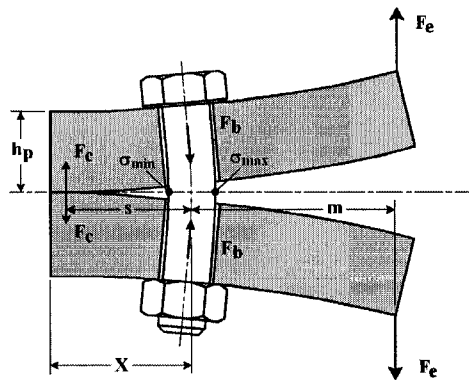


Figure 2.4 – Assembly submitted to eccentric loading

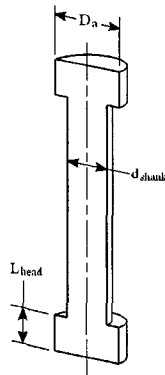
In Equation (2.6), the ratio  $(X/h_p)$  can be associated to the formation of the compression cone, which could be interrupted if the ratio  $(X/h_p)$  is much lower than 1. This will influence the behaviour of the preloaded bolted assembly. The ratio  $(s/X)$  can be associated to the fraction of the contact length where the equivalent contact force is located. With these dimensionless parameters, it is simpler to compare two different sizes of assemblies. Thus, Equation (2.6) shows the existence of hidden dimensionless parameters in the evaluation of the load factor. Despite the fact that this equation does not provide accurate results for any geometry and probably does not regroup every parameter on which depends the load factor, it gives better results than for a constant value as proposed in [10, 11]. In the same manner, this type of reasoning is further applied in order to define more appropriate dimensionless parameters for a more effective behaviour assessment.

## **2.5. Geometry Definitions**

As mentioned before, the first objective is to find a common basis for the geometry definition which would help to easily compare different sizes of assemblies. To reach this objective, bolted joints need to be expressed in terms that allow comparison. Thus, instead of defining geometries based on their dimensions, they can be defined with respect to their proportions. Therefore, if all dimensions of bolted joints are expressed with respect to their bolt nominal diameter, it should be possible to compare two assemblies having the same proportions and different bolt nominal diameters and find a common basis for their evaluation.

### **2.5.1. The Bolt**

The first step is to parameterize the bolt dimension. The purpose of parameterizing the bolt is to simplify the geometry updates in the model for further analyses. Therefore, the diameter and the height of the bolt head have been approximated by a ratio of bolt nominal diameter. These equations are presented in Figure 2.5.



**Dimensions:**

$$d_{shank} = 0.86d_{nom}$$

$$D_a = 1.4d_{nom}$$

$$L_{head} = 0.65d_{nom}$$

**Limits:**

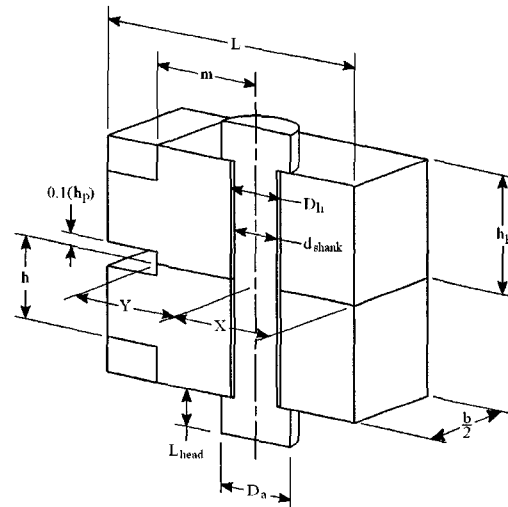
$$5mm \leq d_{nom} \leq 16mm$$

**Figure 2.5 – Bolt geometry**

As a simplification, the threads have not been directly represented in the FEA model. It has been taken into account with an equivalent smaller bolt shank diameter which has been approximated with a linear relation with respect to the bolt nominal diameter. The nominal diameter studied has been limited between 5mm and 16mm. This bolt model has been used for both cases presented in the next two sections.

**2.5.2. First Configuration: Two Rectangular Plates Assembly**

Figure 2.6 presents the parameters used to determine each dimension for the first study case which is an assembly of two rectangular plates bolted together. As shown in Figure 2.6, the bolt nominal diameter ( $d_{nom}$ ) is the main control parameter and all the other dimensions are expressed with respect to this parameter.



Dimensions:

$$h_p = h_{p \text{ frac}} * d_{nom}$$

$$X = X_{frac} * d_{nom}$$

$$Y = Y_{frac} * d_{nom}$$

$$b = b_{frac} * d_{nom}$$

$$m = m_{frac} * d_{nom}$$

$$h = \gamma * h_p$$

$$L = X + 5 * d_{nom}$$

$$D_h = d_{nom} + 0.1$$

Geometric parameters:

$$5 \leq d_{nom} \leq 16 \text{ mm}$$

$$2 \leq h_{p \text{ frac}} \leq 4$$

$$1.5 \leq X_{frac} \leq 3.5$$

$$1.5 \leq Y_{frac} \leq 3.5$$

$$2.5 \leq b_{frac} \leq 5$$

$$1 \leq m_{frac} \leq 3$$

$$0.2 \leq \gamma \leq 0.8$$

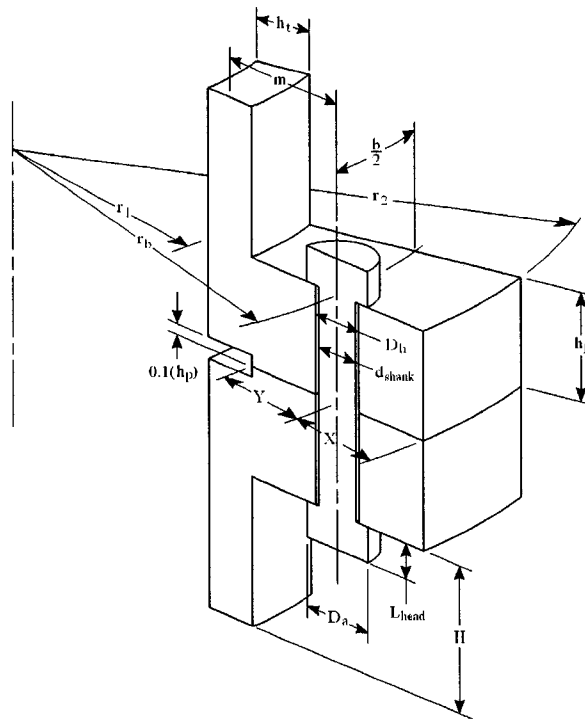
Figure 2.6 – First model: Geometry of two rectangular plates assembly

Thus, the following dimensionless parameters define the geometry: thickness to nominal diameter ratio ( $h_{p \text{ frac}}$ ), outer contact length to nominal diameter ratio ( $X_{frac}$ ), inner contact length to nominal diameter ratio ( $Y_{frac}$ ), width to nominal diameter ratio ( $b_{frac}$ ), eccentricity to nominal diameter ratio ( $m_{frac}$ ) and load factor ( $\gamma$ ). Therefore, if the bolt nominal diameter changes, every dimension of the assembly will follow to keep the same proportions with the new sized assembly.

### 2.5.3. Second Configuration: Two Cylindrical Flanges Assembly

Figure 2.7 presents the parameters used to determine every dimension for the second case which is an assembly of two cylindrical bolted flanges. As for the previous

geometry, the bolt nominal diameter ( $d_{nom}$ ) is the main parameter to control. Thus, the geometry has been defined with the following dimensionless parameters: thickness to nominal diameter ratio ( $h_{p\_frac}$ ), tube thickness to nominal diameter ratio ( $h_{t\_frac}$ ), inner tube radius to nominal diameter ratio ( $r_{1\_frac}$ ), outer contact length to nominal diameter ratio ( $X_{frac}$ ), inner contact length to nominal diameter ratio ( $Y_{frac}$ ), width to nominal diameter ratio ( $b_{frac}$ ), eccentricity to nominal diameter ratio ( $m_{frac}$ ) and height of the tubular part to nominal diameter ratio ( $H_{frac}$ ).



Dimensions:

$$h_p = h_{p\_frac} * d_{nom}$$

$$X = X_{frac} * d_{nom}$$

$$Y = Y_{frac} * d_{nom}$$

$$Y_{frac} < m_{frac} + \frac{h_{t\_frac}}{2}$$

$$b = b_{frac} * d_{nom}$$

$$r_1 = r_{1\_frac} * d_{nom}$$

$$D_h = d_{nom} + 0.1$$

$$m = m_{frac} * d_{nom}$$

$$H = H_{frac} * d_{nom}$$

$$h_t = h_{t\_frac} * d_{nom}$$

$$h_{t\_frac} < 2(m_{frac} - 1)$$

$$r_b = r_1 + \frac{h_t}{2} + m$$

$$r_2 = r_b + X$$

Geometric parameters:

$$2.5 \leq b_{frac} \leq 5$$

$$2 \leq h_{p\_frac} \leq 3.5$$

$$1 \leq h_{t\_frac} \leq 2$$

$$3 \leq r_{1\_frac} \leq 7$$

$$1.5 \leq X_{frac} \leq 3.5$$

$$1.5 \leq Y_{frac} \leq 2.5$$

$$1.75 \leq m_{frac} \leq 3$$

$$2 \leq H_{frac} \leq 6$$

Recommendations:

$$b_{frac} \approx D_{a\_frac} + h_{p\_frac} = 1.4 + m_{frac}$$

$$h_{p\_frac} \approx m_{frac}$$

$$X_{frac} \approx h_{p\_frac}$$

$$Y_{frac} \approx \frac{D_{a\_frac} + h_{p\_frac}}{2} = \frac{1.4 + m_{frac}}{2}$$

Figure 2.7 – Second model: Geometry of two cylindrical flanges assembly

#### 2.5.4. Statements

Two bolted joint assemblies which have the same geometry have been defined. They have the same geometrical proportions with respect to their own bolt nominal diameter, same materials, but different bolt nominal diameters. The initial stress in the bolt induced by the preload has to be the same for both assemblies. This means the preload will be proportional to the equivalent section of the bolt. Considering these conditions and that the supplements are only limited to the elastic domain, the first statement is that these two assemblies will have the same force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) when applying the same external force to preload ratio ( $F_p/Q$ ).

Furthermore, a second statement can be formulated from the first statement. A defined assembly will have the same force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) when applying the same external force to preload ratio ( $F_p/Q$ ), whatever the preload in the bolt.

Finally, from these two previous statements, a third one can be formulated. Two assemblies have been defined using all the same proportions and the same bolt nominal diameter, but with different materials. However, the part modulus of elasticity ( $E_p$ ) to the bolt modulus of elasticity ( $E_b$ ) ratio of each of these two assemblies are equal. With these conditions, the two assemblies will have the same force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) when applying the same external force to preload ratio ( $F_p/Q$ ).

To validate these three statements, numerous tests have been conducted. Two finite element models based on these two configurations have been defined and are presented in the next section.

#### 2.6. The Finite Element Models

The first model used to validate the hypotheses is a simple assembly of two plates bolted together, whereas the second model is a more realistic assembly of two cylindrical

flanges. All the analyses for both models have been performed using Ansys Workbench 11.

### 2.6.1. First model: Two Rectangular Plates Assembly

The finite element model used to evaluate the force supplement in the bolt is shown in Figure 2.8. The bolt and the joint are made of steel. Only hexahedron elements have been used in the mesh and their size have been determined by a convergence study. All boundary conditions applied to the finite element model are shown in Figure 2.8. The contact used between the two parts allows them to separate from each other when the load applied becomes high enough. A bonded contact has been used for the contact between the parts and the bolt head (and the nut), because with the preload applied, the bolt head should not move relatively to the parts. Concerning the loads in the model, the bolt preload has been applied on the cylindrical surface of the half bolt and the external force has been applied on each node on the lines inside the two parts (as shown in Figure 2.8) by an APDL commands block.

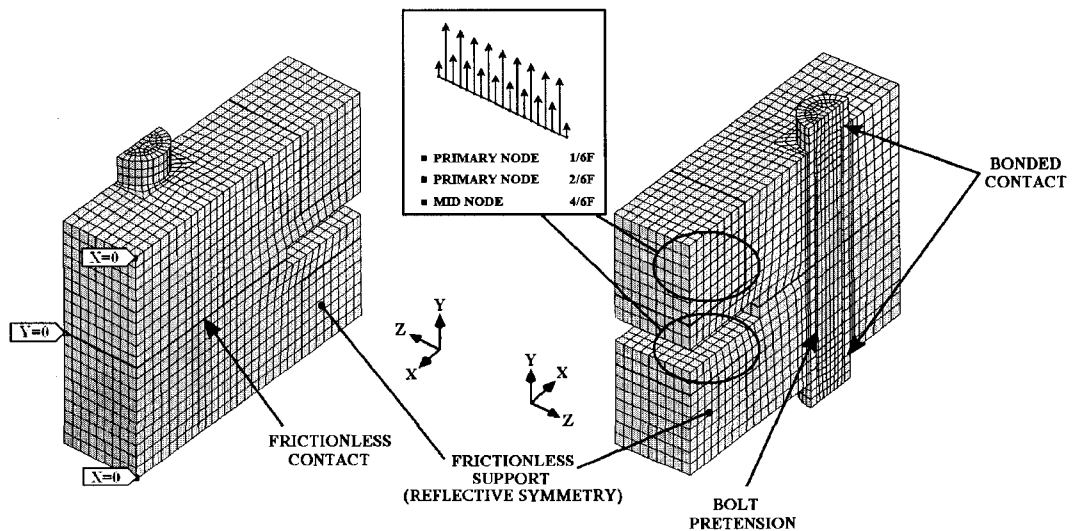


Figure 2.8 – First model: Finite element model for a two rectangular plates assembly



The parameterization of these lines allowed easy modifications of the position of the external force on the assembly. The results of the force supplement in the FEA model has been post-processed with another APDL commands block.

### 2.6.2. Second model: Two Cylindrical Flanges Assembly

The finite element model used to evaluate the force supplement in the bolt is shown in Figure 2.9. The parts and the bolt are made of steel. Only quadratic hexahedron elements have been used in the mesh and their size has been determined by a convergence test similar to the previous model.

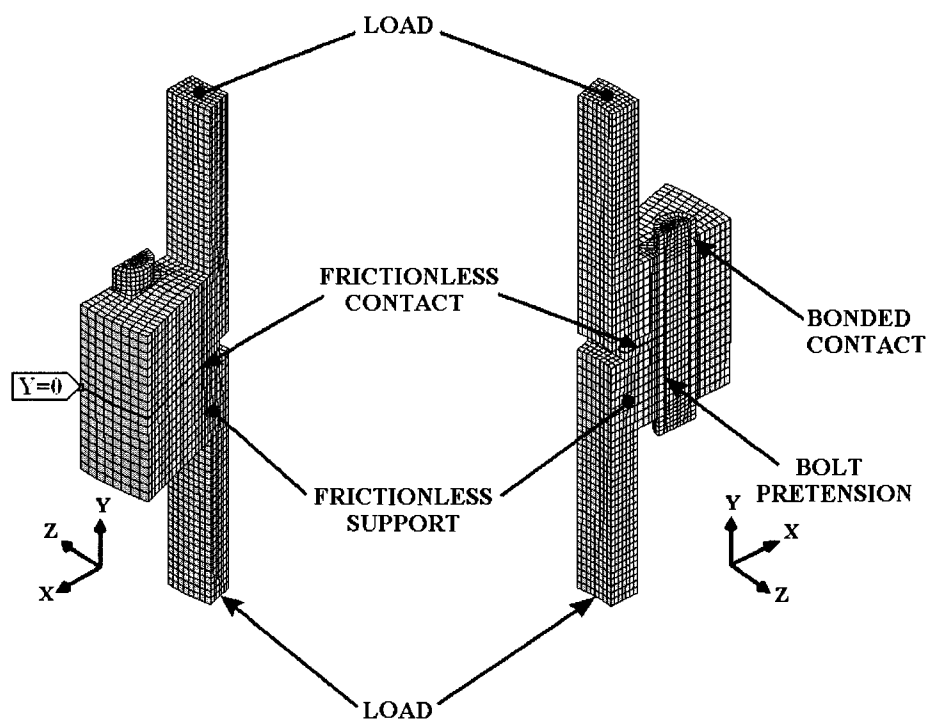


Figure 2.9 – Second model: Finite element model for a two cylindrical flanges assembly

The boundary conditions and the forces applied on this model are very similar to the previous model as shown in Figure 2.9. As seen in Figure 2.9, two frictionless supports have been applied. The first one has been applied on the cutting plane between two bolts

while the second has been applied on the cutting plane of the half bolt. Thus, these two frictionless supports are linked to the symmetry planes in a cylindrical flanges assembly. The non-parallelism of the two symmetry planes eliminates the displacement of the assembly in X (or radial) direction.

### 2.6.3. Force Supplement Evaluation from FEA Results

In finite element analysis, the force supplement and the moment supplement can be evaluated from the maximum and minimum stresses in the bolt shank. For an assembly of two identical flanges, the maximum and minimum stresses used to calculate the supplements in the bolt must be taken at the symmetry plane as shown in Figure 2.4.

$$\sigma_{force} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{4(\Delta F_b + Q)}{\pi(d_{shank})^2} \quad (2.7)$$

$$\sigma_{moment} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{32\Delta M_b}{1000\pi(d_{shank})^3} \quad (2.8)$$

By using Equation (2.7) and Equation (2.8), the force supplement ( $\Delta F_b$ ) and the moment supplement ( $\Delta M_b$ ) can be calculated. These supplements are needed to predict the bolts fatigue life when assemblies are submitted to cyclic loading.

### 2.6.4. Equivalent Contact Force Position from FEA Results

The position ( $s$ ) can be calculated from the moment equilibrium. For a simple case of rectangular plates assembly as shown in Figure 2.4, the position ( $s$ ) is evaluated with Equation (2.9). To evaluate the position ( $s$ ), Equation (2.9) needs values from the external force, the eccentricity and the equivalent contact force which comes from finite element analysis results.

$$s = \left( \frac{F_e}{F_c} \right) m \quad (2.9)$$

For realistic cases such as a cylindrical flanges assembly, it becomes more complex to evaluate this position ( $s$ ) from the finite element analysis results.

### 2.6.5. Types of Analyses Performed

To verify the three statements mentioned previously, three different tests have been performed for both models. The first statement concerns the independence of the response behaviour of preloaded bolted assemblies over their bolt nominal diameter when using the dimensionless parameters. To validate this statement, the proportions of the analysed geometry have been defined. Then, four bolt nominal diameters have been selected to compare the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) obtained from the FEA with respect to the bolt nominal diameter. The preload applied for each bolt size has been chosen in order to create the same initial stress in the bolt (defined to be 600 MPa) when no external load has been applied on the assembly. The preload corresponding to each bolt nominal diameter is presented in Table 2.1.

**Table 2.1 – Preload corresponding to each bolt nominal diameter**

	5 mm	8 mm	12 mm	16 mm
Q (N)	8713	22306	50188	89223

To validate the first statement for the first model and to show the independence of the proportions chosen over the behaviour of bolted joints, two assemblies have been defined with different proportions shown in Table 2.2.

**Table 2.2 – Proportions for rectangular plates assemblies A & B**

#	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$d_{frac}$	$h_{p,frac}$	$\gamma$
A	3	3	3	3	3	0.5
B	1.5	1.75	1.5	2.5	3.5	0.7

For each of these two geometries (A and B), analyses have been completed for the four bolt nominal diameters. Thereafter, to confirm the generality of the first statement, the same procedure has been applied for the second model, which is the cylindrical flanges assembly. The two different geometrical proportions are shown in Table 2.3.

**Table 2.3 – Proportions for cylindrical flanges assemblies A & B**

#	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$b_{frac}$	$h_p frac$	$r_1 frac$	$H_{frac}$	$h_i frac$
A	3	3	3	3	3	3	6	1.5
B	1.5	1.75	1.75	2.5	3.5	7	6	1

In order to validate the second statement, three different preloads have been chosen and are presented in Table 2.4.

**Table 2.4 – Preload applied for a 16mm bolt nominal diameter**

$d_{nom}$	Q (N)		
16 mm	59482	89223	118964

Then, a rectangular plates assembly with constant proportions has been defined as well as its bolt nominal diameter. The chosen proportions of the assembly (C) are presented in Table 2.5.

**Table 2.5 – Proportions for rectangular plates assembly C**

#	$d_{nom}$ (mm)	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$b_{frac}$	$h_p frac$	$\gamma$
C	16	2.5	2.5	3	3	2	0.3

The proportions and bolt nominal diameter remain the same for the analyses performed with these three preloads. Once again, to confirm the generality of the second statement, the same analyses have been performed on a cylindrical flanges assembly (C) with the proportions presented in Table 2.6.

**Table 2.6 – Proportions for cylindrical flanges assembly C**

#	$d_{nom}$ (mm)	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$b_{frac}$	$h_p frac$	$r_1 frac$	$H_{frac}$	$h_i frac$
C	16	2.5	2.5	3	3	2	7	6	1

For the third statement, four finite element analyses have been performed for the rectangular plates assembly (C) using different material combinations presented in Table 2.7.

**Table 2.7 – Materials used for bolt and parts**

#	Bolt Material	Parts Material
1	Steel	Steel
2	Aluminium	Aluminium
3	Steel	Aluminium
4	Aluminium	Steel

The same analysis has been completed for the cylindrical flanges assembly (C) using the same material combinations in order to confirm the generality of the third statement. The force supplement in the bolt has been extracted from these analyses and the force supplement to preload ratio has been determined from these results. The plots and their explanation are presented in the next section.

## 2.7. Results and Analyses

### 2.7.1. Results from the Finite Element Analyses

The first important result found from the analyses mentioned above shows that it is possible to predict the response behaviour of bolted joints without knowing their bolt nominal diameter if the dimensionless parameters proposed are used. To prove this affirmation, the results of a rectangular plates assembly (A) are presented in Table 2.8.

**Table 2.8 – Finite element results for rectangular plates assembly A**

$d_{nom}$ (mm)	Q (N)	$F_c$ (N)	$\Delta F_b$ (N)	$\Delta M_b$ (Nm)	$F_c$ (N)	s (mm)
5	8713	1089	4.7	0.002	7637	2.1
5	8713	2178	46.6	0.014	6582	5.0
5	8713	4357	871.0	0.175	5228	12.5
5	8713	5809	3287.4	0.471	6192	14.1
8	22306	2788	12.1	0.013	19530	3.4
8	22306	5576	119.5	0.064	16849	7.9
8	22306	11153	2232.5	0.718	13385	20.0
8	22306	14871	8417.8	1.934	15851	22.5
12	50188	6274	27.2	0.023	43942	5.1
12	50188	12547	268.9	0.195	37910	11.9
12	50188	25094	5022.6	2.403	30116	30.0
12	50188	33459	18937.0	6.504	35666	33.8
16	89223	11153	48.3	0.070	78118	6.9
16	89223	22306	478.1	0.477	67396	15.9
16	89223	44612	8928.3	5.713	53538	40.0
16	89223	59482	33667.0	15.433	63406	45.0

From these results, the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) and the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) have been computed and plotted in Figure 2.10. As seen on the chart, the four curves are superposed, which means that the bolt nominal diameter does not influence the response behaviour of bolted joints if these dimensionless parameters are used. Moreover, other dimensionless parameters can be developed using the same approach as seen in Figure 2.11, Figure 2.12 and Figure 2.13. The four curves on each chart are superposed as well.

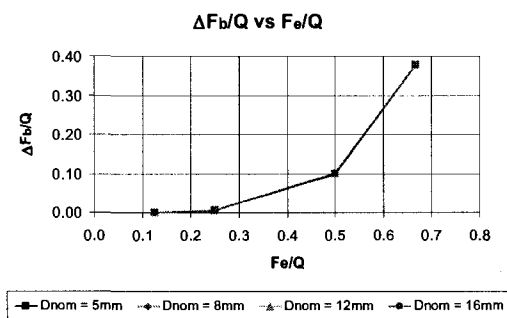


Figure 2.10 – Rectangular plates assembly A: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio

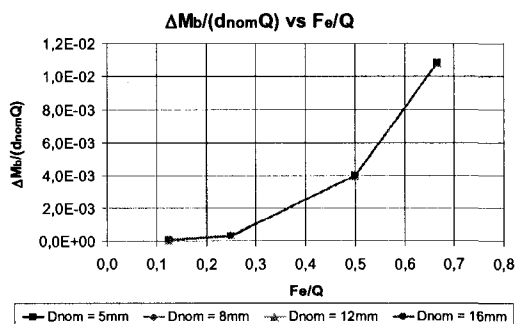


Figure 2.11 – Rectangular plates assembly A: moment supplement to preload and bolt nominal diameter ratio vs external force to preload ratio

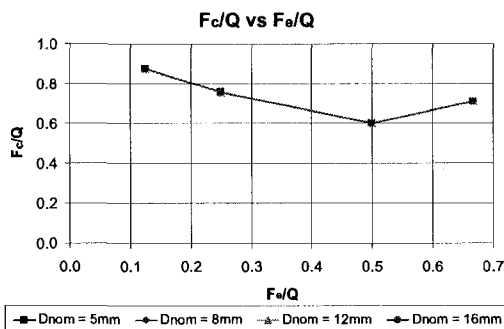


Figure 2.12 – Rectangular plates assembly A: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio

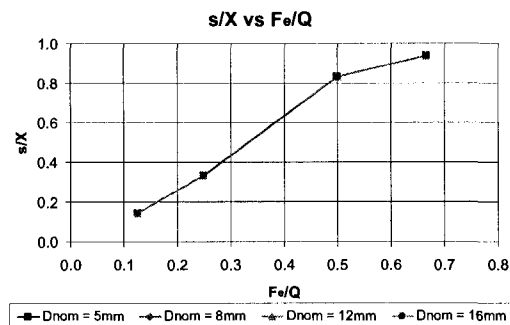
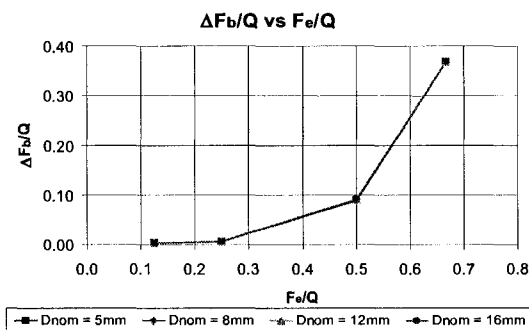


Figure 2.13 – Rectangular plates assembly A: position (s) to contact length (X) ratio vs external force to preload ratio

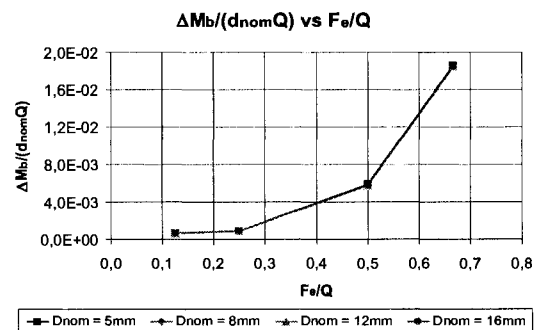
To prove that this result is independent from the assembly proportions, the same dimensionless parameters have been calculated for a second rectangular plates assembly (B). The results coming from the finite element analyses are presented in Table 2.9 and the charts presenting the relation between the dimensionless parameters are presented in Figure 2.14 to Figure 2.17.

**Table 2.9 – Finite element results for rectangular plates assembly B**

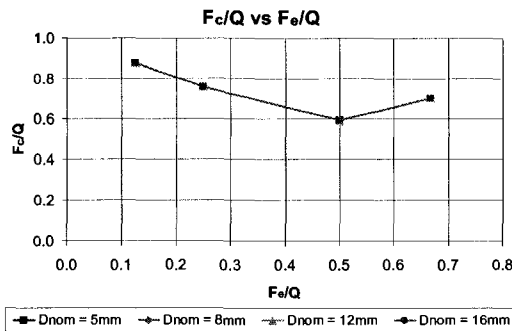
$d_{nom}$ (mm)	Q (N)	$F_e$ (N)	$\Delta F_b$ (N)	$\Delta M_b$ (Nm)	$F_c$ (N)	s (mm)
5	8713	1089	26.6	0.026	7651	1.1
5	8713	2178	53.7	0.038	6589	2.5
5	8713	4357	782.4	0.254	5139	6.4
5	8713	5809	3209.5	0.809	6113	7.1
8	22306	2788	68.0	0.105	19586	1.7
8	22306	5576	137.3	0.152	16867	4.0
8	22306	11153	2005.0	1.037	13158	10.2
8	22306	14871	8215.2	3.305	15649	11.4
12	50188	6274	153.1	0.359	44068	2.6
12	50188	12547	309.0	0.518	37950	6.0
12	50188	25094	4511.4	3.505	29604	15.3
12	50188	33459	18486.0	11.156	35214	17.1
16	89223	11153	272.0	0.842	78342	3.4
16	89223	22306	549.1	1.219	67466	7.9
16	89223	44612	8021.7	8.297	52632	20.3
16	89223	59482	32862.0	26.423	62600	22.8



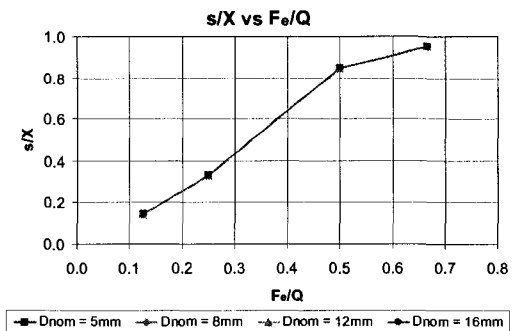
**Figure 2.14 – Rectangular plates assembly B: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio**



**Figure 2.15 – Rectangular plates assembly B: moment supplement to preload and bolt nominal diameter ratio vs external force to preload ratio**



**Figure 2.16 – Rectangular plates assembly B: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio**



**Figure 2.17 – Rectangular plates assembly B: position (s) to contact length (X) ratio vs external force to preload ratio**

Furthermore, the same type of analyses has been performed for the two different cylindrical flanges assemblies (A and B) and their results have been presented in Table 2.10 and Table 2.11.

**Table 2.10 – Finite element results for cylindrical flanges assembly A**

$d_{nom}$ (mm)	$Q$ (N)	$F_e$ (N)	$\Delta P_b$ (N)	$\Delta M_b$ (Nm)	$F_c$ (N)
5	8713	1089	11.722	0.001	7636
5	8713	2178	38.788	0.007	6574
5	8713	4357	253.89	0.060	4610
5	8713	5809	720.57	0.145	3625
8	22306	2788	30.014	0.002	19548
8	22306	5576	99.423	0.029	16829
8	22306	11153	650.19	0.244	11803
8	22306	14871	1845.2	0.593	9280
12	50188	6274	67.542	0.012	43982
12	50188	12547	223.82	0.105	37864
12	50188	25094	1467.1	0.832	26562
12	50188	33459	4156.8	2.005	20884
16	89223	11153	119.92	0.016	78190
16	89223	22306	397.92	0.237	67314
16	89223	44612	2599.2	1.954	47210
16	89223	59482	7402.7	4.745	37144



Table 2.11 – Finite element results for cylindrical flanges assembly B

$d_{nom}$ (mm)	Q (N)	$F_e$ (N)	$\Delta F_b$ (N)	$\Delta M_b$ (Nm)	$F_e$ (N)
5	8713	1089	42.374	0.022	7666
5	8713	2178	84.747	0.036	6620
5	8713	4357	306.08	0.104	4662
5	8713	5809	882.17	0.246	3786
8	22306	2788	108.39	0.090	19626
8	22306	5576	216.79	0.145	16947
8	22306	11153	786.25	0.426	11939
8	22306	14871	2258	1.004	9693
12	50188	6274	243.77	0.304	44158
12	50188	12547	487.51	0.489	38128
12	50188	25094	1766.6	1.439	26860
12	50188	33459	5076.9	3.387	21806
16	89223	11153	433.54	0.714	78504
16	89223	22306	867.07	1.153	67784
16	89223	44612	3153.8	3.412	47766
16	89223	59482	9041	8.027	38782

In Figure 2.18 to Figure 2.23, the four curves on each chart are superposed such as for the charts of the rectangular plates assemblies.

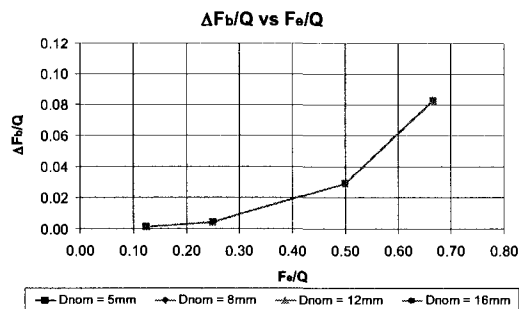


Figure 2.18 – Cylindrical flanges assembly A:  
force supplement to preload ratio vs external  
force to preload ratio

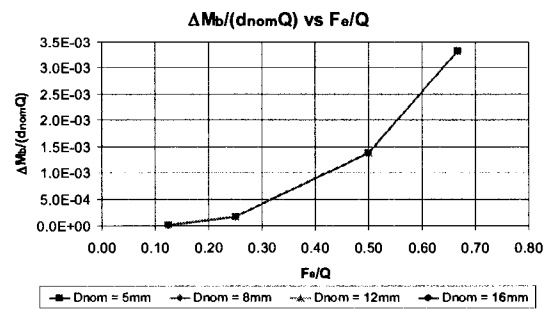
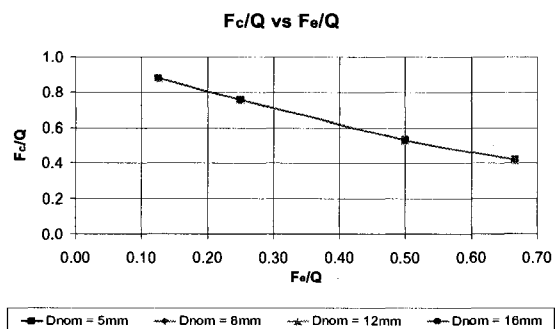
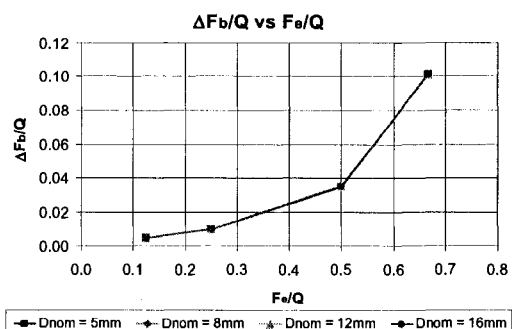


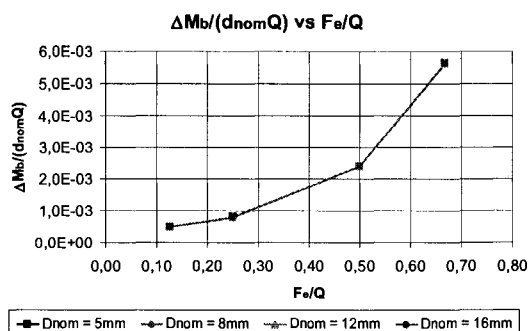
Figure 2.19 – Cylindrical flanges assembly A:  
moment supplement to preload and bolt  
nominal diameter ratio vs external force to  
preload ratio



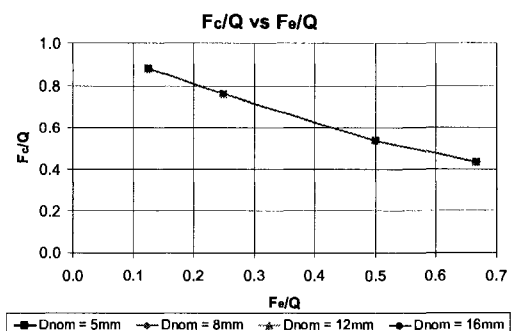
**Figure 2.20 – Cylindrical flanges assembly A: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio**



**Figure 2.21 – Cylindrical flanges assembly B: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio**



**Figure 2.22 – Cylindrical flanges assembly B: moment supplement to preload and eccentricity ratio vs external force to preload ratio**



**Figure 2.23 – Cylindrical flanges assembly B: equivalent contact force to preload ratio vs external force to preload ratio**

### 2.7.2. Discussion

All the results mentioned above show that for assemblies which have the same proportions compared to their own bolt nominal diameter, the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) produced by the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) will be the same regardless of the bolt nominal diameter. Therefore, the first hypothesis has been confirmed.

The second important result found shows the uselessness to set the preload to predict the response behaviour of a bolted assembly when using these dimensionless parameters. Table 2.12 and the Table 2.13 show the results from FEA for both rectangular plates and cylindrical flanges assemblies.

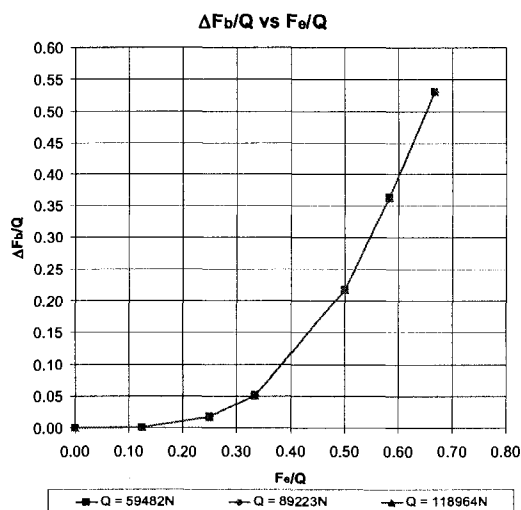
**Table 2.12 – Finite element results for rectangular plates assembly C**

$d_{nom}$ (mm)	Q (N)	$F_p$ (N)	$\Delta F_b$ (N)
16	59482	0	0.00
16	59482	7435	62.6
16	59482	14871	1058.9
16	59482	19827	3041.4
16	59482	29741	12928.0
16	59482	34698	21585.0
16	59482	39655	31595.0
16	89223	0	0.0
16	89223	11153	93.9
16	89223	22306	1588.3
16	89223	29741	4562.4
16	89223	44612	19393.0
16	89223	52047	32377.0
16	89223	59482	47390.0
16	118964	0	0.0
16	118964	14871	125.2
16	118964	29741	2117.6
16	118964	39655	6083.3
16	118964	59482	25857.0
16	118964	69396	43169.0
16	118964	79310	63189.0

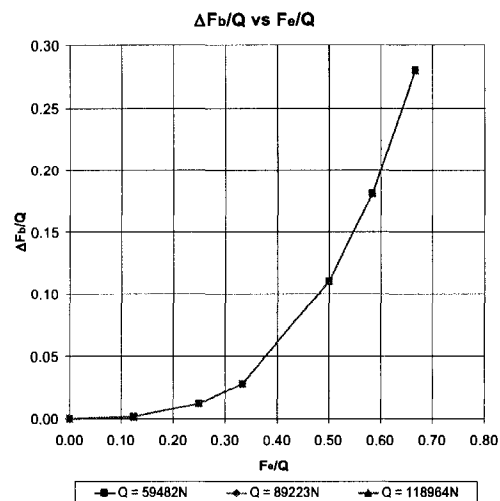
**Table 2.13 – Finite element results for cylindrical flanges assembly C**

$d_{nom}$ (mm)	Q (N)	$F_p$ (N)	$\Delta F_b$ (N)
16	59482	0	0
16	59482	7435	95.042
16	59482	14871	718.06
16	59482	19827	1673.1
16	59482	29741	6551.5
16	59482	34698	10776
16	59482	39655	16670
16	89223	0	0
16	89223	11153	142.58
16	89223	22306	1077
16	89223	29741	2510
16	89223	44612	9827.6
16	89223	52047	16165
16	89223	59482	25004
16	118964	0	0
16	118964	14871	190.11
16	118964	29741	1436
16	118964	39655	3346.5
16	118964	59482	13103
16	118964	69396	21553
16	118964	79310	33340

From these results, the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) with respect to external force to preload ratio ( $F_p/Q$ ) can be determined as shown in Figure 2.24 and Figure 2.25.



