

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CONVECTION NATURELLE DANS UNE COUCHE HORIZONTALE D'UN  
FLUIDE BINAIRE CONFINÉE PAR DES PAROIS POREUSES MINCES

MAJID FEKRI

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)

AOÛT 2008



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 978-0-494-46048-1*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 978-0-494-46048-1*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.



# Canada

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

CONVECTION NATURELLE DANS UNE COUCHE HORIZONTALE D'UN  
FLUIDE BINAIRE CONFINÉE PAR DES PAROIS POREUSES MINCES

présenté par : FEKRI Majid

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. VASSEUR Patrick, Ph.D, membre et directeur de recherche

M. ROBILLARD Luc, D.Sc., membre et codirecteur de recherche

M. TREPANIER Jean-Yves, Ph.D., membre

## DÉDICACE

À ma mère Soheila  
À mon père Alireza  
À ma fiancée Mahboubeh  
À ma sœur Mona  
À tous ceux qui me sont chers

*« Qu'il en soit ainsi de l'entendement,  
c'est ce qu'il est facile de voir, pourvu que  
l'on comprenne et ce qu'est la méthode propre  
à la recherche de la vérité, et ce que sont  
ces instruments naturels qui suffisent à  
l'invention d'instruments nouveaux  
et aux recherches ultérieures. »*

*Baruch Spinoza- Traité de la réforme de l'entendement*

## REMERCIEMENTS

La présente thèse a été réalisée sous la supervision du professeur Patrick Vasseur, directeur de recherche et de professeur Luc Robillard, codirecteur de recherche. Tous les travaux de cette thèse ont été menés dans le département de génie mécanique, section aérothermique, de l'École Polytechnique de Montréal. Je désire tout d'abord remercier chaleureusement et vivement messieurs Patrick Vasseur et Luc Robillard pour leur aide appréciable. Ma profonde gratitude et mes remerciements vont particulièrement à mon directeur de recherche M. Patrick Vasseur pour son orientation efficace et pour ses idées originales qui ont servi à enrichir cette thèse. Je remercie également Dr. Zinedine Alloui pour ses conseils et directions.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus chaleureux à mon ami Farshad Navah, pour ses conseils précieux et pour ses contributions majeures dans la préparation de cette thèse et à mes chers parents et à Mahboubeh Khani pour le soutien et les encouragements qu'ils ont témoignés durant toutes mes études.

Mes vifs et sincères remerciements vont aussi aux professeurs Dominique Pelletier, Jean-Yves Trépanier, Huu Duc Vo et Clément Fortin pour avoir bien voulu participer au jury, malgré leurs multiples occupations.

Je désire également remercier le personnel du département de génie mécanique et, en particulier, Martine Bénard et Vivianne Turcotte pour leur aide et leur disponibilité.

Mes remerciements vont également au gouvernement du Québec pour la bourse d'exemption de frais de scolarités majorés.

## RÉSUMÉ

Cette thèse est consacrée à l'étude de la convection naturelle dans une couche de fluide binaire confinée par deux parois horizontales poreuses. La cavité est chauffée en bas avec un flux de chaleur constant pendant que les parois verticales sont maintenues adiabatiques et imperméables. La condition de glissement de Beavers-Joseph est appliquée sur la vitesse à l'interface de milieux fluide et poreux. La convection double-diffusive et la convection induite par l'effet Soret sont étudiées. Un modèle analytique, basé sur l'approximation de l'écoulement parallèle, est proposé pour le cas de la couche élancée ( $A \gg 1$ ). L'écoulement et les taux de transferts thermique et solutal sont obtenus en termes de paramètres gouvernants du problème, à savoir : le rapport de forme de la cavité  $A$ , le nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , le rapport des forces de volume,  $\varphi$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , et les nombres de Darcy modifiés,  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$ . Un modèle numérique, basé sur la méthode de différence finie est utilisé afin d'obtenir la solution des équations gouvernantes. Les nombres de Rayleigh critiques pour le début de la convection supercritique et souscritique sont prédits pour différentes conditions hydrodynamiques aux frontières. Les solutions concernant une couche fluide limitée par les murs solides et libres peuvent être déduites pour les cas limites de cette analyse. Pour la convection d'amplitude finie, des expressions appropriées ont été obtenues pour les distributions de vitesse, de température et de concentration de soluté au centre de la couche fluide. Les caractéristiques principales prédites par la solution analytique sont confirmées par les solutions numériques des équations complètes.

## ABSTRACT

This thesis reports an analytical and numerical study of natural convection in a horizontal binary fluid layer confined between two horizontal porous walls. The cavity is heated from the bottom by a constant heat flux while the long side walls are impermeable and adiabatic. The Beavers–Joseph slip condition on velocity is applied at the interface between the fluid and the porous layers. Both double-diffusive convection and Soret-induced convection are considered. An analytical model, based on the parallel flow approximation, is proposed for the case of a shallow layer ( $A \gg 1$ ). The flow and heat and mass transfer variables are obtained in terms of the governing parameters of the problem such as aspect ratio of the cavity  $A$ , Rayleigh number,  $Ra_T$ , ratio of buoyancy forces,  $\varphi$ , Lewis number,  $Le$ , and modified Darcy numbers,  $Da_1^*$  and  $Da_2^*$ . A numerical model based on finite difference methods is used to solve the complete governing equations. The critical Rayleigh numbers for the onset of supercritical and subcritical convection are predicted for various hydrodynamic boundary conditions. The results for a fluid layer bounded by solid walls and free surfaces emerge from the present analysis as limiting cases. For finite-amplitude convection, useful expressions have been obtained for velocity, temperature and solute distributions in the core of the layer. The main features predicted by the analytical solution are confirmed by numerical solutions of the full governing equations.

**TABLE DES MATIÈRES**

|                                      |             |
|--------------------------------------|-------------|
| <b>DÉDICACE .....</b>                | <b>IV</b>   |
| <b>REMERCIEMENTS .....</b>           | <b>V</b>    |
| <b>RÉSUMÉ .....</b>                  | <b>VI</b>   |
| <b>ABSTRACT .....</b>                | <b>VII</b>  |
| <b>TABLE DES MATIÈRES.....</b>       | <b>VIII</b> |
| <b>LISTE DES FIGURES .....</b>       | <b>XII</b>  |
| <b>LISTE DES TABLEAUX.....</b>       | <b>XV</b>   |
| <b>LISTE DES ANNEXES .....</b>       | <b>XV</b>   |
| <b>NOMENCLATURE .....</b>            | <b>XVI</b>  |
| <b>CHAPITRE I_INTRODUCTION .....</b> | <b>1</b>    |
| 1.1 Généralités .....                | 1           |
| 1.2 Problème physique .....          | 2           |
| 1.3 Revue bibliographique .....      | 3           |
| 1.4 But de l'étude .....             | 11          |
| 1.5 Contenu du mémoire .....         | 12          |

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CHAPITRE II_PRÉSENTATION ET FORMULATION DU PROBLÈME .....</b>   | <b>13</b> |
| 2.1 Description du problème .....                                  | 13        |
| 2.2 Hypothèses simplificatrices .....                              | 14        |
| 2.2.1 Hypothèse de Boussinesq .....                                | 15        |
| 2.3 Équations différentielles régissant l'écoulement .....         | 16        |
| 2.3.1 Convection en milieu fluide binaire .....                    | 17        |
| 2.3.1.1 Équation de continuité .....                               | 17        |
| 2.3.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement ..... | 17        |
| 2.3.1.3 Équation de conservation de l'énergie .....                | 18        |
| 2.3.1.4 Équation de conservation de l'espèce.....                  | 18        |
| 2.3.2 Conditions aux frontières.....                               | 19        |
| 2.3.2.1 Conditions aux frontières hydrodynamiques.....             | 19        |
| 2.3.2.2 Conditions aux frontières thermiques .....                 | 20        |
| 2.3.2.3 Conditions aux frontières massiques .....                  | 20        |
| 2.3.2.4 Condition de Beavers-Joseph.....                           | 21        |
| 2.4 Formulation adimensionnelle.....                               | 22        |
| 2.4.1 Équations de base adimensionnelles .....                     | 23        |
| 2.4.2 Conditions aux frontières adimensionnelles .....             | 24        |
| 2.4.3 Condition de Beaver-Joseph adimensionnelle .....             | 25        |
| 2.4.4 Transfert de chaleur et transfert de masse .....             | 26        |
| <b>CHAPITRE III_SOLUTION ANALYTIQUE .....</b>                      | <b>27</b> |
| 3.1 Introduction .....                                             | 27        |
| 3.2 Concept de l'écoulement parallèle .....                        | 28        |
| 3.3 Équations de base simplifiées .....                            | 30        |

|                                               |                                                                          |    |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.4                                           | Solution générale de la fonction de courant et de la température .....   | 30 |
| 3.5                                           | Évaluation des constantes $C_T$ , $C_S$ et $\Psi_0$ .....                | 31 |
| 3.5.1                                         | Évaluation de $C_T$ .....                                                | 32 |
| 3.5.2                                         | Évaluation de $C_S$ .....                                                | 33 |
| 3.5.3                                         | Évaluation de $\Psi_0$ .....                                             | 33 |
| 3.6                                           | Rayleigh supercritique et Rayleigh souscritique.....                     | 34 |
| 3.7                                           | Les taux de transfert de chaleur et transfert de masse .....             | 36 |
| 3.8                                           | Vérification de la solution analytique .....                             | 36 |
| 3.8.1                                         | La couche fluide confinée par deux parois solides horizontales.....      | 36 |
| 3.8.2                                         | La couche fluide limitée par une paroi solide et une surface libre ..... | 37 |
| 3.8.3                                         | La couche fluide limitée par deux surfaces libres .....                  | 38 |
| CHAPITRE IV_ SOLUTION NUMÉRIQUE.....          |                                                                          | 40 |
| 4.1                                           | Introduction .....                                                       | 40 |
| 4.2                                           | Discretisation des équations .....                                       | 42 |
| 4.3                                           | Algorithme de calcul.....                                                | 44 |
| 4.4                                           | Critère de convergence .....                                             | 45 |
| 4.5                                           | Effet du maillage .....                                                  | 45 |
| 4.6                                           | Validation du code .....                                                 | 48 |
| CHAPITRE V_ANALYSE DE STABILITÉ LINÉAIRE..... |                                                                          | 50 |
| 5.1                                           | Introduction.....                                                        | 50 |

|                                           |                                                                                  |    |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.2                                       | Théorie de la stabilité linéaire .....                                           | 51 |
| 5.3                                       | Validation d'analyse de stabilité linéaire .....                                 | 53 |
| 5.4                                       | Influence du nombre de Darcy modifié $Da^*$ sur la stabilité linéaire.....       | 54 |
| 5.5                                       | Influence du nombre de Prandtl sur la stabilité linéaire.....                    | 56 |
| 5.6                                       | Influence de coefficient de glissement $\alpha^*$ sur la stabilité linéaire..... | 58 |
| CHAPITRE VI_RÉSULTATS ET DISCUSSION ..... |                                                                                  | 61 |
| 6.1                                       | Influence du rapport de forme de la cavité, $A$ .....                            | 61 |
| 6.2                                       | La convection induite par la double diffusion et par l'effet Soret .....         | 70 |
| 6.3                                       | Influence du rapport des forces de volume $\varphi$ .....                        | 76 |
| 6.4                                       | Influence du nombre de Lewis $Le$ .....                                          | 79 |
| 6.5                                       | Influence du nombre de Darcy modifié $Da^*$ .....                                | 82 |
| CONCLUSION .....                          |                                                                                  | 88 |
| RÉFÉRENCES.....                           |                                                                                  | 90 |
| ANNEXES.....                              |                                                                                  | 98 |

## LISTE DES FIGURES

|                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figure 2.1 :</b> Représentation schématique de la cavité contenant le fluide binaire.....                                                                                                                                                       | 14 |
| <b>Figure 4.1 :</b> Maillage et distribution des nœuds sur le volume de contrôle.....                                                                                                                                                              | 41 |
| <b>Figure 4.2 :</b> Les résultats de solution numérique avec le maillage $81 \times 21$ , pour le cas<br>$\varphi = 0.2, Le = 2, Ra_T = 2000, A = 6, a = 0, Da_1^* = Da_2^* = 0$ .....                                                             | 47 |
| <b>Figure 4.3 :</b> Comparaison de nos résultats avec ceux de <i>Mamou et al.</i> (2001), pour le cas<br>$\varphi = -\sqrt{10}/4, Le = \sqrt{10}, Ra_T = 4 \times 10^4, A = 1.5, a = 0, Da_1^* = Da_2^* = 0$ .....                                 | 49 |
| <b>Figure 5.1:</b> Le paramètre $R_0$ , fonction de $Da_1^*$ et $Da_2^*$ .....                                                                                                                                                                     | 55 |
| <b>Figure 5.2:</b> convection oscillatoire, $Ra_{TC}^{Hopf}$ , fonction de $Pr$ et $Ra_S$ pour $\varphi = 0.2$ ,<br>$Le = 2$ et $Da_1^* = Da_2^* = 0$ .....                                                                                        | 58 |
| <b>Figure 5.3 :</b> L'influence des coefficients de glissement de la condition de Beavers-Joseph,<br>$\alpha_1^*$ et $\alpha_2^*$ sur la convection oscillatoire $Ra_{TC}^{Hopf}$ , pour $Da_1^* = Da_2^* = 10^{-6}$ , $a = 0$ et $Ra_S = 0$ ..... | 59 |
| <b>Figure 5.4 :</b> L'influence de nombre de Darcy $Da_1 = Da_2 = Da$ , sur la convection<br>oscillatoire, $Ra_{TC}^{Hopf}$ fonction de $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha^*$ pour $a = 0$ et $Ra_S = 0$ .....                                      | 60 |

**Figure 6.1 :** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10.$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $a = 0$  : a)  $A = 1$ ,  $\Psi_{\max} = 0.284$ ,  $Nu = 1.014$ ,  $Sh = 1.863$ , b)  $A = 2$ ,  $\Psi_{\max} = 1.066$ ,  $Nu = 1.223$ ,  $Sh = 3.376$  c)  $A = 4$ ,  $\Psi_{\max} = 1.099$ ,  $Nu = 1.296$ ,  $Sh = 3.197$  d)  $A = 8$ ,  $\Psi_{\max} = 1.100$ ,  $Nu = 1.293$ ,  $Sh = 3.182$  64

**Figure 6.2 :** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10.$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $a = 1$  : a)  $A = 1$ ,  $\Psi_{\max} = 0.301$ ,  $Nu = 1.015$ ,  $Sh = 2.143$ , b)  $A = 2$ ,  $\Psi_{\max} = 1.043$ ,  $Nu = 1.215$ ,  $Sh = 4.173$  c)  $A = 4$ ,  $\Psi_{\max} = 1.075$ ,  $Nu = 1.285$ ,  $Sh = 3.818$  d)  $A = 8$ ,  $\Psi_{\max} = 1.077$ ,  $Nu = 1.283$ ,  $Sh = 3.799$  66

**Figure 6.3 :** Influence de rapport de forme sur a) la fonction de courant b) le nombre de Nusselt, c) le nombre de Sherwood pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10.$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $a = 0$  ..... 68

**Figure 6.4 :** Influence du rapport de forme sur a) la fonction de courant b) le nombre de Nusselt, c) le nombre de Sherwood pour  $Ra_T = 5 \times 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 0.2$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$  et  $a = 1$  . ..... 69

**Figure 6.5 :** Diagramme de bifurcation en terme de a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , versus  $Ra_T$  pour  $a = 1$  et  $a = 0$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ ,  $Le = 2$  et  $\varphi = 0.5$  ..... 73

**Figure 6.6 :** Diagramme de bifurcation en terme de a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , versus  $Ra_T$  pour  $a=1$  et  $a=0$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ ,  $Le = 2$  et  $\varphi = -0.5$  .....75

**Figure 6.7 :** Diagramme de bifurcation en terme de a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , pour différentes valeurs de  $\varphi$  versus  $Ra_T / R_0$  où  $a=0$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $Le = 10$  .....78

**Figure 6.8 :** Influence du nombre de Lewis,  $Le$ , sur a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , pour la double diffusion,  $a=0$  et l'effet Soret,  $a=1$ , dans les cas de  $Da_2^* = 0$  et  $Da_2^* \rightarrow \infty$  avec  $Da_1^* = 0$ ,  $Ra_T = 10^3$  et  $\varphi = 0.2$  .....81

**Figure 6.9 :** Distribution de a) la composante de la vitesse horizontale  $u$ , b) la température  $T$ , et c) de la concentration  $S$ , dans le demi-plan vertical ( $x=0$ ) de la cavité pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a=0$  et  $Da_1^* = 0$  .....83

**Figure 6.10 :** Diagramme de bifurcation en termes de la valeur maximum de la fonction de courant  $\Psi_{\max}$ , fonction de  $Ra_T$  pour  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 2$ ,  $Da_1^* = 0$  et a)  $a=0$  et b)  $a=1$  .....85

**Figure 6.11 :** Diagramme de bifurcation en termes de la valeur maximum de la fonction de courant  $\Psi_{\max}$ , fonction de  $Ra_T$  pour  $\varphi = -0.2$ ,  $Le = 2$ ,  $Da_1^* = 0$  et a)  $a=0$  et b)  $a=1$  .....87

## LISTE DES TABLEAUX

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tableau 4.1 :</b> Effet du maillage.....                                                                    | 46 |
| <b>Tableau 4.2 :</b> Comparaison de nos résultats avec <i>Mamou et al. (2001)</i> pour $Ra_T = 4 \times 10^4$  | 48 |
| <b>Tableau 5.1 :</b> Comparaison de nos résultats avec ceux de <i>Prud'homme et Hung Nguyen</i><br>(2002)..... | 54 |

**LISTE DES ANNEXES**

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| <b>Appendice A :</b> Bilan d'énergie ..... | 98  |
| <b>Appendice B:</b> Bilan de masse .....   | 100 |

## NOMENCLATURE

|        |                                                                               |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $A$    | rapport de forme de la cavité, $(L' / H')$                                    |
| $C_f$  | capacité thermique du fluide, $m^2 s^{-2} K^{-1}$                             |
| $D$    | diffusivité solutale, $m^2 / s$                                               |
| $D'$   | coefficient de l'effet de diffusion thermique (thermo-diffusivité), $m^2 / s$ |
| $Da$   | nombre de Darcy, $K / H'^2$                                                   |
| $Da^*$ | nombre de Darcy-modifié, $\sqrt{K / H'^2} / \alpha^*$                         |
| $g$    | accélération de la pesanteur, $m / s^2$                                       |
| $H'$   | hauteur de la couche fluide, $m$                                              |
| $j'$   | flux constant de concentration par unité de surface                           |
| $K$    | perméabilité du milieu poreux,                                                |
| $k_f$  | conductivité thermique du fluide, $W / (m.K)$                                 |
| $L'$   | longueur du système, $m$                                                      |
| $N$    | concentration dimensionnelle, $kg / m^2$                                      |
| $Nu$   | nombre de Nusselt                                                             |
| $Pr$   | Nombre de Prandtl, $\nu / \alpha$                                             |
| $q'$   | flux constant de chaleur par unité de surface                                 |
| $Ra_T$ | nombre de Rayleigh thermique, $g \beta_T q' H'^4 / \alpha_f k_f \nu_f$        |

|                         |                                                                                   |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $Ra_{TC}^{\text{sup}}$  | nombre de Rayleigh supercritique, équation (3.26)                                 |
| $Ra_{TC}^{\text{sous}}$ | nombre de Rayleigh souscritique, équation (3.28)                                  |
| $S$                     | concentration adimensionnelle, $(N - N_o) / \Delta N'$                            |
| $Sh$                    | nombre de Sherwood                                                                |
| $t'$                    | temps, $s$                                                                        |
| $T$                     | température adimensionnelle du milieu fluide, $(T' - T'_0) / \Delta T'$           |
| $u$                     | vitesse adimensionnelle dans la direction $x$ en milieu fluide, $(u'H' / \alpha)$ |
| $v$                     | vitesse adimensionnelle dans la direction $y$ en milieu fluide, $(v'H' / \alpha)$ |
| $W'$                    | profondeur du système, $m$                                                        |
| $x$                     | coordonnée cartésienne adimensionnelle, $(x' / H')$                               |
| $y$                     | coordonnée cartésienne adimensionnelle, $(y' / H')$                               |

### Symboles Grecque

|            |                                                        |
|------------|--------------------------------------------------------|
| $\alpha$   | diffusivité thermique du fluide, $m^2 / s$             |
| $\alpha^*$ | coefficient de glissement adimensionnel                |
| $\beta_N$  | coefficient d'expansion massique du fluide, $m^2 / kg$ |
| $\beta_T$  | coefficient d'expansion thermique du fluide, $K^{-1}$  |
| $\varphi$  | rapport des forces volumiques                          |
| $\nu$      | viscosité cinématique du fluide, $m^2 / s$             |
| $\rho$     | densité du fluide, $kg / m^3$                          |

$\Psi$  fonction de courant adimensionnelle en milieux fluide,  $\Psi'/\alpha$

### Exposants

$^{\circ}$  état de référence

$_p$  milieu poreux

### Indices

$'$  variable dimensionnelle

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

#### 1.1 Généralités

La convection naturelle est l'un des modes majeurs de transfert de chaleur et de masse. Dans les fluides, la convection thermique et massique résulte de la combinaison des effets combinés de la diffusion – le mouvement Brownien de particules individuelles dans le fluide – et de l'advection, selon laquelle la chaleur ou la masse sont transportées par des mouvements de courants dans le fluide. Dans le contexte du transfert thermique et massique le terme 'convection' est utilisé pour se référer au transfert causé par les effets combinés de l'advection et la diffusion.

Le phénomène du transfert de chaleur et de masse par la convection naturelle, dans les espaces confinés ou semi-confinés, est généralement dû à la présence de gradients de température et de concentration. Ces gradients donnent naissance à une distribution non uniforme de la densité du mélange qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Le domaine considéré peut être un milieu fluide ou un milieu poreux saturé par un fluide.

Les mouvements générés par la convection thermique ou massique sont fréquemment rencontrés dans la nature. Par exemple ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), et géologiques (remontées de magma). En outre, les transferts de chaleur et de masse par la convection

sont présents partout dans l'industrie et dans le génie. Ces phénomènes interviennent dans plusieurs procédés thermochimiques et électrochimiques. Par exemple la convection joue un rôle très important dans les réacteurs chimiques ou nucléaires, dans les procédés d'oxydation ou de traitement des surfaces métalliques, dans les procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques et dans le changement de phase des métaux où la convection affecte directement la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermo-physiques des alliages.

La convection dans les couches horizontales chauffées et salées par le bas est généralement connue sous le nom de problème de Rayleigh-Bénard. Ce problème est largement étudié à cause, d'une part, de ses applications nombreuses en génie et en sciences et, d'autre part, de la simplicité inhérente à sa géométrie pour étudier le comportement de systèmes non-linéaires.

## **1.2 Problème physique**

Cette étude porte sur la convection naturelle d'origine thermique et thermo-solutale dans des cavités rectangulaires remplies d'un fluide binaire, soumis à des gradients de température et de concentration. Dans la plupart des situations, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie, le fluide est constitué de deux ou plusieurs composants, par exemple, l'eau de l'océan, laquelle contient plusieurs solutés. Le fluide porte alors le nom de fluide binaire. Différentes conditions limites thermiques et massiques sont considérées sur les surfaces horizontales de la cavité. Inévitablement, la configuration géométrique de la cavité

et les conditions limites imposées à ses frontières ont une influence importante sur la structure de l'écoulement et sur les taux de transfert de chaleur et de masse. Notre investigation porte particulièrement sur les effets des paramètres de contrôle du problème sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse dans le système.

### 1.3 Revue bibliographique

Dans cette section nous présentons une revue bibliographique afin de résumer les travaux antérieurs consacrés à l'étude de la convection naturelle dans les milieux confinés ou semi-confinés rempli de fluides binaires ou de milieux poreux saturés par des fluides binaires. Des revues très documentées sur ce sujet sont présentées dans les livres de *Bejan (1984); Nield et Bejan (1992); Platten et Logros (1984)*.

La convection de Rayleigh-Bénard dans une cavité remplie par un fluide binaire ou un milieu poreux saturé par un fluide binaire a été l'objet d'une grande attention par les ingénieurs et les scientifiques, à cause du fait que ce phénomène est présent dans plusieurs situations naturelles et industrielles. Les situations naturelles peuvent être par exemple les océans, les lacs ou l'atmosphère. Les exemples d'applications industrielles incluent de nombreux procédés chimiques comme la formation de cristaux, le stockage de l'énergie, la solidification des métaux, etc. Pour une revue sur les travaux fondamentaux dans ce domaine voir par exemple *Turner (1985)*.

Un siècle d'études expérimentales et théoriques n'a pas complètement réussi à faire la lumière sur les mécanismes du transfert de chaleur engendrés par la convection naturelle. Le gradient vertical de température est à l'origine de la convection dans le fluide. En

comparaison avec le transfert de chaleur diffusif, la convection, bien entendu, accroît considérablement le transfert thermique. Ce dernier est exprimé en termes d'un paramètre sans dimensions qui s'appelle le nombre de Nusselt ( $Nu$ ). L'approximation de Boussinesq implique que la masse volumique demeure constante sauf dans le terme de la poussée d'Archimède. Les paramètres de contrôle du problème (en plus de configurations géométriques) sont alors le nombre de Rayleigh ( $Ra$ ), et le rapport entre les diffusivités cinématique ( $\nu$ ) et thermique ( $\alpha$ ) du fluide, i.e. le nombre de Prandtl.

Les recherches déjà accomplies sur la convection de Rayleigh-Bénard sont nombreuses et variées puisqu'elles suscitent des intérêts tant fondamentaux que pratiques. Nous nous bornerons d'abord à fournir quelques études qui constituent des aspects importants dans l'acquisition des connaissances relatives au problème de la convection de Rayleigh-Bénard dans une couche horizontale de fluide binaire.

La première étude expérimentale sur le problème de la convection naturelle a été accomplie par **Bénard (1900)** qui a étudié le problème d'une couche fluide très mince chauffée de façon isotherme par le bas. Bénard a observé qu'au dessus d'un nombre de Rayleigh critique, des cellules convectives apparaissent. Lord **Rayleigh (1916)** a considéré analytiquement le problème de la convection naturelle au sein d'une géométrie simple, à savoir une couche fluide avec les parois horizontales maintenues à des températures constantes. Ce dernier a développé une théorie pour prédire le critère de stabilité dans le cas particulier où la couche fluide est bordée deux surfaces horizontales libres. Il a trouvé que pour  $Ra > 27\pi^4/4$  le système devient instable.

Les études concernant l'analyse de la stabilité linéaire portent sur une couche de fluide horizontale infinie chauffée par-dessous. **Veronis (1965)** a étudié la convection dans une couche horizontale infinie du fluide binaire. Dans le cas où le gradient de la concentration est déstabilisant et le gradient de la température est stabilisant, le système devrait devenir instable à un nombre de Rayleigh prédit par la théorie de la stabilité linéaire. Cependant Veronis a observé qu'une solution d'amplitude finie peut exister, en fait, à un nombre de Rayleigh thermique plus petit que celui prévu par le principe de la stabilité linéaire. Le mouvement de fluide dans cette situation est appelé convection sous-critique, c'est-à-dire convection pour laquelle le seuil de convection se produit avec une amplitude finie.

**Bejan et Khair (1985)** ont présenté une étude sur la convection thermosolutale au voisinage d'une plaque verticale adjacente à un milieu poreux saturé par un fluide binaire. Une analyse d'échelle a été développée en régime de couche limite. Quatre régimes possibles ont été identifiés selon les valeurs du rapport de forces volumiques thermiques et solutales, et le nombre de Lewis.

**Poulikakos (1986)** a fait l'étude de la convection thermosolutale dans une couche fluide superposée à une couche poreuse horizontale en utilisant le modèle de Brinkman. Ce modèle est une extension du modèle de Darcy, prenant en compte les conditions d'adhérence du fluide sur les parois solides. Quand les forces de poussée solutales et thermiques sont opposées le début de la convection peut être oscillant ce qui n'est pas le cas quand les forces sont coopérantes. Selon l'analyse de la stabilité linéaire, cet auteur a déterminé le seuil des écoulements convectifs oscillants et stationnaires en fonction du

nombre de Darcy. Le nombre de Darcy, qui intervient dans le modèle de Brinkman pour les milieux poreux, est défini comme le rapport de la perméabilité du milieu poreux et de la taille caractéristique de la couche poreuse.

*Derjani et al. (1986)* ont étudié la convection thermosolutale dans un système composé de couches superposées d'un fluide binaire et d'un milieu poreux dans une cavité ayant deux murs horizontaux solides imperméables avec des températures constantes en haut et en bas. Les résultats de cette étude présentent une image adéquate de l'interaction entre les couches fluides et poreuses.

*Pillatsis et al. (1986)* ont étudié l'effet des conditions hydrodynamiques (rigide ou libre) en haut et en bas d'une cavité horizontale. Ils ont utilisé la condition de Beavers-Joseph pour définir la discontinuité de vitesse aux interfaces dans un système composé d'une couche poreuse située entre deux couches de fluide avec températures constantes imposées sur les murs horizontaux. Ils ont aussi montré l'existence d'un régime d'ébullition ou la surface de chauffage est couverte d'un film de vapeur d'épaisseur très mince.

*Rosenberg et Spera (1992)* ont démontré numériquement que lorsqu'une couche d'un fluide binaire est chauffée et salée par le bas, la dynamique de l'écoulement change considérablement lorsqu'on augmente le rapport des forces de volume. Le rapport entre les forces d'Archimède thermique et solutale peut donc changer considérablement le régime de la convection thermosolutale par rapport à la convection thermique pure. Ils ont constaté en plus que l'écoulement évoluait d'un régime convectif permanent vers un régime oscillant chaotique puis vers l'état de repos.

**Brand et al. (1984)** ont fait l'étude de la stabilité linéaire dans un fluide binaire en fonction du signe et de l'amplitude du coefficient de Soret. En présence de l'effet Soret les gradients de concentration dans un fluide binaire, ayant initialement une concentration uniforme, sont générés par les gradients de température appliqués sur le système. Le signe de l'effet Soret implique que le phénomène est soit déstabilisant (positif) ou stabilisant (négatif). Ils ont montré que lorsque le coefficient d'expansion volumique est positif, une instabilité oscillante apparaît si le chauffage se fait par le bas et si le coefficient de l'effet Soret est négatif. Pour des valeurs positives de la conductivité thermique et un chauffage se faisant par le haut il n'y a pas d'instabilité. Pour certains paramètres du fluide binaire, à savoir le rapport de forces volumiques, une possibilité d'oscillation se présente, quand le chauffage se fait par le haut. Dans le même ordre d'idées, **Steinberg et Brand (1984)** ont examiné le cas d'une couche poreuse horizontale saturée par un fluide binaire. Une revue exhaustive de ces types de situations est présentée dans le livre de **Platten et Logros (1984)**.

**Mamou et al. (2001)** ont observé des oscillations asymétriques de la convection thermosolutale dans une couche horizontale du fluide avec des conditions aux frontières libres. Ils ont montré que lorsque la diffusivité solutale est beaucoup plus petite que la diffusivité thermique, en augmentant le nombre de Rayleigh thermique, l'instabilité se développe au sein du fluide sous la forme d'une bifurcation de Hopf.

**Hollinger et Lucke (1998)** ont étudié analytiquement, l'influence du coefficient de Soret sur le comportement de l'écoulement convectif dans une couche d'un fluide binaire. Ils ont utilisé des conditions aux frontières rigides et imperméables et ont trouvé des

solutions stables et instables. Également, la transition de situations non linéaires faibles aux situations fortement non linéaires a été étudiée en détail.

Les études concernant le problème de Rayleigh-Bénard en présence de l'effet Soret ont été résumées récemment par **Lucke et al. (1995)**. Ces derniers sont aussi les auteurs d'une étude quantitative sur la convection dans une couche horizontale de fluide binaire chauffée par le bas en variant le nombre de Rayleigh pour différentes intensités de l'effet Soret. Ils ont démontré l'importance de l'influence de champ de concentration sur les structures dynamiques de la convection.

**Mamou et al. (2001)** ont présenté une étude complète numérique et analytique sur la convection doublement diffusive (sans effet Soret) dans une cavité rectangulaire soumise à des gradients de température et de concentration verticaux. Ils ont montré qu'un écoulement peut se développer à des nombres de Rayleigh moins grands que la valeur supercritique prévue par la théorie de stabilité linéaire dans les fluides purs soumis aux mêmes conditions frontières. Ces résultats démontrent l'existence d'un écoulement sous-critique.

Plus récemment, la convection thermosolutale dans une couche horizontale de fluide binaire induite par l'effet Soret, a été étudiée par plusieurs auteurs. Par exemple **Mojtabi et al. (2002)** ont étudié l'effet du coefficient de Soret sur la convection naturelle induite dans une cavité rectangulaire remplie d'un fluide binaire. Les conditions aux limites utilisées dans cette étude correspondent à celles des parois rigides imperméables et conductrices de la chaleur. Ces derniers ont trouvé la température moyenne à laquelle le coefficient de l'effet Soret peut changer de signe.

La plupart des études sur la convection naturelle sont consacrées notamment au cas d'une couche fluide binaire horizontale confinée par des parois horizontales rigides et imperméables. Malgré cela, dans beaucoup d'applications, l'écoulement convectif est en interaction avec des conditions limites plus compliquées, comme des milieux poreux par exemple. L'interaction à l'interface de milieux fluides et poreux a été modélisée dans le passé selon deux approches différentes. La première approche correspond à l'équation de Brinkman pour la couche poreuse avec la continuité de la vitesse et la continuité du taux de cisaillement comme condition de l'interface. À l'aide de ces conditions et du modèle de Brinkman, la théorie de la stabilité linéaire a été utilisée par **Somerton et Catton (1982)** pour l'étude des écoulements dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire en prenant en considération l'influence d'une source de chaleur interne.

**Vasseur et al. (1989)**, ont étudié analytiquement l'instabilité de la convection thermique dans une cavité contenant deux couches, une fluide et une poreuse, superposées, en utilisant l'approximation de l'écoulement parallèle. Ces auteurs ont utilisé le modèle de Brinkman pour le milieu poreux et la condition de Marangoni, i.e. la présence d'une force de tension superficielle, à l'interface supérieure fluide-air du système. La condition de Marangoni implique que la dérivée de la vitesse à la frontière dépend d'un nombre sans dimension,  $Ma$ , qui est fonction du gradient de la tension de surface du fluide par rapport à la température. Ils ont obtenu le nombre de Rayleigh critique et le nombre de Nusselt pour différents rapports entre l'épaisseur de la couche fluide et celle de la couche poreuse, ces deux nombres étant donnés en fonction des nombres de Darcy et de Marangoni. Ils ont conclu que la présence de la couche poreuse donnait lieu à une situation plus stable. Par

contre le système devient moins stable en augmentant le nombre de Darcy. Ils ont aussi montré que la condition à la frontière supérieure exerce une influence importante sur la stabilité du système.

La seconde approche à ce problème implique l'utilisation de l'équation de Darcy pour le milieu poreux et une condition de glissement du fluide à l'interface entre les deux milieux. Cette approche a été proposée par *Beavers et Joseph (1967)* et *Jones (1972)*. Dans cette approche les milieux fluides et poreux sont deux domaines distincts avec une discontinuité de la vitesse à l'interface. Les équations de Navier Stokes sont appliquées pour le domaine du fluide et le modèle de Darcy pour le milieu poreux. selon *Nield (1977)*; *Nield (1983)* a utilisé la condition limite de Beavers et Joseph pour étudier la stabilité thermique de couches fluide et poreuse superposées soumises à différentes conditions aux limites supérieures et inférieures. À la suite de ce travail, la majorité des analyses de stabilité linéaire ont été réalisés en utilisant cette condition de glissement (*Carr et Straughan (2003)*; *Carr (2004)*; *Chen et Chen (1988)*; *Shivakumara et al. (2006)*). Le modèle de Beavers-Joseph a aussi été abordé par le passé pour étudier la convection dans le système composé de deux couches, fluide et poreuse. *Poulikakos et al. (1986)* ont publié une étude sur l'analyse numérique de la convection naturelle aux nombres de Rayleigh élevés, pour le cas d'une couche fluide superposée à une couche poreuse.

*Ochoa-Tapia et Whitaker (1995a,b)* ont proposé une condition de discontinuité du cisaillement avec une vitesse continue à l'interface. La continuité de la vitesse permet de considérer le système de fluide-poreux comme un domaine continu. Ces auteurs ont comparé les résultats de ce modèle avec les données expérimentales de *Beavers et Joseph*

(1967). Ils ont conclu que cette approche n'est pas appropriée pour toutes les situations expérimentales mais susceptible d'aider à mieux comprendre la complexité inhérente à l'interface fluide-poreux.

Différents modèles de l'interface fluide-poreux ont été étudiés récemment par *Hirata et al. (2007a,b)*. Ces auteurs ont comparé les résultats de l'approche d'un seul domaine avec ceux du modèle classique de Darcy impliquant deux domaines et également avec ceux de l'approche de Brinkman. Ils ont trouvé une bonne concordance entre les modèles de Beavers-Joseph et de Brinkman et ils ont montré que l'inclusion de la condition de Brinkman joue un rôle secondaire et peu important sur la stabilité linéaire du système.

#### 1.4 But de l'étude

L'objet du présent travail est d'étudier la convection naturelle dans une couche horizontale d'un mélange binaire confinée par deux fines couches poreuses. On suppose que la couche de fluide est chauffée et salée par le bas selon des flux constants de chaleur et de concentration. Dans ces conditions, la solution analytique approximative pour la convection unicellulaire dans la partie centrale de la couche peut être obtenue en utilisant l'hypothèse de l'écoulement parallèle. Les résultats sont présentés en termes des paramètres qui régissent le problème. Aussi, la stabilité du régime d'écoulement parallèle a été étudiée numériquement afin de prédire le nombre de Rayleigh critique de la bifurcation Hopf, à partir duquel la convection stationnaire devient instable.

## 1.5 Contenu du mémoire

La présente mémoire contient six chapitres. Dans le premier chapitre, nous abordons notre sujet de recherche et le problème étudié dans le cadre de présent travail en faisant le point sur les travaux antérieurs dans ce domaine. Le deuxième chapitre est consacré à la description du problème ainsi qu'à la définition du modèle physique et à la formulation mathématique. Le troisième chapitre commence par l'explication de la solution analytique et des hypothèses fondamentales de l'approche de l'écoulement parallèle. Dans le quatrième chapitre, la méthode de solution numérique est expliquée et quelques solutions typiques sont présentées. Le cinquième chapitre est consacré à l'analyse de la stabilité linéaire en étudiant les effets de différents paramètres sur la stabilité du système. Les résultats obtenus par les solutions analytique et numérique sont présentés, comparés et discutés dans le chapitre six. On termine par une conclusion générale sur les résultats obtenus.

## CHAPITRE II

### PRÉSENTATION ET FORMULATION DU PROBLÈME

#### 2.1 Description du problème

Dans cette mémoire, on considère le phénomène de la convection thermosolutale dans une enceinte. La configuration spatiale de ce problème est constituée d'une cavité horizontale élancée de hauteur  $H'$  et de longueur  $L'$ , remplie avec un fluide binaire et confinée horizontalement par deux parois poreuses minces. Le schéma de cette configuration est représenté dans la Figure 2.1. L'origine du système de coordonnées cartésiennes est située au centre de la cavité avec  $x'$  et  $y'$  étant respectivement les axes horizontal et vertical. Les parois verticales sont considérées adiabatiques et imperméables. Un flux de chaleur constant  $q'$  et un flux de masse  $j'(1-a)$  sont imposés sur les parois horizontales, où  $a$  est un nombre réel tel que,  $a = 0$  correspond à une convection doublement diffusive pour laquelle les forces solutales sont induites par l'imposition d'un flux de masse constant  $j'$ , et  $a = 1$  indique une convection induite par les effets Soret pour laquelle le transfert de matière au sein du mélange binaire est dû à la formation d'un gradient de concentration induit par un gradient thermique.

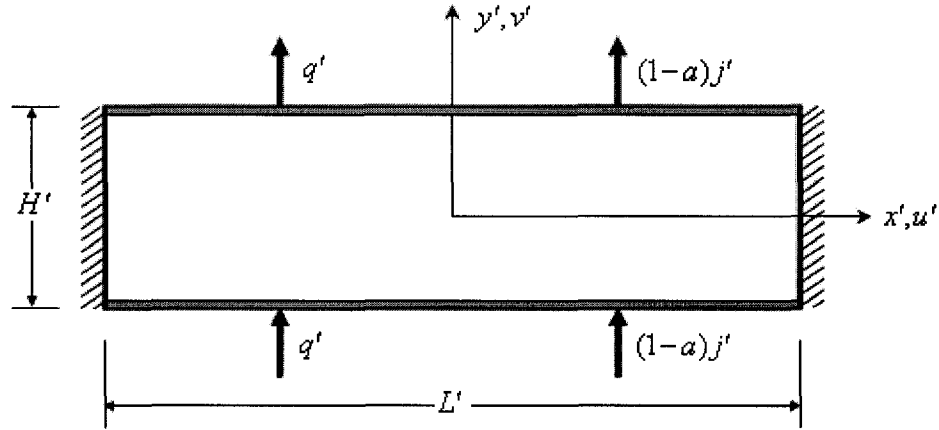


**Figure 2.1 :** Représentation schématique de la cavité contenant le fluide binaire

## 2.2 Hypothèses simplificatrices

Comme dans la majorité des études portant sur la convection naturelle, quelques approximations sont considérées afin d'obtenir une formulation simple du modèle mathématique. Les approximations suivantes sont utilisées dans cette étude :

1. Le problème est bidimensionnel. On suppose que la profondeur de la cavité dans la troisième dimension  $W'$  (parallèle à l'axe  $Z$ ) est suffisamment grande par rapport aux autres dimensions ( $W'/H'$  et  $W'/L' \gg 1$ ) pour que les effets de bords deviennent négligeables.
2. Le fluide dans la cavité étudiée est considéré newtonien et incompressible. De plus, on suppose que le travail induit par les forces visqueuses est négligeable.
3. L'écoulement étudié est laminaire.
4. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.

5. Il n'y a pas de sources internes de chaleur ou de masse dans le problème étudié et il n'y a aucune réaction chimique.
6. Les propriétés thermo-physiques sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence.
7. La densité du fluide varie avec la température et la concentration selon l'hypothèse de Boussinesq.

### 2.2.1 Hypothèse de Boussinesq

Cette hypothèse est utilisée pour la simplification de l'équation d'état du fluide. Normalement, dans les problèmes de fluides incompressibles les variations de densité au sein du fluide sont faibles. Par conséquent, les variations de la masse volumique peuvent être négligées partout, sauf dans le cas de la convection naturelle où elles constituent le moteur du mouvement du fluide. L'hypothèse de Boussinesq suppose que la densité du fluide dans le terme des forces volumiques varie linéairement avec la température et la concentration. Pour un fluide binaire l'hypothèse de Boussinesq conduit à la relation suivante (*Gray et Giorgini (1975)*) :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta'_T (T' - T'_0) - \beta_N (N - N_0)] \quad (2.1)$$

où  $\rho_0$  est la densité du fluide mesurée à la température de référence  $T'_0$  et à la concentration de référence  $N_0$ . De plus,  $T'$  et  $N$  représentent respectivement la température et la concentration de la solution en un point donné du système.

Dans l'équation (2.1),  $\beta'_T$  et  $\beta_N$  sont les coefficients d'expansion volumique thermique et solutale du fluide, respectivement. Ils sont représentés par les relations suivantes :

$$\beta'_T = -\frac{1}{\rho_o} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T'} \right)_{P', N} \quad \beta_N = -\frac{1}{\rho_o} \left( \frac{\partial \rho}{\partial N} \right)_{P', T'} \quad (2.2)$$

En général, pour la plupart des fluides, une augmentation de la température résulte en une diminution de la densité du fluide. Ceci résulte du fait que le coefficient d'expansion volumique thermique  $\beta'_T$  est normalement positif pour tous les fluides, sauf l'eau entre 0°C et 4°C. Cependant,  $\beta_N$  peut être négatif ou positif selon le soluté considéré.

L'hypothèse de Boussinesq est valable quand les variations de la densité sont inférieures à environ moins de 10% de grandeur de la densité moyenne ( $\Delta\rho/\rho \leq 0.1$ ).

## 2.3 Équations différentielles régissant l'écoulement

Dans cette section nous allons établir les équations de base régissant notre problème. La résolution d'un problème de convection naturelle consiste en la détermination des champs de vitesse, de température et de concentration en chaque point du domaine occupé par le fluide.

### 2.3.1 Convection en milieu fluide binaire

Dans notre problème où la cavité horizontale est remplie d'un fluide binaire, les équations de base régissant l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse sont données respectivement par les équations suivantes:

### 2.3.1.1 Équation de continuité

En considérant le milieu fluide comme un milieu continu, le principe de la conservation de la masse permet d'établir l'équation de continuité suivante pour un fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0 \quad (2.3)$$

Les variables  $u'$  et  $v'$  sont les composantes du champ de vitesse  $\vec{V}'(x', y')$  dans les directions  $x'$  et  $y'$  respectivement.

### 2.3.1.2 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Selon la théorie de l'écoulement de fluides homogènes en présence du champ gravitationnel terrestre, l'équation de conservation de quantité de mouvement pour la convection thermique et massique s'écrit comme ci-dessous, (voir par exemple *Ouriemi et al. (2006)*).

$$\rho (\vec{V}' \cdot \nabla \vec{V}') = -\nabla P' + \mu \nabla^2 \vec{V}' + \rho \vec{g} [\beta'_T (T' - T'_o) + \beta_N (N - N_o)] \quad (2.4)$$

où  $\vec{V}'(u', v')$  est le champ de vitesse,  $\rho$  est la densité de fluide,  $P'$  est la pression, et  $\vec{g} = (0, g)$  représente le vecteur de champ de gravité terrestre.

### 2.3.1.3 Équation de conservation de l'énergie

Le principe de conservation d'énergie conduit à l'équation de l'énergie dans laquelle la dissipation visqueuse est négligée :

$$\rho C_f \left[ \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\vec{V}' \cdot \nabla) T' \right] = k_f \nabla^2 T' \quad (2.5)$$

où  $C_f$  est la capacité thermique de fluide,  $t'$  est le temps, et  $k_f$  est la conductivité thermique de milieu fluide.

### 2.3.1.4 Équation de conservation de l'espèce

Pour la mise en équations d'un problème de convection thermo-solutale il est nécessaire de considérer la conservation de l'espèce. Cette équation est donnée par :

$$\frac{\partial N}{\partial t'} + (\vec{V}' \cdot \nabla) N = D \nabla^2 N + a D' N_o (1 - N_o) \nabla^2 T' \quad (2.6)$$

où  $a$  est un nombre réel tel que,  $a = 0$  pour une convection doublement diffusive pour laquelle les forces solutales dans le milieu fluide sont induites par l'imposition d'un flux de masse constant  $j'$ , et  $a = 1$  pour une convection induite par les effets Soret pour laquelle le transfert de matière au sein du mélange binaire est dû à la formation d'un gradient de soluté

induit par un gradient thermique.  $D$  et  $D'$  sont la diffusivité massique de la concentration et le coefficient de l'effet de diffusion thermique (thermo-diffusivité) respectivement.

### 2.3.2 Conditions aux frontières

Le problème reste incomplet sans l'introduction des conditions aux frontières que nous allons spécifier ci-dessous. Les conditions aux frontières associées au problème d'une couche de fluide binaire confinée par les frontières poreuses peuvent être regroupées selon quatre catégories, à savoir : (i) Les condition aux frontières hydrodynamiques, (ii) Les condition aux frontières thermiques, (iii) Les condition aux frontières massiques, et (iv) La condition de Beaver-Joseph a l'interface entre un milieu fluide et une frontière poreuse.

#### 2.3.2.1 Conditions aux frontières hydrodynamiques

On impose des conditions d'imperméabilité sur toutes les parois de la cavité. Sur les parois verticales solides, il en résulte que la vitesse du fluide est nulle dans les deux directions de  $x'$  et  $y'$ . Cependant, sur l'interface entre le fluide et les couches poreuses horizontales la condition de glissement de Beaver-Joseph permet au fluide d'avoir une composante de vitesse horizontale. Les conditions hydrodynamiques sont alors énoncées comme suit :

$$x' = \pm L'/2 \qquad u' = v' = 0 \qquad (2.7)$$

$$y' = \pm H'/2 \qquad v' = 0 \qquad (2.8)$$

### 2.3.2.2 Conditions aux frontières thermiques

Dans le présent problème, les parois verticales sont maintenues adiabatiques tandis que les parois horizontales sont soumises à un flux de chaleur constant. Les conditions thermiques prennent alors la forme suivante:

$$x' = \pm L'/2 \quad \partial T' / \partial x' = 0 \quad (2.9)$$

$$y' = \pm H'/2 \quad \partial T' / \partial y' = -q' / k_f \quad (2.10)$$

### 2.3.2.3 Conditions aux frontières massiques

Dans notre problème un flux de concentration est posé sur les parois horizontales. Les conditions massiques à partir de la concentration sur les parois solides prennent donc la forme :

$$x' = \pm L'/2 \quad \frac{\partial N}{\partial x'} = 0 \quad (2.11)$$

$$y' = \pm H'/2 \quad \frac{\partial N}{\partial y'} = \frac{j'(1-a)}{\rho D} - a \frac{D'}{D} N_0 (1 - N_0) \frac{\partial T'}{\partial y'} \quad (2.12)$$

### 2.3.2.4 Condition de Beavers-Joseph

La condition de *Beavers et Joseph (1967)* est un modèle pour l'interface entre les milieux fluide et poreux. Dans ce modèle, le changement de vitesse horizontale du fluide ( $u'$ ) dans la direction  $y'$  (perpendiculaire à l'interface fluide-poreux) est proportionnel à la différence de vitesses induites à chaque coté de l'interface. La forme générale de cette condition peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\alpha^*}{\sqrt{K}}(u' - u'_p) \quad (2.13)$$

où  $u'$  et  $u'_p$  représentent les composantes horizontales de la vitesse dans le fluide et dans le milieu poreux respectivement,  $K$  est la perméabilité de l'interface poreux, et  $\alpha^*$  est une constante adimensionnelle du matériau poreux, qui s'appelle le paramètre de glissement.