**Figure 2.24 – Rectangular plates assembly C:  
force supplement to preload ratio vs external  
force to preload ratio**

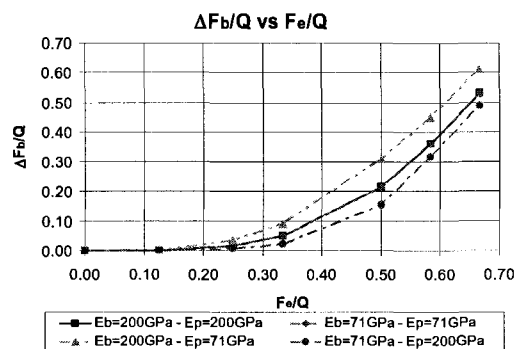


**Figure 2.25 – Cylindrical flanges assembly C:  
force supplement to preload ratio vs external  
force to preload ratio**

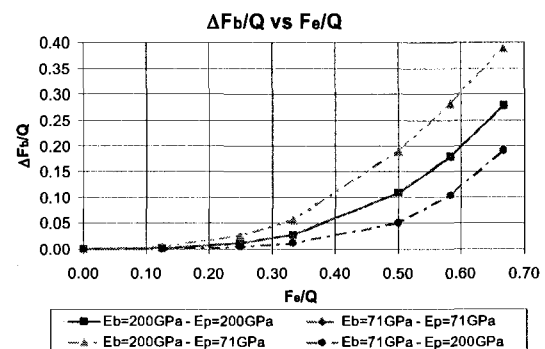
In these two charts, it is shown that the preload does not influence the response behaviour of bolted joints when using the dimensionless parameters because the three curves are superimposed in each chart. In the case where the external force is known, a preload value can be selected and with the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ), the corresponding force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) can be read on the curve obtained with another preload value. When multiplying this result by the preload ( $Q$ ), the force supplement can be determined easily. Thus, the same curve can be used to evaluate the force supplement when the preload changes in a bolted assembly, which will be more effective and less time consuming. Therefore, the second hypothesis has also been confirmed.

Finally, concerning the third statement, Figure 2.26 and Figure 2.27 clearly show that for a constant ratio between the modulus of elasticity of the bolt and the one of the parts ( $E_b/E_p$ ), the response behaviour of the assembly will be the same when the dimensionless parameters are used. This is valid for any material combination. However,

the material combinations used are unusual, because they have only been chosen to validate the third statement. Moreover, as it can be seen in the charts, when the ratio between the modulus of elasticity of the parts and the bolt ( $E_b/E_p$ ) decreases (and then the bolt stiffness to part stiffness ratio ( $K_b/K_p$ ) decreases too), the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) decreases as well. This means the force supplement in the bolt will decrease and the bolt fatigue life will be higher.



**Figure 2.26 – Rectangular plates assembly C: force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for different materials**



**Figure 2.27 – Cylindrical flanges assembly C: Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for different materials**

This is confirmed by reality and is mentioned also by Guillot [2] in its design rules where it is stated that the best bolt fatigue behaviour is obtained by installing compliant bolts on stiff parts. Therefore, the last hypothesis has also been confirmed.

## 2.8. Conclusion

To improve the theory on preloaded bolted joints, new dimensionless parameters concerning their response behaviour have been found. These parameters had to regroup different assemblies which have similar response behaviour. To easily compare the different geometries, each dimension of each assembly has been expressed with respect to their bolt nominal diameter. Moreover, the force supplement and the external force

have been divided by the preload, which leads to the dimensionless parameters used to compare the response behaviour of the assemblies.

The finite element analyses results led to the establishment of three conditions from an initial hypothesis. Thus, if two assemblies have the same geometrical proportions with respect to their own bolt nominal diameter, the same ratio between their own modulus of elasticity of the bolt and the parts ( $E_b/E_p$ ) and if they have:

Condition 1: Different bolt nominal diameters, and/or;

Condition 2: Different preloads, and/or;

Condition 3: Different materials.

then:

Consequence: The bolted assemblies will have the same response behaviour such as the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) against the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ).

These conditions will be true as well for the ratio between the bending moment supplement to bolt nominal diameter times preload ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ) and for other dimensionless parameters defined, such as the equivalent contact force to preload ratio ( $F_c/Q$ ) and the position of the equivalent contact force to outer contact length ratio ( $s/X$ ).

In conclusion, by using previously mentioned dimensionless parameters, it is possible to restrain the number of experiments or finite element analyses needed to predict the response behaviour of preloaded bolted assemblies. For example, instead of performing the same experiments of an assembly under three different preloads, only one test with one of those three preloads will now be needed. Moreover, with these parameters, it becomes useless to initially determine the bolt size to predict the response behaviour of a bolted assembly; only the geometrical proportions and the ratio between the modulus of elasticity of the bolt and the parts are needed. Therefore, the bolt size, the preload and the material properties will no longer be parameters that need to be initially chosen. Only the geometric ratios, force ratios and material property ratios are needed to predict

the response behaviour of preloaded bolted assemblies. Thus, the bolt nominal diameter, the preload and the material properties can be set afterwards, in respect to a fatigue criterion for example. From the results of only one finite element analysis, it will be possible to extrapolate the force supplement of many other possible bolted assemblies. Moreover, it would easily be possible to tabulate the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) versus the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) for different assemblies in respect to their geometrical proportions. For example, for an assembly with constant proportions for which the mass is the objective to minimize, it is possible to find the best combination of bolt nominal diameter and preload to have a maximum mean and alternate stress inferior to the values allowed. The results from only one finite element analysis are needed to plot the dimensionless force and moment supplements against the external force to preload ratio. For different bolt nominal diameters, because the external force is constant, the mean and the alternate stress in the bolt can be plotted on the same chart with respect to the preload. Thus, the best combination that provides stresses under the two prescribed criteria can be found quickly.

## 2.9. References

- [1] J. Rasmussen, "A two body contact problem with friction," in *Euromech Colloquium NR 110 Rimforsa, Italy*, 1978.
- [2] J. Guillot, "Assemblages par éléments filetés. Calcul," in *Techniques de l'Ingénieur, traité Mécanique et Chaleur*, Paris, France, 1989, pp. B5 560 – B5 562.
- [3] J. C. Musto et N. R. Konkle, "Computation of member stiffness in the design of bolted joints," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 128, no. 6, pp. 1357-1360, 2006.
- [4] J. E. Shigley, R. Mischke, et G. Budynas, *Mechanical Engineering Design*, 7<sup>e</sup> éd., New York: McGraw-Hill, 2004.
- [5] VDI2230, *Part 1, Systematic Calculation of High Duty Bolted Joints : Joints with One Cylindrical Bolt*, Dusseldorf, Germany: VDI, 1989.

- [6] J. Wileman, M. Choudhury, et I. Green, "Computation of member stiffness in bolted connections," in *Proceedings of the 1990 ASME International Computers in Engineering Conference and Exposition, Boston, MA*, 1990, pp. 539-544.
- [7] J. Massol, "Étude des assemblages boulonnés à chargement faiblement excentré soumis à des sollicitations de fatigue," L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 1994.
- [8] P. Agatonovic, "The computation of bolted joints," *Wire World International*, vol. 15, pp. 192-198, 1973.
- [9] P. Agatonovic, "Beam model of bolted flanged connections," *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, vol. 2, no. 1, pp. 21-29, 1985.
- [10] E. M. Bahkiet, "Étude des assemblages boulonnés a chargement fortement excentré soumis à des sollicitations de fatigue," L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 1994.
- [11] E. M. Bakhiet et J. F. Guillot, "Analytical model of bolted joints subjected to high eccentric loadings," in *Proceedings of the 2nd Biennial European Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis. Part 7 (of 8), London, Engl*, vol. 64, 1994, pp. 301-313.
- [12] A. Vadean, J. Guillot, et D. Pop, "Etude paramétrique de modélisations tridimensionnelles des assemblages boulonnés de brides cylindriques – Acta Technica Napocensis," *series Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Cluj-Napoca, Romania*, pp. 243-248, 1998.



## CHAPITRE 3

### 3. ARTICLE II: NEW MODELING APPROACH FOR PRELOADED BOLTED JOINTS SUBMITTED TO CYCLIC LOADING – PART II: ANALYTICAL, NUMERICAL AND EXPERIMENTAL VALIDATION

#### 3.1. Présentation du chapitre

Dans cette deuxième partie d'un article présenté sous deux parties, un rappel des trois conditions basées sur les nouveaux paramètres adimensionnels développés dans la première partie a d'abord été effectué. Ensuite, à partir de résultats expérimentaux issus de travaux antérieurs effectués par Bahkiet [2] et Massol [1] sur des brides en chape, les nouveaux paramètres adimensionnels de force ont été utilisés pour représenter les courbes de supplément de force dans le boulon. Les dimensions de la géométrie étudiée ont été exprimées en termes de diamètre nominal de boulon, tel que fait dans la première partie de l'article. Cependant, ces résultats expérimentaux ne permettent que de prouver la deuxième condition développée dans la première partie de l'article et qui stipulait entre autres que la valeur de la force de précontrainte ( $Q$ ) n'a aucun impact sur le supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ). De plus, sur ces mêmes graphiques sont présentées les courbes issues des résultats d'analyses par éléments finis et des modèles analytiques afin de vérifier la correspondance des modèles analytique et numérique avec les essais expérimentaux. Cette comparaison permet également de vérifier la validité des nouveaux paramètres adimensionnels et de la condition considérée. Un exemple d'application démontre à quel point il est possible de réduire le nombre d'analyses ou d'expériences nécessaires à la prévision des suppléments de force et de moment dans un boulon lorsque cette deuxième condition et les nouveaux paramètres adimensionnels sont utilisés.

**NEW MODELING APPROACH FOR PRELOADED BOLTED JOINTS  
SUBMITTED TO CYCLIC LOADING  
PART II: ANALYTICAL, NUMERICAL AND EXPERIMENTAL VALIDATION**

**Francis Turgeon, Aurelian Vadean<sup>†</sup>**

*École Polytechnique de Montréal, Department of Mechanical Engineering, P.O. Box  
6079, Station Centre-Ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3A7*

**3.2. Abstract**

In Part I [1] of this paper, a new modeling approach was proposed, which allows a faster assessment of the force supplement in a bolted joint under fatigue loading. From finite element results, three conditions based on new dimensionless parameters were developed, demonstrating that regrouping bolted assemblies with similar characteristics could be a very efficient method to study those assemblies. The second condition, which pertains to the independence of the bolted joint behaviour over the preload when using the dimensionless parameters, shows that the preload maximizing the fatigue bolt life can be quickly found without having to run any new analysis. Experimental results from two prismatic flanges assemblies studied by Massol [2] and Bahkiet [3] have been compared with analytical and numerical results to validate this second condition of the new approach. An example of application is presented to demonstrate how this condition can be exploited.

*Keywords:* Preloaded bolted joints; Dimensionless parameters; Cyclic loading; Finite element analyses; Experimental validation.

---

<sup>†</sup> Corresponding author. Tel.: 1-514-340-4711 ext.:4589; fax 1-514-340-5867.  
*E-mail address:* aurelian.vadean@polymtl.ca

### 3.3. Introduction

#### 3.3.1. Previously in Part I

In Part I [1] of this paper, it was proven using finite element modeling that the number of analyses or experiments needed to predict the bolted joint behaviour can be noticeably decreased, which will be more effective and less time consuming. An important conclusion, which allows to regroup bolted joints with similar characteristics, presented three conditions based on new dimensionless parameters. Thus, if two assemblies have the same geometrical proportions with respect to their own bolt nominal diameter, the same ratio between their own modulus of elasticity of bolt and parts ( $E_b/E_p$ ) and if they have:

*Condition 1:* Different bolt nominal diameters, and/or;

*Condition 2:* Different preloads, and/or;

*Condition 3:* Different materials.

then:

*Consequence:* The bolted assemblies will have the same response behaviour in terms of force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) against the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ).

These conditions will also be true for the ratio between the bending moment supplement to bolt nominal diameter times preload ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ) as well as for other dimensionless parameters defined, such as the equivalent contact force to preload ratio ( $F_c/Q$ ) and the position of the equivalent contact force to outer contact length ratio ( $s/X$ ).

#### 3.3.2. Objectives in Part II

For preloaded bolted joints, because the preload probably has the most influence in bolt fatigue behaviour, it is important to choose its appropriate value. Thus, it would be useful to quickly find the preload maximizing the fatigue life of a bolted assembly without having to run new analyses. The second condition explained in Part I [1], which pertained to the independence of the bolted joint behaviour over the preload when using

the dimensionless parameters, allows to reach this objective. For this reason, it is particularly important to corroborate the second condition with experimental results, which come from Massol's and Bahkiet's work [2, 3]. Unfortunately, the first and the third conditions detailed in Part I [1] cannot be confirmed with experimental results, because none have been found which would prove them. Therefore, the analytical, numerical and experimental validation of the second condition constitutes the main objective of this second part of the paper.

### 3.3.3. Content of the article

The geometry used in Part II is a prismatic flanges assembly, the same as studied by Massol [2] and Bahkiet [3] in their experiments. The geometry has been defined and its finite element model has been created. The results from this finite element model have been post-processed and compared with the analytical results from the beam model on elastic support and with the experimental results of Massol [2] and Bahkiet [3]. This comparison will show the independence of the response behaviour over the preload while using the new dimensionless parameters. Based on this new approach, new perspectives on preloaded bolted joints can be anticipated.

#### Nomenclature

$A_I$ :	Bolt unthreaded section ( $\text{mm}^2$ )	$D_h^*$ :	Bolt hole dimensionless diameter ( $\text{mm}/\text{mm}$ )
$A_p$ :	Equivalent cross-section of fastened parts ( $\text{mm}^2$ )	$D_p$ :	Fastened parts diameter ( $\text{mm}$ )
$A_p^*$ :	Dimensionless equivalent cross-section of fastened parts ( $\text{mm}^2/\text{mm}^2$ )	$D_p^*$ :	Fastened parts dimensionless diameter ( $\text{mm}/\text{mm}$ )
$A_s$ :	Bolt stress area ( $\text{mm}^2$ )	$E_b$ :	Bolt modulus of elasticity (MPa)
$D_a$ :	Bolt head diameter ( $\text{mm}$ )	$E_p$ :	Fastened parts modulus of elasticity (MPa)
$D_h$ :	Bolt hole diameter ( $\text{mm}$ )		

### Nomenclature

$E_t$ :	Tubular parts modulus of elasticity (MPa)	$S_c$ :	Fastened parts softness varying with the size of the contact area (mm/N)
$F_b$ :	Total force in the bolt (N)	$S_p$ :	Fastened parts softness (mm/N)
$\Delta F_b$ :	Force supplement in the bolt (N)	$S_p^*$ :	Fastened parts softness under the bolt head (mm/N)
$F_c$ :	Equivalent contact force (N)	$X$ :	Outer contact length (mm)
$F_e$ :	External force (N)	$X_{frac}$ :	Outer contact length to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$H$ :	Tubular height (mm)	$Y$ :	Inner contact length (mm)
$H_{frac}$ :	Tubular height to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)	$Y_{frac}$ :	Inner contact length to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$I_b$ :	Moment of inertia of bolt (mm <sup>4</sup> )	$a_1$ :	Coefficient
$I_p$ :	Moment of inertia of parts (mm <sup>4</sup> )	$a_2$ :	Coefficient
$I_t$ :	Moment of inertia of tubular parts (mm <sup>4</sup> )	$b$ :	Parts width (mm)
$K_b$ :	Bolt stiffness (N/mm)	$b_{frac}$ :	Parts width to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$K_p$ :	Fastened parts stiffness (N/mm)	$d_{nom}$ :	Bolt nominal diameter (mm)
$L$ :	Total length of the parts (mm)	$d_{shank}$ :	Diameter of bolt stress area (mm)
$L_{b1}$ :	Unthreaded bolt length	$h_p$ :	Part thickness (mm)
$L_{b2}$ :	Threaded bolt length	$h_{p\ frac}$ :	Part thickness to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$L_{head}$ :	Bolt head height (mm)	$h_t$ :	Tubular part thickness (mm)
$\Delta M_b$ :	Moment supplement in the bolt (Nm)	$h_{t\ frac}$ :	Tubular part thickness to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)
$Q$ :	Bolt preload (N)		
$S$ :	Total softness (mm/N)		
$S_b$ :	Bolt softness (mm/N)		

Nomenclature	
$m$ : Eccentricity of the external force (mm)	$s$ : Position of the equivalent contact force (mm)
$m_{frac}$ : Eccentricity to bolt nominal diameter ratio (mm/mm)	$\Phi$ : Beam model coefficient
$q_1$ : Beam model factor	$\beta$ : Asymptote gradient
	$\gamma$ : Load factor

### 3.4. Theoretical Background

#### 3.4.1. Conventional Theory

In Part I [1] of this article, the equation of a bolted assembly submitted to an axial loading was modified to take into account the new dimensionless parameters, as presented in Equation (3.1).

$$\left( \frac{\Delta F_b}{Q} \right) = \frac{K_b}{K_b + K_p} \left( \frac{F_e}{Q} \right) \quad (3.1)$$

From Equation (3.1), it is possible to assume that these dimensionless parameters can also be used for an eccentric loading case. This was confirmed with the finite element results in Part I [1]. It means that for non-linear cases, the stiffness will be considered as a function of the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) instead of considering it as a function of the external force ( $F_e$ ) and the preload ( $Q$ ) separately.

#### 3.4.2. Stiffness Calculation

There are different methods to evaluate the stiffness of the parts as explained in Part I [1]. However, only the Rasmussen method has been kept for its result accuracy [4, 5] and its formulation under a unique equation, which can be easily programmed. Equation (3.2) regroups the dimensionless parameters and the stiffness equation of the Rasmussen method.

$$A_p^* = \frac{\pi}{4}(1 - D_h^{*2}) + \frac{1}{2}(D_p^{*2} - 1) \arctan \left[ \frac{0.35\sqrt{L_p^*} + \sqrt{1 + 2L_p^{*2}} - 1}{2(D_p^{*2} - D_h^{*2})} \right] \quad (3.2)$$

$$D_h^* = D_h/D_a \quad L_p^* = L_p/D_a \quad D_p^* = D_p/D_a \quad A_p^* = A_p/D_a^2$$

For the bolt stiffness calculation, Alkatan & al. [6] developed a more realistic model which takes into account a better modeling of the stiffness of the bolt head and nut as well as the friction under the bolt head. However, the simplified model shown in Figure 3.1 and in Equation (3) will give stiffness results close to those obtained with the model developed by Alkatan & al.

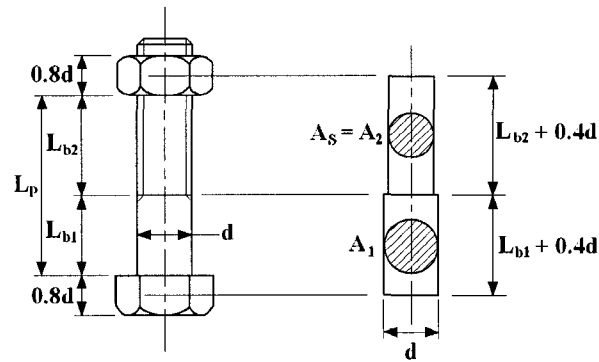


Figure 3.1 – Bolt stiffness model

(adapted from [4])

In fact, the stiffness approximated with Equation (3.3) will provide results accurate enough to compare the analytical results with both finite element and experimental results [4]. This equation has the advantage of being easy to use.

$$S_b = \frac{1}{E_b} \left[ \frac{L_{b1} + 0.4 d_{nom}}{A_1} + \frac{L_{b2} + 0.4 d_{nom}}{A_s} \right] \quad (3.3)$$

Concerning the stiffness calculation of the part (or a flange), the beam model on elastic support requires a stiffness varying with the size of the contact surface. The stiffness (inverse to the compliance) is separated in two terms as shown in Equation (3.4) and (3.5).

$$S_p^* = \frac{h_p / 2}{E_p A_p} \quad (3.4)$$

$$S_c = \frac{h_p}{4E_p (X - s)b} \quad (3.5)$$

The term ( $S_p^*$ ) represents the compliance under the bolt head, whereas the term ( $S_c$ ) is the compliance varying with the size of the contact area.

### 3.4.3. Non-Linear Behaviour Due to Eccentric Loading

The external load will affect the force supplement differently depending if it is an axial or an eccentric load as shown in Figure 3.2 (see Part I [1]). In case of an eccentric loading, two different supplements are involved in the bolt fatigue response. The first one is the force supplement which can be associated to an increase of the tension in the bolt, whereas the second one is the moment supplement which is related to the bending of the bolt induced by the eccentricity. This eccentricity causes a non-linearity in the response behaviour essentially due to the contact area evolution, which means that the flange separation will occur for a smaller external load than in the case of an assembly with less eccentricity.

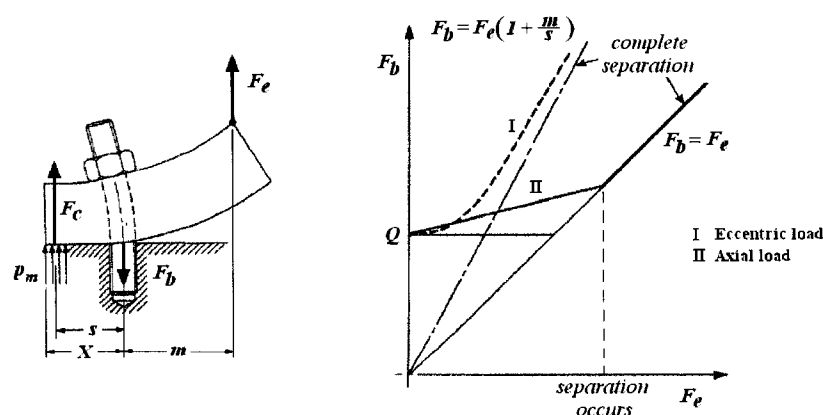


Figure 3.2 – Total bolt working force for axial and eccentric load

(adapted from [4])



Moreover, the combination of these two supplements will result in a fatigue failure for a smaller external load than for an axial loading. Thus, the position where the external load is applied will influence the force supplement in the bolt and the fatigue resistance as described in [2-4, 7-10].

#### 3.4.4. Load Factor

In Part I [1] of this paper, the load factor ( $\gamma$ ) used by Bahkiet [3, 9] in the beam model was used to modify the stiffness of the parts ( $S_p$ ) in order to take into account the variation of the contact area and the thickness of the parts. In the beam model on elastic support, this parameter becomes useless as seen in the previous section, because the parts stiffness will vary directly with the position ( $s$ ) of the equivalent contact force to preload ratio ( $F/Q$ ). Because the height where the external force is applied has little influence on the response behaviour of a preloaded bolted joint when the eccentricity of the external force is high, it can be neglected [10].

#### 3.4.5. Beam Model

Different models exist to evaluate the force and moment supplements in bolts. The first one is the VDI 2230 method [11] which should only be used for limited eccentricity loading. Indeed, the force supplement evaluated with this model will be far from the real result if the eccentricity becomes important [3, 4]. In such a case, the beam model developed by Agatonovic [2, 3, 7-9] would be more appropriate. This model usually returns good results for the force supplement, but not for the moment supplement. Thus, it was modified and renamed to become the beam model on elastic support [2, 3]. Figure 3.3 presents the force equilibrium on which these beam models are based. In the case of a two prismatic flanges assembly [3] submitted to an eccentric external load (see Figure 3.4), the behaviour of the assembly can be evaluated with the beam model on elastic support presented in Equation (3.6).

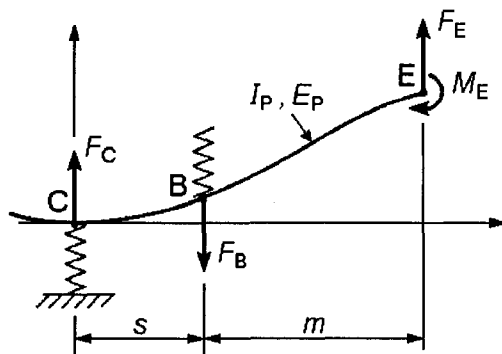


Figure 3.3 – Beam model by Agatonovic  
(adapted from [4])

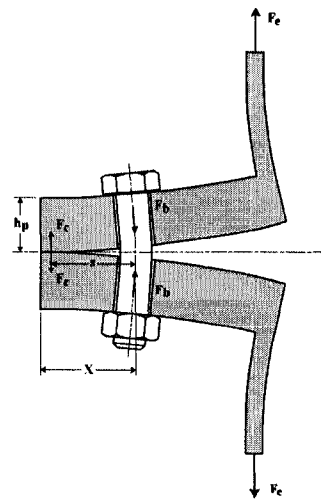


Figure 3.4 – Assembly submitted  
to eccentric loading

The different parameters of the prismatic flanges assembly are shown in Figure 3.6.

$$\left( \frac{m}{6E_p I_p S} \right) s^3 + \left( \frac{\Phi}{m + 2E_p I_p q_1} \right) s^2 + \left( \frac{2m + 2E_p I_p q_1}{m + 2E_p I_p q_1} \Phi \right) s - m = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{Where } S = S_b + S_p^* + S_c ; q_1 = -\frac{H}{E_t I_t} ; \Phi = \left[ \frac{Q}{F_e} - \frac{S_b + S_p^*}{S} \right] \text{ and } I_t = \frac{1}{12} b h_t^3$$

Once the position ( $s$ ) of the equivalent contact force to preload ratio ( $F_c/Q$ ) has been calculated with Equation (3.6), if the ratio ( $s/X$ ) is inferior or equal to 0.75, the equivalent contact force will be evaluated with Equation (3.7). Then, the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) can be obtained with the force equilibrium Equation (3.8) and the moment supplement to bolt nominal diameter and preload ratio ( $\Delta M_b/d_{nom}Q$ ) will be evaluated with Equation (3.9). If the ratio ( $s/X$ ) is superior to 0.75, Equation (3.10) and Equation (3.11) will be used to evaluate the force and the moment supplements instead of the previous equations. Indeed, when the separation between the plates increases, the response behaviour tends to an asymptote where ( $s$ ) is equal to ( $X$ ).

Thus, Equation (3.10) and Equation (3.11) have been based on a hyperbole equation [2, 3].

If  $(s/X) \leq 0.75$ :

Equivalent contact force to preload ratio:

$$\left(\frac{F_c}{Q}\right) = \left(\frac{m}{s}\right) \left(\frac{m + 2 E_p I_p q_1}{s + 2 m + 2 E_p I_p q_1}\right) \left(\frac{F_e}{Q}\right) \quad (3.7)$$

Force supplement to preload ratio:

$$\left(\frac{\Delta F_b}{Q}\right) = \left(\frac{F_c}{Q}\right) + \left(\frac{F_e}{Q}\right) - 1 \quad (3.8)$$

Moment supplement to bolt nominal diameter and preload ratio:

$$\left(\frac{\Delta M_b}{d_{nom} Q}\right) = \frac{s}{d_{nom} \left(\frac{2 h_p E_p I_p}{s E_b I_b} + 2\right)} \left(\frac{F_c}{Q}\right) \quad (3.9)$$

If  $(s/X) > 0.75$ :

Force supplement to preload ratio:

$$\left(\frac{\Delta F_b}{Q}\right) = \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \left(\left(\frac{F_e}{Q}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{Q}\right)^2\right)} - 1 \quad (3.10)$$

Where: 
$$\beta = 1 + \left(\frac{m}{X}\right) \left(\frac{m + 2 E_p I_p q_1}{X + 2 m + 2 E_p I_p q_1}\right)$$

$$\left(\frac{a_1}{Q}\right)^2 = \left(\frac{F_{cC}}{Q} + \frac{F_{eC}}{Q}\right)^2 - \beta^2 \left(\frac{F_{eC}}{Q}\right)^2$$

$$\left(\frac{a_2}{Q}\right)^2 = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{F_{cC}}{Q} + \frac{F_{eC}}{Q}\right)^2 - \left(\frac{F_{eC}}{Q}\right)^2$$

Moment supplement to bolt nominal diameter and preload ratio:

$$\left(\frac{\Delta M_b}{d_{nom} Q}\right) = \left(\frac{\Delta M_{bC}}{d_{nom} Q}\right) + \left(\frac{1}{d_{nom}}\right) \left(\frac{\left(\frac{\Delta F_b}{Q} + 1\right) - \left(\frac{F_{bC}}{Q}\right)}{(1/S_b) s_C}\right) \left(\frac{E_b I_b E_p I_p}{h_p E_p I_p + s_C E_b I_b}\right) \quad (3.11)$$

Where  $(F_{bC})$ ,  $(F_{cC})$ ,  $(F_{eC})$  et  $(\Delta M_{bC})$  are evaluated at  $(s_C/X) = 0.75$ .

The position  $(s)$  depends on the parameters  $(S_p, S_b, I_p, E_p$  and  $E_b)$  which influence the stiffness of the assembly. If the beam model is appropriate for the studied assembly, the position  $(s/X)$  should be inferior to one when the external force  $(F_e)$  tends to infinity [4]. For the case of the beam model on elastic support, the ratio  $(s/X)$  cannot exceed 0.75 [2, 3].

### 3.5. Geometry Definitions

The first objective presented in Part I [1] was to find a common basis for the prestressed assembly definition, which allows direct comparison of different sizes of assemblies. To reach this objective, the bolted joints need to be defined in terms that will allow comparison. Thus, all dimensions of assemblies are expressed with respect to their bolt nominal diameter. Based on that definition, it becomes easier to compare two assemblies having the same proportions and different bolt nominal diameters.

#### 3.5.1. The Bolt

First, as for the two geometries defined in Part I [1], each bolt dimension has been parameterized. To simplify the geometry updates, the diameter and the height of the bolt head have been approximated by a ratio of the bolt nominal diameter. These equations are presented in Figure 3.5. To simplify, the threads have been taken into account with an equivalent smaller bolt shank diameter.

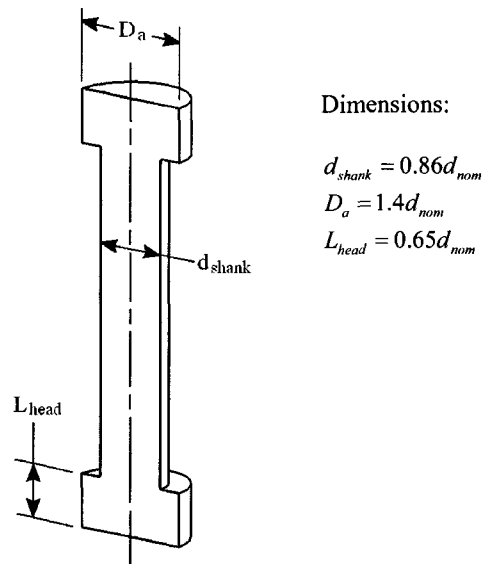
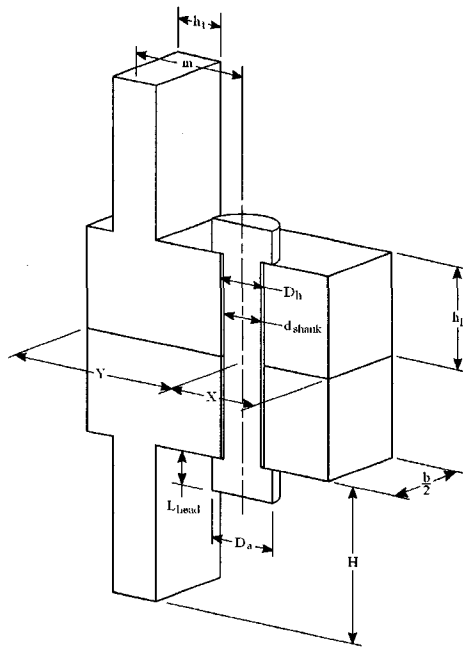


Figure 3.5 – Geometry of the bolt

### 3.5.2. Prismatic Flange Assembly

Figure 3.6 presents the parameters used to determine every dimension of a bolted assembly made of two prismatic flanges. The assembly is the same used as for the experiments of Massol [2] and Bahkiet [3]. As for the two previous geometries in Part I [1], the bolt nominal diameter ( $d_{nom}$ ) is the main control parameter.



Dimensions:

$$h_p = h_{p\_frac} * d_{nom}$$

$$X = X_{frac} * d_{nom}$$

$$Y = Y_{frac} * d_{nom}$$

$$b = b_{frac} * d_{nom}$$

$$m = m_{frac} * d_{nom}$$

$$H = H_{frac} * d_{nom}$$

$$h_t = h_{t\_frac} * d_{nom}$$

$$D_h = d_{nom} + 0.1$$

Figure 3.6 – Geometry of prismatic flanges assembly

Thus, the following dimensionless parameters define the geometry: thickness to nominal diameter ratio ( $h_{p\_frac}$ ), plate thickness to nominal diameter ratio ( $h_{t\_frac}$ ), outer contact length to nominal diameter ratio ( $X_{frac}$ ), inner contact length to nominal diameter ratio ( $Y_{frac}$ ), width to nominal diameter ratio ( $b_{frac}$ ), eccentricity to nominal diameter ratio ( $m_{frac}$ ) and plate height to nominal diameter ratio ( $H_{frac}$ ).

### 3.5.3. Statements and conditions

In Part I [1], three statements were proposed and validated with finite element analysis results, becoming the three conditions concerning preloaded bolted joints. In this paper, only the second condition can be confirmed with experimental results, because none

have been found for the first and the third condition. This second condition mentions that an assembly with defined proportions will have the same force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) when the same external force to preload ratio ( $F/Q$ ) is applied, whatever the preload in the bolt. This condition will be proven by comparing finite element analysis results, analytical results and experimental results for two prismatic assemblies which have different proportions.

### 3.6. The Finite Element Models

For the numerical, analytical and experimental validation, a finite element model based on the geometry defined in the previous section has been developed. All finite element analyses have been performed using Ansys Workbench 11.

#### 3.6.1. Prismatic Flanges Assembly

The finite element model used to evaluate the force supplement in the bolt is shown in Figure 3.7. The parts and the bolt are made of generic steel. Only quadratic hexahedron elements have been used in the mesh and their size has been determined by a convergence test.

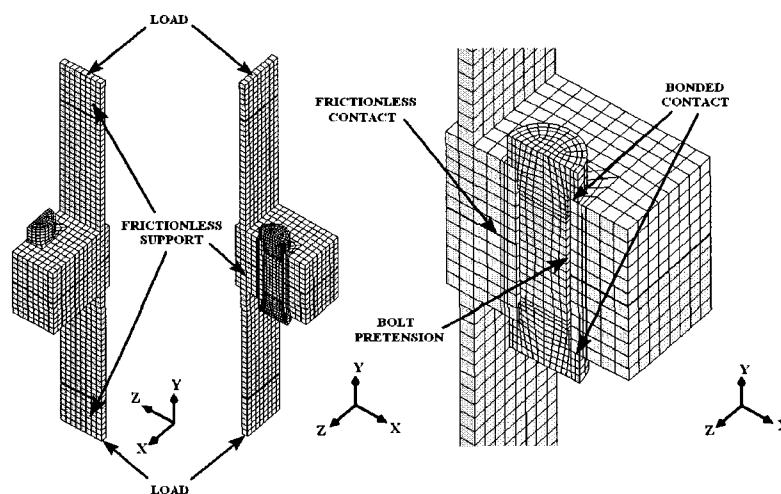


Figure 3.7 – Finite element model of prismatic flanges assembly

The boundary conditions and the forces of the finite element model are similar to those applied on the two models in Part I [1] and shown in Figure 3.7. The main difference is the two frictionless supports applied on the vertical plate surfaces, near the loading area to simulate the clamping by the traction jaws on the bench test. This boundary condition has been used in the finite element model to represent adequately the fastening of the assembly used in the experiments of Massol [2] and Bahkiet [3].

### 3.6.2. Types of Analyses Performed

In order to validate the second condition with experimental results, the results of two different assemblies studied by Massol [2] and Bahkiet [3] have been used. The three different preloads applied on the bolt for both assemblies are shown in Table 3.1, whereas the assembly proportions are presented in Table 3.2.

**Table 3.1 – Preload applied on a 24mm bolt nominal diameter**

$d_{nom}$	Q (kN)		
24 mm	100	200	286

**Table 3.2 – Proportions of prismatic flanges assemblies**

#	$d_{nom}$ (mm)	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$b_{frac}$	$h_{p, frac}$	$H_{frac}$	$h_{t, frac}$
No.2	24	1.688	1.938	1.542	4.167	1.667	6.25	0.292
No.7	24	1.083	2.542	2.146	2.917	1.042	6.25	0.292

These proportions correspond to assemblies No.2 and No.7 in Massol's work. For these two assemblies under each preload, numerical, experimental and analytical results have been compared. The dimensionless parameters have been calculated and the charts plotted. Discussions and conclusions are presented in the next sections.



### **3.7. Results and Analyses**

#### **3.7.1. Results from finite element, analytical and experimental results**

The prismatic flanges assembly No.2 in Massol's [2] and Bahkiet's [3] work is the first assembly used to confirm the second condition. The experimental results have been compared with the numerical results from the finite element analyses and the analytical results from the beam model on elastic support by plotting them all on the same charts. Therefore, both dimensional and dimensionless supplements seen by the bolt have been plotted against the dimensional and dimensionless external force versus three different preloads as shown in Figure 3.8 to Figure 3.11. This has been done to demonstrate the usefulness of the second condition using dimensionless parameters. In the same manner, the results for the prismatic flanges assembly No.7 have been processed and presented on different charts as shown in Figure 3.12 to Figure 3.15.