Dans cette étude nous considérons que l'épaisseur des couches poreuses est infinitésimale. Cela nous permet de mettre la vitesse dans la couche poreuse égale à zéro, i.e.  $u'_p = 0$ . Par conséquent, les conditions de Beavers-Joseph appliquées en haut et en bas de la cavité conduisent aux relations suivantes :

$$y' = -H'/2 \quad \frac{d^2 u'}{dy'^2} = \frac{\alpha_1^*}{\sqrt{K}} u' \quad (2.14)$$

$$y' = H'/2 \quad \frac{d^2 u'}{dy'^2} = \frac{-\alpha_2^*}{\sqrt{K}} u' \quad (2.15)$$

Nous constatons que les paramètres de glissement en bas et en haut de la cavité, sont différents et donnés respectivement par  $\alpha_1^*$  et  $\alpha_2^*$ .

## 2.4 Formulation adimensionnelle

L'adimensionnalisation du problème consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines valeurs caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres et faciliter la comparaison entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux.

Pour mettre les équations précédentes sous une forme adimensionnelle, nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) = (x' / l^*, y' / l^*) \\ (u, v) = (u' / u^*, v' / u^*) \\ P = P' / P^* \\ t = t' / t^* \\ T = \frac{(T' - T_o)}{\Delta T'} \\ S = \frac{(N - N_o)}{\Delta N'} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

où  $l^*, P^*, t^*$  et  $u^*$  sont la longueur, la pression, le temps et la vitesse caractéristique, respectivement. Ces grandeurs sont définies comme suit :

$$\begin{cases} l^* = H' \\ P^* = \rho_o (\alpha_f / H')^2 \\ t^* = \alpha_f / H'^2 \\ u^* = \alpha_f / H' \end{cases} \quad (2.17)$$

En plus,  $\Delta T'$  et  $\Delta N'$  sont des différences caractéristiques de température et de concentration, respectivement. La différence caractéristique de température  $\Delta T' = q'H' / k_f$  est choisie de façon à être représentative de la différence de température causée par la conduction pure. La différence caractéristique de concentration pour la convection massique est donnée par  $\Delta N' = j'H' / D$  pour le cas de la double diffusion, et  $\Delta N' = N_o(1 - N_o)\Delta T'D' / D$  pour le cas de la convection massique causée par l'effet Soret.

#### 2.4.1 Équations de base adimensionnelles

En introduisant les variables adimensionnelles (2.16) dans les équations (2.4), (2.5) et (2.7), les équations de conservation adimensionnelles s'obtiennent comme suit :

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} - J(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \text{Pr} \nabla^4 \Psi - \text{Pr} Ra \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \phi \frac{\partial S}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - J(\Psi, T) = \nabla^2 T \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - J(\Psi, S) = \frac{1}{Le} (\nabla^2 S - a \nabla^2 T) \quad (2.20)$$

où  $\Psi$  est la fonction de courant définie par  $u = \partial\Psi / \partial y$  et  $v = -\partial\Psi / \partial x$  de telle façon que l'équation de continuité est automatiquement satisfaite.  $J$  est l'opérateur Jacobien défini par  $J(f, g) = f_x g_y - f_y g_x$ .

Dans les équations ci-dessus nous notons la présence de cinq paramètres caractéristiques à savoir  $Pr = \nu / \alpha_f$ , le nombre de Prandtl,  $Ra = g\beta'_T \Delta T' H'^3 / \alpha_f \nu$  le nombre de Rayleigh;  $\phi = \beta_N \Delta N / \beta'_T \Delta T'$  est le rapport des forces de volumes massique et thermique,  $Le = \alpha_f / D$  est le nombre de Lewis, et le paramètre  $a$  est un nombre entier qui peut être 0 ou 1, selon la définition du problème.

#### 2.4.2 Conditions aux frontières adimensionnelles

Les conditions aux frontières hydrodynamiques, thermiques et massiques imposées au système sont données par les équations (2.7) à (2.12). Les conditions aux frontières hydrodynamiques données par les équations (2.7) et (2.8) sous la forme adimensionnelle et en termes de la fonction de courant s'écrivent comme suit :

$$x = \pm A/2 \quad \partial\Psi / \partial x = \partial\Psi / \partial y = \Psi = 0 \quad (2.21)$$

$$y = \pm 1/2 \quad \partial\Psi / \partial x = \Psi = 0 \quad (2.22)$$

La forme adimensionnelle des conditions aux frontières thermiques des équations (2.9) et (2.10) est :

$$x = \pm A/2 \quad \partial T / \partial x = 0 \quad (2.23)$$

$$y = \pm 1/2 \quad \partial T / \partial y = -1 \quad (2.24)$$

Les conditions aux frontières massiques données par les équations (2.11) et (2.12) sous la forme adimensionnelle s'écrivent comme suit :

$$x = \pm A/2 \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

$$y = \pm 1/2 \quad \frac{\partial S}{\partial y} = (a-1) + a \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.26)$$

### 2.4.3 Condition de Beaver-Joseph adimensionnelle

Cette condition exprime la relation essentielle pour obtenir la fonction de courant dans la situation de glissement horizontal sur les interfaces du fluide avec les couches poreuses minces en bas et en haut. Les conditions Beavers-Joseph données par les équations (2.14) et (2.15) sous la forme adimensionnelle et en terme de fonction de courant s'écrivent comme :

$$y = -1/2 \quad \frac{d^2 \Psi}{dy^2} = \frac{1}{Da_1^*} \frac{d\Psi}{dy} \quad (2.27)$$

$$y = 1/2 \quad \frac{d^2 \Psi}{dy^2} = \frac{1}{Da_2^*} \frac{d\Psi}{dy} \quad (2.28)$$

À partir des équations ci-dessus, nous remarquons l'apparition des nombres de Darcy modifiés  $Da_1^* = \sqrt{Da} / \alpha_1^*$  et  $Da_2^* = \sqrt{Da} / \alpha_2^*$ , qui contrôlent les effets du nombre de Darcy,  $Da$ , caractérisant le milieu poreux et le paramètre de glissement  $\alpha^*$ . Le paramètre de glissement  $\alpha^*$  est une variable physique qui dépend de la structure et de la porosité de la couche poreuse à l'interface avec le fluide. Selon (*Beavers et Joseph (1967)*)  $\alpha^*$  peut varier entre 0.1 et 4, selon les matériaux. Par conséquent, dans la présente étude, l'effet de  $\alpha^*$  a été examiné pour un domaine compris entre  $0 \leq \alpha^* \leq 10$ . En outre, afin de ne pas violer le modèle de Darcy, les valeurs du nombre de Darcy ont été limitées à  $10^{-8} \leq Da \leq 10^{-4}$ . Avec ces valeurs, l'éventail de la variation du nombre de Darcy modifié s'étend de presque zéro à l'infini.

#### 2.4.4 Transfert de chaleur et transfert de masse

On s'intéresse dans la présente étude au calcul des taux de transfert de chaleur et de masse. Ces taux sont exprimés par les nombres de Nusselt et de Sherwood. Dans notre problème, la cavité est soumise à des flux de chaleur et masse verticaux par unité de surface; on définit des nombres de Nusselt et de Sherwood verticaux, évalués à  $x = 0$  comme suit:

$$Nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{1}{T_{(0,-1/2)} - T_{(0,+1/2)}} \quad (2.29)$$

$$Sh = \frac{1}{\Delta S} = \frac{1}{S_{(0,-1/2)} - S_{(0,+1/2)}} \quad (2.30)$$

## CHAPITRE III

### SOLUTION ANALYTIQUE

#### 3.1 Introduction

Dans cette section le développement d'une solution analytique basée sur l'approximation d'un écoulement parallèle, est présenté. Dans le chapitre précédent le système d'équations régissant les phénomènes d'écoulement, de transfert thermique et massique a été établi. Comme discuté dans le deuxième chapitre, ce système est composé d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, et la résolution d'un tel système de manière analytique demeure extrêmement compliquée, voir impossible. Un modèle simplifié peut être néanmoins obtenu pour le cas limite d'une cavité de grande extension ( $A \gg 1$ ). Ce modèle est une excellente approximation pour les champs de vitesse, de température et de concentration de l'écoulement résultant. La solution permet également d'obtenir une description quantitative des transferts de chaleur et de masse impliqués.

L'approximation de l'écoulement parallèle a été utilisée dans le passé par *Cormack et al. (1974)* et par *Bejan et Tien (1978)* pour l'étude de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire horizontale chauffée par les côtés. En utilisant cette approximation, il a été montré que l'écoulement à l'intérieur de la cavité se décompose en trois régions, à savoir : un écoulement parallèle au centre de la cavité, et un écoulement tournant à  $180^\circ$  aux deux extrémités de la couche.

Une approche similaire a été utilisée successivement par *Trevisan et Bejan (1985)*, *Alavyoon (1993)* et *Alavyoon et al. (1994)* qui ont considéré l'approximation de l'écoulement parallèle combiné à l'approche intégrale pour l'étude des problèmes de double diffusion au sein d'une cavité verticale chauffée et salée par des flux de chaleur et de masse constants. *Sen et al. (1987)*, *Vasseur et Robillard (1987)*, et *Mamou et al. (1995)* ont aussi utilisé cette méthode pour l'étude de la convection naturelle dans des couches fluides ou poreuses soumises à différentes conditions aux frontières. Récemment, *Ouriemi et al. (2005)* ont étudié la convection naturelle d'un mélange binaire confiné dans une cavité longue légèrement inclinée, alors que *Lamsaadi et al. (2008)* ont considéré la convection naturelle dans une cavité horizontale soumise aux flux de chaleur verticaux et horizontaux et remplie de fluides non-newtoniens.

Dans ce chapitre, l'approximation de l'écoulement parallèle est appliquée au cas d'une cavité à grande extension, soumise à des flux de chaleur et de masse sur les parois horizontales. Afin de valider cette solution, un code numérique est développé dans le chapitre suivant.

### 3.2 Concept de l'écoulement parallèle

Le concept de l'écoulement parallèle consiste à supposer que dans une cavité de grande extension ( $A \gg 1$ ), l'écoulement engendré peut être décomposé en trois zones. Ces dernières consistent en deux régions à l'extrémité de la cavité dans lesquelles l'écoulement tourne à  $180^\circ$  et la région centrale de la couche dans laquelle l'écoulement est parallèle

relativement aux longues parois de la cavité. Pour le cas de convection thermique et massique dans une couche fluide confinée par les parois poreuses, ceci permet de négliger la composante de la vitesse perpendiculaire aux parois horizontales, de telle sorte que :

$$v = 0 \quad (3.1)$$

$$u = u(y) \quad (3.2)$$

Les profils de la température et de la concentration sont alors donnés par la somme d'un terme définissant une variation longitudinale linéaire et d'un autre terme donnant la distribution transversale :

$$\Psi(x, y) = \Psi(y) \quad (3.3)$$

$$S(x, y) = C_s x + \theta_s(y) \quad (3.4)$$

$$T(x, y) = C_T x + \theta_T(y) \quad (3.5)$$

où  $C_T$  et  $C_s$  représentent des constantes inconnues à déterminer. Ces dernières expriment les gradients de température et de concentration adimensionnels dans la direction  $x$ .  $\theta_T$  et  $\theta_s$  sont respectivement les fonctions de température et de concentrations adimensionnelles.

### 3.3 Équations de base simplifiées

En utilisant les approximations précédentes les équations de base (2.18)-(2.20) pour la convection dans le fluide binaire confiné par les parois poreuses deviennent:

$$\frac{d^4\Psi}{dy^4} = Ra_T(C_T + \varphi C_S) \quad (3.6)$$

$$\frac{d\Psi}{dy} C_T = \frac{d^2\theta_T}{dy^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{d\Psi}{dy} C_S = \frac{1}{Le} \left[ \frac{d^2\theta_S}{dy^2} - a \frac{d^2\theta_T}{dy^2} \right] \quad (3.8)$$

### 3.4 Solution générale de la fonction de courant et de la température

La solution des équations (3.6)-(3.8), satisfaisant les conditions aux limites hydrodynamiques (2.22), thermiques (2.24), et massiques (2.26) combinées avec les conditions de Beavers-Joseph (2.27) et (2.28) est donnée par:

$$\Psi = \Psi_0(4y^2 - 1)(4y^2 - 2L_1 - 8L_2y + 1) \quad (3.9)$$

$$\theta_T = \frac{\Psi_0 C_T}{15} y (48y^4 - 10L_1(4y^2 - 3) - 60L_2(2y^3 - y) - 15) - y \quad (3.10)$$

$$\theta_S = \frac{\Psi_0(C_S Le + a C_T)}{15} y (48y^4 - 10L_1(4y^2 - 3) - 60L_2(2y^3 - y) - 15) - y \quad (3.11)$$

où

$$\Psi_0 = 15Ra_T^0(C_T + \phi C_S)/8 \quad (3.12)$$

Le nombre de Rayleigh  $Ra_T$  intervient par le biais de la définition  $Ra_T^0 = Ra_T / Ra_o^{\sup}$  où  $Ra_o^{\sup} = 720$ . La contribution des deux nombres de Darcy modifiés se manifeste dans les termes de  $L_1$  et  $L_2$  définis comme suit:

$$L_1 = (36Da_1^*Da_2^* + 6(Da_1^* + Da_2^*) + 1)/(12Da_1^*Da_2^* + 4(Da_1^* + Da_2^*) + 1) \quad (3.13)$$

$$L_2 = -(Da_1^* - Da_2^*)/(12Da_1^*Da_2^* + 4(Da_1^* + Da_2^*) + 1) \quad (3.14)$$

L'effet de l'écoulement qui tourne dans les régions aux limites de la cavité est obtenu en faisant un bilan global de l'énergie et de la concentration dans un volume de contrôle appliqué aux extrémités de la cavité (voir *Mamou et al. (2001)* par exemple).

### 3.5 Évaluation des constantes $C_T$ , $C_S$ et $\Psi_0$

Les coefficients  $C_T$  et  $C_S$  sont définis comme étant des gradients de température et de concentration horizontaux. Ils dépendent du nombre de Rayleigh  $Ra_T$ , des nombres de Darcy modifiés  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$ , et des conditions aux frontières thermiques et massiques. Pour déterminer ces coefficients, on intègre les équations (3.10) et (3.11) sur le volume de contrôle (voir appendices A et B), tout en tenant compte des conditions aux frontières.

### 3.5.1 Évaluation de $C_T$

L'intégration de l'équation d'énergie sur le volume de contrôle mène à :

$$\int \nabla \cdot \nabla \theta_T dv = \int \nabla \cdot \vec{V} \theta_T dv \quad (3.15)$$

En utilisant le théorème de Gauss, l'intégrale de volume (3.15) est convertie en une intégrale de surface  $\Omega$ , à savoir:

$$\int_{\Omega} \nabla \theta_T ds = \int_{\Omega} \theta_T \vec{V} ds \quad (3.16)$$

En faisant le bilan (voir annexe A) on peut montrer que:

$$C_T = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{d\Psi}{dy} \theta_T dy \quad (3.17)$$

En substituant les équations (3.9) et (3.10) dans l'équation (3.15) on obtient alors:

$$C_T = \frac{B_2 \Psi_0}{1 + B_1 \Psi_0^2} \quad (3.18)$$

où:

$$B_1 = \frac{4}{45} \left( 24L_1^2 - \frac{192}{7} L_1 + \frac{96}{7} L_2^2 + 8 \right) \quad (3.19)$$

et

$$B_2 = 4(L_1/3 - 1/5) \quad (3.20)$$

### 3.5.2 Évaluation de $C_s$

En suivant la même démarche qu'à la section 3.5.1, et en considérant l'appendice B, on obtient :

$$C_s = \frac{aC_T(Le+1) + (1-a)B_2Le\Psi_0}{1 + B_1Le^2\Psi_0^2} \quad (3.21)$$

Selon les équations (3.18) et (3.21) les constantes  $C_T$  et  $C_s$  dépendent de la constante de fonction de courant  $\Psi_0$  qui est définie par l'équation (3.12) et s'évaluant en fonction de  $C_T, C_s, Ra_T$  et  $\varphi$ .

### 3.5.3 Évaluation de $\Psi_0$

Les équations (3.12), (3.18) et (3.21) forment un système de trois équations et trois inconnues à savoir  $\Psi_0, C_T$  et  $C_s$ . La substitution des expressions de  $C_T$  et  $C_s$  dans l'expression de  $\Psi_0$  nous donne l'équation suivante, de la forme d'un polynôme de cinquième degré:

$$\Psi_0 \left[ (B_1^4 Le^4) \Psi_0^4 - (B_1^2 Le^2) d_1 \Psi_0^2 - d_2/4 \right] = 0 \quad (3.22)$$

où:

$$d_1 = B_1 \left[ \frac{15}{8} Ra_T^0 B_2 (Le^2 + \varphi Le(1-a)) - Le^2 - 1 \right] \quad (3.23)$$

$$d_2 = 4B_1^2 Le^2 \left[ \frac{15}{8} Ra_T^0 B_2 (1 + \varphi(a + Le)) - 1 \right] \quad (3.24)$$

La solution de l'équation (3.22) est trouvée analytiquement et peut être exprimée comme ceci :

$$\Psi_0 = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2B_1 Le} \left( d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2} \right)^{1/2}, 0 \right\} \quad (3.25)$$

### 3.6 Rayleigh supercritique et Rayleigh souscritique

L'équation (3.25) indique que dans le cas général le problème admet cinq solutions différentes. Dans cette expression, la solution  $\Psi_0 = 0$  représente la conduction pure à l'état de repos et les quatre autres solutions correspondent aux solutions convectives. Dans l'équation (3.24), le signe  $(\pm)$  à l'extérieur des parenthèses, indique que le sens de rotation de l'écoulement peut être horaire ou antihoraire. De plus, le signe  $(\pm)$  à l'intérieur des parenthèses implique qu'il existe deux solutions convectives possibles de différentes amplitudes. Comme discuté dans le chapitre suivant, nous avons trouvé numériquement que la solution avec le signe  $+$  était stable (pouvant être entretenue), alors que celle avec le signe  $-$  était instable. D'un point de vue mathématique, une solution convective existe seulement si les expressions dans les racines sont simultanément positives, dans le cas contraire, la seule solution possible est celle correspondant à l'état de repos du fluide ( $\Psi_0 = 0$ ).

En étudiant le signe des expressions  $d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + d_2}$  et  $d_1^2 + d_2$ , on constate qu'il existe deux types de bifurcations :

Le premier est une bifurcation supercritique dont le seuil de convection se produit avec une amplitude nulle ( $\Psi_0 = 0$ ). Le nombre de Rayleigh supercritique  $Ra_{\tau c}^{\text{sup}}$ , pour le début de mouvement de l'état de repos est obtenu, quand les conditions  $d_1 < 0$  et  $d_2 = 0$  sont satisfaites:

$$Ra_{\tau c}^{\text{sup}} = \frac{R_0}{(1 + \varphi(a + Le))} \quad (3.26)$$

où

$$R_0 = 8Ra_0^{\text{sup}} / 15B_2 \quad (3.27)$$

La seconde bifurcation est une bifurcation souscritique pour laquelle le seuil de convection se produit avec une amplitude finie ( $\Psi_0 \neq 0$ ). Le nombre de Rayleigh souscritique, qui marque le seuil de la convection, est déterminé pour les conditions  $d_1^2 + d_2 = 0$  et  $d_1 > 0$  (voir **Mamou et al. (2001)**). On obtient alors:

$$Ra_{\tau c}^{\text{sous}} = \frac{R_0(1 + Le)}{Le[1 + \varphi(1 - a)]^2} \times \left[ (Le - 1)(Le - \varphi) - a\varphi(Le + 1) + 2\sqrt{\varphi Le(Le + a - 1)(a\varphi - Le + 1)} \right] \quad (3.28)$$

### 3.7 Les taux de transfert de chaleur et transfert de masse

Le taux de transfert thermique (nombre de Nusselt) est obtenu en substituant les valeurs de température (en bas et en haut de la cavité) selon l'équation (3.10) dans l'équation (2.29). Le nombre de Nusselt prend la forme générale suivante:

$$Nu = \frac{1}{1 - B_2 \Psi_0 C_T} \quad (3.29)$$

La valeur du taux de transfert massique peut aussi être trouvée en substituant les valeurs de la concentration (en bas et en haut de la cavité) selon l'équation (3.11) dans l'équation (2.30) :

$$Sh = \frac{1}{1 - B_2 \Psi_0 (C_S Le + a C_T)} \quad (3.30)$$

### 3.8 Vérification de la solution analytique

La solution analytique déjà mentionnée peut être vérifiée grâce aux cas particuliers obtenus lors des études précédentes.

#### 3.8.1 La couche fluide confinée par deux parois solides horizontales

Pour cette situation, la condition relative est  $Da_1^* \rightarrow 0$  et  $Da_2^* \rightarrow 0$ . On obtient tout d'abord les valeurs de  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 0$ ,  $B_1 = 128/315$ ,  $B_2 = 8/15$  et  $R_0 = 720$ .

Ensuite, la substitution de ces constantes dans les équations (3.9)-(3.11) résulte en la solution obtenue auparavant par *Ouriemi et al. (2005)* :

$$\Psi = \Psi_0(4y^2 - 1)^2 \quad (3.31)$$

$$\theta_T = \frac{\Psi_0 C_T}{15} y(48y^4 - 40y^2 + 15) - y \quad (3.32)$$

$$\theta_S = \frac{\Psi_0(C_S Le + aC_T)}{15} y(48y^4 - 40y^2 + 15) - y \quad (3.33)$$

où  $\Psi_0$  est donné par l'équation (3.25). Les constantes  $C_T$  et  $C_S$  peuvent être évaluées en substituant les valeurs de  $B_1$  et  $B_2$  dans les équations (3.18) et (3.21) comme suit:

$$C_T = \frac{8\Psi_0}{15 \left(1 + \frac{128}{315}\Psi_0\right)} \quad (3.34)$$

$$C_S = \frac{aC_T(Le+1) + (1-a)\frac{8}{15}Le\Psi_0}{1 + \frac{128}{315}Le^2\Psi_0^2} \quad (3.35)$$

### 3.8.2 La couche fluide limitée par une paroi solide et une surface libre

Cette condition est indiquée avec  $Da_1^* \rightarrow 0$  et  $Da_2^* \rightarrow \infty$  (ou bien avec  $Da_1^* \rightarrow \infty$  et  $Da_2^* \rightarrow 0$ ). Les constantes résultante sont alors données par  $L_1 = 3/2$ ,  $L_2 = 1/4$ ,  $B_1 = 608/315$ ,  $B_2 = 6/5$  et  $R_0 = 320$ . Cette solution est un cas particulier de problème étudié par *Mahidjiba et al. (2006)*, qui consiste en la convection naturelle dans une couche fluide binaire causée par des forces de cisaillement appliquées sur la surface de la couche

fluide et de l'effet Soret. La solution générale de fonction de courant, du profil de température et du profil de concentration prend alors les formes suivantes :

$$\Psi = 2\Psi_0(4y^2 - 1)(2y + 1)(y - 1) \quad (3.36)$$

$$\theta_T = \frac{\Psi_0 C_T}{15} y (48y^4 - 15(y + 2)(2y^2 - 1)) - y \quad (3.37)$$

$$\theta_s = \frac{\Psi_0 (C_s Le + a C_T)}{15} y (48y^4 - 15(y + 2)(2y^2 - 1)) - y \quad (3.38)$$

En suivant la même méthode que celle de la section 3.8.1, la valeur de  $\Psi_0$  et celles des constantes  $C_T$  et  $C_s$  peuvent être évaluées:

$$C_T = \frac{6\Psi_0}{5 \left(1 + \frac{608}{315}\Psi_0\right)} \quad (3.39)$$

$$C_s = \frac{a C_T (Le + 1) + (1 - a) \frac{6}{5} Le \Psi_0}{1 + \frac{608}{315} Le^2 \Psi_0^2} \quad (3.40)$$

### 3.8.3 La couche fluide limitée par deux surfaces libres

Cette situation se produit quand  $Da_1^* \rightarrow \infty$  et  $Da_2^* \rightarrow \infty$ . Cela conduit à  $L_1 = 3$ ,  $L_2 = 0$ ,  $B_1 = 3968/315$ ,  $B_2 = 16/5$  et  $R_0 = 120$ . Pour cette situation, qui n'est pas encore étudiée, nous avons obtenu la solution analytique suivante :

$$\Psi = \Psi_0(4y^2 - 1)(4y^2 - 5) \quad (3.41)$$

$$\theta_T = \frac{\Psi_0 C_T}{15} y (48y^4 - 120y^2 + 75) - y \quad (3.42)$$

$$\theta_s = \frac{\Psi_0 (C_s Le + a C_T)}{15} y (48y^4 - 120y^2 + 75) - y \quad (3.43)$$

Dans tous les cas, le Rayleigh supercritique et le Rayleigh souscritique peuvent être obtenus respectivement par les équations (3.26) et (3.28). Les taux de transfert thermique et de transfert massique peuvent aussi être évalués selon les équations (3.29) et (3.30).

## CHAPITRE IV

### SOLUTION NUMÉRIQUE

#### 4.1 Introduction

L'approche utilisée dans cette thèse, pour résoudre numériquement le présent problème, est basée sur la technique des volumes de contrôle. Cette méthode qui consiste à transformer un problème exact et continu en un problème approché et discret a été largement utilisée, dans le passé, pour résoudre les problèmes de convection naturelle dans une géométrie simple. Sa puissance et sa grande simplicité de mise en œuvre ont fait qu'elle est à l'origine de la majorité des codes de calcul commerciaux. La méthode des volumes de contrôle consiste, tout d'abord, à découper le domaine physique par un maillage (discrétisation) en un nombre fini de petits volumes limités par des nœuds, identifiés chacun par un couple d'indices  $(i, j)$  (maille), qui ne se superposent pas et remplissent tout le domaine étudié sans laisser d'interstices. Ainsi, on calcule les valeurs de la température, de la concentration et de la fonction de courant et sur chaque nœud, en résolvant les équations gouvernantes (2.18) à (2.20), établies au chapitre II.

Le choix du maillage doit satisfaire l'hypothèse que l'information aux nœuds doit être suffisante pour décrire la solution dans le domaine entier. La deuxième étape est la discrétisation du problème exact sur ce maillage, qui conduit à un problème moins difficile, dit problème approché du problème exact. Le principe de la méthode des volumes finis

consiste à intégrer tous les termes de l'équation à résoudre dans chacun des éléments du volume entier, chacun de ces éléments constituant un volume de contrôle individuel.

Dans cette étude un maillage uniforme décalé a été utilisé pour obtenir la solution numérique (figure 4.1) afin d'écarter les solutions non physiques. Autrement dit, les composantes de la vitesse sont calculées aux interfaces des volumes de contrôle, alors que la pression, la température et la concentration sont évaluées au centre des volumes. Les équations discrétisées ont été dérivées en intégrant d'abord dans chaque volume de contrôle et ensuite en utilisant les différences centrées pour calculer le flux et les différences de toutes les variables pour la discrétisation dans le temps.

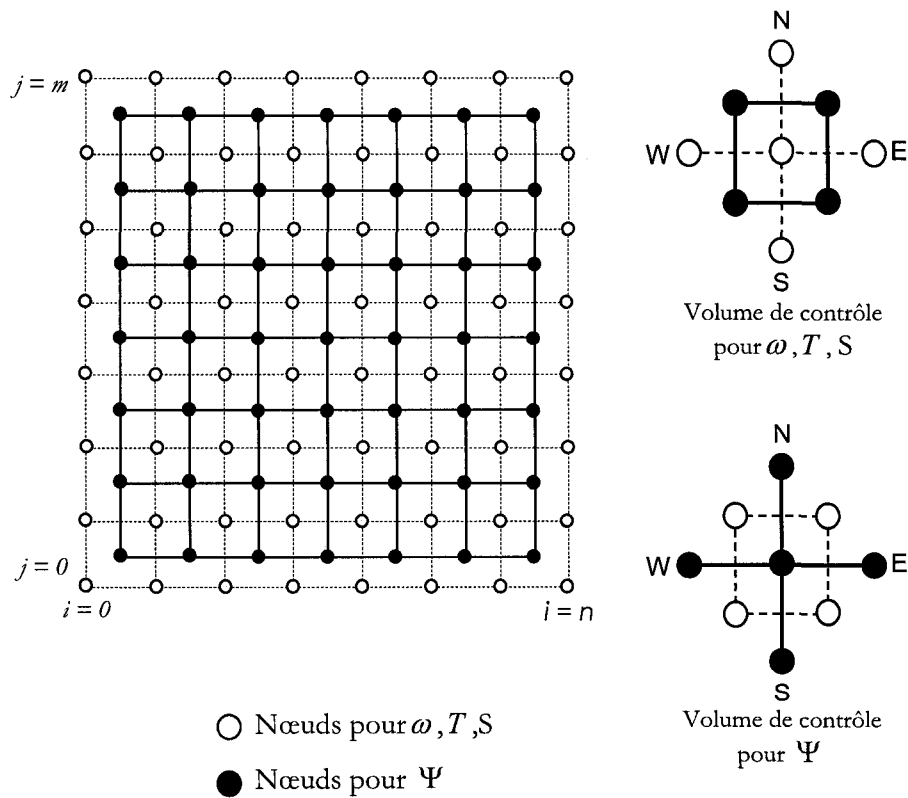


**Figure 4.1 :** Maillage et distribution des nœuds sur le volume de contrôle.

## 4.2 Discrétisation des équations

À l'intérieur du domaine discrétisé, les dérivées partielles de premier et deuxième ordre sont approchées selon un schéma aux différences finies centrées. À un nœud  $(i,j)$  les dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  sont données par :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \quad (4.4)$$

où  $f$  désigne :  $\omega, \psi, T$  ou  $S$ .

Sur le pourtour du domaine, les dérivées partielles qui expriment les conditions aux frontières sont discrétisées avec un schéma aux différences finies décentré en amont (forward) ou en aval (backward), avec un degré de précision de deuxième ordre, à savoir :  
en amont :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{4f_{i+1,j}^{n+1} + f_{i+2,j}^{n+1} - 3f_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{4f_{i,j+1}^{n+1} + f_{i,j+2}^{n+1} - 3f_{i,j}^{n+1}}{2\Delta y} \quad (4.6)$$

et en aval :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i-2,j}^{n+1} - 4f_{i-1,j}^{n+1} + 3f_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i,j-2}^{n+1} - 4f_{i,j-1}^{n+1} + 3f_{i,j}^{n+1}}{2\Delta y} \quad (4.8)$$

La dérivée dans le temps est approximée par une discrétisation implicite du premier ordre, c'est-à-dire :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (4.9)$$

La résolution des équations discrétisées est basée sur la technique ADI (méthode implicite aux directions alternées) à chaque pas de temps. Cette méthode divise un pas de temps en deux : dans le premier demi pas, le système est résolu implicitement dans la direction  $x$  et explicitement dans la direction  $y$ . Dans le second demi pas, la procédure est inversée. Pour obtenir plus de détails sur la procédure numérique utilisée ici, on peut se référer à la thèse de **Mamou (1993)**.

### 4.3 Algorithme de calcul

Pour chaque pas de temps, la procédure de calcul suivante est utilisée pour calculer les champs de vitesse et de concentration:

1. Initialiser les champs de la température, de la concentration, de la vorticité et de la fonction de courant par l'utilisation de la solution au temps précédent.
2. Calculer  $u$  et  $v$  à partir de la fonction de courant.
3. Calculer la vorticité utilisant  $u$ ,  $v$  et l'équation de vorticité.
4. Calculer la fonction de courant grâce à la vorticité et à l'équation de fonction de courant.
5. Résoudre les équations de l'énergie et calculer le champ de température avec la méthode ADI.
6. Résoudre les équations de concentration et calculer le champ de concentration.
7. Retourner à l'étape 2 et répéter les opérations 2-6 jusqu'à obtenir la convergence.
8. Passer à l'étape de temps suivante et retourner à l'étape 2. Répéter les calculs jusqu'à l'obtention de la solution permanente ou de la solution transitoire établie.

#### 4.4 Critère de convergence

Le régime permanent est atteint lorsque le critère de convergence suivant est satisfait pour chaque quantité et à tous les points du maillage, c'est-à-dire lorsque la différence des valeurs obtenues est suffisamment petite pour que son calcul n'introduise pas de changement appréciable :

$$\varepsilon = \frac{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^{k+1} - f_{i,j}^k|}{\sum_i \sum_j |f_{i,j}^k|} \leq 10^{-6} \quad (4.10)$$

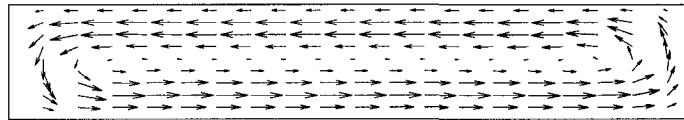
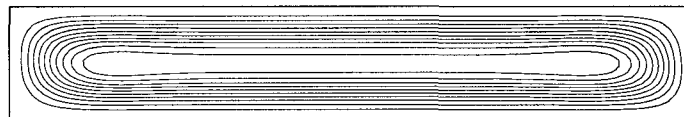
où  $f$  est l'une des variables physiques  $u, v, T$  et  $S$  et  $k$  représente la  $k^e$  itération.

#### 4.5 Effet du maillage

Le tableau 4.1 montre l'influence du maillage sur la précision des résultats obtenus pour les valeurs de la fonction de courant maximum, du nombre de Nusselt et du nombre de Sherwood. On constate que l'influence du maillage devient négligeable à partir d'un maillage de  $81 \times 21$  pour une cavité allongée selon un rapport de forme  $A=6$ .

**Tableau 4.1 : Effet du maillage**

| $\varphi = 0.2, Le = 2, Ra_T = 2000, A = 6, a = 0, Da_1^* = Da_2^* = 0$ |                |                |                |                |                 |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| $n \times 21$                                                           | $21 \times 21$ | $41 \times 21$ | $61 \times 21$ | $81 \times 21$ | $101 \times 21$ |
| $\Psi_{\max}$                                                           | 2.387          | 2.289          | 2.395          | 2.397          | 2.397           |
| $Nu$                                                                    | 1.912          | 1.914          | 1.914          | 1.914          | 1.914           |
| $Sh$                                                                    | 2.684          | 2.683          | 2.683          | 2.683          | 2.683           |

a)  $\vec{V}$ b)  $\Psi$ **Figure 4.2**

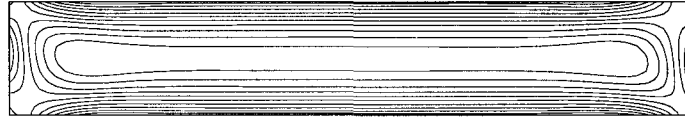
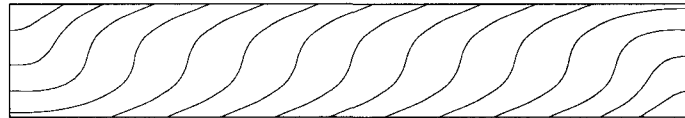
c)  $\omega$ d)  $T$ e)  $S$ 

**Figure 4.2 :** Les résultats de solution numérique avec le maillage  $81 \times 21$ , pour le cas

$$\varphi = 0.2, Le = 2, Ra_T = 2000, A = 6, a = 0, Da_1^* = Da_2^* = 0$$

#### 4.6 Validation du code

Le programme que nous avons élaboré pour résoudre les équations a été validé dans le passé par *Alloui et al. (2007)* en prenant comme références certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats de *Mamou et al. (2001)*, obtenus dans le cas d'une cavité rectangulaire contenant un fluide binaire, ont été utilisés comme référence pour tester notre code numérique concernant le milieu fluide. La comparaison des champs de fonction de courant, de température et de concentration, ainsi que le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood présente une bonne concordance.

**Tableau 4.2 :** Comparaison de nos résultats avec *Mamou et al. (2001)* pour  $Ra_T = 4 \times 10^4$

| $\varphi = -\sqrt{10}/4, Le = \sqrt{10}, Ra_T = 4 \times 10^4, A = 1.5, a = 0, Da_1^* = Da_2^* = 0$ |                     |                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|----------------|
|                                                                                                     | Mamou et al. (2001) | Présente étude |
| $\Psi_{\max}$                                                                                       | 10.126              | 10.213         |
| $\Psi_{\min}$                                                                                       | -10.126             | -10.213        |
| $Nu_m$                                                                                              | 2.546               | 2.551          |
| $Sh_m$                                                                                              | 3.741               | 3.742          |

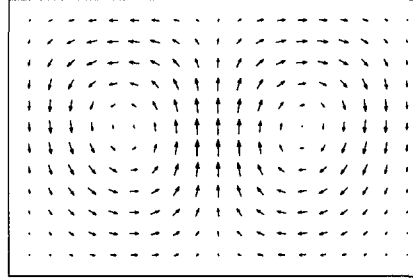
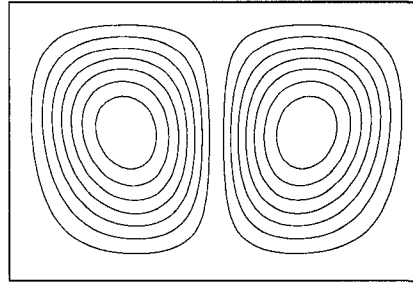
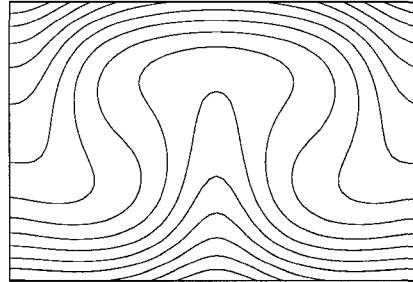
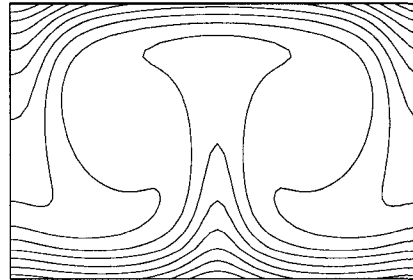
a)  $\vec{V}$ b)  $\Psi$ c)  $T$ d)  $S$ 

**Figure 4.3 :** Comparaison de nos résultats avec ceux de *Mamou et al. (2001)*, pour le cas

$$\varphi = -\sqrt{10}/4, Le = \sqrt{10}, Ra_T = 4 \times 10^4, A = 1.5, a = 0, Da_1^* = Da_2^* = 0$$

## CHAPITRE V

### ANALYSE DE STABILITÉ LINÉAIRE

#### 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité linéaire du problème défini au chapitre II. Ce problème est résolu numériquement par la méthode numérique expliquée au chapitre précédent. Dans ce chapitre, on s'intéresse principalement à la prédiction des nombres de Rayleigh critiques correspondant au seuil de la convection et à la nature des mouvements convectifs associés. Les couches infinie et confinée sont considérées dans ce chapitre pour déterminer le critère de l'apparition de la convection oscillatoire.

Dans le cas d'une couche horizontale soumise à diverses conditions aux limites, plusieurs auteurs comme *Nield (1967)*, *Taunton et al. (1972)*, *Huppert et Moore (1976)*, *da Costa et al. (1981)*, *Platten et Logros (1984)*, *Poulikakos (1986)*, *Nield et Bejan (1992)*, *Mamou et al. (1995)*; *Mamou et al. (2001)* et *Bahloul et al. (2003)*; *Prud'homme et Hung Nguyen (2002)* ont montré l'existence de nombres de Rayleigh supercritiques caractérisant le seuil de la convection. Le régime de la convection surstable et ses conditions d'existence a été étudié par ces auteurs.

*Nield (1983)* a utilisé la condition de Beavers et Joseph à l'interface du milieu fluide et milieu poreux afin d'étudier la stabilité linéaire thermique d'un système composé de deux couches (fluide et poreuse) superposées. Ultérieurement, la majorité des études de la

stabilité linéaire ont été faites en utilisant la même condition aux interfaces fluide-poreux que celle de *Chen et Chen (1988)*.

## 5.2 Théorie de la stabilité linéaire

Pour déterminer le nombre de Rayleigh critique ainsi que la structure de l'écoulement au seuil de la convection, nous utilisons l'approche de la stabilité linéaire. Pour ce faire, on perturbe hydrodynamiquement l'état de repos du système et on étudie l'évolution de cette perturbation dans le temps. Nous considérons que les mêmes équations de base régissant les écoulements convectifs prédits par l'approximation de l'écoulement parallèles (équations (3.6) - (3.8)) sont valables pour notre analyse de stabilité linéaire. On ne s'attend pas à ce que cet écoulement reste stable, indépendamment de la gamme des paramètres régissants. Autrement dit, lorsque l'intensité de mouvement de l'écoulement est augmentée au-dessus d'une valeur critique, le régime de l'écoulement devrait être instable. Au tout début de l'instabilité, l'écoulement global peut être considéré comme une superposition des écoulements de base  $[\Psi(x, y) \approx \Psi(y), T(x, y) \approx C_T x + \theta_T(y)]$  et  $S(x, y) \approx C_S x + \theta_S(y)]$  et une perturbation infime. Ainsi, nous avons:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\psi}(t, x, y) &= \tilde{\psi}(y)e^{pt+ikx} \\ \hat{\theta}_T(t, x, y) &= \tilde{\theta}_T(y)e^{pt+ikx} \\ \hat{\theta}_S(t, x, y) &= \tilde{\theta}_S(y)e^{pt+ikx} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

où  $k$  est le nombre d'onde réel et  $p = \sigma + i\omega$  est un paramètre complexe exprimant à la fois le taux de croissance de l'amplitude de la perturbation  $\sigma$ , et la fréquence de la perturbation  $\omega$ .

Au début de mouvement, la perturbation est très petite. Par conséquent, les termes d'ordre supérieur à l'unité peuvent être négligés. En substituant les nouveaux paramètres de flux de base et de perturbation (5.1), dans les équations de base (2.) - (2.) et en négligeant les termes quadratiques en perturbations, on obtient le système d'équations des perturbations:

$$\text{Pr}(D^4 + k^4)\tilde{\psi} - ikD^3\psi\tilde{\psi} + ik(D^2 - k^2)D\psi\tilde{\psi} - ik\text{Pr}(Ra_T\tilde{\theta}_T + \frac{Ra_s}{Le}\tilde{\theta}_s)D\tilde{\psi} = p(D^2 - k^2)\tilde{\psi} \quad (5.2)$$

$$(D^2 - k^2)\tilde{\theta}_T - ikD\psi\tilde{\theta}_T - C_T D\tilde{\psi} + ikD\theta_T\tilde{\psi} = p\theta_T \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{Le}(D^2 - k^2)(\tilde{\theta}_s - a\tilde{\theta}_T) - ikD\psi\tilde{\theta}_s - C_s D\tilde{\psi} + ikD\theta_s\tilde{\psi} = p\theta_s \quad (5.4)$$

où  $Ra_s = Ra_T\phi Le$  est le nombre de Rayleigh massique.

Les conditions aux limites correspondantes sont :

$$y = -1/2, \quad \tilde{\psi} = 0; \quad D^2\tilde{\psi} = (1/Da_1^*)D\tilde{\psi}; \quad D\tilde{\theta}_T = D\tilde{\theta}_s = 0 \quad (5.6)$$

$$y = 1/2, \quad \tilde{\psi} = 0; \quad D^2\tilde{\psi} = (-1/Da_2^*)D\tilde{\psi}; \quad D\tilde{\theta}_T = D\tilde{\theta}_s = 0 \quad (5.7)$$

où  $D = d/dy$ .

Les équations de l'état perturbé (5.2) - (5.4) avec les conditions aux limites (5.6) et (5.7) peuvent être exprimées par une matrice de forme compacte:

$$L(k)\mathbf{Y} = pM(k)\mathbf{Y} \quad (5.8)$$

où  $\mathbf{Y} = [\tilde{\psi}, \tilde{\theta}_T, \tilde{\theta}_s]$  est le vecteur de la perturbation avec trois éléments et  $L(k)$  et  $M(k)$

sont deux opérateurs différentiels linéaires qui dépendent aux paramètres de contrôle  $Ra_T, Ra_S, Le, Pr, a, Da_1^*$  et  $Da_2^*$ .

Le système des équations (5.8) est résolu en utilisant la méthode de différences finies. Nous avons utilisé une approche centrale de cinq points comme régime de discrétisation spatiale dans le domaine entre  $y = -1/2$  et  $y = 1/2$ . Pour  $N$  points de calcul, le système discret obtenu donne lieu à  $3N$  valeurs propres qui peuvent être trouvées en utilisant une sous-routine IMSL. Les détails de la procédure numérique sont discutés en détail par **Bahloul et al. (2003)** et sont donc omis dans ce travail.

### 5.3 Validation d'analyse de stabilité linéaire

Dans le cas d'une cavité horizontale, chauffée et salée par le bas, il existe un nombre de Rayleigh critique caractérisant la naissance de la convection naturelle. Comme présenté dans la section 5.2, une analyse de stabilité linéaire indique que ce Rayleigh critique est une fonction du rapport de forme de la cavité  $A$ , du nombre de Lewis  $Le$  et du rapport de forces de volume  $\varphi$ .

La validation de l'analyse de stabilité linéaire est obtenue par comparaison avec le cas examiné par **Prud'homme et Hung Nguyen (2002)**. Il s'agit du cas particulier d'une cavité carrée remplie du liquide pur ( $Ra_S = 0$ ), et délimitée par des frontières solides ( $Da_1^* = Da_2^* = 0$ ). Les valeurs critiques obtenues par ces auteurs, et celles de notre étude sont présentées dans le tableau 5.1.

**Tableau 5.1 :** Comparaison de nos résultats avec ceux de *Prud'homme et Hung Nguyen (2002)*

|      | Prud'homme et Nguyen (2002) |       |            | La présente étude |       |            |
|------|-----------------------------|-------|------------|-------------------|-------|------------|
| Pr   | $Ra_{TC}^{Hopf}$            | $k_C$ | $\omega_C$ | $Ra_{TC}^{Hopf}$  | $k_C$ | $\omega_C$ |
| 50   | 64275.9                     | 4.626 | 183.9      | 64275.86          | 4.626 | 183.9      |
| 100  | 65125.8                     | 4.662 | 187.1      | 65125.75          | 4.662 | 187.1      |
| 500  | 65819.3                     | 4.691 | 189.8      | 65819.27          | 4.691 | 189.8      |
| 5000 | 65977.0                     | 4.697 | 190.4      | 65976.98          | 4.697 | 190.4      |

#### 5.4 Influence du nombre de Darcy modifié $Da^*$ sur la stabilité linéaire

Selon la théorie de l'écoulement parallèle, le mouvement se produit à partir de l'état de repos à un nombre de Rayleigh supercritique donné par  $Ra_{TC}^{sup}[1 + \varphi(a + Le)] = R_0$ . Les nombres de Darcy modifiés  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$  expriment la condition de glissement à l'interface fluide-poreux en haut et en bas de la cavité. La figure 5.1 illustre l'influence de  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$  sur le commencement du mouvement convectif. Dans cette figure les résultats de la théorie de l'écoulement parallèle sont montrés par des lignes solides, et ils présentent une bonne concordance avec la solution numérique de la théorie de stabilité linéaire pour le cas particulier  $\Psi = 0$  (c'est-à-dire l'état de repos). Ce résultat montre que quand  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$  sont suffisamment petits  $R_0 = 720$ . *Sparrow et al. (1964)* avaient obtenu le même résultat

dans le cas d'une couche de fluide délimitée par des parois rigides. De plus, la valeur  $R_0 = 120$ , ce qui correspond au cas d'une couche fluide avec des conditions de parois libres est retrouvée dans la limite  $Da_1^* \rightarrow 0$  et  $Da_2^* \rightarrow 0$ . En outre, le cas d'une couche fluide délimitée par une frontière solide horizontale sur un côté et une surface libre à l'autre côté, est obtenu dans la limite  $Da_1^* \rightarrow \infty$  et  $Da_2^* \rightarrow 0$  ou  $Da_1^* \rightarrow 0$  et  $Da_2^* \rightarrow \infty$ . Pour cette situation on obtient  $R_0 = 320$ , ce qui correspond au résultat obtenu dans le passé par *Sparrow et al. (1964)*. Pour des valeurs intermédiaires de  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$ , la figure 5.1 montre une transition sans heurt entre les limites évoquées ci-dessus.

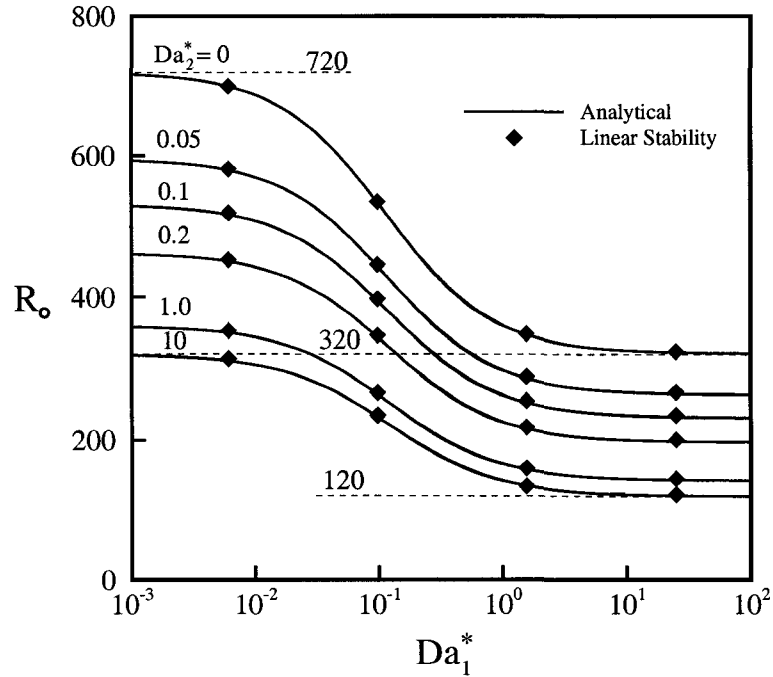


**Figure 5.1 :** Le paramètre  $R_0$ , fonction de  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$

### 5.5 Influence du nombre de Prandtl sur la stabilité linéaire

Grâce à l'analyse de stabilité linéaire discutée à la section 5.2, il est possible de produire numériquement les conditions pour lesquelles la convection stationnaire, prévue par la théorie de l'écoulement parallèle, devient instable. La transition, appelée la bifurcation Hopf, se produit à un nombre de Rayleigh critique  $Ra_{TC}^{Hopf}$  qui dépend de la valeur des paramètres qui régissent le problème, à savoir  $Ra_s$ ,  $Le$ ,  $Pr$ ,  $a$ ,  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$ . La figure 5.2 illustre l'influence du nombre de Prandtl  $Pr$  et du nombre de Rayleigh solutal  $Ra_s$  sur le nombre de Rayleigh critique  $Ra_{TC}^{Hopf}$  dans le cas d'une couche de fluide délimitée par des frontières solides ( $Da_1^* \rightarrow 0$  et  $Da_2^* \rightarrow 0$ ).