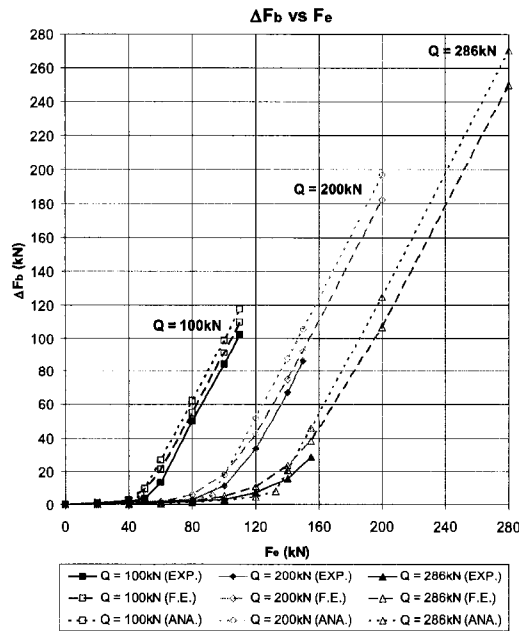


Figure 3.8 – Force supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.2

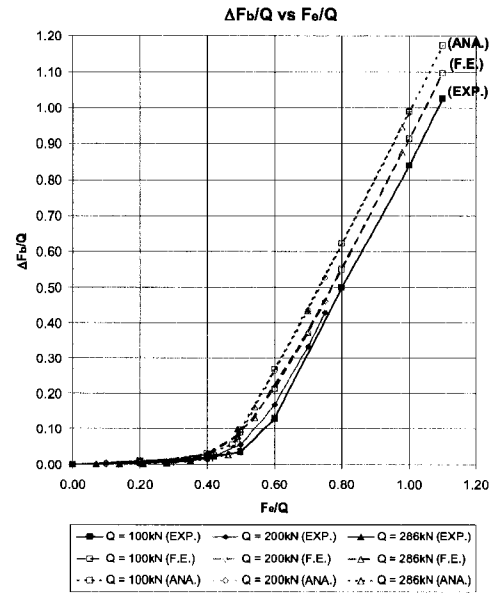


Figure 3.9 – Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.2

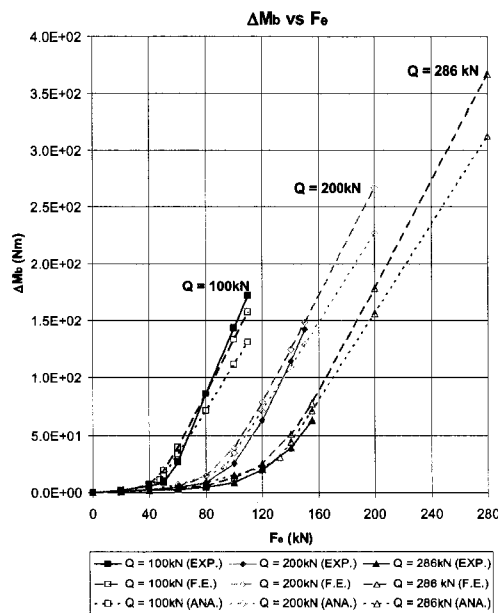


Figure 3.10 – Bending moment supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.2

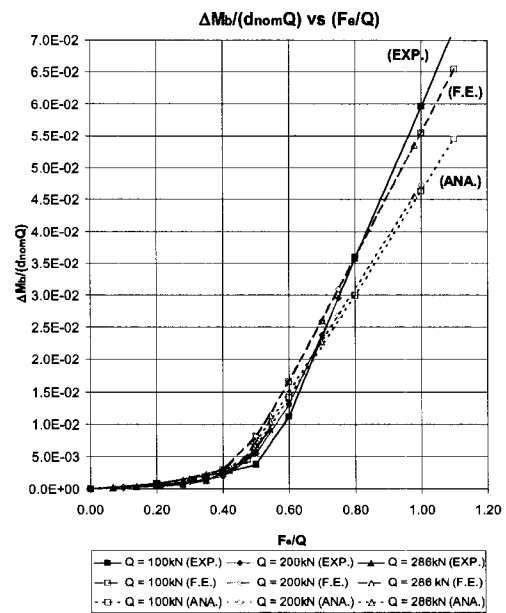


Figure 3.11 – Bending moment supplement to bolt nominal diameter and preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.2

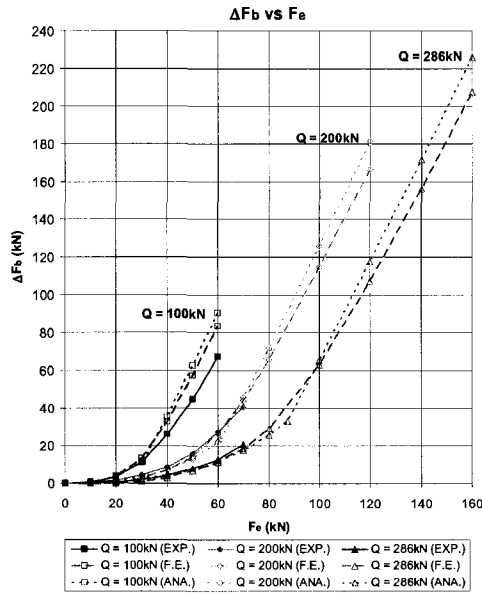


Figure 3.12 – Force supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.7

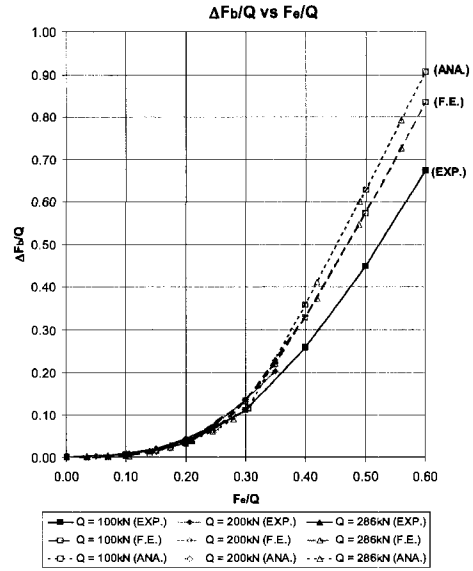


Figure 3.13 – Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.7

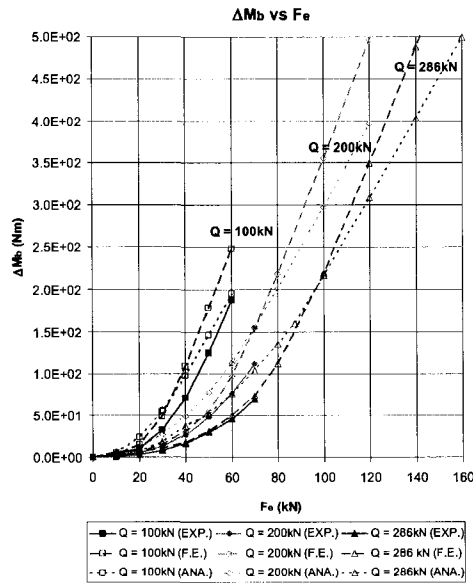


Figure 3.14 – Bending moment supplement vs external force for prismatic flanges assembly No.7

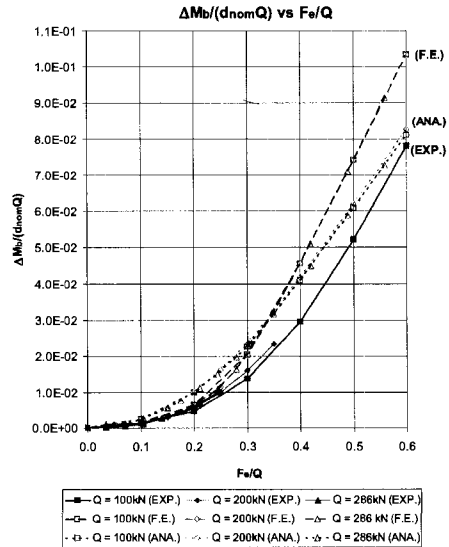


Figure 3.15 – Bending moment supplement to bolt nominal diameter and preload ratio vs external force to preload ratio for prismatic flanges assembly No.7

### 3.7.2. Discussion

All these results confirm the validity of the new dimensionless parameters developed in Part I [1]. Figure 3.8 shows the dimensional initial results from the model which has three different preloads in the same way Massol [2] and Bakhiet [3] presented them. In this chart, the three curves are slightly offset from each other for each preload. One can say that the numerical and analytical models mostly represent the reality. This is also true for the moment supplement presented in Figure 3.10. The force and moment supplements can be processed with the new dimensionless parameters to prove the second condition. As seen in Figure 3.9 and Figure 3.11, all three experimental curves are almost superposed as well as all three numerical and all three analytical curves. One can conclude that the dimensionless response behaviour is unaffected by the preload. This shows that the results from only one analysis or one experiment can be used to predict the force supplement when the preload changes in a bolted assembly. This statement can be corroborated with the results of the prismatic flanges assembly No.7 shown in Figure 3.12 to Figure 3.15. The force and the moment supplements on these charts are also slightly offset between the experimental, numerical and analytical results, but globally, it still confirms the second condition. For an error margin up to 20% in terms of supplements ( $\Delta F_b$ ), the absolute error in terms of total load ( $F_b$ ) seen by the bolt will remain in 2-3% of error margin.

The previous set-up showed that for a constant external load, it is possible to evaluate the force supplement in the bolt, whatever the preload value, if at least one analysis has been completed. The experimental results of the assembly No.2 are used in the following example. If the external force is equal to 80kN and the preload is equal to 100kN, the force supplement found from the experimental results will be 50kN as shown in Figure 3.16. This means that the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) is equal to 0.8 and the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) is equal to 0.5. Now, if the preload doubles to 200kN, the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) will decrease to 0.4 and the corresponding force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) will drop to 0.02 as shown in

Figure 3.17. Consequently, the force supplement will be reduced to 4kN. This is approximately the same value found from the experimental results in Figure 3.16.

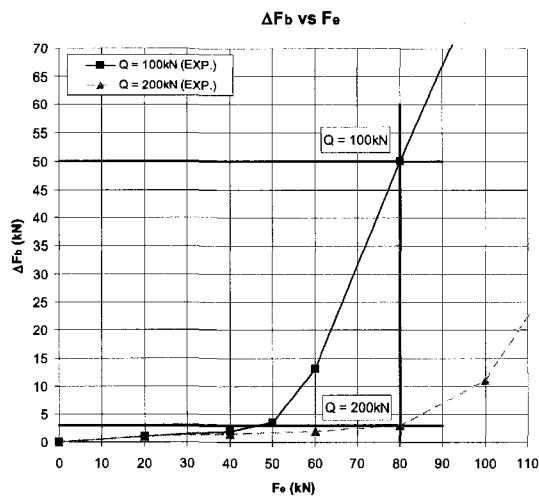


Figure 3.16 – Force supplement vs external force

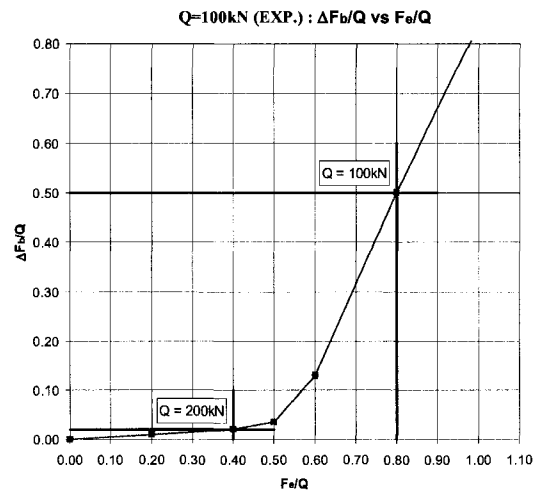


Figure 3.17 – Force supplement to preload ratio vs external force to preload ratio

This example is summarized in Table 3.3.

Table 3.3 – Force supplement evaluated with the dimensionless parameters

Data	Data		Calculated results			Experiments
	Q (kN)	P (kN)	P/Q (kN/kN)	ΔFb/Q (kN/kN)	ΔFb (kN)	ΔFb (kN)
	100	80	0.8	0.5	50	50
	200	80	0.4	0.02	4	3.5

One can observe how increasing the preload will reduce the force supplement seen by the bolt. A lesser force supplement leads to a higher fatigue life and a higher external force is necessary to separate the two flanges. As demonstrated in the example, with these dimensionless parameters and the second condition, the evaluation of the force supplement does not require to perform new experiments of finite element analyses when the preload changes.

### 3.8. Conclusion

In order to improve the theory on preloaded bolted joints as well as the development of new and more accurate computation models, new dimensionless parameters useful for assessment of their fatigue behaviour were found and presented in Part I [1]. Only the second condition based on dimensionless parameters has been confirmed with experimental results which come from Massol's [2] and Bahkiet's [3] work. None have been found that can be used to validate the first and the third conditions, but according to the results in Part I [1], the approach should be validated. Because of the new opportunities these three conditions brought up, it would be interesting to perform new experiments to confirm the two other conditions.

This paper shows that with the application of these dimensionless parameters, it is now possible to restrain the number of experiments or finite element analyses needed to predict the response behaviour of preloaded bolted assemblies. Instead of performing the same experiment repeatedly on the assembly using different preloads, only one will be needed to predict the response behaviour for any preload. The plot of the force supplement to preload ratio ( $\Delta F_b/Q$ ) against the external force to preload ratio ( $F_e/Q$ ) is not affected by the chosen preload. The preload can then be defined subsequently, depending on the maximum force supplement allowed in the bolt. As explained in Part I [1], the bolt size and the material properties are also not initially needed to predict the response behaviour of preloaded bolted joints based on the new dimensionless parameters. They can be determined afterwards according to the force supplement allowed and the geometric or volumetric constraints as defined by the design mandate. Because only one finite element analysis can be used to predict the force supplement of many other bolted assemblies, different charts or tables could be easily established for various assembly proportions and material combinations, all for a more effective global design procedure.

### 3.9. References

- [1] F. Turgeon, "Preloaded Bolted Joints Submitted to Eccentric Loading, Part I: New Dimensionless Parameters," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. submitted for publication to IJPVP, 2008.
- [2] J. Massol, "Étude des assemblages boulonnés à chargement faiblement excentré soumis à des sollicitations de fatigue," L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 1994.
- [3] E. M. Bahkiet, "Étude des assemblages boulonnés a chargement fortement excentré soumis à des sollicitations de fatigue," L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 1994.
- [4] J. Guillot, "Assemblages par éléments filetés. Calcul.," in *Techniques de l'Ingénieur, traité Mécanique et Chaleur*, Paris, France, 1989, pp. B5 560 – B5 562.
- [5] J. Rasmussen, "A two body contact problem with friction," in *Euromech Colloquium NR 110 Rimforsa, Italy*, 1978.
- [6] F. Alkatan, P. Stephan, A. Daidie, et J. Guillot, "Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, no. 8, pp. 589-598, 2007.
- [7] P. Agatonovic, "The computation of bolted joints," *Wire World International*, vol. 15, pp. 192-198, 1973.
- [8] P. Agatonovic, "Beam model of bolted flanged connections," *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, vol. 2, no. 1, pp. 21-29, 1985.
- [9] E. M. Bakhiet et J. F. Guillot, "Analytical model of bolted joints subjected to high eccentric loadings," in *Proceedings of the 2nd Biennial European Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis. Part 7 (of 8)*, London, Engl, vol. 64, 1994, pp. 301-313.

- [10] A. Vadean, J. Guillot, et D. Pop, "Etude paramétrique de modélisations tridimensionnelles des assemblages boulonnés de brides cylindriques – Acta Technica Napocensis," *series Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Cluj-Napoca, Romania*, pp. 243-248, 1998.
- [11] VDI2230, *Part 1, Systematic Calculation of High Duty Bolted Joints : Joints with One Cylindrical Bolt*, Dusseldorf, Germany: VDI, 1989.



## CHAPITRE 4

### 4. DISCUSSION GÉNÉRALE

Pour faciliter la compréhension des deux articles présentés, voici une discussion générale regroupant les principaux points à retenir. Dans cette discussion, on retrouve la définition des modèles géométriques, la définition des paramètres adimensionnels, l'explication des trois conditions issues des résultats des analyses d'éléments finis de même qu'une explication de la validation effectuée à partir de résultats expérimentaux.

#### 4.1. Définition de la géométrie des modèles

Dans les deux parties d'article présentées précédemment, la première étape après la revue de littérature consistait à définir la géométrie étudiée. Les géométries utilisées dans la première partie étaient un assemblage de deux plaques rectangulaires et un assemblage de deux brides cylindriques, alors que celle utilisée dans la deuxième partie était un assemblage de deux brides en chape (voir Figure 3.6). Ces trois géométries ont été définies de manière analogue, c'est-à-dire en termes de proportions. De cette façon, chaque dimension est exprimée par un multiple du diamètre nominal de l'assemblage. On ne s'intéresse donc plus à des dimensions d'assemblages ayant des unités, mais aux proportions géométriques de celles-ci. Ainsi, deux assemblages ayant les mêmes proportions par rapport à leur diamètre nominal de boulon et possédant un diamètre nominal différent l'un de l'autre pourront être comparés plus facilement. Par conséquent, avec une définition géométrique de la sorte, les paramètres influençant le supplément d'effort dans le boulon deviennent alors la forme et les proportions de la bride plutôt que les dimensions de ceux-ci. Le détail de la définition de ces géométries et modèles d'éléments finis est présent à l'Annexe A.

#### 4.2. Définition des paramètres adimensionnels

La définition géométrique est une partie essentielle dans la composition initiale du problème, mais qui est insuffisante pour comparer les suppléments d'effort. En effet, en

utilisant des forces en Newton, il est difficile de comparer un petit assemblage possédant les mêmes proportions qu'un plus grand, puisque les forces extérieures, les suppléments, de même que les forces de précontrainte peuvent avoir des modules très différents sur ces deux assemblages. Pour remédier au problème, plutôt que de tracer des courbes de supplément de force ( $\Delta F_b$ ) en fonction de la force extérieure ( $F_e$ ) appliquée, on trace les ratios de forces relatives à la force de précontrainte ( $Q$ ). Ainsi, le supplément de force ( $\Delta F_b$ ) devient le supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) et la force extérieure ( $F_e$ ) devient la force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ). De plus, afin de faciliter la comparaison entre les suppléments adimensionnels issus des différents assemblages, la force de précontrainte appliquée varie d'un diamètre nominal de boulon à un autre, de telle sorte que la contrainte de tension initiale ( $\sigma_{mi}$ ) dans le boulon soit identique pour les différentes tailles de boulon.

#### **4.3. Analyse des résultats conduisant aux trois conditions**

Basées sur la définition de la géométrie des modèles ainsi que sur des paramètres adimensionnels de force, trois affirmations ont été initialement proposées au sujet du comportement des assemblages boulonnés. À partir des analyses par éléments finis effectuées, il a été possible d'en vérifier la validité.

La première affirmation porte sur l'indépendance du choix de diamètre nominal de boulon lorsque les paramètres adimensionnels de force sont utilisés. Deux assemblages de proportions identiques, mais ayant un diamètre nominal de boulon différent l'un de l'autre sont initialement définis. Le matériau sélectionné pour les boulons est le même pour les deux assemblages, tout comme celui des membrures formant l'assemblage. La force de précontrainte dans le boulon de chacun de ces assemblages est choisie de manière à créer la même contrainte de tension initiale dans le boulon. Ainsi, si une même force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) est appliquée sur chacun des deux assemblages, le supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) sera identique pour les deux assemblages.

La deuxième affirmation porte quant à elle sur l'indépendance du choix de précontrainte lors de l'utilisation des paramètres adimensionnels. Donc, pour un même assemblage soumis à deux forces de précontrainte différentes, si la même force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) est appliquée, les suppléments de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) seront identiques.

La troisième et dernière affirmation concerne le choix des matériaux. Pour deux assemblages boulonnés aux proportions identiques ayant la même précontrainte et des matériaux différents, le supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) sera le même pour une force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) donnée, pourvu que le ratio du module d'élasticité du boulon sur celui des pièces ( $E_b/E_p$ ) soit identique pour les deux assemblages.

Bien que ces conditions soient expliquées pour des paramètres de suppléments de force relatifs à la précontrainte, elles sont également applicables sur d'autres paramètres adimensionnels montrés sur des graphiques dans la première partie de l'article. Ainsi, il est possible de rendre aussi le supplément de moment ( $\Delta M_b$ ) adimensionnel en le divisant par le diamètre nominal du boulon ( $d_{nom}$ ) et la précontrainte ( $Q$ ) afin d'obtenir le supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ). La force de contact équivalente ( $F_c$ ) peut elle aussi être divisée par la précontrainte ( $Q$ ), la rendant adimensionnel à son tour ( $F_c/Q$ ). Finalement, la position ( $s$ ) de cette force peut aussi être rendue adimensionnelle en la divisant par la longueur de contact extérieure ( $X$ ). On obtient alors la position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure ( $s/X$ ). Ce rapport permet une comparaison plus facile des assemblages de proportions et dimensions différentes.

#### **4.4. Validation avec des résultats expérimentaux**

Les trois affirmations précédentes ont été vérifiées avec des résultats issus d'analyses par éléments finis, mais avec aucun résultat expérimental. Des résultats expérimentaux

en lien avec la deuxième condition ont cependant été trouvés dans les travaux de Massol [1] et de Bahkiet [2]. Étant donné qu'on désire habituellement trouver la bonne précontrainte à appliquer sur un assemblage, cette deuxième condition est probablement la plus utile et donc la plus importante à vérifier puisqu'elle permet d'éviter d'avoir recours à de nouvelles analyses ou expériences lorsque la précontrainte change. À partir de ces données expérimentales prises sur un assemblage de brides en chape, les ratios de force ont été calculés puis tracés sur un graphique. Malgré le décalage entre les courbes expérimentales, numériques et analytiques, la deuxième condition a été validée, puisque les trois courbes expérimentales se superposent, tout comme les trois courbes numériques ou analytiques. Un exemple d'application a ensuite permis de démontrer comment évaluer le supplément de force dans un boulon lorsque la précontrainte change en se basant sur les résultats expérimentaux trouvés pour une seule précontrainte. Cet exemple démontre clairement l'impact de cette deuxième condition sur la réduction du nombre d'analyses ou expériences nécessaires à la prévision des suppléments d'effort pour des forces de précontrainte différentes.

#### 4.5. Conclusion

Ces articles mettent en valeur une nouvelle approche concernant l'étude des assemblages boulonnés. L'hypothèse initiale concernant les assemblages en comparaison et sur laquelle se basent les trois conditions se définit comme suit : Si deux assemblages ont les mêmes proportions géométriques par rapport à leur diamètre nominal de boulon respectif, qu'ils ont le même rapport entre les modules d'élasticité du boulon et des pièces ( $E_b/E_p$ ) et qu'ils ont :

Condition 1 : Des diamètres nominaux différents, et/ou ;

Condition 2 : Des forces de précontrainte différentes, et/ou ;

Condition 3 : Des matériaux différents.

Alors : Les deux assemblages boulonnés auront le même supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) si la même force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) est appliquée.

Ces conditions s'appliquent également à d'autres paramètres adimensionnels comme le supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte ( $\Delta M_b / (d_{nom} Q)$ ), la force équivalente de contact relative à la précontrainte ( $F_c / Q$ ) et à la position de la force équivalente de contact relative à la longueur extérieure de contact ( $s/X$ ). Puisque cette approche permet de réduire grandement le nombre d'analyses ou d'expériences à effectuer pour évaluer le comportement d'un assemblage, il en découle une importante diminution de temps et d'argent lors de la conception d'un assemblage boulonné optimal.

## CHAPITRE 5

### 5. APPLICATION DE LA NOUVELLE APPROCHE POUR LA CONCEPTION OPTIMALE DES ASSEMBLAGES BOULONNÉS

La meilleure façon de montrer le potentiel des conditions présentées dans les deux articles s'avère sans doute d'utiliser un exemple d'application. Cette mise en situation purement académique permettra de démontrer leur utilité dans le processus de conception d'un assemblage boulonné précontraint soumis à un chargement de fatigue.

#### 5.1. Énoncé du problème :

Supposons qu'on a un assemblage boulonné précontraint composé de deux plaques rectangulaires (voir Figure 2.6) aux proportions constantes et données. Celui-ci doit être conçu pour supporter une charge extérieure donnée.

##### 5.1.1. Données :

Voici les informations connues :

- La charge extérieure par boulon varie de 0 N à 15000 N.
- Le matériau composant le boulon est de l'acier de classe 10.9 ( $E_b = 200\text{GPa}$ )
- Le matériau composant les pièces est de l'acier standard ( $E_p = 200\text{GPa}$ ).
- Les proportions des assemblages par rapport au diamètre nominal sont constantes et sont présentées dans le Tableau 5.1.

Tableau 5.1 – Proportions de l'assemblage

#	$d_{\text{nom}}$ (mm)	$X_{\text{frac}}$	$Y_{\text{frac}}$	$m_{\text{frac}}$	$b_{\text{frac}}$	$h_{p\text{frac}}$	$\gamma$	$Q$ (N)
1	?	2.5	2.5	3	3	2	0.3	?

**Note :** Puisque les proportions (dimensions relatives au diamètre nominal du boulon) sont constantes, modifier le diamètre nominal aura un impact direct sur toutes les dimensions de l'assemblage et par conséquent sur sa masse, permettant ainsi de la réduire. Normalement, des contraintes géométriques devraient limiter

certaines dimensions de l'assemblage. Cependant, dans cet exemple, ces contraintes sont négligées.

- La contrainte alternée ( $\sigma_a$ ) maximale ne doit pas dépasser 50 MPa (voir Guillot [3]).

**Note :** Normalement, on choisit une limite de contrainte alternée en fonction du diamètre nominal du boulon. Dans ce cas-ci, on se contente d'une valeur moyenne approximative comme critère (voir Guillot [3]).

- La contrainte maximale ( $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$ ) ne doit pas dépasser 850 MPa.

**Note :** Puisque la classe d'acier du boulon est 10.9, on a donc une limite ultime ( $S_{ul}$ ) de 1000 MPa et une limite d'écoulement ( $S_Y$ ) de 900 MPa, d'où la contrainte maximale fixée sous la limite d'écoulement.

### 5.1.2. Objectifs :

On recherche la meilleure combinaison des paramètres suivants :

- La force de précontrainte ( $Q$ ) du boulon ;
- Le diamètre nominal du boulon ( $d_{nom}$ ) ;

qui minimise la masse de l'assemblage, tout en respectant les limites imposées sur :

- La contrainte alternée ( $\sigma_a$ ) ;
- La contrainte maximale ( $\sigma_{max}$ ).

## 5.2. Solution du problème

### 5.2.1. Suppléments adimensionnels issus de la simulation initiale

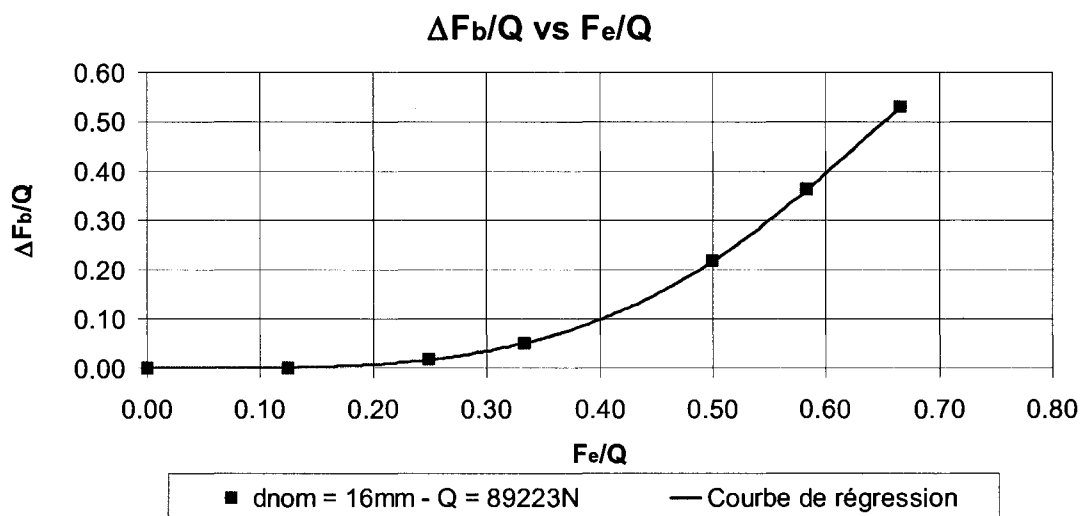
À l'aide de l'analyse par éléments finis d'un modèle ayant une valeur arbitraire de diamètre nominal de boulon ( $d_{nom}$ ) de 16 mm, de même qu'une valeur arbitraire de précontrainte ( $Q$ ) de 89223 N, on peut obtenir les suppléments de force et de moment en fonction de la force extérieure. À partir de ces résultats, on peut calculer les suppléments

relatifs à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$  et  $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ) en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) tel que présenté dans le Tableau 5.2.

**Tableau 5.2 – Suppléments relatifs à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte**

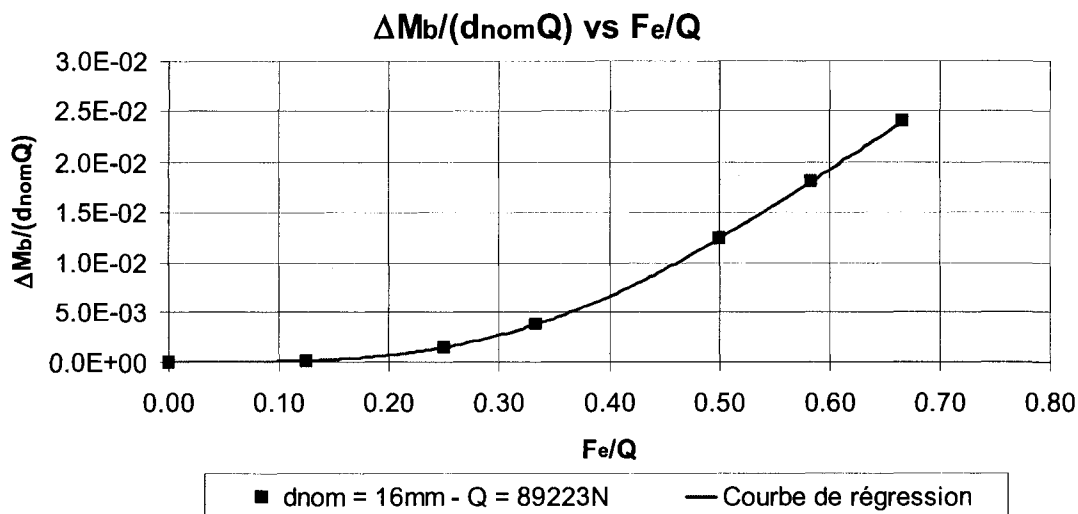
$F_e$ (N)	Q (N)	$\Delta F_b$ (N)	$\Delta M_b$ (Nm)	$F_e/Q$	$\Delta F_b/Q$	$\Delta M_b/(d_{nom}Q)$
0	89223	0	0.00	0.000	0.00E+00	0.00E+00
11153	89223	94	0.21	0.125	1.05E-03	1.45E-04
22306	89223	1588	2.11	0.250	1.78E-02	1.48E-03
29741	89223	4562	5.42	0.333	5.11E-02	3.79E-03
44612	89223	19393	17.76	0.500	2.17E-01	1.24E-02
52047	89223	32377	25.83	0.583	3.63E-01	1.81E-02
59482	89223	47390	34.31	0.667	5.31E-01	2.40E-02

À partir des suppléments relatifs à la précontrainte et de la force extérieure relative à la précontrainte, on peut tracer le graphique du supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) présenté à la Figure 5.1, ainsi que celui du supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ) présenté à la Figure 5.2.



**Figure 5.1 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte**





**Figure 5.2 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte**

### 5.2.2. Suppléments adimensionnels évalués à partir de la situation initiale

À partir des résultats du Tableau 5.2 et sachant que la force extérieure ( $F_e$ ) est constante et vaut 15000 N, il est possible d'évaluer les suppléments relatifs pour une précontrainte ( $Q$ ) variable sans avoir à relancer de nouvelles analyses. En effet, des conditions expliquées dans les Chapitres 2 et 3, on sait que pour un assemblage aux proportions données, une même force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ) donnera le même supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ), peu importe la valeur de précontrainte ou de diamètre nominal choisie. Ainsi, les suppléments relatifs présentés dans le Tableau 5.3 sont obtenus.

Tableau 5.3 – Suppléments relatifs à la précontrainte en fonction de la précontrainte

$Q$ (N)	$F_b/Q$	$\Delta F_b/Q$	$\Delta M_b/(d_{nom}Q)$
5000	3.00	5.20	1.86E-02
10000	1.50	2.20	8.19E-02
15000	1.00	1.20	4.71E-02
20000	0.75	0.697	2.98E-02
25000	0.60	0.397	1.94E-02
30000	0.50	0.215	1.24E-02
35000	0.43	0.125	8.16E-03
40000	0.38	0.0774	5.51E-03
50000	0.30	0.0345	2.71E-03
60000	0.25	0.0176	1.46E-03
70000	0.21	0.0098	8.43E-04
80000	0.19	0.0058	5.22E-04
90000	0.17	0.0035	3.46E-04
100000	0.15	0.0023	2.46E-04
110000	0.136	0.0015	1.87E-04
120000	0.125	0.0010	1.52E-04
130000	0.115	0.0008	1.31E-04
140000	0.107	0.0006	1.18E-04
150000	0.100	0.0005	1.10E-04

### 5.2.3. Contraintes maximales et alternées dans le boulon

À partir de ces résultats de suppléments de force et de moment adimensionnels, on peut évaluer les contraintes maximales (équation (5.1)) et minimales (équation (5.2)) dans le boulon.

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{(Q + \Delta F_b)}{\pi (0.86(d_{nom}/2))^2} + \frac{\Delta M_b 0.86(d_{nom}/2)}{1/4 \pi (0.86(d_{nom}/2))^4} \right) \leq 850 \text{ MPa} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{\min} = \left( \frac{Q}{1/4 \pi (0.86(d_{nom}/2))^2} \right) \quad (5.2)$$

Ces contraintes maximales et minimales permettent ensuite d'évaluer la contrainte moyenne avec l'équation (5.3), qui peut aussi être reformulée en utilisant les suppléments adimensionnels, telle que présentée à l'équation (5.4).

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \left( \frac{2\Delta F_b}{\pi(0.86d_{nom})^2} + \frac{16\Delta M_b}{\pi(0.86d_{nom})^3} + \frac{4Q}{\pi(0.86d_{nom})^2} \right) \quad (5.3)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = Q \left( \frac{2\left(\frac{\Delta F_b}{Q}\right)}{\pi(0.86d_{nom})^2} + \frac{16\left(\frac{\Delta M_b}{d_{nom}Q}\right)}{\pi(0.86)^3 d_{nom}^2} + \frac{4}{\pi(0.86d_{nom})^2} \right) \quad (5.4)$$

Les contraintes maximales et minimales permettent également d'évaluer la contrainte alternée dans le boulon avec l'équation (5.5), qui peut elle aussi être reformulée en utilisant les suppléments adimensionnels, telle que présentée à l'équation (5.6).

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \left( \frac{2\Delta F_b}{\pi(0.86d_{nom})^2} + \frac{16\Delta M_b}{\pi(0.86d_{nom})^3} \right) \quad (5.5)$$

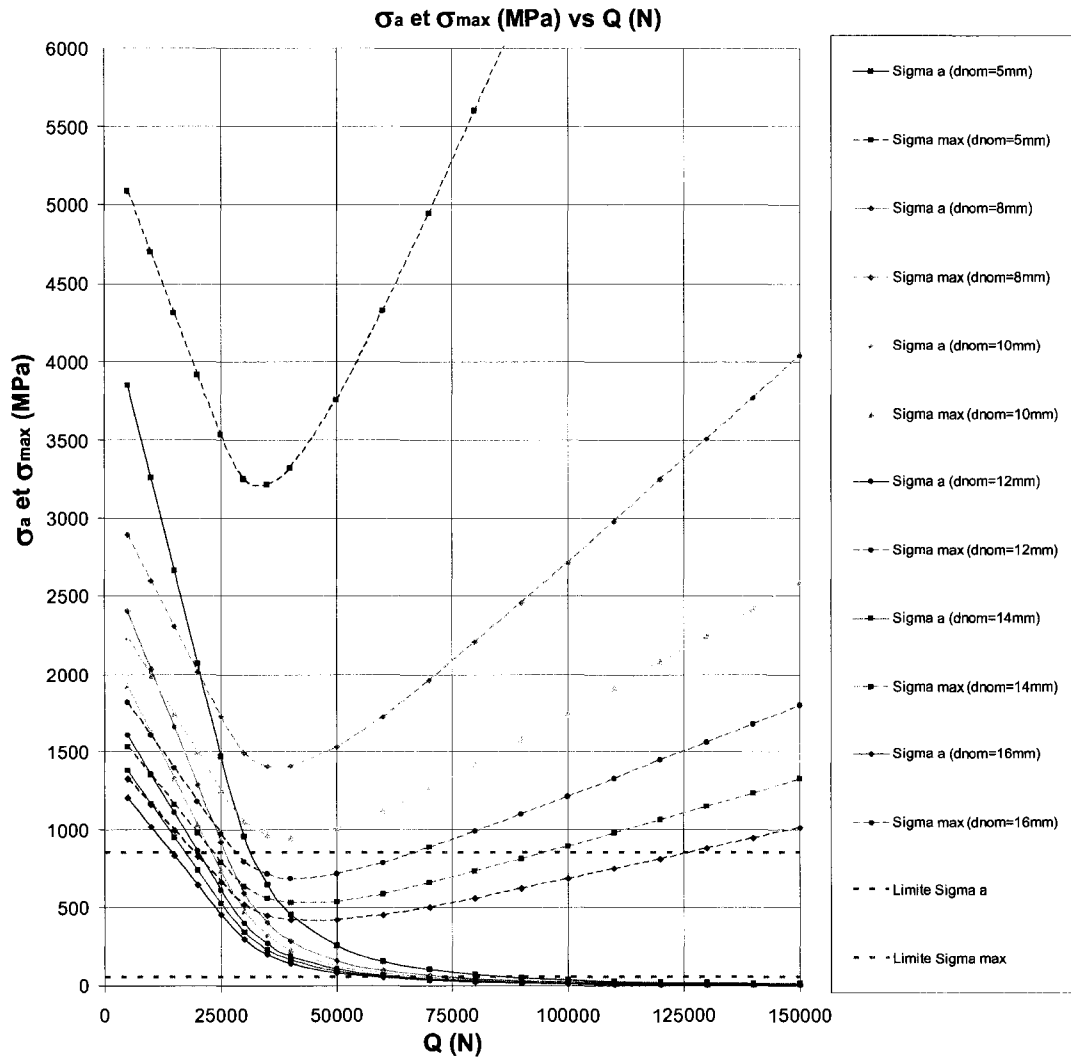
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = Q \left( \frac{2\left(\frac{\Delta F_b}{Q}\right)}{\pi(0.86d_{nom})^2} + \frac{16\left(\frac{\Delta M_b}{d_{nom}Q}\right)}{\pi(0.86)^3 d_{nom}^2} \right) \quad (5.6)$$

Afin de limiter le choix de précontrainte et de diamètre nominal de boulon, deux limites sont imposées sur les contraintes. En effet, pour assurer une durée de vie suffisante en fatigue lors de l'application d'un chargement cyclique sur l'assemblage, la contrainte alternée est limitée à des valeurs inférieures à 50 MPa, (équation (5.7)). De plus, afin de s'assurer de la résistance du boulon, la contrainte maximale permise dans le boulon est fixée à 850 MPa, telle que montrée à l'équation (5.8). Ces valeurs étaient présentées dans les données initiales du problème.

$$\sigma_a \leq 50 \text{ MPa} \quad (5.7)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m \leq 850 \text{ MPa} \quad (5.8)$$

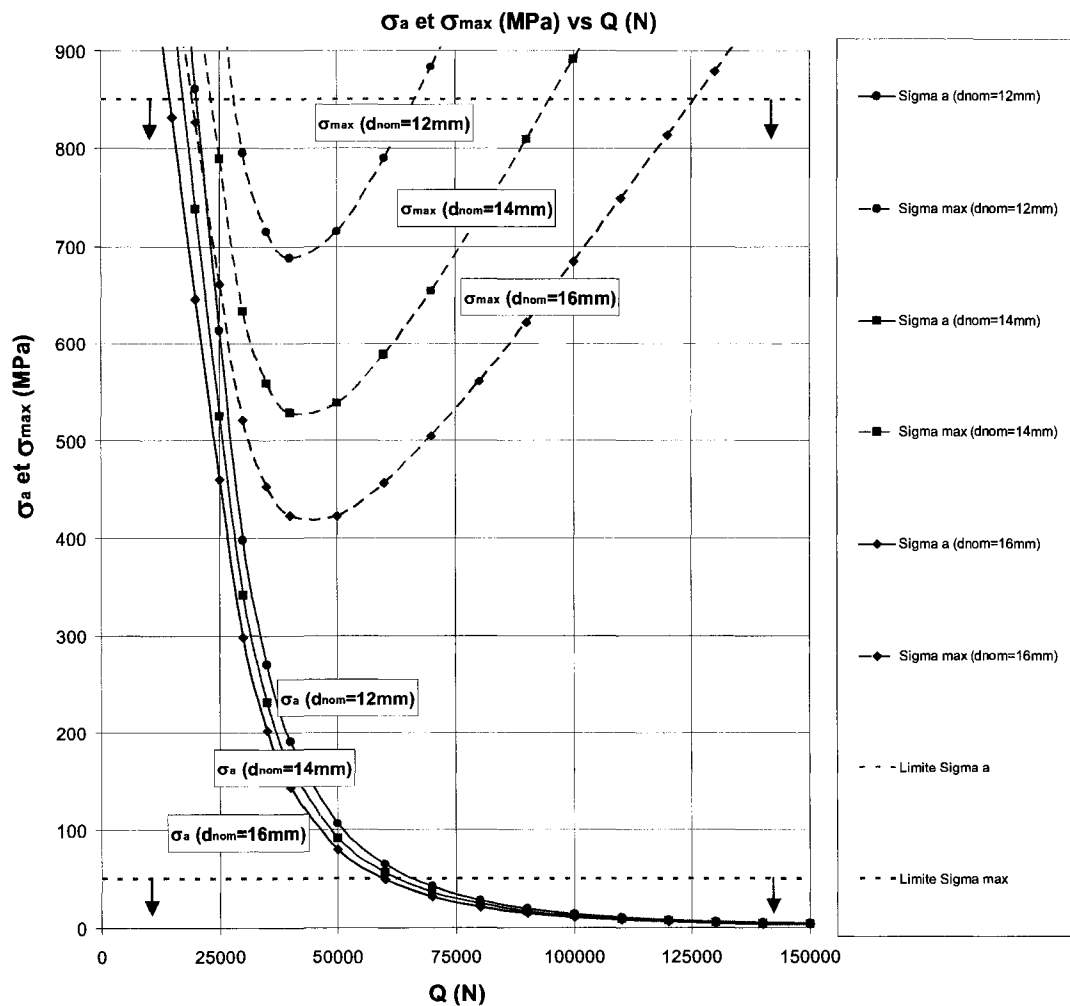
Ainsi, en faisant varier le diamètre nominal du boulon et la précontrainte, on peut tracer sur un même graphique la contrainte alternée et la contrainte maximale en fonction de ces deux paramètres.



**Figure 5.3 – Contrainte alternée et maximale dans le boulon en fonction du diamètre nominal et de la précontrainte**

Sur la Figure 5.3, on peut voir que les trois diamètres de boulon suivants : 5 mm, 8 mm et 10 mm sont insuffisants avec les proportions choisies pour assurer une contrainte maximale inférieure à 850 MPa. Par contre, les diamètres nominaux de 12 mm, 14 mm et 16 mm permettent d'obtenir une contrainte maximale inférieure à 850 MPa.

La Figure 5.4 reprend exactement le même graphique que celui présenté à la Figure 5.3, mais avec un agrandissement dans la zone intéressante, celle située près de la limite de contrainte alternée de 50 MPa et maximale de 850 MPa. Les contraintes maximales et alternées doivent évidemment se trouver sous chacune des limites respectives pour être acceptables.