En premier lieu, nous nous intéressons à l'étude de la courbe correspondant à  $Ra_s = 0$ . Pour cette situation, la convection dans la couche fluide est induite uniquement par les gradients de température. Ce cas a été étudié dans le passé par **Prud'homme et Hung Nguyen (2002)**. En accord avec les résultats de ces auteurs, la courbe de  $Ra_s = 0$  indique que quand la valeur de  $Pr$  devient plus petite  $Ra_{TC}^{Hopf}$  augmente considérablement. Cela s'explique par le fait que la dissipation thermique des perturbations, à l'origine de l'instabilité de régime de l'écoulement, est renforcée relativement quand le  $Pr$  diminue (c'est-à-dire la diffusivité thermique augmente). Par conséquent, le nombre de Rayleigh critique doit demeurer plus grand pour déstabiliser le système. Autrement dit, un flux de chaleur plus intense doit être imposé sur la paroi inférieure pour amorcer la convection. Pour des grands nombres de Prandtl ( $Pr \geq 500$ ) les résultats indiquent que

$Ra_{TC}^{Hopf}$  tend vers une valeur asymptotique. Pour des valeurs intermédiaires de  $Pr$ ,  $Ra_{TC}^{Hopf}$  atteint une valeur minimale à  $Pr \simeq 1$ .

Pour les cas de convection double diffusive ( $a = 0$ ) et la convection induite par l'effet Soret ( $a = 1$ ), l'influence des forces d'Archimède solutales sur le nombre de Rayleigh critique Hopf  $Ra_{TC}^{Hopf}$  est présentée à la figure 5.2. Les courbes de  $Ra_s = 10^4$  correspondent à une situation dans laquelle les deux forces d'Archimède thermique et solutale sont déstabilisantes. Par conséquent, l'instabilité des écoulements se produit aux valeurs de Rayleigh moins grandes que celles obtenues pour la convection thermique pure ( $Ra_s = 0$ ). Naturellement, le même effet agit inversement pour  $Ra_s = -10^4$ , c'est-à-dire lorsque les forces d'Archimède thermique et solutale sont opposées.

Le nombre de Rayleigh critique relatif à la bifurcation de Hopf peut aussi être trouvé par la solution numérique de toutes les équations gouvernantes avec la méthode présentée dans le Chapitre V. Ainsi, pour la convection double diffusive ( $a = 0$ ), il a été constaté que, pour  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 2$ ,  $Pr = 1$  et  $A = 10$ , le passage du régime stable à la convection oscillatoire se produit à environ  $Ra_{TC}^{Hopf} = 39000$ . Ce résultat est en bon accord avec la valeur obtenue par la présente analyse de stabilité linéaire.

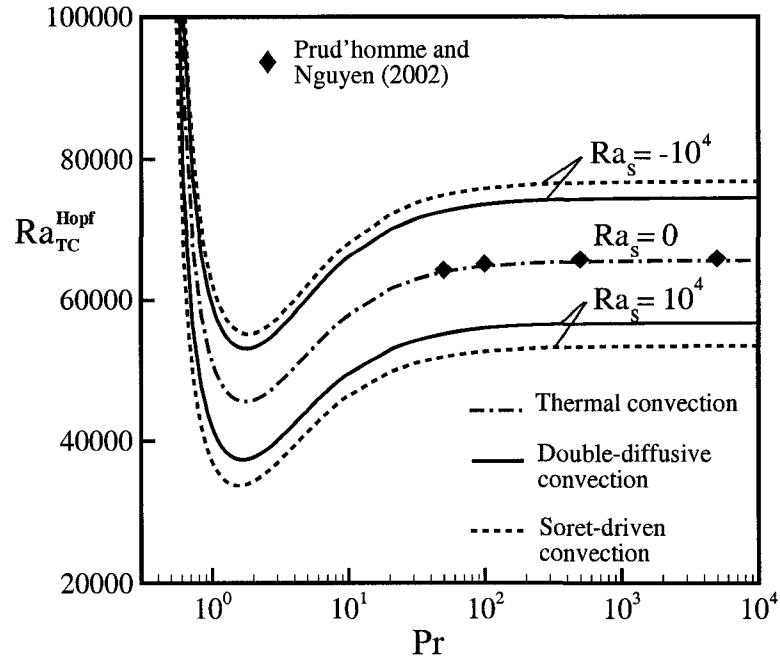


**Figure 5.2:** convection oscillatoire,  $Ra_{TC}^{Hopf}$ , fonction de  $Pr$  et  $Ra_s$  pour  $\phi = 0.2$ ,  $Le = 2$

$$\text{et } Da_1^* = Da_2^* = 0$$

### 5.6 Influence de coefficient de glissement $\alpha^*$ sur la stabilité linéaire

L'influence des coefficients de glissement  $\alpha_1^*$  et  $\alpha_2^*$  sur le problème de Beavers-Joseph, et sur la stabilité des écoulements convectifs (telle que prédite par l'approche de l'écoulement parallèle) est montrée à la figure 5.3 pour le cas  $Da_1 = Da_2 = 10^{-6}$  et  $Ra_s = 0$ . La couche fluide est alors délimitée par des limites supérieure et inférieure libres. Dans ce cas, lorsque les deux  $\alpha_1^*$  et  $\alpha_2^*$  tendent vers zéro  $Ra_{TC}^{Hopf}$  devient minimum.

Naturellement,  $Ra_{TC}^{Hopf}$  est maximum lorsque la couche fluide est délimitée par des murs horizontaux solides, et pour le cas où  $\alpha_1^*$  et  $\alpha_2^*$  tendent vers des grandes valeurs. En plus, nous avons observé que quand  $\alpha_1^*$  est relativement grand, l'influence de  $\alpha_2^*$  sur  $Ra_{TC}^{Hopf}$  est plus importante. Dans ce cas une augmentation de  $\alpha_2^*$  correspond à une transition entre les conditions aux limites libre-libre et libre-rigides. Toutefois, quand  $\alpha_1^*$  est plus petit ( $\alpha_1^* \rightarrow 0$ ), l'influence de  $\alpha_2^*$  sur la transition entre les conditions libre-libre et de libre-rigides devient beaucoup moindre.

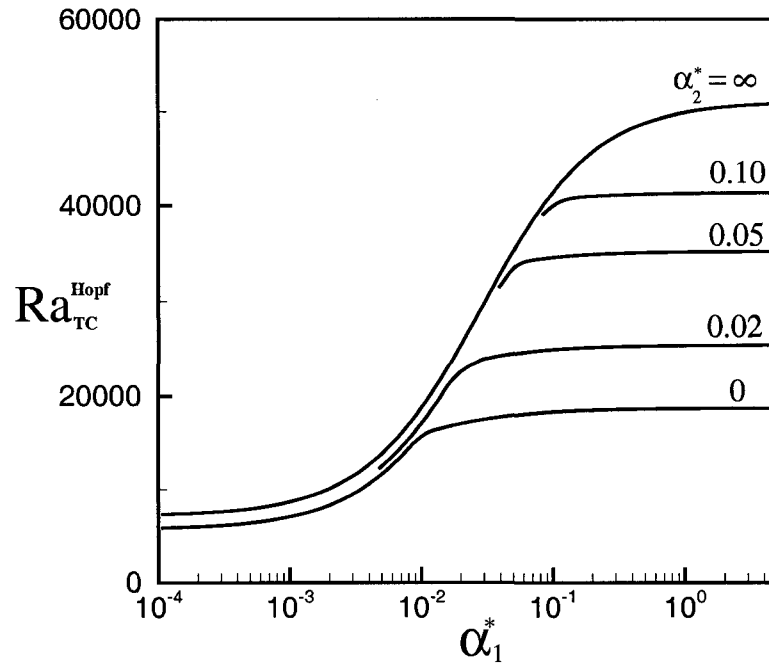


**Figure 5.3 :** L'influence des coefficients de glissement de la condition de Beavers-Joseph,  $\alpha_1^*$  et  $\alpha_2^*$  sur la convection oscillatoire  $Ra_{TC}^{Hopf}$ , pour  $Da_1^* = Da_2^* = 10^{-6}$ ,  $a = 0$  et  $Ra_S = 0$

La figure 5.4 illustre l'influence de paramètres  $\alpha^* = \alpha_1^* = \alpha_2^*$  sur  $Ra_{TC}^{Hopf}$  pour différentes valeurs de  $Da$ , quand  $Ra_s = 0$ . Les courbes de cette figure montrent que la réduction de  $Da$  résulte en l'augmentation du nombre de Rayleigh critique correspondant à l'apparition de la convection oscillatoire,  $Ra_{TC}^{Hopf}$ . En effet, un très petit nombre de Darcy  $Da$  correspond au cas d'une couche poreuse perméable aux frontières. Cela entraîne un amortissement du mouvement de fluide, et exige un grand nombre de Rayleigh critique pour déstabiliser le régime régulier de convection. Aussi, nous avons observé que l'influence de  $Da$  est considérablement réduite quand la valeur de  $\alpha^*$  est augmentée.

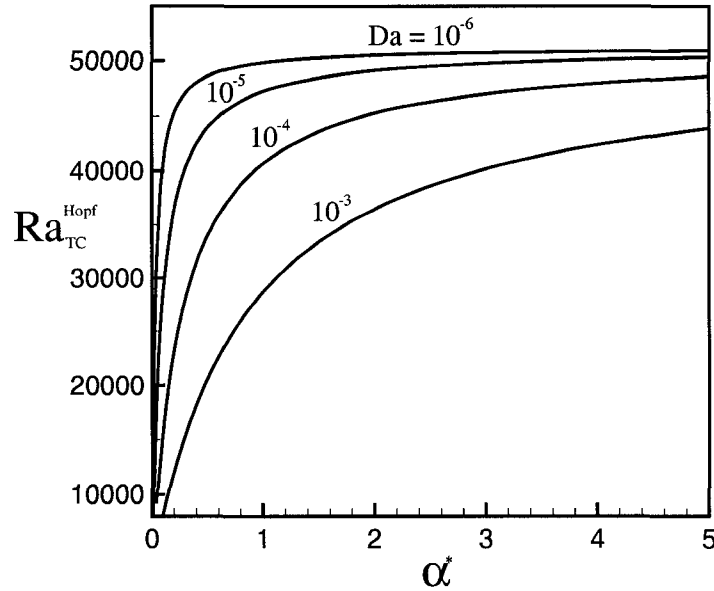


**Figure 5.4 :** L'influence de nombre de Darcy  $Da_1 = Da_2 = Da$ , sur la convection

oscillatoire,  $Ra_{TC}^{Hopf}$  fonction de  $\alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha^*$  pour  $a = 0$  et  $Ra_s = 0$

## CHAPITRE VI

### RÉSULTATS ET DISCUSSION

Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats analytiques et numériques de la double diffusion ( $a = 0$ ) et de l'effet Soret ( $a = 1$ ) obtenus pour le problème d'une cavité rectangulaire remplie d'un fluide binaire, soumise à des flux de chaleur et de masse aux parois horizontales. Le fluide est en contact avec des couches poreuses très minces en haut et en bas de la cavité et la condition de Beavers-Joseph est appliquée sur les interfaces. Les effets des paramètres de contrôle du problème, à savoir le rapport de forme de la cavité  $A$ , le nombre de Rayleigh,  $Ra_T$ , le rapport des forces de volume,  $\varphi$ , le nombre de Lewis,  $Le$ , et les nombres de Darcy modifiés,  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$  (qui interviennent dans la condition de Beavers-Joseph), sont discutés.

#### 6.1 Influence du rapport de forme de la cavité, $A$

La figure 6.1a illustre des résultats numériques typiques obtenus pour le cas  $Ra_T = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10.$ ,  $Pr = 1$  et  $a = 0$  (convection doublement diffusive) pour différentes valeurs de  $A$ . Dans le cas d'une cavité carrée ( $A = 1$ ), la figure 6.1a montre que l'écoulement résultant consiste en une cellule convective pouvant tourner indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. La convection est plutôt faible ( $\Psi_{\max} = 0.284$ ), et par conséquent, les taux de transfert de chaleur et de masse ne sont pas très grands ( $Nu = 1.014$  et  $Sh = 1.863$ ). En augmentant le rapport de forme à  $A = 2$ , la figure 6.1b

indique que l'intensité de la convection est augmentée ( $\Psi_{\max} = 1.066$ ), résultant en des transferts de chaleur et de masse plus importants ( $Nu = 1.223$  et  $Sh = 3.376$ ). Pour le rapport de forme  $A = 4$  (figure 6.1c) l'intensité de la convection devient encore plus grande ( $\Psi_{\max} = 1.099$ ). On remarque que le taux de transfert de chaleur thermique subit alors une faible augmentation ( $Nu = 1.296$ ), mais le taux de transfert massique montre une légère diminution ( $Sh = 3.197$ ). Les valeurs de l'intensité maximum de la fonction de courant et les taux de transfert thermique et massique obtenus à  $A = 8$  (figure 6.1d) sont très proches de celles du cas précédent ( $A = 4$ ; figure 6.1c).

Les résultats de la solution numérique deviennent de plus en plus proches de celles de la solution analytique, au fur et à mesure que l'on augmente le rapport de forme  $A$ . Les figures 6.1c et 6.1d indiquent que l'écoulement devient progressivement parallèle dans le cœur de la cavité. Il en résulte que l'intensité maximale de la convection,  $\Psi_{\max}$ , et les transferts de chaleur et de concentration, convergent asymptotiquement vers la solution prédite par la théorie de l'écoulement parallèle (Chapitre III) qui est indépendante du rapport de forme de la cavité. La figure 6.2 illustre des résultats numériques obtenus pour les mêmes conditions que celles de la figure 6.1 mais pour  $\alpha = 1$ , i.e. dans le cas d'un mouvement convectif induit par l'effet Soret. Qualitativement, les résultats sont similaires pour ces deux modes de convection. La différence entre la convection naturelle induite par la double diffusion et celle générée par l'effet Soret est discutée de façon plus approfondie à la section 6.2.

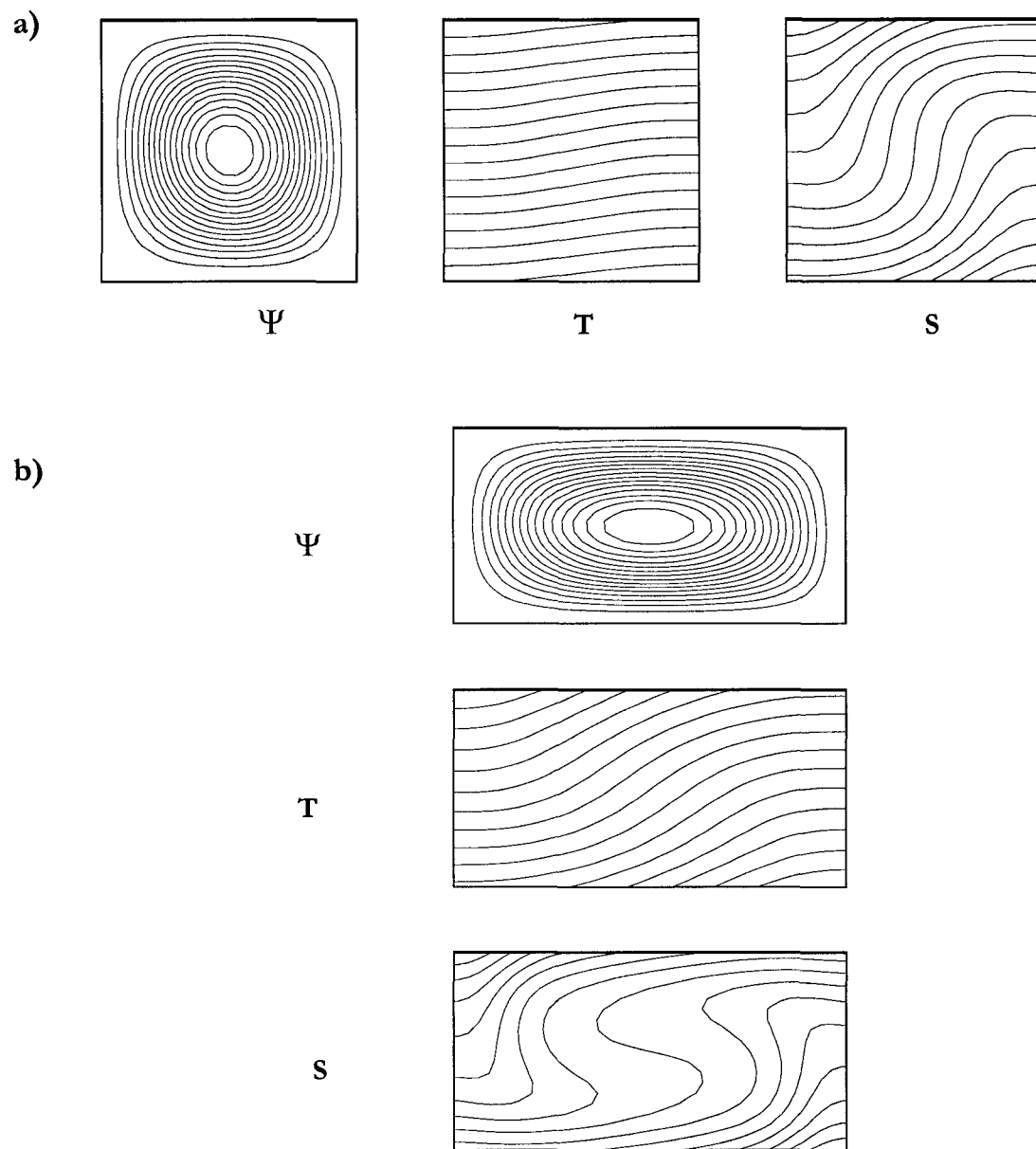


Figure 6.1

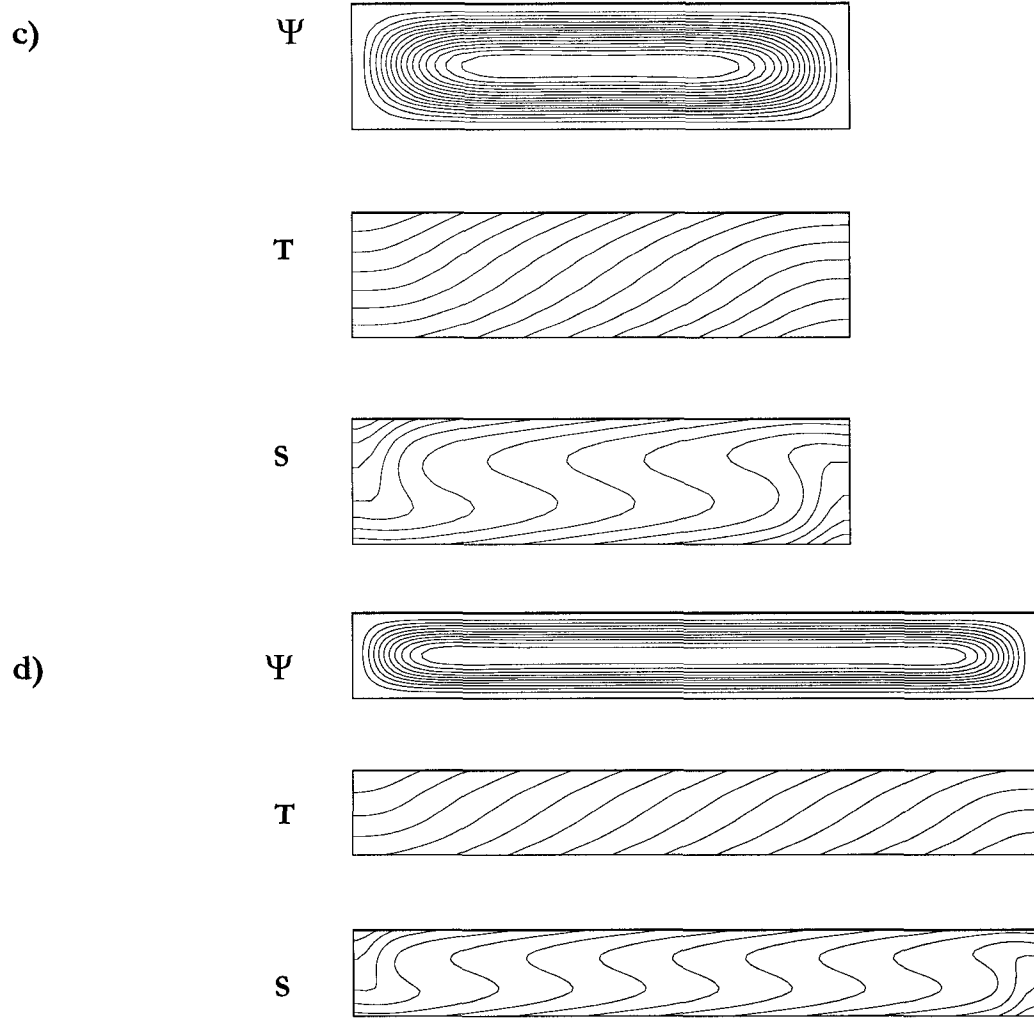


**Figure 6.1 :** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10.$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $a = 0$  : a)  $A = 1$ ,  $\Psi_{\max} = 0.284$ ,  $Nu = 1.014$ ,  $Sh = 1.863$ , b)  $A = 2$ ,  $\Psi_{\max} = 1.066$ ,  $Nu = 1.223$ ,  $Sh = 3.376$  c)  $A = 4$ ,  $\Psi_{\max} = 1.099$ ,  $Nu = 1.296$ ,  $Sh = 3.197$  d)  $A = 8$ ,  $\Psi_{\max} = 1.100$ ,  $Nu = 1.293$ ,  $Sh = 3.182$