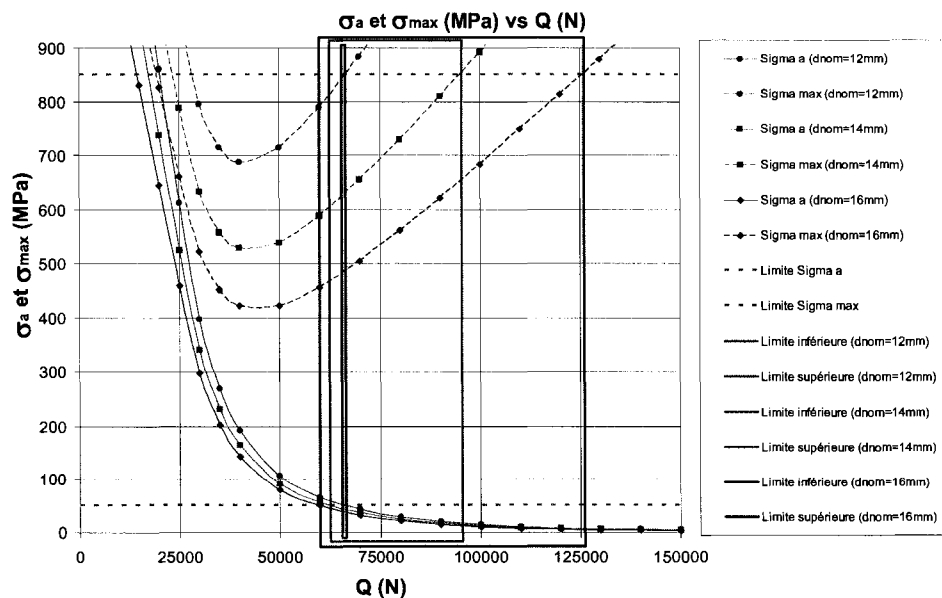
**Figure 5.4 – Contrainte alternée et maximale dans le boulon en fonction du diamètre nominal et de la précontrainte (agrandissement)**

D'après la Figure 5.4, on peut extraire pour chacun des trois diamètres nominaux considérés les précontraintes minimales et maximales qui limitent les contraintes alternées et maximales dans l'intervalle requis ( $\sigma_a \leq 50$  MPa et  $\sigma_{max} \leq 850$  MPa). Ces valeurs sont présentées dans le Tableau 5.4.

**Tableau 5.4 – Limites de précontrainte pour différents diamètres nominaux de boulon afin d'assurer la tenue en statique et en fatigue du boulon**

$d_{nom}$ (mm)		Q (N)	$\sigma_a$ (MPa)	$\sigma_{max}$ (MPa)
12	min	65500	50.0	845.0
	max	66500	49.0	850.0
14	min	62500	50.0	600.0
	max	95500	15.0	850.0
16	min	60000	50.0	480.0
	max	126000	7.5	850.0

Les limites de précontrainte possible pour chacun des trois diamètres nominaux ont été tracées sur la Figure 5.5 afin de mieux visualiser l'étendue de précontrainte acceptable en fonction du diamètre nominal du boulon.



**Figure 5.5 – Limites de précontrainte pour différents diamètres nominaux de boulon**

Les Figure 5.6, Figure 5.7 et Figure 5.8 montrent mieux l'étendue de précontrainte acceptable pour chacun des trois diamètres nominaux retenus. Cette zone est représentée par la zone grise sur les figures, exceptée pour la Figure 5.6 puisque la zone est trop faible pour être visible. Cette zone grise montre l'écart existant entre la contrainte alternée et sa valeur limite de 50 MPa, de même que l'écart entre la contrainte maximale et sa valeur limite fixée à 850 MPa.

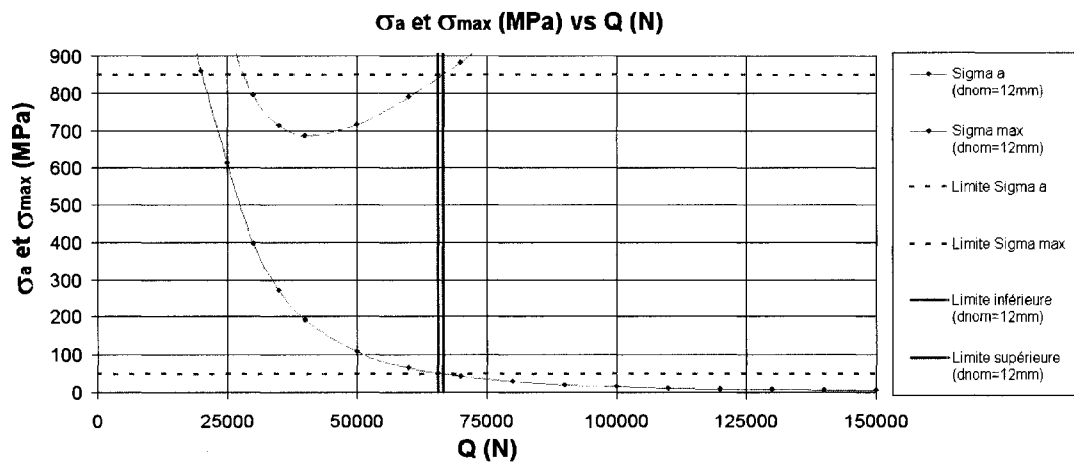


Figure 5.6 – Limites de précontrainte pour un diamètre nominal de boulon de 12 mm

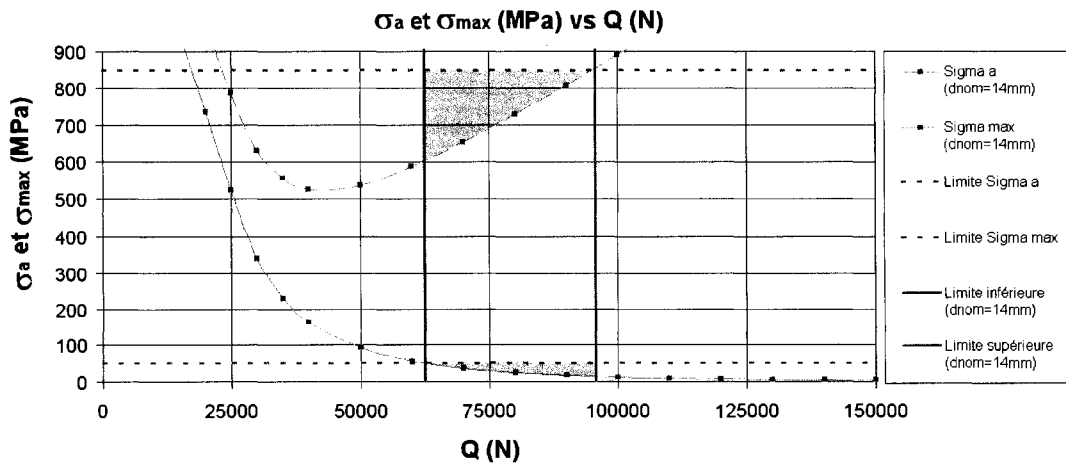
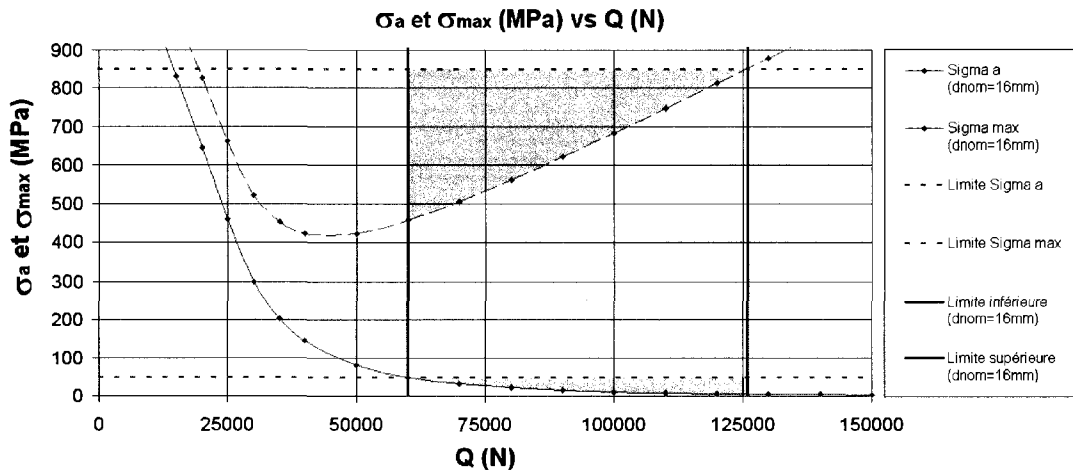


Figure 5.7 – Limites de précontrainte pour un diamètre nominal de boulon de 14 mm



**Figure 5.8 – Limites de précontrainte pour un diamètre nominal de boulon de 16 mm**

#### 5.2.4. Analyse des résultats

Dans cet exemple, la combinaison optimale entre le diamètre nominal et la précontrainte sera obtenue lorsque la masse sera minimisée, en respectant évidemment les limites établies sur la contrainte maximale et alternée du boulon. Puisque l'assemblage est défini en termes de proportions (rapport entre les dimensions et le diamètre nominal du boulon), un diamètre nominal de boulon de 16 mm conduira à un assemblage plus gros et donc plus lourd que pour un diamètre nominal de 12 mm. De plus, on remarque que pour un diamètre nominal plus grand, il y a plus de latitude dans le choix de précontrainte. Il est alors possible d'obtenir des contraintes maximale et alternée plus éloignées des limites imposées que dans le cas d'un diamètre plus petit, fournissant ainsi plus de marge de sécurité. Idéalement, pour obtenir la configuration optimale (la masse la plus petite), on cherche à être près de ces limites, ce qui suppose une excellente connaissance du phénomène en cause. Donc, d'après le Tableau 5.4 et la Figure 5.6, on remarque que la combinaison optimale entre le diamètre nominal du boulon et la précontrainte est respectivement de 12 mm et de 66500 N. On obtient ainsi une



contrainte alternée dans le boulon de 49 MPa et une contrainte maximale d'un peu moins de 850 MPa, ce qui respecte les limites fixées dans l'énoncé du problème.

Normalement, davantage de paramètres seraient à définir, que ce soit les proportions de l'assemblage ou le rapport des modules d'Young du boulon et des pièces ( $E_b/E_p$ ). Il faudrait donc dans une recherche des paramètres optimaux, non seulement définir le diamètre nominal des boulons, leur nombre et la précontrainte à appliquer, mais aussi les proportions de l'assemblage et/ou les matériaux. Ce problème d'optimisation est toutefois beaucoup plus complexe à résoudre que celui présenté et nécessiterait l'utilisation d'algorithmes numériques pour le résoudre. Le serveur gratuit NEOS [18] fait partie des possibilités. Toutefois, ce type de problème d'optimisation ne sera pas abordé dans le cadre de ce mémoire de maîtrise, mais il consisterait une nouvelle direction de recherche intéressante à exploiter à partir de ces résultats.

## CHAPITRE 6

### 6. NOUVELLE FORMULATION DE LA POSITION (s) DE LA FORCE DE CONTACT APPLIQUÉE AU MODÈLE DE POUTRE FLÉCHIE

Le modèle de poutre fléchie est généralement un modèle satisfaisant pour évaluer le supplément de force ou de moment dans le boulon, principalement pour des cas simples et lorsque le chargement extérieur est grandement excentré. Cependant, comme il a été montré dans la revue de littérature, il existe des variantes du modèle de poutre fléchie qui permettent d'obtenir des résultats analytiques plus près des résultats numériques ou expérimentaux. Le modèle de poutre sur appui élastique ([1, 2]) présenté dans la revue de littérature (pp. 25-28) s'avère un bon exemple. Malheureusement, le modèle de poutre fléchie ne fournit pas de résultats satisfaisants pour des cas plus complexes tel qu'un assemblage de brides cylindriques. Ainsi, on cherche à partir des modèles existants un nouveau modèle auquel des améliorations permettront de rapprocher davantage le comportement analytique à celui défini à partir d'un modèle d'éléments finis. Pour arriver à développer ce nouveau modèle, celui-ci doit d'abord être testé sur un cas simple, celui de deux plaques rectangulaires soumis à un chargement extérieur excentré. Une fois le modèle développé sur ce cas simple, celui-ci sera appliqué sur un cas plus courant, celui de deux brides en chape. Finalement, la procédure à suivre pour adapter le nouveau modèle à un assemblage de brides cylindriques sera suggérée.

#### 6.1. Assemblage de plaques rectangulaires

Le premier cas étudié est un assemblage de plaques rectangulaires sur lequel sont appliqués une force de précontrainte ainsi qu'un chargement extérieur excentré, tel qu'utilisé précédemment dans le cadre de ce mémoire.

##### 6.1.1. Modèle de poutre sur appui élastique (P.A.E.)

Le modèle de poutre sur appui élastique ([1, 2]) expliqué dans la revue de littérature (pp. 25-28) servira de base comparative avec le nouveau modèle. Ce modèle fournit déjà

de bons résultats en ce qui concerne les suppléments de force et de moment dans le boulon. Cependant, le ratio de position ( $s/X$ ) trouvé pour la force équivalente de contact ( $F_c$ ) ne représente pas tout à fait la réalité. En effet, celle-ci plafonne à 0.75 pour ce modèle, alors qu'elle aurait dû tendre théoriquement vers la valeur de 1. Un nouveau modèle est alors proposé pour combler cette lacune et il ouvrirait la voie à des développements futurs.

### 6.1.2. Nouveau modèle de poutre non linéaire (N.M.)

Le nouveau modèle utilise une partie du modèle de poutre sur appui élastique [2] pour l'appliquer sur le modèle de poutre fléchie [1-3, 6-8]. Dans le modèle avec appui élastique, un des termes de souplesse de l'assemblage ( $S_c$ ) est modifié par la variation de la surface de contact entre les deux brides. Cette variation de souplesse est directement liée à la valeur de position ( $s$ ) de la force équivalente de contact à l'interface des deux brides. Avec le nouveau modèle, on cherche également à faire varier la souplesse des brides ( $S_p$ ) de l'assemblage, mais par l'intermédiaire d'un facteur de correction ( $\gamma$ ). Ce facteur, initialement relié à la hauteur d'application de la charge pour les cas de deux plaques rectangulaires, avait été redéfini par une autre équation proposée par Bahkiet [2, 6] et qui dépendait de la position ( $s$ ). Cette équation fournissait une valeur maximale de 1, ce qui ne sera plus le cas. En effet, il a été démontré avec ce nouveau modèle qu'une valeur plus grande que 1 permet d'obtenir de meilleurs résultats de position ( $s$ ) de la force équivalente de contact.

Pour assurer la validité du modèle, certaines conditions devraient être respectées. En voici la liste :

- Idéalement, il faut que :  $E_b \approx E_p$  et  $X_{frac} \approx h_{p\ frac}$  où  $X_{frac} = X/d_{nom}$  et  $h_{p\ frac} = h_p/d_{nom}$ , voir Figure 6.1, (voir Guillot [3] Tableau XII : Règles de conception des liaisons de pièces prismatiques)
- Idéalement, il faut que  $S_b \gg S_p$  (désiré pour des assemblages soumis à la fatigue).
- Pour  $E_b \gg E_p$  (ex. :  $E_p = 70$  GPa et  $E_b = 200$  GPa), il faut que  $S_b \gg S_p$ .
- Il faut que  $X_{frac}/h_{p\ frac} \leq 1.5$ .

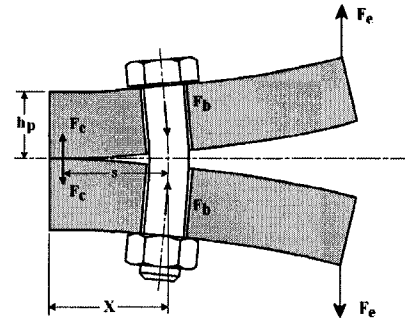


Figure 6.1 – Dimensions géométriques

Donc, on utilise pour le calcul de la souplesse la même procédure que pour le modèle en poutre fléchie expliqué dans la revue de littérature. En remplaçant dans l'équation (1.18) les facteurs ( $q_1$ ) et ( $q_2$ ) par leur valeur respective (conformément à Agatonovic [8] ou Guillot [3]), l'équation (6.1) est obtenue.

$$\left( \frac{m}{6E_p I_p S} \right) s^3 + \left( \frac{Q}{F_e} - \frac{S_b + S_p (1 - \gamma)}{S} \right) s - m = 0 \quad (6.1)$$

À partir des nombreux résultats issus des modèles d'éléments finis utilisés pour les deux articles présentés aux chapitres 2 et 3 précédents, on trouve de manière empirique l'équation du facteur ( $\gamma$ ) présenté à l'équation (6.2) et représentant le facteur de modification de la souplesse en fonction du ratio de position ( $s/X$ ).

$$\gamma = 0.729 \left( \frac{s}{X} \right)^{1.964} + 9.997 \left( \frac{s}{X} \right)^{23.765} \quad (6.2)$$

Puisque de nouveaux paramètres adimensionnels ont été développés, on peut les intégrer dans les équations analytiques utilisées dans les différents modèles. On obtient ainsi l'équation (6.3) représentant la sommation des forces relatives à la précontrainte.

$$\left(\frac{F_c}{Q}\right) = \left(\frac{\Delta F_b}{Q}\right) - \left(\frac{F_e}{Q}\right) + 1 \quad (6.3)$$

On obtient pour la force de contact équivalente relative à la précontrainte l'équation (6.4).

$$\left(\frac{F_c}{Q}\right) = \left(\frac{m}{s}\right) \left(\frac{m + 2E_p I_p \left(q_1 + q_2/m\right)}{s + 2m + 2E_p I_p q_1}\right) \left(\frac{F_e}{Q}\right) \quad (6.4)$$

À partir des équations (6.3) et (6.4) et sachant que ( $q_1 = \infty$ ) et ( $q_2 = \text{quelconque}$ ), on peut simplifier pour obtenir l'équation (6.5) permettant d'évaluer directement le supplément de force relatif à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) pour toute valeur de ( $s/X$ ).

$$\left(\frac{\Delta F_b}{Q}\right) = \left(1 + \frac{m}{s}\right) \left(\frac{F_e}{Q}\right) - 1 \quad (6.5)$$

En ce qui concerne le calcul du supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ), le nouveau modèle reprend les équations utilisées dans le modèle sur appui élastique. Cependant, dans ce cas-ci, la valeur de ( $s/X$ ) est variable et non constante à 0.75. Ces équations originaires du modèle sur appui élastique sont détaillées dans la thèse de Bahkiet [2].

1) Si ( $s/X \leq 0.75$ ), le supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte se calcule par l'équation (6.6).

$$\left(\frac{\Delta M_b}{d_{nom}Q}\right) = \frac{s}{d_{nom} \left(\frac{2h_p E_p I_p}{s E_b I_b} + 2\right)} \left(\frac{F_c}{Q}\right) \quad (6.6)$$

2) Si ( $s/X > 0.75$ ), le supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte se calcule par l'équation (6.7).

$$\left(\frac{\Delta M_b}{d_{nom}Q}\right) = \left(\frac{\Delta M_{bc}}{d_{nom}Q}\right) + \left(\frac{1.25}{d_{nom}}\right) \left(\frac{(F_b/Q) - (F_{bc}/Q)}{(1/S_b)s}\right) \left(\frac{E_b I_b E_p I_p}{h_p E_p I_p + s E_b I_b}\right) \quad (6.7)$$

où  $\frac{F_{bc}}{Q}$  et  $\frac{\Delta M_{bc}}{mQ}$  sont évalués à  $s_C/X = 0.75$

Le nouveau modèle de poutre non linéaire a été développé en prenant un ratio de  $(E_b/E_p) \approx 1$ . Les proportions de trois assemblages analysés sont présentées dans le Tableau 6.1. Plusieurs autres géométries sont présentées à l'Annexe E.

**Tableau 6.1 – Proportions des assemblages analysés**

#	$d_{nom}$ (mm)	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$b_{frac}$	$h_{p\frac{frac}{}}$	$\gamma$	Q (N)	$E_b$ (GPa)	$E_p$ (GPa)
1	16	2	2	2	3	4	0.3	89223	205	200
2	16	3	3	3	3	3	0.5	89223	205	200
4	16	1.5	1.75	3	2.5	3.5	0.7	89223	205	200

Les suppléments de force et de moment adimensionnels sont tracés en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte, de même que la position relative de la force équivalente de contact ( $s/X$ ). Celle-ci a été calculée en utilisant une procédure détaillée à l'Annexe C. Les Figure 6.2 à Figure 6.10 regroupent les graphiques représentant le comportement des géométries 1, 2 et 4. Les résultats des autres géométries se situent à l'Annexe E. À noter que dans la légende, la courbe nommée (É.F.) représente les résultats trouvés à partir du modèle d'éléments finis, la courbe nommée (P.A.E.) représente ceux obtenus par le modèle de poutre sur appui élastique, alors que celle nommée (N.M.) représente ceux obtenus avec le nouveau modèle.

### Résultats de la géométrie 1 :

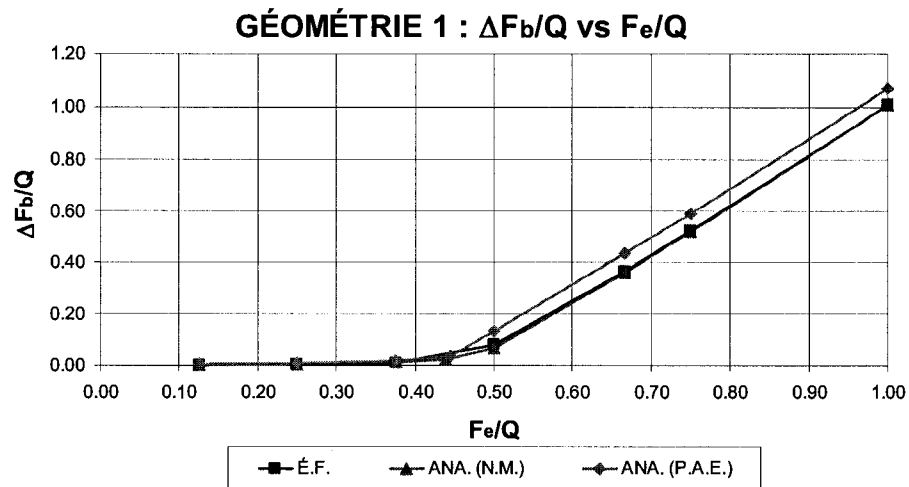


Figure 6.2 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 1)

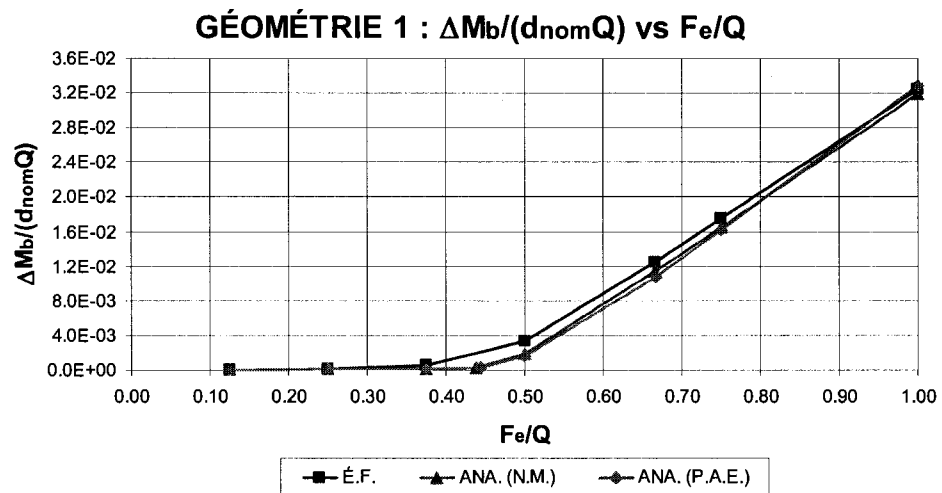


Figure 6.3 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 1)

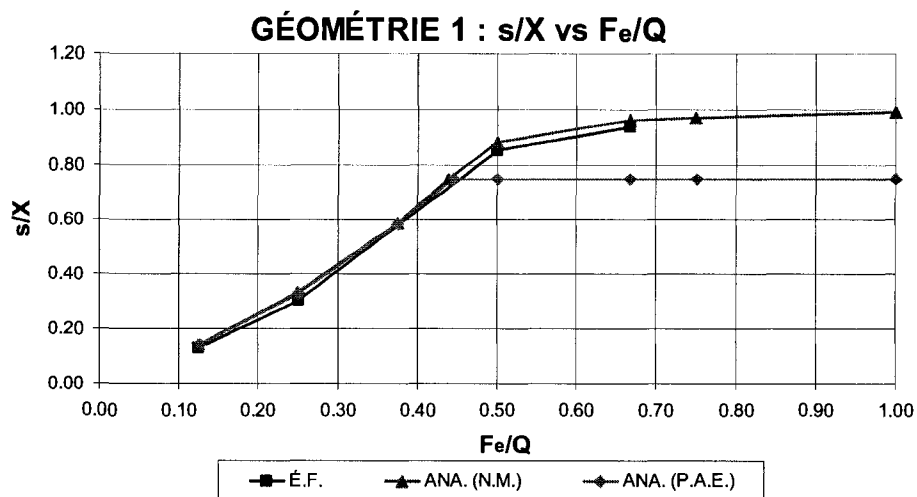


Figure 6.4 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 1)

Résultats de la géométrie 2 :

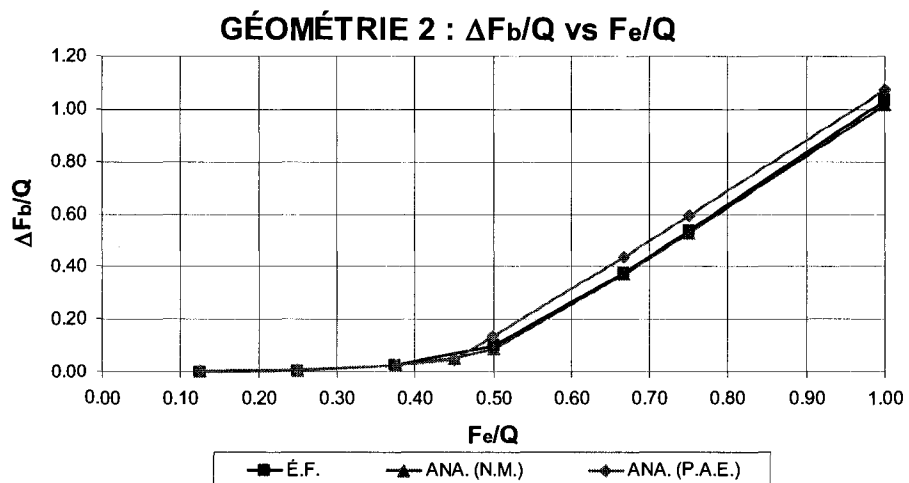


Figure 6.5 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 2)



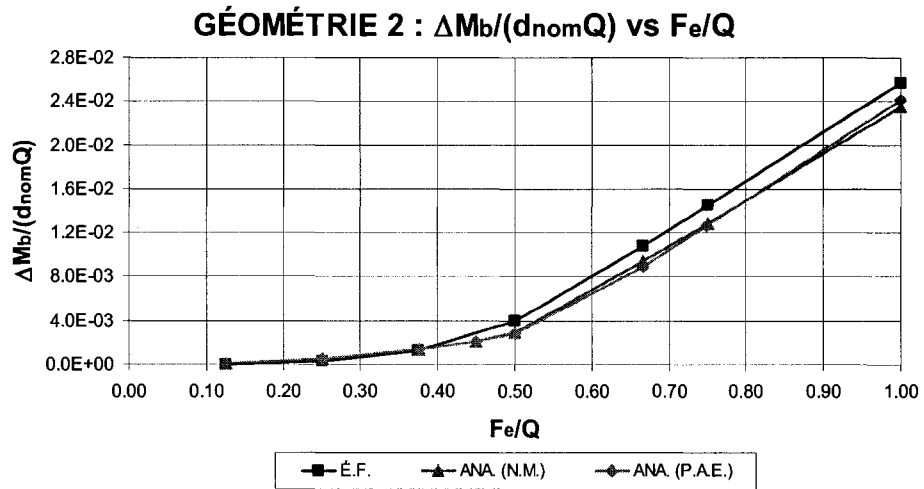


Figure 6.6 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 2)

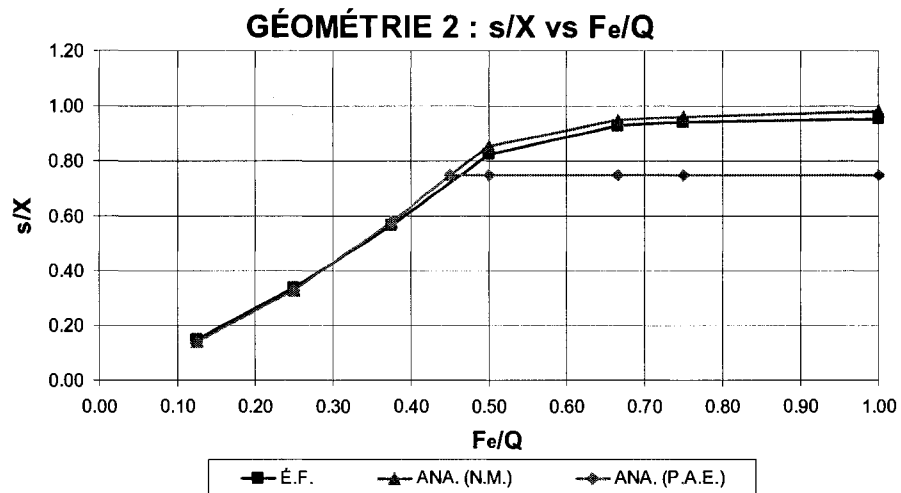


Figure 6.7 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 2)

Résultats de la géométrie 4 :

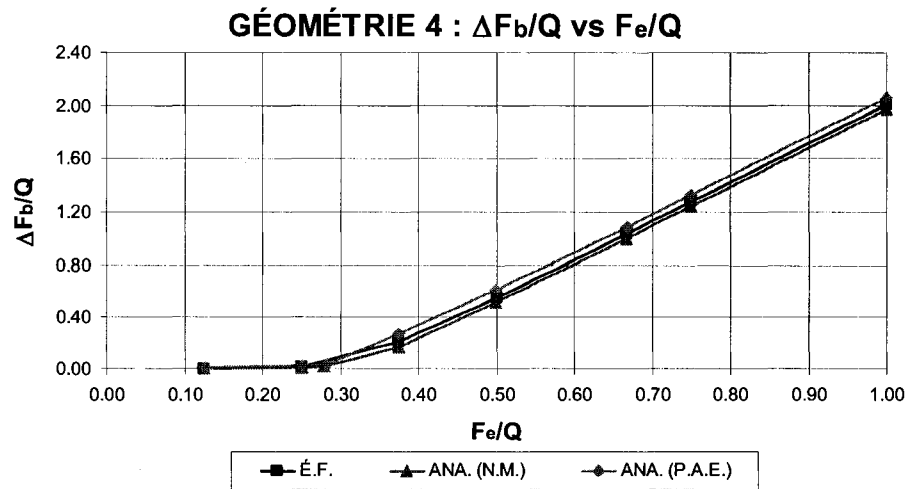


Figure 6.8 – Supplément de force relatif à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 4)

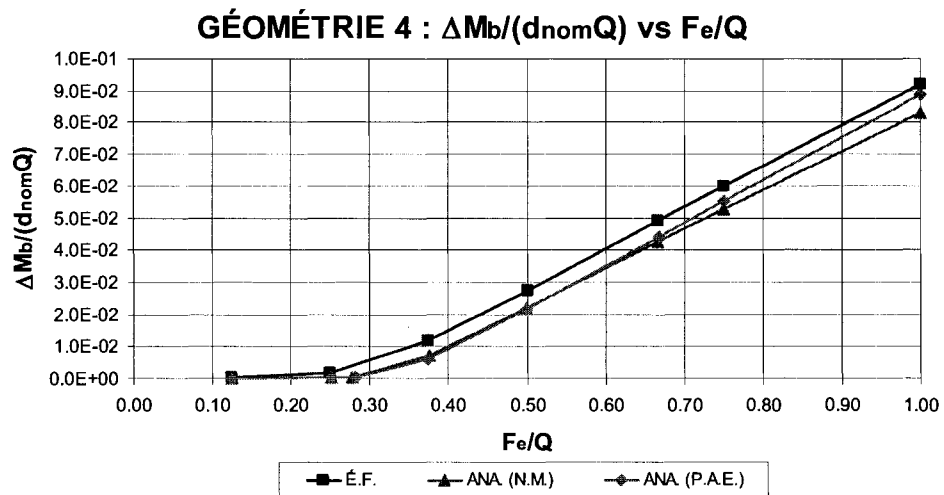
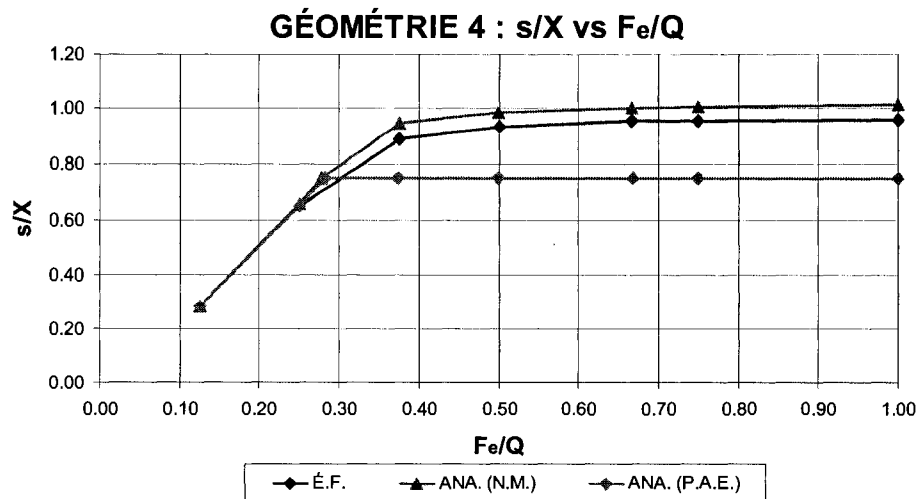


Figure 6.9 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 4)



**Figure 6.10 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Géométrie 4)**

Pour des valeurs  $(s/X) \leq 0.75$ , on remarque qu'il existe peu de différences entre le nouveau modèle et le modèle de poutre sur appui élastique. En effet, les valeurs de suppléments adimensionnels trouvées, de même que les valeurs de  $(s/X)$  sont sensiblement les mêmes. Cependant, sur les Figure 6.4, Figure 6.7, Figure 6.10, on remarque qu'au-delà de 0.75, le nouveau modèle est plus fidèle aux éléments finis en ce qui a trait à la position relative  $(s/X)$ . De plus, on remarque qu'avec le nouveau modèle, il n'y a pas de cassure de la courbe de supplément de force relative à la précontrainte à la valeur  $(s/X) = 0.75$ . Ce n'est pas le cas pour le modèle de poutre sur appui élastique. En fait, dans ce dernier modèle, les équations permettant d'évaluer les suppléments adimensionnels changent à partir de cette valeur, ce qui amène une discontinuité dans la pente de la courbe. Cette discontinuité dans le graphe de supplément de force relatif à la précontrainte  $(\Delta F_b/Q)$  est toutefois inexistante dans celle du nouveau modèle, puisque la même équation est utilisée pour toutes les valeurs de  $(s/X)$ . Pour ce qui est du supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte  $(\Delta M_b/(d_{nom}Q))$ , la même équation est utilisée pour les deux modèles, sauf qu'elle a maintenant un coefficient multiplicateur de 1.25 d'ajouté à un des termes, en plus

d'utiliser une valeur de  $(s/X)$  variable. En regard de ces résultats, le nouveau modèle représente bien le comportement du boulon en termes de suppléments adimensionnels. Il convient donc maintenant d'étudier son application sur d'autres cas.

## 6.2. Assemblage de brides en chape

Le deuxième cas sur lequel on applique le nouveau modèle est le cas des brides en chape, tel qu'utilisé pour les essais expérimentaux réalisés par Massol [1] et Bahkiet [2].

### 6.2.1. Modèle de poutre sur appui élastique (P.A.E.)

Le modèle de poutre sur appui élastique donne également dans ce cas-ci de bons résultats en ce qui concerne les suppléments de force et de moment adimensionnels. Par contre, tout comme pour l'assemblage précédent, la position relative  $(s/X)$  n'est pas conforme à celle trouvée avec les éléments finis. Le nouveau modèle est donc appliqué pour le cas de l'assemblage de brides en chape.

### 6.2.2. Modèle de poutre non linéaire modifié

Les conditions de validité du modèle sont supposées être les mêmes que pour le cas précédent. Les mêmes équations que pour le cas précédent sont utilisées. Par contre, les valeurs des paramètres  $(q_1)$  et  $(q_2)$  sont différentes.

$$q_1 = -\frac{H}{E_t I_t} \text{ et } q_2 = 0$$

$$\text{Où } I_t = \frac{1}{12} b h_t^3 \text{ et } E_t = E_p$$

La formule du facteur de correction  $(\gamma)$  est aussi supposée être la même. Cependant, pour que le comportement de l'assemblage de brides en chape se rapproche de celui de deux plaques rectangulaires, il faut que l'épaisseur  $(h_t)$  de la plaque verticale soit plus faible que l'épaisseur  $(h_p)$  de la plaque horizontale. Les proportions des géométries utilisées sont présentées dans le Tableau 6.2. Les géométries sont les mêmes que celles utilisées dans les essais expérimentaux effectués par Massol [1] et Bahkiet [2].

Tableau 6.2 – Proportions des brides en chape No.2 et 7

#	$d_{nom}$ (mm)	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$b_{frac}$	$h_{p,frac}$	$h_t$	$H_{frac}$	$Q$ (kN)	$E_s$ (GPa)	$E_b$ (GPa)
2	24	1.688	1.938	1.5417	4.167	1.667	0.292	6.25	200	200	200
7	24	1.083	2.542	2.1458	2.917	1.04167	0.292	6.25	200	200	200

Les suppléments adimensionnels de même que la position relative ( $s/X$ ) ont été tracés sur les graphiques présentés sur les Figure 6.11 à Figure 6.13 pour l'assemblage de brides en chape No.2. Sur ces figures sont regroupés les résultats provenant d'essais expérimentaux, d'analyses par éléments finis, du nouveau modèle de poutre non linéaire et du modèle de poutre sur appui élastique.