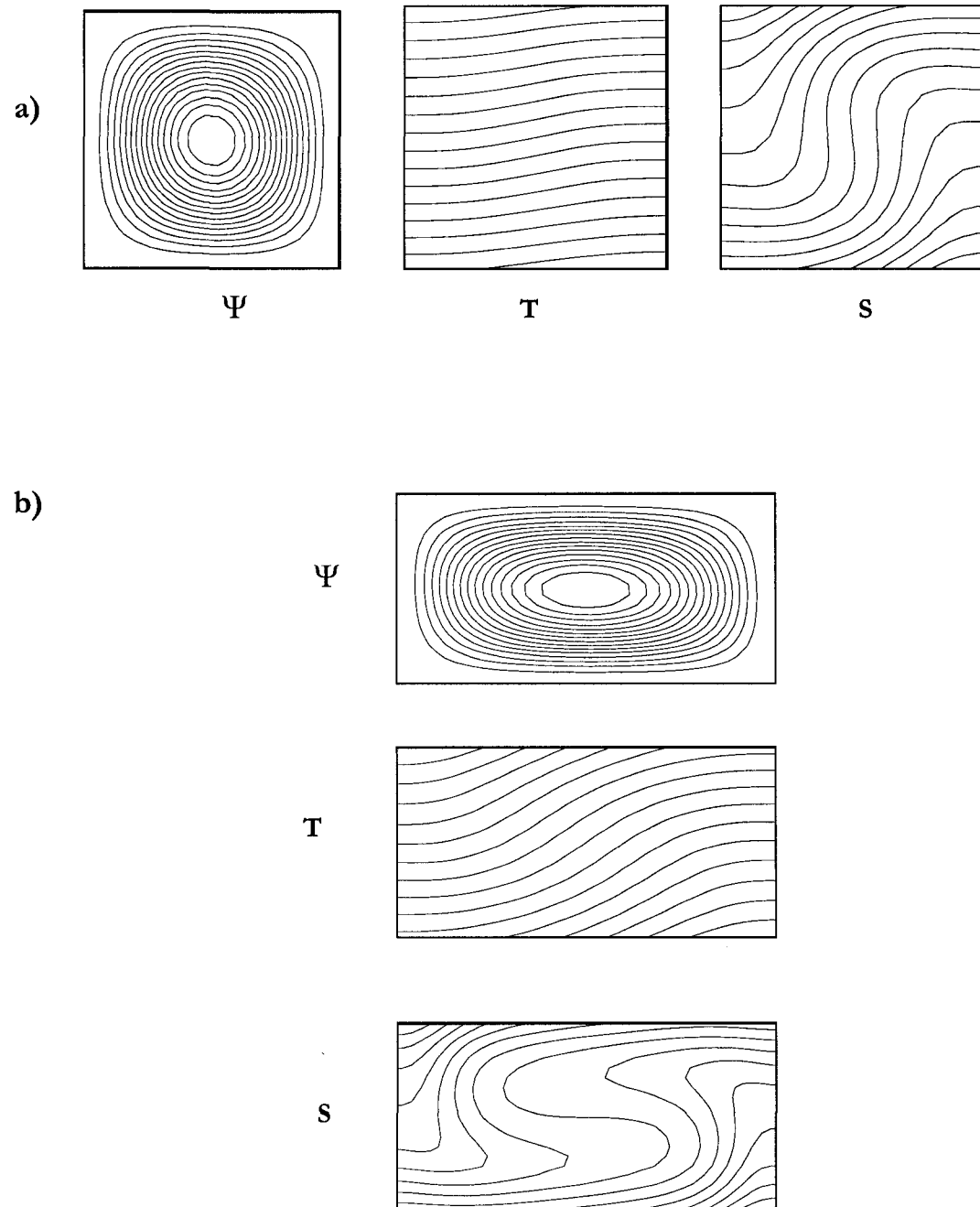


Figure 6.2

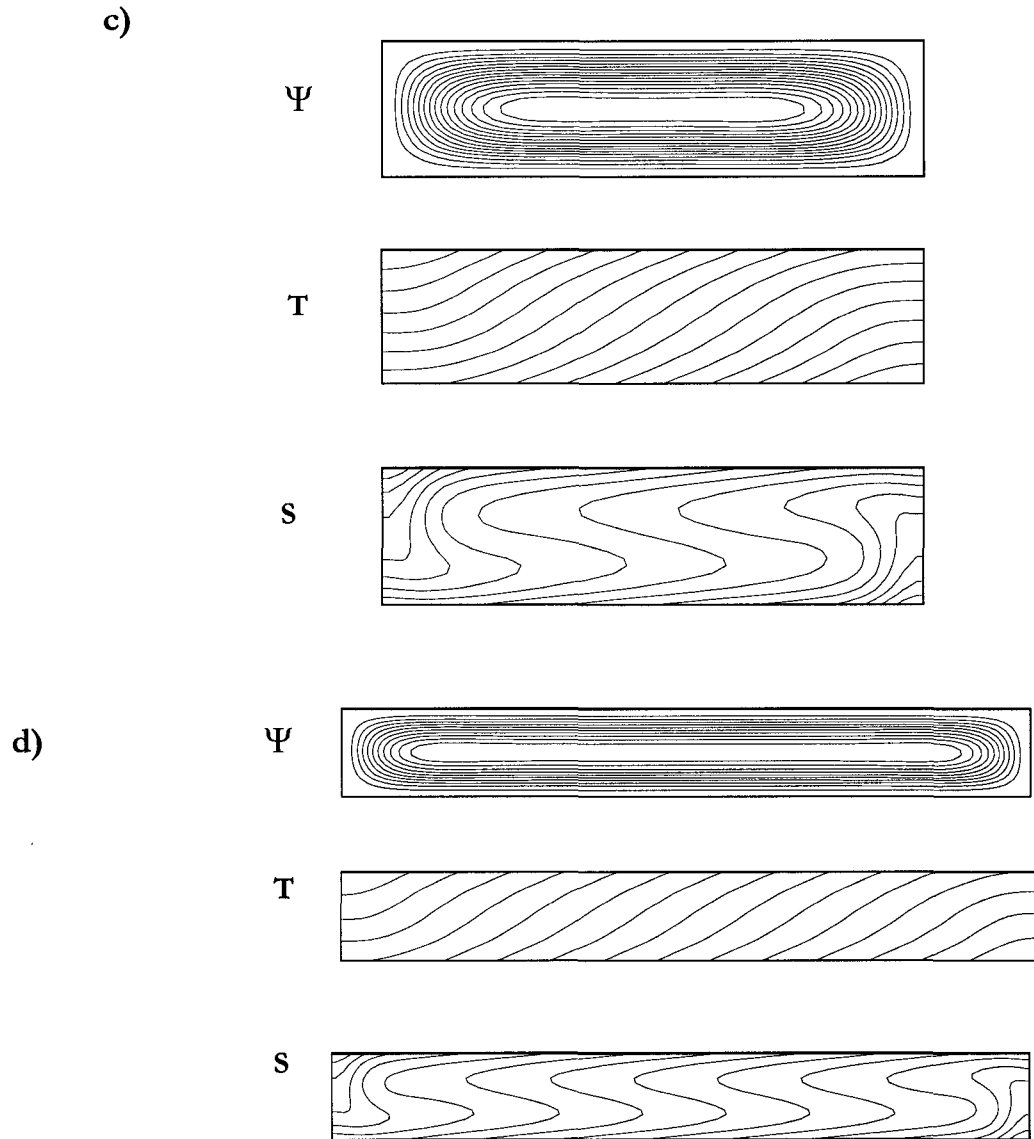


**Figure 6.2 :** Lignes de courant, de température et de concentration pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10.$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $a = 1$  : a)  $A = 1$ ,  $\Psi_{\max} = 0.301$ ,  $Nu = 1.015$ ,  $Sh = 2.143$ , b)  $A = 2$ ,  $\Psi_{\max} = 1.043$ ,  $Nu = 1.215$ ,  $Sh = 4.173$  c)  $A = 4$ ,  $\Psi_{\max} = 1.075$ ,  $Nu = 1.285$ ,  $Sh = 3.818$  d)  $A = 8$ ,  $\Psi_{\max} = 1.077$ ,  $Nu = 1.283$ ,  $Sh = 3.799$

Afin d'estimer le rapport de forme minimum, nécessaire pour simuler le cas d'un écoulement parallèle dans une couche horizontale, des tests numériques ont été exécutés. Des résultats typiques sont rapportés dans les figures 6.3 et 6.4, où les résultats numériques sont indiqués par des symboles en noir et la solution analytique approximée, valide dans la limite d'une couche horizontale infinie ( $A \gg 1$ ), est indiquée par des lignes en pointillés. La solution numérique est illustrée à la figure 6.3, pour le cas de  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 10.$ , et  $a = 0$ . La solution analytique prévoit les résultats suivants :  $\Psi_{\max} = 1.100$ ,  $Nu = 1.291$  et  $Sh = 3.180$ . La figure 6.4 présente la solution numérique pour un nombre de Rayleigh plus élevé  $Ra_T = 5 \times 10^3$ , un nombre de Lewis plus petit  $Le = 0.2$ , et en présence de l'effet Soret  $a = 1$ . Pour ce cas, la solution analytique prévoit les résultats suivants :  $\Psi_{\max} = 4.398$ ,  $Nu = 2.598$  et  $Sh = 3.697$ .

À partir de ces graphiques, on peut estimer la valeur minimum du rapport de forme  $A$  au-dessus de laquelle l'écoulement peut être considéré comme étant parallèle. On observe donc que, en augmentant le rapport de forme de  $A = 1$  à  $A = 10$ , les résultats indiquent que la valeur maximum de la fonction de courant  $\Psi_{\max}$  (figure 6.3a et figure 6.4a), le nombre de Nusselt (figure 6.3b et figure 6.4b) et le nombre de Sherwood (figure 6.3c et figure 6.4c) atteignent la limite d'un écoulement parallèle pour environ  $A = 4$ . Le fait d'augmenter le rapport de forme, pour un nombre de Rayleigh donné, conduit donc à une situation asymptotique pour laquelle les solutions deviennent indépendantes de  $A$ . Ceci est en accord avec la prédiction de la théorie de l'écoulement parallèle.

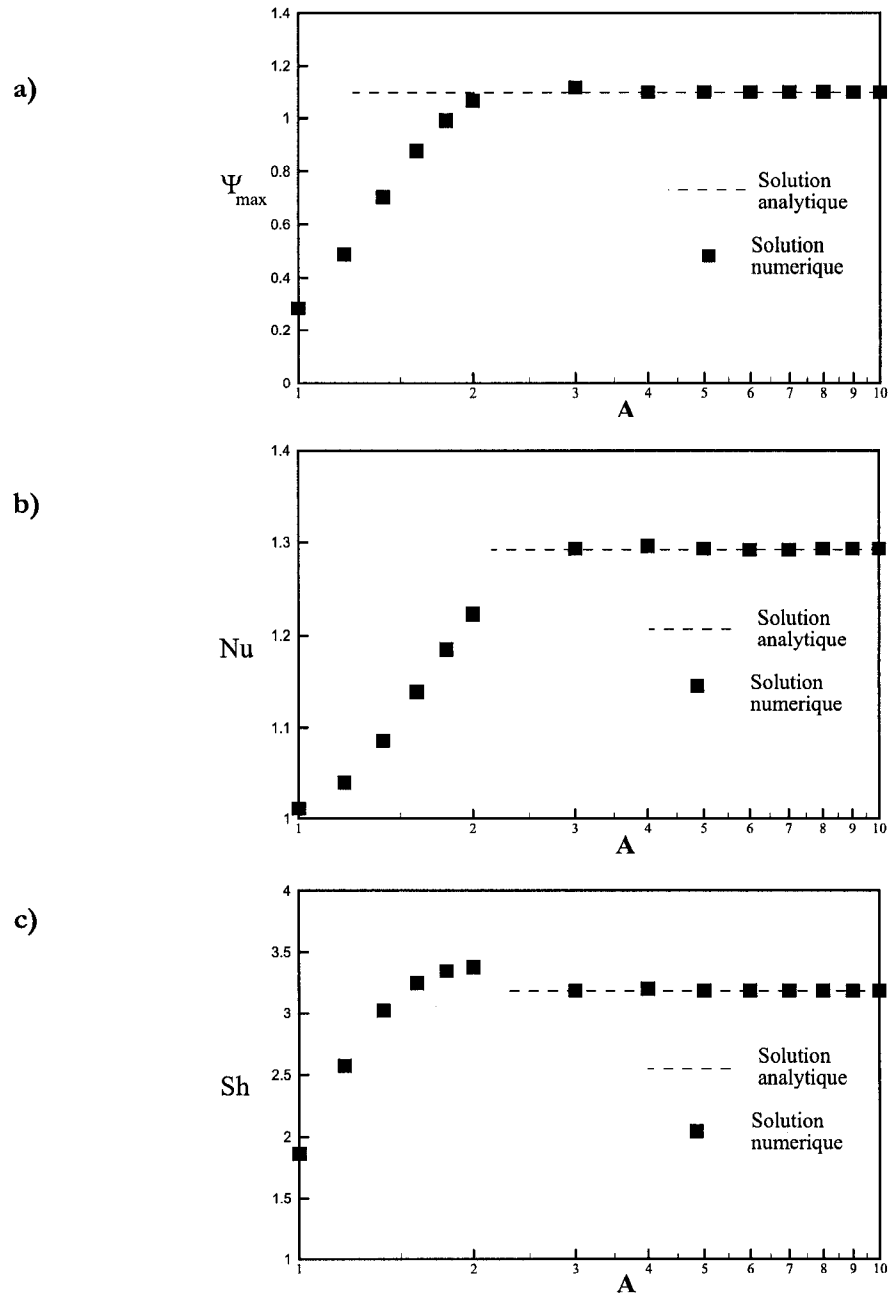


**Figure 6.3 :** Influence de rapport de forme sur a) la fonction de courant b) le nombre de Nusselt, c) le nombre de Sherwood pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 10.$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $a = 0$

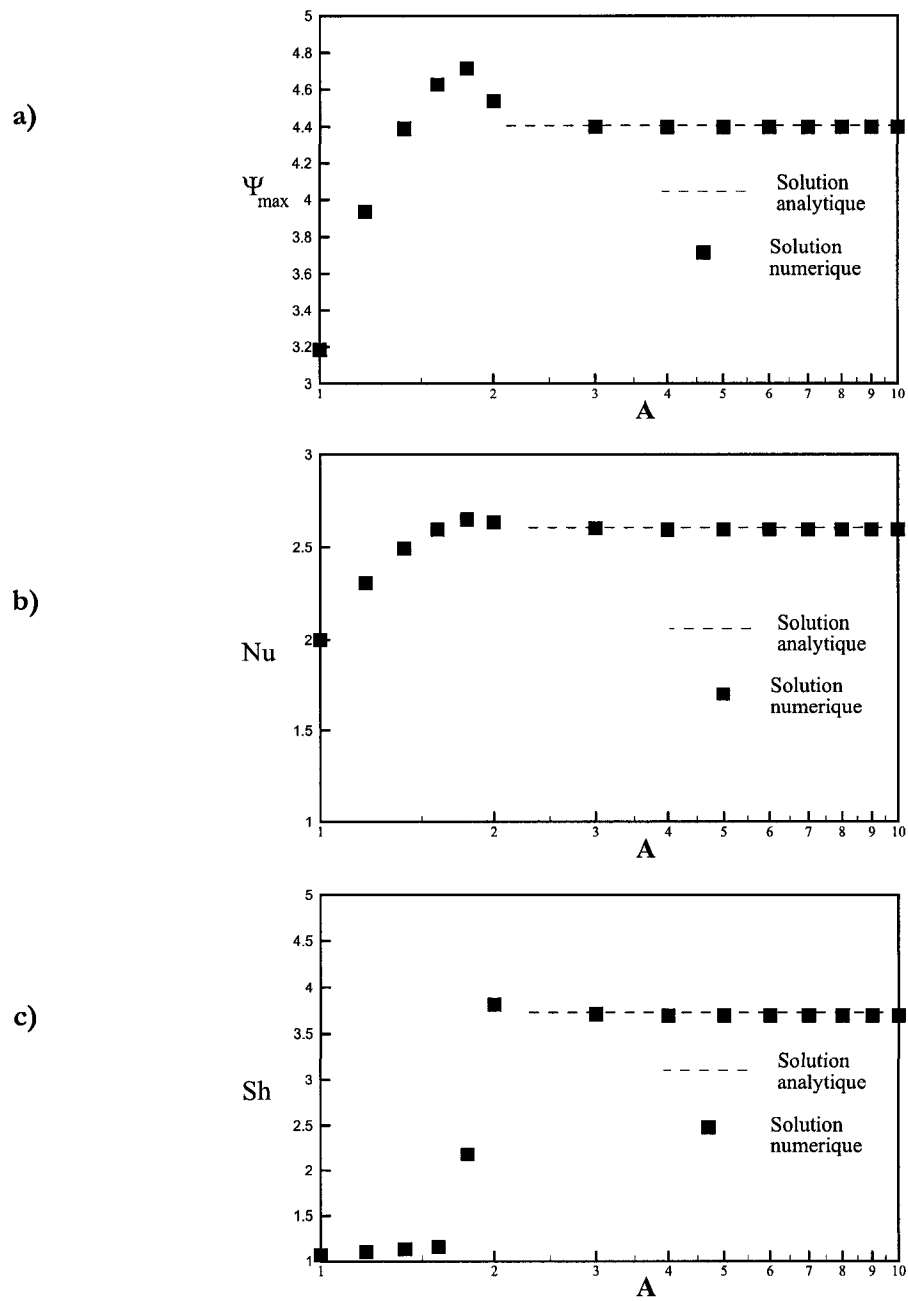


**Figure 6.4 :** Influence du rapport de forme sur a) la fonction de courant b) le nombre de Nusselt, c) le nombre de Sherwood pour  $Ra_T = 5 \times 10^3$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 0.2$ ,  $Pr = 1$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$  et  $a = 1$ .

À la suite de nombreux tests, nous avons conclu que les résultats numériques peuvent être considérés indépendants du rapport de forme pour  $A \geq 6$ . Pour cette raison, la plupart des résultats rapportés dans le présent travail sont obtenus pour un rapport de forme  $A = 8$ . Tel que montré par *Mamou (1998)*, pour la convection thermo-solutale dans une cavité rectangulaire, la valeur du rapport de forme minimum satisfaisant la théorie de l'écoulement parallèle, est une fonction du nombre de Rayleigh thermique,  $Ra_T$ , du rapport de forces de volume,  $\varphi$ , et du nombre de Lewis,  $Le$ .

## 6.2 La convection induite par la double diffusion et par l'effet Soret

Généralement, deux types de problèmes sont étudiés concernant la convection naturelle dans un système de fluide binaire. Le premier type de problème est la double diffusion où les conditions thermique et massique imposées aux frontières de la cavité sont à l'origine de l'écoulement induit par les forces d'Archimède. Dans le deuxième type de problème, la convection thermique dans le fluide binaire est induite par l'effet Soret. Contrairement au cas de la double diffusion, dans cette situation les gradients de la concentration ne sont pas dus à l'imposition de la condition massique aux limites mais, sont générés par les gradients de température dans un système ayant initialement une concentration uniforme.

Nous allons d'abord discuter le cas de la convection thermique pure ( $a = 0, \varphi = 0$ ). Cette situation est illustrée sur les figures 6.5 et 6.6 et correspond au cas classique de la convection de type Rayleigh-Bénard. L'état de repos prévaut jusqu'à un nombre de

Rayleigh supercritique donné par  $Ra_{rc}^{\text{sup}}[1 + \varphi(a + Le)] = R_0$  où  $R_0 = 720$ . Au dessus de cette valeur, on observe l'apparition d'une cellule convective tournant indifféremment dans le sens horaire ou antihoraire. Les changements des taux de transfert thermique ( $Nu$ ) et massique ( $Sh$ ) en fonction du nombre de Rayleigh thermique ( $Ra_T$ ), sont présentés aux figures 6.5 et 6.6. La solution analytique représentée par des lignes solides (stable) et des lignes en pointillées (instable) est en bonne concordance avec les résultats numériques indiqués par des symboles.

La façon selon laquelle cette courbe de bifurcation est influencée par la présence de la force d'Archimède solutale est illustrée aux figures 6.5 et 6.7 pour le cas  $Le = 2$ . On remarque là encore la bonne concordance entre les solutions numériques et analytiques. La figure 6.5(a-c) illustre les résultats typiques obtenus pour  $\varphi > 0$ , ( $\varphi = 0.5$ ), les forces d'Archimède thermique et solutale conjuguées étant déstabilisantes. Pour cette situation, les courbes de bifurcation sont obtenues pour la convection induite à la fois par la double diffusion ( $a = 0$ ) et par l'effet Soret ( $a = 1$ ). Les nombres de Rayleigh critiques correspondants sont respectivement  $Ra_{rc}^{\text{sup}} = 360$  et  $Ra_{rc}^{\text{sup}} = 290$ . Ces nombres de Rayleigh critiques sont plus petits que celui du cas de convection thermique pure ( $Ra_{rc}^{\text{sup}} = 720$ ) où la seule force déstabilisante est la force d'Archimède thermique. Sur la figure 6.5(a) nous observons que l'intensité de l'écoulement  $\Psi_0$  est relativement faible dans la région entre le seuil de la convection thermo-solutale et celui de la convection thermique pure. D'autre part, l'intensité de la convection thermo-solutale augmente fortement quand la valeur de  $Ra_T$  dépasse le seuil de la convection thermique pure. La

figure 6.5(b) indique que le nombre de Nusselt ( $Nu$ ) est plus grand pour la convection doublement diffusive ( $a=0$ ) que pour celle de la convection induite par l'effet Soret ( $a=1$ ). Cela s'explique par le fait que la convection est plus intense dans le cas de  $a=0$  que dans celui de  $a=1$  (figure 6.5(a)). Par contre, comme illustré sur la figure 6.5(c), le nombre de Sherwood  $Sh$  est beaucoup plus grand dans le cas de la convection induite par l'effet Soret.

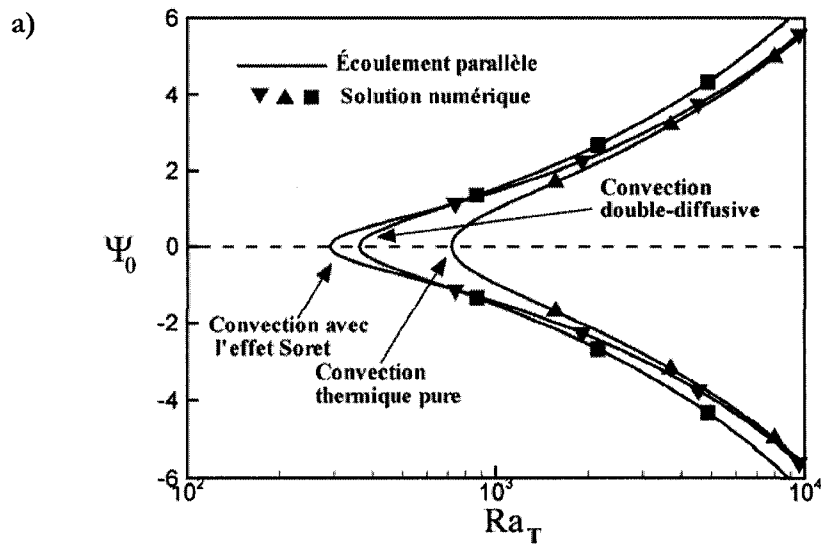


Figure 6.5

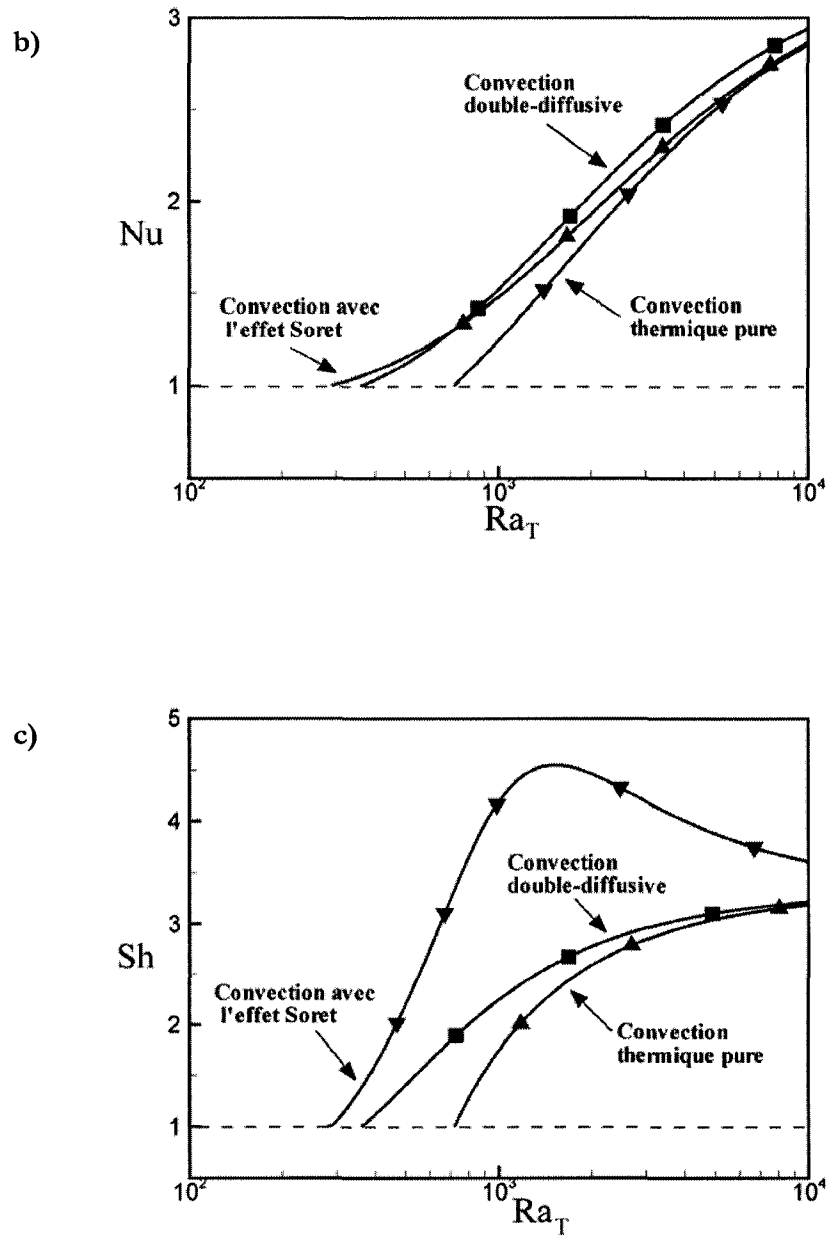


**Figure 6.5 :** Diagramme de bifurcation en terme de a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , versus  $Ra_T$  pour

$$a=1 \text{ et } a=0, Da_1^* = Da_2^* = 0, Le=2 \text{ et } \varphi=0.5$$

La figure 6.6(a-c) montre les valeurs de  $\Psi_0$ ,  $Nu$ , et  $Sh$  obtenues pour  $\varphi = -0.5$ , c'est-à-dire, lorsque les forces d'Archimède solutales et thermiques sont opposées. Pour cette situation, il a été démontré (voir *Mamou et Vasseur (1999)* par exemple) que sous certaines conditions, la convection peut se développer à partir d'une bifurcation sous-critique pour laquelle le seuil de convection se produit avec une amplitude finie ( $\Psi_0 \neq 0$ ). Le nombre de Rayleigh sous-critique,  $Ra_{rc}^{sous}$ , est prédit par l'équation (3.28).

Selon le nombre de Lewis considéré dans les graphes de la figure 6.6, les nombres de Rayleigh sous-critiques sont  $Ra_{rc}^{sous} = 2168$  pour  $a = 0$  et  $Ra_{rc}^{sous} = 2019$  pour  $a = 1$ . La solution analytique prédit l'existence de situations instables (lignes en pointillées) rejoignant les nombres de Rayleigh supercritique à  $Ra_{rc}^{sup} \rightarrow \infty$  (voir l'équation (3.26)).