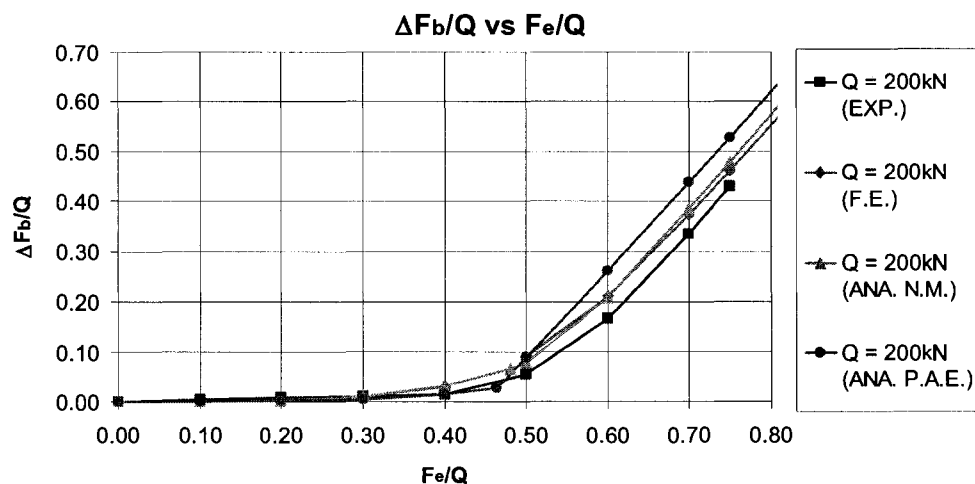


Figure 6.11 – Supplément de force relative à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.2)

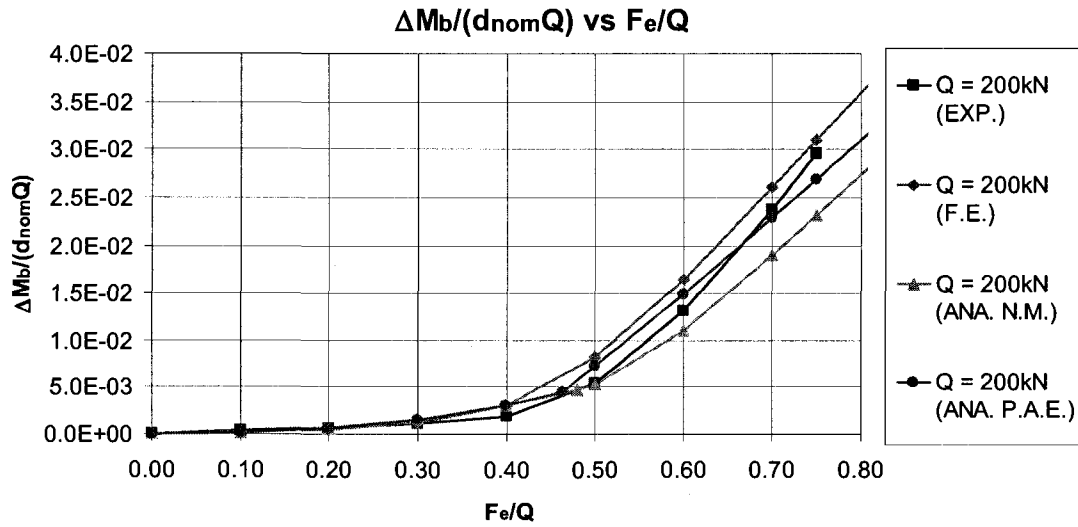


Figure 6.12 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.2)

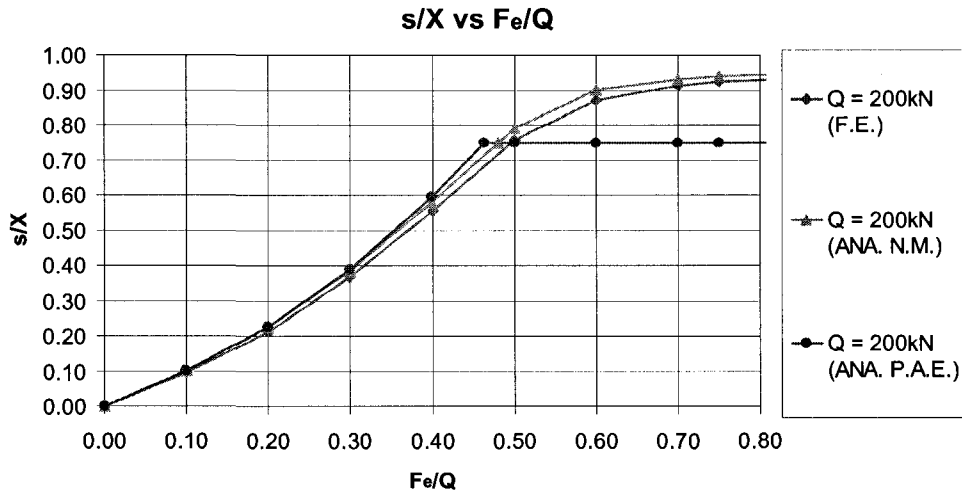


Figure 6.13 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.2)

Les mêmes graphiques ont été tracés pour l'assemblage de brides en chape No.7, tels que montrés sur les Figure 6.14 à Figure 6.16.

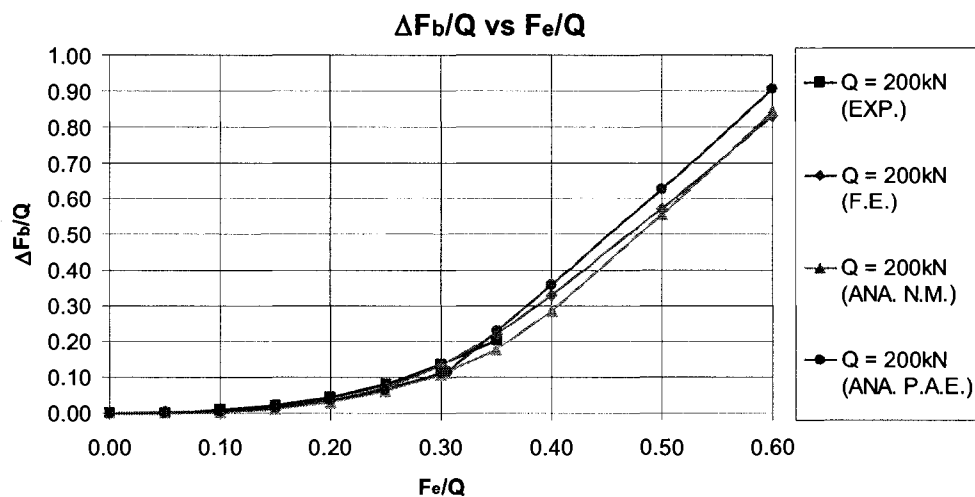


Figure 6.14 – Supplément de force relative à la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.7)

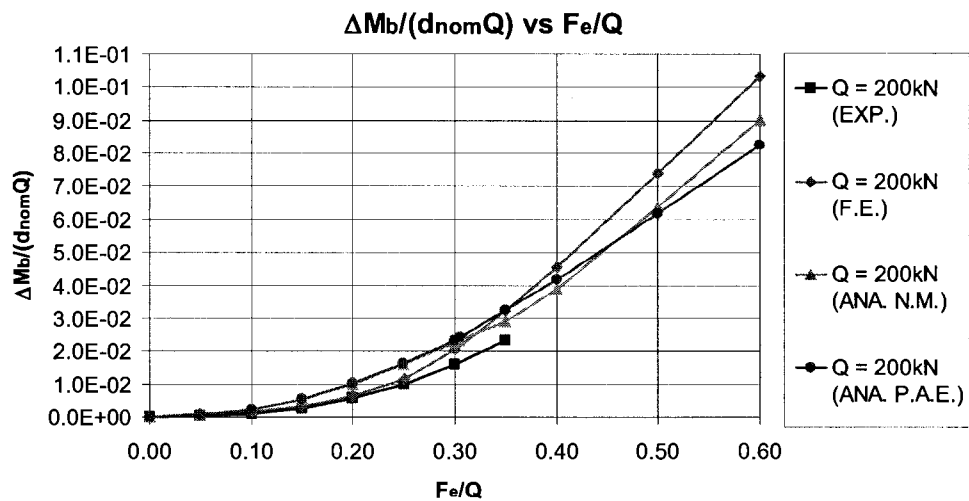
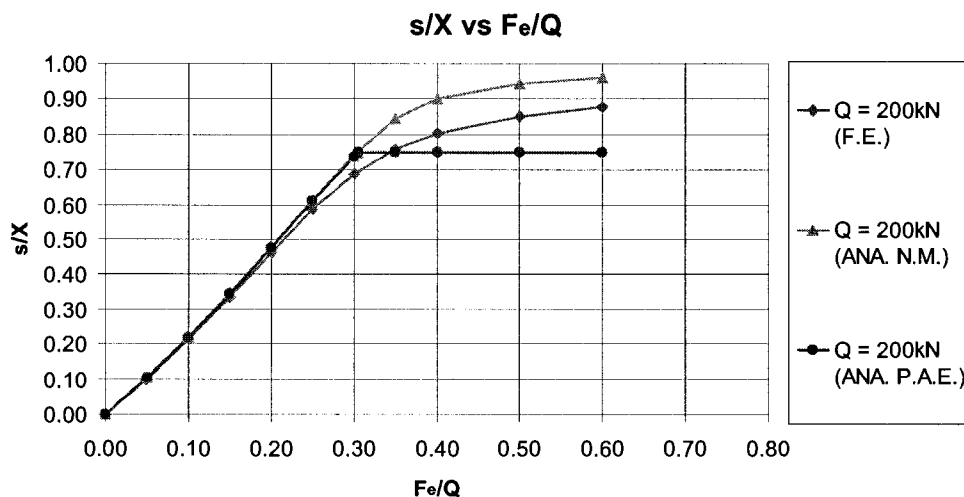


Figure 6.15 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal du boulon par la précontrainte en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.7)



**Figure 6.16 – Position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte (Bride No.7)**

D'après les courbes utilisant le nouveau modèle, on remarque que celui-ci s'adapte généralement bien à l'assemblage de brides en chape No.2. D'ailleurs, on voit que la courbe de la position relative ( $s/X$ ) de la force de contact évaluée par le nouveau modèle suit plus fidèlement celle trouvée à partir des éléments finis que celle tracée à partir du modèle de poutre sur appui élastique. Toutefois, les suppléments de force et de moment adimensionnels étaient déjà relativement bien représentés par le modèle de poutre sur appui élastique, donc le nouveau modèle n'apporte pratiquement aucune amélioration supplémentaire de ce côté.

En ce qui concerne l'assemblage de brides en chape No.7, les suppléments de force et de moment adimensionnels sont sensiblement les mêmes pour les deux modèles analytiques tout comme pour l'assemblage No.2. De plus, on remarque que la position relative ( $s/X$ ) trouvée avec le nouveau modèle reproduit mieux le comportement trouvé à partir de résultats d'éléments finis que ne le fait le modèle de poutre sur appui élastique. Il existe tout de même un décalage entre les résultats numériques et ceux du nouveau modèle analytique qui nécessitera une plus profonde investigation. Il n'est pas à exclure par



exemple de considérer des facteurs géométriques dans l'équation du paramètre ( $\gamma$ ) qui n'est pour l'instant que fonction de ( $s/X$ ).

Un avantage du nouveau modèle réside dans l'utilisation d'une seule équation plutôt que deux pour l'évaluation du supplément de force relatif à la précontrainte, ce qui permet d'éviter la discontinuité discutée dans la section sur l'assemblage de plaques rectangulaires. Pour améliorer le modèle, il faudrait étudier davantage de résultats numériques et analytiques de cas de brides en chape, puis vérifier s'il est nécessaire de trouver une nouvelle équation pour le facteur ( $\gamma$ ) plutôt que de prendre l'expression trouvée avec l'assemblage de deux plaques rectangulaires.

### **6.3. Brides cylindriques**

Dans l'industrie, un cas plus courant d'assemblage boulonné est l'assemblage de brides cylindriques. Il convient donc de vérifier l'applicabilité du nouveau modèle développé sur ces types d'assemblage, sachant que ces modèles se basent souvent sur des hypothèses simplificatrices. Cette partie ne sera toutefois pas abordée dans le cadre de ce travail. Elle fera partie du mandat de celui ou celle qui poursuivra l'étude des assemblages boulonnés

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Lors de ce projet portant sur l'étude d'assemblages boulonnés précontraints soumis à des chargements excentrés, de nombreux thèmes ont été abordés. La plus importante conclusion issue de tout ce travail provient probablement de la Partie I de l'article présentée au chapitre 2. Dans cette première partie de l'article soumis à la revue « *International Journal of Pressure Vessels and Piping* » se trouve le développement d'une nouvelle approche pour étudier les assemblages boulonnés précontraints. Celle-ci permet de regrouper des assemblages boulonnés précontraints ayant des caractéristiques communes quant à leur comportement lorsqu'ils sont soumis à des forces extérieures. De cette façon, le nombre d'analyses et d'expériences nécessaires à la prédiction des suppléments de force et de moment peut être grandement réduit. Ainsi, si deux assemblages ont les mêmes proportions géométriques en termes de diamètre nominal du boulon ( $d_{nom}$ ), le même rapport des modules d'élasticité du boulon et des pièces ( $E_b/E_p$ ) et s'ils ont :

Condition 1 : Des diamètres nominaux de boulon différents, et/ou ;

Condition 2 : Des forces de précontrainte différentes, et/ou ;

Condition 3 : Des matériaux différents.

Alors : Les deux assemblages boulonnés auront le même comportement en termes de forces adimensionnelles, telles que le supplément de force relative à la précontrainte ( $\Delta F_b/Q$ ) en fonction de la force extérieure relative à la précontrainte ( $F_e/Q$ ).

Ces conditions sont également valables en ce qui concerne le supplément de moment relatif à la multiplication du diamètre nominal du boulon par sa précontrainte ( $\Delta M_b/(d_{nom}Q)$ ), ainsi que pour d'autres paramètres adimensionnels développés tels que la force équivalente de contact relative à la précontrainte ( $F_c/Q$ ) et la position de la force équivalente de contact relative à la longueur de contact extérieure ( $s/X$ ).

Dans la Partie II de l'article présentée au chapitre 3, des résultats expérimentaux de même que des données issues d'un modèle analytique ont été utilisées pour valider la nouvelle approche présentée au chapitre 2. En fait, seule la condition concernant l'indépendance du comportement de l'assemblage par rapport au choix de la précontrainte lorsque les nouveaux paramètres adimensionnels sont utilisés a été validée dans chapitre, et ceci pour deux raisons. D'abord, aucun résultat permettant de valider la première et la troisième condition n'a été trouvé dans la littérature. Ensuite, puisque le paramètre servant généralement à optimiser la quantité de supplément dans un boulon se trouve être la force de précontrainte, il est pertinent de valider la deuxième condition en se servant de résultats expérimentaux en les comparant avec ceux trouvés numériquement et analytiquement. Cette confirmation a montré qu'en se servant de cette condition et des paramètres adimensionnels, il est possible de modifier la valeur de la précontrainte et d'obtenir les suppléments d'effort sans avoir recours à de nouvelles analyses ou expériences, une seule étant suffisante. Il serait cependant avisé de valider les deux autres conditions avec des résultats expérimentaux.

L'exemple d'application présenté au chapitre 5 a permis de bien montrer l'utilisation concrète qu'il est possible de faire de ces conditions et paramètres adimensionnels. Une seule analyse a été utilisée pour évaluer les suppléments de force et de moment pour différentes valeurs de précontrainte, permettant d'évaluer rapidement les contraintes moyennes et alternées dans le boulon, afin de déterminer si ce dernier résistera à une sollicitation cyclique et statique. Cet exemple défini dans un contexte théorique devrait idéalement avoir pour paramètres les proportions de l'assemblage, ce qui n'était pas le cas. Ainsi, le problème pourrait être posé dans un contexte d'optimisation des proportions et de la précontrainte afin, par exemple, de minimiser la masse tout en respectant des critères de vie en fatigue. Le serveur NEOS mentionné à la fin du chapitre 5 pourrait être utilisé pour résoudre ce type de problème d'optimisation non linéaire avec contraintes (ex. : plage de variation des différents paramètres).

Le chapitre 6 présentait une ébauche d'amélioration des modèles analytiques existants sur deux plans, d'abord en intégrant les paramètres adimensionnels élaborés aux chapitres 2 et 3 dans les modèles analytiques, ensuite en modifiant la façon d'évaluer les suppléments afin que le comportement des assemblages respecte davantage la réalité.

Plusieurs points restent inexplorés dans le cadre de cette maîtrise, notamment le nouveau modèle développé par Ouqi Zhang et qui semble prometteur puisqu'il introduit des souplesses variant avec les forces extérieures ( $F_e$ ) appliquées. L'influence des proportions d'un assemblage boulonné sur les suppléments dans le boulon n'a pas non plus été étudié, tout comme les proportions optimales nécessaires pour minimiser la masse d'un assemblage. Une étude de la position ( $s$ ) de la force équivalente de contact n'a été que survolée, ayant pour résultat une formulation théorique basée sur les éléments finis et permettant d'évaluer cette position. Cette méthode est détaillée à l'Annexe C, mais elle n'a pas été programmée dans le cadre de ce projet.

Dans un contexte industriel où le temps et l'argent forment d'importants critères dans la réalisation des projets, cette nouvelle approche sur l'étude d'assemblages boulonnés précontraints et soumis à des chargements cycliques permet de répondre à ces deux critères puisqu'elle permet de réduire considérablement le temps de conception d'une bride optimale.

**RÉFÉRENCES**

- [1] J. Massol, "Étude des assemblages boulonnés à chargement faiblement excentré soumis à des sollicitations de fatigue," L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 1994.
- [2] E. M. Bakhiet, "Étude des assemblages boulonnés a chargement fortement excentré soumis à des sollicitations de fatigue," L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 1994.
- [3] J. Guillot, "Assemblages par éléments filetés. Calcul.," in *Techniques de l'Ingénieur, traité Mécanique et Chaleur*, Paris, France, 1989, pp. B5 560 – B5 562.
- [4] O. Zhang, "Discussions on behavior of bolted joints in tension," *Transactions of the ASME. Journal of Mechanical Design*, vol. 127, no. 3, pp. 506-510, 2005.
- [5] O. Zhang et J. A. Poirier, "New analytical model of bolted joints," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 126, no. 4, pp. 721-728, 2004.
- [6] E. M. Bakhiet et J. F. Guillot, "Analytical model of bolted joints subjected to high eccentric loadings," in *Proceedings of the 2nd Biennial European Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis. Part 7 (of 8), London, Engl*, vol. 64, 1994, pp. 301-313.
- [7] P. Agatonovic, "The computation of bolted joints," *Wire World International*, vol. 15, pp. 192-198, 1973.
- [8] P. Agatonovic, "Beam model of bolted flanged connections," *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, vol. 2, no. 1, pp. 21-29, 1985.
- [9] A. Vadean, J. Guillot, et D. Pop, "Etude paramétrique de modélisations tridimensionnelles des assemblages boulonnés de brides cylindriques – Acta Technica Napocensis," *series Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Cluj-Napoca, Romania*, pp. 243-248, 1998.
- [10] VDI2230, *Part 1, Systematic Calculation of High Duty Bolted Joints : Joints with One Cylindrical Bolt*, Dusseldorf, Germany: VDI, 1989.
- [11] F. Alkatan, "Modélisation des raideurs des assemblages par éléments filetés précontraints," L'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, 2005.

- [12] F. Alkatan, P. Stephan, A. Daidie, et J. Guillot, "Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 43, no. 8, pp. 589-598, 2007.
- [13] J. Rasmussen, "A two body contact problem with friction," in *Euromech Colloquium NR 110 Rimforsa, Italy*, 1978.
- [14] A. Vadean, D. Leray, et J. Guillot, "Bolted joints for very large bearings - Numerical model development," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, no. 4, pp. 298-313, 2006.
- [15] J. E. Shigley, R. Mischke, et G. Budynas, *Mechanical Engineering Design*, 7<sup>e</sup> éd., New York: McGraw-Hill, 2004.
- [16] F. Alkatan, P. Stephan, M. Sartor, et J. Guillot, "Raideurs équivalentes des pièces prismatiques assemblées," *Mécanique & Industries* 8, pp. 349-355, 2007.
- [17] J. Wileman, M. Choudhury, et I. Green, "Computation of member stiffness in bolted connections," in *Proceedings of the 1990 ASME International Computers in Engineering Conference and Exposition, Boston, MA*, 1990, pp. 539-544.
- [18] "NEOS Server for Optimization," [En ligne]. Disponible: <http://www-neos.mcs.anl.gov/>. [Consulté en décembre 2007].
- [19] J. Montgomery, "Methods for Modeling Bolts in the Bolted Joint," Siemens Westinghouse Power Corporation, Orlando, Florida, Rapport technique.
- [20] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, et R. J. Witt, *Concepts and applications of finite element analysis*, 4<sup>e</sup> éd., New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

**ANNEXES**

**ANNEXE A**

**MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS**



## **A. MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS**

Les simulations par éléments finis sont toutes effectuées sur le logiciel Ansys Workbench V11.0. Le détail de la modélisation des différentes géométries est présenté dans les sections suivantes.

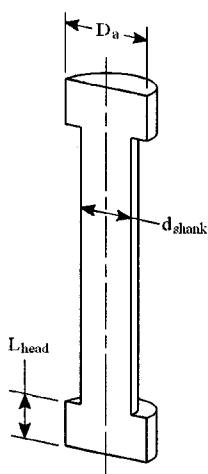
### **A.1.Méthode de modélisation du boulon**

#### **A.1.1. Définition de la géométrie du boulon**

Il existe différentes façons de modéliser le boulon. Si seule la compression des brides sous la force de précontrainte nous intéresse, alors la précontrainte peut être appliquée en appliquant une pression au niveau du contact de la tête sur la bride. Les résultats seront assez prêts de ceux obtenus en modélisant un boulon en éléments solides. On peut aussi modéliser les têtes du boulon en couplant les nœuds de la tête du boulon à ceux de la tige à l'aide d'éléments rigides, on peut modéliser la tête des boulons en éléments solides et modéliser la tige à l'aide d'éléments poutres, ou encore modéliser le boulon complet avec des éléments solides. Les différents avantages et inconvénients de ces méthodes de modélisation sont regroupés dans la publication de Montgomery [19]. Dans ce cas-ci, le choix s'est porté vers la modélisation d'un boulon en éléments solides, puisque le temps de calcul du modèle d'éléments finis ne dépend pas tant du nombre d'éléments dans le boulon que de la convergence du contact sans frottement entre les deux membrures.

Dans le but de simplifier la géométrie du boulon, les filets de la partie filetée n'ont pas été modélisés. Toutefois, pour palier à cette simplification, le diamètre de la section résistante a été imposé sur toute la longueur de la tige du boulon, ce qui signifie qu'on suppose que la partie filetée s'étend de la tête de la vis à l'écrou. L'ensemble de la vis et de l'écrou est de plus modélisé en un seul solide étant donné qu'on ne s'intéresse pas à ce qui se passe au niveau de la tête de la vis et de l'écrou. Par ailleurs, dans l'optique de

faciliter l'exécution de plusieurs analyses dont les dimensions du boulon varient, ces dimensions ont été définies à l'aide de relations approximatives établies en se servant des dimensions standards des vis. Ainsi, la hauteur de tête de vis, le diamètre de tête de vis et le diamètre de la section résistante de la partie filetée sont exprimés en fonction du diamètre nominal de la vis par des relations approximatives. Les relations obtenues sont celles présentées à la Figure A.1.



Dimensions du boulon :

$$d_{shank} = 0.86d_{nom}$$

$$D_a = 1.4d_{nom}$$

$$L_{head} = 0.65d_{nom}$$

Paramètres géométriques :

$$5mm \leq d_{nom} \leq 16mm$$

Figure A.1 – Dimensions du boulon

Ce paramétrage permet donc de modifier rapidement les dimensions d'un boulon en changeant uniquement le diamètre nominal de celui-ci. De plus, ce paramétrage est réutilisé pour les trois géométries qui suivent, soit les assemblages de plaques rectangulaires, de brides en chape et de brides cylindriques.

### A.1.2. Application de la précontrainte

Dans Ansys Workbench, pour appliquer la précontrainte sur le boulon, on doit d'abord idéalement se définir trois étapes d'application de charge (« *Number of Steps* ») tel que montré sur la Figure A.2.

Details of "Analysis Settings"	
<b>Step Controls</b>	
Number Of Steps	3.
Current Step Number	1.
Step End Time	1. s
Auto Time Stepping	Program Controlled
<b>Solver Controls</b>	
Solver Type	Program Controlled
Weak Springs	Off
Large Deflection	Off
Inertia Relief	Off
<b>Nonlinear Controls</b>	
Force Convergence	On
--Value	1. N
--Tolerance	10.%
Moment Convergence	Program Controlled
Displacement Convergence	Program Controlled
Rotation Convergence	Program Controlled
Line Search	Program Controlled
<b>Output Controls</b>	
<b>Analysis Data Management</b>	
<b>Visibility</b>	

Figure A.2 – Options de l'analyse dans Workbench

Ces trois étapes servent à appliquer le chargement de précontrainte ( $Q$ ) et le chargement extérieur ( $F_e$ ) à des moments précis lors de l'analyse. Ceci a pour but d'évaluer plus facilement le supplément de force et de moment dans le boulon. Donc, tel que montré sur la Figure A.3, la précontrainte a été appliquée sur la surface cylindrique de la portion fileté du boulon. À la première étape (« *Step* »), la précontrainte est appliquée, alors qu'aux deux autres étapes (« *Steps* ») elle est verrouillée (« *Lock* »). La deuxième étape n'a aucun chargement supplémentaire d'appliqué, elle sert plutôt de tampon avant d'appliquer le chargement extérieur lors de la troisième étape. À noter que la force de précontrainte appliquée sera la moitié de la force totale, puisqu'il s'agit d'un demi boulon.

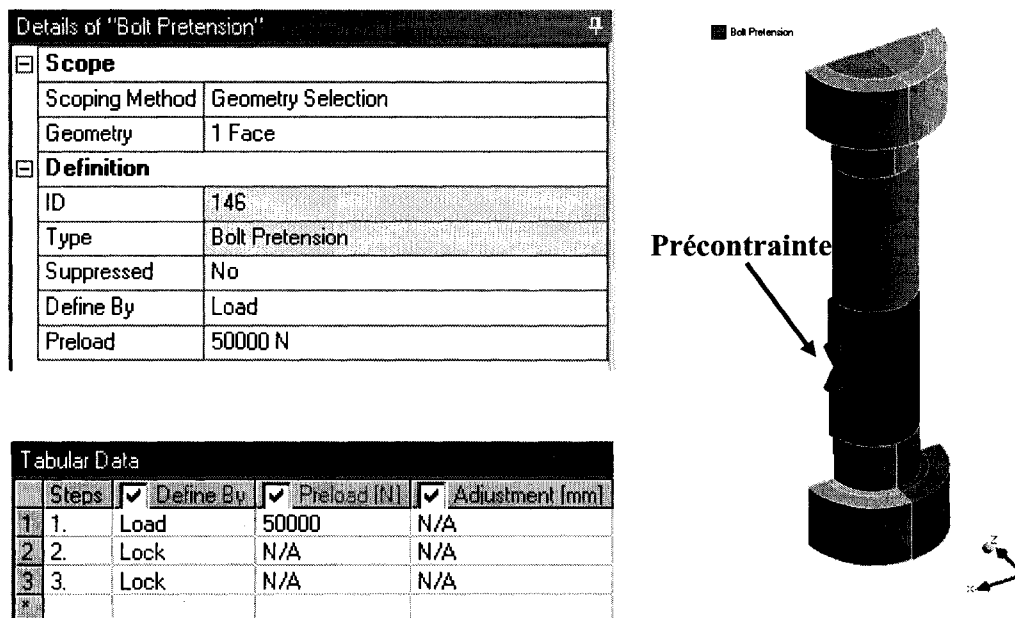


Figure A.3 – Application de la force de précontrainte

Cette façon de procéder pour l'application de la force de précontrainte dans le boulon est la même pour les différents assemblages étudiés.

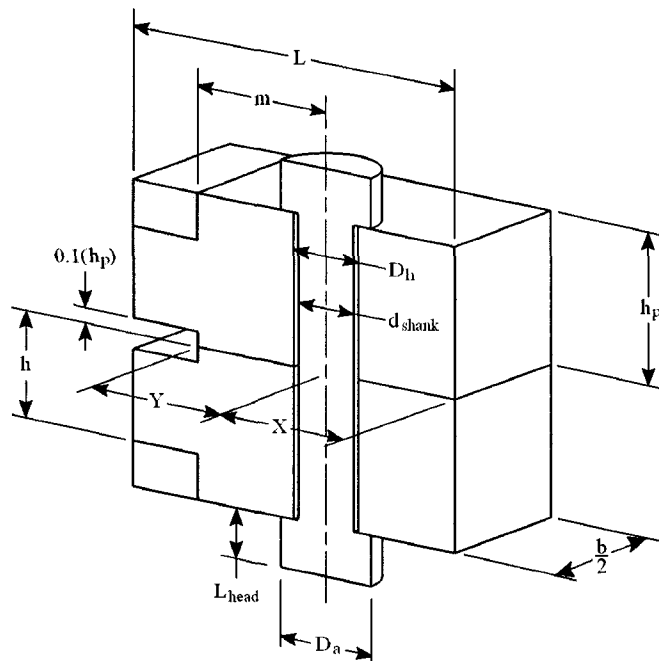
## A.2. Configuration de plaques rectangulaires

La première géométrie étudiée est une des plus simples, soit un assemblage de deux plaques rectangulaires de mêmes épaisseurs et précontraint à l'aide d'un boulon.

### A.2.1. Définition de la géométrie

Dans le but de faciliter la comparaison des différents assemblages de plaques rectangulaires, toutes les dimensions de l'assemblage sont définies par des multiples du diamètre nominal (voir Figure A.4). Ainsi, plutôt que de définir un assemblage par des dimensions en millimètres, ceux-ci sont plutôt définis par des paramètres adimensionnels. Ainsi, il sera plus facile de comparer deux assemblages boulonnés ayant les mêmes proportions géométriques, mais des diamètres nominaux de boulon différents.

Dimensions des  
brides :



$$h_p = h_{p\_frac} * d_{nom}$$

$$X = X_{frac} * d_{nom}$$

$$Y = Y_{frac} * d_{nom}$$

$$b = b_{frac} * d_{nom}$$

$$m = m_{frac} * d_{nom}$$

$$h = \gamma * h_p$$

$$L = X + 5 * d_{nom}$$

$$D_h = d_{nom} + 0.1$$

Paramètres  
géométriques :

$$5mm \leq d_{nom} \leq 16mm$$

$$2 \leq h_{p\_frac} \leq 4$$

$$1.5 \leq X_{frac} \leq 3.5$$

$$1.5 \leq Y_{frac} \leq 3.5$$

$$2.5 \leq b_{frac} \leq 5$$

$$1 \leq m_{frac} \leq 3$$

$$0.2 \leq \gamma \leq 0.8$$

Figure A.4 – Géométrie de l'assemblage de plaques rectangulaires

Le paramètre contrôlant toutes les dimensions est le diamètre nominal du boulon ( $d_{nom}$ ). Les autres dimensions dépendent du diamètre nominal et des ratios entre les dimensions et le diamètre nominal de boulon tels que : l'épaisseur relative ( $h_{p\_frac}$ ), la longueur extérieure de contact relative ( $X_{frac}$ ), la longueur intérieure de contact relative ( $Y_{frac}$ ), la largeur relative ( $b_{frac}$ ) et l'excentration relative ( $m_{frac}$ ). Il est toutefois à noter que le facteur de hauteur d'application de la charge ( $\gamma$ ) ne dépend pas du diamètre nominal.

### A.2.2. Maillage

La Figure A.5 et la Figure A.6 montrent les contrôles de maillages appliqués sur les pièces. Les chiffres indiquent le nombre de divisions imposé sur chacune des arêtes des pièces. Les éléments utilisés pour mailler tous les solides sont les éléments quadratiques à 20 nœuds, plus précisément des hexaèdres.

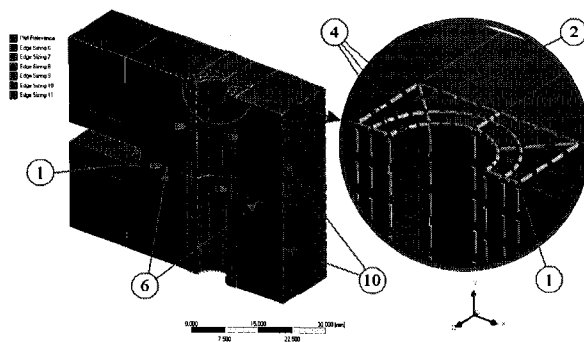


Figure A.5 – Contrôles du maillage des membrures

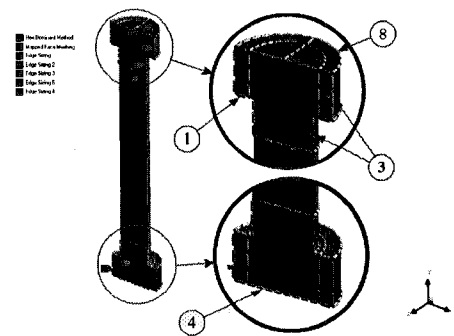


Figure A.6 – Contrôles du maillage du boulon

Les contrôles présentés sur les figures précédentes permettent d'obtenir le maillage présenté à la Figure A.7.

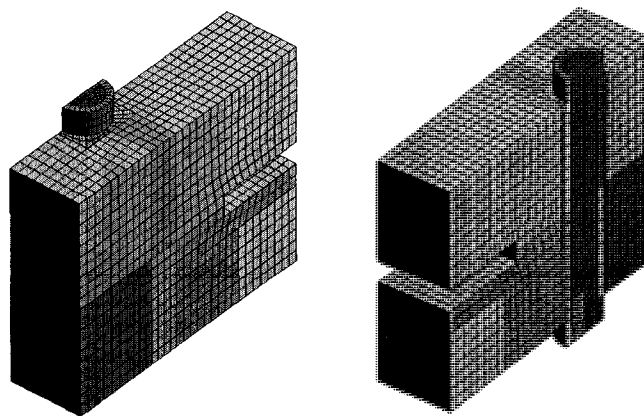


Figure A.7 – Maillage complet de l'assemblage de plaques rectangulaires

La convergence du maillage utilisé a été vérifiée et présentée à l'Annexe B.

### A.2.3. Sélections nommées

La Figure A.8 montre les sélections nommées nécessaires à l'exécution des blocs de commandes. Les sélections d'arête A et B ainsi que les sélections de coin C et D servent à l'application du chargement extérieur sur l'arête interne des brides par le biais du bloc de commandes APDL intitulé « *Macro for distributed load on line* » et présenté à l'Annexe D. Les sélections de coin E et F servent quant à eux à extraire les suppléments de force et de moment dans le boulon par l'intermédiaire du bloc de commandes APDL intitulé « *Macro for evaluation of bolt working load* » présenté à l'Annexe D.

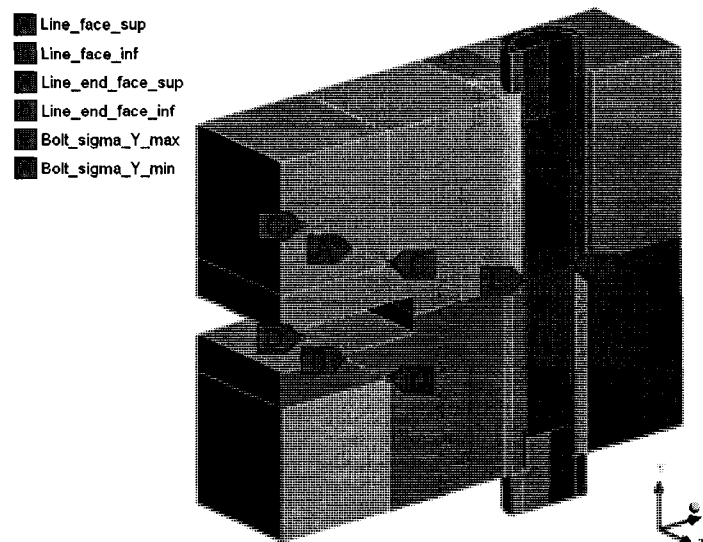


Figure A.8 – Sélections nommées utilisées dans les blocs de commandes APDL

### A.2.4. Conditions limites

En ce qui concerne les conditions limites, des conditions de symétrie ont d'abord été appliquées sur le plan de coupe du boulon étant donné que seule la moitié du boulon est modélisée, afin d'alléger le calcul. D'autres conditions de symétrie sont appliquées sur

la face opposée au plan de coupe du boulon, afin de simuler la présence de plusieurs boulons. L'application de mêmes conditions limites entre un assemblage de brides cylindriques et un assemblage de plaques rectangulaires a pour but de faciliter la comparaison entre les deux. Les deux plans de symétrie en question sont indiqués sur la Figure A.9.

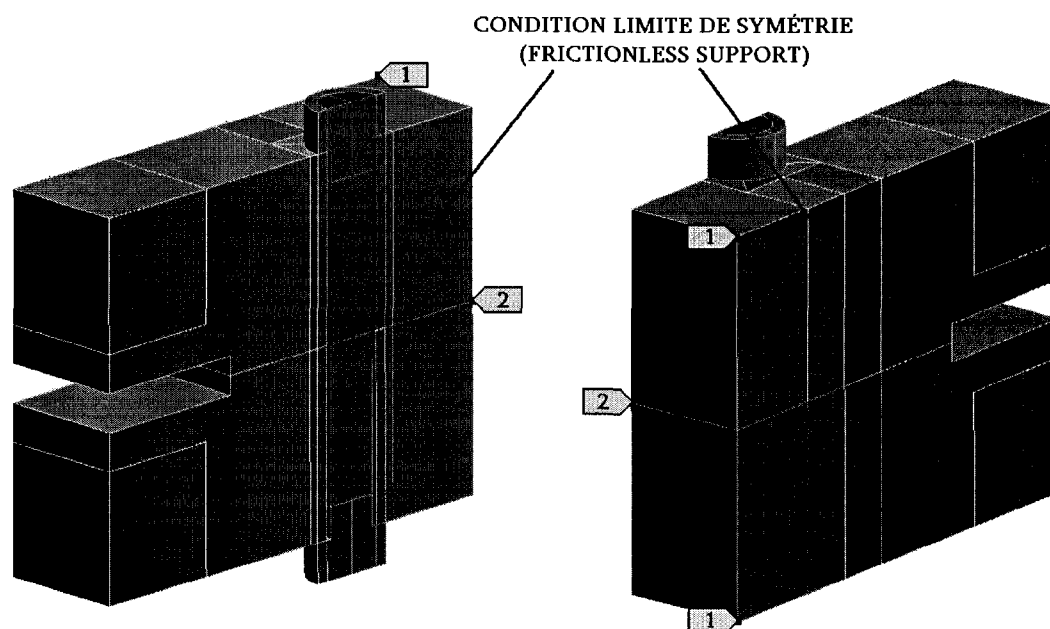


Figure A.9 – Conditions limites de symétrie et de déplacement

Afin d'éviter le mouvement de corps rigides, d'autres conditions limites doivent être appliquées à l'assemblage. Ainsi, pour bloquer la rotation dans l'espace de l'assemblage lors de l'application du chargement extérieur, les points No.1 (voir Figure A.9) ont leur déplacement en X bloqué, de même que pour éviter le déplacement vertical de l'assemblage, on bloque le déplacement en Y du point No.2 et qui se trouve sur la pièce inférieure (voir Figure A.9). Une symétrie supplémentaire aurait pu être utilisée au niveau du plan de joint afin de simplifier davantage le modèle. Cependant, celle-ci n'a pas été appliquée, en prévision de réutiliser le fichier pour des assemblages



asymétriques, tels que deux brides d'épaisseurs différentes ou de matériaux différents par exemple. Avec l'imposition de ces conditions limites, le modèle d'éléments finis permettra de limiter les déplacements de l'assemblage seulement à ceux qu'on désire observer.

### A.2.5. Contacts

Puisque les deux pièces de l'assemblage doivent pouvoir se décoller lors de l'ajout du chargement extérieur, l'utilisation d'un contact sans frottement permet de satisfaire cette exigence (voir Figure A.10). L'utilisation d'un contact avec frottement demanderait plus de temps pour converger lors de l'exécution d'une analyse et puisqu'on ne s'intéresse pas directement à ce qui se passe au niveau du contact, le contact sans frottement donnera des résultats satisfaisants. Par ailleurs, les résultats obtenus avec un contact sans frottement devraient normalement être plus conservateurs, puisque la rigidité de l'assemblage s'en trouve diminué et qu'il n'y a pas de dissipation de l'énergie transmissible au boulon.

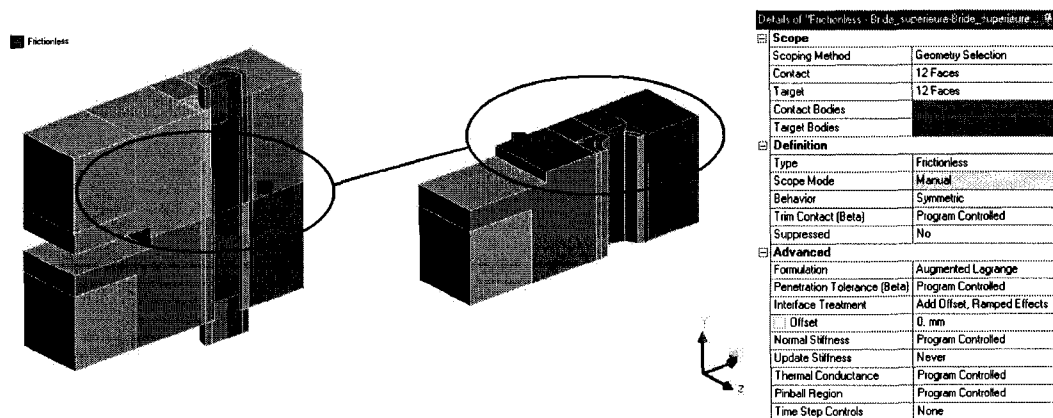


Figure A.10 – Application du contact sans frottement à l'interface des membrures

Puisqu'on émet l'hypothèse qu'il n'y a aucun glissement de la tête de la vis et de l'écrou sur les membrures, un contact complètement lié est utilisé entre ces pièces, tel que montré sur la Figure A.11.

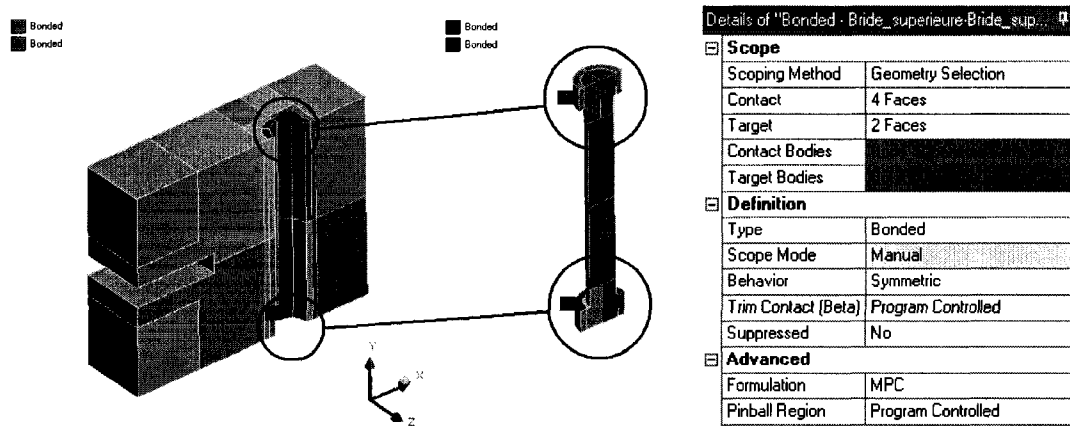


Figure A.11 – Application des contacts complètement liés entre les membrures et le boulon

Sous l'application de la précontrainte sur le boulon, l'hypothèse voulant qu'il n'y ait aucun glissement entre la tête et la membrure de même qu'entre l'écrou et la membrure semble raisonnable. De plus, il est à noter que les nœuds du maillage de chacune des membrures sont coïncidents au niveau du contact afin d'obtenir une meilleure convergence des résultats.

#### A.2.6. Application du chargement extérieur

Puisqu'on veut être en mesure d'étudier le supplément de force et de moment dans le boulon en fonction du point d'application de la charge (hauteur d'application et excentricité), on définit deux arêtes dans les membrures qui pourront se déplacer au besoin (voir Figure A.12). Ces deux arêtes correspondent aux sélections nommées présentées précédemment.

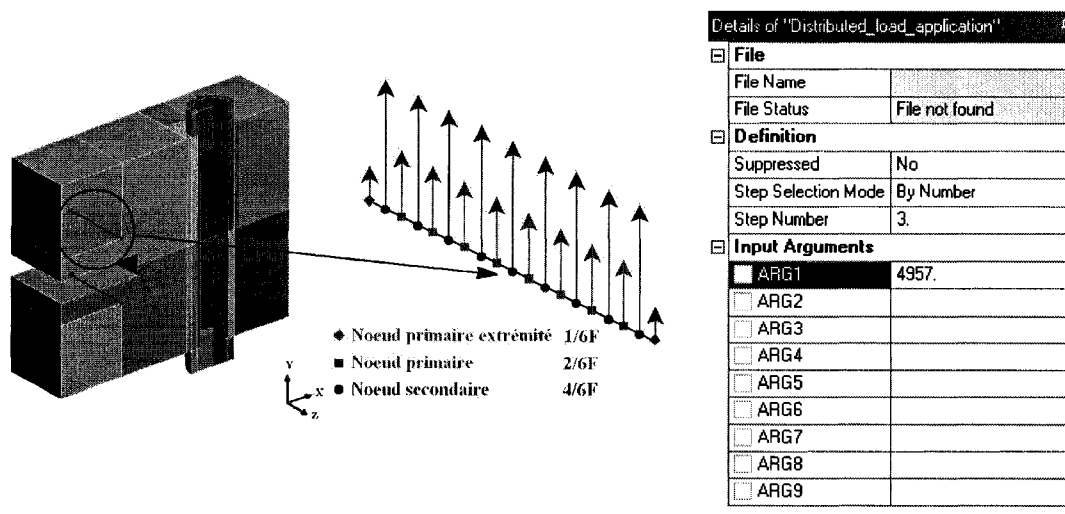


Figure A.12 – Application du chargement extérieur

Le chargement est appliqué sur ces deux arêtes à l'aide d'un bloc de commandes APDL selon le chargement distribué sur les nœuds primaires et secondaires représenté sur la Figure A.12. La force  $F$  représente la force appliquée sur chaque élément. Ainsi, sur les nœuds aux extrémités, on applique une force valant  $1/6F$  puisque celle-ci est appliquée aux endroits où il y a des conditions limites de symétrie. Les autres nœuds primaires ont une force valant  $2/6F$ , alors que les nœuds secondaires ont une force de  $4/6F$ . Le bloc de commandes APDL permettant l'application de ce chargement et intitulé « *Macro for distributed load on line* » est présenté à l'Annexe D.

Normalement, l'application d'une force sur une arête n'est pas une bonne façon de procéder. En effet, à proximité du point d'application, les contraintes auront une distribution non réaliste. Cependant, puisque les résultats qui seront utilisés concernent le supplément de force et de moment dans le boulon et que ceux-ci sont évalués à partir des contraintes dans la tige du boulon, on peut supposer que la méthode d'application de la charge aura une influence négligeable sur l'évaluation des suppléments.

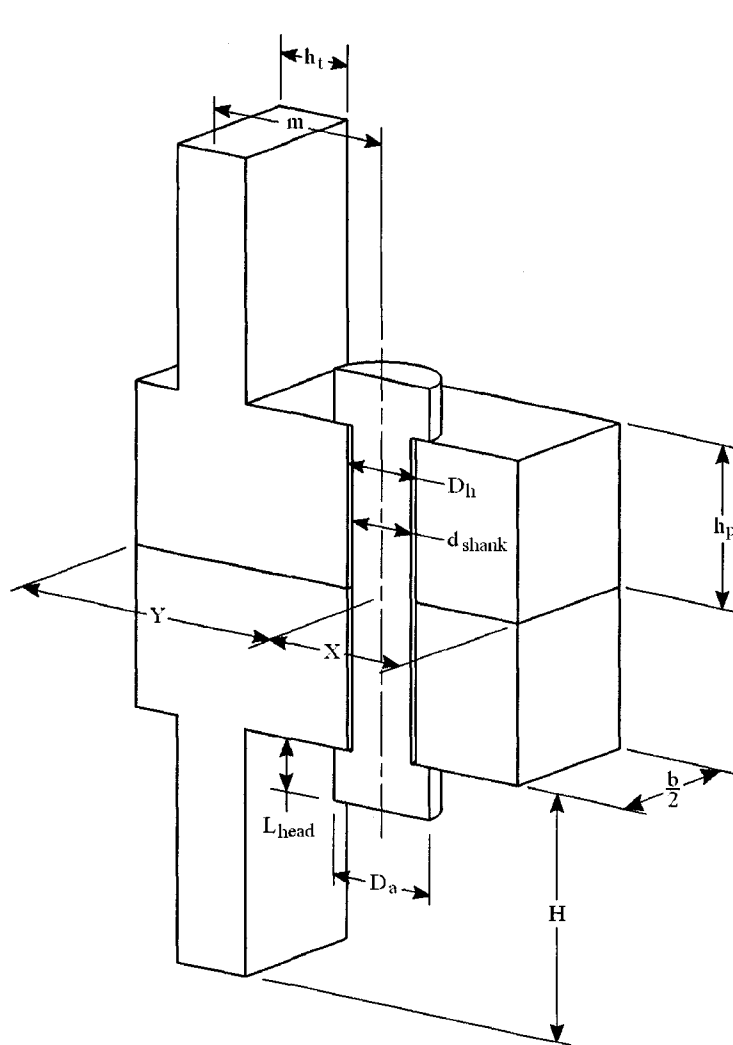
### A.3. Configuration de brides en chape (ou rectangulaires)

La deuxième géométrie étudiée est un cas légèrement plus complexe et plus réaliste, soit un assemblage de deux brides en chape de mêmes épaisseurs et précontraint à l'aide d'un boulon.

#### A.3.1. Définition de la géométrie

L'assemblage de brides en chape (Figure A.13) se définit comme ressemblant à l'assemblage de plaques rectangulaires précédent. Cependant, il a pour particularité une forme en L. Il est à noter que la forme des brides correspond à celle utilisée par Massol [1] lors de ses essais expérimentaux. Pour les mêmes raisons que pour l'assemblage précédent, il est défini en termes de proportions plutôt qu'en termes de dimensions.

Le paramètre de contrôle de la géométrie est le diamètre nominal du boulon ( $d_{nom}$ ) tout comme pour la géométrie précédente. Ainsi, toutes les autres dimensions dépendent de paramètres relatifs qui multiplient le diamètre nominal du boulon. Ces paramètres relatifs sont donc en fait des ratios entre les différentes dimensions et le diamètre nominal, tels que : l'épaisseur relative ( $h_{p\ frac}$ ), la longueur extérieure de contact relative ( $X_{frac}$ ), la longueur intérieure de contact relative ( $Y_{frac}$ ), la largeur relative ( $b_{frac}$ ), l'excentration relative ( $m_{frac}$ ), la hauteur de plaque relative ( $H_{frac}$ ) et l'épaisseur de la plaque relative ( $h_{t\ frac}$ ).



Dimensions des  
brides :

$$h_p = h_{p\_frac} * d_{nom}$$

$$X = X_{frac} * d_{nom}$$

$$Y = Y_{frac} * d_{nom}$$

$$b = b_{frac} * d_{nom}$$

$$m = m_{frac} * d_{nom}$$

$$H = H_{frac} * d_{nom}$$

$$h_t = h_{t\_frac} * d_{nom}$$

$$D_h = d_{nom} + 0.1$$

Limites des  
paramètres :

$$2 \leq h_{p\_frac} \leq 3.5$$

$$1.5 \leq X_{frac} \leq 3.5$$

$$1.5 \leq Y_{frac} \leq 2.5$$

$$2.5 \leq b_{frac} \leq 5$$

$$1.75 \leq m_{frac} \leq 3$$

$$2 \leq H_{frac} \leq 6$$

$$1 \leq h_{t\_frac} \leq 2$$

Figure A.13 – Géométrie de l'assemblage de brides en chape

Cette forme d'assemblage a surtout été utile pour comparer des résultats expérimentaux avec des résultats analytiques et numériques, puisque les essais expérimentaux de Massol [1] ont été réalisés sur ce type de brides.

### A.3.2. Maillage

Différents contrôles ont été imposés sur la géométrie afin de favoriser la génération d'un maillage réglé. Le nombre d'éléments a été imposé sur certaines arêtes, tel que montré

sur les Figure A.14 et Figure A.15. Les chiffres sur les figures correspondent au nombre de divisions sur les arêtes. En plus de ces contrôles, des éléments hexaédriques ont été imposés sur l'ensemble des pièces.

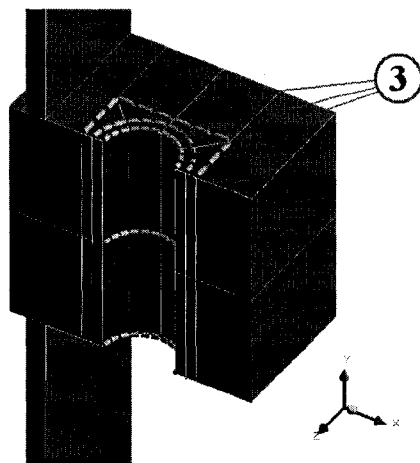


Figure A.14 – Contrôles du maillage des brides

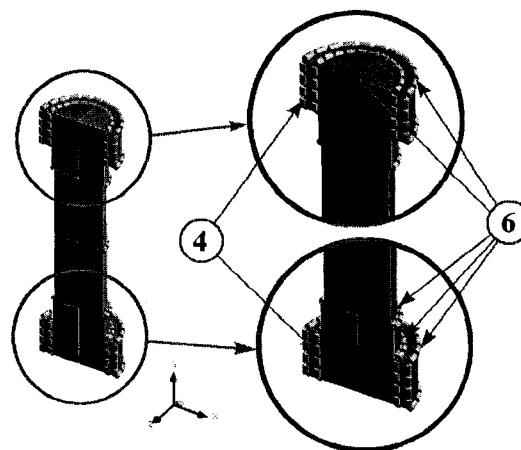


Figure A.15 – Contrôles du maillage du boulon

Ainsi, l'imposition de tous ces contrôles a conduit à la génération du maillage total présenté à la Figure A.16.

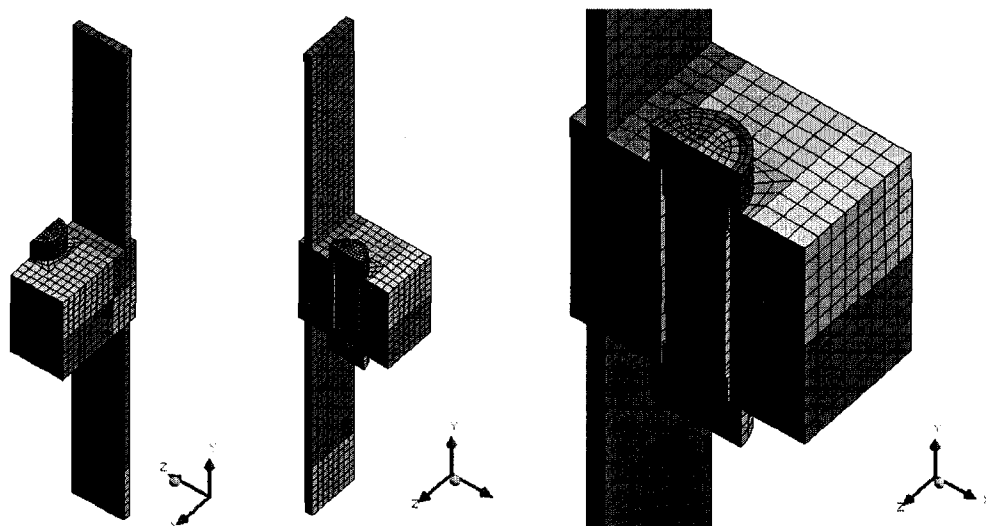


Figure A.16 – Maillage du modèle de brides en chape

En se basant sur l'étude de convergence effectuée sur l'assemblage de plaques rectangulaires, on peut supposer que le maillage est suffisamment raffiné pour fournir des résultats valables. Les résultats de l'étude de convergence de l'assemblage de plaques rectangulaires sont présentés à l'Annexe B.

### A.3.3. Sélections nommées

L'utilisation des blocs de commandes APDL présentés à l'Annexe D nécessite au préalable la création de certaines sélections nommées sur le modèle. Ainsi, sur la Figure A.17, on retrouve les deux sélections nécessaires à l'évaluation du supplément de force et de moment dans le boulon. La sélection A correspond au nœud où la contrainte de tension sera la plus grande lors de l'application d'un chargement extérieur, alors que la sélection B correspond au nœud où la contrainte de tension sera la plus faible.

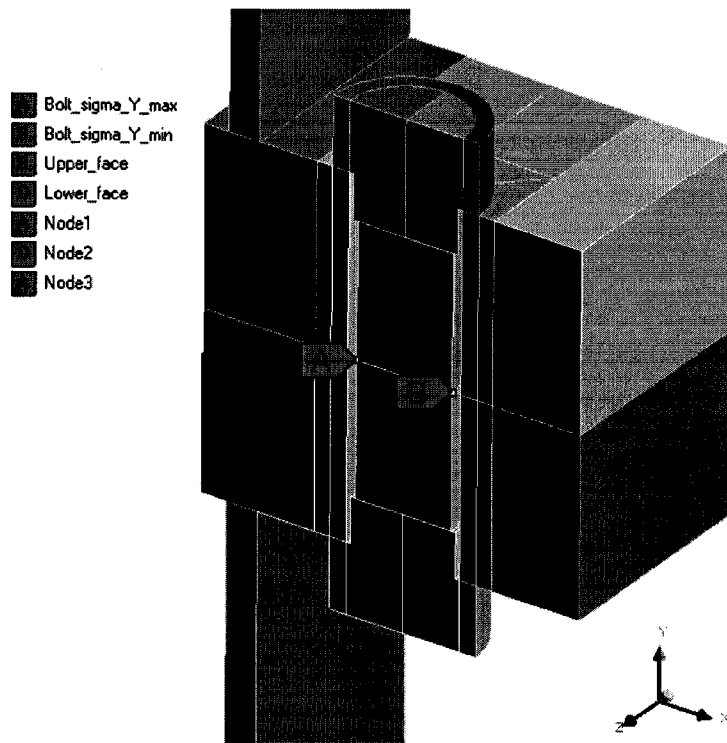


Figure A.17 – Sélections nommées du boulon

Sur la Figure A.18, les sélections de surfaces C et D servent à déterminer sur quelles surfaces le chargement doit être appliqué. Les sélections des nœuds E, F et G servent quant à eux à calculer l'aire des deux surfaces C et D (C et D ayant la même aire). La pression correspondante à l'application de la force sur la surface C et D est ensuite calculée pour l'appliquer sur chacune de ces deux sélections. Il faut seulement choisir la force en Newton à appliquer. Cette procédure s'effectue automatiquement par le biais d'un bloc de commandes APDL expliqué à l'Annexe D.



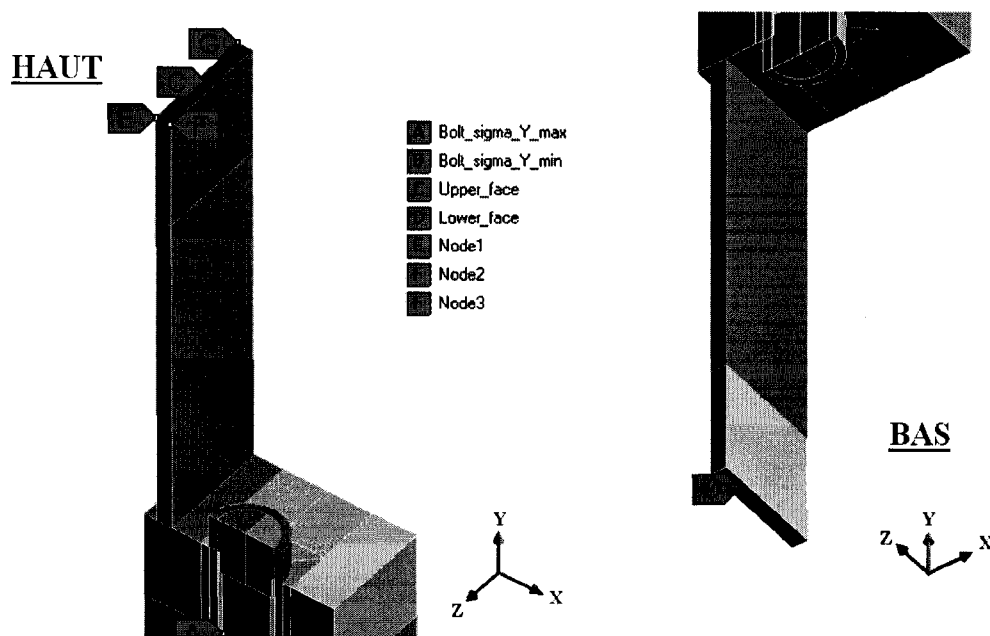


Figure A.18 – Sélections nommées des brides en chape

#### A.3.4. Conditions limites

Pour lancer l'analyse, il faut d'abord que le modèle soit contraint dans l'espace. Donc, une condition de symétrie a d'abord été imposée sur le modèle puisque seule la moitié d'un assemblage a été utilisée (voir Figure A.19). Ensuite, des supports sans frottement (surfaces en bleu) ont été utilisés pour diriger la déformation de la bride en chape lors de l'application du chargement extérieur tel que montré sur la Figure A.20. L'application de ces supports permet d'ailleurs de se rapprocher davantage du comportement du montage expérimental utilisé par Massol [1], d'où proviennent les données servant de comparaison avec les résultats numériques obtenus avec les éléments finis.

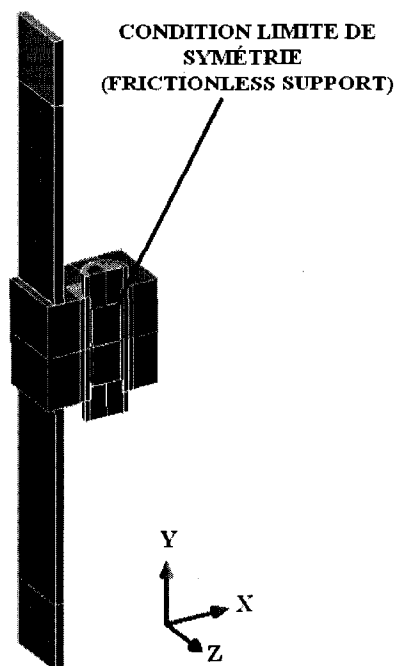


Figure A.19 – Conditions de symétrie

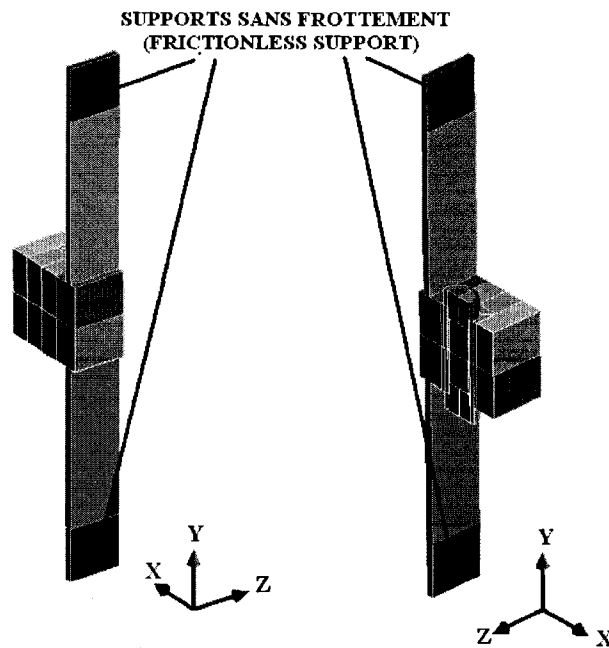


Figure A.20 – Supports sans frottement

Pour s'assurer que le modèle soit complètement contraint, une dernière condition limite doit être appliquée. Ainsi, le déplacement en Y du nœud de la bride supérieure (ou celui de la bride inférieure) situé au point No.1 doit être fixé à zéro, tel qu'illustré à la Figure A.21, ceci afin d'empêcher tout mouvement de corps rigide de l'assemblage dans l'espace. Une symétrie supplémentaire aurait pu être utilisée au niveau du plan de joint afin de simplifier davantage le modèle. Cependant, celle-ci n'a pas été appliquée, en prévision de réutiliser le fichier pour des assemblages asymétriques, tels que deux brides d'épaisseur différente ou de matériau différent par exemple.

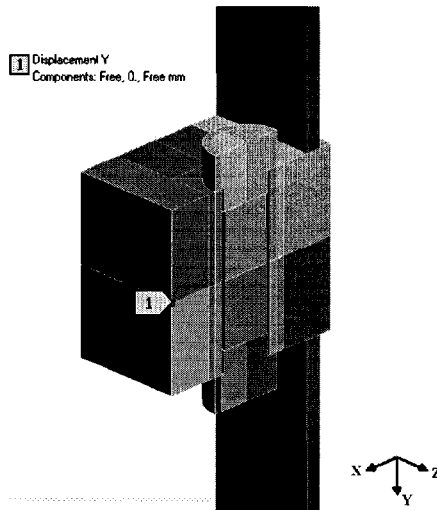


Figure A.21 – Condition limite de déplacement

### A.3.5. Contacts

En ce qui concerne les contacts, un premier a été appliqué sur la surface de contact entre les deux brides. Puisque celui-ci doit permettre le décollement entre les deux brides à mesure que la force extérieure augmente, un contact sans friction (« *Frictionless* ») de formulation Lagrange Augmenté a été retenu (voir Figure A.22).

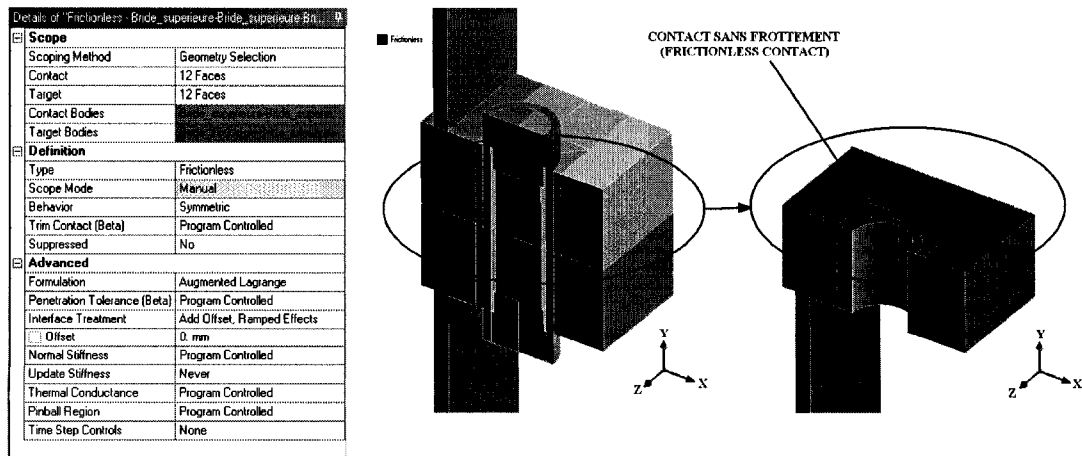


Figure A.22 – Contact entre les brides en chape

Pour ce qui est du contact entre le boulon et les brides, un contact complètement lié (« *Bonded* ») de formulation MPC (Multi Point Constraints) a été utilisé (voir Figure A.23). Celui-ci suppose donc que la force de précontrainte appliquée est suffisante pour empêcher tout décollement ou mouvement relatif possible de la tête du boulon par rapport à la bride, ce qui est acceptable comme hypothèse.

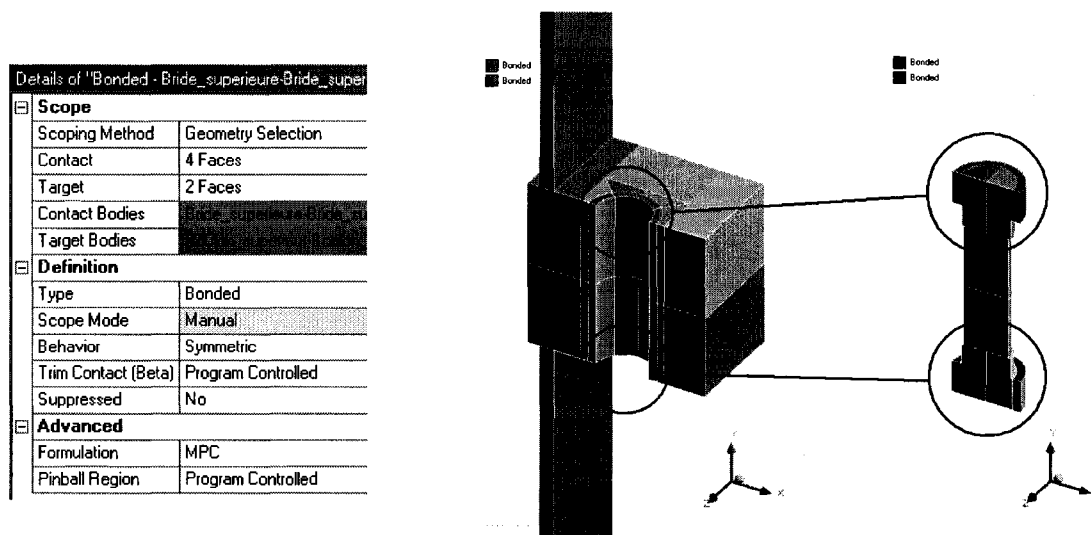


Figure A.23 – Contact entre les brides et le boulon

### A.3.6. Application du chargement extérieur

Comme il a été mentionné dans la définition du boulon, l'analyse s'effectue en trois étapes (« *Steps* »). L'application de la charge externe doit se faire lors de la troisième étape (« *Step Number = 3* ») et donc vient s'ajouter à l'assemblage déjà déformé par la force de précontrainte. L'application de la force se fait à l'aide d'un bloc de commandes APDL intitulé : « *Macro for distributed load on surface* » présenté à l'Annexe D.

Details of "Distributed load on surface"	
[-] <b>File</b>	
File Name	
File Status	File not found
[-] <b>Definition</b>	
Suppressed	No
Step Selection Mode	By Number
Step Number	3.
[-] <b>Input Arguments</b>	
<input type="checkbox"/> ARG1	40000
<input type="checkbox"/> ARG2	
<input type="checkbox"/> ARG3	
<input type="checkbox"/> ARG4	

Figure A.24 – Application du chargement extérieur

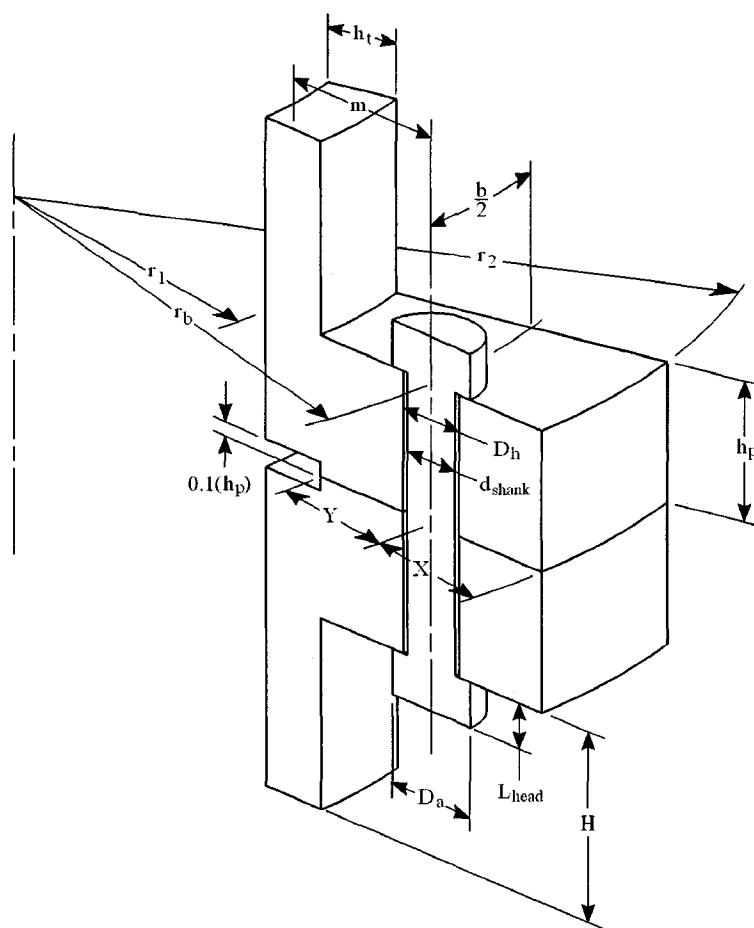
Ainsi, la valeur du chargement doit être entrée dans la case ARG1, ce qui correspond à un paramètre d'entrée dans le modèle tel que montré sur la Figure A.24.

#### A.4. Configuration de brides cylindriques

Le troisième modèle étudié consiste en un assemblage de brides cylindriques (voir Figure A.25), assemblage couramment utilisé dans l'industrie, ne serait-ce qu'au niveau de la tuyauterie, d'éoliennes ou des arbres de turbomoteurs d'avion.

##### A.4.1. Définition de la géométrie

L'assemblage se définit, comme dans le cas des deux modèles précédents, en termes de proportions. Ces proportions sont en fait des rapports entre les dimensions géométriques et le diamètre nominal du boulon ( $d_{nom}$ ), paramètre de contrôle de la géométrie tout comme pour les géométries précédentes. Donc, on obtient les paramètres relatifs suivants : l'épaisseur relative ( $h_{p\frac{frac}{}}$ ), la longueur extérieure de contact relative ( $X_{frac}$ ), la longueur intérieure de contact relative ( $Y_{frac}$ ), la largeur relative ( $b_{frac}$ ), le rayon interne relatif ( $r_{l\frac{frac}{}}$ ), l'excentration relative ( $m_{frac}$ ), la hauteur relative de la partie tubulaire ( $H_{frac}$ ) et l'épaisseur relative de la partie tubulaire ( $h_{l\frac{frac}{}}$ ).



### Dimensions des brides :

$$h_p = h_{p\_frac} * d_{nom}$$

$$X = X_{frac} * d_{nom}$$

$$Y = Y_{frac} * d_{nom}$$

$$Y_{frac} < m_{frac} + \frac{h_{t\_frac}}{2}$$

$$b = b_{frac} * d_{nom}$$

$$r_1 = r_{1\_frac} * d_{nom}$$

$$D_h = d_{nom} + 0.1$$

$$m = m_{frac} * d_{nom}$$

$$H = H_{frac} * d_{nom}$$

$$h_t = h_{t\_frac} * d_{nom}$$

$$h_{t\_frac} < 2(m_{frac} - 1)$$

$$r_b = r_1 + \frac{h_t}{2} + m$$

$$r_2 = r_b + X$$

### Paramètres géométriques :

$$2.5 \leq b_{frac} \leq 5$$

$$2 \leq h_{p\_frac} \leq 3.5$$

$$1 \leq h_{t\_frac} \leq 2$$

$$3 \leq r_{1\_frac} \leq 7$$

$$1.5 \leq X_{frac} \leq 3.5$$

$$1.5 \leq Y_{frac} \leq 2.5$$

$$1.75 \leq m_{frac} \leq 3$$

$$2 \leq H_{frac} \leq 6$$

### Recommandations :

$$b_{frac} \approx D_{a\_frac} + h_{p\_frac} = 1.4 + m_{frac}$$

$$h_{p\_frac} \approx m_{frac}$$

$$X_{frac} \approx h_{p\_frac}$$

$$Y_{frac} \approx \frac{D_{a\_frac} + h_{p\_frac}}{2} = \frac{1.4 + m_{frac}}{2}$$

Figure A.25 – Géométrie de l'assemblage de brides cylindriques

### A.4.2. Maillage

Différents contrôles ont été imposés sur la géométrie afin de favoriser la génération d'un maillage plus régulier. Le nombre d'éléments a été imposé sur certaines arêtes, tel que montré sur les Figure A.26 et Figure A.27. Les chiffres sur les figures correspondent au nombre de divisions sur les arêtes. En plus de ces contrôles du nombre d'éléments, des éléments hexaédriques ont été imposés sur l'ensemble des pièces.

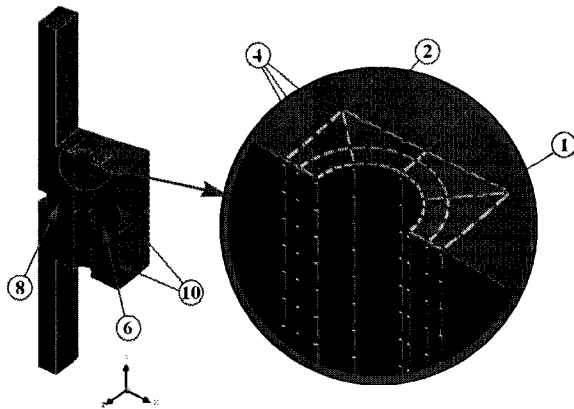


Figure A.26 – Contrôle du maillage des brides

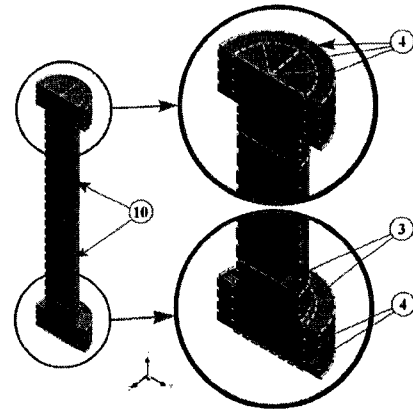


Figure A.27 – Contrôle du maillage du  
boulon

Avec l'imposition de ces contrôles de maillage, le maillage présenté à la Figure A.28 a été obtenu.

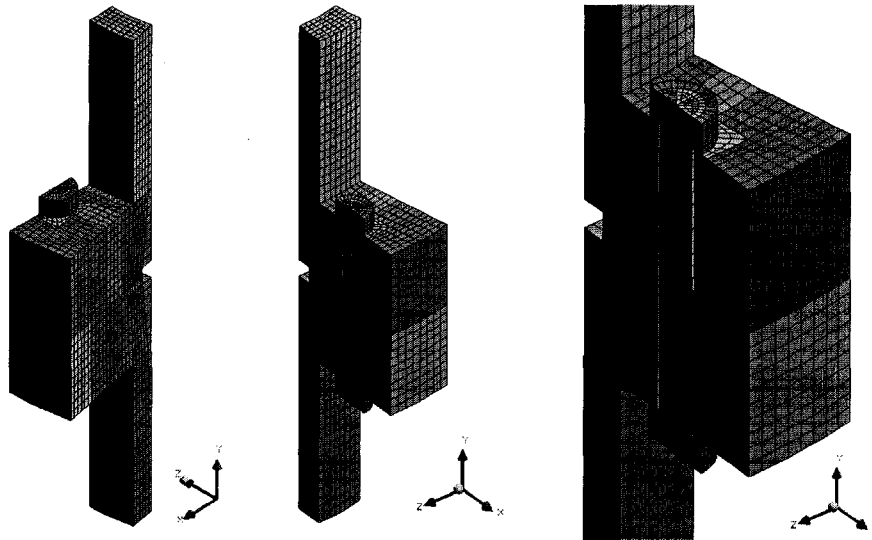


Figure A.28 – Maillage du modèle de brides cylindriques

#### A.4.3. Sélections nommées

L'utilisation des blocs de commandes APDL présentés à l'Annexe D nécessite au préalable la création de certaines sélections nommées sur le modèle. Ainsi, sur la Figure A.29, on retrouve les deux sélections nécessaires à l'évaluation du supplément de force et de moment dans le boulon tout comme pour les deux modèles précédents. La sélection A correspond au nœud où la contrainte de tension sera la plus grande lors de l'application d'un chargement extérieur, alors que la sélection B correspond au nœud où la contrainte de tension sera la plus faible.



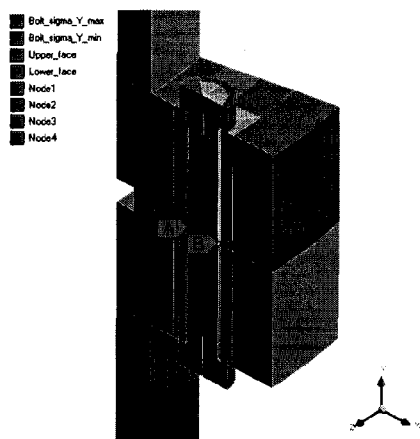


Figure A.29 – Sélections nommées du  
boulon

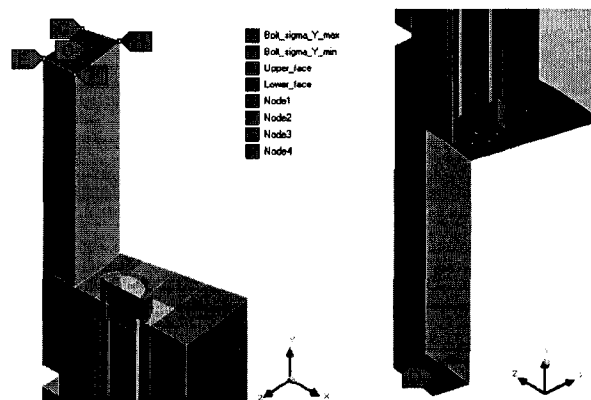


Figure A.30 – Sélections nommées des brides  
cylindriques

Sur la Figure A.30, les sélections de surfaces C et D servent à déterminer sur quelles surfaces le chargement doit être appliqué. Les sélections des nœuds E, F, G et H servent quant à eux à calculer l'aire des deux surfaces précédentes. La pression correspondant à l'application de la force sur la surface C et D est ensuite calculée pour l'appliquer sur chacune des deux sélections de surfaces. Il faut seulement choisir la force en Newton à appliquer. Cette procédure s'effectue automatiquement par le biais d'un bloc de commandes APDL expliqué à l'Annexe D.

#### A.4.4. Conditions limites

Puisque l'assemblage étudié est composé de brides cylindriques et que cet assemblage possède plusieurs axes de symétrie, il n'est pas nécessaire de modéliser plus d'un demi-boulon. En effet, une première coupe peut être effectuée de manière à isoler un seul boulon de l'assemblage, puis une seconde coupant le boulon en deux étant donné qu'il existe un axe de symétrie sur le boulon. Ainsi, l'application de ces conditions limites se fait par l'intermédiaire d'un support sans frottement sur les deux côtés de l'assemblage modélisé représentés en bleu sur la Figure A.31.