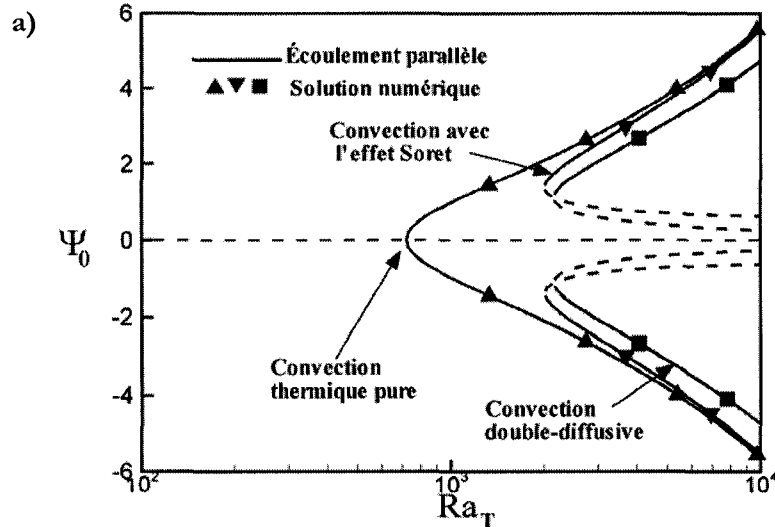


Figure 6.6

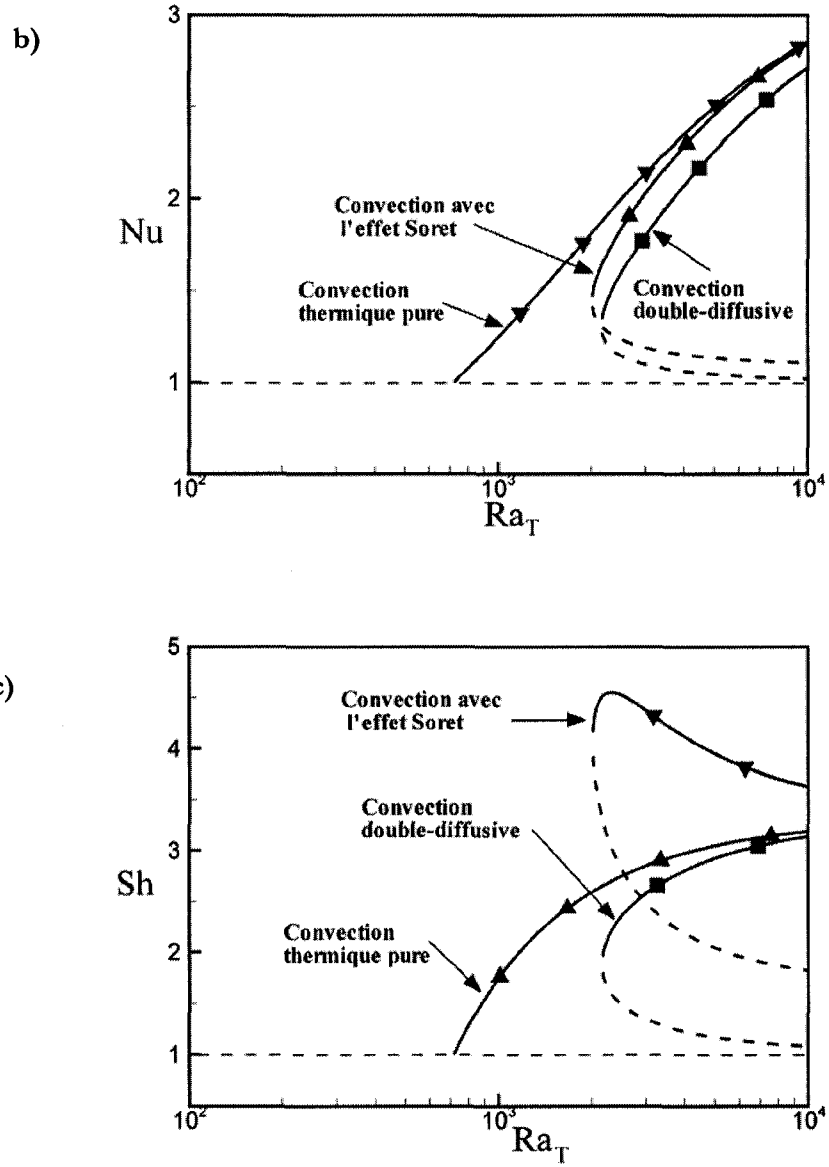


Figure 6.6 : Diagramme de bifurcation en terme de a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , versus  $Ra_T$  pour

$$a = 1 \text{ et } a = 0, Da_1^* = Da_2^* = 0, Le = 2 \text{ et } \varphi = -0.5$$

### 6.3 Influence du rapport des forces de volume $\varphi$

Avec les conditions thermiques et solutales considérées dans cette étude, le gradient thermique imposé sur la couche fluide est toujours déstabilisant, alors que le gradient de concentration est déstabilisant si  $\varphi > 0$  et stabilisant si  $\varphi < 0$ . Le nombre de Rayleigh critique marquant la naissance de la convection, l'intensité de l'écoulement ainsi que les transferts de chaleur et d'espèce résultants, dépend donc fortement du rapport des forces thermique et solutale,  $\varphi$ . L'influence de ce paramètre, sur les diagrammes de bifurcation de l'état de repos du fluide vers l'état convectif, est discutée dans cette section.

Le figure 6.7(a-c) donne les valeurs de  $\Psi_0$ ,  $Nu$ , et  $Sh$  pour différentes valeurs de  $\varphi$  en fonction de  $Ra_T / R_0$  où  $R_0 = 720$  ( $Da_1^* = Da_2^* = 0$ ) pour le cas  $Le = 10$  et  $a = 0$  (convection double-diffusive). La solution analytique, représentée par des lignes solides (solution stable) et des lignes en pointillé (solution instable), est une fois de plus en bonne concordance avec les solutions numériques indiquées par des symboles. Elle est aussi en accord avec les solutions de *Ouriemi et al. (2005)*.

L'influence de la force d'Archimède solutale ( $\varphi$ ) sur le comportement de la convection est illustrée à la figure (6.7). Pour  $\varphi > 0$ , à savoir  $\varphi = 0.2$ , le nombre de Rayleigh supercritique est  $Ra_{TC}^{\sup} = 240$  (i.e.  $Ra_T / R_0 = 0.33$ ) et pour le cas de  $\varphi < 0$  où la force d'Archimède solutale est stabilisante les nombres de Rayleigh sous-critique sont

$Ra_{\tau c}^{sous} = 825$  (i.e.  $Ra_T / R_0 = 1.15$ ) pour  $\varphi = -0.05$  et  $Ra_{\tau c}^{sous} = 1,183$  (i.e.  $Ra_T / R_0 = 1.64$ )

pour  $\varphi = -0.5$ .

Le cas de  $Ra_T < 0$  correspond à une inversion de la direction des flux de chaleur ou ce qui revient au même, à une inversion de la direction de la gravité. Pour  $\varphi < 0$ , l'influence de la force d'Archimède thermique est stabilisante alors que l'influence de la concentration est déstabilisante. Pour le cas  $\varphi = -0.5$  les graphes montrent l'existence d'une bifurcation sous-critique qui apparaît à  $Ra_T / R_0 = -0.25$ .

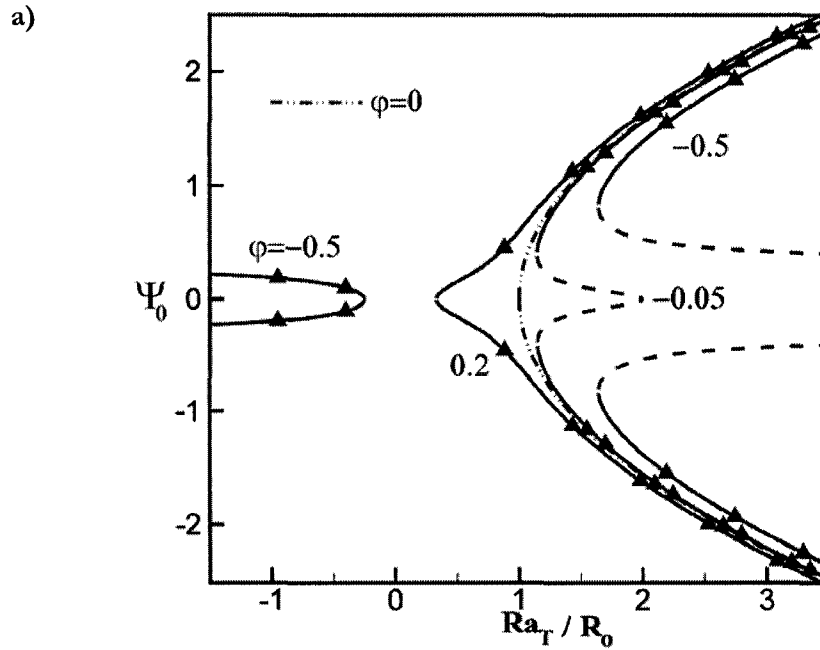


Figure 6.7

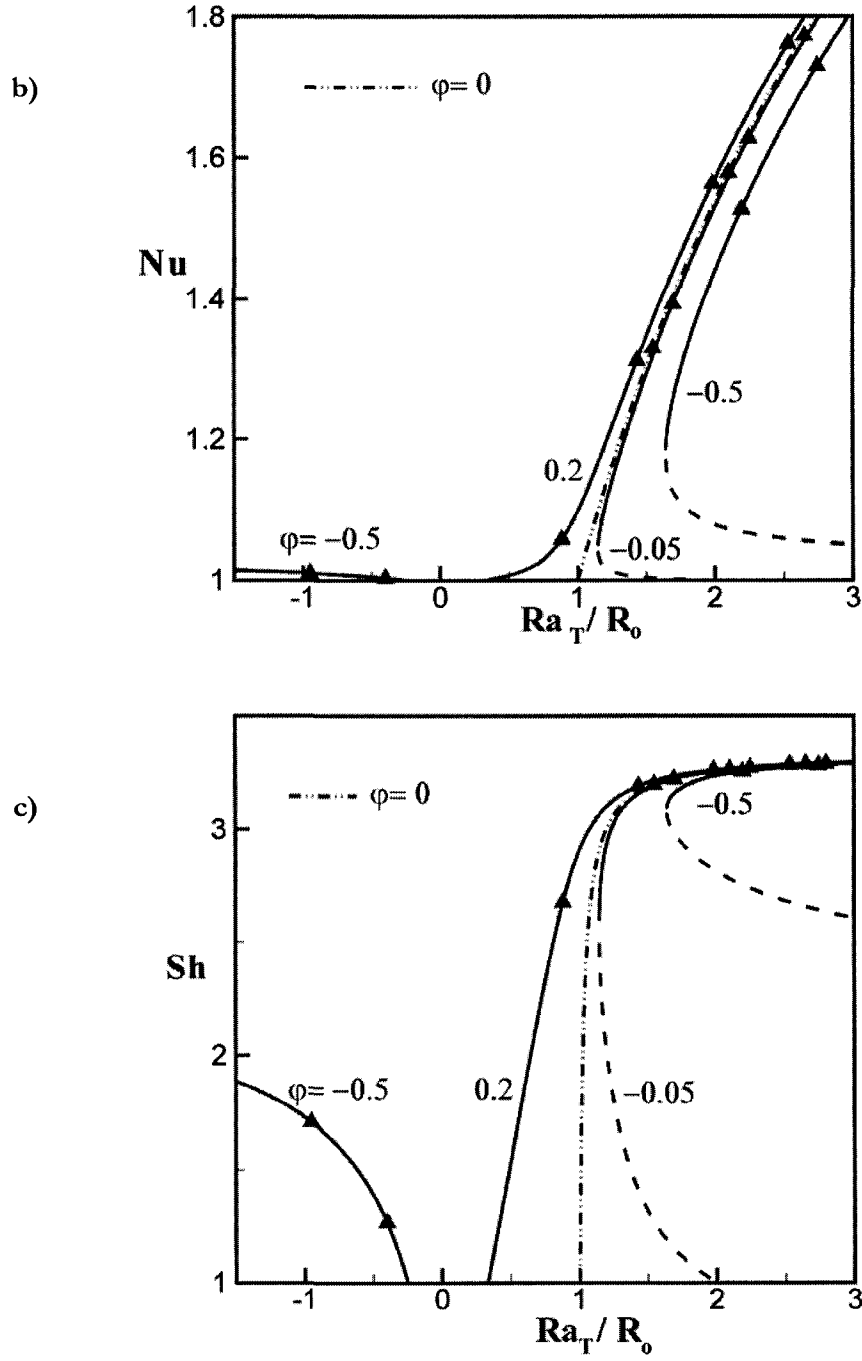


**Figure 6.7 :** Diagramme de bifurcation en terme de a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , pour différentes

valeurs de  $\varphi$  versus  $Ra_T / R_0$  où  $a = 0$ ,  $Da_1^* = Da_2^* = 0$ , et  $Le = 10$ .

#### 6.4 Influence du nombre de Lewis $Le$

La figure 6.8 illustre l'influence du nombre de Lewis,  $Le$ , sur la fonction de courant,  $\Psi_0$  (figure 6.8a), le nombre de Nusselt  $Nu$  (figure 6.8b), et le nombre de Sherwood,  $Sh$  (figure 6.8c), pour la double diffusion,  $a = 0$ , et l'effet Soret,  $a = 1$ , dans les cas où  $Da_2^* = 0$  et,  $Da_2^* \rightarrow \infty$  où  $Da_1^* = 0$ ,  $Ra_T = 10^3$  et  $\varphi = 0.2$ . Le cas de  $Da_2^* \rightarrow \infty$  est représenté sur les graphes par des lignes en pointillé. Cette situation correspond à l'imposition de la condition de frontière libre sur la limite supérieure de la cavité, tandis que la limite inférieure est maintenue rigide ( $Da_1^* = 0$ ). Les résultats de la solution numérique sont indiqués par des symboles et ils sont là encore en bonne concordance avec la prédiction de la théorie de l'écoulement parallèle. Les courbes de la figure 6.8 montrent que, pour  $Le \leq 0.4$ , l'effet Soret ( $a = 1$ ) devient plus important et l'écoulement induit par cet effet est plus intense que celui du cas de la double diffusion ( $a = 0$ ). Les taux de transfert thermique,  $Nu$ , et massique,  $Sh$ , sont aussi plus élevés pour le cas de  $a = 1$ . Cela s'explique par le fait que le nombre de Lewis est par définition le rapport de la diffusivité thermique du fluide sur la diffusivité solutale,  $Le = \alpha / D$ . Donc en diminuant la valeur de  $Le$ , les effets solutaux contrôlent entièrement l'écoulement convectif. Nous avons noté que dans le cas de  $\varphi = 0.2$  (où les forces d'Archimède solutale et thermique sont coopérantes), l'intensité de l'écoulement, ainsi que les taux de transferts thermique et massique atteignent un maximum pour  $0.8 \leq Le \leq 1$  alors que les diffusivités thermique et solutale sont à peu près de même ordre. Pour  $Le \geq 11$  la condition de Beavers-Joseph

( $Da_2^*$ ) devient prépondérante, et l'effet Soret n'a plus aucune influence sur l'écoulement convectif.

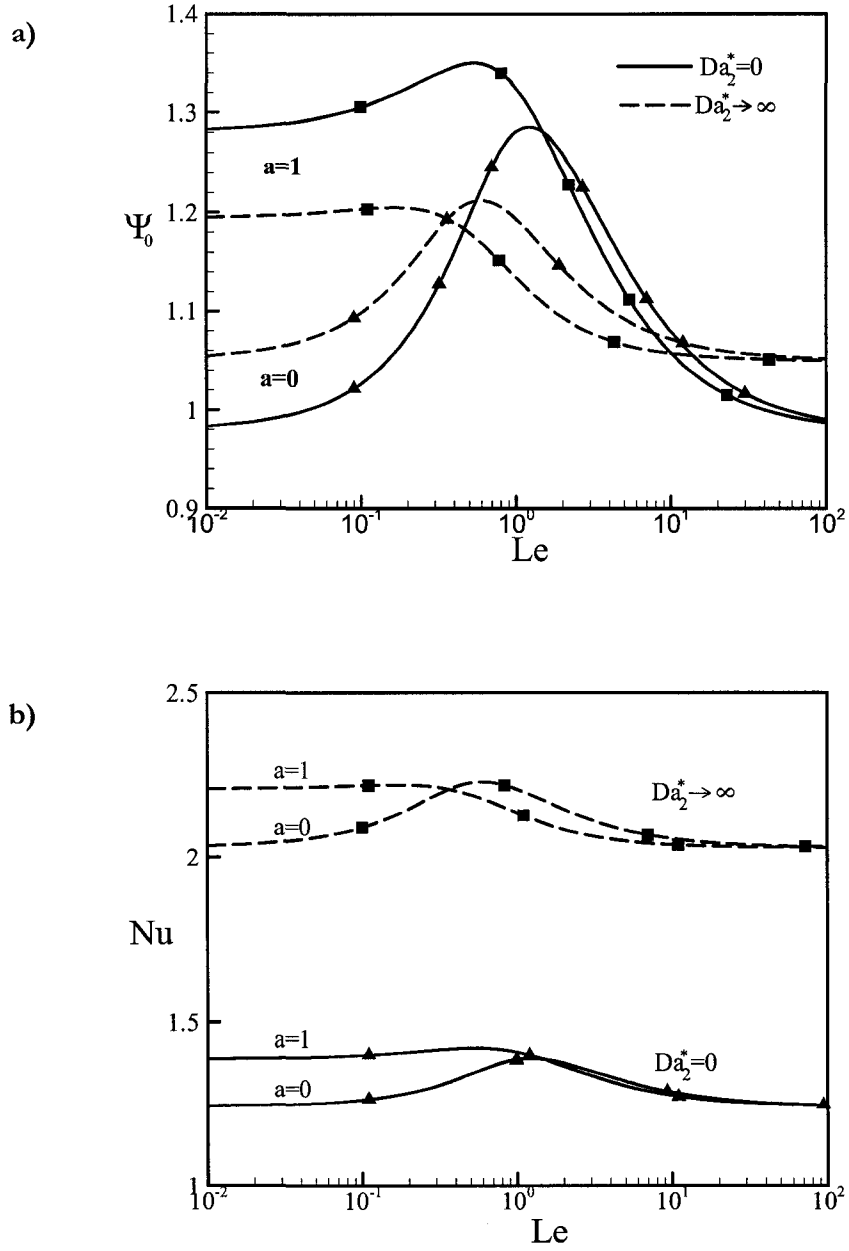


Figure 6.8

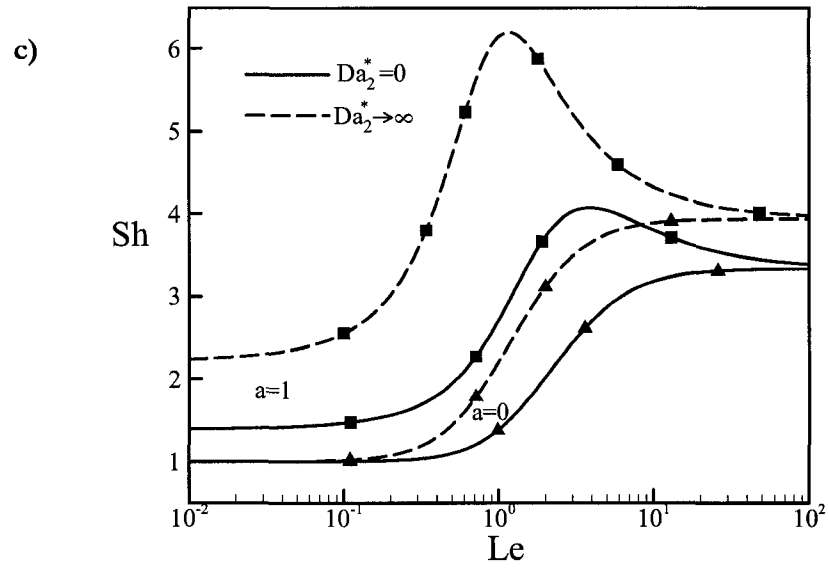


**Figure 6.8 :** Influence du nombre de Lewis,  $Le$ , sur a)  $\Psi_0$ , b)  $Nu$ , c)  $Sh$ , pour la double diffusion,  $a=0$  et l'effet Soret,  $a=1$ , dans les cas de  $Da_2^*=0$  et  $Da_2^*\rightarrow\infty$  avec  $Da_1^*=0, Ra_T=10^3$  et  $\varphi=0.2$

### 6.5 Influence du nombre de Darcy modifié $Da^*$

Les profils des distributions de la vitesse horizontale  $u$ , de la température  $T$  et de la concentration  $S$  dans le demi-plan vertical ( $x = 0$ ) de la cavité sont illustrés à la figure 6.9. Ce graphique est tracé pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 0$ ,  $Da_1^* = 0$  (limite inférieure solide) et pour différentes valeurs de  $Da_2^*$ . Les résultats montrent que la solution analytique basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle (lignes continues), est en accord parfait avec la solution numérique des équations régissantes. L'effet de la condition imposé à la limite supérieure de la cavité est distinctement illustré à la figure 6.5. L'intensité de l'écoulement (vitesse) augmente considérablement près de la surface supérieure lorsque  $Da_2^*$  augmente de zéro (limite solide) à l'infini (surface libre). L'influence de  $Da_2^*$  sur les profils de la température et de la concentration est également considérable.

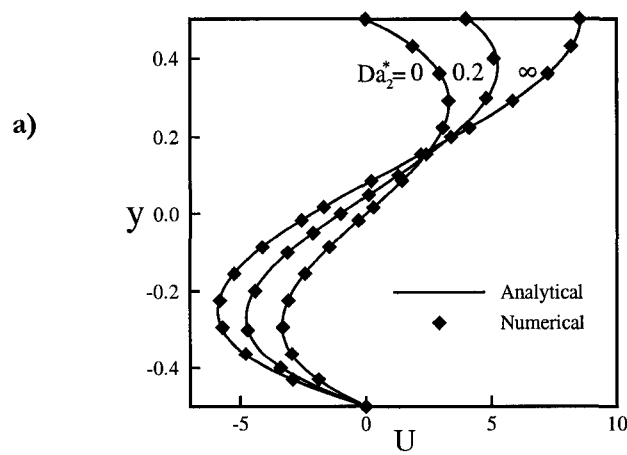


Figure 6.9

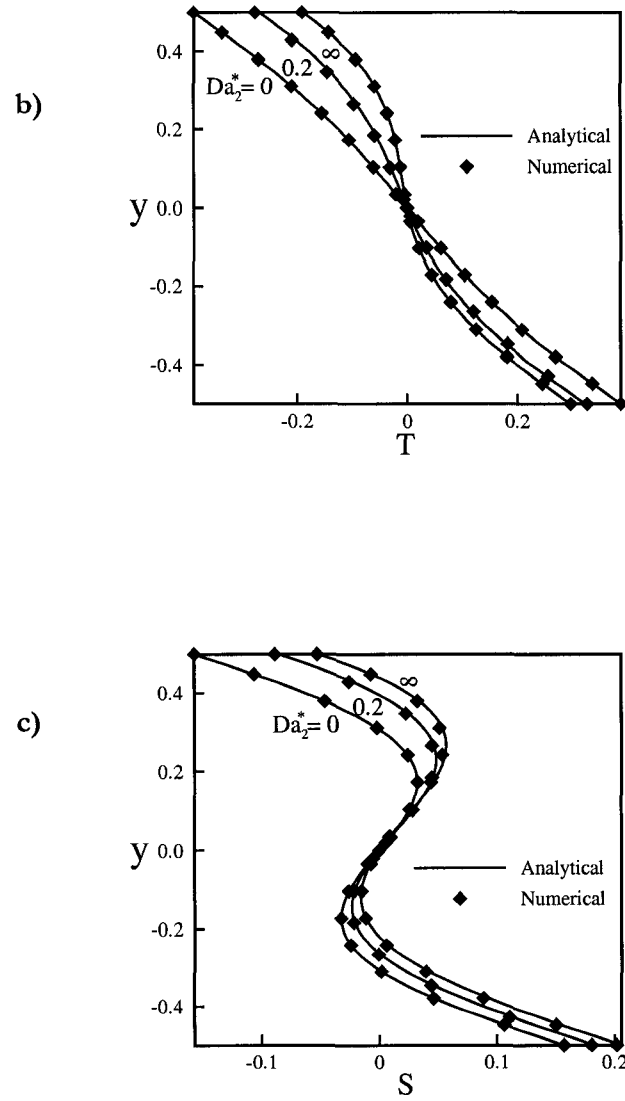


**Figure 6.9 :** Distribution de a) la composante de la vitesse horizontale  $u$ , b) la température  $T$ , et c) de la concentration  $S$ , dans le demi-plan vertical ( $x=0$ ) de la cavité pour  $Ra_T = 10^3$ ,  $Le = 10$ ,  $\varphi = 0.2$ ,  $a = 0$  et  $Da_1^* = 0$ .

La figure 6.10 illustre l'effet du paramètre  $Da_2^*$  sur le diagramme de bifurcation en terme de la valeur maximum de la fonction de courant,  $\Psi_{\max}$ , en fonction de  $Ra_T$  pour  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 2$ ,  $Da_1^* = 0$  et  $a = 0$  et 1. Les courbes obtenues sont les résultats de la solution analytique basée sur la theorie de l'écoulement parallèle. La solution numérique des équations régissantes, obtenue pour  $A = 8$  et  $Pr = 7$  est représentée par des points. Ces points sont une fois de plus, en bon accord avec la solution analytique. Les résultats présentés à la figure 6.10 sont obtenus pour  $\varphi > 0$ , ( $\varphi = 0.2$ ), situation pour laquelle les forces d'Archimède thermique et massique sont coopérantes, et toutes les deux déstabilisantes. Pour cette situation, comme discuté par de nombreux auteurs (voir **Mamou et al. (2001)** par exemple), l'apparition de la convection se fait par le biais d'une bifurcation fourche. Ainsi, pour  $Da_2^* = 0$ , c'est-à-dire pour une couche de fluide limitée par des murs solides, la transition de l'état de repos se produit à un nombre de Rayleigh supercritique  $Ra_{TC}^{\sup} = 514.3$  pour la convection double diffusive ( $a = 0$ ) et à  $Ra_{TC}^{\sup} = 450$  pour la convection induite par l'effet Soret ( $a = 1$ ). Le cas  $Da_2^* \gg 1$  correspond à une couche de fluide avec une condition libre à la limite supérieure pour laquelle nous avons obtenu  $Ra_{TC}^{\sup} = 228.6$  à  $a = 0$  et  $Ra_{TC}^{\sup} = 200$  à  $a = 1$ . Les courbes pour des valeurs intermédiaires de  $Da_2^*$ , à savoir  $Da_2^* = 0.05$  et  $Da_2^* = 0.5$ , sont également présentées à la figure 6.10 pour montrer l'influence de cette condition.

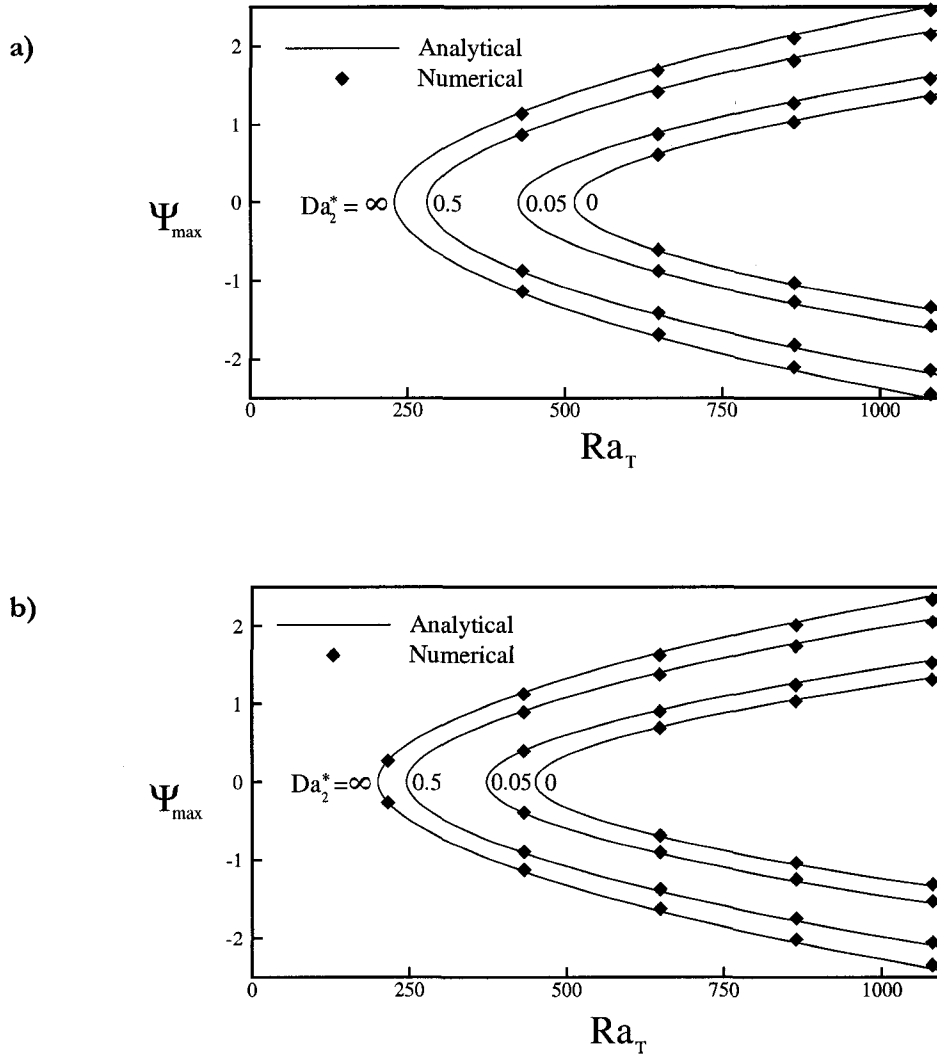


**Figure 6.10 :** Diagramme de bifurcation en termes de la valeur maximum de la fonction de courant  $\Psi_{\max}$ , fonction de  $Ra_T$  pour  $\varphi = 0.2$ ,  $Le = 2$ ,  $Da_1^* = 0$  et a)  $a = 0$  et b)  $a = 1$ .

Les résultats obtenus pour  $\varphi < 0$ , ( $\varphi = -0.2$ ), sont présentés sur la figure 6.11, pour les mêmes conditions que celles de la figure 6.10. Pour cette situation, les forces d'Archimède thermiques et massiques sont opposées et les courbes de ces graphiques indiquent l'existence de bifurcations sous-critiques, en concordance avec la prédiction de l'équation (3.28). Pour les conditions considérées ici et pour  $Da_2^* = 0$  la convection démarre à  $Ra_{TC}^{sub} = 1155.6$  pour  $a = 0$  et à  $Ra_{TC}^{sub} = 1285.2$  pour  $a = 1$ . De la même façon, lorsque  $Da_2^* = \infty$ ,  $Ra_{TC}^{sub} = 514.08$  pour  $a = 0$  et  $Ra_{TC}^{sub} = 571.68$  pour  $a = 1$ . Les résultats obtenus pour  $Ra_T < 0$  (non représentés), correspondants au cas d'une cavité chauffée par le haut indiquent que la convection se fait par le biais d'une bifurcation fourche à un nombre de Rayleigh supercritique donné par l'équation (3.26).

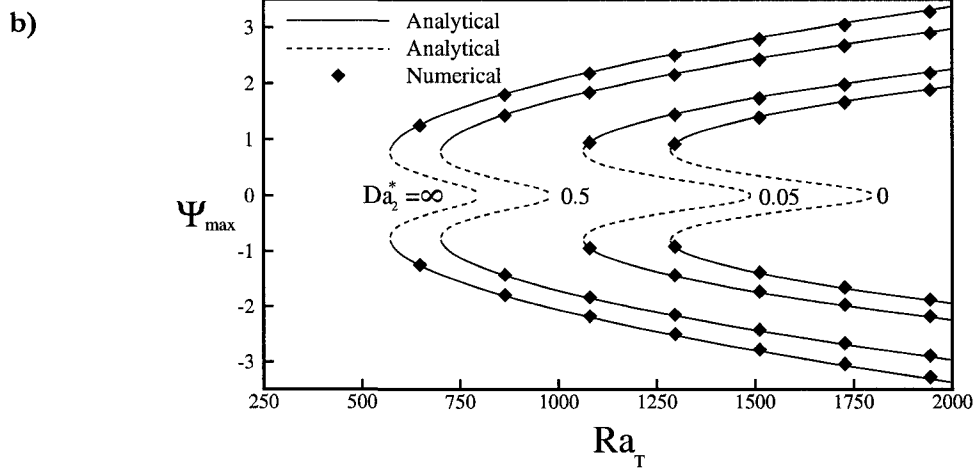
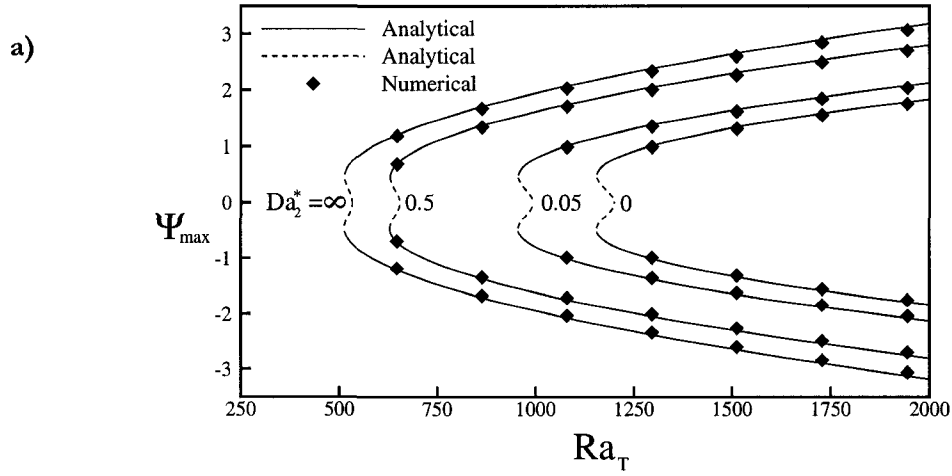


**Figure 6.11 :** Diagramme de bifurcation en termes de la valeur maximum de la fonction de courant  $\Psi_{\max}$ , fonction de  $Ra_T$  pour  $\varphi = -0.2$ ,  $Le = 2$ ,  $Da_1^* = 0$  et a)  $a = 0$  et b)  $a = 1$ .

## CONCLUSION

La présente étude est consacrée à l'étude de la convection naturelle dans une couche horizontale d'un fluide binaire délimitée par des couches minces poreuses. La condition de Beavers-Joseph (BJ) est utilisée pour modéliser la condition à la limite à l'interface fluide/poreux. Les deux cas, convection double-diffusive ( $a = 0$ ) et convection induite par l'effet Soret ( $a = 1$ ) sont considérés. La solution analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle, révèle de façon explicite le rôle joué par la condition BJ de glissement à l'interface  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$ , le nombre de Rayleigh thermique  $Ra_T$ , le rapport de forces de flottabilité  $\varphi$ , le nombre de Lewis  $Le$  et le type de convection (c'est-à-dire le paramètre  $a$ ). Les conclusions principales de la présente investigation sont les suivants:

- i) Dans le cas où des forces de flottabilité thermique et massique sont coopérants ( $\varphi > 0$ ), le modèle analytique proposé prédit le nombre de Rayleigh supercritique marquant l'apparition de la convection en terme de la condition BJ de glissement. La prédiction du nombre de Rayleigh critique est correctement obtenue à partir de la présent approximation de l'écoulement parallèle parce que la convection apparaît avec une longueur d'onde zéro quand des conditions aux limites de type Neumann sont appliquées sur les frontières. Pour des forces de flottabilité opposées ( $\varphi < 0$ ), le modèle prédit l'existence d'un nombre de Rayleigh sous-critique correspondant au passage de l'état de

repos à une convection d'amplitude finie. Une expression explicite pour le nombre de Rayleigh sous-critique est obtenue en termes de  $\varphi$ ,  $Le$ ,  $Da_1^*$ ,  $Da_2^*$  et  $\alpha$ . Pour la convection d'amplitude finie, des expressions appropriées ont été obtenues pour les distributions de vitesse, de température et de concentration de soluté au centre de la couche fluide. Les caractéristiques principales prédites par la solution analytique sont confirmées par les solutions numériques des équations complètes.

- ii) La stabilité du mouvement convectif, prédit par la théorie de l'écoulement parallèle, a fait l'objet d'une étude numérique basée sur la théorie de la stabilité linéaire. Il a été démontré que le nombre de Rayleigh critique pour le début de la bifurcation de Hopf dépend de  $\varphi$ ,  $Le$ ,  $Pr$ ,  $Da_1^*$  et  $Da_2^*$ .

## RÉFÉRENCES

1. Alavyoon F., On natural convection in vertical porous enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36 (10), 1993, 2479-98
2. Alavyoon F., Masuda Y., and Kimura S., On natural convection in vertical porous enclosures due to exposing fluxes of heat and mass prescribed at the vertical walls, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 37 (2), 1994, 195-206
3. Alloui Z., Nguyen T. H., and Bilgen E., Numerical investigation of thermo-bioconvection in a suspension of gravitactic microorganisms, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 (7-8), 2007, 1435-1441
4. Bahloul A., Boutana N., and Vasseur P., Double-diffusive and solet-induced convection in a shallow horizontal porous layer, *Journal of Fluid Mechanics*, 491, 2003, 325-352
5. Beavers G. S. and Joseph D. D., Boundary conditions at naturally permeable wall, *Journal of Fluid Mechanics*, 30 (Part 1), 1967, 197-207
6. Bejan, A., *Convection Heat Transfer*, 1984, John Wiley & Sons,
7. Bejan A. and Khair K. R., Heat and mass transfer by natural convection in a porous medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28 (5), 1985, 909-18

8. Bejan A. and Tien C. L., Laminar natural convection heat transfer in a horizontal cavity with different end temperatures, Transactions of the ASME. Journal of Heat Transfer, 100 (4), 1978, 641-7
9. Bénard H., Convection currents in a liquid layer, Journal de Physique, 9, 1900, 513-524
10. Brand H. R., Hohenberg P. C., and Steinberg V., Codimension-2 bifurcations for convection in binary fluid mixtures, Physical Review A (General Physics), 30 (5), 1984, 2548-61
11. Carr M. and Straughan B., Penetrative convection in a fluid overlying a porous layer, Advances in Water Resources, 26 (3), 2003, 263-276
12. Carr M., Penetrative convection in a superposed porous-medium-fluid layer via internal heating, Journal of Fluid Mechanics, 509, 2004, 305-329
13. Chen F. and Chen C. F., Onset of finger convection in a horizontal porous layer underlying a fluid layer, Transactions of the ASME. Journal of Heat Transfer, 110 (2), 1988, 403-9
14. Cormack D. E., Leal L. G., and Imberger J., Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. I. Asymptotic theory, Journal of Fluid Mechanics, 65, 1974, 209-29
15. da Costa L. N., Knobloch E., and Weiss N. O., Oscillations in double-diffusive

convection, *Journal of Fluid Mechanics*, 109, 1981, 25-43

16. Derjani, G., Taslim, M. E., and Narusawa, U., Convective Stability of a Combined System of a Porous and a Fluid Layer, in the *Proceeding of Natural Convection in Enclosures - 1986*. Presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers., Anaheim, CA, USA, 1986
17. Gray D. D. and Giorgini A., An approximate mean temperature profile for horizontal layer natural convection, *Letters in Heat and Mass Transfer*, 2 (1), 1975, 13-18
18. Hirata S. C., Goyeau B., Gobin D., Carr M., and Cotta R. M., Linear stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Influence of the interfacial modelling, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50 (7-8), 2007a, 1356-67
19. Hirata S. C., Goyeau B., and Gobin D., Stability of natural convection in superposed fluid and porous layers: Influence of the interfacial jump boundary condition, *Physics of Fluids*, 19 (5), 2007b, 058102
20. Hollinger S. and Lucke M., Influence of the Soret effect on convection of binary fluids, *Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)*, 57 (4), 1998, 4238-49
21. Huppert H. E. and Moore D. R., Nonlinear double-diffusive convection, *Journal of Fluid Mechanics*, 78, 1976, 821-54
22. Jones I. P., Low Reynolds number flow past a porous spherical shell, *Proceedings of*

the Cambridge Philosophical Society, 73, 1972, 231-8

23. Lamsaadi M., Naimi M., Bahlaoui A., Raji A., Hasnaoui M., and Mamou M., Parallel flow convection in a shallow horizontal cavity filled with non-Newtonian power-law fluids and subject to horizontal and vertical uniform heat fluxes, *Numerical Heat Transfer, Part A (Applications)*, 53 (1), 2008, 178-203
24. Lucke, M. , Barten, W., Kamps, M., and Schmitz, R., Spatially extended and localized traveling wave convection in binary fluid mixtures, in the *Proceeding of Proceedings of the 1994 IUTAM/ISIMM Symposium on Structure and Dynamics of Nonlinear Waves in Fluids*, Aug 17-20 1994, Hannover, Germany
25. Mahidjiba A., Bennacer R., and Vasseur P., Flows in a fluid layer induced by the combined action of a shear stress and the Soret effect, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49 (7-8), 2006, 1403-1411
26. Mamou, M., *Convection naturelle dans une cavité inclinée à partitions multiples*, 1993, Thèse de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada
27. Mamou, M., *Convection Thermosoltale dans des Milieux Poreux et Fluide confinés*, 1998, Thèse de Philosophiae Doctor, École Polytechnique de Montréal, Canada
28. Mamou M. and Vasseur P., Hysteresis effect on thermosolutal convection with opposed buoyancy forces in inclined enclosures, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 26 (3), 1999, 421-430

29. Mamou M., Vasseur P., Bilgen E., and Gobin D., Double-diffusive convection in an inclined slot filled with porous medium, *European Journal of Mechanics, B/Fluids*, 14 (5), 1995, 629-52
30. Mamou M., Vasseur P., and Hasnaoui M., On numerical stability analysis of double-diffusive convection in confined enclosures, *Journal of Fluid Mechanics*, 433, 2001, 209-50
31. Mojtabi A., Platten J. K., and Charrier-Mojtabi M.-C., Onset of free convection in solutions with variable Soret coefficients, *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 27 (1), 2002, 25-44
32. Nield D. A., The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem, *Journal of Fluid Mechanics*, 29 (3), 1967, 545-558
33. Nield D. A., Onset of convection in a fluid layer overlying a layer of a porous medium, *Journal of Fluid Mechanics*, 81, 1977, 513-22
34. Nield D. A., The boundary correction for the Rayleigh-Darcy problem: limitations of the Brinkman equation, *Journal of Fluid Mechanics*, 128, 1983, 37-46
35. Nield, D. A. and Bejan, A., *Convection in Porous Media*, 1992, Springer Verlag
36. Ochoa-Tapia J. A. and Whitaker S., Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid - II. Comparison with experiment, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38 (14), 1995a, 2647-2655

37. Ochoa-Tapia J. A. and Whitaker S., Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. - I. Theoretical development, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38 (14), 1995b, 2635-2646
38. Ouriemi M., Vasseur P., and Bahloul A., Natural convection of a binary fluid in a slightly inclined shallow cavity, *Numerical Heat Transfer, Part A (Applications)*, 48 (6), 2005, 547-65
39. Ouriemi M., Vasseur P., Bahloul A., and Robillard L., Natural convection in a horizontal layer of a binary mixture, *International Journal of Thermal Sciences*, 45 (8), 2006, 752-759
40. Pillatsis, G., Derjani, G., Taslim, M. E., and Narusawa, U., Effects of Boundary Conditions on Thermal Instability of Superposed Porous and Fluid Layers., in the *Proceeding of Natural Convection in Porous Media*. Presented at the AIAA/ASME 4th Thermophysics and Heat Transfer Conference., Boston, MA, USA, 1986
41. Platten, J. K. and Logros, J. C, *Convection in Liquids*, 1984, Springer Verlag
42. Poulikakos D., Buoyancy-driven convection in a horizontal fluid layer extending over a porous substrate, *Physics of Fluids*, 29 (12), 1986, 3949-57
43. Prud'homme M. and Hung Nguyen T., Parallel flow stability under a uniform heat flux: effect of the Prandtl number, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 29 (6), 2002, 749-56

44. Rayleigh, Convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side, *Philosophical Magazine*, 32, 1916, 529-546
45. Rosenberg N. D. and Spera F. J., Thermohaline convection in a porous medium heated from below, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35 (5), 1992, 1261-73
46. Sen M., Vasseur P., and Robillard L., Multiple steady states for unicellular natural convection in an inclined porous layer, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30 (10), 1987, 2097-113
47. Shivakumara I. S., Suma S. P., and Chavaraddi K. B., Onset of surface-tension-driven convection in superposed layers of fluid and saturated porous medium, *Archives of Mechanics*, 58 (2), 2006, 71-92
48. Somerton C. W. and Catton I., On the thermal instability of superposed porous and fluid layers, *Transactions of the ASME. Journal of Heat Transfer*, 104 (1), 1982, 160-5
49. Sparrow E. M., Goldstein R. J., and Jonsson V. K., Thermal instability in horizontal fluid layer -- Effect of boundary conditions and non-linear temperature profile, *Journal of Fluid Mechanics*, 18 (Part 4), 1964, 513-528
50. Steinberg V. and Brand H. R., Crossover from critical to tricritical behavior in a nonequilibrium system: the convective instability in a binary fluid mixture, *Physical Review A (General Physics)*, 30 (6), 1984, 3366-8

51. Taunton J. W., Lightfoot E. N., and Green T., Thermohaline instability and salt fingers in a porous medium, *Physics of Fluids*, 15 (5), 1972, 748-53
52. Trevisan O. V. and Bejan A., Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 28 (8), 1985, 1597-611
53. Turner J. S., Multicomponent Convection, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1985, 11-44
54. Vasseur P. and Robillard L., The Brinkman model for boundary layer regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 30 (4), 1987, 717-27
55. Vasseur P., Wang C. H., and Sen M., Thermal instability and natural convection in a fluid layer over a porous substrate, *Waerme- und Stoffuebertragung*, 24 (6), 1989, 337-47
56. Veronis G., On finite amplitude instability in thermohaline convection, *Journal of Marine Research*, 23 (1), 1965, 1-17

## APPENDICE A

## BILAN D'ÉNERGIE

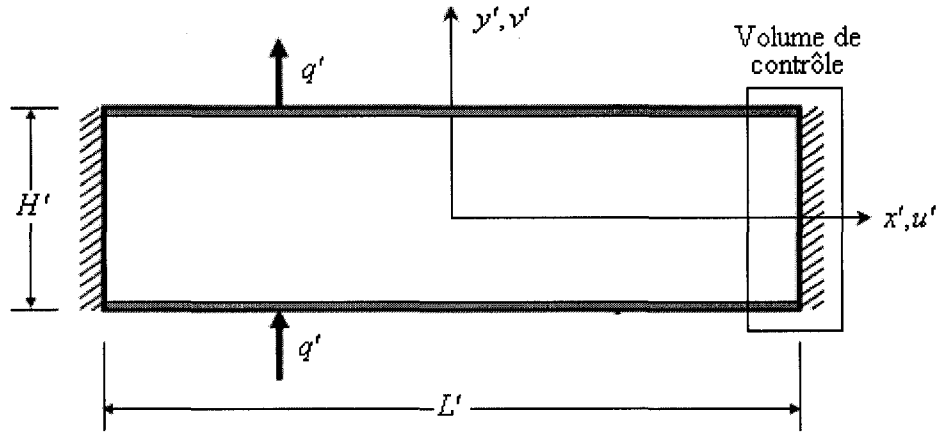


Figure A1 : Volume de contrôle pour le bilan énergétique

En appliquant l'équation (3.16) sur chacune des faces du volume de contrôle indiqué sur la figure A1, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_x dy + \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=A/2} dy + \int_x^{A/2} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1/2} dx - \int_x^{A/2} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-1/2} dx = \\
 & - \int_{-1/2}^{+1/2} uT \Big|_x dy + \int_{-1/2}^{+1/2} uT \Big|_{x=A/2} dy - \int_x^{A/2} vT \Big|_{y=1/2} dx + \int_x^{A/2} vT \Big|_{y=-1/2} dx
 \end{aligned} \tag{A1}$$

En appliquant les conditions aux frontières hydrodynamiques et thermiques (2.21)-(2.24) sur l'équation (A1), on obtient :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\partial T}{\partial x} + b = \int_{-1/2}^{+1/2} uT dy \tag{A2}$$

Selon l'approximation de l'écoulement parallèle  $T(x, y) = C_T x + \theta_T(y)$ , alors l'équation (A2) peut s'écrire comme suit :

$$C_T = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{d\Psi}{dy} \theta_T dy \quad (\text{A3})$$

En substituant les équations (3.9) et (3.10) dans l'équation (A3) on obtient:

$$C_T = \frac{4(L_1/3 - 1/5)\Psi_0}{1 + \frac{4}{45} \left( 24L_1^2 - \frac{192}{7}L_1 + \frac{96}{7}L_2^2 + 8 \right) \Psi_0^2} \quad (\text{A4})$$

## APPENDICE B

## BILAN DE MASSE

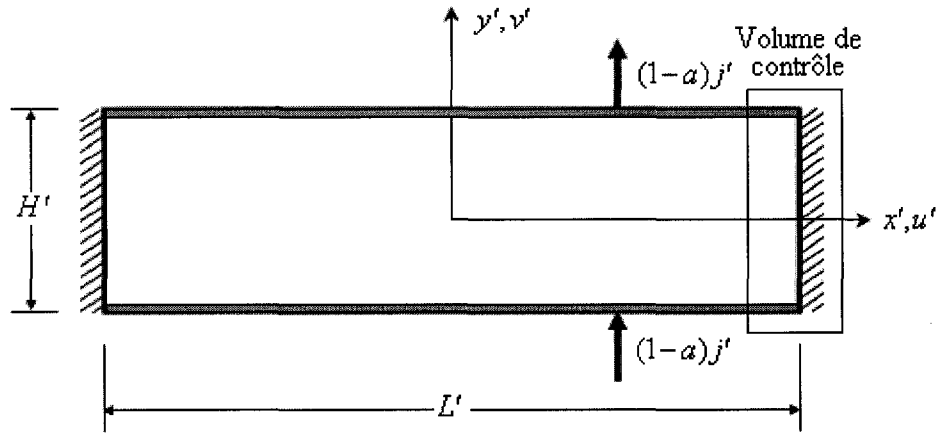


Figure B1 : Volume de contrôle pour le bilan de masse

L'intégration de l'équation de concentration (2.13) sur le volume de contrôle indiqué sur la figure B1 mène à :

$$\int \nabla \cdot \nabla S dv = \int \nabla \cdot \vec{V} S dv \quad (B1)$$

En appliquant l'équation (B1) sur chacune des faces du volume de contrôle, on obtient :

$$\begin{aligned} & - \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_x dy + \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=A/2} dy + \int_x^{A/2} \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=1/2} dx - \int_x^{A/2} \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{y=-1/2} dx = \\ & - \int_{-1/2}^{+1/2} uS \Big|_x dy + \int_{-1/2}^{+1/2} uS \Big|_{x=A/2} dy - \int_x^{A/2} vS \Big|_{y=1/2} dx + \int_x^{A/2} vS \Big|_{y=-1/2} dx \end{aligned} \quad (B2)$$

En appliquant les conditions aux frontières hydrodynamiques (2.21), (2.22) et massiques et (2.25), (2.26) sur l'équation (B2), on obtient :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\partial S}{\partial x} + b = Le \int_{-1/2}^{+1/2} u S dy \quad (\text{B3})$$

Selon l'approximation de l'écoulement parallèle  $S(x, y) = C_s x + \theta_s(y)$ , et en substituant les équations (3.9) et (3.11) dans l'équation (B3) on obtient:

$$C_s = \frac{a C_T (Le + 1) + 4(1 - a)(L_1 / 3 - 1/5) Le \Psi_0}{1 + \frac{4}{45} \left( 24 L_1^2 - \frac{192}{7} L_1 + \frac{96}{7} L_2^2 + 8 \right) Le^2 \Psi_0^2} \quad (\text{B4})$$