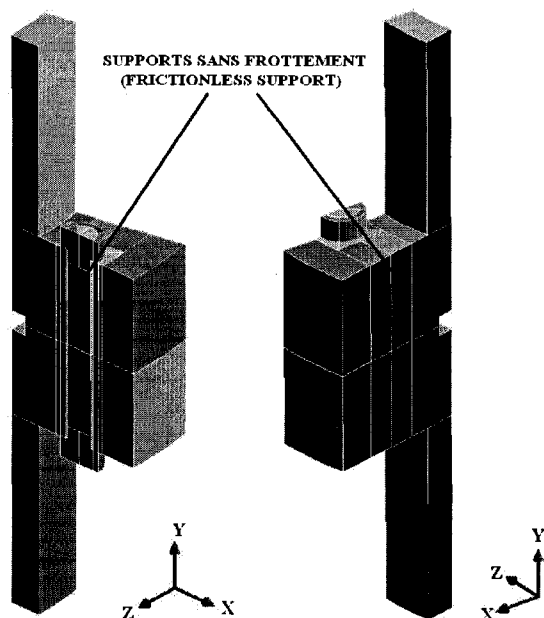


Figure A.31 – Supports sans frottement

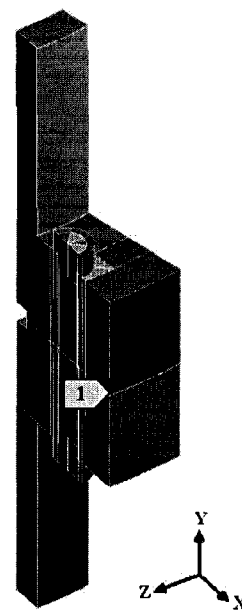


Figure A.32 – Condition limite de déplacement

La condition limite au point No.1 (voir Figure A.32) est la même que pour l'assemblage de bride en chape précédent et bloque donc le déplacement en Y du nœud de la bride supérieure (ou celui de la bride inférieure) à zéro.

#### A.4.5. Contacts

Le contact entre les deux brides sont les mêmes que pour l'assemblage de brides en chape présenté précédemment. Il en est de même pour en ce qui concerne le contact entre le boulon et les brides.

#### A.4.6. Conditions de chargement

Comme il a été mentionné dans la définition du boulon, l'analyse s'effectue en trois étapes (« Steps »). L'application de la charge doit se faire lors de la troisième étape (« Step Number = 3 ») et donc vient s'ajouter à l'assemblage déjà déformé par la force

de précontrainte. L'application de la force se fait à l'aide d'un bloc de commandes APDL intitulé : « *Distributed load on circular surface* » présenté à l'Annexe D.

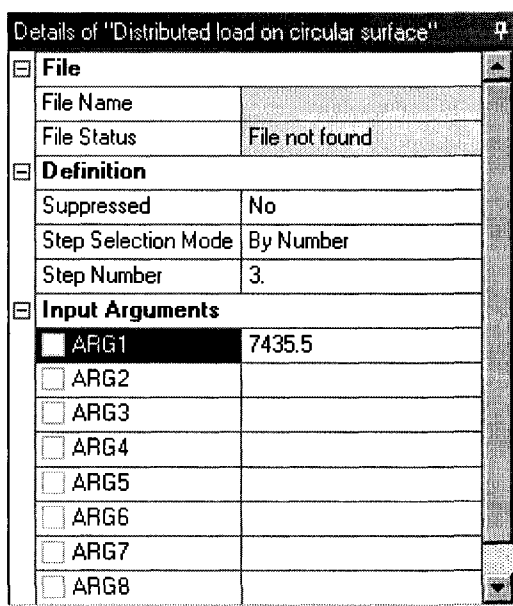


Figure A.33 – Application du chargement extérieur

#### A.4.7. Bloc de commandes APDL de calcul des suppléments de force et de moment dans le boulon

Pour déduire le supplément de force et de moment dans le boulon à partir des résultats d'éléments finis, il faut d'abord extraire les contraintes normales à la section de la tige du boulon, section située vis-à-vis le plan de contact des deux brides dans le cas où leur épaisseur est la même. De ces contraintes, on prend la contrainte minimale et la contrainte maximale et qui devraient être opposées l'une à l'autre sur la section de la tige, tel qu'illustré sur la Figure A.34.

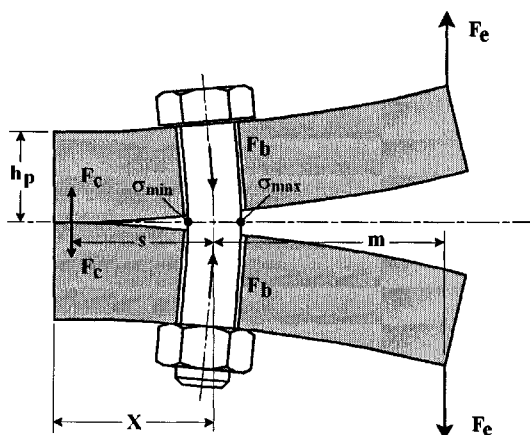


Figure A.34 – Contraintes minimale et maximale dans le boulon

On peut alors évaluer la portion de contrainte due au supplément de force à l'aide de l'équation (A.1).

$$\sigma_{force} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{4F_b}{\pi(0.86d_{nom})^2} \quad (A.1)$$

À partir des contraintes minimale et maximale dans le boulon, on peut isoler et évaluer le supplément de force dans le boulon avec l'équation (A.2).

$$\Delta F_b = \frac{1}{8} \pi (0.86d_{nom})^2 (\sigma_{max} + \sigma_{min}) - Q \quad (A.2)$$

On peut évaluer de manière similaire la portion de contrainte due au supplément de moment dans le boulon avec l'équation (A.3).

$$\sigma_{moment} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{32M_b}{\pi(0.86d_{nom})^3} \quad (A.3)$$

Ainsi, pour obtenir le supplément de moment dans le boulon, on peut soustraire la valeur du moment dans le boulon lors de l'application de la précontrainte ( $M_{bQ}$ ) tel que montré à l'équation (A.4). Puisqu'en général cette valeur est très faible, celle-ci est approximée à zéro pour faciliter le calcul.

$$\Delta M_b = \frac{1}{64} \pi (0.86d_{nom})^3 (\sigma_{max} - \sigma_{min}) - M_{bQ} \quad (A.4)$$

À partir de ces suppléments, on peut tracer les graphiques de suppléments de force et de moment en fonction de la force extérieure appliquée à l'assemblage.

Afin d'automatiser l'évaluation du supplément de force et de moment dans le boulon, un bloc de commandes APDL a été intégré à chacun de ces trois modèles. Ce bloc de commandes récupère d'abord les contraintes minimales et maximales de tension dans la tige du boulon au niveau du plan de joint de l'assemblage, puis à partir des équations développées précédemment, celui-ci calcule le supplément de force et de moment dans le boulon. La Figure A.35 montre les informations calculées et utilisées dans le bloc de commande APDL. Le détail complet de ce bloc de commandes ayant servi aux trois modèles définis précédemment est présenté à l'Annexe D.

Details of "Bolt_working_load"	
<b>File</b>	
File Name	
File Status	File not found
<b>Definition</b>	
Suppressed	No
Output Search Prefix	my_
<b>Input Arguments</b>	
<b>Results</b>	
<input type="checkbox"/> my_sigmaY_max_prestress	263.4
<input type="checkbox"/> my_sigmaY_min_prestress	262.69
<input type="checkbox"/> my_sigmaY_max_load	492.04
<input type="checkbox"/> my_sigmaY_min_load	326.85
<input type="checkbox"/> my_d_tige	22.
<input checked="" type="checkbox"/> my_Prestress_Load	99993
<input checked="" type="checkbox"/> my_Force_supplement	55650
<input checked="" type="checkbox"/> my_Moment_supplement	86.342

Figure A.35 – Calcul des suppléments de force et de moment dans le boulon

**ANNEXE B**

**TEST DE CONVERGENCE**

## B. ANALYSE DE CONVERGENCE DE L'ASSEMBLAGE DE PLAQUES RECTANGULAIRES

### B.1. Comparaison du maillage

Les trois maillages utilisés pour vérifier la convergence des résultats sont présentés aux Figure B.1, Figure B.2 et Figure B.3.

#### Modèle initial

Nombre de nœuds : 28414

Nombre d'éléments : 6655

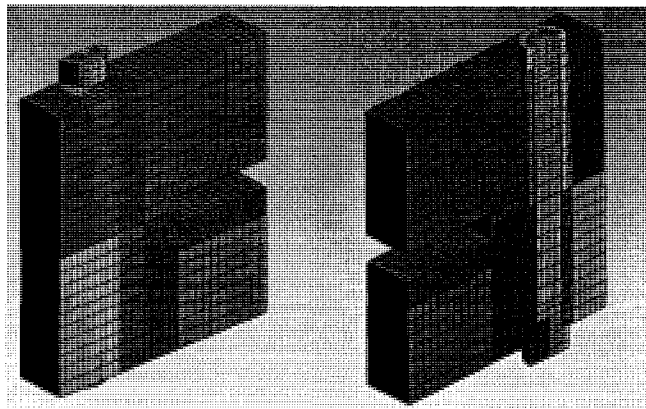


Figure B.1 – Maillage du modèle initial

#### Raffinement 1

Nombre de nœuds : 64068

Nombre d'éléments : 15811

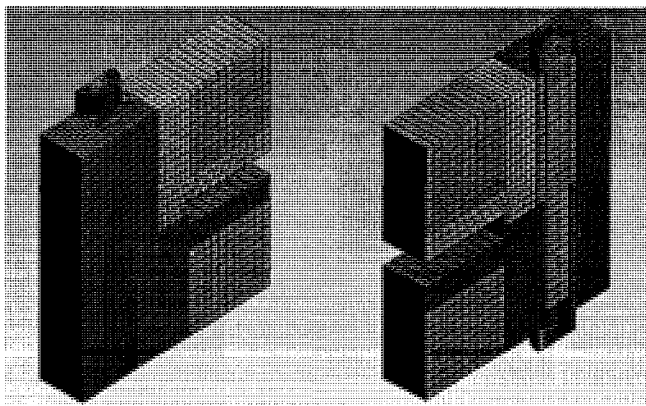


Figure B.2 – Maillage du raffinement 1

### Raffinement 2

Nombre de nœuds : 128045

Nombre d'éléments : 32284

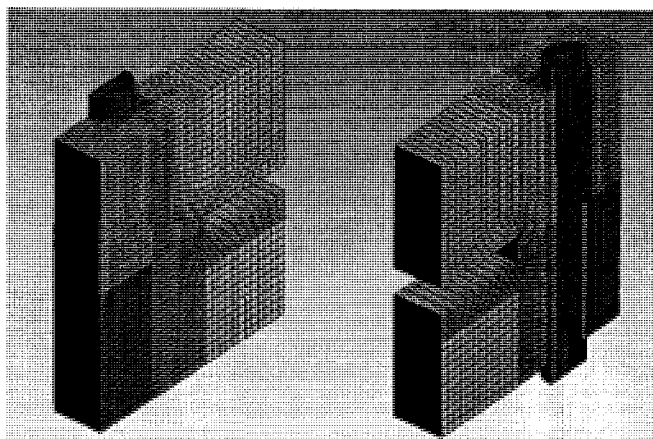


Figure B.3 – Maillage du raffinement 2

## B.2. Comparaison du contact

### B.2.1. Précontrainte seulement

Les résultats présentés aux Figure B.4, Figure B.5 et Figure B.6 montrent la répartition de la pression de contact à l'interface des deux brides pour les trois différents dimensionnements de maillage utilisés.

### Modèle initial

$\sigma_{\max}$  : 40.701 MPa

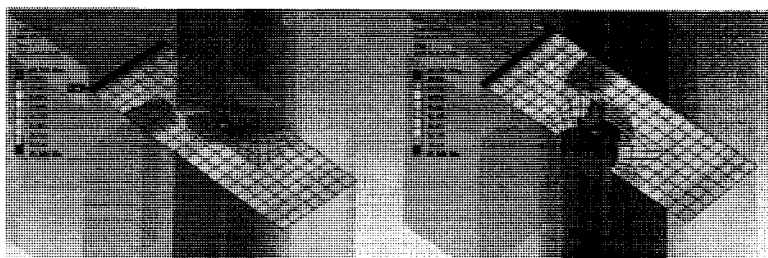
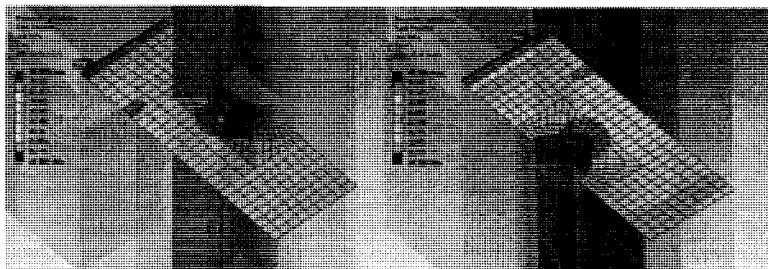
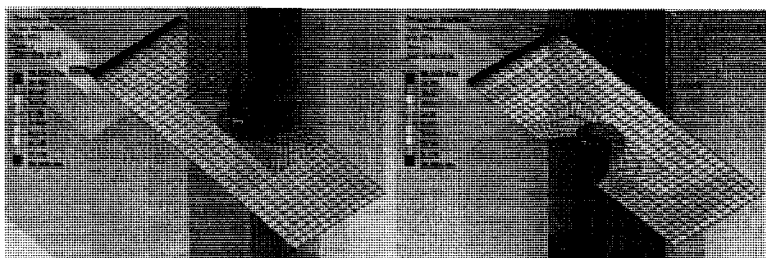


Figure B.4 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le modèle initial (précontrainte seulement)



**Raffinement 1** $\sigma_{\max} : 40.999 \text{ MPa}$ 

**Figure B.5 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 1 (précontrainte seulement)**

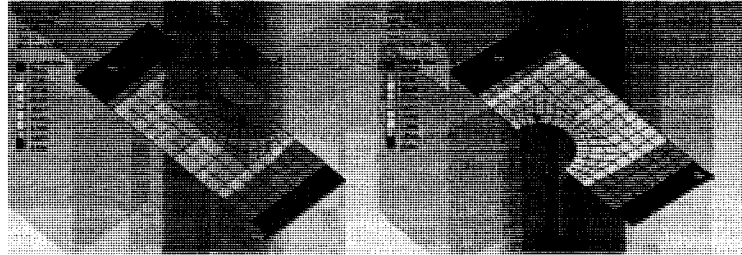
**Raffinement 2** $\sigma_{\max} : 40.023 \text{ MPa}$ 

**Figure B.6 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 2 (précontrainte seulement)**

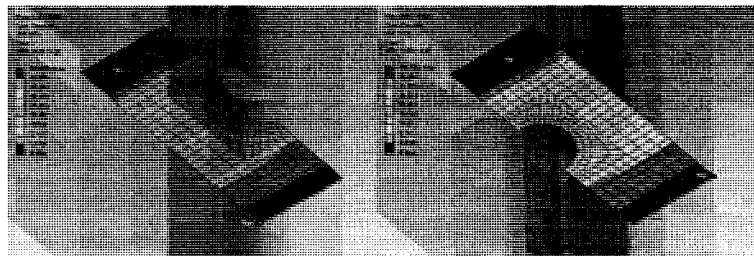
On remarque une légère variation de la distribution de pression de contact en raffinant le maillage. Cependant, il n'est pas essentiel que ces résultats soient parfaitement convergés pour obtenir des suppléments d'effort convergés dans le boulon.

**B.2.2. Précontrainte et force extérieure**

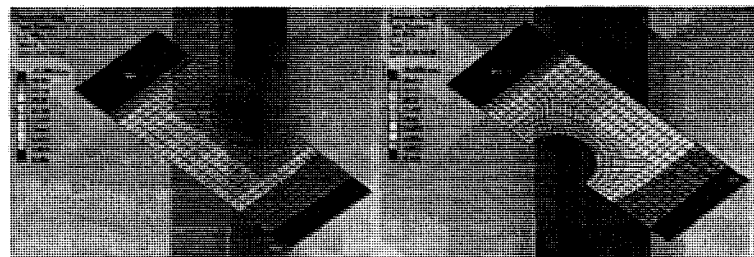
Les résultats des Figure B.7, Figure B.8 et Figure B.9 montrent la distribution de la pression de contact à l'interface des deux brides pour les trois dimensionnements de maillage dans le cas où l'assemblage est soumis à une précontrainte et un effort extérieur.

**Modèle initial** $\sigma_{\max}$  : 43.689 MPa

**Figure B.7 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le modèle initial (précontrainte et force extérieure)**

**Raffinement 1** $\sigma_{\max}$  : 43.835 MPa

**Figure B.8 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 1 (précontrainte et force extérieure)**

**Raffinement 2** $\sigma_{\max}$  : 43.935 MPa

**Figure B.9 – Pression de contact du côté de la bride inférieure et supérieure pour le raffinement 2 (précontrainte et force extérieure)**

Le raffinement du maillage apporte très peu de changement dans le cas de l'application de la précontrainte et de l'effort extérieur. Même la contrainte maximale reste pratiquement la même lorsqu'on raffine le maillage. Comme pour le cas du chargement

de précontrainte seulement, il n'est pas essentiel que ces résultats soient parfaitement convergés pour obtenir des suppléments d'effort convergés dans le boulon.

### B.3. Comparaison des contraintes de compression du joint

#### B.3.1. Précontrainte seulement

Les Figure B.10, Figure B.11 et Figure B.12 montrent le cône de compression des brides lors de l'application de la précontrainte. On voit ainsi les contraintes partant de sous la tête du boulon se distribuer à mesure qu'on se rapproche du plan de joint.

#### Modèle initial

$\sigma_{\max}$  : 39.887 MPa

$\sigma_{\min}$  : -617.12 MPa

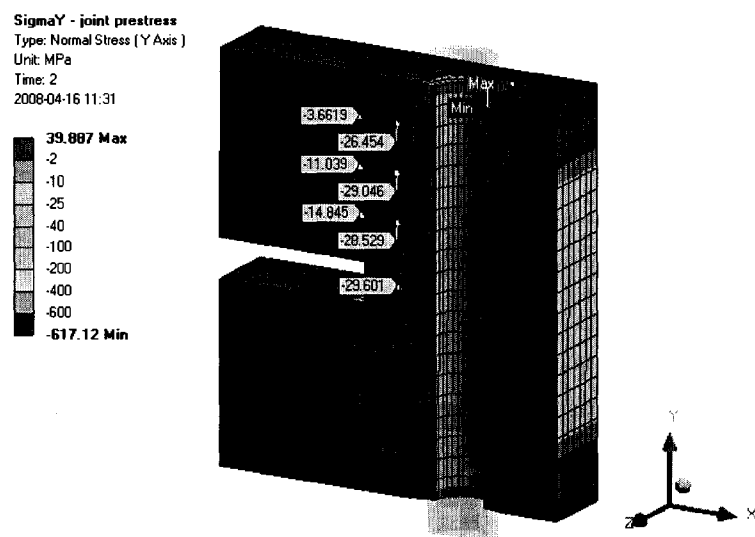
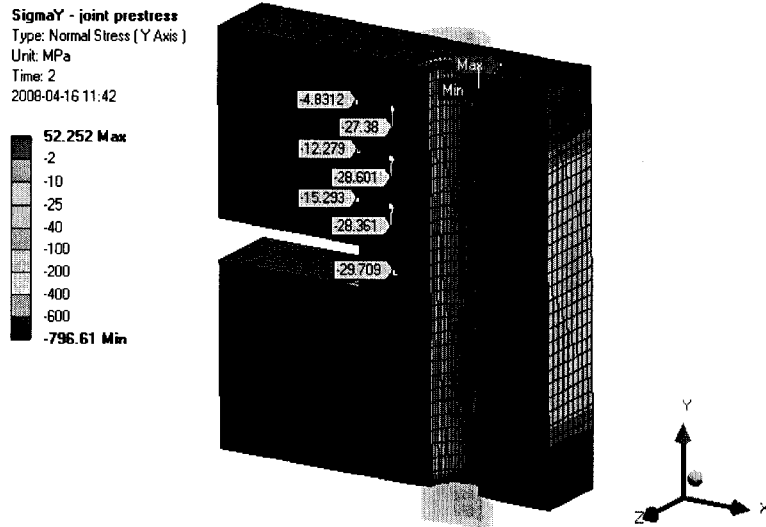


Figure B.10 – Cône de compression des brides sous l'effet de la précontrainte seulement (modèle initial)

**Raffinement 1**

$\sigma_{max}$  : 52.252 MPa

$\sigma_{min}$  : -796.61 MPa

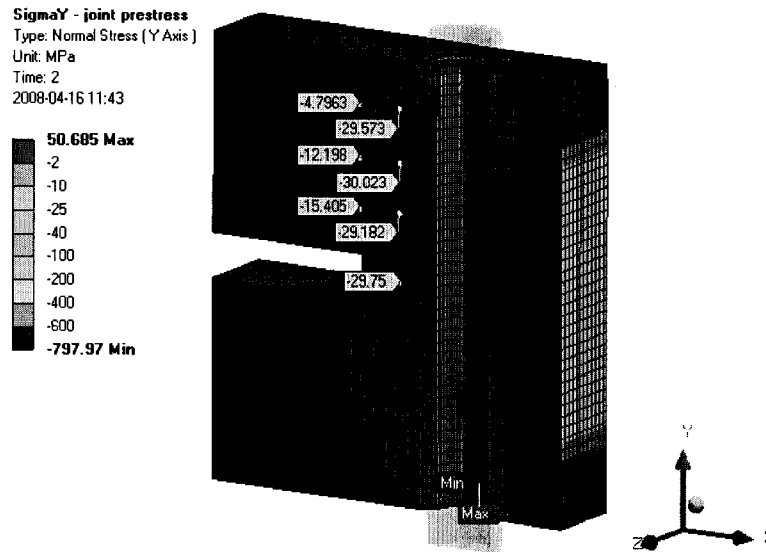


**Figure B.11 – Cône de compression des brides sous l'effet de la précontrainte seulement (raffinement 1)**

**Raffinement 2**

$\sigma_{max}$  : 50.685 MPa

$\sigma_{min}$  : -797.97 MPa



**Figure B.12 – Cône de compression des brides sous l'effet de la précontrainte seulement (raffinement 2)**

D'après les figures précédentes, bien que les contraintes minimales et maximales ne soient pas les mêmes, on peut voir que les contraintes sondées à l'intérieur des membrures sont presque les mêmes pour les trois dimensionnements de maillage. L'écart maximal entre ces contraintes internes pour les 3 modèles est de l'ordre de 5 %.

#### **B.4. Forces de contact à l'interface des brides lors de l'application de la charge extérieure**

Le Tableau B.1 présente les composantes de la force équivalente évaluée au niveau du contact entre les brides par le logiciel d'éléments finis.

**Tableau B.1 – Force de contact équivalente à l'interface des deux brides**

<b>Force de contact</b>	<b>Modèle initial</b>	<b>Raffinement 1</b>	<b>Raffinement 2</b>
<b>F<sub>x</sub></b>	1.7426e-5 N	8.0489e-6 N	2.9746e-7 N
<b>F<sub>y</sub></b>	33595 N	33595 N	33595 N
<b>F<sub>z</sub></b>	-7.0707 N	-8.3838 N	-8.2865 N
<b>F totale</b>	33595 N	33595 N	33595 N

On remarque dans ce tableau une excellente correspondance de la force  $F_y$  (force équivalente de contact  $F_c$ ) pour les trois modèles. Les autres forces  $F_x$  et  $F_z$  sont très faibles, voire de l'ordre de zéro, ce qui rend les écarts négligeables entre ces valeurs. On peut donc dire que la force équivalente de contact ( $F_y$ ) est bien convergée pour le modèle initial.

#### **B.5. Supplément de force et de moment dans le boulon**

Le Tableau B.2 montre les contraintes extraites du modèle d'éléments finis et permettant l'évaluation du supplément de force et de moment. Dans le tableau se trouvent les contraintes provenant du modèle soumis uniquement à la force de précontrainte, ainsi que celui soumis à la précontrainte de même qu'à une force extérieure.

**Tableau B.2 – Contraintes dans le boulon servant à l'évaluation du supplément de force et de moment**

Contraintes		Modèle initial	Raffinement 1	Raffinement 2
Précontrainte seulement	Max	600.3 MPa	600.36 MPa	600.38 MPa
	Min	599.7 MPa	599.63 MPa	599.62 MPa
Précontrainte et force extérieure	Max	603.35 MPa	603.41 MPa	604.43 MPa
	Min	600.32 MPa	600.26 MPa	600.25 MPa

À partir des résultats du tableau précédent, les suppléments de force et de moment ont été calculés à l'aide d'un bloc de commande, fournissant ainsi les suppléments présentés dans le Tableau B.3.

**Tableau B.3 – Supplément de force et de moment dans le boulon**

Supplément dans le boulon	Modèle initial	Raffinement 1	Raffinement 2
Supplément de force	273.41 N	273.53 N	273.75 N
Supplément de moment	0.38692 Nm	0.40221 Nm	0.40676 Nm

On remarque que pour obtenir une bonne convergence du supplément de force dans le boulon, il n'est pas nécessaire de raffiner le maillage. Par contre, pour obtenir de meilleurs résultats en ce qui concerne le supplément de moment, il faudrait idéalement appliquer le raffinement 1. Mais, étant donné que le supplément de moment demeure relativement faible dans le boulon, le gain de précision sur celui-ci ne sera pas nécessaire.

Le problème qui survient en raffinant le maillage est l'augmentation du temps de calcul pour un léger gain qui n'est pas forcément nécessaire. C'est le cas présentement, puisque de nombreuses analyses doivent être lancées. Le temps de calcul devient alors un facteur à ne pas négliger. Pour cette raison, le modèle initial est jugé satisfaisant puisque les résultats sont généralement près de ceux obtenus avec des maillages raffinés. D'ailleurs, puisque ce sont les suppléments de force et de moment qui nous intéressent et qu'ils varient très peu en raffinant le maillage, laisser tomber le raffinement ne devrait pas vraiment avoir de conséquences notables sur les résultats exploités.

**ANNEXE C****CALCUL DE LA POSITION ( $s$ ) DE LA FORCE ÉQUIVALENTE DE  
CONTACT ( $F_c$ )**

### C. CALCUL DE LA POSITION (s) DE LA FORCE ÉQUIVALENTE DE CONTACT (F<sub>c</sub>)

En se basant sur la théorie des éléments finis présentée par Cook [20], les équations permettant d'obtenir la valeur de la position (s) de la force équivalente de contact de même que la méthode d'application de celles-ci dans Ansys Workbench est présentée.

#### C.1. Détermination des interpolations linéaires

L'élément fini « j » de type quadrilatère et linéaire est représenté à la Figure C.1.

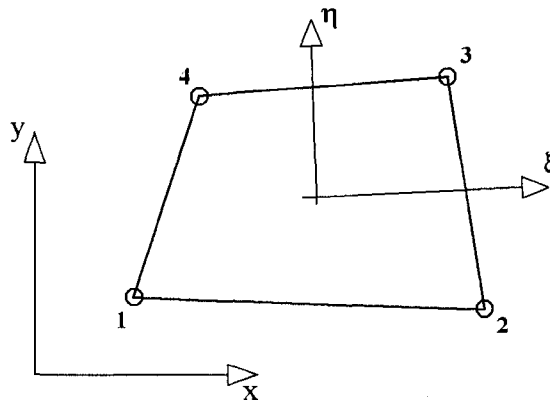


Figure C.1 – Élément fini quadratique linéaire

Fonctions de forme d'un élément linéaire « j » :

$$N_i = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (\text{C.1})$$

$$N_i = \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1+\eta) \quad (1-\xi)(1+\eta)] \quad (\text{C.2})$$

Position (x) et (y) :

$$[x(\xi, \eta) \quad y(\xi, \eta)]_j = [N_i(\xi, \eta)] [\{x_i\} \quad \{y_i\}]_j \quad (\text{C.3})$$



$$[x(\xi, \eta)]_j = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}_j \quad (\text{C.4})$$

$$[y(\xi, \eta)]_j = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}_j \quad (\text{C.5})$$

Jacobien :

$$J_j = \det \left( \begin{bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{bmatrix} [\{x_i\} \quad \{y_i\}]_j \right) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} & \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_j}{\partial \eta} & \frac{\partial y_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

$$\left[ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} \right]_j = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}_j \quad (\text{C.7})$$

$$\left[ \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right]_j = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}_j \quad (\text{C.8})$$

Calcul de la pression sur un élément fini « j » :

$$p_j(\xi, \eta) = [N_i(\xi, \eta)] \{p_i\}_j \quad (\text{C.9})$$

$$[p(\xi, \eta)]_j = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}_j \quad (\text{C.10})$$

Calcul de la position ( $r_j$ ) sur un élément fini «  $j$  » :

$$r_j(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left[ \begin{array}{cccc} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right\}_j - y_0 \quad (\text{C.11})$$

### C.2. Aire infinitésimal

Le calcul de l'élément infinitésimal d'aire se fait à partir du Jacobien d'un élément, qui lui-même provient d'un produit vectoriel.

$$dA_j = J_j d\xi d\eta = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_j}{\partial \xi} & \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_j}{\partial \eta} & \frac{\partial y_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta \quad (\text{C.12})$$

$$dA_j = \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \quad (\text{C.13})$$

### C.3. Calcul de la position (s)

Calcul de la position ( $s$ ) de force équivalente de contact ( $F_c$ ) sur tous les éléments du plan de contact :

$$s = \frac{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_j(\xi, \eta) r_j(\xi, \eta) dA_j \right)}{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_j(\xi, \eta) dA_j \right)} \quad (\text{C.14})$$

$$s = \frac{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_j(\xi, \eta) r_j(\xi, \eta) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \right)}{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_j(\xi, \eta) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \right)} \quad (\text{C.15})$$

$$s = \frac{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \right)}{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \right)} \quad (C.16)$$

Par la méthode des points de Gauss en 2D, on peut évaluer l'intégrale de manière numérique :

$$\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) \approx \sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \sum_k \sum_l W_k Z_l (p_j(\xi_k, \eta_l) r_j(\xi_k, \eta_l) J_j(\xi_k, \eta_l)) \right) \quad (C.17)$$

$$\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) \approx \sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \sum_k \sum_l W_k Z_l (p_j(\xi_k, \eta_l) J_j(\xi_k, \eta_l)) \right) \quad (C.18)$$

À partir des points de Gauss du Tableau C.1, on peut reformuler l'équation (C.17) et l'équation (C.18) de manière à obtenir l'équation (C.19) et l'équation (C.20) :

$$\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) \approx \sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \sum_{k=1}^9 W_k Z_k (p_j(\xi_k, \eta_k) r_j(\xi_k, \eta_k) J_j(\xi_k, \eta_k)) \right) \quad (C.19)$$

$$\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_j(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) \approx \sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \sum_{k=1}^9 W_k Z_k (p_j(\xi_k, \eta_k) J_j(\xi_k, \eta_k)) \right) \quad (C.20)$$

On obtient ainsi la forme générale suivante :

$$s = \frac{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \sum_{k=1}^9 W_k Z_k \left( p_j(\xi_k, \eta_k) r_j(\xi_k, \eta_k) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \right) \right) \right)}{\sum_{j=1}^{Nbelem} \left( \sum_{k=1}^9 W_k Z_k \left( p_j(\xi_k, \eta_k) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \right) \right) \right)} \quad (C.21)$$

Le Tableau C.1 regroupe les 9 points de Gauss pour cas en 2D avec leur poids d'intégration.

Tableau C.1 – Tableau des points de Gauss en 2D

$\xi_3 = -\sqrt{0.6}$ $W_3 = 5/9$	$\eta_3 = +\sqrt{0.6}$ $Z_3 = 5/9$	$\xi_6 = 0$ $W_6 = 8/9$	$\eta_6 = +\sqrt{0.6}$ $Z_6 = 5/9$	$\xi_9 = +\sqrt{0.6}$ $W_9 = 5/9$	$\eta_9 = +\sqrt{0.6}$ $Z_9 = 5/9$
$\xi_2 = -\sqrt{0.6}$ $W_2 = 5/9$	$\eta_2 = 0$ $Z_2 = 8/9$	$\xi_5 = 0$ $W_5 = 8/9$	$\eta_5 = 0$ $Z_5 = 8/9$	$\xi_8 = +\sqrt{0.6}$ $W_8 = 5/9$	$\eta_8 = 0$ $Z_8 = 8/9$
$\xi_1 = -\sqrt{0.6}$ $W_1 = 5/9$	$\eta_1 = -\sqrt{0.6}$ $Z_1 = 5/9$	$\xi_4 = 0$ $W_4 = 8/9$	$\eta_4 = -\sqrt{0.6}$ $Z_4 = 5/9$	$\xi_7 = +\sqrt{0.6}$ $W_7 = 5/9$	$\eta_7 = -\sqrt{0.6}$ $Z_7 = 5/9$

#### C.4. Exemple d'application

Pour bien illustrer la procédure à suivre, l'assemblage de deux plaques rectangulaires a été utilisé. Pour simplifier le calcul, seules les données sur le maillage sont utilisées, plutôt que les données de chaque nœud du maillage au niveau du contact. D'abord, une numérotation globale des nœuds et des éléments a été déterminée tel que montré sur la Figure C.2.

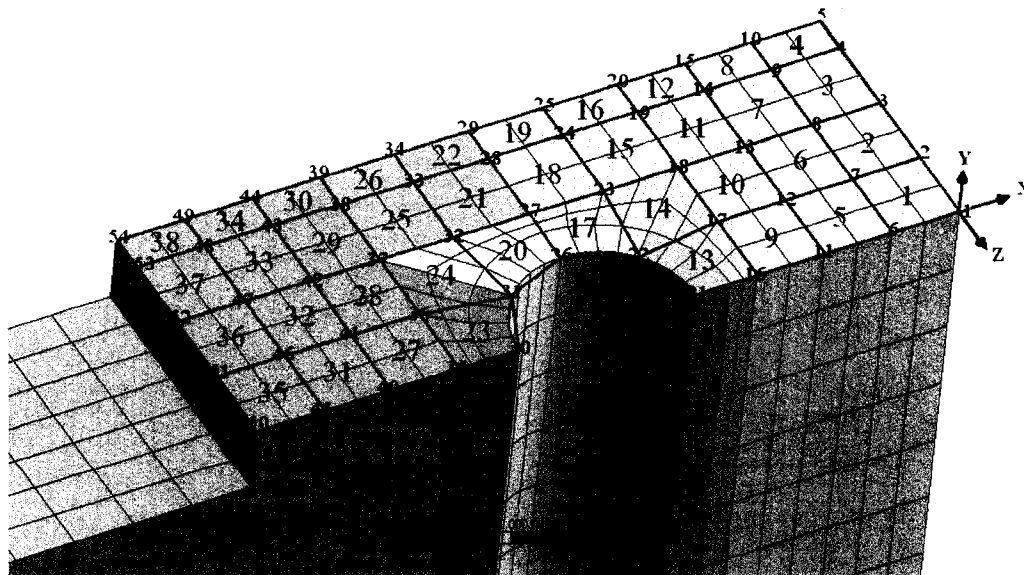


Figure C.2 – Numérotation des nœuds et des éléments au contact

L'étape suivante est d'extraire les données à chacun des nœuds utilisés, soit la position Z et X ainsi que la pression de contact, tel que présenté en exemple sur la Figure C.3. Ces résultats sont présentés dans le Tableau C.2.

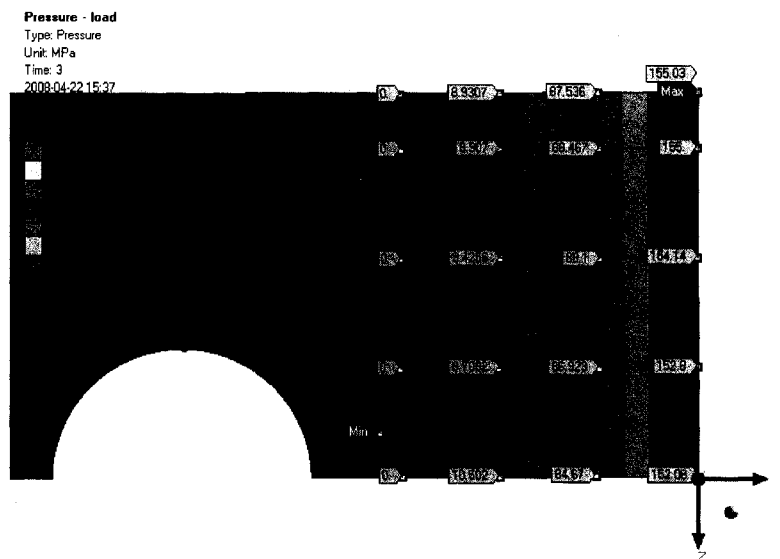


Figure C.3 – Pression de contact pour  $F_e = 22306\text{N}$  sur un demi assemblage

Tableau C.2 – Coordonnées et pression de contact nodales

# Nœud	Z (mm)	X (mm)	p (MPa)
1	0	0	152.08
2	-6.86	0	152.8
...	...	...	...
6	0	-6.13	84.67
7	-6.84	-6.13	86.923
...	...	...	...

On remarque sur la Figure C.4 qu'un système d'axes local  $\eta$  et  $\zeta$  propre à chaque élément a été déterminé. Le sens de la numérotation des nœuds des éléments est déterminé de manière que la normale sorte de l'élément, tel que montré sur la Figure C.4. La numérotation des nœuds doit aussi correspondre aux fonctions de formes présentées précédemment. Donc, le nœud #22 situé à l'emplacement numéro 1 de

l'élément correspond à  $N_1$ , le nœud #21 situé à l'emplacement numéro 2 correspond à  $N_2$ , etc. Ainsi, pour chaque élément, les numéros des quatre nœuds correctement ordonnés sont inscrits dans un tableau, tel que montré dans le Tableau C.3.

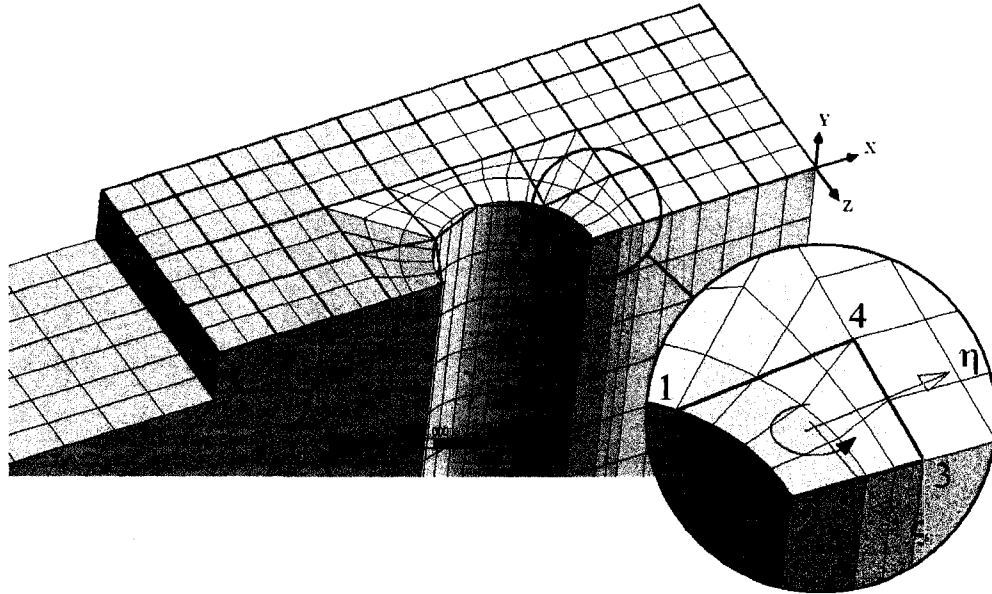


Figure C.4 – Système d'axes local d'un élément

Tableau C.3 – Numéros de nœuds formant les éléments

# Élément	Numéros des nœuds			
	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$
1	7	6	1	2
	8	7	2	3
	9	8	3	4
...	...	...	...	...
22	22	21	16	17
...	...	...	...	...

On peut maintenant transposer dans un autre tableau les informations nécessaires pour le calcul de la position ( $s$ ), tel que montré dans le Tableau C.4.

Tableau C.4 – Données utiles pour chaque élément

# Élément	# Noeuds	Z (mm)	X (mm)	p (MPa)
1	7	-6.84	-6.13	86.923
	6	0	-6.13	84.67
	1	0	0	152.08
	2	-6.86	0	152.8
	...	...	...	...

À l'aide des points de Gauss, on peut calculer la valeur des intégrales doubles du premier élément. Pour se faire, on a au premier point de Gauss les valeurs :

$$\xi_1 = -\sqrt{0.6} \text{ et } W_1 = 5/9 \quad \text{ainsi que} \quad \eta_1 = -\sqrt{0.6} \text{ et } Z_1 = 5/9$$

De l'équation (C.10) on obtient  $p_I(\xi_1, \eta_1) = 94.1$ .

De l'équation (C.11) on obtient  $r_I(\xi_1, \eta_1) = 26.6$ .

De l'équation (C.13) on obtient  $J_I(\xi_1, \eta_1) = 10.5$ .

On a aussi le deuxième point de Gauss :

$$\xi_2 = -\sqrt{0.6} \text{ et } W_2 = 5/9 \quad \text{ainsi que} \quad \eta_2 = 0 \text{ et } Z_2 = 8/9$$

De l'équation (C.10) on obtient  $p_I(\xi_2, \eta_2) = 119.7$ .

De l'équation (C.11) on obtient  $r_I(\xi_2, \eta_2) = 28.9$ .

De l'équation (C.13) on obtient  $J_I(\xi_2, \eta_2) = 10.5$ .

On évalue aux 7 autres points de Gauss ces différents paramètres de l'équation (C.21), ce qui permet d'obtenir finalement pour le premier élément :

$$\sum_{k=1}^9 W_k Z_k (p_j r_j J_j)_k = \left(\frac{5}{9} * \frac{5}{9}\right) (94.1 * 26.6 * 10.5) + \left(\frac{5}{9} * \frac{8}{9}\right) (119.7 * 28.9 * 10.5) + \dots \quad (C.22)$$

$$\sum_{k=1}^9 W_k Z_k (p_j r_j J_j)_k = 146184.8 \quad (C.23)$$

$$\sum_{k=1}^9 W_k Z_k (p_j J_j)_k = \left(\frac{5}{9} * \frac{5}{9}\right) (94.1 * 10.5) + \left(\frac{5}{9} * \frac{8}{9}\right) (119.7 * 10.5) + \dots \quad (C.24)$$

$$\sum_{k=1}^9 W_k Z_k (p_j J_j)_k = 5002.5 \quad (\text{C.25})$$

On obtient ainsi pour le calcul de la position ( $s$ ) l'équation suivante :

$$s = \frac{146184.8 + \sum_{j=2}^{N_{belem}} \left( \sum_{k=1}^9 W_k Z_k \left( p_j(\xi_k, \eta_k) r_j(\xi_k, \eta_k) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \right) \right) \right)}{5002.5 + \sum_{j=2}^{N_{belem}} \left( \sum_{k=1}^9 W_k Z_k \left( p_j(\xi_k, \eta_k) \left( \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial y_j}{\partial \eta} - \frac{\partial x_j}{\partial \eta} \frac{\partial y_j}{\partial \xi} \right) \right) \right)} \quad (\text{C.26})$$

Il reste à appliquer la même procédure aux autres éléments afin de pouvoir finaliser le calcul. La position ( $s$ ) trouvée pour une force extérieure ( $F_e$ ) est de 27.34 mm, ce qui concorde à peu près avec la valeur trouvée à l'aide du modèle de poutre fléchie, soit de 28.64 mm.

Idéalement, il faut s'assurer d'abord que la pression de contact soit bien convergée avant d'utiliser les résultats pour des calculs subséquents, ce qui n'était probablement pas tout à fait le cas avec ces résultats. Il faudrait donc d'abord diminuer la taille des éléments du maillage jusqu'à obtenir la convergence des pressions de contact avant de calculer la valeur de la position ( $s$ ). Ensuite, évidemment plutôt que de prendre une valeur de pression sur quatre sur le maillage, il faudrait prendre toutes celles sur les nœuds du maillage. De plus, une interpolation linéaire a été utilisée entre les nœuds. Mais puisqu'il s'agissait d'éléments quadratiques dans le maillage, il est possible de sortir les valeurs de pression des nœuds milieux et ainsi de remplacer les fonctions de forme linéaires présentées au début par des fonctions de forme quadratiques. La précision de valeur de position ( $s$ ) s'en trouverait sans doute accrue.



**ANNEXE D**

**BLOCS DE COMMANDES APDL**

## D. BLOCS DE COMMANDES APDL

### D.1. Macro de distribution de chargement sur les nœuds d'une arête

Ce bloc de commandes sert à appliquer le chargement extérieur sur l'arête de l'assemblage de plaques rectangulaires.

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! MACRO FOR DISTRIBUTED LOAD ON LINE
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! NAMED SELECTIONS : - Line_face_sup : ligne sur la face supérieure
!                   - Line_face_inf : ligne sur la face inférieure
!                   - Line_end_face_sup : extrémités de la ligne sur la face
!                                     supérieure
!                   - Line_end_face_inf : extrémités de la ligne sur la face
!                                     inférieure
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! DATE : 27 août 2007
! BY : Francis Turgeon
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! LOAD APPLICATION ON THE UPPER FLANGE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! SELECTIONS FOR NODES AND MID NODES SELECTED
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Line_face_sup
*get,N_TOT,node,0,count
CMSEL,s,Line_face_sup
CMSEL,u,Line_end_face_sup
CM,Nodes_line_face_sup,node

```

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! PARAMETER DEFINITION FOR LOAD APPLIED ON EACH NODE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Line_face_sup
NSLE,s,MID,
CM,Mid_nodes,node

CMSEL,u,Mid_nodes
CM,Line_face_sup_2,node

CMSEL,s,Line_face_sup_2
*get,N_TOT_2,node,0,count

CMSEL,u,Line_end_face_sup
CMSEL,s,Line_face_sup_2
CM,Nodes_line_face_sup_2,node

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! PARAMETER DEFINITION FOR NODES WITHOUT MID NODES SELECTED
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Line_face_sup
ESLN,s,0,all
NSLE,s,MID,
CM,Mid_nodes,node

Force_elem = ARG1/((N_TOT-1)/2)
Force_line_end = 1/6*Force_elem
Force_line_mid = 4/6*Force_elem
Force_line_node = 2/6*Force_elem

CMSEL,s,Nodes_line_face_sup
*DO!,1,N_TOT,1
*GET,Force_node,FY,Force_line_mid
NSEL,u,,,Force_node

*ENDDO

CMSEL,s,Nodes_line_face_sup_2
*DO!,1,N_TOT_2,1
*GET,Force_node,node,0,num,min

! Choisir le plus petit # de
! noeud de la sélection courante
! Créer le vecteur de chargement
! sur le noeud sélectionné
! Eliminer le noeud choisi de la
! sélection courante
! Choisir le plus petit # de
! noeud de la sélection courante

```

```

F,Force_node,FY,Force_line_node      ! Créer le vecteur de chargement
                                        ! sur le noeud sélectionné
NSEL,u,,,Force_node                  ! Éliminer le noeud choisi de la
                                        ! sélection courante

*ENDDO

CMSEL,s,Line_end_face_sup
F,Line_end_face_sup,FY,Force_line_end
ALLSEL,all

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! LOAD APPLICATION ON THE LOWER FLANGE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! SELECTIONS FOR NODES AND MID NODES SELECTED
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Line_face_inf
*get,N_TOT,node,0,count

CMSEL,s,Line_face_inf
CMSEL,u,Line_end_face_inf
CM,Nodes_line_face_inf,node

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! PARAMETER DEFINITION FOR NODES WITHOUT MID NODES SELECTED
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Line_face_inf
ESLN,s,0,all
NSLE,s,MID,
CM,Mid_nodes,node

CMSEL,s,Line_face_inf
CMSEL,u,Mid_nodes
CM,Line_face_inf_2,node

CMSEL,s,Line_face_inf_2
*get,N_TOT_2,node,0,count

CMSEL,s,Line_face_inf_2
CMSEL,u,Line_end_face_inf
CM,Nodes_line_face_inf_2,node

```

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! PARAMETER DEFINITION FOR LOAD APPLIED ON EACH NODE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
Force_elem = -ARG1/((N_TOT-1)/2)
Force_line_end = 1/6*Force_elem
Force_line_mid = 4/6*Force_elem
Force_line_node = 2/6*Force_elem
```

```
CMSEL,s,Nodes_line_face_inf
```

```
*DO,i_1,N_TOT,1
```

```
  *GET,Force_node,node,0,num,min
```

```
  F,Force_node,FY,Force_line_mid
```

```
  NSEL,u,,,Force_node
```

```
! Choisir le plus petit # de
! noeud de la sélection courante
! Créer le vecteur de chargement
! sur le noeud sélectionné
! Éliminer le noeud choisi de la
! sélection courante
```

```
*ENDDO
```

```
CMSEL,s,Nodes_line_face_inf_2
```

```
*DO,i_1,N_TOT_2,1
```

```
  *GET,Force_node,node,0,num,min
```

```
  F,Force_node,FY,Force_line_node
```

```
  NSEL,u,,,Force_node
```

```
! Choisir le plus petit # de
! noeud de la sélection courante
! Créer le vecteur de chargement
! sur le noeud sélectionné
! Éliminer le noeud choisi de la
! sélection courante
```

```
*ENDDO
```

```
CMSEL,s,Line_end_face_inf
```

```
F,Line_end_face_inf,FY,Force_line_end
```

```
ALLSEL,all
```

## D.2. Macro d'application de chargement sur une surface rectangulaire

Ce bloc de commandes sert à appliquer le chargement extérieur sur les deux surfaces de l'assemblage de brides en chape.

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! MACRO FOR DISTRIBUTED LOAD ON RECTANGULAR SURFACE
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! NAMED SELECTIONS : - Upper_face : face sur la bride supérieure
!                   - Lower_face : face sur la bride inférieure
!                   - Node1 : noeud permettant d'évaluer ht et b/2
!                   - Node2 : noeud permettant d'évaluer ht
!                   - Node3 : noeud permettant d'évaluer b/2
!
! INPUT ARGUMENT : - ARG1 : force extérieur sur un demi-boulon (N)
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! DATE : 25 octobre 2007
! BY : Francis Turgeon
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! LOAD APPLICATION ON THE UPPER AND THE LOWER FLANGE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Node1
*GET,N1,node,0,num,max
*GET,X_1,node,N1,loc,X           ! X coordinate of Node1
*GET,Y_1,node,N1,loc,Y         ! Y coordinate of Node1
*GET,Z_1,node,N1,loc,Z         ! Z coordinate of Node1

CMSEL,s,Node2
*GET,N2,node,0,num,max
*GET,X_2,node,N2,loc,X           ! X coordinate of Node2
*GET,Y_2,node,N2,loc,Y         ! Y coordinate of Node2
*GET,Z_2,node,N2,loc,Z         ! Z coordinate of Node2

```

```
CMSEL,s,Node3
*GET,N3,node,0,num,max
*GET,X_3,node,N3,loc,X           ! X coordinate of Node3
*GET,Y_3,node,N3,loc,Y           ! Y coordinate of Node3
*GET,Z_3,node,N3,loc,Z           ! Z coordinate of Node3
```

```
ht = ((X_1-X_2)**2 + (Y_1-Y_2)**2 + (Z_1-Z_2)**2)**(1/2)
b = ((X_1-X_3)**2 + (Y_1-Y_3)**2 + (Z_1-Z_3)**2)**(1/2)
Aire = b*ht
```

```
CMSEL,s,Upper_face
CMSEL,a,Lower_face
Pression = -ARG1/(Aire)
SF,ALL,PRES,Pression
```

```
ALLSEL,all
```

### D.3. Macro d'application de chargement sur une surface cylindrique

Ce bloc de commandes sert à appliquer le chargement extérieur sur les deux surfaces de l'assemblage de brides cylindriques.

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! MACRO FOR DISTRIBUTED LOAD ON CIRCULAR SURFACE
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! NAMED SELECTIONS : - Upper_face : face sur la bride supérieure
!                   - Lower_face : face sur la bride inférieure
!                   - Node1 : noeud intérieur sur l'axe de symétrie du boulon
!                   - Node2 : noeud extérieur sur l'axe de symétrie du boulon
!                   - Node3 : noeud intérieur sur l'axe de symétrie de
!                           l'assemblage
!                   - Node4 : noeud extérieur sur l'axe de symétrie de
!                           l'assemblage
!
! INPUT ARGUMENT : - ARG1 : force extérieur sur un demi-boulon (N)
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! DATE : 25 octobre 2007
! BY : Francis Turgeon
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! LOAD APPLICATION ON THE UPPER AND THE LOWER FLANGE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Node1
*GET,N1,node,0,num,max
*GET,X_1,node,N1,loc,X           ! X coordinate of Node1
*GET,Y_1,node,N1,loc,Y           ! Y coordinate of Node1
*GET,Z_1,node,N1,loc,Z           ! Z coordinate of Node1

CMSEL,s,Node2
*GET,N2,node,0,num,max

```



```
*GET,X_2,node,N2,loc,X      ! X coordinate of Node2
*GET,Y_2,node,N2,loc,Y      ! Y coordinate of Node2
*GET,Z_2,node,N2,loc,Z      ! Z coordinate of Node2
```

```
CMSEL,s,Node3
*GET,N3,node,0,num,max
*GET,X_3,node,N3,loc,X      ! X coordinate of Node3
*GET,Y_3,node,N3,loc,Y      ! Y coordinate of Node3
*GET,Z_3,node,N3,loc,Z      ! Z coordinate of Node3
```

```
CMSEL,s,Node4
*GET,N4,node,0,num,max
*GET,X_4,node,N4,loc,X      ! X coordinate of Node4
*GET,Y_4,node,N4,loc,Y      ! Y coordinate of Node4
*GET,Z_4,node,N4,loc,Z      ! Z coordinate of Node4
```

```
ht = ((X_1-X_2)**2)**(1/2)
```

```
X_0 = ((X_4-X_3)/(Z_4-Z_3))*(0-Z_3) + X_3
```

```
r1 = ((X_1-X_0)**2)**(1/2)
```

```
theta = ((asin(Z_3/r1))**2)**(1/2)
```

```
Aire1 = acos(-1)*r1**2
```

```
Aire2 = acos(-1)*(r1+ht)**2
```

```
Aire = (Aire2-Aire1)*((theta/2)/acos(-1))
```

```
CMSEL,s,Upper_face
CMSEL,a,Lower_face
Pression = -ARG1/(Aire)
SF,ALL,PRES,Pression
```

```
ALLSEL,all
```

#### D.4. Macro de calcul des suppléments de force et de moment dans le boulon

Ce bloc de commandes sert à évaluer les suppléments de force et de moment dans le boulon lors de l'application d'un chargement extérieur.

```

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! MACRO FOR EVALUATION OF BOLT WORKING LOAD
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! NAMED SELECTIONS : - Bolt_sigma_Y_max : noeuds où se situe la contrainte
!                               max dans la tige du boulon
!                               - Bolt_sigma_Y_min : noeuds où se situe la contrainte min
!                               dans la tige du boulon
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!
! DATE : 28 août 2007
! BY : Francis Turgeon
!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! SEARCHING FOR NODE NUMBERS
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CMSEL,s,Bolt_sigma_Y_max
*GET,N_max,node,0,num,max

CMSEL,s,Bolt_sigma_Y_min
*GET,N_min,node,0,num,max

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
! EXTRACTION OF SIGMA Y MIN AND MAX FOR PRESTRESS ONLY
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SET,1

*GET,sigmaY_max,node,N_max,s,Y                               ! Sigma Y of N_max
my_sigmaY_max_prestress = sigmaY_max                       ! Assignment of sigma_Y

```



**ANNEXE E**

**RÉSULTATS POUR LA VALIDATION DU NOUVEAU MODÈLE DE POUTRE  
FLÉCHIE**

## E. RÉSULTATS POUR LA VALIDATION DU NOUVEAU MODÈLE DE POUTRE FLÉCHIE

### E.1. Assemblages de deux plaques rectangulaires

Le Tableau E.1 présente les proportions des assemblages de plaques rectangulaires utilisés pour trouver l'équation empirique du facteur correctif ( $\gamma$ ) du nouveau modèle analytique.

Tableau E.1 – Proportions des assemblages de plaques rectangulaires testés

#	$d_{nom}$ (mm)	$X_{frac}$	$Y_{frac}$	$m_{frac}$	$b_{frac}$	$h_{p,frac}$	$h/h_p$	Q (N)	$E_c$ (GPa)	$E_p$ (GPa)
1	16	2	2	2	3	4	0.3	89223	205	200
2	16	3	3	3	3	3	0.5	89223	205	200
3	16	1.5	1.75	1.5	2.5	3.5	0.7	89223	205	200
4	16	1.5	1.75	3	2.5	3.5	0.7	89223	205	200
5	16	4	4	3	4	2	0.3	89223	205	200
6	16	1.5	4	3	4	2	0.3	89223	205	200
7	16	1.5	1.5	3	4	2	0.3	89223	205	200
8	16	4	4	3	4	2	0.8	89223	205	200
9	16	4	4	3	2.5	2	0.3	89223	205	200
10	16	4	4	3	4	3	0.3	89223	205	200
11	16	4	4	3	4	4	0.3	89223	205	200
12	16	4	4	3	4	2.5	0.3	89223	205	200
13	16	4	4	2	4	2.5	0.3	89223	205	200
14	16	4	4	1	4	2.5	0.3	89223	205	200
15	16	1.5	4	2	4	2.5	0.3	89223	205	200
16	16	1.5	4	1	4	2.5	0.3	89223	205	200
17	16	4	4	2	4	2.5	0.8	89223	205	200
18	16	4	4	1	4	2.5	0.8	89223	205	200
19	16	4	4	2	4	4	0.3	89223	205	200
20	16	4	4	1	4	4	0.3	89223	205	200
21	16	4	4	2	4	4	0.3	89223	205	71

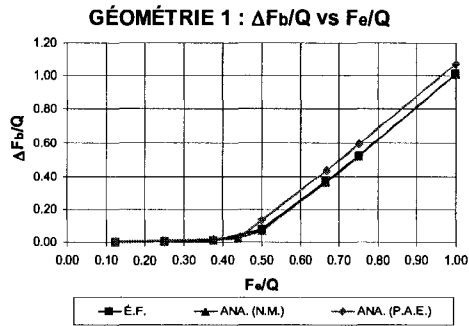


Figure E.1 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 1)

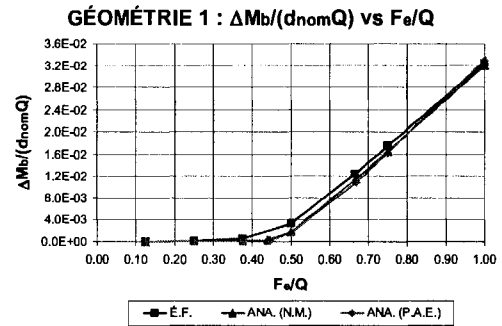


Figure E.2 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 1)

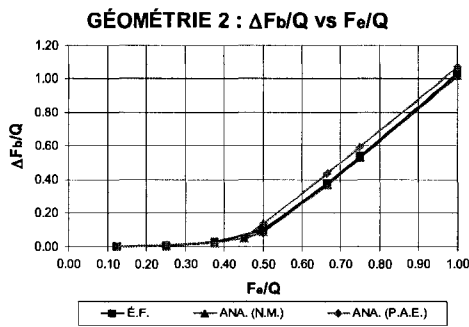


Figure E.3 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 2)

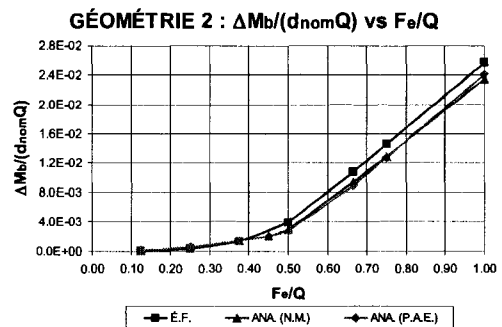


Figure E.4 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 2)

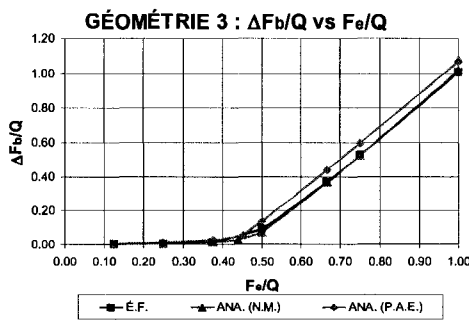


Figure E.5 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 3)

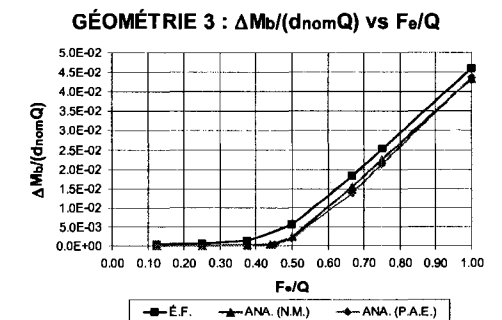


Figure E.6 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 1)

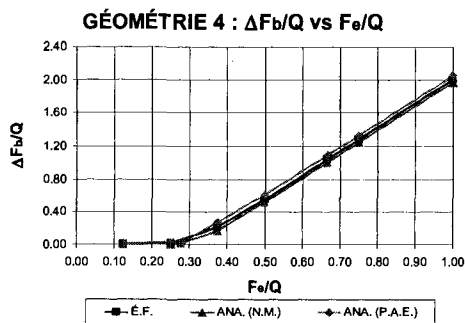


Figure E.7 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 4)

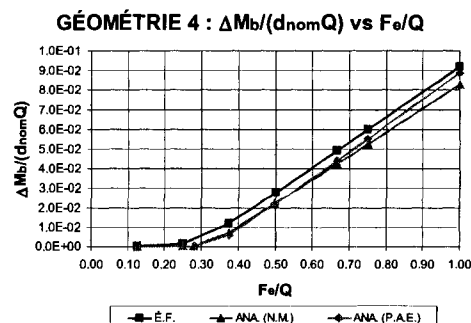


Figure E.8 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 4)

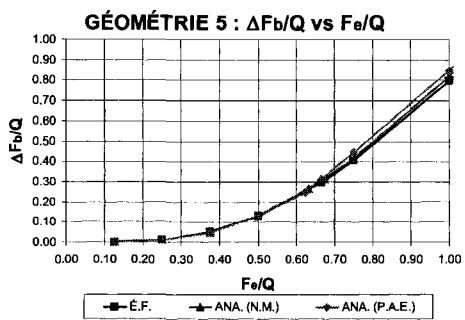


Figure E.9 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 5)

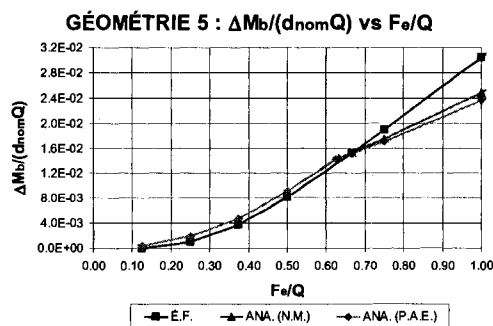


Figure E.10 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 5)

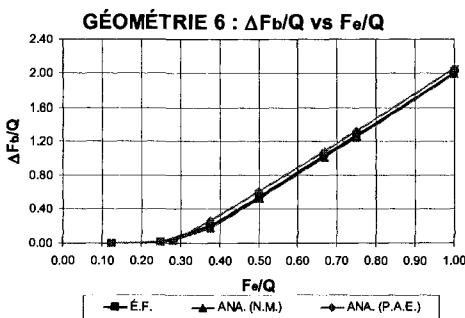


Figure E.11 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 6)

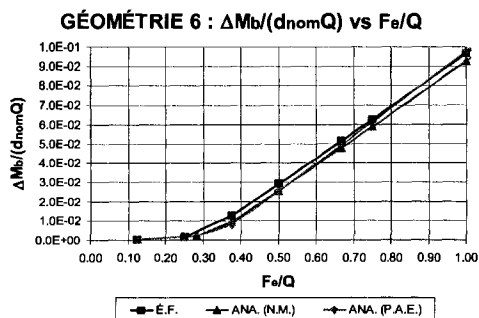


Figure E.12 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 6)

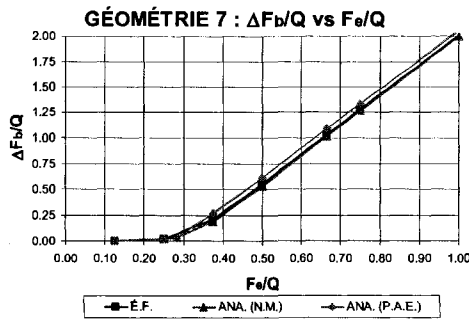


Figure E.13 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 7)

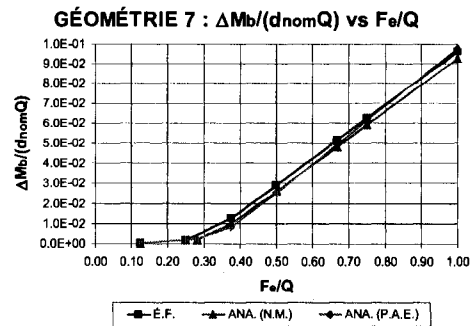


Figure E.14 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 7)

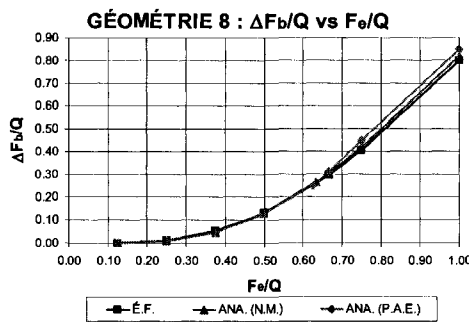


Figure E.15 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 8)

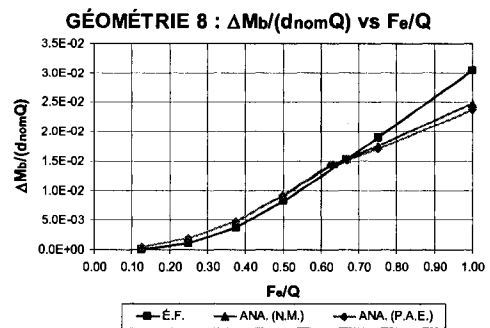


Figure E.16 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 8)

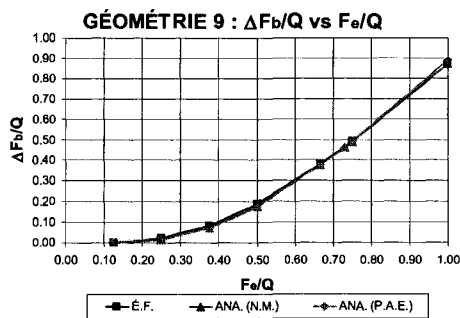


Figure E.17 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 9)

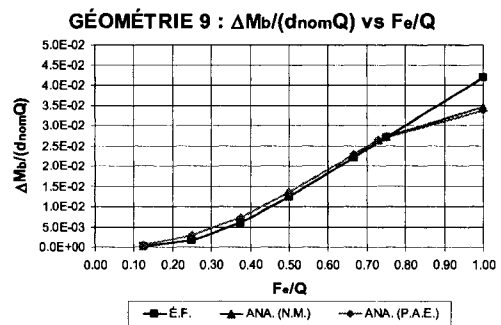


Figure E.18 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 9)



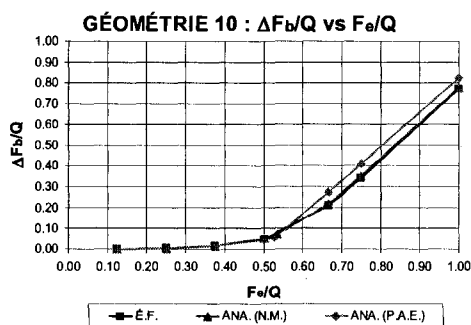


Figure E.19 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 10)

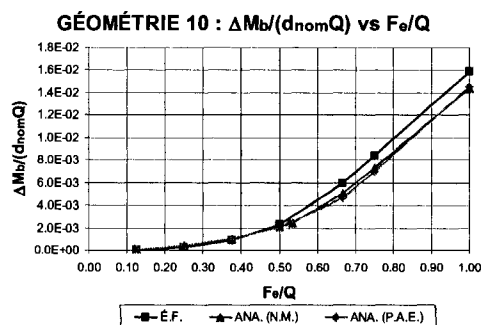


Figure E.20 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 10)

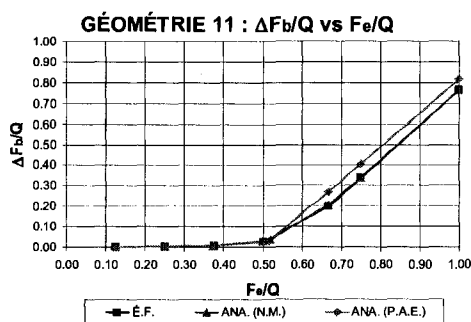


Figure E.21 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 11)

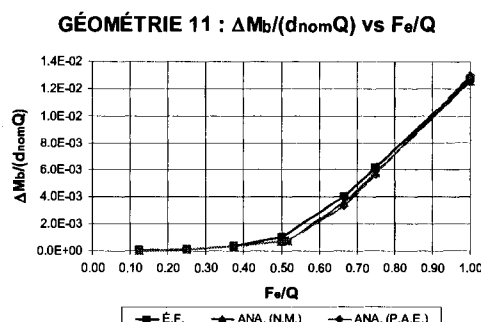


Figure E.22 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 11)

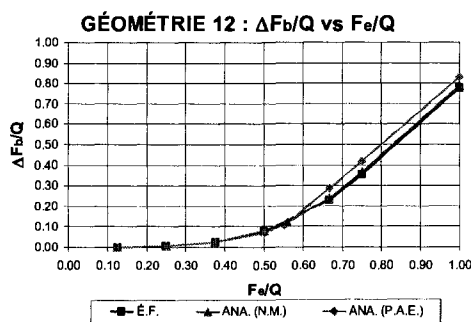


Figure E.23 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 12)

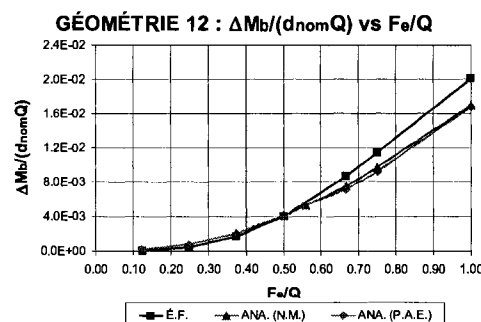


Figure E.24 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 12)

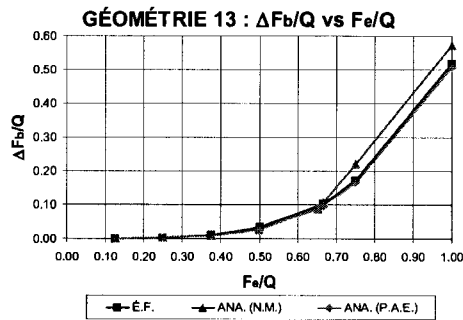


Figure E.25 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 13)

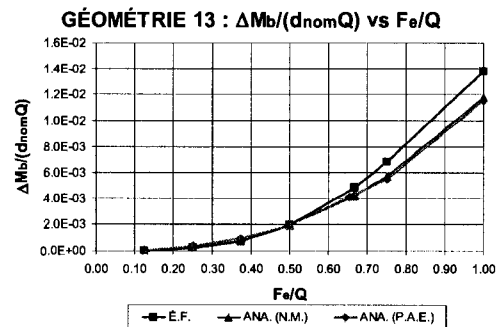


Figure E.26 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 13)

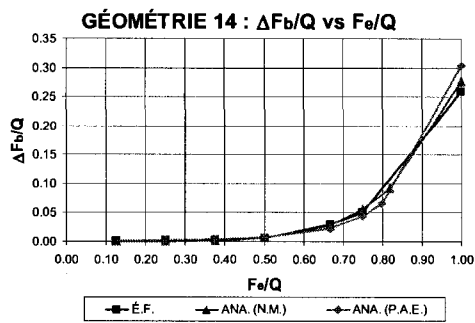


Figure E.27 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 14)

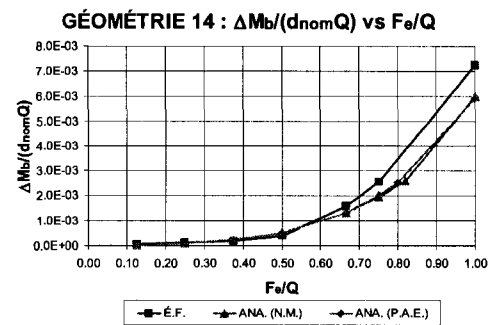


Figure E.28 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 14)

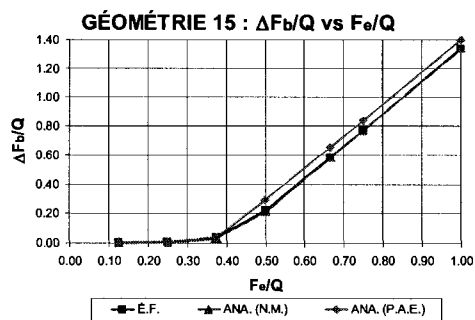


Figure E.29 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 15)

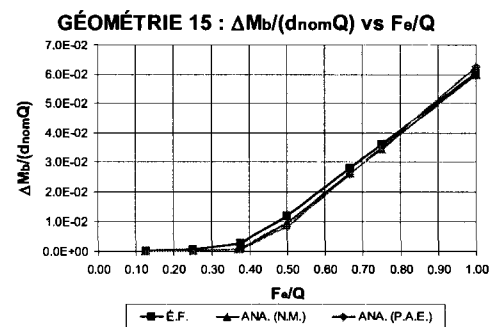


Figure E.30 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 15)

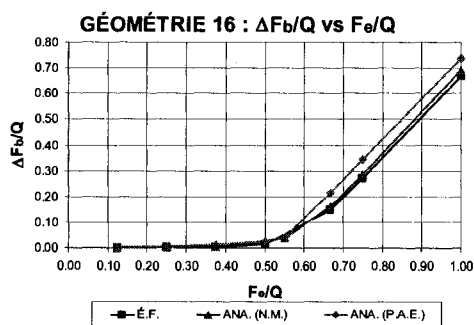


Figure E.31 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 16)

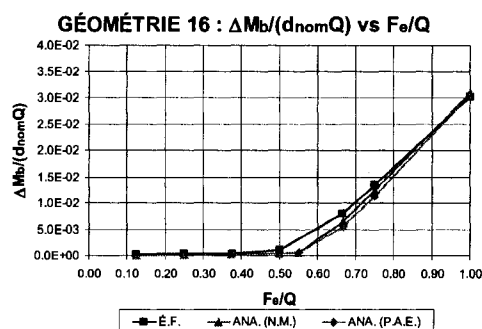


Figure E.32 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 16)

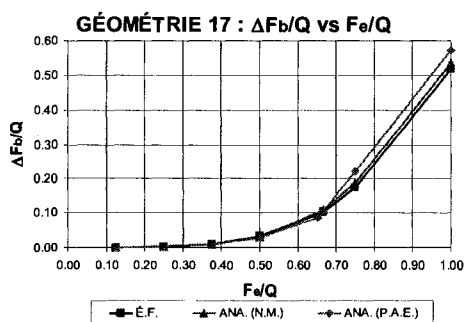


Figure E.33 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 17)

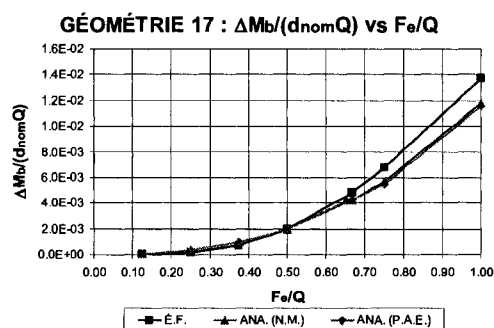


Figure E.34 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 17)

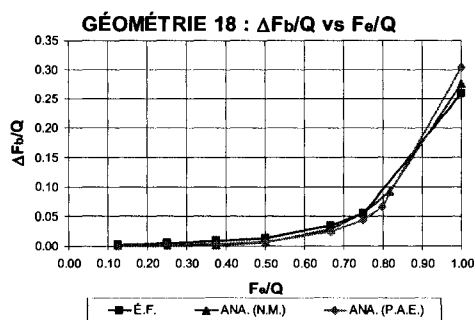


Figure E.35 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 18)

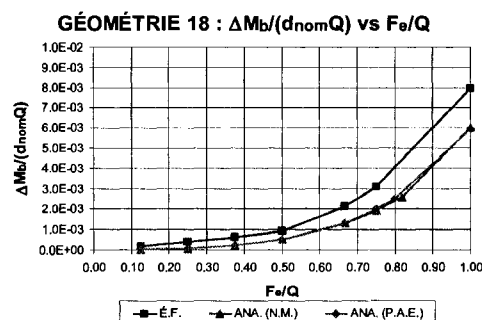


Figure E.36 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 18)

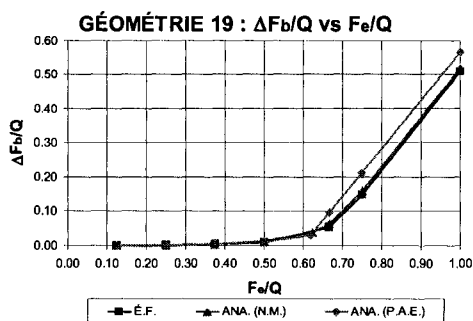


Figure E.37 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 19)

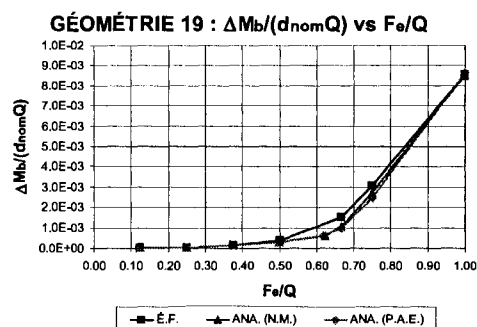


Figure E.38 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 19)

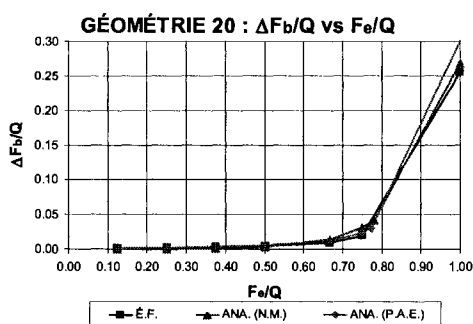


Figure E.39 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 20)

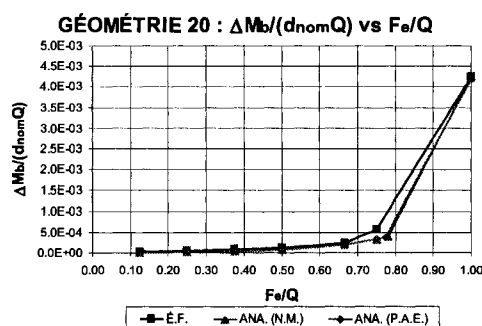


Figure E.40 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 20)

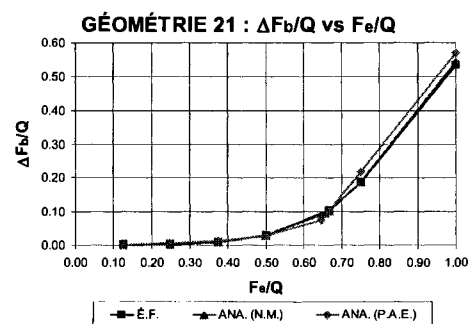


Figure E.41 – Supplément de force relatif à la précontrainte (géométrie 21)

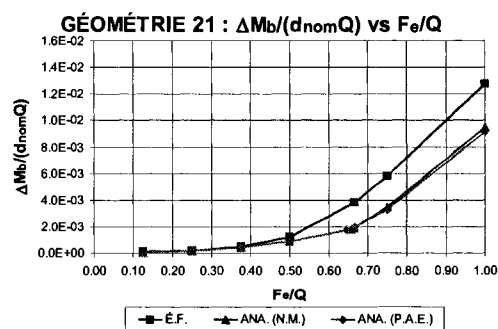


Figure E.42 – Supplément de moment relatif au produit du diamètre nominal par la précontrainte (géométrie 21)